$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$ סטירלינג לעניים

לפי צ'רנוף משתנים מקריים קרובים בערכם לתוחלת שלהם

25/5/2022

מפגש 21

» **החסם העליון שהוכחנו:**

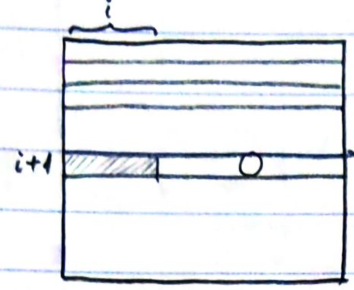
נניח $k=2n$, ולכן:

$$\frac{1}{e^{2n}}\cdot\binom{k}{n}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n.$$

חסם עליון עם $k=2n$

$$\frac{1}{e^{2n}}\cdot\overbrace{\binom{2n}{n}}^{\approx 4^n}\cdot\left(\frac{n^2}{2n}\right)^n \approx \left(\frac{2n}{e^2}\right)^n$$

» **חסם תחתון:**



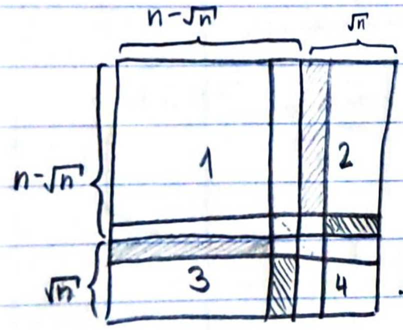
- i מספרים אסורים
- נסמן: X_i הוא מס׳ האפשרויות עבור השורה ה-$i+1$
- $\mathbb{E}[X_i]=(n-i)\cdot\frac{k-i}{k}$

יוריסטיקה: $X_i=\mathbb{E}[X_i]$ תמיד, לכן מס׳ האפשרויות הוא:

$$X_0\cdot X_1\cdot\ldots\cdot X_{n-1}=\underbrace{n\cdot\frac{k}{k}}_{\mathbb{E}[X_0]}\cdot\underbrace{(n-1)\cdot\frac{k-1}{k}}_{X_1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\left(2\cdot\frac{k-(n-2)}{k}\right)}_{X_{n-2}}\cdot\underbrace{\left(1\cdot\frac{k-(n-1)}{k}\right)}_{X_{n-1}}=$$

$$=\left(\frac{1}{k}\right)^n\cdot n!\cdot\left(\frac{k!}{(k-n)!}\right)=\binom{k}{n}\cdot(n!)^2\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^n\Longrightarrow\binom{k}{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^n=\boxed{\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n}$$

סטירלינג לעניים



- נסמן: $N=n-\sqrt{n}$.
- כמו קודם, X_i זהו מספר האפשרויות לשורה ה-$i+1$, וגם: $\mu_i=\mathbb{E}[X_i]=(N-i)\left(\frac{k-i}{k}\right)$.
- X_i הוא סכום של $N-i$ מ״מ ברנולי שווי התפלגות (שהם 1 בסיכוי $\frac{k-i}{k}$).
- צ'רנוף: (לכל $\delta>0$) $Pr(X_i\le(1-\delta)\mu_i)\le e^{-\frac{\delta^2\mu_i}{3}}$
- נניח שנרצה: $e^{-\frac{\delta_i^2\cdot\mu_i}{3}}=\frac{1}{n^2}$, לאחר העברת אגפים: $\delta_i=\sqrt{\frac{6\cdot\ln(n)}{\mu_i}}\longrightarrow 0$ לכל $0\le i\le N-\sqrt{n}$

למשל: $\delta_0=\sqrt{\frac{6\cdot\ln(n)}{n}}$,

- ולכן, מצ'רנוף: $Pr(X_i\le(1-\delta_i)\mu_i)\le\frac{1}{n^2}$

הסיכוי שלכל i מתקיים $X_i\ge(1-\delta_i)\mu_i$ הוא לפחות (חסם האיחוד): $1-\frac{1}{n}$.

החסם התחתון:

$$\prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}}(1-\delta_i)\mu_i=\left(\prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}}(1-\delta_i)\right)\cdot\frac{1}{\prod_{i=N-\sqrt{n}+1}^{N}\mu_i}\cdot\left(\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\frac{N^2}{k}\right)^N\right)$$

למה 1:

$$\prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}}(1-\delta_i)=(1-o(1))^n$$

למה 2:

$$\frac{1}{\prod_{i=N-\sqrt{n}+1}^{N}\mu_i}=(1-o(1))^n$$

למה 3:

$$\prod_{i=0}^{N-1}\mu_i=(1-o(1))^n\cdot\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n$$

$$(1+\tfrac{c}{n})^n<e^c$$

$$=\left(\prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}}(1-\delta_i)\right)\cdot\frac{1}{\prod_{i=N-\sqrt{n}+1}^{N}\mu_i}\cdot\prod_{i=0}^{N-1}\mu_i \overset{\text{למות } 1,2,3}{=} \Rightarrow$$

$$=\underbrace{(1-o(1))^n\cdot(1-o(1))^n\cdot(1-o(1))^n}_{(1-3\cdot o(1))^n=(1-o(1))^n}\cdot\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n$$

וזהו גם החסם העליון שהוכחנו

<< כעת נוכיח את שלוש הלמות:

< הוכחת למה 1: נניח: $k=(1+\varepsilon)n$, $0<\varepsilon<1$.

מכפלה של איברים קטנים מ-1

$$1>\prod_{i=0}^{N-\sqrt{n}}(1-\delta_i)\geq(1-\delta_{N-\sqrt{n}})^n=(1-o(1))^n$$

$$o(1)=\delta_{N-\sqrt{n}}\geq\delta_i$$

< הוכחת למה 2:

$$1>\frac{1}{\prod_{i=N-\sqrt{n}+1}^{N}\mu_i}>\frac{1}{N^{\sqrt{n}}}>\frac{1}{n^{\sqrt{n}}}=\left(\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}=\left(\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=\left(\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{1-o(1)}\right)^n$$

נרצה להוכיח:

נוכיח: $n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\xrightarrow{n\to\infty}1$. ידוע כי: $n=e^{\ln(n)}$

$$n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=e^{\ln(n)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}\longrightarrow e^0=1$$

$$\Uparrow$$

$$\ln(n)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$$

לופיטל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right]=0 \qquad \left[\ \right]=\frac{2}{\sqrt{n}}$$

< הוכחת למה 3: כבר חישבנו: $\prod_{i=0}^{N-1}\mu_i=\binom{k}{N}\cdot\frac{1}{e^{2N}}\cdot\left(\frac{N^2}{k}\right)^N$. נותר להראות:

$$\frac{\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\frac{n^2}{k}\right)^n}{\binom{k}{N}\cdot\frac{1}{e^{2N}}\cdot\left(\frac{N^2}{k}\right)^N}=(1+o(1))^n$$

נחלק את האיברים השמאליים ל-3 ונפתור כל חלק בנפרד:

האיבר האמצעי

$$\frac{\frac{1}{e^{2n}}}{\frac{1}{e^{2N}}}=\frac{e^{2N}}{e^{2n}}=\frac{e^{2(n-\sqrt{n})}}{e^{2n}}=e^{-2\sqrt{n}}<1$$

הוכחת למה 2

$$n^{\sqrt{n}}=\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^n\overset{\downarrow}{=}(1-o(1))^n$$

$$\frac{\frac{(n^2)^n}{k^n}}{\frac{(N^2)^N}{k^N}}=\frac{k^N}{k^n}\cdot\frac{(n^2)^n}{(N^2)^N}<\left(\frac{n^n}{N^N}\right)^2=\left(\frac{n^n}{(n-\sqrt{n})^{(n-\sqrt{n})}}\right)^2=\left(n^{\sqrt{n}}\cdot\underbrace{\left(\frac{n}{n-\sqrt{n}}\right)}_{*}^{n-\sqrt{n}}\right)^2$$

$$(*)\quad \frac{n}{n-\sqrt{n}}=\frac{n-\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}=1+\frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}\Rightarrow\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}\right)^{n-\sqrt{n}}<e^{\sqrt{n}}=\left(\underbrace{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{\to 1}\right)^n=(1+o(1))^n$$

$$(1+\tfrac{c}{n})^n<e^c$$