Mathe Übungsblatt 8

Pascal Diller, Timo Rieke

October 2024

Aufgabe 1

(i)

Linke Seite:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1*3+5*0+0*0 & 2*3+3*0+4*0 & 0*3-2*0-2*0 \\ -1*0+5*3+0*0 & 2*0+3*3+4*0 & 0*0-2*3-2*0 \\ -1*0+5*0+0*3 & 2*0+3*0+4*3 & 0*0-2*0-2*3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 15 & 9 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

Rechte Seite:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3*(-1)+0*5+0*0 & 0*(-1)+3*5+0*0 & 0*(-1)+0*5+3*0 \\ 3*5+0*3+0+(-2) & 0*5+3*3+0+(-2) & 0*5+0*3+3+(-2) \\ 3*0+0*4+0*(-2) & 0*0+3*4+0*(-2) & 0*0+0*4+3*(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 15 & 9 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

(ii)

$A \cdot \lambda$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}*\lambda+a_{1,2}*0+a_{1,3}*0 & a_{2,1}*\lambda+a_{2,2}*0+a_{2,3}*0 & a_{3,1}*\lambda+a_{3,2}*0+a_{3,3}*0 \\ a_{1,1}*0+a_{1,2}*\lambda+a_{1,3}*0 & a_{2,1}*0+a_{2,2}*\lambda+a_{2,3}*0 & a_{3,1}*0+a_{3,2}*\lambda+a_{3,3}*0 \\ a_{1,1}*0+a_{1,2}*0+a_{1,3}*\lambda & a_{2,1}*0+a_{2,2}*0+a_{2,3}*\lambda & a_{3,1}*0+a_{3,2}*0+a_{3,3}*\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}*\lambda & a_{2,1}*\lambda & a_{3,1}*\lambda \\ a_{1,2}*\lambda & a_{2,2}*\lambda & a_{3,2}*\lambda \\ a_{1,3}*\lambda & a_{2,3}*\lambda & a_{3,3}*\lambda \end{bmatrix}$$

$\lambda \cdot A$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda * a_{1,1} + 0 * a_{1,2} + 0 * a_{1,3} & 0 * a_{1,1} + \lambda * a_{1,2} + 0 * a_{1,3} & 0 * a_{1,1} + 0 * a_{1,2} + \lambda * a_{1,3} \\ \lambda * a_{2,1} + 0 * a_{2,2} + 0 * a_{2,3} & 0 * a_{2,1} + \lambda * a_{2,2} + 0 * a_{2,3} & 0 * a_{2,1} + 0 * a_{2,2} + \lambda * a_{2,3} \\ \lambda * a_{3,1} + 0 * a_{3,2} + 0 * a_{3,3} & 0 * a_{3,1} + \lambda * a_{3,2} + 0 * a_{3,3} & 0 * a_{3,1} + 0 * a_{3,2} + \lambda * a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda * a_{1,1} & \lambda * a_{1,2} & \lambda * a_{1,3} \\ \lambda * a_{2,1} & \lambda * a_{2,2} & \lambda * a_{2,3} \\ \lambda * a_{3,1} & \lambda * a_{3,2} & \lambda * a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} * \lambda & a_{2,1} * \lambda & a_{3,1} * \lambda \\ a_{1,2} * \lambda & a_{2,2} * \lambda & a_{3,2} * \lambda \\ a_{1,3} * \lambda & a_{2,3} * \lambda & a_{3,3} * \lambda \end{bmatrix}$$

(iii)

Aufgabe 2

(i)

$$T(1,2,3,4) = (2 \cdot 1 + 4 \cdot 3, -2 \cdot 2 - 4 \cdot 4) = (14, -20)$$

$T^{-1}(\{(2,4)\})$:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,4)$$

Es ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$2x_1 + 4x_3 = 2, -2x_2 - 4x_4 = 4$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, deswegen gibt es frei wählbare Variablen. Für x_3 und x_4 frei wählbar:

$$2x_1 + 4x_3 = 2 \quad | : 2$$

$$x_1 + 2x_3 = 1 \quad | - 2x_3$$

$$x_1 = 1 - 2x_3$$

$$-2x_2 - 4x_4 = 4 \quad | : (-2)$$

$$x_2 + 2x_4 = -2 \quad | - 2x_4$$

$$x_2 = -2 - 2x_4$$

Somit ergibt sich:

$$T^{-1}(\{(2,4)\}) = \{(1 - 2x_3, -2 - 2x_4, x_3, x_3) | x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

(ii)

$T(u+v) = T(u) + T(v)$:
Sei $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ und $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$T(u+v) = (2(u_1+v_1) + 4(u_3+v_3), -2(u_2+v_2) - 4(u_4+v_4))$$

$$= ((2u_1 + 2v_1) + (4u_3 + 4v_3), (-2u_2 - 2v_2) + (-4u_4 - 4v_4)).$$

$$= ((2u_1 + 4u_3) + (2v_1 + 4v_3), (-2u_2 - 4u_4) + (-2v_2 - 4v_4) = T(u) + T(v)$$

$T(au) = aT(u)$:
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$T(au) = (2(au_1) + 4(au_3), -2(au_2) - 4(au_4))$$

$$= a(2u_1 + 4u_3, -2u_2 - 4u_4) = aT(u)$$

Da $T(u+v) = T(u) + T(v)$ und $T(au) = aT(u)$ gilt, ist T linear.

(iii)

Gegeben ist die Abbildung $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_1 + 4x_3, -2x_2 - 4x_4)$. Gesucht ist die 2×4-Matrix A sodass $T_A = T$.
Es gilt:

$$A = \begin{pmatrix} T_A(e_1) & T_A(e_2) & T_A(e_3) & T_A(e_4) \end{pmatrix}$$

Da $T = T_A$:

$$\begin{aligned} T_A(e_1) &= T(1,0,0,0) = (2,0) \\ T_A(e_2) &= T(0,1,0,0) = (0,-2) \\ T_A(e_3) &= T(0,0,1,0) = (4,0) \\ T_A(e_4) &= T(0,0,0,1) = (0,-4) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

(i)

(a)

ref_G^2 ist eine lineare Abbildung, da ref_G eine lineare Abbildung ist, und die Verkettung zweier linearer Abbildungen ebenfalls eine lineare Abbildung ist.

(b)

$$\mathrm{ref}_G = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ref}_G^2 = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix}\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4}\begin{pmatrix} x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2 & 2x^3y-2xy^3+2xy^3-2x^3y \\ 2x^3y-2xy^3+2xy^3-2x^3y & 4x^2y^2+y^4-2x^2y^2+x^4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4}\begin{pmatrix} x^4+2x^2y^2+y^4 & 0 \\ 0 & x^4+2x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist gezeigt, dass $\mathrm{ref}_G^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$

(ii)

$$R_\alpha \cdot R_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta)-\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta)+\cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha)-\sin(\beta)\sin(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha)-\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha)+\cos(\beta)\sin(\alpha) & -\sin(\beta)\sin(\alpha)+\cos(\beta)\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = R_\beta = R_\alpha$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) & -(\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R_{\alpha+\beta}$$