Übungsblatt 11

Pascal Diller, Timo Rieke

June 24, 2025

Aufgabe 1

(i)

$M = \{x \in \mathbb{R}, x^3 > 8\}$
$x^3 > 8 \Leftrightarrow x > 2 \implies M = (2, \infty)$

M ist nach oben unbeschränkt, da $M \to \infty$ geht.
M ist nach unten durch $x > 2$ beschränkt. Demenstprechend ist das Infimum 2, welches jedoch nicht in M enthalten ist, also gibt es kein Minimum.

(ii)

$M = \{1 - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
Untersuchen der Werte: $M = \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}\}$
Daraus folgt: $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1$

M ist nach oben beschränkt, da alle Werte < 1, Somit ist das Supremum 1, jedoch nicht in M enthalten, also kein Maximum.

M ist nach unten beschränkt, da bei kleinstem $n = 1 :\ 1 - 2 = -1$. Somit ist das Infimum -1, was auch das Minimum ist, da $-1 \in M$.

(iii)

$M = \{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2m} : n, m \in \mathbb{N}\}$
Größter Wert entsteht für $n = 1, m = 1 \implies 1 + 1 - 0.5 = 1.5$
Kleinster Wert ensteht für $n \to \infty, m \to \infty \implies 1 + 0 - 0 = 1$
Also ist das Supremum 1.5, welches in M ist und somit das Maximum.
Das Infimum ist 1, welches nicht in M enthalten ist, also gibt es kein Minimum

Aufgabe 2

(i)

$$f(x) = x^3 \cos x - 3x^2 \sin x$$

$$g(x) = x^3 \cos x \implies g'(x) = (x^3)' \cos x + x^3(-\sin x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

$$h(x) = -3x^2 \sin x \implies h'(x) = -3(2x \sin x + x^2 \cos x) = -6x \sin x - 3x^2 \cos x$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x) = (3x^2 \cos x - x^3 \sin x) + (-6x \sin x - 3x^2 \cos x)$$

$$= x^3 \sin x - 6x \sin x = -\sin x(x^3 + 6x)$$

(ii)

$$g(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{dx}(\sin x \cos x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x \cos x) = (\sin x)' \cos x + \sin x(\cos x)' = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos(2x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

(iii)

$$h(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}, \quad x \in [0, \infty)$$

$$u(x) = \sqrt{x} - 1, \quad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v(x) = \sqrt{x} + 1, \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} - 1)\right]}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2)}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$$

(iv)

$$u(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(x) = 1-x^2, \quad f'(x) = -2x$$

$$g(x) = x^2+1, \quad g'(x) = 2x$$

$$u'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{(-2x)(x^2+1) - (1-x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x(x^2+1) - 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^3 - 2x - 2x + 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$