Übungsblatt 1

Pascal Diller (rip62jik), Timo Rieke (bop59buz)

17. April 2025

Aufgabe 1

Sei $z = 1 + i$.

(i)

$$
\begin{aligned}
z^5 = (1+i)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 1^{5-k} i^k \\
= \binom{5}{0} i^0 + \binom{5}{1} i^1 + \binom{5}{2} i^2 + \binom{5}{3} i^3 + \binom{5}{4} i^4 + \binom{5}{5} i^5 \\
= 1 \cdot 1 + 5 \cdot i + 10 \cdot (-1) + 10 \cdot (-i) + 5 \cdot 1 + 1 \cdot i \\
= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = (1 - 10 + 5) + (5 - 10 + 1)i \\
= -4 - 4i
\end{aligned}
$$

(ii)

Für $z = 1 + i$: Betrag $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Argument ϕ: $\tan(\phi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{1}{1} = 1$. Da z im 1. Quadrant liegt, ist $\phi = \frac{\pi}{4}$. Polarform z: $r = \sqrt{2}$, $\phi = \pi/4$. Also $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Für z^5:

$$z^5 = (re^{i\phi})^5 = r^5 e^{i5\phi}$$

$$r^5 = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$$

$$5\phi = 5 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Polarform z^5: $r_5 = 4\sqrt{2}$, $\phi_5 = 5\pi/4$. Also $z^5 = 4\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$.

(iii)

$$z^5 = 4\sqrt{2}e^{i5\pi/4} = 4\sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4))$$

Mit $\cos(5\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin(5\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z^5 = 4\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i(-\frac{1}{\sqrt{2}}))$$

$$z^5 = 4\sqrt{2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + i \cdot 4\sqrt{2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$z^5 = -4 - 4i$$

$\mathrm{Re}(z^5) = -4$, $\mathrm{Im}(z^5) = -4$.

(iv)

$$z^{17} = r^{17}e^{i17\phi} = (\sqrt{2})^{17}e^{i17\pi/4}$$

$$r^{17} = (\sqrt{2})^{17} = 2^{17/2} = 2^8\sqrt{2} = 256\sqrt{2}$$

Der Winkel ist $17\pi/4 = 4\pi + \pi/4$, äquivalent zu $\pi/4$.

$$z^{17} = 256\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 256\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$$

Mit $\cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z^{17} = 256\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$z^{17} = 256\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot 256\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z^{17} = 256 + 256i$$

$\mathrm{Re}(z^{17}) = 256$, $\mathrm{Im}(z^{17}) = 256$.

Aufgabe 2

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

Sei $r = |z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} = e^r$ konvergiert für alle $r \in \mathbb{R}$. Daher konvergiert $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit konvergiert $\exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$ absolut $\forall z \in \mathbb{C}$.

(ii)

Setze $z = i\varphi$:

$$\exp(i\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!}$$

Da die Reihe absolut konvergiert:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\varphi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Mit $i^{2k} = (-1)^k$ und $i^{2k+1} = i(-1)^k$:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\varphi^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Reihendarstellungen:

$$= \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Aufgabe 3

(i)

Die Menge ist nicht leer (min. 3 Elemente)

Funktionenkombinationen sind assoziativ, also gilt $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Somit ist die Operation assoziativ.

Die Identitätsabbildung Id_X erfüllt $f \circ \mathrm{Id}_X = \mathrm{Id}_X \circ f = f$ für alle $f \in F$. Somit hat die Operation ein neutrales Element.

Zu jeder bijektiven Abbildung $f \in F$ gibt es eine bijektive Inverse f^{-1}. Somit ist jedes Element invertierbar.

$\implies (F, \circ, \mathrm{Id}_X)$ ist eine Gruppe.

(ii)

Die Gruppe ist nicht kommutativ, da sich bereits für $X = a, b, c$ permutationen f, g finden lassen, für die gilt: $f \circ g \neq g \circ f$.
Beispiel:

$f = (a\, b)$
$g = (b\, c)$

$$\begin{aligned} f \circ g \rightarrow \quad & f(g(a)) = f(a) = b \\ & f(g(b)) = f(c) = c \\ & f(g(c)) = f(b) = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f \rightarrow \quad & g(f(a)) = g(a) = c \\ & g(f(b)) = g(c) = a \\ & g(f(c)) = g(b) = b \end{aligned}$$

$\implies f \circ g \neq g \circ f$

Aufgabe 4

(i)

$(k + l) \cdot (k + (-l))$	
$= kk + k(-l) + lk + l(-l)$	Multiplikation steht distributiv über der Addition
$= kk + (-(kl)) + kl + (-(ll))$	$(-k)l = k(-l) = -(kl)$
$= kk + (-(ll))$	inv.

(ii)

Wenn n nicht prim ist, dann gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $0 < a, b < n$ mit $a \cdot b = 0 \mod n$.
Da $a, b \neq 0$, aber $a \cdot b = 0$ gibt es Nullteiler und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist kein Körper.
Beispiel:
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$2 \cdot 3 = 6 \mod n = 0$ aber $a, b \neq 0 \implies$ Nullteiler