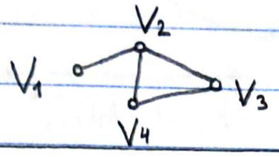
8/8/2021

מפגש 1

◦ **הגדרה:** נתון גרף $G=\langle V,E\rangle$ ולו n קודקודים: $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$.
״מטריצת שכנויות״ של גרף עם n קודקודים זו מטריצה A בגודל $n*n$ של אפסים ואחדות, כאשר:

$$A_{ij}=\begin{cases}1 & ,\{v_i,v_j\}\in E\\ 0 & \text{,אחרת}\end{cases}\qquad\left(\begin{matrix}1\le i,j\le n\\ i\ne j\end{matrix}\right)$$

#דוגמה:



$\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4\\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}$$

עבור גרף דו-צדדי $G=\langle A\uplus B,E\rangle$ (נ״ח: $|A|=n$, $|B|=m$):

$$\left(\begin{matrix}A=\{v_1,\dots,v_n\}\\ B=\{u_1,\dots,u_n\}\end{matrix}\right)$$

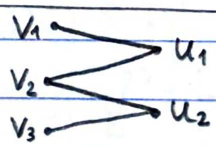
$$M_{i,j}=\begin{cases}1 & ,\{v_i,u_j\}\in E\\ 0 & \text{,אחרת}\end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & n & m\\ \hline n & 0 & M^t\\ m & M & 0\end{array}$$

ניתן לייצג גרף דו-צדדי ע״י M, כאשר:

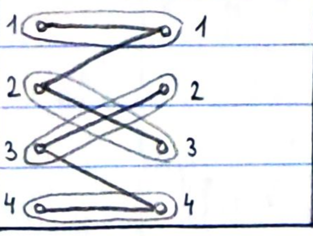
#דוגמה:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Longleftrightarrow$$



בגרף דו-צדדי מאוזן, המטריצה היא ריבועית. זיווג מושלם בגרף דו-צדדי מאוזן: אוסף $M\subseteq E$ שנוגעות בכל קודקוד פעם אחת בלבד.

#דוגמה:



צד שמאל

צד ימין

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4\\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

◦ **הגדרה:** מטריצה $n\times n$ של $1,0$ עם 1 יחיד בכל שורה ועמודה נקראת ״מטריצת פרמוטציה״.

#דוגמה:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ c\\ b\\ d\end{bmatrix}$$

שאלה: כמה מטריצות פרמוטציה $n\times n$ יש?

תשובה: $n!$

(**הוכחה:** נבנה את המטריצה שורה אחר שורה. יש n אפשרויות לשורה ה-I, $n-1$ אפשרויות לשורה ה-II...)

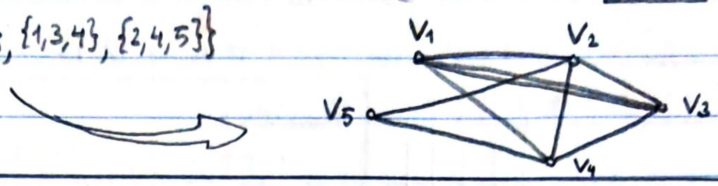
○ **הגדרה:** "היפרגרף" זהו הכללה של המושג גרף, כאשר "גרף" זהו זוג $\langle V,E \rangle$ כאשר E הוא אוסף של זוגות.

○ **הגדרה:** "היפרגרף d-אחיד" הוא זוג $\langle V,E \rangle$ כאשר E זהו אוסף תתי-קבוצות בגודל d של V.

דוגמה: (עבור $d=3$)

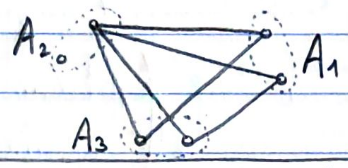
$V=\{1,2,3,4,5\}$

$E=\{\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2,4,5\}\}$



○ **הגדרה:** "היפרגרף d-צדדי" זהו $H=\langle A_1 \uplus A_2 \uplus \dots \uplus A_d , E \rangle$, כך שכל צלע ב-$E$ מכילה קודקוד אחד מכל קבוצה.

דוגמה: (עבור $d=3$)

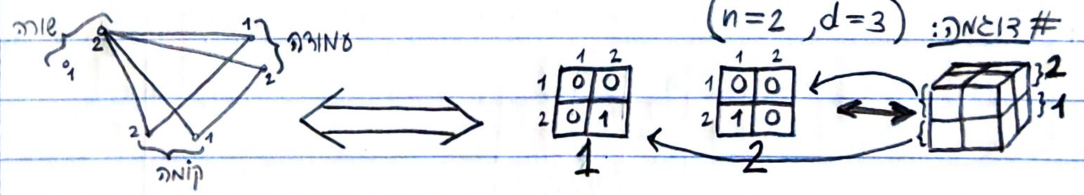


○ **הגדרה:** נניח ש-H הוא היפרגרף d-אחיד d-צדדי מאוזן, עם n קודקודים בכל צד. זיווג מושלם ב-H זהו אוסף צלעות שנוגעות בכל קודקוד בדיוק פעם אחת.

○ **הגדרה:** מטריצת השכנויות של היפרגרף d-צדדי מאוזן $H=\langle A_1 \uplus A_2 \uplus \dots \uplus A_d , E \rangle$ (כאשר $A_1=\{V_1^1,V_2^1,\dots,V_n^1\}$, $A_d=\{V_1^d,\dots,V_n^d\}$) היא מטריצה $\underbrace{n\times \dots \times n\times n}_{d \text{ פעמים}}$ כך ש:

$$M_{i_1,i_2,\dots,i_d}=\begin{cases}1, & \{V^1_{i_1},\dots,V^d_{i_d}\}\in E\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

דוגמה: ($n=2$, $d=3$)



הערה: במטריצה כזו ($d=3$), זיווג מושלם מתקבל לכל קומבינציה של 1 יחיד בכל שורה, עמודה וקומה. בדוגמה לעיל, ישנם אחדות החולקים את אותה השורה.

○ **הגדרה:** "ריבוע לטיני" זהו מטריצה $n\times n$ שמכילה את המספרים $1,\dots,n$, כך שכל שורה/עמודה מכילה כל מספר בדיוק פעם אחת.

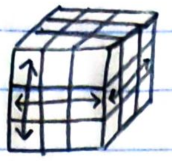
דוגמה:

2	1	4	3
1	3	2	4
3	4	1	2
4	2	3	1

הערה: כל שורה/עמודה מייצגת פרמוטציה. כל מספר הוא מטריצת פרמוטציה.

≪ ייצוגים אחרים לריבוע לטיני:

[מטריצה $n\times n\times n$ של $1,0$ כך שבכל "קו" (ציר) יש 1 יחיד.]



①

2	1	3
1	3	2
3	2	1

$\Longleftrightarrow$

$$\overset{1}{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\quad \overset{2}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}\quad \overset{3}{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}}$$

② **היפרגרף תלת-צדדי:** יש שלושה צדדים/מימדים: שורות, עמודות ומספרים.

$$A_{ij}=k \Leftrightarrow \{i,j,k\}\in E$$

דוגמה:

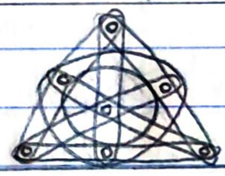
$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}111, 232, 323\\122, 213, 331\\133, 221, 312\end{matrix}\right\}$$

• **הגדרה:** "מערכת שלשות שטיינר" (Steiner triple system) זהו היפרגרף 3-אחיד $H=\langle V,E\rangle$ כך שכל זוג קודקודים שייכים ביחד לשלשה יחידה ב-E.

דוגמה:

$V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$E=\left\{\begin{matrix}123, 146, 157, 345,\\256, 247, 367\end{matrix}\right\}$



• **משפט:** קיים STS מסדר n $\Longleftrightarrow$ $n \bmod 6 \in\{1,3\}$.

[**הערה:** ריבוע לטיני הוא STS תלת-צדדי; כלומר- כל זוג קודקודים מצדדים/מימדים שונים שייכים לשלשה יחידה.]

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

$\Longleftrightarrow$ שורה, מספר, עמודה

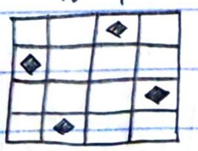
- מטריצות פרמוטציה מסדר n: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$
- ריבועים לטיניים מסדר n: $\approx \left(\frac{n}{e^2}\right)^{n^2}$
⋮
- קוביות לטיניות d-מימדיות מסדר n: $\approx \left(\frac{n}{e^d}\right)^{n^d}$

< בעיית 8-המלכות:

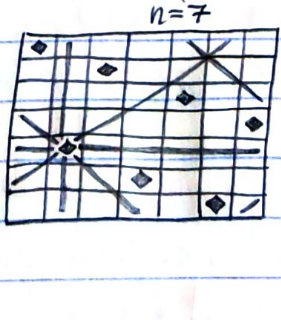
רוצים להציב 8 מלכות כך שאף מלכה לא תאיים על מלכה אחרת.

עבור $n=8$, ישנם 92 פתרונות.

$n=4$



$n=7$



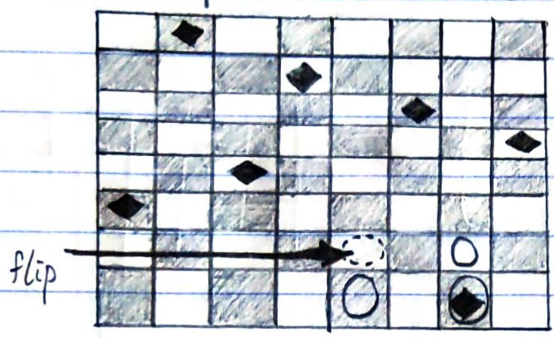
25/8/2021

מפגש 2

» אלג' למציאת פתרון לבעיית n-המלכות:

① **מקרי וחמדני:** בכל צעד בוחרים משבצת לא מאויימת באופן מקרי ומניחים שם מלכה.

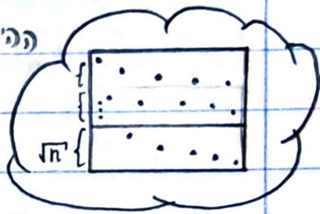
② **flips:** נניח יש תת-מטריצה של k שורות ועמודות שאין בה מלכה; בוחרים בה מטריצת פרמוטציה. לכל איבר במט' פרמוטציה מנסים למצוא מלכה אחרת שאפשר לעשות איתה flip.



(?) **שאלה:** מה הסיכוי שניתן לבצע flip?

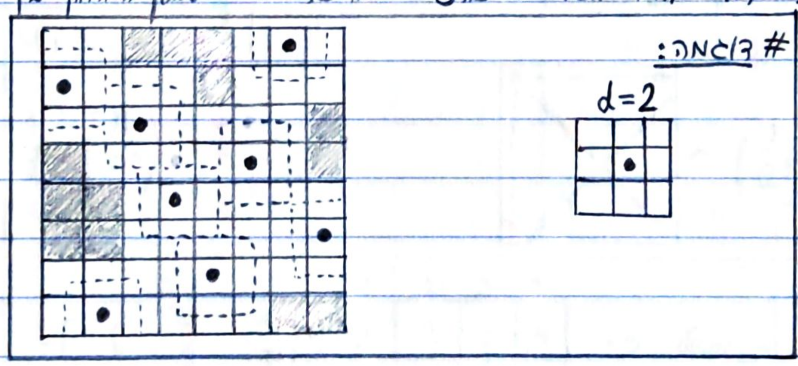
היוריסטיקה: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boxed{\frac{1}{16}}$.

– **הסבר:** השורות והעמודות פנויות מעצם ההגדרה. ההיפוך. הסיכוי שאלכסון כלשהו פנוי הוא $\frac{1}{2}$ (2n אלכסונים עם n מלכות), ויש 2 משבצות שנרצה לאייש.



• **הגדרה:** מרחק בין $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ הוא $\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$

• **הגדרה:** $A_{n,d}$ הוא אוסף מטריצות הפרמוטציה $n\times n$ שבהן המרחק בין כל 2 אחדות הוא לפחות d.



(?) **שאלה:** יהי $d=\alpha\sqrt{n}$ $(n=400)$.

מריצים את אותו האלגוריתם שעבד ב-n המלכות.

– עד כמה רחוק האלגוריתם החמדני מגיע, כפונקציה של α?

במילים אחרות: מספר המטריצות ב-$A_{n,d}$ הוא לפחות ______.

– עבור איזה α-ות האלג' מוצא פתרון?

ניתן לייצג מטריצות פרמוטציה במחשב כווקטור $(1\times n)$, והתכונות נשמרות.

במקום לשאול על $A_{n,d}$, נשאל על אוסף הווקטורים המקיימים תכונה שקולה:

נשאל האם בטווח d מ-i $(i-d, i+d)$ נמצא מספר $x\in[a_i-d, a_i+d]$.

24/9/2021

מפגש 3

המתמטיקאי Nauck טען כי לכל $n \geq 4$ יש פתרון לבעיית n-המלכות $(Q(n) \geq 1)$
לבעיית 8-המלכות ישנם 92 פתרונות.

- חסם תחתון אקספוננציאלי לבעיה: $(1.1)^n \leq Q(n) \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n$
- בשנת 2017 נמצא שיפור לחסם: $\left(n^{1/16}\right)^n = n^{\frac{n}{16}} \leq Q(n) \leq \left(\frac{n}{e^{1.5}}\right)^n$

הביטוי גדל ככל ש-n גדל

> נסמן ב-$Q(n)$ את מספר הפתרונות לבעיית n-המלכות, אז: $Q(n) \leq n!$

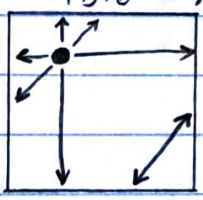
מספר מטריצות הפרמוטציה $n \times n$ הוא $n!$.

קירוב סטירלינג: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

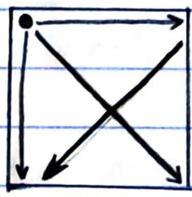
קירוב סטירלינג "לעניים": $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$

השנה (2021), זור ומיכאל מצאו כי: $\left(\frac{n}{e^3}\right)^n \leq Q(n)$
מיכאל מצא: $Q(n) \approx \left(\frac{n}{e^{1.94}}\right)^n$
לפני שבועיים, Keevash ו-Candy מצאו כי: $T(n) \sim \left(\frac{n}{e^3}\right)^n$ [הסבר על $T(n)$ מטה]
לפני כשבוע, פורסמה כתבה ב-Quanta על המאמר של מיכאל.

פתרון: E,M,M



$\approx \left(\frac{n}{e^2}\right)$



$\approx \left(\frac{n}{e^3}\right)$

לוח חיבור מודולו 5:
לוח החיבור של $\mathbb{Z}_5$:

	0	1	2	3	4
0	$\boxed{0}$	1	2	3	4
1	1	$\boxed{2}$	3	4	0
2	2	3	$\boxed{4}$	0	1
3	3	4	0	$\boxed{1}$	2
4	4	0	1	2	$\boxed{3}$

(שקול ל: $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$
חיבור מודולו n)

- **הגדרה:** בריבוע לטיני ציקלי השורה הראשונה יופיעו המספרים $n-1$ לפי הסדר. כל שורה היא shift-left של השורה מעליה.
- **הגדרה:** transversal בריבוע לטיני $n \times n$ זהו אוסף של n תאים, כך ש:
  - תא אחד בכל שורה
  - תא אחד בכל עמודה
  - תא אחד מכל מספר

14/10/2021

מפגש 4

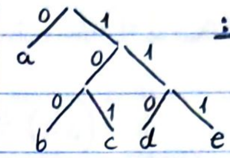
° **הגדרה:** יהי X מ"מ בדיד המקבל ערכים בקבוצה Ω. $X:\Omega\to E$.

האנטרופיה של X: $H(X)=\sum_{x\in\Omega} P_r(X=x)\cdot\log_2\left(\frac{1}{P_r(X=x)}\right)$

דוגמה: X הטלת מטבע הוגן: $\boxed{H(X)=\frac{1}{2}\cdot\log_2(2)+\frac{1}{2}\cdot\log_2(2)=1}$

נזכר בקוד הופמן (מבוסס הסתברויות, ומטרתו לייצג ולצמצם ביטים "מיותרים": ימין-1, שמאל-0).

דוגמה:



עבור: $X=\begin{cases} a & \frac{1}{2} \\ b_1 & \frac{1}{2^{k+1}} \\ \vdots & \vdots \\ b_{2^k} & \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases}$

$$H(X)=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\log 2}_{1}+2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\underbrace{\log 2^{k+1}}_{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2}=\boxed{\frac{k+2}{2}}$$

< **עובדות לגבי אנטרופיה:**

① אם X יכול לקבל n ערכים שונים, אז: $H(X)\le\log(n)$.

שוויון, כלומר: $H(X)=\log(n)$ $\Leftrightarrow$ X מתפלג אחיד.

② כלל השרשרת: $H(X,Y)=H(Y,X)=H(X)+H(Y|X)$

כאשר: $H(X|Y)$ משמעותו כמות האינפורמציה שיש ב-X בהינתן שערכו של Y כבר ידוע.

הכללת כלל השרשרת ל-n מ"מ: $H(X_1,\dots,X_n)=H(X_1)+H(X_2|X_1)+\dots+H(X_n|X_1,\dots,X_{n-1})$

תהי X פרמוטציה מקרית מסדר n. נסמן ב-$P(n)$ את מספר הפרמוטציות מסדר n.

אז: $H(X)=\log(P(n))$

נגדיר: $X=(a_1,\dots,a_n)$, כאשר $a_1,\dots,a_n$ מספרים שונים בין 1 ל-n. נסמן: $X_i=a_i$

$$H(X)=H(X_1,X_2,\dots,X_n)=H(X_1)+H(X_2|X_1)+\dots+H(X_n|X_1,\dots,X_{n-1})\le\log(n)+\log(n-1)+\dots+\log(1)=\log(n\cdot(n-1)\cdot\dots)=\log(n!)$$

$$\Downarrow$$

מסקנה: $\log(P(n))=H(X)\le\log(n!)$

$$\Downarrow$$

$$P(n)\le n!$$

24/10/2021

$\log(x) = -\log\left(\frac{1}{x}\right)$

מפגש 5

<u>תזכורת:</u> יהי $Y \in \{1,2,\dots,k\}$ אזי: $H(Y) \le \log(k)$.

$$\log(|S_n|) = H(X) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i \mid X_1,\dots,X_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \log(n-i+1) = \log(n!)$$

$$\Downarrow$$

$$|S_n| \le n!$$

<u>תזכורת:</u> הגדרת האנטרופיה: $X : \Omega \to E$. $H(X) = \underbrace{\sum_{x\in E} P_x \cdot \log\left(\frac{1}{P_x}\right)}_{} = \underbrace{-\sum_{x\in E} P_x \cdot \log(P_x)}_{}$

$P_x \equiv P_r(X=x)$

> <u>דטרמיננטה:</u> (*) $Det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} \cdot \det(A_{i1})$

מינור של A

דוגמה למינור:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

> <u>פרמוטציה:</u> פונקציה חח״ע ועל מ-$\{1,\dots,n\}$ ל-$\{1,\dots,n\}$.

S_n הן פרמוטציות מסדר n.

> <u>היפוך:</u> זוג אינדקסים $1 \le i < j \le n$ הוא היפוך בפרמוטציה φ אם: $\varphi(i) > \varphi(j)$.

<u>נגדיר:</u> פונקציית הסימן של פרמוטציה φ: $sign(\varphi) = (-1)^{(\text{מס' ההיפוכים ב-}\varphi)}$

דוגמה: $n=4$

$\varphi(1)=2$

$\varphi(2)=4$ היפוכים: $(2,4),(3,4),(1,4),(2,3)$

$\varphi(3)=3$

$\varphi(4)=1$ $sign(\varphi) = (-1)^4 = 1$

> <u>דטרמיננטה</u> (הגדרה נוספת):

$$\overset{n\times n}{Det(A)} = \sum_{\varphi \in S_n} \left(sign(\varphi) \cdot \prod_{i=1}^{n} \underbrace{a_{i,\varphi(i)}}_{} \right)$$

$$A = \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ \left(\quad a_{ij} \leftarrow i \quad \right) \end{array}$$

(!) <u>הערה:</u> אף אחת מההגדרות לא מובילה לאלגוריתם יעיל.

$T(n)$ – זמן הריצה של חישוב Det בעזרת ההגדרה (*):

$$T(n) = \begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = n \cdot T(n-1) \end{cases}$$

פירוש אחר לדטרמיננטה:

טענה ①: אם P מטריצת פרמוטציה, אז היא מייצגת פרמוטציה φ ע"י: $P_{ij}=1 \Leftrightarrow \varphi(i)=j$

דוגמה:

$\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=2$, $\varphi(3)=4$, $\varphi(4)=3$ $\Leftrightarrow$ $P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

טענה ②: $\det(P)=\mathrm{sign}(\varphi)$.

דוגמה: $n=2$.

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

$\det(A)=\underbrace{1\cdot4}_{4}+\underbrace{(-1)\cdot2\cdot3}_{-6}$

- **הגדרה:** הפרמננטה של A תהא: $Per(A)=\sum_{\varphi\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{i,\varphi(i)}\right)$

לפי טענה ② וההגדרה הנוספת לדטרמיננטה (מהעמ' הקודם):

$$\det(\overset{n\times n}{A})=\sum_{\text{מט' פרמוטציה } P_{n\times n}}\left(\det(P)\cdot\prod_{(i,j):\,P_{ij}=1}a_{ij}\right)$$

(P מטריצת פרמוטציה $n\times n$)

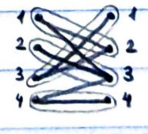
יש אלגוריתם יע"ל שמשתמש בפעולות גאוס על-מנת להעביר את המטריצה למטריצה אלכסונית עליונה (או במילים אחרות: דירוג) $\longleftrightarrow$ לא ידוע אלגוריתם יע"ל לחישוב פרמננטה של מטריצה

- **הגדרה:** $\#P$ הוא אוסף הבעיות כאשר מנסים לספור כמה פתרונות יש לבעיה ב-NP.
- חישוב פרמננטה הוא $\#P$ – שלם.

$\Leftarrow$ אם $P\neq NP$, אין אלגוריתם יע"ל לחישוב פרמננטה.

תזכורת:

$A=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4\\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}$ $\Longleftrightarrow$



(!) **תובנה:** אם A מטריצת שכנויות של גרף דו-צדדי מאוזן, אז: מס' הזיווגים המושלמים $=Per(A)$

$\Leftarrow$ **מסקנה:** לספור כמה זיווגים מושלמים יש בגרף דו-צדדי זו בעיה חישובית קשה.

- **משפט ברגמן:** תהי A מטריצה $n\times n$ של $0,1$ עם d_i אחדות בשורה ה-i.

$$Per(A)\le\prod_{i=1}^{n}(d_i!)^{1/d_i}$$

$$Per(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right)$$

(!) הערה 1: $\frac{n}{e} = \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{1/n} \approx (n!)^{1/n}$ [לפי קירוב סטירלינג ל"עניים"]

(!) הערה 2: קל להוכיח: $Per(A)=\prod_{i=1}^{n} d_i$

- **הגדרה:** מטריצה סטוכסטית A - כל איבריה אי-שליליים וסכום כל שורה הוא 1.
- **הגדרה:** מטריצה דו-סטוכסטית A - כל איבריה אי-שליליים וסכום כל שורה ועמודה הוא 1.

# דוגמה למט' סטוכסטית:	# דוגמה למטריצה דו-סטוכסטית:
$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

- **משפט אגורצ'ב - פאליקמן:** תהי A מטריצה דו-סטוכסטית, אז: $Per(A)\geq \frac{n!}{n^n}$

$$J_n=\begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix} \longrightarrow Per(J_n)=n!\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\frac{1}{n^n}=\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

1/11/2021

מפגש 6

$P_x \equiv P_r(X=x)$

#דוגמה: $d=3$

הגדרות:

① גרף d-רגולרי אם כל הדרגות בו הן d.

② גרף מישורי הוא גרף שניתן לצייר אותו במישור מבלי שהצלעות תחתכנה.

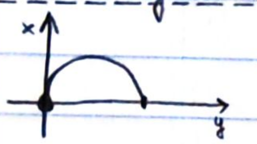
#דוגמה:

$f(x)=x\cdot\log\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Updownarrow$

$X:\Omega\to E$

$\sum_{x\in E} P_x\cdot\log\frac{1}{P_x}$



③ על-מישור (Hyperplane) הוא מהצורה:

$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b \qquad x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}^n$

#דוגמה: $\mathbb{R}^3 \qquad x+y+z=1$

④ היפר-קוביה 4-מימדית: $\{(x_1,x_2,x_3,x_4): 0\le x_i\le 1,\ \forall i\}$

#דוגמה: $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}^3$

$x_1=(0,0,1) \qquad x=(1,0,0)$

$x_2=(0,0,2) \qquad y=(0,1,0)$

$\vdots$

$x_n=(0,0,n) \qquad z=(0,0,1)$

היטלים:

$P_1=\{(a,b,0): a,b\in\mathbb{R}\} \leftrightarrow (0,0,0)$

$P_2=\{(a,0,b): a,b\in\mathbb{R}\} \leftrightarrow (0,0,1),\dots,(0,0,n)$

$P_3=\{(0,a,b): a,b\in\mathbb{R}\} \leftrightarrow (0,0,1),\dots,(0,0,n)$

$$\left.\begin{array}{l} n_1=1 \\ n_2=n \\ n_3=n \end{array}\right\} \Longrightarrow n_1\cdot n_2\cdot n_3=n^2$$

$n_1\cdot n_2\cdot n_3\ge n^2$

$\mathrm{sign}(\varphi)=(-1)^{(\text{מס' ההיפוכים של } \varphi)}$, היפוך ב- $\varphi\in S_n$, S_n

$$\det(\underset{n\times n}{A})=\sum_{\varphi\in S_n}\left(\mathrm{sign}(\varphi)\cdot\prod_{i=1}^{n}a_{i,\varphi(i)}\right), \quad Per(A)=\sum_{\varphi\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{i,\varphi(i)}\right)$$

הגדרנו מטריצת שכנויות של גרף דו-צדדי.

ראינו: זיווג מושלם בגרף שקול למטריצת פרמוטציה שמוכלת במט' שכנויות.

מס' הזיווגים המושלמים בגרף $=$ Per(מטריצת השכנויות)

משפט ברגמן: תהי A מטריצה של 1/0 עם d_i אחדות בשורה i, אז:

$$Per(A)\le\prod_{i=1}^{n}(d_i!)^{1/d_i}\le\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{e}\right)$$

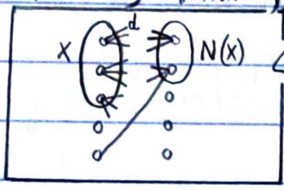
• **משפט אגוריצ'ב-פאליקמן:** תהי A מטריצה דו-סטוכסטית, אז: $\frac{n!}{n^n} \le Per(A)$

• **הגדרה:** גרף d-רגולרי הוא גרף בו כל הדרגות הן d.

• **משפט HALL:** יהי $G=\langle A\dot\cup B, E\rangle$ גרף דו-צדדי מאוזן ($|A|=|B|$).
יש ב-G זיווג מושלם $\Leftrightarrow$ לכל $X\subseteq A$, $|X|\le|N(x)|$ (כאשר $N(x)$ הוא קבוצת השכנים של X)

• **טענה:** יהי G גרף דו-צדדי d-רגולרי, אז יש ב-G זיווג מושלם.

הוכחה: נניח בשלילה שתנאי HALL לא מתקיים, כלומר: תהי $X\subseteq A$ תת-קבוצה כך ש: $|X|>|N(x)|$. ציור המחשבה:



נספור צלעות F שמחברות בין קודקוד ב-X לבין קודקוד ב-$N(x)$:
$\underline{d\cdot|X|} = |F| \le d\cdot N(x) < \underline{d\cdot|X|}$ סתירה

(?) **שאלה:** כמה זיווגים מושלמים יש בגרף d-רגולרי d-צדדי עם n קודקודים בכל צד?
(או במילים אחרות: אם A מטריצת $1/0$ בגודל $n\times n$ עם d אחדות בכל שורה ובכל עמודה, מהו $Per(A)$?)

① Bregman: $\prod_{i=1}^{n}\left((d!)^{1/d}\right)=(d!)^{n/d}$

② נשים-לב: $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $Per(\lambda A)=\lambda^n\cdot Per(A)$

- לפי משפט אגוריצ'ב-פאליקמן: $Per(A)=Per(d\cdot\frac{1}{d}\cdot A)=d^n\cdot Per(\frac{1}{d}\cdot A)\ge d^n\cdot\frac{n!}{n^n}$

> **לסיכום:** $d^n\cdot\frac{n!}{n^n}\le Per(A)\le(d!)^{n/d}$ [**תזכורת:** סטרלינג ל"עניים": $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n$]

נניח ש-d גדול.

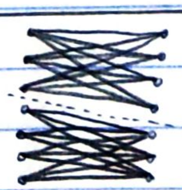
① חסם תחתון - $d^n\cdot\frac{n!}{n^n}\approx d^n\cdot\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n}=\left(\frac{d}{e}\right)^n$

② חסם עליון - $(d!)^{n/d}\approx\left(\left(\frac{d}{e}\right)^d\right)^{n/d}=\left(\frac{d}{e}\right)^{d\cdot n/d}=\left(\frac{d}{e}\right)^n$

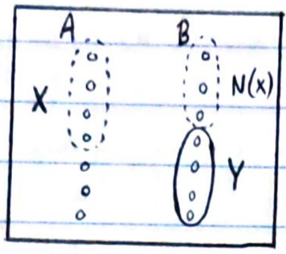
$\Leftarrow Per(A)\approx\left(\frac{d}{e}\right)^n$

(!) **הערה:** אם G הוא רק "כמעט" d-רגולרי, "יתכן שלא יהיו זיווגים מושלמים בכלל.

#דוגמה:



- **הגדרה:** גרף Dirac הוא גרף עם n קודקודים, בו כל הדרגות שוות ל- $\frac{n}{2}$ לפחות.
- **הגדרה:** גרף Dirac דו-צדדי הוא גרף דו-צדדי מאוזן עם n קודקודים בכל צד, שבו כל הדרגות שוות ל- $\frac{n}{2}$ לפחות.



- **טענה:** בגרף Dirac דו-צדדי יש זיווג מושלם.

הוכחה: נניח בשלילה שיש $X \subseteq A$ כך ש: $|X| > |N(X)|$:

נשים-לב ש: $|N(X)| \geq \frac{n}{2} \Leftarrow |X| > \frac{n}{2}$.

נגדיר: $Y = B \setminus N(X)$.

נשים-לב שאין צלעות בין X לבין Y, לכן לכל קודקוד $v \in Y$, השכנים של v נמצאים ב: $A \setminus X$.

ולכן:
$$\frac{n}{2} \overset{\text{Dirac}}{\leq} deg(v) \leq |A \setminus X| = |A| - |X| = n - |X| < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

$\frac{n}{2} < \frac{n}{2} \Leftarrow$ סתירה

8/11/2021

מפגש 7

(?) **שאלה:** יהי G גרף $G=\langle A\cup B, E\rangle$ דו-צדדי מאוזן, ונניח $|A|=|B|=n$, ושהדרגות של הקודקודים שלו הן: $d_1,\dots,d_n \geq \frac{n}{2}$. מה אפשר להגיד על מספר הזיווגים המושלמים ב-G?

① **חסם ברגמן:** $\left(\frac{(\prod d_i)^{1/n}}{e}\right)^n = \frac{\prod_{i=1}^n d_i}{e^n} = \prod_{i=1}^n\left(\frac{d_i}{e}\right) \approx \prod_{i=1}^n (d_i!)^{1/d_i} \geq$ מס' הזיווגים המושלמים

חסם עליון

- **הגדרה:** נתונים n מספרים, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$; ממוצע חשבוני: $AM=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$
- **הגדרה:** נתונים n מספרים, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$; ממוצע גאומטרי: $GM=\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}$
- משפט אי-שוויון הממוצעים: $GM\leq AM$

דוגמה: $4,2\in\mathbb{R}$. $GM=\sqrt{8}\leq 3=AM$

② יש לפחות זיווג מושלם אחד בעקבות משפט HALL.

חסם תחתון

- **טענה היוריסטית:** (בנוגע לגרף מהשאלה):
  - כל הדרגות הן לפחות $n/2$.
  - אם כל הדרגות היו בדיוק $n/2$, כמו שראינו במשפט אגורצ'ב-פאליקמן:
  $\left(\frac{d}{e}\right)^n=\left(\frac{n/2}{e}\right)^n=\left(\frac{n}{2e}\right)^n \leq$ מס הזיווגים המושלמים

- **הגדרה:** (Doubly Stochastic Scaling): נתונה מטריצה $A_{n\times n}$ אי-שלילית.
רוצים: סקלרים $0<\beta_1,\dots,\beta_n,\alpha_1,\dots,\alpha_n$, כך שאם מכפילים את השורה ה-i ב-α_i לכל i, ואת העמודה ה-j ב-β_j לכל j, אז מקבלים מטריצה דו-סטוכסטית.

דוגמאות:

(I) אם סכום כל שורה/עמודה ב-A הוא N, אז אפשר לקחת: $\alpha_1,\dots,\alpha_n=\frac{1}{N}$. $\beta_1,\dots,\beta_n=1$

(II)
$$\begin{array}{c|cc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \alpha_1= & 1 & 1 \\ \alpha_2= & 1 & 2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & \alpha & \beta \\ \hline \alpha= & 1 & 1 \\ \beta= & 1 & 2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\beta_1,\alpha_1=\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}\\ \beta_2,\alpha_2=\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}\end{array}$$

(!) **הערה:** אם A מטריצה $n\times n$, ו-B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת אחת השורות/העמודות בסקלר α, אז: $Per(B)=\alpha\cdot Per(A)$

14/11/2021

מפגש 8

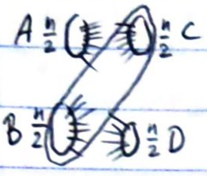
דוגמאות לגרף Dirac:

① $n=2$

G

- כל הדרגות $\geq \frac{n}{2}$
- יש זיווג מושלם אחד

② הכללה של ①:



- צלע אלכסונית לא יכולה להשתתף בזיווג מושלם.

אם כן - לא נוכל לזווג את קודקודי A.

- מס' הזיווגים הוא: $\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2$

← תזכורת: ה-DSS של A אלה $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, $\beta_1,\dots,\beta_n$, כך שאם מכפילים את השורה ה-i ב-α_i ומכפילים את העמודה ה-j ב-β_j, מקבלים מטריצה דו-סטוכסטית.

(!) הערה: אם B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת השורה ה-i ב-α, אז:

$$Per(B)=\alpha\cdot Per(A)$$

מסקנה: נניח ש-G גרף דו-צדדי מאוזן עם מטריצת שכנויות A_G; נניח ש-$\alpha_1,\dots,\alpha_n$, $\beta_1,\dots,\beta_n$ הם DSS של A_G, נסמן ב-B_G את המט' הדו סטוכסטית שמתקבלת מה-scaling, אז: $Per(B_G)=\prod_{i=1}^n\alpha_i\prod_{j=1}^n\beta_j\cdot Per(A_G)$, מספר הזיווגים המושלמים ב-G $= Per(A_G)$

וידוע ש: $Per(B_G)\geq\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ (חסם פאליקמן-אגוריצ'ב)

⇐ מתקבל חסם: מספר הזיווגים המושלמים ב-G $= Per(A_G)=\frac{1}{\prod_{i=1}^n\alpha_i\prod_{j=1}^n\beta_j}\cdot Per(B_G)\geq\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^n\alpha_i\cdot\prod_{j=1}^n\beta_j}$

← תזכורת: tranversal בריבוע לטיני:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

← תזכורת: בעי' n המלכות הרגילה:

נחפש מטריצת פרמוטציה שמכילה מספרים שונים בה מכה ב-2 המטריצות בו-זמנית.

1	2	3	4
5	1	2	3
6	5	1	2
7	6	5	1

1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7

(?) שאלה: נניח ש: $n\geq k$, A מטריצה $n\times n$ שאיבריה שייכים לקבוצה $\{1,\dots,k\}$, ואף מס' לא מופיע פעמיים באותה השורה/העמודה. כמה transversal יכולים להיות ב-A? לכל היותר? לפחות?

(*)

זיווג צבעוני = RM

18/11/2021

מפגש 9

(?) **שאלה:** נתון גרף Dirac דו-צדדי מאוזן $G=\langle V,E\rangle$ על $2n$ קודקודים, וצביעה $\chi: E\to C$ היא μn-חסומה (עבור μ מתאים ו-n מספיק גדול):

$$?_1 \le \text{מס׳ ה-Rainbow Matching} \equiv \#RM \le ?_2$$

יותר קשה, חשוב — חסם אנטרופיה

קונטקסט לשאלה: ריבועים לטיניים הם שקולים לצביעות חוקיות של $K_{n,n}$ ב-n צבעים. כמו כן, transversal בר״ל שקול לזמ״ש צבעוני בצביעה כנ״ל.

- **השערת Ryser:** בכל ר״ל מסדר אי-זוגי יש transversal.

  $\Updownarrow$

  אם צובעים את: $K_{n,n}$ בצביעה חוקית ב-n צבעים (n אי-זוגי), אז יש זיווג מושלם צבעוני.

- **משפט (ארדש+ספנסר):** אם צובעים את $K_{n,n}$ בצביעה $\frac{n-1}{16}$-חסומה, אז יש זיווג צבעוני.

- **Coulson + Perarnau:** הכללה לגרפי Dirac.

> **אלגוריתם למציאת זיווג צבעוני:**

① **Random-Greedy:** - נאתחל $M=\emptyset$.
- בכל שלב, נבחר צלע מקרית שלא חולקת קודקוד/צבע עם צלע ב-M, ונוסיף אותה ל-M.

② נעשה תיקונים לוקליים ע״מ לעבור מ-"כמעט זיווג צבעוני מושלם" לזיווג צבעוני מושלם.

אתגר: מחלקות הצבע עלולות להיות בגדלים שונים.

רעיון: להשתמש בכלים שמיכאל סימקין פיתח עבור בעיית n-המלכות.

> **ניסוח מטריצוני:** נתונה מטריצה $n\times n$ M המכילה איברים מתוך $\{1,2,\dots,k\}$, כך שאף מספר לא מופיע יותר מ-$c\cdot n$ פעמים (עבור קבוע $c<n$).
כמה מטריצות פרמוטציה יש כך שאף 2 אחדות לא צבועים באותו הצבע?

21/11/2021

מפגש 10

∘ **טענה:** עבור n מספיק גדול, כמעט כל הגרפים על n קודקודים הם קשירים.

– **חסם האיחוד:** נניח $A_1,\dots,A_n$ מאורעות, אז: $Pr(A_1\cup\dots\cup A_n)\leq \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i)$

הוכחה:

① נגרל גרף באופן מקרי מההתפלגות האחידה על-פני כל הגרפים עם n קודקודים.

② נראה שההסתברות שהגרף קשיר קרובה ל-1.

נרצה שכל גרף אפשרי יתקבל בסיכוי זהה של: $\left(\frac{1}{\#\text{הגרפים על } n \text{ קודקודים}}\right)$,

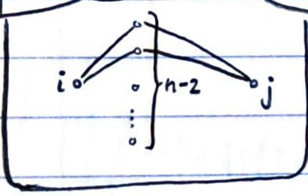
כאשר: $2^{\binom{n}{2}} = $ מס' הגרפים על n קודקודים.

פשוט נטיל מטבע הוגן עבור כל צלע אפשרית באופן בלתי תלוי.

$(G_{n,1/2})$

מס' הקודקודים

כל צלע נמצאת בסיכוי $\frac{1}{2}$



נקבע 2 קודקודים: i,j, כך ש: $i\neq j$, $1\leq i,j\leq n$.

נגדיר: $A_{ij} = $ אין מסלול באורך 2 מ-i ל-j

נסמן ב- A_{ijk} את המאורע הבא: ik, kj צלעות. אז:

(א) $\forall k: Pr(A_{ijk})=\frac{1}{4}$

(ב) לכל $k_1\neq k_2$, A_{ijk_1}, A_{ijk_2} בלתי תלויים, מתקיים:

$$Pr(\overline{A_{ijk_1}}\wedge\overline{A_{ijk_2}})=Pr(\overline{A_{ijk_1}})\cdot Pr(\overline{A_{ijk_2}})=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

$$Pr(A_{ij})=Pr\left(\text{אין מסלול באורך 2 מקודקוד } i \text{ ל-} j\right)=Pr(\overline{A_{ijk}},\ \forall k\neq i,j)=$$

$$=Pr(\underbrace{\overline{A_{ij1}}\wedge\overline{A_{ij2}}\wedge\dots\wedge\overline{A_{ijn}}}_{n-2})=\prod_{k\neq i,j}\underbrace{Pr(\overline{A_{ijk}})}_{3/4}=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$Pr(G\text{ קשיר})=Pr\left(\text{לכל } ij \text{ יש מסלול מקודקוד } i \text{ ל-} j\right)\geq Pr\left(\text{לכל } i,j \text{ יש מסלול באורך 2 מ-} i \text{ ל-} j\right)=Pr\left(\bigcap_{1\leq i,j\leq n}\overline{A_{ij}}\right)=$$

$$=Pr\left(\overline{\left(\bigcup_{1\leq i,j\leq n}A_{ij}\right)}\right)=1-Pr\left(\bigcup_{1\leq i,j\leq n}A_{ij}\right)\underset{\text{חסם האיחוד}}{\geq}1-\sum_{1\leq i,j\leq n}Pr(A_{ij})=$$

$$=1-\sum_{1\leq i,j\leq n}\left(3/4\right)^{n-2}\geq 1-\underbrace{n^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

מ.ש.ל.

9/12/2021

מפגש 11

נתונה מטריצה $n\times n$ מעל $1,\dots,n$: L. כל מספר מופיע בדיוק פעם אחת בכל שורה ועמודה (ר"ל). מחפשים מטריצת פרמוטציה X שהאיברים ב-L המתאימים לאחדות ב-X כולם שונים (טרנסוורסל).

$$L=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

• **משפט:** מס' הטרנסוורסלים בר"ל $n\times n$ הוא לכל היותר: $\left((1+o(1))\left(\frac{n}{e^2}\right)\right)^n$

הוכחה: יהי X טרנסוורסל מקרי של L (התפלגות אחידה), אז:

$$H(X)=\log(\text{מס' הטרנסוורסלים של } L)$$

נגדיר לכל i: $X_i=$ העמודה j כך ש: $X(i,j)=1$

דוגמה:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}X_1=2\\X_2=3\\X_3=1\end{cases}$$

הערות!
1) ה-X_i-ים כולם שונים.
2) $L(i,X_i)$ כולם שונים.
3) $H(X)=H(X_1,X_2,\dots,X_n)$

$$H(X)=H(X_1,\dots,X_n)\overset{\text{כלל השרשרת}}{=}H(X_1)+H(X_2|X_1)+\dots+H(X_n|X_1,\dots,X_{n-1})$$

למעשה, לכל סדר על השורות $1,\dots,n$ נקבל משוואה:

$$H(X)=\sum_i H(X_i\,|\,X_j : j \text{ קודם ל-} i)$$

סימון: $j\prec i \iff j$ קודם ל-i בסדר מסוים $\prec$.

• **הגדרה:** $N_i=$ מס' האפשרויות שיש ל-X_i בהינתן X_j עבור $j\prec i$

תלוי ב- $\prec, X, L$

דוגמה:

$$L=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\\4&5&1&2&3\\3&4&5&1&2\\2&3&4&5&1\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}X_1=5\\X_2=4\\X_3=3\\X_4=2\\X_5=1\end{cases}$$

נבחר סדר: $(5,3,2,4,1)$

$$N_5=5,\ N_3=3,\ N_2=2,\ N_4=1,\ N_1=1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[H(X_i\,|\,X_j=x_j : j\prec i)\right]\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[\log(N_i)\right]$$

רעיון: נבחר סדר λ באופן מקרי ונעשה ממוצע על-פני החסמים שנקבל, כלומר – לכל סדר λ מקבלים חסם: $H(X) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_X[\log(N_i)]$

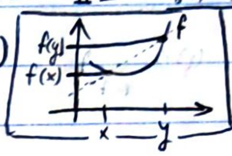
נעשה ממוצע על-פני בחירת סדר מקרי:

$$H(X) \le \mathbb{E}_\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_X[\log(N_i)]\right] =$$

$$= \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\lambda[\log(N_i)]\right] = (*)$$

הגדרה: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא **קמורה** אם לכל $x,y\in\mathbb{R}$ ולכל $0\le t\le 1$,

$$f(t\cdot x+(1-t)\cdot y) \le t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y)$$



הגדרה: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא **קעורה** אם לכל $x,y\in\mathbb{R}$ ולכל $0\le t\le 1$,

$$f(t\cdot x+(1-t)\cdot y) \ge t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y)$$

משפט: (אי-שיוויון ינסן Jensen) נתונים X מ"מ, f פונקציה.
- אם f קמורה, אז: $\mathbb{E}[f(X)] \ge f(\mathbb{E}[X])$
- אם f קעורה, אז: $\mathbb{E}[f(X)] \le f(\mathbb{E}[X])$

$$(*) = \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\lambda[\log(N_i)]\right] \le \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \log(\underbrace{\mathbb{E}_\lambda[N_i]})\right]$$

המקרה הראשון

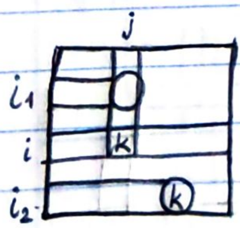
$$\mathbb{E}_\lambda[N_i] = \sum_{j=1}^{n} \Pr_\lambda(X_i \text{ סבור עמודה } j \text{ פנויה}) = \underbrace{1+\frac{n-1}{3}}$$

המקרה השני

כעת יש שני מקרים:

① אם $X_i = j$, אז $\Pr(j \text{ פנוי}) = 1$

② אם $X_i \ne j$, $\Pr(\text{עמודה } j \text{ פנויה}) = \Pr(i \text{ הראשון לפני } i_1, i_2 \text{ בסדר}) = \frac{1}{3}$



$$1+\frac{n-1}{3} \approx \frac{n}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{מס' הטרנסורסלים} \le \left(\frac{n}{3}\right)^n} \Leftarrow H(X) \le \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{n}{3}\right)\right] = n\cdot\log\left(\frac{n}{3}\right)$$

אנו מחפשים חסם הדוק יותר!

נבחר סדר מקרי $\prec$ באופן הבא:

לכל i, נבחר מספר ממשי $\alpha_i \sim U[0,1]$.

נסדר את השורות בסדר יורד של ה-α-ות.

$$(*) = \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\left[\log(N_i)\right]\right] = \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\mathbb{E}_{\alpha_{i'}:\, i'\neq i}\left[\log(N_i)\right]\right]\right] \le$$

א״ש ינסן

$$\le \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\log\left(\mathbb{E}_{\alpha_{i'}:\, i'\neq i}[N_i]\right)\right]\right]$$

$$\mathbb{E}_{\alpha_{i'}:\, i\neq i'}[N_i] = \sum_{j=1}^n \Pr(\text{עמודה } j \text{ פנויה עבור } X_i) = 1+(n-1)\alpha_i^2 \approx n\cdot\alpha_i^2$$

כמו קודם, גם כאן ישנם שני מקרים:

1. אם $X_i = j$, אז: $\Pr(j \text{ פנוי}) = 1$
2. אם $X_i \neq j$, אז: $\Pr(\text{עמודה } j \text{ פנויה עבור } X_i) =$

$$= \Pr(i \text{ קודם ל-} i_1 \text{ ול-} i_2) = \Pr(\alpha_i > \alpha_{i_1} \text{ וגם } \alpha_i > \alpha_{i_2}) =$$

$$= \underbrace{\Pr(\alpha_i > \alpha_{i_1})}_{\alpha_i} \cdot \underbrace{\Pr(\alpha_i > \alpha_{i_2})}_{\alpha_i} = \alpha_i^2$$

$X_{i_1} = j$

$L(i_2, X_{i_2}) = k$

$$H(X) \le \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\log(n\alpha_i^2)\right]}\right]$$

$$\int_0^1 x\log(nx^2)\,dx = \ldots = \boxed{\log(n)-2}$$

$$H(X) \le n\cdot(\log(n)-2) = n\cdot\log\left(\frac{n}{e^2}\right) \Longrightarrow \text{מס׳ הטרנסוורסלים} \le \left(\frac{n}{e^2}\right)^n$$

12/12/2021

מפגש 12

עבור μn
כאשר: $\mu=1$
הוא ר״ל

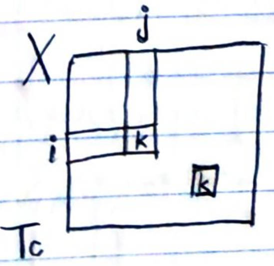
ננסה להכליל את המשפט הקודם לקונטקסט יותר כללי:

- כל מחלקות הצבע הן בגודל μn עבור $0<\mu\leq 1$ ⇐ מספר הצבעים $\left(\frac{1}{\mu}\right)\cdot n=\frac{n^2}{\mu n}$

- **משפט:** מספר הטרנסוורסלים במטריצה לטינית עם $n\left(\frac{1}{\mu}\right)$ מספרים שונים, שבה כל מספר מופיע בדיוק μn פעמים, הוא לכל היותר ___?___.
— אנחנו מצפים: $\left(\frac{n}{e^2}\right)^n\leq$ ___?___ $\leq\left(\frac{n}{e}\right)^n$

רעיון: נסמן ב-T את אוסף כל הטרנסוורסלים של $L\rightarrow$ (המטריצה הלטינית שלנו).
נניח שהצבעים הם $\{1,\dots,\left(\frac{1}{\mu}\right)n\}$.
כל $t\in T$ בוחר n צבעים מתוכם.
לכל תת-קבוצה $C\subseteq\{1,\dots,\left(\frac{1}{\mu}\right)n\}$ בגודל n, נגדיר T_C להיות אוסף הטרנסוורסלים שבוחרים את C.
אז: $T=\bigcup T_C$, $C:|C|=n$,$C\subseteq\{1,\dots,\left(\frac{1}{\mu}\right)n\}$
ולכן: $|T|=\sum|T_C|$.
מספר הנסכמים בסכום לעיל הוא: $\binom{\left(\frac{1}{\mu}\right)n}{n}$
← הרעיון הוא להוכיח חסם מהצורה: לכל C, ___?___ $\leq|T_C|$ ⇐ $|T|\leq\binom{\frac{1}{\mu}n}{n}\cdot$ ___?___

$$|T|\leq\binom{\frac{1}{\mu}\cdot n}{n}\cdot A\Leftarrow|T_C|\leq A$$



מקרים:
1. אם X בחר j, אז: $Pr(\text{פנוי } j)=1$
2. אם $k\notin C$, אז: $Pr(\text{פנוי } j)=0$
3. אם $k\in C$, אז: $Pr(\text{פנוי } j)=\alpha_i^{\,2}$

מספר שקול לצבע,
כלומר: מס' הצבעים
השונים הוא $(\frac{1}{\mu})n$

"מטלת-בית":

נחזור על המשפט אותו נרצה להוכיח:

מספר הטרנסוורסלים במטריצה לטינית עם $(\frac{1}{\mu})n$ מספרים שונים, שבה כל מספר מופיע בדיוק μn פעמים, הוא לכל היותר ___?___.

הוכחה:

המטריצה הלטינית

נסמן ב-T את אוסף כל הטרנסוורסלים של L, ונניח שהצבעים הם: $\{1,\dots,(\frac{1}{\mu})n\}$.
כל $t\in T$ בוחר n צבעים מתוכם.
לכל תת-קבוצה $C\subseteq\{1,\dots,(\frac{1}{\mu})n\}$ בגודל n, נגדיר T_c להיות אוסף הטרנסוורסלים שבוחרים את C, אז: $T=\biguplus T_c$, $C\subseteq\{1,\dots,(\frac{1}{\mu})n\}$, $|C|=n$.

$|T|=\sum|T_c|$

נוכיח חסם מהצורה הבאה:

$$\text{לכל } C,\ |T_c|\le \underline{A} \Leftarrow |T|\le\binom{(\frac{1}{\mu})\cdot n}{n}\cdot\underline{A}$$

יהי $X\in T_c$ טרנסוורסל מקרי של L (התפלגות אחידה), אז: $H(X)=\log\left(\text{מס' הטרנסוורסלים ב-}T_c\right)$
נגדיר לכל i: העמודה j כך ש: $X_i=X(i,j)=1$
לפי כלל השרשרת (אנטרופיה), לכל סדר על השורות $1,\dots,n$, נקבל משוואה:

$$H(X)=\sum_i H(X_i\mid X_j: j \text{ קודם ל-} i)$$

<u>סימון:</u> $j\prec i \Leftrightarrow j$ קטן מ-i בסדר מסוים $\prec$.

נגדיר את מס' האפשרויות שיש ל-X_i בהינתן X_j כך: $N_i = j\prec i$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[H(X_i\mid X_j=x_j: j\prec i)\right]\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[\log(N_i)\right]$$

נחשב ממוצע על-פני בחירת סדר מקרי:

$$H(X)\le\mathbb{E}_{\prec}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X[\log(N_i)]\right]=\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\prec}[\log(N_i)]\right]=\circledast$$

לכל i, נסמן את מס' הצבעים בשורה ה-i השייכים ל-C ב- r_i, כך ש: $\sum_{i=1}^{n}r_i=\mu\cdot n^2$
נשתמש בקמירות של פונקצית $\log$.
נבחר סדר מקרי $\prec$ באופן הבא: לכל i נבחר מס' ממשי $\alpha_i\sim U[0,1]$, ונסדר את השורות בסדר יורד של ה-α-ות.

$$\circledast=\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}[\log(N_i)]\right]=\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\mathbb{E}_{\alpha_j:j\neq i}[\log(N_i)]\right]\right]\le\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\log\left(\mathbb{E}_{\alpha_j:j\neq i}[N_i]\right)\right]\right]$$

א"ש ינסן לפי תכונת הקמירות של פונ' log

$$\mathbb{E}_{\alpha_j:j\neq i}[N_i]=\sum_j \Pr(j \text{ פעיל עבור } X_i)=\star$$

נסמן $L(i,j)=k$.

19/12/2021 מפגש 13

3 מקרים:

(I) $X_i=j$, אז: $Pr(\text{פוני } j)=1$

(II) $k\notin C'$, אז: $Pr(\text{פוני } j)=0$

(III) $X_i\neq j$, $k\in C'$ $\Leftarrow$ יש שורה i_1 כך ש: $X_{i_1}=j$ וגם שורה i_2 כך ש: $L(i_2,X_{i_2})=k$.

אם $i_1\prec i$ או $i_2\prec i$, אז j לא פוני עבור i.

זה לא קורה אם $\alpha_{i_2},\alpha_{i_1}<\alpha_i$, ולכן j פוני עבור X_i בהסתברות α_i^2. $Pr(\text{פוני } j)=\alpha_i^2$

$$☆=\sum_j Pr(X_i \text{ פוני עבור } j)=\underbrace{1}_{(I)}+\left(\left(\text{מס' ה-}j\text{ כך ש: } k\in C' \text{ כלומר: } L(i,j)\in C'\right)-1\right)\cdot\underbrace{\alpha_i^2}_{(III)}$$

כאמור: מס' ה-j-ים כך ש: $r_i=L(i,j)\in C'$.

הוכחנו כי: $\mathbb{E}_{\alpha_{i'}:i'\neq i}[N_i]=1+(r_i-1)\cdot\alpha_i^2\approx\boxed{r_i\cdot\alpha_i^2}$

לכן: $\log(|T_{C'}|)\le\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}_{\alpha_i}[\log(r_i\alpha_i^2)]}$

נזכור ש-α_i נבחר מההתפלגות האחידה על $[0,1]$.

תזכורת: $(X:\Omega\to E\subseteq\mathbb{R})$

- מ"מ בדיד: $\mathbb{E}[X]=\sum_{x\in E}Pr(X=x)\cdot x$
- מ"מ רציף: יש פונקציית צפיפות f_x שמקיימת: $Pr(X\le x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)\,dx$
ומגדירים: $\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)\cdot x\,dx$

$\leftarrow$ תוחלת של פונקציה של מ"מ:

- אם X מ"מ בדיד, $Y=g(x)$ כך ש: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, אז:
$\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[g(x)]=\sum_{x\in E}Pr(X=x)\cdot g(x)$
- אם X מ"מ רציף, $Y=g(x)$ כך ש: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, כאשר ל-$X$ יש פונקציית צפיפות f_x, אז:
$\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)\cdot g(x)\,dx$

כאמור, $\alpha_i\sim U[0,1]$, כך ש: $f_{\alpha_i}(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$

$$\mathbb{E}_{\alpha_i}[\log(r_i\alpha_i^2)]=\int_0^1\log(r_i\alpha_i^2)\,d\alpha_i\overset{\text{שינוי שם של משתנה}}{=}\int_0^1\log(r_ix^2)\,dx=\underbrace{\int_0^1\log(r_i)\,dx}_{\log(r_i)}+2\cdot\underbrace{\int_0^1\log(x)\,dx}_{-1}=\log(r_i)-2$$

פירוט בעמוד הבא

$$\left[(x\cdot\log(x)-x)' = \log(x)+1-1=\log(x) \Rightarrow \int_0^1 \log(x) = \Big|_0^1 (x\cdot\log(x)-x) = (1\cdot\log(1)-1-\underset{\uparrow}{\overset{0}{0\cdot\log(0)}}+0) = -1\right]$$

ולכן:
$$\log(|T_{c'}|) \leq \sum_i (\log(r_i)-2) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{r_i}{e^2}\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r_i}{e^2}\right)\right)$$
$$\Downarrow$$
$$|T_{c'}| \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r_i}{e^2}\right) = \frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right) \leq \frac{(\mu n)^n}{e^{2n}} = \left(\frac{\mu n}{e^2}\right)^n$$

ולכן:
$$\boxed{|T| \leq \binom{\overbrace{\frac{1}{\mu}n}^{N}}{n}\cdot\left(\frac{\mu n}{e^2}\right)^n}$$

- טענה: $\binom{N}{\alpha N} \approx e^{H(\alpha)\cdot N}$, כאשר: $0<\alpha<1$.

"אנטרופיה בינארית"

- הגדרה: אנטרופיה בינארית היא אנטרופיה של מ"מ X: $X=\begin{cases}0, & \alpha \text{ בסיכוי} \\ 1, & 1-\alpha \text{ בסיכוי}\end{cases}$

סימון: $H(\alpha) = \alpha\cdot\log\left(\frac{1}{\alpha}\right) + (1-\alpha)\cdot\log\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$

הוכחה:

נשתמש בקירוב "סטירלינג לעניים": $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\binom{N}{\alpha N} = \frac{N!}{(\alpha N)!\cdot(N-\alpha N)!} = \frac{N!}{(\alpha\cdot N)!\cdot((1-\alpha)N)!} \approx \frac{\left(\frac{N}{e}\right)^N}{\left(\frac{\alpha N}{e}\right)^{\alpha N}\cdot\left(\frac{(1-\alpha)N}{e}\right)^{(1-\alpha)N}} =$$

קירוב סטירלינג לעניים

$$= \frac{1}{\alpha^{\alpha N}\cdot(1-\alpha)^{(1-\alpha)N}} = \left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{(1-\alpha)}\right)^N = e^{N\cdot\left(\alpha\cdot\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)+(1-\alpha)\cdot\log\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right)} =$$
$$= \boxed{e^{H(\alpha)\cdot N}}$$

מש"ל

לפי הטענה, אנו מקבלים:
$$|T| \leq e^{H(\mu)\cdot\left(\frac{1}{\mu}\right)\cdot n}\cdot\left(\frac{\mu n}{e^2}\right)^n = \left(\mu\cdot e^{\frac{1}{\mu}\cdot H(\mu)}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{e^2}\right)^n =$$

$$= \underbrace{\left(\mu\cdot\left(e^{H(\mu)}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)^n}\cdot\left(\frac{n}{e^2}\right)^n$$

$$\left(\mu\cdot\left(e^{H(\mu)}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)^n = \left(\mu\cdot\left(\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{(1-\mu)}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)^n = \left(\cancel{\mu}\cdot\cancel{\frac{1}{\mu}}\cdot\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}\right)^n = \left(\underbrace{\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}}\right)^n$$

$\boxed{\checkmark}$

[ציפ"ה: הביטוי $\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)}$ אמור להיות קרוב ל-e כש-μ קרוב ל-0,
ואמור להיות קרוב ל-1 כש-μ מתקרב ל-1.]

נניח: יש k צבעים, $n<k$.

נניח שיש a_z איברים במטריצה L ששווים ל-z לכל צבע $z\in\{1,2,\dots,k\}$.

(עד עכשיו: $a_z=\mu n$ לכל z).

! **הערה:** $\sum_{z=1}^{k} a_z = n^2$

דוגמה: $k=6$

1	2	3	4
5	6	1	2
3	4	5	6
2	3	4	1

$a_1=a_2=a_3=a_4=3$

$a_5=a_6=2$

$$\sum_{z=1}^{6} a_z = 3+3+3+3+2+2=16$$

לכל $C\subseteq\{1,\dots,k\}$, $|C|=n$, נגדיר T_C כמקודם.

נסמן: $a_C=\frac{\sum_{z\in C} a_z}{n}$ (=הגודל הממוצע של מחלקת צבע ב-C)

מההוכחה שראינו: $|T_C|\le \frac{1}{e^{2n}}\cdot\prod_{i=1}^{n} r_i = \circledast$

! **הערה:** $\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{z\in C} a_z = n\cdot a_C$ = מס' האיברים במטריצה שצבועים בצבע $z\in C$

$$\circledast \le \left(\frac{a_C}{e^2}\right)^n$$

$$|T| = \sum_{C\in\binom{[k]}{n}} |T_C| \le \sum_{C\in\binom{[k]}{n}} \left(\frac{a_C}{e^2}\right)^n = \frac{1}{e^{2n}}\cdot \sum_{C\in\binom{[k]}{n}} \left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{z\in C} a_z\right)^n =$$

$\binom{[k]}{n}$ – תתי הקבוצות בגודל n של $\{1,\dots,k\}$

$$= \left(\frac{1}{n\cdot e^2}\right)^n\cdot\left(\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\left(\sum_{z\in C} a_z\right)^n\right)$$

$$\sum_{z=1}^{k} a_z = n^2$$

$$\mu n=\frac{n^2}{k} \Rightarrow \mu=\frac{n}{k}$$

נגדיר פונקציה: $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ ע"י: $f(x_1,\dots,x_k)=\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\left(\sum_{z\in C} x_z\right)^n$

אילוצים: $x_1+x_2+\dots+x_k=n^2$, $x_i\le n$.

• **שאלה:** מהו המקסימום של f?

» **מטלות בית:**

חשבי בעצמך על הרחבות נוספות/הכללות לפרויקט.

עוד הכללות: (א) מה החסם שבסוף מקבלים? (עבור צביעה כללית/צביעה חצי-חסומה)

(ב) גרף דיראק/ גרף כללי

(ג) גרף לא דו-צדדי

26/12/2021

מפגש 14

L מטריצה $n\times n$ שמכילה מספרים בין 1 ל-k, כך שאף מספר לא מופיע פעמיים בשורה / בעמודה.

המספר $z\in\{1,\dots,k\}$ מופיע a_z פעמים ב-L.

נסמן: T - אוסף הטרנסוורסלים ב-L.

עבור $C\subseteq\{1,\dots,k\}$ בגודל n, נסמן אוסף הטרנסוורסלים של L שמכילים את כל הצבעים ב-C $=T_C$.

נסמן: $[k]=\{1,\dots,k\}$, אוסף תתי-הקבוצות בגודל n של $[k]$ $=\binom{[k]}{n}$

אז $T=\dot{\bigcup}_{C\in\binom{[k]}{n}}T_C \Rightarrow |T|=\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}|T_C|$

נקבע $C\in\binom{[k]}{n}$, ונגדיר מ"מ X להיות איבר מקרי ב-T_C (התפלגות אחידה).

$\Leftarrow H(X)=\log(|T_C|)$

נגדיר מ"מ X_z לכל $z\in C$ כאשר X_z זה השורה והעמודה של האיבר z ב-X שבוחר.

#דוגמה:

$$L=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&5\\5&1&3\end{pmatrix}\quad C=\{1,3,4\}\quad X_1=(1,1),\ X_3=(3,3),\ X_4=(2,2)$$

X

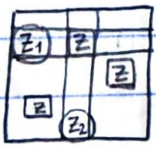
$$H(X)=H(X_z:z\in C)$$

חושפים את ה-X_z-ים לפי סדר יורד של מ"מ α_z, $\alpha_z\sim U([0,1])$.

$$H(X)\le\mathbb{E}_X\Big[\sum_{z\in C}\mathbb{E}_\alpha[\log(N_z)]\Big]\le\mathbb{E}_X\Big[\sum_{z\in C}\mathbb{E}_{\alpha_z}\big[\log(\underbrace{\mathbb{E}_{\alpha_{z'}:z'\neq z}[N_z]})\big]\Big]$$

מספר האפשרויות של X_z בהינתן כל ה-$X_{z'}$ עבור $z'<z$. $(z'\in C)$

$$\mathbb{E}_{\alpha_{z'}:z'\neq z}[N_z]=\sum_{(i,j):L(i,j)=z}\Pr(X_z \text{ חוקי עבור } (i,j))$$



שני מקרים:

(I) $X_z=(i,j)\Rightarrow(i,j)$ חוקי בהסתברות 1

(II) (i,j) חוקי $\Leftrightarrow\alpha_{z_1}<\alpha_z$ וגם $\alpha_{z_2}<\alpha_z\Rightarrow$ סיכוי α_z^2

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}_{\alpha_{z'}:z'\neq z}[N_z]=1+(a_z-1)\cdot\alpha_z^2$$

$$\Downarrow$$

$$H(X)\le\sum_{z\in C}\underbrace{\mathbb{E}_{\alpha_z}[\log(1+(a_z-1)\alpha_z^2)]}$$

$$\int_0^1\log(1+(a_z-1)x^2)\,dx=\dots=\log(a_z)-2+\left(\sim\frac{1}{\sqrt{a_z}}\right)$$

#דוגמה:

1	2	3	4	5
3	1	2	5	6
2	3	5	6	1
4	5	1	3	2
5	4	6	1	3

$a_1=5$, $a_2=4$, $a_3=5$, $a_4=3$, $a_5=5$, $a_6=3$

0.7

$C=\{1,2,4,5,6\}$

חוקי עבור X_4 בסיכוי: $\alpha_4^2=0.7^2=0.49$

← **מסקנה:** $H(X) \le \sum_{z\in C} \left(\log(a_z)-2\right) = \log\left(\prod_{z\in C} \frac{a_z}{e^2}\right)$

$$\Downarrow$$

$$|T_C| \le \prod_{z\in C}\left(\frac{a_z}{e^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$|T| \le \sum_{C\in\binom{[k]}{n}} \prod_{z\in C}\left(\frac{a_z}{e^2}\right) = \left(\frac{1}{e^{2n}}\right)\cdot \underline{\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\prod_{z\in C} a_z}$$

במפגש הקודם הוכחנו: $|T| \le \left(\frac{1}{e^2}\right)\cdot\sum_{C\in\binom{[k]}{n}} \underline{\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{z\in C} a_z\right)^n}$

< **כופלי לגראנז':** נניח שרוצים למצוא נק' קיצון לפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ בכפוף לאילוץ $g(x)=c$, כאשר: $x\in\mathbb{R}^n$.

תנאי הכרחי: $\nabla f = \lambda\cdot\nabla g$, כאשר $\lambda\in\mathbb{R}$.

אצלנו: $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, $f(a_1,\dots,a_k)=\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\prod_{z\in C} a_z$

רוצים: $g(a_1,\dots,a_k)=n^2$, $g(a_1,\dots,a_k)=a_1+\dots+a_k$

$$\nabla g = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = \sum_{\substack{C\in\binom{[k]}{n}\\ i\in C}}\ \prod_{\substack{z\in C\\ i\ne z}} a_z$$

- **טענה:** יש נקודה חשודה יחידה כאשר $a_1=\dots=a_k$.

הוכחה: תרגיל!

צ"ל שיש 2 נגזרות חלקיות שונות זו מזו.

- אם $a_i<a_j$, אז אפשר להראות $\frac{\partial f}{\partial a_i} > \frac{\partial f}{\partial a_j}$.

אם ה-a_i-ים שווים, אז כולם שווים $\frac{n^2}{k}$, ואז לכל i: $\frac{\partial f}{\partial a_i}=\binom{k-1}{n-1}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^{n-1}$

אותו הדבר לכל i

$$\text{Hessian}(f) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f^2}{\partial a_1^2} & \frac{\partial f^2}{\partial a_1\partial a_2} & \cdots\\ \frac{\partial f^2}{\partial a_2\partial a_1} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \to H$$

- **עובדה:** למטריצה סימטרית יש בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים ממשיים.

הנק' x מקסימום אם כל הע"ע של $H(x)$ הם שליליים.

- נדרוש: כל הע"ע של $H(x)$ **פרט** לע"ע של ∇g הם שליליים. בנקודה $a_1=\dots=a_k$:

$$H = c\cdot\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

← צ"ל: יש ל-$\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$ ו"ע $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ עם ע"ע $(k-1)$, כל שאר הע"ע שווים -1.

• **משפט:** נתונה L מטריצה לטינית $n\times n$ מעל $\{1,...,k\}$, אז מספר הטרנסוורסלים שלה הוא לכל היותר:

$$\frac{1}{e^{2n}}\cdot\binom{k}{n}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n = \binom{(\frac{1}{\mu})n}{n}\cdot\left(\frac{\mu n}{e^2}\right)^n$$

$\mu=\frac{n}{k}$

מטרה: החסם במשפט הוא בעצם:

$$\binom{(\frac{1}{\mu})n}{n}\cdot\left(\underbrace{(1+o(1))}_{\text{מגיע מהגורם באינטגרל}}\left(\frac{\mu n}{e^2}\right)\right)^n$$

#דוגמה: $a,b\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} f(a,b)=a\cdot b \\ st \quad a+b=11 \end{cases}$$

$\nabla f=\binom{b}{a}$, $\nabla g=\binom{1}{1}$ $\qquad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

נק' חשודה יחידה: $a=b=5.5$

2 וקטורים עצמיים: $\longrightarrow$ $H=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

① $\nabla g=\binom{1}{1}\to$ ע"ע 1

② $\binom{1}{-1}\to$ ע"ע -1 $\Leftarrow$ $\binom{5.5}{5.5}$ מקסימום

$\Downarrow$

$f(a,b)\le(5.5)\cdot(5.5)=30.25$

מטלות-בית:

① לפתור את האינטגרל המסוים הבא: $\int_0^1\log(1+(a_z-1)x^2)\,dx$

יש לפצל ל-2 מקרים: (I) $a_z=1$

(II) $a_z\neq1$

② להוכיח כי ישנה נק' קיצון **יחידה** לפונקציה: $\boxed{f(a_1,...,a_k)=\sum_{c\in\binom{[k]}{n}}\left(\prod_{z\in c}a_z\right)}$ עבור: $a_1=...=a_k$.

③ יש ל- $\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$ ו"ע $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ עם ע"ע $(k-1)$, כל שאר הע"ע שווים -1.

① פתירת האינטגרל המסוים: $\int_0^1 \log(1+(a_z-1)x^2)dx$. נניח כי: $\log_e \equiv \ln$.

נחלק לשני מקרים:

$a_z=1$ (I)

$a_z\neq 1$ (II)

נפתור תחילה את המקרה הראשון:

$$\int_0^1 \ln(1+(a_z-1)x^2)dx \overset{a_z=1}{=} \int_0^1 \ln(1+0\cdot x^2)dx = \int_0^1 \ln(1)\,dx = \int_0^1 0\,dx = \boxed{0}$$

כעת נתמקד במקרה השני:

$$\int_0^1 \ln(1+(a_z-1)x^2)dx = x\cdot\ln(1+(a_z-1)x^2) - \underbrace{\int_0^1 \frac{2(a_z-1)x^2}{(a_z-1)x^2+1}dx}_{2\cdot(a_z-1)\cdot\int_0^1\frac{x^2}{(a_z-1)x^2+1}dx}$$

אינטגרציה בחלקים: $f=\ln(1+(a_z-1)x^2)$, $g'=1$
$f'=\frac{2(a_z-1)x}{(a_z-1)x^2+1}$, $g=x$

x^2 ניתן לכתוב גם כך: $x^2=\frac{(a_z-1)}{(a_z-1)}\cdot x^2+\frac{1}{a_z-1}-\frac{1}{a_z-1}=\frac{(a_z-1)x^2+1}{a_z-1}-\frac{1}{a_z-1}$

כעת נציב:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(a_z-1)x^2+1}dx = \int_0^1\left(\frac{\frac{1}{a_z-1}\cancel{((a_z-1)x^2+1)}}{\cancel{(a_z-1)x^2+1}} - \frac{\frac{1}{a_z-1}}{(a_z-1)x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{a_z-1}-\frac{1}{(a_z-1)((a_z-1)x^2+1)}\right)dx \overset{\text{סכום אינטגרלים = אינטגרל של סכום}}{=} \int_0^1\frac{1}{a_z-1}dx - \int_0^1\frac{1}{(a_z-1)\cdot((a_z-1)x^2+1)}dx=$$

$$=\frac{1}{a_z-1}\cdot\overbrace{\int_0^1 1\,dx}^{x} - \frac{1}{a_z-1}\cdot\int_0^1\frac{1}{(a_z-1)x^2+1}dx = \frac{1}{a_z-1}\cdot 1 - \frac{1}{a_z-1}\cdot\underbrace{\int_0^1\frac{1}{(a_z-1)x^2+1}dx}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(a_z-1)x^2+1}dx = \int_0^1\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_z-1}}du = \frac{1}{\sqrt{a_z-1}}\cdot\int_0^1\frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{\sqrt{a_z-1}}\cdot\Big|_0^1 \arctan(u) =$$

הצבה: $u=\sqrt{a_z-1}\cdot x$, $\frac{du}{dx}=\sqrt{a_z-1}$ $\Rightarrow$ $dx=\frac{1}{\sqrt{a_z-1}}du$

הצבה, חזרה ל-x

$$=\frac{1}{\sqrt{a_z-1}}\cdot\Big|_0^1\arctan(\sqrt{a_z-1}\,x) = \boxed{\frac{\arctan(\sqrt{a_z-1})}{\sqrt{a_z-1}}}$$

לסיכום:

$$\int_0^1 \ln(1+(a_z-1)x^2)dx \overset{a_z\neq1}{=} x\cdot\ln(1+(a_z-1)x^2) - \left(2(a_z-1)\cdot\left(\frac{1}{a_z-1}-\frac{\arctan(\sqrt{a_z-1})}{\sqrt{a_z-1}}\right)\right)=$$

$$= x\left(\ln(1+(a_z-1)x^2)-2\right)+\frac{2\cdot\arctan(\sqrt{a_z-1}\cdot x)}{\sqrt{a_z-1}}+C=$$

$(a_z>1)$

$$=\boxed{x\cdot\ln(1+(a_z-1)x^2)-2(a_z-1)\left(\frac{x}{a_z-1}-\frac{\arctan\left(\frac{(2a_z-2)x}{2\sqrt{a_z-1}}\right)}{(a_z-1)^{3/2}}\right)}+C$$

2 כופלי לגרנז':

$$\begin{cases} f(a_1,a_2,\dots,a_k)=\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\prod_{z\in C} a_z \\ st \quad g(a_1,a_2,\dots,a_k)=a_1+a_2+\dots+a_k=n^2 \Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_k \end{cases}$$

$$\nabla g=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

תנאי הכרחי: $\nabla f=\lambda\cdot\nabla g$, כאשר $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}=\sum_{\substack{C\in\binom{[k]}{n}\\ i\in C}}\prod_{\substack{z\in C\\ i\ne z}} a_z$$

__צ"ל:__ יש 2 נגזרות חלקיות שונות זו מזו.

נניח כי התנאי $a_1=a_2=\dots=a_k$ לא מתקיים. נבחר $1\le i\ne j\le k$, בפרט ובלי הגבלת הכלליות: $a_j>a_i$. נזכיר כי: $\forall i: a_i>0$

נניח כי יתר ה-a_z-ים שווים, משמע: $\forall p,q: p\ne i\ne j\ne q: a_p=a_q$

לכל קבוצה C, ישנם 4 מקרים: (I) $j\in C,\ i\in C$

נמצא רק בסכום של a_p עבורו $p\in C$ $\begin{cases} \text{(II)}\ j\notin C,\ i\in C \\ \text{(III)}\ j\in C,\ i\notin C \end{cases}$

(IV) $j\notin C,\ i\notin C$

נבדוק השוואה בין $\prod_{\substack{z\in C\\ z\ne i}} a_z$ לבין $\prod_{\substack{z\in C\\ z\ne j}} a_z$ לכל אחד מהמקרים:

(I) $j\in C \vee i\in C$: $\prod_{\substack{z\in C\\ z\ne i\\ j\in C}} a_z=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_j\cdot\ldots\cdot a_k=\underbrace{a_p^{n-1}\cdot a_j>a_p^{n-1}\cdot a_i}=\prod_{\substack{z\in C\\ z\ne j\\ i\in C}} a_z$ (I)

משמע, עבור C כזה: $\prod_{z\ne j} a_z>\prod_{z\ne i} a_z$, כאשר $z\in C$.

(II) $j\notin C \vee i\in C$ — (II) קבוצות C אלו נמצאות רק בסכומים עבור a_i ולא עבור a_j.

(III) $j\in C \vee i\notin C$ — (III) " " " " " a_j " " a_i.

נשים-לב כי קבוצות ממקרה II, מכפלתן a_p^{n-1}. כך גם מכפלת הקבוצות ממקרה III.

(IV) $j\notin C \vee i\notin C$ — (IV) קבוצות אלה לא יופיעו בסכום עבור הנגזרת לפי a_i וגם לא לפי a_j.

כעת נסכום לפי: $\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}$, פעם עבור $i\in C$ ופעם עבור $j\in C$, ונשווה.

נניח כי ישנן t קבוצות C עבורן: $j\in C \vee i\in C$. $t\ge 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}=\sum_{\substack{C\in\binom{[k]}{n}\\ i\in C}}\prod_{\substack{z\in C\\ z\ne i}} a_z=t\cdot a_p^{n-1}\cdot a_j+\left(\binom{k}{n}-t\right)a_p^{n-1}\geq t\cdot a_p^{n-1}\cdot a_i+\left(\binom{k}{n}-t\right)\cdot a_p^{n-1}=\frac{\partial f}{\partial a_j}$$

כאשר השוויון מתקיים אמ"מ $t=0$.

לסיכום, כאשר $a_j>a_i$ הוכחנו כי: $\frac{\partial f}{\partial a_i}>\frac{\partial f}{\partial a_j}$, משמע: $\frac{\partial f}{\partial a_i}\ne\frac{\partial f}{\partial a_j}$.

מ.ש.ל.

③ **תזכורת**: ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים - **הגדרה**:

תהי A מטריצה ריבועית מעל השדה F. נאמר ש- $\lambda \in F$ הוא ע"ע של מטריצה A אם קיים ו"ע $\vec{v}$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ כך ש: $\boxed{A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}$. הו"ע $\vec{v}$ "יקרא ו"ע של A השייך לע"ע λ.

A מטריצה $k \times k$. ערכי האלכסון הראשי שווים ל-0, יתר הערכים 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ניצור מערכת משוואות הנובעות מהנוסחה $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_k = \lambda \cdot x_1 \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_k = \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} = \lambda \cdot x_k \end{cases}$$

נשים-לב שאם $\lambda = 0$, הדבר מחייב $\vec{v} = \vec{0}$, ולכן $\lambda \neq 0$ בהכרח.

נציב:

$$\frac{x_1 + x_3 + \ldots + x_k}{\lambda} + \frac{x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_k}{\lambda} + \ldots + \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}}{\lambda} = \lambda \cdot x_1 \quad / \cdot \lambda$$

$$k \cdot x_1 + (k-1) \cdot x_2 + \ldots + (k-1) \cdot x_k = \lambda^2 \cdot x_1 \quad / -k \cdot x_1$$

$$\begin{cases} (k-1) \cdot (x_2 + x_3 + \ldots + x_k) = (\lambda^2 - k) \cdot x_1 \\ (k-1) \cdot (x_1 + x_3 + \ldots + x_k) = (\lambda^2 - k) \cdot x_2 \\ \vdots \\ (k-1) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}) = (\lambda^2 - k) \cdot x_k \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = 0 \\ \Downarrow \\ (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = 0 \end{gathered}}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{v} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{נחשב דטרמיננטה}=0}^{=M} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^{k-1} \cdot (\lambda - [k-1]) = 0$$

התקבלו שני ע"ע אפשריים: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = k-1$.

נציב את λ_2 במערכת המשוואות לעיל, ונקבל:

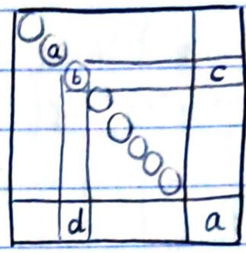
$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_k = (k-1) \cdot x_1 \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_k = (k-1) \cdot x_2 \\ x_1 + \ldots + x_{k-1} = (k-1) x_k \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots x_k = 1 \Rightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

מלבדו, יתר הע"ע שליליים!

23/1/2022

מפגש 15

הוכחה: $T \le \frac{1}{e^{2n}}\binom{k}{n}\left((1+o(n))\left(\frac{n^2}{k}\right)\right)^n$ (עבור הגרף המלא)

① 

אם c, d לא נבחרו, ניתן לבצע היפוך

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

② מספר הריצות השונות של האלגוריתם (בהנחה שתמ״ז מסתיים בטרנסוורסל)

$$\ge$$

$n!$ · מספר הטרנסוורסלים

ולכן: $|T| \le \frac{\text{מספר הריצות השונות של האלגוריתם}}{n!}$

בצביעה מקרית

$$n^2\cdot\left((n-1)^2\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)\cdot\left((n-2)^2\cdot\left(1-\frac{2}{k}\right)\right)\cdot\ldots = \prod_{j=0}^{n-1}(n-j)^2\cdot\left(1-\frac{j}{k}\right) =$$

$$= (n!)^2\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\underbrace{\left(1-\frac{j}{k}\right)}_{\frac{1}{k}\cdot(k-j)} = (n!)^2\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^n\cdot\prod_{j=0}^{n-1}(k-j) = (n!)^2\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^n\cdot\frac{k!}{(k-n)!}$$

חישוב עזר:

$$\left[\prod_{j=0}^{n-1}(k-j) = \left(\prod_{j=0}^{n-1}(k-j)\right)\cdot\frac{\prod_{j=n}^{k-1}(k-j)}{\prod_{j=n}^{k-1}(k-j)} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(k-j) = k!}{\prod_{j=n}^{k-1}(k-j) = (k-n)!}\right]$$

≪ מספר הטרנסוורסלים:

$$\underbrace{(n!)\left(\frac{1}{k}\right)^n\cdot\frac{k!}{(k-n)!}}_{\text{חסם תחתון}} \longleftrightarrow \underbrace{\frac{k!}{n!\,(k-n)!}\cdot\left(\frac{n^2}{e^2 k}\right)^n}_{\text{חסם עליון}}$$

ולאחר הצמצום:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \underset{\text{סטירלינג ל״עניים״}}{\approx} (n!)^2 \longleftrightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$$

16/4/2022

מפגש 16

תיקון החלק הראשון במאמר

≪ תיקון המאמר הראשון:

במקום לחשב ערכים עצמיים ואת הווקטורים העצמיים שלהם, ננסה כזאת כך:

יהי וקטור $\vec{v}$ שסכום כל קואורדינטותיו שווה ל-0, אז אם $\vec{v}^T H \vec{v} < 0$ יש נק' מקסימום מקומית עבור $x_1 = \dots = x_n$.

$$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} v_i = 0$$

$$(H\vec{v})_i = (1 \;\; 1 \;\; 1 \dots \overset{i}{0} \;\; 1 \dots 1)\vec{v} = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) - v_i = -v_i$$

ולכן:

$$H\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} = -\vec{v} \Rightarrow \vec{v}^T H \vec{v} = \vec{v}^T(-\vec{v}) = -(\vec{v}^T\vec{v}) = -\|\vec{v}\|^2 < 0$$

לכל $\vec{v} \neq \vec{0}$