

Übungsblatt 11

Pascal Diller, Timo Rieke

July 10, 2025

Aufgabe 1

(i)

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\text{Sei } g(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \text{ dann ist } f(x) = e^{g(x)}$$

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Da $e^{g(x)} > 0$ gilt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Es existiert genau eine kritische Stelle an $x_0 = e$.

(ii)

Untersuchen des Vorzeichens von f'

Für $x \in (0, e) : \ln(x) < 1 \implies g'(x) > 0 \implies f'(x) > 0 \rightarrow$ streng monoton wachsend

Für $x \in (e, \infty) : \ln(x) > 1 \implies g'(x) < 0 \implies f'(x) < 0 \rightarrow$ streng monoton fallend

Aufgabe 3

(i)

Wenn $x \rightarrow \pi$, geht der Term $(\pi - x)$ gegen 0. Gleichzeitig geht $\tan(\frac{\pi}{2})$ gegen $\tan(\frac{\pi}{2})$, was gegen unendlich strebt. Also: $0 \cdot \infty$

Da $\tan(\alpha) = \frac{1}{\cot \alpha}$:

$$(\pi - x) \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi - x}{\cot\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Bei diesem Bruch streben sowohl Nenner, als auch Zähler gegen 0.

$$\frac{d}{dx}(\pi - x) = -1$$

$$\frac{d}{dx}(\cot(\frac{x}{2})) = -\csc^2(\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\sin^2(\frac{x}{2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-1}{-\frac{1}{2}\csc^2(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow \pi} 2\sin^2(\frac{x}{2})$$

$$\pi \text{ einsetzen: } 2\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 2(1)^2 = 2$$

Der Grenzwert ist 2.

(ii)

Wenn $x \rightarrow \infty$ geht, dann geht der Term $\log(1 + \frac{1}{x})$ gegen $\log(1) = 0$.
Somit erhalten wir die unbestimmte Form $\infty \cdot 0$.

$$x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\log(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}, \text{ Wenn } x \rightarrow \infty, \text{ dann gehen sowohl Nenner als auch Zähler gegen 0, also } \frac{0}{0}$$

$$\frac{d}{dx} \log(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Der Grenzwert ist 1.

(iii)

Wenn $x \rightarrow 0$ geht, gehen beide Terme gegen ∞ , also haben wir die unbestimmte Form $\infty - \infty$.

$$\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

Wenn hier $x \rightarrow 0$ geht, gehen sowohl Nenner als auch Zähler gegen 0, also $\frac{0}{0}$

$$\frac{d}{dx}(x - \sin x) = 1 - \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - \sin x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \frac{1 - 1}{0 + 0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{d}{dx}(1 - \cos x) = \sin x$$

$$\frac{d}{dx}(2x \sin x + x^2 \cos x) = (2 \sin x + 2x \cos x) + (2x \cos x - x^2 \sin x) = 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x) = 2 \cos x = (4 \cos x - 4x \sin x) - (2x \sin x + x^2 \cos x) = 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x} = \frac{\cos(0)}{6 \cos(0) - 0 - 0} = \frac{1}{6}$$

Der Grenzwert ist $\frac{1}{6}$

(iv)

Wenn $x \rightarrow 0^-$ geht x gegen 0. Der Term $1 - e^x$ geht gegen $1 - e^0 = 0$. Da $x < 0$, ist $e^x < 1$, also ist $1 - e^x$ eine kleine positive Zahl. Damit geht $\log(1 - e^x)$ gegen $-\infty$, also haben wir $0 \cdot \infty$

$$x \log(1 - e^x) = \frac{\log(1 - e^x)}{\frac{1}{x}}$$

Wenn $x \rightarrow 0^-$, gehen sowohl Nenner als auch Zaehler gegen $-\infty$, also haben wir $\frac{-\infty}{-\infty}$

$$\frac{d}{dx} \log(1 - e^x) = \frac{-e^x}{1 - e^x}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-e^x}{1 - e^x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 e^x}{1 - e^x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 e^x) = 2x e^x = x^2 e^x$$

$$\frac{d}{dx}(1 - e^x) = -e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} = \frac{2x e^x = x^2 e^x}{-e^x} = \frac{2(0)e^0 + (0)^2 e^0}{-e^0} = \frac{0}{-1} = 0$$

Der Grenzwert ist 0.