4/12/2020

Importante esempio da ricordare

Integrale improprio della funzione gaussiana

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{2\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx}_{\text{integrale di Riemann } = \alpha \in \mathbb{R}} + 2\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$2\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} 2e^{-x^2}\,dx$$

$$0 \le 2e^{-x^2} \le 2xe^{-x^2}$$

su $[1,+\infty)$

$$\lim_{K\to+\infty} \int_1^{K} 2xe^{-x^2}\,dx = \lim_{K\to+\infty} \left. -e^{-x^2} \right|_1^{K} =$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \left(-e^{-K^2} + e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{1} e^{-x^2}\,dx + 2\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le 2 + \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ è convergente

Si può dimostrare che $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$

<u>Ex</u>:

Calcolare: $\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-B(x-x_0)^2}\,dx$ $\quad \forall A, x_0 \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Serie numeriche

Sia a_n una successione di numeri reali.
Vogliamo dare significato alla somma degli infiniti termini della successione, ovvero:

$$a_1 + a_2 + \dots a_n + \dots$$

E' necessario introdurre una operazione di passaggio al limite come segue:

Definiamo la somma parziale, o somma n-esima:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Successione delle somme parziali

Introduciamo la serie numerica come limite di S_n per $n \to +\infty$, ovvero:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Identifichiamo quindi la serie con il limite della successione delle somme parziali

Definizione

Se $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} S \in \mathbb{R} & \text{si dice che la } \sum_1 a_n \text{ è convergente e ha come somma } S \\ +\infty / -\infty & \text{si dice che la } \sum_1 a_n \text{ è divergente e ha come somma } +\infty \text{ o } - \\ \nexists & \text{si dice che la } \sum_1 a_n \text{ è oscillante o indeterminata} \end{cases}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{carattere di una serie}}$

Ex Serie di Mengoli (serie telescopica) (da ricordare)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = 1$$

$\Rightarrow$ la serie è convergente e ha somma $= 1$

Ex

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{S_0} - 1}_{S_1} + 1}_{S_2} - 1}_{S_3} + \cdots$$

$S_0 = 1$

$S_1 = 0$

$S_2 = 1$

$S_3 = 0$

$\vdots$

Quindi $\lim_{k \to +\infty} S_k$ non esiste

$\Rightarrow$ la $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ è indeterminata

Teorema condizione necessaria per la convergenza di una serie

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergente. Allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Dimostrazione Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente $\Rightarrow$

$\exists$ finito il $\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = S$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n - \lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

- Carattere delle serie a termini di segno costante

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con $a_k \geq 0$ (≤ 0) $\forall k \in \mathbb{N}$,

allora la serie è convergente oppure divergente a $+\infty$.
($-\infty$)

Dim $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} \geq 0$$

Quindi $S_{n+1} \geq S_n \Rightarrow$ la successione S_n è

monotone crescente $\Rightarrow$ è regolare $<$ converge a $S \in \mathbb{R}$ / diverge a $+\infty$

In modo analogo si dimostra che se $a_k \le 0$ allora S_n è monotona decrescente $\Rightarrow$

$$S_n \begin{cases} \text{converge a } S \in \mathbb{R} \\ \text{diverge a } -\infty \end{cases}$$

Il risultato è vero anche se $a_k \ge 0$ (≤ 0) definitivamente, ovvero da un certo n_0 in poi

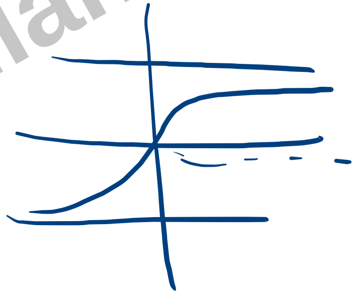
I primi termini della successione delle somme parziali non contano per stabilire il carattere di una serie.

EX Stabilire il carattere della serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan n$

$\arctan n \geq 0$

$\arctan n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} \neq 0$



divergente a $+\infty$

2) (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n^2}}{\left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)}$

$$\frac{\sin\frac{1}{n} + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n^2}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} = \frac{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \sim \frac{2}{n} \cdot n^2 = 2n \longrightarrow +\infty$$

$\Longrightarrow$ (*) diverge

Ex la serie geometrica (da ricordare)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots x^n + x^{n+1} + \dots$$

x: ragione della serie

- Osserviamo che per $x=1$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \underbrace{1+1\dots}_{n+1 \text{ volte}} = n+1 \to +\infty$

- Sia $x \neq 1$. Abbiamo dimostrato per induzione su n (vedi prime esercitazioni)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

. Passiamo al limite per $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } |x|<1 \\ +\infty & \text{se } x>1 \\ \nexists & \text{se } x\le -1 \end{cases}$$

Ricordiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x|<1 \\ (1 & \text{se } x=1) \\ +\infty & \text{se } x>1 \\ \nexists & \text{se } x\le -1 \end{cases}$$

Conclusioni:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1-x} & \text{per } -1<x<1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{per } x \geq 1 \\ \text{è indeterminata} & \text{per } x \leq -1 \end{cases}$$

Osservazione: se $|x|<1 \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - x^0 = \frac{1}{1-x} - 1 \right)$$

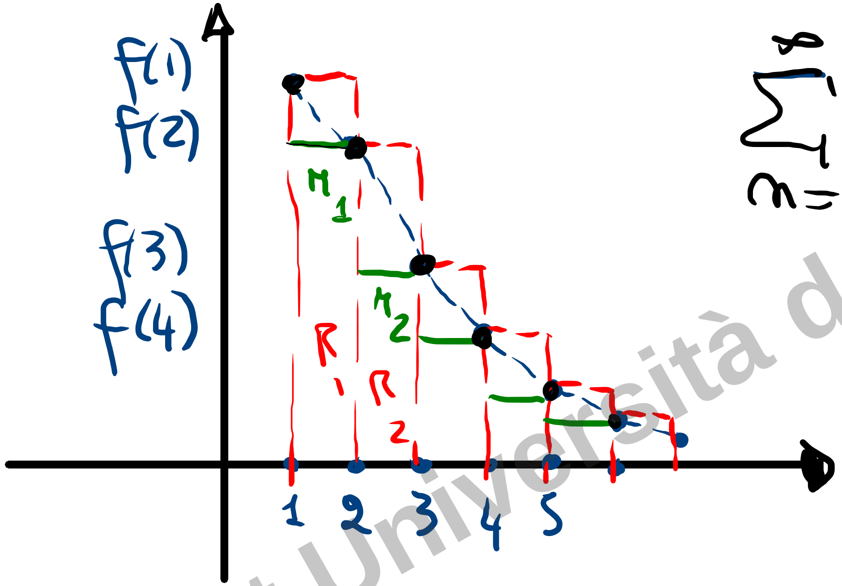
Risulta ora chiaro perché nella rappresentazione decimale dei numeri razionali si esclude $\overline{9}$, ovvero $0,\overline{9} = 1 \qquad 1,2\overline{9} = 1,3 \quad \ldots\ldots$

Infatti

$$0,\overline{9} = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots + \frac{9}{10^n} + \ldots = 9\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k$$

$$= 9 \cdot \left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right] = 9\left[\frac{10}{9} - 1\right] = 10 - 9 = 1$$

• Legame tra integrali impropri su $[1,+\infty)$ e somma della $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ con $f(x)>0$ e $f(x)$ continua e monotòna decrescente su $[1,+\infty)$



$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{f(n)(n+1-n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(R_n)$$

$$\text{Area}(R_n) = f(n)(n+1-n) = \underline{f(n)}$$

$$\underline{\text{Area}(r_n)} = \underline{f(n+1)}(n+1-n) = \\ = \underline{f(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)(\overbrace{\cancel{n+1-n}}^{1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\text{Area}(R_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(r_n) + f(1)$$

Quindi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\right) - f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(r_n) \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(R_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

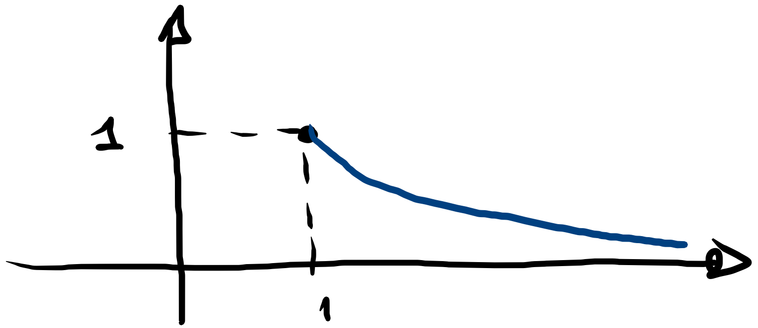
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverge $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge

Ex serie armonica (da ricordare)

Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

- $\frac{1}{n} \to 0$ condizione necessaria ok.
- $\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \sum^{+} \frac{1}{n}$ converge (diverge a $+\infty$
- $\frac{1}{x}$: continua su $[1, +\infty)$ $\frac{1}{x} > 0$ su $[1, +\infty)$

monotona decrescente strettamente



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^k \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(\log k - \log 1 \right) = +\infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

Ex. Serie armonica generalizzata (1) (da ricordare)

Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$

per $a > 0$ e per $a \leq 0$.

- i) per $a \leq 0$ $\quad \frac{1}{n^a} = n^{-a} \to \begin{cases} 1 & a=0 \\ +\infty & a<0 \ (-a>0) \end{cases}$

$-a \geq 0$

$\frac{1}{n^a} \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ è divergente a $+\infty$

- ii) $a > 0$ $\quad \frac{1}{n^a} \Rightarrow \frac{1}{x^a}$ su $[1, +\infty)$

è monotona decrescente, continua e positiva

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \text{converge} & a>1 \\ \text{diverge } a+\infty & 0<a\leq 1 \end{cases}$$

$a>0$

Conclusione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \text{converge per } a>1 \\ \text{diverge per } a\leq 1 \end{cases}$$

Serie armonica generalizzata (2) (da ricordare)

Si può dimostrare che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \log^b n}$$

converge se e solo se

$$\begin{cases} a > 1 & \forall\, b \\ a = 1 & \forall\, b > 1 \end{cases}$$

- Criteri di convergenza per le serie a termini di segno costante ($a_n \geq 0$, $a_n \leq 0$)

Osservazione: sotto queste ipotesi $\sum a_n$ è convergente o divergente

<u>Criterio del confronto per serie a termini di segno costante</u>

Siano a_n e b_n tali che $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

i) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è divergente

ii) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente

Dimostrazione

Siano $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

le somme parziali delle due serie

Poiché $0 \leq a_n \leq b_n \Rightarrow$

$$0 \leq S_n \leq T_n .$$ Quindi:

i) Se $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty$

(Teo confronto successioni)

ii) Se $\lim_{n \to +\infty} T_n = T \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \to +\infty} S_n \leq \lim_{n \to +\infty} T_n = T$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = S \leq T$ (non può essere $+\infty$)

Ex Stabilire il carattere della serie

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sin^2 n}$ $\qquad \frac{1}{n^2+\sin^2 n} > 0$

$0 < \frac{1}{n^2+\sin^2 n} \leq \frac{1}{n^2}$ $\qquad \frac{1}{n^2}$ termine generale serie convergente + teo. confronto

$\boxed{\text{converge}}$

2) (*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$ $\qquad \boxed{\text{diverge a } +\infty}$

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$1 \leq 2+\sin n \leq 3$

$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{2+\sin n}{n} \leq \frac{3}{n}$

$\frac{1}{n}$ t.g. serie divergente

$\Rightarrow$ (*) diverge

Criterio del confronto asintotico per serie a termini di segno costante

Siano a_n e b_n tali che $a_n > 0$, $b_n > 0$, $a_n \sim b_n$.

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow$ fissato $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$

$\exists\, n_0 : \forall n > n_0 \quad 1 - \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$ - Da criterio confronto segue la tesi.

Stabilire il carattere delle serie

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n + \log n}{e^n + n^4 - \frac{1}{n}}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sin\frac{1}{n}\right]$$

Bibliografia

Marcellini e Sbordone, Calcolo, Capitolo 17