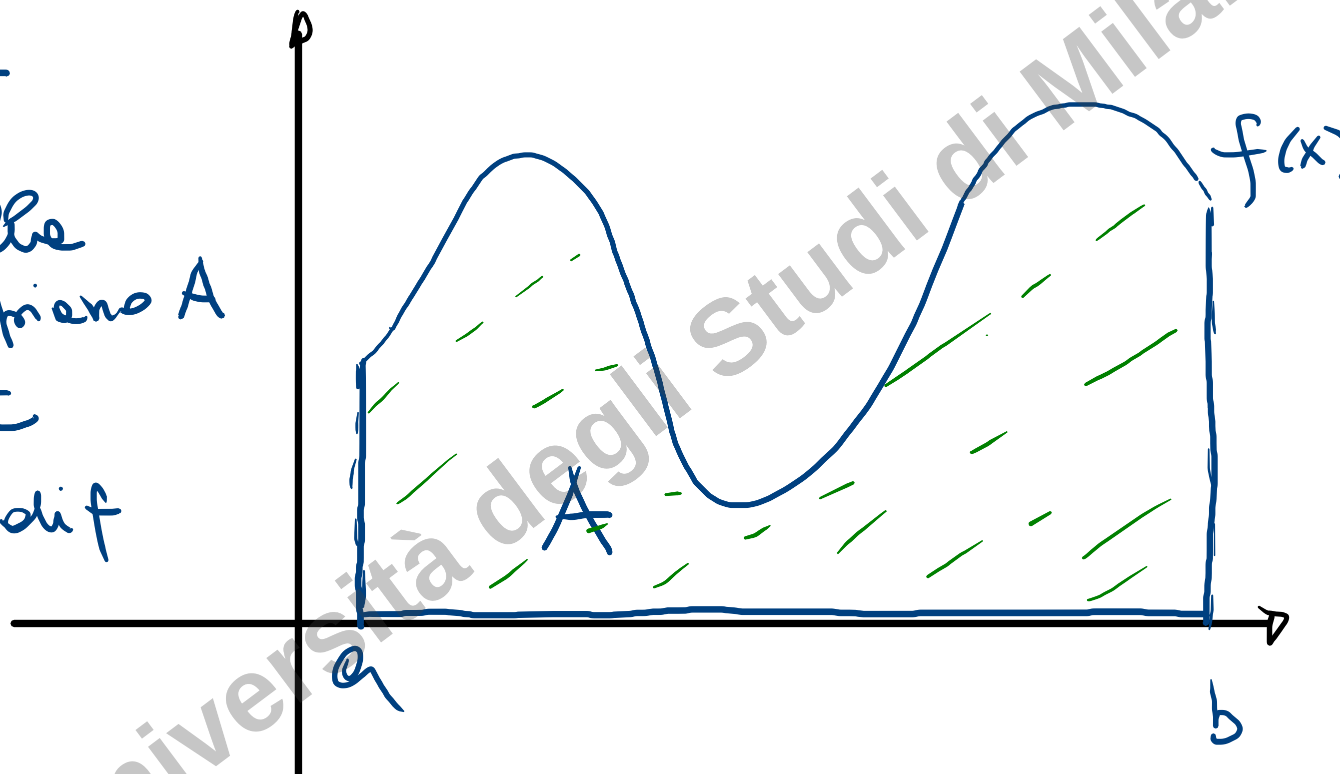
27/11/2020

Problema

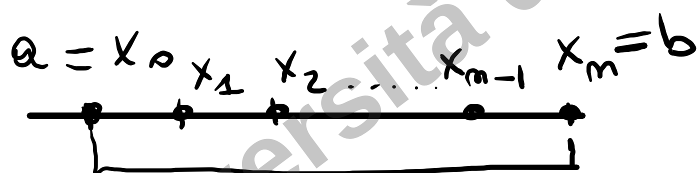
Calcolare l'area della regione del piano A delimitata dal grafico di f, $x=a$, $x=b$, $y=0$



• Integrale di Riemann in $\mathbb{R}$ – Integrale definito

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato

Definizione Si chiama PARTIZIONE di $[a,b]$ un insieme finito di punti x_i con $i = 0, \dots, n$ tali che: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

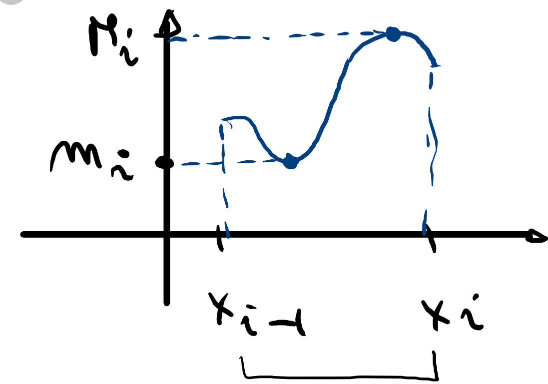


La partizione viene indicata con P_n

Definizione Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f limitata su $[a,b]$.

Si consideri una partizione P_n di $[a,b]$. Poniamo

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad i = 1,\dots,n$$

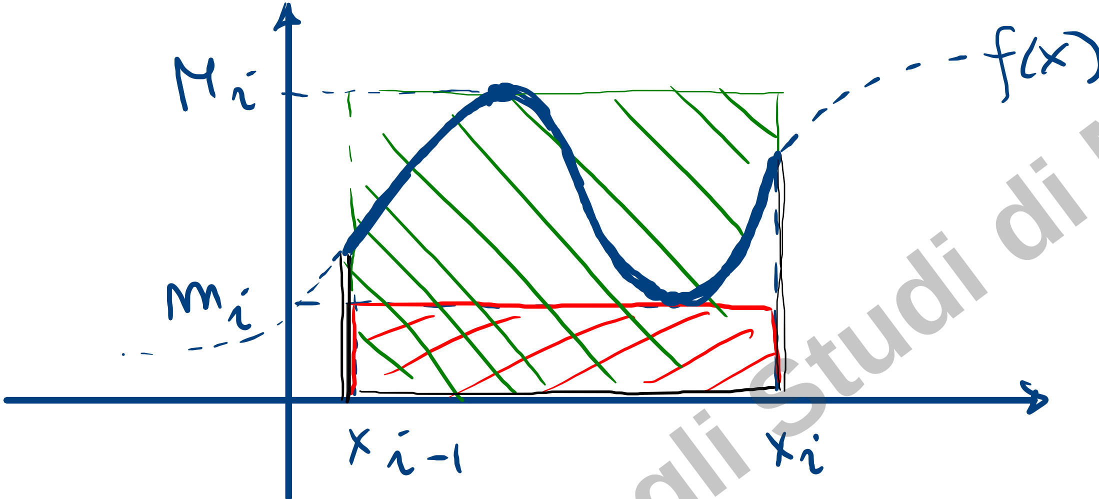


Definiamo:

SOMMA INTEGRALE INFERIORE / SUPERIORE

$$s(P_n,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S(P_n,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$



- $M_i(x_i - x_{i-1})$: Area rettangolo verde
- $m_i(x_i - x_{i-1})$: Area rettangolo rosso
- A_i = regione di piano compresa tra grafico di f e rette $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = 0$

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \text{Area } A_i \leq M_i(x_i - x_{i-1})$$

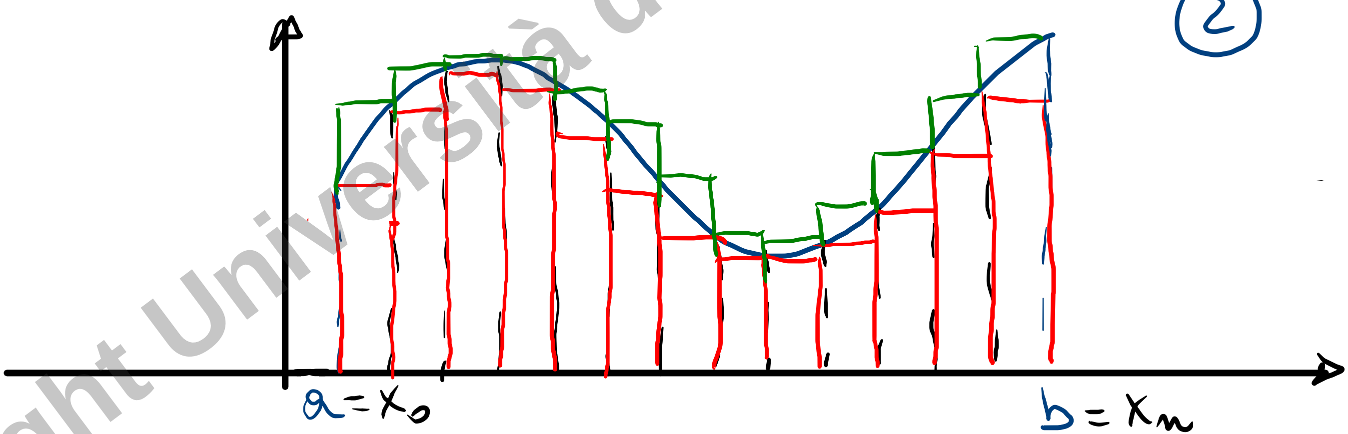
Valgono le seguenti proposizioni (no dimostrazione)

Teorema Sia $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, f limitata su $[a,b]$.

1) $S(P_n, f) \leq S(P_m, f)$, $s(P_n, f) \geq s(P_m, f)$ $\forall n > m$

2) $S(P_n, f) \geq s(P_n, f)$ $\forall n$

3) $\underbrace{S(P_m, f)} \geq \underbrace{s(P_n, f)}$ $\forall n, m$



③ $\text{Area } A_i \le M_i(x_i - x_{i-1})$ su sottointervallo partizione P_m

$\Downarrow$ sommiamo $i = 0, \dots, m$

(*) $\text{Area } A \le S(P_m)$ $\left(A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \right)$

$m_i(z_i - z_{i-1}) \le \text{Area } A_i$ su sottointervallo partizione P_n

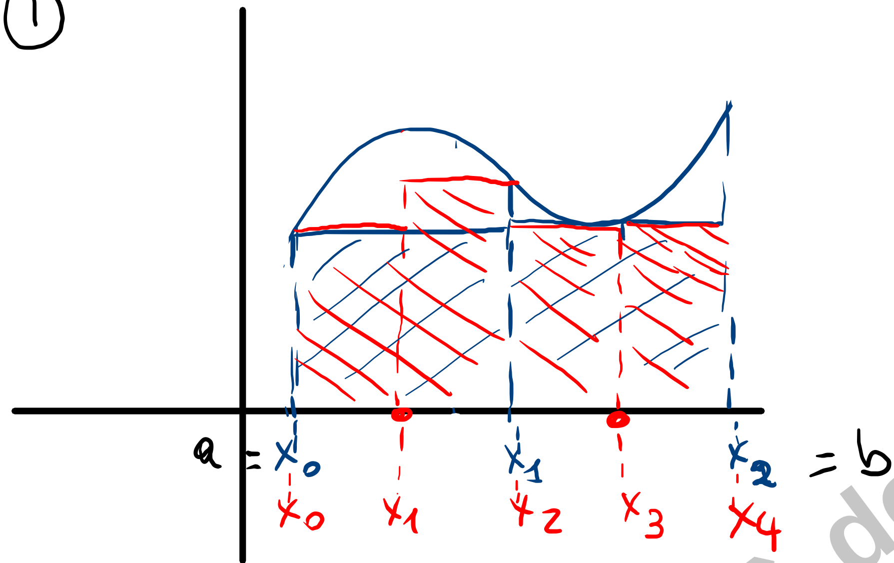
$\Downarrow$ sommiamo $i = 0, \dots, n$

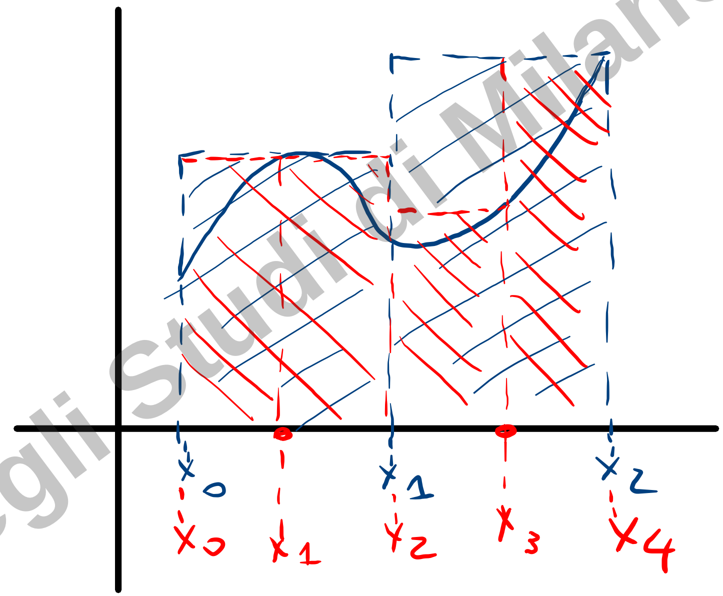
(**) $s(P_n) \le \text{Area } A$

(*)+(**) $\Rightarrow$ $s(P_n) \le \text{Area } A \le S(P_m)$ $\forall n, m$

A: regione di piano compresa tra grafico di f, $x=a$, $x=b$, $y=0$

①





$s(P_2) \leq s(P_4)$

$S(P_2) \geq S(P_4)$

$s(P_n)$ monotòna crescente
(approssimazione per difetto)

$S(P_n)$ monotòna decrescente
(approssimazione per eccesso)

$B_1 = \{ s(P_n, f),\ P_n \text{ partizione di } [a,b] \} \subseteq \mathbb{R}$

$B_2 = \{ S(P_n, f),\ P_n \text{ partizione di } [a,b] \} \subseteq \mathbb{R}$

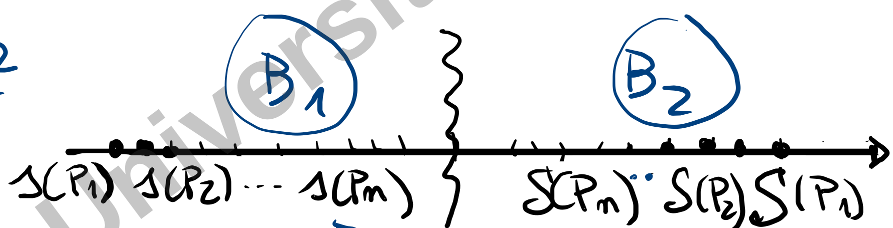
Ogni elemento di B_1 è un minorante di B_2

$\Rightarrow$ B_2 è limitato inferiormente

Ogni elemento di B_2 è un maggiorante di B_1

$\Rightarrow$ B_1 è limitato superiormente

$\exists \sup B_1 \in \mathbb{R}$



$\exists \inf B_2 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} s(P_n) = \sup B_1$$

$$\lim_{n \to +\infty} S(P_n) = \inf B_2$$

Definizione Sia $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, f limitata su $[a,b]$.

f si dice integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ (Riemann-integrabile // R-integrabile su $[a,b]$) se

$$\sup B_1 = \operatorname{Inf} B_2 \; (= \alpha \in \mathbb{R})$$

Tale valore si chiama **integrale definito** di f su $[a,b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$S(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

(passaggio al limite)

$n \to +\infty$

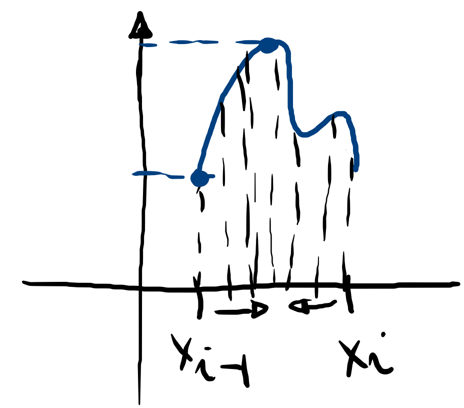
$$\sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

$i=1$: $x_1 - x_0 = x_1 - a$

$i=n$: $x_n - x_{n-1} = b - x_{n-1}$



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$$

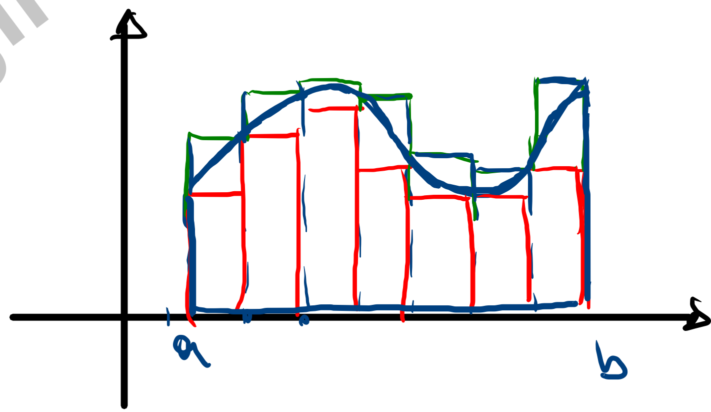
Significato geometrico dell'integrale definito

Sia $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, f limitata in $[a,b]$

Sia f R-integrabile su $[a,b]$

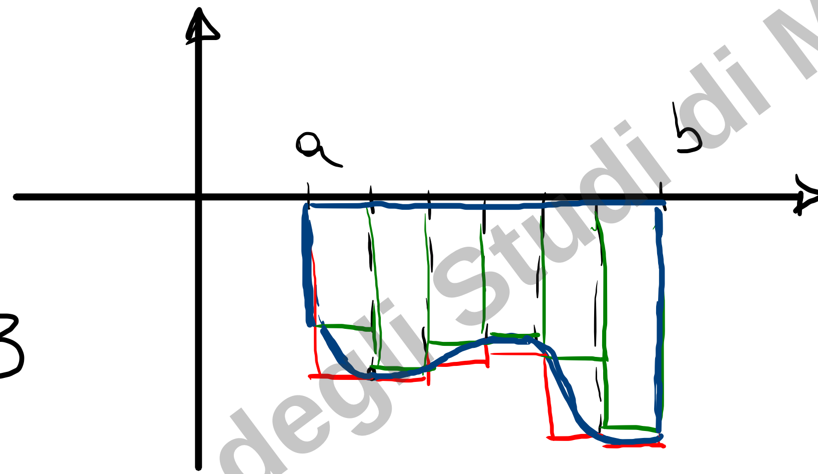
1) $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Area } A$$



A: regione di piano compresa tra grafico di f, $x=a$, $x=b$ e $y=0$

2) $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

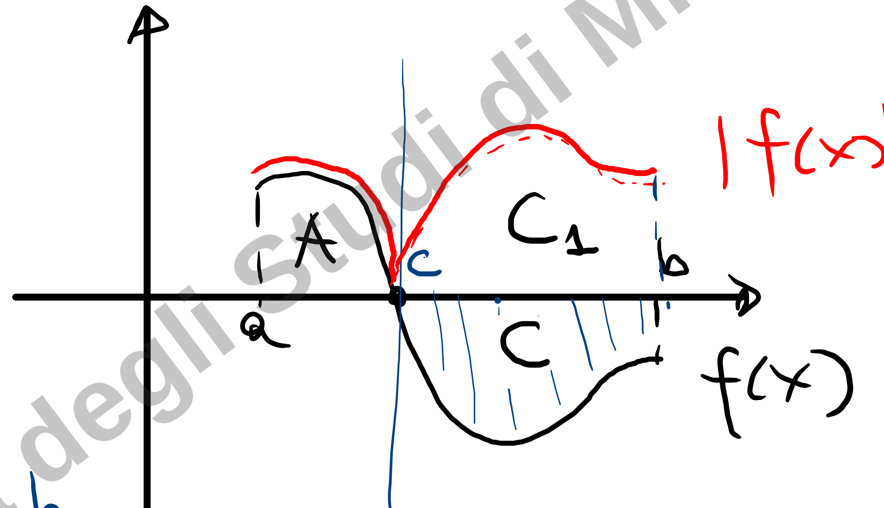


$$\int_a^b f(x)dx = -\text{area } B$$

B: regione di piano compresa tra grafico di f, $x=a$, $x=b$ e $y=0$

3) $f(x)$ cambia segno in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area } A - \text{area } C$$



Se voglio calcolare

Area A + area C = $\int_a^b |f(x)|\,dx$

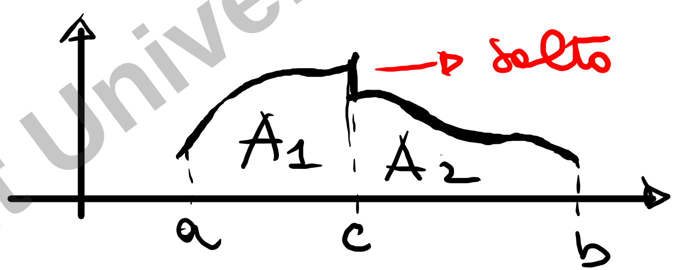
= Area A + area C_1

Teorema (no dimostrazione)

Ogni f continua su $[a,b]$ è Riemann-integrabile su $[a,b]$.

Teorema (no dimostrazione)

Ogni funzione continua su $[a,b]$ tranne al più un numero finito di punti di discontinuità eliminabili o di salto è Riemann-integrabile su $[a,b]$



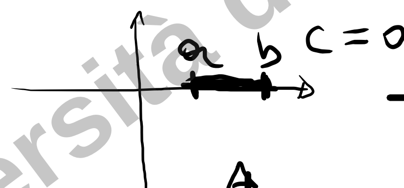
Proprietà dell'integrale definito (f, g R-integrabili su $[a,b]$)

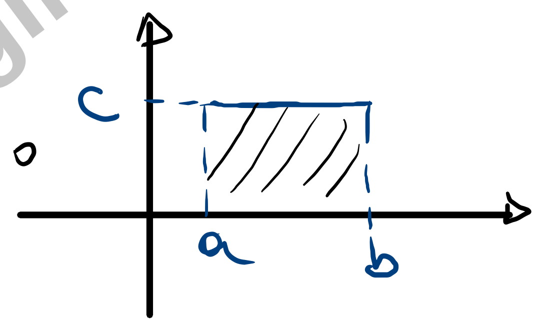
1) $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

2) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

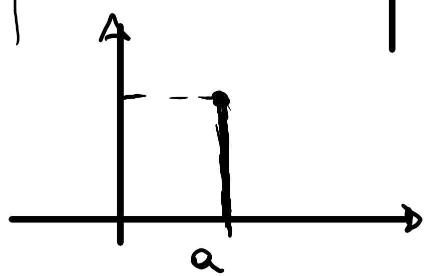
linearità

3) $$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

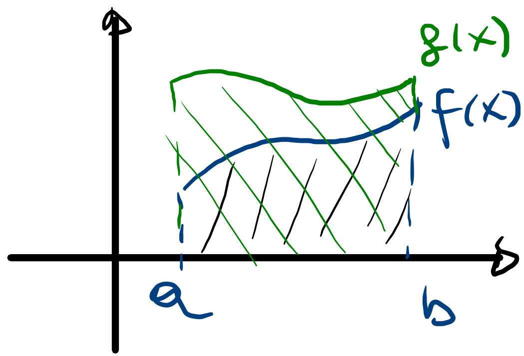




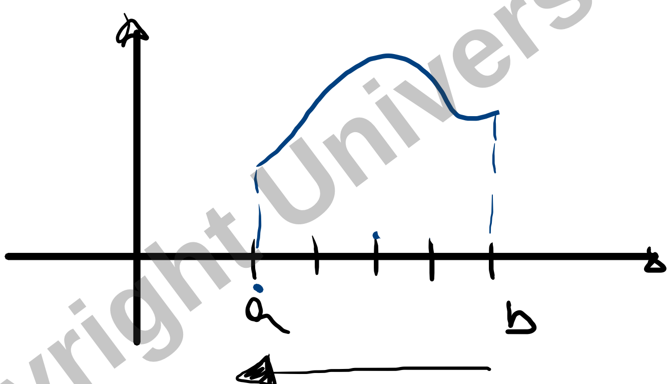
4) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

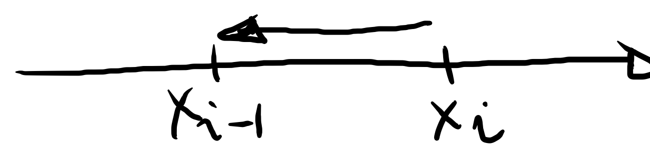


5) Se $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$



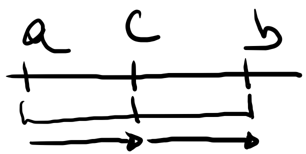
6) <u>Definizione</u> se $a<b$: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

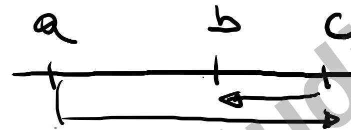


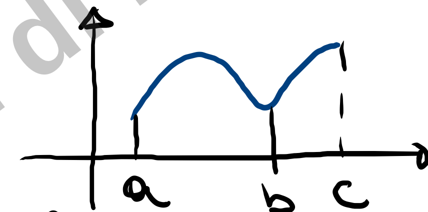


$\Delta x = x_{i-1} - x_i < 0$

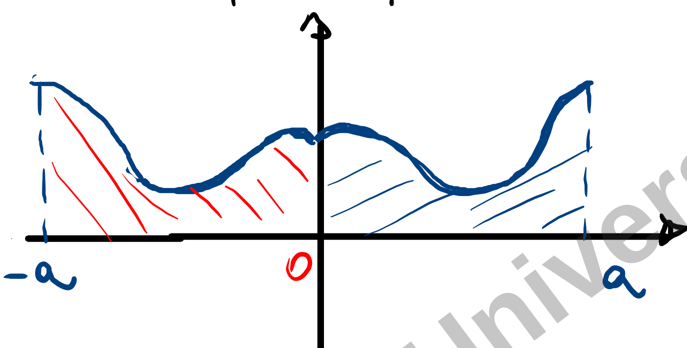
7) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ f R-integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$

i) 

ii) 

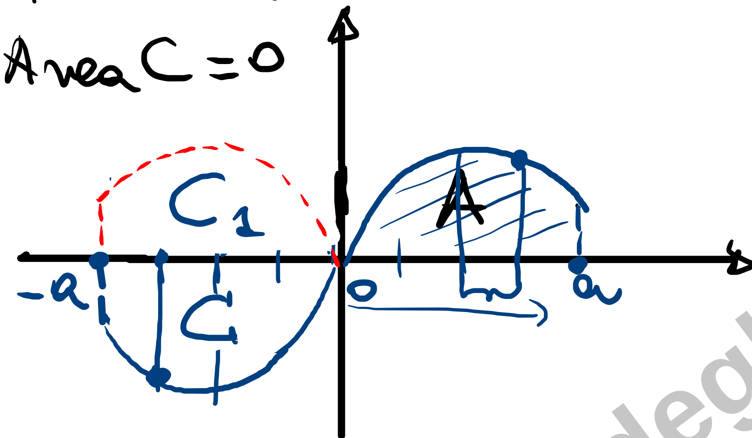


8) se f è pari e $a>0 \Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



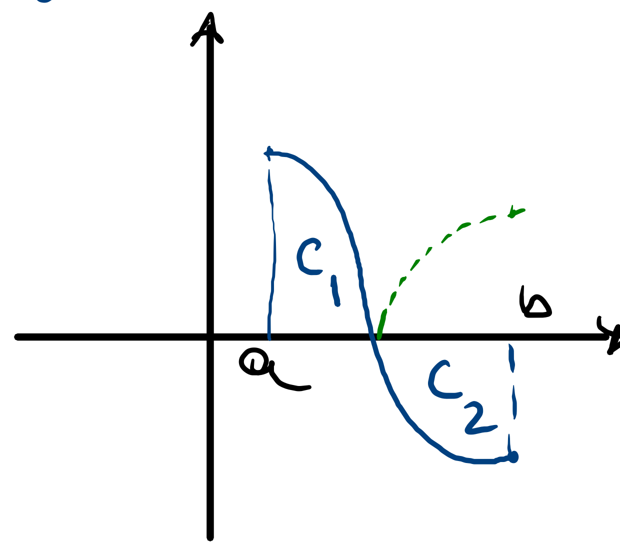
9) Se f è dispari e $a > 0 \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Area A − Area C = 0



$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\text{area } C'$$

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \text{area } A$$



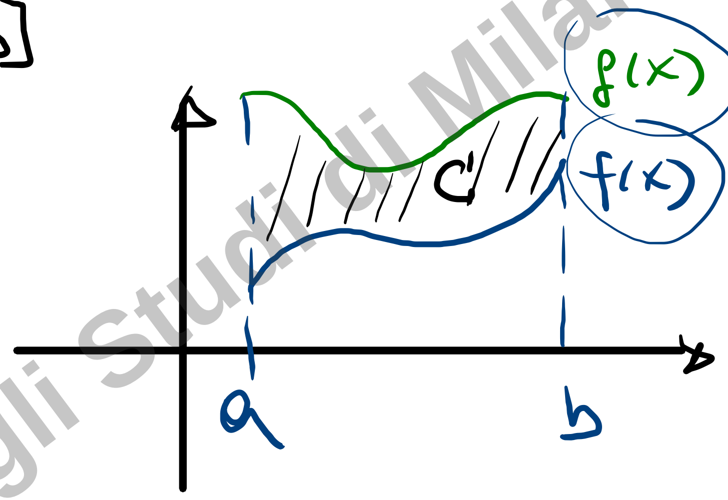
10) Area C_1 + area C_2 =

$$= \int_a^b |f(x)|\,dx$$

11) $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

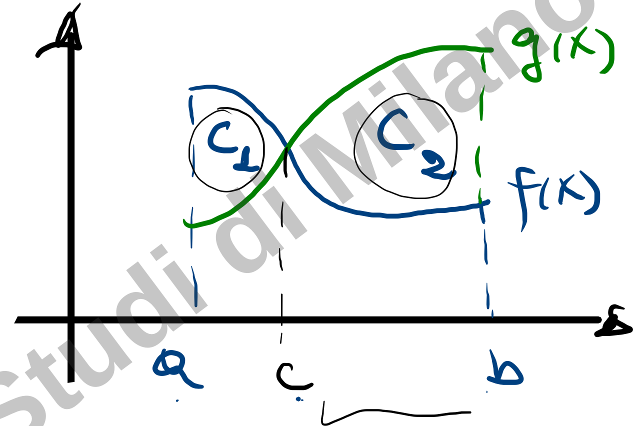
$$\text{Area } C = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx$$



12) $\text{Area } C_1 + \text{area } C_2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

$$= \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\,dx$$



13) $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\sigma)\,d\sigma = \int_a^b f(x)\,dx$

Teorema della media integrale

Sia f continua su $[a,b]$.
Allora $\exists\, z \in [a,b]$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(z)$

Dimostrazione Poiché f è continua su $[a,b]$ per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti $\Rightarrow \exists\, x_0, x_1 \in [a,b]$:

$\underline{m} = f(x_0) \le \underline{f(x)} \le f(x_1) = \underline{M}$, $\forall\, x \in [a,b]$ $\quad m \le f(x) \le M$

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \qquad /\,(b-a)>0$$

$$f(x_0)=m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M = f(x_1)$$

Poiché f è continua su $[a,b]$, per la proprietà di Darboux $\Rightarrow$ $\exists\, z \in [a,b]$: $f(z) = \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$

valore compreso tra $f(x_0)$ e $f(x_1)$.

e quindi: $(b-a)f(z) = \int_a^b f(x)\,dx$

Il teorema si chiama "della media integrale"
perché:

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx$$

è la media integrale di f su $[a,b]$

Bibliografia

Marcellini - Sbordone, Calcolo, capitoli 13 e 14