马来西亚华文独中教科书

高中数学

（一上）

马来西亚董教总全国华文独中工委会课程局编纂

马来西亚华文独中教科书

高中数学

（一上）

董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

《高中数学》（一上）

行政编辑：梁翠芳
美术编辑：梁翠芳
封面设计：梁翠芳
版面设计：萧娇婵
电脑排版：萧娇婵

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Swan Printing Sdn Bhd.

版次：
2013年8月第1版

印次：
2020年11月第8次印刷

编辑说明

一、这套《高中数学》是根据董教总华文独中工委会统一课程委员会所拟定的数学课程标准编写而成。在拟订课程标准的过程中，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KBSM）及各国的课程标准和教材，并采用了旧版统一课本《普通数学》的课程内容。

二、这套《高中数学》是为全国各华文独中的高中文科及商科学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。每册内容依据每周六节，每节四十分钟的教学时间编写。

三、这套教材共有28章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学及微积分。全书是以综合方式编写。

四、本书是高一上册，供高中一年级上半年使用。内容包括：
代　数　— 一元二次方程式、多项式、有理式、无理式
三角学　— 角及其单位、锐角三角函数

五、本书设有"学习目标"、"注意"、"补充资料"、"随堂练习"及"思考题"栏目。设置上述栏目是为了使学生掌握学习重点，启发学生思考，增进学习效果。

六、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。习题的答案都附于书末。此外，本书附有中英名词对照，供学习参考。

七、除非另有说明，本书所有例题及习题的答案皆准确至两位小数。

八、本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会
《高中数学》编审小组
2013年8月

编审小组

学术顾问：林忠强博士　陈庆地博士
钟美国博士　张丽萍博士

学科委员：林汶良　张锦发　苏民胜　萧子良　曾龙文
陈授勤　沈祥清　王经纶　李鸿聪

责任编辑：蔡思盛

鸣 谢

本书承蒙编审小组、前学科秘书郑慧儒、姚和兴、张发财和黄耀弘等提供建设性意见，并协助编写与审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

目录

4. 无理式

5. 角及其单位

6. 锐角三角函数

1. 一元二次方程式

学习目标：

- 熟练掌握一元二次方程式的解法（因式分解法、配方法、公式法）
- 利用判别式讨论一元二次方程式的根的性质（相异实根、相等实根、无实根）
- 利用一元二次方程式的根与系数的关系进行相关计算

1.1 一元二次方程式

只含一个变数（一元），且变数的最高次数是二（二次）的整式方程式，叫做一元二次方程式。任何一个关于变数x的一元二次方程式都可以化成以下形式：

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0\text{ 且 }a,b,c\in\boldsymbol{R})$$

这种形式的方程式称为一元二次方程式的标准式，其中ax^2称为二次项，bx称为一次项，c称为常数项，a是二次项的系数，b是一次项的系数。例如，方程式$3x^2+2x+1=0$的二次项是$3x^2$，一次项是$2x$，常数项是1；二次项的系数是3，一次项的系数是2。

又如，方程式$5x^2+4x=2+x$必须经过移项及合并同类项，化成标准式$5x^2+3x-2=0$后，才能得到各项的名称与系数。其中，方程式的二次项是$5x^2$，一次项是$3x$，常数项是-2；二次项的系数是5，一次项的系数是3。

思考题

为何一元二次方程式中的二次项的系数不能等于零?

随堂练习 1

1. 一元二次方程式$4x^2-9=0$的二次项是________，一次项是________，常数项是________；二次项的系数是________，一次项的系数是________。

2. 一元二次方程式$7x^2-3x=3-5x$的二次项是________，一次项是________，常数项是________；二次项的系数是________，一次项的系数是________。

1.2 一元二次方程式的解法

对于一个方程式，能使等式成立的有关变数的值叫做这个方程式的解或根。方程式所有的解所组成的集合叫做解集。在初中，我们学过，解一元二次方程式有以下三种常用解法：

因式分解法

例题 1

解方程式 $2x^2 + 7x - 15 = 0$。

解

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x - 15 &= 0 \\ (2x-3)(x+5) &= 0 \\ 2x - 3 = 0 \quad \text{或} \quad x + 5 &= 0 \\ x = \frac{3}{2} \qquad\qquad x &= -5 \end{aligned}$$

补充资料

一元二次多项式可以通过交叉相乘法分解成两个一次式的乘积。以例题 1 为例：

$$\begin{array}{ccc} 2x & & -3 \\ & \times & \\ x & & 5 \\ \hline -3x & + \ 10x = & 7x \end{array}$$

例题 2

求方程式 $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的解集。

解

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$\therefore$ 解集 $= \{3\}$

例题 3

解方程式 $9x^2-25=0$ 。

解

$$9x^2-25=0$$
$$(3x+5)(3x-5)=0$$
$$3x+5=0 \quad \text{或} \quad 3x-5=0$$
$$x=-\frac{5}{3} \qquad x=\frac{5}{3}$$

例题 4

求方程式 $(3x-2)(2x-3)=-1$ 的解集。

解

$$(3x-2)(2x-3)=-1$$
$$6x^2-13x+6=-1$$
$$6x^2-13x+7=0$$
$$(x-1)(6x-7)=0$$
$$x-1=0 \quad \text{或} \quad 6x-7=0$$
$$x=1 \qquad x=\frac{7}{6}$$
$$\therefore \text{解集}=\left\{1,\ \frac{7}{6}\right\}$$

思考题

例题 4 的左式已分解成两个因式的乘积，为什么还需逆向展开成多项式?

例题 5

解方程式 $(x+2)(x-3)=2(x-3)$ 。

解

$$(x+2)(x-3)=2(x-3)$$
$$x^2-x-6=2x-6$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0$$
$$x=0 \quad \text{或} \quad x=3$$

思考题

例题5的左右两式都含有因式。可否通过约分来将原方程式简化？试说明原因。

例题5亦可通过抽取公因式求解：

$$
\begin{aligned}
(x+2)(x-3) &= 2(x-3)\\
(x+2)(x-3)-2(x-3) &= 0\\
(x-3)\left[(x+2)-2\right] &= 0\\
x(x-3) &= 0\\
x=0 \quad \text{或} \quad x &= 3
\end{aligned}
$$

随堂练习 2

用因式分解法解下列各方程式：

1. $x^2-2x-35=0$
2. $4x^2+13x+3=0$
3. $9x^2-18x=0$
4. $4x^2=12x-9$

配方法（完全平方法）

例题 6

解方程式 $x^2+3x-4=0$。

解

$$
\begin{aligned}
x^2+3x-4 &= 0\\
x^2+3x &= 4\\
x^2+2\left(\frac{3}{2}\right)x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 4+\left(\frac{3}{2}\right)^2\\
\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4}\\
x+\frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{25}{4}}\\
x &= -\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}\\
x=1 \quad \text{或} \quad x &= -4
\end{aligned}
$$

思考题

在使用配方法时，为什么等式的左右两边都要加上 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$？试说明原因。

注意

等式的左右两边开平方后，右式需取正负值。

例题 7

求方程式 $3x^2-4x-2=0$ 的解集。

解

$$3x^2-4x-2=0$$

$$x^2-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}=0$$

$$x^2-\frac{4}{3}x=\frac{2}{3}$$

$$x^2-2\left(\frac{2}{3}\right)x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$$

$$x-\frac{2}{3}=\pm\sqrt{\frac{10}{9}}$$

$$x=\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\therefore \text{解集}=\left\{\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{3},\ \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{3}\right\}$$

随堂练习 3

用配方法解下列各方程式：

1. $x^2-9x+14=0$
2. $x^2-2x-4=0$
3. $3x^2-17x+20=0$
4. $6x^2-7x-20=0$

公式法

使用配方法可推导出一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 的求根公式：

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

将各项除以二次项的系数 a，使二次项系数化成 1，并将常数项移到右边

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

两边同时加上 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，使左边配成完全平方式

$$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

以上式子就是一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 的求根公式。将一元二次方程式中各项的系数代入求根公式，可直接求得该方程式的解。

例题 8

解方程式 $x^2+3x+1=0$ 。

解 $a=1$，$b=3$，$c=1$。

由求根公式，得 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(1)(1)}}{2(1)}$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

例题 9

解方程式 $5x^2+13x=46$ 。

解 将原方程式写成 $5x^2+13x-46=0$。

$a=5$，$b=13$，$c=-46$ 。

由求根公式，得 $x=\dfrac{-13\pm\sqrt{(13)^2-4(5)(-46)}}{2(5)}$

$$=\frac{-13\pm\sqrt{1089}}{2(5)}$$

$$=\frac{-13\pm33}{10}$$

$$x=2 \quad 或 \quad x=-\frac{23}{5}$$

随堂练习 4

用公式法解下列各方程式：

1. $9x^2+6x+1=0$
2. $12x^2-25x+12=0$
3. $9x^2=11+18x$

练习 1.2

用因式分解法解下列各方程式:

1. $(x-3)^2=25$
2. $(x+1)(x+2)=30$
3. $(2x+1)^2=7(2x+1)$
4. $x^2+\dfrac{1}{4}=x$
5. $3x^2+5=8x$

用配方法解下列各方程式:

6. $(2x-1)(x-2)=5$
7. $(x+8)(x-3)=3x$
8. $4x^2-26x+22=0$
9. $6x^2=5x+6$
10. $x^2-x-64=0$

用公式法解下列各方程式:

11. $(x-1)^2+(x+3)^2=26$
12. $(2x-1)(3x+1)=4$
13. $14x^2+9x-65=0$
14. $(3x+7)^2=1$
15. $(x+1)(x+3)=4$

用适当方法求下列各方程式的解集:

16. $2x^2-x-21=0$
17. $x^2-4x-6=0$
18. $2x^2+6=7x$
19. $x(x+3)=6x+2$
20. $2x^2-x(5-x)=2$
21. $x-8=-\dfrac{3x^2}{2}$
22. $x(6x-1)=35$
23. $2x(x-4)=6-4x$

1.3 一元二次方程式的根的判别式

由求根公式可知，一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的两个根是 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中 b^2-4ac 叫做根的判别式，一般上以 Δ 表示。应用根的判别式可在不解方程式的情况下，判定一元二次方程式的根的性质：

一、当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程式有两个相异的实根；

二、当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程式有两个相等的实根；

三、当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，根式无意义，方程式无实根。

例题 1

判别下列各方程式的根的性质：

(a) $2x^2+6x-1=0$；

(b) $x^2+6x+9=0$；

(c) $x^2-3x+4=0$。

解 (a) $\because a=2$，$b=6$，$c=-1$，

$$\Delta=(6)^2-4(2)(-1)$$
$$=44>0$$

$\therefore$ 方程式 $2x^2+6x-1=0$ 有两个相异的实根。

(b) ∵ $a=1$，$b=6$，$c=9$，

$\Delta=(6)^2-4(1)(9)$

$=0$

∴ 方程式 $x^2+6x+9=0$ 有两个相等的实根。

(c) ∵ $a=1$，$b=-3$，$c=4$，

$\Delta=(-3)^2-4(1)(4)$

$=-7<0$

∴ 方程式 $x^2-3x+4=0$ 没有实根。

补充资料

你注意到了吗？

例题 1(b) 的方程式 $x^2+6x+9=0$ 可以整理成 $(x+3)^2=0$，也就是完全平方的形式。$x=-3$ 是方程式唯一的实根，这类方程式的根称为二重根。

随堂练习 5

判别下列各方程式的根的性质：

1. $x^2-8x+20=0$
2. $4x^2-12x+9=0$
3. $5x^2-9x+2=0$
4. $6x^2+7x+4=0$
5 $x^2+x(x-1)=x-3$

例题 2

若方程式 $x^2-2(1+3m)x+7(3+2m)=0$ 的两个根相等，求 m 的值。

解 由于方程式的两个根相等，所以判别式等于零。

$$\Delta=0$$

$$[-2(1+3m)]^2-4(1)[7(3+2m)]=0$$

$$9m^2-8m-20=0$$

$$(9m+10)(m-2)=0$$

$$\therefore m=-\frac{10}{9} \text{ 或 } m=2$$

例题 3

若 $4x^2-28x+m$ 是一个完全平方式，求 m 的值。

解 若$4x^2-28x+m$ 是一个完全平方式，则方程式

$4x^2-28x+m=0$ 有两个相等的实根。

$$\Delta=0$$
$$(-28)^2-4(4)(m)=0$$
$$\therefore\ m=49$$

例题 4

在 k 取何值时，方程式 $x^2-(2k+1)x+(k^2-1)=0$

(a) 有两个相等的实根；

(b) 有两个相异的实根；

(c) 没有实根。

解 $\Delta=[-(2k+1)]^2-4(1)(k^2-1)$

$=4k^2+4k+1-4k^2+4$

$=4k+5$

(a) 当方程式有两个相等的实根时，

$$4k+5=0$$
$$k=-\frac{5}{4}$$

(b) 当方程式有两个相异的实根时，

$$4k+5>0$$
$$k>-\frac{5}{4}$$

(c) 当方程式没有实根时，

$$4k+5<0$$
$$k<-\frac{5}{4}$$

例题 5

若方程式 $2x^2-2kx+(k+4)=0$ 有等根，求 k 的值。

解 ∵ 方程式有等根，所以 $\Delta=0$ 。

$$(-2k)^2-4(2)(k+4)=0$$
$$4k^2-8k-32=0$$
$$k^2-2k-8=0$$
$$(k+2)(k-4)=0$$
$$\therefore\ k=-2 \quad 或 \quad k=4$$

例题 6

若一元二次方程式 $(k+4)x^2=(k+3)x+1$ 有实根，求 k 的值。

解 原方程式可写成 $(k+4)x^2-(k+3)x-1=0$

一元二次方程式的二次项的系数不等于0，所以 $k\neq-4$ 。

另，方程式有实根，所以 $\Delta\geq 0$。

$$[-(k+3)]^2-4(k+4)(-1)\geq 0$$
$$k^2+6k+9+4k+16\geq 0$$
$$k^2+10k+25\geq 0$$
$$(k+5)^2\geq 0$$

此不等式对于所有 k 都成立。

$\therefore\ k\in R,\ k\neq-4$

随堂练习 6

1. 若方程式 $2x^2-6x+k=0$ 有实根，求 k 的取值范围。
2. 若方程式 $(x+2)(2x-3)=x+m$ 没有实根，求 m 的取值范围。

练习 1.3

1. 判别下列各一元二次方程式的根的性质：
   (a) $3x^2-6x+5=0$
   (b) $2x^2=5$
   (c) $x^2+4(x+1)=0$
   (d) $4x(x-1)+1=0$
   (e) $2ax^2-3x=a$
   (f) $(ax)^2-3=0$
2. 若下列方程式都有等根，求 m 的值：
   (a) $(3x+m)^2=12x$
   (b) $4x^2+4(m-1)x=-m^2$
   (c) $mx^2+2mx+m=2x^2$
   (d) $x^2+1=\dfrac{x}{2m+1}$
3. 若下列式子是完全平方式，求 m 的值：
   (a) $x^2-(m+4)x+2m+5$
   (b) $(m+1)x^2+4mx+(2m+3)$
4. 若方程式 $2x^2+4x+(k-2)=0$ 有实根，求 k 的取值范围。
5. 若方程式 $2x^2-5x+k=0$ 没有实根，求 k 的取值范围。
6. 若方程式 $kx^2+(2k-1)x+(k-2)=0$ 有两个相异实根，求 k 的取值范围。
7. 若方程式 $x^2-2(3k+1)x+7(2k+3)=0$ 有两个等根，求 k 的值。
8. 若方程式 $2x^2-7x+m=0$ 有实根，求 m 的最大整数值。
9. 若方程式 $x^2-2(k+2)x+(k+3)^2=0$ 没有实根，求 k 的取值范围。
10. 若方程式 $\dfrac{1}{4}x^2+(k+3)x+(k^2+3k-3)=0$ 有实根，求 k 的取值范围。

1.4 一元二次方程式的根与系数的关系

由求根公式可知，一元二次方程式最多有两个实根。设 α 和 β 是一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两个根。若将方程式的二次项系数化为 1，可得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\ (a\neq 0) \quad\text{-------------- (1)}$$

因 α 和 β 是原方程式的解，故原方程式也可表示成以下的形式：

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

展开式子，得 $x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0$

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad\text{------------------ (2)}$$

比较 (1) 及 (2)各同类项的系数，可得

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha+\beta&=-\frac{b}{a}\\ \alpha\beta&=\frac{c}{a}\end{aligned}}$$

上述两式为一元二次方程式的根与系数的关系。

例题 1

若方程式 $5x^2+17x-12=0$ 的一根为 $\frac{3}{5}$，求其另一根。

解 设一根为 $\alpha=\frac{3}{5}$，另一根为 β，

二根之和 $\alpha+\beta=-\frac{17}{5}$

$$\frac{3}{5}+\beta=-\frac{17}{5}$$

$$\therefore\ \beta=-4$$

注意

例题1也可使用两根之积来求方程式的另一根：

$$\alpha\beta=-\frac{12}{5}$$

$$\frac{3}{5}\beta=-\frac{12}{5}$$

$$\beta=-4$$

例题 2

若方程式 $15x^2+x+m=0$ 的一根为 $\frac{1}{3}$，求其另一根及 m 的值。

解 设一根为 $\alpha=\frac{1}{3}$，另一根为 β，

二根之和 $\alpha+\beta=-\frac{1}{15}$

$$\frac{1}{3}+\beta=-\frac{1}{15}$$

$$\therefore\ \beta=-\frac{2}{5}$$

二根之积 $\alpha\beta=\frac{m}{15}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{m}{15}$$

$$\therefore\ m=-2$$

例题 3

已知方程式 $x^2-6x+m=0$ 的一根比另一根大 2，求 m 的值。

解 设一根为 α，另一根为 $\beta=\alpha+2$。

二根之和 $\alpha+\beta=-\frac{(-6)}{1}$

$$\alpha+\alpha+2=6$$

$$\therefore\ \alpha=2$$

二根之积 $\alpha\beta=\frac{m}{1}$

$$2\times4=m$$

$$\therefore\ m=8$$

例题 4

若方程式 $4x^2-px+2=0$ 的一根是另一根的两倍，求这两个根及 p 的值。

解 设一根为 α，另一根为 $\beta=2\alpha$。

二根之和 $\alpha+\beta=-\dfrac{(-p)}{4}$

$$\alpha+2\alpha=\frac{p}{4}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{p}{12}$$

二根之积 $\alpha\beta=\dfrac{2}{4}$

$$(\alpha)(2\alpha)=\frac{1}{2}$$

$$2\alpha^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \alpha=\pm\frac{1}{2}$$

当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时，$\beta=2\alpha=1$，$p=6$；

当 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\beta=2\alpha=-1$，$p=-6$。

随堂练习 7

1. 若方程式 $2x^2-3x+m=0$ 的一根是 2，求其另一根及 m 的值。
2. 若方程式 $8x^2+x+p=0$ 的一根是 $\dfrac{1}{4}$，求其另一根及 p 的值。
3. 若方程式 $x^2-2x+q=0$ 的两个根分别是 a 和 $\dfrac{1}{a}$，求 q 及 a 的值。

例题 5

若 α 和 β 是方程式 $x^2-7x+2=0$ 的两个根，$\alpha<\beta$，求下列各式的值：

(a) $(\alpha+1)(\beta+1)$　　(b) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(c) $(\alpha-\beta)^2$　　(d) $\alpha-\beta$

(e) $\alpha^2+\beta^2$　　(f) $\dfrac{2-\alpha}{\beta}+\dfrac{2-\beta}{\alpha}$

解 $\alpha+\beta=7$，$\alpha\beta=2$

(a) $$\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+1)&=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1\\&=2+7+1\\&=10\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}&=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\\&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(7)^2-4(2)\\&=41\end{aligned}$$

(d) $\because\ \alpha<\beta$

$\therefore\ \alpha-\beta=-\sqrt{41}$

(e) $$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(7)^2-2(2)\\&=45\end{aligned}$$

注意

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

(f) $$\frac{2-\alpha}{\beta}+\frac{2-\beta}{\alpha}=\frac{\alpha(2-\alpha)+\beta(2-\beta)}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{2\alpha-\alpha^2+2\beta-\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{2(\alpha+\beta)-(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{2(7)-45}{2}$$
$$=-\frac{31}{2}$$

随堂练习 8

1. 若 α 和 β 是方程式 $2x^2-4x-3=0$ 的二根，其中 $\alpha>\beta$，求下列各式的值：
   (a) $\alpha^2+\beta^2$　　(b) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$
   (c) $(\alpha-\beta)^2$　　(d) $\alpha-\beta$
   (e) $\alpha^2-\beta^2$　　(f) $\alpha^4-\beta^4$

2. 若方程式 $x^2-mx+15=0$ 的二根之差的平方是4，求 m 的值。
3. 若方程式 $x^2-\frac{x}{k}+3=0$ 的两根的平方和是3，求 k 的值。

利用根与系数的关系，我们可从一元二次方程式的根求得原方程式。

例题 6

求解集为 $\{-8,3\}$ 的一元二次方程式。

解 设所求的方程式为 $x^2+px+q=0$。

二根之和　$-8+3=-p$
$p=5$

二根之积 $(-8)(3)=q$
$q=-24$

∴ 所求的方程式为 $x^2+5x-24=0$。

例题 7

设方程式 $2x^2-5x-7=0$ 的两根为 α 和 β，求以下各式为二根的一元二次方程式：

(a) α^2，β^2

(b) $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$

(c) $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$，$\beta+\dfrac{1}{\alpha}$

解 $\alpha+\beta=-\left(\dfrac{-5}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$

$\alpha\beta=-\dfrac{7}{2}$

(a) $$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\left(-\frac{7}{2}\right)\\&=\frac{53}{4}\end{aligned}$$

$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\frac{49}{4}$$

∴ 以 α^2 和 β^2 为二根的一元二次方程式是：

$$\begin{aligned}x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha^2\beta^2)&=0\\x^2-\left(\frac{53}{4}\right)x+\frac{49}{4}&=0\\4x^2-53x+49&=0\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$$=\left(\frac{53}{4}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)$$

$$=-\frac{53}{14}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$$

∴ 以 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 和 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 为二根的一元二次方程式是:

$$x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\left(\frac{\alpha}{\beta}\quad\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$$

$$x^2-\left(-\frac{53}{14}\right)x+1=0$$

$$14x^2+53x+14=0$$

(c) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$$=\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)$$

$$=\frac{25}{14}$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=-\frac{7}{2}+2+\left(-\frac{2}{7}\right)$$

$$=-\frac{25}{14}$$

∴ 以 $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$ 和 $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$ 为二根的一元二次方程式是:

$$x^2-\left(\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}\right)x+\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=0$$

$$x^2-\left(\frac{25}{14}\right)x+\left(-\frac{25}{14}\right)=0$$

$$14x^2-25x-25=0$$

随堂练习 9

1. 求以方程式 $2x^2-8x+3=0$ 的两个根的平方为二根的一元二次方程式。
2. 求以方程式 $3x^2-9x-5=0$ 的两个根的倒数为二根的一元二次方程式。

练习 1.4

1. 求以下列各集合为解集的一元二次方程式:

   (a) $\left\{-\dfrac{3}{2},-\dfrac{2}{3}\right\}$ (b) $\left\{4\pm3\sqrt{2}\right\}$

   (c) $\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

2. 已知方程式 $(m+1)x^2+5x-21=0$ 的一根是 -3，求其另一根。
3. 若方程式 $mx^2-5x+2=0$ 的一根是另一根的倒数，求此方程式的二根。
4. 已知方程式 $(m-3)x^2-3x-4m+12=0$ 的一根是 4，求其另一根。
5. 若方程式 $9x^2-48x+c=0$ 的两根之差是 2，求 c 的值。
6. 若 α 和 β 是 $2x^2-3x-14=0$ 的两个根，且 $\alpha>\beta$，求下列各式的值:

   (a) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ (b) $(\alpha-\beta)^2$

   (c) $\alpha-\beta$ (d) $\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}$

7. 若方程式 $2x^2-x-7=0$ 的两个根是 α 和 β，求以下列各式为二根的一元二次方程式:

   (a) $\alpha+3,\ \beta+3$ (b) $\dfrac{\alpha}{\beta},\ \dfrac{\beta}{\alpha}$

   (c) $2\alpha-\beta,\ 2\beta-\alpha$ (d) $\alpha+2\beta,\ \beta+2\alpha$

   (e) $\alpha^2+\beta^2,\ 2\alpha\beta$ (f) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha},\ \beta+\dfrac{1}{\beta}$

8. 若一元二次方程式的二根之和是 2，二根之平方和是 18，求此方程式。

9. 设 α 和 β 是一个一元二次方程式的两个正根，且 $\alpha^2+\beta^2=13$ 及 $(1-\alpha)(1-\beta)=2$，求此方程式。

总复习题 1

1. 解下列一元二次方程式：
   (a) $2x^2-5x+2=0$
   (b) $6x^2=5-13x$
   (c) $x(7-x)=4$
   (d) $(4x-1)(1+4x)=3(x-2)+5$
   (e) $5(3x-2)(x-1)-3(2x-3)(x-2)=0$

2. 判别下列各方程式的根的性质：
   (a) $3x^2-7x+2=0$
   (b) $2x^2+3x+4=0$
   (c) $3x^2-4x-2=0$
   (d) $4x^2-28x+49=0$
   (e) $m^3x^2+\dfrac{1}{m}=2mx$
   (f) $mx^2-\dfrac{1}{m}=0$

3. 若 $4x^2-4mx+5m$ 是一个完全平方式，求 m 的值。

4. 求下列各方程式的二根之和与二根之积：

(a) $7x^2+14x-6=0$

(b) $2x^2-5x-4=0$

(c) $5x^2 = 2x+1$

(d) $(2x+1)^2=3$

(e) $2x^2+1=3x$

(f) $(x-1)(x+2)=3x$

5. 若方程式 $2x^2-(m+3)x+16=0$ 有两个正根，且其一根是另一根的平方根，求此方程式的二根及 m 的值。

6. 若 $x^2+mx+7=0$ 的两个根是 α 和 β，且 $\alpha^2+\beta^2=22$，求 m 的可能值。

7. 若 α 和 β 是方程式 $2x^2-3x-5=0$ 的两个根，求 $(\alpha-2\beta)(\beta-2\alpha)$ 的值。

8. 若方程式 $3x^2-4x-2=0$ 的解集是 $\{\alpha, \beta\}$，求 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ 的值。

9. 若 α 和 β 是方程式 $x^2-3x-2=0$ 的两个根，其中 $\alpha<\beta$，求下列各式的值：

(a) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)$

(b) $\alpha-\beta$

10. 若 $\{\alpha, \beta\}$ 是方程式 $x^2+bx+c=0$ 的解集，求 $\alpha^2-\beta^2$。

11. 若方程式 $x^2-x+2m=0$ 与方程式 $2x^2-5x+m=0$ 有一个相同的根，求它们的根及 m 的值。

2. 多项式

学习目标：

- 掌握多项式的运算
- 掌握综合除法，并利用综合除法进行因式分解
- 应用余式定理及因式定理来处理多项式的问题
- 掌握一元多项式的因式分解法，进而解一元高次方程式

2.1 多项式与多项式函数

设x是一个变数，n是一个非负整数，具有下列形式的代数式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

叫做一元n次多项式，其中

(i) a_n，a_{n-1}，…，a_1，a_0都是常数且$a_n \neq 0$；

(ii) n是多项式的次数；

(iii) $a_i x^i\,(i=0,1,2,\dots,n)$是多项式的$i$次项，$a_i$是$i$次项的系数，$a_n$是领导系数。

例如，$3x^4-2x^3+x-5$是一个一元四次多项式，

$3x^4$是它的四次项，系数是3；

$-2x^3$是它的三次项，系数是-2；

二次项的系数是0；

x是它的一次项，系数是1；

-5是它的零次项，也叫做常数项。

若我们令$y=3x^4-2x^3+x-5$，当变数x的值改变时，y的值也随着改变。换言之，x的值决定y的值，且每个x的值只有一个对应的y值。在此情况下，我们称y是x的多项式函数。除了y以外，我们还可使用其它字母来表示函数，例如：$f(x)$，$g(x)$，$F(x)$等等。

例题 1

下列的代数式中，哪些是多项式?

(a) $2-3x^2$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $x^2-4x+\frac{2}{x}$

(d) $\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{5}$

(e) $\sqrt{3}x^2-\sqrt{2}x+1$

(f) $5\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2$

解 (a)，(b)，(d) 及 (e) 是多项式。

例题 2

判断多项式 $4x^3+2x-1$ 的次数，并写出它的领导系数及常数项。

解 $4x^3+2x-1$ 的次数是三，其领导系数是 4，常数项是 -1。

例题 3

根据在下列各条件，判断多项式 ax^2+bx+c 的次数。

(a) $a\neq 0$

(b) $a=0$，$b\neq 0$

(c) $a=b=0$，$c\neq 0$

解 (a) 二次多项式

(b) 一次多项式

(c) 零次多项式

注意

在例题3中，若 $a=b=c=0$，多项式将恒等于0。而0也是一个多项式，但因不能确定它的次数，所以不能叫做零次多项式，只能称为零多项式。零次多项式与零多项式统称为常数多项式。

随堂练习 1

1. 判断下列哪些代数式是多项式：

(a) $6x^5-1$ (b) $2x^{-1}-7$

(c) -0.2 (d) $\dfrac{1}{2x^2+3x-1}$

2. 写出下列各多项式的次数及其各项的次数与系数：

(a) $4x^3-5x^2-x+1$ (b) $2x^5-4x^2-3$

(c) $\sqrt{3}x^3+2x+\dfrac{1}{2}$ (d) $\dfrac{x^2}{2}+4x$

练习 2.1

1. 下列的代数式中，哪些是多项式?

(a) $4x^2+2x-\frac{1}{x^3}$　　(b) $\frac{1}{2}x^3+3x-5$

(c) $-\frac{1}{5}$　　(d) $2\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}-1$

(e) $(2x-3)(3x+1)$

2. 写出下列多项式的领导系数及常数项并写出它们是几次多项式。

(a) $4x^3-5x+2$　　(b) $3-2x+x^2-6x^3$

(c) 12　　(d) $-1+4x^2-5x^3-x^5$

3. 写出多项式 $ax^4+bx^3+cx^2+d$ 在下列条件时是几次多项式。

(a) $b=c=d=0$，$a\neq 0$　　(b) $a=b=d=0$，$c\neq 0$

(c) $a=b=c=0$，$d\neq 0$　　(d) $a=b=c=d=0$

2.2 一元多项式的运算

加减法

一元多项式的相加或相减就是将各多项式中的同次项相加或相减。

例题 1

设 $f(x)=3x^2-4x-2$，$g(x)=2x^3+x^2-5$，求

(a) $f(x)+g(x)$；　　(b) $2f(x)-g(x)$。

解 (a) $f(x)+g(x)=(3x^2-4x-2)+(2x^3+x^2-5)$
$=3x^2-4x-2+2x^3+x^2-5$
$=2x^3+4x^2-4x-7$

(b) $2f(x)-g(x)=2(3x^2-4x-2)-(2x^3+x^2-5)$
$=6x^2-8x-4-2x^3-x^2+5$
$=-2x^3+5x^2-8x+1$

乘法

当两个多项式相乘时，先将一个多项式的各项乘另一个多项式的各项，后将同次项相加。

例题 2

设$f(x)=3x^2-2$，$g(x)=4x^2+3x-5$，求$f(x)\cdot g(x)$。

解 $f(x)\cdot g(x)=(3x^2-2)(4x^2+3x-5)$
$=3x^2(4x^2+3x-5)-2(4x^2+3x-5)$
$=12x^4+9x^3-15x^2-8x^2-6x+10$
$=12x^4+9x^3-23x^2-6x+10$

除法

多项式除以多项式时，可以使用长除法计算。

例题 3

设 $f(x)=6x^4-x^3-22x^2+17x-3$，$g(x)=2x-3$，计算 $f(x)\div g(x)$。

解

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x^3+4x^2-5x+1 \\ \cline{2-2}
2x-3 \,\big) & 6x^4-x^3-22x^2+17x-3 \\
 & 6x^4-9x^3 \\ \cline{2-2}
 & \quad 8x^3-22x^2 \\
 & \quad 8x^3-12x^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad -10x^2+17x \\
 & \qquad -10x^2+15x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2x-3 \\
 & \qquad\qquad 2x-3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

∴ 商式 $=3x^3+4x^2-5x+1$

$f(x)\div g(x)=3x^3+4x^2-5x+1$

设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 是多项式，其中 $g(x)$ 不是零多项式。当 $f(x)$ 除以 $g(x)$，得商式 $Q(x)$ 及余式 $R(x)$ 时，可得下列算式：

$$\frac{f(x)}{g(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{g(x)}$$

或 $f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$，

即被除式 = 除式 × 商式 + 余式，

其中余式 $R(x)$ 的次数小于除式 $g(x)$ 的次数。

注意

被除式的次数 = 除式的次数 + 商式的次数

（续） 若余式 $R(x)$ 为零时，则可得下列算式：

$$f(x)=g(x)\cdot Q(x)$$

这时，我们说 $g(x)$ 能整除 $f(x)$，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式。

例题 4

计算 $(8x^4+24x^3-42x^2)\div(2x^2+6x-9)$。

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2+\quad 0\quad -3 \\
\cline{2-2}
2x^2+6x-9 & 8x^4+24x^3-42x^2 \\
 & 8x^4+24x^3-36x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad -6x^2 \\
 & \qquad\qquad\quad -6x^2-18x+27 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\quad 18x-27
\end{array}
$$

∴ 商式 $4x^2-3$，余式 $18x-27$

$$(8x^4+24x^3-42x^2)\div(2x^2+6x-9)=4x^2-3+\frac{18x-27}{2x^2+6x-9}$$

从以上多项式除法的例子中，我们发现运算过程中的算式都按照相同次数进行降幂排列。基于算式中同次项都对齐排列，我们可将变数及项的次数省略不写，只写项的系数。计算结果后，再将变数及次数依次补上。这种简化的验算方法叫做分离系数法。我们以分离系数法来计算例题 4：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4+\ \ 0\ -3 \\
\cline{2-2}
2+6-9 & 8+24-42+0+0 \\
 & 8+24-36 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad -6+0+0 \\
 & \qquad\quad -6-18+27 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 18-27
\end{array}
$$

∴ 商式 $4x^2-3$，余式 $18x-27$

注意

使用分离系数法时，缺项必须补零，使同次项在运算过程中都能上下对齐，避免次数混乱。

例题 5

若被除式 $f(x)=2x^4-3x^3+2x-5$ 除以除式 $g(x)$ 得商式 $Q(x)=x^2+2$ 及余式 $R(x)=8x+3$，求 $g(x)$。

解 被除式 = 除式 × 商式 + 余式

$$f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

$$g(x)=\frac{f(x)-R(x)}{Q(x)}$$

$$=\frac{(2x^4-3x^3+2x-5)-(8x+3)}{x^2+2}$$

$$=\frac{2x^4-3x^3-6x-8}{x^2+2}$$

$$\therefore\ g(x)=2x^2-3x-4$$

使用分离系数法计算：

$$\begin{array}{r|l}
 & 2-3-4 \\
1+0+2 & 2-3+0-6-8 \\
 & \underline{2+0+4} \\
 & \quad -3-4-6 \\
 & \quad \underline{-3+0-6} \\
 & \qquad -4+0-8 \\
 & \qquad \underline{-4+0-8} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

例题 6

若 $x-1$ 能整除 x^3-2x^2-x+m，求 m 的值。

解

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-1-2 \\
1-1 & 1-2-1+m \\
 & \underline{1-1} \\
 & \quad -1-1 \\
 & \quad \underline{-1+1} \\
 & \qquad -2+m \\
 & \qquad \underline{-2+2} \\
 & \qquad\quad (m-2)
\end{array}$$

根据整除的性质，$R(x)=0$

$$m-2=0$$

$$m=2$$

例题 7

若 x^2-3x+4 能整除 $4x^4-11x^3+mx+n$，求 m 及 n 的值。

解

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & +1 & -13 & & \\ \cline{2-6}
1-3+4 & 4 & -11 & +0 & +m & +n \\
 & 4 & -12 & +16 & & \\ \cline{2-4}
 & & 1 & -16 & +m & \\
 & & 1 & -3 & +4 & \\ \cline{3-5}
 & & & -13 & +(m-4) & +n \\
 & & & -13 & +39 & -52 \\ \cline{4-6}
 & & & & (m-43) & +(n+52)
\end{array}
$$

根据整除的性质，$R(x)=0$

即 $(m-43)x+(n+52)=0$

比较系数，得 $m-43=0$ 及 $n+52=0$

$\therefore\ m=43$，$n=-52$

随堂练习 2

1. 设 $f(x)=6x^4-5x^3+6x^2+x-3$，$g(x)=4x^3-5x^2+7$。

   求 (a) $f(x)+g(x)$;

   (b) $f(x)-g(x)$。

2. 计算下列各式:

   (a) $(6x^2+5x-4)(2x-1)$

   (b) $(x^3+1)\div(x+1)$

3. 求 x^3-3x^2+6x-5 除以 $x-3$ 所得的商式及余式。

练习 2.2

1. 计算下列各式:

 (a) $(5x^3-3x+1)+(4x^3+2x^2+2x-3)$

 (b) $(6x^3-3x^2+x+2)-(4x^3-3x-1)$

2. 设 $f(x)=4x^3-2x+3$， $g(x)=2x^2-3x-4$，求

 (a) $f(x)+2g(x)$;

 (b) $2f(x)-g(x)$。

3. 计算下列各式:

 (a) $(x^2-2x+3)(4x-5)$

 (b) $(2x-3)(3x^2+4x-2)$

 (c) $(3x^2-x)(x^2+2)$

 (d) $(x^3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3})(x^3+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3})$

4. 计算下列各式:

 (a) $(x^3+10x^2+12x+27)\div(x^2+x+3)$

 (b) $(8x^4+24x^3-42x^2-18x+27)\div(2x^2+6x-9)$

 (c) $(12x^3-3x^2+8x)\div(4x-1)$

 (d) $(4x^5-5x^3-7x)\div(2x-3)$

 (e) $(4-7x+10x^2+12x^3)\div(2x^2+x+1)$

5. 已知 $2x-1$ 能整除 $2x^4-3x^3-5x^2+8x+m$，求 m 的值。

6. 已知 $3x+2$ 是 $6x^4-5x^3+mx+10$ 的一个因式，求 m 的值。

7. 已知 x^2-2x-3 是 $x^4+ax^3-27x+b$ 的一个因式，求 a 及 b 的值。

8. 已知 $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+ax+b$ 能被 x^2-2x+4 整除，求 a 及 b 的值。

9. 已知 $(2x-3)(x+2)$ 是 $6x^4+3x^3+ax^2+bx+6$ 的因式，求 a 及 b 的值。

10. 若被除式 $f(x)$ 除以除式 $g(x)=x^2-6x+8$，得商式 $Q(x)=2x+3$，余式 $R(x)=4x-5$。求 $f(x)$。

2.3 多元多项式的运算

含有超过一个变数的多项式叫做多元多项式。多元多项式各项的次数是其所含变数的次数之和。多元多项式中次数最高的项的次数就是这个多项式的次数。例如：

$x^4-2x^2y+3xy^2+5$ 是一个二元四次多项式，其中x^4是四次项，而 $2x^2y$ 及 $3xy^2$ 都是三次项；

$2x^2y-xyz+y^2$ 是一个三元三次多项式；

$x^2y^2z-3xy^2+4z^3$ 是一个三元五次多项式。

随堂练习 3

判别多项式 $2x^2y-xyz+y^2$ 及 $x^2y^2z-3xy^2+4z^3$ 中的各项的次数。

多元多项式的加减法

多元多项式的相加或相减，就是将各多项式中的同类项的系数相加或相减。

例题 1

设 $f(x, y)=3x^3+4x^2y-y^2-4y^3$ ，$g(x, y)=2x^3-6x^2y+3y^3$，

求 (a) $f(x, y)+g(x, y)$； (b) $f(x, y)-g(x, y)$。

解 (a) $f(x, y)+g(x, y)$

$=(3x^3+4x^2y-y^2-4y^3)+(2x^3-6x^2y+3y^3)$

$=3x^3+4x^2y-y^2-4y^3+2x^3-6x^2y+3y^3$

$=5x^3-2x^2y-y^3-y^2$

(b) $f(x, y)-g(x, y)$

$=(3x^3+4x^2y-y^2-4y^3)-(2x^3-6x^2y+3y^3)$

$=3x^3+4x^2y-y^2-4y^3-2x^3+6x^2y-3y^3$

$=x^3+10x^2y-7y^3-y^2$

多元多项式的乘法

多元多项式的乘法与一元多项式的乘法相同，先将两个多项式的各项相乘，后再将同类项相加。

例题 2

设 $f(x, y)=2x^2-xy+y^2$，$g(x, y)=3x^2-2xy-3y^2$，求 $f(x, y)\cdot g(x, y)$。

解 $f(x, y)\cdot g(x, y)$

$=(2x^2-xy+y^2)(3x^2-2xy-3y^2)$

$=6x^4-4x^3y-6x^2y^2-3x^3y+2x^2y^2+3xy^3+3x^2y^2-2xy^3-3y^4$

$=6x^4-7x^3y-x^2y^2+xy^3-3y^4$

注：多元多项式的除法不在本书的讨论范围内。

随堂练习 4

1. 设 $f(x, y) = 2x^4 + 6x^2y + 3xy - 4y^3$，$g(x, y) = 2x^3 - 6x^2y + 3y^3$。

   求 (a) $f(x, y) + g(x, y)$;

   (b) $f(x, y) - g(x, y)$。

2. 求 $(x^2 + y^2)(xy^2 + x)$。

练习 2.3

1. 计算下列各式:

   (a) $(3x^2 + 2xy - 1) + (x^2 - 4xy + 2x + 2)$

   (b) $(2xy + 4yz + 3xz - xyz) + (4xy - 5xz + 3xyz)$

   (c) $(4x^2y + 2x + 3y^2 + 1) - (3x^2y - 4x + y^2 - 1)$

   (d) $(7xy^2 + 2yz^2 - 3xz^2) - (4xy^2 - 3yz^2 + 7xz^2)$

2. 计算下列各式:

   (a) $(3x - 2y)(x - 3y)$

   (b) $(x^2 + 4y)(2x - y)$

   (c) $(3x^2 - xy + 2y^2)(3x - 2y)$

   (d) $(2x^2y - xy^2)(x + y^2)$

2.4 综合除法

当一元多项式除以$x-a$（a是非零常数）时，还可使用一种简便的除法 — 综合除法。

例如：$4x^3+5x^2-6x+2$ 除以 $x-2$，使用分离系数法的运算如下：

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 4 & +13 & +20 & \\ \cline{2-5}
1-2 \big) & 4 & +5 & -6 & +2 \\
 & 4 & -8 & & \\ \cline{2-5}
 & & 13 & -6 & \\
 & & 13 & -26 & \\ \cline{3-5}
 & & & 20 & +2 \\
 & & & 20 & -40 \\ \cline{4-5}
 & & & & 42
\end{array}$$

$\therefore$ 商式是 $4x^2+13x+20$，余式是 42 。

因余式 42 是一个数，因此 42 也称为余数。

上面的算式还可进一步简化：省略演算过程中重复的数字，

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 4 & +13 & +20 & \\ \cline{2-5}
1-2 \big) & 4 & +5 & -6 & +2 \\
 & & -8 & & \\ \cline{2-5}
 & & & & \\
 & & & -26 & \\ \cline{3-5}
 & & & & \\
 & & & & -40 \\ \cline{4-5}
 & & & & 42
\end{array}$$

再将算式缩短

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4+13+20 \\
\hline
1-2 & 4+\ 5-\ 6+\ 2 \\
 & \quad -\ 8-26-40 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 42
\end{array}
$$

其中 $-8-26-40$ 是由 -2 逐项乘以 $4+13+20$ 而来。若将 -2 改用 2 乘，那么演算时可将减法换成加法，其写法如下：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4 & +5 & -6 & +2 & 2 \\
 & +8 & +26 & +40 & \\
\hline
4 & +13 & +20 & +42 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式是 $4x^2+13x+20$，余数是 42 。

综合除法运算步骤

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4 & +5 & -6 & +2 & 2 \\
 & +8 & +26 & +40 & \\
\hline
4 & +13 & +20 & +42 &
\end{array}
$$

1. 将被除式的各项系数分离出来并按降幂排列，缺项补零。
2. 重抄被除式的第一项，作为商式的第一项。（橙色箭头）
3. 将商式与除式 $x-a$ 中的 a 相乘的积写在被除式第二项的下方。（红色箭头）
4. 将被除式的第二项与相乘所得的积相加，写成商式的第二项。（绿色箭头）
5. 依序进行，商式的最后一个数是余数。

例题 1

用综合除法计算 $(2x^4-3x^3-11x-10)\div(x-3)$。

解

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -3 & +0 & -11 & -10 & 3 \\
 & +6 & +9 & +27 & +48 & \\
\hline
2 & +3 & +9 & +16 & +\underline{38} &
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式是 $2x^3+3x^2+9x+16$，余数是 38。

例题 2

用综合除法计算 $(x^3+3x^2-6x-10)\div(x+3)$。

解

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & +3 & -6 & -10 & -3 \\
 & -3 & +0 & +18 & \\
\hline
1 & +0 & -6 & +8 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式是 x^2-6，余数是 8。

当除式是 $ax-b\ (a\neq 0)$ 的形式时，仍可使用综合除法计算。这时，将 $ax-b$ 改写成 $a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)$ 的形式。若使用综合除法计算多项式 $f(x)$ 除以 $\left(x-\dfrac{b}{a}\right)$ 后可得商式 $Q(x)$ 及余式 R，那么

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(x-\frac{b}{a}\right)Q(x)+R \\
&= a\left(x-\frac{b}{a}\right)\frac{Q(x)}{a}+R \\
&= (ax-b)\frac{Q(x)}{a}+R
\end{aligned}
$$

由此可见，$f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 所得的商式为 $\dfrac{Q(x)}{a}$，余式为 R。换言之，当多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 时，可先使用综合除法计算 $f(x)\div\left(x-\dfrac{b}{a}\right)$，后将所得的商式 $Q(x)$ 除以 a，即可得到 $f(x)\div(ax-b)$ 的商式，而余式 R 则保持不变。

注意

使用综合除法时必须注意除式正负号的变换。当除式是 $x-a$ 的形式时，演算式的右上角使用 a 运算。当除式是 $x+a$ 时，演算式的右上角则使用 $-a$ 运算。

例题 3

用综合除法计算 $(2x^3-3x^2+8x-14)\div(2x-3)$。

解

$$\begin{array}{r|rrrrrrr|l}
 & 2 & - & 3 & + & 8 & - & 14 & \frac{3}{2} \\
 & & + & 3 & + & 0 & + & 12 & \\
\hline
2 & 2 & + & 0 & + & 8 & - & \underline{2} & \\
\hline
 & 1 & + & 0 & + & 4 & & &
\end{array}$$

$\therefore$ 商式是 x^2+4，余数是 -2。

例题 4

用综合除法计算 $(4x^3-3x+1)\div(2x+1)$。

解

$$\begin{array}{r|rrrrrrr|l}
 & 4 & + & 0 & - & 3 & + & 1 & -\frac{1}{2} \\
 & & - & 2 & + & 1 & + & 1 & \\
\hline
2 & 4 & - & 2 & - & 2 & + & \underline{2} & \\
\hline
 & 2 & - & 1 & - & 1 & & &
\end{array}$$

$\therefore$ 商式是 $2x^2-x-1$，余数是 2。

例题 5

已知 $9x^4+6x^3-3x^2+4x+m$ 能被 $3x+2$ 整除，求 m 的值。

解

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
9 & + & 6 & - & 3 & + & 4 & + & m & -\frac{2}{3} \\
 & - & 6 & + & 0 & + & 2 & - & 4 & \\
\hline
9 & + & 0 & - & 3 & + & 6 & + & \underline{(m-4)} &
\end{array}$$

因多项式 $9x^4+6x^3-3x^2+4x+m$ 能被 $3x+2$ 整除，余式是零。

所以，$m-4=0$

$m=4$

注意

在例题5中，若多项式能被 $3x+2$ 整除，该多项式也能被 $x+\frac{2}{3}$ 整除。因此，我们不必将演算结果除以3以求出商式，只需使演算结果的末项（余式）等于零便可求得 m 的值。

随堂练习 5

1. 用综合除法计算下列各式:
   (a) $(15x^2+31x+10)\div(5x+2)$
   (b) $(2x^3-9x^2+10x-3)\div(x-3)$
   (c) $(8x^4+4x^3-2x-1)\div(2x+1)$
   (d) $(4x^2+20x-6)\div(x+6)$

2. 若 $4x^4+2x^3+mx^2-3x$ 能被 $2x+1$ 整除，求 m 的值。

练习 2.4

1. 用综合除法计算下列各式:
   (a) $(x^4+5x^3+6x^2-x-2)\div(x+2)$
   (b) $(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+3)$
   (c) $(x^3-2x+1)\div(x-1)$
   (d) $(7x^3+4x-6)\div(x-2)$

2. 用综合除法计算下列各式:
   (a) $(2x^3-7x^2+12x-9)\div(2x-3)$
   (b) $(3x^3-7x^2-6x)\div(3x+2)$
   (c) $(6x^3+x^2-4x-1)\div(2x-1)$
   (d) $(9x^3+2x+4)\div(3x+1)$

3. 若 $3x+2$ 能整除 $6x^4-5x^3+mx+10$，求 m 的值。

4. 若以 $x-4$ 除 $x^3+4x^2+px-12$ 得余数 84，求 p 的值。

2.5 余式定理

余式定理

一、多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得余式等于 $f(a)$。

设多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的商式为 $Q(x)$，余式为 R，则 $f(x)=(x-a)\,Q(x)+R$。

以 $x=a$ 代入，得

$$
\begin{aligned}
f(a)&=(a-a)\,Q(a)+R\\
&=R
\end{aligned}
$$

$\therefore\ f(a)=R$

二、多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 所得余式等于 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

同理，设多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 所得的商式为 $Q(x)$，余式为 R，则 $f(x)=(ax-b)\,Q(x)+R$。

以 $x=\dfrac{b}{a}$ 代入，得

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{b}{a}\right)&=\left[a\left(\frac{b}{a}\right)-b\right]Q\left(\frac{b}{a}\right)+R\\
&=(b-b)\,Q\left(\frac{b}{a}\right)+R\\
&=R
\end{aligned}
$$

$\therefore\ f\left(\dfrac{b}{a}\right)=R$

由此证得余式定理。

例题 1

设 $f(x)=x^3-4x^2+3x-10$，求 $f(x)$ 除以 $x-4$ 所得的余数。

解1 用综合除法：

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & +3 & -10 & 4 \\ & 4 & +0 & +12 & \\ \hline 1 & +0 & +3 & +\underset{\sim}{2} & \end{array}$$

∴ 余数是 2 。

解2 用余式定理：

$$\begin{aligned} \text{余数} &= f(4) \\ &= (4)^3-4(4)^2+3(4)-10 \\ &= 2 \end{aligned}$$

例题 2

求 $8x^3-5$ 除以 $2x+1$ 的余数。

解 设 $f(x)=8x^3-5$

$$\begin{aligned} \text{余数} &= f\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3-5 \\ &= -1-5 \\ &= -6 \end{aligned}$$

例题 3

已知 $f(x)=2x^3+ax^2-x+4$ 除以 $x-2$ 得余数 6，求 a 的值。

解

$$
\begin{aligned}
f(2)&=6\\
2(2)^3+a(2)^2-2+4&=6\\
16+4a-2+4&=6\\
4a&=-12\\
a&=-3
\end{aligned}
$$

例题 4

已知 $f(x)=2x^3+mx^2+nx+1$ 除以 $x-2$ 得余数 7，除以 $x+1$ 得余数 -8。求 $f(x)$ 除以 $x-3$ 所得的余数。

解 由余式定理，可得 $f(2)=7$

$$
\begin{aligned}
2(2)^3+m(2)^2+n(2)+1&=7\\
16+4m+2n+1&=7\\
4m+2n&=-10\\
2m+n&=-5 \quad \text{.............} \ (1)
\end{aligned}
$$

由余式定理，可得 $f(-1)=-8$

$$
\begin{aligned}
2(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1&=-8\\
-2+m-n+1&=-8\\
m-n&=-7 \quad \text{.............} \ (2)
\end{aligned}
$$

（续）(1) + (2) 得 $3m = -12$

$$m = -4$$

将 $m = -4$ 代入(1) 得 $2(-4) + n = -5$

$$-8 + n = -5$$

$$n = 3$$

由此可得，多项式 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ 。

$$f(3) = 2(3)^3 - 4(3)^2 + 3(3) + 1$$
$$= 54 - 36 + 9 + 1$$
$$= 28$$

∴ $f(x)$ 除以 $x - 3$ 所得的余数是 28 。

例题 5

设多项式 $f(x)$ 除以 $x - 1$ 得余数 5， 除以 $x - 2$ 得余数 7。求 $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x - 2)$ 所得的余式。

解 设所求余式 $R(x) = ax + b$

则 $f(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b$

由余式定理，可得 $f(1) = 5$

$(1 - 1)(1 - 2)Q(1) + a(1) + b = 5$

$$a + b = 5 \quad \text{............} \quad (1)$$

由余式定理，可得 $f(2) = 7$

$(2 - 1)(2 - 2)Q(2) + a(2) + b = 7$

$$2a + b = 7 \quad \text{............} \quad (2)$$

思考题

为什么例题 5 中的余式需要设成 $ax + b$ 的形式？如何得知该余式是一个一次多项式？

（续）由 $(2)-(1)$ 得 $a=2$

将 $a=2$ 代入(1) 得 $2+b=5$

$b=3$

$\therefore$ 所求的余式是 $2x+3$ 。

随堂练习 6

1. 求 $6x^3-x^2+2$ 除以 $x+1$ 所得的余数。
2. 求 $8x^3-x+1$ 除以 $4x-1$ 所得的余数。
3. 已知 $x^3-7x^2+12x+a$ 除以 $x+3$ 所得的余数是 24 ，求 a 的值。

练习 2.5

1. 求以 $x-3$ 除 $4x^3-5x^2-6x+6$ 所得的余数。
2. 求以 $x+1$ 除 $7x^6+8x^4-9x+10$ 所得的余数。
3. 求 $x^3-4x^2+9x-43$ 除以 $x-4$ 所得的余数。
4. 求 $81x^6-7$ 除以 $3x-2$ 所得的余数。
5. 以 $x-2$ 除 $f(x)=x^3+2x^2+hx+4$ 的余数是14，求 h 的值。
6. 若 $f(x)=x^4+kx^3-2x^2-10x-6$ 除以 $x+3$ 所得的余数是6，求 k 的值。
7. 若 $f(x)=ax^2+bx-4$ 除以 $x+1$ 所得的余数是3，除以 $x-1$ 所得的余数是1，求 a 及 b 的值。

8. 已知 $f(x)=12x^3+hx^2+kx+5$，若以 $2x-1$ 除 $f(x)$ 得余数 2，以 $x+2$ 除 $f(x)$ 得余数 -33，求 h 及 k 的值。

9. 设 $f(x)$ 为一多项式，以 $x+1$ 除之得余数 2，以 $x-2$ 除之得余数 5，求 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-2)$ 所得的余式。

10. 设 $f(x)$ 为一多项式，以 $x-3$ 除 $f(x)$ 得余数 5，以 $x+1$ 除 $f(x)$ 得余数 -3，求以 x^2-2x-3 除 $f(x)$ 所得的余式。

2.6 因式定理

根据余式定理，多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数等于 $f(a)$。由余式定理，我们可以得到下列定理：

一、若 $x-a$ 是多项式 $f(x)$ 的因式，则 $f(a)=0$；反之，若 $f(a)=0$，则 $x-a$ 是多项式 $f(x)$ 的因式。

二、若 $ax-b$（$a\neq 0$）是多项式 $f(x)$ 的因式，则 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$；反之，若 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$，则 $ax-b$ 是多项式 $f(x)$ 的因式。

上述定理称为因式定理。

例题 1

证明 $x-1$ 是 x^4-5x^3+7x-3 的因式。

解 设 $f(x)=x^4-5x^3+7x-3$

$$
\begin{aligned}
f(1) &= (1)^4-5(1)^3+7(1)-3\\
&= 1-5+7-3\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $x-1$ 是 x^4-5x^3+7x-3 的因式。

例题 2

已知 $x-2$ 是 $f(x)=x^3+3x^2+mx-6$ 的因式，求 m 的值。

解

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 0\\
(2)^3+3(2)^2+m(2)-6 &= 0\\
8+12+2m-6 &= 0\\
2m &= -14\\
m &= -7
\end{aligned}
$$

例题 3

若x^3+mx^2+nx+2能被$x-1$及$x+1$整除，求m及n的值。

解 设$f(x)=x^3+mx^2+nx+2$

$f(x)$能被$x-1$及$x+1$整除，$x-1$及$x+1$都是$f(x)$的因式。

$$
\begin{aligned}
f(1)&=0\\
(1)^3+m(1)^2+n(1)+2&=0\\
1+m+n+2&=0\\
m+n&=-3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(-1)&=0\\
(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+2&=0\\
-1+m-n+2&=0\\
m-n&=-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)
\end{aligned}
$$

由 (1) + (2) 得 $2m=-4$

$m=-2$

将$m=-2$代入 (1) 得 $-2+n=-3$

$n=-1$

$\therefore\ m=-2,\ n=-1$

例题 4

已知 $f(x)=2x^3+mx^2+nx+2$ 有因式 x^2-3x+2，求 m 及 n 的值。

解 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$\therefore$ $f(x)$ 有因式 $x-1$ 及 $x-2$。

$$
\begin{aligned}
f(1)&=0\\
2(1)^3+m(1)^2+n(1)+2&=0\\
2+m+n+2&=0\\
m+n&=-4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(2)&=0\\
2(2)^3+m(2)^2+n(2)+2&=0\\
16+4m+2n+2&=0\\
4m+2n&=-18\\
2m+n&=-9 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)
\end{aligned}
$$

由 (2) – (1) 得 $m=-5$

将 $m=-5$ 代入 (1) 得 $-5+n=-4$

$$n=1$$

$\therefore$ $m=-5$，$n=1$

例题 5

求一个三次多项式 $f(x)$，已知 $f(-1)=f(2)=0$，$f(1)=-14$，$f(-2)=-8$。

解 $\because\ f(-1)=0$ 及 $f(2)=0$

$\therefore\ f(x)$ 有因式 $(x+1)(x-2)$ 。

又，$f(x)$ 是三次多项式

$\therefore$ 设 $f(x)=(x+1)(x-2)(ax+b)$

已知 $f(1)=-14$

$$(1+1)(1-2)[a(1)+b]=-14$$
$$-2(a+b)=-14$$
$$a+b=7 \quad \text{-------------} (1)$$

已知 $f(-2)=-8$

$$(-2+1)(-2-2)[a(-2)+b]=-8$$
$$4(-2a+b)=-8$$
$$-2a+b=-2 \quad \text{-------------} (2)$$

由 (1) – (2) 得 $3a=9$

$$a=3$$

将 $a=3$ 代入 (1) 得 $\quad 3+b=7$

$$b=4$$

$\therefore\ f(x)=(x+1)(x-2)(3x+4)$

$$=3x^3+x^2-10x-8$$

随堂练习 7

1. 设 $f(x)=2x^3+5x^2-28x-15$ 。判别下列哪些是 $f(x)$ 的因式:

(a) $x-5$ (b) $x-3$ (c) $x+5$

(d) $2x-3$ (e) $2x-1$ (f) $2x+1$

2. 若 $f(x)=x^4-2x^3+4x^2+ax-48$ 的一个因式是 $x-3$，求 a 的值。

练习 2.6

1. 若 $f(x)=3x^3-4x^2+kx+5$ 能被 $x-1$ 整除，求 k 的值。
2. 已知 $2x^3+mx^2+5x-100$ 有因式 $x-4$ ，求 m 的值。
3. 已知 $x^4+kx^2-(k+2)x+16$ 能被 $x+2$ 整除，求 k 的值。
4. 若 $9x^3+kx+(k-1)$ 有因式 $3x-2$，求 k 的值。
5. 已知 $x^4+ax^3-27x+b$ 有因式 $x+1$ 及 $x-3$，求 a 及 b 的值。
6. 设 $f(x)=2x^3+mx^2+nx+6$ 。若 $f(x)$ 能被 $x-2$ 及 $x-3$ 整除，求 m 及 n 的值。
7. 若 $(x+2)(x+4)$ 是 $2x^3-x^2+ax+b$ 的因式，求 a 及 b 的值。
8. 已知 $f(x)=4x^4+ax^2+9x+b$ 有因式 $2x^2+3x-2$ ，求 a 及 b 的值。
9. 若 $x^5+px^3+qx-12$ 能被 x^2-2x-3 整除，求 p 及 q 的值。
10. 若 $3x^3+kx^2-7x-2$ 有因式 $3x+1$，求 k 的值，并求 $x+2$ 除这个多项式所得的余数。
11. 设 $f(x)=ax^2+5x+b$ 。若 $f(x)$ 能被 $x-1$ 整除，且 $x+2$ 除 $f(x)$ 得余数 21，求 a 及 b 的值。

12. 若$f(x)=x^3+mx^2+nx+4$有一个因式$x+2$，而除以$x-1$时则得余数9，求m及n的值。

13. 判断$f(x)=4x^4-x^2-6x+3$是否有因式$2x^2-3x+1$。

14. 求一个一元二次多项式$f(x)$，已知$f(1)=0$，$f(-2)=0$，$f(4)=36$。

15. 求一个一元三次多项式$f(x)$，已知$f(3)=0$，$f(-5)=0$，$f(1)=12$，$f(4)=18$。

16. 求一个一元四次多项式$f(x)$，已知$f(-2)=f(1)=f(3)=0$且$f(0)=-12$，$f(-1)=-24$。

2.7 一元多项式的因式分解

因式分解在代数上是一个重要的解题技巧，它不仅可以用在约分，通分等问题上，也是解方程式的重要步骤。

将一个多项式化成几个因式的乘积就叫做因式分解。在因式分解时，要特别注意数系的范围。例如，在有理数范围内，多项式x^4-9可以分解成

$$x^4-9=(x^2+3)(x^2-3)$$

在实数范围内，x^4-9则可进一步分解成

$$x^4-9=(x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

本章所讨论的因式分解都在有理数范围内进行。

一般上，一元多项式的因式分解有下列的方法：

一、抽取公因式法；

二、交叉相乘法；

三、应用公式法；

四、分组分解法。

一、抽取公因式法

在因式分解时，若多项式的各项都含有相同的因式，我们可以将它抽出来。而这个被抽取的因式就叫做公因式。

例题 1

因式分解 $9x^4+6x^2$。

解 $9x^4+6x^2=3x^2(3x^2+2)$

例题 2

因式分解 $(x-2)^3+(x-2)^2-2(x-2)$。

解
$$
\begin{aligned}
&(x-2)^3+(x-2)^2-2(x-2)\\
&=(x-2)[(x-2)^2+(x-2)-2]\\
&=(x-2)(x^2-4x+4+x-2-2)\\
&=(x-2)(x^2-3x)\\
&=x(x-2)(x-3)
\end{aligned}
$$

随堂练习 8

因式分解下列各式：

1. $2x^5 + 6x^3 - 2x^2$
2. $6x^4 + 36x^3 - 3x^2$
3. $x(x-1)(x+2) + 3(x-1)(x+2) + 2(x+3)$

二、交叉相乘法

交叉相乘法一般上用于二次三项式的因式分解。

例题 3

因式分解 $-3x^2 + 4x + 15$ 。

解 $-3x^2 + 4x + 15 = -(3x^2 - 4x - 15)$

$= -(3x+5)(x-3)$

$$\begin{array}{ccccc} 3x & & 5 & & \\ x & & -3 & & \\ \hline 5x & + & -9x & = & -4x \end{array}$$

随堂练习 9

因式分解下列各式：

1. $x^2 - 10x + 24$
2. $24x^2 - 2x - 15$
3. $14 - 29x - 15x^2$
4. $2x^3 + x^2 - 3x$

三、应用公式法

因式分解常用的公式如下:

1. $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$
2. $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$
3. $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
4. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3$
5. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3$
6. $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
7. $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

例题 4

因式分解 $x^2+8x+16$ 。

解 $x^2+8x+16=(x+4)(x+4)$
$=(x+4)^2$

例题 5

因式分解 $8x^2-24x+18$ 。

解 $8x^2-24x+18=2(4x^2-12x+9)$
$=2(2x-3)^2$

例题 6

因式分解 x^4-16。

解 $x^4-16=(x^2)^2-(4)^2$

$=(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^2+4)(x^2-2^2)$

$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

例题 7

因式分解 $8x^2-50$。

解 $8x^2-50=2(4x^2-25)$

$=2[(2x)^2-5^2]$

$=2(2x+5)(2x-5)$

例题 8

因式分解 x^3+8。

解 $x^3+8=x^3+2^3$

$=(x+2)[(x^2-(x)(2)+2^2]$

$=(x+2)(x^2-2x+4)$

例题 9

因式分解 $64x^3-125$。

解 $64x^3-125=(4x)^3-5^3$

$=(4x-5)[(4x)^2+(4x)(5)+5^2]$

$=(4x-5)(16x^2+20x+25)$

例题 10

因式分解 $x^3+6x^2+12x+8$。

解 $x^3+6x^2+12x+8=x^3+(3)(x^2)(2)+(3)(x)(2^2)+2^3$

$=(x+2)^3$

随堂练习 10

因式分解下列各式：

1. $4x^2-25$
2. $27x^3-1$
3. $8x^3+12x^2+6x+1$
4. $x^3-x^2+\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{27}$

四、分组分解法

一些多项式必须先经过分组整理后才能得到公因式或平方差公式（或立方和差公式）的形式。而将一个多项式分组后再进行因式分解的方法叫做分组分解法。

例题 11

因式分解 x^3+3x^2+3x+9。

解 $x^3+3x^2+3x+9=(x^3+3x^2)+(3x+9)$

$=x^2(x+3)+3(x+3)$

$=(x+3)(x^2+3)$

例题 12

因式分解 x^3-x^2-4x+4 。

解 $$\begin{aligned} x^3-x^2-4x+4 &= (x^3-x^2)-(4x-4) \\ &= x^2(x-1)-4(x-1) \\ &= (x-1)(x^2-4) \\ &= (x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

例题 13

因式分解 x^4-2x^3+2x-1 。

解 $$\begin{aligned} x^4-2x^3+2x-1 &= (x^4-1)-(2x^3-2x) \\ &= (x^2+1)(x^2-1)-2x(x^2-1) \\ &= (x^2-1)(x^2+1-2x) \\ &= (x^2-1)(x^2-2x+1) \\ &= (x+1)(x-1)(x-1)^2 \\ &= (x+1)(x-1)^3 \end{aligned}$$

随堂练习 11

因式分解下列各式：

1. $x^3+4x^2-16x-64$
2. x^4+x^3+x+1
3. x^4-8x^2+16
4. $2x^3-2x^2+x-1$

练习 2.7a

因式分解下列各式：

1. $8x^2-12x$
2. $x^4+6x^3+\frac{1}{2}x^2$
3. $45x-6-21x^2$
4. $9x^2-12x+4$
5. $3x^4-27$
6. $x^4-(x+2)^4$
7. $8x^3-27$
8. $9x^3+72$
9. x^6-64
10. $216x^6-27$
11. x^3-x^2-x+1
12. $2x^4-x^3-16x+8$
13. $2x^2+4x+\frac{3}{2}$
14. $(x-3)^3-2(x-3)^2+(x-3)$

应用因式定理因式分解

一些整数系数多项式所含项数较多，要找出其中的因式并不容易。因式定理有助于找出这些多项式的因式。

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$是一个整数系数多项式。根据因式定理，

(1) 若$x-q$是$f(x)$的一个因式，其中q是整数，那么q必是a_0的一个因数。

这个定理的证明方法如下：

因为$x-q$是$f(x)$的一个因式，所以$f(q)=0$，

即 $a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}+\ldots+a_1q+a_0=0$

上式可以写成

$$a_0=-q\ (a_nq^{n-1}+a_{n-1}q^{n-2}+\ldots+a_1)$$

由此可见，q是a_0的一个因数。

(2) 若$px-q$是$f(x)$的一个因式，其中p，q是互质的整数（p，q的最高公因数为1），那么p必定是a_n的一个因数，q必定是a_0的一个因数。

这个定理的证明与上述（1）的证明相仿。

例题 14

因式分解 $f(x)=x^3+3x^2-4x-12$。

解 若 $x-q$ 是 $f(x)$ 的因式，q 的可能因数是 ±1，±2，±3，±4，±6，±12。应用综合除法试除，得 $x-2$ 是多项式 $f(x)$ 的因式。

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -4 & -12 & 2 \\ & +2 & +10 & +12 & \\ \hline 1 & +5 & +6 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x) &= x^3+3x^2-4x-12 \\ &= (x-2)(x^2+5x+6) \\ &= (x-2)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

例题 15

因式分解 $f(x)=x^4+2x^3-9x^2-2x+8$。

解 若 $x-q$ 是 $f(x)$ 的因式，q 的可能因数是 ±1，±2，±4，±8。应用综合除法试除，得 $x-1$ 是多项式的因式。继续试除，得 $x+1$ 也是多项式的因式。

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +2 & -9 & -2 & +8 & 1 \qquad (x-1)\text{ 是因式} \\ & +1 & +3 & -6 & -8 & \\ \hline 1 & +3 & -6 & -8 & & -1 \qquad (x+1)\text{ 是因式} \\ & -1 & -2 & +8 & & \\ \hline 1 & +2 & -8 & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x) &= x^4+2x^3-9x^2-2x+8 \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+2x-8) \\ &= (x-1)(x+1)(x-2)(x+4) \end{aligned}$$

例题 16

因式分解 $f(x)=x^4-2x^3-17x^2+4x+30$ 。

解 若 $x-q$ 是 $f(x)$ 的因式，q 的可能因数是 ±1，±3，±5，±15 。应用综合除法试除，得 $x+3$ 是多项式的因式。继续试除，得 $x-5$ 也是多项式的因式。

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -2 & -17 & +4 & +30 & -3 \\
 & -3 & +15 & +6 & -30 & \\
\hline
1 & -5 & -2 & +10 & \multicolumn{1}{r}{} & 5 \\
 & +5 & +0 & -10 & & \\
\hline
1 & +0 & -2 & & &
\end{array}
$$

$(x+3)$ 是因式

$(x-5)$ 是因式

$$\therefore\ f(x)=x^4-2x^3-17x^2+4x+30$$
$$=(x+3)(x-5)(x^2-2)$$

注意

x^2-2 在有理数范围内不能再分解。

例题 17

因式分解 $f(x)=12x^3+4x^2-3x-1$ 。

解 若 $px-q$ 是 $f(x)$ 的因式，q 的可能值是 ±1，p 的可能因数是 ±1，±2，±3，±4，±6，±12。

所以，$\dfrac{q}{p}$ 的可能值是 $\pm1, \pm\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{1}{3}$，$\pm\dfrac{1}{4}$，$\pm\dfrac{1}{6}$，$\pm\dfrac{1}{12}$ 。应用综合除法试除，得

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 12 & +4 & -3 & -1 & \frac{1}{2} \\
 & & +6 & +5 & +1 & \\
\hline
2 & 12 & +10 & +2 & & \\
\hline
 & 6 & +5 & +1 & &
\end{array}
$$

$(2x-1)$ 是因式

$$\therefore\ f(x)=12x^3+4x^2-3x-1$$
$$=(2x-1)(6x^2+5x+1)$$
$$=(2x-1)(2x+1)(3x+1)$$

例题 18

因式分解 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$ 。

解 若 $px-q$ 是 $f(x)$ 的因式，q 的可能值是 ±1，±2，p 的可能值是 ±1，±2，±3，±6，所以 $\frac{q}{p}$ 的可能值是 ±1，±2，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{3}$，$\pm\frac{2}{3}$，$\pm\frac{1}{6}$。应用综合除法试除，得

$$
\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 6 & +5 & +3 & -3 & -2 & -\frac{1}{2} \\
 & & -3 & -1 & -1 & +2 & \\
\hline
2 & 6 & +2 & +2 & -4 & & \\
 & 3 & +1 & +1 & -2 & & \frac{2}{3} \\
 & & +2 & +2 & +2 & & \\
\hline
3 & 3 & +3 & +3 & & & \\
\hline
 & 1 & +1 & +1 & & &
\end{array}
$$

$(2x+1)$ 是因式

$(3x-2)$ 是因式

$$
\begin{aligned}
\therefore\ f(x) &= 6x^4+5x^3+3x^2-3x-2 \\
&= (2x+1)(3x-2)(x^2+x+1)
\end{aligned}
$$

随堂练习 12

因式分解下列各式：

1. $x^3+x^2-14x-24$
2. x^3-3x^2-x+3
3. $3x^3-2x^2-9x+6$
4. $2x^4+x^3+x^2+x-1$

练习 2.7b

因式分解下列各式:

1. x^4-2x^3-x+2
2. $x^3+4x^2-9x-36$
3. $2x^3+7x^2-9$
4. $x^3-6x^2+11x-6$
5. x^4+4x+3
6. $x^4-3x^3+x^2+3x-2$
7. $x^4+x^3-7x^2-13x-6$
8. $2x^4-x^3-17x^2+16x+12$
9. $8x^4-4x^3-6x^2+x+1$
10. $16x^4-8x^2+1$
11. $8x^4+8x^3+2x^2-2x-1$
12. $12x^4+25x^3-11x^2-3x+1$

2.8 解一元高次方程式

我们在第一章学过，只含一个变数且次数是二的多项式方程式叫做一元二次方程式。那么，我们将次数大于二的多项式方程式叫做一元高次方程式。

若一个一元多项式 $f(x)$ 可因式分解成

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

那么，$x=a_1$，$x=a_2$，…，$x=a_n$，就是方程式 $f(x)=0$ 的根。以上一节的例题 14 为例，多项式 $f(x)=x^3+3x^2-4x-12$ 可以分解成 $(x-2)(x+2)(x+3)$。据此，我们可解方程式 $x^3+3x^2-4x-12=0$:

$$x^3+3x^2-4x-12=0$$

$$(x-2)(x+2)(x+3)=0$$

$$x-2=0 \quad 或 \quad x+2=0 \quad 或 \quad x+3=0$$

$$x=2 \qquad\qquad x=-2 \qquad\qquad x=-3$$

∴ 方程式的解为 $x=2$，$x=-2$ 或 $x=-3$。

例题 1

解方程式 $x^4 + 5x^3 + x^2 - 11x + 4 = 0$ 。

解

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +5 & +1 & -11 & +4 & 1 \\ & +1 & +6 & +7 & -4 & \\ \hline 1 & +6 & +7 & -4 & \multicolumn{1}{|l}{-4} & \\ & -4 & -8 & +4 & \multicolumn{1}{|l}{} & \\ \hline 1 & +2 & -1 & & & \end{array}$$

$(x-1)$ 是因式

$(x+4)$ 是因式

$$\therefore \quad x^4 + 5x^3 + x^2 - 11x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x+4)(x^2 + 2x - 1) = 0$$

$x - 1 = 0$ 或 $x + 4 = 0$ 或 $x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = 1$ $\qquad x = -4$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}$$

$\therefore$ $x = 1$, $x = -4$ 或 $x = -1 \pm \sqrt{2}$

例题 2

解方程式 $3x^4-7x^3-15x^2-18x-8=0$。

解

$$
\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 3 & -7 & -15 & -18 & -8 & 4 \\
 & & +12 & +20 & +20 & +8 & \\ \hline
 & 3 & +5 & +5 & +2 & & -\frac{2}{3} \\
 & & -2 & -2 & -2 & & \\ \hline
3 & 3 & +3 & +3 & & & \\ \hline
 & 1 & +1 & +1 & & &
\end{array}
$$

$(x-4)$ 是因式

$(3x+2)$ 是因式

$$\therefore \quad 3x^4-7x^3-15x^2-18x-8=0$$

$$(x-4)(3x+2)(x^2+x+1)=0$$

$x-4=0$ 或 $3x+2=0$ 或 $x^2+x+1=0$

$x=4$ $\qquad$ $x=-\dfrac{2}{3}$

根的判别式 $\Delta=1^2-4(1)(1)$

$=-3<0$

$\therefore$ 无实数解

$$\therefore \quad x=4 \text{ 或 } x=-\frac{2}{3}$$

将一个代数式换成另一个变数的方法，叫做换元法。一些具有特殊形式的一元高次方程式，可以使用换元法来解。

例题 3

解方程式 $x^4-13x^2+36=0$ 。

解 设 $y=x^2$，则原方程式可转换成

$$\therefore \quad y^2-13y+36=0$$

$$(y-4)(y-9)=0$$

$y-4=0$ 或 $y-9=0$

$y=4$ $\qquad$ $y=9$

当$y=4$ 时，$x^2=4$

$x=\pm2$

当$y=9$ 时，$x^2=9$

$x=\pm3$

$\therefore$ 原方程式的解是 $x=\pm2$ 或 $x=\pm3$ 。

例题 4

解方程式 $(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$ 。

解 设 $y=x^2-x$，原方程式转换成

$$y^2-4y-12=0$$
$$(y-6)(y+2)=0$$

$y-6=0$ 或 $y+2=0$

$y=6$　　$y=-2$

当 $y=6$ 时，

$$x^2-x=6$$
$$x^2-x-6=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$
$$x=3 \text{ 或 } x=-2$$

当 $y=-2$ 时，

$$x^2-x=-2$$
$$x^2-x+2=0$$

由根的判别式得知，x 没有实数解。

$\therefore$ 原方程式的解是 $x=3$ 或 $x=-2$ 。

例题 5

解方程式 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=-15$。

解 原方程式可改写成

$$(x-1)(x-7)(x-5)(x-3)+15=0$$
$$(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+15=0$$

设 $y=x^2-8x$，则以上式子可写成以下形式：

$$(y+7)(y+15)+15=0$$
$$y^2+22y+105+15=0$$
$$y^2+22y+120=0$$
$$(y+10)(y+12)=0$$
$$y+10=0 \quad \text{或} \quad y+12=0$$
$$y=-10 \qquad\qquad y=-12$$

当 $y=-10$ 时，
$$x^2-8x=-10$$
$$x^2-8x+10=0$$
$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(10)}}{2(1)}$$
$$=\frac{8\pm\sqrt{24}}{2}$$
$$=4\pm\sqrt{6}$$

当 $y=-12$ 时，
$$x^2-8x=-12$$
$$x^2-8x+12=0$$
$$(x-2)(x-6)=0$$
$$x-2=0 \quad \text{或} \quad x-6=0$$
$$x=2 \qquad\qquad x=6$$

∴ 原方程式的解是 $x=4\pm\sqrt{6}$，$x=2$ 或 $x=6$。

随堂练习 13

解下列方程式：

1. $4x^3 - 13x + 6 = 0$
2. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$
3. $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$
4. $(x-2)^4 - 10(x-2)^2 + 9 = 0$

练习 2.8

解下列方程式：

1. $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$
2. $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0$
3. $2x^3 + 3x^2 - 32x + 15 = 0$
4. $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 = 0$
5. $x^3 - 7x + 6 = 0$
6. $4x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 4x - 3 = 0$
7. $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$
8. $4x^4 + 8x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0$
9. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8 = 0$
10. $(2x-1)^4 + 4(2x-1)^2 = 12$
11. $x(x-1)(x-2)(x-3) = 24$
12. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 360$

总复习题 2

1. 下列哪些代数式是多项式?

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{x^2}$

(c) $4x^3-5x^2+1$ (d) $\sqrt{2}x^4-x^3+\sqrt{3}$

(e) $3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-1$

2. 计算下列各式:

(a) $(2x^4-3x^2+4x-1)+(3x^2-2x+1)$

(b) $(4x^3-3x^2+4)-(-4x^3+2x^2-8x+1)$

(c) $(3x^2-1)(2x^2-3x-1)$

(d) $(x^2+4x+4)(x^2-4x+4)$

(e) $(x^4+9x^2+16)\div(x^2+3x+4)$

(f) $(2x^5-5x^3+2x^2-5)\div(2x^2-5)$

(g) $(x^4-2x^3+2x^2-4x+10)\div(x-2)$

(h) $(8x^4-12x^3+16)\div(2x-1)$

3. 计算下列各式:

(a) $(3x^3+4x^2y-y^2-4y^3)+(2x^3-6x^2y+3y^3)$

(b) $(4x^2y+6xy-7xy^2+3x-2)-(2x^2y+3xy-4xy^2+5)$

(c) $(x^2-xy+3)(2y^2-1)$

4. 求以 $2x+1$ 除 $16x^5+9$ 所得的余数。

5. 已知 $f(x)=x^3+kx^2-3x-2k$ 除以 $x-2$ 的余数为10,求 k 的值。

6. 若 $3x^2-6x-2$ 及 $4x^2+x+4$ 除以 $x-a$ 时,所得的余数相等,求 a 的值。

7. 若以 $x-2$ 除多项式 $f(x)$ 得余数 3,以 $x-4$ 除之得余数 5,求以 $(x-2)(x-4)$ 除 $f(x)$ 所得的余式。

8. 已知 $x-1$ 是多项式 $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+m$ 的因式，求 m 的值。

9. 若 $3x+5$ 是多项式 $f(x)=3x^3-4kx^2+2x+(k-3)$ 的一个因式，求 k 的值。

10. 若 px^3+2x^2+qx-2 能被 $x-1$ 及 $3x+2$ 整除，求 p 及 q 的值。

11. 设 $2x^3+mx^2+nx+2$ 能被 $(x-1)(x-2)$ 整除，求 m 及 n 的值。

12. 若多项式 $f(x)=ax^3-7x^2+7x+b$ 能被 $x-3$ 整除，而除以 $x-1$ 则得余数 -10，求 a 及 b 的值。

13. 若 x^3+ax^2-2x+1 除以 $x-a$ 得余数 a，求 a 的值。

14. 证明 $2x+1$ 是 $6x^4-x^3-2x^2+5x+\dfrac{5}{2}$ 的因式。

15. 证明 $f(x)=x^4-5x^2+4$ 既有因式 $x-1$，又有因式 $x+1$。

16. 因式分解下列各式：

(a) $x^2-10x-144$
(b) $16x^4-1$
(c) $27x^3+125$
(d) $3x^3+4x^2-13x+6$
(e) x^4-2x^2+3x-2
(f) $4x^4-21x^2+5$
(g) $12x^4+8x^3-9x^2-9x-2$
(h) $9x^4-6x^3-2x^2+16x+8$
(i) $x^5+2x^4-2x^3-8x^2-8x$
(j) $x^5-x^4-8x^3+11x^2+7x-10$

17. 解下列方程式：

(a) $2x^3-3x^2-3x+2=0$
(b) $2x^3-5x^2-4x+10=0$
(c) $(x-1)^2(x+2)=4$
(d) $x(2x^2-3x-1)=10$
(e) $x^4-6x^2+9=0$
(f) $2x^4-7x^3-9x^2+22x-8=0$
(g) $4x^4-5x^2+1=0$
(h) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24$

18. 证明 $x-2$ 是 $f(x)=x^3-3x^2-4x+12$ 的因式。据此，解方程式 $f(x)=0$。

3. 有理式

学习目标：

- 掌握有理式的基本性质及四则运算
- 掌握有理方程式的解法
- 理解部分分式的概念，掌握部分分式的化法

3.1 有理式

设A与B为两个任意多项式，其中B不为零，则用 $\frac{A}{B}$ 的形式表示的代数式称为有理式，也叫做分式。例如，$\frac{2x}{3y}$，$\frac{x-1}{y+1}$，$\frac{x^2+5x+3}{x-1}$ 都是分式。

一个分式中，若分母B是零次多项式，则分式 $\frac{A}{B}$ 就是一个多项式；反之，任何多项式都可以表示成一个分式。

当分式中分子的次数低于分母的次数时，此分式称为真分式。反之，若分子的次数高于或等于分母的次数时，则此分式称为假分式。例如，$\frac{3x^2+1}{x^3+2}$ 是真分式；$\frac{2x^3+3}{x^2-1}$ 及 $\frac{x+2}{x-1}$ 是假分式。

只含一个变数的假分式可使用长除法，将原分式化成一个多项式（整式）与一个真分式的和。

注意

若一个分式的分母的值为0，分式就没有意义。例如，在 $\frac{2x}{3y}$ 中，y 不能等于0，$\frac{x^2+5x+3}{x-1}$ 中，x 不能等于1，否则分式就没有意义。

例题 1

化 $\frac{x^2+2x-1}{x-1}$ 成多项式与真分式的和。

解

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & \quad x+3 \\
x-1 & \overline{)\,x^2+2x-1} \\
 & \underline{\;x^2-\;\;x\quad\;} \\
 & \qquad 3x-1 \\
 & \underline{\qquad 3x-3} \\
 & \qquad\qquad 2
\end{array}
$$

$$\therefore \frac{x^2+2x-1}{x-1} = x+3+\frac{2}{x-1}$$

在一个分式中，当分母的值为零时，则分式就无意义。例如，在 $\dfrac{x+2}{x-1}$ 中，$x \neq 1$ 时，分式才有意义。

随堂练习 1

化下列各分式成多项式与真分式的和：

1. $\dfrac{x}{x-2}$
2. $\dfrac{3x^2-2x+1}{x-1}$
3. $\dfrac{2x^3+x}{x^2+1}$
4. $\dfrac{x^4}{x^2-1}$

练习 3.1

1. 若下列分式有意义，x 不能取何值？

   (a) $\dfrac{x-5}{x-3}$　　(b) $\dfrac{2x-1}{x^2-25}$　　(c) $\dfrac{3x+2}{3x^2-4x+1}$

2. 若下列分式的值为零，x 应取何值？

   (a) $\dfrac{x-1}{x-2}$　　(b) $\dfrac{x^2-9}{x^2+3x+2}$　　(c) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

3. 化下列分式成多项式与真分式的和：

   (a) $\dfrac{2x-1}{2x-3}$　　(b) $\dfrac{3x^2-2x+7}{x^2+3}$　　(c) $\dfrac{x^3-2x^2+5}{x^2+x+1}$

   (d) $\dfrac{6x^4-2}{2x^2-1}$　　(e) $\dfrac{4x^3-4x^2-10x+5}{2x^2+x-3}$

3.2 约分与通分

约分

将一个分式中的分子与分母的公因式相约，从而将该分式化简，叫做分式的约分。

若化简后的分式，其分子与分母没有任何公因式，则称为最简分式。

例题 1

化简 $\dfrac{3x^2y^3}{6xy^2}$ 。

解

$$\frac{3x^2y^3}{6xy^2} = \frac{3x^2y^3 \div 3xy^2}{6xy^2 \div 3xy^2} = \frac{1}{2}xy$$

例题 2

化简 $\dfrac{x^2-25}{x^2+5x}$ 。

解

$$\frac{x^2-25}{x^2+5x} = \frac{(x+5)(x-5)}{x(x+5)} = \frac{x-5}{x}$$

例题 3

化简 $\dfrac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2}$ 。

解

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2} &= \frac{x^2(x+y)}{(x+y)(x+y)}\\ &= \frac{x^2}{x+y}\end{aligned}$$

随堂练习 2

化简下列各式：

1. $\dfrac{3xyz}{6xy-9xz}$

2. $\dfrac{x^2-9}{3-x}$

3. $\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

4. $\dfrac{(x^2-16)(x^2+2x)}{(x^2-4)(x^2-4x)}$

5. $\dfrac{x^3y^2-9x^3}{x^2y^2+7x^2y+12x^2}$

通分

将几个不同分母的分式化成相同分母的分式，叫做分式的通分。

一般上，通分的公分母是取各分式的分母的最低公倍式（L.C.M.）。

例题 4

将 $\dfrac{3x-1}{x+1}$ 与 $\dfrac{5x}{x-1}$ 通分。

解 分母的L.C.M.是 $(x+1)(x-1)$。

$$\therefore \frac{3x-1}{x+1} = \frac{(3x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{5x}{x-1} = \frac{5x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

例题 5

将 $\dfrac{3}{5x+15}$ 与 $\dfrac{5x}{x^2-9}$ 通分。

解 $5x+15=5(x+3)$

$x^2-9=(x+3)(x-3)$

分母的 L.C.M. 是 $5(x+3)(x-3)$

$$\therefore \frac{3}{5x+15} = \frac{3(x-3)}{5(x+3)(x-3)}$$

$$\frac{5x}{x^2-9} = \frac{25x}{5(x+3)(x-3)}$$

注意

在进行通分时，各分母的代数式必须先因式分解，以便比较它们的因式，找出各分母的最低公倍式。

例题 6

将 $\dfrac{y}{x^2+xy}$，$\dfrac{x}{xy-y^2}$，$\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 通分。

解 $x^2+xy=x(x+y)$

$xy-y^2=y(x-y)$

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

分母的 L.C.M. 是 $xy(x+y)(x-y)$

（续） $\therefore \dfrac{y}{x^2+xy} = \dfrac{y}{x(x+y)}$

$$= \frac{y^2(x-y)}{xy(x+y)(x-y)}$$

$$\frac{x}{xy-y^2} = \frac{x}{y(x-y)}$$

$$= \frac{x^2(x+y)}{xy(x+y)(x-y)}$$

$$\frac{xy}{x^2-y^2} = \frac{xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{x^2y^2}{xy(x+y)(x-y)}$$

随堂练习 3

将下列各式通分：

1. $\dfrac{3}{8xy}$，$2x$，$\dfrac{5}{2x^3}$
2. $\dfrac{3}{2x-6}$，$\dfrac{5}{3x-9}$
3. $\dfrac{4x}{x+2}$，$\dfrac{5x-1}{2x-3}$
4. $\dfrac{1}{x^2-4y^2}$，$\dfrac{3}{x^2+2xy}$
5. $\dfrac{7}{x^2-4x+4}$，$\dfrac{8x}{x^2-2x-3}$，$\dfrac{2x-3}{x^2-x-2}$

练习 3.2

化简下列各式：

1. $\dfrac{3x^2y}{12xy^2}$
2. $\dfrac{2cd-4d^2}{10cd}$
3. $\dfrac{x^2-4x}{x^2-8x+16}$
4. $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}$
5. $\dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}$
6. $\dfrac{(x-y)(x^2-y^2)}{x^3-2x^2y+xy^2}$

7. $\dfrac{x^3-14x^2-32x}{x^2y+2xy}$

8. $\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$

将下列各分式通分：

9. $\dfrac{1}{2x}$，$\dfrac{2}{3y^2}$，$\dfrac{3}{4z}$

10. $\dfrac{2x}{2x-3}$，$\dfrac{7x-2}{5x-3}$

11. $\dfrac{1}{x^2-25}$，$\dfrac{5x}{x^2-6x+5}$

12. $\dfrac{1}{y^2+y-2}$，$\dfrac{2x}{y^2-4}$，$\dfrac{3x-5}{y^2-5y+6}$

13. $\dfrac{5x}{x^2-2xy+y^2}$，$\dfrac{3x}{x^2+2xy+y^2}$，$\dfrac{4x-1}{x^2-y^2}$

14. $\dfrac{-x-2y}{2x^2-3xy+y^2}$，$\dfrac{x+y}{4x^2-4xy+y^2}$，$\dfrac{3x-2y}{y^2-4x^2}$

3.3 有理式的四则运算

有理式的加减法

当相同分母的分式加减时，只需将各分式的分子相加减，分母保持不变，后通过约分将运算结果化简成最简分式。

例题 1

化简 $\dfrac{2x+1}{3x+3}+\dfrac{x+2}{3x+3}$。

解

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{3x+3}+\frac{x+2}{3x+3} &= \frac{2x+1+x+2}{3x+3}\\ &= \frac{3x+3}{3x+3}\\ &= 1\end{aligned}$$

例题 2

化简 $\dfrac{3x}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2-1}$ 。

解

$$\frac{3x}{x^2-1}-\frac{3}{x^2-1}=\frac{3x-3}{x^2-1}$$
$$=\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{3}{x+1}$$

当不同分母的分式加减时，各分式的分母必须先通分成同分母分式后，才加减及化简。

例题 3

化简 $\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{2}{x-2}$ 。

解

$$\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-2}=\frac{3(x-2)}{(x+3)(x-2)}+\frac{2(x+3)}{(x-2)(x+3)}$$
$$=\frac{3x-6+2x+6}{(x+3)(x-2)}$$
$$=\frac{5x}{(x+3)(x-2)}$$

例题 4

化简 $\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x^2+3}{2x^2-2}$。

解 $\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x^2+3}{2x^2-2}=\dfrac{x+1}{2(x-1)}-\dfrac{x^2+3}{2(x^2-1)}$

$$=\frac{(x+1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)}-\frac{x^2+3}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x^2+2x+1-x^2-3}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2x-2}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}$$

例题 5

化简 $\dfrac{3}{a+2b}-\dfrac{2}{a-2b}$。

解 $\dfrac{3}{a+2b}-\dfrac{2}{a-2b}=\dfrac{3(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)}-\dfrac{2(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)}$

$$=\frac{3a-6b-2a-4b}{(a+2b)(a-2b)}$$

$$=\frac{a-10b}{(a+2b)(a-2b)}$$

随堂练习 4

化简下列各式：

1. $\dfrac{a-1}{2a+2}+\dfrac{a+3}{2a+2}$

2. $\dfrac{2x}{x+y-z}+\dfrac{2y}{x+y-z}-\dfrac{2z}{x+y-z}$

3. $\dfrac{5x}{x-1}-\dfrac{3}{x+2}$

4. $\dfrac{2y}{2x-y}+\dfrac{y}{y-2x}$

5. $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{2y}{x^2-y^2}$

6. $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{4}{1+x^4}$

有理式的乘法

分式相乘所得的积，其分子是各分子的乘积，其分母是各分母的乘积。此乘积应化成最简形式。

例题 6

化简 $\dfrac{20abc}{15bcd}\times\dfrac{5abc}{10bcd}\times\dfrac{3bd}{2ab}$。

解

$$\begin{aligned}\frac{20abc}{15bcd}\times\frac{5abc}{10bcd}\times\frac{3bd}{2ab} &= \frac{4a}{3d}\times\frac{a}{2d}\times\frac{3d}{2a}\\ &= \frac{4a\times a\times 3d}{3d\times 2d\times 2a}\\ &= \frac{a}{d}\end{aligned}$$

例题 7

化简 $\dfrac{x^2-4}{x^2-2x+1} \times \dfrac{x^2-1}{x^2-4x+4}$。

解 $\dfrac{x^2-4}{x^2-2x+1} \times \dfrac{x^2-1}{x^2-4x+4}$

$= \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-1)} \times \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-2)}$

$= \dfrac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$

例题 8

化简 $\dfrac{2c}{2c-d} \times \dfrac{2cd-d^2}{10c}$。

解 $\dfrac{2c}{2c-d} \times \dfrac{2cd-d^2}{10c} = \dfrac{2c}{2c-d} \times \dfrac{d(2c-d)}{10c}$

$= \dfrac{d}{5}$

例题 9

化简 $\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2} \times \dfrac{x^2-y^2}{y}$。

解 $\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2} \times \dfrac{x^2-y^2}{y}$

$= \dfrac{x+y}{(x-y)(x-y)} \times \dfrac{(x+y)(x-y)}{y}$

$= \dfrac{(x+y)^2}{y(x-y)}$

例题 10

化简 $\dfrac{a-b}{-c+a} \times \dfrac{b-c}{-a+b} \times \dfrac{c-a}{-b+c}$。

解 $\dfrac{a-b}{-c+a} \times \dfrac{b-c}{-a+b} \times \dfrac{c-a}{-b+c}$

$= \dfrac{a-b}{-(c-a)} \times \dfrac{b-c}{-(a-b)} \times \dfrac{c-a}{-(b-c)}$

$= -1$

有理式的除法

有理式的除法运算，是把除式的分子、分母对调位置后，与被除式相乘，再进行约分化简。

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}$$

例题 11

化简 $\left(\dfrac{-ab}{x^2y}\right)^2 \div \left(\dfrac{ab^3}{-3y}\right) \div \left(\dfrac{y}{b^2}\right)^2$ 。

解 $\left(\dfrac{-ab}{x^2y}\right)^2 \div \left(\dfrac{ab^3}{-3y}\right) \div \left(\dfrac{y}{b^2}\right)^2$

$= \dfrac{a^2b^2}{x^4y^2} \div \left(\dfrac{ab^3}{-3y}\right) \div \dfrac{y^2}{b^4}$

$= -\left(\dfrac{a^2b^2}{x^4y^2} \div \dfrac{ab^3}{3y} \div \dfrac{y^2}{b^4}\right)$

$= -\left(\dfrac{a^2b^2}{x^4y^2} \times \dfrac{3y}{ab^3} \times \dfrac{b^4}{y^2}\right)$

$= -\dfrac{3ab^3}{x^4y^3}$

例题 12

化简 $\dfrac{x^2-16}{2x^2-18} \div \dfrac{x^2+6x+8}{x^2-x-6}$ 。

解 $\dfrac{x^2-16}{2x^2-18} \div \dfrac{x^2+6x+8}{x^2-x-6}$

$$= \frac{(x+4)(x-4)}{2(x+3)(x-3)} \div \frac{(x+4)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{(x+4)(x-4)}{2(x+3)(x-3)} \times \frac{x-3}{x+4}$$

$$= \frac{x-4}{2(x+3)}$$

例题 13

化简 $\dfrac{x}{x^2+2x+1} \times \left(x-3-\dfrac{4}{x}\right) \div \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$ 。

解 $\dfrac{x}{x^2+2x+1} \times \left(x-3-\dfrac{4}{x}\right) \div \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$

$$= \frac{x}{(x+1)(x+1)} \times \left(\frac{x^2-3x-4}{x}\right) \div \frac{(x-1)(x-4)}{x^2}$$

$$= \frac{x}{(x+1)(x+1)} \times \frac{(x-4)(x+1)}{x} \times \frac{x^2}{(x-1)(x-4)}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$$

随堂练习 5

化简下列各式：

1. $\dfrac{a^2}{6b^3} \times \dfrac{3b^2}{2a} \times \dfrac{8b}{a}$

2. $\dfrac{ab-ac}{ab} \times \dfrac{b}{bc-c^2}$

3. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \times \dfrac{1}{xy+y^2}$

4. $\dfrac{a^2-5a+6}{a} \div \dfrac{a-2}{a^2-3a}$

5. $\dfrac{x^2-9}{x^2+x-20} \div \dfrac{x^2+x-12}{x^2-16}$

6. $\dfrac{4x^2-1}{x^2-6x+8} \div \dfrac{2x^2+5x+2}{x^2-2x-8}$

练习 3.3a

化简下列各式：

1. $\dfrac{x}{3x-3} - \dfrac{x-3}{3x-3}$

2. $\dfrac{5x+6}{2x+5} - \dfrac{x-4}{2x+5}$

3. $\dfrac{3x+5}{2x+1} - \dfrac{x-1}{2x+1} + \dfrac{4x-3}{2x+1}$

4. $\dfrac{a+3}{a+4} - \dfrac{a+1}{a+2}$

5. $\dfrac{3}{(x+1)(x-2)} - \dfrac{2}{(x+1)(x+2)}$

6. $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-a}{x+a} - \dfrac{4a^2}{x^2-a^2}$

7. $\dfrac{2}{x(x-y)} + \dfrac{2}{y(x+y)} - \dfrac{4}{x^2-y^2}$

8. $\dfrac{7}{x^2+x-12} - \dfrac{6}{x^2+2x-8}$

9. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

10. $\dfrac{3}{x^2-5x+4}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}-\dfrac{1}{x^2-7x+12}$

11. $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)}-\dfrac{y}{(y-z)(x-y)}+\dfrac{z}{(x-z)(y-z)}$

12. $\dfrac{1-x^2}{y+y^2}\times\dfrac{1-y^2}{1+x}$

13. $\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{x^4+x^3}{x^2-x+1}$

14. $\dfrac{x+y}{x^2-xy}\times\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$

15. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+9x+20}\times\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$

16. $\dfrac{1}{a^2-4}\div\dfrac{4}{a^2-4a+4}$

17. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-49}\div\dfrac{x^2-8x+7}{x+7}$

18. $\dfrac{a^2-16}{a^2-2a-3}\times\dfrac{a-3}{a^2-5a+4}$

19. $\dfrac{2x^2-3x-2}{2x^2-5x+2}\times\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+3}\div\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^2+x-1}$

20. $\left(\dfrac{1}{a}-a^2\right)\left(a-\dfrac{a^2}{a-1}\right)\div\left[(a+1)^2-a\right]$

繁分式的化简

在一个式子中，若其分子或分母含有分式，这式子就称为繁分式。

例题 14

化简 $\dfrac{\dfrac{x}{y}-1}{x-y}$。

解 $\dfrac{\dfrac{x}{y}-1}{x-y}=\dfrac{\left(\dfrac{x-y}{y}\right)}{x-y}$

$=\dfrac{x-y}{y}\div(x-y)$

$=\dfrac{x-y}{y}\times\dfrac{1}{x-y}$

$=\dfrac{1}{y}$

或 $\dfrac{\dfrac{x}{y}-1}{x-y}=\dfrac{\left(\dfrac{x-y}{y}\right)}{x-y}$

$=\dfrac{y\left(\dfrac{x-y}{y}\right)}{y(x-y)}$

$=\dfrac{x-y}{y(x-y)}$

$=\dfrac{1}{y}$

例题 15

化简 $\dfrac{3x-2}{1-\dfrac{4}{3x+2}}$。

解 $\dfrac{3x-2}{1-\dfrac{4}{3x+2}}=\dfrac{3x-2}{\left(\dfrac{3x+2-4}{3x+2}\right)}$

$=\dfrac{(3x-2)(3x+2)}{\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)(3x+2)}$

$=\dfrac{(3x-2)(3x+2)}{3x-2}$

$=3x+2$

随堂练习 6

化简下列各式：

1. $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{y+\dfrac{1}{x}}$

2. $\dfrac{1+\dfrac{x+y}{x-y}}{1-\dfrac{x+y}{x-y}}$

3. $\dfrac{1+\dfrac{x}{x+y}}{1-\dfrac{3y}{x-y}}$

练习 3.3b

化简下列各式：

1. $\dfrac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}}{\dfrac{y}{b}-\dfrac{x}{a}}$

2. $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x}{x-2}}{\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{3x}{x-3}}$

3. $\dfrac{a-4+\dfrac{2}{a-1}}{a-\dfrac{6}{a-1}}$

4. $\dfrac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}}$

5. $\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{a+\dfrac{1}{a}}}$

3.4 有理方程式

含有分式的方程式叫做有理方程式。例如：

$\dfrac{2}{x+1} - x = 4$ 及 $\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{x-2}{2x-1}$ 都是有理方程式。

解有理方程式时，将方程式两边同乘各分式的分母的最低公倍式（即公分母），可得出一个不含分母的方程式。解此整式方程式所得的根必须经过检验：若所得的根使原分式方程式的任一分母为零时，此根即为原方程式的增根，应舍弃。若所解得的根都是增根，则原分式方程式无解。

例题 1

解方程式 $x + \dfrac{6}{x+1} = 4$ 。

解

$$x + \frac{6}{x+1} = 4$$

$$x - 4 + \frac{6}{x+1} = 0$$

将方程式两边同乘各分母的 L.C.M.，即 $x+1$，得

$$(x-4)(x+1)+6=0$$
$$x^2-3x-4+6=0$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$
$$x=1 \quad 或 \quad x=2$$

经检验，$x=1$ 及 $x=2$ 都是原分式方程式的根。

例题 2

解方程式 $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-1}{2x+5}$。

解 将方程式两边同乘各分母的L.C.M. $(x-2)(2x+5)$，得

$$
\begin{aligned}
(x-1)(2x+5) &= (x-1)(x-2)\\
2x^2+3x-5 &= x^2-3x+2\\
x^2+6x-7 &= 0\\
(x-1)(x+7) &= 0\\
x=1 \quad \text{或} \quad x &= -7
\end{aligned}
$$

经检验，$x=1$ 及 $x=-7$ 都是原方程式的解。

例题 3

解方程式 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}=\dfrac{x+5}{x(x-1)}$。

解 将方程式两边同乘各分母的L.C.M. $x(x-1)$，得

$$
\begin{aligned}
3(x-1)+6x &= x+5\\
3x-3+6x &= x+5\\
8x &= 8\\
x &= 1
\end{aligned}
$$

经检验，$x=1$是增根，应舍弃。所以，此题无解。

例题 4

解方程式 $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}-\dfrac{11}{5}=\dfrac{x^2}{6x-2x^2}$。

解

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}-\frac{11}{5}=\frac{x^2}{6x-2x^2}$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)}-\frac{11}{5}=\frac{x^2}{2x(3-x)}$$

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{11}{5}=-\frac{x}{2(x-3)}$$

方程式两边同乘各分母的L.C.M. $10(x-3)$，得

$$10(x-1)-11(2)(x-3)=-5x$$

$$10x-10-22x+66=-5x$$

$$7x=56$$

$$x=8$$

经检验，$x=8$ 是原方程式的解。

思考题

在例题4中，为什么分式 $\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)}$ 可以约简成 $\dfrac{x-1}{x-3}$？如此约分，原方程式的根会不会减少?

例题 5

解方程式 $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{7}{x+2}=\dfrac{15}{(x-3)(x+2)}$。

解 方程式两边同乘各分母的L.C.M. $(x-3)(x+2)$，得

$$x(x+2)-7(x-3)=15$$

$$x^2+2x-7x+21=15$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$x=2 \quad 或 \quad x=3$$

经检验，$x=3$是增根，应舍弃。$x=2$是原方程式的解。

随堂练习 7

解下列分式方程式：

1. $\dfrac{9}{x-5} = \dfrac{7}{x}$

2. $\dfrac{6x-1}{3x+2} = \dfrac{4x-7}{2x-5}$

3. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x}{x^2-4}$

练习 3.4

解下列分式方程式：

1. $\dfrac{2x-3}{x-1} = \dfrac{4x-1}{2x+3}$

2. $\dfrac{3x}{x+2} = 3 - \dfrac{5}{x}$

3. $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{5}{x}$

4. $\dfrac{2}{y+1} + \dfrac{3}{y-1} = \dfrac{6}{y^2-1}$

5. $\dfrac{7}{x+8} + \dfrac{2}{x-8} = \dfrac{5}{x^2-64}$

6. $\dfrac{4}{x^2-6x+8} = \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{1}{x-4}$

7. $\dfrac{3}{2x+3} + \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{8}{2x^2-7x-15}$

8. $\dfrac{2}{x^2-1} + \dfrac{2}{x^2+4x-5} + \dfrac{3}{x^2+6x+5} = 0$

9. $\dfrac{3x+2}{x^2+x} = \dfrac{x-5}{x^2-1} + \dfrac{x-2}{x^2-x}$

10. $\dfrac{x-4}{x^2+2x} = \dfrac{1}{x^2-2x} - \dfrac{2}{x^2-4}$

11. $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x-6}$

12. $\dfrac{x+5}{x+4} + \dfrac{x+7}{x+6} = \dfrac{x+8}{x+7} + \dfrac{x+4}{x+3}$

3.5 部分分式

恒等式

一个等式，若其未知数在取任何数值时，左右两式的值都相等，此等式即为恒等式。例如：在等式 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 中，无论 a 及 b 取何值，左右两式的值均相等。因此，上述等式恒等，可记作 $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$，其中“$\equiv$”为恒等号。但，为了方便起见，在运算的过程中，“$\equiv$”往往都以“$=$”代替。

设立一个恒等式常需要使用字母来表示一些有待确定的系数，这些系数就称为待定系数。而根据恒等式的定义来确定这些待定系数，则可使用下列方法：

一、数值代入法；

二、系数比较法。

一、数值代入法

根据恒等式的定义，使用适当的数值代入含有待定系数的恒等式中，以便消去恒等式中的一些待定系数，即可解得待定系数的值。这种方法即为数值代入法。

例题 1

若 $5x - 4 = A(x - 2) + B(x + 1)$，求A及B的值。

解 用 $x = -1$ 代入恒等式，得

$$5(-1) - 4 = A(-1 - 2) + B(-1 + 1)$$

$$-9 = -3A$$

$$A = 3$$

（续）用 $x=2$ 代入恒等式，得

$$
\begin{aligned}
5\,(2)-4 &= A\,(2-2)+B\,(2+1)\\
6 &= 3B\\
B &= 2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $A=3$，$B=2$ 。

例题 2

若 $2x^2-5x-1=A\,(x-1)\,(x-2)+B\,(x-2)\,(x-3)+C\,(x-1)\,(x-3)$，求A，B及C的值。

解 用 $x=3$ 代入恒等式，得

$$
\begin{aligned}
2\,(3)^2-5\,(3)-1 &= A\,(3-1)\,(3-2)+B\,(0)+C\,(0)\\
18-15-1 &= A\,(2)(1)\\
A &= 1
\end{aligned}
$$

用 $x=1$ 代入恒等式，得

$$
\begin{aligned}
2\,(1)^2-5\,(1)-1 &= A\,(0)+B\,(1-2)\,(1-3)+C\,(0)\\
2-5-1 &= B\,(-1)\,(-2)\\
B &= -2
\end{aligned}
$$

用 $x=2$ 代入恒等式，得

$$
\begin{aligned}
2\,(2)^2-5\,(2)-1 &= A\,(0)+B\,(0)+C\,(2-1)\,(2-3)\\
8-10-1 &= C\,(1)\,(-1)\\
C &= 3
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $A=1$，$B=-2$，$C=3$ 。

二、系数比较法

将含有待定系数的恒等式，加以整理并按降幂(或升幂)排列，后再比较恒等式两边各对应项的系数，即可确定待定系数的值。这种方法即为系数比较法。

例题 3

设 $-3x+5=\mathrm{A}(x-2)+\mathrm{B}(x-3)$，求 A 及 B的值。

解 整理等式，得

$$\begin{aligned}-3x+5&=\mathrm{A}(x-2)+\mathrm{B}(x-3)\\&=\mathrm{A}x-2\mathrm{A}+\mathrm{B}x-3\mathrm{B}\\&=(\mathrm{A}+\mathrm{B})x+(-2\mathrm{A}-3\mathrm{B})\end{aligned}$$

比较对应项系数，得 $\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=-3\\-2\mathrm{A}-3\mathrm{B}=5\end{cases}$

∴ 解方程组，得 $\mathrm{A}=-4$，$\mathrm{B}=1$。

例题 4

若 $3x^3-4x^2+5x+2=\mathrm{A}x(x-1)(x-2)+\mathrm{B}x(x-1)+\mathrm{C}x+\mathrm{D}$，求A，B，C 及 D 的值。

解 将等式按降幂排列，得

$$\begin{aligned}3x^3-4x^2+5x+2&=\mathrm{A}x(x^2-3x+2)+\mathrm{B}x(x-1)+\mathrm{C}x+\mathrm{D}\\&=\mathrm{A}x^3-3\mathrm{A}x^2+2\mathrm{A}x+\mathrm{B}x^2-\mathrm{B}x+\mathrm{C}x+\mathrm{D}\\&=\mathrm{A}x^3+(-3\mathrm{A}+\mathrm{B})x^2+(2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C})x+\mathrm{D}\end{aligned}$$

比较对应项系数，得 $\begin{cases}\mathrm{A}=3\\-3\mathrm{A}+\mathrm{B}=-4\\2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=5\\\mathrm{D}=2\end{cases}$

∴ 解方程组，得 $\mathrm{A}=3$，$\mathrm{B}=5$，$\mathrm{C}=4$，$\mathrm{D}=2$。

随堂练习 8

1. 已知多项式 $2x+7$ 与 $A(x-1)+B(2x+1)$ 恒等，求 A 及 B 的值。
2. 若 $x^2+x+2=A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)+C(x-1)(x-2)$，求 A，B 及 C 的值。
3. 若 $Ax^2+2x+3=-(x-B)(x-3)$，求 A 及 B 的值。
4. 若 x^3+Ax^2+Bx+C 恒等于 $(x+1)(x-1)(x+5)-3$，求 A，B 及 C 的值。

练习 3.5a

1. 设 $-3x+19=A(x+3)+B(2x-1)$，求 A 及 B 的值。
2. 若 $3x-2=A(x-1)+B(2x-1)$，求 A 及 B 的值。
3. 若 $2(x+2)(x-3)=2x^2+Ax+B$，求 $A+2B$ 的值。
4. 设 $3x^2-7x-2=A(x-1)(x-2)+B(x-2)(x-3)+C(x-3)(x-1)$，求 A，B 及 C 的值。
5. 若 $4x^2+15x+15=A(x+2)(x-3)+B(x+3)(x+1)+C(x+1)(x+2)$，求 A，B 及 C 的值。
6. 若 $3x^3-x^2-5x+9=A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D$，求 A，B，C 及 D 的值。
7. 若 $x+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$，求 A，B，C 及 D 的值。

部分分式

若一个真分式可化成几个最简单的真分式的和，则这些分成的真分式就叫做原分式的部分分式。

例如：分式 $\dfrac{x-17}{(x+3)(x-2)}$ 可化成 $\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{-3}{x-2}$，

因此 $\dfrac{4}{x+3}$ 及 $\dfrac{-3}{x-2}$ 都是原分式的部分分式。

而将真分式化成部分分式，则可使用求待定系数的方法（即数值代入法及系数比较法）。

分母为一次式的乘积

分母为一次式乘积的真分式，如 $\dfrac{Q}{(ax+b)(cx+d)}$（分子Q的次数低于分母的次数 $\dfrac{b}{a} \neq \dfrac{d}{c}$），可以分成各个分母为一次式的部分分式，其中分子为常数，如

$$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$$

例题 5

将 $\dfrac{8x-13}{(x-5)(x+4)}$ 分成部分分式。

解 设 $\dfrac{8x-13}{(x-5)(x+4)} = \dfrac{A}{x-5} + \dfrac{B}{x+4}$

可得 $8x-13 = A(x+4) + B(x-5)$

用 $x=5$ 代入，得 $8(5)-13 = A(5+4) + B(5-5)$

$$27 = 9A$$

$$A = 3$$

用 $x=-4$ 代入，得 $8(-4)-13 = A(-4+4) + B(-4-5)$

$$-45 = -9B$$

$$B = 5$$

$$\therefore \frac{8x-13}{(x-5)(x+4)} = \frac{3}{x-5} + \frac{5}{x+4}$$

例题 6

将 $\dfrac{2x+3}{4x^2-1}$ 分成部分分式。

解 设 $\dfrac{2x+3}{4x^2-1} = \dfrac{2x+3}{(2x+1)(2x-1)}$

$$= \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{2x-1}$$

可得 $2x+3 = A(2x-1) + B(2x+1)$

用 $x = -\dfrac{1}{2}$ 代入，得 $2\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3 = A\left[2\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 1\right] + B\left[2\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1\right]$

$$2 = -2A$$

$$A = -1$$

用 $x = \dfrac{1}{2}$ 代入，得 $2\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3 = A\left[2\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1\right] + B\left[2\left(\dfrac{1}{2}\right) + 1\right]$

$$4 = 2B$$

$$B = 2$$

$\therefore \dfrac{2x+3}{4x^2-1} = -\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{2}{2x-1}$ 。

例题 7

将 $\dfrac{2x^2+x-7}{x^2-1}$ 分成部分分式。

解 原分式是一个假分式，应先化成多项式与真分式的和：

$$\frac{2x^2+x-7}{x^2-1} = 2+\frac{x-5}{x^2-1}$$

设 $\dfrac{x-5}{x^2-1} = \dfrac{x-5}{(x+1)(x-1)}$

$$= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

可得 $x-5 = A(x-1)+B(x+1)$

用 $x=-1$ 代入，得 $-1-5 = A(-1-1)+B(-1+1)$

$$-6 = -2A$$

$$A = 3$$

用 $x=1$ 代入，得 $1-5 = A(1-1)+B(1+1)$

$$-4 = 2B$$

$$B = -2$$

$\therefore \dfrac{2x^2+x-7}{x^2-1} = 2+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}$。

分母为一次式的乘幂

分母为一次式乘幂的真分式，如 $\dfrac{Q}{(ax+b)^k}$

可以分成分母分别为 $(ax+b)^k$，$(ax+b)^{k-1}$，…，$(ax+b)^2$，$(ax+b)$ 的部分分式，其中分子为常数，如

$$\frac{Q}{(ax+b)^3} = \frac{A}{(ax+b)^3} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{ax+b}$$

例题 8

将 $\dfrac{4x-7}{(x-3)^2}$ 分成部分分式。

解 设 $\dfrac{4x-7}{(x-3)^2} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{(x-3)^2}$

可得 $4x-7 = A(x-3)+B$

$\qquad\qquad = Ax + (-3A+B)$

比较对应项系数，得 $\begin{cases} A = 4 \\ -3A + B = -7 \end{cases}$

解方程组，得 $A = 4$，$B = 5$

$$\therefore \frac{4x-7}{(x-3)^2} = \frac{4}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}$$

例题 9

将 $\dfrac{x^2+2x-5}{(x-1)^3}$ 分成部分分式。

解1 设 $\dfrac{x^2+2x-5}{(x-1)^3}=\dfrac{A}{(x-1)^3}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}$

可得 $x^2+2x-5=A+B(x-1)+C(x-1)^2$

$$=Cx^2+(B-2C)x+(A-B+C)$$

比较对应项系数，得 $\begin{cases} C=1 \\ B-2C=2 \\ A-B+C=-5 \end{cases}$

解方程组，得 $A=-2$，$B=4$，$C=1$。

$$\therefore \frac{x^2+2x-5}{(x-1)^3}=-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$$

解2 设 $x-1=y$，则 $x=y+1$。

可得 $\dfrac{x^2+2x-5}{(x-1)^3}=\dfrac{(y+1)^2+2(y+1)-5}{y^3}$

$$=\frac{y^2+4y-2}{y^3}$$

$$=\frac{1}{y}+\frac{4}{y^2}-\frac{2}{y^3}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^3}$$

思考题

试使用解2的方法将例题8的分式分成部分分式。

随堂练习 9

将下列各式分成部分分式：

1. $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$

2. $\dfrac{7x-1}{x^2-4}$

3. $\dfrac{10x-9}{6x^2+x-2}$

4. $\dfrac{3x-1}{(x-2)^2}$

例题 10

将 $\dfrac{3x^2+11x+4}{x^3+4x^2+4x}$ 分成部分分式。

解 因式分解原分式的分母，得 x^3+4x^2+4x

$$=x(x^2+4x+4)$$
$$=x(x+2)^2$$

设 $\dfrac{3x^2+11x+4}{x^3+4x^2+4x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$

可得 $3x^2+11x+4=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx$

用 $x=0$ 代入，得 $4=A(2)^2$

$$4A=4$$
$$A=1$$

用 $x=-2$ 代入，得

$$3(-2)^2+11(-2)+4=A(-2+2)^2+B(-2)(-2+2)+C(-2)$$
$$12-22+4=-2C$$
$$-6=-2C$$
$$C=3$$

（续）用 $x = 1$ 代入，得

$$3(1)^2 + 11(1) + 4 = A(1+2)^2 + B(1)(1+2) + C(1)$$
$$18 = 9A + 3B + C$$
$$18 = 9(1) + 3B + 3$$
$$3B = 6$$
$$B = 2$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2 + 11x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$$

练习 3.5b

将下列各式分成部分分式：

1. $\dfrac{x - 15}{x^2 - 9}$
2. $\dfrac{10x - 9}{(2x+1)(3x-2)}$
3. $\dfrac{24}{4x^2 - 9}$
4. $\dfrac{2x - 7}{(x-5)^2}$
5. $\dfrac{3x^2 + 7x - 6}{x^2 - 4}$
6. $\dfrac{2x^2 - 4x - 48}{x^2 - 64}$
7. $\dfrac{6x^2 + 22x + 18}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
8. $\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2(x-1)}$
9. $\dfrac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x}$
10. $\dfrac{x^3 - x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

总复习题 3

化简下列各式（1 至 13）：

1. $\dfrac{21x^2}{24xy} \times \dfrac{16y}{14x}$

2. $\dfrac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x^2-1)^2}$

3. $\dfrac{6x^2+7x-3}{3x^2+2x-1}$

4. $\dfrac{a-b}{a-c} \div \left(\dfrac{b-a}{b-c} \div \dfrac{c-a}{c-b}\right)$

5. $\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \div \dfrac{y}{x}$

6. $\left[\dfrac{x}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}\right]\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

7. $\dfrac{x-y}{x+y} \times \left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2 \div \left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^3$

8. $\dfrac{x-y}{2x+2y} \div \dfrac{x^2-y^2}{2x^2+2y^2}$

9. $\left(\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right) \div \dfrac{3}{x^2-5x+4}$

10. $\dfrac{\dfrac{x^2-2xy+y^2}{yz}}{\dfrac{x^2-y^2}{xz}}$

11. $\dfrac{\dfrac{3x+2}{x^2-1}}{\dfrac{3x^2+x-2}{9x^2-4}}$

12. $\dfrac{\dfrac{3(a+2)-2(a+1)}{a^2}}{\dfrac{a^3-16a}{a^4-8a^3+16a^2}}$

13. $\dfrac{x-6+\dfrac{12}{x+1}}{x-\dfrac{3}{x-2}}$

解下列各分式方程式（14 至 22）：

14. $\dfrac{3}{x^2-5x-6} = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{3}{x-6}$

15. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3}{x+5} = \dfrac{6}{x^2+4x-5}$

16. $\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1-x}{2-x} - 3$

17. $\dfrac{x+4}{x^2+2x} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2}{x} + 1$

18. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{3}{x^2-1} = 1$

19. $\dfrac{5x}{x^2+x-6} + \dfrac{2x-5}{x^2-x-12} = \dfrac{7x-10}{x^2-6x+8}$

20. $\dfrac{1}{x-10} - \dfrac{1}{x-11} = \dfrac{1}{x-13} - \dfrac{1}{x-14}$

21. $\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x-6}{x-7} = \dfrac{x-2}{x-3} + \dfrac{x-5}{x-6}$

22. $\dfrac{4x-5}{2x-3} + \dfrac{20x-29}{4x-5} = \dfrac{12x-17}{6x-10} + \dfrac{15x-23}{3x-4}$

23. 若 $16-11x = A(x-2)+B(x-1)$，求 A 及 B 的值。

24. 若 $2x^3-3x^2-26x-12 = A(x+2)^3+B(x+2)^2+C(x+2)+D$，求 A，B，C 及 D 的值。

25. 若 $\dfrac{3}{x(x+3)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+3}$，求 $a+b$ 的值。

将下列各式分成部分分式（26 至 30）：

26. $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

27. $\dfrac{3x+20}{12x^2-5x-2}$

28. $\dfrac{8x+2}{x^2-x^3}$

29. $\dfrac{x^2+x-4}{x^2-9}$

30. $\dfrac{48+4x-2x^2}{x^2-64}$

4. 无理式

学习目标：

- 理解无理式的定义并掌握根式的运算
- 掌握有理化分母的方法
- 掌握无理方程式的解法，并会验根
- 能求二次不尽根数的平方根

4.1 根式、无理式

在初中，我们学过，若一个数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，x 就叫做 a 的平方根，或二次方根。同理，若 x 的 n 次方（n 是正整数）等于 a，即 $x^n=a$，x 就叫做 a 的 n 次方根。例如，

$3^2=9$，$(-3)^2=9$，所以 3 及 -3 都是 9 的二次方根（或平方根）；

$4^3=64$，所以 4 是 64 的三次方根（或立方根）；

$5^4=625$，$(-5)^4=625$，所以 5 与 -5 都是 625 的四次方根；

$(-2)^5=-32$，所以 -2 是 -32 的五次方根。

由上述例子可以看出，

一、当 n 是奇数时，a 的奇次方根是唯一的，以 $\sqrt[n]{a}$ 来表示；

二、当 n 是偶数时，正数 a 的偶次方根有两个，且互为相反数，以 $\sqrt[n]{a}$ 及 $-\sqrt[n]{a}$ 表示，也可写成 $\pm\sqrt[n]{a}$，其中 $\sqrt[n]{a}$ 是正值。

注意

在实数范围内，若 a 是负数，则 $\sqrt{a}$ 无意义。

任何根号内含有未知数的式子，$\sqrt[n]{a}$，称为无理式，也叫做根式，其中 n 是根指数，而 a 是被开方数。

一般上，若 $\sqrt[n]{a}$ 有意义，则

一、当 n 是奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$。例如，

$\sqrt[3]{2^3}=2$，$\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$；

二、当 n 是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a\,(a\geq 0) \\ -a\,(a<0) \end{cases}$。例如，

$\sqrt[4]{(-2)^4}=-(-2)=2$。

若根式满足下列四个条件，即称为最简根式：
(1) 被开方式的幂指数与根指数没有公因式；
(2) 被开方式的每一个因式的幂指数都小于根指数；
(3) 分母不含根式；
(4) 只含一个根式。

例题 1

化简下列各式：

(a) $\sqrt[6]{16x^4}$　　(b) $\sqrt[9]{-27x^3y^6z^9}$

解 (a) $\sqrt[6]{16x^4} = \sqrt[6]{(4x^2)^2}$
$= \sqrt[3]{4x^2}$

(b) $\sqrt[9]{-27x^3y^6z^9} = z\sqrt[9]{-27x^3y^6}$
$= z\sqrt[9]{(-3xy^2)^3}$
$= z\sqrt[3]{-3xy^2}$
$= -z\sqrt[3]{3xy^2}$

例题 2

化简下列各式：

(a) $\left(3\sqrt[3]{x^4y^3}\right)^2$　　(b) $\sqrt[3]{\dfrac{24x^2y^3}{z^2}}$

(c) $\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt[3]{x^2yz}$　　(d) $\dfrac{\sqrt[3]{162x^2}}{\sqrt[3]{6x}}$

(e) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32x^{15}y^5}}$

解 (a) $\left(3\cdot\sqrt[3]{x^4y^3}\right)^2 = 9\sqrt[3]{x^8y^6}$

$= 9\sqrt[3]{x^6x^2y^6}$

$= 9x^2y^2\sqrt[3]{x^2}$

(b) $\sqrt[3]{\dfrac{24x^2y^3}{z^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{24x^2y^3z}{z^3}}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{2^3\cdot 3x^2y^3z}}{z}$

$= \dfrac{2y}{z}\sqrt[3]{3x^2z}$

(c) $\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt[3]{x^2yz} = \sqrt[3]{(xy^2)(x^2yz)}$

$= \sqrt[3]{(x^3y^3z)}$

$= xy\sqrt[3]{z}$

(d) $\dfrac{\sqrt[3]{162x^2}}{\sqrt[3]{6x}} = \sqrt[3]{\dfrac{162x^2}{6x}}$

$= \sqrt[3]{27x}$

$= 3\sqrt[3]{x}$

(e) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32x^{15}y^5}} = \sqrt[15]{2^5x^{15}y^5}$

$= x\sqrt[15]{2^5y^5}$

$= x\sqrt[3]{2y}$

随堂练习 1

化下列各式为最简根式：

1. $\sqrt[3]{32a^2b}\cdot\sqrt[3]{2a^2b^3}$

2. $\sqrt[6]{256x^2y^4z^8}$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{4xy^2}}$

练习 4.1

化下列各式为最简根式：

1. $\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2$

2. $\left(m\sqrt[4]{mn^2}\right)^3$

3. $\sqrt[4]{25x^2y^2}$

4. $\sqrt[3]{a^6b^5c^4}$

5. $\sqrt[3]{16x^4y^6z^8}$

6. $\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{7}}}$

7. $\sqrt[5]{a^4b^3c^2}\cdot\sqrt[5]{abc^2}\cdot\sqrt[5]{a^2bc}$

8. $\sqrt[3]{\dfrac{2}{27a^3b}}$

9. $\dfrac{2\sqrt[3]{4xy^2}}{3\sqrt[6]{16x^5y^3}}$

4.2 分数指数

对于任何正数 a，a 的正分数指数幂的意义是 $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$。而 a 的负分数指数幂的意义是 $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$，其中 $a>0$，m，$n\in Z^+$，且 $n\geq 2$。

$$(ab)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

$$(a^{\frac{1}{n}})^m=a^{\frac{m}{n}}$$

在进行根式的乘除运算时，我们可以将根指数化为分数指数，再根据幂的运算法则进行运算。

补充资料

在初中，我们已经学习了指数的运算法则。以下是一些常用的法则：

$a^m\times a^n=a^{m+n}$

$a^m\div a^n=a^{m-n}\ (a\neq 0)$

$(a^m)^n=a^{mn}$

$(ab)^n=a^nb^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

当指数是分数时，上述定律也成立。

例题 1

化简 $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$。

解

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}&=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}\\&=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\\&=a\end{aligned}$$

例题 2

化简 $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{32}$ 。

解 $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{32} = 2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}} \times 32^{\frac{1}{6}}$

$= 2^{\frac{1}{2}} \times (2^2)^{\frac{1}{3}} \times (2^5)^{\frac{1}{6}}$

$= 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}}$

$= 2^2$

$= 4$

例题 3

化简 $(a^{-\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{2}}) \times a^{\frac{17}{6}}$ 。

解 $(a^{-\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{2}}) \times a^{\frac{17}{6}} = (a^{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}) \times a^{\frac{17}{6}}$

$= a^{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{17}{6}}$

$= a^2$

例题 4

化简 $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{x\sqrt{y^3}}$ 。

解 $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{x\sqrt{y^3}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{4}}$

$= x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}$

$= xy^{1 + \frac{1}{4}}$

$= xy^{\frac{5}{4}}$

例题 5

化简 $\left(\sqrt{\dfrac{x\sqrt{y^5}}{y\sqrt{x^3}}}\right)^3$。

解 $\left(\sqrt{\dfrac{x\sqrt{y^5}}{y\sqrt{x^3}}}\right)^3=\left(\dfrac{xy^{\frac{5}{2}}}{yx^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$=(x^{1-\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}-1})^{\frac{3}{2}}$$

$$=(x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}$$

$$=x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{9}{4}}$$

随堂练习 2

化简下列各项：

1. $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[6]{243}$

2. $\sqrt{x\sqrt{x^3\sqrt{x^6}}}$

3. $\dfrac{x^{-3}\cdot\sqrt{y^{-3}}}{y^{-2}\cdot\sqrt{x^{-3}}}$

4. $\dfrac{\sqrt[5]{4}\times\sqrt{8}\times(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$

练习 4.2

化简下列各项：

1. $\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[6]{b^5}\div b$

2. $2\times\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}$

3. $\sqrt[6]{x^5y^4}\cdot\sqrt[4]{x^3y^2}$

4. $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot\sqrt[8]{a^5}$

5. $(\sqrt[3]{8x^2})^2\cdot(\sqrt[4]{4x})^3$

6. $\sqrt{a^{-1}\cdot\sqrt[4]{a^3}}$

7. $\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$

8. $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x}}$

9. $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{32}}\times\sqrt{2^3}\times\sqrt[3]{32}$

10. $\dfrac{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}$

11. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot a\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[4]{a^3}}$

12. $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}\times\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\sqrt{x}}}\right)^6$

13. $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[4]{c^3}\right)\div\left(\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt[6]{c}\right)$

14. $\sqrt[5]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[8]{a^7}}$

4.3 简易有理化分母

将分母中的无理式化成有理式，叫做分母的有理化。使分母有理化的因式称为有理化因式。在一些情况下，我们也可通过约分去除分母中的根式。

例题 1

将下列各式的分母有理化：

(a) $\dfrac{3}{2\sqrt{75}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{1-\sqrt{8}}{3-\sqrt{2}}$

解 (a) 先将分母化为最简根式，后将分子和分母同时乘上有理化因式。

$$\begin{aligned}\frac{3}{2\sqrt{75}} &= \frac{3}{2(5\sqrt{3})}\\ &= \frac{3}{10\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{30}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{10}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{6+2\sqrt{6}\times\sqrt{3}+3}{6-3}\\ &= \frac{9+2\sqrt{18}}{3}\\ &= \frac{9+6\sqrt{2}}{3}\\ &= 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(c) $$\frac{1-\sqrt{8}}{3-\sqrt{2}}=\frac{1-2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\times\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{2}-6\sqrt{2}-4}{9-2}$$

$$=\frac{-1-5\sqrt{2}}{7}$$

例题 2

将下列各式的分母有理化：

(a) $\frac{x^2}{\sqrt{9xy}}$ (b) $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}$ (c) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

解 (a) $$\frac{x^2}{\sqrt{9xy}}=\frac{x^2}{3\sqrt{xy}}\times\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}$$

$$=\frac{x^2\sqrt{xy}}{3xy}$$

$$=\frac{x\sqrt{xy}}{3y}$$

(b) $$\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}\times\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)\sqrt{x-y}}{x-y}$$

$$=\frac{(x+y)(x-y)\sqrt{x-y}}{x-y}$$

$$=(x+y)\sqrt{x-y}$$

或

$$\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}=\frac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{x-y}}$$

$$=\frac{(x+y)(\sqrt{x-y})^2}{\sqrt{x-y}}$$

$$=(x+y)\sqrt{x-y}$$

(c) $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\frac{a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{a-b}$$

$$=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$$

注意

当分式中的分子与分母同乘相同的式子，其值保持不变。例如，

$$\frac{x^2}{\sqrt{9xy}}=\frac{x^2}{3\sqrt{xy}}\times\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}$$

但是，一般情况下，若分母与分子一同取平方，其值则会改变。例如，

$$\frac{x^2}{\sqrt{9xy}}\neq\frac{(x^2)^2}{(\sqrt{9xy})^2}$$

随堂练习 3

化简下列各式：

1. $\frac{4}{6-2\sqrt{7}}$

2. $\frac{a-4}{\sqrt{a}-2}$

化简下列各式：

3. $2+\sqrt{2}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-2}$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{1-\sqrt{2}}$

5. $\frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}+\frac{a+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}$

练习 4.3

化简下列各式（1至8）：

1. $\dfrac{2+\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$

2. $\dfrac{3-\sqrt{12}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3. $\dfrac{x-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

4. $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$

5. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

6. $\dfrac{4\sqrt{7}-3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+2\sqrt{7}}$

7. $\dfrac{\sqrt{x-y}-5}{\sqrt{x-y}+5}$

8. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

化简下列各式（9 至 13）：

9. $\dfrac{3}{3-2\sqrt{3}}-\dfrac{3}{3+2\sqrt{3}}$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

11. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$

12. $\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$

13. $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$

14. 若 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，不得使用计算机，求 x^2+y^2 的值。

4.4 无理方程式

凡是根号内含有未知数的方程式，叫做无理方程式。例如，在方程式 $\sqrt{x^2+2}=x-1$ 及 $\sqrt{x+7}-\sqrt{x}=1$ 中，根号内含有未知数 x。因此，它们都是无理方程式。

在解无理方程式时，必须先将方程式化成有理方程式，然后求其解。在解无理方程式的过程中往往会出现增根，因此必须对所解得的根加以检验。

例题 1

解方程式 $\sqrt{x+1}=x-5$。

解

$$x+1=x^2-10x+25$$

$$x^2-11x+24=0$$

$$(x-3)(x-8)=0$$

$$x=3 \quad 或 \quad x=8$$

检验：将 $x=3$ 代入原方程式，左边 $=\sqrt{3+1}$

$= 2$

右边 $= 3-5$

$= -2$

左式≠右式，所以 $x=3$ 是增根。

（续） 将 $x=8$ 代入原方程式，左边 $=\sqrt{8+1}$

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \sqrt{8+1} \\
&= 3 \\
\text{右边} &= 8-5 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

左式 = 右式，所以 $x=8$ 是原方程式的根。
因此原方程式的根是 $x=8$ 。

例题 2

解方程式 $\sqrt{x+7}-\sqrt{x}=1$ 。

解

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+7} &= \sqrt{x}+1 \\
x+7 &= x+2\sqrt{x}+1 \\
2\sqrt{x} &= 6 \\
4x &= 36 \\
x &= 9
\end{aligned}
$$

检验: 将 $x=9$ 代入原方程式，左边

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \sqrt{9+7}-\sqrt{9} \\
&= \sqrt{16}-\sqrt{9} \\
&= 1 \\
&= \text{右边}
\end{aligned}
$$

因此，原方程式的根是 $x=9$ 。

例题 3

解方程式 $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}=3$ 。

解

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x-2} &= 3-\sqrt{x+3} \\
3x-2 &= 9-6\sqrt{x+3}+x+3 \\
6\sqrt{x+3} &= 14-2x \\
3\sqrt{x+3} &= 7-x \\
9(x+3) &= 49-14x+x^2 \\
x^2-23x+22 &= 0 \\
(x-1)(x-22) &= 0 \\
x &= 1 \quad \text{或} \quad x = 22
\end{aligned}$$

经检验，$x=1$ 是原方程式的根，$x=22$ 是增根。

因此，原方程式的根是 $x=1$ 。

例题 4

解方程式 $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}=1$ 。

解

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+3}+1 \\
x-2 &= x+3+2\sqrt{x+3}+1 \\
2\sqrt{x+3} &= -6 \\
\sqrt{x+3} &= -3
\end{aligned}$$

$\sqrt{x+3}$ 是一个平方根式，不能是负值。

因此，原方程式无解。

例题 5

解方程式 $\sqrt{x^2-4x+4}=x-2$ 。

解
$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$
$$0x=0$$

这式子对于任何实数 x 都成立。

但是，要使根式有意义，根号内的值必须大于或等于零。

$\therefore\ x-2\geq 0$

因此，原方程式的解是 $x\geq 2$ 。

例题 6

解方程式 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{5x-6}$ 。

解
$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}&=\sqrt{5x-6}\\ x+2+2\sqrt{x^2-4}+x-2&=5x-6\\ 2\sqrt{x^2-4}&=3x-6\\ 4x^2-16&=9x^2-36x+36\\ 5x^2-36x+52&=0\\ (5x-26)(x-2)&=0\end{aligned}$$
$$x=\frac{26}{5} \quad 或 \quad x=2$$

经检验，$x=\dfrac{26}{5}$ 及 $x=2$ 都是原方程式的根。

随堂练习 4

解下列无理方程式:

1. $\sqrt{4x-7}-7=0$
2. $\sqrt{2x+3}=x$
3. $\sqrt{x+7}=x+1$
4. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3x}=0$
5. $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$
6. $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+9}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

练习 4.4

解下列无理方程式:

1. $\sqrt{x^2-5}=x-1$
2. $\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}=0$
3. $\sqrt{x+1}=\sqrt{x-5}$
4. $\sqrt{x^2+7x}=x+2$
5. $\sqrt{x}+\sqrt{2}=\sqrt{x+2}$
6. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{1-3x}=1$
7. $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1=0$
8. $\sqrt{x+17}=\sqrt{x+5}+2$
9. $\sqrt{1-x}+\sqrt{x+12}=5$
10. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-14}=5$
11. $2\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-2}=3$
12. $\sqrt{4x+5}+2\sqrt{x-3}=17$
13. $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$
14. $\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1$
15. $\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{5-2x}$
16. $\sqrt{x+6}-\sqrt{2x-5}=2\sqrt{x-2}$

4.5 二次不尽根

若正数 a 的二次方根是无理数，则其正平方根 $\sqrt{a}$ 称为二次不尽根。例如，

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 &= 3+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+2 \\
&= 5+2\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

所以 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，即：$5+2\sqrt{6}$ 的二次不尽根是 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$。可以看出，式中的 5 是 3 与 2 的和，6 是 3 与 2 的积。

一般上，对于 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$，若能求到两个正数 x 与 y，

使得 $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$

那么，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a+2\sqrt{b}} &= \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} \\
&= \sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} \\
&= \sqrt{x}+\sqrt{y}
\end{aligned}
$$

例题 1

计算下列各式：

(a) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$　　(b) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$

(c) $\sqrt{3+\sqrt{8}}$　　(d) $\sqrt{7+\sqrt{13}}$

解 (a) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4+3+2\sqrt{4\times 3}}$
$=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}$
$=\sqrt{4}+\sqrt{3}$
$=2+\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{8}}$
$=\sqrt{4+2+2\sqrt{4\times 2}}$
$=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{2})^2}$
$=\sqrt{4}+\sqrt{2}$
$=2+\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$
$=\sqrt{2+1+2\sqrt{2\times 1}}$
$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{1})^2}$
$=\sqrt{2}+1$

(d) $\sqrt{7+\sqrt{13}}=\sqrt{\dfrac{14+2\sqrt{13}}{2}}$
$=\sqrt{\dfrac{13+1+2\sqrt{13\times 1}}{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{13}+1)^2}}{\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{26}+\sqrt{2}}{2}$

一般上，对于$\sqrt{a-2\sqrt{b}}$，若能求到两个正数x与y（$x>y$），

使得$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$

那么，
$$\begin{aligned}\sqrt{a-2\sqrt{b}} &= \sqrt{x+y-2\sqrt{xy}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} \\ &= \sqrt{x}-\sqrt{y}\end{aligned}$$

例题 2

计算下列各式：

(a) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ (b) $\sqrt{6-\sqrt{32}}$

(c) $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ (d) $\sqrt{33-18\sqrt{2}}$

解 (a)
$$\begin{aligned}\sqrt{7-2\sqrt{10}} &= \sqrt{5+2-2\sqrt{5\times 2}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{5}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sqrt{6-\sqrt{32}} &= \sqrt{6-2\sqrt{8}} \\ &= \sqrt{4+2-2\sqrt{4\times 2}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{4}-\sqrt{2} \\ &= 2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

注意

任何二次根式都必须是正值。因此，在例题2中x必须大于y，否则$\sqrt{x}-\sqrt{y}$将成为负值。

(c) $\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{7}}{2}}$

$= \sqrt{\dfrac{7+1-2\sqrt{7\times 1}}{\sqrt{2}}}$

$= \dfrac{\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$

(d) $\sqrt{33-18\sqrt{2}} = \sqrt{33-2\sqrt{2\times 9^2}}$

$= \sqrt{33-2\sqrt{162}}$

$= \sqrt{27+6-2\sqrt{27\times 6}}$

$= \sqrt{(\sqrt{27}-\sqrt{6})^2}$

$= \sqrt{27}-\sqrt{6}$

$= 3\sqrt{3}-\sqrt{6}$

随堂练习 5

计算下列各式:

1. $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$
2. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$
3. $\sqrt{13-2\sqrt{22}}$
4. $\sqrt{4+\sqrt{15}}$
5. $\sqrt{10+\sqrt{91}}$
6. $\sqrt{11-\sqrt{96}}$
7. $\sqrt{6-\sqrt{35}}$
8. $\sqrt{26-4\sqrt{42}}$

练习 4.5

计算下列各式：

1. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$
2. $\sqrt{18+2\sqrt{56}}$
3. $\sqrt{32+2\sqrt{175}}$
4. $\sqrt{17-2\sqrt{52}}$
5. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
6. $\sqrt{5+\sqrt{21}}$
7. $\sqrt{9+\sqrt{56}}$
8. $\sqrt{8-\sqrt{15}}$
9. $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$
10. $\sqrt{37+12\sqrt{7}}$
11. $\sqrt{52+16\sqrt{3}}$
12. $\sqrt{33-18\sqrt{2}}$
13. $\sqrt{15+4\sqrt{14}}$
14. $\sqrt{61+24\sqrt{5}}$
15. $\sqrt{91-40\sqrt{3}}$
16. $\sqrt{66-24\sqrt{6}}$
17. $\sqrt{55-8\sqrt{39}}$
18. $\sqrt{50-4\sqrt{46}}$
19. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
20. $\sqrt{6+\sqrt{11}}+\sqrt{6-\sqrt{11}}$
21. $\sqrt{7+\sqrt{33}}+\sqrt{7-\sqrt{33}}$
22. $\sqrt{\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}}+\sqrt{\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}}$

总复习题4

化下列根式为最简根式（1 至 6）：

1. $\sqrt[5]{32^3}$

2. $\sqrt[12]{x^8y^4}$

3. $x\cdot\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt[6]{x^5}$

4. $\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}$

5. $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

6. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27x^3y^6z^2}}$

化简下列各式（7 至 17）：

7. $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

8. $2\sqrt{x}\div\sqrt[4]{x}$

9. $\sqrt{\dfrac{1}{8}}\times\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

10. $\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{3x}\cdot\sqrt[4]{4x}$

11. $\dfrac{a^2\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}$

12. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{b^2}}\times\sqrt{\dfrac{b}{a^3}}$

13. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

14. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

15. $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}+1}$

16. $\dfrac{3}{3-2\sqrt{3}}-\dfrac{3}{3+2\sqrt{3}}$

17. $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

解下列无理方程式（18 至 30）：

18. $x-7-\sqrt{x-5}=0$

19. $\sqrt{x-2}+4=x$

20. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3$

21. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7$

22. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=1$

23. $\sqrt{3x+1}-1=\sqrt{2x-1}$

24. $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$

25. $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}=-2$

26. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=2$

27. $\sqrt{\frac{5}{7}x+4}-\sqrt{x-3}=1$

28. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x+4}$

29. $\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}=2$

30. $\sqrt{x+5}+\dfrac{3}{\sqrt{x+5}}=\sqrt{3x+4}$

计算下列各式（31 至 39）：

31. $\sqrt{20+2\sqrt{96}}$

32. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

33. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

34. $\sqrt{52-30\sqrt{3}}$

35. $\sqrt{\sqrt{27}+\sqrt{24}}$

36. $\sqrt{9-4\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

37. $\sqrt{30+12\sqrt{6}}+\sqrt{30-12\sqrt{6}}$

38. $\sqrt{\sqrt{68-48\sqrt{2}}}$

39. $\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}}$

40. 试将 $\dfrac{33-19\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ 表达成 $m+n\sqrt{3}$ 的形式，其中 m 与 n 都是有理数。

据此，不使用计算机，求 $\sqrt{\dfrac{33-19\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}$ 的值。

5. 角及其单位

学习目标：

- 了解弧度制与角度制的区别，并掌握弧度与角度的互化
- 掌握在弧度单位下的弧长及扇形面积的计算

5.1 角的定义及单位

角的定义

任何一个角都可看成是由一条线段绕着它的一个端点旋转而成的。如图5-1所示，若线段OP绕着其中一个端点O，不论是顺时针或逆时针，都可形成一个角。旋转开始时的线段OP叫做该角的始边，旋转终止时的线段OQ叫做该角的终边，端点O叫做该角的顶点。而逆时针方向旋转而成的角是正角，顺时针方向旋转而成的角则是负角。

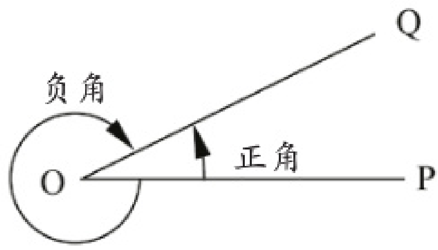


图5-1

根据角的定义，一个角的大小并不局限于一个周角之内，同样的始边与终边可形成无数个不同的角，如图5-2所示。

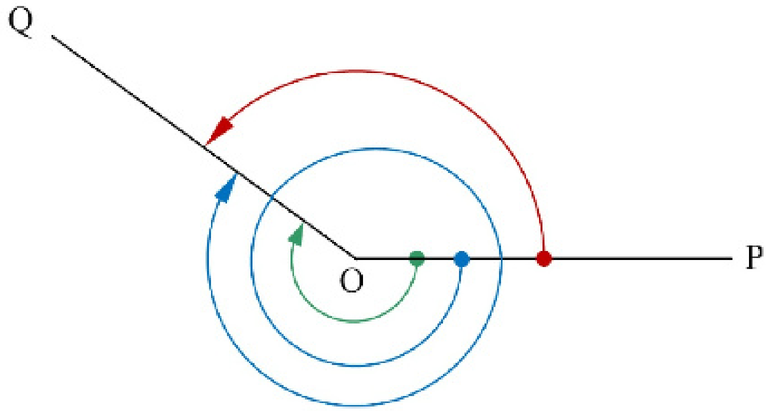


图5-2

思考题

试判别图5-2中，哪些是正角？哪些是负角？

角的单位

一般上，角的量度单位采用下列两种：

一、角度制

- 将一个圆周分成360 等分，每一等分所对的圆心角为1度，记作 1° 。
- 将一度的角所对的弧分成60 等分，每一等分所对的圆心角为1 分，记作 $1'$。

- 将一分的角所对的弧分成60等分，每一等分所对的圆心角为1秒，记作1″。

$$\therefore \quad 一周角 = 360^{\circ}$$
$$1^{\circ} = 60'$$
$$1' = 60''$$

随堂练习 1

1. 35度26分47秒可记作 ________ 。
2. 465′可记作 ______° ______′。
3. 582″可记作 ______′ ______″。

二、弧度制

与半径等长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角。在图5-3中，圆心角AOB所对的弧AB与半径等长，所以∠AOB＝1弧度；弧BC的长为半径的两倍，所以∠BOC＝2弧度。

由于圆周长为$2\pi r$，所以一周角＝$\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$弧度。

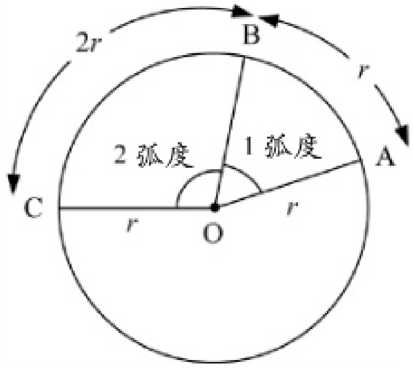


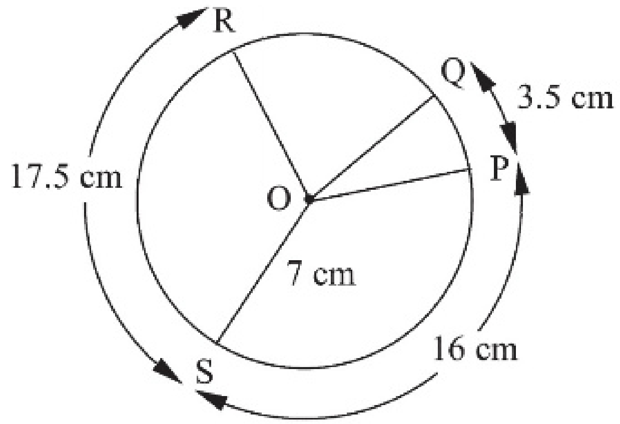
图5-3

随堂练习 2

试从下图中找出下列各角的弧度：

(a) ∠POQ　　(b) ∠ROS

(c) ∠POS　　(d) ∠QOR



练习 5.1

1. 17度2分54秒可记作____________。
2. $527'$可记作______$^{\circ}$______$'$。
3. $845''$可记作______$'$______$''$。
4. $1020''$可记作______$'$______$''$。
5. $244^{\circ}=$______$'=$____________$''$
6. 分别求出平角与直角的弧度。
7. 一弧长与半径的比是3:1，求此弧所对圆心角的弧度。
8. 一圆的直径与圆上一弧的长度之比是2:5，求此弧所对圆心角的弧度。

5.2 弧度与角度

一个角，用“弧度”与“度”为单位来度量，所得的量度是不同的（除零角外）。在角度制中，一个周角等于360°。在弧度制中，一周角则等于2π弧度。由此可得，$360^{\circ}=2\pi$弧度

$$1^{\circ}=\frac{\pi}{180}\text{弧度} \qquad \text{或} \qquad 1\text{弧度}=\frac{180^{\circ}}{\pi}$$

下表列出一些特别角的度数与弧度数的对应值：

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

例题 1

将 72° 化为弧度（答案以 π 表示）。

解 $72^{\circ} = 72^{\circ} \times \dfrac{\pi}{180^{\circ}}$

$= \dfrac{2\pi}{5}$ 弧度

例题 2

将 $\dfrac{3\pi}{5}$ 化为角度。

解 $\dfrac{3\pi}{5}$ 弧度 $= \dfrac{3\pi}{5} \times \dfrac{180^{\circ}}{\pi}$

$= 108^{\circ}$

例题 3

将 $48^{\circ}\,51'$ 化为弧度（答案准确至四位小数）。

解 $48^{\circ}\,51' = 48\dfrac{51}{60} \times \dfrac{\pi}{180}$ 弧度

$= 0.8526$ 弧度

注意

用弧度表示角时，“弧度”二字可省略不写。但若以度数来表示角时，其单位则不可省略。

例题 4

将 1.53 弧度化为角度。

解 1.53 弧度 $= 1.53 \times \dfrac{180^{\circ}}{\pi}$

$= 87^{\circ}\,40'$

随堂练习 3

1. $-300° =$ ________ 弧度（以 π 表示）

2. $75° 45' =$ ______弧度

3. 2.5弧度 = ______° ______′

4. $\frac{7\pi}{2}$ 弧度 = ______°

练习 5.2

1. 将下列各弧度化为角度:

   (a) $\frac{11\pi}{24}$　(b) $\frac{4\pi}{3}$　(c) $-\frac{7\pi}{6}$　(d) $-\frac{5\pi}{9}$

2. 将下列各弧度化为角度:

   (a) 1.33　(b) 2.51　(c) -0.89　(d) -1.11

3. 将下列各角度化为弧度（答案准确至四位小数）:

   (a) $32° 13'$　(b) $-93° 11'$　(c) $43.75°$　(d) $-121.83°$

4. 将下列各角度化为弧度（答案以 π 表示）:

   (a) $240°$　(b) $315°$　(c) $-222°$　(d) $-202\frac{1}{2}°$

5. 一齿轮有 40 个齿，若它旋转了(a) 30 个齿，(b) 70 个齿，问相当于多大的角？分别以弧度与角度表示之。

6. 一太空船绕地球一周需时 75 分钟，求它的角速度（弧度/小时）。

5.3 弧长与扇形面积

在初中，我们学过，半径为r，圆心角为θ的扇形，其弧长l及面积S的计算公式分别是：

弧长 $l = \dfrac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$ （θ为角度）

面积 $S = \dfrac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$ （θ为角度）

已知$360^\circ = 2\pi$，上式中的θ若以弧度表示，可得下列弧长公式，

$$l = \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r$$

$$\boxed{l = r\theta}$$ （θ为弧度）

及下列面积公式：

$$S = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} r^2\theta}$$ （θ为弧度）

同时， $$S = \frac{1}{2} \times r \times r\theta$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} r l}$$

补充资料

在初中，我们学过，扇形实际上就是圆的一部分。

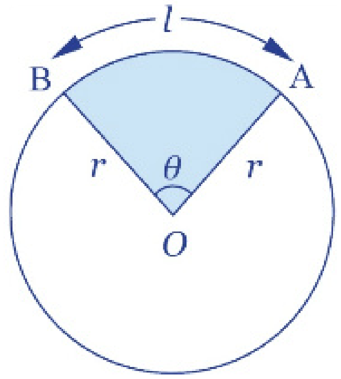


图5−4

因此，只要知道扇形的圆心角，便可得知该扇形在圆中所占的比例，从而找出扇形的弧长及其面积。

例题 1

一扇形的半径为 8 cm，圆心角为 1.8 弧度。求扇形的弧长及面积。

解 扇形弧长

$$\begin{aligned} l &= r\theta \\ &= 8 \times 1.8 \\ &= 14.4\text{ cm} \end{aligned}$$

扇形面积

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} r^2\theta \\ &= \frac{1}{2} \times 8^2 \times 1.8 \\ &= 57.6\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

例题 2

已知扇形面积为 5π cm²，半径为 6 cm 。求此扇形的圆心角及周长。

解 已知 $S = 5\pi$ 及 $r = 6$

应用面积公式

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} r^2\theta \\ 5\pi &= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta \\ \theta &= \frac{5\pi}{18} \end{aligned}$$

或 $\theta = \dfrac{5 \times 180^\circ}{18} = 50^\circ$

扇形弧长

$$\begin{aligned} l &= r\theta \\ &= 6 \times \frac{5\pi}{18} \\ &= \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

∴扇形周长为

$$\begin{aligned} l + 2r &= \frac{5\pi}{3} + 2 \times 6 \\ &= 17.24\text{ cm} \end{aligned}$$

例题 3

求半径为 40 cm，圆心角为 48°42′ 的扇形的弧长及面积。

解

$$48°42' = \left(48\frac{42}{60}\right) \times \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{487\pi}{1800}$$

扇形弧长 $l = r\theta$

$$= 40 \times \frac{487\pi}{1800}$$

$$= 34.00 \text{ cm}$$

扇形面积 $S = \frac{1}{2} r^2\theta$

$$= \frac{1}{2} \times 40^2 \times \frac{487\pi}{1800}$$

$$= 679.98 \text{ cm}^2$$

例题 4

已知一扇形的面积是16 cm²。若该扇形的弧长与半径长之比为2:1，求扇形的周长。

解

已知 $l:r=2:1$，得 $l=2r$。

由面积公式 $S = \frac{1}{2} r l$

$$16 = \frac{1}{2} r \times 2r$$

$$r^2 = 16$$

$$r = 4$$

$\therefore$ 扇形周长 $= l + 2r$

$$= 4r$$

$$= 16 \text{ cm}$$

例题 5

已知扇形面积为 $18\ \text{cm}^2$，周长为 $17\ \text{cm}$，求此扇形弧长、半径及圆心角。

解 设扇形的弧长为 l，半径为 r，圆心角为 θ。

依题意，得 $\begin{cases} \frac{1}{2}rl = 18 & \text{------------}(1) \\ l + 2r = 17 & \text{------------}(2) \end{cases}$

由 (2) 得 $l = 17 - 2r$

代入 (1) 得 $\frac{1}{2}r(17-2r) = 18$

$$2r^2 - 17r + 36 = 0$$

$$(2r-9)(r-4) = 0$$

$$2r - 9 = 0 \quad \text{或} \quad r - 4 = 0$$

$$r = 4.5 \qquad\qquad r = 4$$

当 $r = 4.5$ 时，$l = 17 - 2 \times 4.5 = 8$

$\theta = \frac{8}{4.5} = 1.7778$（答案准确至四位小数）

当 $r = 4$ 时，$l = 17 - 2 \times 4 = 9$

$\theta = \frac{9}{4} = 2.25$

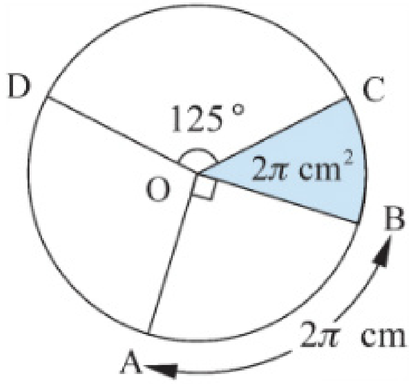
$\therefore$ 当扇形半径为 $4.5\ \text{cm}$ 时，弧长为 $8\ \text{cm}$，圆心角为 1.7778 弧度；
当扇形半径为 $4\ \text{cm}$ 时，弧长为 $9\ \text{cm}$，圆心角为 2.25 弧度。

随堂练习 4

1. 一圆的半径为 4m，求圆心角为 80° 所对的弧长。
2. 已知一扇形的圆心角为 $\frac{5\pi}{9}$，弧长为 5cm。求该扇形所在圆的半径。
3. 已知一扇形的圆心角为 2.5 弧度，面积为 5m^2。求此扇形所在的圆的面积。

练习 5.3

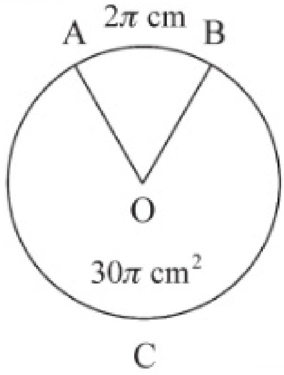
1. 右图所示的圆中，O是圆心，$\angle$AOB是直角，$\angle\text{COD}=125^\circ$，弧 AB = 2π cm及扇形 BOC 的面积为 $2\pi\text{cm}^2$。求下列各项：（答案以 π 表示）
   (a) 圆的半径；
   (b) $\angle$BOC；
   (c) 扇形 AOD 的面积；
   (d) 弧 CD。



（第1题用图）

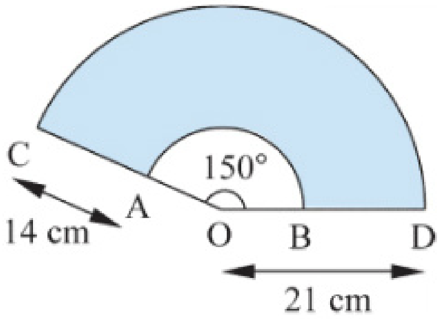
2. 一扇形的半径为3 cm，圆心角为 45°，求其弧长与面积。
3. 已知一扇形的半径与弧长都是 4 cm，求扇形的面积。
4. 一扇形的半径为 4 cm 及弧长为 $\frac{2\pi}{3}$ cm，求此扇形的面积及圆心角。（答案以 π 表示）
5. 已知一扇形的弧长是其半径的四倍且扇形的面积是 8m^2，求此扇形的圆心角及半径。

6. 右图的圆是由一个优扇形 OACB 及一个劣扇形 OAB 所组成。若优扇形 OACB 的面积是 $30\pi\ \text{cm}^2$，劣弧 AB 长 $2\pi\ \text{cm}$，求圆的半径及两个扇形的圆心角。



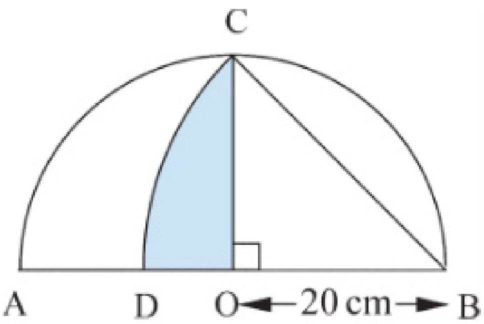
（第6题用图）

7. 右图所示是两个圆心同为 O 的扇形 OAB 及 OCD。已知 $\angle COD = 150°$，OD = 21 cm，AC = 14 cm，求阴影部分的面积及周长。



（第7题用图）

8. 如右图所示，OACB 是一个半圆，其半径 OC 与直径 AB 互相垂直。OBCD 是一个以B为圆心的扇形，其弧 CD 交 AB 于 D。若半圆的半径为 20 cm，求阴影部分的面积及周长。



（第8题用图）

总复习题 5

1. 将下列各角度化为弧度（以 π 表示）：

   (a) 75°　(b) 225°　(c) 157.5°

   (d) 124.2°　(e) $67\frac{1}{2}^\circ$　(f) $105\frac{3}{7}^\circ$

2. 将下列各角度化为弧度:

   (a) $22^\circ 30'$　(b) $84^\circ 15'$　(c) $186^\circ 35'$

   (d) $32^\circ 13'$　(e) $42^\circ 33'$　(f) $127^\circ 27'$

3. 将下列各弧度化为角度:

   (a) $\frac{\pi}{5}$　(b) $\frac{4\pi}{9}$　(c) $\frac{7\pi}{6}$　(d) $\frac{11\pi}{4}$

4. 将下列各弧度化为角度（答案准确至分）：

   (a) 1.5　(b) 2.25　(c) 0.89　(d) 2.51

5. 已知 1° 的圆心角所对的弧的长为 1 m，求这个圆的半径。

6. 已知扇形的半径为 4 cm，弧长为 18 cm，求扇形的圆心角及面积。

7. 已知扇形面积为 $12\pi\,\text{cm}^2$，圆心角为 $\frac{5\pi}{18}$ 弧度，求其半径及弧长。

8. 已知扇形的面积为 $9\,\text{cm}^2$，周长为 12 cm，求此扇形的弧长，半径及圆心角。

9. 如右图所示，A 及 B 是两个以 O 为圆心的扇形，扇形A的弧长为5 m，半径为 4 m，扇形 A 与 B 的半径之比为 2 : 1 。求

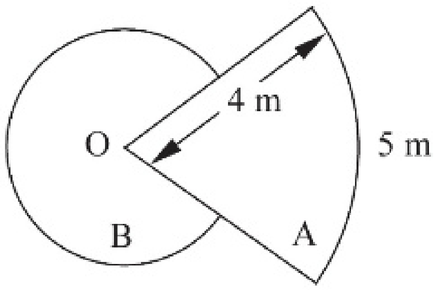
   (a) A的圆心角；

   (b) A的面积；

   (c) B的圆心角；

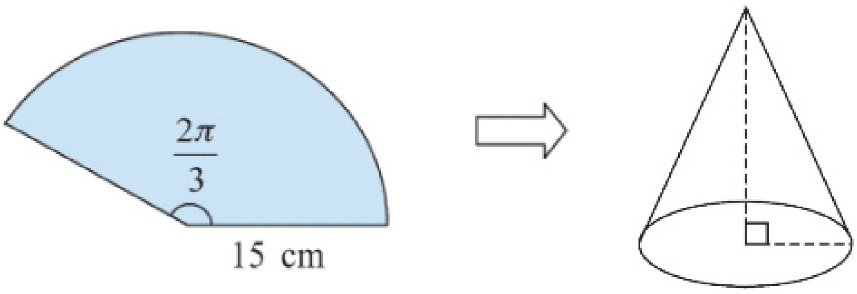
   (d) B的弧长；

   (e) B的面积。



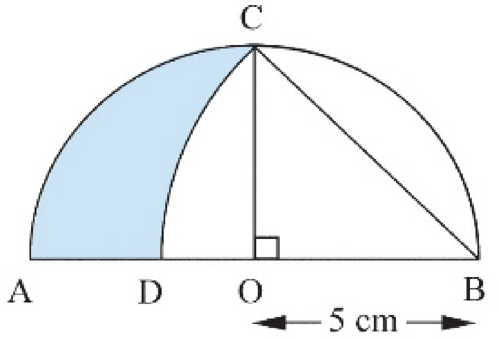
（第9题用图）

10. 如下图所示，将一个半径为 15 cm，圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度的扇形，折成一个直圆锥，求圆锥的底圆半径及高。



（第10题用图）

11. 在半圆中，半径 OC 与直径 AB 互相垂直。以 B 为圆心，BC 为半径，作弧交AB 于 D。若半圆 OACB 的半径为 5 cm，求阴影部分的面积。



（第11题用图）

6. 锐角三角函数

学习目标：

- 理解锐角三角函数的定义
- 掌握特别角的三角函数值
- 掌握锐角三角函数的余角关系及相关计算
- 准确使用三角函数来解直角三角形及相关测量问题

6.1 锐角三角函数的定义

在初中，我们曾利用相似三角形的特质引进了正弦、余弦及正切函数来解决实际的测量问题。在本章中，我们将进一步探讨三角函数的问题。我们先复习正弦、余弦及正切函数的定义：

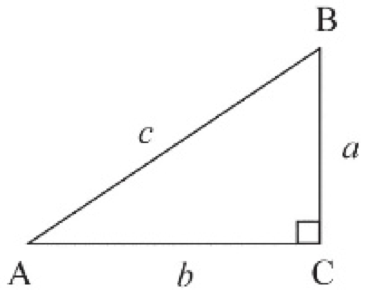


图6-1

图6-1所示的 ΔABC 是一个直角三角形，其中C为直角，AB 为斜边，BC 及 AC 分别是角A的对边及邻边。设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则我们可以得出角A的正弦、余弦及正切函数的定义：

$$\angle A\text{ 的正弦}=\sin A=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$$

$$\angle A\text{ 的余弦}=\cos A=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}$$

$$\angle A\text{ 的正切}=\tan A=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\frac{a}{b}$$

除了以上三个三角函数，我们尚可从图6-1得出另外三个三角函数：

$$\angle A\text{ 的余割}=\operatorname{cosec} A=\frac{\text{斜边}}{\text{对边}}=\frac{c}{a}$$

$$\angle A\text{ 的正割}=\sec A=\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}=\frac{c}{b}$$

$$\angle A\text{ 的余切}=\cot A=\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}=\frac{b}{a}$$

根据以上六个三角函数的定义，我们可以发现它们之间存有以下关系：

一、倒数关系

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

二、商数关系

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

作一直角三角形ABC，角A的对边的长度为3 cm，邻边的长度为8 cm。

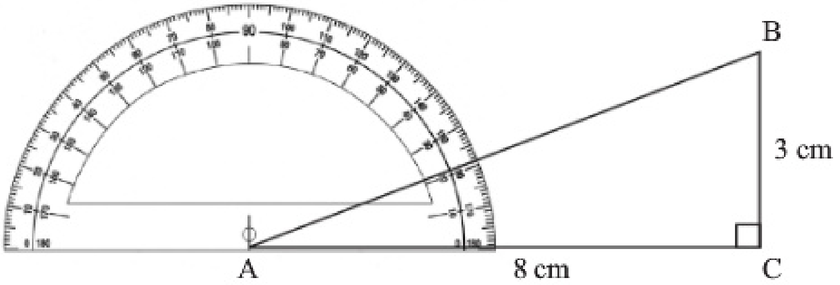


图6-2

若使用量角器测量，可以测得 $A \simeq 21^\circ$。我们也可以根据三角函数的定义 $\tan A = \frac{3}{8}$，求得 $A \simeq 21^\circ$。

例题 1

一直角三角形ABC，已知 $C=90^\circ$，$a=1$，$b=2$，求 B 的所有三角函数值。

解 根据毕氏定理，$c^2=a^2+b^2$

$$=1^2+2^2$$

$$=5$$

$$\therefore\ c=\sqrt{5}$$

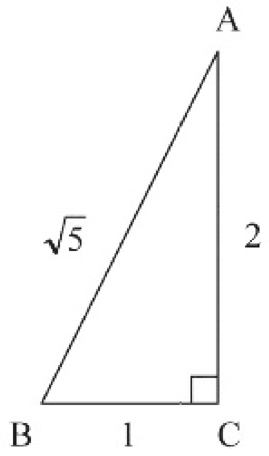


图6-3

B的六个三角函数值为：

$$\sin B=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \operatorname{cosec} B=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos B=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec B=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$$

$$\tan B=\frac{2}{1}=2 \qquad \cot B=\frac{1}{2}$$

例题 2

已知 $\cot\theta=\dfrac{15}{8}$ 且 θ 为锐角，求 $\sin\theta$ 及 $\sec\theta$ 的值。

解 作一直角三角形ABC。

由毕氏定理，$AC^2=AB^2+BC^2$

$$=8^2+15^2$$

$$=64+225$$

$$=289$$

$$\therefore\ AC=17$$

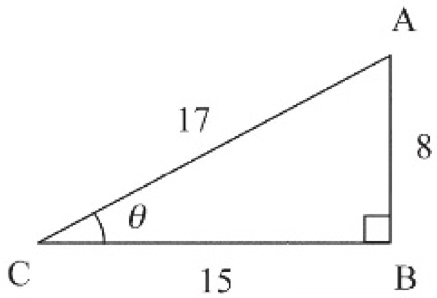


图6-4

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{8}{17},\ \sec\theta=\frac{17}{15}$$

例题 3

若 $\sec x = 2$ 且 x 为锐角，求 $3\sin^2 x - 4\cos^2 x$ 的值。

解 作一直角三角形 ABC。

由毕氏定理，
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$
$$\therefore\ BC = \sqrt{3}$$

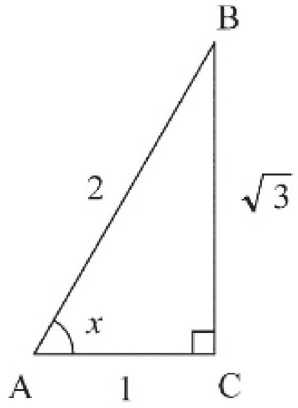


图6-5

$$\therefore\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\quad,\ \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 3\sin^2 x - 4\cos^2 x &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4} - \frac{4}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

随堂练习 1

1. 设 $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$，且$\theta$为锐角，求$\theta$的其它三角函数值。
2. 若 $\sin x = \dfrac{2}{3}$，且 x 为锐角，求 $4\operatorname{cosec}^2 x - 3\cos^2 x$ 的值。

练习 6.1

1. 若 θ 是一个锐角，求 θ 的值:

   (a) $\cos\theta = 0.4$　　　(b) $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{12}{7}$

2. 在直角三角形 ABC 中，A 为直角，B = 65°，BC = 10 cm。求 AB 及 AC 的长度。

3. 在直角三角形 ABC 中，已知 C 为直角，AC = 6 cm，BC = 8 cm，求 A 的所有三角函数值。
4. 已知 $\tan\theta = 2.4$，且 θ 为锐角，求 $\operatorname{cosec}\theta$ 及 $\cos\theta$ 的值。
5. 已知 $\sec\theta = \dfrac{13}{5}$，$0^\circ < \theta < 90^\circ$，求 $\operatorname{cosec}\theta$ 及 $\cot\theta$ 的值。
6. 若 $\cot\theta = 1\dfrac{1}{3}$，且 θ 为锐角，求 $\sin\theta$ 及 $\sec\theta$ 的值。
7. 已知 $\sin x = \dfrac{1}{2}$，且 $0^\circ < x < 90^\circ$，求 $\sec x + \cot x$ 的值。
8. 若 $\tan\alpha = 3$，α 为锐角，求 $\sin^2\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha$ 的值。
9. 已知 $\sin\alpha = \dfrac{m^2-1}{m^2+1}$，$m > 1$，且 α 为锐角。试以 m 表示 $\cos\alpha$ 与 $\tan\alpha$。
10. 设 $\sin\theta = a$ 及 $\sec\theta = b$，证明 $\dfrac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}} = \tan\theta$。

6.2 特别角的三角函数值

30° 及 60° 的三角函数值

在图6-6中，ΔABC 是一个边长为2的等边三角形，D 是 BC 的中点且 $AD \perp BC$。已知 $\angle ACD = 60^\circ$，$\angle CAD = 30^\circ$，$BD = CD = 1$。由毕氏定理可得 $AD = \sqrt{3}$。观察 ΔCAD，我们可以求得下列三角函数值：

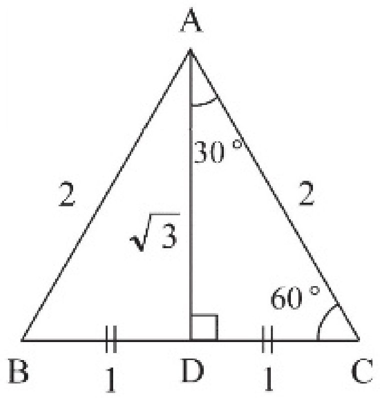


图6-6

$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

45° 的三角函数值

在图6-7中，ΔABC 是一个等腰直角三角形，直角边长为1单位。因此，$A = C = 45^\circ$。由毕氏定理，$AC = \sqrt{2}$。观察 ΔABC，我们可以求得下列有关 45° 的三角函数值：

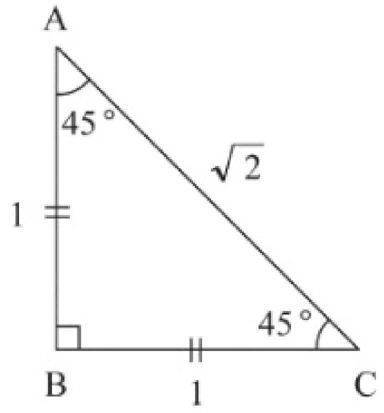


图6-7

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

下表列出特别角 30°，45° 及 60° 的正弦、余弦及正切的函数值：

角 / 函数值 / 函数	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

例题 1

不使用计算机，求 $\cot 60^\circ + \cos^2 45^\circ - \sin 30^\circ$ 的值。

解 $\cot 60^\circ + \cos^2 45^\circ - \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

注意

$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$（或其他三角函数）是该三角函数的平方，也就是 $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$ 或 $\cos^2\theta = (\cos\theta)^2$。而 $\sin\theta^2$，$\cos\theta^2$ 则是角 θ 的平方的三角函数。因此，$\sin^2\theta \neq \sin\theta^2$，$\cos^2\theta \neq \cos\theta^2$。

例题 2

已知 $2\sin\theta = \sqrt{3}$，且 θ 为锐角，求 θ 的值。

解 原式可以写成 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

$\because$ θ 为锐角

$\therefore$ $\theta = 60^\circ$

例题 3

已知 $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$，且 θ 为锐角，求 θ 的值。

解 原式可以写成 $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

$\because$ θ 为锐角

$\therefore$ $\theta = 30^\circ$

例题 4

已知 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=0$，且 θ 为锐角，求 θ 的值。

解 将原式改写成 $\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$。

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{3}$$

$$\tan\theta=\sqrt{3}$$

$\because$ θ 为锐角

$\therefore$ $\theta=60^\circ$

随堂练习 2

1. 不使用计算机，求 $\tan^2 30^\circ-\dfrac{1}{\sin^2 45^\circ}+4\cos^2 30^\circ$ 的值。
2. 已知 $\cot\theta=\sqrt{3}$，且 θ 是锐角，求 θ 的值。

练习 6.2

不使用计算机，求下列各式的值（1至7）：

1. $\sin^2 60^\circ+\cos^2 60^\circ$
2. $\sin^2 30^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 60^\circ$
3. $\tan^2 30^\circ+\tan^2 45^\circ+\cot^2 30^\circ$
4. $\sin 45^\circ\cos 45^\circ+\operatorname{cosec} 45^\circ\sec 45^\circ$
5. $\sin 30^\circ\cos 60^\circ+\cos 30^\circ\sin 60^\circ$
6. $\sin^2 60^\circ+\cos 60^\circ+\tan 45^\circ-\sec^2 30^\circ$
7. $\dfrac{\operatorname{cosec} 60^\circ-\cot 45^\circ}{\sec 30^\circ+\cot 45^\circ}$

不使用计算机，计算下列各式中锐角 x 的值（8至16）：

8. $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

9. $\sqrt{3}\tan x=1$

10. $\sqrt{3}\operatorname{cosec} x=2$

11. $\sqrt{2}-\operatorname{cosec} x=0$

12. $\sqrt{3}-\cot x=0$

13. $2\sec x-\sqrt{8}=0$

14. $\sin x=\cos x$

15. $\sqrt{3}\cot x-2\cos x=0$

16. $9\sin\theta-3\sqrt{3}\cos\theta=0$

6.3 锐角三角函数的余角关系

除了6.1所述的倒数关系及商数关系，锐角三角函数之间还有一种关系，即余角关系。

图6-8中的 ΔABC 为一直角三角形，C 为直角。令 $A=\theta$

$\because$ 三角形内角和为 $180°$

$\therefore$ $B=180°-90°-\theta$
$\quad=90°-\theta$

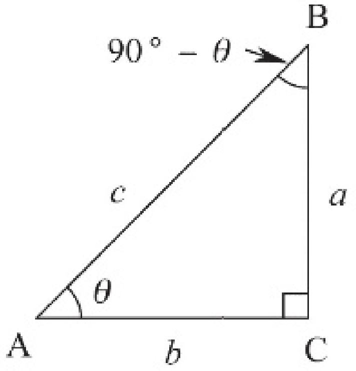


图6-8

由图6-8，我们可以得出以下关系：

$$\sin\theta=\frac{a}{c} \qquad \sin(90°-\theta)=\frac{b}{c}$$

$$\cos\theta=\frac{b}{c} \qquad \cos(90°-\theta)=\frac{a}{c}$$

$$\tan\theta=\frac{a}{b} \qquad \tan(90°-\theta)=\frac{b}{a}$$

$$\cot\theta=\frac{b}{a} \qquad \cot(90°-\theta)=\frac{a}{b}$$

$$\sec\theta=\frac{c}{b} \qquad \sec(90°-\theta)=\frac{c}{a}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{c}{a} \qquad \operatorname{cosec}(90°-\theta)=\frac{c}{b}$$

从以上关系式，我们可得下列关系：

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta \qquad \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta \qquad \cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$

$\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta \qquad \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta$

例题 1

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\cos 35^\circ-\sin 55^\circ$

(b) $\sin 65^\circ-\dfrac{1}{\sec 25^\circ}$

(c) $\tan 37^\circ\tan 53^\circ$

解 (a)
$$\begin{aligned}\cos 35^\circ-\sin 55^\circ&=\cos 35^\circ-\sin(90^\circ-35^\circ)\\&=\cos 35^\circ-\cos 35^\circ\\&=0\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sin 65^\circ-\frac{1}{\sec 25^\circ}&=\sin 65^\circ-\cos 25^\circ\\&=\sin 65^\circ-\cos(90^\circ-65^\circ)\\&=\sin 65^\circ-\sin 65^\circ\\&=0\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\tan 37^\circ\tan 53^\circ&=\tan 37^\circ\tan(90^\circ-37^\circ)\\&=\tan 37^\circ\cot 37^\circ\\&=\tan 37^\circ\left(\frac{1}{\tan 37^\circ}\right)\\&=1\end{aligned}$$

随堂练习 3

1. 化简 $\dfrac{\sin A}{\cos(90^\circ - A)}$。

2. 不使用计算机，求 $2\cos 30^\circ - \tan 43^\circ + \cot 47^\circ$ 的值。

练习 6.3

1. 化简 $\dfrac{\sec A \tan A \cos(90^\circ - A)}{\sin A \operatorname{cosec}(90^\circ - A)\cot(90^\circ - A)}$。

2. 不使用计算机，计算下列各式：

   (a) $\operatorname{cosec} 66^\circ - \sec 24^\circ$

   (b) $2\sin 18^\circ \sec 72^\circ$

   (c) $\dfrac{\sin 28^\circ}{\cos 62^\circ} - \tan^2 45^\circ$

   (d) $2\sin 30^\circ + \sin 40^\circ - \cos 50^\circ$

   (e) $\cos(60^\circ + x) - \sin(30^\circ - x)$

3. 计算 $\cot(45^\circ + x) + \sec^2 60^\circ - \sin^3 30^\circ - \tan(45^\circ - x)$。

4. 已知 $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$，$\theta$ 为锐角，求 $\sin\theta$，$\sin(90^\circ - \theta)$ 及 $\tan(90^\circ - \theta)$ 的值。

5. 已知 $\cos A = \dfrac{4}{5}$，A 为锐角，求 $\cos(90^\circ - A)$，$\cot(90^\circ - A)$ 及 $\sec(90^\circ - A)$ 的值。

6.4 直角三角形的解法

在解直角三角形时，除了直角外，只要知道其中一个边长与另一个边长或角，就可以求出未知的边与角。

思考题

若我们只知道直角三角形的两个角，可以找出这个直角三角形的三个边吗？为什么？

例题 1

已知在 ΔABC 中，C 为直角，$B=47^\circ$，$c=173.21$ cm，解此三角形。

解

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - B - C \\ &= 180^\circ - 47^\circ - 90^\circ \\ &= 43^\circ \end{aligned}$$

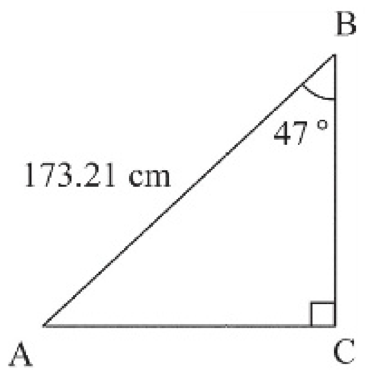


图6-9

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

$$\begin{aligned} a &= c\cos B \\ &= 173.21 \times \cos 47^\circ \\ &= 118.13 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

$$\begin{aligned} b &= c\sin B \\ &= 173.21 \times \sin 47^\circ \\ &= 126.68 \text{ cm} \end{aligned}$$

$\therefore$ $A=43^\circ$，$a=118.13$ cm，$b=126.68$ cm

例题 2

已知在ΔABC 中，C = 90°，a = 5 cm，c = 8.7 cm，求 A，B 及 b。

解

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$= \frac{5}{8.7}$$

$$A = 35.08^\circ$$

$$B = 180^\circ - A - C$$

$$\therefore \quad = 180^\circ - 90^\circ - 35.08^\circ$$

$$= 54.92^\circ$$

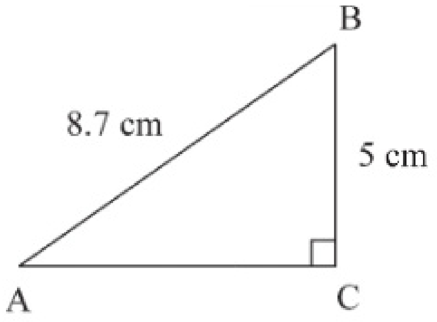


图6-10

由毕氏定理 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$$= \sqrt{8.7^2 - 5^2}$$

$$= 7.12 \text{ cm}$$

∴ A = 35.08°，B = 54.92°，b = 7.12 cm

例题 3

在图6-11的ΔABC 中，∠CAD = 35°，AC = 9 cm，BD = 6.2 cm，AD BC，求 CD 及∠BAD。

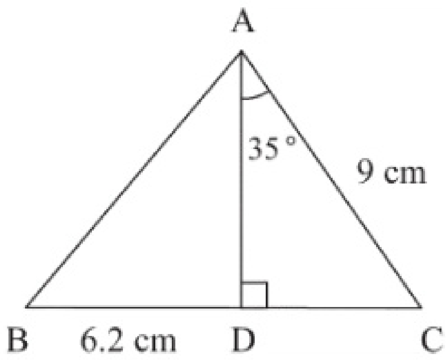


图6-11

解 ΔACD 中，$\sin 35^\circ = \frac{CD}{9}$

$$CD = 9 \sin 35^\circ$$

$$= 5.16 \text{ cm}$$

$$\cos 35^\circ = \frac{AD}{9}$$

$$AD = 9 \cos 35^\circ$$

（续） 在 ΔABD 中，$\tan\angle BAD = \dfrac{6.2}{AD}$

$$= \frac{6.2}{9\cos 35^\circ}$$

$$\angle BAD = 40.06^\circ$$

$\therefore\ CD = 5.16\text{ cm}$，$\angle BAD = 40.06^\circ$

例题 4

一等腰三角形 ABC 的底边长 25 cm，顶角A为 68°，求其底边上的高。

解 如图 6-12 所示，ΔABC的底边 $BC = 25\text{ cm}$，其腰 $AB = AC$，顶角$\angle BAD = 68^\circ$。由 A 作 BC 的垂直线交 BC 于 D 点，则所求底边的高即为 AD。

$\because\ \Delta ABC$ 为等腰三角形，且 $AB = AC$

$\therefore\ BD = DC = 12.5\text{ cm}$，$\angle BAD = \angle CAD = 34^\circ$

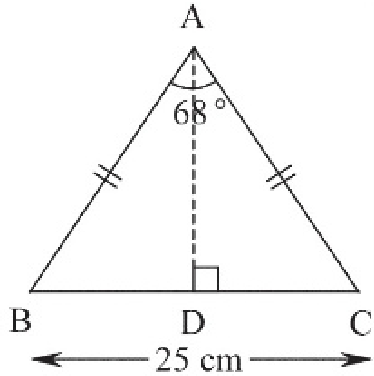


图6-12

$$\tan\angle BAD = \frac{BD}{AD}$$

$$AD = \frac{BD}{\tan\angle BAD}$$

$$= \frac{12.5}{\tan 34^\circ}$$

$$= 18.53\text{ cm}$$

$\therefore\ \Delta ABC$ 底边上的高是 18.53 cm。

例题 5

图 6-13 (a) 中的 ΔABC 及 ΔADE 是两个直角三角形。已知 $BC=6$ cm，$DE=11$ cm 及 $CE=8$ cm，求 θ。

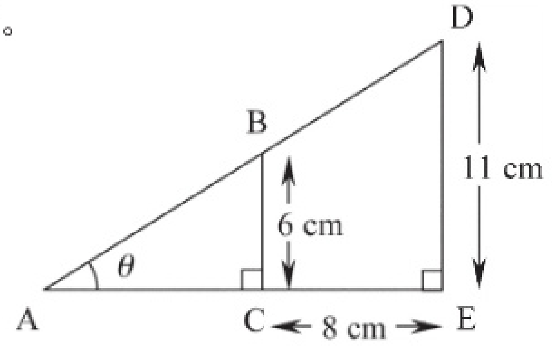


图6-13 (a)

解 作一条与 CE 平行的线段 BF（如图 6-13 (b) 所示），BF = CE 且 BF　DE。

$$DF = DE - EF$$
$$= 11 - 6$$
$$= 5$$

在 ΔBDF 中，$\tan\angle BDF = \dfrac{BF}{DF}$

$$= \frac{8}{5}$$

$$\angle BDF = 57.99^\circ$$

$$\therefore \theta = 180^\circ - 90^\circ - 57.99^\circ$$
$$= 32.01^\circ$$

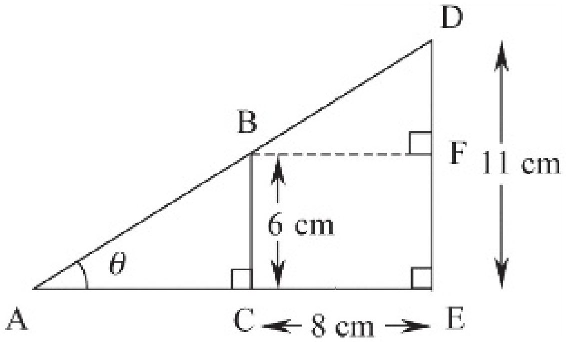


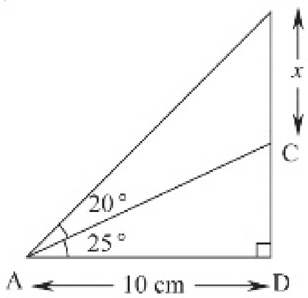
图6-13 (b)

随堂练习 4

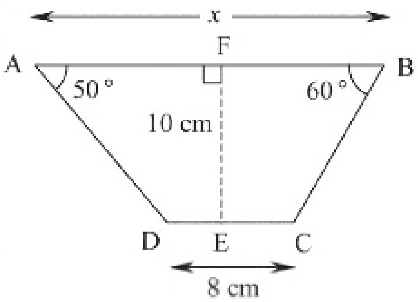
1. 已知等腰三角形的底边长12cm，顶角是50°，求其腰长及面积。

2. 求下列各图形中x的值：

(a)



(b)



练习 6.4

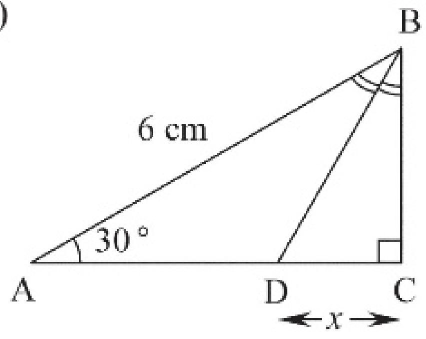
1. 对于ΔABC，已知C是直角。根据下列条件解三角形：

   (a) $a=12$，$b=5$　　(b) $a=4$，$c=7$

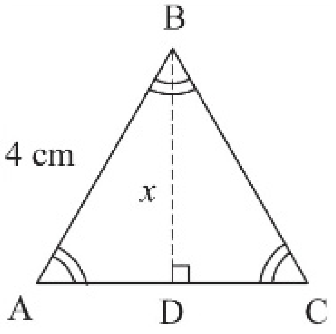
   (c) $a=15.2$，$B=15^\circ$　　(d) $c=25$，$A=53^\circ$

2. 求下列各图形中 x 的值：

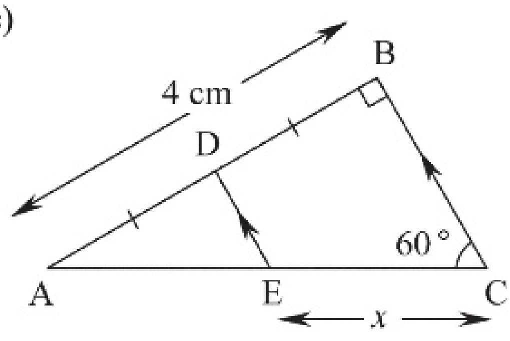
(a)



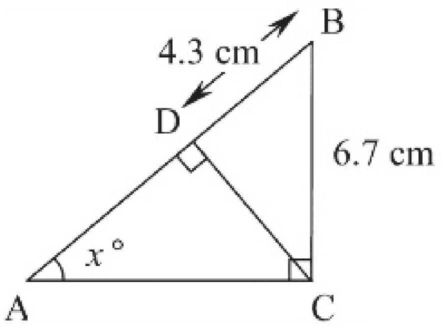
(b)



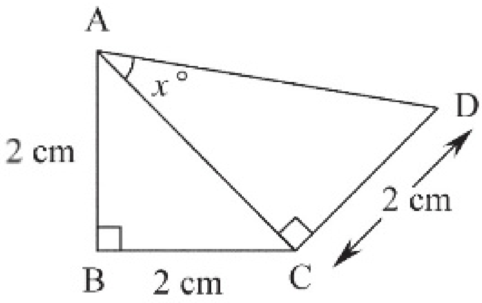
(c)



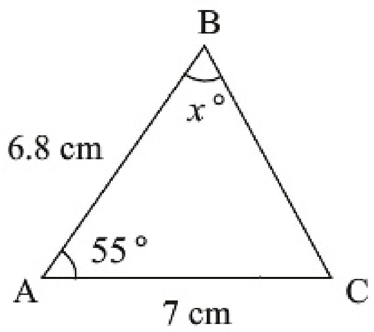
(d)



(e)

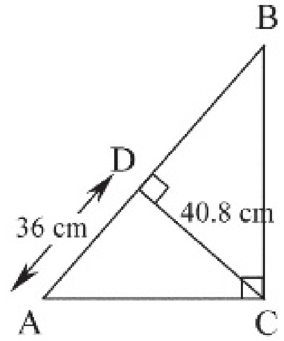


(f)



3. 等腰梯形的上底为 9 cm，下底为 15 cm，高为 8.5 cm 。求此梯形的腰长和底角。

4. 在右图的直角三角形 ABC 中，斜边 AB 上的高 CD = 40.8 cm ，AD = 36 cm ，求 BD 的长。

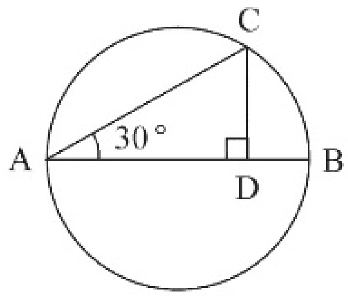


（第4题用图）

5. 一等腰三角形的底长是 46 cm ，底角是 65° ，求其周长及面积。

6. 已知菱形的锐角是 73° ，短的对角线长 30 cm ，求此菱形的边长及另一对角线的长。

7. 右图所示是一个直径为 10 cm 的圆，D是直径 AB 上的一点。已知∠CAB = 30° 且 AB CD，求 CD 的长。



（第7题用图）

8. 一等腰三角形的周长是50cm，底边的高是16cm。求此三角形的腰长，底边长及顶角。

6.5 直角三角形测量问题

直角三角形的解法可以应用在实际的三角测量问题中。

例题 1

如图 6-14 (a) 的横截面所示，用三个宽 1 m 的石板砌成沟渠，两个石板之间都构成 130° 角，求沟渠的宽度 AD 。

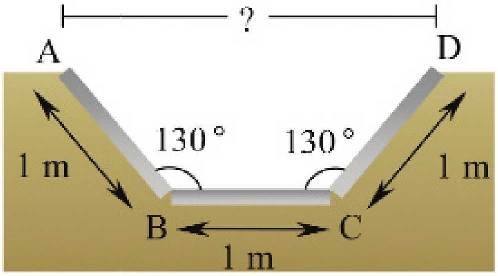


图6-14 (a)

解 从 B，C 作垂直于 AD 的线段，交 AD 于 E，F。（如图 6-14 (b) 所示）

$\angle A = 180^\circ - 130^\circ$ （同旁内角互补）

$= 50^\circ$

在 ΔABE 中，$\cos A = \dfrac{AE}{AB}$

$AE = AB \cos A$

$= 1 \times \cos 50^\circ$

$\because EF = BC = 1$ m，$FD = AE = \cos 50^\circ$

$\therefore AD = AE + EF + FD$

$= 2\cos 50^\circ + 1$

$= 2.29$ m

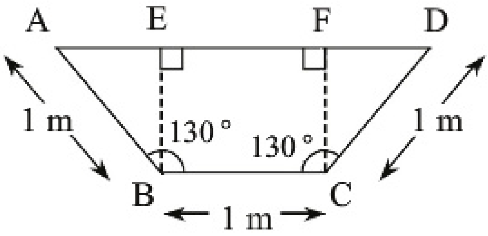


图6-14 (b)

$\therefore$ 沟渠的宽度 AD 是 2.29 m 。

仰角、俯角、视角

在实际的测量问题中，我们经常可看到仰角，俯角及视角这些名词。例如，从小丘上望向一棵大树，望向树顶及树底的视线与水平线都成一个角，如图6-15 所示。我们称 α 为仰角，β 为俯角，$\alpha+\beta$ 则称为该树的视角。

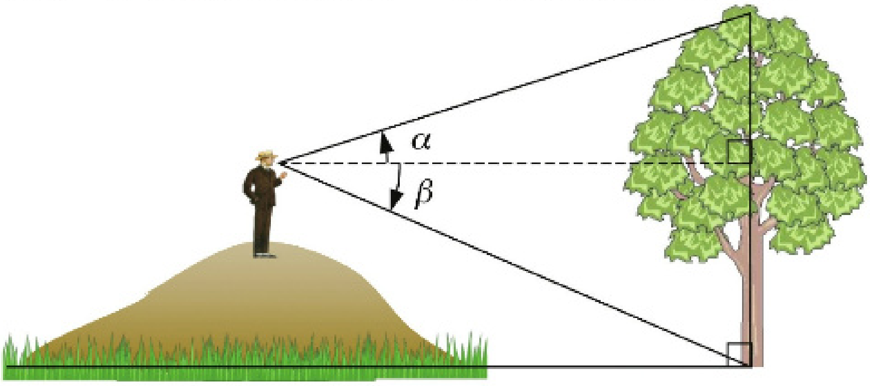


图6-15

例题 2

为了测量一颗树的高度，某人在与树相距 23.5 m 的D处，用测角仪器测得树顶 A 的仰角是43°。若测角仪器的高度是1.2 m，求树的高度。

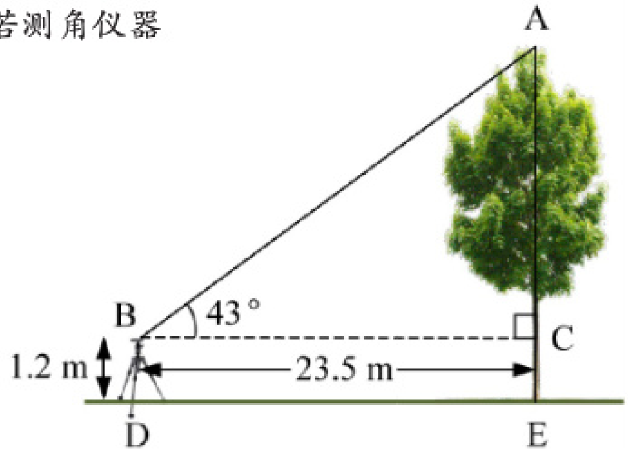


图6-16

解 在 ΔABC 中，$\angle ABC = 43^\circ$

$$\frac{AC}{BC} = \tan\angle ABC$$

$$AC = BC\ \tan\angle ABC$$

$$= 23.5 \times \tan 43^\circ$$

$$AE = AC + CE$$

$$= 23.5 \times \tan 43^\circ + 1.2$$

$$= 23.11$$

$\therefore$ 树高为 23.11 m。

例题 3

从 212 m 高的悬崖俯视海中的一个浮标 B，所测得的俯角是 40°。求浮标与海岸的距离。

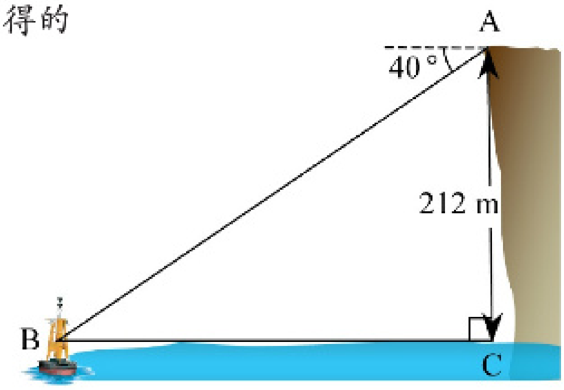


图6-17

解 已知悬崖的高度 AC = 212 m 。

$$\frac{AC}{BC} = \tan 40^\circ$$

$$BC = \frac{AC}{\tan 40^\circ}$$

$$= \frac{212}{\tan 40^\circ}$$

$$= 252.65 \text{ m}$$

∴ 浮标与海岸的距离是 252.65 m。

例题 4

从平地上两点 P 及 Q 分别测得吉隆坡塔顶 R 的仰角是 68° 及 81°。已知 P，Q 两点的距离是 103.42 m，求吉隆坡塔的高度。

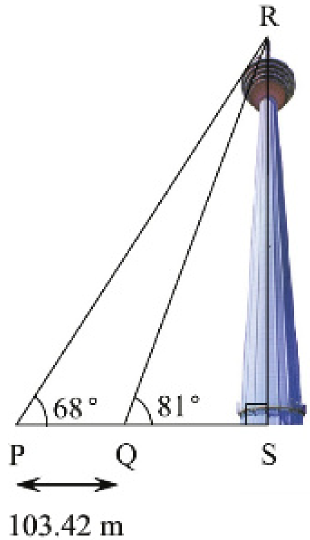


图6-18

解 在 ΔQRS 中，$\tan 81^\circ = \dfrac{RS}{QS}$

$$QS = \frac{RS}{\tan 81^\circ}$$

（续） 在 ΔPRS中，$\tan 68^\circ = \dfrac{RS}{PQ+QS}$

$$= \frac{RS}{103.42 + \dfrac{RS}{\tan 81^\circ}}$$

$$RS = 103.42\tan 68^\circ + \frac{RS \times \tan 68^\circ}{\tan 81^\circ}$$

$$RS - \frac{RS \times \tan 68^\circ}{\tan 81^\circ} = 103.42\tan 68^\circ$$

$$RS = 421.02\ \text{m}$$

$\therefore$ 吉隆坡塔的高度是421.02 m。

方位角

在测量工作中，方位角常用来度量目标相对于测量点的方向。在采用方位角时，所有方向都是从正北方向依顺时针方向量度的。方位角的度数必须写成三位数的形式，它的取值范围介于000° 至 360° 之间。例如，在图 6-19 中，

由 O 测得 A 的方位角是070°，

由 O 测得 B 的方位角是130° 20′，

由 O 测得 C 的方位角是225°。

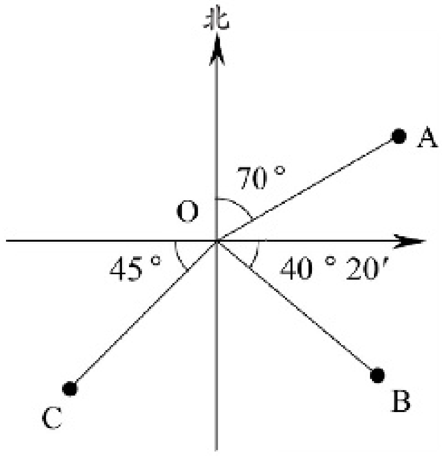


图6-19

例题 5

如图 6-20 所示，一艘船在 A 点测得海上一座礁石 B 的方位角是 037°。此船后来以每小时 8 海里的速度离开 A 点，往方位角为 127° 的方向航行。五个小时后，此船抵达 C 点，并从 C 点测得礁石的方位角是 340°。求：

(a) BC 的距离；

(b) AB 的距离。

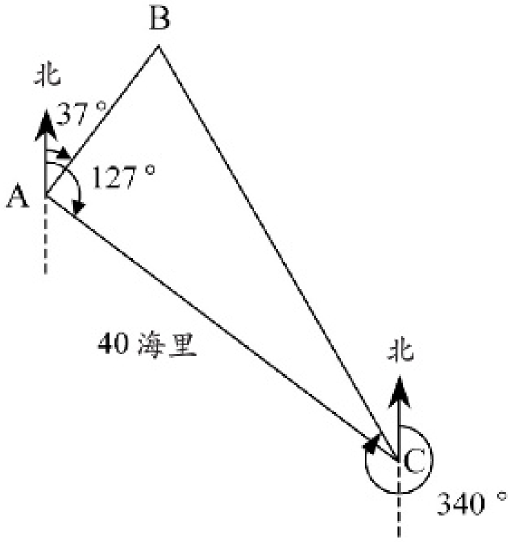


图6-20

解 在 ΔABC 中，

$\angle BAC = 127^\circ - 37^\circ = 90^\circ$

$\angle ACB = 180^\circ - 127^\circ - 20^\circ = 33^\circ$

$AC = 5 \times 8 = 40$

(a) $\cos 33^\circ = \dfrac{AC}{BC}$

$$BC = \frac{AC}{\cos 33^\circ} = \frac{40}{\cos 33^\circ} = 47.69$$

(b) $\tan 33^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$$AB = AC \tan 33^\circ = 40 \tan 33^\circ = 25.98$$

(a) BC 的距离是 47.69 海里；

(b) AB 的距离是 25.98 海里。

补充资料

海里（nautical mile）是一个用于航海或航空的距离计量单位。

1 海里 ≈ 1.853 公里

随堂练习 5

1. 一把 10 m 长的梯子倚墙而立，梯足距离墙底 2 m，求梯与地面所成的角。
2. 某人在一座 86 m 高的山上观测 100 m 外另一座山 B，并测得山峰的仰角为 30°。求 B 的高度。
3. 从一座 125 m 高的大厦天台俯视另一座 85 m 高的大厦天台，测得俯角为 35°。求这两座建筑物的距离。

练习 6.5

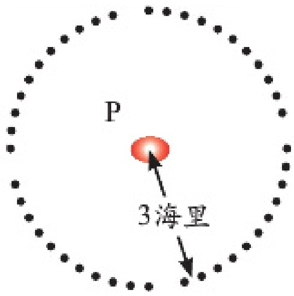
1. 某人沿着直线走了 78.6 m 到斜坡的坡顶。若该斜坡与地面成 43° 的角，求斜坡的高度。
2. 一把 5.15 m 长的梯子，下端着地，上端靠墙。若梯子与地面成 67° 的角，求梯足与墙脚之间的距离。
3. 一个 125 cm 高的小孩放风筝，放出了 60 m 的线，而风筝的仰角为 48°，求风筝离地面的高度。（答案以公尺（m）表示）
4. 一棵树被强风吹折后，树顶垂落着地，并与地面成 55° 角。已知树顶着地处与树根相距 5 m，求这棵树原来的高度。
5. 当太阳的仰角是 37° 时，某建筑物的影子会比太阳的仰角是 55° 时的影子长 10 m。求此建筑物的高度。
6. 在两座相距 100 m 的等高建筑物 A 与 B 之间的一点，测得 A，B 的仰角分别是 60° 及 30°。求这两座建筑物的高度及观测点的位置。
7. 某人在平地上的一点测得一山峰的仰角是 45°。他向着山前进 a 公尺后，测得山峰仰角是 60°。若山的高度为 h，证明 $h=\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})a$。
8. 一船停泊在海岸外，一人于岸边，见船在其正南方。此人沿着岸边向正东方向行走 200 m 后，测得船的方位角为 210°。求这艘船与海岸的距离。

9. A、B 两艘船同时离港，船A 以每小时 7.5 海里的速度往 210° 的方向航行，船B 则以每小时 10 海里的速度往 120° 的方向航行。求两个小时后，

(a) A、B 两艘船的距离；

(b) 由船 A 所测得船 B 的方位角。

10. 如右图所示，海中有一座小岛 P，其方圆3海里处都布下水雷。一艘船在A 处测得 P 的方位角为 060°。该船往正东方向航行 5 海里后，于 B 处测得 P 的方位角为 045°。若此船继续朝相同方向航行，问该船是否有危险?



总复习题6

1. 不使用计算机，求下列各式的值:

(a) $\dfrac{1-\tan 30^\circ}{1+\tan 30^\circ}$

(b) $(1+\sin 45^\circ+\sin 30^\circ)(1-\cos 45^\circ+\cos 60^\circ)$

(c) $\cot 60^\circ \tan 45^\circ \tan 60^\circ$

(d) $\tan^2 60^\circ+4\sin^2 45^\circ+3\sec^2 30^\circ$

2. 不使用计算机，求 $\operatorname{cosec} 37^\circ-\cot^2 30^\circ+\cos 60^\circ-\sec 53^\circ$ 的值。

3. 化简 $\sin(60^\circ-x)+\operatorname{cosec}^2 45^\circ-\cot^2 45^\circ-\cos(30^\circ+x)$。

4. 若 $4\sin x-3=0$，求锐角 x。

5. 若 $1-\sqrt{3}\cot(x+15^\circ)=0$，求锐角$x$。

6. 若 $\cos\theta=\dfrac{15}{17}$，且 θ 为锐角，求 $\sin\theta$，$\tan\theta$ 及 $\operatorname{cosec}\theta$ 的值。

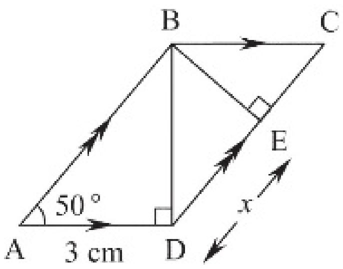
7. 若 $\tan A=\dfrac{1}{2}$，且 A 为锐角，求 $\cot A$，$\sin A$ 及$\sec A$ 的值。

8. 若 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin\theta\cos(90^\circ-\theta)$ 的值。

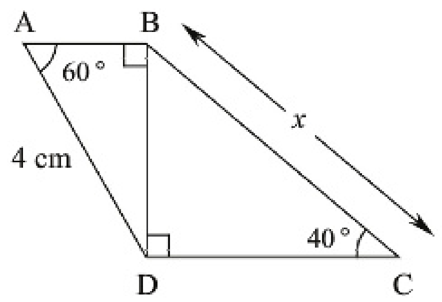
9. 已知 $\cos A = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$，且 $0^\circ < A < 90^\circ$，求 $\sin A$，$\sin(90^\circ - A)$ 及 $\tan(90^\circ - A)$ 的值。

10. 求下列各图形中x的值:

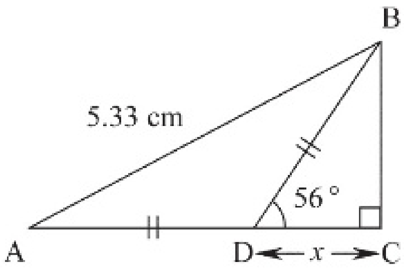
(a)



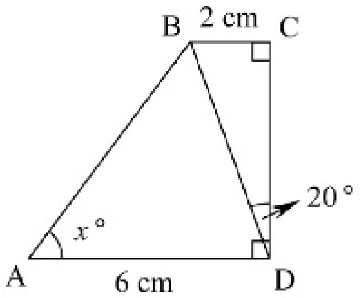
(b)



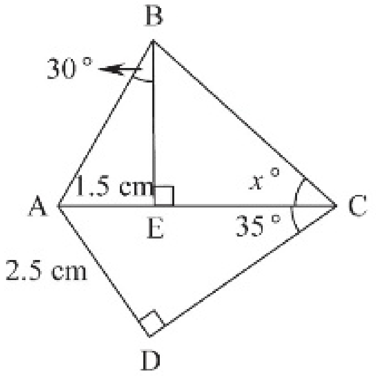
(c)



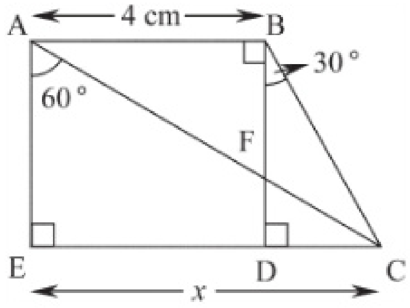
(d)



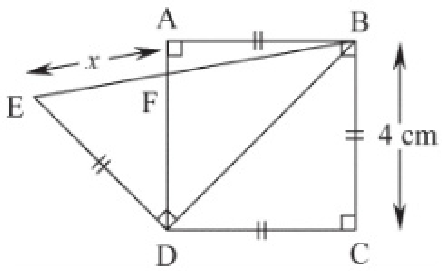
(e)



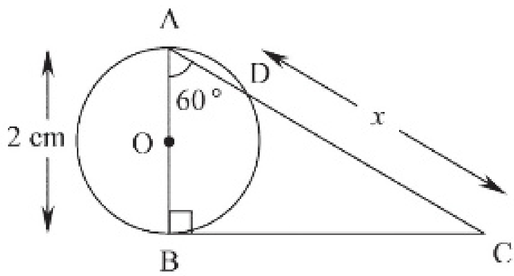
(f)



(g)



(h)

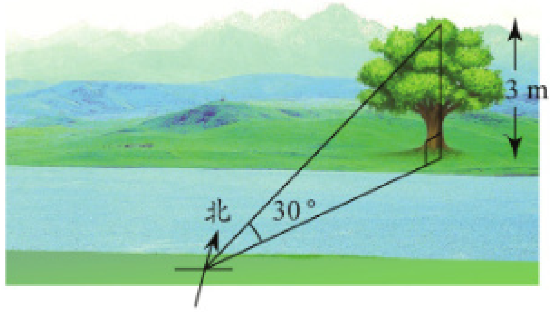


11. 在矩形 ABCD 中，已知 AB = 48 m ，BC = 60 cm 。求它的外接圆半径及其两条对角线相交所成的锐角。

12. 从一座 250 m 高的高塔上测得平地上一座大厦的顶部及底部的俯角分别是 30° 及 60° ，求这座大厦的高度。

13. 两建筑物的水平距离是 72.5 m ，从其中一座建筑物的顶部测得另一座建筑物的顶部与底部的俯角分别是 35°及 60°，求这两座建筑物的高。

14. 如右图所示，某人在溪边测得在其对岸东北方一棵树的树顶的仰角是 30° 。若该树高 3 m ，求小溪的宽度。



（第 14 题用图）

15. 一梯形的上底是 23 cm ，下底是 28 cm ，两底角分别是 62° 及 78° ，求这梯形的两腰的长。

16. 已知 Q 在P 的西北且 PQ 的距离是 200 m 。R 在 Q 的正西。若 PR的距离是 500 m，求∠PRQ 。

17. 某人由 A 往东北方向行驶 2.5 km 至 B，接着再由 B 往东南方向行驶 4 km 至 C 。求由 A 所测得 C 的方位角。

18. 一艘船在 A 处测得一座灯塔的方位角为 030° 。该船继续往正北方向航行 5 海里后，测得灯塔的方位角为 120° 。求该船的航线与灯塔的最短距离。

名词对照

1 一元二次方程式

一元二次方程式 quadratic equation of one variable

标准式 standard form

常数项 constant term

系数 coefficient

根 root

解集 solution set

因式分解法 factorization method

配方法 method of completing the square

公式法 solving by formula

判别式 discriminant

二重根 double root

2 多项式

多项式函数 polynomial function

一元多项式 polynomial of one variable

领导系数 leading coefficient

次数 degree

零次多项式 polynomial of degree zero

零多项式 null polynomial

常数多项式 constant polynomial

同类项 like terms

分离系数法 separation of coefficient

多元多项式 multivariate polynomial

综合除法 synthetic division

降幂 descending order

余式定理 remainder theorem

因式定理 factor theorem

公因式 common factor

分组分解法 factorization by grouping

交叉相乘法 cross multiplication method

一元高次方程式 higher-degree polynomial equation of one variable

换元法 substitution method

3 有理式

有理式 rational expression

分式 fraction

真分式 proper fraction

假分式 improper fraction

长除法 long division

分式的约分 reduction of a fraction

最简分式 simplest fraction

分式的通分 changing fractions to a common denominator

最低公倍式 lowest common multiple

繁分式 complex fraction

有理方程式 rational equation

增根 extraneous root

部分分式 partial fractions

恒等式 identity

待定系数 undetermined coefficient

数值代入法 substitution method

4 无理式

无理式 irrational expression
根式 radical
根指数 index of radical
被开方数 radicand
分数指数 fractional index
有理化 rationalization
无理方程式 irrational equation
二次不尽根 quadratic surd

5 角及其单位

顺时针 clockwise
逆时针 anticlockwise
始边 initial side
终边 terminal side
顶点 vertex
正角 positive angle
负角 negative angle
弧 arc
圆心角 circular angle
弧度 radian
特别角 special angle
扇形 sector

6 锐角三角函数

相似三角形 similar triangle
锐角 acute angle
量角器 protractor
余角 complementary angle
仰角 angle of elevation
俯角 angle of depression
视角 angle of observation
方位 bearing
海里 nautical mile

答案

1. 一元二次方程式

随堂练习 1 (P. 2)

1. $4x^2$，$-$，-9；4，0

2. $7x^2$，$2x$，-3；7，2

随堂练习 2 (P. 5)

1. -5，7
2. -3，$-\frac{1}{4}$
3. 0，2
4. $\frac{3}{2}$

随堂练习 3 (P. 6)

1. 2，7
2. $1\pm\sqrt{5}$
3. $\frac{5}{3}$，4
4. $-\frac{4}{3}$，$\frac{5}{2}$

随堂练习 4 (P. 8)

1. $-\frac{1}{3}$
2. $\frac{3}{4}$，$\frac{4}{3}$
3. $\frac{3\pm2\sqrt{5}}{3}$

练习 1.2 (P. 9)

1. -2，8
2. -7，4
3. $-\frac{1}{2}$，3
4. $\frac{1}{2}$
5. 1，$\frac{5}{3}$
6. $-\frac{1}{2}$，3
7. -6，4
8. 1，$\frac{11}{2}$
9. $-\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$
10. $\frac{1\pm\sqrt{257}}{2}$
11. -4，2
12. $-\frac{5}{6}$，1
13. $-\frac{5}{2}$，$\frac{13}{7}$
14. $-\frac{8}{3}$，-2
15. $-2\pm\sqrt{5}$
16. $\left\{-3,\ \frac{7}{2}\right\}$
17. $\left\{2\pm\sqrt{10}\right\}$
18. $\left\{\frac{3}{2},\ 2\right\}$
19. $\left\{\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$
20. $\left\{-\frac{1}{3},\ 2\right\}$
21. $\left\{-\frac{8}{3},\ 2\right\}$
22. $\left\{-\frac{7}{3},\ \frac{5}{2}\right\}$
23. $\{-1,\ 3\}$

随堂练习 5 (P. 11)

1. 没有实根
2. 有两个相等的实根
3. 有两个相异的实根
4. 没有实根
5. 没有实根

随堂练习 6 (P. 14)

1. $k\le\frac{9}{2}$
2. $m<-6$

练习 1.3 (P. 14)

1. (a) 没有实根
   (b) 有两个相异的实根
   (c) 有两个相等的实根

(d) 有两个相等的实根

(e) 有两个相异的实根

(f) 有两个相异的实根

2. (a) 1　(b) $\frac{1}{2}$

(c) 0　(d) $-\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{1}{4}$

3. (a) ± 2　(b) $-\frac{1}{2}$ 或 3

4. $k \leq 4$　5. $k > \frac{25}{8}$

6. $k > -\frac{1}{4}$，$k \neq 0$　7. $-\frac{10}{9}$ 或 2

8. 6　9. $k > -\frac{5}{2}$

10. $k \geq -4$

随堂练习 7 (P. 17)

1. $-\frac{1}{2}$，$m=-2$　2. $-\frac{3}{8}$，$p=-\frac{3}{4}$

3. $q=1$，$a=1$

随堂练习 8 (P. 19)

1. (a) 7　(b) $-\frac{14}{3}$

(c) 10　(d) $\sqrt{10}$

(e) $2\sqrt{10}$　(f) $14\sqrt{10}$

2. ± 8　3. $\pm\frac{1}{3}$

随堂练习 9 (P. 22)

1. $4x^2-52x+9=0$

2. $5x^2+9x-3=0$

练习 1.4 (P. 22)

1. (a) $6x^2+13x+6=0$

(b) $x^2-8x-2=0$

(c) $25x^2-10x+1=0$

2. $\frac{7}{4}$　3. $\frac{1}{2}$ 及 2

4. -1　5. 55

6. (a) $-\frac{21}{2}$　(b) $\frac{121}{4}$

(c) $\frac{11}{2}$　(d) $-\frac{33}{28}$

7. (a) $2x^2-13x+14=0$

(b) $14x^2+29x+14=0$

(c) $2x^2-x-64=0$

(d) $2x^2-3x-6=0$

(e) $4x^2-x-203=0$

(f) $14x^2-5x-82=0$

8. $x^2-2x-7=0$

9. $x^2-5x+6=0$

总复习题 1 (P. 23)

1. (a) $\frac{1}{2}$，2　(b) $-\frac{5}{2}$，$\frac{1}{3}$

(c) $\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$　(d) 0，$\frac{3}{16}$

(e) $\frac{2\pm2\sqrt{19}}{9}$

2. (a) 有两个相异的实根

(b) 没有实根

(c) 有两个相异的实根

(d) 有两个相等的实根

(e) 有两个相等的实根

(f) 有两个相异的实根

3. 0 或 5

4. (a) -2；$-\frac{6}{7}$　(b) $\frac{5}{2}$；-2

(c) $\frac{2}{5}$；$-\frac{1}{5}$　(d) -1；$-\frac{1}{2}$

(e) $\frac{3}{2}$；$\frac{1}{2}$　(f) 2；-2

5. 2 及 4；$m=9$　6. ±6

7. -27　8. $-\frac{56}{27}$

9. (a) $-\frac{1}{2}$　(b) $-\sqrt{17}$

10. $\pm b\sqrt{b^2-4c}$

11. 0 及 1，0 及 $\frac{5}{2}$；$m=0$

3 及 -2，3 及 $-\frac{1}{2}$；$m=-3$

2. 多项式

随堂练习 1 (P. 27)

1. (a)及(c)

2. (a) 三次多项式；

$4x^3$：三次，4；$-5x^2$：二次，-5；

$-x$：一次，-1；1：零次

(b) 五次多项式；

$2x^5$：五次，2；$-4x^2$：二次，-4；

-3：零次

(c) 三次多项式；

$\sqrt{3}x^3$：三次，$\sqrt{3}$；$2x$：一次，2；

$\frac{1}{2}$：零次

(d) 二次多项式；

$\frac{x^2}{2}$：二次，$\frac{1}{2}$；$4x$：一次，4

练习 2.1 (P. 28)

1. (b)，(c)，(e)

2. (a) 4，2，三次多项式

(b) -6，3，三次多项式

(c) 12，12，零次多项式

(d) -1，-1，五次多项式

3. (a) 四次多项式

(b) 二次多项式

(c) 零次多项式

(d) 零多项式

随堂练习 2 (P. 33)

1. (a) $6x^4-x^3+x^2+x+4$

   (b) $6x^4-9x^3+11x^2+x-10$

2. (a) $12x^3+4x^2-13x+4$

   (b) x^2-x+1

3. 商式：x^2+6，余式：13

练习 2.2 (P. 34)

1. (a) $9x^3+2x^2-x-2$

   (b) $2x^3-3x^2+4x+3$

2. (a) $4x^3+4x^2-8x-5$

   (b) $8x^3-2x^2-x+10$

3. (a) $4x^3-13x^2+22x-15$

   (b) $6x^3-x^2-16x+6$

   (c) $3x^4-x^3+6x^2-2x$

   (d) $x^6+x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}$

4. (a) $x+9$

   (b) $4x^2-3$

   (c) $3x^2+2$ 余 2

   (d) $2x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 余 3

   (e) $6x+2$ 余 $-15x+2$

5. $-\frac{5}{2}$　　6. 19

7. $a=1$，$b=-27$　　8. $a=8$，$b=-24$

9. $a=-20$，$b=-1$

10. $2x^3-9x^2+2x+19$

随堂练习 3 (P. 35)

$2x^2y$：三次；$-xyz$：三次；y^2：二次

x^2y^2z：五次；$-3xy^2$：三次；$4z^3$：三次

随堂练习 4 (P. 37)

1. (a) $2x^4+2x^3-y^3+3xy$

   (b) $2x^4-2x^3+12x^2y-7y^3+3xy$

2. (a) $x^3y^2+xy^4+x^3+xy^2$

练习 2.3 (P. 37)

1. (a) $4x^2-2xy+2x+1$

   (b) $2xyz+6xy-2xz+4yz$

   (c) x^2y+2y^2+6x+2

   (d) $3xy^2-10xz^2+5yz^2$

2. (a) $3x^2-11xy+6y^2$

   (b) $2x^3-x^2y+8xy-4y^2$

   (c) $9x^3-9x^2y+8xy^2-4y^3$

   (d) $2x^2y^3-xy^4+2x^3y-x^2y^2$

随堂练习 5 (P. 42)

1. (a) $3x+5$　　(b) $2x^2-3x+1$

   (c) $4x^3-1$　　(d) $4x-4$ 余 18

2. -6

练习 2.4 (P. 42)

1. (a) x^3+3x^2-1
   (b) x^2+x 余 -2
   (c) x^2+x-1
   (d) $7x^2+14x+32$ 余 58
2. (a) x^2-2x+3
   (b) x^2-3x
   (c) $3x^2+2x-1$ 余 -2
   (d) $3x^2-x+1$ 余 3
3. 19
4. -8

随堂练习 6 (P. 47)

1. -5
2. $\dfrac{7}{8}$
3. 150

练习 2.5 (P. 47)

1. 51
2. 34
3. -7
4. $\dfrac{1}{9}$
5. -3
6. 3
7. $a=6$，$b=-1$
8. $h=8$，$k=-13$
9. $x+3$
10. $2x-1$

随堂练习 7 (P. 53)

1. (b)，(c)，(f)
2. -5

练习 2.6 (P. 53)

1. -4
2. -3
3. -6
4. -1
5. $a=1$，$b=-27$
6. $m=-9$，$n=7$
7. $a=-62$，$b=-104$
8. $a=-11$，$b=-2$
9. $p=-8$，$q=-5$
10. $k=-2$；-20
11. $a=12$，$b=-17$
12. $m=2$，$n=2$
14. $2x^2+2x-4$
15. $x^3-19x+30$
16. $x^4-4x^3-x^2+16x-12$

随堂练习 8 (P. 56)

1. $2x^2(x^3+3x-1)$
2. $3x^2(2x^2+12x-1)$
3. $x(x+1)(x+3)$

随堂练习 9 (P. 56)

1. $(x-4)(x-6)$
2. $(4x+3)(6x-5)$
3. $-(3x+7)(5x-2)$
4. $x(x-1)(2x+3)$

随堂练习 10 (P. 59)

1. $(2x+5)(2x-5)$
2. $(3x-1)(9x^2+3x+1)$
3. $(2x+1)^3$
4. $\dfrac{(3x-1)^3}{27}$

随堂练习 11 (P. 60)

1. $(x+4)^2(x-4)$
2. $(x+1)^2(x^2-x+1)$
3. $(x+2)^2(x-2)^2$
4. $(2x^2+1)(x-1)$

练习 2.7a (P. 61)

1. $4x(2x-3)$
2. $\frac{1}{2}x^2(2x^2+12x+1)$
3. $-3(x-2)(7x-1)$
4. $(3x-2)^2$
5. $3(x^2+3)(x^2-3)$
6. $-8(x+1)(x^2+2x+2)$
7. $(2x-3)(4x^2+6x+9)$
8. $9(x+2)(x^2-2x+4)$
9. $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
10. $27(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)$
11. $(x+1)(x-1)^2$
12. $(2x-1)(x-2)(x^2+2x+4)$
13. $\frac{1}{2}(2x+1)(2x+3)$
14. $(x-4)^2(x-3)$

随堂练习 12 (P. 64)

1. $(x+2)(x+3)(x-4)$
2. $(x+1)(x-1)(x-3)$
3. $(3x-2)(x^2-3)$
4. $(x+1)(2x-1)(x^2+1)$

练习 2.7b (P. 65)

1. $(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$
2. $(x-3)(x+3)(x+4)$
3. $(x-1)(x+3)(2x+3)$
4. $(x-1)(x-2)(x-3)$
5. $(x+1)^2(x^2-2x+3)$
6. $(x-1)^2(x+1)(x-2)$
7. $(x+1)^2(x+2)(x-3)$
8. $(x-2)^2(x+3)(2x+1)$
9. $(2x+1)^2(2x-1)(x-1)$
10. $(2x+1)^2(2x-1)^2$
11. $(2x+1)(2x-1)(2x^2+2x+1)$
12. $(3x+1)(4x-1)(x^2+2x-1)$

随堂练习 13 (P. 71)

1. -2，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$
2. $\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{3}$
3. -4，-3，2
4. ±1，3，5

练习 2.8 (P. 71)

1. -3，±1
2. $-\frac{1}{2}$，2，3
3. -5，$\frac{1}{2}$，3
4. $\pm\frac{1}{2}$
5. -3，1，2
6. $\pm\frac{1}{2}$，1，3
7. ±4，$\pm\sqrt{5}$
8. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，-1

9. 2 10. $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

11. -1，4 12. -7，2

总复习题 2 (P. 72)

1. (a)，(c)，(d)

2. (a) $2x^4+2x$

(b) $8x^3-5x^2+8x+3$

(c) $6x^4-9x^3-5x^2+3x+1$

(d) x^4-8x^2+16

(e) $x^2-3x+14$ 余 $-30x-40$

(f) x^3+1

(g) x^3+2x 余 10

(h) $4x^3-4x^2-2x-1$ 余 15

3. (a) $5x^3-2x^2y-y^3-y^2$

(b) $2x^2y-3xy^2+3xy+3x-7$

(c) $2x^2y^2-2xy^3-x^2+xy+6y^2-3$

4. $\frac{17}{2}$ 5. 4

6. -6 或 -1 7. $x+1$

8. 1 9. -2

10. $p=3$，$q=-3$ 11. $m=-5$，$n=1$

12. $a=2$，$b=-12$ 13. 1 或 $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

16. (a) $(x+8)(x-18)$

(b) $(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)$

(c) $(3x+5)(9x^2-15x+25)$

(d) $(x-1)(x+3)(3x-2)$

(e) $(x-1)(x+2)(x^2-x+1)$

(f) $(2x+1)(2x-1)(x^2-5)$

(g) $(x-1)(3x+2)(2x+1)^2$

(h) $(3x+2)^2(x^2-2x+2)$

(i) $x(x-2)(x+2)(x^2+2x+2)$

(j) $(x-2)(x-1)(x+1)(x^2+x-5)$

17. (a) -1，$\frac{1}{2}$，2 (b) $\pm\sqrt{2}$，$\frac{5}{2}$

(c) -1，2 (d) $\frac{5}{2}$

(e) $\pm\sqrt{3}$ (f) -2，$\frac{1}{2}$，1，4

(g) ±1，$\pm\frac{1}{2}$ (h) 0，5

18. ±2，3

3. 有理式

随堂练习 1 (P. 77)

1. $1+\frac{2}{x-2}$ 2. $3x+1+\frac{2}{x-1}$

3. $2x-\frac{x}{x^2+1}$ 4. $x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$

练习 3.1 (P. 77)

1. (a) 3 (b) ±5 (c) $\frac{1}{3}$ 或 1

2. (a) 1 (b) ±3 (c) 1

3. (a) $1+\frac{2}{2x-3}$

(b) $3-\frac{2x+2}{x^2+3}$

(c) $x-3+\frac{2x+8}{x^2+x+1}$

(d) $3x^2+\frac{3}{2}-\frac{1}{2(2x^2-1)}$

(e) $2x-3-\frac{x+4}{2x^2+x-3}$

随堂练习 2 (P. 79)

1. $\dfrac{yz}{2y-3z}$

2. $-x-3$

3. $\dfrac{x}{x+1}$

4. $\dfrac{x+4}{x-2}$

5. $\dfrac{x(y-3)}{y+4}$

随堂练习 3 (P. 81)

1. $\dfrac{3}{8xy}=\dfrac{3x^2}{8x^3y}$

$2x=\dfrac{16x^4y}{8x^3y}$

$\dfrac{5}{2x^3}=\dfrac{20y}{8x^3y}$

2. $\dfrac{3}{2x-6}=\dfrac{9}{6(x-3)}$

$\dfrac{5}{3x-9}=\dfrac{10}{6(x-3)}$

3. $\dfrac{4x}{x+2}=\dfrac{4x(2x-3)}{(x+2)(2x-3)}$

$\dfrac{5x-1}{2x-3}=\dfrac{(x+2)(5x-1)}{(x+2)(2x-3)}$

4. $\dfrac{1}{x^2-4y^2}=\dfrac{x}{x(x+2y)(x-2y)}$

$\dfrac{3}{x^2+2xy}=\dfrac{3(x-2y)}{x(x+2y)(x-2y)}$

5. $\dfrac{7}{x^2-4x+4}=\dfrac{7(x+1)(x-3)}{(x-2)^2(x+1)(x-3)}$

$\dfrac{8x}{x^2-2x-3}=\dfrac{8x(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)(x-3)}$

$\dfrac{2x-3}{x^2-x-2}=\dfrac{(2x-3)(x-2)(x-3)}{(x-2)^2(x+1)(x-3)}$

练习 3.2 (P. 81)

1. $\dfrac{x}{4y}$

2. $\dfrac{c-2d}{5c}$

3. $\dfrac{x}{x-4}$

4. $\dfrac{x-3}{x-5}$

5. $\dfrac{x+3}{x+4}$

6. $\dfrac{x+y}{x}$

7. $\dfrac{x-16}{y}$

8. $x+2$

9. $\dfrac{1}{2x}=\dfrac{6y^2z}{12xy^2z}$

$\dfrac{2}{3y^2}=\dfrac{8xz}{12xy^2z}$

$\dfrac{3}{4z}=\dfrac{9xy^2}{12xy^2z}$

10. $\dfrac{2x}{2x-3}=\dfrac{2x(5x-3)}{(2x-3)(5x-3)}$

$\dfrac{7x-2}{5x-3}=\dfrac{(2x-3)(7x-2)}{(2x-3)(5x-3)}$

11. $\dfrac{1}{x^2-25}=\dfrac{x-1}{(x+5)(x-5)(x-1)}$

$\dfrac{5x}{x^2-6x+5}=\dfrac{5x(x+5)}{(x+5)(x-5)(x-1)}$

12. $\dfrac{1}{y^2+y-2}=\dfrac{(y-2)(y-3)}{(y-1)(y+2)(y-2)(y-3)}$

$\dfrac{2x}{y^2-4}=\dfrac{2x(y-1)(y-3)}{(y-1)(y+2)(y-2)(y-3)}$

$\dfrac{3x-5}{y^2-5y+6}=\dfrac{(3x-5)(y+2)(y-1)}{(y-1)(y+2)(y-2)(y-3)}$

13. $\dfrac{5x}{x^2-2xy+y^2}=\dfrac{5x(x+y)^2}{(x+y)^2(x-y)^2}$

$\dfrac{3x}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{3x(x-y)^2}{(x+y)^2(x-y)^2}$

$\dfrac{4x-1}{x^2-y^2}=\dfrac{(4x-1)(x+y)(x-y)}{(x+y)^2(x-y)^2}$

14. $\dfrac{-x-2y}{2x^2-3xy+y^2}=\dfrac{-(x+2y)(y+2x)(y-2x)}{(y-2x)^2(y+2x)(y-x)}$

$\dfrac{x+y}{4x^2-4xy+y^2}=\dfrac{(x+y)(y+2x)(y-x)}{(y-2x)^2(y+2x)(y-x)}$

$\dfrac{3x-2y}{y^2-4x^2}=\dfrac{(3x-2y)(y-2x)(y-x)}{(y-2x)^2(y+2x)(y-x)}$

随堂练习 4 (P. 85)

1. 1　　2. 2

3. $5+\dfrac{2x+13}{(x+2)(x-1)}$　　4. $\dfrac{y}{2x-y}$

5. $\dfrac{2}{x+y}$　　6. $\dfrac{8x^4}{1-x^8}$

随堂练习 5 (P. 89)

1. 2　　2. $\dfrac{1}{c}$

3. $\dfrac{1}{y(x-y)}$　　4. $(a-3)^2$

5. $\dfrac{x+3}{x+5}$　　6. $\dfrac{2x-1}{x-2}$

练习 3.3a (P. 89)

1. $\dfrac{1}{x-1}$　　2. 2

3. 3　　4. $\dfrac{2}{(a+2)(a+4)}$

5. $\dfrac{x+10}{(x+1)(x+2)(x-2)}$　　6. 2

7. $\dfrac{2(x-y)}{xy(x+y)}$　　8. $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

9. $\dfrac{3}{(x-1)(x-3)}$　　10. $\dfrac{4}{(x-1)(x-3)}$

11. 0　　12. $\dfrac{(x-1)(y-1)}{y}$

13. $x+1$　　14. $\dfrac{x}{(x-y)^2}$

15. $\dfrac{x+1}{x+5}$　　16. $\dfrac{(a-2)}{4(a+2)}$

17. $\dfrac{x-2}{(x-7)^2}$　　18. $\dfrac{a+4}{(a+1)(a-1)}$

19. $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+3)}$　　20. 1

随堂练习 6 (P. 92)

1. $\dfrac{x}{y}$　　2. $-\dfrac{x}{y}$

3. $\dfrac{(2x+y)(x-y)}{(x+y)(x-4y)}$

练习 3.3b (P. 92)

1. $\dfrac{ab}{xy}$　　2. $\dfrac{x-3}{x-1}$

3. $\dfrac{a-2}{a+2}$　　4. 1

5. a^2+1

随堂练习 7 (P. 96)

1. $-\dfrac{35}{2}$　　2. 1　　3. 1

练习 3.4 (P. 96)

1. 2 2. 10 3. 10
4. 无解 5. 5 6. 6
7. 4 8. $-\frac{9}{7}$ 9. -5
10. 3 11. $\frac{9}{2}$ 12. -5

随堂练习 8 (P. 100)

1. $A=-4$，$B=3$
2. $A=2$，$B=-8$，$C=7$
3. $A=-1$，$B=-1$
4. $A=5$，$B=-1$，$C=-8$

练习 3.5a (P. 100)

1. $A=5$，$B=-4$
2. $A=1$，$B=1$
3. -26
4. $A=2$，$B=-3$，$C=4$
5. $A=-1$，$B=-1$，$C=6$
6. $A=3$，$B=8$，$C=2$，$D=6$
7. $A=-1$，$B=1$，$C=-1$，$D=2$

随堂练习 9 (P. 106)

1. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$
2. $\frac{15}{4(x+2)}+\frac{13}{4(x-2)}$
3. $\frac{47}{7(3x+2)}-\frac{8}{7(2x-1)}$
4. $\frac{5}{(x-2)^2}+\frac{3}{x-2}$

练习 3.5b (P. 107)

1. $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-3}$ 2. $\frac{4}{2x+1}-\frac{1}{3x-2}$
3. $\frac{4}{2x-3}-\frac{4}{2x+3}$ 4. $\frac{3}{(x-5)^2}+\frac{2}{x-5}$
5. $3+\frac{2}{x+2}+\frac{5}{x-2}$ 6. $2-\frac{7}{x+8}+\frac{3}{x-8}$
7. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}$
8. $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}$
9. $\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}-\frac{3}{2x}$
10. $2+x+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}$

总复习题 3 (P. 108)

1. 1 2. 1
3. $\frac{2x+3}{x+1}$ 4. -1
5. $\frac{1}{y^2}$ 6. $-\frac{1}{x(x-1)}$
7. 1 8. $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$
9. 1 10. $\frac{x(x-y)}{y(x+y)}$
11. $\frac{(3x+2)^2}{(x+1)^2(x-1)}$ 12. $\frac{a-4}{a}$
13. $\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$ 14. 0，3
15. -3 16. 无解
17. -4 18. $\frac{1}{2}$
19. 1 20. 12
21. $\frac{9}{2}$ 22. $\frac{10}{7}$
23. $A=-5$，$B=-6$

24. A = 2， B = −15， C = 10， D = 12

25. 0

26. $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-1}$

27. $\dfrac{6}{3x-2}-\dfrac{7}{4x+1}$

28. $\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{10}{x}-\dfrac{10}{x-1}$

29. $1+\dfrac{4}{3(x-3)}-\dfrac{1}{3(x+3)}$

30. $-2+\dfrac{7}{x+8}-\dfrac{3}{x-8}$

4. 无理式

随堂练习 1 (P. 115)

1. $4ab\sqrt[3]{ab}$　　2. $2z\sqrt[3]{2xy^2z}$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{2xy^2}}{2y}$

练习 4.1 (P. 115)

1. $a\sqrt[3]{ab^2}$　　2. $m^3n\sqrt[4]{m^3n^2}$

3. $\sqrt{5xy}$　　4. $a^2bc\cdot\sqrt[3]{b^2c}$

5. $2xy^2z^2\cdot\sqrt[3]{2xz^2}$　　6. $\sqrt[12]{28}$

7. $abc\cdot\sqrt[5]{a^2}$　　8. $\dfrac{\sqrt[3]{2b^2}}{3ab}$

9. $\dfrac{2\sqrt[6]{x^3y}}{3x}$

随堂练习 2 (P. 118)

1. 9　　2. x^2

3. $\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2}$　　4. 4

练习 4.2 (P. 119)

1. $b^{\frac{1}{6}}$　　2. $2^{\frac{15}{8}}$

3. $x^{\frac{19}{12}}y^{\frac{7}{6}}$　　4. a

5. $8\sqrt{2}x^{\frac{25}{12}}$　　6. $a^{-\frac{1}{8}}$

7. 3　　8. 1

9. 4　　10. $a^{\frac{2}{5}}$

11. $a^{\frac{7}{12}}$　　12. $x^{\frac{9}{2}}y^{-1}$

13. $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{12}}c^{\frac{7}{12}}$　　14. $a^{\frac{5}{3}}$

随堂练习 3 (P. 122)

1. $\sqrt{7}+3$　　2. $\sqrt{a}+2$

3. 2　　4. $2(\sqrt{2}+1)$

5. $\dfrac{2a+2}{a-1}$

练习 4.3 (P. 123)

1. $\dfrac{2\sqrt{7}+14}{7}$

2. $3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{6}-6$

3. $\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{xy}+y}{x-y}$

4. $(a-b)\sqrt{a+b}$

5. $\dfrac{-5\sqrt{6}-12}{6}$

6. $\dfrac{13\sqrt{14}-43}{11}$

7. $\dfrac{x-y-10\sqrt{x-y}+25}{x-y-25}$

8. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

9. $-4\sqrt{3}$
10. $1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}$
11. 98
12. $\dfrac{2\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$
13. $\sqrt{5}-5$
14. 62

随堂练习 4 (P. 128)

1. 14
2. 3
3. 2
4. -3，1
5. 20
6. 49

练习 4.4 (P. 128)

1. 3
2. 无解
3. 无解
4. $\dfrac{4}{3}$
5. 0
6. 无解
7. $\dfrac{5}{4}$
8. -1
9. -8，-3
10. 15
11. $\dfrac{9}{16}$
12. 19
13. $x \le 3$
14. 3
15. 2
16. 3

随堂练习 5 (P. 132)

1. $\sqrt{2}+\sqrt{7}$
2. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$
3. $\sqrt{11}-\sqrt{2}$
4. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}$
5. $\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{26}}{2}$
6. $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$
7. $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}$
8. $\sqrt{14}-2\sqrt{3}$

练习 4.5 (P. 133)

1. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
2. $\sqrt{14}+2$
3. $\sqrt{7}+5$
4. $\sqrt{13}-2$
5. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
6. $\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$
7. $\sqrt{7}+\sqrt{2}$
8. $\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}$
9. $\sqrt{6}+\sqrt{3}$
10. $2\sqrt{7}+3$
11. $4\sqrt{3}+2$
12. $3\sqrt{3}-\sqrt{6}$
13. $\sqrt{7}+2\sqrt{2}$
14. $3\sqrt{5}+4$
15. $5\sqrt{3}-4$
16. $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$
17. $\sqrt{39}-4$
18. $\sqrt{46}-2$
19. $2\sqrt{5}$
20. $\sqrt{22}$
21. $\sqrt{22}$
22. 4

总复习题 4 (P. 134)

1. 8
2. $\sqrt[3]{x^2y}$
3. $x^3\cdot\sqrt[6]{x}$
4. $\sqrt{2}$
5. $a\cdot\sqrt[8]{a^7}$
6. $\sqrt[12]{27x^3y^6z^2}$
7. $a\cdot\sqrt[12]{a^5}$
8. $2\sqrt[4]{x}$
9. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
10. $2x\cdot\sqrt[12]{81x}$
11. $a\cdot\sqrt[5]{a^2}$
12. $\dfrac{\sqrt{b}}{2ab}$
13. $\sqrt{15}-4$
14. $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$
15. $\dfrac{19-5\sqrt{3}}{26}$
16. $-4\sqrt{3}$

17. $-3\sqrt{3}-8$
18. 9
19. 6
20. 3
21. 5
22. 0，4
23. 1，5
24. 2，34
25. 1
26. $\frac{5}{4}$
27. 7
28. 1
29. 2
30. 4
31. $2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
32. $\sqrt{5}-2$
33. $3-\sqrt{2}$
34. $3\sqrt{3}-5$
35. $\sqrt[4]{3}(\sqrt{2}+1)$
36. $2\sqrt{3}-1$
37. $6\sqrt{2}$
38. $2-\sqrt{2}$
39. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
40. $26-15\sqrt{3}$，$\frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{2}$

5. 角及其单位

随堂练习 1 (P. 139)

1. $35°26'47''$
2. $7°45'$
3. $9'42''$

随堂练习 2 (P. 139)

(a) 0.5 (b) 2.5
(c) 2.29 (d) 1.00

练习 5.1 (P. 140)

1. $17°2'54''$
2. $8°47'$
3. $14'5''$
4. $17'0''$
5. $14640'$；$878400''$
6. π，$\frac{\pi}{2}$
7. 3
8. 5

随堂练习 3 (P. 142)

1. $-\frac{5\pi}{3}$
2. 1.32
3. $143°14'$
4. $630°$

练习 5.2 (P. 142)

1. (a) $82°30'$ (b) $240°$
   (c) $-210°$ (d) $-100°$
2. (a) $76°12'$ (b) $143°49'$
   (c) $-51°$ (d) $-63°36'$
3. (a) 0.56 (b) -1.63
   (c) 0.76 (d) -2.13
4. (a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) $\frac{7\pi}{4}$
   (c) $-\frac{37\pi}{30}$ (d) $-\frac{9\pi}{8}$
5. (a) $\frac{3\pi}{2}$，$270°$ (b) $\frac{7\pi}{2}$，$630°$
6. $\frac{8\pi}{5}$ 弧度/小时

随堂练习 4 (P. 147)

1. 5.59 m（或 $\frac{16\pi}{9}$ m）
2. 2.86 cm
3. 12.57 m^2（或 4π m^2）

练习 5.3 (P. 147)

1. (a) 4 cm (b) $45°$
   (c) $\frac{40\pi}{9}$ cm^2 (d) $\frac{25\pi}{9}$ cm
2. 2.36 cm（或 $\frac{3\pi}{4}$ cm）；3.53 cm^2（或 $\frac{9\pi}{8}$ cm^2）
3. 8 cm^2
4. $\frac{4\pi}{3}$ cm^2；$\frac{\pi}{6}$
5. 4 弧度；2 m
6. 6 cm；

   劣扇形：$\frac{\pi}{3}$（或 $60°$）；优扇形：$\frac{5\pi}{3}$（或 $300°$）

7. 513.13 cm^2; 101.30 cm

8. 114.16 cm^2; 50.50 cm

总复习题 5 (P. 149)

1. (a) $\frac{5\pi}{12}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$
   (c) $\frac{7\pi}{8}$ (d) $\frac{69\pi}{100}$
   (e) $\frac{3\pi}{8}$ (f) $\frac{41\pi}{70}$
2. (a) 0.39 (b) 1.47
   (c) 3.26 (d) 0.56
   (e) 0.74 (f) 2.22
3. (a) $36°$ (b) $80°$
   (c) $210°$ (d) $495°$
4. (a) $85°57'$ (b) $128°55'$
   (c) $51°$ (d) $143°49'$
5. 57.30 m
6. 4.5 弧度；36 cm^2
7. $r = 9.30\text{ cm}$; $l = 8.12\text{ cm}$
8. $l = 6\text{ cm}$; $r = 3\text{ cm}$; $\theta = 2$ 弧度
9. (a) 1.25 弧度 (b) 10 m^2
   (c) 5.03 弧度 (d) 10.06 m
   (e) 10.06 m^2
10. 5 cm；14.14 cm
11. 12.5 cm^2

6. 锐角三角函数

随堂练习 1 (P. 155)

1. $\sin\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
   $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{2}$
2. $\frac{22}{3}$

练习 6.1 (P. 155)

1. (a) $66.42°$ (b) $35.69°$
2. $AB = 4.23\text{ cm}$, $AC = 9.06\text{ cm}$
3. $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $\tan A = \frac{4}{3}$,
   $\operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}$, $\sec A = \frac{5}{3}$, $\cot A = \frac{3}{4}$
4. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$, $\cos\theta = \frac{5}{13}$
5. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$, $\cot\theta = \frac{5}{12}$
6. $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$
7. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
8. $\frac{4}{5}$
9. $\cos\alpha = \frac{2m}{m^2+1}$, $\tan\alpha = \frac{m^2-1}{2m}$

随堂练习 2 (P. 159)

1. $\frac{4}{3}$
2. $30°$

练习 6.2 (P. 159)

1. 1
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{13}{3}$
4. $\frac{5}{2}$
5. 1
6. $\frac{11}{12}$
7. $7-4\sqrt{3}$
8. $45°$
9. $30°$
10. $60°$
11. $45°$
12. $30°$
13. $45°$
14. $45°$
15. $60°$
16. $30°$

随堂练习 3 (P. 162)

1. 1
2. $\sqrt{3}$

练习 6.3 (P. 162)

1. 1
2. (a) 0 (b) 2
   (c) 0 (d) 1
   (e) 0
3. $\frac{31}{8}$
4. $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$
5. $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{3}$

随堂练习 4 (P. 166)

1. 14.20 cm; 77.20 cm^2
2. (a) 5.34 cm (b) 22.16 cm

练习 6.4 (P. 167)

1. (a) $c=13$， $A=67.38°$， $B=22.62°$
   (b) $b=5.74$， $A=34.85°$， $B=55.15°$
   (c) $b=4.07$， $c=15.74$， $A=75°$
   (d) $a=19.97$， $b=15.05$， $B=37°$
2. (a) 1.73 cm (b) 3.46 cm
   (c) 2.31 cm (d) 39.93°
   (e) 35.26° (f) 64.10°
3. 9.01 cm; 70.56°
4. 46.24 cm
5. 154.85 cm; 1134.44 cm^2
6. 边长 = 25.22 cm； 对角线的长 = 40.54 cm
7. 4.33 cm
8. 腰长 = 17.62 cm； 底边长 = 14.76 cm；
   顶角 = 49.52°

随堂练习 5 (P. 174)

1. 78.46°
2. 143.74 m
3. 57.13 m

练习 6.5 (P. 174)

1. 53.61 m
2. 2.01 m
3. 45.84 m
4. 15.86 m
5. 15.95 m
6. 43.30 m; 观测点距离 A 25 m
8. 346.41 m
9. (a) 25 海里 (b) 083°8′
10. 安全

总复习题 6 (P. 175)

1. (a) $2-\sqrt{3}$ (b) $\frac{7}{4}$
   (c) 1 (d) 9
2. $-\frac{5}{2}$
3. 1
4. 48.59°
5. 45°
6. $\sin\theta=\frac{8}{17}$； $\tan\theta=\frac{8}{15}$； $\operatorname{cosec}\theta=\frac{17}{8}$
7. $\cot A=2$； $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$； $\sec A=\frac{\sqrt{5}}{2}$
8. $\frac{1}{4}$
9. $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$； $\sin(90°-A)=\frac{\sqrt{6}}{3}$；
   $\tan(90°-A)=\sqrt{2}$

10. (a) 2.74 cm (b) 5.39 cm
(c) 1.69 cm (d) 53.95°
(e) 42.27° (f) 6 cm
(g) 2.87 cm (h) 3 cm

11. 38.42 cm；77.32°

12. 166.67 m

13. 74.81 m，125.57 m

14. 3.67 m

15. 6.87 cm，7.61 cm

16. 16.43°

17. 102.99°

18. 2.17 海里