

微分方程数值解作业 - 小船渡河

题目描述

2. 一只小船渡过宽为 d 的河流，目标是起点正对着的另一岸点。已知河水流速与船在静水中的速度之比为 k 。

(i) 建立小船航线的方程，求其解析解。

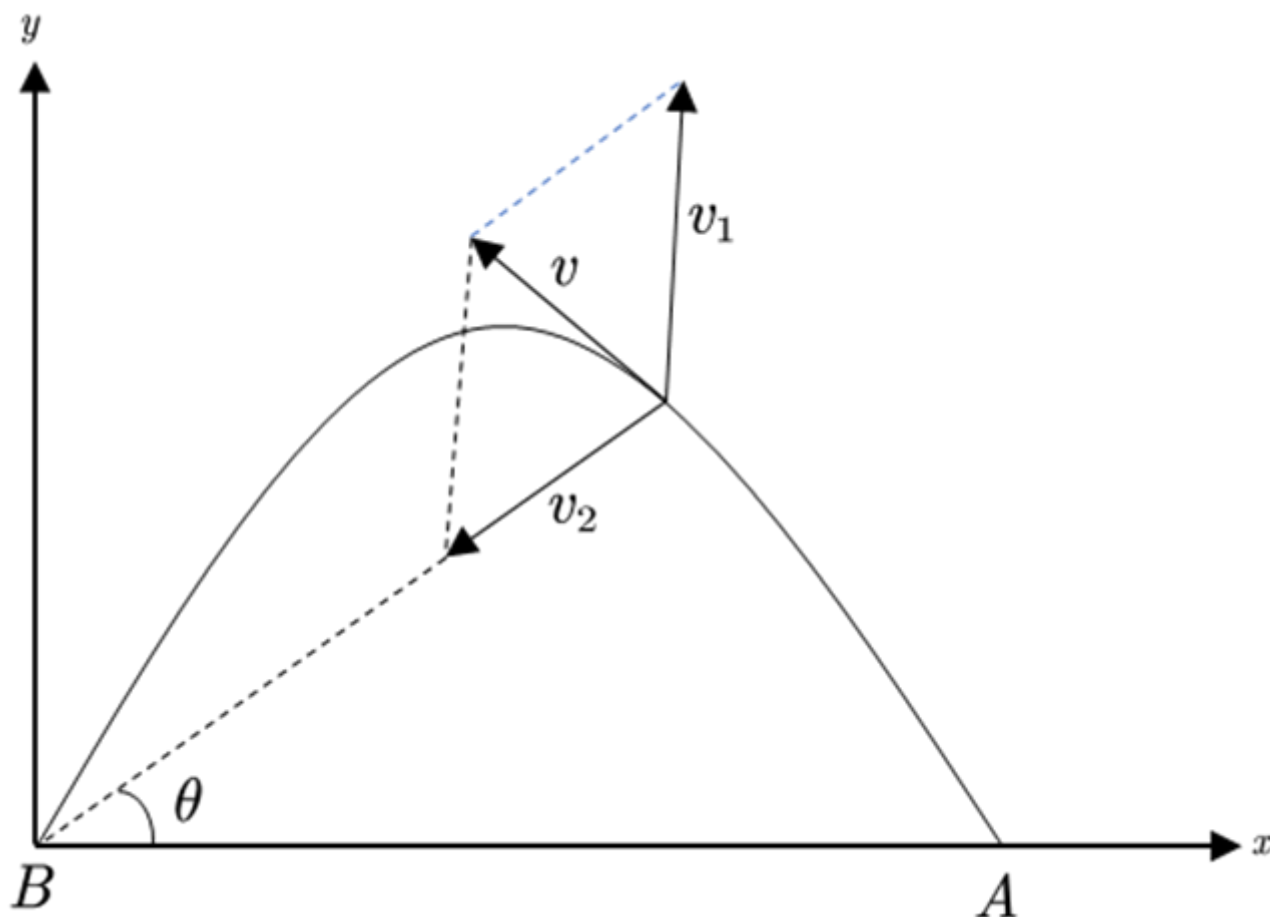
(ii) 设 d , v_1 , v_2 为已知量，用数值解法求渡河所需时间、任意时刻小船的位置及航行曲线，作图，并与解析解比较。

解答

假设

假设河流宽为 d ，起点为 A ，正对的岸点为 B ，河水流速为 v_1 ，船在静水中流速为 v_2 ， $\frac{v_1}{v_2} = k$

设 B 为原点， A 为 x 轴上一点，小船在 t 时刻的坐标为 $(x(t), y(t))$ ，设 $\arctan \frac{y}{x} = \theta$



模型建立及求解

(1) 建立航线方程并求解析解

将速度分解为平行于x轴方向和平行于y轴方向的速度 v_x, v_y

$$\begin{cases} v_y = v_1 - v_2 \sin \theta \\ v_x = -v_2 \cos \theta \end{cases}$$

又有

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dx}{dt} = v_x \end{cases}$$

将两式相除得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{v_1 - v_2 \sin \theta}{-v_2 \cos \theta} \\ &= -\frac{v_1}{v_2} \sec \theta + \tan \theta \end{aligned}$$

将 $\frac{v_1}{v_2} = k, \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \tan\theta = \frac{y}{x}$ 代入上式得

$$\frac{dy}{dx} = -k \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \frac{y}{x}$$

使用Matlab dsolve函数发现无法找到解析解

(2) 设d=100m,v1=1m/s,v2=2m/s，用数值解法求渡河所需时间、任意时刻小船的位置及航行曲线，作图，并与解析解比较

微分方程和初边值条件如下

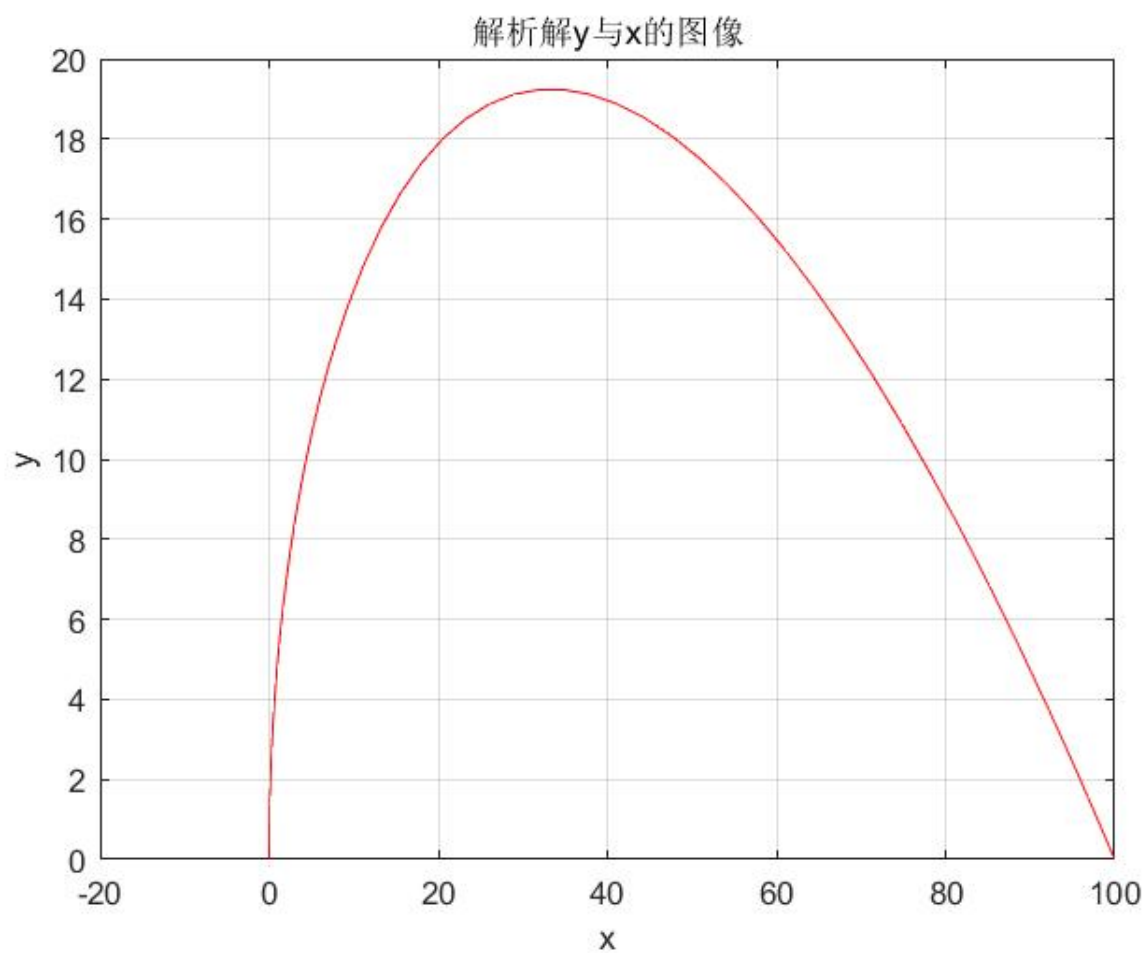
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 - 2\sin\theta \\ \frac{dx}{dt} = -2\cos\theta \\ y(0) = 0 \\ x(0) = 100 \\ 0 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

将 $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 代入得

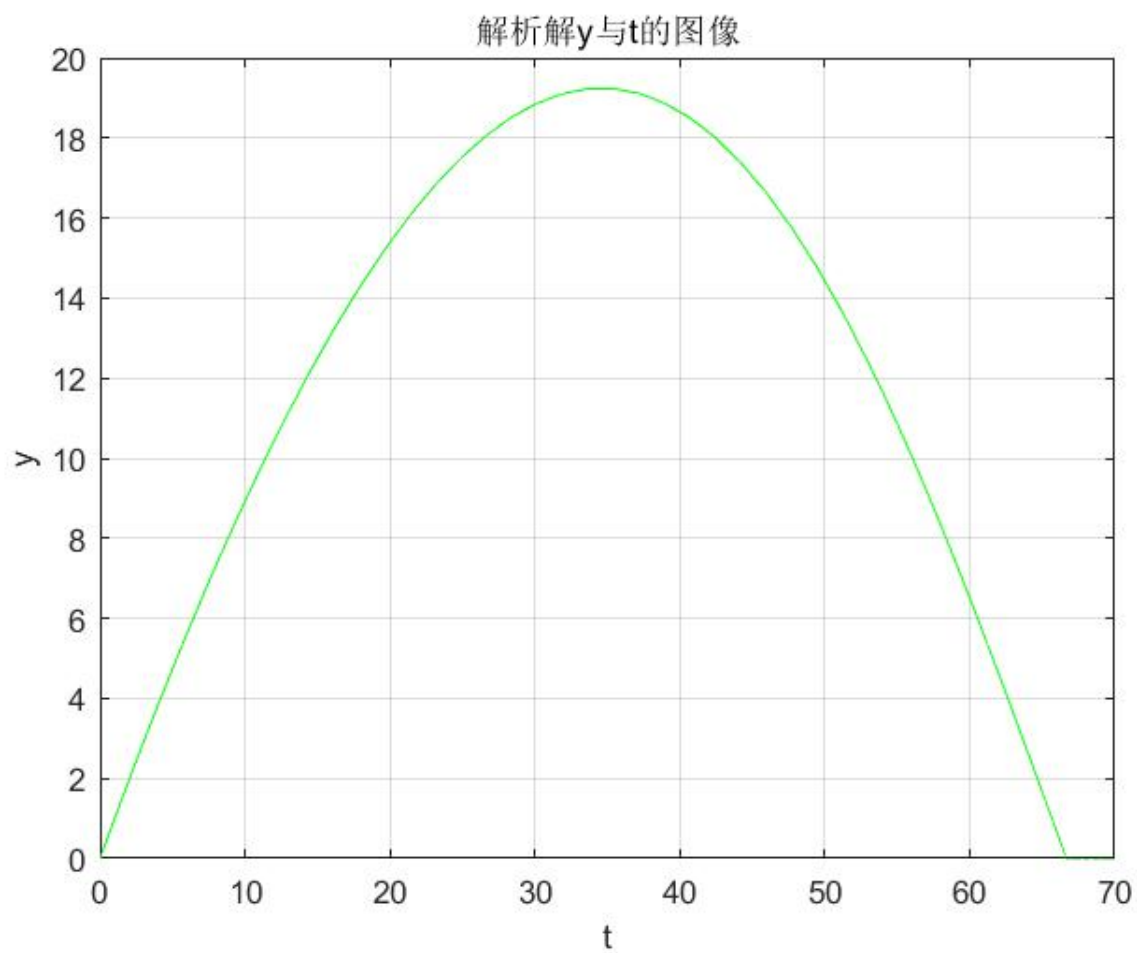
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 - 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{dx}{dt} = -2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y(0) = 0 \\ x(0) = 100 \end{cases}$$

使用Matlab ode45函数求得数值解如下

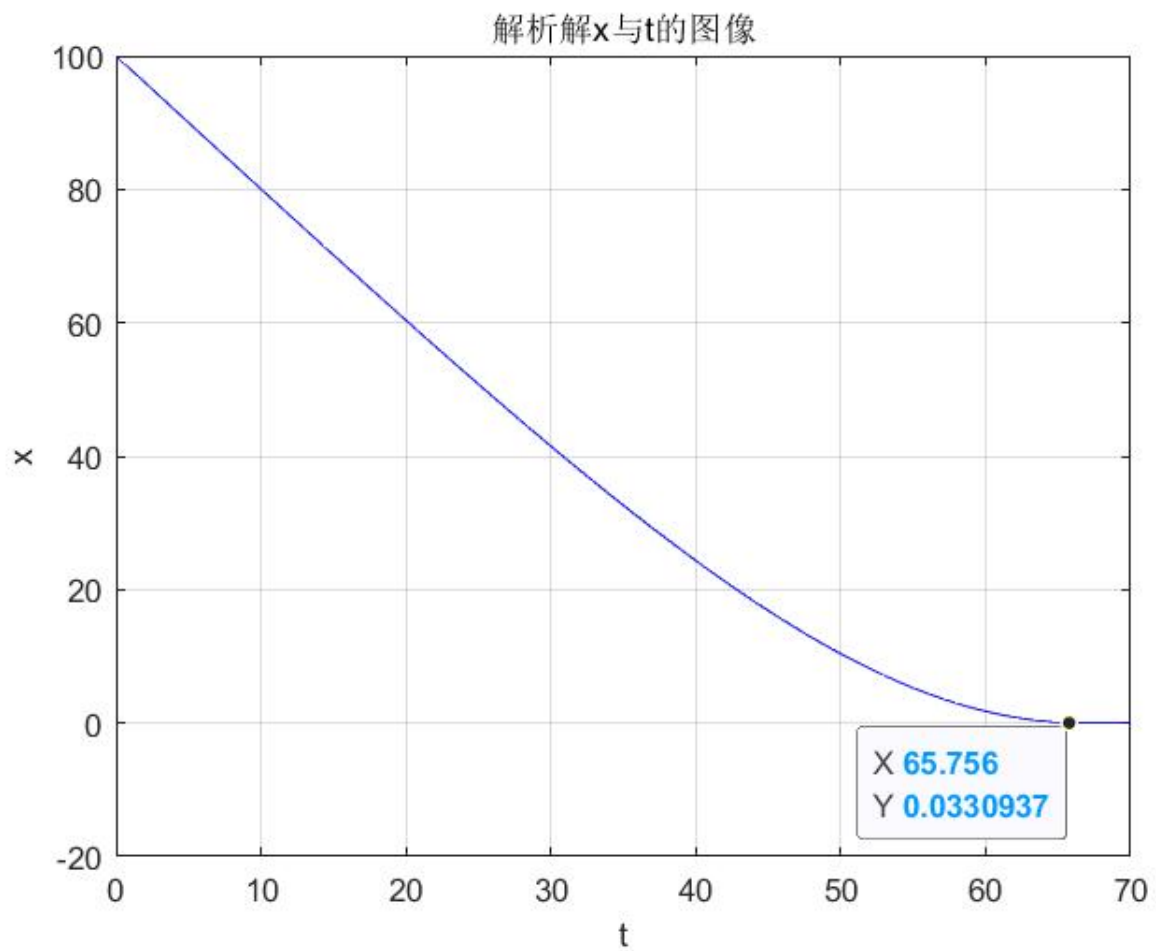
航行曲线（y与x的图像）为



河内移动距离 y 与时间 t 的图像为



离岸距离 x 与时间 t 的图像为



由离岸距离 x 与时间 t 的图像可见，在时间 $t=65.756\text{s}$ 时离岸边目的地只剩 3.3cm 远，可以认为该时刻小船到达了目的地。