26/4/2022

מפגש 17

R - שורות שטרם נבחרו
C - עמודות שטרם נבחרו
S - סמלים שטרם נבחרו

מציאת טרנסוורסל במטריצה: K_{nn} בצביעה מקרית

	1	2	3	4	5
1	1	9	4	1	3
2	2	5	7	7	1
3	6	5	10	3	2
4	3	1	1	7	6
5	9	4	3	1	1

האלגוריתם:
① RG
② היפוכים

R	C	S
1	5	2,4,5,6,8,10

משפט: בהסתברות גבוהה (כאשר $0<\mu<1$, $n\to\infty$) האלג׳ מוצא טרנסוורסל.

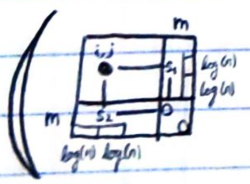
הוכחה:

למה 2: בסיום השלב החמדן, בהסתברות גבוהה התנאים הבאים מתקיימים:
(א) $m\le n^{1-\varepsilon}$ (בחרנו $n-m$ תאים), עבור $\varepsilon>0$ מסוים.
(ב) לכל תא ב-$R\times C$ יש לפחות $10\cdot m\cdot\log n$ היפוכים אפשריים.

למה 1: כשמגרילים את המטריצה, מתקיימים התנאים הבאים:
(א)
(ב)
(ג)
(ד)
תנאים שנצטרך עבור ההוכחה של למה 2
(ה) מספר מסוים מופיע בשורה/עמודה מסוימת לכל היותר $\log(n)$ פעמים.

למה 3: בשלב ההיפוכים, ביצוע היפוך לתא מסוים זה הורס לכל היותר $1+4\cdot\log(n)$ היפוכים עבור כל תא אחר (בהסתמך על סעיף (ה) מלמה 1).

הוכחה:



כתוצאה מההיפוך, S_1, S_2-1 והאיבר j,i כבר לא פנויים להיפוכים.
S_1, S_2 מופיעים לכל היותר $\log(n)$ פעמים בכל שורה/עמודה.

בשלב ההיפוכים, בכל צעד בוחרים תא ב-$R\times C$ ועושים לו היפוך.
מלמה 2 סעיף (ב), בתחילת שלב ההיפוכים לכל תא שנבחר יש לפחות $10\cdot m\cdot\log(n)$ היפוכים.
מלמה 3, כל היפוך שנעשה הורס לכל היותר $4\cdot\log(n)+1$ היפוכים עבור התא הבא.
מספר התאים שנבחר הוא m, לכן במצטבר נהרסים $m\cdot(4\cdot\log(n)+1)$ היפוכים אופציונליים סה״כ.
שוב מלמה 2 (ב), עדיין נותרו היפוכים אפילו בתא האחרון שנבחר.

הסבר על למה 2 (א): מספר ההיפוכים הצפוי (לפי היוריסטיקה) הוא בערך $\frac{1}{4}\cdot n$

באופן כללי קבוע מסוים

נרצה שאסימפטוטית עבור $n\to\infty$ יתקיים: $5\cdot m\cdot\log(n)<\frac{1}{4}\cdot n$

(א) $\Rightarrow 5\cdot n^{1-\varepsilon}\cdot\log(n)<\frac{1}{4}n \Rightarrow 20\cdot\log(n)<n^{\varepsilon}$

$$\boxed{k=\frac{1}{\eta}\cdot n}$$

time

• **רעיון:** לעקוב אחרי המשתנים: $i\in\{1,\dots,k\}$, $t\in\{0,1,\dots,n\}$

מספר הפסמים שהצבע i מופיע בקבוצה $R\times C$ אחרי הצעד ה-t של השלב החמדן $=X_{i,t}$

נסמן ב- $d_i = X_{i,0}$ זה מספר הפסמים ש-i מופיע במטריצה.

> **למה:** בהסתברות גבוהה, לכל $1\le i\le k$ מתקיים: $|d_i-\eta n|\le$ ____

[מכיוון ש: $d_i\sim \frac{1}{k}\cdot n^2=\frac{\eta}{n}\cdot n^2=\eta\cdot n$]

הוכחה:

> **אי-שוויון צ'רנוף:** יהיו $X_1,\dots,X_N$ מ"מ בת"ל ברנולי שווי-התפלגות, ונניח שלכל j: $Pr(X_j=1)=p$.

נסמן: $X=\sum_{j=1}^{N}X_j$, $g=p\cdot N$. נקבל: $Pr(|X-g|\ge\delta\cdot g)\le 2\cdot e^{-\frac{\delta^2\cdot g}{3}}$

נקבע $1\le i\le k$, ונגדיר מ"מ מציינים (=ברנולי) לכל תא במטריצה עבור המאורע שהצבע הוא i $\Leftarrow$ צ'רנוף: $Pr(|d_i-\eta n|\ge\delta\cdot\eta n)\le 2\cdot e^{-\frac{\delta^2\cdot\eta\cdot n}{3}}$

> **חסם האיחוד:** A,B מאורעות. $Pr(A)\le a$, $Pr(B)\le b$. $Pr(A\cup B)\le a+b$.

קיים i כך ש: $Pr(|d_i-\eta n|\ge\delta\cdot\eta\cdot n)\le k\cdot 2\cdot e^{-\frac{\delta^2\cdot\eta\cdot n}{3}}\approx\frac{n}{e^{\delta^2 n}}\xrightarrow[\text{(הוכח)}]{}0$

נרצה שהמכנה יהיה קטן מהמונה: $e^{\delta^2\cdot n}\gg n$

$$\delta^2\cdot n\gg\log(n)$$

$$\delta^2\gg\frac{\log(n)}{n}$$

$$\delta\gg\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\xRightarrow{\text{Sens}}\delta=\frac{\log(n)}{\sqrt{n}\cdot\eta}$$

ולכן: $|d_i-\eta\cdot n|\le\sqrt{n}\cdot\log(n)$.

בס״ד

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\approx\frac{n^k}{k!}$$

k גורמים שכולם ≈ n

3/5/2022

מפגש 18

X מ״מ.

① **אי״ש מרקוב:** אם $X\geq 0$ עם תוחלת μ, אז $(\lambda>1)$: $\boxed{Pr(X\geq \mu\cdot\lambda)\leq\frac{1}{\lambda}}$.

הוכחה: נניח בשלילה $Pr(X\geq\lambda\cdot\mu)<\frac{1}{\lambda}$.

$$E[X]=\sum_x x\cdot Pr(X=x)=\sum_{x<\lambda\mu}x\cdot Pr(X=x)+\sum_{x\geq\lambda\mu}x\cdot Pr(X=x)\geq$$

$$\geq 0+\sum_x(\lambda\cdot\mu)\cdot Pr(X=x)=\lambda\cdot\mu\underbrace{\sum_{x:x\geq\mu\cdot\lambda}Pr(X=x)}_{Pr(X\geq\lambda\mu)>\frac{1}{\lambda}}>\lambda\cdot\mu\cdot\frac{1}{\lambda}=\mu$$

סתירה

②

$Var(X)=\sigma^2$, $E[X]=\mu$

$$E[\underbrace{(X-\mu)^2}_{Y}]\Rightarrow Y=(X-\mu)^2$$

אי״ש מרקוב

$$Pr(Y\geq\lambda^2\cdot\sigma^2)\leq\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow Pr((X-\mu)^2\geq\lambda^2\sigma^2)\leq\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow$$ נוציא שורש מאגף שמאל

לסיכום, אי״ש צ׳בישב: $\boxed{Pr(|X-\mu|\geq\lambda\sigma)\leq\frac{1}{\lambda^2}}$

דוגמה: $G_{n,p}$ הוא גרף בעל n קודקודים וכל צלע נמצאת שם בסיכוי p.

שאלה: עבור איזה p-ים אנו יכולים לצפות שיהיה ב-$G_{n,p}$ "משולש"?

(כלומר - 3 קודקודים שמחוברים ביניהם בצלע △)

triangle

נסמן ב-X את מספר המשולשים לכל שלשה של קודקודים $t=\{x,y,z\}$

נסמן ב-X_t את המ״מ המציין של המאורע ש-$\{x,y,z\}$ הוא משולש.

$$X_t=\begin{cases}1 & xy,yz,xz\in E\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

מספר השלשות האפשריות זה $\binom{n}{3}\approx\frac{n^3}{6}$ (לפי הכתוב בראש דף זה)

$$X=\sum_t X_t\Rightarrow E[X]=\sum_t\overbrace{E[X_t]}^{Pr(yz,xz,xy\in E)=p^3}=$$

$$=\binom{n}{3}p^3\approx\frac{n^3\cdot p^3}{6}$$

למשל: $p=\frac{1}{n\cdot\log n}$

מסקנה: אם $np\to 0$ אז בהסתברות גבוהה אין בגרף משולש.

(**הוכחה:** $Pr(X>0)=Pr(X\geq 1)=Pr(X\geq(\frac{1}{\mu})\cdot\mu)\leq\frac{1}{\lambda}=\mu\approx\frac{(np)^3}{6}\to 0$)

טענה: אם $np\to\infty$, אז $Pr(X=0)\to 0$.

למשל: $p=\frac{\log n}{n}$

הוכחה: $Pr(X=0)\leq Pr(|X-\mu|\geq\mu)=Pr(|X-\mu|\geq\lambda\cdot\sigma)\leq\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{(\frac{\mu}{\sigma})^2}=\frac{\sigma^2}{\mu^2}$

$\mu=\lambda\cdot\sigma$
$\lambda=\frac{\mu}{\sigma}$

ברור כעת כי אנו רוצים: $\frac{Var(X)}{E[X]^2}\to 0$.

! **הערה:** $Var(X)=E[X^2]-E[X]^2$.

$$\boxed{(x_1+x_2+\dots+x_N)(x_1+x_2+\dots+x_N)=\sum_{i=1}^{N}x_i^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le N\\ i\ne j}}x_ix_j}$$

$$\frac{Var[X]}{\mathbb{E}[X]}\to 0 \iff \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2}\to 1\ ,\quad \mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}\Big[\big(\sum_t X_t\big)^2\Big]=$$

$$=\mathbb{E}\Big[\sum_t X_t^2+\sum_{t_1\ne t_2}X_{t_1}X_{t_2}\Big]\underset{\text{תוחלת הסכום = סכום התוחלות}}{=}\mathbb{E}\Big[\sum_t X_t^2\Big]+\sum_{t_1\ne t_2}\mathbb{E}[X_{t_1}\cdot X_{t_2}]=$$

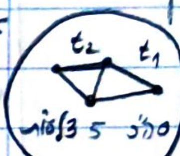
[**הערה**!: $X_t^2=X_t$ תמיד (מכיוון ש- X_t שווה ל-0 או ל-1).]

$$=\overbrace{\mathbb{E}[X]}^{\mu}+\sum_{t_1\ne t_2}\mathbb{E}[X_{t_1}\cdot X_{t_2}]$$

$$\mathbb{E}[X]^2=\Big(\sum_t\mathbb{E}[X_t]\Big)^2=\sum_t\mathbb{E}[X_t]^2+\sum_{t_1\ne t_2}\mathbb{E}[X_{t_1}]\cdot\mathbb{E}[X_{t_2}]$$

$$Var[X]=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=\mu+\sum_{t_1\ne t_2}\mathbb{E}[X_{t_1}\cdot X_{t_2}]-\Big(\sum_t\mathbb{E}[X_t]^2+\sum_{t_1\ne t_2}\mathbb{E}[X_{t_1}]\mathbb{E}[X_{t_2}]\Big)\le$$

$$\le\mu+\sum_{t_1\ne t_2}\Big(\mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2}]-\mathbb{E}[X_{t_1}]\cdot\mathbb{E}[X_{t_2}]\Big)\le\mu+\sum_{\substack{t_1\ne t_2\\ \text{עם צלע משותפת}}}\underbrace{\mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2}]}_{p^5}=$$



$$=\mu+\sum_{\substack{t_1\ne t_2\\ \text{עם צלע משותפת}}}p^5\le\mu+\frac{n^4}{2}p^5$$

$\binom{n}{3}\le\frac{n^3}{6}$ דרכים לבחור את t_1. יש 3 דרכים לבחור את הצלע המשותפת

ויש $n-3\le n$ דרכים לבחור את הקודקוד הנוסף.

ולכן:

$$\frac{Var[X]}{\mu^2}\le\frac{\mu+\frac{n^4}{2}p^5}{\mu^2}=\frac{1}{\mu}+\frac{\frac{n^4p^5}{2}}{\frac{n^6p^6}{36}}=\underbrace{\frac{1}{\mu}}_{\to 0}+\underbrace{18\cdot\frac{1}{n(\underbrace{np}_{\to\infty})}}_{\to 0}\longrightarrow 0$$

$$\mu\approx\frac{n^3p^3}{6}\Rightarrow\mu^2\approx\frac{n^6p^6}{36}$$

אובייקט מתמטי חדש - design:

$V=\{1,\dots,n\}$ קודקודים. היפרגרף q-אחיד $\iff$ בכל צלע יש q קודקודים.

? **שאלה**: מה זה היפרגרף ראוי?

– **design** - (n,q,r,λ): היפרגרף q-אחיד על n קודקודים כך שכל r-יה של קודקודים מוכלת בדיוק ב-λ צלעות. $(1\le r<q)$.

? **שאלה**: עבור אילו פרמטרים n,q,r,λ קיימים designs-(n,q,r,λ)?

– **Erdős**: נקבע λ,r,q וניקח $n\to\infty$. האם אפשר לבנות היפרגרף q-אחיד שבו <u>כמעט</u> כל r-יה מוכלת בדיוק ב-λ צלעות?

← **תרגום השאלה**: נבנה היפרגרף חדש. יש קודקוד עבור כל r-יה $\binom{n}{r}$ קודקודים. נחליף כל צלע אפשרית בכל ה-$\binom{q}{r}$ r-יות שהיא מכסה, תוך הנחה ש: $\lambda=1$.

Auxilier hypergraph

הבעיה המקורית מתרגמת לבעיית מציאת זיווג מושלם בהיפרגרף החדש.
הבעיה של Erdős מתרגמת לבעיית מציאת אוסף צלעות זרות מהיפרגרף החדש שמכסות במעט את כל הקודקודים.

11/05/2022

מפגש 19

Rödl Nibble:

יש n קודקודים בהיפרגרף r-אחיד. לכל קודקוד v, $deg(v)=(1\pm\delta)d$ (δ קבוע קטן).
לכל u,v, $deg(u,v)=o(d)$.

⇐ **צ"ל:** אפשר לבחור קבוצה של $(1+o(1))\cdot\frac{n}{r}$ צלעות שמכסות את כל הקודקודים.

קבוע קטן → ε, הדרגה → d

> **אלגוריתם:** מכיל מס' שלבים. בכל שלב נבחר כל צלע אפשרית בסיכוי $\approx\frac{\varepsilon}{d}$

- הסיכוי של קודקוד מסוים להיות מכוסה הוא $\sim\varepsilon$.
- רוב הצלעות יהיו זרות.

בסוף שלב מוציאים את הקודקודים שכיסינו ואת הצלעות שלהם מה"משחק".
יש לוודא שמה שנשאר הוא עדיין ~ רגולרי (כאן נכנסת "שיטת המומנט השני").

> **שיטת המומנט השני:** משתמשים בא"ש צ'בישב: $Pr(|X-\mu|\ge\lambda\cdot\sigma)\le\frac{1}{\lambda^2}\equiv Pr(|X-\mu|\ge\lambda)\le\frac{\sigma^2}{\lambda^2}$

$X=|E'|=$ מס' הצלעות שנבחרו

$$(1-\delta_1)\cdot\frac{\varepsilon n}{r}\le\mathbb{E}[X]\le(1+\delta_1)\cdot\frac{\varepsilon n}{r}$$

$$\sigma^2=Var[X]\le(1+\delta_1)\cdot\frac{\varepsilon n}{r}$$ ← צ"ל

$$Pr\left(\left|X-\frac{\varepsilon n}{r}\right|\ge\delta_2\cdot\frac{\varepsilon n}{r}\right)\le 0.99$$

הוכחה: נבחר $\delta_2=\delta_1+c$, ולכן:

$$Pr\Big(|X-\mu|\ge\underbrace{c\cdot\frac{\varepsilon n}{r}}_{\lambda}\Big)\le\frac{(1+\delta_1)\cdot\frac{\varepsilon n}{r}}{\left(c\cdot\frac{\varepsilon n}{r}\right)^2}=\frac{(1+\delta_1)}{c^2\cdot\frac{\varepsilon n}{r}}\xrightarrow{}0$$

$n\to\infty$ והשאר קבועים

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

- **קירוב נפוץ:** $\boxed{(1-\varepsilon)^n\approx e^{-\varepsilon n}}$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to e^{-1}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^m=\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha=e^{-\alpha}$$

$m=\alpha\cdot n$

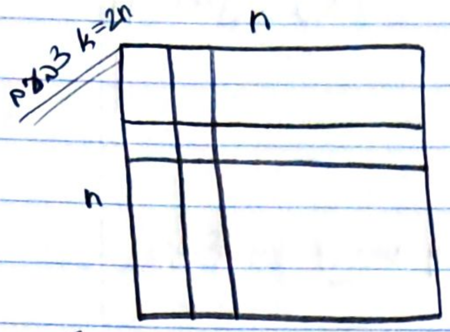
> **למה:** קיימת E' שמקיימת את התנאים 1,2,3.

הוכחה: נבחר את E' באקראי. 1 מתקיים בסיכוי 0.99, כך גם 2 ו-3.

$$Pr(\bar{1}\vee\bar{2}\vee\bar{3})\le Pr(\bar{1})+Pr(\bar{2})+Pr(\bar{3})\le 0.03\Leftarrow Pr(1\wedge2\wedge3)\ge0.97>0.$$

חסם האיחוד

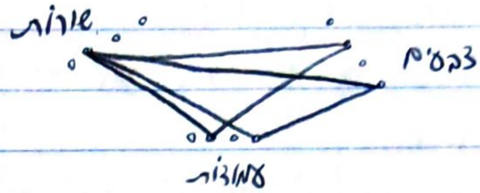
קיימת בחירה שמקיימת את 1, 2, 3.



(בכל צעד t נגריל באקראי
n תאים עם צבעים שונים)

הוכחת Rödl Nibble למקרה שלנו:

מספר זהה של שורות, עמודות וצבעים.



17/5/2022

מפגש 20

> האלג׳ למציאת "כמעט טרנסוורסל":

- עבור $i=1,2,\dots$ בוחרים איבר מקרי מהשורה ה-i שלא מתנגש עם צבעים/עמודות שכבר נבחרו.

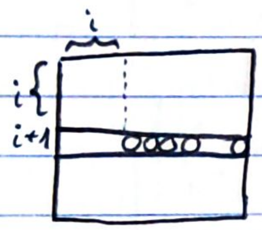
רעיונית: חושפים את המטריצה המקרית שורה אחר שורה. בשלב ה-i מגרילים צבעים עבור השורה ה-i, ואז בוחרים איבר חוקי מתוכה.

- האלגוריתם נתקע כאשר כל האיברים שהגרלנו מתנגשים עם צבעים/עמודות שכבר נבחרו.

נניח $n\cdot(1+\varepsilon)$ צבעים.

? **שאלה:** מה הסיכוי שהאלג׳ נתקע בשלב ה-$i+1$?

נסמן: המאורע שנתקענו בשלב ה-i $=A_i$



! **תשובה:** בחרנו i עמודות ו-i צבעים שונים. כל איבר שהוא בעמודה חוקית הוא לא חוקי בסיכוי $\frac{i}{(1+\varepsilon)n} < \frac{n}{(1+\varepsilon)n} = \frac{1}{1+\varepsilon}$

$$\Pr(A_i \mid \overline{A_1},\dots,\overline{A_{i-1}}) \le \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-i}$$

נקבע K. מה הסיכוי שהאלג׳ לא מצליח להגיע לשלב ה-$K+1$?

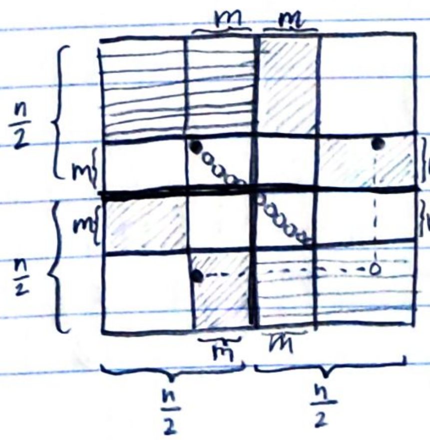
$$\Pr(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_K) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2\mid\overline{A_1}) + \dots + \Pr(A_K\mid\overline{A_1},\dots,\overline{A_{K-1}}) < \sum_{i=0}^{K}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-i}$$

$$\sum_{k=n-K}^{n}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{k} = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K}\cdot\sum_{k=0}^{K}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{k} \le \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{k} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right) =$$

עובדה: $0<x<1$, אז: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

$$= \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K}\cdot\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K} \Rightarrow \Pr\left(\begin{array}{c}\text{האלג׳ נתקע עד}\\ \text{השלב ה-}K\end{array}\right) = \frac{1}{\varepsilon\cdot n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$



≫ אלגוריתם למציאת טרנסוורסל:

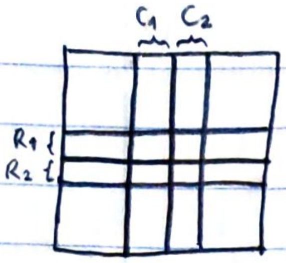
1. נחלק את המטריצה לרבעים: $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$
2. נריץ את האלגוריתם הקודם על $\boxed{1}$ ואז על $\boxed{4}$.

מאותו הניתוח:

$$\Pr\left(\begin{array}{c}\text{האלג׳ נתקע עד}\\ \text{השלב ה-}K\text{ ב-}\boxed{1}\end{array}\right) + \Pr\left(\begin{array}{c}\text{האלג׳ נתקע עד}\\ \text{השלב ה-}K\text{ ב-}\boxed{4}\end{array}\right) \le \frac{2}{\varepsilon n}$$

$(k=\frac{n}{2}-m)$

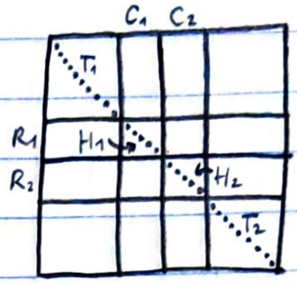
$\varepsilon<1$



עבור: $K=\frac{n}{2}-\log_{1+\varepsilon}(n)$ [כלומר $m=\log_{1+\varepsilon}(n)$]

נסמן ב-R_1,R_2 את השורות הלא-מכוסות, ו-C_1,C_2 את העמודות הלא מכוסות.

! **הערה:** מספר הצבעים שלא השתמשנו בהם $>\varepsilon n$.



$R_1=\{r_1,\dots,r_m\}$

$R_2=\{r_{m+1},\dots,r_{2m}\}$

$C_1=\{c_1,\dots,c_m\}$

$C_2=\{c_{m+1},\dots,c_{2m}\}$

$T_1=\{(x_1,y_1),\dots,(x_{\frac{n}{2}-m},y_{\frac{n}{2}-m})\}$ עבור הבחירות מ-$\boxed{1}$

$T_2=\{(\bar{x}_1,\bar{y}_1),\dots,(\bar{x}_{\frac{n}{2}-m},\bar{y}_{\frac{n}{2}-m})\}$ עבור הבחירות מ-$\boxed{4}$

נסתכל בקבוצה:

$H_1=\{(r_1,c_1),\dots,(r_m,c_m)\}$

$H_2=\{(r_{m+1},c_{m+1}),\dots,(r_{2m},c_{2m})\}$

---

③ נעבור אחד-אחד על איברי H_1. לכל $(r_i,c_i)\in H_1$, נחפש $(\bar{x}_j,\bar{y}_j)\in T_2$ כך שהצבעים של $(\bar{x}_j,c_i),(r_i,\bar{y}_j)$ <u>שונים</u> <u>ומותרים</u>.
נמחק את $(\bar{x}_j,\bar{y}_j)$ מהטרנסוורסל ונוסיף את $(\bar{x}_j,c_i),(r_i,\bar{y}_j)$

④ נחזור על סעיף ③ עבור H_2 ו-T_1.

? **שאלה:** בשלב ③ באלגוריתם - מה הסיכוי המקסימלי שקיים $(r_i,c_i)\in H_1$ שאי-אפשר למצוא לו $(\bar{x}_j,\bar{y}_j)\in T_2$ כך שהצבעים $(\bar{x}_j,c_i),(r_i,\bar{y}_j)$ שונים ומותרים?

! **תשובה:** יש $\frac{n}{2}-2m$ ($\frac{n}{2}-m$ בהתחלה, מתוכם נבחרו m לכל היותר) זוגות להיפוכים אפשריים. כל אחד הוא היפוך חוקי בסיכוי: $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2<\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2-\frac{1}{(1+\varepsilon)n}$

הסיכוי שהוא לא חוקי הוא לכל היותר: $1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$.

הסיכוי שאף זוג אינו חוקי הוא לכל היותר: $\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}-2m}$

$$\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}-2m}<\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{\frac{n}{3}}\le e^{-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\cdot\frac{n}{3}}=e^{-\left(\frac{\varepsilon^2}{12}\right)\cdot n}$$

$2m<\frac{n}{6}$

$\Leftarrow$ הסיכוי שקיים i עבורו השלב נכשל הוא: $\boxed{m\cdot e^{-\left(\frac{\varepsilon^2}{12}\right)\cdot n}}\xrightarrow{n\to\infty}0$

צ'רנוף: אם $X=\sum_{i=1}^{N} X_i$, $X_i=\begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$, בת"ל. $\mu=Np$.

$P_r(X \geq (1-\delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2\mu}{3}}$ $\left[e^{-\frac{\delta^2\mu}{3}} \approx \frac{1}{n^2}\right]$

$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$ סטירלינג לעניים

לפי צ'רנוף משתנים מקריים קרובים בערכם לתוחלת שלהם

25/5/2022

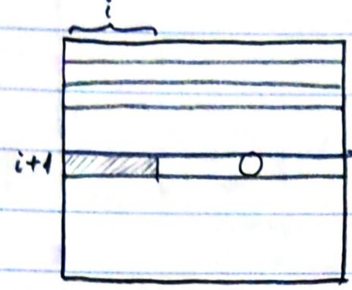
מפגש 21

≪ **החסם העליון שהוכחנו:** $\frac{1}{e^{2n}}\cdot\binom{k}{n}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n$.

נניח $k=2n$, ולכן:

$$\frac{1}{e^{2n}}\cdot\overbrace{\binom{2n}{n}}^{\sim 4^n}\cdot\left(\frac{n^2}{2n}\right)^n\approx\left(\frac{2n}{e^2}\right)^n \xleftarrow{} \text{חסם עליון עם } k=2n$$

≪ **חסם תחתון:**

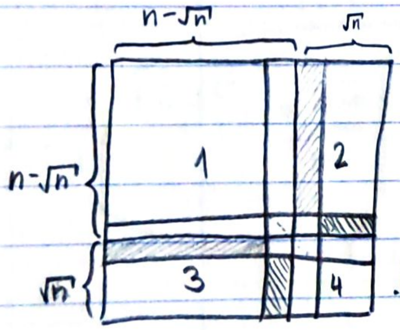


- i מספרים אסורים
- נסמן: X_i הוא מס' האפשרויות עבור השורה ה-$i+1$
- $\mathbb{E}[X_i]=(n-i)\cdot\frac{k-i}{k}$

יוריסטיקה: $X_i=\mathbb{E}[X_i]$ תמיד, לכן מס' האפשרויות הוא:

$$X_0\cdot X_1\cdot\ldots\cdot X_{n-1}=\underbrace{n\cdot\frac{k}{k}}_{\mathbb{E}[X_0]}\cdot\underbrace{(n-1)\cdot\frac{k-1}{k}}_{X_1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\left(2\cdot\frac{k-(n-2)}{k}\right)}_{X_{n-2}}\cdot\underbrace{\left(1\cdot\frac{k-(n-1)}{k}\right)}_{X_{n-1}}=$$

$$=\left(\frac{1}{k}\right)^n\cdot n!\cdot\left(\frac{k!}{(k-n)!}\right)=\binom{k}{n}\cdot(n!)^2\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^n\xRightarrow[\text{סטירלינג לעניים}]{}\binom{k}{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^n=\boxed{\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n}$$



- נסמן: $N=n-\sqrt{n}$.
- כמו קודם, X_i זהו מספר האפשרויות לשורה ה-$i+1$, וגם:
  $\mu_i=\mathbb{E}[X_i]=(N-i)\left(\frac{k-i}{k}\right)$.
- X_i הוא סכום של $N-i$ מ״מ ברנולי שווי התפלגות (שהם 1 בסיכוי $\frac{k-i}{k}$).
  צ'רנוף: (לכל $\delta>0$) $\Pr(X_i\le(1-\delta_i)\mu_i)\le e^{-\frac{\delta_i^2\mu_i}{3}}$
- נניח שנרצה: $e^{-\frac{\delta_i^2\cdot\mu_i}{3}}=\frac{1}{n^2}$, לאחר העברת אגפים: $\delta_i=\sqrt{\frac{6\cdot\ln(n)}{\mu_i}}\longrightarrow 0$ לכל $0\le i\le N-\sqrt{n}$
  למשל: $\delta_0=\sqrt{\frac{6\cdot\ln(n)}{n}}$,
- ולכן, מצ'רנוף: $\Pr(X_i\le(1-\delta_i)\mu_i)\le\frac{1}{n^2}$

הסיכוי שלכל i מתקיים $X_i\ge(1-\delta_i)\mu_i$ הוא לפחות (חסם האיחוד): $1-\frac{1}{n}$.

החסם התחתון:

$$\prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}}(1-\delta_i)\mu_i=\left(\prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}}(1-\delta_i)\right)\cdot\frac{1}{\prod_{i=N-\sqrt{n}+1}^{N}\mu_i}\cdot\left(\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\frac{N^2}{k}\right)^N\right)$$

למה 1:

$$\prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}}(1-\delta_i)=(1-o(1))^n$$

למה 2:

$$\frac{1}{\prod_{i=N-\sqrt{n}+1}^{N}\mu_i}=(1-o(1))^n$$

למה 3:

$$\prod_{i=0}^{N-1}\mu_i=(1-o(1))^n\cdot\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n$$

$\left(1+\frac{c}{n}\right)^n < e^c$

$$= \left(\prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}} (1-\delta_i)\right) \cdot \frac{1}{\prod_{i=N-\sqrt{n}+1}^{N} \mu_i} \cdot \prod_{i=0}^{N-1} \mu_i \overset{\text{למות } 1,2,3}{=} \Rightarrow$$

$$= \underbrace{(1-o(1))^n \cdot (1-o(1))^n \cdot (1-o(1))^n}_{(1-3\cdot o(1))^n = (1-o(1))^n} \cdot \binom{k}{n} \cdot \frac{1}{e^{2n}} \cdot \left(\frac{n^2}{k}\right)^n$$

וזהו גם החסם העליון שהוכחנו

≪ כעת נוכיח את שלוש הלמות:

מכפלה של איברים קטנים מ-1

< **הוכחת למה 1:** נניח: $k=(1+\varepsilon)n$, $0<\varepsilon<1$.

$$1 > \prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}} (1-\delta_i) \geq \left(1-\delta_{N-\sqrt{n}}\right)^n = (1-o(1))^n$$

$o(1)=\delta_{N-\sqrt{n}} \geq \delta_i$

< **הוכחת למה 2:**

$$1 > \frac{1}{\prod_{i=N-\sqrt{n}+1}^{N} \mu_i} > \frac{1}{N^{\sqrt{n}}} > \frac{1}{n^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \left(\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = \Bigg(\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{1-o(1)}\Bigg)^n$$

נרצה להוכיח:

נוכיח: $n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. ידוע כי: $n=e^{\ln(n)}$

$$n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{\ln(n)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}} \longrightarrow e^0 = 1$$

$$\Uparrow$$

$$\ln(n)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

לופיטל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left[\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right]}_{=\frac{2}{\sqrt{n}}} = 0$$

< **הוכחת למה 3:** כבר חישבנו: $\prod_{i=0}^{N-1}\mu_i = \binom{k}{N}\cdot\frac{1}{e^{2N}}\cdot\left(\frac{N^2}{k}\right)^N$. נותר להראות:

$$\frac{\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n}{\binom{k}{N}\cdot\frac{1}{e^{2N}}\cdot\left(\frac{N^2}{k}\right)^N} = (1+o(1))^n$$

נחלק את האגף השמאלי ל-3 ונפתור כל חלק בנפרד:

האיבר האמצעי

$$\frac{\frac{1}{e^{2n}}}{\frac{1}{e^{2N}}} = \frac{e^{2N}}{e^{2n}} = \frac{e^{2(n-\sqrt{n})}}{e^{2n}} = e^{-2\sqrt{n}} < 1$$

$$n^{\sqrt{n}} = \left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^n \overset{\text{הוכחת למה 2}}{=} (1-o(1))^n$$

$$\frac{\frac{(n^2)^n}{k^n}}{\frac{(N^2)^N}{k^N}} = \frac{k^N}{k^n}\cdot\frac{(n^2)^n}{(N^2)^N} < \left(\frac{n^n}{N^N}\right)^2 = \left(\frac{n^n}{(n-\sqrt{n})^{(n-\sqrt{n})}}\right)^2 = \Bigg(n^{\sqrt{n}}\cdot\underbrace{\left(\frac{n}{n-\sqrt{n}}\right)^{n-\sqrt{n}}}_{*}\Bigg)^2$$

$$* \quad \frac{n}{n-\sqrt{n}} = \frac{n-\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} = 1+\frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} \Rightarrow \left(1+\frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}\right)^{n-\sqrt{n}} < e^{\sqrt{n}} = \Big(\underbrace{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{\to 1}\Big)^n = (1+o(1))^n$$

$\left(1+\frac{c}{n}\right)^n < e^c$