# Linguaggi Formali e Automi

Informatica Triennale: I anno
Docente: Beatrice Palano
Data: 17 luglio 2015

Matricola: ...................... Cognome: ...................... Nome: ......................

---

La durata dell'esame scritto è di **2 ore**. Con la sufficienza si accede all'orale.

| Buono | Sufficiente | Insufficiente |
|---|---|---|
| | | |

---

1. Dati i due linguaggi binari $A = \{1\}^* \cdot \{0,1\}^*$ e $B = \{0\}^* \cdot \{0,1\}^*$, rispondere alle seguenti domande:

   (a) Sia $A^c$ il complemento di $A$. Che linguaggio è $A^c$ ? $A^c =$ ............................

   **Soluzione:** $A^c = \emptyset$. Si noti che $A = \{0,1\}^*$, infatti $1^*$ comprende anche la parola vuota.

   (b) Vale $A \cap B = A \cup B$ ? Giustificare la risposta.

   **Soluzione:** Come detto al punto sopra $A = \{0,1\}^*$ e pertanto per simmetria $B = \{0,1\}^*$, di conseguenza sia il linguaggio unione che il linguaggio intersezione è $\{0,1\}^*$. Perciò, SI, vale l'uguaglianza.

   (c) Vale $A \cdot B = A$ ? Giustificare la risposta.

   **Soluzione:** Dato che $A = B = \{0,1\}^*$, anche $A \cdot B = \{0,1\}^*$, e dunque l'uguaglianza $A \cdot B = A$ vale.

(d) Mettere una crocetta di fianco ai linguaggi che contengono la stringa nulla:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ $A^c$ | ☒ $A^c \cup A$ | ☒ $A^0$ | ☒ $A \cdot B$ |
| ☒ $A$ | ☒ $A^*$ | ☒ $A^2$ | ☒ $(A \cdot B)^+$ |
| ☐ $A^c \cap A$ | ☒ $A^+$ | ☒ $A \cap B$ | ☒ $(A \cdot B)^*$ |

2. Dare un esempio di linguaggio ricorsivamente numerabile ma non ricorsivo. Dimostrare che il linguaggio dato è ricorsivamente numerabile.

**Soluzione:** Sia $u$ il programma interprete, ovvero il programma che soddisfa $F_u(w\$x) = F_w(x)$ (cioè, $u$ su input $w\$x$ mi restituisce il risultato del programma $w$ su input $x$). Si definisce il linguaggio dell'arresto ristretto l'insieme:

$$D = \{x \in \{0,1\}^* \mid F_u(x\$x) \downarrow \},$$

dove $\downarrow$ indica che il programma termina. Il linguaggio $D$ è un esempio di linguaggio ricorsivamente numerabile ma non ricorsivo. Per quanto riguarda la prima affermazione, si consideri la seguente procedura:

RICNUM($x \in \{0,1\}^*$)
$y = F_u(x\$x)$
return 1

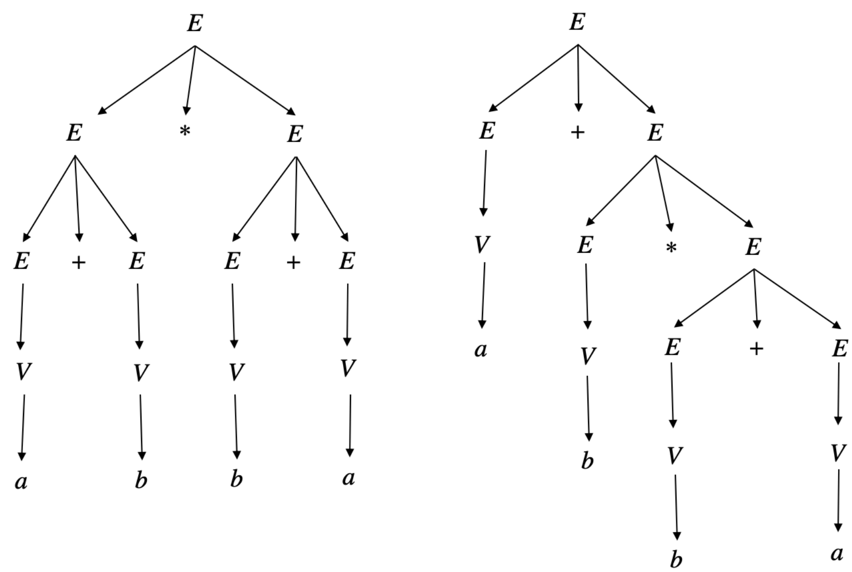
Si noti che se $x \in D$ allora $F_u(x\$x) \downarrow$ e RICNUM($x$)= 1, mentre se $x \notin D$ allora $F_u(x\$x) \uparrow$ e RICNUM($x$)$\uparrow$. Quindi RICNUM dimostra che $D$ è ricorsivamente numerabile. Inoltre, è anche possibile dimostrare che $D$ non è ricorsivo.

3. Sia la grammatica

$$G = (\ T = \{a, b, +, *\},\ V = \{E, V\},\ E,\ P = \{E \to E{+}E,\ E \to E{*}E,\ E \to V,\ V \to a,\ V \to b\}\ ).$$

(a) Disegnare l'albero di derivazione per $a + b * b + a$. È unico?

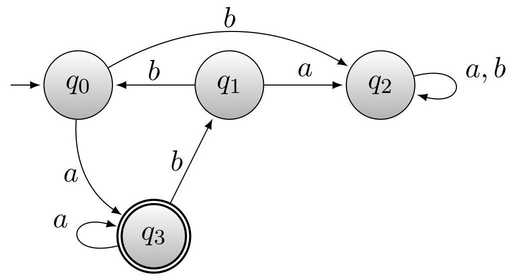
**Soluzione:** No, per tale parola esistono almeno due alberi di derivazione in G differenti. Ad esempio i seguenti sono alberi di derivazione per $a + b * b + a$:




(b) Stabilire se la grammatica $G$ è ambigua. Giustificare la risposta.

**Soluzione:** La grammatica $G$ è ambigua in quanto esiste una parola in $L(G)$ che ammette due alberi di derivazione differenti. Ad esempio, la parola $a + b * b + a$ citata sopra.

4. Sia $A$ il seguente automa:




Ricavare un'espressione regolare per $L(A)$:

**Soluzione:** Usando la tecnica data nella dimostrazione del Teorema di Kleene, che afferma l'equivalenza tra le espressioni regolari e gli automi a stati finiti, si può impostare il seguente sistema di equazioni di linguaggi dove $L(A)$ è l'incognita $X_0$:

$$\begin{cases} X_0 = aX_3 + bX_2 \\ X_1 = aX_2 + bX_0 \\ X_2 = aX_2 + bX_2 \\ X_3 = aX_3 + bX_1 + \varepsilon \end{cases}$$

Ognuna di queste equazioni deve essere risolta sfruttando l'equazione tipo $X = AX + B$, la cui soluzione è $X = A^*B$. Partiamo dall'equazione $X_2 = aX_2 + bX_2$, allora la sua soluzione è $X_2 = \emptyset$. Inserendo tale valore nell'equazione due si ottiene $X_1 = a\emptyset + bX_0$. Ora sostituisco il valore trovato di $X_1$ nell'equazione quattro, si ha $X_3 = aX_3 + bbX_0 + \varepsilon$, da cui $X_3 = a^*(bbX_0 + \varepsilon)$. Ora possiamo sostituire il valore di $X_3$ nell'equazione uno:

$$X_0 = a^+(bbX_0 + \varepsilon) + b\emptyset = a^+bbX_0 + a^+.$$

Applicando ancora una volta l'equazione tipo si ottiene:

$$X_0 = (a^+bb)^*a^+ = L(A).$$

5. Disegnare un automa a stati finiti che riconosce le parole su $\{0, 1\}$ con prefisso e suffisso 01. Non è richiesto che l'automa sia deterministico.

   **Soluzione:** La scelta di un automa nondeterministico semplifica l'esercizio. Prima di dare il diagramma degli stati dell'automa richiesto, si noti che oltre alle parole denotate dall'espressione regolare $01\{0, 1\}^*01$, l'automa deve riconoscere anche la semplice parola 01. Infatti, per definizione di prefisso e suffisso anche 01 ha prefisso e suffisso 01. L'automa richiesto è il seguente: