Mathe Übung 4

Pascal Diller, Timo Rieke

11 November 2024

1 Aufgabe 1

(i)

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

"

Induktionsanfang: für n=1

$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1*2*3}{6} = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6}$

$\Longrightarrow$ Die Gleichung stimmt für n = 1

.

Induktionsvorraussetzung:

Angenommen, die Formel gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

.

Induktionsschritt: Formel für n+1

$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Es gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

Einsetzen: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{(n+1)(n(2n+1))+6(n+1))}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$\Longrightarrow$ Dies zeigt, dass die Induktionsannahme ebenfalls für n+1 gilt, somit ist die Formel bewiesen

.

(ii)

(a)

Berechne :$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

$= \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1)$

$= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

Berechnen der Teilsummen:

1. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\Longrightarrow 4 * \sum_{k=1}^{n} k^2 = 4 * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1}{3}$

2. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\implies -4 * \sum_{k=1}^{n} k = -4\frac{n(n+1)}{2} = -2n(n+1)$

3. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

Zusammensetzen der Teilsummen:

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1}{3} - 2n(n+1) + n$

.

(b)

Berechne :$\sum_{k=2}^{n+2} 2^{k-2}$

Setze $j = k-2$, dann wird die Summe: $\sum_{k=2}^{n+2} 2^{k-2} = \sum_{j=0}^{n} 2^j$

$\sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1} - 1$

Also ergibt sich:

$\sum_{k=2}^{n+2} 2^{k-2} = 2^{n+1} - 1$

.

(c)

Berechne :$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Zerlege den Bruch als Differenz:

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Einsetzen in die Summe:

$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

Somit erhalten wir:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

2 Aufgabe 2

3 Aufgabe 3