Übungsblatt 4

Pascal Diller, Timo Rieke

May 15, 2025

Aufgabe 1

(i)

Für U_1:

$$x + z = 0 \iff x = -z$$

$$(x, y, z, w) = (-z, y, z, w) = y(0, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1)$$

Basis für U_1: $\{(0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
Dimension von $U_1 : \dim U_1 = 3$

Für U_2:

$$x + y - z = 0 \iff x = z - y$$

$$y - w = 0 \iff w = y$$

$$(x, y, z, w) = (z - y, y, z, y) = y(-1, 1, 0, 1) + z(1, 0, 1, 0)$$

Basis von U_2: $\{(-1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$
Dimension von $U_2 : \dim U_2 = 2$

(ii)

$$x + z = 0 \iff x = -z$$

$$x + y - z = 0 = -z + y - z \iff y = 2z$$

$$y - w = 0 \iff y = w = 2z$$

$$(x, y, z, w) = (-z, 2z, z, 2z) = z(-1, 2, 1, 2)$$

Basis: $\{(-1, 2, 1, 2)\}$
$\dim U_1 \cap U_2 = 1$

(iii)

$$\dim (U_1 + U_2) = \dim (U_1) + \dim (U_2) - \dim (U_1 \cap U_2) = 3 + 2 - 1 = 4$$

Aufgabe 2

(ii)

$M_n(\mathbb{R})$ ist die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$, also:

$$\dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$$

Da T bijektiv ist, müssen $\dim(M_n(\mathbb{R}))$ und $\dim(\mathbb{R}^m)$ gleich sein.

$$\dim(\mathbb{R}^m) = m = \dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$$

$$m = n^2$$