19/12/2021

מפגש 13

3 מקרים:

(I) $X_i = j$, אז: $Pr(\text{פני } j) = 1$

(II) $k \notin C'$, אז: $Pr(\text{פני } j) = 0$

(III) $k \in C'$, $X_i \neq j$ $\Leftarrow$ יש שורה i_1 כך ש: $X_{i_1} = j$ וגם שורה i_2 כך ש: $L(i_2, X_{i_2}) = k$.

אם $i_1 \prec i$ או $i_2 \prec i$, אז j לא פני עבור i.

זה לא קורה אם $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} < \alpha_i$, ולכן j פני עבור X_i בהסתברות α_i^2. $Pr(\text{פני } j) = \alpha_i^2$

$$\star = \sum_j Pr(X_i \text{ פני עבור } j) = \underbrace{1}_{(I)} + \left(\left(\begin{matrix}\text{מס' ה-}j\text{ כך ש: } k\in C'\\ \text{כלומר: } L(i,j)\in C'\end{matrix}\right) - 1\right) \cdot \underbrace{\alpha_i^2}_{(III)}$$

כאמור: מס' ה-j-ים כך ש: $r_i = L(i,j) \in C'$.

הוכחנו כי:
$$\mathbb{E}_{\alpha_{i'} : i' \neq i}[N_i] = 1 + (r_i - 1)\cdot\alpha_i^2 \approx \boxed{r_i \cdot \alpha_i^2}$$

לכן:
$$\log(|T_{C'}|) \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}_{\alpha_i}[\log(r_i \alpha_i^2)]}$$

נזכור ש-α_i נבחר מההתפלגות האחידה על $[0,1]$.

תזכורת: $(X : \Omega \to E \subseteq \mathbb{R})$

- מ"מ בדיד: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in E} Pr(X=x)\cdot x$
- מ"מ רציף: יש פונקציית צפיפות f_x שמקיימת: $Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\,dx$

ומגדירים: $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\cdot x\,dx$

$\longleftarrow$ **תוחלת של פונקציה של מ"מ:**

- אם X מ"מ בדיד, $Y = g(x)$ כך ש: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, אז:
$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(x)] = \sum_{x\in E} Pr(X=x)\cdot g(x)$$
- אם X מ"מ רציף, $Y = g(x)$ כך ש: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, כאשר ל-$X$ יש פונקציית צפיפות f_x, אז:
$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\cdot g(x)\,dx$$

כאמור, $\alpha_i \sim U(0,1]$, כך ש: $f_{\alpha_i}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

$$\mathbb{E}_{\alpha_i}[\log(r_i\alpha_i^2)] = \int_0^1 \log(r_i\alpha_i^2)\,d\alpha_i \overset{\text{שינוי של משתנה}}{=} \int_0^1 \log(r_i x^2)\,dx = \underbrace{\int_0^1 \log(r_i)\,dx}_{\log(r_i)} + 2\cdot\underbrace{\int_0^1 \log(x)\,dx}_{-1} = \log(r_i) - 2$$

פירוט בעמוד הבא

$$\left[(x\cdot\log(x)-x)' = \log(x)+1-1=\log(x) \Rightarrow \int_0^1 \log(x) = \Big|_0^1 (x\cdot\log(x)-x) = (1\cdot\log(1)-1-0\cdot\log(0)+0) = -1 \right]$$

ולכן:
$$\log(|T_{c'}|) \le \sum_i (\log(r_i)-2) = \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{r_i}{e^2}\right) = \log\left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{e^2}\right)\right)$$
$$\Downarrow$$
$$|T_{c'}| \le \prod_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{e^2}\right) = \frac{1}{e^{2n}}\cdot\left(\prod_{i=1}^n r_i\right) \le \frac{(\mu n)^n}{e^{2n}} = \left(\frac{\mu n}{e^2}\right)^n$$

ולכן:
$$\boxed{|T| \le \binom{\overbrace{\frac{1}{\mu}n}^{N}}{n}\cdot\left(\frac{\mu n}{e^2}\right)^n}$$

טענה: $\binom{N}{\alpha N} \approx e^{H(\alpha)\cdot N}$, כאשר: $0<\alpha<1$.

"אנטרופיה בינארית"

הגדרה: אנטרופיה בינארית היא אנטרופיה של מ"מ X:
$$X=\begin{cases} 0, & \alpha \text{ בסיכוי} \\ 1, & 1-\alpha \text{ בסיכוי} \end{cases}$$

סימון:
$$H(\alpha) = \alpha\cdot\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)+(1-\alpha)\cdot\log\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

הוכחה:

נשתמש בקירוב "סטירלינג לעניים": $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\binom{N}{\alpha N} = \frac{N!}{(\alpha N)!\cdot(N-\alpha N)!} = \frac{N!}{(\alpha\cdot N)!\cdot((1-\alpha)N)!} \approx \frac{\left(\frac{N}{e}\right)^N}{\left(\frac{\alpha N}{e}\right)^{\alpha N}\cdot\left(\frac{(1-\alpha)N}{e}\right)^{(1-\alpha)N}} =$$

קירוב סטירלינג לעניים

$$= \frac{1}{\alpha^{\alpha N}\cdot(1-\alpha)^{(1-\alpha)N}} = \left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{(1-\alpha)}\right)^N = e^{N\cdot\left(\alpha\cdot\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)+(1-\alpha)\cdot\log\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right)} =$$
$$= \boxed{e^{H(\alpha)\cdot N}}$$

מש"ל

לפי הטענה, אנו מקבלים:
$$|T| \le e^{H(\mu)\cdot\left(\frac{1}{\mu}\right)\cdot n}\cdot\left(\frac{\mu n}{e^2}\right)^n = \left(\mu\cdot e^{\frac{1}{\mu}\cdot H(\mu)}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{e^2}\right)^n =$$

$$= \underbrace{\left(\mu\cdot\left(e^{H(\mu)}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)^n}\cdot\left(\frac{n}{e^2}\right)^n$$

$$\left(\mu\cdot\left(e^{H(\mu)}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)^n = \left(\mu\cdot\left(\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{(1-\mu)}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)^n = \left(\mu\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}\right)^n = \left(\underbrace{\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}}\right)^n$$

☑ [צ'פ"ה: הביטוי $\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)}$ אמור להיות קרוב ל-e כש-μ קרוב ל-0, ואמור להיות קרוב ל-1 כש-μ מתקרב ל-1.]

נניח: יש k צבעים, $n<k$.

נניח שיש a_z איברים במטריצה L ששווים ל-z לכל צבע $z\in\{1,2,\dots,k\}$.

(עד עכשיו: $a_z=\mu n$ לכל z).

! **הערה:** $\sum_{z=1}^{k} a_z = n^2$

 # דוגמה: $k=6$

1	2	3	4
5	6	1	2
3	4	5	6
2	3	4	1

$a_1=a_2=a_3=a_4=3$

$a_5=a_6=2$

$$\sum_{z=1}^{6} a_z = 3+3+3+3+2+2=16$$

לכל $C\subseteq\{1,\dots,k\}$, $|C|=n$, נגדיר T_C כמקודם.

נסמן: $a_C=\frac{\sum_{z\in C} a_z}{n}$ (=הגודל הממוצע של מחלקת צבע ב-C)

מהוכחה שראינו: $|T_C|\le \frac{1}{e^{2n}}\cdot\prod_{i=1}^{n} r_i = \circledast$

! **הערה:** $\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{z\in C} a_z = n\cdot a_C$ = מס' האיברים במטריצה שצבועים בצבע $z\in C$

$$\circledast \le \left(\frac{a_C}{e^2}\right)^n$$

$$|T| = \sum_{C\in\binom{[k]}{n}} |T_C| \le \sum_{C\in\binom{[k]}{n}} \left(\frac{a_C}{e^2}\right)^n = \frac{1}{e^{2n}}\cdot\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{z\in C} a_z\right)^n =$$

תתי הקבוצות בגודל n של $\{1,\dots,k\}$

$$= \left(\frac{1}{n\cdot e^2}\right)^n\cdot\left(\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\left(\sum_{z\in C} a_z\right)^n\right)$$

$$\boxed{\sum_{z=1}^{k} a_z = n^2 \qquad \mu n=\frac{n^2}{k}\Rightarrow \mu=\frac{n}{k}}$$

נגדיר פונקציה: $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ ע"י: $f(x_1,\dots,x_k)=\sum_{C\in\binom{[k]}{n}}\left(\sum_{z\in C} x_z\right)^n$

ואילוצים: $x_1+x_2+\dots+x_k=n^2$, $x_i\le n$.

• **שאלה:** מהו המקסימום של f?

≪ **מטלות בית:**

חשבו בצמוד על הרחבות נוספות/הכללות לפרויקט.

עוד הכללות: ⓐ מה החסם שבסוף מקבלים? (עבור צביעה כללית/צביעה חצי-חסומה)

ⓑ גרף דיראק/ גרף כללי

ⓒ גרף לא 13-צביעי