Übung 3

Pascal Diller, Timo Rieke

November 4, 2024

1

(i)

(a)

Für m gerade:

$$m = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N}$$
$$f(m) = \frac{2k}{2} = k$$

$\implies$ k kann alle natürlichen Zahlen annehmen. Somit sind die Werte bei $f(m)$ für m gerade alle in $\mathbb{N}$.

Für m gerade:

$$m = 2k + 1 \text{ für } k \in \mathbb{N}$$
$$f(m) = \frac{(2k+1) - 1}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

$\implies$ k kann wieder $\mathbb{N}$ annehmen.

$\implies$ Da $f(m)$ alle natürlichen Zahlen abbildet ist f surjektiv auf $\mathbb{N}$, jedoch nicht auf $\mathbb{Z}$, da keine negativen Zahlen erreicht werden.

(b)

Für $z \in \mathbb{N}$:
gerade: $m = 2z$
ungerade: $m = 2z + 1$
jedes $z \in \mathbb{N}$ hat 2 Werte von m(gerade, ungerade), die auf z abgebildet werden.
Kardinalität $|f^{-1}(\{z\})| = 2$ für $z \in \mathbb{N}$

Für $z < 0$
Da $f(m)$ nur Werte aus $\mathbb{N}$ annimmt, gibt es kein m, das auf ein negatives z

abgebildet wird.
Daher: $|f^{-1}(\{z\})| = 0$ für $z < 0$

Für $z = 0$
Da $f(m)$ immer einen positiven Wert ergibt, kann 0 von $f(m)$ ebenfalls nicht erreicht werden.
Somit: $|f^{-1}(\{z\})| = 0$

Für $z \in \mathbb{N} : |f^{-1}(\{z\})| = 2$
Für $z \leq 0 : |f^{-1}(\{z\})| = 0$

Injektivität; Da jedes $z \in \mathbb{N}$ zwei Urbilder hat, ist f nicht injektiv.

(c)

$M = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ (Menge der geraden Zahlen)
m ist eine gerade Zahl $(m \in M)$
$m = 2k, k \in \mathbb{N}$
$\implies f(m) = \frac{m}{2} = k$
Jeder Wert von k wird auf genau einen Wert $m = 2k$ abgebildet, sodass für jedes Bild $f(m)$ genau ein Urbild existiert.
Da $f|_M$ alle natürlichen Zahlen erreicht, ist f surjektiv auf $\mathbb{N}$.
Somit ist $M(2n|n \in \mathbb{N})$ eine Teilmenge, bei der $f|_M : M \to f(\mathbb{N})$ bijektiv ist.

(ii)

(a)

$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (n, m) \mapsto nm$
Bild von $(3, 11)$: $g(3, 11) = 3 \cdot 11 = 33$

Urbild von $\{10\}$: $g(n, m) = 10 \implies n \cdot m = 10$
mögliche Paare für $(n, m) : (1, 10), (2, 5), (10, 1), (5, 2)$
Urbild: $\{(1, 10), (2, 5), (5, 2), (10, 1)\}$

(b)

Injektivität:
$g(n_1, m_2) = g(n_2, m_2)$ für $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$
Bsp: $g(1, 10) = 10 = g(2, 5)$, somit ist g nicht injektiv.
Surjektiv:
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ kann $g(1, k) = k$ verwendet werden um alle Werte in $\mathbb{N}$ zu erreichen. Somit ist g surjektiv.

2

(i)

$$A: \forall x \in \mathbb{N}, x > 1 \wedge (d|x \rightarrow d = 1 \vee d = x)$$

(ii)

$\neg A$: Es gibt mindestens eine Natürliche Zahl, die keine Primzahl ist.

$$\neg A: \exists x \in \mathbb{N}, d|x \rightarrow d \neq 1 \wedge d \neq x$$

Die Aussage A ist falsch, da es auch Natürliche Zahlen gibt, die nicht nur 1 und sich selber als Teiler haben.

3

(i)

$$\neg((Q \vee R) \rightarrow P) \sim ((Q \wedge \neg P) \vee (R \wedge \neg P))$$

Implikation:

$$(Q \vee R) \rightarrow P \sim \neg(Q \vee R) \vee P$$
$$\neg((Q \vee R) \rightarrow P) \sim \neg(\neg(Q \vee R) \vee P)$$

De Morgan Gesetz:

$$\neg(\neg(Q \vee R) \vee P) \sim (Q \vee R) \vee \neg P$$

Distributivgesetz:

$$(Q \vee R) \wedge \neg P \sim (Q \wedge \neg P) \vee (R \wedge \neg P)$$

Somit ist bewiesen, dass die Formeln logisch äquivalent sind.

(ii)

$$(((P \rightarrow R) \rightarrow (R \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)) \mapsto 0$$