

Lernzettel

Pascal Diller

December 1, 2024

Contents

Logik	5
Mengen	5
boolesche Algebra	7
Schaltalgebra	8
boolesche Funktionen	9
boolescher Ausdruck	9
Äquivalenz boolescher Ausdrücke	10
Tautologie	10
Vollständiges Operatorensystem	10
Normalformen	10
Kanonische Normalformen	11
Konstruktion der Normalformen	11
DNF	11
KNF	11
Minimierung	12
KV-Diagramm	12
Implikanten	14
Disjuntive Minimalform über das KV-Diagramm	14
Konjuntive Minimalform über das KV-Diagramm	15
Relationen	16
Äquivalenzrelationen	17
Ordnungsrelationen	17
Hüllen	17
Vollständige Induktion	19
Idee der vollständigen Induktion	19
Beweis durch vollständige Induktion	19
Abbildungen	20
Reelle Funktionen	21
Funktionsgraphen	21
Intervalle	21

Beschränkte Mengen und Funktionen	22
Monotone Funktionen	23
Trigonometrische Funktionen	23
Sinus- und Cosinus-Funktion	23
Tangens-Funktion	24
Polynome	25
Zahlensysteme	25
Binärsystem	25
Carry-Flag	26
Zweierkomplement	26
Hexadezimalsystem	26
Oktalsystem	26
Festkommazahlen	27
Gleitkommazahlen: IEEE 754	27
Aufbau	27
Dezimal zu IEEE 754	27
IEEE 754 zu Dezimal	28
Fehlererkennung	29
Redundanzen	29
Hamming-Distanz	29
Parität	29
Zweidimensionale Parität	30
Hamming-Code	30
Berechnung der Prüfbits	31
Summenzeichen und Produktzeichen	32
Summenzeichen	32
Produktzeichen	32
Rechenregeln	33
Bruchregeln	33
Potenzgesetze	33
Wurzelgesetze	33
Logarithmengesetze	33

Trigonometrie	34
Bogenmaß	34

Logik

- " \wedge ": **Und**
- " \vee ": **Oder**
- " \neg ": **Nicht** (Verneinung)
- $A \implies B$: A **impliziert** B
- $A \impliedby B$: A wird durch B **impliziert**
- $A \iff B$: A ist äquivalent zu B
Es gilt: $A \implies B$ und $A \impliedby B$
- \forall : **Für alle**
- \exists : **Es existiert (mindestens) ein**

Mengen

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von (mathematischen) Objekten.
Die Objekte in einer Menge werden als **Elemente** bezeichnet.

- $x \in M$: x in/Element M
- $x \notin M$: x nicht in/Element M

Defintion einer Menge:

- Aufzählung:

$$M_1 = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, -1\}; \quad M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Es kommt **nicht** auf die **Reihenfolge** und **nicht** auf **Verdopplungen** an: $\{1, 3, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$

- Beschreibung:

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \leq 1\} = [-1, 1]$$

Menge B ist eine **Teilmenge** von Menge A , wenn für jedes $x \in A$ auch $x \in B$ gilt.

- $A \subset B$ ("A ist eine Teilmenge von B")
- $A \supset B$ ("B ist eine Teilmenge von A")

Mengenoperationen:

- **Vereinigung** der Mengen A und B

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \text{ ("A vereinigt B")}$$

- **Durchschnitt** der Mengen A und B

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \text{ ("A geschnitten B")}$$

- **Differenzmenge** der Mengen A und B

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \text{ ("A ohne B")}$$

Kartesisches Produkt:

sei $n \in \mathbb{N}$ und seien X_1, \dots, X_n Mengen, dann ist

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i, \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

die Menge der **n-Tupel** mit i -ter Koordinate x_i in X_i für $i = 1, \dots, n$.

Potenzmenge:

Die Menge aller Teilmengen einer Menge X heißt Potenzmenge von X und wird mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet:

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subset X\}$$

Es gilt immer: $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ und $X \in \mathcal{P}(X)$.

Beispiel: Sei $X = \{1, 2, 3\}$. Dann ist

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Sei P eine Menge bestehend aus Mengen. Dann steht

$$\bigcup_{Y \in P} Y = \{y : \text{es gibt } Y \in P \text{ so dass } y \in Y\}$$

für die (möglicherweise unendliche) Vereinigung aller Mengen in P .

Partitionen:

Sei X eine Menge. Eine Partition von X ist eine Teilmenge $P \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ sodass

- für alle $Y, Z \in P$ mit $Y \neq Z, Y \cap Z = \emptyset$ (Y und Z sind disjunkt).
- $\bigcup_{Y \in P} Y = X$.

Definierte Mengen:

- Leere Menge: $\emptyset = \{\}$
- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ ($0 \notin \mathbb{N}$)
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- Reelle Zahlen: \mathbb{R} , Menge aller **reellen Zahlen**, die man **nicht abzählen** kann

Es gilt: $\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R}$

boolesche Algebra

Als eine **boolesche Algebra** bezeichnet man eine Menge $V = \{a, b, c, \dots\}$, auf der zwei zweistellige Operationen \oplus und \otimes derart definiert sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus V wieder Elemente aus V entstehen (Abgeschlossenheit).

Abgeschlossenheit: für alle $a, b \in V$ gilt:

$$a \otimes b \in V$$

$$a \oplus b \in V$$

Zudem müssen die vier **Huntingtonischen Axiome** gelten:

- H1: **Kommutativgesetz**

$$a \otimes b = b \otimes a$$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

- H2: **Distributivgesetz**

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

$$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$$

- H3: **Neutrale Elemente**

Es existieren zwei Elemente $e, n \in V$, so dass gilt:

$$a \otimes e = a \quad (e \text{ wird } \mathbf{Einselement} \text{ genannt})$$

$$a \oplus n = a \quad (n \text{ wird } \mathbf{Nullelement} \text{ genannt})$$

- H4: **Inverse Elemente**

Für jedes $a \in V$ existiert ein Element $a^{-1} \in V$, so dass gilt:

$$a \otimes a^{-1} = n$$

$$a \oplus a^{-1} = e$$

Schaltalgebra

Die Schaltalgebra $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$ ist eine spezielle boolesche Algebra. 0 und 1 können als die logischen Werte wahr und falsch interpretieren.

Es gelten die vier Huntingtonischen Axiome:

- (H1) Kommutativgesetz $a \vee b = b \vee a$
 $a \wedge b = b \wedge a$
- (H2) Distributivgesetz $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- (H3) Neutrale Elemente $a \wedge 1 = a$
 $a \vee 0 = a$
- (H4) Invere Elemente $a \wedge \neg a = 0$
 $a \vee \neg a = 1$

Es lassen sich folgende Sätze ableiten:

- (R1) Assoziativgesetz $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- (R2) Idempotenzgesetz $a \wedge a = a$
 $a \vee a = a$
- (R3) Absorptionsgesetz $a \wedge (a \vee b) = a$
 $a \vee (a \wedge b) = a$
- (R4) DeMorgan-Gesetz $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
 $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

boolesche Funktionen

Eine Funktion $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ wird als boolesche Funktion bezeichnet.

boolescher Ausdruck

Sei $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ eine Menge boolescher Variablen. Dann ist die Menge der booleschen Ausdrücke wie folgt definiert:

- $0, 1, x_i$ sind boolesche Ausdrücke.
- Ist Φ ein boolescher Ausdruck, dann ist auch $\neg\Phi$ ein boolescher Ausdruck.
- Wenn Φ und Ψ boolesche Ausdrücke sind, dann sind auch $\Phi \wedge \Psi$ und $\Phi \vee \Psi$ boolesche Ausdrücke.
- Ist Φ ein boolescher Ausdruck, dann ist auch (Φ) ein boolescher Ausdruck.

Äquivalenz boolescher Ausdrücke

Zwei boolesche Ausdrücke Φ und Ψ sind äquivalent, falls sie dieselbe Funktion repräsentieren.

Sie sind genau dann äquivalent, wenn für alle Variablenbelegungen x_1, \dots, x_n die folgende Beziehung gilt:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Psi(x_1, \dots, x_n)$$

Tautologie

Ein boolescher Ausdruck, der immer wahr ist, wird als **Tautologie** bezeichnet.

Das heißt zwei boolesche Ausdrücke A und B sind äquivalent, wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Vollständiges Operatorensystem

M sei eine beliebige Menge von Operatoren. M ist ein **vollständiges Operatorensystem**, wenn sich jede boolesche Funktion auch durch einen Ausdruck beschreiben lässt, in dem neben den Variablen x_1, \dots, x_n ausschließlich Operatoren aus M vorkommen.

Normalformen

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine beliebige n -stellige boolesche Funktion.

Ein **Minterm** ist jeder Ausdruck der Form

$$\hat{x}_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_n \text{ mit } \hat{x}_i \in \{\bar{x}_i, x_i\}$$

Ein **Maxterm** ist jeder Ausdruck der Form

$$\hat{x}_1 \vee \dots \vee \hat{x}_n \text{ mit } \hat{x}_i \in \{\bar{x}_i, x_i\}$$

Ein **Literal** ist der Teilausdruck \hat{x}_i , der entweder aus einer negierten oder einer unnegierten Variablen besteht.

Kanonische Normalformen

Eine kanonische Normalform ist eine **eindeutige Darstellung** mit UND, ODER und NICHT.

- kanonische **disjunktive Normalform (DNF)**

Die Disjunktion (Verbinden mit ODER) von Mintermen der Funktion

Die **nicht kanonische** Form ist eine Disjunktion beliebiger konjunktiv verknüpfter boolescher Ausdrücke.

- kanonische **konjunktive Normalform (KNF)**

Die Konjunktion (Verbinden mit UND) von Maxtermen der Funktion

Die **nicht kanonische** Form ist eine Konjunktion beliebiger disjuntiv verknüpfter boolescher Ausdrücke.

Es wird **ausschließlich** die **kanonische Form** behandelt und deswegen das Wort kanonisch häufig wegelassen.

Konstruktion der Normalformen

DNF

Es werden für jede **Einszeile** in der Wahrheitstabelle der Funktion ein **Minterm** konstruiert, der für genau diese Variablenbelegungen **1** wird.
Diese Minterme werden dann disjunktiv (\vee) verknüpft.

KNF

Es werden für jede **Nullzeile** in der Wahrheitstabelle der Funktion ein **Max-term** konstruiert, der für genau diese Variablenbelegungen **0** wird.
Diese Maxterme werden dann mit konjunktiv (\wedge) verknüpft.

Beispiel:

a	b	c	$f(a, b, c)$	relative Minterme	relative Maxterme
0	0	0	1	$\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$	
0	0	1	0		$a \vee b \vee \bar{c}$
0	1	0	0		$a \vee \bar{b} \vee c$
0	1	1	1	$\bar{a} \wedge b \wedge c$	
1	0	0	1	$a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$	
1	0	1	0		$\bar{a} \vee b \vee \bar{c}$
1	1	0	0		$\bar{a} \vee \bar{b} \vee c$
1	1	1	1	$a \wedge b \wedge c$	

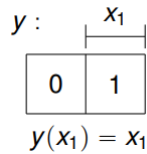
$$f_{\text{DNF}}(a, b, c) = (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$f_{\text{KNF}}(a, b, c) = (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$$

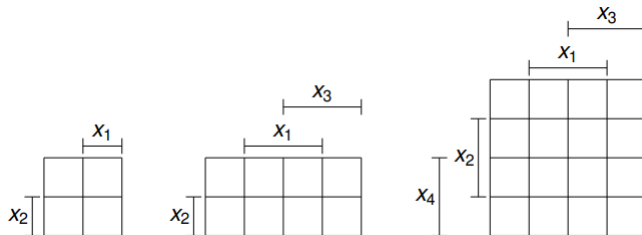
Minimierung

KV-Diagramm

Ein KV-Diagramm ist eine andere Form der Wahrheitstabelle.
Ausgangspunkt mit einer Variablen:

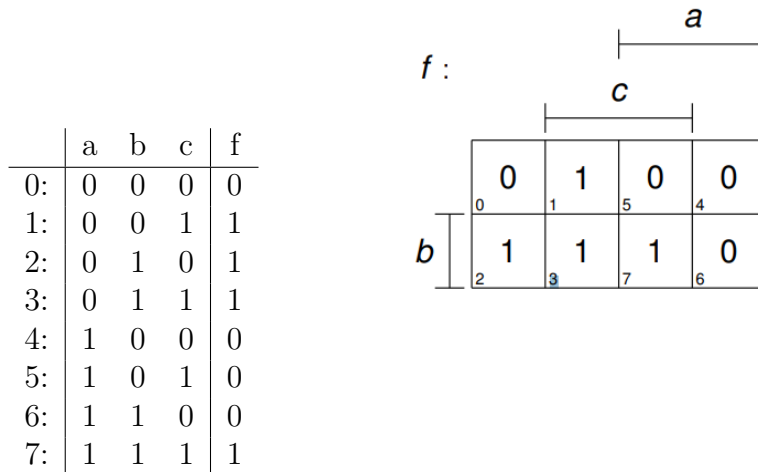


Erweitert wird mit einer abwechselnd horizontalen und vertikalen Spiegelung.



Beispiel: $f(a, b, c) = (\neg a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$

Wahrheitstabelle: Es ergibt sich folgendes KV-Diagramm



Jedes 1-Feld entspricht einem Minterm, jedes 0-Feld einem Maxterm.

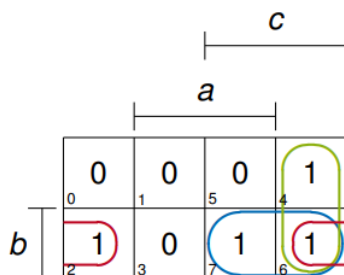
Gegeben seien zwei Belegungen der Variablen x_1, \dots, x_n .

Die Variable x_i heißt **gebunden**, falls sie in beiden Belegungen den gleichen Wert hat.

Die Variable x_i heißt **frei**, falls sie in beiden Belegungen ein unterschiedlichen Wert hat.

Zwei Variablenbelegungen heißen **benachbart**, wenn sie sich in genau einer freien Variablen unterscheiden.

Beispiel für benachbarte Variablenbelegungen:



Benachbarte Blöcke können ebenfalls zusammengefasst werden.

Implikanten

Implikant:

Ein konjunktiv verknüpfter Term, der einen Block von 2^k Einsen beschreibt. (Implikant k -ter Ordnung).

Primimplikant:

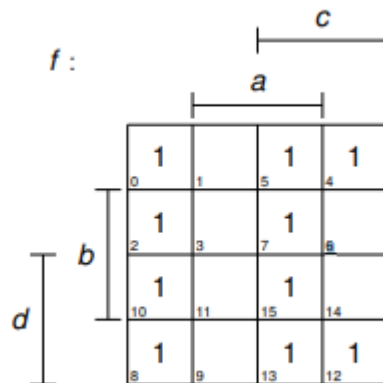
Der Implikant zu einem nicht vergrößerbaren Eins-Block ist ein Primimplikant.

Kernprimimplikant:

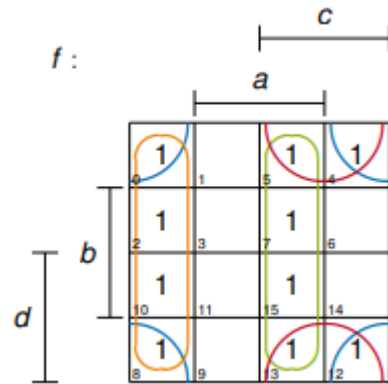
Primimplikant, welcher mindestens eine Eins abdeckt, die durch keinen anderen Primimplikanten abgedeckt wird.

Disjuntive Minimalform über das KV-Diagramm

1. KV-Diagramm erstellen



2. Primimplikanten bestimmen



3. eine minimale vollständige Überdeckung finden

Mit Kernprimimplikanten beginnen

$$\bar{a} \wedge \bar{b}, a \wedge c$$

Mit möglichst wenigen Primimplikanten fortfahren, bis alle 1en überdeckt sind

$$\bar{b} \wedge c$$

4. Disjunktive Minimalform ablesen

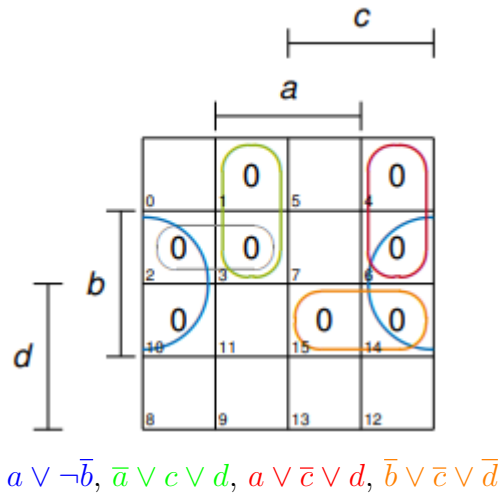
Primimplikanten einer minimalen vollständigen Überdeckung mit \vee verknüpfen

$$f_{\text{DMF}}(a, b, c, d) = (\bar{a} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge c)$$

Konjunktive Minimalform über das KV-Diagramm

1. KV-Diagramm erstellen
2. Primimplikanten der Null-Blöcke bestimmen
3. eine minimale vollständige Überdeckung finden
4. Konjunktive Minimalform ablesen

Es werden die Variablen, die von dem Block nicht überdeckt werden disjunktiv verknüpft



Relationen

Eine (**binäre**) **Relation** zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Teilmenge

$$R \subset X \times Y$$

Im Falle $X = Y$ sprechen wir von einer Relation auf X .

$x \in X$ steht in Relation zu $y \in Y$ genau dann wenn $(x, y) \in R$.

Auch geschrieben: $x R y$ oder $x \sim_R y$ für $(x, y) \in R$ und $x \not R y$ oder $x \not\sim_R y$ für $(x, y) \notin R$.

Seien X, Y und Z Mengen und $R \subset X \times Y, S \subset Y \times X$ Relationen.

- Die zu R **inverse Relation** ist

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$$

- Die Verkettung von R und S ist

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z : \text{es gibt } y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

Eine binäre Relation R auf der Menger X heißt:

- **reflexiv**, wenn $x R x$ für alle $x \in X$.

- **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in X$ aus $x R y$ stets $y R x$ folgt.
- **antisymmetrische**, wenn für alle $x, y \in X$ aus $x R y$ und $y R x$ stets $x = y$ folgt.
- **asymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in X$ aus $x R y$ stets $y \not R x$ folgt.
- **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in X$ aus $x R y$ und $y R z$ stets $x R z$ folgt.

Äquivalenzrelationen

Sei X eine nicht leere Menge. Eine Relation R auf X die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt **Äquivalenzrelationen**. Für $x \in X$ nennt man die Menge

$$[x] \sim_R = \{y \in X : x R y\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x . Man nennt x und jedes andere Element aus $[x] \sim_R$ einen **Vertreter** oder **Repräsentanten** dieser Äquivalenzklasse.

Sei X eine Menge und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Ein **Vertreter-system** ist eine Teilmenge von X , die für jede Äquivalenzklasse genau ein Element enthält.

Ordnungsrelationen

Sei X eine Menge. Eine **Ordnung** auf X ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation. Eine **strikte Ordnung** auf X ist eine asymmetrisch und transitive Relation. Wir nennen eine (strikte) Ordnung \preceq **total**, wenn je zwei Elemente vergleichbar sind:

$$\text{für alle } x, y \in X \text{ gilt } x \preceq y \text{ oder } y \preceq x$$

Ansonsten nennen wir sie **partiell**.

Hüllen

Sei R eine Relation auf der Menge X . Wir definieren:

- Für $n \in \mathbb{N}_0$

$$R^n = \begin{cases} I_X & n = 0 \\ R \circ R^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

Es gilt, dass $R^1 = R$

- Die **transitive Hülle** von R ist

$$R_{\text{trans}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$$

- Die **reflexive Hülle** von R ist

$$R_{\text{refl}} = R \cup I_X$$

- Die **symmetrische Hülle** von R ist

$$R_{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$$

Vollständige Induktion

Das **Prinzip der vollständigen Induktion** ist ein Beweisverfahren, mit dem man Aussagen $A(n)$ beweisen kann, die von $n \in \mathbb{N}_0$ abhängen.

Idee der vollständigen Induktion

Zu zeigen sei die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Angenommen, man kann zeigen, dass $A(n_0)$ gilt, und weiter kann man beweisen, dass $A(n+1)$ gilt, wenn man voraussetzt, dass $A(n)$ gilt, d.h. die Implikation $A(n) \implies A(n+1)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gültig. Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Beweis durch vollständige Induktion

1. **Induktionsanfang (I.A.):** Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass $A(n_0)$ wahr ist.
2. **Induktionsvoraussetzung (I.V.):** Annahme: $A(n)$ ist wahr (für ein $n \geq n_0$).
3. **Induktionsschluss (I.S.):** Zeige: $A(n) \implies A(n+1)$.

Abbildungen

Eine **Abbildung** $f : X \rightarrow Y$ besteht aus:

- einer Menge X , der **Definitionsbereich** von f ;
- einer Menge Y , der **Wertebereich** von f ;
- einer **Vorschrift**, die jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zuordnet.

Notation: $f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$

Seien X, Y Mengen, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $x \in X, y \in Y$ sodass $f(x) = y$.
Dann ist y das **Bild** von x und x ein **Urbild** von y .

Für eine Teilmenge $X_0 \subset X$ ist

$$f(X_0) := \{y \in Y : \text{es gibt } x \in X_0, \text{ sodass } f(x) = y\} \subset Y$$

das **Bild** von X_0 und für eine Teilmenge $Y_0 \subset Y$ ist

$$f^{-1}(Y_0) := \{x \in X : f(x) \in Y_0\} \subset X$$

das **Urbild** von Y_0 .

Seien X und Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

f ist **injektiv** falls aus $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt.

”zu jedem y höchstens 1 x -Wert”

f ist **surjektiv** falls es für jedes $y \in Y$, ein $x \in X$ existiert so dass $f(x) = y$.

”zu jedem y mindestens 1 x -Wert”

f ist **bijektiv** falls f injektiv und surjektiv ist.

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

Die **Komposition** oder **Verknüpfung** von f und g ist die

Abbildung $g \circ f : X \rightarrow Z$, definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Reelle Funktionen

Sei M eine Menge. Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Funktion.

Für Funktionen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ sind $f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ definiert durch

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für $x \in M$
- $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ für $x \in M$
- $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \in M \setminus \{x \in M : g(x) = 0\}$

”punktweise” Entsprechend

- $|f|(x) := |f(x)|, \max\{f, g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\},$
 $\min\{f, g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}$ für $x \in M$
- $f \leq g$ genau dann wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in M$.

Für eine Abbildung $f : N \rightarrow M$ mit $N, M \subset \mathbb{R}$ wird $f^{-1} : M \rightarrow N$ als **Umkehrfunktion** von f bezeichnet.

(!!! $f^{-1} \neq x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ für $x \in M$)

Funktionsgraphen

Seien M eine Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist der **Graph** von f

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\} \subset M \times \mathbb{R}$$

Intervalle

Definitionsbereiche von reellen Funktionen sind oft Intervalle.

- beschränkte Intervalle für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ ”abgeschlossen”, ”kompakt”}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ ”offen”}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \text{ ”halboffen”}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \text{ ”halboffen”}$$

mit $[a, b] = [a, a] = a$ für $a = b$ und $(a, b) = [a, b] = (a, b] = \emptyset$ für $a = b$.

- unbeschränkte Intervalle für $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \text{ "abgeschlossen"} \\ (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \text{ "abgeschlossen"} \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \text{ "offen"} \\ (-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \text{ "offen"} \end{aligned}$$

Beschränkte Mengen und Funktionen

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt

- **nach oben beschränkt** genau dann wenn $\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq C$
 C heißt **obere Schranke**
Falls $M \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt ist M nach oben beschränkt.
- **nach unten beschränkt** genau dann wenn $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \geq c$
 c heißt **untere Schranke**
Falls $M \subset \mathbb{R}$ ein Minimum besitzt ist M nach unten beschränkt.
- **beschränkt** genau dann wenn M nach oben und nach unten beschränkt

Betrachte die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

- f heißt nach **oben/unten beschränkt** genau dann wenn $f(M)$ nach oben/unten beschränkt ist.
- f besitzt ein **Maximum/Minimum** auf M genau dann wenn $f(M)$ ein Maximum/Minimum besitzt.
- Ein Punkt $x_0 \in M$ mit
$$f(x_0) = \max_{x \in M} f(x)$$
heißt **Maximalstelle** von f ,

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x)$$
heißt **Minimalstelle** von f .
- Ein Punkt $x_0 \in M$ heißt **Extremstelle** von f , wenn x_0 eine Maximal- oder Minimalstelle ist.

Monotone Funktionen

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f

- **monoton wachsend**, falls $\forall x, y : x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$
- **streng monoton wachsend**, falls $\forall x, y : x < y \rightarrow f(x) < f(y)$
- **monoton fallend**, falls $\forall x, y : x \leq y \rightarrow f(x) \geq f(y)$
- **streng monoton fallend**, falls $\forall x, y : x < y \rightarrow f(x) > f(y)$

Trigonometrische Funktionen

Betrachte einen Winkel α mit Schenkeln der Länge 1 und Spitze im Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Wenn $\alpha > 0$, dann ist der Winkel orientiert, d.h. Die Strecke des Winkels wird **gegen den Uhrzeigersinn** gedreht.

Wenn $\alpha < 0$, dann ist die Strecke des Winkels **im Uhrzeigersinn** gedreht.

Für die Länge $x = x(\alpha)$ des Kreisbogens die Verhältnisgleichung

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ} \iff x = x(\alpha) = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360^\circ}$$

Sinus- und Cosinus-Funktion

Betrachte den Vektor $(u(x), v(x))$ auf dem Einheitskreis um 0, der mit der positiven x -Achse den Winkel $x = x(\alpha)$ bildet.

Dann ist die **Cosinus-Funktion** definiert als

$$\cos(x) := u(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

und die **Sinus-Funktion** definiert als

$$\sin(x) := v(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Es folgen wesentliche Eigenschaften von Sinus und Cosinus:

- \cos und \sin sind 2π -periodisch. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ und $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x) \implies \cos$ ist eine **gerade** Funktion.

- $\sin(-x) = -\sin(x) \implies \sin$ ist eine **ungerade** Funktion.
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $|\cos(x)| \leq 1, |\sin(x)| \leq 1, |\sin(x)| \leq |x|$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die **Additionstheoreme**

$$\begin{aligned}\cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \\ \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)\end{aligned}$$

Spezialfälle:

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(x) \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \cos(x) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = \cos(x) \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \sin(x) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = \sin(x)\end{aligned}$$

Tangens-Funktion

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ für } x \in D := \mathbb{R} \setminus \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Eigenschaften des Tangens:

- Die Tangens-Funktion ist π -periodisch, d.h. für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in D$ gilt

$$\tan(x+k\pi) = \frac{\sin(x+k\pi)}{\cos(x+k\pi)} = \frac{\sin(x)\cos(k\pi) + \cos(x)\sin(k\pi)}{\cos(x)\cos(k\pi) - \sin(x)\sin(k\pi)} = \frac{\mp \sin(x)}{\mp \cos(x)} = \tan(x).$$

- Die Tangens-Funktion ist ungerade, es gilt für $x \in D$

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

Polynome

Sei t eine Variable oder Unbestimmte. Ein **Polynom mit Koeffizienten in \mathbb{R}** oder ein **Polynom über \mathbb{R}** ist ein formaler Ausdruck der Gestalt

$$P(t) := \sum_{k=0}^m a_k t^k = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

mit $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Die Menge aller Polynome über \mathbb{R} wird mit $\mathbb{R}[t]$ bezeichnet. Falls $a_m \neq 0$ (**Leitkoeffizient**) gilt, dann heißt m der **Grad** von P .

Notation:

- Wir bezeichnen mit $\deg P$ den Grad von P .
- Für das Nullpolynom N , bei dem alle a_i Null sind, ist $\deg N := -\infty$.
- $\mathbb{R}_m[t] := \{P \in \mathbb{R}[t] : \deg P \leq m\}$.
- Polynome von Grad 0 ($P(x) = a_0$) sind die **konstanten Polynome**.
- Polynome von Grad 1 ($P(x) = a_1 x + a_0$) sind die **linearen Polynome**.
- Polynome von Grad 2 ($P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$) sind die **quadratischen Polynome**.

Eine **Polynomfunktion** ist eine Funktion der Form $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto P(x)$ für ein Polynom $P \in \mathbb{R}[t]$.

Seien $M \subset \mathbb{R}, x_0 \in M$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt x_0 **Nullstelle** von f , falls $f(x_0) = 0$ gilt.

Ein Polynom $P \in \mathbb{R}_m[x]$ vom Grad $m \in \mathbb{N}$ hat **höchstens** m Nullstellen.

Zahlensysteme

Binärsystem

Eine Binärzahl b mit $n + 1$ Stellen hat die Form $b_n \dots b_1 b_0$ mit $b_i \in \{0, 1\}$.

Sie entspricht der Dezimalzahl d mit $d = b_n \cdot 2^n + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$

Beispiel: $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$

Carry-Flag

Wenn bei einer Addition oder Subtraktion ein **Übertrag in der höchsten Stelle** auftritt, wird die Carry-Flag gesetzt. Dieser kann von nachfolgenden Befehlen aufgerufen werden.

Zweierkomplement

Um **negative Zahlen** darzustellen wird der entsprechende Wert des **höchsten Bits negiert**.

Beispiel bei 4 Bit: $1011_{2c} = 1 \cdot (-2^3) + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = -5$

Um von einer positiven ganzen Zahl zur negativen Zahl (oder umgekehrt) gleichen Betrags zu gelangen werden **alle Bits invertiert** und **1 zum Ergebnis addiert**.

Hexadezimalsystem

Eine Hexadezimalzahl h mit $n + 1$ Stellen hat die Form $h_n \dots h_1 h_0$ mit $h_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A(\cong 10), B(\cong 11), C(\cong 12), D(\cong 13), E(\cong 14), F(\cong 15)\}$.

Sie entspricht der Dezimalzahl d mit $d = h_n \cdot 16^n + h_1 \cdot 16^1 + h_0 \cdot 16^0$.

Beispiel: $5F_{16} = 5 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 95_{10}$

4 Binärziffern lassen sich zu einer Hexadezimalzahl zusammenfassen:

$$\underbrace{1101}_{13_{10}=D_{16}} \underbrace{0011}_3 = D3_{16}$$

Oktalsystem

Eine Oktalzahl o mit $n + 1$ Stellen hat die Form $o_n \dots o_1 o_0$ mit $o_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Sie entspricht der Dezimalzahl d mit $d = o_n \cdot 8^n + \dots + o_1 \cdot 8^1 + o_0 \cdot 8^0$.

Beispiel: $36_8 = 3 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 30_{10}$

3 Binärziffern lassen sich zu einer Oktalzahl zusammenfassen:

$$\underbrace{11}_3 \underbrace{010}_2 \underbrace{011}_3 = 323_8$$

Festkommazahlen

Eine Festkommazahl besteht aus einer **festen Anzahl von Ziffern vor und nach dem Komma**.

2^3	2^2	2^1	2^0		2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
1	1	0	1	.	0	1	0	1

Gleitkommazahlen: IEEE 754

3 Formate:

- Single Precision: 32 Bit
- Double Precision: 64 Bit
- Extended Precision: 80 Bit

Basiert auf der wissenschaftlichen Notation.

Aufbau

Single Precision:	1 Bit Vorzeichen	8 Bit Exponent	23 Bit normalisierte Mantisse
Double Precision:	1 Bit Vorzeichen	11 Bit Exponent	52 Bit normalisierte Mantisse

Vorzeichen: 0 = +; 1 = −

Exponent: wird gespeichert, indem man den festen Biaswert (127:SP, 1023:DP) addiert.

Die Mantisse beginnt mit einem "Hidden Bit" (immer 1).

Dezimal zu IEEE 754

Beispiel: -62.058

1. Vorzeichen Bit bestimmen

Vorzeichen Bit = 1

2. Zu pur Binär umwandeln

$$62.058_{10} = 111110.10010100_2$$

3. Normalisieren für Mantisse und Exponent (ohne Bias)

$$111110.10010100_2 = 1.1111010010100_2 \cdot 2^5$$

4. Exponent mit Bias bestimmen

$$5 + 127 = 132_{10} = 10000100_2$$

5. Führende 1 der Mantisse abschneiden

$$1.1111010010100_2 \rightarrow 1111010010100_2$$

6. Zusammenfügen

$$-62.058_{10} = \underbrace{1}_{\substack{\text{Vorzeichen} \\ \text{Bit}}} \underbrace{10000100}_{\text{Exponent}} \underbrace{1111010010100}_{\text{Mantisse}}$$

IEEE 754 zu Dezimal

Beispiel: 01000010011010100000000000000000

1. Vorzeichen bestimmen

Vorzeichen: +

2. Exponent bestimmen (Bias muss abgezogen werden)

$$10000100_2 - 127_{10} = 132_{10} - 127_{10} = 5_{10}$$

3. Mantisse bestimmen

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
1	1	0	1	0	1

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{53}{64} = 0.828125$$

4. 1 zur Mantisse addieren (Hidden Bit) und Vorzeichen einrechnen

$$1.828125$$

5. Ergebnis berechnen

$$1.828125 \cdot 2^5 = 58.5_{10}$$

Fehlererkennung

Redundanzen

Eine Einheit von n Datenbits und k Redundanzbits nennt man **Codewort**.

Die **Länge** eines Codeworts ist insgesamt $n + k$.

Die Menge aller gültigen Codewörter nennt man **Code**.

Hamming-Distanz

Die Hamming Distanz zweier Codewörter ist gegeben als die Anzahl der Bitpositionen, in denen sie sich unterscheiden.

Beispiel: 11110000 und 11001100 \Rightarrow Hamming-Distanz beträgt 4

Die Hamming Distanz eines Codes ist die kleinste Hamming-Distanz zweier Codewörter

Beispiel: {1100, 0011, 1111} \Rightarrow Hamming-Distanz beträgt 2

c -Bit Fehler können erkannt werden, wenn die Hamming-Distanz $c+1$ beträgt.
 c -Bit Fehler können korrigiert werden, wenn die Hamming-Distanz $2c + 1$ beträgt.

Parität

Durch Hinzufügen eines **Paritätsbits** wird ein Code mit Hamming-Distanz 2 erzeugt.

Das Paritätsbit wird gesetzt sodass die Gesamtzahl der 1en...

... gerade ist

$\underbrace{00100101}_{\text{Datenbits}} \underbrace{1}_{\text{Paritätsbit}}$

... ungerade ist

$\underbrace{00100101}_{\text{Datenbits}} \underbrace{0}_{\text{Paritätsbit}}$

Zweidimensionale Parität

Die zweidimensionale Parität konstruiert einen Code mit Hamming-Distanz 4.

Dabei werden n Wörter zu je n Bits in einer $n \times n$ -Matrix untereinander geschrieben und über jede Zeile und jede Spalte je ein Paritätsbit berechnet.

Bei einem 1-Bit-Fehler stimmen die Paritätsbits genau einer Zeile und Spalte nicht.

Dann ist die Position des Fehlers klar und er kann korrigiert werden.

fehlerfrei:	0	1	1	0		0	1-Bit-Fehler:	0	1	1	0		0
	1	0	0	0		1		1	0	1	0		1
	0	1	0	0		1		0	1	0	0		1
	0	1	1	1		1		0	1	1	1		1
	1	1	0	1		1		1	1	0	1		1

Das Bit ganz unten rechts wird zur Paritätsberechnung der Paritätszeile und -spalte genutzt.

Hamming-Code

Ein Hamming-Code mit n **Redundanzbits** hat maximal $2^n - 1$ Bits und maximal $2^n - 1 - n$ Datenbits (mit $n \in \mathbb{N}$)

Die Bits des Codewortes werden, beginnend bei 1, durchnummeriert.

Das i -te **Prüfbit** (auch Redundanzbit) steht im Codewort an Position 2^i ($\Rightarrow 1, 2, 4, 8, \dots$)

Beispiel (gerade Parität):	Position	Bits des Codewortes	
	1_{10}	0	Prüfbit
	2_{10}	1	Prüfbit
	3_{10}	0	
	4_{10}	0	Prüfbit
	5_{10}	1	
	6_{10}	0	
	7_{10}	1	

Gespeichertes Datenwort: 0101

Berechnung der Prüfbits

Jedes Prüfbit ist ein Paritätsbit über eine eindeutige Menge von Bits.

Das i -te Prüfbit an Position 2^i wird über alle Stellen aus dem Codewort berechnet, für die in der Binärdarstellung für 2^i das Bit auf der jeweiligen Position auf 1 gesetzt ist.

Beispiel: 0. Prüfbit an Stelle $2^2 = 4_{10} = 100_2 \implies$ jedes Bit aus dem Codewort, in dessen Binärdarstellung der Position das Bit auf Position 2^2 gesetzt ist, wird zur Berechnung des Prüfbits verwendet.

Summenzeichen und Produktzeichen

Summenzeichen

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Die Summen der Zahlen a_m, a_{m+1}, \dots, a_n wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

Dabei gilt: $i \hat{=}$ **Summationsindex**; $m/n \hat{=}$ **untere/obere Summationsgrenze**.
Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^n c \cdot a_i &= c \cdot \sum_{i=m}^n a_i \\ \sum_{i=m}^n (a_i + b_i) &= \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i\end{aligned}$$

Leere Summe:

$$\sum_{i=m}^n := 0, \text{ für } m > n$$

Produktzeichen

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Das Produkt der Zahlen a_m, a_{m+1}, \dots, a_n wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Dabei gilt: $i \hat{=}$ **Laufindex**; $m/n \hat{=}$ **untere/obere Grenze**.
Leeres Produkt:

$$\prod_{i=m}^n := 1, \text{ für } m > n$$

Rechenregeln

Bruchregeln

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot c} & \frac{a}{b} + \frac{c}{b} &= \frac{a+c}{b} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} & \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}\end{aligned}$$

Potenzgesetze

$$\begin{aligned}a^n \cdot a^m &= a^{n+m} & a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\ (a^n)^m &= (a^m)^n = a^{n \cdot m} & a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, a \neq 0 \\ a^0 &= 1, a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Wurzelgesetze

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^n} &= a & (\sqrt[n]{a})^n &= a \\ \sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0 \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} & a^{-\frac{1}{n}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, a > 0\end{aligned}$$

Logarithmengesetze

$$\begin{aligned}\log 1 &= 0 & \log e &= 1 \\ a^x = b &\Leftrightarrow x = \log_a(b) & \log(a^x) &= x \log a \\ \log(x \cdot y) &= \log x + \log y & \log\left(\frac{x}{y}\right) &= \log x - \log y\end{aligned}$$

Trigonometrie

Bogenmaß

Der Bogenmaß ist die Länge des Kreisbogens des Einheitskreises und gibt den Betrag des Winkels an. Der Umfang des Einheitskreises beträgt 2π .

Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

Umwandlung von Winkel α von Gradmaß zu Bogenmaß: $\text{Bogenmaß} = \alpha \frac{\pi}{180}$
Umwandlung von Winkel α von Bogenmaß zu Gradmaß: $\text{Gradmaß} = \alpha \frac{180}{\pi}$