马来西亚华文独中教科书

高中数学

（二下）

马来西亚董教总全国华文独中工委会课程局编纂

《高中数学》（二下）

行政编辑：梁翠芳
美术编辑：梁翠芳
封面设计：梁翠芳
版面设计：萧娇婵
电脑排版：蔡思盛

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Swan Printing Sdn Bhd.

版次：
2014年8月第1版

印次：
2020年11月第7次印刷

编辑说明

一、这套《高中数学》是根据董教总全国华文独中工委会课程局所拟定的数学课程标准编写而成。在拟订课程标准的过程中，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KBSM）及各国的课程标准和教材，并采用了旧版统一课本《普通数学》的课程内容。

二、这套《高中数学》是为全国各华文独中的高中文科及商科学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。每册内容依据每周六节，每节四十分钟的教学时间编写。

三、这套教材共有 28 章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学及微积分。全书是以综合方式编写。

四、本书是高二下册，供高中二年级下半年使用。内容包括：

统计学

代　数 — 排列与组合、二项式定理、概率

五、本书设有“学习目标”、“注意”、“补充资料”、“随堂练习”及“思考题”栏目。设置上述栏目是为了使学生掌握学习重点，启发学生思考，增进学习效果。

六、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。习题的答案都附于书末。此外，本书附有中英名词对照，供学习参考。

七、除非另有说明，本书所有例题及习题的答案皆准确至两位小数。

八、本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总全国华文独中工委会课程局
《高中数学》编审小组
2014年7月

编审小组

学术顾问：林忠强博士　陈庆地博士　张丽萍博士

学科委员：林汶良　张锦发　苏民胜　萧子良　李鸿聪
刘建华

责任编辑：蔡思盛

鸣谢

本书承蒙编审小组、王经纶、曾龙文、洪燕芬、胡晓蓓和蔡超群等提供建设性意见，并协助编写与审稿，谨此统致谢忱。

马来西亚董教总全国华文独中工委会课程局　启

目录

18. 统计学

18.1 统计学的基本概念 2
18.2 资料的处理 3
18.3 集中趋势 14
18.4 离中趋势 33
18.5 变异系数 50
18.6 相关及相关系数 53
18.7 统计指数 62

19. 排列与组合

19.1 加法原理及乘法原理 78
19.2 排列与排列数公式 81
19.3 环形排列 96
19.4 不尽相异元素的全排列 100
19.5 元素可重复的排列 104
19.6 组合与组合数公式 109

20. 二项式定理

20.1 指数为自然数的二项式定理 120
20.2 二项展开式的通项公式 123

21. 概率

21.1 样本空间与事件 129
21.2 概率的定义 136
21.3 加法原理 143
21.4 乘法原理 152
21.5 数学期望值 163
21.6 常态分配 167

标准常态分配表 181
名词对照 182
答案 184

18. 统计学

学习目标：

- 能编制累计频数分配表、绘制频数多边形及累积频数多边形
- 掌握集中趋势的度量
- 掌握离中趋势的度量
- 掌握变异系数的概念及相关计算
- 掌握相关系数的概念及相关计算
- 掌握统计指数的概念及相关计算

18.1 统计学的基本概念

统计学主要是研究如何收集、整理及分析数据，从而得出相应的结论。

统计学在各行业已被广泛的应用，如药剂师要鉴定新药物是否比原有的药物更有效，厂商要预测其新产品的市场需求是否可观等。这些问题都需用统计学处理。

母体及样本

在统计学里，被研究的对象的全体叫做母体，组成母体的单位叫做个体或元素。从母体中抽取的一部分个体，叫做母体的一个样本。样本所含个体的数目叫做样本容量。例如，从 4000 份高中数学统考答卷中抽取 20 份并记录其分数：

72	80	96	20	42	75	60	92	18	53
82	77	53	29	34	57	79	82	90	41

在此，4000 个分数是母体，每一个分数是个体，而这 20 个所抽出的分数是样本，其容量是 20。

全面调查与抽样调查

调查方法根据调查的对象是全体或是部分，可分为全面调查 (或普查) 及抽样调查 (简称抽查) 两种。普查是指对全体研究对象的调查或研究，如全国人口普查。普查所得的数据较为完整及可靠，但却需动用极大的人力、财力及时间。

抽查是指从全体研究对象中抽取一部分个体，即样本进行调查或研究。抽取样本的过程叫做抽样。研究者希望透过样本来推测母体的全部情形。例如，电灯泡工厂所生产的灯泡产量大，无法逐个测试其性能，只能抽取一小部分作为样本，加以测试。

采用抽查的方式来收集数据，不但省时、省力、省钱，若应用得当，也能正确地协助我们推测母体的特征。

18.2 资料的处理

已收集的数据，必须先经过整理，才能进行分析。

频数分配

当数据的可能值不多时，可将每个可能值出现的次数记录成表，叫做频数分配表。各个数据出现的次数叫做频数。

例题 1

某次数学小考中有 6 道选择题。以下是 52 名考生所答对的题数：

3	4	4	5	2	3	3	2	0	4	5	6	5
5	4	4	4	3	3	2	1	3	2	2	3	3
1	2	2	5	5	4	5	3	3	2	3	3	4
5	6	4	4	3	0	2	2	2	3	1	6	4

试作一频数分配表。

解

答对题数	画记	频数
0	‖	2
1					3
2	卌 卌		11
3	卌 卌 ||||	14
4	卌 卌		11
5	卌 |||	8
6					3

当数据的可能值很多时，必须先将数据分组。分组前，先确定数据的全距，即数据的最大值与最小值之差，然后再确定分组的数目，即组数。组数的多寡应视研究的目的及资料特征而定。分组后，每一组的范围叫做该组的组距。一般上，每组的组距可视为相等，且组距必须大于全距除以组数的值。确定组数及组距后，便可设定每组的上下限，最后将各组数据出现的次数按数据的大小顺序列成频数分配表。各组数据出现的次数叫做该组的频数。

例题 2

从某种零件中抽取100个作为样本，其质量(以克为单位)如下：

1.36	1.49	1.43	1.41	1.37	1.40	1.32	1.42	1.47	1.39
1.41	1.36	1.40	1.34	1.42	1.42	1.45	1.35	1.42	1.39
1.44	1.42	1.39	1.42	1.42	1.30	1.34	1.42	1.37	1.36
1.37	1.34	1.37	1.37	1.44	1.45	1.32	1.48	1.40	1.45
1.39	1.46	1.39	1.53	1.36	1.48	1.40	1.39	1.38	1.40
1.36	1.45	1.50	1.43	1.38	1.43	1.41	1.48	1.39	1.45
1.37	1.37	1.39	1.45	1.31	1.41	1.44	1.44	1.42	1.47
1.35	1.36	1.39	1.40	1.38	1.35	1.38	1.43	1.42	1.42
1.42	1.40	1.41	1.37	1.46	1.36	1.37	1.27	1.37	1.38
1.42	1.34	1.43	1.42	1.41	1.41	1.44	1.48	1.55	1.39

试作一频数分配表。

解 以上的数据中，最小值是1.27，最大值是1.55，

$\therefore$ 全距 $=1.55-1.27=0.28$

将数据分成10组，则组距须大于 $\dfrac{0.28}{10}=0.028$，

故取组距为0.03。

将第一组的下限定为1.27，则第2组的下限为

$1.27+0.03=1.30$ 。

由于所有数据都是两位小数，第一组的上限应取为1.29。依此类推，得出各组：1.27–1.29，1.30–1.32，…，1.54–1.56。

思考题

为什么组距要定为0.03而非0.028？

(续) 列成频数分配表：

质量 m (克)	频数
1.27 – 1.29	1
1.30 – 1.32	4
1.33 – 1.35	7
1.36 – 1.38	22
1.39 – 1.41	24
1.42 – 1.44	24
1.45 – 1.47	10
1.48 – 1.50	6
1.51 – 1.53	1
1.54 – 1.56	1

在以上的例子中，我们可假设所有的零件的质量都准确至两位小数。因此，若一个零件的质量是1.443克，准确至两位小数是1.44克，落在 1.42 – 1.44 那一组。因此，第一组 1.27 – 1.29 的实际质量范围是 $1.265 \leq m < 1.295$，记作 1.265 – 1.295，其中1.265 及 1.295 是第一组的组界，1.265 是下组界，1.295 是上组界。下组界与上组界的平均数叫做组中点。例如，第一组的组中点为 $\dfrac{1.265+1.295}{2}=1.28$。

在进行已分组数据的分析时，各组的组中点就成为该组各数值的代表。因此，组距及组界的选取应尽量使资料密集处为组中点，以便作更精确的分析。

注意

每组的组中点也是其下限与上限的平均数。

频数的分布情况也可使用直方图或频数多边形来表示。

直方图是一排连续的长方形，每一个长方形的底边在横轴上。对于未分组的数据，每个长方形的底边以数据来标示，长方形的高则为该数据出现的频数。对于已分组的数据，每个长方形的底边以各组的组界来标示，各长方形的面积必须与各组的频数成正比。当各组的组距相等时，可使用各组的频数作为各长方形的高。

注意

对于未分组的数据，直方图与条形图相似，只是各长方形之间没有间隔。

频数多边形是一线形图。以各组的组中点为横坐标，频数为纵坐标，标出各点，包括第一组之前及最后一组之后以 0 为频数的两个点，用直线将各点顺序连接起来，就可得频数多边形。

注意

在直方图的基础上，将直方图中每个长方形上方的中点顺序用直线连接起来，就是频数多边形。

例题 3

试作一直方图及频数多边形表示例题 1 的数据。

解

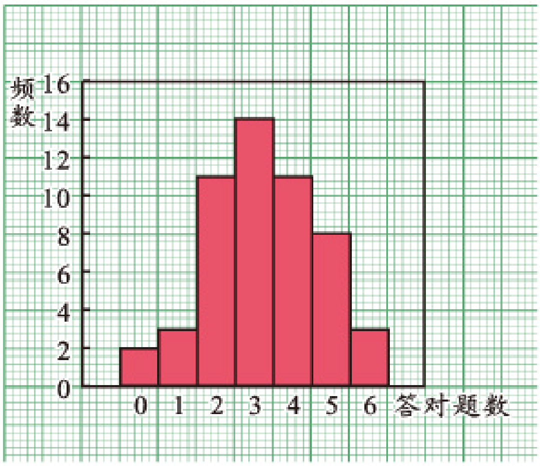


图 18-1 (a) 答对题数的直方图

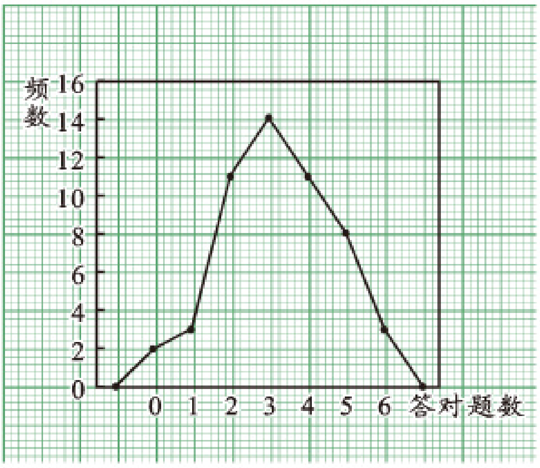


图 18-1 (b) 答对题数的频数多边形

(续)

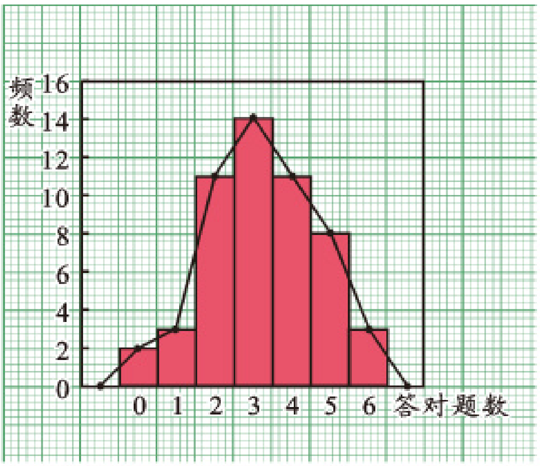


图 18-1 (c) 答对题数的直方图及频数多边形

例题 4

求例题 2 中各组的下组界、上组界及组中点，并作一直方图及频数多边形表示频数分配。

解

质量 m (克)	下组界	上组界	组中点	频数
1.27 – 1.29	1.265	1.295	1.28	1
1.30 – 1.32	1.295	1.325	1.31	4
1.33 – 1.35	1.325	1.355	1.34	7
1.36 – 1.38	1.355	1.385	1.37	22
1.39 – 1.41	1.385	1.415	1.40	24
1.42 – 1.44	1.415	1.445	1.43	24
1.45 – 1.47	1.445	1.475	1.46	10
1.48 – 1.50	1.475	1.505	1.49	6
1.51 – 1.53	1.505	1.535	1.52	1
1.54 – 1.56	1.535	1.565	1.55	1

(续)

图 18-2 质量分布的直方图及频数多边形

随堂练习 1

某校的高三文商班有 105 位学生，在统考模拟考中，所考获的数学科成绩如下：

35 88 67 32 38 34 45 78 54 58 69 21 90 78 74 43 42 35 57 34 77
89 66 74 71 44 56 48 33 24 73 63 51 59 49 34 55 52 75 72 62 62
44 48 73 49 57 67 80 70 66 54 32 29 35 37 47 41 51 36 46 55 53
60 53 62 39 35 48 42 71 63 70 33 45 42 44 61 59 67 30 42 43 89
96 82 47 63 54 34 45 45 87 28 34 29 77 64 64 50 48 75 33 56 84

(a) 求全距；
(b) 将以上的成绩分成 10 组，作一频数分配表，并求各组的上、下组界及组中点；
(c) 作一直方图及频数多边形。

累积频数分配

将各组的频数逐级累加，即可得到累积频数。以各组的上组界为横坐标，累积频数为纵坐标，标出各点，包括第一组之前以 0 为频数的点，用直线将各点顺序连接起来，所得的图叫做累积频数多边形。将累积频数多边形上最高点及横轴之间分成 100 等份，就可得到累积频数百分率。

补充资料

在作累积频数多边形时，用直线连接各点，是假设各组中的数据是均匀分配在该组内。

例题 5

为了研究某一年龄儿童的身高分布，收集了 120 个儿童身高的数据，其频数分配表如下：

身高 x (cm)	76 – 78	78 – 80	80 – 82	82 – 84	84 – 86	86 – 88	88 – 90	90 – 92
人数	2	5	7	18	40	28	15	5

(a) 作累积频数分配表及累积频数多边形；

(b) 求身高低于 83cm 的儿童所占的百分率；

(c) 求身高超过 87cm 的儿童所占的百分率。

解 (a)

身高(cm)	频数	身高低于(cm)	累积频数
76 – 78	2	78	2
78 – 80	5	80	7
80 – 82	7	82	14
82 – 84	18	84	32
84 – 86	40	86	72
86 – 88	28	88	100
88 – 90	15	90	115
90 – 92	5	92	120

注意

第一组的 76 – 78 表示 $76 \le x < 78$ ，依此类推。

(续)

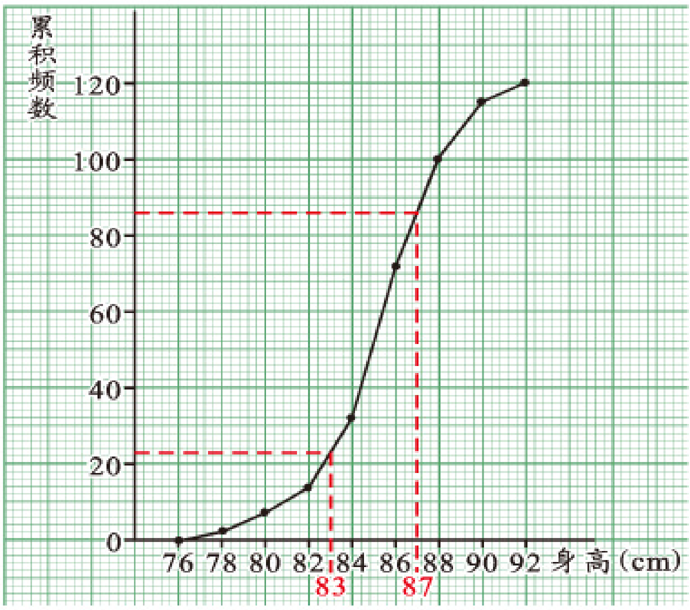


图 18-3 累积频数多边形

(b) 由图18-3，身高低于 83cm 的儿童大约有 23 人，占 $\frac{23}{120}\times100\%=19.17\%$。

(c) 由图18-3，身高超过 87cm 的儿童大约有 $(120-86)=34$ 人，占 $\frac{34}{120}\times100\%=28.33\%$。

注意

数据在分组后，某些资讯会流失。例如，我们无法得知身高介于 82cm 至 84cm 这一组的儿童当中，实际上有多少人的身高低于 83cm。因此，所求得的身高低于 83cm 的儿童人数只是一个估计值。

思考题

当我们说身高低于 83cm 的儿童大约有 23 人时，我们作了什么假设？

随堂练习 2

某校的高三文商班有 155 位学生，其学年总平均的频数分配表如下：

学年总平均	频数
50 – 55	3
55 – 60	8
60 – 65	25
65 – 70	38
70 – 75	46
75 – 80	19
80 – 85	12
85 – 90	4

(a) 作累积频数分配表及累积频数多边形；

(b) 若一学生的总平均分数为 72 分，求此学生的名次；

(c) 若成绩最好的 20% 的学生将获得奖状，求获得奖状者的最低分数。

练习 18.2

1. 某公司对前来求职的 100人 进行了能力测试，结果如下：

得分	8	7	6	5	4	3
人数	5	12	24	33	19	7

根据上表作直方图及频数多边形。

2. 从稻田中抽取 120个稻穗，量得稻穗的长度 (以cm为单位) 如下：

6.5	6.4	6.7	5.8	5.9	5.9	5.2	4.0	5.4	4.6	5.8	5.5	6.0	6.5	5.1
6.2	5.4	5.0	5.0	6.8	6.0	5.0	5.7	6.0	5.5	6.8	6.0	6.3	5.5	5.0
6.4	5.8	5.9	5.7	6.8	6.6	6.0	6.4	5.7	7.4	6.0	5.4	6.5	6.0	6.8
5.3	6.4	5.7	6.7	6.2	5.6	6.0	6.7	6.7	6.0	5.5	6.2	6.1	5.3	6.2
5.8	5.3	7.0	6.0	6.0	5.9	5.4	6.0	5.2	6.0	6.3	5.7	6.8	6.1	4.5
5.4	6.3	6.9	4.9	5.1	5.6	5.9	6.1	6.5	6.6	5.7	5.8	5.8	6.2	6.3
6.5	5.3	5.9	5.5	5.8	6.3	5.2	6.0	7.0	6.4	5.8	6.3	6.0	6.3	5.6
6.8	6.6	4.7	5.7	5.7	5.6	6.3	6.0	5.8	6.3	7.5	6.2	6.4	7.0	6.5

(a) 求全距；

(b) 将以上的数据分成 12 组，作一频数分配表，求各组的上、下组界及组中点，并计算累积频数；

(c) 作频数多边形；

(d) 作累积频数多边形；

(e) 估计稻田中长度大于 6.0 cm 的稻穗所占的百分率。

3. 下表所示是 90 个婴儿的体重 (以 kg为单位) 分布：

体重	1.5 – 2.0	2.0 – 2.5	2.5 – 3.0	3.0 – 3.5	3.5 – 4.0	4.0 – 4.5	4.5 – 5.0
频数	2	4	13	32	28	10	1

(a) 作累积频数分配表；

(b) 作累积频数多边形；

(c) 求体重超过 3.8 kg 的婴儿所占的百分率。

4. 下表所示是某班 50 名学生在期中考的成绩分布：

平均分数	50.0 – 59.9	60.0 – 69.9	70.0 – 79.9	80.0 – 89.9	90.0 – 99.9
频数	4	9	23	12	2

(a) 作累积频数分配表及累积频数多边形；

(b) 某学生的平均分数为 74 分，求此学生的名次；

(c) 求排名第 20 名的学生的平均分数；

(d) 求平均分数超过 85 分的学生所占的百分率。

5. 下表所示是1200 名学生在统考会计学的成绩分布：

分数	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99
人数	20	60	95	130	340	310	135	80	30

考生的成绩分成四个等级：特优、优等、及格及不及格。

(a) 作累积频数分配表及累积频数多边形。

(b) 若及格分数为 38 分，求及格率。

(c) 若特优及优等的最低分数分别是 75 分及 55 分，分别求考获特优及优等的学生所占的百分率。

(d) 若欲使及格率达到 90 %，求及格分数。

(e) 若欲使 15% 的考生获得特优，求特优的最低分数。

18.3 集中趋势

集中趋势是指全部数据的代表值，或是数据的分布中心。最常见的量度集中趋势的值有平均数、中位数及众数三种。

平均数

平均数也叫做算术平均数，对于 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，其平均数是

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

若所给的数据的所有可能值是 x_1，x_2，…，x_n，出现的频数分别是 f_1，f_2，…，f_n，则其平均数是

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

对于已分组的数据，则取各组的组中点为该组的代表值 x_i。

加权平均数

在一些情况下，加权平均数比平均数更具代表性。

在计算算术平均数时，各项数值都具有相同的重要性。但在一些情况下，一组数据中各个数值的重要性并不相同。例如，学生各科的成绩的重要性依授课节数的不同而异。因此，在计算学生的学业平均分数时，各科的成绩必须乘以反映该科的相对重要性的一个数值，这个数值叫做权数。加权平均数的计算方法是将各数据乘以其对应的权数后，再将各项乘积的总和除以总权数，即

$$\text{加权平均数} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{\sum w_ix_i}{\sum w_i}$$

其中 x_i 为数据，w_i 为 x_i 的权数。

例题 1

某班的 10 名学生在一次数学测验中的得分如下：

86　91　100　72　93　89　90　85　75　95

求他们的平均分数。

解
$$\text{平均分数} = \frac{86+91+100+72+93+89+90+85+75+95}{10} = 87.6\text{分}$$

例题 2

某工人在 30 天中加工一种零件，其日产量如下：一天内生产 11 件的有2天，12 件的有 3 天，13 件的有 6 天，14 件的有 8 天，15 件的有 7 天，16 件的有 3 天，17 件的有1 天。计算他在这30 天的平均日产量。

解 设零件的日产量为 x_i，对应的天数为 f_i。

x_i	f_i	$f_i x_i$
11	2	22
12	3	36
13	6	78
14	8	112
15	7	105
16	3	48
17	1	17
	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 418$

∴ 平均日产量 $=\dfrac{418}{30}=13.93$ 件

例题 3

下表所示是 120 名儿童的身高数据，计算他们的平均身高。

身高 (cm)	76 - 78	78 - 80	80 - 82	82 - 84	84 - 86	86 - 88	88 - 90	90 - 92
人数	2	5	7	18	40	28	15	5

解

身高 (cm)	组中点 x_i	频数 f_i	f_ix_i
76 - 78	77	2	154
78 - 80	79	5	395
80 - 82	81	7	567
82 - 84	83	18	1494
84 - 86	85	40	3400
86 - 88	87	28	2436
88 - 90	89	15	1335
90 - 92	91	5	455
		$\sum f_i = 120$	$\sum f_ix_i = 10236$

$\therefore$ 平均身高 $= \dfrac{10236}{120} = 85.3$ cm

例题 4

栽种 60 棵幼树，3 年后测得树高如下：

树高 (cm)	101 – 120	121 – 140	141 – 160	161 – 180	181 – 200	201 – 220
频数	6	10	22	15	6	1

计算这些树的平均高度。

解

树高 (cm)	组中点 x_i	频数 f_i	f_ix_i
101 – 120	110.5	6	663
121 – 140	130.5	10	1305
141 – 160	150.5	22	3311
161 – 180	170.5	15	2557.5
181 – 200	190.5	6	1143
201 – 220	210.5	1	210.5
		$\sum f_i = 60$	$\sum f_ix_i = 9190$

$\therefore$ 平均高度 $= \dfrac{9190}{60} = 153.17$ cm

例题 5

某学生各学科的分数及上课节数如下：

学科	华文	马来文	英文	数学	商业学	簿记	经济学	历史
分数	86	70	80	90	75	72	64	76
节数	7	6	7	7	5	5	5	3

以节数为权数，求该学生成绩的加权平均数。

解

学　科	分数 x_i	节数 w_i	$w_i x_i$
华　文	86	7	602
马来文	70	6	420
英　文	80	7	560
数　学	90	7	630
商业学	75	5	375
簿　记	72	5	360
经济学	64	5	320
历　史	76	3	228
		$\sum w_i = 45$	$\sum w_i x_i = 3495$

$\therefore$ 加权平均数$= \dfrac{3495}{45} = 77.67$ 分

思考题

利用节数作为权数计算成绩的加权平均数，有什么优点及缺点？

随堂练习 3

1. 求数据 34，50，24，32，53，30，62，27 的平均数。
2. 某工厂有甲、乙、丙三个车间。甲车间有 10 名工人，每人的日薪是 RM 35；乙车间有 30 名工人，每人的日薪是 RM 45；丙车间有 15 名工人，每人的日薪是 RM 55。求该工厂工人的平均日薪。
3. 某校派学生参加一项数学比赛，参赛者必须在一小时内回答 25 道选择题。下表所示是这些学生所答对题数的频数分配表：

答对题数	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20	21 – 25
频数	3	12	7	8	5

完成下表，并求每位学生答对题数的平均数。

答对题数	频数 f_i	组中点 x_i	$f_i x_i$
1 – 5			
6 – 10			
11 – 15			
16 – 20			
21 – 25			

练习 18.3a

1. 从一批机器零件中抽取 20 件，其质量如下 (以 g 为单位)：

210	208	200	205	202	218	206	214	215	207
195	207	218	192	202	216	185	227	187	215

计算这 20 件零件的平均质量。

2. 已知一组数据 4，-3，2，k，5，8 的平均数是 10，求 k 的值。
3. 已知 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 的平均数是40；y_1，y_2，y_3 的平均数是15。若将两组数据合并，求平均数。
4. 某校的高三有甲、乙两班，在一次华文测验中，甲班 49 名学生的平均分数是 72 分，乙班 45 名学生的平均分数是 68 分。求两班合起来的平均分数。
5. 已知 8 个数据的平均数是 5，加入 x 及 $3x$ 这两个数据后，平均数增加了1.4，求 x 的值。
6. 同时抛掷 6 枚匀称的硬币，记录掷得正面的次数。在抛掷了 100 次后，得到以下的频数分配表：

掷得正面的次数	0	1	2	3	4	5	6
频数	2	10	24	35	22	6	1

求平均每次掷得正面的次数。

7. 下表所示是 66 名学生在一次华文考试的成绩分布：

得分	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
频数	6	12	15	15	8	6	4

求他们的平均成绩。

8. 某初中生各学科的上课节数及学年成绩如下：

学科	华文	马来文	英文	数学	科学	历史	地理
节数	7	7	7	7	5	3	3
分数	75	73	65	82	86	73	87

(a) 求平均分数；

(b) 以节数为权数，求加权平均分数。

9. 某校初中二 60 名男生的体重如下：

体重 (kg)	54 – 56	57 – 59	60 – 62	63 – 65	66 – 68	69 – 71
人数	10	20	x	8	4	y

已知平均体重是 60.1 kg，求 x 及 y 的值。

中位数

中位数的意义是数据按大小排列后，排在正中位置的数。中位数两侧的数据个数必须相等。

若数据的个数是 n，将数据由小到大排列，

当 n 是奇数时，中位数是排在第 $\frac{n+1}{2}$ 位的数；

当 n 是偶数时，中位数是排在第 $\frac{n}{2}$ 位与第 $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ 位的两个数的平均数。

对于已分组的数据，可作累积频数多边形，

累积频数百分率中，50% 所对应的数值为中位数。

设 n 表示数据的个数，即 $\sum f_i$，

L_m 表示中位数所在组的下组界，

C_m 表示中位数所在组的组距，

f_m 表示中位数所在组的频数，

F_m 表示中位数所在组之前各组的累积频数。

思考题

如何得知中位数在哪一组？

图 18-4 所示是累积频数多边形的一部分，点 R 是中位数所在组所对应的点，点 P 是中位数所在组前一组所对应的点，M 是中位数。由于 ΔPQR 与 ΔPST 相似，

$$\therefore \quad \frac{PS}{PQ}=\frac{ST}{QR}$$

即 $$\frac{M-L_m}{C_m}=\frac{\frac{n}{2}-F_m}{f_m}$$

整理后即得中位数公式。

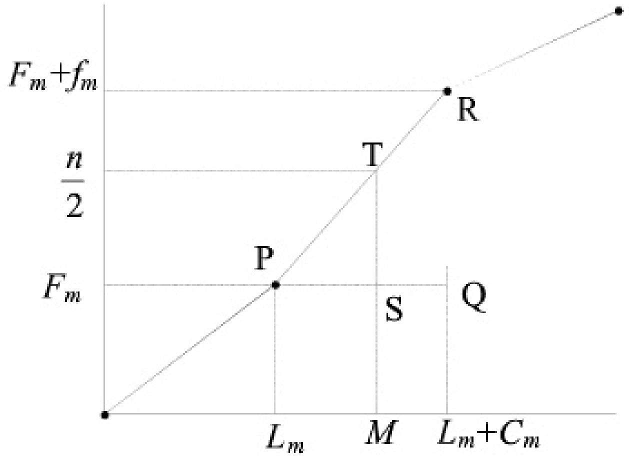


图 18-4

$$\text{中位数 } M=L_m+\left(\frac{\frac{n}{2}-F_m}{f_m}\right)C_m$$

例题 6

求下列各组数据的中位数：

(a) 7 16 8 25 3 20 10

(b) 20 12 4 18 7 14 6 2

解 (a) 将数据由小到大排列

3，7，8，10，16，20，25

排在第 4 位的数是中位数，即中位数 = 10

(b) 将数据由小到大排列

2，4，6，7，12，14，18，20

排在第 4 位与第 5 位的两个数的平均数是中位数，

即中位数 $=\frac{7+12}{2}=9.5$

例题 7

下表所示是某班学生在一次数学小考中答对的选择题题数：

答对题数	0	1	2	3	4	5
人数	3	5	8	10	3	6

求这班学生答对题数的中位数。

解 作累积频数分配表：

答对题数	人数	累积频数
0	3	3
1	5	8
2	8	16
3	10	26
4	3	29
5	6	35

由于 $n=35$，则排在第 18 位的数为中位数。

$\therefore$ 答对题数的中位数是 3。

例题 8

栽种 60 棵幼树，3 年后测得树高如下：

树高 (cm)	101 – 120	121 – 140	141 – 160	161 – 180	181 – 200	201 – 220
频数	6	10	22	15	6	1

(a) 从累积频数多边形中求树高的中位数；

(b) 利用公式求树高的中位数

解 作累积频数分配表：

树高(cm)	频数	树高低于(cm)	累积频数
101 – 120	6	120.5	6
121 – 140	10	140.5	16
141 – 160	22	160.5	38
161 – 180	15	180.5	53
181 – 200	6	200.5	59
201 – 220	1	220.5	60

(a)

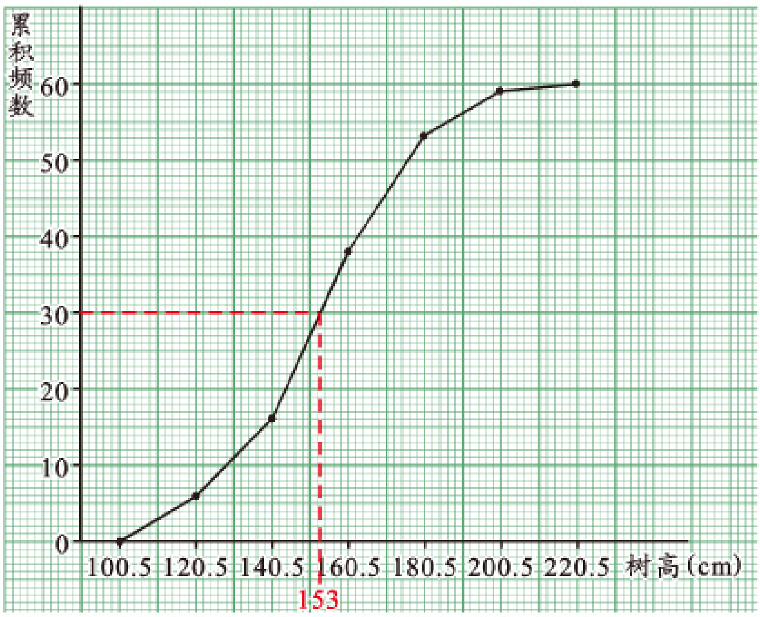


图 18-5 累积频数多边形

由图 18-5，得中位数 = 153。

思考题

1. 使用同一组数据，例题 4 所得的平均数与例题 8 所得的中位数非常接近，这反映什么？
2. 若中位数比平均数小，这反映什么？反之，若中位数比平均数大，这又反映什么？

(b) $n=60$，$\frac{n}{2}=30$，中位数所在组为 141 – 160，

$C_m=20$，$L_m=140.5$，$f_m=22$，$F_m=16$，

$$\therefore \text{中位数} = 140.5 + \frac{30-16}{22} \times 20$$
$$= 153.23 \text{ cm}$$

注意

141 – 160 这一组的下组界是 140.5，而非 141；组距是 20，而非19。

随堂练习 4

1. 某工厂的 10 名工人在某天生产同一种零件，生产的件数分别是：
   15　17　14　10　15　19　17　16　14　12
   求这一天10名工人生产的零件件数的中位数。

2. 某班 49 名学生右眼视力的检查结果如下：

视力	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5
人数	2	3	4	3	4	9	9	10	5

   求他们右眼视力的中位数。

3. 下表所示是 21 名学生每天上网的时间分布：

时间 (小时)	1.1 – 1.3	1.4 – 1.6	1.7 – 1.9	2.0 – 2.2	2.3 – 2.5
人数	4	3	5	4	5

   求他们每天上网的时间的中位数。

练习 18.3b

1. 在一次体操比赛中，由 4 名裁判员同时给运动员完成的动作打分，并规定将 4 个分数的中位数作为运动员的得分。已知 4 名裁判员给某运动员的分数分别是 9.5，9.4，9.8 及 9.4，求该运动员的得分。

2. 同龄的 15 个男孩的体重 (以 kg 为单位) 如下：

   36 35 33 37 35 42 40 38 38 39 40 41 36 38 37

   (a) 求上述 15 个男孩的体重的中位数；

   (b) 将以上的数据按 33 – 35，35 – 37，…，41 – 43 分组后求中位数。

3. 下表所示是一组学生在某项小考的得分分布：

分数	5	10	15	20	25
学生人数	4	2	3	x	4

   若中位数是 15，求 x 的可能值。

4. 下表所示是某公司员工的收入情况：

收入 (RM)	1000 – 2000	2000 – 3000	3000 – 4000	4000 – 5000	5000 – 6000
人数	11	17	20	10	2

   (a) 从累积频数多边形中求收入的中位数；

   (b) 利用公式求收入的中位数并与 (a) 的结果做比较。

5. 下表所示是 20 名学生的身高分布：

身高 (cm)	120 – 130	130 – 140	140 – 150	150 – 160	160 – 170
学生人数	3	4	x	5	6

   求 (a) x 的值；

   (b) 身高的中位数。

6. 下表所示是某工厂工人的日薪分布：

日薪 (RM)	40 – 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89
人数	4	14	5	x	2

   若中位数是 63.5，求 x 的值。

众数

在一组数据中，出现的次数最多的数据，叫做这组数据的众数。一组数据可以有多于一个众数。若每个数据出现的次数相同，则这组数据没有众数。

对于已分组的数据，定义众数组为频数最高的组，且可以有多于一个众数组。另一方面，众数也可由直方图中估计而得，其方法如下：

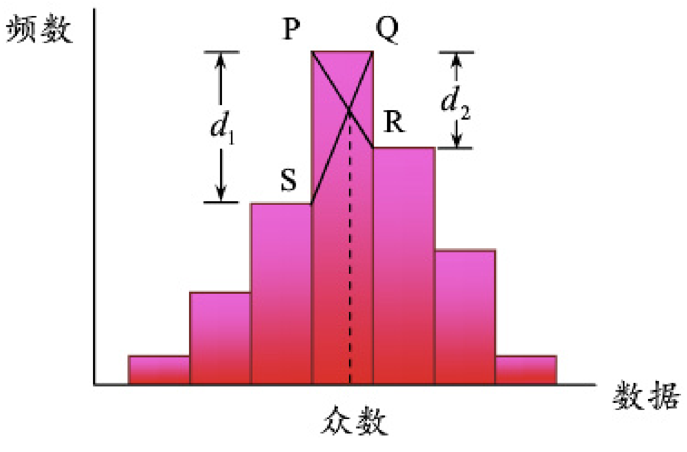


图18-6

图 18-6 所示是一组数据的直方图，最高的长方形所对应的组为众数组，而众数则为 PR 与 QS 的交点的横坐标。

与中位数一样，利用相似三角形，可以导出众数的公式。设

L 表示众数所在组的下组界，

C 表示众数所在组的组距，

d_1 表示众数所在组与之前一组的频数之差，

d_2 表示众数所在组与之后一组的频数之差，

则

$$众数 = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)C$$

例题 9

求下列各组数据的众数：

(a) 3 4 1 3 5 3 9 1 8 3 1

(b) 3 9 2 3 10 11 9 12

(c) 2 5 6 5 2 6

解 (a) 众数 = 3，因为 3 出现了四次，是出现次数最多的数据。

(b) 众数 = 3 及 9，两个数据都出现了两次。

(c) 没有众数，因为每个数据出现的次数相同。

例题 10

下表所示是高中某班学生的数学测验成绩的频数分配表：

分数	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
频数	4	10	18	12	6

(a) 求众数组；

(b) 从直方图中求学生成绩的众数；

(c) 利用公式求学生成绩的众数。

解 (a) 众数组为 71 – 80。

(b)

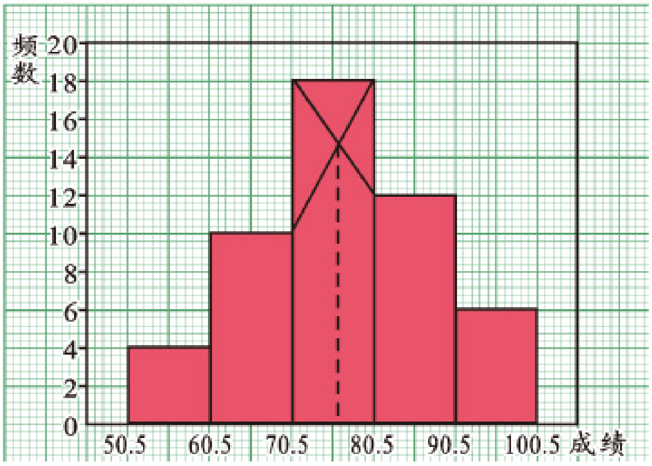


图 18-7 学生成绩的直方图

由图 18-7 得众数= 76.5。

(c) $L=70.5$， $C=10$，$d_1=18-10=8$，$d_2=18-12=6$，

$$\therefore \text{众数} = 70.5+\frac{8}{8+6}\times 10$$
$$=76.21 \text{ 分}$$

随堂练习 5

下表所示是 36 名学生在一次数学测验的分数分布：

分数	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
人数	2	6	10	12	3	2	1

(a) 求众数组；

(b) 从直方图中求学生成绩的众数；

(c) 利用公式求学生成绩的众数。

平均数、中位数与众数的比较

一般上，一组数据的平均数、中位数及众数都不相同，它们各自传达不同的讯息。

例题 11

以下为某公司 16 名员工的月薪 (以 RM 为单位):

1500	1500	1500	1500	1700	1800	1800	1900
2000	2300	2400	2500	2700	3000	5000	8800

求平均数、中位数及众数，并给予评述。

解

$$\text{平均数} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{41900}{16} = \text{RM } 2618.75$$

$$\text{中位数} = \frac{1900 + 2000}{2} = \text{RM } 1950$$

$$\text{众数} = \text{RM } 1500$$

在 16 名员工中，有 12 名员工的月薪少于平均月薪 RM 2618.75。这是由于两名最高薪员工的月薪比其他员工的月薪高很多，而提高了平均月薪。因此，用平均数来反映此公司员工的月薪的集中趋势并不理想；反而，中位数 RM 1950 更能反映员工月薪的集中趋势。众数 RM 1500 也不能很好地反映集中趋势，因为它是最低薪员工的月薪，且有12 名员工的月薪高于此众数。

思考题

你认为在平均数、中位数及众数中，何者最能反映我国人民年收入的集中趋势？为什么？

思考题

在伦敦奥运的跳水项目中有七名裁判。在七名裁判所给的分数中，剔除两个最高分及两个最低分后，剩余的三个分数的总和乘以动作难度系数就是选手的最终得分。问如此计算得分有何优点？

练习 18.3c

1. 求下列各组数据的众数：

   (a) 3 4 3 2 4 5 5 5 4 4

   (b) 7 6 8 8 5 6 6 9 8 5

   (c) 1.0 1.1 1.0 0.9 0.8 1.2 1.0 0.9 1.1 1.0

2. 在某中学的运动会中，参加男子跳高的 17 名运动员的成绩如下：

成绩 (m)	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
人数	2	3	2	3	4	1	1	1

   这些运动员成绩的平均数、中位数及众数。

3. 在某数学竞赛中，参赛者的得分及得分人数的分组资料如下：

分数	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59
人数	20	60	80	40	10

   求众数组及众数。

4. 已知一组正整数数据 3，5，8，6，8，10，5，3，x，y 的平均数是 6，

   (a) 证明 $x+y=12$；

   (b) 据此，若

   (i) $x=y$

   (ii) $x<y$

   求这组数据的众数。

5. 一组数据 13，5，5，n，5，10，10，11，9，n^2 的平均数是 7.4，

   (a) 求 n 的可能值；

   (b) 据此，若

   (i) $n>0$

   (ii) $n<0$

   求这组数据的中位数。

6. 下表所示是一组学生在某项比赛的得分分布：

分数	0	1	2	3	4
学生人数	3	x	4	6	2

(a) 若众数是 1，求 x 的最小值。

(b) 若中位数是 2，求 x 的最大值。

(c) 若平均数是 1.95，求 x 的值。

7. 已知五个正整数的众数是 9，中位数是 8，平均数是 7.6，求这五个数。

8. 下表所示是某鞋店一个月内所售出的某款鞋子的数量：

鞋子号码	5	6	7	8	9
数量	4	10	11	18	2

(a) 求鞋子号码的平均数、中位数及众数；

(b) 哪一个集中趋势值最能代表上述的数据？为什么？

9. 在某次考试的 54 名考生中，有 15 名来自城市，39 名来自农村，考试成绩的频数分配表如下：

得分	城市考生人数	农村考生人数
12 – 23	0	1
23 – 34	0	0
34 – 45	0	5
45 – 56	1	6
56 – 67	3	5
67 – 78	4	13
78 – 89	6	4
89 – 100	1	5

(a) 分别求城市考生及农村考生成绩的平均数、中位数及众数；

(b) 求所有考生成绩的平均数、中位数及众数。

10. 下表所示是一组学生在某次华文测验的成绩分布：

分数 x	$40<x\leq50$	$50<x\leq60$	$60<x\leq70$	$70<x\leq80$	$80<x\leq90$	$90<x\leq100$
人数	12	30	35	25	10	3

求 (a) 平均数；
(b) 众数组及众数；
(c) 中位数。

18.4 离中趋势

离中趋势可用于反映数据的散布情况。

在描述一组数据时，若只使用代表性的中间值(集中趋势值)，对整组数据所提供的资讯非常有限。例如，已知四名学生在一次数学测验的平均分数、中位数及众数都是 70 分，我们无法判断这四名学生的分数的差距。他们的分数可能不相上下 (如：68，72，70，70)，也可能差别很大 (如：100，40，70，70)。后者的四个分数显然比前者的较为分散。

最常用来反映数据散布情况的离中趋势值有全距、四分位距、四分位差、平均差、方差及标准差。

全距

所考虑的数据中最大值与最小值之差叫做全距。

对于已分组的数据，全距是最后一组的上限与第一组的下限之差。

注意

对于已分组的数据，最后一组的上限与第一组的下限之差会高估原始资料的全距。

例题 1

以下是某中学同龄的 20 名女生的身高 (以 cm 为单位)：

167	154	159	166	169	159	156	166	162	158
158	160	165	158	163	153	157	161	154	165

求身高的全距。

解 全距 $=169-153=16$ cm

例题 2

经抽样调查，得到成年人每星期看电视时间的频数分配表如下：

时间 (小时)	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35
人数	18	15	20	14	15	10	8

求成年人每星期看电视时数的全距。

解 全距 $= 35-0$

$= 35$小时

观察例题 1 及例题 2 可得，全距简单易求。当数据中存在偏大或偏小的异常值时，全距就会偏大，因而失去反映数据分散情况的意义。例如，若在例题 2 的被调查者中有一个电视迷，每星期看电视的时数是 60 小时，而非 35 小时，则全距是 60 小时。这就很难反映这 100个成年人每星期看电视时间的散布情况。

四分位数、四分位距及四分位差

四分位数是三个数 Q_1、Q_2 及 Q_3，其中 Q_2 是上节已讨论过的中位数，是排在数据正中位置的数。Q_1 及 Q_3 分别叫做下四分位数及上四分位数，是分别排在四分之一位置及四分之三位置的数。

若数据的个数是 n，将数据由小到大排列。

当 n 是偶数时，将数据分成前后两部分，各有 $\frac{n}{2}$ 个数；

当 n 是奇数时，去掉中位数后，将数据分成前后两部分，各有 $\frac{n-1}{2}$ 个数；

前半部的中位数即为下四分位数 Q_1；

后半部的中位数即为上四分位数 Q_3。

对于已分组的数据，可作累积频数多边形。

在累积频数百分率中，

25% 所对应的数值是下四分位数 Q_1；

50% 所对应的数值是中位数 Q_2；

75% 所对应的数值是上四分位数 Q_3。

利用导出中位数公式的方法，可以导出上、下四分位数的公式。设

n 表示数据的个数，即 $\sum f_i$，

L_k 表示 Q_k 所在组的下组界，

C_k 表示 Q_k 所在组的组距，

f_k 表示 Q_k 所在组的频数，

F_k 表示 Q_k 所在组之前各组的累积频数，

则

$$\text{下四分位数 } Q_1 = L_1 + \left(\frac{\frac{n}{4} - F_1}{f_1} \right) C_1$$

$$\text{上四分位数 } Q_3 = L_3 + \left(\frac{\frac{3n}{4} - F_3}{f_3} \right) C_3$$

上四分位数 Q_3 减下四分位数 Q_1 所得的值叫做四分位距，即

$$\text{四分位距} = Q_3 - Q_1$$

四分位距除以 2 所得的值叫做四分位差，以 $Q.D.$ 表示，即

$$\text{四分位差 } Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

由于四分位距及四分位差较不受数据中的异常值所影响，相较于全距，它们更适合用来反映数据的散布情况。

例题 3

求下列各组数据的四分位数及四分位差：

(a)	7	16	8	25	3	20	10						
(b)	2	6	6	3	10	3	8	8	7	4	10	9	15
(c)	6	3	4	5	5	7	3	7	9	8			
(d)	20	12	4	18	7	14	6	2					

解 (a) 将数据由小到大排列：

3 7 8 10 16 20 25

得 $Q_1 = 7$ $Q_2 = 10$ $Q_3 = 20$

$$\therefore\ Q.D. = \frac{20-7}{2} = 6.5$$

(b) 将数据由小到大排列：

2 3 3 4 6 6 7 8 8 9 10 10 15

得 $Q_1 = \frac{3+4}{2} = 3.5$ $Q_2 = 7$ $Q_3 = \frac{9+10}{2} = 9.5$

$$\therefore\ Q.D. = \frac{9.5-3.5}{2} = 3$$

(c) 将数据由小到大排列：

3 3 4 5 5 6 7 7 8 9

得 $Q_1 = 4$ $Q_2 = \frac{5+6}{2} = 5.5$ $Q_3 = 7$

$$\therefore\ Q.D. = \frac{7-4}{2} = 1.5$$

(d) 将数据由小到大排列：

2 4 6 7 12 14 18 20

得 $Q_1 = \dfrac{4+6}{2} = 5$ $Q_2 = \dfrac{7+12}{2} = 9.5$ $Q_3 = \dfrac{14+18}{2} = 16$

$\therefore \quad Q.D. = \dfrac{16-5}{2} = 5.5$

例题 4

以下是某工厂 60 名工人每月所获得的津贴的分布情况：

津贴 (RM)	401 – 420	421 – 440	441 – 460	461 – 480	481 – 500
人数	17	20	15	6	2

(a) 从累积频数多边形中求上、下四分位数及四分位差；
(b) 利用公式求上、下四分位数及四分位差。

解 作累积频数分配表：

津贴 (RM)	频数	津贴少于(RM)	累积频数
401 – 420	17	420.5	17
421 – 440	20	440.5	37
441 – 460	15	460.5	52
461 – 480	6	480.5	58
481 – 500	2	500.5	60

(a) 作累积频数多边形：

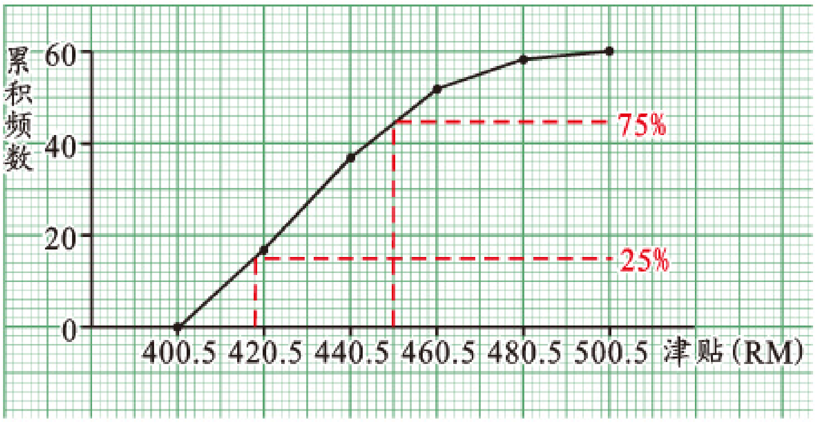


图18-8

从图中18-8，得 $Q_1 = \text{RM } 418.5$，$Q_3 = \text{RM } 451.5$

$$\therefore \ Q.D. = \frac{451.5 - 418.5}{2} = \text{RM } 16.5$$

(b) $n = 60$，$\frac{n}{4} = 15$，下四分位数所在组为 401 − 420

$C_1 = 20$，$L_1 = 400.5$，$f_1 = 17$，$F_1 = 0$

$$\therefore \ Q_1 = 400.5 + \frac{15 - 0}{17} \times 20$$
$$= \text{RM } 418.15$$

$\frac{3n}{4} = 45$，上四分位数所在组为 441 − 460

$C_3 = 20$，$L_3 = 440.5$，$f_3 = 15$，$F_3 = 37$

$$\therefore \ Q_3 = 440.5 + \frac{45 - 37}{15} \times 20$$
$$= \text{RM } 451.17$$

$$\therefore \ Q.D. = \frac{451.17 - 418.15}{2} = \text{RM } 16.51$$

随堂练习 6

1. 求下列各组数据的全距、四分位数及四分位距：
   (a) 4 8 7 3 3 9 6 5 1 1 2
   (b) 7 6 8 8 5 6 1 9 8
   (c) 1.0 1.1 1.5 0.7 0.8 1.2 1.4 0.9 1.6 1.3
   (d) 3 4 7 2 4 6 5 8
2. 下表所示是 60 名学生身高的累积频数分配表：

身高 (cm)	累积频数
150 – 155	3
155 – 160	10
160 – 165	22
165 – 170	37
170 – 175	51
175 – 180	58
180 – 185	60

   (a) 从累积频数多边形中求学生身高的四分位差；
   (b) 利用公式求学生身高的四分位差。

练习 18.4a

1. 某商店在 11 天内每天所售的电视机数量如下：
   4 9 0 1 3 4 2 5 7 2 3
   求 (a) 全距；
   (b) 四分位数及四分位距。
2. 已知一组数据：1.2，1.0，1.1，1.3，1.5，1.7，1.2，1.0。
   求 (a) 全距；
   (b) 四分位数及四分位差。

3. 某校高一年级 100 名学生的数学成绩分布如下：

分数	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
人数	3	4	13	22	30	23	5

求学生成绩的四分位差。

平均差

设一组数据 x_1，x_2，⋯，x_n 的平均数是 $\bar{x}$，$|x_i - \bar{x}|$ 是第 i 个数据与平均数的差距，这 n 个差距的平均数可以用来度量 x_1，x_2，⋯，x_n 的离中趋势，叫做平均差，即

$$\text{平均差} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

若所给的数据的所有可能值是 x_1，x_2，⋯，x_n，出现的频数分别是 f_1，f_2，⋯，f_n，则其平均差是

$$\text{平均差} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum f_i}$$

对于已分组的数据，则取各组的组中点为该组的代表值 x_i。

例题 5

求数据 400，420，460，480，440 的平均差。

解 $\bar{x}=\dfrac{400+420+460+480+440}{5}$

$=440$

平均差 $=\dfrac{1}{5}\left(|400-440|+|420-440|+|460-440|+|480-440|+|440-440|\right)$

$=24$

例题 6

以下是 20 名家庭主妇每周做家务的时间的频数分配表：

时间 (小时)	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50
人数	3	8	7	2

求她们每周做家务的时间的平均差。

解

时间 (小时)	频数 f_i	组中点 x_i	f_ix_i	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert f_i$
11 – 20	3	15.5	46.5	14	42
21 – 30	8	25.5	204	4	32
31 – 40	7	35.5	248.5	6	42
41 – 50	2	45.5	91	16	32
	$\sum f_i=20$		$\sum f_ix_i=590$		$\sum\lvert x_i-\bar{x}\rvert f_i=148$

$\bar{x}=\dfrac{590}{20}=29.5$

平均差 $=\dfrac{148}{20}=7.4$ 小时

随堂练习 7

完成下表，并求这组数据的平均数及平均差。

组限	频数 f_i	组中点 x_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert f_i$
50 – 54	2				
55 – 59	3				
60 – 64	6				
65 – 69	9				

练习 18.4b

1. 求下列各组数据的平均差：

   (a) 7　10　9　12　4　11　3

   (b) 58　65　38　76　43

   (c) 45.0　46.5　47.0　48.0　48.7　48.9　49.5　50.4

2. 下表所示是 26 名学生在某次数学小考中答对题数的频数分布：

答对题数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人数	0	1	1	1	6	8	6	1	1	1

   求答对题数的平均差。

3. 某班 36 名学生的测验成绩如下：

   77　60　52　73　60　50　70　60　52　68　59　50　72　59　48　66　58　46
   60　48　34　61　55　40　62　55　42　63　55　43　65　56　45　65　57　46

   (a) 将以上数据按 [34，38)，[38，42)，[42，46)，⋯ 分组，列出频数分配表；

   (b) 从频数分配表中求平均数；

   (c) 从频数分配表中求平均差。

方差及标准差

设一组数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数是 $\bar{x}$，$(x_i-\bar{x})^2$ 是第 i 个数据与平均数的差距的平方，这 n 个差距的平方的平均数叫做方差，或变异数，以 σ^2 表示，即

$$方差\ \sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

方差的正平方根，叫做标准差，以 σ 表示，即

$$标准差\ \sigma=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

若所给的数据的所有可能值是 x_1，x_2，…，x_n，出现的频数分别是 f_1，f_2，…，f_n，则

$$方差\ \sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$标准差\ \sigma=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}}$$

对于已分组的数据，则取各组的组中点为该组的代表值 x_i。

用上述的公式求方差及标准差较为烦琐，整理上述公式：

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}\\ &= \frac{\sum x_i^2 f_i - 2\bar{x}\sum x_i f_i + \bar{x}^2\sum f_i}{\sum f_i}\\ &= \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2\\ &= \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2\end{aligned}$$

因此，若数据 x_i 出现的频数是 f_i，则

方差 $\sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2$

标准差 $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$

当所有的频数 f_i 都是 1 时，就可以得到 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n 的方差及标准差的公式：

方差 $\sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

标准差 $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$

相较于平均差，方差及标准差的公式中不含绝对值，在运算上较为方便。方差及标准差也考虑到每个数据与平均数的差异。所以，在日常工作及生活中，方差及标准差是较常用的离中趋势值。

例题 7

求数据 3，8，7，6，10，2 的方差及标准差。

解

$$\bar{x}=\frac{3+8+7+6+10+2}{6}=6$$

$$\sum x_i^2=9+64+49+36+100+4=262$$

$$\begin{aligned}\sigma^2&=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2\\&=\frac{262}{6}-36\\&=\frac{23}{3}\\&=7.67\end{aligned}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{23}{3}}=2.77$$

例题 8

下表所示是某班48位学生在一次马来文小考中答对题数的频数分配表：

答对题数	6	7	8	9	10
频数	9	10	13	10	6

求答对题数的标准差。

解

答对题数 x_i	频数 f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
6	9	54	324
7	10	70	490
8	13	104	832
9	10	90	810
10	6	60	600
	$\sum f_i = 48$	$\sum x_i f_i = 378$	$\sum x_i^2 f_i = 3056$

$$\bar{x} = \frac{378}{48} = \frac{63}{8}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3056}{48} - \left(\frac{63}{8}\right)^2} = 1.28 \text{ 题}$$

例题 9

从高中某班50名学生的一次默写练习中的错字字数，得到以下的频数分配表：

错字字数	0 – 2	3 – 5	6 – 8	9 – 11	12 – 14
人数	15	12	10	9	4

求这班学生在这次默写中错字字数的标准差。

解

错字字数	频数 f_i	组中点 x_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
0 – 2	15	1	15	15
3 – 5	12	4	48	192
6 – 8	10	7	70	490
9 – 11	9	10	90	900
12 – 14	4	13	52	676
	$\sum f_i = 50$		$\sum x_i f_i = 275$	$\sum x_i^2 f_i = 2273$

$$\bar{x} = \frac{275}{50} = 5.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2273}{50} - 5.5^2} = 3.9 \text{ 个字}$$

随堂练习 8

1. 对实验室中的 10 棵植物幼苗的高度 (以 cm 为单位) 进行测量，得到以下数据：

   12　6　15　3　12　6　21　15　18　12

   求幼苗高度的标准差。

2. 完成下列各表，并求标准差。

(a)

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
3	30		
5	35		
7	28		

(b)

组限	f_i	组中点 x_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
150 – 154	5			
155 – 159	8			
160 – 164	10			
165 – 169	7			
170 – 174	6			
175 – 179	4			

练习 18.4c

1. 求下列各组数据的方差及标准差：

   (a) 3　6　3　8

   (b) 3　3　4　5　10

   (c) 2　9　10　10　12　2　10　9

2. 求下列各组数据的方差及标准差：

   (a)

数据	6	5	4
频数	35	36	30

   (b)

数据	60	70	80	90	100
频数	4	6	2	5	1

3. 已知两组数据：

A	9.9	10.3	9.8	10.1	10.4	10	9.8	9.7
B	10.3	10	9.5	10.4	10.5	9.4	9.8	10.1

   分别求这两组数据的平均数及方差。哪一组数据较为分散？

4. 已知两组学生的华文测验分数如下：

甲组	76	90	84	86	81	87	86	82	85	83
乙组	82	84	85	89	79	80	91	89	79	74

   分别求这两组学生分数的平均数及标准差。哪一组学生的成绩较为集中？

5. 下表所示是某年级全部学生的身高分布：

身高 (cm)	人数
145 – 149	10
150 – 154	36
155 – 159	193
160 – 164	205
165 – 169	240
170 – 174	83
175 – 179	33

   求身高的平均值及标准差。

6. 某校 100 名学生的体重分布如下：

体重 (kg)	45 – 47	48 – 50	51 – 53	54 – 56	57 – 59	60 – 62	63 – 65
人数	3	16	20	32	15	10	4

求方差及标准差。

7. 已知 10 个数据的和是 400，平方和是 16400，求这 10 个数据的平均数及方差。

8. 已知 30 个数据 x_1，x_2，…，x_{30} 的平均数是 5，标准差是 2，求 $\sum_{i=1}^{30} x_i$ 及 $\sum_{i=1}^{30} x_i^2$ 。

9. 5 个数据的平均数是 10，加入数据 p 后，其平均数保持不变，
   (a) 求 p 的值；
   (b) 若原有 5 个数据的平方和是 558，求加入 p 后 6 个数据的方差。

10. 已知 3，6，7，8，9，12，14，15，x，y 的平均数是 13，标准差是 $\sqrt{102}$，求 x 及 y 的值。

18.5 变异系数

一般上，要比较两组或多组数据的变异程度时，只比较各组的标准差是不足够的。若数据的性质或测量单位不同时，更不能直接以标准差作比较。例如，若我们欲知某班学生的身高的变异较大，或是体重的变异较大，我们需要一种相对的度量值作为比较的标准，而变异系数就是一种相对的度量值。对于一组非负的数据，变异系数的定义如下：

$$\text{变异系数 } v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

由以上的定义观察可得，变异系数是将平均数视为 1 时的标准差。因此，当变异系数越大时，数据之间的变异越大；反之，数据之间的变异越小 。

例题 1

设40位女生的平均身高是154.2cm，标准差是 4.7 cm；平均体重是 46.5 kg，标准差是 4.46 kg。比较身高及体重的变异情形。

解 身高的变异系数为 $v_1=\dfrac{\sigma_1}{\bar{x}_1}\times100\%$

$$=\frac{4.7}{154.2}\times100\%$$
$$=3.05\%$$

体重的变异系数为 $v_2=\dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2}\times100\%$

$$=\frac{4.46}{46.5}\times100\%$$
$$=9.59\%$$

$\because\ v_2>v_1$

$\therefore$ 体重的变异较身高的变异大。

注意

例题 1 的结果符合一般常识。一般人的体重在60 kg左右，而体重加倍的人（体重120 kg）也有。但是，一般人的身高在165 cm 左右，而身高加倍的人（身高 330 cm）却没有。

随堂练习 9

在某次小考中，高二学生的华文科满分是100分，平均分数是70分，标准差是10分；数学科的满分是70分，平均分数是40分，标准差是8 分。比较两个学科成绩的变异情形 。

练习 18.5

1. 某小学一年级男生的身高及体重的统计数据如下：

	平均数	标准差
身高 (cm)	115.87	4.86
体重 (kg)	19.39	2.16

比较这些男生的身高及体重的变异情形。

2. 下表所示是某校初中一五个班级在第一学期数学考试的平均成绩及标准差：

班级	甲	乙	丙	丁	戊
平均成绩	62	74	65	70	53
标准差	11	9	10	7	8

哪一班学生的成绩的变异系数最小?

3. 下表所示是 A 、B 两组学生的数学成绩：

组别	成绩				
A	60	98	76	84	52
B	88	58	90	69	78

(a) 求各组的平均分数；

(b) 求各组的标准差；

(c) 求各组的变异系数。

4. 下表所示是今年首六个月每公斤木瓜及葡萄的价格 (以 RM 为单位)：

月份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
木瓜的价格	3.50	3.00	2.50	3.20	3.60	2.80
葡萄的价格	20.00	22.00	24.00	23.00	18.00	21.00

(a) 分别求木瓜及葡萄在今年首六个月的平均价格及标准差；

(b) 哪一种水果的价格波动较大?

5. 下表所示是甲、乙两班学生的学年总平均成绩的分布：

分数	甲班人数	乙班人数
40 – 49	3	4
50 – 59	4	10
60 – 69	10	17
70 – 79	16	14
80 – 89	12	1

分别求这两班学生学年总平均成绩的变异系数。

18.6 相关及相关系数

相关

在统计学中，两组或多组数据之间的相互关系叫做相关。例如，儿童的身高与体重的关系，一个商品的售价与销售量的关系。

散布图

散布图是一种用于表示两组数据之间的相关程度的图。设两组数据为 x_1，x_2，⋯，x_n 及 y_1，y_2，⋯，y_n，在坐标平面上标出 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，⋯，(x_n, y_n) 各点，所得的图就叫做散布图。

例题 1

下表所示是 15 个 10 岁儿童的身高 (cm)及体重 (kg)：

身高	126	130	110	123	118	130	127	124	116	112	113	121	115	120	118
体重	41	42	38	36	33	45	34	35	30	32	31	40	34	35	33

作身高与体重的散布图。

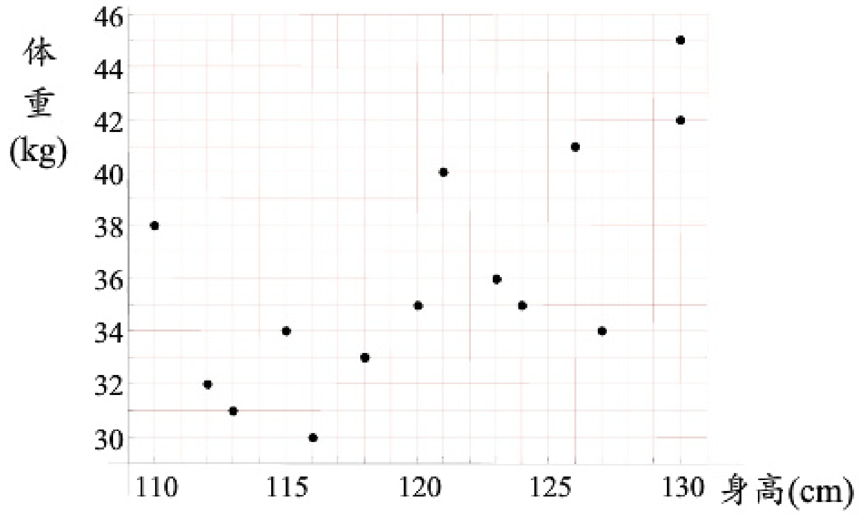
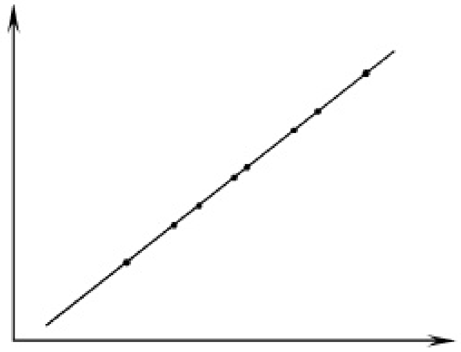


图 18-9 身高与体重的散布图

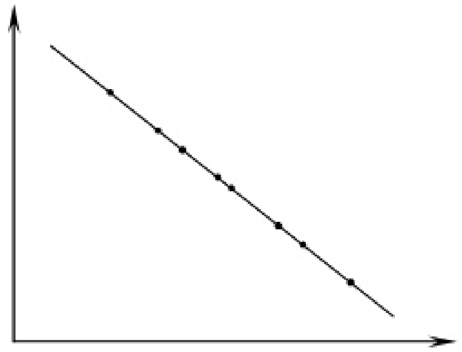
直线相关

在散布图中，若两组数据的关系可用直线来描述，叫做直线相关。依两组数据的变化趋向，直线相关可分为正相关、负相关及零相关三种。例如，身高较高的人通常体重会比较重。因此，身高与体重成正相关。又如，一个商品的售价高，销售量就会低。因此，商品的售价与销售量成负相关。若两组数据不存在任何关系，则叫做零相关。

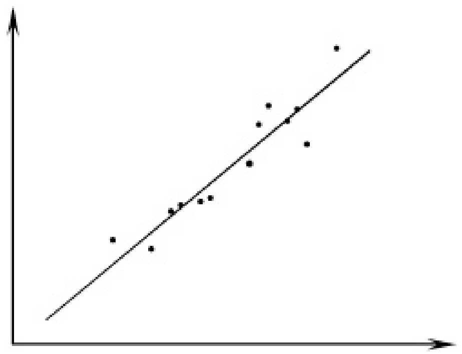
图 18-10 所示是各种直线相关的可能情况。



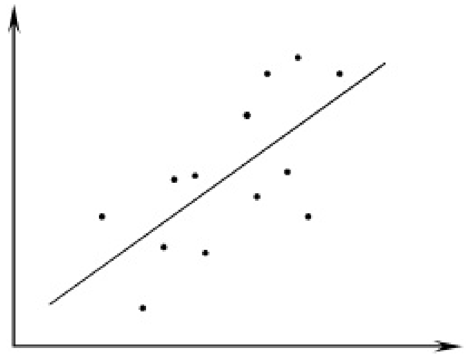
(a) 完全正相关



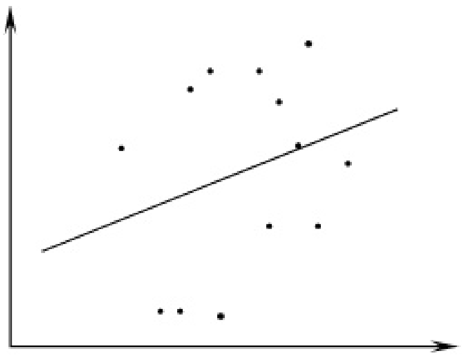
(b) 完全负相关



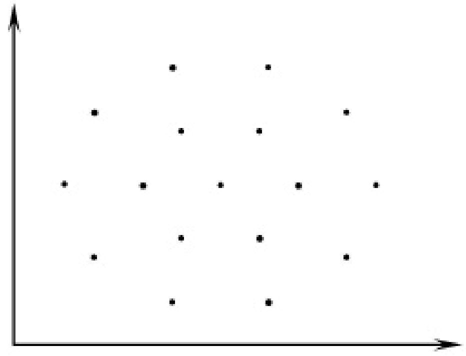
(c) 高度正相关



(d) 中度正相关



(e) 低度正相关



(f) 零相关

图 18-10

1. 若各点完全落在一直线上，如图 18-10 (a) 及图 18-10 (b) 所示，这类的相关叫做完全相关。若直线的斜率为正，叫做正相关；若直线的斜率为负，叫做负相关。
2. 若各点散布在一斜率不为零的直线的两旁，则其散布在两旁的范围越狭，相关程度就越高，如图 18-10 (c) 所示是高度正相关，图 18-10 (d) 所示是中度正相关，图 18-10 (e) 所示是低度正相关。
3. 若各点的散布，上下左右均成对称的状态，毫无偏向任何一方的趋势，则两组数据不存在任何关系，相关程度为零。

相关系数

以上通过观察散布图上各点的散布情况来判定两组数据的相关程度并不精确。为了更精确地描述两组数据的相关程度，必须使用一个能区分相关程度的系数去度量。

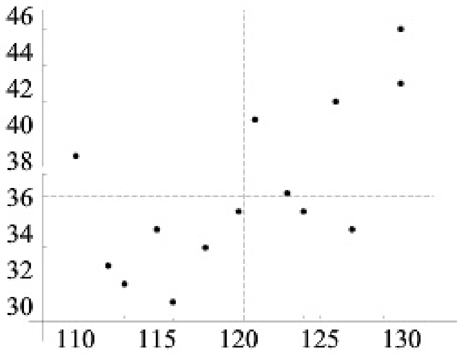


图 18-11

设两组数据 x_1，x_2，…，x_n 及 y_1，y_2，…，y_n 的平均数分别是 $\overline{x}$ 及 $\overline{y}$。在这两组数据的散布图上作两条平均线 $x=\overline{x}$ 及 $y=\overline{y}$，使全图分成四个象限，如图 18-11 所示。其意义是将坐标轴的原点平移到 $(\overline{x},\overline{y})$ 处。若点 (x_i,y_i) 落在第一或第三象限，$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$ 为正；若点 (x_i,y_i) 落在第二或第四象限，$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$为负。由前面的说明可知，若两组数据呈正相关，$(x_i,y_i)$ 将散布在一条斜率为正的直线两旁，即大部分的点将落在第一及第三象限。所以，$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$ 的正值较多，因此 $\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$ 也会是个正值；若相关程度越高，则散布在第一及第三象限的点越多，因此 $\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$ 的正值越大。

反之，若两组数据呈负相关，大部分的点将落在第二及第四象限。所以，$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ 中的负值较多，因此 $\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ 也会是个负值。同理，若相关程度越高，$\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ 的负值越大。

因此，$\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ 的值及正负性，可以反映两组数据的相关程度及正负关系。$\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ 的值会受数据 x_1，x_2，…，x_n 及 y_1，y_2，…，y_n 所使用的度量单位影响。为了使相关程度的度量不受度量单位的影响，定义两组数据 x_1，x_2，…，x_n 及 y_1，y_2，…，y_n 的相关系数为

$$r=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$

相关系数 r 的值介于 -1 及 1 之间，$r=0$ 表示零相关，$r>0$ 表示正相关，$r<0$ 表示负相关。相关系数的绝对值，可判定相关的程度，一般划分如下：

1. $|r|=1$ 表示完全相关
2. $0.7\le|r|<1$ 表示高度相关
3. $0.3\le|r|<0.7$ 表示中度相关
4. $0<|r|<0.3$ 表示低度相关

补充资料

此相关程度的划分方法只是一个参考，并不是绝对的。

将相关系数的公式的分子及分母都除以数据的个数 n，则分子是 $(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ 的平均值，而分母是数据 x_1，x_2，…，x_n 及数据 y_1，y_2，…，y_n 的标准差的乘积。与标准差一样，相关系数有一个更简便的算法：

$$\text{相关系数 } r=\frac{\frac{\sum x_iy_i}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2\right)\left(\frac{\sum y_i^2}{n}-\bar{y}^2\right)}}$$

思考题

如何证明这个公式？

例题 2

10 名学生参与两项测试，以鉴定性向与成就的关系，其结果如下：

学生		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
得分	性向	2	1	4	7	7	5	3	9	5	7
	成就	1	3	4	5	7	6	7	8	9	10

求这些学生的性向与成就的相关系数，并判定其相关程度。

解

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
2	1	4	1	2
1	3	1	9	3
4	4	16	16	16
7	5	49	25	35
7	7	49	49	49
5	6	25	36	30
3	7	9	49	21
9	8	81	64	72
5	9	25	81	45
7	10	49	100	70
$\sum x_i = 50$	$\sum y_i = 60$	$\sum x_i^2 = 308$	$\sum y_i^2 = 430$	$\sum x_iy_i = 343$

(续) $\bar{x}=\frac{50}{10}=5$

$\bar{y}=\frac{60}{10}=6$

$$\text{相关系数 } r=\frac{\frac{\sum x_i y_i}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2\right)\left(\frac{\sum y_i^2}{n}-\bar{y}^2\right)}}$$

$$=\frac{\frac{343}{10}-5\times 6}{\sqrt{\left(\frac{308}{10}-5^2\right)\left(\frac{430}{10}-6^2\right)}}$$

$$=0.6748$$

根据计算结果，这批学生的性向与成就呈中度正相关。

注意

相关系数一般取四位小数。

随堂练习 10

1. 求例题 1 中儿童身高与体重的相关系数，并判定其相关程度。
2. 为了研究人体心脏的收缩压 (以 mmHg 为单位) 与年龄 (岁) 的关系，某医学院收集了 13 名男子的数据：

年龄	51	22	23	31	33	49	58	53	44	55	42	45	25
收缩压	130	141	124	126	117	135	143	138	132	143	133	155	147

(a) 作收缩压与年龄的散布图；

(b) 求收缩压与年龄的相关系数并判定其相关程度。

练习 18.6

1. 下表所示是10个同类企业的固定资产价值及总产值的数据(皆以万令吉为单位)：

企业编号	固定资产价值	总产值
1	200	638
2	314	605
3	318	524
4	409	815
5	415	913
6	502	928
7	910	1019
8	1022	1219
9	1210	1516
10	1225	1624

(a) 作固定资产价值与总产值的散布图；

(b) 分别求固定资产价值及总产值的平均数；

(c) 求固定资产价值与总产值的相关系数，并判定其相关程度。

2. 下表所示是15名学生的数学及经济学的成绩：

数　学	83	50	62	90	68	61	58	62	71	63	72	54	64	48	81
经济学	79	61	70	86	69	68	62	80	70	74	77	54	77	50	92

(a) 作数学成绩与经济学成绩的散布图；

(b) 求数学成绩与经济学成绩的相关系数，并判定其相关程度。

3. 下表所示是16名学生的华文测验成绩。试题分为白话文及文言文两部分，满分各为60分及40分。

白话文	43	50	38	45	58	47	32	36	38	51	44	28	49	42	46	35
文言文	30	21	20	19	15	18	30	28	26	30	29	29	22	32	33	25

(a) 作白话文成绩与文言文成绩的散布图。

(b) 求此次测验白话文成绩与文言文成绩的相关系数，并判定其相关程度。

4. 一产业经纪在五次交易中的服务开销及所销售产业价值的数据如下：

服务开销 (百令吉)	16.5	17.4	16.8	17.9	18.4
产业价值 (十万令吉)	3.9	4.2	4.1	4.5	4.8

求这五次交易的服务开销与所销售产业价值的相关系数，并判定其相关程度。

5. 下表所示是某企业的劳动机械化程度及工人劳动生产率的资料：

劳动机械化程度 (%)	工人劳动生产率 (令吉/人)
40	800
45	880
50	1010
55	1034
60	980
65	1030
70	1077
75	1344
80	1460

(a) 作劳动机械化程度与工人劳动生产率的散布图；

(b) 求劳动机械化程度与工人劳动生产率的相关系数，并判定其相关程度。

6. 怡保十家百货公司的销售额 (以百万令吉为单位) 及所得净利率 (%) 的数据如下：

公司	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
销售额	18.4	16.5	14.6	23.3	35.6	24.2	33.6	44.5	26.8	31.9
净利率	15.3	14.8	13.6	14.3	12.9	14.6	13.8	13.7	13.5	14.2

(a) 作销售额与所得净利率的散布图；

(b) 求销售额与所得净利率的相关系数，并判定其相关程度。

18.7 统计指数

指数

在统计学中，指数是用来度量所考察的对象于不同时期的变动情况的指标。指数的应用很广泛，如反映物价变动的物价指数，反映工业生产量变化的生产指数，反映工作报酬变动的工薪指数。其他指数包括生活指数、外汇指数、人口指数、股价指数等。

指数是一种相对数。计算指数时所使用作为比较的标准的时期，叫做基期。基期可以是一年或一个月，视情况而定。基期的指数一般使用 100，500 或 1000 等容易记忆及比较的数字，所选择的数字也必须能反映所考察对象的变化幅度。本章所使用的基期的指数为 100。与基期相比的时期叫做计算期。设 Q_0 为所考察对象在基期的值，Q_1 为其在计算期的值，则

$$\text{指数 } I=\frac{Q_1}{Q_0}\times 100$$

其中所乘的 100 是基期的指数。

例题 1

某独中 2012 年的初一新生人数是 240 人，2014 年的新生人数是 280 人。以 2012 年为基期，求该独中 2014 年初一新生人数的指数。

解

$$I=\frac{Q_1}{Q_0}\times 100$$
$$=\frac{280}{240}\times 100$$
$$=116.67$$

注意

当基期的指数为 100 时，计算期的指数可视为一个百分数。例如，在例题 1 中，初一新生的指数为 116.67，表示 2014 年的初一新生人数比 2012 年增加了 16.67%。

价比

价比是商品在不同时期的价格的比较，是一种简单的指数。设商品基期的价格是 P_0，计算期的价格是 P_1，则

$$价比=\frac{P_1}{P_0}\times 100$$

例题 2

某餐厅一碟炒面在2007年的价格是RM4，在2014年的价格是RM5.50。以2007年为基期，2014年为计算期，求该餐厅一碟炒面的价比。与2007年相比，该餐厅一碟炒面的价格在7年后上涨的百分率。

解

$$\begin{aligned}价比 &= \frac{P_1}{P_0}\times 100\\ &= \frac{5.5}{4}\times 100\\ &= 137.5\end{aligned}$$

与2007年相比，该餐厅一碟炒面的价格在7年后上涨了37.5%。

随堂练习 11

下表所示是某公司由2010年至2014年每年的净收入 (以百万令吉为单位)。以2010年为基期，求各年的指数。

年份	2010	2011	2012	2013	2014
净收入	700	621	584.1	720.5	800

练习 18.7a

1. 白砂糖在2011年的售价是每公斤RM2.10，在2012年的售价是每公斤RM2.30，而在2013年的售价是每公斤RM2.50。分别以2011年及2012年为基期，求白砂糖在2013年的价比。
2. 某食品在2011年，2013年及2015年的价格分别是RM3.40，RM3.75及RM3.90。以2011年为基期，2013年及2015年为计算期，分别求出价比。

3. 某华小由 2011 年至 2015 年每年的新生人数如下：

年份	2011	2012	2013	2014	2015
人数	182	150	120	104	94

以 2011 年为基期，求各年的指数。

4. 下表所示是某地区的排屋由2010年至2014年间的售价 (以万令吉为单位)：

年份	2010	2011	2012	2013	2014
售价	32.0	35.5	43.4	51.0	60.0

以 2010 年为基期，求各年的指数。

5. 下表所示是 A、B 及 C 三种零件以不同年份为基期及计算期的价比：

计算期	基期	零件 A 的价比	零件 B 的价比	零件 C 的价比
2010	2005	160	x	170
2015	2005	140	190	y
2015	2010	z	210	150

求 x，y 及 z 的值。

综合指数

综合指数是多个考察对象的指数的平均数。由于所考察的 n 个对象的重要性可能不相同，所以必须以权数来表示各对象的相对重要性，而所得的指数的加权平均数就叫做综合指数。

设 n 个对象对于同一基期及同一计算期的简单指数分别是 x_1，x_2，…，x_n，其所对应的权数分别是 w_1，w_2，…，w_n，则

$$\text{综合指数} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{\sum w_ix_i}{\sum w_i}$$

若所考察的对象是某些商品，x_i 是其中第 i 种商品的价比，那么上述的加权平均数就叫做物价指数。若所考察的对象涉及生活中的各项开支费用，所得的加权平均数则叫做生活消费指数。

例题 3

下表所示是五种食品在 2014 年的价比 (以 2012 年为基期)，权数是根据销售额推算而得。求物价指数。

食品	价比	权数
肉类	108	13
鱼类	121	12
蔬菜	120	13
饮料	110	7
水果	105	8

解

食品	x_i	w_i	w_ix_i
肉类	108	13	1404
鱼类	121	12	1452
蔬菜	120	13	1560
饮料	110	7	770
水果	105	8	840
		$\sum w_i = 53$	$\sum w_ix_i = 6026$

$$\text{物价指数} = \frac{6026}{53}$$

$$= 113.70$$

例题 4

城市居民的生活费用可分为以下八大类：食品、房屋、服装、交通、通讯、医疗保健、娱乐及其他。根据有关的价格、销售额及营业额得出它们各自的价比及权数，如下表所示：

生活费用	价比	权数(相对消费量)
食品	120	25
房屋	112	20
服装	110	12
交通	105	15
通讯	119	8
医疗保健	120	10
娱乐	107	5
其他	103	5

计算生活费指数，并简述其含义。

解

生活费用	x_i	w_i	w_ix_i
食品	120	25	3000
房屋	112	20	2240
服装	110	12	1320
交通	105	15	1575
通讯	119	8	952
医疗保健	120	10	1200
娱乐	107	5	535
其他	103	5	515
		$\sum w_i = 100$	$\sum w_ix_i = 11337$

$$\begin{aligned}\text{生活费指数} &= \frac{11337}{100} \\ &= 113.37\end{aligned}$$

根据计算结果，生活费用上涨了 13.37%。

例题 5

下表所示是甲、乙、丙、丁四种商品在 2005 年及 2015 年的单价 (以RM 为单位):

商品	甲	乙	丙	丁
2005 年	5	12	18	32
2015 年	7.2	16.2	23.4	40

设它们的权数分别为 8，5，3，2。以 2005 年为基期，2015年为计算期，求综合指数。

解

商品	2005 年	2015 年	价比 x_i	权数 w_i	$w_i x_i$
甲	5	7.2	144	8	1152
乙	12	16.2	135	5	675
丙	18	23.4	130	3	390
丁	32	40	125	2	250
				$\sum w_i = 18$	$\sum w_i x_i = 2467$

$$\text{综合指数} = \frac{2467}{18} = 137.06$$

随堂练习 12

下表所示是三种不同品牌的球鞋在 2012 年及 2015 年的售价及其对应的权数。

球鞋	单价 (RM)		权数
	2012 年	2015 年	
A	230	233	5
B	225	228	3
C	215	221	2

(a) 以 2012 年为基期，2015 年为计算期，分别求出球鞋 A、B 及 C 的价比。

(b) 以 2012 年为基期，求球鞋在 2015 年的物价指数。

练习 18.7b

1. 以2012年为基期，2014年的食品、汽油及布料的价比分别是111，105，106，权数分别是5，1，2。求这三种消费品在2014年的综合指数。
2. 下表所示是各主要食物在2015年的物价资料 (以2005年为基期)。 求2015年的物价指数。

食物	价比	权数
肉类	130	15
鱼类	150	14
蔬菜	200	10
米	110	20
食油	120	8
饮料	150	7
水果	160	6

3. 一工厂购买三种原料的重量及单位价格如下：

原料	重量 (吨)	单位价格 (RM)	
		2010年	2014年
甲	20	0.62	0.71
乙	50	2.05	2.09
丙	60	0.80	0.85

以2010年为基期，2014年为计算期，
(a) 不加权 (权数为1)，求单位价格的综合指数；
(b) 以购买重量为权数，求单位价格的综合指数。

4. 下表所示是三个指数及其权数。若综合指数是103，求 x 的值。

指数	90	$11x$	120
权数	x	4	6

5. 下表所示是三种物品以2013年为基期，2015年为计算期的的价比及其权数。已知物品 A 在 2013 年及 2015 年的价格分别是 RM 20 及 RM 25，物品 B 的价比是物品 A 的两倍。

物品	价比	权数
A	r	2
B	t	1
C	120	3

(a) 求 r 及 t 的值。

(b) 以 2013 年为基期，求 2015 年的物价指数。

6. 下表所示是五种货品以 2012 年为基期，2014 年为计算期的价比及其权数：

货品	价比	权数
A	125	2
B	120	$3x$
C	110	2
D	130	x
E	115	2

已知 2014 年的物价指数是 120，

(a) 求 x 的值；

(b) 若货品 A 在 2014 年的价格是 RM30，求它在 2012 年的价格。

7. 下表所示是四种商品在 2012 年及 2014 年的价格、价比及权数：

商品	价格 (RM)		价比	权数
	2012 年	2014 年		
甲	12	y	150	1
乙	x	24	120	2
丙	14	28	z	3
丁	10	13	130	4

其中价比的基期为 2012 年，计算期为 2014 年。

(a) 求 x，y 及 z 的值。

(b) 以 2012 年为基期，求 2014 年的物价指数。

8. 下表所示是两种物品在2005年及2015年的售价：

物品	售价 (RM)		权数
	2005 年	2015 年	
A	30	x	2
B	50	$x+10$	3

以 2005 年为基期，

(a) 若这两种物品在 2015 年的价比相同，求 x 的值；

(b) 求 2015 年的物价指数。

总复习题 18

1. 实验室中 60 根棉花的纤维长度 (以 mm 为单位) 的数据如下：

82 202 352 321 25 293 293 86 28 206 323 355 357 33 325
113 233 294 50 296 115 236 357 326 52 301 140 328 238 358
58 255 143 360 340 302 370 343 260 303 59 146 60 263 170
175 348 305 380 346 61 305 264 383 62 306 195 350 265 385

(a) 以 21 mm 为第一组的下限，40 mm 为组距，作一频数分配表；

(b) 作直方图及频数多边形；

(c) 作累积频数分配表及累积频数多边形；

(d) 从累积频数多边形中求纤维长度大于 150 mm 的棉花所占的百分率；

(e) 求四分位距。

2. 求数据 8，10，9，12，4，4，2 的平均数、中位数、全距、四分位差及平均差。

3. 16 名幼儿的体重 (以 kg 为单位) 如下：

8 9 10 9 8 7 9 10 9 8 8 9 10 9 8 7

求他们体重的平均数、中位数、众数、全距、四分位差、平均差及标准差。

4. 下表所示是某校高中三学生在一次商业学测验的成绩分布：

分数	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49
学生人数	7	21	32	27	13

(a) 作一累积频数分配表；

(b) 作一累积频数多边形；

(c) 从累积频数多边形中求中位数及四分位距；

(d) 求考获 45 分或以上的学生人数；

(e) 若及格分数是 15 分，求不及格率。

5. 以下是 10 个火箭推力装置的燃烧时间 (以秒为单位) 的数据：

50.7　54.9　54.3　44.8　42.2　69.0　55.4　66.1　48.1　34.5

求燃烧时间的全距、方差及标准差。

6. 下表所示是某人在 30 次游戏的得分：

分数	0	1	2	3	4
次数	5	3	4	$x + 1$	7

求 (a) x 的值；

(b) 得分的平均数及标准差。

7. 下表所示是一班学生在一项小考的分数分布：

分数	学生人数
$0 < x \leq 5$	8
$5 < x \leq 10$	1
$10 < x \leq 15$	9
$15 < x \leq 20$	7
$20 < x \leq 25$	11
$25 < x \leq 30$	4

求 (a) 全距；(b) 中位数；(c) 众数。

8. 某班40名学生的商业学考试成绩分布如下：

分数	46 – 54	54 – 62	62 – 70	70 – 78	78 – 86	86 – 94
人数	4	9	10	8	6	3

求 (a) 平均数；(b) 中位数；(c) 众数；(d) 方差。

9. 下表所示是500个灯泡的使用寿命的频数分配：

使用寿命 (小时)	个数
800 – 850	35
850 – 900	127
900 – 950	185
950 – 1000	103
1000 – 1050	42
1050 – 1100	8

求 (a) 这500个灯泡寿命的平均数及标准差；
(b) 平均差；
(c) 中位数；
(d) 四分位差。

10. 若数据2，$x+1$，5，$2x+1$，8及$2x-3$的平均数是4，
(a) 求x的值；
(b) 据此，求数据的标准差。

11. 一组数据2，5，3，11，9，3，11，p，q的平均数及众数分别是6及3，且$q>p$。
求 (a) p及q的值；
(b) 中位数；
(c) 标准差。

12. 已知x，$x+1$，$2x-3$，5，y及8的平均数是6。删除y后，剩余五个数据的平均数是3.8。
(a) 求x及y的值；
(b) 据此，求原有六个数据的方差。

13. 已知十个数的平方和是400，平均数是5。若将其中一个数8从此组数据中删除，求剩余的数据的平均数及方差。

14. 甲、乙两个女声小合唱队各由5名队员组成，她们的身高(以cm为单位)如下：

甲队身高	170	162	159	160	155
乙队身高	180	165	150	154	160

(a) 求两队身高的平均数及标准差；

(b) 哪一队的身高差异较小?

15. 下表所示是三个班级数学成绩的数据：

班级	平均分数	标准差	学生人数
甲	36.8	5.2	32
乙	30.3	12.4	36
丙	38.8	10.3	32

(a) 甲、乙、丙三班中，哪一班的表现较为一致? 为什么?

(b) 求三班合起来的平均分数及标准差。

16. 六位评判对于一位体操选手的评分如下：

7 5 9 7 8 6

求这位选手得分的 (a) 平均数；(b) 标准差；(c) 变异系数。

17. 在一项智力测验中，十位受测验学生的平均智商是114，其中九位的智商如下：

101 125 118 128 106 115 99 118 109

求 (a) 第十位学生的智商；

(b) 这些学生智商的变异系数。

18. 已知两组女童的体重(以kg为单位)数据如下：

	平均数	标准差
一岁组体重	10.90	1.24
五岁组体重	19.00	2.11

比较这两组女童体重的变异情形。

19. 某工厂在今年首六个月的输出产量及生产成本的数据如下：

月份	1	2	3	4	5	6
输出产量 (千吨)	2	3	1	4	3	5
成本 (千令吉)	9	11	7	13	11	15

求此工厂在今年首六个月的输出产量与生产成本的相关系数，并判定其相关程度。

20. 某校高二 16 位学生的华文科及数学科测验的成绩如下：

华文	82	79	76	63	56	67	69	81	77	73	58	64	68	72	75	80
数学	59	63	99	67	61	88	82	77	75	74	67	79	75	65	64	66

(a) 作华文与数学成绩的散布图；

(b) 求华文与数学成绩的相关系数，并判定其相关程度。

21. 下表所示是某物品在 2005，2010 及 2015 年的价格 (以 RM 为单位)：

年份	2005	2010	2015
价格	4	6	x

(a) 若此物品的价格由 2005 年至 2010 年及由 2010 年至 2015 年的上升百分比相同，求 x 的值；

(b) 以 2005 年为基期，求此物品在 2015 年的价比。

22. 某城市主要食品以 2013 年为基期，2014 年为计算期的物价资料如下：

食品	价比	权数
肉类	105	8
鱼类	111	7
蔬菜	98	5
米面	103	10
食油	100	3
饮料	107	2
水果	99	2

求 2014 年的物价指数。

23. 某地居民的衣食住行的价比 (以上一年为基期) 及相对消费量如下：

消费项目	价比	相对消费量
衣着	120	23
食物	117	40
房租	132	19
交通	130	18

以相对消费量为权数，求衣食住行的综合指数。

24. 下表所示是某公司连续三年在四个不同项目的开销：

项目	开销 (RM)			A	B
	2012 年	2013 年	2014 年		
薪金	x	20000	30000	150	P
文具	5000	y	7000	120	140
维修	4000	5000	z	125	150
其他	8000	Q	15000	R	R

已知 A 是以 2012 年为基期，2013 年为计算期的指数，B 是以 2012 年为基期，2014 年为计算期的指数。求 x，y，z，P，Q 及 R 的值。

19. 排列与组合

学习目标：

- 掌握加法原理及乘法原理
- 掌握排列数公式及线性排列问题的解法
- 掌握环形排列问题的解法
- 掌握不尽相异元素的全排列问题的解法
- 掌握相异元素可重复的排列问题的解法
- 掌握组合数公式及组合的问题的解法

19.1 加法原理及乘法原理

排列与组合的知识是学习概率与数理统计的基础。在日常生活中，我们经常需要计算出有多少种不同的方法来完成事件中的所有程序。这些计算涉及两个基本原理，即加法原理及乘法原理。

例题 1

从吉隆坡到新加坡，若每日有 2 班火车，4 班长途巴士及 3 班飞机，问从吉隆坡到新加坡每日有多少种不同的方法?

解 由于乘火车有2种方法，乘长途巴士有4种方法，乘飞机有3种方法，且每一种方法都可从吉隆坡到达新加坡，所以不同的方法有 $2+4+3=9$ 种。

一般来说，有以下的加法原理：

若完成一件事有 n 类办法，第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，而且它们彼此间的关系是独立的。不论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事，那么完成这件事共有

$$m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法。

例题 2

从甲地到乙地有 2 条路，从乙地到丙地有 3 条路，问从甲地经乙地到丙地有多少种不同的方法?

解 从甲地到乙地有2种不同的方法，a_1及a_2。无论使用哪一种方法到达乙地后又各有 3 种不同的方法，b_1、b_2及b_3，去丙地。所以，从甲地经乙地到丙地不同的走法有 $2\times3=6$ 种。

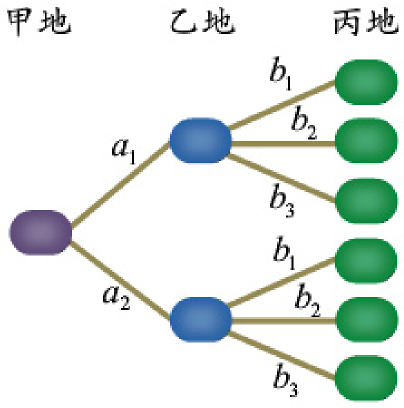


图 19-1

以上的排列方式，叫做“树图”，它的排列是由左至右，每一支脉代表一种排列。

一般来说，有以下的**乘法原理**:

若完成一件事要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，⋯，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法。

例题 3

5 名高一学生，6 名高二学生及 7 名高三学生组成一个研究小组，问

(a) 选其中一人为组长，有多少种不同的选法?

(b) 每一年级选一名组长，有多少种不同的选法?

解 (a) 要选一人当组长，有三类办法：

第一类：选高一学生，有 5 种选法；

第二类：选高二学生，有 6 种选法；

第三类：选高三学生，有 7 种选法。

无论哪一类办法中的哪一种方法，都能完成这件事情。应用加法原理，完成这件事共有 $5+6+7=18$ 种不同的选法。

(b) 从每一年级选一名组长，须分三个步骤：

第一步：选高一的组长，有 5 种选法；

第二步：选高二的组长，有 6 种选法；

第三步：选高三的组长，有 7 种选法。

这三个步骤缺一不可。当依次完成这三个步骤，这件事才算完成。应用乘法原理，完成这件事共有 $5\times6\times7=210$ 种不同的选法。

随堂练习 1

1. 小华要从 2 本数学参考书，3 本小说，4 本成语故事中各选一本，问共有多少种不同的选法?
2. 从 A 地到 B 地，可乘搭巴士或火车，每日有 4 趟巴士及 3 趟火车。问每日从 A 地到 B 地有多少种不同的方法?

练习 19.1

1. 在某节日前夕，从新山往槟城共有 3 班火车，4 班长途巴士及 4 班飞机。问在当天从新山往槟城共有多少种方法？
2. 某人有 13 件衬衫及 6 件长裤，问他可作出多少种不同的搭配法？
3. 有四家航空公司 A、B、C 及 D 提供从吉隆坡飞往曼谷的航班：A 公司每日提供 3 趟航班，B 公司每日提供 2 趟航班，C 及 D 公司每日各提供 1 趟航班。问每日从吉隆坡飞往曼谷有多少种不同的选择？
4. 6 种不同的餐食，5 种不同的饮料及 2 种不同的甜品可配成多少种不同的套餐？
5. 一间教室有 4 个门，甲、乙二人可从任何一个门进入教室。问他们进入教室的方法有多少种？
6. 两支乒乓队伍举行友谊赛，每支队伍必须派出 3 名选手，每名选手都必须与对方各选手进行一场比赛。问必须举行多少场比赛？
7. 以 8 件不同颜色的上衣搭配 5 件不同的裙子，问共有多少种的搭配法？若再以 4 双不同颜色的鞋子搭配上述的衣裙，其搭配法又有多少种？

19.2 排列与排列数公式

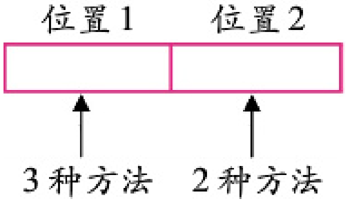
例题 1

从 3 个字母 A、B、C，每次选取 2 个排列，问有多少种不同的排法？

解 完成排列的方法有两个步骤：

第一步：从三个字母中任选一个排在第一位，有 3 种方法；

第二步：从剩余的两个字母中任选一个排在第二位，有 2 种方法。



(续) 根据乘法原理，从三个字母中任选两个的排列方法有3×2＝6种。这6种排列方法如下：

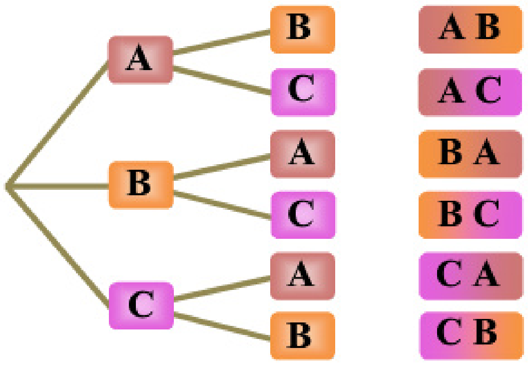
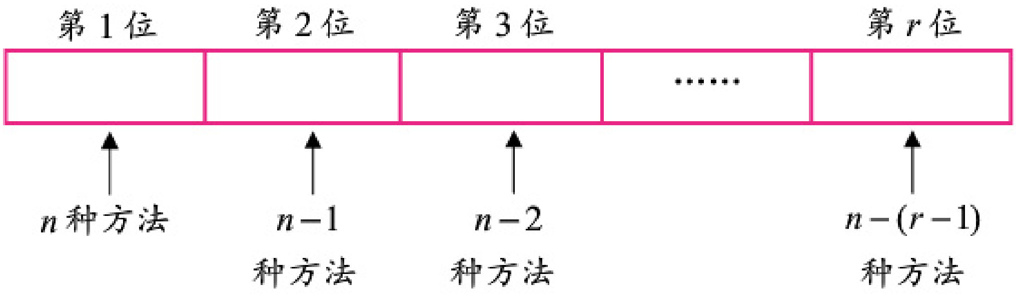


图 19-2

随堂练习 2

由数字1、2、3、4这四个数字可组成多少个数字不重复的二位数？

将例题1推广，若从 n 个不同的元素任取 r 个排成一列，有多少种排法呢？这个问题可视为 r 个空格有待填空，也就是说这件事有 r 个步骤要完成。



第一步：从n个元素中任选一个填入第一个空格，有n种方法；

第二步：从剩余的$n-1$个元素中任选一个填入第二个空格，有$n-1$种方法；

第三步：从剩余的$n-2$个元素中任选一个填入第三个空格，有$n-2$种方法。

依此类推，当前面的$r-1$个空格都填满后，第r个空格只能从剩余的$n-(r-1)$个元素中任选一个填上，有$n-r+1$种方法。根据乘法原理，要填完r个空格有

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

种方法。因此，从n个不同的元素中任取r个排成一列有$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$种不同的排列法，记作${}_nP_r$，${}^nP_r$或P_r^n。

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

其中$r \le n$，$n \in N$，$r=0, 1, 2, \cdots, n$。以上的公式叫做排列数公式。

当$r=n$，即排列为全排列时，

$${}_nP_r = {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1。$$

因此，从n个不同的元素中全取的排列数，等于自然数1到n的连乘积，叫做n的阶乘，以$n!$表示。

$$\begin{aligned} n! &= {}_nP_n \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \end{aligned}$$

应用阶乘，排列数公式 ${}_nP_r$ 可作以下的变形：

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

因此，排列数公式也可写成以下的形式：

$$
{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}
$$

注意

为了使公式在 $n=r$ 时成立，0！被定义为1。

例题 2

计算 ${}_{12}P_3$，${}_8P_4$ 及4！。

解

$$
\begin{aligned}
{}_{12}P_3 &= 12\times 11\times 10 = 1320 \\
{}_8P_4 &= 8\times 7\times 6\times 5 = 1680 \\
4! &= 4\times 3\times 2\times 1 = 24
\end{aligned}
$$

例题 3

若 $52({}_nP_2) = {}_{2n}P_3$，求 n 的值。

解

$$
\begin{aligned}
52({}_nP_2) &= {}_{2n}P_3 \\
52(n)(n-1) &= (2n)(2n-1)(2n-2) \\
52(n)(n-1)-(2n)(2n-1)(2n-2) &= 0 \\
52(n)(n-1)-4(n)(2n-1)(n-1) &= 0 \\
8n(n-1)(7-n) &= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore\ n=0$ 或 $n=1$ 或 $n=7$

$\because\ n\in N$ 且 $n\geq 2$

$\therefore\ n=7$

随堂练习 3

1. 求 ${}_7P_3$ 及 5! 的值。
2. 计算 ${}_{10}P_3 + {}_8P_4$。
3. 若 $100({}_nP_2) = {}_{2n}P_3$，求 n 的值。

练习 19.2a

1. 写出从 4 个元素 A、B、C、D 中任取 3 个元素的所有排列。
2. 计算：

   (a) ${}_{15}P_4$　　(b) ${}_{100}P_3$

   (c) $7!$　　(d) $\dfrac{8!}{5!}$

3. 计算下列各式：

   (a) $\dfrac{11! - 10!}{10! - 9!}$　　(b) $\dfrac{7! - 6! - 5!}{5!}$

   (c) $\dfrac{13! - 12!}{(12)^2\,10!}$　　(d) $\dfrac{5({}_8P_3)}{2({}_6P_2)}$

   (e) $\dfrac{{}_9P_5 + {}_9P_4}{{}_9P_3}$　　(f) $\dfrac{{}_{12}P_{12} - {}_{11}P_{11}}{{}_{10}P_{10}}$

4. 化简下列各式

   (a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$　　(b) $\dfrac{(20-r)!}{(18-r)!}$

5. 求下列各式中 n 或 r 的值：

   (a) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = 42$　　(b) $127({}_{2n}P_3) = {}_{2n}P_4$

   (c) $18({}_{n-1}P_2) = {}_nP_4$　　(d) ${}_{2n+1}P_4 = 132({}_nP_3)$

   (e) $4({}_{10}P_{r-1}) = {}_{10}P_r$　　(f) $6({}_9P_{r-2}) = {}_9P_r$

例题 4

从英文字“VOLUME”中任取三个字母排成一行，问共有多少种不同的排法?

解 从六个不同的元素中任取三个排列，排法有 ${}_6P_3 = 6\times5\times4 = 120$ 种。

例题 5

一火车厢有28个座位。甲、乙、丙三名乘客进入车厢后，有多少种不同的坐法?

解 将车厢中的28个座位编上号码1至28。从这28个号码中任取三个给甲、乙、丙三名乘客，所以他们的坐法有 ${}_{28}P_3 = 28\times27\times26 = 19656$ 种。

例题 6

若将4个不同的母音及4个不同的子音共8个字母排成一行，问两端为母音字母的排法有多少种?

解 母音排在两端的方法有 ${}_4P_2 = 12$ 种，而中间六个字母的排法有 ${}_6P_6 = 6! = 720$ 种，所以排法有 ${}_4P_2 \times {}_6P_6 = 12\times720 = 8640$ 种。

例题 7

由 1、2、3、4、5、6、7 这七个数字可组成多少个数字不重复的

(a) 四位数；

(b) 四位奇数；

(c) 两端都是奇数的四位数？

解 (a) 从七个数字中任取四个，可组成的四位数有 ${}_7P_4 = 7\times6\times5\times4 = 840$ 个。

(b) 所求的四位数中，个位数字应取 1、3、5、7 四个数字中的其中一个，有四种方法。其余三个空格可从未选取的六个数字中任取三个排列，有 ${}_6P_3$ 种方法：

千位数	百位数	十位数	个位数
			1 3 5 7

${}_6P_3$ 种方法　　　　4 种方法

∴ 根据乘法原理，可组成的四位奇数有

${}_6P_3\times4 = 6\times5\times4\times4 = 480$ 个。

(c) 所求的四位数中，个位数字及千位数字应取 1、3、5、7 四个数字中的其中两个，有 ${}_4P_2$ 种方法，其余两个空格可从剩余的五个数字中任取两个排列，有 ${}_5P_2$ 种方法：

千位数	百位数	十位数	个位数
奇数			奇数

${}_5P_2$ 种方法

∴ 根据乘法原理，可组成两端都是奇数的四位数有 ${}_4P_2 \times {}_5P_2 = 4 \times 3 \times 5 \times 4 = 240$ 个。

例题 8

由数字 1、2、3 可组成多少个数字不重复的自然数？

解 所组成的自然数有三类：

一位数自然数有 ${}_3P_1 = 3$ 个；

二位数自然数有 ${}_3P_2 = 6$ 个；

三位数自然数有 ${}_3P_3 = 6$ 个。

∴ 根据加法原理，所组成的自然数有

${}_3P_1 + {}_3P_2 + {}_3P_3 = 3 + 6 + 6 = 15$ 个。

例题 9

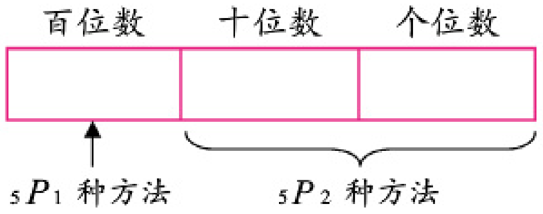
从 0、1、2、3、4、5 这六个数字中任取不同的数字可组成多少个

(a) 三位数；

(b) 四位偶数；

(c) 能被 5 整除的三位数？

解 (a) 由于百位数字不能是0，所以只能从 1、2、3、4、5 这五个数字中任选一个来排列，其方法有 ${}_5P_1$ 种。十位及个位上的数字可以从剩余的五个数字中任选两个来排列，有 ${}_5P_2$ 种方法。



∴ 根据乘法原理，可组成的三位数有

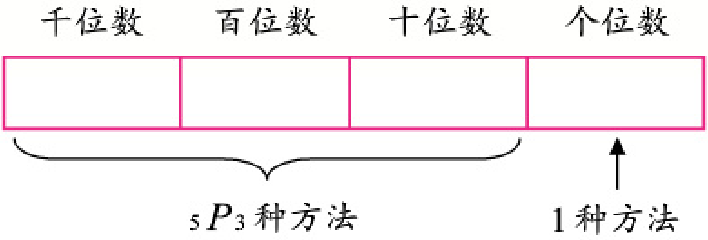
$${}_5P_1 \times {}_5P_2 = 5 \times 5 \times 4 = 100 \text{ 个。}$$

(b) 偶数的个位数字应取 0、2、4中的其中一个。由于 0 不能排在千位上，我们将所求的数分成两类。

第一类：个位数字为 0

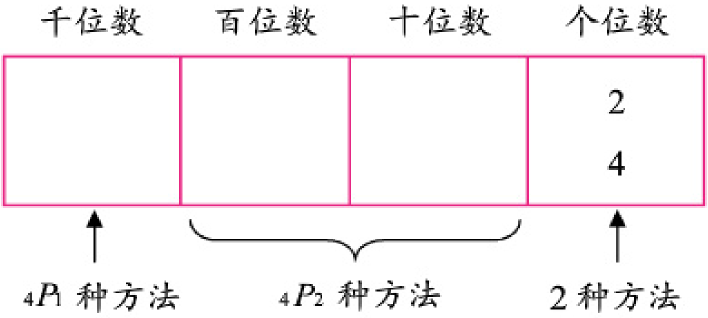
将 0 排在个位上只有一种方法。再从剩余的五个数字中任取三个排在千位、百位及十位上，有 ${}_5P_3$ 种方法。

(续)



∴ 可组成的四位偶数有 $_5P_3 \times 1 = 60$ 个。

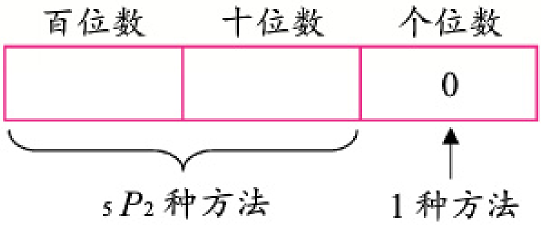
第二类：个位数字为 2 或 4
从 2 或 4 中选取一个数字排在个位上，有 2 种方法。千位上的数字必须从 0 及个位数字以外的四个数字中选取一个来排列，有 $_4P_1$ 种方法。再从剩余的四个数字中任取三个排在百位及十位上，有 $_4P_2$ 种方法。



∴ 可组成的四位偶数有 $_4P_1 \times {}_4P_2 \times 2 = 96$ 个。
∴ 根据加法原理，可组成的四位偶数有
$60 + 96 = 156$个。

(c) 能被 5 整除的数，其个位数字必须是 0 或 5
第一类：个位数字为 0
将0排在个位上只有一种方法。再从剩余的五个数字中任取两个排在百位及十位上，有 $_5P_2$ 种方法。

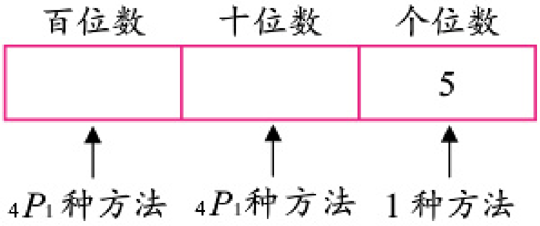
(续)



∴ 可组成的三位数有 $_5P_2 \times 1 = 20$ 个。

第二类：个位数字为 5

将5排在个位上同样只有一种方法。由于0不能排在百位上，百位数字必须从 1、2、3、4 这四个数字中选取一个来排列，有 $_4P_1$ 种方法。再从剩余的四个数字中任取一个排在十位上，有 $_4P_1$ 种方法。



∴ 可组成的三位数有 $_4P_1 \times {_4P_1} \times 1 = 16$ 个。

∴ 根据加法原理，能被 5 整除的三位数有 $20 + 16 = 36$ 个。

例题 10

由 0、1、2、3、4、5 这六个数字可组成多少个大于2100，且数字不重复的四位数？

解 大于2100的四位数可分成下列两类：

第一类：千位数字大于2

千位数字必须从3、4、5这三个数字中选取一个来排列，有 ${}_3P_1$ 种方法。再从剩余的五个数字中任取三个排在百位、十位及个位上，有 ${}_5P_3$ 种方法。

千位数	百位数	十位数	个位数
3 4 5			
${}_3P_1$种方法	${}_5P_3$种方法		

∴ 可组成的四位数有 ${}_3P_1 \times {}_5P_3 = 180$ 个。

第二类：千位数字为 2 且大于2100

将 2 排在千位上只有一种方法。由于所求的数大于2100，所以 0 不能排在百位上。因此，百位数字必须从 1、3、4、5 这四个数字中任取一个来排列，有 ${}_4P_1$ 种方法。再从剩余的四个数字中任取两个排在十位及个位上，有 ${}_4P_2$ 种方法。

千位数	百位数	十位数	个位数
2			
1 种方法	${}_4P_1$种方法	${}_4P_2$ 种方法	

∴ 可组成的四位数有 $1 \times {}_4P_1 \times {}_4P_2 = 48$ 个。

∴ 根据加法原理，所求大于2100的四位数有 $180 + 48 = 228$个。

随堂练习 4

1. 若数字不重复，由 1、2、3、4、5 这五个数字，可组成多少个三位数？
2. 若数字不重复，由 0、1、2、3、4 这五个数字，可组成多少个三位数？

例题 11

有 8 个人排队，问

(a) 排成一行，有多少种不同的排法？

(b) 排成前后两行，每行 4 人，有多少种不同的排法？

(c) 排成三行，第一行 1 人，第二行 3 人，第三行 4 人，有多少种不同的排法？

解 (a) 这是 8 个元素的全排列问题。
因此，不同的排法有 ${}_8P_8 = 8! = 40320$ 种。

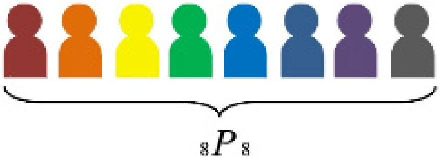


图 19-3

(b) 先从 8 人中选出 4 人排在第一行，有 ${}_8P_4$ 种排法；其余的 4 人排在第二行，有 ${}_4P_4$ 种排法。根据乘法原理，不同的排法有
${}_8P_4 \times {}_4P_4 = 8! = 40320$ 种。

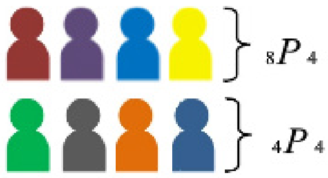


图 19-4

(c) 先从 8 人中选出 1 人，排在第一行，有 ${}_8P_1$ 种排法；再从其余的 7 人中选出 3 人排在第二行，有 ${}_7P_3$ 种排法；最后剩下的 4 人则排在第三行，有 ${}_4P_4$ 种排法。根据乘法原理，不同的排法有 ${}_8P_1 \times {}_7P_3 \times {}_4P_4 = 8! = 40320$ 种。

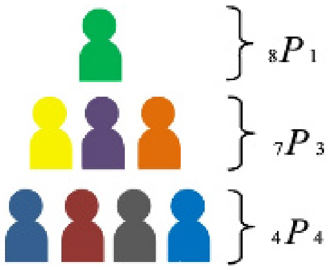


图 19-5

例题 12

5男5女排成一行，问

(a) 特定的两女必须相邻的排法有多少种?

(b) 特定的两女不相邻的排法有多少种?

(c) 5男5女相间的排法有多少种?

解 (a) 当特定的两女相邻时，可将此二女视为一人，所以 9 人的排法有 9！种。两女的位置可互相调换，因而两女的排法有 2！种。根据乘法原理，特定两女必须相邻的排法有 $9! \times 2! = 725760$ 种。

(b) 10人的全排列法有 10！种。
因此，特定两女不相邻的排法有
$10! - 9! \times 2! = 2903040$ 种。

(c) 5 男的排法有 5！种，5 女的排法也有 5！种，又可分为“男女男女…”或“女男女男…”两种排法。所以有 $5! \times 5! \times 2! = 28800$ 种。

随堂练习 5

1. 课室里有 50 个座位，问让 50 名学生就座的方法有多少种?
2. 甲、乙二人必须在排成一行的五个椅子中选坐相邻的两个座位，问有多少种不同的坐法?
3. 4 位男同学及 2 位女同学排成一行拍照。若两位女同学必须相邻，问这六位同学有多少种不同的排法?

练习 19.2b

1. 若数字不重复，由 1、2、3、4、5 这五个数字，可组成多少个五位数？
2. 将东协十国的国旗排列成一行，问有多少种不同的排法？
3. 将 7 篇小说编成一本小说集，其中最短的一篇必须编排在最前面，最长的一篇则必须编排在最后面，问有多少种编排法？
4. 十名学生排成一行，其中两名较高大的学生必须排在两端，问有多少种不同的排法？
5. 在某个文艺晚会里共有九个演出节目。若其中一个节目必须被安排在中间或最后一个节目，问有多少种不同的方法安排这些节目的演出？
6. 将英文字“EQUATION”中的所有字母加以排列，问有多少种排法？若 E 须排首，N 须排尾，又有多少种排法？
7. 有 4 支手机需要注册电话号码。现选出 7 个电话号码供配对，问可有多少种不同的配对方法？
8. 4 位乘客乘坐休旅车的 6 个座位，问有多少种不同的坐法？
9. 某乒乓队教练想从 5 名球员中选出 3 名代表担任第一单打，第二单打及第三单打。若其中一位特优球员必须被选为第一单打或第二单打，有多少种不同的安排法？
10. 将 8 张椅子排成两行，每行各 4 张，以供 8 个人就座。若这 8 人中的其中 3 人必须坐在第一行，问有多少种不同的坐法？
11. 由“TRIANGLE”一字的字母中任取五个不同的字母排列，问有多少种排法？两端必须是子音字母的排列法又有多少种？
12. 将“FANCIES”一字中的字母全取排列，问母音字母排在偶数位置的字有多少个？
13. 用“NUMERICAL”一字所有的字母重新排列，问有多少种排列法？若四个母音字母必须排在一起，又有多少种排列法？
14. 七个科目必须安排在连续的七天考试，每天只考一个科目。若其中的两个科目不能安排在连续的两天举行，问这七个科目的考试有多少种不同的安排法？
15. 由 1、2、3、4、5 这五个数字，可组成多少个数字不重复的
    (a) 五位奇数；(b) 五位偶数？
16. 若数字不可重复，由 0 至 5 这六个数字，可组成多少个六位奇数？

17. 由 0、1、2、3、4、5、6、7 这八个数字，可组成多少个数字不重复，且能被 25 整除的五位数?

18. 由 0、1、2、3、4、5 这六个数字，可组成多少个数字不重复，且能被 4 整除的四位数?

19.3 环形排列

在前面所讨论的排列中，元素都可视为排在直线上。这种排列叫做线形排列。其特点是有一个起点也有一个终点。现在我们要讨论的排列，元素则是排在一条封闭的曲线上。这种排列叫做环形排列。其特点是它没有起点也没有终点。

例题 1

四人围圆桌而坐，问有多少种不同的坐法?

解 设这四人分别是 A、B、C及D。
若四人沿一直线排列，则其排法有 4! 种。
观察以下四种排列：

图 19-6

（续） 这四种排法在环形排列中实际上是相同的排法，如图 19-7 所示。

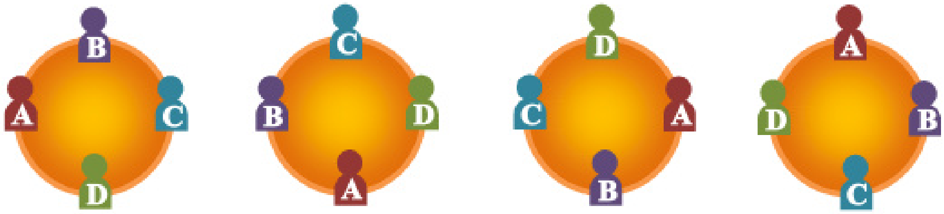


图 19-7

由此可知，每一个环形排列可对应四种不同的线形排列。已知四人作直线排列的排列数是 $4!$，所以四人围坐圆桌的方法有 $\dfrac{4!}{4}=3!=6$ 种。

例2 当四个人围圆桌而坐时，每人依序向右或向左移动一个或多个位子均不会改变各人之间的左右关系。因此，可先将其中一人的座位固定，剩下的三个座位则给其余的三人随意就座，就座的方法有 $3!$ 种。由此也可得四人围圆桌而坐的方法有 $3!$ 种。

将例题 1 的处理结果一般化，可得以下结论：

(1) n 个不同元素的环形排列数公式：

$$\frac{{}_nP_n}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

(2) 从 n 个不同元素中任取 r 个 ($r\leq n$) 的环形排列数公式：

$$\frac{{}_nP_r}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$$

例题 2

从 6 盆不同的花，选出若干盆放置在圆形展览台的周围。问下列情况下，各有多少种不同的放置方法?

(a) 选出 3 盆;

(b) 6 盆全取。

解 (a) 从6盆中取出3盆的环形排列数为 $\frac{{}_6P_3}{3}=40$ 种。

(b) 6盆全取的环形排列数为 $(6-1)!=120$ 种。

例题 3

8人围坐一圆桌开会，其中正、副组长及文书各一人。问满足下列条件的坐法各有多少种?

(a) 没有任何限制;

(b) 正、副组长必须相邻而坐;

(c) 文书及正、副组长必须相邻而坐，且文书必须坐在正、副组长之间。

解 (a) 8人围一圆桌的坐法有 $(8-1)!=7!=5040$ 种。

(b) 因为正、副组长必须相邻而坐，可将此二人视为一人，即 7 人围坐一圆桌，有 $(7-1)!$ 种坐法。又因为正、副组长所坐的位子可以互调，有 $2!$ 种坐法。

因此，所求的坐法有 $(7-1)!\times 2!=1440$ 种。

(c) 将正、副组长及文书视为一人，那么6人围坐一圆桌就有$(6-1)!$种坐法。
又因文书必须坐在正、副组长之间，而正、副组长的位子又可以对调，此三人的坐法有${}_1P_1 \times {}_2P_2 = 2!$种。因此，所求的坐法有$(6-1)! \times 2! = 240$种。

例题 4

4男4女围成一圆圈，且男女间隔排列，问有多少种排法？

解 首先，让4个男生排成一个圆圈，有$(4-1)!$种排法。接着，让4个女生排在男生之间。此时，圆圈有4个不同的空位供4个女生排入其中，其排列数为$4!$。

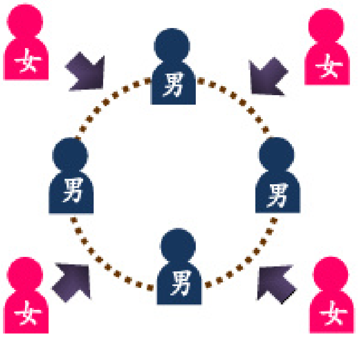


图 19-8

根据乘法原理，所求的排法有$(4-1)! \times 4! = 144$种。

思考题

若先让4个女生排列，再让4个男生排在各女生之间，问有多少种排法？

随堂练习 6

1. 从6男5女中任选5人排成一个圆圈，问有多少种排法?
2. 6男4女围一圆桌而坐，其中女生不能相邻，问有多少种坐法?

练习 19.3

1. 8人围圆桌而坐，问有多少种不同的坐法?
2. 10位儿童排成环形，其排法有多少种? 若其中一位儿童须排在主位，其排法又有多少种?
3. 6人围成一圆圈，若其中的两个人必须相邻，问有多少种围法?
4. 4男3女围坐于一圆桌，若任何两女不能相邻，问有多少种不同的坐法?
5. 4对夫妇及一个小孩围坐于一圆桌。若每对夫妇必须相邻，问有多少种坐法?
6. 一家七口围圆桌吃团圆饭，其中爷爷、奶奶、爸爸、妈妈必须坐在一起，且爷爷奶奶必须相邻，爸爸妈妈也必须相邻，问有多少种坐法?
7. 若 n 个人的线形排列数是其环形排列数的六倍，求此两种排列数。

19.4 不尽相异元素的全排列

前面所讨论的排列问题，所给定的元素都是相异的。若所给定的元素当中有一些是相同的，这种情况就属于不尽相异元素的排列问题了。探讨以下的例子:

若将 a、a、b 这三个元素全取排列，排列方法有多少种?

将两个相同的元素 a 视为两个不同的 a_1 及 a_2，那么三个不同的元素 a_1、a_2、b 的排列方法有 $3!=6$ 种。列出如下：

$a_1\,a_2\,b$	$a_1\,b\,a_2$	$b\,a_1\,a_2$
$a_2\,a_1\,b$	$a_2\,b\,a_1$	$b\,a_2\,a_1$

观察以上三列，在每一列中，b 的位置是固定的，a_1 及 a_2 有 $2!=2$ 种不同的排法。

若将上表中的 a_1 及 a_2 都换回 a，则每一列中两个不同的排列方法就成为同一种排列方法。因此，三个元素 a、a、b 的全排列只有 $\dfrac{3!}{2!}=3$ 种，即 aab、aba 及 baa。

推广到一般情况，若有 n 个元素：

$$\underbrace{a_1, a_1, \cdots, a_1}_{n_1\text{个}}, \underbrace{a_2, a_2, \cdots, a_2}_{n_2\text{个}}, \cdots, \underbrace{a_r, a_r, \cdots, a_r}_{n_r\text{个}}$$

其中 a_1 有 n_1 个，a_2 有 n_2 个，…，a_r 有 n_r 个，且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则这 n 个元素的全排列数是：

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

例题 1

有6面彩旗，其中红旗3面，黄旗2面及白旗1面。若将6面旗子排成一行，问有多少种排法？

解 这是不尽相异元素的全排列问题。

不同的排法有$\dfrac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=60$ 种。

例题 2

求“MISSISSIPPI”一字的字母全取的排列数。

解 在这11个字母中有4个S，4个I，2个P及1个M。

所以，其排列数是$\dfrac{11!}{4!\times 4!\times 2!}=34650$。

例题 3

如图19-9所示，某市区有5条南北向的大道，4条东西向的大道。一人从西南角A走向东北角B，问有多少条最短的路径可走？

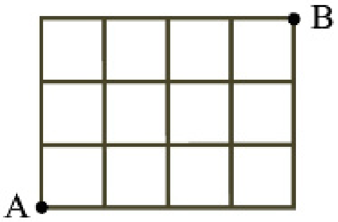


图 19-9

解 从西南角开始，每到一个交叉路口就必须选择向东或向北 (不能向西或向南，否则就不是走最短的路径) 。

设东西向的大道每段长为 a，南北向的大道每段长为 b。

(续) 从西南角 A 到东北角 B，沿最短的路径，无论如何走都要经过 4 个横段 a 及 3 个纵段 b。

所以，此题可归类为 7 个不尽相异元素 a、a、a、a、b、b、b 的全排列问题。

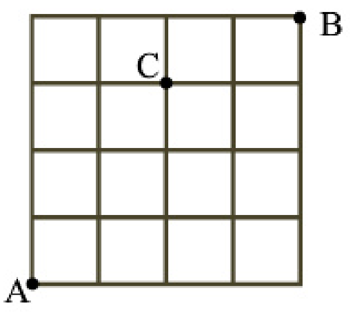
因此，从 A 到 B 的最短路径有 $\dfrac{7!}{4!\times 3!}=35$ 条。

随堂练习 7

1. 将 2 支钢笔，3 支原子笔，4 支铅笔分给九个儿童，问每个儿童都得到一支笔的分配方法有多少种?
2. 求“EXPRESSION”一字的字母全取的排列数。

练习 19.4

1. 将 1、1、2、2、3、3、4、5 这八个数字加以排列，问可排出多少个不同的八位数?
2. 将“MALAYSIA”一字的所有字母加以排列，使其中的三个“A”不完全连在一起，问有多少种不同的排法?
3. 将“MATHEMATICAL”一字的所有字母加以排列，使其中的三个“A”不完全连在一起，问有多少种不同的排法?
4. 如右图所示，某市区有五条南北向的大道，五条东西向的大道，其每段纵横道路皆等距。问
   (a) 由 A 经 C 到 B 的最短路径有多少条?
   (b) 由 A 不经 C 到 B 的最短路径有多少条?



(第 5 题用图)

5. 将“GEOMETRIC”一字的全部字母加以排列，求下列各情况的排列数：
   (a) 没有任何限制；
   (b) 全部母音必须排在一起；
   (c) 没有任何两个母音字母相邻而排。

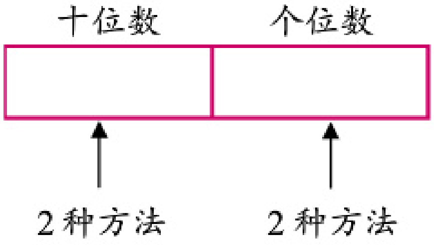
19.5 元素可重复的排列

若元素可重复选取，从 n 个不同的元素中任取 r 个元素排列，叫做从 n 个不同的元素中取 r 个元素的可重复排列。

例题 1

由数字 1 及 2，可组成多少个不同的
(a) 二位数；(b) 三位数？

解 (a) 个位数字可从 1 及 2 两个数字中任取一个，有 2 种方法。
十位数字也可从 1 及 2 中任取一个，同样也有 2 种方法。



∴ 可组成的二位数有 $2 \times 2 = 2^2 = 4$ 个。

(续)　以树图表示如下：

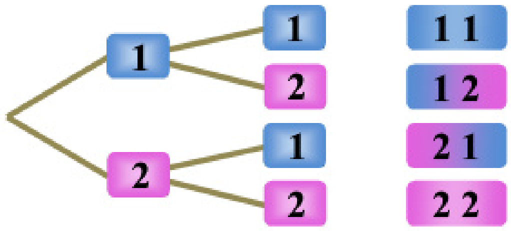
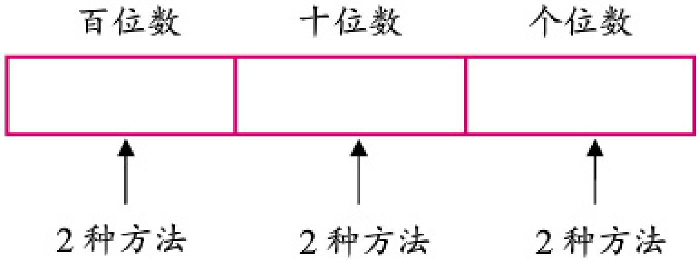


图 19-10

(b) 与 (a) 小题同理，由于数字可重复使用，所以三位数的个位、十位及百位数字都可从1及2中任取一个数：



∴ 可组成的三位数有 $2\times2\times2=2^3=8$个。

推广到一般情况，若有 n 个相异的元素，每个元素可重复使用，则取出第一个元素有 n 种方法，取出第二个，第三个，以至第 r 个元素都各有 n 种方法。根据乘法原理，其排列数为

$$\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{个元素}}=n^r$$

例题 2

若数字可重复使用，由 1、3、5、7、9 这五个数字，可组成多少个不同的四位数？

解

千位数	百位数	十位数	个位数
↑	↑	↑	↑
5 种方法	5 种方法	5 种方法	5 种方法

由于五个数字可重复使用，个位、十位、百位及千位数字都各有 5种方法。

∴ 可组成不同的四位数有 $5^4 = 625$ 个。

例题 3

有 4 位同学同时竞夺三项比赛的冠军，问三项比赛的冠军得主的可能情况有多少种？

解 由于每一项比赛的冠军都可由任何一位同学获得，即每项比赛的冠军得主有 4 种可能。

∴ 三项比赛的冠军得主有 $4^3 = 64$ 种可能情况。

思考题

若一个集合有 n 个元素，为什么其子集有 2^n 个？

例题 4

从 0、1、2、⋯ 、9 这十个数字中任取四个数字组成编码，但0000不能使用。问可编成多少个不同的编码?

解 这是一个从 0 到 9 这十个数字中任取四个数字，且数字可重复使用的排列问题。

四位数字的每一个位子都可从 0 到 9 这十个数字中任取一个来排列，有10 种方法。

$\therefore$ 排法有 10^4 种。

根据题意，0000 不能作为编码。因此，所求的编码有 $10^4-1=9999$ 个。

例题 5

由 1、2、3、5、7 这五个数字，可组成多少个大于5000 且数字可重复的四位数?

解 由于所组成的四位数必须大于5000，千位数字只能使用 5 及 7 两个数字，故有 2 种方法。

而百位、十位及个位数字都有五个数字可供选择使用。

千位数	百位数	十位数	个位数
2 种方法	5 种方法	5 种方法	5 种方法

$\therefore$ 所求的四位数有 $2\times5^3=250$ 个。

随堂练习 8

1. 将3粒球投入6个篮子，有多少种投法？
2. 若数字可重复使用，由0、1、2、3、4这五个数字，可组成多少个三位数？

练习 19.5

1. 某公司的办公室文件是使用首四个英文字母A、B、C及D中的其中两个字母组成的代号加以区别。若个别字母可重复使用，问可组成多少个不同的代号？
2. 甲地及乙地之间有八条路径。现由甲地到乙地，再由乙地返回甲地，问有多少种不同的走法？
3. 用3、4、5、7这四个数字组成四位数，其千位数字及百位数字必须相同，问可组成多少个不同的四位数？
4. 一场篮球赛有两种战绩 (甲队胜或乙队胜)，问十场篮球赛会产生多少种不同的战绩？
5. 某餐厅推出7种午间特餐。有3人到此餐厅各点一份套餐，问有多少种不同的点餐方法？
6. 某大厦每晚都安排一位保安人员负责看守。若有关保安公司有三位保安人员可供指派，问一个星期的编班方法有多少种？
7. 一场足球赛有三种战绩 (甲队胜、乙队胜或和球)。问八场足球赛会产生多少种不同的战绩？
8. 某校举办华巫英三种语言演讲比赛。比赛规定每班在每项比赛只能派一位代表参赛。若某班有40名学生，欲从中选出参赛者，有多少种不同的选派方法？
9. 由0、1、2、…、5这六个数字，可组成多少个数字可重复的六位奇数？
10. 某国家的电话号码从七位数提升至八位数，但规定号码的第一个数字不能是0或1。问号码提升后会增加多少个电话号码？

19.6 组合与组合数公式

从n个不同的元素中，任取$r\,(r\le n)$个元素，不考虑顺序，作为一组，叫做从n个不同元素中取出r个元素的一个组合。所有组合的个数叫做从n个不同元素中取出r个元素的组合数，记作${}_nC_r$，也可记作${}^nC_r$，C_r^n或$\binom{n}{r}$。

举例说明：考虑从a、b、c三个不同的元素中任取两个作为一组的方法。从a、b、c三个不同的元素中任取两个排列的方法如下：

<table>
<tr><td>排列法</td><td>ab</td><td>ba</td><td>ac</td><td>ca</td><td>bc</td><td>cb</td></tr>
<tr><td>组合法</td><td colspan="2">ab</td><td colspan="2">ac</td><td colspan="2">bc</td></tr>
</table>

它可分成以下两个步骤来考虑：

第一步：从3个不同的元素中任取2个元素作组合，共有${}_3C_2$个组合。

第二步：对每一个组合中的2个不同的元素作全排列，各有2!种方法。

根据乘法原理，${}_3P_2={}_3C_2\times 2!$

$$\begin{aligned}\therefore\quad {}_3C_2&=\frac{{}_3P_2}{2!}\\&=3\end{aligned}$$

推广到一般情况，从 n 个不同的元素中任取 r 个元素的排列数的求法，可按以下两个步考虑：

第一步：先从 n 个不同的元素中取出 r 个作组合，有 ${}_nC_r$ 个组合。

第二步：每一个组合中的 r 个元素的全排列有 $r!$ 种方法。

根据乘法原理，${}_nP_r = {}_nC_r \times r!$

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} $$

$$ = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}\ ,\ r \le n $$

注意

若 $r=n$，${}_nC_n = \frac{n!}{0!\ n!} = 1$ 。

若 $r=0$，${}_nC_0 = \frac{n!}{n!\ 0!} = 1$ 。

根据定义 ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$，

$$ \therefore \quad {}_nC_{n-r} = \frac{n!}{[n-(n-r)]!\ (n-r)!} $$

$$ = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

$$ = {}_nC_r $$

即 $\boxed{{}_nC_r = {}_nC_{n-r}}$

例题 1

求 ${}_8C_3$ 及 ${}_{100}C_{98}$ 。

解

$$ {}_8C_3 = \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} = 56 $$

$$ {}_{100}C_{98} = {}_{100}C_{100-98} $$

$$ = {}_{100}C_2 $$

$$ = \frac{100\times 99}{1\times 2} $$

$$ = 4950 $$

例题 2

从 50 人中选出 8 人组成一个委员会，问有多少种不同的选法?

解 从50人中选出8人组成委员会，其组合数为

$$
\begin{aligned}
{}_{50}C_8 &= \frac{{}_{50}P_8}{8\,!} \\
&= \frac{50 \times 49 \times \cdots \times 43}{1 \times 2 \times \cdots \times 8} \\
&= 536878650
\end{aligned}
$$

例题 3

从 25 个男生及 15 个女生中选出 5 人组成一个 3 男 2 女的委员会，问有多少种不同的方法?

解 从 25 个男生中选出 3 人的组合数是 ${}_{25}C_3$；

从15个女生中选出 2 人的组合数是 ${}_{15}C_2$ 。

根据乘法原理，组成委员会的方法有

$$
\begin{aligned}
{}_{25}C_3 \times {}_{15}C_2 &= \frac{25\times24\times23}{1\times2\times3}\times\frac{15\times14}{1\times2} \\
&= 241500 \text{ 种}
\end{aligned}
$$

例题 4

一支羽球队有 5 名男队员及 4 名女队员。现欲安排双打训练，问

(a) 选出一对男双与一对女双进行对打，有多少种不同的选法?

(b) 选出两队混双对打，有多少种不同的选法?

解 (a) 先从男队员中选出 2 人，其方法有 ${}_5C_2$ 种。
再从女队员中选出 2 人，其方法有 ${}_4C_2$ 种。
根据乘法原理，所求的选法有
${}_5C_2 \times {}_4C_2 = 60$ 种。

(b) 先从男队员中选出 2 人，这是一个与次序无关的组合问题，其方法有 ${}_5C_2$ 种。
再从女队员中选出 2 人，与选出的 2 名男队员搭配。这是一个与次序有关的排列问题，其方法有 ${}_4P_2$ 种。
根据乘法原理，选出两队混双对打的方法有
${}_5C_2 \times {}_4P_2 = 120$ 种。

随堂练习 9

1. 在某国的六个主要城市中，各城市之间都有陆路交通连接。问该六个城市之间有多少条公路连接？
2. 五个人分乘四辆车，每辆车必须至少载一人，问有多少种不同的乘坐方法？

例题 5

从7名男医生及 4 名女医生中选出 5 人组成一个研究小组。根据下列的要求，可组成多少种不同的小组？

(a) 至少有2名女医生；

(b) 最多有3名女医生。

解 (a) 若至少有2名女医生，

一、选2名女医生，3名男医生，有 ${}_4C_2\times{}_7C_3$ 种方法；

二、选3名女医生，2名男医生，有 ${}_4C_3\times{}_7C_2$ 种方法；

三、选4名女医生，1名男医生，有 ${}_4C_4\times{}_7C_1$ 种方法。

根据加法原理，至少有2名女医生的组成方法有 ${}_4C_2\times{}_7C_3+{}_4C_3\times{}_7C_2+{}_4C_4\times{}_7C_1=301$ 种。

(b) 若最多有3名女医生，

一、选3名女医生，2名男医生，有 ${}_4C_3\times{}_7C_2$ 种方法；

二、选2名女医生，3名男医生，有 ${}_4C_2\times{}_7C_3$ 种方法；

三、选1名女医生，4名男医生，有 ${}_4C_1\times{}_7C_4$ 种方法；

四、全部5位组员都是男医生，有 ${}_7C_5$ 种方法。

根据加法原理，最多有3名女医生的组成方法有 ${}_4C_3\times{}_7C_2+{}_4C_2\times{}_7C_3+{}_4C_1\times{}_7C_4+{}_7C_5=455$ 种。

(续) 或

根据题意，4 名女医生加 1 名男医生的情况必须排除。

4 名女医生加 1 名男医生的选法有 ${}_4C_4 \times {}_7C_1$ 种，

而从 11 名医生选出 5 名医生的方法有 ${}_{11}C_5$ 种。

所以，组员中最多只有 3 名女医生的组成方法有

${}_{11}C_5 - {}_4C_4 \times {}_7C_1 = 455$ 种。

例题 6

将 6 本不同的书分给甲、乙、丙三人。问下列情况下，各有多少种不同的分法？

(a) 甲得 3 本，乙得 2 本，丙得 1 本；

(b) 一人得 3 本，一人得 2 本，一人得 1 本。

解 (a) 分书本给甲、乙、丙的步骤如下：

第一步：先从 6 本书中选出 3 本分给甲，有 ${}_6C_3$ 种方法；

第二步：再从剩下的 3 本书中选出 2 本分给乙，有 ${}_3C_2$ 种方法；

第三步：将最后 1 本书分给丙，有 ${}_1C_1$ 种方法。

根据乘法原理，不同的分法有

${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = 60$ 种。

思考题

若先把书分给丙，再分给乙，最后分给甲，有多少种分法？

(b) 在(a)小题中，设定甲、乙、丙三人各可分得3本，2本及1本书。而(b)小题的分别在于任何一人都可分得3本，2本或1本书。
因此，在(a)小题的每一种分法中，让甲、乙、丙三人分得书本后再互相调换，有3! 种方法。
根据乘法原理，不同的分法有
${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times 3! = 360$ 种。

例题 7

有6本不同的书。问下列情况下，各有多少种不同的分法？
(a) 甲、乙、丙三人每人分得2本；
(b) 分成三堆，每堆2本。

解 (a) 先从6本书中选出2本分给甲，有 ${}_6C_2$ 种方法；再从剩下的4本书中选2本分给乙，有 ${}_4C_2$ 种方法；将最后的2本书分给丙，有 ${}_2C_2$ 种方法。
根据乘法原理，不同的分法有
$N_1 = {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 90$ 种。

(b) 将(a)小题的分法分成以下两个步骤：
第一步：先将6本书分成三堆，每堆2本。设分法有 N_2 种；
第二步：将三堆书分给甲、乙、丙三人，分法有3! 种。
根据乘法原理，将6本不同的书分给甲、乙、丙三人的分法有 $N_1 = N_2 \times 3!$ 种。
将6本不同的书分成三堆的方法有
$$N_2 = \frac{N_1}{3!} = 15 \text{ 种。}$$

随堂练习 10

有4本不同的书。问下列情况下，各有多少种不同的分法？

(a) 平分给甲、乙二人；

(b) 平分成两堆。

练习 19.6

1. 求下列各式中 n 或 r 的值：
   (a) ${}_{16}C_{r+3} = {}_{16}C_{7-r}$
   (b) ${}_{30}C_{r} = {}_{30}C_{r+2}$
   (c) ${}_{n}C_{8} = {}_{n}C_{7}$
2. 若 $3({}_{n}C_{4}) = 5({}_{n-1}C_{5})$，求 ${}_{n}C_{9}$ 的值。
3. 大马金杯足球赛有17支队伍参赛。若各队之间都必须进行一场比赛，问需要安排多少场比赛？
4. 凸九边形有多少条对角线？
5. 某班有6名值日生，一名负责擦黑板，一名负责倒垃圾，两名负责扫地及两名负责排桌椅。问有多少种方法编排工作？
6. 从5对夫妇中选出4人，任何一对夫妇不能同时被选，问有多少种选法？
7. 从一面红旗，两面黄旗及三面蓝旗共六面旗中任取三面旗作信号，问有多少种方法？
8. 从9名数学系学生及4名教育系学生中，选出6人组成一个考察团。问下列情况下，各有多少种组团方法？
   (a) 团员中恰有2名教育系学生；
   (b) 团员中至少有2名教育系学生。
9. 将14名学生平分成两组，问有多少种分组法？若将这14名学生平分到两间教室，则有多少种分配法？

总复习题19

1. 计算：

(a) $\dfrac{7!}{3!4!}+\dfrac{7!}{2!5!}$　　(b) $\dfrac{{}_{11}P_5+{}_{11}P_4}{{}_{12}P_5+{}_{12}P_4}$

2. 若 $\dfrac{(n+6)!}{(n+4)!}=18(n+1)$，求 n。

3. 若 ${}_{2n}C_3:{}_nC_2=44:3$，求 n 的值。

4. 将“TRIANGLE”一字的字母全取排列，其母音字母不相邻的排法有多少种？

5. 从“VOLUME”一字中任取一个子音字母及一个母音字母组成一个字，问可组成多少个字？

6. 篮球教练从四位射手中选出两位担任前锋，两位身材特别高大的球员中选出一位担任中锋，四位控球手中选出两位担任后卫，问他可排出多少种不同的阵容？

7. 某委员会成员必须从 3 位律师，6 位工程师及 7 位医生各选出一位律师，两位工程师及两位医生组成，问有多少种组成方法？

8. 六种不同面额的纸币 1、5、10、20、50、100 令吉各一张，可组成多少种不同的币值？

9. 书架上有 4 本不同的历史书，5 本不同的地理书及 3 本不同的文学书。若将全部书籍排成一行，且同类型的书籍必须排在一起，问有多少种排法？

10. 从 A、B、C、D、E 及 0、1、2、3、4 这十个字元中任取六个作为网络账号密码，其中 0 不能居首位，且字元不重复，问可组成多少个密码供使用？

11. 由 0、1、2、3、4、5、6 这七个数字全取而排列，问可组成多少个七位偶数？这些七位偶数中，有多少个是 10 的倍数？

12. 将“非礼勿视，非礼勿言”这八个字全取而排列，问有多少种不同的排列法？

13. 将“ARRANGEMENT”一字的字母全取而排列，问有多少种不同的排列法？

14. 将六个不同颜色的杯子及四罐不同口味的果汁排成环形，其中罐装饮料不能相邻，问有多少种不同的排法？

15. 一盒象棋里，红色的一方有车、马、炮、仕、相各两粒，兵五粒及帅一粒。现将这 16 粒棋子排成环形，问

(a) 同样的棋子必须排在一起，有多少种排法？

(b) 同样的棋子对称于一条直径，有多少种排法？

16. 若数字不重复，由 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个数字，可组成多少个介于 4000 与 9000 之间的奇数？

17. 若数字可重复使用，由 1、2、3、4、5 这五个数字所组成的四位数中，有多少个恰有两个重复的数字？

18. 从班会的十名执委中，委派至少两名，最多八名代表出席一场座谈会，问有多少种委派法？

19. 从 5 名工程师及 4 名技术员中选出 4 人组成一个小组。若小组成员必须有至少 2 名工程师及 1 名技术员，问有多少种选法？

20. 将 9 本不同的书分给甲、乙、丙三人。问下列情况下，各有多少种不同的分法？

(a) 每人各分得 3 本；

(b) 甲得 2 本，乙得 3 本，丙得 4 本；

(c) 一人得 2 本，一人得 3 本，一人得 4 本；

(d) 分成三堆，每堆 3 本。

20. 二项式定理

学习目标：

- 能展开指数为自然数的二项式
- 掌握二项展开式的通项公式

20.1 指数为自然数的二项式定理

在初中，我们已经学过

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

现在，我们讨论 $(a+b)^4$ 的展开式

$(a+b)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$

$(a+b)^4$ 的展开式中的每一项都是从每一个括号中各取一个字母相乘而得的乘积，因此每一项都是四次项，即展开式中应有以下各项：a^4，a^3b，a^2b^2，ab^3，b^4。

应用排列与组合的知识，可得展开式各项的系数：

在四个括号中，都不取 b，有 ${}_4C_0$ 种方法，所以 a^4 的系数是 ${}_4C_0$；

在四个括号中，恰有 1 个取 b，有 ${}_4C_1$ 种方法，所以 a^3b 的系数是 ${}_4C_1$；

在四个括号中，恰有 2 个取 b，有 ${}_4C_2$ 种方法，所以 a^2b^2 的系数是 ${}_4C_2$；

在四个括号中，恰有 3 个取 b，有 ${}_4C_3$ 种方法，所以 ab^3 的系数是 ${}_4C_3$；

在四个括号中，4 个都取 b，有 ${}_4C_4$ 种方法，所以 b^4 的系数是 ${}_4C_4$。

因此，$(a+b)^4={}_4C_0\,a^4+{}_4C_1\,a^3b+{}_4C_2\,a^2b^2+{}_4C_3\,ab^3+{}_4C_4\,b^4$。

推广到一般情况，有以下的公式：

$$(a+b)^n={}_nC_0\,a^n+{}_nC_1\,a^{n-1}b+{}_nC_2\,a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_r\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_n\,b^n\quad(n\in N)$$

以上公式叫做二项式定理，右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，其中 ${}_nC_0$，${}_nC_1$，${}_nC_2$，${}_nC_r$，${}_nC_n$ 等叫做二项式系数。

观察上述公式可知，

(1) 每一项中a及b的指数之和都等于二项式的幂指数，a的指数从n逐次减1直到0为止，而b的指数则从0逐次加1直到n为止。

(2) 二项展开式有$n+1$项，故其项数比二项式的幂指数多1。

(3) 各项的二项式系数如下：

首项是${}_nC_0$，第二项是${}_nC_1$，第三项是${}_nC_2$，第$r+1$项是${}_nC_r$，末项是${}_nC_n$。

由于${}_nC_r={}_nC_{n-r}$，所以${}_nC_0={}_nC_n$，${}_nC_1={}_nC_{n-1}$，${}_nC_2={}_nC_{n-2}$，… 。

二项式系数也可以直接用下表推算：

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1　1
$(a+b)^2$	1　2　1
$(a+b)^3$	1　3　3　1
$(a+b)^4$	1　4　6　4　1
$(a+b)^5$	1　5　10　10　5　1
	⋮

上表中每一行的两端都是1，除了1以外的每一个数都等于其肩上两个数的和，即${}_{n+1}C_r={}_nC_{r-1}+{}_nC_r$。

补充资料

早在1261年中国宋朝数学家杨辉著《详解九章算术》一书中就已提出此表。杨辉在注释中还提到，贾宪也用过上述方法。因此，此表被称为杨辉三角或贾宪三角。

法国数学家巴斯卡（*Blaise Pascal*，1623 - 1662）于1653年也发现此表。因此，也有许多人称它为巴斯卡三角形（*Pascal's Triangle*）。

思考题

如何证明${}_{n+1}C_r={}_nC_{r-1}+{}_nC_r$？

例题 1

展开 $(2x+y)^5$。

解 $(2x+y)^5 = {}_5C_0\,(2x)^5 + {}_5C_1\,(2x)^4 y + {}_5C_2\,(2x)^3 y^2$
$\qquad + {}_5C_3\,(2x)^2 y^3 + {}_5C_4(2x)y^4 + {}_5C_5\,y^5$
$\qquad = 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$

在二项式定理中，若设 $a=1$， $b=x$，则得公式

$$(1+x)^n = 1 + {}_nC_1\,x + {}_nC_2\,x^2 + {}_nC_3\,x^3 + \cdots + {}_nC_r\,x^r + \cdots + x^n$$

例题 2

展开 $(1+x)^5$。

解 $(1+x)^5 = 1 + {}_5C_1x + {}_5C_2x^2 + {}_5C_3x^3 + {}_5C_4x^4 + x^5$
$\qquad = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

例题 3

展开 $(1-2x)^4$。

解 $(1-2x)^4 = 1 + {}_4C_1(-2x) + {}_4C_2(-2x)^2 + {}_4C_3(-2x)^3 + (-2x)^4$
$\qquad = 1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$

随堂练习 1

展开下列各式：

1. $(1+x)^7$　　　　2. $(2+3x)^5$

练习 20.1

展开下列各式 (1 至 9):

1. $(m+n)^7$
2. $(3+2x)^4$
3. $(x-3)^5$
4. $(x+y^2)^6$
5. $\left(2+\frac{1}{x}\right)^5$
6. $\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{x}\right)^4$
7. $\left(x-\sqrt[3]{x^2}\right)^3$
8. $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$
9. $(1+x+x^2)^3$
10. 计算 $\left(1+\sqrt{x}\right)^5+\left(1-\sqrt{x}\right)^5$。

20.2 二项展开式的通项公式

二项展开式

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

的第 $r+1$ 项是 $\boxed{T_{r+1}={}_nC_ra^{n-r}b^r}$

这个公式叫做二项展开式的通项公式。

例题 1

求 $(3x-2y)^9$ 按 x 的降幂展开后的第六项。

解 应用通项公式 $T_{r+1}={}_nC_ra^{n-r}b^r$

$\because\ r+1=6$

$\therefore\quad r=5$

$$\begin{aligned}T_6&={}_9C_5(3x)^{9-5}(-2y)^5\\&=126\times3^4\times x^4\times(-2)^5\times y^5\\&=-326592x^4y^5\end{aligned}$$

例题 2

求 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中含 x^3 项的系数。

解 由通项公式，得 $T_{r+1}={}_9C_r\,x^{9-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r$

$$={}_9C_r\,x^{9-r}(-1)^r(x^{-1})^r$$

$$=(-1)^r\times{}_9C_r\times x^{9-2r}$$

$\because$ 对于 x^3 项，$9-2r=3$

$$r=3$$

$\therefore$ x^3 项的系数是 $(-1)^3\times{}_9C_3=-84$。

例题 3

求 $\left(2x^3-\dfrac{1}{x}\right)^{12}$ 的展开式中的常数项。

解 由通项公式，得 $T_{r+1}={}_{12}C_r\,(2x^3)^{12-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r$

$$={}_{12}C_r\times 2^{12-r}(x^3)^{12-r}(-1)^r(x^{-1})^r$$

$$=(-1)^r\times{}_{12}C_r\times 2^{12-r}\times x^{36-4r}$$

对于常数项，$36-4r=0$

$$r=9$$

$\therefore$ 常数项是 $(-1)^9\times{}_{12}C_9\times 2^{12-9}=-1760$。

随堂练习 2

求 $(x^3+2x)^7$ 按 x 的降幂展开后的第四项。

练习 20.2

1. 求 $(x+1)^9$ 按 x 的降幂展开后的第四项的系数。
2. 求 $(3x+2)^5$ 按 x 的降幂展开后的第三项。
3. 求 $\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)^{10}$ 按 x 的升幂展开后的第四项。
4. 求 $\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^8$ 按 x 的升幂展开后的中间项。
5. 求 $(2-3x)^7$ 中 x^2 的系数。
6. 求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 的常数项。
7. 求 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中 $\dfrac{1}{x^5}$ 项的系数。
8. 求 $\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数。

总复习题20

1. 求 $(1-2x)^5$ 的展开式。
2. 展开 $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$。
3. 求二项式 $\left(\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{1}{3x}\right)^{11}$ 按 x 的降幂展开后的第八项。
4. 求 $\left(x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 按 x 的降幂展开后的中间项。
5. 求二项式 $\left(x^3-\dfrac{1}{x}\right)^{24}$ 展开式中 x^{-12} 的系数。

6. 若二项式 $(1+ax)^5$ 的展开式中 x^4 的系数是80，求 a 的值。

7. 已知 $(1+x)^n$ 按 x 的升幂展开后的第二、三、四项的系数成等差数列，求 n 的值。

8. 写出 $\left(px+\dfrac{q}{x}\right)^n$ 按 x 的降幂展开后的第四项。若此项是常数项，求 n 的值。

21. 概率

学习目标：

- 理解样本空间、事件及概率的概念
- 理解互斥事件的概念及掌握加法原理
- 理解独立事件的概念及掌握乘法原理
- 掌握数学期望值的概念及其计算
- 掌握常态分配的应用

在日常生活中，许多现象在某种情况或条件下会有特定的结果。例如，把一块石头抛向空中，它一定会往下坠落；纯水在标准大气压下加热到 100 ℃ 时会沸腾。但是，一些现象在某种情况或条件下却可得到多种可能的结果，且其结果是偶然的。例如，任意抛掷一枚匀称的硬币，有可能掷得“正面朝上”或“反面朝上”，其结果是无法预知的。但是，在相同的条件下进行大量重复的试验时，经过分析就会发现，其结果有一定的规律性。

为了寻找抛掷匀称硬币出现“正面朝上”的规律，历史上有些人做过成千上万次抛掷硬币的试验，其结果如下：

试验者	投掷次数 (n)	出现“正面朝上”的次数 (m)	频率 $\left(\frac{m}{n}\right)$
德摩根 (*De Morgan*)	2048	1061	0.5181
蒲丰 (*Buffon*)	4048	2048	0.5059
费勒 (*Feller*)	10000	4979	0.4979
皮尔逊 (*Pearson*)	12000	6019	0.5016
皮尔逊 (*Pearson*)	24000	12012	0.5005

从表中的结果观察可得，当抛掷次数 (n) 很大时，出现“正面朝上” (m) 的频率 $\left(\frac{m}{n}\right)$ 总是接近于 0.5。

由此可知，这个试验有两个显著的特点：

一、试验前不能预测其结果 — 偶然性；

二、在相同条件下进行大量重复试验时，呈现出统计规律性 — 必然性。

概率论就是利用数学的方法研究统计规律的一个数学分支。本章将介绍概率的初步知识。

21.1 样本空间与事件

一个试验的每一种可能的结果叫做这个试验的样本点，而所有可能结果的集合就叫做这个试验的样本空间，常以 S 表示。以抛掷硬币为例，其结果有两种可能，即“正面朝上”及“反面朝上”。若以 H 表示“正面朝上”，T 表示“反面朝上”，则样本点就是 H 及 T，样本空间 $S = \{H, T\}$。

抛掷硬币的试验只有两个样本点。但是，一些试验却可以有无限多个样本点，例如，从 0 及 1 之间选出一个数字，其样本点就有无限多个，如 0.1，0.12，0.145 等。

例题 1

将一枚硬币抛掷两次，根据其出现正面 (H) 或反面 (T) 的可能结果，写出此试验的样本空间。

解

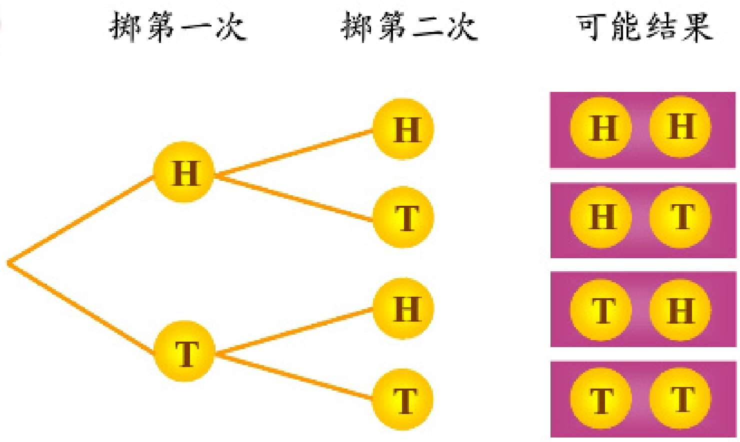


图 21-1

思考题

抛掷一枚硬币两次及抛掷两枚硬币各一次的样本空间是否相同？

∴ 样本空间 S = {(H, H)，(H, T)，(T, H)，(T, T)}。

例题 2

求投掷一粒骰子及一枚硬币的样本空间。

解

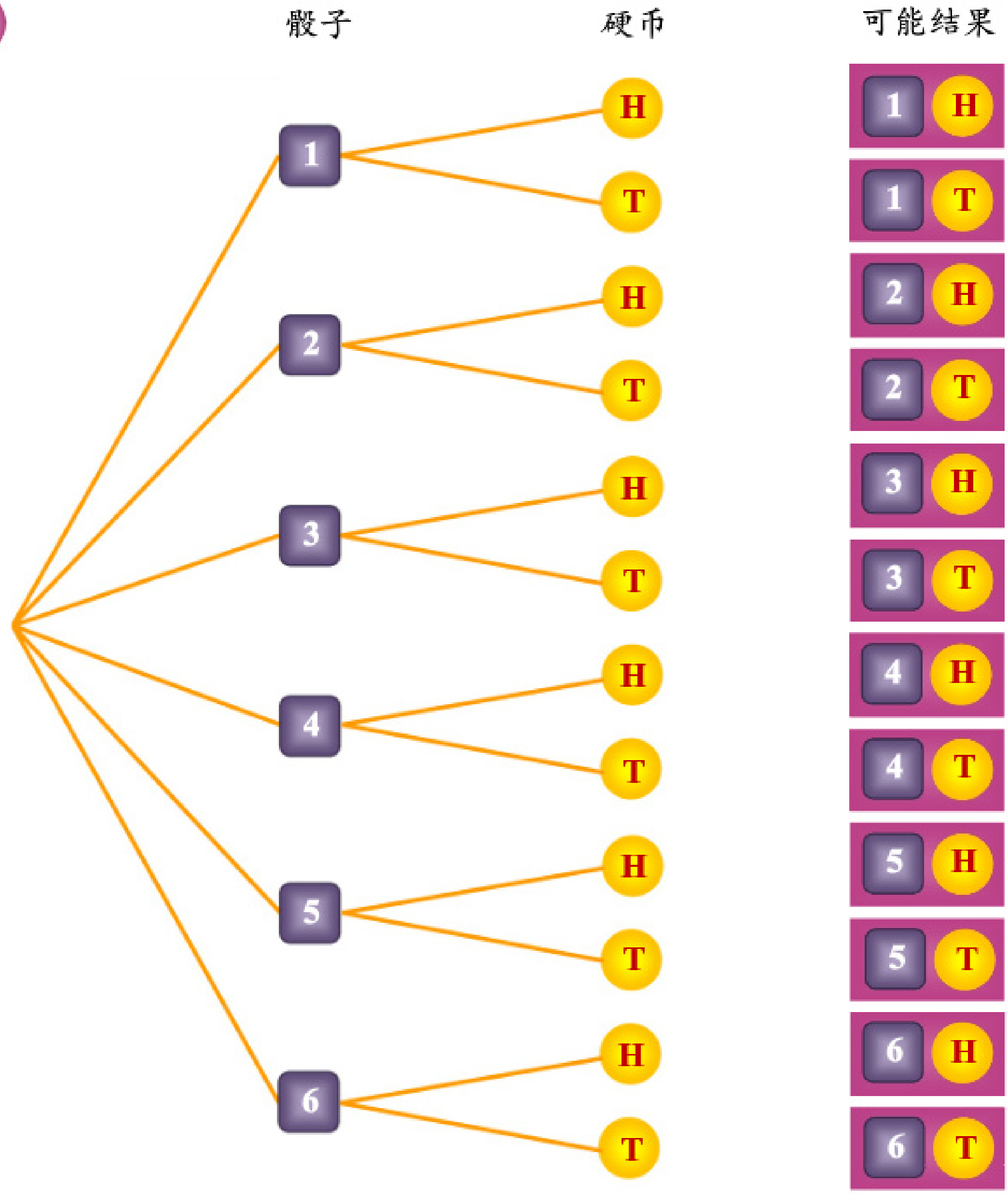


图 21-2

∴ 样本空间 S = {(1, H)，(1, T)，(2, H)，(2, T)，(3, H)，(3, T)，(4, H)，(4, T)，(5, H)，(5, T)，(6, H)，(6, T)}。

例题 3

写出投掷两粒骰子一次的样本空间。

解

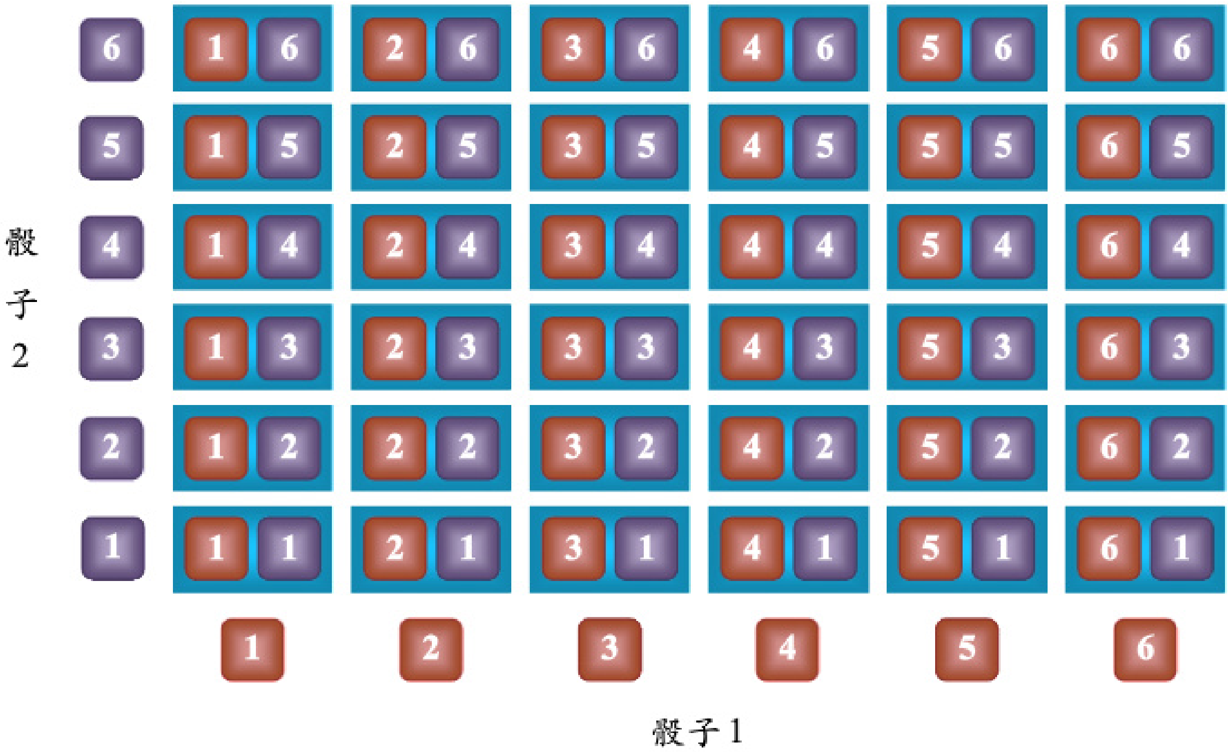


图 21-3

∴ 样本空间 S = {(1, 1)，(1, 2)，(1, 3)，(1, 4)，(1, 5)，(1, 6)，
(2, 1)，(2, 2)，(2, 3)，(2, 4)，(2, 5)，(2, 6)，
(3, 1)，(3, 2)，(3, 3)，(3, 4)，(3, 5)，(3, 6)，
(4, 1)，(4, 2)，(4, 3)，(4, 4)，(4, 5)，(4, 6)，
(5, 1)，(5, 2)，(5, 3)，(5, 4)，(5, 5)，(5, 6)，
(6, 1)，(6, 2)，(6, 3)，(6, 4)，(6, 5)，(6, 6)} 。

随堂练习 1

1. 写出抛掷两枚硬币一次的样本空间。
2. 写出投掷一粒骰子一次的样本空间。
3. 从 0，1，…，9 这十个号码中任选一个号码，写出其样本空间。
4. 写出抛掷三枚硬币一次的样本空间。

在一个试验中，若干个样本点所成的集合，即样本空间 S 的一个子集，叫做该试验的一个事件，一般以大写英文字母 A，B，C 等表示。样本空间 S 也是一个事件，是必然发生的，叫做必然事件。空集合 Ø 也是一个事件，是永远不会发生的，叫做不可能事件或空事件。当事件只含一个样本点时，即事件只含样本空间S的一个元素，叫做基本事件。

例如，在投掷一粒骰子以求其出现点数的试验中，必然事件 S = {1，2，3，4，5，6}，出现点数 7 是不可能事件，以Ø表示。而出现1至6之间任何一个点数的事件，叫做基本事件。

又如，从52张扑克牌中随意抽取一张，有 52 种可能结果。因此，这个试验的样本空间是一个含有 52 个元素的集合，而任何一个事件就是这个集合的一个子集。以下列出这个样本空间的一些事件：

- 抽到的牌是数字 11（不可能事件）
- 抽到的牌是红心 3（基本事件）
- 抽到的牌是数字 9（含 4 个元素的事件）
- 抽到的牌是黑桃（含 13 个元素的事件）
- 抽到的牌不是梅花5（含51 个元素的事件）

由于事件是以集合表示，以下列出一些用于表示事件相应关系的集合运算：

设A及B为两个事件，

$A \cup B$ 表示事件A及事件B至少有一个事件会发生，

$A \cap B$ 表示事件A及事件B同时发生，

A' 表示事件A不会发生。

例题 4

盒子内有10粒小球，球上分别标有号码1，2，…，10。从中任取一球。

(a) 写出试验的样本空间。

(b) 若事件A＝“球的号码是偶数”，事件B＝“球的号码小于9”，求 $A \cap B$。

(c) 若事件M＝“球的号码是3的倍数”，事件N＝“球的号码是奇数”，求 $M \cup N$。

解

(a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(b) $A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$

(c) $M \cup N = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

随堂练习 2

以集合表示下列各事件(1至4)：

1. 投掷一粒骰子，事件A＝“掷得的点数是质数”。
2. 同时投掷三粒骰子，事件B＝“点数之和小于6”。
3. 抛掷两枚硬币一次，事件K＝“恰好掷得一个正面”，事件L＝“至少掷得一个正面”，事件M＝“最多掷得一个正面”。

4. 抛掷一枚硬币三次。
   (a) D =“至少掷得两个正面”
   (b) E =“掷得正面的次数比反面的次数少”

练习 21.1

1. 从四个字母 K、O、T、A 中任取两个，求
   (a) 样本空间 S；
   (b) 事件 A =“一个字母是母音，一个字母是子音”；
   (c) 事件 B =“两个字母都是母音”；
   (d) 事件 C =“至少一个字母是母音”。
2. 投掷两粒骰子，求其点数之和是 3 的倍数的事件。
3. 投掷三粒骰子，求其点数之和是 15 的事件。
4. 从 A、B、C、D、E 这五个字母中任取两个排成一列，求
   (a) 样本空间 S；
   (b) 事件 M =“恰有一个字母是母音”。
5. 抛掷三枚硬币，求
   (a) 样本空间 S；
   (b) 事件 A =“三枚硬币都是正面”；
   (c) 事件 B =“两枚硬币是正面，一枚是反面”；
   (d) 事件 C =“至少有两枚硬币是正面”。
6. 投掷两粒骰子。以集合表示下列各事件：
   (a) A =“掷得两粒骰子的点数相等”；
   (b) B =“掷得一粒骰子的点数是另一粒骰子的点数的两倍”；
   (c) C =“掷得两粒骰子的点数之和是 5 或 6 的倍数”。

21.2 概率的定义

本节将介绍概率的两种定义，即概率的统计定义及概率的古典定义。

概率的统计定义

在相同条件下进行大量重复的试验，事件发生的频率会呈现一定的规律性。探讨以下投掷骰子的例子：

投掷一粒骰子多次，记录点数 1 出现的次数及试验总次数，其结果如下：

投掷总次数 (n)	1000	2000	3000	4000	5000	6000
点数 1 出现的次数 (m)	174	350	499	673	837	999
频率 $\left(\frac{m}{n}\right)$	0.1740	0.1750	0.1663	0.1683	0.1674	0.1665

从观察可得，当投掷的次数越多时，点数1出现的频率越接近于常数 $\frac{1}{6} \approx 0.1667$。

在进行大量重复的试验时，某事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总是接近于某个常数，这个常数叫做事件 A 的概率，记作 P(A)。这就是概率的统计定义。

由于事件A发生的次数不会超过试验的总次数，所以频率一定是从0到1的数，即 $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$。于是，由概率的统计定义，对任何事件 A，其概率 $0 \leq P(A) \leq 1$。

必然事件 S 在每次试验中都会发生，所以 $P(S)=1$。对于不可能事件 Ø，无论进行多少次试验，它发生的次数都是 0，所以 $P(\varnothing)=0$。

概率的古典定义

若一个试验满足以下两个条件：

一、可能发生的结果为有限个；

二、每个结果发生的可能性相等；

这种试验模型就叫做古典概率模型。

设 S 为样本空间，含有 n 个均等可能的结果，A 为一事件，含有 m 个结果，则事件 A 的概率是

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

这就是概率的古典定义。

例题 1

投掷一粒匀称的骰子，问掷得点数是 3 的概率是多少？掷得点数是奇数的概率又是多少？

解 样本空间 S = {1，2，3，4，5，6}

设事件A = “点数是 3”，则 A = {3}。

$$\therefore\ P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{6}$$

设事件B = “点数是奇数”，则 B = {1，3，5}。

$$\therefore\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

例题 2

抛掷三枚硬币，求下列各事件的概率：

(a) 只有一枚硬币正面朝上；

(b) 至少一枚硬币正面朝上。

解 以H表示正面，T表示反面。

S = {(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H),
(T, H, H), (H, T, T), (T, H, T),
(T, T, H), (T, T, T)}

n (S) = 8

(a) 设事件 A = "只有一枚硬币正面朝上"。

A = {(T, H, T), (T, T, H), (H, T, T)}

n (A) = 3

$\therefore$ $P(A) = \frac{3}{8}$

(b) 设事件 B = "至少一枚硬币正面朝上"。

B = {(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H),
(T, H, H), (T, H, T), (T, T, H),
(H, T, T)}

n (B) = 7

$\therefore$ $P(B) = \frac{7}{8}$

例题 3

在 20 件产品中，有 15 件一等品，5 件二等品。从中抽出 3 件，求下列各事件的概率：

(a) 3 件都是二等品；

(b) 2 件一等品，1 件二等品。

解 S = “从 20 件产品抽出 3 件”，$n(S) = {}_{20}C_3 = 1140$ 。

(a) 设事件 A = “3 件都是二等品”。

由于二等品有 5 件，$n(A) = {}_{5}C_3 = 10$ 。

$$\therefore \quad P(A) = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}$$

(b) 设事件 B = “2 件一等品，1 件二等品”。

由于一等品有 15 件，二等品有 5 件，

$n(B) = {}_{15}C_2 \times {}_{5}C_1 = 525$。

$$\therefore \quad P(B) = \frac{525}{1140} = \frac{35}{76}$$

例题 4

一袋中有 4 枝铅笔及 3 枝圆珠笔。任意抽取 3 枝笔，求下列各事件的概率：

(a) 3 枝铅笔；

(b) 2 枝铅笔，1 枝圆珠笔；

(c) 1 枝铅笔，2 枝圆珠笔。

解 S = “任意抽取 3 枝笔”，$n(S) = {}_7C_3 = 35$

(a) 设事件 A = “3 枝铅笔”。

$n(A) = {}_4C_3 = 4$

$\therefore \quad P(A) = \dfrac{4}{35}$

(b) 设事件 B = “2 枝铅笔，1 枝圆珠笔”。

$n(B) = {}_4C_2 \times {}_3C_1 = 18$

$\therefore \quad P(B) = \dfrac{18}{35}$

(c) 设事件 C = “1 枝铅笔，2 枝圆珠笔”。

$n(C) = {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 12$

$\therefore \quad P(C) = \dfrac{12}{35}$

例题 5

将“SINGAPORE”一字中的所有字母任意排列。求下列各事件的概率：

(a) 4个母音相邻；

(b) 4个母音不完全相邻。

解 S =“所有字母任意排列”，$n(S) = 9!$

(a) 设事件A =“四个母音相邻”。

当 4 个母音相邻时，可将此 4 个母音视为一个字母，所以 6 个字母的排法有 6! 种。而 4 个母音的位置可互相调换，其排法有4!种。

$n(A) = 6! \times 4!$

$\therefore \quad P(A) = \dfrac{6! \times 4!}{9!} = \dfrac{1}{21}$

(b) 设事件 B =“4 个母音不完全相邻”。

$n(B) = n(S) - n(A)$

$\quad\quad = 9! - 6! \times 4!$

$\therefore \quad P(B) = \dfrac{9! - 6! \times 4!}{9!} = \dfrac{20}{21}$

随堂练习 3

1. 从一副52张的扑克牌中任意抽取两张，求所抽得的两张牌都是“K”的概率。
2. 在某班的学生中，有13人是A血型，10人是B血型，2人是AB血型及15人是O血型。从中任意选出4人，求下列各事件的概率：
   (a) 2个A血型，2个B血型；
   (b) 2个A血型，1个AB血型，1个O血型；
   (c) 各血型各一人。
3. 将“GERMANY”一字中的所有字母任意排列。求下列各事件的概率：
   (a) 5个子音相邻；
   (b) 5个子音不完全相邻。

练习 21.2

1. 一袋内有9粒球，其中2粒是白球，3粒是红球，4粒是黄球。从中任意抽取一球，求下列各事件的概率：
   (a) 抽得的球是红球；
   (b) 抽得的球不是红球；
   (c) 抽得的球是黄球。
2. 一盒中装有3颗喉糖及5颗口香糖。从中任意抽取两颗，求抽得的两颗糖都是口香糖的概率。
3. 从一副52张的扑克牌中任意抽取三张，求所抽得的三张牌都是“黑桃”的概率。
4. 一箱子中装有4本小说及8本散文。从中任意抽取3本书，求下列各事件的概率：
   (a) 3本都是小说；
   (b) 两本小说，一本散文；
   (c) 3本都是散文。

5. 从 6 男 5 女中选出 4 人成立委员会。求下列各事件的概率：
   (a) 4人都是男性；
   (b) 4人都是女性；
   (c) 男女各两人。
6. 在 100 件产品中，有 95 件是正品，其余的 5 件是次品。从中任意抽取两件，求下列各事件的概率：
   (a) 两件都是正品；
   (b) 两件都是次品；
   (c) 一件是正品，一件是次品。
7. 从“TRIANGLE”一字中任意抽取 3 个字母。求下列各事件的概率：
   (a) 抽得母音比子音多；
   (b) 抽得子音比母音多。
8. 同时投掷三粒骰子一次，求所掷得的点数之和大于 15 的概率。
9. 将 2233344455 的各数字任意排列，求两个“2”恰好排在一起的概率。
10. 将 5 张编号分别为 1，2，3，4，5 的卡片任意排成一行以组成一个五位数，求得到偶数的概率。

21.3 加法原理

互斥与不互斥事件

当两个事件 A 及 B 可同时发生时，我们称 A 与 B 不互斥，事件 A 及 B 就叫做不互斥事件。例如，当投掷一粒骰子一次时，“点数是偶数”及“点数是 3 的倍数”这两个事件可同时发生。因此，这两个事件就是不互斥事件。以下我们求投掷一粒骰子一次，点数是偶数或 3 的倍数的概率。

试验的样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$n(S)=6$。

设事件 A =“点数是偶数” $=\{2,4,6\}$，$n(A)=3$，

所以 $P(A)=\frac{3}{6}$。

设事件 B =“点数是 3 的倍数” $=\{3,6\}$，$n(B)=2$，

所以 $P(B)=\frac{2}{6}$。

$A\cup B$ =“点数是偶数或 3 的倍数” $=\{2,3,4,6\}$，

$n(A\cup B)=4$，所以 $P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$。

$A\cap B$ =“点数同时是偶数及 3 的倍数” $=\{6\}$，

$n(A\cap B)=1$，所以 $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$。

一般上，根据集合的基数公式，

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

将每一项除以 $n(S)$，得

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

即 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

以上的关系式就是概率的加法原理。

在上述例子中，

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

例题 1

从一副 52 张的扑克牌中任意抽取一张，求所抽得的牌是“黑桃”或“Q”的概率。

解 设事件A＝“抽得的牌是黑桃”，$P(A)=\frac{13}{52}$。

设事件B＝“抽得的牌是Q”，$P(B)=\frac{4}{52}$ 。

$A\cap B$ ＝“抽得黑桃Q”，$P(A\cap B)=\frac{1}{52}$

$A\cup B$ ＝“抽得黑桃或Q”，

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}\\&=\frac{4}{13}\end{aligned}$$

例题 2

已知班机 A 延误的概率是 0.32，班机 B 延误的概率是 0.25，两班班机同时延误的概率是 0.18。求这两班班机中至少有一班延误的概率。

解 设事件A＝“班机A延误”，$P(A)=0.32$。

设事件B＝“班机B延误”，$P(B)=0.25$。

$A\cap B$ ＝“A及B同时延误”，$P(A\cap B)=0.18$

$A\cup B$＝“至少有一班机延误”，

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=0.32+0.25-0.18\\&=0.39\end{aligned}$$

当两个事件A及B不可能同时发生时，即$A \cap B = \varnothing$，我们称A与B互斥，事件A及B就叫做互斥事件。例如，一袋内含有红、白两粒球，从中抽出一球，则不是红球就是白球，二者不可能同时出现，这就是互斥事件。

由于A及B是互斥事件，所以$P(A \cap B) = 0$。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

以上的关系式就是互斥事件的加法原理。

由此可知，若事件A与B互斥，A或B发生的概率等于两者的概率之和。

例题 3

投掷一粒骰子一次，求掷得点数小于2或是偶数的概率。

解 根据题意，$n(S) = 6$。

设事件A＝“点数小于2”，$P(A) = \dfrac{1}{6}$。

设事件B＝“点数是偶数”，$P(B) = \dfrac{3}{6}$。

$A \cup B$ ＝“点数小于2或是偶数”

由于事件A与B互斥，

$$\therefore\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$$

例题 4

一袋内有3粒红球，5粒白球及4粒黑球。从中抽取一球，求抽得红球或白球的概率。

解 根据题意，$n(S)=12$。

设事件A＝“抽得红球”，$P(A)=\frac{3}{12}$。

设事件B＝“抽得白球”，$P(B)=\frac{5}{12}$。

$A\cup B$ ＝“抽得红球或白球”

由于事件A与B互斥，

$$\begin{aligned}\therefore\quad P(A\cup B)&=P(A)+P(B)\\&=\frac{3}{12}+\frac{5}{12}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

例题 5

在20件产品中，有15件一等品，5件二等品。从中抽取两件，求至少抽得一件是二等品的概率。

解 S＝“抽取两件产品”，$n(S)={}_{20}C_2=190$

设事件A＝“抽得一件是二等品，另一件是一等品”，

$n(A)={}_{15}C_1\times{}_5C_1=75$，$P(A)=\frac{75}{190}$。

设事件B＝“抽得两件都是二等品”，

$n(B)={}_5C_2=10$，$P(B)=\frac{10}{190}$。

(续) $A\cup B$ =“至少抽得一件是二等品”

由于事件A与B互斥，

$$\therefore\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{75}{190}+\frac{10}{190}$$
$$=\frac{17}{38}$$

随堂练习 4

1. 一袋中有红、黄、蓝三种颜色的卡片各5张。从中任意抽取一张，求抽得红色或黄色卡片的概率。
2. 从一副52张的扑克牌中任意抽取一张，求抽得“红心”或“数字为5的倍数”的概率。
3. 某班的45位学生中，有20位到过巴厘岛或雅加达，其中14位到过巴厘岛，10位到过雅加达。从该班学生中选出一人，求这位学生两个城市都到过的概率。

对立事件

在试验时，若两个互斥事件中必有一个会发生，这两个事件就是对立事件。一个事件A的对立事件记作A'。以抛掷硬币为例，若A是掷得正面的事件，则其对立事件A'就是掷得反面的事件。由于A及A'中必有一个事件会发生，所以$A\cup A'=S$。应用互斥事件概率的加法原理，

$$P(A)+P(A')=P(A\cup A')$$
$$=P(S)$$
$$=1$$
$$\therefore\ \boxed{P(A)=1-P(A')}$$

以上的关系式可用来计算对立事件的概率。

思考题

一盒中有3粒红球，4粒黑球及5粒白球。从中任意抽取一球。

设A =“抽得红球”，

B =“抽得白球”，

C =“抽得的球不是红球”，

判断以上哪些是互斥事件，哪些是对立事件。

例题5除了可使用互斥事件的方法计算，也可使用对立事件的方法计算。

例题 6

在20件产品中，有15件一等品，5件二等品。从中抽取两件，求至少抽得一件二等品的概率。

解 S＝“抽取两件产品”，$n(S) = {}_{20}C_2 = 190$

设事件A＝“至少抽得一件二等品”，

则A′＝“没抽得二等品”。

$n(A') = {}_{15}C_2 = 105$， $P(A') = \frac{105}{190} = \frac{21}{38}$

$$\begin{aligned} \therefore\ P(A) &= 1 - P(A') \\ &= 1 - \frac{21}{38} \\ &= \frac{17}{38} \end{aligned}$$

例题 7

篮子里有3粒橙，5粒梨及5粒苹果。任意抽取4粒水果，求至少抽得一粒苹果的概率。

解 S＝“任意抽取4粒水果”，$n(S) = {}_{13}C_4 = 715$。

设事件A＝“至少抽得一粒苹果”，

则A′＝“没抽得苹果”。

$n(A') = {}_{8}C_4 = 70$， $P(A') = \frac{70}{715} = \frac{14}{143}$

$$\begin{aligned} \therefore\ P(A) &= 1 - \frac{14}{143} \\ &= \frac{129}{143} \end{aligned}$$

例题 8

从一副52张的扑克牌中任意抽取3张，求至少抽得一张“K”的概率。

解 S =“任意抽取 3 张牌”， $n(S) = {}_{52}C_3 = 22100$

设事件 A =“至少抽得一张 K”，

则 A′=“没抽得 K”。

$n(A') = {}_{48}C_3 = 17296$， $P(A') = \dfrac{17296}{22100} = \dfrac{4324}{5525}$

$\therefore\ P(A) = 1 - \dfrac{4324}{5525}$

$= \dfrac{1201}{5525}$

随堂练习 5

1. 某班有22个男生及23个女生。从中任意选出2人，求这2人中至少有一个男生的概率。
2. 在一项抽奖游戏中，60 个箱子中的其中 5 个有奖品。任意选择 2个箱子，求至少一个有奖品的概率。

练习 21.3

1. 一盒中有 5 粒红球，6 粒黄球及 8 粒黑球。任意抽取一球，求抽得红球或黄球的概率。
2. 书架上有 18 本不同的参考书，其中数学及华文各有 6 本及 5 本，其余的是经济学。从中任意抽取两本书，求抽得至少一本是数学或华文的概率。

3. 衣架上有15件衬衫，10件背心及5件T恤。从中任意抽取2件衣物，求抽得至少一件T恤的概率。
4. 在一项抽奖游戏的50份奖品中，其中1份是RM800现金奖，2份是RM500现金奖，5份是RM100现金奖，其余的是RM10的书券。某人抽奖两次，求抽得至少一份现金奖的概率。
5. 有50人在教室里开会，其中学生35人，学生家长12人及老师 3 人。从与会者中任选一名发言人，求下列各事件的概率：
   (a) 发言人是老师或学生；
   (b) 发言人是老师或家长；
   (c) 发言人是学生或家长。
6. 100张彩票中的其中3张是有奖的。某人买了10张彩票，求下列各事件的概率
   (a) 全部都不中奖；
   (b) 至少有一张中奖。
7. 某班的45名学生中有11人曾经捐过血。从中任意选出三人，求下列各事件的概率：
   (a) 三人都捐过血；
   (b) 三人都未捐过血；
   (c) 至少一人捐过血。
8. 同时投掷两粒骰子，求掷得的点数之和至少是9的概率。
9. 连续抛掷一枚硬币5次，求掷得至少一次“正面”的概率。
10. 一盒中有7粒红球及10粒白球。从中任意抽取3球，求下列各事件的概率：
   (a) 抽得至少一粒红球；
   (b) 抽得至少一粒白球；
   (c) 抽得至少两粒红球。
11. 投掷三粒骰子一次，求下列各事件的概率：　:
   (a) 恰有一粒骰子的点数是6；
   (b) 恰有一粒或全部三粒骰子的点数是1。

21.4 乘法原理

独立事件

对于两个事件 A 及 B，若事件 A 发生的概率与事件 B 发生的概率互不影响，那么这两个事件叫做独立事件。例如，投掷一粒骰子两次，第一次出现的结果并不会影响到第二次出现的结果，反之亦然。在此情况下，前后两个事件就是独立的事件。两个相互独立的事件同时发生的概率等于每个事件发生的概率之积：

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

例题 1

甲盒里有 6 粒白球及 4 粒黑球；乙盒里有 3 粒白球及 5 粒黑球。任意从这两个盒里各抽取一球，求抽得的两粒球都是白球的概率。

解 设事件 A＝“从甲盒里抽得白球”，

设事件 B＝“从乙盒里抽得白球”。

由于 A 与 B 是独立事件，

$$\begin{aligned}\therefore\ P(A\cap B)&=P(A)\times P(B)\\&=\frac{6}{10}\times\frac{3}{8}\\&=\frac{9}{40}\end{aligned}$$

例题 2

抛掷一枚硬币 5 次，求 5 次都掷得“正面”的概率。

解 每一次掷得“正面”的概率是 $\frac{1}{2}$，且前一次抛掷的结果不会影响后一次抛掷的结果。因此，每一次抛掷都是一个独立事件。

所求的概率 $P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{32}$

例题 3

20 张彩票中的其中 3 张有奖。二人依次抽彩票，问他们之间谁中奖的概率比较大?

解 设事件 M＝“第一人中奖且第二人也中奖”，
设事件 N＝“第一人不中奖而第二人中奖”。

根据题意，第一人中奖的概率是 $\frac{3}{20}$。

而第二人中奖的事件是 $M\cup N$:
第一人中奖后，彩票剩下 19 张，有奖的则剩下 2张。因此，第二人中奖的概率是 $\frac{2}{19}$。

∴ 两人同时中奖的概率 $P(M)=\frac{3}{20}\times\frac{2}{19}$

$=\frac{3}{190}$

(续) 第一人没中奖的概率是 $\frac{17}{20}$。

若第一人没中奖，第二人中奖的概率是 $\frac{3}{19}$。

∴ 第一人没中奖而第二人中奖的概率 $P(N)=\frac{17}{20}\times\frac{3}{19}$

$$=\frac{51}{380}$$

由于M与N互斥，所以 $P(M\cap N)=0$。因此，第二人中奖的概率是 $P(M\cup N)=P(M)+P(N)$

$$=\frac{3}{190}+\frac{51}{380}$$

$$=\frac{3}{20}$$

第二人中奖的概率也是 $\frac{3}{20}$。

∴ 两人中奖的概率相等。

例题 4

如图 21-4 所示，有一网状管子从 O 向下依次分支。一球从 O 进入管中，球掉落至各个分支点时，落入左右两个分支的机会均等。计算球分别从 A、B、C 及 D 各出口处掉落出来的概率。

解 球由上往下掉落，遇到分支点时，选择任何一个通道的概率是 $\frac{1}{2}$。球从 O 到 A 掉落的路径是：

$O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow A$

途经 P、Q 及 R 三个分支点时所选择的路径是三个独立的事件。因此，从 A 掉落出来的概率

$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$。

同理，从 D 掉落出来的概率 $P(D)=\frac{1}{8}$。

由于球必定从四个出口的其中一个掉落出来，

所以 $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$。

$$\begin{aligned}P(B)+P(C)&=1-P(A)-P(D)\\&=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

∴ 由管子的对称性可知，$P(B)=P(C)=\frac{3}{8}$。

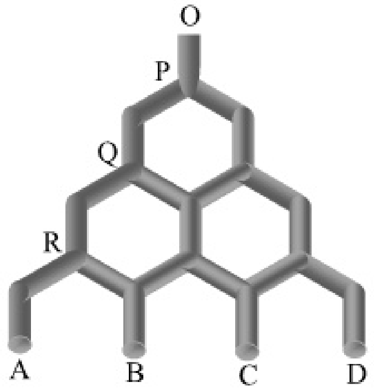


图 21-4

补充资料

由于管子的对称性，我们也可根据球掉落时可能经过的路径逐步标示出发生的概率，最终求得球从 A、B、C 及 D 四个出口掉落出来的概率。

如图 21-5 所示，当球途经 P 分支点时，往左边或右边管子掉落的概率均等，即概率都是 $\frac{1}{2}$ 。当球途经 Q 分支点时，往左边或右边管子掉落的概率同样是均等的，即概率都是 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 。另外，球可能经由 Q 点或 T 点到达 S 点。所以，球经过 SU 的概率是 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ 。依此，可由上至下标出球可能经过各段管子的概率。

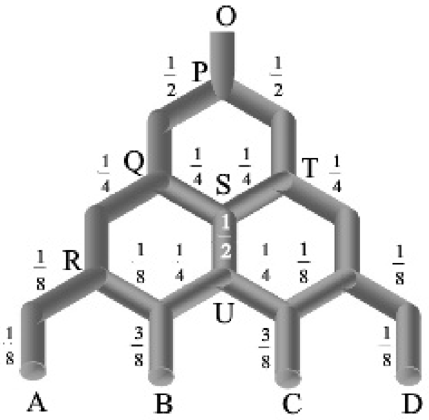


图 21-5

$\therefore\quad P(A)=P(D)=\frac{1}{8}\qquad P(B)=P(C)=\frac{3}{8}$

例题 5

甲、乙、丙三人参加一项考试，他们通过考试的概率分别是 $\frac{4}{7}$，$\frac{3}{5}$ 及 $\frac{2}{3}$。求下列各事件的概率：

(a) 三人都通过考试；
(b) 只有一人通过考试；
(c) 恰好有两人通过考试；
(d) 至少有一人通过考试。

解 (a) 设事件A＝“三人都通过考试”。

$$P(A)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{8}{35}$$

(b) 设事件 B =“只有一人通过考试”。这个事件可分成三种情况：

B_1 =“甲通过考试，乙及丙没通过考试”

$$P(B_1) = \frac{4}{7} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{8}{105}$$

B_2 =“乙通过考试，甲及丙没通过考试”

$$P(B_2) = \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{3}{35}$$

B_3 =“丙通过考试，甲及乙没通过考试”

$$P(B_3) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)$$
$$= \frac{4}{35}$$

$$\therefore \quad P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$
$$= \frac{8}{105} + \frac{3}{35} + \frac{4}{35}$$
$$= \frac{29}{105}$$

(c) 设事件 C =“恰好有两人通过考试”。这个事件也可分成三种情况：

C_1 =“甲及乙通过考试，丙没通过考试”

$$P(C_1) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{4}{35}$$

(续) C_2＝“甲及丙通过考试，乙没通过考试”

$$P(C_2)=\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)$$
$$=\frac{16}{105}$$

C_3＝“乙及丙通过考试，甲没通过考试”

$$P(C_3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{4}{7}\right)$$
$$=\frac{6}{35}$$

$$\therefore\quad P(C)=P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)$$
$$=\frac{4}{35}+\frac{16}{105}+\frac{6}{35}$$
$$=\frac{46}{105}$$

(d) 设事件D ＝“至少有一人通过考试”，
则 D'＝“没人通过考试”。

$$P(D)=1-P(D')$$
$$=1-\left(1-\frac{4}{7}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)$$
$$=1-\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{33}{35}$$

随堂练习 6

1. 两个果篮内分别有 10 粒橙及 12 粒苹果，其中 2 粒橙及 4 粒苹果已经变坏。从每个果篮中各取一粒水果，求取得的两粒水果都已变坏的概率。
2. 甲、乙二人参加一项射箭比赛，他们射中红心的概率分别是 $\frac{5}{8}$ 及 $\frac{7}{15}$。求下列各事件的概率：
   (a) 两人都射中红心；
   (b) 两人都射不中红心；
   (c) 至少一人射中红心。

练习 21.4a

1. 投掷一粒骰子三次，求第一次及第二次出现的点数是2，第三次出现的点数是奇数的概率。
2. 将一枚硬币连掷五次，求恰好连续四次掷得“正面”的概率。
3. 某气象站的预报准确率是 80%。求 5 次预报中恰有 4 次准确的概率。(答案准确至四位小数)
4. 某种零件的加工有三道工序，每一道工序的废品率分别是1.2 %，1.8 % 及 0.8%。若每道工序会否出废品不受其他工序的影响，求产品的合格率。
5. 从一副 52 张的扑克牌中任意抽取一张，不放回，再抽取一张，求第二张牌是“黑桃”的概率。
6. 3人独立去破译一份密码，他们破译的概率分别是 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}$ 及 $\frac{1}{3}$。求这份密码被破译的概率。
7. 三人参加一项射击比赛，A 五发三中，B 三发二中，C 二发一中。现三人各射击一次，求下列各事件的概率：
   (a) 三人都击中目标；
   (b) 只有一人击中目标；
   (c) 至少一人击中目标。

8. 一盒子里有5粒黑球，4粒黄球及3粒白球。每次任意抽取一球后再将球放回盒里。现抽取三次。求下列各事件的概率：
   (a) 只有一次抽得黄球；
   (b) 三次都抽得黄球；
   (c) 抽得一次是黑球，一次是黄球及一次是白球。

例题 6

某中学生投篮的命中率是0.2。求他投篮五次，恰好投中两次的概率。

解1 已知命中率是0.2，没有命中的概率是$1-0.2=0.8$。
同时，在五次投篮中，必须要有两次投中(余下三次没有投中)，而这两次投中的次序可任意分布，有十种情况：

(中，中，不中，不中，不中)　(不中，中，不中，中，不中)
(中，不中，中，不中，不中)　(不中，中，不中，不中，中)
(中，不中，不中，中，不中)　(不中，不中，中，中，不中)
(中，不中，不中，不中，中)　(不中，不中，中，不中，中)
(不中，中，中，不中，不中)　(不中，不中，不中，中，中)

每一种情况的概率都是$0.2\times0.2\times0.8\times0.8\times0.8$。
$\therefore$ 所求的概率是$10(0.2\times0.2\times0.8\times0.8\times0.8)=0.2048$。

使用排列组合的方法解题：

解2 在五次投篮投中两次的方法有${}_5C_2=10$种。
我们知道每一种情况发生的概率都是$(0.2)^2\times(0.8)^3$。
$\therefore$ 所求的概率是${}_5C_2\times(0.2)^2\times(0.8)^3=0.2048$。

例题 7

一个测验有6道选择题，每道题有5个选项，其中只有一个选项是正确的。某学生随意作答，问恰好答中三道题的概率是多少？

解 每一道题答对的概率是 $\frac{1}{5}$，答错的概率是 $\frac{4}{5}$。

$\therefore$ 所求的概率是 ${}_6C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{256}{3125}$。

例题 8

一个测验有 6 道是非题。某学生随意作答，求下列各事件的概率：

(a) 都答对；

(b) 至少答错一题；

(c) 恰好答对三题。

解 每一道题答对及答错的概率都是 $\frac{1}{2}$。

(a) 都答对的概率 $= {}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=\frac{1}{64}$$

(b) 至少答错一题的概率 $= 1 - {}_6C_6\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

$$= 1 - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{63}{64}$$

(c) 恰好答对三题的概率 $= {}_6C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$$= \frac{5}{16}$$

随堂练习 7

某社区有八成的家庭签购光纤网络配套。现从该社区抽选 10 户家庭进行调查，求下列各事件的概率 (答案准确至四位小数)：

(a) 恰有半数的家庭签购光纤网络配套；

(b) 全部 10 户家庭都签购光纤网络配套；

(c) 至少有一户家庭没签购光纤网络配套。

练习 21.4b

1. 栽种某植物的存活率是 0.6。现栽种十棵此类植物，求恰好有五棵能存活下来的概率。
2. 某人投篮的命中率是 0.4。求他投篮 25 次，恰好投中 10 次的概率。
3. 根据统计，某城市有 85% 的人口注射 B 型肝炎疫苗。现从该城市任意抽选 8 人进行健康检查，求最多有两人没有注射疫苗的概率。
4. 某药物治愈伤风的概率是 0.96。现有 10 名伤风患者服食该药物，求至少有 8 人被治愈的概率。

5. 某工厂生产一种零件，出现次品的概率是 0.04。现生产此零件 20 件，求下列各事件的概率：
   (a) 恰有一件是次品；
   (b) 恰有两件是次品；
   (c) 最多有一件是次品。
6. 抛掷一枚匀称的硬币 5 次，求下列事件的概率：
   (a) 恰好掷得 3 次“正面”；
   (b) 至少掷得 3 次“正面”；
   (c) 掷得“正面”的次数为奇数。
7. 某人在开车上班的路途中需经过四个交通灯。已知每个交通灯的红灯、黄灯及绿灯的亮灯时间分别是 90 秒、5 秒及 25 秒。求下列各事件的概率：
   (a) 在每个交通灯都遇红灯；
   (b) 只在前两个交通灯遇红灯；
   (c) 恰有两个交通灯遇红灯。

21.5 数学期望值

考虑以下的问题：若某人在一项商业活动中，获利 RM 300 的概率是 0.6，亏损 RM 100 的概率是 0.4。此人现进行 10 次该项商业活动，由概率得知，可获利 RM 300 的次数预计有 6 次，而亏损 RM 100 的次数有 4 次。所以，这 10 次商业活动的获利总额是 $300\times6+(-100)\times4$。

$$\begin{aligned}\text{每次活动的平均利润} &= \frac{300\times6+(-100)\times4}{10}\\ &= 300\times0.6+(-100)\times0.4\\ &= 140\end{aligned}$$

这个平均值叫做此人进行该商业活动的数学期望值，简称期望值。

期望值并非指每次活动都可获利 RM 140，而是在进行大量同样的活动后，平均每次可望获利 RM 140。

推广之，设某人获利 x_1 元，x_2 元，…，x_k元的概率分别是 p_1，p_2，…，p_k，其中 $p_1+p_2+...+p_k=1$，则他获利的期望值是

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_kp_k$$

注意

x_i 可正可负，正号表示赚得 x_i 元，负号表示亏损 x_i 元。因此，所得期望值可能是正值、零或负值。

所谓期望值实际上是一种特别的“加权平均数”。因此，必须从平均值的意义上理解所得期望值。

例题 1

某保险公司售卖一份个人旅游保险予一名旅客，保费是 RM 15，保额是 RM 1,000。根据统计，旅途中发生意外的概率是 $\frac{1}{1000}$，求该保险公司的期望利润。

解 若旅客在旅途中未发生意外，保险公司将赚 RM 15，概率是 $1-\frac{1}{1000}=\frac{999}{1000}$，否则将亏损 RM 985。

所以，保险公司的期望利润是

$$\begin{aligned}E&=15\times\frac{999}{1000}+(-985)\times\frac{1}{1000}\\&=\text{RM }14\end{aligned}$$

期望利润为 RM 14 并非指保险公司每售出一份旅游保险可获利 RM 14。其实际意义是指保险公司在售出大量旅游保险后，每份保单的平均利润是 RM 14 。

例题 2

某机构发行 10,000 张一元彩票，其中只有一张是有奖的，奖金为 RM 6,000。某人购买一张彩票，求他所得的期望值。

解 中奖的概率是 $\frac{1}{10000}$，可获利 RM 5,999；

不中奖的概率是 $1-\frac{1}{10000}=\frac{9999}{10000}$，亏损 RM 1。

因此，以RM 1购买此彩票所得的期望值是

$$
\begin{aligned}
E &= 5999\times\frac{1}{10000}+(-1)\times\frac{9999}{10000} \\
&= -\text{RM } 0.40
\end{aligned}
$$

例题 3

已知半岛某地区在年初的天气只有三种情况：晴天、阴天及雨天。某露天小贩在晴天时可获利 RM 1,000；阴天时生意一般，只能获利 RM 500；雨天时则货物滞销，将亏损 RM 500。根据天气预报，某天是晴天及阴天的概率分别是0.4及0.2，该小贩当天可望获利多少？

解 该小贩当天可望获利

$$
\begin{aligned}
E &= 1000\times0.4+500\times0.2+(-500)\times(1-0.4-0.2) \\
&= 400+100-200 \\
&= \text{RM } 300
\end{aligned}
$$

随堂练习 8

1. 某人付RM2玩一场游戏，他赢得此游戏的概率是0.4，并可获得RM3的奖金。求此人在一场游戏中获利的期望值。
2. 在一项投资活动中，某人获利 RM 2,500 的概率是0.55；亏损 RM 1,200 的概率是0.45。求此人在这项投资活动中的期望利润。

练习 21.5

1. 某人在一项商业活动中，可获利 RM 10,000 的概率是 $\frac{3}{5}$，亏损 RM 6,000 的概率是 $\frac{2}{5}$，求他获利的期望值。
2. 某公司生产灯泡，每个正品灯泡获利 RM 2，每个次品灯泡亏损 50 仙。若灯泡中有 2% 是次品，求生产每个灯泡获利的期望值。
3. 某工厂替每位工人投保 RM 60 的意外保险，员工若因工受伤将获赔 RM 1,200。已知该工厂发生意外的概率是0.005，求保险公司从每份保单中获利的期望值。
4. 某航空公司以 RM 8 售卖一项航班保障计划予一乘客。当航班延误一个小时或以上时，乘客将获赔 RM 250。根据统计，此航空公司航班延误一个小时或以上的百分率是 2%，求航空公司获利的期望值。
5. 一彩票每张售价 RM 2，其中奖的概率如下：获得 RM 5,000 的概率是 $\frac{1}{10000}$；获得 RM 500 的概率是 $\frac{1}{1000}$。某人购买一张彩票，求其所得的期望值。
6. 某人以一元来玩一个游戏，其获利情况如下：获得 RM 3,000，RM 2,000 及 RM 1,000 的概率都是 $\frac{1}{10000}$，求此人所得的期望值。问是否划算？
7. 某独中举行的游艺会发了 8000 张的 1 元彩票，其中有 5 张奖金 RM 500、8 张奖金 RM 300、10 张奖金 RM 100 及 50 张奖金 RM 10。求某人购买一张彩票所得的期望值。

21.6 常态分配

前面所讨论的概率模型，其试验可能得到的结果只有有限个，即样本空间是有限集合。但是现实生活中的很多试验，其可能得到的结果为某个范围内的实数。

例如，测量高中二男生的身高，其结果 (以 cm 为单位) 是大于 0 的实数。当被测量的人数越多时，其身高的频数多边形将会越趋近于如图 21-6 所示的钟形曲线，这类曲线叫做常态曲线。

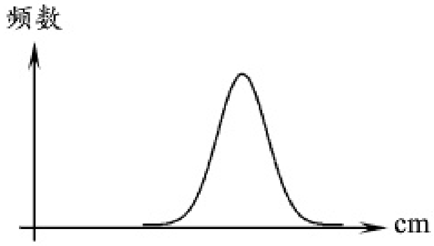


图 21-6

常态分配是现实生活中最常用的概率模型。一个常态分配有两个参数：平均数 μ 及标准差 σ，其对应的常态曲线的函数表达式是

$$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

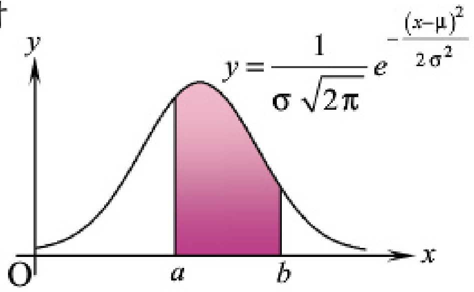


图 21-7

若一个试验的观测值 X 是一个平均数为 μ 及标准差为 σ 的常态分配，我们以

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

表示。观测值 X 落在区间 (a, b) 的概率 $P(a<X<b)$ 就是由 x 轴，直线 $x=a$，$x=b$ 及常态曲线所围成的区域 (图 21-7 的阴影部分) 的面积。

一个平均数为 0，标准差为 1 的常态分配叫做标准常态分配。其常态曲线

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

对称于 y 轴，如图 21-8 所示。

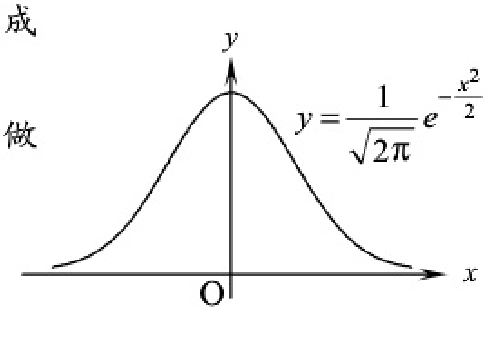


图 21-8

若 X 是一个平均数为 μ 及标准差为 σ 的常态分配，则

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

是一个标准常态分配，即

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则 $Z\sim N(0,1)$。

因此，一般常态分配的问题都能转化成标准常态分配的问题来处理。

为了计算与标准常态分配有关的事件的概率，我们在附录列出了图 21-9 中阴影部分的面积的表。若 Z 是一个标准常态分配，z 是一个小于 3.49 的正数，我们可利用此表求出 $Q(z)=P(Z\geq z)$。

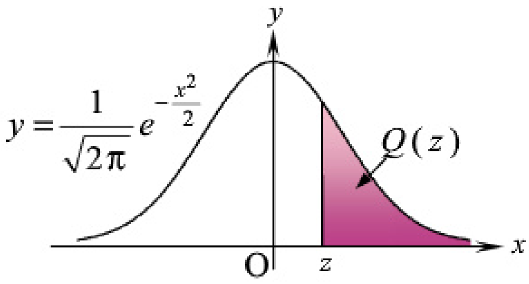


图 21-9

例如，为了求出 $P(Z\geq 1.23)$，先在表的第一列找出 1.2 所在的行。此行中对应 3 (小数的第二位) 的位置的数值是 0.1093，这就是所求的 $P(Z\geq 1.23)$。

z	0	1	2	3	…
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	

任何与标准常态分配有关的事件的概率，可以利用对称性及概率的性质求得。

注意

由于必然事件的概率是 1，所以在标准常态曲线下方及 x 轴上方的区域的面积为 1。

注意

若 X 是一常态分配，x 是任意实数，$P(X=x)=0$。
因此，$P(X<x)=P(X\leq x)$，$P(X>x)=P(X\geq x)$。

例题 1

若某试验观测值 Z 呈标准常态分配，求下列各事件的概率：

(a) “$Z \le -1.23$” (b) “$Z < 0.35$”

(c) “$Z \ge -0.52$” (d) “$0.20 < Z \le 1.01$”

(e) “$-2.53 < Z < -1.55$” (f) “$-2.53 < Z \le 1.55$”

解 (a) 由对称性可知，$P(Z \le -1.23) = P(Z \ge 1.23)$
$= 0.1093$

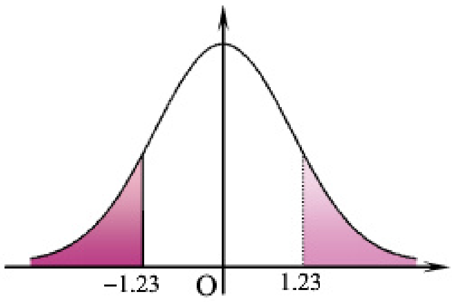


图 21-10

(b) “$Z<0.35$”的对立事件是“$Z \ge 0.35$”。

$\therefore\ P(Z<0.35) = 1 - P(Z \ge 0.35)$
$= 1 - 0.3632$
$= 0.6368$

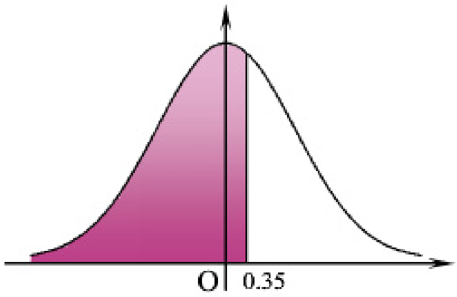


图 21-11

(c) $P(Z \ge -0.52) = 1 - P(Z < -0.52)$
$= 1 - P(Z > 0.52)$
$= 1 - 0.3015$
$= 0.6985$

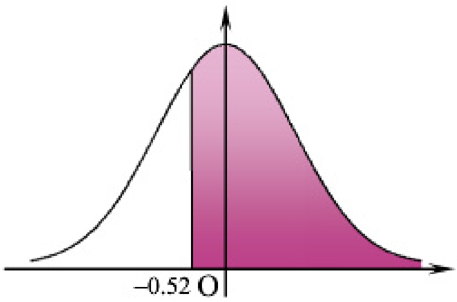


图 21-12

(d) $P(0.2<Z\leq 1.01)=P(Z>0.2)-P(Z>1.01)$
$=0.4207-0.1562$
$=0.2645$

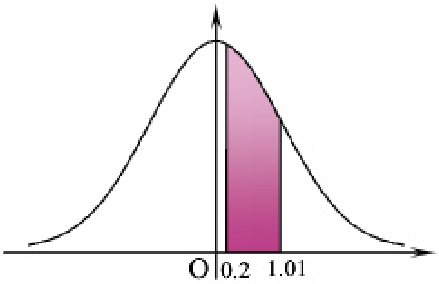


图 21-13

(e) $P(-2.53<Z<-1.55)=P(1.55<Z<2.53)$
$=P(Z>1.55)-P(Z\geq 2.53)$
$=0.0606-0.0057$
$=0.0549$

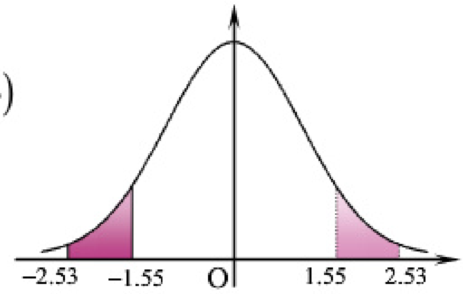


图 21-14

(f) $P(-2.53<Z\leq 1.55)=1-P(Z\leq -2.53)-P(Z>1.55)$
$=1-P(Z\geq 2.53)-P(Z>1.55)$
$=1-0.0057-0.0606$
$=0.9337$

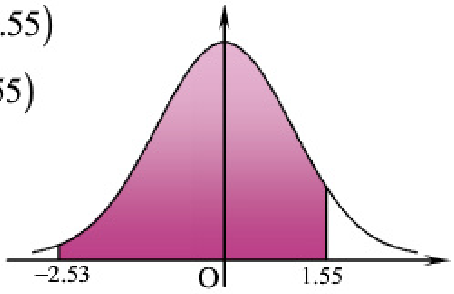


图 21-15

例题 2

已知某试验观测值 Z 呈标准常态分配，求下列各式中 a 的值。

(a) $P(Z > a) = 0.2296$

(b) $P(Z < a) = 0.8485$

(c) $P(Z > a) = 0.8997$

(d) $P(Z < a) = 0.2483$

(e) $P(|Z| > a) = 0.0628$

(f) $P(|Z| < a) = 0.6528$

注意

若 Z 是标准常态分配，当 $a > 0$ 时，$P(Z < a) > 0.5$，$P(Z > a) < 0.5$；当 $a < 0$ 时，$P(Z < a) < 0.5$，$P(Z > a) > 0.5$。

解

(a) 由常态分配表可得，若 $P(Z > a) = 0.2296$

$a = 0.74$

(b) $P(Z < a) = 0.8485$

$P(Z \geq a) = 0.1515$

$a = 1.03$

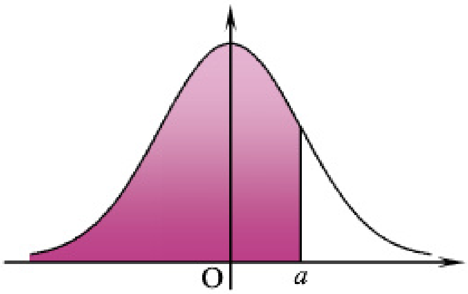


图 21-16

(c) $\because$ $0.8997 > 0.5$，$\therefore$ $a < 0$

$P(Z > a) = 0.8997$

$P(Z \leq a) = 0.1003$

$P(Z \geq -a) = 0.1003$

$-a = 1.28$

$a = -1.28$

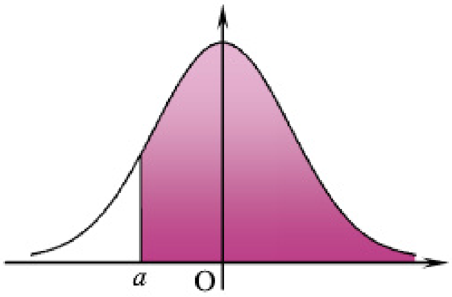


图 21-17

(d) $\because\ 0.2483 > 0.5$， $\therefore\ a < 0$

$$P(Z < a) = 0.2483$$
$$P(Z > -a) = 0.2483$$
$$-a = 0.68$$
$$a = -0.68$$

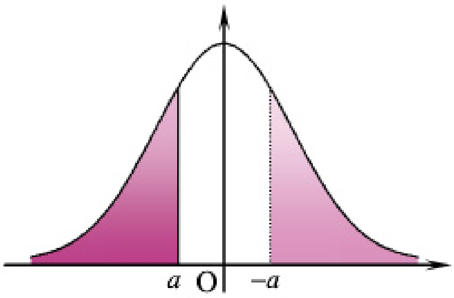


图 21-18

(e) $P(|Z| > a) = 0.0628$

$$2P(Z > a) = 0.0628$$
$$P(Z > a) = 0.0314$$
$$a = 1.86$$

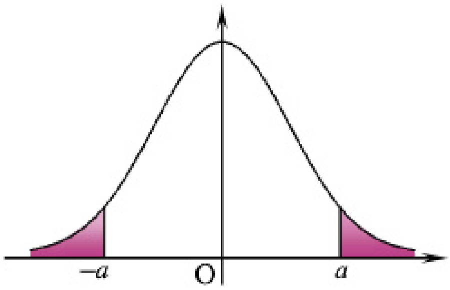


图 21-19

(f) $P(|Z| < a) = 0.6528$

$$P(|Z| \geq a) = 0.3472$$
$$2P(Z \geq a) = 0.3472$$
$$P(Z \geq a) = 0.1736$$
$$a = 0.94$$

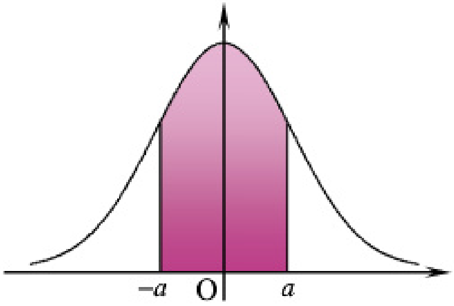


图 21-20

例题 3

某校的高中部有1500名男生，他们的高度分布可视为常态分配，平均身高为176 cm，标准差为9.3 cm。

(a) 任选一名男生，求其身高低于155 cm的概率。

(b) 任选一名男生，求其身高介于160 cm及190 cm之间的概率。

(c) 求身高超过180 cm的男生人数。

(d) 求身高超过170 cm的男生所占的百分率。

(e) 若有27.79%的男生的身高低于h cm，求h的值。

(f) 若有50%的男生的身高介于$(176-k)$ cm及$(176+k)$ cm之间，求k的值。

(g) 任选6名男生，求恰好有4人的身高超过180 cm的概率。

解 令X为男生的身高，则$Z=\dfrac{X-176}{9.3}$为标准常态分配。

(a)
$$\begin{aligned}P(X<155)&=P\left(\frac{X-176}{9.3}<\frac{155-176}{9.3}\right)\\&=P(Z<-2.26)\\&=P(Z>2.26)\\&=0.0119\end{aligned}$$

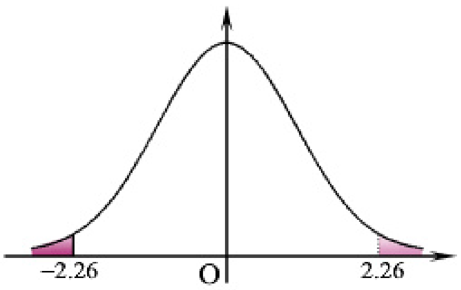


图 21-21

(b)
$$\begin{aligned}P(160<X<190)&=P\left(\frac{160-176}{9.3}<Z<\frac{190-176}{9.3}\right)\\&=P(-1.72<Z<1.51)\\&=1-P(Z\le-1.72)-P(Z\ge1.51)\\&=1-P(Z\ge1.72)-P(Z\ge1.51)\\&=1-0.0427-0.0655\\&=0.8918\end{aligned}$$

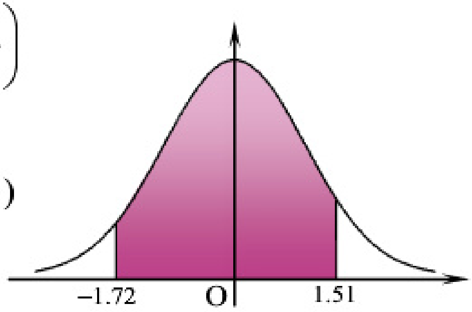


图 21-22

(c) $$\begin{aligned} P(X>180) &= P\left(Z>\frac{180-176}{9.3}\right) \\ &= P(Z>0.43) \\ &= 0.3336 \end{aligned}$$

$1500\times0.3336=500.4$

∴ 身高超过 180 cm 的男生有 500 人。

(d) $$\begin{aligned} P(X>170) &= P\left(Z>\frac{170-176}{9.3}\right) \\ &= P(Z>-0.65) \\ &= 1-P(Z\le-0.65) \\ &= 1-P(Z\ge0.65) \\ &= 1-0.2578 \\ &= 0.7422 \end{aligned}$$

∴ 身高超过 170 cm 的男生占 74.22%。

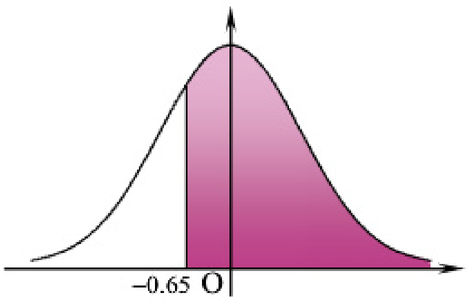


图 21-23

(e) $$\begin{aligned} P(X<h) &= 0.2776 \\ P\left(Z<\frac{h-176}{9.3}\right) &= 0.2776 \\ P\left(Z>-\frac{h-176}{9.3}\right) &= 0.2776 \\ -\frac{h-176}{9.3} &= 0.59 \\ h &= 170.51 \end{aligned}$$

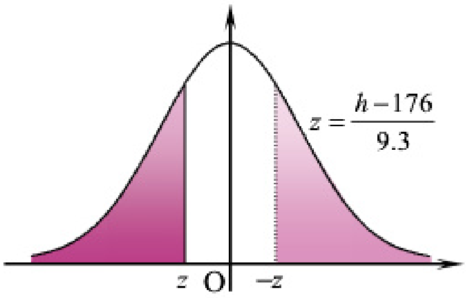


图 21-24

(f) $P(176-k<X<176+k)=0.4844$

$$P\left(-\frac{k}{9.3}<Z<\frac{k}{9.3}\right)=0.4844$$

$$2P\left(Z\geq\frac{k}{9.3}\right)=0.5156$$

$$P\left(Z\geq\frac{k}{9.3}\right)=0.2578$$

$$\frac{k}{9.3}=0.65$$

$$k=6.05$$

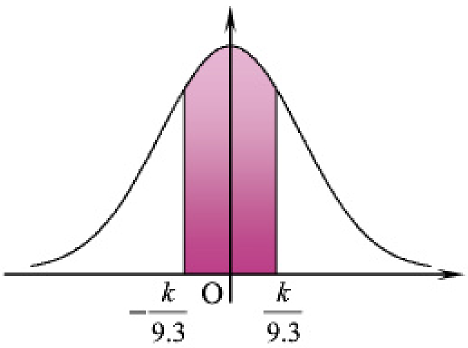


图 21-25

(g) 身高超过 180 cm 的概率 = 0.3336

身高低于 180 cm 的概率 = 0.6664

∴ 任选 6 名男生，恰好有 4 人的身高超过 180 cm 的概率是

$$P={}_6C_4\times(0.3336)^4\times(0.6664)^2$$

$$=0.0825$$

随堂练习 9

有 2500 名学生参加高中统考地理科的考试，他们的成绩分布可视为常态分配，其平均分数为 60 分，标准差为 11 分。

(a) 求分数低于 40 分的学生人数。

(b) 若 A1 等级为 78 分或以上，求考获 A1 等级的学生所占的百分率。

(c) 若及格率是 90%，求及格分数。(答案准确至整数)

练习 21.6

1. 若某试验观测值 Z 呈标准常态分配，求下列各概率：

   (a) $P(Z > 0.91)$
   (b) $P(Z \le -2.01)$
   (c) $P(Z \ge -0.5)$
   (d) $P(0.24 < Z \le 1.79)$
   (e) $P(-2.21 < Z < -0.97)$
   (f) $P(-2.39 < Z \le 0.56)$

2. 若某试验观测值 Z 呈标准常态分配，求下列各式中 a 的值。

   (a) $P(Z > a) = 0.0505$
   (b) $P(Z < a) = 0.8980$
   (c) $P(Z < a) = 0.3632$
   (d) $P(Z > a) = 0.8599$
   (e) $P(|Z| > a) = 0.0142$
   (f) $P(|Z| < a) = 0.7888$

3. 一工厂生产罐装咖啡，每罐咖啡的容量可视为常态分配，平均容量为 244.5 ml，标准差为 5.4 ml。

   (a) 任选一罐咖啡，求其容量少于 235 ml 的概率。
   (b) 任选一罐咖啡，求其容量介于 240 ml 及 250 ml 之间的概率。
   (c) 该工厂在某星期售出了 18,000 罐咖啡，其中有多少罐的容量超过 260 ml？
   (d) 某人买了 7 罐咖啡，求恰好有 4 罐的容量少于 242 ml 的概率。

4. 一机器生产包装饼干，每包饼干的质量可视为常态分配，平均质量为 501.25 克，标准差为 5.32 克。

   (a) 求质量少于 490 克所占的百分率。
   (b) 由该机器所生产的 10,000 包饼干中，有多少包的质量超过 510 克？
   (c) 若有 2.5% 的包装饼干少于 a 克，求 a 的值。
   (d) 若有 99.02 % 的包装饼干的质量介于 $(501.25-c)$ 克及 $(501.25+c)$ 克之间，求 c 的值。

5. A 牌电视机的寿命可视为常态分配，其平均寿命为 7.28 年，标准差为 2.23 年。该电视机的保证期为 3 年。若电视机在保证期内损坏，消费者可获免费退换。求被退换的电视机所占的百分率。

6. 设某公司在一个工作日内所收到的信件数可视为常态分配。已知一个工作日内收到超过 150 封信件的概率是 0.1210，而收到超过 50 封信件的概率是 0.9495。求每个工作日所收到的信件的平均数及标准差。

7. 某独中的入学试有 2,256 名考生，考试的总分是 400 分，有 1,200 人被录取。考生的成绩分布可视为常态分配，平均分数为 189 分，标准差为 53 分。
   (a) 求考获 160 分以下的考生人数。
   (b) 求被录取的新生的最低分数。(答案准确至整数)
   (c) 若考获 300 分以上的学生可获得奖学金，求获得奖学金的新生人数及其占新生总数的百分率。
   (d) 若校方规定考获 200 分以下的新生须参加额外的补习，求参加额外补习的新生人数。
8. 有一组数据呈常态分配，平均数为μ，标准差为σ。求在这组数据中，
   (a) 介于$\mu-\sigma$ 及 $\mu+\sigma$ 之间所占的百分率；
   (b) 介于$\mu-2\sigma$ 及 $\mu+2\sigma$ 之间所占的百分率；
   (c) 介于$\mu-3\sigma$ 及 $\mu+3\sigma$ 之间所占的百分率。

总复习题 21

1. 同时投掷两粒骰子，求点数之和为 8 的事件。
2. 某班共有男生 30 名，女生 12 名。随意选出一名代表，求男生当选的概率。
3. 从一副 52 张的扑克牌中任意抽取一张，求下列各事件的概率：
   (a) 抽得“黑桃”；
   (b) 不是“黑桃”。
4. 从一副 52 张的扑克牌中任意抽取一张，求下列各事件的概率：
   (a) 抽得“梅花”；
   (b) 抽得“A”；
   (c) 抽得“梅花 A”；
   (d) 抽得“梅花”或“A”。

5. 随意写出一个二位数，求下列各事件的概率：
   (a) 大于 20；
   (b) 偶数；
   (c) 奇数。
6. 设电话号码由 0，1，2，…，9 中的任意 7 个数字所组成，某人只记得同事家电话号码的前三个数字，而忘了后四个数字。问他一次拨号就拨对该电话号码的概率是多少？
7. 甲、乙两人各投掷两粒骰子，乙先掷得 10 点，问甲能赢乙的概率是多少？
8. 在一项射击比赛中，甲及乙胜出的概率分别是 0.35 及 0.45。求两人在比赛中皆落败的概率。
9. 某公司有 200 名职员，其中有四分之一是外国人。这些职员中有 115 名男职员及 85 名女职员。已知有 20 名女职员是外国人。现从所有职员中任意选出一名，求这名职员是男职员且是本国人的概率。
10. 从一副 52 张的扑克牌中任意抽取 3 张，求至少抽得一张“人头牌”的概率。
11. 某人投篮的命中率是 0.8。若他投了三次，求恰好投中两次的概率。
12. 某气象站的预报准确率是 89%。求一星期中有五次预测准确的概率。
13. 已知一个年届 18 岁的少年被抽中参加国民服役计划的概率是 0.2。若某社区有 4 个年届 18 岁的孩子，求至少有一个孩子被抽中参加国民服役计划的概率。
14. 投掷一粒骰子，掷得点数是“6”时可得 RM 30，掷得其他点数则可得 RM 3。求掷此骰子一次所得的期望值。
15. 一袋中有 4 个 50 仙硬币及 6 个 20 仙硬币。某人从袋中任取两个硬币，求所得的期望值。
16. 某档子每日准备 250 包椰浆饭，每包成本为 RM 1.50，售价为 RM 5.00，每日未售出的椰浆饭必须丢弃。根据统计，该档子平均每日可售出 57% 的椰浆饭，求该档子一日可获利的期望值。
17. 一项抽奖游戏备有 15 封装有现金的信封，其中 RM 100 一封，RM 50 两封，RM 10 三封，RM 5 四封，RM 1 五封。现某人抽取其中一封，求他所得现金的期望值。若此人付了 RM 15 来抽奖，问此种抽奖对他是否划算？

18. 某慈善展销会的猜奖游戏的得奖概率如下：获得 RM 2,000，RM 500，RM 200 的概率都是 $\frac{1}{5000}$，而获得 RM 150 的概率则是 $\frac{1}{3000}$。若每玩一次游戏的收费是 RM 1，求所得奖金的期望值。此猜奖游戏对参与者是否划算？

19. 某独中的2,524名女生的体重分布可视为常态分配，平均体重为53.79 kg，标准差为 7.24 kg。

    (a) 任选一名女生，求其体重少于 40 kg 的概率。

    (b) 求体重超过 65 kg 的女生人数。

    (c) 求体重介于 45 kg 及 55 kg 之间的女生所占的百分率。

    (d) 若有 10.03 % 的女生的体重超过 c kg，求 c 的值。

    (e) 任选 10 名女生，求至少有两人的体重少于 55kg 的概率。

20. 某公司的客服专线所接听电话的通话时间可视为常态分配。已知所接听的电话中，有1.02%的通话时间多于30 分钟，25.14%的通话时间少于 20 分钟。求每通来电的平均通话时间及其标准差。

名词对照

18 统计学

统计学 statistics
总体 population
个体 individual
普查 census
抽查 sampling survey
抽样 sampling
频数 frequency
频数分配 frequency distribution
上组限 upper class limit
下组限 lower class limit
上组界 upper class boundary
下组界 lower class boundary
组中点 class midpoint
直方图 histogram
频数多边形 frequency polygon
折线图 line graph
累积频数分配 cumulative frequency distribution
累积频数多边形 cumulative frequency polygon / ogive
集中趋势 central tendency
平均数 mean
算术平均数 arithmetic mean
加权平均数 weighted mean
权数 weight
中位数 median
众数 mode
众数组 modal class
离中趋势 measures of dispersion
全距 range
四分位数 quartile
四分位距 interquartile range
四分位差 quartile deviation
平均差 mean deviation
方差 variance
标准差 standard deviation
变异系数 coefficient of variation
相关 correlation
相关系数 correlation coefficient
散布图 scatter plot
统计指数 statistical index
相对数 relative number
基期 base period
价比 price relative
综合指数 composite index
物价指数 price index
生活消费指数 cost of living index

19 排列与组合

加法原理 addition rule
乘法原理 multiplication rule
树图 tree diagram
排列 permutation
阶乘 factorial
线形排列 linear permutation
环形排列 circular permutation
组合 combination

20 二项式定理

二项式定理 binomial theorem
系数 coefficient
二项展开式 binomial expansion
二项式系数 binomial coefficient
幂指数 exponent
巴斯卡三角形 Pascal's Triangle
常数项 constant term
降幂 descending order
升幂 ascending order

21 概率

概率 probability
试验 trial
样本点 sample point
样本空间 sample space
事件 event
必然事件 sure event
空事件 null event
基本事件 simple event / elementary event
古典概率 classical probability
不互斥事件 inclusive events
互斥事件 mutually exclusive events
对立事件 complementary events
独立事件 independent events
期望值 expected value
常态分配 normal distribution
钟形曲线 bell curve
常态曲线 normal curve

答案

18. 统计学

随堂练习 1 (P. 9)

(a) 75

随堂练习 2 (P. 12)

(b) 63 (c) 77

练习 18.2 (P. 12)

2. (a) 3.5 (e) 45.14%
3. (c) 24.44%
4. (b) 28 (c) 77 (d) 16%
5. (b) 86.67%
   (c) 特优：14.17%；优等：45%
   (d) 34
   (e) 75

随堂练习 3 (P. 19)

1. 39 2. RM 45.91
3. 13

练习 18.3a (P. 19)

1. 206.45 g 2. 44
3. 30.63 4. 70.09
5. 6 6. 2.87
7. 61.71
8. (a) 77.29 (b) 76.28
9. $x=16$，$y=2$

随堂练习 4 (P. 25)

1. 15 2. 0.8 3. 1.86 小时

练习 18.3b (P. 26)

1. 9.45
2. (a) 38 kg (b) 38 kg
3. 0，1，2，3，4
4. (a) RM 3100 (b) RM 3100
5. (a) 2 (b) 152 cm
6. 15

随堂练习 5 (P. 29)

(a) 50 – 59 (b) 51.5 (c) 51.32

练习 18.3c (P. 31)

1. (a) 4 (b) 6，8 (c) 1.0
2. 平均数 = 1.69 m，中位数 = 1.70 m，
   众数 = 1.75 m
3. 众数组：30 – 39，众数 = 32.83
4. (b) (i) 6
   (ii) 若 $x=1$，$y=11$，众数 = 3，5，8；
   若 $x=2$，$y=10$，众数 = 3，5，8，10；
   若 $x=3$，$y=9$，众数 = 3；
   若 $x=4$，$y=8$，众数 = 8；
   若 $x=5$，$y=7$，众数 = 5。
5. (a) –3 或 2
   (b) (i) 7 (ii) 9
6. (a) 7 (b) 8 (c) 5
7. 5，7，8，9，9

8. (a) 平均数 = 7.09，中位数 = 7， 众数 = 8

(b) 众数

9. (a)

	城市	农村
平均数	74.7	66.01
中位数	76.63	69.12
众数	81.14	72.18

(b) 平均数 = 68.43， 中位数 = 70.88，

众数 = 73.19

10. (a) 65

(b) 众数组：$60 < x \le 70$， 众数 = 63.33

(c) 64.43

随堂练习 6 (P. 40)

1. (a) 全距：8；四分位数：$Q_1 = 2$， $Q_2 = 4$，

$Q_3 = 7$；四分位距：5

(b) 全距：8；四分位数：$Q_1 = 5.5$， $Q_2 = 7$，

$Q_3 = 8$；四分位距：2.5

(c) 全距：0.9；四分位数：$Q_1 = 0.9$，$Q_2 = 1.15$，

$Q_3 = 1.4$；四分位距：0.5

(d) 全距：6；四分位数：$Q_1 = 3.5$， $Q_2 = 4.5$，

$Q_3 = 6.5$；四分位距：3

2. (a) 5.5 cm (b) 5.39 cm

练习 18.4a (P. 40)

1. (a) 9

(b) $Q_1 = 2$， $Q_2 = 3$， $Q_3 = 5$； 四分位距 = 3

2. (a) 0.7

(b) $Q_1 = 1.05$， $Q_2 = 1.2$， $Q_3 = 1.4$； $Q.D. = 0.18$

3. 9.52

随堂练习 7 (P. 43)

平均数 = 62.5， 平均差 = 4.05

练习 18.4b (P. 43)

1. (a) 2.86 (b) 12.4 (c) 1.38

2. 1.15

3. (b) 57 (c) 7.67

随堂练习 8 (P. 48)

1. 5.37 cm

2. (a) 1.58 (b) 7.53

练习 18.4c (P. 49)

1. (a) $\sigma^2 = 4.5$， $\sigma = 2.12$

(b) $\sigma^2 = 6.8$， $\sigma = 2.61$

(c) $\sigma^2 = 12.75$， $\sigma = 3.57$

2. (a) $\sigma^2 = 0.64$， $\sigma = 0.80$

(b) $\sigma^2 = 157.10$， $\sigma = 12.53$

3. A 组： $\bar{x} = 10$， $\sigma^2 = 0.06$

B 组： $\bar{x} = 10$， $\sigma^2 = 0.15$

B 组的数据比较分散。

4. 甲组： $\bar{x} = 84$， $\sigma = 3.63$

乙组： $\bar{x} = 83.2$， $\sigma = 5.13$

甲组的数据比较集中。

5. $\bar{x} = 163.31$ cm， $\sigma = 6.23$ cm

6. $\sigma^2 = 18.00\ \text{kg}^2$， $\sigma = 4.24$ kg

7. $\bar{x} = 40$， $\sigma^2 = 40$

8. $\sum_{i=1}^{30} x_i = 150$， $\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 870$

9. (a) 10 (b) 9.67

10. $x=15$，$y=41$ 或 $x=41$，$y=15$

随堂练习 9 (P. 51)

数学科成绩的变异较大。

练习 18.5 (P. 52)

1. 身高：$v_1=4.19\%$，体重：$v_2=11.14\%$

   体重的变异较身高的变异大。

2. 丁班的变异系数最小。

3.

	A 组	B 组
(a) 平均分数	74	76.6
(b) 标准差	16.49	11.96
(c) 变异系数	22.29%	15.61%

4. (a)

	木瓜	葡萄
平均价格	3.1	21.33
标准差	0.38	1.97

   (b) 木瓜的价格波动较大。

5. 甲班：$v_1=16.23\%$，乙班：$v_2=15.25\%$

随堂练习 10 (P. 59)

1. $r=0.6631$，中度正相关

2. (b) $r=0.2748$，低度正相关

练习 18.6 (P. 60)

1. (b) 固定资产价值平均数 $\bar{x}=$ RM 6,525,000

   总产值平均数 $\bar{y}=$ RM 9,801,000

   (c) $r=0.9478$，高度正相关

2. (b) $r=0.8445$，高度正相关

3. (b) $r=-0.4444$，中度负相关

4. $r=0.9818$，高度正相关

5. (b) $r=0.9072$，高度正相关

6. (b) $r=-0.5350$，中度负相关

随堂练习 11 (P. 64)

2010	2011	2012	2013	2014
100	88.71	83.44	102.93	114.29

练习 18.7a (P. 64)

1. 119.05，108.70

2. 110.29，114.71

3.

2011	2012	2013	2014	2015
100	82.42	65.93	57.14	51.65

4.

2010	2011	2012	2013	2014
100	110.94	135.63	159.38	187.5

5. $x=90.48$，$y=255$，$z=87.5$

随堂练习 12 (P. 68)

(a) A：101.30，B：101.33，C：102.79

(b) 101.61

练习 18.7b (P. 69)

1. 109 2. 140.25

3. (a) 107.57 (b) 105.87

4. 10

5. (a) $r=125$，$t=250$

   (b) 143.33

6. (a) 2 (b) RM 24

7. (a) $x=20$， $y=18$， $z=200$

(b) 151

8. (a) 15 (b) 50

总复习题18 (P. 71)

1. (d) 73.33% (e) 192.5

2. 平均数＝7，中位数＝8，全距＝10，

四分位差＝3，平均差＝3.14

3. 平均数＝8.63，中位数＝9，众数＝9，

全距＝3，四分位差＝0.5，平均差＝0.80，

标准差＝0.93

4. (c) 中位数＝26.5，四分位距＝17

(d) 6

(e) 18.5%

5. 全距＝34.5，方差＝98.41，标准差＝9.92

6. (a) 10 (b) $\bar{x}=2.4$，$\sigma=1.38$

7. (a) 30 (b) 16.43 (c) 21.82

8. (a) 68.4 (b) 67.6 (c) 64.67

(d) 128.64

9. (a) $\bar{x}=926.4$，$\sigma=55.21$

(b) 41.34

(c) 923.78

(d) 39.08

10. (a) 2 (b) 2.31

11. (a) $p=3$，$q=7$

(b) 5

(c) 3.40

12. (a) $x=2$，$y=17$

(b) 29.33

13. $\bar{x}=4.67$，$\sigma^2=15.56$

14. (a)

	甲队	乙队
平均数	161.2	161.8
标准差	4.96	10.44

(b) 甲队

15. (a) 甲班

(b) $\bar{x}=35.1$，$\sigma=10.56$

16. (a) 7 (b) 1.29 (c) 18.44%

17. (a) 121 (b) 8.24%

18. 一岁组：$v_1=11.38\%$，五岁组：$v_2=11.11\%$

一岁组女童体重的变异程度较大。

19. $r=1$，完全正相关

20. (b) $r=0.0189$，低度正相关

21. (a) 9 (b) 225

22. 104.03 23. 122.88

24. $x=13333.33$，$y=6000$，$z=6000$，

P＝225，Q＝15000，R＝187.5

19. 排列与组合

随堂练习 1 (P. 80)

1. 24 2. 7

练习 19.1 (P. 81)

1. 11 2. 78 3. 7
4. 60 5. 16 6. 9
7. 40；160

随堂练习 2

(P. 82)

12

随堂练习 3

(P. 85)

1. 210，120
2. 2400　　3. 13

练习 19.2a

(P. 85)

1. ABC、ABD、ACB、ACD、ADB、ADC、BAC、BAD、BCA、BCD、BDA、BDC、CAB、CAD、CBA、CBD、CDA、CDB、DAB、DAC、DBA、DBC、DCA、DCB

2. (a) 32760　(b) 970200
   (c) 5040　(d) 336

3. (a) $\frac{100}{9}$　(b) 35
   (c) 11　(d) 28
   (e) 36　(f) 121

4. (a) $n(n+1)$　(b) $(20-r)(19-r)$

5. (a) 41　(b) 65
   (c) 6　(d) 5
   (e) 7　(f) 8

随堂练习 4

(P. 93)

1. 60　　2. 48

随堂练习 5

(P. 94)

1. 50!　　2. 8　　3. 240

练习 19.2b

(P. 95)

1. 120　　2. 3628800
3. 120　　4. 80640
5. 80640　　6. 40320；720
7. 840　　8. 360
9. 24　　10. 2880
11. 6720；2400　　12. 144
13. 362880；17280　　14. 3600
15. 72；48　　16. 288
17. 320　　18. 72

随堂练习 6

(P. 100)

1. 11088　　2. 43200

练习 19.3

(P. 100)

1. 5040
2. 362880；362880
3. 48　　4. 144
5. 384　　6. 48
7. 环形排列数是 120；线形排列数是 720

随堂练习 7

(P. 103)

1. 1260　　2. 907200

练习 19.4

(P. 103)

1. 5040　　2. 6000
3. 19051200
4. (a) 30　(b) 40
5. (a) 181440　(b) 8640
   (c) 21600

随堂练习 8

(P. 108)

1. 216　　2. 100

练习 19.5

(P. 108)

1. 16　2. 64　3. 64
4. 1024　5. 343　6. 2187
7. 6561　8. 64000　9. 19440
10. 72000000

随堂练习 9

(P. 112)

1. 15　2. 240

随堂练习 10

(P. 116)

(a) 6　(b) 3

练习 19.6

(P. 116)

1. (a) 2　(b) 14　(c) 15
2. 10　3. 136　4. 27
5. 180　6. 80　7. 19
8. (a) 756　(b) 1128
9. 1716；3432

总复习题 19

(P. 117)

1. (a) 56　(b) $\frac{16}{27}$
2. 3 或 4　3. 6
4. 14400　5. 18
6. 72　7. 945
8. 63　9. 103680
10. 136080　11. 2520；720
12. 5040　13. 2494800
14. 43200
15. (a) 720　(b) 2520
16. 1288　17. 360
18. 1002　19. 100
20. (a) 1680　(b) 1260
(c) 7560　(d) 280

20. 二项式定理

随堂练习 1

(P. 122)

1. $1+7x+21x^2+35x^3+35x^4+21x^5+7x^6+x^7$
2. $32+240x+720x^2+1080x^3+810x^4+243x^5$

练习 20.1

(P. 123)

1. $m^7+7m^6n+21m^5n^2+35m^4n^3+35m^3n^4$
$+21m^2n^5+7mn^6+n^7$
2. $81+216x+216x^2+96x^3+16x^4$
3. $x^5-15x^4+90x^3-270x^2+405x-243$
4. $x^6+6x^5y^2+15x^4y^4+20x^3y^6+15x^2y^8+6xy^{10}$
$+y^{12}$
5. $32+\frac{80}{x}+\frac{80}{x^2}+\frac{40}{x^3}+\frac{10}{x^4}+\frac{1}{x^5}$
6. $\frac{x^4}{81}+\frac{8x^2}{27}+\frac{8}{3}+\frac{32}{3x^2}+\frac{16}{x^4}$
7. $x^3-3x^2\sqrt[3]{x^2}+3x^2\sqrt[3]{x}-x^2$
8. $x^3-6x^2+15x-20+\frac{15}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}$
9. $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$
10. $2+20x+10x^2$

随堂练习 2

(P. 124)

$280x^{15}$

练习 20.2 (P. 125)

1. 84
2. $1080x^3$
3. $15x^6$
4. $70x^3\sqrt[3]{x}$
5. 6048
6. 252
7. –36
8. 1792

总复习题 20 (P. 125)

1. $1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5$
2. $64x^3-192x^2+240x-160+\dfrac{60}{x}-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$
3. $-\dfrac{55x}{72}$
4. $\dfrac{35x^2}{8}$
5. –2024
6. ±2
7. 7
8. ${}_nC_3\,p^{n-3}q^3x^{n-6}$；6

21. 概率

随堂练习 1 (P. 133)

1. {(H , H), (H , T), (T , H), (T , T)}
2. {1, 2, 3, 4, 5, 6}
3. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
4. {(H , H , H), (H , H , T), (H , T , H), (H , T , T), (T , T , T), (T , T , H), (T , H , T), (T , H , H)}

随堂练习 2 (P. 134)

1. A = {2, 3, 5}
2. B = {(1 , 1 , 1), (1 , 1 , 2), (1 , 2 , 1), (1 , 2 , 2), (1 , 1 , 3), (1 , 3 , 1), (2 , 1 , 1), (2 , 1 , 2), (2 , 2 , 1), (3 , 1 , 1)}
3. K = {(H , T), (T , H)}
   L = {(H , T), (T , H), (H , H)}
   M = {(H , T), (T , H), (T , T)}
4. (a) D = {(H , H , T), (H , T , H), (T , H , H), (H , H , H)}
   (b) E = {(T , T , H), (T , H , T), (H , T , T), (T , T , T)}

练习 21.1 (P. 135)

1. (a) S = {(K , O), (K , T), (K , A), (O , T), (O , A), (T , A)}
   (b) A = {(K , O), (K , A), (O , T), (T , A)}
   (c) B = {(O , A)}
   (d) C = {(K , O), (K , A), (O , T), (O , A), (T , A)}
2. {(1 , 2), (1 , 5), (2 , 1), (2 , 4), (3 , 3), (3 , 6), (4 , 2), (4 , 5), (5 , 1), (5 , 4), (6 , 3), (6 , 6)}
3. {(3 , 6 , 6), (4 , 5 , 6), (4 , 6 , 5), (5 , 4 , 6), (5 , 5 , 5), (5 , 6 , 4), (6 , 3 , 6), (6 , 4 , 5), (6 , 5 , 4), (6 , 6 , 3)}
4. (a) S = {(A , B), (A , C), (A , D), (A , E), (B , A), (B , C), (B , D), (B , E), (C , A), (C , B), (C , D), (C , E), (D , A), (D , B), (D , C), (D , E), (E , A), (E , B), (E , C), (E , D)}
   (b) M = {(A , B), (A , C), (A , D), (B , A), (B , E), (C , A), (C , E), (D , A), (D , E), (E , B), (E , C), (E , D)}
5. (a) S = {(H , H , H), (H , H , T), (H , T , H), (H , T , T), (T , H , H), (T , H , T), (T , T , H), (T , T , T)}
   (b) A = {(H , H , H)}

(c) B = {(H , H , T), (H , T , H), (T , H , H)}

(d) C = {(H , H , H), (H , H , T), (H , T , H), (T , H , H)}

6. (a) A = {(1 , 1), (2 , 2), (3 , 3), (4 , 4), (5 , 5) (6 , 6)}

(b) B = {(1 , 2), (2 , 1), (2 , 4), (3 , 6), (4 , 2) (6 , 3)}

(c) C = {(1 , 4), (1 , 5), (2 , 3), (2 , 4), (3 , 2), (3 , 3), (4 , 1), (4 , 2), (4 , 6), (5 , 1), (5 , 5), (6 , 4), (6 , 6)}

随堂练习 3 (P. 142)

1. $\frac{1}{221}$

2. (a) $\frac{27}{703}$ (b) $\frac{18}{703}$ (c) $\frac{30}{703}$

3. (a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{6}{7}$

练习 21.2 (P. 142)

1. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{9}$

2. $\frac{5}{14}$ 3. $\frac{11}{850}$

4. (a) $\frac{1}{55}$ (b) $\frac{12}{55}$ (c) $\frac{14}{55}$

5. (a) $\frac{1}{22}$ (b) $\frac{1}{66}$ (c) $\frac{5}{11}$

6. (a) $\frac{893}{990}$ (b) $\frac{1}{495}$ (c) $\frac{19}{198}$

7. (a) $\frac{2}{7}$ (b) $\frac{5}{7}$

8. $\frac{5}{108}$ 9. $\frac{1}{5}$ 10. $\frac{2}{5}$

随堂练习 4 (P. 148)

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{19}{52}$ 3. $\frac{4}{45}$

随堂练习 5 (P. 150)

1. $\frac{67}{90}$ 2. $\frac{19}{118}$

练习 21.3 (P. 150)

1. $\frac{11}{19}$ 2. $\frac{44}{51}$ 3. $\frac{9}{29}$

4. $\frac{52}{175}$

5. (a) $\frac{19}{25}$ (b) $\frac{3}{10}$ (c) $\frac{47}{50}$

6. (a) $\frac{178}{245}$ (b) $\frac{67}{245}$

7. (a) $\frac{1}{86}$ (b) $\frac{272}{645}$ (c) $\frac{373}{645}$

8. $\frac{5}{18}$ 9. $\frac{31}{32}$

10. (a) $\frac{14}{17}$ (b) $\frac{129}{136}$ (c) $\frac{49}{136}$

11. (a) $\frac{25}{72}$ (b) $\frac{19}{54}$

随堂练习 6 (P. 159)

1. $\frac{1}{15}$

2. (a) $\frac{7}{24}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{4}{5}$

练习 21.4a (P. 159)

1. $\frac{1}{72}$ 2. $\frac{1}{16}$ 3. 0.4096

4. 96.25% 5. $\frac{1}{4}$ 6. $\frac{3}{5}$

7. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{3}{10}$ (c) $\frac{14}{15}$

8. (a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{1}{27}$ (c) $\frac{5}{24}$

随堂练习 7 (P. 162)

(a) 0.0264 (b) 0.1074 (c) 0.8926

练习 21.4b (P. 162)

1. 0.2007
2. 0.1612
3. 0.8948
4. 0.9938
5. (a) 0.3683 (b) 0.1458 (c) 0.8103
6. (a) $\frac{5}{16}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$
7. (a) $\frac{81}{256}$ (b) $\frac{9}{256}$ (c) $\frac{27}{128}$

随堂练习 8 (P. 166)

1. –RM 0.80
2. RM 835

练习 21.5 (P. 166)

1. RM 3600
2. RM 1.95
3. RM 54
4. RM 3
5. –RM 1
6. –RM 0.40
7. –RM 0.20

随堂练习 9 (P. 175)

(a) 86 (b) 5.05% (c) 46 分

练习 21.6 (P. 176)

1. (a) 0.1814 (b) 0.0222 (c) 0.6915 (d) 0.3685 (e) 0.1524 (f) 0.7039
2. (a) 1.64 (b) 1.27 (c) –0.35 (d) –1.08 (e) 2.45 (f) 1.25
3. (a) 0.0392 (b) 0.6428 (c) 38 罐 (d) 0.1180
4. (a) 1.74% (b) 505 包 (c) 490.82 (d) 13.73
5. 2.74%
6. $\mu = 108.36$，$\sigma = 35.59$
7. (a) 657 人 (b) 185 分 (c) 41 人；3.42% (d) 260 人
8. (a) 68.26% (b) 95.44% (c) 99.74%

总复习题 21 (P. 177)

1. {(2 , 6)，(3 , 5)，(4 , 4)，(5 , 3)，(6 , 2)}
2. $\frac{5}{7}$
3. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{4}$
4. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{1}{52}$ (d) $\frac{4}{13}$
5. (a) $\frac{79}{90}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$
6. $\frac{1}{10000}$
7. $\frac{1}{12}$
8. 0.3575
9. $\frac{17}{40}$
10. $\frac{47}{85}$
11. 0.384
12. 0.1419
13. 0.5904
14. RM 7.50
15. 64 仙

16. RM 337.50

17. RM 17；划算，可望获利 RM 2

18. RM 0.59；不划算，可损失 RM 0.41

19. (a) 0.0287 (b) 153 人

(c) 45.44% (d) 63.06

(e) 0.9968

20. $\mu = 22.24$，$\sigma = 3.34$