

# Mathe 3 Übungsblatt 6

Pascal Diller, Timo Rieke

## Aufgabe 1

(i)

Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ .

Laut Voraussetzung gilt fuer alle Folgenglieder:  $g(x_k) \leq f(x_k) \leq h(x_k)$ .

Da  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = c$  folgt nach 11.2.1:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = c \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) = c$$

Da die Folge  $f(x_k)$  zwischen den beiden nach  $c$  konvergierenden Folgen  $g, h$  liegt, muss auch gelten:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = c$$

Da die Folge  $(x_k)$  beliebig gewaehlt war, gilt dies auch fuer alle solche Folgen, was nach 11.2.1 bedeutet:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$$

(ii)

(a)

Fuer den Nenner gilt:  $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ , da  $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \geq x^2 + y^2$

Fuer  $(x, y) \neq (0, 0)$  folgt:

$$0 \leq \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Grenzuebergang von  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ :

linke Seite konstant 0.

rechte Seite  $\sqrt{x^2 + y^2}$  strebt gegen 0.

Dann gilt nach dem Sandwichkriterium:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0$$

(b)

Untersuchen von verschiedenen Pfaden um zu ueberpruefen, ob ein Grenzwert existiert:

1. Pfad: Entlang der Geraden  $y = -x$  (fuer  $x \neq 0$ )

$$f(x, -x) = \frac{e^{x-x} - x - (-x) - 1}{x^2 + (-x)^2} = \frac{e^0 - 0 - 1}{2x^2} = 0$$

$\Rightarrow$  Grenzwert hier ist 0

2. Pfad: Entlang der Geraden  $y = x$  (fuer  $x > 0$ )

$$f(x, x) = \frac{e^{2x} - 2x - 1}{2x^2}$$

Die Taylor-Entwicklung fuer  $e^t$  um  $t = 0$  mit  $t = 2x$ .

$$e^{2x} \approx 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 = 1 + 2x + 2x^2$$

einsetzen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x + 2x^2) - 2x - 1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

$\Rightarrow$  Grenzwert hier ist 1.

Da die Grenzwerte auf den verschiedenen Pfaden unterschiedlich sind, existiert der Grenzwert nicht.