Übung 2

Pascal Diller, Timo Rieke

November 4, 2024

1

(i)

$$R_1^{-1} = \{(z,x),(y,z)\}$$
$$R_1 \bullet\ R_2 = \{(x,z),(x,x),(y,y),(y,z)\}$$

(ii)

Überprüfen von R_2 auf
Reflexivität: R_2 ist Reflexiv, da $(x,x),(y,y),(z,z) \in R_2$
Symmetrisch: R_2 ist symmetrisch, da bei allen xRy ein yRx folgt.
Antisymmetrie: R_2 ist nicht antisymmetrisch, da Paare wie (x,y) und (y,x) enthalten sind, ohne dass x=y gilt.
Asymmetrie: R_2 ist nicht asymmetrisch, da $(x,y) \in R_2$ und $(y,x) \in R_2$
Transitivität: R_2 ist nicht transitiv, da z.B. aus (y,x) und (x,z) NICHT (y,z) folgt

(iii)

$R_1^2 = R_1 \bullet R_1 = (x,z),(z,y) \bullet (x,z),(z,y) = (x,y)$
$R_1^3 = R_1^2 \bullet R_1 = (x,z),(z,y) \bullet (x,y) = \emptyset$
Reflexive Hülle von R_1: $R_1 \cup (x,x),(y,y),(z,z) =$
Symmetrische Hülle von R_1: $R_1 \cup R_1^{-1} = (x,z),(z,y),(z,x),(y,x)$
Transitive Hülle von R_1: $(x,z),(z,y),(z,x)$

2

(i)

Die Relation ist asymmetrisch, da aus $f(0) < g(0)$ folgt, dass $f(0) \not> g(0)$
Die Relation ist transitiv, da bei einem $g < h$ ebenfalls folgen würde das $f < h$ ist.
$\implies$ strikte Ordnung

(ii)

Die Ordnung ist total, da zwischen den zwei Werten $f(0)$ und $g(0)$ immer gilt: $f(0) < g(0)$

3

(i)

R ist reflexiv, da wenn $x = y$ gilt: $f(x) = f(y)$
R ist symmetrisch, da wenn $x = y$ auch gilt: $y = x$
R ist transitiv, dan wenn $x = y$ und $y = z$, auch $x = z$
$\implies$ Äquivalenzrelation

(ii)

$$\begin{aligned}
[1] &= \{x \in X \mid f(x) = 1\} \\
[2] &= \{x \in X \mid f(x) = 2\} \\
[3] &= \{x \in X \mid f(x) = 3\} \\
[4] &= \{x \in X \mid f(x) = 4\}
\end{aligned}$$

4

(i)

$f_1 \circ f_2$ ist nicht wohldefiniert, da der Wertebereich von f_2 ($\mathbb{Q}$) nicht mit dem Definitionsbereich von f_1 ($\mathbb{N}$) übereinstimmt.

$f_1 \circ f_3$ ist nicht wohldefiniert, da der Wertebereich von f_3 ($\mathbb{R}$) nicht mit dem Definitionsbereich von f_1 ($\mathbb{N}$) übereinstimmt.

$f_2 \circ f_1 = 3 \cdot \frac{x-1}{3} + 4 = x - 1 + 4 = x + 3$

$f_3 \circ f_1 = \sqrt{(\frac{x-1}{3})^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2-2x+4}{3}}$

$f_2 \circ f_3$ ist nicht wohldefiniert, da der Wertebereich von f_3 ($\mathbb{R}$) nicht mit dem Definitionsbereich von f_2 ($\mathbb{Q}$) übereinstimmt.

$f_3 \circ f_2 = \sqrt{(3x+4)^2 + 1} = \sqrt{9x^2 + 24x + 16}$

(ii)

f_2 ist injektiv und nicht surjektiv, da für jedes x nur ein $y = 3x + 4$ definiert ist.

(iii)

$$f_1(\mathbb{N}) = \left\{\frac{n-1}{3}, n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$\text{Sei } n-1 = k$$
$$f_1(\mathbb{N}) = \left\{\frac{k}{3}, k \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\begin{aligned} f_1^{-1}([0,2]) &= 0 \leq \frac{x-1}{3} \leq 2 \\ &= 0 \leq x-1 \leq 6 \\ &= 1 \leq x \leq 7 \\ &= \{1,2,3,4,5,6,7\} \end{aligned}$$

5

Seien X und Y Mengen
Zu zeigen: Wenn $f : X \to Y$ injektiv ist, ist $f' : X \to f(X), x \to f(x)$ bijektiv.
Eine Funktion ist injektiv, wenn für alle x_1, x_2 gilt: $f'(x_1) = f'(x_2)$.
Sei also $f'(x_1) = f'(x_2) \implies f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
Daher ist f' injektiv
Sei $y \in f(X)$. Da $x \in X$ gilt $f(x) = y$
Daraus folgt: $f'(x) = f(x) = y$
Daher ist f' surjektiv
Da f' injektiv und surjektiv ist, ist f' ebenfalls bijektiv.