26/12/2021

מפגש 14

L מטריצה $n\times n$ שמכילה מספרים בין 1 ל-k, כך שאף מספר לא מופיע פעמיים בשורה / בעמודה.

המספר $z\in\{1,\dots,k\}$ מופיע a_z פעמים ב-L.

נסמן: T - אוסף הטרנסוורסלים ב-L.

עבור $C\subseteq\{1,\dots,k\}$ בגודל n, נסמן אוסף הטרנסוורסלים של L שמכילים את כל הצבעים ב-$C = T_C$.

נסמן: $[k]=\{1,\dots,k\}$, אוסף תתי-הקבוצות בגודל n של $[k] = \binom{[k]}{n}$

אז $$|T|=\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}|T_C| \Leftarrow T=\dot{\bigcup_{C\in\binom{[k]}{n}}} T_C$$

נקבע $C\in\binom{[k]}{n}$, ונגדיר מ"מ X להיות איבר מקרי ב-T_C (התפלגות אחידה).

$$\Leftarrow H(X)=\log(|T_C|)$$

נגדיר מ"מ X_z לכל $z\in C$ כאשר X_z זה השורה והעמודה של האיבר z ב-X שבוחר.

#דוגמה:

$$L=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad C=\{1,3,4\}$$

$X_1=(1,1)$
$X_3=(3,3)$
$X_4=(2,2)$

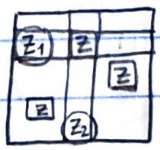
$$H(X)=H(X_z : z\in C)$$

חושפים את ה-X_z-ים לפי סדר יורד של מ"מ α_z, $\alpha_z\sim U([0,1])$.

$$H(X)\le \mathbb{E}_X\Big[\sum_{z\in C}\mathbb{E}_\alpha[\log(N_z)]\Big]\le \mathbb{E}_X\Big[\sum_{z\in C}\mathbb{E}_{\alpha_z}\big[\log(\underbrace{\mathbb{E}_{\alpha_{z'}:z'\neq z}[N_z]})\big]\Big]$$

מספר האפשרויות של X_z בהינתן כל ה-$X_{z'}$ עבור $z'<z$. $(z'\in C)$

$$\mathbb{E}_{\alpha_{z'}:z'\neq z}[N_z]=\sum_{(i,j):L(i,j)=z}\Pr(X_z \text{ עבור חוקי } (i,j))$$



שני מקרים:

(I) $X_z=(i,j) \Leftarrow (i,j)$ חוקי בהסתברות 1

(II) (i,j) חוקי $\Leftrightarrow \alpha_{z_1}<\alpha_z$ וגם $\alpha_{z_2}<\alpha_z \Leftarrow$ סיכוי α_z^2

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}_{\alpha_{z'}:z'\neq z}[N_z]=1+(a_z-1)\cdot\alpha_z^2$$

$$\Downarrow$$

$$H(X)\le\sum_{z\in C}\underbrace{\mathbb{E}_{\alpha_z}\big[\log(1+(a_z-1)\alpha_z^2)\big]}$$

$$\int_0^1\log(1+(a_z-1)x^2)\,dx=\dots=\log(a_z)-2+\left(\sim\frac{1}{\sqrt{a_z}}\right)$$

#דוגמה:

1	2	3	4	5
3	1	2	5	6
2	3	5	6	1
4	5	1	3	2
5	4	6	1	3

$$C=\{1,2,\overset{0.7}{4},5,6\}$$

$a_1=5$
$a_2=4$
$a_3=5$
$a_4=3$
$a_5=5$
$a_6=3$

חוקי עבור X_4 בסיכוי:
$\alpha_4^2=0.7^2=0.49$

$$H(X) \le \sum_{z\in C}\left(\log(a_z)-2\right) = \log\left(\prod_{z\in C}\frac{a_z}{e^2}\right)$$:מסקנה ←

$$\Downarrow$$

$$|T_C| \le \prod_{z\in C}\left(\frac{a_z}{e^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$|T| \le \sum_{C\in\binom{[k]}{n}} \prod_{z\in C}\left(\frac{a_z}{e^2}\right) = \left(\frac{1}{e^{2n}}\right)\cdot \underline{\sum_{C\in\binom{[k]}{n}} \prod_{z\in C} a_z}$$

במעבר הקודם הוכחנו: $|T| \le \left(\frac{1}{e^2}\right)\cdot\sum_{C\in\binom{[k]}{n}} \underline{\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{z\in C} a_z\right)^n}$

> **כופלי לגראנז':** נניח שרוצים למצוא נק' קיצון לפונקציה $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ בכפוף לאילוץ $g(x)=c$, כאשר: $x\in\mathbb{R}^n$.
תנאי הכרחי: $\nabla f = \lambda\cdot\nabla g$, כאשר $\lambda\in\mathbb{R}$.

אצלנו: $f: \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, $f(a_1,\dots,a_k)=\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\prod_{z\in C} a_z$

רוצים: $g(a_1,\dots,a_k)=n^2$, $g(a_1,\dots,a_k)=a_1+\dots+a_k$

$$\nabla g = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = \sum_{\substack{C\in\binom{[k]}{n}\\ i\in C}} \prod_{\substack{z\in C\\ i\neq z}} a_z$$

- **טענה:** יש נקודה חשודה יחידה כאשר $a_1=\dots=a_k$.

הוכחה: תרגיל!

צ"ל שיש 2 נגזרות חלקיות שונות זו מזו.

- אם $a_i<a_j$, אז <u>אפשר להראות</u> $\frac{\partial f}{\partial a_i} > \frac{\partial f}{\partial a_j}$.

אם ה-a_i-ים שווים, אז כולם שווים $\frac{n^2}{k}$, ואז לכל i:

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = \binom{k-1}{n-1}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^{n-1}$$

אותו הדבר לכל i

$$\text{Hessian}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial f^2}{\partial a_1^2} & \frac{\partial f^2}{\partial a_1\partial a_2} & \cdots\\ \frac{\partial f^2}{\partial a_2\partial a_1} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}}_{H}$$

- **עובדה:** למטריצה סימטרית יש בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים ממשיים.

הנק' x מקסימום אם כל הע"ע של $H(x)$ הם שליליים.

- נדרוש: כל הע"ע של $H(x)$ <u>פרט</u> לע"ע של ∇g הם שליליים. בנקודה $a_1=\dots=a_k$:

$$H = c\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}$$

← צ"ל: יש ל-$\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}$ ו"ע $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ עם ע"ע $(k-1)$, כל שאר הע"ע שווים -1.

• **משפט:** נתונה L מטריצה לטינית $n\times n$ מעל $\{1,\dots,k\}$, אז מספר הטרנסוורסלים שלה הוא לכל היותר:

$$\left(\frac{(\frac{1}{\mu})n}{n}\right)\cdot\left(\frac{\mu n}{e^2}\right)^n = \frac{1}{e^{2n}}\cdot\binom{k}{n}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n$$

$$\mu=\frac{n}{k}$$

מטרה: החסם במשפט הוא בעצם:

$$\binom{(\frac{1}{\mu})n}{n}\cdot\left(\underbrace{(1+o(1))}_{\text{מגיע מהגורם באינטגרל}}\left(\frac{\mu n}{e^2}\right)\right)^n$$

דוגמה: $a,b\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} f(a,b)=a\cdot b \\ st\quad a+b=11 \end{cases}$$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\qquad \nabla f=\binom{b}{a},\ \nabla g=\binom{1}{1}$

נק' חשודה יחידה: $a=b=5.5$

2 וקטורים עצמיים: $\longrightarrow H=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

① $\nabla g=\binom{1}{1}\leftarrow$ ע"ע 1

② $\binom{1}{-1}\leftarrow$ ע"ע -1 $\Rightarrow \binom{5.5}{5.5}$ מקסימום

$\Downarrow$

$f(a,b)\le(5.5)\cdot(5.5)=30.25$

מטלות-בית:

① לפתור את האינטגרל המסוים הבא: $\int_0^1 \log(1+(a_z-1)x^2)\,dx$

יש לפצל ל-2 מקרים: (I) $a_z=1$

(II) $a_z\neq1$

② להוכיח כי ישנה נק' קיצון **יחידה** לפונקציה: $\boxed{f(a_1,\dots,a_k)=\sum_{c\in\binom{[k]}{n}}\left(\prod_{z\in c}a_z\right)}$ עבור: $a_1=\dots=a_k$.

③ יש ל- $\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$ ו"ע $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ עם ע"ע $(k-1)$, כל שאר הע"ע שווים -1.

① פתירת האינטגרל המסוים: $\int_0^1 \log(1+(a_z-1)x^2)dx$. נ"ח כי: $\log_e \equiv \ln$.

נחלק לשני מקרים:

(I) $a_z=1$

(II) $a_z\neq1$

נפתור תחילה את המקרה הראשון:

$$\int_0^1 \ln\left(1+(a_z-1)x^2\right)dx \overset{a_z=1}{=} \int_0^1 \ln\left(1+0\cdot x^2\right)dx = \int_0^1 \ln(1)\,dx = \int_0^1 0\,dx = \boxed{0}$$

כעת נתמקד במקרה השני:

$$\int_0^1 \ln\left(1+(a_z-1)x^2\right)dx = x\cdot\ln\left(1+(a_z-1)x^2\right) - \underbrace{\int_0^1 \frac{2(a_z-1)x^2}{(a_z-1)x^2+1}dx}_{2\cdot(a_z-1)\cdot\int_0^1 \frac{x^2}{(a_z-1)x^2+1}dx}$$

אינטגרציה בחלקים: $f=\ln(1+(a_z-1)x^2)$, $g'=1$, $f'=\frac{2(a_z-1)x}{(a_z-1)x^2+1}$, $g=x$

x^2 ניתן לכתוב גם כך:

$$x^2=\frac{(a_z-1)}{(a_z-1)}\cdot x^2+\frac{1}{a_z-1}-\frac{1}{a_z-1}=\frac{(a_z-1)x^2+1}{a_z-1}-\frac{1}{a_z-1}$$

כעת נציב:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(a_z-1)x^2+1}dx = \int_0^1\left(\frac{\frac{1}{a_z-1}\cancel{((a_z-1)x^2+1)}}{\cancel{(a_z-1)x^2+1}}-\frac{\frac{1}{a_z-1}}{(a_z-1)x^2+1}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{a_z-1}-\frac{1}{(a_z-1)((a_z-1)x^2+1)}\right)dx \overset{\text{סכום אינטגרלים = אינטגרל של סכום}}{=} \int_0^1\frac{1}{a_z-1}dx-\int_0^1\frac{1}{(a_z-1)\cdot((a_z-1)x^2+1)}dx=$$

$$=\frac{1}{a_z-1}\cdot\overbrace{\int_0^1 1\,dx}^{x}-\frac{1}{a_z-1}\cdot\int_0^1\frac{1}{(a_z-1)x^2+1}dx=\frac{1}{a_z-1}\cdot1-\frac{1}{a_z-1}\cdot\underbrace{\int_0^1\frac{1}{(a_z-1)x^2+1}dx}$$

$$\int_0^1\frac{1}{(a_z-1)x^2+1}dx=\int_0^1\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_z-1}}du=\frac{1}{\sqrt{a_z-1}}\cdot\int_0^1\frac{1}{u^2+1}du=\frac{1}{\sqrt{a_z-1}}\cdot\Big|_0^1\arctan(u)=$$

הצבה: $u=\sqrt{a_z-1}\cdot x$, $\frac{du}{dx}=\sqrt{a_z-1}$ $\Rightarrow dx=\frac{1}{\sqrt{a_z-1}}du$

הצבה, חזרה ל-x

$$=\frac{1}{\sqrt{a_z-1}}\cdot\Big|_0^1\arctan(\sqrt{a_z-1}\,x)=\boxed{\frac{\arctan(\sqrt{a_z-1})}{\sqrt{a_z-1}}}$$

לסיכום:

$$\int_0^1 \ln(1+(a_z-1)x^2)\,dx \overset{a_z\neq1}{=} x\cdot\ln\left(1+(a_z-1)x^2\right)-\left(2(a_z-1)\cdot\left(\frac{1}{a_z-1}-\frac{\arctan(\sqrt{a_z-1})}{\sqrt{a_z-1}}\right)\right)=$$

$$=x\left(\ln\left(1+(a_z-1)x^2\right)-2\right)+\frac{2\cdot\arctan(\sqrt{a_z-1}\cdot x)}{\sqrt{a_z-1}}+C=$$

$$(a_z>1)\qquad =\boxed{x\cdot\ln\left(1+(a_z-1)x^2\right)-2(a_z-1)\left(\frac{x}{a_z-1}-\frac{\arctan\left(\frac{(2a_z-2)x}{2\sqrt{a_z-1}}\right)}{(a_z-1)^{3/2}}\right)}+C$$

② כופלי לגרנז':

$$\begin{cases} f(a_1,a_2,\dots,a_k)=\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\prod_{z\in C} a_z \\ st \quad g(a_1,a_2,\dots,a_k)=a_1+a_2+\dots+a_k=n^2 \end{cases} \Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_k$$

$$\nabla g=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

תנאי הכרחי: $\nabla f=\lambda\cdot\nabla g$, כאשר $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}=\sum_{\substack{C\in\binom{[k]}{n}\\ i\in C}}\prod_{\substack{z\in C\\ i\neq z}} a_z$$

צ"ל: יש 2 נגזרות חלקיות שונות זו מזו.

נניח כי התנאי $a_1=a_2=\dots=a_k$ לא מתקיים. נבחר $1\le i\neq j\le k$, בפרט ובלי הגבלת הכלליות: $a_j>a_i$. נזכיר כי: $\forall i: a_i>0$

נניח כי יתר ה-a_z-ים שווים, משמע: $\forall p,q: p\neq i\neq j\neq q: a_p=a_q$

לכל קבוצה C, ישנם 4 מקרים: (I) $j\in C,\ i\in C$

נמצא רק בסכום של a_p עבורו $p\in C$ $\begin{cases} (II)\ j\notin C,\ i\in C \\ (III)\ j\in C,\ i\notin C \end{cases}$

(IV) $j\notin C,\ i\notin C$

נבדוק השוואה בין $\prod_{\substack{z\in C\\ z\neq i}} a_z$ לבין $\prod_{\substack{z\in C\\ z\neq j}} a_z$ לכל אחד מהמקרים:

(I) $j\in C \vee i\in C$: $\prod_{\substack{z\in C\\ z\neq i\\ j\in C}} a_z=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_j\cdot\ldots\cdot a_k=\underbrace{a_p^{n-1}\cdot a_j>a_p^{n-1}\cdot a_i}=\prod_{\substack{z\in C\\ z\neq j\\ i\in C}} a_z$ (I)

משמע, עבור C כזה: $\prod_{z\neq j} a_z>\prod_{z\neq i} a_z$, כאשר $z\in C$.

(II) קבוצות C אלו נמצאות רק בסכומים עבור a_i ולא עבור a_j. (II) $j\notin C \vee i\in C$

(III) " " " " " " a_j " " a_i. (III) $j\in C \vee i\notin C$

נשים-לב כי קבוצות ממקרה II, מכפלתן a_p^{n-1}. כך גם מכפלת הקבוצות ממקרה III.

(IV) קבוצות אלה לא יופיעו בסכום עבור הנגזרת לפי a_i וגם לא לפי a_j. (IV) $j\notin C \vee i\notin C$

כעת נסכום לפי: $\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}$, פעם עבור $i\in C$ ופעם עבור $j\in C$, ונשווה.

נניח כי ישנן t קבוצות C עבורן: $j\in C \vee i\in C$. $t\ge 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}=\sum_{\substack{C\in\binom{[k]}{n}\\ i\in C}}\prod_{\substack{z\in C\\ z\neq i}} a_z=t\cdot a_p^{n-1}\cdot a_j+\left(\binom{k}{n}-t\right)a_p^{n-1}\geq t\cdot a_p^{n-1}\cdot a_i+\left(\binom{k}{n}-t\right)\cdot a_p^{n-1}=\frac{\partial f}{\partial a_j}$$

כאשר השוויון מתקיים אמ"ם $t=0$.

לסיכום, כאשר $a_j>a_i$ הוכחנו כי: $\frac{\partial f}{\partial a_i}>\frac{\partial f}{\partial a_j}$, משמע: $\frac{\partial f}{\partial a_i}\neq\frac{\partial f}{\partial a_j}$.

מ.ש.ל.

③ <u>תזכורת:</u> <u>ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים - הגדרה:</u>

תהי A מטריצה ריבועית מעל השדה F. נאמר ש- $\lambda\in F$ הוא ע"ע של מטריצה A אם קיים ו"ע $\vec{v}$ $(\vec{v}\neq\vec{0})$ כך ש: $\boxed{A\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}}$. הוא $\vec{v}$ "יקרא ו"ע של A השייך לע"ע λ.

A מטריצה $k\times k$. ערכי האלכסון הראשי שווים ל-0, יתר הערכים 1:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

ניצור מערכת משוואות הנובעות מהנוסחה $A\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}$:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_2+x_3+\dots+x_k=\lambda\cdot x_1\\x_1+x_3+\dots+x_k=\lambda\cdot x_2\\\vdots\\x_1+x_2+\dots+x_{k-1}=\lambda\cdot x_k\end{cases}$$

נשים-לב שאם $\lambda=0$, הדבר מחייב $\vec{v}=\vec{0}$, ולכן $\lambda\neq0$ <u>בהכרח.</u>

נציב:

$$\frac{x_1+x_3+\dots+x_k}{\lambda}+\frac{x_1+x_2+x_4+\dots+x_k}{\lambda}+\dots+\frac{x_1+x_2+\dots+x_{k-1}}{\lambda}=\lambda\cdot x_1 \quad /\cdot\lambda$$

$$k\cdot x_1+(k-1)\cdot x_2+\dots+(k-1)\cdot x_k=\lambda^2\cdot x_1 \quad /-k\cdot x_1$$

$$\begin{cases}(k-1)\cdot(x_2+x_3+\dots+x_k)=(\lambda^2-k)\cdot x_1\\(k-1)\cdot(x_1+x_3+\dots+x_k)=(\lambda^2-k)\cdot x_2\\\vdots\\(k-1)\cdot(x_1+x_2+\dots+x_{k-1})=(\lambda^2-k)\cdot x_k\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered}A\cdot\vec{v}-\lambda\cdot\vec{v}=0\\\Downarrow\\(A-\lambda\cdot I)\cdot\vec{v}=0\end{gathered}}$$

$$\left(\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\vec{v}=\left(\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda\end{pmatrix}\right)\cdot\vec{v}=\overset{M}{\underbrace{\begin{pmatrix}0-\lambda&1&\cdots&1\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1\\1&\cdots&1&0-\lambda\end{pmatrix}}_{\text{נחשב דטרמיננטה}=0}}\cdot\vec{v}=0$$

$$\det(M)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&\cdots&1\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1\\1&\cdots&1&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^{k-1}\cdot(\lambda-[k-1])=0$$

התקבלו שני ע"ע אפשריים: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=k-1$.

נציב את λ_2 במערכת המשוואות לעיל, ונקבל:

$$\begin{cases}x_2+x_3+\dots+x_k=(k-1)\cdot x_1\\x_1+x_3+\dots+x_k=(k-1)\cdot x_2\\x_1+\dots+x_{k-1}=(k-1)x_k\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=\dots x_k=1\Rightarrow \vec{v}_g=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

מלבדו, יתר הע"ע שליליים!