Mathe 3 Übungsblatt 7

Pascal Diller, Timo Rieke

Aufgabe 1

(i)

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h}$$

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - \frac{2\cdot 0\cdot y^3 - 2\cdot 0^3\cdot y}{0^2+y^2}}{h}$$

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - 0}{h}$$

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2hy^3 - 2h^3y}{h^2+y^2} - 0}{h}$$

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{2hy^3 - 2h^3y}{h(h^2+y^2)}$$

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{2hy^3 - 2h^3y}{h(h^2+y^2)}$$

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{2y^3 - 2h^2y}{h^2+y^2}$$

$$\partial_x f(0,y) = \frac{2y^3}{y^2} = 2y$$

$$\partial_y f(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,0+h) - f(x,0)}{h}$$

$$\partial_y f(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2xh^3 - 2x^3h}{x^2+h^2}}{h}$$

$$\partial_y f(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{2xh^3 - 2x^3h}{h(x^2+h^2)}$$

$$\partial_y f(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{2xh^2 - 2x^3}{x^2+h^2}$$

$$\partial_y f(x,0) = \frac{-2x^3}{x^2} = -2x$$

(ii)

Fuer $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\partial_x f(x, y) = \frac{(2y^3 - 6x^2y)(x^2 + y^2) - (2xy^3 - 2x^3y)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\partial_x f(x, y) = \frac{2x^2y^3 + 2y^5 - 6x^4y - 6x^2y^3 - 4x^2y^3 + 4x^4y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\partial_x f(x, y) = \frac{y^5 - 4x^2y^3 - x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot C$$

Fuer $(x, y) = (0, 0)$:

Aus Teil(i): $\partial_x f(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0$ Wir betrachten $\partial_x f(x, y)$ und nutzen die Polarkoordinaten $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$.
Der Zaehler von f ist ein Polynom vom Grad 4, der Nenner Grad 2. Nach der Ableitung hat der Zaehler Grad 5 und der Nenner Grad 4.

$$\partial_x f \approx \frac{r^5}{r^4} = r$$

Da der Term linear in r gegen 0 geht fuer $r \to 0$, ist die partielle Ableitung im Ursprung stetig. Dasselbe gilt analog fuer $\partial_y f$.

$\implies$ Da die partiellen Ableitungen ueberall existieren und stetig sind, ist $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

(iii)

Aus (i): $\partial_x f(0, y) = 2y$, $\partial_y f(x, 0) = -2x$

$\partial_y(\partial_x f)(0, 0)$ ist die Ableitung von $\partial_x f$ nach y an $(0, 0)$.
Wir betrachten die Funktion $\partial_x f$ auf der y-Achse, also $\partial_x f(0, y) = 2y$

$$\partial_y(\partial_x f)(0, 0) = \frac{d}{dy}(2y)\Big|_{y=0} = 2$$

$\partial_x(\partial_y f)(0, 0)$ ist die Ableitung von $\partial_y f$ nach x an $(0, 0)$.
Wir betrachten die Funktion $\partial_y f$ auf der x-Achse, also $\partial_y f(x, 0) = -2x$

$$\partial_x(\partial_y f)(0, 0) = \frac{d}{dx}(-2x)\Big|_{x=0} = -2$$

(iv)

Nach dem Satz von Schwarz gilt fuer jede Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, dass die gemischten partiellen Ableitungen vertauschbar sein muessen.

$$\partial_x \partial_y f(x, y) = \partial_y \partial_x f(x, y)$$

In (iii) wurde jedoch gezeigt, dass im Punkt $(0,0)$ gilt:

$$\partial_y \partial_x f(0,0) = 2 \neq -2 = \partial_x \partial_y f(0,0)$$

Also gilt der Satz nicht. $\implies f \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

Aufgabe 4

Die Bogenlaenge einer Kurve γ ist definiert durch das Integral ueber die Norm ihrer Ableitung:

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$

Bestimmung von $\gamma'(t)$:

Gegeben ist $\gamma(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$.

$$x(t) = r(t)\cos t \implies x'(t) = r'(t)\cos t - r(t)\sin t$$
$$y(t) = r(t)\sin t \implies y'(t) = r'(t)\sin t + r(t)\cos t$$
$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos t - r(t)\sin t \\ r'(t)\sin t + r(t)\cos t \end{pmatrix}$$

Berechnung der Norm $||\gamma'(t)||$:

$$||\gamma'(t)||^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2$$
$$||\gamma'(t)||^2 = (r'(t)\cos t - r(t)\sin t)^2 + (r'(t)\sin t + r(t)\cos t)^2$$
$$||\gamma'(t)||^2 = ((r')^2\cos^2 t - 2r'r\cos t\sin t + r^2\sin^2 t) + ((r')^2\sin^2 t + 2r'r\sin t\cos t + r^2\cos^2 t)$$
$$||\gamma'(t)||^2 = (r')^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + (r')^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t$$
$$||\gamma'(t)||^2 = (r'(t))^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + (r(t))^2(\sin^2 t + \cos^2 t)$$
$$||\gamma'(t)||^2 = (r'(t))^2 + (r(t))^2$$
$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{(r(t))^2 + (r'(t))^2}$$

Einsetzen in die Bogenlaengenformel:

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(r(t))^2 + (r'(t))^2}dt$$