

MATEMATICA DEL CONTINUO - A.A. 2023/24
Professoressa Cecilia Cavaterra – Professoressa Anna Gori
PROGRAMMA DEFINITIVO

Sia per la prova scritta che per la prova orale è richiesta la conoscenza di tutte le definizioni e di tutti gli enunciati dei teoremi/proposizioni.

Sia per la prova scritta che per l'orale ridotto (conferma del voto della prova scritta o delle prove in itinere) saranno richieste anche le dimostrazioni dei teoremi/proposizioni indicati con ()**

Per l'orale completo (possibilità di incrementare il voto della prova scritta o delle prove in itinere) saranno richieste anche le dimostrazioni dei teoremi/proposizioni indicati con (*) e con ().**

Introduzione al corso.

Quantificatori. Simbolo di sommatoria. Principio di induzione. Coefficiente binomiale.

Numeri naturali, interi, razionali, reali. Proprietà dei numeri reali. Rappresentazione decimale dei numeri reali. La retta reale. Insiemi di numeri reali limitati e illimitati. Estremo superiore, estremo inferiore di un insieme. Massimo e minimo. Teorema di completezza di \mathbb{R} . Il simbolo "infinito". Intervalli limitati e non limitati. Radice n-esima di un numero reale non negativo. Valore assoluto di un numero reale.

Introduzione ai numeri complessi. Numeri complessi: forma algebrica e forma trigonometrica. Potenza n-sima di un numero complesso (*). Radici n-esime di un numero complesso (*). Teorema fondamentale dell'algebra.

Funzioni reali di variabile reale: dominio immagine, grafico. Funzioni iniettive. Funzione inversa. Funzioni monotone. Funzioni concave e convesse. Relazione tra funzioni monotone e funzioni iniettive. Funzioni superiormente e inferiormente limitate. Sup, Inf, Massimo e minimo assoluto di una funzione su un insieme. Funzioni concave e convesse. Segno e zeri di una funzione.

Operazioni elementari con le funzioni. Composizione di funzioni. Traslazioni, simmetrie. Funzioni pari, funzioni dispari.

Intorno di un numero reale. Intorno destro e intorno sinistro. Intorno di $\pm\infty$. Punto isolato, punto di accumulazione.

Successioni numeriche. Successioni limitate e illimitate. Successioni monotone. Proposizioni definitivamente vere. Successioni convergenti e divergenti. Successioni regolari e indeterminate. Successioni infinite e infinitesime. Teoremi sui limiti di successioni: unicità del limite di successioni convergenti (*), successioni convergenti sono limitate (*), successioni monotone sono regolari (*), permanenza del segno (*), confronto (*), prodotto di una successione limitata e di una successione infinitesima è una successione infinitesima. Operazioni con i limiti di successioni e forme di indecisione. Numero di Nepero. Limiti di successioni: criterio del rapporto, criterio della radice n-esima. Confronto tra successioni infinite: fattoriali, potenze, esponenziali, logaritmi. Simboli di Landau.

Grafico delle funzioni elementari. Polinomi di primo e secondo grado, valore assoluto di x , radice quadrata di x . Funzioni potenza ad esponente naturale, intero, razionale, reale. Funzioni trigonometriche. Funzioni esponenziali. Funzioni logaritmo. Grafico delle funzioni $\text{signum } x$, parte intera di x . Grafico delle funzioni elementari composte con traslazioni e simmetrie. Disequazioni.

Limiti di funzioni. Limite destro/sinistro, per eccesso/difetto. Asintoti orizzontali/verticali. Relazione tra limiti di funzioni e limiti successionali. Limiti di funzioni composte. Simboli di Landau per le funzioni. Limiti notevoli e sviluppi al primo ordine con o -piccolo. Asintoti obliqui.

Continuità. Continuità delle funzioni elementari. Classificazione dei punti di discontinuità. Teorema di Bolzano (teorema degli zeri). Teorema di Darboux o dei valori intermedi. Teorema di Weierstrass.

Funzioni derivabili in un punto. Significato geometrico della derivata. Retta tangente al grafico di una funzione in un punto di derivabilità (*)(**). Relazione tra derivabilità e continuità (*). Derivate delle funzioni elementari. Funzioni non derivabili in un punto: esempi di punti a tangente verticale, punti angolosi, punti cuspidali. Regole di derivazione (somma, differenza, prodotto, rapporto). Derivata della funzione composta. Derivabilità della funzione inversa e derivata della funzione inversa. Condizione sufficiente di derivabilità in un punto: continuità + uguaglianza limiti (finiti) destro e sinistro della funzione derivata.

Punti di massimo e minimo relativi. Teorema di Fermat (*)(**). Teorema di Rolle (*)(**). Teorema di Lagrange (*). Conseguenze del Teorema di Lagrange: funzioni con derivata nulla su un intervallo sono costanti (*); funzioni con derivate coincidenti su un intervallo differiscono per una costante additiva (*); relazioni tra monotonia e segno della derivata su un intervallo (*). Teorema di Cauchy. Prima formula dell'incremento finito (*). Seconda formula dell'incremento finito (*). Derivate successive. Relazione tra concavità/convessità e segno della derivata seconda. Studio del grafico di una funzione.

Teorema di de l'Hopital. Formula di Taylor con resto in forma di Peano e in forma di Lagrange.

Integrale indefinito. Primitiva di una funzione. Alcune primitive elementari. Proprietà dell'integrale indefinito.

Integrali definiti e aree. Proprietà dell'integrale definito.

Teorema della media integrale (*)(**). Teorema fondamentale del calcolo integrale (*)(**). Formula fondamentale del calcolo integrale (*)(**). Metodi di integrazione per parti e per sostituzione. Integrazione delle funzioni razionali.

Integrali impropri su intervalli limitati e non chiusi e su intervalli chiusi e non limitati. Criteri di integrabilità in senso improprio per funzioni non negative: criterio del confronto, criterio del confronto asintotico. Convergenza assoluta degli integrali impropri.

Serie numeriche. Serie geometrica. Serie armonica. Serie armonica generalizzata. Serie a termini positivi, criteri di convergenza: criterio del confronto, criterio del confronto asintotico, criterio della radice n-esima, criterio del rapporto. Serie a termini di segno qualunque. Convergenza assoluta. Criterio di Leibniz per la convergenza di serie a segni alterni. Criterio convergenza assoluta. Serie numeriche e integrali impropri.

Serie di potenze. Raggio di convergenza e criteri di determinazione. Serie derivata di una serie di potenze. Serie di potenze con raggio non nullo e derivabilità di qualunque ordine della funzione somma. Derivabilità e integrabilità termine a termine di una serie di potenze con raggio non nullo.

Funzioni analitiche o sviluppabili in serie di Taylor. Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor. Esempi di funzioni analitiche. Confronto tra formula di Taylor e serie di Taylor.

Serie di Fourier. Convergenza della serie di Fourier. Formula di Parseval.

Irrazionalità del numero e . Forma esponenziale dei numeri complessi. Formula di Eulero. Equazione di Eulero.