Übung 9

Pascal Diller, Timo Rieke

December 17, 2024

Aufgabe 1

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_A = \{1 \cdot 1 \cdot 1, 1 \cdot 2 \cdot 1, 2 \cdot (-2) \cdot 1, 2 \cdot 2 \cdot 0, 1 \cdot (-2) \cdot 1, 1 \cdot 1 \cdot 0\}$$

$$\det(A) = \sum_{P \in \mathcal{M}_A} (-1)^{\text{ Misstände in } P} \cdot P$$

$$= (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^1 \cdot (-4) + (-1)^2 \cdot 0 + (-1)^2 \cdot (-2) + (-1)^3 \cdot 0$$

$$= 1 - 2 + 4 - 2 = 1$$

Da $\det(A) = 1 \neq 0$ ist A invertierbar.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z_2 - 2 \cdot Z_1 \to Z_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z_3 - Z_1 \to Z_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z_2 - Z_3 \to Z_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z_1 + 2 \cdot Z_2 \to Z_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z_3 - 4 \cdot Z_2 \rightarrow Z_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$B_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Wenn $\det(B_t) \neq 0$, dann ist B_t invertierbar.

$$\mathcal{M}_{B_t} = \{t \cdot t \cdot t, t \cdot 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 \cdot t, 1 \cdot 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 \cdot 1, 1 \cdot t \cdot 1\}$$

$$\begin{aligned} \det(B_t) &= (-1)^0 \cdot t^3 + (-1)^1 \cdot t + (-1)^1 \cdot t + (-1)^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 1 + (-1)^3 \cdot t \\ &= t^3 - t - t + 1 + 1 - t \\ &= t^3 - 3t + 2 \end{aligned}$$

Wenn $t^3 - 3t + 2 \neq 0$, dann ist B_t invertierbar. Für $t = 1$ und $t = -2$ ist $t^3 - 3t + 2 = 0$, also:

Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ ist B_t invertierbar.

(iii)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a)

Alle Muster, die eine 0 beinhalten, können ignoriert werden.

$$\mathcal{M}_C = \{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2\}$$

$$\det(C) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

(b)

$$Z_2 + 3 \cdot Z_1 \rightarrow Z_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_3 - Z_1 \rightarrow Z_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_3 - 1.5 \cdot Z_2 \rightarrow Z_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_4 + \frac{4}{5} \cdot Z_3 \rightarrow Z_4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = 1 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot (-\frac{12}{5}) = \frac{120}{5} = 24$$

(c)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0^- & 0^+ & 4^- & 0^+ \end{pmatrix}$$

Aus der definition des Laplaceschen Entwicklungssatzes folgt, dass für einen Nulleintrag in der ausgewählten Zeile die Determinante der dazugehörigen Teilmatrix wegfällt.

$$\implies \det(C) = -4 \cdot \ \det \begin{pmatrix} 1^+ & 0^- & 0^+ \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \cdot (\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}) = -4 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 2) = -4 \cdot (-6) = 24$$

Aufgabe 2

(i) Beziehung zwischen det(D) und det(kD)

Es gilt:

$$det(kD) = k^n \cdot det(D)$$

Begründung:

Da jede Zeile der Matrix D mit k multiplizert wird und es n Zeilen gibt, wird die Determinate ingesamt mit k^n multipliziert.

(ii) Beziehung zwischen det(D) und det(kD)

Für eine invertierbare Matrix E gilt: $E \cdot E^{-1} = I$ (I die Einheitsmatrix). Somit:

$$det(E \cdot E^{-1}) = det(I)$$

Die Determinante des Produkts zweier Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten. $det(I) = 1$, somit folgt:

$$det(E) \cdot det(E^{-1}) = 1$$

Geteilt durch $det(E)$:

$$det(E^{-1}) = \frac{1}{det(E)}$$

Die Beziehung zwischen der Determinante einer Matrix E und ihrer Inversen E^{-1} ist:

$$det(E^{-1}) = \frac{1}{det(E)}$$

(iii) Nachweis das det(F)=0

Da die letze Zeile von F ist eine Mischung aus den vorherigen Zeilen ist, ist die Determinate 0. Das liegt an der Eigenschaft, dass für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit zwei gleichen Zeilen immer det(A)=0 gilt (Proposition 3.5.9 (ii)).