30/11/2020

- Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Introduzione:

Sia $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$

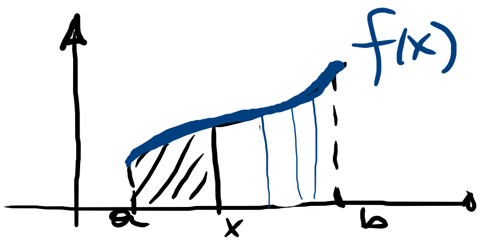
Allora comunque io fissi $x \in [a,b]$ f è R-integrabile sull'intervallo $[a,x] \subseteq [a,b]$.

Definiamo la funzione $F: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ come segue:

integrale definito: $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \forall\ x \in [a,b].$$

Osserviamo che $F(a) = 0$ $\quad F(a) = \int_a^a f(t)dt$

F viene detta funzione integrale di f



Vale il seguente teorema

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Sia f continua su $[a,b]$

Allora la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in [a,b]$,
è derivabile su $[a,b]$.

Inoltre vale $\quad F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

In altri termini, F è primitiva di f su $[a,b]$.

Dimostrazione

i) Sia $x_0 \in (a,b)$. Allora per h sufficientemente piccolo $x_0 + h \in (a,b)$. Considero il rapporto incrementale di F centrato in x_0:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Osserviamo che $\begin{cases} \text{se } h>0 & x_0+h > x_0 \\ \text{se } h<0 & x_0+h < x_0 \end{cases}$

Per entrambi i casi $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ è la media

integrale di f sull'intervallo $\begin{cases} [x_0, x_0+h] & h>0 \\ [x_0+h, x_0] & h<0 \end{cases}$

Infatti: se $h>0$ $\quad \frac{1}{x_0+h-x_0}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$

se $h<0$ $\quad \frac{1}{x_0-(x_0+h)}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt = \frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt =$

$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$

Poichè f è continua su $[a,b] \Rightarrow f$ è continua sull'intervallo di estremi x_0, $x_0+h \in (a,b)$.
Possiamo quindi applicare il Teorema della media integrale. Quindi $\exists\, z \in \begin{cases} [x_0, x_0+h], & h>0 \\ [x_0+h, x_0], & h<0 \end{cases}$

tale che:

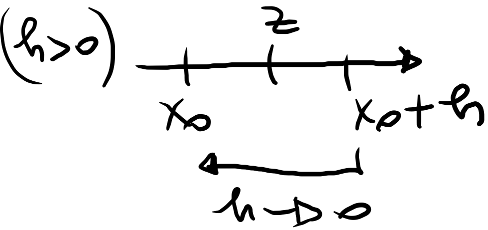
$$f(z) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

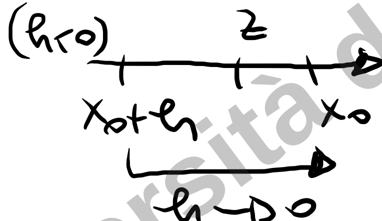
Passiamo ora al limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale di F centrato in x_0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt=$$

$$=\lim_{h\to 0} f(z) \qquad \text{con } z\in \begin{cases}[x_0,x_0+h] & h>0\\ [x_0+h,x_0] & h<0\end{cases}$$

Osserviamo che se $h\to 0 \Rightarrow x_0+h\to x_0 \Rightarrow z\to x_0$





Quindi si ottiene:

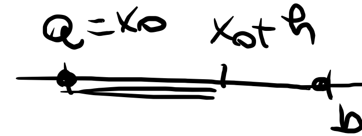
(f è continua in x_0)

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0} f(z)=\lim_{z\to x_0} f(z)=f(x_0)$$

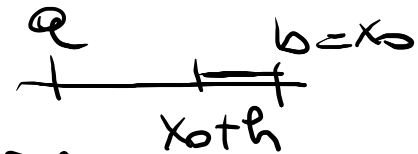
Di conseguenza $\exists$ finito $\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ e vale $f(x_0)$.

Quindi $\exists\, F'(x_0) = f(x_0)$.

ii) Sia ora $x_0 = a$. Si ripetono gli stessi passaggi limitandoci all'incremento $h>0$



Se invece $x_0 = b$, si procede in modo analogo con incremento $h<0$



<u>Conclusione</u> F è derivabile in $[a,b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Formula fondamentale del calcolo integrale

Sia $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Sia f continua su $[a,b]$

Sia G una primitiva di f su $[a,b]$

Allora $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$

Dimostrazione

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ è primitiva di f su $[a,b]$.

Allora F e G sono primitive della stessa funzione f su $[a,b]$.

Quindi F e G differiscono per una costante additiva su $[a,b]$, ovvero

$$(*) \quad F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in [a,b].$$

Poniamo $x=a$ in $(*)$ $\Rightarrow$ $F(a) = G(a) + c$

Ricordiamo che $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

Quindi $0 = G(a) + c \Rightarrow c = -G(a)$

Poniamo ora $x=b$ in $(*)$ $\Rightarrow F(b)=G(b)+c$

Ma abbiamo $F(b)=\int_a^b f(t)dt$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(t)dt = G(b)+c$$

Ricordiamo che $c=-G(a)$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a)$$

E la tesi è dimostrata.

Notazione

$$\int_a^b f(t)dt = G(x)\Big|_a^b = G(b)-G(a)$$

$$= [G(x)]_a^b = G(b)-G(a)$$

Osservazione

Nella formula fondamentale del calcolo integrale si può scegliere una primitiva qualunque e il risultato non cambia:

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \left(G(x)+c\right)\Big|_a^b = G(b)+c-\left(G(a)+c\right) =$$

$$= G(b)+c-G(a)-c$$

$$= G(b)-G(a)$$

Ex

1) $$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(\frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

2) $$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} dx = \int_{1}^{2} x^{-2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{2} = -\frac{1}{2} - (-1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

3) $$\int_{0}^{2} \frac{1}{x-3} dx = \log|x-3|\Big|_{0}^{2} = \log 1 - \log 3 = -\log 3$$

4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2\sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin 2x \, dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{1}{4}\left[\cos 2\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[1 - 0\right] = -\frac{1}{4}$$

4bis) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x \cos x \, dx =$

$$= \frac{(\sin x)^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{(\sin \pi)^2}{2} - \frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

5) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{-2} \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2-1|\Big|_{-3}^{-2} =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log 8 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{8}\right)$

6) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{x^4+1}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(x^2)\Big|_0^1 =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\arctan 1 - \frac{1}{2}\arctan 0 = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

7) $$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-5x+6}\,dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{7}{x-2} + \frac{9}{x-3}\right] dx =$$

$$= -7\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx + 9\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$\begin{cases} A = 2-B \\ -6+3B-2B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -7 \\ B = 9 \end{cases}$$

Trovo A e B

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} = $$

$$= \frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)} = \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=3 \end{cases}$$

$$= -7\log|x-2|\Big|_0^1 + 9\log|x-3|\Big|_0^1 =$$

$$= -7\log 1 + 7\log 2 + 9\log 2 - 9\log 3 =$$

$$= 7\log 2 + 9\log\left(\frac{2}{3}\right)$$

8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4x+4}\,dx \left(= \int_0^1 \frac{x-1}{(x-2)^2}\,dx = \right)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-4x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(2x-4)+2}{x^2-4x+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-4}{x^2-4x+4}\,dx + \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^1 \frac{\cancel{2}}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2-4x+4|\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{x-2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\log 1 - \frac{1}{2}\log 4 +$$

$$- \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} = (*)$$

$$(*) = -\log 2 + 1 - \frac{1}{2} = -\log 2 + \frac{1}{2}$$

9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+x+1}\,dx =$

$(\Delta = 1-4<0)$

$$= \int_0^1 \frac{2x+1\ \ +4}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 4\int_0^1 \frac{1}{\underbrace{x^2+x+1}}\,dx$$

$$= \log|x^2+x+1|\Big|_0^1 + 4\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1}\,dx$$

$$= \log 3 - \log 1 + 4\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \log 3 + 4\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \log 3 + 4\int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\frac{4}{3}+1\right]}\,dx =$$

$$= \log 3 + 4\cdot\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx =$$

$$= \log 3 + \frac{16}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\Bigg|_0^1$$

$$= \log 3 + \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \frac{3}{2}\right) - \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \log 3 + \frac{8\sqrt{3}}{3} \left[\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \right] =$$

$$= \log 3 + \frac{8\sqrt{3}}{3} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right] = \log 3 + \frac{8\sqrt{3}}{3} \frac{\pi}{6}$$

$$= \log 3 + \frac{4}{9} \sqrt{3}\,\pi$$

- **Metodo di integrazione per sostituzione**

Sia $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sia f continua su $[a,b]$

Sia $g : [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R} \to [a,b]$, derivabile su $[\alpha,\beta]$

Siano g e g' continue su $[\alpha,\beta]$

Sia $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$.

Allora $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Dimostrazione

Sia F una primitiva di f su $[a,b]$. $\left(\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)\right)$ (*)

Allora F è derivabile su $[a,b]$ con derivata $F' = f$, continua su $[a,b]$.

Quindi la funzione composta $(F\circ g)(x) = F(g(x))$ è continua e derivabile con derivata continua su $[\alpha,\beta]$.

Quindi: $\underline{(F\circ g)'(x)} = F'(g(x)) \cdot g'(x) = \underline{f(g(x))g'(x)}$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$

Ma allora

$$\int_\alpha^\beta \underline{f(g(x))g'(x)}\,dx = \int_\alpha^\beta \underline{(F\circ g)'(x)}\,dx \overset{\text{Teo. calcolo integrale}}{=} (F\circ g)(\beta) - (F\circ g)(\alpha)$$

$$= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Osservazione ①

Nella risoluzione degli esercizi la formula va usata con attenzione a seconda dei casi – ovvero, se la uso in questa direzione:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt \Rightarrow$$

devo trovare $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ tale che:

g e g' siano continue su $[\alpha, \beta]$ con $g' > 0$ ($g' < 0$):

$$\left[\begin{array}{l|l} x = g(t) & t = g^{-1}(x) \\ a = g(\alpha) & \alpha = g^{-1}(a) \\ b = g(\beta) & \beta = g^{-1}(b) \end{array}\right.$$

(g è strettamente monotona $\Rightarrow$ g è invertibile $\Rightarrow$ g^{-1} è invertibile e continua)

Osservazione 2

Negli integrali indefiniti il metodo di sostituzione è il seguente:

i) se f continua

se g e g' continue

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx \Big|_{x=g(t)} = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

ii) se inoltre $g'>0$ ($g'<0$)

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

Ex 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx =$

$e^x = t \qquad t = g^{-1}(x)$

$x = \log t = g(t)$

$g'(t) = \frac{1}{t}$

$x=0 \quad t=1$

$x=1 \quad t=e$

$$= \int_1^e \frac{t^2}{t+1}\,\frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \int_1^e \frac{t}{t+1}\,dt =$$

$$= \int_1^e \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \Big[t - \log|t+1|\Big]_1^e =$$

$e - \log(e+1) - 1 + \log 2$

$= e - 1 + \log\left(\frac{2}{e+1}\right)$

2) $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}\,dx =$

$(t = g^{-1}(x))$

$\sqrt{x} = t \qquad t > 0$

$x = t^2 = g(t)$

$g'(t) = 2t$

$x = 9 \qquad t = 3$

$x = 16 \qquad t = 4$

$$= \int_3^4 \frac{t-3}{t^2-3t+2}\, 2t \, dt$$

$$= 2\int_3^4 \frac{(t^2-3t+2)-2}{t^2-3t+2}\,dt = 2\int_3^4 \left(1 - \frac{2}{t^2-3t+2}\right)dt$$

$$2 \cdot 1 - 4\int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2}\,dt =$$

(concludere ....)

$$= 2 - 4\log\frac{4}{3}$$ (vedi pag. successiva)

$$\int_3^4 \frac{1}{t^2-3t+2}\,dt = \int_3^4 \left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2}\right)dt =$$

$$= \int_3^4 \left(-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-2}\right)dt = \left(-\log|t-1| + \log|t-2|\right)\Big|_3^4 =$$

$$= -\log 3 + \log 2 + \log 2 - \log 1 = \log\frac{4}{3}$$

$$\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2} = \frac{At-2A+Bt-B}{(t-1)(t-2)} = \frac{(A+B)t-2A-B}{(t-1)(t-2)} = \frac{1}{t^2-3t+2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-B \\ 2B-B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

Bibliografia

- Marcellini - Sbordone, Calcolo, capitolo 15
- Matematica Assistita, Aracne, Argomento 9