

# Lernzettel

Pascal Diller

October 31, 2024

# Contents

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Logik</b>                              | <b>4</b>  |
| <b>Mengen</b>                             | <b>4</b>  |
| <b>Boolische Algebra</b>                  | <b>6</b>  |
| Schaltalgebra . . . . .                   | 7         |
| Boolische Funktionen . . . . .            | 8         |
| Boolischer Ausdruck . . . . .             | 8         |
| Äquivalenz boolischer Ausdrücke . . . . . | 9         |
| Tautologie . . . . .                      | 9         |
| Vollständiges Operatorensystem . . . . .  | 9         |
| <b>Relationen</b>                         | <b>9</b>  |
| Äquivalenzrelationen . . . . .            | 10        |
| Ordnungsrelationen . . . . .              | 10        |
| Hüllen . . . . .                          | 11        |
| <b>Abbildungen</b>                        | <b>12</b> |
| <b>Zahlensysteme</b>                      | <b>13</b> |
| Binärsystem . . . . .                     | 13        |
| Carry-Flag . . . . .                      | 13        |
| Zweierkomplement . . . . .                | 13        |
| Hexadezimalsystem . . . . .               | 13        |
| Oktalsystem . . . . .                     | 14        |
| Festkommazahlen . . . . .                 | 14        |
| Gleitkommazahlen: IEEE 754 . . . . .      | 14        |
| Aufbau . . . . .                          | 14        |
| Dezimal zu IEEE 754 . . . . .             | 15        |
| IEEE 754 zu Dezimal . . . . .             | 15        |
| <b>Fehlererkennung</b>                    | <b>16</b> |
| Redundanzen . . . . .                     | 16        |
| Hamming-Distanz . . . . .                 | 16        |
| Parität . . . . .                         | 16        |
| Zweidimensionale Parität . . . . .        | 17        |
| Hamming-Code . . . . .                    | 17        |

|   |           |
|---|-----------|
| Berechnung der Prüfbits . . . . .       | 18        |
| <b>Summenzeichen und Produktzeichen</b> | <b>19</b> |
| Summenzeichen . . . . .                 | 19        |
| Produktzeichen . . . . .                | 19        |
| <b>Rechenregeln</b>                     | <b>20</b> |
| Bruchregeln . . . . .                   | 20        |
| Potenzgesetze . . . . .                 | 20        |
| Wurzelgesetze . . . . .                 | 20        |
| Logarithmengesetze . . . . .            | 20        |
| <b>Trigonometrie</b>                    | <b>21</b> |
| Bogenmaß . . . . .                      | 21        |

## Logik

- " $\wedge$ ": **Und**
- " $\vee$ ": **Oder**
- " $\neg$ ": **Nicht** (Verneinung)
- $A \implies B$ :  $A$  **impliziert**  $B$
- $A \impliedby B$ :  $A$  wird durch  $B$  **impliziert**
- $A \iff B$ :  $A$  ist äquivalent zu  $B$   
Es gilt:  $A \implies B$  und  $A \impliedby B$
- $\forall$ : **Für alle**
- $\exists$ : **Es existiert (mindestens) ein**

## Mengen

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von (mathematischen) Objekten.  
Die Objekte in einer Menge werden als **Elemente** bezeichnet.

- $x \in M$ :  $x$  in/Element  $M$
- $x \notin M$ :  $x$  nicht in/Element  $M$

Defintion einer Menge:

- Aufzählung:

$$M_1 = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, -1\}; \quad M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Es kommt **nicht** auf die **Reihenfolge** und **nicht** auf **Verdopplungen** an:  $\{1, 3, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$

- Beschreibung:

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \leq 1\} = [-1, 1]$$

Menge  $B$  ist eine **Teilmenge** von Menge  $A$ , wenn für jedes  $x \in A$  auch  $x \in B$  gilt.

- $A \subset B$  ("A ist eine Teilmenge von B")
- $A \supset B$  ("B ist eine Teilmenge von A")

Mengenoperationen:

- **Vereinigung** der Mengen  $A$  und  $B$   
 $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$  ("A vereinigt B")
- **Durchschnitt** der Mengen  $A$  und  $B$   
 $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$  ("A geschnitten B")
- **Differenzmenge** der Mengen  $A$  und  $B$   
 $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$  ("A ohne B")

**Kartesisches Produkt:**

sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $X_1, \dots, X_n$  Mengen, dann ist

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i, \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

die Menge der n-**Tupel** mit  $i$ -ter Koordinate  $x_i$  in  $X_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

**Potenzmenge:**

Die Menge aller Teilmengen einer Menge  $X$  heißt Potenzmenge von  $X$  und wird mit  $\mathcal{P}(X)$  bezeichnet:

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subset X\}$$

Es gilt immer:  $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$  und  $X \in \mathcal{P}(X)$ .

Beispiel: Sei  $X = \{1, 2, 3\}$ . Dann ist

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Sei  $P$  eine Menge bestehend aus Mengen. Dann steht

$$\bigcup_{Y \in P} Y = \{y : \text{es gibt } Y \in P \text{ so dass } y \in Y\}$$

für die (möglicherweise unendliche) Vereinigung aller Mengen in  $P$ .

Partitionen:

Sei  $X$  eine Menge. Eine Partition von  $X$  ist eine Teilmenge  $P \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$  sodass

- für alle  $Y, Z \in P$  mit  $Y \neq Z, Y \cap Z = \emptyset$  ( $Y$  und  $Z$  sind disjunkt).
- $\bigcup_{Y \in P} Y = X$ .

Definierte Mengen:

- Leere Menge:  $\emptyset = \{\}$
- Natürliche Zahlen:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$  ( $0 \notin \mathbb{N}$ )
- Ganze Zahlen:  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$
- Rationale Zahlen:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- Reelle Zahlen:  $\mathbb{R}$ , Menge aller **reellen Zahlen**, die man **nicht abzählen** kann

Es gilt:  $\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R}$

## Boolische Algebra

Als eine **Boolische Algebra** bezeichnet man eine Menge  $V = \{a, b, c, \dots\}$ , auf der zwei zweistellige Operationen  $\oplus$  und  $\otimes$  derart definiert sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus  $V$  wieder Elemente aus  $V$  entstehen (Abgeschlossenheit).

**Abgeschlossenheit:** für alle  $a, b \in V$  gilt:

$$a \otimes b \in V$$

$$a \oplus b \in V$$

Zudem müssen die vier **Huntingtonischen Axiome** gelten:

- H1: **Kommutativgesetz**

$$a \otimes b = b \otimes a$$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

- H2: **Distributivgesetz**

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

$$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$$

- H3: **Neutrale Elemente**

Es existieren zwei Elemente  $e, n \in V$ , so dass gilt:

$$a \otimes e = a \quad (e \text{ wird } \mathbf{Einselement} \text{ genannt})$$

$$a \oplus n = a \quad (n \text{ wird } \mathbf{Nullelement} \text{ genannt})$$

- H4: **Inverse Elemente**

Für jedes  $a \in V$  existiert ein Element  $a^{-1} \in V$ , so dass gilt:

$$a \otimes a^{-1} = n$$

$$a \oplus a^{-1} = e$$

## Schaltalgebra

Die Schaltalgebra  $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$  ist eine spezielle boolische Algebra. 0 und 1 können als die logischen Werte wahr und falsch interpretieren.

Es gelten die vier Huntingtonischen Axiome:

- (H1) Kommutativgesetz  $a \vee b = b \vee a$   
 $a \wedge b = b \wedge a$
- (H2) Distributivgesetz  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$   
 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- (H3) Neutrale Elemente  $a \wedge 1 = a$   
 $a \vee 0 = a$
- (H4) Invere Elemente  $a \wedge \neg a = 0$   
 $a \vee \neg a = 1$

Es lassen sich folgende Sätze ableiten:

- (R1) Assoziativgesetz  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$   
 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- (R2) Idempotenzgesetz  $a \wedge a = a$   
 $a \vee a = a$
- (R3) Absorptionsgesetz  $a \wedge (a \vee b) = a$   
 $a \vee (a \wedge b) = a$
- (R4) DeMorgan-Gesetz  $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$   
 $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

## Boolische Funktionen

Eine Funktion  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  wird als boolische Funktion bezeichnet.

## Boolischer Ausdruck

Sei  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  eine Menge boolischer Variablen. Dann ist die Menge der boolischen Ausdrücke wie folgt definiert:

- $0, 1, x_i$  sind boolische Ausdrücke.
- Ist  $\Phi$  ein boolischer Ausdruck, dann ist auch  $\neg\Phi$  ein boolischer Ausdruck.
- Wenn  $\Phi$  und  $\Psi$  boolische Ausdrücke sind, dann sind auch  $\Phi \wedge \Psi$  und  $\Phi \vee \Psi$  boolische Ausdrücke.
- Ist  $\Phi$  ein boolischer Ausdruck, dann ist auch  $(\Phi)$  ein boolischer Ausdruck.



## Äquivalenz boolischer Ausdrücke

Zwei boolische Ausdrücke  $\Phi$  und  $\Psi$  sind äquivalent, falls sie dieselbe Funktion repräsentieren.

Sie sind genau dann äquivalent, wenn für alle Variablenbelegungen  $x_1, \dots, x_n$  die folgende Beziehung gilt:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Psi(x_1, \dots, x_n)$$

## Tautologie

Ein boolischer Ausdruck, der immer wahr ist, wird als **Tautologie** bezeichnet.

Das heißt zwei boolische Ausdrücke  $A$  und  $B$  sind äquivalent, wenn  $A \leftrightarrow B$  eine Tautologie ist.

## Vollständiges Operatorensystem

$M$  sei eine beliebige Menge von Operatoren.  $M$  ist ein **vollständiges Operatorensystem**, wenn sich jede boolische Funktion auch durch einen Ausdruck beschreiben lässt, in dem neben den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ausschließlich Operatoren aus  $M$  vorkommen.

## Relationen

Eine (**binäre**) **Relation** zwischen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  ist eine Teilmenge

$$R \subset X \times Y$$

Im Falle  $X = Y$  sprechen wir von einer Relation auf  $X$ .

$x \in X$  steht in Relation zu  $y \in Y$  genau dann wenn  $(x, y) \in R$ .

Auch geschrieben:  $x R y$  oder  $x \sim_R y$  für  $(x, y) \in R$  und  $x \not R y$  oder  $x \not\sim_R y$  für  $(x, y) \notin R$ .

Seien  $X, Y$  und  $Z$  Mengen und  $R \subset X \times Y, S \subset Y \times X$  Relationen.

- Die zu  $R$  **inverse Relation** ist

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$$

- Die Verkettung von  $R$  und  $S$  ist

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z : \text{es gibt } y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

Eine binäre Relation  $R$  auf der Menge  $X$  heißt:

- **reflexiv**, wenn  $x R x$  für alle  $x \in X$ .
- **symmetrisch**, wenn für alle  $x, y \in X$  aus  $x R y$  stets  $y R x$  folgt.
- **antisymmetrisch**, wenn für alle  $x, y \in X$  aus  $x R y$  und  $y R x$  stets  $x = y$  folgt.
- **asymmetrisch**, wenn für alle  $x, y \in X$  aus  $x R y$  stets  $y \not R x$  folgt.
- **transitiv**, wenn für alle  $x, y, z \in X$  aus  $x R y$  und  $y R z$  stets  $x R z$  folgt.

## Äquivalenzrelationen

Sei  $X$  eine nicht leere Menge. Eine Relation  $R$  auf  $X$  die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt **Äquivalenzrelationen**. Für  $x \in X$  nennt man die Menge

$$[x] \sim_R = \{y \in X : x R y\}$$

die **Äquivalenzklasse** von  $x$ . Man nennt  $x$  und jedes andere Element aus  $[x] \sim_R$  einen **Vertreter** oder **Repräsentanten** dieser Äquivalenzklasse.

Sei  $X$  eine Menge und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Ein **Vertreter-system** ist eine Teilmenge von  $X$ , die für jede Äquivalenzklasse genau ein Element enthält.

## Ordnungsrelationen

Sei  $X$  eine Menge. Eine **Ordnung** auf  $X$  ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation. Eine **strikte Ordnung** auf  $X$  ist eine asymmetrisch und transitive Relation. Wir nennen eine (strikte) Ordnung  $\preceq$  **total**, wenn je zwei Elemente vergleichbar sind:

$$\text{für alle } x, y \in X \text{ gilt } x \preceq y \text{ oder } y \preceq x$$

Ansonsten nennen wir sie **partiell**.

## Hüllen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $X$ . Wir definieren:

- Für  $n \in \mathbb{N}_0$

$$R^n = \begin{cases} I_X & n = 0 \\ R \circ R^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

Es gilt, dass  $R^1 = R$

- Die **transitive Hülle** von  $R$  ist

$$R_{\text{trans}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$$

- Die **reflexive Hülle** von  $R$  ist

$$R_{\text{refl}} = R \cup I_X$$

- Die **symmetrische Hülle** von  $R$  ist

$$R_{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$$

# Abbildungen

Eine **Abbildung**  $f : X \rightarrow Y$  besteht aus:

- einer Menge  $X$ , der **Definitionsbereich** von  $f$ ;
- einer Menge  $Y$ , der **Wertebereich** von  $f$ ;
- einer **Vorschrift**, die jedem  $x \in X$  eindeutig ein  $y \in Y$  zuordnet.

Notation:  $f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$

Seien  $X, Y$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $x \in X, y \in Y$  sodass  $f(x) = y$ .  
Dann ist  $y$  das **Bild** von  $x$  und  $x$  ein **Urbild** von  $y$ .

Für eine Teilmenge  $X_0 \subset X$  ist

$$f(X_0) := \{y \in Y : \text{es gibt } x \in X_0, \text{ sodass } f(x) = y\} \subset Y$$

das **Bild** von  $X_0$  und für eine Teilmenge  $Y_0 \subset Y$  ist

$$f^{-1}(Y_0) := \{x \in X : f(x) \in Y_0\} \subset X$$

das **Urbild** von  $Y_0$ .

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

$f$  ist **injektiv** falls aus  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$  stets  $x_1 = x_2$  folgt.

”zu jedem  $y$  höchstens 1  $x$ -Wert”

$f$  ist **surjektiv** falls es für jedes  $y \in Y$ , ein  $x \in X$  existiert so dass  $f(x) = y$ .

”zu jedem  $y$  mindestens 1  $x$ -Wert”

$f$  ist **bijektiv** falls  $f$  injektiv und surjektiv ist.

Seien  $X, Y, Z$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen.

Die **Komposition** oder **Verknüpfung** von  $f$  und  $g$  ist die

Abbildung  $g \circ f : X \rightarrow Z$ , definiert durch  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

# Zahlensysteme

## Binärsystem

Eine Binärzahl  $b$  mit  $n + 1$  Stellen hat die Form  $b_n \dots b_1 b_0$  mit  $b_i \in \{0, 1\}$ .

Sie entspricht der Dezimalzahl  $d$  mit  $d = b_n \cdot 2^n + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$

Beispiel:  $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$

## Carry-Flag

Wenn bei einer Addition oder Subtraktion ein **Übertrag in der höchsten Stelle** auftritt, wird die Carry-Flag gesetzt. Dieser kann von nachfolgenden Befehlen aufgerufen werden.

## Zweierkomplement

Um **negative Zahlen** darzustellen wird der entsprechende Wert des **höchsten Bits negiert**.

Beispiel bei 4 Bit:  $1011_{2c} = 1 \cdot (-2^3) + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = -5$

Um von einer positiven ganzen Zahl zur negativen Zahl (oder umgekehrt) gleichen Betrags zu gelangen werden **alle Bits invertiert** und **1 zum Ergebnis addiert**.

## Hexadezimalsystem

Eine Hexadezimalzahl  $h$  mit  $n + 1$  Stellen hat die Form  $h_n \dots h_1 h_0$  mit  $h_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A(\hat{=10}), B(\hat{=11}), C(\hat{=12}), D(\hat{=13}), E(\hat{=14}), F(\hat{=15})\}$ .

Sie entspricht der Dezimalzahl  $d$  mit  $d = h_n \cdot 16^n + h_1 \cdot 16^1 + h_0 \cdot 16^0$ .

Beispiel:  $5F_{16} = 5 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 95_{10}$

4 Binärziffern lassen sich zu einer Hexadezimalzahl zusammenfassen:

$$\underbrace{1101}_{13_{10}=D_{16}} \underbrace{0011_2}_{3_{16}} = D3_{16}$$

## Oktalsystem

Eine Oktalzahl  $o$  mit  $n + 1$  Stellen hat die Form  $o_n \dots o_1 o_0$  mit  $o_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Sie entspricht der Dezimalzahl  $d$  mit  $d = o_n \cdot 8^n + \dots + o_1 \cdot 8^1 + o_0 \cdot 8^0$ .

Beispiel:  $36_8 = 3 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 30_{10}$

3 Binärziffern lassen sich zu einer Oktalzahl zusammenfassen:

$$\underbrace{11}_{3_8} \underbrace{010}_{2_8} \underbrace{011}_{{}_2}_{3_8} = 323_8$$

## Festkommazahlen

Eine Festkommazahl besteht aus einer **festen Anzahl von Ziffern vor und nach dem Komma**.

|       |       |       |       |   |          |          |          |          |
|-------|-------|-------|-------|---|----------|----------|----------|----------|
| $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |   | $2^{-1}$ | $2^{-2}$ | $2^{-3}$ | $2^{-4}$ |
| 1     | 1     | 0     | 1     | . | 0        | 1        | 0        | 1        |

## Gleitkommazahlen: IEEE 754

3 Formate:

- Single Precision: 32 Bit
- Double Precision: 64 Bit
- Extended Precision: 80 Bit

Basiert auf der wissenschaftlichen Notation.

### Aufbau

|                   |                  |                 |                               |
|-------------------|------------------|-----------------|-------------------------------|
| Single Precision: | 1 Bit Vorzeichen | 8 Bit Exponent  | 23 Bit normalisierte Mantisse |
| Double Precision: | 1 Bit Vorzeichen | 11 Bit Exponent | 52 Bit normalisierte Mantisse |

Vorzeichen: 0 = +; 1 = −

Exponent: wird gespeichert, indem man den festen Biaswert (127:SP, 1023:DP) addiert.

Die Mantisse beginnt mit einem "Hidden Bit" (immer 1).

## Dezimal zu IEEE 754

Beispiel: -62.058

1. Vorzeichen Bit bestimmen

Vorzeichen Bit = 1

2. Zu pur Binär umwandeln

$$62.058_{10} = 111110.10010100_2$$

3. Normalisieren für Mantisse und Exponent (ohne Bias)

$$111110.10010100_2 = 1.1111010010100_2 \cdot 2^5$$

4. Exponent mit Bias bestimmen

$$5 + 127 = 132_{10} = 10000100_2$$

5. Führende 1 der Mantisse abschneiden

$$1.1111010010100_2 \rightarrow 1111010010100_2$$

6. Zusammenfügen

$$-62.058_{10} = \underbrace{1}_{\substack{\text{Vorzeichen} \\ \text{Bit}}} \underbrace{10000100}_{\text{Exponent}} \underbrace{1111010010100}_{\text{Mantisse}}$$

## IEEE 754 zu Dezimal

Beispiel: 01000010011010100000000000000000

1. Vorzeichen bestimmen

Vorzeichen: +

2. Exponent bestimmen (Bias muss abgezogen werden)

$$10000100_2 - 127_{10} = 132_{10} - 127_{10} = 5_{10}$$

3. Mantisse bestimmen

|               |               |               |                |                |                |
|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{64}$ |
| 1             | 1             | 0             | 1              | 0              | 1              |

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{53}{64} = 0.828125$$

4. 1 zur Mantisse addieren (Hidden Bit) und Vorzeichen einrechnen

$$1.828125$$

5. Ergebnis berechnen

$$1.828125 \cdot 2^5 = 58.5_{10}$$

## Fehlererkennung

### Redundanzen

Eine Einheit von  $n$  Datenbits und  $k$  Redundanzbits nennt man **Codewort**.

Die **Länge** eines Codeworts ist insgesamt  $n + k$ .

Die Menge aller gültigen Codewörter nennt man **Code**.

### Hamming-Distanz

Die Hamming Distanz zweier Codewörter ist gegeben als die Anzahl der Bitpositionen, in denen sie sich unterscheiden.

Beispiel: 11110000 und 11001100  $\Rightarrow$  Hamming-Distanz beträgt 4

Die Hamming Distanz eines Codes ist die kleinste Hamming-Distanz zweier Codewörter

Beispiel:  $\{1100, 0011, 1111\} \Rightarrow$  Hamming-Distanz beträgt 2

$c$ -Bit Fehler können erkannt werden, wenn die Hamming-Distanz  $c+1$  beträgt.  
 $c$ -Bit Fehler können korrigiert werden, wenn die Hamming-Distanz  $2c + 1$  beträgt.

### Parität

Durch Hinzufügen eines **Paritätsbits** wird ein Code mit Hamming-Distanz 2 erzeugt.

Das Paritätsbit wird gesetzt sodass die Gesamtzahl der 1en...

... gerade ist

$$\underbrace{00100101}_{\text{Datenbits}} \underbrace{1}_{\text{Paritätsbit}}$$



... ungerade ist

$\underbrace{00100101}_{\text{Datenbits}} \underbrace{0}_{\text{Paritätsbit}}$

## Zweidimensionale Parität

Die zweidimensionale Parität konstruiert einen Code mit Hamming-Distanz 4.

Dabei werden  $n$  Wörter zu je  $n$  Bits in einer  $n \times n$ -Matrix untereinander geschrieben und über jede Zeile und jede Spalte je ein Paritätsbit berechnet.

Bei einem 1-Bit-Fehler stimmen die Paritätsbits genau einer Zeile und Spalte nicht.

Dann ist die Position des Fehlers klar und er kann korrigiert werden.

|             |   |   |   |   |   |               |   |   |   |   |   |
|-------------|---|---|---|---|---|---------------|---|---|---|---|---|
|             | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |               | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|             | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |               | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| fehlerfrei: | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1-Bit-Fehler: | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
|             | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |               | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|             | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |               | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Das Bit ganz unten rechts wird zur Paritätsberechnung der Paritätszeile und -spalte genutzt.

## Hamming-Code

Ein Hamming-Code mit  $n$  **Redundanzbits** hat maximal  $2^n - 1$  Bits und maximal  $2^n - 1 - n$  Datenbits (mit  $n \in \mathbb{N}$ )

Die Bits des Codewortes werden, beginnend bei 1, durchnummeriert.

Das  $i$ -te **Prüfbit**(auch Redundanzbit) steht im Codewort an Position  $2^i$  ( $\Rightarrow 1, 2, 4, 8, \dots$ )

|                               | Position | Bits des Codewortes |         |
|-------------------------------|----------|---------------------|---------|
| Beispiel (gerade Parität):    | $1_{10}$ | 0                   | Prüfbit |
|                               | $2_{10}$ | 1                   | Prüfbit |
|                               | $3_{10}$ | 0                   |         |
|                               | $4_{10}$ | 0                   | Prüfbit |
|                               | $5_{10}$ | 1                   |         |
|                               | $6_{10}$ | 0                   |         |
|                               | $7_{10}$ | 1                   |         |
| Gespeichertes Datenwort: 0101 |          |                     |         |

### Berechnung der Prüfbits

Jedes Prüfbit ist ein Paritätsbit über eine eindeutige Menge von Bits.

Das  $i$ -te Prüfbit an Position  $2^i$  wird über alle Stellen aus dem Codewort berechnet, für die in der Binärdarstellung für  $2^i$  das Bit auf der jeweiligen Position auf 1 gesetzt ist.

Beispiel: 0. Prüfbit an Stelle  $2^2 = 4_{10} = 100_2 \implies$  jedes Bit aus dem Codewort, in dessen Binärdarstellung der Position das Bit auf Position  $2^2$  gesetzt ist, wird zur Berechnung des Prüfbits verwendet.

# Summenzeichen und Produktzeichen

## Summenzeichen

Seien  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $m \leq n$ . Die Summen der Zahlen  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$  wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

Dabei gilt:  $i \hat{=}$  **Summationsindex**;  $m/n \hat{=}$  **untere/obere Summationsgrenze**.  
Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^n c \cdot a_i &= c \cdot \sum_{i=m}^n a_i \\ \sum_{i=m}^n (a_i + b_i) &= \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i \end{aligned}$$

## Produktzeichen

Seien  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $m \leq n$ . Das Produkt der Zahlen  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$  wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Dabei gilt:  $i \hat{=}$  **Laufindex**;  $m/n \hat{=}$  **untere/obere Grenze**.

## Rechenregeln

### Bruchregeln

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot c} & \frac{a}{b} + \frac{c}{b} &= \frac{a+c}{b} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} & \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}\end{aligned}$$

### Potenzgesetze

$$\begin{aligned}a^n \cdot a^m &= a^{n+m} & a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\ (a^n)^m &= (a^m)^n = a^{n \cdot m} & a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, a \neq 0 \\ a^0 &= 1, a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

### Wurzelgesetze

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^n} &= a & (\sqrt[n]{a})^n &= a \\ \sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0 \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} & a^{-\frac{1}{n}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, a > 0\end{aligned}$$

### Logarithmengesetze

$$\begin{aligned}\log 1 &= 0 & \log e &= 1 \\ a^x = b &\Leftrightarrow x = \log_a(b) & \log(a^x) &= x \log a \\ \log(x \cdot y) &= \log x + \log y & \log\left(\frac{x}{y}\right) &= \log x - \log y\end{aligned}$$

# Trigonometrie

## Bogenmaß

Der Bogenmaß ist die Länge des Kreisbogens des Einheitskreises und gibt den Betrag des Winkels an. Der Umfang des Einheitskreises beträgt  $2\pi$ .

|          |           |                 |                 |                 |                 |             |                  |             |
|----------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|------------------|-------------|
| Bogenmaß | 0         | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$       | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$      |
| Gradmaß  | $0^\circ$ | $30^\circ$      | $45^\circ$      | $60^\circ$      | $90^\circ$      | $180^\circ$ | $270^\circ$      | $360^\circ$ |

Umwandlung von Winkel  $\alpha$  von Gradmaß zu Bogenmaß:  $\text{Bogenmaß} = \alpha \frac{\pi}{180}$   
Umwandlung von Winkel  $\alpha$  von Bogenmaß zu Gradmaß:  $\text{Gradmaß} = \alpha \frac{180}{\pi}$