Mathe 3 Übungsblatt 1

Pascal Diller, Timo Rieke

Aufgabe 1

$$
\begin{array}{ll}
F_1 = 0 & F_1' = 0' = 0 = f_1 \\
F_2 = -\cos x & F_2' = (-\cos x)' = \sin x = f_2 \\
F_3 = \sinh x & F_3' = (\sinh x)' = \cosh x = f_3 \\
F_4 = \ln(\cosh x) & F_4' = \frac{1}{\cosh x} \cdot (\cosh x)' = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x = f_4 \\
F_5 = \log(x+1) & F_5' = \frac{1}{x+1} = f_5 \\
F_6 = \frac{1}{2}x^{10} + \frac{1}{2}x^6 & F_6' = \frac{10}{2}x^9 + \frac{6}{2}x^5 = 5x^9 + 3x^5 = f_6 \\
F_7 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} & F_7' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = f_7 \\
F_8 = \frac{2^x}{\ln 2} & F_8' = \frac{1}{\ln 2} \cdot (2^x \cdot \ln 2) = 2^x = f_8
\end{array}
$$

Aufgabe 2

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{kb}{n} - \frac{(k-1)b}{n} = \frac{b}{n}$, da die Zerlegung Äquidistant ist.

$$
\begin{aligned}
\sum\left(f, Z^{(n)}), \xi^{(n)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \\
= \sum_{k=1}^{n}\left(k\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2b^3}{n^3} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 \\
&= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{b^3n(n+1)(2n+1)}{6n^3} &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \\
= \frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot (1+\frac{1}{n}) \cdot (2+\frac{1}{n}) &= \frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot (1+0) \cdot (2+0) = \frac{2b^3}{6} = \frac{b^3}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\sum\left(f, Z^{(n)}, \xi^{(n)}\right) = \frac{b^3}{3}
$$

Aufgabe 3

(i)

Seien $a < b$, $J := [a, b]$ und $f \in C^0(J)$ mit $f \geq 0$. Sei $I \subset J$ ein Intervall. Dann gilt:

$$\int_I f(x)dx \leq \int_J f(x)dx$$

Beweis:
Sei $a < x < b, I := [a, x]$
Somit ist $\int_I f(x)dx + \int_x^b f(x)dx = \int_J f(x)dx$
Da $f \geq 0$ ist $\int f \geq 0$
Sei $c \geq 0$
Somit ist $\int_I f(x)dx + c = \int_J f(x)dx$
Also ist $\int_I f(x)dx \leq \int_J f(x)dx$

(ii)

Zu zeigen: $\int_{-1}^1 cosh(x)dx \geq 2$

$$cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Ebenfalls wissen wir das $cosh(0) = 1$, streng monton wachsend in $[0, \infty)$, sowie streng monton fallend in $(-\infty, 0]$.
Außerdem ist cosh gerade, d.h. es gilt cosh(-x) = cosh(x) für $x \in \mathbb{R}$

$$cosh(1) = \frac{1}{2}(e + e^{-1}) \approx 1,54$$

Der kleinte Wert der Funktion ist bei $x = 0$. Daraus folgt dass $cosh(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Da $cosh(x) \geq 1$ folgt $\int_{-1}^1 cosh(x)dx \geq 1 * (1 - (-1)) = 2$

Aufgabe 4

(i)

$$\int_0^1 (x^2 + ax)dx = \frac{4}{3}$$

$$[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}a1^2 - (\frac{1}{3}0^3 + \frac{1}{2}a0^2) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}a - 0 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2}a = 1$$
$$a = 2$$

(ii)

$$\int_0^\beta x^2 dx = 9$$
$$[\frac{1}{3}x^3]_0^\beta = 9$$
$$\frac{1}{3}\beta^3 - (\frac{1}{3}0^3) = 9$$
$$\frac{1}{3}\beta^3 = 9$$
$$\beta^3 = 27$$
$$\beta = 3$$

(iii)

$$\int_3^0 (\gamma x^2 - 2x - 2)dx = -12$$
$$[(\frac{1}{3}\gamma x^3 - \frac{1}{2} * 2x^2 - 2x)]_3^0 = -12$$
$$(\frac{1}{3}\gamma 0^3 - \frac{1}{2} * 2 * 0^2 - 2 * 0) - (\frac{1}{3}\gamma 3^3 - \frac{1}{2} * 2 * 3^2 - 2 * 3 = -12)$$
$$-(\frac{1}{3}\gamma 3^3 - \frac{1}{2} * 2 * 3^2 - 2 * 3 = -12)$$
$$-(9\gamma - 9 - 6) = -12$$
$$-9\gamma + 15 = -12$$
$$-9\gamma = -27$$
$$\gamma = 3$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
\mu &:= \frac{1}{4}\int_0^4 x^2 - 4x + 1 dx \\
&= \frac{1}{4}[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x]_0^4 \\
&= \frac{1}{4}(\frac{1}{3} * 4^3 - 2 * 4^2 + 4 - (\frac{1}{3} * 0^3 - 2 * 0^2 + 0)) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{64}{3} - 32 + 4 - 0) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{64}{3} - 28) \\
&= \frac{64}{12} - 7 \\
&= -\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$