**PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 22.01.21**

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2020/21 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

**PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte**

**La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 risposte su 5**

1. Le soluzioni dell'equazione $2^x + 4^x = 2$ sono

   a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = -2$ e $x = 1$ c) $x = 0$ e $x = -1$ d) $x = 0$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $B = \{\log_2(-x) \mid -1 < x < 0\}$ , allora

   a) $-2 \in B$ b) $B = \emptyset$ c) $0 \in B$ d) $2 \in B$

3. Le soluzioni della disequazione $\sqrt{x} > x - 2$ sono

   a) $x < 4$ b) $0 \leq x < 4$ c) $0 \leq x < 2$ d) $x > 0$

4. Calcolare il valore di $\log_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt[3]{4}\right)$

   a) $\frac{3}{5}$ b) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{4}}$ c) $-2^{\frac{5}{3}}$ d) $-\frac{5}{3}$

5. Quale di queste espressioni ha senso

   a) $\log(\cos 2\pi - 1)$ b) $\sqrt{\sin 1}$ c) $\arcsin \pi$ d) $\dfrac{1}{\arctan 1 - \frac{\pi}{4}}$

**PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte**

1. **(PUNTI 1)** Scegliere la proposizione corretta

   a) Sia $f$ continua su $[a, b]$ con $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$. Allora $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$

   b) Sia $f$ continua su $[a, b]$ con $f(a)f(b) > 0$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$

   c) Sia $f$ continua su $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$

   d) Sia $f$ continua su $[a, b]$. Allora $f$ assume tutti i valori compresi tra $a$ e $b$

2. **(PUNTI 1)** Scegliere la definizione corretta di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

   a) $\exists\, M > 0$ tale che $\forall x > M$ si ha $f(x) = 3$

   b) $\forall \varepsilon > 0$ si ha $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$

   c) $\forall M > 0\ \exists\, \varepsilon > 0$ tale che $\forall x > M$ si ha $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$

   d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0$ tale che $\forall x > M$ si ha $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$

3. **(PUNTI 1)** Sia $f$ continua e derivabile su $[a, b]$. Sia $x_0 \in [a, b]$.

   a) Se $f'(x_0) = 0$ allora $x_0$ è un punto estremante

   b) Se $x_0$ è un punto estremante allora $f'(x_0) = 0$

   c) Se $x_0$ è punto di massimo assoluto allora $x_0 \in (a, b)$

   d) Se $x_0$ è punto di massimo e di minimo assoluto allora $f(x) = f(x_0), \forall x \in [a, b]$

4. **(PUNTI 1)** Sia $f$ continua su $\mathbb{R}$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Allora

   a) $F$ è crescente su $\mathbb{R}$

   b) $F$ è positiva su $\mathbb{R}$

   c) $F'(x) = f(x) - f(0)$

   d) $F$ è derivabile su $\mathbb{R}$

5. **(PUNTI 1)** Si consideri un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora

   a) il $\sup A$ esiste ed è unico

   b) il $\sup A$ è unico e appartiene a $\mathbb{R}$

   c) il $\sup A$ potrebbe non esistere

   d) se il $\sup A \in \mathbb{R}$ allora il $\sup A$ coincide con il massimo di $A$

**PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte**

6. **(PUNTI 3)** Utilizzando la definizione, dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n^2+2}\right) = 0$

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in forma algebrica dell'equazione $iz^4\overline{z} + 1 = 0$

8. **(PUNTI 3)** Calcolare la formula di Taylor arrestata al secondo ordine e centrata in $x_0 = 1$ della funzione $f(x) = \sqrt{x+3}\log x$

9. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x+2\sqrt{x+3}}dx$

10. **(PUNTI 3)** Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n, \quad \text{dove } \binom{2n}{n} \text{ è il coefficiente binomiale}$$

**PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte**

**(PUNTI 10)** Data la funzione $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-2}$ determinare:

1) l'insieme di definizione; il segno di $f$; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo

2) Disegnare il grafico di $f$

3) Disegnare il grafico di $g(x) = |f(x)|$

4) Disegnare il grafico di $h(x) = f(|x|)$