Mathe 3 Übungsblatt 6

Pascal Diller, Timo Rieke

Aufgabe 1

(i)

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $D\backslash\{x_0\}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$.
Laut Vorraussetzung gilt fuer alle Folgeglieder: $g(x_k) \leq f(x_k) \leq h(x_k)$.
Da $\lim_{x\to x_0} g(x) = c$ und $\lim_{x\to x_0} h(x) = c$ folgt nach 11.2.1:

$$\lim_{k\to\infty} g(x_k) = c \text{ und } \lim_{k\to\infty} h(x_k) = c$$

Da die Folge $f(x_k)$ zwischen den beiden nach c konvergierenden Folgen f, h liegt, muss auch gelten:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = c$$

Da die Folge (x_k) beliebig gewaehlt war, gilt dies auch fuer alle solche Folgen, was nach 11.2.1 bedeuted:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

(ii)

(a)

Fuer den Nenner gilt: $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, da $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \geq x^2 + y^2$
Fuer $(x, y) \neq (0, 0)$ folgt:

$$0 \leq \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Grenzuebergang von $(x, y) \to (0, 0)$:
linke Seite konstant 0.
rechte Seite $\sqrt{x^2 + y^2}$ strebt gegen 0.
Dann gilt nach dem Sandwichkriterium:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0$$

(b)

Untersuchen von verschiedenen Pfaden um zu ueberpruefen, ob ein Grenzwert existiert:

1. Pfad: Entlang der Geraden $y = -x$ (fuer $x \neq 0$)

$$f(x,-x) = \frac{e^{x-x} - x - (-x) - 1}{x^2 + (-x)^2} = \frac{e^0 - 0 - 1}{2x^2} = 0$$

$\implies$ Grenzwert hier ist 0

2. Pfad: Entlang der Geraden $y = x$ (fuer $x > 0$)

$$f(x,x) = \frac{e^{2x} - 2x - 1}{2x^2}$$

Die Taylor-Entwicklung fuer e^t um $t = 0$ mit $t = 2x$.

$$e^{2x} \approx 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 = 1 + 2x + 2x^2$$

einsetzen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + 2x + 2x^2) - 2x - 1}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

$\implies$ Grenzwert hier ist 1.

Da die Grenzwerte auf den verschiedenen Pfaden unterschiedlich sind, existiert der Grenzwert nicht.

Aufgabe 2

(i)

Fuer $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f stetig, da es sich um Polynome handelt und der Nenner $\neq 0$ ist.

Fuer $(x, y) = (0, 0)$: Untersuchung mit Pfaden

1. Pfad: $y = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{0 - x^2}{x^2 + 0} = \lim_{x \to 0}(-1) = -1$$

2. Pfad: $x = 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{y^2 - 0}{0 + y^2} = \lim_{y \to 0}(1) = 1$$

Da $1! = -1$ existiert der Grenzwert nicht.

$\implies$ f ist in $(0, 0)$ nicht stetig.
$\implies$ f ist in $\mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ stetig.

(ii)

Fuer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$: g ist stetig, da der Sinus stetig ist und f dort ebenfalls stetig ist.

Fuer $(x, y) = (0,0)$: zu zeigen: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$
Untersuchen den Betrag von $g(x, y)$

$$|g(x, y)| = |\sin(x + y)| \cdot \left| \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right|$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt: $|y^2 - x^2| \leq x^2 + y^2$. Daraus folgt:

$$\left| \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

$\implies$ der Term aus $f(x, y)$ ist also beschraenkt.

Da der Sinus stetig ist, gilt:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(x + y) = \sin(0) = 0$$

Aus dem Produkt der Nullfolge (sin) und der beschraenkten Function (f) folgt:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$$

Da der Grenzwert $0 = g(0,0)$ ist, ist g im Ursprung stetig.

$\implies$ g ist in $\mathbb{R}^2$ stetig.