Übung 2

Pascal Diller, Timo Rieke

October 28, 2024

1

(i)

$$R_1^{-1} = \{(z, x), (y, z)\}$$
$$R_1 \bullet \ R_2 = \{(x, z), (x, x), (y, y), (y, z)\}$$

(ii)

Überprüfen von R_2 auf
Reflexivität: R_2 ist Reflexiv, da $(x, x), (y, y), (z, z) \in R_2$
Symmetrisch: R_2 ist symmetrisch, da bei allen xRy ein yRx folgt.
Antisymmetrie: R_2 ist nicht antisymmetrisch, da Paare wie (x, y) und (y, x) enthalten sind, ohne dass x=y gilt.
Asymmetrie: R_2 ist nicht asymmetrisch, da $(x, y) \in R_2$ und $(y, x) \in R_2$
Transitivität: R_2 ist nicht transitiv, da z.B. aus (y, x) und (x, z) NICHT (y, z) folgt

(iii)

$R_1^2 = R_1 \bullet R_1 = (x, z), (z, y) \bullet (x, z), (z, y) = (x, y)$
$R_1^3 = R_1^2 \bullet R_1 = (x, z), (z, y) \bullet (x, y) = \emptyset$
Reflexive Hülle von R_1: $R_1 \cup (x, x), (y, y), (z, z) =$
Symmetrische Hülle von R_1: $R_1 \cup R_1^{-1} = (x, z), (z, y), (z, x), (y, x)$
Transitive Hülle von R_1: $(x, z), (z, y), (z, x)$

2

(i)

Die Relation ist asymmetrisch, da aus $f(0) < g(0)$ folgt, dass $f(0) \not> g(0)$
Die Relation ist transitiv, da bei einem $g < h$ ebenfalls folgen würde das $f < h$ ist.
$\implies$ strikte Ordnung

(ii)

Die Ordnung ist total, da zwischen den zwei Werten $f(0)$ und $g(0)$ immer gilt: $f(0) < g(0)$

3

(i)

R ist reflexiv, da wenn $x = y$ gilt: $f(x) = f(y)$
R ist symmetrisch, da wenn $x = y$ auch gilt: $y = x$
R ist transitiv, dan wenn $x = y$ und $y = z$, auch $x = z$
$\implies$ Äquivalenzrelation

(ii)

$$
\begin{gathered}
[1] = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \\
[2] = \{x \in X \mid f(x) = 2\} \\
[3] = \{x \in X \mid f(x) = 3\} \\
[4] = \{x \in X \mid f(x) = 4\}
\end{gathered}
$$

4

(i)

(ii)

f_2 ist injektiv und nicht surjektiv, da für jedes x nur ein $y = 3x+4$ definiert ist.

(iii)

$$
\begin{gathered}
f_1(\mathbb{N}) = \left\{\frac{n-1}{3}, n \in \mathbb{N}\right\} \\
\text{Sei } n - 1 = k \\
f_1(\mathbb{N}) = \left\{\frac{k}{3}, k \in \mathbb{N}\right\}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f_1^{-1}([0,2]) = 0 \leq \frac{x-1}{3} \leq 2 \\
= 0 \leq x - 1 \leq 6 \\
= 1 \leq x \leq 7 \\
= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}
\end{gathered}
$$

5

Seien X und Y Mengen
Zu zeigen: Wenn $f : X \to Y$ injektiv ist, ist $f' : X \to f(X), x \to f(x)$ bijektiv.
Eine Funktion ist injektiv, wenn für alle x_1, x_2 gilt: $f'(x_1) = f'(x_2)$.
Sei also $f'(x_1) = f'(x_2) \implies f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
Daher ist f' injektiv
Sei $y \in f(X)$. Da $x \in X$ gilt $f(x) = y$
Daraus folgt: $f'(x) = f(x) = y$
Daher ist f' surjektiv
Da f' injektiv und surjektiv ist, ist f' ebenfalls bijektiv.