1/11/2021

מפגש 6

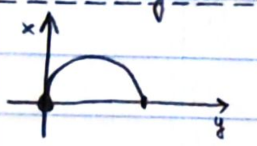
$P_x \equiv P_r(X=x)$

$f(x)=x\cdot\log\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Updownarrow$

$X:\Omega\to E$

$\sum_{x\in E} P_x\cdot\log\frac{1}{P_x}$



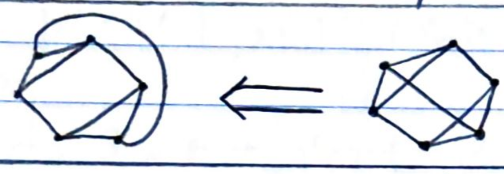
דוגמה: $d=3$

הגדרות:

① **גרף d-רגולרי** אם כל הדרגות בו הן d.

② **גרף מישורי** הוא גרף שניתן לצייר אותו במישור מבלי שהצלעות תחתכנה.

דוגמה:



③ **על-מישור** (Hyperplane) הוא מהצורה:

$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$ $\quad x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}^n$

דוגמה: $\mathbb{R}^3$ $\quad x+y+z=1$

④ **היפר-קוביה 4-מימדית**: $\{(x_1,x_2,x_3,x_4): 0\le x_i\le 1,\ \forall i\}$

דוגמה: $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}^3$

$x_1=(0,0,1)$ $\quad x=(1,0,0)$

$x_2=(0,0,2)$ $\quad y=(0,1,0)$

$\vdots$

$x_n=(0,0,n)$ $\quad z=(0,0,1)$

היטלים:

$P_1=\{(a,b,0): a,b\in\mathbb{R}\}\leftrightarrow(0,0,0)$

$P_2=\{(a,0,b): a,b\in\mathbb{R}\}\leftrightarrow(0,0,1),\dots,(0,0,n)$

$P_3=\{(0,a,b): a,b\in\mathbb{R}\}\leftrightarrow(0,0,1),\dots,(0,0,n)$

$$\left.\begin{array}{l} n_1=1\\ n_2=n\\ n_3=n\end{array}\right\}\Longrightarrow n_1\cdot n_2\cdot n_3=n^2$$

$$n_1\cdot n_2\cdot n_3\ge n^2$$

$sign(\varphi)=(-1)^{\text{מס' ההיפוכים של }\varphi}$, היפוך ב- $\varphi\in S_n$, S_n

$$\det(\underset{n\times n}{A})=\sum_{\varphi\in S_n}\left(sign(\varphi)\cdot\prod_{i=1}^{n}a_{i,\varphi(i)}\right),\quad Per(A)=\sum_{\varphi\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{i,\varphi(i)}\right)$$

הגדרנו מטריצת שכנויות של גרף דו-צדדי.

ראינו: זיווג מושלם בגרף שקול למטריצת פרמוטציה שמוכלת במט' שכנויות.

מס' הזיווגים המושלמים בגרף $=$ Per(מטריצת השכנויות)

- **משפט ברגמן:** תהי A מטריצה של 1/0, עם d_i אחדות בשורה i, אז:

$$Per(A)\le\prod_{i=1}^{n}(d_i!)^{1/d_i}\le\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{e}\right)$$

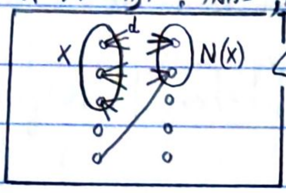
• **משפט אגוריצ'ב-פאליקמן:** תהי A מטריצה דו-סטוכסטית, אז: $\frac{n!}{n^n} \le Per(A)$

• **הגדרה:** גרף d-רגולרי הוא גרף בו כל הדרגות הן d.

• **משפט HALL:** יהי $G=\langle A\dot\cup B, E\rangle$ גרף דו-צדדי מאוזן ($|A|=|B|$).
יש ב-G זיווג מושלם $\Leftrightarrow$ לכל $X\subseteq A$, $|X|\le|N(x)|$ (כאשר $N(x)$ הוא קבוצת השכנים של X)

• **טענה:** יהי G גרף דו-צדדי d-רגולרי, אז יש ב-G זיווג מושלם.

הוכחה: נניח בשלילה שתנאי HALL לא מתקיים, כלומר: תהי $X\subseteq A$ תת-קבוצה כך ש: $|X|>|N(x)|$. ציור המחשבה:



נספור צלעות F שמחברות בין קודקוד ב-X לבין קודקוד ב-$N(x)$:

$\underline{d\cdot|X|} = |F| \le d\cdot N(x) < \underline{d\cdot|X|}$ סתירה

(?) **שאלה:** כמה זיווגים מושלמים יש בגרף d-רגולרי d-צדדי עם n קודקודים בכל צד?
(או במילים אחרות: אם A מטריצת 1/0 בגודל $n\times n$ עם d אחדות בכל שורה ובכל עמודה, מהו $Per(A)$?)

① Bregman: $\prod_{i=1}^{n}\left((d!)^{1/d}\right) = (d!)^{n/d}$

② נשים-לב: $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $Per(\lambda A)=\lambda^n\cdot Per(A)$

- לפי משפט אגוריצ'ב-פאליקמן: $Per(A)=Per(d\cdot\frac{1}{d}\cdot A)=d^n\cdot Per(\frac{1}{d}\cdot A)\ge d^n\cdot\frac{n!}{n^n}$

> **לסיכום:** $d^n\cdot\frac{n!}{n^n}\le Per(A)\le (d!)^{n/d}$ [תזכורת: סטרלינג ל"עניים": $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n$]

נניח ש-d גדול.

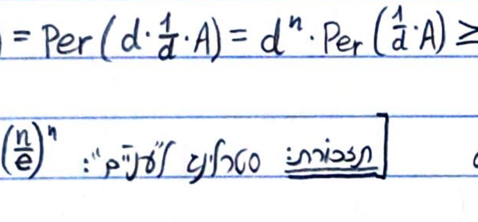
① חסם תחתון - $d^n\cdot\frac{n!}{n^n}\approx d^n\cdot\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n} = \left(\frac{d}{e}\right)^n$

② חסם עליון - $(d!)^{n/d}\approx\left(\left(\frac{d}{e}\right)^d\right)^{n/d} = \left(\frac{d}{e}\right)^{d\cdot n/d} = \left(\frac{d}{e}\right)^n$

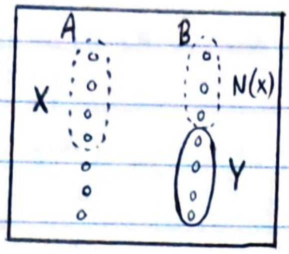
$\Rightarrow Per(A)\approx\left(\frac{d}{e}\right)^n$

(!) **הערה:** אם G הוא רק "כמעט" d-רגולרי, "יתכן שלא יהיו לו זיווגים מושלמים בכלל.

#דוגמה:



- **הגדרה:** גרף Dirac הוא גרף עם n קודקודים, בו כל הדרגות שוות ל- $\frac{n}{2}$ לפחות.
- **הגדרה:** גרף Dirac דו-צדדי הוא גרף דו-צדדי מאוזן עם n קודקודים בכל צד, שבו כל הדרגות שוות ל- $\frac{n}{2}$ לפחות.



- **טענה:** בגרף Dirac דו-צדדי יש זיווג מושלם.

הוכחה: נניח בשלילה שיש $X \subseteq A$ כך ש: $|X| > |N(X)|$:

נשים-לב ש: $|X| > \frac{n}{2} \Leftarrow \frac{n}{2} \le |N(X)|$.

נגדיר: $Y = B \setminus N(X)$.

נשים-לב שאין צלעות בין X לבין Y, לכן לכל קודקוד $v \in Y$, השכנים של v נמצאים ב: $A \setminus X$.

ולכן: $\frac{n}{2} \overset{\text{Dirac}}{\le} deg(v) \le |A \setminus X| = |A| - |X| = n - |X| < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$

סתירה $\Leftarrow \frac{n}{2} < \frac{n}{2}$