Lernzettel

Pascal Diller

October 22, 2024

Contents

Logik

- ”$\wedge$”: **Und**
- ”$\vee$”: **Oder**
- ”$\neg$”: **Nicht** (Verneinung)
- $A \implies B$: A **impliziert**B
- $A \impliedby B$: A wird durch B **impliziert**
- $A \iff B$: A ist äquivalent zu B
  Es gilt: $A \implies B$ und $A \impliedby B$
- $\forall$: **Für alle**
- $\exists$: **Es existiert (mindestens) ein**

Mengen

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von (mathematischen) Objekten.
Die Objekte in einer Menge werden als **Elemente** bezeichnet.

- $x \in M$: x in/Element M
- $x \notin M$: x nicht in/Element M

Defintion einer Menge:

- Aufzählung:

  $M_1 = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, -1\}; \quad M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
  Es kommt **nicht** auf die **Reihenfolge** und **nicht** auf **Verdopplungen** an: $\{1, 3, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$

- Beschreibung:

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \leq 1\} = [-1, 1]$$

Menge B ist eine **Teilmenge** von Menge A, wenn für jedes $x \in A$ auch $x \in B$ gilt.

- $A \subset B$ ("A ist eine Teilmenge von B")
- $A \supset B$ ("B ist eine Teilmenge von A")

Mengenoperationen:

- **Vereinigung** der Mengen A und B
  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ ("A vereinigt B")
- **Durchschnitt** der Mengen A und B
  $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ ("A geschnitten B")
- **Differenzmenge** der Mengen A und B
  $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ ("A ohne B")

Kartesisches Produkt:
sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ Mengen, dann ist

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i, \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

die Menge der n-**Tupel** mit i-ter Koordinate x_i in X_i für $i = 1, \ldots, n$.

Potenzmenge:
Die Menge aller Teilmengen einer Menge X heißt Potenzmenge von X und wird mit $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ bezeichnet:

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subset X\}$$

Es gilt immer: $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ und $X \in \mathcal{P}(X)$.
Beispiel: Sei $X = \{1, 2, 3\}$. Dann ist

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2.3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Sei P eine Menge bestehend aus Mengen. Dann steht

$$\bigcup_{Y \in P} Y = \{y : \text{ es gibt } Y \in P \text{ so dass } y \in Y\}$$

für die (möglicherweise unendliche) Vereinigung aller Mengen in P.

Partitionen:
Sei X eine Menge. Eine Partition von X ist eine Teilmenge $P \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ sodass

- für alle $Y, Z \in P$ mit $Y \neq Z, Y \cap Z = \emptyset$ (Y und Z sind disjunkt).
- $\bigcup_{Y \in P} Y = X$.

Definierte Mengen:

- Leere Menge: $\emptyset = \{\}$
- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ $(0 \notin \mathbb{N})$
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$
- Relle Zahlen: $\mathbb{R}$, Menge aller **rellen Zahlen**, die man **nicht abzählen** kann

Es gilt: $\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R}$

Relationen

Eine **(binäre) Relation** zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Teilmenge

$$\mathrm{R} \in X \times Y$$

Im Falle $X = Y$ sprechen wir von einer Relation auf X.
$x \in X$ steht in Relation zu $y \in Y$ genau dann wenn $(x, y) \in \mathrm{R}$.
Auch geschrieben: $x\,\mathrm{R}\,y$ oder $x \sim_{\mathrm{R}} y$ für $(x, y) \in \mathrm{R}$ und $x\,\not{\mathrm{R}}\,y$ oder $x \nsim_{\mathrm{R}} y$ für $(x, y) \notin \mathrm{R}$.

Seien X, Y und Z Mengen und $\mathrm{R} \subset X \times Y$, $\mathrm{S} \subset Y \times X$ Relationen.

- Die zu R **inverse Relation** ist

$$\mathrm{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y \in \mathrm{R})\}$$

- Die Verkettung von R und S ist

$$\mathrm{S} \circ \mathrm{R} = \{(x, z) \in X \times Z : \text{es gibt } y \in Y \text{ mit } (x, y) \in \ \mathrm{R} \text{ und } (x, y) \in \mathrm{S}\}$$

Eine binäre Relation R auf der Menger X heißt:

- **relfexiv**, wenn $x\,\mathrm{R}\,x$ für alle $x \in X$.
- **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in X$ aus $x\,\mathrm{R}\,y$ stets $y\,\mathrm{R}\,x$ folgt.

- **antisymmetrische**, wenn für alle $x, y \in X$ aus $x \mathrm{R} y$ und $y \mathrm{R} x$ stets $x = y$ folgt.
- **asymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in X$ aus $x \mathrm{R} y$ stets $y \not\mathrm{R} x$ folgt.
- **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in X$ aus $x \mathrm{R} y$ und $y \mathrm{R} y$ stets $x \mathrm{R} z$ folgt.

Äquivalenzrelationen

Zahlensysteme

Binärsystem

Eine Binärzahl b mit $n + 1$ Stellen hat die Form $b_n \dots b_1 b_2$ mit $b_i \in \{0, 1\}$.

Sie entspricht der Dezimalzahl d mit $d = b_n \cdot 2^n + \cdots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$

Beispiel: $1101_2 = 1 \cdot 2^3 +^{\cdot} 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$

Carry-Flag

Wenn bei einer Addition oder Subtraktion ein **Übertrag in der höchsten Stelle** auftritt, wird die Carry-Flag gesetzt. Dieser kann von nachfolgenden Befehlen aufgerufen werden.

Zweierkomplement

Um **negative Zahlen** darzustellen wird der entsprechende Wert des **höchsten Bits negiert**.

Beispiel bei 4 Bit: $1011_{2c} = 1 \cdot (-2^3) + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = -5$

Um von einer positiven ganzen Zahl zur negativen Zahl (oder umgekehrt) gleichen Betrags zu gelangen werden **alle Bits invertiert** und **1 zum Ergebnis addiert**.

Hexadezimalsystem

Eine Hexadezimalzahl h mit $n+1$ Stellen hat die Form $h_n \dots h_1 h_0$ mit $h_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A(\widehat{=}10), B(\widehat{=}11), C(\widehat{=}12), D(\widehat{=}13), E(\widehat{=}14), F(\widehat{=}15)\}$.

Sie entspricht der Dezimalzahl d mit $d = h_n \cdot 16^n + h_1 \cdot 16^1 + h_0 \cdot 16^0$.

Beispiel: $\texttt{5F}_{16} = 5 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 95_{10}$

4 Binärziffern lassen sich zu einer Hexadezimalzahl zusammenfassen:
$\underbrace{1101}_{13_{10}=D_{16}}\ \underbrace{0011_2}_{3_{16}} = \texttt{D3}_{16}$

Oktalsystem

Eine Oktalzahl o mit $n+1$ Stellen hat die Form $o_n \dots o_1 o_0$ mit $o_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Sie entspricht der Dezimalzahl d mit $d = o_n \cdot 8^n + \dots + o_1 \cdot 8^1 + o_0 \cdot 8^0$.

Beispiel: $36_8 = 3 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 30_{10}$

3 Binärziffern lassen sich zu einer Oktalzahl zusammenfassen:
$\underbrace{11}_{3_8}\underbrace{010}_{2_8}\underbrace{011_2}_{3_8} = 323_8$

Festkommazahlen

Eine Festkommazahl besteht aus einer **festen Anzahl von Ziffern vor und nach dem Komma**.

2^3	2^2	2^1	2^0		2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
1	1	0	1	.	0	1	0	1

Gleitkommazahlen: IEEE 754

3 Formate:

- Single Precision: 32 Bit
- Double Precision: 64 Bit
- Extended Precision: 80 Bit

Basiert auf der wissenschaftlichen Notation.

Aufbau

Single Precision:	1 Bit Vorzeichen	8 Bit Exponent	23 Bit normalisierte Mantisse
Double Precision:	1 Bit Vorzeichen	11 Bit Exponent	52 Bit normalisierte Mantisse

Vorzeichen: $0 = +$; $1 = -$

Exponent: wird gespeichert, indem man den festen Biaswert (127:SP, 1023:DP) addiert.

Die Mantisse beginnt mit einem "Hidden Bit" (immer 1).

Dezimal zu IEEE 754

Beispiel: -62.058

1. Vorzeichen Bit bestimmen

   Vorzeichen Bit = 1

2. Zu pur Binär umwandeln

   $62.058_{10} = 111110.10010100_2$

3. Normalisieren für Mantisse und Exponent (ohne Bias)

   $111110.10010100_2 = 1.1111010010100_2 \cdot 2^5$

4. Exponent mit Bias bestimmen

   $5 + 127 = 132_{10} = 10000100_2$

5. Führende 1 der Mantisse abschneiden

   $1.1111010010100_2 \rightarrow 1111010010100_2$

6. Zusammenfügen

   $$-62.058_{10} = \underbrace{1}_{\substack{\text{Vorzeichen}\\\text{Bit}}}\ \underbrace{10000100}_{\text{Exponent}}\underbrace{1111010010100}_{\text{Mantisse}}$$

IEEE 754 zu Dezimal

Beispiel: 01000010011010100000000000000000

1. Vorzeichen bestimmen

   Vorzeichen: +

2. Exponent bestimmen (Bias muss abgezogen werden)

   $10000100_2 - 127_{10} = 132_{10} - 127_{10} = 5_{10}$

3. Mantisse bestimmen

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
1	1	0	1	0	1

   $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{53}{64} = 0.828125$

4. 1 zur Mantisse addieren (Hidden Bit) und Vorzeichen einrechnen

   1.828125

5. Ergebnis berechnen

   $1.828125 \cdot 2^5 = 58.5_{10}$

Summenzeichen und Produktzeichen

Summenzeichen

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Die Summen der Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

Dabei gilt: $i \widehat{=}$ **Summationsindex**; $m/n \widehat{=}$ **untere/obere Summationsgrenze**.
Rechenregeln:

$$\sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_1) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

Produktzeichen

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Das Produkt der Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Dabei gilt: $i \widehat{=}$ **Laufindex**; $m/n \widehat{=}$ **untere/obere Grenze**.

Rechenregeln

Bruchregeln

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Potenzgesetze

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

$$a^0 = 1, a \in \mathbb{R}$$

Wurzelgesetze

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \; b \neq 0$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, a > 0$$

Logarithmengesetze

$$\log 1 = 0 \qquad \log e = 1$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b) \qquad \log(a^x) = x \log a$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y \qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

Trigonometrie

Bogenmaß

Der Bogenmaß ist die Länge des Kreisbogens des Einheitskreises und gibt den Betrag des Winkels an. Der Umfang des Einheitskreises beträgt 2π.

Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

Umwandlung von Winkel α von Gradmaß zu Bogenmaß: Bogenmaß $= \alpha \frac{\pi}{180°}$
Umwandlung von Winkel α von Bogenmaß zu Gradmaß: Gradmaß $= \alpha \frac{180°}{\pi}$

Differentialrechnung

Ableitungsregeln

Natürliche Potenzen

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{x-1}$$

Summenregel

$$\frac{d}{dx} \left(u(x) + v(x) \right) = \frac{d}{dx} u(x) + \frac{d}{dx} v(x)$$

Produktregel

$$\frac{d}{dx} (u(x) \cdot v(x)) = \frac{d}{dx} u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{d}{dx} v(x)$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx} u(v(x)) = \frac{d}{dv} u(v) \cdot \frac{d}{dx} v(x)$$

Ebenen

Parameterform

$$E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$$\vec{p} \mathrel{\widehat{=}} \text{Stützvektor}$$
$$\vec{u}, \vec{v} \mathrel{\widehat{=}} \text{Spannvektoren}$$

Normalenform

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{x} \mathrel{\widehat{=}} \text{Ortsvektor}$$
$$\vec{p} \mathrel{\widehat{=}} \text{Stützvektor}$$
$$\vec{n} \mathrel{\widehat{=}} \text{Normalenvektor, orthogonal zu Spannvektoren}$$

Koordinatenform

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d = \vec{n} \cdot \vec{p}$$

Umwandlung von Koordinatenform in Normalenform: