26/4/2022

מפגש 17

R - שורות שטרם נבחרו
C - עמודות שטרם נבחרו
S - סמלים שטרם נבחרו

מציאת טרנסוורסל במטריצה: מתח K_{mn} בצביעה מקרית

	1	2	3	4	5
1	1	9	4	1	3
2	2	5	7	7	1
3	6	5	10	3	2
4	3	1	1	7	6
5	9	4	3	1	1

האלגוריתם:
1. RG
2. היפוכים

R	C	S
1	5	2,4,5,6,8,10

משפט: בהסתברות גבוהה (כאשר $0<\mu<1$, $n\to\infty$) האלג' מוצא טרנסוורסל.

הוכחה:

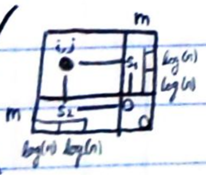
למה 2: בסיום השלב החמדן, בהסתברות גבוהה התנאים הבאים מתקיימים:
א) $m\le n^{1-\varepsilon}$ (בחרנו $n-m$ תאים), עבור $\varepsilon>0$ מסוים.
ב) לכל תא ב-$R\times C$ יש לפחות $10\cdot m\cdot\log n$ היפוכים אפשריים.

למה 1: כשמגרילים את המטריצה, מתקיימים התנאים הבאים:
א)
ב)
ג)
ד)
תנאים שנצטרך עבור ההוכחה של למה 2

ה) מספר מסוים מופיע בשורה/עמודה מסוימת לכל היותר $\log(n)$ פעמים.

למה 3: בשלב ההיפוכים, ביצוע היפוך לתא מסוים זה הורס לכל היותר $1+4\cdot\log(n)$ היפוכים עבור כל תא אחר (בהסתמך על סעיף ה) מלמה 1).

הוכחה:



כתוצאה מההיפוך, S_1, S_2-1 והאבר j,i כבר לא פנויים להיפוכים.
S_1, S_2 מופיעים לכל היותר $\log(n)$ פעמים בכל שורה/עמודה.

בשלב ההיפוכים, בכל צעד בוחרים תא ב-$R\times C$ ועושים לו היפוך.
מלמה 2 סעיף ב), בתחילת שלב ההיפוכים לכל תא שנבחר יש לפחות $10\cdot m\cdot\log(n)$ היפוכים.
מלמה 3, כל היפוך שנעשה הורס לכל היותר $4\cdot\log(n)+1$ היפוכים עבור התאים הבאים.
מספר התאים שנבחר הוא m, לכן במצטבר נהרסים $m\cdot(4\cdot\log(n)+1)$ היפוכים אופציונליים סה"כ.
שוב מלמה 2 ב), עדיין נותרו היפוכים אפילו בתא האחרון שנבחר.

הסבר על למה 2 א): מספר ההיפוכים הצפוי (לפי היוריסטיקה) הוא בערך $\frac{1}{4}\cdot n$

באופן כללי קבוע מסוים

נרצה שאסימפטוטית עבור $n\to\infty$ יתקיים: $5\cdot m\cdot\log(n)<\frac{1}{4}\cdot n$

א) $\Leftarrow$ $5\cdot n^{1-\varepsilon}\cdot\log(n)<\frac{1}{4}n$ $\Leftarrow$ $20\cdot\log(n)<n^{\varepsilon}$

$k = \frac{1}{\mu} \cdot n$

time

- <u>רעיון:</u> לעקוב אחרי המשתנים: $i \in \{1, \dots, k\}$, $t \in \{0, 1, \dots, n\}$
  $X_{i,t} =$ החמדן של השלב ה-t אחרי הצעד $R \times C$ מספר הפסמים שהצבע i מופיע בקבוצה
  נסמן ב- $X_{i,0} = d_i$ זה מספר הפסמים ש-i מופיע במטריצה.

< <u>למה:</u> בהסתברות גבוהה, לכל $1 \le i \le k$ מתקיים: $|d_i - \mu n| \le$ ____

[מכוון ש: $d_i \sim \frac{1}{k} \cdot n^2 = \frac{\mu}{n} \cdot n^2 = \mu \cdot n$]

<u>הוכחה:</u>

< <u>אי-שיוויון צ'רנוף:</u> יהיו $X_1, \dots, X_N$ מ"מ בת"ל ברנולי שווי-התפלגות, ונניח שלכל j: $Pr(X_j = 1) = p$.

נסמן: $X = \sum_{j=1}^{N} X_j$, $g = p \cdot N$. נקבל: $Pr(|X - g| \ge \delta \cdot g) \le 2 \cdot e^{-\frac{\delta^2 \cdot g}{3}}$

נקבע $1 \le i \le k$, ונגדיר מ"מ מציינים (=ברנולי) לכל תא במטריצה עבור המאורע שהצבע הוא i $\Leftarrow$ צ'רנוף: $Pr(|d_i - \mu \cdot n| \ge \delta \cdot \mu n) \le 2 \cdot e^{-\frac{\delta^2 \cdot \mu \cdot n}{3}}$

< <u>חסם האיחוד:</u> A, B מאורעות. $Pr(A) \le a$, $Pr(B) \le b$. $Pr(A \cup B) \le a + b$.

קיים i כך ש: $Pr(|d_i - \mu \cdot n| \ge \delta \cdot \mu \cdot n) \le k \cdot 2 \cdot e^{\frac{-\delta^2 \cdot \mu \cdot n}{3}} \approx \frac{n}{e^{\delta^2 n}} \xrightarrow[\text{(הנחה)}]{} 0$

נרצה שהמכנה יהיה קטן מהמונה:

$$e^{\delta^2 \cdot n} \gg n$$

$$\delta^2 \cdot n \gg \log(n)$$

$$\delta^2 \gg \frac{\log(n)}{n}$$

$$\delta \gg \sqrt{\frac{\log(n)}{n}} \xRightarrow{\text{Sens}} \delta = \frac{\log(n)}{\sqrt{n} \cdot \mu}$$

ולכן: $|d_i - \mu \cdot n| \le \sqrt{n} \cdot \log(n)$.