единить в одну формулу (используя конъюнкцию). Далее, рассматриваем все наборы переменных, для которых новая формула равна 1, если на всех этих наборах формула $A$ также равна 1, то секвенция верна, в противном случае – нет. Например, пусть требуется установить верна ли секвенция $A, \rceil B \Rightarrow \rceil A \vdash B$. Тогда эта секвенция равносильна секвенции $A\ (\rceil B \Rightarrow \rceil A) \vdash B$. Далее мы замечаем, что $A\ (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$ равно единице только если $A = 1$ и $B = 1$. Значит, наша секвенция верна.

Однако этот способ, во-первых, не очень интересен, так как фактически все сводится к булевым функциям, а во-вторых, во многих случаях он приводит к более сложным рассуждениям, чем применение естественных свойств теории ИВ. В частности в нашем примере гораздо проще было заменить выражение $\rceil B \Rightarrow \rceil A$ на равносильное $B \vee \rceil A$, и тогда секвенция $A, B \vee \rceil A \vdash B$ становится совершенно очевидной.

Перейдем теперь к несколько более сложной теории, а именно исчислению предикатов (ИП).

### 8. Построение формул в исчислении предикатов

Дадим сначала точное определение предиката в математической логике.

***Определение***. *Предикатом называется функция нескольких переменных, которая в области задания этих переменных может принимать лишь два значения «1» или «0» (которые мы как всегда можем рассматривать как истину или ложь).*

Если предикат зависит от $n$ переменных, то он называется $n$-местным.

Заметим, что предикатом также является сама переменная в случае, если она принимает только два значения 1 и 0. В этом случае предикат считается нуль-местным. Фактически нуль-местный предикат – это высказывание.

Область определения предиката называется *интерпретацией*. Естественно, что при задании предиката должна быть указана его интерпретация (которая чаще всего определяется неоднозначно).

Разберем некоторые примеры предикатов. Например, предложение «студент Иванов имеет дома компьютер» (имеется в виду конкретный студент) является высказыванием или нуль-местным предикатом. Это высказывание может принять значение 1 или 0 (т. е. быть истинным или ложным). Однако предложение – «студент имеет дома компьютер» – уже не является высказыванием, а является предикатом (в данном случае одноместным). Область определения (интерпретация) такого предиката – студенты (либо все, либо данного города, вуза или группы). Фактически из любого высказывания легко сделать одноместный предикат. Например, пусть есть высказывание «4 – четное число». Тогда ему со-



ответствует предикат «число четное». Естественно для такого предиката требуется область определения. Такой областью могут быть только числа, причем обязательно целые. Разумеется, мы сами можем ограничивать область определения предиката, например, рассматривать предикат «число четное» на множестве чисел, делящихся на пять, или больших (меньших) какого-то числа. Совершенно ясно, что для четных чисел рассматриваемый предикат принимает значение 1, а для нечетных – 0.

Будем обозначать предикаты заглавными латинскими буквами, при этом иногда будем перечислять переменные (строчные латинские буквы) в него входящие, иногда нет. Заметим, что если $P(x,y)$ – (двуместный) предикат, то $P(x,x)$ – также предикат (одноместный).

***Замечание.*** Как мы увидим далее в примерах, запись некоторых (даже достаточно простых) математических формул в виде формул ИП требует применения достаточно большого числа предикатов и, значит, введения большого числа обозначений, что затрудняет *понимание* формул ИП. Поэтому в примерах (см. раздел «Дополнительные задачи») мы будем (вместо обозначения предиката заглавными латинскими буквами) иногда использовать смысл этого предиката.

Особенность предиката состоит в возможности введения для них *кванторов* существования и всеобщности. Например, если $P(x)$ – некоторый предикат с некоторой интерпретацией $M$, имеют смысл 2 предложения: $(\forall x)P(x)$ и $(\exists x)\ P(x)$. Смысл первого предложения: «для любого $x$ (из $M$) $P(x)$ истинно, т. е. принимает значение 1», смысл второго: «существует $x$ (из $M$) такое, что $P(x)$ истинно, т. е. принимает значение 1».

В соответствии с указанным смыслом мы считаем, что высказывание $(\forall x)\ P(x)$ принимает значение 1, если $P(x) = 1$ для всех $x$ из $M$, высказывание $(\exists\ x)\ P(x)$ считается истинным, если хотя бы для одного $x$ из $M$ $P(x)$ истинно.

В данном случае оба предложения являются высказываниями. Переменная $x$ в этих предложениях становится связанной.

Аналогично, выражение $(\forall\ x_1)\ P(x_1, x_2, ..., x_n)$ является $(n-1)$-местным предикатом и принимает значение 1 для тех значений $x_2, ..., x_n$, при которых при всех $x_1$ значение $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ равно единице, а предложение $(\exists\ x_1)P(x_1, x_2, ..., x_n)$ считается истинным для тех и только для тех значений $x_2, ..., x_n$, для которых существует хотя бы одно $x_1$, для которого $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимает значение 1. Переменная $x_1$ становится связанной.

Заметим, что (при отсутствии дополнительных скобок) область действия квантора распространяется только на ближайший к нему предикат, содержащий нужную переменную.

Наличие кванторов во многом определяет специфику теории ИП.

Перейдем к построению формул.

Алфавит: латинские буквы (возможно с индексами), заглавные для обозначения предикатов, строчные – для обозначения переменных в предикатах.

Само построение формул проведем в соответствии с общей теорией.

1) Первичные (атомарные) формулы – это предикаты. Все переменные объявляются свободными. Связки 1-го порядка: $\rceil$, а также $\forall$ и $\exists$, связки 2-го порядка – это логические действия: конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность.

2) Если $A$ – уже построенная формула, то $\rceil A$ – тоже формула, причем все свободные (не связанные кванторами) переменные остаются свободными, все связанные переменные – связанными. Кроме того, если $A$ – формула и $x$ – свободная переменная, входящая в $A$, то выражения $((\forall x)\ A)$ и $((\exists x)\ A)$ – тоже формулы, причем переменная $x$ становится связанной.

3) Если $A$ и $B$ – две уже построенные формулы, то следующие выражения: $(AB) = (A\&B)$ (конъюнкция), $(A \vee B)$ (дизъюнкция), $(A \Rightarrow B)$ (импликация) и $(A \sim B)$ (эквивалентность) – также являются формулами, причем все связанные переменные остаются связанными, а свободные – свободными.

*Любая формула в ИП получается из первичных с помощью применения конечного числа правил 2 и 3.*

Заметим, что в ИП все логические операции, включая эквивалентность, конъюнкцию и дизъюнкцию, обычно вводятся с самого начала при построении формул.

## 9. Равносильные, общезначимые, выполнимые формулы. Свойства кванторов, приводящие к равносильным формулам

Естественным образом, исходя из определения формул в ИП, мы получаем, что любая формула при конкретных значениях переменных в нее входящих (из области интерпретации предикатов) принимает значение либо 1, либо 0.

***Определения.***

*Формула в ИП называется выполнимой в данной интерпретации, если существуют такие значения свободных переменных, что эта формула принимает значение 1.*

*Формула в ИП называется истинной в данной интерпретации, если при всех значениях свободных переменных, взятых из данной интерпретации, она принимает значение 1.*



*Формула в ИП называется общезначимой, если в любой возможной интерпретации она является истинной.*

Приведем два важных примера общезначимых формул.

***Предложение 1.*** *Пусть $A(x)$ формула в ИП, в которой $x$ свободная переменная, а $y$ не входит в формулу $A(x)$ (но мы считаем, что $x$ и $y$ берутся из одной и той же интерпретации). Тогда формула*

$$(\forall x)\ A(x) \Rightarrow A(y) \tag{9.1}$$

*общезначима.*

Действительно, если формула $(\forall x)\ A(x)$ при каких-то конкретных значениях свободных переменных (в любой возможной интерпретации) принимает значение 0, то формула (9.1) принимает значение 1. Если же $(\forall x)\ A(x)$ принимает значение 1, то очевидно и $A(y)$ также принимает значение 1. Таким образом, формула (9.1) в любой возможной интерпретации всегда принимает значение 1, т. е. она общезначима.

***Предложение 2.*** *В условиях предыдущего предложения формула*

$$A(y) \Rightarrow (\exists\ x)\ A(x) \tag{9.2}$$

*является общезначимой.*

Действительно, если $A(y) = 0$, то формула (9.2) принимает значение 1. Если же для какого-то значения $y$ (при конкретном наборе других свободных переменных) $A(y) = 1$, то и формула $(\exists\ x)A(x)$ также примет значение 1 и, значит, и формула (9.2) будет истинной.

*Две формулы в ИП называются равносильными в данной интерпретации, если при любых возможных значениях свободных переменных (из данной интерпретации) обе формулы принимают одинаковые значения.*

Если $M$ – *интерпретация всех предикатов, входящих в формулы $A$ и $B$, то равносильность этих формул в $M$ обозначается $A = B\ (M)$.*

*Формулы $A$ и $B$ называются равносильными, если они равносильны в любой возможной интерпретации.*

Очевидно, что для формул в ИП сохраняются все равносильности и правила равносильных преобразований, справедливых в ИВ. Некоторые отличия связаны с наличием в ИП кванторов. Перечислим 4 важных свойства кванторов, приводящих к равносильным формулам:

1. *Перенос квантора через отрицание.*

$$\rceil(\forall x)\ A(x) = (\exists\ x)\ \rceil A(x) \tag{9.3}$$

$$\rceil(\exists\ x)\ A(x) = (\forall x)\ \rceil A(x) \tag{9.4}$$

Мы не будем приводить строгого доказательства этих формул, а ограничимся лишь интуитивным пониманием. А именно, ясно, что слова: «не для любого $x$ $A(x)$ верно» означают, что «существует $x$ такое, что $A(x)$ неверно» или «не существует такого $x$, что $A(x)$ верно» означают, что для всех $x$ $A(x)$ неверно.

2. *Вынос квантора за скобки.*

Пусть формула $A$ содержит свободную переменную $x$, а формула $B$ не содержит $x$. Тогда имеют место следующие 4 формулы:

$$(\exists x)\,(A(x)\,\&B) = (\exists x)\,A(x)\,\&\,B$$
$$(\forall x)\,(A(x)\,\&B) = (\forall x)\,A(x)\,\&\,B$$
$$(\exists x)\,(A(x) \vee B) = (\exists x)\,A(x) \vee B$$
$$(\forall x)\,(A(x) \vee B) = (\forall x)\,A(x) \vee B$$

Читатель без труда должен понять интуитивно верный смысл этих формул.

Заметим, что если формула $B$ также зависит от $x$, то будут выполняться только две равносильности:

$$(\forall x)\,(A(x)\,\&\,B(x)) = (\forall x)\,A(x)\,\&\,(\forall x)\,B(x)$$
$$(\exists x)\,(A(x) \vee B(x)) = (\exists x)\,A(x) \vee (\exists x)\,B(x)$$

Предлагаем студентам самим понять, почему эти равносильности верны, а две другие нет.

3. *Перестановка одноименных кванторов.*

$$(\forall x)\,(\forall y)\,A(x,y) = (\forall y)\,(\forall x)\,A(x,y)$$
$$(\exists x)\,(\exists y)\,A(x,y) = (\exists y)\,(\exists x)\,A(x,y)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко понять из общих соображений, что перестановка *разноименных* кванторов не приводит к равносильным формулам.

В частности легко проверить «на словах» (и мы предлагаем это сделать), что формула

$$(\exists x)\,(\forall y)\,A(x,y) \Rightarrow (\forall y)\,(\exists x)\,A(x,y)$$

является общезначимой, однако обратная импликация неверна.

4. *Переименование связанной переменной.*

Заменяя связанную переменную формулы $A$ другой переменной, не входящей в эту формулу, всюду в области действия квантора, получим равносильную формулу.

## 10. Приведенные и нормальные формулы

**Определения:**

1) *Длиной формулы в ИП называется общее число входящих в нее символов предикатов, логических символов и символов кванторов. Так формула* $(\forall x)\,A(x,y)\,\&\,(\exists z)\,B(y,z)$ *имеет длину 5.*

Таким образом, длина формулы в ИП определяется несколько иначе, чем в ИВ.

2) *Формулы, в которых из логических символов имеются только символы конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем символ* $\rceil$ *встречается лишь перед символом предиката, называется приведенной.*



Отметим, что приведенная формула в ИП является в какой-то мере аналогом ДНФ и отличается от ДНФ возможным наличием кванторов.

Например, формула $(\forall x)\,A(x,y)\,\&\,((\exists z)\,\rceil B(y,z))$ является приведенной, а формула $\rceil((\forall x)\,A(x,y)\,\&\,(\exists z)\,B(y,z))$ – нет.

3) *Формула в ИП называется нормальной, если все ее кванторы стоят в начале формулы или она вообще не содержит символов кванторов.*

Приведем следующие две теоремы без доказательства.

***Теорема 1.*** *Для любой формулы в ИП существует равносильная ей приведенная формула, причем множества свободных и связанных переменных этих двух формул совпадают.*

Заметим, что длины этих формул могут быть разные.

***Теорема 2.*** *Для любой приведенной формулы существует равносильная ей нормальная формула, причем длины обоих формул совпадают.*

Доказательства этих теорем можно найти в [1].

Из этих двух теорем сразу же следует общая теорема.

***Теорема 3.*** *Для любой формулы в ИП существует равносильная ей приведенная нормальная формула.*

## 11. Теория исчисления предикатов

Мы уже ввели формулы в ИП. Перечислим аксиомы ИП. Приведем 5 аксиом ИП. (Разумеется, также как и для теории ИВ, аксиоматику можно вводить по-разному, тем не менее, все возможные аксиоматики будут приводить к одной теории).

Заметим, что первые 3 аксиомы аналогичны аксиомам ИВ. Именно, каковы бы ни были формулы $A$, $B$ следующие 5 формул являются аксиомами.

А1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

А2. $((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

А3. $(\rceil B \Rightarrow \rceil A) \Rightarrow ((\rceil B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$.

А4. $(\forall x)\,A(x) \Rightarrow A(y)$, где формула $A(x)$ не содержит переменной $y$.

А5. $A(y) \Rightarrow (\exists x)\,A(x)$, где формула $A(y)$ не содержит переменной $x$.

Имеется 4 правила вывода ИП.

1. Правило *m.p.* $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$.

2. Правило связывания квантором всеобщности:

$B \Rightarrow A(x) \vdash B \Rightarrow (\forall x)\,A(x)$, где формула $B$ не содержит переменной $x$.

3. Правило связывания квантором существования:

$A(x) \Rightarrow B \vdash (\exists x)\,A(x) \Rightarrow B$, где формула $B$ не содержит переменной $x$.

4. Правило переименования связанной переменной. Связанную переменную формулы $A$ (в кванторе и во всех вхождениях в области действия квантора) можно обозначить другой переменной, не являющейся свободной переменной формулы $A$.

Докажем теперь следующие 2 предложения:

***Предложение 3.*** *Аксиомы ИП – общезначимые формулы.*

В самом деле, для аксиом A1, A2, A3 это следует из теории ИВ. Для аксиом A4 и A5 – это предложения 1 и 2 разд.9.

***Предложение 4.*** *Формула, получающаяся из общезначимой формулы с помощью правил вывода 1–4, является общезначимой.*

***Доказательство.*** 1) Для правила вывода 1 наше утверждение следует из свойств импликации.

2) Рассмотрим правило вывода 2. Пусть $B \Rightarrow A(x_i)$ – общезначимая формула. Докажем, что формула $B \Rightarrow (\forall x_i)\ A(x_i)$ тоже общезначима. Возможны два случая.

а) $B$ на произвольном наборе своих свободных переменных принимает значение 1 (истинна). Тогда из общезначимости формулы $B \Rightarrow A(x_i)$ следует, что для любого элемента $x_i$ справедливо равенство $A(x_i) = 1$. Тогда $(\forall x_i)A(x_i) = 1$, откуда следует, что на любом наборе свободных переменных $(B \Rightarrow (\forall x_i)A(x_i)) = 1$.

б) $B$ на каком-то наборе своих свободных переменных принимает значение 0 (ложна). Тогда по определению импликации $(B \Rightarrow (\forall x_i)A(x_i)) = 1$, что и требовалось доказать.

3) Докажем предложение 4 для правила вывода 3. Пусть формула $A(x) \Rightarrow B$ общезначима. Докажем тогда, что и формула $(\exists\ x)A(x) \Rightarrow B$ также общезначима. Заметим, что если формула $(\exists\ x)A(x)$ (для каких-то значений свободных переменных) принимает значение «0», то для этих значений свободных переменных по свойству импликации формула $(\exists\ x)\ A(x) \Rightarrow B$ принимает значение «1». Если же $(\exists\ x)A(x)$ (для каких-то значений свободных переменных) принимает значение «1», то для этих значений свободных переменных существует некоторое значение $x_1$, для которого $A(x_1)$ истинно.

Тогда из общезначимости формулы $A(x) \Rightarrow B$ следует (напомним, что по условию $B$ не зависит от $x$), что $B$ принимает значение «1» и, значит, формула $(\exists\ x)A(x) \Rightarrow B$ принимает значение «1».

4) То, что правило вывода 4 сохраняет общезначимость, является очевидным.

Непосредственно из предложения 4 очевидным образом следует то, что любая выводимая (из аксиом) формула в ИП является общезначимой. Знаменитый немецкий математик-логик Курт Гедель доказал и обратное утверждение. Таким образом, верно следующее утверждение:

***Теорема 1.*** *Формула в ИП выводима (из аксиом), если и только если она общезначима.*

Из этой теоремы сразу же следует

***Теорема 2.*** *Исчисление предикатов непротиворечивая теория.*



Действительно, не могут быть одновременно общезначимы (т.е. тождественно истинны в любой возможной интерпретации) формулы $A$ и $\rceil A$.

***Замечание.*** Таким образом, в ИП формула выводима (из аксиом) тогда и только тогда, когда она общезначима. Однако, в отличие от исчисления высказываний в ИП не существует алгоритма, позволяющего определить общезначимость любой формулы. Это связано с тем обстоятельством, что интерпретация предикатов может содержать бесконечные возможные значения переменных.

## 12. Примеры решения типовых задач

I. В задачах **1–20** в п. а) требуется доказать секвенции, которые содержат из логических операций только $\rceil$ и $\Rightarrow$. Для решения в основном используются свойства разд. 5. Напомним кратко основные факты этого раздела:

– правило *т. р.*: $A, A \Rightarrow B \vdash B$;

– секвенции $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ равносильны;

– из противоречивых формул $\Gamma \vdash$ следует любая формула $\Gamma \vdash A$, при этом формулы $A$ и $\rceil A$ противоречивы;

– равносильны секвенции $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma, \rceil A \vdash$, а также $\Gamma \vdash \rceil A$ и $\Gamma, A \vdash$.

Кроме того, мы используем здесь два правила разд. 2, а именно: «лишняя формула не мешает» и «удаление выводимой формулы».

Напомним также, что в разд. 5 приведены примеры вывода секвенций.

Задачи (1–20).а подобраны так, чтобы доказательства секвенций были нетрудными. Перейдём к примерам типа (1–20), а.

Требуется доказать секвенцию $\vdash \rceil(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ ?

Знак вопроса ставим, так как секвенция ещё не доказана. Далее применяя перечисленные выше свойства, получаем:

$$\rceil(A \Rightarrow B) \vdash A\ ?$$
$$\rceil(A \Rightarrow B), \rceil A \vdash\ ?$$
$$\rceil A \vdash A \Rightarrow B\ ?$$
$$\rceil A, A \vdash B\ ?$$

Формулы $\rceil A$ и $A$ противоречивы, поэтому уже без знаков вопроса «обратным ходом» получаем:

$$\rceil A, A \vdash B;$$
$$\rceil A \vdash A \Rightarrow B;$$
$$\rceil A, \rceil(A \Rightarrow B) \vdash;$$
$$\rceil(A \Rightarrow B) \vdash A;$$
$$\vdash \rceil(A \Rightarrow B) \Rightarrow A.$$

В п. б) задач **1–20** требуется вывести (или, что то же, доказать) секвенции, содержащие конъюнкции и дизъюнкции. Здесь используются свойства разд. 7. Напомним главные из них:

– вывод секвенции $\Gamma \vdash AB$ равносилен выводу двух секвенций: $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$;

– секвенция $\Gamma \vdash A \vee B$ равносильна секвенции $\Gamma, \rceil A \vdash B$;

– секвенция $\Gamma, A \vee B \vdash C$ равносильна секвенции $\Gamma, \rceil A \Rightarrow B \vdash C$;

– если $\Gamma \vdash A$, то для любого $B$ верна секвенция $\Gamma \vdash A \vee B$.

Во всех задачах используются также и методы вывода, приведённые в п. а) данного раздела.

Приведём в качестве примера вывод секвенции $\vdash A \vee (B \Rightarrow \rceil(AB))$.

Сначала ставим знак вопроса, так как секвенция не доказана.

$\vdash A \vee (B \Rightarrow \rceil(AB))$ ?

Далее:

$$\rceil A \vdash B \Rightarrow \rceil(AB) \ ?$$
$$\rceil A, B \vdash \rceil(AB) \ ?$$
$$\rceil A, B, AB \vdash \ ?$$
$$\rceil A, B, A, B \vdash \ ?$$

Уже видно, что $A, \rceil A \vdash$ (без знака вопроса). Поэтому «обратным ходом» получаем: $\rceil A, A, B \vdash$ или $AB, \rceil A \vdash$, откуда

$$\rceil A, B, AB \vdash;$$
$$\rceil A, B \vdash \rceil(AB);$$
$$\rceil A \vdash B \Rightarrow \rceil(AB);$$
$$\vdash A \vee (B \Rightarrow \rceil(AB)).$$

В п. в) задач **1–20** требуется доказать равносильность формул или из равносильности некоторых формул вывести равносильную ей. При этом наряду с предыдущими правилами используется свойство равносильных формул, а именно: $A = B$, если одновременно $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

Пусть требуется доказать равносильность формул:

$(\rceil A \Rightarrow B) = \rceil(\rceil A \cdot \rceil B)$.

Это значит, что нужно доказать

1) $\vdash (\rceil A \Rightarrow B) \Rightarrow \rceil(\rceil A \cdot \rceil B)$ ? Последовательно записываем:

$\rceil A \Rightarrow B \vdash \rceil(\rceil A \cdot \rceil B)$ ?

$\rceil A \Rightarrow B, \rceil A \cdot \rceil B \vdash$ ?

$\rceil A \Rightarrow B, \rceil A, \rceil B \vdash$ ? Видим, что можно применить правило *m. p.*, поэтому вывод предложенной секвенции осуществляем так:

$B, \rceil B \vdash$; добавляем «лишние» формулы:

$\rceil A \Rightarrow B, \rceil A, B, \rceil B \vdash$, удаляем выводимую формулу $B$ и далее «обратным» ходом получаем формулу 1).

2) $\vdash \rceil(\rceil A \cdot \rceil B) \Rightarrow (\rceil A \Rightarrow B)$ ?



$\rceil(\rceil A \cdot \rceil B) \vdash (\rceil A \Rightarrow B)$ ?

$\rceil(\rceil A \cdot \rceil B), \rceil A \vdash B$ ?

$\rceil(\rceil A \cdot \rceil B), \rceil A, \rceil B \vdash$ ?

$\rceil A, \rceil B \vdash \rceil A \cdot \rceil B$ ?

$\rceil A \cdot \rceil B \vdash \rceil A \cdot \rceil B$. Эта формула уже верна (так как $A \vdash A$). Поэтому обратным ходом получаем формулу 2), а вместе с ней и нужную равносильность.

II. Рассмотрим пример решения задач **21–40**.

Напомним, что область действия квантора (если нет дополнительных скобок) – это ближайший предикат, содержащий переменную, стоящую под знаком квантора. Поэтому связанную переменную необходимо переименовывать, если ее обозначение совпадает с обозначением другой свободной или связанной переменной, стоящей вне области действия первого квантора. Заметим, что в предлагаемых задачах только в задаче 37 не требуется переименования связанной переменной.

Вообще при решении этих задач используются действия с кванторами (разд. 9), главные из которых:

– при переносе квантора через отрицание квантор меняет свой смысл;

– в конъюнкции (дизъюнкции) двух выражений квантор, стоящий перед одним из них, можно выносить за скобки, если в другое выражение не входит эта связанная переменная.

***Пример***. Пусть имеется формула:

$$(\exists x)\, A(x,y) \Rightarrow \rceil(\forall x)\, B(x). \qquad (12.1)$$

Здесь буквой $x$ обозначены две связанные переменные с разной областью действия кванторов, поэтому одну из них надо переименовать и обозначить, например, буквой $z$. Получим формулу (равносильную (12.1)):

$$(\exists x)\, A(x,y) \Rightarrow \rceil(\forall z)\, B(z) \qquad (12.2)$$

Здесь $x$ и $z$ – связанные переменные, а $y$ – свободная.

Длина формулы (12.2) (также как и формулы (12.1)) равна общему числу символов предикатов, кванторов и логических символов и, значит, равна 6.

Теперь найдем приведенную нормальную формулу, равносильную формуле (12.2). Для этого «убираем» символ $\Rightarrow$, исходя из равенства

$$(A \Rightarrow B) = (\rceil A \vee B),$$

поэтому (12.2) равносильна формуле

$$\rceil(\exists x)\, A(x,y) \vee \rceil(\forall z) B(z). \qquad (12.3)$$

Теперь, чтобы формула (12.3) стала приведённой, нужно, чтобы отрицания встали непосредственно перед значениями предикатов. Так как перенос квантора через отрицание означает перемену квантора, получаем:

$$(\forall x)(\neg A(x,y)) \vee (\exists z)(\neg B(z)). \qquad (12.4)$$

Теперь формула (12.4) является приведённой. Для того чтобы она стала нормальной, нужно, чтобы кванторы стояли в её начале. Так как от связанной переменной $x$ переменная $z$ не зависит, получаем:

$$(\forall x)(\exists z)(\neg A(x,y)) \vee \neg B(z)). \qquad (12.5)$$

Формула (12.5) является приведённой нормальной; её длина равна 7.

б) Ясно, что формула (12.5), так же как и (12.1), является выполнимой (в данной интерпретации: $A(x, y)$ – «$y = 2x$», $B(x)$ – «$x$ чётно»). Более того, формула (12.5), а значит, и формула (12.1), тождественно истинны в этой интерпретации, так как $\exists z$ такое, что $B(z)$ ложно (независимо от $A(x, y)$).

Например, можно взять $z = 3$.

Заметим, что при решении задач, где есть символ эквивалентности ~, обычно используется равенство $(A \sim B) = (A \cdot B) \vee (\neg A \cdot \neg B)$.

III. В задачах **41–60** в пп. а), б), в) требуется написать формулу в ИП, которая равна 1, если данное предложение истинно и равна 0, если предложение ложно. При этом можно использовать лишь два предиката $P(x,y,z)$ и $S(x,y,z)$. Предикат $P(x,y,z)$ – это предикат, равный 1, если $xy = z$ и равный 0, если $xy \neq z$ (кратко мы этот предикат записываем $xy = z$). $S(x,y,z)$ – это аналогичный предикат для сложения ($x+y = z$). Интерпретация обоих предикатов – это целые неотрицательные числа. Приведем здесь в качестве примеров запись в виде формулы в ИП пяти предложений: (ясно, что эта запись может быть неоднозначной, но желательно, чтобы она была как можно короче).

а) $x = 0$. Мы знаем, что 0 – это единственное число, для которого при любых $y$ выполняется равенство $y + 0 = y$. Отсюда получаем нужную формулу $F_1(x) = (\forall y)\, S(x,y,y)$. Заметим, что равносильную формулу можно записать в виде $F_1(x) = (\forall y) P(x,y,x)$.

б) $x = 2$. Для этой формулы достаточно заметить, что для любого $y$ верно равенство $1y = y$ и $1+1 = 2$. Поэтому (в написанной ниже формуле $z = 1$)

$$F_2(x) = (\forall y)\, P(z,y,z) \& S(z,z,x).$$

в) $y$ делится на $x$.

$$F_3(x,y) = (\exists z)\, P(x,z,y).$$

г) $z = xy + 3x + 2y$. Ясно, что для того чтобы написать такую формулу, надо сначала ввести два числа 2 и 3 (а для этого нужно еще ввести число равное 1). Тогда



$$F_4(x,y,z) = (\forall y_1)\, P(k, y_1, y_1) \cdot S(k,k,t) \cdot S(k,t,u) \cdot P(x,u,x_1) \cdot P(t,y,y_2) \cdot$$
$$\cdot P(x,y,z_1) \cdot S(x_1, y_2, z_2) \cdot S(z_1, y_2, z)$$

(заметим, что здесь $k = 1$, $t = 2$, $u = 3$, $x_1 = 3x$, $y_2 = 2y$, $z_1 = xy$, $z_2 = 3x + 2y$, $z = z_1 + z_2 = xy + 3x + 2y$).

Из логических операций мы использовали только конъюнкцию.

д) $z$ = Н.О.Д. $(x, y)$.

Заметим, что наибольший общий делитель (Н.О.Д.) – это, во-первых, делитель чисел $x$, $y$ (т. е. $x$ делится на $z$ и $y$ делится на $z$) и, во-вторых, если некоторое число $r$ – также делитель $x$ и $y$, то $r \leq z$. Поэтому

$$F_5(z) = (\exists x_1)\, P(z, x_1, x) \cdot (\exists y_1)\, P(z, y_1, y) \cdot (\forall r)((\exists x_2)\, P(r, x_2, x) \cdot$$
$$\cdot (\exists y_2)\, P(r, y_2, y) \Rightarrow (\exists y_3)\, S(r, y_3, z)).$$

IV. Рассмотрим типовой пример задач **61–80**. Пусть $f(x)$ – произвольная фиксированная функция, и пусть имеет смысл $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Рассмотрим следующие предикаты: $P(x,\delta)$: $0 < |x - a| < \delta$, $Q(x,\varepsilon)$: $|f(x) - A| < \varepsilon$, $R(\varepsilon)$: $\varepsilon > 0$.

Тогда утверждение о том, что число $A$ – предел функции $f(x)$ при $x \to a$, записывается формулой

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)((R(\varepsilon) \cdot P(x,\delta)) \Rightarrow Q(x,\varepsilon)). \qquad (12.6)$$

Выражение $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$ является отрицанием формулы (12.6), т. е. может быть записано в виде

$$\neg((\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)((R(\varepsilon) \cdot P(x,\delta)) \Rightarrow Q(x,\varepsilon))). \qquad (12.7)$$

Найдём приведённую нормальную формулу, равносильную (12.7). Проводя отрицание через кванторы, получим:

$$(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(\exists x)\neg((R(\varepsilon) \cdot P(x,\delta)) \Rightarrow Q(x,\varepsilon))).$$

Выражая импликацию через дизъюнкцию и отрицание, получим:

$$(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(\exists x)\neg(\neg(R(\varepsilon) \cdot P(x,\delta)) \vee Q(x,\varepsilon))).$$

Применяя правило де Моргана, окончательно получим:

$$(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(\exists x)(R(\varepsilon) \cdot P(x,\delta) \cdot \neg Q(x,\varepsilon)). \qquad (12.8)$$

Это и есть приведённая нормальная формула для формулы (12.7).

Словесное выражение формулы (12.8) таково: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$ означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует $x$ из области $0 < |x - a| < \delta$, для которого $|f(x) - A| \geq \varepsilon$.

## 13. Типовые задачи

I. В задачах **1–20** в пп. а) и б) методами теории ИВ доказать секвенции, в п. в) доказать равносильность формул или вывести секвенцию для равносильных формул.

**1.** а) $A \Rightarrow B,\ \neg B \vdash \neg A$. б) $\vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$.

в) $AB \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$.

**2.** а) $\vdash \neg(A \vee \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg A)$. б) $(AB) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
в) $\neg B \Rightarrow \neg A \equiv A \Rightarrow B$.

**3.** а) $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. б) $A \Rightarrow B \vdash (AC) \Rightarrow (BC)$.
в) $\neg(AB) \equiv \neg A \vee \neg B$.

**4.** а) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. б) $\vdash \neg B(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$.
в) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A)(\neg B)$.

**5.** а) $\vdash \neg((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$. б) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$.
в) $A \Rightarrow B \equiv \neg(A(\neg B))$.

**6.** а) $A \Rightarrow B \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. б) $\vdash \neg(A(\neg A))$.
в) $A \Rightarrow B \equiv \neg(A(\neg B))$.

**7.** а) $A \Rightarrow \neg B \vdash B \Rightarrow \neg A$. б) $\vdash (A \cdot (\neg B)) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$.
в) $A(B \vee C) \equiv AB \vee AC$.

**8.** а) $A \Rightarrow B \vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. б) $\neg A(\neg A \Rightarrow B) \vdash (\neg C \Rightarrow \neg B) \Rightarrow C$.
в) $AB \Rightarrow C \equiv \neg A \vee (B \Rightarrow C)$.

**9.** а) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$. б) $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$.
в) $\neg(AB) \equiv \neg A \vee \neg B$.

**10.** а) $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow \neg P$. б) $\vdash \neg(P \Rightarrow \neg P) \vee \neg P$.
в) $A \equiv B \vdash \neg A \equiv \neg B$.

**11.** а) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. б) $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$.
в) $A \equiv B \vdash (A \Rightarrow C) \equiv (B \Rightarrow C)$.

**12.** а) $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$. б) $\vdash ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.
в) $\neg A \Rightarrow B \equiv A \vee B$.

**13.** а) $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow R$. б) $A(\neg B) \vdash \neg(\neg B \Rightarrow \neg A)$.
в) $\neg B \Rightarrow \neg A \equiv A \Rightarrow B$.

**14.** а) $\neg B \Rightarrow \neg A, \neg B \Rightarrow A \vdash B$. б) $\vdash \neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$.
в) $A \Rightarrow B \equiv \neg(A(\neg B))$.

**15.** а) $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$. б) $A \Rightarrow B \vdash AC \Rightarrow BC$.
в) $A \equiv B \vdash (C \Rightarrow A) \equiv (C \Rightarrow B)$.

**16.** а) $A \vdash \neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$. б) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash \neg B \vee (A \Rightarrow C)$.
в) $\neg B \Rightarrow \neg A \equiv \neg A \vee B$.

**17.** а) $\vdash P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$. б) $(AB) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
в) $\neg A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow A$.

**18.** а) $\vdash \neg B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow B))$. б) $A \Rightarrow B \vdash (\neg C \vee A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$.
в) $\neg(AB) \equiv A \Rightarrow \neg B$.

**19.** а) $\neg A \Rightarrow B, \neg B \vdash A$. б) $AB \Rightarrow C \vdash \neg A \vee (B \Rightarrow C)$.
в) $\neg A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow A$.

**20.** а) $\vdash B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow \neg B))$. б) $A \Rightarrow \neg B \vdash AC \Rightarrow (\neg B)C$.
в) $A \equiv B \vdash (A \Rightarrow B) \equiv (B \Rightarrow A)$.



II. В задачах **21–40** в п. а) переименовать связанные переменные (если это необходимо), затем в полученной формуле указать свободные и связанные переменные, определить длину формулы, привести данную формулу (равносильным образом) к приведенной нормальной форме, указать длину полученной формулы, в п. б) определить, выполнимы или нет эти формулы, если считать что $A(x, y)$ – предикат $2x = y$, а $B(x)$ – предикат: $x$ – чётное число (причем оба предиката имеют интерпретацию всех целых неотрицательных чисел).

**21.** $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \Rightarrow (\exists x)B(x)$.
**22.** $(\exists x)A(x, y) \sim B(y)$.
**23.** $(\forall x)(A(x, y) \vee B(x)) \Rightarrow (\exists y)B(y)$.
**24.** $\neg((\exists x)A(x, y) \Rightarrow A(x, y))$.
**25.** $\neg((\forall x)A(x, y) \vee (\exists x)B(x))$.
**26.** $\neg((\exists y)A(x, y) \cdot (\forall x)B(x))$.
**27.** $(\forall y)(A(x, y) \sim B(y))$.
**28.** $A(x, y) \Rightarrow (\forall y)B(y)$.
**29.** $(\exists x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x, y)$.
**30.** $(\exists x)B(x) \Rightarrow (\forall x)B(x)$.
**31.** $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)A(x, y)$.
**32.** $\neg(\exists x)B(x) \Rightarrow B(x)$.
**33.** $\neg((\exists y)A(x, y) \Rightarrow B(y))$.
**34.** $\neg((\forall x)A(x, y) \sim B(y))$.
**35.** $\neg(\forall y)(A(x, y) \sim B(y))$.
**36.** $A(x, y) \vee \neg(\exists y)B(y)$.
**37.** $(\neg(\forall x)A(x, y)) \cdot B(y)$.
**38.** $(\forall x)A(x, y) \sim A(x, y) \cdot B(y)$.
**39.** $(\exists x)A(x, y) \Rightarrow B(y)$.
**40.** $\neg((\forall y)(\exists x)(A(x,y) \Rightarrow B(y))$

III. В задачах **41–60** в пп. а), б) и в) требуется с помощью заданных предикатов (а именно: предикатов $P(x,y,z)$, которые кратко описываются равенствами $xy = z$ и $S(x,y,z)$: $x + y = z$, причем интерпретация обоих предикатов – это целые неотрицательные числа), записать формулой из ИП данные предложения (т. е. написать формулу из ИП, которая принимает значение «1», если предложение является верным и значение «0», если оно неверно).

| | | | |
|---|---|---|---|
| **41.** | а) $x = 0$; | б) $x$ делится на $y$; | в) $z$ = Н.О.К.$(2x, y)$. |
| **42.** | а) $x = 1$; | б) $x + y$ делится на $z$; | в) $xy \le z+2$. |
| **43.** | а) $x = 2$; | б) $x \le y$; | в) $x+2y$ делится на $z$. |
| **44.** | а) $x$ чётно; | б) $x = y$; | в) $x+2y$ делится на $z$. |
| **45.** | а) $x$ нечётно; | б) $x > y$; | в) $z$ делится и на $x$, и на $y$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **46.** | а) $x$ – простое число; | б) $z = \max\{x, y\}$; | в) $x = y + 2$. |
| **47.** | а) $x$ делится на 3; | б) $z = \min\{x, y\}$; | в) $z = x + 1$. |
| **48.** | а) $z = 2x + 3y$; | б) $x$ делится на 4; | в) $z = \min\{x, y\}$. |
| **49.** | а) $x > 6$; | б) $x \le y$; | в) $z + 1$ делится либо на $x$, либо на $y$. |
| **50.** | а) $2x+3y$ делится на 5; | б) $x = 2$; | в) $z = \min\{x, y\}$. |
| **51.** | а) $y$ чётно; | б) $3x + y$ делится на 3; | в) $z \ge 5$. |
| **52.** | а) $z$ – простое число; | б) $y$ и $z$ делятся на $x+1$; | в) $z \le x+2y+1$. |
| **53.** | а) $z$ – не простое число; | б) $z = 3x + 2y$; | в) $z =$ Н.О.Д. $(x+y, y)$. |
| **54.** | а) $x + 2$ делится на $y$; | б) $z \ge x + y$; | в) $z = \max\{3x, y\}$. |
| **55.** | а) $xy$ делится на 6; | б) $z = 2x - 5y$; | в) $x \le y+z$. |
| **56.** | а) $x = 1$; | б) $y$ делится на $xz$; | в) $z = 3x + 2y + xy$. |
| **57.** | а) $x$ делится на 3; | б) $z = x = y$; | в) $z = \max\{xy, 3x+2y\}$. |
| **58.** | а) $x \ge y$; | б) $z = \max\{x, y\}$; | в) $z$ делится на $x + y$ и на $y$. |
| **59.** | а) $x \le 5$; | б) $x$ делится на $y$ и на $z$; | в) $x \ge y+2z$. |
| **60.** | а) $x \le 3$; | б) $x+3y$ делится на 6; | в) $z =$ Н.О. Д $(x, 3y)$ |

IV. В задачах **61–80** в пп. а) и б) требуется ввести нужные предикаты и записать формулами в ИП данные математические утверждения. Кроме того, в п. б) требуется полученную формулу ИП привести к приведённой нормальной форме. Записать словесное выражение для обеих формул.

**61.** а) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; б) $\lim_{x\to\infty} f(x) \ne \infty$.

**62.** а) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$; б) $\lim_{x\to+\infty} f(x) \ne A$.

**63.** а) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$; б) $\lim_{x\to x_0} f(x) \ne -\infty$.

**64.** а) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; б) $\lim_{x\to-\infty} f(x) \ne -\infty$.

**65.** а) $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$; б) $\lim_{x\to x_0+0} f(x) \ne A$.

**66.** а) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$; б) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \ne A$.

**67.** а) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$; б) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \ne +\infty$.

**68.** а) $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$; б) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \ne A$.



**69.** а) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = 0$; б) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \ne 0$.

**70.** а) $\lim_{x\to+0} f(x) = +\infty$; б) $\lim_{x\to+0} f(x) \ne +\infty$.

**71.** а) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; б) $\lim_{x\to\infty} f(x) \ne 0$.

**72.** а) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; б) $\lim_{x\to+\infty} f(x) \ne 0$.

**73.** а) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; б) $\lim_{x\to-\infty} f(x) \ne 0$.

**74.** а) $\lim_{x\to0} f(x) = \infty$; б) $\lim_{x\to0} f(x) \ne \infty$.

**75.** а) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; б) $\lim_{x\to-\infty} f(x) \ne +\infty$.

**76.** а) $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$; б) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \ne -\infty$.

**77.** а) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; б) $\lim_{x\to+\infty} f(x) \ne -\infty$.

**78.** а) $\lim_{x\to5} f(x) = \infty$; б) $\lim_{x\to5} f(x) \ne \infty$.

**79.** а) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$; б) $\lim_{x\to-\infty} f(x) \ne A$.

**80.** а) $\lim_{x\to-5+0} f(x) = A$; б) $\lim_{x\to-5+0} f(x) \ne A$.

## 14. Дополнительные задачи

I. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов совпадает с $R$. (Здесь для записи предикатов мы используем замечание, сделанное нами на с. 56, а именно обозначаем предикаты не латинскими буквами, а их смысловыми значениями).

а) $(\exists x)\,(x + 5 = x + 3)$;
б) $(\exists x)\,(x^2 + x + 0.5 = 0)$;
в) $(\forall x)\,(x^2 + x + 1 > 0)$;
г) $(\forall x)\,(x^2 - 5x + 6 \ge 0)$;
д) $(\exists x)\,((x^2 - 5x + 6 \ge 0)\ \&\ (x^2 - 2x+1 > 0))$;
е) $(\exists x)\,((x^2 - 5x + 6 \ge 0)\ \&\ (x^2 - 6x + 8 \le 0))$;
ж) $(\forall x)\,((x^2 - 6x + 8 \ge 0)\ \&\ (x^2 - 6x + 8 < 0))$;
з) $(\exists x)\,((x \in \{2, 5\} \Rightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0))$;
и) $(\forall x)\,((x \in \{3, 5\}) \Rightarrow (x^2 - 6x + 8 < 0))$.

II. Привести примеры таких $a$, для которых данное высказывание 1) истинно, 2) ложно (областью определения предикатов является $R$).

а) $(\exists x < 0)\,(x^2 + ax + a = 0)$;
б) $(\forall x \in [0, 1])(x^2 + x + a < 0)$;
в) $(\forall x > 7)\,(x^2 + ax + 1 > 0)$;
г) $(\exists x \in [a, a+1])\,(x^2 - x - 2 < 0)$.

III. Доказать или опровергнуть следующие равносильности (формула $B$ не содержит вхождений переменной $x$).

а) $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B) \equiv (\forall x)A(x) \Rightarrow B$ (?)

б) $(\exists x)(A(x) \Rightarrow B) \equiv (\exists x)A(x) \Rightarrow B$ (?)

в) $(\forall x)(B \Rightarrow A(x)) \equiv B \Rightarrow (\forall x)A(x)$ (?)

г) $(\exists x)(B \Rightarrow A(x)) \equiv B \Rightarrow (\exists x)A(x)$ (?)

IV. Выводимы ли в ИП (т. е. общезначимы ли) формулы:

а) $((\exists x)A(x) \Rightarrow (\forall x)A(x))$;

б) $((\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)A(x))$;

в) $\rceil((\exists x)A(x) \Rightarrow (\forall x)A(x))$;

г) $\rceil((\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)A(x))$;

д) $(\exists x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x) A(x, y)$;

е) $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)A(x, y)$;

ж) $((\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x)) \equiv (\exists x)(A(x) \Rightarrow B(x))$.

V. Пусть М – множество точек, прямых и плоскостей 3-мерного евклидова пространства. Рассмотрим в этой интерпретации следующие предикаты: $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$, где $P_1(x)$ – «$x$ – точка», $P_2(x)$ – «$x$ – прямая», $P_3(x)$ – «$x$ – плоскость», $Q(x, y)$ – «$x$ лежит на $y$», $R(x, y)$ – «$x$ совпадает с $y$». Записать в этой интерпретации формулы, выражающие следующие утверждения:

а) через каждые две точки можно провести прямую, и притом только одну, если эти две точки различны;

б) через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну;

в) две данные прямые $y_1$ и $y_2$ параллельны, но не совпадают;

г) две данные прямые $y_1$ и $y_2$ скрещиваются, но не пересекаются;

д) две данные прямые $y_1$ и $y_2$ пересекаются.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Нефедов В. Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики / МАИ. М., 1992.

2. Лихтарникова Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. СПб: Изд-во «Лань», 1999.

3. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. М., 1972.

4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Изд. фирма «Физ. мат. литература», 1995.

5. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. / Под ред. Яблонского С.В. и Лупанова О.Б. М.: Наука, 1974.

6. Духнякова В.Л. Логика. Ч.2. Изд. С-П. 1987.




## СОДЕРЖАНИЕ