Übung 6

Pascal Diller, Timo Rieke

November 25, 2024

Aufgabe 1

Zu zeigen: $cos(2x) = 1 - 2sin^2x$

$$cos(2x) = cos(x + x)$$
$$\text{Additionstheorem: } cos(x + x) = cosx * cosx - sinx * sinx$$
$$cosx * cosx - sinx * sinx = cos^2x - sin^2x$$
$$\text{Pythagoras: } cos^2x + sin^2x = 1 \iff cos^2x = 1 - sin^2x$$
$$\text{Einsetzen von } cos^2x = 1 - sin^2x \text{ in die Formel } cos^2x - sin^2x\text{:}$$
$$(1 - sin^2x) - sin^2x = 1 - 2sin^2x$$
$$\implies cos(2x) = 1 - 2sin^2x$$

Aufgabe 2

(i)

Seien f und g zwei ungerade Funktionen. Somit gilt: $f(-x) = -f(x)$ und $g(-x) = -g(x)$. Zu zeigen: $(f \cdot g)(-x) = (f \cdot g)(x)$

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

Somit ist gezeigt, dass das Produkt zweier ungeraden Funktionen gerade ist.

(ii)

Sei f eine gerade Funktion ($f(-x) = f(x)$) und g eine ungerade Funktion ($g(-x) = -g(x)$). Zu zeigen: $(f \cdot g)(-x) = -(f \cdot g)(x)$

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -(f(x) \cdot g(x)) = -(f \cdot g)(x)$$

Somit ist gezeigt, dass das Produkt einer gerade und einer ungeraden Funktion ungerade ist.

(iii)

Seien f und g zwei gerade Funktionen. Zu zeigen: $(f+g)(-x) = (f+g)(x)$

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

Somit ist gezeigt, dass die Summe zweier geraden Funktionen auch gerade ist.

(iv)

Sei $\lambda \in \mathbb{N}$ und f eine gerade Funktion. Zu zeigen: $\lambda f(-x) = \lambda f(x)$

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x)$$

Somit ist gezeigt, dass für λ und die gerade Funktion f das Produkt aus λf gerade ist.

(v)

Zu zeigen:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^n \begin{cases} \text{gerade wenn } n \text{ gerade} \\ \text{ungerade wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

I.A.
Sei $n = 0$. Da $f_0(-x) = (-x)^0 = f_0(x) = x^0 = 1$ ist f gerade.

Sei $n = 1$. Da $f_1(-x) = (-x)^1 = -f_1(x) = -x^1 = -x$ ist f ungerade.

I.V.

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^n \begin{cases} \text{gerade wenn } n \text{ gerade} \\ \text{ungerade wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

I.S.

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n$$

Betrachte $x \cdot x^n$ als Produkt der Funktionen $f(x) = x$ und $g_n(x) = x^n$.
f ist ungerade, da gilt: $f(-x) = -f(x) = -x$.
Wenn n gerade ist, dann ist g_n gerade. Wenn n ungerade ist, dann ist g_n ungerade.
Aus vorherigen Aufgaben folgt:
Wenn n gerade: $f \cdot g_n$ ist ungerade, da das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade ist.
Wenn n ungerade: $f \cdot g_n$ ist gerade, da das Produkt aus zwei ungerade Funktionen gerade ist.
Somit ist gezeigt, dass wenn n gerade ist, ist $n+1$ ungerade und die Funktion ist gerade (und anders herum).

(vi)

(a)

Sei $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $R(x) := x^{10} - 15x^8 + 85x^6 - 255x^4 + 274x^2 - 120$.
R ist eine Summe aus Thermen der Form λx^n. Da n immer gerade ist, ist x^n(v) auch immer gerade. Demnach ist λx^n ebenfalls immer gerade(iv). Da eine Summe aus geraden Funktionen gerade ist, ist R gerade(iii).

(b)

Da R gerade ist, gilt: $R(-x) = R(x)$. Also gibt es für jede angegebene Nullstelle eine weitere mit negiertem Vorzeichen. Somit sind die Nullstellen: $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm\sqrt{2}, x_3 = \pm\sqrt{3}, x_4 = \pm 2, x_5 = \pm\sqrt{5}$

Aufgabe 3

(i) Bestimmen der Nullstellen von $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

Substitution: $z = x^2$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = z^2 - 8z - 9$$

PQ-Formel:

$$z_{1,2} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{(\frac{-8}{2})^2 + 9} = 4 \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5$$
$$z_1 = 4 + 5 = 9$$
$$z_2 = 4 - 5 = -1$$

Rücksubstitution:

$$z_1\text{: } \sqrt{9} = -3 \vee 3$$
$$z_2\text{: } \sqrt{-1} \Longrightarrow \text{keine Lösung}$$
$$\Longrightarrow \text{Nullstellen bei } x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 3$$

(ii) Nullstellen und Grad der Funktion $Q(x)$

$$Q(x) = (x-5)^2(x+2)(x^2-4)(3x^2+2)$$

Nullstellen:

1. $(x-5)^2$: Nullstelle $x = 5$ mit Ordnung 2
2. $(x+2)$: Nullstelle $x = -2$ mit Ordnung 1
3. $(x^2-4) = (x-2)(x+2)$: Nullstellen $x = 2$ und $x = -2$, da $x = -2$ erneut vorkommt:
   $x = 2$ mit Ordnung 1 und $x = -2$ mit Ordnung 2

4. $(3x^2 + 2)$: $3x^2 + 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \Longleftrightarrow$ Keine Nullstelle

$\Longrightarrow$ Nullstellen: $x = -2$ mit Ordnung 2, $x = 2$ mit Ordnung 1 und $x = 5$ mit Ordnung 2

Grad von $Q(x)$:
$2 + 1 + 2 + 2 = 7 \Longrightarrow$ Der Grad von $Q(x)$ entspricht 7.