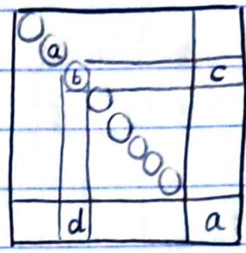
23/1/2022

מפגש 15

הוכחה: $T \le \frac{1}{e^{2n}}\binom{k}{n}\left((1+o(n))\left(\frac{n^2}{k}\right)\right)^n$ (עבור הגרף המלא)

(1)



אם c, d לא נבחרו, ניתן לבצע היפוך

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(2) מספר הריצות השונות של האלגוריתם (בהנחה שתמיד מסתיים בטרנסוורסל)

$$\ge$$

$n!\cdot$ מספר הטרנסוורסלים

ולכן: $|T| \le \dfrac{\text{מספר הריצות השונות של האלגוריתם}}{n!}$

בצביעה מקרית

$$n^2\cdot\left((n-1)^2\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)\cdot\left((n-2)^2\cdot\left(1-\frac{2}{k}\right)\right)\cdot\ldots = \prod_{j=0}^{n-1}(n-j)^2\cdot\left(1-\frac{j}{k}\right) =$$

$$= (n!)^2\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\underbrace{\left(1-\frac{j}{k}\right)}_{\frac{1}{k}\cdot(k-j)} = (n!)^2\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^n\cdot\prod_{j=0}^{n-1}(k-j) = (n!)^2\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^n\cdot\frac{k!}{(k-n)!}$$

חישוב עזר:

$$\left[\prod_{j=0}^{n-1}(k-j) = \left(\prod_{j=0}^{n-1}(k-j)\right)\cdot\frac{\prod_{j=n}^{k-1}(k-j)}{\prod_{j=n}^{k-1}(k-j)} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(k-j) = k!}{\prod_{j=n}^{k-1}(k-j) = (k-n)!}\right]$$

$\Leftarrow$ מספר הטרנסוורסלים: $\underbrace{(n!)\left(\frac{1}{k}\right)^n\cdot\frac{k!}{(k-n)!}}_{\text{חסם תחתון}} \longleftrightarrow \underbrace{\frac{k!}{n!\,(k-n)!}\cdot\left(\frac{n^2}{e^2 k}\right)^n}_{\text{חסם עליון}}$

ולאחר הצמצום: $\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \underset{\text{סטירלינג ל"עניים"}}{\approx} (n!)^2 \longleftrightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$