Mathe 3 Übungsblatt 1

Pascal Diller, Timo Rieke

Aufgabe 1

(i)

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{3}{2}x^2+2x-5\right)dx = [\frac{1}{2}x^3+x^2-5x]_{-1}^{2}$$

$$= (\frac{1}{2}\cdot 2^3+2^2-5\cdot 2)-(\frac{1}{2}\cdot(-1)^3+(-1)^2-5\cdot(-1)) = (4+4-10)-(-0.5+1+5) = -7.5$$

(ii)

$$\int_{-100}^{100}\sinh(x)dx = \big[\cosh(x)\big]_{-100}^{100} = \cosh(100)-\cosh(-100)$$

$$\text{da } \cosh(100)=\cosh(-100)\ ,\ \int_{-100}^{100}\sinh(x)dx = 0$$

(iii)

$$\int_{-1}^{1}(|x|+1)dx = \int_{-1}^{0}(-x+1)dx + \int_{0}^{1}(x+1)dx$$

$$= [-\frac{1}{2}x^2+x]_{-1}^{0} + [\frac{1}{2}x^2+x]_{0}^{1}$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{2}0^2+0\right)-\left(-\frac{1}{2}(-1)^2+(-1)\right)\right)+\left(\left(-\frac{1}{2}1^2+1\right)-\left(-\frac{1}{2}0^2+0\right)\right)$$

$$= \frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 3$$

(iv)

$$\int_{0}^{\ln 2}\tanh(x)dx = \int_{0}^{\ln 2}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}dx$$

Sei $u=\cosh(x)$, dann ist $\frac{du}{dx}=\sinh(x)$

$$\int_{0}^{\ln 2}\frac{\frac{du}{dx}}{u}dx = \int_{0}^{\ln 2}\frac{du}{dx}\frac{dx}{u} = \int_{0}^{\ln 2}\frac{du}{u} = \int_{0}^{\ln 2}\frac{1}{u}du$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{u}$ ist $\ln(u) \implies \ln|\cosh(x)|$
Da $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \geq 1$ kann man schreiben: $\ln(\cosh(x))$

$$\implies \int_0^{\ln 2} \tanh(x)dx = \big[\ln(\cosh(x))\big]_0^{\ln(2)} = \ln(\cosh(\ln(2))) - \ln(\cosh(0))$$

$$= \ln(\frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2}) - \ln(\frac{e^0 + e^0}{2}) = \ln(\frac{2+\frac{1}{2}}{2}) - \ln(\frac{1+1}{2})$$

$$= \ln(\frac{5}{4}) - \ln(1) = \ln(\frac{5}{4}) - 0 = \ln(\frac{5}{4})$$

$$\implies \int_0^{\ln 2} \tanh(x)dx = \ln(\frac{5}{4})$$

Aufgabe 3

(iii)

$$\int_0^{\sinh 1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Sei $x = \sinh(t)$, dann ist $dx = \cosh(t)dt$ und das Intervall $[0, 1]$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+(\sinh(t))^2}}\cosh(t)dt$$

Anwenden der Hyperbolischen Identitaet:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(t)}}\cosh(t)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\cosh(t)}\cosh(t)dt = \int_0^1 1dt = 1$$

Aufgabe 4

(i)

Nach dem Mittelwertsatz gilt fuer $J = [a, b]$:

$$\frac{1}{|J|} \cdot \int_J f(x)dx = f(c) \iff \int_J f(x)dx = f(c) \cdot |J|$$

Es gilt: $\int_J f(x)dx = 0$

$$0 = f(c) \cdot |J| = f(c) \cdot (b - a)$$

Da $b > a$, muss $|J| > 0$, also muss $f(c) = 0$ um die Gleichung zu erfuellen.
Also gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$

(ii)

Beweis durch Widerspruch:
Angenommen $g(x)$ hat keine Nullstelle in $[a, b]$
Da g keine stetig ohne Nullstelle ist, muessen alle $g(x)$ fuer $x \in [a, b]$ entweder > 0 oder < 0 sein.

Fuer $g(x) > 0$:
Da $f(x) \geq \epsilon > 0$, also $f(x) > 0$, ist $f(x) \cdot g(x) > 0$
Das Integral einer stetigen Function h mit $h(x) > 0$ ueber $[a, b]$, ist ebenfalls ueber das Intervall positiv.
Das ist ein Widerspruch zur Angabe, dass $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$

Fuer $g(x) < 0$:
Da $f(x) > 0$ ist $f(x) \cdot g(x) < 0$ Das Integral einer stetigen Funktion, die ueberall negativ ist, ist ebenfalls negativ.
Das ist auch ein Widerspruch zur Angabe.

$\Longrightarrow$ $g(x)$ muss mindestens eine Nullstelle $c \in [a, b]$ haben.