Linguaggi Formali e Automi

Informatica Triennale: I anno
Docente: Beatrice Palano
Data: 02 luglio 2015

Matricola: .... Cognome: .... Nome: ....

La durata dell'esame scritto è di **2 ore**. Con la sufficienza si accede all'orale.

Buono	Sufficiente	Insufficiente

---

1. Dati i due linguaggi $A = a^*cb^*$ e $B = c^*$, rispondere alle seguenti domande:

   (a) Che linguaggio è $A \cap B$?

   Soluzione: $A \cap B = \{c\}$. Infatti, essendo B un linguaggio unario sull'alfabeto $\{c\}$, l'unico elemento in comune con A è proprio la parola fatta da una sola c. La parola c appartiene ad A dato che ε è presente sia a sinistra che a destra dell'espressione regolare a^*cb^* che denota A.

   (b) Sia A^c il complemento di A. Vale $B \subseteq A^c$? Giustificare la risposta.

   Soluzione: No. Si noti che in B è presente la parola c, che appartiene anche ad A (vedi il punto sopra), di conseguenza si ha $c \notin A^c$. Pertanto esiste una parola che appartiene a B ma non ad A^c e questo prova che B non è un sottoinsieme di A^c.

   (c) Che linguaggio è $(B \cdot A \cdot B) \cap B$?

   Soluzione: Le parole del linguaggio intersezione (il linguaggio $(B \cdot A \cdot B) \cap B$) devono essere composte solamente dal simbolo c visto che $B = c^*$. Il prodotto $B \cdot A \cdot B$ ha in comune con B proprio queste parole perchè in a^* e b^* è denotata anche la parola vuota. L'unica eccezione è ε che sebbene sia presente in B non è ottenibile nel linguaggio prodotto $(B \cdot A \cdot B)$ a causa di A che non la contiene. Pertanto vale $(B \cdot A \cdot B) \cap B = c^+$.

(d) Vale $B^* = B^+$? Giustificare la risposta.

Soluzione: Si, perchè l'unico elemento che può fare la differenza tra i due linguaggi è $B^0 = \varepsilon$. Ma in questo caso il linguaggio B contiene la parola vuota ($B = c^*$), per cui $B^+ = B^*$. Più precisamente vale $B^* = B^+ = B = c^*$.

2. Dare la definizione formale di linguaggio ricorsivamente numerabile.

Soluzione: Informalmente, un linguaggio ricorsivamente numerabile è un linguaggio che ammette un sistema generativo, un sistema cioè che consente di elencare le parole del linguaggio. Tale sistema però non permette un completo riconoscimento del linguaggio stesso. Questa risposta non può essere completamente accetta perchè non è formalizzata e priva della possibilità di essere utilizzata a livello progettuale nella costruzione di programmi che mostrano proprietà sui linguaggi ricorsivamente enumerabili.

Pertanto, la risposta che deve essere data è la definizione *formale* di linguaggio ricorsivamente numerabile.
Definizione:
Un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ si dice ricorsivamente numerabile quando esiste una procedura implementata da un programma w tale che, per ogni $x \in \Sigma^*$, si ha:

$$F_w(x) = \begin{cases} 1 & x \in L \\ \uparrow & x \notin L \end{cases}$$

dove con F_w si indica la semantica del programma w e con $\uparrow$ un programma che non termina.

3. Sia la grammatica

$$G = (\ T = \{a, b, c\},\ V = \{S\},\ S,\ P = \{S \to aSa,\ S \to bSb,\ S \to c\}\ ).$$

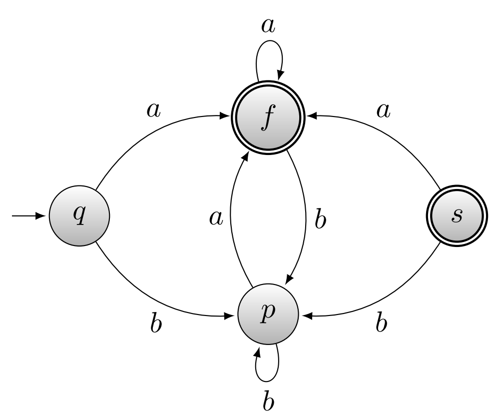
(a) Mettere una crocetta di fianco alle parole appartenenti a $L(G)$:

☐ $abSab$	☐ aSa	☐ $baab$	☐ ε
☒ $abcba$	☒ aca	☐ $bacba$	☒ c
☐ $abba$	☐ $baba$	☒ bcb	☒ $aacaa$

(b) Mettere una crocetta sulle risposte corrette:

La grammatica G è di tipo 1? ☐ SI ☐ NO **soluzione:** SI
La grammatica G è di tipo 2? ☐ SI ☐ NO **soluzione:** SI
La grammatica G è di tipo 3? ☐ SI ☐ NO **soluzione:** NO

4. Sia A il seguente automa:



(a) Mettere una crocetta sulle risposte corrette:

$aba \in L(A)$? ☐ SI ☐ NO **soluzione:** SI
$aba^* \subseteq L(A)$? ☐ SI ☐ NO **soluzione:** NO
$a^*ba \subseteq L(A)$? ☐ SI ☐ NO **soluzione:** SI
$a^+ \subseteq L(A)$? ☐ SI ☐ NO **soluzione:** SI

(b) In A sono presenti stati indistinguibili tra loro? Se sì quali?

Soluzione: Si, gli stati indistinguibili sono (p, q) ed (f, s). Per definizione $p \approx q$ se e solo se per ogni $w \in \{a, b\}^*$ vale $\lambda(\delta^*(q, w)) = \lambda(\delta^*(p, w))$. Dimostrare che ciò è vero in questo caso è facile. Infatti valgono le seguenti uguaglianze:

$$\delta(q, a) = \delta(p, a) \text{ e } \delta(q, b) = \delta(p, b).$$

Qualunque sia la parola w che leggiamo a partire da p o da q, dopo il primo simbolo di w, si raggiunge sempre lo stesso stato e pertanto le risposte dell'automa A non potranno che essere uguali. Similarmente accade per f ed s.

5. Sia A l'automa dell'esercizio 4.

(a) Fornire una grammatica G equivalente ad A.

Soluzione: Si utilizza la costruzione presente nella dimostrazione del teorema che afferma l'equivalenza tra le grammatiche di tipo 3 e gli automi a stati finiti.
Senza cambiare notazione rispetto a quella che definisce l'automa A, definiamo la grammatica:

$$G = (\ T = \{a, b\},\ V = \{q, p, f, s\},\ q \text{ (assioma)},\ P\ ),$$

dove le seguenti regole di produzione appartengono a P:

- $q \to af$, $q \to bp$,
- $p \to bp$, $p \to af$,
- $f \to af$, $f \to bp$, $f \to \varepsilon$,
- $s \to af$, $s \to bp$, $s \to \varepsilon$.

(b) Esistono regole di G che possono essere eliminate senza modificare $L(G)$? Se sì quali?

Soluzione: Si sono le regole $s \to af$, $s \to bp$, $s \to \varepsilon$. Possono essere eliminate in quanto la variabile s non è raggiungibile dall'assioma della grammatica e quindi le regole per s non aiutano a generare parole del linguaggio. Questo lo si deduce anche dal diagramma degli stati di A dove s risulta essere uno stato non osservabile (ovvero non raggiungibile da alcuna parola a partire dallo stato iniziale di A).