Übungsblatt 11

Pascal Diller, Timo Rieke

July 10, 2025

Aufgabe 1

(i)

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\text{Sei } g(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \text{ dann ist } f(x) = e^{g(x)}$$

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$\text{Da } e^{g(x)} > 0 \text{ gilt:}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Es existiert genau eine kritische Stelle an $x_0 = e$.

(ii)

Untersuchen des Vorzeichens von f'

Für $x \in (0, e) : \ln(x) < 1 \implies g'(x) > 0 \implies f'(x) > 0 \rightarrow$ streng monoton wachsend

Für $x \in (e, \infty) : \ln(x) > 1 \implies g'(x) < 0 \implies f'(x) < 0 \rightarrow$ streng monoton fallend

Aufgabe 3

(i)

Wenn $x \to \pi$, geht der Term $(\pi - x)$ gegen 0. Gleichzeitig geht $\tan(\frac{\pi}{2})$ gegen $\tan(\frac{\pi}{2})$, was gegen unendlich strebt. Also: $0 \cdot \infty$
Da $\tan(\alpha) = \frac{1}{\cot \alpha}$:

$$(\pi - x)\tan(\frac{x}{2} = \frac{\pi - x}{\cot(\frac{x}{2})}$$

Bei diesem Bruch streben sowohl nenner, als auch Zaehler gegen 0.

$$\frac{d}{dx}(\pi - x) = -1$$

$$\frac{d}{dx}(\cot(\frac{x}{2})) = -\csc^2(\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\sin^2(\frac{x}{2})}$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{-1}{-\frac{1}{2}\csc^2(\frac{x}{2})} = \lim_{x \to \pi} 2\sin^2(\frac{x}{2})$$

$$\pi \text{ einsetzen: } 2\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 2(1)^2 = 2$$

Der Grenzwert ist 2.