Übungsblatt 2

Pascal Diller, Timo Rieke

24. April 2025

Aufgabe 1

(i)

1. Das Nullpolynom $p(x) = 0$ hat $a_0 = 0$, also $0 \in M_0$.
2. Seien $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ in M_0. Der konstante Term von $p(x) + q(x)$ ist $0 + 0 = 0$. Also $p(x) + q(x) \in M_0$.
3. Sei $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in M_0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Der konstante Term von $\lambda p(x) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) x^i$ ist $\lambda \cdot 0 = 0$. Also $\lambda p(x) \in M_0$.

Somit ist M_0 ein Unterraum.

(ii)

$M_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid a_0 = 1\}$: Das Nullpolynom $p(x) = 0$ hat $a_0 = 0$, also $0 \notin M_1$.
M_1 ist kein Unterraum.
$M_{\geq 0} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid a_0 \geq 0\}$:
Sei $p(x) = 1 \in M_{\geq 0}$ (da $a_0 = 1 \geq 0$) und $\lambda = -1$.
Dann ist $\lambda p(x) = -1$. Der konstante Term ist -1, was nicht ≥ 0 ist.
Also $\lambda p(x) \notin M_{\geq 0}$. $M_{\geq 0}$ ist nicht abgeschlossen bzgl. Skalarmultiplikation und somit kein Unterraum.

Aufgabe 2

(i)

Seien $(a_n), (b_n), (c_n) \in F$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Addition ist assoziativ ($(a_n + b_n) + c_n = a_n + (b_n + c_n)$) und kommutativ ($a_n + b_n = b_n + a_n$), da $+$ in $\mathbb{R}$ diese Eigenschaften hat.
Das neutrale Element ist die Nullfolge $(0)_{n \in \mathbb{N}}$, da $(a_n) + (0) = (a_n + 0) = (a_n)$.
Das inverse Element zu (a_n) ist $(-a_n)$, da $(a_n) + (-a_n) = (a_n - a_n) = (0)$.
$(F, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
Für Skalarmultiplikation:
Ax 1: $1 \cdot (a_n) = (1 \cdot a_n) = (a_n)$.
Ax 2: $(\lambda\mu) \cdot (a_n) = ((\lambda\mu) a_n) = (\lambda(\mu a_n)) = \lambda \cdot (\mu(a_n))$ (Assoziativität von $\cdot$ in

$\mathbb{R}$).
Ax 3: $\lambda\cdot((a_n)+(b_n)) = \lambda\cdot(a_n+b_n) = (\lambda(a_n+b_n)) = (\lambda a_n+\lambda b_n) = \lambda(a_n)+\lambda(b_n)$ (Distributivität in $\mathbb{R}$).
Ax 4: $(\lambda+\mu)\cdot(a_n) = ((\lambda+\mu)a_n) = (\lambda a_n+\mu a_n) = \lambda(a_n)+\mu(a_n)$ (Distributivität in $\mathbb{R}$).
F ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(ii)

1. Die Nullfolge (0) konvergiert gegen 0, also $0_F \in M_{\to 0}$.
2. Seien $(a_n),(b_n) \in M_{\to 0}$. Dann $\lim a_n = 0$ und $\lim b_n = 0$. Es gilt $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = 0 + 0 = 0$. Also $(a_n) + (b_n) \in M_{\to 0}$.
3. Sei $(a_n) \in M_{\to 0}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Somit $\lim a_n = 0$. Es gilt $\lim(\lambda a_n) = \lambda \lim a_n = \lambda \cdot 0 = 0$.
Also $\lambda(a_n) \in M_{\to 0}$.
Somit ist $M_{\to 0}$ ein Unterraum.

(iii)

Betrachte (a_n) mit $a_n = n$ ($\lim a_n = \infty$, also $(a_n) \in M_{\to\infty}$) und (b_n) mit $b_n = -n + 1$ ($\lim b_n = -\infty$, also $(b_n) \in M_{\to\infty}$).
Die Summe ist $(a_n) + (b_n) = (n + (-n + 1)) = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.
Die konstante Folge (1) strebt nicht gegen $\pm\infty$ und ist nicht die Nullfolge. Also $(a_n) + (b_n) \notin M_{\to\infty}$.
$M_{\to\infty}$ ist nicht abgeschlossen bzgl. Addition und somit kein Unterraum.

Aufgabe 3

(i)

zu zeigen:

1. $0 \in M_{\text{ger}}$

   $\lambda f + g \in M_{\text{ger}}$
2. $\implies f + g \in M_{\text{ger}}$
3. $\implies \lambda f \in M_{\text{ger}}$

Beweise:

1. $f(t) = 0 = f(-t) \in M_{\text{ger}}$
2. $(f + g)(-t) = f(-t) + g(-t) = f(t) = g(t) = (f + g)(t)$
3. $(\lambda f)(-t) = \lambda \cdot f(-t) = \lambda \cdot f(t) = (\lambda f)(t)$

(ii)

Für $M_{\mathbb{Q}}$ mit Gegenbeispiel:

Sei $f \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = x$ für alle x.
$\implies f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \in \mathbb{Q}$

Sei $\lambda = \sqrt{2}$. Dann gilt: $(\lambda f)(x) = \sqrt{2}x$
Für $x = 1$ gilt jedoch: $(\lambda f)(1) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Somit gilt nicht: $\lambda f \in \mathbb{Q}$

Für M_{+1} mit Gegenbeispiel:

Seien $f(n) = n, g(n) = -n$. Dann gilt:
$f(n+1) = n + 1 = f(n) + 1$
$g(n+1) = -(n+1) = g(n) - 1$
Allerdings:
$(f + g)(n+1) = f(n+1) + g(n+1) = (n+1) - (n+1)$,
aber: $(f + g)(n) + 1 = n - n + 1 = 1 \neq 0 = (f + g)(n+1)$
$\implies (f+g)(n+1) \neq (f+g)(n) \implies f+g \notin M_{+1} \implies$ Kriterium nicht erfüllt

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
&\lambda(-v) + \lambda(-u) && \\
=&(-\lambda)v + (-\lambda)(u) && -(\lambda v) = (-\lambda)v = \lambda(-v) \\
=&(-\lambda) \cdot (v + u) && \text{Ax 3} \\
=&(-1)\lambda \cdot (v + u) && (-1)v = -v \\
=&-(\lambda(v + u)) && \text{Ax 2}
\end{aligned}$$