SECONDA PROVA IN ITINERE - MATEMATICA DEL CONTINUO - 15.01.21

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2020/21 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE 1 - Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 2)** Sia f continua su $[a, b]$ e sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall\, x \in [a, b]$. Allora
   a) $F'(x) = f(x) - f(a)$, $\forall\, x \in [a, b]$
   b) f è una primitiva di F in $[a, b]$
   c) F è una primitiva di f in $[a, b]$
   d) $F'(x) = f'(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$

2. **(PUNTI 2)** Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
   a) se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ allora la serie converge
   b) se la serie converge allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
   c) se la serie converge allora la serie converge assolutamente
   d) se la serie converge allora la successione delle somme parziali converge a zero

3. **(PUNTI 2)** Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0\ \forall n \geq 0$. Allora
   a) la serie è convergente
   b) la serie è divergente a $+\infty$
   c) la serie è convergente oppure divergente a $+\infty$
   d) la serie è convergente, oppure divergente a $+\infty$, oppure oscillante

4. **(PUNTI 2)** Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha > 0$, allora
   a) la serie converge $\forall x \in (-\alpha, \alpha)$
   b) la serie converge $\forall x \in (-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$
   c) la serie converge $\forall x \in [-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$
   d) la serie converge $\forall x \in (-\infty, -\frac{1}{\alpha}) \cup (\frac{1}{\alpha}, +\infty)$

5. **(PUNTI 2)** Sia f continua in $[a, b]$. Allora
   a) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$
   b) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = (b - a)\int_a^b f(x)dx$
   c) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = \int_a^b f(x)dx$
   d) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$

PARTE 2 - Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 2)** Determinare la formula di Taylor centrata in $x_0 = 0$ arrestata al terzo ordine della funzione $f(x) = e^x \cos x$

   a) $f(x) = 2 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

   b) $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$

   c) $f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

   d) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

7. **(PUNTI 2)** La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$

   a) converge b) diverge c) converge assolutamente d) oscilla

8. **(PUNTI 2)** Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\, dx$

   a) $\dfrac{\log(1+x^6)}{6} + c$

   b) $x^2 \log(1+x^6) - 2x \log(1+x^6) + c$

   c) $\arctan x^3 + c$

   d) $\dfrac{\arctan x^3}{3} + c$

9. **(PUNTI 1)** Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   a) 2 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) 0

10. **(PUNTI 1)** Calcolare la derivata della funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} \cos t\, dt$

    a) $F'(x) = e^{t^2} \cos t$

    b) $F'(x) = e^{x^2} \cos x$

    c) $F'(x) = e^{x^2} \cos x - 1$

    d) $F'(x) = -e^{x^2} \sin x + 2xe^{x^2} \cos x$

PARTE 3 - Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

11. **(PUNTI 2)** Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}$

12. **(PUNTI 2)** Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$

13. **(PUNTI 2)** Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$

14. **(PUNTI 2)** Dopo aver disegnato la regione A del piano limitata dai grafici delle funzioni $f(x) = x^4$ e $g(x) = \sqrt{x}$, calcolarne l'area

15. **(PUNTI 2)** Calcolare $\displaystyle\int_0^1 2x \arctan x\,dx$

16. **(PUNTI 2)** Stabilire se $x_0 = 1$ è un estremante per $F(x) = \displaystyle\int_0^x (t-1)e^t \arctan t\,dt$

FORMULE DI TAYLOR

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

$$\mathrm{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$