马来西亚华文独中教科书

高中数学

（二上）

马来西亚董教总全国华文独中工委会课程局编纂

《高中数学》（二上）

行政编辑：梁翠芳
美术编辑：梁翠芳
封面设计：梁翠芳
版面设计：萧娇婵
电脑排版：蔡思盛

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Swan Printing Sdn Bhd.

版次：
2014年8月第1版

印次：
2020年11月第7次印刷

编辑说明

一、这套《高中数学》是根据董教总全国华文独中工委会课程局所拟定的数学课程标准编写而成。在拟订课程标准的过程中，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KBSM）及各国的课程标准和教材，并采用了旧版统一课本《普通数学》的课程内容。

二、这套《高中数学》是为全国各华文独中的高中文科及商科学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。每册内容依据每周六节，每节四十分钟的教学时间编写。

三、这套教材共有 28 章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学及微积分。全书是以综合方式编写。

四、本书是高二上册，供高中二年级上半年使用。内容包括：

代　　数 — 数列与级数、联立方程式、矩阵与行列式、不等式与线性规划

解析几何 — 圆、立体几何与经纬度

五、本书设有“学习目标”、“注意”、“补充资料”、“随堂练习”及“思考题”栏目。设置上述栏目是为了使学生掌握学习重点，启发学生思考，增进学习效果。

六、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。习题的答案都附于书末。此外，本书附有中英名词对照，供学习参考。

七、除非另有说明，本书所有例题及习题的答案皆准确至两位小数。

八、本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总全国华文独中工委会课程局

《高中数学》编审小组

2014年7月

编审小组

学术顾问：林忠强博士　陈庆地博士　张丽萍博士

学科委员：林汶良　张锦发　苏民胜　萧子良　李鸿聪
刘建华

责任编辑：蔡思盛

鸣 谢

本书承蒙编审小组、王经纶、曾龙文、洪燕芬、胡晓蓓和蔡超群等提供建设性意见，并协助编写与审稿，谨此统致谢忱。

马来西亚董教总全国华文独中工委会课程局　启

目录

12. 数列与级数

12.1 数列与级数 2
12.2 等差数列与等差级数 9
12.3 等比数列与等比级数 18
12.4 简易特殊级数之和 28

13. 联立方程式

13.1 二元联立方程式 36
13.2 三元一次联立方程式 39

14. 矩阵与行列式

14.1 矩阵 46
14.2 矩阵的加减法 49
14.3 矩阵的纯量积 52
14.4 矩阵的乘法 55
14.5 行列式 61
14.6 逆矩阵 75
14.7 高斯消元法 85
14.8 克兰姆法则 93

15. 不等式与线性规划

15.1 不等式及其性质 102
15.2 一元一次不等式 106
15.3 一元二次不等式 113
15.4 一元高次不等式 119
15.5 分式不等式 124
15.6 含绝对值的不等式 127
15.7 二元一次不等式 130
15.8 线性规划 137

16. 圆

16.1 圆的标准方程式 150
16.2 圆的一般方程式 152
16.3 圆的相关问题 156

17. 立体几何与经纬度

17.1 立体图形 166
17.2 直线与平面所成的角 171
17.3 两个平面所成的角 180
17.4 经纬线与经纬度 188
17.5 同一经线上两地的距离 195
17.6 同一纬线上两地的距离 199

名词对照 207
答案 210

12. 数列与级数

学习目标：

- 掌握等差数列的通项公式与等差级数的求和公式及其应用
- 掌握等比数列的通项公式与等比级数的求和公式及其应用
- 掌握无穷等比级数的求和公式
- 能求简易特殊级数的和

12.1 数列与级数

按照某种规则排列的一列数叫做数列。数列中的每一个数叫做数列的项。从第一个数开始数起，数列的每一项依序叫做首项、第二项、第三项、…。若数列有最后一项，则叫做数列的末项。

一般上，一个数列的各项可以表示成 a_1，a_2，…，a_n，…，其中a_n表示数列的第n项。我们称a_n为数列的通项，a_n与项数n之间的关系就叫做该数列的通项公式。

例题 1

写出从1到8各整数的10倍加1的数列，并求此数列的首项、末项及其通项公式。

解 所求数列有8项：11，21，31，41，51，61，71，81。

数列的首项是11，末项是81，通项公式是 $a_n=10n+1$。

例题 2

写出从1到10各整数的倒数的数列，并求此数列的首项、末项及其通项公式。

解 所求数列有10项：$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{10}$。

数列的首项是1，末项是$\frac{1}{10}$，通项公式是 $a_n=\frac{1}{n}$。

例题 3

根据下列各数列的通项公式，写出其首 5 项：

(a) $a_n = 2n+1$　　　　(b) $a_n = n(n+1)$

解 (a) 数列的首 5 项是 $a_2 = 2(2)+1 = 5$，

$a_1 = 2(1)+1 = 3$，

$a_3 = 2(3)+1 = 7$，

$a_4 = 2(4)+1 = 9$，

$a_5 = 2(5)+1 = 11$。

(b) 数列的首 5 项是 $a_1 = 1(1+1) = 2$，

$a_2 = 2(2+1) = 6$，

$a_3 = 3(3+1) = 12$，

$a_4 = 4(4+1) = 20$，

$a_5 = 5(5+1) = 30$。

例题 4

写出下列各数列的一个通项公式：

(a) 3，7，11，15，…

(b) 2，5，10，17，…

解 (a)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= 3+4 = 3+4(2-1) \\
a_3 &= 3+8 = 3+4(3-1) \\
a_4 &= 3+12 = 3+4(4-1) \\
&\vdots \\
a_n &= 3+4(n-1) = 4n-1
\end{aligned}
$$

注意

数列的通项公式无法通过该数列的首几项唯一地确定。例如，例题 4(a) 的通项公式也可写成 $a_n = 4n-1+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

(b) $a_1 = 1^2 + 1$

$a_2 = 2^2 + 1$

$a_3 = 3^2 + 1$

$a_4 = 4^2 + 1$

$\vdots$

$a_n = n^2 + 1$

随堂练习 1

1. 一个数列的通项公式是 $a_n = \dfrac{2^n}{n+1}$，写出它的首 5 项。
2. 写出数列 1，8，27，64，… 的一个通项公式。

若 a_1，a_2，a_3，…，a_k，…是一个数列，将数列中的各项相加所得的式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$ 就叫做级数。若级数有 n 个项，我们可使用 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 来表示 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$，并称此级数为有限级数。若级数有无穷多个项，则可使用 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 来表示 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$，并称此级数为无穷级数。

补充资料

$\sum$ 为希腊字母，读作 Sigma，在此表示和的意思。

例题 5

写出下列各级数：

(a) $\sum_{n=1}^{5} n^2$　　(b) $\sum_{n=1}^{6} n(n-1)$

(c) $\sum_{n=2}^{5} \frac{n}{n+1}$　　(d) $\sum_{n=1}^{5} (-1)^n(2n+1)$

解

(a) $$\sum_{n=1}^{5} n^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$$
$$=1+4+9+16+25$$

(b) $$\sum_{n=1}^{6} n(n-1) = 1(1-1)+2(2-1)+3(3-1)+4(4-1)+5(5-1)+6(6-1)$$
$$=0+2+6+12+20+30$$

(c) $$\sum_{n=2}^{5} \frac{n}{n+1} = \frac{2}{2+1}+\frac{3}{3+1}+\frac{4}{4+1}+\frac{5}{5+1}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{5} (-1)^n(2n+1) = (-1)(2\times1+1)+(-1)^2(2\times2+1)+(-1)^3(2\times3+1)+(-1)^4(2\times4+1)+(-1)^5(2\times5+1)$$
$$=-3+5-7+9-11$$

例题 6

求下列各级数的首项、末项及项数：

(a) $\sum_{n=3}^{7}(2n+3)$　　(b) $\sum_{n=5}^{10}\frac{n^2}{2}$

解 (a) 首项是 $a_3=2(3)+3=9$，
末项是 $a_7=2(7)+3=17$，项数是 5。

(b) 首项是 $a_5=\frac{5^2}{2}=\frac{25}{2}$，

末项是 $a_{10}=\frac{10^2}{2}=\frac{100}{2}=50$，项数是 6。

例题 7

以$\sum$符号表示下列各级数：

(a) $2+2+2+2+2+2$　　(b) $3+3^2+3^3+\cdots+3^{20}$

(c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$　　(d) $3\times4+4\times6+5\times8+6\times10$

解 (a) $a_1=a_2=\cdots=a_6=2$

$\therefore\ 2+2+2+2+2+2=\sum_{n=1}^{6}2$

(b) $a_1=3$，$a_2=3^2$，$a_3=3^3$，…，$a_{20}=3^{20}$

$\therefore\ 3+3^2+3^3+\cdots+3^{20}=\sum_{n=1}^{20}3^n$

(c) $a_1=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+1}$， $a_2=\dfrac{1}{2+1}$， $a_3=\dfrac{1}{3+1}$，

$a_4=\dfrac{1}{4+1}$， $a_5=\dfrac{1}{5+1}$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n+1}$$

(d) $a_1=3\times4=(1+2)(2\times1+2)$

$a_2=4\times6=(2+2)(2\times2+2)$

$a_3=5\times8=(3+2)(2\times3+2)$

$a_4=6\times10=(4+2)(2\times4+2)$

$$\therefore\quad 3\times4+4\times6+5\times8+6\times10=\sum_{n=1}^{4}(n+2)\ (2n+2)$$

随堂练习 2

1. 写出级数 $\sum_{n=1}^{10}(n^2+1)$。

2. 写出级数 $\sum_{n=4}^{8}(3^n-2^n)$ 的首项、末项及项数。

3. 以$\sum$符号表示级数 $2\times5+3\times7+4\times9+\cdots+15\times31$。

练习 12.1

1. 写出下列各数列的一个通项公式：

   (a) 5，8，11，14，⋯ (b) 2，4，8，16，⋯

   (c) $\frac{2}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$，⋯ (d) $\frac{2}{5}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{6}{9}$，$\frac{8}{11}$，⋯

2. 根据下列各数列的通项公式，写出其首5项：

   (a) $a_n = 2n+3$ (b) $a_n = n(n-2)$

   (c) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ (d) $a_n = (-3)^n$

3. 写出下列各级数：

   (a) $\sum_{n=1}^{5} n(n+3)$ (b) $\sum_{n=2}^{6} \dfrac{1}{3^n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{6} \dfrac{1}{n(2n+1)}$ (d) $\sum_{n=2}^{5} \dfrac{1}{n^2+2}$

4. 写出下列各级数的首项、末项及项数：

   (a) $\sum_{n=3}^{10} 2^2$ (b) $\sum_{n=1}^{8} \dfrac{n+2}{n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{10} (3n^2-n)$ (d) $\sum_{n=9}^{14} n^2(n-7)$

5. 以Σ符号表示下列各级数：

   (a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{30}$ (b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+50^3$

   (c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ (d) $2\times4+4\times7+6\times10+8\times13+10\times16$

12.2 等差数列与等差级数

当一个数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，… 的每一项减去它的前一项所得的差都相等时，此数列叫做等差数列，而这个相等的差叫做公差，以 d 表示。例如，2，5，8，11，14，… 是一个等差数列，它的公差是3。又如，3，1，−1，−3，−5，… 也是一个等差数列，它的公差是−2。

通项公式

在一个等差数列中，若首项 $a_1=a$，公差是 d，那么这个数列的第2项 $a_2=a+d$，第3项 $a_3=a+2d$，第4项 $a_4=a+3d$，…。依此类推，可得等差数列的通项公式：

$$a_n=a+(n-1)d$$

例题 1

求等差数列 1，5，9，… 的第8项。

解 首项 $a=1$，公差 $d=5-1=4$

$\therefore$ 第8项 $a_8=1+(8-1)\times4=29$。

例题 2

等差数列 9，6，3，⋯ 的第几项是 -21？

解 $a=9$，$d=6-9=-3$

$\because \quad a_n=a+(n-1)d$

$\therefore \ -21=9+(n-1)(-3)$

$n=11$

$\therefore$ 第11项是 -21。

例题 3

已知一个等差数列的第 3 项是 -1，第 7 项是 -17。
求此数列的首项、公差及第 9 项。

解 $a_3=-1$

$a+2d=-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$a_7=-17$

$a+6d=-17 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

解 (1) 及 (2) 得，$d=-4$，$a=7$

$a_9=a+8d=7+8\times(-4)=-25$

$\therefore$ 此数列的首项是7，公差是 -4，第9项是 -25。

例题 4

从 100 到 300 共有几个 6 的倍数?

解 从 100 到 300 的 6 的倍数形成一个等差数列，
首项 $a=102$，末项 $a_n=300$，公差 $d=6$。

$$a_n=a+(n-1)d$$
$$300=102+(n-1)(6)$$
$$n=34$$

∴ 从 100 到 300 共有 34 个 6 的倍数。

例题 5

求18与33之间的四个数，使这六个数成一个等差数列。

解 在所求的等差数列中，$a=18$，$a_6=33$。

$$a_n=a+(n-1)d$$
$$33=18+5d$$
$$d=3$$

∴ 所求的四个数是 21，24，27，30。

随堂练习 3

1. 求等差级数 $-4-2\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+16$ 的项数。
2. 已知一等差数列的第 2 项是4，第 6 项是 -8。求此数列的第 10 项。
3. 从 50 到 500 共有几个 7 的倍数?
4. 求 30 与 54之间的五个数，使这七个数成一个等差数列。

等差中项

若在两个数 x 与 y 之间有一个数A，且 x，A，y 成一等差数列，那么A 就是 x 与 y 的等差中项。

$\because$ $A - x = y - A$

$\therefore$ $A = \dfrac{x+y}{2}$

例题 6

求 5 与 11 的等差中项。

解 所求的等差中项 $= \dfrac{5+11}{2} = 8$

随堂练习 4

1. 若三个数 9，x，17 成一个等差数列，求 x 的值。
2. 求 26 与 -11 的等差中项。
3. 若 3，x，12，y，21 成一个等差数列，求 x 及 y 的值。

求和公式

若 a_1，a_2，a_3，…，a_n 是一个等差数列，将数列中的各项相加所得的式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 就叫做等差级数或算术级数。

设S_n表示一个等差数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…的首n项之和，即

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$= a + (a+d) + \cdots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

S_n 也可写成

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \cdots + (a+d) + a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

将(1)及(2)各对应的项相加，得

$$2S_n = \underbrace{[2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \cdots + [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d]}_{\text{共有 } n \text{ 项}}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

由此可得等差数列的求和公式：

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$$

其中a为首项，d为公差，n为项数。
又因等差数列的第n项$a_n = a+(n-1)d$，所以以上的求和公式也可写成

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a+a_n)}$$

例题 7

求等差级数 $13+8+3+\cdots$ 的首 10 项之和。

解 $a=13$， $d=8-13=-5$

$$\therefore\ S_{10}=\frac{10}{2}[2\times13+(10-1)\times(-5)]$$
$$=-95$$

例题 8

求从 1 到 100 所有 5 的倍数之和。

解 从1到100的5的倍数形成一个等差数列，$a=5$，$d=5$。

$$a_n=100$$
$$5+(n-1)\times5=100$$
$$n=20$$

$\therefore$ 所求的和 $S_{20}=\dfrac{20}{2}(5+100)=1050$。

例题 9

若等差数列 13，21，29，⋯ 的首 n 项之和是 910，求 n 的值。

解 $a=13$， $d=21-13=8$， $S_n=910$

$$\frac{n}{2}[2\times13+(n-1)\times8]=910$$
$$\frac{n}{2}(8n+18)=910$$
$$4n^2+9n-910=0$$
$$(n-14)(4n+65)=0$$
$$n=14 \quad 或 \quad n=-\frac{65}{4}$$

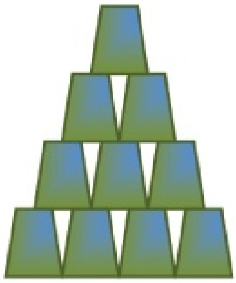
$\because$ n 为正整数

$\therefore$ $n=14$

思考题

叠杯子

将100个杯子叠成金字塔状，由下往上逐层递减一个杯子，使顶层只有一个杯子。问是否会恰巧堆完所有杯子?



例题 10

若一等差数列的首 n 项之和 $S_n=n^2+3n$，求

(a) 首项；

(b) 公差；

(c) 第 10 项；

(d) 从第 5 项到第 10 项之和。

解 (a) $a=S_1=1^2+3\times1=4$

(b) $\because\ a_2=S_2-S_1=(2^2+3\times2)-4=6$

$\therefore\ d=a_2-a_1=6-4=2$

(c) $a_{10}=S_{10}-S_9=(10^2+3\times10)-(9^2+3\times9)=22$

(d) 第 5 项到第 10 项之和为

$S_{10}-S_4=(10^2+3\times10)-(4^2+3\times4)=102$

补充资料

若已知某数列的首 n 项之和 S_n，则 $a_n=S_n-S_{n-1}$。

例题 11

-56，-50，-44，… 是一个等差数列。问从第 1 项加到第几项，其和才开始是正值?

解 $a=-56$，$d=-50-(-56)=6$

设此数列从第 1 项加到第 n 项之和是正值，则 $S_n>0$。

$$S_n>0$$

$$\frac{n}{2}[2\times(-56)+(n-1)\times6]>0$$

$$n\ (3n-59)>0$$

由于 $n>0$，所以

$$3n-59>0$$

$$n>19\frac{2}{3}$$

$\because$ n 为大于 $19\frac{2}{3}$ 的整数，n 的最小值是 20。

$\therefore$ 此数列从第 1 项加到第 20 项，其和才开始是正值。

随堂练习 5

1. 求等差级数 $22+18+14+10+\cdots$ 的首16项之和。
2. 若等差级数 $23+19+15+\cdots$ 的和是72，求其项数。
3. 一等差级数的首 n 项之和 $S_n=2n+3n^2$，求其首项及公差。

练习 12.2

1. 求等差数列 5，13，21，⋯ 的第 10 项。
2. 求等差数列 5，$4\frac{1}{4}$，$3\frac{1}{2}$，$2\frac{3}{4}$，⋯ 的第 8 项。
3. 求下列各等差数列的项数：

   (a) 4，9，⋯，64　　(b) $4\frac{1}{3}$，$3\frac{2}{3}$，3，⋯，$-10\frac{1}{3}$
4. 一等差数列的第 6 项是43，第 10 项是75，求其首项及公差。
5. 一等差数列的第 7 项是 -10，第 12 项是 -25，求此数列的第 15 项。
6. 从 100 到 200 共有几个 7 的倍数？
7. 求下列各数对的等差中项：

   (a) 8，20　　(b) -9，17
8. 求 22 与 58 之间的五个数，使这七个数成一个等差数列。
9. 求等差级数 $12+15+18+\cdots$ 的首 20 项之和。
10. 求等差级数 $18+10+2-6-\cdots$ 的首 12 项之和。
11. 求等差级数 $\frac{1}{6}+\frac{4}{3}+\frac{5}{2}+\cdots$ 的首 14 项之和。
12. 求 200 与 800 之间能被 13 整除的所有整数之和。
13. 若等差数列 -3，-7，-11，⋯ 的首 n 项之和是 -903，求 n 的值。

14. 若一等差数列的首三项是 x，$3x-4$，$2x+7$，求

(a) x 的值；

(b) 公差；

(c) 首 10 项之和。

15. 设一等差数列的首 n 项之和 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{4}$，求

(a) 首项；

(b) 公差；

(c) 第 6 项；

(d) 第 6 项加到第 10 项之和。

16. 三个整数成一等差数列，若数列之和是 30，三个数的平方和是 318，求这三个数。

17. 求 100 与 200 之间能同时被 2 及 3 整除的所有整数之和。

18. $-100-96-92-\cdots$ 是一个等差级数，问

(a) 从第几项开始是正值?

(b) 从第一项加到第几项之和才开始是正值?

19. 等差数列 20，$19\dfrac{1}{5}$，$18\dfrac{2}{5}$，$\cdots$ 的第一个负数项是第几项?

20. 等差级数 $10+9\dfrac{1}{5}+8\dfrac{2}{5}+\cdots$ 的第一个负数项是第几项? 从第一项加到第几项之和才开始是负值? 并求此和。

21. 设一个凸多边形各内角的度数成一个等差数列，公差是 6°，最大角是 135°，问此多边形有多少边?

22. 一等差数列的第 5 项是 3，首 10 项之和是 $26\dfrac{1}{4}$。问数列的第几项是 0?

23. 一等差级数的首 6 项之和是 96，首 10 项之和等于首 20 项之和的三分之一，求此级数的首项及第 10 项。

24. 设 $5^2\times5^4\times5^6\times\cdots\times5^{2n}=(0.04)^{-28}$，求 n 的值。

25. 若一等差级数的第 9 项等于第 5 项的两倍，求其首 9 项之和与首 5 项之和的比值。

12.3 等比数列与等比级数

当一个数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，… 的每一项与它的前一项的比都相等时，此数列叫做等比数列，而这个相等的比叫做公比，以 r 表示。

例如，3，6，12，24，… 是一个等比数列，它的公比是 2。又如，5，$-\frac{5}{3}$，$\frac{5}{9}$，$-\frac{5}{27}$，… 也是一个等比数列，它的公比是 $-\frac{1}{3}$。

思考题

−1，1，−1，1，… 是不是一个等比数列？

通项公式

在一个等比数列中，若首项 $a_1=a$，公比是 r，那么这个数列的第 2 项 $a_2=ar$，第 3 项 $a_3=ar^2$，第 4 项 $a_4=ar^3$，…。依此类推，可得等比数列的通项公式：

$$a_n=ar^{n-1}$$

例题 1

求等比数列 2，6，18，… 的第 6 项。

解 $a=2$，$r=\frac{6}{2}=3$

$\therefore\ a_6=ar^{6-1}=2\times3^5=486$

例题 2

等比数列 16，−8，4，… 的第几项是$\frac{1}{4}$？

解 $a=16$，$r=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{4}$

$$ar^{n-1}=\frac{1}{4}$$

$$16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{6}$$

$$n=7$$

∴ 数列的第 7 项是$\frac{1}{4}$。

补充资料

若等比数列的公比是负数时，此数列是一个正、负数相间隔的数列。

例题 3

若一等比数列的第 3 项是 972，第 8 项是 128，求其首项、公比及第 5 项。

解 $a_3=972$，$a_8=128$

$ar^2=972$ ………… (1)

$ar^7=128$ ………… (2)

解 (1) 及 (2) 得，$r=\frac{2}{3}$，$a=2187$

∴ $a_5=ar^4=2187\left(\frac{2}{3}\right)^4=432$

思考题

若等比数列的第 3 项是 128，第 8 项是 972，求其公比。

例题 4

求3与3888之间的三个数,使这五个数成一个等比数列。

解 $a=3$, $a_5=3888$

$ar^4=3888$

$3r^4=3888$

$r=\pm 6$

当 $r=6$ 时，所求的三个数是18，108，648；

当 $r=-6$ 时，所求的三个数是 −18，108，−648 。

随堂练习 6

1. 求等比数列12，−18，27，… 的第6项。
2. 求级数 $\frac{1}{64}-\frac{1}{32}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\cdots-512$ 的项数。
3. 一个等比数列的第5项是3，第9项是 $\frac{1}{27}$，求此数列的首项及公比。
4. 求 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{128}$ 之间的五个数，使这七个数成一个等比数列。

等比中项

若在两个数 x 与 y 之间有一个数 G，且 x，G，y 成一等比数列，那么 G 就是 x 与 y 的等比中项。

$$\because \frac{G}{x}=\frac{y}{G}$$

$$\therefore G^2=xy$$

$$G=\pm\sqrt{xy}$$

例题 5

求 3 与 27 的等比中项。

解 所求的等比中项 $=\pm\sqrt{3\times 27}=\pm 9$。

随堂练习 7

求 $\frac{27}{8}$ 与 $\frac{2}{3}$ 的等比中项。

求和公式

若 a_1，a_2，a_3，⋯，a_n 是一个等比数列，将数列中的各项相加所得的式子 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 就叫做等比级数或几何级数。设 S_n 表示一个等比数列的首 n 项之和，即

$$\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n \\ &= a+ar+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \end{aligned}$$

(1) $\times r$ 得，$rS_n = ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$ $\qquad$ ………… (2)

(1) $-$ (2) 得，$S_n-rS_n=a-ar^n$

由此可得等比数列的求和公式：

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (r\neq 1)$$

注意

当 $r=1$ 时，$S_n=na$。

例题 6

求等比级数 4+8+16+⋯ 的首 6 项之和。

解 $a=4$，$r=\dfrac{8}{4}=2$

$$\therefore\ S_6=\frac{4\,(1-2^6)}{1-2}=252$$

例题 7

求等比级数 2−8+32−128+⋯+8192 之和。

解 $a=2$，$r=\dfrac{-8}{2}=-4$，$a_n=8192$

$$ar^{n-1}=8192$$

$$2\,(-4)^{n-1}=8192$$

$$(-4)^{n-1}=4096$$

$$(-4)^{n-1}=(-4)^6$$

$$n=7$$

$\therefore$ 所求之和 $S_7=\dfrac{2\left[1-(-4)^7\right]}{1-(-4)}=6554$。

例题 8

若等比数列 108，72，48，⋯ 的首 n 项之和是 $281\frac{1}{3}$，求 n 的值。

解 $a=108$，$r=\frac{72}{108}=\frac{2}{3}$，$S_n=281\frac{1}{3}=\frac{844}{3}$

$$\frac{108\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}=\frac{844}{3}$$

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{211}{243}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{32}{243}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$n=5$$

随堂练习 8

1. 求等比级数 $3+6+12+\cdots$ 的首 8 项之和。
2. 求等比级数 $1+\sqrt{3}+3+\cdots+81$ 之和。
3. 若等比数列 $4\frac{4}{5}$，$1\frac{3}{5}$，$\frac{8}{15}$，⋯ 的首 n 项之和是 $7\frac{145}{729}$，求 n 的值。

无穷等比级数的和

若 a_1，a_2，a_3，…是一个有无穷多个项的等比数列，式子 $a_1+a_2+a_3+\cdots$ 就叫做无穷等比级数，其和以 S_∞ 来表示。

设首项为a，公比为r。当 $r\neq1$ 时，等比数列首 n 项的求和公式为 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$。

若 $-1<r<1$，n 越来越大时，r^n 无限趋近于0。

因此，无穷等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots$ 之和为

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}\quad(-1<r<1)$$

补充资料

当 $r\leq-1$ 或 $r\geq1$ 时，无穷等比级数之和S_∞是不存在的，例如$1+1+1+\cdots$，$1+2+4+\cdots$或$1-2+4-8+\cdots$。当 n 越来越大时，首 n 项之和并不趋近于任何有限的数，这样的无穷等比级数之和就没有意义。

例题 9

求无穷等比级数 $36+12+4+\cdots$ 之和。

解 $a=36$，$r=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\ S_\infty=\frac{36}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=54$$

例题 10

使用无穷等比级数的求和公式将下列循环小数化为分数：

(a) $0.\dot{2}\dot{3}$ (b) $0.2\dot{1}\dot{3}$

解 (a) $0.\dot{2}\dot{3} = 0.232323\cdots$

$$= 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \cdots$$

这是一个无穷等比级数，其首项 $a = 0.23$，

公比 $r = 0.01$。

$$\therefore\ S_\infty = \frac{0.23}{1-0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$$

$$\therefore\ 0.\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}$$

(b) $0.2\dot{1}\dot{3} = 0.2131313\cdots$

$$= 0.2 + (0.013 + 0.00013 + 0.0000013 + \cdots)$$

以上括弧内的式子也是一个无穷等比级数，

其首项 $a = 0.013$，公比 $r = 0.01$。

$$\therefore\ S_\infty = \frac{0.013}{1-0.01} = \frac{0.013}{0.99} = \frac{13}{990}$$

$$\therefore\ 0.2\dot{1}\dot{3} = \frac{2}{10} + \frac{13}{990} = \frac{211}{990}$$

随堂练习 9

1. 求下列各无穷等比级数之和：
   (a) $16+8+4+\cdots$ (b) $18-12+8+\cdots$
   (c) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\cdots$ (d) $\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots$

2. 使用无穷等比级数的求和公式将下列各循环小数化为分数：
   (a) $0.\dot{3}$ (b) $0.\dot{5}\dot{3}$

练习 12.3

1. 求等比数列 2，4，8，⋯ 的第 10 项。
2. 求等比数列 243，−162，108，⋯ 的第 8 项。
3. 求下列各等比数列的项数：
   (a) 8，4，2，1，⋯，$\frac{1}{64}$
   (b) 6，−18，54，⋯，−13122
   (c) 54，36，24，⋯，$3\frac{13}{81}$
4. 一个等比数列的第 2 项是12，第 4 项是108，求此数列的首项及公比。
5. 一个等比数列的第 3 项是 $1\frac{1}{3}$，第 8 项是 $-10\frac{1}{8}$，求此数列的第 5 项。
6. 求 2 与 18 的等比中项。
7. 若 $x+12$，$x+4$，$x-2$ 成一等比数列，求 x 的值及数列的公比。
8. 求 14 与 224 之间的三个数，使这五个数成一个等比数列。
9. 求等比级数 $2+6+18+\cdots$ 的首 6 项之和。
10. 求等比级数 $32-16+8-\cdots$ 的首 8 项之和。
11. 求等比级数 $14-28+56-\cdots+3584$ 之和。

12. 若等比级数的首项是7，公比是3，级数之和是847，求此级数的项数及末项。

13. 求下列各无穷等比级数之和：

(a) $24+18+13\frac{1}{2}+\cdots$

(b) $27-9+3-1+\cdots$

(c) $2-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}+\cdots$

14. 若一无穷等比级数之和是24，首项是30，求公比。

15. 使用无穷等比级数的求和公式将下列各循环小数化为分数：

(a) $0.\dot{4}\dot{5}$　　(b) $0.\dot{0}3\dot{7}$

(c) $0.2\dot{1}\dot{8}$　　(d) $1.\dot{3}$

16. 三个整数成一等比数列，它们的和是42，积是512，求这三个数。

17. 一等比级数的首6项之和是其首3项之和的9倍，求公比。

18. 一等比级数的首项是16，末项是$\frac{1}{2}$，和是$31\frac{1}{2}$，求公比及项数。

19. 一个等比数列的第3项比第2项少6，第2项比第1项少9，求此数列的第4项及首4项之和。

20. 一个公比为正值的无穷等比级数之和是9，首两项之和是5，求第4项。

21. 若$x+1$，$x-2$，$\frac{1}{2}x$是一个无穷等比级数的首三项，求

(a) x的值；

(b) 公比；

(c) 级数的和。

12.4 简易特殊级数之和

本节将讨论三个简易特殊级数$\sum_{k=1}^{n}k$，$\sum_{k=1}^{n}k^2$，$\sum_{k=1}^{n}k^3$。

$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n$ 是一个等差级数，

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n}{2}[2\times1+(n-1)\times1]$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

因此，可得**自然数求和公式**：$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n}k^2$ 及 $\sum_{k=1}^{n}k^3$ 的推导不在本书的讨论范围内。

以下列出这两个特殊级数的求和公式：

自然数平方求和公式：$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

自然数立方求和公式：
$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

例题 1

求级数 $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$ 之和。

解
$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2&=\sum_{k=1}^{10}k^2\\&=\frac{1}{6}(10)\ (10+1)\ (20+1)\\&=385\end{aligned}$$

例题 2

求级数 $11^3+12^3+\cdots+20^3$ 之和。

解
$$\begin{aligned}11^3+12^3+\cdots+20^3&=\sum_{k=1}^{20}k^3-\sum_{k=1}^{10}k^3\\&=\frac{1}{4}(20)^2(20+1)^2-\frac{1}{4}(10)^2(10+1)^2\\&=41075\end{aligned}$$

例题 3

求下列各级数之和：

(a) $\sum_{k=1}^{10}(3k-2)$ (b) $\sum_{k=5}^{12}(2k-1)^2$

解 (a)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(3k-2)&=3\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}2\\&=3\times\frac{(10)\ (10+1)}{2}-2\times10\\&=145\end{aligned}$$

(b) $\sum_{k=5}^{12}(2k-1)^2=\sum_{k=5}^{12}(4k^2-4k+1)$

$$=4\sum_{k=5}^{12}k^2-4\sum_{k=5}^{12}k+\sum_{k=5}^{12}1$$

$$=4\left[\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{4}k^2\right]-4\left[\sum_{k=1}^{12}k-\sum_{k=1}^{4}k\right]+(12-4)$$

$$=4\left[\frac{1}{6}(12)(13)(25)-\frac{1}{6}(4)(5)(9)\right]-4\left[\frac{(12)(13)}{2}-\frac{(4)(5)}{2}\right]+8$$

$$=2216$$

例题 4

求级数 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$ 之和。

解 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}[(2n+1)+3]$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

例题 5

求级数 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots$ 的首 n 项之和。

解 $a_n=n(n+1)(n+2)$

$$
\begin{aligned}
&1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)\\
&=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)\\
&=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\\
&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+3\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]+2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&=\frac{1}{4}n(n+1)[n(n+1)+2(2n+1)+4]\\
&=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)\\
&=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}
$$

随堂练习 10

1. 求下列各级数之和：

   (a) $\sum_{k=1}^{8}3k$　　(b) $\sum_{k=1}^{12}k^2$

   (c) $\sum_{k=3}^{10}(2k-3)$　　(d) $\sum_{k=7}^{13}3k^2$

2. 已知一数列的第 n 项是 $n(n+3)$，求此数列的首 20 项之和。
3. 求级数 $1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+n(n+2)$ 之和。

练习 12.4

1. 求下列级数之和：

(a) $\sum_{k=1}^{8} 5k^2$

(b) $\sum_{k=1}^{9} k^3$

(c) $\sum_{n=1}^{10} (3n-5)$

(d) $\sum_{k=3}^{6} 2k^3$

(e) $\sum_{k=6}^{10} (2k^2+3)$

(f) $\sum_{n=11}^{15} (n^2+2n)$

(g) $\sum_{n=2}^{6} n(n^2-n+1)$

2. 已知数列的第 n 项是 $3n^2+n$，求首 10 项之和。
3. 求级数 $1\times3+2\times7+3\times11+\cdots$ 的首 n 项之和。
4. 求级数 $1^2+3^2+5^2+\cdots+15^2$ 之和。

总复习题 12

1. 以 $\sum$ 符号表示下列各级数：

(a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{49}{50}$

(b) $6-7+8-9+\cdots$

(c) $2\times5+3\times7+4\times9+\cdots+15\times31$

2. 一数列的通项公式是 $a_n=\frac{3^n}{2n-3}$，写出此数列的首五项。
3. 写出级数 $\sum_{k=1}^{10}(2k^2-3)$。

4. 写出级数 $\sum_{k=3}^{7}(3^k-2^k-k)$ 的首项、末项及项数。

5. 求等差级数 $-4-2\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+16$ 的项数。

6. 若 $x+1$，$2x+1$，$x-3$ 是一个等差数列的首三项，求

(a) x 的值；

(b) 第10项到第20项之和。

7. 求28与-12之间的四个数，使这六个数成一个等差数列。

8. 求下列各等差级数之和：

(a) $7+11+15+\cdots$ 至第10项

(b) $20+18\frac{1}{2}+17+\cdots$ 至第16项

(c) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\cdots+13\sqrt{2}$

9. 设一等差数列的首 n 项之和 $S_n=n(1+2n)$，求

(a) 首项；

(b) 公差；

(c) 首20项之和。

10. 已知一等差级数为 $33+27+21+\cdots$。

(a) 若首 n 项之和为105，求 n 的值。

(b) 若首 n 项之和为负值，求 n 的最小值。

11. 求150与300之间能同时被3及5整除的所有整数之和。

12. 求100与200之间能被2或3整除的所有整数之和。

13. 求50与100之间不能被5整除的所有整数之和。

14. 等差级数 $20+16\frac{1}{4}+12\frac{1}{2}+\cdots$ 的第一个负数项是第几项？

15. 三个数成一等差数列，它们的和是15，平方和是83，求这三个数。

16. 求级数 $18^2-17^2+16^2-15^2+14^2-13^2+\cdots+2^2-1^2$ 之和。

17. 求数列 20，-10，5，$-2\frac{1}{2}$，$\cdots$ 的通项公式。

18. 有三个整数 $x-3$，$x+1$，$4x-2$ 成一等比数列。若此数列之和是 S，公比是 r，求 $S+r$ 的值。

19. 求$\dfrac{1}{3}$与$\dfrac{1}{5}$的等比中项。

20. 求$-\dfrac{1}{4}$与$-\dfrac{1}{256}$之间的五个数，使这七个数成一个等比数列。

21. 求级数$\sum\limits_{n=5}^{15} n^2(3n+1)$之和。

22. 求级数$5^2+7^2+9^2+\cdots+25^2$之和。

23. 求级数$2\times3+3\times12+4\times27+\cdots+(n+1)\times3n^2$之和。

13. 联立方程式

学习目标：

- 掌握二元联立方程式的解法（一个二元一次方程式与一个二元二次方程式）
- 掌握三元一次联立方程式的解法

联立方程式 (或方程组) 是由两个或两个以上的方程式所组成。本章只讨论由一个二元一次方程式与一个二元二次方程式所组成的二元联立方程式，及由三个三元一次方程式所组成的三元一次联立方程式。

13.1 二元联立方程式

解一个二元一次方程式与一个二元二次方程式所组成的二元联立方程式，一般上使用代入法。将一次方程式中的其中一个未知数化为主项代入二次方程式，从而消去一个未知数，得到一个一元二次方程式。解一元二次方程式所得的根代入原方程组的一次方程式，就可以求得另一个未知数的值。

例题 1

解方程组 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \end{cases}$。

解 $\begin{cases} x+y=4 & \text{............ (1)} \\ xy=2 & \text{............ (2)} \end{cases}$

由 (1)，得 $y=4-x$ .... (3)

将 (3) 代入 (2)，得 $x(4-x)=2$

$$x^2-4x+2=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$=2\pm\sqrt{2}$$

(续) 将 $x=2+\sqrt{2}$ 代入 (3)，得 $y=4-\left(2+\sqrt{2}\right)$
$$=2-\sqrt{2}$$

将 $x=2-\sqrt{2}$ 代入 (3)，得 $y=4-\left(2-\sqrt{2}\right)$
$$=2+\sqrt{2}$$

$$\therefore \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ y=2-\sqrt{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=2-\sqrt{2} \\ y=2+\sqrt{2} \end{cases}$$

例题 2

解方程组 $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2+xy-2y^2=4 \end{cases}$。

解 $\begin{cases} 2x-3y=1 & \text{............ (1)} \\ x^2+xy-2y^2=4 & \text{............ (2)} \end{cases}$

由 (1)，得 $x=\dfrac{3y+1}{2}$ .... (3)

将 (3) 代入 (2)，得 $\left(\dfrac{3y+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3y+1}{2}\right)y-2y^2=4$

$$\frac{9y^2+6y+1}{4}+\frac{3y^2+y}{2}-2y^2-4=0$$
$$9y^2+6y+1+6y^2+2y-8y^2-16=0$$
$$7y^2+8y-15=0$$
$$(y-1)(7y+15)=0$$
$$y=1 \quad \text{或} \quad y=-\frac{15}{7}$$

(续) 将 $y=1$ 代入 (3)，得 $x=2$

将 $y=-\dfrac{15}{7}$ 代入 (3)，得 $x=-\dfrac{19}{7}$

$$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-\dfrac{19}{7} \\ y=-\dfrac{15}{7} \end{cases}$$

随堂练习 1

解下列各方程组：

1. $\begin{cases} 2x-3y=11 \\ xy=-5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x^2-2xy=8 \end{cases}$

练习 13.1

解下列各方程组：

1. $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-y=4 \\ xy=4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+4y=-39 \\ xy=30 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x^2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x-y=3 \\ y^2-6x^2=25 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=3 \\ (x+2)(y+3)=12 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x-6y=-1 \\ 25x^2+36y^2=61 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+4y=5 \\ 2x^2+21xy+27y^2=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{10}=\dfrac{5}{6} \\ x(y-2)=2y+3 \end{cases}$

13.2 三元一次联立方程式

解三个三元一次方程式所组成的联立方程式，可使用代入法或加减法先消去其中一个未知数，从而得出只含两个未知数的二元一次联立方程式。解这个联立方程式所得的两个未知数的值，代入其中一个三元一次方程式，就可求出所消去未知数的值。

例题 1

解方程组 $\begin{cases} 2x-y-3z=-6 \\ 4x-4y+z=7 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$ 。

解 $\begin{cases} 2x-y-3z=-6 \text{ .... } (1) \\ 4x-4y+z=7 \text{ .... } (2) \\ x+2y-z=1 \text{ .... } (3) \end{cases}$

由 (3)，得 $x=1-2y+z$ .... (4)

将 (4) 代入 (1)，得 $2(1-2y+z)-y-3z=-6$

$5y+z=8$ .... (5)

将 (4) 代入 (2)，得 $4(1-2y+z)-4y+z=7$

$12y-5z=-3$ .... (6)

由 (5)，得 $z=8-5y$ .... (7)

将 (7) 代入 (6)，得 $12y-5(8-5y)=-3$

$y=1$

将 $y=1$ 代入 (7)，得 $z=3$

将 $y=1$，$z=3$ 代入 (4)，得 $x=2$

$\therefore$ $x=2$，$y=1$，$z=3$

例题 2

解方程组$\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 3x-2y-z=7 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases}$。

解

$$\begin{cases} x+3y-2z=4 & \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x-2y-z=7 & \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ 4x-2y+3z=5 & \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

(2)×2 得 $6x-4y-2z=14$ ………… (4)

(4)−(1) 得 $5x-7y=10$ ………………… (5)

(2)×3 得 $9x-6y-3z=21$ ………… (6)

(6)+(3) 得 $13x-8y=26$ ………………… (7)

(5)×8 得 $40x-56y=80$ ………………… (8)

(7)×7 得 $91x-56y=182$ ……………… (9)

(9)−(8) 得 $51x=102$

$x=2$

将 $x=2$ 代入 (5)，得 $y=0$

将 $x=2$，$y=0$ 代入 (2)，得 $z=-1$

$\therefore$ $x=2$，$y=0$，$z=-1$

例题 3

解方程组 $\begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=0 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{z}=-9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{3}{z}=6 \end{cases}$。

解 令 $u=\dfrac{1}{x}$，$v=\dfrac{1}{y}$，$w=\dfrac{1}{z}$，得

$$\begin{cases} 3u-v+2w=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2u+v-4w=-9 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ u+v+3w=6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

(1)+(2) 得 $5u-2w=-9$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4)

(1)+(3) 得 $4u+5w=6$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (5)

(4)×5 得 $25u-10w=-45$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (6)

(5)×2 得 $8u+10w=12$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (7)

(6)+(7) 得 $33u=-33$

$u=-1$

$\therefore$ $x=-1$

将 $u=-1$ 代入 (4)，得 $w=2$

$\therefore$ $z=\dfrac{1}{2}$

将 $u=-1$，$w=2$ 代入 (1)，得 $v=1$

$\therefore$ $y=1$

$\therefore$ $x=-1$，$y=1$，$z=\dfrac{1}{2}$

随堂练习 2

解方程组 $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 2x-y+z=6 \\ x-y-3z=-3 \end{cases}$。

练习 13.2

解下列各方程组：

1. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-3y+z=0 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y-z=-4 \\ 3x+4y=-6 \\ x+3y+3z=4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x+y-3z=8 \\ x+4y-z=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=z-5 \\ y+z=x-3 \\ z+x=y+1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+4y+2z=4 \\ 2x-2y+z=4 \\ x-2y+3z=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x+2y=13 \\ y-3z=-1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+2y-z=-1 \\ x+3y+z=-8 \\ 3x-2y+3z=9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{2}{z}=4 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=-11 \end{cases}$

总复习题13

解下列各方程组：

1. $\begin{cases} 3x+4y=24 \\ xy=12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y=5 \\ 5x^2+4y^2+12x=29 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-3y+2=0 \\ 2y+5z-19=0 \\ 5x-7z+16=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y+z=9 \\ 3x+y-2z=1 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-3y-z=4 \\ 4x+y+2z=3 \\ x-4y-3z=2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z-1}=2 \\ \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y+2}-\dfrac{1}{z-1}=7 \\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+2}-\dfrac{4}{z-1}=8 \end{cases}$

14. 矩阵与行列式

学习目标：

- 理解矩阵的概念
- 进行矩阵的运算（矩阵的加减法、矩阵的纯量积，矩阵相乘）
- 掌握二阶及三阶行列式的计算
- 掌握行列式的性质
- 掌握二阶及三阶逆矩阵的求法
- 应用逆矩阵或高斯消元法解二元或三元一次方程组

14.1 矩阵

矩阵的定义

由一些数所排成的矩形阵列叫做矩阵，例如：

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-3 & 5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3 & 1 & 8 & -4\\2 & 0 & 9 & 3\\1 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\1 & 4 & 5\end{pmatrix}。$$

一个矩阵的一般形式如下，

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

简记作 A。

在一个矩阵中，横向的叫做行，纵向的叫做列，矩阵中的每一个数叫做此矩阵的元素，其中位于第 i 行第 j 列的元素以 a_{ij} 表示。例如， a_{32} 表示位于第三行第二列的元素。所以，一个矩阵也可用 (a_{ij}) 来表示，或用 $(a_{ij})_{m\times n}$ 来表示矩阵有 m 行 n 列。

一个有 m 行 n 列的矩阵叫做 $m\times n$ 矩阵，而 $m\times n$ 则是这个矩阵的阶。例如，

$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-3 & 5\end{pmatrix}$ 是一个 3×2 矩阵， $\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\1 & 4 & 5\end{pmatrix}$ 是一个 2×3 矩阵。

当 $m=n$ 时，矩阵叫做 n 阶方阵。例如， $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ 是一个二阶方阵。

当 $m=1$ 时，即矩阵只有一行，这个矩阵叫做行矩阵。例如，$(1\quad 2\quad 5)$ 是一个行矩阵。

补充资料

一般上，矩阵使用大写字母来表示。

当 $n=1$ 时，即矩阵只有一列，这个矩阵叫做列矩阵。例如，$\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ 是一个列矩阵。

相等矩阵

若两个矩阵 A 及 B 的阶相同，且所有对应的元素都相等，A 及 B 就叫做相等矩阵，记作 $A=B$。

零矩阵

所有元素都是零的矩阵叫做零矩阵，记作 O。零矩阵可以是任意阶。例如，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$是一个2×3 零矩阵，$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 是一个2×2 零矩阵，或二阶零方阵。

单位矩阵

由左上角至右下角的主对角线上的元素都是 1，其余元素都是零的方阵叫做单位矩阵，记作 I。单位矩阵的形式如下：

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

转置矩阵

将一矩阵A的行与列依次对调，所得的矩阵叫做A的转置矩阵，记作 A'， A^t 或 A^T。本章皆使用 A' 来表示转置矩阵。例如，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{pmatrix} \text{ 的转置矩阵是 } A'=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}。$$

显然的， $m\times n$ 矩阵的转置矩阵是 $n\times m$ 矩阵。

思考题

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，则 $(A')'$ = ?

例题 1

设 $\begin{pmatrix}a+1 & a+c\\ c & d+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -b\\ b-d & 1\end{pmatrix}$，求 a，b，c 及 d 的值。

解 根据相等矩阵的义，得

$$\begin{cases}a+1=-2\\ a+c=-b\\ c=b-d\\ d+2=1\end{cases}$$

解方程组，得 $a=-3$，$b=1$，$c=2$，$d=-1$。

练习 14.1

1. 写出下列各矩阵的阶：

(a) $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$　　(c) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

2. 若 $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -2 & -4\\ 2 & -4 & 3 & -1\\ 0 & 6 & 4 & 7\end{pmatrix}$，则元素 $a_{23}=$ _____， $a_{34}=$ _____ 。

3. 若 $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & x\end{pmatrix}$，求$x$的值。

14.2 矩阵的加减法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 及 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个 $m\times n$ 矩阵。

A与B之和是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$。

A与B之差是一个 $m\times n$ 矩阵 $D=(d_{ij})_{m\times n}$，其中 $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$。

注意

阶数不相等的矩阵不能相加或相减。例如，矩阵$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$及矩阵$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$的阶数不相等，因此它们不能相加或相减。

例题 1

计算下列各式：

(a) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & -6\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\\ 1 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

解 (a) $$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & -6\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & -2+1 & 3-6\\ 0+1 & 4+3 & 5+7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -1 & -3\\ 1 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix}4 & 5\\3 & 4\\1 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 4\\2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2 & 5-4\\3-3 & 4-4\\1-2 & -5-(-3)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\\-1 & -2\end{pmatrix}$

矩阵的加法有以下的性质：

设 A、B 及 C 为同阶矩阵，则

(1) 交换律 $A+B=B+A$

(2) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$

补充资料

若A是一个 $m\times n$ 矩阵，O是一个 $m\times n$ 零矩阵，则 $A\pm O=A$。

例题 2

设 $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\-2 & 1\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & -4\end{pmatrix}$。计算下列各式：

(a) $(A+B)'$ (b) $A-B'$

(c) $A+A'$ (d) $B-B'$

解 (a) $A+B=\begin{pmatrix}3 & 5\\-2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 8\\-1 & -3\end{pmatrix}$

$\therefore\ (A+B)'=\begin{pmatrix}1 & -1\\8 & -3\end{pmatrix}$

补充资料

设 A 及 B 是两个 $m\times n$ 矩阵，则 $(A\pm B)'=A'\pm B'$。

(b) $A-B'=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -5 & 5\end{pmatrix}$

(c) $A+A'=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

(d) $B-B'=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

补充资料

设 A 是一个方阵。

若 $A=A'$，我们称 A 为对称矩阵，如 (c) 小题的 $\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$。

若 $A=-A'$，我们称 A 为反对称矩阵，如 (d) 小题的 $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$。

对于任意方阵 A，$A+A'$ 是一个对称矩阵，$A-A'$ 是一个反对称矩阵。

随堂练习 1

设 $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -7\\ 5 & 4 & 0\\ 3 & -2 & -3\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & -5\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$，计算下列各式：

(a) $A+B'$

(b) $(A-B)'$

练习 14.2

设 $P=\begin{pmatrix}-5 & 4 & 2\\ 6 & -4 & 3\\ -2 & 1 & 6\end{pmatrix}$ 及 $Q=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$，计算下列各式：

(a) $(P+Q)'$

(b) $Q'-P'$

(c) $(P'-Q)'$

(d) $P'-(I-Q)'$

14.3 矩阵的纯量积

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，k 为任意实数，则 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$，叫做矩阵 A 与纯量 k 的纯量积。例如：

$$k\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4k & -k & 3k\\ 2k & 5k & 6k\end{pmatrix}。$$

矩阵的纯量积有以下的性质：

设 r 及 s 为实数，A 及 B 为同阶矩阵，则

(1) $r(A+B)=rA+rB$

(2) $(r+s)A=rA+sA$

(3) $(rs)A=r(sA)$

例题 1

计算下列各式：

(a) $2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$

解 (a) $$2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 8 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 0 & 4\\ 12 & -4 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ 16 & 1 & 17\end{pmatrix}$$

例题 2

设 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$。

若 $3X-2B=X+4A$，求矩阵 X。

解 $$\begin{aligned}3X-2B&=X+4A\\ 2X&=4A+2B\\ X&=2A+B\\ &=2\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-5 & 4 & 3\\ 5 & -1 & 5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

随堂练习 2

设 $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$，计算下列各式：

(a) $3A+B$ (b) $2A-3B$

(c) $4B-2A$ (d) $A'-2B'$

练习 14.3

1. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ 及 $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。计算下列各式：

   (a) $2A-3B+4C$ (b) $4A'-(C+B')$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 及 $C=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$。计算下列各式：

   (a) $3A+B-2C$ (b) $3(A+C)'-B'$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$。求下列各式中的矩阵 X：

   (a) $X+4A=3(X+B)-A$

   (b) $2A-B+X'=B$

14.4 矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times p}$ 是一个 $m\times p$ 矩阵，$B=(b_{ij})_{p\times n}$ 是一个 $p\times n$ 矩阵，则 A 与 B 之乘积 AB 是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$。

注意

两个矩阵相乘，第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数，否则就不能相乘。$A_{m\times p}$ 与 $B_{p\times n}$ 的乘积 C 是一个 $m\times n$ 矩阵，即 $A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}$。

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1p}b_{p1}$$

$$c_{2n}=a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2p}b_{pn}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

例题 1

计算下列各式：

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 (a)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times3+(-1)\times(-5)+0\times9 \\ 1\times3+3\times(-5)+4\times9 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 11 \\ 24 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+0\times(-2) & 2\times4+0\times0 & 2\times3+0\times1\\4\times1+1\times(-2) & 4\times4+1\times0 & 4\times3+1\times1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2 & 8 & 6\\2 & 16 & 13\end{pmatrix}$$

思考题

若 $A_{m\times n}$ 是一个矩阵，$I_{m\times m}$ 及 $I_{n\times n}$ 是单位矩阵，则

$I_{m\times m}\times A_{m\times n}=?$

$A_{m\times n}\times I_{n\times n}=?$

例题 2

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，AB 及 BA 是否有意义？若有意义，求它们的积。

解 A是一个 2×3 矩阵，B是一个 3×1 矩阵。由于A的列数等于 B 的行数，所以 AB 有意义。

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times1+2\times0+3\times(-1)\\0\times1+1\times0+1\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$

由于 B 的列数不等于 A 的行数，所以 BA 没有意义。

注意

由例题 2 可知，AB 有意义时，BA 不一定有意义。

例题 3

已知下列的矩阵 A 及 B，求 AB 及 BA：

(a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(b) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$

解

(a) $AB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

(b) $AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 6\\ 13 & -7 & 0\\ -9 & 5 & 1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 11 & -8\end{pmatrix}$

注意

由例题 3 可知，一般上 $AB \neq BA$。

例题 4

已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$，求 $(AB)'$ 及 $B'A'$。

解

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 6\\ 13 & -7 & 0\\ -9 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$(AB)'=\begin{pmatrix}-2 & 13 & -9\\ 2 & -7 & 5\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B'A'=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 13 & -9\\ 2 & -7 & 5\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

补充资料

$(AB)'=B'A'$ 恒成立。

思考题

$(AB)'$ 是否会恒等于 $A'B'$？

例题 5

设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 及 $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$。

求 (AB) C 及 A (BC)。

解

$$\begin{aligned}(AB)\,C &= \left(\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-5 & 7\\ 7 & -8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\,(BC) &= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -6\\ -1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-5 & 7\\ 7 & -8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

矩阵的乘法有以下的性质：

设 k 是实数，A、B 及 C 是矩阵，则

(1) 结合律 $(AB)\,C = A\,(BC)$

(2) 分配律 $A\,(B + C) = AB + AC$

$(B + C)\,A = BA + CA$

(3) $k\,(AB) = (kA)\,B = A\,(kB)$

随堂练习 3

计算下列各式:

1. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

练习 14.4

计算下列各式(1至8):

1. $(1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)$

3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -6 & -4 & 2 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

判断下列各矩阵，AB及BA是否有意义。若有意义，求它们的乘积。(9至10)

9. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\3 & 0 & 2\end{pmatrix}$

11. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -2\\-3 & 4\end{pmatrix}$ 及 $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 0\end{pmatrix}$。验证下列各式：

(a) $(AB)C=A(BC)$ (b) $A(B+C)=AB+AC$

(c) $(A+B)C=AC+BC$ (d) $(AB)'=B'A'$

12. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\-3 & 1\end{pmatrix}$ 及 $C=\begin{pmatrix}5 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$。计算下列各式：

(a) $A(B+C)$ (b) $B(2A'+3C)$

13. 计算：

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & 4\\-1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\3 & -3 & 0\\1 & 4 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & 4\\-1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\2 & -2 & 4\\-1 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

14.5 行列式

一个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式记作 det A。当 $n\geq 2$ 时，行列式也可记作 $|A|$。行列式是一个数值。

当 $n=1$ 时，$A=(a)$ 的行列式是 a。

注意

勿将行列式的记号 $|\cdot|$ 与绝对值的记号混淆。

二阶行列式

对于一个二阶方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 。

例题 1

求下列各行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$　　(c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$

解

(a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

(b) $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-4)\times 3 - 2\times 1$

$= -14$

(c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\times(-1) - 3\times(-3)$

$= 11$

随堂练习 4

求下列各行列式的值：

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$　　2. $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ -8 & -9 \end{vmatrix}$　　3. $\begin{vmatrix} 12 & -20 \\ -21 & 35 \end{vmatrix}$

三阶行列式

对于一个三阶方阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，其行列式的定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

三阶行列式也可按照萨拉斯法来展开：依序将行列式的第一及第二列重抄于数组的右边，成为第四及第五列，如图 14-1 所示。将此 15 个数中位于斜线上的每三个数相乘。各实线上的三个数的积相加后，再逐一减去各虚线上的三个数的积，便可求得三阶行列式的值。

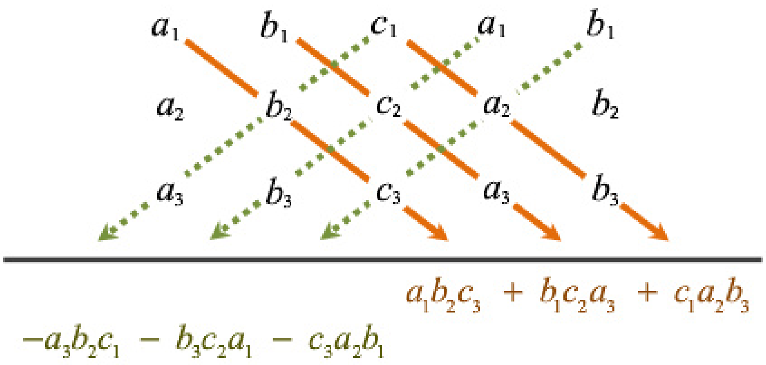


图 14-1

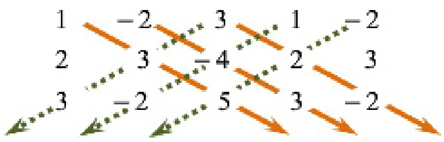
注意

萨拉斯法只适用于三阶行列式。

例题 2

求三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值。

解 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 15+24-12-(27+8-20)=12$



随堂练习 5

求下列各行列式的值：

1. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 9 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

余子式与代数余子式

将行列式中元素 a_{ij} 所在的行及列删去，余下的元素所组成的行列式就是 a_{ij} 的余子式。以行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 为例，a_1 的余子式是 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$c_2$ 的余子式是 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$。

将元素 a_{ij} 的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子就是该元素的代数余子式。在上述例子中，a_1 的代数余子式

是 $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$c_2$ 的代数余子式是 $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$。

令 A_1、B_1 及 C_1 分别为 a_1、b_1 及 c_1 的代数余子式，即

$$A_1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$B_1=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$C_1=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

于是，

$$|A|=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1,$$

即行列式的值是行列式第一行的元素与其代数余子式的乘积之和。

一般上，三阶行列式有以下的定理：

定理 1 行列式的值等于其任意一行 (或列) 的元素与其代数余子式的乘积之和。

也就是说，我们可按任意一行 (或列) 来展开三阶行列式，即

$$\begin{aligned}|A| &= a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1\\ &= a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2\\ &= a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3\\ &= a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3\\ &= b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3\\ &= c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3\end{aligned}$$

补充资料

元素的代数余子式的正负号取决于该元素所在的位置，如下图所示：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

补充资料

任意阶的行列式也可定义成其任意一行（或列）的元素与其代数余子式的乘积之和。

定理 2 行列式的任意一行 (或列) 的元素与另一行 (或列) 对应元素的代数余子式的乘积之和为零。

例如，行列式的第二行的元素与第一行对应元素的代数余子式的乘积之和为零，即

$$
\begin{aligned}
& a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 \\
&= a_2\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

例题 3

求三阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值。

解 按第三列展开行列式：

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0-4(6-2)+3(3+1) \\
&= -4
\end{aligned}
$$

随堂练习 6

求下列各三阶行列式的值：

1. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

练习 14.5a

求下列各行列式的值：

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 35 & -2 \\ -11 & 5 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 0 & -q & -r \\ q & 0 & -s \\ r & s & 0 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} p & -q & r \\ q & r & -s \\ -r & s & p \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{vmatrix}$

行列式的性质

性质 1 将行列式的行与列依次互调，其值不变，即 $|A|=|A'|$ 。

例题 4

设 $A=\begin{pmatrix}-7 & 7 & -5\\ 8 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$。验证 $|A|=|A'|$ 。

证

$$|A|=\begin{vmatrix}-7 & 7 & -5\\ 8 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}8 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}8 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=5$$

$$|A'|=\begin{vmatrix}-7 & 8 & -2\\ 7 & -1 & 1\\ -5 & 2 & -1\end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}7 & 1\\ -5 & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}7 & -1\\ -5 & 2\end{vmatrix}=5$$

由此证得 $|A|=|A'|$ 。

性质 2 将行列式的任意两行 (或列) 互调，其值变号。

例如，$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ (第一、二行对调)

又如，$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c_1 & b_1 & a_1\\ c_2 & b_2 & a_2\\ c_3 & b_3 & a_3\end{vmatrix}$ (第一、三列对调)

例题 5

已知 $\begin{vmatrix} -7 & 7 & -5 \\ 8 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & k \end{vmatrix} = 5$，求 $\begin{vmatrix} -7 & 7 & -5 \\ -2 & 1 & k \\ 8 & -1 & 2 \end{vmatrix}$。

解 所求的行列式可由已知行列式的第二、三行对调而得。

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} -7 & 7 & -5 \\ -2 & 1 & k \\ 8 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

随堂练习 7

已知 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$，求 $\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$。

性质 3 若行列式中有两行 (或列) 的对应元素相同，其值为零。

若行列式 $|A|$ 中有两行 (或列) 的对应元素相同，将这两行 (或列) 互调，所得到的行列式仍是原式 $|A|$。但是，根据性质 2，行 (或列) 互调后的行列式的值会变号，即变成 $-|A|$。所以，

$$|A| = -|A|$$

于是，$|A| = 0$。

性质 4 将行列式的任意一行（或列）的所有元素乘以同一常数，所得的行列式等于原行列式与该常数的乘积。

例如，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$。

思考题

若行列式的其中一行（或列）的数都是零，则行列式的值为何？

随堂练习 8

利用行列式的性质，证明 $\begin{vmatrix} 10 & -12 & 2 \\ -15 & 18 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 180\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$。

性质 5 若行列式的任意一行（或列）的数都是两部分之和，那么此行列式等于将这些数各取一部分作为相应的行（或列），而其余行（或列）不变的两个行列式之和。

例如，$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$。

性质 6 将行列式的任意一行 (或列) 的数都乘以同一常数，加到另一行 (或列) 对应的数上，所得行列式的值不变。

例如，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$。

思考题

性质 6 可应用所学习过的行列式的性质证明。试证明之。

例题 6

利用行列式的性质，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ 。

证

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{(第一列乘以(-1)加到第二列)}$$

$$= 0 \quad \text{(性质 3)}$$

随堂练习 9

利用行列式的性质，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$ 。

性质 7 两个同阶方阵的乘积的行列式等于其行列式的乘积，即 $|AB|=|A||B|$ 。

例题 7

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ 。验证 $|AB|=|A||B|$ 。

证

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}|AB| &=\begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} \\ &=(ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg) \\ &=(acef+adeh+bcfg+bdgh)-(acef+adfg+bceh+bdgh) \\ &=adeh-adfg-bceh+bcfg\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A||B| &=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} \\ &=(ad-bc)(eh-fg) \\ &=adeh-adfg-bceh+bcfg\end{aligned}$$

由此证得 $|AB|=|A||B|$ 。

随堂练习 10

设 $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 3\end{pmatrix}$。已知 $|AB|=-18$，求 x 的值。

练习 14.5b

1. 已知 $\begin{vmatrix}2 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1$。利用行列式的性质，求下列各式的值：

(a) $\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix}4 & -2 & 3\\ 0 & -2 & -4\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix}-3 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix}0 & 2 & 5\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & -5 & -2\\ -1 & 4 & 1\end{vmatrix}$

2. 不展开行列式，利用行列式的性质， 证明下列各式：

(a) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 6 & 12\\ 3 & 3 & 9\end{vmatrix}=0$ (b) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & -2 & 6\end{vmatrix}=0$

(c) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 9 & 6 & 5\\ 12 & 8 & 8\end{vmatrix}=0$ (d) $\begin{vmatrix}10 & 8 & 2\\ 15 & 12 & 3\\ 20 & 32 & 12\end{vmatrix}=0$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$　　(f) $\begin{vmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 0 & -9 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -27\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix}$　　(h) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix} 2x+1 & -2 \\ x & 1 \end{pmatrix}$。已知 $|AB|=-22$，求 x 的值。

4. 设 $P=\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ 及 $Q=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$。已知 $PQ=\begin{pmatrix} 30 & -18 & -33 \\ -6 & 4 & 6 \\ -11 & 6 & 14 \end{pmatrix}$，求 $|Q|$。

求下列各式中 x 的值 (5 至 10)：

5. $\begin{vmatrix} x & x \\ -2x & -1 \end{vmatrix} = 6$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & x & 9 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

8. $\begin{vmatrix} 2x-7 & 6 & 9 \\ 3x-5 & 5 & 4 \\ x-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

9. $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$

10. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & x-3 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 2 & x-2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

14.6 逆矩阵

若两个同阶方阵A及B满足 $AB=BA=I$，其中 I 是一个与 A、B 同阶的单位矩阵，则 B 叫做 A 的逆矩阵，以 $B=A^{-1}$ 表示，即 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$。由于$AB=BA=I$，所以A 也是 B 的逆矩阵，即 $A=B^{-1}$ 。

补充资料

只有方阵才可能有逆矩阵。若一个矩阵的逆矩阵存在，则此矩阵叫做可逆矩阵，其逆矩阵是唯一的。

二阶方阵的逆矩阵

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆，其逆矩阵为 $B=\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$。

由 $AB=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} au+bx & av+by \\ cu+dx & cv+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

比较系数，得

$$\begin{cases} au+bx=1 & \text{............ (1)} \\ cu+dx=0 & \text{............ (2)} \\ av+by=0 & \text{............ (3)} \\ cv+dy=1 & \text{............ (4)} \end{cases}$$

解 (1) 及 (2)，得 $u=\dfrac{d}{ad-bc}$ ， $x=\dfrac{-c}{ad-bc}$ $\quad (ad-bc\neq 0)$

解 (3) 及 (4)，得 $v=\dfrac{-b}{ad-bc}$ ， $y=\dfrac{a}{ad-bc}$

$$\therefore \quad B=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$BA=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由以上结果得知，若 $|A|=ad-bc=0$，A 没有逆矩阵。若 $|A|\neq 0$，A 的逆矩阵是

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (ad-bc\neq 0)$$

例题 1

下列二阶方阵是否有逆矩阵？若有，求其逆矩阵：

(a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$　　(b) $B=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$

解 (a) $|A|=2\times 4-(-1)\times 3=11\neq 0$

$\therefore$ 原方阵有逆矩阵。

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $|B|=4\times 9-(-6)\times(-6)=0$

$\therefore$ 原方阵没有逆矩阵。

例题 2

若矩阵 $A=\begin{pmatrix}5-x & 4\\ 2 & 3-x\end{pmatrix}$ 的逆矩阵不存在，求 x 的值。

解 $\because$ 矩阵 A 的逆矩阵不存在

$$\therefore \quad |A|=0$$
$$(5-x)(3-x)-8=0$$
$$x^2-8x+15-8=0$$
$$x^2-8x+7=0$$
$$(x-1)(x-7)=0$$
$$x=1 \quad 或 \quad x=7$$

例题 3

设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$。

(a) 求 A^{-1}。

(b) 若 $AX=B$，求 X。

(c) 若 $YA=B$，求 Y。

解 (a) $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=1$

$$\therefore \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

(b) $$AX=B$$

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B$$

$$X=A^{-1}B$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}$$

(c) $$YA=B$$

$$(YA)A^{-1}=BA^{-1}$$

$$Y(AA^{-1})=BA^{-1}$$

$$Y=BA^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 21 & -8 \end{pmatrix}$$

注意

由于矩阵的乘法不具交换律，即 $AB \neq BA$，所以在例题 3 中，A^{-1} 必须乘于等式的同一边。例如，在 (b) 小题中，A^{-1} 必须乘于两式的左边；(c) 小题中，A^{-1} 必须乘于两式的右边。

随堂练习 11

判断下列各二阶方阵是否有逆矩阵。若有，求其逆矩阵。(1 至 3)

1. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$　　2. $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$　　3. $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

4. 若矩阵 $\begin{pmatrix} 2b+1 & 2 \\ -3b-3 & -4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵不存在，求 b 的值。

三阶方阵的逆矩阵

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$。将 $|A|$ 中各数的代数余子式按其对应的位置列成一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

此矩阵的转置矩阵叫做矩阵 A 的伴随矩阵，记作 adj A，即

$$\text{adj } A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

由行列式的定理，可得

$$\begin{aligned} A\cdot \text{adj } A &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A|I \end{aligned}$$

同理可得，

$$\text{adj } A\cdot A=|A|I$$

当 $|A|\neq 0$ 时，以上式子可化成

$$A\left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right)=\left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right)A=I$$

由以上结果得知，若 $|A|\neq 0$，矩阵 A 的逆矩阵是

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj } A \qquad (|A|\neq 0)$$

思考题

若 A 的逆矩阵存在，证明 $|A|\neq 0$。

例题 4

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 2\\ 8 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 2\\ 8 & -1 & 1\end{vmatrix}=18$$

将 $|A|$ 中各数的代数余子式按其对应的位置列成一个矩阵：

$$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 2\\ 8 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 1\\ 8 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -2\\ 8 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 8 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 12 & -12\\ 3 & 18 & -6\\ 0 & -12 & 6\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 12 & 18 & -12\\ -12 & -6 & 6\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 12 & 18 & -12\\ -12 & -6 & 6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & 6 & -4\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

随堂练习 12

求下列各矩阵的逆矩阵：

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

用逆矩阵解线性方程组

以下讨论以逆矩阵解二元及三元线性方程组。在使用这一方法时，线性方程组的系数矩阵必须可逆。

例题 5

解方程组 $\begin{cases} 4x+7y=3 \\ 2x-5y=-7 \end{cases}$。

解 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$。

以矩阵来表示方程组，可得

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(续)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-34}\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-34}\begin{pmatrix} 34 \\ -34 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $x=-1$，$y=1$

例题 6

解方程组 $\begin{cases} 2x-y-2z=5 \\ 4x+y+2z=7 \\ 8x-y+z=20 \end{cases}$。

解 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。

以矩阵来表示方程组，可得

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}$$

(续)

由例题 4，得系数矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&0\\4&6&-4\\-4&-2&2\end{pmatrix}$。

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&0\\4&6&-4\\-4&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\\20\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}12\\-18\\6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore\quad x=2,\quad y=-3,\quad z=1$

随堂练习 13

以逆矩阵解下列各方程组：

1. $\begin{cases}3x-2y=12\\7x+5y=-1\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y+z=6\\2x-y+z=3\\x-y-2z=-7\end{cases}$

练习 14.6

判断下列各二阶方阵是否有逆矩阵。若有，求它们的逆矩阵。(1 至 6)

1. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$
7. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是 $\begin{pmatrix} x & y \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，求 x 及 y 的值。
8. 若 $\begin{pmatrix} 3 & x \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵不存在，求 x 的值。
9. 若矩阵 $\begin{pmatrix} y^2-7 & -2 \\ 6 & 2y \end{pmatrix}$ 的逆矩阵存在，求 y 的取值范围。
10. 若矩阵 $\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & x-1 & -2 \\ 1-x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵不存在，求 x 的值。
11. 已知单位矩阵 $\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathrm{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 及 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$。若 $\mathrm{AJA}=\mathrm{J}$，且 $\mathrm{A}+\mathrm{A}^{-1}=3\mathrm{I}$，求 A。
12. 已知矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 及 $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。若 $\mathrm{AB}=\mathrm{C}$，求 A。

求下列各矩阵的逆矩阵 (13 至 15)：

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

以逆矩阵解下列各方程组 (16至20)：

16. $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x-7y=8 \\ 9x-4y=-19 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x+4y-3z=3 \\ 3x-8y+6z=1 \\ 8x-2y-9z=4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x-y+4z=0 \\ 5x+4y-3z=0 \\ 2x-3y-z=0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x-y=14 \\ 2y+z=5 \\ 5z-x=10 \end{cases}$

14.7 高斯消元法

高斯消元法的基本概念是顺序加减消元，通过矩阵的初等行变换求线性方程组的解。

矩阵有三种初等行变换：

(1) 任意两行互调；

$R_i \leftrightarrow R_j$：第 i 行与第 j 行互调。

(2) 以一非零常数乘某一行的所有元素；

$R_i \to kR_i$：以 k 乘第 i 行的所有元素，其中 $k \neq 0$。

(3) 以一常数乘某一行后加到另一行。

$R_j \to kR_i + R_j$：以 k 乘第 i 行的所有元素后加到第 j 行的对应元素。

例题 1

解方程组 $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 4x-4y+z=7 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$。

解 以矩阵来表示方程组，可得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将方程式右边的常数矩阵 $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ 增置至系数矩阵

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的右边，可得增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$。

通过矩阵的初等行变换求解：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to -R_1+R_3]{R_2\to -4R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to -\frac{1}{3}R_3]{R_2\to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

注意

一般上，在使用高斯消元法时，我们将主对角线上的元素都化为 1，且主对角线左下方的元素化为 0。

据此，得 $z=3$ 。

将 $z=3$ 代入 $y-\frac{2}{3}z=-1$，得 $y=1$。

将 $y=1$ 及 $z=3$ 代入 $x-y+z=4$，得 $x=2$。

$\therefore\ x=2,\quad y=1,\quad z=3$

我们也可继续使用初等行变换，将系数矩阵转换成单位矩阵，以求得未知数的值。将上例继续进行初等行变换：

$$\xrightarrow[R_2 \to \frac{2}{3}R_3+R_2]{R_1 \to -R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

由此同样可得，$x=2$，$y=1$，$z=3$。

例题 2

解方程组 $\begin{cases} y-z=-2 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x-y-3z=1 \end{cases}$。

解 $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{R_1 \to -R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -2R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -11 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 7R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -18 & -21 \end{array}\right)$$

(续)

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{18}R_3}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_3+R_2]{R_1\to -4R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to -3R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & \frac{11}{6}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6}\end{array}\right)$$

$\therefore\ x=\dfrac{11}{6},\ y=-\dfrac{5}{6},\ z=\dfrac{7}{6}$

随堂练习 14

利用高斯消元法解下列各方程组：

1. $\begin{cases}3x-2y-z=4\\ 2x+y-4z=4\\ x+2y-3z=4\end{cases}$

2. $\begin{cases}3x+y+2z=5\\ 2x-2y+5z=3\\ x-3y+4z=0\end{cases}$

我们也可使用高斯消元法求逆矩阵。

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ 是一个可逆矩阵，即

$|A|\neq 0$。将 A 与一个三阶单位方阵左右并排成一个

3×6 增广矩阵 $(\mathrm{A}\mid\mathrm{I})=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$。

若经过行运算，虚线左边的 A 化为单位矩阵时，虚线右边的单位矩阵则会在运算过程中化为A的逆矩阵，即当 $(\mathrm{A}\mid\mathrm{I})$ 化为 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)$ 时，

则 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ 就是 A 的逆矩阵 A^{-1}。

例如，若矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

设 A 的逆矩阵 $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} x & u & r \\ y & v & s \\ z & w & t \end{pmatrix}$。

由 $\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{I}$，得 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u & r \\ y & v & s \\ z & w & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

由以上的等式可得以下三个三元一次方程组：

$$L_1:\ \begin{cases} 2x-y-2z=1 \\ 4x+y+2z=0 \\ 8x-y+z=0 \end{cases},\quad L_2:\ \begin{cases} 2u-v-2w=0 \\ 4u+v+2w=1 \\ 8u-v+w=0 \end{cases},\quad L_3:\ \begin{cases} 2r-s-2t=0 \\ 4r+s+2t=0 \\ 8r-s+t=1 \end{cases}$$

这三个方程组的系数矩阵相同。将它们的增广矩阵与系数矩阵并排，表示成以下形式：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

将矩阵进行行运算：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to -4R_1+R_3]{R_2 \to -2R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -R_2+R_3]{R_1 \to \frac{1}{3}R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -2R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{3}R_3]{R_1 \to \frac{1}{2}R_1,\ R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

方程组 L_1，L_2 及 L_3 的解分别是 $x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{2}{3}$，$z=-\frac{2}{3}$；

$$u=\frac{1}{6},\quad v=1,\quad w=-\frac{1}{3};$$

$$r=0,\quad s=-\frac{2}{3},\quad t=\frac{1}{3}。$$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ 或 } A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -4 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

例题 3

利用高斯消元法求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&3\\3&4&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&1&3&0&1&0\\3&4&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to -3R_1+R_3]{R_2\to -2R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&1&-2&1&0\\0&7&-1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&7&-1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to -7R_2+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&-\frac{10}{3}&\frac{5}{3}&-\frac{7}{3}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{3}{10}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{7}{10}&-\frac{3}{10}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to -\frac{1}{3}R_3+R_2]{R_1\to -R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&\frac{3}{2}&-\frac{7}{10}&\frac{3}{10}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{7}{10}&-\frac{3}{10}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{7}{10}&-\frac{3}{10}\end{array}\right)$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\\-\frac{1}{2}&\frac{7}{10}&-\frac{3}{10}\end{pmatrix}\ \text{或}\ A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}10&-6&4\\-5&1&1\\-5&7&-3\end{pmatrix}$$

随堂练习 15

利用高斯消元法求 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

练习 14.7

利用高斯消元法解下列各方程组 (1 至 4):

1. $\begin{cases} 3x-y-14=0 \\ 2y+z-5=0 \\ x-5z+10=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+3z=10 \\ 2x+3y-4z=8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x+y+z=5 \\ 2x-7y+4z=1 \\ 2x-5y+3z=-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-y-7z=0 \\ 5x-2y-z=1 \\ 3x+3y+5z=2 \end{cases}$

利用高斯消元法求下列各矩阵的逆矩阵 (5 至 6):

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 14 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

14.8 克兰姆法则

以下讨论以克兰姆法则解线性方程组。在使用这一法则时，线性方程组的系数行列式必须不等于零。

考虑一个三元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$。

方程组的系数行列式为 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$。分别以常数项 d_1、d_2、d_3 顺次代替 Δ 中未知数 x、y、z 的系数，所得的行列式为

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}。$$

利用行列式的性质，可得

$$\begin{aligned}
\Delta_x &= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= x\,\Delta+y\times 0+z\times 0 \\
&= x\,\Delta
\end{aligned}$$

补充资料

此方法可推广到任意阶。

由此可得，当 $\Delta\neq 0$ 时，$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$。同理，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$。

例题 1

解方程组 $\begin{cases} 3x-y=11 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}$。

解 $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=17 \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}=51 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-34$

$\therefore\ x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{51}{17}=3$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-34}{17}=-2$

例题 2

解方程组 $\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 3x-2y-z=7 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases}$。

解 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$=-6-12+12-(16+2+27)$

$=-51$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$=-24-15+28-(20+8+63)$

$=-102$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

$=21-16-30-(-56-5+36)$

$=0$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$=-10+84-24-(-32-14+45)$

$=51$

$\therefore\ x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-102}{-51}=2$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{0}{-51}=0$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{51}{-51}=-1$

随堂练习 16

利用克兰姆法则解下列各方程组：

1. $\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 3x+4y+5z=2 \\ 4x+5y+2z=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 2x+3y-z=0 \\ 3x-2y+z=-1 \end{cases}$

练习 14.8

利用克兰姆法则解下列各方程组：

1. $\begin{cases} x+3y+2z=-4 \\ 2x+y+4z=-3 \\ 3x+4y+z=-2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y-5z=-4 \\ 4x-y+3z=2 \\ 3x+2y+4z=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-2y-3z=4 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=3 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=13 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z}=-9 \end{cases}$

总复习题14

计算下列各式(1 至 4):

1. $5\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $-4\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 8 & -4 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

4. $2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5. 已知 $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，求 x 及 y 的值。

6. 设 $P=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$， $Q=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 及 $R=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$。计算下列各式:

   (a) $2Q+R'$ (b) $(P-R)+2Q'$

   (c) $[2(Q-P)]'$ (d) $(R'-Q)'$

7. 设 $M=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 及 $N=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$。求下列各式中的矩阵X:

   (a) $2N-3M=2M-X$
   (b) $2(M-2N)+X=M+N$
   (c) $(M+2N)'=X$
   (d) $3N'-M'=2X$

判断下列各矩阵，AB 及 BA 是否有意义。若有，求它们的乘积。(8至 11)

8. $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\5 & 4 & 0\\-2 & 6 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}9 & 0\\-7 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 4\\5 & 2\end{pmatrix}$

12. 已知 $A=\begin{pmatrix}a & 3a\\2b & b\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，且 $AB=\begin{pmatrix}45\\48\end{pmatrix}$。求 a 及 b 的值。

13. 已知 $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}$，且 $A+B=AB$。求 a，b 及 c 的值。

求下列各行列式的值 (14 至 22)：

14. $\begin{vmatrix}20 & 15\\8 & 6\end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix}6 & -7\\15 & -2\end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix}-4 & -10\\12 & 7\end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix}3 & 3 & -6\\2 & -2 & 0\\3 & 0 & -3\end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix}5 & 7 & 1\\-3 & 6 & 9\\4 & 7 & 3\end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix}-2 & 7 & -4\\3 & -5 & 2\\-1 & 0 & -3\end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\3 & -2 & 5\\-1 & 1 & 3\end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix}2 & 6 & 4\\1 & 3 & 1\\-2 & -6 & 5\end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix}10 & 8 & -2\\15 & 16 & -3\\-5 & -4 & 1\end{vmatrix}$

利用行列式的性质，证明下列各等式成立 (23 至 24)：

23. $\begin{vmatrix}bc & 1 & bc\,(b+c)\\ca & 1 & ca\,(c+a)\\ab & 1 & ab\,(a+b)\end{vmatrix}=0$

24. $\begin{vmatrix}a & 1 & a^2(b+c)\\b & 1 & b^2(c+a)\\c & 1 & c^2(a+b)\end{vmatrix}=0$

求下列各式中 x 的值 (25 至 26)：

25. $\begin{vmatrix}2x & 3 & x+5\\-3 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\end{vmatrix}=5x-1$

26. $\begin{vmatrix}x+3 & 1 & 0\\x & 3 & 0\\1 & 0 & -x-2\end{vmatrix}=x+6$

27. 已知单位矩阵 $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。设 $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，且 $(2\mathrm{I}+\mathrm{J})^{-1}=r\,\mathrm{I}+s\,\mathrm{J}$，求 r 及 s 的值。

若下列矩阵没有逆矩阵，求 a 的值 (28 至 31)：

28. $\begin{pmatrix}3 & a\\ -2 & 6\end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix}5a+2 & 4\\ 6 & a\end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix}-7 & a & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & -a & 4\end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix}a & -1 & 0\\ 4 & 0 & -2\\ a+4 & a & -8\end{pmatrix}$

求下列各矩阵的逆矩阵 (32 至 37)：

32. $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 9\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -4\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 3\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

利用高斯消元法解下列各方程组 (38 至 41)：

38. $\begin{cases}2x-y+4z=5\\ 2x+3y-4z=-7\\ x+y+z=2\end{cases}$

39. $\begin{cases}x-2y-3z=-4\\ 3x+y-4z=-5\\ 2x+4y-z=-5\end{cases}$

40. $\begin{cases}x-2y-z=3\\ 4x-y+2z=1\\ x+3y=5\end{cases}$

41. $\begin{cases}2x-y-z=0\\ 4x-3y+2z=1\\ 3x-2y-4z=-1\end{cases}$

利用克兰姆法则解下列各方程组 (42 至 45):

42. $\begin{cases} x-3y-2z=1 \\ 7x+4y-5z=0 \\ 3x+9y+z=-1 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2x-2y-4z+3=0 \\ 2x+3y+4z-2=0 \\ 7x+3y-2z-2=0 \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}+\dfrac{4}{z}=-3 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}=7 \\ \dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{z}=4 \end{cases}$

15. 不等式与线性规划

学习目标：

- 掌握不等式的性质
- 掌握一元一次、二次不等式及不等式组的解法
- 掌握一元高次不等式的解法
- 掌握分式不等式的解法
- 掌握含绝对值的不等式的解法
- 掌握二元一次不等式及不等式组的解法
- 应用图解法解线性规划问题

15.1 不等式及其性质

不等式

任何两个实数之间都存有一种关系。例如：

$$11>10$$

$$-3<-2$$

以上的式子表示数与数之间的不等关系。同样的，

$$x+3<2$$

$$x^2+5<6x$$

也表示两个式子之间的不等关系。这些以不等号“>”或“<”将两个数量连结而成的式子叫做不等式。

> 对于任意两个实数 a 及 b，
> 若 $a-b$ 是正数，即 $a-b>0$，那么 $a>b$；
> 若 $a-b$ 是负数，即 $a-b<0$，那么 $a<b$。

由此可知，要比较两个实数的大小，只需计算它们的差即可。

补充资料

“≥”及“≤”也是常用的数学符号，其中 $a\geq b$ 表示 $a>b$ 或 $a=b$； $a\leq b$ 表示 $a<b$ 或 $a=b$。

思考题

$5\geq 5$ 是否正确？

思考题

在什么情况下，$a\geq b$ 且 $a\leq b$？

例题 1

比较 $(x-5)(x+7)$ 与 $(x+5)(x-3)$ 的大小。

解

$$\begin{aligned}(x-5)(x+7)-(x+5)(x-3)&=(x^2+2x-35)-(x^2+2x-15)\\&=x^2+2x-35-x^2-2x+15\\&=-20<0\end{aligned}$$

$\therefore\ (x-5)(x+7)<(x+5)(x-3)$

例题 2

比较 $\left(x^2-5\right)^2$ 与 x^4-10x^2+7 的大小。

解 $\left(x^2-5\right)^2-\left(x^4-10x^2+7\right)=\left(x^4-10x^2+25\right)-\left(x^4-10x^2+7\right)$

$=x^4-10x^2+25-x^4+10x^2-7$

$=18>0$

$\therefore\ \left(x^2-5\right)^2>x^4-10x^2+7$

例题 3

比较 x^2+15 与 $10x-12$ 的大小。

解 $x^2+15-(10x-12)=x^2-10x+27$

$=x^2-10x+5^2-5^2+27$

$=(x-5)^2+2$

$\because\ (x-5)^2\geq 0$

$\therefore\ (x-5)^2+2>0$

$\therefore\ x^2+15>10x-12$

随堂练习 1

比较下列各题中两个代数式的大小：

1. $(x+3)(x-1)$ 与 $(x+4)(x-2)$
2. $(x+8)(x+10)$ 与 $(x+9)^2$
3. x^2+6x 与 $4x-2$

不等式的性质

性质 1 若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$。

性质 2 若 $a>b$，则 $a+c>b+c$。

性质 3 若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$。

性质 4 若 $a>b$，则：当 $c>0$ 时，$ac>bc$；
当 $c=0$ 时，$ac=bc$；
当 $c<0$ 时，$ac<bc$。

例题 4

已知 $x>y>0$，用不等号连结下列各式：

(a) $x-3$ 与 $y-3$ (b) $y-5$ 与 $x-2$

(c) $-3x$ 与 $-3y$ (d) $3x$ 与 $2y$

解 (a) $\because \quad x>y$

$\therefore \quad x-3>y-3$

(b) $\because \quad y<x$，$-5<-2$

$\therefore \quad y-5<x-2$

(c) $\because \quad x>y$，$-3<0$

$\therefore \quad -3x<-3y$

(d) $\because$ $x>y$，$2>0$

$\therefore$ $2x>2y$ .... (1)

又，$x>0$ .... (2)

结合 (1) 及 (2)， 得 $2x+x>2y$

即 $3x>2y$

随堂练习 2

已知 $y<x<0$，用不等号连结下列各式：

(a) $x+1$ 与 $y+1$ (b) $2y$ 与 $2x$

(c) $-x+1$ 与 $-y+2$ (d) $3x$ 与 $4y$

练习 15.1

比较下列各题中两个代数式的大小 (1 至 5)：

1. $(x-4)^2$ 与 $(x-6)(x-2)$
2. x^2+13 与 $4x$
3. $(x-1)(x^2+x+1)$ 与 $(x+1)(x^2-x+1)$
4. $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ 与 x^4+x^2-1
5. $(1-2x)(1+2x)$ 与 $(x^2-6)^2$
6. 已知 $y<x<0$，用不等号连结下列各式：

   (a) $2x-3$ 与 $2y-5$ (b) x^2 与 y^2

15.2 一元一次不等式

一元一次不等式的解法

一元一次不等式的一般形式是$ax+b>0$或$ax+b<0$，其中$a\neq0$。我们可应用不等式的基本性质来解一元一次不等式。

例题 1

解下列不等式：

(a) $x+3>2$　　(b) $2x-7<x+3$

解 (a)
$$\begin{aligned} x+3&>2\\ x&>2-3\\ x&>-1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x-7&<x+3\\ 2x-x&<3+7\\ x&<10 \end{aligned}$$

例题 2

解不等式$2(x+3)\leq3(3-2x)$。

解
$$\begin{aligned} 2(x+3)&\leq3(3-2x)\\ 2x+6&\leq9-6x\\ 8x&\leq3\\ x&\leq\frac{3}{8} \end{aligned}$$

例题 3

解不等式 $\frac{x}{2}+1>x-3$。

解
$$\frac{x}{2}+1>x-3$$
$$-\frac{x}{2}>-4$$
$$x<8$$

例题 4

解不等式 $\frac{2x+1}{2}+9\geq\frac{x}{3}-\frac{3}{2}$。

解
$$\frac{2x+1}{2}+9\geq\frac{x}{3}-\frac{3}{2}$$
$$3(2x+1)+54\geq 2x-9$$
$$6x+57\geq 2x-9$$
$$4x\geq -66$$
$$x\geq -\frac{33}{2}$$

例题 5

解不等式 $-3\leq 3x+4\leq 7$。

解
$$-3\leq 3x+4\leq 7$$
$$-7\leq 3x\leq 3$$
$$-\frac{7}{3}\leq x\leq 1$$

例题 6

解不等式 $2<3-x\le 8$。

解

$$
\begin{aligned}
2&<3-x\le 8\\
-2&>x-3\ge -8\\
-8&\le x-3<-2\\
-5&\le x<1
\end{aligned}
$$

随堂练习 3

解下列各不等式：

1. $2x>x+9$
2. $11-2x\le -7$
3. $2(x+2)\ge \frac{2}{3}+\frac{2x+3}{4}$
4. $2x-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}<3x-\frac{1}{2}+\frac{x}{6}$
5. $10\le x+3\le 12$
6. $-3<7-2x<9$

练习 15.2a

解下列各不等式：

1. $4x-3>x+9$
2. $-4x>1-x$
3. $3x+20\ge 34-4x$
4. $5x+8\le 6x-7$
5. $1\le 6(x-7)$
6. $2(x+7)\le 5x+14$
7. $\frac{x}{2}+\frac{2-3x}{5}>-\frac{7}{2}+\frac{x+1}{5}$
8. $-5<12-x<-1$
9. $-\frac{3}{5}<\frac{x}{2}-\frac{1}{2}<\frac{2}{5}$
10. $-2<\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}\le 4$

一元一次不等式组的解法

由多于一个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做一元一次不等式组。同时满足不等式组里所有不等式的公共解，即为该不等式组的解，可用数线来表示。

例题 7

解下列各不等式组：

(a) $\begin{cases} x > -2 \\ x > 3 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x < -2 \\ x \leq 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 3 \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} x \leq -2 \\ x > 3 \end{cases}$

补充资料

在不等式的图解中，符号“○”所在的数值不是解的一部分，其不等号为“>”或“<”。而“●”所在的数值是解的一部分，其不等号为“≥”或“≤”。

解 (a) $\begin{cases} x > -2 \\ x > 3 \end{cases}$

$x > -2$ 及 $x > 3$ 的图像如图 15-1 所示。

$x > -2$ 的解与 $x > 3$ 的解在数线上重叠的部分为不等式组的解。

$\therefore$ 不等式组的解为 $x > 3$ 。

图 15-1

(b) $\begin{cases} x < -2 \\ x \leq 3 \end{cases}$

$\therefore$ $x < -2$

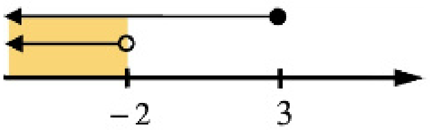


图 15-2

(c) $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 3 \end{cases}$

$\therefore\ -2 \leq x < 3$

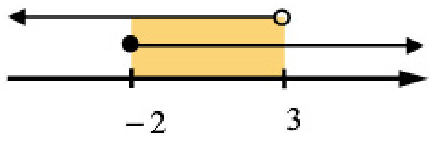


图 15-3

(d) $\begin{cases} x \leq -2 \\ x > 3 \end{cases}$

∴ 此不等式组无解。

图 15-4

例题 8

解不等式组 $\begin{cases} 3x+2 > 2x-2 \\ 4x-3 \leq 3x-2 \end{cases}$。

解 $\begin{cases} 3x+2 > 2x-2 \ \ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (1) \\ 4x-3 \leq 3x-2 \ \ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (2) \end{cases}$

由 (1)，得 $x > -4$

由 (2)，得 $x \leq 1$

∴ 不等式组的解是 $-4 < x \leq 1$。

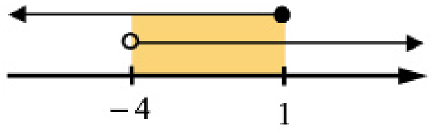


图 15-5

例题 9

解不等式组 $\begin{cases} x+2>4 \\ 3x-3\le 2x+2 \\ x+5>3-x \end{cases}$。

解 $\begin{cases} x+2>4 & \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x-3\le 2x+2 & \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ x+5>3-x & \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$

由 (1)，得 $x>2$

由 (2)，得 $x\le 5$

由 (3)，得 $2x>-2$

$x>-1$

$\therefore$ 不等式组的解是 $2<x\le 5$ 。

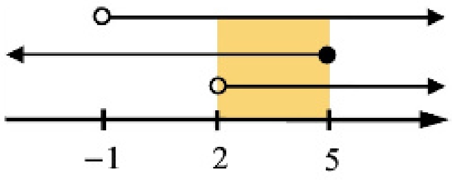


图 15-6

例题 10

解不等式 $x-2<5\le x+3$ 。

解 原不等式可写成不等式组：

$\begin{cases} x-2<5 & \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+3\ge 5 & \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

由 (1)，得 $x<7$

由 (2)，得 $x\ge 2$

$\therefore$ 原不等式的解是 $2\le x<7$。

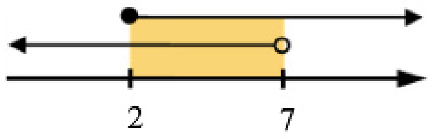


图 15-7

随堂练习 4

解下列各不等式组：

1. $\begin{cases} 3x+2 \geq 2x-2 \\ 4x-3 > 3x-2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x-4 \leq 2x+5 \\ 7-x < 3+x \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2-x < 4+x \\ 1-2x \geq 3x+11 \end{cases}$

4. $2-x < 2x-7 \leq x-9$

练习 15.2b

解下列各不等式组：

1. $\begin{cases} 5-x < 6 \\ 7-3x \geq 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 2x+1 \leq 4x-3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-1 < 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-6 \geq 5x \\ 3x+5 \leq x+9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2(x+2) > 3x \\ 6x-8 > 4(x+1) \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+4 \leq 3x+7 \\ \dfrac{5x}{2}-1 \leq 3x-2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+4 > 1 \\ 3x-1 \leq 2x+2 \\ 1-2x > 5-x \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-\dfrac{1}{3} < 3-\dfrac{x}{2} \\ 2(1-x) \leq \dfrac{4x}{3} \\ 4(3x-1) > 1+\dfrac{9x}{2} \end{cases}$

9. $-4+x \leq 6-x \leq 10$

10. $x-2 \leq 2x+5 < 3$

15.3 一元二次不等式

一元二次不等式的解法

含有一个未知数，且未知数的最高次数是二次的多项式不等式叫做一元二次不等式。

解一元二次不等式常用的方法是先将不等式整理成 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ 的形式，其中 $a>0$，然后因式分解二次式，并比较各因式的正负号。

例题 1

解不等式 $x^2-4x-5>0$ 。

解

$x^2-4x-5>0$

$(x+1)(x-5)>0$

当 $x+1=0$ 时，$x=-1$；

当 $x-5=0$ 时，$x=5$。

$x=-1$ 及 $x=5$ 将实数分成三个区域：

$x<-1$，$-1<x<5$ 及 $x>5$。

作一符号表：

x 的取值范围	$x<-1$	$-1<x<5$	$x>5$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-5)$	$+$	$-$	$+$

(续) 或以数线表示：

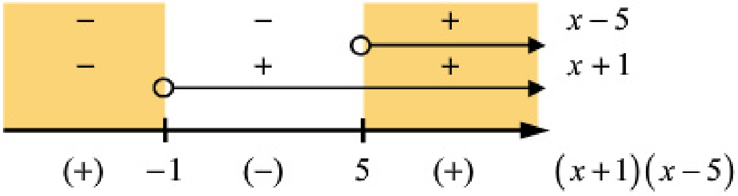


图 15-8

∴ 不等式的解是 $x<-1$ 或 $x>5$ 。

例题 2

解不等式 $x^2-5x+6<0$。

解

$$x^2-5x+6<0$$

$$(x-2)(x-3)<0$$

作一符号表：

x 的取值范围	$x<2$	$2<x<3$	$x>3$
$x-2$	−	+	+
$x-3$	−	−	+
$(x-2)(x-3)$	+	−	+

或以数线表示：

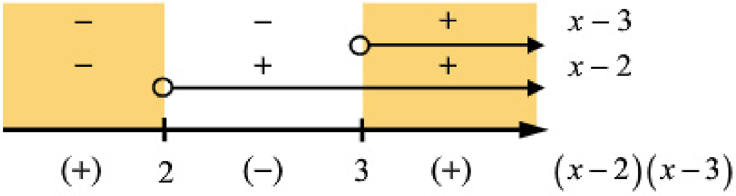


图 15-9

∴ 不等式的解是 $2<x<3$。

观察例题 1 及例题 2 的解可得，因式积项的符号都是由右至左 +−+ 间隔出现。因此，当二次式的领导系数为正值时，我们只需将各因式的根值标在数线上，然后由右至左顺序以 +−+ 将因式积项的符号标在各区间，就可得到一个简化的数线图。例如，例题 1 的不等式 $x^2-4x-5>0$，其数线图可简化成如图 15-10 所示。由图可得，不等式的解为 $x<-1$ 或 $x>5$。而例题 2 的不等式 $x^2-5x+6<0$，其数线图可简化成如图 15-11 所示。由图可得，不等式的解为 $2<x<3$。

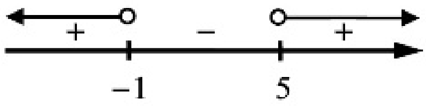


图 15-10

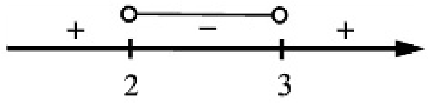


图 15-11

例题 3

解不等式 $x^2+5x-6\geq 0$。

解

$$x^2+5x-6\geq 0$$
$$(x+6)(x-1)\geq 0$$
$$x\leq -6 \quad \text{或} \quad x\geq 1$$

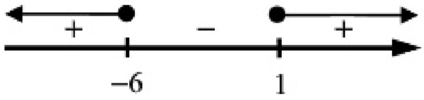


图 15-12

例题 4

解不等式 $(2x-1)^2\leq 4$。

解

$$(2x-1)^2\leq 4$$
$$(2x-1)^2-4\leq 0$$
$$(2x-3)(2x+1)\leq 0$$
$$-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{3}{2}$$

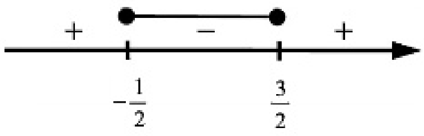


图 15-13

在以上的例子中，不等号左边的二次式都可因式分解成两个不同的一次式的乘积。因此，我们得到二次式的两个不同的根值，将数线分成三个区域。若二次式因式分解后得到两个相同的一次式，此时二次式含有一个完全平方式。在解这一类的不等式时，需注意对于所有实数，完全平方式都是非负的。

例题 5

解不等式 $2x^2-1<3x(x-2)+8$。

解

$$2x^2-1<3x(x-2)+8$$
$$3x^2-6x+8>2x^2-1$$
$$x^2-6x+9>0$$
$$(x-3)^2>0$$

当 $x\neq 3$ 时，$(x-3)^2>0$ 恒成立。

∴ 原不等式的解是 $x\in R$，$x\neq 3$。

补充资料

不等式 $(x-3)^2\geq 0$ 的解为 $x\in R$；不等式 $(x-3)^2<0$ 无解；不等式 $(x-3)^2\leq 0$ 的解为 $x=3$。

随堂练习 5

解下列各不等式：

1. $x^2+3x\geq 54$
2. $4x^2>1$
3. $3+2x-x^2\geq 0$
4. $2x^2<3x$

练习 15.3a

解下列各不等式：

1. $x^2+4x+3>0$
2. $x^2+2x-8\le 0$
3. $4x+12>x^2$
4. $9x^2\ge 16$
5. $(x+2)(x-3)\le 6$
6. $x(x+2)<x(3-x)+1$
7. $16x^2-3x+1\ge 5x$
8. $(x-4)^2+(x-6)^2\le 2$
9. $1<4x(1-x)$
10. $x^2-3x+9>3x(3-x)$

一元二次不等式组的解法

解一元二次不等式组，就是求出该不等式组中各个不等式的公共解。

例题 6

解不等式组 $\begin{cases} 2x^2-7x+5\le 0 \\ 3x+4>10 \end{cases}$。

解

$$\begin{cases} 2x^2-7x+5\le 0 & \text{............ (1)} \\ 3x+4>10 & \text{............ (2)} \end{cases}$$

由 (1)，得 $(2x-5)(x-1)\le 0$

$$1\le x\le \frac{5}{2}$$

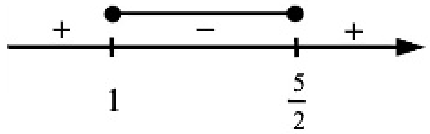


图 15-14 (a)

由 (2)，得 $3x>6$

$$x>2$$

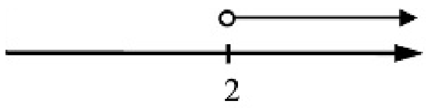


图 15-14 (b)

∴ 不等式组的解是 $2<x\le \frac{5}{2}$。

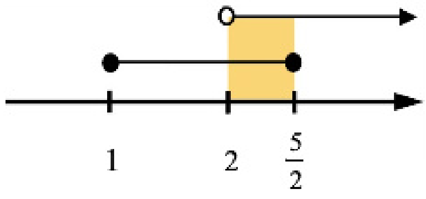


图 15-14 (c)

例题 7

解不等式组 $\begin{cases} x^2+2x<15 \\ 3x^2-4x\geq 7 \end{cases}$。

解

$$\begin{cases} x^2+2x<15 & \text{............ (1)} \\ 3x^2-4x\geq 7 & \text{............ (2)} \end{cases}$$

由 (1)，得 $\quad x^2+2x-15<0$

$$(x+5)(x-3)<0$$

$$-5<x<3$$

由 (2)，得 $\quad 3x^2-4x-7\geq 0$

$$(3x-7)(x+1)\geq 0$$

$$x\leq -1 \quad 或 \quad x\geq \frac{7}{3}$$

∴ 不等式组的解是 $-5<x\leq -1$ 或 $\frac{7}{3}\leq x<3$。

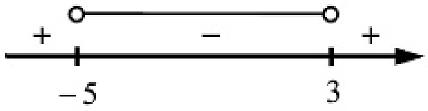


图 15-15 (a)

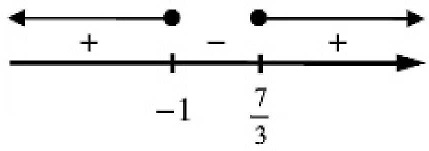


图 15-15 (b)

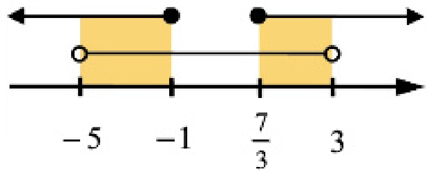


图 15-15 (c)

随堂练习 6

解下列各不等式组：

1. $\begin{cases} x+1<0 \\ x^2-x-6>0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ x^2+3x-4\leq 0 \end{cases}$

练习 15.3b

解下列各不等式组：

1. $\begin{cases} 3x-4\ge x-6 \\ x^2-3x<2x+14 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+5x+4>0 \\ x^2+10x+21\ge 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2>4 \\ 4x(x-1)\le 15 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+x<6 \\ 4(2x+3)<(2-x)(1+x) \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x-1)(x+1)>11+4x \\ x^2+4\le 7x-2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2+3x\ge 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x-3)(x+3)\ge 16 \\ x^2+3\ge 13(x-3) \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2-x-1\le \dfrac{x-1}{6} \\ (2x-1)(x-6)\ge 13 \end{cases}$

15.4 一元高次不等式

含有一个未知数，且未知数的最高次数大于二的多项式不等式叫做一元高次不等式。在解不等式时，所有非零项须移至不等号的左边，并使多项式的领导系数大于零。本节只讨论多项式可因式分解成一次式乘积的情况。

例题 1

解不等式 $x^3-6x^2+11x-6<0$。

解 先使用综合除法，将左式因式分解：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -6 & +11 & -6 & 1 \\
 & +1 & -5 & +6 & \\
\hline
1 & -5 & +6 & & 2 \\
 & +2 & -6 & & \\
\hline
1 & -3 & & &
\end{array}
$$

$$x^3-6x^2+11x-6<0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)<0$$

作一符号表：

x 的取值范围	$x<1$	$1<x<2$	$2<x<3$	$x>3$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)(x-2)(x-3)$	$-$	$+$	$-$	$+$

或以数线表示：

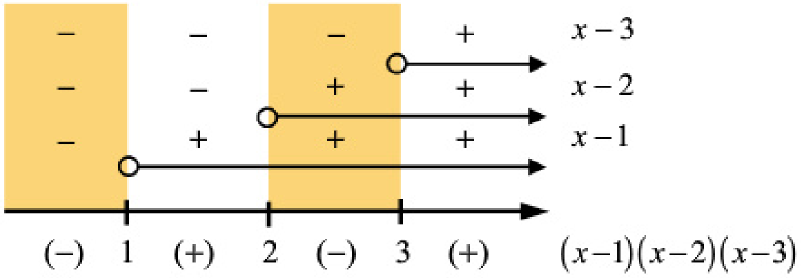


图 15-16

$\therefore$ 不等式的解是 $x<1$ 或 $2<x<3$。

由以上的例子可以看出，因式积项的符号由右至左 + − + − ⋯ 间隔出现。因此，如同解一元二次不等式，我们可得出一个较为简化的数线。整理不等式使得其不等号的右边为零，并使左式的领导系数大于零，然后再将不等式的左式因式分解。若多项式的因式中没有完全平方式，可将各因式的根值标在数线上，然后由右至左顺序以 + − + − ⋯ 将因式积项的符号标在各区，便可得出不等式的解。例如，例题 1 的数线图可简化成如图15-17所示。由图可得，不等式的解为 $x<1$ 或 $2<x<3$ 。

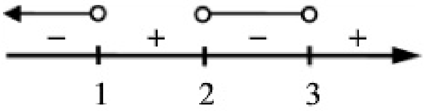


图 15-17

例题 2

解不等式 $9x+18<x^3+2x^2$。

解

$$9x+18<x^3+2x^2$$
$$x^3+2x^2-9x-18>0$$
$$(x+2)(x^2-9)>0$$
$$(x+2)(x+3)(x-3)>0$$
$$-3<x<-2 \text{ 或 } x>3$$

1	+2	−9	−18	−2
	−2	0	+18	
1	0	−9		

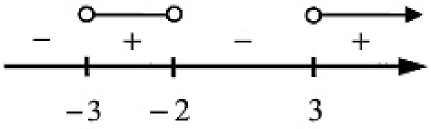


图 15-18

例题 3

解不等式$\left(x^2-9\right)\left(16-x^2\right)\le 0$。

解

$$\left(x^2-9\right)\left(16-x^2\right)\le 0$$

$$\left(x^2-9\right)\left(x^2-16\right)\ge 0$$

$$(x+3)(x-3)(x+4)(x-4)\ge 0$$

$$x\le -4 \text{ 或 } -3\le x\le 3 \text{ 或 } x\ge 4$$

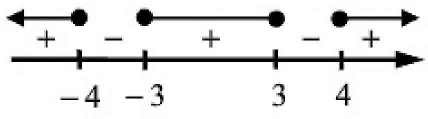


图 15-19

例题 4

解不等式$(x+2)^2(x-1)<0$。

解 当$x\ne -2$时，$(x+2)^2>0$，不等式可以简化成$x-1<0$，即$x<1$。

当$x=-2$时，$(x+2)^2(x-1)=0$。

$\therefore$ $x=-2$不是不等式的解。

$\therefore$ 不等式的解是$x<1$，$x\ne -2$。

例题 5

解不等式$(x+3)(x+2)(x-1)^2\le 0$。

解 当$x\ne 1$时，$(x-1)^2>0$，不等式可以简化成

$(x+3)(x+2)\le 0$

$\therefore$ $-3\le x\le -2$

当$x=1$时，$(x+3)(x+2)(x-1)^2=0$。

$\therefore$ $x=1$是不等式的解。

$\therefore$ 不等式的解是$-3\le x\le -2$或$x=1$。

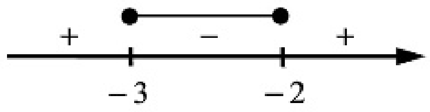


图 15-20

随堂练习 7

解下列各不等式:

1. $x^3-7x-6\geq 0$
2. $3x^2+18x+8>2x^3$
3. $x^4+x^3\leq 3x^2+x-2$
4. $x^4-x^3-5x^2-3x>0$

练习 15.4

解下列各不等式:

1. $(x-1)(x+1)(2x+1)<0$
2. $(3x+6)(x+3)(5-x)\leq 0$
3. $4x^3+8x^2-x-2\leq 0$
4. $x^3-3x^2+3x-1\geq 0$
5. $x^4>81$
6. $x^3(x-2)^2(x+3)>0$
7. $(x-3)^5(x-1)^3(x+2)<0$
8. $x^3(x-2)\geq x(2x-1)(x-2)$

15.5 分式不等式

含有分式的不等式，叫做分式不等式。解分式不等式时，须先整理不等式，使不等号的右边为零。

例题 1

解不等式 $\dfrac{3x+4}{x-2}<2$。

注意

由于 $(x-2)$ 的正负性无法确定，原不等式的两边不能同乘以 $(x-2)$ 来化成整式不等式。

解

$$\frac{3x+4}{x-2}<2$$

$$\frac{3x+4}{x-2}-2<0$$

$$\frac{x+8}{x-2}<0$$

作一符号表：

x 的取值范围	$x<-8$	$-8<x<2$	$x>2$
$x+8$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x+8}{x-2}$	$+$	$-$	$+$

或以数线表示：

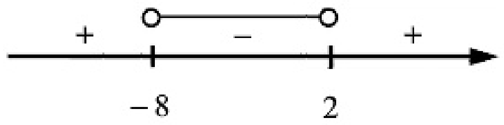


图 15-21

$\therefore$ 不等式的解是 $-8<x<2$。

例题 2

解不等式 $\dfrac{x+5}{x-1}>\dfrac{2}{x}$。

解

$$\frac{x+5}{x-1}>\frac{2}{x}$$

$$\frac{x+5}{x-1}-\frac{2}{x}>0$$

$$\frac{x(x+5)-2(x-1)}{x(x-1)}>0$$

$$\frac{x^2+3x+2}{x(x-1)}>0$$

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x(x-1)}>0$$

$x<-2$ 或 $-1<x<0$ 或 $x>1$

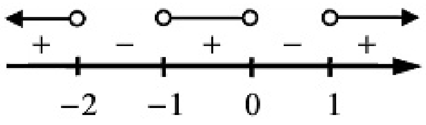


图 15-22

例题 3

解不等式 $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4}\le 0$。

解

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4}\le 0$$

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)}\le 0$$

将此不等式分成两个部分来处理：

当 $\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)}=0$ 时，$x=-3$ 或 $x=1$ 。

当 $\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)}<0$ 时，$-3<x<-1$ 或 $1<x<4$ 。

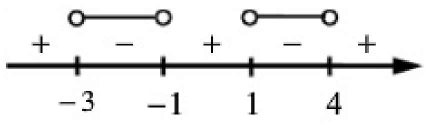


图 15-23

∴ 原不等式的解是 $-3\le x<-1$ 或 $1\le x<4$ 。

随堂练习 8

解下列各不等式:

1. $\dfrac{x-5}{3x+1}>2$

2. $\dfrac{x+22}{x-2}<x+1$

3. $\dfrac{1}{x-3}\geq\dfrac{1}{2x-1}$

4. $\dfrac{x^2-7}{1-x^2}\leq 1$

练习 15.5

解下列各不等式:

1. $\dfrac{7-x}{9-x}>\dfrac{1}{2}$

2. $\dfrac{5-x}{2}\geq\dfrac{3-x}{x}$

3. $\dfrac{x-4}{x+6}>\dfrac{1}{x}$

4. $\dfrac{1}{x-3}\geq\dfrac{1}{2x+2}$

5. $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\leq 1$

6. $1+\dfrac{1}{x-2}\leq\dfrac{x-2}{x-1}$

7. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+4}\leq 0$

8. $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+5x+6}\geq 0$

15.6 含绝对值的不等式

若 x 是一个实数，它的绝对值可用 $|x|$ 来表示，其中

$$|x|=\begin{cases} x & \text{当 } x\geq 0 \text{ 时} \\ -x & \text{当 } x<0 \text{ 时} \end{cases}$$

即，若 x 是正数，其绝对值是 x；若 x 是负数，其绝对值是 $-x$。零的绝对值是零。

例题 1

解不等式 $|x|<1$。

解 当 $x\geq 0$ 时，$|x|=x$。

原不等式可写成 $x<1$。

$\therefore$ $0\leq x<1$ 为原不等式解的一部分。

当 $x<0$ 时，$|x|=-x$。

原不等式可写成 $-x<1$，即 $x>-1$。

$\therefore$ $-1<x<0$ 为原不等式解的另一部分。

$\therefore$ 原不等式的解是 $-1<x<1$。

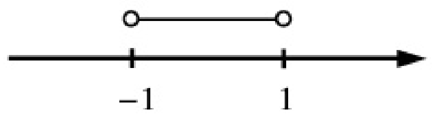


图 15-24

例题 2

解不等式 $|x|>2$。

解 当 $x\geq 0$ 时，$|x|=x$。

原不等式可写成 $x>2$。

$\therefore$ $x>2$ 为原不等式解的一部分。

当 $x<0$ 时，$|x|=-x$。

原不等式可写成 $-x>2$，即 $x<-2$。

$\therefore$ $x<-2$ 为原不等式解的另一部分。

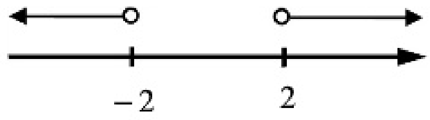


图 15-25

$\therefore$ 原不等式的解是 $x<-2$ 或 $x>2$。

由以上的例子可得，若 $a>0$，

$$|x|<a \iff -a<x<a$$

$$|x|>a \iff x<-a \text{ 或 } x>a$$

思考题

若 $a\leq 0$，$|x|<a$ 及 $|x|>a$ 的解分别是什么？

例题 3

解不等式 $|x-1|<3$。

解 原不等式可写成 $-3<x-1<3$。

$\therefore$ $-2<x<4$

例题 4

解不等式 $|2x-1|>5$。

解 原不等式可写成

$2x-1<-5$ 或 $2x-1>5$

$2x<-4$ $\quad$ $2x>6$

$\therefore\ x<-2$ $\quad$ $x>3$

例题 5

解不等式 $2<|x-1|\leq 4$。

解 原不等式可写成不等式组

$$\begin{cases} |x-1|>2 \text{ .... } (1) \\ |x-1|\leq 4 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

由 (1)，得 $x-1<-2$ 或 $x-1>2$

$x<-1$ $\quad$ $x>3$

由 (2)，得 $-4\leq x-1\leq 4$

$-3\leq x\leq 5$

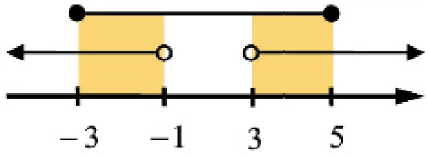


图 15-26

$\therefore$ 原不等式的解是 $-3\leq x<-1$ 或 $3<x\leq 5$。

随堂练习 9

解下列各不等式：

1. $|x|>5$
2. $|x|<9$
3. $|x+4|\geq 7$
4. $-1\leq|2x-3|<3$

练习 15.6

解下列各不等式:

1. $|x-5|>3$
2. $2|x+1|-3>7$
3. $|2x-5|<7$
4. $|5x-3|\leq 1$
5. $|2-3x|\geq 8$
6. $1<|3-2x|\leq 9$
7. $9\leq 2|x+2|\leq 19$
8. $\dfrac{2}{|x+1|}-3\geq 4$

15.7 二元一次不等式

二元一次不等式的解法

含有两个未知数，且未知数的次数都是一次的不等式叫做二元一次不等式。例如:

$$2x-3y>8$$

$$3x+4y\leq 20$$

二元一次不等式的解可用直角坐标平面上的区域来表示。

例题 1

以图像表示 $y>x+1$ 的解。

解 首先作方程式 $y=x+1$ 的图像：

x	0	2
y	1	3

此直线将坐标平面分成两个区域。直线上方的区域内的点，如 (0,2)及 (1,3)，满足 $y>x+1$；直线下方的区域内的点，如 (0,0) 及 (1,1)，满足 $y<x+1$。所以，不等式 $y>x+1$ 的解为直线 $y=x+1$ 上方的点，其图像如图 15-27 所示。直线 $y=x+1$ 为虚线，表示直线上的点不是不等式的解。

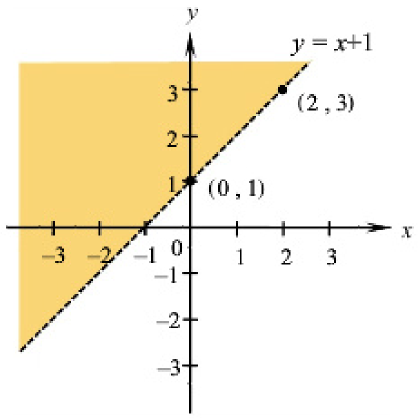


图 15-27

一条直线 $Ax+By+C=0$ 将坐标平面分成两个区域，分别为不等式 $Ax+By+C>0$ 及不等式 $Ax+By+C<0$ 所表示的区域。将个别区域上的一点代入 $Ax+By+C$，可判断该区域所表示的不等式：若得到正值，则该区域所表示的不等式为 $Ax+By+C>0$；反之，若得到负值，则该区域所表示的不等式为 $Ax+By+C<0$。

例题 2

解不等式 $2x+y\leq 3$。

解 直线 $2x+y=3$ 将平面分成两个区域。取点 (0, 0) 代入 $2x+y-3$ 得负值。因此，点 (0,0) 所在的区域所表示的不等式为 $2x+y-3<0$，即 $2x+y\leq 3$ 的图像为直线 $2x+y=3$ 下方与直线上的点，如图 15-28 所示。直线 $2x+y=3$ 为实线，表示直线上的点是解的一部分。

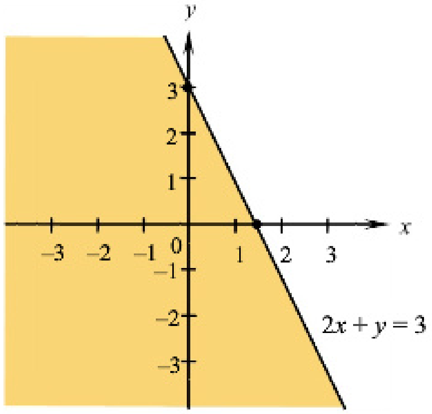


图 15-28

例题 3

解不等式 $4x-3y\geq 6$。

解 $4x-3y\geq 6$ 的图像为直线 $4x-3y=6$ 下方的区域及直线上的点，如图 15-29 所示。

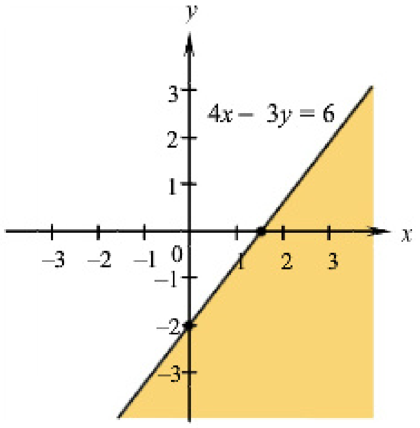


图 15-29

随堂练习 10

以图像表示下列各不等式的解：

1. $x+3y<6$
2. $2x-5y\leq 10$
3. $4y-x+8>0$
4. $3x+2y\leq 9$

二元一次不等式组的解法

同时满足二元一次不等式组中各个不等式的公共解，即各个不等式的图像的公共区域，就是此不等式组的解。

例题 4

解不等式组 $\begin{cases} y<2x \\ x+2y\leq 5 \end{cases}$。

解 $y<2x$ 的图像为直线 $y=2x$ 下方的区域，如图 15-30(a) 所示。

$x+2y\leq 5$ 的图像为直线 $x+2y=5$ 下方的区域及直线上的点，如图15-30(b) 所示。

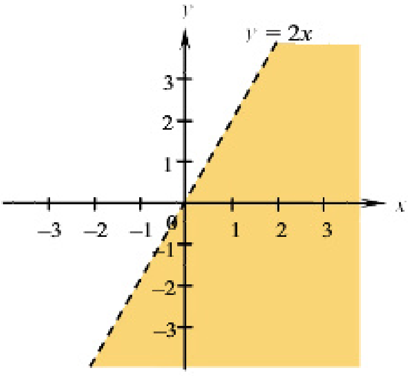


图 15-30(a)

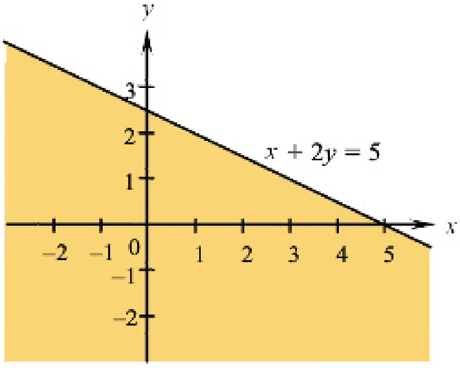


图 15-30(b)

作图 (a) 与图 (b) 于同一坐标平面上，两图重叠的部分就是所求不等式组的解，即图 15-30(c) 所示的阴影区域。

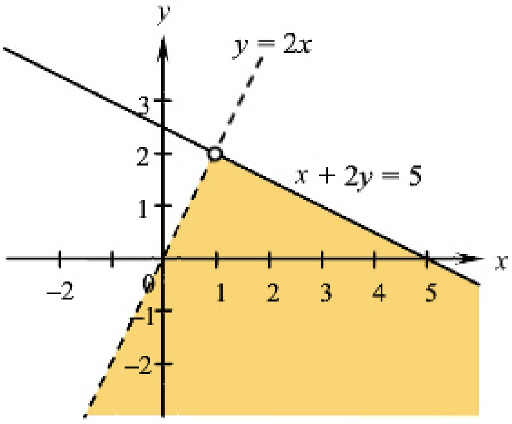


图 15-30(c)

注意

由于图 15-30(c)中的点(1 , 2)不满足不等式 $y<2x$ ，所以该点的坐标以“○”标出，表示该点不是解的一部分 。

例题 5

解不等式组 $\begin{cases} x+2y\geq 3 \\ 2x-y<1 \end{cases}$。

解 $x+2y\geq 3$ 的图像为直线 $x+2y=3$ 上方的区域与直线上的点。

$2x-y<1$ 的图像为直线 $2x-y=1$ 上方的区域。

所求不等式组的解为图 15-31 所示的阴影区域。

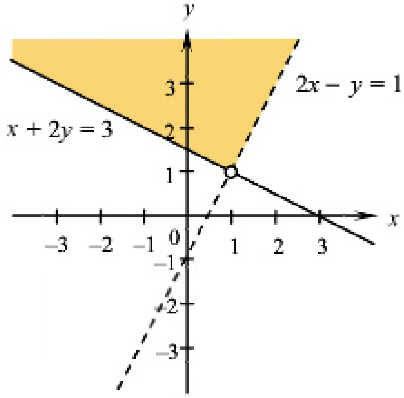


图 15-31

例题 6

解不等式组 $\begin{cases} x-y+5>0 \\ 3x+2y+5\geq 0 \\ x\leq 3 \end{cases}$。

解 $x-y+5>0$ 的图像为直线 $x-y+5=0$ 下方的区域。

$3x+2y+5\geq 0$ 的图像为直线 $3x+2y+5=0$ 上方的区域及直线上的点。

$x\leq 3$ 的图像为直线 $x=3$ 左方的区域及直线上的点。

所求不等式组的解为图 15-32所示的阴影区域。

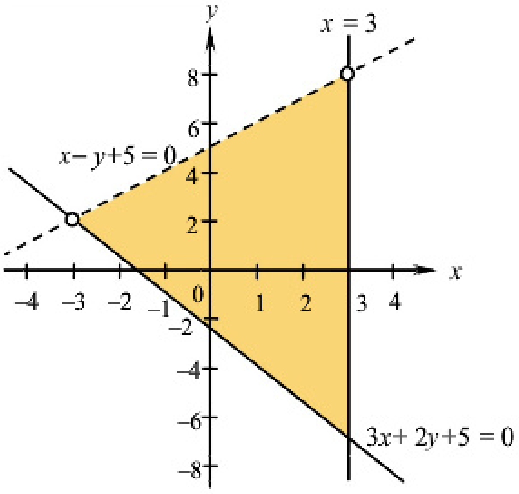


图 15-32

例题 7

写出一个不等式组表示图 15-33 所示的阴影区域。

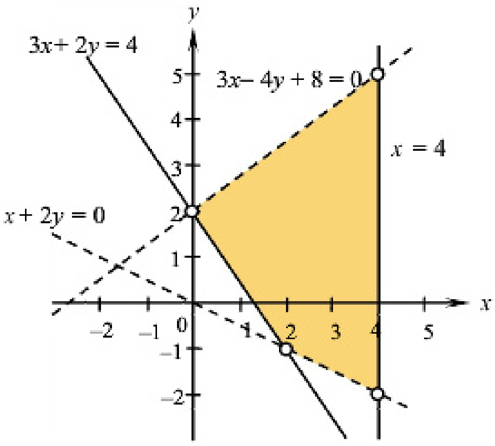


图 15-33

解 所求的不等式组为：

$$\begin{cases} 3x+2y\geq 4 \\ x+2y>0 \\ 3x-4y+8>0 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

随堂练习 11

解下列各不等式组：

1. $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+y-5\leq 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y-3>0 \\ x-2y+4<0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+7y\leq 21 \\ 5x+4y>20 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x+6y\leq 30 \\ 3x+2y\leq 12 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

练习 15.7

解下列各不等式组 (1至8):

1. $\begin{cases} y \geq 2x+1 \\ x+2y<4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ x+2y \leq 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y \geq 3-x \\ y \leq \dfrac{x}{2}-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+3y-6>0 \\ 2x+y+2<0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x>0 \\ 2x+y \leq 10 \\ y \leq 6 \end{cases}$

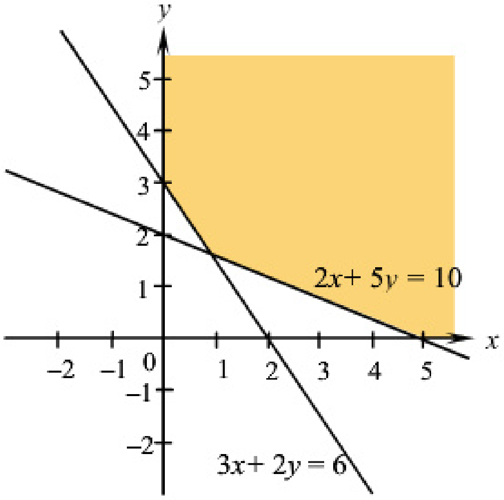
6. $\begin{cases} x+2y \leq 12 \\ 3x-y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x+2y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

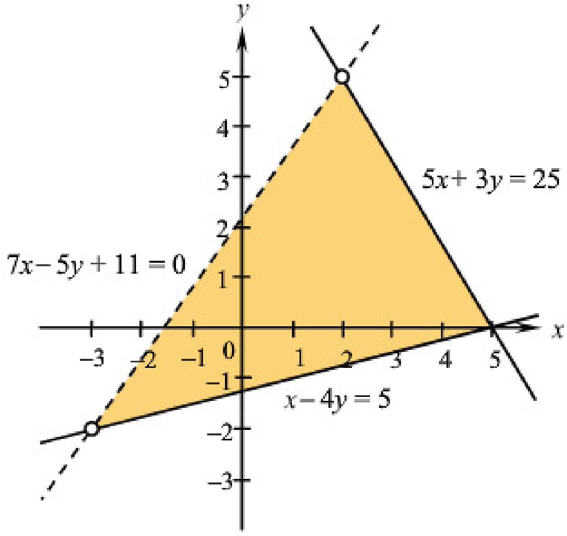
8. $\begin{cases} x-y \leq 1 \\ 2x+3y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

写出一个不等式组表示下列各图所示的阴影区域 (9至10):

9.



10.



15.8 线性规划

规划论主要研究两个方面的问题：一个是对于给定的人力及物力，如何才能发挥最大的经济或社会效益；另一个是对于给定的任务，如何才能以最少的人力及物力去完成。因此，规划论的问题可以归结为研究在一组不等式或等式的约束下，使得某一目标函数取得最大或最小的极值问题。每一个不等式或等式都是一个约束条件，它是目标函数中各个变数必须满足的条件。能同时满足所有的约束条件，且可使目标函数取得所期望的最大或最小值的解，叫做最优解。

若规划模型中的所有约束条件都是线性 (一次) 等式或不等式，且目标函数是线性 (一次) 的，则这个规划问题叫做线性规划问题。本节只讨论只含两个变数，且能使用图解法解题的线性规划问题。

例题 1

求 $z=3x+7y$ 的最大值及最小值，式中 x 及 y 满足下列的约束条件：

$$\begin{cases} x+2y\le 10 \\ x+y\ge 1 \\ x\ge 0 \\ 0\le y\le 4 \end{cases}$$

解 将约束条件中各个不等式的解画在同一坐标平面上，以得到此不等式组的解，如图 15-34 中所示的阴影区域。多边形 ABCDE 内及其边界上的点都满足此不等式组。因此，多边形 ABCDE 及其内部的点的集合就叫做此不等式组的可行区域，可行区域中的任何点都叫做可行点。

将目标函数 $z=3x+7y$ 改写成 l：$y=-\frac{3}{7}x+\frac{z}{7}$ 。

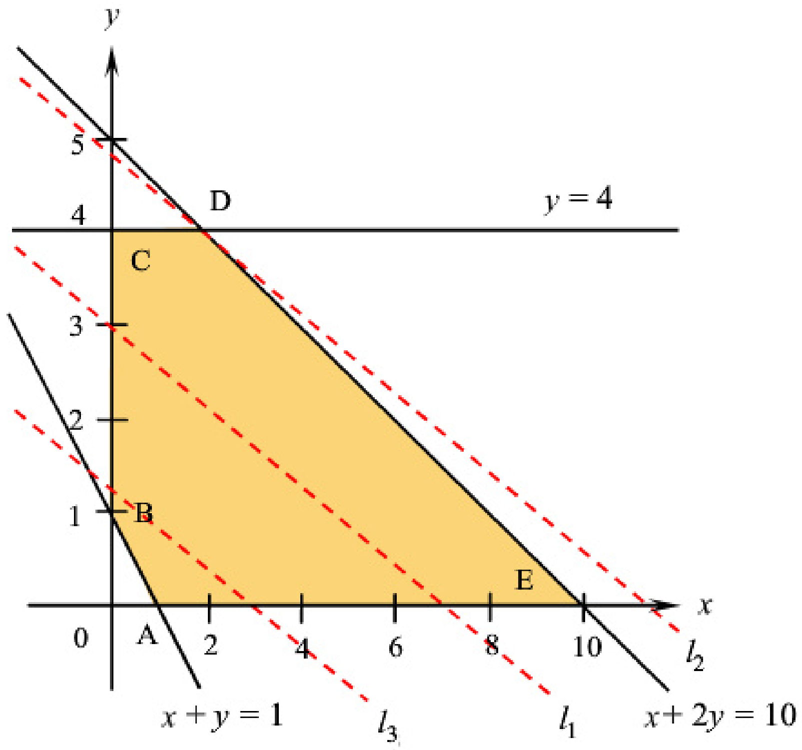


图 15-34

由此可知，当 z 变动时，l 表示一组具有相同斜率 $-\frac{3}{7}$ 的平行线，其 y 截距是 $\frac{z}{7}$。令 z 等于某个常数，如 $z=21$，可得到一条 y 截距为 3 的直线 $y=-\frac{3}{7}x+3$，即图 15-34 中的直线 l_1。此直线上的任意一点都会使目标函数 $z=3x+7y$ 的值为 21。

当 l_1 在可行区域中向远离原点的方向平移时，所得的直线所对应的 z 值将增加。当直线平移至 l_2 的位置后，若继续向远离原点的方向平移，则直线不再经过可行区域，表示其所对应的 z 值是不能达到的。因此，目标函数的最大值为 l_2 所对应的 z 值。l_2 与可行区域的交点D是使得目标函数有最大值的点，也是 $x+2y=10$ 及 $y=4$ 的交点。解方程组

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ y=4 \end{cases}$$

得点D的坐标为 $(2,4)$。所以，当 $x=2$，$y=4$ 时，z 有最大值

$$z_{\max}=3(2)+7(4)=34。$$

同理，当 l_1 在可行区域中向趋近原点的方向平移至 l_3 的位置时，其所对应的 z 值是目标函数的最小值。l_3 与可行区域的交点 A 是方程组

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=0 \end{cases}$$

的解。所以，当 $x=1$，$y=0$ 时，z 有最小值

$$z_{\min}=3(1)+7(0)=3。$$

例题 2

某公司生产A、B两种产品。产品A需要在第一装配线上加工2小时，在第二装配线上加工7小时；产品B需要在第一装配线上加工4小时，在第二装配线上加工7小时。第一及第二装配线在一周内的工作时间分别是100小时及210小时。若每件产品A可获利RM30，每件产品B可获利RM50，且生产的产品都能卖出，应如何安排这两种产品的生产量以获取最大的利润?

解 设该公司每周生产 x 件产品A及 y 件产品B。
依题意，列表如下 ：

	产品 A (x 件)	产品 B (y 件)	工时限制
第一装配线	$2x$	$4y$	100
第二装配线	$7x$	$7y$	210
利润 (RM)	$30x$	$50y$	

全部产品卖完后的利润是 $z=30x+50y$。这是目标函数。依题意，求其最大值，约束条件为：

$$\begin{cases} 2x+4y\le 100 \\ 7x+7y\le 210 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x+2y\le 50 \\ x+y\le 30 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

此不等式组的解，即可行区域，为图15-35 所示的阴影区域(包括边界)。

(续)

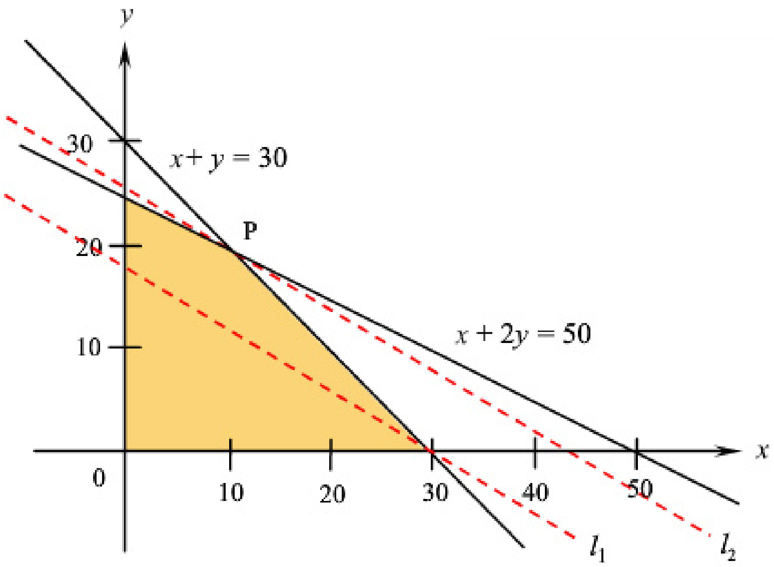


图 15-35

令 l：$30x+50y=z$。

当 $z=900$ 时，得直线 l_1。将直线向远离原点的方向平移至 l_2 时，z 的值最大。此时 l_2 与可行区域相交于点 P。解方程组

$$\begin{cases} x+2y=50 \\ x+y=30 \end{cases}$$

得 $x=10$，$y=20$，对应的最大 z 值为

$$z_{\max}=30(10)+50(20)=1300$$

因此，该公司每周应生产 10 件产品 A 及 20 件产品B，可获得的最大利润是 RM 1300。

例题 3

某公司有甲、乙两间成衣制造厂，生产三种相同的成衣。甲厂每日可生产240打童装、30打睡衣及60打校服；乙厂每日可生产60打童装、30打睡衣及210打校服。甲、乙两厂每日的维持费分别是RM400及RM800。现接获一张订单，需480打童装，150打睡衣及600打校服。问应如何分配两厂的工作时间，使得维持费最低?

解 设甲厂开工 x 天，乙厂开工 y 天。

依题意，列表如下：

	甲厂 (x 天)	乙厂 (y 天)	订购量
童装	$240x$	$60y$	480
睡衣	$30x$	$30y$	150
校服	$60x$	$210y$	600
维持费 (RM)	$400x$	$800y$	

两厂的维持费是 $z=400x+800y$。这是目标函数。依题意，求其最小值，约束条件为：

$$\begin{cases} 240x+60y\geq 480 \\ 30x+30y\geq 150 \\ 60x+210y\geq 600 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} 4x+y\geq 8 \\ x+y\geq 5 \\ 2x+7y\geq 20 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

其可行区域为图 15-36 所示的阴影区域。

(续)

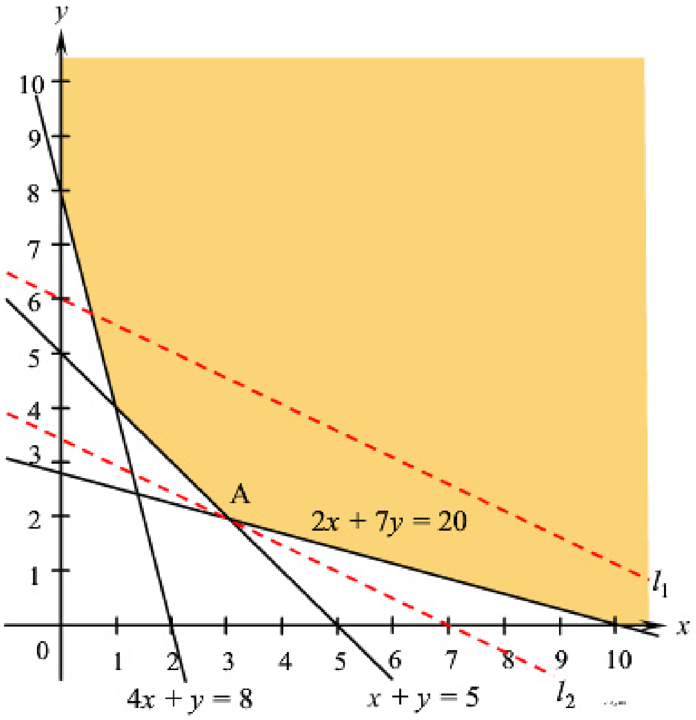


图 15-36

令 l： $400x+800y=z$ 。

当 $z=4800$ 时，得直线 l_1 。将直线向趋近原点的方向平移至 l_2 时， z 的值最小。此时 l_2 与可行区域相交于点 A。解方程组

$$\begin{cases} 2x+7y=20 \\ x+y=5 \end{cases}$$

得 $x=3$ ， $y=2$ ，对应的最小 z 值为

$$z_{\min}=400(3)+800(2)=2800$$

因此，甲厂开工 3 天，乙厂开工 2 天，其维持费最低，即 RM 2800。

随堂练习 12

求 $z=8x-10y$ 的最大值及最小值，式中 x 及 y 满足下列的约束条件：

$$\begin{cases} x+2y\le 40 \\ 3x+2y\le 90 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

练习 15.8

1. 求 $z=10x+12y$ 的最小值，式中 x 及 y 满足下列的约束条件：

$$\begin{cases} 3x+y\ge 8 \\ 2x+3y\ge 15 \\ x+5y\ge 9 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

2. 有一位房屋发展商有建筑资本 RM4,600,000 及一块面积为 2,400 平方公尺的土地。他想要建造 A 及 B 两种类型的房屋。已知每间 A 型房屋占地 150 平方公尺，建筑费 RM 250,000，可赚 RM 55,000；每间 B 型房屋占地 200 平方公尺，建筑费 RM 400,000，可赚 RM 80,000。若所建的房屋都可售完，此发展商应建造 A 型房屋及 B 型房屋各多少间才可赚取最高的利润？求最高的利润。

3. 某人有一幢室内面积为 180 平方公尺的楼房。他拟付 RM 7,000 的装修费来隔出两类房间租给学生：每间大房的面积是 20 平方公尺，可住 5 人，每人月租 RM 225；每间小房的面积是 15 平方公尺，可住 3 人，每人月租 RM 250。每间大房及小房的装修费分别是 RM 700 及 RM 600。若租客来源稳定，此人应隔出大房及小房各多少间，每月才能赚取最多的租金？每月最多可赚取多少租金？

4. 陈小姐是一位补习老师，专教初三及高三的数学。初三每班有 5 位学生，每位学生每月学费 RM50，上课 4 小时；高三每班有 3 位学生，每位学生每月学费 RM120，上课 6 小时。学生来源不成问题，但初三学生人数不能多于高三学生人数的两倍。若陈小姐想要每月赚取至少 RM 6,600，她需如何安排初三及高三的开班数量，使得上课时数最少？每月最少的上课时数是多少？

5. 某工厂可使用两种不同的原料来生产某一产品。若采用甲原料，每吨成本 RM 300，运输费 RM 50，每日生产 90 公斤；若采用乙原料，每吨成本 RM 700，运输费 RM 40，每日生产 100 公斤。若每日所使用原料的总成本不得超过 RM 2,100，运输费不得超过 RM 200，此工厂每日最多可生产多少公斤的产品？甲、乙两种原料各需使用多少吨？

6. 某工厂使用 a、b、c 及 d 四种原料来制造 A 及 B 两种产品，a、b、c 及 d 的库存分别是 22、14、15 及 18 个单位。已知每个产品 A 所需的原料 a、b、c 及 d 的用量分别是 3、2、0 及 3 个单位；每个产品 B 所需的原料 a、b、c 及 d 的用量分别是 2、1、3 及 0 个单位。若每个产品 A 可获利 RM7,000，每个产品 B 可获利 RM5,000，以现有的库存，该如何安排这两种产品的生产数量，才可赚取最高的利润？

7. 黄先生欲使用 A 及 B 两种饮料调配出一种新的饮料。A 饮料每公升成本 RM2，含有 20 毫克的维他命 C，3 毫克的色素及 150 克的糖；B 饮料每公升成本 RM4，含有 35 毫克的维他命 C，2 毫克的色素及 100 克的糖。黄先生欲调配出至少 50 公升的新饮料，每公升至少要有 30 毫克的维他命 C，但所含的总糖份不能超过 6 公斤，总成本不能超过 RM 180。若欲使所含的总色素量最低，应使用饮料 A 及饮料 B 各多少公升？

8. 某烘培坊烘焙 A 及 B 两种蛋糕。每个蛋糕 A 需使用 1 公斤的面粉，5 个蛋及 300 克的糖；每个蛋糕 B 需使用 800 克的面粉，8 个蛋及 200 克的糖。该烘培坊有 3 位烘培师傅，每人每日工作至少 8 小时，每位师傅烘焙蛋糕 A 及蛋糕 B 的时间分别是 40 分钟及 50 分钟。该烘培坊每日至少需烘焙 32 个蛋糕，而每日原料的供应量分别是蛋 220 个及糖 9 公斤。由于面粉短缺，该烘培坊尽量减少面粉的使用量。问该烘培坊每日应烘焙蛋糕 A 及 B 各多少个，才能使面粉的使用量最少？面粉的最少使用量是多少？

总复习题 15

比较下列各题中两个代数式的大小 (1 至 2):

1. $(x-3)(4-x)$ 与 $(6-x)(x-1)$
2. $6-x^2$ 与 $4x-2x^2$

解下列各不等式 (3 至 16):

3. $4(x-1)>x+6$
4. $3(3-x)\geq 2(x+3)$
5. $3-\dfrac{x-1}{4}\geq 2+\dfrac{3(x+1)}{8}$
6. $x-\dfrac{x-1}{2}\leq\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x+1}{2}$
7. $-1<\dfrac{1}{2}x+3<7$
8. $-\dfrac{3}{2}<1-3x\leq 8$
9. $x^2<7$
10. $x^2+10x-200\geq 0$
11. $4<3x^2+4x$
12. $5x-3\geq 2x^2$
13. $x^2-x(x-6)>5(x-1)$
14. $(2x+1)^2+5\leq 4(x+2)^2$
15. $9x^2+2\leq 12x-2$
16. $4(x^2+7)>3-20x$

解下列各不等式组 (17 至 28):

17. $\begin{cases}3x+2\leq 0\\ 4-x<x\end{cases}$
18. $\begin{cases}x+4>-x\\ \dfrac{3x-1}{2}<2(x+1)\end{cases}$
19. $\begin{cases}x-3\leq 5-3x\\ 4+(2x-1)\leq 4x+7\end{cases}$
20. $\begin{cases}4x-5\geq 2x+1\\ x+\dfrac{2}{3}\leq\dfrac{2x+5}{3}\end{cases}$
21. $5<2x-7<x+1$
22. $4<6+2x\leq 4x$

23. $\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}\geq 1-\dfrac{x}{2} \\ 2-\dfrac{x}{3}<\dfrac{2x}{3}-3 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x+\dfrac{13}{2}>\dfrac{7-x}{2} \\ 2\left(x+\dfrac{1}{3}\right)<2-x \\ x^2\geq\dfrac{5x}{2} \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2-3x-4\geq 0 \\ 2x^2-x-6>0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} (2x-1)(x-2)\leq 8x-9 \\ 3(x^2-2)<7x \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2(x^2+3)\geq 7-x \\ (x+3)^2>1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x(x-1)\leq 2 \\ x(x+1)\geq 6 \end{cases}$

解下列各不等式 (29至40):

29. $x^4-5x^2+4\leq 0$

30. $(x^2+2x-8)(x^2+2x-3)>0$

31. $(2x+1)^2(x^2+3x-10)<0$

32. $(x-1)^2(6x^2+13x+6)\leq 0$

33. $\dfrac{2x-7}{x+6}\geq 4$

34. $\dfrac{x}{2x+1}>\dfrac{6}{x+7}$

35. $\dfrac{(x+3)(x-2)^2}{x^2-1}\leq 0$

36. $4+\dfrac{7}{x+6}\leq\dfrac{15}{x+2}$

37. $|3-5x|\geq 7$

38. $2<|x-5|<9$

39. $1\leq\left|\dfrac{3x-1}{4}-2\right|<4$

40. $\dfrac{4}{|x+3|}-5\leq 3$

求下列各不等式组的图解 (41至42):

41. $\begin{cases} x+y-3>0 \\ x-2y+4>0 \\ 0\leq y\leq 8 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x+y\geq 20 \\ 2x+3y\leq 48 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

43. 求 $z=x-y$ 的最大值及最小值，式中 x 及 y 满足下列的约束条件：

$$\begin{cases} 3x+y\le 3 \\ 2x+3y\le 6 \\ 3x-2y\le 1 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

44. 某工厂生产 A 及 B 两种产品。该两种产品每公斤所含的成份如下：

产品（每公斤）	成分 X (公斤)	成分 Y (公斤)
A	0.6	0.5
B	0.3	0.7

每公斤产品 A 及 B 的利润分别是 RM 3 及 RM 5。该工厂现有 24 公斤的成份 X 及 28 公斤的成份 Y。问产品 A 及 B 应各生产多少公斤才可赚取最高的利润？

45. 某种动物每日必须摄取甲、乙及丙三种营养素至少 11、13 及 15 个单位。现有两种饲料 A 及 B，每公斤饲料 A 及 B 所含的营养成分的数量如下表所示：

饲料 (每公斤)	甲 (单位)	乙 (单位)	丙 (单位)
A	1	3	2
B	2	1	2

已知每公斤饲料 A 的价格是 RM 300，每公斤饲料 B 的价格是 RM 400。问每日应使用饲料 A 及 B 各多少公斤，才能使饲料费最低？求最低的饲料费。

16. 圆

学习目标：

- 掌握圆的方程式的解法
- 应用圆的方程式求其圆心及半径
- 掌握圆的相关问题的解法（圆与直线相切、切距、点到圆的最长或最短距离）

16.1 圆的标准方程式

在平面上与一定点等距离的点的轨迹叫做圆，此定点叫做圆心，此等距离叫做圆的半径。

设C(h , k) 为圆心，r为圆的半径($r>0$)，P(x , y)为圆上的任意动点，如图 16-1 所示，

$$CP=r$$

由距离公式，得 $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$

即 $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

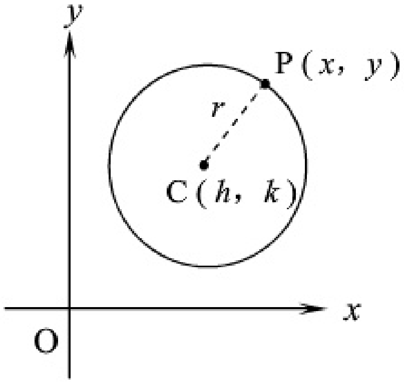


图 16-1

以上式子就是圆的标准方程式。

若圆心在坐标原点，则$h=k=0$，那么圆的方程式就是 $x^2+y^2=r^2$ ($r>0$)。

例题 1

求圆心为(−1 , 2)，半径为 4 的圆的方程式。

解 圆的方程式是 $[x-(-1)]^2+(y-2)^2=4^2$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16$$

例题 2

求过点(1 , 9)，圆心为(6 , −3)的圆的方程式。

解 圆的半径 $r=\sqrt{(1-6)^2+[9-(-3)]^2}$

$=13$

圆的方程式是 $(x-6)^2+[y-(-3)]^2=13^2$

$$(x-6)^2+(y+3)^2=169$$

例题 3

已知两点 A $(-2, 3)$ 及 B$(4, 1)$，求以线段AB为直径的圆的方程式。

解 设 C(h, k) 是圆心，则 C是线段 AB 的中点。

因此，$h=\dfrac{-2+4}{2}=1$， $k=\dfrac{3+1}{2}=2$

圆的半径 $r=\dfrac{1}{2}\text{AB}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{[4-(-2)]^2+(1-3)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{40}$$

$$=\sqrt{10}$$

圆的方程式是 $(x-1)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=10$$

例题 4

化方程式 $x^2+y^2-4x+8y=29$ 为圆的标准式，并求其圆心及半径。

解 利用配方法将方程式化为圆的标准式：

$$x^2+y^2-4x+8y=29$$

$$\left(x^2-4x\right)+\left(y^2+8y\right)=29$$

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+8y+16\right)=29+4+16$$

$$(x-2)^2+(y+4)^2=49$$

圆的标准方程式是 $(x-2)^2+(y+4)^2=49$，其圆心是 $(2, -4)$，半径是 7。

随堂练习 1

1. 求圆心为 $(3, -1)$，半径为 2 的圆的方程式。
2. 求过点 $(1, 5)$，圆心为 $(-2, 9)$ 的圆的方程式。

练习 16.1

1. 求圆心在原点，半径为 7 的圆的方程式。
2. 根据下列各条件，求圆的方程式：
   (a) 过点 $(5, -3)$，圆心为 $(2, 1)$
   (b) 圆心为 $(3, 2)$，半径为 4
   (c) 圆心为 (a, b)，半径为 $a+b$
3. 已知一圆的直径的两端点坐标分别是 $(5, -3)$ 及 $(3, 1)$，求此圆的方程式。
4. 求以点 $(-3, 4)$ 与 $(9, 2)$ 的连线为直径的圆的方程式。
5. 已知两点 P $(-2, 2)$ 及 Q $(4, 6)$，求以线段 PQ 为直径的圆的方程式。
6. 化方程式 $x^2+y^2-6x+12y+41=0$ 为圆的标准式，并求其圆心及半径。

16.2 圆的一般方程式

在上一节，我们学习了圆的标准方程式是 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

若我们将此标准方程式展开并整理，可得 $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$。

令 $g=-h$，$f=-k$，$c=h^2+k^2-r^2$，得

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

以上式子就是圆的一般方程式。

注意

圆的一般方程式有以下的特点：
一、它是一个二元二次方程式；
二、式中 x^2 与 y^2 项的系数相同；
三、没有 xy 项。

由 $c=h^2+k^2-r^2$，得 $r^2=h^2+k^2-c$

$$\begin{aligned} r&=\sqrt{h^2+k^2-c} \\ &=\sqrt{(-g)^2+(-f)^2-c} \\ &=\sqrt{g^2+f^2-c} \end{aligned}$$

因此，

(1) 当 $g^2+f^2-c>0$ 时，方程式 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 的图像是一个圆，其圆心为$(-g,-f)$，半径为 $\sqrt{g^2+f^2-c}$。

(2) 当 $g^2+f^2-c=0$ 时，方程式 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 的图像是一个点$(-g,-f)$。

(3) 当 $g^2+f^2-c<0$ 时，方程式 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 的图像不存在。

注意

在使用此公式求圆心及半径时，圆的方程式中 x^2 及 y^2 的系数都必须是 1。

例题 1

求圆 $2x^2+2y^2+3x-4y=0$ 的圆心及半径。

解 $2x^2+2y^2+3x-4y=0$

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-2y=0$$

$\therefore\ 2g=\frac{3}{2}$，$2f=-2$，$c=0$

即 $g=\frac{3}{4}$，$f=-1$，$c=0$

(续) $\therefore$ 此圆的圆心是 $\left(-\frac{3}{4}, 1\right)$。

$$\begin{aligned}\text{半径 } r &= \sqrt{g^2+f^2-c} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+(-1)^2-0} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

例题 2

求过 A(1,1)， B(2,–1)， C(3,2)三点的圆的方程式。

解 设所求的圆的方程式为 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 。

点A，B及C都在圆上，它们都满足此圆的方程式。

由此可得，

$$\begin{cases}1+1+2g+2f+c=0 \\ 4+1+4g-2f+c=0 \\ 9+4+6g+4f+c=0\end{cases}$$

即 $\begin{cases}2g+2f+c=-2 \\ 4g-2f+c=-5 \\ 6g+4f+c=-13\end{cases}$

解此方程组，得 $g=-\frac{5}{2}$， $f=-\frac{1}{2}$， $c=4$ 。

$\therefore$ 所求的圆的方程式是 $x^2+y^2+2\left(-\frac{5}{2}\right)x+2\left(-\frac{1}{2}\right)y+4=0$

$$x^2+y^2-5x-y+4=0$$

随堂练习 2

1. 求圆 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 的圆心及半径。
2. 求过下列三个点的圆的方程式：
   (a) A (0 , 0)，B (2 , 0)，C (0 , −3)
   (b) K (0 , 3)，L (1 , 2)，M (2 , −1)
3. 已知ΔABC的三个顶点分别是 (1 , 2)，(2 , 5) 及 (−1 , 2)，求ΔABC的外接圆的方程式。

练习 16.2

1. 求下列各圆的圆心及半径：
   (a) $x^2+y^2-64=0$
   (b) $x^2+y^2-4x-8y=44$
   (c) $x^2+y^2-8x=0$
   (d) $9x^2+9y^2+2x-6y-6=0$
2. 求过下列三个点的圆的方程式：
   (a) A (1 , 1)，B (1 , −1)，C (−2 , 1)
   (b) F (0 , 0)，G (3 , −3)，H (−1 , 0)
   (c) P (1 , 0)，Q (0 , −3)，R (3 , 4)
3. 圆过点 A (2 , 2) 及 B (5 , 3)，且与直线 $x+y=4$ 相交于 y 轴，求此圆的方程式。

16.3 圆的相关问题

例题 1

一圆过点 A(3,1) 及 B(−1,3)，且圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上，求圆的方程式。

解 设所求圆的圆心为 (h,k)。

∵ 圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上，

∴ $3h-k-2=0$

$$k=3h-2 \quad \text{............} \quad (1)$$

∵ 圆心到 A(3,1) 及 B(−1,3) 两点的距离相等，可得

$$\sqrt{(h-3)^2+(k-1)^2}=\sqrt{(h+1)^2+(k-3)^2}$$
$$h^2-6h+9+k^2-2k+1=h^2+2h+1+k^2-6k+9$$
$$8h-4k=0$$
$$k=2h \quad \text{............} \quad (2)$$

解 (1) 及 (2)，得 $h=2$，$k=4$。

∵ 圆心为 (2, 4)，半径 $r=\sqrt{(2-3)^2+(4-1)^2}$

$$=\sqrt{10}$$

∴ 所求圆的方程式是 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$

或 $x^2+y^2-4x-8y+10=0$

圆与直线相切

如图16-2所示，当直线 l 与圆只有一个公共点P时，该直线与圆相切，直线 l 叫做圆的切线，点P叫做切点。换言之，当一个圆的圆心至直线的距离等于圆的半径时，此圆与直线相切。

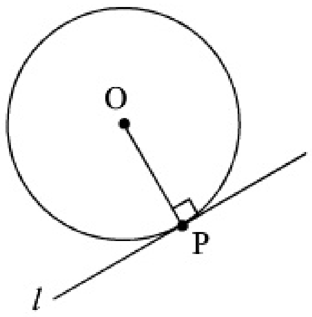


图 16-2

例题 2

求以点 $(1, -1)$ 为圆心，且与直线 $3x+4y-9=0$ 相切的圆的方程式。

解 由点到直线的距离公式，

$$圆的半径\quad r=\left|\frac{3(1)+4(-1)-9}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|$$
$$=2$$

圆的方程式是 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$。

例题 3

证明直线 $3x+4y+16=0$ 与圆 $x^2+y^2-2y-15=0$ 相切。

证 1 圆 $x^2+y^2-2y-15=0$ 的圆心为 $(0, 1)$，

半径 $=\sqrt{0^2+1^2-(-15)}=4$。

$$圆心至直线的距离=\left|\frac{3(0)+4(1)+16}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|$$
$$=4$$

$\because$ 圆心至直线的距离 = 半径

$\therefore$ 证得直线 $3x+4y+16=0$ 与圆 $x^2+y^2-2y-15=0$ 相切。

证 2

$$3x+4y+16=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$x^2+y^2-2y-15=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

由 (1)，得 $4y=-3x-16$

$$y=\frac{-3x-16}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

由 (3) 代入 (2)，得

$$x^2+\left(\frac{-3x-16}{4}\right)^2-2\left(\frac{-3x-16}{4}\right)-15=0$$

$$16x^2+9x^2+96x+256+24x+128-240=0$$

$$25x^2+120x+144=0$$

$$(5x+12)^2=0$$

$$x=-\frac{12}{5}$$

代 $x=-\frac{12}{5}$ 入 (3)，$y=\dfrac{-3\left(-\frac{12}{5}\right)-16}{4}$

$$=-\frac{11}{5}$$

由解方程组得知，直线与圆只有一个交点。因此，证得直线与圆相切。

补充资料

在解 2 中，利用代入消元法得到一元二次方程式 $25x^2+120x+144=0$ 后，可使用根的判别式来判断直线与圆有多少个交点：

$\Delta=(120)^2-4(25)(144)=0$

由判别式得知，直线与圆只有一个交点。因此，直线与圆相切。

例题 4

若直线 $5x-12y+k=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ 相切，求 k 的值。

解 圆 $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ 的圆心为 $(3, 2)$，

半径 $=\sqrt{3^2+2^2-(-3)}=4$ 。

(续) 由于直线与圆相切，所以圆心到直线的垂直距离与半径相等，即

$$\left| \frac{5(3)-12(2)+k}{\sqrt{25+144}} \right| = 4$$

$$k-9 = \pm 4 \times 13$$

$$\therefore \quad k = -43 \text{ 或 } k = 61$$

切距

由初中所学习过的切线长定理可知，从圆外一点到圆上两切点的距离相等。圆外一点到切点的距离叫做切线长或切距。

如图16-3所示，P (x_1, y_1) 是圆外一点，C是圆心，线段 PA 及 PB 分别切圆于点 A 及 B，PA 及 PB 就是从点P到圆的切距，且 PA = PB。切距可根据圆的方程式及切点的坐标求得。

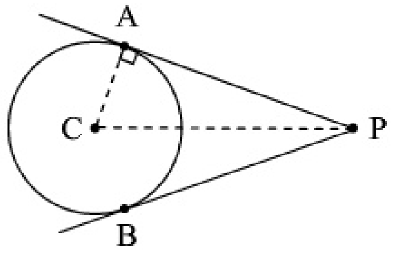


图 16-3

设已知圆的方程式为 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$，圆外一点 P 的坐标为 (x_1, y_1)。连接 PC 及 CA，$\angle CAP = 90°$，圆心 C 的坐标为 $(-g, -f)$。

$\therefore$ $CA = \sqrt{g^2+f^2-c}$，$PC = \sqrt{[x_1-(-g)]^2+[y_1-(-f)]^2}$

由毕氏定理，$PA^2+CA^2=PC^2$

$$\begin{aligned} PA^2 &= PC^2 - CA^2 \\ &= (x_1+g)^2+(y_1+f)^2-(g^2+f^2-c) \\ &= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{切距 } PA = \sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}}$$

注意

在使用此公式求切距时，圆的方程式中 x^2 及 y^2 的系数都必须是 1。

例题 5

求从圆 $3x^2+3y^2-6x+9y-1=0$ 外一点 P(1,2) 到圆的切距。

解 $3x^2+3y^2-6x+9y-1=0$

$$x^2+y^2-2x+3y-\frac{1}{3}=0$$

$$\therefore \text{切距}=\sqrt{1^2+2^2-2(1)+3(2)-\frac{1}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{78}}{3}$$

平面上一点到圆的最长及最短距离

已知圆的圆心为C，半径为r，P是平面上任意一点。

若 $\text{PC}>r$，则P在圆外，该点与圆的最长距离 $M=\text{PC}+r$，最短距离 $m=\text{PC}-r$，如图 16-4所示。

若 $\text{PC}<r$，则P在圆内，该点与圆的最长距离 $M=\text{PC}+r$，最短距离 $m=r-\text{PC}$，如图 16-5所示。

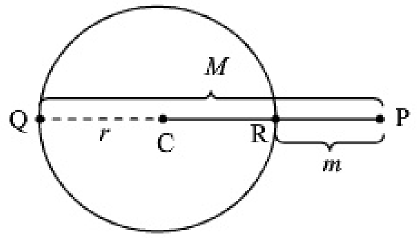


图 16-4

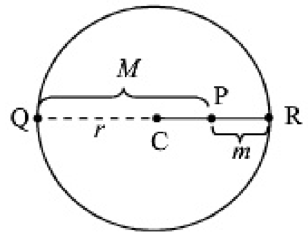


图 16-5

例题 6

求点 P (−4 , 5) 到圆 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 的最长及最短距离。

解 圆心为 C (2 , −3)， 半径$=\sqrt{2^2+(-3)^2-(-3)}=4$。

$$PC=\sqrt{[2-(-4)]^2+(-3-5)^2}$$
$$=\sqrt{6^2+(-8)^2}$$
$$=10>4$$

∴ 点 P 在圆外。

∴ 所求的最长距离是10+4=14，最短距离是10−4=6。

例题 7

求点P (1 , −2) 到圆 $x^2+y^2-8x+12y-12=0$ 的最长及最短距离。

解 圆心为 C (4 , −6)，半径$=\sqrt{4^2+(-6)^2-(-12)}=8$。

$$PC=\sqrt{(1-4)^2+[-2-(-6)]^2}$$
$$=5<8$$

∴ 点 P 在圆内。

∴ 所求的最长距离是 $8+5=13$ ，最短距离是 $8-5=3$。

随堂练习 3

1. 求以点 $(3, 4)$ 为圆心，且与直线 $x+2y-6=0$ 相切的圆的方程式。
2. 一圆过点 $(2, -3)$ 及 $(-2, -5)$，且圆心在直线 $x-2y=3$ 上，求此圆的方程式。
3. 一半径为 $\sqrt{5}$ 的圆与直线 $x-2y-1=0$ 相切于点 $(3, 1)$，求此圆的方程式。
4. 证明下列的直线与圆相切：
   (a) $3x-y-5=0$，$x^2+y^2-16x+2y+25=0$
   (b) $2x-y-1=0$，$x^2+y^2+2x-4y=0$
5. 求点 $P(8, 3)$ 到圆 $x^2+y^2-8=0$ 的切距。

练习 16.3

1. 求过点 $(1, 4)$ 及 $(0, -3)$，且圆心在直线 $x-2y=4$ 上的圆的方程式。
2. 求过点 $(3, 2)$ 及 $(-4, -5)$，且圆心在直线 $3x+y+6=0$ 上的圆的方程式。
3. 求过点 $A(5, 2)$ 及 $B(-3, 0)$，且圆心在 y 轴上的圆的方程式。
4. 求以原点为圆心，且与直线 $3x-4y+20=0$ 相切的圆的方程式。
5. 求以 $A(-5, 4)$ 为圆心，且与 x 轴相切的圆的方程式。
6. 一圆的圆心为 $(-4, 2)$，且与直线 $3x+2y=5$ 相切，求圆的方程式。
7. 求过点 $P(3, 0)$，且与直线 $2x-3y-24=0$ 相切于点 $(3, -6)$ 的圆的方程式。
8. 已知一圆 C_1 与圆 C_2：$x^2+y^2-4x-6y+8=0$ 的圆心相同，且 C_1 与直线 $3x+4y-13=0$ 相切。求圆 C_1 的方程式。
9. 证明下列的直线与圆相切：
   (a) $6x+5y-31=0$，$x^2+y^2+4x-5y-5=0$
   (b) $3x+1=0$，$9x^2+9y^2+3x+6y+1=0$
10. 求下列的点到圆的切距：
    (a) $(-2, 3)$，$x^2+y^2-6x-2y=0$
    (b) $(-6, 0)$，$x^2+y^2-6x+2y+8=0$
    (c) $(2, 2)$，$2x^2+2y^2+2x+4y-3=0$

11. 若下列的直线与圆相切，求 k 的值：

    (a) $4x+3y-k=0$， $x^2+y^2-6x+4y-12=0$

    (b) $x+3y+k=0$， $2x^2+2y^2+12y+13=0$

12. 求点 P (-2 , 5) 到圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的最长及最短距离。

13. 求点 Q (0 , 1) 到圆 $x^2+y^2-6x-10y-2=0$ 的最长及最短距离。

14. 若点 R (5 , 2) 到圆 $x^2+y^2-4x+4y-1=0$ 的最长距离是 M，最短距离是 N，求 M 与N的乘积。

总复习题16

1. 求下列各圆的方程式：

    (a) 圆心为 (1 , -1)，半径为 3

    (b) 圆心为 (2 , -3)，半径为 7

2. 求圆心在原点，且过点 (2 , -1) 的圆的方程式。

3. 求圆心为 (2 , 3)，且过点 (-5 , 6) 的圆的方程式。

4. 求以点 (2 , -5) 与 (8 , -1) 的连线为直径的圆的方程式。

5. 求下列各圆的圆心及半径：

    (a) $x^2+y^2-6x+14y+50=0$

    (b) $x^2+y^2+5x-2y+1=0$

    (c) $3x^2+3y^2+6x-12y+1=0$

    (d) $4x^2+4y^2-12x+16y-7=0$

6. 求经过下列三个点的圆的方程式：

    (a) (-1 , -1)， (-3 , 5)， (1 , 3)

    (b) (2 , 1)， (2 , -4)， (3 , -5)

    (c) (0 , 0)， (0 , a)， (b , 0)

7. 若圆 $x^2+y^2-8x+10y+c=0$ 的半径是 9，求 c 的值。

8. 已知两圆为 $x^2+y^2-2x-4y-95=0$ 与 $x^2+y^2-8x-12y+48=0$，求两圆的圆心距。

9. 求以点 $(1, -1)$ 为圆心，且与直线 $5x-12y+9=0$ 相切的圆的方程式式。
10. 一圆过点 $(1, -1)$ 及 $(1, 1)$，且与直线 $x-2=0$ 相切，求此圆的方程式。
11. 一圆过点 $(6, -4)$ 及 $(1, 7)$，且圆心在直线 $2x-3y=6$ 上，求此圆的方程式。
12. 求过点 $(-1, 1)$ 及 $(1, 3)$，且圆心在 x 轴上的圆的方程式。
13. 一圆与直线 $3x+4y+18=0$ 相切于点 $(-2, -3)$，且圆心在 $x-y=0$ 上，求此圆的方程式。
14. 若下列直线与圆相切，求 k 的值：
    (a) $2x-y+k=0$， $x^2+y^2-1=0$
    (b) $2x+3y+3\sqrt{13}=0$， $x^2+y^2=k$
    (c) $y=x+k$， $x^2+y^2=9$
15. 若圆 $x^2+y^2-6x-4y+k=0$ 与 x 轴相切，求 k 的值及切点的坐标。
16. 已知点的坐标及圆的方程式，求点到圆的切距：
    (a) $(1, 6)$， $x^2+y^2+2x-19=0$
    (b) $(2, 4)$， $x^2+y^2-2x+6y+9=0$
    (c) $(3, 2)$， $2x^2+2y^2+10x+11y-52=0$
    (d) $(0, 0)$， $x^2+y^2-2ax+4ay+4a^2=0$
17. 证明从点 $A(3, -4)$ 到圆 $C_1: x^2+y^2-10x-7y+13=0$ 的切距等于它到圆 $C_2: 2x^2+2y^2-3x-12y-17=0$ 的切距。
18. 证明直线 $y=2x$ 是圆 $x^2+y^2+16x+12y+80=0$ 的切线，并求其切点的坐标。
19. 求点 $P(-5, -12)$ 到圆 $x^2+y^2-25=0$ 的最长及最短距离。
20. 已知圆的方程式是 $x^2+y^2+8x-6y=0$。
    (a) 求其圆心及半径。
    (b) 证明点 $P(-2, 7)$ 落在圆内。
    (c) 求在圆内被点 $P(-2, 7)$ 平分的弦的方程式。

17. 立体几何与经纬度

学习目标：

- 能求直线与平面及两个平面所成的角
- 理解经度及纬度的概念
- 能计算同一经线上或同一纬线上两地之间的距离

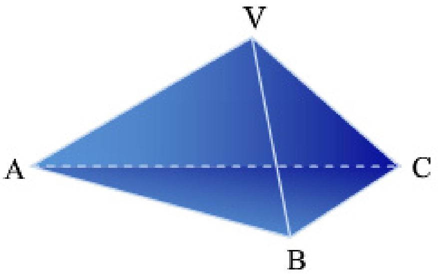
17.1 立体图形

立体几何的研究对象是立体图形。在本章中，我们将在平面几何知识的基础上讨论一些简易的立体图形的性质及其计算问题。

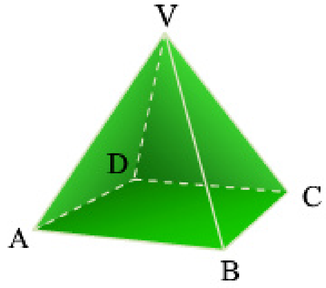
多面体

由有限个平面多边形相连接，且每一边必为两个平面多边形的公共边，这种立体叫做多面体。多面体可按照其面数分为四面体、五面体、六面体等等，如图 17-1 所示。围成多面体的各个平面叫做多面体的面，两个相邻平面的公共边叫做多面体的棱，棱与棱的公共点叫做多面体的顶点。例如，图17-1 (a) 是一个四面体 VABC，ΔVAB、ΔVBC、ΔVAC 及 ΔABC 是此四面体的面，VA、VB、VC、AB、BC及 AC 则是它的棱，而点 V、A、B 及 C 是它的顶点。

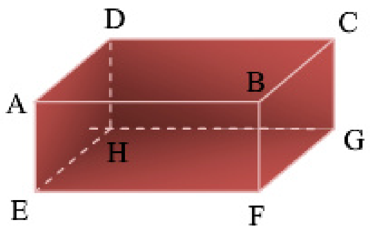
另外，相交于同一顶点的各平面所成的角叫做多面体的多面角或立体角。不在同一平面上的两个顶点所连接的线段叫做多面体的对角线。以图 17-1 (c) 的六面体为例，AG、BH、CE 及 DF 是此六面体的对角线。



(a) 四面体



(b) 五面体

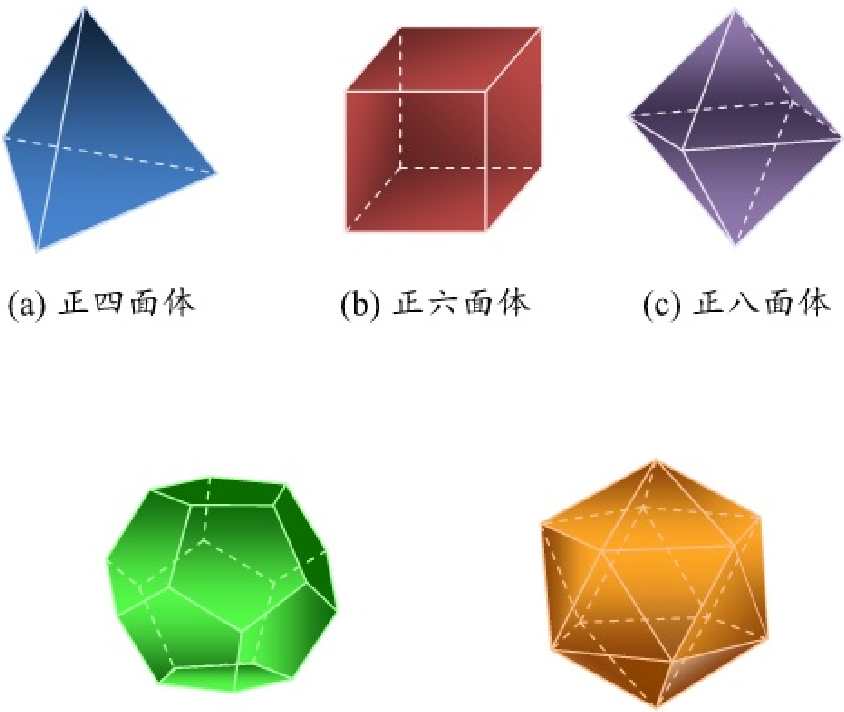


(c) 六面体

图17-1

正多面体

由全等的正平面多边形相连接，且立体角都全等的多面体，叫做正多面体。正多面体有五种，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体及正二十面体，如图 17-2 所示。



(a) 正四面体　(b) 正六面体　(c) 正八面体

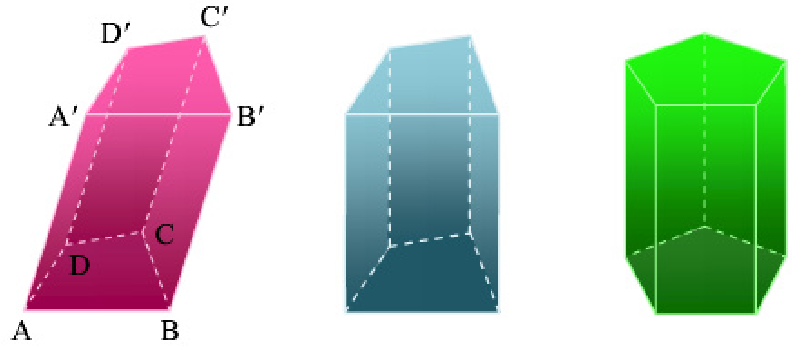
(d) 正十二面体　(e) 正二十面体

图17-2

棱柱（角柱）

若一个多面体的其中两个面互相平行，其余各面顺次相交成平行线，这种多面体叫做棱柱或角柱。互相平行的两个面叫做棱柱的底面，其余各面叫做棱柱的侧面。两个相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱，两个底面之间的距离叫做棱柱的高。以图17-3(a) 的棱柱为例，ABCD及A′B′C′D′是此棱柱的底面，AA′D′D、DD′C′C、CC′B′B及AA′B′B是其侧面，AA′、BB′、CC′及DD′是侧棱。点A、B、C、D、A′、B′、C′及D′是此棱柱的顶点，AC′、A′C、BD′、及B′D是对角线。而ABCD与A′B′C′D′之间的距离就是此棱柱的高。

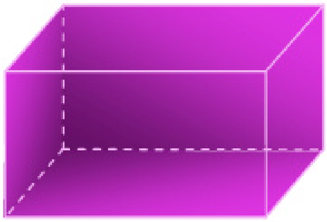
侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱(图17-3(a))；侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱(图17-3(b))；而底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱(图17-3(c))。



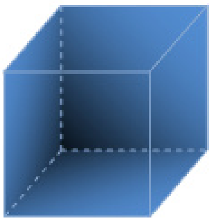
(a) 斜棱柱　(b) 直棱柱　(c) 正棱柱

图17-3

两个底面为平行四边形的棱柱叫做平行六面体。侧棱垂直于两底面的平行六面体叫做直平行六面体，底面为矩形的直平行六面体叫做长方体，长、宽与高都相等的长方体叫做立方体，如图 17-4 所示。



(a)长方体



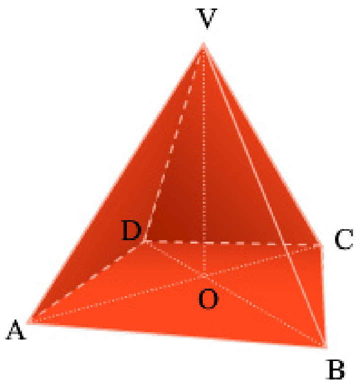
(b)立方体

图17-4

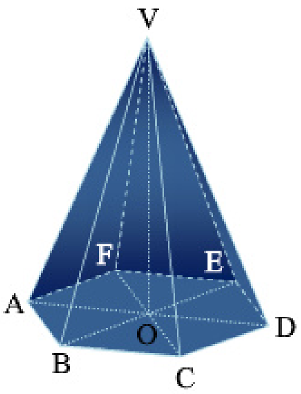
棱锥（角锥）

若一个多面体的其中一个面是多边形，其余各面为有一个公共点的三角形，这种多面体叫做棱锥或角锥。以图 17-5 (a) 的棱锥为例，多边形 ABCD 是棱锥的底面，ΔVAB、ΔVBC、ΔVCD、ΔVAD 是其侧面，V 是其顶点。由 V 至底面的垂直距离 VO 叫做棱锥的高。

若一个棱锥的顶点至底面的垂足是此多边形的中心，这种棱锥叫做直棱锥。若直棱锥的底面是一个正多边形，这种棱锥叫做正棱锥，如图 17-5 (b) 所示。



(a)直棱锥



(b)正棱锥

图17-5

直圆柱

如图 17-6 所示，将一个矩形 YY′BA 绕着边 YY′ 旋转一周所得的立体叫做直圆柱，其中 YY′ 叫做直圆柱的轴。由 AB 绕着 YY′ 旋转一周所得的面叫做直圆柱的侧面。由 YA 及 Y′B 绕着 YY′旋转一周所得的两个互相平行且面积相等的圆叫做直圆柱的底面，两个底面之间的距离叫做直圆柱的高。

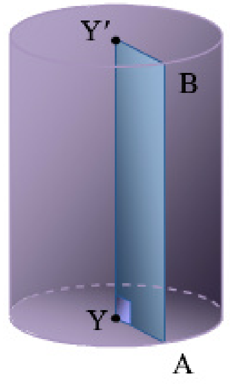


图17-6

直圆锥

如图 17-7 所示，将一个直角三角形 Y′YA 绕着其直角边 YY′ 旋转一周所得的立体叫做直圆锥，其中 YY′ 叫做直圆锥的轴。由Y′A 旋转一周所得的面叫做直圆锥的侧面。由 YA 旋转一周所得的圆叫做直圆锥的底面。从顶点到底面的垂直距离Y′Y 叫做直圆锥的高，而从顶点到底圆上一点的距离 Y′A 叫做直圆锥的斜高。

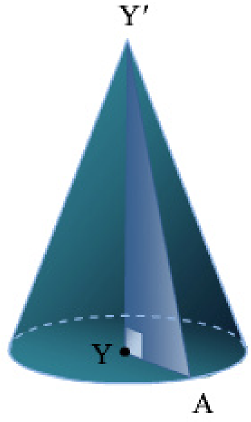


图17-7

球

由一个半圆绕着其直径旋转一周所得的图形叫做球面，球面所包围的立体叫做球体，简称球。半圆的圆心叫做球心，连接球心与球面上任意一点的线段叫做球体的半径。

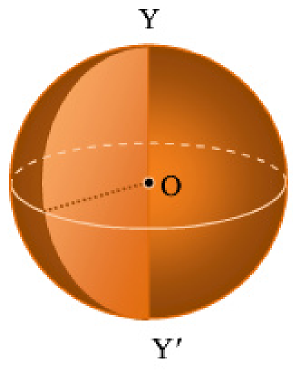


图17-8

若我们用一个平面截一个球，此截面就是圆面。球的截面有以下的性质：

一、球心与截面圆心的连线垂直于截面；

二、球心至截面的垂直距离 d、球的半径 R 及截面的半径 r 之间的关系是：

$$r=\sqrt{R^2-d^2}$$

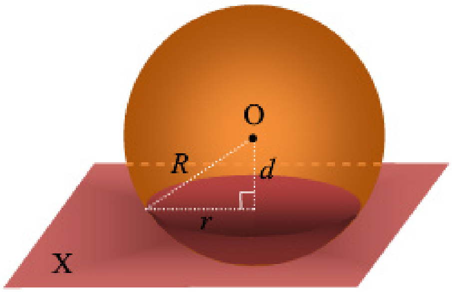


图17-9

由经过球心的平面所截得的圆叫做大圆，由不经过球心的平面所截得的圆叫做小圆。

17.2 直线与平面所成的角

一条直线与一个平面有以下三种位置关系：

(a) 直线在平面上；

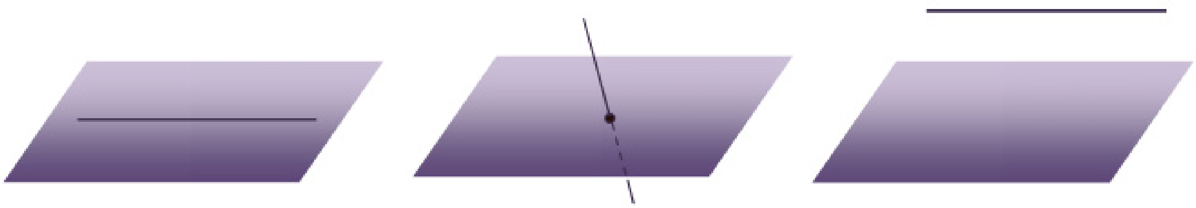
(b) 直线与平面只相交于一点；

(c) 直线与平面没有交点，

如图 17-10所示。

补充资料

若直线与平面没有交点，直线与平面平行。



(a) (b) (c)

图17-10

一直线与它在一平面上的正射影所成的角，叫做此直线与平面所成的角。从这个角的大小可以表示直线对平面的倾斜程度，所以这个角也叫做直线对平面的倾斜角。

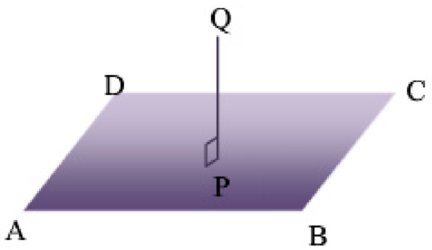


图17-11

在图 17-11 中，直线 PQ 垂直于平面 ABCD，垂足 P 是直线 PQ 的正射影，则该直线与平面成直角。

在图 17-12 中，PQ 与平面 ABCD 相交于点 P，QN 垂直于平面 ABCD，垂足为 N，则 PN 为 PQ 在 ABCD 上的正射影，∠QPN 就是 PQ 与 ABCD 所成的角。

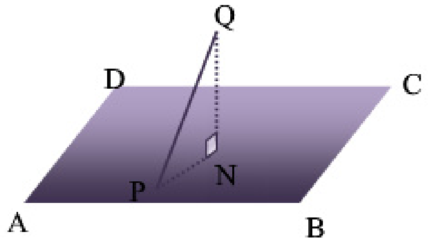


图17-12

例题 1

图17-13(a) 所示是一个边长为 8 cm 的正方体，M 是 AB 的中点，求

(a) MC的长；

(b) MG与平面 ABCD所成的角。

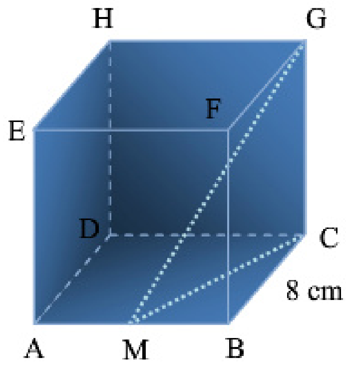


图17-13 (a)

解 (a) 在Δ MBC中，

$$\begin{aligned} MC^2 &= MB^2 + BC^2 \\ &= 4^2 + 8^2 \\ &= 80 \end{aligned}$$

$$MC = 4\sqrt{5}\ \text{cm}$$

(b) MG与平面ABCD所成的角是∠GMC。

在ΔMCG中，$\tan\angle GMC=\dfrac{CG}{MC}$

$$=\frac{8}{4\sqrt{5}}$$

$$\angle GMC=41.81°$$

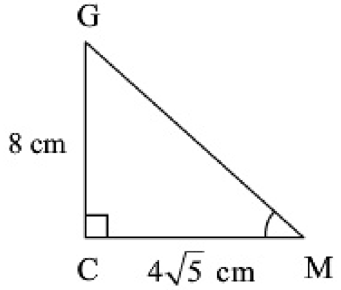


图17-13 (b)

例题 2

图 17-14 (a) 所示是一个棱锥，其底面是个矩形，其中 EH = 12 cm，GH = 10 cm。M 是 EF 的中点，V 位于 M 的正上方，VM = 6 cm。求 VG 与平面 EFGH 所成的角。

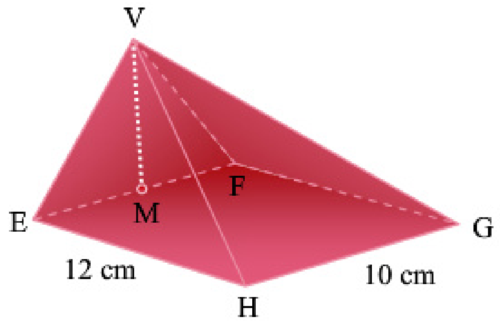


图17-14 (a)

解 在ΔMFG中，$MG^2=MF^2+FG^2$

$$=5^2+12^2$$

$$MG=13\text{ cm}$$

VG与平面EFGH所成的角是∠VGM。

$$\tan\angle VGM=\frac{VM}{MG}$$

$$=\frac{6}{13}$$

$$\angle VGM=24.78°$$

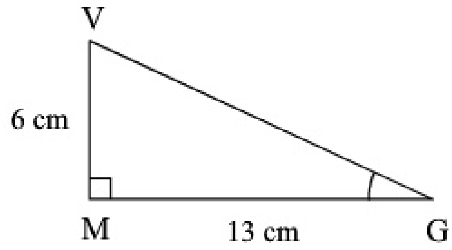


图17-14 (b)

例题 3

图 17-15 (a) 所示是一个长方体，其中 AB = 12 cm，BC = 8 cm，CG = 7 cm。求

(a) CH 与平面 ABCD 所成的角；

(b) BH 与平面 CDHG 所成的角。

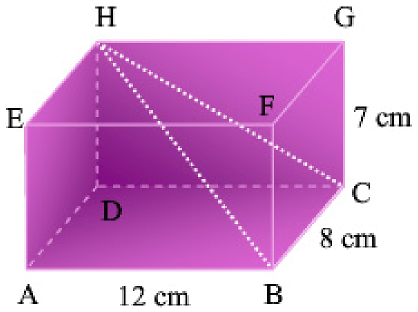


图17-15 (a)

解 (a) CH 与平面 ABCD 所成的角是∠HCD。

$$\tan \angle HCD = \frac{HD}{CD} = \frac{7}{12}$$

$$\angle HCD = 30.26°$$

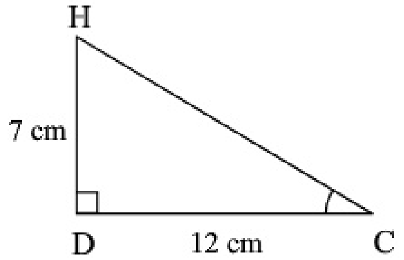


图17-15 (b)

(b) BH 与平面 CDHG 所成的角是∠BHC 。

在 ΔDHC 中，$CH^2 = 7^2 + 12^2$

$$CH = \sqrt{193}$$

在ΔBCH 中，$\tan \angle BHC = \frac{BC}{CH} = \frac{8}{\sqrt{193}}$

$$\angle BHC = 29.94°$$

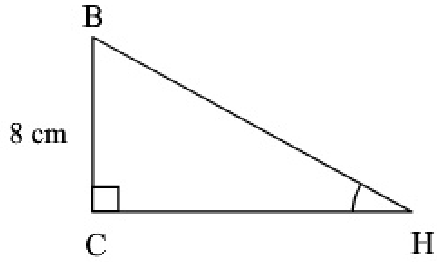
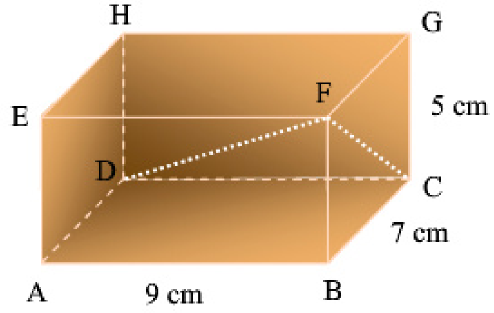


图17-15 (c)

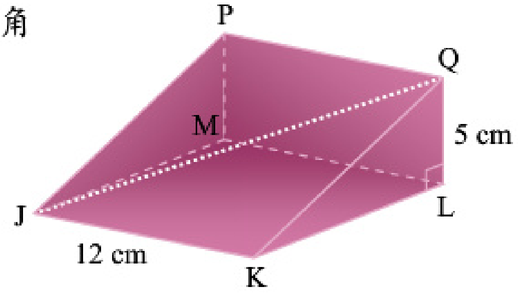
随堂练习 1

1. 在右图所示的长方体中，AB = 9 cm，BC = 7 cm，CG = 5 cm。求
(a) CF 与平面 GHDC 所成的角；
(b) DF 与平面 EFGH 所成的角。



(第 1 题用图)

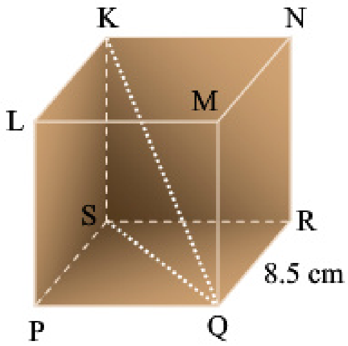
2. 右图所示是一个直棱柱，其底面 KQL 是一个直角三角形，JKLM 为一正方形。已知 JK = 12 cm，LQ = 5 cm，求 JQ 与平面 PQLM 所成的角。



(第 2 题用图)

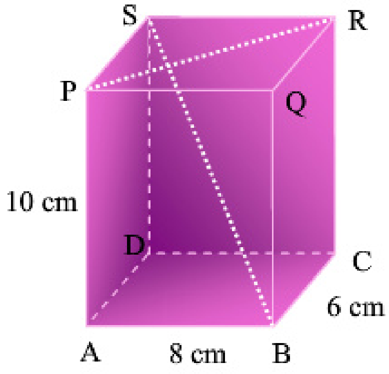
练习 17.2

1. 右图所示是一个边长为 8.5 cm 的立方体，求
(a) QS 与平面 MNRQ 所成的角；
(b) KQ 与平面 PQML 所成的角。



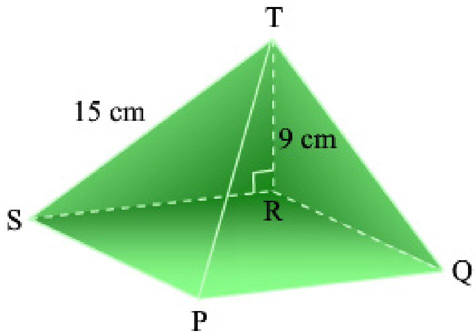
(第 1 题用图)

2. 右图所示是一个长方体，其中 AB = 8 cm，BC = 6 cm 及 AP = 10 cm。求
(a) PR 的长；
(b) SB 与平面 APQB 所成的角。



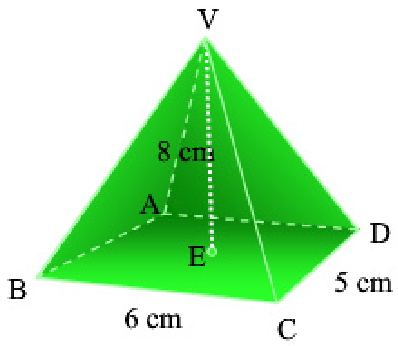
(第 2 题用图)

3. 右图所示是一个棱锥，其底面 PQRS 是一个正方形，TR 垂直于平面 PQRS。已知 TS = 15 cm 及 TR = 9 cm，求
(a) RS 的长；
(b) PT 与平面 PQRS 所成的角。



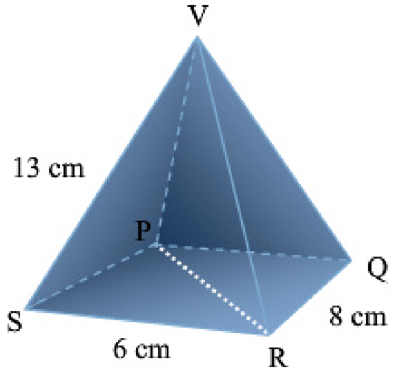
(第 3 题用图)

4. 右图所示是一个高 8 cm 的直棱锥，其底面 ABCD 是个矩形，E 是 V 至底面的垂足。已知 CD = 5cm，BC = 6 cm，求
(a) VA 与 VE 所成的角；
(b) VC 与平面 ABCD 所成的角。



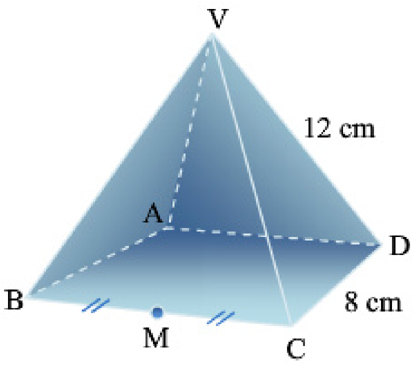
(第 4 题用图)

5. 右图所示是一个直棱锥，其底面 PQRS 是一个长方形。已知 SR = 6 cm，QR = 8 cm，VS = 13 cm，求
   (a) PR 的长；
   (b) 棱锥的高；
   (c) VP 与平面 PQRS 所成的角。



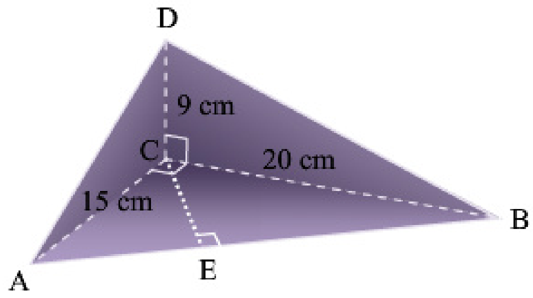
(第 5 题用图)

6. 右图所示是一个正棱锥，其侧棱的长为12 cm，底面 ABCD 是一个边长为 8 cm 的正方形，M 是 BC的中点。求
   (a) 侧棱与底面所成的角；
   (b) VM 与底面所成的角。



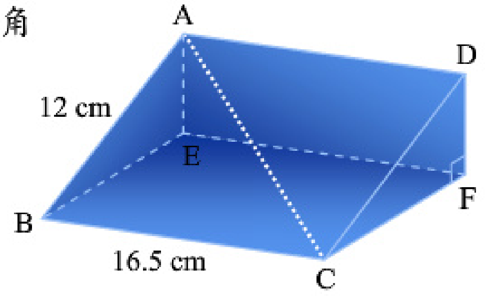
(第 6 题用图)

7. 在右图所示的棱锥中，ΔABC 是一个直角三角形，CD 垂直于平面 ABC，CE 与 AB 垂直。已知 AC = 15 cm，BC = 20 cm 及 CD = 9 cm，求
   (a) CE 的长；
   (b) ∠DEC；
   (c) AD 与平面 ABC 所成的角。



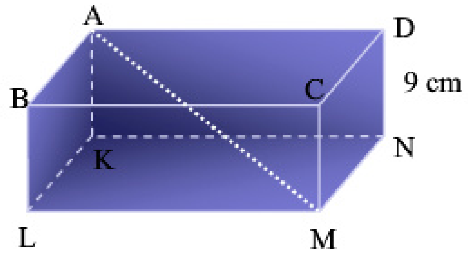
(第 7 题用图)

8. 右图所示是一个直棱柱，其底面 CDF 是一个直角三角形。已知 BC = 16.5 cm 及 AB = 12 cm。若 CF = 2DF，求
   (a) AB 与平面 BCFE 所成的角；
   (b) AC 与平面 BCFE 所成的角。



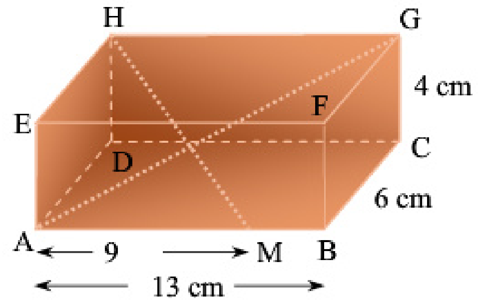
(第 8 题用图)

9. 右图所示是一个长方体，其体积是 300 cm^3。已知 AD = 2DC 及 DN = 9 cm。求 AM 与平面 KLMN 所成的角。



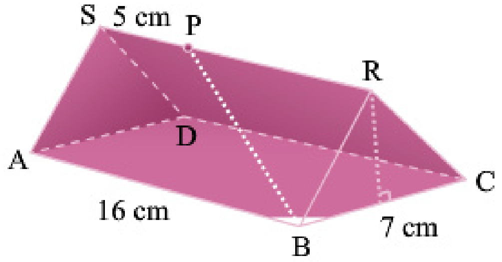
(第 9 题用图)

10. 右图所示是一个长方体。已知 AB = 13 cm，BC = 6 cm，CG = 4 cm，M 为 AB 上的一点且 AM = 9 cm，求
    (a) HM 与平面 ABCD 所成的角；
    (b) HM 与平面 HDAE 所成的角；
    (c) AG 与平面 CDHG 所成的角。



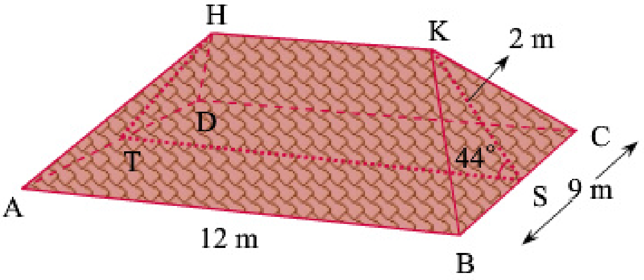
(第 10 题用图)

11. 右图所示是一个正棱柱，其底面 ADS 及 BCR 是等边三角形。若 AB = 16 cm，BC = 7 cm，SP = 5 cm，求
    (a) BP的长；
    (b) BP与平面ABCD所成的角。



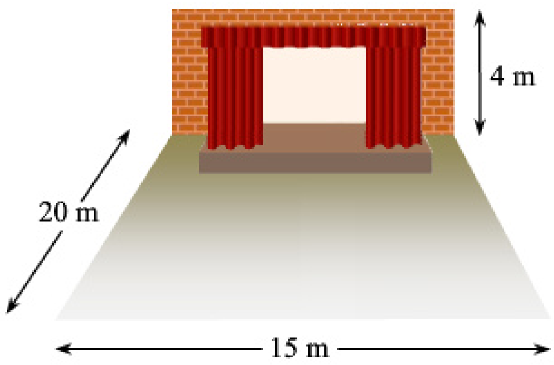
(第 11 题用图)

12. 在右图所示的屋顶中，HK 为屋脊，其四条棱 HA、HD、KB、KC 等长。平面 HAD 及 KBC 皆与平面 ABCD 成 44° 角。已知 S 及 T 分别是 BC 及 AD 的中点，且 AB = 12 m，BC = 9 m，KS = 2 m，求
(a) HK 与平面 ABCD 的距离；
(b) HK 的长；
(c) HA 与平面 ABCD 所成的角。



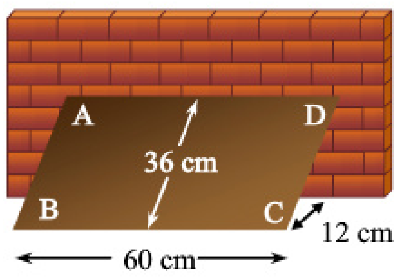
(第 12 题用图)

13. 一礼堂长 20 m，宽 15 m，高 4 m。求
(a) 连接礼堂的对角线的长；
(b) 对角线与地板所成的角。



(第 13 题用图)

14. 在右图中，ABCD 表示一个长 60 cm，宽 36 cm 的长方形木板，其底部 BC 位于地面上而其顶部 AD 则靠墙。若 BC 距离墙脚 12 cm，求木板的对角线 BD 与地面所成的角。



(第 14 题用图)

17.3 两个平面所成的角

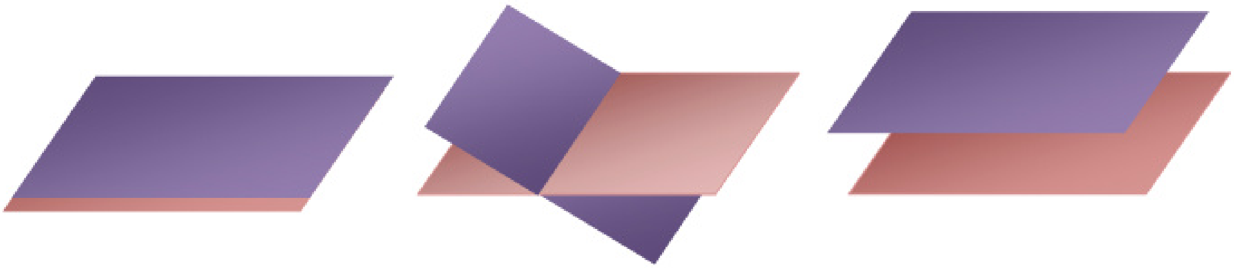
两个平面有以下三种位置关系：

(a) 两平面重合；

(b) 两平面相交于一直线；

(c) 两平面平行但不重合，

如图17-16所示。



(a) (b) (c)

图17-16

两个不平行的平面必相交于一直线，此直线叫做公共棱。由棱上的任意一点，在两个平面上各作一条与棱垂直的直线，则这两条垂直线所成的锐角叫做两平面所成的角或两平面的夹角。在图17-17中，平面ABCD与平面ABEF相交于公共棱 AB 上，∠KLM为平面 ABCD 与平面ABEF所成的角。

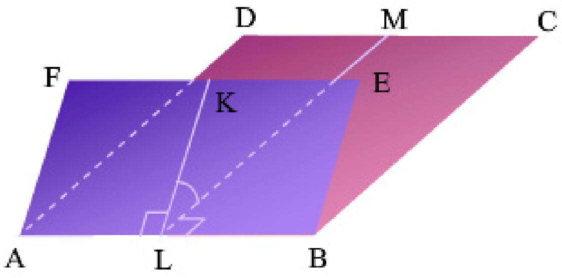


图17-17

例题 1

图 17-18 (a) 所示是一个长方体，其中M是 EH 的中点。已知 ABGF 是一个正方形，其边长是 6 cm，BC = 13 cm，求

(a) 平面 ABHE 与平面 ABCD 所成的角；

(b) 平面 MBA 与平面 ABGF 所成的角；

(c) 平面 MBA 与平面 CDEH 所成的角。

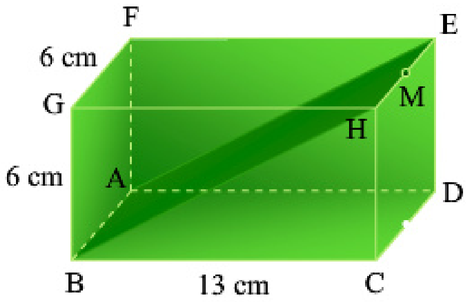


图 17-18 (a)

解 (a) ∵ AB 为平面 ABHE 与平面 ABCD 的公共棱，且 BH⊥AB，BC⊥AB。

∴ ∠HBC 为平面 ABHE 与平面 ABCD 所成的角。

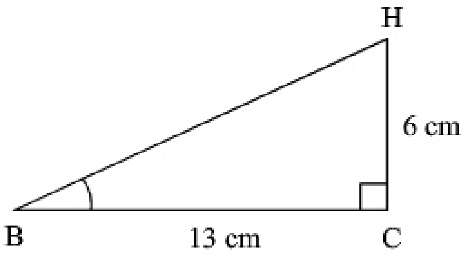


图 17-18 (b)

$$\text{在}\triangle BHC\text{中，} \tan \angle HBC = \frac{HC}{BC} = \frac{6}{13}$$

$$\angle HBC = 24.78°$$

(b) 平面 MBA 在平面 ABHE 内，因此平面 MBA 与平面 ABGF 所成的角等于平面 ABHE 与平面 ABGF 所成的角。

∵ EA⊥AB，FA⊥AB，

∴ 平面 ABHE 与平面 ABGF 所成的角为∠EAF。

$$\text{在}\triangle EFA\text{中，} \tan \angle EAF = \frac{EF}{FA} = \frac{13}{6}$$

$$\angle EAF = 65.22°$$

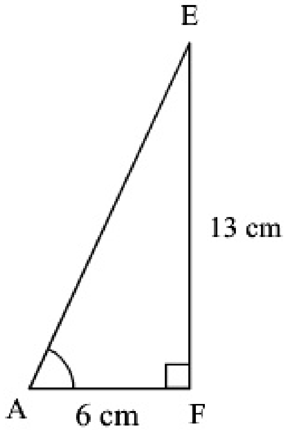


图 17-18 (c)

(c) ∵ 平面 CDEH 与平面 BAFG 平行

∴ 平面 MBA 与平面 CDEH 所成的角等于平面 MBA 与平面 ABGF 所成的角，即 65.22°。

补充资料

不共线的三点唯一决定一个平面。

例题 2

图 17-19 所示是一个以直角三角形为底面的直棱柱。已知 $CE=\frac{1}{5}$ EF， $BC=\frac{2}{3}$ EF 及 AB = 15 cm，求平面 ABEF 与平面 ABCD 所成的角。

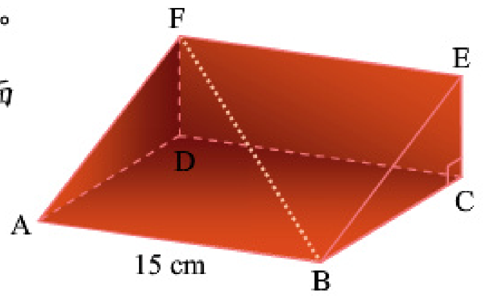


图17-19

解 ∵ AB 为平面 ABEF与平面 ABCD 的公共棱，

∴ 且EB⊥AB，BC⊥AB，

∠EBC 为所求的角。

$$\text{已知 } CE=\frac{1}{5}EF$$
$$=3\text{ cm}$$
$$BC=\frac{2}{3}EF$$
$$=10\text{ cm}$$

$$\text{在 } \Delta EBC\text{中，} \tan\angle EBC=\frac{EC}{BC}$$
$$=\frac{3}{10}$$
$$\angle EBC=16.70^\circ$$

例题 3

图 17-20(a) 所示是一个直棱锥，其高 VO 为 10cm。棱锥的底面 ABCD 是一个矩形，其中 CD = 8 cm 及 BC = 9.5 cm。求

(a) 平面 VBC 与平面 ABCD 所成的角；

(b) 平面 VAB 与平面 VCD 所成的角。

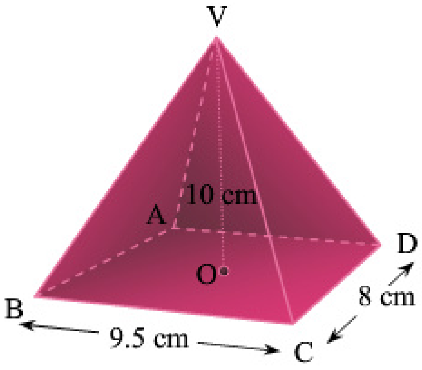


图 17-20 (a)

解 令 E、F 及 G 分别为 AB、CD 及 BC 的中点。

(a) ∵ 平面 VBC 与平面 ABCD 的公共棱为 BC，

∴ 且 $VG \perp BC$，$OG \perp BC$。

所求的角是 $\angle VGO$。

在 ΔVGO 中，$GO = 4$ cm。

$$\tan \angle VGO = \frac{VO}{GO}$$

$$= \frac{10}{4}$$

$$\angle VGO = 68.20°$$

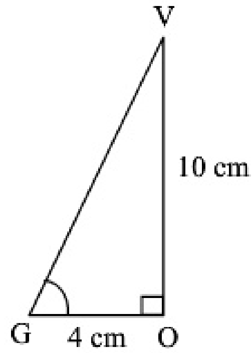


图 17-20 (b)

(b) 平面 VAB 与平面 VCD 所成的角是 $\angle EVF$。

∵ ΔVEF 为一等腰三角形

∴ $\angle EVO = \angle FVO$

在 ΔFVO 中，$FO = 4.75$ cm。

$$\tan \angle FVO = \frac{FO}{VO}$$

$$= \frac{4.75}{10}$$

$$\angle FVO = 25.41°$$

∴ $\angle EVF = 2 \times \angle FVO$

$= 2 \times 25.41°$

$= 50.82°$

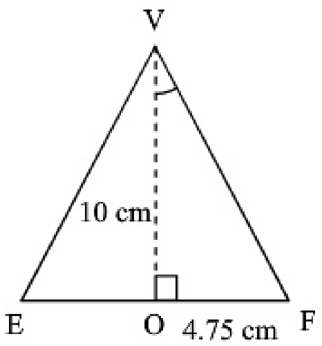
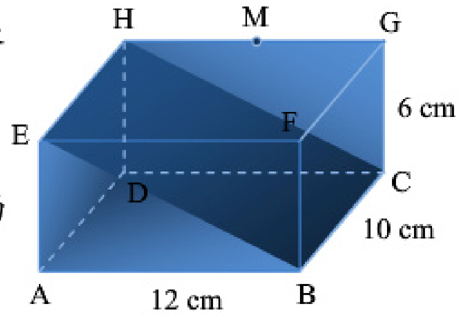


图 17-20 (c)

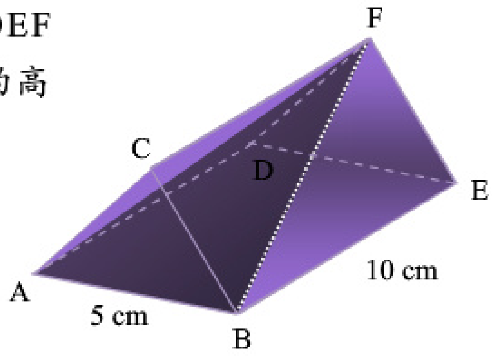
随堂练习 2

1. 右图所示是一个长 12 cm，宽 10 cm 及高 6 cm 的长方体。
   (a) 求平面 EBCH 与平面 ABCD 所成的角。
   (b) 若 M 为 HG 上的一点，求平面 MAB 与平面 ABCD 所成的角。



(第 1 题用图)

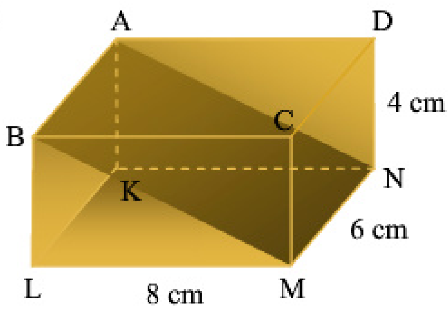
2. 右图所示是一个正棱柱，其底面 ABC 及 DEF 都是边长为 5 cm 的等边三角形。已知棱柱的高为 10 cm，求
   (a) BF 的长；
   (b) 平面 ABF 与平面 ABC 所成的角。



(第 2 题用图)

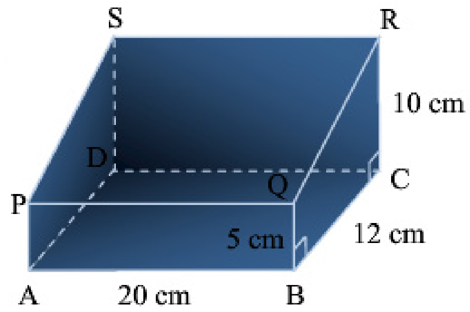
练习 17.3

1. 右图所示是一个长 8 cm，宽 6 cm 及高 4 cm 的长方体。求平面 ABMN 与平面 KLMN 所成的角。



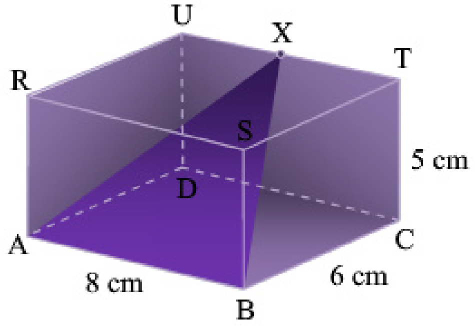
(第 1 题用图)

2. 在右图所示的直棱柱中，ABCD 是一个长 20 cm，宽 12 cm 的长方形，BCRQ 是一个梯形，∠QBC 及 ∠RCB 是直角，BQ = 5 cm，CR = 10 cm。求平面 PQRS 与平面 ABCD 所成的角。



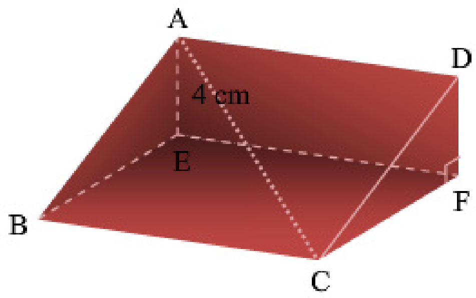
(第 2 题用图)

3. 在右图的长方体中，AB = 8 cm，BC = 6 cm 及 CT = 5 cm，X 是 TU 的中点。求
(a) 平面 XAB 与平面 ABCD 所成的角；
(b) 平面 BCUR 与平面 ADUR 所成的角；
(c) 平面 ABTU 与平面 ABCD 所成的角。



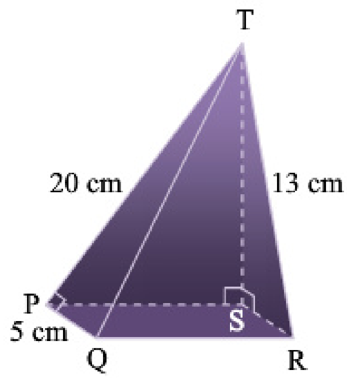
(第 3 题用图)

4. 右图所示是一个直棱柱，其底面 ABE 及 DCF 是直角三角形。已知 AE = 4 cm，$BE=\frac{2}{3}EF$，EF = 4DF，求平面 ABCD 与平面 BCFE 所成的角。



(第 4 题用图)

5. 在右图所示的棱锥中，PQT、SPT 及 SRT 都是直角三角形，PQRS 是一个矩形。已知 PQ = 5 cm，RT = 13 cm 及 PT = 20 cm，求
(a) 棱锥的高；
(b) TQ 与平面 PST 所成的角；
(c) 平面 RST 与平面 PQT 所成的角。

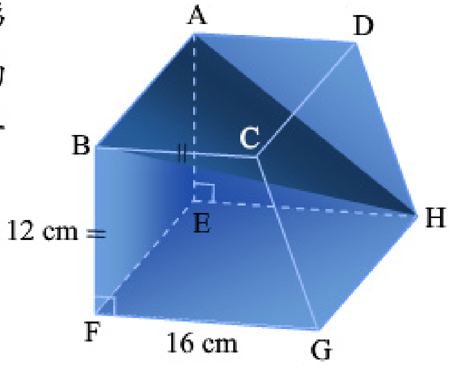


(第 5 题用图)

6. 右图所示是一个直棱柱，其底面 BCGF 是一个梯形，其中 BC = BF = 12 cm，FG = 16 cm。棱柱的其中一个侧面 EFGH 是一个正方形，且垂直于另一侧面 ABFE。求

(a) 平面 CDHG 与平面 EFGH 所成的角；

(b) 平面 ABH 与平面 ABFE 所成的角。

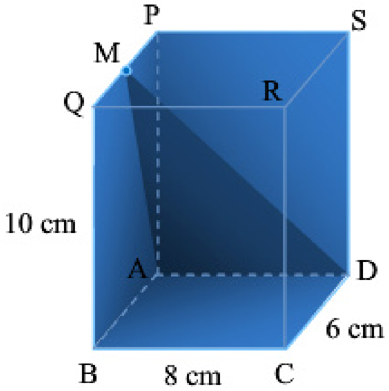


(第 6 题用图)

7. 在右图所示的长方体中，BC = 8 cm，CD = 6 cm 及 BQ = 10 cm。已知 M 是 PQ 的中点，求

(a) MD 与平面 PQBA 所成的角；

(b) 平面 AMD 与平面 ABCD 所成的角。

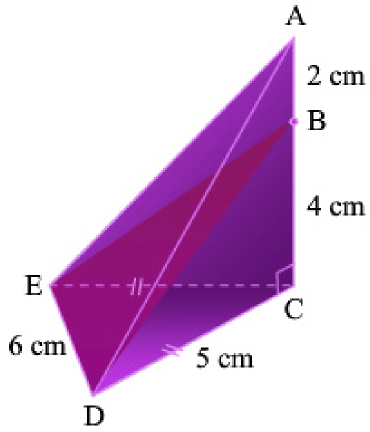


(第 7 题用图)

8. 右图所示是一个底面为等腰三角形的棱锥，其中 CD = CE = 5 cm 及 ED = 6 cm。ACD 是一个直角三角形，B 是 AC 边上的一点，AB = 2 cm 及 BC = 4 cm。求

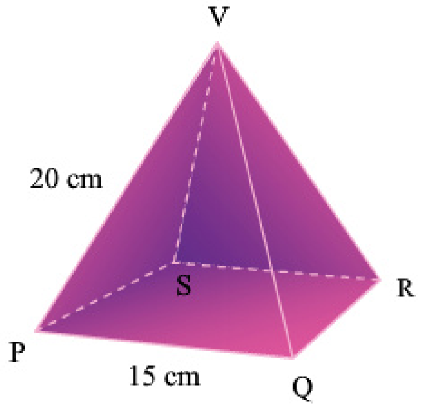
(a) 平面 BDE 与平面 CDE 所成的角；

(b) 平面 ADE 与平面 CDE 所成的角。



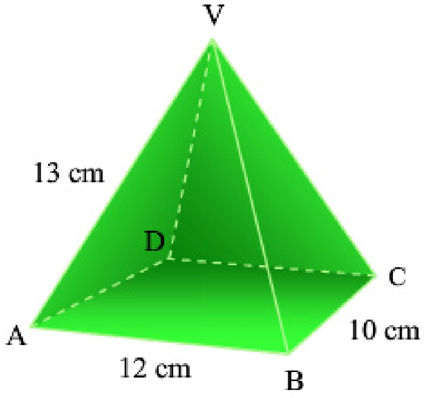
(第 8 题用图)

9. 右图所示是一个底面为正方形的正棱锥，已知 PQ = 15 cm 及 PV = 20 cm，求
(a) PV 与平面 PQRS 所成的角；
(b) 棱锥的侧面与底面所成的角。



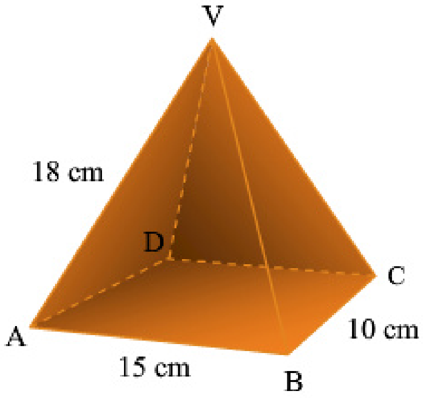
(第 9 题用图)

10. 右图所示是一个直棱锥，其侧棱的长为 13 cm。棱锥的底面 ABCD 是一个长 12 cm，宽 10 cm 的长方形。求
(a) 平面 VBC 与平面 ABCD 所成的角；
(b) 平面 VCD 与平面 ABCD 所成的角。



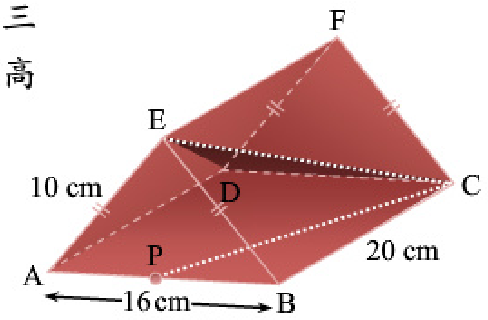
(第 10 题用图)

11. 右图所示是一个直棱锥，其侧棱的长是18 cm，底面 ABCD 是一个长 15 cm，宽 10 cm 的长方形。求
(a) 棱锥的高度；
(b) 平面 VAB 与平面 ABCD 所成的角；
(c) 平面 VBC 与平面 VAD 所成的角。



(第 11 题用图)

12. 右图所示是一个底面为等腰三角形的直棱柱，三角形的腰长为 10 cm，底边长为 16 cm，棱柱的高为 20 cm。已知 P 是 AB 的中点，求
   (a) PC 的长；
   (b) EC 与平面 ABCD 所成的角；
   (c) 平面 DCE 与平面 ABCD 所成的角。



(第 12 题用图)

17.4 经纬线与经纬度

地球可近似地视为一个球，其半径的近似值为 6370 公里，其极轴为过北极 (N) 及南极 (S) 的直线。地球依其极轴自转一周的时间为一天；而地球绕着太阳旋转一周的时间为一年。

经线与经度

在地球表面上连接南北两极的半个大圆叫做经线，也叫做子午线。而经过英国格林威治皇家天文台的经线为 0° 经线，叫做格林威治子午线，也叫做本初子午线。

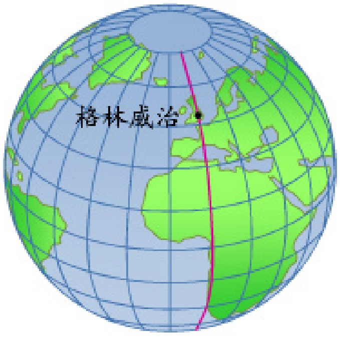


图17-21

一条经线的经度是指任何经线所在的平面与本初子午线所在的平面所成的角，如图17-22所示。本初子午线以东的经线叫做东经，以E表示；本初子午线以西的经线叫做西经，以W表示。东西经各有180°，其中东经180°与西经180°重合在同一条经线上，叫做180°经线。例如，吉隆坡的经度是东经102°或102°E（图17-23），纽约的经度是西经74°或74°W（图17-24）。

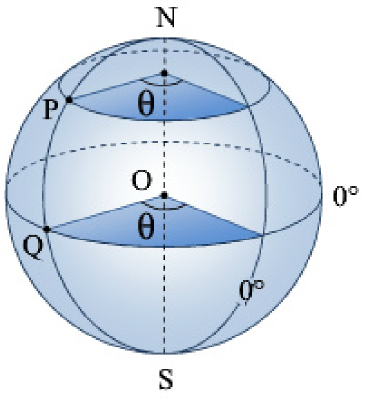


图 17-22

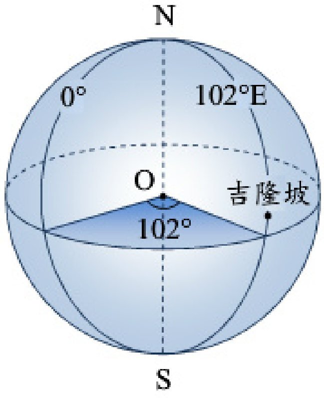


图 17-23

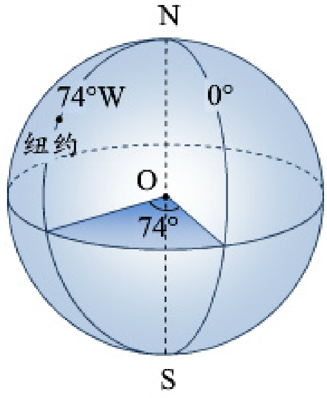


图 17-24

例题 1

在图17-25中，NAS为本初子午线，O为地球的中心。已知∠AOB＝65°及∠AOC＝38°，求B、C及D三地的经度。

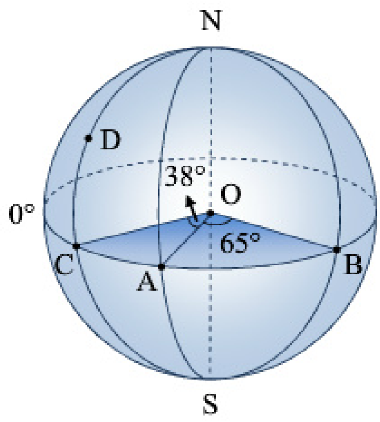


图17-25

解 B位于本初子午线以东，所以其经度是65°E。

C位于本初子午线以西，所以其经度是38°W。

D与C位于同一经线上，所以其经度是38°W。

纬线与纬度

垂直于极轴的平面截地球表面所得的圆叫做纬线，纬线中唯一的大圆叫做赤道，其余的纬线都是小圆，如图 17-26 所示。

任何纬线上的一点至地心的直线与赤道平面所成的角叫做纬度，如图 17-27 所示。赤道以北的纬线叫做北纬，以 N 表示；赤道以南的纬线叫做南纬，以 S 表示。赤道是纬度的度量准线，其纬度是 0°，南北纬各有 90°，南极为南纬 90°，北极为北纬 90°。例如，北京的纬度是北纬 40° 或 40° N（图17-28），悉尼的纬度是南纬 34° 或 34°S（图17-29）。

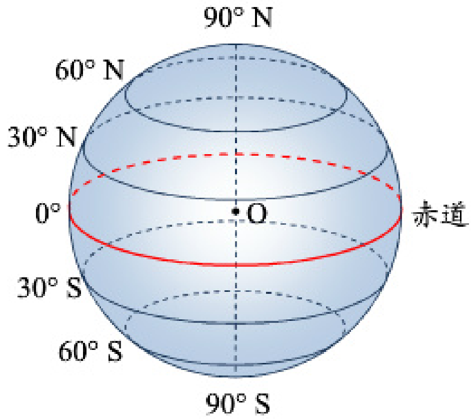


图17-26

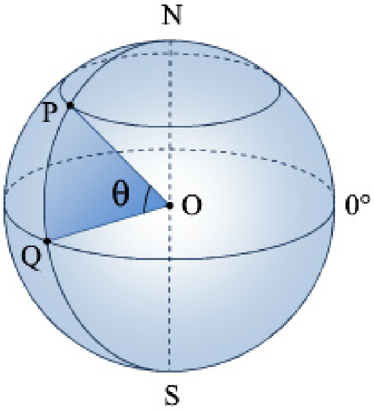


图 17-27

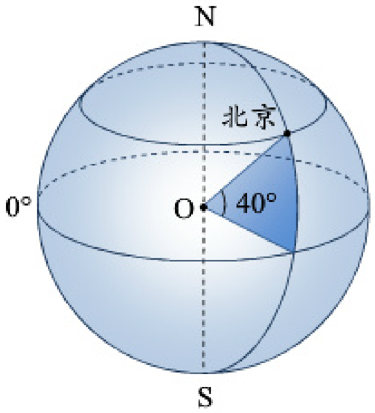


图 17-28

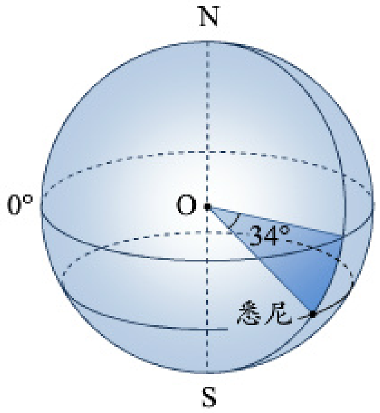


图 17-29

例题 2

在图 17-30 中，O 为地球的中心，A 位于赤道上，求 P、Q 及R三地的纬度。

解 P位于赤道以北，所以其纬度为 40° N。

$\because\ \angle AOQ = 90° - 70°$

$= 20°$

Q及R位于同一纬线上。

$\therefore$ Q及R的纬度为 20°S。

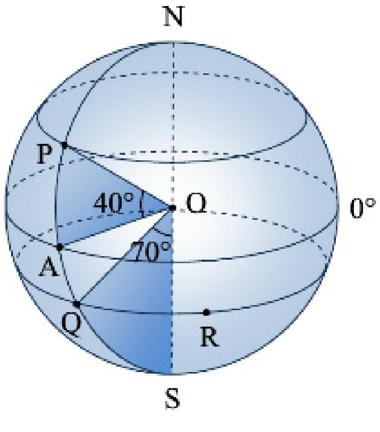


图17-30

例题 3

在图17-31中，O为地球的中心，求A，B，C及D四地的位置。

解 A地的经度 = 0°

A地的纬度 = 75° N

$\therefore$ A (75° N , 0°)

B地的经度 = 20° W

B地的纬度 = 0°

$\therefore$ B (0° , 20° W)

C地的经度 = (180° − 20°) E = 160° E

C地的纬度 = 75° N

$\therefore$ C (75° N , 160° E)

D地的经度 = 160° E

D地的纬度 = (90° − 40°) S = 50° S

$\therefore$ D (50° S , 160° E)

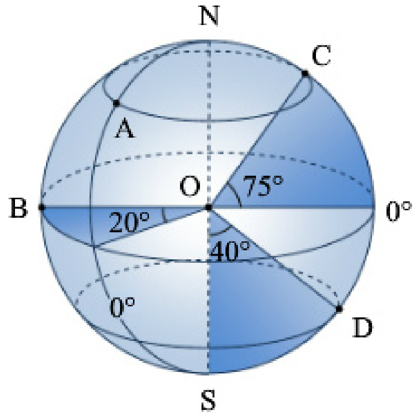


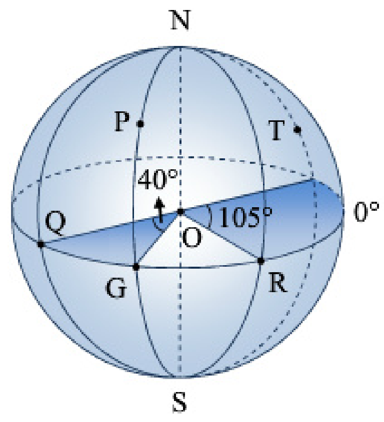
图17-31

补充资料

地球上任何一个地方的位置都可用经纬度来确定，表示成(纬度，经度)。例如，吉隆坡的经纬度是(3° 15′ N，102° E)。

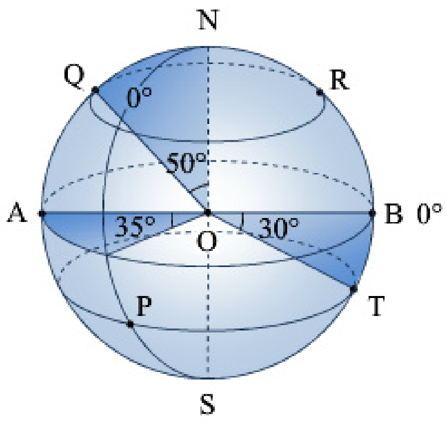
随堂练习 3

1. 在右图中，NGS 为本初子午线，O 为地球中心。求 P、Q、R 及 T 四地的经度。



(第 1 题用图)

2. 在右图中，O 为地球的中心，A、B 两地位于赤道上。写出 P、Q、R 及 T 四地的位置。



(第 2 题用图)

纬线圈的半径

如图 17-32 所示，设 R 是地球的半径，r 是纬度为 θ 的纬线圈的半径，则 $r = R\cos\theta$。

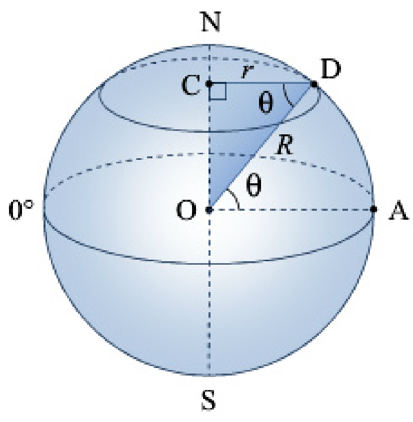


图17-32

海里的定义

在地球的大圆上，$1'$（即$\frac{1}{60}^{\circ}$）的圆心角所对的弧长为 1 海里，即 1 海里$=\dfrac{1}{60\times360}\times2\pi\times6370$ 公里

$=1.853$ 公里

时间与经度

时间的测量是根据地球自转一周所需的时间来计算的。地球由西往东自转，自转一周所需的时间为24小时。因此，地球每小时旋转 15° 经度，所以经度每相隔 15°，时间相差一个小时。

一、地方时

地方时是个别地区特有的时刻。凡处于同一经线上的地区，其地方时相同。

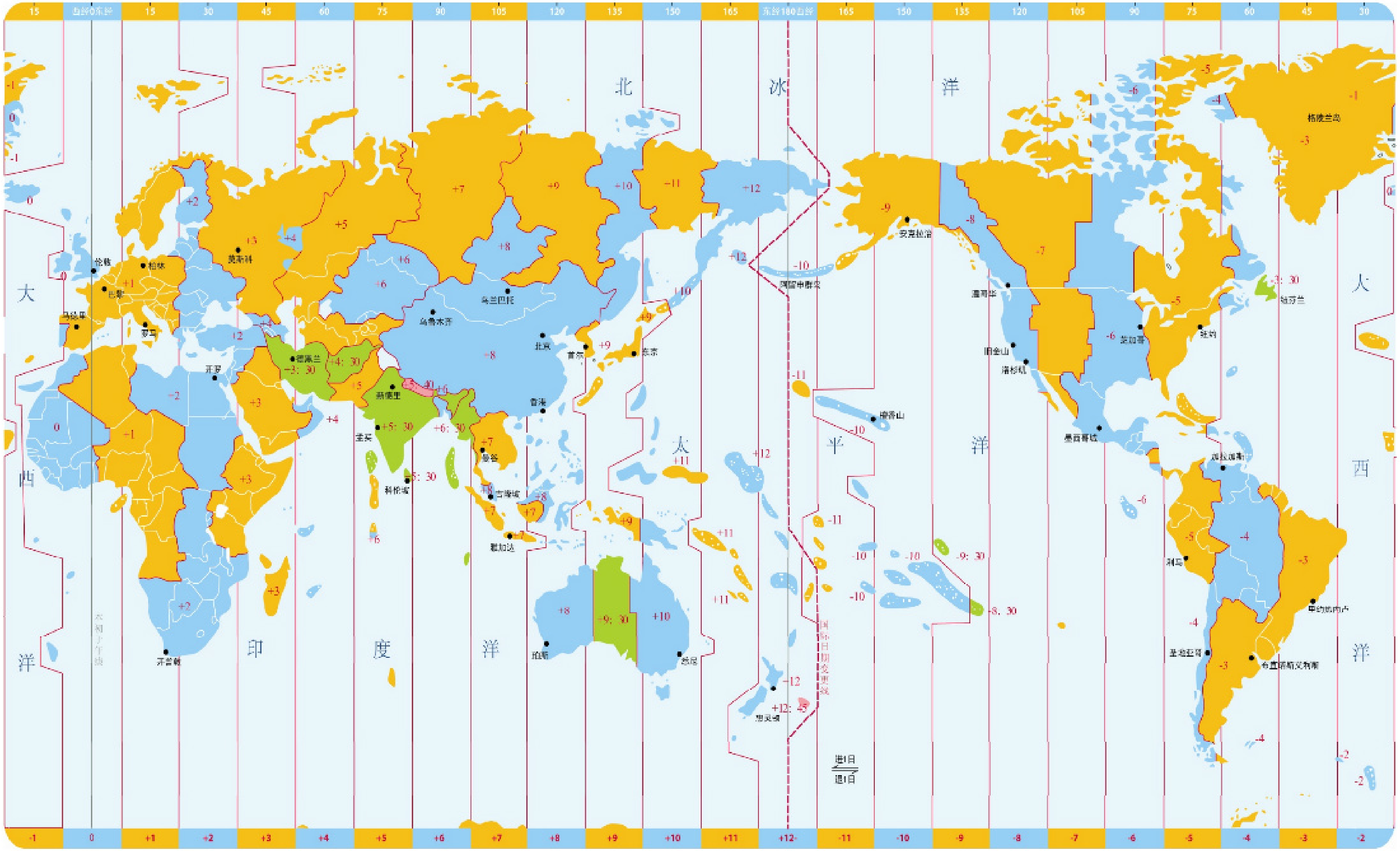
二、标准时

公元1884年，在美国华盛顿举行的一个国际经度会议上，各国议决将全球划分为24个时区。时区的划分是以格林威治子午线为基准，其东西两侧各7.5° 经度内的范围为零时区。由零时区开始，以每 15° 划分一个时区，就是世界的24 个时区，如图17-33 所示 。东经 7.5° 至东经 22.5° 的范围为东一时区，西经 7.5° 至西经 22.5° 的范围为西一时区，依此类推。例如，吉隆坡的经度为东经 102°，位于东七时区。同一时区内的所有地点都采用统一的时刻，而各时区的时刻是以该时区的中央经线的地方时作为标准，叫做标准时或区时。

由于两个相邻的时区相差一个小时，由西往东进入另一时区时，时间应拨快一个小时；反之，由东往西进入另一时区时，时间应拨慢一个小时。例如，吉隆坡位于东七时区，所以其标准时间比伦敦快七个小时。

补充资料

由于时区的划分及其他的因素，各地的“理论”时间与其实际的时间有时会有些出入。



北
冰
洋
大
西
洋
印
度
洋
太
平
洋
伦敦
巴黎
柏林
罗马
马德里
开罗
开普敦
莫斯科
德黑兰
新德里
孟买
科伦坡
乌鲁木齐
乌兰巴托
北京
首尔
东京
香港
曼谷
吉隆坡
雅加达
珀斯
悉尼
惠灵顿
国际日期变更线
檀香山
安克雷奇
温哥华
旧金山
洛杉矶
墨西哥城
芝加哥
纽约
加拉加斯
利马
圣地亚哥
布宜诺斯艾利斯
里约热内卢
格陵兰岛
纽芬兰
进1日
退1日

图 17-33

17.5 同一经线上两地的距离

同一经线上两地的距离，就是两地的纬度差在经线圈上所对的弧长。如图 17-34 所示，P、Q 两地位于同一经线上，它们的距离可由 PQ 的弧长求得。

根据海里的定义，$\overset{\frown}{PQ}=\theta\times 60$ 海里　　或

$=\theta\times 60\times 1.853$ 公里

其中 θ 为两地的纬度差。

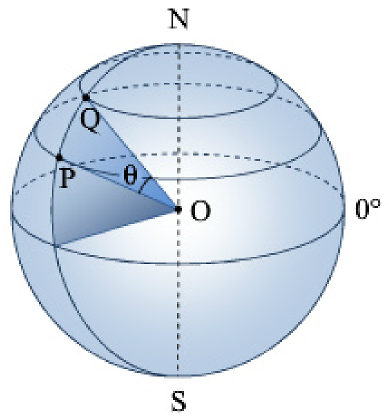


图17-34

例题 1

两个城市 A 及 B 位于同一子午线上，它们的纬度分别是北纬 45° 及北纬 30°。分别以海里及公里表示，求两个城市沿着经线的距离。

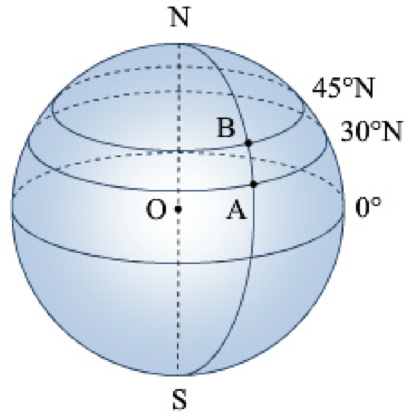


图17-35

解 A 与 B 的纬度差 $=45^\circ-30^\circ=15^\circ$

$\therefore$ A、B 两地的距离 $=15\times 60$

$=900$ 海里

即 900 海里 $=900\times 1.853$

$=1667.7$ 公里

例题 2

已知市镇A位于市镇B(30° N，110° E)的正北，且两地相距2400公里，求市镇A的经纬度。

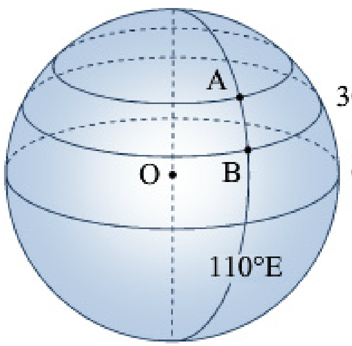


图17-36

解 A及B位于同一经线上，所以市镇A的经度也是110° E。

A、B两地的距离 $=2400$ 公里

$$= \frac{2400}{1.853} \text{ 海里}$$

同一经线上两地的距离 $=\theta\times 60$

$$\frac{2400}{1.853}=\theta\times 60$$

$$\theta=21°\ 35'$$

A、B两地的纬度差是 $21°\ 35'$。

A位于B的正北，所以A的纬度 $=(30°+21°\ 35')$ N

$=51°\ 35'$ N

∴ A的经纬度是（$51°\ 35'$ N，110° E）。

例题 3

一飞机由一机场 P (42° N , 140° E) 往正南飞行至另一机场 Q (36° S , 140° E)。

(a) 求此飞机飞行的距离 (答案以海里表示) 。

(b) 若飞机的飞行速度为每小时 450 海里，求其飞行时间 (答案准确至分钟)。

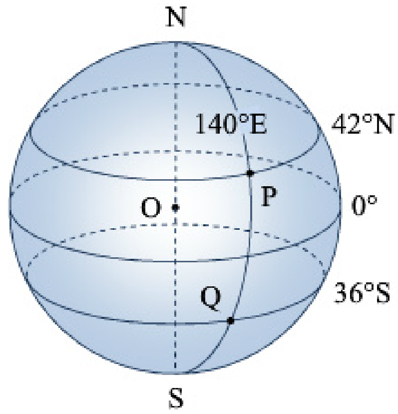


图17-37

解 (a) P、Q 两地的纬度差 $= 42° + 36°$

$= 78°$

$\therefore$ P、Q 两地的距离 $= 78 \times 60$

$= 4680$ 海里

(b) 已知飞机的飞行速度为 450 海里/小时。

$\therefore$ 所需时间 $= \dfrac{4680}{450}$

$=10$ 小时 24 分钟

随堂练习 4

1. 已知 A、B 两地位于同一经线上。根据下列纬度，求 A、B 两地的距离 (答案以海里表示):
   (a) A (58° N), B (75° N)
   (b) A (0°), B (42° S)
   (c) A (43° N), B (38° S)
2. 已知 P、Q 两地位于同一经线上，且两地相距 1000 海里，P 位于北纬 7° 30′ 。根据下列的条件，求 Q 的纬度:
   (a) Q位于P的北方
   (b) Q位于P的南方

练习 17.5

1. 已知 A、B 两地位于同一经线上。根据下列两地的纬度差，求 A、B 两地的距离 (答案以海里表示):
   (a) $\theta = 39°$
   (b) $\theta = 80° \, 30'$
   (c) $\theta = 64° \, 20'$
2. 已知 A、B 两地位于同一经线上。根据下列两地的距离，求两地的纬度差 (答案准确至分):
   (a) 700 海里
   (b) 318 海里
   (c) 3450 海里
3. 求下列两地沿同一经线上的距离:
   (a) A(21° S, 110° E), B(33° S, 110° E)
   (b) X(38° N, 40° W), Y(19° N, 40° W)
   (c) E(34° 45′ S, 80° E), F(0°, 80° E)
   (d) P(18° 15′ N, 90° W), Q(43° 30′ N, 90° W)
   (e) T(15° 30′ N, 120° E), M(24° 30′ S, 120° E)
4. X、Y 两地位于同一经线上，且两地相距 400 海里，求 X、Y 两地的纬度差。
5. P、Q 两地位于同一经线上，它们沿着经线的距离是 600 公里，求它们的纬度差。
6. 甲城及乙城位于同一经线上，甲城的纬度是北纬 2° 15′，乙城的纬度是北纬 6°。求这两个城市的距离 (答案以公里表示)。
7. 一飞机由某机场 A(15° N, 115° E) 往正北飞行 1000 公里至另一机场 B，求机场 B 的经纬度。
8. 一飞机由某机场 P(5° N, 100° E) 往正南飞行 1500 公里至另一机场 Q，求机场 Q 的经纬度。
9. 求由 A(18° 30′ S) 沿着经线至北极的距离。
10. C、D 两地相距 700 海里，C 位于 D 的正南。若 C 的纬度是北纬 35° 30′，求 D 的纬度。

11. 一飞机由 P(60° N，60° E)起飞，沿着大圈经北极飞往 Q(50° N，120° W)。求飞行的距离。
12. 一船由港口 P(50° S，160° E)往正北航行至另一港口 Q(30° N，160° E)，航行时间为 10 天。求全程的平均航行速度(答案以海里/时表示)。
13. 已知 PQ 为南纬 35° 纬线圈的直径。一飞机由 P 点起飞，沿着经线飞行经过南极，13 小时 40 分钟后抵达 Q 点。求全程的平均速度(答案以海里/时表示)。

17.6 同一纬线上两地的距离

同一纬线上两地的距离，就是两地的经度差在纬线圈上所对的弧长。如图 17-38 所示，P、Q 两地同在一纬度为 θ 的纬线上，它们的经度差为 α。A 及 B 分别是赤道上的两点。

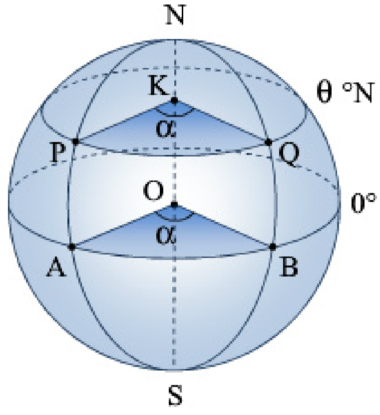


图17-38

已知 $\angle PKQ = \angle AOB = \alpha$。设 R 为地球的半径，r 为纬线圈的半径。

$$\frac{\overset{\frown}{PQ}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\frac{\alpha}{360^\circ}\times 2\pi r}{\frac{\alpha}{360^\circ}\times 2\pi R}$$

$$= \frac{r}{R}$$

由纬线圈的半径 $r = R\cos\theta$，得 $\frac{r}{R} = \cos\theta$。

$$\therefore \quad \frac{\overset{\frown}{PQ}}{\overset{\frown}{AB}} = \cos\theta$$

$$\overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{AB}\ \cos\theta$$

$= \alpha\times 60\times\cos\theta$ 海里　　或

$= \alpha\times 60\times\cos\theta\times 1.853$ 公里

例题 1

已知 P、Q 两地同在北纬 40° 的纬线上，它们的经度分别是东经 50° 及东经 120°。分别以海里及公里表示，求两地沿着纬线的距离。

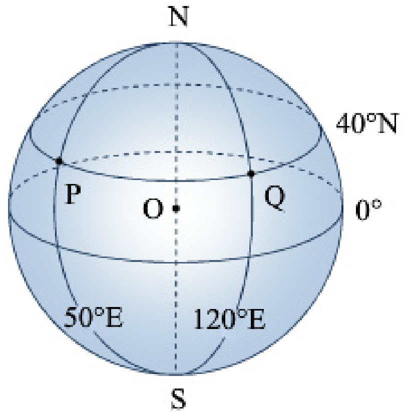


图17-39

解 P、Q 两地沿着纬线上的距离

$=(120-50)\times 60\times \cos 40°$

$=3217.39$ 海里

即 3217.39×1.853

$=5961.82$ 公里

例题 2

一船由港口 P (30° N，20° W) 往正西航行到另一港口 Q (30° N，83° W)。求此船航行的距离。(答案以海里表示)

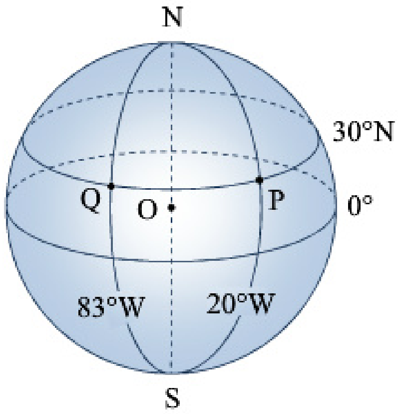


图17-40

解 P、Q 都位于北纬 30°。

$\therefore$ P、Q 的距离 $=(83-20)\times 60\times \cos 30°$

$=3273.58$ 海里

例题 3

一船由港口 P(45° S，50° E) 往正东航行到另一港口 Q(45° S，170° W)。求此船航行的距离。(答案以海里表示)

解 P、Q 都位于南纬 45°。

P、Q 的经度差

$=360°-50°-170°$

$=140°$

∴ P、Q 的距离

$=140\times60\times\cos 45°$

$=5939.70$ 海里

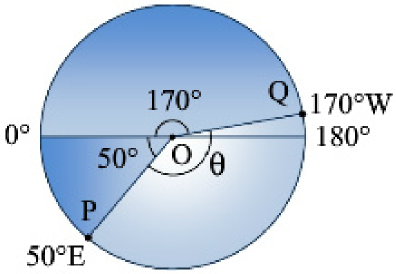


图17-41 (a)

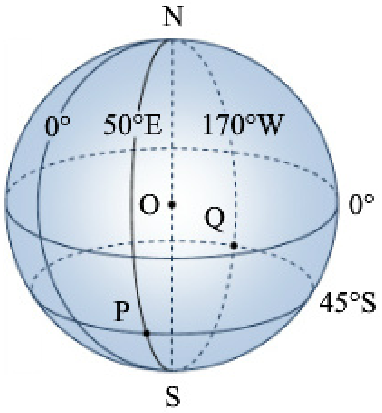


图17-41 (b)

例题 4

已知Q位于 P(30° N，40° E)的正东，且两地相距5400海里。求 Q 的经纬度。

解 P、Q 两地位于同一纬线上，所以 Q 的纬度也是 30° N。已知P、Q两地距离是5400海里。

$\alpha\times60\times\cos 30°=5400$

$$\theta=\frac{5400}{60\times\cos 30°}$$

$=103°\ 55'$

P、Q 两地经度差为 103° 55′。

Q位于P的正东，所以Q地的经度 $=(40°+103°\ 55')$ E

$=143°\ 55'$ E

∴ Q 的经纬度是 (30° N，143° 55′ E)。

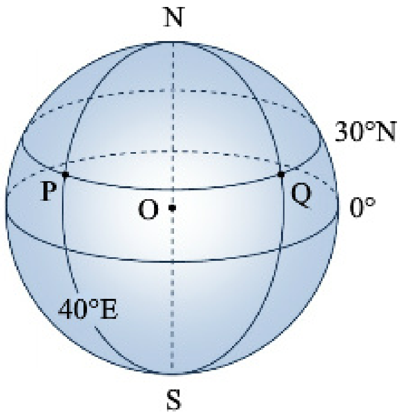


图17-42

随堂练习 5

1. 求下列两地沿同一纬线上的距离 (答案以海里表示):
   (a) P (80° N , 105° W), Q (80° N , 48° W)
   (b) M (50° S , 48° E), N (50° S , 100° E)
   (c) X (40° N , 28° 15′ E), Y (40° N , 42° 45′ W)
   (d) K (20° S , 160° E), L (20° S , 140° W)
2. 已知 A 位于 B (46° N , 72° W) 的正西，且两地相距 2350 海里，求 A 的经纬度。

练习 17.6

1. 求下列两地沿同一纬线上的距离 (答案以海里表示):
   (a) P (45° S , 20° E), Q (45° S , 100° E)
   (b) M (36° N , 45° W), N (36° N , 105° W)
   (c) A (80° S , 130° E), B (80° S , 165° E)
   (d) K (70° N , 40° E), L (70° N , 20° W)
   (e) T (0° , 128° W), M (0° , 120° E)
2. 根据下列 P、Q 两地的距离及 P 的经纬度，求 Q 的经纬度:
   (a) PQ = 800 海里，Q 位于 P (50° S , 100° W) 的正西
   (b) PQ = 3400 海里，Q 位于 P (35° N , 68° E) 的正东
   (c) PQ = 1450 公里，Q 位于 P (42° N , 15° W) 的正东
3. 已知两地同在北纬 60° 的纬线上，且两地的经度差是 160°。求两地的距离。(答案以公里表示)
4. A、B 两城同在北纬 5° 30′ 的纬线上，它们的经度分别是东经 100° 15′ 及东经 103°。求两城沿着纬线上的距离。
5. 求南纬 35° 30′ 的纬线圈的周长。(答案以海里表示)
6. 求北纬 60° 的纬线圈的半径。(答案以公里表示)

7. 一船由一港口 P (20° E) 启航，沿着北纬 42° 的纬线往正东航行了600 海里。求目的地的经纬度。

8. 一船由港口 P (48° N，12° W) 往正西航行 1000 海里至另一港口Q，求 Q 的经纬度。

9. 已知 A 位于在巴黎 (49° N，$2^\circ 30'$E) 的正东，且两地相距 2200 公里。求 A 的经纬度。

10. 一飞机由 X (40° N，75° W) 往正东飞行 9265 公里至 Y，求 Y 的经纬度。

11. 一飞机由柏林 ($52^\circ 30'$ N，$13^\circ 30'$ E) 往正西飞行 1853 公里至 P，求 P 的经纬度。

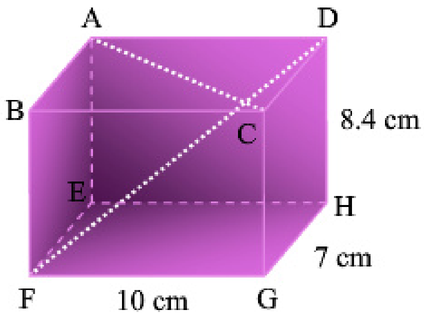
12. 已知地球自转一周需 24 小时。求吉隆坡 ($3^\circ 15'$ N，102° E) 依地球自转的转速。(答案以海里/时表示)

13. 已知 P 及 Q 的经度分别是西经 50° 及西经 110°。若 P 及 Q 都位于 R (55° S) 的正西且 PR = PQ，求
   (a) R 的经度；
   (b) Q、R 两地沿着纬线的距离。

14. 一飞机由 F (50° S，70° E) 往正西飞行至 H (50° S，45° W) 后，再往正北飞行 4800 海里至 K。已知此飞机全程的平均速度为每小时 480 海里，求
   (a) K 的纬度；
   (b) F、H 两地沿着纬线的距离；
   (c) 此飞机全程的飞行时间。

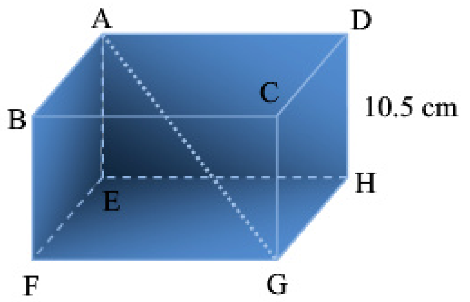
总复习题 17

1. 在右图所示的长方体中，FG = 10 cm，GH = 7 cm，DH = 8.4 cm，求
   (a) AC 与平面 BFGC 所成的角；
   (b) FD 与平面 EFGH 所成的角。



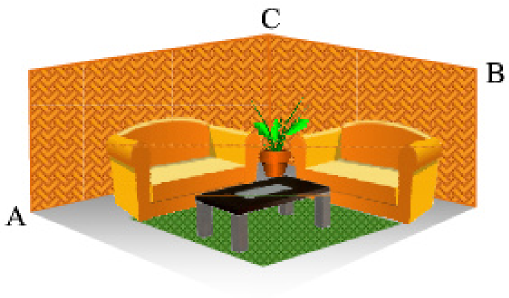
(第 1 题用图)

2. 右图所示是一个长方体，其体积是400 cm^3，高是10.5 cm，且 AD = 2DC，求 AG 与平面 ADHE 所成的角。



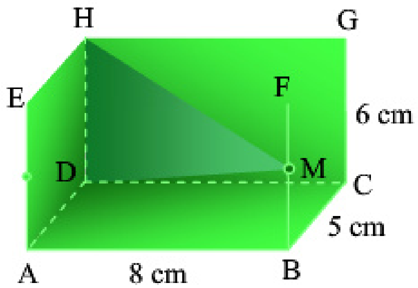
(第 2 题用图)

3. 右图所示是一间会客室，其地面是边长为 6 m 的正方形。已知由墙角 A 测得墙角 C 的仰角是30°，求墙角 A 及B 的连线与地面所成的角。



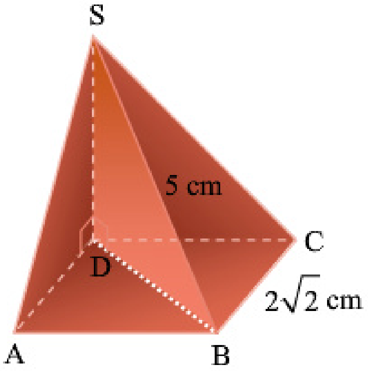
(第 3 题用图)

4. 右图所示是一个长 8 cm，宽 5 cm，高 6 cm 的长方体，M 是 BF 的中点。求平面 HDM 与平面 ADHE所成的角。



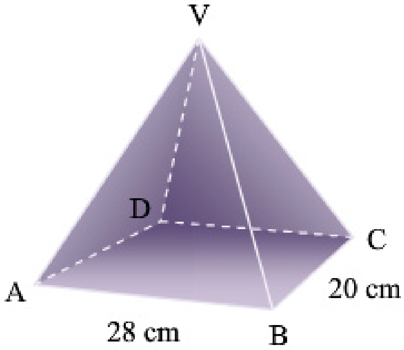
(第 4 题用图)

5. 右图所示是一个底面为正方形的棱锥，其侧棱 SD 垂直于底面。已知 $BC = 2\sqrt{2}$ cm，$SB = 5$ cm。求
   (a) 平面 SAD 与平面 SBD 所成的角；
   (b) 侧棱 SA 与底面 ABCD 所成的角。



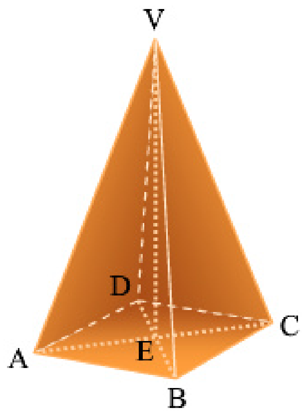
(第 5 题用图)

6. 右图所示是一个直棱锥，其底面 ABCD 是一个长 28 cm，宽 20 cm 的长方形。若平面 VBC 与底面成 60° 的角，求平面 VAB 与底面所成的角。



(第 6 题用图)

7. 右图所示是一个底面为正方形的正棱锥。已知 $VE = \frac{5}{2}AD$。求
   (a) VA 与底面 ABCD 所成的角；
   (b) 平面VAB与底面所成的角。



(第 7 题用图)

8. 求由巴拿马城 (9° N，79° 30′ W) 至多伦多 (43° 45′ N，79° 30′ W) 的距离。(答案以海里表示)
9. 东京与阿德莱德位于同一经线上，两地的纬度分别是北纬 35° 45′ 及南纬 35°。分别以海里及公里表示，求这两个城市沿着经线的距离。
10. 一飞机沿着赤道飞行 2000 海里，求出发地与目的地的经度差。
11. M、N 两地同在北纬 45°的纬线上，它们的经度差是 20°。求 M、N 两地沿着纬线的距离。(答案以海里表示)
12. X、Y 两地同在北纬 20° 的纬线上，它们的经度分别是东经 45° 及东经 80°。求 X、Y 两地沿着纬线的距离。(答案以海里表示)
13. 一飞机沿着赤道由 A (42° E) 飞行至 B (20° E) 后，再往正北飞行至 C(30° N)。求此飞机全程的飞行距离。
14. 若 A 位于赤道以北 1000 海里，格林威治子午线以东 600 海里，求 A 的经纬度。
15. 一飞机由 P (15° N，30° E) 往正南飞行 2000 海里至 B，求 B 的经纬度。另一飞机则由 P 往正东飞行 3000 海里至 C，求 C 的经纬度。
16. 一飞机由 A (130° E) 沿着赤道往 B (120° 30′ E) 飞行后，再由 B 往正北飞行至 C (20° 45′ N)。若此飞机全程的平均飞行速度为每小时 300 海里，求全程的飞行时间。
17. 一飞机由 A (50° N，10° E) 往正东飞行至 B (45° E)。
    (a) 求该飞机的飞行距离。(以海里表示)
    (b) 若该飞机的飞行速度为每小时 420 海里，求全程的飞行时间。
18. 已知 P、Q、R 三地同在北纬 40° 的纬线上。P 及 R 的经度分别是 10° 30′ W 及 4° 30′ E，而 Q 位于 P 与 R 的正中。
    (a) 求 P、R 两地的经度差。
    (b) 求 Q 的经度。
    (c) 求 P、R 两地沿着纬线的距离。
    (d) 一船以每小时 18 海里的速度沿着纬线由 P 航向 Q，求此船的航行时间。

名词对照

12 数列与级数

- 数列 sequence
- 级数 series
- 项 term
- 首项 first term
- 末项 last term
- 通项 general term
- 有限级数 finite series
- 无穷级数 infinite series
- 等差数列 arithmetic sequence
- 等差级数 arithmetic series / arithmetic progression
- 公差 common difference
- 等差中项 arithmetic mean
- 等比数列 geometric sequence
- 等比级数 geometric series / geometric progression
- 公比 common ratio
- 等比中项 geometric mean
- 无穷等比级数 infinite geometric series
- 循环小数 repeating decimal / recurring decimal

13 联立方程式

- 联立方程式 system of equations
- 二元联立方程式 system of equations in two variables
- 三元一次联立方程式 system of equations in three variables

14 矩阵与行列式

- 矩阵 matrix
- 行 row
- 列 column
- 阶 order
- 方阵 square matrix
- 行矩阵 row matrix
- 列矩阵 column matrix
- 相等矩阵 equal matrices
- 零矩阵 zero matrix
- 单位矩阵 identity matrix
- 转置矩阵 transpose matrix
- 对称矩阵 symmetric matrix
- 反对称矩阵 antisymmetric matrix / skew symmetric matrix
- 纯量积 scalar product
- 行列式 determinant
- 二阶行列式 second order determinant
- 三阶行列式 third order determinant
- 萨拉斯法 Sarrus method
- 余子式 minor
- 代数余子式 cofactor
- 逆矩阵 inverse matrix
- 可逆矩阵 invertible matrix
- 伴随矩阵 adjoint matrix
- 线性方程组 system of linear equations
- 系数矩阵 coefficient matrix
- 高斯消元法 Gauss elimination method
- 初等行变换 elementary row operations
- 常数矩阵 constant matrix
- 增广矩阵 augmented matrix
- 克兰姆法则 Cramer's rule

15 不等式与线性规划

不等式 inequality
一元一次不等式 linear inequality in one variable
不等式组 system of inequalities
数线 number line
一元二次不等式 quadratic inequality in one variable
一元高次不等式 higher-degree inequality in one variable
分式不等式 fractional inequality
绝对值 absolute value
二元一次不等式 linear inequality in two variables
线性规划 linear programming
目标函数 objective function
最优解 optimal solution
可行点 feasible point
可行区域 feasible region

16 圆

圆的标准方程式 standard equation of a circle
轨迹 locus
圆心 centre of a circle
半径 radius
圆的一般方程式 general equation of a circle
切线 tangent
切点 point of contact
交点 point of intersection
切距 length of a tangent
弦 chord

17 立体几何与经纬度

立体几何 solid geometry
多面体 polyhedron
四面体 tetrahedron
五面体 pentahedron
六面体 hexahedron
棱 edge
顶点 apex
多面角 polyhedral angle
对角线 diagonal

正多面体 regular polyhedron
正四面体 regular tetrahedron
正六面体 regular hexahedron
正八面体 regular octahedron
正十二面体 regular dodecahedron
正二十面体 regular icosahedron
棱柱（角柱） prism
底面 base
侧面 lateral face
侧棱 lateral edge
斜棱柱 oblique prism
直棱柱 right prism
正棱柱 regular prism
平行六面体 parallelepiped
矩形 rectangle
棱锥（角锥） pyramid
直棱锥 right pyramid
正棱锥 regular pyramid
直圆柱 right circular cylinder
直圆锥 right circular cone
球 sphere
球面 spherical surface
球心 centre of a sphere
小圆 small circle

射影 projection
极轴 polar axis
南极 South Pole
北极 North Pole
经线 meridian / lines of longitude
经度 longitude
格林威治子午线 Greenwich Meridian
纬度 latitude
纬线 parallels of latitude
海里 nautical mile
地方时 local time
标准时 standard time
时区 time zone

答案

12. 数列与级数

随堂练习 1 (P. 4)

1. 1，$\frac{4}{3}$，2，$\frac{16}{5}$，$\frac{16}{3}$

2. $a_n = n^3$

随堂练习 2 (P. 7)

1. $2+5+10+17+26+37+50+65+82+101$

2. $a_4 = 65$，$a_8 = 6305$，项数 $=5$

3. $\sum_{n=1}^{14}(n+1)(2n+3)$

练习 12.1 (P. 8)

1. (a) $a_n = 3n+2$ (b) $a_n = 2^n$
   (c) $a_n = \frac{n+1}{n}$ (d) $a_n = \frac{2n}{2n+3}$

2. (a) 5，7，9，11，13
   (b) −1，0，3，8，15
   (c) $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{11}$
   (d) −3，9，−27，81，−243

3. (a) $4+10+18+28+40$
   (b) $\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$
   (c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{21}+\frac{1}{36}+\frac{1}{55}+\frac{1}{78}$
   (d) $\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}$

4. (a) $a_3 = 4$，$a_{10} = 4$，项数 $=8$
   (b) $a_1 = 3$，$a_8 = \frac{5}{4}$，项数 $=8$
   (c) $a_1 = 2$，$a_{10} = 290$，项数 $=10$
   (d) $a_9 = 162$，$a_{14} = 1372$，项数 $=6$

5. (a) $\sum_{n=1}^{30}\frac{1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{50}n^3$
   (c) $\sum_{n=1}^{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (d) $\sum_{n=1}^{5}2n(3n+1)$

随堂练习 3 (P. 11)

1. 17 2. −20 3. 64

4. 34，38，42，46，50

随堂练习 4 (P. 12)

1. 13 2. $\frac{15}{2}$

3. $x = \frac{15}{2}$，$y = \frac{33}{2}$

随堂练习 5 (P. 16)

1. −128 2. 8

3. $a_1 = 5$，$d = 6$

练习 12.2 (P. 16)

1. 77 2. $-\frac{1}{4}$

3. (a) 13 (b) 23

4. $a_1 = 3$，$d = 8$

5. −34 6. 14

7. (a) 14 (b) 4

8. 28，34，40，46，52

9. 810 10. −312

11. $\frac{217}{2}$ 12. 23023

13. 21

14. (a) 5 (b) 6 (c) 320

15. (a) $\frac{1}{2}$　(b) $\frac{1}{2}$

(c) 3　(d) 20

16. 7，10，13　17. 2550

18. (a) 第27项　(b) 第52项

19. 第27项

20. 第14项；第27项；$-\frac{54}{5}$

21. 六边　22. 第9项

23. $a_1=11$，$a_{10}=29$

24. 7　25. 18:5

随堂练习 6 (P. 20)

1. $-\frac{729}{8}$　2. 16

3. $a_1=243$，$r=-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{3}$

4. 当 $r=-\frac{1}{2}$ 时，$-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$-\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$，$-\frac{1}{64}$

当 $r=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$，$\frac{1}{64}$

随堂练习 7 (P. 21)

$\pm\frac{3}{2}$

随堂练习 8 (P. 23)

1. 765　2. $121+40\sqrt{3}$

3. 8

随堂练习 9 (P. 26)

1. (a) 32　(b) $\frac{54}{5}$

(c) 4　(d) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$

2. (a) $\frac{1}{3}$　(b) $\frac{53}{99}$

练习 12.3 (P. 26)

1. 1024　2. $-\frac{128}{9}$

3. (a) 10　(b) 8　(c) 8

4. $a_1=4$，$r=3$ 或 $a_1=-4$，$r=-3$

5. 3　6. ± 6

7. $x=20$，$r=\frac{3}{4}$

8. -28，56，-112 或 28，56，112

9. 728　10. $\frac{85}{4}$　11. 2394

12. 项数$=5$，$a_n=567$

13. (a) 96　(b) $\frac{81}{4}$　(c) $\frac{8}{5}$

14. $-\frac{1}{4}$

15. (a) $\frac{5}{11}$　(b) $\frac{1}{27}$

(c) $\frac{12}{55}$　(d) $\frac{4}{3}$

16. 2，8，32

17. 2

18. $r=\frac{1}{2}$，项数$=6$

19. $a_4=8$，$S_4=65$

20. $\frac{8}{9}$

21. (a) 8　(b) $\frac{2}{3}$　(c) 27　或

(a) 1　(b) $-\frac{1}{2}$　(c) $\frac{4}{3}$

随堂练习 10 (P. 31)

1. (a) 108　(b) 650

(c) 80　(d) 2184

2. 3500　3. $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

练习 12.4 (P. 32)

1. (a) 1020 (b) 2025
(c) 115 (d) 864
(e) 675 (f) 985
(g) 370

2. 1210

3. $\dfrac{n(n+1)(8n+1)}{6}$

4. 680

总复习题 12 (P. 32)

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}\frac{2k-1}{2k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=6}^{\infty}(-1)^k k$
(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{14}(k+1)(2k+3)$

2. -3，9，9，$\dfrac{81}{5}$，$\dfrac{243}{7}$

3. $-1+5+15+29+47+69+95+125+159+197$

4. $a_3=16$，$a_7=2052$，项数 $=5$

5. 17

6. (a) -2 (b) -319

7. 20，12，4，-4

8. (a) 250 (b) 140 (c) $90\sqrt{2}$

9. (a) 3 (b) 4 (c) 820

10. (a) 5 或 7 (b) 13

11. 2025

12. 9750

13. 3000

14. 第 7 项

15. 3，5，7

16. 171

17. $a_n=20\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

18. 29

19. $\pm\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

20. 当 $r=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{1}{8}$，$-\dfrac{1}{16}$，$\dfrac{1}{32}$，$-\dfrac{1}{64}$，$\dfrac{1}{128}$
当 $r=\dfrac{1}{2}$ 时，$-\dfrac{1}{8}$，$-\dfrac{1}{16}$，$-\dfrac{1}{32}$，$-\dfrac{1}{64}$，$-\dfrac{1}{128}$

21. 44110

22. 2915

23. $\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{4}$

13. 联立方程式

随堂练习 1 (P. 38)

1. $x=\dfrac{5}{2}$，$y=-2$ 或 $x=3$，$y=-\dfrac{5}{3}$

2. $x=-\dfrac{4}{7}$，$y=\dfrac{47}{7}$ 或 $x=2$，$y=-1$

练习 13.1 (P. 38)

1. $x=-2$，$y=-3$ 或 $x=3$，$y=2$

2. $x=-\dfrac{2}{3}$，$y=-6$ 或 $x=2$，$y=2$

3. $x=-8$，$y=-\dfrac{15}{4}$ 或 $x=-5$，$y=-6$

4. $x=-1$，$y=1$ 或 $x=3$，$y=9$

5. $x=-3$，$y=-4$ 或 $x=4$，$y=3$

6. $x=-\dfrac{8}{19}$，$y=-\dfrac{97}{19}$ 或 $x=2$，$y=7$

7. $x=0$，$y=3$ 或 $x=4$，$y=-1$

8. $x=-\dfrac{6}{5}$，$y=-\dfrac{5}{6}$ 或 $x=1$，$y=1$

9. $x=-3$，$y=2$ 或 $x=9$，$y=-1$

10. $x=1$，$y=-5$ 或 $x=\dfrac{41}{10}$，$y=\dfrac{16}{3}$

随堂练习 2 (P. 42)

$x=1$，$y=-2$，$z=2$

练习 13.2 (P. 42)

1. $x=1$，$y=1$，$z=1$

2. $x=-2$，$y=0$，$z=2$

3. $x=3$，$y=-1$，$z=-1$

4. $x=-2$，$y=-4$，$z=-1$

5. $x=2$，$y=\frac{1}{4}$，$z=\frac{1}{2}$

6. $x=3$，$y=2$，$z=1$

7. $x=2$，$y=-3$，$z=-1$

8. $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，$z=1$

总复习题 13 (P. 43)

1. $x=4$，$y=3$

2. $x=-1$，$y=3$ 或 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{13}{6}$

3. $x=2$，$y=3$ 或 $x=3$，$y=1$

4. $x=-1$，$y=3$ 或 $x=2$，$y=1$

5. $x=1$，$y=2$，$z=3$

6. $x=2$，$y=3$，$z=4$

7. $x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{5}{3}$，$z=\frac{5}{3}$

8. $x=0$，$y=-3$，$z=\frac{1}{2}$

14. 矩阵与行列式

练习 14.1 (P. 48)

1. (a) 3×1 阶　(b) 2×4 阶　(c) 3×3 阶

2. $a_{23}=3$；$a_{34}=7$

3. -4

随堂练习 1 (P. 51)

(a) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 8 & 5 & -1 \\ 5 & -7 & -2 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -9 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

练习 14.2 (P. 52)

(a) $\begin{pmatrix} -4 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} -5 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

随堂练习 2 (P. 54)

(a) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -12 & 22 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 14 & -26 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

练习 14.3 (P. 54)

1. (a) $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$

2. (a) $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 13 & 5 & 14 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

3. (a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

随堂练习 3 (P. 60)

1. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 12 & -9 & 14 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & 14 & 18 \\ 28 & -12 & 5 \end{pmatrix}$　4. $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}$

练习 14.4 (P. 60)

1. (14)

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 29 & 11 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 44 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $AB=(-7)$； $BA=\begin{pmatrix} 4 & 8 & -10 \\ 2 & 4 & -5 \\ 6 & 12 & -15 \end{pmatrix}$

10. $AB=\begin{pmatrix} 11 & -4 & 8 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$；BA 没有定义

12. (a) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -34 & 18 \\ -55 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 9 & 3 & -24 \\ 6 & 0 & -23 \end{pmatrix}$

随堂练习 4 (P. 62)

1. 29　2. -2　3. 0

随堂练习 5 (P. 64)

1. 74　2. -25

随堂练习 6 (P. 67)

1. 23　2. 3　3. -8

练习 14.5a (P. 67)

1. -14　2. 153　3. $1+a^2$

4. 1　5. 12　6. 74

7. 51　8. 0

9. $p^2r+pq^2+ps^2+r^3$

10. $cy+az+bx-ay-bz-cx$

随堂练习 7 (P. 69)

10

随堂练习 10 (P. 73)

-3

练习 14.5b (P. 73)

1. (a) -1　(b) 1　(c) -4

(d) 1　(e) -1　(f) -1

3. -3　4. ± 2

5. $-\frac{3}{2}$ 或 2　6. $\frac{15}{2}$

7. -2 或 1　8. 2

9. 4　10. 2

随堂练习 11 (P. 78)

1. $\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2. 无逆矩阵

3. $\begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

4. 1

随堂练习 12 (P. 81)

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

随堂练习 13

(P. 83)

1. $x=2$，$y=-3$

2. $x=1$，$y=2$，$z=3$

练习 14.6

(P. 84)

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

2. 无逆矩阵

3. 无逆矩阵

4. $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

5. 无逆矩阵

6. $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$

7. $x=-3$，$y=-5$

8. -6

9. $y\in R$，$y\neq -3$，1，2

10. -2 或 $\dfrac{1}{2}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -7 & 20 & 5 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -\frac{13}{5} & 2 & \frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} & -1 & -\frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

16. $x=1$，$y=-1$

17. $x=-3$，$y=-2$

18. $x=1$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{1}{3}$

19. $x=0$，$y=0$，$z=0$

20. $x=5$，$y=1$，$z=3$

随堂练习 14

(P. 88)

1. $x=3$，$y=2$，$z=1$

2. $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{3}{2}$，$z=1$

随堂练习 15

(P. 92)

$\begin{pmatrix} \frac{17}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

练习 14.7

(P. 92)

1. $x=5$，$y=1$，$z=3$

2. $x=3$，$y=2$，$z=1$

3. $x=-5$，$y=-1$，$z=1$

4. $x=\dfrac{2}{7}$，$y=\dfrac{1}{7}$，$z=\dfrac{1}{7}$

5. $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{14}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}$

随堂练习 16

(P. 95)

1. $x=-15$，$y=13$，$z=-1$

2. $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{3}{2}$，$z=\dfrac{7}{2}$

练习 14.8

(P. 95)

1. $x=1$，$y=-1$，$z=-1$

2. $x=0$，$y=-\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{1}{2}$

3. $x=\dfrac{11}{5}$，$y=0$，$z=-\dfrac{3}{5}$

4. $x=\dfrac{1}{3}$，$y=-\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{1}{4}$

总复习题 14 (P. 96)

1. $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 19 & 16 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \\ 2 & 12 & -6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 19 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

5. $x=17$， $y=\frac{3}{2}$

6. (a) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & -8 \\ -4 & -2 & 10 \\ 11 & -3 & 7 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -12 & 4 & 8 \\ -4 & 14 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -6 & -4 & 4 \\ -10 & 18 & 10 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -9 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

7. (a) $\begin{pmatrix} -11 & -12 \\ 6 & -13 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 16 & 30 \\ 31 & -2 \\ -22 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 18 & -6 \\ 12 & -5 & 8 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} 5 & \frac{17}{2} & -7 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. AB 没有定义； BA $=\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. AB $=\begin{pmatrix} 1 & -17 \\ -5 & -11 \end{pmatrix}$； BA $=\begin{pmatrix} 11 & -6 & -3 \\ 15 & -12 & -9 \\ -9 & -4 & -9 \end{pmatrix}$

10. AB $=\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 17 & 4 \\ -58 & 9 \end{pmatrix}$； BA 没有定义

11. AB 没有定义； BA $=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 18 & 4 \\ 18 & 2 \end{pmatrix}$

12. $a=5$， $b=6$

13. $a=\frac{3}{2}$， $b=0$， $c=\frac{4}{3}$

14. 0　　15. 93　　16. 92

17. 0　　18. 45　　19. 39

20. -12　　21. 0　　22. 0

25. -2

26. -4 或 -3

27. $r=\frac{2}{5}$， $s=-\frac{1}{5}$

28. -9　　29. $-\frac{12}{5}$ 或 2

30. 4　　31. -4 或 3

32. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　33. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} -11 & 3 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　35. $\begin{pmatrix} -7 & \frac{17}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　37. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

38. $x=-1$， $y=1$， $z=2$

39. $x=9$， $y=-4$， $z=7$

40. $x=2$， $y=1$， $z=-3$

41. $x=\frac{1}{3}$， $y=\frac{1}{3}$， $z=\frac{1}{3}$

42. $x=2$， $y=-1$， $z=2$

43. $x=8$， $y=4$， $z=2$

44. $x=-\frac{3}{4}$， $y=2$， $z=-\frac{5}{8}$

45. $x=\frac{1}{3}$， $y=\frac{3}{19}$， $z=\frac{3}{17}$

15. 不等式与线性规划

随堂练习 1 (P. 103)

1. $(x+3)(x-1)>(x+4)(x-2)$

2. $(x+8)(x+10)<(x+9)^2$

3. $x^2+6x>4x-2$

随堂练习 2 (P. 105)

(a) $x+1>y+1$ (b) $2y<2x$

(c) $-x+1<-y+2$ (d) $3x>4y$

练习 15.1 (P. 105)

1. $(x-4)^2>(x-6)(x-2)$
2. $x^2+13>4x$
3. $(x-1)(x^2+x+1)<(x+1)(x^2-x+1)$
4. $(x^2-x+1)(x^2+x+1)>x^4+x^2-1$
5. $(1-2x)(1+2x)<\left(x^2-6\right)^2$
6. (a) $2x-3>2y-5$

 (b) $x^2<y^2$

随堂练习 3 (P. 108)

1. $x>9$ 2. $x\geq 9$
3. $x\geq -\frac{31}{18}$ 4. $x>\frac{5}{9}$
5. $7\leq x\leq 9$ 6. $-1<x<5$

练习 15.2a (P. 108)

1. $x>4$ 2. $x<-\frac{1}{3}$
3. $x\geq 2$ 4. $x\geq 15$
5. $x\geq \frac{43}{6}$ 6. $x\geq 0$
7. $x<\frac{37}{3}$ 8. $13<x<17$
9. $-\frac{1}{5}<x<\frac{9}{5}$ 10. $-\frac{15}{4}<x\leq \frac{21}{4}$

随堂练习 4 (P. 112)

1. $x>1$ 2. $2<x\leq 3$
3. 无解 4. 无解

练习 15.2b (P. 112)

1. $-1<x\leq 1$ 2. $x\geq 2$
3. $x<\frac{1}{3}$ 4. $x\leq -6$
5. 无解 6. $2\leq x\leq 3$
7. 无解 8. $\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$
9. $-4\leq x\leq 5$ 10. $-7\leq x<-1$

随堂练习 5 (P. 116)

1. $x\leq -9$ 或 $x\geq 6$ 2. $x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>\frac{1}{2}$
3. $-1\leq x\leq 3$ 4. $0<x<\frac{3}{2}$

练习 15.3a (P. 117)

1. $x<-3$ 或 $x>-1$ 2. $-4\leq x\leq 2$
3. $-2<x<6$ 4. $x\leq -\frac{4}{3}$ 或 $x\geq \frac{4}{3}$
5. $-3\leq x\leq 4$ 6. $-\frac{1}{2}<x<1$
7. $x\in R$ 8. $x=5$
9. 无解 10. $x\in R$，$x\neq \frac{3}{2}$

随堂练习 6 (P. 118)

1. $x<-2$ 2. $-1<x\leq 1$

练习 15.3b (P. 119)

1. $-1\leq x<7$ 2. $x\leq -7$ 或 $x>-1$
3. $2<x\leq \frac{5}{2}$ 4. $-3<x<-2$
5. 无解
6. $x\leq -3$ 或 $0\leq x<1$ 或 $x>2$
7. $x\leq -5$ 或 $5\leq x\leq 6$ 或 $x\geq 7$
8. $x=-\frac{1}{2}$

随堂练习 7 (P. 123)

1. $-2 \le x \le -1$ 或 $x \ge 3$
2. $x < -2$ 或 $-\frac{1}{2} < x < 4$
3. $-2 \le x \le -1$ 或 $x = 1$
4. $x < 0$，$x \ne -1$ 或 $x > 3$

练习 15.4 (P. 123)

1. $x < -1$ 或 $-\frac{1}{2} < x < 1$
2. $-3 \le x \le -2$ 或 $x \ge 5$
3. $x \le -2$ 或 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$
4. $x \ge 1$
5. $x < -3$ 或 $x > 3$
6. $x < -3$ 或 $x > 0$，$x \ne 2$
7. $x < -2$ 或 $1 < x < 3$
8. $x \le 0$ 或 $x = 1$ 或 $x \ge 2$

随堂练习 8 (P. 126)

1. $-\frac{7}{5} < x < -\frac{1}{3}$
2. $-4 < x < 2$ 或 $x > 6$
3. $-2 \le x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 3$
4. $x \le -2$ 或 $-1 < x < 1$ 或 $x \ge 2$

练习 15.5 (P. 126)

1. $x < 5$ 或 $x > 9$
2. $x < 0$ 或 $1 \le x \le 6$
3. $x < -6$ 或 $-1 < x < 0$ 或 $x > 6$
4. $-5 \le x < -1$ 或 $x > 3$
5. $-1 < x \le \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$
6. $x < 1$ 或 $\frac{3}{2} \le x < 2$
7. $-3 \le x \le 2$，$x \ne -2$
8. $x < -3$ 或 $-2 < x \le \frac{1}{2}$ 或 $x \ge 1$

随堂练习 9 (P. 129)

1. $x < -5$ 或 $x > 5$
2. $-9 < x < 9$
3. $x \le -11$ 或 $x \ge 3$
4. $0 < x < 3$

练习 15.6 (P. 130)

1. $x < 2$ 或 $x > 8$
2. $x < -6$ 或 $x > 4$
3. $-1 < x < 6$
4. $\frac{2}{5} \le x \le \frac{4}{5}$
5. $x \le -2$ 或 $x \ge \frac{10}{3}$
6. $-3 \le x < 1$ 或 $2 < x \le 6$
7. $-\frac{23}{2} \le x \le -\frac{13}{2}$ 或 $\frac{5}{2} \le x \le \frac{15}{2}$
8. $-\frac{9}{7} \le x \le -\frac{5}{7}$，$x \ne -1$

练习 15.7 (P. 136)

9. $\begin{cases} 2x+5y \ge 10 \\ 3x+2y \ge 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-4y \le 5 \\ 5x+3y \le 25 \\ 7x-5y+11 > 0 \end{cases}$

随堂练习 12 (P. 144)

$z_{max} = 240$，$z_{min} = -200$

练习 15.8 (P. 144)

1. $z_{min} = 62\frac{4}{7}$
2. 应建造 A 型房屋 4 间及 B 型房屋 9 间；
   最高利润是 RM 940,000
3. 只需隔出大房 9 间；
   每月最高租金收入是 RM 10,125
4. 需教初三 12 班及高三 10 班；
   每月最少上课时数是 108 小时
5. 最多可生产 414.78 公斤的产品；
   须使用甲原料 2.43 公吨及乙原料 1.96 公吨
6. 须生产 A 产品 4 个及 B 产品 5 个
7. 应使用 10 公升饮料 A 及 40 公升饮料 B
8. 应烘培 A 类蛋糕 12 个及 B 类蛋糕 20 个；
   面粉的最低需求量是 28 公斤

总复习题 15 (P. 146)

1. $(x-3)(4-x)<(6-x)(x-1)$
2. $6-x^2>4x-2x^2$
3. $x>\frac{10}{3}$
4. $x\le\frac{3}{5}$
5. $x\le\frac{7}{5}$
6. $x\ge\frac{1}{2}$
7. $-8<x<8$
8. $-\frac{7}{3}\le x<\frac{5}{6}$
9. $-\sqrt{7}<x<\sqrt{7}$
10. $x\le-20$ 或 $x\ge10$
11. $x<-2$ 或 $x>\frac{2}{3}$
12. $1\le x\le\frac{3}{2}$
13. $x>-5$
14. $x\ge-\frac{5}{6}$
15. $x=\frac{2}{3}$
16. $x\in R$，$x\ne-\frac{5}{2}$
17. 无解
18. $x>-2$
19. $-2\le x\le2$
20. $x=3$
21. $6<x<8$
22. $x\ge3$
23. $5<x\le6$
24. $-2<x\le0$
25. $x<-\frac{3}{2}$ 或 $x\ge4$
26. $1\le x<3$
27. $x<-4$ 或 $-2<x\le-1$ 或 $x\ge\frac{1}{2}$
28. $x=2$
29. $-2\le x\le-1$ 或 $1\le x\le2$
30. $x<-4$ 或 $-3<x<1$ 或 $x>2$
31. $-5<x<2$，$x\ne-\frac{1}{2}$
32. $-\frac{3}{2}\le x\le-\frac{2}{3}$ 或 $x=1$
33. $-\frac{31}{2}\le x<-6$
34. $x<-7$ 或 $-1<x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>6$
35. $x\le-3$ 或 $-1<x<1$ 或 $x=2$
36. $-7\le x<-6$ 或 $-2<x\le1$
37. $x\le-\frac{4}{5}$ 或 $x\ge2$
38. $-4<x<3$ 或 $7<x<14$
39. $-\frac{7}{3}<x\le\frac{5}{3}$ 或 $\frac{13}{3}\le x<\frac{25}{3}$
40. $x\le-\frac{7}{2}$ 或 $x\ge-\frac{5}{2}$
43. $z_{max}=\frac{1}{3}$，$z_{min}=-2$
44. 只需制造 40 公斤的混合物 B
45. 应使用 4 公斤饲料 A 及 3.5 公斤饲料 B；
    最低的饲料费是 RM 2,600

16. 圆

随堂练习 1 (P. 152)

1. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$
2. $(x+2)^2+(y-9)^2=25$

练习 16.1 (P. 152)

1. $x^2+y^2=49$

2. (a) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

 (b) $(x-3)^2+(y-2)^2=16$

 (c) $(x-a)^2+(y-b)^2=(a+b)^2$

3. $(x-4)^2+(y+1)^2=5$

4. $(x-3)^2+(y-3)^2=37$

5. $(x-1)^2+(y-4)^2=13$

6. $(x-3)^2+(y+6)^2=4$

 圆心$=(3,-6)$，半径$=2$

随堂练习 2 (P. 155)

1. 圆心$=(3,4)$，半径$=2$

2. (a) $x^2+y^2-2x+3y=0$

 (b) $x^2+y^2+6x+2y-15=0$

3. $x^2+y^2-8y+11=0$

练习 16.2 (P. 155)

1. (a) 圆心$=(0,0)$，半径$=8$

 (b) 圆心$=(2,4)$，半径$=8$

 (c) 圆心$=(4,0)$，半径$=4$

 (d) 圆心$=\left(-\frac{1}{9},\frac{1}{3}\right)$，半径$=\frac{8}{9}$

2. (a) $x^2+y^2+x-3=0$

 (b) $x^2+y^2+x+7y=0$

 (c) $x^2+y^2-52x+20y+51=0$

3. $x^2+y^2-\frac{11}{2}x-\frac{19}{2}y+22=0$

随堂练习 3 (P. 162)

1. $x^2+y^2-6x-8y+20=0$

2. $x^2+y^2+2x+4y-5=0$

3. $x^2+y^2-4x-6y+8=0$ 或

 $x^2+y^2-8x+2y+12=0$

5. $\sqrt{65}$

练习 16.3 (P. 162)

1. $x^2+y^2-8x-9=0$

2. $x^2+y^2+4x-25=0$

3. $x^2+y^2-10y-9=0$

4. $x^2+y^2-16=0$

5. $x^2+y^2+10x-8y+25=0$

6. $x^2+y^2+8x-4y+7=0$

7. $x^2+y^2-2x+6y-3=0$

8. $x^2+y^2-4x-6y+12=0$

10. (a) $\sqrt{19}$ (b) $4\sqrt{5}$ (c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

11. (a) -19 或 31 (b) 4 或 14

12. 最长距离$=6$，最短距离$=4$

13. 最长距离$=11$，最短距离$=1$

14. 16

总复习题16 (P. 163)

1. (a) $x^2+y^2-2x+2y-7=0$

   (b) $x^2+y^2-4x+6y-36=0$

2. $x^2+y^2-5=0$

3. $x^2+y^2-4x-6y-45=0$

4. $x^2+y^2-10x+6y+21=0$

5. (a) 圆心$=(3,-7)$，半径$=2\sqrt{2}$

   (b) 圆心$=\left(-\frac{5}{2},1\right)$，半径$=\frac{5}{2}$

   (c) 圆心$=(-1,2)$，半径$=\frac{\sqrt{42}}{3}$

   (d) 圆心$=\left(\frac{3}{2},-2\right)$，半径$=2\sqrt{2}$

6. (a) $x^2+y^2+4x-4y-2=0$

   (b) $x^2+y^2-11x+3y+14=0$

   (c) $x^2+y^2-bx-ay=0$

7. -40

8. 5

9. $x^2+y^2-2x+2y-2=0$

10. $x^2+y^2-2x=0$

11. $x^2+y^2-18x-8y+24=0$

12. $x^2+y^2-4x-6=0$

13. $x^2+y^2-2x-2y-23=0$

14. (a) $\pm\sqrt{5}$ (b) 9 (c) $\pm 3\sqrt{2}$

15. $k=9$；$(3,0)$

16. (a) $2\sqrt{5}$ (b) 7

    (c) $\sqrt{13}$ (d) $2|a|$

18. $(-4,-8)$

19. 最长距离$=18$，最短距离$=8$

20. (a) 圆心$=(-4,3)$，半径$=5$

    (c) $x+2y-12=0$

17. 立体几何与经纬度

随堂练习 1 (P. 175)

1. (a) 54.46° (b) 23.68°

2. 42.71°

练习 17.2 (P. 175)

1. (a) 45° (b) 35.26°

2. (a) 10 cm (b) 25.10°

3. (a) 12 cm (b) 27.94°

4. (a) 26.02° (b) 63.98°

5. (a) 10 cm (b) 12 cm

   (c) 67.38°

6. (a) 61.87° (b) 69.30°

7. (a) 12 cm (b) 36.87°

   (c) 30.96°

8. (a) 26.57° (b) 15.25°

9. 44.59°

10. (a) 20.29° (b) 51.30°

    (c) 23.80°

11. (a) 13.04 cm (b) 27.71°

12. (a) 1.39 m (b) 9.12 m

    (c) 16.39°

13. (a) 25.32 m (b) 9.09°

14. 29.02°

随堂练习 2 (P. 184)

1. (a) 26.57° (b) 30.96°

2. (a) 11.18 cm (b) 66.59°

练习 17.3 (P. 184)

1. 26.57°
2. 22.62°
3. (a) 39.81° (b) 57.99° (c) 39.81°
4. 20.56°
5. (a) 12 cm (b) 14.04° (c) 53.13°
6. (a) 71.57° (b) 53.13°
7. (a) 37.46° (b) 73.30°
8. (a) 45° (b) 56.31°
9. (a) 57.97° (b) 66.14°
10. (a) 60° (b) 64.31°
11. (a) 15.58 cm (b) 72.21° (c) 51.41°
12. (a) 21.54 cm (b) 15.56° (c) 16.70°

随堂练习 3 (P. 192)

1. P (0°), Q (40° W), R (35° E), T (140° E)
2. P (30° S , 0°), Q (40° N , 35° W), R (40° N , 145° E), T (30° S , 145° E)

随堂练习 4 (P. 197)

1. (a) 1020 海里 (b) 2520 海里 (c) 4860 海里
2. (a) 24° 10′ N (b) 9° 10′ S

练习 17.5 (P. 198)

1. (a) 2340 海里 (b) 4830 海里 (c) 3860 海里
2. (a) 11° 40′ (b) 5° 18′ (c) 57° 30′
3. (a) 720 海里 (b) 1140 海里 (c) 2085 海里 (d) 1515 海里 (e) 2400 海里
4. 6° 40′
5. 5° 24′
6. 416.93 公里
7. B (24° N , 115° E)
8. Q (8° 30′ S , 100° E)
9. 6510 海里
10. 北纬 47° 10′
11. 4200 海里
12. 20 海里 / 时
12. 482.93 海里 / 时

随堂练习 5 (P. 202)

1. (a) 593.88 海里 (b) 2005.50 海里 (c) 3263.35 海里 (d) 3382.89 海里
2. A (46° N , 128° 23′ W)

练习 17.6 (P. 202)

1. (a) 3394.11 海里 (b) 2912.46 海里
   (c) 364.66 海里 (d) 1231.27 海里
   (e) 6720 海里
2. (a) Q (50° S , 120° 45′ W)
   (b) Q (35° N , 137° 11′ E)
   (c) Q (42° N , 2° 33′ E)
3. 8894.4 公里
4. 164.24 海里
5. 17584.90 海里
6. 3185 公里
7. (42° N , 33° 27′ E)
8. Q (48° N , 36° 54′ W)
9. A (49° N , 32° 40′ E)
10. (40° N , 33° 47′ E)
11. (52° 30′ N , 13° 53′ W)
12. 898.55 海里 / 时
13. (a) 10° E (b) 4129.75 海里
14. (a) 30° N (b) 4435.23 海里
    (c) 19 小时 14 分钟

总复习题 17 (P. 203)

1. (a) 34.99° (b) 34.53°
2. 17.73°
3. 22.21°
4. 57.99°
5. (a) 45° (b) 46.69°
6. 67.59°
7. (a) 74.21° (b) 78.69°
8. 2085 海里
9. 4245 海里 或 7865.99 公里
10. 33° 20′
11. 848.53 海里
12. 1973.35 海里
13. 3120 海里
14. A (16° 40′ N , 10° 26′ E)
15. B (18° 20′ S , 30° E) ;
    C (15° N , 81° 46′ E)
16. 6 小时 3 分钟
17. (a) 1349.85 海里 (b) 3 小时 13 分钟
18. (a) 15° (b) 3° W
    (c) 689.44 海里 (d) 19 小时 9 分钟