Mathe 3 Übungsblatt 4

Pascal Diller, Timo Rieke

Aufgabe 1

(i)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k}}{2k!} x^{k+2} = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k}}{2k!} x^k$$

x^2 beeinflusst den Konvergenzradius nicht
Sei $c_k = \frac{e^{-k}}{2k!}$, dann:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Anwenden des Quotientenkriterium um Grenzwert $L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|$ zu berechnen.

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{e^{-(k+1)}}{2(k+1)!} \cdot \frac{2k!}{e^{-k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{e^{-k} \cdot e^{-1}}{e^{-k}} \cdot \frac{2k!}{2(k+1) \cdot k!} \right|$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left| e^{-1} \cdot \frac{1}{k+1} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{e(k+1)} \right| = 0$$

Der Konvergenzradius R ist $R = \frac{1}{L}$. Da $L = 0$, ist $R = \infty$

(ii)

Der Entwicklugspunkt ist $x_0 = 2$
Bestimmen vom Konvergenzradius R fuer den Koeffizienten $c_k = (-1)^k \cdot \frac{k}{3^k}$ mit Quotientkriterium:

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{(-1)^k \cdot k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| (-1) \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{3^k}{3^k \cdot 3} \right|$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{3} \right) = \lim_{k\to\infty} \left((1 + \frac{1}{k}) \cdot \frac{1}{3} \right) = \left((1+0) \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Der Konvergenzradius ist $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1/3} = 3$

Die Potenzreihe konvergiert fuer $|x - 2| < 3$, was dem offenen Intervall $(2 - 3,\ 2 + 3) = (-1, 5)$ entspricht.

1. Randpunkt

$x = -1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{k}{3^k} \cdot (-3)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{k}{3^k} \cdot (-1)^k 3^k$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(-1)^k \cdot k \cdot \frac{3^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k} \cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} k$$

Diese Reihe ist divergent, da ihre Glieder kein Nullfolge bilden.

2. Randpunkt

$x = 5$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{k}{3^k} \cdot 3^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot k \cdot \frac{3^k}{3^k}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k$$

Die Reihe $= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k = -1 + 2 - 3 + 4 - \ldots$ ist divergent, da ihre Glieder kein Nullfolge bilden.

Also konvergiert die Potenzreihe fuer $x \in (-1, 5)$ und divergiert an beiden Randpunkten.

Aufgabe 2

(f_1)

Untersuchung des Verhaltens von $f_1(x)$ für $x \to 0$. Dazu nutzen wir die Taylor-Entwicklung der Kosinusfunktion um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

Für den Zähler von $f_1(x)$ ergibt sich:

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = \frac{x^2}{2} - O(x^4)$$

Da $x^2 = |x|^2$ und $O(-x^4) = O(x^4)$ gilt:

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}|x|^2 + O(|x|^4)$$

Einsetzen der Funktion $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \frac{\frac{1}{2}|x|^2 + O(|x|^4)}{|x|^{1/2}} = \frac{1}{2}|x|^{2-1/2} + O(|x|^{4-1/2}) = \frac{1}{2}|x|^{3/2} + O(|x|^{7/2})$$

Das dominante Verhalten von $f_1(x)$ nahe $x = 0$ ist also proportional zu $|x|^{3/2}$.

Analyse des Grenzwertes $\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{|x|^s}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{|x|^s} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}|x|^{3/2} + O(|x|^{7/2})}{|x|^s} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2}|x|^{3/2-s} + O(|x|^{7/2-s}) \right)$$

(i) $f_1(x) = o(|x|^s)$ (für $x \to 0$) Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Grenzwert 0 ist. Dies ist der Fall, wenn der Exponent des dominanten Terms $\frac{1}{2}|x|^{3/2-s}$ positiv ist:

$$\frac{3}{2} - s > 0 \implies s < \frac{3}{2}$$

(ii) $f_1(x) = O(|x|^s)$ (für $x \to 0$) Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Grenzwert endlich (beschränkt) ist. Dies ist der Fall, wenn der Exponent des dominanten Terms nicht-negativ ist:

$$\frac{3}{2} - s \geq 0 \implies s \leq \frac{3}{2}$$

(Für den Fall $s = 3/2$ ist der Grenzwert $\frac{1}{2}$, was endlich ist).

Ergebnis für f_1:

- (i) $f_1(x) = o(|x|^s)$ gilt für $s \in (-\infty, 3/2)$.
- (ii) $f_1(x) = O(|x|^s)$ gilt für $s \in (-\infty, 3/2]$.

(f_2)

Untersuchen von $f_2(x)$ für $x \to 0$. Da $x^2 \to 0^+$ (für $x \to 0$), geht $1/x^2 \to \infty$ und somit der Exponent $-1/x^2 \to -\infty$. Die Funktion $f_2(x)$ geht also "extrem schnell" gegen 0.

Analyse des Grenzwert $L = \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)}{|x|^s}$ für ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^s}$$

Substituieren $y = \frac{1}{|x|}$. Wenn $x \to 0$, geht $y \to \infty$. Weiterhin gilt $1/x^2 = (1/|x|)^2 = y^2$ und $|x|^s = (1/y)^s = y^{-s}$. Der Grenzwert lässt sich umschreiben zu:

$$L = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y^2}}{y^{-s}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^s}{e^{y^2}}$$

Die Exponentialfunktion e^{y^2} im Nenner wächst wesentlich schneller als jede Potenz y^s im Zähler, unabhängig davon, wie groß s gewählt wird.
Somit ist der Grenzwert für jedes $s \in \mathbb{R}$ gleich Null:

$$L = 0 \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}$$

(i) $f_2(x) = o(|x|^s)$ (für $x \to 0$) Wir benötigen $\lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)}{|x|^s} = 0$. Da $L = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$, ist diese Bedingung für alle $s \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(ii) $f_2(x) = O(|x|^s)$ (für $x \to 0$) Wir benötigen $\limsup_{x\to 0} \left|\frac{f_2(x)}{|x|^s}\right| < \infty$. Da der Grenzwert $L = 0$ (und 0 eine endliche Zahl ist), ist diese Bedingung ebenfalls für alle $s \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Ergebnis für f_2:

- (i) $f_2(x) = o(|x|^s)$ gilt für alle $s \in \mathbb{R}$.
- (ii) $f_2(x) = O(|x|^s)$ gilt für alle $s \in \mathbb{R}$.