Mathe 3 Übungsblatt 5

Pascal Diller, Timo Rieke

Aufgabe 3

(i)

Solange $|-x^2| < 1$ kann man $q = -x^2$ substituieren und die Geometrische Reihe verwenden.

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Also ist diese alterniernde Reihe die Taylorreihe um $x_0 = 0$ mit $|-x^2| < 1$, da sie durch Substitution aus der Geometrischen Reihe hervorgekommen ist.

(ii)

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

$$\implies g(x) = \int f(t)dt = \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \right) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C$$

Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ einsetzen um C zu bestimmen

$$g(0) = \arctan(0) = 0$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{0^{2k+1}}{2k+1} + C \implies C = 0$$

Also ist die Taylorreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Aufgabe 4

Wir untersuchen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n, y_n, z_n)$ komponentenweise auf Konvergenz.

1. Komponente (x_n)

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{n} + 3^n + n^3}{10 + n^9 + 9^n}$$

Da der Term 9^n im Nenner am stärksten wächst, erweitern wir den Bruch mit $\frac{1}{9^n}$:

$$x_n = \frac{\frac{\sqrt[n]{n}}{9^n} + (\frac{3}{9})^n + \frac{n^3}{9^n}}{\frac{10}{9^n} + \frac{n^9}{9^n} + 1}$$

Bekanntlich gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und Exponentialfunktionen wachsen schneller als Polynome. Daher gehen alle Zählerterme und die ersten beiden Nennerterme gegen 0.

$$\implies \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{0+0+0}{0+0+1} = 0$$

2. Komponente (y_n)

Hier liegt der Fall $\infty - \infty$ vor. Wir erweitern mit dem konjugierten Ausdruck:

$$y_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{(n^2+n+1) - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} + \sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}$$

$$= \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Für $n \to \infty$ gehen die Terme $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \to 0$.

$$\implies \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

3. Komponente (z_n)

$$z_n = \frac{1}{3}\log(n^3) - \log(n+2) = \log((n^3)^{1/3}) - \log(n+2)$$

$$= \log(n) - \log(n+2) = \log\left(\frac{n}{n+2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{n}{n(1+\frac{2}{n})}\right) = \log\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right)$$

Da der Logarithmus stetig ist und $\frac{2}{n} \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \log(1) = 0$$

$\Longrightarrow$ Die Folge konvergiert gegen den Vektor:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$