Übungsblatt 4

Pascal Diller, Timo Rieke

May 9, 2025

Aufgabe 1

(i)

(a)

Seien $f(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$ und $g(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$

Dann ist $f(x) + g(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 + a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 = (a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2)x + (d_1 + d_2)$

Also gilt:

$T(f + g) = (2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + 3(d_1 + d_2), (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2))$

$= (2a_1 + b_1 + 3d_1, a_1 + c_1 - d_1) + (2a_2 + b_2 + 3d_2, a_2 + c_2 - d_2 = T(f) + T(g))$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$T(\lambda f) = T(\lambda a_1x^3 + \lambda b_1x^2 + \lambda c_1x + \lambda d_1) = (2\lambda a_1 + \lambda b_1 + 3\lambda d_1, \lambda a_1 + \lambda c_1 - \lambda d_1)$$
$$= \lambda(2a_1 + b_1 + 3d_1, a_1 + c_1 d_1 = \lambda T(f))$$

Also ist T linear.

(b)

$T(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1) = (0, 0)$

$$2a + b + 3d = 0 \tag{1}$$
$$a + c - d = 0 \tag{2}$$

$$\iff$$

$$(1)\ b = -2a - 3d$$
$$(2)\ c = -a + d$$

Parameterfrei ist die Lösung: $(a, b, c, d) = a(1, -2, -1, 0) + d(0, -3, 1, 1)$

Also:

$$\ker(T) = \operatorname{Span}\left\{x^3 - 2x^2 - x,\ -3x^2 + x + 1\right\}$$

(c)

Da $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ linear ist und

$$\dim(\ker(T)) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(\operatorname{Im}(T)) = 4 - 2 = 2$$

Da der Zielraum $\mathbb{R}^2$ ebenfalls Dimension 2 hat, folgt:
Folgerung: T ist surjektiv.

(ii)

(a)

Berechne die Bilder der Basisvektoren von $\mathbb{R}^2$:

$$S(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen sind linear unabhängig.
Folgerung:

$$\operatorname{Im}(S) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(b)

Gesucht: $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sodass $S(a, b) = 0$. Also:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - b = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0$$

Ergebnis: $\ker(S) = \{(0, 0)\}$

(c)

Da $\ker(S) = \{(0, 0)\}$, folgt direkt:
S ist injektiv.

Aufgabe 2

$B_1 = (x^2 + 2x - 3, 3x^2 + 2x - 5, -3x^2 + 2x + 1)$

$\lambda_1(x^2 + 2x - 3) + \lambda_2(3x^2 + 2x - 5) + \lambda_3(-3x^2 + 2x + 1) = 0.$
Koeffizientenvergleich:

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \implies \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$-3\lambda_1 - 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Aus (2) folgt $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3$.
Einsetzen in (1): $(-\lambda_2 - \lambda_3) + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \implies 2\lambda_2 = 4\lambda_3 \implies \lambda_2 = 2\lambda_3$.
Damit $\lambda_1 = -2\lambda_3 - \lambda_3 = -3\lambda_3$.
Einsetzen in (3): $-3(-3\lambda_3) - 5(2\lambda_3) + \lambda_3 = 9\lambda_3 - 10\lambda_3 + \lambda_3 = 0$.
Das System hat nichttriviale Lösungen (z.B. $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_1 = -3$).
Somit ist B_1 linear abhängig und somit keine Basis.

$B_2 = (x^2 + 2x - 3, 3x^2 + 2x - 5, -3x^2 + 2x + 4)$

$\lambda_1(x^2 + 2x - 3) + \lambda_2(3x^2 + 2x - 5) + \lambda_3(-3x^2 + 2x + 4) = 0.$
Koeffizientenvergleich:

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \implies \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$-3\lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$$

Wie oben folgt $\lambda_1 = -3\lambda_3$ und $\lambda_2 = 2\lambda_3$.
Einsetzen in (3): $-3(-3\lambda_3) - 5(2\lambda_3) + 4\lambda_3 = 9\lambda_3 - 10\lambda_3 + 4\lambda_3 = 3\lambda_3 = 0$.
Daraus folgt $\lambda_3 = 0$, und somit auch $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$.
Die einzige Lösung ist die triviale Lösung.
Somit ist B_2 linear unabhängig und somit eine Basis.

Aufgabe 3

IA (n=1):

$T(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 T(v_1)$

IV:

Es gelte $T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS (n $\to$ n+1):

$$\begin{aligned}
T\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i\right) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda_{n+1} v_{n+1}\right) \\
&\overset{(i)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) + T(\lambda_{n+1} v_{n+1}) \\
&\overset{IV}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i)\right) + T(\lambda_{n+1} v_{n+1}) \\
&\overset{(ii)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i)\right) + \lambda_{n+1} T(v_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i T(v_i)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Das Tupel (w_1, w_2) ist linear unabhängig $\iff$ $(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0_V \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0)$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0_V &\iff \lambda_1(av_1 + bv_2) + \lambda_2(cv_1 + dv_2) = 0_V \\
&\iff (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2 = 0_V
\end{aligned}$$

Da (v_1, v_2) linear unabhängig ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 a + \lambda_2 c = 0 \\
\lambda_1 b + \lambda_2 d = 0
\end{aligned}$$

Gleichungssystem für (λ_1, λ_2):

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System hat genau dann nur die triviale Lösung $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$, wenn A^T invertierbar ist.
A^T ist invertierbar, deswegen gilt $\det(A^T) \neq 0$.
Da $\det(A^T) = \det(A)$, ist A invertierbar und somit $\det(A) \neq 0$.
Also ist (w_1, w_2) linear unabhängig und $\det A \neq 0$.