马来西亚华文独中教科书

高级数学

高一
上册

董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

马来西亚华文独中教科书

高级数学

高一
上册

董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

《高级数学》高一上册

行政编辑： 黄宝玉
美术编辑： 曹薇华
排　　版： 梁翠芳

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School（MICSS）Working Committee

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Vinlin Press Sdn. Bhd.

版次：
2023 年 9 月第 1 版

印次：
2023 年 9 月第 1 次印刷

编审团队

学科顾问 ：刘建华　郑章华

编审委员 ：纪露结　陈玉丽　陈美溢　陈盈颖　苏民胜　李鸿聪
张锦发　林艾嘉　林汶良　姚和兴　萧子良　黄书丰

编写人员 ：刘建华　林方馨　林汶良　郑凯耀　黄书丰

责任编辑 ：林方馨

（按姓氏笔画排列）

鸣　谢

本书承蒙国内学者、独中数学科教师等提供建设性意见，并协助编写及审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

2023 年 9 月

编辑说明

1. 这套《高级数学》是根据董教总全国华文独中工委会统一课程委员会所拟定的“高级数学课程标准”编写而成。在拟定课程标准的过程中，除采用部分旧版《高级数学》的课程内容，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要 (KSSM)、SPM、STPM 及各国的课程标准和教材。

2. 这套《高级数学》是为全国华文独中的高中理科班学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。高一及高二的每册内容依据每周7节、每节 40 分钟的教学时间编写，而高三每册则依据每周 5 节、每节 40 分钟编写。惟各校可按个别情况安排授课时数。

3. 这套教材共有35章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学与微积分等等。

4. 本书是高一上册，供高中一年级上半年使用。

5. 本书设有“学习目标”、“想一想”、“数学橱窗”、“补充资料”、“注意”及“探索活动”栏目。设置以上栏目，是为了方便学生掌握学习重点、启发学生思考，并增进学习效果。

6. 本书每节都设有习题及随堂练习，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。

7. 本书附有中英名词对照，供学习参考，习题的答案也都附在书末。

8. 本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会
《高级数学》编审小组
2023 年 9 月

目录

17 世纪初期，法国数学家笛卡尔（René Descartes）创建了结合代数与几何的数学分支——解析几何，将几何中的点和线分别用坐标及方程式来表示。这种想法也成为现代电脑绘图及卫星导航的基础。上图为安顺三民独中校园的卫星图像，红色的框内为校园的范围。学习本章过后，同学们可以尝试利用卫星地图估计自己校园的实际面积。

1

直角坐标系与直线

学习目标

- 能计算线段的定比分点坐标
- 能从多边形的顶点求出其面积
- 理解斜率的定义
- 掌握直线方程式的求法
- 掌握两条直线平行与垂直的条件
- 理解两直线的位置关系
- 能求点到直线的距离

1.1 直角坐标系

直角坐标系 (rectangular coordinate system) 也称为笛卡尔坐标系 (Cartesian coordinate system)。在初中，我们学习如何使用序偶在直角坐标系上表示点的位置。

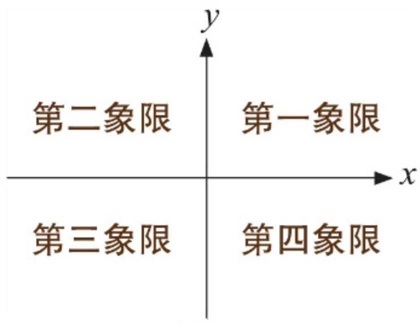


图1–1

坐标平面上的 x 轴与 y 轴把平面分为四个区域。如图1-1所示，我们把这四个区域分别称为第一象限 (quadrant)，第二象限，第三象限以及第四象限。x 轴与 y 轴上的点不属于任何象限。

随堂练习 1.1

以下各点分别属于哪个象限？

$A(-5,2)$, $B(6,-1)$, $C(-2,-5)$, $D(0,7)$

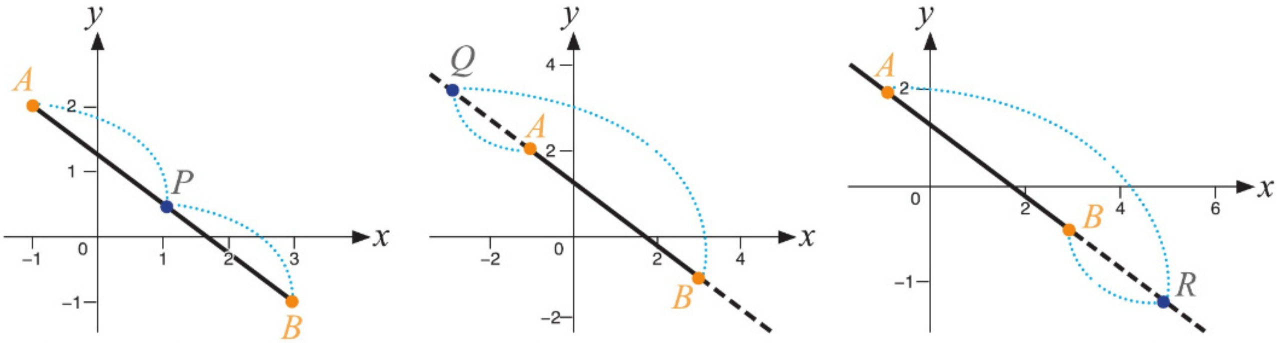
想一想 1 我们如何从坐标判别一个点是属于哪个象限？

1.2 定比分点

给定 A，B 两点，如果我们能在直线 AB 上找到点 P 使得 $AP:PB$ 等于一已知比值，点 P 就是线段 AB 的定比分点。

如图 1-2(a) 所示，若分点 P 在线段 AB 上，且 $AP:PB = m:n$，我们说 P 内分 (divide internally) AB 成 $m:n$。P 叫做内分点 (internal division point)。又如图 1-2(b)、(c) 所示，若分点 Q 在线段 AB 的延长线上，且 $AQ:QB = m:n$，我们说 Q 外分 (divide externally) AB 成 $m:n$。Q 叫做 AB 的外分点 (external division point)。

想一想 2 我们如何知道线段 AB 的外分点比较靠近 A 或是靠近 B？



（a）P 内分线段 AB 成 1:1　（b）Q 外分线段 AB 成 1:3　（c）R 外分线段 AB 成 3:1

图1–2

例题 1

已知 $A\,(-3, 2)$，$B\,(7, 8)$ 两点，求内分线段 AB 成 2:1 的点 P 的坐标。

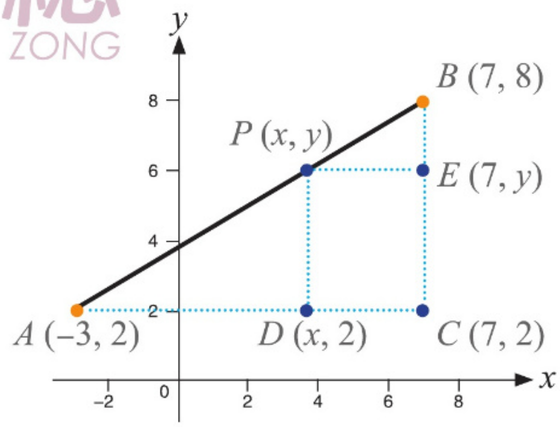
解 设 P 的坐标为 (x, y) 。如图所示，过 A 的水平线分别与过 P 及 B 的铅垂线相交于 D 及 C，过 P 的水平线交 BC 于 E。于是，$\Delta APD \sim \Delta PBE$ 。

$$\frac{AD}{PE}=\frac{AP}{PB}=\frac{2}{1}$$

$$\frac{x-(-3)}{7-x}=\frac{2}{1}$$

$$x+3=14-2x$$

$$x=\frac{11}{3}$$



同理，$\dfrac{PD}{BE}=\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{2}{1}$

$$\frac{y-2}{8-y}=\frac{2}{1}$$

$$y-2=16-2y$$

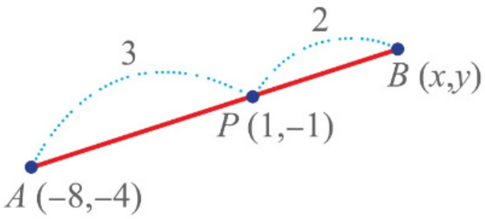
$$y=6$$

P 的坐标为 $\left(\dfrac{11}{3},6\right)$。

例题 2

已知点 P 内分线段 AB 成 3:2，点 A 与点 P 的坐标分别为 $(-8,-4)$ 及 $(1,-1)$ ，求点 B 的坐标。

解 设点 B 的坐标为 (x, y) ，作示意图如右。



利用相似比，可以列方程式：

$$\frac{1-(-8)}{x-1}=\frac{3}{2}$$
$$3x-3=18$$
$$x=7$$

$$\frac{-1-(-4)}{y-(-1)}=\frac{3}{2}$$
$$3y+3=6$$
$$y=1$$

B 的坐标为 $(7,1)$ 。

随堂练习 1.2a

已知 A，P 两点的坐标分别为 $(4, 5)$ 及 $(-2, -3)$ 。若点 P 内分线段 AB 成 2:3，求点 B 的坐标。

已知两点 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ ，点 $P(x, y)$ 内分线段 AB 成 $m:n$ ，如图 1-3 所示。

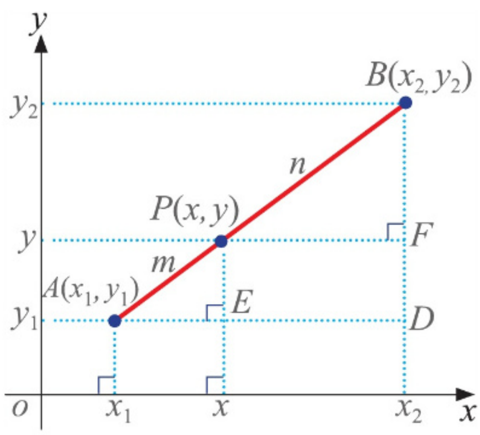


图 1-3

由于 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{m}{n}$，由图可得 $\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{m}{n}$，即

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}$$
$$nx-nx_1=mx_2-mx$$
$$(m+n)x=mx_2+nx_1$$
$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

同理可得， $y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$

因此，将线段 AB 内分成 $m:n$ 的点 $P\ (x, y)$ 中，

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n} \qquad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

这就是分比公式。

例题 3

若点 P 内分连接 $A\ (-5, 2)$ 及 $B\ (7, 4)$ 的线段 AB 成 2:1，求点 P 的坐标。

解 点 P 的坐标

$$=\left(\frac{2\times7+1\times(-5)}{2+1}, \frac{2\times4+1\times2}{2+1}\right)$$

$$=\left(3, \frac{10}{3}\right)$$

随堂练习 1.2b

用分比公式检验例题 2 的答案。

当 P 内分 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 的线段成 1:1 时，我们称 P 为 AB 的中点（midpoint）。由分比公式可得

中点公式：$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

想一想 3 中点公式跟统计学的哪个概念相近？

例题 4

已知两点 $A(-1,5)$ 及 $M(3,-2)$，且 M 是线段 AB 的中点。求点 B 的坐标。

解 设点 B 的坐标为(x,y)。AB 的中点坐标为$\left(\dfrac{-1+x}{2},\dfrac{5+y}{2}\right)$

$$\frac{-1+x}{2}=3 \qquad \frac{5+y}{2}=-2$$

$$-1+x=6 \qquad 5+y=-4$$

$$x=7 \qquad y=-9$$

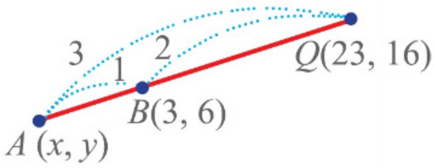
点 B 的坐标为$(7,-9)$。

例题 5

已知点 Q 外分线段 AB 成 $3:2$，点 Q 与点 B 的坐标分别为 $(23,16)$ 及 $(3,6)$，求点 A 的坐标。

解 分析题目可以知道点 Q 在线段 AB 的外侧，且 QA 比 QB 长。因此，点 Q 在靠近点 B 那一端且 $QB:BA=2:1$。

令点 A 的坐标为 (x,y)，并作示意图如右。



解法一 利用相似比，可列方程式：

$$\frac{23-3}{3-x}=\frac{2}{1} \qquad \frac{16-6}{6-y}=\frac{2}{1}$$

$$20=6-2x \qquad 10=12-2y$$

$$x=-7 \qquad y=1$$

点 A 的坐标为 $(-7,1)$。

解法二 应用分比公式，把 B 看作是内分点，可列方程式：

$$\frac{1\times 23+2x}{3}=3 \qquad \frac{1\times 16+2y}{3}=6$$

$$2x+23=9 \qquad 2y+16=18$$

$$x=-7 \qquad y=1$$

点 A 的坐标为 $(-7,1)$。

随堂练习 1.2c

已知线段 AB 的端点坐标为 $A(3,-4)$ 及 $B(-9,2)$。若点 P 是线段 AB 的外分点且 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{1}{4}$，求点 P 的坐标。

习题 1.2

1. 已知 $A(8,1)$，$B(-2,-9)$ 两点。求
   (a) 将线段 AB 内分成 $3:2$ 的点 P 的坐标；
   (b) 将线段 AB 外分成 $3:2$ 的点 Q 的坐标。

2. 已知两点 $A(11,1)$ 及 $B(2,6)$，点 P 在线段 AB 上使得 $AP=2PB$。求点 P 的坐标。

3. 已知 $A(3,2)$，$B(13,7)$ 两点，点 P 在线段 AB 的延长线上使得 $3PA=2PB$，求点 P 的坐标。

4. 已知 ΔABC 的其中两个顶点 $A(8,20)$ 及 $B(-7,14)$。若线段 AC 的中点位于 x 轴上，线段 BC 的中点位于 y 轴上，求点 C 的坐标。

5. 已知 $A(-2,-7)$，$B(1,-3)$ 及 $C(6,9)$ 是平行四边形 $ABCD$ 的其中三个顶点，求点 D 的坐标。

6. 一条直路的起点及终点的坐标分别为 $(0,-2)$ 及 $(11,-35)$，起点及终点处已安装了路灯。若要在路上等距地再安装 10 盏路灯，求从起点算起第 k 个路灯的坐标，$k=1,2,\cdots,10$。

1.3 多边形的面积

我们学过一些基本几何图形的面积公式。求其他不规则图形的面积时，一般可以利用切割或补遗的方式把图形化成数个基本图形，分别找面积后再求原图形的面积，如右图所示。

L型图的面积等于两个长方形面积的和

原图的面积等于大长方形面积减去小长方形的面积

坐标几何提供我们一个可以求多边形面积的简便方法。

三角形的面积

如图1–4所示，ΔABC 的三个顶点为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$。

作垂线 AD，BE 及 CF 分别交 x 轴于 D，E，F 三点，则

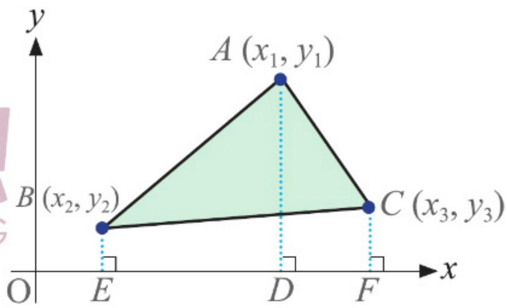


图1–4

ΔABC 的面积

= 梯形 $BEDA$ 的面积 + 梯形 $ADFC$ 的面积 – 梯形 $BEFC$ 的面积

$$=\frac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1+y_2)+\frac{1}{2}(x_3-x_1)(y_3+y_1)-\frac{1}{2}(x_3-x_2)(y_3+y_2)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3)$$

在上述的推导中，三角形的顶点是按逆时针方向排列的，所得的公式是三角形的面积。

随堂练习 1.3a

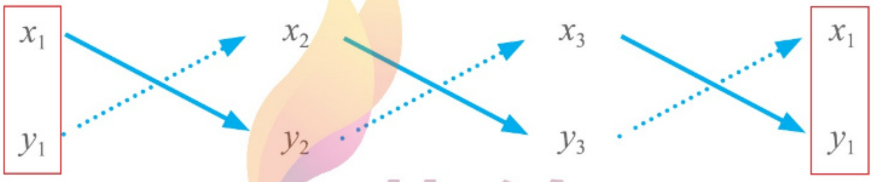
如果我们在上述的推导中按顺时针方向排列三角形的顶点，即把 (x_2, y_2) 与 (x_3, y_3) 对调，那么所得到的结果与三角形的面积有什么关系？

综合以上的结果，我们知道

> 若 ΔABC 的三个顶点为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$，则
> ΔABC 的面积 $=\dfrac{1}{2}\left|\,(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\,\right|$。

这个公式可以用以下的方法帮助记忆:

1. 将 ΔABC 三个顶点的坐标排列如下：

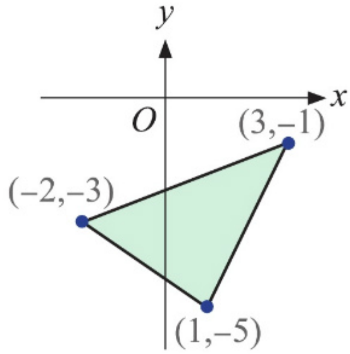


   其中第一点的坐标必须重复写在最后一列。

2. 将每个向下箭头的两数乘积之和，减去向上箭头的两数乘积之和，将结果取绝对值再除以 2，就可以得到三角形的面积。

例题 6

已知三角形的顶点为 $(-2,-3)$，$(1,-5)$，$(3,-1)$，求此三角形的面积。



解 $\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & -1 & -3 \end{array}$

三角形的面积

$$=\frac{1}{2}\left|\left[(-2)(-5)+(1)(-1)+(3)(-3)\right]-\left[(-3)(1)+(-5)(3)+(-1)(-2)\right]\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(10-1-9)-(-3-15+2)\right|$$

$$=8$$

例题 7

已知 ΔABC 的三个顶点分别为 $A(3,1)$，$B(1,-3)$ 及 $C(t,t-2)$。若 ΔABC 的面积等于 3，求点 C 的坐标。

$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & t & 3 \\ 1 & -3 & t-2 & 1 \end{array}$

解 $\frac{1}{2}\left|\left[-9+(t-2)+t\right]-\left[1-3t+3(t-2)\right]\right|=3$

$$\frac{1}{2}\left|2t-6\right|=3$$

$$2t-6=6 \text{ 或 } 2t-6=-6$$

$$t=6 \text{ 或 } t=0$$

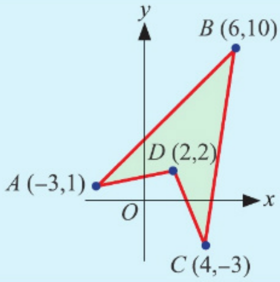
点 C 的坐标为 $(6,4)$ 或 $(0,-2)$。

想一想 4

若 ΔABC 的面积等于 0，A、B 及 C 三点有什么关系？

随堂练习 1.3b

四边形 $ABCD$ 的顶点坐标如右图所示，求 ΔABD 与 ΔBCD 的面积之和。



多边形的面积

已知四边形 $ABCD$ 的顶点按逆时针的顺序为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ 及 $D(x_4, y_4)$。要如何求 $ABCD$ 的面积？

我们可以将四边形的面积表示成两个三角形的面积之和，如图 1–5 所示。

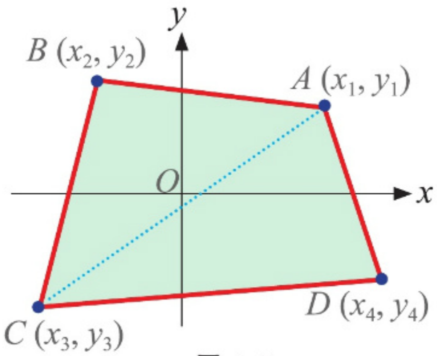


图 1–5

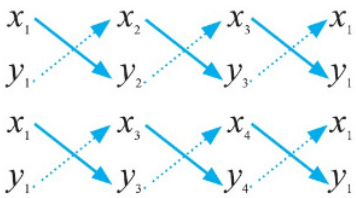
四边形 $ABCD$ 的面积

$= \Delta ABC$ 的面积 $+ \Delta ACD$ 的面积

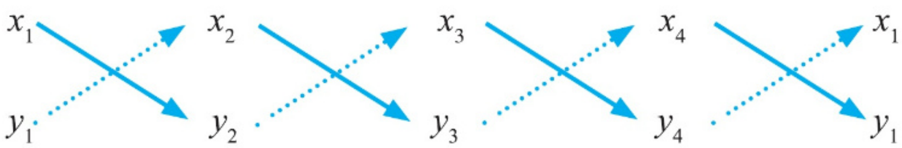
$$=\frac{1}{2}\left[\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1\right)-\left(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(x_1y_3+x_3y_4+x_4y_1\right)-\left(x_3y_1+x_4y_3+x_1y_4\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1\right)-\left(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4\right)\right]$$



上述的公式可以用以下的方法帮助记忆：



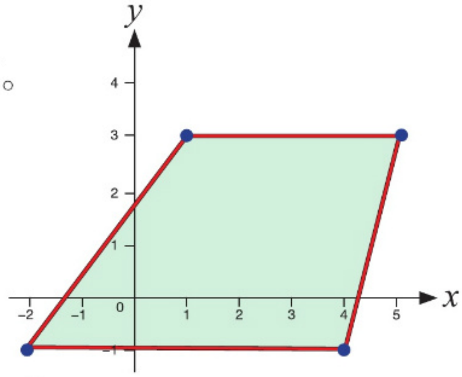
用箭头向下的两数乘积之和，减去箭头向上的两数乘积之和，再将结果除以 2，便得到四边形的面积。但必须注意，四个顶点必须依序排列，逆时针排列得正值，顺时针排列得负值。因此，

> 若一个四边形的顶点依序为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 及 (x_4, y_4)，则四边形的面积 $=\frac{1}{2}\left|\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1\right)-\left(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4\right)\right|$。

例题 8

求以 (1,3) ，(5,3)，(−2,−1) 及 (4,−1) 为顶点的四边形的面积。

解 先在坐标平面上标出各点，如右图所示。
从任意点开始，依序将各顶点的坐标写下。



$$\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 3 \end{array}$$

四边形的面积

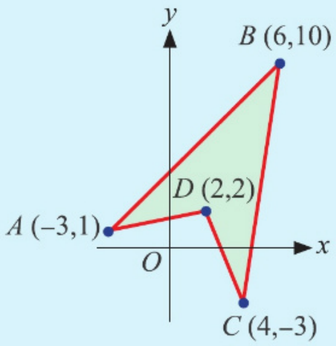
$$= \frac{1}{2}\left|\left[(1)(-1)+(-2)(-1)+(4)(3)+(5)(3)\right]-\left[(3)(-2)+(-1)(4)+(-1)(5)+(3)(1)\right]\right|$$

$$= 20$$

观察此四边形是一个梯形，我们也可以用梯形的公式求其面积。

随堂练习 1.3c

四边形 $ABCD$ 的顶点坐标如右图所示，用四边形的面积公式求四边形 $ABCD$ 的面积。你的答案是否与随堂练习 1.3b 的答案相同？



以上的三角形及四边形的面积公式也可以推广到任意多边形，我们以例子示范其用途。

例题 9

求以 $(-3,-1)$，$(-1,4)$，$(5,0)$，$(4,4)$ 及 $(0,-2)$ 为顶点的凸五边形 (convex pentagon) 的面积。

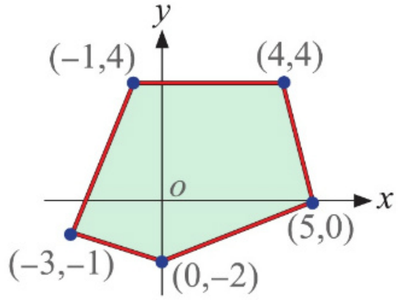
解 先在坐标平面上标出各点，如图所示。
从任意点开始，依序将各顶点的坐标写下。

$$\begin{array}{cccccc} 4 & -1 & -3 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & -2 & 0 & 4 \end{array}$$

五边形的面积

$$=\frac{1}{2}\left|(16+1+6+0+20)-(-4-12+0-10+0)\right|$$

$$=\frac{69}{2}$$



习题 1.3

1. 已知 ΔABC 的三个顶点为 $A(1,3)$，$B(-7,6)$，$C(5,-1)$，求 ΔABC 的面积。

2. 已知 ΔABC 的面积等于 13，它的其中两个顶点为 $A(4,2)$ 及 $B(-3,-6)$，顶点 C 落在 x 轴上。求点 C 的坐标。

3. 已知 ΔPQR 的三个顶点分别是 $P(x,x-3)$，$Q(-3,2)$ 及 $R(4,-5)$，若 ΔPQR 的面积等于 42，求点 P 的坐标。

4. 已知 $PQRS$ 是风筝形，$PQ=PS$，$RQ=RS$。若 P，R，S 的坐标分别为 $(6,2)$，$(-2,-2)$ 及 $(6,-3)$，求 $PQRS$ 的面积。

5. 求以 $(-1,6)$，$(-3,-9)$，$(3,9)$ 及 $(5,-8)$ 为顶点的四边形的面积。

6. 已知一个凸五边形的顶点为 $(1,5)$，$(-2,-4)$，$(-4,0)$，$(5,3)$，$(5,0)$，求它的面积。

1.4 直线的斜率

乘车出游时，同学们可能曾经留意到道路两旁出现如右图的标志，此标志意在提醒司机们前方有斜坡。图 1–6 的 10% 代表什么意思呢？

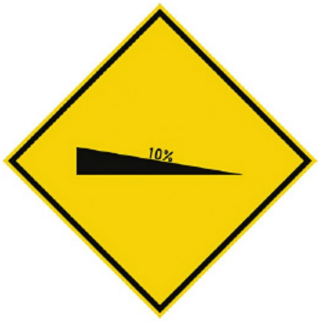
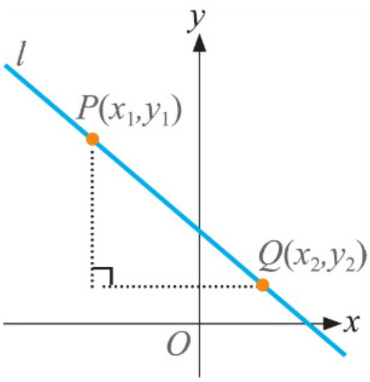


图1–6

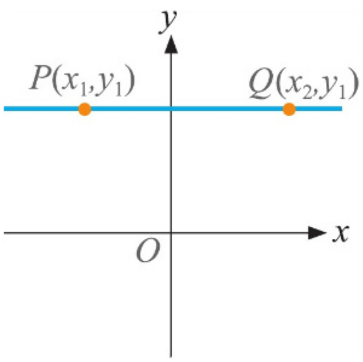
对于一给定直线 l，我们可以定义其斜率 (gradient/slope) 如下：

> 设 $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$ 是直线上的任意两点，
>
> 直线的斜率 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$。

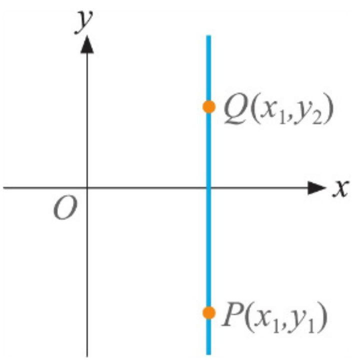


从定义可知，当直线平行于 x 轴时，其斜率为 0，见图 1–7(a)。

当直线平行于 y 轴时，由于分母为 0，斜率不存在，见图 1–7(b)。



(a) 斜率为0

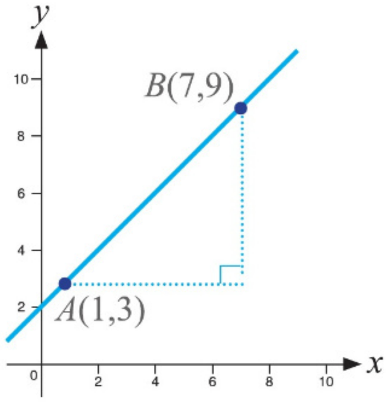


(b) 斜率不存在

图 1–7

例题 10

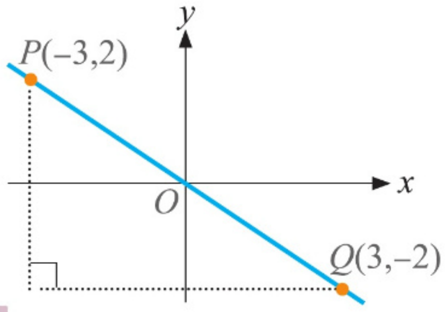
已知直线 l 经过 $A(1,3)$ 及 $B(7,\ 9)$ 两点，求其斜率。



解 斜率 $m=\dfrac{9-3}{7-1}=1$

例题 11

已知直线 l 经过 $P(-3,2)$ 及 $Q(3,-2)$ 两点，求其斜率。



解 斜率 $m=\dfrac{2-(-2)}{-3-3}=-\dfrac{2}{3}$

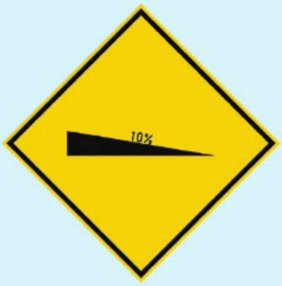
斜率就是沿着直线移动，当横轴增加一个单位时，纵轴方向所改变的量。

随堂练习 1.4

1. 求经过点 $P(-5,-4)$ 及 $Q(1,-8)$ 两点的直线的斜率。

2. 已知直线 l 经过 $C(3,6)$ 及 $D(7,k)$ 两点，且其斜率为 $-\dfrac{1}{2}$。求 k 的值。

3. 右图中的 10% 表示路面的坡度为 1:10，即每前进 10 公尺下降 1 公尺的意思。求此时路面与水平面所形成的倾斜角。



1.5 直线方程式

我们知道二元一次方程式的图像是直线。给定一条直线要如何求得它的方程式呢?

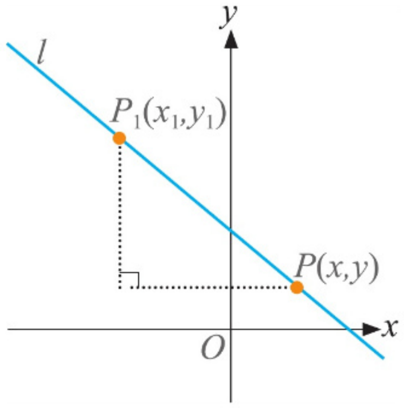


图1–8

如图 1–8 所示，$P_1(x_1, y_1)$ 是直线 l 上的一点，直线 l 的斜率是 m。设 $P(x, y)$ 是直线 l 上的任意一点，则

直线 l 的斜率 $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$。

由此可得，直线 l 的方程式为

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

这个式子称为点斜式。

若 P_1 的坐标为 $(0, c)$，则 $x_1 = 0$, $y_1 = c$。此时，方程式可以写成

$$y = mx + c$$

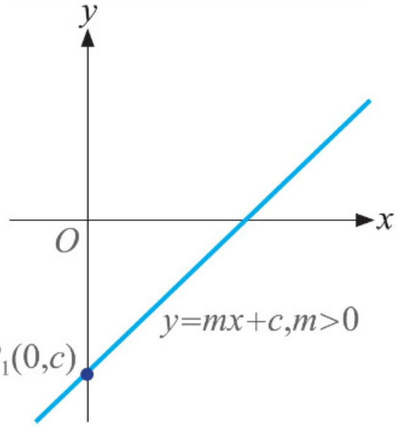


图 1–9

这个式子称为斜截式。这里的 c 是直线与 y 轴的交点的 y 坐标，叫做 y 截距(y-intercept)，见图 1–9。同理，一直线与 x 轴的交点的 x 坐标为该直线的 x 截距。

探索活动 1

目的：观察直线的变化。

工具：https://www.geogebra.org/m/pqqmcut8

步骤：1. 滑动滑杆 m，观察直线的变化。

2. 滑动滑杆 c，观察直线的变化。

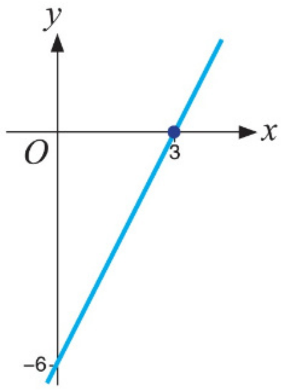
例题 12

已知一直线的斜率为 $\frac{2}{3}$，且经过点 $(-2,4)$。求此直线的方程式。

解 直线的方程式为 $y-4=\frac{2}{3}\left[x-(-2)\right]$

方程式可以写成更简洁的形式，即 $2x-3y+16=0$。

例题 13



求通过点 $(3,0)$ 且斜率为 2 的直线的 y 截距。

解 $y-0=2(x-3)$

$y=2x-6$

由此，我们知道 y 截距为 -6。

例题 14

求过点 $(3,4)$ 与点 $(7,6)$ 的直线方程式。

解

$$m=\frac{6-4}{7-3}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ 直线的方程式为 $$y-4=\frac{1}{2}(x-3)$$

即 $x-2y+5=0$

不同表达式的方程式各有其方便之处。同学们应该熟悉它们的转换。

我们看到，点斜式都可以写成 $ax+by+c=0$ 的形式。$ax+by+c=0$ 就称为直线的一般式 (general form)。

想一想 5

为什么我们不把 $y=mx+c$ 称为一般式呢？

随堂练习 1.5a

1. 求下列各直线的一般式：
   (a) 直线斜率为$-\dfrac{3}{4}$，且过点$(-4,6)$；
   (b) 经过$(-4,6)$与$(4,\ 2)$两点；
   (c) 经过$(-4,-2)$且与x轴垂直的线。
2. 已知直线$l:5x-3y+15=0$，求l的斜率与y截距。

平行直线的斜率相等

如图 1–10 所示，直线 l_1 与直线 l_2 平行，但不平行于y轴时，它们的斜率 m_1 与 m_2 也相等。反之，若直线 l_1 与 l_2 的斜率相等，则它们平行。

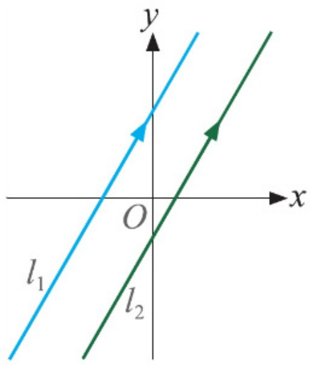


图 1–10

我们可以将重合的两直线看作是平行的特例。当两直线重合时，他们的斜率也相等。要注意的是，单从斜率相等是无法得知两直线是平行或是重合的。

想一想 6 为什么我们讨论直线l_1与直线l_2的斜率时，要说明l_1及l_2不平行于y轴？

探索活动 2

目的：点旋转 90° 的坐标变化。

工具：https://www.geogebra.org/m/sz6rhtad

步骤：1. 随意移动点 A。写出 A' 所在的象限及坐标。A' 的坐标与A的坐标有什么关系？

2. 滑动 α 滑杆至 270° 。写出 A' 的坐标及所在象限。A' 的坐标与 A 的坐标有什么关系？

从探索活动 2，我们知道，

1. 将点 (x, y) 绕原点旋转 90°后的像的坐标为 $(-y, x)$。
2. 将点 (x, y) 绕原点旋转 270°后的像的坐标为 $(y, -x)$。

两条直线垂直的条件

从探索活动 2，我们观察点 A 在绕原点逆时针旋转 90° 后，其像为 A'。坐标的变化如图 1–11 所示。

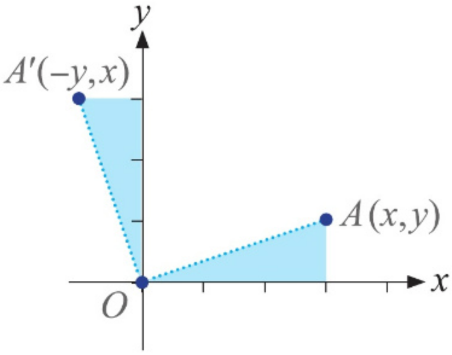


图 1–11

线段 OA 的斜率，$m_{OA}=\dfrac{y}{x}$

线段 OA' 的斜率，$m_{OA'}=\dfrac{x-0}{-y-0}=-\dfrac{x}{y}$

于是，$m_{OA}\times m_{OA'}=\dfrac{y}{x}\times\left(-\dfrac{x}{y}\right)=-1$。

如果点 A 顺时针旋转 90°，其像为 A''，则 $m_{OA'}=m_{OA''}$。我们同样有 $m_{OA}\times m_{OA''}=-1$。

由此我们知道，除了水平线与铅垂线，两直线互相垂直时，它们斜率的积等于 -1。反之，若直线 l_1 与 l_2 的斜率的积等于 -1，则它们互相垂直。

例题 15

已知两条直线 $l_1: 2x+3y-2=0$，$l_2: 4x+6y+8=0$。求证 $l_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} l_2$。

证 将 $l_1: 2x+3y-2=0$ 写成 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$，其中 $m_1=-\dfrac{2}{3}$。

将 $l_2: 4x+6y+8=0$ 写成 $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3}$，其中 $m_2=-\dfrac{2}{3}$。

$\because m_1=m_2$，$\therefore l_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} l_2$。

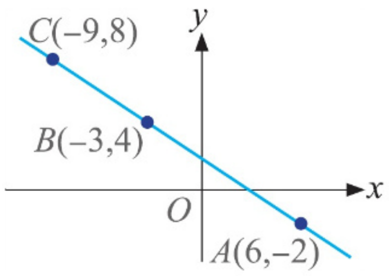
例题 16

证明 $A(6,-2)$，$B(-3,4)$ 及 $C(-9,8)$ 三点在同一直线上。

证 直线 AB 的斜率 $m_{AB}=\dfrac{4-(-2)}{-3-6}=-\dfrac{2}{3}$

直线 BC 的斜率 $m_{BC}=\dfrac{8-4}{-9-(-3)}=-\dfrac{2}{3}$

由于直线 AB 与直线 BC 的斜率相等，且有公共点 B，因此 A、B、C 三点共线 (collinear)。



随堂练习 1.5b

求经过点 $(3,-7)$ 且与直线 $5x-8y=1$ 平行的直线的方程式。

例题 17

已知 A、B 两点的坐标分别为 $A(-2,5)$ 及 $B(5,1)$。若点 C 在直线 $y=-1$ 上且 $AC\perp BC$，求点 C 的坐标。

解 设点 C 的坐标为 $(c,-1)$。

$\because\ AC\perp BC$

$\therefore\ m_{AC}\cdot m_{BC}=-1$

$$\frac{-1-5}{c-(-2)}\cdot\frac{-1-1}{c-5}=-1$$

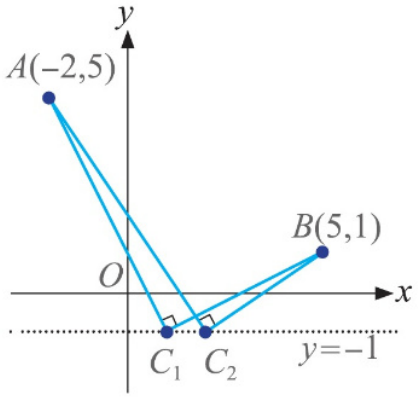
$$(c+2)(c-5)=-12$$

$$c^2-3c+2=0$$

$$(c-1)(c-2)=0$$

$$c=1 \text{ 或 } c=2$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(1,-1)$ 或 $(2,-1)$。



想一想

7 在上图中，点 A，B，C_1，C_2 有什么关系？

随堂练习 1.5c

1. 若 $P(-4,5)$、$Q(-2,2)$ 及 $R(2,k)$ 三点在同一直线上，求 k 的值。
2. 已知连接点 $(5,7)$ 和点 $(0,-3)$ 的直线与连接点 $(1,-3)$ 和点 $(3,y)$ 的直线互相垂直，求 y 的值。

例题 18

求经过点 $(-2,5)$ 且与直线 $3x+4y=6$ 垂直的直线方程式。

解 直线 $3x+4y=6$ 的斜率是 $-\dfrac{3}{4}$

所求的直线与直线 $3x+4y=6$ 垂直，

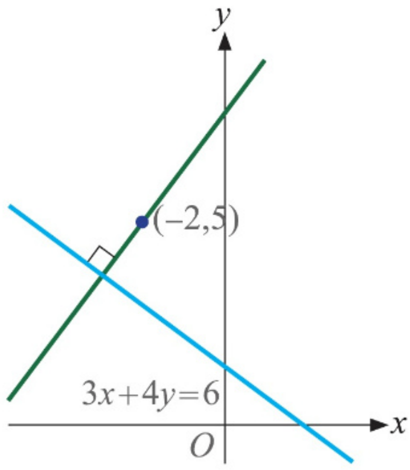
设其斜率为 m，则 $m\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1$

$$m=\frac{4}{3}$$

$\therefore$ 经过点 $(-2,5)$ 且与直线 $3x+4y=6$

垂直的直线方程式为 $y-5=\dfrac{4}{3}\left[x-(-2)\right]$，

即 $4x-3y+23=0$。



随堂练习 1.5d

已知 $P(-5,-3)$ 及 $Q(-1,-1)$ 两点，求线段 PQ 的垂直平分线的方程式。

习题 1.5

1. 若 $A(2,8)$，$B(5,3)$ 及 $C(7,k)$ 三点在同一直线上，求 k 的值。

2. 证明直线 $l_1:3x+2y-2=0$ 平行于直线 $l_2:6x+4y+7=0$，且垂直于直线 $l_3:2x-3y-7=0$。

3. 已知直线 l 经过点 $(5,-3)$ 且与直线 $3x-5y=5$ 平行。若直线 l 与两坐标轴相交于 A、B 两点，求 ΔOAB 的面积，其中 O 是原点。

4. 若直线 $3x+5y-10=0$ 与直线 $kx-(k-1)y-3=0$ 互相垂直，求 k 的值。

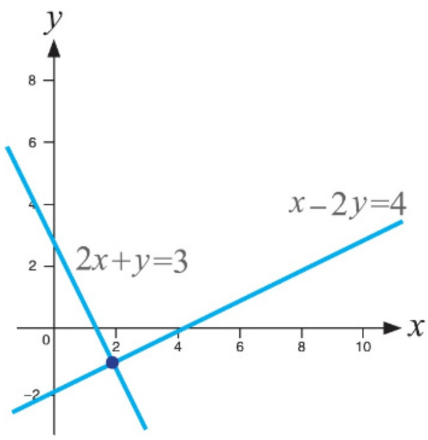
5. 一个三角形的三个顶点坐标为 $A(6,\ 3)$，$B(1,\ 2)$ 和 $C(-7,\ 2)$。证明 AB 及 BC 的中点的连线平行于 AC。

1.6 两直线的位置关系

在前面的讨论中，我们知道平面上的两条直线的位置关系可以是：相交，平行或重合。两直线的位置关系不止有其几何上的意义，这三种情况也代表了二元一次方程组的三种不同形式的解。

例题 19

求直线 $l_1:x-2y=4$ 与 $l_2:2x+y=3$ 的交点。



解 解方程组 $\begin{cases} x-2y=4 & \text{------}(1) \\ 2x+y=3 & \text{------}(2) \end{cases}$

由 (1)： $x=2y+4$ ------(3)

将 (3) 代入 (2)： $5y=-5$

$y=-1$

将 $y=-1$ 代入(3)：$x=2$

$\therefore$ 直线 l_1 与 l_2 的交点是 $(2,-1)$。

例题 20

求直线 $l_1: x-2y=4$ 与 $l_2: 2x-4y=3$ 的交点。

解法一 解方程组 $\begin{cases} x-2y=4 & \text{------}(1) \\ 2x-4y=3 & \text{------}(2) \end{cases}$

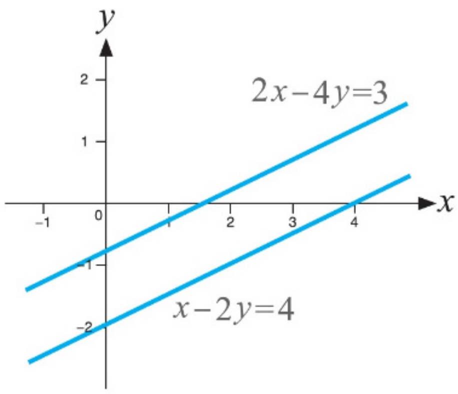
由 (1) 得：$x=2y+4$ ------(3)

将 (3) 代入 (2) 得：$4y+8-4y=3$

$0y=-5$

没有任何的 y 乘上 0 会等于 -5 。

$\therefore$ 两直线没有交点。



解法二 将上述两个方程式化为斜截式：

$$l_1: y=\frac{1}{2}x-2 \text{ 及 } l_2: y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$

由此可知 l_1 的斜率等于 l_2 的斜率，但是它们的 y 截距不相等。因此，l_1 平行于 l_2，两直线没有交点。

例题 21

解方程组 $\begin{cases} x+y=3 & \text{------}(1) \\ -5y=5x-15 & \text{------}(2) \end{cases}$

解法一 由 (2)： $y=-x+3$ ------(3)

将 (3) 代入 (1)： $0x=0$

任何数乘上 0 都等于 0，因此 x 可以是任意实数。

当 x 固定后，y 的值必须满足(3)。任何满足(3)的 (x,y) 都是解，如 $(1,2),(-3,6),\cdots$ 。方程组的解集可以写成 $\{(t,-t+3) \mid t\in R\}$ 。

解法二 将上述两个方程式化为斜截式：

$$x+y=3 \Rightarrow y=-x+3$$

$$-5y=5x-15 \Rightarrow y=-x+3$$

此时，l_1 的斜率等于 l_2 的斜率，且它们的 y 截距相等。两方程式等价，故其图像重合。方程组的解集可以写成 $\{(t,-t+3) \mid t\in R\}$ 。

综合上述讨论，设两直线的方程式为 $l_1: a_1x+b_1y=c_1$ 及 $l_2: a_2x+b_2y=c_2$。

两直线的位置关系	方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$
l_1 与 l_2 相交	有唯一解
l_1 与 l_2 平行（不重合）	无解
l_1 与 l_2 重合	有无限多组解

例题 22

已知两条直线 $l_1: x+my+6=0$ 及 $l_2: (m-2)x+3y+2m=0$。当 m 为何值时，l_1 与 l_2

(a) 平行但不重合?

(b) 重合?

(c) 相交于一点?

解 若直线 $l_1: x+my+6=0$ 与直线 $l_2: (m-2)x+3y+2m=0$ 平行，

$$-\frac{1}{m}=-\frac{m-2}{3}$$

$$m^2-2m-3=0$$

$$(m-3)(m+1)=0$$

$$m=3 \text{ 或 } m=-1$$

当 $m=-1$，$l_1: x-y+6=0$，$l_2: -3x+3y-2=0$。

当 $m=3$，$l_1: x+3y+6=0$，$l_2: x+3y+6=0$。

(a) 当 $m=-1$，l_1 与 l_2 平行但不重合。

(b) 当 $m=3$，l_1 与 l_2 重合。

(c) 当 $m\neq-1$ 且 $m\neq3$，l_1 与 l_2 相交于一点。

随堂练习 1.6

1. 已知直线 $3x+ky=5$ 经过直线 $x+2y=3$ 与直线 $2x+5y=4$ 的交点，求 k 的值。
2. 直线 $l_1: y=2x-6$ 及 $l_2: 4x-2y=6$ 是相交，平行还是重合？

习题 1.6

1. 已知直线 $2kx+(k+1)y-9=0$ 与直线 $(2k-1)x-y+3=0$ 的交点落在 y 轴上，求 k 的值及交点的坐标。

2. 已知直线 $kx+2y=10$ 与直线 $3x+y+3=0$ 的交点落在直线 $x+y=1$ 上，求 k 的值。

3. 已知直线 $2ax+(b+1)y=18$ 与直线 $ax+(b-1)y=16$ 相交于点 $(3,-2)$，求 a 与 b 的值。

4. 考虑两条直线 $\begin{cases} x-(a-1)y=4 \\ (a-1)x-y=3 \end{cases}$。当 a 为何值时，两条直线

   (a) 平行但不重合？
   (b) 重合？
   (c) 相交于一点？

1.7 点到直线的距离

从一点 P 作垂直于直线 l_1 的线与 l_1 相交于 Q，点 Q 称为 P 到 l_1 的垂足。点 P 到 l_1 的距离就是 P 与 Q 距离，如图 1–12 所示。

若直线 l_2 经过 P 且平行于 l_1，那么两直线 l_1 与 l_2 之间的距离就是点 P 到 l_1 的距离。

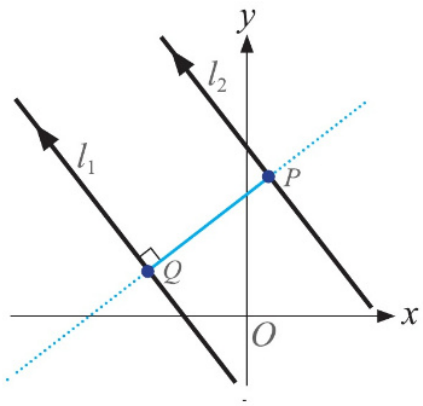


图 1–12

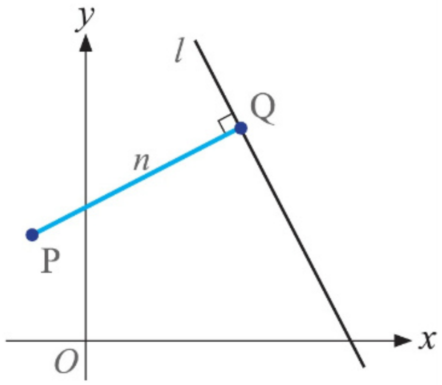
例题 23

求点 $P(-1,\ 2)$ 到直线 $l: 2x+y-10=0$ 的距离。

解 l 的斜率为 -2。

与 l 垂直且通过 P 的直线方程式为

$$n: y-2=\frac{1}{2}[x-(-1)] \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$



解方程组 $\begin{cases} 2x+y-10=0 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases}$

得 l 与 n 的交点为 $Q(3,4)$。

$$PQ^2=[3-(-1)]^2+(4-2)^2=20$$

点 $P(-1,\ 2)$ 到直线 $2x+y-10=0$ 的距离 $PQ=2\sqrt{5}$。

例题 23 的方法虽然简单，但是计算的步骤比较多。利用这个方法，我们可以推导出点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l: ax+by+c=0$ 的距离公式。

l 的斜率为 $-\dfrac{a}{b}$

过 P 且垂直于 l 的直线 $n: y-y_0=\dfrac{b}{a}(x-x_0)$ 。

解方程组 $\begin{cases} ax+by+c=0 & \text{------(1)} \\ y=\frac{b}{a}(x-x_0)+y_0 & \text{------(2)} \end{cases}$

将(2)代入(1)： $ax+b\left[\dfrac{b}{a}(x-x_0)+y_0\right]+c=0$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)x=\frac{b^2}{a}x_0-by_0-c$$

$$x=\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)\left(b^2x_0-aby_0-ac\right)$$

$$x-x_0=\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)\left(-ax_0-by_0-c\right)$$

$$\begin{aligned}PQ^2&=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\\&=(x-x_0)^2+\frac{b^2}{a^2}(x-x_0)^2\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2}(x-x_0)^2\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2(-ax_0-by_0-c)^2\\&=\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)(-ax_0-by_0-c)^2\end{aligned}$$

$$PQ=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

因此，

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:ax+by+c=0$ 的距离 $=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

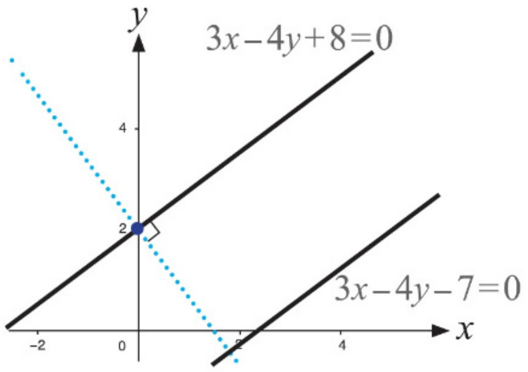
随堂练习 1.7a

利用上述公式解例题 23。

例题 24

求直线 $3x-4y+8=0$ 与直线 $3x-4y-7=0$ 的距离。

解 当两条直线平行时，先找出其中一条直线上的一点，再利用点到直线的距离公式，即可求出两条平行线之间的距离。



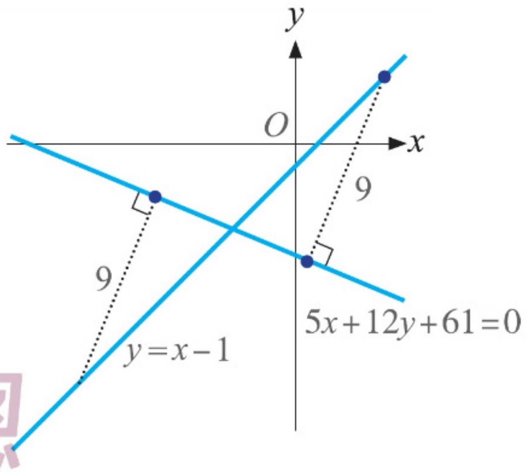
在直线 $3x-4y+8=0$ 上，令 $x=0$，得 $y=2$。

用点到直线的距离公式求从点 $(0, 2)$ 到直线 $3x-4y-7=0$ 的距离，即

两条直线的距离 $=\dfrac{|3(0)-4(2)-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

例题 25

已知点 P 在直线 $y=x-1$ 上，且点 P 到直线 $5x+12y+61=0$ 的距离为 9，求点 P 的坐标。



解 设点 P 的坐标为 $(a, a-1)$。则

$$\frac{|5a+12(a-1)+61|}{\sqrt{5^2+12^2}}=9$$

$$\frac{17a+49}{13}=\pm 9$$

$$17a+49=\pm 117$$

$$a=4 \text{ 或 } a=-\frac{166}{17}$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(4, 3)$ 或 $\left(-\dfrac{166}{17}, -\dfrac{183}{17}\right)$。

随堂练习 1.7b

求直线 $x+y+1=0$ 与直线 $x+y-1=0$ 之间的距离。

想一想 8

两平行线之间的距离是否等于它们的截距的差？

习题 1.7

1. 求点 $(6,-4)$ 到直线 $3x+7y=12$ 的距离。

2. 已知点 $A(a,6)$ 到直线 $3x-4y=2$ 的距离等于 4，求 a 的值。

3. 求直线 $12x-5y=32$ 与直线 $12x-5y+33=0$ 的距离。

4. 求直线 $6x+8y=6$ 与直线 $3x+4y=48$ 的距离。

5. 已知点 P 在直线 $x+2y+5=0$ 上，且点 P 到直线 $5x-12y=55$ 的距离等于 4，求点 P 的坐标。

总复习题 1

1. 已知 ΔABC 的顶点为 $A(1,-2)$，$B(-3,-1)$ 及 $C(-1,7)$。
   (a) 证明 ΔABC 是直角三角形。
   (b) 求 ΔABC 的面积。
   (c) 求点 D 使得 $ABCD$ 是长方形。

2. 已知四边形 $ABCD$ 四个边 AB，BC，CD 及 DA 的中点分别为 $(-1,4)$，$(5,5)$，$(6,0)$ 及 $(0,-1)$，点 A 在 x 轴上，点 B 在 y 轴上。求 A，B，C，D 的坐标。

3. 已知 $A(h,-3)$，$B(2,k)$，$C(6,12)$ 在同一直线上，且点 A 外分线段 BC 成 $3:5$，求 h 与 k 的值。

4. 已知 $P(-7,17)$，$Q(3,k)$，$R(9,-7)$ 三点在同一直线上，
   (a) 求 $PQ:PR$。
   (b) 求 k 的值。

5. 已知直线 $ax+(b+1)y=7$ 与直线 $(a+1)x+2by=8$ 相交于点 $(-4,5)$，求 a 与 b 的值。

6. 凸五边形 $ABCDE$ 的顶点分别为 $A(4,2)$，$B(0,4)$，$C(-4,-2)$，$D(-1,-4)$及 $E(2,t)$。若其面积等于 39，求 t 的值。

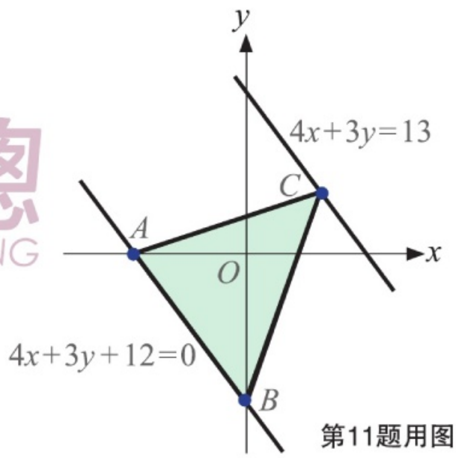
7. 若 $A(p,\ 2)$，$B(3,\ 5)$，$C(7,\ 11)$ 三点共线，求 p 的值。

8. (a) 当 a 为何值时，直线 $l_1: x+2ay-1=0$ 与 $l_2:(3a-1)x-ay-1=0$ 互相平行？
   (b) 当 m 、n 各为何值时，直线 $l_3: x+2y=4$ 与 $l_4: mx+y=n$ 重合？
   (c) 当 h 为何值时，直线 $l_5: 4hx+y=1$ 与 $l_6:(1-h)x+y=-1$ 互相垂直？

9. 已知直线 l_1 经过点 $P(5,6)$ 且与直线 $l_2: 3x+2y=1$ 垂直，求 l_1 的方程式。据此，求由点 P 到直线 l_2 的垂足。

10. 将直线 $ax+by=c,\ c\neq 0$ 的常数项化为 1，即 $\dfrac{x}{A}+\dfrac{y}{B}=1$。
    (a) 此时 A,B 有什么几何意义？
    (b) 一直线经过点 $(3,2)$，且其在两坐标轴的截距相等，求此直线的方程式。

11. 如右图所示，点 A 与点 B 分别是直线 $4x+3y+12=0$ 与 x 轴及 y 轴的交点，点 C 在直线 $4x+3y=13$ 上。求 ΔABC 的面积。



第11题用图

12. 若直线 $l: 6x+4y=37$ 是线段 CD 的垂直平分线，点 C 的坐标是 $(5,5)$，求
    (a) 线段 CD 的方程式；
    (b) 直线 l 与线段 CD 的交点；
    (c) 点 D 的坐标。

13. 已知 ΔABC 的顶点为 $A(0,5)$，$B(1,-2)$及 $C(-6,4)$。证明
    (a) ΔABC 三个边的中垂线共点；
    (b) ΔABC 三条中线共点。

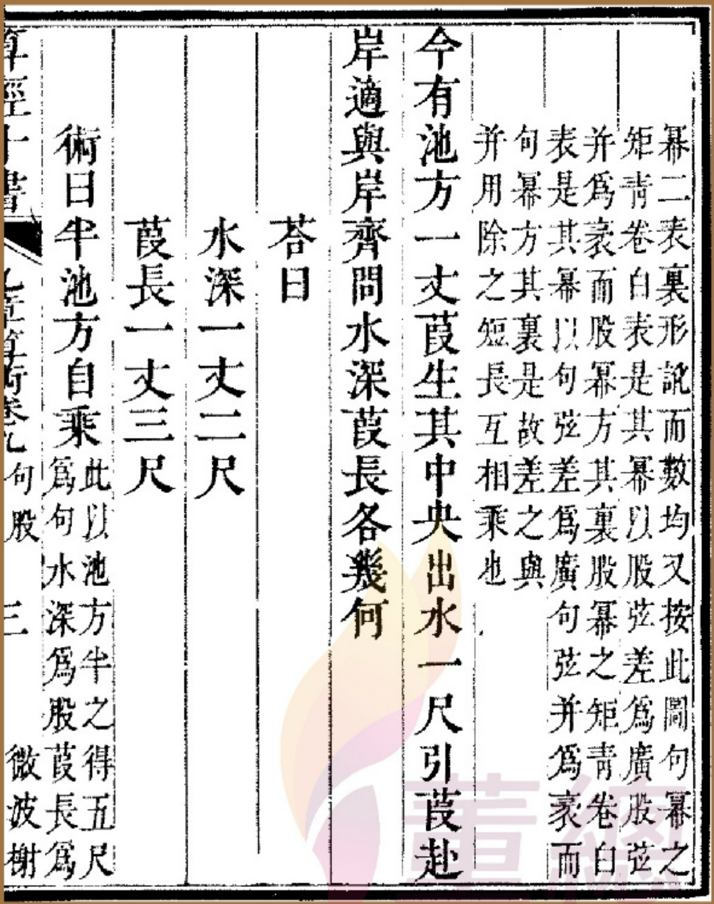
14. 光线从点 $P(-2,3)$ 射到 x 轴上的一点 $Q(1,0)$ 后被 x 轴反射。求反射光线所在直线的方程式。

15. 已知点 $A(1,1)$ 及 $B(7,-11)$，AB 线段上的点 P，Q 使得 $AP:PQ:QB=1:2:3$。求 P 与 Q 的坐标。

16. 已知点 $A(0,5)$，$B(4,7)$ 及 $C(2t-16,t)$。证明 ΔABC 的面积为一常数，并从几何上解释为什么 ΔABC 的面积与 t 无关。

17. 在弹性限度内，弹簧所伸长的长度与所挂物的重量成正比。一弹簧在悬挂 10N 的物体时，伸长了 1.5 cm；悬挂 40N 的物体时，长度为 20 cm。写出此弹簧长度 l (cm) 与所挂物的重量 w (N) 的关系式。

18. 试从卫星图像中找到你的学校，并根据图像的比例尺，结合本章的知识，与同学讨论要如何估计校园的面积。对讨论的结果进行实际计算，并与学校的真实面积作比较。除了使用本章的方法，是否还有其他方式估计校园的面积？



冪二表裏形訛而數均又按此圖句冪之矩青卷白表是其冪以股弦差爲廣股弦并爲袤而股冪方其裏股冪之矩青卷白表是其冪以句弦差爲廣句弦并爲袤而句冪方其裏是故差之與并用除之短長互相乘也

今有池方一丈葭生其中央出水一尺引葭赴岸適與岸齊問水深葭長各幾何

荅曰

水深一丈二尺

葭長一丈三尺

術曰半池方自乘此以池方半之得五尺爲句水深爲股葭長爲

“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何？”

上文是中国经典数学著作《九章算术》中的一道名题“引葭赴岸”。其译文为：一正方形池塘的边长为一丈。一棵芦苇在池塘的正中央，露出水面一尺。若把它拉向岸边，正好碰到岸沿。问水深及芦苇的高度各为多少？（一丈等于十尺）

那么我们该如何解决此问题呢？

2

一元二次方程式与二次函数

学习目标

- 认识一元二次方程式
- 运用一元二次方程式的根的判别式
- 理解一元二次方程式的根与系数的关系
- 将二次函数写成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式
- 掌握二次函数的图像

2.1 一元二次方程式的根的判别式

只含有一个变数，且变数的最高次数是二次的多项式方程式叫做一元二次方程式 (quadratic equation in one variable)。任何一个关于变数 x 的一元二次方程式都可化为以下形式：

$ax^2+bx+c=0$，其中 a，b 及 c 为实数，$a\neq 0$

想一想 1 为何一元二次方程式的二次项的系数不能为零?

这种形式的一元二次方程式称为一元二次方程式的一般式。ax^2 为二次项 (quadratic term)，bx 为一次项 (linear term)，c 称为常数项 (constant term)。而 a、b 分别是二次项及一次项的系数 (coefficient)。

下表举例说明：

一元二次方程式	一般式	二次项	一次项	常数项	二次项系数	一次项系数
$4x=3x^2$	$3x^2-4x=0$	$3x^2$	$-4x$	0	3	-4
$2y^2=5-y$	$2y^2+y-5=0$	$2y^2$	y	-5	2	1
$a(a-6)=1$	$a^2-6a-1=0$	a^2	$-6a$	-1	1	-6

随堂练习 2.1a

1. 一元二次方程式 $-7x^2+5x-12=0$ 的二次项是______，一次项是______，常数项是______。
2. 一元二次方程式 $8x^2+\frac{1}{3}=0$ 的二次项的系数是____，一次项的系数是____。

一元二次方程式的根的判别式

在初中，我们已学过一元二次方程式的常用解法：因式分解法、配方法及公式法。然而我们可以在不求解的情况下了解根的性质。以下我们先复习如何用配方法从一元二次方程式导出公式法。

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

因此，一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，$a\neq 0$ 的两个根是 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中 b^2-4ac 叫做根的判别式 (discriminant)，一般上以 Δ 表示。

（一）若 $b^2-4ac>0$，方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异的实根 (distinct real roots)，即

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 及 } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

（二）若 $b^2-4ac=0$，方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实根 (equal real roots)，或称等根，即

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

（三）若 $b^2-4ac<0$，方程式 $ax^2+bx+c=0$ 没有实根。

我们总结如下：

$\Delta=b^2-4ac$ 的值	$ax^2+bx+c=0$ 的根的性质
$\Delta>0$	两个相异的实根
$\Delta=0$	两个相等的实根
$\Delta<0$	没有实根

想一想 2 若方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有实根，该如何表示判别式的值？

例题 1

在不解出方程式的情况下，判断下列各方程式的根的性质：

(a) $3x^2+5x-1=0$　　(b) $5x^2+21=0$

(c) $4y^2+9=12y$

解 (a) $\because\ \Delta=5^2-4(3)(-1)$

$=37>0$

$\therefore$ 方程式 $3x^2+5x-1=0$ 有两个相异的实根。

(b) $\because\ \Delta=0^2-4(5)(21)$

$=-420<0$

$\therefore$ 方程式 $5x^2+21=0$ 没有实根。

(c) $4y^2+9=12y$

$4y^2-12y+9=0$

$\because\ \Delta=(-12)^2-4(4)(9)$

$=0$

$\therefore$ 方程式 $4y^2+9=12y$ 有两个相等的实根。

随堂练习 2.1b

完成下表：

	方程式	判别式 Δ 的值	根的性质
1.	$2x-7=3x^2$		
2.	$7y^2-9y=5$		
3.	$121=66z-9z^2$		

例题 2

已知 $y=4x^2-28x+m$ 是一个完全平方式 (perfect square)，

(a) 求 m 的值；

(b) 将 y 表示成完全平方式。

解 (a) $y=4x^2-28x+m$ 是一个完全平方式，

$$\therefore \Delta=0$$

$$(-28)^2-4(4)(m)=0$$

$$m=49$$

(b) $y=4x^2-28x+49$

$$=(2x-7)^2$$

补充资料

若 $4x^2-28x+m$ 是一个完全平方式，则方程式 $4x^2-28x+m=0$ 有等根。

例题 3

证明对于任意实数 m，关于 x 的方程式 $(x+1)(x+2)=m^2$ 恒有两个相异实数解。

证 $(x+1)(x+2)=m^2$ 的一般式为 $x^2+3x+(2-m^2)=0$

$$\Delta=(3)^2-4(1)(2-m^2)$$

$$=4m^2+1$$

对于任意实数 m，$4m^2\geq 0$

$\therefore \Delta>0$

$\therefore$ 方程式 $(x+1)(x+2)=m^2$ 恒有两个相异实数解。

随堂练习 2.1c

1. 若变数为 z 的二次方程式 $2z^2-6z+k=0$ 有两个不相等的实根，求 k 的取值范围。
2. 若一元二次方程式 $2x^2-2kx+(k+4)=0$ 有两个相等的实根，求 k 的值。

习题 2.1

1. 求 m 的取值范围，使得关于 x 的方程式 $mx^2+(2m-3)x+(m-2)=0$
   (a) 有两个相等的实根；
   (b) 有两个不相等的实根；
   (c) 没有实根。

2. 若变数为 x 的方程式 $2x^2-7x+m=0$ 有实根，求 m 的最大整数值。

3. 若关于 x 的方程式 $kx^2+(4k+3)x+4k-2=0$ 有两个相异的实数解，求 k 的取值范围。

4. 若关于 x 的方程式 $2kx^2-3x+5=0$ 没有实数解，求 k 的取值范围。

5. 已知 $(3a+4)x^2-4ax+4$ 是一个完全平方式，求 a 的值。

6. 已知 $a\neq 0$，证明关于 x 的方程式 $a^2x^2+2ax+2=0$ 没有实数解。

7. 已知变数为 x 的方程式 $a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$ 有等根，证明 $c^2=a^2+b^2$ 且 $a\neq c$。

2.2 一元二次方程式的根与系数的关系

若一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 α 及 β，则此方程式可写成

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \text{------(1)}$$

另一方面，$ax^2+bx+c=0$ 也可以化成

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \text{------(2)}$$

(1) 及 (2) 是同一个方程式两种不同的形式，且它们的二次项的系数同为 1。因此，比较 (1) 与 (2) 的各项系数，得出：

$$-(\alpha+\beta)=\frac{b}{a} \quad \text{及} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

我们总结如下：

若一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 α 及 β，则

$$\text{两根之和}=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\text{两根之积}=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

由以上的推导过程可得，以 α 及 β 为两根的一元二次方程式可以写成

x^2-（两根之和）$x+$（两根之积）$=0$。

例题 4

已知一关于 t 的一元二次方程式的两根为 $\frac{6}{7}$ 及 -2，求这个方程式。

解法一 这个方程式为 $\left(t-\frac{6}{7}\right)\left[t-(-2)\right]=0$

$$(7t-6)(t+2)=0$$

即 $$7t^2+8t-12=0$$

解法二 两根之和 $=\frac{6}{7}+(-2)=-\frac{8}{7}$

两根之积 $=\frac{6}{7}(-2)=-\frac{12}{7}$

$\therefore$ 所求的方程式为 $t^2-\left(-\frac{8}{7}\right)t+\left(-\frac{12}{7}\right)=0$

即 $$7t^2+8t-12=0$$

想一想 3 这个方程式是否唯一？

随堂练习 2.2a

1. 已知一变数为 z 的方程式的两个根为 $-\frac{2}{3}$ 及 $-\frac{3}{2}$，求这个方程式。
2. 已知 $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ 的两个根为 α 和 β。利用公式法，证明 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ 及 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$。

例题 5

已知变数为 x 的方程式 $x^2+kx+5k-7=0$ 的其中一根是另一根的两倍，求这两个根及 k 的值。

解 设方程式 $x^2+kx+5k-7=0$ 的两根为 α 及 2α，则

两根之和 $\alpha+2\alpha=-k$

$k=-3\alpha$

两根之积 $\alpha(2\alpha)=5k-7$

$2\alpha^2=5(-3\alpha)-7$

$2\alpha^2+15\alpha+7=0$

$(2\alpha+1)(\alpha+7)=0$

$\therefore \alpha=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\alpha=-7$

当 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$，方程式的两根为 $-\dfrac{1}{2}$ 及 -1，$k=-3\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$。

当 $\alpha=-7$，方程式的两根为 -7 及 -14，$k=-3(-7)=21$。

随堂练习 2.2b

已知关于 x 的二次方程式 $ax^2+9x+2a=0$ 的一根为 -4，求另一根及 a 的值。

例题 6

已知 α 及 β 为方程式 $2x^2-7x-3=0$ 的两个根，且 $\alpha<\beta$，求

(a) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(b) $\alpha^2+\beta^2$

(c) $\alpha-\beta$

(d) $\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}$

解 $\alpha+\beta=\dfrac{7}{2}$， $\alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$

(a) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=-\dfrac{7}{3}$

(b) $$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\left(-\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{61}{4}\end{aligned}$$

(c) **解法一**

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\left(\frac{7}{2}\right)^2-4\left(-\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{73}{4}\end{aligned}$$

$\because$ $a<\beta$， $\therefore$ $\alpha-\beta=-\dfrac{\sqrt{73}}{2}$

解法二

解方程式 $2x^2-7x-3=0$ 得

$$\begin{aligned}x&=\frac{7\pm\sqrt{49-4(2)\ (-3)}}{4}\\&=\frac{7\pm\sqrt{73}}{4}\end{aligned}$$

$\therefore$ $\alpha=\dfrac{7-\sqrt{73}}{4}$， $\beta=\dfrac{7+\sqrt{73}}{4}$

$\alpha-\beta=-\dfrac{\sqrt{73}}{2}$

(d) $$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}&=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta\alpha}\\&=(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)\ \left(-\frac{2}{3}\right)\\&=\left(\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{73}}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\\&=\frac{7\sqrt{73}}{6}\end{aligned}$$

例题 7

已知 α 及 β 为方程式 $x^2+5x-2=0$ 的两个根，求一个以 $\alpha-2$ 及 $\beta-2$ 为两根的一元二次方程式。

解 $\alpha+\beta=-5$， $\alpha\beta=-2$

$$\begin{aligned}(\alpha-2)+(\beta-2)&=\alpha+\beta-4\\&=-9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha-2)(\beta-2)&=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\\&=-2-2(-5)+4\\&=12\end{aligned}$$

$\therefore$ 所求的方程式为 $x^2+9x+12=0$ 。

随堂练习 2.2c

1. 已知方程式 $x^2+mx+8=0$ 的两根之差的平方是 17，求 m 的值。
2. 已知 α 及 β 为方程式 $3x^2+6x-2=0$ 的两个根，且 $\alpha>\beta$。求
   (a) $\alpha-\beta$。
   (b) 一个以 α^2 及 β^2 为两根的一元二次方程式。

习题 2.2

1. 求一个关于 u 的一元二次方程式，使它的两个根为 $4+3\sqrt{2}$ 及 $4-3\sqrt{2}$ 。
2. 已知一个一元二次方程式有两个相同的解 $x=\frac{1}{5}$，求这个方程式。
3. 已知方程式 $9x^2+px-16=0$ 的两个根互为相反数，求 p 的值及这两个根。
4. 已知方程式 $x^2+cx+c=0$ 有两个相异的实根，其中一根是另一根的三倍，求这个方程式的解。

5. 若 α 及 β 是方程式 $4x^2-7x-9=0$ 的两个根，求

(a) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(b) $(3\alpha+2)(3\beta+2)$

(c) $\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}$　　(d) $(\alpha-\beta)^2$

(e) $\dfrac{3-\alpha}{\beta}+\dfrac{3-\beta}{\alpha}$　　(f) $\left(\alpha+\dfrac{3}{\beta}\right)\left(\beta+\dfrac{3}{\alpha}\right)$

6. 若 α 及 β 是方程式 $3x^2+5x-7=0$ 的两个根且 $\alpha>\beta$，求 $\alpha^2-\beta^2$。

7. 若一个方程式的二根之和是 $\dfrac{17}{2}$，二根之平方和是 $\dfrac{249}{4}$，求这个方程式。

8. 已知 α 及 β 为正数，$\alpha^2+\beta^2=13$，$(1-\alpha)(1-\beta)=2$，求一个以 α 及 β 为根的一元二次方程式。

9. 求一个一元二次方程式，使它的根是方程式 $x^2+x-5=0$ 的各根的平方。

10. 已知方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根。证明 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 $cx^2+bx+a=0$ 的根的倒数。

11. 如图所示，我们把一段长为 1 的线段分割为一长一短的两段，其中较长的一段与全长的长度比，恰好等于较短的一段与较长的一段的长度比。这个特定的比称为黄金比。求此黄金比。（答案准确至三位小数）

（第11题用图）

2.3 二次函数的图像与最值

二次函数

我们来看右边的立方体（图 2–1）的表面积问题。

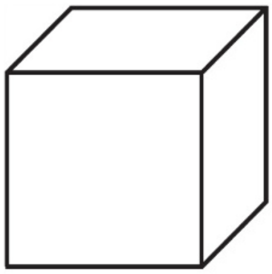


图 2–1

假设此立方体的边长为 x，表面积为 y，显然地，对于每个值 x，都有一个对应值 y，即 y 是 x 的

函数 (function)。它们的关系可以表示成 $y=6x^2$ 。由于 $6x^2$ 的次数为 2，我们亦称之为二次函数 (quadratic function)。

一般上，形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq 0$）的函数，我们都叫做二次函数。

透过配方法，我们可以把二次函数写成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式：

$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx+c\\&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\&=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\end{aligned}$$

例题 8

已知函数 $y=3x^2+12x+17$ 。利用配方法将它化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

解
$$\begin{aligned}y&=3x^2+12x+17\\&=3(x^2+4x)+17\\&=3(x^2+4x+2^2)+17-3\times 2^2\\&=3(x+2)^2+5\end{aligned}$$

随堂练习 2.3a

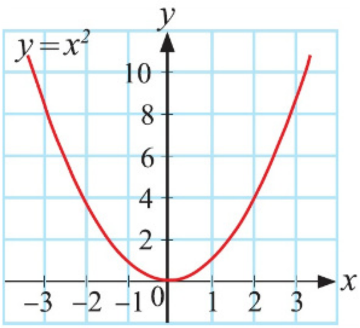
利用配方法，将下列函数化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

1. $y=x^2+5x-6$
2. $y=-2x^2+12x+1$

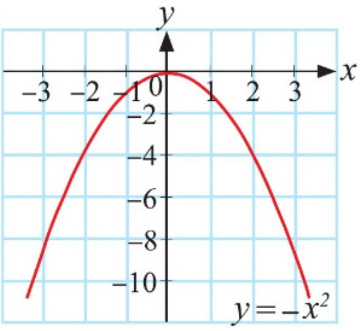
二次函数的图像

在初中，我们学过一元二次函数的图像为抛物线 (parabola)，如图 2–2(a) 及图 2–2(b) 所示，它们分别为 $y=x^2$ 及 $y=-x^2$ 的图像。

$y=x^2$ 的开口向上，$y=-x^2$ 的开口向下。它们都对称于直线 $x=0$ (y 轴)。顶点 (vertex) 也均为 $(0,0)$。当开口向上时，此顶点为最低点 (lowest point)。当开口向下时，此顶点为最高点 (highest point)。



(a)



(b)

图2–2

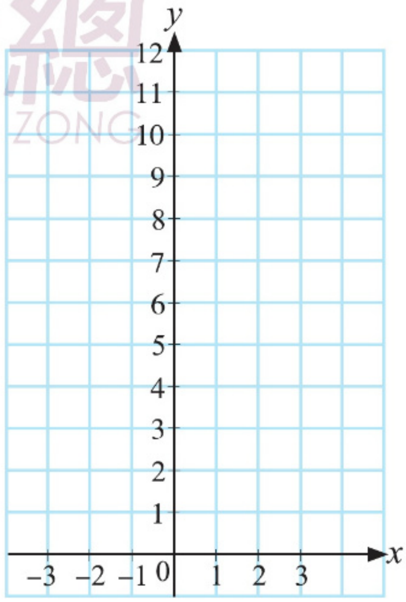
探索活动 1

已知 $y=x^2-3x+2$，

1. 完成下表：

x	…	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…							

2. 在直角坐标系上描出以上的点，并用曲线连接起来。



3. 从图中找出曲线的顶点及对称轴。

除了使用描点法之外，我们也可将函数化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，直接求出顶点及对称轴 (axis of symmetry)，并描出简图。示范如下：

步骤一：将 $y=x^2-3x+2$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，

$$\begin{aligned} y &= x^2-3x+2 \\ &= x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

步骤二：$\because$ x^2 的系数为正　$\therefore$ 抛物线开口向上

当完全平方式为零时，y 为最小值，即

当 $x-\frac{3}{2}=0$， $y=0-\frac{1}{4}$ 为最小值，

$$x=\frac{3}{2} \qquad y=-\frac{1}{4}$$

$\therefore$ 顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$，对称轴为 $x=\frac{3}{2}$。

步骤三：当 $x=0,\ y=2$，得 y 截距为 2，

由开口方向、顶点坐标、y 截距，就可描出简图（图2–3）。

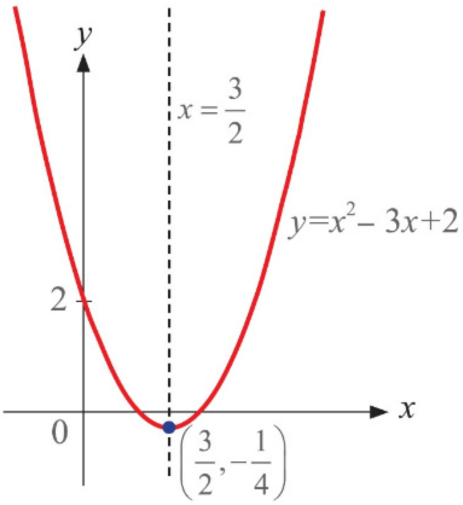


图 2–3

想一想 3 为什么我们要将 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$？

例题 9

作 $y=-3x^2-6x+5$ 的简图。

解 $y=-3\left(x^2+2x\right)+5$

$=-3\left(x^2+2x+1\right)+5+3$

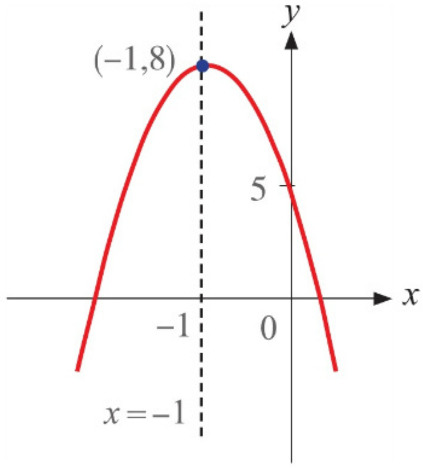
$=-3\left(x+1\right)^2+8$

当 $x+1=0$， $y=8$

$\therefore$ 顶点为 $(-1,8)$，对称轴为 $x=-1$

当 $x=0, y=5$ $\therefore$ y 截距为 5

由此，作右图。

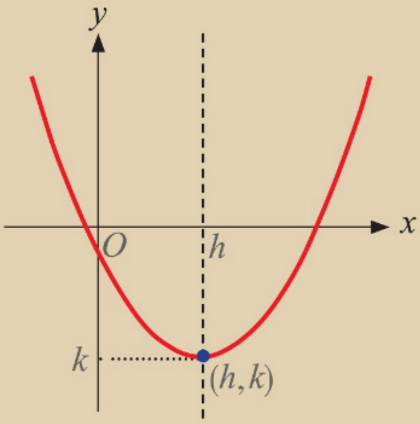
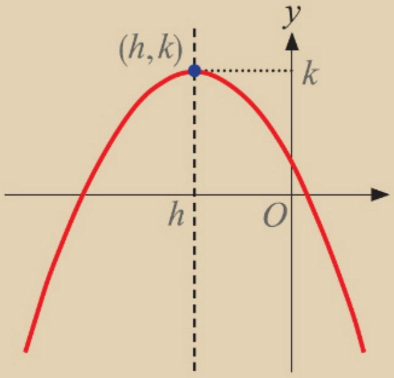


由图 2-3，在函数 $y=x^2-3x+2$ 中，$a=1>0$，函数的图像开口向上。当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，函数有最小值 (minimum value) $y=-\dfrac{1}{4}$，所以抛物线的顶点 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$ 是最低点，$x=\dfrac{3}{2}$ 是对称轴。

如例题 9 的图所示，在函数 $y=-3x^2-6x+5$ 中，$a=-3<0$，函数的图像开口向下。当 $x=-1$ 时，函数有最大值 (maximum value) $y=8$，所以抛物线的顶点 $(-1, 8)$ 是最高点，$x=-1$ 是对称轴。

最大值与最小值统称为最值 (extreme value)。

由以上的讨论，我们总结出函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像及其性质如下：

	$a>0$	$a<0$
图像		
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=h$	
顶点	(h,k) 最低点	(h,k) 最高点
最值	在 $x=h$ 时，y 有最小值 k	在 $x=h$ 时，y 有最大值 k

例题 10

求函数 $y=3x^2-12x+17$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标及最值。

解 $\because$ x^2 的系数 >0　　$\therefore$ 开口向上

$$
\begin{aligned}
y &= 3x^2-12x+17 \\
&= 3\left(x^2-4x\right)+17 \\
&= 3\left(x^2-4x+2^2\right)-3(2)^2+17 \\
&= 3(x-2)^2+5
\end{aligned}
$$

对称轴为 $x=2$，顶点为 $(2,5)$， $y=5$ 为最小值。

随堂练习 2.3b

已知函数 $y=-3x^2+8x-20$。

1. 用配方法将它化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。
2. 求其图像的开口方向、对称轴、顶点坐标及最值。
3. 作函数的图像。

例题 11

已知函数 $y=(5-2x)(x+1)$。

(a) 求抛物线 $y=(5-2x)(x+1)$ 与 x 轴的交点。

(b) 求函数图像的开口方向、对称轴、顶点坐标及最值。

(c) 作函数的图像。

解 (a) 当 $y=0$ 时，$(5-2x)(x+1)=0$

$$x=\frac{5}{2} \text{ 或 } x=-1$$

$\therefore$ 交点为 $\left(\frac{5}{2},0\right)$ 及 $(-1,0)$。

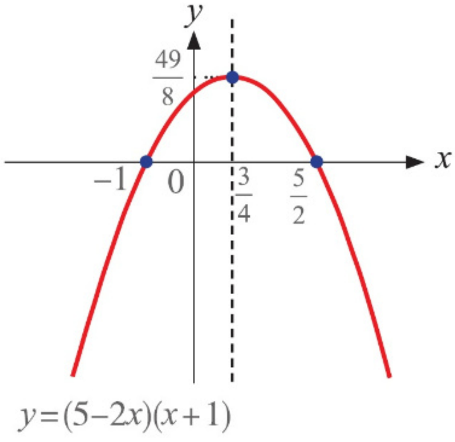
(b) $\because$ x^2 项的系数 <0　$\therefore$ 图像的开口向下，

图像的对称轴一定经过 $\left(\frac{5}{2},0\right)$ 及 $(-1,0)$ 的中点 $\left(\frac{3}{4},0\right)$，因此对称轴是 $x=\frac{3}{4}$。

当 $x=\frac{3}{4}$ 时，$y=\frac{49}{8}$。

$\therefore$ 函数图像的顶点是 $\left(\frac{3}{4},\frac{49}{8}\right)$，最大值为 $y=\frac{49}{8}$。

(c) 函数的图像如下图所示。



由例题11(b)可知，若抛物线与 x 轴有两个交点 $(x_1,0)$ 及 $(x_2,0)$，其对称轴一定经过这两个交点的中点，所以对称轴为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$。由于两根之和是 $-\dfrac{b}{a}$，因此我们也可直接得出对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$。

随堂练习 2.3c

已知二次函数 $y=(x+2)(x-5)$。

1. 求抛物线 $y=(x+2)(x-5)$ 与 x 轴的交点。
2. 求函数图像的开口方向，对称轴，顶点坐标及最值。
3. 作函数的图像。

例题 12

求下列各函数的最值，并判断它是最大值还是最小值：

(a) $y=3x^2-2x+1$　　(b) $y=-2x^2-5x+6$

解 (a) $y=3x^2-2x+1$

$$=3\left[x^2-\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]-3\left(\frac{1}{3}\right)^2+1$$

$$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

当 $x=\frac{1}{3}$ 时，y 有最小值 $\frac{2}{3}$。

(b) $y=-2x^2-5x+6$

$$=-2\left[x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]+2\left(\frac{5}{4}\right)^2+6$$

$$=-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{73}{8}$$

当 $x=-\frac{5}{4}$ 时，y 有最大值 $\frac{73}{8}$。

随堂练习 2.3d

1. 求下列各函数的最值，并判断它是最大值还是最小值：

(a) $y=\frac{1}{2}x^2-7x-6$

(b) $y=-3x^2+11x-6$

2. 已知函数 $y=ax^2+4ax+1$ 的最值为 5，求 a 的值。

例题 13

大鸿要用长 72 m 的篱笆网在他的农地上围出一块长方形的临时仓库，问大鸿应该怎样围，才能围出最大面积？最大面积是多少？

解 设所围出的长方形地的长为 x m，宽为 y m，则

周长 $2x+2y=72$

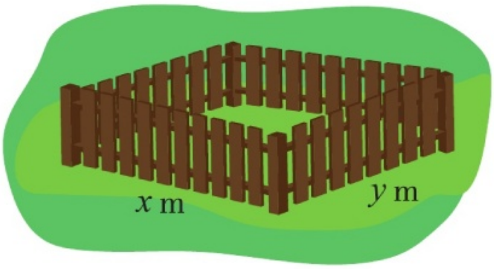
$y=36-x$

面积 $A=xy$

$=x(36-x)$

$=-(x^2-36x+18^2)+18^2$

$=-(x-18)^2+324$



当 $x=18$ 时，A 有最大值 324，此时 $y=18$。

即，当所围出的长及宽均为 18 m 时，仓库面积达到最大的 324 m²。

随堂练习 2.3e

小文将一石头向上抛，t 秒后，石头离地面的高度为 $h=\left(\frac{3}{4}+10t-4t^2\right)$ m。求石头所达到的最大高度。

习题 2.3

求下列各抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标、最值及与 y 轴的交点，并作其图像（1 至 2）：

1． $y=-4x^2+4x-2$

2． $y=7-3x+2x^2$

求下列各抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标及与两坐标轴的交点，并作其图像（3 至 4）：

3． $y=3x^2+7x-6$

4． $y=15+4x-4x^2$

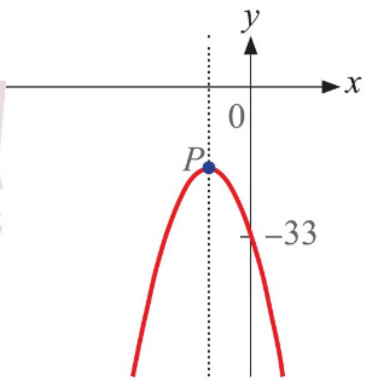
5. 已知函数 $y=2x^2+7x+c=2(x+h)^2+\frac{31}{8}$。
   (a) 求 c 及 h 的值。
   (b) 作函数 y 在 $-3\le x\le 1$ 的图像。据此，求 y 的取值范围。

6. 已知一抛物线 $y=x^2+px+q$ 与 x 轴的交点为 $(-2,0)$ 及 $(4,0)$，其中 p 、q 是实数。求此抛物线的顶点。

7. 小华丢出一粒铅球后，铅球作抛物线运动，铅球离地面的高度 y (m) 与离小华的水平距离 x (m) 的关系为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$。
   (a) 求铅球的落点与小华的水平距离。
   (b) 当铅球达到 2 m 时，求铅球离小华的最远水平距离。

第7题用图

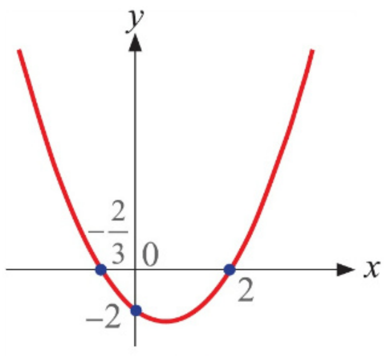
8. 右图所示为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，它的顶点 P 为 $\left(-\frac{5}{3},-8\right)$。求 a，b 及 c 的值。



第8题用图

9. 已知抛物线 $y=ax^2+x+3$ 的对称轴是直线 $x=3$，求函数 $y=ax^2+x+3$ 的最值。

10. 右图所示为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，它与 x 轴相交于 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ 及 $(2,0)$ 两点，与 y 轴相交于点 $(0,-2)$。求 a，b 及 c 的值。



第10题用图

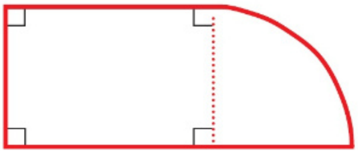
11. 已知函数 $y=ax^2+bx+1$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 时有最值 0，
(a) 求 a 及 b 的值。
(b) 0 是最大值或最小值？

12. 将 75 分成两个正数，使它们的平方和为最小，求这两个数。

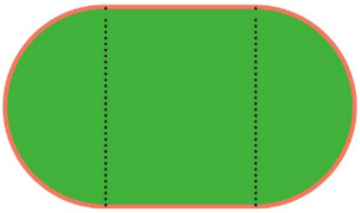
13. 小张要用 60 m 长的篱笆围成一块长方形的草地，其中一边靠墙，如右图所示。问要怎样围法，才能使所围成的面积最大？此最大的面积是多少？


第 13 题用图

14. 右图所示的金属片是由一个长方形及一个四分之一圆焊接而成。已知此金属片的周长为56 cm，当此金属片的面积最大时，长方形的长及宽各是多少？


第 14 题用图

15. 发展商要在住宅区旁边建一个草场，草场的两端是两个半径相等的半圆，中间是一个长方形，如右图所示。若发展商打算沿草场的边缘筑一条内周长 400 m 的跑道，则草场的尺寸应是多少，才能使草场的面积最大？最大的面积是多少？


第 15 题用图

2.4 一元二次函数的图像与直线的位置关系

我们已学过如何使用判别式来判断 $ax^2+bx+c=0$ 的根的性质。现在，我们要了解根的性质及 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点个数之间的关系。

探索活动 2

目的：观察 $ax^2+bx+c=0$ 的根的性质及 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点个数之间的关系。

工具：图解纸或数学绘图软体（如 GeoGebra、Desmos 等）

步骤：

1. 画出 $y_1=2x^2-8x+8$，$y_2=x^2-4x-5$，$y_3=-x^2+6x-12$ 的图像。
2. 判断 $y_1=0$，$y_2=0$，$y_3=0$ 的根的性质（有两个相异实根/有两个相等实根/没有实根）。
3. 观察 y_1、y_2、y_3 的图像与 x 轴的交点个数。
4. 通过步骤 2 及步骤 3 的结果，作出结论。

由探索活动 2，我们知道一元二次函数图像与 x 轴的交点个数与根的性质有以下的关系：

判别式	根的性质	抛物线与 x 轴的交点个数
$\Delta>0$	两个相异的实根	2个
$\Delta=0$	两个相等的实根	1个
$\Delta<0$	没有实根	0个

随堂练习 2.4a

完成下表：

	抛物线	Δ 的值	抛物线与 x 轴的交点个数
1.	$y=3x^2-4x-7$		
2.	$y=30x-25-9x^2$		
3.	$y=-2x^2+7x-10$		

例题 14

求 k 的取值范围，使得抛物线 $y=x^2-(2k-3)x+(k^2+2)$ 与 x 轴

(a) 只有一个交点；

(b) 有两个交点；

(c) 没有交点。

解 判别式 $\Delta=\left[-(2k-3)\right]^2-4(1)(k^2+2)$

$=-12k+1$

(a) 若抛物线与 x 轴只有一个交点，

$$\Delta=-12k+1=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{12}$$

(b) 若抛物线与 x 轴有两个交点，

$$\Delta=-12k+1>0$$

$$\therefore k<\frac{1}{12}$$

(c) 若抛物线与 x 轴没有交点，

$$\Delta=-12k+1<0$$

$$\therefore k>\frac{1}{12}$$

抛物线与直线的相交情况

求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $px+qy+r=0$ 的交点就是解方程组

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ px+qy+r=0 \end{cases}$$

例题 15

求抛物线 $y=2x^2-3x-10$ 与直线 $y=3x-2$ 的交点。

解 解方程组 $\begin{cases} y=2x^2-3x-10 & \text{------} \quad (1) \\ y=3x-2 & \text{------} \quad (2) \end{cases}$

$(1)-(2)$ 得：$2x^2-6x-8=0$

$x^2-3x-4=0$

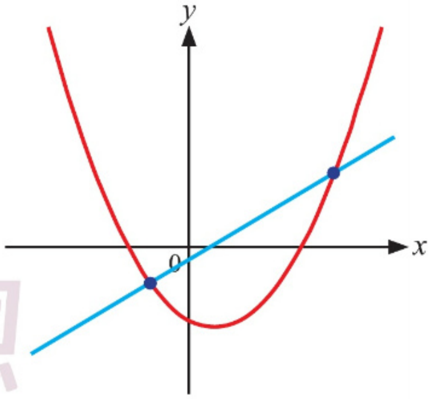
$(x+1)(x-4)=0$

$x=-1$ 或 $x=4$

当 $x=-1$，$y=-5$

当 $x=4$，$y=10$

$\therefore$ 所求的交点为 $(-1,-5)$ 及 $(4,10)$。



随堂练习 2.4b

求抛物线 $y=10-x^2$ 与直线 $y-2x=11$ 的交点。

例题 16

求直线 $2y = x$ 与抛物线 $y = x^2 + 1$ 的交点。

解 解方程组 $\begin{cases} 2y = x & \text{------ (1)} \\ y = x^2 + 1 & \text{------ (2)} \end{cases}$

由(1)： $y = \dfrac{x}{2}$ 代入 (2)

$$\frac{x}{2} = x^2 + 1$$

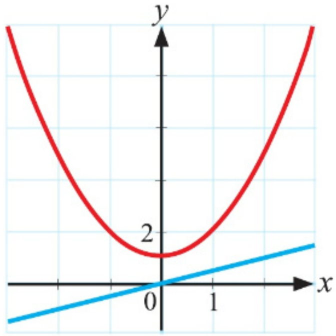
$$x^2 - \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{15}{16}$$

由于 $\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 \geq 0$，此方程式无实数解。

$\therefore$ 直线 $2y = x$ 与抛物线 $y = x^2 + 1$ 没有交点。



我们可利用判别式来判断直线与抛物线的交点个数。

例题 17

若抛物线 $y = 2x^2 - (4k+1)x + 2k^2$ 与直线 $y = 5x - 2$ 相交，求 k 的取值范围。

解 抛物线 $y = 2x^2 - (4k+1)x + 2k^2$ 与直线 $y = 5x - 2$ 相交，

$\therefore$ 方程式 $2x^2 - (4k+1)x + 2k^2 = 5x - 2$ 有实根

即 $2x^2 - (4k+6)x + 2k^2 + 2 = 0$ 有实根

$$\Delta \geq 0$$

$$\left(-(4k+6)\right)^2 - 4(2)\left(2k^2 + 2\right) \geq 0$$

$$12k + 5 \geq 0$$

$$k \geq -\frac{5}{12}$$

随堂练习 2.4c

若抛物线 $y=3x^2-7x+2c$ 与直线 $y=2x-c$ 不相交，求 c 的取值范围。

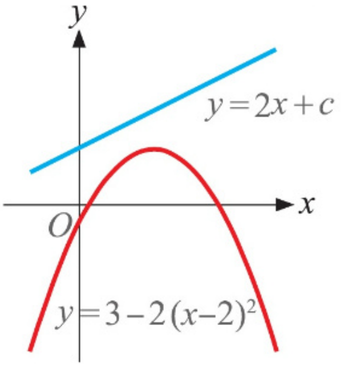
习题 2.4

1. 求直线 $y=4x+1$ 与抛物线 $y=2x^2-3x+4$ 的交点。

2. 求抛物线 $y=5-2x-x^2$ 与直线 $y=6x+21$ 的交点。

3. 求抛物线 $y=2x^2-x+9$ 与直线 $y=4x+5$ 的交点。

4. 如图所示，直线 $y=2x+c$ 与抛物线 $y=3-2(x-2)^2$ 不相交，求 c 的取值范围。



第4题用图

5. 若抛物线 $y=4x^2+(p+3)x+(p-1)$ 与 x 轴相切，求 p 的值。

6. 若抛物线 $y=-x^2+1$ 与直线 $y=(2m+1)x+5$ 相切，求 m 的值。

7. 若抛物线 $y=mx^2+9x-7$ 与 x 轴相交于两点，求 m 的取值范围。

8. 已知抛物线 $y=-x^2+(2a-3)x+7a-a^2$ 与直线 $y=3x-a$ 不相交，求 a 的取值范围。

9. 证明抛物线 $y=x^2+(2k-1)x-\left(k-\dfrac{1}{8}\right)$ 与 x 轴有两个交点。

10. 证明抛物线 $y=px^2-(p+q)x+q$ 与 x 轴相交。

2.5 针对系数 a, b, c 的变化，分析 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像的变化

当一元二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的 a, b, c 变化时，函数图像会发生什么改变?

探索活动 3

目的：观察 $y = ax^2 + bx + c$ 的 a, b, c 与图像变化之间的关系。

工具：https://www.geogebra.org/m/nqhdtqeh

步骤：1. 操作以上 GeoGebra。

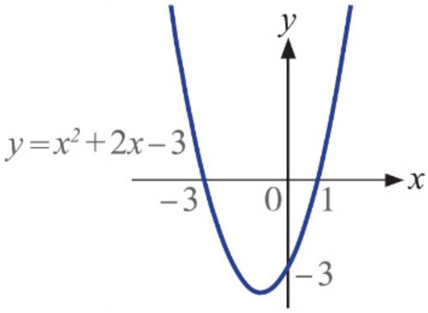
2. 完成下表：

<table>
<tr><th colspan="4">$y = ax^2 + bx + c$ 的图像</th></tr>
<tr><td rowspan="2">只有 a 改变</td><td colspan="2">当 $a > 0$，抛物线开口（向上 / 向下）。
当 $a = 0$，图像为（　　）。
当 $a < 0$，抛物线开口（向上 / 向下）。</td><td rowspan="2">y 截距不变</td></tr>
<tr><td colspan="2">当 $|a|$ 越大，抛物线宽度越（宽 / 窄）。
当 $|a|$ 越靠近 0，抛物线宽度越（宽 / 窄）。</td></tr>
<tr><td rowspan="5">只有 b 改变</td><td rowspan="2">$a > 0$</td><td>当 $b > 0$，顶点在 y 轴的（左侧 / 右侧）。</td><td rowspan="4">y 截距不变</td></tr>
<tr><td>当 $b < 0$，顶点在 y 轴的（左侧 / 右侧）。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a < 0$</td><td>当 $b > 0$，顶点在 y 轴的（左侧 / 右侧）。</td></tr>
<tr><td>当 $b < 0$，顶点在 y 轴的（左侧 / 右侧）。</td></tr>
<tr><td colspan="2">当 $b = 0$，顶点在（　　）。</td><td></td></tr>
<tr><td>只有 c 改变</td><td colspan="2">y 截距 =（　　）。</td><td></td></tr>
</table>

想一想 4 除了上述活动，我们能否透过 a, b 的正负号来判断顶点及对称轴在 y 轴的左侧或右侧?

例题 18

右图显示 $y=x^2+2x-3$ 的简图。据此，配对以下函数及其对应的图像。

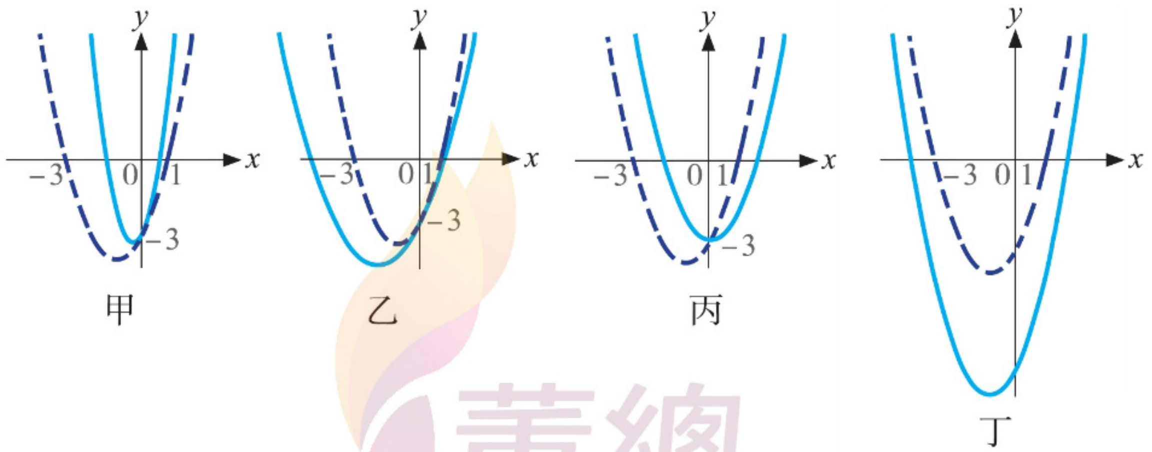


$y_1=3x^2+2x-3$

$y_2=x^2-3$

$y_3=\dfrac{1}{2}x^2+2x-3$

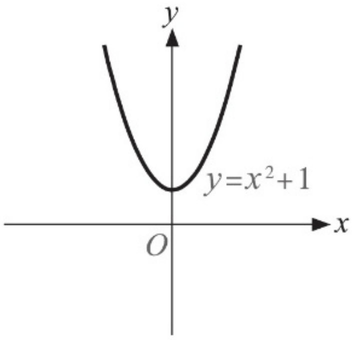
$y_4=x^2+2x-8$



解 函数 y_1 的图像是甲；
函数 y_2 的图像是丙；
函数 y_3 的图像是乙；
函数 y_4 的图像是丁。

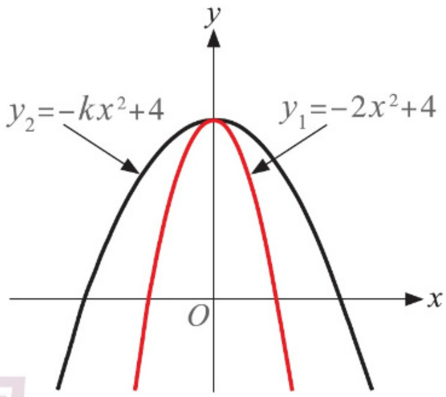
习题 2.5

1. 右图显示 $y=x^2+1$ 的简图。画出下列条件改变后 y 的图像。
   (a) 二项式的系数变成 3；
   (b) 二项式的系数变成 $\frac{1}{3}$；
   (c) 常数项变成 -1。



第 1 题用图

2. 右图显示两个函数 $y_1=-2x^2+4$ 及 $y_2=kx^2+4$ 的图像。写出 k 的取值范围，并说明原因。



第 2 题用图

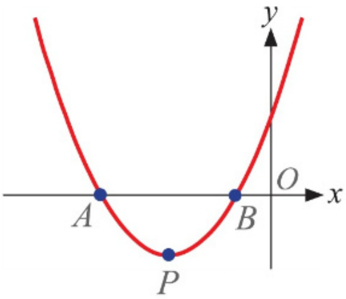
总复习题 2

1. 解下列各方程式：
   (a) $36(x+2)=x^2-4$
   (b) $(t+1)^2+3(t+1)(t-2)+2(t-2)^2=0$

2. 解方程式 $5y^2+4=y+7$。
   据此，解方程式 $5(2x-1)^2+4=2x+6$。

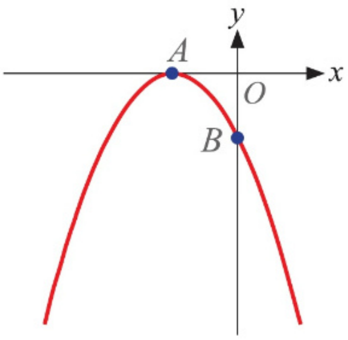
3. 已知抛物线 $y=3-5x-2x^2$。
   (a) 求抛物线的对称轴及顶点坐标。
   (b) 求抛物线与两坐标轴的交点。
   (c) 作抛物线的图像。

4. 右图所示为抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像，它的顶点是 P，与 x 轴的交点是 A、B。已知 A、P 两点的坐标分别为 $(-5,0)$ 及 $(-3,-8)$。
   (a) 求 a 的值。
   (b) 求点 B 的坐标。



第4题用图

5. 右图所示为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，它与 x 轴相切于顶点 $A(-2,0)$，与 y 轴相交于点 $B(0,-12)$。求a，b及c的值。



第5题用图

6. 求直线 $y=3x+6$ 与抛物线 $y=3x^2+5x-2$ 的交点。

7. 若关于 x 的二次方程式 $3x^2+2(m+2)x+3m=0$ 有等根，求 m 的值。

8. 若抛物线 $y=kx^2+2(k+3)x+k+5$ 与 x 轴相交，求 k 的取值范围。

9. 若抛物线 $y=mx^2-3x+m$ 与直线 $y=2mx+4$ 不相交，求 m 的取值范围。

10. 已知 $9x^2+7mx+8m+1$ 是一完全平方式，求 m 的值。

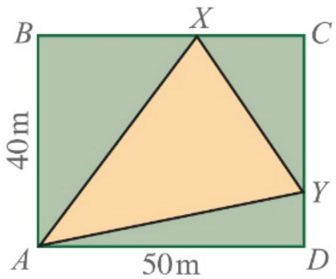
11. 已知关于 x 的方程式 $(m+1)x^2+5x-21=0$ 的一个根是 -3，求它的另一个根及 m 的值。

12. 已知关于 x 的方程式 $2x^2+3kx+2=0$ 的一根是另一根的两倍，求 k 的值及方程式的两个根。

13. 已知 α 及 β 为方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根。求一个一元二次方程式，使它的两根分别为 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 及 $\dfrac{\beta}{\alpha}$。

14. 证明对于任意实数 x， $y=2x^2+7x+9$ 的值都是正数。

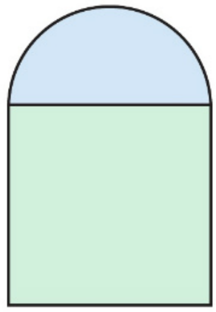
15. 右图中， $ABCD$ 是一长方形，它的长及宽各为 50 m 及 40 m 。在 BC 边及 CD 边各取一点 X 及 Y，使得 $CX=2DY$ 。DY 的长应取多少，才能使所围成 ΔAXY 的面积最小？此最小的面积是多少？



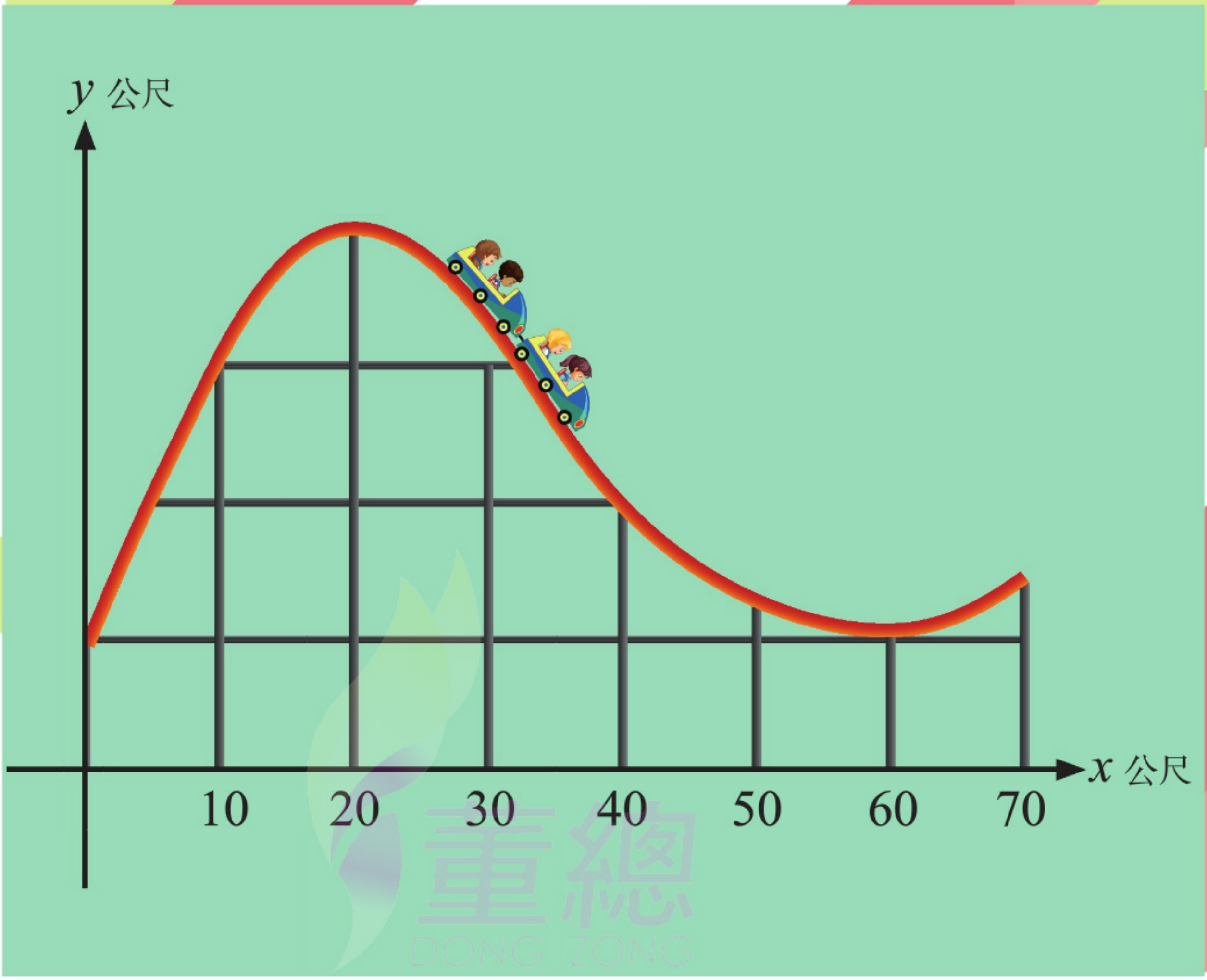
第15题用图

16. 已知一圆的半径为 r，求它的内接长方形的最大面积。

17. 如右图所示，一窗是由一长方形及一半圆所组成，窗的周长为 480 cm。当此窗的面积最大时，半圆部分的半径是多少？窗有多高？窗的最大面积是多少？


第17题用图

18. 一家杂志社拥有 2400 名订阅者，而订阅月费为 RM 10。经过市场调查后，杂志社预计每当月费增加 RM 0.10 时，他们将流失 20 名订阅者。若此杂志社想要得到最高收入，他们应把订阅月费调至多少？



过山车是一种大型游乐设施，常见于游乐园或主题公园中。一个基本的过山车构造会涵盖爬升、滑落及旋转。从最高点滑至最低点的瞬间充满了刺激感，总是让人害怕却又想去尝试。

为了更具娱乐性，工程师会希望过山车经过某些点，但又希望轨道的连结是平滑顺畅的。建造一座过山车的成本非常高，因此工程师无法先建一座过山车再来做调整，而多项式的图形恰好可以协助完成初步的设计。

那么，我们要如何找出一个会经过点(0,10)、(20,42)、(60,10)及 (70,17) 的过山车轨道？

3

多项式

学习目标

- 掌握多项式的运算
- 能应用余式定理与因式定理
- 掌握多项式的因式分解
- 掌握一元高次方程式的解法

3.1 多项式

在初中，我们学过一元一次式 $ax+b$，例如：$5x+1$，$3x-7$。我们也曾学过一元二次式 ax^2+bx+c，例如：$4x^2+4x+1$。此外，还有一元三次式 ax^3+bx^2+cx+d，例如：$5x^3+6x^2+7x-1$；一元四次式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 等。

设 x 是一个变数，具有下列形式的代数式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_1x+a_0$$

叫做变数 x 的多项式 (polynomial) 或一元多项式，其中 n 是非负整数，a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_1，a_0 都是常数。在这个多项式中，a_ix^i 称为这个多项式的 i 次项，a_i 称为 i 次项的系数 (coefficient)，a_0 称为常数项。

在一个多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 中，若最高次项 a_nx^n 的系数 a_n 不等于零，则这个系数 a_n 叫做这个多项式的领导系数 (leading coefficient)，n 叫做这个多项式的次数 (degree)，而这个多项式就叫做 n 次多项式。

例如：$3x^5-4x^4+2x^3+4x-5$ 是一个一元五次多项式，
$3x^5$ 是它的五次项，系数是 3，这个 3 也是领导系数；
$-4x^4$ 是它的四次项，系数是 -4；
$2x^3$ 是它的三次项，系数是 2；
$0x^2$ 是它的二次项，系数是 0（系数是 0 的项可以略去不写）；
$4x$ 是它的一次项，系数是 4；
-5 是它的常数项。

上述例子的 -5 可以写成 $-5x^0$，所以称为零次多项式 (polynomial of degree zero)。数 0 是多项式，但因不能确定它的次数，所以不能叫做零次多项式，而称之为零多项式 (null polynomial)。零次多项式与零多项式统称为常数多项式 (constant polynomial)。

此外，这里我们用 $f(x)$、$g(x)$ 等来表示 x 的多项式，例如：

$$g(x)=6x^2-11x+4,\qquad f(x)=x^2-4x+\frac{1}{3}$$

例题 1

判别下列各式中，哪些是多项式？

(a) x^2-x^4　(b) $\frac{1}{4}$　(c) $\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x-1$

(d) $\frac{5}{2x+1}$　(e) $3\sqrt{x}-\frac{7}{x}+5$　(f) $\frac{x^2}{2}+3x$

解 (a)、(b)、(c)、(f) 是多项式。

(d)、(e)不是多项式，因为 x 的指数不是非负整数。

例题 2

判断多项式 $7x^3+2x-5$ 是几次多项式？并写出它的领导系数及常数项。

解 $7x^3+2x-5$ 是三次多项式，其领导系数是 7，常数项为 -5。

随堂练习 3.1a

1. 判别下列各式，哪些不是多项式？

(a) $\frac{2}{x}+4$　(b) $\sqrt[3]{x}-1$　(c) $\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x-1$

(d) $\frac{5}{2x-3}$　(e) $\frac{1}{2}$　(f) $6x-1$

2. 在下列条件下，多项式 ax^5+bx^3+cx+d 是几次多项式？

(a) $a\neq 0$　(b) $a=0, b\neq 0$

(c) $a=b=0, c\neq 0$　(d) $a=b=c=0, d\neq 0$

3．完成下表：

	多项式	多项式的次数	系数 x^5	系数 x^4	系数 x^3	系数 x^2	系数 x	领导系数	常数项
(a)	$-8x^5+5x^2-3x+2$								
(b)	$5x+6x^4-7x^3+\frac{1}{2}$								
(c)	$\frac{3}{5}$								
(d)	$7x^2$								

一元多项式的四则运算

加减法

一元多项式的相加或相减就是将各多项式中的同类项相加或相减。

例题 3

已知 $f(x)=3x^2+5x-6$， $g(x)=2x^3+x^2+6$，求

(a) $f(x)+g(x)$；

(b) $2f(x)-g(x)$。

解 (a)
$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= (3x^2+5x-6)+(2x^3+x^2+6) \\ &= 2x^3+4x^2+5x \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2f(x)-g(x) &= 2(3x^2+5x-6)-(2x^3+x^2+6) \\ &= 6x^3+10x-12-2x^3-x^2-6 \\ &= 4x^3-x^2+10x-18 \end{aligned}$$

随堂练习 3.1b

已知 $f(x)=-2x^2+1$， $g(x)=-3x^2+3-4x$，求

1. $f(x)+g(x)$
2. $g(x)-f(x)$

乘法

运用乘法的分配律展开，其中两项相乘时，系数相乘，次数相加。

例题 4

已知 $f(x)=4x^2-3$， $g(x)=2x^2-6x-9$，求 $f(x)g(x)$。

解

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (4x^2-3)(2x^2-6x-9) \\ &= 4x^2(2x^2-6x-9)-3(2x^2-6x-9) \\ &= 8x^4-24x^3-36x^2-6x^2+18x+27 \\ &= 8x^4-24x^3-42x^2+18x+27 \end{aligned}$$

除法

多项式的除法可以用长除法计算。其他除法方式可见数学橱窗 1。

数学橱窗 1

www.bit.ly/3KDPJ9b

例题 5

计算 $(8x^4+24x^3-42x^2)\div(2x^2+6x-9)$。

解 利用长除法，

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & \quad 4x^2+0\quad-3 \\
2x^2+6x-9 & \overline{\big)\ 8x^4+24x^3-42x^2+\ 0+\ 0} \\
 & \ \ \underline{8x^4+24x^3-36x^2\qquad\qquad} \\
 & \qquad\qquad\quad -6x^2 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-6x^2-18x+27} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 18x-27
\end{array}
$$

$$\frac{8x^4+24x^3-42x^2}{2x^2+6x-9}=4x^2-3+\frac{18x-27}{2x^2+6x-9}$$

$\therefore$ 商式为 $4x^2-3$，余式为 $18x-27$。

当多项式 $f(x)$ 除以 $g(x)$，可得商式 $Q(x)$ 及余式 $R(x)$ 时，可写作

$$\frac{f(x)}{g(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{g(x)}$$

或 $$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$$

即 被除式 = 除式 × 商式 + 余式

注意

被除式的次数
=除式的次数+商式的次数

其中余式 $R(x)$ 的次数小于除式 $g(x)$ 的次数。当除式 $g(x)$ 为一次式时，余数为常数。

若余式等于零，则 $f(x)=g(x)Q(x)$。同时，我们也说 $g(x)$ 能整除 $f(x)$，即 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式。

例题 6

已知多项式 $6x^3-5x^2+5x-8$ 除以 $3x^2-x+1$，可得余式 $2x-7$，求商式。

解 由 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$，可得

$$6x^3-5x^2+5x-8=(3x^2-x+1)Q(x)+(2x-7)$$

$$6x^3-5x^2+3x-1=(3x^2-x+1)Q(x)$$

$$Q(x)=\frac{6x^3-5x^2+3x-1}{3x^2-x+1}$$

$$=2x-1$$

$\therefore$ 商式为 $2x-1$。

例题 7

已知 $f(x)=2x^5-5x^3+3x^2+1$ 除以 $g(x)$ 后，得商式 $Q(x)=x^2+1$，余式 $R(x)=7x-2$，求 $g(x)$。

解 由 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$，可得

$$f(x)-R(x)=g(x)Q(x)$$

$$g(x)=\frac{f(x)-R(x)}{Q(x)}$$

$$=\frac{(2x^5-5x^3+3x^2+1)-(7x-2)}{x^2+1}$$

$$=\frac{2x^5-5x^3+3x^2-7x+3}{x^2+1}$$

$$\therefore g(x)=2x^3-7x+3$$

例题 8

若 x^2-3x+4 能整除 $4x^4-11x^3+mx+n$，求 m 与 n 的值。

解

$$
\begin{array}{r l}
 & 4x^2 + x \quad -13 \\
x^2-3x+4 & \overline{)\,4x^4-11x^3 \; +0 \; + \; mx + \quad n} \\
 & \underline{4x^4-12x^3 \; +16x^2} \\
 & \qquad\quad x^3 \; -16x^2+mx \\
 & \qquad\quad \underline{x^3 \; -3x^2 \; +4x} \\
 & \qquad\qquad -13x^2+(m-4)x+n \\
 & \qquad\qquad \underline{-13x^2+39x \quad -52} \\
 & \qquad\qquad\qquad (m-43)x+(n+52)
\end{array}
$$

根据整除性质，$R(x)=0$

$$(m-43)x+(n+52)=0$$

得 $$m-43=0\text{，}\ n+52=0$$

$$\therefore m=43\text{，}\ n=-52$$

随堂练习 3.1c

1. 计算下列各式：

   (a) $(3x^2+2x+1)(x-1)$ (b) $(x^3+5x^2-6)(x^2-5x+6)$

2. 计算：

   (a) $(4x^3+2x^2-4x+8)\div(2x-1)$ (b) $(x^3-3x^2+6x-5)\div(x-3)$

习题 3.1

1. 计算：

   (a) $(x^4-x^3+2x^2-1)+(2x^3+4x^2-3)$

   (b) $(x^5-x^6+x^2-3x-2)-(x^3-2x^5+x^6+3)$

   (c) $(3x^3+2x^2+x-3)+2(x^2-x^3-x+7)$

2. 计算：
   (a) $(4x^4-3x^3+2x^2-5)(x-1)$
   (b) $(3x^3-2x^2+x-1)(2x+5)$
   (c) $2(2x^2+3x-1)(3x-4)$

3. 已知 $f(x)=4x^2+3x-2$， $g(x)=2x^3-7x-5$， $k(x)=3x^2-4x+1$，求：
   (a) $f(x)g(x)$
   (b) $g(x)k(x)$
   (c) $f(x)g(x)k(x)$

4. 已知 $f(x)g(x)=h(x)$，
   (a) 若 $f(x)=4x^2+1$， $h(x)=32x^4-2$，求 $g(x)$。
   (b) 若 $g(x)=x-1$， $h(x)=x^5-x^4+3x^3-2x+1$，求 $f(x)$。

5. 计算：
   (a) $(4x^3+5x^2-4x+2)\div(x-1)$
   (b) $(6x^4+3x^3-6x^2+5x+4)\div(2x+1)$
   (c) $(4x^5-2x^3+1)\div(2x^2-1)$

6. 已知 $f(x)$ 除以 $g(x)=x^2-6x+8$， 得商式 $Q(x)=3x-1$，余式 $R(x)=4x-5$，求 $f(x)$ 。

7. 已知 $x-1$ 能整除 $6x^4-5x^3+mx+10$，求 m 的值。

8. 已知 $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+ax+b$ 能被 x^2-2x+4 整除，求 a 与 b 的值。

3.2 余式定理

例题 9

已知 $f(x)=x^3-5x^2+x+29$，求：

(a) $f(x)$ 除以 $x-3$ 的余数;

(b) $f(3)$ 的值。

解 (a) 利用长除法，

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & x^2-2x-5 \\
x-3 \big) & \overline{x^3-5x^2+x+29} \\
 & \underline{x^3-3x^2} \\
 & -2x^2+x \\
 & \underline{-2x^2+6x} \\
 & -5x+29 \\
 & \underline{-5x+15} \\
 & 14
\end{array}
$$

$\therefore$ 余数为 14。

(b) $f(x)=x^3-5x^2+x+29$

$f(3)=3^3-5(3)^2+3+29$

$=14$

从例题 9 我们看到，$f(x)$ 除以 $x-3$ 所得的余数正好等于 $f(3)$ 的值。这并非偶然。事实上，对一般的多项式有下面的定理：

余式定理

多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余式等于 $f(a)$。

证明：

设多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的商式为 $Q(x)$，余数为 R，

则 $$f(x)=(x-a)Q(x)+R$$

以 $x=a$ 代入

得 $$f(a)=(a-a)Q(a)+R$$

$$f(a)=R$$

因此，对于形如 $ax-b$ 的除式同样有下面的定理：

余式定理 (Remainder Theorem)

多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 所得的余式等于 $f\left(\frac{b}{a}\right)$。

证明：

设多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 所得的商式为 $Q(x)$，余数为 R，

则 $f(x)=(ax-b)Q(x)+R$

以 $x=\frac{b}{a}$ 代入，

得 $$f\left(\frac{b}{a}\right)=\left(a\times\frac{b}{a}-b\right)Q\left(\frac{b}{a}\right)+R$$

$$f\left(\frac{b}{a}\right)=R$$

例题 10

已知 $f\left(x\right)=x^3-4x^2+9x-43$，求 $f\left(x\right)$ 除以 $x-4$ 所得的余数。

解 由余式定理可得，
$$\begin{aligned} f(4) &= 4^3-4(4)^2+9(4)-43 \\ &= -7 \end{aligned}$$

$\therefore$ 余数为 -7。

例题 11

求 $5x^4-6$ 除以 $5x-2$ 的余数。

解 由余式定理可得，
$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{5}\right) &= 5\left(\frac{2}{5}\right)^4-6 \\ &= -5\frac{109}{125} \end{aligned}$$

$\therefore$ 余数为 $-5\frac{109}{125}$。

例题 12

已知 $f\left(x\right)=4x^4+3x^2-ax+20$，$f(x)\div(x-3)$ 的余数是 -4。求 a 的值。

解 由余式定理可得，$f\left(3\right)=-4$
$$\begin{aligned} 4(3)^4+3(3)^2-a(3)+20 &= -4 \\ -3a+371 &= -4 \\ \therefore a &= 125 \end{aligned}$$

随堂练习 3.2a

1. 求 $6x^{30}-x^2+2$ 除以 $x-1$ 所得的余数。
2. 求 $8x^4-x+1$ 除以 $2x+1$ 所得的余数。

例题 13

已知 $f(x)=2x^3+mx^2+nx+1$ 除以 $x-2$ 得余数 7，除以 $x+1$ 得余数 -8。求 $f(x)$ 除以 $x-3$ 所得的余数。

解 由余式定理，$f(2)=7$

$$2(2)^3+m(2)^2+n(2)+1=7$$

$$4m+2n=-10$$

$$2m+n=-5 \quad \text{-----}(1)$$

由余式定理，$f(-1)=-8$

$$2(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=-8$$

$$m-n=-7 \quad \text{-----}(2)$$

由 $(1)+(2)$ 得，$3m=-12$

$$m=-4$$

将 $m=-4$ 代入 (2)，得 $\quad -4-n=-7$

$$n=3$$

由余式定理，
$$\begin{aligned} f(3)&=2(3)^3-4(3)^2+3(3)+1\\ &=54-36+9+1\\ &=28 \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 除以 $x-3$ 所得的余数是 28。

例题 14

设 $f(x)$ 为一多项式，$f(x)$ 除以 $x-1$ 得余数 5，$f(x)$ 除以 $x-2$ 得余数 7，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 所得的余式。

解 设所求的余式为 $R(x)=ax+b$

则 $\quad f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

已知 $\quad f(1)=5$

即 $\quad (1-1)(1-2)Q(1)+a+b=5$

$$a+b=5 \quad \text{-----}(1)$$

已知 $\quad f(2)=7$

> 想一想 1
> 为何余式要假设成 $ax+b$ 的形式？

即 $(2-1)(2-2)Q(2)+2a+b=7$

$$2a+b=7 \text{ -----(2)}$$

(2) − (1) 得 $a=2$，$b=3$

∴ 所求的余式为 $2x+3$。

随堂练习 3.2b

1. 已知 $f(x)=x^3+kx^2-3x-2k$，$f(x)\div(x-2)$ 的余数为 10，求 $f(3)$。
2. 设 $f(x)$ 为一多项式，$f(x)$ 除以 $3x-1$ 得余数 3，$f(x)$ 除以 $x-1$ 得余数 5，求 $f(x)$ 除以 $3x^2-4x+1$ 所得的余式。

习题 3.2

1. 求以 $x-3$ 除 $4x^3-5x^2-6x+6$ 所得的余数。
2. 求 $7x^6+8x^4-9x+10$ 除以 $x+1$ 所得的余数。
3. 已知 $(x^3-7x^2+12x+a)\div(x+3)$ 的余数为 24，求 a 的值。
4. 以 $x-2$ 除 $f(x)=x^3+2x^2+hx+4$ 的余数为 14，求 h 的值。
5. 设 $f(x)=x^4+mx^3+mx^2-15$，若 $f(x)$ 能被 $(x-1)$ 整除，求 $f(-3)$ 的值。
6. 设 $f(x)=3x^2+hx+k$，若以 $x-2$ 除 $f(x)$ 得余数 13，以 $x+3$ 除 $f(x)$ 所得的余数 48，求 h 与 k 的值。
7. 以 $(x+1)^2$ 分别除 $x^4+3x^3+2x^2+ax+b$ 及 x^3+3x^2-5x+6 所得的余式相同，求 a 与 b 的值。

3.3 因式定理

由余式定理可知，当 $f(a)=0$ 时，则 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余数等于 0，即能被 $x-a$ 所整除，因此 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式。

反之，如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式，则 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余数等于 0，即 $f(a)=0$。

这就有下面的因式定理。

若 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式，则 $f(a)=0$。
反之，若 $f(a)=0$，则 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式。

证明：设 $f(x)$ 除以 $x-a$ 得

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R$$

如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式，则 $R=0$

即 $$\begin{aligned} f(a)&=(a-a)Q(a)\\ &=0 \end{aligned}$$

反之，如果 $f(a)=0$，那么得

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-a)Q(x)+0\\ &=(x-a)Q(x) \end{aligned}$$

因此，$x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式。

对于形如 $ax-b$ 的因式，同样有以下定理：

因式定理 (Factor Theorem)

如果 $f(x)$ 有因式 $ax-b$，那么 $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$。

反之，如果 $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$，那么 $f(x)$ 有因式 $ax-b$。

例题 15

判断 $x-1$ 是否是 x^4-5x^3+7x-3 的因式。

解 $f(1)=1^4-5(1)^3+7(1)-3$

$\quad =0$

由因式定理可得，$x-1$ 是 x^4-5x^3+7x-3 的因式。

例题 16

证明 $f(x)=27x^4+x-6$ 有因式 $3x-2$。

证 $f\left(\frac{2}{3}\right)=27\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{2}{3}-6$

$\quad =\frac{16}{3}+\frac{2}{3}-6$

$\quad =0$

由因式定理可得 $f(x)$ 有因式 $3x-2$。

例题 17

已知 $x^4+kx^2-(k+2)x+16$ 能被 $x+2$ 整除，求 k 的值。

解 令 $f(x)=x^4+kx^2-(k+2)x+16$

$f(-2)=0$

$(-2)^4+k(-2)^2-(k+2)(-2)+16=0$

$16+4k+2k+4+16=0$

$6k=-36$

$k=-6$

例题 18

已知 $f(x)=4x^4+ax^2+9x+b$ 有因式 $2x^2+3x-2$，求 a 与 b 的值。

解 $f(x)=(2x^2+3x-2)Q(x)$

$=(x+2)(2x-1)Q(x)$

$f(x)$ 既有因式 $x+2$，又有因式 $2x-1$，则

$$\begin{cases} f(-2)=4(-2)^4+a(-2)^2+9(-2)+b=0 \\ f(\frac{1}{2})=4(\frac{1}{2})^4+a(\frac{1}{2})^2+9(\frac{1}{2})+b=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 4a+b=-46 & \text{------(1)} \\ a+4b=-19 & \text{------(2)} \end{cases}$

由 (2)×4： $4a+16b=-76$ ------(3)

由 (1)−(3)： $-15b=30$

$b=-2$

代入(2)： $a+4(-2)=-19$

$a=-11$

$\therefore a=-11$， $b=-2$

例题 19

已知 $f(1)=0, f(-2)=0, f(4)=36$，求二次多项式 $f(x)$ 。

解 $\because f(1)=0$ 及 $f(-2)=0$

$\therefore f(x)$ 有因式 $x-1$ 及 $x+2$

令 $f(x)=a(x-1)(x+2)$

$a(4-1)(4+2)=36$

$a=2$

$\therefore f(x)=2(x-1)(x+2)$

$=2x^2+2x-4$

例题 20

已知三次多项式 $f(x)$ 满足 $f(-1)=f(2)=0$， $f(1)=-14$， $f(-2)=-8$ 。求 $f(x)$ 。

解 $\because f(-1)=f(2)=0$

$\therefore f(x)$ 有因式 $(x+1)(x-2)$

令 $f(x)=(x+1)(x-2)(ax+b)$

$$f(1)=-14$$
$$(1+1)(1-2)(a+b)=-14$$
$$a+b=7$$

$$f(-2)=-8$$
$$(-2+1)(-2-2)(-2a+b)=-8$$
$$-2a+b=-2$$

可得 $\begin{cases} a+b=7 \\ -2a+b=-2 \end{cases}$，解方程组后，得 $a=3, b=4$ 。

因此 $f(x)=(x+1)(x-2)(3x+4)$

想一想 2 为何多项式要假设成 $f(x)=(x+1)(x-2)(ax+b)$ 的形式？

随堂练习 3.3

1. 已知 $2x^3+mx^2+5x-100$ 有因式 $x-4$，求 m 的值。
2. 已知 $x^4+ax^3-27x+b$ 有因式 $x+1$，又有因式 $x-3$，求 a，b 的值。
3. 若 $(x+2)(x+4)$ 是 $2x^3-x^2+ax+b$ 的因式，求 a，b 的值。

习题 3.3

1. 不用除法，判断 $x+2$ 是否是 $x^4-3x-22$ 的因式。

2. 证明 $2x+1$ 是 $6x^4-x^3-2x^2+5x+\dfrac{5}{2}$ 的因式。

3. 证明 $a^6x^6-b^6$ 有因式 $ax+b$ 。

4．若 $x-1$ 能整除 $f(x)=2x^4+x^3+2x^2-x+k$ ，求 k 的值。

5．设 $f(x)=2x^3+mx^2+nx+6$ ，若 $f(x)$ 能被 $x-2$ 及 $x-3$ 整除，求 m，n 的值。

6．设 $f(x)=ax^2+5x+c$ ，若 $f(x)$ 能被 $x-1$ 整除，且 $x+2$ 除 $f(x)$ 得余数 21，求 a，c 的值。

7．若 $f(y)=3y^4-my^3-11y^2-7y+(n-5)$ 有因式 y^2+y ，求 m，n 的值。

8．已知 $f(-3)=0$ ， $f(3)=-18$ ， $f(4)=0$ 。求二次多项式 $f(x)$ 。

9．已知 $f(-5)=0$ ， $f(3)=0$ ， $f(1)=12$ ， $f(4)=18$ 。求三次多项式 $f(x)$ 。

3.4 一元多项式的因式分解

因式分解在代数上是一个重要的技能，它不仅可以用于约分、通分等问题，也是解方程式的重要步骤。

将一个多项式化成几个因式的乘积叫做因式分解。在因式分解时，要特别注意系数的范围。例如，
在有理数范围内，多项式 x^4-9 可以被分解成：

$$(x^4-9)=\left(x^2+3\right)\left(x^2-3\right)$$

而在实数范围内， x^4-9 则可被分解成：

$$\begin{aligned}(x^4-9)&=\left(x^2+3\right)\left(x^2-3\right)\\&=\left(x^2+3\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

本章所讨论的因式分解都在有理数范围内进行。

一般上，我们可以透过以下的技巧作因式分解：
一、抽取公因式
二、交叉相乘
三、应用公式
四、分组分解
五、应用因式定理

一、抽取公因式

在因式分解时，若多项式的各项都含有相同的因式，我们可以将它抽取出来。而这个被抽取的因式就叫做公因式。

例题 21

因式分解 $25x^2+625$。

解 $25x^2+625=25(x^2+25)$

例题 22

因式分解 $(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)$。

解

$$\begin{aligned}(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)&=(x+1)\left[(x+1)^2+(x+1)+1\right]\\&=(x+1)\left(x^2+2x+1+x+1+1\right)\\&=(x+1)\left(x^2+3x+3\right)\end{aligned}$$

二、交叉相乘

一般上，交叉相乘用于二次三项多项式。

例题 23

因式分解 $-3x^2+4x+15$。

解

$$\begin{aligned}-3x^2+4x+15&=-(3x^2-4x-15)\\&=-(3x+5)(x-3)\end{aligned}$$

交叉相乘

$$\begin{array}{cc|c}3x & 5 & 5x\\ x & -3 & -9x\\ \hline 3x^2 & -15 & -4x\end{array}$$

三、应用公式

因式分解常用的公式如下：

1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
2. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
4. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
5. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
6. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

想一想 3 第4,5,6,7的公式如何得来？

例题 24

因式分解 $16x^2-25$。

解 $16x^2-25=(4x)^2-(5)^2$
$=(4x+5)(4x-5)$

例题 25

因式分解 x^3+27。

解 $x^3+27=x^3+3^3$
$=(x+3)(x^2-3x+3^2)$
$=(x+3)(x^2-3x+9)$

例题 26

因式分解 $x^3+6x^2+12x+8$。

解 $x^3+6x^2+12x+8=x^3+3(x)^2(2)+3(x)(2)^2+2^3$
$=(x+2)^3$

四、分组分解

一些多项式必须经过分组整理后才能得到公因式或平方差公式（或立方和公式）的形式。将一个多项式分组后再进行因式分解的技巧叫做分组分解。

例题 27

因式分解 $x^3+4x^2-16x-64$。

解
$$\begin{aligned} x^3+4x^2-16x-64 &= x^2(x+4)-16(x+4) \\ &= (x+4)(x^2-16) \\ &= (x+4)(x+4)(x-4) \\ &= (x+4)^2(x-4) \end{aligned}$$

例题 28

因式分解 x^4-2x^3+2x-1。

解
$$\begin{aligned} x^4-2x^3+2x-1 &= (x^4-1)-(2x^3-2x) \\ &= (x^2+1)(x^2-1)-2x(x^2-1) \\ &= (x^2-1)(x^2-2x+1) \\ &= (x+1)(x-1)(x-1)^2 \\ &= (x+1)(x-1)^3 \end{aligned}$$

随堂练习 3.4a

因式分解下列各式：

1. $8x^2-12x$
2. $45x-6-21x^2$
3. $63x^2+22x-8$
4. $9x^3+72$
5. $2x^4-x^3-16x+8$
6. $8x^3-27$
7. x^4-26x^2+25
8. $2x^3-2x^2+x-1$

习题 3.4a

因式分解下列各式：

1. $5x^2-125$
2. $3x^2+23x+40$
3. $x^2-26x+25$
4. $125x^3-64$
5. $x^3-4x^2-4x+16$
6. $4x^3+16x^2+x+4$
7. x^6-1
8. $x^3+(4x+1)^3$

五、应用因式定理

一些整数系数多项式所含项数较多，要找出其中的因式并不容易。因式定理有助于找出这些多项式的因式。

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整数系数多项式，根据因式定理，

(1) 若 $x-q$ 是 $f(x)$ 的一个因式，其中 q 是整数，那么 q 必是 a_0 的一个因数。

(2) 若 $px-q$ 是 $f(x)$ 的一个因式，其中 p，q 是互质的整数（即 p，q 的 H.C.F. 为 1），那么 p 必是 a_n 的一个因数，q 必是 a_o 的一个因数。

证明：

定理 (1)

因为 $x-q$ 是 $f(x)$ 的一个因式，所以 $f(q)=0$，

即 $a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}+\cdots+a_1q+a_0=0$，

也可写成 $a_0=-q(a_nq^{n-1}+a_{n-1}q^{n-2}+\cdots+a_1)$

由此可见，q 是 a_0 的一个因数。

定理 (2) 的证明与定理 (1) 的证明类似。

例题 29

因式分解 $f(x)=x^3+9x^2+26x+24$。

解 若 $x-q$ 是 $f(x)$ 的一个因式，

q 的可能值为 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$。

$f(1)\neq0$，$x-1$ 不是 $f(x)$ 的因式，

$f(-1)\neq0$，$x+1$ 不是 $f(x)$ 的因式，

$f(2)\neq0$，$x-2$ 不是 $f(x)$ 的因式，

$f(-2)=0$，由因式定理得 $x+2$ 是 $f(x)$ 的因式。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+7x+12 \\ \hline
x+2 & x^3+9x^2+26x+24 \\
 & \underline{x^3+2x^2} \\
 & \qquad 7x^2+26x \\
 & \qquad \underline{7x^2+14x} \\
 & \qquad\qquad 12x+24 \\
 & \qquad\qquad \underline{\underline{12x+24}}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore f(x)&=(x+2)\left(x^2+7x+12\right)\\
&=(x+2)(x+3)(x+4)
\end{aligned}
$$

数学橱窗 ②

www.bit.ly/3KDPJ9b

例题 30

因式分解 $f(x)=12x^3+16x^2-5x-3$。

解 若 $px-q$ 是 $f(x)$ 的一个因式，q 的可能值为 $\pm1,\pm3$；

p 的可能值为 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$，

所以 $\dfrac{q}{p}$ 的可能值为 $\pm1,\pm3,\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{3}{2},\pm\dfrac{1}{3},\pm\dfrac{1}{4},\pm\dfrac{3}{4},\pm\dfrac{1}{6},\pm\dfrac{1}{12}$。

经验算，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，则 $2x-1$ 是 $f(x)$ 的因式。

$$
\begin{array}{r}
6x^2+11x+3 \\
2x-1\overline{)12x^3+16x^2-5x-3} \\
\underline{12x^3-6x^2} \\
22x^2-5x \\
\underline{22x^2-11x} \\
6x-3 \\
\underline{\underline{6x-3}}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore f(x)&=(2x-1)\left(6x^2+11x+3\right)\\
&=(2x-1)(3x+1)(2x+3)
\end{aligned}
$$

例题 31

因式分解 $f(x)=2x^3+x^2+5x-3$。

解 若 $px-q$ 是 $f(x)$ 的一个因式，q 的可能值为 $\pm1,\pm3$；

p 的可能值为 $\pm1,\pm2$，

所以 $\dfrac{q}{p}$ 的可能值为 $\pm1,\pm3,\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{3}{2}$。

经验算，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，则 $2x-1$ 是 $f(x)$ 的因式。

$$
\begin{array}{r}
x^2+x+3 \\
2x-1\overline{)2x^3+x^2+5x-3} \\
\underline{2x^3-x^2} \\
2x^2+5x \\
\underline{2x^2-x} \\
6x-3 \\
\underline{\underline{6x-3}}
\end{array}
$$

$\therefore f(x)=(2x-1)\left(x^2+x+3\right)$

想一想 4 为什么 x^2+x+3 不能在有理数范围内分解？

随堂练习 3.4b

因式分解下列各式:

1. $x^3-5x^2-78x+432$　　2. $6x^3-41x^2-8x+7$　　3. $3x^3-5x^2+x+1$

习题 3.4b

因式分解下列各式：

1. $x^3+9x^2+27x+27$
2. $2x^3+7x^2-9$
3. $x^3-5x^2+24x-54$
4. $3x^3+10x^2+4x-8$
5. $-6x^3+29x^2+45x-18$
6. $30x^3-49x^2-19x+18$
7. $2x^3-3x^2-4x-1$
8. $5x^3+4x-10x^2-8$

3.5 解一元高次方程式

若一个方程式只含一个未知数，且这个未知数的最高次数大于2，这样的方程式被称为一元高次方程式 (equation of higher degree in one variable)，例如：

$$x^3+3x^2-4x-12=0$$

$$-2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0$$

假设一元高次方程式可因式分解成

$$f(x)=(x-a)(x-b)\cdots(x-n)=0$$

那么，$x=a$，$x=b$，…，$x=n$ 就是方程式 $f(x)=0$ 的根。因此，之前所学的多项式因式分解的方法可以用于一元高次方程式的解法。

例题 32

解方程式 $3x^3-x^2-12x+4=0$。

解 由因式定理，可知 $x-2$，$x+2$，$3x-1$ 是方程式的因式，

$\therefore (x-2)(x+2)(3x-1)=0$

$$x-2=0 \quad \text{或} \quad x+2=0 \quad \text{或} \quad 3x-1=0$$

$$x=2 \qquad\qquad x=-2 \qquad\qquad x=\frac{1}{3}$$

$\therefore$原方程式的解是 $x=2$，$x=-2$，$x=\frac{1}{3}$。

例题 33

解方程式 $x^3+6x^2+7x-4=0$。

解 应用长除法，

$$\begin{array}{r}
x^2+2x-1 \\
x+4\overline{\big)\,x^3+6x^2+7x-4} \\
\underline{x^3+4x^2\qquad\qquad} \\
2x^2+7x\qquad \\
\underline{2x^2+8x\qquad} \\
-x-4 \\
\underline{\underline{-x-4}}
\end{array}$$

$$(x+4)(x^2+2x-1)=0$$

$$x=-4 \quad \text{或} \quad x^2+2x-1=0$$

$$\begin{aligned}
x&=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-1)}}{2(1)} \\
&=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} \\
&=-1\pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$\therefore$原方程式的解是 $x=-4$，$x=-1\pm\sqrt{2}$。

例题 34

解方程式 $2x^3+3x^2+3x+1=0$。

解 应用长除法，可得

$$
\begin{array}{r}
x^2+x+1 \\
2x+1\,\big)\overline{2x^3+3x^2+3x+1} \\
\underline{2x^3+x^2} \\
2x^2+3x \\
\underline{2x^2+x} \\
2x+1 \\
\underline{2x+1} \\
\end{array}
$$

$$(2x+1)(x^2+x+1)=0$$

$2x+1=0$ 或 $x^2+x+1=0$

$x=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\because \Delta=(1)^2-4(1)(1)<0$

$\therefore$ 无实数解

$\therefore$ 原方程式的解是 $x=-\dfrac{1}{2}$。

数学橱窗 3

www.bit.ly/3KDPJ9b

随堂练习 3.5a

解下列方程式：

1. $x^3-6x^2-27x+140=0$
2. $30x^3-61x^2-24x+7=0$
3. $3x^3-2x^2+3x-2=0$

将一个代数式换成以另一个变数来表示的方法，叫做换元法。一些具有特殊形式的一元高次方程式，可以使用换元法来解。

例题 35

求方程式 $(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$ 的解集。

解 令 $y=x^2-x$，得 $y^2-4y-12=0$

$$(y-6)(y+2)=0$$

$$y=6 \quad \text{或} \quad y=-2$$

当 $y=6$ 时，$x^2-x=6$

$$x^2-x-6=0$$

$$(x-3)(x+2)=0$$

$$x=3 \quad \text{或} \quad x=-2$$

当 $y=-2$ 时，$x^2-x=-2$

$$x^2-x+2=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(1)(2)<0$$

$\therefore$ 无实数解

$\therefore$ 原方程式的解集是 $\{3,-2\}$。

例题 36

解方程式 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=-15$。

解 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=-15$

$(x-1)(x-7)(x-3)(x-5)=-15$

$(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+15=0$

令 $u=x^2-8x$，

$$(u+7)(u+15)+15=0$$

$$u^2+22u+120=0$$

$$(u+12)(u+10)=0$$

$$u=-12 \quad \text{或} \quad u=-10$$

想一想 5 能否把 u 换元成其他式子？

当 $u=-12$ 时，$x^2-8x=-12$

$$x^2-8x+12=0$$
$$(x-2)(x-6)=0$$
$$x=2 \quad 或 \quad x=6$$

当 $u=-10$ 时，$x^2-8x=-10$

$$x^2-8x+10=0$$
$$x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(10)}}{2(1)}$$
$$=\frac{8\pm\sqrt{24}}{2}$$
$$=4\pm\sqrt{6}$$

∴ 原方程式的根为 $x=4\pm\sqrt{6}$，$x=2$，$x=6$。

随堂练习 3.5b

解下列方程式：

1. $(2x+1)^4+4(2x+1)^2=12$
2. $9x^4-24x^2+16=0$
3. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=360$

习题 3.5

解下列方程式：

1. $2x^3-9x^2+7x+6=0$
2. $-3x^3+3x^2-9x+9=0$
3. $2x^3-11x^2-75x+378=0$
4. $x^3-5x^2-29x+105=0$
5. $4x^4-5x^2+1=0$
6. $(x-2)^4-10(x-2)^2+9=0$

7. $(x^2+14x+24)(x^2+14x-6)=-200$

8. $(2x-3)(2x-1)(2x+1)(2x+3)=3465$

总复习题 3

1. 计算：
   (a) $(8x^4+6x^3+5x^2-3x+9)+(2x^3+6x-10)$
   (b) $(6x^3-7x^2+5x+2)-(2x^3+6x^2-5)$
   (c) $(3x^4-2x^2-5)(2x^2-3x-5)$
   (d) $(6x^6-9x^5-19x^4+6x^3+8x^2)\div(2x^2-3x-5)$

2. 多项式 $f(x)=2x^5-x^3-6x^2-x+10$ 除以 $g(x)$，得商式 $Q(x)=x^3+2x-3$，余式 $R(x)=9x-5$，求 $g(x)$。

3. 设 $f(x)=16x^5+9$，求 $f(x)\div(2x+1)$ 的余数。

4. 已知 $f(x)=3x^3-4kx^2+2x+(k-3)$ 有因式 $3x+5$，求 k 的值。

5. 如果 $x-1$ 能整除 $x^4-4x^3+6x^2-4x+m$，求 m 的值。

6. 如果 $2x^4-5x^2+m$ 能被 x^2-2 整除，求 m 的值。

7. 若 px^3+2x^2+qx-2 能被 $x-1$ 及 $3x+2$ 整除，求 p 与 q 的值。

8. 以 $(x+2)^2$ 分别除 $x^4-3x^3+2x^2+ax+b$ 及 x^3-3x^2+6x 得到相同的余式，求 a 与 b 的值。

9. 如果以 $x-2$ 除 $f(x)$ 得余数 3，以 $x-4$ 除 $f(x)$ 得余数 5，求以 $(x-2)(x-4)$ 除 $f(x)$ 所得的余式。

10. 已知 n 为正整数，$a\neq 0$。判断 x^n+a^n 是否有因式 $x+a$。

11. 已知 n 为正整数，
(a) 证明 $(x+4)^n-1$ 能被 $x+3$ 所整除；
(b) 求 $(x+2)^n-1$ 除以 $x+3$ 所得的余式。

12. 证明 $x-2$ 是 $f(x)=x^3-3x^2-4x+12$ 的一个因式。据此，解方程式 $f(x)=0$ 。

13. 证明 $f(x)=x^4-5x^2+4$ 既有因式 $x-1$，又有因式 $x+1$。
据此，因式分解 $f\left(x\right)$。

14. 求一个一元三次多项式 $f(x)$，已知当 $x=2$ 及3时，它的值是 0；当 $x=0$ 时，它的值是6；当 $x=1$ 时，它的值是 12。

15. 已知 $f(1)=f(2)=f(-2)=0$， $f(3)=40$， $f(-3)=40$ 。求一元四次多项式 $f(x)$。

16. 因式分解：

(a) $8x^3-125$	(b) $-64-343x^3$
(c) $x^3-7x^2+4x+12$	(d) x^3-8x^2+x+42
(e) $6x^3-13x^2+2x+5$	(f) $16x^4-8x^2+1$

17. 解下列方程式：
(a) $x^3-19x-30=0$
(b) $2x^3-3x^2-3x+2=0$
(c) $\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)=4$
(d) $x\left(2x^2-3x-1\right)=10$
(e) $(3x-1)(3x+1)(3x+2)(3x-2)=10$

18. 一工程师希望所设计的过山车经过点 $(0,10)$、$(20,42)$、$(60,10)$ 及 $(70,17)$。
(a) 证明以上四点满足初步轨道方程式

$$f(x)=10\cdot\frac{(x-20)(x-60)(x-70)}{(0-20)(0-60)(0-70)}+42\cdot\frac{x(x-60)(x-70)}{20(20-60)(20-70)}+10\cdot\frac{x(x-20)(x-70)}{60(60-20)(60-70)}+17\cdot\frac{x(x-20)(x-60)}{70(70-20)(70-60)}$$

(b) 以上的初步轨道方程式可以由拉格朗日插值公式得到。若想要再让过山车经过点 $(90,91)$，透过你的观察，试写出新的轨道方程式（无需化简）。

希帕索斯 (Hippasus)，生活于大约公元前500年，属于毕达哥拉斯学派门生，发现无理数的第一人。公元前5世纪毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”，世界上只有整数和分数（有理数）。而希帕索斯却发现了令人震惊的“无限不循环小数”($\sqrt{2}$)，即无理数，令该学派感到恐慌，并引发了第一次数学危机。无理数的发现，极大地推动了数学的发展。

4

无理式

学习目标

- 理解根式的意义
- 掌握根式的基本性质
- 掌握根式的运算
- 掌握有理化分母的方法

4.1 根式

若一个数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，则 x 就叫做 a 的二次方根，或平方根 (square root)。例如 $3^2=9$，$(-3)^2=9$，所以 3 与 -3 都是 9 的平方根。

推广到一般的情况，若一个数 x 的 n 次方等于 a，即 $x^n=a$，则 x 就叫做 a 的 n 次方根。例如：

(i) 因为 $2^3=8$，所以 2 是 8 的三次方根，三次方根也叫做立方根 (cube root)。
(ii) 因为 $2^4=16$，$(-2)^4=16$，所以 2 与 -2 都是 16 的四次方根。
(iii) 因为 $(-2)^5=-32$，所以 -2 是 -32 的五次方根。

根式的意义

在实数范围内，

(i) 当 n 是奇数时，任何数 a 都有一个唯一的 n 次方根 (n^{th} root)，记作 $\sqrt[n]{a}$。
例如 -32 的五次方根为 -2，即 $\sqrt[5]{-32}=-2$。
(ii) 当 n 是偶数时，任何负数都没有 n 次方根，而任何正数 a 都有两个 n 次方根。这两个 n 次方根互为相反数 (additive inverse number)，$\sqrt[n]{a}$ 表示正的 n 次方根（算术根 (principal root)），$-\sqrt[n]{a}$ 表示负的 n 次方根。
例如 -16 没有四次方根，16 有两个四次方根 2 与 -2，$\sqrt[4]{16}$ 表示 16 的正四次方根 2，即 $\sqrt[4]{16}=2$；$-\sqrt[4]{16}$ 表示 16 的负四次方根 -2，即 $-\sqrt[4]{16}=-2$。16 的两个四次方根也可以用 $\pm\sqrt[4]{16}$ 表示，即 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$。

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做 n 次根式 (radical expression)，n 叫做根指数 (index of radical)，a 叫做被开方数 (radicand)。

当 n 是偶数时，必须注意以下两点：

(i) 若 a 是正数，则 $\sqrt[n]{a}$ 有意义且是正的。
(ii) 若 a 是负数，则 $\sqrt[n]{a}$ 在实数范围内没有意义。

对于任意大于 1 的正整数 n，$\sqrt[n]{0}=0$，即 0 是 0 唯一的一个 n 次方根。

根号内含有未知数的式子叫做无理式 (irrational expression)。

根据根式的意义，可得：

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

若 n 是奇数，则 $\sqrt[n]{a^n} = a$。

若 n 是偶数，则 $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$。

想一想 1 为什么 $\sqrt[4]{(-3)^4} \neq -3$？

想一想 2 在任何情况下，$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ 都成立吗？

例题 1

求 x 的取值范围使得下列各无理式有意义：

(a) $\sqrt[3]{2x+1}$　　　　(b) $\sqrt[4]{2x+1}$

解 (a) 由于立方根式中被开方数可以是任意实数，

$\therefore\ x \in \boldsymbol{R}$

(b) 由于四次方根式中被开方数不可以是负数，

$\therefore\ 2x+1 \geq 0$

$x \geq -\dfrac{1}{2}$

随堂练习 4.1a

求 x 的取值范围使得下列各无理式有意义：

(a) $\sqrt[5]{-8-x}$　　　　(b) $\sqrt[6]{-8-x}$

例题 2

不用计算机，求下列各式的值：

(a) $\left(\sqrt{3}\right)^2$　　(b) $\left(\sqrt[3]{-7}\right)^3$

(c) $\sqrt[5]{2^5}$　　(d) $\sqrt[3]{(-2)^3}$

(e) $\sqrt[4]{3^4}$　　(f) $\sqrt[4]{(-3)^4}$

解 (a) $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$　　(b) $\left(\sqrt[3]{-7}\right)^3=-7$

(c) $\sqrt[5]{2^5}=2$　　(d) $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

(e) $\sqrt[4]{3^4}=3$　　(f) $\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt[4]{3^4}=3$

例题 3

化简下列各式：

(a) $\sqrt[5]{(x-2)^5}$　　(b) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$ ， $a\le b$

解 (a) $\sqrt[5]{(x-2)^5}=x-2$

(b) $a\le b$

$b-a\ge 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-2ab+b^2}&=\sqrt{(a-b)^2}\\&=\sqrt{(b-a)^2}\\&=b-a\end{aligned}$$

随堂练习 4.1b

已知 $a+b<0$，化简 $\sqrt[4]{(a+b)^4}$ 。

习题 4.1a

求 x 的取值范围使得下列各无理式有意义（1 至 4）：

1. $\sqrt{-x}$
2. $\sqrt{x^2+1}$
3. $\sqrt[5]{-x-1}$
4. $\sqrt[4]{x^2+2x+1}$

化简下列各式（5 至 14）：

5. $\left(\sqrt[5]{-8}\right)^5$
6. $\sqrt[3]{x^3}$
7. $\sqrt{x^4}$
8. $\left(\sqrt[5]{x+2}\right)^5$
9. $\sqrt[6]{a^6}$， $a<0$
10. $\sqrt{x^2+4x+4}$， $x\ge -2$
11. $\sqrt{x^2-6x+9}$， $x\le 3$
12. $\sqrt{4x^2+12x+9}$， $x<-\dfrac{3}{2}$
13. $\sqrt[3]{(1-x)^3}+\sqrt[7]{(1+x)^7}$
14. $\sqrt[4]{(a-2)^4}+\sqrt[6]{(a-3)^6}$， $2\le a\le 3$

根式的基本性质

设 $x=\sqrt[n]{a^m}$，则 $x^n=a^m$，

$$\begin{aligned}(x^n)^p &= (a^m)^p\\ x^{np} &= a^{mp}\\ x &= \sqrt[np]{a^{mp}}\\ \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[np]{a^{mp}}\end{aligned}$$

其中 m 为正整数，n, p 都是大于 1 的正整数。

当 $n=1$，可得 $a^m=\sqrt[p]{a^{mp}}$ 。

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ 及 $\sqrt[p]{a^{mp}}=a^m$ 两个性质在 $a\ge 0$ 时成立，在 $a<0$ 时未必成立。例如 $\sqrt[4]{(-3)^2}\ne\sqrt{-3}$， $\sqrt[6]{(-5)^2}\ne\sqrt[3]{-5}$ 。

若 a 是正数，则当 n 是偶数时 $\sqrt[n]{-a}$ 没有意义，而当 n 是奇数时，$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ 。例如 $\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4$ 。利用这个结果，只要研究算术根的性质就可以了。

在这一章，如果没有特别注明，根号内的未知数都是非负的。

例题 4

化简下列各式：

(a) $\sqrt[15]{a^{10}}$　　(b) $\sqrt[12]{729a^6b^9}$

(c) $\sqrt[9]{-27x^3y^6}$　　(d) $\sqrt[6]{(-3)^2x^4}$

解 (a) $\sqrt[15]{a^{10}}=\sqrt[15]{\left(a^2\right)^5}$

$=\sqrt[3]{a^2}$

(b) $\sqrt[12]{729a^6b^9}=\sqrt[12]{3^6a^6b^9}$

$=\sqrt[12]{\left(3^2a^2b^3\right)^3}$

$=\sqrt[4]{9a^2b^3}$

(c) $\sqrt[9]{-27x^3y^6}=-\sqrt[9]{3^3x^3y^6}$

$=-\sqrt[9]{\left(3xy^2\right)^3}$

$=-\sqrt[3]{3xy^2}$

(d) $\sqrt[6]{(-3)^2x^4}=\sqrt[6]{3^2x^4}$

$=\sqrt[6]{\left(3x^2\right)^2}$

$=\sqrt[3]{3x^2}$

随堂练习 4.1c

化简下列各式：

(a) $\sqrt[12]{27x^9}$　　(b) $\sqrt[8]{(-2)^6x^4}$

同次根式、异次根式

根指数相同的根式叫做同次根式，根指数不同的根式叫做异次根式。利用根式的性质，可将异次根式化为同次根式。

例题 5

化下列各题中的根式为同次根式：

(a) $\sqrt[3]{a^2}$ ，$\sqrt[4]{a}$ ，$\sqrt[6]{a^5}$　　　(b) $\sqrt{3}$ ，$\sqrt[3]{-5}$

解 (a) $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[12]{a^8}$

$\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^3}$

$\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[12]{a^{10}}$

(b) $\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$

$\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}=-\sqrt[6]{5^2}=-\sqrt[6]{25}$

随堂练习 4.1d

化 $\sqrt{2}$ ，$\sqrt[3]{2}$ 为同次根式。

想一想 3

不求出 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$ 的近似值，如何判断它们的大小关系？

习题 4.1b

化简下列各式（1 至 10）：

1．$\sqrt[7]{-128}$　　　2．$\sqrt[15]{243}$

3．$\sqrt[16]{625}$　　　4．$\sqrt[3]{a^9b^3c^{12}}$

5．$\sqrt[4]{16a^8b^{12}}$　　　6．$\sqrt[12]{x^4y^6}$

7．$\sqrt[6]{(-3)^2a^2b^2}$　　　8．$\sqrt[6]{(-5)^4x^4y^2}$

9．$\sqrt[3]{\dfrac{8x^3y^6}{27a^6b^9}}$　　　10．$\sqrt[n]{\dfrac{a^nb^{2n}}{c^{3n}d^n}}$

化下列各题中的根式为同次根式（11 至 16）：

11．$\sqrt{3}$ ，$\sqrt[3]{3}$　　　12．$\sqrt[3]{5}$ ，$\sqrt[5]{3}$

13. $\sqrt[6]{2}$，$\sqrt[9]{-2}$

14. $\sqrt[6]{(-2)^2}$，$\sqrt[15]{(-2)^3}$

15. $\sqrt{x}$，$\sqrt[3]{x^2}$，$\sqrt[4]{x^3}$

16. $\sqrt{x+y}$，$\sqrt[4]{x^2+y^2}$，$\sqrt[6]{x^3+y^3}$

4.2 分数指数

在初中学过正数的正分数指数幂的意义是

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}\text{；}\left(a>0, m, n\in \boldsymbol{Z}^+, n>1\right)$$

正数的负分数指数幂的意义是

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\left(a>0, m, n\in \boldsymbol{Z}^+, n>1\right)\text{。}$$

指数的运算法则也适用于分数指数 (fractional index) $\left(a>0, m, n\in \boldsymbol{Z}^+\right)$。

$$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\qquad\left(a\ge 0, b\ge 0\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\qquad\left(a\ge 0, b>0\right)$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}\qquad\left(a\ge 0\right)$$

按照分数指数幂的意义，可将上述法则表示成根式的形式：

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\qquad\left(a\ge 0, b\ge 0\right)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\qquad\left(a\ge 0, b>0\right)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\qquad\left(a\ge 0\right)$$

例题 6

化简下列各式：

(a) $\left(\sqrt[3]{5a}\right)^2$　　(b) $\sqrt[3]{27\times64}$

(c) $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^3}}$　　(d) $\sqrt{\sqrt[3]{x+y}}$

解 (a) $\left(\sqrt[3]{5a}\right)^2=\sqrt[3]{(5a)^2}$

$=\sqrt[3]{25a^2}$

(b) $\sqrt[3]{27\times64}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}$

$=3\times4$

$=12$

(c) $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^3}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{b}}{a}$

(d) $\sqrt{\sqrt[3]{x+y}}=\sqrt[6]{x+y}$

随堂练习 4.2a

化简下列各式：

(a) $\left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^2$　　(b) $\sqrt[3]{a^6b^2}$

(c) $\sqrt[3]{\dfrac{9}{8}}$　　(d) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$

习题 4.2a

化简下列各式：

1. $\left(\sqrt[3]{ab}\right)^2$
2. $\left(3\sqrt[5]{a^2b}\right)^2$
3. $\sqrt{121\times64\times225}$
4. $\sqrt[3]{-343\times512\times729}$
5. $\sqrt{\dfrac{2}{81}}$
6. $\sqrt[3]{\dfrac{5}{27}}$

7. $\sqrt{\dfrac{n}{49m^4}}$

8. $\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{16b^4}}$

9. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$

10. $\sqrt[3]{\sqrt{ab^2}}$

11. $\sqrt[n]{\sqrt{2^n}}$

12. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a}}\right)^4$

根式中因式的外移和内移

利用 $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$（$a\geq 0, b\geq 0$），可以把根号内能开得尽的因式，用它的算术根代替，移到根号外面；反之也可以把根号外面的非负因式乘方（乘方的次数与根指数相同）后，移到根号里面。

例题 7

把下列各式中根号里面能开得尽的因式以它的算术根代替移到根号外面，使被开方式的每一个因式的指数都小于根指数：

(a) $\sqrt{a^3b}$　　(b) $\sqrt[3]{a^6b^5}$

解 (a) $\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{ab}$

$=a\sqrt{ab}$

(b) $\sqrt[3]{a^6b^5}=\sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{b^3}\cdot\sqrt[3]{b^2}$

$=a^2b\sqrt[3]{b^2}$

例题 8

把下列各式中根号外面的非负因式适当的乘方后移到根号里面：

(a) $x\sqrt[3]{y^2}$　　(b) $x^2\sqrt{y}$

解 (a) $x\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^2}$

$=\sqrt[3]{x^3y^2}$

(b) $x^2\sqrt{y}=\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{y}$

$=\sqrt{x^4y}$

最简根式

如果一个根式符合以下三个条件，这个根式就叫做最简根式。

① 被开方式中每一个因式的指数都小于根指数；

② 被开方式不含分母；

③ 被开方式的指数与根指数互质。

例如 $\sqrt[3]{a^2b}$ 是最简根式，而 $\sqrt[3]{a^4b}$，$\sqrt[4]{a^2b^2}$，$\sqrt[5]{\frac{b^3}{a}}$ 都不是最简根式。

想一想 4 根式 $\sqrt[6]{a^3b^2}$ 中，a 及 b 的指数都不与根指数互质，那么它是最简根式吗？

例题 9

化下列根式为最简根式：

(a) $\sqrt{\frac{20a^2b^3}{c}}$ (b) $\sqrt[6]{\frac{64y^4}{x^4}}$

解 (a)
$$\sqrt{\frac{20a^2b^3}{c}}=\sqrt{\frac{20a^2b^3c}{c^2}}=\frac{\sqrt{4a^2b^2}\cdot\sqrt{5bc}}{\sqrt{c^2}}=\frac{2ab\sqrt{5bc}}{c}$$

(b)
$$\sqrt[6]{\frac{64y^4}{x^4}}=\sqrt[6]{\frac{64x^2y^4}{x^6}}=\frac{\sqrt[6]{64x^2y^4}}{\sqrt[6]{x^6}}=\frac{2\sqrt[3]{xy^2}}{x}$$

随堂练习 4.2b

化下列根式为最简根式：

(a) $\sqrt{16t^5}$ (b) $\sqrt[3]{16a^4b^5}$

(c) $\sqrt{\frac{1}{8x^3}}$ (d) $\sqrt[3]{\frac{x^7}{8y^6}}$

习题 4.2b

把下列各式中根号外面的非负因式适当的乘方后移到根号里面（1 至 6）：

1. $5\sqrt{3}$
2. $2\sqrt[3]{9}$
3. $4b\sqrt{bc}$
4. $x^3\sqrt{xy}$
5. $2a\sqrt[3]{4a^2}$
6. $xy^2\sqrt[3]{x^2y}$

化下列根式为最简根式（7 至 16）：

7. $\sqrt{27a^3}$
8. $\sqrt{128p^3q^7}$
9. $\sqrt[3]{216x^5}$
10. $\sqrt[3]{81y^6}$
11. $\sqrt{\dfrac{n^2}{8m}}$
12. $\sqrt{\dfrac{16c^3}{9a^5b}}$
13. $\left(\sqrt[3]{ab^2}\right)^2$
14. $\left(\sqrt[4]{25n^3}\right)^3$
15. $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$
16. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32x^{15}y^5}}$

4.3 根式的运算

同类根式

几个根式化成最简根式后，若它们的被开方式相同，根指数也相同，则这几个根式就叫做同类根式。例如 $2\sqrt[3]{xy}$ 与 $-3\sqrt[3]{xy}$ 是同类根式，而 $2\sqrt[3]{xy}$ 与 $2\sqrt{xy}$ 不是同类根式，$2\sqrt[3]{xy}$ 与 $2\sqrt[3]{x}$ 也不是同类根式。

例题 10

下列各式中，哪些是同类根式？

$\sqrt{12x}$，$\sqrt{9x}$，$\sqrt[3]{24x^2}$，$\sqrt[4]{81x^6}$，$\sqrt[6]{9x^2}$，$\sqrt[8]{81x^4}$，$\sqrt{\dfrac{x}{3}}$，$\sqrt[3]{\dfrac{3}{x}}$

解 $\sqrt{12x}=2\sqrt{3x}$　　　$\sqrt{9x}=3\sqrt{x}$

$\sqrt[3]{24x^2}=2\sqrt[3]{3x^2}$　　　$\sqrt[4]{81x^6}=3x\sqrt{x}$

$\sqrt[6]{9x^2}=\sqrt[3]{3x}$　　　$\sqrt[8]{81x^4}=\sqrt{3x}$

$\sqrt{\dfrac{x}{3}}=\dfrac{\sqrt{3x}}{3}$　　　$\sqrt[3]{\dfrac{3}{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{3x^2}}{x}$

$\therefore$ $\sqrt{12x}$，$\sqrt[8]{81x^4}$，$\sqrt{\dfrac{x}{3}}$ 是同类根式；

$\sqrt{9x}$，$\sqrt[4]{81x^6}$ 是同类根式；

$\sqrt[3]{24x^2}$，$\sqrt[3]{\dfrac{3}{x}}$ 是同类根式。

根式的加法、减法

进行根式的加减运算时，先化简各根式，再合并同类根式。

例题 11

计算下列各式：

(a) $\sqrt{8}+\sqrt[3]{54}-6\sqrt[3]{\dfrac{2}{27}}+3\sqrt{18}$

(b) $\left(\sqrt[3]{27a^4}-\sqrt{\dfrac{b}{3}}\right)-\left(7\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt{12b}\right)$

想一想 5　为什么 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 不等于 $\sqrt{a+b}$？

想一想 6　两个有理数的和一定是有理数吗？两个无理数的和一定是无理数吗？

解 (a) $\sqrt{8}+\sqrt[3]{54}-6\sqrt[3]{\frac{2}{27}}+3\sqrt{18}$

$=2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}+9\sqrt{2}$

$=11\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$

(b) $\left(\sqrt[3]{27a^4}-\sqrt{\frac{b}{3}}\right)-\left(7\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt{12b}\right)$

$=3a\sqrt[3]{a}-\frac{1}{3}\sqrt{3b}-7b\sqrt[3]{a}+2\sqrt{3b}$

$=(3a-7b)\sqrt[3]{a}+\frac{5}{3}\sqrt{3b}$

随堂练习 4.3a

计算：

(a) $\sqrt[3]{24}-\sqrt{98}+2\sqrt{50}-\sqrt[3]{81}$

(b) $\sqrt[3]{3b}-\sqrt{18a}-\sqrt[3]{\frac{b}{9}}+\sqrt{8a}$

习题 4.3a

1. 下列各式中，哪些是同类根式？

(a) $\sqrt[3]{54}$，$\sqrt[4]{64}$，$\sqrt{\frac{1}{32}}$，$\sqrt[6]{\frac{1}{16}}$

(b) $\sqrt{x^3}$，$\sqrt[3]{x^4}$，$\sqrt[6]{x^2}$，$\sqrt[6]{x^3}$

(c) $\sqrt{a^3b}$，$\sqrt[6]{a^4b^2}$，$\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$，$\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^3}}$

(d) $\sqrt[6]{4a^4b^2}$，$\sqrt[6]{27a^3b^9}$，$\sqrt{\frac{a^3}{3b}}$，$\sqrt[3]{\frac{a^2}{4b^2}}$

计算下列各式，并将答案化为最简根式（2 至 8）：

2. $\sqrt{12}-2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-4\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{16}$

3. $\sqrt{45}+\sqrt[3]{\frac{8}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{81}}-\sqrt{125}$

4. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+2\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{48}-\frac{1}{5}\sqrt{54}$

5. $\sqrt{24}-\sqrt[3]{0.5}-\sqrt[3]{0.0625}+\sqrt{0.24}$

6. $\frac{2}{a}\sqrt[3]{a^4b}-3a\sqrt{\frac{b}{a}}+4b\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}+2\sqrt{9ab}$

7. $x\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{8y}-\frac{\sqrt{x}}{2}+y\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}}$

8. $\frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt[3]{\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{\frac{1}{xy^2}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$

根式的乘法、除法

已知根式的运算法则

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

反过来，可得

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

由此可知，同次根式相乘（或相除），把被开方式相乘（或相除），根指数不变。

例题 12

计算下列各式：

(a) $5\sqrt[3]{20}\times 2\sqrt[3]{2}$

(b) $\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

(c) $4\sqrt[3]{2}\div 2\sqrt[3]{4}$

(d) $\sqrt[3]{a^2b}\div\sqrt[3]{ab^2}$

解 (a) $5\sqrt[3]{20}\times 2\sqrt[3]{2}=10\sqrt[3]{20\times 2}$
$=20\sqrt[3]{5}$

(b) $\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\frac{b}{a}}$
$=\frac{b}{a}\sqrt[3]{a}$

(c) $4\sqrt[3]{2}\div 2\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{\frac{2}{4}}$
$=\sqrt[3]{4}$

(d) $\sqrt[3]{a^2b}\div\sqrt[3]{ab^2}=\sqrt[3]{\frac{a^2b}{ab^2}}$
$=\frac{1}{b}\sqrt[3]{ab^2}$

随堂练习 4.3b

计算下列各式：

(a) $2\sqrt[3]{60}\times 3\sqrt[3]{90}$

(b) $6\sqrt[3]{4}\div 4\sqrt[3]{6}$

(c) $\sqrt[3]{a^2b^4}\times\sqrt[3]{a^2b^5}$

(d) $a\sqrt[3]{ab^2}\div\sqrt[3]{a^2b}$

异次根式相乘（或相除），可以利用根式的基本性质，把异次根式化成同次根式，再进行相乘（或相除）。

例题 13

计算下列各式：

(a) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}$

(b) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[6]{\frac{y}{x}}$

(c) $4\sqrt{2}\div 2\sqrt[3]{4}$

(d) $\sqrt{3a}\div\sqrt[3]{3a}$

解 (a) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{2^4}$

$$=\sqrt[6]{2^7}$$

$$=2\sqrt[6]{2}$$

(b) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[6]{\frac{y}{x}}=\sqrt[12]{\frac{x^3}{y^3}}\cdot\sqrt[12]{\frac{y^2}{x^2}}$

$$=\sqrt[12]{\frac{x}{y}}$$

$$=\frac{1}{y}\sqrt[12]{xy^{11}}$$

(c) $4\sqrt{2}\div 2\sqrt[3]{4}=4\sqrt[6]{8}\div 2\sqrt[6]{16}$

$$=2\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt[6]{32}$$

(d) $\sqrt{3a}\div\sqrt[3]{3a}=\sqrt[6]{(3a)^3}\div\sqrt[6]{(3a)^2}$

$$=\sqrt[6]{3a}$$

随堂练习 4.3c

计算下列各式：

(a) $2\sqrt{3}\times 3\sqrt[3]{2}$

(b) $2\sqrt[4]{2}\div\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{ab}\times\sqrt[3]{a^2b}$

(d) $\sqrt[3]{a^2b}\div\sqrt[4]{ab}$

根式可以写成分数指数幂的形式，因此进行根式的乘除运算时，可以将根式写成分数指数幂的形式，再利用幂的运算法则进行运算。

例题 14

利用分数指数幂计算下列各式：

(a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\times\sqrt[10]{a^7}}$　　(b) $\sqrt[4]{x^3y}\times\sqrt[3]{xy^2}\div\sqrt[6]{x^4y^3}$

解 (a)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\times\sqrt[10]{a^7}} &= \frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{7}{10}}}\\ &= a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}}\\ &= a^{\frac{20}{30}+\frac{18}{30}-\frac{15}{30}-\frac{21}{30}}\\ &= a^{\frac{1}{15}}\\ &= \sqrt[15]{a}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x^3y}\times\sqrt[3]{xy^2}\div\sqrt[6]{x^4y^3} &= x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{\frac{4}{6}}y^{\frac{3}{6}}\\ &= x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\\ &= x^{\frac{5}{12}}y^{\frac{5}{12}}\\ &= \sqrt[12]{x^5y^5}\end{aligned}$$

想一想 7

在例题14(a)中，分数指数幂相加减时进行通分母，它在根式的意义为何？

例题 15

计算下列各式：

(a) $\left(2\sqrt[3]{3}+3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)$　　(b) $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}\right)^2$

(c) $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[5]{25}\right)\div\sqrt[4]{5}$

解 (a)
$$\begin{aligned}\left(2\sqrt[3]{3}+3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)&=4\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}+6\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}-6\\&=4\sqrt[3]{9}+4\sqrt[6]{9}\cdot\sqrt[6]{8}-6\\&=4\sqrt[3]{9}+4\sqrt[6]{72}-6\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}\right)^2&=\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2\\&=a-2\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^4}+\sqrt[3]{a^4}\\&=a-2a\sqrt[6]{a}+a\sqrt[3]{a}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[5]{25}\right)\div\sqrt[4]{5}&=\sqrt[3]{5}\div\sqrt[4]{5}-\sqrt[5]{25}\div\sqrt[4]{5}\\&=\sqrt[12]{5^4}\div\sqrt[12]{5^3}-\sqrt[20]{5^8}\div\sqrt[20]{5^5}\\&=\sqrt[12]{5}-\sqrt[20]{125}\end{aligned}$$

随堂练习 4.3d

计算下列各式：

(a) $\left(2\sqrt[3]{9}-3\right)\left(\sqrt[3]{3}+2\right)$　　(b) $\left(2\sqrt{x}+3\sqrt[4]{y}\right)\left(2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{y}\right)$

例题 16

化 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ 为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的形式。（ x 、 y 为有理数）

解 设 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ，

$$\begin{aligned}5+2\sqrt{6}&=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\\&=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{y}\right)^2\\&=x+y+2\sqrt{xy}\end{aligned}$$

比较等式两边可得 $\begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}$，

解此方程组得 $x=3$， $y=2$ 或 $x=2$， $y=3$。

$\therefore\ \sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

上述做法可以简化如下：

$$\begin{aligned}\sqrt{5+2\sqrt{6}}&=\sqrt{2+3+2\sqrt{2\times 3}}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}\\&=\sqrt{2}+\sqrt{3}\end{aligned}$$

习题 4.3b

计算下列各式（1 至 18）：

1. $3\sqrt{5}\times 2\sqrt{10}$
2. $\sqrt[3]{-9}\times\sqrt[3]{12}$
3. $\sqrt[3]{9a^2b}\times\sqrt[3]{3ab^5}$
4. $\sqrt[4]{6x^3y}\times\sqrt[4]{54x^2y^3}$
5. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[6]{32}$
6. $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}$
7. $\sqrt{xy}\cdot\sqrt[3]{x^2y}$
8. $\sqrt{\dfrac{y}{x}}\cdot\sqrt[6]{xy^4}$
9. $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{a\cdot\sqrt[6]{a}}$
10. $\sqrt{\dfrac{a}{b^3}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{b^5}{a}}$

11. $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\times\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^4}}$

12. $\frac{\sqrt{3}\times\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$

13. $\frac{\sqrt[3]{81}\times\sqrt[4]{27}}{\sqrt[12]{3}}$

14. $\sqrt{x\sqrt{x^3\sqrt{x^6}}}$

15. $\sqrt{xy}\times\sqrt{x\sqrt{y^3}}$

16. $\left(2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\right)\left(2-\sqrt[3]{9}\right)$

17. $\left(2\sqrt[3]{9}-3\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt[3]{3}-2\sqrt{3}\right)$

18. $\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}\right)\div\left(-\sqrt[4]{a^3}\right)$

19. 化 $\sqrt{7+\sqrt{40}}$ 为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的形式。（ x 、 y 为有理数）

20. 化 $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ 为 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 的形式。（ x 、 y 为有理数）

4.4 有理化因式及有理化分母

观察下列各式：

$$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$
$$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=2$$
$$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$$
$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a^2}=a$$
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$$
$$\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$$

在上述各式中，两个含有根式的代数式相乘，如果它们的积不含根式，我们就说这两个代数式互为有理化因式 (rationalizing factor)。一个根式的有理化因式可以有无限多个，例如 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{8}$ ， $\sqrt{18}$ 等都是 $\sqrt{2}$ 的有理化因式。通常我们常取最简单的有理化因式。

例题 17

求下列各式的有理化因式：

(a) $3\sqrt{7}$ (b) $2\sqrt[3]{9}$

(c) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ (d) $3-2\sqrt{3}$

解 (a) $\because\ 3\sqrt{7}\times\sqrt{7}=21$ 是有理式，

$\therefore\ 3\sqrt{7}$ 的有理化因式是 $\sqrt{7}$。

(b) $\because\ 2\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}=6$ 是有理式，

$\therefore\ 2\sqrt[3]{9}$ 的有理化因式是 $\sqrt[3]{3}$。

(c) $\because\ \left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=6$ 是有理式，

$\therefore\ 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 的有理化因式是 $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$。

(d) $\because\ \left(3-2\sqrt{3}\right)\left(3+2\sqrt{3}\right)=-3$ 是有理式，

$\therefore\ 3-2\sqrt{3}$ 的有理化因式是 $3+2\sqrt{3}$。

随堂练习 4.4a

求下列各式的有理化因式：

(a) $7\sqrt{5}$ (b) $3\sqrt[3]{3}$

(c) $\sqrt{22}-2\sqrt{2}$ (d) $5+2\sqrt{5}$

有理化分母

把分母中的根号去掉的过程叫做有理化分母 (rationalizing the denominator)。一般上我们将分子与分母同时乘以分母的有理化因式，使得分母不含根式。

例题 18

化简下列各式：

(a) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}}$　　(b) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

(c) $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}$　　(d) $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

解 (a)
$$\frac{1}{2\sqrt[3]{5}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25}}=\frac{\sqrt[3]{25}}{10}$$

(b)
$$\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{9+6\sqrt{5}+5}{9-5}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

(c) **解法一**
$$\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}=\frac{\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x-y}}{x-y}=\frac{(x+y)(x-y)\sqrt{x-y}}{x-y}=(x+y)\sqrt{x-y}$$

解法二
$$\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}=\frac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{x-y}}=(x+y)\sqrt{x-y}$$

(d)
$$\frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{2\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\left(1-\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\right)\left(\left(1-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{2\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)^2-3}$$
$$=\frac{2\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{1-2\sqrt{2}+2-3}$$
$$=\frac{2\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{-2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

想一想 8　例题18(d)有没有其他的做法？

例题 19

已知矩形 $ABCD$ 的面积为 49 cm^2，其中 $AB=\left(5\sqrt{2}+1\right)\text{cm}$，求：

(a) 另一边 BC 的长；

(b) 对角线 AC 的长。

解 (a) $$BC=\frac{49}{5\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{49}{5\sqrt{2}+1}\times\frac{5\sqrt{2}-1}{5\sqrt{2}-1}$$
$$=\left(5\sqrt{2}-1\right)\text{cm}$$

(b) $$AC^2=AB^2+BC^2$$
$$=\left(5\sqrt{2}+1\right)^2+\left(5\sqrt{2}-1\right)^2$$
$$=50+10\sqrt{2}+1+50-10\sqrt{2}+1$$
$$=102$$
$$\therefore AC=\sqrt{102}\text{ cm}$$

随堂练习 4.4b

化简下列各式：

(a) $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}}$

(b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{a-4}{\sqrt{a}-2}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

习题 4.4

求下列各式的有理化因式（1 至 6）：

1. $\sqrt{40}$

2. $\sqrt[3]{12}$

3. $2a\sqrt{b}$

4. $\sqrt[3]{xy^2}$

5. $\sqrt{2a}+\sqrt{3b}$

6. $2\sqrt{x}-3y$

化简下列各式（7 至 20）：

7. $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}}$

8. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

9. $\dfrac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

10. $\dfrac{14+6\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

11. $\dfrac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

12. $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}-1}$

14. $\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$

15. $\dfrac{3}{3-2\sqrt{3}}-\dfrac{3}{3+2\sqrt{3}}$

16. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

17. $\dfrac{x+2\sqrt{2xy}+2y}{\sqrt{x}+\sqrt{2y}}$

18. $\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2-2a}}+\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-2a}}$

19. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

20. $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

21. 已知直角三角形 ABC 中，角 B 为直角，$AB=\left(3+\sqrt{2}\right)$ cm，$AC=\left(3\sqrt{2}+1\right)$ cm，求：
(a) BC的长；
(b) AC边上的高。

例题 20

解方程式 $\sqrt{x+1}+x=5$。

解

$$\sqrt{x+1}+x=5$$

$$\sqrt{x+1}=5-x$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(5-x)^2$$

$$x+1=25-10x+x^2$$

$$x^2-11x+24=0$$

$$(x-3)(x-8)=0$$

$x=3$ 或 $x=8$

将 $x=3$ 代入原方程式，
左式 $=\sqrt{3+1}+3=5=$ 右式
$\therefore x=3$ 是原方程式的解。

将 $x=8$ 代入原方程式，
左式 $=\sqrt{8+1}+8=11\neq$ 右式
$\therefore x=8$ 是增根。

$\therefore$原方程式的解是 $x=3$。

想一想 9 为什么例题20会有增根？

例题 21

已知 $A(-2,3)$，$B(7,6)$ 两点，C 是 x 轴上的一点使得 $2CA=CB$，求点 C 的坐标。

解 设点 C 的坐标是 $(c,0)$。

$$2CA=CB$$
$$2\sqrt{(c-(-2))^2+(0-3)^2}=\sqrt{(c-7)^2+(0-6)^2}$$
$$2\sqrt{c^2+4c+13}=\sqrt{c^2-14c+85}$$
$$4(c^2+4c+13)=c^2-14c+85$$
$$3c^2+30c-33=0$$
$$c^2+10c-11=0$$
$$(c-1)(c+11)=0$$
$$c=1 \text{ 或 } c=-11$$

$\therefore$点 C 的坐标是 $(1,0)$ 或 $(-11,0)$。

想一想 10 为什么例题21不需要检验是否有增根?

总复习题 4

1. 求 x 的取值范围使得下列各无理式有意义：

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$　　(b) $\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}$

2. 若 $a\le 1$，求 $a+\sqrt[6]{(a-1)^6}$。

3. 指出下述推导的错误：

因为 $(-3)^4=3^4$

所以 $\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt[4]{3^4}$

因为 $\sqrt[4]{(-3)^4}=-3$，$\sqrt[4]{3^4}=3$

所以 $-3=3$

化简下列各式（4 至 21）：

4. $\sqrt[4]{x^6y^6}$

5. $\sqrt[6]{m^4+2m^3n+m^2n^2}$

6. $\sqrt[4]{(-3)^6x^2y^8}$

7. $\sqrt[n]{a^{n+1}b^{2n+2}c^{3n+3}}$

8. $\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

9. $\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}+\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

10. $\dfrac{\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{3}}{\sqrt[6]{243}}$

11. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}\times\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt[5]{x^2y^3}}$

12. $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$，$a>b$

13. $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}$，$x<-1$

14. $\left(\sqrt{6}-\sqrt{35}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{21}\right)$

15. $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}\right)$

16. $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[6]{a^5}\right)^2$

17. $\dfrac{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

18. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{6}}-\dfrac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

19. $\dfrac{x-16}{\sqrt[4]{x}+2}$

20. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$

21. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

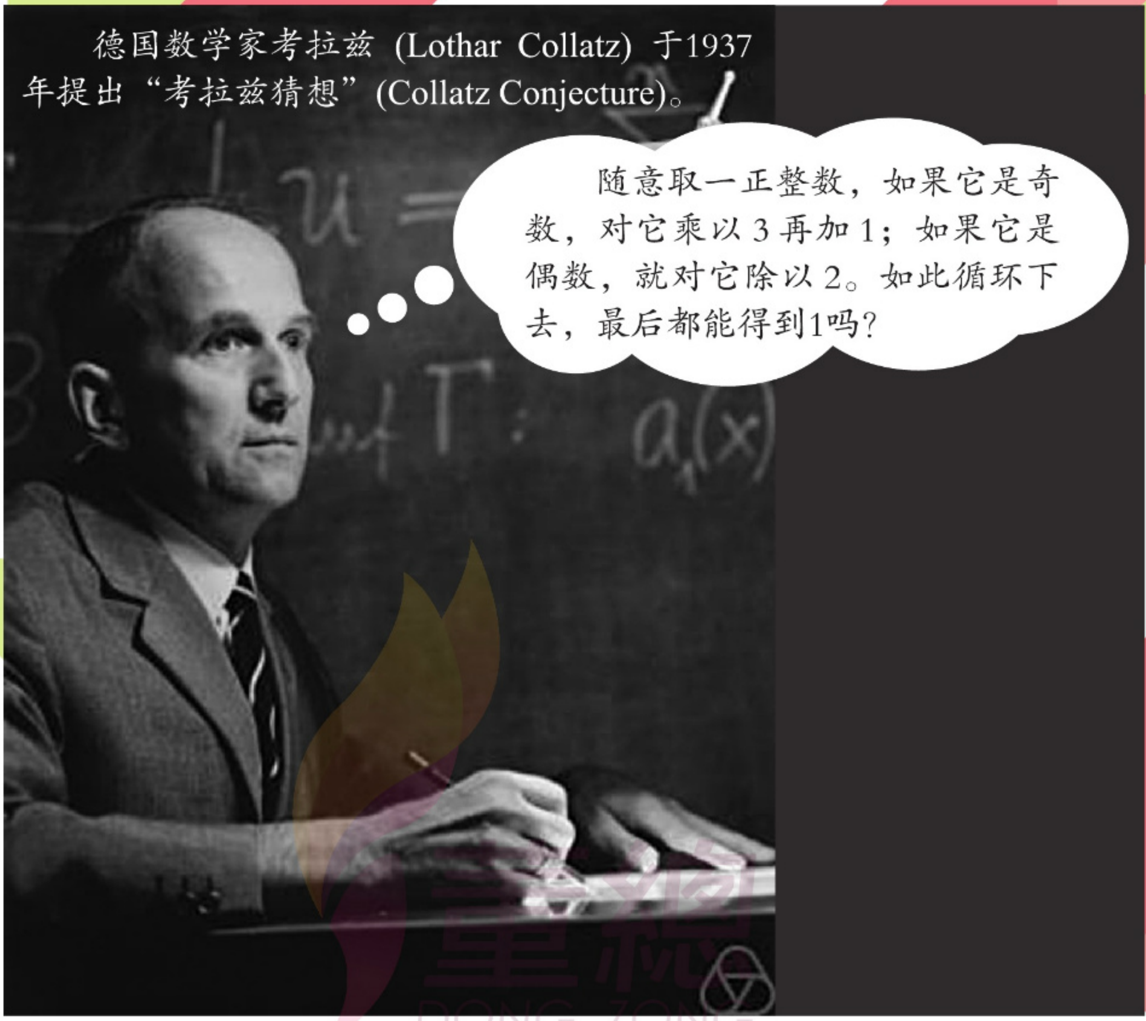
22. 将 $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 的分母有理化。据此，化简

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}。$$

23. 化 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 为 $a-\sqrt{b}$ 的形式。（ a 、b 为有理数。）

24. 解方程式 $x+4+\sqrt{2x+11}=0$ 。

25. 已知点 $A(1,4)$ 与点 $B(k,2k+1)$ 的距离是 17，求 k 的值。



德国数学家考拉兹 (Lothar Collatz) 于1937年提出“考拉兹猜想”(Collatz Conjecture)。

实际上，我们经常遇到“一个量随着另一个量而变化”的情况。比如，飞机的升力因高度不同而改变；当你玩电子游戏时，游戏中的角色的移动速度会因位置而改变；一天的气温是随着时间而变化等等。这种“输入一个值后将输出一个值”的关系，就是这章要讨论的内容。

在本章中，我们将学习一个量随着另一个量而变化的一些基本问题，包括如何使用式子、图、表来描述这些变化的内容。

5 函数

学习目标

- 掌握对应与映射的定义
- 掌握函数的定义及表示法
- 掌握函数的定义域及值域的求法
- 掌握合成函数的概念及运算
- 认识基本函数的图像
- 掌握函数图像的变换
- 理解一对一函数，映成函数及一一映成函数
- 掌握反函数的概念及求法

5.1 函数

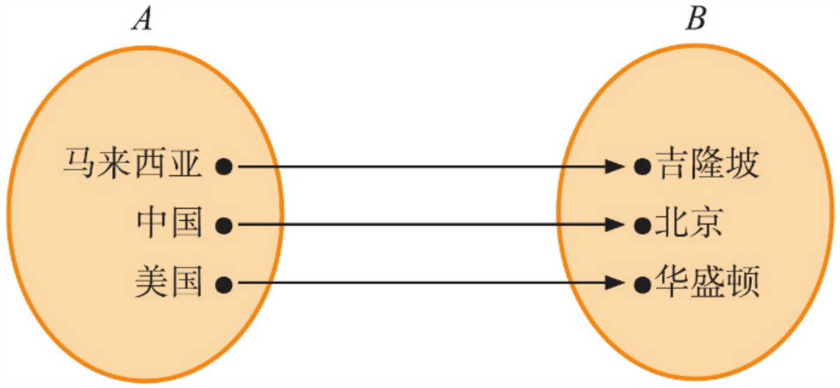
对应与映射的意义

在生活中，经常存在两件事或物之间的关系。如：
(1) 高一理科班不同学科的课本与其对应的价格；
(2) 各个国家与其对应的首都

在数学里，我们经常利用集合 (set) 来表示这些关系。

以例子 (2) 为例，先假设两个非空集合 (nonempty set)，它们分别是以国家为元素(element) 所构成的集合 A，及由城市为元素所构成的集合 B，可用范恩图表示出来：

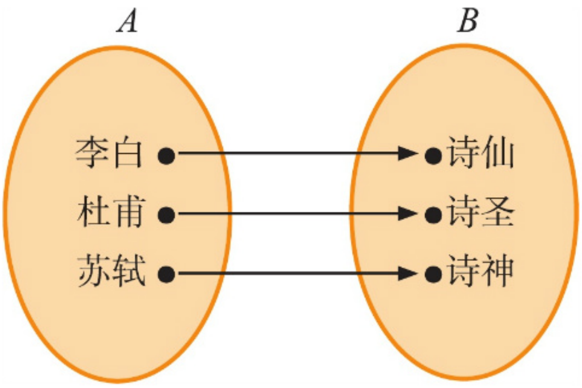
上述的对应法则 (corresponding rule) 为“首都”，所以对于集合 A 中的所有（或部分）元素要在集合 B 中找到对应的元素：



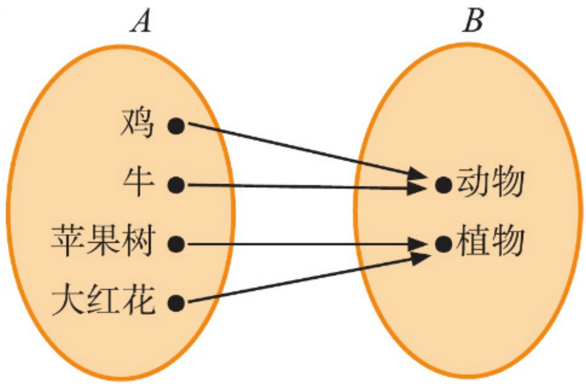
这样我们就完成了从集合 A 到集合 B 的对应关系 (relation)。

对应关系可分为以下四个种类：

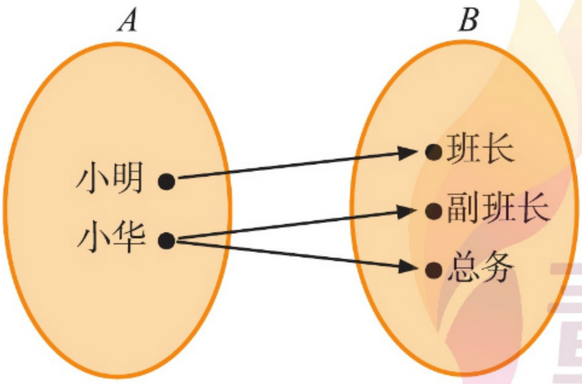
(a) 一对一



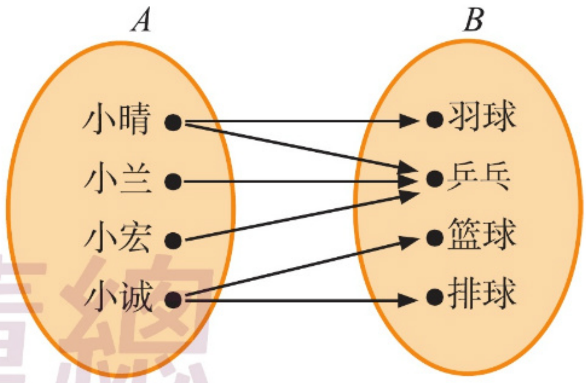
(b) 多对一



(c) 一对多



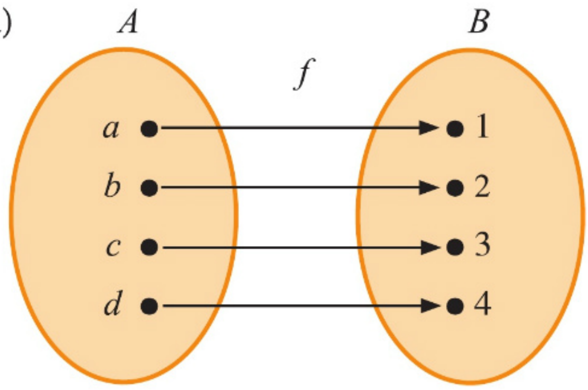
(d) 多对多



设 A 与 B 是两个非空集合，若按照某种对应法则 f，对于 A 中每一个元素 a，在 B 中都有唯一的元素 b 和它对应，则这样的对应 f 叫做从集合 A 到集合 B 的一个映射 (mapping)，记作 $f: A \to B$。b 称作 a 在 f 之下的映像 (image)，记作 $b = f(a)$；而 a 称作 b 在 f 之下的原像 (preimage)。

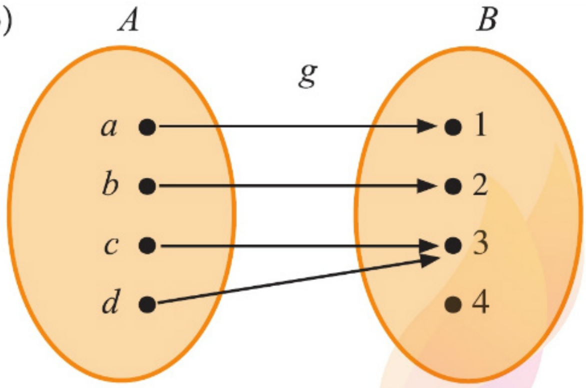
例如在以下的关系中，

(a)



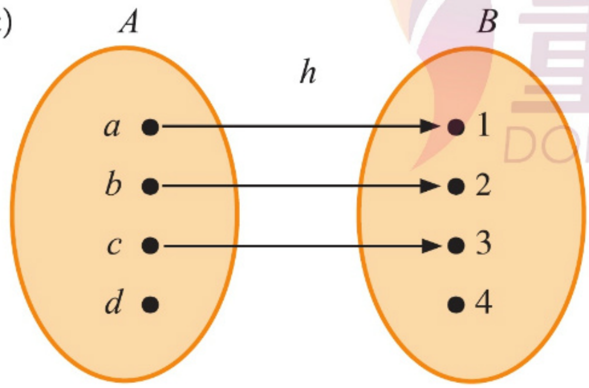
- f 是映射。
- 集合 A 中每一个元素在集合 B 中都有唯一的元素与之对应。

(b)



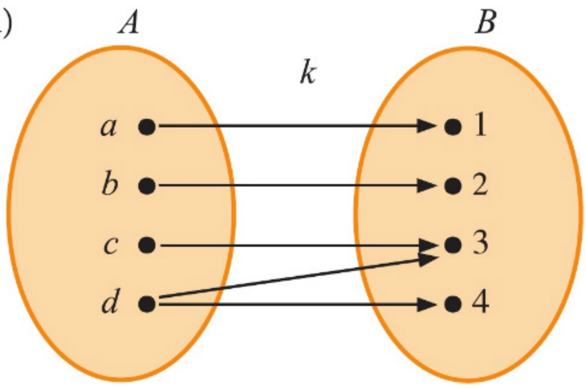
- g 是映射。
- 集合 A 中每一个元素在集合 B 中都有唯一的元素与之对应。
- 对于集合 B 中的每一个元素，并不要求它在集合 A 中有唯一的原像，可以有不同的原像，也可以没有原像。

(c)



- h 不是映射。
- 集合 A 中的元素 d 在集合 B 中没有映像。

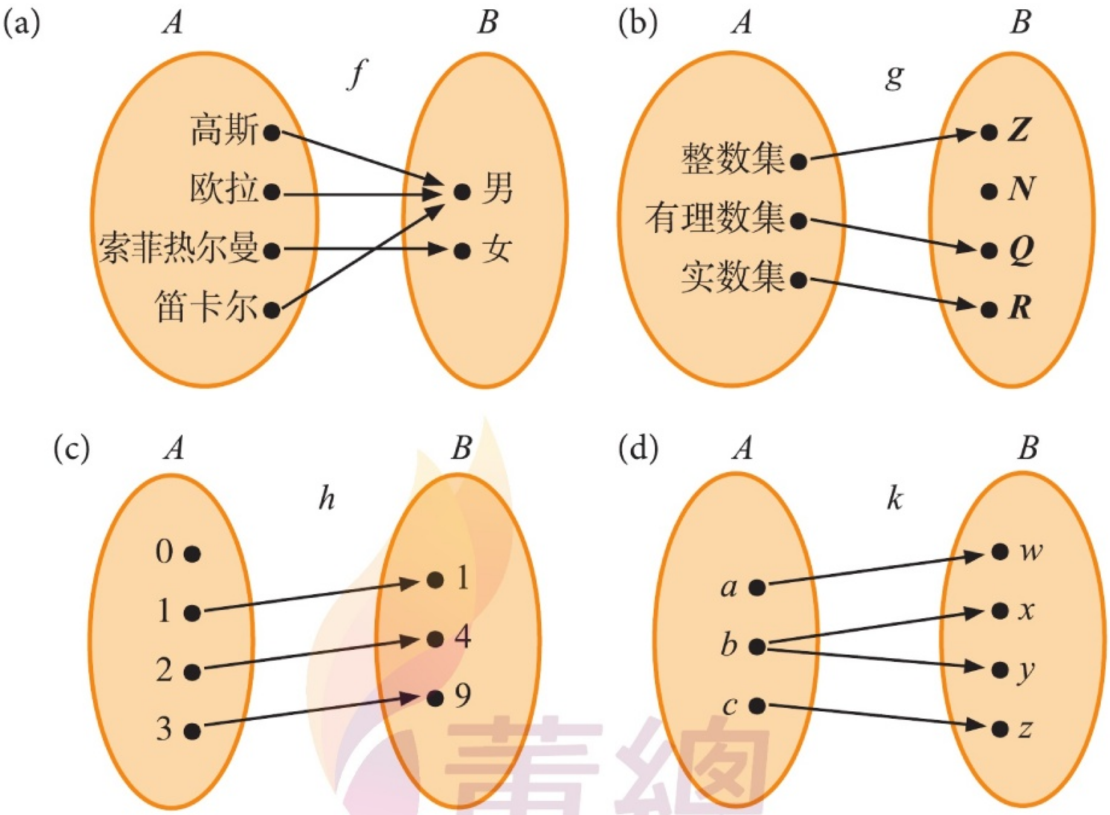
(d)



- k 不是映射。
- 集合 A 中的元素 d 在集合 B 中的映像不唯一（元素 3 与 4）。

例题 1

判断下列对应关系是否为映射，若其为映射则指出集合 A 中各元素的映像及集合 B 中各元素的原像。



解 (a) $f: A \to B$ 是映射。其对应法则为“性别”，即

f（高斯）$=f$（欧拉）$=f$（笛卡尔）$=$ 男，f（索菲热尔曼）$=$ 女。

集合 B 中的“男”有 3 个原像：高斯、欧拉、笛卡尔；

“女”的原像为索菲热尔曼。

(b) $g: A \to B$ 是映射。其对应法则为“集合的符号”，即 g（整数集）$=\boldsymbol{Z}$，g（有理数集）$=\boldsymbol{Q}$，g（实数集）$=\boldsymbol{R}$。

(c) $h: A \to B$ 不是映射，因为集合 A 中的元素 0 在集合 B 中没有映像。

(d) $k: A \to B$ 不是映射，因为集合 A 中的元素 b 在集合 B 中有两个映像 x 和 y。

例题 2

判断下列对应关系是否为映射：

(a) $A=\boldsymbol{Z}$ ， $B=\boldsymbol{Z}$ ，f 将 A 中各数对应到 B 中比其大 1 的数；

(b) $A=\boldsymbol{Z}$ ， $B=\boldsymbol{Z}^{+}\cup\{0\}$ ，g 将 A 中各数对应到 B 中其平方数；

(c) $A=\boldsymbol{Z}$ ， $B=\boldsymbol{Q}$ ，h 将 A 中各数对应到 B 中其倒数；

(d) $A=\boldsymbol{Z}^{+}$ ， $B=\boldsymbol{Z}$ ，k 将 A 中各数对应到 B 中其开平方数。

解 (a) $f:A\to B$ 是映射。集合 A 中的每一个元素在集合 B 中都存在唯一一个比它大 1 的数。

(b) $g:A\to B$ 是映射。集合 A 中的每一个元素在集合 B 中都存在唯一的平方数。

(c) $h:A\to B$ 不是映射，因为集合 A 中的元素 0 在集合 B 中没有映像。

(d) $k:A\to B$ 不是映射，因为集合 A 中的元素在集合 B 中都有两个映像，如 9 的映像为 3 和 -3 。

随堂练习 5.1a

设 $A=\{a,b,c,d\}$ ，其中 a 、b 表示甲班的两名学生， c 、d 表示乙班的两名学生； $B=\{x,y\}$ ，其中 x 、y 分别为甲、乙两班的数学教师。

(a) 作图表示下列对应关系：

(i) A 到 B 的对应法则 f 为“其数学教师”；

(ii) B 到 A 的对应法则 g 为“其所教的学生”。

(b) 以上两个对应中哪个是映射？是从哪个集合到哪个集合的映射？

习题 5.1a

1. 设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x^4$，求 -1，0，1，2 在 f 之下的映像。

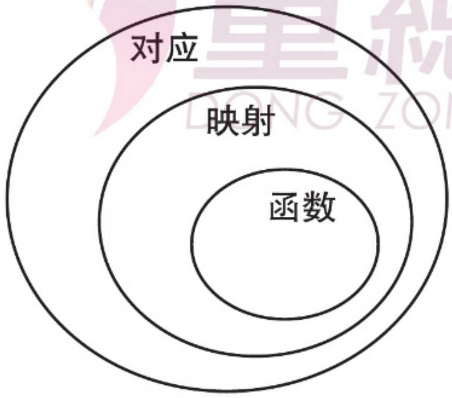
2. 设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x^2$，求 0，1，4 在 f 之下的原像。$\boldsymbol{R}$ 中哪些元素在 f 之下没有原像?

3. 设 $f:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$，$f(n)=n+1$，求 2 在 f 之下的映像和原像。$\boldsymbol{N}$ 中有没有在 f 之下不存在原像的元素?

函数、自变量、因变量的定义

上一小节中，我们掌握了映射的定义，而函数 (function) 则是在映射的基础上，按某种对应法则去表示两个数值之间的关系。函数可以看作是特殊的映射。

一般地，设 A、B 是两个非空的数集，f 是 A 到 B 的一个映射，这个映射 f 称为从 A 映到 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$，$f:A\to B$，$f(x)=y$，$x\in A$，$y\in B$。



数集 A 中的变量 x 称为自变量 (independent variable)，数集 B 中的变量 y 称为因变量 (dependent variable)。

例如，一辆汽车以均匀速度 v 行驶，经过若干时间 t 后，汽车所行进的距离 s 为

$$s=vt,\ \ t\geq 0$$

其中速度 v 为常数，时间 t 为自变量，距离 s 为因变量。对于所有的时间 t 都有唯一与其对应的距离 s，故上述的对应关系为函数。

随堂练习 5.1b

1. 作范恩图表示从集合 A 到集合 B 的对应：

   (a) $A=\{0,3,9,12\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，对应法则为“除以 3”。

   (b) $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{0,1,4,9,16\}$，对应法则为“4 次方”。

   (c) $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{0,1,4\}$，对应法则为“平方”。

   (d) $A=\{30°,45°,60°\}$，$B=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$，对应法则为“取余弦值”。

   (e) $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，对应法则为“3 次方”。

2. 在第 1 题的各对应关系中，哪些是从集合 A 到集合 B 的函数?

函数表示法

在元素个数较多的情况下，范恩图就难以完整地表示函数。我们将继续介绍另外三种表示法，它们分别为解析法 (analytic method)、列表法 (tabulation method)、图像法 (graphical method)。

一、解析法

例：

$$y=\sqrt{x-2}\quad(x\geq 2)$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\quad(x\neq 0)$$

$$A=\pi r^2\quad(r\geq 0)$$

用解析式表示函数，可以清楚地反映函数关系，便于由自变量求出其函数的对应值，也便于利用对解析式的分析来研究函数的性质。

例题 3

用解析式表示下列函数：

(a) f 将每个自然数映射为比其 3 倍少 2 的数；

(b) g 将每个实数映射为其平方的 5 倍；

(c) h 将每个正实数映射为 1，每个负实数映射为 -1，0 映射为其自身；

(d) k 将不等于 0 的实数映射为其倒数。

解 (a) $f(x)=3x-2\ \ (x\in \boldsymbol{N})$

(b) $g(x)=5x^2\ \ (x\in \boldsymbol{R})$

(c) $h(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

(d) $k(x)=\dfrac{1}{x}\ \ (x\neq 0)$

二、列表法

通过表格一一列出自变量 x 所取的值及相对应的因变量 y 的值，也可以表示函数的关系，如：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	2	3	4	5	6	…

$y=x+4\ \ (x\in \boldsymbol{Z})$

用列表法表示函数，便于不经计算直接查找函数的对应值。

例题 4

以解析式表示下表所示的函数：

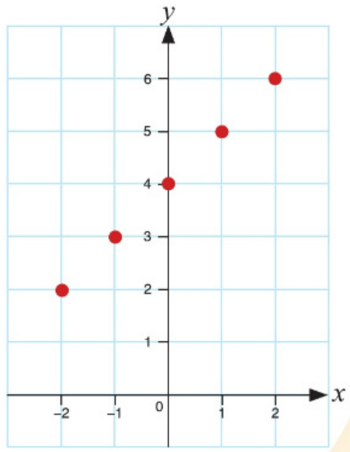
x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	5	2	1	2	5	…

解 $y=x^2+1\ \ (x\in \boldsymbol{Z})$

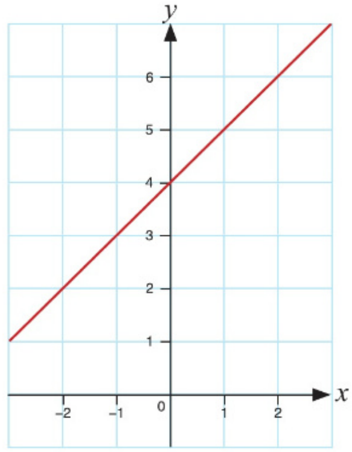
三、图像法

设函数 $f: A \to B$。对于每个自变量 x，与其所对应的因变量 y，都在直角坐标平面内对应一点 (x, y)。在坐标平面上，所有点 $(x, f(x))$ 所构成的图形，称为函数 f 的图像。

(a) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \boldsymbol{N}$，$f(x) = x + 4$



(b) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$f(x) = x + 4$



用图像法表示函数，可以直观地表示出函数的变化情况，便于研究函数的性质。

想一想 1

根据上图，相同的解析式就一定代表同一个函数吗？

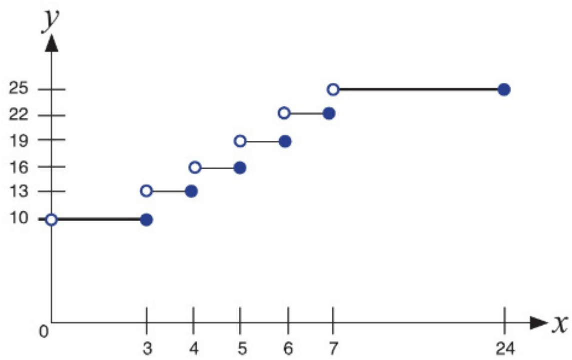
例题 5

某停车场的首 3 小时的费用为 RM 10，超过 3 小时后每小时加收 RM 3，超过 7 小时且不超过 24 小时则收费 RM 25，写出解析式并画出函数图像。

解 解析式

$$y = \begin{cases} 10, & 0 < x \leq 3 \\ 13, & 3 < x \leq 4 \\ 16, & 4 < x \leq 5 \\ 19, & 5 < x \leq 6 \\ 22, & 6 < x \leq 7 \\ 25, & 7 < x \leq 24 \end{cases}$$

函数图像

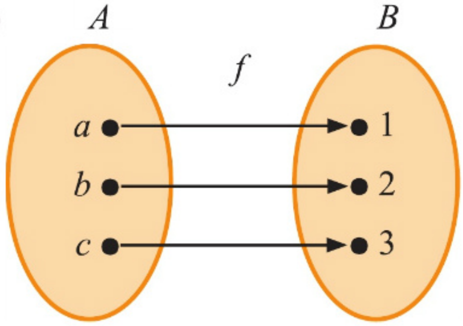


在例题 5，若函数的自变量 x 对于不同的取值范围，有不同的对应法则，这样的函数称为分段函数。分段函数也可以看作是若干个函数组成的一个函数。

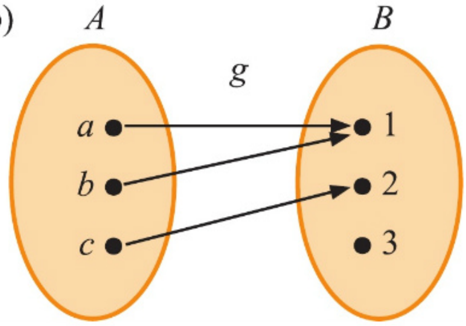
习题 5.1b

1. 下列各图所示的对应关系中，哪些是集合 A 映到集合 B 的函数关系？

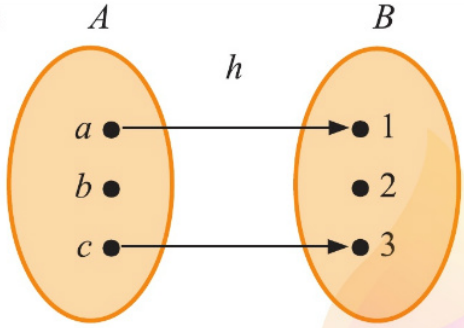
(a)



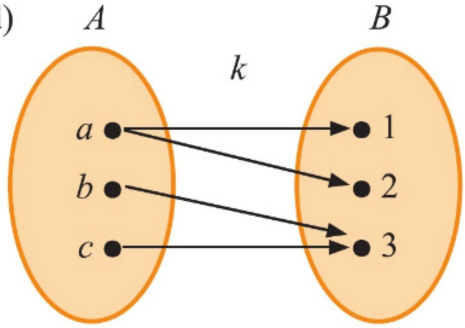
(b)



(c)



(d)



2. 对于第 1 题中表示集合 A 映到集合 B 的函数的图，分别指出其中 a 的映像及 2 的原像各是什么？

3. 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{0,1\}$，以范恩图表示出从集合 A 映到集合 B 的所有函数。问共有几个函数？

4. 作出下列函数的图像：

(a) $f(x)=2x$， $x\in\{1,2,3\}$

(b) $f(x)=x$， $0\le x\le 3$

(c) $f(x)=x^2$， $-2<x<2$

(d) $f(x)=x+2$， $x\in \boldsymbol{R}$

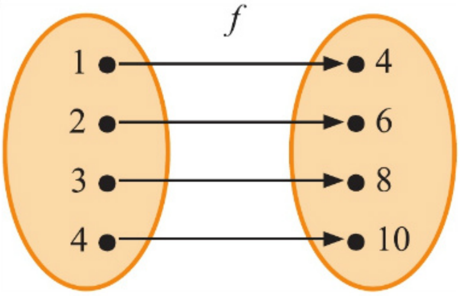
5. 作出下列函数的图像：

(a) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

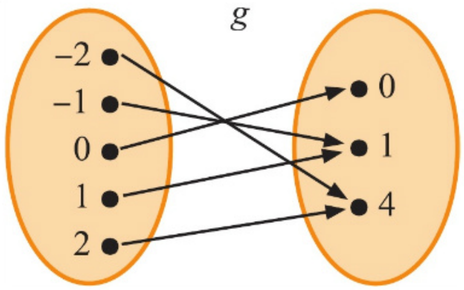
(b) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$

6. 写出下列各图所表示的函数的解析式：

(a)



(b)

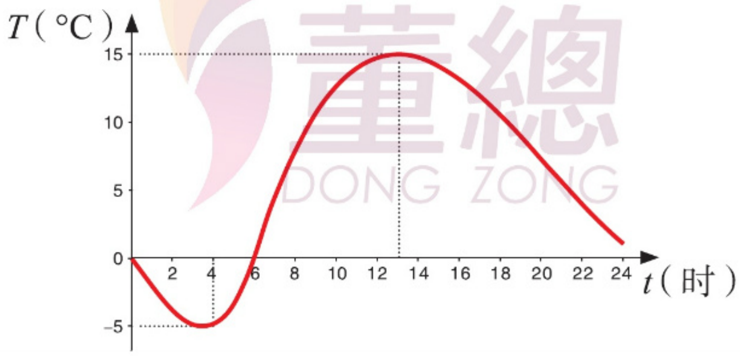


7. 下表是某地区的海拔高度与平均气温对照表。

高度 h（米）	0	500	1000	2000	3000
气温 T（°C）	10	7	4	−2	−8

根据这个表，写出高度 h（米）与气温 T（°C）之间的函数关系解析式（已知 T 是 h 的一次函数），并计算高度为 1500 米 的平均气温。

8. 下图是某地区某天温度 T（°C）随时间 t（时）变化的图像，根据图像说明该地区该天的最高温度和最低温度各是多少，各发生在什么时刻。



第8题用图

9. 某种商品的售价为：不超过 10 公斤，每公斤收 RM 1；超过 10 公斤后，超出部分每公斤多收 RM 0.10。试写出购物数量 x（公斤）与售价 y（RM）之间的函数解析式，并画出函数的图像（设 $0 < x \leq 20$）。

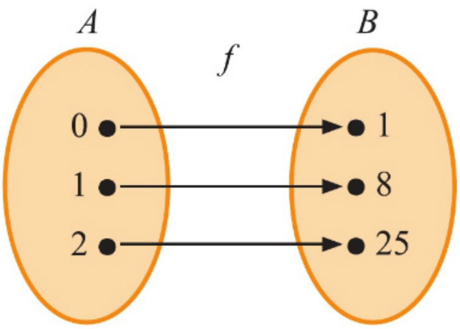
5.2 函数的定义域与值域

自变量的取值与函数值

设 $f:A\to B$ 是一个函数，集合 A 中的任一元素 a 在 f 之下的映像 $f(a)$，称为自变量取值为 a 时的函数值。

例如，对于函数 $f(x)=5x^2+2x+1\quad(x\in\boldsymbol{R})$，自变量 x 的取值为 0，1，2 时的函数值分别为

$$f(0)=5(0)^2+2(0)+1=1$$
$$f(1)=5(1)^2+2(1)+1=8$$
$$f(2)=5(2)^2+2(2)+1=25$$



例题 6

已知函数 $f(x)=-2x^2+3x-1$，$x\in\boldsymbol{R}$，求 $f(2)$，$f(\sqrt{2})$，$f(-a)$ 及 $f(x-2)$。

解 $f(2)=-2(2)^2+3(2)-1$
$\quad=-3$

$f(\sqrt{2})=-2(\sqrt{2})^2+3(\sqrt{2})-1$
$\quad=3\sqrt{2}-5$

$f(-a)=-2(-a)^2+3(-a)-1$
$\quad=-2a^2-3a-1$

$f(x-2)=-2(x-2)^2+3(x-2)-1$
$\quad=-2(x^2-4x+4)+3x-6-1$
$\quad=-2x^2+8x-8+3x-6-1$
$\quad=-2x^2+11x-15$

函数的定义域与值域

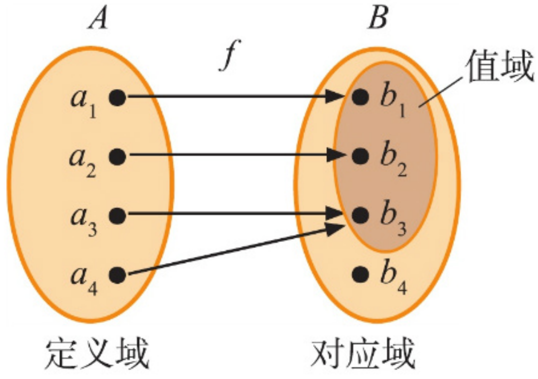


图5–1

如图 5–1，对于函数 $f:A\to B$，集合 A 称为这个函数的定义域 (domain)，记作D_f。集合 B 称为这个函数的对应域 (codomain)。

集合 A 中全体元素在 f 之下的映像的集合，记作 $f(A)$，也就是说

$$f(A)=\{b\mid b=f(a),a\in A\}。$$

$f(A)$ 称为这个函数的值域 (range)，记作 R_f，即 $R_f=f(A)$。

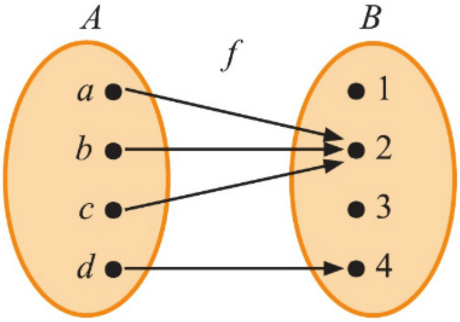
显然，函数的定义域就是自变量取值的范围，函数的值域则是全部函数值的集合。值域是对应域的子集（可能是真子集，也可能两者相等）。总之，对于函数 $f:A\to B$，一定有 $f(A)\subseteq B$。

设函数 $f:A\to B$ 中的定义域 $A\subseteq \boldsymbol{R}$，对应域 $B\subseteq \boldsymbol{R}$，则这个函数称为实函数 (real function)。本书中主要讨论实函数。当一个实函数定义域未注明而仅给出其对应法则时，其定义域被约定为所有使 $f(x)$ 有意义的实数 x 的集合。当一个函数的定义域和对应法则确定后，其值域也就随之确定了。

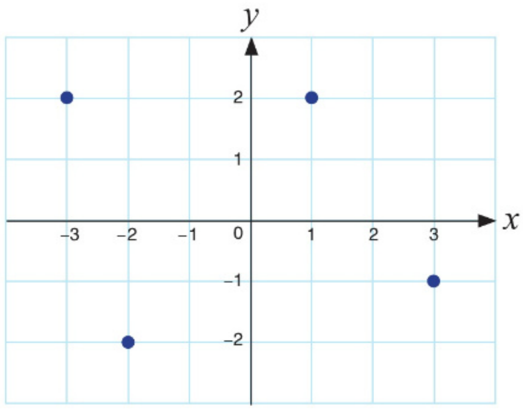
例题 7

求出下列函数的定义域和值域：

(a)



(b)



解 (a) 定义域 $D_f=\{a,b,c,d\}$，值域 $R_f=\{2,4\}$。

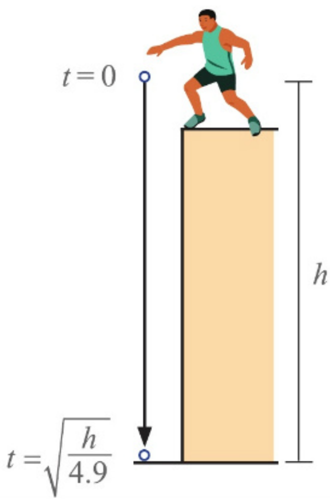
(b) 定义域 $D_f=\{-3,-2,1,3\}$，值域 $R_f=\{-2,-1,2\}$。

例题 8

物体从高度为 h 米处自由落地到地面，运动路程 S（米）与下落时间 t（秒）之间的函数关系式为 $S=4.9t^2$，求这个函数的定义域。

解 由函数，t 取任一实数值都有意义，但从实际问题看，t 的值应为非负的，且当 $t=\sqrt{\dfrac{h}{4.9}}$ 时，物体落在高度为 0 米处（运动结束），所以这个函数的定义域为

$$D_S=\left\{t \,\middle|\, t\in \boldsymbol{R}, 0\le t\le \sqrt{\frac{h}{4.9}}\right\}$$

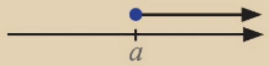
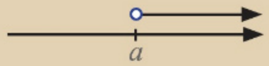
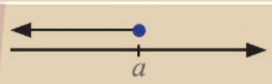


从实际问题抽象出来的函数的定义域，往往要根据实际问题的具体意义来确定。

区间的概念及表示法

为了更方便地表示函数的定义域和值域，我们需要认识区间 (interval) 的表示法。

设 a、b 是两个实数，且 $a<b$，

定义	符号	数轴表示
$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a, b]$	
$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x \mid a < x \le b\}$	$(a, b]$	
$\{x \mid x \ge a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x \mid x > a\}$	(a, ∞)	
$\{x \mid x \le a\}$	$(-\infty, a]$	
$\{x \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	
$\boldsymbol{R}$	$(-\infty, \infty)$	

包含端点的区间称为“闭区间 (closed interval)”，不包含端点的区间称为“开区间 (open interval)”。

例题 9

用区间表示以下集合：

(a) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R}, x \geq 1\}$

(b) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R}, x \neq 2\}$

(c) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R}, x \leq 4\}$

(d) $\{y \mid y \in \boldsymbol{R}, y > 0\}$

(e) $\left\{t \,\middle|\, t \in \boldsymbol{R}, 0 \leq t \leq \sqrt{\dfrac{h}{4.9}}\right\}$

解

(a) $[1, \infty)$

(b) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

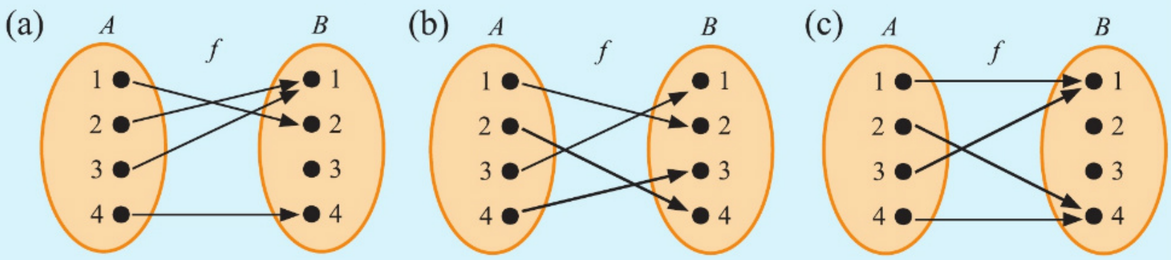
(c) $(-\infty, 4]$

(d) $(0, \infty)$

(e) $\left[0, \sqrt{\dfrac{h}{4.9}}\right]$

随堂练习 5.2

1．求下列各图所示的函数的值域。



2．设 $A = \{-1, 0, 1\}$， $f: A \to \boldsymbol{R}$， $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$。求

(a) 定义域 D_f；

(b) 值域 R_f。

3．用区间表示集合 $A = \{x \mid -5 < x \leq 3\}$。

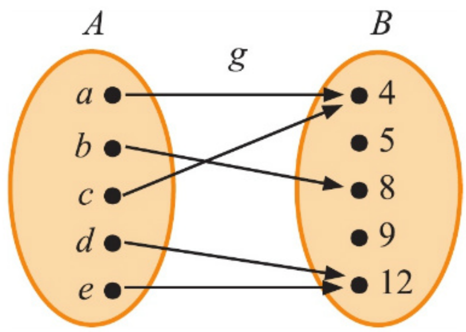
习题 5.2

1. 设函数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=x^2-3x+2$。求
   (a) $f(-3)$
   (b) $f(a^2)$
   (c) $f(2x-3)+f(x+3)$
   (d) $f(x^2-3x+2)$
   (e) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2. 求下列函数在 $x=1$，$-\dfrac{1}{2}$，0时的函数值：
   (a) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$
   (b) $g(x)=\begin{cases}1, & x\in\boldsymbol{Z}\\ 0, & x\notin\boldsymbol{Z}\end{cases}$

3. 设函数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x<-2\\ x^2-2, & -2\le x\le 3\\ 3x-1, & x>3\end{cases}$。求
   (a) $f(-4)$
   (b) $f(-2)$
   (c) $f(0)$
   (d) $f(5)$

4. 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$， $B=\{4,5,8,9,12\}$，函数 $g:A\to B$ 的定义如右图所示。求函数 g 的定义域和值域。



第4题用图

5. 设 $A=\{-1,0,1,2\}$，函数 $f:A\to \boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=3x^2-2$。求
   (a) f 的定义域；
   (b) f 的值域。

6. 设函数 $f:\{x \mid x\in \boldsymbol{R}, -2\le x\le 8\}\to \boldsymbol{R}$，定义成 $f(x)=x-2$。求
   (a) $f(4)$
   (b) $f(-3)$
   (c) $f(0)$
   (d) $f(t+2)$
   (e) $f(-t)$

7. 下列各小题中两个函数的定义域是否相等？值域是否相等？
   (a) $f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$
   (b) $f(x)=\sqrt{2}x$，$g(x)=\sqrt{2x^2}$
   (c) $f(x)=x+1$，$g(x)=\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3$

8. 修筑一个容积为 10000 m^3，深为 10 m 的长方体水池，池壁每平方米造价为 RM a，池底每平方米造价为RM $2a$。水池长不小于 50 m 且不大于 100 m。试将水池总造价 y（RM）表示成水池长 x（m）的函数，并求其定义域。

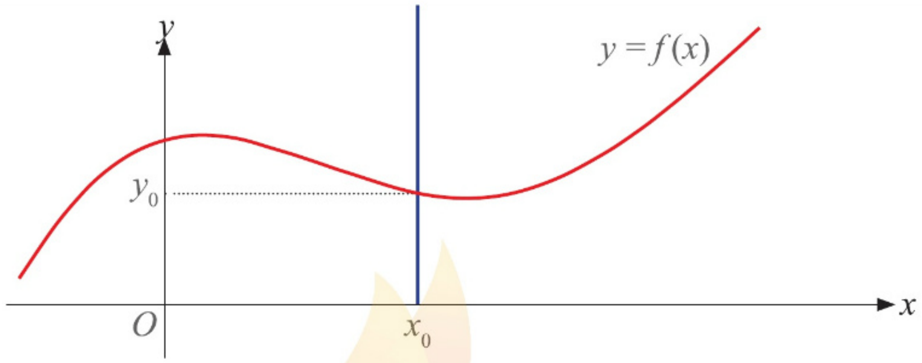
9. 列车从远处以 30 米/秒的速度匀速减速地驶向车站，到达车站后停在站上。列车速度 v（米/秒）与行车时间 t（秒）之间的函数关系式为 $v=30-0.1t$。求这个函数的定义域。

5.3 函数的图像

一个函数 $y=f(x)$ 的图像即是在平面直角坐标系中的点集

$$\{(x, y) \mid x \in D_f, y=f(x)\}。$$

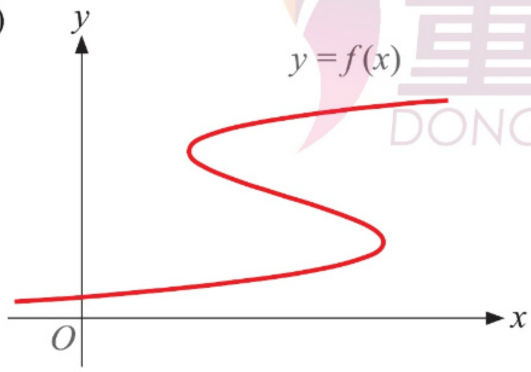
由函数的定义可知，对于定义域内任取 x 的值 x_0，函数 y 只能有唯一确定的值 y_0 与其对应。因此，函数的图像与直线 $x=x_0$ 的交点只有一个。



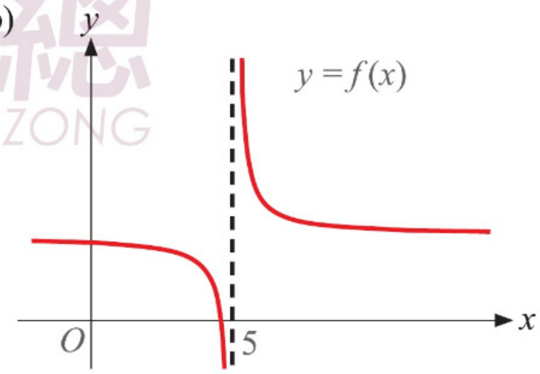
例题 10

判断下列各图中的 y 是否为 x 的函数。

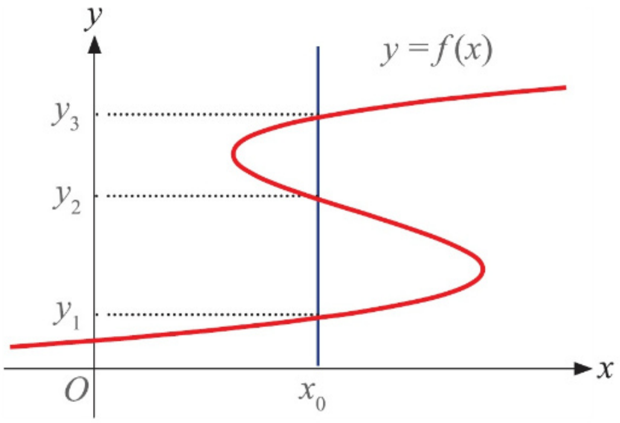
(a)



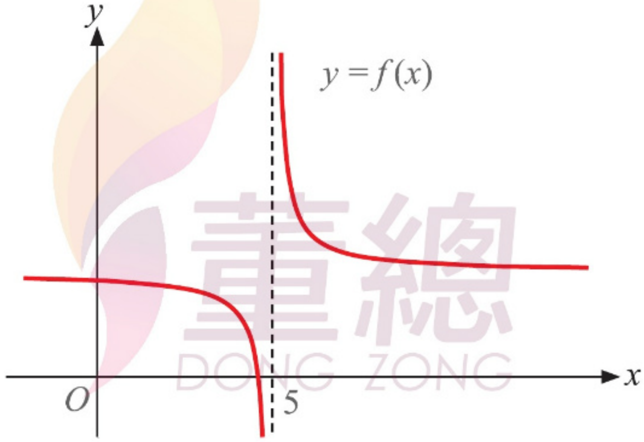
(b)



解 (a) y 不是 x 的函数，因为可以找到与 x 轴垂直的直线与该图像有超过一个交点。如下图，$x=x_0$ 与 y 的交点为 (x_0, y_1)，(x_0, y_2)，(x_0, y_3)。



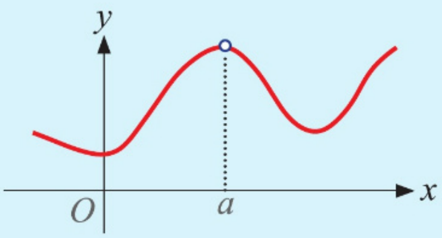
(b) 除了直线 $x=5$ 与 $y=f(x)$ 没有交点，其他所有与 x 轴垂直的直线都与该图像的交点只有一个。所以，在 $x\neq5$，y 是 x 的函数。



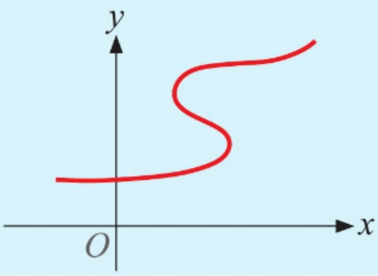
随堂练习 5.3a

下列曲线中哪些不是函数的图像？请说出理由。

(a)



(b)

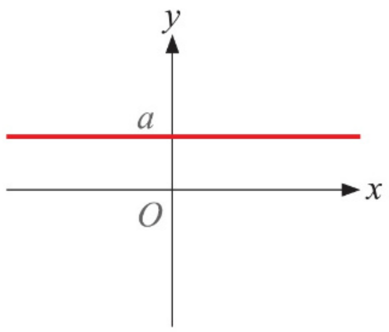


基本函数图像及其性质

这里介绍几个常见的基本函数图像。

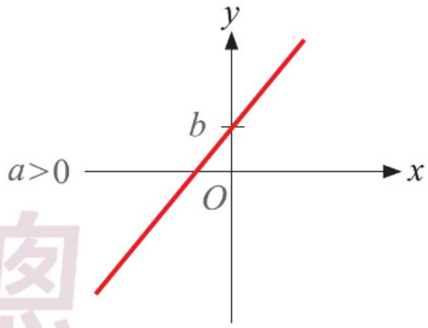
<table>
<tr><th>函数</th><th>性质</th><th>图像</th></tr>
<tr>
<td>常数函数
(constant function)
$y=a$</td>
<td>不论 x 取何值，所对应的 y 值都恒等于一常数。其图像是一条过点 $(0,a)$ 且与 x 轴平行的直线。

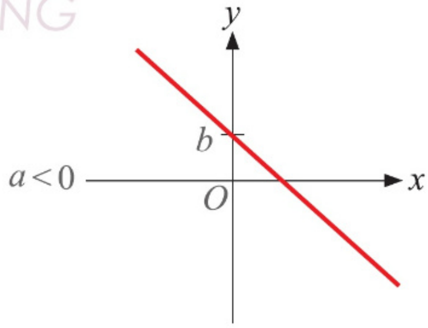
定义域：$\boldsymbol{R}$

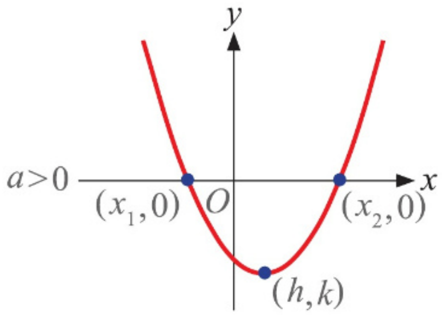
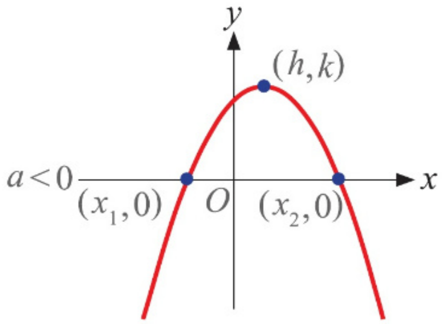
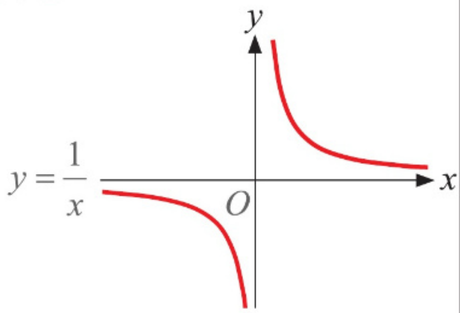
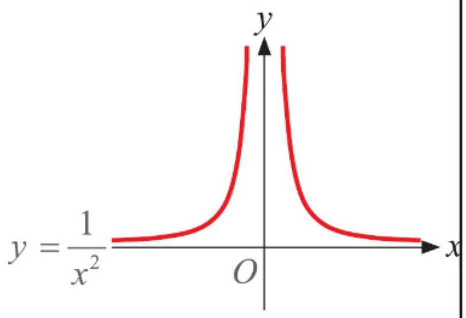
值域：$\{a\}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>一次函数
(linear function)

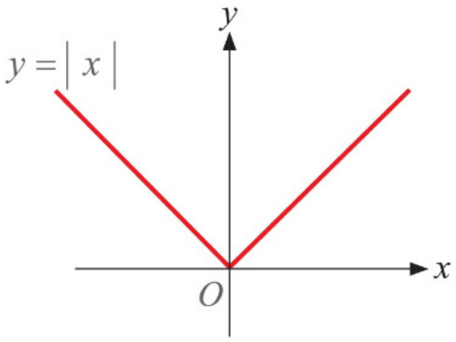
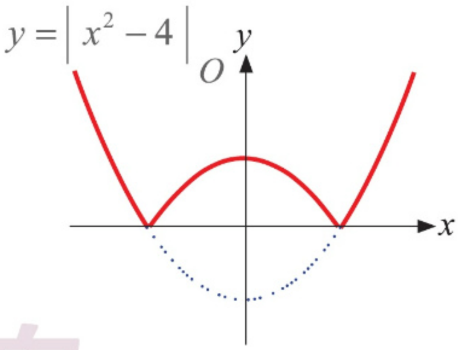
$y=ax+b$
其中 a，b 为常数
且 $a\neq 0$</td>
<td>一次函数的图像是一条直线。
当 $x=0$ 时，$y=b$，直线与 y 轴交于点 $(0,b)$。

定义域：$\boldsymbol{R}$

值域：$\boldsymbol{R}$</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

二次函数 (quadratic function) $y=ax^2+bx+c$ 其中 a，b，c 为常数且 $a\neq 0$ 或 $y=a(x-h)^2+k$ 其中 a，h，k 为常数且 $a\neq 0$	二次函数的图像是一条抛物线。当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下。若 $y=0$ 有解，则其图像与 x 轴的交点为 $(x_1,0)$ 及 $(x_2,0)$，其中 x_1 及 x_2 是 $y=0$ 的解。 定义域：$\boldsymbol{R}$ 当 $a>0$ 时，值域为 (k,∞) 当 $a<0$ 时，值域为 $(-\infty,k)$	
倒数函数 (reciprocal function)	倒数函数的图像是双曲线(hyperbola)。此双曲线与 x 轴和 y 轴都没有交点，当 x 的绝对值越大，y 的值越接近 0。当 x 的值越接近0，y 的绝对值越大。	
$y=\dfrac{1}{x}$，$x\neq 0$	$y=\dfrac{1}{x}$ 的图像位于第一象限及第三象限， 定义域：$\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ 值域：$\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$	
$y=\dfrac{1}{x^2}$，$x\neq 0$	$y=\dfrac{1}{x^2}$ 的图像位于第一象限及第二象限， 定义域：$\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ 值域：$\boldsymbol{R}^+$	

绝对值函数 (absolute value function)	将函数 $y=f(x)$ 的图像在 x 轴以下的部分以 x 轴为对称轴作反射，就得到 $y=\|f(x)\|$ 的图像。	
$y=\|x\|$	$y=\|x\|$ 定义域：$\boldsymbol{R}$ 值域：$\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$	
$y=\|x^2-4\|$	$y=\|x^2-4\|$ 定义域：$\boldsymbol{R}$ 值域：$\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$	

探索活动 1

目的：绝对值函数的图像的探索

工具：https://www.geogebra.org/m/u4wjy9ry

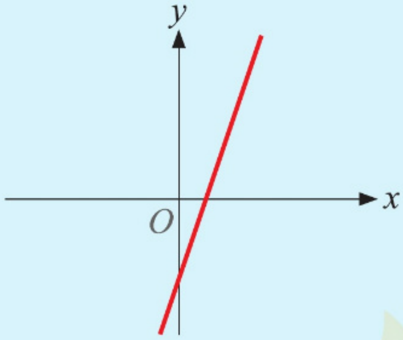
随堂练习 5.3b

1．将以下的解析式与图像进行配对：

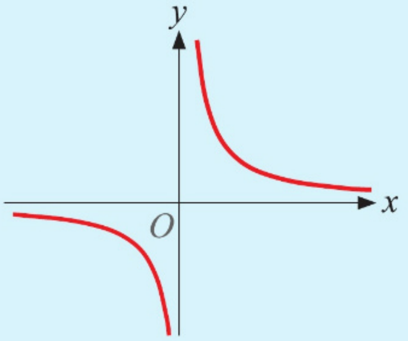
(a) $y=\dfrac{3}{x}$　　(b) $y=3x-2$

(c) $y=x^2-9$　　(d) $y=|-x+3|$

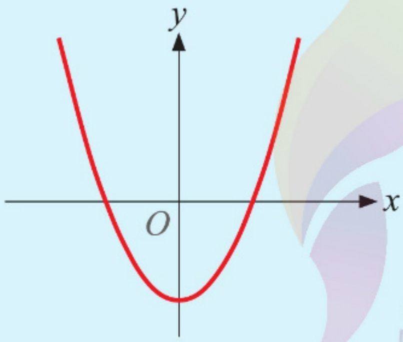
甲



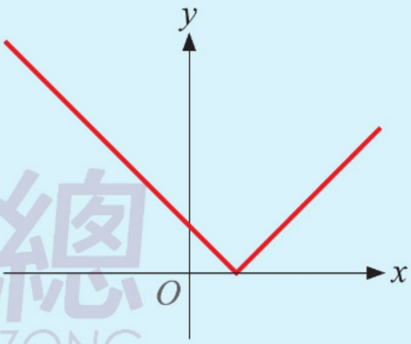
乙



丙



丁



2．与 y 轴平行的直线是不是某种函数的图像？

函数的图像及其变换

接下来，我们将学习函数图像的几何变换(geometric transformation)与其所对应的函数式之间的关系。配合前面所认识的基本函数图像，往后我们无需标点就可以描绘许多函数图像。

函数图像的平移

垂直平移 (vertical translation)

若 $k>0$，

- 将函数 $y=f(x)$ 的图像沿垂直方向往上移 k 个单位，即可得到函数 $y=f(x)+k$ 的图像，如图 5–2 所示。
- 将函数 $y=f(x)$ 的图像沿垂直方向往下移 k 个单位，即可得到函数 $y=f(x)-k$ 的图像，如图 5–3 所示。

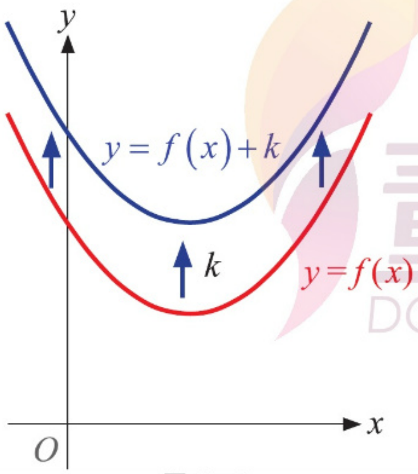


图 5 – 2

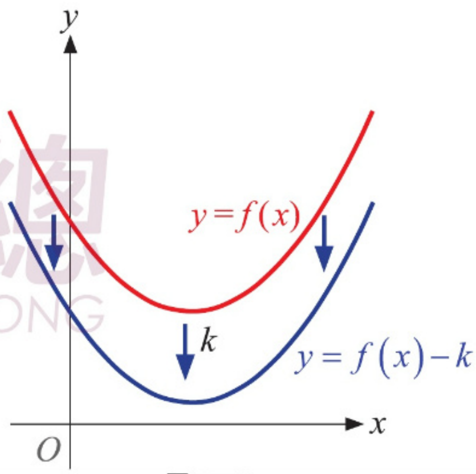


图 5 – 3

探索活动 2

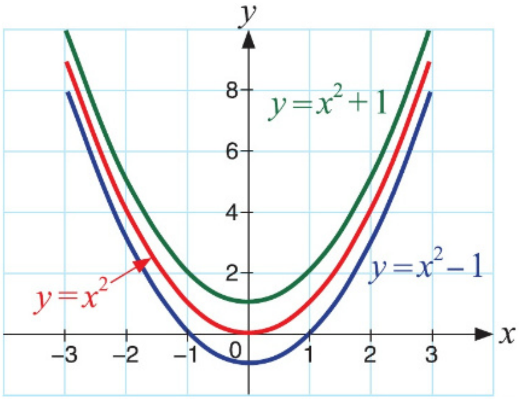
目的：垂直平移的探究

工具：https://www.geogebra.org/m/yfpft5ss

例题 11

设 $f(x)=x^2$，作 $f(x)$，$f(x)+1$，$f(x)-1$ 的函数图像。

解 先作 $f(x)=x^2$ 的图像，然后分别向上平移 1 个单位及向下平移 1 个单位，就可分别作出 $f(x)+1=x^2+1$ 及 $f(x)-1=x^2-1$ 的函数图像。



水平平移 (horizontal translation)

若 $h>0$，

- 将函数 $y=f(x)$ 的图像沿水平方向往左移 h 个单位，即可得到函数 $y=f(x+h)$ 的图像，如图 5–4 所示。
- 将函数 $y=f(x)$ 的图像沿水平方向往右移 h 个单位，即可得到函数 $y=f(x-h)$ 的图像，如 5–5 所示。

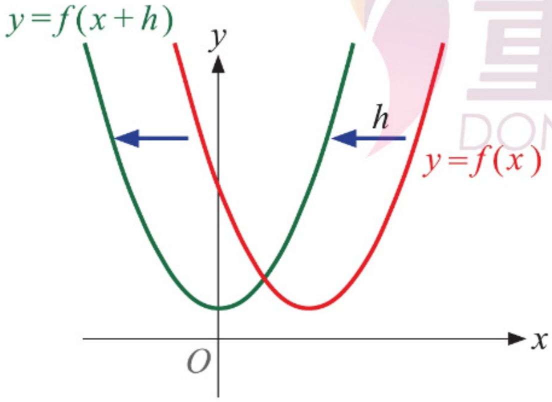


图 5–4

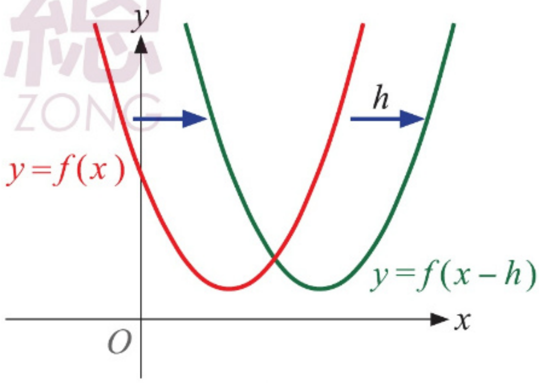


图 5–5

探索活动 3

目的：水平平移的探究

工具：https://www.geogebra.org/m/pkvbnv8e

例题 12

设 $f(x)=x^2$ 。作 $f(x)$， $f(x+1)$， $f(x-1)$ 的函数图像。

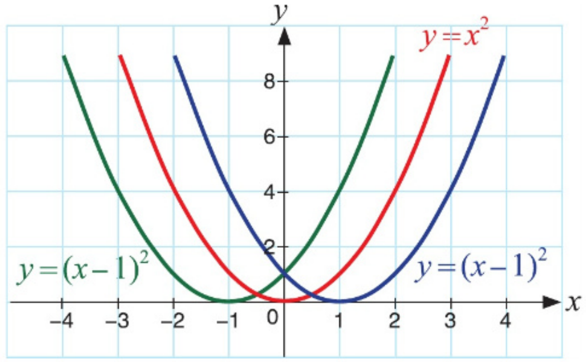
解 先作 $f(x)=x^2$ 的图像，然后分别向左平移 1 个单位及向右平移 1 个单位，就可分别作出

$f(x+1)=(x+1)^2$

及

$f(x-1)=(x-1)^2$

的函数图像。

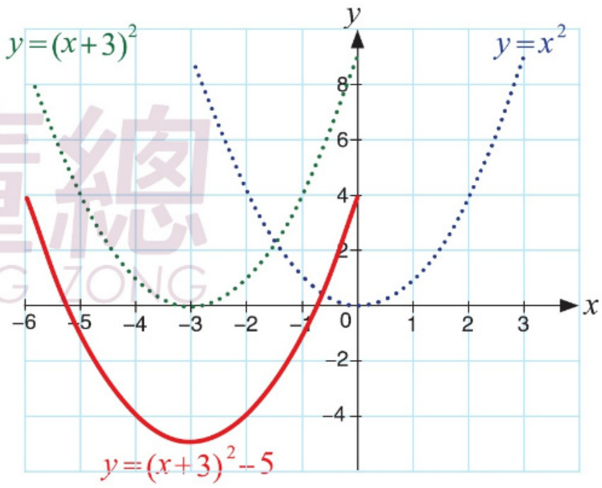


例题 13

作函数 $y=(x+3)^2-5$ 的图像。

解 如右图所示，

1. 先作函数 $y=x^2$ 的图像。
2. 将 $y=x^2$ 的图像向左移 3 个单位，便得到 $y=(x+3)^2$ 的图像。
3. 将 $y=(x+3)^2$ 的图像向下移 5个单位，便得到 $y=(x+3)^2-5$ 的图像。



探索活动 4

目的：例题13的探究

工具：https://www.geogebra.org/m/ybgd2q7h

函数图像的反射

函数图像关于 x 轴和关于 y 轴的反射 (reflection)

- 将函数 $y=f(x)$ 的图像对 x 轴作反射，即可得到函数 $y=-f(x)$ 的图像，如图 5–6 所示。
- 将函数 $y=f(x)$ 的图像对 y 轴作反射，即可得到函数 $y=f(-x)$ 的图像，如图5–7 所示。

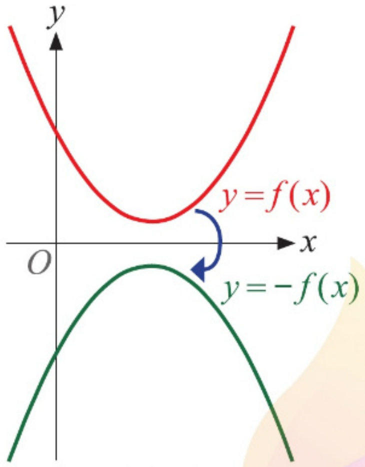


图5–6

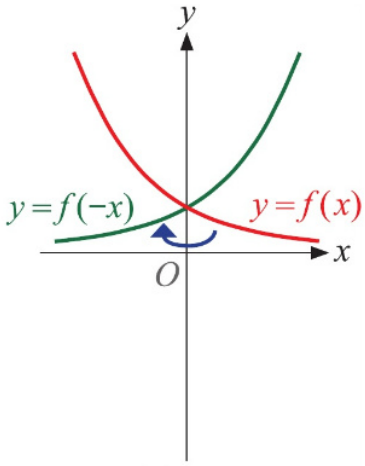
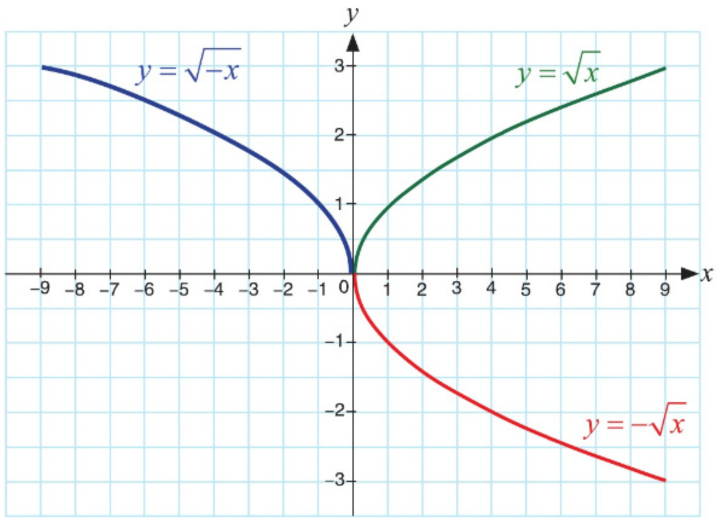


图5–7

例题 14

设 $f(x)=\sqrt{x}$，作 $-f(x)$， $f(-x)$ 的函数图像。

解 先作 $y=\sqrt{x}$ 的图像，然后分别对 x 轴和 y 轴作反射，就可分别作出 $y=-\sqrt{x}$ 及 $y=\sqrt{-x}$ 的函数图像。



探索活动 5

目的：反射的探究

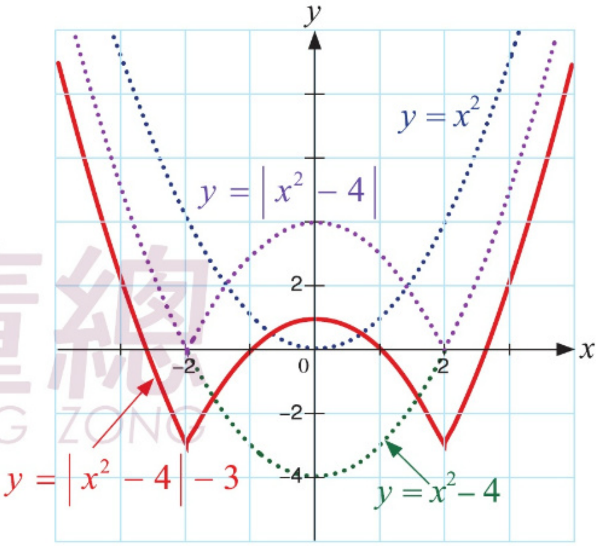
工具：https://www.geogebra.org/m/xxzm34jh

例题 15

作函数 $y=\left|x^2-4\right|-3$ 的图像，并求其值域。

解 如右图所示，

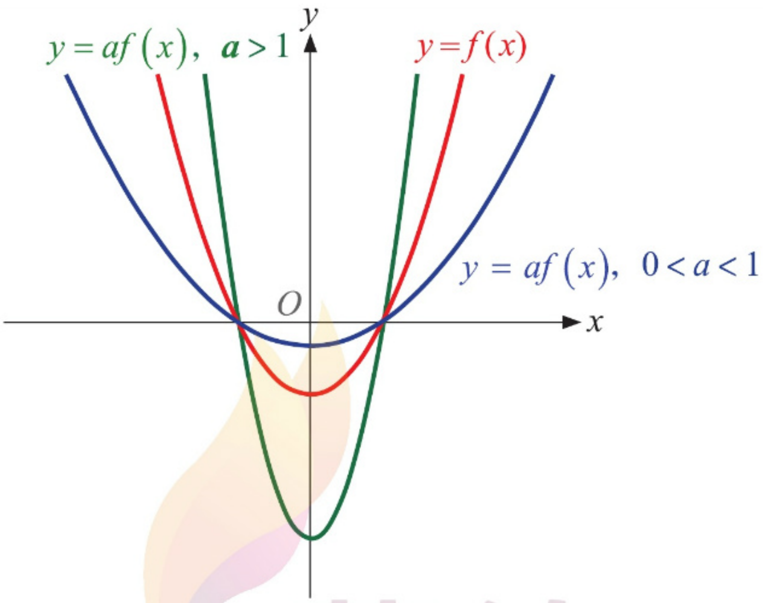
1. 先作 $y=x^2$ 的图像。
2. 将 $y=x^2$ 的图像向下移 4 个单位，便得到 $y=x^2-4$ 的图像。
3. 将 $y=x^2-4$ 在 x 轴下方的部分对 x 轴作反射，便得到 $y=\left|x^2-4\right|$ 的图像。
4. 将 $y=\left|x^2-4\right|$ 的图像向下移3个单位，便得到 $y=\left|x^2-4\right|-3$ 的图像。
5. 函数的值域为 $[-3,\infty)$。



函数图像的伸缩

垂直伸缩 (vertical stretching)

- 作 $y=af(x)$ 的图像时，可将 $y=f(x)$ 图像上每点的横坐标保持不变，纵坐标伸缩到原来的 a 倍，即可得 $y=af(x)$ 的图像。



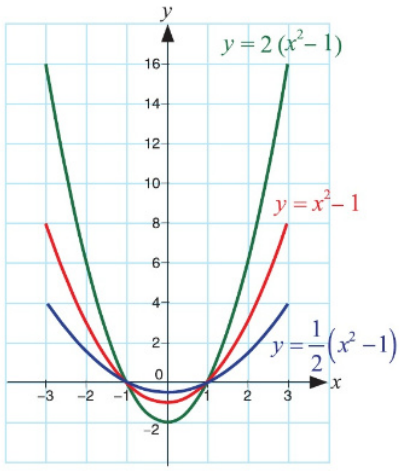
探索活动 6

目的：垂直伸缩的探究

工具：https://www.geogebra.org/m/wuucdsyf

例题 16

设 $f(x)=x^2-1$，作 $2f(x)$，$\frac{1}{2}f(x)$ 的函数图像。



解 $2f(x)=2(x^2-1)$

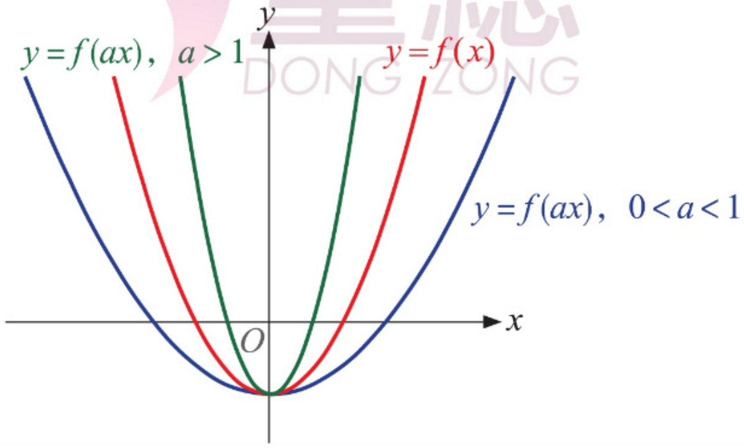
作 $y=2f(x)$ 的图像时，将图像上的点保持 x 坐标不变，将 y 坐标乘上 2，即可得 $y=2f(x)$ 的图像。

$\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)$

作 $y=\frac{1}{2}f(x)$ 的图像时，将图像上的点保持 x 坐标不变，将 y 坐标乘上 $\frac{1}{2}$，即可得 $y=\frac{1}{2}f(x)$ 的图像。

水平伸缩 (horizontal stretching)

- 作 $y=f(ax)$ 的图像时，可将 $y=f(x)$ 图像上每点的纵坐标保持不变，横坐标伸缩为原来的 $\frac{1}{a}$，即可得 $y=f(ax)$ 的图像。



探索活动 7

目的：水平伸缩的探究

工具：https://www.geogebra.org/m/ua5dcwmg

例题 17

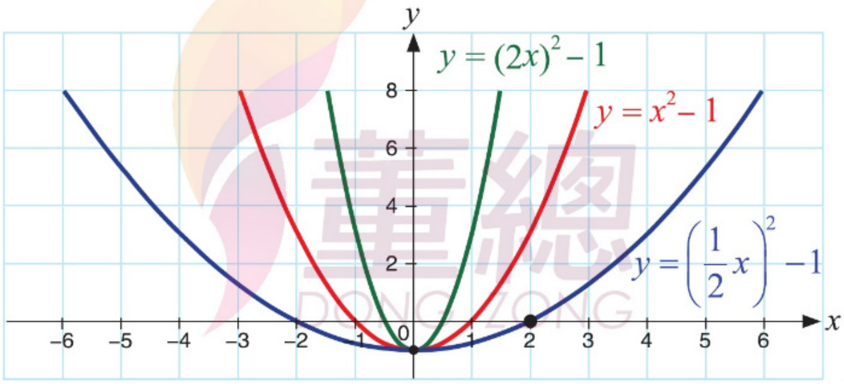
设 $f(x)=x^2-1$，作 $f(2x)$，$f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ 的函数图像。

解 $f(2x)=(2x)^2-1=4x^2-1$

作 $y=f(2x)$ 的图像时，将图像上的点保持 y 坐标不变，将 x 坐标乘上 $\dfrac{1}{2}$，即可得 $y=f(2x)$ 的图像。

$f\left(\dfrac{1}{2}x\right)=\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2-1=\dfrac{1}{4}x^2-1$

作 $y=f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ 的图像时，将图像上的点保持 y 坐标不变，将 x 坐标乘上 2，即可得 $y=f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ 的图像。



例题 18

作下列各函数的图像，并求出它们的定义域和值域。

(a) $f(x)=|x+1|-2$

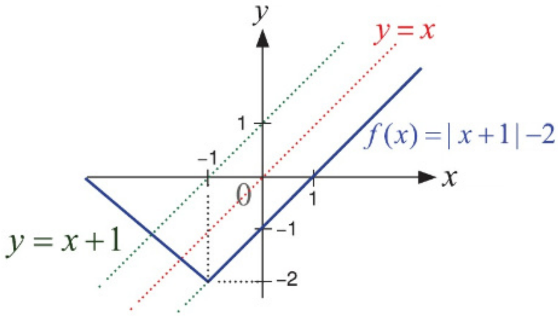
(b) $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

(c) $h(x)=4-x^2$

解

(a) $\therefore$ 定义域 $D_f = \boldsymbol{R}$。

值域 $R_f = \{ y \mid y \in \boldsymbol{R}, y \geq -2 \}$。

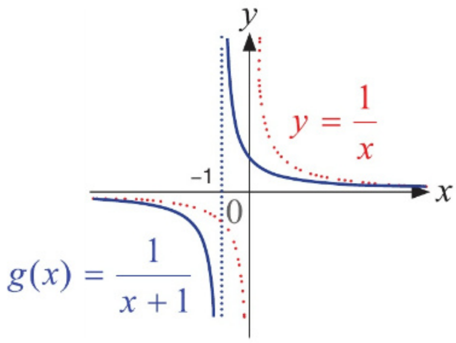


(b) $\because$ 当 $x+1 \neq 0$ 时，$\dfrac{1}{x+1}$ 有意义，

$\therefore$ 定义域 $D_g = \{ x \mid x \in \boldsymbol{R}, x \neq -1 \}$。

$\because$ 对于任意实数 $x \in D_g$，$\dfrac{1}{x+1}$ 都不为 0，

$\therefore$ 值域 $R_g = \{ y \mid y \in \boldsymbol{R}, y \neq 0 \}$。

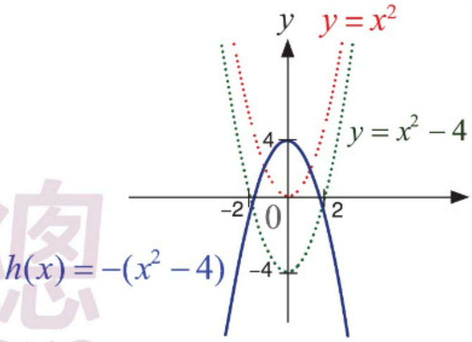


(c) $\because$ 对于任意实数 x，$4-x^2$ 都有意义，

$\because 4-x^2 = -(x^2-4)$

$\therefore$ 定义域 $D_h = \boldsymbol{R}$。

$\therefore$ 值域 $R_h = \{ y \mid y \in \boldsymbol{R}, y \leq 4 \}$。



随堂练习 5.3c

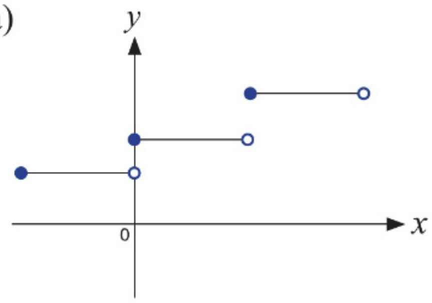
1. 已知函数 $f(x)=x^2-6x+8$，$g(x)=-x^2+6x-8$，$h(x)=x^2+6x+8$。在不作图的情况下，描述
   (a) $y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 的图像之间的变换；
   (b) $y=f(x)$ 及 $y=h(x)$ 的图像之间的变换。

2. 在同一直角坐标系中依序作出下列各函数的图像，并求其定义域与值域：
   (a) $y=\dfrac{1}{x}$　(b) $y=\dfrac{1}{x-4}$　(c) $y=\dfrac{1}{4-x}$　(d) $y=\dfrac{1}{4-x}+3$

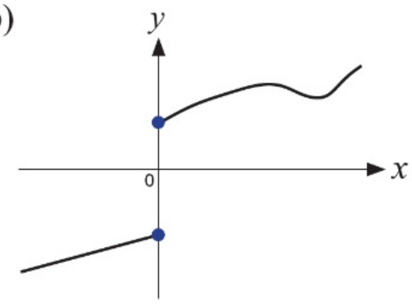
习题 5.3

1. 判断下列图像是否是函数图像？请说出理由。

(a)

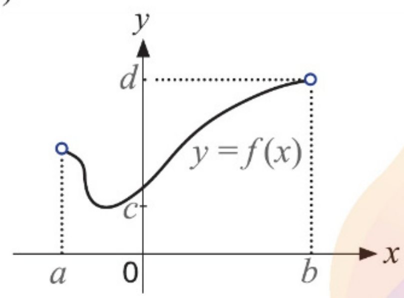


(b)

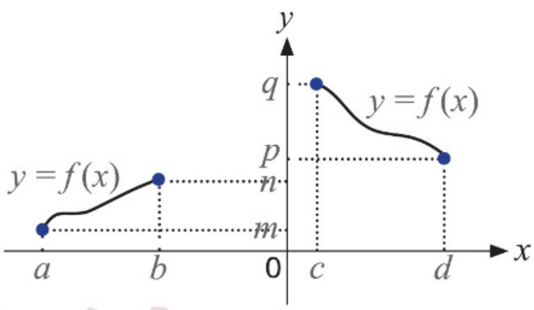


2. 根据下列函数的图像，确定函数的定义域和值域。

(a)



(b)



3. 画出下列函数的图像，并写出它们的值域。

(a) $y=x+2$， $x\in[-1,1)$

(b) $y=-2x$， $x\in\boldsymbol{R}$

(c) $y=x^2+2x-1$， $x\in\boldsymbol{R}$

(d) $y=\dfrac{1}{x}+1$， $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$

(e) $y=\begin{cases}x^2, x\le 0\\ x,\ x>0\end{cases}$

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$， $g(x)=\dfrac{8}{x+3}$， $h(x)=\dfrac{2}{4x+12}$。在不作图的情况下，描述

(a) $y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 的图像之间的变换；

(b) $y=f(x)$ 及 $y=h(x)$ 的图像之间的变换。

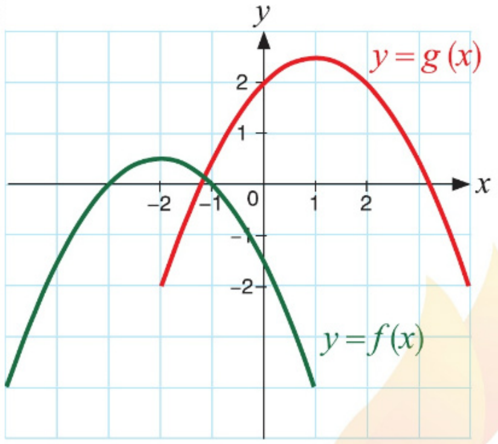
5. 在同一直角坐标系中依序作出下列各函数的图像，并求其定义域与值域：

(a) $y=\sqrt{x}$　　(b) $y=\sqrt{x-3}$

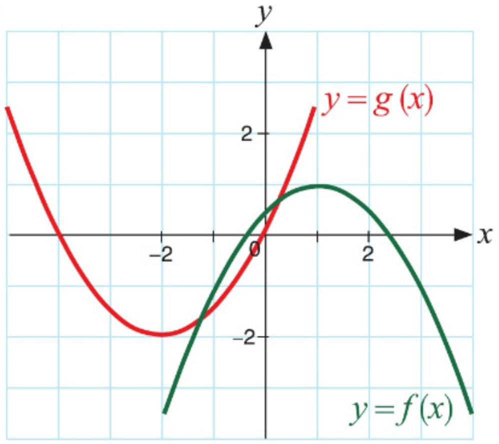
(c) $y=\sqrt{3x-9}$　　(d) $y=\sqrt{-3x-9}$

6. 在下列各图中，函数 $y=f(x)$ 经变换后得到函数 $y=g(x)$ 的图像。描述图像间的变换，将 $g(x)$ 表示成 $af(bx+c)+d$ 的形式。

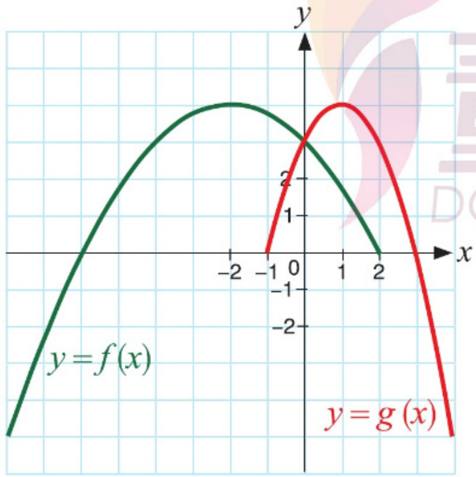
(a)



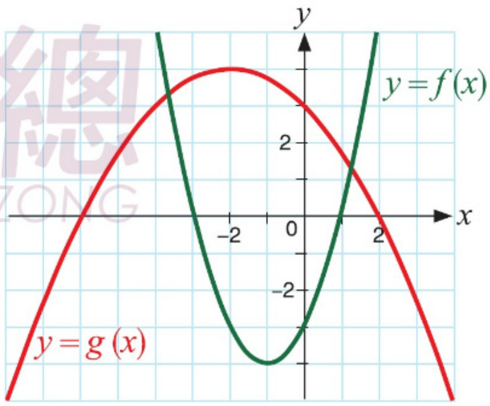
(b)



(c)



(d)



5.4 合成函数

合成函数及其运算

图 5–12 与图 5–13 分别为函数 $f:A\rightarrow B$ 与 $g:B\rightarrow C$ 的范恩图：

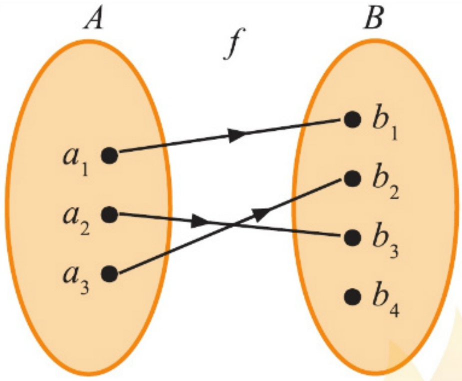


图 5–12

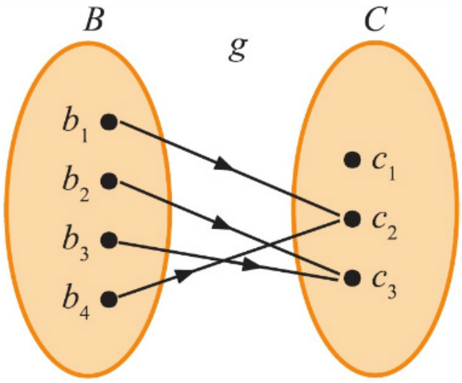


图 5–13

我们观察到

$$a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} c_2$$

$$a_2 \xrightarrow{f} b_3 \xrightarrow{g} c_3$$

$$a_3 \xrightarrow{f} b_2 \xrightarrow{g} c_3$$

我们可以将图 5–12 与图 5–13 合在一起表示成图 5–14：

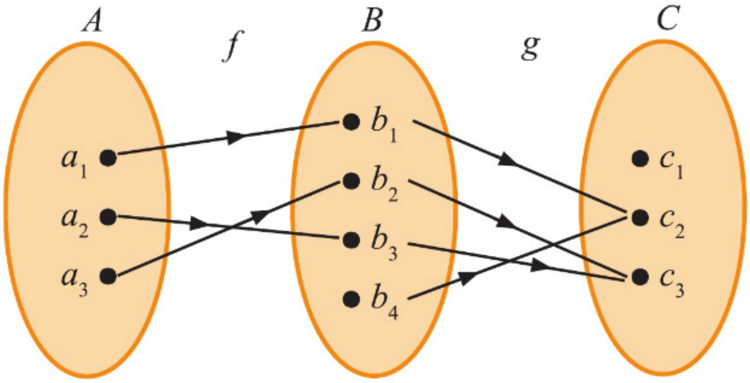


图 5–14

我们发现 A 中的任一元素通过 f 与 g 两个函数的相继映射下，在 C 中都有唯一确定的元素与之对应。

若 A、B 及 C 为三个非空的集合，$f:A\to B$ 与 $g:B\to C$ 是两个函数，则 A 中的任一元素 x，经由 f 映到 B 中的 $f(x)$ 再由 g 映到 C 中的 $g(f(x))$，这两次映射合起来相当于从 A 映射到 C 的一个函数，这个函数称为 f 与 g 的合成函数 (composite function)，记作 $g\circ f$，也就是 $g\circ f:A\to C$。如图 5–15 所示。

$$x \xrightarrow{\ f\ } f(x) \xrightarrow{\ g\ } g(f(x))$$

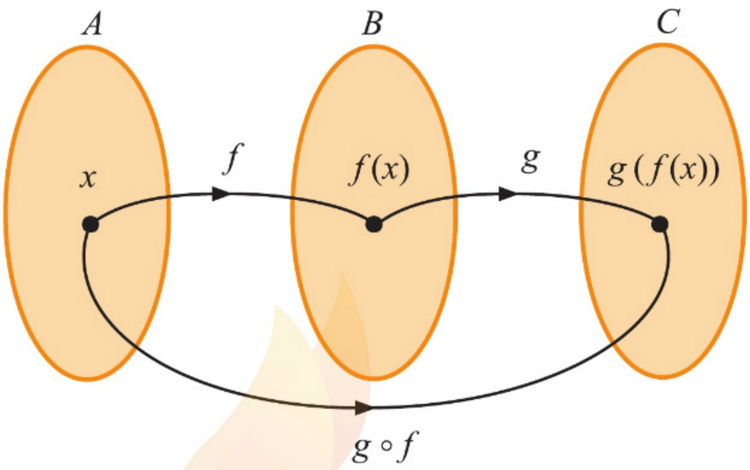


图 5–15

在合成函数 $g\circ f$ 中，f 的值域必须包含于 g 的定义域内。即 $R_f\subseteq D_g$。

如图 5–16，我们讨论 $R_f\not\subset D_g$ 的情况：

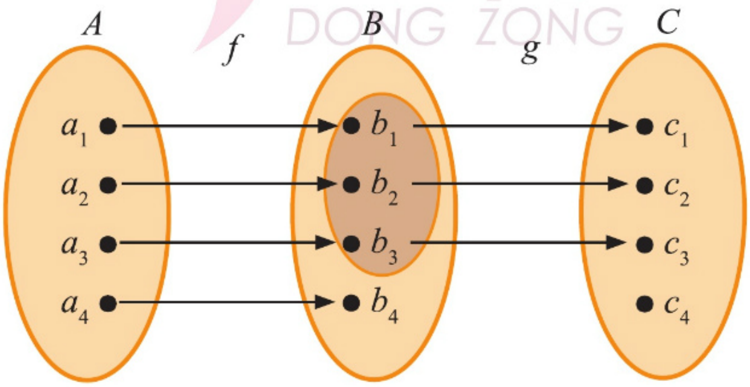


图 5–16

我们可以发现 A 中的 a_4 在 C 中没有与之对应的元素，故 $g\circ f$ 不存在。

例题 19

设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$， $f(x)=2x$； $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$， $g(x)=x^{2}$，

(a) 计算 $f(3)$ 及 $g(6)$ 的值，并求 $g(f(3))$ 的值；

(b) 求 $g\circ f$ 并求 $(g\circ f)(3)$；

(c) 求 $f^{3}(3)$。

解

(a)
$$\begin{aligned}f(3)&=2(3)\\&=6\\g(6)&=6^{2}\\&=36\\g(f(3))&=g(6)\\&=36\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(2x)\\&=(2x)^{2}\\&=4x^{2}\\(g\circ f)(3)&=4(3)^{2}\\&=36\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}f^{3}(3)&=(f\circ f\circ f)(3)\\&=f(f(f(3)))\\&=f(f(6))\\&=f(12)\\&=24\end{aligned}$$

注意

$$f^{n}(x)=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{个}}(x)$$

$$f^{n}(x)\neq\left[f(x)\right]^{n}$$

例题 20

设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$， $f(x)=x+1$； $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$， $g(x)=2x$， 求 $(g\circ f)(x)$ 与 $(f\circ g)(x)$。

解
$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(x+1)\\&=2(x+1)\\&=2x+2\\(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f(2x)\\&=2x+1\end{aligned}$$

由例题20可知，合成函数 $(g\circ f)(x)$ 与 $(f\circ g)(x)$ 的含义不同。一般上，$(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$，即函数的合成不满足交换律。

例题 21

若函数 f 、 g 的定义为 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$， $f(x)=x^2-4$； $g:\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}$，$g(x)=\sqrt{x}$，

(a) 求 $f\circ g$；

(b) 说明为何 $g\circ f$ 不存在。

解 (a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$$=f(\sqrt{x})$$

$$=x-4$$

(b) $R_f=[-4,\infty)$

$D_g=[0,\infty)$

$\because R_f\not\subset D_g$

$\therefore g\circ f$ 不存在。

例题 22

已知 $f:x\to 2x+1$，若 $f\circ g:x\to 6x+11$，求函数 g。

解 已知 $f(x)=2x+1$

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=6x+11\\ f(g(x))&=6x+11\\ 2g(x)+1&=6x+11\\ 2g(x)&=6x+10\\ g(x)&=3x+5\end{aligned}$$

例题 23

已知函数 $f:x\to x-3$，合成函数 $g\circ f:x\to x^2-6x+11$，求函数 g。

解 已知 $f(x)=x-3$

$$(g\circ f)(x)=x^2-6x+11$$
$$g(f(x))=x^2-6x+11$$
$$g(x-3)=x^2-6x+11$$

令 $u=x-3$

$$x=u+3$$

$$\begin{aligned}g(u)&=(u+3)^2-6(u+3)+11\\&=u^2+6u+9-6u-18+11\\&=u^2+2\end{aligned}$$

$\therefore g(x)=x^2+2$

随堂练习 5.4

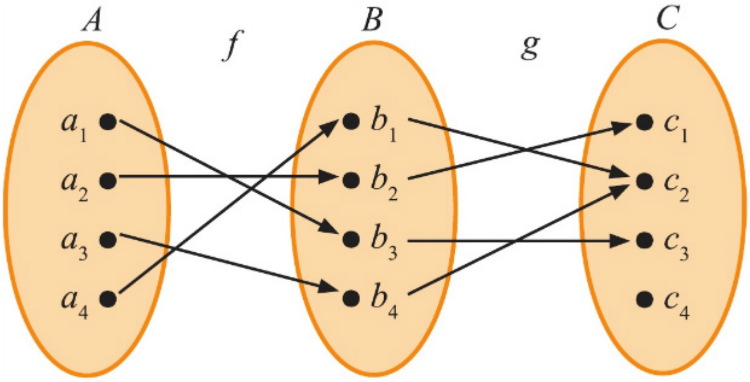
1. 已知实数函数 f 与 g，求合成函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$：
   (a) $f:x\to 3x$， $g:x\to x-1$
   (b) $f:x\to x^2$， $g:x\to x+2$

2. 设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$， $f(x)=4-x^2$， $g:\{x\mid x\le 4\}\to\boldsymbol{R}$， $g(x)=\sqrt{4-x}$，分别检验 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 是否存在。

3. 已知函数 $f:x\to\dfrac{1}{x}, x\ne 0$。
   (a) 求函数 g 使得 $f\circ g:x\to x^2+4$。
   (b) 求函数 h 使得 $h\circ f:x\to x^2+4$。

习题 5.4

1. 下图所示为函数 $f:A\to B$ 及 $g:B\to C$，求合成函数 $g\circ f$ 的定义域及值域。



2. 设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$，$bc+a^2\neq 0$，求 $f\circ f$。

3. 已知实数函数 f 与 g，求合成函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$：
   (a) $f:x\to 2x+3$，$g:x\to x+1$
   (b) $f:x\to 5x$，$g:x\to \dfrac{1}{5}x$
   (c) $f:x\to 2x+1$，$g:x\to x^2-2$

4. 设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 与 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=x^2+2x-3$ 与 $g(x)=3x-4$，求
   (a) $f\circ g$ 与 $g\circ f$；
   (b) $g(f(2))$，$f(g(2))$，$(f\circ g)(2)$，$(g\circ f)(2)$。

5. 设 $f:x\to 3x-2$，$g:x\to kx+2$ 都是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数。若 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 为同一函数，求 k 之值。

6. 设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x^2+2$，$g:\{x\mid x\leq 1\}\to\boldsymbol{R}$，$g(x)=\sqrt{1-x}$，
   (a) 试说明为何 $g\circ f$ 无意义；
   (b) 求 $f\circ g$ 及其值域。

7. 已知 $f:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=\log_{10}x$，$g:S\to\boldsymbol{R}$，$g(x)=2-x$，试定义 S 使得 $f\circ g$ 有意义。

8. 设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x+1$，求 $f^2(x)$ 与 $f^3(x)$。据此，求 $f^{100}(x)$。

9. 已知函数 $f(x)=2x-5$，$g(f(x))=8x^2+6x+7$，求函数 g。

10. 已知函数 $g(x)=3x-7$，$(g\circ f)(x)=\dfrac{5x+3}{2x-1}$，求函数 f。

5.5 一一映成函数

一对一函数

设函数 $f:A\to B$，且对应域 B 中的每一个元素在定义域 A 中最多只有一个原像，则称函数 f 是一对一函数 (one-to-one/injective function)，即定义域 A 中的元素都映射到不同的像。

映成函数

设函数 $f:A\to B$，且对应域 B 中的每一个元素都在定义域 A 中有原像，则称函数 f 是映成函数 (onto/surjective function)，即对应域 B 中的元素都有被映射到。

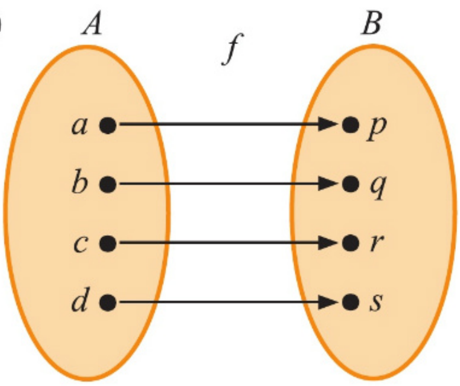
一一映成函数

设函数 $f:A\to B$，若 f 既是一对一函数，又是映成函数，则称其为一一映成函数 (one-to-one onto/bijective function)。即对应域 B 中的每一个元素都在定义域 A 中有原像（映成），且只有唯一的原像（一对一）。

例题 24

判断下列函数是否为一对一函数、映成函数、一一映成函数。

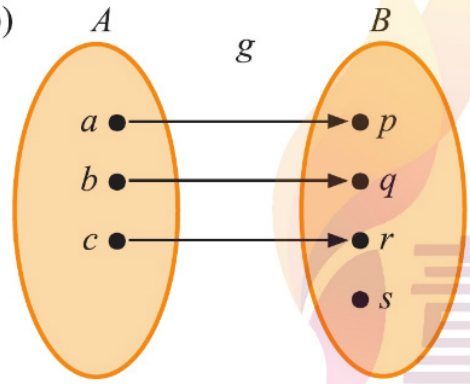
(a)



解

- 对应域 B 中的每一个元素在定义域 A 中最多只有一个原像。所以 f 是一对一函数。
- 对应域 B 中的每一个元素都在定义域 A 中有原像。所以 f 是映成函数。
- f 是一对一函数，又是映成函数，所以 f 是一一映成函数。

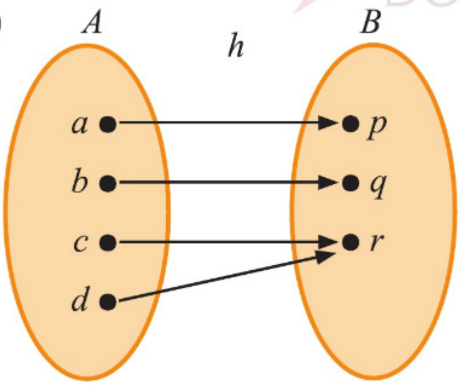
(b)



解

- 对应域 B 中的每一个元素在定义域 A 中最多只有一个原像。所以 g 是一对一函数。
- 对应域 B 中的 s 在定义域 A 中没有原像。所以 g 不是映成函数。
- 所以 g 不是一一映成函数。

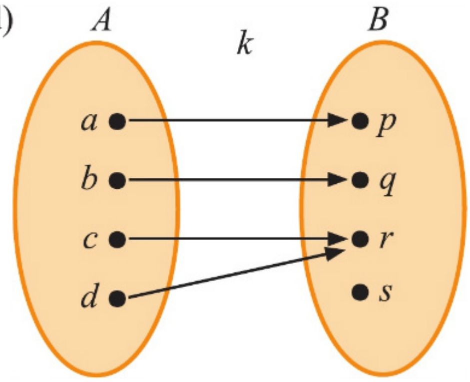
(c)



解

- 对应域 B 中的 r 在定义域 A 中有超过一个原像。所以 h 不是一对一函数。
- 对应域 B 中的每一个元素都在定义域 A 中有原像。所以 h 是映成函数。
- 所以 h 不是一一映成函数。

(d)



解 • 对应域 B 中的 r 在定义域 A 中有超过一个原像。所以 k 不是一对一函数。
• 对应域 B 中的 s 在定义域 A 中没有原像。所以 k 不是映成函数。
• 所以 k 不是一一映成函数。

例题 25

下列函数中哪些是一一映成函数？

(a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$， $f(x)=x^2$

(b) $f:\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}$， $f(x)=x^2$

(c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$， $f(x)=x^2$

(d) $f:\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$， $f(x)=x^2$

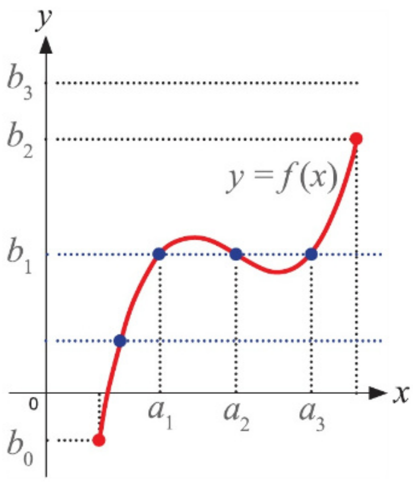
解 (a) 不是一一映成函数，它既不是一对一函数，也不是映成函数。
例如：1 有两个原像 1 与 -1，而 -1 没有原像。

(b) 不是一一映成函数，它是一对一函数，但不是映成函数。
例如：-1 没有原像。

(c) 不是一一映成函数，它是映成函数，但不是一对一函数。
例如：1 有两个原像 1 与 -1。

(d) 是一一映成函数，因为它既是一对一函数，也是映成函数。

由函数图像可以判断函数是不是一对一的或者是不是映成的。如右图所示为函数 $f:A\to B$ 的图像与 $y=b_2$ 相交于3点，因此 b_2 有三个原像 a_1、a_2、a_3。由此可见，函数不是一对一的。若对应域是 $B=[b_0,b_2]$，则函数是映成的，若对应域是 $B=[b_0,b_3]$，则函数不是映成的。



由以上讨论，我们可以得出以下结论：

若函数 $y=f(x)$ 是一对一函数，则对于任意的 b，直线 $y=b$ 与函数的图像最多只相交于一点。

若函数 $y=f(x)$ 是映成函数，b 在对应域中，则直线 $y=b$ 与函数的图像一定有交点。

例题 26

由图像判断下列由 $\boldsymbol{R}$ 映到 $\boldsymbol{R}$ 的函数图像是否为一对一函数，是否为映成函数。

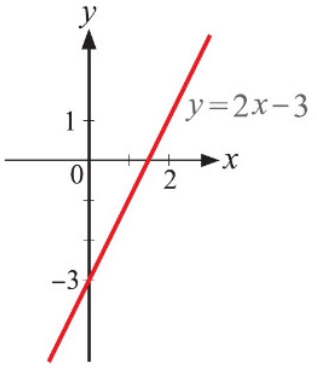
(a) $f(x)=2x-3$

(b) $f(x)=x^2-1$

(c) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$

解 (a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=2x-3$

f 是一对一函数，也是映成函数。



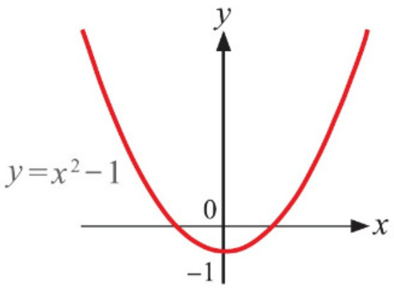
解 (b) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$， $f(x)=x^2-1$

f 不是一对一函数，

如：0 有两个原像 1 与 -1。

f 不是映成函数。

如：-2 没有原像。

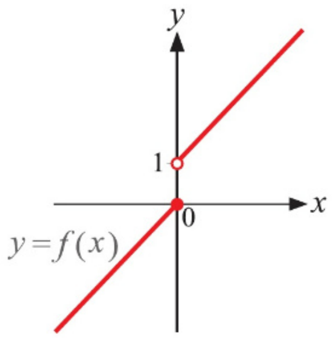


(c) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$， $f(x)=\begin{cases} x, & x \le 0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$

f 是一对一函数，

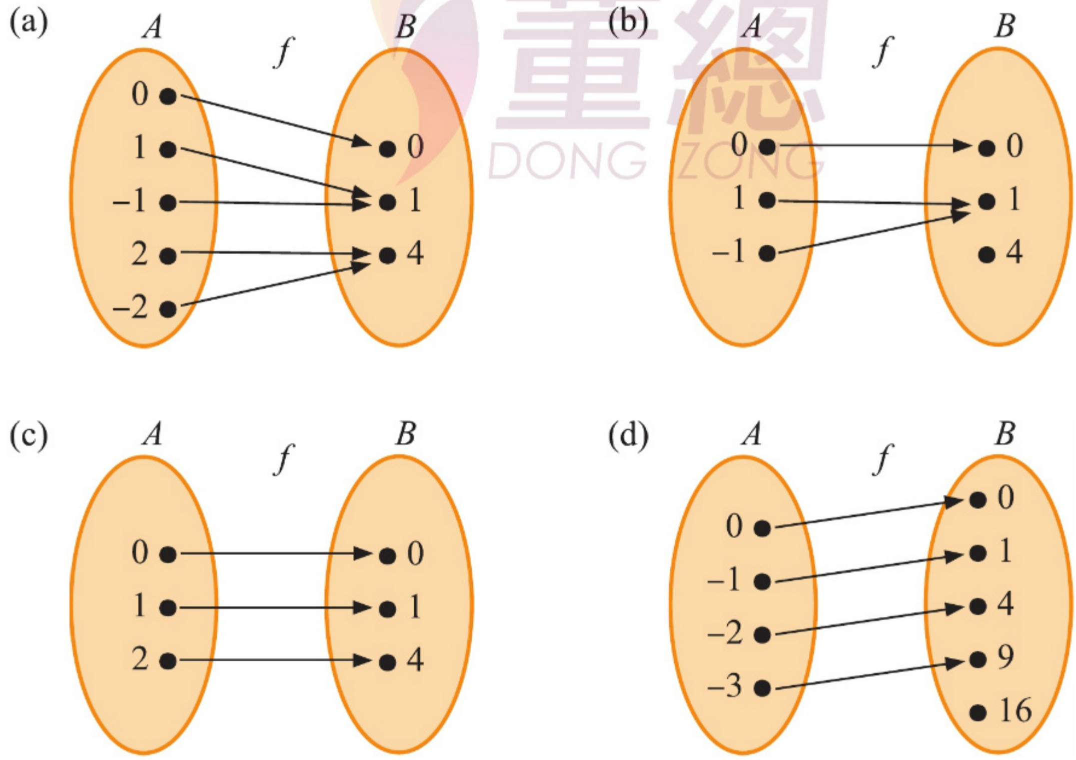
f 不是映成函数。

如：$\frac{1}{2}$ 没有原像。

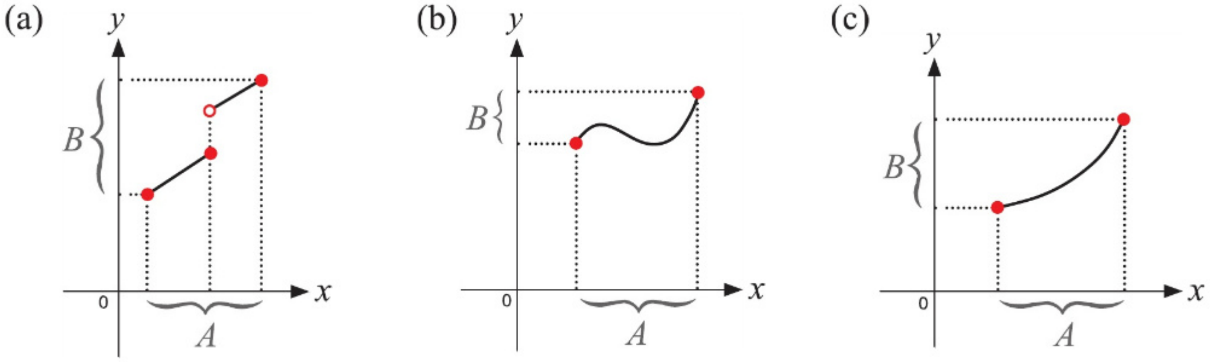


习题 5.5

1. 下列函数中哪些是一对一函数？哪些是映成函数？



2. 判断下列从 A 到 B 的函数哪些是一对一函数，哪些是映成函数。



3. 下列函数中哪些是一一映成函数？

(a) $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$， $f(x) = 2x$

(b) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$， $f(x) = 2x$

(c) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^{+} \cup \{0\}$， $f(x) = |x|$

(d) $f: \{x \mid x \in \boldsymbol{R}$ 且 $x \leq 0\} \to \boldsymbol{R}^{+} \cup \{0\}$， $f(x) = 2|x|$

5.6 反函数

反函数的意义及其定义域与值域

如图 5–17，若 $f: A \to B$ 是一个一一映成函数，则存在一个函数 $g: B \to A$ 使得 $(g \circ f)(x) = x$ 。

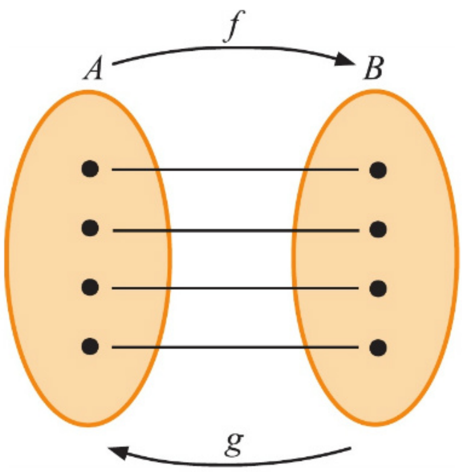


图 5–17

函数 g 则称为 f 的反函数 (inverse function)，记作 f^{-1}，如图 5–18。

由定义可知，若 $f: A \to B$ 是一个一一映成函数，

1. $f^{-1}: B \to A$ 也是一个一一映成函数；
2. f 和 f^{-1} 互为反函数，即 $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$；
3. 一一映成函数的定义域及值域与其反函数的定义域及值域的关系为：
   $D_{f^{-1}} = R_f$，$R_{f^{-1}} = D_f$。

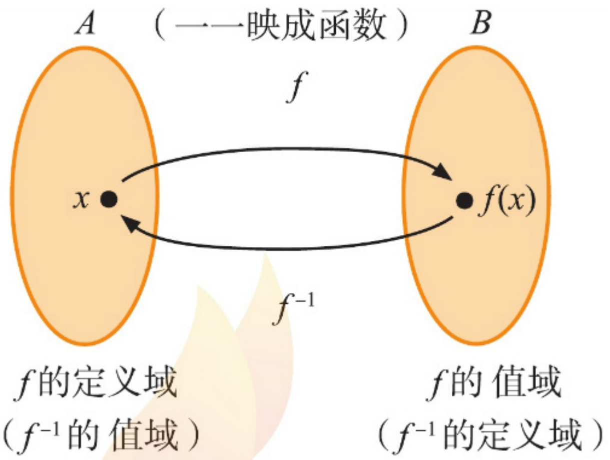
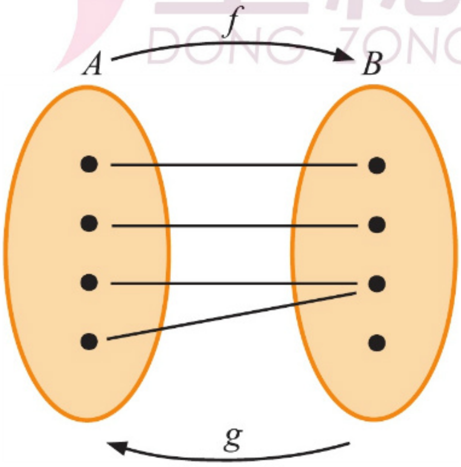


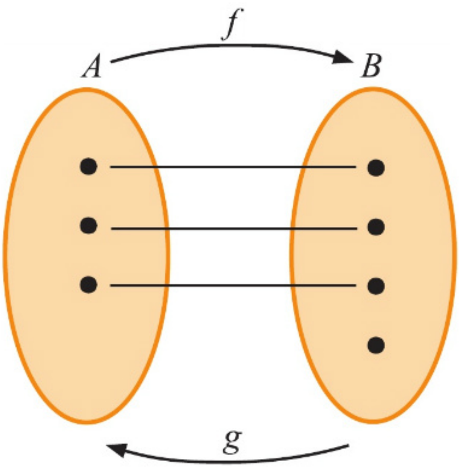
图 5–18

如果函数 f 不是一对一或映成函数，则有如下的情况：

当 f 为多对一函数时，g 是一对多对应，故而 g 不是函数，所以 f 没有反函数。



当 f 不是映成函数时，B 中有元素没有对应，故而 g 不是函数，所以 f 没有反函数。



例题 27

已知 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$， $f(x)=2x-1$， $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$， $g(x)=\dfrac{x+1}{2}$，求

(a) $(g\circ f)(x)$；

(b) $(f\circ g)(x)$；

(c) 说明 f 与 g 的关系。

解 (a) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$=g(2x-1)$$

$$=\frac{(2x-1)+1}{2}$$

$$=x$$

(b) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$$=f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$=2\left(\frac{x+1}{2}\right)-1$$

$$=x$$

(c) 据(a)，g 是 f 的反函数，据(b)，f 是 g 的反函数，

$\therefore f$ 与 g 互为反函数。

例题 28

设 $f(x)=2x+4$，$x\in \boldsymbol{R}$，求 $f(x)$ 的反函数。

解 令 $y=f(x)$，则 $x=f^{-1}(y)$

$$y=2x+4$$

$$x=\frac{y-4}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(y)=\frac{y-4}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}$$

例题 29

下列函数中，哪些有反函数？若有，求出这些反函数。

(a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，　$f(x)=x^2$

(b) $g:\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}$，　$g(x)=x^2$

(c) $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，　$h(x)=|x|-1$

(d) $k:\boldsymbol{R}\setminus\{3\}\to\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$，　$k(x)=\dfrac{2}{x-3}$

解 (a) 函数 f 没有反函数，因为它不是一一映成函数。

(b) 函数 $g(x)=x^2$ 有反函数，

$$g(x)=x^2,\ x\ge 0$$

$$x=\sqrt{g(x)}$$

$$g^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

(c) 函数 h 没有反函数，因为它不是一一映成函数。

(d) 函数 $k(x)=\dfrac{2}{x-3}$ 有反函数，

$$k(x)=\frac{2}{x-3}$$

$$x-3=\frac{2}{k(x)}$$

$$x=\frac{2}{k(x)}+3$$

$$k^{-1}(x)=\frac{2}{x}+3$$

反函数的图像

例题 30

在同一直角坐标系中，作下列函数及其反函数的图像。

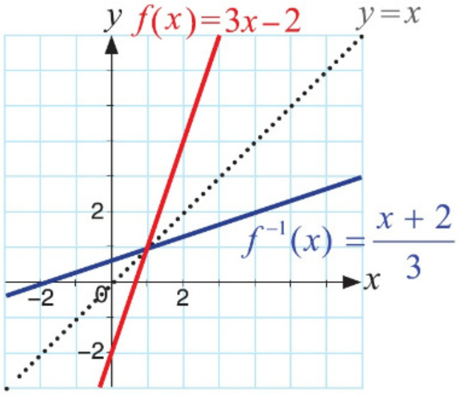
(a) $f(x)=3x-2$

(b) $g(x)=x^3$

(c) $h(x)=x^2$， $x\geq 0$

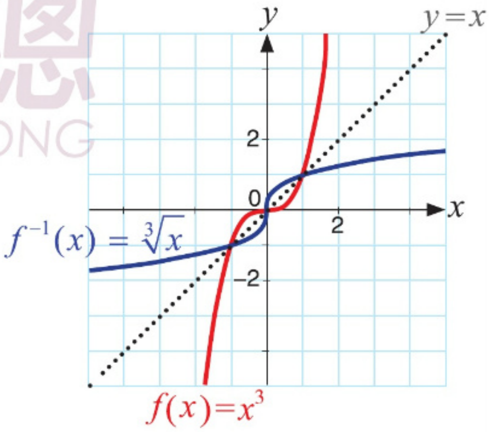
解 (a) $f(x)=3x-2$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$$



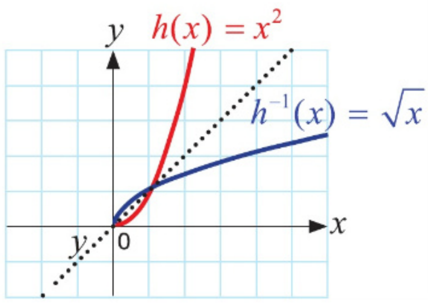
(b) $g(x)=x^3$

$$g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$



(c) $h(x)=x^2$， $x\geq 0$

$$h^{-1}(x)=\sqrt{x}$$



观察例题 30，我们可以发现，函数 f 的图像与它的反函数 f^{-1} 的图像对称于直线 $y=x$。

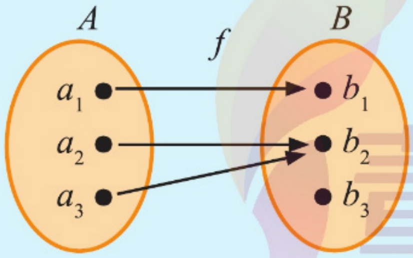
探索活动 8

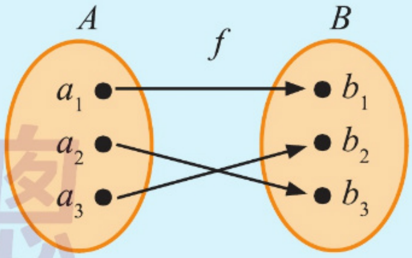
目的：反函数的图像

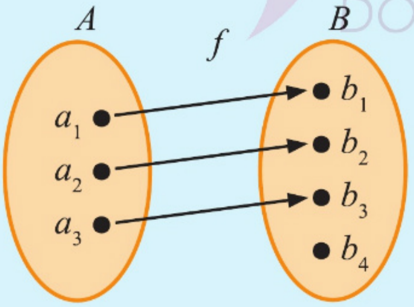
工具：https://www.geogebra.org/m/sncd3ux9

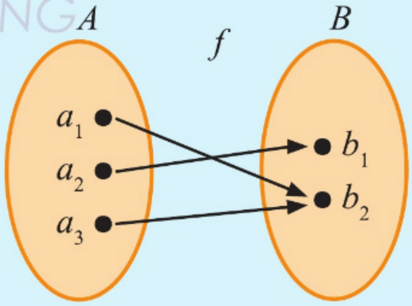
随堂练习 5.5

1. 判断下列函数是否有反函数，并说明理由。

(a)


(b)


(c)


(d)


2. 求下列函数的反函数：

(a) $f(x)=4x-5$，　$x\in \boldsymbol{R}$

(b) $f(x)=x^4$，　$x\in[0,\infty)$

(c) $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$，　$x\in \boldsymbol{R}$ 且 $x\neq -\dfrac{1}{2}$

(d) $f(x)=\sqrt{2x-4}$，　$x\in[2,\infty)$

习题 5.6

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\neq -1$。求反函数 f^{-1}。

2. 求下列各函数的反函数及反函数的定义域：
   (a) $f(x)=3x-7$，$x\in\boldsymbol{R}$
   (b) $f(x)=54-2x^3$，$x\in\boldsymbol{R}$
   (c) $f(x)=x^4$，$x\in\boldsymbol{R}$
   (d) $f(x)=\sqrt{2x-5}$，$x\in\left[\dfrac{5}{2},\infty\right)$
   (e) $f(x)=(x+1)^2$，$x\in[0,\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-7}{2-x}$ 及函数 $g(x)=4+3x$。求
   (a) $f^{-1}(x)$
   (b) $g^{-1}(x)$
   (c) $\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)$
   (d) $(g\circ f)^{-1}(x)$

4. 设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，其定义为 $f(x)=ax+b$，$a\neq 0$。
   (a) 求 f^{-1}；
   (b) 若其反函数即为其本身，求 a 与 b 的可能值。

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x+b}$，$f(3)=-1$ 及 $f(-9)=3$。
   (a) 求 a 与 b 的值。
   (b) 求 c 使得 $f(c)=f^{-1}(c)$。

6. 求下列各函数的反函数，并在同一直角坐标系上作该函数及其反函数的图像。
   (a) $f(x)=5-2x$，$x\in\boldsymbol{R}$
   (b) $f(x)=x^2-1$，$x\in[0,\infty)$
   (c) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$x\in\boldsymbol{R}$
   (d) $f(x)=\sqrt{4-2x}$，$x\in(-\infty,2]$

总复习题 5

1. 判断下列集合 A 到集合 B 的对应，哪些是映射，哪些不是映射，并说明理由。
   (a) $A=\{0,1,2\}$，$B=\{3\}$，对应法则 $f:0\to 3$，$1\to 3$，$2\to 3$
   (b) $A=\{\alpha\mid 0°<\alpha<90°\}$，$B=\{y\mid 0<y<1\}$，对应法则 $f:\alpha\to y=\sin\alpha$，$\alpha\in A$，$y\in B$
   (c) $A=\boldsymbol{R}$，$B=\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$，对应法则 $f:x\to y=x^2$，$x\in A$
   (d) $A=\boldsymbol{N}$，$B=\boldsymbol{N}$，对应法则 $f:n\to 2n$，$n\in A$
   (e) $A=\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$，$B=\boldsymbol{R}$，对应法则 $f:x\to y$，$|y|=x$，$x\in A$
   (f) $A=\boldsymbol{R}$，$B=\boldsymbol{Z}$，对应法则 $f:x\to x$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-3|, & x<-3\\ 2x-1, & -3\le x\le 7\\ 3-4x, & x>7\end{cases}$，求 $f^3(-4)$。

3. 某巴士路线全长 20 km，票价规定如下：5 km 以下者票价 RM 1.00，5 km 至 12 km 者票价 RM 1.80，12 km 以上者票价 RM 2.80。
   (a) 将票价 y (RM) 表示成路程 x (km) 的函数；
   (b) 作此函数的图像；
   (c) 求这个函数的定义域与值域。

4. 求下列各函数的定义域：
   (a) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-2}$
   (b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$

5. 求下列函数的值域：
   (a) $f(x)=3x^2-1$，$x\in\boldsymbol{R}$
   (b) $y=\dfrac{2}{x}+1$，$x\in\boldsymbol{R}$ 且 $x\neq 0$

6. 已知函数 f 满足关系式 $f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\dfrac{2+x}{2-x}$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$。

7. 已知 $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$。

(a) 化 $f(x)$ 为 $a+\dfrac{b}{x-1}$ 的形式；

(b) 作函数 $y=f(x)$ 的图像；

(c) 求 f 的定义域及值域。

8. 已知函数 $f(x)=ax+b$。若 $(f\circ f)(x)=4x+12$，求 a 与 b 的值。

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2-ax}{5x+3}$。

(a) 求 f 的定义域 D_f；

(b) 求 a 的值使得 $(f\circ f)(x)=x$。

10. 作下列各函数的图像，并求其定义域与值域：

(a) $y=\dfrac{1}{x}+1$， $x\in\boldsymbol{R}$ 且 $x\neq 0$

(b) $y=2x^2$， $x\in\boldsymbol{R}^+$

(c) $y=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$

11. 若函数 $f:(-2,6)\to B$， $f(x)=1+3x$ 为一一映成函数，求集合 B。

12. 已知函数 $f(x)=x^2-2$， $x\in(-\infty,0]$。

(a) 作函数 f 的图像；

(b) 求 $f^{-1}(x)$，并求 f^{-1} 的定义域。

13. 设函数 $f(x)=3-7x$，若 g 是一函数使得 $(g\circ f^{-1})(x)=x^2+3x+6$，求函数 g。

14. 在本章的引言中，“考拉兹猜想”表示：函数 f 将正奇数对应到它的 3 倍加 1；将正偶数对应到它的一半。

(a) 用解析式表示函数 f；

(b) 对于以下的 n，验算 $f(n)$， $f^2(n)$， $f^3(n)$，…直到得到 1 为止。

(i) 5 (ii) 7 (iii) 10 (iv) 14

老王经营着一家小成本的网络代购。一天，老王打算进货两种商品：商品 A 及商品 B。商品 A 的收购成本是每件 RM 5，而商品 B 的收购成本是每件 RM 2。若顺利卖出，每件商品 A 可获利 RM 1.20，而每件商品 B 可获利 RM 0.60。

老王准备了现金 RM 1,000，想最多进货350件。这原是一个简单的进货任务，但当他听到家人的建议后，老王却发了愁。老王的妻子说："应该多进些商品 A，因为它每件获利较多。"但这时老王的儿子不同意了，说："不，应该多进些商品 B，因为它盈率比较高。"老王一听，真是妻说妻有理，儿说儿有理，就犯了难。你能帮老王想出一个最佳的方案吗？

6

不等式

学习目标

- 掌握不等式的性质
- 掌握一元二次不等式及不等式组的解法
- 掌握一元高次不等式及分式不等式的解法
- 掌握含绝对值的不等式的解法
- 掌握二元一次不等式及不等式组的图解法
- 能应用图解法解线性规划问题

6.1 不等式及其性质

不等式

在初中，我们学过有关表示大小关系的式子，即不等式 (inequality)。另外，我们知道两实数 a、b 之间，$a<b$、$a=b$、$a>b$ 这三种情况恰有一个成立。

> 对于任意实数 a 及 b，
> 若 $a-b$ 是正数，即 $a-b>0$，那么 $a>b$；
> 若 $a-b$ 是零，　即 $a-b=0$，那么 $a=b$；
> 若 $a-b$ 是负数，即 $a-b<0$，那么 $a<b$。

由此，如果我们要比较两实数的大小，只需计算它们的差，并观察其正负性即可。

例题 1

若 x 是实数，比较 x^2+3 与 x^2-7 的大小。

解 $$\begin{aligned}\left(x^2+3\right)-\left(x^2-7\right)&=x^2+3-x^2+7\\&=10>0\end{aligned}$$

$\therefore\ x^2+3>x^2-7$

例题 2

已知有两个长方形的规格如下：

长方形 A：长 $(x+2)$ cm，宽 $(x-3)$ cm；

长方形 B：长 x cm，宽 $(x-1)$ cm。

比较上述两个长方形面积的大小。

解 长方形 A 的面积 $=(x+2)(x-3)\text{ cm}^2$，

长方形 B 的面积 $=x(x-1)\text{ cm}^2$。

$$
\begin{aligned}
&(x+2)(x-3)-x(x-1)\\
&=(x^2-x-6)-(x^2-x)\\
&=x^2-x-6-x^2+x\\
&=-6<0
\end{aligned}
$$

$\therefore\ (x+2)(x-3)<x(x-1)$

$\therefore$ 长方形 A 的面积比长方形 B 的面积小。

想一想 1

在例题2中，因为长方形的边长是正数，故 $x>3$。若考虑 x 是任意实数，不等式 $(x+2)(x-3)<x(x-1)$ 仍然成立吗?

例题 3

若 x 是实数，比较 x^2-x 与 $x-6$ 的大小。

解
$$
\begin{aligned}
&(x^2-x)-(x-6)\\
&=x^2-x-x+6\\
&=x^2-2x+6\\
&=x^2-2x+1+5\\
&=(x-1)^2+5>0
\end{aligned}
$$

$\therefore\ x^2-x>x-6$

想一想 2

为什么 $(x-1)^2+5$ 会大于0?

探索活动 1

目的：利用两个函数的图像来判断两个式子的大小。

工具：https://www.geogebra.org/m/seme5wjf

随堂练习 6.1a

比较 $(x-1)(x^2+x+1)$ 与 $(x-2)(x^2+2x+4)$ 的大小，其中 x 为实数。

不等式的性质

在初中，我们学过不等式的性质，也能使用上述比较大小的方法推导出来。

性质1 若$a>b$，$b>c$，则$a>c$。

证明：由$a>b$，$b>c$，得$a-b>0$及$b-c>0$。

$$a-c=a-b+b-c$$
$$=(a-b)+(b-c)>0$$
$$\therefore\ a>c$$

补充资料 若$a>b$且$b>c$，我们可以将其简化成$a>b>c$。

性质2 若$a>b$，则$a+c>b+c$。

证明：由$a>b$，得$a-b>0$。

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c$$
$$=a-b>0$$
$$\therefore\ a+c>b+c$$

性质3 若$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$。

证明：由$a>b$，$c>d$，得$a-b>0$及$c-d>0$。

$$(a+c)-(b+d)=a+c-b-d$$
$$=(a-b)+(c-d)>0$$
$$\therefore\ a+c>b+d$$

想一想 3 能否用性质1及性质2来证明性质3呢？

性质4 设$a>b$，

若$c>0$，则$ac>bc$；

若$c=0$，则$ac=bc$；

若$c<0$，则$ac<bc$。

证明：由$a>b$，得$a-b>0$。

由$ac-bc=c(a-b)$，

若$c>0$，则$c(a-b)>0$，因此$ac>bc$；

若 $c=0$，则 $c(a-b)=0$，因此 $ac=bc$；
若 $c<0$，则 $c(a-b)<0$，因此 $ac<bc$。

性质5 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$。

证明：因为 $a>b$ 且 $c>0$，根据性质4，可得 $ac>bc$；
因为 $c>d$ 且 $b>0$，根据性质4，可得 $bc>bd$。
因为 $ac>bc>bd$，所以 $ac>bd$。

想一想 4
如果将 $a>b>0$ 及 $c>d>0$ 换成 $a>b$ 及 $c>d$，结论 $ac>bd$ 仍然成立吗？

例题 4

已知 $x>y$，比较 $x+5$ 与 $y+2$ 的大小。

解 因为 $x>y$ 且 $5>2$，根据性质3，
$\therefore\ x+5>y+2$

想一想 5
在例题4中，能否直接将两式相减而判断两式的大小呢？

随堂练习 6.1b

已知 $a>b$，比较 $-2a$ 与 $-2b$ 的大小。

习题 6.1

1. 比较 $(x-5)^2$ 与 $(x-8)(x-2)$ 的大小。

2. 比较 x^2+5x 与 $3x-2$ 的大小。

3. 比较 $(1-2x)(1+2x)$ 与 $(x^2-8)^2$ 的大小。

4. 已知 $x>y>0$，比较 x^2 与 y^2 的大小。

5. 已知 $a>b>0$，比较 $3a-b-2$ 与 $2b-5$ 的大小。

6.2 一元二次不等式

一元二次不等式的解法

当一个不等式仅含一个未知数，且未知数的最高次数为二，我们称这个不等式为一元二次不等式 (quadratic inequality in one variable)。

在解一元二次不等式时，一般上我们会先将不等式整理成 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ 的形式（其中 $a>0$）。然后，我们可以透过函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像来判断出不等式的解。此外，我们也可以透过代数分析的方法来解一元二次不等式，而这种方法也适用于未来要学习的高次不等式及分式不等式。

例题 5

解不等式 $x^2-3x+2<0$。

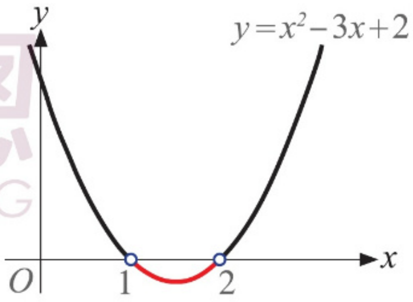
解法一

设 $y=x^2-3x+2$。

$$y=x^2-3x+2$$
$$=(x-2)(x-1)$$

从右图可知，只有当 $1<x<2$ 时，$y<0$。

$\therefore$ 原不等式的解为 $1<x<2$。



想一想 6 在上图中，x 轴上两个点的空心有何意义？

探索活动 2

目的：利用函数的图像来解一元二次不等式。

工具：https://www.geogebra.org/m/dp4wmyax

解法二

$$x^2-3x+2<0$$

$$(x-2)(x-1)<0$$

作一符号表：

	$x<1$	$1<x<2$	$x>2$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)(x-1)$	$+$	$-$	$+$

$\therefore$ 原不等式的解为 $1<x<2$。

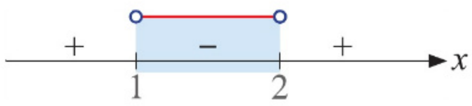
上表可以简化成数线图，表示如下：

解法三

$$x^2-3x+2<0$$

$$(x-2)(x-1)<0$$

$\therefore$ 原不等式的解为 $1<x<2$。



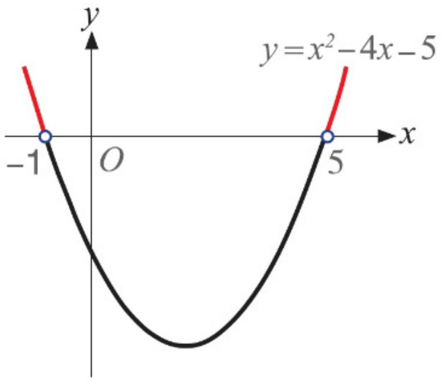
例题 6

解不等式 $x^2-4x-5>0$。

解法一

设 $y=x^2-4x-5$。

$y=x^2-4x-5$
$\quad=(x-5)(x+1)$



从右图可知，当 $x<-1$ 或 $x>5$ 时，$y>0$。
$\therefore$ 原不等式的解为 $x<-1$ 或 $x>5$。

解法二

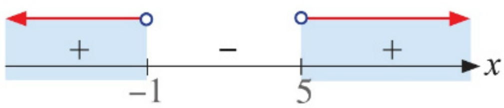
$x^2-4x-5>0$
$(x-5)(x+1)>0$

	$x<-1$	$-1<x<5$	$x>5$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-5)(x+1)$	$+$	$-$	$+$

由上表，可以看到当 $x<-1$ 或 $x>5$ 时，$(x-5)(x+1)>0$。
$\therefore$ 原不等式的解为 $x<-1$ 或 $x>5$。

解法三

$x^2-4x-5>0$
$(x-5)(x+1)>0$
$\therefore$ 原不等式的解为 $x<-1$ 或 $x>5$。



例题 7

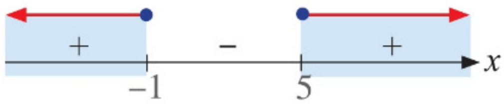
解不等式 $x^2-4x-5\geq 0$。

解 $x^2-4x-5\geq 0$

$(x-5)(x+1)\geq 0$

$x\leq -1$ 或 $x\geq 5$

$\therefore$ 原不等式的解为 $x\leq -1$ 或 $x\geq 5$。



想一想 7 比较例题6与例题7，根据例题5的所求的解，求 $x^2-3x+2\leq 0$ 的解。

例题 8

解不等式 $x(3x+1)\leq 2$。

解 $x(3x+1)\leq 2$

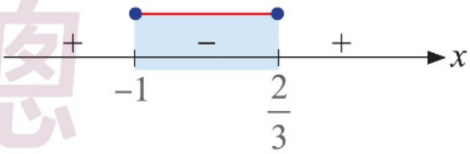
$3x^2+x\leq 2$

$3x^2+x-2\leq 0$

$(3x-2)(x+1)\leq 0$

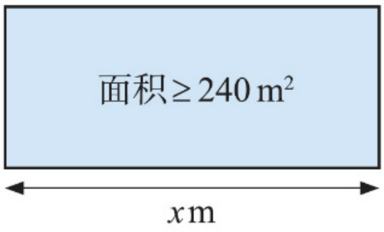
$-1\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

$\therefore$ 原不等式的解为 $-1\leq x\leq \dfrac{2}{3}$。



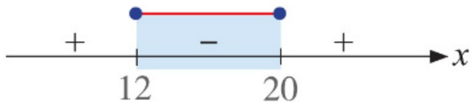
例题 9

小明要用一长 64 m的篱笆围出一个长方形草地来种水果，其中一边长为 x m。若所围出的长方形面积至少需为 240 m²，求 x 的取值范围。



解 依题意，长方形另一边长 $\dfrac{64-2x}{2}=(32-x)$ m。

$$x(32-x)\geq 240$$
$$32x-x^2\geq 240$$
$$x^2-32x+240\leq 0$$
$$(x-12)(x-20)\leq 0$$
$$\therefore\ 12\leq x\leq 20$$



随堂练习 6.2a

解下列各不等式：

1. $x^2-5x+4<0$
2. $3x^2-5x-2\leq 0$
3. $8x^2-6x+1>0$
4. $x(x-4)\geq 0$
5. $3+2x-x^2\geq 0$
6. $2x^2\leq 3x$

在以上的例子中，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ 中的左式都可以分解成两个不同的一次式的乘积。我们可以藉此找到该左式（二次式）的两个根，并将数线分成三个区域，然后求得该不等式的解。

在一些情况下，我们无法直接将 ax^2+bx+c 分解成有理系数的一次式的乘积。我们可以借由函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像来解这类不等式。

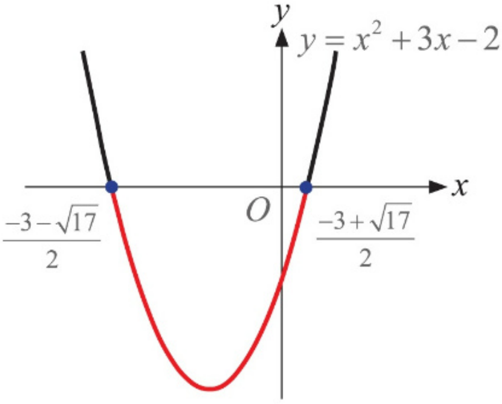
例题 10

解不等式 $x^2+3x-2\le 0$。

解 设方程式 $x^2+3x-2=0$，则

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$



所以，函数 $y=x^2+3x-2$ 的图像经过点

$\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2},0\right)$ 及 $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2},0\right)$。

由右图可知，当 $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\le x\le\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ 时，$y\le 0$。

$\therefore$ 原不等式的解为 $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\le x\le\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$。

但是，如果该二次式在因式分解后得到两个相同的一次式，那么此时二次式是一个完全平方式。我们除了可以借由函数图像来解不等式，由于“任何完全平方式都是非负的”，我们也可以藉此来解这类问题。

例题 11

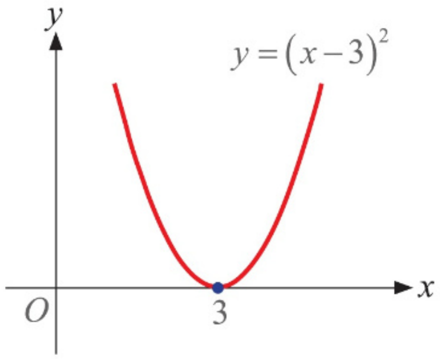
解不等式 $x^2+9\geq 6x$。

解法一

$$x^2+9\geq 6x$$
$$x^2-6x+9\geq 0$$
$$(x-3)^2\geq 0$$

观察函数 $y=(x-3)^2$ 的图像，当 x 为任意实数时，$y\geq 0$ 皆成立。

$\therefore$ 原不等式的解为 $x\in \boldsymbol{R}$。



解法二

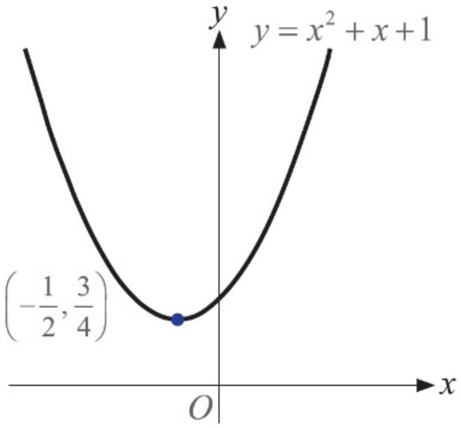
$$x^2+9\geq 6x$$
$$x^2-6x+9\geq 0$$
$$(x-3)^2\geq 0$$

$\therefore$ 原不等式的解为 $x\in \boldsymbol{R}$。

由例题 11 的解法，可知不等式 $(x-3)^2>0$ 的解为 $x\in \boldsymbol{R}$ 且 $x\neq 3$。另外，不等式 $(x-3)^2<0$ 无解；不等式 $(x-3)^2\leq 0$ 的解为 $x=3$。

例题 12

解不等式 $x^2+x+1\le 0$。



解法一

作函数 $y=x^2+x+1$ 的图像。由图可知，无论 x 为任何实数，$y\le 0$ 皆不成立。

$\therefore$ 原不等式无解。

解法二

观察函数 $y=x^2+x+1$，

$$
\begin{aligned}
y&=x^2+x+1\\
&=x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\
&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

由于 $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$，所以原不等式无解。

想一想 8 求不等式 $x^2+x+1<0$，不等式 $x^2+x+1\ge 0$，以及不等式 $x^2+x+1>0$ 的解。

例题 13

证明不等式 $-4x^2+3x\le 2$ 对于任意实数 x 皆成立。

证 $-4x^2+3x\le 2$

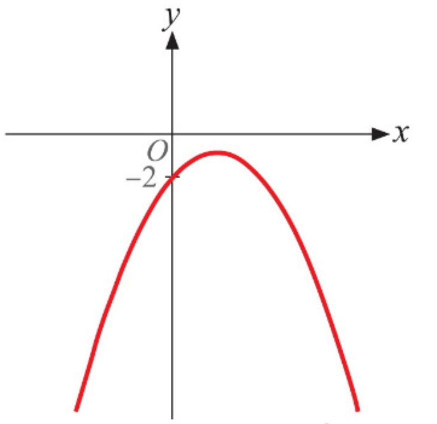
$-4x^2+3x-2\le 0$

考虑函数 $y=-4x^2+3x-2$，

判别式 $\Delta=3^2-4(-4)(-2)$

$=-23<0$

故函数 $y=-4x^2+3x-2$ 的图像与 x 轴没有交点。又因为函数 $y=-4x^2+3x-2$ 的图像为一开口向下的抛物线（如右图）。



由图可知，无论 x 为任何实数，$y\le 0$ 皆都成立。

$\therefore$ 不等式 $-4x^2+3x\le 2$ 对于任意实数 x 皆成立。

随堂练习 6.2b

解下列各不等式：

1. $(x-2)^2\le 2$
2. $x^2-3>0$
3. $4(x+1)>-x^2$
4. $4x^2+11<12x$

一元二次不等式组的解法

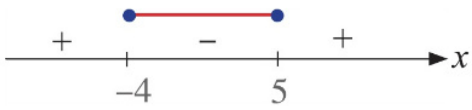
一个不等式组（system of inequalities）的解，就是该组中各个不等式共同的解。

例题 14

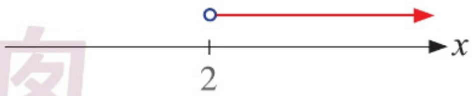
解不等式组 $\begin{cases} x^2 \le x+20 \\ 3x+4>10 \end{cases}$。

解 $\begin{cases} x^2 \le x+20 \text{ ------(1)} \\ 3x+4>10 \text{ ------(2)} \end{cases}$

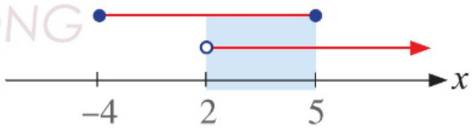
由(1)，
$$\begin{aligned} x^2 &\le x+20 \\ x^2-x-20 &\le 0 \\ (x-5)(x+4) &\le 0 \\ -4 \le x &\le 5 \end{aligned}$$



由(2)，
$$\begin{aligned} 3x+4 &> 10 \\ 3x &> 6 \\ x &> 2 \end{aligned}$$



∴ 不等式组的解为 $2<x\le 5$。



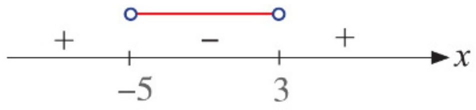
例题 15

解不等式组 $\begin{cases} x^2+2x<15 \\ x^2+x>2 \end{cases}$。

解 $\begin{cases} x^2+2x<15 & \text{------}(1) \\ x^2+x>2 & \text{------}(2) \end{cases}$

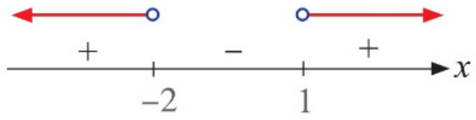
由(1)， $x^2+2x<15$

$$x^2+2x-15<0$$
$$(x+5)(x-3)<0$$
$$-5<x<3$$

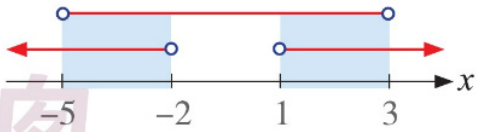


由(2)， $x^2+x>2$

$$x^2+x-2>0$$
$$(x+2)(x-1)>0$$
$$x<-2 \text{ 或 } x>1$$



∴ 不等式组的解为 $-5<x<-2$ 或 $1<x<3$。



随堂练习 6.2c

解下列各不等式组：

1. $\begin{cases} x^2+x-2<0 \\ 2x+3<5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+2x-15<0 \\ x^2+2x-8>0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+x-2\le 0 \\ x^2+x-6>0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+5x+4>0 \\ x^2+10x+21\ge 0 \end{cases}$

习题 6.2

解下列各不等式（1 ~ 10）：

1. $x^2-5x-6>0$
2. $3x^2+4x-4<0$
3. $x^2-7x+12\geq 0$
4. $x(19-x)>90$
5. $(x+2)(x-1)+1\geq 0$
6. $3x^2+x-1>0$
7. $3x(x-5)<2(2x-3)$
8. $(x+1)^2\geq 2(x-2)^2+9$
9. $x^2\leq 9$
10. $(x+3)(x-1)>3(x-1)$

解下列各不等式组（11 ~ 14）：

11. $\begin{cases}(x-3)(x+3)\geq 16\\ x^2+3\geq 13(x-3)\end{cases}$
12. $\begin{cases}40+9x-10x^2<0\\ 10x^2+4x-32<0\end{cases}$
13. $\begin{cases}x^2>4\\ 4x(x-1)\leq 15\end{cases}$
14. $\begin{cases}x^2+5x+4<0\\ x^2+10x+21\leq 0\end{cases}$

15. 若要用一长 100 m 的铁网围成一个矩形的篱笆（如右图），且篱笆内的面积至少为 600 m²，假设此矩形的一边的长度为 x m，问 x 的取值范围为何？

第15题用图

16. 已知方程式 $2x^2-kx-k=0$ 没有实根，求 k 的取值范围。

17. 若抛物线 $y=kx^2-(2k+4)x+9$ 与 x 轴不相交，求 k 的取值范围。

6.3 一元高次不等式与分式不等式

一元高次不等式

当一个不等式仅含一个未知数，且未知数的最高次数大于 2 时，我们称这个不等式为一元高次不等式 (higher degree inequality in one variable)。

例题 16

解不等式 $(x+1)(x-3)(x-5)>0$。

解法一 作一符号表：

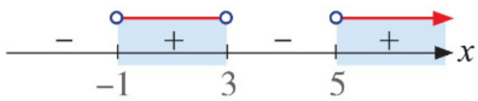
	$x<-1$	$-1<x<3$	$3<x<5$	$x>5$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-3)(x-5)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\therefore$ 原不等式的解为 $-1<x<3$ 或 $x>5$。

解法二

$(x+1)(x-3)(x-5)>0$

$\therefore$ 原不等式的解为 $-1<x<3$ 或 $x>5$。



在解高次不等式时，我们会先将所有非零项移至不等号的左边，并将左边多项式的领导系数调整为正数。之后我们可以透过因式分解及代数分析的方法来解不等式。

例题 17

解不等式 $4x+12>x^3+3x^2$。

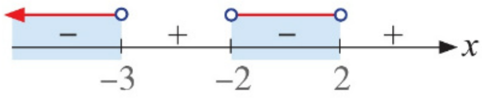
解

$$4x+12>x^3+3x^2$$

$x^3+3x^2-4x-12<0$

将 $x^3+3x^2-4x-12$ 因式分解，得

$(x+3)(x+2)(x-2)<0$



$\therefore$ 原不等式的解为 $x<-3$ 或 $-2<x<2$。

例题 18

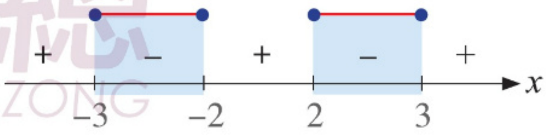
解不等式 $(x^2-4)(9-x^2)\geq 0$。

解

$$(x^2-4)(9-x^2)\geq 0$$

$$(x^2-4)(x^2-9)\leq 0$$

$(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)\leq 0$



$\therefore$ 原不等式的解为 $-3\leq x\leq -2$ 或 $2\leq x\leq 3$。

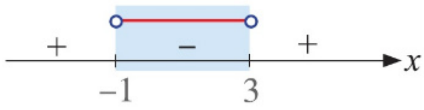
例题 19

解不等式 $(x+2)^2(x+1)(x-3)\le 0$。

解法一

情况一：当 $(x+2)^2(x+1)(x-3)=0$ 时，
$x=-2$，$x=-1$ 或 $x=3$。 ------(1)

情况二：当 $(x+2)^2(x+1)(x-3)<0$ 时，
因为 $x+2\neq 0$，故 $(x+2)^2$ 恒为正值，所以 $(x+1)(x-3)<0$ 且 $x\neq -2$，因而得 $-1<x<3$。------(2)



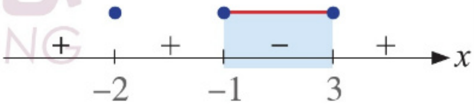
由 (1) 及 (2)，得原不等式的解为 $x=-2$ 或 $-1\le x\le 3$。

若不等式中含有等号时，我们可以将其不等式分成一个方程式与一个不等式来处理。而原不等式的解集就是这个方程式的解集与这个不等式的解集的联集。

因此，上述的结果也可简化成以一个数线表示。

解法二

$(x+2)^2(x+1)(x-3)\le 0$



$\therefore\ x=-2$ 或 $-1\le x\le 3$。

想一想 9

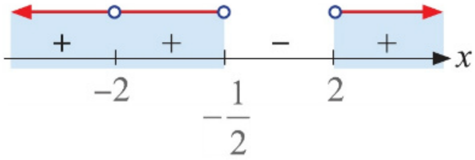
为什么数线图中的符号不是正负相间，而是++–+?

例题 20

解不等式 $(x-2)^3(x+2)^2(2x+1)>0$。

解 $(x-2)^3(x+2)^2(2x+1)>0$

$\therefore\ x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $x>2$，且 $x\neq -2$。



随堂练习 6.3a

解下列各不等式：

1. $x^3-2x^2-5x+6<0$
2. $2x^3-x^2-15x+18\geq 0$
3. $(x-1)^3(x+8)>0$
4. $(x-1)(x-3)^2(x-7)^3\geq 0$

分式不等式

当一个不等式含分式时，我们称这个不等式为分式不等式 (fractional inequality)。在解分式不等式时，我们须先将不等式整理，使其不等式的右式为零。

例题 21

解不等式 $\dfrac{2x-3}{x+2}<1$。

解法一

$$\frac{2x-3}{x+2}<1$$

$$\frac{2x-3}{x+2}-1<0$$

$$\frac{(2x-3)-(x+2)}{x+2}<0$$

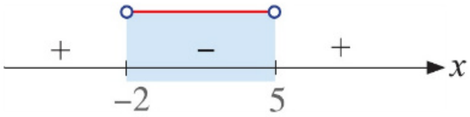
$$\frac{x-5}{x+2}<0$$

想一想 10 能不能将不等式 $\dfrac{2x-3}{x+2}<1$ 化成 $2x-3<x+2$ 来求其不等式的解呢？为什么？

作一符号表：

	$x<-2$	$-2<x<5$	$x>5$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{x-5}{x+2}$	$+$	$-$	$+$

上表可简化以数线表示，表示如下：



$\therefore$ 原不等式的解为 $-2<x<5$。

解法二

因为 $x+2$ 不能为 0，所以 $(x+2)^2$ 恒为正值，将不等式的两边同乘以 $(x+2)^2$，得 $(2x-3)(x+2)<(x+2)^2$　　且 $x\neq -2$

$$(x+2)\left[(2x-3)-(x+2)\right]<0$$

$$(x+2)(x-5)<0$$

$\therefore$ 原不等式的解为 $-2<x<5$。

例题 22

解不等式 $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}\leq 0$。

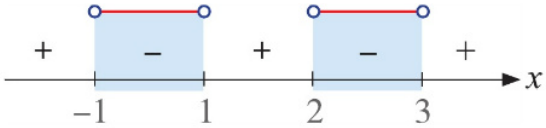
解法一

情况一：当 $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}=0$ 时，

得 $\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=0$，其解为 $x=-1$ 或 $x=3$。-----(1)

情况二：当 $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}<0$ 时，

得 $\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-1)}<0$ 且 $x\neq \pm1, 2, 3$



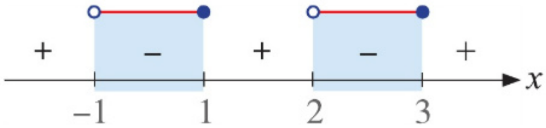
其解为 $-1<x<1$ 或 $2<x<3$。------(2)

由 (1) 与 (2)，得原不等式的解为 $-1\leq x<1$ 或 $2<x\leq 3$。

解法二

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}\leq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-1)}\leq 0$$



$\therefore\ -1\leq x<1$ 或 $2<x\leq 3$

11 为什么这个数轴上的点有些是实心的，有些是空心的？

随堂练习 6.3b

解下列各不等式：

1. $\dfrac{x}{x+1}\geq 2$

2. $x+1>\dfrac{3}{2-x}$

3. $\dfrac{x^2}{(x-3)(x-1)}<1$

4. $\dfrac{(2-x)(3x+2)}{2x-5}\leq 0$

习题 6.3

解下列各不等式：

1. $x^3+3x^2-4x-12<0$

2. $2x^3-9x^2+7x+6>0$

3. $(x-1)(x+1)^2(x+4)\le 0$

4. $x^4-13x^2+36\ge 0$

5. $(x^2-3x-4)(2x^2-x-1)\le 0$

6. $(16-9x^2)(3x^2-1)>0$

7. $(x-1)(x+3)^2(2x-5)<0$

8. $(x-4)^3\ge 0$

9. $\dfrac{4x-1}{2x+3}<3$

10. $\dfrac{1}{x-2}<\dfrac{1-x}{2-x}-3$

11. $\dfrac{36}{x^2-9}>1+\dfrac{x-3}{x+3}$

12. $\dfrac{x-2}{x+3}\ge 1$

13. $\dfrac{2x-1}{x-2}\le x-2$

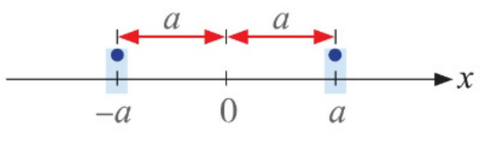
14. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+5}\ge 0$

6.4 含绝对值的不等式

在初中，我们学过一个数 x 在数线上所对应的点与原点的距离，称为该数的绝对值，记作 $|x|$。

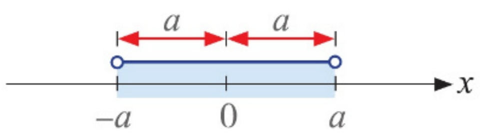
当 $a>0$ 时，

① 若 $|x|=a$，则 $x=\pm a$；

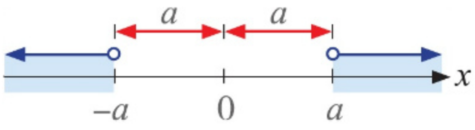


想一想 12 若当 $a<0$ 或当 $a=0$ 时，那么 $|x|=a$、$|x|<a$、$|x|>a$ 的解为何？

② 若 $|x|<a$，则 $-a<x<a$；



③ 若 $|x|>a$，则 $x<-a$ 或 $x>a$。



由上述结果可知，若 $|x|\le a$，则 $-a\le x\le a$；若 $|x|\ge a$，则 $x\le -a$ 或 $x\ge a$。

例题 23

解不等式 $|x-3|<2$。

解

$$|x-3|<2$$
$$-2<x-3<2$$
$$1<x<5$$

$\therefore$ 原不等式的解为 $1<x<5$。

例题 24

解不等式 $|3x-2|\ge 5$。

解

$$|3x-2|\ge 5$$

$3x-2\le -5$ 或 $3x-2\ge 5$

$$3x\le -3 \qquad 3x\ge 7$$
$$x\le -1 \qquad x\ge \frac{7}{3}$$

$\therefore$ 原不等式的解为 $x\le -1$ 或 $x\ge \dfrac{7}{3}$。

例题 25

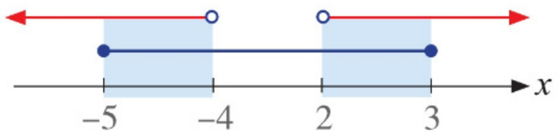
解不等式 $3<|x+1|\le 4$。

解 原不等式可写成不等式组

$$\begin{cases} |x+1|>3 & \text{------(1)} \\ |x+1|\le 4 & \text{------(2)} \end{cases}$$

由 (1)，得 $x+1<-3$ 或 $x+1>3$

$x<-4$ $\quad$ $x>2$



由 (2)，得 $-4\le x+1\le 4$

$-5\le x\le 3$

因此，原不等式的解为 $-5\le x<-4$ 或 $2<x\le 3$。

随堂练习 6.4

解下列各不等式：

1. $|x|>5$
2. $|2x-1|<3$
3. $|3x+1|\le 2$
4. $1\le|1-x|<3$

习题 6.4

解下列各不等式：

1. $|x-3|<12$
2. $3|x+1|-4>11$
3. $|3x+5|\le 1$
4. $|x|+3\ge 4$
5. $1<|2x+1|\le 5$
6. $|1-2x|<4$
7. $4<|4x-2|<6$
8. $\dfrac{3}{|x+1|}-2\ge 4$
9. $9|x-2|-10<-73$
10. $3+4|3x+7|\ge -89$

6.5 二元一次不等式

二元一次不等式的解法

当一个不等式含有两个未知数，且未知数的次数皆为一次时，我们称这个不等式为二元一次不等式 (linear inequality in two variables)。例如：

$$2x-5y<8$$
$$y\geq 3x+4$$

如同我们可以用数线表示一元二次不等式的解，我们也可以利用直角坐标平面来表示二元一次不等式的解。

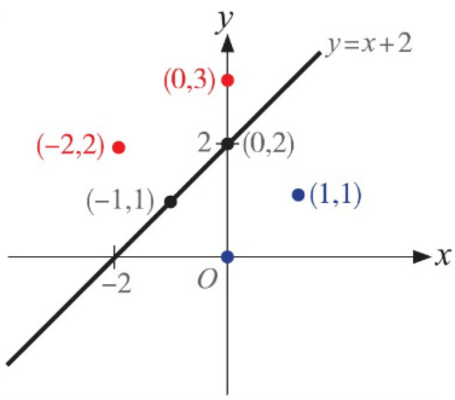
探索活动 3

目的：1. 在坐标平面上，绘制直线 $y=x+2$。

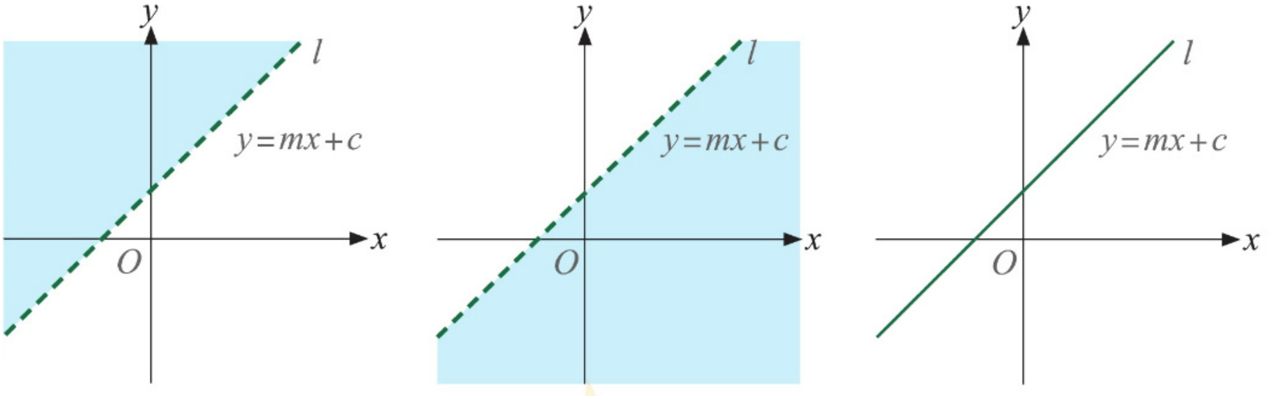
2. 在坐标平面上取任意点 A，观察其坐标何时满足 $y>x+2$、$y=x+2$、$y<x+2$。

工具：https://www.geogebra.org/m/dejapvrd

不难发现，直线 $y=x+2$ 将坐标平面分成两个区域。直线上所有的点，如 $(0,2)$ 及 $(-1,1)$ 等，皆满足方程式 $y=x+2$；直线上方的区域内所有的点，如 $(-2,2)$ 及 $(0,3)$ 等，皆满足不等式 $y>x+2$；而直线下方的区域内所有的点，如 $(0,0)$ 及 $(1,1)$，皆满足不等式 $y<x+2$。



因此可以得知，直线 $y=mx+c$ 把平面分成两个区域。直线上方的区域是满足不等式 $y>mx+c$ 所有的点所成的区域，直线下方的区域则是满足不等式 $y<mx+c$ 所有的点所成的区域，而直线本身则是满足方程式 $y=mx+c$ 所有点所成的区域。



$y>mx+c$　　　　$y<mx+c$　　　　$y=mx+c$

例题 26

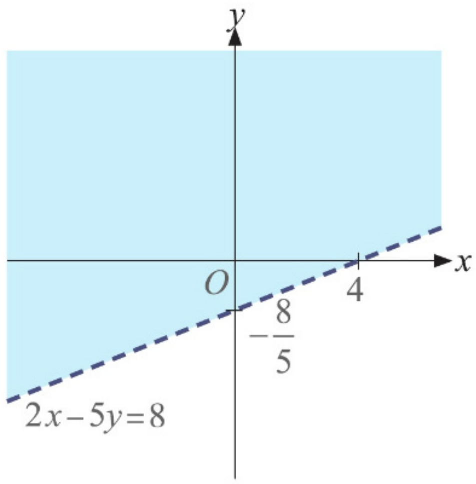
绘出满足不等式 $2x-5y<8$ 的区域。

解 $2x-5y<8$

$$y>\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}$$

作直线 $y=\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}$ 的图像。不等式 $y>\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}$ 所对应的区域，是直线 $y=\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}$ 上方的区域。

而直线 $2x-5y=8$ 为虚线，表示直线上的点不满足不等式 $2x-5y<8$。



想一想 **13** 不等式 $x<a$ 及不等式 $x>a$ 及方程式 $x=a$ 所对应的图像应该是什么？

一般上，一个二元一次不等式，比如 $Ax+By+C>0$，所表示的区域一定是直线 $Ax+By+C=0$ 所分两个区域的其中一个。究竟是哪一侧的区域，不一定需要如例题 26 一样，将不等式化成函数 y 的代数式来判断，而可以取其中一侧区域中的任何一点，将它的坐标代入不等式。如果不等式成立，那么这一侧的区域就是不等式所表示的区域；如果不等式不成立，那么另一侧的区域就是不等式所表示的区域（参考例题 27）。

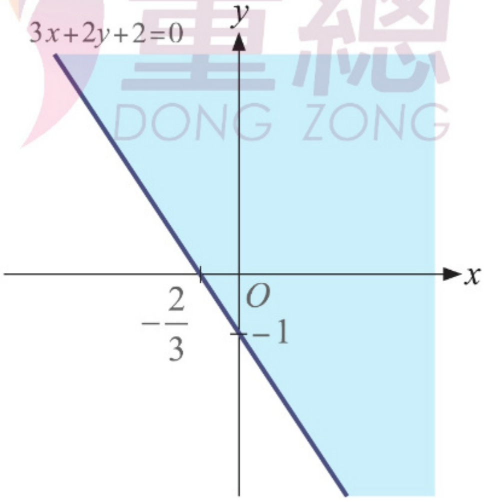
例题 27

绘出满足不等式 $3x+2y+2\geq 0$ 的区域。

解 作方程式 $3x+2y+2=0$ 的图像。

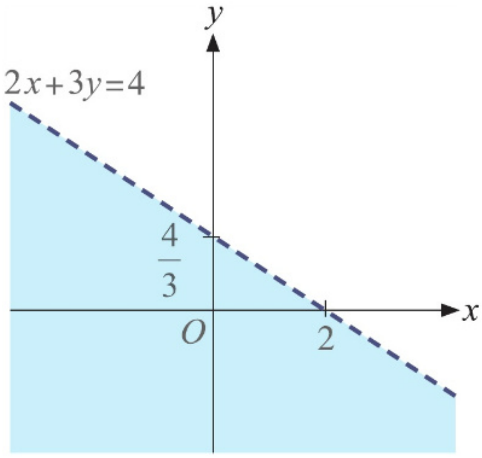
直线 $3x+2y+2=0$ 将坐标平面分成两个区域。取点 $O(0,0)$ 代入 $3x+2y+2$ 得正值。因此，点 $(0,0)$ 所在的区域所表示的不等式为 $3x+2y+2>0$，即 $3x+2y+2\geq 0$ 的图像为直线 $3x+2y+2=0$ 上方与直线上的所有点。（如下图）

直线 $3x+2y+2=0$ 为实线，表示直线上的点满足不等式 $3x+2y+2\geq 0$。



例题 28

写出右图阴影区域所表示的不等式。



解 直线 $2x+3y=4$ 下方的区域所表示的不等式为 $2x+3y<4$。

因此，右图阴影区域所表示的不等式为 $2x+3y<4$。

随堂练习 6.5a

以图像表示下列各不等式的解：

1. $y<2x-1$
2. $2x-5y\geq 1$
3. $3x+2y\leq 2$
4. $x+3y+2>0$

二元一次不等式组的解法

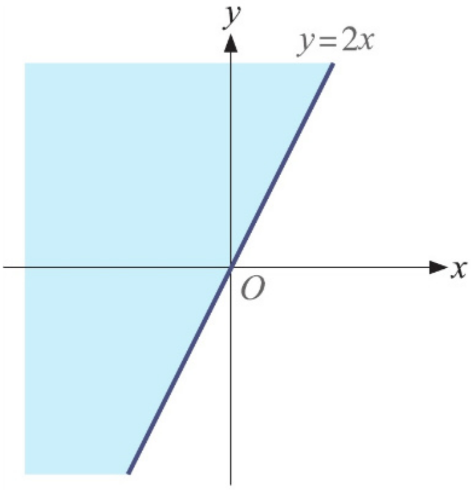
在直角坐标平面上，二元一次不等式组的解，就是各个不等式所对应的共同区域。

例题 29

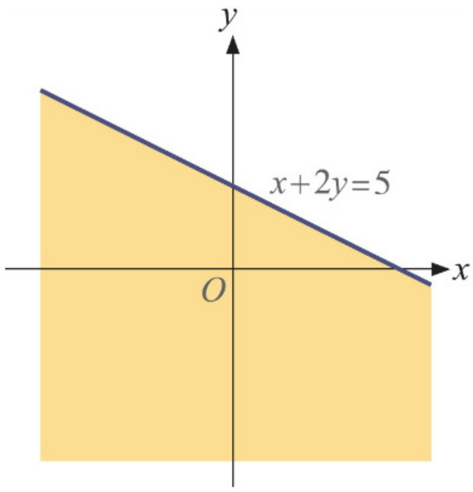
绘出满足不等式组 $\begin{cases} y\geq 2x \\ x+2y\leq 5 \end{cases}$ 的区域。

解 不等式 $y\geq 2x$ 的图像为直线 $y=2x$ 上方的区域及直线上的点，如图 (a) 所示。

不等式 $x+2y\leq 5$ 的图像为直线 $x+2y=5$ 下方的区域及直线上的点，如图 (b) 所示。

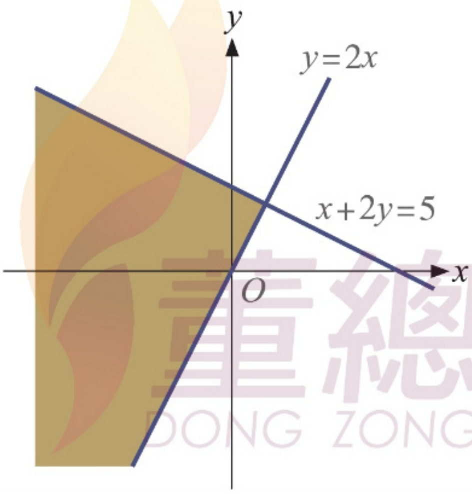


(a) $y \geq 2x$



(b) $x+2y \leq 5$

满足不等式组的区域，就是上述两图重叠，如下图所示：



探索活动 4

目的：观察不等式组所代表的图像：

工具：https://www.geogebra.org/m/wr5kkbtc

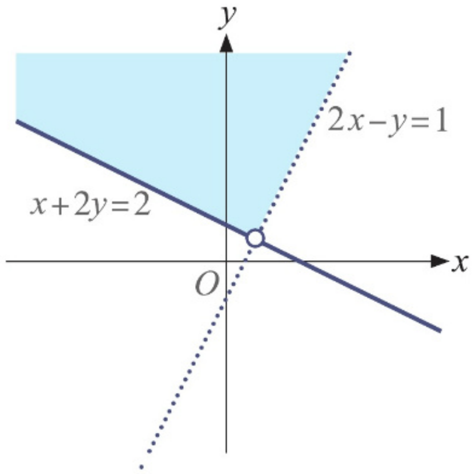
例题 30

以图像表示不等式组 $\begin{cases} x+2y \geq 2 \\ 2x-y<1 \end{cases}$。

解 不等式 $x+2y \geq 2$ 的图像为直线 $x+2y=2$ 上方的区域及该直线上的点（实线）；

不等式 $2x-y<1$ 的图像为直线 $2x-y=1$ 上方的区域，但不包含直线上的点（虚线）。

两区域重叠部分即为此不等式组的解，如右图所示。



应该注意的是，右图中两线交点处的点为空心“○”，表示该点不是解的一部分。

例题 31

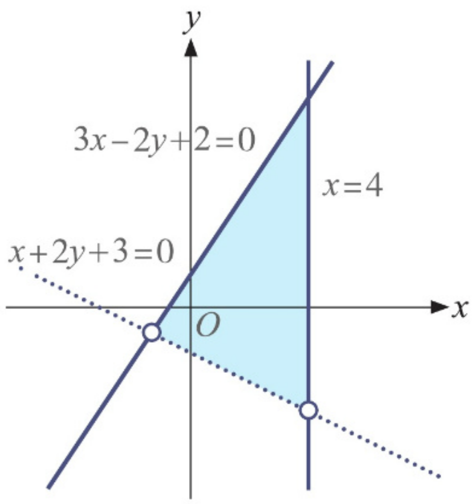
绘出满足不等式组 $\begin{cases} x+2y+3>0 \\ 3x-2y+2 \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$ 的区域。

解 不等式 $x+2y+3>0$ 的图像为直线 $x+2y+3=0$ 上方的区域，但不包括直线上的点（虚线）；

不等式 $3x-2y+2 \geq 0$ 的图像为直线 $3x-2y+2=0$ 上方的区域及该直线上的点（实线）；

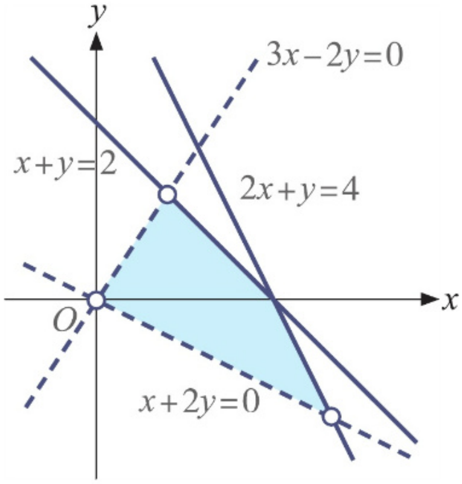
不等式 $x \leq 4$ 的图像为直线 $x=4$ 左方的区域及该直线的点（实线）。

三个区域重叠部分即为此不等式组的解，如右图所示。



例题 32

写出表示右图阴影区域的不等式组。



解 所求的不等式组为：

$$\begin{cases} 3x-2y>0 \\ x+y\le 2 \\ 2x+y\le 4 \\ x+2y>0 \end{cases}$$ 。

随堂练习 6.5b

以图像表示下列各不等式的解：

1. $\begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ x+y-3<0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x\ge 0 \\ 2x-y\le 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y>3 \\ x-2y<4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y\ge 6 \\ 4x-3y\le 12 \\ 1\le y\le 2 \end{cases}$

习题 6.5

绘出满足下列各不等式的区域（1 至 4）：

1. $y\ge 3x+1$

2. $x+2y<2$

3. $2x+y\ge 5$

4. $x-2y-5\ge 0$

以图像表示下列各不等式组的解（5 至 7）：

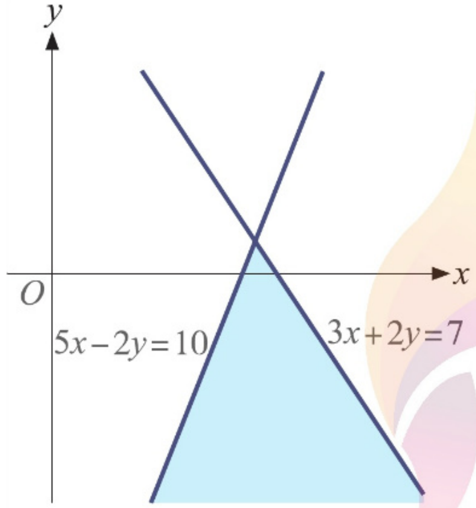
5. $\begin{cases} x+2y+6>0 \\ 2x+y-2<0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-y\le 2 \\ 2x+3y\le 7 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

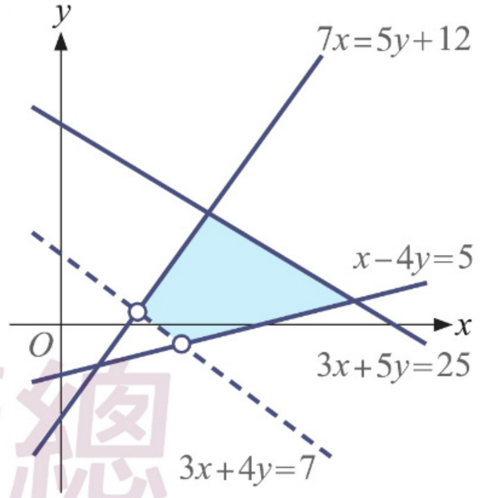
7. $\begin{cases} x+3y\le 12 \\ 3x-2y\le 6 \\ x\ge 0 \end{cases}$

写出下列各图所示的阴影区域所表示的不等式组（8至9）：

8.



9.



6.6 线性规划

线性规划

规划论主要研究两个方面的问题：一个是对于给定的人力及物力，如何才能发挥最大的经济或社会效益；另一个是对于给定的任务，如何才能以最少的人力及物力去完成。

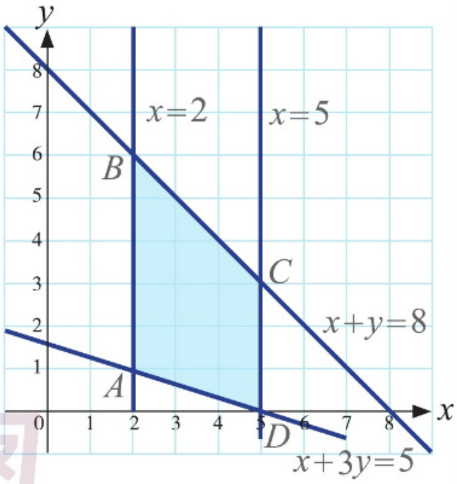
一般上，规划问题可以归结为研究在一组不等式或等式的约束下，使得某一目标函数 (objective function) 取得最大或最小的最值问题。能满足所有的约束条件 (constraint)，且可使目标函数取得所期望的最大或最小值的解，叫做最优解 (optimal solution)。

如果规划模型中的所有约束条件都是线性的（一次的）等式或不等式，且目标函数也是线性的（一次的），则这种问题就叫做线性规划 (linear programming) 问题。

例题 33

已知 x 及 y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\le 8 \\ x+3y\ge 5 \\ 2\le x\le 5 \end{cases}$，求 $2x+y$ 的最大值及最小值。

解 在坐标平面上，绘出约束条件中不等式组的图像，其图像如右图的阴影部分所示。图中多边形 $ABCD$ 内及其边界上的点都满足这组不等式，所以多边形 $ABCD$ 及其内部的点的集合就叫做这组不等式的可行区域 (feasible region)，属于区域中的任何一点都叫做可行点 (feasible point)。

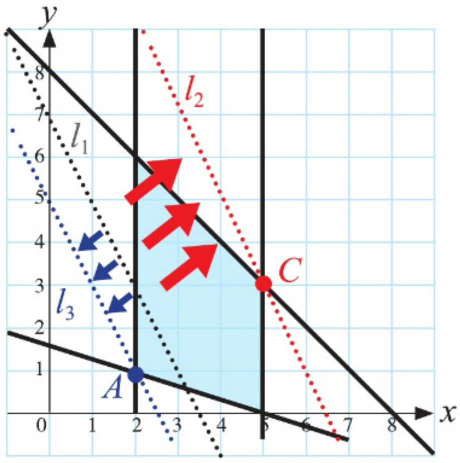


将目标函数 $z=2x+y$ 写成

$l: y=-2x+z$。

由此可知，l 表示斜率为 -2 的一条直线，且 y 轴上的截距是 z。

当令 z 等于某个常数时，例如 $z=7$，我们可以得到一条直线 $l_1: y=-2x+7$，在这条直线上的任一点都会使目标函数 $z=2x+y$ 的值为 7。



当直线平移至 l_2 的位置时，对应于直线的 z 值最大，且 l_2 与可行区域相交于点 $C(5, 3)$。因此，

当 $x=5$，$y=3$ 时，z 有最大值

$$z_{\max}=2(5)+3=13。$$

同理，当直线平移至 l_3 的位置时，对应于直线的 z 值最小，且 l_3 与可行区域相交于点 $A\,(2, 1)$。因此，

当 $x=2$， $y=1$ 时，z 有最小值

$$z_{\min}=2(2)+1=5\text{。}$$

探索活动 5

目的：解决线性规划问题。

工具：https://www.geogebra.org/m/xbyqfejj

随堂练习 6.6a

求 $z=x-y$ 的最大值与最小值，式中 x 及 y 满足约束条件：$\begin{cases} x-2y+6\geq 0 \\ 7x-2y\leq 18 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$ 。

例题 34

小王要在一片 10 公顷的土地上种植包菜及番茄。根据小王的调查，包菜的种植成本为每公顷 RM 2400，番茄的种植成本为每公顷 RM 1600，而种植包菜所带来的利润为每公顷 RM 250，种植番茄所带来的利润为每公顷 RM 200。若小王手上只有 RM 19200 的预算，那么他该种植多大面积的包菜及番茄，才能一次收成获利最多？最大获利是多少？

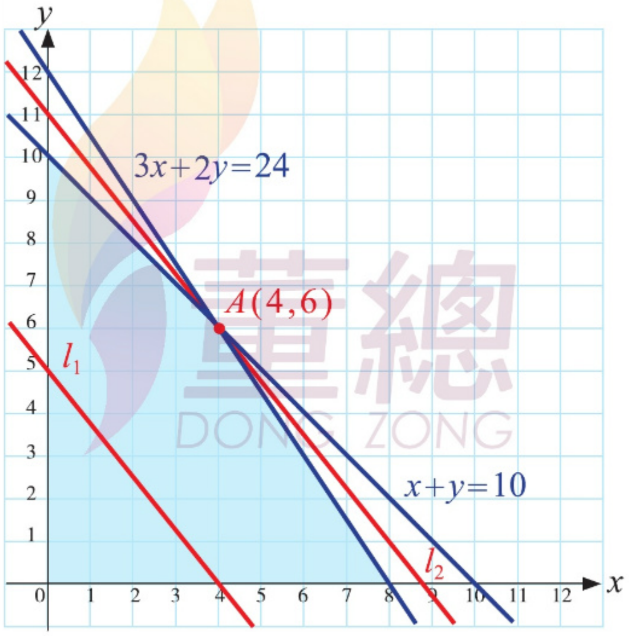
解 设小王种植包菜 x 公顷，种植番茄 y 公顷。由题意，可得限制条件：

$$\begin{cases} x+y\le 10 \\ 2400x+1600y\le 19200 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

想一想 14 为什么在限制条件中，要增设 $x\ge 0$ 及 $y\ge 0$？

经化简，得 $\begin{cases} x+y\le 10 \\ 3x+2y\le 24 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

其总利润（目标函数）$z=250x+200y$。依题意，我们需求出其最大值。



令 $l: z=250x+200y$。当 $z=1000$，得直线 l_1。将直线平移至 l_2 时，z 的值最大。此时 l_2 与可行区域交于点 $A(4, 6)$。因此，

当 $x=4$，$y=6$ 时，z 有最大值

$$z_{\max}=250(4)+200(6)=2200。$$

因此，当小王种植包菜 4 公顷，番茄 6 公顷时，获利最多。最大获利为 RM 2200。

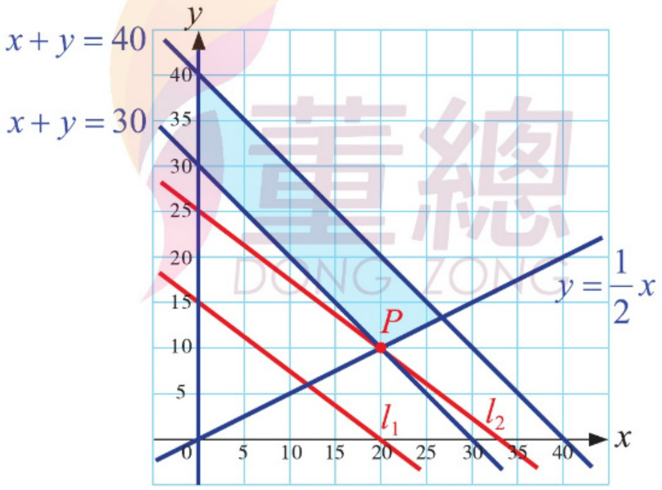
例题 35

某机构欲资助初中生参加数学加强班与科学加强班，以协助提升学生的数理能力。在该机构的计划中，资助的学生总人数至少 30 名，至多 40 名，并且参与科学加强班的人数至少是数学加强班人数的一半。若数学加强班与科学加强班的学费分别为每人 RM 60 及每人 RM 80，问此机构至少资助了多少的学费？

解 设有 x 名学生参与数学加强班，有 y 名学生参与科学加强班。根据题意，我们可以列出约束条件：

$$\begin{cases} 30 \le x+y \le 40 \\ y \ge \frac{1}{2}x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

其总花费（目标函数）$z = 60x + 80y$。依题意，我们需求出其最小值。



令 $l: z = 60x + 80y$。

当 $z = 1200$，得直线 l_1。将直线平移至 l_2 时，z 的值最小。此时 l_2 与可行区域交于点 $P(20, 10)$。因此，

当 $x = 20$，$y = 10$ 时，z 有最小值

$$z_{\min} = 60(20) + 80(10) = 2000\text{。}$$

当有 20 人参加数学加强班，10 人参加科学加强班时，其总资助学费最低，即 RM 2000。所以，此机构至少资助了学费 RM 2000。

利用图解法来解线性规划问题，一般可以按下列步骤进行：

1．写出约束条件及目标函数；

2．在坐标平面中，绘出可行区域；

3．利用平移法求目标函数的最值。

线性规划问题的最优解不一定只有一个。当有多个可行点都可使目标函数达最值，则这些点皆为此线性规划问题的最优解。

在一般情况下，x，y 值不一定是整数。但是在一些情况，x，y 值都必须是整数，但不等式组所成多边形的顶点有可能是非整数点，那么我们需要找到接近此顶点的整数点，才是问题的最优解。

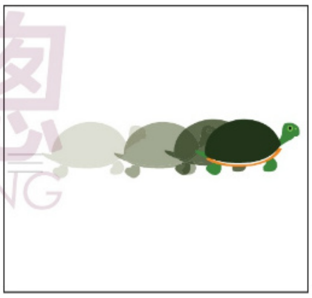
例题 36

在一场电子竞赛的决斗中，某选手决定使用“十万伏特”及“电光一闪”两种技能来迎敌。每使用一次技能，其带来杀伤力、减少对方的防御力、损耗自己的生命值如下所示：

十万伏特

杀伤力：	15单位
对方防御力：	8单位
自身生命值：	10单位

电光一闪



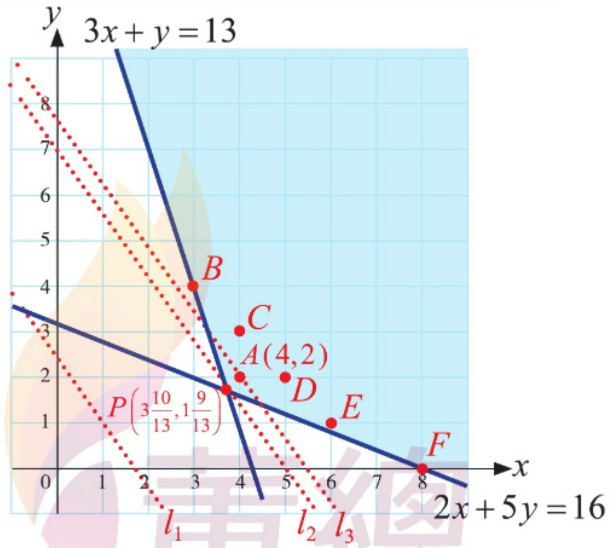
杀伤力：	5单位
对方防御力：	20单位
自身生命值：	7单位

若要打败对手，至少需要达 65 单位的杀伤力，同时需至少减少对方防御力 64 单位。问该选手要使用这两种技能各多少次，才能消耗最少的生命值而打败对手？而最少要消耗的生命值是多少？

解 设该选手使用“十万伏特”x次，“电光一闪”y次。我们可以列出限制条件：

$\begin{cases}15x+5y\geq 65\\8x+20y\geq 64\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$。经化简，得$\begin{cases}3x+y\geq 13\\2x+5y\geq 16\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$，

其消耗的生命值（目标函数）$z=10x+7y$。依题意，我们需求出其最小值。



令 $l: z=10x+7y$。

当$z=17$，得直线l_1。将直线向上平移至l_2时，l_2与可行区域交于点P。依题意，x值及y值皆为非负整数。所以，由图可知，点P不是满足题意的点。我们需再将直线平移至第一个整数点$A(4,2)$。此时，z值最小。因此，

想一想 15 如何确定在点A时，z有最小值？为什么不是点B、C、D、E又或是F？

当$x=4$，$y=2$时，z有最小值

$$z_{\min}=10(4)+7(2)=54。$$

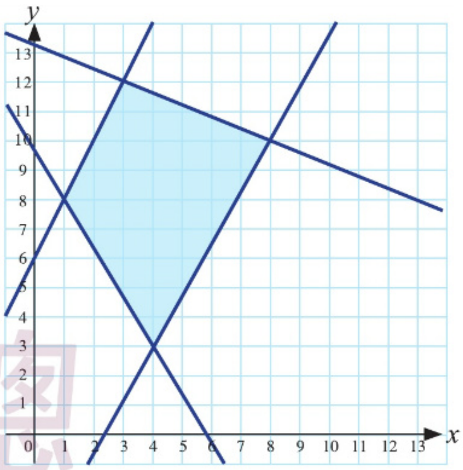
因此，该选手使用4次“十万伏特”，2次“电光一闪”时，消耗了最少的生命值54个单位。

随堂练习 6.6b

某工厂生产 A、B 两种产品。生产一个产品 A 需要原料铁 7 公斤及沙石 4 公斤；生产一个产品 B 需要原料铁 4 公斤及沙石 7 公斤。已知每周能供应的原料铁及沙石分别为 1000 公斤及 2100 公斤。若每个产品 A 可获利 RM 30，每个产品 B 可获利 RM 50，且生产的产品皆可卖出，问应如何安排这两种产品的生产量以获得最大利润?

习题 6.6

1. 右图中阴影部分表示 x，y 值约束条件的可行区域。如果 $z=3x+5y$，求 z 的最大值与最小值。



第 1 题用图

2. 已知 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}4x+y\geq 7\\4x+5y\leq 19\\4x-3y\leq 27\end{cases}$，

求函数 $z=10x+12y$ 的最大值与最小值。

3. 一工厂生产两种球拍：“卓越”球拍及“王者”球拍。假设一天内，该工厂生产出 x 支“卓越”球拍及 y 支“王者”球拍。生产这两种球拍，需要经过两道工序，每道工序的所花的时间如下：

工序一		工序二	
“卓越”球拍：	50分钟/支	“卓越”球拍：	40分钟/支
“王者”球拍：	20分钟/支	“王者”球拍：	20分钟/支

已知每日要生产这两种球拍，需考量以下限制：

I. 负责工序一的师傅最多只能工作 600 分钟；

II. 工序二的机器最少需运作 400 分钟；

III. “卓越”球拍的生产数量不能多于“王者”球拍生产数量的两倍。

(a) 试以三个不等式列出约束条件（除了 $x \geq 0$ 及 $y \geq 0$）。

(b) 在坐标平面上绘出其可行区域。
（比例尺：x 轴以 2 cm 代表 2 支，y 轴以 2 cm 代表 5 支）

(c) 若每支“卓越”球拍的利润是RM 4，而每支“王者”球拍的利润是RM 6，问工厂每天需制作多少“卓越”球拍与“王者”球拍，才能获得最多利润？

4. 某狗粮生产商出产两种狗粮，而要生产这两种狗粮都需要两种主要原料。
已知每袋的“优宝”狗粮需使用 100 kg 的原料 A 及 50 kg 的原料 B；
每袋的“活宝”狗粮需使用 50 kg 的原料 A 及 100 kg 的原料 B。

(a) 若该生产商生产了 x 袋的“优宝”狗粮，及 y 袋的“活宝”狗粮，且至少使用了 2500 kg 的原料 A 及 3500 kg 的原料 B，列出其约束条件。

(b) 试以适当的比例尺，在坐标平面上绘出其可行区域。

(c) 若生产每袋“优宝”狗粮需花费 RM 150，生产每袋“活宝”狗粮需花费 RM 200，问生产商应生产这两种狗粮各多少袋，才能使其成本最少？其最低成本为何？

5. 小美想要制作一些窗帘与桌布来增加收入。已知一件窗帘需花 50 分钟的准备时间及 75 分钟的裁缝时间，而一件桌布需花 60 分钟的准备时间及 45 分钟的

裁缝时间。每星期，小美最多只能花 16 小时来进行准备工作，而缝纫机最多只能工作 15 小时。若窗帘的件数需少于或等于桌布的件数，且每件窗帘可获利 RM 14，每件桌布可获利 RM 12。问小美一周可得的最高利润是多少？

6. 在一个活动中，某商家推出了两款不同的限定版巧克力配套。每款配套中，白巧克力与黑巧克力的数量，以及其售价如下表所示：

	配套A（每套）	配套B（每套）
白巧克力	7颗	3颗
黑巧克力	4颗	4颗
售价	RM 60	RM 30

小明准备了 RM 1200，欲买至少 120 颗黑巧克力。

(a) 若小明想尽量多买一些白巧克力，应买这两款配套各多少套？此时小明买到了多少颗白巧克力？

(b) 若小明想尽量少买一点白巧克力，应买这两款配套各多少套？此时小明买到了多少颗白巧克力？

总复习题 6

1. 比较下列两代数式的大小：

(a) $\left(x^2+1\right)^2$ 与 x^4+x^2+1，其中 $x \neq 0$；

(b) $\left(1+x+x^2\right)^2$ 与 $3\left(1+x^2+x^4\right)$，其中 $x \neq 1$；

(c) a^2+3b^2 与 $2b(a+b)$，其中 $a \neq b$。

2. 解下列各不等式：

(a) $\left(x^2+1\right)(x-3)<0$

(b) $x^3+1>(x+1)^3$

(c) $2x^3+3x^2-23x-12 \geq 0$

(d) $(x+1)^3(x-2)^2\left(2x^2-x-6\right) \leq 0$

(e) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+4}>0$

(f) $\dfrac{13-x}{1+x} \geq \dfrac{11+x}{2+x}$

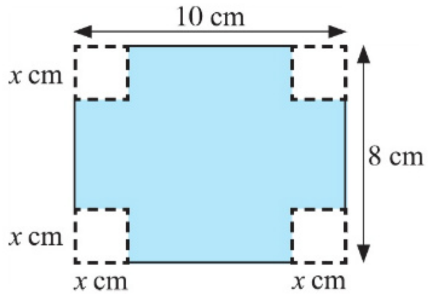
(g) $|2x+5|<3$

(h) $\left|x^2+2x-4\right| \leq 4$

3. 解下列各不等式组：

(a) $\begin{cases} x^2-3x+2<0 \\ 2x^2-3x\geq 0 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x^2-7x+10>0 \\ x^2-6x-14\leq 0 \end{cases}$

4. 一无盖的容器拆开后，如右图所示。若其容器的体积至少为 48 cm³，则 x 的取值范围为何？



第 4 题用图

5. (a) 求 $6x+4y$ 的最大值，其中 x、y 满足下列条件：$\begin{cases} 2x+4y\leq 96 \\ 3x+3y\geq 90 \\ 2x+y\leq 50 \end{cases}$

(b) 求 $3x-2y$ 的最小值，其中 x、y 满足下列条件：$\begin{cases} 4x+3y<12 \\ y\leq 1 \\ y\leq 2x \end{cases}$

6. 某工厂利用三种原料甲、乙、丙，制造两种成品 X、Y，每公吨的 X 需要甲 6 公吨、乙 4 公吨、丙 12 公吨，可得利润为 RM 2,000。每公吨的 Y，则需要甲 4 公吨、乙 6 公吨、丙 3 公吨，可得利润 RM 6,000。本月购入原料甲、乙、丙各 60 公吨。

(a) 若要获得最大利润，应生产出多少的 X 与 Y？其最高利润为何？

(b) 若因市场变动，每吨的 X 与每吨的 Y 的获利相同，又该如何安排生产？

7. 某餐厅营业者想购买一些桌椅，并从下列两种配套中来订购一些桌椅。

配套 A

售价：RM 400

配套 B

售价：RM 250

根据过去的经验，餐厅需至少需购买 180 张椅子。另外，由于二人座的使用率会比四人座高，故订购配套 B 的数量至少与配套 A 的数量相等。若营业者欲用 RM 24,000 的预算来增设桌椅，问该业者应该购入这两个配套各几套，使其成本最低？

8. 回顾本章引言中的问题。你能为老王提出一个最佳的方案吗？

学生到网路上搜寻“minesweeper”，就能探索到免费的扫地雷游戏。

在日常交流中，我们会说某人讲话不合逻辑或自相矛盾。学习逻辑，可以让我们正确理解数学概念、合理论证数学结论及准确表达数学内容。且看以下两个句子：

这两句话中恰有一句为真。

这两句话中恰有一句为假。

问：这两句话中有几句是真的？

在“扫地雷”游戏中，方格中的数字代表该方格四周的格子中地雷的个数，小旗子标示已经被找到的地雷。已知图中还有三个地雷未被找到，我们是否有足够的资讯找出那三个地雷？

7

逻辑

学习目标

- 理解命题的意义
- 掌握逻辑联结词“且”、“或”及“非”
- 理解充分条件、必要条件、充要条件的意义
- 理解全称量词及存在量词的意义
- 能根据所给的条件作简单推论

7.1 命题

在我们所应用的语句中，用来描述事实或表达看法的语句称为陈述句。可以判断真假的陈述句叫做命题 (statement)，例如

(1) $2+4=6$

(2) 在平面上，三角形的内角和为180°。

(3) 31 能被 2 整除。

(4) 所有的质数都是奇数。

以上的命题中，(1) 和 (2)为真命题 (true statement)，(3) 和 (4) 为假命题 (false statement)。

想一想 1 为什么(4)是假命题？

不是陈述句或无法判断真假的陈述句都不是命题，如

(5) 你好吗？

(6) 我认为活动应该安排在下午。

以上的语句中，(5) 是疑问句，而 (6) 是无法明确判断真假的陈述句。所以，(5)和 (6) 都不是命题。

判断一个语句是不是命题，要看它是否符合“是陈述句”及“可以判断真假”这两个条件。为叙述简便，我们用小写字母 p，q，r，……表示命题。

随堂练习 7.1a

1. 判断下列各语句是否是命题。若是，判断其真假；若不是，说明原因。

(a) p: 抛物线 $y=x^2+1$ 与 x 轴相交。

(b) q: $x-y=0$

(c) r: 平面上的三角形至少有两个内角是锐角。

(d) s: 早安！

2. 各举一个算术，代数及几何中的真命题。

蕴涵 ($p \to q$)

在数学中，我们经常看到以下形式的命题：

1. 若两个三角形的三个角对应相等，则这两个三角形相似。
2. 如果整数 n 能被 2 整除，则 n 是偶数。
3. 只要 x 是实数，就有 $x^2 \geq 0$。

在类似“若 p，则 q”形式的命题中，p 叫做条件或前因 (antecedent)，q 叫做结果 (consequent)。“若 p，则 q”可记作“$p \to q$”，读作“p 蕴涵 q”(p implies q)。

如果 p 为真能保证 q 也为真，则“若 p，则 q”为真命题。例如

$$p: \ x = 1 \qquad q: \ x^2 = 1$$

当 $x = 1$ 时，一定有 $x^2 = 1$。因此，$x = 1 \to x^2 = 1$ 是真命题。值得注意的是，当 $x = -1$ 时，p 就是假命题，可是 $x = -1 \to x^2 = 1$ 依然是真命题。

例题 1

判断命题“$x \neq 1 \to x^2 \neq 1$”的真假。

解 当 $x = -1$ 时，$x \neq 1$ 是真命题。此时 $x^2 = (-1)^2 = 1$。
因此 $x \neq 1$ 是真命题时，不能保证 $x^2 \neq 1$ 也是真命题。
$\therefore x \neq 1 \to x^2 \neq 1$ 是假命题。

例题 2

指出命题“对顶角相等”中的条件与结果。

解 写成“若 p，则 q”的形式：
若两个角是对顶角，则这两个角相等。
条件为两个角是对顶角；结果是两个角相等。

想一想 2
这题能不能写成“若两个角相等，则这两个角是对顶角”？

例题 3

判断以下两个命题是否为真。

p：若 $A \subseteq B$，则 $n(A) \leq n(B)$。

q：若 $n(A) \leq n(B)$，则 $A \subseteq B$。

解 p 为真命题。

q 为假命题。例如 $A = \{1\}$，$B = \{2,3\}$ 满足条件，但 A 并不是 B 的子集。

随堂练习 7.1b

判断以下命题是否为真。

r：若 $n(A) > n(B)$，则 A 不是 B 的子集。

习题 7.1

1. 判断下列各语句是不是命题。若是，判断其真假；若不是，说明原因。
   (a) 快去上学！
   (b) $x+5=y-3$。
   (c) 直线 $y=x+1$ 与 x 轴没有交点。
   (d) 25 与 30 的最大公因数是 5。
   (e) 最小的整数是 0。

2. 指出以下命题中的条件与结果，并判断其真假。
   (a) 所有的偶数都不是质数。
   (b) 四边形的内角和与外角和相等。
   (c) 任何大于 0 的数都有倒数。

3. 指出以下命题中的条件与结果，并判断其真假。

p: 在平面上，垂直于同一直线的两条直线平行。

q: 在空间上，垂直于同一直线的两条直线平行。

4. 下列各题中，写出 $p \to q$，并判断其真假：

(a) p： 12 是偶数。

q： 12 不可以被 2 整除。

(b) p： 7 是奇数。

q： 7 是质数。

7.2 逻辑联结词“非”、“且”及“或”

在生活上，我们经常使用“不是”、“或者”、“并且”等词语。在逻辑，我们将这些词语缩写成“非”、“且”及“或”并赋予它们特定的意义。

“非”

观察以下的两个命题：

p： 正整数 n 是 3 的倍数。

q： 正整数 n 不是 3 的倍数。

这两个命题中，总有一个是真的；而且当其中一个为真时，另一个必为假。这里的 q 是 p 的否定 (negation)，记作“$\sim p$”，读作“非 p”(not p)。

若 p 是真命题，则 $\sim p$ 必是假命题；

若 p 是假命题，则 $\sim p$ 必是真命题。

例题 4

写出下列命题的否定，并判断它们的真假：

(a) 87 是质数。

(b) $x-3$ 是 x^2-3x 的因式。

解 (a) $87=3\times29$，原命题为假。

原命题的否定"87 不是质数"为真命题。

(b) $x^2-3x=x(x-3)$，原命题为真。

原命题的否定"$x-3$ 不是 x^2-3x 的因式"为假命题。

想一想 3

'非'与集合论中的哪个运算相似？

随堂练习 7.2a

写出命题"$-1\le2$"的否定，并判断其真假。

"且"

观察以下三个命题：

p: 20 能被 2 整除。

q: 20 能被 5 整除。

r: 20 能被 2 整除且能被 5 整除。

这里的 r 是用"且"将 p 和 q 联结起来的命题，记作"$p\wedge q$"，读作"p 且 q"(p and q)。

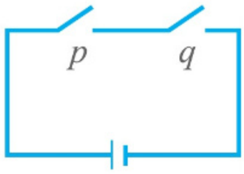
综合惯例，我们规定：

当 p，q 都是真命题时，$p\wedge q$ 为真命题；

当 p，q 两个命题中有一个为假命题时，$p\wedge q$ 为假命题。

在上述例子中，p，q 皆为真命题，所以 r 也是真命题。

我们可以把用"且"连接的命题想象成右图中的串联电路。唯有在 p 与 q 都是真（通电）时，$p\wedge q$ 为真（通电）。



想一想 4

'且'与集合论中的哪个运算相似？

例题 5

判断以下命题的真假：

p:17 是质数，也是奇数。

q:17 是质数，且不是奇数。

r:17 不是质数，且是奇数。

s:17 不是质数，也不是奇数。

解 “17 是质数”是真命题。“17 是奇数”也是真命题。
因此，p 是真命题。q，r，s 都是假命题。

例题 6

用“且”将下列命题联结成新命题并判断其真假。

p:平行四边形的对角线互相平分。

q:平行四边形的对角线相等。

解 $p \wedge q$: 平行四边形的对角线互相平分且相等。
由于 q 为假命题，所以 $p \wedge q$ 也是假命题。

随堂练习 7.2b

已知

p:4 是方程式 $x^2+2x-8=0$ 的根。

q:2 是方程式 $x^2+2x-8=0$ 的根。

r:-4 是方程式 $x^2+2x-8=0$ 的根。

写出 $p \wedge q$ 及 $q \wedge r$，并判断它们的真假。

“或”

观察以下三个命题：

$p: 3<5$

$q: 3=5$

$r: 3\leq 5$

这里的 r 是用“或”将 p 和 q 联结起来的命题，记为“$p\vee q$”，读作“p 或 q”(p or q)。

综合惯例，我们规定：

当 p，q 两个命题中有一个为真命题时，$p\vee q$ 为真命题；

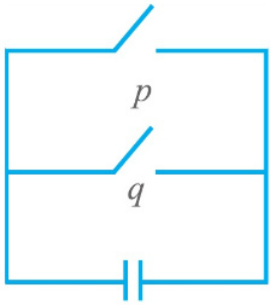
当 p，q 都是假命题时，$p\vee q$ 为假命题。

在上面的例子中，p 为真命题，q 为假命题；所以 r 是真命题。

想一想 5 ‘或’与集合论中的哪个运算相似？

我们可以把用“或”连接的命题想象成右图中的并联电路。

只要 p 与 q 其中一个为真（通电）时，$p\vee q$ 就为真（通电）。



例题 7

判断以下命题的真假：

p: 17 是质数，也是奇数。

q: 17 是质数，且不是奇数。

r: 17 不是质数，且是奇数。

s: 17 不是质数，也不是奇数。

解 “17 不是质数”是假命题。“17 不是奇数”也是假命题。因此，s 是假命题。p，q，r 都是真命题。

例题 8

判断下列命题的真假：

(a) 集合 A 是 $A\cap B$ 的子集，或是 $A\cup B$ 的子集。

(b) 若 $x^2-1=0$，则 $x=1$ 或 $x=-1$。

解 (a) 这个命题是由

p: 集合 A 是 $A\cap B$ 的子集。

q: 集合 A 是 $A\cup B$ 的子集。

用联结词“或”所构成。无论 p 是真是假，q 在任何情况下都是真的。所以原命题为真。

(b) 这个命题是由

p: 若 $x^2-1=0$，则 $x=1$。

q: 若 $x^2-1=0$，则 $x=-1$。

用联结词“或”所构成。p，q 都是真命题，所以原命题为真。

例题 9

用“或”将下列命题联结成新命题并判断其真假。

p: 所有周长相等的两个三角形全等。

q: 所有面积相同的两个三角形全等。

解 $p\vee q$: 所有周长相等的两个三角形全等，或所有面积相同的两个三角形全等。

由于 p，q 都是假命题，所以 $p\vee q$ 也是假命题。

随堂练习 7.2c

已知

p: 4 是方程式 $x^3-8=0$ 的根。

q: 2 是方程式 $x^3-8=0$ 的根。

r: -2 是方程式 $x^3-8=0$ 的根。

写出 $p\vee q$ 及 $q\vee r$，并判断它们的真假。

例题 10

写出下列命题的否定：

p: x 是集合 A 的元素，或 x 是集合 B 的元素。

q: y 是集合 A 的元素，且 y 是集合 B 的元素。

解 $\sim p$: x 不是集合 A 的元素，且 x 不是集合 B 的元素。

$\sim q$: y 不是集合 A 的元素，或 y 不是集合 B 的元素。

注意

观察命题的否定中‘或’与‘且’的变化。

例题 10 表示集合论中的两个结果，即

$$(A\cup B)' = A'\cap B'$$

$$(A\cap B)' = A'\cup B'$$

随堂练习 7.2d

1. 写出命题“$x=1$ 或 $x=-1$”的否定。
2. 作范恩图验证
   (a) $(A\cup B)' = A'\cap B'$
   (b) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

习题 7.2

1. 写出下列各命题的否定，并判断它们的真假：

   p: 三角形的两边之和大于第三边。

   q: 最小的正整数是 1。

   r: π 是有理数。

   s: 方程式 $x^2+2x+2=0$ 有实根。

2. 下列各题中，写出 $p\wedge q$ 及 $p\vee q$，并判断它们的真假。
   (a) p: 梯形有两条边平行。
       q: 梯形有两个角相等。
   (b) p: 平行四边形的四条边相等。
       q: 平行四边形的四个角相等。
   (c) p: 自然数的集合中有最小的元素。
       q: 自然数的集合中没有最大的元素。

3. 已知 p 是真命题，q 是假命题。判断下列各命题的真假：
   (a) $p\wedge(\sim p)$
   (b) $q\wedge(\sim q)$
   (c) $p\vee(\sim p)$
   (d) $q\vee(\sim q)$

4. (a) 若 $p\vee q$ 是假命题，$p\wedge q$ 的真假能被确定吗？为什么？
   (b) 若 $p\wedge q$ 是假命题，$p\vee q$ 的真假能被确定吗？为什么？

5. 写出下列各命题的否定，并判断它们的真假：
   (a) $1+1=2$ 且 $2<3$
   (b) $1<2$ 或 $1=2$

7.3 全称量词与存在量词

全称量词

考虑以下两个命题：

p: 任何实数的平方都不小于 0。

q: 对所有的实数 x，都有 $2x+1>x$。

在命题 p 中，有一个量词“任何”，我们称它为全称量词 (universal quantifier)，以符号“$\forall$”表示。命题 p 可以写成“$\forall x\in\boldsymbol{R}$，$x^2$ 不小于 0”。只有当所有实数的平方都不小于 0，这个命题才是真命题。我们知道所有实数的平方都不是负的，因此 p 是真命题。

命题 q 中的“对所有的”，也是全称量词。我们可以将命题 q 写成“$\forall x \in \boldsymbol{R}$，$2x+1>x$”。由于我们能找到一个实数 $x=-2$，使得 $2x+1>x$ 不成立，因此命题 q 是假命题。使得这个命题不成立的例子，叫做反例 (counterexample)。

其他常见的全称量词还有“对一切”，“每一个”，“对任意”等。

存在量词

再看以下两个命题：

r: 有的整数没有因数。

s: 存在比 100 大的质数。

在命题 r 中，有一个量词“有的”，我们称它为存在量词 (existential quantifier)，以符号“$\exists$”表示。命题 r 可以写成“$\exists n \in \boldsymbol{Z}$，$n$ 没有因数”。只要我们可以找到一个没有因数的整数，这个命题就是真命题，否则就是假命题。但是每个整数都至少有一个因数 1，因此 r 是假命题。

又如命题 s 中的量词“存在”也是存在量词。由于我们可以找到一个比 100 大的质数 101，因此 s 是真命题。

其他常见的存在量词还有“有些”，“有一个”，“对某些”等。

随堂练习 7.3a

判断下列各命题的真假：

1. $\forall x \in \boldsymbol{R}$，$x<x+1$。
2. $\exists a \in \boldsymbol{R}$，$a^3=-2$。

现在我们来探讨含有全称量词或存在量词的命题的否定。例如：

p: 所有的人都是亚洲人。

若 p 是假命题，则表示不是所有的人都是亚洲人；也就是说，有的人不是亚洲人。因此，

$\sim p$: 有的人不是亚洲人。

再看以下的命题：

q: 有的偶数不能被 2 整除。

若 q 是假命题，即表示没有偶数不能被 2 整除，也就是说，所有的偶数都能被 2 整除。因此，

$\sim q$: 所有的偶数都能被2整除。

从以上两个例子，我们注意到，全称命题的否定为存在命题；而存在命题的否定为全称命题。

例题 11

写出下列各命题的否定，并判断它们的真假。

p: 所有的整数都是正数。

q: $\exists x \in \boldsymbol{N}$， x 没有平方根。

解 $\sim p$: 有的整数不是正数。$\sim p$ 是真命题。

$\sim q$: $\forall x \in \boldsymbol{N}$，$x$ 有平方根。$\sim q$ 是真命题。

随堂练习 7.3b

写出下列各命题的否定，并判断它们的真假。

p: 任意两个无理数相加，其和为无理数。

q: 任意两个无理数相加，其和为有理数。

r: 有的偶数可以被 3 整除。

s: $\forall x \in \boldsymbol{R}$， $x+1$ 比 1 大。

习题 7.3

1. 判断下列各命题的真假，并写出它们的否定：
   (a) 所有的等腰三角形都是锐角三角形。
   (b) 有的四边形有两个钝角。
   (c) $\forall x \in \boldsymbol{Q}$，$x$ 有倒数。
   (d) $\exists x \in \boldsymbol{R}$，$x+1=x-1$。
   (e) $\exists x \in \boldsymbol{Q}$，$\dfrac{1}{2x+3}>2$。

2. 判断下列命题的真假。如果是假命题，试举出反例。
   (a) 任意两个无理数相乘，其积为无理数。
   (b) 任意两个无理数相乘，其积为有理数。
   (c) 所有能被 3 整除的数都是奇数。
   (d) 存在一个三角形的三个顶点不共圆。

7.4 充分条件、必要条件及充要条件

观察以下的例子：

p:若 $x=1$，则 $x^2=1$。

q:若 $x^2=1$，则 $x=1$。

在 p 中，若条件成立，即 $x=1$，就充分保证有 $x^2=1$，也就是结论成立。我们说 $x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分条件 (sufficient condition)。

反观在 q 中，即使 $x^2=1$，x 不一定为 1，x 也可能是 -1。所以 $x^2=1$ 不是 $x=1$ 的充分条件。但是，如果 $x^2\neq1$，x 就肯定不会等于 1。因此，我们说 $x^2=1$ 是 $x=1$ 的必要条件 (necessary condition)。

如果“若 p 则 q”为真，那么 p 就是 q 的充分条件；同时，q 是 p 的必要条件。

例题 12

在下列的语句中，哪些是哪些的充分条件或必要条件？

p: $x^2 - x = 0$

q: $x = 0$

解 我们知道 $x = 0$ 能保证 $x^2 - x = 0$。

因此 $x = 0 \to x^2 - x = 0$。

q 是 p 的充分条件；p 是 q 的必要条件。

例题 13

在下列的语句中，哪些是哪些的充分条件或必要条件？

p: $x^2 = 1$

q: $x = -1$ 或 $x = 1$

解 我们知道 $p \to q$ 与 $q \to p$ 都是真命题。

因此 p 是 q 的充分条件，q 也是 p 的充分条件。

同时，p 是 q 的必要条件，q 也是 p 的必要条件。

在上面的例子中，我们看到 p 是 q 的充分条件也是必要条件，我们简称 p 是 q 的充要条件 (necessary and sufficient condition)，记作 “$p \Leftrightarrow q$”，读作 “p 若且唯若 q” (p if and only if q)。例如，我们可以把因式定理写作 $x-a$ 是多项式 $f(x)$ 的因式若且唯若 $f(a) = 0$。

许多的数学推导步骤都具有 ‘若且唯若’ 的意涵，比如在解多项式方程式时，

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 2x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-1)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 1
\end{aligned}
$$

这过程保证了最后的答案能够满足原方程式。一般上在解方程式的过程中，我们没将“若且唯若”写出来。

例题 14

在以下解方程式的过程中，哪一步的推导不是“若且唯若”？

$$\sqrt{x}=x-2$$
$$x=(x-2)^2$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-4)(x-1)=0$$
$$x=1 \text{ 或 } x=4$$

解 我们可以由 $\sqrt{x}=x-2$ 得到 $x=\left(x-2\right)^2$；但却不能由 $x=\left(x-2\right)^2$ 得到 $\sqrt{x}=x-2$。

因此，我们无法保证最后的解都能满足原方程式。这也是解方程式时可能出现增根的原因。

例题 15

已知 p: 在 ΔABC 中，$AB=AC$。

q: 在 ΔABC 中，$\angle B=\angle C$。

判断 p 与 q 的关系。

解 在初中，我们证明了，在 ΔABC 中，若 $AB=AC$，则 $\angle B=\angle C$；也证明了，若 $\angle B=\angle C$，则 $AB=AC$。因此，$p\Leftrightarrow q$。

随堂练习 7.4

1. 已知

   p: ΔABC 的三边都相等。

   q: ΔABC 的三个内角都相等。

   写出 p 与 q 的关系。
2. 用‘若且唯若’叙述毕氏定理及其逆定理。

习题 7.4

1. 判断下列各命题的真假：
   (a) “$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件。
   (b) “$|a|>|b|$”是“$a^2>b^2$”的必要条件。
   (c) “$a>b$”是“$a+c>b+c$”的充要条件。

2. 下列各题中，p 是否为 q 的充分条件？p 是否为 q 的必要条件？
   (a) p: $x^2=x$。
   q: $x=1$。
   (b) p: $b^2-4ac=0$。
   q: 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有相等的实根，其中 $a,b,c\in\boldsymbol{R}$。

7.5 推理

推理是从一些已有的判断（已经成立的命题）P_1，P_2，⋯，P_n，去推导出一个新的判断（命题）C 的过程。这些已有的判断或已经成立的命题叫做前提 (premise)，新的判断叫做结论 (conclusion)。先看看以下的例子：

P_1: 若四边形的四边等长，则此四边形为菱形。

P_2: 四边形的四边等长。

C : $ABCD$ 是菱形。

在这种推理形式下，若 P_1，P_2 皆为真命题，则所得到的结论也必定为真。我们可以把上述的推理形式写成

$$\begin{array}{lcc} & p\to q & (P_1) \\ & p & (P_2) \\ \hline \therefore & q & (C) \\ \hline \end{array}$$

数学中许多的结果都是由这种推理过程，逐步构建出来的。

例题 16

根据以下的前提，我们能作什么结论?

(a) P_1 : 若 $y=f(x)$ 的图像对称于 y 轴，则 $f(x)=x^4$ 是偶函数。

P_2 : $y=x^4$ 的图像对称于 y 轴。

(b) P_1 : 如果今天下雨，就没有户外活动。

P_2 : 今天有户外活动。

解 (a) $f(x)=x^4$ 是偶函数。

(b) 结合两个前提，我们可作结论：今天没有下雨。

因为如果今天有下雨，根据 P_1 就没有户外活动，这与 P_2 互相矛盾。

例题 16(b) 表现推理的另一种形式，即

$$
\begin{array}{lrl}
 & p \rightarrow q & (P_1) \\
 & \sim q & (P_2) \\
\hline
\therefore & \sim p & (C) \\
\hline
\end{array}
$$

随堂练习 7.5a

根据以下的前提，

P_1：如果小明超过 7 点起床，他就会迟到。

P_2：小明迟到了。

我们能否作结论‘小明超过 7 点起床’?

由随堂练习 7.5a 可知，不是给定任何的前提我们都能作出有效的推理 (valid argument)。在前提都为真的情况下，有效的推理能给出真的结论。

例题 17

判断以下的推理是否有效：

P_1：小明去看电影或去公园。

P_2：小明去看电影。

C：小明没有去公园。

解 令 p：小明去看电影，q：小明去公园。

若 p,q 皆为真命题，则两个前提

$P_1 : p \vee q$ 为真

$P_2 : p$ 为真。

但是，结论 $C : \sim q$ 却是假命题。因此，题目所给的推理是无效的。

例题 18

根据以下的前提，我们能作什么结论?

(a) $P_1 : x = 1$ 或 $x = 2$

$P_2 : x \neq 2$

(b) P_1：所有的等腰三角形都有对称轴。

P_2：ΔABC 是等腰三角形。

解 (a) 由于 $x \neq 2$，要使得 P_1 为真，必须有 $x = 1$。可得结论"$x = 1$"。

(b) ΔABC 有对称轴。

随堂练习 7.5b

根据以下的前提，

P_1 : 所有的等腰三角形都有对称轴。

P_2 : ΔABC 有对称轴。

我们能否作结论“ΔABC 是等腰三角形”？

命题“有对称轴的三角形是等腰三角形”是否为真命题?

由随堂练习 7.5b 我们看出，无效的推理所得到的结论未必就是假的。

习题 7.5

1. 写出下列各推理中的所缺失的命题使得推理有效：

(a) P_1 : 若一个图形是正方形，则它的对角线互相垂直。

P_2 : $ABCD$ 是正方形。

C : ______________

(b) P_1 : 若一个平面图形是正方形，则它的对角线互相垂直。

P_2 : 一个平面图形的对角线并不互相垂直。

C : ______________

(c) P_1 : x 小于 -2 或 x 大于 3。

P_2 : ______________

C : x 小于 -2。

(d) P_1 : 所有的动物都需要呼吸。

P_2 : ______________

C : 马来貘需要呼吸。

(e) P_1 : ______________

P_2 : x 是 4 的倍数。

C : x 可以被 2 整除。

(f) P_1 : ________________

P_2 : 小明有撑伞。

C : 今天有下雨。

2. 判断以下的推理是否有效：

(a) P_1 : 若小慧吃了雪糕，她的心情就好。

P_2 : 小慧没有吃雪糕。

C : 小慧的心情不好。

(b) P_1 : 若小明得了肺炎，他就会发烧。

P_2 : 小明发烧。

C : 小明得了肺炎。

(c) P_1 : 所有的等边三角形都是等腰三角形。

P_2 : ΔABC 是等腰三角形。

C : ΔABC 是等边三角形。

总复习题 7

1. 判断下列各命题的真假，并说明原因：

p：2 是合数或 3 是质数。

q：2 不是合数且 3 不是质数。

r：任一数 x 都大于 $-x$。

s：$\forall a \in \boldsymbol{R}$，二次方程式 $x^2 = a$ 有两个相异的实数解或没有实数解。

t：$\exists x \in \boldsymbol{R}$，$x^2 = -1$ 或 $2x^2 + 1 = 0$。

u：所有的直线方程式都可以写成 $y = mx + c$ 的形式。

2. 写出下列各命题的否定：

p：这次考试中，有人考 100 分，也有人考 0 分。

q：有的地区没有网络及自来水。

r：所有的独中生都报考历史或物理。

3. 判断下列命题的真假：

(a) $x^2 = y^2 \to x = y$ (b) $x = y \to x^2 = y^2$

(c) $ac = bc \to a = b$ (d) $a = b \to ac = bc$

4. 举例说明：

(a) p 是 q 的充分但不是必要条件。

(b) p 是 q 的必要但不是充分条件。

(c) p 是 q 的充要条件。

5. 下列各题中，p 是 q 的什么条件？

(a) p : 三角形是等腰三角形； q : 三角形是等边三角形。

(b) p : 三角形是等边三角形； q : 三角形的三个角相等。

(c) p : 三角形是等边三角形； q : 三角形的三个边等长。

(d) p : $x-1=0$ ； q : $x(x-1)=0$ 。

6. 下面的推导过程中，哪几个符号“$\Leftrightarrow$”是不对的？

$$
\begin{aligned}
& a = b \\
\Leftrightarrow\ & a^2 = ab \\
\Leftrightarrow\ & a^2 - b^2 = ab - b^2 \\
\Leftrightarrow\ & (a+b)(a-b) = b(a-b) \\
\Leftrightarrow\ & (a+b) = b \\
\Leftrightarrow\ & 2b = b \\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1
\end{aligned}
$$

7. 判断下列各推理是否有效，结论是否为真。

(a) P_1 : 若两个三角形全等，则它们的对应角相等，

P_2 : 两个三角形的对应角相等；

C : 这两个三角形全等。

(b) P_1 : 所有边长相等的凸多边形都是正多边形，

P_2 : 菱形是边长相等的凸多边形；

C : 菱形是正多边形。

8. 以下两个命题中，有几个是真的？

这两句话中恰有一句为真。

这两句话中恰有一句为假。

9. 尝试标示引言 “扫地雷”游戏中剩下的三枚地雷。

中英名词对照 Glossary

本名词对照表按华文条目的汉语拼音字母的次序排列

https://bit.ly/43XpHoW

B

被开方数 radicand 104
必要条件 necessary condition 250
闭区间 closed interval 148
不等式 inequality 192
不等式组 system of inequalities 205

C

常数多项式 constant polynomial 70
常数函数 constant function 154
常数项 constant term 36
充分条件 sufficient condition 250
充要条件 necessary and sufficient condition 251
垂直平移 vertical translation 158
垂直伸缩 vertical stretching 163
次数 degree 70
存在量词 existential quantifier 248

D

倒数函数 reciprocal function 155
笛卡尔坐标系 Cartesian coordinate system 4
顶点 vertex 48
定义域 domain 146
对称轴 axis of symmetry 49
对应法则 corresponding rule 134
对应域 codomain 146
多项式 polynomial 70

E

二次函数 quadratic function 47，155
二次项 quadratic term 36
二元一次不等式 linear inequality in two variables 217

F

反函数 inverse function 181
反例 counterexample 248
反射 reflection 161
非 p not p 241
非空集合 nonempty set 134
分式不等式 fractional inequality 211
分数指数 fractional index 110
否定 negation 241

G

根式 radical expression 104
根指数 index of radical 104
共线 collinear 22
关系 relation 134

答案

第1章 直角坐标系与直线

随堂练习 1.1 P.4

A，第二象限；B，第四象限；

C，第三象限；D不属于任何象限。

随堂练习 1.2a P.6

$(-11,-15)$

随堂练习 1.2b P.7

$(7,1)$

随堂练习 1.2c P.9

$(7,-6)$

习题 1.2 P.9

1．(a) $(2,-5)$　(b) $(-22,-29)$

2．$\left(5,\frac{13}{3}\right)$　3．$(-17,-8)$

4．$(7,-20)$　5．$(3,5)$

6．$(k,-2-3k)$

随堂练习 1.3a P.11

所得的结果为三角形面积的相反数。

随堂练习 1.3b P.13

36

随堂练习 1.3c P.14

36；一样

习题 1.3 P.15

1．10　2．$(-1,0)$ 或 $\left(\frac{11}{2},0\right)$

3．$(7,4)$ 或 $(-5,-8)$　4．40

5．96　6．46.5

随堂练习 1.4 P.17

1．$-\frac{2}{3}$　2．4　3．5.71°

随堂练习 1.5a P.20

1．(a) $3x+4y-12=0$;　(b) $x+2y-8=0$;

(c) $x+4=0$

2．斜率为$\frac{5}{3}$，y截距为5

随堂练习 1.5b P.22

$5x-8y=71$

随堂练习 1.5c P.23

1．-4　2．-4

随堂练习 1.5d P.23

$2x+y=-8$

习题 1.4 P.24

1. $-\frac{1}{3}$　3. 30　4. $\frac{5}{2}$

随堂练习 1.6 P.27

1. 8　2. 平行

习题 1.6 P.27

1. $k=2$，$(0,3)$　2. -2
3. $a=2, b=-4$
4. (a) $a=0$ 或 $a=2$；
   (b) 没有任何a能使两线重合；
   (c) 当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 2$ 时

随堂练习 1.7a P.29

$2\sqrt{5}$

随堂练习 1.7b P.30

$\sqrt{2}$

习题 1.7 P.31

1. $\frac{22}{\sqrt{58}}$　2. $\frac{46}{3}$，2
3. 5　4. 9
5. $(7,-6)$ 或 $(-\frac{27}{11},-\frac{14}{11})$

总复习题 1 P.31

1. (b) 17　(c) $(3,6)$
2. $(-2,0)$，$(0,8)$，$(10,2)$，$(2,-2)$
3. -4，6
4. (a) $5:8$　(b) 2
5. 2，2　6. -4　7. 1
8. (a) 0，$\frac{1}{6}$　(b) $m=\frac{1}{2}$，$n=2$
   (c) $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$
9. $2x-3y=-8$；$(-1,2)$
10. (a) A,B 分别为x截距及y截距
    (b) $x+y=5$
11. $\frac{25}{2}$
12. (a) $2x-3y+5=0$
    (b) $\left(\frac{7}{2},4\right)$　(c) $(2,3)$
14. $x-y-1=0$
15. $P(2,-1)$，$Q(4,-5)$
16. C落在与 AB 平行的直线上，以 AB 为底，三角形的高不变。
17. $l=0.15w+14$

第2章 一元二次方程式与二次函数

随堂练习 2.1a P.36

1. $-7x^2$，$5x$，-12
2. 8，0

随堂练习 2.1b P.38

1. -80，无实数根
2. 221，有两个相异实根
3. 0，有两个相同实根

随堂练习 2.1c P.39

1. $k<\dfrac{9}{2}$ 2. $-\dfrac{7}{2}$

习题 2.1 P.40

1. (a) $m=\dfrac{9}{4}$ (b) $m<\dfrac{9}{4}$， $m\neq 0$

   (c) $m>\dfrac{9}{4}$

2. 6 3. $k>-\dfrac{9}{32},k\neq 0$

4. $k>\dfrac{9}{40}$ 5. $a=-1,4,a\neq-\dfrac{4}{3}$

随堂练习 2.2a P.42

1. $6x^2+13x+6=0$

随堂练习 2.2b P.43

$-\dfrac{1}{2}$， $a=2$

随堂练习 2.2c P.45

1. ± 7
2. (a) $\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$ (b) $9x^2-48x+4=0$

习题 2.2 P.45

1. $u^2-8u-2=0$
2. $25x^2-10x+1=0$
3. $p=0$， $x=\pm\dfrac{4}{3}$
4. -4， $-\dfrac{4}{3}$
5. (a) $-\dfrac{63}{16}$ (b) $-\dfrac{23}{4}$ (c) $-\dfrac{14}{9}$

   (d) $\dfrac{193}{16}$ (e) $\dfrac{37}{36}$ (f) $-\dfrac{1}{4}$

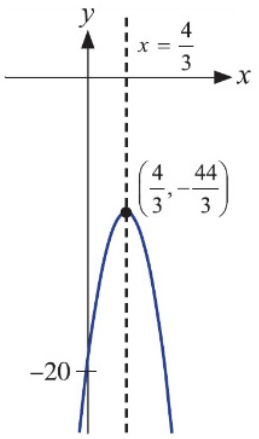
6. $-\dfrac{5\sqrt{109}}{9}$
7. $2x^2-17x+10=0$
8. $x^2-5x+6=0$
9. $x^2-11x+25=0$
11. $\varphi=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618$

随堂练习 2.3a P.47

1. $y=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}$
2. $y=-2(x-3)^2+19$

随堂练习 2.3b P.52

1. $y=-3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{44}{3}$
2. 开口向下，对称轴 $x=\dfrac{4}{3}$，顶点 $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{44}{3}\right)$，最大值 $-\dfrac{44}{3}$
3.

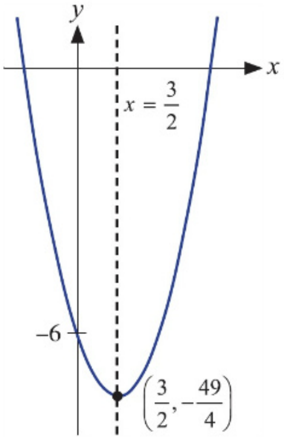


随堂练习 2.3c P.53

1. $(-2,0)$， $(5,0)$

2. 开口向上，对称轴 $x=\frac{3}{2}$，顶点 $\left(\frac{3}{2},-\frac{49}{4}\right)$，最小值 $-\frac{49}{4}$

3.



随堂练习 2.3d P.54

1. (a) 最小值 $-\frac{61}{2}$　　(b) 最大值 $\frac{49}{12}$

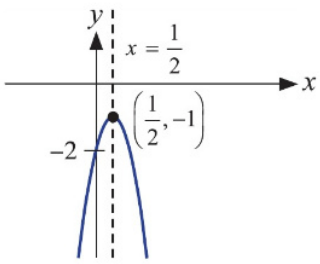
2. −1

随堂练习 2.3e P.55

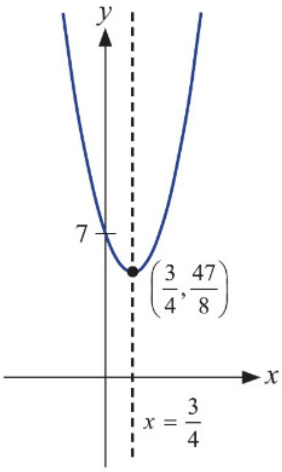
7 m

习题 2.3 P.55

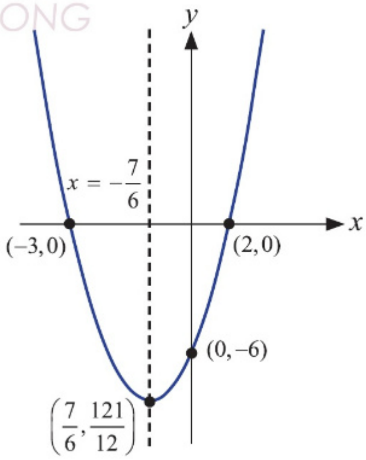
1. 开口向下，对称轴 $x=\frac{1}{2}$，顶点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$，最大值 −1，与 y 轴的交点 $(0,-2)$



2. 开口向上，对称轴 $x=\frac{3}{4}$，顶点 $\left(\frac{3}{4},\frac{47}{8}\right)$，最小值 $\frac{47}{8}$，与 y 轴的交点 $(0,7)$



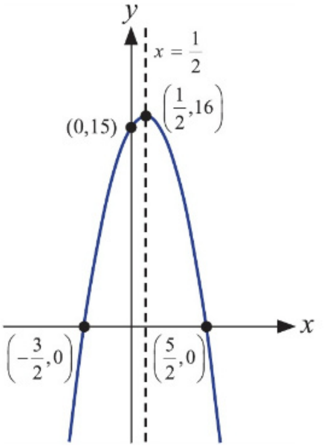
3. 开口向上，$x=-\frac{7}{6}$，顶点 $\left(-\frac{7}{6},-\frac{121}{12}\right)$，与 x 轴的交点 $\left(\frac{2}{3},0\right)$，$(-3,0)$ 与 y 轴的交点 $(0,-6)$



4. 开口向下，$x=\frac{1}{2}$，顶点$\left(\frac{1}{2},16\right)$，

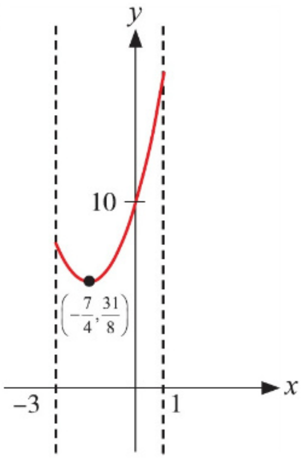
与 x 轴的交点$\left(\frac{5}{2},0\right)$，$\left(-\frac{3}{2},0\right)$

与 y 轴的交点 $(0,15)$



5. (a) $c=10$，$h=\frac{7}{4}$

(b)



，$\frac{31}{8}\le y\le 19$

6. $(1,-9)$

7. (a) 10 m　　(b) $4+2\sqrt{3}$ m

8. $a=-9$，$b=-30$，$c=-33$

9. 最大值 $\frac{9}{2}$

10. $a=\frac{3}{2}$，$b=-2$，$c=-2$

11. (a) $a=4$，$b=4$　　(b) 最小值

12. $\frac{75}{2}$，$\frac{75}{2}$

13. 长30 m，宽15 m；450 m^2

14. 长14 cm，宽 $\frac{28-7\pi}{2}$ cm

15. 半径为 $\frac{200}{\pi}$ m 的圆；$\frac{40000}{\pi}$ m^2

随堂练习 2.4a　P.59

1. 100，2个　　2. 0，1个

3. −31，0个

随堂练习 2.4b　P.60

$(-1,9)$

随堂练习 2.4c　P.62

$c>\frac{9}{4}$

习题 2.4　P.62

1. $\left(\frac{1}{2},3\right)$，$(3,13)$　　2. $(-4,-3)$

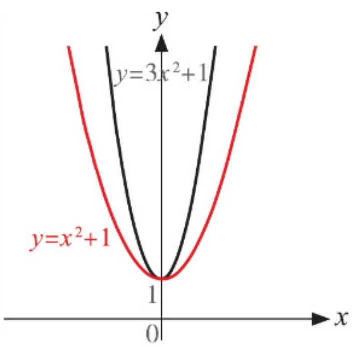
3. 没有交点　　4. $c>-\frac{1}{2}$

5. 5　　6. $-\frac{5}{2}$，$\frac{3}{2}$

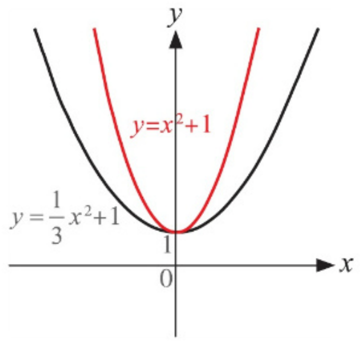
7. $m>-\frac{81}{28}$，$m\ne 0$　　8. $a<-\frac{9}{2}$

习题 2.5　P.65

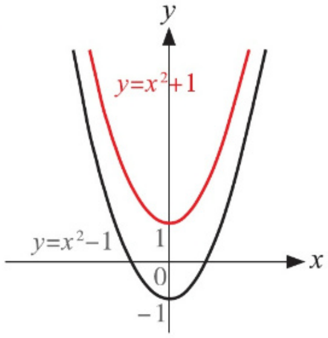
1. (a)



(b)



(c)



2. $-2<k<0$

总复习题 2　P.65

1. (a) -2，38　　(b) $\frac{1}{2}$，1

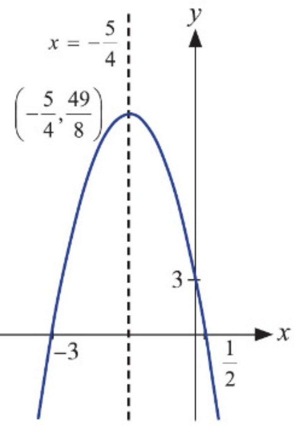
2. $y=\frac{1\pm\sqrt{61}}{10}$　　$x=\frac{11\pm\sqrt{61}}{20}$

3. (a) 对称轴 $x=-\frac{5}{4}$，顶点 $\left(-\frac{5}{4},\frac{49}{8}\right)$

(b) 与 x 轴的交点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，$(-3,0)$

与 y 轴的交点 $(0,3)$

(c)



(d) 最大值 $\frac{49}{8}$

4. (a) 2　　(b) $(-1,0)$

5. $a=-3$，$b=-12$，$c=-12$

6. $(-2,0)$，$\left(\frac{4}{3},10\right)$

7. 1，4　　8. $k\geq -9, k\neq 0$

9. $m<-\frac{9}{28}$　　10. 6，$-\frac{6}{49}$

11. 另一根为 $\frac{7}{4}$，$m=3$

12. $k=\sqrt{2}$；根：$-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$-\sqrt{2}$ 或

$k=-\sqrt{2}$；根：$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{2}$

13. $acx^2-\left(b^2-2ac\right)x+ac=0$

15. 12.5 m，843.75 m²

16. $2r^2$

17. 半径 $\frac{480}{\pi+4}$ cm，高 $\frac{960}{\pi+4}$ cm，最大面积 $\frac{115200}{\pi+4}$ cm^2

18. RM 11

第3章 多项式

随堂练习 3.1a　P.71

1. (a), (b), d)

2. (a) 五次多项式　　(b) 三次多项式

(c) 一次多项式　　(d) 零次多项式

3.

	多项式的次数	系数					领导系数	常数项
		x^5	x^4	x^3	x^2	x		
(a)	五次	−8	0	0	5	−3	−8	2
(b)	四次	0	6	−7	0	0	6	$\frac{1}{2}$
(c)	零次	0	0	0	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
(d)	二次	0	0	0	7	0	7	0

随堂练习 3.1b　P.73

1．$-5x^2-4x+4$　　2．$-x^2-4x+2$

随堂练习 3.1c　P.76

1．(a) $3x^3-x^2-x-1$

(b) $x^5-19x^3+24x^2+30x-36$

2．(a) 商式为 $2x^2+2x-1$，余式为7

(b) 商式为 x^2+6，余式为13

习题 3.1　P.76

1．(a) $x^4+x^3+6x^2-4$

(b) $-2x^6+3x^5-x^3+x^2-3x-5$

(c) x^3+4x^2-x+11

2．(a) $4x^5-7x^4+5x^3-2x^2-5x+5$

(b) $6x^4+11x^3-8x^2+3x-5$

(c) $12x^3+2x^2-30x+8$

3．(a) $8x^5+6x^4-32x^3-41x^2-x+10$

(b) $6x^5-8x^4-19x^3+13x^2+13x-5$

(c) $24x^7-14x^6-112x^5+11x^4+129x^3-7x^2-41x+10$

4．(a) $8x^2-2$

(b) $x^4+3x^2+3x+1+\dfrac{2}{x-1}$

5．(a) $4x^2+9x+5+\dfrac{7}{x-1}$

(b) $3x^3-3x+4$

(c) $2x^3+\dfrac{1}{2x^2-1}$

6．$3x^3-19x^2+34x-13$

7．-11

8．$a=8$，$b=-24$

随堂练习 3.2a　P.80

1．7　　2．2

随堂练习 3.2b　P.82

1．49　　2．$3x+2$

习题 3.2　P.82

1．51　　2．34　　3．150

4．-3　　5．-60

6．$h=-4,\ k=9$　　7．$a=-9,\ b=4$

随堂练习 3.3　P.86

1．-3　　2．$a=1,\ b=-27$

3．$a=-62,\ b=-104$

习题 3.3　P.86

1．是　　4．-4

5．$m=-9,\ n=7$

6．$a=12,\ c=-17$

7．$m=1, n=5$

8．$3x^2-3x-36$

9．$x^3-19x+30$

随堂练习 3.4a P.90

1. $4x(2x-3)$
2. $-3(x-2)(7x-1)$
3. $(9x-2)(7x+4)$
4. $9(x+2)(x^2-2x+4)$
5. $(2x-1)(x-2)(x^2+2x+4)$
6. $(2x-3)(4x^2+6x+9)$
7. $(x-5)(x+5)(x+1)(x-1)$
8. $(x-1)(2x^2+1)$

习题 3.4a P.91

1. $5(x+5)(x-5)$
2. $(3x+8)(x+5)$
3. $(x-25)(x-1)$
4. $(5x-4)(25x^2+20x+16)$
5. $(x-4)(x+2)(x-2)$
6. $(4x^2+1)(x+4)$
7. $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
8. $(5x+1)(13x^2+7x+1)$

随堂练习 3.4b P.94

1. $(x-8)(x-6)(x+9)$
2. $(x-7)(2x+1)(3x-1)$
3. $(x-1)^2(3x+1)$

习题 3.4b P.94

1. $(x+3)^3$
2. $(x-1)(2x+3)(x+3)$
3. $(x-3)(x^2-2x+18)$
4. $(x+2)^2(3x-2)$
5. $-(3x-1)(2x+3)(x-6)$
6. $(2x-1)(3x+2)(5x-9)$
7. $(2x+1)(x^2-2x-1)$
8. $(x-2)(5x^2+4)$

随堂练习 3.5a P.96

1. -5，4，7
2. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{3}$
3. $\frac{2}{3}$

随堂练习 3.5b P.98

1. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}-1}{2}$
2. $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$
3. -7，2

习题 3.5 P.98

1. 2，3，$-\frac{1}{2}$
2. 1
3. -6，$\frac{9}{2}$，7
4. -5，3，7
5. $\pm1, \pm\frac{1}{2}$
6. -1，1，3，5
7. $-7\pm\sqrt{35}, -7\pm3\sqrt{5}$
8. ±4

总复习题 3 P.99

1. (a) $8x^4+8x^3+5x^2+3x-1$
   (b) $4x^3-13x^2+5x+7$
   (c) $6x^6-9x^5-19x^4+6x^3+15x+25$
   (d) 商式为 $3x^4-2x^2-1$，余式为 $-3x-5$
2. $2x^2-5$
3. $8\frac{1}{2}$
4. -2
5. 1

6. 2

7. $p=3$， $q=-3$

8. $a=106$， $b=132$

9. $x+1$

10. 当n为正奇数，有因式$x+a$；当n为正偶数，没有因式$x+a$。

11. (b) $(-1)^n-1$

12. $x=\pm 2$， $x=3$

13. $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+2)$

14. $5x^3-24x^2+25x+6$

15. x^4-5x^2+4

16. (a) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$

(b) $-(7x+4)(49x^2-28x+16)$

(c) $(x-6)(x+1)(x-2)$

(d) $(x-7)(x+2)(x-3)$

(e) $(3x-5)(2x+1)(x-1)$

(f) $(2x-1)^2(2x+1)^2$

17. (a) -2，-3，5　　(b) -1，$\frac{1}{2}$，2

(c) -1，2　　(d) $\frac{5}{2}$

(e) $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

18. (b)

$$f(x)=10\cdot\frac{(x-20)(x-60)(x-70)(x-90)}{(0-20)(0-60)(0-70)(0-90)}+42\cdot\frac{x(x-60)(x-70)(x-90)}{20(20-60)(20-70)(20-90)}$$
$$+10\cdot\frac{x(x-20)(x-70)(x-90)}{60(60-20)(60-70)(60-90)}+17\cdot\frac{x(x-20)(x-60)(x-90)}{70(70-20)(70-60)(70-90)}$$
$$+91\cdot\frac{x(x-20)(x-60)(x-70)}{90(90-20)(90-60)(90-70)}$$

第4章 无理式

随堂练习 4.1a P.105

(a) $x\in\boldsymbol{R}$　　(b) $x\le -8$

随堂练习 4.1b P.106

$-a-b$

习题 4.1a P.107

1. $x\le 0$　　2. $x\in\boldsymbol{R}$

3. $x\in\boldsymbol{R}$　　4. $x\in\boldsymbol{R}$

5. -8　　6. x

7. x^2　　8. $x+2$

9. $-a$　　10. $x+2$

11. $3-x$　　12. $-2x-3$

13. 2　　14. 1

随堂练习 4.1c P.108

(a) $\sqrt[4]{3x^3}$　　(b) $\sqrt[4]{8x^2}$

随堂练习 4.1d P.109

$\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}$

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{4}$

习题 4.1b P.109

1. -2　　2. $\sqrt[3]{3}$

3. $\sqrt[4]{5}$　　4. a^3bc^4

5. $2a^2b^3$　　6. $\sqrt[6]{x^2y^3}$

7. $\sqrt[3]{3ab}$　　8. $\sqrt[3]{25x^2y}$

9. $\frac{2xy^2}{3a^2b^3}$　　10. $\frac{ab^2}{c^3d}$

11. $\sqrt{3}=\sqrt[6]{27}$

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$

12. $\sqrt[3]{5}=\sqrt[15]{3125}$

$\sqrt[5]{3}=\sqrt[15]{27}$

13. $\sqrt[6]{2}=\sqrt[18]{8}$

$\sqrt[9]{-2}=-\sqrt[18]{4}$

14. $\sqrt[6]{(-2)^2}=\sqrt[15]{32}$

$\sqrt[15]{(-2)^3}=-\sqrt[15]{8}$

15. $\sqrt{x}=\sqrt[12]{x^6}$

$\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[12]{x^8}$

$\sqrt[4]{x^3}=\sqrt[12]{x^9}$

16. $\sqrt{x+y}=\sqrt[12]{(x+y)^6}$

$\sqrt[4]{x^2+y^2}=\sqrt[12]{(x^2+y^2)^3}$

$\sqrt[6]{x^3+y^3}=\sqrt[12]{(x^3+y^3)^2}$

随堂练习 4.2a P.111

(a) $\sqrt[5]{a^2b^4}$ (b) $a^2\sqrt[3]{b^2}$

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}$ (d) $\sqrt[6]{5}$

习题4.2a P.111

1. $\sqrt[3]{a^2b^2}$
2. $9\sqrt[5]{a^4b^2}$
3. 1320
4. –504
5. $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$
6. $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3}$
7. $\dfrac{\sqrt{n}}{7m^2}$
8. $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{2b}$
9. $\sqrt[3]{a}$
10. $\sqrt[6]{ab^2}$
11. $\sqrt{2}$
12. $\sqrt[3]{a^2}$

随堂练习 4.2b P.113

(a) $4t^2\sqrt{t}$ (b) $2ab\sqrt[3]{2ab^2}$

(c) $\dfrac{\sqrt{2x}}{4x^2}$ (d) $\dfrac{x^2\sqrt[3]{x}}{2y^2}$

习题 4.2b P.114

1. $\sqrt{75}$
2. $\sqrt[3]{72}$
3. $\sqrt{16b^3c}$
4. $\sqrt{x^7y}$
5. $\sqrt[3]{32a^5}$
6. $\sqrt[3]{x^5y^7}$
7. $3a\sqrt{3a}$
8. $8pq^3\sqrt{2pq}$
9. $6x\sqrt[3]{x^2}$
10. $3y^2\sqrt[3]{3}$
11. $\dfrac{n\sqrt{2m}}{4m}$
12. $\dfrac{4c\sqrt{abc}}{3a^3b}$
13. $b\sqrt[3]{a^2b}$
14. $5n^2\sqrt[4]{25n}$
15. $\sqrt[3]{a^2}$
16. $x\sqrt[3]{2y}$

随堂练习 4.3a P.116

(a) $3\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$ (b) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{3b}-\sqrt{2a}$

习题 4.3a P.116

1. (a) $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[6]{\dfrac{1}{16}}$; $\sqrt[4]{64}$, $\sqrt{\dfrac{1}{32}}$

(b) $\sqrt{x^3}$, $\sqrt[6]{x^3}$; $\sqrt[3]{x^4}$, $\sqrt[6]{x^2}$

(c) $\sqrt{a^3b}$, $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^3}}$; $\sqrt[6]{a^4b^2}$, $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

(d) $\sqrt[6]{4a^4b^2}$, $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{4b^2}}$; $\sqrt[6]{27a^3b^9}$, $\sqrt{\dfrac{a^3}{3b}}$

2. $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$
3. $\dfrac{7}{9}\sqrt[3]{9}-2\sqrt{5}$
4. $\dfrac{1}{15}\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{6}$
5. $\dfrac{11}{5}\sqrt{6}-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{4}$
6. $6\sqrt[3]{ab}+3\sqrt{ab}$
7. $\dfrac{\sqrt{x}}{2}+3\sqrt[3]{y}$
8. $x\sqrt{x}+\dfrac{6xy+1}{xy}\sqrt[3]{x^2y}$

随堂练习 4.3b P.118

(a) $36\sqrt[3]{25}$　(b) $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{2}$

(c) $ab^3\sqrt[3]{a}$　(d) $\sqrt[3]{a^2b}$

随堂练习 4.3c P.119

(a) $6\sqrt[6]{108}$　(b) $\sqrt[4]{8}$

(c) $a\sqrt[6]{ab^5}$　(d) $\sqrt[12]{a^5b}$

随堂练习 4.3d P.121

(a) $4\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}$　(b) $4x-9\sqrt{y}$

习题 4.3b P.122

1. $30\sqrt{2}$　2. $-3\sqrt[3]{4}$　3. $3ab^2$
4. $3xy\sqrt[4]{4x}$　5. 4　6. a
7. $x\sqrt[6]{xy^5}$　8. $\dfrac{y\sqrt[6]{x^4y}}{x}$　9. 1
10. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{b}$　11. $\dfrac{\sqrt[12]{x^{11}y^5}}{x^2}$　12. 3
13. 9　14. x^2　15. $xy\sqrt[4]{y}$
16. $4\sqrt[3]{9}-9$
17. $36-12\sqrt[6]{3}-9\sqrt[6]{243}$
18. $\sqrt[12]{a^7}-\sqrt[4]{a}$
19. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$
20. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

随堂练习 4.4a P.124

(a) $\sqrt{5}$　(b) $\sqrt[3]{9}$

(c) $\sqrt{22}+2\sqrt{2}$　(d) $5-2\sqrt{5}$

随堂练习 4.4b P.126

(a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$　(b) $5+3\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{a}+2$

(d) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

习题 4.4 P.127

1. $\sqrt{10}$　2. $\sqrt[3]{18}$
3. $\sqrt{b}$　4. $\sqrt[3]{x^2y}$
5. $\sqrt{2a}-\sqrt{3b}$　6. $2\sqrt{x}+3y$
7. $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{2}$　8. $\dfrac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{5}$
9. $5\sqrt{3}-6\sqrt{2}$　10. $3+\sqrt{5}$
11. $2\sqrt{3}-3$
12. $(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})$
13. $(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)$
14. $\sqrt[4]{x}+2$　15. $-4\sqrt{3}$
16. $4\sqrt{6}$　17. $\sqrt{x}+\sqrt{2y}$
18. 1
19. $\dfrac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}+\sqrt{70}}{20}$
20. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
21. (a) $2\sqrt{2}$ cm　(b) $\dfrac{32+6\sqrt{2}}{17}$ cm

总复习题 4 P.129

1. (a) $x \le \dfrac{5}{2}$　(b) $x \ge 1$
2. 1　3. $\sqrt[4]{(-3)^4} \ne -3$
4. $xy\sqrt{xy}$　5. $\sqrt[3]{m^2+mn}$
6. $3y^2\sqrt{3x}$　7. $ab^2c^3\sqrt[n]{ab^2c^3}$

8. $\frac{7}{6}\sqrt{6}$

9. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{12}-\frac{4}{3}\sqrt[3]{18}$

10. $\sqrt[12]{3}$

11. $\sqrt[60]{x^{31}y^{29}}$

12. $\frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$

13. -2

14. $-5\sqrt{15}-2\sqrt{14}$

15. $\sqrt[3]{6}+\sqrt[6]{72}+\sqrt[6]{108}+\sqrt{6}$

16. $a\sqrt[3]{a}+2a\sqrt{a}+a\sqrt[3]{a^2}$

17. $\sqrt[6]{x}$

18. $\frac{16\sqrt{2}-12\sqrt{3}}{5}$

19. $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-8$

20. $\frac{\sqrt{6}-2+\sqrt{2}}{4}$

21. $\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{12}$

22. 9

23. $2-\sqrt{3}$

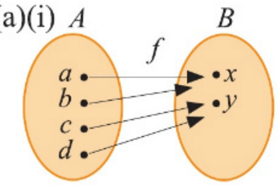
24. -5

25. $-\frac{31}{5}$，9

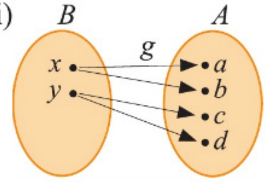
第5章 函数

随堂练习 5.1a P.138

(a)(i)



(ii)



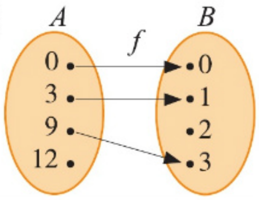
(b) f是从A到B的映射，学生集合到老师集合

习题 5.1a P.139

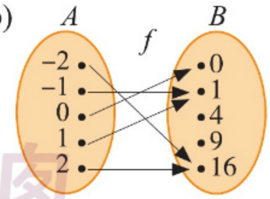
1. $f(-1)=1$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=16$
2. 0的原像是0，1的原像是1和−1，4的原像是2和−2，$\boldsymbol{R}$中全部负实数在f之下没有原像。
3. $f(2)=3$，2的原像是1，1无原象。

随堂练习 5.1b P.140

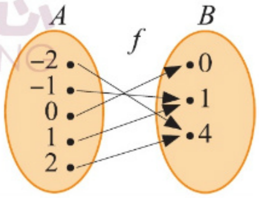
1. (a)



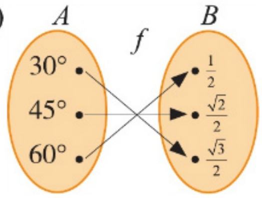
(b)



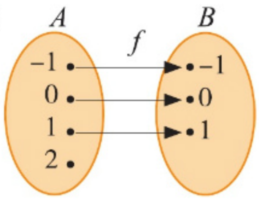
(c)



(d)



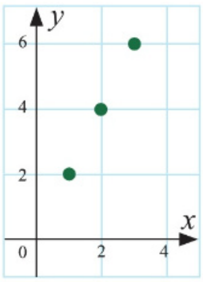
(e)

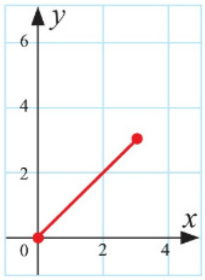


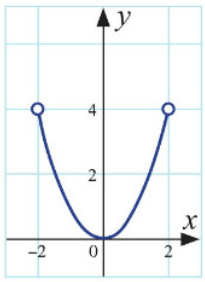
2. (b)，(c)，(d)是映射

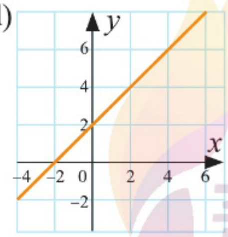
习题 5.1b P.143

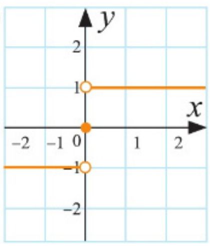
1. (a)，(b)是函数关系。
2. (a) 中a的映像是1，2的原像是b

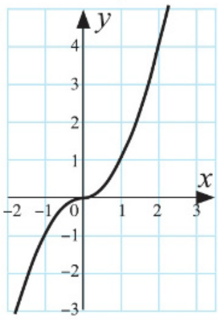
   (b) 中a的映像是1，2的原像是c
3. 范恩图略。a，b，c各有两个映像可选择：$\therefore 2\times2\times2=8$ 个
4. (a) 

   (b) 

   (c) 

   (d) 

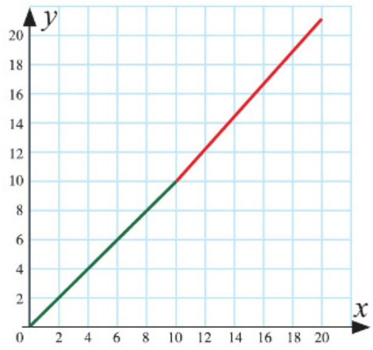
5. (a) 

   (b) 

6. (a) $f(x)=2x+2, x\in\{1,2,3,4\}$

   (b) $g(x)=x^2, x\in\{-2,-1,0,1,2\}$
7. $T=-\dfrac{3}{500}h+10$，

   1500米处的气温是1°C。
8. 最高15°C，发生在13时；最低−5°C，发生在4时
9. $y=\begin{cases}x, & 0<x\le 10\\ 1.1x-1, & x>10\end{cases}$，



随堂练习 5.2 P.149

1. (a) $\{1,2,4\}$　　(b) $\{1,2,3,4\}$

   (c) $\{1,4\}$
2. (a) $D_f=\{-1,0,1\}$

   (b) $R_f=\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\}$
3. $(-5,3]$

习题 5.2 P.150

1. (a) 20　　(b) a^4-3a^2+2

   (c) $5x^2-15x+22$

   (d) $x^4-6x^3+10x^2-3x$

   (e) $2x+h-3$
2. (a) $f(1)=1$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，$f(0)=0$

   (b) $g(1)=1$，$g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，$g(0)=1$
3. (a) −5　　(b) 2

   (c) −2　　(d) 14
4. 定义域$=\{a,b,c,d,e\}$，

   值域$=\{4,8,12\}$
5. (a) $\{-1,0,1,2\}$　　(b) $\{-2,1,10\}$
6. (a) 2

(b) 无意义

(c) -2

(d) t，且 $t \in [-4, 6]$

(e) $-t-2$，且 $t \in [-8, 2]$

7. (a) 定义域不同，值域不同。

(b) 定义域相同，值域不同。

(c) 定义域相同，值域相同。

8. $y = 2000a + 20ax + \dfrac{20000a}{x}$，

$x \in [\,50, 100\,]$

9. $t \in [\,0, 300\,]$

随堂练习 5.3a P.153

(a) y是x的函数，所有与x轴垂直的直线都与该图像的交点只有一个。

(b) y不是x的函数，因为可以找到与x轴垂直的直线与该图像不只有一个交点。

随堂练习 5.3b P.157

1. (a) 乙　(b) 甲　(c) 丙　(d) 丁

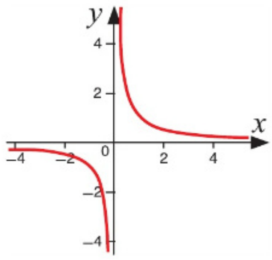
2. 与y轴平行的直线是$x=a$的图像，但是$x=a$不是函数。

随堂练习 5.3c P.166

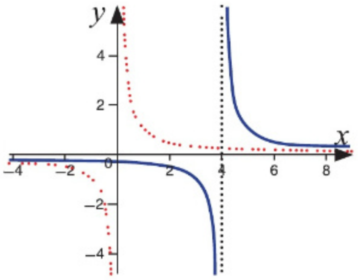
1. (a) 将 $y=f(x)$ 的函数图像对x轴作反射，便得到 $y=g(x)$ 的图像。

(b) 将 $y=f(x)$ 的函数图像对y轴作反射，便得到 $y=h(x)$ 的图像。

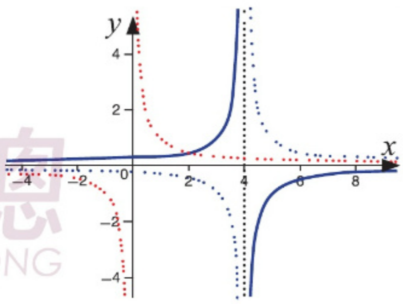
2. (a) $D_y = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$，$R_y = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$



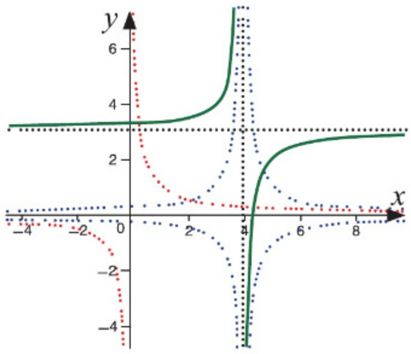
(b) $D_y = \boldsymbol{R} \setminus \{4\}$，$R_y = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$



(c) $D_y = \boldsymbol{R} \setminus \{4\}$，$R_y = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$



(d) $D_y = \boldsymbol{R} \setminus \{4\}$，$R_y = \boldsymbol{R} \setminus \{3\}$



习题 5.3 P.167

1. (a) 是 $y=f(x)$ 的函数，所有与x轴垂直的直线都与该图像的交点只有一个。

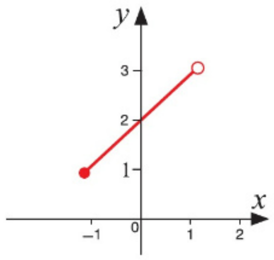
(b) 不是 $y = f(x)$ 的函数，因为在 $x=0$ 处可找到与x轴垂直的直线与该图像有两个交点。

2. (a) $D_f = (a, b)$，$R_f = [c, d)$

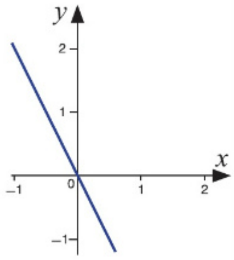
(b) $D_f = [a, b] \cup [c, d]$，

$R_f = [m, n] \cup [p, q]$

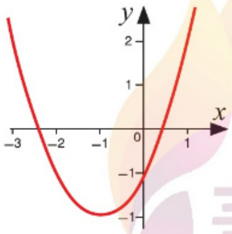
3. (a) $x \in [1, 3)$



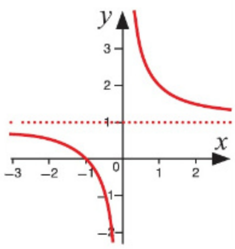
(b) $x \in \boldsymbol{R}$



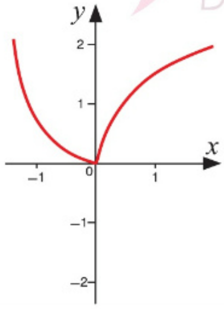
(c) $x \in [-2, \infty)$



(d) $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$



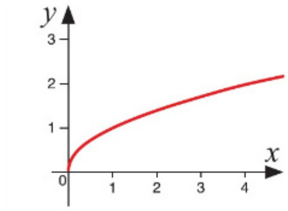
(e) $x \in \boldsymbol{R}$



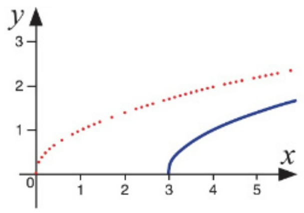
4. (a) 将 $y = f(x)$ 图像上的点保持x坐标不变，y坐标放大至原来的 $\dfrac{1}{4}$ 倍便得到 $y = g(x)$ 的图像。

(b) 将 $y = f(x)$ 图像上的点保持x坐标不变，y坐标缩小至原来的4倍便得到 $y = h(x)$的图像。

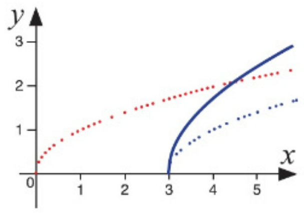
5. (a) $D_y = [0, \infty)$，$R_y = [0, \infty)$



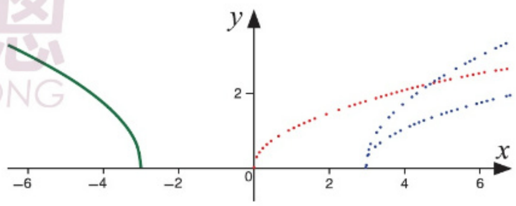
(b) $D_y = [3, \infty)$，$R_y = [0, \infty)$



(c) $D_y = [3, \infty)$，$R_y = [0, \infty)$



(d) $D_y = (-\infty, -3]$，$R_y = [0, \infty)$



6. (a) 将 $y = f(x)$ 的函数图像向右移 3 个单位再往上移2个单位，便得到 $y = g(x)$ 的图像：$g(x) = f(x-3) + 2$

（或其他合理答案）

(b) 将 $y = f(x)$ 的函数图像向左移 3 个单位，向上一个单位，再对x轴作反射，便得到 $y = g(x)$ 的图像：

$g(x) = -f(x+3) - 1$

（或其他合理答案）

(c) 将 $y=f(x)$ 图像上的点保持 x 坐标不变，y 坐标乘上 $\frac{1}{2}$，再向右移 3 个单位，便得到 $y=g(x)$ 的图像：$g(x)=\frac{1}{2}f(x+3)$
（或其他合理答案）

(d) 将 $y=f(x)$ 向左移 1 个单位，保持 y 坐标不变，x 坐标乘上 2，再对 x 轴作反射，便得到 $y=g(x)$ 的图像：$g(x)=-f\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)$
（或其他合理答案）

随堂练习 5.4 P.173

1. (a) $(f\circ g)(x)=3x-3$，
   $(g\circ f)(x)=3x-1$
   (b) $(g\circ f)(x)=(x+2)^2$，
   $(g\circ f)(x)=x^2+2$
2. $R_g=[0,\infty)\subseteq D_f=\boldsymbol{R}$，故 $f\circ g$ 存在；$R_f=(-\infty,4]\subseteq D_g=(-\infty,4]$，故 $g\circ f$ 存在
3. (a) $\dfrac{1}{x^2+4}$ (b) $\dfrac{1}{x^2}+4$

习题 5.4 P.174

1. $D=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$R=\{c_1,c_2,c_3\}$
2. x
3. (a) $(f\circ g)(x)=2x+5$，
   $(f\circ g)(x)=2x+4$
   (b) $(f\circ g)(x)=x$，$(f\circ g)(x)=x$
   (c) $(f\circ g)(x)=2x^2-3$，
   $(f\circ g)(x)=4x^2+4x-1$
4. (a) $(f\circ g)(x)=9x^2-18x+5$，
   $(f\circ g)(x)=3x^2+6x-13$
   (b) 11，5，11，5
5. -1
6. (a) $R_f=[2,\infty)\not\subset D_g=(-\infty,1)$
   (b) $(f\circ g)(x)=3-x$，$R_{f\circ g}=[2,\infty)$
7. $S=(-\infty,2)$
8. $x+2$，$x+3$，$x+100$
9. $g(x)=2x^2+23x+72$
10. $f(x)=\dfrac{19x-4}{6x-3}$

习题 5.5 P.179

1. (a) 是映成函数 (b) 都不是
   (c) 是一一映成函数 (d) 是一对一函数
2. (a) 是一对一函数 (b) 是映成函数
   (c) 是一一映成函数
3. (b) – (d) 是一一映成函数

随堂练习 5.5 P.185

1. 只有(b)有反函数，因为它是一一映成函数
2. (a) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{4}$，$x\in\boldsymbol{R}$
   (b) $f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x}$，$x\in[0,\infty)$
   (c) $f^{-1}(x)=\dfrac{3-x}{2x}$，$x\in\boldsymbol{R}$ 且 $x\neq0$
   (d) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{2}+2$，$x\in[0,\infty)$

习题 5.6 P.186

1. $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

2. (a) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+7}{3}$， $D_{f^{-1}}=\boldsymbol{R}$

(b) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{54-x}{2}}$， $D_{f^{-1}}=\boldsymbol{R}$

(c) $f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x}$， $D_{f^{-1}}=\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$

(d) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+5}{2}$， $D_{f^{-1}}=\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$

(e) $f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$， $D_{f^{-1}}=\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$

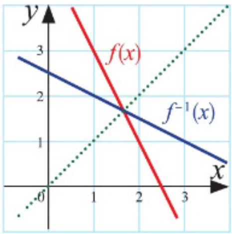
3. (a) $\dfrac{2x+7}{2+x}$ (b) $\dfrac{x-4}{3}$

(c) $\dfrac{-2x-1}{6+3x}$ (d) $\dfrac{2x+13}{x+2}$

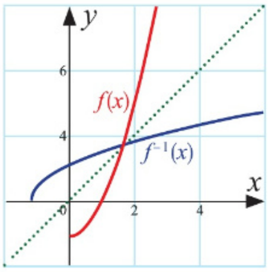
4. (a) $\dfrac{x-b}{a}$ (b) $a=-1$， $b\in\boldsymbol{R}$

5. (a) $a=-9$， $b=6$ (b) $c=-3$

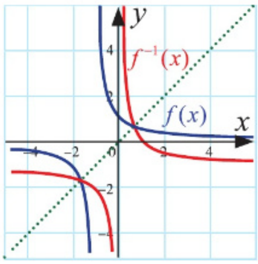
6. (a) $\dfrac{5-x}{2}, x\in\boldsymbol{R}$



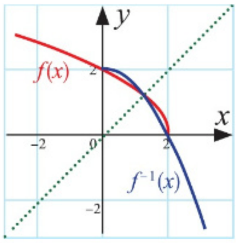
(b) $\sqrt{x+1}, x\in[-1,\infty)$



(c) $\dfrac{1}{x}-1, x\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$



(d) $\dfrac{4-x^2}{2}, x\in[0,\infty)$



总复习题 5 P.187

1. (a) 是，因为 A 的任意元素在 B 中都有唯一的映像。

(b) 是，因为 A 的任意元素在 B 中都有唯一的映像。

(c) 是，因为 A 的任意元素在 B 中都有唯一的映像。

(d) 是，因为 A 的任意元素在 B 中都有唯一的映像。

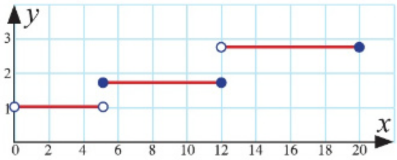
(e) 否，因为 B 中的 ，1 的原像是 1。

(f) 否，因为 A 中的 在 B 中没有映像。

2. -49

3. (a) $f(x)=\begin{cases}1.00, & 0<x<5\\ 1.80, & 5\le x\le 12\\ 2.80, & 12<x\le 20\end{cases}$

(b)



(c) $D_f=(0,20]$， $R_f=\{1.00, 1.80, 2.80\}$

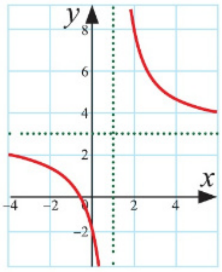
4. (a) $D_f=\boldsymbol{R}^{+}\setminus\{2\}$ (b) $D_f=\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$

5. (a) $R_f=(-1,\infty)$ (b) $R_f=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$

6. $\dfrac{5}{7}$

7. (a) $3+\dfrac{5}{x-1}$

(b)

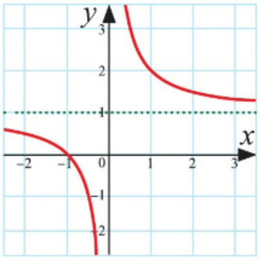


(c) $D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$， $R_f=\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$

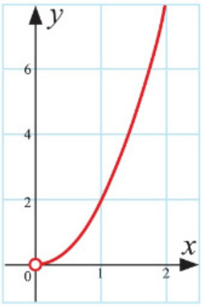
8. $a=2$ 或 -2，$b=4$ 或 -12

9. (a) $D_f=\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{5}\right\}$　(b) $a=3$

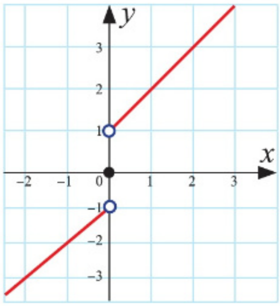
10. (a) $D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$， $R_f=\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$



(b) $D_f=\boldsymbol{R}^+$， $R_f=\boldsymbol{R}^+$

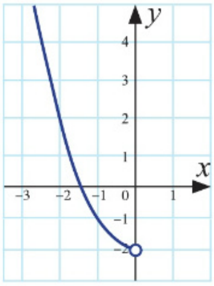


(c) $D_f=\boldsymbol{R}$， $R_f=(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,\infty)$



11. $B=(-5,19)$

12. (a)



(b) $f(x)=-\sqrt{x+2}$， $D_f=[-2,\infty)$

13. $g(x)=49x^2-63x+24$

14. (a) $f(n)=\begin{cases}3n+1, & n\text{ 是正奇数}\\ \dfrac{n}{2}, & n\text{ 是正偶数}\end{cases}$

第6章 不等式

随堂练习 6.1a P.193

$(x-1)(x^2+x+1)>(x-2)(x^2+2x+4)$

随堂练习 6.1b P.195

$-2a<-2b$

习题 6.1 P.195

1. $(x-5)^2>(x-8)(x-2)$
2. $x^2+5x>3x-2$
3. $(1-2x)(1+2x)<(x^2-8)^2$
4. $x^2>y^2$
5. $3a-b-2>2b-5$

随堂练习 6.2a P.200

1. $1<x<4$　　2. $-\dfrac{1}{3}\le x\le 2$

3. $x<\frac{1}{4}$ 或 $x>\frac{1}{2}$　　4. $x\le 0$ 或 $x\ge 4$

5. $-1\le x\le 3$　　6. $0\le x\le\frac{3}{2}$

随堂练习 6.2b　P.204

1. $2-\sqrt{2}\le x\le 2+\sqrt{2}$

2. $x<-\sqrt{3}$ 或 $x>\sqrt{3}$

3. $x\in\boldsymbol{R}$ 且 $x\ne -2$　　4. 无解

随堂练习 6.2c　P.206

1. $-2<x<1$

2. $-5<x<-4$ 或 $2<x<3$

3. 无解　　4. $x\le -7$ 或 $x>-1$

习题 6.2　P.207

1. $x<-1$ 或 $x>6$　　2. $-2<x<\frac{2}{3}$

3. $x\le 3$ 或 $x\ge 4$　　4. $9<x<10$

5. $x\le -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

6. $x<-\frac{1+\sqrt{13}}{6}$ 或 $x>\frac{\sqrt{13}-1}{6}$

7. $\frac{1}{3}<x<6$　　8. $2\le x\le 8$

9. $-3\le x\le 3$　　10. $x<0$ 或 $x>1$

11. $x\le -5$，$5\le x\le 6$ 或 $x\ge 7$

12. $-2<x<-\frac{8}{5}$

13. $2<x\le\frac{5}{2}$　　14. $-4<x\le -3$

15. $20\le x\le 30$　　16. $-8<k<0$

17. $1<k<4$

随堂练习 6.3a　P.211

1. $x<-2$ 或 $1<x<3$

2. $-3\le x\le\frac{3}{2}$ 或 $x\ge 2$

3. $x<-8$ 或 $x>1$

4. $x\le 1$，$x=3$ 或 $x\ge 7$

随堂练习 6.3b　P.213

1. $-2\le x<-1$　　2. $x>2$

3. $x<\frac{3}{4}$ 或 $1<x<3$

4. $-\frac{2}{3}\le x\le 2$ 或 $x>\frac{5}{2}$

习题 6.3　P.214

1. $x<-3$ 或 $-2<x<2$

2. $-\frac{1}{2}<x<2$ 或 $x>3$

3. $-4\le x\le 1$，$x=-1$

4. $x\le -3$，$-2\le x\le 2$ 或 $x\ge 3$

5. $-1\le x\le -\frac{1}{2}$ 或 $1\le x\le 4$

6. $-\frac{4}{3}<x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{4}{3}$

7. $1<x<\frac{5}{2}$　　8. $x\ge 4$

9. $x<-5$ 或 $x>-\frac{3}{2}$　　10. 无解

11. $3<x<6$　　12. $x<-3$

13. $1\le x<2$ 或 $x\ge 5$

14. $x<-5$ 或 $1<x\le 7$

随堂练习 6.4　P.215

1. $x<-5$ 或 $x>5$

2. $-1<x<2$　　3. $-1\le x\le\frac{1}{3}$

4. $-2<x\le 0$ 或 $2\le x<4$

习题 6.4 P.216

1. $-9<x<15$

2. $x<-6$ 或 $x>4$

3. $-2\le x\le -\dfrac{4}{3}$

4. $x\le -1$ 或 $x\ge 1$

5. $-3\le x<-1$ 或 $0<x\le 2$

6. $-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$

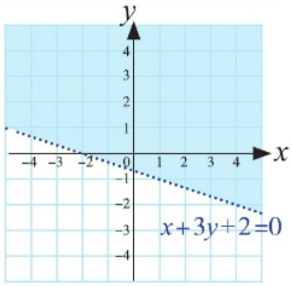
7. $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}<x<2$

8. $-\dfrac{3}{2}\le x\le -\dfrac{1}{2}$ 且 $x\ne -1$

9. 无解

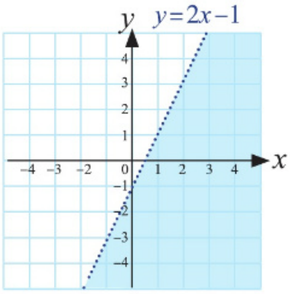
10. $x\in \boldsymbol{R}$

4.

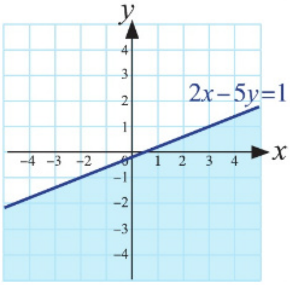


随堂练习 6.5a P.220

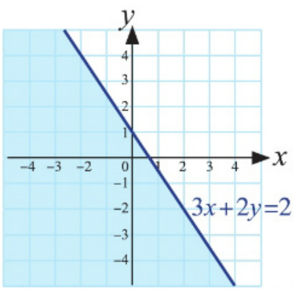
1.



2.

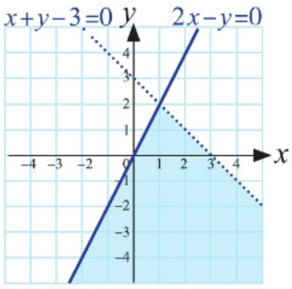


3.

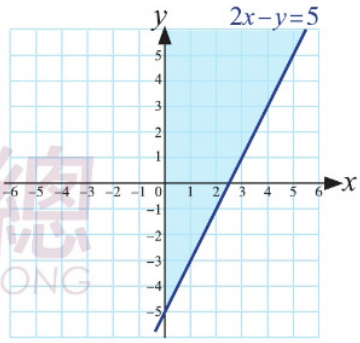


随堂练习 6.5b P.223

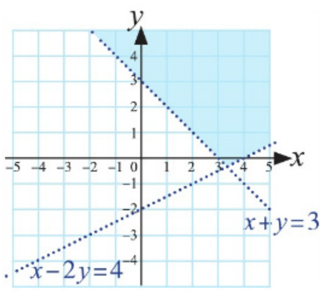
1.



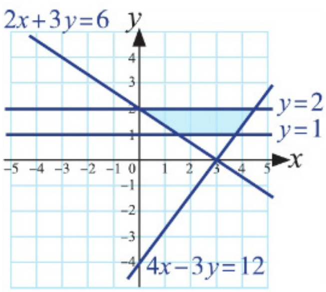
2.



3.

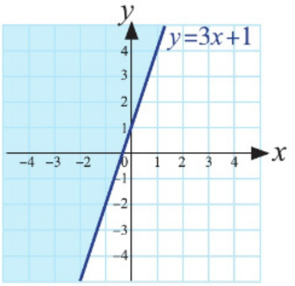


4.

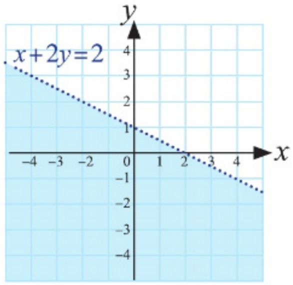


习题 6.5　P.223

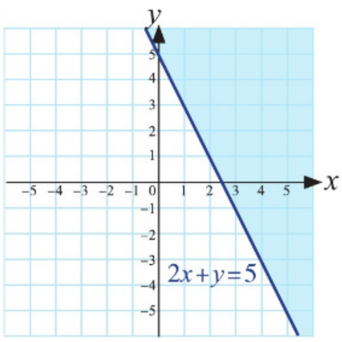
1.



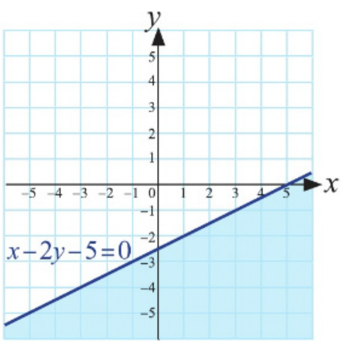
2.



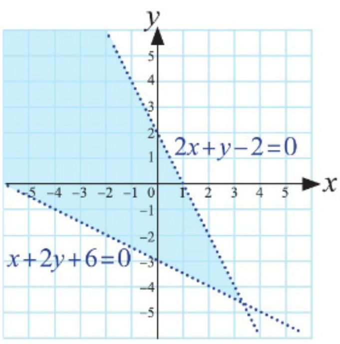
3.



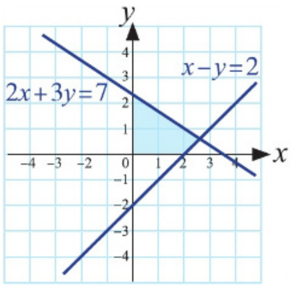
4.



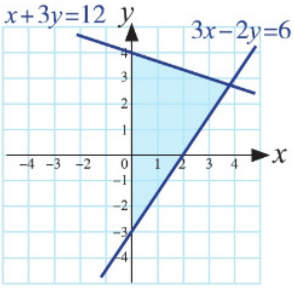
5.



6.



7.



8. $\begin{cases} 5x-2y\geq 10 \\ 3x+2y\leq 7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x\geq 5y+12 \\ 3x+5y\leq 25 \\ x-4y\leq 5 \\ 3x+4y>7 \end{cases}$

随堂练习 6.6a　P.226

当 $x=2$， $y=-2$ 时，z有最大值4；

当 $x=-2$， $y=2$ 时，z有最小值-4。

随堂练习 6.6b　P.231

应生产产品A　0个，产品B　250个，所获得最大利润为RM 12500。

习题 6.6　P.231

1. 在（8, 10）处，z有最大值74；

   在（4, 3）处，z有最小值27。

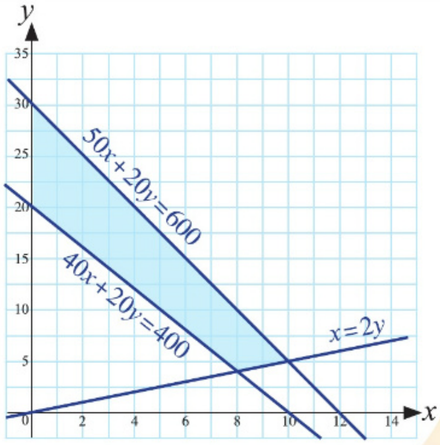
2. 在（6, −1）处，z有最大值48；

   在（3, −5）处，z有最小值−30。

3. (a) $\begin{cases} 50x+20y \le 600 \\ 40x+20y \ge 400 \\ x \le 2y \end{cases}$

（或 $\begin{cases} 5x+2y \le 60 \\ 2x+y \ge 20 \\ x \le 2y \end{cases}$ ）

(b)

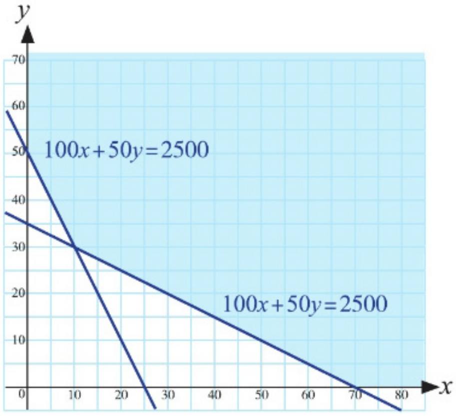


(c) “卓越”球拍0支，“王者”球拍30支，最大利润RM 180

4. (a) $\begin{cases} 100x+50y \ge 2500 \\ 50x+100y \ge 3500 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

（或 $\begin{cases} 2x+y \ge 50 \\ x+2y \ge 70 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ ）

(b)



(c) “优宝”狗粮10袋，“活宝”狗粮30袋，最低成本RM 7500

5. RM 204

6. (a) 配套A 10套，配套B 20包，白巧克力130颗

(b) 配套A 0包，配套B 30包，白巧克力90颗

总复习题 6 P.233

1. (a) $\left(x^2+1\right)^2 > x^4+x^2+1$

(b) $\left(1+x+x^2\right)^2 < 3\left(1+x^2+x^4\right)$

(c) $a^2+3b^2 > 2b\left(a+b\right)$

2. (a) $x<3$

(b) $-1<x<0$

(c) $-4 \le x \le -\frac{1}{2}$ 或 $x \ge 3$

(d) $x \le -\frac{3}{2}$ 或 $-1 \le x \le 2$

(e) $x<-4$， $-1<x<1$ 或 $x>2$

(f) $-3 \le x < -2$ 或 $-1<x \le \frac{5}{2}$

(g) $-4<x<-1$

(h) $-4 \le x \le -2$ 或 $0 \le x \le 2$

3. (a) $\frac{3}{2} \le x < 2$

(b) $3-\sqrt{23} \le x < 2$ 或 $5 < x \le 3+\sqrt{23}$

4. $1 \le x \le 2$

5. (a) 在$\left(17\frac{1}{3}, 15\frac{1}{3}\right)$处，有最大值$165\frac{1}{3}$

(b) 在$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$处，有最小值$-\frac{1}{2}$

6. (a) 应只生产10公吨的成品Y，最高利润RM60000；

(b) 应生产3公吨的成品X及8公吨的成品Y。

7. 应购买配套A 30套，配套B 30套，最低成本RM 19500。

8. 应进货商品A 100件，商品B 250件，可得最高获利RM 270。

第7章 逻辑

随堂练习 7.1a P.238

1. (a) 假命题

   (b) 不是命题，$x-y=0$是方程式，在没有前提条件下无法判断真假。

   (c) 真命题

   (d) 不是命题，这个句子不是陈述句。

随堂练习 7.1b P.240

真命题

习题 7.1 P.240

1. (a) 不是命题

   (b) 不是命题；无法判断真假

   (c) 假命题 (d) 真命题

   (e) 假命题

2. (a) 条件：一个数是偶数

   结论：这个数不是质数

   假命题

   (b) 条件：一个图形是四边形

   结果：这个图形的内角和与外角和相等

   真命题

   (c) 条件：一个数大于0

   结果：这个数有倒数

   真命题

3. p：条件：平面上两直线垂直于同一直线

   结果：这两条直线平行

   真命题

   q：条件：空间上两直线垂直于同一直线

   结果：这两条直线平行

   假命题

4. (a) 若12是偶数，则12不可以被2整除；假命题

   (b) 若7是奇数，则7是质数；真命题

随堂练习 7.2a P.242

$-1>2$，假命题

随堂练习 7.2b P.243

$p\wedge q$：4及2都是方程式 $x^2+2x-8=0$ 的根，假命题

$q\wedge r$：2及 -4 都是方程式 $x^2+2x-8=0$ 的根，真命题

随堂练习 7.2c P.245

$p\vee q$：4或2是方程式 $x^3-8=0$ 的根，真命题

$q\vee r$：2或-2都是方程式 $x^3-8=0$ 的根，真命题

随堂练习 7.2d P.246

1. $x \neq 1$ 且 $x \neq -1$

习题 7.2 P.246

1. $\sim p$: 三角形的两边之和不大于第三边；假命题

   $\sim q$: 最小的正整数不是1；假命题

   $\sim r$: π 不是有理数；真命题

   $\sim s$: 方程式 $x^2+2x+2=0$ 没有实根；正命题

2. (a) $p \wedge q$: 梯形有两条边平行且有两个角相等；假命题

   $p \vee q$: 梯形有两条边平行或有两个角相等；真命题

   (b) $p \wedge q$: 平行四边形的四条边相等且四个角相等；假命题

   $p \vee q$: 平行四边形的四条边相等或四个角相等；假命题

   (c) $p \wedge q$: 自然数的集合中有最小的元素且没有最大的元素；真命题

   $p \vee q$: 自然数的集合中有最小的元素或没有最大的元素；真命题

3. (a) 假　(b) 假　(c) 真　(d) 真

4. p，q之间至少有一个是假命题，因此 $p \wedge q$为假命题。

   p，q之间可能只有一个假命题或两个都是假命题，因此，我们无法确定 $p \vee q$ 的真假

5. (a) $1+1 \neq 2$ 或 $2 \geq 3$；假命题

   (b) $1 \geq 2$ 且 $1 \neq 2$；假命题

随堂练习 7.3a P.248

1. 真　　2. 真

随堂练习 7.3b P.249

$\sim p$: 存在两个无理数，其和不是无理数；真命题

$\sim q$: 存在两个无理数，其和不是有理数；真命题

$\sim r$: 所有的偶数都可以被3整除；假命题

$\sim s$: $\exists x \in \boldsymbol{R}$，$x+1 \leq 1$；真命题

习题 7.3 P.250

1. (a) 假命题；有些等腰三角形不是锐角三角形

   (b) 真命题；所有的四边形都没有两个钝角。

   (c) 假命题；$\exists x \in \boldsymbol{Q}$，$x$没有倒数。

   (d) 假命题；$\forall x \in \boldsymbol{R}$，$x+1 \neq x-1$。

   (e) 真命题；$\forall x \in \boldsymbol{Q}$，$\dfrac{1}{2x+3} \leq 2$

2. (a) 假命题；$\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$

   (b) 假命题；$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

   (c) 假命题；6能被3整除，但是6是偶数

   (d) 假命题；任何一个三角形的三个顶点都共圆

随堂练习 7.4 P.252

1. p 是 q 的充分条件或 q 是 p 的必要条件

2. 在 ΔABC 中，$BC^2 = AB^2 + AC^2$ 若且唯若 $\angle A = 90°$

习题 7.4 P.253

1. (a) 假命题 (b) 真命题 (c) 真命题
2. (a) p 是 q 的必要条件但不是充分条件
   (b) p 是 q 的充分条件也是必要条件

随堂练习 7.5a P.254

不能，小明可能因为其他原因迟到

随堂练习 7.5b P.256

我们无法从前提得到结论‘ ΔABC 是等腰三角形’。但是‘有对称轴的三角形是等腰三角形’是真命题

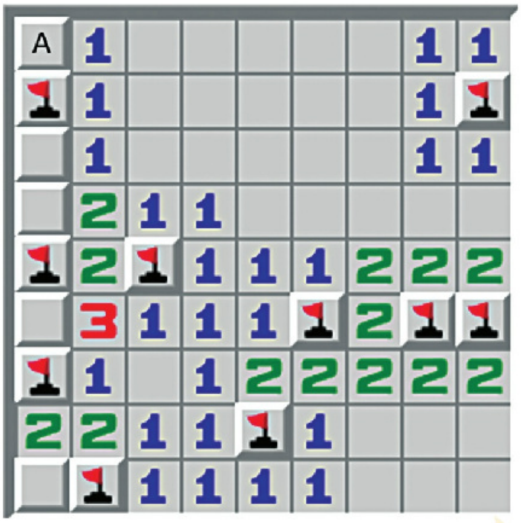
习题 7.5 P.256

1. (a) C: $ABCD$ 的对角线互相垂直。
   (b) C: 该平面图形不是正方形。
   (c) P_2: x 不大于3。
   (d) P_2: 马来貘是动物。
   (e) P_1: 所有4的倍数都可以被2整除；或
   P_1: 若 x 是4的倍数，则 x 可以被2整除。
   (f) P_1: 若今天没有下雨，则小明不会打伞。（或其他适合的答案）
2. 判断以下的推理是否有效：
   (a) 无效 (b) 无效 (c) 无效

总复习题 7 P.257

1. 判断下列各命题的真假，并说明原因：
   p: 真命题；3是质数为真
   q: 假命题；3不是质数为假
   r: 假命题；当 $x<0$ 时，不成立
   s: 假命题；当 $a=0$ 时，不成立
   t: 假命题，没有任何的 $\exists x \in \boldsymbol{R}$，能使得 $x^2=-1$ 或 $2x^2+1=0$ 中任何一个成立
   u: 假命题，垂直于 x 轴的直线无法表达成 $y=mx+c$ 的形式。
2. p: 这次考试中，没有人考100分或者0分
   q: 所有的地区有网络或有自来水。
   r: 有的独中生没有报考历史且没有报考物理。
3. (a) 假 (b) 真 (c) 假 (d) 真
5. (a) p 是 q 的必要条件
   (b) p 是 q 的充要条件
   (c) p 是 q 的充要条件
   (d) p 是 q 的充分条件
6. $$\begin{aligned} & a=b \\ \Leftrightarrow\ & a^2=ab \\ \Leftrightarrow\ & a^2-b^2=ab-b^2 \\ \Leftrightarrow\ & (a+b)(a-b)=b(a-b) \\ \Leftrightarrow\ & (a+b)=b \\ \Leftrightarrow\ & 2b=b \\ \Leftrightarrow\ & 2=1 \end{aligned}$$
7. (a) 推理无效，结论为假
   (b) 推理有效，结论为假
8. 0个

9. 假设图中A格有地雷，会得到矛盾的结果。因此A格不可能有地雷。



图片出处

本教材使用了网站或作者注明可免费使用的图片与照片，谨致谢意。

页码／图次	出处
2	Google Maps，安顺三民独中校园的卫星图像，31/1/2023，https://www.google.com/maps/@4.0183883,101.0335482,413m/data=!3m1! 1e3
16	Public Works Department Malaysia，斜坡交通标志，11/8/2023, https://id.wikipedia.org/wiki/Berkas:Malaysia_road_sign_WD8.svg
34	《四部丛刊初编》volumes390–392，《景上海涵芬楼藏微波榭刊本》 《九章算术》，影印于Sturgeon（2011），18/2/2023,https://ctext.org/library.pl?if=gb&file=77749&page=58
102	Girolamo Olgiati, Imaginary engraving of the philosopher Hippasus of Metapontum. From the 1580 book Illustrium philosophorum et sapientum effigies ab eorum numistatibus extractae, by Girolamo Olgiati. Reprinted 1583, 16/2/2023, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hippasus_Metapontinus_–_Illustrium_philosophorum_et_sapientum_effigies_ab_eorum_numistatibus _extractae.png
132	Jacobs, Konrad, German mathematician Lothar Collatz in undated photo, 20/3/2023, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lothar_Collatz.jpg

本会已尽力追溯图片来源，但仍有部分图片未能查明出处，如有侵犯版权，谨此致歉，并欢迎告知。