

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \approx \frac{n^k}{k!}$ הערה: k קטן מ n

3/5/2022

18 עמוד

① עקרון מרקוב: אם $X \geq 0$ ו- $\lambda > 0$ אז $Pr(X \geq \lambda \cdot \mu) \leq \frac{1}{\lambda}$

הוכחה: נניח $Pr(X \geq \lambda \cdot \mu) < \frac{1}{\lambda}$

$$E[X] = \sum_x x \cdot Pr(X=x) = \sum_{x < \lambda \cdot \mu} x \cdot Pr(X=x) + \sum_{x \geq \lambda \cdot \mu} x \cdot Pr(X=x) \geq 0 + \sum_{x \geq \lambda \cdot \mu} (\lambda \cdot \mu) \cdot Pr(X=x) = \lambda \cdot \mu \cdot \underbrace{\sum_{x \geq \lambda \cdot \mu} Pr(X=x)}_{Pr(X \geq \lambda \cdot \mu) > \frac{1}{\lambda}} > \lambda \cdot \mu \cdot \frac{1}{\lambda} = \mu$$

נגזר

② $Var(X) = \sigma^2, E[X] = \mu$

$E[(X-\mu)^2] \Rightarrow Y = (X-\mu)^2$

$Pr(Y \geq \lambda^2 \cdot \sigma^2) \leq \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow Pr((X-\mu)^2 \geq \lambda^2 \cdot \sigma^2) \leq \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow Pr(|X-\mu| \geq \lambda \sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$

עקרון צ'ב'ס

שאלה: G_{np} הוא גרף פשוט ובלתי מכווץ עם מספר קצוות p .
שאלה: עבור איזה p יש יבולת של G_{np} "עשיר"?
 (כלומר - 3 קצוות מחוברות ביניהם בלבד)

נניח $X = \{x, y, z\}$ קצוות של G_{np} ו- $t = \{x, y, z\}$ קצוות של G_{np} ו- $t = \{x, y, z\}$ קצוות של G_{np} ו- $t = \{x, y, z\}$ קצוות של G_{np} .

$X_t = \begin{cases} 1 & xy, yz, xz \in E \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

מספר הענפים $X = \sum_t X_t \Rightarrow E[X] = \sum_t E[X_t] = \binom{n}{3} p^3 \approx \frac{n^3}{6} p^3$

הערה: $p = \frac{1}{n \log n}$

הערה: $p = \frac{\log n}{n}$

הוכחה: אם $np \rightarrow 0$ אז $Pr(X > 0) = Pr(X \geq 1) = Pr(X \geq (\frac{1}{n}) \cdot \mu) \leq \frac{1}{\lambda} = \mu \approx \frac{(np)^3}{6} \rightarrow 0$

הוכחה: אם $np \rightarrow \infty$ אז $Pr(X=0) \rightarrow 0$

הוכחה: $Pr(X=0) \leq Pr(|X-\mu| \geq \mu) = Pr(|X-\mu| \geq \lambda \sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$

הוכחה: $\frac{Var(X)}{E[X]^2} \rightarrow 0$ כי $\mu \rightarrow \infty$

הוכחה: $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_N)(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = \sum_{i=1}^N X_i^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ i \neq j}} X_i X_j$$

$$\frac{\text{Var}[X]}{E[X]} \rightarrow 0 \iff \frac{E[X^2]}{E[X]^2} \rightarrow 1 \quad E[X^2] = E\left[\left(\sum_t X_t\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\sum_t X_t^2 + \sum_{t_1 \neq t_2} X_{t_1} X_{t_2}\right] = E\left[\sum_t X_t^2\right] + \sum_{t_1 \neq t_2} E[X_{t_1} X_{t_2}] =$$

(תחת הסכום = סכום תחת)

$$\left[(1-s) \text{ ו-} 0-s \text{ של } X_t = e \text{ (נכון) } 3 \text{ } X_t^2 = X_t : \text{הערך!} \right]$$

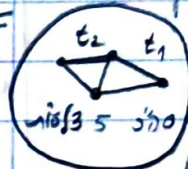
$$= \underbrace{E[X]}_{\mu} + \sum_{t_1 \neq t_2} E[X_{t_1} X_{t_2}]$$

$$E[X]^2 = \left(\sum_t E[X_t]\right)^2 = \sum_t E[X_t]^2 + \sum_{t_1 \neq t_2} E[X_{t_1}] \cdot E[X_{t_2}]$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \mu + \sum_{t_1 \neq t_2} E[X_{t_1} X_{t_2}] - \left(\sum_t E[X_t]^2 + \sum_{t_1 \neq t_2} E[X_{t_1}] E[X_{t_2}]\right) \leq$$

$$\leq \mu + \sum_{t_1 \neq t_2} (E[X_{t_1} X_{t_2}] - E[X_{t_1}] \cdot E[X_{t_2}]) \leq \mu + \sum_{\substack{t_1 \neq t_2 \\ \text{שם } p \\ \text{נענה}}} E[X_{t_1} X_{t_2}] =$$

$$= \mu + \sum_{\substack{t_1 \neq t_2 \\ \text{שם } p \\ \text{נענה}}} p^5 \leq \mu + \frac{n^4}{2} \cdot p^5$$



ע' $\binom{n}{3} \leq \frac{n^3}{6}$ זרזים למחור את t_1 ו-3 זרזים למחור את הבלם הנענה
 ו' $n-3 \leq \frac{n}{2}$ זרזים למחור את הקיזקזק הנענה.

$$\frac{\text{Var}[X]}{\mu^2} \leq \frac{\mu + \frac{n^4}{2} p^5}{\mu^2} = \frac{1}{\mu} + \frac{\frac{n^4 p^5}{2}}{\frac{n^6 p^6}{36}} = \left(\frac{1}{\mu}\right) + 18 \cdot \frac{1}{n(n p)} \rightarrow 0$$

וסק:

$$\mu \approx \frac{n^3 p^3}{6} \Rightarrow \mu^2 \approx \frac{n^6 p^6}{36}$$

אלגוריתם מנחם עזר design:

$V = \{1, \dots, n\}$ קיזקזים. הפסחל q -אח' \iff בל' של q קיזקזים.
 ? על: מה כח הפסחל האל?

— design (n, q, r, λ) : הפסחל q -אח' ל n קיזקזים כח בל' r -יה λ
 קיזקזים מכלל בזק λ בל' r . $(1 \leq r < q)$.

? על: עבור אל' פוטח' λ, q, r, n קי'מ (n, q, r, λ) -designs?

— Erdős: נקח λ, q, r ונניח $n \rightarrow \infty$. האם אפשר לבנות הפסחל q -אח' r -יה λ בל' r -יה מכלל בזק λ בל' r ?

← מאמ העל: נניח הפסחל חזש' r -יה קיזקזים עבור בל' r -יה $\binom{n}{r}$ קיזקזים. נאיל'
 בל' של r -יה בל' r -יה $\binom{n}{r}$ ו- r יה שיה מנסה, קי'מ תחיה $\lambda = 1$.

Auxiliary hypergraph

הבעיה המקורה מתבטאת לעיתים מצאנו שאלה קרובים. הבעיה של Erdős מתבטאת לעיתים מצאנו שאלה קרובים. הבעיה המקורה מתבטאת לעיתים מצאנו שאלה קרובים.