SECONDA PROVA IN ITINERE - MATEMATICA DEL CONTINUO - 15.01.22

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2021/22 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE 1 - Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 2.5)** Sia f continua su $[a, b]$ e sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall\, x \in [a, b]$.

   a) Se G è una primitiva di f su $[a, b]$, allora $F'(x) = G'(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

   b) Se G è una primitiva di f su $[a, b]$, allora $F(x) = G(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

   c) Se G è una primitiva di f su $[a, b]$, allora $F'(x) = G(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

   d) Se G è una primitiva di f su $[a, b]$, allora $G'(x) = F(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

2. **(PUNTI 2.5)** Data la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e la successione delle somme parziali $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$

   a) se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$, allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$

   b) se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = S$

   c) se la serie converge allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 0$

   d) se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, allora $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$

3. **(PUNTI 2.5)** Si consideri una successione a_n tale che $a_n > 0$.

   a) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

   b) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

   c) Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

   d) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverge.

4. **(PUNTI 2.5)** Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \alpha > 0$, allora

   a) l'insieme di convergenza è $(-\alpha, \alpha)$

   b) il raggio di convergenza è α

   c) l'insieme di convergenza è $(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$

   d) il raggio di convergenza è $\frac{1}{\alpha}$

PARTE 2 - Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

5. **(PUNTI 2)** La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$

   a) converge b) diverge c) converge assolutamente d) oscilla

6. **(PUNTI 2)** Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 3x\sin(x^2)\,dx$

   a) 3 b) -3 c) 6 d) -6

7. **(PUNTI 2)** La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

   a) oscilla b) converge a $\dfrac{3}{2}$ c) converge a $\dfrac{3}{4}$ d) diverge

8. **(PUNTI 2)** Calcolare la derivata della funzione $F(x) = \displaystyle\int_1^x \log(1+t^2)\sin t\,dt$

   a) $F'(x) = \log(1+x^2)\sin x$
   b) $F'(x) = \log(1+x^2)\sin x - \log(2)\sin 1$
   c) $F'(x) = \log(1+x^2)\cos x + \frac{2x}{1+x^2}\sin x$
   d) $F'(x) = \log(1+t^2)\cos t + \frac{2t}{1+t^2}\sin t$

9. **(PUNTI 2)** L'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}x^n$ è

   a) $(-3,3)$ b) $[-3,3)$ c) $(-3,3]$ d) $[-3,3]$

PARTE 3 - Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

10. **(PUNTI 2)** Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}) \right)$

11. **(PUNTI 2)** Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ è convergente e usando il confronto integrale trovare un maggiorante e un minorante della somma.

12. **(PUNTI 2)** Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x+1}{x+\sqrt{x}}\, dx$

13. **(PUNTI 2)** Dopo aver disegnato la regione A del piano limitata dai grafici delle funzioni $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 + 1$, calcolarne l'area

14. **(PUNTI 2)** Determinare per quali valori di α la funzione $F(x) = (2 \log x - 3\alpha)x^2$ è una primitiva di $f(x) = 4x \log x + x$

FORMULE DI TAYLOR

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\mathrm{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0$$