Übungsblatt 4

Pascal Diller, Timo Rieke

8. Mai 2025

Aufgabe 1

(i)

(a)

Seien $f(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$ und $g(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$

Dann ist $f(x) + g(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 + a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 = (a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2)x + (d_1 + d_2)$

Also gilt:

$T(f + g) = (2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + 3(d_1 + d_2), (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2))$

$= (2a_1 + b_1 + 3d_1, a_1 + c_1 - d_1) + (2a_2 + b_2 + 3d_2, a_2 + c_2 - d_2 = T(f) + T(g))$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$T(\lambda f) = T(\lambda a_1x^3 + \lambda b_1x^2 + \lambda c_1x + \lambda d_1) = (2\lambda a_1 + \lambda b_1 + 3\lambda d_1, \lambda a_1 + \lambda c_1 - \lambda d_1)$$
$$= \lambda(2a_1 + b_1 + 3d_1, a_1 + c_1d_1 = \lambda T(f))$$

Also ist T linear.

(b)

$T(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1) = (0, 0)$

$$2a + b + 3d = 0 \tag{1}$$
$$a + c - d = 0 \tag{2}$$

$$\iff$$

$$(1)\ b = -2a - 3d$$
$$(2)\ c = -a + d$$

Parameterfrei ist die Lösung: $(a,b,c,d) = a(1,-2,-1,0) + d(0,-3,1,1)$

Also:

$$\ker(T) = \operatorname{Span}\left\{x^3 - 2x^2 - x,\ -3x^2 + x + 1\right\}$$

(c)

Da $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ linear ist und

$$\dim(\ker(T)) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(\operatorname{Im}(T)) = 4 - 2 = 2$$

Da der Zielraum $\mathbb{R}^2$ ebenfalls Dimension 2 hat, folgt:
Folgerung: T ist surjektiv.

(ii)

(a)

Berechne die Bilder der Basisvektoren von $\mathbb{R}^2$:

$$S(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen sind linear unabhängig.
Folgerung:

$$\operatorname{Im}(S) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(b)

Gesucht: $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, sodass $S(a,b) = 0$. Also:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - b = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0$$

Ergebnis: $\ker(S) = \{(0,0)\}$

(c)

Da $\ker(S) = \{(0,0)\}$, folgt direkt:
S ist injektiv.