PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 19.01.22

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2021/22 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Calcolare $\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{25}}{5^3}\right)$ a) $-\dfrac{3}{7}$ b) $\dfrac{3}{7}$ c) $-\dfrac{7}{3}$ d) $\dfrac{7}{3}$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $B = \{x^2 + 4x \mid -4 < x < 0\}$, allora
   a) $0 \in B$ b) $B \subset (-4, 0)$ c) $-4 \notin B$ d) $(-4, 0) \subset B$

3. Le soluzioni della disequazione $\dfrac{4}{x} + x + 4 < 0$ sono
   a) $-2 < x < 0$ b) $x < 0$ con $x \neq -2$ c) $x < 0$ d) nessuna soluzione

4. Le soluzioni dell'equazione $e^{2x} - e^x = 6$ sono
   a) $x = \log 3$ b) $x = \log 3$ e $x = \log 2$ c) $x = 3$ e $x = -2$ d) $x = 3$

5. Calcolare $\dfrac{1}{8}$ di $(16)^2$
   a) 2^2 b) 2^3 c) 2^4 d) 2^5

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.
   a) Se $a \neq 0$ allora a_n è illimitata
   b) $(a_n - a) = o(1)$
   c) $(a_n - a) \sim 1$
   d) Se $a = 0$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente

2. **(PUNTI 1)** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato. Allora
   a) esiste $\min A$
   b) esiste $\inf A$
   c) $\inf A$ è il più piccolo dei minoranti di A
   d) $\inf A$ è il più piccolo dei maggioranti di A

3. **(PUNTI 1)** Sia f continua nell'intervallo $[a, b]$ con $f(a) = f(b)$. Allora
   a) f è costante su $[a, b]$
   b) esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$
   c) f non è iniettiva su $[a, b]$
   d) f è invertibile su $[a, b]$

4. **(PUNTI 1)** Sia f continua in $[a,b]$. Allora

   a) esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

   b) esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = (b-a)\int_a^b f(x)dx$

   c) esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = \int_a^b f(x)dx$

   d) esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$

5. **(PUNTI 1)** Sia f una funzione definita su $\mathbb{R}$, $2\pi-$ periodica e continua a tratti. Sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la serie di Fourier associata. Allora

   a) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

   c) la serie di Fourier non converge nei punti in cui $f(x)$ non è continua

   d) la serie di Fourier converge nei punti in cui $f(x)$ non è continua a $f(x)$

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Utilizzando la **definizione di limite**, dimostare che $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ in forma algebrica di $2|z| = 2z + (z\bar{z})^{\frac{1}{2}} - i$

8. **(PUNTI 3)** Trovare la primitiva di $f(x) = \log(x^2+1)$ che vale 5 in $x = 1$.

9. **(PUNTI 3)** Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\frac{1}{2^n}x^n$, determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza.

10. **(PUNTI 3)** Calcolare la formula di Taylor al II ordine centrata in $x_0 = 0$, con resto di Peano, di $f(x) = e^{x^2} + \sin x + \log(1+x) - 2x - x^2$ e determinare la natura di x_0

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Si consideri la funzione $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

1) Determinare: l'insieme di definizione A; il segno di f; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo.
2) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$
3) Determinare al variare del parametro k il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$
4) Tracciare un grafico qualitativo di $g(x) = f(|x|)$