בס״ד

12/12/2021

מפגש 12

עבור μn
כאשר: $\mu = 1$
הוא ר״ל

ננסה להכליל את המשפט הקודם לקונטקסט יותר כללי:

- כל מחלקות הצבע הן בגודל μn עבור $0<\mu\le 1$ ⇐ מספר הצבעים $\left(\frac{1}{\mu}\right)\cdot n = \frac{n^2}{\mu n}$

- **משפט:** מספר הטרנסוורסלים במטריצה לטינית עם $n\left(\frac{1}{\mu}\right)$ מספרים שונים, שבה כל מספר מופיע בדיוק μn פעמים, הוא לכל היותר $\underline{\quad ? \quad}$.

— אנחנו מצפים: $\left(\frac{n}{e^2}\right)^n \le \underline{\quad ? \quad} \le \left(\frac{n}{e}\right)^n$

רעיון: נסמן ב-T את אוסף כל הטרנסוורסלים של $L \rightarrow$ (המטריצה הלטינית שלנו).

נניח שהצבעים הם $\{1,\dots,\left(\frac{1}{\mu}\right)n\}$.

כל $t\in T$ בוחר n צבעים מתוכם.

לכל תת-קבוצה $C\subseteq\{1,\dots,\left(\frac{1}{\mu}\right)n\}$ בגודל n, נגדיר T_C להיות אוסף הטרנסוורסלים שבוחרים את C.

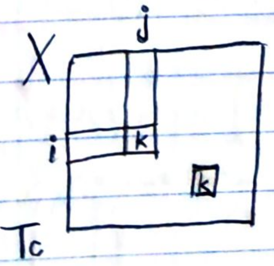
אז: $T=\bigcup T_C$, $C\subseteq\{1,\dots,\left(\frac{1}{\mu}\right)n\}$, $C:|C|=n$

ולכן: $|T|=\sum|T_C|$.

מספר הנסכמים בסכום לעיל הוא: $\binom{\left(\frac{1}{\mu}\right)n}{n}$

← הרעיון הוא להוכיח חסם מהצורה: לכל C, $|T_C|\le \underline{?} \Leftarrow |T|\le\binom{\frac{1}{\mu}n}{n}\cdot\underline{?}$

$$|T|\le\binom{\frac{1}{\mu}\cdot n}{n}\cdot A \Leftarrow |T_C|\le A$$



מקרים:

① אם X בחר j, אז: $P_r(\text{פנוי } j)=1$

② אם $k\notin C$, אז: $P_r(\text{פנוי } j)=0$

③ אם $k\in C$, אז: $P_r(\text{פנוי } j)=\alpha_i^2$

מספר שקול לצבע,
כלומר: מס' הצבעים
השונים הוא $(\frac{1}{\mu})n$

»"מטלת-בית":

נחזור על המשפט אותו נרצה להוכיח:

מספר הטרנסוורסלים במטריצה לטינית עם $(\frac{1}{\mu})n$ מספרים שונים, שבה כל מספר מופיע בדיוק μn פעמים, הוא לכל היותר ___?___.

הוכחה:

המטריצה הלטינית

נסמן ב-T את אוסף כל הטרנסוורסלים של L, ונניח שהצבעים הם: $\{1,\dots,(\frac{1}{\mu})n\}$.
כל $t\in T$ בוחר n צבעים מתוכם.
לכל תת-קבוצה $C\subseteq\{1,\dots,(\frac{1}{\mu})n\}$ בגודל n, נגדיר T_C להיות אוסף הטרנסוורסלים שבוחרים את C, אזי: $T=\bigcup T_C$, $C\subseteq\{1,\dots,(\frac{1}{\mu})n\}$, $|C|=n$.

$|T|=\sum|T_C|$

נוכיח חסם מהצורה הבאה:

לכל C, $|T|\le\binom{(\frac{1}{\mu})\cdot n}{n}\cdot\underline{A} \Leftarrow |T_C|\le\underline{A}$

יהי $X\in T_C$ טרנסוורסל מקרי של L (התפלגות אחידה), אזי: $H(X)=\log(\text{מס' הטרנסוורסלים ב-}T_C)$

נגדיר לכל i: העמודה j כך ש: $X_i=X(i,j)=1$

עפ"י כלל השרשרת (אנטרופיה), לכל סדר על השורות $1,\dots,n$, נקבל משוואה:

$$H(X)=\sum_i H(X_i\mid X_j : j \text{ קודם ל-} i)$$

<u>סימון:</u> $j\prec i \Leftrightarrow$ j קטן מ-i בסדר מסוים $\prec$.

נגדיר את מס' האפשרויות יש ל-X_i בהינתן X_j כך: $N_i=j\prec i$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[H(X_i\mid X_j=x_j : j\prec i)\right]\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[\log(N_i)\right]$$

נחשב ממוצע על-פני בחירת סדר מקרי:

$$H(X)\le\mathbb{E}_{\prec}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_X[\log(N_i)]\right]=\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\prec}[\log(N_i)]\right]=\circledast$$

לכל i, נסמן את מס' הצבעים בשורה ה-i השייכים ל-C ב- r_i, כך ש: $\sum_{i=1}^{n}r_i=\mu\cdot n^2$

נשתמש בקמירות של פונקציית $\log$.

נבחר סדר מקרי $\prec$ באופן הבא: לכל i נבחר מס' ממשי $\alpha_i\sim U[0,1]$, ונסדר את השורות בסדר יורד של ה-α-ות.

$$\circledast=\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}[\log(N_i)]\right]=\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\mathbb{E}_{\alpha_j:j\neq i}[\log(N_i)]\right]\right]\le\mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\log\left(\mathbb{E}_{\alpha_j:j\neq i}[N_i]\right)\right]\right]$$

א"ש ינסן לפי תכונת הקמירות של פונ' $\log$

$$\mathbb{E}_{\alpha_j:j\neq i}[N_i]=\sum_j \Pr(X_i \text{ עבור } j \text{ פנוי})=✩$$

נסמן $L(i,j)=k$.