Mathe 3 Übungsblatt 3

Pascal Diller, Timo Rieke

Aufgabe 2

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 (5x^4+3x^2)dx + \int_1^2 (\frac{1}{x})dx + \int_2^3 (\frac{3}{2}\sqrt{x-2})dx + \int_3^4 (\frac{2x+1}{x^2+x-11})dx$$

$\int_0^1 (5x^4+3x^2)dx$:

$$\int_0^1 (5x^4+3x^2)dx = \left[x^5+x^3\right]_0^1 = (1^5+1^3)-(0^5+0^3) = 2$$

$\int_1^2 (\frac{1}{x})dx$:

$$\int_1^2 (\frac{1}{x})dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln(2)-\ln(1) = \ln(2)-0 = \ln(2)$$

$\int_2^3 (\frac{3}{2}\sqrt{x-2})dx$:

$u = x-2,\ du = dx$
Grenzen: $x = 2 \implies u = 0,\ x = 3 \implies u = 1$

$$\int_0^1 (\frac{3}{2}\sqrt{u})du = \int_0^1 \frac{3}{2}u^{1/2}du = [\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}]_0^1 = [u^{3/2}]_0^1 = 1^{3/2}-0^{3/2} = 1$$

$\int_3^4 (\frac{2x+1}{x^2+x-11})dx$:

$u = x^2+x-11,\ du = (2x+1)dx$
Grenzen:
$x = 3 \implies u = 3^2+3-11 = 1$
$x = 4 \implies u = 4^2+4-11 = 9$

$$\int_1^9 \frac{1}{9}du = [\ln|u|]_1^9 = \ln(9)-\ln(1) = \ln(9)$$

$$\int_0^4 f(x)dx = 2+\ln(2)+1\ln(9) = 3+\ln(2\cdot 9) = 3+\ln(18)$$

Aufgabe 3

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}(x-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^k$$

Das ist die Geometrische Reihe mit Quotienten $r = \frac{x-3}{2}$. Sie konvergiert genau dann, wenn der Betrag des Quotienten kleiner als 1 ist.

$$|r| < 1 \implies \left|\frac{x-3}{2}\right| < 1$$

$$|x-3| < 2$$

$$-2 < x-3 < 2$$

$$1 < x < 5$$

Also ist das groesst moegliche Intervall $(1, 5)$, in dem die Reihe konvergiert.

Berechnung des Reihenwertes:
Einsetzen von r in die Summenformel fuer eine konvergente geometrische Reihe:

$$S(x) = \frac{1}{1-(\frac{x-3}{2})} = \frac{1}{\frac{2}{2}-\frac{x-3}{2}} = \frac{1}{\frac{2-(x-3)}{2}} = \frac{1}{\frac{2-x+3}{2}} = \frac{1}{\frac{5-x}{2}} = \frac{2}{5-x}$$

Aufgabe 4

(i)

Zu zeigen: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
f ist ungerade, $\implies f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Substitution mit $t = -x,\ dt = -dx$ fuer $\int_{-a}^{0} f(x)dx$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)dt$$

$$=^{\text{ungerade Funktion}} \int_{0}^{a} -f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

(ii)

Zu zeigen: $\int_{-a}^{a} g(x)dx + 2\int_{0}^{a} g(x)dx$
g ist gerade $\implies g(-x) = g(x)$

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = \int_{-a}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx$$

Substitution im ersten Integral mit $t = -x$

$$\int_{-a}^{0} g(x)dx = \int_{a}^{0} g(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} g(-t)dt$$

$$=^{\text{gerade Funktion}} \int_{0}^{a} g(t)dt = \int_{0}^{a} g(x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx$$