马来西亚华文独中教科书

高中数学

（三下）

董教总独中工委会统一课程委员会编纂

马来西亚华文独中教科书

高中数学

（三下）

董教总独中工委会统一课程委员会编纂

《高中数学》（三下）

行政编辑：梁翠芳
美术编辑：梁翠芳
封面设计：梁翠芳
版面设计：萧娇婵
电脑排版：蔡思盛

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Swan Printing Sdn Bhd.

版次：
2015年7月第1版

印次：
2020年11月第6次印刷

编辑说明

一、这套《高中数学》是根据董教总独中工委会统一课程委员会所拟定的数学课程标准编写而成。在拟订课程标准的过程中，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要 (KBSM) 及各国的课程标准和教材，并采用了旧版统一课本《普通数学》的课程内容。

二、这套《高中数学》是为全国各华文独中的高中文科及商科学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。每册内容依据每周六节，每节四十分钟的教学时间编写。

三、这套教材共有 28 章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学及微积分。全书是以综合方式编写。

四、本书是高三下册，供高中三年级下半年使用。内容包括：
微积分 — 微分的应用、不定积分 、定积分及其应用

五、本书设有“学习目标”、“注意”、“补充资料”、“随堂练习”及“思考题”栏目。设置上述栏目是为了使学生掌握学习重点，启发学生思考，增进学习效果。

六、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。习题的答案都附于书末。此外，本书附有中英名词对照，供学习参考。

七、除非另有说明，本书所有例题及习题的答案皆准确至两位小数。

八、本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总独中工委会统一课程委员会
《高中数学》编审小组
2015年7月

编审小组

学术顾问：林忠强博士　陈庆地博士　张丽萍博士

学科委员：林汶良　张锦发　苏民胜　萧子良　李鸿聪
刘建华

责任编辑：蔡思盛

鸣 谢

本书承蒙编审小组提供建设性意见，并协助编写与审稿，谨此统致谢忱。

董教总独中工委会统一课程委员会　启

目录

26. 微分的应用

学习目标：

- 能求曲线上一点的切线及法线
- 能判断函数的增减性
- 能求函数的极大值与极小值
- 判断曲线的凸向及求拐点
- 掌握多项式函数的作图法
- 掌握变率的概念及其应用
- 掌握增量的近似计算

26.1 切线与法线

在上一章，我们学过，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 的切线斜率是

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=f'(x_0)$$

因此，为了求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线，只需先求出函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数值 $f'(x_0)$，就可利用直线方程式的点斜式求出切线的方程式。

如图 26-1 所示，过点 P 且与切线 PT 互相垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点P的法线。若两条直线互相垂直，它们的斜率的乘积为 -1。由于曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的斜率是 $f'(x_0)$，所以当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，曲线在 $x=x_0$ 处的法线斜率是 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$。

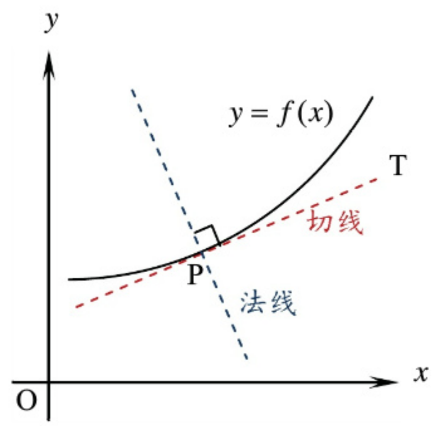


图 26-1

例题 1

求曲线 $y=x^2-4x+3$ 在点 $(4,3)$ 的切线方程式。

解 $\dfrac{dy}{dx}=2x-4$

$\therefore$ 在点 $(4,3)$ 的切线斜率 $\dfrac{dy}{dx}=2(4)-4=4$。

$\therefore$ 在点 $(4,3)$ 的切线方程式是 $y-3=4(x-4)$

即 $4x-y-13=0$

例题 2

求曲线 $y=4x+\dfrac{3}{x^2}$ 在 $x=1$ 处的法线方程式。

解

$$\frac{dy}{dx}=4-\frac{6}{x^3}$$

当 $x=1$， $y=7$

$\because$ 切线斜率 $\dfrac{dy}{dx}=-2$

$\therefore$ 法线斜率 $=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 法线方程式是 $y-7=\dfrac{1}{2}(x-1)$

即 $x-2y+13=0$

例题 3

求曲线 $x^2+2xy-2y^2=-12$ 在点 $(2,4)$ 的切线及法线方程式。

解

$$x^2+2xy-2y^2=-12$$

两边对 x 微分，得

$$2x+2\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)-4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$x+x\frac{dy}{dx}+y-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x-2y}$$

(续) 当 $x=2$， $y=4$

$\because$ 切线斜率 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2+4}{2-2(4)}=1$

$\therefore$ 法线斜率 $=-1$

$\therefore$ 切线方程式是 $y-4=1(x-2)$

即 $x-y+2=0$

法线方程式是 $y-4=-1(x-2)$

即 $x+y-6=0$

例题 4

已知曲线 $y=3x^2-4x+7$ 在点P的切线斜率是 2，求点P的坐标。

解 $\dfrac{dy}{dx}=6x-4$

已知切线斜率是 2，得 $6x-4=2$

$x=1$

当 $x=1$， $y=6$

$\therefore$ 点P的坐标是$(1,6)$。

例题 5

已知曲线 $y=ax^2+bx+5$ 在点 $(2,3)$ 的切线斜率是3，求 a 及 b 的值。

解 $\frac{dy}{dx}=2ax+b$

已知当 $x=2$ 时，$\frac{dy}{dx}=3$。

$3=4a+b$ .... (1)

$\because$ $(2,3)$ 在曲线 $y=ax^2+bx+5$ 上

$\therefore$ $-1=2a+b$ .... (2)

解 (1) 及 (2)，得 $a=2$，$b=-5$。

例题 6

已知曲线 $y=\sin x$ 在点P的切线斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，其中 $0<x<\pi$，求点P的坐标。

解 $\frac{dy}{dx}=\cos x$

已知切线斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}$

当 $x=\frac{\pi}{6}$，$y=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 点P的坐标是 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$。

随堂练习 1

1. 求曲线 $y=x^3$ 在 $x=2$ 处的切线及法线方程式。
2. 已知曲线 $y=x^2-2x+3$ 在点Q的切线斜率是4，求点Q的坐标。
3. 求曲线 $x^3-2xy+y^2=1$ 在点 $(1,2)$ 的切线及法线方程式。

练习 26.1

1. 求曲线 $y=x^2+2$ 在点 $(2,6)$ 的切线及法线方程式。
2. 求曲线 $y=2x^3-3x^2-12x+8$ 在 $x=0$ 处的切线方程式。
3. 求曲线 $y=3x^3-4x+7$ 在点 $(1,6)$ 的法线方程式。
4. 求曲线 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $x=-1$ 处的切线方程式。
5. 求曲线 $y=1-2x^2$ 在 $x=-2$ 处的切线及法线方程式。
6. 求曲线 $y=(x+1)(x-1)(x-3)$ 与 x 轴的交点处的切线方程式。
7. 求曲线 $y=4x^3-27x+7$ 上与 x 轴平行的切线的方程式。
8. 求曲线 $y=11x-3x^2$ 上与直线 $x+y-2=0$ 平行的切线的方程式。
9. 求曲线 $y=\ln(2x-1)$ 在 $x=1$ 处的切线及法线方程式。
10. 若直线 $y=8x+k$ 是曲线 $y=x^2+4x-3$ 的切线，求 k 的值。
11. 已知曲线 $y=ax+bx^2$ 在点 $(1,0)$ 的切线斜率是 $\dfrac{1}{2}$，求 a 及 b 的值。
12. 若 $x+y+2=0$ 是曲线 $y=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处的切线方程式，求 a 及 b 的值。
13. 已知曲线 $y=x^3-6x^2+10x-5$ 上的一点 P 的切线斜率是 -2，求点 P 的坐标。
14. 证明曲线 $y=x^2-3x+1$ 与曲线 $x(y+3)=4$ 在点 $(2,-1)$ 的切线互相垂直。
15. 求曲线 $x^2-xy+y^2=7$ 在点 $(-2,-3)$ 的切线及法线方程式。
16. 求曲线 $y^2+y=2\sin x$ 在点 $(0,-1)$ 的切线方程式。

26.2 函数的增减性

单调函数

对于定义在区间D上的函数$f(x)$，

一、对于D中的任意两个数x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，$f(x_1)<f(x_2)$，则$f(x)$在区间D上是增函数，如图26-2 (a)所示；

二、对于D中的任意两个数x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，$f(x_1)>f(x_2)$，则$f(x)$在区间D上是减函数，如图26-2 (b)所示。

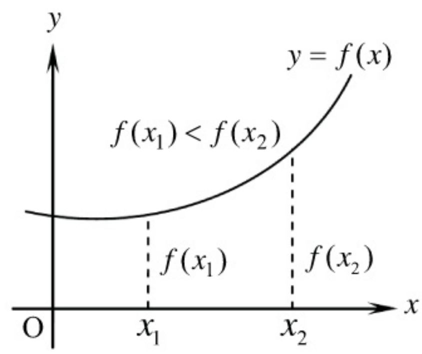


图 26-2 (a)

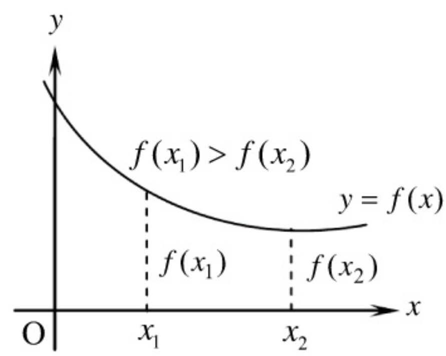


图 26-2 (b)

若函数$f(x)$在区间D上是增函数或减函数，那么我们说$f(x)$在区间D上是单调函数。

图26-3所示的曲线是函数$f(x)$在区间$[-5,5]$上的图像。由此图像可知，函数$f(x)$在区间$[-5,-2]$及$[1,3]$上是减函数，在区间$[-2,1]$及$[3,5]$上是增函数。

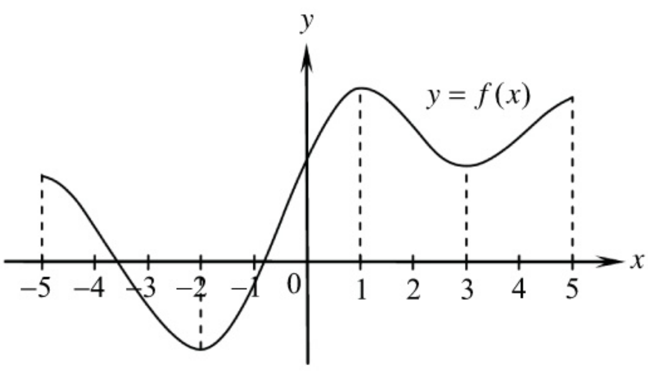


图 26-3

函数增减性的判别法

如图26-4所示，当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上是增函数时，它在区间(a,b)内任意点的切线斜率都是正数，即$f'(x)>0$；当函数$f(x)$在区间$[b,c]$上是减函数时，它在区间(b,c)内任意点的切线斜率都是负数，即$f'(x)<0$。

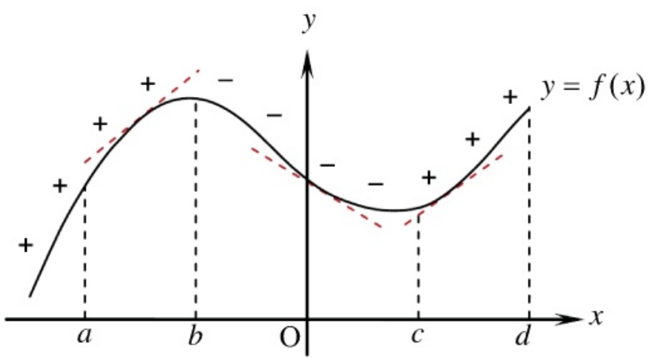


图 26-4

由此，我们可得一个以导数值的正负号来判别函数增减性的方法：

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)内可导。

- 若在区间(a,b)内，$f'(x)>0$，则$f(x)$在区间$[a,b]$上是增函数；
- 若在区间(a,b)内，$f'(x)<0$，则$f(x)$在区间$[a,b]$上是减函数。

例题 1

判别函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 在哪一个区间是增函数，在哪一个区间是减函数。

解

$$f'(x)=6x^2-18x+12$$

$$f'(x)=0$$

$$6x^2-18x+12=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x=1 \quad 或 \quad x=2$$

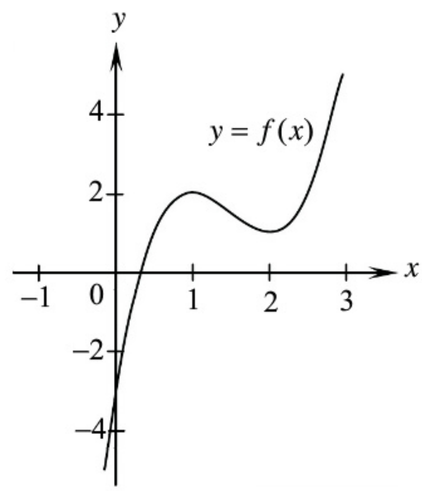


图 26-5

在区间 $(-\infty,1)$，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上是增函数；

在区间 $(1,2)$，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数；

在区间 $(2,\infty)$，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[2,\infty)$ 上是增函数。

上述函数的增减性，也可列表如下：

区间	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

随堂练习 2

判别下列各函数在哪一个区间是增函数，在哪一个区间是减函数。

1. $f(x)=x^2+2x-3$
2. $f(x)=x^3-x^2-x+1$

练习 26.2

判别下列各函数在哪一个区间是增函数，在哪一个区间是减函数。

1. $f(x)=x^2-2x+4$
2. $f(x)=2x^3-6x^2+7$
3. $f(x)=x^3+x$
4. $f(x)=2+3x-x^3$
5. $f(x)=x^2(x-3)$
6. $f(x)=3x^4+2x^3-3x^2-2$
7. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
8. $f(x)=\cos 2x$， $0\le x\le \pi$

26.3 函数的极大值与极小值

如图26-6所示，函数在 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ 较其邻近点的函数值大，我们称 $f(a)$ 为极大值；函数在 $x=b$ 处的函数值 $f(b)$ 较其邻近点的函数值小，我们称 $f(b)$ 为极小值。

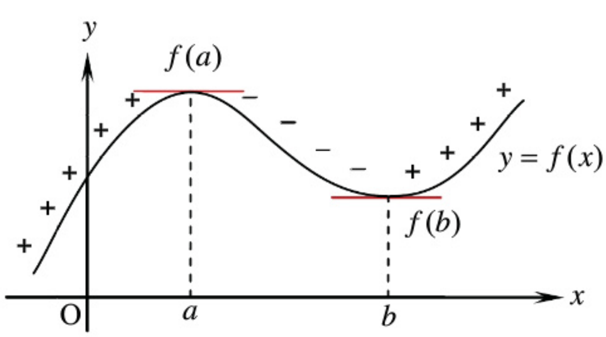


图 26-6

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近都有定义，
- 若在 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ 大于它邻近各点的函数值，我们就说函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极大值 $f(a)$，点 $(a, f(a))$ 就叫做函数的极大值点；
- 若在 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ 小于它邻近各点的函数值，我们就说函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极小值 $f(a)$，点 $(a, f(a))$ 就叫做函数的极小值点。

极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为极值点。

观察图26-6还可得，曲线在极值点的切线斜率为0。由此可得以下定理：

若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且在 $x=a$ 处有极值，那么 $f'(a)=0$。

我们将满足 $f'(x)=0$ 的点叫做驻点。

若函数在极值点可导，极值点一定是驻点，但驻点不一定是极值点。例如，函数 $f(x)=x^3$ 的导数是 $f'(x)=3x^2$，且 $f'(0)=0$，即 $O(0,0)$ 是驻点，但它不是极值点，如图26-7所示。

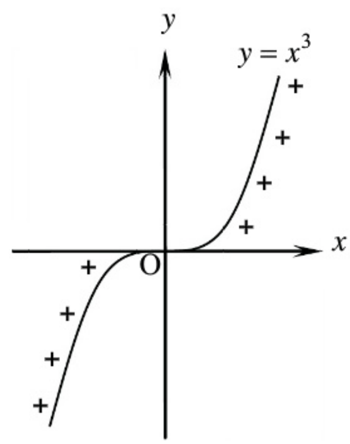


图 26-7

极值的判别法

一、第一判别法

观察图26-6可得，曲线在极大值点左侧的切线斜率为正，右侧为负；曲线在极小值点左侧的切线斜率为负，右侧为正。由此可得以下定理：

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近可导，且 $f'(a)=0$
- 若在 $x=a$ 的左侧 $f'(x)>0$，在 $x=a$ 的右侧 $f'(x)<0$，则 $f(a)$ 是极大值；
- 若在 $x=a$ 的左侧 $f'(x)<0$，在 $x=a$ 的右侧 $f'(x)>0$，则 $f(a)$ 是极小值。

若极值点不是端点，则它位于函数增减区间的交界处。所以，极值点也叫做转向点。

二、第二判别法

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近二次可导，且 $f'(a)=0$。
- 若 $f''(a)<0$，则 $f(a)$ 是极大值；
- 若 $f''(a)>0$，则 $f(a)$ 是极小值。

注意

第二判别法在 $f''(a)=0$ 时无效，必须改用第一判别法。

例题 1

求 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 的极值。

解 $f'(x)=x^2-4$

$$f'(x)=0$$
$$x^2-4=0$$
$$(x+2)(x-2)=0$$
$$x=-2 \quad 或 \quad x=2$$

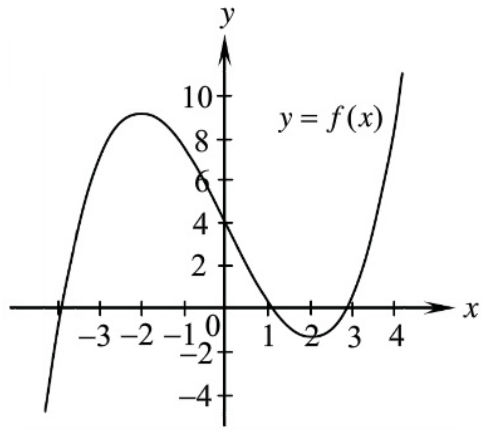


图 26-8

利用第一判别法：当 x 的值变化时，$f'(x)$ 及 $f(x)$ 的值的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值 $9\frac{1}{3}$	↘	极小值 $-1\frac{1}{3}$	↗

$\therefore$ 极大值是 $9\frac{1}{3}$，极小值是 $-1\frac{1}{3}$。

或

利用第二判别法：

$f''(x)=2x$

$\because\ f''(-2)=-4<0$， $f''(2)=4>0$

$\therefore\ f(-2)=9\frac{1}{3}$ 是极大值，$f(2)=-1\frac{1}{3}$ 是极小值。

例题 2

求 $f(x)=1-x^4$ 的极值。

解 $f'(x)=-4x^3$

$f'(x)=0$

$-4x^3=0$

$x=0$

$\because\ f''(0)=0$

$\therefore$ 极值的第二判别法在此无效。

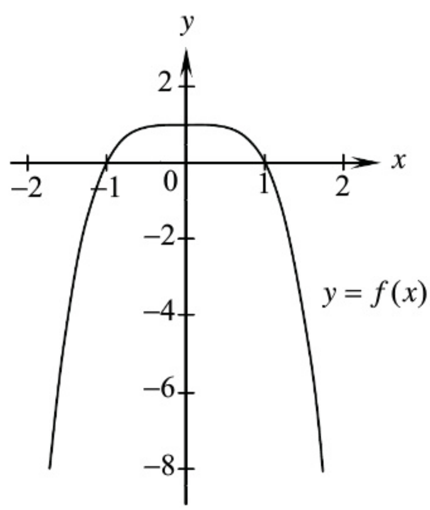


图 26-9

利用第一判别法：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值 1	↘

$\therefore$ 极大值 $=f(0)=1$。

例题 3

求 $y=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值点的坐标。

解 $\frac{dy}{dx}=3x^2-6x-9$

$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-6$

当 $\frac{dy}{dx}=0$ 时，$3\left(x^2-2x-3\right)=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 或 $x=3$

当 $x=-1$ 时，$y=10$。

$\frac{d^2y}{dx^2}=-12<0$

当 $x=3$ 时，$y=-22$。

$\frac{d^2y}{dx^2}=12>0$

$\therefore$ 极大值点是$(-1,10)$，极小值点是$(3,-22)$。

随堂练习 3

求下列各函数的极值（1至4）：

1. $f(x)=x^2+x-6$
2. $f(x)=2-x-x^2$
3. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$
4. $f(x)=4x-3x^3$

求下列各函数的极值点的坐标（5至6）：

5. $y=2x^3-3x^2-12x-7$
6. $y=x+\frac{1}{x}$

练习 26.3

求下列各函数的极值(1至6):

1. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$
2. $f(x)=4+2x-x^2$
3. $f(x)=-2x^2+4x+7$
4. $f(x)=3x^2-2x+1$
5. $f(x)=2x^3-9x^2-24x-12$
6. $f(x)=15+9x-3x^2-x^3$

求下列各函数的极值点的坐标(7至11):

7. $f(x)=x\left(x^2-12\right)$
8. $f(x)=4x^3-3x^2-6x+2$
9. $f(x)=x(x-8)(x-3)$
10. $f(x)=4x^2+\frac{1}{x}$
11. $f(x)=x-2\sin x$, $-\pi<x<\pi$
12. 求函数 $f(x)=x^2(3-x)$ 的驻点，并判断驻点是极大值点或极小值点。

26.4 函数的最大值与最小值

图26-10所示的曲线是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像。由此图像可知，$f(x_1)$ 及 $f(x_3)$ 是极小值，$f(x_2)$ 是极大值。在解决实际问题时所注重的是函数在整个定义区间上，哪个值最大，哪个值最小。在图26-10中，函数 $f(x)$ 的最大值是 $f(b)$，最小值是 $f(x_3)$。

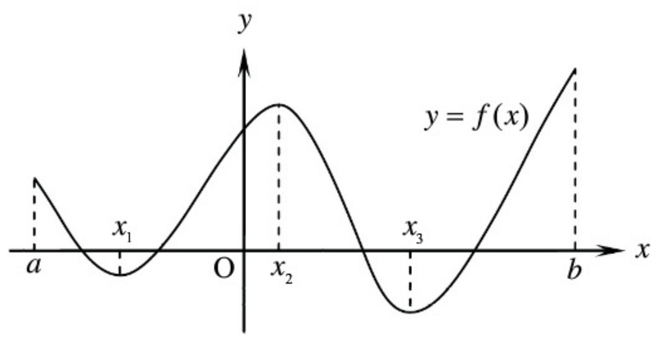


图 26-10

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值及最小值。

在开区间 (a,b) 内连续的函数 $f(x)$ 不一定有最大值及最小值。例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,\infty)$ 内连续，却没有最大值及最小值。又如图 26-10 中，若其定义域为开区间 (a,b)，则函数在此开区间只有最小值而没有最大值。

由图 26-10 可知，若函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续，只需将函数所有的极值点与端点的值作比较，就可求出函数的最大值或最小值了。

例题 1

求函数 $f(x)=x^3-3x+3$ 在闭区间 $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right]$ 上的最大值及最小值。

解 $f'(x)=3x^2-3$

令 $f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$x=\pm1$

函数的极值是 $f(-1)=5$ 及 $f(1)=1$。

端点的函数值是 $f(-3)=-15$ 及 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{15}{8}$。

比较函数的极值及端点的函数值，可得函数在闭区间 $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right]$ 上的最大值是5及最小值是-15。

例题 2

欲利用一个长为120m的铁丝网围成一个矩形的养鸡场，只围三边，另一边为一道墙。求养鸡场的长及宽，使得所围的养鸡场的面积为最大。

解 设养鸡场的长为 x m，宽为 y m。

已知 $x+2y=120$

$x=120-2y$

矩形面积 $A=xy$

$=(120-2y)y$

$=120y-2y^2$

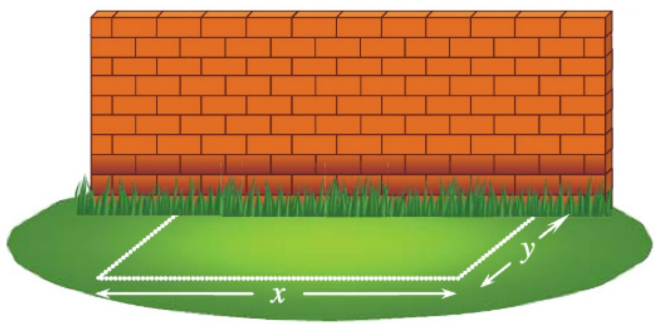


图 26-11

$\dfrac{dA}{dy}=120-4y$

令 $\dfrac{dA}{dy}=0$，得 $y=30$。

$\because \dfrac{d^2A}{dy^2}=-4<0$

$\therefore$ 当 $y=30$ 时，面积 A 为最大值。当 $y=30$ 时，$x=60$。

$\therefore$ 当养鸡场的长为 60m，宽为 30m 时，其面积为最大。

随堂练习 4

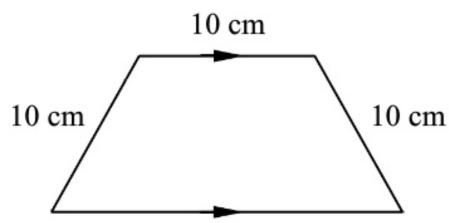
求下列各函数在指定区间上的最大值及最小值 (1至2):

1. $f(x)=3x^3-9x+5$，$[-2,2]$
2. $f(x)=x^4-2x^2+5$，$[-2,3]$
3. 若 $x+y=8$，求 x^2+y^2 的最小值。
4. 将一条长100 cm的铁线围成矩形。求矩形的长及宽，使得其面积为最大。

练习 26.4

求下列各函数在指定区间上的最大值及最小值(1至3):

1. $f(x)=5-36x+3x^2+4x^3$，$[-1,2]$
2. $f(x)=4x^2\left(x^2-2\right)$，$[-1,3]$
3. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3$，$[0,4]$
4. 将一条长 60 cm 的铁线围成矩形。求矩形的长及宽，使得其面积为最大。
5. 将一条长100 cm的铁线分成两段，各围成一个正方形。求两段铁线的长度，使得两个正方形的面积之和为最小。
6. 如右图所示，一梯形的三边各为10 cm。若欲使梯形的面积为最大，求第四边的长，并求梯形的最大面积。

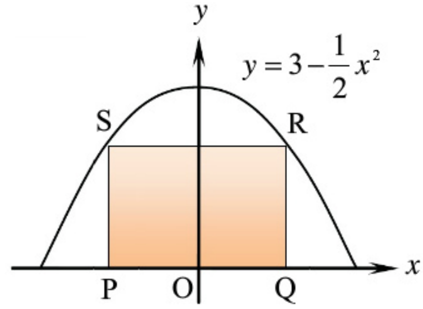


(第 6 题用图)

7. 一个直圆锥的侧棱长 9 cm。求圆锥的高，使得其体积为最大。
8. 一个有盖的圆柱形铁罐的容量是$250\pi\ cm^3$。求铁罐的高及底半径，使得其所使用的材料为最少。
9. 将 20 分成两个部分，使得其中一部分的倒数的 4 倍，与另一部分的倒数的 9 倍之和为最小。
10. 将一条长150cm的铁线分成两段，分别围成一个正方形及一个圆形。求两条线段的长，使得正方形及圆形的面积之和为最小。
11. 如右图所示，某个窗子是由一个长方形及一个半圆所组成，整个窗子的周长是300 cm。若欲使此窗子的面积为最大，求半圆的半径，并求此窗子的最大面积。


(第 11 题用图)

12. 在右图中，PQRS是一长方形，P及Q的坐标分别是$(-k,0)$及$(k,0)$，其中$k>0$，且R及S两点在曲线$y=3-\dfrac{1}{2}x^2$上。求k的值，使得长方形的面积为最大。



(第 12 题用图)

26.5 曲线的凸向及拐点

对于曲线 $y=f(x)$，

一、若在某区间内，其切线皆位于曲线的上方，则曲线在此区间内是上凸的，如图 26-12(a) 所示；

二、若在某区间内，其切线皆位于曲线的下方，则曲线在此区间内是下凸的，如图 26-12(b) 所示。

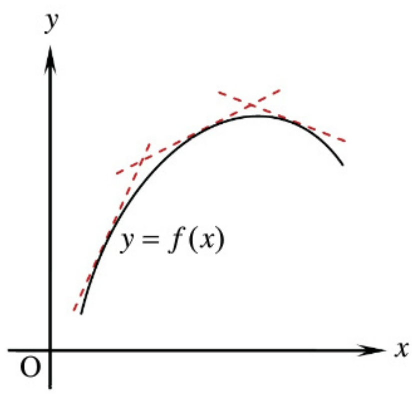


图26-12 (a)

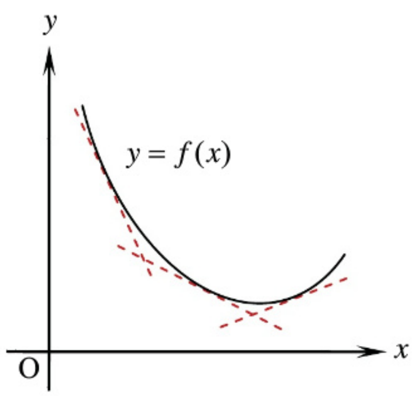


图26-12 (b)

若函数 $y=f(x)$ 的曲线在某一点的两侧改变了凸向，则这个上凸、下凸的分界点叫做拐点。

以下我们讨论判定函数的凸向及拐点的方法。在图26-13中，函数的图像在 $x=x_0$ 的左侧是上凸的，而右侧是下凸的。

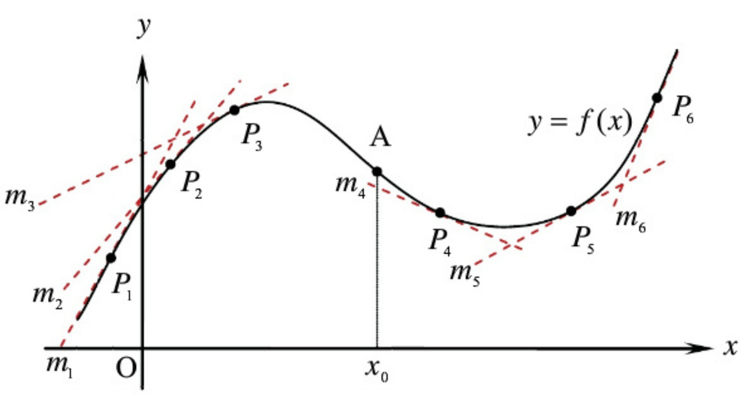


图26-13

在上凸的区间 $(-\infty, x_0)$ 内，当曲线的切线由左至右分别切于 P_1，P_2 及 P_3 时，其切线的斜率 m_1，m_2 及 m_3 是递减的，即切线的斜率 $f'(x)$ 是减函数。

在下凸的区间 (x_0, ∞) 内，当曲线的切线由左至右分别切于 P_4，P_5 及 P_6 时，其切线的斜率 m_4，m_5 及 m_6 是递增的，即切线的斜率 $f'(x)$ 是增函数。

我们有以下定理：

设函数 $f(x)$ 有二阶导数 $f''(x)$。

- 若在某区间内，$f''(x)<0$，则曲线在此区间内是上凸的；
- 若在某区间内，$f''(x)>0$，则曲线在此区间内是下凸的；
- 若 $f''(x_0)=0$，且 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧异号，则 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点。

例题 1

求曲线 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ 的凸向区间及拐点。

解

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$f''(x)=6x-12$

令 $f''(x)=0$

$6x-12=0$

$x=2$

(续) 在区间$(-\infty,2)$内，$f''(x)<0$，所以$f(x)$在区间$(-\infty,2)$内是上凸的。

在区间$(2,\infty)$内，$f''(x)>0$，所以$f(x)$在区间$(2,\infty)$内是下凸的。

$\because$ $f(2)=1$，且$f''(x)$在点$(2,1)$的两侧异号，

$\therefore$ $(2,1)$是拐点。

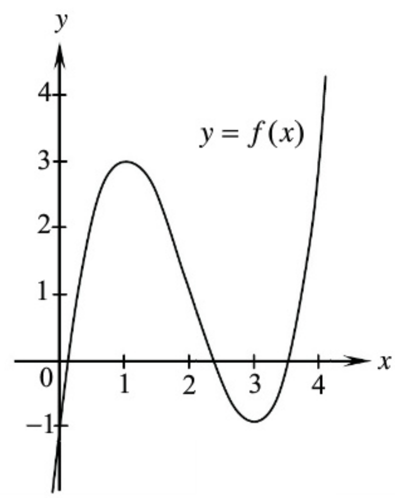


图 26-14

例题 2

判定曲线$f(x)=x^4-1$的凸向并求其拐点。

解

$f'(x)=4x^3$

$f''(x)=12x^2$

令$f''(x)=0$

得 $x=0$

在区间$(-\infty,0)$内，$f''(x)>0$，所以$f(x)$在区间$(-\infty,0)$内是下凸的。

在区间$(0,\infty)$内，$f''(x)>0$，所以$f(x)$在区间$(0,\infty)$内是下凸的。

由于曲线$f(x)=x^4-1$在$(-\infty,\infty)$内都是下凸的，所以曲线没有拐点。

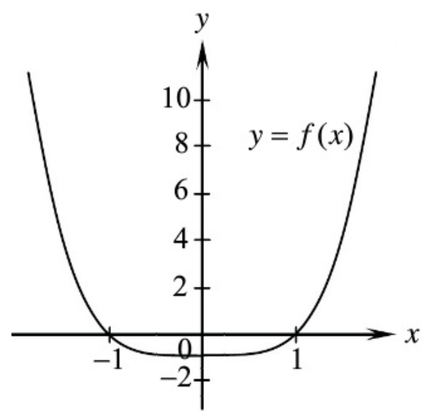


图 26-15

注意

若$f''(x_0)=0$，$f''(x)$在$x=x_0$两侧的符号不变，则该点不是拐点。

例题 3

判定曲线 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 的凸向。

解

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{(x+1)^3}$$

当 $x=-1$ 时，函数 $f(x)$ 没有意义。

在区间 $(-\infty,-1)$ 内，$f''(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 内是下凸的。

在区间 $(-1,\infty)$ 内，$f''(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,\infty)$ 内是上凸的。

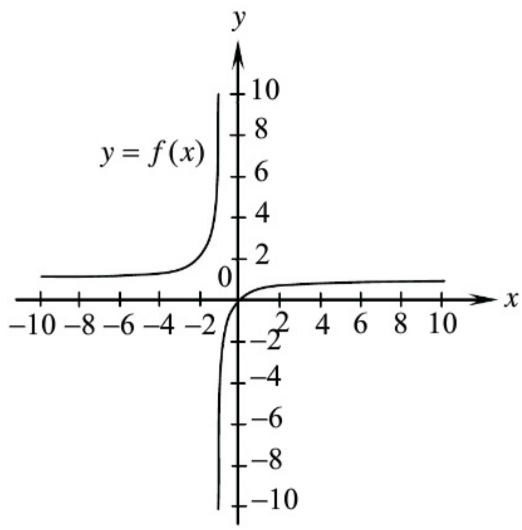


图 26-16

随堂练习 5

求下列各曲线的凸向区间及拐点：

1. $f(x)=3x^2-x^3$
2. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$

练习 26.5

求下列各曲线的拐点坐标(1至3):

1. $f(x)=x^3-6x+4$

2. $f(x)=x^3(4-x)$

3. $f(x)=x^{\frac{7}{3}}$

求下列各曲线的凸向区间及拐点(4至6):

4. $f(x)=-(x-2)^3$

5. $f(x)=2x^3-3x^2-36x+25$

6. $f(x)=x^4-2x^3+1$

求下列各函数的极值、拐点坐标及凸向区间(7至8):

7. $f(x)=x(6-2x)^2$

8. $f(x)=-\dfrac{2}{1+x^2}$

26.6 曲线作图法

在学习了导数之后，我们可利用函数的增减性、极值及曲线的凸向、拐点等概念，较准确地描绘出函数的图像。以下列出描绘函数的图像的步骤，并举例说明：

(1) 求出曲线与坐标轴的交点；

(2) 解方程式 $f'(x)=0$，并确定曲线的增减性与极值；

(3) 解方程式 $f''(x)=0$，并确定曲线的凸向及拐点；

(4) 描点作图。

上述的步骤并非一成不变，在实际应用时应根据具体的情况灵活地使用。

例题 1

作函数 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 的图像。

解 (1) 当 $x=0$ 时，$f(0)=1$。
当 $f(x)=0$ 时，得 $x=1$。

$\therefore$ 曲线通过点 $(0,1)$ 及 $(1,0)$。

(2) $f'(x)=12x^3-12x^2$
$=12x^2(x-1)$
令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=1$。

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\therefore$ 极小值点是 $(1,0)$。

(3) $f''(x)=36x^2-24x$
$=12x(3x-2)$

令 $f''(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$。

x	$(-\infty,0)$	$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$	$\left(\dfrac{2}{3},\infty\right)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
凸向	下凸	上凸	下凸

$\therefore$ 拐点是 $(0,1)$ 及 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27}\right)$。

(续) (4) 作函数 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 的图像如下:

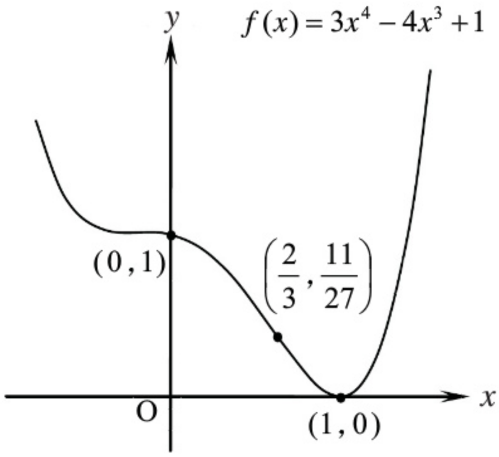


图 26-17

例题 2

作函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 的图像。

解 (1) 当 $x=0$ 时, $f(0)=1$。

$\therefore$ 曲线通过点$(0,1)$。

(2) $f'(x)=3x^2-3$

$=3(x+1)(x-1)$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=-1$ 或 $x=1$。

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$\therefore$ 极大值点是$(-1,3)$, 极小值点是$(1,-1)$。

(续) (3) $f''(x)=6x$

令 $f''(x)=0$，得 $x=0$。

x	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
凸向	上凸	下凸

$\therefore$ 拐点是 $(0,1)$。

(4) 作函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 的图像如下：

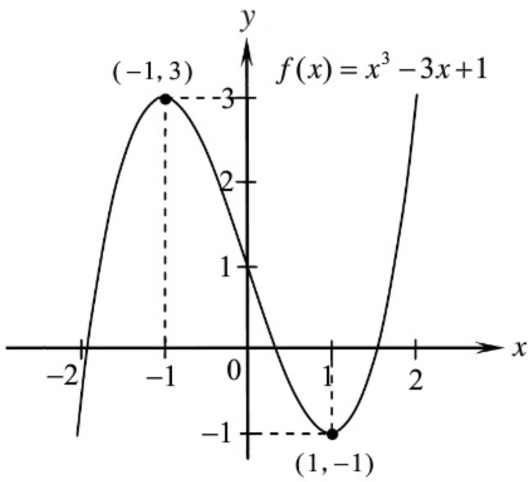


图 26-18

随堂练习 6

作函数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 的图像。

练习 26.6

作下列各函数的图像 (1至3):

1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$

2. $f(x)=x^4-32x+10$

3. $f(x)=(x-1)^3(x-2)$

4. 已知函数 $f(x)=x^3(4-x)$ 。

   (a) 求 $f(x)$ 的极值及增减区间。

   (b) 求 $f(x)$ 的拐点及凸向区间。

   (c) 据此，作函数 $f(x)$ 的图像。

26.7 变率与相关变率

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数叫做因变量y在 $x=x_0$ 处对自变量x的变化率。例如，$\frac{dy}{dx}=3$ 表示当x改变一个单位时，相应的y的变量是三个单位，即y及x都在改变，它们是以3比1的速率改变。

同理，面积函数 $A=A(t)$ 在时刻 $t=t_0$ 的导数是面积在时刻 $t=t_0$ 时相对于时间的变率。当面积在时刻 $t=t_0$ 的变率为 $\frac{dA}{dt}=4\text{ cm}^2/\text{s}$ 时，表示面积是以每秒 4 平方公分的速率增加；而 $\frac{dA}{dt}=-4\text{ cm}^2/\text{s}$ 则表示面积是以每秒 4 平方公分的速率减少。

若一个固定的关系连系着几个变量，这些变量都是随着时间而变，则它们的变率之间必然也有一定的关系。这种有关系的变率叫做相关变率。若 $y=f(x)$ 是 x 的函数，而 x 依时间 t 而变，则由于 y 依 x 而变，所以 y 也依时间 t 而变。换言之，y 也是时间 t 的函数。因此，由链导法可得以下关系：

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

即 y 的变率与 x 的变率相关。

例题 1

一个底部有一小孔的容器，其盛水量与时间的关系为 $V=\left(500-3t-t^2\right)\text{ cm}^3$，其中 $0\le t\le 20$。当 $t=10$ 秒时，求水量的变率。

解 $\dfrac{dV}{dt}=-3-2t$

当 $t=10$，$\dfrac{dV}{dt}=-23$。

$\therefore$ 当 $t=10$ 秒时，水是以每秒 23 cm^3 的速率流出。

例题 2

某人向水池投掷一块石头。石头在水面所激起的涟漪，其半径r是以每秒20cm 的速率增加。当半径为80 cm时，求涟漪的面积A的变率。

解 $A=\pi r^2$

$$\frac{dA}{dr}=2\pi r$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dr}\times\frac{dr}{dt}$$

$$=2\pi r\frac{dr}{dt}$$

当 $r=80$，$\frac{dr}{dt}=20$ 时，$\frac{dA}{dr}=2\pi(80)(20)$

$$=3200\pi$$

∴ 当半径为 80 cm 时，涟漪的面积的变率为每秒 $3200\pi\ \text{cm}^2$。

例题 3

一铁球受热膨胀，其半径以每分钟 0.2 mm 的速度匀速增加。求半径为100 mm时，铁球的体积增加的速率。

解 设铁球的体积为V，半径为r，则$V=\frac{4}{3}\pi r^3$。

$$\frac{dV}{dr}=4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\times\frac{dr}{dt}$$

$$=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

(续) 当 $r=100$，$\dfrac{dr}{dt}=0.2$ 时，$\dfrac{dV}{dr}=4\pi(100)^2(0.2)$

$=8000\pi$

∴ 当半径为 100 mm 时，铁球的体积增加的速率为每分钟 $8000\pi\ \text{mm}^3$。

例题 4

一倒立的圆锥形容器的底半径为 5 cm，高为 15 cm。若水以 $10\ \text{cm}^3/\text{s}$ 的流速注入此容器，当水深为 4 cm 时，求

(a) 水面的升高率；

(b) 水面面积的变率。

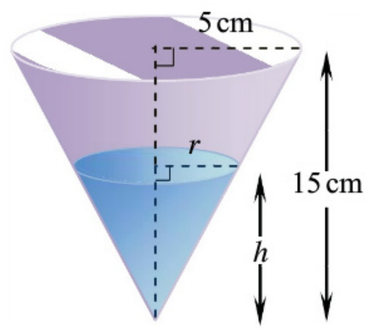


图 26-19

解 (a) 设水深为 h，水面半径为 r

$$\frac{r}{h}=\frac{5}{15}$$

$$r=\frac{h}{3}$$

水的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2h$$

$$=\frac{\pi h^3}{27}$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\times\frac{dh}{dt}$$

$$=\frac{\pi h^2}{9}\cdot\frac{dh}{dt}$$

(续) 已知$\dfrac{dV}{dt}=10$。

当$h=4$时，$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{9}{\pi(4)^2}\times 10$

$$=\frac{45}{8\pi}\text{ cm/s}$$

∴ 当水深为4 cm时，水面的升高率为$\dfrac{45}{8\pi}$ cm/s。

(b) 由于水面呈一圆形，所以水面面积为

$$A=\pi r^2$$
$$=\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2$$
$$=\frac{\pi h^2}{9}$$

水面面积的变率为$\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{dA}{dh}\times\dfrac{dh}{dt}$

$$=\frac{2\pi h}{9}\times\frac{dh}{dt}$$

当$h=4$及$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{45}{8\pi}$时，$\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{2\pi(4)}{9}\times\dfrac{45}{8\pi}$

$$=5\text{ cm}^2/\text{s}$$

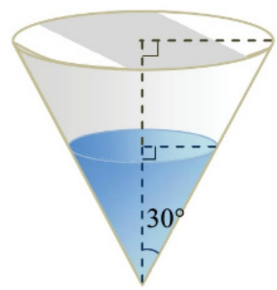
∴ 当水深为4 cm时，水面面积的变率为5 cm^2/s。

随堂练习 7

1. 一滴墨汁滴到纸上后墨迹逐渐扩散，在t秒时，其面积为$A=\left(3t^2+\dfrac{1}{5}t+2\right)\text{mm}^2$。当$t=2$秒时，求墨迹扩散的速率。
2. 一球体的半径以3 cm/s的速率增加。当半径为5 cm时，求球体表面积的变率。

练习 26.7

1. 将水倒入一容器内，水的体积与时间的关系为$V=\left(2t^2+3t\right)\text{cm}^3$。当$t=3$秒时，求水的体积的变率。
2. 某人向水池投掷一块石头。石头在水面所激起的涟漪，其半径以每秒0.1 m的速率向外扩大。当半径为1 m时，求涟漪的面积的变率。
3. 一正方形的边长每秒增加3 cm。当边长为15 cm时，求其面积的变率。
4. 一立方体在受热后膨胀，其边长的变率是5 cm/s。当边长为4 cm时，求其体积的变率。
5. 一球体的半径每秒增加1 cm。当半径为3 cm时，求其体积的变率。
6. 一圆的面积每分钟增加5 cm^2。当圆的周长为40 cm时，求其半径的变率。
7. 一球体的体积以每分钟 $12\pi\ \text{cm}^3$ 的速率减少。当球体的半径为6 cm时，求其半径及表面积的变率。
8. 一球体的表面积以 $10\ \text{cm}^2/\text{s}$ 的速率增加。当半径为5 cm时，求该球体的半径及体积的变率。
9. 将水倒入如右图所示的圆锥形容器中，水面的升高率为每秒1 cm。当水深为2 m时，求水的体积的变率。
10. 一实心直圆柱的半径 r 每秒减少0.04 cm，其高恒为20 cm。当半径为2 cm时，求此圆柱体表面积的变率。
11. 已知函数 $y=x^3+10$。当 y 的变率为 x 的变率的27倍时，求 x 的值。
12. 将水以每分钟 $2\ \text{m}^3$ 的速率注入一个高为18 m，底半径为24 m，且顶点朝下的圆锥形水池。当水的高度为6 m时，求水面的升高率。



（第 9 题用图）

26.8 近似计算

在上一章，我们学过，函数 $y=f(x)$ 的导数是

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

由极限的定义可知，当 Δx 充分小时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\approx\frac{dy}{dx}$$

因此，

$$\boxed{\Delta y\approx\frac{dy}{dx}\Delta x}$$

或 $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$

即

$$\boxed{f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x}$$

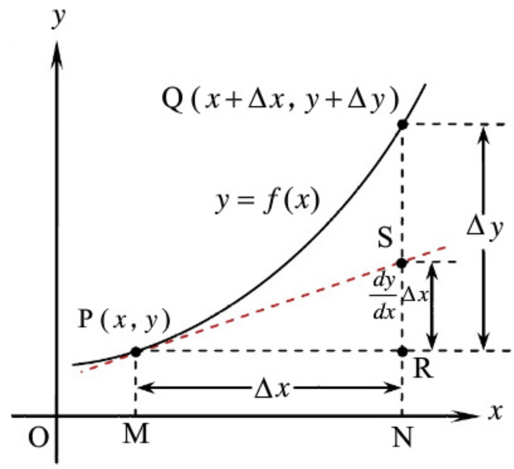


图 26-20

以上式子是一个简单的近似计算公式，可用来求函数的近似值。

例题 1

一正方体的边长由 4 cm 增加至 4.01 cm，它的体积大约增加了多少？

解 设边长为 x，体积为 V，则 $V=x^3$。

$$\frac{dV}{dx}=3x^2$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}\approx\frac{dV}{dx}$$

$$\therefore\quad \Delta V\approx 3x^2\,\Delta x$$

(续) 当 $x=4$ 及 $\Delta x=0.01$ 时，$\Delta V \approx 3(4)^2(0.01)$

$= 0.48\ \text{cm}^3$

∴ 正方体的体积大约增加了 $0.48\ \text{cm}^3$。

思考题

利用求体积的公式计算例题1中正方体的体积增加了多少，并与例题1所得的答案作比较。

例题 2

若一球体的半径由 5 cm 减少至 4.98 cm，求它的表面积的近似减量。

解 设球体的半径为 r，表面积为 A，则 $A=4\pi r^2$。

$$\frac{dA}{dr}=8\pi r$$

∴ $\Delta A \approx 8\pi r \Delta r$

当 $r=5$ 及 $\Delta r=-0.02$ 时，$\Delta A \approx 8\pi(5)(-0.02)$

$= -0.8\pi\ \text{cm}^2$

∴ 球体的表面积大约减少了 $0.8\pi\ \text{cm}^2$。

例题 3

求 $\sqrt{17}$ 的近似值。

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

取 $x=16$ 及 $\Delta x=1$，则 $f(16)=\sqrt{16}=4$。

由 $f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x$

得 $f(17) \approx f(16)+f'(16)\cdot 1$

即 $\sqrt{17} \approx 4+\frac{1}{8}$

$= 4.125$

例题 4

设 $y=3x^3$。若 x 增加了 0.1%，则 y 大约增加了多少巴仙？

解 $\frac{dy}{dx}=9x^2$， $\Delta x=0.001x$

$$\begin{aligned}\Delta y &\approx \frac{dy}{dx}\Delta x\\ &=9x^2(0.001x)\\ &=0.009x^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{y}\times 100\% &=\frac{0.009x^3}{3x^3}\times 100\%\\ &=0.3\%\end{aligned}$$

$\therefore$ y大约增加了0.3%。

随堂练习 8

1. 一正方体的边长由1 cm增加至1.01 cm，它的表面积大约增加了多少？
2. 一铁球经加热后，其半径由4cm增加至4.01cm。求其体积及表面积的近似增量。
3. 求$\sqrt{15}$的近似值。

练习 26.8

1. 一正方形的边长由4 cm增加至4.001 cm，它的面积大约增加了多少？
2. 一圆的半径由3 cm增加至3.01 cm，求其面积的近似增量。
3. 一球体的半径由3 cm减少至2.98 cm，求其体积的近似减量。
4. 设 $y=3x^5$。若 x 减少了0.2%，则y大约减少了多少巴仙？

5. 若一正方体的边长增加了1%，其体积大约增加了多少巴仙?
6. 设一个高为16 cm，半径为r cm的实心直圆柱的表面积为A。
   (a) 证明$\frac{dA}{dr}=4\pi(r+8)$。
   (b) 若直圆柱的高度不变，利用(a)的结果，求当直圆柱的半径由4 cm增加至4.02 cm时，其表面积的近似增量。
7. 若$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，求$\frac{dy}{dx}$。据此，求$\frac{1}{\sqrt{99.4}}$的近似值。(答案准确至四位小数)
8. 若$y=x^{\frac{1}{4}}$，求$\frac{dy}{dx}$。据此，求$16.05^{\frac{1}{4}}$的近似值。(答案准确至四位小数)

总复习题26

1. 求曲线$y=x^3-3x$在$x=3$处的切线方程式。
2. 求曲线$y=x(x-4)(x+1)$与x轴的交点处的法线方程式。
3. 已知曲线$y=ax^2+bx-10$经过点$(2,0)$，且在该点的切线斜率是3。求a及b的值。
4. 求曲线$y=x+\frac{2}{x}$在点$(2,3)$的法线方程式。若该法线分别交x、y两轴于A及B两点，求AB的长度。

下列各函数在哪一个区间是增函数? 在哪一个区间是减函数? (5至6)

5. $f(x)=2x^2(6-x)$
6. $f(x)=4x^3-3x^2-6x+1$
7. 若$x-y=3$，求x^2y的极小值。
8. 若$2x^2+y^2=6x$，求x^2+y^2+2x的最大值。
9. 已知$y=18x^2+12x+7$在$x=p$处有极小值q。求p及q的值。
10. 一矩形场地的其中一边是墙，另三边则以栏杆围成。若栏杆长40 m，求场地的长及宽，使得场地的面积为最大。

11. 一周长为18 cm的长方形绕其中一边旋转一周后形成一个直圆柱。若欲使此圆柱体的体积为最大，求长方形的长及宽，并求圆柱体的最大体积。
12. 一隧道截面的上部是一个半圆，下部是一个矩形。若截面的面积固定，求半圆的半径与矩形的高之比，使得截面的周长为最小。
13. 将28分成两个部分，使得其中一部分的平方与另一部分的立方之和为最小。
14. 一圆柱形铁罐的容量固定。欲使此铁罐以最少的材料制成，其底圆半径与高之比应为多少?

求下列各曲线的拐点坐标(15至16):

15. $y = x^3 - 2$
16. $y = 3x + (2-x)^3$
17. 已知函数 $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$。求函数 $f(x)$ 的极值，并求曲线 $y = f(x)$ 的凸向区间及拐点坐标。
18. 已知函数 $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$。
    (a) 求函数的驻点坐标。
    (b) 判定函数在哪一个区间是增函数，在哪一个区间是减函数。
    (c) 求函数的凸向区间及拐点坐标。

作下列各函数的图像(19至20):

19. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$
20. $y = x^3 - 3x^2 + 4$
21. 在某容器中，水的体积 $V\,(\text{cm}^3)$ 与水深 $x\,(\text{cm})$ 的关系为 $V = 4x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$。若将水以每秒 6 cm^3 的速率倒入容器中，当 $x = 2\text{ cm}$ 时，求水深的变率。
22. 将水以每分钟 5 m^3 的速率注入一个高为20 m，底半径为10 m，且顶点朝下的圆锥形水池。当水的高度为10 m时，求
    (a) 水面的升高率;
    (b) 水面面积的变率。
23. 一球体的半径由4 cm减少至3.95 cm，求其体积及表面积的近似减量。
24. 一球形容器内的水容量为 $V = \left[\dfrac{\pi h^2}{3}(15-h)\right]\text{cm}^3$，其中 $h\,(\text{cm})$ 为水深。若水深由4 cm增加至4.01 cm，求水量的近似增量。

25. 在一个碗中，当水的高度为 h cm 时，水的体积为 $V=\left(h^3+3h^2+11h\right)$ cm^3。当水的高度为 7 cm 时，将额外 ΔV cm^3 的水倒入碗中。求水的高度的近似增量。

26. 若 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。据此，求 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{130}}$ 的近似值。(答案准确至三位小数)

27. 不定积分

学习目标：

- 理解不定积分的概念
- 掌握基本函数的积分公式
- 掌握积分的运算法则
- 掌握换元积分法
- 掌握部分分式积分法

27.1 不定积分 — 微分的反运算

设函数 $F(x)$ 及 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上都有定义。若在此区间上的任意一点 x 都有 $F'(x)=f(x)$，那么 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的一个原函数。

根据上述的定义，求函数 $f(x)$ 的一个原函数，就是求出一个函数 $F(x)$，使它的导数 $F'(x)$ 等于 $f(x)$。例如，

$$\begin{aligned}(x^2)' &= 2x\\(x^2+1)' &= 2x\\(x^2-2)' &= 2x\\&\vdots\end{aligned}$$

对于任意常数 C，x^2+C 的导数都是 $2x$，所以 $2x$ 的原函数是 x^2+C，其中 C 可以是任意常数。

由于 $\left[F(x)+C\right]'=F'(x)$，所以若函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么 $F(x)+C$ （C 是常数）也是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $f(x)$ 有无穷多个原函数。

反之，若 $F(x)$ 及 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的任意两个原函数，则 $F'(x)=f(x)$，$G'(x)=f(x)$。

$$\begin{aligned}\because\ \left[G(x)-F(x)\right]' &= G'(x)-F'(x)\\&= f(x)-f(x)\\&= 0\end{aligned}$$

$$\therefore\ G(x)-F(x)=C$$

即 $$G(x)=F(x)+C$$

由此可见，$f(x)$ 的任意两个原函数只相差一个常数。若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么 $f(x)$ 的所有原函数都可表示成 $F(x)+C$ 的形式，其中 C 是常数。

不定积分的概念

设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数。我们将 $f(x)$ 的所有原函数 $F(x)+C$ (C是常数) 叫做函数 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)\,dx$，即 $\int f(x)\,dx = F(x)+C$。$\int$ 叫做积分符号，$f(x)$ 叫做被积函数，C叫做积分常数。

求函数 $f(x)$ 的不定积分，就是求出 $f(x)$ 的所有原函数。由以上说明可知，只需先求出函数 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$，再加上常数 C，就可得 $f(x)$ 的不定积分。

例题 1

求下列各不定积分：

(a) $\int 2x\,dx$　　(b) $\int \cos x\,dx$

解 (a) $\because \dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x$

$\therefore \int 2x\,dx = x^2 + C$

(b) $\because \dfrac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

$\therefore \int \cos x\,dx = \sin x + C$

27.2 不定积分的运算法则

基本的积分公式

为了掌握求不定积分的方法及技巧，必须先掌握一些基本的积分公式。我们知道，求不定积分就是求导数的逆运算。因此，我们可由导数公式得到相应的不定积分公式。

例如，当 $n \neq -1$ 时，$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$。

因此，$\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$。

同理，我们也可得到其他的不定积分公式。以下列出一些基本的积分公式：

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\,,\quad n\neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C \qquad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C \qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C \qquad \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+C$$

$$\int \operatorname{cosec} x\cot x\,dx=-\operatorname{cosec} x+C \qquad \int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$$

思考题

$\int 0\,dx=?$

若 a 为常数，

$\int a\,dx=?$

例题 1

求下列各不定积分:

(a) $\int x^2 \, dx$　　(b) $\int \cos x \, dx$

(c) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} \, dx$　　(d) $\int \left(1+\tan^2 x\right) dx$

(e) $\int 2^x \, dx$

解

(a)
$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C$$
$$= \frac{1}{3} x^3 + C$$

(b)
$$\int \sqrt[5]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{5}} \, dx$$
$$= \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}} + C$$

(c)
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-\frac{3}{2}} \, dx$$
$$= -2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

(d)
$$\int \left(1+\tan^2 x\right) dx = \int \sec^2 x \, dx$$
$$= \tan x + C$$

(e)
$$\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

随堂练习 1

求下列各不定积分：

1. $\int x^3\,dx$
2. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$
3. $\int \frac{1}{x^3}\,dx$
4. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

练习 27.2a

求下列各不定积分：

1. $\int 3x\,dx$
2. $\int 5x^4\,dx$
3. $\int 5\,dx$
4. $\int x^{-9}\,dx$
5. $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$
6. $\int 2x^{-\frac{1}{2}}\,dx$
7. $\int \frac{1}{x^5}\,dx$
8. $\int \left(\frac{1}{x}\right)^4 dx$
9. $\int \sqrt{3x}\,dx$
10. $\int x^3\sqrt[3]{x^2}\,dx$
11. $\int \cos(-x)\,dx$
12. $\int \frac{2}{\operatorname{cosec} x}\,dx$
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$
14. $\int \frac{1}{1-\sin^2 x}\,dx$
15. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$
16. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

根据导数的运算法则，可推导出以下两个有关不定积分的运算法则：

一、提出常数法则

被积函数的常数因子可提到积分符号前，即若 k 为非零常数，则

$\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$。

二、分项积分法则

两个函数的和(或差)的不定积分等于这两个函数的不定积分的和(或差)，即

$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$。

注意

在分项积分时，每个不定积分的结果都含有一个积分常数。但是，几个常数的和（或差）仍然是一个常数。所以，分项求积分时，只需写一个积分常数就可以了。

例题 2

求下列各不定积分：

(a) $\int\left(3x^4 - 2x^2 + 5x - \frac{1}{4}\right)dx$　　(b) $\int\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

(c) $\int \frac{x + \sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x}}\,dx$　　(d) $\int \frac{x^2 + \sqrt{2}}{x}\,dx$

(e) $\int\left(2x^2 + \frac{1}{x} - \cos x\right)dx$　　(f) $\int\left(\frac{1}{2}e^x - 2\sin x + 3a^x\right)dx$

解 (a) $\int\left(3x^4 - 2x^2 + 5x - \frac{1}{4}\right)dx = 3\int x^4\,dx - 2\int x^2\,dx + 5\int x\,dx - \frac{1}{4}\int dx$

$$= \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + C$$

(b) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$=\int\left(x^2+2+x^{-2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+2x-x^{-1}+C$$

(c) $\int\frac{x+\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$$

(d) $\int\frac{x^2+\sqrt{2}}{x}\,dx=\int\left(x+\sqrt{2}x^{-1}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}\ln|x|+C$$

(e) $\int\left(2x^2+\frac{1}{x}-\cos x\right)dx=\frac{2}{3}x^3+\ln|x|-\sin x+C$

(f) $\int\left(\frac{1}{2}e^x-2\sin x+3a^x\right)dx=\frac{1}{2}e^x+2\cos x+\frac{3a^x}{\ln a}+C$

随堂练习 2

求下列各不定积分：

1. $\int\frac{1}{4}x^3\,dx$

2. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

3. $\int\frac{x^2+3x-1}{x^3}\,dx$

4. $\int\left(\sin x-3\cos x+2^x\right)dx$

例题 3

已知函数 $y=\dfrac{x}{6-2x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。据此，求 $\displaystyle\int\frac{3}{(6-2x)^2}dx$。

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(6-2x)-x(-2)}{(6-2x)^2}$$

$$=\frac{6}{(6-2x)^2}$$

$$\int\frac{3}{(6-2x)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{6}{(6-2x)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{6-2x}\right)+C$$

$$=\frac{x}{4(3-x)}+C$$

例题 4

已知函数 $y=\dfrac{2x^3-3}{2x}$，且 $\dfrac{dy}{dx}=3f(x)$，求 $\displaystyle\int f(x)dx$。

解

$$\frac{dy}{dx}=3f(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\int f(x)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dy}{dx}dx$$

$$=\frac{1}{3}y+C$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2x^3-3}{2x}\right)+C$$

$$=\frac{2x^3-3}{6x}+C$$

例题 5

已知 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4x}{2x^2-5}\right)=h(x)$，求 $\int[5x-h(x)]\,dx$。

解 $\because\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4x}{2x^2-5}\right)=h(x)$

$\therefore\ \int h(x)\,dx=\dfrac{4x}{2x^2-5}+C'$

$$\begin{aligned}\int[5x-h(x)]\,dx&=\int 5x\,dx-\int h(x)\,dx\\&=\frac{5x^2}{2}-\frac{4x}{2x^2-5}+C\end{aligned}$$

随堂练习 3

1. 证明 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$。据此，求 $\int\dfrac{x^2+2x+2}{2(x+1)^2}\,dx$。
2. 已知函数 $y=\dfrac{3}{(5x+7)^3}$，且 $\dfrac{dy}{dx}=5g(x)$，求 $\int[3-g(x)]\,dx$。

练习 27.2b

求下列各不定积分 (1 至 20)：

1. $\int\left(x^3-3x+1\right)dx$
2. $\int\left(5x^4+2\sqrt{x}\right)dx$
3. $\int\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{x^2}\right)dx$
4. $\int(\sin x-3\cos x)\,dx$

5. $\int (x-5)^2\,dx$

6. $\int (x-1)(x-2)\,dx$

7. $\int \left(x^2+2\right)\sqrt{x}\,dx$

8. $\int \frac{x^4-5}{x^2}\,dx$

9. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

11. $\int \frac{x^2-9}{x+3}\,dx$

12. $\int \frac{x^3-8}{x-2}\,dx$

13. $\int \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$

14. $\int \frac{(2x+1)^2}{x}\,dx$

15. $\int \frac{(x+1)\left(3x^2-4\right)}{2x^3}\,dx$

16. $\int \left(\frac{x-1}{x^2}\right)^2 dx$

17. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

18. $\int \tan^2 x\,dx$

19. $\int \left(e^2+\frac{1}{4x}\right)dx$

20. $\int (2e)^x\,dx$

21. 已知函数 $y=\frac{5x}{3-x}$，求 $\frac{dy}{dx}$。据此，求 $\int \frac{1}{(3-x)^2}\,dx$。

22. 若函数 $y=\frac{2x^2}{3x-1}$，求 $\frac{dy}{dx}$。据此，求 $\int \frac{2x-3x^2}{(3x-1)^2}\,dx$。

23. 证明 $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2}{x^2+2}\right)=\frac{12x}{\left(x^2+2\right)^2}$。据此，求 $\int \frac{4x}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx$。

24. 已知 $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-1}{5x^2+7}\right)=f(x)$，求 $\int \left[3x^2-1-2f(x)\right]dx$。

25. 已知 $\frac{d}{dx}\left(\frac{2+x^3}{2-x^3}\right)=3g(x)$，求 $\int \left[g(x)-3x+2\right]dx$。

27.3 换元积分法

在上一节中，我们利用一些基本的积分公式及两个运算法则，来求出一些函数的不定积分。但是，对于一些较为复杂的不定积分，如 $\int 3\sqrt{3x+1}\,dx$ 及 $\int 2\sin 2x\,dx$ 等，则无法直接利用基本积分公式或运算法则求得。因此，我们需要利用其他的积分方法来求这些较为复杂的不定积分。以下将讨论换元积分法。

考虑一函数 $F(u)$，其中 u 是 x 的函数，即 $u=g(x)$。

由链导法，得 $\frac{d}{dx}F\left(g(x)\right)=F'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ 。

$$\therefore \quad \boxed{\int F'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx=F\left(g(x)\right)+C}$$

一般上，在运算过程中，我们设 $u=g(x)$。

$$\begin{aligned}\therefore \quad \int F'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx &= \int F'(u)\frac{du}{dx}\,dx\\ &= \int F'(u)\,du\\ &= F(u)+C\\ &= F\left(g(x)\right)+C\end{aligned}$$

对于一些无法直接利用基本积分公式求得的不定积分，若它可化成 $\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx$ 的形式，就可利用 $u=g(x)$ 代换，化成 $\int f(u)\,du$ 的形式。

补充资料

若 $u=g(x)$，则

$du=\frac{du}{dx}\,dx=g'(x)\,dx$。

例题 1

求 $\int 3\sqrt{3x+1}\ dx$ 。

解 令 $u=3x+1$，则 $\frac{du}{dx}=3$。所以，$du=3\ dx$ 。

$$\begin{aligned}\therefore\quad \int 3\sqrt{3x+1}\ dx &= \int \sqrt{3x+1}\cdot 3\ dx\\ &= \int u^{\frac{1}{2}}\ du\\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

例题 2

求 $\int 2\sin 2x\ dx$ 。

解 令 $u=2x$，则 $du=2\,dx$ 。

$$\begin{aligned}\int 2\sin 2x\ dx &= \int \sin u\ du\\ &= -\cos u + C\\ &= -\cos 2x + C\end{aligned}$$

例题 3

求$\int (5-2x)^3\, dx$。

解 令$u=5-2x$，则$du=-2\, dx$。

$$\int (5-2x)^3\, dx = -\frac{1}{2}\int u^3\, du$$
$$= -\frac{1}{8}u^4 + C$$
$$= -\frac{1}{8}(5-2x)^4 + C$$

思考题

展开$(5-2x)^3$后逐项求其积分，并与例题 3 的结果作比较。

与例题 3 的解法相比，哪种解法较为简单?

例题 4

求$\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2+3x}}\, dx$。

解 令$u=2x^2+3x$，则$du=(4x+3)\, dx$。

$$\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2+3x}}\, dx = \int u^{-\frac{1}{2}}\, du$$
$$= 2u^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 2\sqrt{2x^2+3x} + C$$

例题 5

求$\int \frac{1}{2x-1}\,dx$。

解 令$u=2x-1$，则$du=2\,dx$。

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int u^{-1}\,du$$
$$=\frac{1}{2}\ln|u|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$$

例题 6

求$\int 3^{4x+1}\,dx$。

解 令$u=4x+1$，则$du=4\,dx$。

$$\int 3^{4x+1}\,dx=\frac{1}{4}\int 3^{u}\,du$$
$$=\frac{3^{u}}{4\ln 3}+C$$
$$=\frac{3^{4x+1}}{4\ln 3}+C$$

例题 7

求 $\int \sec^2(3x-2)\,dx$ 。

解 令 $u=3x-2$，则 $du=3\,dx$ 。

$$\begin{aligned}\int \sec^2(3x-2)\,dx &= \frac{1}{3}\int \sec^2 u\,du \\ &= \frac{1}{3}\tan u + C \\ &= \frac{1}{3}\tan(3x-2)+C\end{aligned}$$

在熟练运算步骤后，部分的过程可省略。例题 7 可省略成下列步骤：

$$\begin{aligned}\int \sec^2(3x-2)\,dx &= \frac{1}{3}\int \sec^2(3x-2)\,d(3x-2) \\ &= \frac{1}{3}\tan(3x-2)+C\end{aligned}$$

例题 8

求 $\int (3x+2)^4\,dx$ 。

解

$$\begin{aligned}\int (3x+2)^4\,dx &= \frac{1}{3}\int (3x+2)^4\,d(3x+2) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x+2)^5+C \\ &= \frac{1}{15}(3x+2)^5+C\end{aligned}$$

随堂练习 4

求下列各不定积分：

1. $\int \sqrt[3]{3x+1}\, dx$

2. $\int \frac{1}{1-4x}\, dx$

3. $\int 2^{4x+3}\, dx$

4. $\int \sin x \cos x\, dx$

练习 27.3a

求下列各不定积分：

1. $\int (2x+1)^3\, dx$

2. $\int (3x+2)^5\, dx$

3. $\int (3-x)^6\, dx$

4. $\int (2x-1)^{-3}\, dx$

5. $\int 4\sqrt{2x-1}\, dx$

6. $\int 2(3x+1)^2\, dx$

7. $\int \frac{dx}{(2x+5)^8}$

8. $\int \frac{2}{(3-2x)^2}\, dx$

9. $\int x\sqrt{x^2+1}\, x$

10. $\int 3x^2\left(x^3+4\right)^3\, dx$

11. $\int 15x^2\left(x^3-1\right)^4\, dx$

12. $\int (2x+1)\left(x^2+x+2\right)^5\, dx$

13. $\int \left(x^2-2x\right)\left(x^3-3x^2+1\right)^4\, dx$

14. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\, dx$

15. $\int x^2\cos\left(x^3+2\right) dx$

16. $\int \sin\frac{x}{2}\, dx$

17. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$

18. $\int e^{1-2x}\, dx$

19. $\int \left(e^x+e^{-x}\right) dx$

20. $\int x e^{x^2}\, dx$

例题 9

求 $\int \sin x \cos x \, dx$。

解1 $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx$

令 $u = 2x$，则 $du = 2\, dx$。

$$\therefore \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin u \, du$$
$$= -\frac{1}{4}\cos u + C$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

解2 令 $u = \sin x$，则 $du = \cos x \, dx$。

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int u \, du$$
$$= \frac{1}{2}u^2 + C$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

解3 令 $u = \cos x$，则 $du = -\sin x \, dx$。

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\int u \, du$$
$$= -\frac{1}{2}u^2 + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$$

思考题

验证例题9中三个解法所得的不定积分 $-\frac{1}{4}\cos 2x$，$\frac{1}{2}\sin^2 x$ 与 $-\frac{1}{2}\cos^2 x$ 之间各相差一个常数。

例题 10

求$\int \sin^2 x\,dx$。

解 由倍角公式，可得$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$。

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx&=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x+C'\right)\\&=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C \qquad (\text{其中 } C=\frac{C'}{2})\end{aligned}$$

补充资料

由 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$
$=2\cos^2 x-1$

可得 $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

及 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$。

例题 11

求$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$。

解

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx&=\int (\sin x\cos x)^2\,dx\\&=\int \frac{1}{4}\sin^2 2x\,dx\\&=\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx\\&=\frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx\\&=\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C\end{aligned}$$

例题 12

求$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$。

解 令$u=\sin x$，则$du=\cos x\, dx$。

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^2 x \left(1-\sin^2 x\right) \cos x \, dx \\ &= \int \left(u^2-u^4\right) du \\ &= \frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+C \\ &= \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C\end{aligned}$$

例题 13

求$\int \tan x \sec^3 x \, dx$。

解 令$u=\sec x$，则$du=\sec x \tan x \, dx$。

$$\begin{aligned}\int \tan x \cdot \sec^3 x \, dx &= \int \sec^2 x \,(\sec x \tan x)\, dx \\ &= \int u^2 \, du \\ &= \frac{u^3}{3}+C \\ &= \frac{1}{3}\sec^3 x+C\end{aligned}$$

例题 14

求$\int \sec^4 x\,dx$。

解 令$u = \tan x$，则$du = \sec^2 x\,dx$。

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\,dx &= \int \sec^2 x \sec^2 x\,dx \\ &= \int \left(\tan^2 x + 1\right) \sec^2 x\,dx \\ &= \int (u^2+1)\,du \\ &= \frac{u^3}{3} + u + C \\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C\end{aligned}$$

例题 15

求$\int \tan x\,dx$。

解 $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

令$u = \cos x$，则$du = -\sin x\,dx$。

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= -\int \frac{du}{u} \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C \\ &= \ln\left|(\cos x)^{-1}\right| + C \\ &= \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

随堂练习 5

求下列各不定积分：

1. $\int \sin 2x \cos 2x \, dx$
2. $\int \cos^2 2x \, dx$
3. $\int \sin^3 x \, dx$
4. $\int \cos^3 x \, dx$
5. $\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$
6. $\int \tan^4 \frac{x}{2} \, dx$

练习 27.3b

求下列各不定积分：

1. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$
2. $\int \tan^2 5x \, dx$
3. $\int \frac{1}{\sec^2 4x} \, dx$
4. $\int \cos^2 (3x-1) \, dx$
5. $\int \sec 5x \tan 5x \, dx$
6. $\int -\operatorname{cosec} 3x \cot 3x \, dx$
7. $\int \left(\sin \frac{x}{8} - \sec^2 2x \right) dx$
8. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$
9. $\int (\sec x + \tan x)^2 \, dx$
10. $\int (2 - \sin x)^2 \, dx$
11. $\int \cos^4 x \, dx$
12. $\int \left(1+\tan^2 x\right)\left(1-\tan^2 x\right) dx$
13. $\int \sin^2 4x \cos 4x \, dx$
14. $\int 3\cot^3 3x \operatorname{cosec}^2 3x \, dx$
15. $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$
16. $\int \sec x \cdot \tan^3 x \, dx$

27.4 部分分式积分法

求一个真分式的不定积分，一般上需先将它分解成部分分式的和，再逐项求积分。这种积分的方法叫做部分分式积分法。

求一个假分式的不定积分，可先利用除法将分式化成多项式与真分式的和。

例题 1

求$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$。

解 $x^2-1=(x+1)(x-1)$

设$\frac{1}{x^2-1}=\frac{\mathrm{A}}{x+1}+\frac{\mathrm{B}}{x-1}$

可得 $1=\mathrm{A}(x-1)+\mathrm{B}(x+1)$

用$x=-1$代入，得$\mathrm{A}=-\frac{1}{2}$

用$x=1$代入，得$\mathrm{B}=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \int \frac{1}{x^2-1}\,dx=\int\left(-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$

例题 2

求$\int \frac{2x}{x^2-9}\,dx$。

解 $x^2-9=(x+3)(x-3)$

设$\frac{2x}{x^2-9}=\frac{\mathrm{A}}{x+3}+\frac{\mathrm{B}}{x-3}$

可得$2x=\mathrm{A}(x-3)+\mathrm{B}(x+3)$

用$x=-3$代入，得$\mathrm{A}=1$

用$x=3$代入，得$\mathrm{B}=1$

$$\begin{aligned}\therefore \int \frac{2x}{x^2-9}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}\right)dx \\ &= \ln|x+3|+\ln|x-3|+C \\ &= \ln|x^2-9|+C\end{aligned}$$

思考题

例题 2 可否利用换元积分法来解?

例题 3

求$\int \frac{x-2}{x^2-2x-3}\,dx$。

解 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

设$\frac{x-2}{x^2-2x-3}=\frac{\mathrm{A}}{x+1}+\frac{\mathrm{B}}{x-3}$

可得$x-2=\mathrm{A}(x-3)+\mathrm{B}(x+1)$

用$x=-1$代入，得$\mathrm{A}=\frac{3}{4}$

用$x=3$代入，得$\mathrm{B}=\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore \int \frac{x-2}{x^2-2x-3}\,dx &= \int\left(\frac{3}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-3)}\right)dx \\ &= \frac{3}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3|+C\end{aligned}$$

例题 4

求$\int \frac{x^2}{(x-2)^3} dx$。

解 令$u=x-2$，则$x=u+2$， $du=dx$。

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x-2)^3} dx &= \int \frac{(u+2)^2}{u^3} du \\ &= \int \frac{u^2+4u+4}{u^3} du \\ &= \int \left(u^{-1}+4u^{-2}+4u^{-3}\right) du \\ &= \ln|u|-4u^{-1}-2u^{-2}+C \\ &= \ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}+C\end{aligned}$$

例题 5

求$\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-x} dx$。

解 原分式是一个假分式，应先化成多项式与真分式的和：

$$\begin{aligned}\frac{x^3+2x+1}{x^2-x} &= x+1+\frac{3x+1}{x^2-x} \\ &= x+1+\frac{3x+1}{x(x-1)}\end{aligned}$$

(续) 设 $\dfrac{3x+1}{x(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}$

可得 $3x+1=A(x-1)+Bx$

用 $x=0$ 代入，得 $A=-1$

用 $x=1$ 代入，得 $B=4$

$$\therefore \quad \int \frac{x^3+2x+1}{x^2-x}\,dx=\int\left(x+1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x-1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x|+4\ln|x-1|+C$$

随堂练习 6

求下列各不定积分：

1. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$

练习 27.4

求下列各不定积分：

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x-3)}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{4x-13}{2x^2+x-6}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{5x-1}{1-x^2}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{(x+1)(x-1)}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+2x+1}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{4x-3}{(2x+1)^2}\,dx$

27.5 不定积分的应用

我们可利用微分求得曲线上任意一点的切线斜率。反之，若已知曲线上任意一点的切线斜率，我们也可利用不定积分求得该曲线的方程式。

例题 1

一曲线过点$(-4,3)$，且$\frac{dy}{dx}=2x+3$。求此曲线的方程式。

解 $\frac{dy}{dx}=2x+3$

$$y=\int(2x+3)\,dx$$
$$=x^2+3x+C$$

由于曲线过点$(-4,3)$，得 $3=(-4)^2+3\times(-4)+C$

$$3=16-12+C$$
$$C=-1$$

$\therefore$ 此曲线的方程式是 $y=x^2+3x-1$。

例题 2

一曲线上任意一点的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}=-3x^2+x+2$，且此曲线经过原点。求此曲线的方程式。

解 $\frac{dy}{dx}=-3x^2+x+2$

$$y=\int\left(-3x^2+x+2\right)dx$$

$$=-x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+C$$

由于曲线过原点，得 $0=0+C$

$$C=0$$

∴ 此曲线的方程式是 $y=-x^3+\frac{1}{2}x^2+2x$。

随堂练习 7

一曲线 $y=f(x)$ 经过点 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$。若此曲线上任意一点的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}=3-\frac{1}{x^2}$，求此曲线的方程式。

练习 27.5

1. 已知$\dfrac{dy}{dx}=4x^3-6x^2+3$，且当$x=2$时，$y=7$。以$x$表示$y$。

2. 一曲线上任意一点的切线斜率为$\dfrac{dy}{dx}=x^2+2x-4$，且曲线过点$(3,3)$，求此曲线的方程式。

3. 一曲线在点$(1,-1)$的斜率是-4，且$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}+k$。求

   (a) k的值；

   (b) 此曲线的方程式。

总复习题 27

求下列各不定积分（1至34）：

1. $\int 2x^{\frac{1}{5}}\,dx$

2. $\int (2x-1)^3\,dx$

3. $\int (x+4)^{100}\,dx$

4. $\int \left(\dfrac{5}{x^2}+2x^{\frac{1}{2}}+3\right)dx$

5. $\int \left(3x^2+\dfrac{1}{x^2}-\sin x\right)dx$

6. $\int \left(4\cos x+\dfrac{1}{x}+x^3\right)dx$

7. $\int \dfrac{3x^3-2x^2+x^{-1}}{x^2}\,dx$

8. $\int (2x-1)(x+2)\,dx$

9. $\int \left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^2 dx$

10. $\int \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 dx$

11. $\int 10^{-x}\,dx$

12. $\int \left(e^x-e^{-x}\right)^2 dx$

13. $\int 2x\left(x^2-1\right)^4 dx$

14. $\int 3x^2\left(x^3+1\right)^4 dx$

15. $\int \frac{x+1}{\left(x^2+2x+5\right)^3}\,dx$

16. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

17. $\int \frac{x-2}{\sqrt{(x-1)(x-3)}}\,dx$

18. $\int \frac{7}{2x^2+5x-3}\,dx$

19. $\int \frac{8+7x}{2+x-3x^2}\,dx$

20. $\int \frac{x+1}{(3x+2)(5x+3)}\,dx$

21. $\int \frac{2x^2+5x-2}{2x^2+x-3}\,dx$

22. $\int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 dx$

23. $\int \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}\,dx$

24. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$

25. $\int \left(3\sin 2x-4e^{3x}\right) dx$

26. $\int \sin(5x-6)\,dx$

27. $\int \left(\cos 6x+\sec^2 4x\right) dx$

28. $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x-\cos\frac{x}{7}\right) dx$

29. $\int \tan^2 3x\,dx$

30. $\int \tan x\sec^2 x\,dx$

31. $\int \frac{3\sin x}{\cos 2x+1}\,dx$

32. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x+2}\,dx$

33. $\int \cot 2x\,\mathrm{cosec}^3 2x\,dx$

34. $\int \tan^3 x\sec^3 x\,dx$

35. 若函数 $y=\ln x-\frac{3}{x}$，求 $\frac{dy}{dx}$。据此，求 $\int \frac{3+x}{3x^2}\,dx$。

36. 若函数 $y=\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$，求 $\frac{dy}{dx}$。据此，求 $\int \frac{x}{\sqrt{\left(4x^2-1\right)^3}}\,dx$。

37. 已知函数 $y=\frac{x^2+3}{1-x}$，且 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}f(x)$，求 $\int \left[3-x^2-f(x)\right] dx$。

38. 已知 $\frac{d}{dx}(x\ln x)=g(x)$，求 $\int [g(x)-2x]\,dx$。

39. 一曲线上任意一点的切线斜率都等于该点的横坐标的三倍，且此曲线经过点 $(-2, 5)$。求该曲线的方程式。

40. 一曲线上任意一点的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}=3x^2-8x+1$，且此曲线与 x 轴交于点 $(2, 0)$。求此曲线与 x 轴的其他交点。

28. 定积分

学习目标：

- 理解定积分的概念
- 掌握定积分与不定积分的关系
- 掌握定积分的性质及运算
- 能应用定积分求面积及旋转体的体积

28.1 定积分的概念及其与不定积分的关系

定积分的概念

许多实际的问题，如求面积、体积等，都可归结为求某类和的极限。我们以求面积为例，说明解决这类问题的方法，从而引出定积分的概念。

图28-1所示的图形（阴影部分）是由直线$x=a$，$x=b$，$y=0$及曲线$y=f(x)$所围成，其中$f(x)\geq 0$。此类图形叫做曲边梯形。

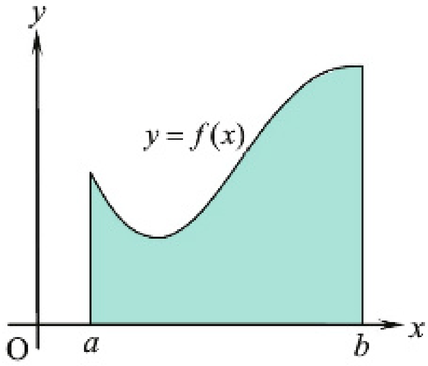


图 28-1

如图28-2所示，为了求此曲边梯形的面积，我们可将它分割成许多小曲边梯形，每个小曲边梯形以相应的小矩形代替。将这些小矩形的面积相加，就可得到曲边梯形面积的一个近似值。当曲边梯形分割得越细，所得的近似值就越接近所求的曲边梯形的面积。

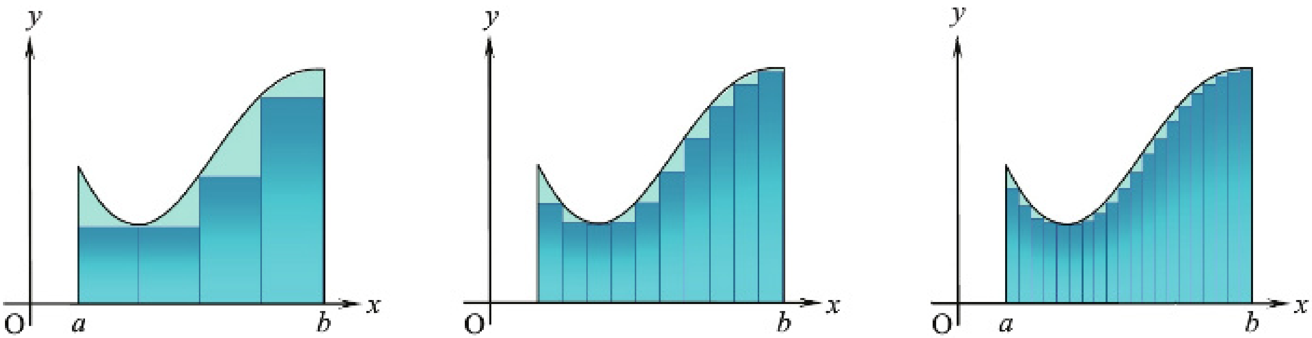


图28-2

根据这个想法，将区间$[a,b]$分割成n个小区间$[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，…，$[x_{n-1}, x_n]$，其中$x_0=a$，$x_n=b$。过所有分点x_1，x_2，…，x_{n-1}，作x轴的垂线，就可将曲边梯形分成n个小曲边梯形。

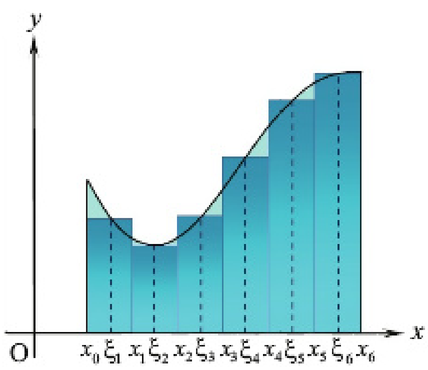


图 28-3

在第i个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任意选一点ξ_i，则第i个小曲边梯形的面积ΔA_i，可利用以$f(\xi_i)$为长，

$\Delta x = x_i - x_{i-1}$ 为宽的小矩形面积近似，如图28-3所示，即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x$$

所有小矩形面积之和就是原曲边梯形面积A的近似值，即

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

当分点越多，每个小区间的宽度越小时，所得的近似值就越接近曲边梯形的面积A。为了求A的值，我们将区间$[a, b]$无限细分使得$\Delta x \to 0$（此时$n \to \infty$），则上述 n个小矩形面积之和的极限值，就定义为曲边梯形的面积，即

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

对于任何定义在区间$[a, b]$上的连续函数$f(x)$，我们也可依照以上的步骤定义极限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

此极限值叫做函数$f(x)$由a至b的定积分，以符号$\int_a^b f(x)\,dx$表示，即

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

式中$f(x)$叫做被积函数，$[a, b]$叫做积分区间，a及b分别是积分的下限及上限。

若在区间$[a, b]$上$f(x) \geq 0$，则从以上的讨论可知，定积分$\int_a^b f(x)\,dx$的值等于由直线$x = a$，$x = b$，$y = 0$及曲线$y = f(x)$所围成的曲边梯形的面积，即$A = \int_a^b f(x)\,dx$。

注意

定积分$\int_a^b f(x)\,dx$是一个与x无关的数值。

思考题

$\int_a^b f(x)\,dx$与$\int_a^b f(u)\,du$相等吗？

若在区间$[a,b]$上$f(x)\le 0$，如图28-4所示，则$f(\xi_i)\Delta x$是第i个小矩形面积的负值。因此，定积分$\int_a^b f(x)\,dx$是负值，其绝对值等于由直线$x=a$，$x=b$，$y=0$及曲线$y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积，即$A=-\int_a^b f(x)\,dx$。

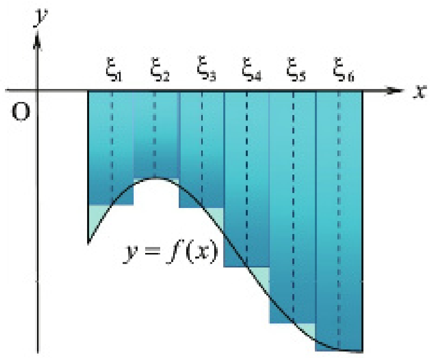


图 28-4

例题 1

利用定积分的定义求$\int_0^1 x^2\,dx$。

解 令$f(x)=x^2$。所求的定积分$\int_0^1 x^2\,dx$是由曲线$y=x^2$，直线$x=1$及x轴所围成的曲边梯形的面积。如图28-5所示，将区间$[0,1]$等分成n个小区间$\left[0,\frac{1}{n}\right]$，$\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$，…，$\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right]$。在第$i$个小区间$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$上取$\xi_i=\frac{i-1}{n}$，即区间的左端点。

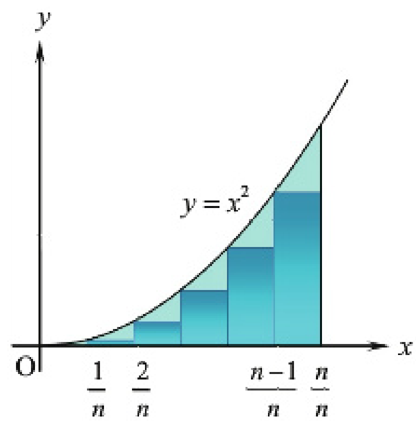


图 28-5

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\,2}\frac{1}{n}\\ &=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\\ &=\frac{1}{n^3}\left[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]\\ &=\frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)(n-1+1)\left[2(n-1)+1\right]}{6}\\ &=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\end{aligned}$$

思考题

在例题1中，若取ξ_i为区间$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$的右端点或中点，其结果如何？是否会相同？

(续) 求$n \to \infty$的极限，得

$$\int_0^1 x^2\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

例题 2

图28-6所示的阴影部分是由曲线$y=f(x)$，直线$x=5$，x轴及y轴所围成。利用定积分表示此阴影部分的面积。

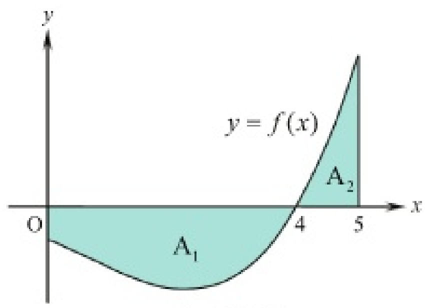


图 28-6

解 $A_1 = -\int_0^4 f(x)\,dx$，$A_2 = \int_4^5 f(x)\,dx$

∴ 阴影部分的面积 $= A_1 + A_2$

$$= -\int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx$$

思考题

在例题 2 中，定积分 $\int_0^5 f(x)\,dx$ 的值代表什么？

随堂练习 1

利用定积分的定义求$\int_0^2 x\,dx$的值。

定积分与不定积分的关系

定积分与不定积分存在着密切的关系。考虑求曲边梯形面积的例子。设 $x_0 > a$ 且 $f(x) \geq 0$ 。由直线 $x = a$ ，$x = x_0$ ，$y = 0$ 及曲线 $y = f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积为 $A(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)\,dx$ 。

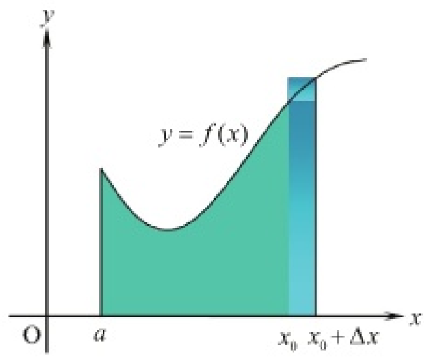


图 28-7

当 x_0 变化时，面积 $A(x_0)$ 也随着变化。由图 28-7 可知，

$$m\Delta x \leq A(x_0 + \Delta x) - A(x_0) \leq M\Delta x\,,$$

其中 m 及 M 分别是 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的最小值及最大值。因此，

$$m \leq \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x} \leq M$$

显然地，当 Δx 趋近于0，m 及 M 都趋近于 $f(x_0)$ 。此外，根据导数的定义，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x} = A'(x_0)$ 。因此，可得 $A'(x_0) = f(x_0)$ 。此关系式对于任意 $x_0 > a$ 均成立。换言之，$A'(x) = f(x)$ ，即 $A(x)$ 的导数为 $f(x)$ 。

设 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ，即 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则由 $A'(x) = f(x) = F'(x)$ ，得 $A(x) = F(x) + C$ ，其中 C 为常数。当 $x = a$ 时，$A(a) = 0$ 。因此，$C = -F(a)$ ，即对于任意 $x_0 > a$ ，可得
$A(x_0) = F(x_0) - F(a)$ 。

令 $x_0 = b$ ，得 $A(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ 。此关系式对于任意连续函数 $f(x)$ 均成立。为了让此关系式对任意 a 及 b 都成立，当 $a > b$ 时，定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

补充资料

在求定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 时，只需求出 $f(x)$ 的其中一个原函数 $F(x)$ 。$f(x)$ 的其他原函数可写成 $F(x) + C$，其中 C 是一个常数。但是，

$$\begin{aligned}&[F(x) + c]_a^b\\&= [F(b) + C] - [F(a) + C]\\&= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

因此，定积分的值与常数 C 无关。以任何一个 $f(x)$ 的原函数所求定积分的值都是相同的。

以上所得为定积分与不定积分的关系，即

若 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$，则 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$。

补充资料

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

此关系式叫做微积分基本定理。一般上，我们将此关系式写成以下的形式：

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的任意一个原函数。

例题 3

利用微积分基本定理求 $\int_0^1 x^2\,dx$。

解

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

补充资料

$[F(x)]_a^b$ 也可以表示成 $F(x)\big|_a^b$。

例题 4

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$。

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx &= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \\ &= 1\end{aligned}$$

例题 5

求 $\int_{-6}^{-2} \frac{1}{x}\, dx$ 。

解

$$\begin{aligned}\int_{-6}^{-2} \frac{1}{x}\, dx &= \left[\ln|x|\right]_{-6}^{-2} \\ &= \ln 2 - \ln 6 \\ &= -\ln 3\end{aligned}$$

随堂练习 2

求下列各定积分:

1. $\int_{2}^{8} x\, dx$
2. $\int_{-2}^{4} x^3\, dx$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$
4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

练习 28.1

求下列各定积分:

1. $\int_{-2}^{4} x^2\, dx$
2. $\int_{1}^{4} \frac{1}{x^2}\, dx$
3. $\int_{4}^{9} \sqrt{x}\, dx$
4. $\int_{1}^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\, dx$
5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx$
6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$
7. $\int_{0}^{2} e^x\, dx$
8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^2 x\, dx$
9. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\, dx$
10. $\int_{0}^{2} \frac{1}{x+1}\, dx$

28.2 定积分的性质及运算

定积分的性质

定积分有以下的基本性质：

性质 1 $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ （k为常数）

性质 2 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

性质 3 $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

例题 1

求下列各定积分：

(a) $\int_1^3 \left(6x^2 + 4x^3\right) dx$　　(b) $\int_1^4 \frac{4x^{\frac{3}{2}} + 3}{\sqrt{x}}\,dx$

(c) $\int_0^{\pi} (\sin x + 2)\,dx$　　(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x)\,dx$

解 (a)
$$\begin{aligned}\int_1^3 \left(6x^2 + 4x^3\right) dx &= \int_1^3 6x^2\,dx + \int_1^3 4x^3\,dx \\ &= \left[2x^3\right]_1^3 + \left[x^4\right]_1^3 \\ &= (54 - 2) + (81 - 1) \\ &= 132\end{aligned}$$

(b) $$\int_1^4 \frac{4x^{\frac{3}{2}}+3}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \left(4x+3x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \int_1^4 4x\,dx + \int_1^4 3x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \left[2x^2\right]_1^4 + \left[6x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

$$= 2(16-1)+6(2-1)$$

$$= 36$$

(c) $$\int_0^{\pi} (\sin x+2)\,dx = \left[-\cos x+2x\right]_0^{\pi}$$

$$= (-\cos\pi+2\pi)-(-\cos 0+0)$$

$$= 2\pi+2$$

(d) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x-2\sin x)\,dx = \left[3\sin x+2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(3\sin\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{2}\right)-(3\sin 0+2\cos 0)$$

$$= (3+0)-(0+2)$$

$$= 1$$

例题 2

设 $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & -1\le x\le 1 \\ x+1, & 1<x\le 3 \end{cases}$，求 $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$。

解 $$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (3x-1)\,dx + \int_1^3 (x+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2}-x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^3$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}-1\right)-\left(\frac{3}{2}-(-1)\right)\right]+\left[\left(\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]$$

$$= 4$$

例题 3

已知 $\int_1^4 f(x)\,dx = 20$，$\int_4^5 f(x)\,dx = 10$，$\int_0^1 g(x)\,dx = 5$ 及 $\int_0^5 g(x)\,dx = 23$。求下列各定积分:

(a) $\int_5^1 f(x)\,dx$

(b) $\int_1^5 g(x)\,dx$

(c) $\int_1^5 [\,2f(x) - 3g(x)\,]\,dx$

解

(a)
$$\begin{aligned}\int_5^1 f(x)\,dx &= -\int_1^5 f(x)\,dx \\ &= -\left(\int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx\right) \\ &= -(20+10) \\ &= -30\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int_1^5 g(x)\,dx &= \int_0^5 g(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx \\ &= 23 - 5 \\ &= 18\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\int_1^5 [\,2f(x) - 3g(x)\,]\,dx &= 2\int_1^5 f(x)\,dx - 3\int_1^5 g(x)\,dx \\ &= 2(30) - 3(18) \\ &= 6\end{aligned}$$

例题 4

求$\int_2^5 \frac{1}{x^2-1}\,dx$。

解 将被积函数分成部分分式。

设$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$

可得 $1=A(x-1)+B(x+1)$

用$x=-1$代入，得$A=-\frac{1}{2}$

用$x=1$代入，得$B=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_2^5 \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_2^5 \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big]_2^5 \\ &= \frac{1}{2}\big[(\ln 4-\ln 6)-(\ln 1-\ln 3)\big] \\ &= \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

例题 5

已知函数$y=\frac{x}{2x^2+9}$，求$\frac{dy}{dx}$。据此，求$\int_0^1 \frac{9-2x^2}{\left(2x^2+9\right)^2}\,dx$。

解 $y=\frac{x}{2x^2+9}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(2x^2+9\right)(1)-x(4x)}{\left(2x^2+9\right)^2} \\ &= \frac{9-2x^2}{\left(2x^2+9\right)^2}\end{aligned}$$

(续) $\dfrac{x}{2x^2+9}$ 是 $\dfrac{9-2x^2}{\left(2x^2+9\right)^2}$ 的一个原函数。

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_0^1 \frac{9-2x^2}{\left(2x^2+9\right)^2}\,dx &= \left[\frac{x}{2x^2+9}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{11}-0 \\ &= \frac{1}{11}\end{aligned}$$

随堂练习 3

求下列各定积分 (1至4):

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x^2+3x+2}{x}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(3e^{2x}-5x\right)dx$

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos x-3\sec^2 x\right)dx$

4. $\displaystyle\int_{-2}^4 f(x)\,dx$， $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & -2\le x<2 \\ 4-x, & 2\le x\le 4\end{cases}$

5. 已知 $\int_{-2}^5 f(x)\,dx=2$， $\int_{-2}^3 f(x)\,dx=-1$， $\int_3^4 g(x)\,dx=3$ 及 $\int_4^5 g(x)\,dx=2$ 。求

   (a) $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int_3^5 \left(\frac{1}{3}g(x)+\frac{1}{2}f(x)\right)dx$ 。

6. 已知 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，求 $f'(x)$。据此，求 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ 。

换元积分法

在上一章中，我们已经学习了不定积分的换元积分法：$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$，其中 $u = g(x)$。利用微积分基本定理，可导出定积分的换元积分法：

$$\int_a^b f\left(g(x)\right) g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

定积分的换元积分法与不定积分的换元积分法相似，但需注意积分的上下限必须随着变换。

例题 6

求 $\int_1^6 \frac{1}{3x+2}\, dx$。

解 令 $u = 3x+2$，则 $du = 3\, dx$。

当 $x = 1$，$u = 5$；

当 $x = 6$，$u = 20$。

$$\begin{aligned}\int_1^6 \frac{1}{3x+2}\, dx &= \int_5^{20} \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{3} \\ &= \left[\frac{1}{3}\ln|u|\right]_5^{20} \\ &= \frac{1}{3}(\ln 20 - \ln 5) \\ &= \frac{\ln 4}{3}\end{aligned}$$

例题 7

求$\int_1^3 x\sqrt{x^2-1}\,dx$。

解 令$u=x^2-1$，则$du=2x\,dx$。

当$x=1$，$u=0$；

当$x=3$，$u=8$。

$$\begin{aligned}\int_1^3 x\sqrt{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{x^2-1}\cdot 2x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^8\sqrt{u}\,du\\ &= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^8\\ &= \frac{1}{3}\left(8^{\frac{3}{2}}-0\right)\\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

思考题

在例题 7 中，若先求$f(x)=x\sqrt{x^2-1}$的原函数，再求定积分，可否得到相同的答案?

例题 8

求$\int_0^8 \frac{3x-2}{\sqrt{x+1}}\,dx$。

解 令$u=x+1$，则$x=u-1$，$du=dx$。

当$x=0$，$u=1$；

当$x=8$，$u=9$。

(续) $\displaystyle\int_0^8 \frac{3x-2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^9 \frac{3(u-1)-2}{\sqrt{u}}\,du$

$$= \int_1^9 \frac{3u-5}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \int_1^9 \left(3u^{\frac{1}{2}} - 5u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \left[2u^{\frac{3}{2}} - 10u^{\frac{1}{2}}\right]_1^9$$

$$= (54-30)-(2-10)$$

$$= 32$$

例题 9

已知$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 3$，$\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx = -2$。求$\displaystyle\int_0^3 f(2x)\,dx$ 。

解 令$u = 2x$，则$du = 2\,dx$。

当$x = 0$，$u = 0$；

当$x = 3$，$u = 6$。

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \int_0^6 f(u)\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^3 f(u)\,du + \int_3^6 f(u)\,du\right)$$

$$= \frac{1}{2}(3-2)$$

$$= \frac{1}{2}$$

随堂练习 4

求下列各定积分：

1. $\int_0^3 4e^{2x}\,dx$

2. $\int_1^3 \frac{x}{3x^2+5}\,dx$

3. $\int_0^4 \frac{x}{25-x^2}\,dx$

4. $\int_0^{\pi} 2\sin x\cos^2 x\,dx$

练习 28.2

求下列各定积分 (1至18)：

1. $\int_0^4 \left(x^2-2x\right) dx$

2. $\int_1^4 \frac{2x^2-3\sqrt{x}+1}{x}\,dx$

3. $\int_{-3}^3 (x+3)^2\,dx$

4. $\int_{-1}^1 (2+x)\left(2-x^2\right) dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin 3\theta-3\cos 2\theta\right) d\theta$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\ d\theta$

7. $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^2 dx$

8. $\int_1^4 \frac{2}{4x-1}\,dx$

9. $\int_{-1}^3 \sqrt{2x+3}\,dx$

10. $\int_1^2 \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx$

11. $\int_{-1}^1 x^2\left(x^3-1\right)^4 dx$

12. $\int_1^6 x\sqrt{3x-2}\,dx$

13. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\ d\theta$

14. $\int_3^5 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

15. $\int_2^5 \frac{x}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

16. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+2x+1}\,dx$

17. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\cos\theta\ d\theta$

19. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x^2-1, & -2\le x\le 2\\ 3x+1, & 2<x\le 4\end{cases}$，求 $\int_{-2}^4 f(x)\,dx$。

20. 已知$\int_3^5 f(x)\,dx=6$，$\int_5^9 f(x)\,dx=18$，$\int_1^4 g(x)\,dx=4$及$\int_3^4 g(x)\,dx=-4$。求

(a) $\int_1^3 g(x)\,dx$；

(b) $\int_1^3 f(3x)\,dx$；

(c) $\int_1^3 [f(3x)-3g(x)]\,dx$。

21. 已知函数$y=x\sqrt{x+1}$，求$\frac{dy}{dx}$。据此，求$\int_3^8 \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$。

22. 已知函数$y=\frac{x^2-1}{2x+1}$，求$\frac{dy}{dx}$。据此，求$\int_0^2 \frac{x^2+x+1}{4x^2+4x+1}\,dx$。

23. 已知函数$y=xe^x-e^x$，求$\frac{dy}{dx}$。据此，求$\int_1^4 2xe^x\,dx$。

28.3 面积

在引进定积分的概念时，我们已经学过，若在区间$a\le x\le b$上$f(x)\ge 0$，则由直线$x=a$，$x=b$，x轴及曲线$y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积是

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

定积分的应用不仅用于求曲边梯形的面积，它在各个科技领域中的应用也极为广泛。利用定积分解决实际的问题，其基本的思路就是定义中所述的步骤：分割、近似代替、求和及求极限。在掌握此思路后，部分的步骤可省略，而直接写出相关的定积分。

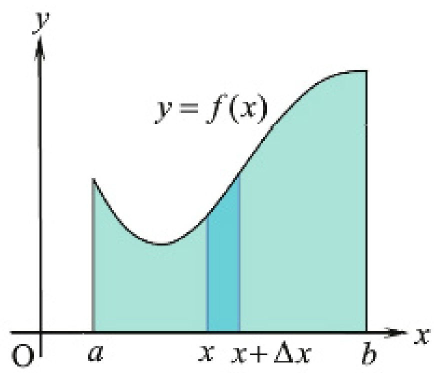


图 28-8

以求由直线$x=a$，$x=b$，x轴及曲线$y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积为例，加以说明。由于曲边

梯形的其中两边是直线 $x=a$ 及 $x=b$，所以我们将区间 $a\le x\le b$ 等分成多个小区间，而原曲边梯形也对应地被分割成多个小曲边梯形。如图28-8所示，任取一个小区间，以 $[x, x+\Delta x]$ 表示，其所对应的小曲边梯形可近似地视为一个以 Δx 为底边长，点 x 处的函数值 $f(x)$ 为高的小矩形。因此，小曲边梯形的面积是 $\Delta A\approx f(x)\Delta x$。

将这些小曲边梯形的近似面积相加，再取当 $\Delta x\to 0$ 时的极限，就可得原曲边梯形的面积，即

$$\sum \Delta A\approx \sum f(x)\Delta x \xrightarrow{\Delta x\to 0} \int_a^b f(x)\,dx$$

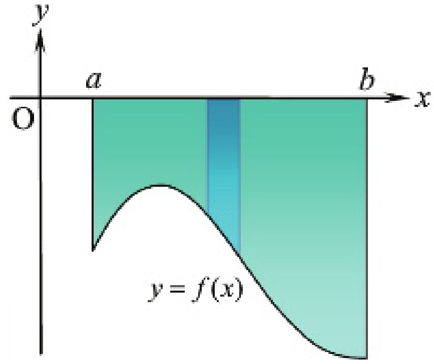


图 28-9

同理，若在区间 $a\le x\le b$ 上 $f(x)\le 0$，如图 28-9 所示，则由直线 $x=a$，$x=b$，x 轴及曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积是

$$A=-\int_a^b f(x)\,dx$$

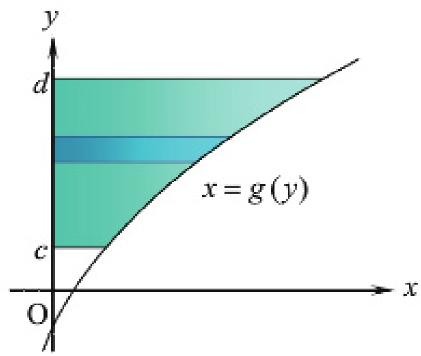


图 28-10

若所求的面积 A 是由直线 $y=c$，$y=d$，y 轴及曲线 $x=g(y)$ 所围成，其中在区间 $c\le y\le d$ 上 $g(y)\ge 0$，如图 28-10 所示，以相同的方法，可得曲边梯形的面积是

$$A=\int_c^d g(y)\,dy$$

思考题

1. 如何导出文中所述的结果 $A=\int_c^d g(y)\,dy$？

2. 若在区间 $c\le y\le d$ 上，$g(y)\le 0$，则由 $y=c$，$y=d$，y 轴及曲线 $x=g(y)$ 所围成区域的面积如何以积分表示？

例题 1

求由曲线 $y=6x-x^2$ 与 x 轴所围成区域的面积。

解 在曲线 $y=6x-x^2$ 与 x 轴的交点，$y=0$。

$$6x-x^2=0$$

$$x(6-x)=0$$

$\therefore\ x=0$ 或 $x=6$

$$\text{所求的面积}=\int_0^6\left(6x-x^2\right)dx$$

$$=\left[3x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^6$$

$$=(108-72)-(0-0)$$

$$=36$$

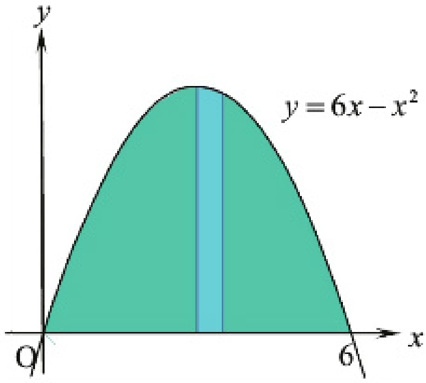


图 28-11

例题 2

求由曲线 $x=10+3y-y^2$ 与 y 轴所围成区域的面积。

解 在曲线 $x=10+3y-y^2$ 与 y 轴的交点，$x=0$。

$$10+3y-y^2=0$$

$$(5-y)(2+y)=0$$

$\therefore\ y=-2$ 或 $y=5$

$$\text{所求的面积}=\int_{-2}^5\left(10+3y-y^2\right)dy$$

$$=\left[10y+\frac{3y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^5$$

$$=\left(50+\frac{75}{2}-\frac{125}{3}\right)-\left(-20+6+\frac{8}{3}\right)$$

$$=\frac{343}{6}$$

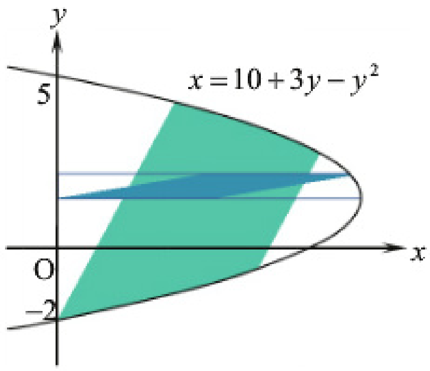


图 28-12

注意

在求面积之前，必须先绘出所要求面积的区域的图像，才能确定被积的函数及积分区间。

例题 3

求由曲线 $y=\ln x$，直线 $y=-1$，$y=3$ 及 y 轴所围成区域的面积。

解 $y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y$

如图 28-13 所示，所求的面积 $=\int_{-1}^{3} e^y\,dy$

$=\left[e^y\right]_{-1}^{3}$

$=e^3-e^{-1}$

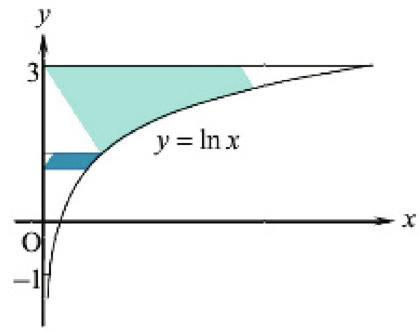


图 28-13

例题 4

求曲线 $y=\sin x$ 及 x 轴在区间 $-\pi \le x \le 0$ 所围成区域的面积。

解 如图 28-14 所示，所求的面积 $=-\int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx$

$=\left[\cos x\right]_{-\pi}^{0}$

$=\cos 0-\cos(-\pi)$

$=2$

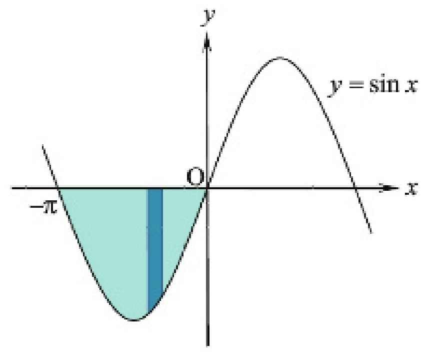


图 28-14

例题 5

求由曲线 $y=x^3-7x^2+10x$ 及 x 轴所围成区域的面积。

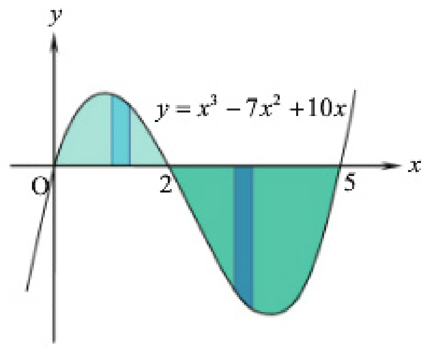


图 28-15

解 在曲线 $y=x^3-7x^2+10x$ 与 x 轴的交点，$y=0$。

$$x^3-7x^2+10x=0$$

$$x(x-2)(x-5)=0$$

$\therefore\ x=0$ 或 $x=2$ 或 $x=5$

所求的面积

$$=\int_0^2\left(x^3-7x^2+10x\right)dx+\left[-\int_2^5\left(x^3-7x^2+10x\right)dx\right]$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{7x^3}{3}+5x^2\right]_0^2-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{7x^3}{3}+5x^2\right]_2^5$$

$$=\left(4-\frac{56}{3}+20\right)-(0-0+0)-\left[\left(\frac{625}{4}-\frac{875}{3}+125\right)-\left(4-\frac{56}{3}+20\right)\right]$$

$$=\frac{253}{12}$$

随堂练习 5

1. 求由曲线 $y=x^2-2x-8$ 及 x 轴所围成区域的面积。
2. 求由曲线 $x=\sqrt{y}$，直线 $y=1$，$y=4$ 及 y 轴所围成区域的面积。
3. 求由曲线 $x=y(y+2)(y-2)$ 及 y 轴所围成区域的面积。

若在区间 $a \le x \le b$ 上 $f_2(x) \ge f_1(x)$，则由曲线 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ 及直线 $x = a$ 与 $x = b$ 所围成区域的面积也可由定积分求得。

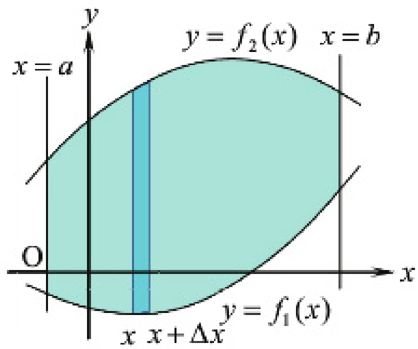


图 28-16

如图28-16所示，将区间 $a \le x \le b$ 等分成多个小区间。任取一个小区间，以 $[x, x+\Delta x]$ 表示。此小区间内的区域(深蓝色区域)，可由一个宽为 Δx，高为 $f_2(x) - f_1(x)$ 的小矩形近似代替，即

$$\Delta A \approx [f_2(x) - f_1(x)]\Delta x。$$

将这些近似面积相加，再取当 $\Delta x \to 0$ 时的极限，就可得由曲线 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ 及直线 $x = a$ 与 $x = b$ 所围成区域的面积，即

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$

注意

在应用此公式时，必须确保函数 $f_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上恒大于函数 $f_1(x)$。

同理，若在区间 $c \le y \le d$ 上 $g_2(y) \ge g_1(y)$，则由曲线 $x = g_1(y)$，$x = g_2(y)$ 及直线 $y = c$ 与 $y = d$ 所围成区域(图 28-17) 的面积是

$$A = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]\,dy$$

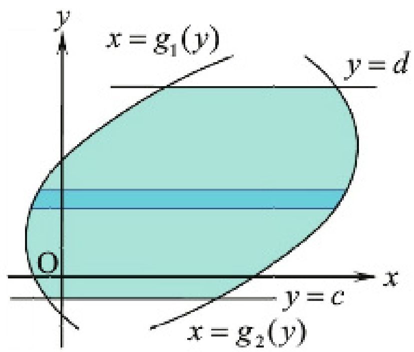


图 28-17

例题 6

求由曲线 $y=6x-x^2$ 及曲线 $y=x^2-2x$ 所围成区域的面积。

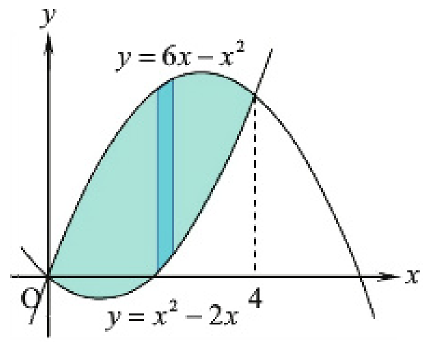


图 28-18

解 解方程组 $\begin{cases} y=6x-x^2 \\ y=x^2-2x \end{cases}$

得 $$2x^2-8x=0$$

$$2x(x-4)=0$$

$\therefore\ x=0$ 或 $x=4$

$$\text{所求的面积}=\int_0^4\left[\left(6x-x^2\right)-\left(x^2-2x\right)\right]dx$$

$$=\int_0^4\left(8x-2x^2\right)dx$$

$$=\left[4x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^4$$

$$=\left(64-\frac{128}{3}\right)-(0-0)$$

$$=\frac{64}{3}$$

例题 7

求由曲线 $y^2=4x$ 与直线 $y=2x-4$ 所围成区域的面积。

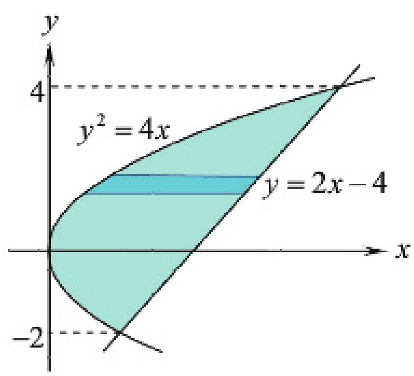


图 28-19

解 $y^2=4x \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2}{4}$

$y=2x-4 \Leftrightarrow x=\dfrac{y+4}{2}$

（续） 解方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

得 $y^2 - 2y - 8 = 0$

$(y+2)(y-4) = 0$

$\therefore\ y = -2$ 或 $y = 4$

所求的面积 $= \int_{-2}^{4} \left(\dfrac{y+4}{2} - \dfrac{y^2}{4} \right) dy$

$= \left[\dfrac{y^2}{4} + 2y - \dfrac{y^3}{12} \right]_{-2}^{4}$

$= \left(4 + 8 - \dfrac{16}{3} \right) - \left(1 - 4 + \dfrac{2}{3} \right)$

$= 9$

思考题

如何将例题 7 中所求的面积表示成对 x 的积分？

例题 8

求由曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 1$ 及 $y = 9$ 所围成区域的面积。

解 $y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$

所求的面积 $= \int_{1}^{9} \left[\sqrt{y} - \left(-\sqrt{y} \right) \right] dy$

$= 2\int_{1}^{9} y^{\frac{1}{2}}\, dy$

$= 2\left[\dfrac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{9}$

$= \dfrac{4}{3}(27 - 1)$

$= \dfrac{104}{3}$

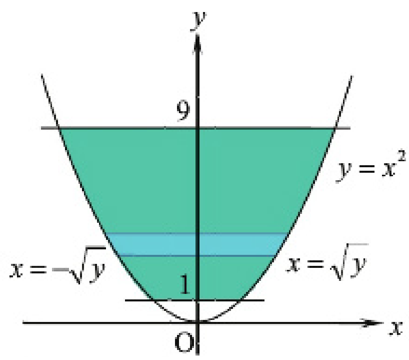


图 28-20

例题 9

图 28-21(a) 所示的阴影区域是由曲线 $y=\sin x$，$y=\cos x$，直线 $x=0$ 及 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 所围成。求此区域的面积。

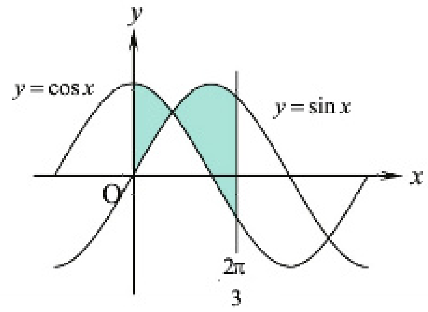


图 28-21(a)

解 $\sin x=\cos x$，$0\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore\quad x=\dfrac{\pi}{4}$

所求的面积

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(0+1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2}$$

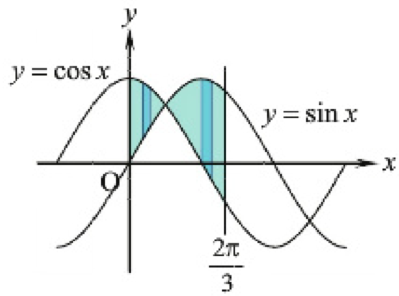


图 28-21(b)

随堂练习 6

1. 求由曲线 $y=x^2-4x+5$ 及直线 $y=x+1$ 所围成区域的面积。
2. 求由曲线 $x=4y-y^2$ 及直线 $x-2y+3=0$ 所围成区域的面积。

练习 28.3

求由下列各曲线所围成区域的面积（1至10）:

1. $y=3x^2$，$x=2$，$x=5$ 及 x 轴
2. $y=(x-1)^2$，$x=4$，x 轴及 y 轴

3. $y=x^2+4x-21$ 及 x 轴
4. $y=e^{2x}$，$x=0$，$x=4$ 及 x 轴
5. $y=\sin\frac{x}{2}$，$0\le x\le 2\pi$ 及 x 轴
6. $y=\cos x$，$x=2\pi$，x 轴及 y 轴
7. $x=y^2$，$y=3$ 及 y 轴
8. $x=9y-y^3$ 及 y 轴
9. $y=\frac{1}{x}$，$y=\frac{1}{2}$，$y=2$ 及 y 轴
10. $y^2=x$，$x=4$ 及 $x=16$
11. 求由曲线 $y=x^2-4$ 及直线 $y=3x$ 所围成区域的面积。
12. 求由曲线 $y=x^2+2x$ 及曲线 $y=12+4x-x^2$ 所围成区域的面积。
13. 求由曲线 $y=\sin x$ 及 $y=-2\sin x$ 在区间 $0\le x\le\pi$ 上所围成区域的面积。
14. 求由曲线 $y=e^x$，$y=e^{-2x}$ 及直线 $x=-2$ 与 $x=4$ 所围成区域的面积。
15. 求由曲线 $y=x^3-10x^2+28x$ 及直线 $y=4x$ 所围成区域的面积。
16. 求由曲线 $x=8y-y^2$，$x=16y-y^2-48$ 及 y 轴所围成区域的面积。
17. 求由曲线 $x=2y^2-8y+10$ 及 $x=y^2-y$ 所围成区域的面积。
18. 已知曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(1,0)$，且曲线上任意一点 (x,y) 的切线斜率是 $3x^2-3$。求由此曲线，$x=2$ 及 x 轴所围成区域的面积。

28.4 旋转体的体积

将一个平面图形绕着平面内一条直线旋转一周所得的立体叫做旋转体，如直圆柱体、直圆锥体、球体等。

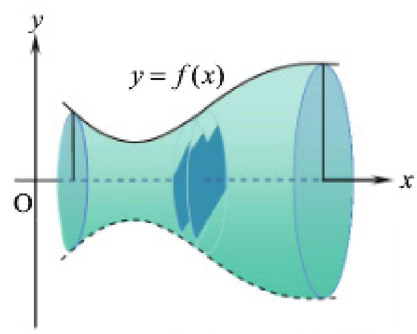


图 28-22(a)

图28-22(a)所示的旋转体是由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的区域绕 x 轴旋转一周而得。我们可利用上一节所讨论的方法来求此旋转体的体积。

将区间$a \le x \le b$等分成小区间。任取一个小区间，以$[x, x+\Delta x]$来表示。此小区间内的区域，可由一个宽为Δx，高为$f(x)$的长方形近似代替。此小长方形绕x轴旋转一周后的旋转体是一个小圆柱体，其半径为$f(x)$，高为Δx，如图 28-22(b) 所示。所以，小区间$[x, x+\Delta x]$上的旋转体的近似体积是

$$\Delta V \approx \pi \left[f(x)\right]^2 \Delta x$$

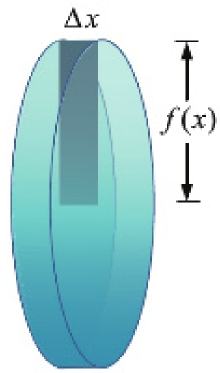


图 28-22(b)

将各小区间上的近似体积相加，再取极限，就可得旋转体的体积，即

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

思考题

在应用此公式时，$f(x)$可否是负的？为什么？

同理，若一旋转体是由曲线$x = g(y)$，直线$y = c$，$y = d$及y轴所围成的区域绕y轴旋转一周而得，如图 28-23 所示，其体积是

$$V = \pi \int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy$$

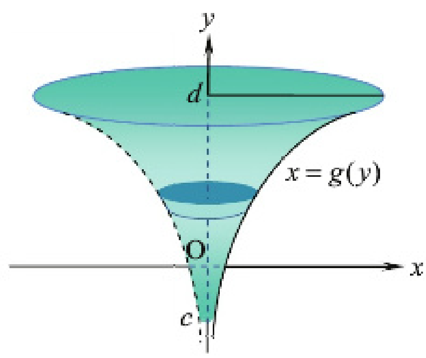


图 28-23

例题 1

求由曲线$y = x^2 - 4x$及x轴所围成的区域绕x轴旋转一周所得旋转体的体积。

解

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$\therefore\ x = 0 \quad 或 \quad x = 4$$

(续) 所求的体积 $=\pi\int_0^4\left(x^2-4x\right)^2dx$

$$=\pi\int_0^4\left(x^4-8x^3+16x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{16x^3}{3}\right]_0^4$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1024}{5}-512+\frac{1024}{3}\right)-(0-0+0)\right]$$

$$=\frac{512\pi}{15}$$

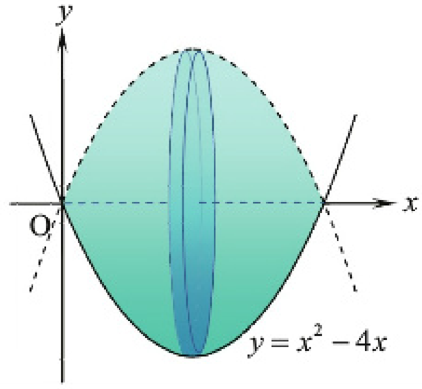


图 28-24

例题 2

求半径为 r 的球体的体积。

解 半径为 r 的球体可由半圆 $x^2+y^2=r^2$， $y\geq 0$ 绕 x 轴旋转一周而得。

$x^2+y^2=r^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2=r^2-x^2$

球体的体积 $=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$

$$=2\pi\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx$$

$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$=2\pi\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-(0-0)\right]$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$

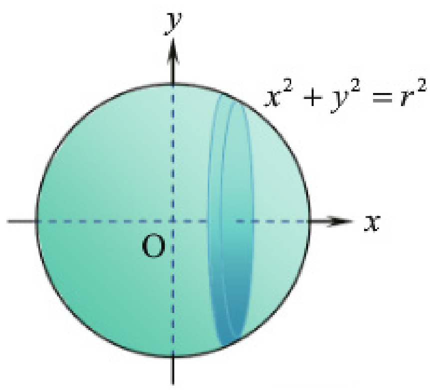


图 28-25

例题 3

求由曲线 $y=x^2-4$，直线 $y=0$ 及 $y=12$ 所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解 $y=x^2-4 \iff x^2=y+4$

$$\text{所求的体积} = \pi\int_0^{12}(y+4)\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}+4y\right]_0^{12}$$
$$=\pi\left[(72+48)-(0+0)\right]$$
$$=120\pi$$

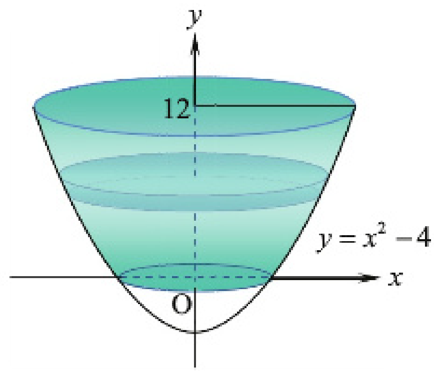


图 28-26

例题 4

求由曲线 $y=\ln x^3$，直线 $y=-3$，$y=9$ 及 y 轴所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解 $y=\ln x^3 \iff x^3=e^y \iff x=e^{\frac{y}{3}}$

$$\text{所求的体积} = \pi\int_{-3}^{9}\left(e^{\frac{y}{3}}\right)^2 dy$$
$$=\pi\int_{-3}^{9} e^{\frac{2y}{3}}\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{3}{2}e^{\frac{2y}{3}}\right]_{-3}^{9}$$
$$=\frac{3\pi}{2}\left(e^6-e^{-2}\right)$$

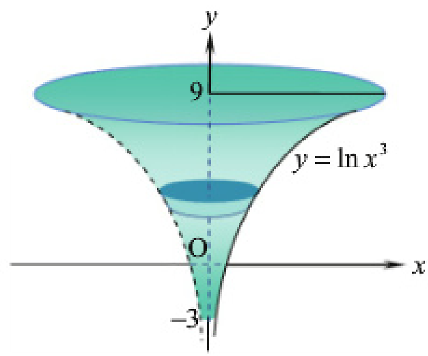


图 28-27

例题 5

图 28-28 (a) 所示的阴影区域是由曲线 $y=x^2-4$，两坐标轴及直线 $x=3$ 所围成。求此区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

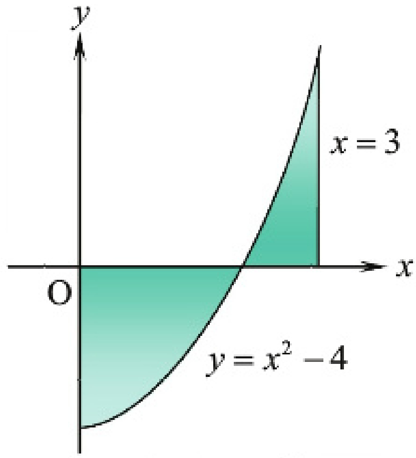


图 28-28 (a)

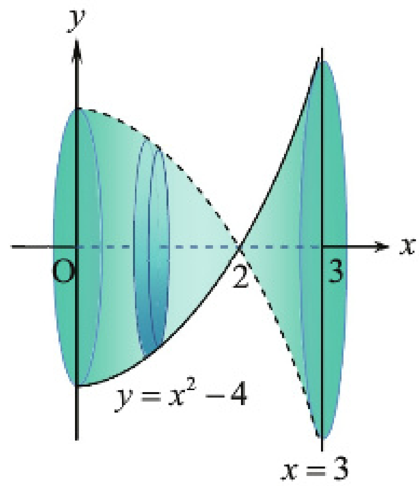


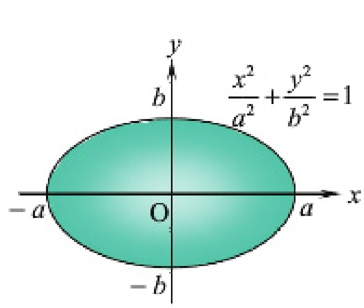
图 28-28 (b)

解 所求的体积

$$
\begin{aligned}
&= \pi \int_0^3 \left(x^2-4\right)^2 dx \\
&= \pi \int_0^3 \left(x^4-8x^2+16\right) dx \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+16x\right]_0^3 \\
&= \pi \left[\left(\frac{243}{5}-72+48\right)-(0-0+0)\right] \\
&= \frac{123\pi}{5}
\end{aligned}
$$

随堂练习 7

1. 利用定积分求一底圆半径为 r，高为 h 的直圆锥的体积。
2. 右图所示的阴影区域是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成，其中 $a>0$ 及 $b>0$。若此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体体积分别是 V_x 及 V_y，
   (a) 求 V_x 及 V_y；
   (b) 若 $V_x=3V_y$，求 $a:b$ 的值。



(第 2 题用图)

若一区域是由曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成，且 $f_2(x)\geq f_1(x)\geq 0$，此区域绕 x 轴旋转一周所得的旋转体如图 28-29 所示，其体积是

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_a^b[f_2(x)]^2dx-\pi\int_a^b[f_1(x)]^2dx\\&=\pi\int_a^b\left\{[f_2(x)]^2-[f_1(x)]^2\right\}dx\end{aligned}$$

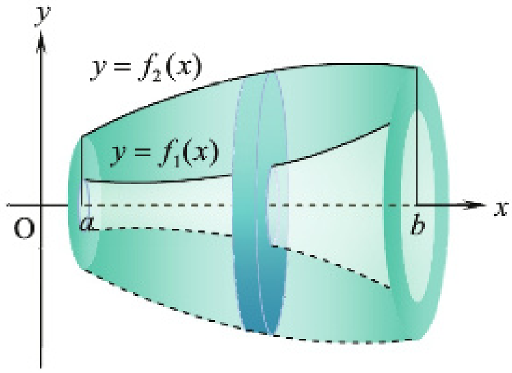


图 28-29

若一区域是由曲线 $x=g_1(y)$，$x=g_2(y)$ 及直线 $y=c$，$y=d$ 所围成，且 $g_2(y)\geq g_1(y)\geq 0$，此区域绕 y 轴旋转一周所得的旋转体如图 28-30 所示，其体积是

$$V=\pi\int_c^d\left\{[g_2(y)]^2-[g_1(y)]^2\right\}dy$$

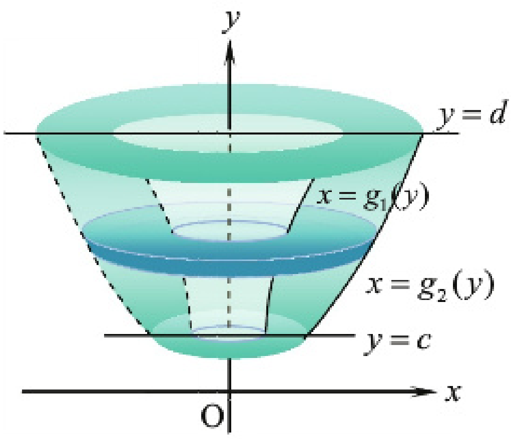


图 28-30

思考题

如何诠释此公式？
当 $f_2(x)\leq f_1(x)\leq 0$，此公式是否仍成立?为什么?

思考题

一般上，学生常将以上求体积的公式写成 $V=\pi\int_a^b(f_2(x)-f_1(x))^2\,dx$。说明为什么此写法不正确。

注意

应用此公式时，必须确保在区间 $[a,b]$ 上 $|f_2(x)|\geq|f_1(x)|$。

例题 6

求由曲线 $y=x^2$，直线 $x=3$ 及 $y=1$ 所围成的区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

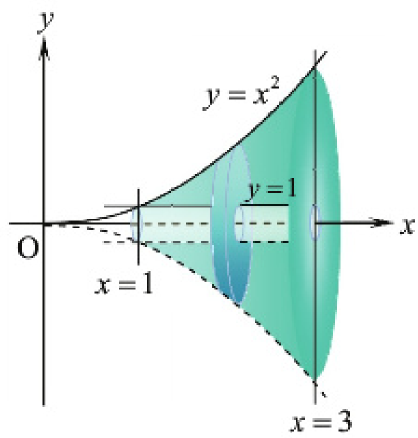


图 28-31

解 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 相交时，

$$x^2=1$$

$\therefore\quad x=-1$ 或 $x=1$

$$\begin{aligned}\text{所求的体积} &= \pi\int_1^3\left[\left(x^2\right)^2-1^2\right]dx\\ &= \pi\int_1^3\left(x^4-1\right)dx\\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5}-x\right]_1^3\\ &= \pi\left[\left(\frac{243}{5}-3\right)-\left(\frac{1}{5}-1\right)\right]\\ &= \frac{232\pi}{5}\end{aligned}$$

例题 7

已知一区域是由曲线 $y=x^3$ 及 $y=\sqrt{x}$ 所围成。求此区域

(a) 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积；

(b) 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解 在曲线 $y=x^3$ 与 $y=\sqrt{x}$ 的交点，

$$x^3=\sqrt{x}$$

$\therefore\quad x=0$ 或 $x=1$

$\quad\quad y=0\quad\quad y=1$

(a) 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

$$=\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^3\right)^2\right]dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(x-x^6\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^7}{7}\right]_0^1$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)-(0-0)\right]$$

$$=\frac{5\pi}{14}$$

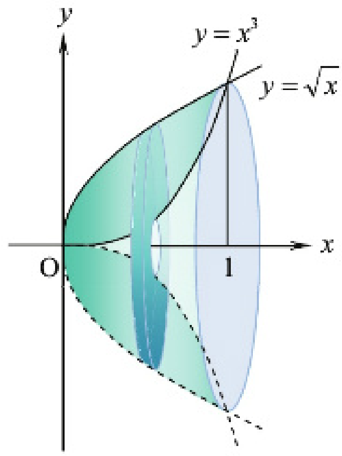


图 28-32 (a)

(b) $y=x^3 \Leftrightarrow x=y^{\frac{1}{3}}$

$y=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=y^2$

绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

$$=\pi\int_0^1\left[\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(y^2\right)^2\right]dy$$

$$=\pi\int_0^1\left(y^{\frac{2}{3}}-y^4\right)dy$$

$$=\pi\left[\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1$$

$$=\pi\left[\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right)-(0-0)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{5}$$

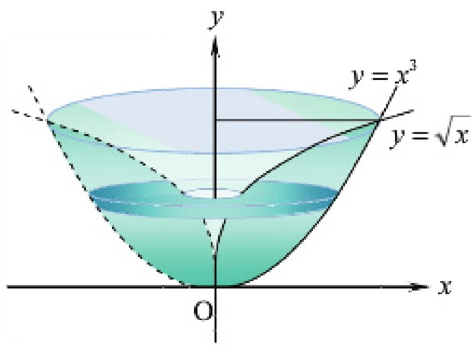


图 28-32 (b)

注意

一般上，一区域绕 x 轴旋转与绕 y 轴旋转所得旋转体的体积是不相同的。

例题 8

求由曲线 $y^2=4x$ 及直线 $y=2x-12$ 所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解

$$y^2=4x \iff x=\frac{y^2}{4}$$

$$y=2x-12 \iff x=\frac{y+12}{2}$$

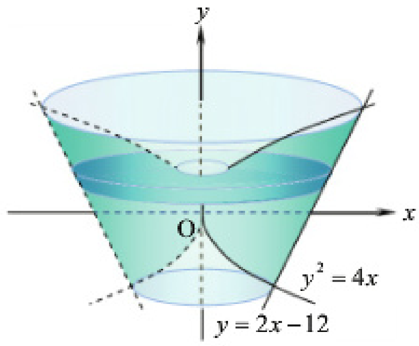


图 28-33

在曲线 $y^2=4x$ 与直线 $y=2x-12$ 的交点，

$$\frac{y^2}{4}=\frac{y+12}{2}$$

$$y^2-2y-24=0$$

$$(y+4)(y-6)=0$$

$$\therefore\ y=-4 \text{ 或 } y=6$$

$$\text{所求的体积}=\pi\int_{-4}^{6}\left[\left(\frac{y+12}{2}\right)^2-\left(\frac{y^2}{4}\right)^2\right]dy$$

$$=\pi\int_{-4}^{6}\left(\frac{y^2}{4}+6y+36-\frac{y^4}{16}\right)dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^3}{12}+3y^2+36y-\frac{y^5}{80}\right]_{-4}^{6}$$

$$=\pi\left[\left(18+108+216-\frac{486}{5}\right)-\left(-\frac{16}{3}+48-144+\frac{64}{5}\right)\right]$$

$$=\frac{1000\pi}{3}$$

随堂练习 8

1. 已知直线 $x+y=a$ 将圆 $x^2+y^2=a^2$ 分成两个区域。求面积较小的区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。
2. 已知一区域是由曲线 $y^2=8-x$ 及 $y^2=x-4$ 所围成。分别求此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

练习 28.4

求由下列各曲线所围成的区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积（1至7）：

1. $y=\sqrt{x}$，$x=4$，$x=9$ 及 x 轴
2. $y=3x$，$x=4$ 及 x 轴
3. $y=x(x-2)$ 及 x 轴
4. $x^2+y^2=4$，$x=0$ 及 $x=2$
5. $y=\sin x$，$x=0$，$x=\pi$ 及 x 轴
6. $y=e^x$，$x=-1$，$x=1$ 及 x 轴
7. $y=x^3+x^2-2x$ 及 x 轴

求由下列各曲线所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积（8至14）：

8. $y=x^3$，$y=8$ 及 y 轴
9. $x=\sqrt{y-1}$，$y=4$ 及 y 轴
10. $y^2=x+3$，$y=2$，x 轴及 y 轴
11. $y^2=x+1$ 及 y 轴
12. $x^2-y^2=4$，$y=3$ 及 x 轴
13. $y=1-\sqrt{x}$，x 轴及 y 轴
14. $y=\dfrac{1}{x}-1$，$y=1$，x 轴及 y 轴
15. 已知一区域是由曲线 $y=4-x^2$ 及 x 轴所围成。分别求此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

16. 已知一区域是由曲线 $y=5-\sqrt{x}$，x 轴及 y 轴所围成。分别求此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

17. 求由曲线 $y^2=9x$，直线 $y=6$ 及 y 轴所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

18. 已知一区域是由曲线 $y=x^2+1$，直线 $x=-2$，$x=2$ 及 x 轴所围成。分别求此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

19. 求由曲线 $y=x(6-x)$ 及直线 $y=3x$ 所围成的区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

20. 求由曲线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 及 $y=9$ 所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

21. 已知一区域是由曲线 $y^2=8x$ 及直线 $y=2x$ 所围成。分别求此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

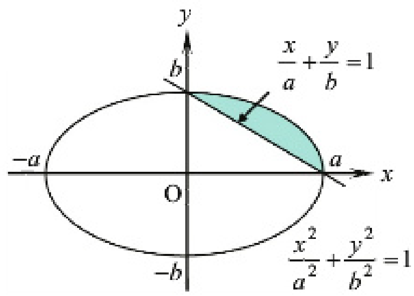
22. 已知一区域是由曲线 $y^2=8x$ 及 $y=8x^2$ 所围成。分别求此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

23. 已知一区域是由曲线 $y^2=2x$ 及 $y^2=12-4x$ 所围成。分别求此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

24. 右图所示的阴影区域是由曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 及直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 所围成，其中 $a>0$ 及 $b>0$。若此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积分别是 V_x 及 V_y，

(a) 求 V_x 及 V_y；

(b) 若 $V_x=2V_y$，求 $a:b$ 的值。



(第 24 题用图)

总复习题28

求下列各定积分（1至20）:

1. $\int_0^a \left(2x^2-3x+2\right)dx$

2. $\int_1^3 \left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx$

3. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin\theta-2\cos 2\theta)\,d\theta$

4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3\sec^2\theta+\tan^2\theta\right)d\theta$

5. $\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx$

6. $\int_1^3 \frac{2}{3x-1}\,dx$

7. $\int_1^{16} \frac{2x+3}{\sqrt{x}}\,dx$

8. $\int_1^4 \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}\,dx$

9. $\int_1^2 \left(x+\frac{4}{x^2}\right)^2 dx$

10. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

11. $\int_{-1}^2 \frac{5x}{\left(1+x^2\right)^4}\,dx$

12. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$

13. $\int_2^4 \frac{3x-2}{(2x-3)^2}\,dx$

14. $\int_2^4 \frac{2}{x^3-x}\,dx$

15. $\int_1^3 \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$

16. $\int_0^{\pi} (\sin\theta+\cos\theta)^2\,d\theta$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta\tan\theta\,d\theta$

18. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$

19. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

20. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}\,d\theta$

21. 已知$\int_0^4 f(x)\,dx=2$，$\int_0^3 g(x)\,dx=4$ 及$\int_3^8 g(x)\,dx=12$。求$\int_0^8 \left[f\left(\frac{x}{2}\right)-2g(x)\right]dx$ 的值。

22. 已知函数 $y=(x+3)\sqrt{2x-3}$，求$\frac{dy}{dx}$。据此，求$\int_2^6 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx$。

23. 已知函数 $y=x\ln x$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。据此，求下列各定积分：

(a) $\int_1^4 \ln x\,dx$　　(b) $\int_1^4 \ln(2x)\,dx$

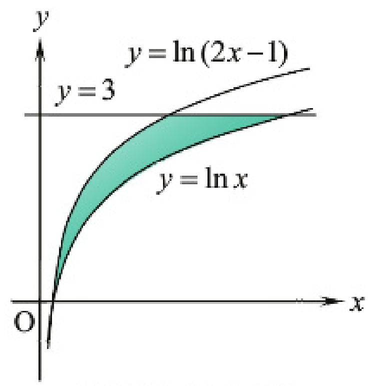
24. 求由曲线 $y=\dfrac{1}{x+1}$，直线 $x=1$，$x=7$ 及 x 轴所围成区域的面积。

25. 求由曲线 $y=\dfrac{3}{x}$ 及直线 $y=4-x$ 所围成区域的面积。

26. 求由曲线 $x=y^2-5y$ 及直线 $x+7y=24$ 所围成区域的面积。

27. 求由曲线 $y=x^2$ 及 $y^3=x$ 所围成区域的面积。

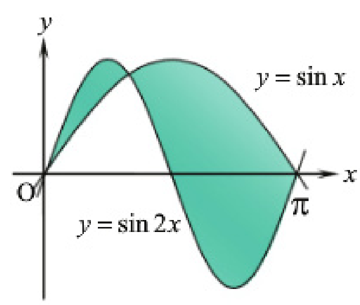
28. 右图所示的阴影区域是由曲线 $y=\ln x$，$y=\ln(2x-1)$ 及直线 $y=3$ 所围成。求此区域的面积。



(第 28 题用图)

29. 求由曲线 $x=y^3-y$ 及 $x=y-y^2$ 所围成区域的面积。

30. 右图所示的阴影区域是由曲线 $y=\sin x$ 及 $y=\sin 2x$ 在区间 $0\le x\le\pi$ 的部分所围成。求此区域的面积。



(第 30 题用图)

31. 求由曲线 $y=\dfrac{1}{x+2}$，直线 $x=2$ 及两坐标轴所围成的区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

32. 求由曲线 $y=e^x-3$ 及两坐标轴所围成的区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

33. 求由曲线 $x=y^2-3y$ 及 y 轴所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

34. 求由曲线 $y=x^2$ 及直线 $y=x+2$ 所围成的区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

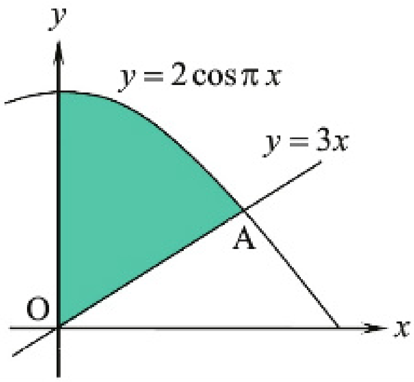
35. 求由曲线 $y^2=x+9$ 及直线 $y=x+3$ 所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

36. 已知一区域是由曲线 $y^2=8x$ 及 $y=x^2$ 所围成。分别求此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

37. 右图所示的阴影区域是由曲线 $y = 2\cos\pi x$，直线 $y = 3x$ 及 y 轴所围成。

(a) 证明点 A 的 x 坐标为 $\frac{1}{3}$。

(b) 求此区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。



(第 37 题用图)

38. 已知一区域是由曲线 $xy = 12$，直线 $x = 4$ 及 $y = 6$ 所围成。分别求此区域绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

名词对照

26 微分的应用

法线 normal
单调函数 monotone function
增函数 increasing function
减函数 decreasing function
极大值 local maximum value / relative maximum value
极小值 local minimum value/ relative minimum value
极值 extreme values / extrema
极值点 extreme point
转向点 turning point
驻点 stationary point
最大值 global maximum value / absolute maximum value / maximum value
最小值 global minimum value / absolute minimum value / minimum value
上凸 convex up / concave down
下凸 convex down / concave up
拐点 inflection point
变率 rate of change
相关变率 related rate of change

27 不定积分

不定积分 indefinite integral
原函数 primitive function
被积函数 integrand
积分常数 constant of integration
换元积分法 integration by substitution
部分分式积分法 integration by partial fractions

28 定积分

定积分 definite integral
微积分基本定理 fundamental theorem of calculus
旋转体 solid of revolution

答案

26. 微分的应用

随堂练习 1 (P. 6)

1. 切线：$12x-y-16=0$

   法线：$x+12y-98=0$

2. $Q(3,6)$

3. 切线：$x-2y+3=0$

   法线：$2x+y-4=0$

练习 26.1 (P. 6)

1. 切线：$4x-y-2=0$

   法线：$x+4y-26=0$

2. $12x+y-8=0$

3. $x+5y-31=0$

4. $x-4y+3=0$

5. 切线：$8x-y+9=0$

   法线：$x+8y+58=0$

6. $8x-y+8=0$，$4x+y-4=0$，

   $8x-y-24=0$

7. $y=-20$，$y=34$

8. $x+y-12=0$

9. 切线：$2x-y-2=0$

   法线：$x+2y-1=0$

10. -7

11. $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$

12. $a=2$，$b=-5$

13. $P(2,-1)$

15. 切线：$x+4y+14=0$

    法线：$4x-y+5=0$

16. $2x+y+1=0$

随堂练习 2 (P. 10)

1. $f(x)$ 在区间 $[-1,\infty)$ 上是增函数，在区间 $(-\infty,-1]$ 上是减函数。

2. $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$ 及 $[1,\infty)$ 上是增函数，在区间 $\left[-\frac{1}{3},1\right]$ 上是减函数。

练习 26.2 (P. 10)

1. $f(x)$ 在区间 $[1,\infty)$ 上是增函数，在区间 $(-\infty,1]$ 上是减函数。

2. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 及 $[2,\infty)$ 上是增函数，在区间 $[0,2]$ 上是减函数。

3. $f(x)$ 是增函数。

4. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,\infty)$ 上是减函数，在区间 $[-1,1]$ 上是增函数。

5. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 及 $[2,\infty)$ 上是增函数，在区间 $[0,2]$ 上是减函数。

6. $f(x)$在区间$[-1,0]$及$\left[\frac{1}{2},\infty\right)$上是增函数，在区间$(-\infty,-1]$及$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上是减函数。

7. $f(x)$在区间$[-1,1]$上是增函数，在区间$(-\infty,-1]$及$[1,\infty)$上是减函数。

8. $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上是增函数，在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是减函数。

9. 极大值点：$\left(\frac{4}{3},\frac{400}{27}\right)$，极小值点：$(6,-36)$

10. 极小值点：$\left(\frac{1}{2},3\right)$

11. 极大值点：$\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$
    极小值点：$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$

12. 极大值点：$(2,4)$，极小值点：$(0,0)$

随堂练习 3 (P. 15)

1. 极小值：$-\frac{25}{4}$
2. 极大值：$\frac{9}{4}$
3. 极大值：$\frac{19}{6}$，极小值：$-\frac{4}{3}$
4. 极大值：$\frac{16}{9}$，极小值：$-\frac{16}{9}$
5. 极大值点：$(-1,0)$，极小值点：$(2,-27)$
6. 极大值点：$(-1,-2)$，极小值点：$(1,2)$

练习 26.3 (P. 16)

1. 极小值：$-\frac{9}{2}$
2. 极大值：5
3. 极大值：9
4. 极小值：$\frac{2}{3}$
5. 极大值：1，极小值：-124
6. 极大值：20，极小值：-12
7. 极大值点：$(-2,16)$，极小值点：$(2,-16)$
8. 极大值点：$\left(-\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right)$，极小值点：$(1,-3)$

随堂练习 4 (P. 18)

1. 最大值：11，最小值：-1
2. 最大值：68，最小值：4
3. 32
4. 长及宽皆为 25 cm。

练习 26.4 (P. 19)

1. 最大值：40，最小值：$-\frac{115}{4}$
2. 最大值：252，最小值：-4
3. 最大值：64，最小值：-27
4. 长及宽皆为 15 cm。
5. 两段铁线皆为 50 cm。
6. 20 cm；$75\sqrt{3}$ cm^2
7. $3\sqrt{3}$ cm
8. $h=10$ cm，$r=5$ cm
9. 8 及 12
10. $\frac{600}{\pi+4}$ cm，$\frac{150\pi}{\pi+4}$ cm
11. $\frac{300}{\pi+4}$ cm；$\frac{45000}{\pi+4}$ cm^2
12. $\sqrt{2}$

随堂练习 5 (P. 23)

1. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 内是下凸的，在区间 $(1,\infty)$ 内是上凸的；拐点是 $(1,2)$。

2. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 内是上凸的，在区间 $(1,\infty)$ 内是下凸的；拐点是 $\left(1,-\dfrac{5}{3}\right)$。

练习 26.5 (P. 24)

1. $(0,4)$　　2. $(0,0)$，$(2,16)$

3. $(0,0)$

4. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 内是下凸的，在区间 $(2,\infty)$ 内是上凸的；拐点是 $(2,0)$。

5. $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ 内是上凸的，在区间 $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$ 内是下凸的；拐点是 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{13}{2}\right)$。

6. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 及 $(1,\infty)$ 内是下凸的，在区间 $(0,1)$ 内是上凸的；拐点是 $(0,1)$ 及 $(1,0)$。

7. 极大值：16，极小值：0，拐点：$(2,8)$

   $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 内是上凸的，在区间 $(2,\infty)$ 内是下凸的。

8. 极小值：-2，拐点：$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{3}{2}\right)$ 及 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{3}{2}\right)$

   $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 及 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$ 内是上凸的，在区间 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 内是下凸的。

练习 26.6 (P. 28)

4. (a) 极大值：27

   $f(x)$ 在区间 $(-\infty,3]$ 上是增函数，在区间 $[3,\infty)$ 上是减函数。

   (b) 拐点：$(0,0)$，$(2,16)$

   $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 及 $(2,\infty)$ 内是上凸的，在区间 $(0,2)$ 内是下凸的。

随堂练习 7 (P. 32)

1. 12.2 mm^2/s　　2. 120π cm^2/s

练习 26.7 (P. 33)

1. 15 cm^3/s　　2. 0.2π m^2/s

3. 90 cm^2/s　　4. 240 cm^3/s

5. 36π cm^3/s　　6. $\dfrac{1}{8}$ cm/min

7. $-\dfrac{1}{12}$ cm/min，-4π cm^2/min

8. $\dfrac{1}{4\pi}$ cm/s，25 cm^3/s

9. $\dfrac{40000\pi}{3}$ cm^3/s （或 $\dfrac{\pi}{75}$ m^3/s）

10. -1.92π cm^2/s

11. -3 或 3　　12. $\dfrac{1}{32\pi}$ m/min

随堂练习 8 (P. 36)

1. 0.12 cm^2

2. 0.64π cm^3，0.32π cm^2

3. 3.875

练习 26.8 (P. 36)

1. 0.008 cm^2　　2. 0.06π cm^2

3. -0.72π cm^3　　4. 1%

5. 3%

6. $0.96\pi\ \text{cm}^2$

7. $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$；0.1003

8. $\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$；2.0016

总复习题26 (P. 37)

1. $24x-y-54=0$
2. $x+5y+1=0$，$x-4y=0$，$x+20y-4=0$
3. $a=-1$，$b=7$
4. $2x+y-7=0$，$\frac{7\sqrt{5}}{2}$
5. $f(x)$在区间$[0,4]$上是增函数，在区间$(-\infty,0]$及$[4,\infty)$上是减函数。
6. $f(x)$在区间$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$及$[1,\infty)$上是增函数，在区间$\left[-\frac{1}{2},1\right]$上是减函数。
7. -4
8. 16
9. $p=-\frac{1}{3}$，$q=5$
10. 长：20 m，宽：10 m
11. 长：6 cm，宽：3 cm；$108\pi\ \text{cm}^3$
12. 1:1
13. 24及4

14. 1:2

15. $(0,-2)$

16. $(2,6)$

17. $f(x)$没有极值。

    $f(x)$在区间$(-\infty,-1)$及$(0,1)$内是下凸的，在区间$(-1,0)$及$(1,\infty)$内是上凸的；拐点是$(0,0)$。

18. (a) $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，$\left(1,\frac{1}{2}\right)$

    (b) $f(x)$在区间$[-1,1]$上是增函数，在区间$(-\infty,-1]$及$[1,\infty)$上是减函数。

    (c) $f(x)$在区间$(-\infty,-\sqrt{3})$及$(0,\sqrt{3})$内是上凸的，在区间$(-\sqrt{3},0)$及$(\sqrt{3},\infty)$内是下凸的；拐点是$\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$(0,0)$及$\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$。

21. $\frac{1}{3}$ cm/s

22. (a) $\frac{1}{5\pi}$ m/min (b) $1\ \text{m}^2/\text{min}$

23. $-3.2\pi\ \text{cm}^3$，$-1.6\pi\ \text{cm}^2$

24. $0.24\pi\ \text{cm}^3$

25. $\frac{\Delta V}{200}$ cm

26. $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$；0.197

27. 不定积分

随堂练习1 (P. 46)

1. $\frac{1}{4}x^4+C$

2. $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

3. $-\frac{1}{2}x^{-2}+C$

4. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

练习27.2a (P. 46)

1. $\frac{3}{2}x^2+C$

2. x^5+C

2. $5x+C$

4. $-\frac{1}{8}x^{-8}+C$

5. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

6. $4x^{\frac{1}{2}}+C$

7. $-\frac{1}{4}x^{-4}+C$

8. $-\frac{1}{3}x^{-3}+C$

9. $\frac{2}{\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}+C$

10. $\frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}+C$

11. $\sin x+C$

12. $-2\cos x+C$

13. $-\cot x+C$

14. $\tan x+C$

15. $\sec x+C$

16. $-\operatorname{cosec} x+C$

随堂练习 2 (P. 48)

1. $\frac{1}{16}x^4+C$

2. $4x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

3. $\ln|x|-3x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}+C$

4. $-\cos x-3\sin x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$

随堂练习 3 (P. 50)

1. $\frac{x^2-2}{2(x+1)}+C$

2. $3x-\frac{3}{5(5x+7)^3}+C$

练习 27.2b (P. 50)

1. $\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+x+C$

2. $x^5+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

3. $\frac{1}{6}x^3+2x^{-1}+C$

4. $-\cos x-3\sin x+C$

5. $\frac{1}{3}x^3-5x^2+25x+C$

6. $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$

7. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

8. $\frac{1}{3}x^3+5x^{-1}+C$

9. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+10x^{\frac{1}{2}}+C$

10. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$

11. $\frac{1}{2}x^2-3x+C$

12. $\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$

13. $\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

14. $2x^2+4x+\ln|x|+C$

15. $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\ln|x|+2x^{-1}+x^{-2}+C$

16. $-x^{-1}+x^{-2}-\frac{1}{3}x^{-3}+C$

17. $x+\cos x+C$

18. $\tan x-x+C$

19. $e^2x+\frac{1}{4}\ln|x|+C$

20. $\frac{(2e)^x}{1+\ln 2}+C$

21. $\frac{15}{(3-x)^2}$；$\frac{x}{3(3-x)}+C$

22. $\frac{6x^2-4x}{(3x-1)^2}$；$-\frac{x^2}{3x-1}+C$

23. $\frac{x^2}{x^2+2}+C$

24. $x^3-x-\frac{6x^2-2}{5x^2+7}+C$

25. $\frac{2+x^3}{3(2-x^3)}-\frac{3}{2}x^2+2x+C$

随堂练习 4 (P. 57)

1. $\frac{1}{4}(3x+1)^{\frac{4}{3}}+C$
2. $-\frac{1}{4}\ln|1-4x|+C$
3. $\frac{2^{4x+1}}{\ln 2}+C$
4. $\frac{1}{2}\sin^2 x+C$ 或 $-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$ 或 $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

练习 27.3a (P. 57)

1. $\frac{1}{8}(2x+1)^4+C$
2. $\frac{1}{18}(3x+2)^6+C$
3. $-\frac{1}{7}(3-x)^7+C$
4. $-\frac{1}{4}(2x-1)^{-2}+C$
5. $\frac{4}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C$
6. $\frac{2}{9}(3x+1)^3+C$
7. $-\frac{1}{14}(2x+5)^{-7}+C$
8. $\frac{1}{3-2x}+C$
9. $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$
10. $\frac{1}{4}\left(x^3+4\right)^4+C$
11. $\left(x^3-1\right)^5+C$
12. $\frac{1}{6}\left(x^2+x+2\right)^6+C$
13. $\frac{1}{15}\left(x^3-3x^2+1\right)^5+C$
14. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|+C$
15. $\frac{1}{3}\sin\left(x^3+2\right)+C$
16. $-2\cos\frac{x}{2}+C$
17. $\frac{1}{3}\ln^3 x+C$
18. $-\frac{1}{2}e^{1-2x}+C$
19. $e^x-e^{-x}+C$
20. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

随堂练习 5 (P. 62)

1. $-\frac{1}{4}\cos^2 2x+C$ 或 $\frac{1}{4}\sin^2 2x+C$ 或 $-\frac{1}{8}\cos 4x+C$
2. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}+C$
3. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$
4. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$
5. $\frac{1}{5}\tan^5 x+C$
6. $\frac{2}{3}\tan^3\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}+x+C$

练习 27.3b (P. 62)

1. $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}+C$
2. $\frac{1}{5}\tan 5x-x+C$
3. $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{x}{2}+C$
4. $\frac{1}{12}\sin(6x-2)+\frac{x}{2}+C$
5. $\frac{1}{5}\sec 5x+C$
6. $\frac{1}{3}\operatorname{cosec}3x+C$
7. $-8\cos\frac{x}{8}-\frac{1}{2}\tan 2x+C$
8. $x-\cos x+C$
9. $2\tan x+2\sec x-x+C$
10. $\frac{9}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+4\cos x+C$
11. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$
12. $\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+C$
13. $\frac{1}{12}\sin^3 4x+C$
14. $-\frac{1}{4}\cot^4 3x+C$
15. $\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$
16. $\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C$

随堂练习 6 (P. 66)

1. $2\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$
2. $\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+C$

练习 27.4 (P. 66)

1. $\ln|x|-\ln|x+1|+C$
2. $\dfrac{1}{4}\ln|x+1|+\dfrac{3}{4}\ln|x-3|+C$
3. $3\ln|x+2|-\ln|2x-3|+C$
4. $-3\ln|x+1|-2\ln|x-1|+C$
5. $x-3\ln|x+1|+3\ln|x-1|+C$
6. $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+C$
7. $2\ln|x+1|+\dfrac{3}{x+1}+C$
8. $\ln|2x+1|+\dfrac{5}{2(2x+1)}+C$

随堂练习 7 (P. 68)

$y=3x+\dfrac{1}{x}-2$

练习 27.5 (P. 69)

1. $y=x^4-2x^3+3x+1$
2. $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-4x-3$
3. (a) -5

   (b) $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-5x+\dfrac{10}{3}$

总复习题 27 (P. 69)

1. $\dfrac{5}{3}x^{\frac{6}{5}}+C$
2. $\dfrac{1}{8}(2x-1)^4+C$
3. $\dfrac{1}{101}(x+4)^{101}+C$
4. $-5x^{-1}+\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+C$
5. $x^3-x^{-1}+\cos x+C$
6. $4\sin x+\ln|x|+\dfrac{1}{4}x^4+C$
7. $\dfrac{3}{2}x^2-2x-\dfrac{1}{2}x^{-2}+C$
8. $\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-2x+C$
9. $\dfrac{1}{3}x^3-2\ln|x|-\dfrac{1}{3}x^{-3}+C$
10. $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{2}x^2+3\ln|x|-\dfrac{1}{2}x^{-2}+C$
11. $-\dfrac{1}{10^x\ln 10}+C$
12. $\dfrac{1}{2}e^{2x}-2x-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C$
13. $\dfrac{1}{5}\left(x^2-1\right)^5+C$
14. $\dfrac{1}{5}\left(x^3+1\right)^5+C$
15. $-\dfrac{1}{4}\left(x^2+2x+5\right)^{-2}+C$
16. $2\sqrt{x^2-4}+C$
17. $\sqrt{x^2-4x+3}+C$
18. $\ln|2x-1|-\ln|x+3|+C$
19. $\dfrac{2}{3}\ln|3x+2|-3\ln|x-1|+C$
20. $\dfrac{2}{5}\ln|5x+3|-\dfrac{1}{3}\ln|3x+2|+C$
21. $\ln|2x^2+x-3|+x+C$
22. $x+4\ln|x-1|-\dfrac{4}{x-1}+C$
23. $\dfrac{1}{2}x^2+x+3\ln|x-2|-\dfrac{1}{x-2}+C$
24. $\ln|x+2|+\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{2}{(x+2)^2}+C$
25. $-\dfrac{3}{2}\cos 2x-\dfrac{4}{3}e^{3x}+C$
26. $-\dfrac{1}{5}\cos(5x-6)+C$

27. $\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{4}\tan 4x+C$

28. $-2\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x-7\sin\frac{x}{7}+C$

29. $\frac{1}{3}\tan 3x-x+C$

30. $\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

31. $\frac{3}{2}\sec x+C$

32. $\ln\left|\tan x+2\right|+C$

33. $-\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^3 2x+C$

34. $\frac{1}{5}\sec^5 x-\frac{1}{3}\sec^3 x+C$

35. $\frac{x+3}{x^2}$； $\frac{1}{3}\ln x-\frac{1}{x}+C$

36. $-\frac{4x}{\sqrt{\left(4x^2-1\right)^3}}$； $-\frac{1}{4\sqrt{4x^2-1}}+C$

37. $3x-\frac{x^3}{3}-\frac{2\left(x^2+3\right)}{1-x}+C$

38. $x\ln x-x^2+C$

39. $y=\frac{3}{2}x^2-1$

40. $(-1,0)$，$(3,0)$

28. 定积分

随堂练习 1 (P. 75)

2

随堂练习 2 (P. 78)

1. 30	2. 60
3. 0	4. 1

练习 28.1 (P. 78)

1. 24	2. $\frac{3}{4}$	3. $\frac{38}{3}$
4. $\frac{4}{3}$	5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
7. e^2-1	8. 1	9. $\ln 2$
10. $\ln 3$		

随堂练习 3 (P. 83)

1. $24+2\ln 4$	2. $\frac{3}{2}\left(e^2-e^{-2}\right)$
3. $-4\sqrt{3}$	4. $-\frac{2}{3}$
5. (a) 3	(b) $\frac{19}{6}$

6. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$； $\sqrt{2}-1$

随堂练习 4 (P. 87)

1. $2\left(e^6-1\right)$	2. $\frac{\ln 2}{3}$
3. $\ln\frac{5}{3}$	4. $\frac{4}{3}$

练习 28.2 (P. 87)

1. $\frac{16}{3}$	2. $9+\ln 4$
3. 72	4. $\frac{20}{3}$
5. $\frac{2}{3}$	6. $\ln 2$
7. $\frac{e^2-4e+5}{2}$	8. $\frac{\ln 5}{2}$
9. $\frac{26}{3}$	10. $\frac{2}{9}$
11. $\frac{32}{15}$	12. $\frac{274}{5}$
13. $\frac{\pi-2}{4}$	14. $\frac{\ln 2}{3}$
15. $\frac{3}{8}+\frac{\ln 2}{4}$	16. $\frac{3}{2}-2\ln 2$
17. 1	18. $\frac{1}{24}$

19. $\frac{80}{3}$

20. (a) 8 (b) 8 (c) -16

21. $\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$; 36

22. $\frac{2(x^2+x+1)}{(2x+1)^2}$; $\frac{4}{5}$

23. xe^x ; $6e^4$

随堂练习 5 (P. 92)

1. 36
2. $\frac{14}{3}$
3. 8

随堂练习 6 (P. 96)

1. $\frac{9}{2}$
2. $\frac{32}{3}$

练习 28.3 (P. 96)

1. 117
2. $\frac{28}{3}$
3. $\frac{500}{3}$
4. $\frac{e^8-1}{2}$
5. 4
6. 4
7. 9
8. $\frac{81}{2}$
9. $2\ln 2$
10. $\frac{224}{3}$
11. $\frac{125}{6}$
12. $\frac{125}{3}$
13. 6
14. $\frac{3e^4+2e^{-2}+e^{-8}}{2}-3$
15. $\frac{148}{3}$
16. $\frac{80}{3}$
17. $\frac{9}{2}$
18. 8

随堂练习 7 (P. 101)

1. $\frac{\pi r^2 h}{3}$

2. (a) $V_x=\frac{4\pi ab^2}{3}$, $V_y=\frac{4\pi a^2 b}{3}$

   (b) $1:3$

随堂练习 8 (P. 106)

1. $\frac{\pi a^3}{3}$
2. 4π , $64\sqrt{2}\pi$

练习 28.4 (P. 106)

1. $\frac{65\pi}{2}$
2. 192π
3. $\frac{16\pi}{15}$
4. $\frac{16\pi}{3}$
5. $\frac{\pi^2}{2}$
6. $\frac{\pi}{2}(e^2-e^{-2})$
7. $\frac{162\pi}{35}$
8. $\frac{96\pi}{5}$
9. $\frac{9\pi}{2}$
10. $\frac{42\pi}{5}$
11. $\frac{16\pi}{15}$
12. 21π
13. $\frac{\pi}{5}$
14. $\frac{\pi}{2}$
15. $\frac{512\pi}{15}$; 8π
16. $\frac{625\pi}{6}$; 625π
17. $\frac{96\pi}{5}$
18. $\frac{412\pi}{15}$; 12π
19. $\frac{243\pi}{5}$
20. 32π
21. $\frac{16\pi}{3}$; $\frac{32\pi}{15}$
22. $\frac{3\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{20}$
23. 6π ; $\frac{128\pi}{5}$
24. (a) $V_x=\frac{\pi ab^2}{3}$, $V_y=\frac{\pi a^2 b}{3}$

    (b) $1:2$

总复习题28 (P. 108)

1. $\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+2a$
2. $\frac{82}{9}$
3. $\sqrt{3}$
4. $8-\frac{\pi}{2}$
5. $\frac{7}{3}$
6. $\frac{4\ln 2}{3}$
7. 102
8. $2\ln 2-1$
9. $8\ln 2+7$
10. $\frac{\ln 2}{2}$
11. $\frac{39}{400}$
12. $\frac{1}{2}$
13. $\frac{3\ln 5}{4}+1$
14. $\ln\frac{5}{4}$
15. $\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$
16. π
17. $\frac{3}{2}$
18. $\frac{2}{3}$
19. $\ln\frac{1+e}{2}$
20. $\ln 3$
21. -28
22. $\frac{3x}{\sqrt{2x-3}}$; $\frac{22}{3}$
23. $1+\ln x$
   (a) $8\ln 2-3$　　(b) $11\ln 2-3$
24. $2\ln 2$
25. $4-3\ln 3$
26. $\frac{500}{3}$
27. $\frac{5}{12}$
28. $\frac{e^3}{2}-2$
29. $\frac{37}{12}$
30. $\frac{5}{2}$
31. $\frac{\pi}{4}$
32. $(9\ln 3-8)\pi$
33. $\frac{81\pi}{10}$
34. $\frac{72\pi}{5}$
35. $\frac{625\pi}{3}$
36. $\frac{48\pi}{5}$, $\frac{24\pi}{5}$
37. (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\pi}{9}$
38. 36π, 24π