PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 20.01.23

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2022/23 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 risposte su 5

1. Le soluzioni dell'equazione $e^{|x+1|} - e = 0$ sono

   a) $x = 1$ e $x = -1$ b) $x = -2$ e $x = 0$ c) $x = -2$ d) $x = 1$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $B = \{\log(x+1) \mid x < 0\}$, allora

   a) $B = (-1, 0)$ b) $B = (-\infty, 0)$ c) $B = (0, +\infty)$ d) $B = (-\infty, 1)$

3. Le soluzioni della disequazione $(\log x)^2 - 4 < 0$ sono

   a) $x < e^2$ b) $0 < x < e^2$ c) $e^{-2} < x < e^2$ d) $0 < x < 2$

4. Le soluzioni della disequazione $\cos x \geq 1$ sono

   a) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, c) $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ d) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \log_2(\log_{\frac{1}{2}} x)$ è

   a) $x > 0$ b) $0 < x < 1$ c) $x > 1$ d) $x > \frac{1}{2}$

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia f una funzione definita su $\mathbb{R}$, $2\pi-$ periodica e continua a tratti.

   Sia $\displaystyle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la serie di Fourier associata. Allora

   a) se f è una funzione dispari allora $b_n = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

   b) la serie di Fourier converge in tutti i punti di $\mathbb{R}$

   c) la serie di Fourier non converge nei punti in cui $f(x)$ non è continua

   d) la serie di Fourier converge nei punti in cui $f(x)$ non è continua a $f(x)$

2. **(PUNTI 1)** Sia f continua in $[a, b]$. Allora

   a) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$

   b) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = (b - a) \int_a^b f(x)dx$

   c) $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$

   d) se f è derivabile in $[a, b]$ vale $\int_a^b f(x)dx = f'(b) - f'(a)$

3. **(PUNTI 2)** L'integrale definito $\displaystyle \int_1^e \frac{\log x}{x^2}\, dx$ vale

   a) $1 - \dfrac{2}{e}$ b) $\dfrac{2}{e} - 1$ c) $\dfrac{1}{e^2}$ d) $\dfrac{1}{2}$

4. **(PUNTI 2)** Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

   a) $R = 1$ b) $R = e$ c) $R = \dfrac{1}{e}$ d) $R = +\infty$

5. **(PUNTI 2)** Data la funzione $f(x) = e^{3x} - \sin x - \cos x - 2x + 2$ allora vale

   a) $f(x) = 2 + 10x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ e $x = 0$ è punto di minimo relativo

   b) $f(x) = 2 + 5x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ e $x = 0$ è punto di minimo relativo

   c) $f(x) = 2 - 2x + x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ e $x = 0$ non è punto estremante

   d) $f(x) = 2 - 2x + 2x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ e $x = 0$ non è punto estremante

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e utilizzarla per dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in forma algebrica dell'equazione $z^4\overline{z} + i = 0$

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali negli spazi del foglio risposte - PUNTI 8

Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{-1 + \log x}$ determinare:

1) l'insieme di definizione; il segno; i limiti; eventuali asintoti (oriz., vert., obl.); $f'(x)$; segno di $f'(x)$; eventuali punti estremanti; eventuali punti di prolungamento continuo

2) Tracciare il grafico di $f(x)$

3) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$

PARTE III
Dimostrare il Teorema di Rolle - PUNTI 8

FORMULE DI TAYLOR

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\mathrm{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$