

Übung 2

Pascal Diller, Timo Rieke

October 28, 2024

1

(i)

$$R_1^{-1} = \{(z, x), (y, z)\}$$

$$R_1 \bullet R_2 = \{(x, z), (x, x), (y, y), (y, z)\}$$

(ii)

Überprüfen von R_2 auf

Reflexivität: R_2 ist Reflexiv, da $(x, x), (y, y), (z, z) \in R_2$

Symmetrisch: R_2 ist symmetrisch, da bei allen xRy ein yRx folgt.

Antisymmetrie: R_2 ist nicht antisymmetrisch, da Paare wie (x, y) und (y, x) enthalten sind, ohne dass $x=y$ gilt.

Asymmetrie: R_2 ist nicht asymmetrisch, da $(x, y) \in R_2$ und $(y, x) \in R_2$

Transitivität: R_2 ist nicht transitiv, da z.B. aus (y, x) und (x, z) NICHT (y, z) folgt

(iii)

$$R_1^2 = R_1 \bullet R_1 = (x, z), (z, y) \bullet (x, z), (z, y) = (x, y)$$

$$R_1^3 = R_1^2 \bullet R_1 = (x, z), (z, y) \bullet (x, y) = \emptyset$$

$$\text{Reflexive Hülle von } R_1: R_1 \cup (x, x), (y, y), (z, z) =$$

$$\text{Symmetrische Hülle von } R_1: R_1 \cup R_1^{-1} = (x, z), (z, y), (z, x), (y, x)$$

$$\text{Transitive Hülle von } R_1: (x, z), (z, y), (z, x)$$

2

(i)

Die Relation ist asymmetrisch, da aus $f(0) < g(0)$ folgt, dass $f(0) \not> g(0)$

Die Relation ist transitiv, da bei einem $g < h$ ebenfalls folgen würde das $f < h$ ist.

\implies strikte Ordnung

(ii)

Die Ordnung ist total, da zwischen den zwei Werten $f(0)$ und $g(0)$ immer gilt:
 $f(0) < g(0)$

3

(i)

R ist reflexiv, da wenn $x = y$ gilt: $f(x) = f(y)$

R ist symmetrisch, da wenn $x = y$ auch gilt: $y = x$

R ist transitiv, da wenn $x = y$ und $y = z$, auch $x = z$

\implies Äquivalenzrelation

(ii)

$$[1] = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

$$[2] = \{x \in X \mid f(x) = 2\}$$

$$[3] = \{x \in X \mid f(x) = 3\}$$

$$[4] = \{x \in X \mid f(x) = 4\}$$

4

(i)

$f_1 \circ f_2$ ist nicht wohldefiniert, da der Wertebereich von f_2 (\mathbb{Q}) nicht mit dem Definitionsbereich von f_1 (\mathbb{N}) übereinstimmt.

$f_1 \circ f_3$ ist nicht wohldefiniert, da der Wertebereich von f_3 (\mathbb{R}) nicht mit dem Definitionsbereich von f_1 (\mathbb{N}) übereinstimmt.

$$f_2 \circ f_1 = 3 \cdot \frac{x-1}{3} + 4 = x - 1 + 4 = x + 3$$

$$f_3 \circ f_1 = \sqrt{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{3}}$$

$f_2 \circ f_3$ ist nicht wohldefiniert, da der Wertebereich von f_3 (\mathbb{R}) nicht mit dem Definitionsbereich von f_2 (\mathbb{Q}) übereinstimmt.

$$f_3 \circ f_2 = \sqrt{(3x+4)^2 + 1} = \sqrt{9x^2 + 24x + 16}$$

(ii)

f_2 ist injektiv und nicht surjektiv, da für jedes x nur ein $y = 3x + 4$ definiert ist.

(iii)

$$f_1(\mathbb{N}) = \left\{ \frac{n-1}{3}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Sei $n-1 = k$

$$f_1(\mathbb{N}) = \left\{ \frac{k}{3}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$f_1^{-1}([0, 2]) = 0 \leq \frac{x-1}{3} \leq 2$$

$$= 0 \leq x-1 \leq 6$$

$$= 1 \leq x \leq 7$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

5

Seien X und Y Mengen

Zu zeigen: Wenn $f : X \rightarrow Y$ injektiv ist, ist $f' : X \rightarrow f(X), x \mapsto f(x)$ bijektiv.

Eine Funktion ist injektiv, wenn für alle x_1, x_2 gilt: $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Sei also $f'(x_1) = f'(x_2) \implies f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Daher ist f' injektiv

Sei $y \in f(X)$. Da $x \in X$ gilt $f(x) = y$

Daraus folgt: $f'(x) = f(x) = y$

Daher ist f' surjektiv

Da f' injektiv und surjektiv ist, ist f' ebenfalls bijektiv.