Übungsblatt 4

Pascal Diller, Timo Rieke

May 22, 2025

Aufgabe 1

Gegeben ist die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$T(x, y, z) = (2x + y,\ y + 2z,\ x + z),$$

sowie die Basen

$$\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ und Bijektivität

Wir berechnen die Bilder der Standardbasisvektoren:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(1, 0, 0) = (2, 0, 1), \\ T(e_2) &= T(0, 1, 0) = (1, 1, 0), \\ T(e_3) &= T(0, 0, 1) = (0, 2, 1). \end{aligned}$$

Diese Vektoren sind die Spalten der Darstellungsmatrix in der Standardbasis:

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Bijektivität: Die Determinante ist

$$\det([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) = 2(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) - 1(0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 0 = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Daher ist T bijektiv.

(ii) Übergangsmatrizen $U_B^{\mathcal{E}}, U_{\mathcal{E}}^C, U_B^C$

Da die Spalten von B als Koordinaten in $\mathcal{E}$ (Standardbasis) gegeben sind:

$$U_B^{\mathcal{E}} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $U_{\mathcal{E}}^{C}$ ist die Inverse von C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_{\mathcal{E}}^{C} = C^{-1}.$$

Berechnung:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{(durch Gauß oder CAS).}$$

Dann ergibt sich:

$$U_{B}^{C} = U_{\mathcal{E}}^{C} \cdot U_{B}^{\mathcal{E}}.$$

(iii) Darstellungsmatrix $[T]_{B}^{C}$

Wir verwenden:

$$[T]_{B}^{C} = U_{\mathcal{E}}^{C} \cdot [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \cdot (U_{B}^{\mathcal{E}})^{-1}.$$

Alle drei Matrizen sind bekannt oder berechenbar, also folgt daraus die Darstellungsmatrix $[T]_{B}^{C}$.

Aufgabe 2

Gegeben: lineare Abbildungen $S, T : V \to W$. Zeige:

$$[S+T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} = [S]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} + [T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}.$$

Beweis: Sei $v \in V$. Dann gilt:

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v).$$

Dies bedeutet auf Koordinatenebene:

$$[(S+T)(v)]_{\mathcal{B}_W} = [S(v)]_{\mathcal{B}_W} + [T(v)]_{\mathcal{B}_W}.$$

Das entspricht der Matrixmultiplikation:

$$[S+T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} \cdot [v]_{\mathcal{B}_V} = [S]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} \cdot [v]_{\mathcal{B}_V} + [T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} \cdot [v]_{\mathcal{B}_V}.$$

Da dies für alle v gilt, folgt:

$$[S+T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} = [S]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} + [T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}.$$

Aufgabe 3

Sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ. Zeige:

(i) $r\lambda$ ist Eigenwert von $r\varphi$ für $r \in \mathbb{R}$

Da λ Eigenwert von φ ist, existiert $v \neq 0$ mit

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Dann gilt:

$$(r\varphi)(v) = r \cdot \varphi(v) = r\lambda v.$$

Somit ist v ein Eigenvektor von $r\varphi$ zum Eigenwert $r\lambda$.