

◀ פירוש אחר לזכרון: סדרה

← סדרה 1: אם P מציגת פרמוטציה, אז היא מייצגת פרמוטציה σ :

$P_{ij} = 1 \Leftrightarrow \sigma(i) = j$

$\sigma(1) = 1$
 $\sigma(2) = 2$
 $\sigma(3) = 4$
 $\sigma(4) = 3$

$\#$ זכרון: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

← סדרה 2: $\det(P) = \text{sign}(\sigma)$

$\#$ זכרון: $n=2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

◦ הצורה: הפרמוטציה של A תהא:

$$\text{Per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$$

◦ סדרה 2 וההצורה הנוספת לזכרון (מחצית קוקרן):

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\det(P) \cdot \prod_{(i,j): P_{ij}=1} a_{ij})$

$\#$ זכרון: $(P$ מציגת פרמוטציה $n \times n$)

יש אלוותם יעיל שמחשבים הפולחן אלו -
 מנה להפוך את המציגה/מציגה אלכסונית
 עיון (או באלו אחרות: זכרון)

◀ \Leftrightarrow

לא יזכר אלוותם יעיל
 מחשב פרמוטציה של
 מציגה

◦ הצורה: $\#P$ הוא אלוף המציג כמעט כמעט פרמוטציה $n \times n$ - $\#P$ - $\#P$ - $\#P$.

◀ אם $P \neq NP$, אין אלוותם יעיל למחשב פרמוטציה.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

\Leftrightarrow

$\#$ זכרון: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

◦ תוצאה: אם A מציגת שכיחות של $1, 0$ אז $\det(A) = \text{Per}(A)$

◀ מסקנה: למעשה כמעט כמעט פרמוטציה $n \times n$ היא חשיבות קשה.

◦ משפט ברטאן: תהי A מציגה $n \times n$ של $1, 0$ אז $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n (d_i!)$

$$\text{Per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$$

$$\text{Per}(A) = \prod_{i=1}^n d_i$$

(!) הערה 1: $(n!)^{1/n} \approx \left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \right)^{1/n} = \frac{n}{e}$ [לפי קרייב סטילס "א"ע"ס"]
 (!) הערה 2: קל להוכיח ש:

° הערה: מטריצה סטוכסטית - כל איבריה אי-שליליים וסכום כל שורה הוא 1.
 ° הערה: מטריצה גו-סטוכסטית - כל איבריה אי-שליליים וסכום כל שורה וסלעיה הוא 1.

# דוגמא / מטריצה גו-סטוכסטית:	# דוגמא מט' סטוכסטית:
$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

° משט אכרצ'ג - פא'קמן: תהי A מטריצה גו-סטוכסטית, אז: $\text{Per}(A) \geq \frac{n!}{n^n}$

$$J_n = \begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix} \rightarrow \text{Per}(J_n) = n! \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^n \approx \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{e} \right)^n$$