Übung 5

Pascal Diller, Timo Rieke

November 18, 2024

Aufgabe 1

(i)

I.A.

$$\left|\sum_{k=1}^{1} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{1} |a_k| = 1 \leq 1$$

I.V.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

I.S

$$|\sum_{k=1}^{n+1} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

$$= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right) + |a_{n+1}|$$

$$\overset{I.V.}{=} \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

Somit ist gezeigt, dass $A(n) \implies A(n+1)$.

(ii)

Zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Seien $x = -1$ und $y = 1$:

$$\begin{aligned}(-1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \\ = 0^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\ = 0 &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(i) f, g beschränkt $\Longrightarrow f * g$ beschränkt

Wenn f ung g beschränkt sind, gib es Konstanten $M_f, M_g > 0$, sodass
$|f(x)| \leq M_f$ und $|g(x)| \leq M_g$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Für das Produkt $f * g$ gilt dann:
$|f(x) * g(x)| \leq |f(x)| * |g(x)| \leq M_f * M_g$
$\Longrightarrow f * g$ ist ebenfalls beschränkt.

(ii) f, g monoton wachsend $\Longrightarrow f * g$ monoton wachsend

Gegenbeispiel:
Seien $f(x) = x$ und $g(x) = x - 1$
Beide sind monoton wachsend, da $f'(x) = 1 > 0$ und $g'(x) = 1 > 0$.
$f * g$**:** $(f * g)(x) = x * (x-1) = x^2 - x$
Ableitung: $(f * g)'(x) = 2x - 1$
$\Longrightarrow$ Da für $x < \frac{1}{2}$ $(f * g)'(x) < 0$ ist und für $x > \frac{1}{2}$ $(f * g)'(x) > 0$ ist, ist $f * g$ nicht monoton wachsend.

Aufgabe 3

(i) Untersuchen auf (strenge) Monotonie

$$f(x) = x^3$$

Ableitung: $f'(x) = 3x^2$
$f'(x) = 0$ bei $x = 0$
$f'(x) > 0$ bei $x \neq 0$
$\implies$ Da $f'(x) > 0$ überall außer an der Stelle x=0 ist, ist f(x) streng monton wachsend.

$g(x) = x^4$
Ableitung: $f'(x) = 4x^3$
$g'(x) = 0$ bei $x = 0$
$g'(x) > 0$ bei $x > 0$
$g'(x) < 0$ bei $x < 0$
$\implies$ Da $g'(x)$ sein Vorzeichen wechselt, ist $g(x)$ nicht streng monoton

(ii) Betrachten der Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty), x \mapsto \frac{1}{x}$

a)

Es gilt: $\forall x_1, x_2 \in (0, \infty) : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$. Somit ist f injektiv.
Da der Definitionsbereich gleich dem Wertebereich ist, gilt: $\forall y \in (0, \infty) \exists x = y^{-1} : f(x) = y$. Somit ist f surjektiv.
Da f bijektiv ist, besitzt f auch eine Umkehrfunktion.

b)

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \iff x = f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$$

Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f.
Der Wertebereich von f^{-1} ist der Definitionsbereich von f.

$$\implies f^{-1} : (0, \infty) \to (0, \infty), y \mapsto \frac{1}{y}$$

Aufgabe 4

(i) nach unten durch 1 beschränkt ist

Induktionsanfang

Für $n = 1$:

$$f(1) = 2 \longrightarrow f(1) \geq 1$$

Induktionsvoraussetzung

$$f(k) \geq 1 \text{ gilt für ein } k \in \mathbb{N}$$

Induktionsschluss

Wir zeigen, dass $f(k+1) \geq 1$
Die Rekursionsgleichung lautet:

$$f(k+1) = 2 - \tfrac{2}{f(k)+2}$$

Da $f(k) \geq 1$, folgt:

$$f(k) + 2 \geq 3 \implies \tfrac{2}{f(k)+2} \geq \tfrac{2}{3}$$

Somit gilt:

$$f(k+1) = 2 - \tfrac{2}{f(k)+2} \geq 2 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3}$$

Da $\frac{4}{3} > 1$, folgt $f(k+1) \geq 1$

$\implies$ Nach vollständiger Induktion ist $f(n) \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(ii)

$f(1) = 2$, $f(n+1) = 2 - \frac{2}{f(n)+2}$

Zu zeigen: Es gibt $x \leq y$ so dass $f(x) \geq f(y)$

Induktionsanfang

Sei $n = 1$.

$$\begin{aligned} f(2) &\geq f(3) \\ = 2 - \frac{2}{f(1)+2} &\geq 2 - \frac{2}{f(2)+2} \\ = 2 - \frac{2}{4} &\geq 2 - \frac{2}{2 - \frac{2}{4} + 2} \\ = \frac{3}{2} &\geq 2 - \frac{2}{\frac{3}{2} + 2} \\ = \frac{3}{2} &\geq \frac{10}{7} \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung

$f(n+1) \geq f(n+2)$ für $n \in \mathbb{N}$
$\implies$ $f(n) \geq f(n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschluss

Man untersucht die Differenz $f(n+1)-f(n+2)$. Wenn $f(n+1)-f(n+2) \geq 0$, dann gilt $f(n+1) \geq f(n+2)$

$$\begin{aligned} & f(n+1) - f(n+2) \\ = & \left(2 - \frac{2}{f(n)+2}\right) - \left(2 - \frac{2}{f(n+1)+2}\right) \\ & = 2 - \frac{2}{f(n)+2} - 2 + \frac{2}{f(n+1)+2} \\ & = \frac{2}{f(n+1)+2} - \frac{2}{f(n)+2} \end{aligned}$$

Aus der I.V. gilt: $f(n) \geq f(n+1)$. Demnach ist $f(n)+2 \geq f(n+1)+2$.
Daraus folgt, dass $\frac{2}{f(n+1)+2} \geq \frac{2}{f(n)+2}$
Also ist $\frac{2}{f(n+1)+2} - \frac{2}{f(n)+2} = f(n+1) - f(n+2) \geq 0$
Damit ist gezeigt, dass $f(n+1) \geq f(n+2)$.