马来西亚华文独中教科书

高中数学

（三上）

董教总独中工委会统一课程委员会编纂

马来西亚华文独中教科书

高中数学

（三上）

董教总独中工委会统一课程委员会编纂

《高中数学》（三上）

行政编辑：梁翠芳
美术编辑：梁翠芳
封面设计：梁翠芳
版面设计：萧娇婵
电脑排版：蔡思盛

© 郑重声明，此书版权归出版单位所有，未经允许，书上所有内容不得通过任何形式进行复制、转发、储存于检索系统，或翻译成其它语言的活动。

© Dong Zong
Hak cipta terpelihara. Mana-mana bahan atau bahagian dalam buku ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, atau ditukar kepada apa-apa bentuk atau apa-apa cara, baik dengan elektronik, mekanikal, fotokopi, rakaman, pengalihan bahasa dan sebagainya tanpa mendapat kebenaran secara menulis daripada pihak penerbit terlebih dahulu.

© Dong Zong
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, translated in any other languages, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Swan Printing Sdn Bhd.

版次：
2015年7月第1版

印次：
2020年11月第6次印刷

编辑说明

一、这套《高中数学》是根据董教总独中工委会统一课程委员会所拟定的数学课程标准编写而成。在拟订课程标准的过程中，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KBSM）及各国的课程标准和教材，并采用了旧版统一课本《普通数学》的课程内容。

二、这套《高中数学》是为全国各华文独中的高中文科及商科学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。每册内容依据每周六节，每节四十分钟的教学时间编写。

三、这套教材共有 28 章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学及微积分。全书是以综合方式编写。

四、本书是高三上册，供高中三年级上半年使用。内容包括：

代　数 — 函数、指数与对数

微积分 — 极限、微分

五、本书设有“学习目标”、“注意”、“补充资料”、“随堂练习”及“思考题”栏目。设置上述栏目是为了使学生掌握学习重点，启发学生思考，增进学习效果。

六、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。习题的答案都附于书末。此外，本书附有中英名词对照，供学习参考。

七、除非另有说明，本书所有例题及习题的答案皆准确至两位小数。

八、本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总独中工委会统一课程委员会

《高中数学》编审小组

2015年7月

编审小组

学术顾问：林忠强博士　陈庆地博士　张丽萍博士

学科委员：林汶良　张锦发　苏民胜　萧子良　李鸿聪
刘建华

责任编辑：蔡思盛

鸣 谢

本书承蒙编审小组提供建设性意见，并协助编写与审稿，谨此统致谢忱。

董教总独中工委会统一课程委员会　启

目录

22. 函数

22.1 函数的定义 2
22.2 函数的定义域与值域 8
22.3 函数的图像及其变换 12
22.4 合成函数 22
22.5 一对一函数、映成函数、一一映成函数 27
22.6 反函数 33

23. 指数与对数

23.1 指数 46
23.2 对数 55
23.3 对数的运算法则与换底公式 61
23.4 指数方程式 69
23.5 对数方程式 72
23.6 复利与年金 77

24. 极限

24.1 极限的概念 92
24.2 函数的极限 93
24.3 函数极限的运算法则 99

25. 微分

25.1 曲线上切线的斜率 110
25.2 切线斜率与导数 114
25.3 微分法则 119
25.4 链导法 — 合成函数的微分法 129
25.5 高阶导数 134
25.6 隐函数的微分法 136
25.7 两个基本极限 139
25.8 三角函数的导数 147
25.9 对数函数的导数 154
25.10 指数函数的导数 159

名词对照 165
答案 167

22. 函数

学习目标：

- 掌握函数的定义及表示法
- 能求函数的定义域及值域
- 认识基本函数的图像
- 掌握合成函数的概念及运算
- 理解一对一、映成及一一映成函数
- 掌握反函数的概念及求法

22.1 函数的定义

对应、原像及映像

对于两个非空集合A及B，若A中的某一元素a，在B中有一对应的元素b，记作$a \to b$，读作a对应于b或a与b对应。两个集合之间的对应一般使用f、g、h等来表示。图22-1所示的对应可表示成

$f:1 \to x$，$2 \to y$，$4 \to z$。

设$f:A \to B$是一个对应，a是A中的任意元素。若a在f之下对应到B中的元素b，则b叫做a在f之下的映像，简称像，记作$b=f(a)$；而a则叫做b在f之下的原像。在图22-1中，在映射f之下，1、2及4的像分别是x、y及z，而x、y及z的原像分别是1、2及4。

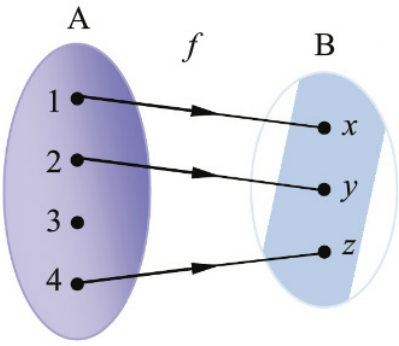


图 22-1

设A及B是两个非空集合，f是由A至B的一个对应，使得对于A中的任意元素，在B中都有唯一的元素与它对应，则f叫做由集合A至集合B的一个函数或映射，记作$f:A \to B$。

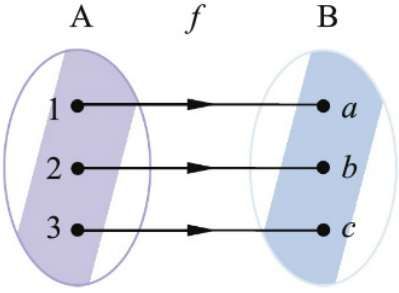


图 22-2

图22-2所示的对应就是一个函数。

思考题

判断图22-1所示的对应是否为一个函数。

例题 1

判断下列各对应是否为函数：

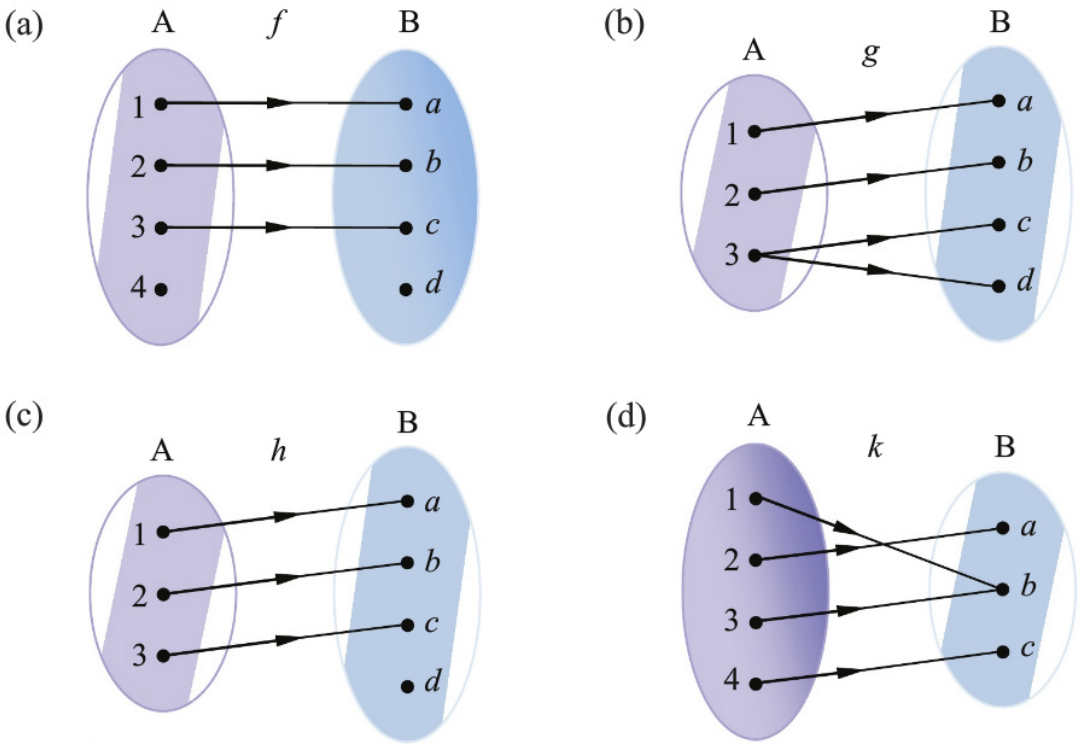


图 22-3

解 (a) 由于 $4 \in A$ 没有映像，所以 f 不是函数。

(b) 由于 $3 \in A$ 有两个不同的映像 c 及 d，所以 g 不是函数。

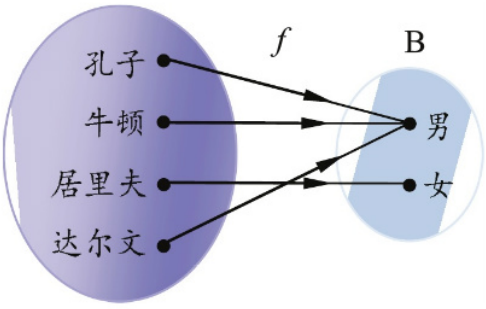
(c) 由于 A 中的每个元素都只对应于 B 中的一个元素，所以 h 是一个函数。

(d) 由于 A 中的每个元素都只对应于 B 中的一个元素，所以 k 是一个函数。

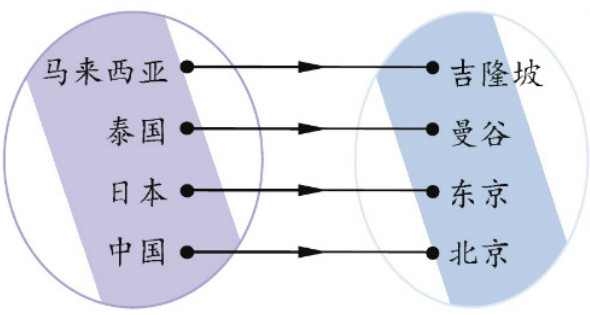
随堂练习 1

1. 列出下列各对应中，集合 A 各元素的像及集合 B 各元素的原像，并判断该对应是否为函数：

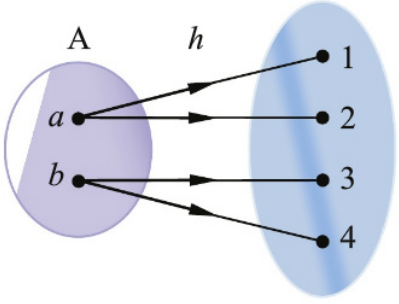
(a)



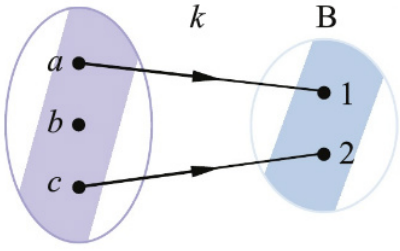
(b)



(c)



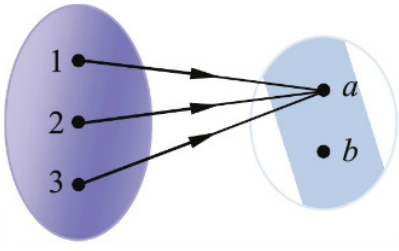
(d)



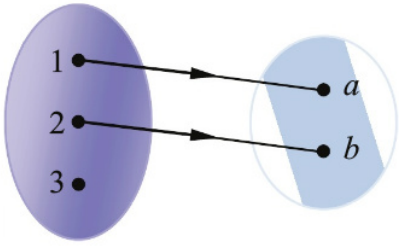
2. 已知对应关系 $g: x \to x+3$，其中 $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$。列出各 x 所对应的像。

3. 判断下列所示的各对应关系中，哪些是函数，哪些不是函数。

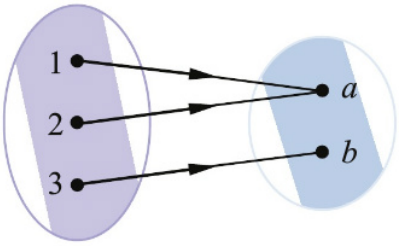
(a)



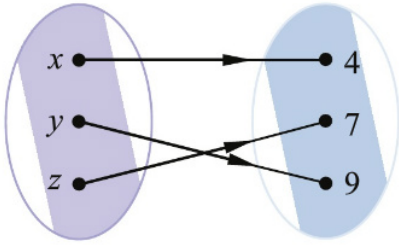
(b)



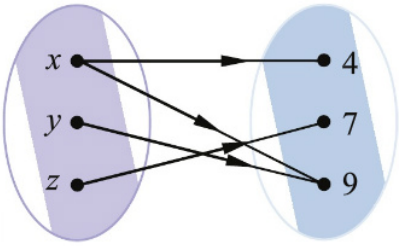
(c)



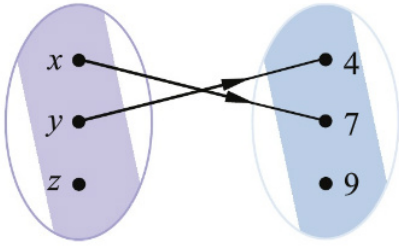
(d)



(e)



(f)



一个函数 f: A $\to$ B 的关系式可写成 $y=f(x)$，x 是 A 中的元素，y 是 B 中的元素。当 x 改变时，y 也随着改变。x 叫做自变量，y 叫做因变量。

注意

$f(x)$ 不是 f 与 x 的乘积。

函数的表示法

一般上，函数有以下几种表示法：

一、叙述法：以文字说明两个集合之间的函数关系。

例如，设 $A=\{1,2,3\}$ 及 $B=\{1,4,9\}$。
f 是一个由 A 映到 B 的函数，其定义为A中的任意元素x，与B中的 x^2 对应。

二、箭号图示法：使用箭号将原像与映像连起来，使每个原像与其映像相对应。以箭号图示法来表示以上叙述法的例子，其表示法为
f: $1\to1$，$2\to4$，$3\to9$。

三、解析法：以数学式子来表示自变量与因变量之间的函数关系，如 $f(x)=x^2$，$x\in A$。

四、范氏图示法：在两个集合的范氏图上标注箭号来表示两个集合之间的函数关系，如图22-4所示。

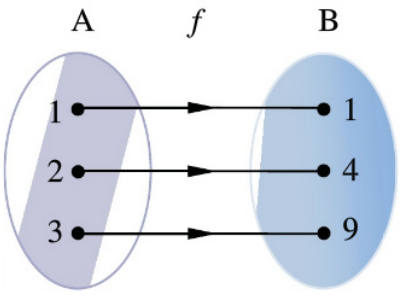


图 22-4

五、列表法：用表格列出自变量 x 所取的值及其相对应的因变量 y 的值来表示两个变量之间的函数关系，例如：

x	1	2	3
y	1	4	9

六、图像法：以图像来表示两个变量之间的函数关系，如图 22-5 所示。

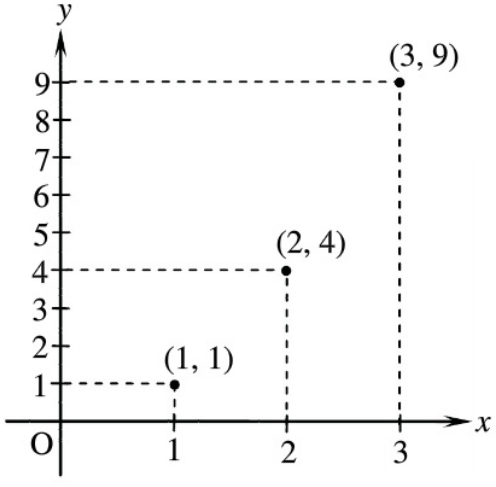


图 22-5

随堂练习 2

以解析法、范氏图示法、列表法及图像法表示下列各函数。

(a) f 将每个由 -3 至 3 的整数对应于比它的平方多 4 的数。

(b) g 将每个由 1 至 4 之间的自然数对应于它的立方。

练习 22.1

1. 以范氏图表示由集合 A 到 B 的对应，并判断哪些对应为函数。

	集合 A	集合 B	对应法则
(a)	$\{0,3,9,12\}$	$\{0,1,2,3\}$	除以 3
(b)	$\{-2,-1,0,1,2\}$	$\{0,1,4,9,16\}$	取 4 次方
(c)	$\{-2,-1,0,1,2\}$	$\{0,1,4\}$	取平方
(d)	$\{30°,45°,60°\}$	$\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$	取正弦值
(e)	$\{-1,0,1,2\}$	$\{-1,0,1\}$	取 3 次方

2. 设函数 $f(x)=3x^2+1$。

   (a) 求下列各元素的像：

   (i) -3　(ii) -2　(iii) 0　(iv) 2　(v) 5

   (b) 求下列各元素的原像：

   (i) 13　(ii) 28　(iii) 1　(iv) 0　(v) 4

3. 设函数 $g(x)=5x-2$。求

   (a) $g(-2)$　(b) $g(-1)$　(c) $g(0)$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<-1 \\ x-1, & -1\le x<3 \\ 4x+2, & x\ge 3 \end{cases}$。求

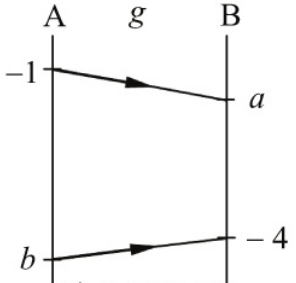
(a) $f(-5)$　(b) $f(-2)$　(c) $f(0)$　(d) $f(2)$　(e) $f(10)$

5. 设 $f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x^4$。求 -1，0，1，2 在 f 之下的像。

6. 设 $f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x^2$。求 0，1，4 在 f 之下的原像。在 $\boldsymbol{R}$ 中，哪些元素在 f 之下没有原像？

7. 在右图中，已知函数 g: A $\to$ B 定义成 $g: x\to 2x-8$。求 a 及 b 的值。

8. 以叙述法、箭号图示法、范氏图示法、列表法及图像法表示函数 $f(x)=2x$，$x\in\{-2,-1,0,1,2\}$。



(第 7 题用图)

22.2 函数的定义域与值域

设 f 是一个由集合 A 映到集合 B 的函数，则集合 A 叫做 f 的定义域，记作 D_f；集合 B 叫做 f 的对应域；集合 A 中的所有元素在 f 之下的映像的集合叫做 f 的值域，记作 R_f。

若函数 f: A $\to$ B 的定义域 A 及对应域 B 都是实数集合 $\boldsymbol{R}$ 的子集，则这个函数叫做实函数。本书主要讨论实函数。当一个实函数的定义域未注明而仅说明其对应法则时，其定义域被约定为所有使 $f(x)$ 有意义的实数 x 的集合。当一个函数的定义域及对应法则被确定后，其值域就随之确定。

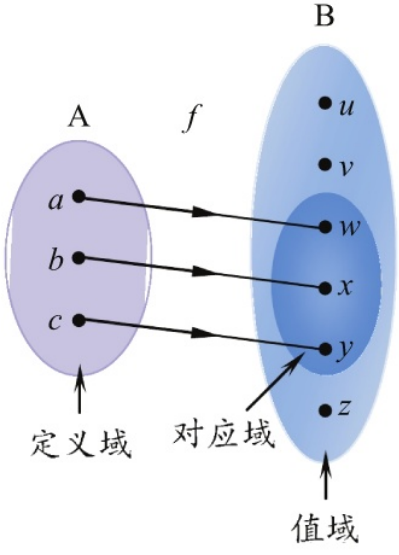


图 22-6

例题 1

设 $A=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{-3,-1,1,3,5,6,7,8,9\}$。已知函数 f: $A\to B$ 定义成 f: $x\to 2x+3$，求 f 的定义域及值域。

解

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7

$D_f=A=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$

$R_f=\{-3,-1,1,3,5,7\}$

例题 2

图 22-7 的曲线表示函数 $y=f(x)$，$-3\le x\le 2$。求 f 的定义域及值域。

解 $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ -3\le x\le 2\}$

由图像可得，$R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ 2\le y\le 18\}$。

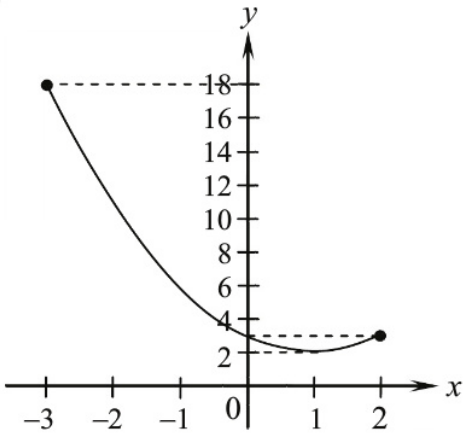


图 22-7

例题 3

求下列各函数的定义域及值域：

(a) $f(x)=\sqrt{x-3}$　　(b) $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$

解 (a) $\because$ 在 $x-3\geq 0$ 时，$\sqrt{x-3}$ 才有意义。

$\therefore$ $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\geq 3\}$ 或 $[3,\infty)$

$\because$ $\sqrt{x-3}\geq 0$，

$\therefore$ $R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\geq 0\}$ 或 $[0,\infty)$

(b) $\because$ 在 $x\neq 2$ 时，$\dfrac{1}{x-2}$ 才有意义。

$\therefore$ $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\neq 2\}$

$\because$ $\dfrac{1}{x-2}\neq 0$，

$\therefore$ $R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\neq 0\}$

补充资料

区间表示法

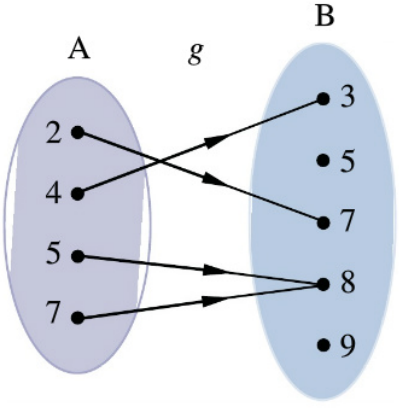
设 a 及 b 为两个实数，且 $a<b$。

区间	集合表示法
(a,b)	$\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ a<x<b\}$
$[a,b)$	$\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ a\leq x<b\}$
$(a,b]$	$\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ a<x\leq b\}$
$[a,b]$	$\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ a\leq x\leq b\}$
(a,∞)	$\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x>a\}$
$[a,\infty)$	$\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\geq a\}$
$(-\infty,a)$	$\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x<a\}$
$(-\infty,a]$	$\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\leq a\}$

随堂练习 3

1. 设 $A=\{2,4,5,7\}$ 及 $B=\{3,5,7,8,9\}$，函数 g 的定义如右图所示。求函数 g 的定义域、对应域及值域。

2. 设 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，函数 f: $A\to \boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=x^2-1$。求 f 的定义域及值域。



(第 1 题用图)

3. 右图的曲线表示函数 $y=f(x)$，$-2\le x\le 3$。求 f 的定义域及值域。

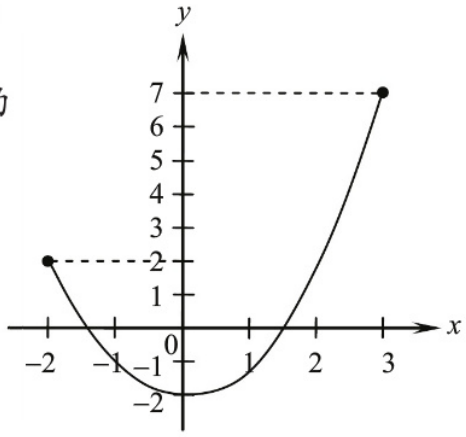
4. 求下列各函数的定义域及值域：

(a) $f(x)=-4x+5$

(b) $g(x)=x^2-1$

(c) $h(x)=\dfrac{1}{4x+7}$

(d) $k(x)=\sqrt{6-x}$

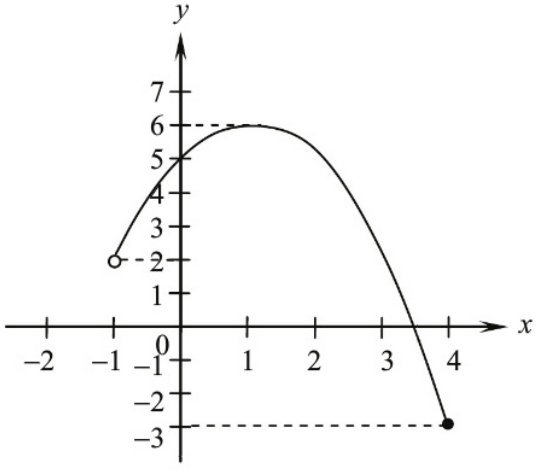


(第 3 题用图)

练习 22.2

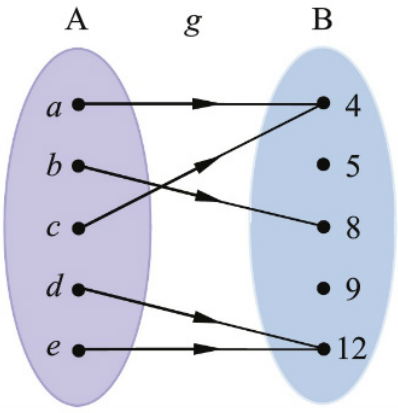
1. 设 $X=\{a, b, c, d\}$ 及 $Y=\{-1, 2, 9, 11\}$，函数 $f: X\to Y$ 定义成 $f(a)=2$，$f(b)=-1$，$f(c)=2$，$f(d)=9$。求 f 的定义域及值域。

2. 右图的曲线表示函数 $y=f(x)$，$-1<x\le 4$。求 f 的定义域及值域。



(第 2 题用图)

3. 设 $A=\{a, b, c, d, e\}$ 及 $B=\{4, 5, 8, 9, 12\}$，函数 $g: A \to B$ 的定义如右图所示。求函数 g 的定义域、对应域及值域。



(第 3 题用图)

4. 设 $A=\{-1, 0, 1, 2\}$，函数 $f: A \to \boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=3x^2-2$，求 f 的定义域及值域。
5. 设 $A=\{-1, 0, 2, 5, 11\}$，函数 $f: A \to \boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=x^2-x-2$，求 f 的定义域及值域。
6. 求下列各函数的定义域及值域：

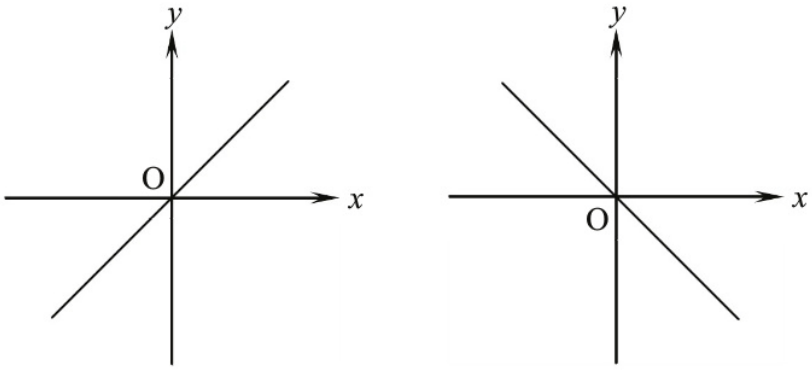
(a) $f(x)=x^3+3$　　(b) $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

(c) $h(x)=\dfrac{1}{2x+3}$　　(d) $k(x)=x^2-2x+4$

22.3 函数的图像及其变换

简易函数的图像

在直角坐标平面上，所有满足 $y=f(x)$ 的点 (x, y) 所成的图像叫做函数 f 的图像。以下为一些简易函数的图像。

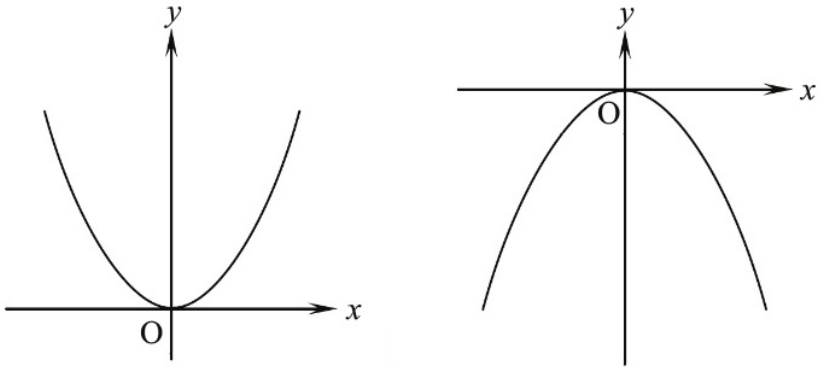


(a) $y=x$　　(b) $y=-x$

图 22-8

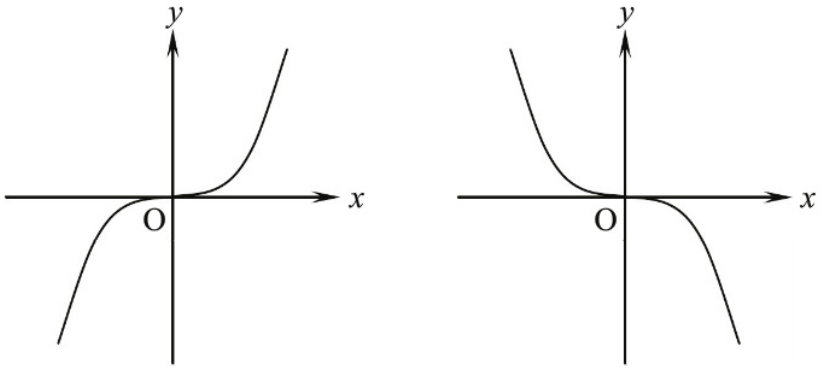
注意

任何与 y 轴平行的直线与函数的图像最多相交于一点。



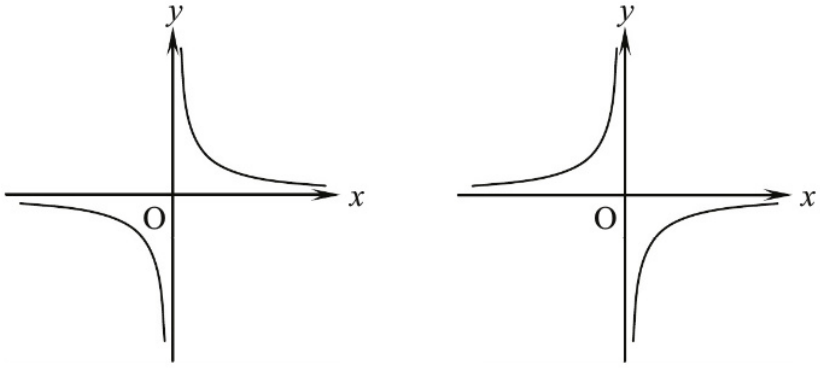
(a) $y = x^2$　　(b) $y = -x^2$

图 22-9



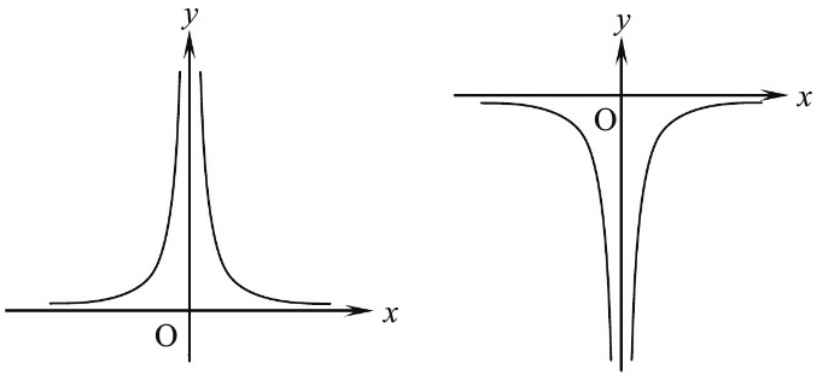
(a) $y = x^3$　　(b) $y = -x^3$

图 22-10



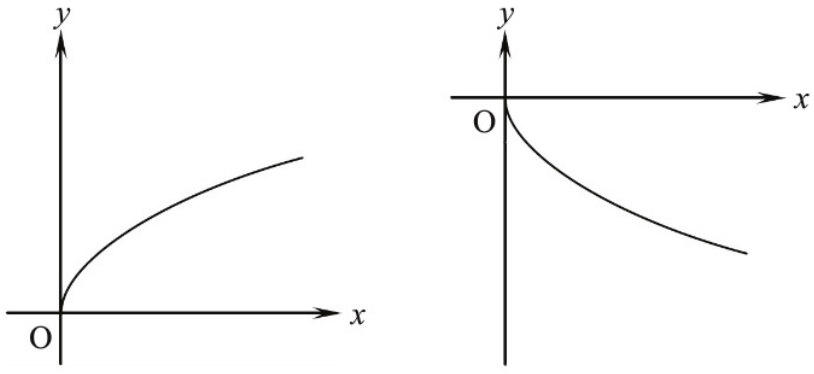
(a) $y = \frac{1}{x}$　　(b) $y = -\frac{1}{x}$

图 22-11



(a) $y=\frac{1}{x^2}$ (b) $y=-\frac{1}{x^2}$

图 22-12



(a) $y=\sqrt{x}$ (b) $y=-\sqrt{x}$

图 22-13

函数图像的变换

- 若 $k>0$，将函数 $y=f(x)$ 的图像沿垂直方向往上移 k 个单位，即可得到函数 $y=f(x)+k$ 的图像，如图 22-14 (a) 所示。
- 若 $k>0$，将函数 $y=f(x)$ 的图像沿垂直方向往下移 k 个单位，即可得到函数 $y=f(x)-k$ 的图像，如图 22-14 (b) 所示。

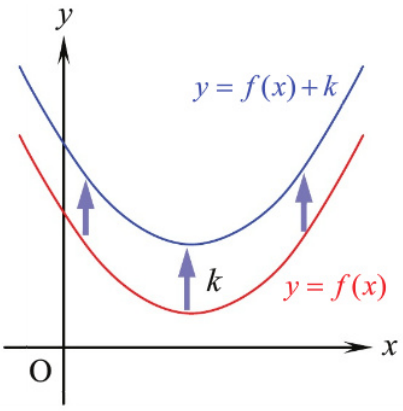


图 22-14(a)

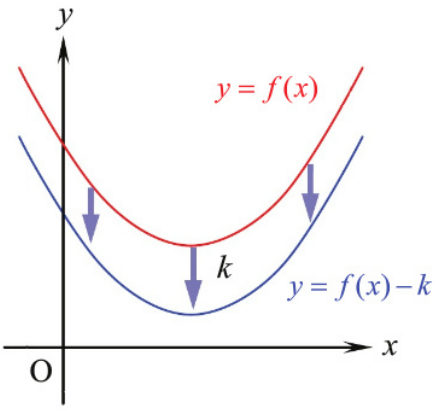


图 22-14(b)

- 若 $h>0$，将函数 $y=f(x)$ 的图像沿水平方向往右移 h 个单位，即可得到函数 $y=f(x-h)$ 的图像，如图 22-15 (a) 所示。
- 若 $h>0$，将函数 $y=f(x)$ 的图像沿水平方向往左移 h 个单位，即可得到函数 $y=f(x+h)$ 的图像，如图 22-15 (b) 所示。

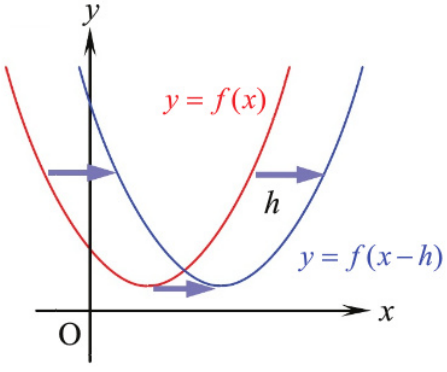


图 22-15(a)

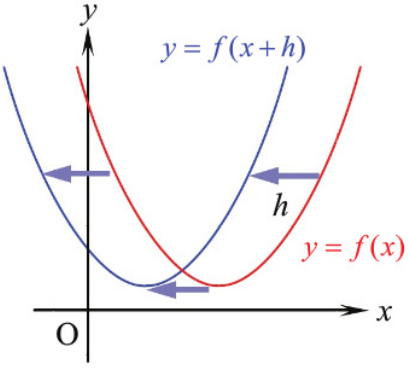


图 22-15(b)

- 将函数 $y=f(x)$ 对 x 轴作反射，即可得到函数 $y=-f(x)$ 的图像，如图 22-16 (a) 所示。
- 将函数 $y=f(x)$ 对 y 轴作反射，即可得到函数 $y=f(-x)$ 的图像，如图 22-16 (b) 所示。

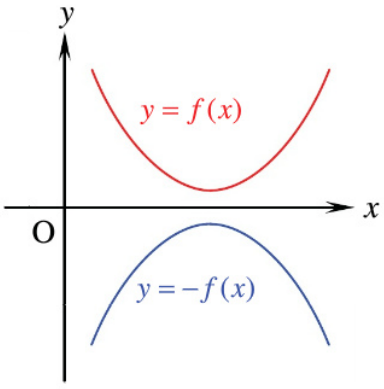


图 22-16(a)

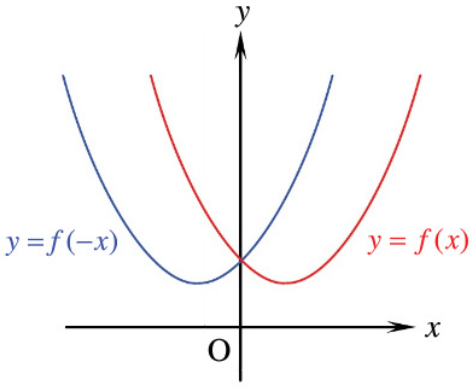
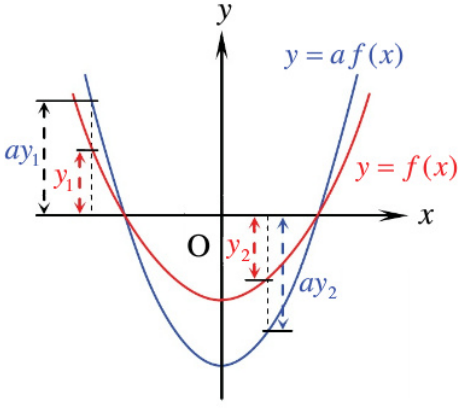
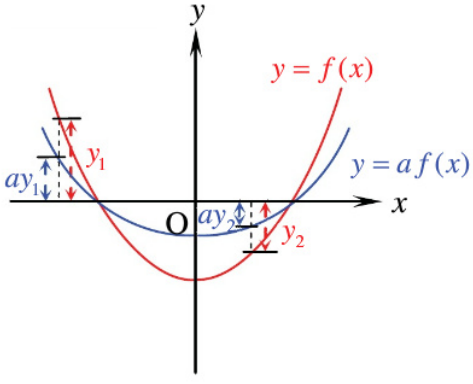


图 22-16(b)

若 $a>0$，将函数 $y=f(x)$ 的图像沿 y 轴放大（当 $a>1$ 时）或缩小（当 $0<a<1$ 时）至原来的 a 倍，即可得到函数 $y=af(x)$ 的图像，如图22-17(a)及图22-17(b)所示。



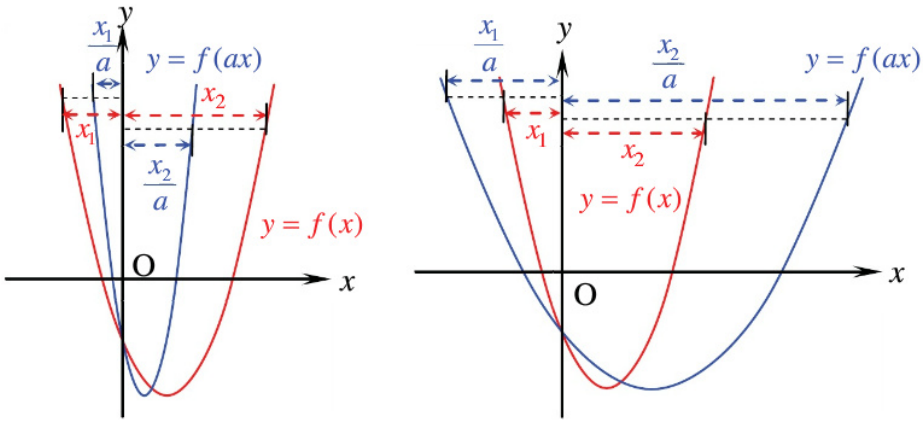
(a) $a>1$



(b) $0<a<1$

图 22-17

若 $a>0$，将函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴缩小(当 $a>1$ 时)或放大(当 $0<a<1$ 时)至原来的 $\frac{1}{a}$ 倍，即可得到函数 $y=f(ax)$ 的图像，如图22-18(a)及图22-18(b)所示。



(a) $a>1$　　(b) $0<a<1$

图 22-18

例题 1

作函数 $y=|x|$ 的图像。

解 ∵ $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

∴ $y=|x|$ 的图像如图 22-19 所示。

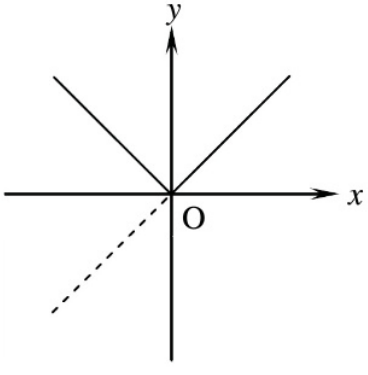


图 22-19

比较 $y=|x|$ 与 $y=x$(图22-8(a))的图像，可发现只需将直线 $y=x$ 在 x 轴下方的所有点对 x 轴作反射，而其他点保持不变，即可得到 $y=|x|$ 的图像。一般上，此方法也可应用于作函数 $y=|f(x)|$ 的图像。换言之，函数 $y=|f(x)|$ 的图像是由将函数 $y=f(x)$ 在 x 轴下方的所有点对 x 轴作反射而得。

例题 2

作函数 $y=2x^2$，$y=2(x-3)^2$ 及 $y=2(x-3)^2+2$ 的图像。

解 首先，作 $y=2x^2$ 的图像，如图 22-20 所示。
将 $y=2x^2$ 的图像往右移 3 个单位，就可得到 $y=2(x-3)^2$ 的图像。
将 $y=2(x-3)^2$ 的图像往上移 2 个单位，就可得到 $y=2(x-3)^2+2$ 的图像。

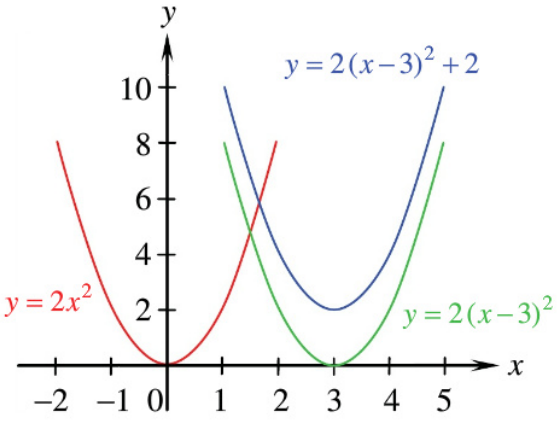


图 22-20

例题 3

作函数 $y=3x^2+6x+1$ 的图像。

解 应用配方法，将函数 $y=3x^2+6x+1$ 化成 $y=3(x+1)^2-2$。
按照以下的步骤作 $y=3x^2+6x+1$ 的图像。

$y=3x^2$

左移 1 个单位 $y=3(x+1)^2$

下移 2 个单位 $y=3(x+1)^2-2$

$y=3x^2+6x+1$ 的图像如图 22-21所示。

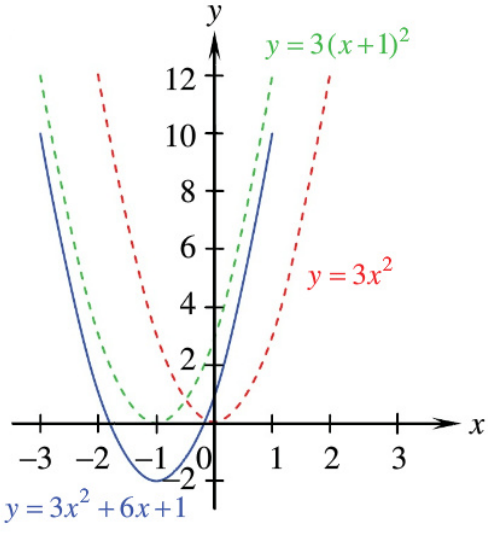


图 22-21

由例题 2 及 3 可知，在作二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像时，可使用配方法将函数化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。首先，作 $y=ax^2$ 的图像。它是一个对称于 y 轴，顶点为 $(0,0)$ 的抛物线。若 $a>0$，抛物线的开口向上，如图 22-9 (a) 所示；若 $a<0$，抛物线的开口向下，如图 22-9 (b) 所示。

将抛物线 $y=ax^2$ 往右移 $(h>0)$ 或往左移 $(h<0)$，使得其对称轴移至直线 $x=h$ 处，即可得到 $y=a(x-h)^2$ 的图像。再将抛物线 $y=a(x-h)^2$ 往上移 $(k>0)$ 或往下移 $(k<0)$，使得其顶点移至点 (h,k)，即可得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像，如图 22-22 所示。在熟练这些作图步骤后，只需找出抛物线的对称轴及顶点，并判断其开口方向，便可直接作出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像。

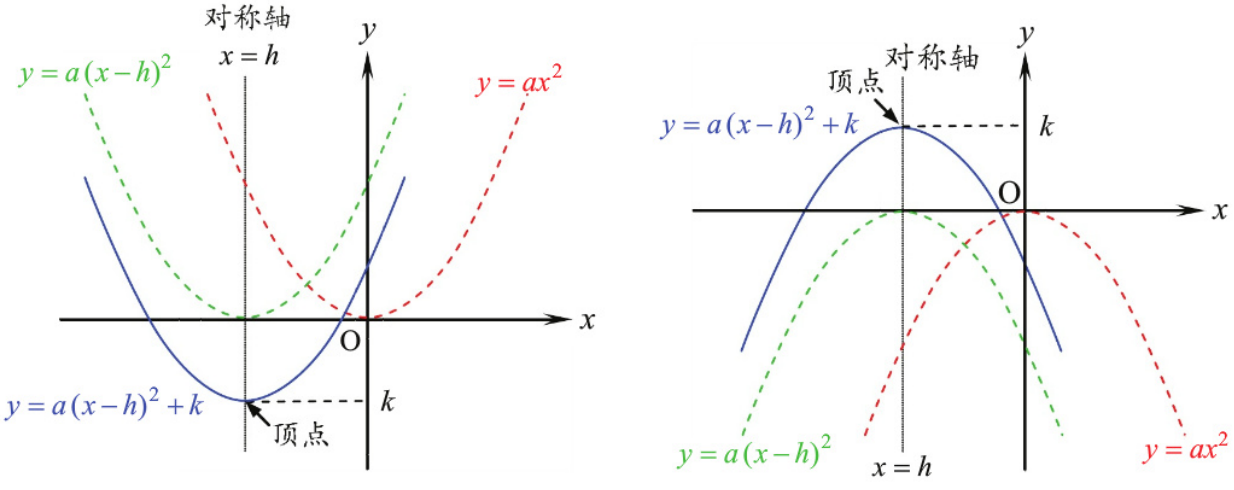


图22-22

例题 4

作函数 $y=-\dfrac{3}{x-3}$ 的图像。

解

$$y=\frac{3}{x}$$

关 x 轴作反射

$$y=-\frac{3}{x}$$

向右移 3 个单位

$$y=-\frac{3}{x-3}$$

函数 $y=-\dfrac{3}{x-3}$ 的图像如图 22-23所示。

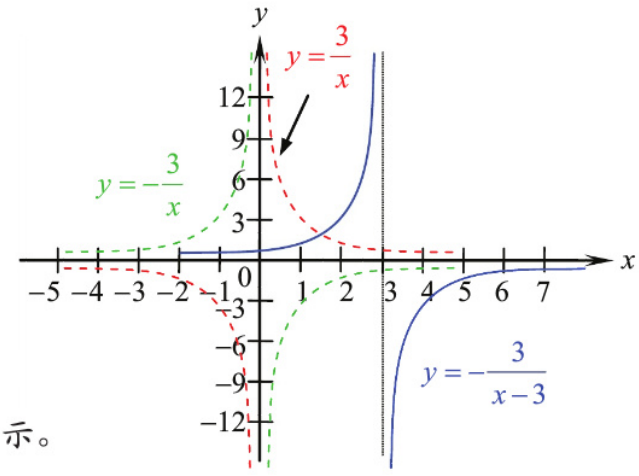


图 22-23

随堂练习 4

求下列各抛物线的对称轴及顶点，并作其图像 (1 至 2):

1. $y=2x^2+8x+11$

2. $y=-3x^2+18x-7$

作下列各函数的图像 (3至4):

3. $y=\dfrac{4}{(x+2)^2}$

4. $y=\sqrt{x-1}+3$

练习 22.3

求下列各抛物线的对称轴及顶点，并作其图像 (1至4):

1. $y=2x^2+4x+5$
2. $y=-3x^2+12x-4$
3. $y=4x^2-20x+19$
4. $y=-3x^2-6x-4$

作下列各函数的图像 (5至12):

5. $y=(x+2)^3-5$
6. $y=\sqrt{x-5}$
7. $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$
8. $y=-\dfrac{1}{2(x-1)^2}$
9. $y=3\sqrt{x+2}-4$
10. $y=\dfrac{4}{2x+3}$
11. $y=\begin{cases}4x+9, & x\le 0\\ 9-2x, & x>0\end{cases}$
12. $y=\begin{cases}x, & x<-1\\ \sqrt{x+1}, & x\ge -1\end{cases}$
13. 作函数 $f(x)=x^2-6x+12$，$-2\le x\le 8$ 的图像，并求其定义域及值域。
14. 作函数 $g(x)=-x^2-4x-7$，$-2\le x\le 5$ 的图像，并求其定义域及值域。
15. 作函数 $f(x)=-x^2+2x+10$ 的图像，并求其定义域及值域。
16. 作函数 $y=\sqrt{x}$ 的图像，并将图像按下列步骤作变换。在同一直角坐标系上作每个步骤所得的图像，并写出相对应的函数:

    第一步：往左移 4 个单位;

    第二步：沿 x 轴放大至原来的 2 倍;

    第三步：对 y 轴作反射;

    第四步：往下移 3 个单位;

    第五步：沿 y 轴缩小至原来的一半。

22.4 合成函数

设A、B及C是三个非空集合，f: A→B及g : B→C是两个函数，A中的任意元素x，在f之下映到B中的$f(x)$，再于g之下映到C中的$g(f(x))$。换言之，A中的x在经过两次映射后，映到C中的$g(f(x))$，即

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

这两次的映射的结合是一个由A至C的函数，这个函数叫做f与g的合成函数，记作$g \circ f$。在定义合成函数$g \circ f$时，f的值域必须包含于g的定义域内，即$R_f \subseteq D_g$。

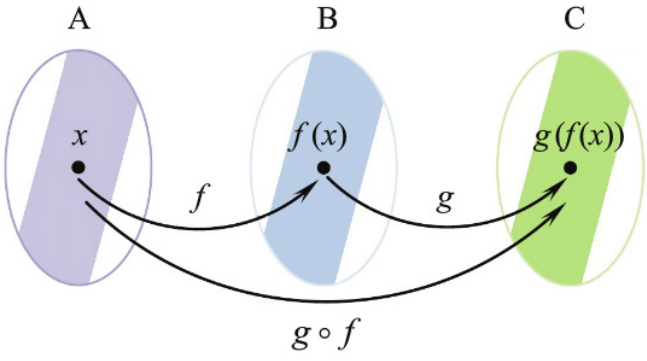


图 22-24

注意

$D_{g \circ f} = D_f$

$R_{g \circ f} \subseteq R_g$

补充资料

对于所有自然数n，定义

$f^{n+1} = f \circ f^n$。

例题 1

设 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$f(x)=x^2+1$ 及 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$g(x)=2x+1$。求 $(g \circ f)(x)$ 及 $(f \circ g)(x)$。

解

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\left(f(x)\right) \\ &= g\left(x^2+1\right) \\ &= 2\left(x^2+1\right)+1 \\ &= 2x^2+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\left(g(x)\right) \\ &= f(2x+1) \\ &= (2x+1)^2+1 \\ &= 4x^2+4x+2\end{aligned}$$

注意

由例题 1 可知，一般上 $f \circ g \neq g \circ f$。

例题 2

已知函数 $f: x \to x+3$，$g: x \to 2x-1$ 及 $h: x \to x^2$。求合成函数 $f \circ g$ 及 $g \circ h$。据此，求合成函数 $(f \circ g) \circ h$ 及 $f \circ (g \circ h)$。

解

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\left(g(x)\right) \\ &= f(2x-1) \\ &= (2x-1)+3 \\ &= 2x+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= g\left(h(x)\right) \\ &= g\left(x^2\right) \\ &= 2x^2-1\end{aligned}$$

(续) $[(f\circ g)\circ h](x)=(f\circ g)(h(x))$

$$=(f\circ g)(x^2)$$

$$=2x^2+2$$

$$[f\circ(g\circ h)](x)=f((g\circ h)(x))$$

$$=f(2x^2-1)$$

$$=(2x^2-1)+3$$

$$=2x^2+2$$

补充资料

若 $f\circ(g\circ h)$ 有意义，则 $(f\circ g)\circ h$ 也有意义，且 $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$。因此，$f\circ(g\circ h)$ 可简记作 $f\circ g\circ h$。

例题 3

若函数 f 及 g 分别定义成 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x^2-4$ 及 $g:\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}$，$g(x)=\sqrt{x}$。

(a) 求函数 $f\circ g$，其定义域及值域。

(b) 验证函数 $g\circ f$ 是否存在。

解 (a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$$=f(\sqrt{x})$$

$$=(\sqrt{x})^2-4$$

$$=x-4$$

$D_{f\circ g}=D_g=[0,\infty)$

当 $x\geq 0$ 时，$x-4\geq -4$

$\therefore\ R_{f\circ g}=[-4,\infty)$

(b) $R_f=[-4,\infty)$，$D_g=[0,\infty)$

$\because\ R_f\not\subseteq D_g$

$\therefore\ g\circ f$ 不存在。

随堂练习 5

1. 设 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$f(x)=2x+3$ 及 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$g(x)=5-x$。求 $(g \circ f)(x)$ 及 $(f \circ g)(x)$。
2. 设 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$f(x)=x^2-2x+3$ 及 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$g(x)=3x-4$。求
   (a) $g \circ f$ 及 $f \circ g$；
   (b) $g(f(2))$，$f(g(2))$，$(g \circ f)(2)$ 及 $(f \circ g)(2)$。
3. 设 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$f(x)=4-x^2$ 及 $g: \{x \mid x \le 4\} \to \boldsymbol{R}$，$g(x)=\sqrt{4-x}$。分别验证 $f \circ g$ 及 $g \circ f$ 是否存在。

例题 4

已知 $f: x \to 2x+1$。求另一函数 g 使得 $f \circ g: x \to 6x+11$。

解

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 6x+11 \\
f(g(x)) &= 6x+11 \\
2g(x)+1 &= 6x+11 \\
2g(x) &= 6x+10 \\
g(x) &= 3x+5
\end{aligned}
$$

例题 5

一函数 f 的定义是 $f: x \to x-3$。求另一函数 g 使得 $g \circ f: x \to x^2-6x+11$。

解 1

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= x^2-6x+11 \\
g(x-3) &= x^2-6x+11
\end{aligned}
$$

(续) 设 $y=x-3$

$x=y+3$

$$g(y)=(y+3)^2-6(y+3)+11$$
$$=y^2+2$$

$\therefore\ g(x)=x^2+2$

解 2 $(g\circ f)(x)=x^2-6x+11$

$g(x-3)=(x-3)^2+2$

$\therefore\ g(x)=x^2+2$

随堂练习 6

1. 已知 $f: x\to 2x+1$ 及 $f\circ g: x\to 2x-1$。求函数 g。
2. 一函数 f 的定义是 $f: x\to 5-x$。求另一函数 g 使得 $g\circ f: x\to x^2-10x+8$。
3. 一函数 f 的定义是 $f: x\to 2x-3$。求另一函数 g 使得 $f\circ g: x\to 4x^2-14x+9$。

练习 22.4

1. 已知函数 f 及 g。求 $f\circ g$ 及 $g\circ f$：
   (a) $f: x\to 3x$，$g: x\to x-1$
   (b) $f: x\to 5x$，$g: x\to \frac{1}{5}x$
   (c) $f: x\to x^2$，$g: x\to x+2$
   (d) $f: x\to 2x+1$，$g: x\to x^2-2$
   (e) $f: x\to 3x^2-5x+2$，$g: x\to 4-x$

2. 设函数 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 及 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 分别定义成 $f(x) = x^2 - 3$ 及 $g(x) = x + 5$。求
   (a) $g \circ f$ 及 $f \circ g$；
   (b) $g(f(-2))$，$f(g(-2))$，$(g \circ f)(-2)$ 及 $(f \circ g)(-2)$。
3. 设函数 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 及 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 分别定义成 $f(x) = 3x - 2$ 及 $g(x) = x + 1$。求
   (a) $f \circ g$
   (b) $(f \circ g)(3)$，$(f \circ g)(-1)$ 及 $(f \circ g)\left(\frac{1}{4}\right)$
   (c) $g \circ f$
   (d) $(g \circ f)(2)$，$(g \circ f)(-2)$ 及 $(g \circ f)(0)$
   (e) f^2
   (f) g^2
4. 设函数 $g: \{x \mid x \in \boldsymbol{R}, x \neq 1\} \to \boldsymbol{R}$ 定义成 $g: x \to \dfrac{x+1}{x-1}$。求 $g^2(x)$ 及 $g^4(x)$。据此，求 $g^{33}(x)$ 及 $g^{50}(x)$。
5. 设 $f: x \to 3x - 2$ 及 $g: x \to kx + 2$ 都是由 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数。若 $g \circ f = f \circ g$，求 k 的值。
6. 已知函数 $f: x \to x + 2$，求函数 g 使得 $f \circ g: x \to \dfrac{3-2x}{x+5}$。
7. 已知函数 $f: x \to 3x - 1$。求函数 g 使得 $f \circ g: x \to 6x^2 - 3x + 2$。
8. 已知函数 $g(x) = x - 2$。求函数 h 使得 $(h \circ g)(x) = 2x^2 - 8x + 5$。
9. 已知函数 g 及函数 $f \circ g$。求函数 f：
   (a) $g: x \to 2x - 4$ 及 $f \circ g: x \to 4x^2 - 16x + 1$
   (b) $g: x \to x - 3$ 及 $f \circ g: x \to x^2 - 5x + 3$
10. 已知函数 $f: x \to x - 3$ 及函数 $g \circ f: x \to x^2 - 6x + 7$，求函数 $f \circ g$。

22.5 一对一函数、映成函数、一一映成函数

一对一函数

设 f: A → B 是一个函数。若 B 中的任意元素在 A 中最多只有一个原像，我们说函数 f 是一对一的，或 f 是一对一函数。

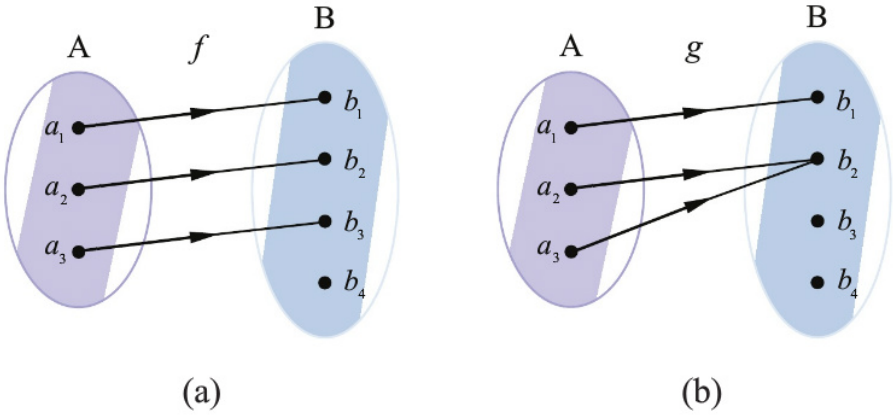


图 22-25

如图 22-25所示，函数f: A → B的对应域B 中的任意元素在定义域A 中最多只有一个原像，所以函数f是一对一的；而函数g: A → B的对应域B 中的元素b_2在g之下有两个原像a_2及a_3，所以函数g不是一对一的。

补充资料

函数 $y=f(x)$ 为一对一函数，若且唯若任意与 x 轴平行的直线与函数的图像最多相交于一点。

例题 1

判断下列由$\boldsymbol{R}$映到$\boldsymbol{R}$的函数是否为一对一函数。

(a) $f(x)=2x$　　(b) $f(x)=|x|$

(c) $f(x)=x^3+1$　　(d) $f(x)=x^2-4$

解 (a) $f(x)=2x$是一对一函数。

(b) $f(x)=|x|$不是一对一函数，因为1有两个原像-1及1。

(c) $f(x)=x^3+1$是一对一函数。

(d) $f(x)=x^2-4$不是一对一函数，因为0有两个原像-2及2。

映成函数

若函数f: A $\rightarrow$ B 的对应域 B 中的任意元素在f之下都有原像，我们说函数f是映成的，或f是映成函数。

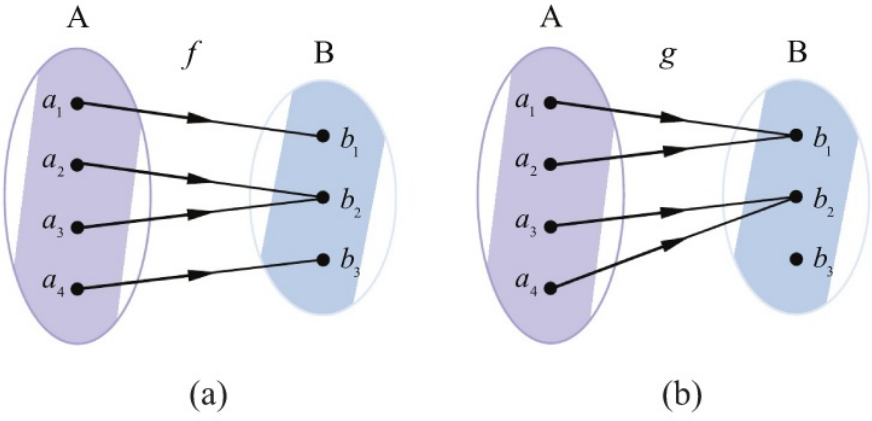


图 22-26

如图 22-26所示，函数 f : A $\rightarrow$ B 的对应域 B 中的任意元素在f之下都有原像，所以f是映成的；而函数 g : A $\rightarrow$ B 的对应域 B 中的元素b_3在 g 之下没有原像，所以 g 不是映成的。

例题 2

判断下列由$\boldsymbol{R}$映到$\boldsymbol{R}$的函数是否为映成函数。

(a) $f(x)=2x$　　(b) $f(x)=x-1$

(c) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$　　(d) $f(x)=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$

解 (a) $f(x)=2x$ 是映成函数。

(b) $f(x)=x-1$ 是映成函数。

思考题

试作例题2中各函数的图像。

(c) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 不是映成函数。

例如，2 在 f 之下没有原像。

(d) $f(x)=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$ 不是映成函数。

例如，$-\dfrac{1}{2}$ 在 f 之下没有原像。

思考题

在例题 2(c) 中，若函数 f 的定义域为 $\boldsymbol{R}$，对应域为 $\{-1,0,1\}$，则 f 是否为映成函数?

一一映成函数

若函数 f: A → B 既是一对一函数，也是映成函数，我们说 f 是一一映成的，或 f 是一一映成函数，如图 22-27所示。

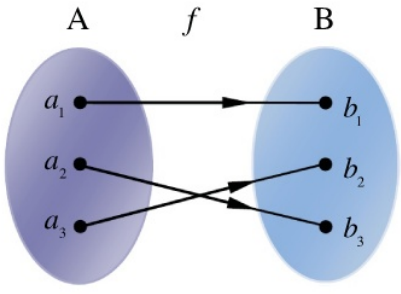


图 22-27

例题 3

判断下列各函数是否为一一映成函数。

(a) $f:\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2x$

(b) $f:\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2$

(c) $f:\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^+\cup\{0\},\ f(x)=x^2$

(d) $f:\ \boldsymbol{R}^+\cup\{0\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2$

(e) $f:\ \boldsymbol{R}^+\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}^+\cup\{0\},\ f(x)=x^2$

解 (a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=2x$ 是一一映成函数。

(b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x^2$ 不是一一映成函数，因为它不是一对一的。

(c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}$，$f(x)=x^2$ 不是一一映成函数，因为它不是一对一的。

(d) $f:\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x^2$ 不是一一映成函数，因为它不是映成的。

(e) $f:\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}$，$f(x)=x^2$ 是一一映成函数。

注意

在例题 3(b) 中，由 f 不是映成函数也可以推论出 f 不是一一映成函数。

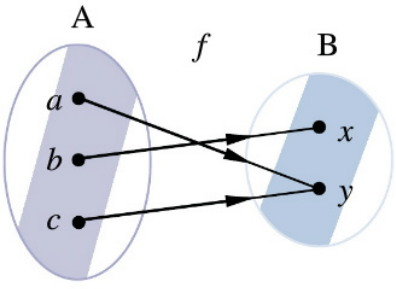
思考题

例题3(c)中的函数是否是映成的?

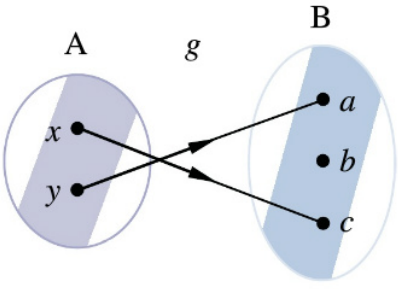
随堂练习 7

判断下列各函数是否为一对一函数或映成函数。

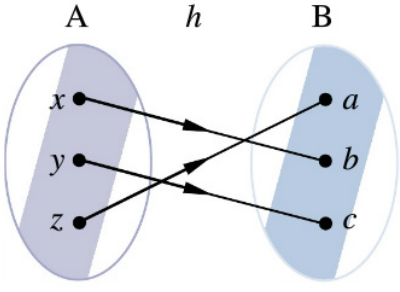
(a)



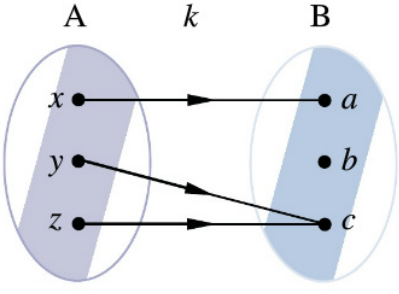
(b)



(c)



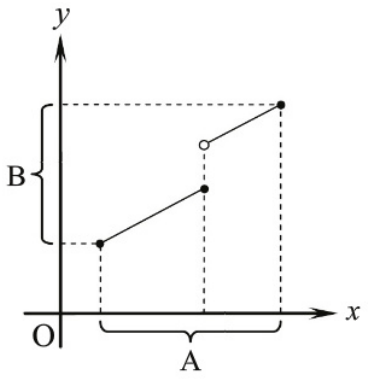
(d)



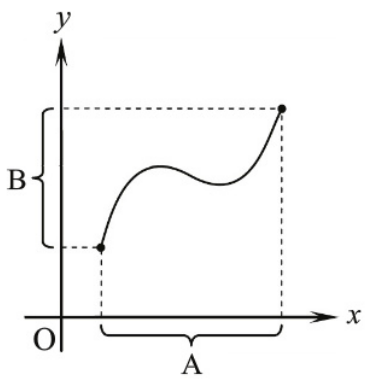
练习 22.5

1. 设 $A=\{1,2,3\}$，且 $f:A\to A$ 定义成 $f:1\to1$，$f:2\to3$，$f:3\to2$。判断 f 是否为一对一函数或映成函数。
2. 设 $A=\{a,b,c,d\}$ 及 $B=\{x,y,z\}$，且 $f:A\to B$ 定义成 $f:a\to y$，$b\to x$，$c\to z$，$d\to y$。判断 f 是否为一对一函数或映成函数。
3. 设函数 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 定义成 $g(x)=2x+1$。判断 g 是否为一对一函数或映成函数。
4. 设函数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=2x^3-3$。判断 f 是否为一对一函数或映成函数。
5. 设函数 $f:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$ 定义成 $f(x)=\dfrac{1}{x}$。判断 f 是否为一对一函数或映成函数。
6. 设函数 $f:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$ 定义成 $f(x)=\sqrt{x}$。判断 f 是否为一对一函数或映成函数。
7. 判断下列各对应是否为函数。若是，说明它是否为一对一、映成或一一映成函数。
   (a) $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y,z\}$，$f:A\to B$，$f:a\to x$，$b\to x$，$c\to y$
   (b) $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y,z\}$，$g:A\to B$，$g:a\to x$，$b\to y$，$c\to z$
   (c) $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y\}$，$h:A\to B$，$h:a\to x$，$b\to y$，$c\to y$
   (d) $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y\}$，$k:A\to B$，$k:a\to x$，$a\to y$，$c\to y$
   (e) $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y\}$，$f:A\to B$，$f:a\to x$，$a\to y$，$b\to x$，$c\to y$
   (f) $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{u,v,x,y,z\}$，$g:A\to B$，$g:a\to u$，$b\to v$，$c\to x$，$d\to y$
8. 判断下列由 A 映到 B 的函数是否一对一或映成。

(a)



(b)



22.6 反函数

若f: A → B 是一个一一映成函数，则存在一个函数g: B → A 存在，使得若 $y=f(x)$，则 $g(y)=x$。此函数 g 就叫做 f 的反函数，记作 f^{-1}。

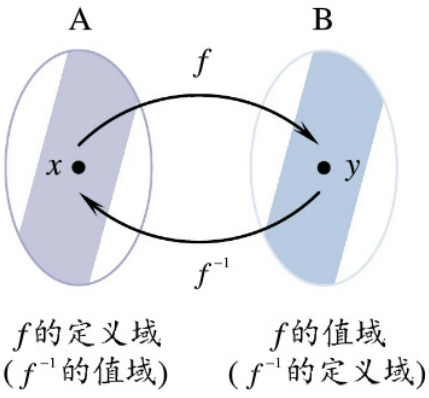


图 22-28

由图 22-28，可得以下的结论：

$$x \xrightarrow{f} y=f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x=f^{-1}\big(f(x)\big)=f^{-1}(y)$$

或

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x=f^{-1}(y) \xrightarrow{f} y=f\big(f^{-1}(y)\big)=f(x)$$

例题 1

设函数f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=2x+4$，求f 的反函数。

解 1 设

$$\begin{aligned} y &= f^{-1}(x) \\ f(y) &= x \\ 2y+4 &= x \\ y &= \frac{x-4}{2} \\ \therefore\ f^{-1}(x) &= \frac{x-4}{2} \end{aligned}$$

解 2 设 $y=2x+4$

$$x=\frac{y-4}{2}$$

$$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}$$

例题 2

判断下列各函数中，哪些有反函数。若有，求其反函数。

(a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$f(x)=x^2$

(b) $g:\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}$，$g(x)=x^2$

(c) $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$h(x)=|x|-1$

(d) $k:\boldsymbol{R}\backslash\{3\}\to\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$，$k(x)=\dfrac{2}{x-3}$

解 (a) 由于1在f之下有两个原像-1及1，f不是一一映成函数，所以它没有反函数。

(b) $g:\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}$，$g(x)=x^2$ 是一一映成函数，所以g有反函数。

设 $y=f^{-1}(x)$

$$f(y)=x$$

$$y^2=x$$

$$y=\sqrt{x}$$

$$\therefore\ g^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

(c) 由于0在h之下有两个原像-1及1，h不是一一映成函数，所以它没有反函数。

(d) $k: \boldsymbol{R}\setminus\{3\}\to\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$，$k(x)=\dfrac{2}{x-3}$ 是一一映成函数，所以 k 有反函数。

设 $y=f^{-1}(x)$

$f(y)=x$

$\dfrac{2}{y-3}=x$

$\therefore\quad k^{-1}(x)=\dfrac{3x+2}{x}$，$x\neq 0$

例题 3

设函数 f 及 g 分别定义成 $f: x\to 3x+2$ 及 $g: x\to 2x-5$。求

(a) $f^{-1}\circ g^{-1}$　　(b) $g^{-1}\circ f^{-1}$

(c) $(f\circ g)^{-1}$　　(d) $(g\circ f)^{-1}$

解 设 $y=f^{-1}(x)$

$x=f(y)=3y+2$

$\therefore\quad f^{-1}(x)=y=\dfrac{x-2}{3}$

设 $y=g^{-1}(x)$

$x=g(y)=2y-5$

$\therefore\quad g^{-1}(x)=y=\dfrac{x+5}{2}$

补充资料

若一实数函数的对应域未注明时，只要函数是一对一的，我们就约定其反函数存在，且反函数的定义域为原函数的值域。

(续) (a) $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(x)=f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)$

$$=f^{-1}\left(\frac{x+5}{2}\right)$$

$$=\frac{\frac{x+5}{2}-2}{3}$$

$$=\frac{x+1}{6}$$

(b) $\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)=g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$

$$=g^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right)$$

$$=\frac{\frac{x-2}{3}+5}{2}$$

$$=\frac{x+13}{6}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g\left(f(x)\right)\\&=g(3x+2)\\&=2(3x+2)-5\\&=6x-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f\left(g(x)\right)\\&=f(2x-5)\\&=3(2x-5)+2\\&=6x-13\end{aligned}$$

(c) 设 $y=(f\circ g)^{-1}(x)$

$x=(f\circ g)(y)=6y-13$

$\therefore\ (f\circ g)^{-1}(x)=y=\dfrac{x+13}{6}$

(d) 设 $y=(g\circ f)^{-1}(x)$

$x=(g\circ f)(y)=6y-1$

$\therefore\ (g\circ f)^{-1}(x)=y=\dfrac{x+1}{6}$

注意

在例题 3 中，

$(f\circ g)^{-1}(x)=\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)$

$(g\circ f)^{-1}(x)=\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(x)$

补充资料

若 $(g\circ f)^{-1}$ 及 $f^{-1}\circ g^{-1}$ 都存在，则 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。

随堂练习 8

1. 求下列各函数的反函数：

(a) $f:x\to 7x-3$

(b) $g:x\to \dfrac{1}{2}x+9$

(c) $h:x\to \dfrac{x+1}{x-8}$，$x\neq 8$

(d) $k:x\to \dfrac{x-1}{2x}$，$x\neq 0$

2. 已知函数 $f:x\to 2x+1$ 及 $g:x\to \dfrac{1}{x-4}$，$x\neq 4$。求

(a) f^{-1}

(b) g^{-1}

(c) $f^{-1}\circ g^{-1}$

(d) $g^{-1}\circ f^{-1}$

(e) $(f\circ g)^{-1}$

(f) $(g\circ f)^{-1}$

反函数的图像

例题 4

在同一直角坐标系上，作函数f及其反函数f^{-1}的图像：

(a) $f(x)=3x-2$　　(b) $f(x)=x^3$

解 (a) 设 $y=f^{-1}(x)$

$x=f(y)=3y-2$

$\therefore\ f^{-1}(x)=y=\dfrac{x+2}{3}$

$f(x)=3x-2$ 及 $f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{3}$ 的图像如图22-29所示。

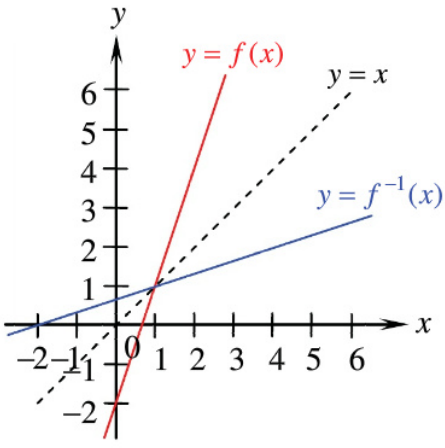


图 22-29

(b) 设 $y=f^{-1}(x)$

$x=f(y)=y^3$

$\therefore\ f^{-1}(x)=y=\sqrt[3]{x}$

$f(x)=x^3$ 及 $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ 图像如图 22-30 所示。

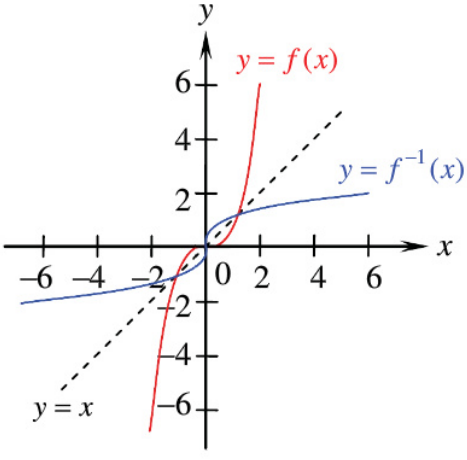


图 22-30

观察以上的例子，可得

在同一直角坐标系上，函数的图像与其反函数的图像对称于直线 $y=x$。

随堂练习 9

已知函数 g：$\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}\to\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$，$g(x)=x^{2}$。在同一直角坐标系上，作函数 g 及其反函数 g^{-1} 的图像。

练习 22.6

1. 求下列各函数的反函数：

(a) $f:x\to 2x-7$

(b) $g:x\to\dfrac{1}{x-2}$，$x\neq 2$

(c) $h:x\to\dfrac{2x-5}{x-2}$，$x\neq 2$

(d) $k:x\to\dfrac{3x}{x-4}$，$x\neq 4$

2. 已知 $f:x\to\dfrac{160}{ax+b}$，$f(5)=8$ 及 $f(9)=10$。求

(a) a 及 b 的值；

(b) $f^{-1}(16)$。

3. 已知 $f:x\to\dfrac{a}{x+b}$，$f(3)=-1$ 及 $f(-9)=3$。求

(a) a 及 b 的值；

(b) x 的值使得 $f(x)=f^{-1}(x)$。

4. 已知函数 $g: x \to \frac{6}{x} - 3$，$x \neq 0$。求

(a) g^{-1}；

(b) x 的值使得 $g^{-1}(x) = x - 2$。

5. 已知函数 $f: x \to ax + b$ 及 $f^2: x \to 4x + 12$。若 $a > 0$，求

(a) a 及 b 的值；

(b) $f^{-1}(3)$。

6. 已知 $f: x \to 3x - 2$ 及 $g: x \to \frac{x}{x+4}$，$x \neq -4$。求

(a) f^{-1}　　(b) g^{-1}　　(c) $f^{-1} \circ g^{-1}$

(d) $g^{-1} \circ f^{-1}$　　(e) $(f \circ g)^{-1}$　　(f) $(g \circ f)^{-1}$

7. 已知函数 $f: \boldsymbol{R} \setminus \{2\} \to \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$，$f: x \to \frac{1}{x-2}$。

(a) 求 f^{-1}。

(b) 在同一直角坐标系上，作 f 及 f^{-1} 的图像。

8. 已知函数 $f: x \to 2\sqrt{x+4}$，$x \geq -4$，

(a) 求 f^{-1}；

(b) 在同一直角坐标系上，作 f 及 f^{-1} 的图像。

总复习题22

1. 判断下列由集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 到集合 $B = \{a, b, c, d\}$ 的对应是否为函数：

(a) $1 \to a$，$2 \to c$，$4 \to b$

(b) $1 \to c$，$2 \to d$，$3 \to b$，$4 \to a$

(c) $1 \to c$，$2 \to c$，$3 \to b$，$4 \to b$

(d) $1 \to a$，$2 \to c$，$2 \to b$，$4 \to d$

(e) $1 \to c$，$2 \to b$，$3 \to d$，$4 \to c$，$4 \to a$

2. 若函数 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & x<-3 \\ 2x^2+4, & -3 \le x < 2 \\ -2x+9, & x \ge 2 \end{cases}$，求

(a) $f(-4)$　　(b) $f(0)$　　(c) $f(2)$　　(d) $f(3)$

3. 求下列各函数的定义域及值域：

(a) $f: 1 \to 3$，$2 \to 5$，$4 \to 8$

(b) $g: 2 \to 4$，$4 \to 5$，$5 \to 7$，$6 \to 9$

(c) $h: 1 \to 3$，$2 \to 5$，$3 \to 6$，$4 \to 8$

4. 下表所示为一函数 f：

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-22	-3	4	5	6

(a) 求函数的定义域及值域；

(b) 以图像表示此函数；

(c) 判断 f 的反函数是否存在。

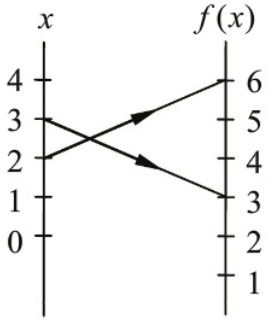
5. 如右图所示，设函数 $f: x \to ax+b$。求 $f(4)$ 及 $f^{-1}(5)$ 的值。

6. 已知函数 $f: x \to x^2-x+1$，$-1 \le x \le 3$，求其值域。

7. 设函数 $f: x \to 2x^2-4x+3$。

(a) 若 $D_f = \boldsymbol{R}$，求 f 的值域；

(b) 若 $D_f = \{x \mid x \ge 3\}$，求 f 的值域。



(第 5 题用图)

8. 求下列各函数的定义域及值域：

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　(b) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

(c) $f(x)=x^2+4x+7$　　(d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$

9. 求下列各函数的定义域：

(a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$　　(b) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

(c) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2-5x+2}$　　(d) $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

10. 作下列各函数的图像：

(a) $f(x)=2x^2-5x+9$　　(b) $f(x)=-3x^2+6x+11$

(c) $f(x)=3x^2+12x+10$　　(d) $f(x)=-5x^2+15x-2$

(e) $f(x)=2x^3-7$　　(f) $f(x)=\sqrt{3x-9}$

(g) $f(x)=\dfrac{4}{2x+11}$　　(h) $f(x)=\dfrac{2x+7}{x-1}$

(i) $f(x)=2\sqrt{x+5}-4$　　(j) $f(x)=\dfrac{1}{(2x-3)^2}$

(k) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$　　(l) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\leq 1\\ x^2+2x-3, & x>1\end{cases}$

11. 已知函数 $f:x\to 2x^2$ 及 $g:x\to 3x-4$。求 m 的值使得 $(f\circ g)(m)=(g\circ f)(m)$。

12. 已知函数 $f:x\to x^2+2x-3$ 及 $g:x\to 3x-4$。若 $(f\circ g)(k)=(g\circ f)(k)$，求 k 的值。

13. 已知 $f(x)=3x+1$，$(f\circ g)(x)=6x^2-9x+4$，求 $g(x)$。

14. 已知 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$，$x\neq 0$。若 $(f\circ g)(x)=x$，求 $g(x)$。

15. 一函数 f 定义成 $f:x\to x-3$。求另一函数 g 使得 $g\circ f:x\to 4x^2-20x+25$。

16. 设 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 定义成 $f(x)=\begin{cases}-2, & x\leq -3\\ |x|-2x, & -3<x<3\\ 2x-1, & x\geq 3\end{cases}$。求 $(f\circ f\circ f)(-1000)$。

17. 设函数 $f:\mathrm{A}\to\boldsymbol{R}$ 定义成 $f:x\to 2x^2$。判断当 A 为下列集合时，f 是否为一对一函数。

(a) $\mathrm{A}=\{x\mid 0\leq x<6\}$　　(b) $\mathrm{A}=\{x\mid x<0\}$

(c) $\mathrm{A}=\{x\mid -2\leq x<2\}$　　(d) $\mathrm{A}=\{x\mid x>3\}$

18. 判断下列各函数是否一对一或映成。

(a) $f:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}$，$f:x\to|x|-2$

(b) $f:\boldsymbol{R}\backslash\{2\}\to\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$，$f:x\to\dfrac{x}{x-2}$

(c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}$，$f:x\to|x|$

19. 设 $A=\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ 及 $B=\boldsymbol{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$，函数 $f:A\to B$ 定义成 $f(x)=\frac{x-3}{2x+1}$。求

(a) $f^{-1}(-2)$　　(b) $f^{-1}(0)$　　(c) $f^{-1}(3)$

20. 设函数 $f:\boldsymbol{R}^{+}\to\boldsymbol{R}^{+}$ 定义成 $f(x)=x^2+2x+1$。求 $f^{-1}(4)$ 及 $f^{-1}(9)$。

21. 一函数 f 定义成 $f:x\to\frac{x}{2}+1$。若 $g\circ f^{-1}:x\to 4x^2-8x+7$，求函数 g。

22. 已知函数 $f:x\to 3x^2+5x+9$，$x\le a$。求 a 的最大值使得 f 的反函数存在。

23. 设函数 f 及 g 的分别定义成 $f:x\to 5x+3$ 及 $g:x\to 2x-7$。求

(a) $f\circ g$　　(b) $(f\circ g)^{-1}$　　(c) $g^{-1}\circ f^{-1}$

24. 已知函数 $f:x\to 2x+3$ 及 $g:x\to\frac{3-x}{2x+5}$，$x\ne-\frac{5}{2}$。求

(a) $f\circ g$　　(b) f^{-1}　　(c) g^{-1}

验证 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$。

25. 已知函数 $f:x\to\sqrt{x}$，$x\ge 0$ 及 $g:x\to x^3$。求

(a) $g\circ f$　　(b) f^{-1}　　(c) g^{-1}

(d) $(g\circ f)^{-1}$　　(e) $g^{-1}\circ f^{-1}$

26. 已知函数 $f:x\to 2\sqrt{x-4}+3$，$x\ge 4$。

(a) 求 f 的值域。

(b) 求 f 的反函数 f^{-1}。

(c) 在同一直角坐标系上，作 f 及 f^{-1} 的图像。

23. 指数与对数

学习目标：

- 掌握指数与对数的性质及运算法则
- 掌握对数的换底公式
- 能解指数及对数方程式
- 应用指数与对数解复利与年金的问题

23.1 指数

指数的定义及其运算法则

在高中一，我们学过以下有关指数的定义：

正整数指数 $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}}$ （n是正整数）

零指数 $a^0=1$ （$a\neq 0$）

负整数指数 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ （$a\neq 0$，n是正整数）

分数指数 $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ （$a>0$，$n>1$且m、n是正整数）

有理数的指数幂有以下的运算法则：

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

$$a^m\div a^n=a^{m-n}\quad(a\neq 0)$$

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

$$(ab)^n=a^nb^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(b\neq 0)$$

例题 1

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

(b) $8^{\frac{2}{3}}+27^{\frac{2}{3}}-125^{\frac{2}{3}}$

(c) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}+(-5)^0-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+(0.25)^{-\frac{1}{2}}$

解 (a)
$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2&=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}\\&=-\frac{4}{27}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}8^{\frac{2}{3}}+27^{\frac{2}{3}}-125^{\frac{2}{3}}&=\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}+\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}-\left(5^3\right)^{\frac{2}{3}}\\&=4+9-25\\&=-12\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}+(-5)^0-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+(0.25)^{-\frac{1}{2}}&=\left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1-\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{\left(0.5^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{3}{2}+1-\left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{0.5}\\&=\frac{3}{2}+1-\frac{3}{4}+2\\&=3\frac{3}{4}\end{aligned}$$

例题 2

化简下列各式:

(a) $\left(x^4y^{-5}\right)\left(x^{-2}y^2\right)$

(b) $\left(a^3b\right)^2\times\left(ab^{-2}\right)^{-1}\div\left(ab\right)^{-1}$

(c) $\dfrac{\left(a^{-2}b^{-3}\right)\left(-4a^{-1}b\right)}{12a^{-4}b^{-2}c}$

解 (a)
$$\begin{aligned}\left(x^4y^{-5}\right)\left(x^{-2}y^2\right)&=x^{4+(-2)}y^{-5+2}\\&=x^2y^{-3}\\&=\frac{x^2}{y^3}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\left(a^3b\right)^2\times\left(ab^{-2}\right)^{-1}\div\left(ab\right)^{-1}&=a^6b^2\times a^{-1}b^2\div\left(a^{-1}b^{-1}\right)\\&=a^{6+(-1)-(-1)}b^{2+2-(-1)}\\&=a^6b^5\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\frac{\left(a^{-2}b^{-3}\right)\left(-4a^{-1}b\right)}{12a^{-4}b^{-2}c}&=-\frac{4a^{-2+(-1)-(-4)}b^{-3+1-(-2)}}{12c}\\&=-\frac{a^1b^0}{3c}\\&=-\frac{a}{3c}\end{aligned}$$

例题 3

化简下列各式:

(a) $125\times 25^{4n-1}\div 5^{8n+1}$

(b) $\dfrac{2\times 3^{2n+1}+3^{2n}}{9^{n}}$

解 (a)
$$\begin{aligned}125\times 25^{4n-1}\div 5^{8n+1}&=5^{3}\times 5^{2(4n-1)}\div 5^{8n+1}\\&=5^{3+8n-2-(8n+1)}\\&=5^{0}\\&=1\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{2\times 3^{2n+1}+3^{2n}}{9^{n}}&=\frac{2\times 3^{2n}\times 3+3^{2n}}{3^{2n}}\\&=\frac{3^{2n}(6+1)}{3^{2n}}\\&=7\end{aligned}$$

随堂练习 1

不使用计算机，求下列各式的值(1至2):

1. $2^{-2}+2^{-5}-(-2)^{-3}$

2. $\left(3\dfrac{6}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$

3. 化简 $a^{-4}\div a^{-5}\times\left(b^{-3}\right)^{-4}$。

指数函数及其图像

设 a 是一个大于零且不等于 1 的常数，则以 $y=a^x$ 的形式表示的函数叫做指数函数。指数函数的定义域是实数集合。

考虑以下的问题：某种细胞由一个分裂成两个，两个再分裂成四个，依此类推。若此细胞在经过 x 次分裂后，所得的细胞个数为 y，则 y 与 x 的函数关系是 $y=2^x$，这就是一个指数函数。

为了研究指数函数 $y=a^x$ 的图像及性质，我们作一些指数函数的图像，如图23-1(a) 所示的 $y=2^x$ 与 $y=10^x$ 的图像及图 23-1(b) 所示的 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

x	…	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	…
$y=10^x$	…	0.1	0.32	1	3.16	10	…

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

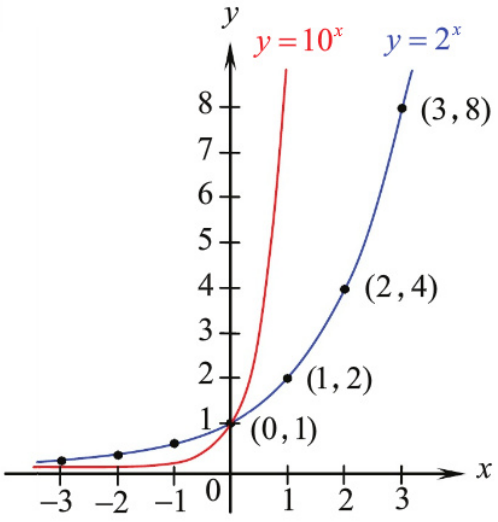


图 23-1 (a)

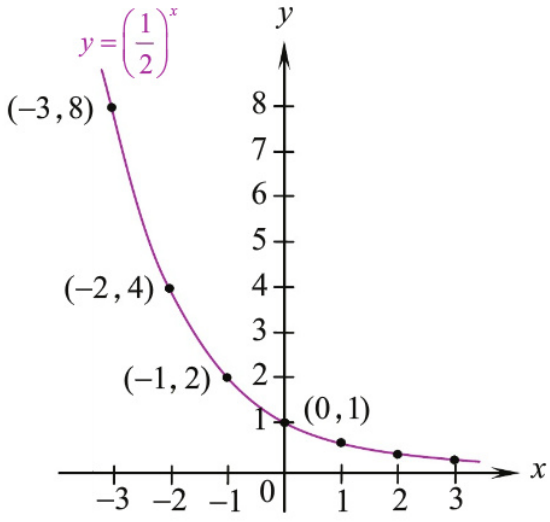


图 23-1 (b)

从以上的图像，我们可以观察到：

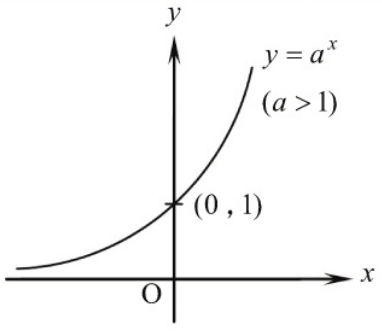
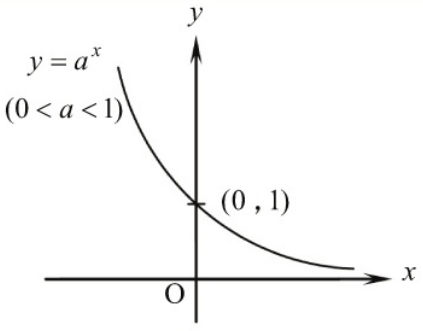
(1) 函数 $y=2^x$，$y=10^x$ 及 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像都只位于 x 轴的上方。事实上，当 $a>0$ 时，$a^x>0$。所以，指数函数 $y=a^x$ 的值恒大于 0。

(2) 当 $x=0$ 时，$y=1$。所以，指数函数 $y=a^x$ 的图像都通过点 $(0, 1)$。

(3) 对于函数 $y=2^x$ 及 $y=10^x$，当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$0<y<1$。当 x 的值增大时，y 的值也随着增大，即函数在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数。

(4) 对于函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，当 $x>0$ 时，$0<y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$。当 x 的值增大时，y 的值减小，即函数在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数。

在讨论指数函数 $y=a^x$ 的图像及性质时，可分为底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 两种情况，如下表所示：

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	• $y>0$	
	• 当 $x=0$ 时，$y=1$。	
	• 当 $x>0$ 时，$y>1$； 当 $x<0$ 时，$0<y<1$。	• 当 $x>0$ 时，$0<y<1$； 当 $x<0$ 时，$y>1$。
	• 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数	• 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数

例题 4

不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $1.5^{3.1}$ 与 $1.5^{3.5}$　　(b) $0.7^{2.3}$ 与 $0.7^{3.2}$

(c) $0.2^{-5.1}$ 与 $0.2^{-4.1}$

解 (a) ∵ 底数 $1.5>1$，指数函数 $y=1.5^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数，

指数 $3.1<3.5$。

∴ $1.5^{3.1}<1.5^{3.5}$

(b) ∵ 底数 $0.7<1$，指数函数 $y=0.7^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数，
指数 $2.3<3.2$。
∴ $0.7^{2.3}>0.7^{3.2}$

(c) ∵ 底数 $0.2<1$，指数函数 $y=0.2^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数，
指数 $-5.1<-4.1$
∴ $0.2^{-5.1}>0.2^{-4.1}$

随堂练习 2

1. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：
   (a) $\pi^{2.1}$ 与 $\pi^{3.5}$　　(b) $0.15^{-2.3}$ 与 $0.15^{-3.8}$
2. 已知指数函数 $f(x)=3^{x^2-3x+5}$ 及 $g(x)=3^{x+10}$。求 x 的值使得 $f(x)=g(x)$。

练习 23.1

不使用计算机，求下列各式的值(1至10)：

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^0-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$
2. $\left(\frac{3^{-5}\cdot 3^2}{3^{-3}}\right)^{-2}$
3. $6^{-8}\div 6^{-5}+3^{-3}$
4. $12^{\frac{1}{3}}\times 6^{\frac{1}{3}}\div 27^{\frac{1}{6}}\div 3^{\frac{1}{6}}$
5. $(0.2)^{-2}\times(0.125)^{\frac{2}{3}}$
6. $(0.3)^{-\frac{1}{3}}\times(0.0081)^{\frac{1}{3}}+(0.064)^{\frac{1}{3}}$
7. $\left(\frac{81}{16}\right)^{-0.25}\times\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2.5}$
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+125^{\frac{2}{3}}+343^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
9. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}+\left(1\frac{11}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(2\frac{2}{3}\right)^0$
10. $\dfrac{\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$

化简下列各式(11 至 24):

11. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{8}} \cdot a^{\frac{3}{8}}$

12. $\left(9a^2b^{-2}c^{-4}\right)^{-1}$

13. $\left(x^4y^{-5}\right)\left(x^{-2}y^2\right)^2$

14. $3a^{-2}b^{-3} \div \left(-3^{-1}a^2b^{-3}\right)$

15. $\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}b^5}}$

16. $5a^{-2}b^{-3} \div \left(5^{-1}a^2b^{-3}\right) \times 5^{-2}ab^4c$

17. $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-2}+b^{-2}}$

18. $\left(a^{-1}+b^{-1}\right)(a+b)^{-1}$

19. $\left(x+x^{-1}\right)\left(x-x^{-1}\right)$

20. $\left(-2x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}}\right)\left(3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)\left(-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{3}}\right)$

21. $2x^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)$

22. $\left(\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt{y}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{y} \cdot \sqrt{x^3}\right)^3$

23. $\dfrac{3\times 2^n - 4\times 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

24. $\left(3^{n+6} - 5\times 3^{n+1}\right) \div \left(7\times 3^{n+2}\right)$

25. 在同一坐标系中作下列各函数的图像:

(a) $y = 3^x$

(b) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

26. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小:

(a) $2.5^{7.1}$ 与 $2.5^{8.5}$

(b) $0.35^{6.5}$ 与 $0.35^{5.6}$

(c) $1.03^{-2.1}$ 与 $1.03^{-3.2}$

(d) $\left(\sqrt{2}\right)^{\pi}$ 与 $\left(\sqrt{2}\right)^{\pi-3.5}$

(e) $0.01^{-\frac{1}{3}}$ 与 $0.01^{-\frac{1}{2}}$

(f) $2.7^{\sqrt{20}}$ 与 $2.7^{\sqrt[3]{35}}$

27. 已知 f_1：$x \to 2^{3x}$ 及 f_2：$x \to 2^{x^2+2}$。求 x 的值使得 $f_1(x) = f_2(x)$。

28. 已知函数 $f(x) = (0.4)^{x^2-x+1}$ 及 $g(x) = (0.4)^{6x+19}$。求 x 的值使得 $f(x) = g(x)$。

23.2 对数

对数的定义

若 $a^n = x$，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，则定义 $\log_a x = n$，读作“以 a 为底，x 的对数为 n”。在 $\log_a x$ 中，a 为底数，x 为真数。

反之，若 $\log_a x = n$，则 $a^n = x$。这就是对数式与指数式之间的互换关系，即

$$a^n = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x = n$$
$$(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$$

以10为底的对数，叫做常用对数，记作 $\log_{10} a$ 或 $\log a$。

补充资料

对数函数还有一个重要的底数 e ($e \approx 2.71828182846$)。以 e 为底的对数，叫做自然对数，记作 $\ln a$。

例题 1

求下列各式中 x 的值：

(a) $\log_3 x = 5$　　(b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} = 0$

(c) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = x$

解

(a) $\log_3 x = 5$

$x = 3^5$

$= 243$

(b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x} = \sqrt{2}^{\,0}$

$= 1$

$x = 1$

(c) $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{9}=x$

$$\sqrt{3}^{x}=\frac{1}{9}$$

$$3^{\frac{1}{2}x}=3^{-2}$$

$$\frac{1}{2}x=-2$$

$$x=-4$$

随堂练习 3

求下列各式中 x 的值：

1. $\log x=3$
2. $\log_x 27=\frac{3}{2}$
3. $2\log_x\left(3\sqrt{3}\right)=1$
4. $\log_2\left(16\sqrt{2}\right)=x$

对数函数及其图像

由对数的定义可知，若 $y=a^x$，则 $x=\log_a y$。根据反函数的概念，$y=\log_a x$ 就是 $y=a^x$ 的反函数。函数 $y=\log_a x$ 叫做对数函数，其中 $a>0$，且 $a\neq 1$。由于指数函数 $y=a^x$ 的定义域是实数集合，值域是正实数集合，所以对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域是正实数集合，值域是实数集合。

由于对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，所以 $y=\log_a x$ 的图像与 $y=a^x$ 的图像对称于直线 $y=x$。我们只需作与 $y=a^x$ 的图像关于直线 $y=x$

对称的曲线，就可得到 $y=\log_a x$ 的图像。例如，在图 23-2(a) 及 (b) 中，函数 $y=2^x$ 及 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称的曲线，分别是 $y=\log_2 x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像。

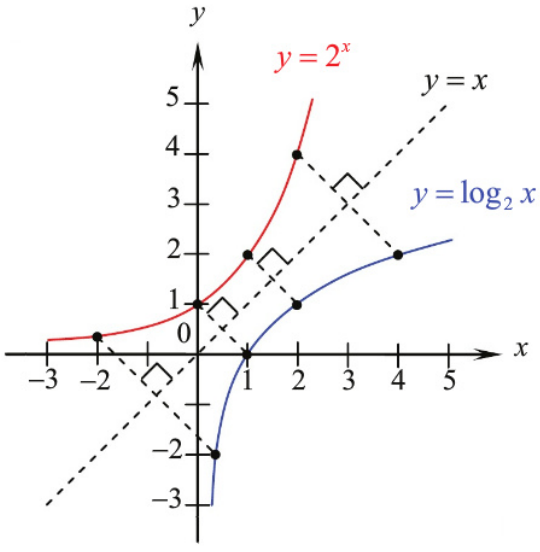


图 23-2 (a)

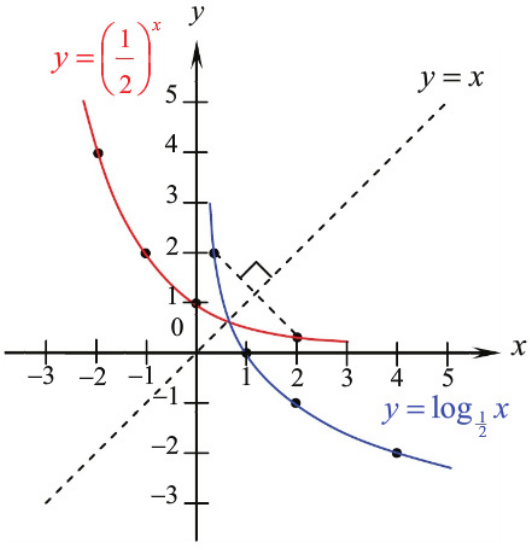


图 23-2 (b)

从以上图像，我们可以观察到：

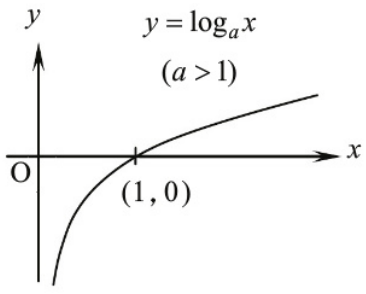
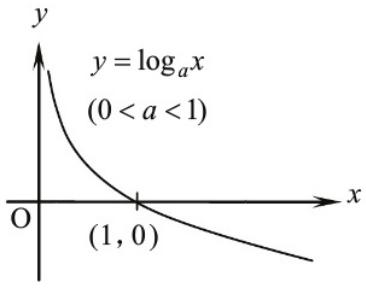
(1) 由于 $y=\log_a x$ 的定义域是 $x>0$，所以函数 $y=\log_2 x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像都只位于 x 轴的右方。

(2) 当 $x=1$ 时，$y=0$。所以，对数函数 $y=\log_a x$ 的图像都通过点 $(1, 0)$。

(3) 对于函数 $y=\log_2 x$，当 $x>1$ 时，$y>0$；当 $0<x<1$ 时，$y<0$。当 x 的值增大时，y 的值也随着增大，即函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数。

(4) 对于函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$，当 $x>1$ 时，$y<0$；当 $0<x<1$ 时，$y>0$。当 x 的值增大时，y 的值减小，即函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数。

在讨论对数函数 $y=\log_a x$ 的图像及性质时，可分为底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 两种情况，如下表所示：

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	• $x>0$	
	• 当 $x=1$ 时，$y=0$。	
	• 当 $x>1$ 时，$y>0$； 当 $0<x<1$ 时，$y<0$。	• 当 $x>1$ 时，$y<0$； 当 $0<x<1$ 时，$y>0$。
	• 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数	• 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数

例题 2

不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $\log_3 5$ 与 $\log_3 7$　　(b) $\log_{0.6} 1.2$ 与 $\log_{0.6} 3.1$

(c) $\log_4 5$ 与 $\log_9 8$

解 (a) $\because$ 底数 $3>1$，对数函数 $y=\log_3 x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数，

真数 $5<7$。

$\therefore \log_3 5 < \log_3 7$

(b) ∵ 底数 $0.6<1$，对数函数 $y=\log_{0.6}x$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上是减函数，
真数 $1.2<3.1$。
∴ $\log_{0.6}1.2>\log_{0.6}3.1$

(c) ∵ $\log_4 5>1$，$\log_9 8<1$
∴ $\log_4 5>\log_9 8$

例题 3

求下列各函数的定义域：

(a) $y=\log_a(x-4)$　　(b) $y=\log_2\left(x^2+5\right)$

(c) $y=\log_3\dfrac{x+3}{2-x}$　　(d) $y=\sqrt{\log_5(x-3)}$

解 (a) 由 $x-4>0$，得 $x>4$。
∴ 函数 $y=\log_a(x-4)$ 的定义域是 $\left\{x \mid x\in\boldsymbol{R}，x>4\right\}$。

(b) 对于所有 $x\in\boldsymbol{R}$，$x^2+5>0$。
∴ 函数 $y=\log_2\left(x^2+5\right)$ 的定义域是 $\boldsymbol{R}$。

(c) 由 $\dfrac{x+3}{2-x}>0$，得 $-3<x<2$。
∴ 函数 $y=\log_3\dfrac{x+3}{2-x}$ 的定义域是 $\left\{x \mid x\in\boldsymbol{R}，-3<x<2\right\}$。

(d) x 须同时满足 $x-3>0$ 及 $\log_5(x-3)\geq 0$，

即 $\begin{cases} x>3 \\ x-3\geq 1 \end{cases} \Rightarrow x\geq 4$。

∴ 函数 $y=\sqrt{\log_5(x-3)}$ 的定义域是区间 $[4，\infty)$。

随堂练习 4

1. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $\log 6$ 与 $\log 9$　　(b) $\log_{0.5} 4.2$ 与 $\log_{0.5} 3.9$

(c) $\log_2 1.8$ 与 $\log_4 5.8$

2. 求下列各函数的定义域：

(a) $y=\log_a(x+2)$　　(b) $y=\log_2\left(x^2-9\right)$

(c) $y=\log_7 \dfrac{2}{3-2x}$　　(d) $y=\sqrt{\log_5(2-x)}$

练习 23.2

1. 求下列各式中 x 的值：

(a) $\log_2 x=4$　　(b) $\log_{125} x=\dfrac{1}{3}$

(c) $\log_{16}\left(2\sqrt{2}\right)=x$　　(d) $\log_{\frac{1}{3}} 81=x$

(e) $\log_x 81=4$　　(f) $\log_x 49=-2$

2. 在同一坐标系中作下列各函数的图像：

(a) $y=\log_5 x$　　(b) $y=\log_{\frac{1}{5}} x$

3. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $\log_3 5$ 与 $\log_3 6$　　(b) $\log_{1.5} 1.4$ 与 $\log_{1.5} 1.6$

(c) $\log_{\sqrt{3}} 4.8$ 与 $\log_{\sqrt{3}} 5.8$　　(d) $\log_{2.3}\pi$ 与 $\log_{2.3}(\pi-3)$

(e) $\log_{0.4}\sqrt{2}$ 与 $\log_{0.4}\sqrt{3}$　　(f) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ 与 $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{4}$

4. 求下列各函数的定义域：

(a) $y=\log_2(3-2x)$　　(b) $y=\log\left(x^2+1\right)$

(c) $y=\log_5\left(9-16x^2\right)$　　(d) $y=\log_9\dfrac{1}{x-2}$

(e) $y=\log_8\sqrt{2x^2-x-3}$　　(f) $y=\dfrac{1}{\log_3(7x-5)}$

23.3 对数的运算法则与换底公式

对数的性质及其运算法则

对数有以下的基本性质：

$$\log_a a = 1$$
$$\log_a 1 = 0$$

对数有以下的运算法则：

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad (x > 0，y > 0)$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (x > 0，y > 0)$$
$$\log_a x^m = m \log_a x \quad (x > 0)$$
$$a^{\log_a x} = x$$

例题 1

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\log_5 125$　　(b) $\log_2 \frac{1}{64}$

(c) $\log_{2.5} 1$　　(d) $\log_{0.8} 0.8$

解 (a)
$$\begin{aligned}\log_5 125 &= \log_5 5^3 \\ &= 3\log_5 5 \\ &= 3\end{aligned}$$

(b) $\log_2 \frac{1}{64} = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= \log_2 2^{-6}$

$= -6$

(c) $\log_{2.5} 1 = 0$

(d) $\log_{0.8} 0.8 = 1$

例题 2

若 $a = \log 2$，以 a 表示下列各式：

(a) $\log 8^2$　　(b) $(\log 8)^2$

(c) $\log\ (8 \times 32)$

解 (a) $\log 8^2 = 2\log 8$

$= 2\log 2^3$

$= 6\log 2$

$= 6a$

(b) $(\log 8)^2 = (\log 2^3)^2$

$= (3\log 2)^2$

$= (3a)^2$

$= 9a^2$

(c) $\log(8 \times 32) = \log\ (2^3 \times 2^5)$

$= \log 2^8$

$= 8\log 2$

$= 8a$

例题 3

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $100^{\log 3}$

(b) $2\log_3 15+\log_3 27-\log_3 25$

(c) $\log\frac{41}{35}+\log 70-\log\frac{41}{2}+2\log 5$

解 (a)
$$\begin{aligned}100^{\log 3}&=10^{2\log 3}\\&=10^{\log 9}\\&=9\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}2\log_3 15+\log_3 27-\log_3 25&=\log_3\frac{15^2\times 27}{25}\\&=\log_3 3^5\\&=5\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\log\frac{41}{35}+\log 70-\log\frac{41}{2}+2\log 5&=\log\left(\frac{41}{35}\times 70\div\frac{41}{2}\times 5^2\right)\\&=\log 10^2\\&=2\end{aligned}$$

例题 4

已知 $\log_2 3=a$，$\log_2 5=b$。以 a 及 b 表示下列各式：

(a) $\log_2 30$　　(b) $\log_2 1.25$

解 (a)
$$\begin{aligned}\log_2 30&=\log_2(2\times 3\times 5)\\&=\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5\\&=1+a+b\end{aligned}$$

(b) $\log_2 1.25 = \log_2 \frac{5}{4}$

$= \log_2 5 - \log_2 2^2$

$= b - 2$

对数的换底公式

对数的底数可由某个数换成另一个数。

设 $\log_a x = n$，则 $a^n = x$。将 $a^n = x$ 的两边同时取以 b 为底的对数，得

$$\log_b a^n = \log_b x$$

$$n \log_b a = \log_b x$$

由于 $a \neq 1$，所以 $\log_b a \neq 0$。

$$n = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\therefore \quad \boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

以上式子就是对数的换底公式。

当 $x = b$ 时，得 $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$

例题 5

求下列各式的值：

(a) $\log_3 5$　　(b) $\log_8 32$

解 (a) $\log_3 5 = \dfrac{\log 5}{\log 3}$

$= 1.4650$

(b) $\log_8 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 8}$

$= \dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3}$

$= \dfrac{5}{3}$

注意

在本书中，对数的值都准确至四位小数。

例题 6

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\log_3 16 \cdot \log_{64} 3$

(b) $\log_4 8 - \log_9 27 + \log_{\sqrt{5}} 125$

解 (a) $\log_3 16 \cdot \log_{64} 3 = \dfrac{\log 16}{\log 3} \times \dfrac{\log 3}{\log 64}$

$= \dfrac{\log 2^4}{\log 2^6}$

$= \dfrac{4 \log 2}{6 \log 2}$

$= \dfrac{2}{3}$

(b) $\log_4 8-\log_9 27+\log_{\sqrt{5}} 125=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}-\dfrac{\log_3 27}{\log_3 9}+\dfrac{\log_5 125}{\log_5 \sqrt{5}}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{\frac{1}{2}}$

$=6$

例题 7

已知 $\log_2 3=x$， $\log_3 5=y$。以 x 及 y 表示下列各式:

(a) $\log_3 60$ (b) $\log_9 2.5$

解 (a) $\log_3 60=\log_3\left(2^2\times 3\times 5\right)$

$=\log_3 2^2+\log_3 3+\log_3 5$

$=2\left(\dfrac{1}{\log_2 3}\right)+1+\log_3 5$

$=\dfrac{2}{x}+1+y$

(b) $\log_9 2.5=\dfrac{\log_3 \frac{5}{2}}{\log_3 9}$

$=\dfrac{\log_3 5-\log_3 2}{\log_3 3^2}$

$=\dfrac{\log_3 5-\frac{1}{\log_2 3}}{2}$

$=\dfrac{y-\frac{1}{x}}{2}$

$=\dfrac{xy-1}{2x}$

例题 8

已知 $3\log_7\left(xy^2\right)+\log_7 x=4+2\log_7 y$。以 x 表示 y。

解

$$3\log_7\left(xy^2\right)+\log_7 x=4+2\log_7 y$$

$$3\log_7\left(xy^2\right)+\log_7 x-2\log_7 y=4$$

$$\log_7\left(xy^2\right)^3+\log_7 x-\log_7 y^2=4$$

$$\log_7\frac{x^3y^6\cdot x}{y^2}=4$$

$$x^4y^4=7^4$$

$$xy=7$$

$$y=\frac{7}{x}$$

随堂练习 5

不使用计算机，求下列各式的值(1至4):

1. $5^{2\log_5 4}$
2. $4^{3\log_2\sqrt{2}}$
3. $2\log 5-\log\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log\frac{16}{9}$
4. $\frac{\log_4 27}{\log_2 3}$
5. 已知 $\log_2 3=a$ 及 $\log_2 5=b$。以 a 及 b 表示下列各式:

   (a) $\log_2 90$　　(b) $\log_3 270$　　(c) $\log_9 1.8$

6. 已知 $\log_{16} y=\frac{1}{2}+\log_4 x$。以 x 表示 y。

练习 23.3

化简下列各式(1至6):

1. $\log_2 4^x$
2. $\log_2 a^{\log_a 2}$
3. $3^{\log_3 x-\log_3 y}$
4. $\log_3\left(9^x\times 27^y\right)$
5. $2^{-\log_8 x}$
6. $3\log_4 2^x$

不使用计算机，求下列各式的值(7至22):

7. $\log_7\sqrt[3]{49}$
8. $49^{\log_7 3}$
9. $2^{2\log_2 7}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}$
10. $\log_3 5-\log_3 15$
11. $\dfrac{\log\sqrt{3}}{\log\frac{1}{9}}$
12. $\log_5\frac{1}{5}+\log_5\sqrt[3]{5}-\log_5 25$
13. $\log_3\sqrt[3]{27\sqrt[4]{81}}$
14. $\log(0.1)^4-\log\sqrt[3]{0.001}$
15. $\dfrac{\log 4+\log 3}{1+\log 0.4+\frac{1}{2}\log 9}$
16. $\log_{36}6-\log_6 36-\log_6\frac{1}{6}$
17. $\log_2\frac{1}{25}\cdot\log_3\frac{1}{8}\cdot\log_5\frac{1}{9}$
18. $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$
19. $\log_4 8-\log_{\frac{1}{9}}3-\log_{\sqrt{2}}4$
20. $\left(\log_2 3+\log_2\sqrt{3}\right)\log_{\sqrt{3}}2$
21. $\dfrac{\log_5\sqrt{2}\cdot\log_7 9}{\log_7\sqrt[3]{4}\cdot\log_5\frac{1}{3}}$
22. $\frac{1}{2}\log\frac{81}{17}+2\log\frac{5}{3}-\log\frac{17}{4}+\frac{3}{2}\log 17$
23. 已知 $\log_2 3=a$ 及 $\log_2 5=b$。以 a 及 b 表示 $\log_4 15$。
24. 已知 $\log_3 5=m$ 及 $\log_5 6=n$。以 m 及 n 表示 $\log_{25}54$。
25. 已知 $\log_2 3=a$ 及 $\log_3 7=b$。以 a 及 b表示 $\log_{42}14$。
26. 已知 $\log_3 6=x$。以 x 表示 $\log_9 12$。
27. 已知 $\log_3 y-\log_9\sqrt[3]{x}=1+\log_{27}x$。以 x 表示 y。
28. 已知 $\log_{25}(2x-1)=\log_5(x-3)+\log_{25}5$，证明 $5x^2-32x+46=0$。

29. 若 $a>0$ 及 $b>0$，且 $a^2+b^2=7ab$，证明 $2\log_3(a+b)=2+\log_3 a+\log_3 b$。

30. 若 $x>0$ 及 $y>0$，且 $x^2+9y^2=10xy$，证明 $2\log(x+3y)-4\log 2=\log x+\log y$。

23.4 指数方程式

凡是指数含有未知数的方程式就叫做指数方程式。例如，$9^x=3^{x-1}$，$3^x=5$ 及 $2^{x-1}+2^x-2=0$ 都是指数方程式。以下是一些简易的指数方程式的解法。

例题 1

解下列各指数方程式：

(a) $2\left(2^{x-2}\right)=64^x$　　(b) $5^x=7$

(c) $3\left(2^{x+1}\right)=-3$　　(d) $3^{x+1}=5^{x-1}$

解 (a)
$$\begin{aligned}2\left(2^{x-2}\right)&=64^x\\2^{1+x-2}&=2^{6x}\\1+x-2&=6x\\5x&=-1\\x&=-\frac{1}{5}\end{aligned}$$

(b)
$$5^x=7$$

将原方程式两边取以 10 为底的对数，得

$$\begin{aligned}\log 5^x&=\log 7\\x\log 5&=\log 7\\x&=\frac{\log 7}{\log 5}\\&=1.2091\end{aligned}$$

(c) $3\left(2^{x+1}\right)=-3$

$$2^{x+1}=-1$$

由于2^{x+1}必须大于 0，所以原方程式无解。

(d)
$$3^{x+1}=5^{x-1}$$

将原方程式两边取以 10 为底的对数，得

$$\log 3^{x+1}=\log 5^{x-1}$$
$$(x+1)\log 3=(x-1)\log 5$$
$$x(\log 5-\log 3)=\log 5+\log 3$$
$$x=\frac{\log 5+\log 3}{\log 5-\log 3}$$
$$=5.3013$$

例题 2

解下列各指数方程式:

(a) $5^x-5^{x-1}=100$　　(b) $2^{x+1}-3\left(2^{-x}\right)+5=0$

解 (a)
$$5^x-5^{x-1}=100$$
$$5^x-5^x\left(\frac{1}{5}\right)=100$$
$$5^x\left(1-\frac{1}{5}\right)=100$$
$$5^x=100\times\frac{5}{4}$$
$$5^x=125$$
$$x=3$$

(b) $2^{x+1}-3\left(2^{-x}\right)+5=0$

$2^{x}(2)-3\left(\dfrac{1}{2^{x}}\right)+5=0$

设 $y=2^{x}$，则 $2y-\dfrac{3}{y}+5=0$ 。

$$2y^{2}+5y-3=0$$

$$(2y-1)(y+3)=0$$

$$y=\frac{1}{2} \quad 或 \quad y=-3$$

当 $y=\dfrac{1}{2}$，$2^{x}=2^{-1}$，得 $x=-1$；

当 $y=-3$，$2^{x}=-3$。由于 2^{x} 必须大于 0，所以此情况无解。

∴ 原方程式的解是 $x=-1$。

随堂练习 6

解下列各指数方程式：

1. $3^{2x}=-\dfrac{1}{9}$
2. $2^{x^{2}+4x}=\dfrac{1}{8}$
3. $6^{x}=5^{x-1}$
4. $4^{x-1}+2^{x-1}=20$

练习 23.4

解下列各指数方程式：

1. $8^{x-3}=\dfrac{1}{256}$
2. $3^{2^x+1}=243$
3. $10^{x^2-4}=1$
4. $3^{x^2+3}=27^{x+7}$
5. $4^{x^2}=2^{5x+7}$
6. $5^{2x^2+x}=25^{1+x-2x^2}$
7. $\left(\dfrac{9}{16}\right)^x=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{x-6}$
8. $5^{2^x+1}=5^{4^x+1}$
9. $2^{2x+3}\cdot 4^{x+6}=\left(8^x\right)^x$
10. $\dfrac{5^{x^2}}{5}=7^{(x+1)(x-1)}$
11. $3^{x+1}=4^{x-1}$
12. $7^{5-3x}=5^{x+2}$
13. $13^{2x+5}=14^{x+7}$
14. $2^{x^2-1}=3^{x+1}$
15. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}=\dfrac{80}{9}$
16. $3^{x+1}+9^x-18=0$
17. $25^x-23\cdot 5^x-50=0$
18. $3^{x-1}+3^{3-x}-10=0$
19. $3^{2x}-3^{x+1}+2=0$
20. $2^{x+2}+3\left(2^{1-x}\right)-14=0$
21. $2^{2x-1}-3\cdot 2^{x-1}+1=0$
22. $3^x-5^{x+2}=3^{x+1}-5^{x+3}$

23.5 对数方程式

凡是对数的真数或底数含有未知数的方程式叫做对数方程式。例如，$\log(x-1)=3$，$\log_x 9=2$ 及 $2\log_3 x+\log_9 x=1$ 都是对数方程式。解对数方程式时所得的结果必须加以检验。

例题 1

解下列各对数方程式：

(a) $2\log_5 x = 1$　　(b) $\log_{0.2}(5x^2 - 3x - 1) = 0$

解 (a) $2\log_5 x = 1$

$$\log_5 x = \frac{1}{2}$$

$$x = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{5}$$

(b) $\log_{0.2}(5x^2 - 3x - 1) = 0$

$$5x^2 - 3x - 1 = 1$$

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(5x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{2}{5} \quad 或 \quad x = 1$$

经检验，$x = -\frac{2}{5}$ 及 $x = 1$ 都是原方程式的根。

例题 2

解方程式 $\log_2 x + \log_2(3 - x) = 1$。

解 $\log_2 x + \log_2(3 - x) = 1$

$$\log_2\left[x(3 - x)\right] = 1$$

$$3x - x^2 = 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 1 \quad 或 \quad x = 2$$

经检验，$x = 1$ 及 $x = 2$ 都是原方程式的根。

例题 3

解方程式 $\log(5-x)=2\log(x+1)$。

解

$$\log(5-x)=2\log(x+1)$$
$$\log(5-x)=\log(x+1)^2$$
$$5-x=(x+1)^2$$
$$x^2+3x-4=0$$
$$(x-1)(x+4)=0$$
$$x=1 \quad 或 \quad x=-4$$

经检验，$x=1$ 是原方程式的根，$x=-4$ 是增根。

$\therefore$ 原方程式的根是 $x=1$。

例题 4

解方程式 $\log_3{}^2x-\log_3 x^3=0$。

解

$$\log_3{}^2x-\log_3 x^3=0$$
$$(\log_3 x)^2-3\log_3 x=0$$
$$(\log_3 x)(\log_3 x-3)=0$$
$$\log_3 x=0 \quad 或 \quad \log_3 x=3$$

当 $\log_3 x=0$ 时，$x=3^0=1$；

当 $\log_3 x=3$ 时，$x=3^3=27$。

经检验，$x=1$ 及 $x=27$ 都是原方程式的根。

注意

$(\log_3 x)^2$ 可写成 $\log_3{}^2x$。$\log_3 x^2$ 表示 $\log_3(x^2)$，它不等于 $(\log_3 x)^2$。

例题 5

解方程式 $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$。

解 $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$

$$\log_3 x - \frac{6}{\log_3 x} = 1$$

设 $y = \log_3 x$，则原方程式转换成

$$y - \frac{6}{y} = 1$$

$$y^2 - 6 = y$$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$(y+2)(y-3) = 0$$

$$y = -2 \quad 或 \quad y = 3$$

当 $y = -2$ 时，$\log_3 x = -2$

$$x = 3^{-2}$$

$$= \frac{1}{9}$$

当 $y = 3$ 时，$\log_3 x = 3$

$$x = 3^3$$

$$= 27$$

经检验，$x = \frac{1}{9}$ 及 $x = 27$ 都是原方程式的根。

例题 6

解方程式 $x^{1+\log x}=100$。

解 将方程式两边同时取以 10 为底的对数，得

$$\log x^{1+\log x}=\log 100$$

$$(1+\log x)(\log x)=2$$

$$(\log x)^2+\log x-2=0$$

设 $y=\log x$，则原方程式转换成

$$y^2+y-2=0$$

$$(y-1)(y+2)=0$$

$$y=1 \quad 或 \quad y=-2$$

当 $y=1$ 时，$\log x=1$

$$x=10$$

当 $y=-2$ 时，$\log x=-2$

$$x=\frac{1}{100}$$

经检验，$x=10$ 及 $x=\frac{1}{100}$ 都是原方程式的根。

随堂练习 7

解下列各对数方程式：

1. $\log_3 x=5$
2. $\log_5(x-2)=0$
3. $\log(x^2+2x-3)-\log(x+3)=0$
4. $\log_3(3x+1)+1=\log_3(2x-1)+\log_3 5$
5. $\log_x 3+\log_x 81=5$
6. $3\log_2{}^2 x+5\log_2 x-2=0$
7. $\log_2 x-\log_x 8=2$
8. $x^{\log x}=100x$

练习 23.5

解下列各对数方程式：

1. $\log_{\sqrt{3}} x = -2$
2. $\log_2 x^4 = 4$
3. $\log\dfrac{x-2}{x+2} = \log\dfrac{1}{x-1}$
4. $2\log x + \log 7 = \log 14$
5. $\log x + \log(x-3) = 1$
6. $\log(x+6) - \log(x-3) = 1$
7. $\log_6 x + \log_6(x^2-7) = 1$
8. $\log_{1.2}(15x^2 - 2x - 12) = 0$
9. $\log_8(x^2 - 3x - 2) = \dfrac{1}{3}$
10. $\log_2(x^2 - x - 2) - \log_2(x+1) = 0$
11. $\log_3(2x-3) + \log_3(3x+2) = \log_3(2x-1)$
12. $\dfrac{1}{2}(\log x - \log 5) = \log 2 - \dfrac{1}{2}\log(9-x)$
13. $\log(x+6) - \dfrac{1}{2}\log(2x-3) = 2 - \log 25$
14. $\log_2 x = \log_8 x + 1$
15. $3^{\log x} = 2^{\log 3}$
16. $4x^{\log_2 x} = x^3$
17. $2(\log_3 x)^2 + \log_3 x - 1 = 0$
18. $\log_4{}^2 x - 5\log_4 x + 6 = 0$
19. $6\log^2 x + \log x^3 - 3 = 0$
20. $(\log x)^2 = 2\log x$
21. $\log_x 25 - \log_{25} x = 0$
22. $2\log_4 x - 3\log_x 4 + 5 = 0$
23. $2\log_x 10 - \log x + 1 = 0$
24. $\log_3[\log_2(\log_x 5)] = 0$

23.6 复利与年金

复利

单利及复利是两种不同的计算利息的方法。单利只以本金来计算利息。复利则是将上一期的利息并入本金内，作为本金的一部分来计算下一期的利息。

例如，将一笔金额为 RM p 的款项存入金融机构，存款的年利率是 $r\%$。

本金 = RM p

$t=1$

$$利息 = p\times r\% = \frac{pr}{100}$$

$$本利和 = p+\frac{pr}{100} = p\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

第 2 年本金

$t=2$

$$利息 = p\left(1+\frac{r}{100}\right)\times r\% = \frac{pr}{100}\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$\begin{aligned}本利和 &= p\left(1+\frac{r}{100}\right)+\frac{pr}{100}\left(1+\frac{r}{100}\right)\\ &= p\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)\\ &= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\end{aligned}$$

第 3 年本金

$t=3$

$$利息 = p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times r\% = \frac{pr}{100}\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\begin{aligned}本利和 &= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+\frac{pr}{100}\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\\ &= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)\\ &= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^3\end{aligned}$$

第 4 年本金

⋮

据此，t 年后的本利和 $\boxed{A = p\left(1+\frac{r}{100}\right)^t}$

其中 p 也叫做 A 的现值。

补充资料

若年利率是 r %，每年计息 m 次，则 t 年后的本利和 $A = p\left(1+\frac{\frac{r}{m}}{100}\right)^{mt}$。

例题 1

已知本金是 RM 50,000，年利率是 6%。以复利计算，求 15 年后的本利和。

解 已知 $p = 50000$，$r = 6$，$t = 15$。

代入公式，得本利和 $= 50000\left(1+\frac{6}{100}\right)^{15}$

$= \text{RM } 119,827.91$

例题 2

已知本金是 RM80,000，年利率是 7.5%，每半年计息一次。以复利计算，求 5 年后的存款增加了多少？

解 5 年后所增加的数额 = 本利和 − 本金

$= 80000\left(1+\frac{3.75}{100}\right)^{10} - 80000$

$= \text{RM } 35,603.52$

例题 3

已知本金是 RM 100,000，年利率是 6.5%，每年结算一次。以复利计算，问至少需要多少年，本利和才会超过 RM 150,000？

解 设至少需要 t 年，本利和才会超过 RM 150,000。

依题意，$100000\left(1+\frac{6.5}{100}\right)^t > 150000$

$$1.065^t > 1.5$$

$$\log(1.065)^t > \log 1.5$$

$$t\log 1.065 > \log 1.5$$

$$t > \frac{\log 1.5}{\log 1.065}$$

$$t > 6.44$$

$\because$ t 的最小整数值是 7。

$\therefore$ 至少需要 7 年，本利和才会超过 RM 150,000。

例题 4

已知年利率是 8%，每年结算一次。以复利计算，3 年后的存款增加了 RM 22,075.52。求本金。

解 设本金是 RM x，则

$$x\left(1+\frac{8}{100}\right)^3 - x = 22075.52$$

$$\left(1.08^3 - 1\right)x = 22075.52$$

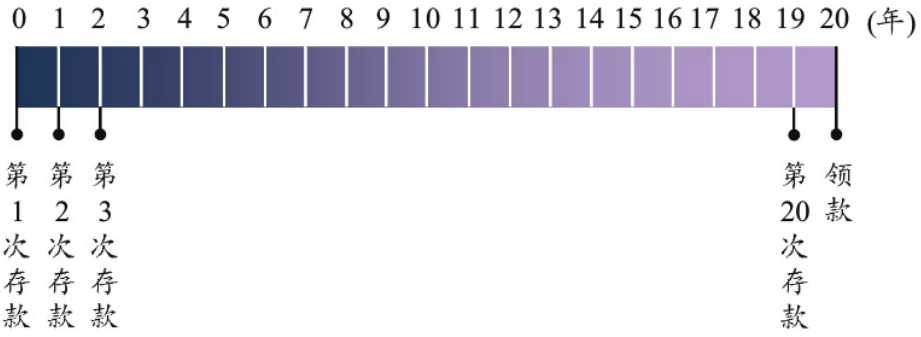
$$x = \text{RM } 85,000$$

$\therefore$ 本金是 RM 85,000。

例题 5

某人每年年初存款 RM 1,000。若年利率是 3%，每年计息一次，以复利计算，求 20 年后的本利和。

解



依题意，20 后的本利和是

$$1000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{20}+1000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{19}+1000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{18}+\cdots+1000\left(1+\frac{3}{100}\right)$$

$$=1000\left(1.03+1.03^2+1.03^3+\cdots+1.03^{20}\right)$$

$$=1000\times\frac{1.03\left(1.03^{20}-1\right)}{1.03-1}$$

$$=\text{RM } 27,676.49$$

年金与现值

年金是指根据某种合约，定期支付或收取的金额。例如，各类分期付款、租金、保险费、分期偿还贷款等，都属于年金。在本书中，我们只考虑在相等的时间间隔所支付或收受的等额款项。

补充资料

年金并非局限于每年只支付一次。

例题 6

某房东每月月初收取房租 RM 650。若年利率是 3.3%，每个月计息一次，以复利计算，求该房东在一年后所收到的房租连同其所生成的利息的总值。

解 依题意，该房东在一年后所收到的房租连同其所生成的利息的总值是

$$650\left(1+\frac{3.3}{1200}\right)^{12}+650\left(1+\frac{3.3}{1200}\right)^{11}+650\left(1+\frac{3.3}{1200}\right)^{10}+\cdots+650\left(1+\frac{3.3}{1200}\right)$$

$$=650\left(1.00275+1.00275^2+1.00275^3+\cdots+1.00275^{12}\right)$$

$$=650\times\frac{1.00275\left(1.00275^{12}-1\right)}{1.00275-1}$$

$$=\text{RM } 7{,}940.84$$

我们可通过计算年金的现值来比较两种不同的支付方式，何者较为划算。由公式 $A=p(1+r\%)^t$，可得现值 $p=\dfrac{A}{(1+r\%)^t}$。若年利率是 $r\%$，年金是 RM A，每年支付一次，则一年后所支付金额的现值是 $A(1+r\%)^{-1}$，两年后所支付金额的现值是 $A(1+r\%)^{-2}$，依此类推。因此，在连续支付 n 年后，其现值的总和是

$$\frac{A}{1+r\%}+\frac{A}{(1+r\%)^2}+\cdots+\frac{A}{(1+r\%)^n}$$

$$=A\left[\frac{1}{1+r\%}+\frac{1}{(1+r\%)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r\%)^n}\right]$$

$$=A\left[\frac{1}{1+r\%}\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+r\%)^n}}{1-\frac{1}{1+r\%}}\right]$$

$$=\frac{A}{r\%}\left(1-\frac{1}{(1+r\%)^n}\right)$$

例题 7

某人以 RM 6,000 投资一项金融产品。该产品保证将在未来五年每年发放RM 1,500。若当前的银行存款的年利率是3%，以复利计算，每年结算一次，问这项投资是否划算?

解 首先，计算该产品所发放金额的现值。

已知 $n=5$，$A=\text{RM } 1{,}500$，$r=3$。

代入公式，得现值 $=\frac{1500}{3\%}\left(1-\frac{1}{(1+3\%)^5}\right)$

$=\text{RM } 6{,}869.56$

由于该产品的现值比所投资的金额高，意即此项投资的回报率会比银行的存款利率高。以这方面考虑，该项投资是划算的。

例题 8

已知年金是 RM 2,000，年利率是 6%，每年支付一次。
问至少需支付多少年，现值才会超过 RM 20,000？

解 设至少需支付 n 年。

依题意，$\dfrac{2000}{6\%}\left(1-\dfrac{1}{(1+6\%)^n}\right)>20000$

$$\left(1-\frac{1}{1.06^n}\right)>0.6$$

$$\frac{1}{1.06^n}<0.4$$

$$1.06^n>2.5$$

$$n\log 1.06>\log 2.5$$

$$n>\frac{\log 2.5}{\log 1.06}$$

$$n>15.73$$

$\because$ n 的最小整数值是16，

$\therefore$ 至少需支付 16 年，现值才会超过 RM 20,000。

无限期支付的年金叫做永续年金，此时 $n\to\infty$，$\dfrac{1}{(1+r\%)^n}\to 0$。由此可得，永续年金的现值公式是 $\dfrac{A}{r\%}$。

例题 9

某人欲拨出一笔款项设立一个每年发放 RM 5,000 的慈善基金。若年利率保持在5%，每年结算一次，问他至少需拨出多少钱才能使该基金永续运作?

解 设立该基金所需要的款额可视为一个RM5,000的永续年金的现值。

已知 A = RM5,000，$r = 5$。

代入公式，得现值 $= \dfrac{5000}{0.05}$

$= \text{RM } 100,000$

∴ 他至少需拨出 RM 100,000 才能使该基金永续运作。

随堂练习 8

1. 已知本金是 RM 75,000，年利率是 4.5%。以复利计算，求 10 年后的本利和。
2. 某人将 RM 40,000 存入金融公司，年利率 8%，每半年结算一次。以复利计算，求3 年后的本利和。
3. 已知年利率是6%，每半年结算一次。以复利计算，5 年后的本利和是RM 4,031.75，求本金。
4. 已知年利率是 4%，年金是 RM 3,500，每年支付一次。连续支付15年。求现值。另，求永续年金的现值。

练习 23.6

1. 已知本金是 RM 90,000，年利率是 5%。以每年一期的复利计算，求 10 年后的本利和。
2. 某人存入一笔款项，年利率是 8%。以每年一期的复利计算，3 年后的存款增加了 RM 779.14。求该笔款项的数额。
3. 将 RM 80,000 存入金融公司，年利率是 8%，每三个月结算一次。以复利计算，求 5 年后的本利和。
4. 证明年利率为 5% 以复利计算的本利和，在 15 年后会超过其本金的两倍。
5. 已知本金是 RM 15,000，年利率是 6%，每年计息一次。以复利计算，问至少需多少年，本利和才会超过 RM 300,000？
6. 已知本金是 RM 120,000，年利率是 5.5%。以每半年一期的复利计算，问至少需经过多少年，存款才会超过 RM 200,000？
7. 某人每年年初存款 RM 2,500，年利率是 4.5%，每年计息一次。以复利计算，求 15年后的本利和。
8. 若现值是 RM 15,443.46，年利率是 5%，求连续支付 10 年的年金。
9. 已知年金是 RM 5,000，年利率是 5%，每年支付一次，连续支付 25 年。求现值。另，求永续年金的现值。
10. 已知年金是 RM 2,500，年利率是 4.5%，每年支付一次。问至少需支付多少年，其现值才会超过 RM 30,000？
11. 某银行推出一项年金计划，投资者可在投资 RM 20,000 后，每年领取 RM 1,000 直至终身。若将此年金计划近似地视为一个永续年金，求此年金计划的年利率。

总复习题23

1. 不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

(b) $5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

(d) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}\div\sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}}{3}}$

2. 化简下列各式：

(a) $\left(\frac{b}{2a^2}\right)^3\div\left(\frac{2b^2}{3a}\right)^0\times\left(-\frac{b}{a}\right)^{-3}$

(b) $\frac{3^{n+2}-2\times3^n}{5\left(3^{n+1}\right)}$

(c) $\frac{\left(x^{-1}+y^{-1}\right)\left(x^{-1}-y^{-1}\right)}{x^{-2}y^{-2}}$

(d) $\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{-\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}}\right)$

(e) $\frac{\left(\sqrt[4]{p^3}\right)^{\frac{1}{6}}\sqrt[9]{p^{-3}}}{\left(\sqrt{p^{-7}}\right)^{\frac{1}{6}}}$

(f) $\frac{\left(a^2+a^{-2}+2\right)^2}{\left(a^2+1\right)^4}$

3. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) 2.3^{-2} 与 2.3^{-1}

(b) $0.15^{-\frac{1}{2}}$ 与 $0.15^{-\frac{1}{3}}$

(c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$ 与 $3^{-\frac{5}{3}}$

(d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ 与 $\left(\frac{5}{3}\right)^{3.1}$

4. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $\log_{3.2}3$ 与 $\log_{3.2}2$

(b) $\log_{0.5}5.3$ 与 $\log_{0.5}3.5$

(c) $\log_3 2$ 与 $\log_2 3$

(d) $\log_2 2.3$ 与 $\log_4 4.8$

5. 求下列各函数的定义域：

(a) $y=\log_{0.5}\left(16-x^2\right)$

(b) $y=\log_2\left(2x^2-5x-12\right)$

(c) $y=\sqrt{3-3^x}$

(d) $y=\log_2(x-3)^2$

(e) $y=\log_5\left(x^2-2x\right)$

(f) $y=\log_3\dfrac{2}{3-x}$

(g) $y=\dfrac{1}{\log(x+1)-1}$

(h) $y=\dfrac{\log_3(2-x)}{\log_3(2+x)}$

(i) $y=\sqrt{\log_3(x-2)}$

(j) $y=\dfrac{2}{\sqrt{1-\log x}}$

6. 化简下列各式:

(a) $\log_3 27^x$

(b) $\log_x b^{a\log_b x}$

(c) $\log_5\left(25^x\cdot 5^y\right)$

(d) $3^{2\log_3 x-\log_3 y}$

(e) $5^{-2\log_{25} x}$

7. 若 $\log_2 5=p$，以 p 表示 $\log_2 100$。

8. 若 $\log_3 12=a$，以 a 表示下列各式:

(a) $\log_3 24$

(b) $\log_9 36$

9. 不使用计算机，求下列各式的值:

(a) $\log_c\dfrac{1}{5}+\log_c 5$

(b) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)-2\log_2\sqrt{2}$

(c) $\log_8\dfrac{2}{7}-\log_8(-2)^2-\log_8\dfrac{1}{7}$

(d) $\log\dfrac{5}{32}-2\log\dfrac{5}{6}+\log\dfrac{40}{9}$

(e) $\left(\log_2 3\right)\left(\log_3 4\right)$

(f) $\dfrac{\log_{16} 5}{\log_{32} 5}$

(g) $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 27$

(h) $\log_2\dfrac{1}{9}\cdot\log_3\dfrac{1}{25}\cdot\log_5\sqrt{8}$

(i) $\dfrac{1}{3}\log_2 8+\log_3 27-\dfrac{1}{4}\log_4 16$

(j) $\log^2 2+\log 2\cdot\log 5+\log 5$

(k) $2\log_3 15+3\log_3 12-\log_3 25-6\log_3 2$

(l) $\dfrac{\log\sqrt{27}+\log\sqrt{8}-\log\sqrt{125}}{\log 6-\log 5}$

(m) $\log_8\left(\log_2\sqrt{8+4\sqrt{3}}+\log_2\sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)$

10. 若 $\log_3 2=a$，$\log_2 5=b$，证明 $\log 3=\dfrac{1}{a(b+1)}$。

11. 若 $\log_2 3 = p$， $\log_3 7 = q$， 证明 $\log_{21} 14 = \dfrac{pq+1}{p(q+1)}$。

12. 已知 $2\log_5(x+y) = 1 + \log_5 x + \log_5 y$。证明 $x^2 + y^2 = 3xy$。

13. 已知 $x = 5^k$ 及 $y = 5^n$。以 k 及 n 表示下列各式:

(a) $\log_5 \dfrac{xy^3}{125}$

(b) $\log_{25}\left(5\sqrt{xy}\right)$

14. 已知 $2 + \log_4 y = 2\log_{16} x$。以 x 表示 y。

15. 解下列各指数方程式:

(a) $3^{3x-2} = 243$

(b) $4^{1-x} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{2x}$

(c) $2^{x^2} = \left(2^x\right)^2$

(d) $3^{5^x} = 3$

(e) $5^{8^x} = 625$

(f) $3^{x+1} = 6^x$

(g) $7^x - 7^{x-1} = 6$

(h) $3^{2x+1} = 10\left(3^x\right) - 3$

(i) $2^{2x+1} = 3\left(2^x\right) - 1$

(j) $5^{2x+1} = 26\left(5^x\right) - 5$

(k) $2^{2x+3} - 2^x = 1 - 2^{x+3}$

(l) $2^{2x+8} - 32\left(2^x\right) + 1 = 0$

16. 若 $\log_2 x + \log_4 x = \dfrac{9}{2}$， 求 x 的值。

17. 解下列各对数方程式:

(a) $2\log x - 3\log 4 = 2$

(b) $2\log x = \log 32 + \log 2$

(c) $\log x + \log(x+3) = \log(x+8)$

(d) $(\log_2 x)^2 = \log_2 x + 6$

(e) $\log_3 x + 6\log_x 3 = 5$

(f) $4^{\log x} = 2^{\log x + 1}$

(g) $\log_{x+1}\left(x^2 - 5x - 13\right) = 2$

(h) $\log_x \sqrt{2x^2 - 5x + 6} = 1$

(i) $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3 + \log_2 x$

(j) $\log_2\left[\log_3\left(\log_5 x\right)\right]=0$

(k) $3\log_8 x-2\log_2 x+2=0$

(l) $\log_4(x+4)+1=\log_2(x+1)$

(m) $2\log_2 x\cdot\log_8 x=\log_2 x+\log_8 x$

18. 某人将一笔款项存入银行，年利率是 5.5%。以每年一期的复利计算，4 年后的存款增加了 RM 1,432.95。求该笔款项的数额。
19. 已知本金是 RM 75,000，年利率是 3.5%，每三个月结算一次。以复利计算，求 8 年后的本利和。
20. 已知本金是 RM 150,000，年利率是 5.25%，每年结算一次。以复利计算，问至少需多少年，本利和才会超过 RM 300,000？
21. 若现值是 RM 24,924.44，年利率是 5%，求连续支付 20 年的年金。
22. 已知年金是 RM 8,000，年利率是 4.5%，每年支付一次，连续支付 15 年。求现值。另，求永续年金的现值。
23. 已知年金是 RM 4,500，年利率是 4%，每年支付一次。问至少需支付多少年，其现值才会超过 RM 50,000？
24. 某品牌手提电脑的售价是 RM 2,500，可以一次性付清或分期付款。分期付款为每个月支付 RM 110，为期两年。若以年利率 4%，每个月支付利息的复利计算，考虑两种付款方式的现值，哪一种付款方式较为划算?

24. 极限

学习目标：

- 理解极限的概念
- 掌握函数极限的计算

24.1 极限的概念

极限的概念是微积分学的基础，它是研究函数的变化过程及变化趋势的理论根据。在此先介绍一个有关极限概念的例子。

刘徽割圆术

圆不是直边图形，它的面积公式$A=\pi r^2$是怎么得来的呢？

设圆内接正n边形的边长是a_n，边心距是r_n，如图 24-1 所示，正n边形的面积是$A_n=n\cdot\frac{1}{2}a_n\cdot r_n$，正$n$边形的周长是$P_n=na_n$，则$A_n=\frac{1}{2}P_n\cdot r_n$。

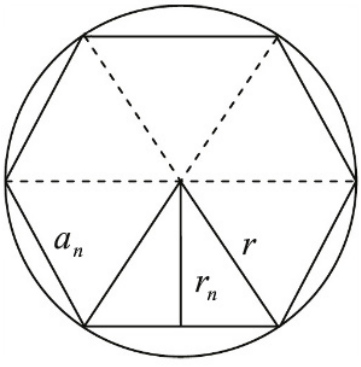


图 24-1

当n的值越来越大时，正n边形的面积A_n就无限地接近于圆的面积A，记作$A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$，读作当$n$趋向无限大时，$A_n$的极限是A。

当$n\to\infty$时，圆的内接正n边形的周长P_n及边心距r_n，分别越来越接近于圆的周长P及半径r，即$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$，$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=r$。

$$\begin{aligned}\therefore\ A&=\lim_{n\to\infty}A_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}P_n\cdot r_n\\&=\frac{1}{2}Pr\end{aligned}$$

由$P=2\pi r$，可得$A=\pi r^2$。

以上应用了“以直代曲”的方法，将圆的面积视为它的内接正n边形当n无限增大时的极限。这种通过极限运算求圆的面积的方法，是中国著名数学家刘徽

补充资料

周长$P=2\pi r$是由圆周率π的定义，$\pi=\frac{\text{周长}}{\text{直径}}$所得。

在公元三世纪所提出，叫做刘徽割圆术。以刘徽的原话来说就是："割之弥细，所失弥少；割之又割，以至不可割，则与圆周合体而无所失矣。"

24.2 函数的极限

若一变数x的值无限地接近于一常数a，我们简单地说，x趋近于a。

当x趋近于x_0(但不等于x_0)时，若函数$f(x)$的值都趋近于一个固定常数A，我们就说，x 趋近于x_0时，函数$f(x)$的极限是A，记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$。

例题 1

研究当x趋近于 2 时，函数$f(x)=x^2$的变化趋势，并求$\lim\limits_{x\to 2} x^2$。

解 欲研究当 x 趋近于2时，函数$f(x)=x^2$的变化趋势，可列表如下：

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	…	趋近 2
$f(x)=x^2$	3.61	3.96	3.996	3.9996	3.99996	…	趋近 4

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	…	趋近 2
$f(x)=x^2$	4.41	4.04	4.004	4.0004	4.00004	…	趋近 4

(续) 观察上一页的列表可得，当 x 从 2 的左侧或右侧趋近于 2 (但不等于 2) 时，函数 $f(x)=x^2$ 的值都趋近于 4。

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

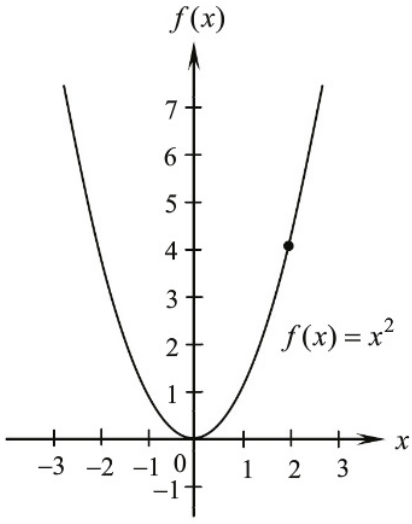


图 24-2

在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$ 的定义中，当 x 从 x_0 的左侧 $(x<x_0)$ 或右侧 $(x>x_0)$ 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值都趋近于同一固定常数 A。

若当 x 从 x_0 的左侧 $(x<x_0)$ 趋近于 x_0 时 (记作 $x\to x_0^-$) 函数 $f(x)$ 的值趋近于一个固定常数 A，则 A 就是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\mathrm{A}$。

同理，若当 x 从 x_0 的右侧 $(x>x_0)$ 趋近于 x_0 时 (记作 $x\to x_0^+$)，函数 $f(x)$ 的值趋近于一个固定常数 A，则 A 就是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\mathrm{A}$。

若当 x 从 x_0 的左侧 (或右侧) 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值不趋近于任何固定常数，则函数 $f(x)$ 的左极限 (或右极限) 不存在。

根据极限、左极限及右极限的定义，可得以下定理

当 $x\to x_0$ 时，若函数 $f(x)$ 的左极限与右极限存在且相等，则函数 $f(x)$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 。

反之，若函数的左极限或右极限不存在，或左极限不等于右极限，则函数 $f(x)$ 的极限不存在。

例题 2

研究当 $x \to 1^-$ 及 $x \to 1^+$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势，并求此函数在 $x=1$ 处的左极限、右极限与极限。

解 欲研究当 $x \to 1^-$ 及 $x \to 1^+$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势，可列表如下：

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	…	趋近 1
$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	…	趋近 2

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	…	趋近 1
$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	…	趋近 2

观察上表可得，当 x 从左侧趋近于 1 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值趋近于 2。

$$\therefore \lim_{x \to 1^-} f(x)=\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}=2$$

当 x 从右侧趋近于 1 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值趋近于 2。

$$\therefore \lim_{x \to 1^+} f(x)=\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$$\because \lim_{x \to 1^-} f(x)=\lim_{x \to 1^+} f(x)=2$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)=2$$

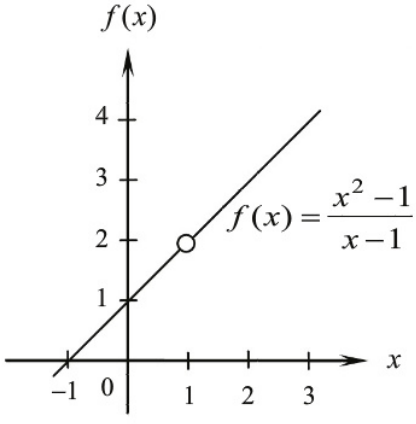


图 24-3

注意

极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与函数值 $f(x_0)$ 是不相同的概念。当 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在时，函数值 $f(x_0)$ 可能不存在；即使存在，也未必与极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 相等。

随堂练习 1

完成下表，研究当 $x \to 1$ 时，函数 $f(x)=2x+1$ 的值的变化趋势，并求 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$。

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
$f(x)=2x+1$					

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
$f(x)=2x+1$					

若 x 趋向无穷大时，函数 $f(x)$ 的值趋近于一个固定常数 A，则 A 就是函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=\mathrm{A}$。

同理，若 x 趋向负无穷大时，函数 $f(x)$ 的值趋近于一个固定常数 B，则 B 就是函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\mathrm{B}$。

若 $x \to \infty$（或 $x \to -\infty$）时，函数 $f(x)$ 的值不趋近于任何固定常数，则函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$（或 $x \to -\infty$）时的极限不存在。

例题 3

研究当 x 趋向无穷大时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势，并求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$。

解 欲观察当 x 无限增大时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势，可列表如下：

x	1	10	100	1000	10000	…
$f(x)=\frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	…

观察上表可得，当 x 无限增大时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的值趋近于 0。

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

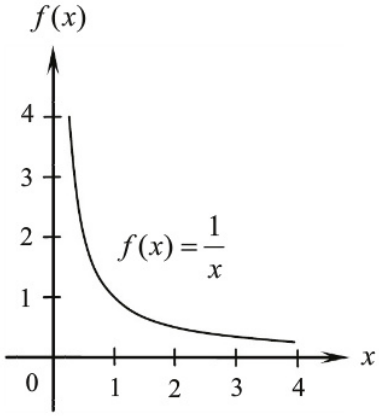


图 24-4

随堂练习 2

完成下表，研究当 x 趋向负无穷大时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势，并求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$。

x	−1	−10	−100	−1000	−10000	…
$f(x)=\frac{1}{x}$						…

练习 24.2

1. 完成下表，并求函数 $f(x)=3x-1$ 在 $x=1$ 处的左极限、右极限与极限。

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
$f(x)=3x-1$					

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
$f(x)=3x-1$					

2. 完成下列各表，研究当 $x\to x_0$ 时，函数值 $f(x)$ 的变化趋势，并求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

(a) $f(x)=x^3+1$，$x_0=0$

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f(x)$					

x	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	−0.00001
$f(x)$					

(b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$，$x_0=-2$

x	−2.1	−2.01	−2.001	−2.0001	−2.00001
$f(x)$					

x	−1.9	−1.99	−1.999	−1.9999	−1.99999
$f(x)$					

(c) $f(x)=\begin{cases} 4-x, & x<1 \\ x^2+2, & x\geq 1 \end{cases}$，$x_0=1$

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
$f(x)$					

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
$f(x)$					

3. 完成下表，研究当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ 的变化趋势，并求 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$。

x	1	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$						

4. 完成下表，研究当 $x \to -\infty$ 时，函数 $f(x)=2^x$ 的变化趋势，并求 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

x	-1	-2	-3	-4	-5	-10
$f(x)$						

24.3 函数极限的运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} k\cdot f(x)=k\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ （k 为常数）

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$ （n 为正数）

思考题

若 k 是常数，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} k$ 为何？

上述的运算法则对于 $x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$ 也同样成立。很明显的，$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$。

利用函数极限的运算法则，可根据已知的较为简单的函数的极限，求出较为复杂的函数的极限。例如，由以上的法则，可得

$$\lim_{x\to x_0}\left(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\right)$$
$$=a_n x_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_0$$

例题 1

求 $\lim\limits_{x\to -3}(3x+2)$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3}(3x+2)&=\lim_{x\to -3}3x+\lim_{x\to -3}2\\&=3\lim_{x\to -3}x+\lim_{x\to -3}2\\&=3\times(-3)+2\\&=-7\end{aligned}$$

例题 2

求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x^2+3x+2}&=\frac{2\times 2+1}{2^2+3\times 2+2}\\&=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

补充资料

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

例题 3

求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$。

解 当 $x\to 3$ 时，分母的极限是0，所以不能直接运用商的极限的运算法则。但是，当 $x\neq 3$，即 $x-3\neq 0$ 时，可先将分子与分母的公因式 $x-3$ 相约，再求极限。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}&=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

例题 4

求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

例题 5

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+2}{2x^2+4x+1}$。

解 当 $x\to\infty$ 时，分子及分母都无限增大，即不趋近于一固定常数，所以不能直接运用商的极限的运算法则。但是，若先将分子及分母同除以 x^2，就可求得极限。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+2}{2x^2+4x+1}&=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\\&=\frac{3-0+0}{2+0+0}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

例题 6

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+1}{3x^3-x^2-2x+5}$。

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+1}{3x^3-x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}$$
$$=\frac{0+0+0}{3-0-0+0}$$
$$=0$$

思考题

在例题 6 中，若将分子及分母同除以 x^2，是否也可求得答案?

随堂练习 3

求下列各极限:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x+4}$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+1}$

极限不存在的例子

例题 7

研究当 x 趋近于 1 时，函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<1\\ x, & x\geq 1\end{cases}$ 的极限是否存在。

解

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1-x)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x=1$$

$$\because \lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) \text{ 不存在。}$$

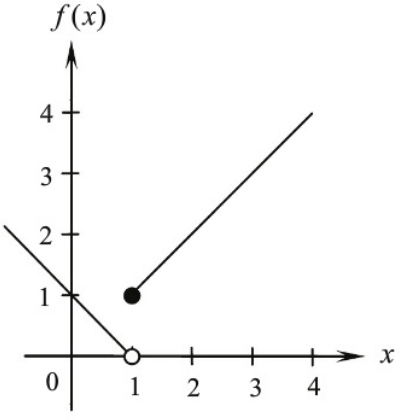


图 24-5

注意

例题 7 的函数在 $x=1$ 处不连续。

例题 8

研究当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ 的极限是否存在。

解

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1$$

$$\because \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) \text{ 不存在。}$$

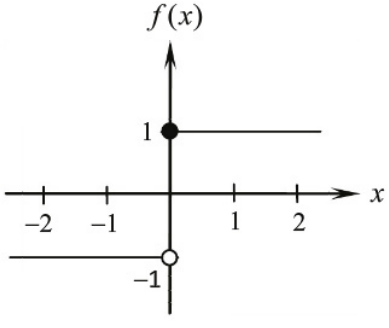


图 24-6

例题 9

研究当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的左极限、右极限与极限是否存在。

解 当 $x \to 0^-$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2} \to \infty$，即 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 不存在。

当 $x \to 0^+$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2} \to \infty$，即 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 不存在。

$\because$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$（或 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$）不存在，

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在。

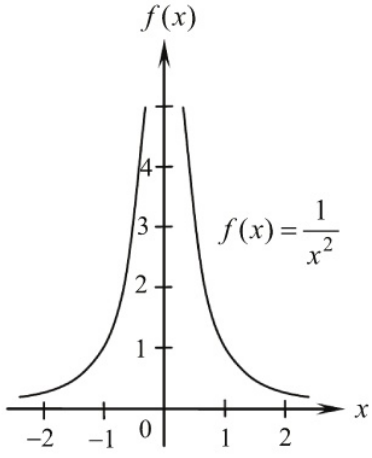


图 24-7

例题 10

研究当 $x \to \infty$ 及 $x \to -\infty$ 时，函数 $f(x)=2x+1$ 的极限是否存在。

解 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)=2x+1$ 的值趋向正无穷大，而不趋近于一个固定的常数，所以 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 不存在。

当 $x \to -\infty$ 时，函数 $f(x)=2x+1$ 的值趋向负无穷大，而不趋近于一个固定的常数，所以 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 也不存在。

例题 11

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+3x-1}{3x^2+5x+2}$。

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+3x-1}{3x^2+5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

$$=\infty$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+3x-1}{3x^2+5x+2}$ 不存在。

随堂练习 4

研究当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的左极限、右极限与极限是否存在。

练习 24.3

求下列各极限(1至31):

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+x-3\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 4}x^2(x-1)$
3. $\lim\limits_{x\to -2}x\left(9-x^2\right)$
4. $\lim\limits_{x\to -1}(x+3)(x-1)$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2x-1)\left(x^2+3x+4\right)$
6. $\lim\limits_{x\to -2}\left(4x^3+2x^2+3x+1\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2}{x-5}$
8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+3x-4}{x-4}$

10. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+5)(x+3)}{x+3}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

12. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x}{x^2+2x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3+x^2}{x^2-3x}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{2x^2+x-3}$

17. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+1}$

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-9}$

19. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}-2}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$

22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x-2}$

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+3}{x^2-1}-\dfrac{x+1}{x^2-x}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-1}{x^3-x+2}$

25. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{2x^3+x^2-5}$

26. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+7}{x^3+2x^2-4}$

27. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+2x^3-x^2+1}{x^5+x^3-2}$

28. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{2x+1}-\dfrac{x}{2}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to \infty}2^x$

30. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{x+1}$

31. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-3x+1}{2x^2+x+1}$

32. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 2x, & x\geq 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

33. 设 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ 3, & x=1\\ 2x-2, & x>1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$。

判断下列各函数在$x=x_0$处的极限是否存在。若存在，求它们的极限。(34至36)

34. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$，$x_0=0$

35. $f(x)=\begin{cases} -x+1, & x\le 2 \\ x-3, & x>2 \end{cases}$，$x_0=1$，$x_0=2$

36. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$，$x_0=-3$

总复习题24

1. 完成下表，研究函数$f(x)=x^3-1$在$x=1$处的变化趋势，并求此函数在$x=1$处的左极限、右极限与极限。

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$									

求下列各极限(2至13)：

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x-2\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-1\right)\sqrt{x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+4x-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{3x+4}}{x^2+x}$

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{3}}{x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-x-6}$

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x+3}{x^2+2x-1}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-x^3+3x+1}{3x^4+4x^2-x-2}$

11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-2x^2+3}{2x^2-1}$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2+1}-\dfrac{x^2}{2x+3}\right)$

判断下列各函数在 $x=x_0$ 处的极限是否存在。若存在，求它们的极限。(14 至 17)

14. $f(x)=\begin{cases}1-3x, & x<0\\ 2x+1, & x\geq 0\end{cases}$，$x_0=0$

15. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3}, & x<-2\\ x+1, & x>-2\end{cases}$，$x_0=-2$

16. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$，$x_0=1$

17. $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leq 1\\ x^2+1, & 1<x\leq 2\\ 3x-1, & x>2\end{cases}$，$x_0=1$，$x_0=2$

25. 微分

学习目标：

- 掌握导数的概念
- 掌握基本函数的微分
- 掌握微分法则
- 应用链导法求合成函数的导数
- 能求高阶导数
- 掌握隐函数的微分
- 掌握两个基本的极限

  $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
- 掌握三角函数、指数及对数函数的微分

25.1 曲线上切线的斜率

如图25-1所示，在直角坐标系上作曲线C的图像，并在曲线上取一点P及另一点Q，过点P及Q的直线是曲线的一条割线。当点Q沿着曲线趋近于点P时，割线PQ绕着点P转动，且趋近于一个极限直线PT。此直线PT就叫做曲线C在点P的切线。

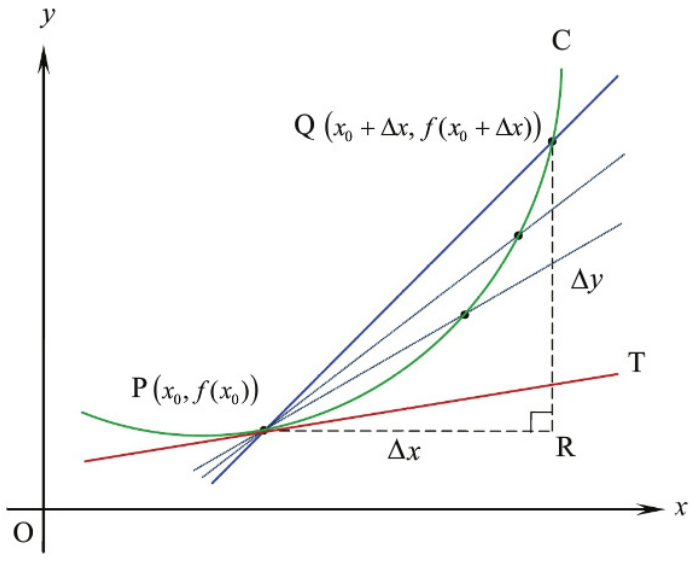


图 25-1

Δx 可取正值或负值。

我们知道，一条直线可由直线上的一点及其斜率来确定。因此，要确定曲线C在点P处的切线，就必须先求切线的斜率。

欲求曲线 $y=f(x)$ 在点P $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率，可在曲线上取一邻近的点 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$，如图25-1所示。将横坐标的变量PR记作 Δx，相应地将纵坐标的变量RQ记作 Δy，则 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。

因此，割线 PQ 的斜率是 $\dfrac{y\text{ 的变量}}{x\text{ 的变量}}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，若上式的极限存在，这极限就是曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线斜率，以 m 表示，即

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

例题 1

求曲线 $y=x^2$ 在 $x=2$ 处的切线斜率。

解 设 $f(x)=x^2$，点 P 为 $(2，f(2))$，点 Q 为 $(2+\Delta x，f(2+\Delta x))$，如图 25-2 所示。

割线PQ的斜率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$$=\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$$

$$=\frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2-4}{\Delta x}$$

$$=4+\Delta x$$

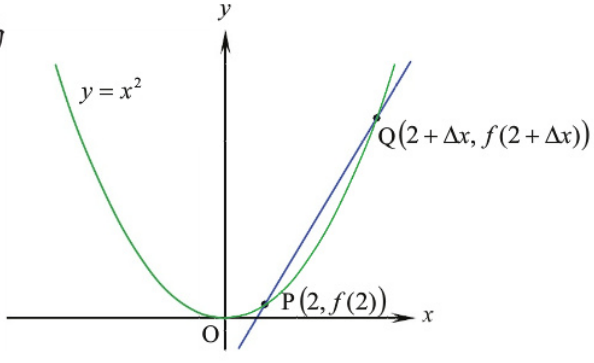


图 25-2

$\therefore$ 曲线在点 P 的切线斜率 $m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)$$

$$=4$$

例题 2

求曲线 $y=x^2+2x-3$ 在 $x=3$ 处的切线斜率。

解 设 $f(x)=x^2+2x-3$ 。

当 $x=3$ 时，$f(3)=(3)^2+2(3)-3=12$ 。

在曲线上 $x=3$ 处取邻近的一点 Q $\left(3+\Delta x,\ f(3+\Delta x)\right)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}\\&=\frac{[(3+\Delta x)^2+2(3+\Delta x)-3]-12}{\Delta x}\\&=\frac{[9+6\Delta x+(\Delta x)^2+6+2\Delta x-3]-12}{\Delta x}\\&=8+\Delta x\end{aligned}$$

$\therefore$ 曲线在 $x=3$ 处的切线斜率 $m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(8+\Delta x)$

$=8$

随堂练习 1

1. 求曲线 $y=2-x^2$ 在 $x=1$ 处的切线斜率。
2. 求曲线 $y=x^2+3x$ 在 $x=2$ 处的切线斜率。

练习 25.1

1. 已知曲线 $y=x^2+1$。若P是曲线在 $x=2$ 处的点，Q是邻近的一点，

   (a) 求点Q的 x 坐标为2.5、2.25、2.1、2.05、2.01及2.001时的变量 Δx 及相对变量 Δy，并完成下表：

点Q的 x 坐标	点Q的 y 坐标	Δx	Δy	割线PQ的斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$x=2.5$				
$x=2.25$				
$x=2.1$				
$x=2.05$				
$x=2.01$				
$x=2.001$				

   (b) 观察当点Q趋近于点P时割线PQ的斜率，从而求曲线在点P的切线斜率。

2. 求曲线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 在 $x=2$ 处的切线斜率。

3. 求曲线 $y=\frac{10}{x}$ 在点Q(2，5)的切线斜率。

4. 求曲线 $y=\frac{4}{x}-5$ 在 $x=1$ 处的切线斜率。

5. 求曲线 $y=\frac{1}{2}x^3+1$ 在点P(−2，−3)的切线斜率。

25.2 切线斜率与导数

在上一节，我们已经学过，若 $P(x_0, f(x_0))$ 及 $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的两点，割线PQ的斜率是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。当点Q趋近于点P，即当 $\Delta x \to 0$ 时，割线PQ将趋近于切线PT。

因此，切线 PT 的斜率是

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其附近有定义，当 x 在 x_0 处有变量 Δx 时，函数 y 有相应的变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，我们说 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导或可微，并将这个极限叫做函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

若上述极限不存在，我们就说 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导或不可微。

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每个点都可导，我们说 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导。在开区间 (a,b) 内每个确定的值 x_0 都对应着一个确定的导数值 $f'(x_0)$，这就在开区间 (a,b) 内形成了一个函数。这个新的函数就叫做 $f(x)$ 的导数，记作 $f'(x)$ 或 y'。

根据导数的定义，可得导数

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$f'(x)$ 也常记作 $\dfrac{dy}{dx}$，也叫做函数 $y=f(x)$ 对 x 的微分。

由导数的定义可知，求函数 $y=f(x)$ 的导数的步骤如下：

一、求函数的变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

二、求变量 Δy 与变量 Δx 的比值，即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

三、求上述比值的极限，即

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}。$$

以上由导数的定义求导数的方法，叫做求微分的第一法则。

注意

① 导函数也简称导数。除非另有说明，求导数即为求导函数。

② 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是有分别的。$f(x)$ 是一个函数，而 $f'(x_0)$ 是一个数值，但它们又是有关联的。$f'(x_0)$ 是导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，又叫做 $x=x_0$ 处的导数值。

例题 1

求函数 $y=2x^2-3$ 对 x 的微分，并求在 $x=3$ 处的导数值。

解

$$\begin{aligned}\Delta y&=\left[2(x+\Delta x)^2-3\right]-\left(2x^2-3\right)\\&=2\left[x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2\right]-3-2x^2+3\\&=4x(\Delta x)+2(\Delta x)^2\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x)$$

$$\frac{dy}{dx}=4x$$

∴ 函数在 $x=3$ 处的导数值是 $4(3)=12$。

例题 2

求函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数，并求在 $x=9$ 处的导数值。

解

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

(续)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\times\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\therefore$ 函数在 $x=9$ 处的导数值是 $\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$。

随堂练习 2

1. 求函数 $y=2x^2$ 的导数，并求在 $x=1$ 处的导数值。
2. 设函数 $y=4-3x+x^2$，求
   (a) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；
   (b) $\frac{dy}{dx}$；
   (c) 函数在 $x=2$ 处的导数值。

练习 25.2

由导数的定义求下列各函数的导数，并求在 $x=2$ 处的导数值 (1至12):

1. $f(x)=3x+2$
2. $f(x)=x^2+1$
3. $f(x)=4x^2-3$
4. $f(x)=2-x^2$
5. $y=x^2-3x$
6. $y=x^2-x-3$
7. $y=2x^2+3x-1$
8. $y=x^3+1$
9. $y=x^3-2x$
10. $y=\sqrt{x+2}$
11. $y=\dfrac{2}{x^2}$
12. $y=\dfrac{1}{1-x}$

13. 已知函数 $y=\dfrac{3}{x-2}$，$x\neq 2$。求

    (a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

    (b) $\dfrac{dy}{dx}$；

    (c) 函数在 $x=3$ 处的导数值。

14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，$x\neq 0$。求 (a) $f'(x)$；(b) $f'(1)$。

15. 已知曲线 $y=3-4x-5x^2$。

    (a) 由导数的定义求 $\dfrac{dy}{dx}$。

    (b) 求曲线在 $x=-2$ 处的切线斜率。

    (c) 若曲线在点 P 的切线斜率是6，求点P的坐标。

25.3 微分法则

由于应用导数的定义求导数的步骤较为繁琐，所以我们应用导数的定义推导一些求导数的公式，再以这些公式去求导数。

幂函数的导数

设 $y=f(x)=c$，其中 c 为常数。

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\frac{c-c}{\Delta x}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(c)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}0\\&=0\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(c)=0 \qquad (c\text{为常数})$$

设 $y=f(x)=x^n$，其中 n 为正整数。

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)\\&=(x+\Delta x)^n-x^n\\&=\left[x^n+{}_nC_1x^{n-1}\Delta x+{}_nC_2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+{}_nC_nx^0(\Delta x)^n\right]-x^n\\&={}_nC_1x^{n-1}\Delta x+{}_nC_2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+{}_nC_n(\Delta x)^n\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}={}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}\Delta x+\cdots+{}_nC_n(\Delta x)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^n\right)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[{}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}\Delta x+\cdots+{}_nC_n(\Delta x)^{n-1}\right]\\&=nx^{n-1}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}\quad(n\text{为实数})$$

以上的推导只考虑当 n 是正整数时的情形。实际上，以上公式在当 n 是任何实数时也成立。

函数与常数乘积的导数

设 $y=cu$，其中 c 为常数，u 为 x 的可导函数。

$$\begin{aligned}y+\Delta y&=c(u+\Delta u)\\&=cu+c\Delta u\end{aligned}$$

$$\Delta y=c\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(cu) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(c\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\ &= c\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\ &= c\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}$$ （c为常数，u为x的可导函数）

例题 1

求下列各函数的导数：

(a) $y=x^6$　　(b) $y=\dfrac{2}{x^3}$　　(c) $y=\sqrt[3]{x^5}$

解 (a) $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^6\right)\\ &= 6x^5\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right)\\ &= 2\left(-3x^{-4}\right)\\ &= -\frac{6}{x^4}\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}}\right)\\ &= \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

函数的和与差的导数

设 $y=u\pm v$，其中 u 及 v 为 x 的可导函数。

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v)$$

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(u\pm v)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\\&=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$$

（u 及 v 为 x 的可导函数）

以上公式可推广到任意有限个可导函数 u_1，u_2，u_3，…，u_n，即

$$\frac{d}{dx}(u_1\pm u_2\pm u_3\pm\cdots\pm u_n)=\frac{du_1}{dx}\pm\frac{du_2}{dx}\pm\frac{du_3}{dx}\pm\cdots\pm\frac{du_n}{dx}$$ 。

例题 2

求下列各函数的导数：

(a) $y=3x^4+x^2-5$

(b) $y=x^3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{3x^3}$

解 (a) $\dfrac{dy}{dx}=3\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right)+\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)-\dfrac{d}{dx}(5)$

$=12x^3+2x$

(b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right)+\dfrac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)-\dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dx}\left(x^{-3}\right)$

$=3x^2-2x^{-3}+x^{-4}$

$=3x^2-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}$

函数的积的导数

设 $y=uv$，其中 u 及 v 为 x 的可导函数。

$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$

$=uv+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v$

$\Delta y=u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}+v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$

已知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\dfrac{du}{dx}$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=\dfrac{dv}{dx}$，

因此，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x$

$=v'(x)\cdot 0$

$=0$

补充资料

这里证明了若 $\dfrac{dv}{dx}$ 在 $x=x_0$ 处存在，则

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v(x_0+\Delta x)-v(x_0)\right)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v$

$=0$

由此可得，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}v\left(x_0+\Delta x\right)=v(x_0)$

即 $y=v(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x\to 0}(uv)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right)$$
$$=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\right)$$
$$=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+0$$
$$=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \quad (u\text{ 及 }v\text{ 为 }x\text{ 的可导函数})$$

注意

$$\frac{d}{dx}(uv)\neq\frac{d}{dx}u\cdot\frac{d}{dx}v$$

例题 3

求下列各函数的导数：

(a) $y=(4x^2+1)(5x^3+2x-3)$

(b) $y=(x+2)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)$

解 (a)
$$\frac{dy}{dx}=(4x^2+1)\frac{d}{dx}(5x^3+2x-3)+(5x^3+2x-3)\frac{d}{dx}(4x^2+1)$$
$$=(4x^2+1)(15x^2+2)+(5x^3+2x-3)(8x)$$
$$=100x^4+39x^2-24x+2$$

(b) $$\frac{dy}{dx}=(x+2)\frac{d}{dx}\left(x^{-2}-3x^{-3}\right)+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)\frac{d}{dx}(x+2)$$

$$=(x+2)\left(-2x^{-3}+9x^{-4}\right)+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)(1)$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{18}{x^4}$$

思考题

在例题3(a)及(b)中，将多项式展开后再求导的步骤是否较为简单?

随堂练习 3

求下列各函数的导数:

1. $y=5x$
2. $y=\sqrt{x}$
3. $y=6x^3+3x^2-5$
4. $y=(2x-3)(x^2+2)$
5. $y=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$
6. $y=2x^3-3x+\frac{7}{\sqrt{x}}$

练习 25.3a

求下列各函数的导数 (1至18):

1. $y=2x^3+2$
2. $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+2$
3. $y=x^5-\frac{1}{4}x^4+3x^2-4$
4. $y=2x^2+4x^3-7x^4$
5. $y=x^2-3x+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}$
6. $y=2x^3-4x-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}$
7. $y=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+3$
8. $y=3\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x^2}$
9. $y=(2x-5)^2$
10. $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

11. $y=\dfrac{x^3+4x^2-x+2}{x}$

12. $y=\dfrac{2x^4+3x^2-6}{x^2}$

13. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}}$

14. $y=(x+2)(x^2+3x-8)$

15. $y=(2+3x)(1+x-x^2)$

16. $y=(x+2)(x-2)(x^2+4)$

17. $y=(x-1)^2(3x+5)$

18. $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^2)$

19. 若曲线 $y=x^3+6x^2+45x+12$ 在点 A 的斜率是 36，求点 A 的坐标。

20. 已知函数 $f(x)=x^2+3x+4$ 及 $g(x)=x^3+x^2+7$。若 $f'(a)=g'(a)$，求 a 的值。

函数的商的导数

设 $y=\dfrac{u}{v}$，其中 u 及 v 为 x 的可导函数。

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}$$

$$=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

当 $\dfrac{dv}{dx}$ 存在时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$。

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v^2+v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v}$$

$$=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} \quad (v\neq 0\ ,\ u\text{及}v\text{为}x\text{的可导函数})$$

例题 4

求函数 $y=\dfrac{2x-1}{2x+3}$ 的导数。

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)$ $\qquad (u=2x-1\ ,\ \ v=2x+3)$

$$=\frac{(2x+3)\dfrac{d}{dx}(2x-1)-(2x-1)\dfrac{d}{dx}(2x+3)}{(2x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x+3)(2)-(2x-1)(2)}{(2x+3)^2}$$

$$=\frac{8}{(2x+3)^2}$$

例题 5

求函数 $y=\dfrac{3x^2}{3x+2}$ 的导数。

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2}{3x+2}\right)$$

$$=\frac{(3x+2)(6x)-3x^2(3)}{(3x+2)^2}$$

$$=\frac{9x^2+12x}{(3x+2)^2}$$

随堂练习 4

求下列各函数的导数：

1. $y=\dfrac{2x}{x+2}$
2. $y=\dfrac{3x-2}{x+2}$
3. $y=\dfrac{x}{x^2-5}$
4. $y=\dfrac{x^2-1}{3x-2}$

练习 25.3b

求下列各函数的导数：

1. $y=\dfrac{x-2}{x+2}$
2. $y=\dfrac{x-a}{2x+a}$ （a为常数）
3. $y=\dfrac{2x^3}{x+2}$
4. $y=\dfrac{2x+3}{x^2+1}$

5. $y=\dfrac{3x}{x^2-4x}$

6. $y=\dfrac{3x^2+x-1}{2x-1}$

7. $y=\dfrac{2x^4}{(x+3)^2}$

8. $y=\dfrac{2}{1+x}+\dfrac{2}{1-x}$

9. $y=\dfrac{4-x}{3-2x+x^2}$

10. $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

25.4 链导法 — 合成函数的微分法

若 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 都是可导函数，则合成函数 $y=f(g(x))$ 也可导。在合成函数 $y=f(g(x))$ 中，当 x 有一个变量 Δx 时，就使 u 产生一个变量 Δu，也使 y 产生一个变量 Δy，且 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$。

若函数 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 的导数分别是 $\dfrac{dy}{du}$ 及 $\dfrac{du}{dx}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\dfrac{du}{dx}$，$\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=\dfrac{dy}{du}$。

因此，
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

所以，合成函数 $y=f(g(x))$ 的导数是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

将上述的结果进一步推广。若 $y=f(v)$，$v=g(u)$，$u=h(x)$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

以上法则就是链导法。

例题 1

求函数 $y=(3x-2)^5$ 的导数。

解 设 $u=3x-2$，$y=u^5$。

由链导法，得
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=\frac{d}{du}\left(u^5\right)\cdot\frac{d}{dx}(3x-2)\\&=5u^4(3)\\&=15(3x-2)^4\end{aligned}$$

例题 2

已知 $y=2u^4$ 及 $u=3x+5$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解 由于 $\frac{dy}{du}=8u^3$，$\frac{du}{dx}=3$，

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=8u^3(3)\\&=24(3x+5)^3\end{aligned}$$

例题 3

求函数 $y=\dfrac{2}{(2x-3)^2}$ 的导数。

解 设 $u=2x-3$， $y=2u^{-2}$。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=-4u^{-3}(2)\\&=-8u^{-3}\\&=-\frac{8}{(2x-3)^3}\end{aligned}$$

在熟练运算步骤后，部分的运算过程可省略。例题3可省略成下列步骤：

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left[2(2x-3)^{-2}\right]\\&=-4(2x-3)^{-3}\frac{d}{dx}(2x-3)\\&=-4(2x-3)^{-3}(2)\\&=-\frac{8}{(2x-3)^3}\end{aligned}$$

例题 4

求函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的导数。

解 $y=\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{2}\left(x^2+2x-3\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(x^2+2x-3\right)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2+2x-3\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)\\&=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}\end{aligned}$$

例题 5

求函数 $y=(3x+2)^3(2x-5)^2$ 的导数。

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(3x+2)^3\frac{d}{dx}\left[(2x-5)^2\right]+(2x-5)^2\frac{d}{dx}\left[(3x+2)^3\right]\\&=(3x+2)^3\left[2(2x-5)(2)\right]+(2x-5)^2\left[3(3x+2)^2(3)\right]\\&=4(2x-5)(3x+2)^3+9(2x-5)^2(3x+2)^2\\&=(2x-5)(3x+2)^2\left[4(3x+2)+9(2x-5)\right]\\&=(2x-5)(3x+2)^2(30x-37)\end{aligned}$$

例题 6

求函数 $y=\dfrac{(4x+3)^3}{\left(x^2+2\right)^2}$ 的导数。

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\left(x^2+2\right)^2\frac{d}{dx}\left[(4x+3)^3\right]-(4x+3)^3\frac{d}{dx}\left[\left(x^2+2\right)^2\right]}{\left(x^2+2\right)^4}\\&=\frac{\left(x^2+2\right)^2\left[3(4x+3)^2(4)\right]-(4x+3)^3\left[2\left(x^2+2\right)(2x)\right]}{\left(x^2+2\right)^4}\\&=\frac{4\left(x^2+2\right)(4x+3)^2\left[3\left(x^2+2\right)-x(4x+3)\right]}{\left(x^2+2\right)^4}\\&=-\frac{4(4x+3)^2\left(x^2+3x-6\right)}{\left(x^2+2\right)^3}\end{aligned}$$

随堂练习 5

求下列各函数的导数：

1. $y=\left(2x^3-4\right)^3$
2. $y=\dfrac{6}{\sqrt{2x-3}}$
3. $y=(x+1)(x-3)^3$
4. $y=\left(x^2-2\right)\sqrt{1+x}$
5. $y=\dfrac{x}{(2x+3)^3}$
6. $y=\dfrac{(3x+4)^2}{(x-5)^3}$

练习 25.4

求下列各函数的导数：

1. $y=(2x-3)^8$
2. $y=\left(3x^2-6x+5\right)^4$
3. $y=\sqrt{2x^4-4x^2+5}$
4. $y=\sqrt[3]{3x^2-3x+2}$
5. $y=\dfrac{3}{6x^2-4}$
6. $y=\dfrac{9}{\sqrt{6x^3-9x}}$
7. $y=\dfrac{3x}{(x+5)^2}$
8. $y=\dfrac{3x-1}{\sqrt{x-1}}$
9. $y=\sqrt{x}\left(x-3\right)^5$
10. $y=x^2(x-3)(x+2)^2$
11. $y=(2x+1)^2(x+1)^3$
12. $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$
13. $y=x^2\sqrt{1+x^2}$
14. $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$

25.5 高阶导数

若函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 f' 在 $x=x_0$ 处的导数就叫做函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的二阶导数，记作 $f''(x_0)$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=f''(x_0)$$

函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的导数，叫做 f 的二阶导数，记作 $(f')'=f''$ 或 $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2(f(x))}{dx^2}$；而 f' 则叫做一阶导数。依相同的步骤，我们可连续求导数而得到三阶导数 f'''，四阶导数 $f^{(4)}$ 至 n 阶导数 $f^{(n)}$。

求高阶导数的步骤如同求一阶导数，只需将结果逐次微分即可。

补充资料

$f''(x_0)$ 也叫做函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的二次导数。

补充资料

	$f(x)$	y
一阶	$f'(x)$	y' 或 $\frac{dy}{dx}$
二阶	$f''(x)$	y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$
三阶	$f'''(x)$	y''' 或 $\frac{d^3y}{dx^3}$
四阶	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$ 或 $\frac{d^4y}{dx^4}$
⋮		
n 阶	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$

例题 1

求函数 $y=2x^4-3x^3+8x^2+6x-7$ 的一阶、二阶、三阶及四阶导数。

解

$$\frac{dy}{dx}=8x^3-9x^2+16x+6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=24x^2-18x+16$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=48x-18$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=48$$

思考题

在例题1中，求四阶以上的导数。

例题 2

求函数 $y=\dfrac{3}{(3x-2)^3}$ 的二阶导数。

解

$$y=3(3x-2)^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx}=-9(3x-2)^{-4}(3)$$

$$=-27(3x-2)^{-4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=108(3x-2)^{-5}(3)$$

$$=\frac{324}{(3x-2)^5}$$

随堂练习 6

1. 求函数 $y=3x^5+2x^4-5x^2-8x+9$ 的一阶至六阶的导数。

求下列各函数的三阶导数(2 至 5):

2. $y=\dfrac{3}{x^4}$

3. $y=3x^3+6x^2-5x$

4. $y=\sqrt{2x-3}$

5. $y=\dfrac{1}{(2x+5)^3}$

练习 25.5

1. 若函数 $y=ax^6+2bx^4-3cx^3+4x^2-5$，其中 a、b 及 c 都是常数，求 y 的一阶至七阶的导数。

求下列各函数的二阶导数（2 至 9）：

2. $y=2x-\dfrac{x^3}{2}$

3. $y=\left(2+x^2\right)^3$

4. $y=x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

5. $y=x^2-\dfrac{1}{x^2}$

6. $y=\sqrt{a^2-x^2}$ （a 为常数）

7. $y=\dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$

8. $y=\sqrt[3]{3x^2+2}$

9. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

10. 已知函数 $y=2x^3-3x^2-6x+10$，求 y'，y'' 及 y''' 在 $x=1$ 处的值。

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{5}{(2x+1)^2}$，求 $f''(2)$ 的值。

12. 求函数 $y=2x^3+3x^2-72x+15$ 的二阶导数 y''，并求 $y''=0$ 时 x 的值。

25.6 隐函数的微分法

考虑方程式 $x^2+y^2=x^3$ 及 $y^2+2xy-3=0$。对于这些方程式，y 并不是以 x 表示，因此我们称 y 为 x 的隐函数。在某些情况下，以上方程式很难或甚至不可能改写成 $y=f(x)$ 的形式。欲求隐函数的导数，可同时在方程式的两边对 x 微分及应用链导法，以得出一个联系 x、y 及 $\dfrac{dy}{dx}$ 的方程式，由此就可求得 $\dfrac{dy}{dx}$。

补充资料

$x^2+y^2=1$ 确定两个函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=-\sqrt{1-x^2}$。

例题 1

已知 $y^2-5x=0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

$$y^2-5x=0$$

两边对 x 微分，得

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right)-\frac{d}{dx}(5x)=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}-5=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2y}$$

例题 2

已知 $x^3+2xy-y^2=5$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

$$x^3+2xy-y^2=5$$

两边对 x 微分，得

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)+\frac{d}{dx}(2xy)-\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=\frac{d}{dx}(5)$$

$$3x^2+2x\frac{dy}{dx}+2y-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2x-2y)\frac{dy}{dx}=-\left(3x^2+2y\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2y}{2x-2y}$$

例题 3

已知 $(x-2y)^2=3x^2y+5$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

$$(x-2y)^2=3x^2y+5$$

两边对 x 微分，得

$$2(x-2y)\left(1-2\frac{dy}{dx}\right)=3x^2\frac{dy}{dx}+6xy$$

$$2(x-2y)-4(x-2y)\frac{dy}{dx}=3x^2\frac{dy}{dx}+6xy$$

$$\left(8y-4x-3x^2\right)\frac{dy}{dx}=6xy+4y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6xy+4y-2x}{8y-4x-3x^2}$$

随堂练习 7

求下列各隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

1. $x^2+y^2-6x+8y-9=0$
2. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=5$ （a 及 b 为常数）
3. $2x^2-4xy+2y^2=5$
4. $x^3+2x^2y^3+y^4=1$

练习 25.6

求下列各隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

1. $x^2+y^3=3$
2. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ （a 为常数）
3. $x^3+y^3=2xy+3$
4. $y^2(x+1)=3x^2$

5. $3x^2-6xy+3y^2=25$

6. $xy^3=2x^2-2y^2$

7. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2x$

8. $\frac{3x^2}{y}+\frac{3y^2}{x}=1$

9. $xy-x+xy^3=10$

10. $4x^3+2xy^2-xy=0$

25.7 两个基本极限

一、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

考虑当 x 趋近于零时 $\frac{\sin x}{x}$ 的值。当 $x=0$ 时，$\sin x$ 及 x 都是零。因此，$\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$ 没有意义，但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 是存在的，如下表所示：

x (弧度)	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
1.00	0.84147098	0.84147098
0.500	0.479425539	0.958851077
0.250	0.247403959	0.989615837
0.100	0.099833417	0.99833417
0.010	0.0099998333	0.99998333
0.001	0.00099999983	0.99999983
⋮	⋮	⋮

注意

在微积分中，三角函数的自变量 x 都是以弧度为单位。

观察上表可得，当x趋近于零时，函数$\frac{\sin x}{x}$的值趋近于1。由此可推测

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

我们来证明以上的推测。在图25-3所示的单位圆中，以OA为始边的圆心角x，其终边与圆相交于P，AN是过点A的切线，AN与OP相交于N。

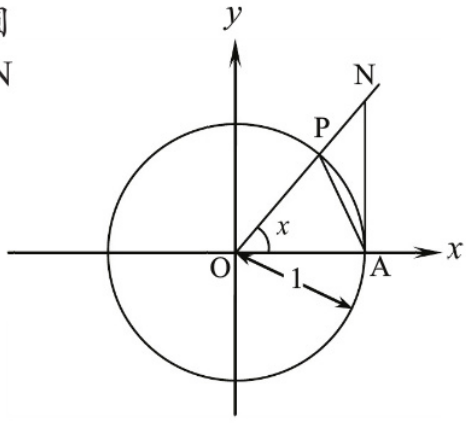


图 25-3

由图可知，$\overset{\frown}{PA}=x$

$$AN=\tan x$$

且ΔOAP的面积<扇形OAP的面积<ΔOAN的面积。

$$\therefore\ \frac{1}{2}(1)^2\sin x<\frac{1}{2}(1)^2x<\frac{1}{2}(1)\tan x$$

$$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

当x为小于$\frac{\pi}{2}$的正角时，$\sin x>0$。将以上式子除以$\sin x$，得

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

当$x<0$时，$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x)}{-x}$，$\cos(-x)=\cos x$。

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$介于$\lim\limits_{x\to 0}\cos x$与1之间。

$\because\ \lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

由此，也可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$

$$=1$$

补充资料

文中的证明所得的结论是应用挟挤定理推导而得。

例題 1

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{8\sin 8x}{8x}\\&=8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}\\&=8\times 1\\&=8\end{aligned}$$

例題 2

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{3x}&=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{\cos 5x}\right)\\&=\frac{5}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\right)\\&=\frac{5}{3}\times 1\times 1\\&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

例題 3

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{6}{2}\right)\\&=3\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\right)\\&=3\times 1\times 1\\&=3\end{aligned}$$

例题 4

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\\&=\frac{1}{4}\times 1\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

随堂练习 8

求下列各极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 5x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 9x}{\sin 5x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x\sin 3x}{x^2}$

练习 25.7a

求下列各极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin 2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cot x)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 7x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{5}{2}x}{2x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(2x^2\right)}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 bx}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{2x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\tan 8x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 5x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{2\tan^2 2x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{3x^2}$

二、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

考虑当x趋向无穷大时$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的极限。当$x\to\infty$时，函数$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的变化趋势如下一页的列表所示：

x	$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=2.59374$
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2.70481$
1000	$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2.71692$
10000	$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}=2.71815$
100000	$\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000}=2.71827$
⋮	⋮

观察上表可得，当 x 趋向无穷大时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 趋近于一个常数，以 e 来表示，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

若 $y=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{y}$。当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$。

于是，$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$。

补充资料

e 是一个无理数，它的近似值是2.71828182846。e 是自然对数的底，在数学及科技等其他领域常会用到它。

例題 5

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x}&=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-2}\\&=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-2}\\&=e^{-2}\end{aligned}$$

例題 6

求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}&=\lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{4}\\&=\left(\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{4}\\&=e^{4}\end{aligned}$$

例題 7

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x}\right)^{x}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x}\right)^{x}&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{6}\\&=e^{6}\end{aligned}$$

例题 8

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\\&=e\times 1\\&=e\end{aligned}$$

随堂练习 9

求下列各极限：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-3x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$

练习 25.7b

求下列各极限：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{-3x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x}{3}\right)^{-\frac{3}{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2-x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{3+x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{-\frac{3}{x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1-\frac{2}{x}}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}$

25.8 三角函数的导数

以下我们来推导正弦、余弦及正切函数的导数公式。

设 $y=\sin x$ 。

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$$

$$\begin{aligned}\Delta y&=\sin(x+\Delta x)-\sin x\\&=\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x\\&=\sin x(\cos\Delta x-1)+\cos x\sin\Delta x\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sin x\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$\because\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2\cdot\Delta x$$

$$=0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$$

$$= \cos x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$$

$$\because \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1)$$

$$= -\sin x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$$

思考題

利用导数的定义证明 $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$。

$$\because \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

以下列出余切、正割及余割的导数公式。学生可应用上述三角函数的导数公式及微分法则自行证明这些公式。

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

例题 1

求函数 $y=\sin 5x$ 的导数。

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}(\sin 5x)\\&=\cos 5x\frac{d}{dx}(5x)\\&=5\cos 5x\end{aligned}$$

例题 2

求函数 $y=\cos^3 7x$ 的导数。

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(\cos^3 7x\right)\\&=3\cos^2 7x\frac{d}{dx}(\cos 7x)\\&=3\cos^2 7x\,(-7\sin 7x)\\&=-21\sin 7x\cos^2 7x\end{aligned}$$

例题 3

求函数 $y=2x\sec x$ 的导数。

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=2x\,(\sec x\tan x)+2\sec x\\&=2\sec x\,(x\tan x+1)\end{aligned}$$

例題 4

求函数 $y=\cot 5x^\circ$ 的导数。

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(\cot\left(5x^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right)\\&=\frac{d}{dx}\left(\cot\frac{\pi}{36}x\right)\\&=-\frac{\pi}{36}\operatorname{cosec}^2 5x^\circ\end{aligned}$$

例題 5

求函数 $y=\dfrac{2}{5\tan^3 3x}$ 的导数。

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5\tan^3 3x}\right)\\&=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}\cot^3 3x\right)\\&=\frac{2}{5}\left(3\cot^2 3x\right)\left(-\operatorname{cosec}^2 3x\right)(3)\\&=-\frac{18}{5}\cot^2 3x\operatorname{cosec}^2 3x\end{aligned}$$

例题 6

求函数 $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ 的导数。

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\\&=\frac{(1+\cos x)\dfrac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\dfrac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{(1+\cos x)(\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{1}{1+\cos x}\end{aligned}$$

例题 7

已知函数 $y=x\cos x$，证明 $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}-\tan x$。

证

$$\frac{dy}{dx}=x(-\sin x)+\cos x$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{x\cos x}(-x\sin x+\cos x)\\&=-\frac{x\sin x}{x\cos x}+\frac{\cos x}{x\cos x}\\&=\frac{1}{x}-\tan x\end{aligned}$$

随堂练习 10

求下列各函数的导数:

1. $y=\cos\left(5x^2\right)$
2. $y=\sin^2(2x-3)$
3. $y=\tan^4 3x$

练习 25.8

求下列各函数的导数 (1 至 20):

1. $y=\sin^2 x$
2. $y=\sin 3x-\cos 3x$
3. $y=\tan 4x-\cot 5x$
4. $y=\sec 3x+\operatorname{cosec} 5x$
5. $y=2x\sec x$
6. $y=\dfrac{2x}{\sin x}$
7. $y=\cos 3x^\circ$
8. $y=\cos^4(1-2x)$
9. $y=\tan^3\left(2x^2\right)$
10. $y=\cos^2 x-\sin^2 x$
11. $y=4\sin x\cos x$
12. $y=\sin 3x\tan 6x$
13. $y=\sqrt{\cos 2x}$
14. $y=\sin^2\sqrt{1+x^2}$
15. $y=x\tan^2(3x-2)$
16. $y=\dfrac{3\sin 2x}{\cos x}$
17. $y=\dfrac{2}{3\tan^3 x}$
18. $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$
19. $y=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
20. $y=\dfrac{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$
21. 已知函数 $y=\dfrac{x}{2+\cos x}$。求当 $x=0$、$\dfrac{\pi}{2}$ 及 π 时的导数值。
22. 若函数 $y=\sec x+\tan x$，证明 $\dfrac{dy}{dx}=y\sec x$。
23. 若函数 $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。
24. 若函数 $r=\sin 3t-2\cos t$，求 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 时 $\dfrac{d^2r}{dt^2}$ 的值。

25.9 对数函数的导数

自然对数函数的导数

设 $y=\ln x$，其中 $x>0$。

$$y+\Delta y=\ln(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x$$

$$=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\ln\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\ln e$$

$$=\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}}$$

补充资料

$$\lim_{x\to x_0}\ln f(x)=\ln\lim_{x\to x_0}f(x)$$

若 $x<0$，则 $-x>0$。

$$\frac{d}{dx}\ln(-x)=\frac{1}{-x}\frac{d}{dx}(-x)$$
$$=\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)=\frac{1}{x}}$$

例题 1

求函数 $y=\ln\left(3x^2\right)$ 的导数。

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)$$
$$=\frac{6x}{3x^2}$$
$$=\frac{2}{x}$$

例题 2

求函数 $y=\ln\left(4x^2+8x+5\right)$ 的导数。

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4x^2+8x+5}\cdot\frac{d}{dx}\left(4x^2+8x+5\right)$$
$$=\frac{8x+8}{4x^2+8x+5}$$

其他对数函数的导数

设 $y=\log_a x$

$$=\frac{\ln x}{\ln a}$$

$$=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$=\frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x\ln a}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}}$$

一般上，求对数函数的导数时，可先将对数变换成自然对数，或应用对数函数的性质化简后，再求导数。

例题 3

求函数 $y=\log_a(4x-5)$ 的导数。

解

$$y=\frac{\ln(4x-5)}{\ln a}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d}{dx}\ln(4x-5)$$

$$=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{4}{4x-5}$$

$$=\frac{4}{(4x-5)\ln a}$$

例题 4

求函数 $y=\log_5\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 的导数。

解

$$y=\log_5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}{\ln 5}\right]$$

$$=\frac{1}{2\ln 5}\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\ln 5}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2\ln 5}\left[\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{\left(x^2-1\right)\ln 5}$$

例题 5

求函数 $y=x^2\log_3 x$ 的导数。

解

$$\frac{dy}{dx}=x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)+\log_3 x\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$=x^2\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{x}\right)+2x\cdot\log_3 x$$

$$=\frac{x}{\ln 3}+2x\log_3 x$$

随堂练习 11

求下列各函数的导数：

1. $y=\ln\left(x^2-2x+1\right)$
2. $y=\log_2 \sin 3x$
3. $y=\ln(\sec x)$
4. $y=x\ln x$
5. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
6. $y=\log_2\sqrt{1+x^2}$

练习 25.9

求下列各函数的导数：

1. $y=\ln(5x-3)$
2. $y=\ln\left(ax^3\right)$
3. $y=\ln\dfrac{3}{x^2}$
4. $y=\ln\left(2x^2-3x+4\right)$
5. $y=\log_5(3x)$
6. $y=\log_2\left(x^2-4x+3\right)$
7. $y=\log_a\left(2ax^2-4ax\right)$
8. $y=\log_a(\ln x)$
9. $y=3x^2\ln(5x)$
10. $y=\ln\left(\cos^2 x\right)$
11. $y=\ln(4x+3)^2$
12. $y=\log_5\left(2x^2-3\right)$
13. $y=\log_8\sqrt{x^2-2}$
14. $y=\log_b(\sin 5x)$
15. $y=\log(5x)+\ln(\tan x)$
16. $y=\ln^2(\sec x)$
17. $y=\log_3\dfrac{2}{x^2-1}$
18. $y=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$
19. $y=\ln\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$
20. $y=\ln\dfrac{2\sin x}{\sec x}$

25.10 指数函数的导数

指数函数 $y=e^x$ 的导数

若 $y=e^x$，则 $\ln y=\ln e^x=x$。

两边对 x 微分，得 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=1$

$$\frac{dy}{dx}=y$$

$$=e^x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x}$$

例题 1

求函数 $y=e^{5x}$ 的导数。

解

$$\frac{dy}{dx}=e^{5x}\frac{d}{dx}(5x)$$

$$=e^{5x}\cdot 5$$

$$=5e^{5x}$$

例题 2

求函数 $y=e^{5x}\sin 3x$ 的导数。

解

$$\frac{dy}{dx}=e^{5x}\frac{d}{dx}(\sin 3x)+(\sin 3x)\frac{d}{dx}\left(e^{5x}\right)$$

$$=e^{5x}(3\cos 3x)+(\sin 3x)\left(5e^{5x}\right)$$

$$=3e^{5x}\cos 3x+5e^{5x}\sin 3x$$

其他指数函数的导数

设 $y=a^x$，其中 $a>0$。

两边取自然对数，得 $\ln y=\ln a^x$

$$=x\ln a$$

两边对 x 微分，得 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\ln a$

$$\frac{dy}{dx}=y\ln a$$

$$=a^x\ln a$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x\ln a}$$

一般上，求指数函数的导数时，可先在原方程式的两边取自然对数，再两边对 x 微分。

例题 3

求函数 $y=a^{3x}$ 的导数。

解 1 两边取自然对数，得 $\ln y=\ln a^{3x}$

$$=3x\ln a$$

两边对 x 微分，得 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=3\ln a$

$$\frac{dy}{dx}=3y\ln a$$

$$=3a^{3x}\ln a$$

解2 $\dfrac{dy}{dx}=a^{3x}(\ln a)\dfrac{d}{dx}(3x)$

$=a^{3x}(\ln a)(3)$

$=3a^{3x}\ln a$

随堂练习 12

求下列各函数的导数：

1. $y=e^{-3x}$
2. $y=-e^{-\frac{1}{3}x}$
3. $y=2a^{5x}$
4. $y=a^{2x}-e^{-x}+x^{a}$
5. $y=\left(e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}\right)^{2}$
6. $y=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{x}}$

练习 25.10

求下列各函数的导数：

1. $y=e^{-5x}$
2. $y=3e^{-\frac{1}{3}x}$
3. $y=e^{x^{2}+3x-1}$
4. $y=e^{5x}\cdot e^{-6x}\cdot 4e^{2}$
5. $y=5^{2x}$
6. $y=(3b)^{7x}$
7. $y=4^{3-2x^{2}}$
8. $y=4^{2x}-4^{-2x}$
9. $y=3e^{\tan x}$
10. $y=e^{x}\ln x$
11. $y=3^{2x}\cos 5x$
12. $y=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$
13. $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2e^{x}}$
14. $y=\dfrac{3e^{5x}-2e^{-2x}}{6e^{x}}$

总复习题25

1. 求曲线 $y=2x^2+1$ 在 $x=2$ 处的切线斜率。
2. 求曲线 $y=3x^2-1$ 在点 A $(-1, 2)$ 的切线斜率。
3. 求曲线 $y=2x-x^3$ 在点 B $(-1, -1)$ 的切线斜率。
4. 由导数的定义求下列各函数的导数，并求其在 $x=1$ 处的导数值：

   (a) $f(x)=x^2+2x$　　(b) $g(x)=x^3$

   (c) $h(x)=\dfrac{5}{x}$　　(d) $k(x)=\sqrt{x+3}$

5. 求下列各函数的导数：

   (a) $y=2x^4-3x^3+5x-8$　　(b) $y=2x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}$

   (c) $y=\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{3x}}$　　(d) $y=\left(x^3-4x\right)\left(x^2+3x-1\right)$

   (e) $y=(x-1)^5\sqrt{x+2}$　　(f) $y=\left(2x+5\right)\left(x^2-2\right)\left(x^3-1\right)$

   (g) $y=\dfrac{2x^3-3x^2+4}{x^2}$　　(h) $y=\dfrac{x^2+4}{x+1}$

   (i) $y=\dfrac{x+2}{x^2+5x+6}$　　(j) $y=\dfrac{x^2}{\left(x^2-1\right)^3}$

6. 求下列各函数的导数：

   (a) $y=\left(x^3-1\right)^4$　　(b) $y=(5x+3)^6$

   (c) $y=\left(x^3-3x\right)^5$　　(d) $y=\sqrt{x^2-2x}$

   (e) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^2-1}}$　　(f) $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{1-2x}}$

7. 求下列各函数的二阶导数：

   (a) $y=x^2(3x-4)$　　(b) $y=2x^5-6x^4-3x+5$

   (c) $y=\dfrac{3}{x^5}$　　(d) $y=\sqrt{2x+1}$

8. 若函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求 y' 及 y''。

9. 已知函数 $y=2x^3+3x^2-72x+21$，求 $\dfrac{dy}{dx}=0$ 时 x 的值。

10. 已知函数 $y=\left(2-3x^2\right)^4$，求 $x=1$ 时 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的值。

11. 若函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+x+1$，求

(a) $f'(1)$ 及 $f''(2)$；

(b) $f''(x)=0$ 时 x 的值。

12. 若函数 $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$，求 $f'(1)$，$f''(1)$，$f'''(1)$ 及 $f^{(4)}(1)$。

13. 求下列各隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

(a) $x^2+2y=2x+3$

(b) $x^2+3x=y^2-5y$

(c) $3x^2+7xy-9y^2=2$

(d) $x^3y+xy^3=3xy$

14. 求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 在点 A $(2,-2)$ 的切线斜率。

15. 求下列各极限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\tan^2 3x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{4x+1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x}$

16. 求下列各函数的导数：

(a) $y=\tan^2 3x$

(b) $y=\cos^4 2x$

(c) $y=\sec^3 2x$

(d) $y=\sec^2(3x+5)$

(e) $y=(1+\sin x)^3$

(f) $y=\sin(\cos x)$

(g) $y=\sin 2x\cos 2x$

(h) $y=x^3\sin 2x$

(i) $y=(x-1)\cos x^2$

(j) $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$

(k) $y=\dfrac{\cos 5x}{\sin 3x}$

(l) $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

17. 求下列各函数的导数:

(a) $y=5^{3x-2}$

(b) $y=3e^{2x^2}$

(c) $y=a^{3x}+e^{-3x}$

(d) $y=\dfrac{e^{3x}-e^{2x}+e^{5x}}{e^{2x}}$

(e) $y=x^a-2a^x$

(f) $y=e^{2x}\operatorname{cosec}2x$

18. 若函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{e^x}$，证明 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+5y=0$。

19. 求下列各函数的导数:

(a) $y=\ln\left(x^2+5\right)$

(b) $y=\ln\left(3x^2+6x\right)$

(c) $y=\ln\left(e^x+2\right)$

(d) $y=\ln\left(\sin^2 4x\right)$

(e) $y=\log\left(x^3+3x-4\right)$

(f) $y=\log_5(3x+7)$

(g) $y=\log_2\dfrac{x}{x+3}$

(h) $y=\dfrac{1+\log x}{1+\ln x}$

20. 若函数 $y=\ln(x+1)$，求 $x=1$ 时 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的值。

22 函数

函数 function
对应 correspondence
原像 preimage
映像 image
元素 element
映射 mapping
自变量 independent variable
因变量 dependent variable
箭号图示法 arrow method
韦氏图示法 Venn diagram method
定义域 domain
值域 range
对应域 codomain
实函数 real-valued function / real function
区间 interval
合成函数 composite function
一对一函数 one-to-one function
映成函数 onto function
一一映成函数 one-one onto function
反函数 inverse function

23 指数与对数

指数 exponent
正整数指数 positive integral exponent
零指数 zero exponent
负整数指数 negative integral exponent
分数指数 fractional exponent
指数函数 exponential function
对数 logarithm
自然对数 natural logarithm
常用对数 common logarithm
对数函数 logarithmic function
指数方程式 exponential equation
对数方程式 logarithmic equation
单利 simple interest
复利 compound interest
本金 principal
年利率 annual interest rate
现值 present value
年金 annuity
永续年金 perpetuity

24 极限

极限 limit
左极限 left limit
右极限 right limit

25 微分

割线 secant

切线 tangent

导数 derivative

可导/可微 differentiable

微分的第一法则 first principle of differentiation

链导法 chain rule

高阶导数 higher order derivative

二阶导数 second order derivative

一阶导数 first order derivative

隐函数 implicit function

答案

22. 函数

随堂练习 1 (P. 4)

1. (a)及(b)是函数。
2. −2，−1，0，1，2，3 的像分别是 1，2，3，4，5，6
3. (a)、(c)及(d)是函数。

随堂练习 2 (P. 7)

解析法：

(a) $f(x)=x^2+4$，$-3\le x\le 3$，$x\in \boldsymbol{Z}$

(b) $g(x)=x^3$，$1\le x\le 4$，$x\in \boldsymbol{N}$

练习 22.1 (P. 7)

1. (b)、(c)及(d)是函数。
2. (a) (i) 28　(ii) 13　(iii) 1　(iv) 13　(iv) 76

   (b) (i) −2，2　(ii) −3，3　(iii) 0　(iv) 没有原像　(iv) −1，1
3. (a) −12　(b) −7　(c) −2
4. (a) −10　(b) −4　(c) −1　(d) 1　(e) 42
5. −1，0，1，2 的像分别是 1，0，1，16
6. 0，1，4 的原像分别是 0，±1，±2

   所有负数在 f 之下没有原像。
7. $a=-10$，$b=2$
8. 箭号图示法：

   f：$-2\to -4$，$-1\to -2$，$0\to 0$，$1\to 2$，$2\to 4$

随堂练习 3 (P. 10)

1. $D_g=\{2,4,5,7\}$，$R_g=\{3,7,8\}$

   对应域：$\{3,5,7,8,9\}$
2. $D_f=\{-2,-1,0,1,2\}$，$R_f=\{-1,0,3\}$
3. $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ -2\le x\le 3\}$

   $R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ -2\le y\le 7\}$
4. (a) $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R}\}$，$R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R}\}$

   (b) $D_g=\{x\mid x\in \boldsymbol{R}\}$，$R_g=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\ge -1\}$

   (c) $D_h=\left\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\ne -\dfrac{7}{4}\right\}$

   $R_h=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\ne 0\}$

   (d) $D_k=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\le 6\}$

   $R_k=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\ge 0\}$

练习 22.2 (P. 11)

1. $D_f=\{a,b,c,d\}$，$R_f=\{-1,2,9\}$
2. $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ -1<x\le 4\}$

   $R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ -3\le y\le 6\}$
3. $D_g=\{a,b,c,d,e\}$，$R_g=\{4,8,12\}$

   对应域：$\{4,5,8,9,12\}$
4. $D_f=\{-1,0,1,2\}$，$R_f=\{-2,1,10\}$
5. $D_f=\{-1,0,2,5,11\}$

   $R_f=\{-2,0,18,108\}$

6. (a) $D_f=\{x \mid x\in \boldsymbol{R}\}$，$R_f=\{y \mid y\in \boldsymbol{R}\}$

(b) $D_g=\{x \mid x\in \boldsymbol{R},\ -1\le x\le 1\}$

$R_g=\{y \mid y\in \boldsymbol{R},\ 0\le y\le 1\}$

(c) $D_h=\left\{x \mid x\in \boldsymbol{R},\ x\ne -\frac{3}{2}\right\}$

$R_h=\{y \mid y\in \boldsymbol{R},\ y\ne 0\}$

(d) $D_k=\{x \mid x\in \boldsymbol{R}\}$

$R_k=\{y \mid y\in \boldsymbol{R},\ y\ge 3\}$

随堂练习 4 (P. 20)

1. 对称轴：$x=-2$，顶点：$(-2,3)$

2. 对称轴：$x=3$，顶点：$(3,20)$

练习 22.3 (P. 21)

1. 对称轴：$x=-1$，顶点：$(-1,3)$

2. 对称轴：$x=2$，顶点：$(2,8)$

3. 对称轴：$x=\frac{5}{2}$，顶点：$\left(\frac{5}{2},-6\right)$

4. 对称轴：$x=-1$，顶点：$(-1,-1)$

13. $D_f=\{x \mid x\in \boldsymbol{R},\ -2\le x\le 8\}$

$R_f=\{y \mid y\in \boldsymbol{R},\ 3\le y\le 28\}$

14. $D_g=\{x \mid x\in \boldsymbol{R},\ -2\le x\le 5\}$

$R_g=\{y \mid y\in \boldsymbol{R},\ -52\le y\le -3\}$

15. $D_f=\{x \mid x\in \boldsymbol{R}\}$

$R_f=\{y \mid y\in \boldsymbol{R},\ y\le 11\}$

16. 第一步：$y=\sqrt{x+4}$

第二步：$y=\sqrt{\frac{x}{2}+4}$

第三步：$y=\sqrt{-\frac{x}{2}+4}$

第四步：$y=\sqrt{-\frac{x}{2}+4}-3$

第五步：$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{x}{2}+4}-3\right)$

随堂练习 5 (P. 25)

1. $(g\circ f)(x)=-2x+2$，$(f\circ g)(x)=-2x+13$

2. (a) $(g\circ f)(x)=3x^2-6x+5$

$(f\circ g)(x)=9x^2-30x+27$

(b) $g(f(2))=5$，$f(g(2))=3$，

$(g\circ f)(2)=5$，$(f\circ g)(2)=3$

3. $f\circ g$ 及 $g\circ f$ 皆存在。

随堂练习 6 (P. 26)

1. $x-1$　　2. x^2-17

3. $2x^2-7x+6$

练习 22.4 (P. 26)

1. (a) $(f\circ g)(x)=3x-3$，$(g\circ f)(x)=3x-1$

(b) $(f\circ g)(x)=x$，$(g\circ f)(x)=x$

(c) $(f\circ g)(x)=x^2+4x+4$

$(g\circ f)(x)=x^2+2$

(d) $(f\circ g)(x)=2x^2-3$

$(g\circ f)(x)=4x^2+4x-1$

(e) $(f\circ g)(x)=3x^2-19x+30$

$(g\circ f)(x)=-3x^2+5x+2$

2. (a) $(g\circ f)(x)=x^2+2$

$(f\circ g)(x)=x^2+10x+22$

(b) $g(f(-2))=6$，$f(g(-2))=6$，

$(g\circ f)(-2)=6$，$(f\circ g)(-2)=6$

3. (a) $3x+1$

(b) $(f\circ g)(3)=10$，$(f\circ g)(-1)=-2$，

$(f\circ g)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$

(c) $3x-1$

(d) $(g\circ f)(2)=5$，$(g\circ f)(-2)=-7$，

$(g\circ f)(0)=-1$

(e) $9x-8$

(f) $x+2$

4. $g^2(x)=g^4(x)=x$；

$g^{33}(x)=\frac{x+1}{x-1}$，$g^{50}(x)=x$

5. -1　　6. $\frac{-4x-7}{x+5}$

7. $2x^2-x+1$　　8. $2x^2-3$

9. (a) x^2-15　　(b) x^2+x-3

10. x^2-5

随堂练习 7 (P. 31)

(a) 是映成函数；

(b) 是一对一函数；

(c) 是一一映成函数；

(d) 不是一对一函数，也不是映成函数。

练习 22.5 (P. 32)

1. 一一映成函数　　2. 映成函数

3. 一一映成函数　　4. 一一映成函数

5. 一一映成函数　　6. 一一映成函数

7. (a) 函数　　(b) 一一映成函数

(c) 映成函数　　(d) 不是函数

(e) 不是函数　　(f) 一对一函数

8. (a) 一对一函数　　(b) 映成函数

随堂练习 8 (P. 37)

1. (a) $\frac{x+3}{7}$　　(b) $2x-18$

(c) $\frac{8x+1}{x-1}$，$x\neq 1$　　(d) $\frac{1}{1-2x}$，$x\neq\frac{1}{2}$

2. (a) $\frac{x-1}{2}$　　(b) $\frac{1+4x}{x}$，$x\neq 0$

(c) $\frac{3x+1}{2x}$，$x\neq 0$　　(d) $\frac{4x-2}{x-1}$，$x\neq 1$

(e) $\frac{4x-2}{x-1}$，$x\neq 1$　　(f) $\frac{3x+1}{2x}$，$x\neq 0$

练习 22.6 (P. 39)

1. (a) $\frac{x+7}{2}$　　(b) $\frac{2x+1}{x}$，$x\neq 0$

(c) $\frac{2x-5}{x-2}$，$x\neq 2$　　(d) $\frac{4x}{x-3}$，$x\neq 3$

2. (a) $a=-1$，$b=25$　　(b) 15

3. (a) $a=-9$，$b=6$　　(b) -3

4. (a) $\frac{6}{x+3}$，$x\neq -3$　　(b) -4 或 3

5. (a) $a=2$，$b=4$　　(b) $-\frac{1}{2}$

6. (a) $\frac{x+2}{3}$ (b) $\frac{4x}{1-x}$, $x\neq 1$

(c) $\frac{2x+2}{3-3x}$, $x\neq 1$ (d) $\frac{4x+8}{1-x}$, $x\neq 1$

(e) $\frac{4x+8}{1-x}$, $x\neq 1$ (f) $\frac{2x+2}{3-3x}$, $x\neq 1$

7. (a) $\frac{2x+1}{x}$, $x\neq 0$

8. (a) $\frac{x^2-16}{4}$

总复习题22 (P. 40)

1. (b)及(c)是函数。

2. (a) -14 (b) 4

(c) 5 (d) 3

3. (a) $D_f=\{1,2,4\}$, $R_f=\{3,5,8\}$

(b) $D_g=\{2,4,5,6\}$, $R_g=\{4,5,7,9\}$

(c) $D_h=\{1,2,3,4\}$, $R_h=\{3,5,6,8\}$

4. (a) $D_f=\{-3,-2,-1,0,1\}$

$R_f=\{-22,-3,4,5,6\}$

(c) f 的反函数存在。

5. $f(4)=0$, $f^{-1}(5)=\frac{7}{3}$

6. $R_f=\left\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ \frac{3}{4}\leq y\leq 7\right\}$

7. (a) $R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\geq 1\}$

(b) $R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\geq 9\}$

8. (a) $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\neq 0\}$

$R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\neq 0\}$

(b) $D_f=\left\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\geq \frac{5}{2}\right\}$

$R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\geq 0\}$

(c) $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R}\}$

$R_f=\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ y\geq 3\}$

(d) $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R}\}$

$R_f=\left\{y\mid y\in \boldsymbol{R},\ 0<y\leq \frac{1}{4}\right\}$

9. (a) $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\neq 3\}$

(b) $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ -2\leq x\leq 2\}$

(c) $D_f=\left\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x\neq \frac{1}{2},\ x\neq 2\right\}$

(d) $D_f=\{x\mid x\in \boldsymbol{R},\ x<-3$ 或 $x>3\}$

11. 1 或 3 12. 1 或 3

13. $2x^2-3x+1$ 14. $\frac{1}{x-1}$, $x\neq 1$

15. $(2x+1)^2$ 16. 11

17. (a)、(b)及(d)是一对一函数。

18. (a) 一对一 (b) 一一映成

(c) 映成

19. (a) $\frac{1}{5}$ (b) 3 (c) $-\frac{6}{5}$

20. $f^{-1}(4)=1$, $f^{-1}(9)=2$

21. x^2+3 22. $-\frac{5}{6}$

23. (a) $10x-32$ (b) $\frac{x+32}{10}$

(c) $\frac{x+32}{10}$

24. (a) $\frac{4x+21}{2x+5}$, $x\neq -\frac{5}{2}$

(b) $\frac{x-3}{2}$

(c) $\frac{3-5x}{1+2x}$, $x\neq -\frac{1}{2}$

25. (a) $\sqrt{x^3}$ (b) x^2

(c) $\sqrt[3]{x}$ (d) $\sqrt[3]{x^2}$

(e) $\sqrt[3]{x^2}$

26. (a) $R_f=\{y \mid y\in \boldsymbol{R},\ y\geq 3\}$

(b) $\dfrac{x^2-6x+25}{4}$

23. 指数与对数

随堂练习 1 (P. 49)

1. $\dfrac{13}{32}$ 2. $\dfrac{5}{9}$ 3. ab^{12}

随堂练习 2 (P. 53)

1. (a) $\pi^{2.1}<\pi^{3.5}$ (b) $0.15^{-2.3}<0.15^{-3.8}$

2. -1 或 5

练习 23.1 (P. 53)

1. $-\dfrac{71}{9}$ 2. 1 3. $\dfrac{1}{24}$

4. 2 5. $\dfrac{25}{4}$ 6. $\dfrac{7}{10}$

7. 48 8. 33 9. $\dfrac{7}{54}$

10. 4 11. a 12. $\dfrac{b^2c^4}{9a^2}$

13. $\dfrac{1}{y}$ 14. $-\dfrac{9}{a^4}$ 15. $\dfrac{\sqrt{a}}{b^2}$

16. $\dfrac{b^4c}{a^3}$ 17. $\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ 18. $\dfrac{1}{ab}$

19. $\dfrac{x^4-1}{x^2}$ 20. $24y$ 21. $\dfrac{x-4}{x}$

22. $\sqrt{x^{13}y^5}$ 23. 4 24. $\dfrac{34}{3}$

26. (a) $2.5^{7.1}<2.5^{8.5}$

(b) $0.35^{6.5}<0.35^{5.6}$

(c) $1.03^{-2.1}>1.03^{-3.2}$

(d) $\left(\sqrt{2}\right)^{\pi}>\left(\sqrt{2}\right)^{\pi-3.5}$

(e) $(0.01)^{-\frac{1}{3}}<(0.01)^{-\frac{1}{2}}$

(f) $2.7^{\sqrt{20}}>2.7^{\sqrt[3]{35}}$

27. 1 或 2 28. -2 或 9

随堂练习 3 (P. 56)

1. 1000 2. 9

3. 27 4. $\dfrac{9}{2}$

随堂练习 4 (P. 60)

1. (a) $\log 6<\log 9$

(b) $\log_{0.5}4.2<\log_{0.5}3.9$

(c) $\log_2 1.8<\log_4 5.8$

2. (a) $\{x \mid x\in \boldsymbol{R},\ x>-2\}$

(b) $\{x \mid x\in \boldsymbol{R},\ x<-3$ 或 $x>3\}$

(c) $\left\{x \mid x\in \boldsymbol{R},\ x<\dfrac{3}{2}\right\}$

(d) $\{x \mid x\in \boldsymbol{R},\ x\leq 1\}$

练习 23.2 (P. 60)

1. (a) 16 (b) 5 (c) $\dfrac{3}{8}$

(d) -4 (e) 3 (f) $\dfrac{1}{7}$

3. (a) $\log_3 5<\log_3 6$

(b) $\log_{1.5}1.4<\log_{1.5}1.6$

(c) $\log_{\sqrt{3}} 4.8 < \log_{\sqrt{3}} 5.8$

(d) $\log_{2.3} \pi > \log_{2.3}(\pi - 3)$

(e) $\log_{0.4} \sqrt{2} > \log_{0.4} \sqrt{3}$

(f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$

4. (a) $\left\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x < \frac{3}{2}\right\}$

(b) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$

(c) $\left\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ -\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}\right\}$

(d) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x > 2\}$

(e) $\left\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x < -1 \text{ 或 } x > \frac{3}{2}\right\}$

(f) $\left\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x > \frac{5}{7},\ x \neq \frac{6}{7}\right\}$

随堂练习 5 (P. 67)

1. 16　　2. 8

3. 2　　4. $\frac{3}{2}$

5. (a) $2a+b+1$　　(b) $\frac{3a+b+1}{a}$

(c) $\frac{2a-b}{2a}$

6. $y = 4x^2$

练习 23.3 (P. 68)

1. $2x$　　2. 1

3. $\frac{x}{y}$　　4. $2x+3y$

5. $x^{-\frac{1}{3}}$　　6. $\frac{3x}{2}$

7. $\frac{2}{3}$　　8. 9　　9. 56

10. -1　　11. $-\frac{1}{4}$　　12. $-\frac{8}{3}$

13. $\frac{4}{3}$　　14. -3　　15. 1

16. $-\frac{1}{2}$　　17. -12　　18. $\frac{3}{2}$

19. -2　　20. 3　　21. $-\frac{3}{2}$

22. 2

23. $\frac{a+b}{2}$　　24. $\frac{mn+2}{2m}$

25. $\frac{ab+1}{ab+a+1}$　　26. $\frac{2x-1}{2}$

27. $y = 3\sqrt{x}$

随堂练习 6 (P. 71)

1. 无解　　2. -3 或 -1

3. -8.8275　　4. 3

练习 23.4 (P. 72)

1. $\frac{1}{3}$　　2. 2

3. -2 或 2　　4. -3 或 6

5. -1 或 $\frac{7}{2}$　　6. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$

7. 2　　8. 0

9. $-\frac{5}{3}$ 或 3　　10. -1 或 1

11. 8.6377　　12. 0.8742

13. 2.2678　　14. -1 或 2.5850

15. -2　　16. 1

17. 2　　18. 1 或 3

19. 0 或 $\log_3 2$　　20. -1 或 $\log_2 3$

21. 0 或 1　　22. -7.6582

随堂练习 7 (P. 76)

1. 243　2. 3　3. 2
4. 8　5. 3
6. $\frac{1}{4}$ 或 $\sqrt[3]{2}$
7. $\frac{1}{2}$ 或 8
8. $\frac{1}{10}$ 或 100

练习 23.5 (P. 77)

1. $\frac{1}{3}$　2. -2 或 2
3. 4　4. $\sqrt{2}$
5. 5　6. 4
7. 3　8. $-\frac{13}{15}$ 或 1
9. -1 或 4　10. 3
11. $\frac{5}{3}$　12. 4 或 5
13. 6 或 14　14. $2\sqrt{2}$
15. 2　16. 2 或 4
17. $\frac{1}{3}$ 或 $\sqrt{3}$　18. 16 或 64
19. $\frac{1}{10}$ 或 $\sqrt{10}$　20. 1 或 100
21. $\frac{1}{25}$ 或 25　22. $\frac{1}{64}$ 或 2
23. $\frac{1}{10}$ 或 100　24. $\sqrt{5}$

随堂练习 8 (P. 85)

1. RM 116,472.71
2. RM 50,612.76
3. RM 3,000
4. RM 38.914.36；RM 87,500

练习 23.6 (P. 86)

1. RM 146,600.52
2. RM 3,000.02
3. RM 118,875.79
5. 52 年
6. 9 年半
7. RM 54,298.34
8. RM 2,000
9. RM 70,469.72；RM 100,000
10. 18 年
11. 5%

总复习题 23 (P. 87)

1. (a) $\frac{21}{4}$　(b) $2\sqrt{5}$
   (c) 4　(d) $\sqrt{3}$
2. (a) $-\frac{1}{8a^3}$　(b) $\frac{7}{15}$
   (c) y^2-x^2　(d) $\frac{xy-1}{y}$
   (e) $p^{\frac{3}{8}}$　(f) $\frac{1}{a^4}$
3. (a) $2.3^{-2}<2.3^{-1}$
   (b) $0.15^{-\frac{1}{2}}>0.15^{-\frac{1}{3}}$
   (c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}>3^{-\frac{5}{3}}$
   (d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}<\left(\frac{5}{3}\right)^{3.1}$
4. (a) $\log_{3.2}3>\log_{3.2}2$
   (b) $\log_{0.5}5.3<\log_{0.5}3.5$
   (c) $\log_3 2<\log_2 3$
   (d) $\log_2 2.3>\log_4 4.8$

5. (a) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ -4 < x < 4\}$

(b) $\left\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x < -\frac{3}{2} \text{ 或 } x > 4\right\}$

(c) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x \leq 1\}$

(d) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x \neq 3\}$

(e) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$

(f) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x < 3\}$

(g) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x > -1,\ x \neq 9\}$

(h) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ -2 < x < 2,\ x \neq -1\}$

(i) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x \geq 3\}$

(j) $\{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ 0 < x < 10\}$

6. (a) $3x$ (b) a (c) $2x+y$

(d) $\frac{x^2}{y}$ (e) $\frac{1}{x}$

7. $2p+2$

8. (a) $\frac{3a-1}{2}$ (b) $\frac{a+1}{2}$

9. (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{1}{3}$

(d) 0 (e) 2 (f) $\frac{5}{4}$

(g) 3 (h) 6 (i) $\frac{7}{2}$

(j) 1 (k) 5 (l) $\frac{3}{2}$

(m) $\frac{1}{3}$

13. (a) $k+3n-3$ (b) $\frac{k+n+2}{4}$

14. $y=\frac{x}{16}$

15. (a) $\frac{7}{3}$ (b) $-\frac{1}{2}$

(c) 0 或 2 (d) 0

(e) $\frac{2}{3}$ (f) 1.5850

(g) 1 (h) −1 或 1

(i) −1 或 0 (j) −1 或 1

(k) −3 (l) −4

16. 8

17. (a) 80 (b) 8

(c) 2 (d) $\frac{1}{4}$ 或 8

(e) 9 或 27 (f) 10

(g) 无解 (h) 2 或 3

(i) 1 或 3 (j) 125

(k) 4 (l) 5

(m) 1 或 4

18. RM 6,000.01 19. RM 99,113.95

20. 14 年 21. RM 2,000

22. RM 85,916.37；RM 177,777.78

23. 15 年 24. 一次性付款

24. 极限

随堂练习 1 (P. 96)

3

随堂练习 2 (P. 97)

0

练习 24.2 (P. 98)

1. 2，2，2

2. (a) 1 (b) −4 (c) 3

3. 2 4. 0

随堂练习 3 (P. 102)

1. $-\frac{2}{3}$　2. -4　3. $\frac{1}{2}$

随堂练习 4 (P. 105)

所有极限皆不存在。

练习 24.3 (P. 105)

1. -1　2. 48　3. -10
4. -4　5. 0　6. -29
7. -2　8. 2　9. 1
10. 2　11. -1　12. 12
13. 0　14. $\frac{3}{2}$　15. 0
16. $\frac{7}{5}$　17. 3　18. $\frac{1}{5}$
19. $\frac{1}{4}$　20. $\frac{3}{4}$　21. $-\frac{1}{8}$
22. $\frac{1}{2}$　23. $\frac{1}{2}$　24. 2
25. $\frac{3}{2}$　26. 0　27. 0
28. $\frac{5}{4}$
29. 不存在　30. 不存在
31. 不存在　32. 不存在
33. 0　34. 不存在
35. 0；-1　36. 不存在

总复习题 24 (P. 107)

1. 0，0，0
2. 0　3. 6　4. $\frac{5}{8}$
5. 0　6. $-\frac{3}{4}$　7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
8. $\frac{1}{20}$　9. 0　10. $\frac{2}{3}$
11. 不存在　12. $\frac{1}{2}$　13. $\frac{3}{4}$
14. 1　15. 不存在　16. 2
17. 不存在；5

25. 微分

随堂练习 1 (P. 112)

1. -2　2. 7

练习 25.1 (P. 113)

1. (b) 4
2. $\frac{4}{3}$　3. $-\frac{5}{2}$
4. -4　5. 6

随堂练习 2 (P. 117)

1. $4x$；4
2. (a) $\Delta x+2x-3$　(b) $2x-3$
(c) 1

练习 25.2 (P. 118)

1. 3；3　2. $2x$；4
3. $8x$；16　4. $-2x$；-4
5. $2x-3$；1　6. $2x-1$；3
7. $4x+3$；11　8. $3x^2$；12
9. $3x^2-2$；10　10. $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$；$\frac{1}{4}$
11. $-\frac{4}{x^3}$；$-\frac{1}{2}$　12. $\frac{1}{(1-x)^2}$；1
13. (a) $-\frac{3}{(x-2)(x-2+\Delta x)}$
(b) $-\frac{3}{(x-2)^2}$　(c) -3
14. (a) $-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$　(b) -1

15. (a) $-10x-4$ (b) 16

(c) $(-1,2)$

随堂练习 3 (P. 125)

1. 5
2. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $18x^2+6x$
4. $6x^2-6x+4$
5. $-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$
6. $6x^2-3-\frac{7}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

练习 25.3a (P. 125)

1. $6x^2$
2. $x-\frac{1}{3}$
3. $5x^4-x^3+6x$
4. $4x+12x^2-28x^3$
5. $2x-3-\frac{2}{x^2}+\frac{8}{x^3}$
6. $6x^2-4+\frac{6}{x^3}-\frac{12}{x^4}$
7. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$
8. $\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
9. $4(2x-5)$
10. $2x-\frac{2}{x^3}$
11. $2x+4-\frac{2}{x^2}$
12. $4x+\frac{12}{x^3}$
13. $x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$
14. $3x^2+10x-2$
15. $-9x^2+2x+5$
16. $4x^3$
17. $9x^2-2x-7$
18. $-15x^4+4x^3+3$
19. $(-3,-96)$ 或 $(-1,-28)$
20. -1 或 1

随堂练习 4 (P. 128)

1. $\frac{4}{(x+2)^2}$
2. $\frac{8}{(x+2)^2}$
3. $-\frac{x^2+5}{(x^2-5)^2}$
4. $\frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}$

练习 25.3b (P. 128)

1. $\frac{4}{(x+2)^2}$
2. $\frac{3a}{(2x+a)^2}$
3. $\frac{4x^3+12x^2}{(x+2)^2}$
4. $\frac{-2x^2-6x+2}{(x^2+1)^2}$
5. $-\frac{3}{(x-4)^2}$
6. $\frac{6x^2-6x+1}{(2x-1)^2}$
7. $\frac{4x^4+24x^3}{(x+3)^3}$
8. $\frac{8x}{(1-x^2)^2}$
9. $\frac{x^2-8x+5}{(3-2x+x^2)^2}$
10. $\frac{-4x+2}{(1-x+x^2)^2}$

随堂练习 5 (P. 133)

1. $72x^2(x^3-2)^2$
2. $-\frac{6}{\sqrt{(2x-3)^3}}$
3. $4x(x-3)^2$
4. $\frac{5x^2+4x-2}{2\sqrt{x+1}}$
5. $\frac{-4x+3}{(2x+3)^4}$
6. $-\frac{3(3x+4)(x+14)}{(x-5)^4}$

练习 25.4 (P. 133)

1. $16(2x-3)^7$
2. $24(x-1)(3x^2-6x+5)^3$
3. $\frac{4x^3-4x}{\sqrt{2x^4-4x^2+5}}$
4. $\frac{2x-1}{\sqrt[3]{(3x^2-3x+2)^2}}$
5. $-\frac{9x}{(3x^2-2)^2}$
6. $-\frac{81(2x^2-1)}{2\sqrt{(6x^3-9x)^3}}$
7. $-\frac{3(x-5)}{(x+5)^3}$
8. $\frac{3x-5}{2\sqrt{(x-1)^3}}$

随堂练习 6 (P. 135)

1. $y'=15x^4+8x^3-10x-8$

$y''=60x^3+24x^2-10$

$y'''=180x^2+48x$

$y^{(4)}=360x+48$

$y^{(5)}=360$

$y^{(6)}=0$

2. $-\dfrac{360}{x^7}$　　3. 18

4. $\dfrac{3}{\sqrt{(2x-3)^5}}$　　5. $-\dfrac{480}{(2x+5)^6}$

练习 25.5 (P. 136)

1. $y'=6ax^5+8bx^3-9cx^2+8x$

$y''=30ax^4+24bx^2-18cx+8$

$y'''=120ax^3+48bx-18c$

$y^{(4)}=360ax^2+48b$

$y^{(5)}=720ax$

$y^{(6)}=720a$

$y^{(7)}=0$

2. $-3x$　　3. $30x^4+72x^2+24$

4. $\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{x^4}$　　5. $2-\dfrac{6}{x^4}$

6. $-\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$　　7. $\dfrac{3}{2\sqrt{(x-2)^5}}$

8. $\dfrac{4-2x^2}{\sqrt[3]{\left(3x^2+2\right)^5}}$　　9. $\dfrac{3x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}}$

10. $y'(1)=-6$, $y''(1)=6$, $y'''(1)=12$

11. $\dfrac{24}{125}$

12. $12x+6$; $-\dfrac{1}{2}$

随堂练习 7 (P. 138)

1. $\dfrac{3-x}{y+4}$　　2. $\dfrac{b^2x}{a^2y}$

3. 1　　4. $-\dfrac{x\left(3x+4y^3\right)}{2y^2\left(3x^2+2y\right)}$

练习 25.6 (P. 138)

1. $-\dfrac{2x}{3y^2}$　　2. $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

3. $\dfrac{3x^2-2y}{2x-3y^2}$　　4. $\dfrac{6x-y^2}{2y(x+1)}$

5. 1　　6. $\dfrac{4x-y^3}{3xy^2+4y}$

7. $-\dfrac{y^2\left(2x^2+1\right)}{x^2}$　　8. $\dfrac{y\left(2x^3-y^3\right)}{x\left(x^3-2y^3\right)}$

9. $-\dfrac{y^3+y-1}{3xy^2+x}$　　10. $\dfrac{12x^2+2y^2-y}{x-4xy}$

随堂练习 8 (P. 142)

1. $\dfrac{4}{5}$　　2. $\dfrac{7}{5}$　　3. $\dfrac{5}{4}$

4. $\dfrac{2}{3}$　　5. $\dfrac{9}{5}$　　6. 6

练习 25.7a (P. 143)

1. $\dfrac{1}{2}$　　2. 1　　3. $\dfrac{2}{7}$

4. $\dfrac{5}{4}$　　5. 0　　6. $\dfrac{1}{b^2}$

7. $\dfrac{9}{2}$　　8. $\dfrac{1}{2}$　　9. $\dfrac{5}{3}$

10. $\dfrac{8}{5}$　　11. $\dfrac{5}{8}$　　12. $-\dfrac{3}{2}$

练习 25.7a (P. 143)

1. $\frac{1}{2}$ 2. 1 3. $\frac{2}{7}$

4. $\frac{5}{4}$ 5. 0 6. $\frac{1}{b^2}$

7. $\frac{9}{2}$ 8. $\frac{1}{2}$ 9. $\frac{5}{3}$

10. $\frac{8}{5}$ 11. $\frac{5}{8}$ 12. $-\frac{3}{2}$

随堂练习 9 (P. 146)

1. e 2. e^{-6}

3. $e^{\frac{3}{2}}$ 4. e^{-3}

练习 25.7b (P. 146)

1. $e^{\frac{1}{2}}$ 2. e^{6} 3. e^{10}

4. $e^{-\frac{3}{2}}$ 5. e 6. e^{-5}

7. $e^{\frac{3}{2}}$ 8. e^{12} 9. e^{-4}

10. e

随堂练习 10 (P. 153)

1. $-10x\sin\left(5x^2\right)$

2. $4\sin(2x-3)\cos(2x-3)$ 或 $2\sin(4x-6)$

3. $12\sec^2 3x\tan^3 3x$

练习 25.8 (P. 153)

1. $2\sin x\cos x$ 或 $\sin 2x$

2. $3\sin 3x+3\cos 3x$

3. $5\operatorname{cosec}^2 5x+4\sec^2 4x$

4. $3\sec 3x\tan 3x-5\cot 5x\operatorname{cosec} 5x$

5. $2x\sec x\tan x+2\sec x$

6. $\frac{2\sin x-2x\cos x}{\sin^2 x}$

7. $-\frac{\pi}{60}\sin 3x^{\circ}$

8. $8\cos^3(1-2x)\sin(1-2x)$

9. $12x\sec^2\left(2x^2\right)\tan^2\left(2x^2\right)$

10. $-4\sin x\cos x$ 或 $-2\sin 2x$

11. $4\cos^2 x-4\sin^2 x$ 或 $4\cos 2x$

12. $3\cos 3x\tan 6x+6\sin 3x\sec^2 6x$

13. $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

14. $\frac{2x\sin\sqrt{1+x^2}\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ 或 $\frac{x\sin 2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

15. $\tan^2(3x-2)+6x\sec^2(3x-2)\tan(3x-2)$

16. $6\cos x$

17. $-2\cot^2 x\operatorname{cosec}^2 x$

18. $-\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

19. $\frac{2\sec^4 x}{\left(1-\tan^2 x\right)^2}$ 或 $2\sec^2 2x$

20. $\frac{2}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$ 或 $2\operatorname{cosec}^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

21. $y'(0)=\frac{1}{3}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}$, $y'(\pi)=1$

23. $\frac{\sin x}{(1+\cos x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\cos x}}$

24. 1

随堂练习 11 (P. 158)

1. $\frac{2}{x-1}$
2. $\frac{3\cos 3x}{\sin 3x \ln 2}$
3. $\tan x$
4. $\ln x+1$
5. $\frac{2}{1-x^2}$
6. $\frac{x}{(1+x^2)\ln 2}$

练习 25.9 (P. 158)

1. $\frac{5}{5x-3}$
2. $\frac{3}{x}$
3. $-\frac{2}{x}$
4. $\frac{4x-3}{2x^2-3x+4}$
5. $\frac{1}{x\ln 5}$
6. $\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)\ln 2}$
7. $\frac{2(x-1)}{(x^2-2x)\ln a}$
8. $\frac{1}{(x\ln x)\ln a}$
9. $6x\ln 5x+3x$
10. $-\frac{2\sin x}{\cos x}$ 或 $-2\tan x$
11. $\frac{8}{4x+3}$
12. $\frac{4x}{(2x^2-3)\ln 5}$
13. $\frac{x}{(x^2-2)\ln 8}$
14. $\frac{5\cot 5x}{\ln b}$
15. $\frac{\sec^2 x}{\tan x}+\frac{1}{x\ln 10}$
16. $2\tan x\ln(\sec x)$
17. $-\frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$
18. $\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$
19. $\frac{8x}{4-x^4}$
20. $\cot x-\tan x$ 或 $2\cot 2x$

随堂练习 12 (P. 161)

1. $-3e^{-3x}$
2. $\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$
3. $10a^{5x}\ln a$
4. $ax^{a-1}+e^{-x}+2a^{2x}\ln a$
5. $2e^{2x}-2e^{-2x}$
6. $2e^{2x}+4e^{-4x}$

练习 25.10 (P. 161)

1. $-5e^{-5x}$
2. $-e^{-\frac{x}{3}}$
3. $(2x+3)e^{x^2+3x-1}$
4. $-4e^{2-x}$
5. $2(5^{2x})\ln 5$
6. $7(3b)^{7x}\ln(3b)$
7. $-4^{4-2x^2}x\ln 4$
8. $2(4^{2x}+4^{-2x})\ln 4$
9. $3e^{\tan x}\sec^2 x$
10. $e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$
11. $3^{2x}(2\ln 3)\cos 5x-5\cdot 3^{2x}\sin 5x$
12. $-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$
13. $\frac{1}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-3x}$
14. $2e^{4x}+e^{-3x}$

总复习题 25 (P. 162)

1. 8
2. -6
3. -1
4. (a) $2x+2$; 4
   (b) $3x^2$; 3
   (c) $-\frac{5}{x^2}$; -5
   (d) $\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$; $\frac{1}{4}$
5. (a) $8x^3-9x^2+5$
   (b) $2-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}$
   (c) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{\sqrt{3}}{6}x^{-\frac{3}{2}}$
   (d) $5x^4+12x^3-15x^2-24x+4$
   (e) $\frac{(x-1)^4(11x+19)}{2\sqrt{x+2}}$

(f) $12x^5+25x^4-16x^3-36x^2-10x+4$

(g) $2-\frac{8}{x^3}$ (h) $\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$

(i) $-\frac{1}{(x+3)^2}$ (j) $\frac{-4x^3-2x}{\left(x^2-1\right)^4}$

6. (a) $12x^2\left(x^3-1\right)^3$

(b) $30(5x+3)^5$

(c) $5\left(3x^2-3\right)\left(x^3-3x\right)^4$

(d) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

(e) $\frac{-4x}{3\sqrt[3]{\left(2x^2-1\right)^4}}$

(f) $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

7. (a) $18x-8$ (b) $40x^3-72x^2$

(c) $\frac{90}{x^7}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

8. $y'=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$, $y''=\frac{6x}{(x-1)^4}$

9. -4 或 3

10. 456

11. (a) $f'(1)=-3$, $f''(2)=-1$

(b) $\frac{5}{2}$

12. (a) $f'(1)=\frac{7}{8}$, $f''(1)=-\frac{7}{64}$, $f'''(1)=\frac{63}{512}$,

$f^{(4)}(1)=-\frac{1071}{4096}$

13. (a) $1-x$ (b) $\frac{2x+3}{2y-5}$

(c) $-\frac{6x+7y}{7x-18y}$ (d) $\frac{y\left(-3x^2-y^2+3\right)}{x\left(x^2+3y^2-3\right)}$

14. 1

15. (a) 4 (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{1}{9}$

(d) e^4 (e) e^{-6} (f) e^2

16. (a) $6\sec^2 3x\tan 3x$

(b) $-8\cos^3 2x\sin 2x$

(c) $6\sec^3 2x\tan 2x$

(d) $6\sec^2(3x+5)\tan(3x+5)$

(e) $3\cos x(1+\sin x)^2$

(f) $-\sin x\cos(\cos x)$

(g) $2\cos^2 2x-2\sin^2 2x$ 或 $2\cos 4x$

(h) $3x^2\sin 2x+2x^3\cos 2x$

(i) $\cos x^2-\left(2x^2-2x\right)\sin x^2$

(j) $\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$

(k) $\frac{-5\sin 3x\sin 5x-3\cos 3x\cos 5x}{\sin^2 3x}$

(l) $\frac{-1-\cos x}{\sin^2 x}$

17. (a) $3\cdot 5^{3x-2}\cdot\ln 5$

(b) $12x\,e^{2x^2}$

(c) $3a^{3x}\ln a-3e^{-3x}$

(d) e^x+3e^{3x}

(e) $ax^{a-1}-2a^x\ln a$

(f) $2e^{2x}\operatorname{cosec}2x-2e^{2x}\operatorname{cosec}2x\cot 2x$

19. (a) $\dfrac{2x}{x^2+5}$

(b) $\dfrac{2x+2}{x^2+2x}$

(c) $\dfrac{e^x}{e^x+2}$

(d) $\dfrac{8\cos 4x}{\sin 4x}$ 或 $8\cot 4x$

(e) $\dfrac{3x^2+3}{\left(x^3+3x-4\right)\ln 10}$

(f) $\dfrac{3}{(3x+7)\ln 5}$

(g) $\dfrac{3}{x(x+3)\ln 2}$

(h) $\dfrac{1-\ln 10}{x(1+\ln x)^2\ln 10}$

20. $-\dfrac{1}{4}$