9/12/2021

מפגש 11

נתונה מטריצה $n\times n$ מעל $1,\dots,n$, L. כל מספר מופיע בדיוק פעם אחת בכל שורה ועמודה (ר"ל). מחפשים מטריצת פרמוטציה X שהאיברים ב-L המתאימים לאחדות ב-X כולם שונים (טרנסוורסל).

$$L=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

משפט: מס' הטרנסוורסלים בר"ל $n\times n$ הוא לכל היותר: $\left((1+o(1))\left(\frac{n}{e^2}\right)\right)^n$

הוכחה: יהי X טרנסוורסל מקרי של L (התפלגות אחידה), אז:

$H(X)=\log($מס' הטרנסוורסלים של $L)$

נגדיר לכל i: העמודה j כך ש: $X(i,j)=1$ $=X_i$

#דוגמה:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}X_1=2\\X_2=3\\X_3=1\end{cases}$$

הערות! 1) ה-X_i-ים כולם שונים.

2) $L(i,X_i)$ כולם שונים.

3) $H(X)=H(X_1,X_2,\dots,X_n)$

כלל השרשרת

$$H(X)=H(X_1,\dots,X_n)=H(X_1)+H(X_2|X_1)+\dots+H(X_n|X_1,\dots,X_{n-1})$$

למעשה, לכל סדר על השורות $1,\dots,n$ נקבל משוואה:

$$H(X)=\sum_i H(X_i\,|\,X_j : j \text{ קודם ל-} i)$$

סימון: $j\prec i \iff j$ קודם ל-i בסדר מסוים $\prec$.

הגדרה: מס' האפשרויות שיש ל-X_i בהינתן X_j עבור $j\prec i$ $=N_i$

תלוי ב- $L, X, \prec$

#דוגמה:

$$L=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\\4&5&1&2&3\\3&4&5&1&2\\2&3&4&5&1\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}X_1=5\\X_2=4\\X_3=3\\X_4=2\\X_5=1\end{cases}$$

נבחר סדר: $(5,3,2,4,1)$

$$N_5=5,\ N_3=3,\ N_2=2,\ N_4=1,\ N_1=1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[H(X_i\,|\,X_j=x_j : j\prec i)\right]\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[\log(N_i)\right]$$

רעיון: נבחר סדר λ באופן מקרי ונעשה ממוצע על-פני החסמים שנקבל, כלומר – לכל סדר λ מקבלים חסם: $H(X)\le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_X[\log(N_i)]$

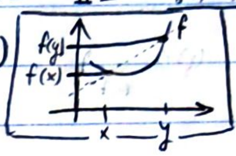
נעשה ממוצע על-פני בחירת סדר מקרי:

$$H(X)\le \mathbb{E}_{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_X[\log(N_i)]\right]=$$

$$=\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\lambda}[\log(N_i)]\right]=(*)$$

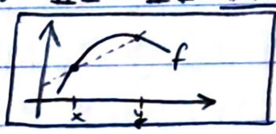
הגדרה: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא **קמורה** אם לכל $x,y\in\mathbb{R}$ ולכל $0\le t\le 1$,

$$f(t\cdot x+(1-t)\cdot y)\le t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y)$$



הגדרה: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא **קעורה** אם לכל $x,y\in\mathbb{R}$ ולכל $0\le t\le 1$,

$$f(t\cdot x+(1-t)\cdot y)\ge t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y)$$



משפט: (אי-שוויון ינסן Jensen) נתונים X מ״מ, f פונקציה.
- אם f קמורה, אז: $\mathbb{E}[f(X)]\ge f(\mathbb{E}[X])$
- אם f קעורה, אז: $\mathbb{E}[f(X)]\le f(\mathbb{E}[X])$

$$(*)=\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\lambda}[\log(N_i)]\right]\le \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \log\left(\underbrace{\mathbb{E}_{\lambda}[N_i]}\right)\right]$$

המקרה הראשון

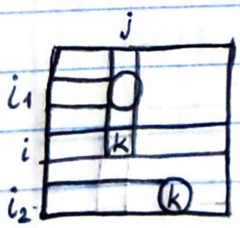
המקרה השני

$$\mathbb{E}_{\lambda}[N_i]=\sum_{j=1}^{n} Pr_{\lambda}(\text{עמודה } j \text{ פנויה עבור } X_i)=\underbrace{1+\frac{n-1}{3}}$$

כעת ישנם שני מקרים:

① אם $X_i=j$, אז $Pr(j\text{ פנוי})=1$

② אם $X_i\ne j$, $Pr(\text{עמודה } j \text{ פנויה})=Pr(i \text{ הב״ע לפני } i_1 \text{ ו-} i_2 \text{ בסדר})=\frac{1}{3}$



$$1+\frac{n-1}{3}\approx\frac{n}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{מס' הטרנסוורסלים}\le\left(\frac{n}{3}\right)^n}\Leftarrow H(X)\le\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{n}{3}\right)\right]=n\cdot\log\left(\frac{n}{3}\right)$$

אנו מחפשים חסם הדוק יותר!

נבחר סדר מקרי $\prec$ באופן הבא:

לכל i, נבחר מספר ממשי $\alpha_i \sim U[0,1]$.

נסדר את השורות בסדר יורד של ה-α-ות.

$$(*) = \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\left[\log(N_i)\right]\right] = \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\mathbb{E}_{\alpha_{i'}:\, i'\neq i}\left[\log(N_i)\right]\right]\right] \leq$$

א״ש ינסן

$$\leq \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\log\left(\underbrace{\mathbb{E}_{\alpha_{i'}:\, i'\neq i}[N_i]}\right)\right]\right]$$

$$\mathbb{E}_{\alpha_{i'}:\, i\neq i'}[N_i] = \sum_{j=1}^{n} \Pr(\text{עמודה } j \text{ פנויה עבור } X_i) = 1+(n-1)\alpha_i^2 \approx n\cdot\alpha_i^2$$

כמו קודם, גם כאן ישנם שני מקרים:

① אם $X_i = j$, אז: $\Pr(j \text{ פנוי}) = 1$

② אם $X_i \neq j$, אז:

$$\Pr(\text{עמודה } j \text{ פנויה עבור } X_i) = \Pr(i \text{ קודם ל-} i_1 \text{ ול-} i_2) = \Pr(\alpha_i > \alpha_{i_1} \text{ וגם } \alpha_i > \alpha_{i_2}) =$$

$$= \underbrace{\Pr(\alpha_i > \alpha_{i_1})}_{\alpha_i} \cdot \underbrace{\Pr(\alpha_i > \alpha_{i_2})}_{\alpha_i} = \alpha_i^2$$

$X_{i_1} = j$

$L(i_2, X_{i_2}) = k$

$$H(X) \leq \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\log(n\alpha_i^2)\right]}\right]$$

$$\int_0^1 x\log(nx^2)\,dx = \dots = \boxed{\log(n)-2}$$

$$H(X) \leq n\cdot(\log(n)-2) = n\cdot\log\left(\frac{n}{e^2}\right) \Longrightarrow \text{מס׳ הטרנסוורסלים} \leq \left(\frac{n}{e^2}\right)^n$$