17/5/2022

מפגש 20

< האלג' למציאת "כמעט טרנסוורסל":

- עבור $i=1,2,\dots$ בוחרים איבר מקרי מהשורה ה-i שלא מתנגש עם צבעים/ עמודות שכבר נבחרו.

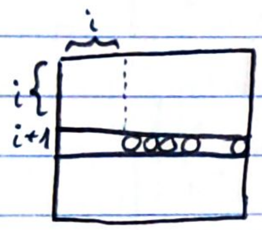
רעיונית: חושפים את המטריצה המקרית שורה אחר שורה. בשלב ה-i מגרילים צבעים עבור השורה ה-i, ואז בוחרים איבר חוקי מתוכה.

- האלגוריתם נתקע כאשר כל האיברים שהגרלנו מתנגשים עם צבעים/ עמודות שכבר נבחרו.

נניח $n\cdot(1+\varepsilon)$ צבעים.

? **שאלה:** מה הסיכוי שהאלג' נתקע בשלב ה-$i+1$?

נסמן: המאורע שנתקענו בשלב ה-i $= A_i$



! **תשובה:** בחרנו i עמודות ו- i צבעים שונים. כל איבר שהוא בעמודה חוקית הוא לא חוקי בסיכוי $\frac{i}{(1+\varepsilon)n} < \frac{n}{(1+\varepsilon)n} = \frac{1}{1+\varepsilon}$

$$Pr(A_i \mid \overline{A_1},\dots,\overline{A_{i-1}}) \le \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-i}$$

נקבע K. מה הסיכוי שהאלג' לא מצליח להגיע לשלב ה-$K+1$?

$$Pr(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K) = Pr(A_1) + Pr(A_2 \mid \overline{A_1}) + \dots + Pr(A_K \mid \overline{A_1},\dots,\overline{A_{K-1}}) < \sum_{i=0}^{K}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-i}$$

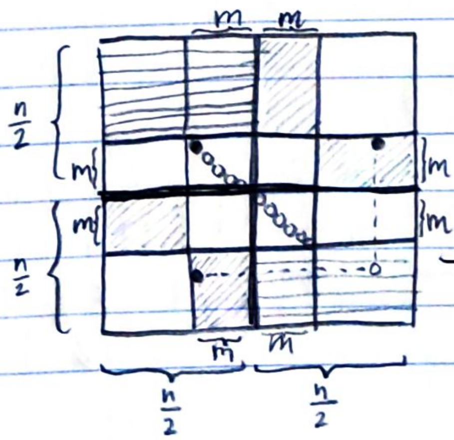
$$\sum_{k=n-K}^{n}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{k} = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K}\cdot\sum_{k=0}^{K}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{k} \le \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{k} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right) =$$

עובדה: $0<X<1$ אז: $\sum_{k=0}^{\infty} X^k = \frac{1}{1-X}$

$$= \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K}\cdot\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-K}$$

$\Rightarrow Pr($האלג' נתקע עד השלב ה-$K$$) = \frac{1}{\varepsilon\cdot n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



<< אלגוריתם למציאת טרנסוורסל:

1. נחלק את המטריצה לרבעים:

1	2
3	4

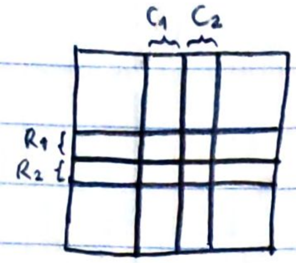
2. נריץ את האלגוריתם הקודם על $\boxed{1}$ ואז על $\boxed{4}$.

מאותו הניתוח:

$Pr($האלג' נתקע עד השלב ה-K ב-$\boxed{1}$$) + Pr($האלג' נתקע עד השלב ה-$K$ ב-$\boxed{4}$$) \le \frac{2}{\varepsilon n}$

$(K=\frac{n}{2}-m)$

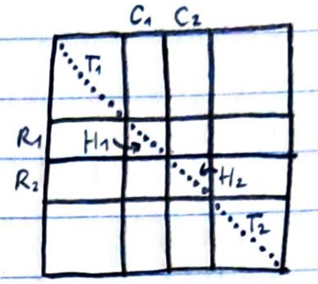
$\varepsilon<1$



עבור: $K=\frac{n}{2}-\log_{1+\varepsilon}(n)$ [כלומר $m=\log_{1+\varepsilon}(n)$]

נסמן ב-R_1,R_2 את השורות הלא-מכוסות, ו-C_1,C_2 את העמודות הלא מכוסות.

! הערה: מספר הצבעים שלא השתמשנו בהם $<\varepsilon n$.



$R_1=\{r_1,\dots,r_m\}$

$R_2=\{r_{m+1},\dots,r_{2m}\}$

$C_1=\{c_1,\dots,c_m\}$

$C_2=\{c_{m+1},\dots,c_{2m}\}$

$T_1=\{(x_1,y_1),\dots,(x_{\frac n2-m},y_{\frac n2-m})\}$ עבור הבחירות מ-$\boxed{1}$

$T_2=\{(\bar{x}_1,\bar{y}_1),\dots,(\bar{x}_{\frac n2-m},\bar{y}_{\frac n2-m})\}$ עבור הבחירות מ-$\boxed{4}$

נתחיל בקבוצה:

$H_1=\{(r_1,c_1),\dots,(r_m,c_m)\}$

$H_2=\{(r_{m+1},c_{m+1}),\dots,(r_{2m},c_{2m})\}$

---

③ נעבור אחד-אחד על איברי H_1. לכל $(r_i,c_i)\in H_1$, נחפש $(\bar{x}_j,\bar{y}_j)\in T_2$ כך שהצבעים של $(\bar{x}_j,c_i)$, $(r_i,\bar{y}_j)$ שונים ומותרים.
נמחק את $(\bar{x}_j,\bar{y}_j)$ מהטרנסוורסל ונוסיף את $(\bar{x}_j,c_i)$, $(r_i,\bar{y}_j)$

④ נחזור על סעיף ③ עבור H_2 ו-T_1.

? שאלה: בשלב ③ באלגוריתם - מה הסיכוי המקסימלי שקיים $(r_i,c_i)\in H_1$ שאי-אפשר למצוא לו $(\bar{x}_j,\bar{y}_j)\in T_2$ כך שהצבעים $(\bar{x}_j,c_i)$, $(r_i,\bar{y}_j)$ שונים ומותרים?

! תשובה: יש $\frac n2-2m$ ($\frac n2-m$ בהתחלה, מתוכם נבחרו m לכל היותר) זוגות להיפוכים אפשריים. כל אחד הוא היפוך חוקי בסיכוי: $(\frac{\varepsilon}{2})^2<(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon})^2-\frac{1}{(1+\varepsilon)n}$

הסיכוי שהוא לא חוקי הוא לכל היותר: $1-(\frac{\varepsilon}{2})^2$.

הסיכוי שאף זוג אינו חוקי הוא לכל היותר: $(1-(\frac{\varepsilon}{2})^2)^{\frac n2-2m}$

$$\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{\frac n2-2m}<\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{\frac n3}\le e^{-(\frac{\varepsilon}{2})^2\cdot\frac n3}=e^{-(\frac{\varepsilon^2}{12})\cdot n}$$ $2m<\frac n6$

$\Leftarrow$ הסיכוי שקיים i עבורו השלב נכשל הוא: $\boxed{m\cdot e^{-(\frac{\varepsilon^2}{12})\cdot n}}\xrightarrow{n\to\infty}0$

צ'רנוף: אם $X=\sum_{i=1}^{N} X_i$, $X_i=\begin{cases}1, & p\\ 0, & 1-p\end{cases}$, ב"ת. $\mu=Np$.

$$P_r(X \geq (1-\delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2\mu}{3}} \qquad \left[e^{-\frac{\delta^2\mu}{3}} \approx \frac{1}{n^2}\right]$$