Übung 10

Pascal Diller, Timo Rieke

January 7, 2025

Aufgabe 1

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1-n^2}{-1-n})_{n\in\mathbb{N}} = \frac{-(n^2-1)}{-(n+1)} = \frac{(n^2-1)}{(n+1)}$$
$$= \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)} = n-1$$

Die Folge ist nach unten beschränkt durch -1 aber nach oben unbeschränkt. Außerdem ist die Folge $a_n = n-1$ für $n \in \mathbb{N}$ streng monton wachsend.

Aufgabe 2

$$b_n = 6 - (\frac{6+n^2}{n})$$

Vereinfachen der Folge:

$$b_n = 6 - (\frac{6}{n} + \frac{n^2}{n}) = 6 - (\frac{6}{n} + n) = 6 - \frac{6}{n} - n$$

(i)

$$\frac{6}{n} \text{ geht gegen } 0, \text{ wenn } n \to \infty$$
$$-n \text{ geht gegen } -\infty, \text{ wenn } n \to \infty$$

Somit konvergiert b_n gegen $-\infty$, was bedeuted das die Folge nach unten unbeschränkt ist und nach oben mit 6 beschränkt ist.

(ii)

$$B_n = b_{n+1} - b_n$$

Berechnen von B_n:

$$B_n = b_{n+1} - b_2 = (6 - \frac{6}{n+1} - (n+1)) - (6 - \frac{6}{n} - n)$$

$$= -\frac{6}{n+1} + \frac{6}{n} - 1 = \frac{6n - 6(n+1)}{n(n+1)} - 1 = \frac{6n - 6n - 6}{n(n+1)} - 1$$
$$= \frac{-6}{n(n+1)} - 1$$

Da $\frac{-6}{n(n+1)} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ negativ ist, ist $B_n < 0$.

(iii)

Da $B_n < 0$ für alle $n \geq 1$ ist die Folge streng monton fallend ab $n = 1$. Somit ist der minimale Wert für m und l: $m = 1$, $l = 1$

Aufgabe 3

Sei $a_n = \frac{A}{2n^3 - 15n}$. Da A eine konstante reelle Zahl ist und $2n^3 - 15n$ mit steigendem n ebenfalls steigt, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 + B$$

Da B eine konstante reelle Zahl ist, konvergiert c_n auf B.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Folge:

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Logarithmus:

$$\ln(d_n) = n \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Für kleine Werte von $\frac{1}{n^2}$ gilt die Näherung $\ln(1+x) \approx x$, wenn $x \to 0$. Somit folgt:

$$\ln(d_n) \approx n \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n}.$$
$$\ln(d_n) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$
$$d_n \to e^0 = 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Die Bernoulli-Ungleichung besagt, dass für $x > -1$ und $r \geq 1$ gilt:

$$(1+x)^r \geq 1 + rx.$$

Einsetzen von $x = -\frac{1}{n^2}$ und $r = n$:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Da $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ offensichtlich durch 1 nach oben beschränkt ist, ergibt sich:

$$1-\frac{1}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1.$$

Da $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$, folgt mit dem Sandwichkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert 1 Sei $a_n = \frac{A}{2n^3-15n}$. Da A eine konstante reelle Zahl ist und $2n^3-15n$ mit steigendem n ebenfalls steigt, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 + B$$

Da B eine konstante reelle Zahl ist, konvergiert c_n auf B.

Aufgabe 5

(i)

(ii)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

Seien $a = 1, a_n = \frac{n-1}{n+1}, b_n = \frac{2}{n+1}$.
Aus (i) gilt: $|a_n - a| \leq b_n$ und b_n ist eine Nullfolge.
Also gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = 1$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}|a_n - a + a| = \lim_{n\to\infty}(|a_n - a| + |a|)$$

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$:

$$\lim_{n\to\infty}(|a_n - a| + |a|) = |a|$$

Es gilt: $|a_n - a| \to 0$, $|a|$ ist konstant.

$$\lim_{n\to\infty} = |a|$$

(iv)

Da a_n beschränkt ist: $|a_n| \leq m$ für $m > 0$

$$|a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq m \cdot |b_n|$$

Da b_n eine Nullfolge ist, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n| = \lim_{n\to\infty} m \cdot |b_n| = 0$$

Somit ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

(v)

Es gilt: $|cos(n)| \leq 1$, also: $|a_n| = \left|\frac{cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{n^2}$ ist eine Nullfolge, dann ergibt sich aus dem Sandwichkriterium, dass $\frac{cos(n)}{n^2}$ auf 0 konvergiert.