Übung 7

Pascal Diller, Timo Rieke

December 2, 2024

Aufgabe 1

(i)

G_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Z_1 und Z_3 vertauschen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Z_4 - Z_1 \rightarrow Z_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Z_4 + Z_2 \rightarrow Z_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Z_4 - Z_3 \rightarrow Z_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G_1 hat einen Rang von 3 und ist singulär, da $3 < 4$ (Anzahl Zeilen).

G_2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 19 & -2 \\ 7 & 23 & 39 & 10 \\ -4 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$Z_2 - \frac{7}{3} \cdot Z_1 \to Z_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 19 & -2 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{44}{3} \\ -4 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$Z_3 + \frac{4}{3} \cdot Z_1 \to Z_3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 19 & -2 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{44}{3} \\ 0 & \frac{35}{3} & \frac{70}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$Z_3 + \frac{35}{8} \cdot Z_2 \to Z_3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 19 & -2 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{44}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{135}{2} \end{pmatrix}$$

G_2 hat einen Grad von 3 und ist regulär, da $3 = 3$ (Anzahl Zeilen).

G_3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 25 \\ 7 & 9 & 19 & 65 \\ -4 & 5 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

$Z_2 - \frac{7}{3} \cdot Z_1 \to Z_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & -\frac{8}{3} & 12 & \frac{20}{3} \\ -4 & 5 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

$Z_3 + \frac{4}{3} \cdot Z_1 \to Z_3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & -\frac{8}{3} & 12 & \frac{20}{3} \\ 0 & \frac{35}{3} & 15 & \frac{115}{3} \end{pmatrix}$$

$Z_3 + \frac{35}{8} \cdot Z_2 \to Z_3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & -\frac{8}{3} & 12 & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & \frac{135}{2} & \frac{135}{2} \end{pmatrix}$$

G_3 hat einen Grad von 3 und ist regulär, da $3 = 3$(Anzahl Zeilen).

(ii)

$\mathbb{L}_{G_1} = \{t, -t, t, -t | t \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{L}_{G_2} = \emptyset$ (Es sind keine Lösungen vorhanden)
$\mathbb{L}_{G_3} = \{4, 2, 1\}$

Aufgabe 2

Aufgabe 3

$f + g$ ist eine lineare Abbildung, wenn gilt:

$$(f+g)(a+b) = (f+g)(a) + (f+g)(b) \tag{1}$$
$$(f+g)(\lambda a) = \lambda (f+g)(a) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
(f+g)(a+b) &= f(a+b) + g(a+b) && \text{Definition von } f+g \\
&= f(a) + f(b) + g(a) + g(b) && f \text{ und } g \text{ sind linear} \\
&= f(a) + g(a) + f(b) + g(b) \\
&= (f+g)(a) + (f+g)(b) && \text{Definition von } f+g
\end{aligned}$$

Somit ist (1) gezeigt.

$$\begin{aligned}
(f+g)(\lambda a) &= f(\lambda a) + g(\lambda a) && \text{Definition von } f+g \\
&= \lambda f(a) + \lambda g(a) && f \text{ und } g \text{ sind linear} \\
&= \lambda(f(a) + g(a)) \\
&= \lambda (f+g)(a) && \text{Definition von } f+g
\end{aligned}$$

Somit ist (2) gezeigt.