Mathe Übung 11

Pascal Diller, Timo Rieke

January 14, 2025

Aufgabe 1

(i)

$$|I_n| = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \implies |I_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$I_{n+1} = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, 1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

Da $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$, gilt: $I_{n+1} \subset I_n$ für jedes n.
Somit ist gezeigt, dass I_n eine Intervallverschachtelung ist.

(ii)

$$|J_n| = \frac{3n+5}{n} - \left(3 - \frac{1}{n}\right) = \frac{3n}{n} + \frac{5}{n} - 3 + \frac{1}{n} = \frac{6}{n}$$

Da $\frac{6}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, folgt $|J_n| \to 0$

$$J_{n+1} = \left[3 - \frac{1}{n+1}, \frac{3(n+1)+5}{n+1}\right]$$

$3 - \frac{1}{n+1} < 3 - \frac{1}{n}$, da $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ und $\frac{3(n+1)+5}{n+1} < \frac{3n+5}{n}$ da der Bruch mit größerem n kleiner wird. Somit folgt: $J_{n+1} \subset J_n$.

Somit ist gezeigt, dass J_n eine Intervallverschachtelung ist.

Aufgabe 2

(i)

Sei $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$$\ln\left(a_n\right) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Aus der Taylor-Reihe für $\ln(1-x)$ gilt: $\ln(1-x) \approx -x$. Also: $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \approx -\frac{1}{n}$

$$\ln(a_n) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \approx n\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$$

$$a_n = e^{\ln(a_n)} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Also: $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

(ii)

(a)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2$$

Es gilt: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^2$$

(b)

Sei $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\ln(b_n) = n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Es gilt: $\ln(1+x) \approx x$

$$\ln(b_n) \approx n^2 \frac{1}{n} = n$$

$$b_n = e^{\ln(b_n)} \approx e^n$$

Also: $b_n \to \infty \implies$ die Folge divergiert.

(c)

$$\frac{(n+1)!}{n!} \frac{1}{(n+2)^n} = (n+1)\frac{1}{(n+2)^n} = \frac{n+1}{(n+2)^n}$$

Bei großem n dominiert der Nenner über den Zähler, also strebt der Ausdruck gegen 0.

Aufgabe 3

(i)

$$a_n = \frac{n - (-1)^n}{4 + (-1)^n n}$$

Die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind: $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$.

$$b_n = n^2 \frac{n!}{(n+1)!}$$

Die Häufungspunkte der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind: 1.

(ii)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, da sie zwei unterschiedliche Häufungspunkte besitzt, nämlich $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$. Da eine konvergente Folge nur einen einzigen Häufungspunkt haben kann, muss $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sein.

(iii)

$$(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 2, 4, 6, 8, \dots)$$

$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$$

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Teilfolge von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 3, 2, 5, 7, 6, 9, 11, 10, \dots)$$

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Teilfolge von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Das bedeutet:

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$
$$\text{es existiert ein } M \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Bolzano-Weierstraß-Satz besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, muss jede Teilfolge ebenfalls monoton wachsend sein und denselben Grenzwert haben.

Sei b_n eine konvergente Teilfolge von (a_n) mit Grenzwert L. Da (a_n) monoton wachsend ist und $a_n \leq M$, folgt, dass $a_n \to L$ für $n \to \infty$.

Daher konvergiert die gesamte Folge (a_n) gegen L.