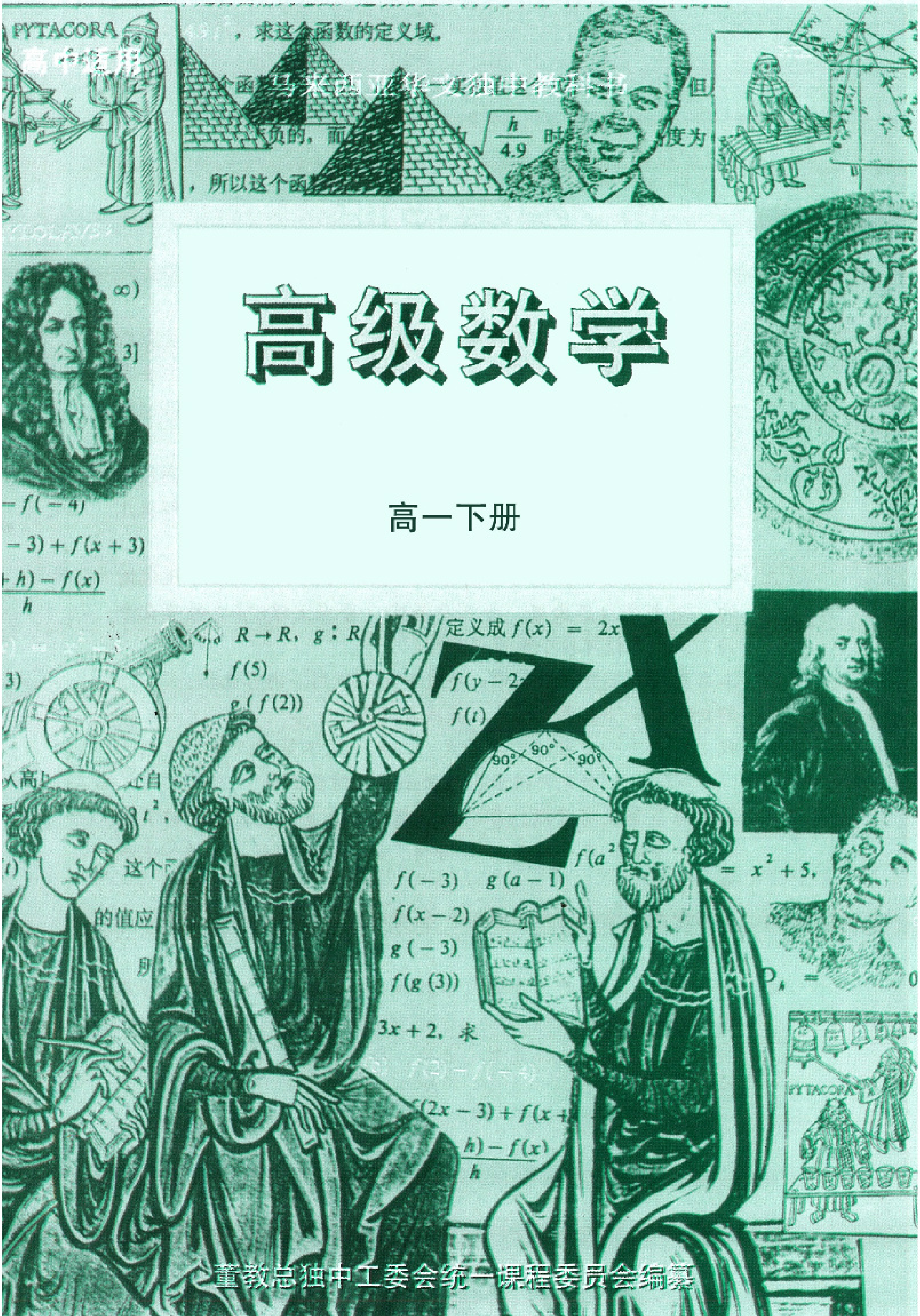
高中适用

马来西亚华文独中教科书



# 高级数学

高一下册

董教总独中工委会统一课程委员会编纂

# 编辑说明

一、这套《高级数学》是根据董教总独中工委会统一课程委员会所拟订的课程纲要而编写的。在拟订课程纲要的过程中，主要参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KBSM）及STPM的课程范围，此外，也参考了其他一些国家的课程纲要。

二、这套《高级数学》是以综合的方式编写，它将取代旧版的高级中学数学课本——《高中代数》上、下册，《三角学》，《解析几何》及《微积分》。

三、这套《高级数学》是为全国各华文独中的高中理科班学生编写的，全书分六册出版，分三年教完。每周上课8节（每节40分钟），惟各校可按个别情况处理。

四、本书是高一下册，供高中一年级下半年使用。内容包括：
解析几何——直角坐标系、直线方程式
代　　数——方程组、不等式、二元一次不等式及线性规划、数列与级数、指数函数与对数函数

五、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题。习题的答案都附于书后。其中附有“*”号者，是较难的题目，可按学生水准而取舍。

六、本书中某些章内的附录部分，各校可按学生水平与授课时间而自行取舍。

七、配合本书，另编有《高级数学教师手册》高二上册，供教师教学参考之用。

八、书中如有错误、遗漏或欠妥之处，祈望教师及其他读者予以指正。

## 鸣 谢

本书承蒙国内外学者和数学教师协助编写与审稿，谨此统致谢谢忱。

董教总独中工委会统一课程委员会　启

1995年5月

# 目　录


## 11. 直角坐标系

11.1 直角坐标系 …… 1
11.2 斜率 …… 5
11.3 三角形的面积 …… 11
11.4 多边形的面积 …… 14
11.5 分比公式 …… 16
总复习题 11 …… 21

## 12. 直线方程式

12.1 二元一次方程式与直线 …… 23
12.2 直线方程式 …… 24
12.3 两条直线的平行与垂直 …… 32
12.4 两条直线的夹角 …… 37
12.5 两条直线的交点 …… 40
12.6 点到直线的距离 …… 44
总复习题 12 …… 48

## 13. 方程组

13.1 三元一次方程组 …… 51
13.2 二元二次方程组 …… 55
总复习题 13 …… 65

## 14. 不等式


14.1 不等式 …… 67
14.2 不等式的性质 …… 68
14.3 不等式的证明 …… 70
14.4 一元二次不等式 …… 75
14.5 一元高次不等式 …… 83
14.6 分式不等式 …… 85
14.7 无理不等式 …… 86
14.8 含绝对值的不等式 …… 89
14.9 代数式的最大值和最小值 …… 92
总复习题 14 …… 94


## 15. 二元一次不等式及线性规划


15.1 二元一次不等式 …… 96
15.2 二元一次不等式组 …… 99
15.3 线性规划 …… 102
总复习题 15 …… 110


## 16. 数列与级数


16.1 数列与级数 …… 112
16.2 等差数列 …… 115
16.3 等比数列 …… 123
16.4 无穷级数 …… 131
16.5 简易特殊数列的和 …… 135
总复习题 16 …… 142
附录 调和数列 …… 144

## 17. 指数函数与对数函数

17.1 指数 …… 147
17.2 对数 …… 151
17.3 对数的换底公式 …… 154
17.4 指数方程式 …… 159
17.5 对数方程式 …… 162
17.6 指数函数及其图象 …… 165
17.7 对数函数及其图象 …… 169
总复习题 17 …… 174

名词对照 …… 177
习题答案 …… 180

# 11 直角坐标系

## 11.1 直角坐标系

### ● 直角坐标系

在初中，我们学过了**直角坐标系**（rectangular coordinate system），利用互相垂直的两条数轴——**横轴**（horizontal axis）即 $x$ 轴，和**纵轴**（vertical axis）即 $y$ 轴，可以用一对有序实数，即序偶 $(x, y)$ 来表示平面内一个点的位置，从而把平面内的点和有序实数对建立起一一对应关系。这就是说，对于坐标平面内任意一点 P（图 11－1），我们可以得出唯一的一对有序实数 $(x, y)$ 和它对应；反过来，对于任何一对有序实数 $(x, y)$，在平面内就有唯一的一个点 P 和它对应。

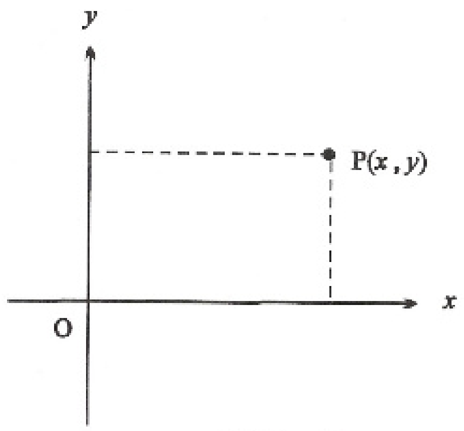



图 11－1

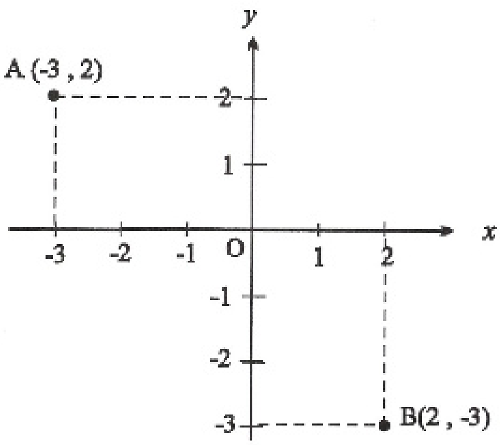



图 11－2

横轴和纵轴的交点叫做**原点**（origin），点的横坐标从原点向右为正，向左为负；纵坐标从原点向上为正，向下为负。

例如，图 11－2 中的点 A 和有序实数对 $(-3, 2)$ 对应，点 B 和有序实数对 $(2, -3)$ 对应。

利用直角坐标系，可以把平面内的点和有序实数对联系起来，从而就可以把几何问题和代数问题联系起来进行研究。

## ● 距离公式

在直角坐标系中，已知两点 A $(x_1, y_1)$ 和 B $(x_2, y_2)$ （图 11－3）。

作 AC 平行于 $x$ 轴，BC 平行于 $y$ 轴，则 C 点坐标为 $(x_2, y_1)$。

AB 是直角三角形 ABC 的斜边，所以

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$\because$ $AC = |x_2 - x_1|$

$BC = |y_2 - y_1|$

$\therefore$ $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

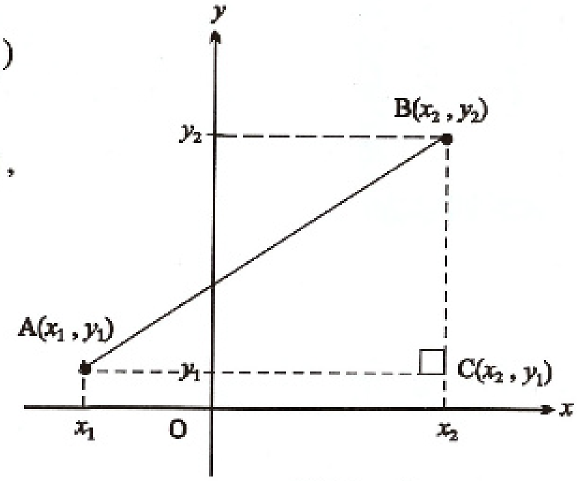



图 11－3

由此得到两点 A $(x_1, y_1)$，B $(x_2, y_2)$ 间的距离公式：

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**例 1** 已知 △ABC 的三个顶点是 A $(-a, 0)$，B $(a, 0)$ 和 C $(0, -\sqrt{3}a)$ $(a > 0)$，求证这个三角形是等边三角形。

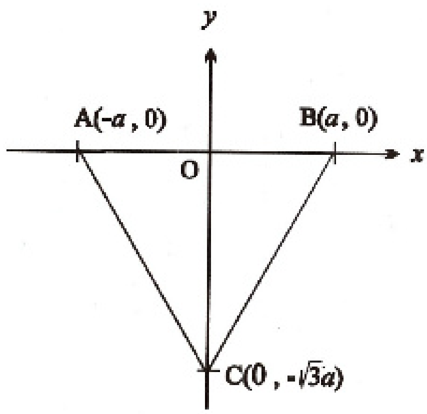
**解**

$$AB = \sqrt{(-a-a)^2 + (0-0)^2} = 2a$$

$$BC = \sqrt{(a-0)^2 + [0-(-\sqrt{3}a)]^2} = 2a$$

$$CA = \sqrt{[0-(-a)]^2 + (-\sqrt{3}a-0)^2} = 2a$$

$\therefore$ △ABC 是等边三角形。




## ● 中点公式

如图 11－4，已知两点 A $(x_1, y_1)$，B $(x_2, y_2)$。设 M $(x, y)$ 是线段 AB 的中点。

从 A、B、M 分别向 $x$ 轴作垂线 AC、BD、MN，那么 N 也是线段 CD 的中点。所以

$$CN = ND$$

即 $$|x - x_1| = |x_2 - x|$$

因为 N 在 C 和 D 之间，所以 $x - x_1$ 和 $x_2 - x$ 的符号相同。因此可得

$$x - x_1 = x_2 - x$$

即 $$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

同理，得 $$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

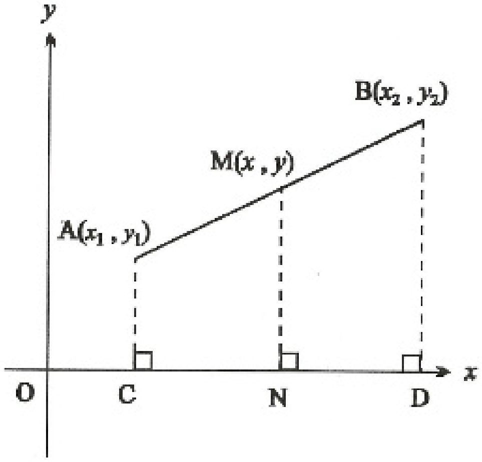


图 11－4

于是得到下面的中点公式：

连结两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 的线段的中点 $(x, y)$ 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

**例 2** 设有三点 $A(6, 5)$，$B(-28, 19)$，$C(-4, -5)$。求以 △ABC 三边的中点为顶点的三角形的周长。

**解** 设 BC、CA、AB 的中点分别为 D、E、F。则由中点公式，D、E、F 的坐标分别为 $D(-16, 7)$，$E(1, 0)$，$F(-11, 12)$。

再由距离公式，△DEF 的三边的长分别为

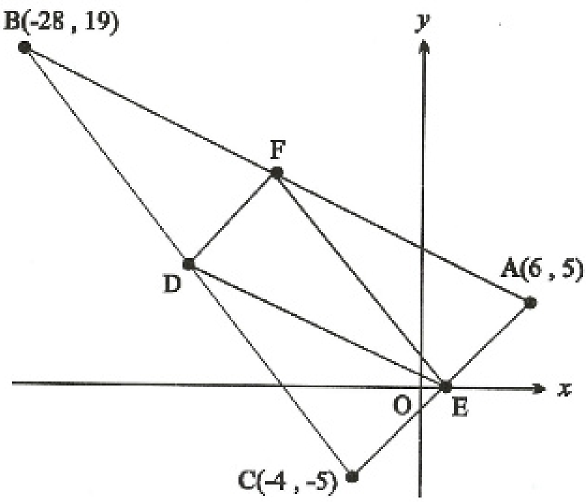
$$EF = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$$

$$FD = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$DE = \sqrt{17^2 + 7^2} = 13\sqrt{2}$$

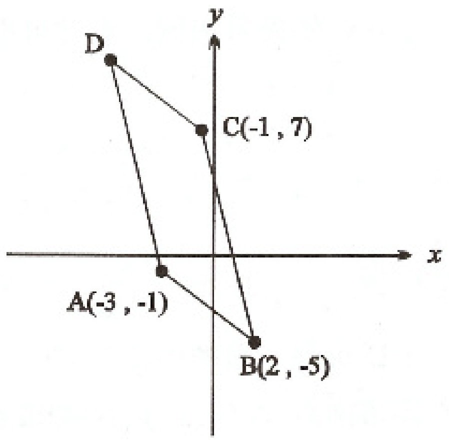
∴ △DEF 的周长

$$= 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 13\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$



**例 3** 平行四边形 ABCD 的三个顶点是 A $(-3, -1)$，B $(2, -5)$，C $(-1, 7)$，求 D 点的坐标。

**解** 设 D 点的坐标为 $(x, y)$，对角线 AC 的中点 M 为 $(-2, 3)$，而对角线 BD 之中点亦为 AC 之中点 M，




$$\therefore \quad \frac{x+2}{2} = -2$$

$$x = -6$$

$$\frac{y+(-5)}{2} = 3$$

$$y = 11$$

∴ D 点的坐标为 $(-6, 11)$

## 习题 11a

1. (a) 在 $x$ 轴上的点，它们的纵坐标都等于什么？
   (b) 在 $y$ 轴上的点，它们的横坐标都等于什么？
   (c) 在两条坐标轴夹角平分线上的点，它们的横坐标和纵坐标之间有什么关系？(分两种情况说明)
2. 求下列两点间的距离：
   (a) $(2, 1)$ 和 $(5, -3)$　　(b) $(-6, -2)$ 和 $(0, 5)$
   (c) $(4, -6)$ 和 $(-2, 2)$　　(d) $(-1, 3)$ 和 $(11, -2)$
3. 求 $\triangle ABC$ 的周长，其中 A $(4, -2)$，B $(1, 2)$，C $(-4, -8)$。
4. 判别下列各三角形是等边三角形，等腰三角形或直角三角形：
   (a) $(-4, 3)$，$(2, -5)$，$(0, 6)$
   (b) $(-6, 8)$，$(6, -8)$，$(8, 6)$
   (c) $(2, 2)$，$(-2, -2)$，$(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$
5. 已知点 A $(1, 4)$ 与点 B $(-2, a)$ 之长度为 5 单位，求 $a$ 可能之值。
6. 已知 A $(3, 8)$，B $(3, -2)$，C $(t, 1)$，若 AB = 2BC，求 $t$ 可能之值。

7. 求连结下列两点的线段的中点的坐标:

   (a) A(7, 4) 和 B(3, 2)

   (b) M(−3, 1) 和 N(2, −7)

   (c) $P_1(6, -4)$ 和 $P_2(-2, -2)$

8. 一个三角形的三个顶点为 A(1, −3), B(3, −5) 和 C(−7, 9)。求它的三边的中点的坐标。

9. 连结两点 A($x$, $y$)、B(2, −6) 的线段的中点是 P(3, 2), 求 $x$ 和 $y$。

10. 已知 A(−2, 0), B(−8, 4) 及 C(3, 8), D 是 AB 的中点, 求 CD 之长。

11. A(1, 1), B(−2, 0), C(−1, 3) 是平行四边形的三个顶点, 求第四个顶点 D 的坐标。

12. 已知 A(1, 1), B($p$, 0), C(−1, 3), D($q$, $r$) 是一菱形的 4 个顶点, 求 $p$、$q$、$r$ 之值。

13. 已知 P(−3, −3), Q(−$a$, $a$), R(−7, −7), S 为 PR 的中点且 QS = 10, 求 $a$ 之值。

14. 已知一个三角形三边的中点为 (−2, −5), (−1, 1) 和 (4, 1), 试求这个三角形的三个顶点的坐标。

# 11.2 斜率

## ● 斜率 (gradient)

在坐标平面内研究直线的性质, 例如研究两条直线是否平行或垂直, 常常要研究直线对 $x$ 轴的倾斜程度。直线对 $x$ 轴的倾斜程度通常是用直线的倾斜角或斜率来表示。

直线的斜率定义为:

> 直线上一点至另一点的 $y$ 坐标的增值与 $x$ 坐标的增值的比,
>
> 即 $$m = \frac{y\text{ 坐标的增值}}{x\text{ 坐标的增值}} \quad (m\text{ 为斜率})$$

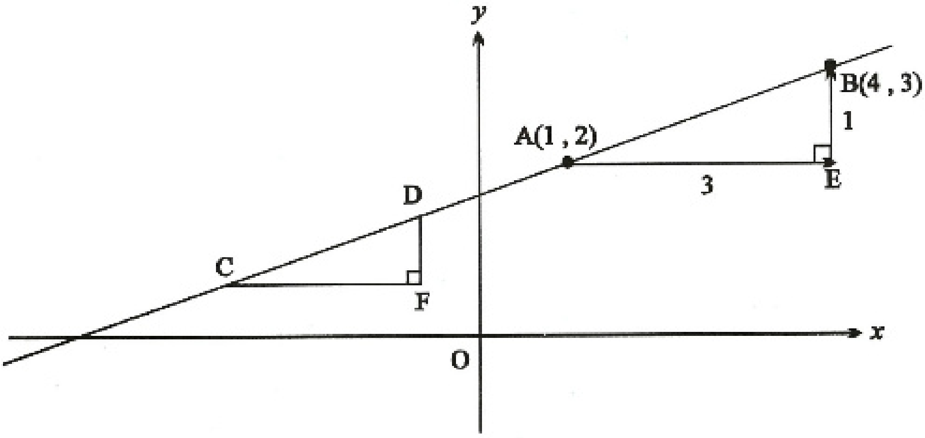



图 11 – 5

如图 11 – 5，一直线上有两点 A (1, 2) 和 B (4, 3)。

由 A 至 B，　$y$ 坐标的增值为 $3-2=1$

　　　　　$x$ 坐标的增值为 $4-1=3$

∴　直线 AB 的斜率为 $m_{AB}=\dfrac{1}{3}$

若 C 和 D 为同一直线上的任意两点，那么△ABE 与△CDF 是相似形。

∴

$$\frac{EB}{AE}=\frac{FD}{CF}$$

而 EB 表示 $y$ 坐标的增值 1，AE 表示 $x$ 坐标的增值 3。

∴

$$m_{AB}=\frac{EB}{AE}=\frac{FD}{CF}=\frac{1}{3}$$

这就是说，一直线的斜率可由此直线上的任意两点求得。

如图 11 – 6，直线上有两点 P (2, 5) 和 Q (6, 3)。

由 P 至 Q，

$y$ 坐标的值减少 2，即增值为 $3-5=-2$，

$x$ 坐标的增值为 $6-2=4$，

$$\therefore\ m_{PQ}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

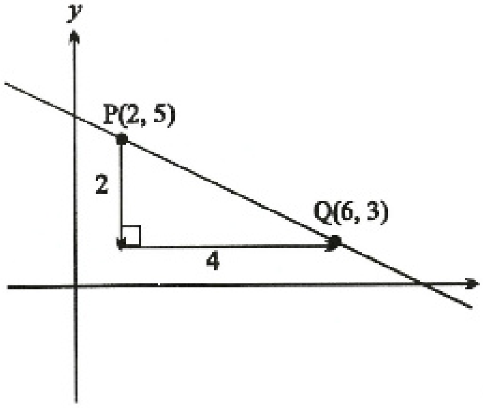



图 11 – 6

若由 Q 至 P，则 $\dfrac{y\text{ 坐标的增值}}{x\text{ 坐标的增值}} = \dfrac{5-3}{2-6}$

$$= \frac{2}{-4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

这就是说，直线斜率的值不受两点的顺序所影响。

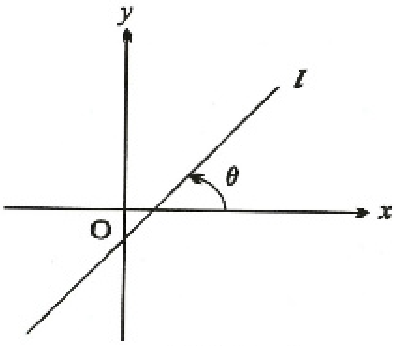



图 11－7

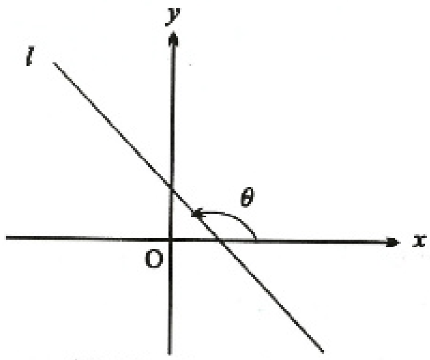



图 11－8

当一直线的斜率是正值时，此直线与 $x$ 轴的正向形成锐角（图 11－7）。

当一直线的斜率是负值时，此直线与 $x$ 轴的正向形成钝角（图 11－8）。

一直线与 $x$ 轴的正向所形成的角叫做**倾斜角**（angle of inclination）。

在图 11－9 中，直线 AB 的斜率 $m$ 为

$$m_{AB} = \frac{NB}{AN}$$

$$= \tan\theta$$

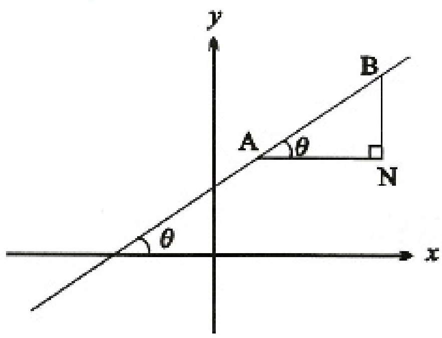



图 11－9

在图 11－10 中，直线 AB 的斜率 $m$ 为

$$m_{AB} = \frac{-AN}{NB}$$

$$= -\tan\alpha$$

$$= -\tan(180^\circ - \theta)$$

$$= \tan\theta$$

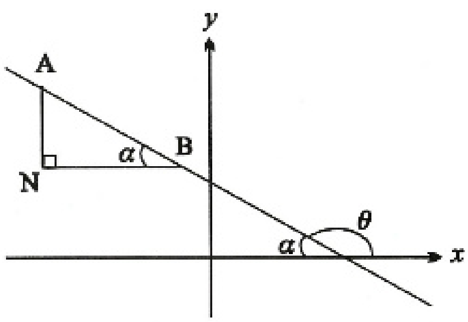



图 11－10

所以，斜率 $m$ 也可表示为

一直线的倾斜角 $\theta$ 的正切

即 $\quad m = \tan\theta$

一般上，经过 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 两点的直线的斜率公式为：

$$m_{AB} = \frac{y\text{ 坐标的增值}}{x\text{ 坐标的增值}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

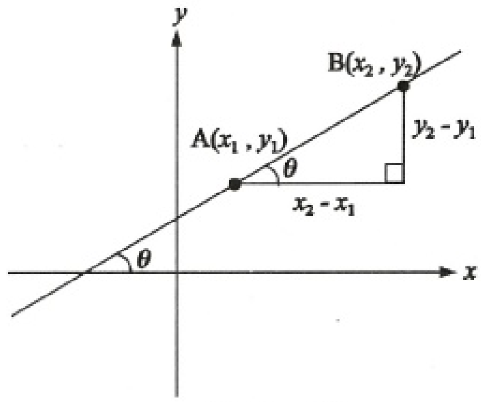


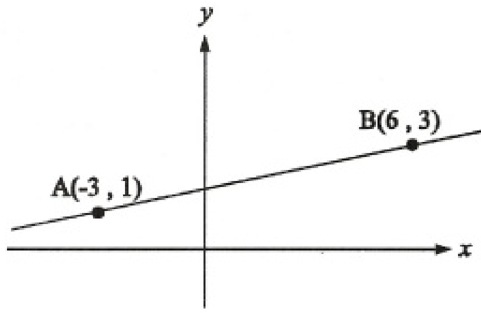

图 11 — 11

**例 4** 求经过下列两点的直线的斜率。

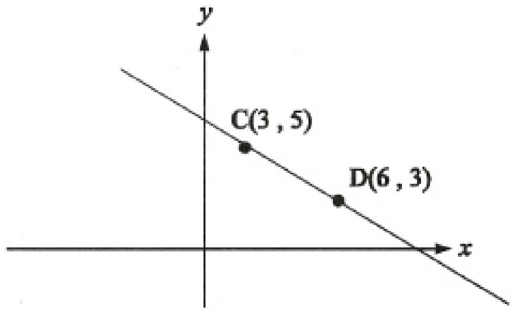
(a) $A(-3, 1)$，$B(6, 3)$　　(b) $C(3, 5)$，$D(6, 3)$

(c) $E(-1, 2)$，$F(5, 2)$　　(d) $G(3, 1)$，$H(3, 5)$

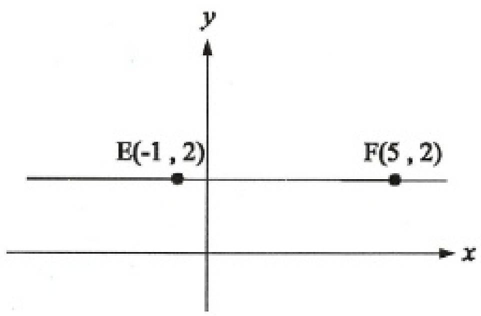
**解** (a) $m_{AB} = \dfrac{3-1}{6-(-3)} = \dfrac{2}{9}$




(b) $m_{CD} = \dfrac{3-5}{6-3} = \dfrac{-2}{3}$




(c) $m_{EF} = \dfrac{2-2}{5-(-1)} = \dfrac{0}{6} = 0$

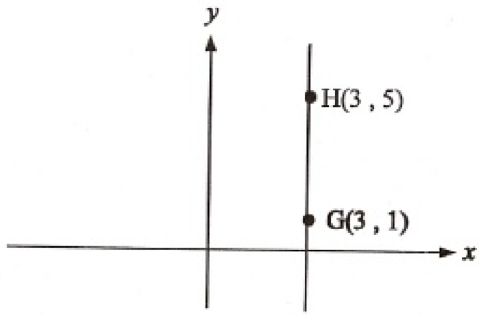


(d) $m_{\text{GH}} = \dfrac{5-1}{3-3}$

$= \dfrac{4}{0}$

由于 $\dfrac{4}{0}$ 没有意义

$\therefore$ 斜率不存在




【注】由例 4 的 (c) 和 (d) 可知， 当直线与 $x$ 轴平行时，它的斜率为 0，
当直线与 $y$ 轴平行时，它的斜率不存在。

**例 5** 求经过 $(-2,\ 0)$，$(-5,\ 3)$ 两点的直线的斜率和倾斜角。

**解** 斜率 $m = \dfrac{0-3}{-2-(-5)} = -1$

即 $\tan\alpha = -1$

$\therefore \quad \alpha = 135^\circ$ ( 或 $\dfrac{3}{4}\pi$ 弧度)

## 习题 11b

1. 求经过下列每两个点的直线的斜率和倾斜角：

   (a) $(3,\ 5)$，$(-4,\ 12)$　　(b) $(10,\ 8)$，$(4,\ -4)$

   (c) $(0,\ 0)$，$(-1,\ \sqrt{3})$　　(d) $(-3,\ 2)$，$(-2,\ 3)$

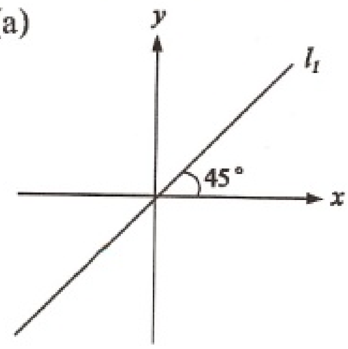
2. 已知 $a$、$b$、$c$ 是两两不等的实数，求经过下列每两个点的直线的倾斜角（用弧度表示）：

   (a) $(a,\ c)$，$(b,\ c)$　　(b) $(a,\ b)$，$(a,\ c)$

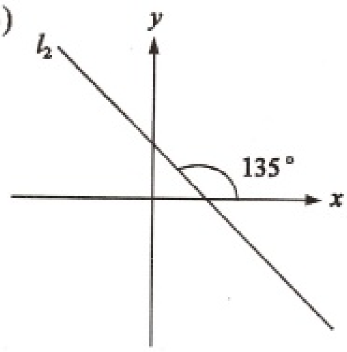
   (c) $(b,\ b+c)$，$(a,\ a+c)$　　(d) $(a,\ b+c)$，$(b,\ c+a)$

3. 求下列图中各直线的斜率：

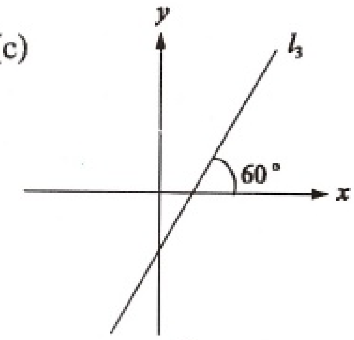
(a)




(b)




(c)



## ● 三点共线

我们知道，经过两点有且只有一条直线。经过三点，就不一定有一条直线。这就是说，三点不一定在一条直线上。

如果三点在一条直线上，就叫做三点共线（collinear）。

现在我们来研究三点共线的条件。

设三点的坐标为 A$(x_1, y_1)$，B$(x_2, y_2)$，C$(x_3, y_3)$。

如果三点 A、B、C 共线，那么 AB 和 BC 是同一条直线，那么，它们有相同的斜率。反过来，如果直线 AB 和 BC 有相同的斜率，它们又都经过 B 点，所以它们是同一条直线，于是 A、B、C 三点共线。

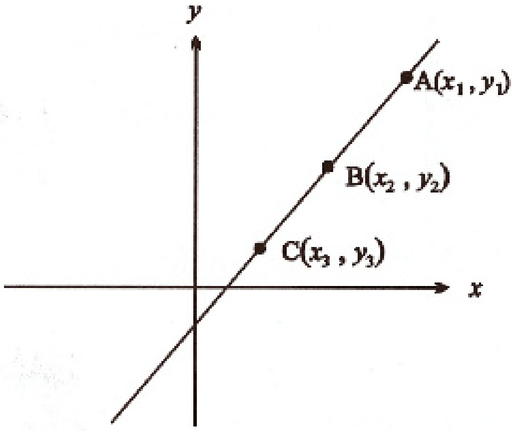


图 11－12

因此，三点 A$(x_1, y_1)$，B$(x_2, y_2)$，C$(x_3, y_3)$ 共线的条件是 AB 和 BC 的斜率相同。这可以写成

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

**例 6** 证明点 A(2, 4)，B(－4, 7)，C(6, 2) 三点共线。

**解** $m_{AB} = \dfrac{7-4}{-4-2} = -\dfrac{1}{2}$

$m_{BC} = \dfrac{2-7}{6-(-4)} = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ m_{AB} = m_{BC}$

$\therefore$ A、B、C 三点共线

## 习题 11c

求证下列三点共线（1～3）：

1. A(1, －1)，B(7, 2)，C(9, 3)
2. L(1, 4)，M(3, －2)，N(－3, 16)
3. P$(-\frac{1}{2}, 3)$，Q(－5, 6)，R(－8, 8)

判别下列三点是否共线（4～6）：

4. R $(-1,\ -4)$，S $(5,\ 2)$，T $(2,\ -1)$

5. A $(\frac{1}{3},\ 0)$，B $(2\frac{1}{2},\ 3)$、C $(4,\ 5)$

6. L $(a,\ b+c)$，M $(b,\ c+a)$，N $(c,\ a+b)$

7. 若 $(-2,\ -3)$，$(0,\ 2)$，$(4,\ a)$ 三点共线，求 $a$ 的值。

8. 若 $(p+1,\ 1)$，$(2p+1,\ 3)$，$(2p+2,\ 2p)$ 三点共线，求 $p$ 的值。

## 11.3　三角形的面积

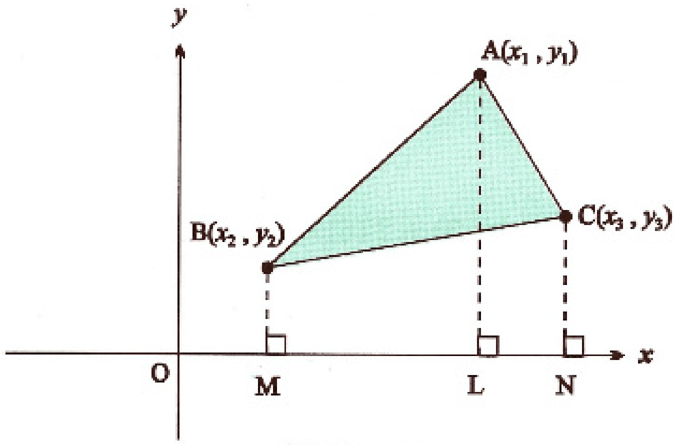



图 11－13

设有△ABC（图 11－13），它的三个顶点的坐标别为 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$，C $(x_3,\ y_3)$，我们来求它的面积（用顶点的坐标表示）。

作 AL、BM、CN，都垂直于 $x$ 轴，垂足分别为 L、M、N。那么

△ABC 的面积

＝ 梯形 ABML 的面积 ＋ 梯形 ALNC 的面积 － 梯形 BMNC 的面积

$$= \frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_3-x_1)(y_3+y_1)-(x_3-x_2)(y_3+y_2)]$$

化简后得

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1)$$

上面这个面积公式可以利用下面的方法加以记忆。

逐个写出三个顶点的坐标，再写第一个顶点的坐标。如下图，把每条由左上

$$\begin{matrix} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_1 \end{matrix}$$

至右下的斜线上的两数相乘的积相加，减去每条由左下至右上的斜线上的两数相乘的积，然后把结果除以 2，就可得到三角形的面积公式了。

利用上述公式所求得的三角形面积的值为正或负，由所取顶点次序的方向而定：反时针方向为正，顺时针方向为负。但实际面积的值恒等于其绝对值，所以

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2}\left| x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1 \right|$$

**例 7** $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(5, 6)$，$B(-4, -1)$，$C(2, -3)$，求它的面积。

**解** $\triangle ABC$ 的面积

$$= \frac{1}{2}\left| 5(-1) + (-4)(-3) + 2(6) - 6(-4) - (-1)2 - (-3)5 \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| -5 + 12 + 12 + 24 + 2 + 15 \right|$$

$$= 30$$

$$\begin{matrix} 5 & & -4 & & 2 & & 5 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 6 & & -1 & & -3 & & 6 \end{matrix}$$

**例 8** 已知点 $A(2, 4)$，$B(-1, 2)$ 和 $C(a, 0)$ 为一三角形的三个顶点，若 $\triangle ABC$ 的面积为 4，求 C 点坐标。

**解** 已知 $\triangle ABC$ 的面积 $= 4$

$$\begin{matrix} 2 & & -1 & & a & & 2 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 4 & & 2 & & 0 & & 4 \end{matrix}$$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\left| 4 + 4a - (-4) - (2a) \right| = 4$

$\left| 8 + 2a \right| = 8$

$\therefore \quad 8 + 2a = 8$ 或 $(8 + 2a) = -8$

$a = 0$ 或 $a = -8$

$\therefore$ C 点的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(-8, 0)$

我们也可用三角形的面积来研究三点共线的条件。

如果 A、B、C 三点共线，那么 $\triangle ABC$ 的面积为零。反过来，如果 $\triangle ABC$ 的面积为零，那么 A、B、C 三点共线。

**例 9** 若 A $(-6,\ -4)$，B $(3t,\ 2t)$，C $(t,\ 4t)$ 三点共线，且 $t \neq 0$，求 $t$ 的值。

**解一** 三点共线，则

$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= m_{BC} \\
\frac{2t+4}{3t+6} &= \frac{4t-2t}{t-3t} \\
(2t+4)(-2t) &= 2t(3t+6) \\
-t(2t+4) - t(3t+6) &= 0 \\
t(5t+10) &= 0 \\
t \neq 0,\ \therefore\ t &= -2
\end{aligned}
$$

**解二** 三点共线，则 $\triangle$ABC 面积 $= 0$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \frac{1}{2}\left|-12t+12t^2-4t+12t-2t^2+24t\right| &= 0 \\
10t^2+20t &= 0 \\
t(t+2) &= 0 \\
t \neq 0,\ \therefore\ t &= -2
\end{aligned}
$$

## 习题 11d

1. 求以下列各点为顶点的三角形的面积：
   (a) A $(1,\ 3)$，B $(-7,\ 6)$，C $(5,\ -1)$
   (b) L $(0,\ 4)$，M $(3,\ 6)$，N $(-8,\ -2)$
   (c) A $(a,\ b+c)$，B $(-a,\ c)$，C $(a,\ b-c)$
2. A $(2,\ 0)$，B $(5,\ p)$，C $(6,\ 0)$ 为三角形 ABC 的顶点，其面积为 10 平方单位
   求 $p$ 的值。
3. 一三角形的面积为 3 平方单位，它的两个顶点为 A $(3,\ 1)$ 及 B $(1,\ -3)$，而第三顶点 C 在 $y$ 轴上，求 C 的坐标。
4. 已知三角形的三顶点 A $(2,\ t)$，B $(3+t,\ 2)$ 及 C $(3,\ 4)$ 按逆时针方向排列。若
   $\triangle$ABC 面积为 $2\frac{1}{2}$ 平方单位，求 $t$ 之值。
5. 已知一三角形的三顶点为 A $(1,\ -2)$，B $(1,\ 2)$，C $(7,\ 6)$，求 $\triangle$ABC 之面积。据此，求 B 与 AC 的垂直距离。
6. 若 $(p,\ 2)$，$(3,\ 5)$ 与 $(7,\ 11)$ 三点共线，求 $p$ 的值。

## 11.4 多边形的面积

求顶点是 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$ 的四边形的面积。(图 11－14)

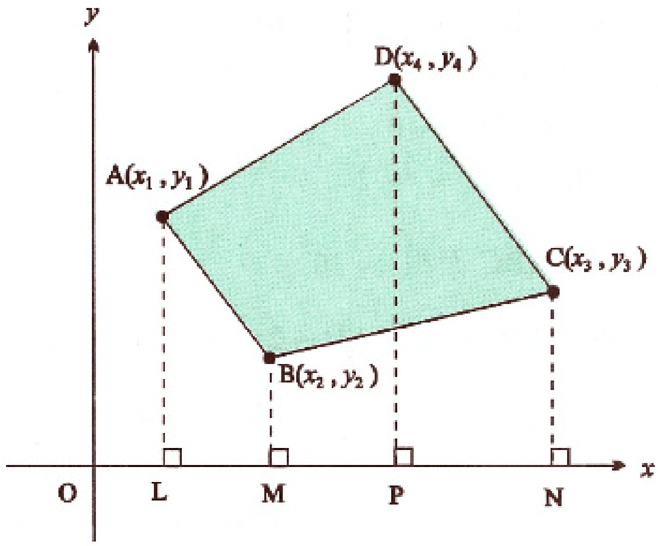



图 11－14

如图 11－14，作 AL、BM、CN、DP 都垂直于 $x$ 轴，垂足分别为 L、M、N、P，那么

$$\begin{aligned}\text{四边形 ABCD 的面积} &= \text{梯形 ALPD 的面积} + \text{梯形 DPNC 的面积} \\ &\quad - \text{梯形 ALMB 的面积} - \text{梯形 BMNC 的面积} \\ &= \frac{1}{2}[(x_4-x_1)(y_4+y_1)+(x_3-x_4)(y_3+y_4) \\ &\quad -(x_2-x_1)(y_2+y_1)-(x_3-x_2)(y_3+y_2)]\end{aligned}$$

化简后，得

$$\begin{aligned}\text{四边形 ABCD 的面积} &= \frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1 \\ &\quad -x_2y_1-x_3y_2-x_4y_3-x_1y_4|\end{aligned}$$

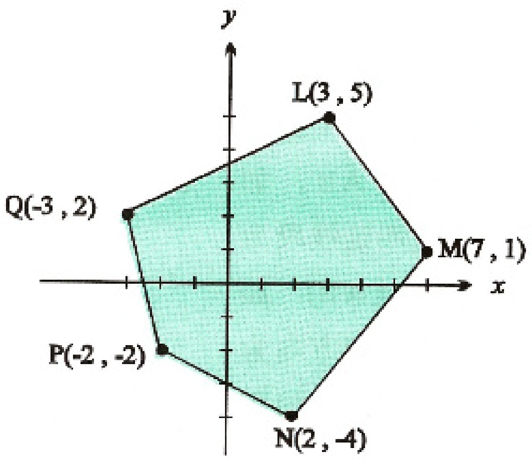
实际计算时，也可逐个写出四个顶点的坐标（各顶点按顺序排列），再写第一个顶点的坐标。然后把每条自左上向右下的斜线上的两数相乘的积相加，减去每条自左下向右上的斜线上的两数相乘的积。再把结果除以 2，如下图。

$$\begin{matrix} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_1 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & y_1 \end{matrix}$$

五边形以及多于五边的多边形的面积，都可仿照以上所说的方法计算。

**例 10** 五边形 LMNPQ 的顶点为 L (3, 5)，M (7, 1)，N (2, $-4$)，P ($-2$, $-2$)，Q ($-3$, 2)。求它的面积。

**解**




如上图，按顺序排列，写出各顶点的坐标，再重复第一个顶点的坐标。

$$\begin{array}{cccccc} 3 & -3 & -2 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & -2 & -4 & 1 & 5 \end{array}$$

LQPNM 的面积

$$= \frac{1}{2}\,|\,3(2)+(-3)(-2)+(-2)(-4)+2(1)+7(5)$$

$$-5(-3)-2(-2)-(-2)2-(-4)7-1(3)\,|$$

$$= 52.5$$

## 习题 11e

求以下列各点为顶点的四边形的面积 (1～2)：

1. A (1, 1)，B (3, 4)，C (5, $-2$)，D (4, $-7$)
2. Q ($-1$, 6)，R ($-3$, $-9$)，S (5, $-8$)，T (3, 9)
3. 一个筝形 OABC 的四个顶点分别为 O (0, 0)，A (4, 0)，B (6, 6)，C (0, $p$)。求

   (a) $p$ 的值　　　　(b) 此筝形的面积
4. 已知五边形的顶点分别为 (1, 0)，(3, 1)，(4, 3)，(0, 4)，($-2$, 1)，求其面积。
5. 一平行四边形 ABCD 的三个顶点为 A ($-2$, 3)，B (4, $-5$)，C ($-3$, 1)，求此平行四边形的面积。

# 11.5 分比公式

## ● 有向线段

每一条线段都有两个方向。如果我们规定其中某一个方向为正向，那么另一个方向就是负向。如图 11－15 (a) 的线段 AB，如果规定从 A 到 B 的方向为正，就叫这线段为**有向线段 AB** (directed line segment AB)，如图 11－15 (b)；如果规定从 B 到 A 的方向为正，那么就叫这线段为有向线段 BA，如图 11－15 (c)。

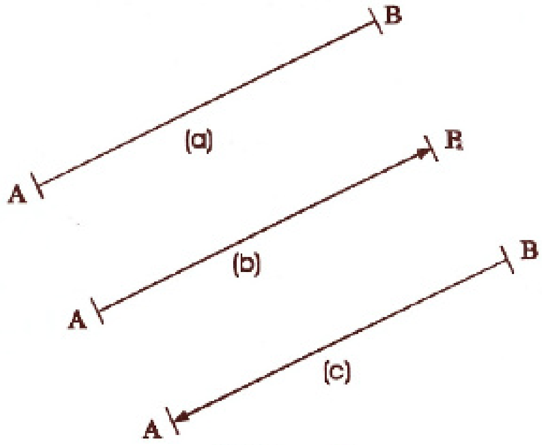



图 11－15

以后为了简化，我们把有向线段 AB 简称为线段 AB，记作 AB；有向线段 BA，简称线段 BA，记着 BA。

## ● 线段的定比分点

设有一条线段 AB，在 AB 所在的直线上有一点 P，点 P 把 AB 分为 AP 和 PB，且 $\frac{AP}{PB}=\lambda$，那么点 P 叫做把线段 AB 分为定比 $\lambda$ 的**定比分点**（point dividing a line in a given ratio）。这里要注意 $\frac{AP}{PB}$ 的字母顺序，即

$$分比\ \lambda = \frac{起点到分点的线段}{分点到终点的线段}$$

当 P 在线段 AB 上时（图 11－16 a），AP 和 PB 的方向相同，所以 $\frac{AP}{PB}=\lambda$ 是一个正比值，这时分点 P 叫做**内分点**（internal division point）。当 P 在线段 AB 外时（图 11－16 b），由于 AP 和 PB 的方向相反，所以 $\frac{AP}{PB}=\lambda$ 是一个负比值，这时分点 P 叫做**外分点**（external division point）。

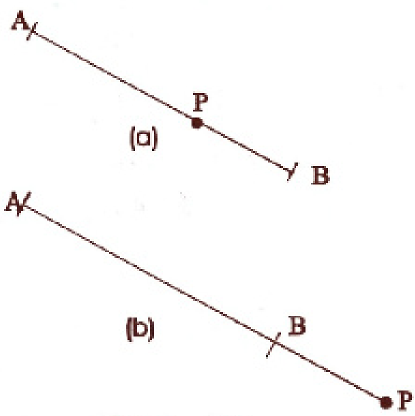


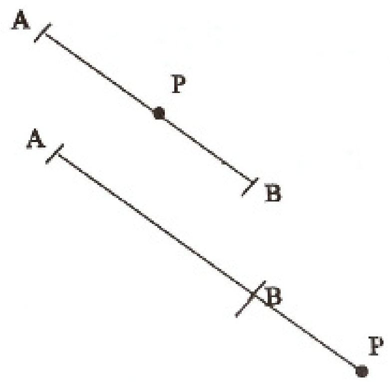

图 11－16

**例 11** (a) 当 P 是线段 AB 的中点时（如右图），求 P 点分 AB 所成的比 $\lambda$ 的值；

(b) 当 P 在线段 AB 外，且

$$PB = -\frac{1}{2}AB$$

时（如右图），求 P 点分 AB 所成的比 $\lambda$ 的值。




**解** (a) P 是线段 AB 的中点，AP = PB，所以

$$\lambda = \frac{AP}{PB}$$
$$= 1$$

(b) P 在线段 AB 外，且 $PB = -\frac{1}{2}AB$，则

$$AP = \frac{3}{2}AB$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{AP}{PB}$$
$$= \frac{\frac{3}{2}AB}{-\frac{1}{2}AB}$$
$$= -3$$

## ● 分比公式

已知线段 AB 的两个端点的坐标为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，现在来求把 AB 分成定比 $\lambda$ 的分点 P 的坐标。

先看内分的情况。

分点 P 在线段 AB 上，把 AB 分成定比 $\frac{AP}{PB} = \lambda\ (\lambda > 0)$。

设 P 的坐标为 $P(x, y)$。从 A、P、B 向 $x$ 轴作垂线 $AM_1$、PM、$BM_2$，垂足分别为 $M_1$、M、$M_2$（图 11－17）。

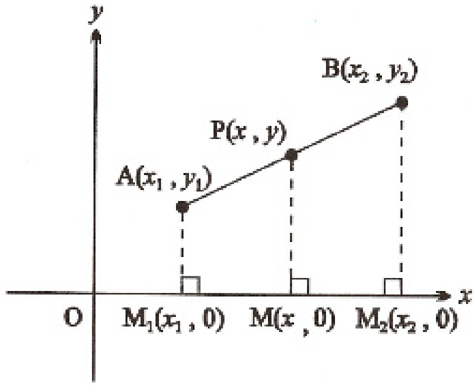



图 11－17

因为 $\frac{AP}{PB}=\lambda$，所以由平行线分线段成比例定理，

可得 $$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$$

即 $$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda\ (x-x_1 \text{ 与 } x_2-x \text{ 同号，} \lambda \text{ 为正值})$$

解出 $x$，得 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

同理，可得 $$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

再看外分的情况。

分点 P $(x, y)$ 在线段 AB 外，把 AB 分成定比 $\frac{AP}{PB}=\lambda\ (\lambda<0)$，如图 11－18。

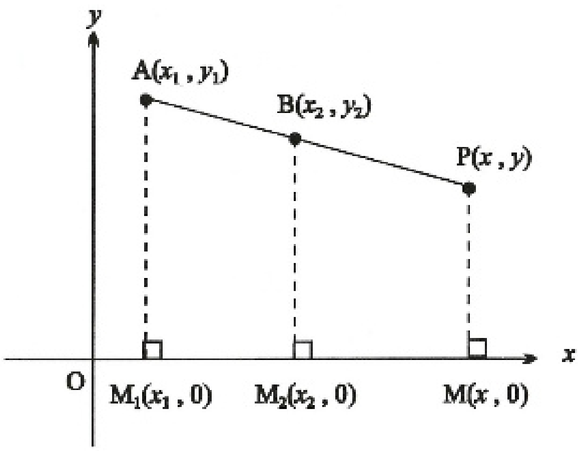



图 11－18

这时，仍有

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda\ (x-x_1 \text{ 与 } x_2-x \text{ 异号，} \lambda \text{ 为负值})$$

所以仍有

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

这样，我们有下面的分比公式：

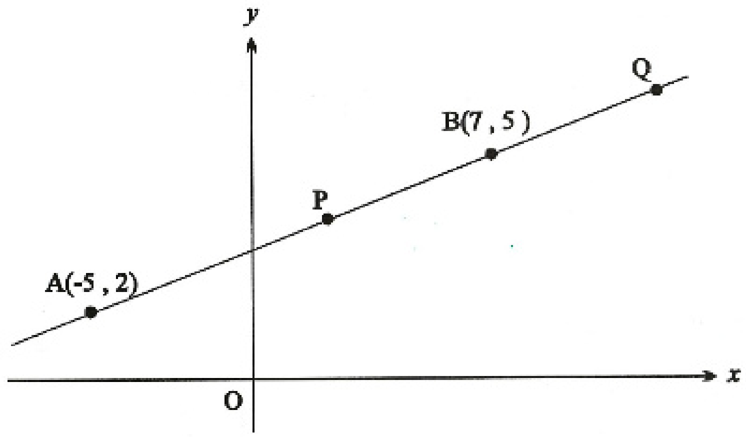
如果连结两点 A $(x_1, y_1)$，B $(x_2, y_2)$ 的线段 AB 被 P 点分成 $\frac{AP}{PB}=\lambda$，那么 P 点的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

**例 12** 设有两点 A $(-5, 2)$，B $(7, 5)$。试求

(a) 内分线段 AB 成定比 $\lambda = 2$ 的点 P 的坐标；

(b) 外分线段 AB 成定比 $\lambda = -2$ 的点 Q 的坐标。




**解** (a) 设 P 点的坐标为 $(x, y)$，则由分比公式，

$$x = \frac{-5+2(7)}{1+2} = 3$$

$$y = \frac{2+2(5)}{1+2} = 4$$

即 P 点的坐标为 $(3, 4)$。

(b) 设 Q 点的坐标为 $(x, y)$，由分比公式，

$$x = \frac{-5+(-2)(7)}{1+(-2)} = 19$$

$$y = \frac{2+(-2)(5)}{1+(-2)} = 8$$

即 Q 点的坐标为 $(19, 8)$

**例 13** 已知两点 A $(-7, 1)$ 及 B $(3, 6)$，试求

(a) 内分 AB 成 $3:2$ 的 P 点坐标；

(b) 外分 AB 成 $3:2$ 的 Q 点坐标。

**解** (a) 设 P 点的坐标为 $(x,\ y)$,

已知定比 $\lambda=\dfrac{3}{2}$, 由分比公式,

$$x=\frac{-7+\frac{3}{2}(3)}{1+\frac{3}{2}} \qquad y=\frac{1+\frac{3}{2}(6)}{1+\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{-14+9}{2+3} \qquad =\frac{2+18}{2+3}$$

$$=-1 \qquad =4$$

即 P 点的坐标为 $(-1,\ 4)$

(b) 设 Q 点的坐标为 $(x,\ y)$,

已知定比 $\lambda=-\dfrac{3}{2}$, 由分比公式,

$$x=\frac{-7+\left(-\frac{3}{2}\right)(3)}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)} \qquad y=\frac{1+\left(-\frac{3}{2}\right)6}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{-14-9}{2-3} \qquad =\frac{2-18}{2-3}$$

$$=23 \qquad =16$$

即 Q 点的坐标为 $(23,\ 16)$

## 习题 11f

1. Q 点在线段 AB 处, 且 QA = 2AB, 求 Q 点分 AB 所成的比 $\lambda$ 的值。
2. P、Q、R 三点分别为线段 AB 上的三个四等分点, 分别求它们分 AB 所成的比 $\lambda$ 的值。
3. 已知两点 A (8, 1) 与 B (−2, −9)。

   (a) P 点内分 AB 成 $\dfrac{3}{2}$, 求 P 点的坐标;

   (b) Q 点外分 AB 成 $\dfrac{3}{2}$, 求 Q 点的坐标。
4. 已知 A (11, 1), B (2, 6), P 在 AB 线上且 AP = 2PB, 求 P 之坐标。
5. 已知 A (3, 2), B (13, 7), P 在 AB 上且 3AP = 2PB, 求 P 之坐标。
6. 点 $(h,\ k)$ 内分 (4, 3) 与 (−3, −7) 成 2∶3, 求 $h$, $k$。

7. 设 A, B 两点的坐标分别为 $(1,\ -2)$ 与 $(-5,\ 3)$。若 Q 点外分 AB 成 $2:1$，求 Q 点的坐标。

8. 一线段的两个端点分别为 A $(1,\ -3)$ 与 B $(7,\ 6)$，现将 AB 分成三等分，求两个三等分点的坐标。

9. 求证三点 A $(-3,\ 7)$，B $(-1,\ 4)$，C $(5,\ -5)$ 在一条直线上，并求 B 点分线段 AC 所成的内分比。

10. 求证三点 P $(10,\ -7)$，Q $(6,\ -15)$，R $(18,\ 9)$ 共线，并求 Q 点分线段 PR 所成的外分比。

11. 已知 C $(a,\ 2b)$，D $(2a,\ b)$，Q 外分 CD 使得 $CQ:QD=3:4$，求 Q 之坐标。

12. 一直线经过 P $(2,\ 6)$ 且与 $x$ 轴，$y$ 轴的交点分别为 A $(a,\ 0)$ 与 B $(0,\ b)$。若 P 内分 AB 成 $3:2$，求 $a$, $b$。

13. 已知点 A $(1,\ -1)$，B $(-4,\ 5)$，将 AB 延长至 C，使 $AC=3AB$，求 C 点的坐标。

14. 已知 A $(-1,\ 5)$ 与 B $(3,\ -1)$，P 内分 AB 成 $1:2$，$x$ 轴上一点 Q 亦内分 AB 成 $m:n$，求

    (a) P 之坐标；　(b) $m:n$；　(c) Q 之坐标。

15. 三角形三个顶点的坐标为 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$，C $(x_3,\ y_3)$。D 点把 AB 分成内分比 $\dfrac{l}{k}$，E 点把 DC 分成内分比 $\dfrac{m}{k+l}$，求 E 点的坐标。

16. 试由分比公式推出中点公式。

## 总复习题 11

1. 求下列两点的距离：

   (a) $(a^2,\ 2ab)$ 和 $(b^2,\ 0)$；　(b) $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ 和 $(\cos\beta,\ \sin\beta)$。

2. 已知两点 $(a,\ 5)$ 和 $(0,\ -10)$ 的距离是 17，求 $a$ 的值。

3. 点 A、B、C 的坐标分别为 $(-1,\ -3)$，$(11,\ 2)$，$(a,\ -10)$。若 $AB=BC$，求 $a$ 的值。

4. 已知 $(0,\ 2)$，$(5,\ 3)$，$(7,\ 6)$ 及 $(a,\ b)$ 为平行四边形顺序的点，求

   (a) $a$ 与 $b$ 的值；　(b) 此平行四边形的面积。

5. 已知一条线段的一个端点为 $(-8,\ 4)$，线段的中点为 $(-2,\ -3)$，求它的另一个端点。

6. 三角形三个顶点是 A (2, 1), B (−2, 3), C (0, −1), 求它的三条中线的长。

7. 求经过下列每两点的直线的斜率和倾斜角:

(a) (10, −4), (−7, 6);

(b) (25, −8), (16, 20);

(c) $(a, \sqrt{3}\,b)$, $(b, \sqrt{3}\,a)$ $(a \neq b)$。

8. 一条直线经过两点 (5, −7) 和 $(x, 0)$, 它的斜率是 3, 求 $x$。

9. 一个三角形的三个顶点为 A $(a, c)$, B $(a, a+c)$, C $(-a, c-a)$, 求它的周长和面积 $(a > 0)$。

10. A(3, $y$), B (1, 3), C (−2, −1) 为一三角形的顶点, 其面积为 $14\frac{1}{2}$ 平方单位, 求 $y$ 的可能值。

11. 求以下列各点为顶点的五边形的面积:

A (−1, 3), B (−3, −2), C (7, −4), D (9, 4), E (0, 4)

12. 判别下列三点是不是在同一条直线上:

(a) A (3, 1), B (8, 4), C (−7, −5)

(b) L (−2, 1), M (−10, 5), N (7, −3)

13. 若 (1, −1), $(p, 2)$, $(p^2, p+3)$ 三点共线, 求 $p$ 的值。

14. 证明 $(a, 0)$, $(at^2, 2at)$, $\left(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t}\right)$ 三点共线。

15. 设 P 点外分线段 AB 成外分比 −3, 求 B 点内分线段 AP 所成的内分比。

16. 已知 C (−1, −2), D (4, 2), P 在 CD 上且 CP = 4PD, 求 P 之坐标。

17. 已知 A (−6, 8) 和 B (0, −1), 求

(a) 内分 AB 成 2∶1 的点的坐标;

(b) 外分 AB 成 2∶1 的点的坐标。

18. 有两点 A $(a+b, a-b)$, B $(a-b, a+b)$。

(a) 求分 AB 成 $\frac{a}{b}$ 的内分点;

(b) 求分 AB 成 $-\frac{a}{b}$ 的外分点。

19. 三角形的顶点为 A $(x_1, y_1)$, B $(x_2, y_2)$, C $(x_3, y_3)$。三角形的重心的坐标为 G $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。求证三角形的重心分每一条中线 (从顶点到对边中点) 成 2∶1 的比。

# 12 直线方程式

## 12.1 二元一次方程式与直线

我们知道，在直角坐标系中，画出的一次函数图象是一条直线。例如函数

$$y = 2x + 1$$

的图象是直线 $l$（图 12－1）。这时，满足函数 $y = 2x + 1$ 的每一对 $x$，$y$ 的值都是直线 $l$ 上的点的坐标，如数对（0，1）满足函数 $y = 2x + 1$，在直线 $l$ 上就有一点 A，它的坐标是（0，1）；反过来，直线 $l$ 上每一点的坐标都满足函数 $y = 2x + 1$，如直线 $l$ 上点 P 的坐标是（1，3），数对（1，3）就满足函数 $y = 2x + 1$。

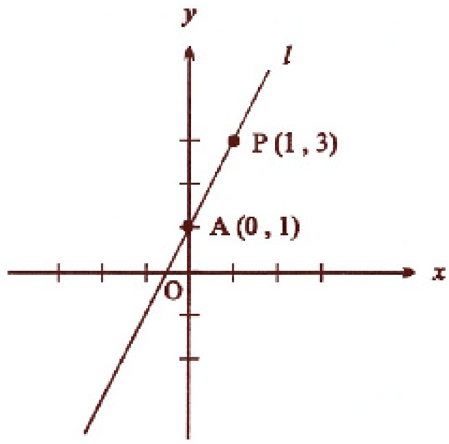


图 12－1

一般地，一次函数 $y = mx + c$ 的图象是一条直线，它是以满足 $y = mx + c$ 的每一对 $x$，$y$ 的值为坐标的点构成的；反过来，该图形上任一点的坐标，都满足该函数式。

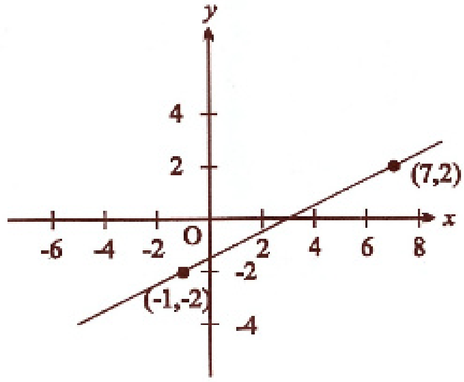
由于函数 $y = mx + c$ 也可以看作二元一次方程式，因此也可以说：任何一个二元一次方程式的图象都是一条直线。

**例 1** 在坐标平面上，画出方程式 $x - 2y - 3 = 0$ 的直线。

**解** 我们知道，两点确定一条直线，因此，只要找出满足该方程式的两组解，就能画出该方程式的直线。

令 $x$ 分别取 $-1$，7，得 $y$ 的值分别为 $-2$，2。

在平面上作一个坐标系，标出 $(-1,\ -2)$，$(7,\ 2)$ 的对应点，过这两点画直线，即得方程 $x-2y-3=0$ 的直线（如右图）。




## 12.2 直线方程式

若以一个方程式的解为坐标的点都落在某条直线上；那么，这条直线上点的坐标都满足这个方程式。这时，这个方程式就叫做这条**直线的方程式**（equation of a straight line），这条直线叫做这个方程式的直线。

下面，我们来研究怎样根据所给的条件，求出直线的方程式。

### ● 点斜式

如图 12－2，已知直线 $l$ 的斜率为 $m$，且通过点 A $(x_1,\ y_1)$，求直线 $l$ 的方程式。

设点 P $(x,\ y)$ 是直线 $l$ 上不同于点 A 的任意一点。根据经过两点的直线的斜率公式，得

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

可化为

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

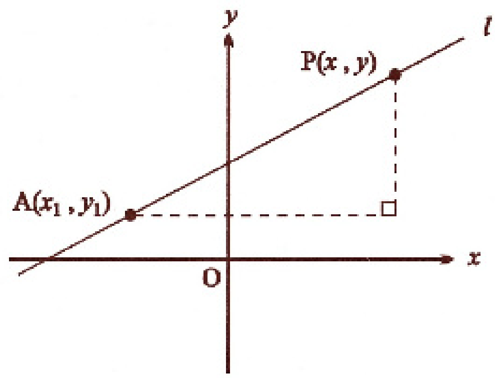



图 12－2

这个方程式是由直线上一点和直线的斜率确定的，叫做直线方程的**点斜式**（point slope form）。

**例 2** 一条直线经过点 $P(-2, 3)$，倾斜角 $\alpha = 45°$。试求这条直线的方程式，并画出图形。

**解** 这条直线经过点 $P(-2, 3)$，

斜率 $m = \tan 45°$

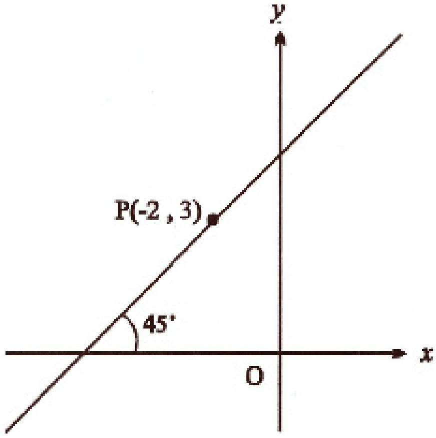
$= 1$

代入点斜式，得

$$y - 3 = x + 2$$

即 $x - y + 5 = 0$

这就是所求的直线方程式，图形如右图。




## ● 二点式

已知直线 $l$ 经过两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，求直线 $l$ 的方程式(图 12 – 3)。

设 $P(x, y)$ 为动点，则此直线的斜率可表示为 $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ 或 $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$。

$$\therefore \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

这个方程是由直线上两点确定的，叫做直线方程的**两点式**（two–point form）。

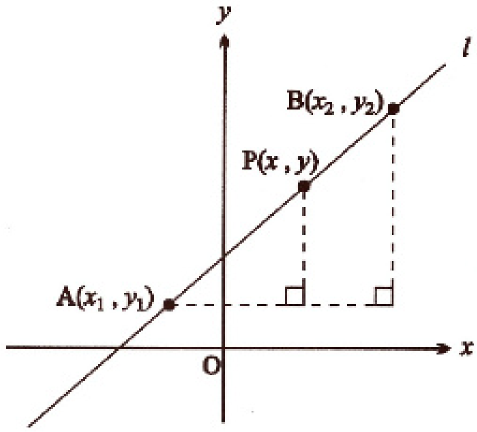



图 12 – 3

**例 3** 求通过 $(3, 0)$ 及 $(-2, 5)$ 二点的直线的方程式。

**解** 此直线的方程式为 $\dfrac{y - 0}{x - 3} = \dfrac{5 - 0}{-2 - 3}$

即 $x + y - 3 = 0$

## 习题 12a

1. 在坐标平面上，画出下列方程式的直线：

(a) $y = x$ (b) $2x + 3y = 6$

(c) $2x + 3y + 6 = 0$ (d) $2x - 3y + 6 = 0$

2. 已知直线的斜率为 $m$，并经过定点 P，求它们的方程式，并画出图形：

(a) $m=4$，P(2，5)　　(b) $m=3$，P(1，4)

(c) $m=\frac{1}{3}$，P(5，−2)　　(d) $m=-\frac{5}{2}$，P(−1，2)

3. 求下列直线的方程式，并画出图形：

(a) 经过点 P(−2，2)，倾斜角是 30°；

(b) 经过点 P(0，3)，倾斜角是 0°；

(c) 经过点 P(4，−2)，倾斜角是 120°。

4. 求经过下列两点的直线方程式：

(a) (−3，2) 与 (5，4)　　(b) (−1，1) 与 (1，−2)

(c) (0，1) 与 (2，0)　　(d) (2，1) 与 (0，−3)

(e) (0，5) 与 (5，0)　　(f) (−4，−5) 与 (0，0)

5. 已知三角形的三个顶点是 A(3，5)，B(−5，−1)，C(−2，−5)，求：

(a) 三条边的方程式；

(b) 三条中线的方程式。

## ● 斜截式

已知直线 $l$ 的斜率为 $m$，在 $y$ 轴上的截距为 $c$，求直线 $l$ 的方程式（图 12－4）。

设 P$(x,\ y)$ 为动点，则斜率为 $\frac{y-c}{x-0}$。

∴　$$\frac{y-c}{x-0}=m$$

即　$$y=mx+c$$

这个方程式是由直线 $l$ 的斜率和它在 $y$ 轴上的截距确定的，叫做直线方程的**斜截式** (gradient intercept form)。

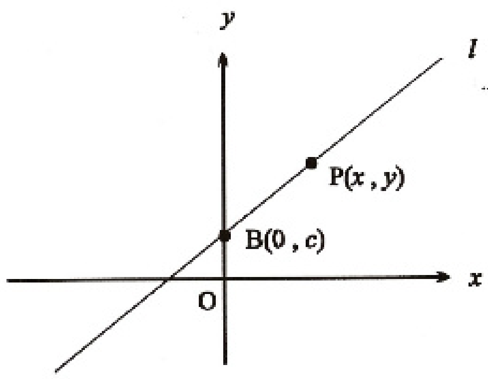



图 12－4

**例 4** 一直线在 $y$ 轴上的截距为 $-3$，且斜率为 $\frac{1}{2}$，试求这条直线的方程式。

**解** 此直线的方程式为 $y = \frac{1}{2}x - 3$

即 $x - 2y - 6 = 0$

**例 5** 一直线在 $y$ 轴上的截距为 2，倾斜角为 135°，试求这条直线的方程式。

**解** 该直线的斜率为 $m = \tan 135° = -1$

∴ 该直线的方程式为 $y = -x + 2$

即 $x + y - 2 = 0$

## ● 截距式

已知直线 $l$ 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距分别为 $a$ 和 $b$，求直线 $l$ 的方程式(图 12－5)。

设 P $(x, y)$ 为动点，则

$$\frac{y-b}{x-0} = \frac{0-b}{a-0}$$

整理得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

这个方程式是由直线在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距确定的，叫做直线方程的**截距式** (intercept form)。

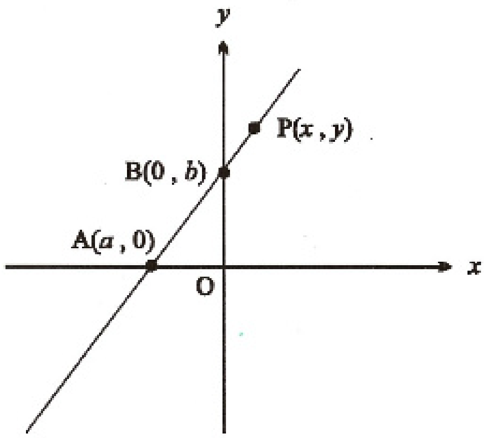
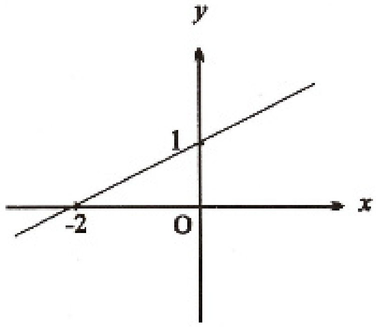


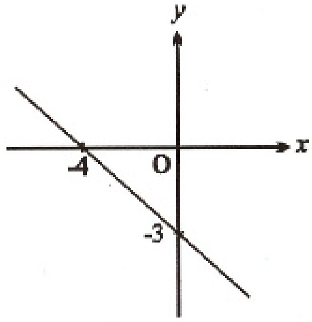

图 12－5

**例 6** 求下列直线的方程式:

(a)




(b)



**解** (a) 由图中可知，$x$ 轴和 $y$ 轴的截距分别为 $-2$ 和 1。

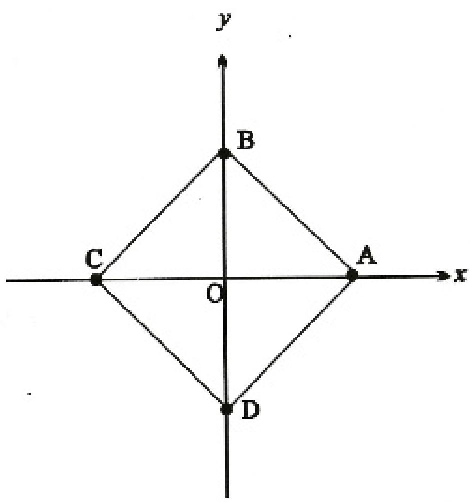
$$\begin{aligned} \therefore \quad \frac{x}{-2}+\frac{y}{1} &= 1 \\ x-2y &= -2 \\ x-2y+2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) 由图中可知，$x$ 轴和 $y$ 轴的截距分别为 $-4$ 和 $-3$，

$$\begin{aligned} \therefore \quad \frac{x}{-4}+\frac{y}{-3} &= 1 \\ -3x-4y &= 12 \\ 3x+4y+12 &= 0 \end{aligned}$$

**例 7** 已知一正方形的边长是 $2\sqrt{2}$，它的两条对角线落在坐标轴上，求此正方形各边的方程式。

**解** 依题意，可画出右图。




$\because$ 正方形 ABCD 的边长为 $2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 对角线 AC 与 BD 的长为

$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$

因此可得 A、B、C、D 各点的坐标为：

(2，0)、(0，2)、(−2，0)、(0，−2)。

$\therefore$ AB 边的方程式为

$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$，即 $x+y-2=0$，

BC 边的方程式为

$\frac{x}{(-2)}+\frac{y}{2}=1$，即 $x-y+2=0$，

CD 边的方程式为

$\frac{x}{(-2)}+\frac{y}{(-2)}=1$，即 $x+y+2=0$；

DA 边的方程式为

$\frac{x}{2}+\frac{y}{(-2)}=1$，即 $x-y-2=0$。

## 习题 12b

1. 求下列直线的方程式:

   (a) 斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y$ 轴上的截距是 $-2$;

   (b) 斜率是 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y$ 轴上的截距是 2;

   (c) 倾斜角是 $135°$，$y$ 轴上的截距是 $-3$;

   (d) 倾斜角是 $45°$，$y$ 轴上的截距是 3。

2. 已知下列直线的斜截式方程，求各直线的斜率和在 $y$ 轴上的截距。

   (a) $y=-x+6$　　(b) $y=x$

   (c) $y=3x-9$　　(d) $y=-8x-7$

3. 求下列直线的方程式，并画出图形。

   (a) $x$ 轴上的截距是 2，$y$ 轴上的截距是 3;

   (b) $x$ 轴上的截距是 $-5$，$y$ 轴上的截距是 6;

   (c) $x$ 轴上的截距是 4，$y$ 轴上的截距是 $-3$;

   (d) $x$ 轴上的截距和 $y$ 轴上的截距都是 $-\frac{1}{2}$。

4. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标为：$A(-5,\ 0)$，$B(3,\ -3)$，$C(0,\ 2)$。

   (a) 用两点式求直线 AB 的方程式;

   (b) 用斜截式求直线 BC 的方程式;

   (c) 用截距式求直线 AC 的方程式。

## ● 直线方程的一般式

上一节我们学习了直线方程的几种特殊形式，它们都可化为二元一次方程式

$$Ax+By+C=0$$

的形式，其中 A、B 不同时为零。

我们把这种形式的方程叫做直线方程的**一般式**（general form）。

下面分 $B\neq 0$ 和 $B=0$ 两种情况加以讨论。

(a) 当 $B\neq 0$ 时，方程式 $Ax+By+C=0$ 可化为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

将它与斜截式方程 $y=mx+c$ 比较，可知这是斜率为 $-\dfrac{A}{B}$，在 $y$ 轴上的截距为 $-\dfrac{C}{B}$ 的直线。

若 $A=0$，即斜率为 $-\dfrac{A}{B}=0$，则得一条与 $x$ 轴平行的直线 $y=-\dfrac{C}{B}$，如图 12－6（此直线在 $C=0$ 时与 $x$ 轴重合）。

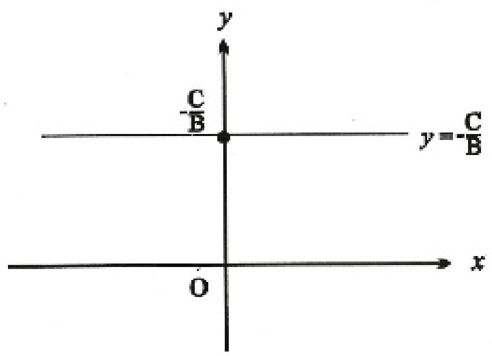



图 12－6

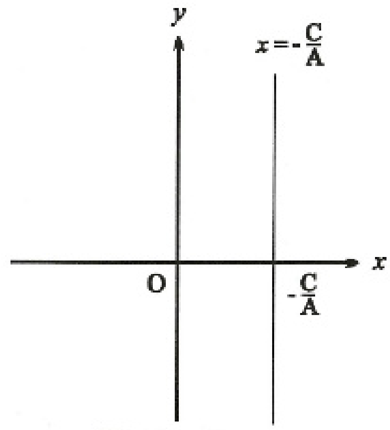



图 12－7

(b) 当 $B=0$ 时，方程式 $Ax+By+C=0$ 可化为

$$x=-\frac{C}{A}$$

这表示一条与 $y$ 轴平行或重合（当 $C=0$ 时）的直线，如图 12－7。

**例 8** 已知直线经过点 A (6, －4)，斜率为 $-\dfrac{4}{3}$，求直线的

(a) 点斜式； (b) 一般式； (c)截距式。

**解** 经过点 A (6, －4) 并且斜率等于 $-\dfrac{4}{3}$ 的直线的点斜式是

$$y+4=-\frac{4}{3}(x-6)$$

化成一般式，得 $4x+3y-12=0$

把常数项移到等号的右边，再把方程的两边除以 12，

得截距式 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$

**例 9** 把直线 $l$ 的方程式 $x-2y+6=0$ 化成斜截式，求出直线 $l$ 的斜率和在 $x$ 轴与 $y$ 轴上的截距，并画图。

**解** 将原方程式 $x-2y+6 = 0$ 移项，

得 $2y = x+6$

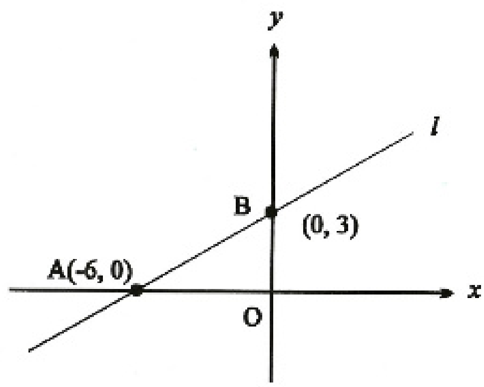
两边除以 2，得 $y = \frac{1}{2}x+3$

因此，直线 $l$ 的斜率 $m=\frac{1}{2}$，在 $y$ 轴上的截距是 3。

令 $y=0$，得 $x = -6$

即直线 $l$ 在 $x$ 轴上的截距是 $-6$。

画一条直线时，只要找出这条直线上的任意两点就可以了。通常是找出直线与两个坐标轴的交点。上面已求得直线 $l$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴的交点为：A $(-6, 0)$，B $(0, 3)$。过点 A、B 作直线，就得直线 $l$。




**例 10** 由下列各条件，写出直线的方程式，并化成一般式：

(a) 经过点 P $(4, 2)$，平行于 $x$ 轴；

(b) 经过点 P $(-\frac{1}{2}, 0)$，平行于 $y$ 轴。

**解** (a) 直线的方程式为：

$$y = 2$$

一般式为 $y-2 = 0$

(b) 直线的方程式为：

$$x = -\frac{1}{2}$$

一般式为 $2x+1 = 0$

## 习题 12c

1. 由下列各条件，写出直线方程的一般式：

   (a) 斜率是 $-\frac{1}{2}$，经过点 A $(8,\ -2)$；

   (b) 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距分别是 $\frac{3}{2}$，$-3$；

   (c) 经过两点 $P_1(3,\ -2)$，$P_2(5,\ -4)$；

   (d) $x$ 轴上的截距是 $-7$，倾斜角是 $45°$。

2. 已知直线 $Ax+By+C=0$，

   (a) 当 $B\neq 0$ 时，该直线的斜率是多少？当 $B=0$ 时呢？

   (b) 系数为何值时，方程式表示通过坐标原点的直线。

3. 求下列直线的斜率和在 $y$ 轴上的截距：

   (a) $3x+y-5=0$　　(b) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$

   (c) $x+2y=0$　　(d) $7x-6y+4=0$

4. 画出下列直线的图形：

   (a) $x-2y+3=0$　　(b) $y=\frac{1}{2}x+5$

   (c) $y=2x$　　(d) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$

5. 由下列条件，写出直线的方程式：

   (a) 经过点 $(3,\ 8)$，倾斜角是 $0°$　　(b) 经过点 $(4,\ 0)$，倾斜角是 $90°$

   (c) 经过点 $(0,\ 0)$，倾斜角是 $0°$　　(d) 经过点 $(0,\ 0)$，倾斜角是 $90°$

## 12.3 两条直线的平行与垂直

在平面几何中，我们学过平面上两条直线互相平行（parallel）或垂直(perpendicular) 的位置关系。现在我们来学怎样通过直线的方程式来判定两条直线平行或垂直。

设直线 $l_1$ 和 $l_2$ 的斜率为 $m_1$ 和 $m_2$，它们的方程式分别是

$$l_1:\ y=m_1x+c_1$$
$$l_2:\ y=m_2x+c_2$$

下面分别研究平行与垂直两种情况。

**(一)　两条直线平行**

如果 $l_1 // l_2$（图 12－8），那么它们的倾斜角相等，$\alpha_1 = \alpha_2$。

∴　$\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$

即　$m_1 = m_2$，

反过来，如果两条直线的斜率相等，

即　$m_1 = m_2$

也就是　$\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$

由于 $0° \leqslant \alpha_1 < 180°$，$0° \leqslant \alpha_2 < 180°$，

∴　$\alpha_1 = \alpha_2$

∴　$l_1 // l_2$

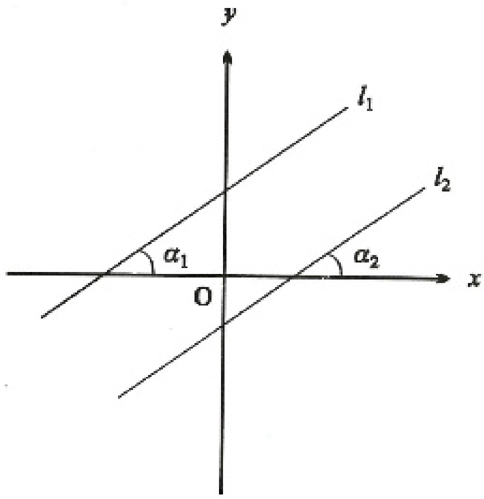



图 12－8

也就是说，

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

**例 11**　已知两条直线 $l_1$：$2x + 3y - 2 = 0$；$l_2$：$4x + 6y + 8 = 0$。

求证：$l_1 // l_2$。

**解**　将 $l_1$、$l_2$ 化成截距式，

即　$l_1$：$y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}$

$l_2$：$y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2}$

得　$m_1 = -\dfrac{2}{3}$

$m_2 = -\dfrac{2}{3}$

因　$m_1 = m_2$

∴　$l_1 // l_2$

**例 12** 求过点 A (1, $-4$)，且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线方程式。

**解** 已知直线 $2x+3y+5=0$ 的斜率是 $-\frac{2}{3}$，

所求直线与已知直线平行，因此它的斜率也是 $-\frac{2}{3}$。

根据点斜式，得到所求直线的方程式是

$$y+4 = -\frac{2}{3}(x-1)$$

即 $2x+3y+10 = 0$

**(二) 两条直线互相垂直**

如果 $l_1 \perp l_2$，这时 $\alpha_1 \neq \alpha_2$。

设 $\alpha_2 < \alpha_1$ (图 12－9)，则 $\alpha_1 = 90° + \alpha_2$。

因为 $l_1$、$l_2$ 的斜率是 $m_1$、$m_2$，

即 $\alpha_1 \neq 90°$，所以 $\alpha_2 \neq 0°$。

$$\therefore \quad \tan\alpha_1 = \tan(90° + \alpha_2) = -\cot\alpha_2 = -\frac{1}{\tan\alpha_2}$$

即 $$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$m_1 m_2 = -1$$

反过来，如果 $m_1 m_2 = -1$。设其中一个，例如 $m_2$ 是正数，则 $m_1$ 是负数。那么 $\alpha_2$ 是锐角，$\alpha_1$ 是钝角。

于是由 $$\tan\alpha_1 = -\frac{1}{\tan\alpha_2} = \tan(90° + \alpha_2)$$

可以推出 $$\alpha_1 = 90° + \alpha_2$$

$$\therefore \quad l_1 \perp l_2$$

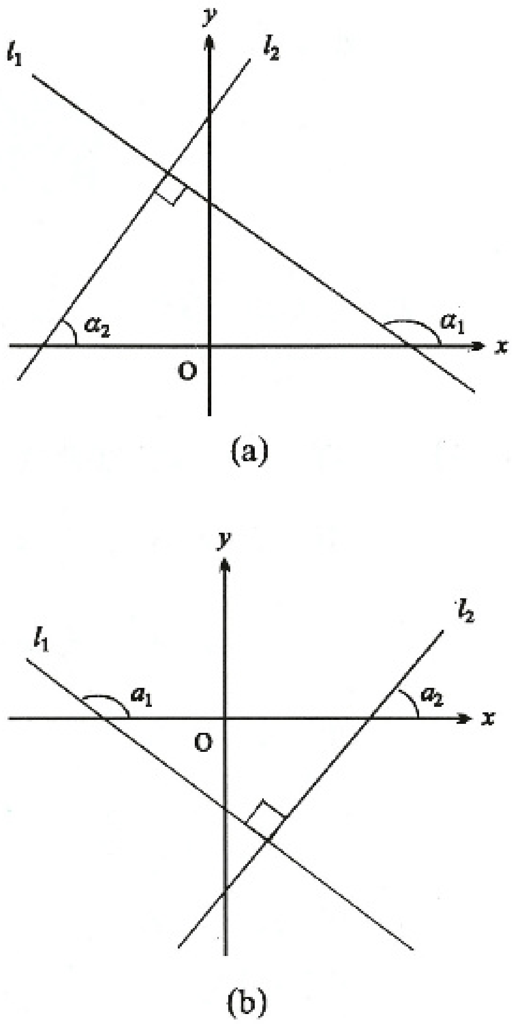



图 12－9

即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

**例 13** 已知两条直线 $l_1$：$2x-4y+7=0$，$l_2$：$2x+y-5=0$，求证：$l_1 \perp l_2$。

**解** $l_1$ 的斜率为 $m_1 = \frac{1}{2}$，$l_2$ 的斜率为 $m_2 = -2$

$\because \quad m_1 m_2 = \frac{1}{2} \times (-2)$

$= -1$

$\therefore \quad l_1 \perp l_2$

**例 14** 求过点 A (2，1)，且与直线 $2x+y-10=0$ 垂直的直线方程式。

**解** 直线 $2x+y-10=0$ 的斜率是 $-2$。

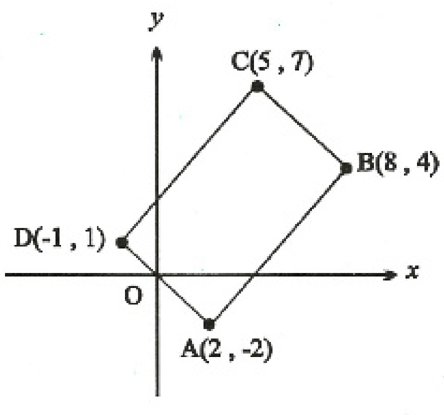
因为所求直线与已知直线垂直，所以它的斜率 $m=\frac{1}{2}$。

根据点斜式，所求直线的方程是 $y-1 = \frac{1}{2}(x-2)$

即 $x-2y = 0$

**例 15** 试证 A (2，$-2$)，B (8，4)，C (5，7) 和 D ($-1$，1) 为一长方形的四个顶点。

**解** $m_{AB} = \dfrac{4-(-2)}{8-2} = 1$




$m_{CD} = \dfrac{7-1}{5-(-1)} = 1$

$\therefore$ AB // CD

$m_{AD} = \dfrac{1-(-2)}{-1-2} = -1$

$m_{BC} = \dfrac{4-7}{8-5} = -1$

$\therefore$ AD // BC

$\therefore$ ABCD 为一平行四边形

由于 $m_{AB} \times m_{AD} = 1 \times (-1) = -1$，

所以 $AB \perp AD$，即 $\angle A = 90^\circ$

$\therefore$ ABCD 为一长方形

【注】例 15 也可用对角线相等来证明。

## 习题 12d

1. 判别下列各对直线是否平行、垂直、或两者皆非：
   (a) $y = 3x + 4$，$2y - 6x + 1 = 0$
   (b) $y = -\dfrac{4}{3}x + 5, -3x + 2y = -1$
   (c) $y = x$，$3x + 3y - 10 = 0$
   (d) $3x + 4y = 0$，$6x + 8y = 7$
   (e) $y + 1 = \dfrac{3}{4}x, -4x - 3y + 10 = 0$
   (f) $\sqrt{3}\,x - y - 1 = 0$，$\sqrt{3}\,x + 3y + 6 = 0$
2. 试证直线 $3x + 2y - 2 = 0$ 平行于直线 $6x + 4y + 8 = 0$，且垂直于直线 $2x - 3y - 7 = 0$。
3. 求过点 $(-4, 3)$，且与直线 $y = 2x + 5$ 平行的直线方程式。
4. 求过点 A $(2, 3)$，且分别适合下列条件的直线方程式：
   (a) 平行于直线 $2x + y - 5 = 0$
   (b) 垂直于直线 $x - y - 2 = 0$
5. 一三角形的三个顶点为 A $(6, 3)$，B $(1, 2)$，C $(-7, 2)$。证明 AB 及 BC 的中点的连线平行于 AC。
6. 求 A $(3, -1)$, B $(-5, 5)$ 两点连线的垂直平分线。若点 $(k, 1)$ 在此垂直平分线上，求 $k$ 之值。
7. 设 A $(a, -5)$，B $(-4, a)$ 两点的连线与 C $(3, a)$，D $(a, 3)$ 两点的连线互相垂直，求 $a$ 的值。
8. 证明 A $(2, 3)$，B $(4, -1)$，C $(0, -5)$，D $(-2, -1)$ 为一平行四边形。
9. 已知两条直线 $l_1$、$l_2$，其中一条没有斜率。这两条直线什么时候：
   (a) 平行　　(b) 垂直
   它们的逆命题成立吗？
10. 求证 A $(4, 3)$，B $(5, -2)$，C $(0, -3)$，D $(-1, 2)$ 为一正方形。

# 12.4　两条直线的夹角

两条直线 $l_1$ 和 $l_2$ 相交构成四个角，它们是两对对顶角，其中必有一对是锐角，我们把这个锐角叫做 $l_1$ 和 $l_2$ 所成的角，简称夹角。

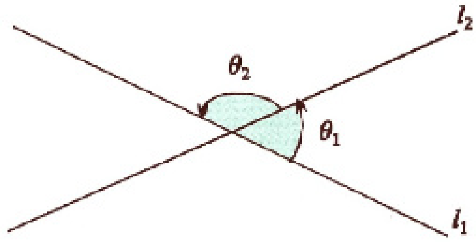



图 12－10

另外，我们把直线 $l_1$ 依逆时针方向旋转到与 $l_2$ 重合时所转的角，叫做 $l_1$ 到 $l_2$ 的角，图 12－10 中，直线 $l_1$ 到 $l_2$ 的角是 $\theta_1$，$l_2$ 到 $l_1$ 的角是 $\theta_2$。

现在我们来求斜率为 $m_1$、$m_2$ 的两条直线 $l_1$ 到 $l_2$ 的角 $\theta$。设已知直线的方程式分别是

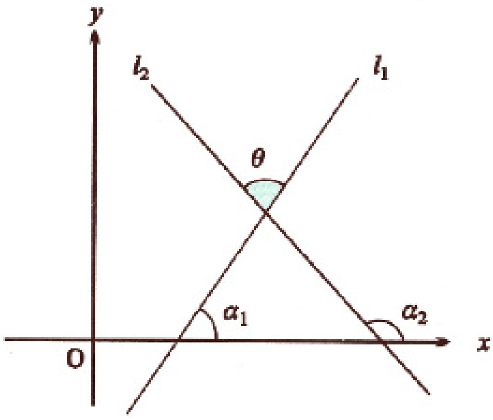
$$l_1:\ y = m_1x + c_1$$

$$l_2:\ y = m_2x + c_2$$

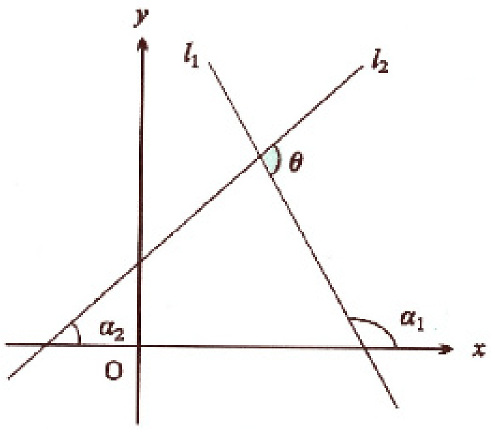
如果 $m_1m_2 = -1$，那么 $\theta = 90°$。

下面研究 $m_1m_2 \neq -1$ 时的情形。

设 $l_1$、$l_2$ 的倾斜角分别是 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$（图 12－11），




(a)




(b)

图 12－11

则　$\tan\alpha_1 = m_1$，$\tan\alpha_2 = m_2$

∵　$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$　（图 12－11 a）

或　$\theta = \pi - (\alpha_1 - \alpha_2)$

$\quad = \pi + (\alpha_2 - \alpha_1)$　（图 12－11 b）

∴　$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$

或　$\tan\theta = \tan[\pi + (\alpha_2 - \alpha_1)]$

$\quad = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$

可得　$\tan\theta = \dfrac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2\tan\alpha_1}$

即

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1} \qquad (m_1m_2 \neq -1)$$

由两条直线的夹角的定义可知，直线 $l_1$、$l_2$ 的夹角满足:

$$\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}\right|$$

**例 16** 求直线 $l_1$: $y=-2x+3$, $l_2$: $y=x-\frac{3}{2}$ 的夹角.

**解** 两条直线的斜率为 $m_1=-2$, $m_2=1$, 得

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}\right|\\&=\left|\frac{1-(-2)}{1+1(-2)}\right|\\&=3\end{aligned}$$

$\therefore\ \theta=71°34'$

**例 17** 已知直线 $l_1$: $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $l_2$: $A_2x+B_2y+C_2=0$ ($B_1\neq0$, $B_2\neq0$, $A_1A_2+B_1B_2\neq0$), $l_1$ 到 $l_2$ 的角是 $\theta$。

求证: $\tan\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$

**解** 设两条直线 $l_1$、$l_2$ 的斜率分别是 $m_1$、$m_2$,

则 $m_1=-\frac{A_1}{B_1}$, $m_2=-\frac{A_2}{B_2}$

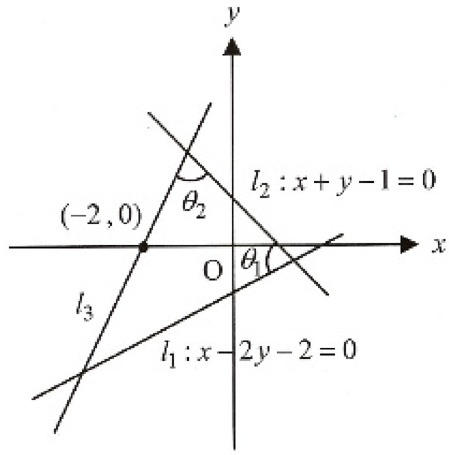
$$\begin{aligned}\therefore\ \tan\theta&=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}\\&=\frac{-\frac{A_2}{B_2}-\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)}{1+\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)}\\&=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\end{aligned}$$

**例 18** 等腰三角形一腰所在的直线 $l_1$ 的方程式是 $x-2y-2=0$，底边所在的直线 $l_2$ 的方程式是 $x+y-1=0$，点 $(-2, 0)$ 在另一腰上，求这腰所在直线 $l_3$ 的方程式.

**解** 设 $l_1$、$l_2$、$l_3$ 的斜率分别为 $m_1$、$m_2$、$m_3$，$l_1$ 到 $l_2$ 的角是 $\theta_1$，$l_2$ 到 $l_3$ 的角是 $\theta_2$。

则 $m_1 = \frac{1}{2}$，$m_2 = -1$

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} = \frac{(-1)-\frac{1}{2}}{1+(-1)\left(\frac{1}{2}\right)} = -3$$




因为 $l_1$、$l_2$、$l_3$ 所围成的三角形是等腰三角形，

所以 $\theta_2 = \theta_1$

$\tan\theta_2 = \tan\theta_1$

即 $$\frac{m_3-m_2}{1+m_3m_2} = -3$$

$$\frac{m_3+1}{1-m_3} = -3$$

解得 $m_3 = 2$

因为 $l_3$ 经过点 $(-2, 0)$，斜率为 2，

由点斜式得 $l_3$ 的方程式为: $y = 2[x-(-2)]$

$$2x-y+4 = 0$$

## 习题 12e

1. 求下列直线 $l_1$ 到 $l_2$ 的角与 $l_2$ 到 $l_1$ 的角:

(a) $l_1$: $y=\frac{1}{2}x+2$
$l_2$: $y=3x+7$

(b) $l_1$: $x-y=5$
$l_2$: $x+2y-3=0$

2. 求下列直线的夹角：

(a) $y=3x-1$，$y=-\frac{1}{3}x+4$

(b) $x-y=5$，$y=4$

(c) $5x-3y=9$，$6x+10y+7=0$

3. 求下列各三角形的内角，其

(a) 三边方程式为：$4x-3y+9=0$，$12x-5y+15=0$，$2x-y+1=0$；

(b) 三顶点为 $(0,\ 1)$，$(-3,\ -1)$，$(5,\ -2)$。

4. 求经过点 $(1,\ -4)$，并与直线 $x-2y+7=0$ 的夹角的正切为 $\frac{2}{3}$ 的直线的方程式。

5. 已知等腰直角三角形的斜边的方程式为 $3x-y+1=0$，直角顶点为 $(6,\ 1)$，求此三角形其他两边的方程式。

6. 求经过原点 $(0,\ 0)$，且与直线 $2x+3y-4=0$ 的夹角为 $45°$ 的直线方程式。

## 12.5 两条直线的交点

两直线的**交点**（point of intersection）即为此二直线方程式的公共解。因而，解此二直线的方程组，就可求得它们交点的坐标。

若三条或三条以上的直线相交于同一点，我们说这些直线**共点**(concurrent)。

**例 19** 求两条直线 $l_1$：$3x+4y-2=0$，$l_2$：$2x+y+2=0$ 的交点。

**解** 解方程组 $\begin{cases}3x+4y-2=0\\2x+y+2=0\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$

$\therefore$ $l_1$、$l_2$ 的交点是 $(-2,\ 2)$。

**例 20** 试求直线 $l_1$：$2x-4y+3=0$ 与 $l_2$：$x-2y=0$ 的交点。

**解** 因为直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的斜率都是 $-\frac{1}{2}$，

$\therefore$ $l_1 /\!/ l_2$

即 $l_1$ 与 $l_2$ 没有交点。

**例 21** 试证下列四条直线共点。

$l_1$：$x+y=0$ $l_2$：$2x-y=6$

$l_3$：$x-y=4$ $l_4$：$x-2y=6$

**解一** $l_1$、$l_2$ 的交点为 $(2,\ -2)$，

$l_3$、$l_4$ 的交点为 $(2,\ -2)$，

$\therefore$ $l_1$、$l_2$、$l_3$、$l_4$ 交于同一点 $(2,\ -2)$。

**解二** $l_1$、$l_2$ 的交点为 $(2,\ -2)$。

经过验证得知点 $(2,\ -2)$ 落在 $l_3$、$l_4$ 上。

$\therefore$ $l_1$、$l_2$、$l_3$、$l_4$ 交于同一点 $(2,\ -2)$。

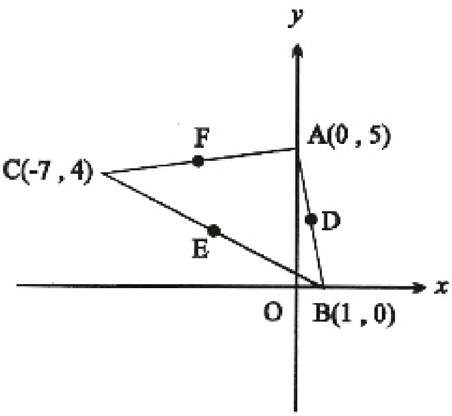
**例 22** 已知三角形的顶点是 A $(0,\ 5)$，B $(1,\ 0)$，C $(-7,\ 4)$。求证该三角形的三条中线共点。

**解** 设 D、E、F 分别是 AB、BC、CA 的中点，则由中点公式可分别求出这三点的坐标为 D$\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$，E $(-3,\ 2)$，F$\left(-\frac{7}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

中线 AE 所在直线的方程式为

$$\frac{y-5}{x-0}=\frac{5-2}{0+3}$$

化简得 $y = x+5$ ..........................(1)




中线 CD 所在直线的方程式为

$$\frac{y-4}{x+7}=\frac{4-\frac{5}{2}}{-7-\frac{1}{2}}$$

化简得 $x-5y+13 = 0$................(2)

中线 BF 所在直线的方程式为

$$\frac{y+0}{x-1} = \frac{0-\frac{9}{2}}{1+\frac{7}{2}}$$

化简得 $x+y-1 = 0$ ..................(3)

由 (1)、(2) 可得中线 AE、CD 的交点坐标为 $(-2, 3)$。

经过验证得知点 $(-2, 3)$ 满足方程式 (3)。

所以中线 AE、BF、CD 共点于 $(-2, 3)$。

**例 23** 已知两条直线：$l_1$：$x+my+6=0$，$l_2$：$(m-2)x+3y+2m=0$。当 $m$ 为何值时，$l_1$ 与 $l_2$ (a) 平行；(b) 重合；(c) 相交。

**解** 将两直线方程式化成斜截式，

得 $l_1$：$y = -\dfrac{1}{m}x-\dfrac{6}{m}$

$l_2$：$y = \dfrac{-(m-2)}{3}x-\dfrac{2m}{3}$

当 $l_1 \parallel l_2$，则 $-\dfrac{1}{m} = -\dfrac{(m-2)}{3}$

$$3 = m^2-2m$$

$$m^2-2m-3 = 0$$

$$(m+1)(m-3) = 0$$

$$m = -1 \quad \text{或} \quad m = 3$$

(a) 当 $m = -1$ 时，得

$l_1$：$y=x-6$

$l_2$：$y=x+\dfrac{2}{3}$

∴ 当 $m = -1$ 时，$l_1$ 与 $l_2$ 平行。

(b) 当 $m=3$ 时，得

$$l_1:\ y=-\frac{1}{3}x-2$$

$$l_2:\ y=-\frac{1}{3}x-2$$

$\therefore$ 当 $m=3$ 时，$l_1$ 与 $l_2$ 重合

(c) 当 $m\neq-1$，$m\neq3$ 时，$l_1$ 与 $l_2$ 相交

## 习题 12f

1. 求下列各对直线的交点，并画图：

   (a) $l_1$: $2x+3y=12$
   $l_2$: $x-2y=4$

   (b) $l_1$: $x=2$
   $l_2$: $3x+2y-12=0$

2. 判定下列各对直线的位置关系。如果相交，则求出交点的坐标：

   (a) $l_1$: $2x-y=7$
   $l_2$: $4x+2y=1$

   (b) $l_1$: $2x-6y+4=0$
   $l_2$: $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}$

   (c) $l_1$: $(\sqrt{2}-1)x+y=3$
   $l_2$: $x+(\sqrt{2}+1)y=2$

3. A 和 C 取什么值时，直线 $Ax-2y-1=0$ 和直线 $6x-4y+C=0$。

   (a) 平行；(b) 重合；(c) 相交。

4. P $(a, b)$ 在直线 $12x-2y+5=0$ 上，Q $(b, a)$ 在直线 $4x-10y+3=0$ 上，求 PQ 的方程式。

5. 求直线 $2y-3x+7=0$ 与二点 $(6, -1)$、$(-4, -3)$ 的连线的交点，并求此二直线的夹角。

6. 三角形的顶点为 A $(4, 2)$、B $(0, -6)$ 及 C $(7, -1)$。试求：

   (a) 三边高的方程式及其交点；

   (b) 通过顶点 A 且平行于对边 BC 的直线方程式。

7. 已知点 A $(-7, -8)$ 和 B $(18, -8)$ 分别为一等腰 $\triangle ABC$ 的两个顶点，其中 AB = BC。由 B 到 AC 的垂线的方程式为 $4x+3y=48$，试求 C 点的坐标。

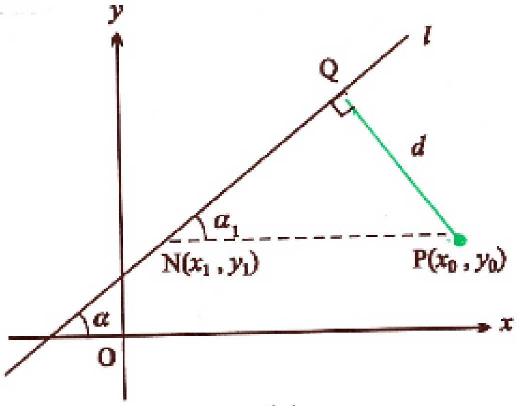
8. 求经过点 A $(5, 2)$ 并垂直于直线 $l$: $y=3x-5$ 的直线方程式。据此，求点 A 至直线 $l$ 的垂足的坐标。

# 12.6 点到直线的距离

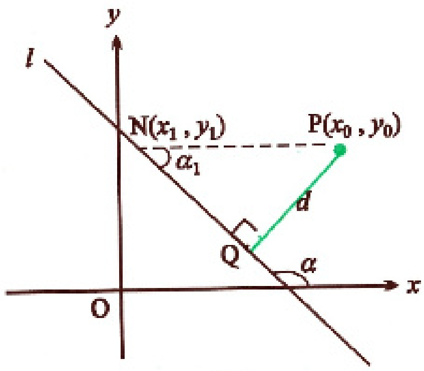
## ● 点到直线的距离

根据定义，点 P 到直线 $l$ 的距离是点 P 到直线 $l$ 的垂线段的长 PQ（图 12－12）。

设直线 $l$: $Ax+By+C=0$ 的倾斜角为 $\alpha$。过点 $P(x_0, y_0)$ 作 PN // OX，那么 PN 与 $l$ 相交于点 $N(x_1, y_1)$，点 Q 是点 P 在直线 $l$ 上的垂足（图 12－12）。




(a)




(b)

图 12－12

∵ PN // OX，所以 N 点的坐标为:

$$y_1=y_0$$

$$x_1=\frac{-By_0-C}{A}$$

$$\therefore\ PN=\left|x_0-\left(\frac{-By_0-C}{A}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}\right|$$

当 $\alpha<90°$ 时，见图 12－12 (a)，$\alpha_1=\alpha$；

当 $\alpha>90°$ 时，见图 12－12 (b)，$\alpha_1=\pi-\alpha$。

所以，在两种情况下都有

$$\tan^2\alpha_1=\tan^2\alpha=\frac{A^2}{B^2}$$

$$\because\ \alpha_1<90°,$$

$$\sin\alpha_1=\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$\therefore\ PQ=PN\sin\alpha_1$$

$$=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}\right|\cdot\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

这样就得到了点 $P(x_0, y_0)$ 到一条直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式:

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

**例 24** 求点 P $(-1, 2)$ 到直线 (a) $2x + y - 10 = 0$；(b) $3x = 2$ 的距离。

**解** (a) 根据点到直线的距离公式，得

$$d = \left|\frac{2(-1)+1(2)-10}{\sqrt{2^2+1^2}}\right|$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

(b) 因为直线 $3x = 2$ 平行于 $y$ 轴，所以

$$d = \left|\frac{2}{3} - (-1)\right|$$

$$= \frac{5}{3}$$

或

将 $3x = 2$ 写成一般式 $3x - 2 = 0$，

$$d = \left|\frac{3(-1)+0(2)-2}{\sqrt{3^2+0^2}}\right|$$

$$= \frac{5}{3}$$

**例 25** 已知 △ABC 三边所在直线的方程式分别为

AB：$3x + 5y - 15 = 0$，BC：$3x + 2y - 24 = 0$，CA：$x - y + 3 = 0$。

求 B 至 AC 的距离。

**解** 解方程组：

$$\begin{aligned} 3x + 5y - 15 &= 0 \quad \dots\dots\dots\dots(1) \\ 3x + 2y - 24 &= 0 \quad \dots\dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

(1) − (2)，

$$\begin{aligned} 3y + 9 &= 0 \\ y &= -3 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

∴ 点 B 为 $(10, -3)$

∴ 点 B $(10, -3)$ 到 AC：$x - y + 3 = 0$ 的距离为

$$d = \left|\frac{10-(-3)+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|$$

$$= \frac{16}{\sqrt{2}}$$

$$= 8\sqrt{2}$$

**例 26**　已知点 A $(a,\ 6)$ 到直线 $3x-4y=2$ 的距离等于 4；求 $a$ 的值。

**解**　　点 A 到直线 $l$ 的距离为　$d = \left|\dfrac{3a-4\times 6-2}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|$

$$4 = \left|\frac{3a-26}{5}\right|$$

$\therefore$　　$\dfrac{3a-26}{5} = \pm 4$

解得　　$a = \dfrac{46}{3}$　或　$a = 2$

## ● 二平行线的距离

已知两条平行线：$l_1$：$Ax+By+C_1=0$，$l_2$：$Ax+By+C_2=0$。

怎样求 $l_1$、$l_2$ 之间的距离呢？

由平面几何知识可知，两条平行线间的距离处处相等，所以可在 $l_1$(或 $l_2$) 上任取一点，求得该点到 $l_2$(或 $l_1$) 的距离，即为直线 $l_1$、$l_2$ 之间的距离。

如图 12－13，在 $l_1$ 上任取一点 P $(x_1,\ y_1)$，

则 $Ax_1+By_1+C_1 = 0$

$$Ax_1+By_1 = C_1$$

P 点至直线 $l_2$ 的距离为

$$d = \left|\frac{A(x_1)+B(y_1+C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-C_1+C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

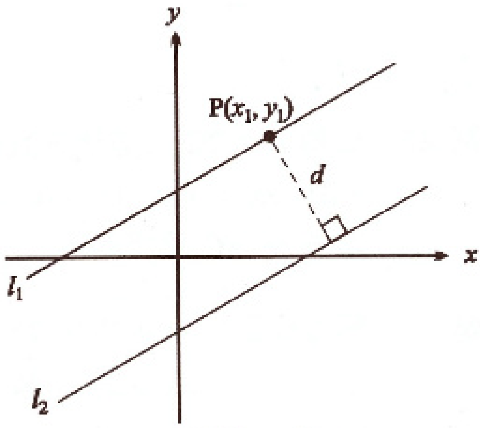


图 12－13

即

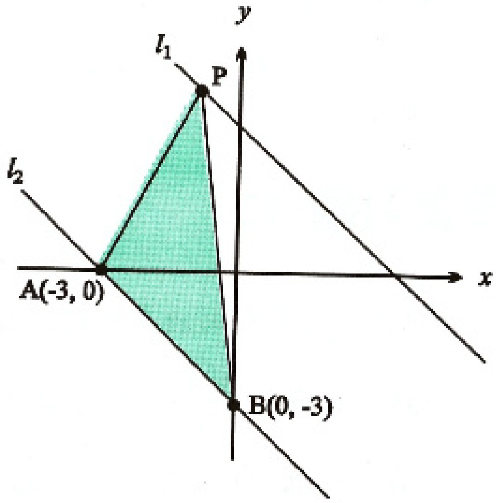
$$\boxed{d = \left|\frac{C_2-C_1}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|}$$

**例 27**　求平行线 $2x-7y+8=0$ 和 $2x-7y-6=0$ 的距离。

**解**　　$d = \left|\dfrac{8-(-6)}{\sqrt{2^2+(-7)^2}}\right|$

$$= \frac{14}{53}\sqrt{53}$$

**例 28** 如右图，已知 $l_1 /\!/ l_2$，且点 A $(-3, 0)$，B $(0, -3)$ 落在直线 $l_1$：$x+y+3=0$ 上。若点 P 是直线 $l_2$：$x+y-10=0$ 上的某一定点，求 $\triangle$ABP 的面积。




**解** 点 P 到 AB 的距离为

$$d = \left|\frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-10-3}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$$

$$= \frac{13}{2}\sqrt{2}$$

$\therefore$ $\triangle$ABP 的面积 $= \dfrac{1}{2}\,AB \times d$

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{13}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{39}{2}$$

## 习题 12g

1. 求坐标原点到下列直线的距离：
   (a) $3x+2y-26=0$　　(b) $x=y$
2. 求下列点到直线的距离：
   (a) P $(1, 2)$，$x-4y-1=0$　　(b) P $(2, -2)$，$x+4y+5=0$
   (c) P $(-4, -3)$，$x+y-2=0$　　(d) P $(-4, -2)$，$2y-x+2=0$
   (e) P $(1, -2)$，$4x+3y=0$
3. 求下列三条直线所围成的三角形的三条高的长：
   $$3x+y+3=0,\ x-3y-5=0,\ x+3y+14=0$$
4. 已知点 P $(4, m)$ 到直线 $x-4y=8$ 的距离等于 2，求 $m$ 的值。
5. 求下列两条平行线的距离：
   (a) $2x+3y-8=0$，$2x+3y+18=0$；
   (b) $3x+4y=10$，$3x+4y=0$；
   (c) $3x-2y-1=0$，$6x-4y+2=0$。
6. 若从 $y$ 轴上的点到一直线 $x-2y-1=0$ 的距离是 $\sqrt{5}$，试求这些点的坐标。

7. 三角形的三个顶点分别是 A (−4, 2), B (−1, 0), C (3, −6), 试求从 A 到 BC 边上的高的长度。
8. 从一点 Q (5, 1) 到通过一点 P (2, 5) 的直线的距离等于 3。试求此直线的方程式。
9. 从一点 A (4, −6) 到通过一点 C (7, −2) 的直线的距离等于 5, 试求此直线的方程式。

## 总复习题 12

1. 根据下列条件写出直线的方程式:

   (a) 斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 经过点 A (8, −2);

   (b) 过点 B (−2, 0), 且与 $x$ 轴垂直;

   (c) 斜率为 −4, 在 $y$ 轴上的截距为 7;

   (d) 经过两点 A (−1, 8), B (4, −2);

   (e) 在 $y$ 轴上的截距是 2, 且与 $x$ 轴平行;

   (f) 在 $x$ 轴、$y$ 轴上的截距分别是 4 与 −3。

2. 一条直线经过点 A (2, −3), 它的倾斜角等于直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 的倾斜角的 2 倍, 求这条直线的方程式。
3. 求直线 $2x-5y-10=0$ 和坐标轴所围成的三角形的面积。
4. 求经过点 A (−3, 4), 并且在两轴上截距的和等于 12 的直线的方程式。
5. 一条直线和 $y$ 轴相交于点 P (0, 2), 它的倾斜角的正弦是 $\frac{4}{5}$。求这条直线的方程式。这样的直线有几条?
6. (a) 已知三角形的顶点是 A (8, 5), B (4, −2), C (−6, 3), 求经过每两边中点的三条直线的方程式。

   (b) △ABC 的顶点是 A (0, 5), B (1, −2), C (−6, 4), 求 BC 边上的中线的方程式。

7. 直线方程式 $Ax+By+C=0$ 的系数 A、B、C 满足什么关系时, 这条直线

   (a) 与坐标轴都相交;　　(b) 只与 $x$ 轴相交;

   (c) 只与 $y$ 轴相交;　　(d) 是 $x$ 轴;

   (e) 是 $y$ 轴。

8. 已知直线分别满足下列条件，求直线的方程式：

   (a) 经过点 A (3，2)，且与直线 $4x+y-2=0$ 平行；

   (b) 经过点 B (3，0)，且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直；

   (c) 经过点 C (2，$-3$)，且平行于过两点 M (1，2) 和 N ($-1$，$-5$) 的直线。

9. 设有两点 A (7，$-4$)，B ($-5$，6)，求线段 AB 的垂直平分线的方程式。

10. 三角形三个顶点是 A (4，0)，B (6，7)，C (0，3)。求这个三角形的三条高的方程式。

11. 已知直线分别满足下列条件，求直线的方程式：

    (a) 斜率为$-2$，且过两条直线 $3x-y+4=0$ 和 $x+y-4=0$ 的交点；

    (b) 过两条直线 $x-2y+3=0$ 和 $x+2y-9=0$ 的交点和原点；

    (c) 经过两条直线 $2x-3y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点，且垂直于直线 $3x-2y+4=0$；

    (d) 经过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点，且平行于直线 $4x-3y-7=0$；

    (e) 经过直线 $y=2x+3$ 和 $3x-y+2=0$ 的交点，且垂直于第一条直线。

12. 直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$ 和 $2x-y=10$ 相交于一点，求 $a$ 的值。

13. 不解方程组，判定下列两个方程式的直线的位置关系。

    (a) $\begin{cases}2x+y=11\\x+3y=18\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}2x-3y=4\\4x-6y=8\end{cases}$

    (c) $\begin{cases}3x+10y=16\\6x+20y=7\end{cases}$　　(d) $\begin{cases}4x+10y=12\\6x-15y=18\end{cases}$

14. 已知平行四边形两条边所在直线的方程是 $x+y-1=0$，$3x-y+4=0$，它的对角线的交点是 M (3，3)。求这个平行四边形其他两边的方程式。

15. 直线 $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ 和 $(5a-2)x+(a+4)y-7=0$ 互相垂直。求 $a$ 的值。

16. 已知直线：$l_1$：$(3+m)x+4y=5-3m$，$l_2$：$2x+(5+m)y=8$。$m$ 为何值时，$l_1$ 与 $l_2$ (a) 相交；(b) 平行；(c) 重合。

17. (a) 当 $a$ 为何值时，下列两方程式的直线平行：

    (i) $ax-5y=9$，$2x-3y=15$；

    (ii) $x+2ay-1=0$，$(3a-1)x-ay-1=0$；

    (iii) $2x+3y=a$，$4x+6y-3=0$。

(b) 当 $m$、$n$ 各为何值时，下列两方程式的直线重合：

(i) $x+2y=4$，$mx+y=n$；

(ii) $mx+10y=2$，$3x+(n-1)y=-1$。

(c) 当 $a$ 为何值时，下列两方程式的直线互相垂直：

(i) $4ax+y=1$，$(1-a)x+y=-1$；

(ii) $2x+ay=2$，$ax+2y=1$。

18. 讨论两条直线的位置关系：

$l_1$：$A_1x+B_1y+C_1=0$，

$l_2$：$A_2x+B_2y+C_2=0$。

(a) 当 $B_1=0$，$B_2\neq 0$ 时；　(b) 当 $B_1=B_2=0$ 时。

19. 三角形的三个顶点是 A (6，3)，B (9，3)，C (3，6)。求它的三个内角的度数。

20. 已知直线 $l$ 经过点 P (2，1)，且和直线 $5x+2y+3=0$ 的夹角等于 $45°$。求直线 $l$ 的方程。

21. 求两条平行直线 $3x+4y-12=0$ 和 $6x+8y+11=0$ 的距离。

22. 求平行于直线 $x-y-2=0$ 且与它的距离为 $2\sqrt{2}$ 的直线方程式。

23. 正方形的中心在 C (−1，0)，一条边的方程式是 $x+3y-5=0$，求其他三边的方程式。

24. 一根弹簧，挂 4 千克的物体时，长 20 厘米，在弹性限度内，所挂物的重量每增加 1 千克，弹簧伸长 1.5 厘米。利用点斜式写出弹簧的长度 $l$（厘米）和所挂物体重量 F（千克）之间关系的方程。

25. 油槽储油 20 立方米，从一管道等速流出，50 分钟流完。用截距式写出关于油槽里剩余的油量 Q（立方米）和流出的时间 $t$（分）的方程，并且画出图形（注意：$0\leqslant t\leqslant 50$）。

26. 光线从点 $m$ (−2，3) 射到 $x$ 轴上一点 P (1，0) 后被 $x$ 轴反射。求反射光线所在直线的方程式。

# 13 方程组

## 13.1 三元一次方程组

### ● 三元一次方程组的解法

含有三个未知数，且未知数的次数只有一次的方程式，叫做**三元一次方程式**(linear equation in three variables)，如

$$6x+2y-5z=13;\ 3u+3v-2w=13 \text{ 和 } 7p+5q-3r=26$$

等都是三元一次方程式。

由几个含有三个相同未知数的三元一次方程式组成的方程组，叫做**三元一次方程组**（simultaneous linear equations in three variables），如

$$(\text{I})\ \begin{cases} x+2y+2z=5 \\ 2x+6y+5z=22 \\ x-2y-3z=-1 \end{cases} \text{ 和 } (\text{II})\ \begin{cases} 2x+3y+11z=7 \\ x+y+5z=3 \\ x+y+3z=1 \end{cases}$$

都是三元一次方程组。

把 $\begin{cases} x=-1 \\ y=9 \\ z=-6 \end{cases}$ 代入方程组(Ⅰ)，各方程式两边都相等，我们称 $\begin{cases} x=-1 \\ y=9 \\ z=-6 \end{cases}$ 为方程组(Ⅰ)的解，以上解通常记作 $(-1, 9, -6)$。同样，方程组(Ⅱ)的解是 $(-2, 0, 1)$。

在解二元一次方程组时，我们设法消去其中一个未知数，从而得出另一未知数的一元一次方程式，解这个方程式得出一个未知数的值，然后再求出所消去的未知数的值。同样的，解三元一次方程组时，我们也是先设法消去其中一个未知数，从而得出其它两个未知数的二元一次方程组，解这个方程组得出两个未知数的值，然后再求出所消去的未知数的值。在消去未知数时，一般用代入法、加减法，也可以用比较法。

**例 1** 解方程组 $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 2x+y-4z=-9 \\ x+y+3z=6 \end{cases}$。

**解** $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \text{ ............(1)} \\ 2x+y-4z=-9 \text{ ........(2)} \\ x+y+3z=6 \text{ ............(3)} \end{cases}$

由 (1) 式，得 $y=3x+2z$ ...............(4)

把 (4) 代入 (2)，得 $2x+(3x+2z)-4z=-9$

即 $5x-2z=-9$ ...............(5)

把 (4) 代入 (3)，得 $x+(3x+2z)+3z=6$

即 $4x+5z=6$ ...............(6)

解 (5) 和 (6)，得 $x=-1, z=2$

把 $x=-1, z=2$ 代入 (4)，得 $y=1$

∴ 解是 $(-1,1,2)$

**例 2** 求方程组 $\begin{cases} 6x+2y-5z=13 \\ 3x+3y-2z=13 \\ 7x+5y-3z=26 \end{cases}$ 的解集。

**解** $\begin{cases} 6x+2y-5z=13 \text{ ................(1)} \\ 3x+3y-2z=13 \text{ ................(2)} \\ 7x+5y-3z=26 \text{ ................(3)} \end{cases}$

(1) × 2，得 $12x+4y-10z=26$ .................(4)

(2) × 5，得 $15x+15y-10z=65$ .................(5)

(5) − (4)，得 $3x+11y=39$ .................(6)

(2) × 3，得 $9x+9y-6z=39$ .................(7)

(3) × 2，得 $14x+10y-6z=52$ .................(8)

(8) − (7)，得 $5x+y=13$

∴ $y=13-5x$ .................(9)

把 (9) 代入 (6)，可得 $\quad 3x+11(13-5x) = 39$

$$x = 2$$

把 $x=2$ 代入 (9)，得 $\quad y = 13-5(2)$

$$= 3$$

把 $x=2, y=3$ 代入 (1) 式，得 $6(2)+2(3)-5z = 13$

$$z = 1$$

∴ 解集是 $\{(2, 3, 1)\}$

**例 3** 解方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=9 \\ z+x=3 \end{cases}$。

**解**

$$\begin{cases} x+y=2 \text{ ............(1)} \\ y+z=9 \text{ ............(2)} \\ z+x=3 \text{ ............(3)} \end{cases}$$

此方程组可用下列特殊方法去解：

(1) + (2) + (3)，得 $\quad 2(x+y+z) = 14$

∴ $\quad x+y+z = 7$ ................(4)

(4) − (1)，得 $\quad z=5$

(4) − (2)，得 $\quad x=-2$

(4) − (3)，得 $\quad y=4$

∴ 解是 $(-2, 4, 5)$

**例 4** 求方程组 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=2 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4 \\ -\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6 \end{cases}$ 的解集。

**解**　设 $u=\dfrac{1}{x}, v=\dfrac{1}{y}, w=\dfrac{1}{z}$，则原方程组化成:

$$\begin{cases} u+v-w=2 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ u-v+w=4 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ -u+v+w=6 & \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(1) + (2) + (3)，得　$u+v+w = 12$ ……………(4)

(4) − (1)，得　$2w = 10$

∴　$w = 5$

(4) − (2)，得　$2v = 8$

∴　$u = 4$

(4) − (3)，得　$2u = 6$

∴　$u = 3$

$$\therefore \begin{cases} u=\dfrac{1}{x}=3 \\ v=\dfrac{1}{y}=4 \\ w=\dfrac{1}{z}=5 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{4} \\ z=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

∴　解集是 $\left\{\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}\right)\right\}$

## 习题 13a

解下列各方程组:

1. $\begin{cases} 3x+2y-4z=15 \\ 5x-3y+2z=28 \\ -x+3y+4z=24 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-7y+10=0 \\ 9y+4z-18=0 \\ 11x+8z+19=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 4x-4y+z=7 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y-2z=-5 \\ x-y+z=1 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 3x+5y-2z=9 \\ 2x-y+4z=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+6y+3z=6 \\ 3x+15y+7z=6 \\ 4x-9z+4z=9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=7 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=-2 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{z}=4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{y+2}-\dfrac{1}{z+1}=-1 \\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{2}{z+1}=-3\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{y+2}-\dfrac{3}{z+1}=9\dfrac{1}{2} \end{cases}$

## 13.2　二元二次方程组

一个含有两个未知数，并且各项中含未知数项的最高次数是 2 的整式方程式，叫做**二元二次方程式**（quadratic equation in two variables）。例如，$x^2+y^2=25$，$xy=221$，$3x^2-xy=4y^2-2y+1$ 等都是二元二次方程式。

二元二次方程式的一般形式是：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

这里，$a, b, c$ 至少要有一个不是零。由（相同未知数的）一个二元二次方程式和几个二元一次方程式或二元二次方程式所组成的方程组，叫做二元二次方程组。

### ● 二元一次方程式与二元二次方程式组成的方程组

解由一个二元一次方程式和一个二元二次方程式所组成的二元二次方程组，一般用代入法。这就是先从一次方程式中，把其中一个未知数用另一个未知数表示出来，将它代入二次方程式里，从而消去一个未知数，得到一个一元二次方程式，解得根后再代入原来的一次方程式里，就可以求得另一个未知数的值。

**例 5** 解方程组 $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2-4x+3y-3=0\\2x-3y=1\end{cases}$。

**解** $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2-4x+3y-3=0\ \ldots\ldots(1)\\2x-3y=1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$

由 (2)，得 $y=\dfrac{2x-1}{3}$ ……………………………(3)

把 (3) 代入 (1)，得

$$2x^2-3x\left(\frac{2x-1}{3}\right)+\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2-4x+3\left(\frac{2x-1}{3}\right)-3=0$$

∴ $4x^2-13x-35=0$

∴ $(x-5)(4x+7)=0$

∴ $x=5$ 或 $x=-\dfrac{7}{4}$,

代入 (3)，得

$$y=3 \quad 或 \quad y=-\frac{3}{2}$$

故，此方程组的解为：$(5,3)$，$\left(-\dfrac{7}{4},-\dfrac{3}{2}\right)$

**例 6** 求方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=225\\x+y=21\end{cases}$ 的解集。

**解** $\begin{cases}x^2+y^2=25\ \ldots\ldots\ldots(1)\\x+y=21\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$

由 (2) 得 $y=21-x$,

将 (2) 代入 (1) 得 $x^2+(21-x)^2=225$

$x^2-21x+108=0$

$(x-12)(x-9)=0$

$x=12$ 或 $x=9$

将 $x$ 的值代入 $y=21-x$，得

$$y=9 \quad 或 \quad y=12$$

∴ 解集是 $\{(12,9),(9,12)\}$

## 习题 13b

解下列方程组：

1. $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-2y^2+3x-2=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 3x^2-2y^2-2x-y-1=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2y-3x=1 \\ 13x^2-8xy+3=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y-2=0 \\ 3x^2-5=2xy \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2+1=0 \\ 2x+y-10=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x^2+y^2=40 \\ x=\sqrt{3}\,y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2-y^2=21 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+y^2=10-y \\ x+y=-1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6x+6y=13 \\ xy=1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2-3y^2=13 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x^2-xy+y^2=x+y-1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y=12 \\ x^2+y^2=90 \end{cases}$

13. $\begin{cases} xy-7y+8=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y-11=0 \\ xy=24 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x-y-5=0 \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{5}{84} \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12} \\ xy=12 \end{cases}$

## ● 两个二元二次方程式组成的方程组

### (a) 加减消去法

如果二元二次方程组里的两个方程式都含有同类的二次项，而且各对应二次项的系数成比例，我们就可以利用加减消元法消去这些二次项，得出一个二元一次方程，这样就可用代入法来解此方程组了。

**例 7** 解方程组 $\begin{cases} xy+x=3 \\ 3xy+y=8 \end{cases}$ 。

解

$$\begin{cases} xy+x = 3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3xy+y = 8 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1) × 3 − (2)，得 $3x-y = 1$

$$y = 3x-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

把 (3) 代入 (1)，得 $x(3x-1)+x = 3$

$$3x^2-3 = 0$$

$$x = \pm 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

把 (4) 代入 (3)，得

$$y=2 \quad 或 \quad -4$$

∴ 解是 (1, 2)，(−1, −4)。

例 8 求方程组 $\begin{cases} 2x^2+4xy-2x-y+2=0 \\ 3x^2+6xy-x+3y=0 \end{cases}$ 的解集。

解

$$\begin{cases} 2x^2+4xy-2x-y+2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x^2+6xy-x+3y=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(2) × 2 − (1) × (3)，得 $4x+9y-6 = 0$

$$y = \frac{2}{9}(3-2x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) 代入 (1)，整理后得 $x^2+5x+6 = 0$

∴ $x = -2$ 或 $x = -3$

把 $x = -2$ 和 $x = -3$ 分别代入 (3)，

得 $y=\dfrac{14}{9}, y=2$

∴ 解集 $= \{(-2, \frac{14}{9}), (-3, 2)\}$

如果二元二次方程组里两个方程式中含某一个未知数（比如 $y$）的各对应项的系数成比例，我们就可以消去这个方程组里的这个未知数（$y$），得出另一个未知数（$x$）的一元方程，这样，就可求此方程组的解了。

**例 9** 求 $\begin{cases} x^2 - 15xy - 3y^2 + 2x + 9y - 98 = 0 \\ 5xy + y^2 - 3y + 21 = 0 \end{cases}$ 的解集。

**解**
$$\begin{cases} x^2 - 15xy - 3y^2 + 2x + 9y - 98 = 0 \quad \cdots\cdots(1) \\ 5xy + y^2 - 3y + 21 = 0 \quad \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1) + (2) × 3，得 $x^2 + 2x - 35 = 0$

$$(x-5)(x+7) = 0$$

$\therefore \quad x = 5$ 或 $x = -7$

把 $x = 5$ 代入 (2)，整理后得

$$y^2 + 22y + 21 = 0$$
$$(y+1)(y+21) = 0$$

$\therefore \quad y = -1, y = -21$

把 $x = -7$ 代入 (2)，整理后得

$$y^2 - 38y + 21 = 0$$

$$y = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 - 4 \times 21}}{2} = 19 \pm 2\sqrt{85}$$

$\therefore$ 解集 $= \{(5,-1), (5,-21), (-7, 19+2\sqrt{85}), (-7, 19-2\sqrt{85})\}$

## 习题 13c

解下列方程组：

1. $\begin{cases} xy - x + y = 7 \\ xy + x - y = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x^2 + 5x - 8y = 36 \\ 2x^2 - 3x - 4y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 6 \\ x^2 - y^2 - x - y = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 3y = 2 \\ x^2 + y^2 + y - x = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + xy - y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 - y - 1 = 0 \\ 2x^2 - 4y^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + 4y^2 + x = 96 \\ x^2 + xy + 2y^2 - y = 43 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x + 3y - 1 = 0 \\ 2x^2 - 6xy + y^2 + 8x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

**(b) 一个方程式可以因式分解成两个一次方程式**

若二元二次方程组可变成

$$\begin{cases}(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0\\ f(x,y)=0\end{cases}$$

则可转化成解二元一次方程式与二元二次方程式组成的二元二次方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ f(x,y)=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}a_2x+b_2y+c_2=0\\ f(x,y)=0\end{cases}$$

的问题，就可以用代入法解之.

**例 10** 求方程组 $\begin{cases}3x^2-xy-4y^2-3x+4y=0\\ x^2+y^2=25\end{cases}$ 的解集.

**解**

$$\begin{cases}3x^2-xy-4y^2-3x+4y=0 \text{ ............(1)}\\ x^2+y^2=25 \text{ ....................................(2)}\end{cases}$$

由 (1) 得 $\quad (x+y)(3x-4y)-(3x-4y)=0$

$\therefore \quad (3x-4y)(x+y-1)=0$

$\therefore \quad 3x-4y=0$ .....................(3)

或 $\quad x+y-1=0$ .....................(4)

由 (2) 和 (3), (2) 和 (4) 分别组成方程组，那么原方程组可以化成两个方程组:

$$\begin{cases}3x-4y=0\\ x^2+y^2=25\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x+y-1=0\\ x^2+y^2=25\end{cases}$$

把 $y=\frac{3}{4}x$ 代入 $x^2+y^2=25$，得:

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=25$$

即 $\quad x^2=16$

$\therefore \quad x=\pm 4$

把 $x=\pm 4$ 代入 $y=\frac{3}{4}x$,

得 $\quad y=\pm 3$

把 $y=1-x$ 代入 $x^2+y^2=25$，得:

$$x^2+(1-x)^2=25$$

$\therefore$ $x^2-x-12=0$

$\therefore$ $(x-4)(x+3)=0$

$\therefore$ $x=4$ 或 $x=-3$

把 $x=4$ 或 $x=-3$ 代入 $y=1-x$，得:

$y=-3$ 或 $y=4$

$\therefore$ 解集是 $\{(4,3),(-4,-3),(4,-3),(-3,4)\}$

**例 11** 解方程组 $\begin{cases} x^2-y^2=5(x+y) \\ x^2+xy+y^2=43 \end{cases}$。

**解**

$$\begin{cases} x^2-y^2=5(x+y) \text{ ..................(1)} \\ x^2+xy+y^2=43 \text{ ..................(2)} \end{cases}$$

由 (1)，得 $(x+y)(x-y)=5(x+y)$

$\therefore$ $(x+y)(x-y-5)=0$

$\therefore$ $x+y=0$ 或 $x-y-5=0$

$\therefore$ $x=-y$ 或 $x=y+5$

把 $x=-y$ 代入 (2)，得 $y^2=43$

$\therefore$ $y=\pm\sqrt{43}$,

$x=\mp\sqrt{43}$

把 $x=y+5$ 代入 (2)，得:

$$(y+5)^2+(y+5)y+y^2=43$$

$\therefore$ $3y^2+15y-18=0$

$\therefore$ $(y+6)(3y-3)=0$

$\therefore$ $y=-6$ 或 $y=1$

把 $y=-6$ 代入 $x=y+5$，得 $x=-1$

把 $y=1$ 代入 $x=y+5$， 得 $x=6$

$\therefore$ 解是 $(\sqrt{43},-\sqrt{43}),(-\sqrt{43},\sqrt{43}),(-1,-6)\,(6,1)$

## 习题 13d

解下列二元二次方程组：

1. $\begin{cases}4x^2-9y^2=0\\6x^2+8xy=10y-x\end{cases}$

2. $\begin{cases}6x^2+5xy-6y^2=0\\4x^2+y^2=25\end{cases}$

3. $\begin{cases}x^2+y^2=5\\2x^2-3xy-2y^2=0\end{cases}$

4. $\begin{cases}x^2+y^2=25\\(x+y)^2=49\end{cases}$

5. $\begin{cases}2x^2-xy+y^2=2y\\2x^2+4xy=5y\end{cases}$

6. $\begin{cases}(x+y-2)(x-y+3)=0\\(2x-y+1)(3x+y-4)=0\end{cases}$

### (c) 两方程式中变数的各项齐次者

当一个方程组里的两个方程式的变数的各项是齐次者，则可用以下两个方法来求解。

**例 12** 解方程组 $\begin{cases}2x^2+y^2=7xy+5\\x^2-y^2=4xy-1\end{cases}$。

**解一**

$$\begin{cases}2x^2+y^2=7xy+5 \text{ .................(1)}\\x^2-y^2=4xy-1 \text{ .................(2)}\end{cases}$$

利用加减消去法消去常数项，

(1) + (2) × 5，得 $7x^2-4y^2=27xy$

$\therefore$ $7x^2-27xy-4y^2=0$

$\therefore$ $(x-4y)(7x+y)=0$

$\therefore$ $x=4y$ 或 $y=-7x$

把 $x=4y$ 代入 (2)，得 $y^2=1$

$\therefore$ $y=\pm 1$，$x=\pm 4$

把 $y=-7x$ 代入 (2)，得 $20x^2=1$

$\therefore$ $x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{10}$，$y=\pm\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$

$\therefore$ 解是 (4, 1)，(−4, −1)，$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{10},-\dfrac{7\sqrt{5}}{10}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{10},\dfrac{7\sqrt{5}}{10}\right)$

解二
$$\begin{cases}2x^2+y^2=7xy+5 \quad\text{.................(1)}\\ x^2-y^2=4xy-1 \quad\text{.................(2)}\end{cases}$$

设 $y=mx$，代入 (1) 和 (2) 整理后，得

$$(2+m^2-7m)x^2 = 5 \quad\text{................(3)}$$
$$(1-m^2-4m)x^2 = -1 \quad\text{................(4)}$$

$\dfrac{(3)}{(4)}$，得 $$\frac{2+m^2-7m}{1-m^2-4m} = -5$$

整理后，得 $$4m^2+27m-7 = 0$$
$$(4m-1)(m+7) = 0$$

∴ $$m=\frac{1}{4} \quad 或 \quad m=-7$$

将 $m=\dfrac{1}{4}$ 代入 (4)，得 $$x=\pm 4$$

再代入 $y=mx$，得 $$y=\pm 1$$

将 $m=-7$ 代入 (4)，得 $$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{10}$$

再代入 $y=mx$，得 $$y=\mp\frac{7\sqrt{5}}{10}$$

∴ 解是 $(4,1),(-4,-1),(\frac{\sqrt{5}}{10},-\frac{7\sqrt{5}}{10}),(-\frac{\sqrt{5}}{10},\frac{7\sqrt{5}}{10})$

**例 13** 求方程组 $\begin{cases}8xy-13y^2=3\\ 13x^2-21xy=10\end{cases}$ 的 解集。

解一
$$\begin{cases}8xy-13y^2=3 \quad\text{.........................(1)}\\ 13x^2-21xy=10 \quad\text{.....................(2)}\end{cases}$$

(1) × 10，得 $$80xy-130y^2 = 30 \quad\text{..................(3)}$$

(2) × 3，得 $$39x^2-63xy = 30 \quad\text{..................(4)}$$

(3) − (4)，得 $$-39x^2+143xy-130y^2 = 0$$

∴ $$3x^2-11xy+10y^2 = 0$$

∴ $$(3x-5y)(x-2y) = 0$$

∴ $$x=\frac{5}{3}y \quad 或 \quad x=2y$$

把 $x=\frac{5}{3}y$ 代入 (1)，得 $$8\left(\frac{5}{3}y\right)y-13y^2=3$$
$$y^2=9$$
$$y=\pm 3$$
$$x=\pm 5$$

把 $x=2y$ 代入 (1)，得 $$8(2y)y-13y^2=3$$
$$3y^2=3$$
$$y=\pm 1$$
$$x=\pm 2$$

∴ 解集：$\{(5,3),(-5,-3),(2,1),(-2,-1)\}$

**解二**
$$\begin{cases}8xy-13y^2=3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ 13x^2-21xy=10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

设 $y=mx$ 代入 (1) 和 (2)，整理后得
$$(8m-13m^2)x^2=3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$(13-21m)x^2=10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$\frac{(3)}{(4)}$，得 $$\frac{8m-13m^2}{13-21m}=\frac{3}{10}$$

整理后得 $$10m^2-11m+3=0$$
$$(5m-3)(2m-1)=0$$

∴ $$m=\frac{3}{5} \quad 或 \quad m=\frac{1}{2}$$

将 $m=\frac{3}{5}$ 代入 (4)，得 $$\left[13-21\left(\frac{3}{5}\right)\right]x^2=10$$
$$x^2=25$$
$$x=\pm 5$$

将 $m=\frac{3}{5}, x=\pm 5$ 代入 $y=mx$，得 $$y=\pm 3$$

将 $m=\frac{1}{2}$ 代入 (4)，得 $$\left[13-21\left(\frac{1}{2}\right)\right]x^2=10$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm 2$$

再代入 $y=mx$，得 $$y=\pm 1$$

∴ 解集 $=\{(5,3),(-5,-3),(2,1),(-2,-1)\}$

## 习题 13e

解下列二元二次方程组:

1. $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9 \\ 2x^2-3xy+2y^2=4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2-9y^2=27 \\ 2x^2-xy-3y^2=12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=73 \\ xy=24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2=17 \\ 7y^2+15xy=-68 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ (x-y)(x+3y)=6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} xy+y^2=12 \\ x^2+xy=24 \end{cases}$

## 总复习题 13

解下列方程组:

1. $\begin{cases} x-2y+5z=7 \\ 3x-y-2z=4 \\ 2x-5y+6z=10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y-5z=3 \\ x-2y+z=0 \\ 3x+y+3z=7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ 7x+6y+7z=100 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=8 \\ y+z=12 \\ z+x=10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ xy+y^2=4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x(y+6)-xy=4y(y+6) \\ xy-x(y-6)=6y(y-6) \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

9. $\begin{cases} xy-y^2=-2 \\ 9xy-x^2=17 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ x-y=3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{12}{35} \\ xy=35 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x^2 + xy = 7 \\ 3xy + y^2 = 18 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 3xy - 35 = 0 \\ y + 2xy = 22 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 - x - y = 6 \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ 2(x-2)^2 - 3(y-1)^2 = 5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 2x - 1 = 0 \\ 2x^2 - 2xy + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$

# 14 不等式

在初中我们学习过一元一次不等式和一元一次不等式组。在这一章，我们将系统地学习不等式的性质、简易不等式的证明以及几类特殊不等式的解法。

## 14.1 不等式

在初中我们已经学过，表示不相等关系的式子，叫做**不等式**（inequality）。例如：

$$x+5>x-1 \qquad (1)$$

$$a^2+3>3a \qquad (2)$$

$$3x+1<2x+6 \qquad (3)$$

$$x^2<a \qquad (4)$$

都是不等式。

在以上的不等式中，(1) 和 (2) 是同向不等式，(3) 和 (4) 也是同向不等式。而 (1) 和 (3)，(2) 和 (4)，就是异向不等式。

对于任意两个实数 $a$ 与 $b$，如果 $a-b$ 是正数，我们说 $a>b$ 或 $b<a$；如果 $a-b$ 是负数，我们说 $a<b$ 或 $b>a$。

由上可知，要比较两个实数的大小，只要考察他们的差就可以了。

**例 1** 比较 $(a+3)(a-5)$ 与 $(a+2)(a-4)$ 的大小。

**解** $\because$ $(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)$

$$=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)$$

$$=a^2-2a-15-a^2+2a+8$$

$$=-7$$

$\therefore$ $(a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$

**例 2** 已知 $x \neq 0$，比较 $(x^2+1)^2$ 与 $x^4+x^2+1$ 的大小。

**解** $(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$

$= x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1$

$= x^2$

由 $x \neq 0$，得 $x^2>0$

因此 $(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$

## 习题 14a

1. 比较 $(x+5)(x+7)$ 与 $(x+6)^2$ 的大小。
2. 比较 $(x-9)^2$ 与 $(x-8)(x-10)$ 的大小。
3. 比较 $(x-1)(x^2+x+1)$ 与 $(x+1)(x^2-x+1)$ 的大小。
4. 比较 $a^2+12$ 与 $6a$ 的大小。
5. 已知 $y \neq 0$，比较 $(y^2+\sqrt{2}y+1)(y^2-\sqrt{2}y+1)$ 与 $(y^2+y+1)(y^2-y+1)$ 的大小。

# 14.2 不等式的性质

不等式有下面一些性质。

性质 1：如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$。

**证明** $a>b$，$\therefore$ $a-b>0$

$b>c$，$\therefore$ $b-c>0$

$a-c=a-b+b-c>0$

$\therefore$ $a>c$

性质 1 还可以表示为：如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$。

性质 2：如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$。

**证明** $a>b$，$\therefore$ $a-b>0$

由于 $a+c-(b+c)=a-b>0$

$\therefore$ $a+c>b+c$

由性质 2 可以得出：

**如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$。**

这是因为，若 $a+b>c$

则 $a+b+(-b)>c+(-b)$

即 $a>c-b$

于是我们得到不等式的移项法则:不等式中的任何一项改变符号后，可以把它从一边移到另一边。

性质 3：如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$。

**证明** $a>b$，$\therefore\ a-b>0$

$c>d$，$\therefore\ c-d>0$

由于 $a+c-(b+d)=(a-b)+(c-d)>0$

$\therefore\ a+c>b+d$

这就是说，两个或者几个同向不等式的两边分别相加，所得的不等式与原不等式同向。

性质 4：如果 $a>b$，则：当 $c>0$ 时，有 $ac>bc$，
当 $c=0$ 时，有 $ac=bc$，
当 $c<0$ 时，有 $ac<bc$。

由性质 4 可以得出：

(a) **如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$。**

这是因为，由 $a>b$，$c>0$，得到

$$ac>bc,$$

由 $c>d$，$b>0$，得到

$$bc>bd,$$

故 $ac>bd$。

这就是说，两个或几个两边都是正数的同向不等式的两边分别相乘，所得的不等式与原不等式同向。由此我们可以得到：

(b) **如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$** $(n\in N$，且 $n>1)$

**例 3** 已知 $a>b>0$，用不等号连结下列各式：

(a) $a+2$ 与 $b+2$　　(b) $b-8$ 与 $a-3$

(c) $-3a$ 与 $-3b$　　(d) $a^3$ 与 $b^3$

**解** (a) 因为 $a>b$，两边都加上 2，得 $a+2>b+2$；

(b) 因为 $a>b$，有 $b<a$，又 $-8<-3$，故 $b-8<a-3$；

(c) 因为 $a>b$，两边同乘以一个负数 $(-3)$，得 $-3a<-3b$；

(d) 因为 $a>b>0$，由性质 4 所得的结论 (b)，可知 $a^3>b^3$。

**例 4** 试证：如果 $a>b>0$，$c<d<0$，那么 $ac<bd$。

**证明** $\because$ $a>b$，$d<0$

$\therefore$ $$ad<bd \quad (1)$$

又 $c<d$，$a>0$

$\therefore$ $$ac<ad \quad (2)$$

结合 (1)，(2) 式，由性质 2 可知

$$ac<bd$$

## 14.3 不等式的证明

不等式的证明，一般是证明给定的不等式在其字母的取值范围内都能成立。由于不等式的形式是多种多样的，所以不等式的证明方法也就灵活多样。下面举例说明一些常用的证明方法。

### ● 比较法

我们已经知道，当 $a-b>0$ 时，有 $a>b$，当 $a-b<0$ 时，有 $a<b$。因此，要证 $a>b$，只需证 $a-b>0$，要证 $a<b$，只需证 $a-b<0$。这是证明不等式常用的一种方法，通常叫做比较法。

**例 5** 试证 $a^2+3>3a$。

**证明** $\because$ $$(a^2+3)-3a = a^2-3a+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3$$

$$= \left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

由于 $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$，$\frac{3}{4}>0$，故 $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$\therefore\ a^2+3>3a$

**例 6** 如果 $a \neq b$，试证 $a^4+b^4>a^3b+ab^3$。

**证明**
$$\begin{aligned}(a^4+b^4)-(a^3b+ab^3) &= (a^4-a^3b)+(b^4-ab^3)\\ &= a^3(a-b)+b^3(b-a)\\ &= (a^3-b^3)(a-b)\\ &= (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

$\because\ a\neq b\quad \therefore\ (a-b)^2>0$，

且
$$\begin{aligned}a^2+ab+b^2 &= a^2+ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}\\ &= \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}>0\end{aligned}$$

$\therefore\ (a-b)^2(a^2+ab+b^2)>0$

即 $(a^4+b^4)-(a^3b+ab^3)>0$

$\therefore\ a^4+b^4>a^3b+ab^3$

## 综合法

证明不等式还常常用到下面两个定理:

**定理 1** 如果 $a>0$，$b>0$，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（等号成立当且仅当 $a=b$）

**证明** 
$$\because\ \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

当 $a\neq b$ 时，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$，

当 $a=b$ 时，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0$，

$$\therefore \quad \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0,$$

$$即 \quad \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geqslant 0$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \text{（等号成立当且仅当 } a=b\text{）}$$

从定理 1 的证明过程可知:

对于任意实数 $a$ 与 $b$，总有 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$（等号成立当且仅当$a=b$）

**例 7** 已知 $x>0$，$y>0$，$x+y=S$，$xy=P$，

(a) 设 P 是定值，求证 S 的值最小当且仅当 $x=y$；

(b) 设 S 是定值，求证 P 的值最大当且仅当 $x=y$。

**证明** (a) $\because$ $x>0$，$y>0$

$\therefore$ $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$

即 $S \geqslant 2\sqrt{p}$（等号成立当且仅当 $x=y$）

这就是说，如果 P 是定值，那么当且仅当 $x=y$ 时，S 有最小值 $2\sqrt{P}$。

(b) 从第 (a) 小题的证明可知 $S \geqslant 2\sqrt{P}$，即

$$\sqrt{P} \leqslant \frac{S}{2}$$

$\therefore$ $P \leqslant \dfrac{S^2}{4}$（等号成立当且仅当 $x=y$）

这就是说，如果 S 是定值，那么当且仅当 $x=y$ 时，P 有最大值。

定理 2 如果 $a>0$，$b>0$，$c>0$，那么 $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$（等号成立当且仅当 $a=b=c$）

定理 2 的证明从略。由定理 2，可推出

对于任意正数 $a$，$b$，$c$，总有 $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$ （等号成立当且仅当 $a=b=c$）

我们可以利用某些已经证明过的不等式（如上面的两个定理）作为基础，再运用不等式的性质直接推导出所要证明的不等式。这种证明不等式的方法，通常叫做综合法。

**例 8** 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$，试证 $(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$。

**证明** 由 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$，得

$$\frac{ab+cd}{2}\geqslant\sqrt{ab\cdot cd}>0$$

$$\frac{ac+bd}{2}\geqslant\sqrt{ac\cdot bd}>0$$

$$\therefore\quad \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{4}\geqslant abcd$$

即 $(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$

**例 9** 已知 $x>0$，$y>0$，$z>0$，求证 $(x+y+z)^3\geqslant 27yxz$。

**证明** $\because\quad \dfrac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}>0$

$$\therefore\quad \frac{(x+y+z)^3}{27}\geqslant xyz$$

即 $(x+y+z)^3\geqslant 27xyz$

**例 10** 如果 $a$，$b$，$c$，$x$，$y$，$z$ 都是正数，且 $a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=1$，证明 $ax+by+cz\leqslant 1$。

**解**

$$a^2+x^2\geqslant 2ax$$
$$b^2+y^2\geqslant 2by$$
$$c^2+z^2\geqslant 2cz$$

以上各式相加得

$$a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2\geqslant 2(ax+by+cz)$$
$$2\geqslant 2(ax+by+cz)$$

即 $$ax+by+cz\leqslant 1$$

## 习题 14b

1. (a) 如果 $a>b$，$c>d$，能否断定 $a+c$ 与 $b+d$ 谁大谁小？举例说明；

   (b) 如果 a > b，c > d，是否可以推出 ac > bd？举例说明。

2. 已知 $a>b$，求证 $c-2a<c-2b$。

3. 已知 $a>b>0$，$c<0$，求证 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$。

4. 已知 $x>0$，$y>0$，求证 $(x+y)(x^3+y^3)\geqslant(x^2+y^2)^2$。

5. 已知 $a\neq 2$，求证 $\frac{4a}{4+a^2}<1$。

6. 如果 $x, y$ 是不相等的二个正数，求证

   (a) $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})>4$

   (b) $x^3+y^3>xy(x+y)$

7. 已知 $a\neq b\neq c$，求证 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac$。

8. 求证 $a^2+b^2+5\geqslant 2(2a-b)$。

9. 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，求证：

   (a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$

   (b) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 9$

10. 当 $x>0$ 时，求证 $x+\frac{4}{x^2}$ 的最小值是 3。

11. 已知 $a$，$b$，$c$ 都是正数，求证：

    $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc$

12. 求证 $(a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\geqslant 16$。

13. 如果 $a^2+b^2=1, x^2+y^2=1$，求证 $ax+by\leqslant 1$。

14. 已知 $x, y, z$ 是不相等的三个正数，求证 $(x+y)(y+z)(z+x)>8xyz$。

15. 如果 $x, y, z$ 都是正数，且 $x+y+z=1$，求证 $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$。

# 14.4 一元二次不等式

## ● 一元一次不等式

在初中，我们已经学习过一元一次不等式和一元一次不等式组的解法。我们知道，一元一次不等式的一般形式是 $ax+b>0\,(a\neq 0)$，例如

$$3x+2>0,\quad -3x+2>0$$

等。并且，我们可以应用不等式的基本性质来解一元一次不等式。

**例 11** 解不等式 $\frac{4}{5}(x-1)>\frac{3}{10}(1+2x)$。

**解**

$$\begin{aligned} 8(x-1) &> 3(1+2x) \\ 8x-8 &> 3+6x \\ 8x-6x &> 3+8 \\ 2x &> 11 \\ \therefore\quad x &> 5\frac{1}{2} \end{aligned}$$

**例 12** 求不等式 $2(x+1)+\frac{x-2}{3}\leqslant\frac{7x}{2}-1$ 的解集。

**解**

$$\begin{aligned} 2(x+1)+\frac{x-2}{3} &\leqslant \frac{7x}{2}-1 \\ 12(x+1)+2(x-2) &\leqslant 21x-6 \\ 14x+8 &\leqslant 21x-6 \\ -7x &\leqslant -14 \\ \therefore\quad x &\geqslant 2 \end{aligned}$$

故解集为 $\{x\,|\,x\geqslant 2\}$

我们知道，几个一元一次不等式可以组成一元一次不等式组，同时满足一元一次不等式组里各个不等式的公共解，就叫做该不等式组的解。换句话说，一元一次不等式组的解集就是该不等式组内各个不等式的解集的交集。

**例 13** 解不等式组 $\begin{cases} 3x+2\leqslant 5 \\ 10+5x>6x+14 \end{cases}$

**解** $\begin{cases} 3x+2\leqslant 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 10+5x>6x+14 \ldots\ldots (2) \end{cases}$

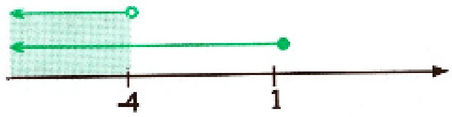
由 (1)，$3x \leqslant 5-2$

$x \leqslant 1$

由 (2)，$-x > 4$

$x < -4$

∴ 所求的解是 $x < -4$



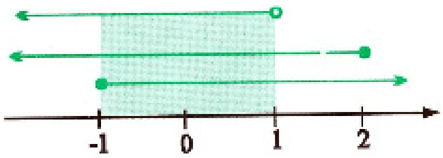

**例 14** 求不等式组 $\begin{cases} 10+2x\leqslant 11+3x \\ 5x-3\leqslant 4x-1 \\ 7+2x>6+3x \end{cases}$ 的解集。

**解** 因为各不等式的解集分别是

$\{x \mid x \geqslant -1\}$

$\{x \mid x \leqslant 2\}$

$\{x \mid x < 1\}$




所以不等式组的解集是

$\{x \mid x\geqslant -1\} \cap \{x \mid x\leqslant 2\} \cap \{x \mid x<1\}$

$= \{x \mid -1\leqslant x<1\}$

**例 15** 解不等式 $3<-2x-9\leqslant 7$。

**解** 原不等式可写成不等式组 $\begin{cases} 3<-2x-9 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -2x-9\leqslant 7 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

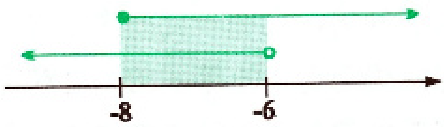
由 (1)，$2x < -12$

$x < -6$

由 (2)，$-2x \leqslant 16$

$x \geqslant -8$

故所求解是 $-8\leqslant x<-6$



**例 16** 求不等式 $3-x \leqslant 2x-9<7$ 的解集。

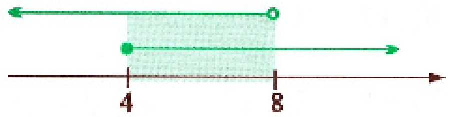
**解** 原不等式可以写成不等式组

$$\begin{cases} 3-x \leqslant 2x-9 \text{ ............(1)} \\ 2x-9<7 \text{ ...................(2)} \end{cases}$$

其解集分别是 $\{x \mid x \geqslant 4\}$，$\{x \mid x<8\}$

故原不等式的解集是

$$\{x \mid x \geqslant 4\} \cap \{x \mid x<8\}$$
$$=\{x \mid 4 \leqslant x<8\}$$




## 习题 14c

解下列不等式（1～5）：

1. $15-9x<10-4x$

2. $\dfrac{5(x-1)}{6} \geqslant \dfrac{3x-1}{2}$

3. $x^2-x(x-7)>5(x-1)$

4. $\dfrac{x}{2}+2.5 \leqslant \dfrac{1}{5}(0.4-\dfrac{x}{2})-\dfrac{1}{4}$

5. $5[x+3-4(1-2x)] \leqslant x-1$

解下列不等式组（6～10）：

6. $\begin{cases} 3x+2>2(x-1) \\ 4x-3 \leqslant 3x-2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{2t-1}{2}<\dfrac{t+6}{3} \\ 2+\dfrac{3t+3}{8}>3-\dfrac{t-1}{4} \end{cases}$

8. $\begin{cases} (2x+1)^2+5 \leqslant 4(x+2)^2 \\ (x+4)(x-5)>(x-1)(x+2)-20 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-2>0 \\ x-5<0 \\ 2x+3>0 \end{cases}$

10. $-3-x<3x-1 \leqslant 5$

## ● 一元二次不等式

现在我们来学习一元二次不等式的解法。

含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做**一元二次不等式**(quadratic inequality in one variable)。

任何一个一元二次不等式，经过变形、整理后，都可以化成

$$ax^2+bx+c>0\ (a>0)，\text{或}\quad ax^2+bx+c<0\ (a>0)$$

的形式（这是因为，如果二次项系数小于零，两边乘以 $-1$，并把不等号改变方向，仍可化成上面两种形式之一，其中 $a>0$）。

解一元二次不等式常用的方法是因式分解法，下面举例说明。

**例 17** 求不等式 $x^2-3x+2>0$ 的解集。

**解一** $\because\ x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$\therefore$ 原不等式可以改写为

$$(x-1)(x-2)>0$$

由两数（或式）的积大于零，可知这两数（或式）必同为正或同为负。故上不等式可以变为下面两个不等式组

$$(\text{I})\ \begin{cases}x-1>0\\x-2>0\end{cases}\qquad\qquad(\text{II})\ \begin{cases}x-1<0\\x-z<0\end{cases}$$

不等式组(I)的解集是 $\{x\,|\,x>2\}$

不等式组(II)的解集是 $\{x\,|\,x>1\}$

原一元二次不等式的解集是不等式组(I)和不等式组(II)的解集的联集，所以原不等式的解集是

$$\{x\,|\,x>2\}\cap\{x\,|\,x<1\}=\{x\,|\,x<1\ \text{或}\ x>2\}$$

**解二**

$$x^2-3x+2>0$$
$$(x-1)(x-2)>0$$

由 $x$ 的取值范围，列出符号表来解此不等式

| $x$ 值的范围 | $x<1$ | $1<x<2$ | $x>2$ |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(x-1)(x-2)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

要使 $(x-1)(x-2)>0$，需取

$$x<1\quad\text{或}\quad x>2$$

故原不等式的解集是

$$\{x\,|\,x<1\quad\text{或}\quad x>2\}$$

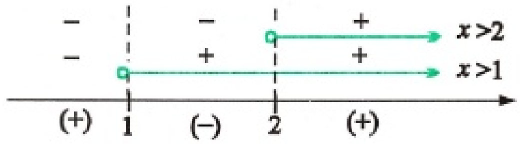
**解三** $$x^2-3x+2>0$$

$$(x-1)(x-2)>0$$

若 $(x-1)$ 是正数，即 $(x-1)>0$，那么 $x>1$；

若 $(x-2)$ 是正数，即 $(x-2)>0$，那么 $x>2$。

将 $x>1$ 与 $x>2$ 以数线表示如下，




由图中，可看出：

在 $x>2$ 的取值范围内，两个因式 $(x-1)$，$(x-2)$ 都是正值，

$\therefore$ $(x-1)(x-2)$ 是正值。

在 $1<x<2$ 的取值范围内，只有 $(x-1)$ 是正值，

$\therefore$ $(x-1)(x-2)$ 是负值。

在 $x<1$ 的取值范围内，两个因式 $(x-1)$，$(x-2)$ 都为负值，

$\therefore$ $(x-1)(x-2)$ 是正值。

$\therefore$ 要使 $(x-1)(x-2)>0$，需取 $x<1$ 或 $x>2$，

$\therefore$ 解集为 $\{x \mid x<1$ 或 $x>2\}$

**例 18** 解不等式 $x^2+2x-15<0$。

**解一** $$x^2+2x-15<0$$

$$(x-3)(x+5)<0$$

由 $x$ 的取值范围，列出符号表如下：

| $x$ 值的范围 | $x<-5$ | $-5<x<3$ | $x>3$ |
|---|---|---|---|
| $x-3$ | − | − | + |
| $x+5$ | − | + | + |
| $(x-3)(x+5)$ | + | − | + |

要使 $(x-3)(x+5)<0$，取解为 $-5<x<3$

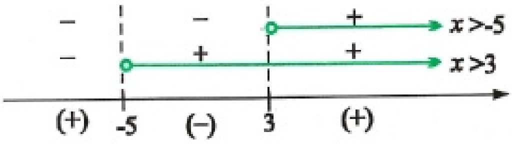
**解二** $$x^2+2x-15<0$$

$$(x-3)(x+5)<0$$

若 $(x-3)$ 是正数，即 $(x-3)>0$，那么 $x>3$；

若 $(x+5)$ 是正数，即 $(x+5)>0$，那么 $x>-5$。

将 $x>3, x>-5$ 以数线表示如下，




因 $(x-3)(x+5)<0$

$\therefore$ 解为 $-5<x<3$

由例 17 的解三及例 18 的解二的数线可发现到，因式积项的符号都是 $+-+$ 相间地出现，因此，我们只需将各因式的根值标在数线上，将数线分成三个区间，然后自右至左顺序以 $+-+$ 将因式积项的符号标出，就可得出一个更简化的数线图。比如

例 17 的不等式 $(x-1)(x-2)>0$，

其数线可化简成如右图所示。

由图中，可知解为

$x<1$ 或 $x>2$


在以下例题中，我们将以此法求解。

**例 19** 解不等式 $x^2-2x-2\leqslant 0$。

**解** $x^2-2x-2\leqslant 0$

不能因式分解时，可用配方法，

$(x-1)^2-3\leqslant 0$

$(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})\leqslant 0$

由右图可知，解为 $1-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{3}$

**例 20** 解下列不等式:

(a) $4x^2+4x+1>0$　　(b) $-x^2+3x-4\geqslant 0$

**解** (a) $\because\ 4x^2+4x+1>0$

$(2x+1)^2>0$

当 $x\neq -\frac{1}{2}$ 时，恒有

$(2x+1)^2>0$

所以原不等式的解是 $x\neq -\frac{1}{2}$，$x$ 是实数。

(b) $-x^2+3x-4\geqslant 0$

即 $x^2-3x+4\leqslant 0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+4-\frac{9}{4}\leqslant 0$

$\therefore\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\leqslant 0$

但是，对于任何数 $x$，均有 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$，所以原不等式无解。

## 习题 14d

解下列不等式 (1～10):

1. $x^2-7x-8<0$
2. $5+x-6x^2\leqslant 0$
3. $9x^2\geqslant 4$
4. $x^2+2x-1<0$
5. $-x^2+4>3x$
6. $x(x+2)<x(3-x)+1$
7. $9x^2-6x+1\geqslant 0$
8. $2\sqrt{3}x-3x^2-1<0$
9. $x^2-2x+5>0$
10. $(x+2)(x-3)\leqslant -7$

## ● 一元二次不等式组

解一元二次不等式组，也就是要求出该不等式组中各个不等式的交集。

**例 21** 求不等式组 $\begin{cases} 3x^2 - 14x + 11 \leqslant 0 \\ 2x + 1 \geqslant 5 \end{cases}$ 的解集。

**解**
$$\begin{cases} 3x^2 - 14x + 11 \leqslant 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x + 1 \geqslant 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

由 (1)，$(3x - 11)(x - 1) \leqslant 0$

解集为 $\{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{11}{3} \}$

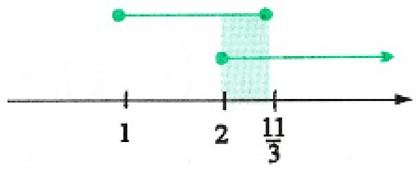

由 (2)，$2x \geqslant 4$

解集为 $\{ x \mid x \geqslant 2 \}$

所以原不等式组的解集为

$$\{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{11}{3} \} \cap \{ x \mid x \geqslant 2 \}$$

$$= \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant \frac{11}{3} \}$$

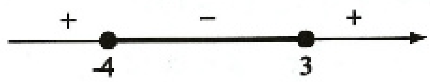



**例 22** 解不等式组 $\begin{cases} x^2 + x \leqslant 12 \\ 2x^2 + 3x > 5 \end{cases}$

**解**
$$\begin{cases} x^2 + x \leqslant 12 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x^2 + 3x > 5 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

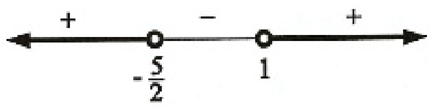
由 (1)，$(x - 3)(x + 4) \leqslant 0$

解为 $-4 \leqslant x \leqslant 3$



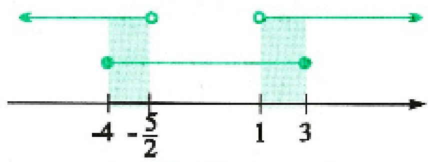

由 (2)，$(2x + 5)(x - 1) > 0$

解为 $x < -\frac{5}{2}$ 或 $x > 1$




∴ 原不等式组的解为

$$-4 \leqslant x < -\frac{5}{2} \quad 或 \quad 1 < x \leqslant 3$$



## 习题 14e

解下列不等式组：

1. $\begin{cases} x+1<0 \\ (x+2)(x-3)>0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ x^2+3x-4<0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-3 \geqslant x-1 \\ x^2-3x<2x+6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-7x+12>0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x+2)(x-3) \leqslant 0 \\ (3x+2)(x-3) \geqslant (x-3)^2 \end{cases}$

## 14.5 一元高次不等式

一元高次不等式是指仅含有一个未知数，并且未知数的最高次数是大于 2 的不等式。对于简单的一元高次不等式，可以用综合除法，将它因式分解后来解。

**例 23** 求不等式 $x^3-6x^2+11x-6<0$ 的解集。

**解一**

$$x^3-6x^2+11x-6<0$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)<0$$

根据 $x$ 的取值范围，可以列出因式的符号表如下：

| $x$ 值的范围 | $x<1$ | $1<x<2$ | $2<x<3$ | $x>3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | − | + | + | + |
| $x-2$ | − | − | + | + |
| $x-3$ | − | − | − | + |
| $(x-1)(x-2)(x-3)$ | − | + | − | + |

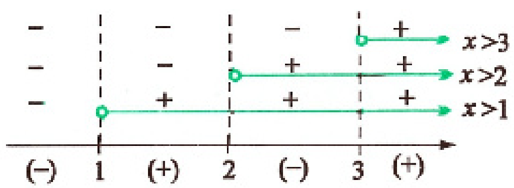
由表中最后一列可知，原不等式的解集为 $\{x \mid x<1$ 或 $2<x<3\}$

**解二**

$$x^3-6x^2+11x-6<0$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)<0$$

由图中，可知解集为

$\{x \mid x<1$ 或 $2<x<3\}$



**例 24** 解不等式 $(x^2-9)(16-x^2)>0$

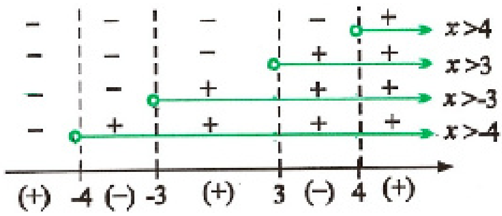
**解** $(x^2-9)(16-x^2)>0$

$(x+3)(x-3)(4+x)(4-x)>0$

即 $(x+3)(x-3)(x+4)(x-4)<0$

由图中可知，原不等式的解为

$-4<x<-3$ 或 $3<x<4$




由例 23 及例 24 的数线可发现到，因式积项的符号都是正负相间地出现，且最右者恒为正。因此，自右而左地推算，其因式积的符号总是 $+-+-\cdots\cdots$。由此，我们可以像解一元二次不等式那样，得出一个更简化的数线图。即将各因式的根值标在数线上，将数线分成若干个区间，然后自右而左顺序以 $+-+-\cdots\cdots$将因式积项的符号标出就可。比如，重解例 24，可得

$$(x+3)(x-3)(x+4)(x-4)<0$$


由图中可知，解为 $-4<x<-3$ 或 $3<x<4$。

在以下例题中，我们将以此法解之。

**例 25** 求不等式 $x^4-7x^3+10x^2\leqslant 0$ 的解集。

**解** $x^4-7x^3+10x^2\leqslant 0$

$x^2(x-5)(x-2)\leqslant 0$

将此不等式分成一个方程式和一个不等式来处理，

当 $x^2(x-5)(x-2)=0$，其解集为 $\{0, 2, 5\}$

当 $x^2(x-5)(x-2)<0$，因 $x^2>0$，则此不等式可以简化成

$(x-5)(x-2)<0$

解集是 $\{x\mid 2<x<5\}$


所以原不等式的解集是

$$\{x\mid 2<x<5\}\cup\{0,2,5\}=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 5\}\cup\{x\mid x=0\}$$

【注】当所要解的不等式中含有“=”号时，可先将原不等式分成一个方程式和一个不等式来处理，所得的两个解集的联集就是所要求的不等式的解集。

## 14.6 分式不等式

**例 26** 解不等式 $\dfrac{3x-4}{x+2}<1$。

**解一**

$$\frac{3x-4}{x+2}<1$$

$$\frac{3x-4}{x+2}-1<0$$

即 $$\frac{3x-4-x-2}{x+2}<0$$

$$\frac{x-3}{x+2}<0$$


由于两式的商小于零，因此，原不等式的解集为

$$-2<x<3$$

**解二** 由于 $x+2$ 不能为零，故有 $(x+2)^2>0$

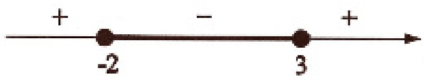
原不等式 $\dfrac{3x-4}{x+2}<1$ 的两边同乘以 $(x+2)^2$，

得到 $(3x-4)(x+2)<(x+2)^2$

$$3x^2+2x-8<x^2+4x+4$$

即 $$x^2-x-6<0$$

$$(x-3)(x+2)<0$$




从而得出原不等式的解是 $-2<x<3$

【注】不能在原不等式的两边同乘以 $(x+2)$ 以化成整式不等式，因为 $(x+2)$ 的正负还不能确定。

**例 27** 求不等式 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}\leqslant 0$ 的解集。

**解** 将原不等式的分子和分母都分解因式，得

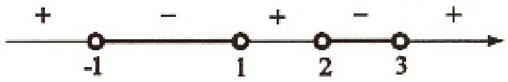
$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+1)}\leqslant 0$$

将此不等式分成一个等式及一个不等式来处理。

当 $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+1)}=0$ 时，

得解集为 $\{1,2\}$

当 $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+1)}<0$ 时，




由右图可知，解集为

$\{x \mid -1<x<1$ 或 $2<x<3\}$

以上两部分解的联集就是所要求的解集，

即 $\{x \mid -1<x\leqslant 1$ 或 $2\leqslant x<3\}$

## 习题 14f

解下列不等式：

1. $x^3+2x^2-13x+10<0$
2. $(x-1)^2(x+3)>0$
3. $(2-x)(3x^2-2x-1)>0$
4. $(2x-1)(x+2)^2(x-3)^5<0$
5. $(x-1)(2x+7)^3\geqslant 0$
6. $x^3-4x>0$
7. $4x^3+8x^2-x-2\leqslant 0$
8. $(3-x^2)(x^2-3x-4)<0$
9. $\dfrac{x}{2x-1}>3$
10. $\dfrac{x+3}{x+4}<x+1$
11. $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}<1$
12. $1+\dfrac{x-3}{x-2}>\dfrac{x-2}{x-1}$
13. $\dfrac{1}{x-3}>\dfrac{1}{x+2}$
14. $\dfrac{(x-2)(2x+5)}{x-6}\geqslant 0$

## 14.7 无理不等式

被开方式中含有未知数的不等式叫做**无理不等式**（irrational inequality）。如

$$\sqrt{x-1}>3,\ \sqrt{1+x}+\sqrt{x^2-1}>2$$

等都是只含二次根式的无理不等式。下面举例说明简易的无理不等式的解法。

**例 28** 解不等式 $\sqrt{2x-1}<3$。

**解** 因为根式必须有意义，故有

$$2x-1\geqslant 0$$

解得 $\{x \mid x\geqslant \frac{1}{2}\}$ (1)

另一方面，把原不等式的两边平方，得

$$2x-1<9$$

解得 $\{x \mid x<5\}$ (2)

原不等式的解集应当是 (1) 和 (2) 的交集，所以原不等式的解集是

$$\{x \mid x\geqslant \frac{1}{2}\}\cap\{x \mid x<5\} = \{x \mid \frac{1}{2}\leqslant x<5\}$$

【注】解含有二次根式的无理不等式时，首先应保证根式有意义，即被开方数及根式值都是非负数，这样可得到一个有理不等式（或组）；在此前提下，再把原不等式的两边平方，得到另一个有理不等式。分别解这两个有理不等式（或组），则这两个有理不等式（或组）的解集的交集，就是原不等式的解集。但两边平方时，应注意两边的值的符号。

**例 29** 解不等式 $\sqrt{3x-4}-\sqrt{x-3}>0$。

**解** 因为根式必须有意义，故有

$$\begin{cases}3x-4\geqslant 0\\ x-3\geqslant 0\end{cases}$$

解得 $\{x \mid x\geqslant 3\}$

另一方面，原不等式可化为

$$\sqrt{3x-4}>\sqrt{x-3}$$

两边平方，得

$$3x-4>x-3$$

解得 $\{x \mid x>\frac{1}{2}\}$

所以，原不等式的解集是

$$\{x \mid x\geqslant 3\}\cap\{x \mid x>\frac{1}{2}\} = \{x \mid x\geqslant 3\}$$

**例 30** 解不等式 $\sqrt{x+1}+1>0$。

**解** 由 $x+1\geqslant 0$，得 $x\geqslant -1$

把原不等式变形为 $\sqrt{x+1}>-1$

则当 $x\geqslant -1$ 时，这个不等式的左边是一个非负数，右边是一个负数，不等式是成立的。

因此，原不等式的解集为 $\{x \mid x\geqslant -1\}$。

从例 30 可以看出，$\sqrt{x+a}>b\ (b<0)$ 的解集是 $\{x \mid x\geqslant -a\}$，同样可知 $\sqrt{x+a}<b\ (b<0)$ 的解集是空集（为什么?）。

***例 31** 解不等式 $\sqrt{5-x}>x+1$。

**解** 分 $x+1<0$ 与 $x+1\geqslant 0$ 两种情况来讨论。

(i) 当 $5-x\geqslant 0$ 且 $x+1<0$ 时，原不等式的左边为非负数，右边为负数，这时原不等式成立。此时

$$x<-1$$

(ii) 当 $5-x\geqslant 0$ 且 $x+1\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 5$ 时，把原不等式的两边平方得

$$5-x>(x+1)^2$$

整理得 $x^2+3x-4<0$

解得 $-4<x<1$

因而，当 $\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 5\}\cap\{x \mid -4<x<1\}$

$=\{x \mid -1\leqslant x<1\}$ 时，不等式成立。

所以，原不等式的解集是

$$\{x \mid x<-1\}\cup\{x \mid -1\leqslant x<1\}=\{x \mid x<1\}$$

【注】只有当无理不等式的两边都是非负数时，把不等式的两边平方，不等号才不会改变方向。这就是例 31 中要讨论 $x+1$ 的符号的原因。

***例 32** 解不等式 $\sqrt{3x+2}-\sqrt{x-1}>\sqrt{5x}$。

**解**　由 $\begin{cases} 3x+2\geqslant 0 \\ x-1\geqslant 0 \\ 5x\geqslant 0 \end{cases}$ 知 $\begin{cases} x\geqslant -\dfrac{2}{3} \\ x\geqslant 1 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$

它们的公共解为 $\{x \mid x\geqslant 1\}$

原不等式左边的符号不能确定，因此把它改写为

$$\sqrt{3x+2}>\sqrt{5x}+\sqrt{x-1}$$

两边平方得

$$3x+2>5x+x-1+2\sqrt{5x(x-1)}$$

即 $$2\sqrt{5x(x-1)}<-3(x-1)$$

当 $x\geqslant 1$ 时，$-3(x-1)\leqslant 0$，因此 $2\sqrt{5x(x-1)}$ 的值要为负数，这不可能。

所以原不等式的解集是空集。

## 习题 14g

解下列不等式：

1. $\sqrt{x-2}>3$
2. $\sqrt{3x-5}<\dfrac{1}{2}$
3. $\sqrt{9-x}\geqslant\sqrt{2x-1}$
4. $\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-5}>0$
5. $\sqrt{x^2-x-2}>2$
6. $\sqrt{x^2+8x}-3>0$

*7. $\sqrt{2x+5}\leqslant x+1$

*8. $\sqrt{6-x}>x-4$

*9. $\sqrt{x^2-3x-10}+x<8$

*10. $\sqrt{3x+1}>\sqrt{2x+1}-1$

*11. $\sqrt{x^2-7x+12}>x+5$

*12. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x}+\sqrt{x-1}>0$

## 14.8　含绝对值的不等式

我们知道，如果 $x$ 是一个实数，它的绝对值可以用 $|x|$ 来表示，并且

$$|x|=\begin{cases} x & (\text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}) \\ -x & (\text{当 } x<0 \text{ 时}) \end{cases}$$

换句话说，$x$ 如果是正数，其绝对值是 $x$；$x$ 如果是负数，其绝对值是 $-x$，零的绝对值为零。

下面我们来讨论不等式 $|x|<a$，$|x|>a\ (a>0)$ 的解集。

(a) 对于不等式 $|x|<a$ 来说，

当 $x\geqslant 0$ 时，$|x|=x$

$\therefore\qquad x<a$

当 $x<0$ 时，$|x|=-x$

得 $\qquad -x<a$

$\therefore\qquad x>-a$

故不等式 $|x|<a\ (a>0)$ 的解集为

$$\{x\,|-a<x<a\}$$

(b) 对于不等式 $|x|>a$ 来说，

当 $x\geqslant 0$ 时，有 $x>a$

当 $x>0$ 时，有 $-x>a$

即 $\qquad x<-a$

故不等式 $|x|>a\ (a>0)$ 的解集为

$$\{x\,|\,x>a，或\ x<-a\}$$

**例 33** 求不等式 $|2x-3|<5$ 的解集。

**解** 原不等式可写成 $\quad -5<2x-3<5$

即 $\qquad -2<2x<8$

$\therefore\qquad -1<x<4$

故原不等式的解集为 $\{x\,|-1<x<4\}$

**例 34** 解不等式 $|3x+4|\geqslant 8$。

**解** 原不等式 $|3x+4|\geqslant 8$ 可写成

$$3x+4\geqslant 8 \quad 或 \quad 3x+4\leqslant -8$$

解得 $\qquad x\geqslant\dfrac{4}{3}\quad 或\quad x\leqslant -4$

**例 35** 解不等式 $|x^2-5x|>6$。

**解** 原不等式可写成

$$x^2-5x>6 \quad 或 \quad x^2-5x<-6$$

由不等式 $x^2-5x>6$，

得 $(x+1)(x-6)>0$

解得 $x<-1$，或 $x>6$

由不等式 $x^2-5x<-6$，

得 $(x-2)(x-3)<0$

解得 $2<x<3$

因此，原不等式的解是

$$x<-1,\ \text{或}\ 2<x<3,\ \text{或}\ x>6$$

**例 36** 求不等式 $1<|3x+4|\leqslant 6$ 的解集。

**解** 原不等式可改写为不等式组

$$\begin{cases}|3x+4|>1 & \dots\dots\dots\dots(1)\\ |3x+4|\leqslant 6 & \dots\dots\dots\dots(2)\end{cases}$$

由 (1)，可得 $3x+4>1$ 或 $3x+4<-1$

解是 $x>-1$，或 $x<-\dfrac{5}{3}$

由 (2)，可得 $-6\leqslant 3x+4\leqslant 6$

解是 $-\dfrac{10}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$

因此，原不等式的解集是

$$\left\{x\,\middle|\,x>-1,\ \text{或}\ x<-\frac{5}{3}\right\}\cap\left\{x\,\middle|\,-\frac{10}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\right\}$$

$$=\left\{x\,\middle|\,-\frac{10}{3}\leqslant x<-\frac{5}{3},\ \text{或}\ -1<x\leqslant\frac{2}{3}\right\}$$

## 习题 14h

解下列不等式：

1. $|x-2|<5$
2. $|3-2x|\geqslant 7$
3. $2|x|+4<7$
4. $3|x-3|-9<0$
5. $|x^2-3x-1|>3$
6. $|x^2-x|\leqslant 6$
7. $1<|x-3|<4$
8. $3\leqslant|5-2x|<9$
9. $|\sqrt{3x-2}-3|>1$
10. $\dfrac{4}{|x+1|}\geqslant 1$

## 14.9　代数式的最大值和最小值

某些代数式的最大值或最小值，可用一元二次方程根的判别式来求得。下面举例说明。

**例 37**　求代数式 $-2x^2+5x+2$ 的最大值或最小值，并说出这时实数 $x$ 的值是多少。

**解一**　设 $y=-2x^2+5x+2$，则方程式 $-2x^2+5x+2-y=0$ 有实数解 $x$ 的充要条件是

$$5^2+4\times 2(2-y)\geqslant 0$$

即

$$y\leqslant \frac{41}{8}$$

故代数式 $-2x^2+5x+2$ 的最大值是 $\frac{41}{8}$。

当 $y=\frac{41}{8}$ 时，方程式 $-2x^2+5x+2=\frac{41}{8}$ 的解为

$$x=\frac{5}{4}$$

即当 $x=\frac{5}{4}$ 时，$-2x^2+5x+2$ 有最大值 $\frac{41}{8}$

**解二**　设

$$\begin{aligned} y &= -2x^2+5x+2 \\ &= -2\left(x^2-\frac{5}{2}x-1\right) \\ &= -2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{41}{16}\right] \\ &= -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{41}{8} \end{aligned}$$

由于

$$-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2\leqslant 0$$

$$\therefore\quad -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{41}{8}\leqslant\frac{41}{8}$$

$\therefore$　当 $x=\frac{4}{5}$，这个代数式有最大值 $\frac{41}{8}$

**例 38** 求代数式 $\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+1}$ 的最大值与最小值。

**解** 设 $y=\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+1}$

则 $x^2y+y=3x^2-2x+1$

$$(y-3)x^2+2x+(y-1)=0$$

这个方程式有实数解 $x$ 的充要条件是

$$4-4(y-3)(y-1)\geqslant 0$$

即 $$y^2-4y+2\leqslant 0$$

解这个不等式，得

$$2-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{2}$$

因此，代数式 $\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+1}$ 有最大值 $2+\sqrt{2}$，最小值 $2-\sqrt{2}$。

## 习题 14i

求下列代数式的最大值或最小值（1～4）：

1. $x^2-4x+6$
2. $-2x^2-x+1$
3. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-x}$
4. $\dfrac{3x}{x^2+x+1}$
5. 当 $x$ 取什么值时，下列各分式有最小值或最大值，并求出它的最小值或最大值：

   (a) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$　　(b) $\dfrac{x^4-x^2+4}{x^2}$
6. 如果 $x$ 是实数，求证函数 $\dfrac{x^2-12}{2x-7}$ 的值不能在 3 和 4 之间。
7. 如果 $x$ 是实数，求证函数 $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ 的值介于 1 和 $-\dfrac{1}{11}$ 之间。
8. 如果代数式 $-x^2+mx+2$ 的最大值为 $\dfrac{9}{4}$，求 $m$ 的值。
9. 已知 $a+b=20$，问 $a$、$b$ 为何值时使 $a^2+b^2$ 最小？

## 总复习题 14

1. 比较下列各组中两个代数式的大小：
   (a) $(x^2+1)^2$ 与 $x^4+x^2+1$
   (b) $(\sqrt{x}+1)^2$ 与 $(\sqrt{x}-1)^2 (x>0)$
   (c) $(x+\frac{1}{2})(x^2+x+1)$ 与 $(x+1)(x^2+\frac{x}{2}+1)$
2. 当 $x<a<0$ 时，判断下列各式是否为立？
   (a) $x^2<ax<0$
   (b) $x^2<a^2$
   (c) $x^2>ax>a^2$
   (d) $x^2>ax$ 且 $ax<0$
   (c) $ax>0$ 且 $ax>x^2$
3. 证明下列不等式：
   (a) $a^2+3b^2 \geqslant 2b(a+b)$
   (b) $4x^2-4x+2>0$
   (c) $\frac{a+b+c+d}{2} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$
   (d) $(x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x})(y\sqrt{x}+z\sqrt{y}+x\sqrt{z}) \geqslant 9xyz$
4. 已知 $a>b>0$，且 $m>0$，求证 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$。
5. 如果 $x$，$y$，$z$ 是不相等的正数，求证下列不等式：
   (a) $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})>4$
   (b) $6xyz<yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)$
   (c) $(x+y+z)^2>3(xy+yz+zx)$
   (d) $\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x+y+z} \geqslant xyz$
6. 解下列不等式：
   (a) $3(x+5)-2(x-5)>2(x-\frac{3}{2})+\frac{3}{2}$
   (b) $3-\frac{x-1}{4} \geqslant 2+\frac{3(x+1)}{8}$
   (c) $\frac{1}{2}x^2-4x+6<0$
   (d) $x^2-x>x(2x-3)+2$
   (e) $(x-3)(x^2-6x-16) \leqslant 0$
   (f) $x^2(x^2-10) \geqslant -9$

(g) $\dfrac{x^2-2x-5}{x-2}<0$　　(h) $\dfrac{x}{x^2-7x+12}>1$

(i) $\dfrac{x^2-2x-15}{x-2}\geqslant 0$　　(j) $\dfrac{2x+3}{2-x}\geqslant 1$

7. 解下列联立不等式:

(a) $\begin{cases}2x+3(4-x)>4\\ x-3>\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\end{cases}$

(b) $\begin{cases}(x+1)(x+2)>(x-3)(x-4)\\ (2x-1)(x+3)<x(x+1)+x(x+2)\end{cases}$

(c) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}+1\geqslant 0\\ 5(x-2)<x(x-1)\\ x^2+3x<4\end{cases}$

8. 解下列不等式:

(a) $\sqrt{x^2+3x+2}\leqslant\sqrt{6}$　　*(b) $\sqrt{(x-3)(x+2)}>x+2$

(c) $|x^2-1|\leqslant 3$　　(d) $4\leqslant|x-5|\leqslant 7$

9. $m$ 是什么数时，方程式 $x^2+(m-3)x+m=0$ 有两个不相等的实数根?

10. 求代数式 $\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ 的最大值或最小值。

11. 试证函数 $\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ 的值不能在 2 和 6之间。

12. 建造背面靠墙的长方形小屋一间，面积为 24 平方米，房屋正面用木板修建，平均每平方米造价为 $4a\ (a>0)$ 元，房屋侧面用砖墙，平均每平方米造价为 $3a$ 元，若墙高 $h$ 米，问房屋应该怎样设计，才能使造价最低? 最低造价是多少?

# 15 二元一次不等式及线性规划

## 15.1 二元一次不等式

含有两个未知数，且未知数的次数都是一次的不等式叫做**二元一次不等式**(linear inequality in two variables)。

如 $6m+n<2$，$3a-5b+1\geqslant 0$，$7x-y>2(x+3)$ 都是二元一次不等式。

二元一次不等式的解可用直角坐标的区域来表示。

**例 1** 在平面坐标上绘出 $y>x+1$ 的解集。

**解** 首先画方程式 $y=x+1$ 的图象，得到一条直线 $l$。直线 $l$ 上方的点如 (0，2)，(0，3)，(−1，1)，(−1，2)，(−1，3)，(1，3)，(1，4)，(2，4)，(2，5)，…… 都满足 $y>x+1$。

∴ $y>x+1$ 的解为直线 $l$ 上方的平面，如图 15－1 所示。其中直线 $l$ 为虚线，表示直线 $l$ 上的点不在解的范围内。

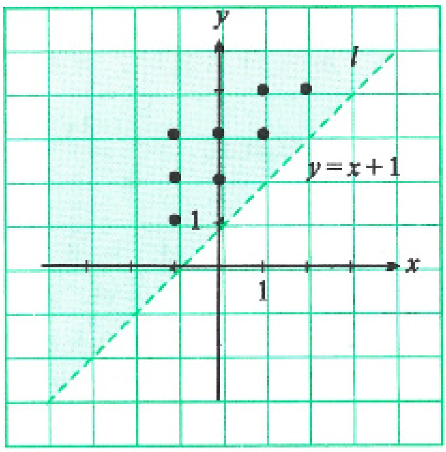



图 15－1

**例 2** 以图象表示 $y\geqslant x+1$ 的解。

**解** 首先画方程式 $y=x+1$ 的图象，得到直线 $l$。直线 $l$ 上方的点如 (0，2)，(1，3)，(−1，2)，(−1，3)，(0，3)，…… 及直线 $l$ 上的坐标如 (−3，−2)，(−2，−1)，(−1，0)，(0，1)，等都满足 $y\geqslant x+1$。

∴ $y \geqslant x+1$ 的解为直线 $l$ 上方的平面与直线 $l$ 上的点，如图 15－2 所示。其中直线 $l$ 为实线，表示直线上的点在解的范围内。

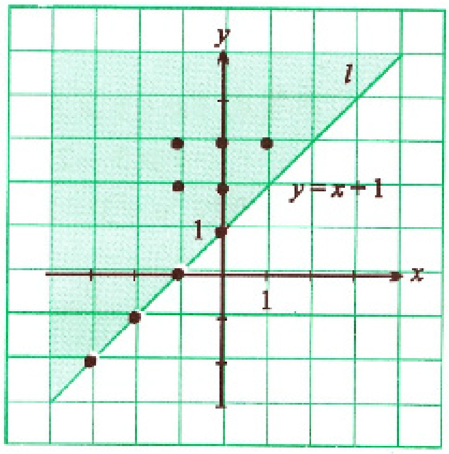



图 15－2

**例 3** 在平面坐标上绘出 $y<x+1$ 的解。

**解** 首先画方程式 $y=x+1$ 的图象，得到直线 $l$。直线 $l$ 下方的点如 (0，0)，(1，0)，(2，0)，(－1，－1)，(－1，－2)，(－2，－2)，(－2，－3)，…… 都满足 $y<x+1$。

∴ $y<x+1$ 的解为直线 $l$ 下方的平面，如图 15－3 所示。

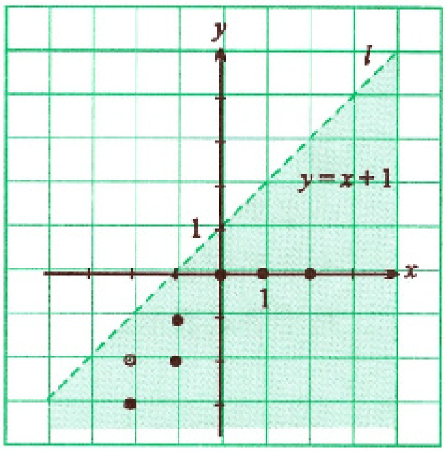
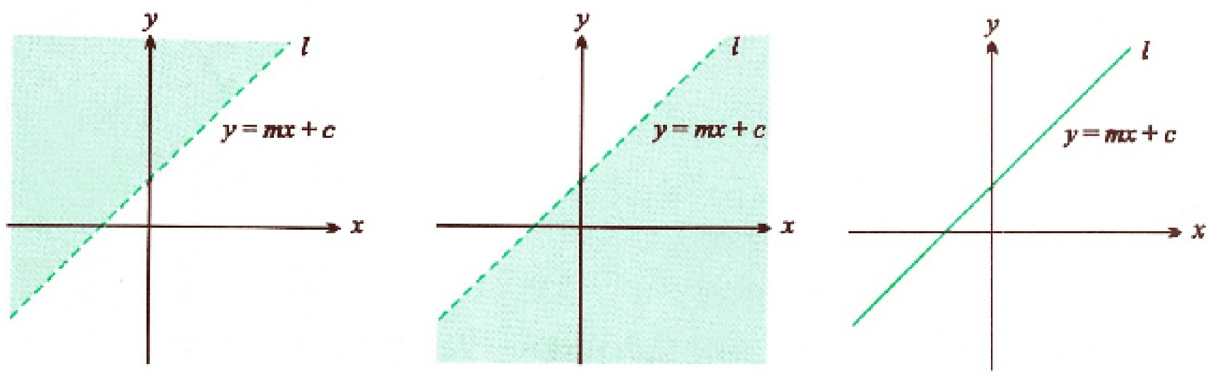



图 15－3

由以上几个例子可知，直线 $y=mx+c$ 把平面分成两个半平面，直线上方的半平面表示 $y>mx+c$ 的区域；直线下方的半平面表示 $y<mx+c$ 的区域；而直线本身表示 $y=mx+c$ 的区域（如图 15－4）。




$y>mx+c$　　　$y<mx+c$　　　$y=mx+c$

图 15－4

**例 4**　试绘不等式 $2x+y\geqslant 3$ 的图象。

**解**　不等式 $2x+y\geqslant 3$ 可化为

$$y\geqslant 3-2x$$

先画直线 $y=3-2x$ 的图象。

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $y$ | 3 | −1 |

$2x+y\geqslant 3$ 的图象为直线 $y=3-2x$ 上方的平面与直线上的点，如右图 15－5 所示。

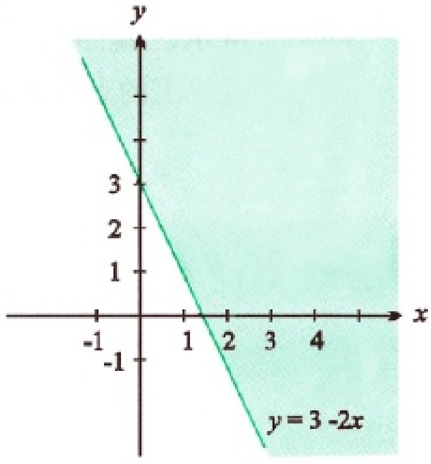


图 15－5

【注】一般上，一个二元一次不等式，比如 $Ax+By+C>0$，所表示的区域一定是直线 $Ax+By+C=0$ 所分的两个半平面中的一个。究竟是哪一个半平面，不一定需如例 4 般将不等式化为函数 $y$ 的代数式来判断，而可取其中一个半平面上的任意一点，将它的坐标代入不等式，如果不等式成立，那么这个半平面就是不等式表示的区域；如果不等式不成立，那么另一个半平面就是不等式表示的区域。

**例 5**　试绘不等式 $3x-2y+1\geqslant 0$ 的图象。

**解**　先画直线 $3x-2y+1=0$。

| $x$ | −1 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | −1 | 2 |

将原点 (0, 0) 代入不等式

$3x-2y+1>0$，得

$3(0)-2(0)+1=1>0$，

不等式成立。

所以原点所在半平面是不等式

$3x-2y+1>0$ 表示的区域。

由此，$3x-2y+1\geqslant 0$ 的图象为直线 $3x-2y+1=0$ 上的点与直线下方的平面，如右图 15－6 所示。

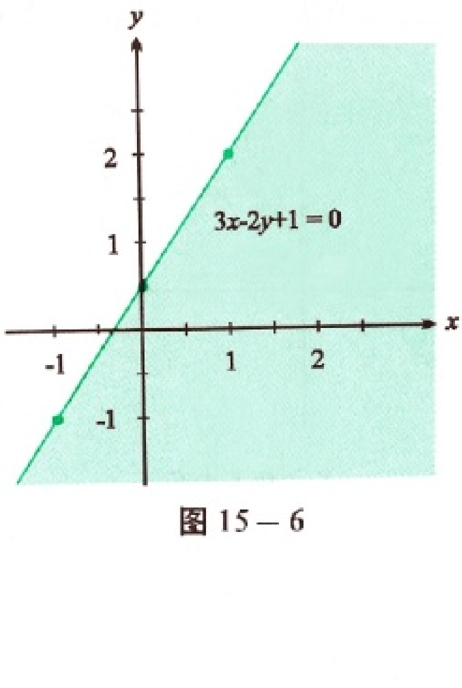


图 15－6

## 习题 15a

以图象表示下列各不等式的解（1～10）：

1. $x<3$
2. $y\leqslant -2$
3. $2x-3\geqslant 0$
4. $x-3y<0$
5. $x-y+1\leqslant 0$
6. $2x+3y-6>0$
7. $2x+5y-10>0$
8. $4x-3y<9$
9. $3x-2y\geqslant 7$
10. $3x-y+5\geqslant 0$

## 15.2　二元一次不等式组

同时满足二元一次不等式组里各个不等式的公共解，就是此不等式组的解。一般上，二元一次不等式组的解就是各个不等式的图象的公共区域。

**例 6**　试求不等式组 $\begin{cases} y<x \\ x+2y\leqslant 4 \end{cases}$ 的图象。

**解**　$y<x$ 的图象为直线 $y=x$ 下方的平面，如图 15－7 (a) 所示。

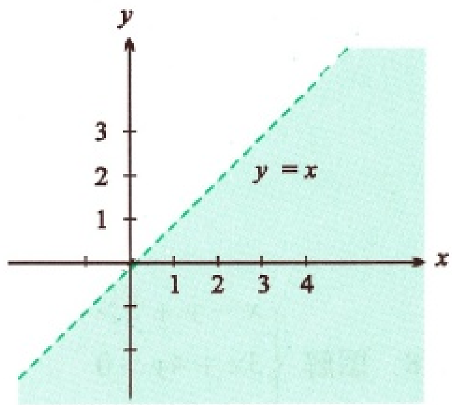



图 15－7 (a)

$x+2y\leqslant 4$ 的图象为直线 $x+2y=4$ 下方的平面与直线 $x+2y=4$，如图 15－7 (b) 所示。

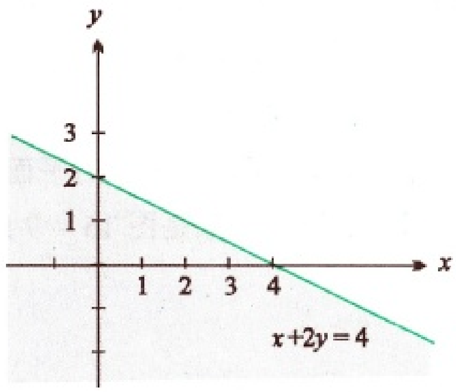



图 15－7 (b)

将图 (a) 与图 (b) 画在同一坐标平面上，两图相交的部分就是此联立不等式的解，如右图 15 – 7 (c) 所示。

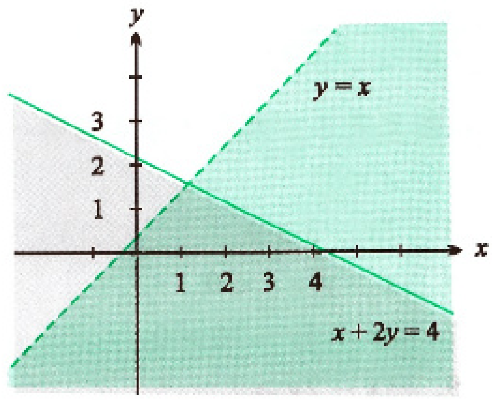



图 15 – 7 (c)

**例 7** 图解 $\begin{cases} 2x + y \geqslant 3 \\ x - 2y < -1 \end{cases}$

**解** $2x + y \geqslant 3$ 的图象为直线 $2x + y = 3$ 上方的平面与直线本身。

$x - 2y < -1$ 的图象为直线 $x - 2y = -1$ 上方的平面。

所求的图象是图 15 – 8 的阴影区域。

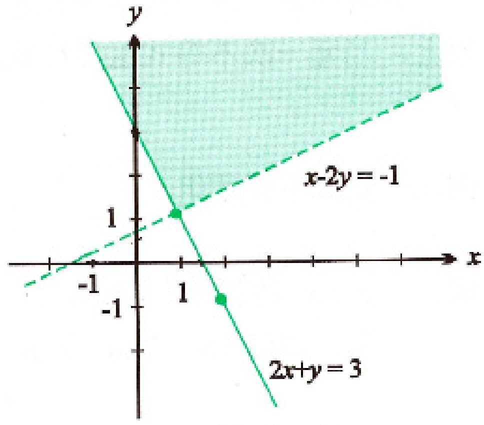



图 15 – 8

**例 8** 图解 $\begin{cases} x - y + 5 > 0 \\ 3x + 4y > 0 \\ x < 3 \end{cases}$

**解** $x - y + 5 > 0$ 的图象为直线 $x - y + 5 = 0$ 下方的平面。

$3x + 4y > 0$ 的图象为直线 $3x + 4y = 0$ 上方的平面。

所求的图象是图 15 – 9 的阴影部分。

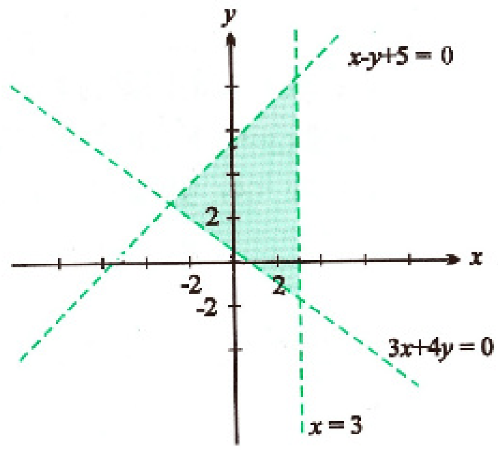



图 15 – 9

**例 9** 试写出以图 15 — 10 中阴影部分为图象的一个不等式组。

**解** 所求的不等式组为:

$$\begin{cases} x < 3 \\ 2y \geqslant x \\ 3x + 2y \geqslant 6 \\ 3y < x + 9 \end{cases}$$

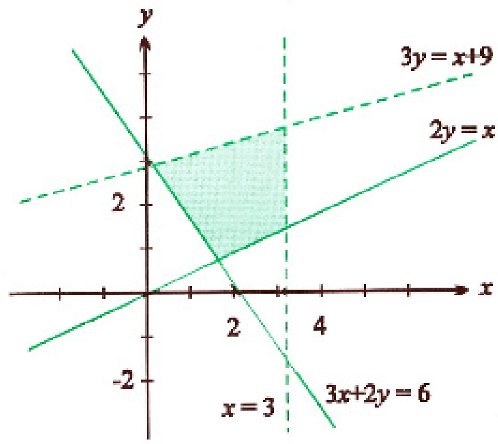



图 15 — 10

## 习题 15b

求下列联立不等式组的图象 (1～8):

1. $\begin{cases} x > 0 \\ x + y - 3 > 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y \geqslant 2x + 1 \\ x + 2y < 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y \leqslant 4 \\ x + 2y \leqslant 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y \geqslant 3 - x \\ y \leqslant \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y - 3 > 0 \\ x - 2y + 4 < 0 \end{cases}$

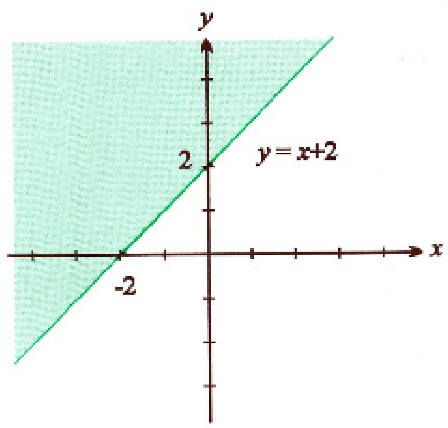
6. $\begin{cases} x > 0 \\ 2x + y \leqslant 10 \\ y \leqslant 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y \leqslant 12 \\ 3x - y \leqslant 6 \\ 0 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases}$

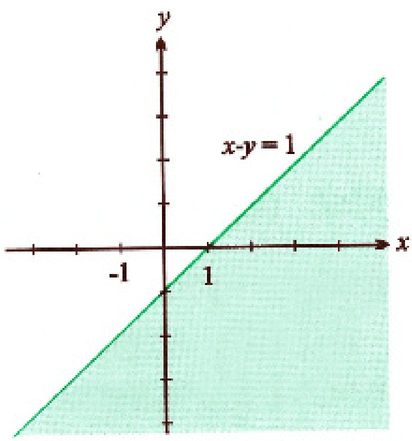
8. $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \\ x + y < 7 \\ y > 2x \end{cases}$

在下列各图中，试写出以阴影部分为图象的一个不等式组。(32～38)

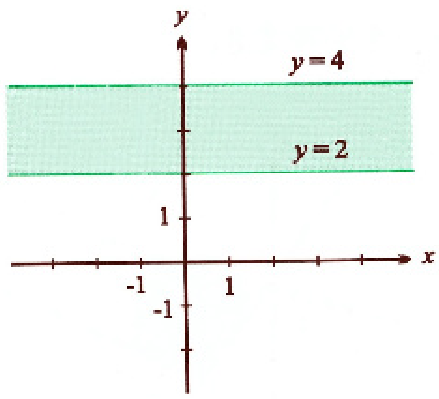
9.



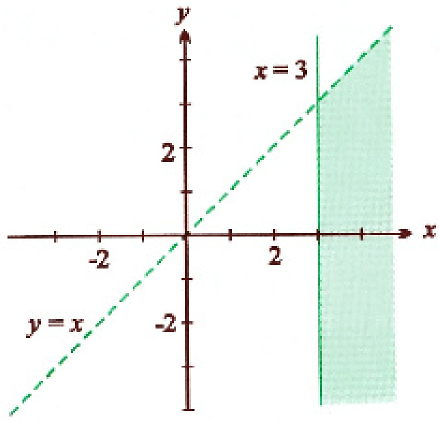

10.



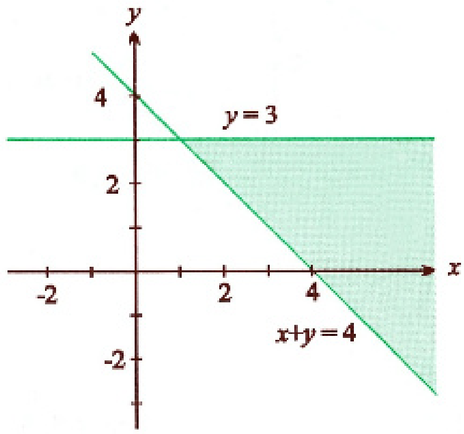
11.



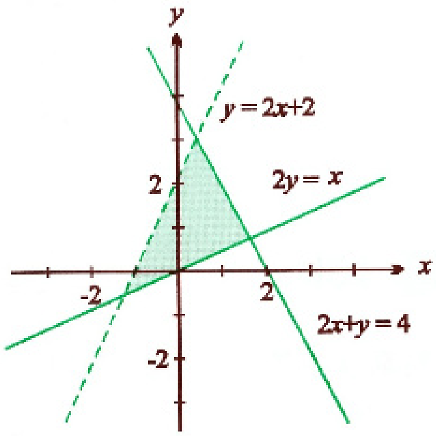

12.



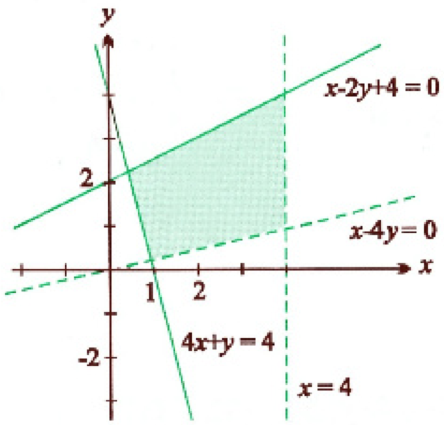

13.




14.




15.




## 15.3　线性规划

### ● 运筹学（operations research）

运筹学是二十世纪四十年代才开始形成的一门应用数学学科，现在它已经是经济计划、系统工程、现代管理和决策等各个领域中的强有力的工具。

运筹学的主要分支有规划论、排队论、决策论等。

## ● 线性规划（linear programming）

作为运筹学的一个重要分支的**规划论**（mathematical programming）主要研究两个方面的问题，一个是对于给定的人力和物力，怎样才能发挥最大的效益（经济的或社会的），另一个是对于给定的任务，怎样才能用最少的人力和物力去完成它．因此，规划论的问题可以归结为研究在一组不等式或等式的约束下，使得某一**目标函数**（objective function）取得极大（或极小）的极值问题．其中的一组不等式或等式叫做**约束条件**（constraints），它是目标函数中的各个变数必须满足的条件，能同时满足约束条件及所期望的目标的解，叫做**最优解**（optimal solution）。

如果规划论模型中的所有方程、不等式以及目标函数等都是线性的（即一次的），则称之为线性规划问题，本节将介绍只限于两个变数且能用图解法来解决的线性规划问题，即由两个非负变数所构成的线性函数（目标函数）的极值（极大或极小）问题。

**例 10**　如果 $z=3x+5y$，式中 $x$ 和 $y$ 受下列条件所约束：

$$\begin{cases}5x+3y=29\\7x-4y\leqslant 16\\2x+5y\leqslant 66\\-2x+y\leqslant 6\end{cases}$$

试求 $z$ 的极值。

**解**

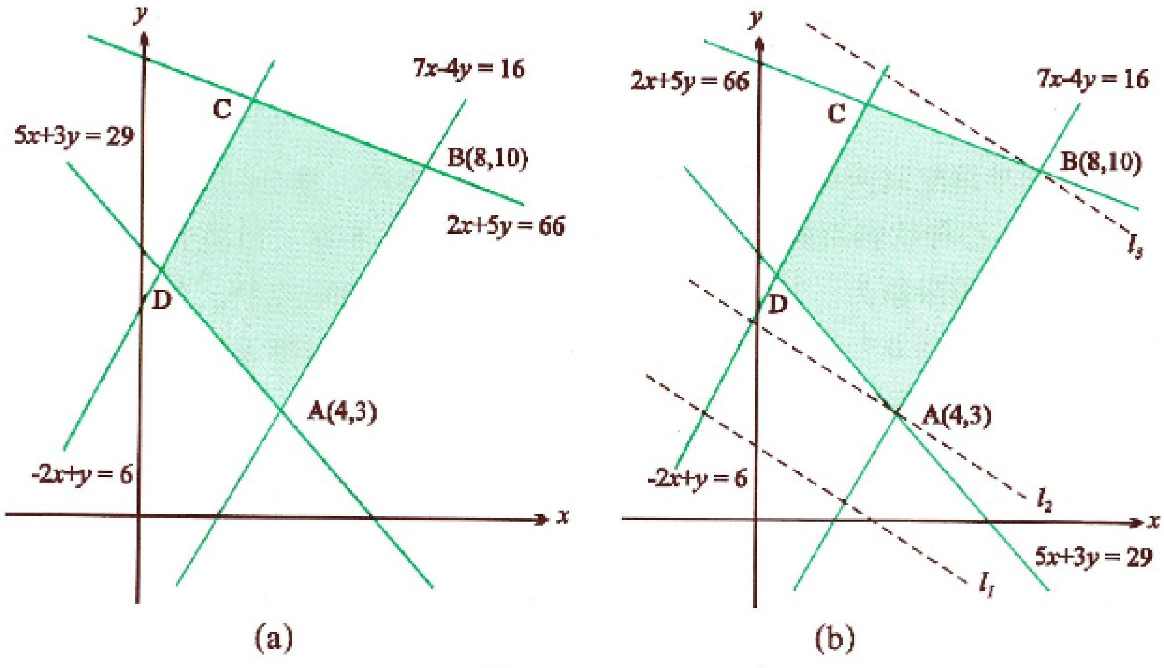



图 15－11

将约束条件中各个不等式的解集画在同一个坐标平面上，得到这个不等式组的解集，其图象如图 15－9 (a) 的阴影区域所示、该多边形内及其边界上的点都满足这组不等式。因此，多边形 ABCD 及其内部的点的集合就叫做这组不等式的**可行区域**（feasible region），属于区域中的任何一点都叫做**可行点**（feasible points）。

将 $z = 3x + 5y$ 写成

$$t: y = -\frac{3}{5}x + \frac{z}{5}$$

由此可知，当 $z$ 变动时，$t$ 表示一组具有相同斜率 $-\frac{3}{5}$ 的平行线，且 $y$ 轴上的截距是 $\frac{z}{5}$。当令 $z$ 等于某个常数，如 $z = 10$ 时，得到此组直线在 $y$ 轴上截距为 2 的一条直线：$y = -\frac{3}{5}x + 2$，该直线上任意一点的坐标都使目标函数（$z = 3x + 5y$）值为 10（见图 15－9 (a) 中的直线 $l_1$）。

当 $l_1$ 在可行区域中向远离原点的方向平移至 $l_3$ 的位置时，对应于 $l_3$ 的 $z$ 值是极大值且 $l_3$ 与可行区域的交点坐标 B (8，10) 就是所求的解集。所以当 $x = 8$，$y = 10$ 时，$z$ 有极大值。

$$z_{max} = 3 \times 8 + 5 \times 10 = 74$$

同理，将 $l_1$ 在可行区域中向趋近原点的方向平移至 $l_2$ 的位置时，对应于 $l_2$ 的 $z$ 值是极小值且 $l_2$ 与可行区域的交点坐标 A (4，3) 就是所求的解集，所以当 $x = 4$，$y = 3$ 时，$z$ 有极小值。

$$z_{min} = 3 \times 4 + 5 \times 3 = 27$$

**例 11** 某咖啡馆配制两种饮料。甲种饮料用奶粉、咖啡、糖分别为 9 克、4 克、3 克；乙种饮料用奶粉、咖啡、糖分别为 4 克、5 克、10 克。已知每天原料的使用限额为：3600 克奶粉、2000 克咖啡、3000 克糖。如果甲种饮料每杯能获利 0.7 元，乙种饮料每杯能获利 1.2 元。问每天应配制两种饮料各多少杯（假设这些饮料能全部售出）能获利最大？

**解** 设每天应配制甲种饮料 $x$ 杯，乙种饮料 $y$ 杯，可使该咖啡馆获利最大。依题意，列表如下：

| 原料 \ 饮料 | 甲（$x$ 杯） | 乙（$y$ 杯） | 原料限量（克） |
|---|---|---|---|
| 奶粉（克） | $9x$ | $4y$ | 3600 |
| 咖啡（克） | $4x$ | $5y$ | 2000 |
| 糖　（克） | $3x$ | $10y$ | 3000 |
| 利润 | $0.7x$ | $1.2y$ | |

每天使用的奶粉的关系是：$9x+4y\leqslant 3600$；

每天使用的咖啡的关系是：$4x+5y\leqslant 2000$；

每天使用的糖的关系式是：$3x+10y\leqslant 3000$；

又由于产量不能为负数，故：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$。

因此，我们得到下列不等式组：

$$\begin{cases} 9x+4y\leqslant 3600 \\ 4x+5y\leqslant 2000 \\ 3x+10y\leqslant 3000 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

这组不等式是目标函数的约束条件。它的解集是图 15－12 所示的多边形 OABCD 及其内部的点的集合。

全部产品卖完后的获利是 $z=0.7x+1.2y$，

当 $z=0$ 时，得到一条经过原点的直线 $l_1$：$0.7x+1.2y=0$。

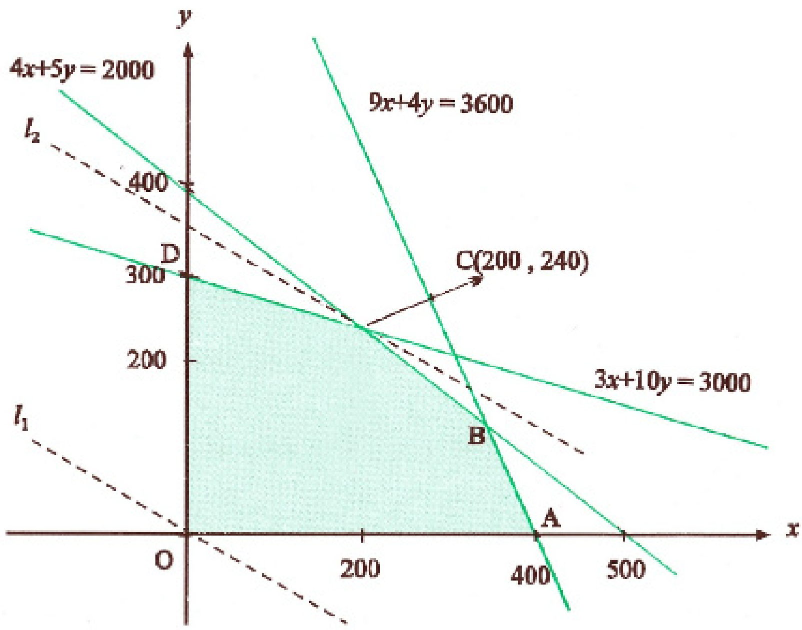



图 15－12

把 $l_1$ 在可行区域中平行移动到离原点最远的位置时，得到直线 $l_2$，并且 $l_2$ 与可行区域交于 C 点，此时，$z$ 的值最大。由于 C 点是直线 $4x+5y=2000$ 与直线 $3x+10y=3000$ 的交点，故 C 点的坐标是 (200，240)。

因此，当 $x=200$，$y=240$，即每天应配制甲种饮料 200 杯，乙种饮料 240 杯时，该咖啡馆获利最大，并且

$$\begin{aligned} z_{max} &= 200 \times 0.7 + 240 \times 1.2 \\ &= 428\ (\text{元}) \end{aligned}$$

**例 12** 某公司有甲、乙两个服装厂，生产相同的三种服装，其产量是：甲厂每天可生产 240 打童装、30 打睡衣、60 打校服；乙厂每天可生产 60 打童装、30 打睡衣、210 打校服。两厂每天开工的维持费是：甲厂 400 元，乙厂 800 元，今接到一宗订货单，需童装 480 打、睡衣 150 打、校服 600 打，为使维持费最低，问应如何分配两厂的工作时间？

**解** 设甲厂开工 $x$ 天，乙厂开工 $y$ 天，总维持费为 $z$ 元，依提意，列表如下：

| 服装种类 | 甲厂产量(打) | 乙厂产量(打) | 定购量(打) |
|---|---|---|---|
| 童　装 | $240x$ | $60y$ | 480 |
| 睡　衣 | $30x$ | $30y$ | 150 |
| 校　服 | $60x$ | $210y$ | 600 |
| 维持费 | $400x$ | $800y$ | |

两厂童装产量的关系式是：$240x+60y \geqslant 480$，
两厂睡衣产量的关系式是：$30x+30y \geqslant 150$，
两厂校服产量的关系式是：$60x+210y \geqslant 600$，
又开工天数不能为负数，故：$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$。

$$\text{因此} \quad \begin{cases} 4x+y \geqslant 8 \\ x+y \geqslant 5 \\ 2x+7y \geqslant 20 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

这组不等式是目标函数的约束条件，它的解集如图 15－13 的阴影区域（包括边界）所示。

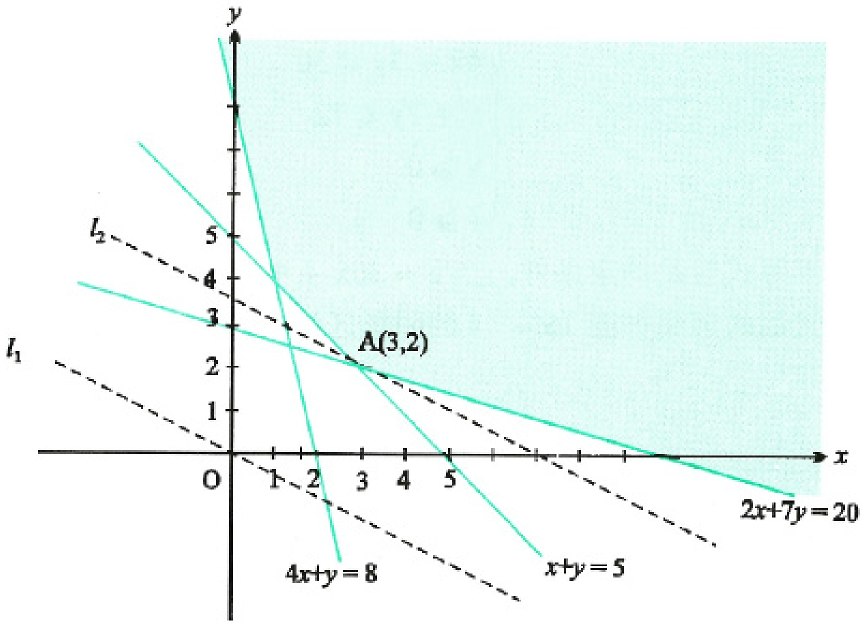



图 15－13

完成这项工作的维持费是 $z=400x+800y$（元）

令 $l$：$400x+800y=z$，

由图 15－11 可见，直线 $l$ 与可行区域的最趋近原点的交点是 A (3，2)，因此，要使维持费用最低可安排甲厂工作 3 天，乙厂工作 2 天，即

$$z_{min}=400\times3+800\times2=2800\text{（元）}$$

**例 13** 某木器加工厂只生产两种产品：桌子和椅子，售出一张桌子的利润为 30 元，售出一把椅子的利润为 40 元，又知桌子和椅子需经过两个加工工段：装配工段和精整工段，其中每个桌子和椅子所需工时，以及各工段的生产能力由下表给出，问如何安排生产可使总利润最大。

| 项目<br>工时<br>工段 | 桌子 | 椅子 | 生产能力<br>（工时／天） |
|---|---|---|---|
| 装配 | 4 | 3 | 30 |
| 精整 | 1 | 2 | 12 |

**解**　设每天计划生产桌子 $x$ 张，椅子 $y$ 张，由题意，可得：

目标函数 $z = 30x + 40y$，且变数 $x, y$ 满足：

$$\begin{cases} 4x + 3y \leqslant 30 \\ x + 2y \leqslant 12 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

上面不等式组是约束条件，求 $z = 30x + 40y$ 的极大值（总的利润）。

不等式组的解集如图 15－14 的阴影区域（包括边界）所示。

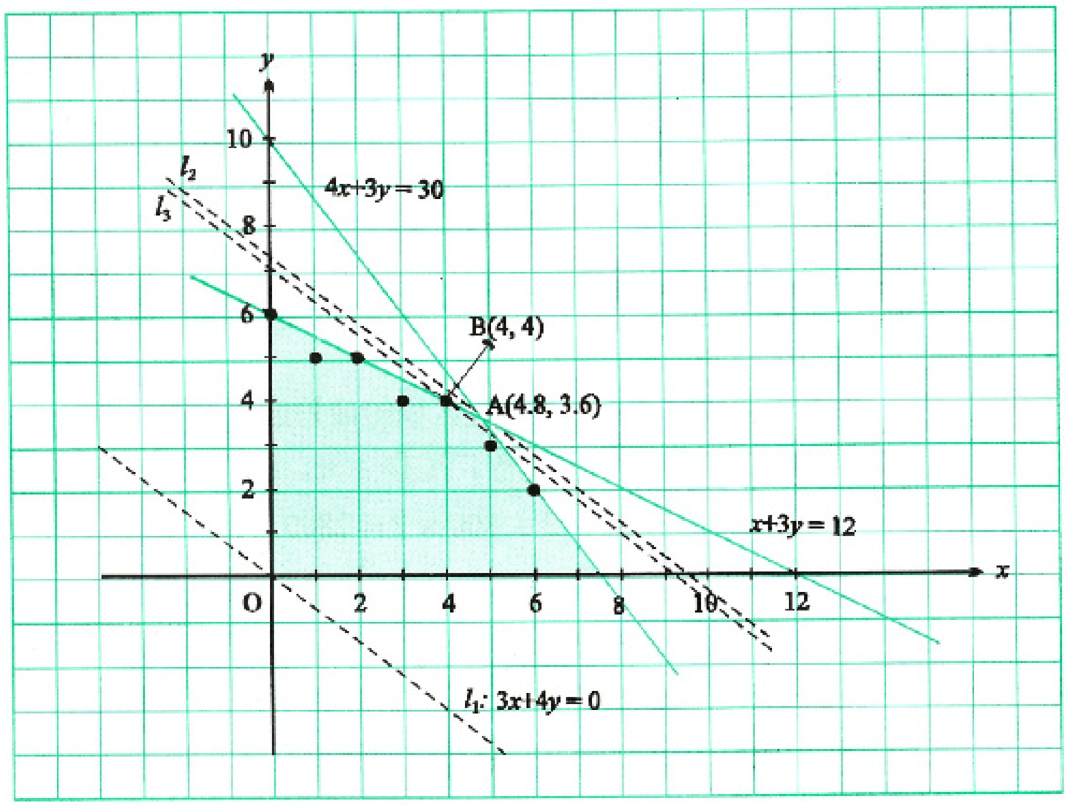



图 15－14

令 $l$：$30x + 40y = f$。

由图 15－14 可知，直线 $l$ 与可行区域中离原点最远的交点是 A (4.8, 3.6)，由于桌子或椅子的数量必须是正整数，所以转而考虑可行区域内坐标为整数的点。将直线 $l_2$ 由交点 A 向原点方向平行移动至碰到的第一个整数点 B (4, 4)，这就是所要求的点。也就是说，当每天生产桌子 4 张，椅子 4 把时，获得的总利润最大，即

$$z_{max} = 30 \times 4 + 40 \times 4 = 280 \text{（元）}.$$

总之，利用图解法求解两个变量的线性规划问题一般可按下列步骤进行：

1. 写出约束条件及目标函数；
2. 在坐标平面中，作出可行区域，即约束条件中方程或不等式组的解集；
3. 用平移法求目标函数的极值。

## 习题 15c

1. 试求 $z=x+3y$ 的极大值，式中 $x$ 与 $y$ 满足下列约束条件：

$$\begin{cases} 2x+3y\leqslant 24 \\ x-y\leqslant 7 \\ y\leqslant 6 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

2. 试求 $w=7x+25y$ 的极小值，式中 $x$ 与 $y$ 满足下列约束条件：

$$\begin{cases} 2x+5y\geqslant 15 \\ x+5y\geqslant 10 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

3. 某运输公司可替两个工厂装运货物，工厂甲的每一箱货物重 40 千克，体积是 2 个单位，工厂乙的每一箱货物重 50 千克，体积是 3 个单位，该公司运送甲、乙两厂的每一箱货物分别收费 2.20 元及 3.00 元，如果该公司的运货车装运重量不能超过 37000 千克，体积不能超过 2000 个单位，问各取甲、乙厂的多少箱货物来装运，可使运输公司的收费最多。
4. 某化工厂生产 500 克重的瓶装涂料。它由 A、B 两种原料混合而成，工艺规定 A 种原料最多不能超过 350 克，B 种原料不能少于 200 克。已知原料成本 A 种每克 0.5 分，B 种每克 1 分。求每瓶中两种原料各用多少，才能使成本最低。
5. 某工厂生产 A 和 B 两种产品，已知制造一吨 A 产品要消耗 8 吨煤、10 千瓦电、4 个劳动日；制造一吨 B 产品要消耗 4 吨煤、2 千瓦电、6 个劳动日，又知每吨 A 产品的价值为 12 万元，每吨 B 产品的价值为 8 万元，现工厂只有技工 240 人，限定用煤不超过 360 吨，电力消耗不超过 460 千瓦，问应生产多少吨 A 产品和多少吨 B 产品，才能使产值最大？

6. 某人有楼房一幢，室内面积共180平方公尺，拟隔成两类房间分租给学生。大房每间占地18平方公尺，可住五位学生，月租每人40元；小房每间占地15平方公尺，可住三位学生，月租每人50元；但是大房的装修布置每间1000元，小房每间则需600元。如果某人现有款项8000元准备用于装修布置，且学生来源是不必顾虑的话，问他应隔大房与小房各多少间才可获得最大的收益。

## 总复习题 15

1. 求下列不等式的图象：

   (a) $2y+7\leqslant 0$　　(b) $4x+3y\geqslant 24$

   (c) $-3x+5y>2$　　(d) $5x-8y+40<0$

2. 求下列不等式组的图象：

   (a) $\begin{cases} x+y-4>0 \\ x-2y+6>0 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} -x+3y\leqslant 9 \\ 5x+6y+30\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$

3. 试求 $z=10x+15y$ 的极大值，式中 $x$ 与 $y$ 满足下列约束条件：

   $$\begin{cases} x+2y\leqslant 24 \\ 3x+2y\leqslant 36 \\ 0\leqslant x\leqslant 10 \\ 0\leqslant y\leqslant 11 \end{cases}$$

4. 设 $x$，$y$ 满足约束条件：

   $$\begin{cases} 3x+y\geqslant 6 \\ 4x+3y\geqslant 13 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

   试求 $w=x+2y$ 的极值。

5. 某工厂用 $a$，$b$，$c$，$d$ 四种原料来制造A，B两种产品，产品A每个需用原料 $a$，$b$，$c$，$d$ 分别是2，2，0，3单位；产品B每个需要用料 $a$，$b$，$c$，$d$ 分别是3，1，3，0单位。已知库存原料 $a$，$b$，$c$，$d$ 的存量分别为19，13，15，18单位，产品A每个可获利7千元，产品B每个可获利5千元。以现有库存须如何生产才能获得最大的利润？

6. 饲养某种动物时，每天至少需要分别供应甲，乙，丙三种营养素 11 单位，13 单位，15 单位，现有饲料 A，B 二种，A 每一千克的价格为 300 元，B 每一千克的价格为 400 元。A，B 每一千克中所含各营养素的单位量如下表，问饲养这种动物时，平均每天使用饲料 A，B 各多少千克能使饲料费最少？

| | 甲 | 乙 | 丙 |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 3 | 2 |
| B | 2 | 1 | 2 |

7. 某工厂制造 A，B 两种产品，需原料、设备、人工情况如下表，它们所能利用的限度如表中最右边的一列。又已知 A，B 每一个单位的利润分别为 3 万元，2 万元，问：

(a) 要想获得最大利润，产品应各生产多少个？

(b) 若设备的利用限度只能为 8，则最大利润将减少多少？

| | A | B | 利用限度 |
|---|---|---|---|
| 原　料 | 1 | 1 | 6 |
| 设　备 | 2 | 1 | 10 |
| 人　工 | 1 | 2 | 10 |

8. 有一位建屋发展商想要建造 A、B 两种类型的房屋。每间 A 型房屋需用地 120 平方公尺，建筑费 RM70000，每间可赚 RM20000。每间 B 型房屋需用地 300 平方公尺，建筑费 RM126000，每间可赚 RM40000。如果这位建筑商有一块地，其面积为 2400 平方公尺，建筑资本 RM1260000。问他应该建造多少间 A 型房屋和 B 型房屋才可获得最高利润？并求其最高利润（假设所建的房屋都售完）。

# 16 数列与级数

## 16.1 数列与级数

按照某种规则排列着的一列数叫做**数列** (sequence)。

**例 1** 从 1 到 8 的各个整数的 10 倍加 1，按从小到大的顺序排列：

$$11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81。$$

**例 2** 从 1 到 10 的各个整数的倒数，按从大到小的顺序排列：

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}。$$

数列中的每一个数叫做数列的一**项** (term)。从开始数起，数列的各项依次叫做第 1 项 (或首项)、第 2 项、第 3 项、…，如果数列有最后一项，这项就叫做数列的末项。

例如，例 1 中的数列的首项为 11，末项为 81，这个数列共有 8 项；例 2 中的数列的首项为 1，末项为 $\frac{1}{10}$，这个数列共有 10 项。

一般上，一个数列的各项可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots。$$

简记作 $\{a_n\}$。数列的第 $n$ 项是 $a_n$，$a_n$ 叫做这个数列的**通项** (general term)。表示数列的第 $n$ 项 $a_n$ 和项数 $n$ 之间的关系的式子叫做这个数列的**通项公式**。例如，例 1 中的数列的通项公式是 $a_n = 10n+1$，例 2 中的数列的通项公式是 $a_n = \frac{1}{n}$。

**例 3** 已知一个数列的通项公式如下，试写出这个数列的前 5 项：

(a) $a_n = 3^n$ (b) $a_n = n(n+1)$

**解** (a) 3，9，27，81，243 (b) 2，6，12，20，30

**例 4** 写出下列数列的一个通项公式：

(a) 1，4，9，… (b) $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，…

(c) 0，1，0，1，0，1，…

**解** (a) $a_n = n^2$ (b) $a_n = \frac{n}{n+1}$

(c) $a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2}$

$$= \frac{1+(-1)^n}{2}$$

【注】例 4 (c) 也可写出另一个通项公式，$\sin^2 \frac{n-1}{2}\pi$。这说明了一个数列的通项公式，不是唯一的。

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，将数列中各项之间以加号连结成的式子，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

叫做**级数** (series)。

如果 $\{a_n\}$ 是一个只含有 $k$ 项的有限数列，那么 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 叫做**有限级数** (finite series)。一个有限级数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 常用 $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ 表示。这里“Σ”读作 sigma，$\sum\limits_{n=1}^{k}$ 表示从 $n=1$ 到 $n=k$ 的各项相加。

例如，由例 1 中的数列所成的级数可以表示为 $\sum\limits_{n=1}^{8} (10n+1)$，

即 $\sum\limits_{n=1}^{8} (10n+1) = 11 + 21 + 31 + 41 + 51 + 61 + 71 + 81$。

又如，由例 2 中的数列所成的级数可以表示为 $\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{n}$，

即 $\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$。

**例 5** 写出下列级数:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{6}\frac{n}{n+1}$ (b) $\sum\limits_{n=2}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{6}1$

**解** (a) $\sum\limits_{n=1}^{6}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}$

(b) $$\sum\limits_{n=2}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{6}1=1+1+1+1+1+1$

**例 6** 用 Σ 符号表示下列级数:

(a) $6+12+20+\cdots+(n+1)(n+2)+\cdots+10100$

(b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

(c) $2+2+2+2+2+2+2+2$

**解** (a) $\sum\limits_{n=1}^{99}(n+1)(n+2)$ (b) $\sum\limits_{n=2}^{5}\frac{1}{n}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{8}2$

## 习题 16a

1. 试求下列数列的随后三项:

(a) 1，3，9，27，____，____，____；

(b) 1，3，4，7，11，____，____，____；

(c) $a^4$，$-2a^5$，$4a^6$，$-8a^7$，____，____，____；

(d) $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{11}$，____，____，____。

2. 根据下列数列的通项公式，写出它的前 5 项：

(a) $a_n = 2n + 3$ (b) $a_n = 3^{n+1}$

(c) $a_n = \dfrac{n}{3n+4}$ (d) $a_n = (-1)^{2n+1}$

3. 写出下列数列的一个通项公式：

(a) 3，6，9，12，⋯ (b) 2，4，8，16，⋯

(c) $\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{4}$，⋯ (d) $-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，$-\dfrac{1}{27}$，$\dfrac{1}{81}$，⋯

4. 写出下列符号所表示的级数：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{5} n(n-1)$ (b) $\sum\limits_{n=3}^{8} \dfrac{1}{3^n}$

5. 用 Σ 符号表示下列级数：

(a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 50^3$ (b) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16}$

## 16.2 等差数列

如果一个数列 $a_1$，$a_2$，⋯，$a_n$，⋯ 的每一个项与它前一项的差等于一个常数，那么这个数列叫做**等差数列**（arithmetic sequence）。这个常数叫做**公差**(common difference)。公差常用 $d$ 表示。

例如，4，7，10，13，16，⋯ 是一个等差数列，它的公差是 3。又如，−1，−3，−5，−7，⋯ 也是一个等差数列，它的公差是 −2。

### ● 通项公式

在一个等差数列中，如果首项 $a_1 = a$，公差为 $d$，那么这个数列的第 2 项为 $a + d$，第 3 项为 $a + 2d$，第 4 项为 $a + 3d$，⋯，第 $n$ 项 $a_n$ 为 $a + (n-1)d$。

于是得到等差数列的通项公式：

$$a_n = a + (n-1)d$$

式中 $a$ 为等差数列的首项，$d$ 为公差，$n$ 为项数，$a_n$ 为第 $n$ 项。

**例 7** 试求等差数列 9，6，3，… 的第 7 项。

**解** 这个数列的首项为 $a=9$，公差为 $d=6-9=-3$，项数为 $n=7$。

根据通项公式，$a_7=9+(7-1)(-3)$

$=-9$

即第 7 项为 $-9$。

**例 8** 一个等差数列的首项是 1，第 5 项是 26，求它的公差。已知这个数列共有 8 项，试写出这个数列。

**解** $a=1$，$a_5=26$，$n=5$。

代入通项公式，$26=1+(5-1)d$

解得 $d=6\frac{1}{4}$

这个数列为 1，$7\frac{1}{4}$，$13\frac{1}{2}$，$19\frac{3}{4}$，26，$32\frac{1}{4}$，$38\frac{1}{2}$，$44\frac{3}{4}$。

**例 9** 一个等差数列的第 3 项为 19，第 7 项为 $-9$，求这个数列的首项和公差。

**解** 由通项公式，$\begin{cases}19=a+(3-1)d\\-9=a+(7-1)d\end{cases}$

解方程组，得 $a=33$，$d=-7$

即这个数列的首项为 33，公差为 $-7$。

## 等差中项

在 $a$ 和 $b$ 之间有一个数 A，使 $a$，A，$b$ 成等差数列，那么 A 叫做两个数 $a$ 和 $b$ 的**等差中项**（arithmetic mean）。

设 A 是 $a$ 和 $b$ 的等差中项，则 $a$，A，$b$ 成等差数列，于是

$$\mathrm{A}-a=b-\mathrm{A}$$

从而可以解得

$$\mathrm{A}=\frac{a+b}{2}$$

**例 10** 在 18 与 33 之间插入 4 个数，使所成的 6 个数成为等差数列。

**解** 所成的等差数列首项 $a = 18$，$a_6 = 33$。

根据通项公式，　$33 = 18 + (6 - 1)d$

解得　$d = 3$

因此插入的 4 个数为　21，24，27，30。

【注】像例 10 那样，在两数 $a$、$b$ 之间插入几个数 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$，使得 $a$，$x_1$，$x_2$，…，$x_n$，$b$ 成等差数列，那么中间各数 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$ 也可以称为 $a$ 和 $b$ 的等差中项。

**例 11** 已知 $a$，$b$，$c$ 三数成等差数列，求证 $b + c$，$c + a$，$a + b$ 三数也成等差数列。

**解** ∵ $a$，$b$，$c$ 成等差数列，∴ $b = \frac{a + c}{2}$

$$2b = a + c$$

今 $(b + c) + (a + b) = 2b + (a + c)$

$$= (a + c) + (a + c)$$

$$= 2(a + c)$$

∴ $a + c$ 是 $b + c$ 与 $a + b$ 的等差中项

∴ $b + c$，$c + a$，$a + b$ 三数成等差数列。

**例 12** 一个直角三角形三条边的长成等差数列，求证它们的比是 3∶4∶5。

**解一** 设三边的长 $a$，$b$，$c$ 成等差数列，$c$ 是斜边。

$b$ 为中项，则有 $b = \frac{1}{2}(a + c)$，

即　$c + a = 2b$　………. (1)

又由毕氏定理，得 $c^2 - a^2 = b^2$　………. (2)

(1) ÷ (2)，得　$c - a = \frac{b}{2}$　………. (3)

解由 (1)，(3) 组成的方程组，得 $a = \frac{3b}{4}$，$c = \frac{5b}{4}$

所以 $a∶b∶c = 3∶4∶5$。

**解二**　设三边的长为 $a$，$a+d$，$a+2d$。$(d>0)$

由毕氏定理，$a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2$

$$a^2-2ad-3d^2=0$$

$$(a-3d)(a+d)=0$$

$$a=3d \text{ 或 } a=-d$$

因 $a>0$，不可能 $a=-d$，$\therefore a=3d$

三边长为 $3d$，$3d+d=4d$，$3d+2d=5d$，

即三边长的比为 $3:4:5$。

## 习题 16b

1. 写出下列等差数列的通项：

   (a) 5，8，11，14，17，…；

   (b) $\frac{1}{2}$，0，$-\frac{1}{2}$，$-1$，$-\frac{3}{2}$，…。

2. 求下列数列的项数：

   (a) $6+3+0-3-\cdots-36$；

   (b) $-4-2\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+16$。

3. 求等差数列 42，40，38，… 的第 20 项。

4. 等差数列 1，3，5，7，… 的第几项是 81？

5. 一个等差数列的首项是 17，第 18 项是 0，写出这个数列的前 3 项。

6. 一个等差数列的第 8 项为 36，第 17 项为 63。求这个数列的首项和公差，并写出这个数列的前 4 项。

7. 求下列两数的等差中项：

   (a) 18 和 82；　　(b) $-9$ 和 17；

   (c) $a+8d$ 和 $a+12d$；　　(d) $a^2-b^2$ 和 $a^2+b^2$。

8. 在 22 和 58 之间插入；

   (a) 3 个等差中项；　　(b) 5 个等差中项。

9. 等差级数 $20+19\frac{1}{5}+18\frac{2}{5}+\cdots$ 的第几项是第一个负数项？

10. 三个数成等差数列，它们的和是 15，它们的平方和是 83，求这三个数。

11. 已知 $a$，$b$，$c$ 成等差数列，求证 $a^2(b+c)$，$b^2(c+a)$，$c^2(a+b)$ 也成等差数列。

12. 一个三角形的三边成等差数列，周长是 12 cm，面积等于 6 $cm^2$，求这三角形各边的长。这个三角形是什么三角形？

## ● 求和公式

把一个等差数列的前 $n$ 项相加，得

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

这样的一个式子叫做**等差级数**，也叫做**算术级数** (arithmetic progression 或 arithmetic series)。相加的和叫做这个等差级数的**和** (sum)，也就是这个等差数列前 $n$ 项的和。

设 $S_n$ 表示一个等差数列前 $n$ 项的和，则有

$$S_n = a + (a+d) + \cdots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \cdots + (a+d) + a$$

---

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \cdots + [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d]$$

共有 $n$ 项

$$2S_n = n[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

于是得到等差级数的求和公式：一个首项为 $a$，公差为 $d$，项数为 $n$ 的等差级数的和为

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

又因末项 $a_n$ 等于 $n+(n-1)d$，所以上面的求和公式也可写成

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

**例 13** 求从 1 到 100 所有 5 的倍数的和。

**解** 首项 $a = 5$，末项 $a_n = 100$，公差 $d = 5$。

代入通项公式，$100 = 5 + (n-1)5$

$$n = 20$$

于是 $S_{20}=\frac{n}{2}(a+a_n)$

$$=\frac{20}{2}(5+100)$$

$$=1050$$

即从 1 到 100 所有 5 的倍数的和为 1050。

**例 14** $-100$，$-96$，$-92$，… 是一个等差数列，问从第 1 项加到第几项的和才开始为正值？

**解** 在这个数列中，$a=-100$，$d=4$。

要使和为正值，应有 $S_n>0$

即 $\frac{n}{2}[-200+(n-1)4]>0$

$$n(2n-102)>0$$

因 $n>0$，故得 $2n-102>0$，即 $n>51$

满足上述条件的最小的 $n$ 为 52。

因此，从第 1 项加到第 52 项的和才开始为正值。

**例 15** 已知 $d=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{3}{2}$，$S_n=-\frac{15}{2}$，求 $a$ 及 $n$ 的值，并写出这个数列。

**解** ∵ $\begin{cases} a_n=a+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2} \\ S_n=\frac{n}{2}\left(a+\frac{3}{2}\right)=-\frac{15}{2} \end{cases}$

得 $\begin{cases} 2a+n=4 \\ (2a+3)n=-30 \end{cases}$

消去 $a$ 得 $(4-n+3)n=-30$

$$n^2-7n-30=0$$

$$(n-10)(n+3)=0$$

$n=10$ 或 $n=-3$（不适合）

∴ $a=-3$

因此这个数列是 $-3$，$-2\frac{1}{2}$，$-2$，$-1\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$。

**例 16** 如果在一等差级数中，$S_n = 2n^2 + 3n$，试求它的第 $n$ 项。

**解** $\because \quad S_n = 2n^2 + 3n$

$\therefore \quad S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1)$

因此 $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2n^2 + 3n) - (2n^2 - 4n + 2 + 3n - 3)$

$= 4n + 1$

**例 17** 首项为 13 之等差级数，其首 4 项之和与首 10 项之和相等。求 $n$ 使其首 $n$ 项之和为最大。

**解** 设公差为 $d$，

依题意 $$\frac{4}{2}[2(13) + (4-1)d] = \frac{10}{2}[2(13) + (10-1)d]$$

$$2(26 + 3d) = 5(26 + 9d)$$

$$39d = -78$$

$$d = -2$$

设 $S_n$ 为其首 $n$ 项的和，则 $$S_n = \frac{n}{2}[2(13) + (n-1)(-2)]$$

$$= 13n - n(n-1)$$

$$= -(n^2 - 14n + 49) + 49$$

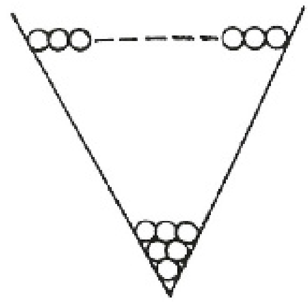
$$= 49 - (n-7)^2$$

由此可知，当 $n = 7$ 时，其和 $S_7 = 49$ 为最大。

## 习题 16c

1. 求等差级数 $-8-6-4-\cdots$ 前 9 项的和。
2. 求等差级数 $\frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{5}{4} + \cdots$ 前 12 项的和。
3. 求下列等差级数的和:
   (a) $7 + 11 + 15 + \cdots$ 至 10 项；
   (b) $(a-4b) + (2a-6b) + (3a-8b)\cdots$ 至 40 项；
   (c) $2\sqrt{3}$，$3\sqrt{3}$，$4\sqrt{3}$，$\cdots$，$50\sqrt{3}$；
   (d) $(e+f) + (e+3f) + (e+5f) + \cdots + (e+31f)$。

4. 一个等差数列的首项为 1，第 5 项为 9，求这个数列前 8 项的和。
5. 在 16 与 4 之间插入 5 个等差中项，求所有这 7 个数的和。
6. 求从 1 到 1000 的所有 4 的倍数的个数，并求它们的和。
7. 一个等差级数的第 4 项是 9，第 8 项是 $-7$，求它的前 10 项的和。
8. 一个等差级数的首项是 12，公差是 $-3$，各项的和是 12，求它的项数。
9. 如图所示，一个堆放铅笔的 V 形架的最下层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一枝，最上面一层放 50 支，问这个 V 形架上共放了多少支铅笔？



10. 一个等差级数的首项是 31，公差是 $-3\frac{1}{2}$，问自首项起至哪一项止，其总和方为负数？
11. 一个 A.P. 的第 8 项是 0，问自首项至哪一项止，其总和是 0？
12. 一个 A.P. 的第 5 项是 3，首 10 项的和是 $26\frac{1}{4}$，问哪一项是 0？
13. 在一个 A.P. 中，如果 $S_{10}=465$，且 $9S_3=4S_6$，试求 $S_5$ 及 $T_5$。
14. 如果一个 A.P. 的首项是 1，项数是奇数，且它的奇数项的和是 175，偶数项的和是 150，试求出这个数列。
15. 如果一个数列的第 $n$ 项是 $4n+2$，试求它的首 15 项的和。
16. 如果一个数列的第 $q$ 项是 $\frac{q}{a}+b$，试求它的首 $q$ 项的和。
17. 求 $18^2-17^2+16^2-15^2+14^2-13^2+\cdots+2^2-1^2$ 的和。
18. 一个等差级数的首项是 45，公差是 $-6$，$n$ 为其项数，问 $n$ 为何值时，其和为最大？
19. 设一个凸多边形诸内角的数值成一个等差数列，公差是 $6°$，最大角是 $135°$，问这个多边形有多少个边？
20. 设 $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \cdots 5^{2n}=(0.04)^{-28}$，求 $n$ 的值。
21. 设等差级数的首 $n$ 项的和是 $2n+3n^2$，试求其第 $r$ 项。
22. 一个级数的首 $n$ 项之和是 $S_n=[\frac{n}{2}(n+1)]^2$，试求此级数的第五项。

23. 试求由 1 至 2000 的所有不能被 5 整除的整数的和。

24. 若一个等差级数的第九项等于第五项的 2 倍，试求其首九项之和与首五项之和的比值。

## 16.3 等比数列

如果一个数列 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$，…的每一个项与它前一项的比等于一个常数，那么这个数列叫做**等比数列**（geometric sequence）。这个常数叫做**公比**(common ratio)，公比常用 $r$ 表示。

例如，3，6，12，24，…是一个等比数列，它的公比是 2。又如，5，$-\frac{5}{3}$，$\frac{5}{9}$，$-\frac{5}{27}$，…也是一个等比数列，它的公比是 $-\frac{1}{3}$。

### 通项公式

在一个等比数列中，如果首项为 $a$，公比为 $r$，那么这个数列的第 2 项为 $ar$，第 3 项为 $ar^2$，第 4 项为 $ar^3$，…，第 $n$ 项 $a_n$ 为 $ar^{n-1}$。

于是得到等比数列的通项公式：

$$a_n = ar^{n-1}$$

式中 $a$ 为等比数列的首项，$r$ 为公比，$n$ 为项数，$a_n$ 为第 $n$ 项。

**例 18** 求等比数列 18，12，8，… 的第 6 项。

**解** 这个数列的首项为 $a=18$，公比为 $r=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$，项数为 $n=6$。

代入通项公式，
$$\begin{aligned} a_6 &= 18\left(\frac{2}{3}\right)^{6-1} \\ &= \frac{64}{27} \end{aligned}$$

即第 6 项为 $\frac{64}{27}$。

**例 19** 等比数列 16，$-8$，4，… 的第几项是 $\frac{1}{4}$？

**解** $a=16$，$r=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{4}$。

代入通项公式，
$$\frac{1}{4}=16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\frac{1}{64}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{6}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$n-1=6$$
$$n=7$$

$\frac{1}{4}$ 是这个等比数列的第 7 项。

**例 20** 一个等比数列的第 5 项为 3，第 9 项为 $\frac{1}{27}$，求它的第 6 项。

**解** 设首项为 $a$，公比为 $r$。由通项公式得，
$$\begin{cases} ar^4=3 & \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ ar^8=\frac{1}{27} & \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

(2) ÷ (1)， $r^4=\frac{1}{81}$

∴ $r=\frac{1}{3}$ 或 $r=-\frac{1}{3}$

第 6 项为 $ar^5=(ar^4)\cdot r=3r$

由 $r=\frac{1}{3}$ 或 $r=-\frac{1}{3}$，

故得第 6 项为 1 或 $-1$。

## ● 等比中项

在 $a$ 和 $b$ 之间有一个数 G，使 $a$，G，$b$ 成等比数列，那么 G 叫做两个数 $a$ 和 $b$ 的**等比中项**（geometric mean）。

设 G 是 $a$ 和 $b$ 的等比中项，则 $a$，G，$b$ 成等比数列，于是 $\frac{G}{a}$ 与 $\frac{b}{G}$ 都等于公比而相等，即有

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$$

$$G^2=ab$$

$$G=\pm\sqrt{ab}$$

**例 21** 求 21 与 $\frac{7}{3}$ 的等比中项。

**解**

$$G=\pm\sqrt{21\times\frac{7}{3}}$$

$$=\pm 7$$

21 与 $\frac{7}{3}$ 的等比中项为 $\pm 7$。

在两数 $a$ 和 $b$ 之间插入几个数 $y_1$，$y_2$，…，$y_n$，使得

$$a,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ b$$

成等比数列，则中间各数 $y_1$，$y_2$，…，$y_n$ 也可以叫做这两数 $a$ 和 $b$ 的等比中项。

**例 22** 在 $\frac{1}{6}$ 与 216 之间插入 3 个等比中项。

**解** 插入后所成的等比数列的首项为 $\frac{1}{6}$，末项为 216，项数为 5。

代入通项公式，$216=\frac{1}{6}\cdot r^{5-1}$

得 $r^4=6^3\cdot 6$

即 $r^4=6^4$

∴ $r=\pm 6$

取 $r=6$，得插入的三个数为 1，6，36。

取 $r=-6$，得插入的三个数为 $-1$，6，$-36$。

## 习题 16d

1. 求下列数列的通项：

   (a) $3$，$-6$，$12$，$-24$，$\cdots$；

   (b) $20$，$-10$，$5$，$-2\frac{1}{2}$，$1\frac{1}{4}$，$\cdots$。

2. 求下列数列的项数：

   (a) $8+4+2+1+\cdots+\frac{1}{64}$；

   (b) $\frac{1}{64}-\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\cdots+256$。

3. 求等比数列 32，16，8，$\cdots$ 的第 9 项。
4. 求等比数列 36，$-24$，16，$\cdots$ 的第 10 项。
5. 一个等比数列的公比是 $-\frac{1}{2}$，第 5 项是 3，求它的首项。
6. 等比数列 24，36，54，$\cdots$ 的第几项是 $182\frac{1}{4}$？
7. 一个等比数列的首项是 18，第 4 项是 $-2\frac{1}{4}$，求它的公比。
8. 一个等比数列的第 3 项是 4，第 7 项是 64，求它的首项和公比，并求它的第 8 项。
9. 求 24 与 1.5 的等比中项。
10. 在 $-4$ 与 $\frac{1}{8}$ 之间插入 4 个等比中项。
11. 若三个数 3，$x$，4 成等比数列，求 $x$ 的值。
12. 如果 $1+\sqrt{5}$，$a+b\sqrt{5}$，$16+8\sqrt{5}$ 成等比数列，求 $a$ 和 $b$ 的值。
13. 如果一个等比数列的第三项是 $1\frac{1}{3}$，第八项是 $-10\frac{1}{8}$，求它的第五项。
14. 三个整数成等比数列，它们的和是 42，积是 512，求这三个数。
15. 如果 $a$，$b$，$c$ 成等比数列，证明 $a^n$，$b^n$，$c^n$ 也成等比数列。
16. 如果一个等比数列的第 $p$，$q$，$r$ 项分别是 $a$，$b$，$c$，求证 $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1$。

## ● 求和公式

把一个等比数列的前 $n$ 项相加，得

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

这样的一个式子叫做**等比级数**，也叫做**几何级数**（geometric progression 或 geometric series）。相加的和叫做这个等比级数的**和**，也就是这个等比数列前 $n$ 项的和。

设 $S_n$ 表示一个等比数列前 $n$ 项的和，

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(1)×$r$，得 $$rS_n=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)－(2)，得 $$S_n-rS_n=a-ar^n$$

由此得到 $r\neq 1$ 时， $$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

于是得到等比级数的求和公式：一个首项为 $a$，公比为 $r$，项数为 $n$ 的等比级数的和为

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (r\neq 1)$$

**【注】** 当 $r=1$ 时，$S_n=na$。

**例 23** 求等比级数 $8+12+18+\cdots$ 的第 6 项及前 6 项的和。

**解** $a=8$，$r=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$，$n=6$。

第 6 项为 $$\begin{aligned}a_6&=ar^{n-1}\\&=8\left(\frac{3}{2}\right)^5\\&=\frac{243}{4}\end{aligned}$$

前 6 项的和为 $$\begin{aligned}S_6&=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\\&=\frac{8\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]}{\left(1-\frac{3}{2}\right)}\\&=\frac{665}{4}\end{aligned}$$

**例 24** 一个等比级数的第 1 项为 4，公比为 $-2$，它的前几项的和为 44？写出这个等比级数。

**解** $a=4$，$r=-2$，$S_n=44$。

代入求和公式，$44=\dfrac{4[1-(-2)^n]}{1-(-2)}$

由此求得 $(-2)^n=-32$

即 $(-2)^n=(-2)^5$

$\therefore\quad n=5$

这个等比级数的前 5 项的和为 44，这个等比级数是

$4-8+16-32+64$。

**例 25** 某商品的销售量第 1 年为 27 万件，第 4 年为 64 万件。如果每年比上一年以相同的百分率上升，求这个百分率，并求第二年、第三年的销售量。

**解** 4 年的销售量成等比数列，设公比为 $r$，

则 $64=27r^{4-1}$

$r=\dfrac{4}{3}$

故第二年销售量为 $27\times\dfrac{4}{3}$ 万件，即 36 万件，

第三年销售量为 $36\times\dfrac{4}{3}$ 万件，即 48 万件。

每年比上一年上升的百分率为 $\dfrac{4}{3}\times100\%-100\%$，

$=33.33\%$。

## 习题 16e

1. 求下列等比级数的和：

 (a) $1+2+4+\cdots$ 前 8 项；　(b) $1-2+4-\cdots$ 前 8 项；

 (c) $\dfrac{5}{48}$，$\dfrac{5}{24}$，$\dfrac{5}{12}$，$\cdots$，$26\dfrac{2}{3}$；(d) 3，$-4$，$\dfrac{16}{3}$，$\cdots$ 至 $2n$ 项。

2. 一个等比级数的首项 16，末项为 $\dfrac{1}{2}$，和为 $31\dfrac{1}{2}$。求它的公比及项数。

3. 一个等比级数的首项为 128，公比为 $-\frac{1}{2}$，若干项的和为 85，求项数及末项。
4. 一个等比级数的首项为 5，第 6 项为 160，求其公比及 $\sum_{n=1}^{6} a_n$。
5. 一个等比级数的首项为 5，末项为 160，公比为 2，求项数 $n$ 及 $\sum_{k=1}^{n} a_k$。
6. 在一个等比数列中，第 3 项比第 2 项少 6，第 2 项比第 1 项少 9，求其第 4 项及前 4 项的和。
7. 一个等比级数的首六项的和是首三项的和的 9 倍，求它的公比。
8. 某厂今年生产拖拉机 1080 台，计划到后年产量提高到每年生产 1920 台，如果每一年比上一年提高的百分率相同，求这个百分率，并求明年的计划产量。
9. 某制糖厂今年制糖 5 万吨，如果平均每年产量比上一年增加 10%，求第 5 年的产量及这 5 年中的总产量。

## ● 杂例

**例 26** 三正数成等差数列，其和为 36。若各项依次加上 1，4，43 后，则成等比数列，求此三数。

**解** 设此三数为 $x-y$，$x$，$x+y$

则 $(x-y)+x+(x+y)=36$ .......... (1)

$(x+4)^2=(x-y+1)(x+y+43)$ .......... (2)

由 (1) 得 $x=12$

代入 (2)，$(13-y)(55+y)=256$

$y^2+42y-459=0$

$(y-9)(y+51)=0$

$\therefore$ $y=9$ 或 $-51$（不合）

当 $y=9$ 时，此三数为 3，12，21。

**例 27** 一等差数列的第 4 项，第 8 项及第 16 项成等比数列，求证此等差数列的第 3 项，第 6 项及第 12 项也成等比数列。

**解** 根据题意，得知 $a+3d$，$a+7d$，$a+15d$ 成等比数列，

即 $a+7d$ 为等比中项，

$$\therefore \quad (a+7d)^2=(a+3d)(a+15d)$$

$$a^2+14ad+49d^2=a^2+18ad+45d^2$$

$$4d^2=4ad$$

$$\therefore \quad d(d-a)=0$$

$$d\neq 0,\ \therefore \quad d=a$$

等差数列的第 3 项，第 6 项，第 12 项分别为 $a+2d$，$a+5d$，$a+11d$

即 $3a$，$6a$，$12a$

由于 $\sqrt{3a\cdot 12a}=\sqrt{36a^2}$

$=6a$

$\therefore$ $6a$ 为 $3a$，$12a$ 的等比中项

$\therefore$ $3a$，$6a$，$12a$ 成等比数列

即 等差数列的第 3 项，第 6 项，第 12 项成等比数列。

## 习题 16f

1. 已知成等差数列的三个正数的和等于 15，并且这三个数分别加上 1，3，9 就成等比数列，求这三个数。
2. 组成等差数列的三个数的和是 30，如果从第一个数里减去 5，从第二个数里减去 4，第三个数不变，那末所得到的数组成等比数列，求这些数。
3. 成等比数列的三个数的和等于 65，如果第一个数减去 1，第三个数减去 19，那末就成等差数列，求这三个数。
4. 有四个整数，前三个数组成等差数列，后三个数组成等比数列，已知首末两个数的和是 37，中间两个数的和是 36，求这四个数。
5. 四个数组成等差数列。如果从这四个数里相应地减去 2，6，7，2，那末所得到的数又组成等比数列，求这些数。
6. 一等差数列的第 2 项，第 6 项，第 8 项成等比数列，求此等比数列的公比及通项公式。

7. 三个不同的正数 2，$x$，$y$ 成等比数列，此三数同时是一个等差数列的第 1 项，第 2 项及第 12 项，求 $x$ 及 $y$ 的值。
8. 如果 $9x$，$y$，$3x$ 成等差数列，求证 $9x$，$y$，$4x$ 成等比数列。
9. 如果一个等比数列的第 $p$，$q$，$r$ 项也成等比数列，（$a \neq 0$，$r \neq 0$，$r \neq 1$），求证 $p$，$q$，$r$ 成等差数列。
10. 一等差数列的第 1 项，第 8 项及第 22 项成等比数列，求证此等差数列的第 2 项，第 10 项，第 26 项也成等比数列。

## 16.4 无穷级数

如果 $\{a_n\}$ 是一个无穷多项的数列，那么

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

这样的式子叫做无穷级数（infinite series）。一个无穷级数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 常用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 表示，这里“$\infty$”读作无限大。

例如，无穷级数 $1+1+1+\cdots+1+\cdots$ 可以表示为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$。

又如，无穷级数 $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \cdots + \dfrac{1}{10^n} + \cdots$ 可以表示为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{10^n}$。

**例 28** 写出下列级数：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　　　(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3n$

**解**　(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \cdots$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3n = 3 + 6 + 9 + \cdots + 3n + \cdots$

**例 29** 用 Σ 符号表示下列级数:

(a) $3+5+7+\cdots$

(b) $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$

**解** (a) $3+5+7+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$

(b) $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$

## ● 无穷等比级数的和

一个级数如果是无穷等比级数，例如 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$，那么它有没有和呢?

我们看图 16.1

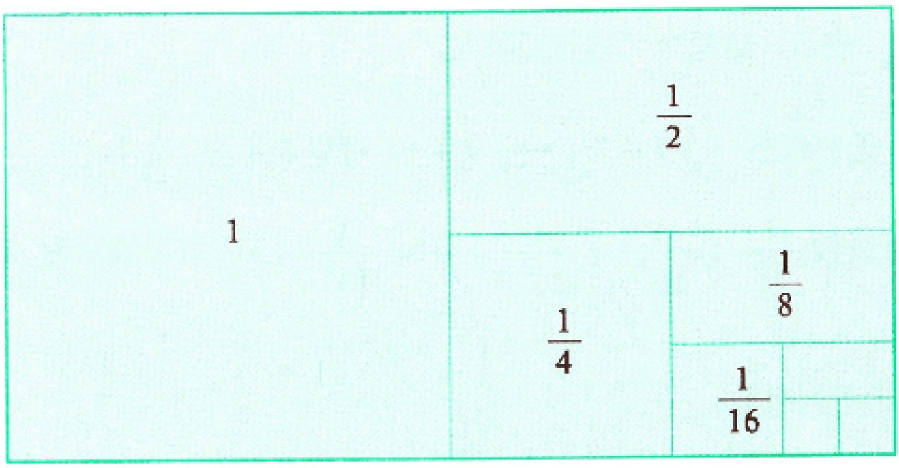



**图 16.1**

在这个图中，左边的正方形的面积是 1，右边的矩形和正方形的面积依次是 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…。

这些正方形和矩形的面积就可以表示级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 的各项。

当项数越来越多时，我们看到，这些正方形和矩形的面积的总和越来越接近于 2，项数充分多时，面积的总和与 2 的相差数的绝对值可以小于任何预先指定的正数。

在这种情况下，我们就说这个无穷等比级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 的和是 2。

一般地，设有一个无穷等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ 如果存在一个数 S，使前 $n$ 项组成的有限级数的和越来越接近于 S，项数充分大时，有限级数的和与 S 的相差数的绝对值可以小于任何预先指定的正数，那么我们就把这样的 S 叫做这个**无穷等比级数的和**（这与有限级数的和在意义上是不同的）。

例如，我们把 2 叫做无穷等比级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 的和。

当无穷等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ 的公比 $r$ 的绝对值小于 1 时，这样的 S 是存在的。

这是因为，前 $n$ 项的和是 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，而当 $|r|<1$，$n$ 越来越大时，$r^n$ 越来越接近于 0（例如 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 越来越接近于 0），因此 $S_n$ 越来越接近于 $\dfrac{a}{1-r}$。这里的 $\dfrac{a}{1-r}$ 就是这样的 S。

但要注意，当公比 $r$ 的绝对值等于 1 或大于 1 时，这样的 S 是不存在的。例如，无穷等比级数

$$1+1+1+\cdots,$$
$$1+2+4+\cdots,$$
$$1-2+4-8+\cdots,$$

当 $n$ 越来越大时，前 $n$ 项的和并不越来越接近任何有限的数，这样的无穷级数的和就没有意义。

根据上面的讨论，我们有下面的无穷等比级数求和公式：当 $|r|<1$ 时，无穷等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots$ 的和为

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}\qquad(|r|<1)$$

**例 30** 在一个无穷等比级数中，$a=27$，$r=\frac{1}{3}$，写出这个级数并求它的和。

**解** 这个级数是 $27+9+3+1+\cdots$。

$$S_\infty=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=40.5$$

**例 31** 用分数表示无穷循环小数 $0.\dot{2}$。

**解** $0.\dot{2} = 0.2222\cdots$

$= 0.2 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \cdots$

这是一个无穷等比级数，它的首项 $a = 0.2$，公比 $= \frac{1}{10}$。

$$\therefore\ S_{\infty} = \frac{0.2}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{2}{9}$$

即 $0.\dot{2} = \frac{2}{9}$。

【注】如果用除法进行 $2 \div 9$，可以看到商为无穷循环小数 $0.2222\cdots$。

## 习题 16g

1. 求下列无穷等比级数的和:

   (a) $27 - 9 + 3 - 1 + \cdots$;　　(b) $2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \cdots$。

2. 在一个无穷等比级数中，$a = 64$，$r = \frac{1}{2}$。求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。

3. 一个无穷等比级数的首项为 36，公比为 $-\frac{1}{3}$，求它的和。

4. 一个无穷等比级数的首项为 12，公比为 $\frac{4}{3}$。这个无比等比级数有没有和？如果有，求它的和。

5. 用分数表示下列无穷循环小数:

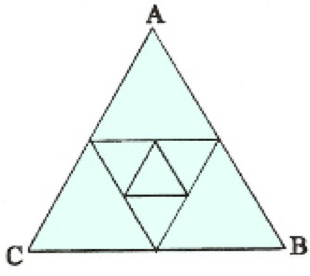
   (a) $0.333\cdots$;　　(b) $0.010101\cdots$;

   (c) $0.454545\cdots$;　　(d) $0.037037037\cdots$。

6. 有限小数 0.5555 与无穷循环小数 $0.555\cdots$ 相差多少？

7. 求 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\text{至无穷}}}}$ 的值。

8. 等边三角形 ABC 面积为 S。连结它各边中点得一小三角形，再连结小三角形各边中点得更小的三角形，像这样无限继续下去，求所有的这些三角形的面积的和。



## 16.5 简易特殊数列的和

### ● 自然数的正整数次幂的和

本节我们将探讨三个简易特殊数列 $\sum\limits_{k=1}^{n} k$，$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$，$\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ 的求和问题。

$\sum\limits_{k=1}^{n} k$ 就是 $1+2+3+\cdots+n$，这是一个等差级数，

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[2(1)+(n-1)(1)] = \frac{n(n+1)}{2}$$

即自然数求和公式为:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

求 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$，即求 $1^2+2^2+3^2+\cdots n^2$。

因
$$\begin{aligned}
(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1\\
n^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\\
(n-1)^3 &= (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1\\
&\vdots\\
3^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1\\
2^3 &= 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1
\end{aligned}$$

各式两边相加，并消去两边都有的各项，得

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n\times 1$$

即自然数平方求和公式为:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

求 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$，即求 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$，

同样，由

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,\\
n^4 &= (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,\\
(n-1)^4 &= (n-2)^4 + 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1,\\
&\vdots\\
3^4 &= 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1,\\
2^4 &= 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1,
\end{aligned}$$

将各式两边相加，并消去两边都有的各项，可得

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

即

$$\begin{aligned}
4\sum_{k=1}^{n} k^3 &= (n+1)^4 - 1 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - n\\
&= (n+1)^4 - 1 - 6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n\\
&= n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

∴

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

即自然数立方求和公式为:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

利用上述三个公式，除了可以直接求得自然数的和、自然数平方的和、自然数立方的和以外，还可以求得其他某些级数的和。

**例 32** 求 $\sum\limits_{k=10}^{20} k^2 = 10^2 + 11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2$。

**解**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=10}^{20} k^2 &= \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2\\
&= \frac{1}{6}\times 20\times 21\times 41 - \frac{1}{6}\times 10\times 11\times 21\\
&= 2485
\end{aligned}$$

**例 33** 试求 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$ 的和。

**解**
$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 2k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + \frac{3}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{2}{2} n(n+1) \\
&= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

**例 34** 求级数 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots$ 至 $n$ 项的和。

**解**
$$a_n = n(n+1)$$
$$\begin{aligned}
\therefore S_n &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

## 习题 16h

1. 求下列的值:

(a) $\sum_{k=1}^{8} k^2$　　(b) $\sum_{k=5}^{15} k^2$

(c) $\sum_{k=1}^{10} k^3$　　(d) $\sum_{k=4}^{12} k^3$

2. 求下列数列首 $n$ 项的和，已知它的第 $n$ 项是：

(a) $3n^2 - n$　　(b) $n^2(2n-5)$

(c) $4n(n^2+1)-(6n^2+1)$　　(d) $(n+3)^3$

3. 求级数 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + n(n+1)$ 的和。

4. 求级数 $1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots$ 前 $n$ 项的和。

5. 求下列级数的和：

(a) $1 \times 4 \times 7 + 2 \times 5 \times 8 + 3 \times 6 \times 9 + \cdots$ 至 $n$ 项；

(b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots$ 至 $n$ 项。

6. 计算：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{10} n(n^2+2)$　　(b) $\sum\limits_{n=6}^{12} n(n+1)(n+3)$

## ● 等差等比混合的数列的和

这里再考虑一种特殊的数列——等差等比混合的数列的求和问题。

**例 35** 求级数 $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + \cdots$ 前 $n$ 项的和。

**解** 这个级数的各项是带分数，整数部分成等差级数，分数部分成等比级数。因此所求的和可以成为一个等差级数与一个等比级数的和。

$$1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + \cdots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= (1+2+3+\cdots+n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 - \frac{1}{2^n}$$

**例 36** 求级数 $3x+5x^2+7x^3+\cdots$ 前 $n$ 项的和。

**解** 这个级数是由等差数列 3，5，7，…与等比数列 $x$，$x^2$，$x^3$，…的对应项乘积构成。

像这样的级数通常可以用相减法求和。

设 $$S=3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n+1)x^n$$

则 $$xS=\quad 3x^2+5x^3+\cdots+(2n-1)x^n+(2n+1)x^{n+1}$$

相减得 $$(1-x)S=3x+2x^2+2x^3+\cdots+\quad 2x^n\quad -(2n+1)x^{n+1}$$

中间部分 $2x^2+2x^3+\cdots 2x^n$ 是一个等比级数，可以求得它的和为

$$\frac{2x^2(1-x^{n-1})}{1-x}。$$

因此可得 $$(1-x)S=3x+\frac{2x^2(1-x^{n-1})}{1-x}-(2n+1)x^{n+1}$$

$$\therefore \quad S=\frac{3x-(2n+1)x^{n+1}}{1-x}+\frac{2x^2(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}$$

**例 37** 求 $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots$ 的和。

**解** 此级数是由等差数列 1，2，3，…与等比数列 1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3^2}$，$\frac{1}{3^3}$…的对应项乘积构成。

设 $$S_\infty=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots$$

则 $$\frac{1}{3}S_\infty=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots$$

相减得 $$(1-\frac{1}{3})S_\infty=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

$$\frac{2}{3}S_\infty=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{2}{3}S_\infty=\frac{3}{2}$$

$$S_\infty=\frac{9}{4}$$

## 拆项法

有些级数可以利用拆项法来求和，即把一项拆成两项或几项，而使前后的项可以相消。这里举两个例子。

**例 38** 求 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ 的和。

**解** 这里的通项是 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，应用部分分式拆成两项的差:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

于是
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

**例 39** 求 $\frac{1}{1\times 3\times 5}+\frac{1}{3\times 5\times 7}+\frac{1}{5\times 7\times 9}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ 的和。

**解**
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\Sigma\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\\&=\Sigma\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}\right)+\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}\right)+\left(\frac{1}{5\times7}-\frac{1}{7\times9}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)$$

$$=\frac{n^2+2n}{3(2n+1)(2n+3)}$$

## 习题 16i

求下列级数的和：

1. $2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+\cdots$ 至 20 项。
2. $1\frac{1}{3}+4\frac{1}{9}+7\frac{1}{27}+\cdots$ 至 $n$ 项。
3. $(x+a)+(x^2+2a)+(x^3+3a)+\cdots$ 至 $n$ 项。
4. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{7}{27}+\frac{10}{81}+\cdots$ 无穷。
5. $x+5x^2+9x^3+\cdots$ 至 $n$ 项。
6. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots$ 至 $n$ 项。
7. $\frac{1}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1}{4\cdot7\cdot10}+\frac{1}{7\cdot10\cdot13}+\cdots$ 至 $n$ 项。
8. $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\cdots$ 至 $n$ 项。
9. 已知一数列的通项 $a_n=\frac{1}{4n^2-1}$，求此数列 $n$ 项的和。
10. 求 $2-2\cdot3+2\cdot3^2-2\cdot3^3+\cdots+2\cdot3^{10}$。

## 总复习题 16

1. 用 $\Sigma$ 符号表示下列级数：

   (a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{99}{100}$

   (b) $6-7+8-9+\cdots$

2. 在一个等差级数中，

   (a) 已知首项 $a$，末项 $a_n$，项数 $n$，求公差 $d$；

   (b) 已知首项 $a$，末项 $a_n$，总和 $S_n$，求项数 $n$；

   (c) $S_4=28$，$S_8=48$，求 $S_{12}$。

3. 在一个等比级数中，

   (a) 已知首项 $a$，末项 $a_n$，项数 $n$，求公比 $r$；

   (b) 已知首项 $a$，公比 $r$，总和 $S_n$，求末项 $a_n$；

4. 梯子的最高一级宽 33 cm，最低一级宽 110 cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列。求中间各级的宽。

5. 某地大豆产量第 1 年为 100 000 公斤，每年比上一年增产 10%，到哪一年产量累积可以达到 464 100 公斤？

6. 一个等差级数的首项是 $-5$，第十项是 $\frac{17}{2}$，问自首项起至哪一项止，其总和方为正数？

7. 有一等差数列，第 10 项是 23，第 25 项是 $-22$，问

   (a) 从第几项起，开始为负？

   (b) 自首项起至哪一项止，其总和开始为负？

8. 有一等比级数，首 $n$ 项之和为 5，首 $2n$ 项之和为 650，求首 $3n$ 项之和。

9. 求在 1 到 1 000 中不能被 5 整除的所有整数的和。

10. 求由 100 至 1 000，能被 2 或 3 所整除的数的总和。

11. 设三数 $a$，$b$，$c$ 成等比数列，且 $b+5$ 为 $a+1$ 及 $c+25$ 的等比中项，求 $a:b:c$。

12. 已知 $a$，$b$，$c$ 成等差数列，$a$，$b$，$c+8$ 成等比数列。如果 $a+b+c=18$，求 $a$，$b$，$c$。

13. 三整数 $x-3$，$x+1$，$4x-2$ 成等比数列，若公比为 $r$，三数和为 S，求 $r+S$ 的值。

14. 有一凸多边形，内角度量成等差，公差 5°，最小角为 120°，则此多边形共有几边？

15. 於 10 与 $m$ 之间，插入 10 个数，使这 12 个数成等差数列，且第 6 项为 $-5$，求 $m$。

16. 若一等差数列的第 2 项是 10，且前 3 项之和与前 10 项之和相等，则此数列从第几项开始为负数？

17. 四正数 $a$，$b$，$c$，$d$ 成等比数列，若 $a+d=9$，$b+c=6$，求其公比。

18. 在 4 与 64 之间插入三正数 $a$，$b$，$c$ 使 4，$a$，$b$ 成等比，$b$，$c$，64 成等比，$a$，$b$，$c$ 成等差，求 $a$，$b$，$c$。

19. 一等差数列 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$ 之前 n 项的和为 $S_n=n^2+n$，求其

(a) 第 $n$ 项 $a_n$　　(b) 公差　　(c) $a_{12}$

20. 设一数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2(n+1)$，求 $a_n$ 及 $a_{200}$。

21. 求小於 300 的自然数中能被 6 整除，但不能被 8 整除的一切自然数之和。

22. 有限小数 0.111…1 (20 位小数) 与无穷循环小数 0.111… 相差多少？

23. 把下列无穷循环小数化为分数：

(a) 0.6 363…　　(b) 1.4 545…

(c) 0.8 037 037 037…　　(d) 2.9 181 818…

24. 已知无穷等比级数的和为 $\frac{9}{2}$，其第二项为 $-2$，求其首项及公比。

25. 求 $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\text{无穷}}}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\cdots\text{无穷}}}}}$ 的值。

26. 求下列级数前 $n$ 项的和：

(a) $2\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+\cdots$

(b) $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+7\frac{1}{16}+\cdots$

(c) $x+4x^2+7x^3+\cdots$

(d) $2\cdot5+3\cdot7+4\cdot9+5\cdot11+\cdots$

(e) $\dfrac{1}{1\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot16}+\cdots$

(f) $\dfrac{1}{1\cdot6\cdot11}+\dfrac{1}{6\cdot11\cdot16}+\dfrac{1}{11\cdot16\cdot21}+\cdots$

(g) $5+55+555+5555+\cdots$

(h) $0.1+0.11+0.111+0.1111+\cdots$

27. 有两等差数列，其首 $n$ 项和之比为 $7n+2∶n+3$，求其第五项之比。

28. 求 $\left[\left(1\frac{1}{2}\right)^2-1^2\right]+\left[\left(2\frac{1}{2}\right)^2-2^2\right]+\left[\left(3\frac{1}{2}\right)^2-3^2\right]+\cdots$

$+\left[\left(24\frac{1}{2}\right)^2-24^2\right]$ 的和。

29. 如果一个数列的第 $p$ 项是 $\frac{p}{6}+3$，求它的首 30 项的和。

30. 若 $\log a$，$\log b$，$\log c$ 成等差数列，求证 $a$，$b$，$c$ 成等比数列。

## 附录　调和数列

常见的数列，除了等差数列、等比数列之外，还有一类调和数列。

一个数列，它的各项的倒数成等差数列，这个数列叫做**调和数列**（harmonic sequence）。

例如，$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\cdots$ 是一个调和数列；$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{8}$，$\cdots$ 也是一个调和数列。

因此，调和数列可以写成如下的形式：

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+d},\ \frac{1}{a+2d},\ \cdots,\ \frac{1}{a+(n-1)d}.$$

我们不必要建立调和数列的通项公式，如果要求某调和数列的第 $n$ 项，只要取各项的倒数得到一个等差数列，求出这个等差数列的第 $n$ 项，取其倒数，即为所求的调和数列的第 $n$ 项。

**例 1**　求调和数列 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{2}$，$-1$，$\cdots$ 的第 10 项。

**解**　取倒数，5，2，$-1$，$\cdots$ 成等差数列，

它的第 10 项是 $5+(10-1)(-3)=-22$

所以所求调和数列的第 10 项为 $-\frac{1}{22}$。

设 $a$，H，$b$ 成调和数列，那么 H 叫做 $a$、$b$ 的调和中项。

因 $a$、H、$b$ 成调和数列，则 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{\mathrm{H}}$，$\frac{1}{b}$ 成等差数列，

于是 $$\frac{1}{\mathrm{H}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

由此可得 $$\mathrm{H}=\frac{2ab}{a+b}$$

就是说，两数 $a$、$b$ 的调和中项是 $\frac{2ab}{a+b}$。

**例 2** 已知 $\frac{1}{a^2}$，$\frac{1}{b^2}$，$\frac{1}{c^2}$ 成调和数列，求证 $b+c$，$c+a$，$a+b$ 也成调和数列。

**证明** $\frac{1}{a^2}$，$\frac{1}{b^2}$，$\frac{1}{c^2}$ 成调和数列， $\therefore$ $a^2$，$b^2$，$c^2$ 成等差数列，

求证 $b+c$，$c+a$，$a+b$ 成调和数列，

即求证 $\frac{1}{b+c}$，$\frac{1}{c+a}$，$\frac{1}{a+b}$ 成等差数列。

因 $$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{a+c+2b}{(b+c)(a+b)}$$
$$=\frac{(a+c+2b)(c+a)}{(b+c)(a+b)(c+a)}$$
$$=\frac{2ac+2ab+2b^2+2bc}{(b+c)(a+b)(c+a)}$$
$$=\frac{2(a+b)(b+c)}{(b+c)(a+b)(c+a)}$$
$$=\frac{2}{(c+a)}$$

$\therefore$ $\frac{1}{b+c}$，$\frac{1}{c+a}$，$\frac{1}{a+b}$ 成等差数列，

即 $b+c$，$c+a$，$a+b$ 成调和数列。

**例 3** 已知 $a$，$b$，$c$ 成等差数列，$b$，$c$，$d$ 成等比数列，$c$，$d$，$e$ 成调和数列，求证 $a$，$c$，$e$ 成等比数列。

**证明** ∵ $a$，$b$，$c$ 成等差数列，∴ $b=\frac{1}{2}(a+c)$ .......... (1)

∵ $b$，$c$，$d$ 成等比数列，∴ $c^2=bd$ .......... (2)

∵ $c$，$d$，$e$ 成调和数列，

∴ $\frac{1}{c}$，$\frac{1}{d}$，$\frac{1}{e}$ 成等差数列，∴ $\frac{1}{d}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{e}\right)$

即 $d=\frac{2ce}{c+e}$ .......... (3)

把 (1)，(3) 代入 (2)，得 $c^2=\frac{1}{2}(a+c)\frac{2ce}{c+e}$

约简，可得 $c^2=ae$

∴ $a$，$c$，$e$ 成等比数列。

我们看两个正数 2 和 18，它们的等差中项是 10，等比中项是 6（取正数），调和中项是 $\frac{18}{5}$，可见等差中项最大，等比中项居中，调和中项最小。对于任意两个不相等的正数 $a$ 和 $b$，都有这样的性质，你能加以证明吗？

## 习题

1. 求调和数列 $1\frac{1}{3}$，$1\frac{11}{17}$，$2\frac{2}{13}$，⋯ 的第 10 项。
2. 求下列数列的第四项：

   (a) 2，$2\frac{1}{2}$，$3\frac{1}{3}$，____；　　(b) $\frac{1}{3}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{3}{5}$，____。
3. 试写出下列两数之间的调和中项：

   (a) 3 与 5；　　(b) $-4$ 与 $-7$；　　(c) $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{y}$。
4. 在 1 和 6 两个数中插入 4 个调和中项。
5. 两个数的等比中项是 4，调和中项是 $\frac{16}{5}$，求这两个数。
6. 如果 $a$，$b$，$c$ 三数成等差数列，$b$，$c$，$d$ 三数成调和数列，求证 $ad=bc$。

# 17 指数函数与对数函数

## 17.1 指数

### ● 定义

在初中，我们学过了：

(1) 正整数指数 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots\cdots a}_{n\text{项}}$ ($n$ 是正整数)

(2) 零指数 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

(3) 负整数指数 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$，$n$ 是正整数)

(4) 分数指数 $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

其中，$a > 0, m, n$ 是正整数，$n > 1$。

### ● 运算法则

我们知道，有理数指数幂的运算法则如下：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

**例 1** 计算:

(a) $125^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+343^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

(b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+(-5.6)^{0}-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.125^{-\frac{1}{3}}$

(c) $\frac{(a^{-2}b^{-3})(-4a^{-1}b)}{12a^{-4}b^{-2}c}$

(d) $(a^{2}b)^{\frac{1}{2}}\times(ab^{2})^{-2}\div\left(\frac{b}{a^{2}}\right)^{-3}$

**解** (a) $125^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+343^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$=(5^{3})^{\frac{2}{3}}+(2)^{2}+(7^{3})^{\frac{1}{3}}-(27)^{\frac{1}{3}}$

$=5^{2}+4+7-(3^{3})^{\frac{1}{3}}$

$=25+4+7-3$

$=33$

(b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+(-5.6)^{0}-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.125^{-\frac{1}{3}}$

$=\left(\frac{2^{2}}{3^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+1-\frac{1}{\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{(0.5^{3})^{\frac{1}{3}}}$

$=\frac{2}{3}+1-\frac{9}{16}+2$

$=3\frac{5}{48}$

(c) $\frac{(a^{-2}b^{-3})(-4a^{-1}b)}{12a^{-4}b^{-2}c}$

$=-\frac{1}{3}a^{-2-1-(-4)}b^{-3+1-(-2)}c^{-1}$

$=-\frac{1}{3}a^{1}b^{0}c^{-1}$

$=-\frac{a}{3c}$

(d) $(a^2b)^{\frac{1}{2}} \times (ab^2)^{-2} \div \left(\frac{b}{a^2}\right)^{-3}$

$= ab^{\frac{1}{2}} \times a^{-2}b^{-4} \div \frac{b^{-3}}{a^{-6}}$

$= ab^{\frac{1}{2}} \times a^{-2}b^{-4} \times \frac{a^{-6}}{b^{-3}}$

$= a^{1-2-6}b^{\frac{1}{2}-4-(-3)}$

$= a^{-7}b^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{\sqrt{b}}{a^7 b}$

**例 2** 化简:

(a) $\frac{2 \cdot 3^{2n+1} + 3^{2n}}{9^n}$　　　(b) $\sqrt[3]{\frac{ab^{-1}}{a^{-\frac{1}{2}}b^5}}$

**解** (a) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 3^{2n} + 3^{2n}}{3^{2n}} = \frac{3^{2n}(6+1)}{3^{2n}}$

$= 7$

(b) $\sqrt[3]{\frac{ab^{-1}}{a^{-\frac{1}{2}}b^5}} = [a^{1-(-\frac{1}{2})}b^{-1-5}]^{\frac{1}{3}}$

$= [a^{\frac{3}{2}}b^{-6}]^{\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{1}{2}}b^{-2}$

$= \frac{\sqrt{a}}{b^2}$

## 习题 17a

计算（第 1～40 题）:

1. $(-2)^3 - (-1)^0$
2. $2^{-2} + (-2)^{-5}$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \div \left(\frac{1}{2}\right)^0$
4. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 2^{-1}$

5. $3^{-5} \cdot 3^{6}$ 6. $7^{-9} \div 7^{-10}$ 7. $a^{-3} \cdot a^{2}$

8. $b^{-4} \div b^{-2}$ 9. $(a^{-3})^{-2}$ 10. $(x^{-3})^{0}$

11. $(xy)^{-2}$ 12. $\left(\frac{p}{q}\right)^{-2}$ 13. $(x^{4}y^{-3})(x^{-2}y^{2})$

14. $3a^{-2}b^{-3} \div 3^{-1}a^{2}b^{-3}$ 15. $\left(\frac{3^{-5} \cdot 3^{2}}{3^{-3}}\right)^{-2}$

16. $(9a^{2}b^{-2}c^{-4})^{-1}$ 17. $5a^{-2}b^{-3} \div 5^{-1}a^{2}b^{-3} \times 5^{-2}ab^{4}c$

18. $\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-2} + b^{-2}}$ 19. $(a^{-1} + b^{-1})(a + b)^{-1}$

20. $(x + x^{-1})(x - x^{-1})$ 21. $\frac{(x^{-1} + y^{-1})(x^{-1} - y^{-1})}{x^{-2}y^{-2}}$

22. $\left(\frac{81}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 23. $27^{\frac{2}{3}}$

24. $4^{-\frac{1}{2}}$ 25. $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

26. $(0.2)^{-2} \times (0.064)^{\frac{1}{3}}$ 27. $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} \cdot a^{\frac{5}{8}}$

28. $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} \div a^{-\frac{1}{2}}$ 29. $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^{6}$

30. $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}} \div \left(-\frac{2}{3}\,a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$ 31. $\left(\frac{8a^{-3}}{27b^{6}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

32. $(-2x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})(3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}})(-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{3}})$

33. $4x^{\frac{1}{4}}(-3x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}}) \div (-6x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}})$

34. $\frac{-15a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{3}{4}}}{25a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{4}}}$ 35. $2x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right)$

36. $(2x^{\frac{1}{2}} + 3y^{-\frac{1}{4}})(2x^{\frac{1}{2}} - 3y^{-\frac{1}{4}})$

37. $\left(\frac{81}{16}\right)^{-0.25} \times \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \times (0.25)^{-2.5}$

38. $\frac{3 \cdot 2^{n} - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^{n} - 2^{n-1}}$ 39. $\frac{3^{n+6} - 6 \cdot 3^{n+1}}{7 \cdot 3^{n+2}}$

40. $(a^{\frac{1}{2}}+1+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-1-a^{-\frac{1}{2}})$

41. 若 $a^{2x}=\sqrt{2}+1$，求 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$ 的值。

42. 化简：

(a) $\sqrt[12]{x^4}$

(b) $\sqrt[3]{(a+b)^5}\cdot(a+b)^{-\frac{2}{3}}$

(c) $(\sqrt[3]{x^5})^{\frac{1}{2}}\times\sqrt[6]{x^{-5}}$

(d) $(\sqrt[3]{x^3}\sqrt{y})^2\cdot(\sqrt{y}\sqrt{x^3})^3$

(e) $\dfrac{\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt{8}\,(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$

## 17.2 对数

### ● 定义

在初中，我们学过，对数的定义如下：

若 $a^n=x\,(a>0,a\neq1)$，则 $\log_a x=n$，读作以 $a$ 为底，$x$ 的对数为 $n$。$a$ 叫做底数，$x$ 叫做真数。

反之，若 $\log_a x=n$，则 $a^n=x$。

即

$$a^n=x\Leftrightarrow\log_a x=n\,(a>0,a\neq1,x>0)$$

在实数范围内，正数的任何次幂都是正数。在 $a^n=x$ 中，因为 $a$ 是不等于 1 的正数，所以对于任何实数 $n$，$x$ 总是正数，这就是说，零与负数的对数是没有意义的。

本章对数式 $\log_a x$ 中，底数 $a$ 都是不等于 1 的正数，真数 $x$ 都是正数。

### ● 性质

对数有下列基本性质：

(1) $\log_a a=1$

(2) $\log_a 1=0$

## 运算法则

我们知道，对数有以下的运算法则：

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (x > 0, y > 0)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (x > 0, y > 0)$$

$$\log_a x^m = m \log_a x \quad (x > 0)$$

**例 3** 求下列各式的值：

(a) $\log_4 64$ (b) $\log_{\frac{1}{5}} 25$

(c) $\log_{15} 15$ (d) $\log_{0.4} 1$

**解** (a) $\log_4 64 = \log_4 4^3$
$= 3$

(b) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = \log_{\frac{1}{5}} 5^2$
$= \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$
$= -2$

(c) $\log_{15} 15 = 1$ (d) $\log_{0.4} 1 = 0$

**例 4** 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

(a) $\log_a \dfrac{xy}{a^2}$ (b) $\log_a x\sqrt[4]{\dfrac{z^3}{y^2}}$

**解** (a) $\log_a \dfrac{xy}{a^2} = \log_a xy - \log_a a^2$
$= \log_a x + \log_a y - 2$

(b) $\log_a x\sqrt[4]{\dfrac{z^3}{y^2}} = \log_a x + \log_a z^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{1}{2}}$
$= \log_a x + \log_a z^{\frac{3}{4}} + \log_a y^{-\frac{1}{2}}$
$= \log_a x + \dfrac{3}{4} \log_a z - \dfrac{1}{2} \log_a y$

**例 5** 化简:

(a) $\dfrac{\log\sqrt{3}}{\log\dfrac{1}{9}}$ (b) $2\log^2 5+\log 4\log 50$

**解** (a) $$\frac{\log\sqrt{3}}{\log\frac{1}{9}}=\frac{\log 3^{\frac{1}{2}}}{\log 3^{-2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\log 3}{-2\log 3}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

(b) $$\begin{aligned}2\log^2 5+\log 4\log 50 &= 2\log^2 5+\log 2^2(\log 5+\log 10)\\ &= 2\log^2 5+2\log 2\,(\log 5+1)\\ &= 2\log^2 5+2\log 2\log 5+2\log 2\\ &= 2\log 5\,(\log 5+\log 2)+2\log 2\\ &= 2\log 5+2\log 2\\ &= 2\end{aligned}$$

## 习题 17b

求下列各式的值（第 1～12 题）：

1. $\log_5 25$
2. $\log_2\dfrac{1}{16}$
3. $\log_a a^5$
4. $\log_9 1$
5. $\log_{3.7}3.7$
6. $\log 0.0001^3$
7. $\log_7\sqrt[3]{49}$
8. $\log_8 4$
9. $\log_3(27\times 9^2)$
10. $\log\dfrac{1}{1000}$
11. $\log_{16}\dfrac{1}{2}$
12. $\log_{0.25}2$

用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式（第 13～16 题）:

13. $\log_a xyz$
14. $\log_a\dfrac{axy^2}{z}$
15. $\log_a\dfrac{\sqrt{x}}{y^2z}$
16. $\log_a xy^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{2}{3}}$

计算（第 17～32 题）：

17. $\log_5 3+\log_5\frac{1}{3}$

18. $\log_3 5-\log_3 15$

19. $\log_{36}6-\log_6 36-\log_{36}\frac{1}{6}$

20. $\log_a\sqrt[n]{a}-\log_a\frac{1}{a^n}$

21. $\log_5\frac{1}{5}+\log_5\sqrt[3]{5}$

22. $\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\times 9^{-\frac{2}{3}}}}$

23. $\log 7\frac{1}{8}+\log\frac{5}{76}+\log 2\frac{2}{15}$

24. $\log(0.1)^4-\log\sqrt[3]{0.001}$

25. $\log_4\cos\frac{\pi}{4}+\log_4\sin\frac{\pi}{6}$

26. $\dfrac{\log 2^2+\log 3}{1+\log 0.4+\frac{1}{2}\log 9}$

27. $\dfrac{\log a^3b+\log ab^3}{\log\sqrt[3]{ab}}$

28. $\log^2 2+\log^2 5+\log 5\log 4$

29. $3^{\log_3 4}$

30. $2^{\log_2 7}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}$

31. $\dfrac{\log_2 25}{\log_2 5}$

32. $\dfrac{\log 27}{\log 3}$

33. 设 $2.5^x=1000, 0.25^y=1000$，求 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 的值。

34. 如果 $\log 24=a, \log 18=b$，试以 $a$ 及 $b$ 表示 $\log 162$ 及 $\log 1.35$。

35. 设 $a^2+b^2=14ab$，求证 $\log\frac{a+b}{4}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$。

36. 求证 $\log 2+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots\cdots+\log\frac{n}{n-1}=\log n$。

37. 设 $a, b, c$ 成 A.P, $x, y, z$ 成 G.P，求证

$(b-c)\log x+(c-a)\log y+(a-b)\log z=0$

## 17.3 对数的换底公式

有时，为了某种需要，必须将对数的底由某数换为另外一个数。

设 $\log_a x=n$，则 $x=a^n$

两边取以 $b$ 为底的对数，得

$$\log_b x = \log_b a^n$$

$$\log_b x = n\log_b a$$

因为 $a \neq 1$，所以 $\log_b a \neq 0$。上式两边都除以 $\log_b a$，得

$$n = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

即

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

此公式称为对数换底公式。

**例 6** 求 $\log_2 5$ 的值。

**解**

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0.6990}{0.3010} = 2.322$$

**例 7** 试证：

(a) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ (b) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

**解** (a)

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log a}{\log b} = 1$$

或

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b a} \cdot \log_b a = 1$$

(b)

$$\log_{a^n} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^n} = \frac{1}{n}\log_a x$$

**例 8** 计算 $\log_8 9 \cdot \log_{27} 32$ 的值。

**解** $$\log_8 9 \cdot \log_{27} 32 = \frac{\log 9}{\log 8} \cdot \frac{\log 32}{\log 27} = \frac{2\log 3}{3\log 2} \cdot \frac{5\log 2}{3\log 3} = \frac{10}{9}$$

**例 9** 已知 $\log_2 3 = m, \log_5 2 = n$，求证：$\log_6 10 = \dfrac{n+1}{n+mn}$ 。

**解一** $$\log_6 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 6} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{1 + \dfrac{1}{\log_5 2}}{1 + \log_2 3} = \frac{\log_5 2 + 1}{\log_5 2 + \log_2 3 \log_5 2} = \frac{n+1}{n+mn}$$

**解二** 左式：$$\log_6 10 = \frac{\log 10}{\log 6} = \frac{1}{\log 2 + \log 3}$$

右式：$$\frac{n+1}{n+mn} = \frac{\log_5 2 + 1}{\log_5 2 + \log_2 3 \cdot \log_5 2} = \frac{\dfrac{\log 2}{\log 5} + 1}{\dfrac{\log 2}{\log 5} + \dfrac{\log 3}{\log 2} \cdot \dfrac{\log 2}{\log 5}} = \frac{\log 2 + \log 5}{\log 2 + \log 3} = \frac{1}{\log 2 + \log 3}$$

∴ 左式 = 右式

∴ $\log_6 10 = \dfrac{n+1}{n+mn}$

例 10 若 $a^2 = b^2 + c^2$，求证：$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = 2\log_{a+b} c \log_{a-b} c$ 。

解一 $$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = \frac{1}{\log_c (a+b)} + \frac{1}{\log_c (a-b)}$$
$$= \frac{\log_c (a+b) + \log_c (a-b)}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)}$$
$$= \frac{\log_c (a^2 - b^2)}{\log_c (a+b) \log_c (a-b)}$$
$$= \frac{\log_c c^2}{\log_c (a+b) \log_c (a-b)}$$
$$= 2\frac{1}{\log_c (a+b)} \cdot \frac{1}{\log_c (a-b)}$$
$$= 2\log_{a+b} c \log_{a-b} c$$

解二 左式：$$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = \frac{\log c}{\log (a+b)} + \frac{\log c}{\log a - b}$$
$$= \frac{\log c \cdot \log (a-b) + \log c \cdot \log (a+b)}{\log (a-b) \log (a-b)}$$
$$= \frac{\log c \log (a^2 - b^2)}{\log (a+b) \log (a-b)}$$
$$= \frac{\log c \log c^2}{\log (a+b) \log (a-b)}$$
$$= \frac{2\log^2 c}{\log (a+b) \log (a-b)}$$

右式：$$2\log_{a+b} c \log_{a-b} c = 2\frac{\log c}{\log (a+b)} \cdot \frac{\log c}{\log (a-b)}$$
$$= \frac{2\log^2 c}{\log (a+b) \log (a-b)}$$

∴ 左式 = 右式

∴ $\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = 2\log_{a+b} c \log_{a-b} c$

## 习题 17c

1. 求下列各式的值:

   (a) $\log_2 3$　　(b) $\log_9 34.59$

   (c) $\log_{32} 128$　　(d) $\log_3 0.0093$

求证（第 2～9 题）：

2. $\log_x y \cdot \log_y z = \log_x z$

3. $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$

4. $\log_{ab} x = \dfrac{\log_a x}{1+\log_a b}$

5. $\dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$

6. $\dfrac{1}{\log_x a} + \dfrac{1}{\log_y a} = \dfrac{1}{\log_{xy} a}$

7. $\log_a b \cdot \log_b C \cdot \log_c a = 1$

8. $\log_a x \log_b x + \log_b x \log_c x + \log_c x \log_a x = \dfrac{\log_a x \log_b x \log_c x}{\log_{abc} x}$

9. $\dfrac{1}{\log_{abc} bc} - \dfrac{\log_b a \cdot \log_c a}{\log_b a + \log_c a} = 1$

计算（第 10～16 题）：

10. $\dfrac{\log_2 46}{\log_8 46}$

11. $\log_3 16 \cdot \log_8 3$

12. $\log_4 8 - \log_{\frac{1}{9}} 3 - \log_{\sqrt{2}} 4$

13. $\log_2 \dfrac{1}{25} \cdot \log_3 \dfrac{1}{8} \cdot \log_5 \dfrac{1}{9}$

14. $\dfrac{\log_5 \sqrt{2} \cdot \log_7 9}{\log_5 \dfrac{1}{3} \cdot \log_7 \sqrt[3]{4}}$

15. $(\log_2 5 + \log_4 \dfrac{1}{5})(\log_5 2 + \log_{25} \dfrac{1}{2})$

16. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

17. 已知 $\log_2 3 = a$，$\log_2 5 = b$，求证 $\log_4 15 = \dfrac{1}{2}(a+b)$。

18. 已知 $\log_5 3 = a$，$\log_5 6 = b$，求证 $\log_{25} 54 = a + \dfrac{1}{2}b$。

19. 已知 $\log_3 6 = m$，$\log_4 3 = n$，求证 $\log_9 12 = \dfrac{2mn+1}{4n}$。

20. 已知 $\log_2 3=m$，$\log_3 7=n$，求证 $\log_{42}56=\dfrac{mn+3}{mn+m+1}$。

21. 若 $b^2=ac$，求证 $\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_c x}=\dfrac{2}{\log_b x}$。

22. 若 $a^2=b^2+1$，求证 $\log_{a+b}x=-\log_{a-b}x$。

23. 若 $\log_a x\log_b x+\log_b x\log_c x+\log_c x\log_a x=\log_a x\log_b x\log_c x$，

求证 $x=abc$。

24. 若 $\log_x y=\dfrac{1}{1-\log_x a}$，求证 $\dfrac{\log_a y}{\log_a x}=\log_a\dfrac{y}{x}$。

25. 若 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，试以 $a$，$b$ 表示 $\log_{42}14$。

## 17.4 指数方程式

在初中课本里，我们学过，凡未知数出现于指数的位置的方程式就叫做**指数方程式**（exponential equation）。也学过可化成同底的指数方程式的解法，例如解方程：$4^x=2^{x+1}$。

$$\begin{aligned}2^{2x}&=2^{x+1}\\2x&=x+1\\x&=1\end{aligned}$$

我们再来看几种简单指数方程式的解法。

**例 11** 解下列方程式：

(a) $5^x=7$　　　　(b) $3^x=-1$

**解** (a) $$\begin{aligned}\log 5^x&=\log 7\\x&=\frac{\log 7}{\log 5}\\&=1.209\end{aligned}$$

(b) $\because$ $3^x>0$

$\therefore$ 方程式 $3^x=-1$ 无解

**例 12** 解方程式 $2^{x^2-1}=3^{x+1}$。

**解** 原方程两边取对数，得

$$
\begin{aligned}
\log 2^{x^{2}-1} &= \log 3^{x+1} \\
(x^{2}-1)\log 2 &= (x+1)\log 3 \\
(x^{2}-1)\log 2-(x+1)\log 3 &= 0 \\
(x+1)(x-1)\log 2-(x+1)\log 3 &= 0 \\
(x+1)[(x-1)\log 2-\log 3] &= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad x = -1$

或 $x-1 = \dfrac{\log 3}{\log 2}$

$$
\begin{aligned}
x &= 1+\frac{\log 3}{\log 2} \\
&= 2.585
\end{aligned}
$$

**例 13** 解下列方程式:

(a) $3^{x+1}+9^{x}-18=0$ (b) $2^{x+2}+3\cdot 2^{1-x}-14=0$

**解** (a) 原方程式可化为

$$3\cdot 3^{x}+(3^{x})^{2}-18=0$$

利用换元法，设 $3^{x}=y$，方程式又成为

$$y^{2}+3y-18=0$$

由此解得 $y=3$ 或 $y=-6$

当 $y=3$，$3^{x}=3$

得 $x=1$

当 $y=-6$，$3^{x}=-6$

因为 $3^{x}>0$，此方程式无解。

$\therefore$ 原方程式的解是 $x=1$

(b) 原方程式可化为 $4\cdot 2^{x}+6\cdot\dfrac{1}{2^{x}}-14=0$

设 $2^{x}=y$，则

$$
\begin{aligned}
4y+\frac{6}{y}-14 &= 0 \\
4y^{2}-14y+6 &= 0 \\
y = \frac{1}{2} \quad 或 \quad y &= 3
\end{aligned}
$$

当 $y=\frac{1}{2}$，$2^x=\frac{1}{2}$

得 $x=-1$

当 $y=3$，$2^x=3$

得 $x=\frac{\log 3}{\log 2}$

$=1.5850$

$\therefore$ 原方程式的解是 $x=-1$ 或 $x=1.5850$

## 习题 17d

解下列方程式（第 1～40 题）：

1. $2^{x-1}=8$
2. $3^{\frac{1}{x}}=9$
3. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=64$
4. $5^{(x-1)(x+2)}=1$
5. $\left(\frac{1}{2}\right)^x 8^{2x}=4$
6. $5^x+5^{x-1}=750$
7. $9^x=(\sqrt{3})^{x+2}$
8. $4^{x^2}=2^{5x+7}$
9. $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-6}$
10. $2^x=5$
11. $3^{2x+1}=7$
12. $5^{1-x}=11$
13. $10^{x^2-1}=1$
14. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2-x}}=1$
15. $\left(\frac{1}{4}\right)^x=0$
16. $3^x=-3$
17. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=-1$
18. $2^x=3^x$
19. $(\sqrt{3})^{4x+4}=25^{x+1}$
20. $\frac{7^{x^2}}{7}=11^{(x+1)(x-1)}$
21. $5^{x-1}=6^x$
22. $3^{x^2}=4^x$
23. $2^{\frac{1}{x}}=5^x$
24. $a^x=cb^x$ ($a\neq b, a, b, c$ 是不为 1 的正数)
25. $a^{\sqrt[3]{x}}\cdot b^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}=1$ ($a, b$ 是不为 1 的正数，$a\neq b^2$)
26. $a^{3x}=b^{2x}c^x$ ($a, b, c$ 是不为 1 的正数，$a^3\neq b^2c$)

27. $25^{x}-23\cdot 5^{x}-50=0$

28. $2^{2x-1}-3\cdot 2^{x-1}+1=0$

29. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-24=0$

30. $4^{x-1}+2^{x-1}=20$

31. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=\frac{80}{9}$

32. $3^{x-1}+3^{3-x}-10=0$

33. $2^{x}\times 3^{1-x}+2^{-x+1}\times 3^{x}=5$

34. $4^{x}-2\cdot 6^{x}+9^{x}=0$

35. $3\cdot 4^{x}+6^{x}-2\cdot 9^{x}=0$

36. $2^{3x}=4$

37. $3^{2^{x}+1}=27$

38. $5^{2^{x}+1}=5^{4^{x}+1}$

39. $3(9^{x}+9^{-x})-16(3^{x}+3^{-x})+26=0$

40. $2(4^{x}+4^{-x})-3(2^{x}+2^{-x})=1$

## 17.5　对数方程式

在对数符号后面含有未知数的方程叫做**对数方程式**（logarithmic equation）。例如 $\log x+\log(x-3)=1$, $\log_{\sqrt{2}}x=2$, $2\log_{25}x+\log_{x}25=3$ 等都是对数方程式。

因为零和负数没有对数，所以解对数方程所得的根必须使真数的值大于零。因而解对数方程式时必须对所得的根进行检验。

**例 14**　解方程式 $\log(5-x)=2\log(x+1)$。

**解**

$$\begin{aligned}
\log(5-x) &= 2\log(x+1)\\
5-x &= (x+1)^2\\
5-x &= x^2+2x+1\\
x^2+3x-4 &= 0\\
(x+4)(x-1) &= 0\\
x = -4 \quad &\text{或} \quad x = 1
\end{aligned}$$

当 $x=-4$ 时，$\log(x+1)$ 中的 $(x+1)=-3$，负数的对数没有意义，所以 $x=-4$ 不是原方程式的根，应舍去。

$\therefore$　原方程式的解为 $x=1$

**例 15** 解下列方程式:

(a) $\log_3 x = 4$ (b) $\log_{0.1}(6x^2 - 5x - 3) = 0$

**解** (a)

$$\begin{aligned} \log_3 x &= 4 \\ x &= 3^4 \\ x &= 81 \end{aligned}$$

经检验，解为 $x = 81$

(b)

$$\begin{aligned} \log_{0.1}(6x^2 - 5x - 3) &= 0 \\ 6x^2 - 5x - 3 &= 0.1^0 \\ 6x^2 - 5x - 3 &= 1 \\ 6x^2 - 5x - 4 &= 0 \\ (2x+1)(3x-4) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad 或 \quad x = \frac{4}{3}$$

经检验，求得的解是原方程的解。

**例 16** 解下列方程式:

(a) $\log x + \log(x-3) = 1$

(b) $\log(x+6) - \dfrac{1}{2}\log(2x-3) = 2 - \log 25$

**解** (a)

$$\begin{aligned} \log x + \log(x-3) &= 1 \\ \log x(x-3) &= \log 10 \\ x^2 - 3x - 10 &= 0 \\ (x-5)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 5 \quad 或 \quad x = -2$$

经检验，$x = -2$ 应舍去，

$\therefore$ 解是 $x = 5$

(b)

$$\begin{aligned} \log(x+6) + \frac{1}{2}\log(2x-3) &= 2 - \log 25 \\ \log\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} &= \log\frac{100}{25} \\ \frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} &= 4 \\ x^2 - 20x + 84 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 6 \quad 或 \quad x = 14$$

经检验，$x=6$ 或 $x=14$ 都是原方程式的根。

**例 17** 解方程式 $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$。

**解** 原方程式可化为

$$\log_3 x - \frac{6}{\log_3 x} = 1$$

设 $\log_3 x = y$，则

$$y - \frac{6}{y} = 1$$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$y = -2 \quad 或 \quad y = 3$$

$$\log_3 x = -2 \quad 或 \quad \log_3 x = 3$$

$$x = \frac{1}{9} \quad 或 \quad x = 27$$

经检验，$x=\frac{1}{9}$ 或 $x=27$ 是原方程式的解。

【注】本题中除要求 $x>0$ 外，还要求 $x \neq 1$。

**例 18** 解方程式 $x^{1+\log x} = 100$。

**解** 原方程式两边取以 10 为底的对数，得

$$\log x^{1+\log x} = \log 100$$

$$(1+\log x)\log x = 2$$

$$(\log x)^2 + \log x - 2 = 0$$

设 $\log x = y$，则

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = -2 \quad 或 \quad y = 1$$

$$\log x = -2 \quad 或 \quad \log x = 1$$

$$x = 0.01 \quad 或 \quad x = 10$$

经检验，$x=0.01$ 或 $x=10$ 是原方程式的解。

## 习题 17e

解下列方程式（第 1～28 题）：

1. $\log_2 x=5$
2. $\log_{\frac{1}{2}} x=-3$
3. $\log_7 x=\frac{1}{2}$
4. $\log_5 x=1$
5. $\log_3 x=0$
6. $\log_2 x=2$
7. $\log_6(2x+4)=2$
8. $\log_4(3-x)=-\frac{1}{2}$
9. $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=1$
10. $\log_2 x^4=4$
11. $\log_8(x^2-3x-2)=\frac{1}{3}$
12. $\log_a\frac{x^2-x+2}{x+1}=0$
13. $\log_2(x^2-3)=\log_2(1-3x)$
14. $\log\frac{x-2}{x+2}=\log\frac{1}{x-1}$
15. $2\log x+\log 7=\log 14$
16. $\log x+\log(x-3)=1$
17. $\frac{1}{2}(\log x-\log 5)=\log 2-\frac{1}{2}\log(9-x)$
18. $\log(x^2-x-2)-\log(x+1)-\log 2=0$
19. $2(\log_3 x)^2+\log_3 x-1=0$
20. $\frac{1}{12}(\log x)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\log x$
21. $2\log_x 25-3\log_{25} x=1$
22. $2\log_4 x+2\log_x 4=5$
23. $x^{2\log x}=10x$
24. $3^{\log x}=2^{\log 3}$
25. $\log_3(\log_7 x)=1$
26. $\log_3\log_2\log_x 5=0$
27. $\log_2 x+\log_8 x=2\log_2 x\log_8 x$
28. $\log_2(\log_3 x)+3\log_8(\log_5 9)=2$

## 17.6 指数函数及其图象

### ● 指数函数

函数 $y=a^x$ 叫做指数函数（exponential function），其中 $a$ 是一个大于零且不等于 1 的常量（当 $a=1$ 时，$y=1^x=1$ 是一个常数函数）。指数函数的定义域是实数集 $R$。

【注】当 $a>0$，$x$ 是一个无理数时，$a^x$ 是一个确定的实数。对于无理指数幂，过去学过的有理指数幂的性质和运算法则都适用。

## 指数函数的图象及性质

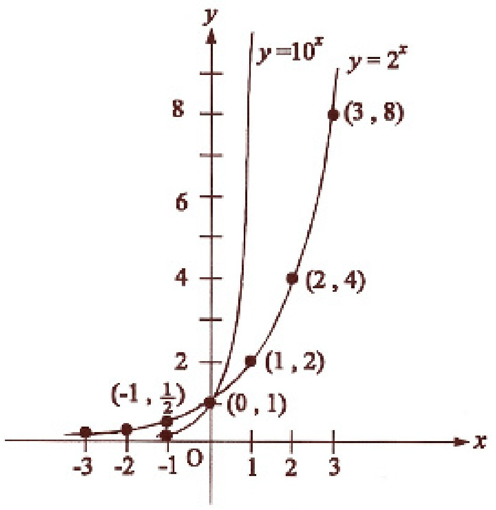
为了研究指数函数 $y=a^x$ 的图象及性质，先画出一些指数函数的图象，例如，画出 $y=2^x$，$y=10^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象。

先取 $x$ 的一些值，计算出 $y$ 的对应值，列出表，然后描点连线，得出 $y=2^x$，$y=10^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象，如图 17－1 (a) 和 (b)。

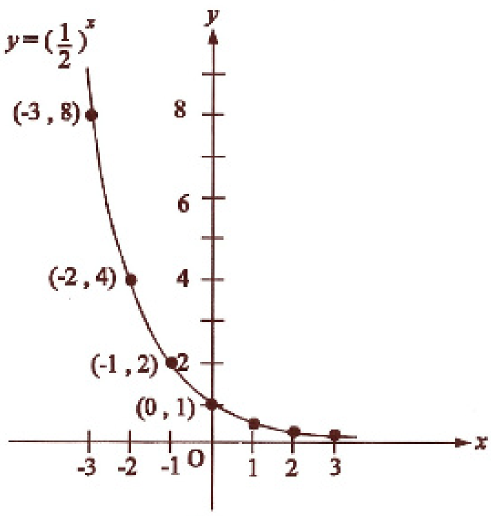
| $x$ | … | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=2^x$ | … | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | … |

| $x$ | … | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=10^x$ | … | 0.1 | 0.32 | 1 | 3.16 | 10 | … |

| $x$ | … | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | … | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | … |




(a)




(b)

图 17－1

从图象上可以看出：

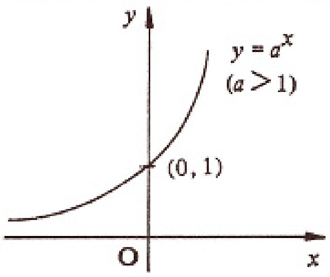
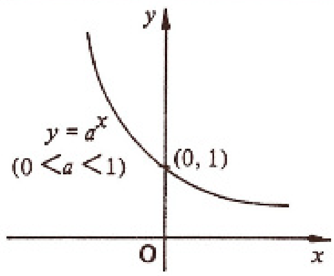
(一) 函数 $y=2^x$，$y=10^x$，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的图象只占据 $x$ 轴上方，即都有 $y>0$，这些函数的值域都为 $(0, \infty)$。

(二) 图象与 $y$ 轴都相交于点 $(0, 1)$；即当 $x=0$ 时，$y=1$。

(三) 对于函数 $y=2^x$，$y=10^x$ 来说，当 $x>0$ 时，$y>1$，当 $x<0$ 时，$0<y<1$；在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数（$x$ 值越大，$y$ 值越大）。

(四) 对于函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 来说，当 $x>0$ 时，$0<y<1$，当 $x<0$ 时，$y>1$；在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数（$x$ 值越大，$y$ 值越小）。

一般地，指数函数 $y=a^x$ 在其底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图象和性质如下表所示。

| | $a>1$ | $0<a<1$ |
|---|---|---|
| 图象 |  |  |
| 性质 | (1) $y>0$ | |
| | (2) 当 $x=0$ 时，$y=1$ | |
| | (3) 当 $x>0$ 时，$y>1$<br>当 $x<0$ 时，$0<y<1$ | 当 $x>0$ 时，$0<y<1$<br>当 $x<0$ 时，$y>1$ |
| | (4) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数 | 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数 |

**例 19** 比较下列各题中两个值的大小：

(a) $1.7^{2.5}, 1.7^3$　　　　(b) $0.8^{-0.2}, 0.8^{-0.1}$

**解**　(a) 考察指数函数 $y=1.7^x$

$\because$ $1.7>1$

$\therefore$ $y=1.7^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数

$\because$ $2.5<3$

$\therefore$ $1.7^{2.5}<1.7^3$

(b) 考察指数函数 $y=0.8^x$

$\because$ $0.8<1$

$\therefore$ $y=0.8^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数

$\because$ $-0.2<-0.1$

$\therefore$ $0.8^{-0.2}>0.8^{-0.1}$

**例 20** 已知 $a>1$，$0<b<1$，$m>0$，$n>0$，试证 $a^n>b^m$。

**解** $\because$ $a>1$

$\therefore$ 当 $n>0$ 时，$a^n>1$

$\because$ $0<b<1$

$\therefore$ 当 $m>0$ 时，$b^m<1$

$\therefore$ $a^n>b^m$

## 习题 17f

1. 在同一坐标系内画出下列函数的图象:

   (a) $y=4^x$ (b) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

2. 一种产品的年产量原来是 $a$ 件，在今后 $m$ 年内，计划使年产量平均每年比上一年增加 $p\%$。写成年产量随经过年数变化的函数关系式。

3. 比较下面各题中两个值的大小:

   (a) $3^{0.8}, 3^{0.7}$ (b) $0.75^{-0.1}, 0.75^{0.1}$

   (c) $1.01^2, 1.01^{3.5}$ (d) $0.99^3, 0.99^{4.5}$

4. 有两个指数函数 $f(x)=5^{4x^2+3x+2}$ 与 $g(x)=5^{(2x-1)^2}$，欲使 $f(x)=g(x)$，问 $x$ 应取何值。

5. 有两个指数函数 $f(x)=10^{\frac{1}{1-x}}$ 与 $g(x)=10^{\frac{2}{1+x}}$，欲使 $f(x)=g(x)$，问 $x$ 应取何值。

6. 若 $f(x)=a^x\ (a>0, a\neq 1)$，试证:

   (a) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ (b) $f(x)\cdot f(-x)=1$

   (c) $f(x^m)=[f(x)]^m$

7. 已知 $a>1, 0<b<1, n<0, m<0$，试证 $a^n<b^m$。

8. 已知 $a>1, b>1, m>0, n<0$，试证 $a^n<b^m$。

9. 已知 $0<a<1, 0<b<1, m>0, n<0$，试证 $a^{n}>b^{m}$。

10. 已知 $a>b>1, n>m>0$，试证 $a^{n}>b^{m}$。

## 17.7 对数函数及其图象

### ● 对数函数

由对数的意义可知，如果 $y=2^{x}$（其中 $x\in R$），那么 $x=\log_2 y$。所以根据反函数的概念可以知道，函数 $y=\log_2 x$ 是指数函数 $y=2^{x}$ 的反函数。

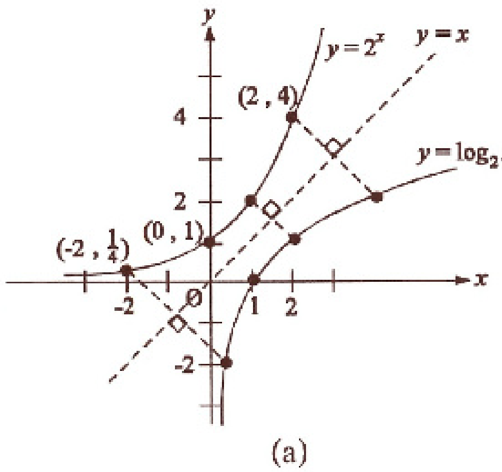
一般地，指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的反函数

$$y=\log_a x \quad (a>0，且\ a\neq 1)$$

叫做**对数函数**（logarithmic function）。因为指数函数 $y=a^{x}$ 的定义域是 $R$，值域是 $R^{+}$，所以对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域是 $R^{+}$，值域是 $R$。

### ● 对数函数的图象及性质

因为对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^{x}$ 的反函数，所以 $y=\log_a x$ 的图象和 $y=a^{x}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。因此，我们只要画出和 $y=a^{x}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的曲线，就可以得到 $y=\log_a x$ 的图象。例如，画出和 17.6 节中两个函数 $y=2^{x}$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的曲线，就可以得到 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象，如图 17－2 (a) 和 (b)。



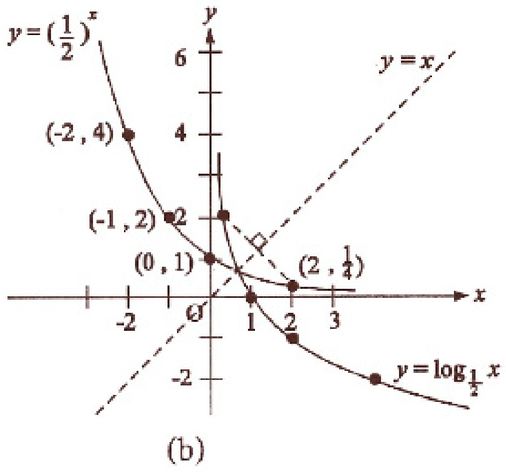




图 17－2

从图象上可以看出：

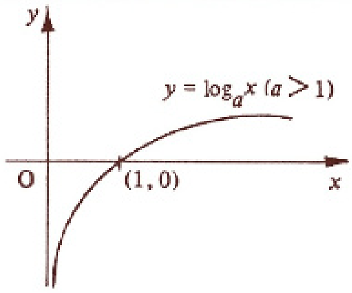
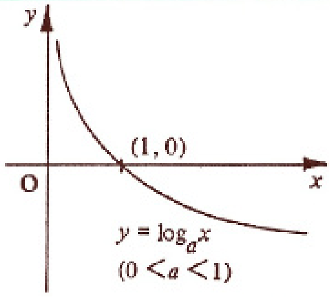
(一) 对于函数 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 来说，都有 $x>0$；

(二) 图象与 $x$ 轴都相交于点 $(1, 0)$，即当 $x=1$ 时，$y=0$。

(三) 对于函数 $y=\log_2 x$ 来说，当 $x>1$ 时，$y>0$，当 $0<x<1$ 时，$y<0$；在 $(0, +\infty)$ 上是增函数。

(四) 对于函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 来说，当 $x>1$ 时，$y<0$，当 $0<x<1$ 时，$y>0$；在 $(0, +\infty)$ 上是减函数。

一般地，对数函数 $y=\log_a x$ 在其底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图象和性质如下表所示。

| | | $a>1$ | $0<a<1$ |
|---|---|---|---|
| 图象 | |  |  |
| 质 | | $x>0$ | |
| | (2) | 当 $x=1$ 时，$y=0$ | |
| | (3) | 当 $x>1$ 时，$y>0$<br>当 $x<1$ 时，$y<0$ | 当 $x>1$ 时，$y<0$<br>当 $0<x<1$ 时，$y>0$ |
| | (4) | 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数 | 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数 |

**例 21** 求下列函数的定义域：

(a) $y=\log_a x^2$　　　　(b) $y=\log_a(4-x)$

(c) $y=\dfrac{1}{\log_2(x+5)}$　　　　(d) $y=\sqrt{\log_5(x-3)}$

**解** (a) 由 $x^2>0$，得 $x\neq 0$，

$\therefore$ 函数 $y=\log_a x^2$ 的定义域是 $\{x \mid x\in R，且\ x\neq 0\}$。

(b) 由 $4-x>0$，得 $x<4$。

$\therefore$ 函数 $y=\log_a(4-x)$ 的定义域是 $(-\infty, 4)$。

(c) $x$ 必须同时满足 $x+5>0$

$\log_2(x+5)\neq 0$

即 $x>-5$

$x+5\neq 1$

即满足 $x>-5$ 且 $x\neq -4$

∴ 函数 $y=\dfrac{1}{\log_2(x+5)}$ 的定义域是

$\{x \mid x\in R, x>-5, \text{ 且 } x\neq -4\}$

(d) $x$ 必须同时满足 $x-3>0$

$\log_5(x-3)\geqslant 0$

即 $x>3$

$x-3\geqslant 1$

即满足 $x\geqslant 4$

所以函数 $y=\sqrt{\log_5(x-3)}$ 的定义域是 $[4, +\infty)$。

**例 22** 比较下列各组中两个值的大小:

(a) $\log_2 3$，$\log_2 3.5$ (b) $\log_{0.7}1.6$，$\log_{0.7}1.8$

(c) $\log_4 5$，$\log_9 8$ (d) $\log_{0.5}0.4$，$\log_2 0.7$

**解** (a) 考察函数 $y=\log_2 x$

∵ $2>1$

∴ $y=\log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

∵ $3<3.5$

∴ $\log_2 3<\log_2 3.5$

(b) 考察函数 $y=\log_{0.7}x$

∵ $0<0.7<1$

∴ $y=\log_{0.7}x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

∵ $1.6<1.8$

∴ $\log_{0.7}1.6>\log_{0.7}1.8$

(c) $\because \log_4 5 > \log_4 4$

$\therefore \log_4 5 > 1$

$\because \log_9 8 < \log_9 9$

$\therefore \log_9 8 < 1$

$\therefore \log_4 5 > \log_9 8$

(d) $\because \log_{0.5} 0.4 > 0$

$\log_2 0.7 < 0$

$\therefore \log_{0.5} 0.4 > \log_2 0.7$

或

由换底公式，得

$$\begin{aligned}\log_{0.5} 0.4 &= \frac{\log_2 0.4}{\log_2 0.5}\\ &= -\log_2 0.4\\ &= \log_2 \frac{1}{0.4}\\ &= \log_2 2.5\end{aligned}$$

$\because \log_2 2.5 > \log_2 0.7$

$\therefore \log_{0.5} 0.4 > \log_2 0.7$

## 习题 17g

若 $f(x)=\log_a x$，试证（第 1～4 题）：

1. $f(xy)=f(x)+f(y)$

2. $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

3. $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

4. $f(x^m)=mf(x)$

在同一坐标系内画出下列函数的图象（第 5～6 题）：

5. $y=\log_4 x$

6. $y=\log_{\frac{1}{4}} x$

求下列函数的定义域（第 7～20 题）：

7. $y=\log_a(-x)^2$

8. $y=\log_5\sqrt{x}$

9. $y=\log_2(1+x)$

10. $y=\log_a(2-x)$

11. $y=\log_3(x^2+1)$

12. $y=\log_3(x^2-1)$

13. $y=\log_4\dfrac{1}{x}$

14. $y=\log_7\dfrac{1}{1-3x}$

15. $y=\dfrac{1}{\log_4 x}$

16. $y=\dfrac{1}{\log_7(3-x^2)}$

17. $y=\sqrt[3]{\log_2 x}$

18. $y=\sqrt{\log_3 x}$

19. $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$

20. $y=\sqrt{\dfrac{1}{\log_2\dfrac{1}{x}}}$

比较下面各题中两个值的大小（第 21～30 题）：

21. $\log 6$，$\log 8$

22. $\log_{0.5}6$，$\log_{0.5}4$

23. $\log^{\frac{2}{3}}0.5$，$\log_{\frac{2}{3}}0.6$

24. $\log_{1.5}1.6$，$\log_{1.5}1.4$

25. $\log_2 3$，$\log_6 5$

26. $\log_{0.2}0.3$，$\log_{0.6}0.5$

27. $\log_{0.7}4$，$\log_5 4.8$

28. $\log_{0.1}0.7$，$\log_{1.2}0.9$

29. $\log_2 1.6$，$\log_4 2.5$

30. $\log_{\frac{1}{2}}3$，$\log_{\frac{1}{8}}25$

（提示：第 29～30 题用换底公式）

31. 有两个对数函数 $f(x)=\log_2(x+1)$ 与 $g(x)=\log_2(x^2-1)$，欲使 $f(x)=g(x)$ 成立，问 $x$ 应取何数值。

32. 有两个对数函数 $f(x)=\log_3(x^2-2x)$ 与 $g(x)=\log_3(2x^2-3)$，欲使 $f(x)=g(x)$ 成立，问 $x$ 应取何数值。

33. 有两个对数函数 $f(x)=\log_4\dfrac{x-1}{x+1}$ 与 $g(x)=\log_4\dfrac{1}{x^2-1}$，欲使 $f(x)=g(x)$ 成立，问 $x$ 应取何数值。

34. 有两个对数函数 $f(x)=\log_5 x$ 与 $g(x)=\log_{0.2}x$，欲使 $f(x)=g(x)$ 成立，问 $x$ 应取何数值。

## 总复习题 17

1. 计算:

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

(b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

(c) $\left(\frac{b}{2a^{2}}\right)^{3}\div\left(\frac{2b^{2}}{3a}\right)^{0}\times\left(-\frac{b}{a}\right)^{-3}$

(d) $5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(e) $3a^{-\frac{1}{4}}(9^{-1}a^{\frac{5}{4}}+\frac{1}{3}a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}})$

(f) $(x^{\frac{1}{4}}-y^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}})$

(g) $(a^{4}+a^{-4}+2)^{\frac{1}{2}}$

(h) $\dfrac{3^{n+2}-2\cdot 3^{n}}{5(3^{n+1})}$

(i) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}\div\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{8}}{3}}$

(j) $\dfrac{(\sqrt[4]{p^{3}})^{\frac{1}{6}}\sqrt[9]{p^{-3}}}{(\sqrt{p^{-7}})^{\frac{1}{6}}}$

2. 计算:

(a) $\log_{a}\frac{1}{3}+\log_{a}3$

(b) $\log_{2}(2\sqrt{2})-2\log_{2}\sqrt{2}$

(c) $\log_{8}\frac{2}{7}-\log_{8}(-2)^{2}-\log_{8}\frac{1}{7}$

(d) $\log 5+\log 2\log 5+\log^{2}2$

(e) $\dfrac{\log_{16}10}{\log_{32}10}$

(f) $(\log_{2}3+\log_{2}\sqrt{3})\log_{\sqrt{3}}2$

(g) $\log_{2}\frac{1}{9}\log_{3}\frac{1}{25}\log_{5}\sqrt{8}$

(h) $\log_{3}5\log_{5}7\log_{7}9$

(i) $\dfrac{\log_{4}27}{\log_{2}3}$

(j) $(\log_{2}3+\log_{4}9)(\log_{3}4+\log_{9}2)$

(k) $\log_{2}(\log_{3}65)+3\log_{5}(\log_{5}9)$

(l) $\log_{8}(\log_{2}\sqrt{8+4\sqrt{3}}+\log_{2}\sqrt{8-4\sqrt{3}})$

3. 求证：

(a) 若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $\frac{1}{\log_{x+y}a}=\frac{1}{\log_x a}+\frac{1}{\log_x y}$

(b) 若 $b^2=ac$，且 $a,b,c$ 为互不相等且不等于 1 的正数，则

$$\frac{\log_a x}{\log_c x}=\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}$$

(c) 若 $\log_3 2=a$，$\log_2 5=b$，则 $\log 3=\frac{1}{a(b+1)}$

(d) 若 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，则 $\log_{21} 14=\frac{ab+1}{a(b+1)}$

4. 解下列指数方程式：

(a) $3^{2x-1}=81$ (b) $\left(\frac{1}{8}\right)^x=4^{1-x}$

(c) $3\times 2^x=2\times 3^x$ (d) $3^{x^2}=(3^x)^2$

(e) $2^{x+2}+2^{x-2}=34$ (f) $7^x-7^{x-1}=6$

(g) $2^x=3$ (h) $3^{x+1}=5^x$

(i) $5^{2x+1}=26\times 5^x-5$ (j) $9^{x-1}+3^{x+2}=90$

(k) $2^{x+2}-2^{-x}+3=0$ (l) $4^{x+1}-3\times 4^{-x}+4=0$

(m) $9^x+16^x=2\times 12^x$ (n) $4\times 9^x-9\times 4^x=5\times 6^x$

(o) $2^{5^x}=2$ (p) $5^{2^x}=25$

5. 解下列对数方程式：

(a) $2\log x=\log 32+\log 2$

(b) $\log x+\log(x+3)=\log(x+8)$

(c) $(\log_2 x)^2=\log_2 x+6$ (d) $\log_3 x+6\log_x 3=5$

(e) $3^{\log x}=2^{\log 3}$ (f) $4^{\log x}=2^{\log x+1}$

(g) $\log_{x+1}(x^2-5x-13)=2$ (h) $\log_x\sqrt{2x^2-5x+6}=1$

(i) $\log_2[\log_3(\log_5 x)]=0$ (j) $\log_3(\log_2 x)+2\log_9(\log_7 8)=2$

(k) $3\log_8 x+2=2\log_2 x$ (l) $\log_4(x+4)+1=\log_2(x+1)$

(m) $\log 2x\log 3x-\log 6x^2=\log\frac{1}{10}$

(n) $(\log 2x)^2+(\log 3x)^2=(\log 2)^2+(\log 3)^2$

6. 求下列函数的定义域:

(a) $y=2^{2x+1}$

(b) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2x-1}}$

(c) $y=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1}$

(d) $y=\sqrt{2-2^{x}}$

(c) $y=\log_2(2x+1)$

(f) $y=\log_3(x-1)^2$

(g) $y=\log_3(x^2+x)$

(h) $y=\log_5\frac{1}{2-x}$

(i) $y=\frac{1}{\log(x+1)-1}$

(j) $y=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2(x+1)}$

(k) $y=\sqrt{\log_2(x-1)}$

(l) $y=\frac{1}{\sqrt{1-\log x}}$

7. 比较下面各题中两个值的大小:

(a) $2^{0.11}$, $2^{0.12}$

(b) $0.81^{3.1}$, $0.81^{3.2}$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $2^{-\frac{3}{5}}$

(d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{1.1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1.2}$

(c) $\log_2 1.1$, $\log_2 1.2$

(f) $\log_{\frac{1}{3}}4$, $\log_{\frac{1}{3}}5$

(g) $\log_2 3$, $\log_3 2$

(h) $\log_4 3$, $\log_2 1.7$

# 名词对照

(注：本名词对照表按华文条目的汉语拼音字母的次序排列)

B

| 华　文 | 英　文 | 国　文 |
|---|---|---|
| 不等式 | inequality | ketaksamaan |

C

| | | |
|---|---|---|
| 垂直 | perpendicular | serenjang |

D

| | | |
|---|---|---|
| 定比分点 | point diving a line in a given ratio | titik membahagi satu tembereng garis menurut nisbah yang diberi |
| 点斜式 | point–slope form | bentuk titik–kecerunan |
| 等差数列 | arithmetic sequence | jujukan aritmetik |
| 等差级数 | arithmetic progression / arithmetic series | janjang aritmetik / siri aritmetik |
| 等比数列 | geometric sequence | jujukan geometri |
| 等比级数 | geometric progression / geometric series | janjang geometri / siri geometri |
| 对数方程式 | logarithmic equation | persamaan logaritma |
| 对数函数 | logarithmic function | fungsi logaritma |

E

| | | |
|---|---|---|
| 二元二次方程式 | quadratic equation in two variable | persamaan kuadratik dalam dua anu |
| 二元一次不等式 | linear inequality in two variable | ketaksamaan linear dalam dua anu |

G

| | | |
|---|---|---|
| 共线 | collinear | kolinear / segaris |
| 共点 | concurrent | kesetemuan / keserentakan |
| 规划论 | mathematical programming | pengaturcaraan matematik |
| 公差 | common difference | beza sepunya |
| 公比 | common ratio | nisbah sepunya |

**H**

| | | |
|---|---|---|
| 横轴 | horizontal axis | paksi mengufuk |
| 和 | sum | hasil tambah |

**J**

| | | |
|---|---|---|
| 截距式 | intercept form / double-intercept form | bentuk pintas |
| 交点 | point of intersection | titik persilangan |

**K**

| | | |
|---|---|---|
| 可行区域 | feasible region | rantau tersaur |
| 可行点 | feasible point | titik tersaur |

**L**

| | | |
|---|---|---|
| 两点式 | two-point form | bentuk dua-titik |

**M**

| | | |
|---|---|---|
| 目标函数 | objective function | fungsi matlamat |

**N**

| | | |
|---|---|---|
| 内分点 | internal division point | titik pembahagian dalam |

**P**

| | | |
|---|---|---|
| 平行 | parallel | selari |

**Q**

| | | |
|---|---|---|
| 倾斜角 | angle of inclination | sudut condong |

**S**

| | | |
|---|---|---|
| 三元一次方程式 | linear equation in three variables | persamaan linear dalam tiga anu |
| 三元一次方程组 | simultaneous linear equations in three variables | persamaan linear serentak dalam tiga anu |
| 数列 | sequence | jujukan |

**T**

| | | |
|---|---|---|
| 通项 | general term | sebutan am |
| 调和数列 | harmonic sequence | jujukan harmonik |

**W**

| | | |
|---|---|---|
| 外分点 | external division point | titik pembahagian luar |
| 无理不等式 | irrational inequality | ketaksamaan tak rasinal |
| 无穷级数 | infinite series | siri tak terhingga |

**X**

| | | |
|---|---|---|
| 斜率 | gradient / slope | kecerunan |
| 斜截式 | gradient–intercept form | bentuk kecerunan |
| 线性规划 | linear programming | pengaturcaraan linear |
| 项 | term | sebutan |

**Y**

| | | |
|---|---|---|
| 原点 | origin | asalan |
| 有向线段 | directed line segment | garis tembereng terarah |
| 一般式 | general form | bentuk am |
| 一元二次不等式 | quadratic inequality in one variable | ketaksamaan kuadratik dalam satu anu |
| 运筹学 | operations research | penyelidikan operasi |
| 约束条件 | constraints | kekangan |
| 有限级数 | finite series | siri terhingga |

**Z**

| | | |
|---|---|---|
| 直角坐标系 | rectangular coordinate system | sistem koordinate segi empat tepat |
| 纵轴 | vertical axis | paksi mencancang |
| 直线方程式 | equation of straight line | persamaan garis lurus |
| 最优解 | optimal solution | penyelesaian optimum |
| 指数方程式 | exponential equation | persamaan indeks |
| 指数函数 | exponential function | persamaan logaritma |

# 习 题 答 案

## 第 11 章

### 习题 11a (P.4)

1. (a) $y=0$; (b) $x=0$; (c) $x=y$，$x=-y$
2. (a) 5; (b) $\sqrt{85}$; (c) 10; (d) 13
3. $15+5\sqrt{5}$
4. (a) 直角三角形; (b) 等腰直角三角形; (c) 等边三角形
5. 0，8
6. $-1$，7
7. (a) (5，3); (b) $(-\frac{1}{2}，-3)$; (c) (2，$-3$)
8. (2，$-4$)，($-3$，3)，($-2$，2)
9. $x=4$，$y=10$
10. 10
11. (2，4)
12. $p=-2$，$q=2$，$r=4$
13. $-5$，5
14. (3，$-5$)，($-7$，$-5$)，(5，7)

### 习题 11b (P.9)

1. (a) $-1$，$135°$; (b) 2，$63°26'$; (c) $-\sqrt{3}$，$120°$; (d) 1，$45°$
2. (a) 0; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{\pi}{4}$; (d) $\frac{3}{4}\pi$
3. (a) 1 (b) $-1$ (c) $\sqrt{3}$

### 习题 11c (P.10)

4. 是
5. 不是
6. 是
7. 12
8. $-\frac{1}{2}$，2

### 习题 11d (P.13)

1. (a) 10 (b) 1 (c) $2ac$
2. $-5$，5
3. (0，$-2$)，(0，$-8$)
4. 3，1
5. 12，2.4
6. 1

## 习题 11c (P.15)

1. $20\frac{1}{2}$　　2. 96　　3. (a) 4　(b) 24

4. $14\frac{1}{2}$　　5. 20

## 习题 11f (P.20)

1. $-\frac{2}{3}$　　2. $\lambda=\frac{1}{3}$，1，3

3. (a) P(2，−5)　　(b) Q(−22，−29)

4. $(5,\ 4\frac{1}{3})$　　5. (7，4)　　6. $h=1\frac{1}{5}$，$k=-1$

7. (−11，8)　　8. (3，0)，(5，3)　　9. $\lambda=\frac{1}{3}$

10. $\lambda=-\frac{1}{3}$　　11. $(-2a,\ 5b)$　　12. $a=5$，$b=10$

13. (−14，17)

14. (a) $(\frac{1}{3},\ 3)$　　(b) 5∶1　　(c) $(2\frac{1}{3},\ 0)$

15. $E\left(\frac{kx_1+lx_2+mx_3}{k+l+m},\ \frac{ky_1+ly_2+my_3}{k+l+m}\right)$

## 总复习题 11 (P.21)

1. (a) $a^2+b^2$，　　(b) $2-2\cos(\alpha-\beta)$

2. $a=8$ 或 $a=-8$　　3. 6，16

4. (a) $a=2$，$b=5$　　(b) 13

5. (4，−10)　　6. 3，$3\sqrt{2}$，3

7. (a) $\frac{-10}{17}$，149°32'；　　(b) $-\frac{28}{9}$，107°49'；

(c) $-\sqrt{3}$，120°

8. $x=\frac{22}{3}$　　9. 周长 $(1+\sqrt{5}+2\sqrt{2})a$，面积 $a^2$

10. −4，$15\frac{1}{2}$　　11. $70\frac{1}{2}$

12. (a) 是，　(b) 不是　　13. $p=\frac{1}{2}$，1

15. 2

16. $(3, 1\frac{1}{5})$

17. (a) $(-2, 2)$ (b) $(6, -10)$

18. (a) $\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}, \frac{a^2+2ab-b^2}{a+b}\right)$; (b) $\left(\frac{a^2-2ab-b^2}{a-b}, \frac{a^2+b^2}{a-b}\right)$

# 第 12 章

## 习题 12a (P.25)

2. (a) $4x-y-3=0$ (b) $3x-y+1=0$
   (c) $x-3y-11=0$ (d) $5x+2y+1=0$
3. (a) $\sqrt{3}x-3y-6-2\sqrt{3}=0$ (b) $y-3=0$
   (c) $\sqrt{3}x+y+2-4\sqrt{3}=0$
4. (a) $x-4y+11=0$ (b) $3x+2y+1=0$
   (c) $x+2y-2=0$ (d) $2x-y-3=0$
   (e) $x+y-5=0$ (f) $5x-4y=0$
5. (a) AB 边：$3x-4y+11=0$，
   BC 边：$4x+3y+23=0$，
   CA 边：$2x-y-1=0$。
   (b) AB 边上的中线：$7x-y+9=0$，
   BC 边上的中线：$16x-13y+17=0$，
   CA 边上的中线：$2x-11y-1=0$。

## 习题 12b (P.29)

1. (a) $\sqrt{3}x-2y-4=0$ (b) $\sqrt{3}x+2y-4=0$
   (c) $y=-x-3$ (d) $y=x+3$
2. (a) $m=-1$，$c=6$ (b) $m=1$，$c=0$
   (c) $m=3$，$c=-9$ (d) $m=-8$，$c=-7$
3. (a) $3x+2y=6$ (b) $6x-5y+30=0$
   (c) $3x-4y-12=0$ (d) $2x+2y+1=0$
4. (a) $3x+8y+15=0$ (b) $5x+3y-6=0$
   (c) $2x-5y+10=0$

## 习题 12c (P.32)

1. (a) $x+2y-4=0$　　(b) $2x-y-3=0$
   (c) $x+y-1=0$　　(d) $x-y+7=0$

2. (a) $B\neq 0$ 时，$m=-\frac{A}{B}$；$B=0$ 时，斜率不存在。
   (b) $C=0$ 时，方程表示通过原点的直线。

3. (a) $m=-3$，$c=5$　　(b) $m=\frac{5}{4}$，$c=-5$
   (c) $m=-\frac{1}{2}$，$c=0$　　(d) $m=\frac{7}{6}$，$c=\frac{2}{3}$

5. (a) $y=8$　　(b) $x=4$
   (c) $y=0$　　(d) $x=0$

## 习题 12d (P.36)

1. (a) 平行　　(b) 两者皆非　　(c) 垂直
   (d) 平行　　(e) 垂直　　(f) 垂直

3. $2x-y+11=0$

4. (a) $2x+y-7=0$　　(b) $x+y-5=0$

6. $4x-3y+10=0$，$k=-\frac{7}{4}$　　7. $a=-\frac{9}{2}$ 或 3

9. (a) 另一条也没有斜率　　(b) 另一条斜率为 0
   逆命题成立。

## 习题 12c (P.39)

1. (a) 45°，135°　　(b) 108°26'，71°34'

2. (a) 90°　　(b) 45°　　(c) 90°

3. (a) 165°45'，3°57'，10°18'
   (b) 40°49'，23°50'，115°21'

4. $7x-4y-23=0$，$x+8y+31=0$

5. $2x+y-13=0$，$x-2y-4=0$

6. $5x-y=0$ 或 $x+5y=0$

## 习题 12f (P.43)

1. (a) $\left(\frac{36}{7},\ \frac{4}{7}\right)$　(b) $(2,\ 3)$

2. (a) 相交，$\left(\frac{15}{8},\ -\frac{13}{4}\right)$　(b) 重合

   (c) 平行

3. (a) $A=3$，$C\neq -2$　(b) $A=3$，$C=-2$

   (c) $A\neq 3$

4. $x+y+4=0$

5. $(1,\ -2)$，$45°$

6. (a) AB 边上的高：$x+2y-5=0$　BC 边上的高：$7x+5y-38=0$

   CA 边上的高：$x-y-6=0$　交点 $\left(\frac{17}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

   (b) 过点 A 且平行于 BC 的直线：$5x-7y-6=0$

7. $C(25,\ 16)$

8. $x+3y-11=0$，$\left(\frac{13}{5},\ \frac{14}{5}\right)$

## 习题 12g (P.47)

1. (a) $2\sqrt{13}$　(b) $0$

2. (a) $\frac{8}{17}\sqrt{17}$　(b) $\frac{1}{17}\sqrt{17}$　(c) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$

   (d) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$　(e) $\frac{2}{5}$

3. $\frac{41}{30}\sqrt{10}$，$\frac{41}{40}\sqrt{10}$，$\frac{41}{50}\sqrt{10}$

4. $\frac{\sqrt{17}}{2}-1$ 或 $-\frac{\sqrt{17}}{2}-1$

5. (a) $2\sqrt{13}$　(b) $2$　(c) $\frac{2}{13}\sqrt{13}$

6. $(0,\ 2)$ 或 $(0,\ -3)$

7. $\frac{5}{13}\sqrt{13}$

8. $7x+24y-134=0$ 或 $x-2=0$

9. $3x+4y-13=0$

## 总复习题 12 (P.48)

1. (a) $\sqrt{3}\,x-3y-8\sqrt{3}-6=0$　(b) $x=-2$

   (c) $4x+y-7=0$　(d) $2x+y-6=0$

   (e) $y=2$　(f) $3x-4y-12=0$

2. $\sqrt{3}\,x-y-2\sqrt{3}-3=0$

3. 5

4. $x+3y-9=0$，$4x-y+16=0$

5. $4x-3y+6=0$ (倾斜角为锐角)，　　$4x+3y-6=0$ (倾斜角为钝角)。

6. (a) $2x-14y+9=0$，$7x-4y+9=0$，$x+2y-9=0$

   (b) $8x-5y+25=0$

7. (a) $A\neq 0$，$B\neq 0$　　(b) $A\neq 0$，$B=0$

   (c) $A=0$，$B\neq 0$　　(d) $A=0$，$B\neq 0$，$C=0$

   (c) $A\neq 0$，$B=0$，$C=0$

8. (a) $4x+y-14=0$　　(b) $x-2y-3=0$　　(c) $7x-2y-20=0$

9. $6x-5y-1=0$

10. AB 边上高：$2x+7y-21=0$

    BC 边上高：$3x+2y-12=0$

    CA 边上高：$4x-3y-3=0$

11. (a) $2x+y-4=0$　　(b) $y=x$

    (c) $2x+3y-2=0$　　(d) $4x-3y-6=0$

    (e) $x+2y-11=0$

12. $a=-1$

13. (a) 相交　　(b) 重合

    (c) 平行　　(d) 相交

14. $3x-y-16=0$ 和 $x+y-11=0$　　15. $a=0$ 或 $a=1$

16. (a) $m\neq -1$，$m\neq -7$　　(b) $m=-7$　　(c) $m=-1$

17. (a) (i) $a=\dfrac{10}{3}$；(ii) $a=0$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$；(*iii*) $a\neq\dfrac{3}{2}$

    (b) (i) $m=\dfrac{1}{2}$，$n=2$；(ii) $m=-6$，$n=-4$

    (c) (i) $a=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$；(ii) $a=0$ (注意：分 $a\neq 0$ 和 $a=0$ 两种情况讨论)

18. (a) 相交 (当 $A_2=0$ 时垂直)

    (b) $\dfrac{C_1}{A_1}\neq\dfrac{C_2}{A_2}$ 时平行，$\dfrac{C_1}{A_1}=\dfrac{C_2}{A_2}$ 时重合

19. $135°$，$26°34'$ $18°26'$

20. $3x+7y-13=0$ 或 $7x-3y-11=0$

21. $\dfrac{7}{2}$　　22. $x-y-6=0$，$x-y+2=0$

23. $3x-y-3=0$，$3x-y+9=0$，$x+3y+7=0$

24. $l = 1.5F + 14$

25. $\frac{t}{50} + \frac{Q}{20} = 1\ (0 \leqslant t \leqslant 50)$

26. $x - y - 1 = 0$

# 第 13 章

## 习题 13a (p.54)

1. $(7,\ 5,\ 4)$
2. $(-5,\ 0,\ \frac{9}{2})$
3. $(2,\ 1,\ 3)$
4. $(-1,\ 0,\ 2)$
5. $(4,\ -1,\ -1)$
6. $(5,\ \frac{1}{3},\ -2)$
7. $(1,\ 0,\ 2)$
8. $(2,\ 3,\ 4)$
9. $(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ 2)$
10. $(3,\ -\frac{5}{3},\ -2)$

## 习题 13b (P.57)

1. $(1,\ 1)$, $(-13,\ 8)$
2. $(-2,\ -3)$, $(-\frac{2}{5},\ \frac{1}{5})$
3. $(1,\ 2)$, $(3,\ 5)$
4. $(-5,\ -7)$, $(1,\ -1)$
5. $(3,\ 4)$, $(-12,\ -14)$
6. $(2\sqrt{3},\ 2)$, $(-2\sqrt{3},\ -2)$
7. $(5,\ 2)$
8. $(2,\ -3)$, $(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2})$
9. $(\frac{3}{2},\ \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3},\ \frac{3}{2})$
10. $(4,\ 1)$, $(5,\ 2)$
11. $(1,\ 1)$
12. $(3,\ 9)$, $(9,\ 3)$
13. $(-1,\ 1)$, $(5,\ 4)$
14. $(3,\ 8)$, $(8,\ 3)$
15. $(-7,\ -12)$, $(12,\ 7)$
16. $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$

## 习题 13c (P.59)

1. $(5,\ 2)$, $(-2,\ -5)$
2. $(5,\ 8)$, $(6,\ \frac{51}{4})$
3. $(2,\ 0)$, $(2,\ -1)$, $(-2,\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$, $(-2,\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2})$
4. $(1,\ 0)$, $(-\frac{1}{5},\ -\frac{3}{5})$
5. $(3,\ 2)$, $(3,\ 1)$

6. $(2, 1)$, $(-11, \frac{15}{2})$

7. $(4, 3)$, $(\frac{1}{2}, \frac{19}{4})$

8. $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $(-\frac{16}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{-7\pm\sqrt{57}}{2}, -1)$

## 习题 13d (P.62)

1. $(0, 0)$, $(-\frac{23}{2}, \frac{23}{3})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
2. $(2, 3)$, $(-2, -3)$, $(\frac{3\sqrt{10}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{2})$, $(-\frac{3\sqrt{10}}{4}, \frac{\sqrt{10}}{2})$
3. $(1, -2)$, $(-1, 2)$, $(-2, -1)$, $(2, 1)$
4. $(3, 4)$, $(-3, -4)$, $(4, 3)$, $(-4, -3)$
5. $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(\frac{15}{22}, \frac{9}{22})$
6. $(1, 1)$, $(2, 5)$, $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$, $(\frac{1}{4}, \frac{13}{4})$

## 习题 13e (P.65)

1. $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$, $(-2, -1)$
2. $(3, 1)$, $(-3, -1)$
3. $(3, 8)$, $(8, 3)$, $(-3, -8)$, $(-8, -3)$
4. $(5, -1)$, $(-5, 1)$, $(-3, 4)$, $(3, -4)$
5. $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
6. $(4, 2)$, $(-4, -2)$

## 总复习题 13 (P.65)

1. $(2, 0, 1)$
2. $(\frac{10}{7}, 1, \frac{4}{7})$
3. $(3, 5, 7)$
4. $(3, 5, 7)$
5. $(2, 3)$, $(3, 2)$
6. $(3, 1)$, $(-3, -1)$
7. $(0, 0)$, $(720, 30)$
8. $(1, 2)$
9. $(1, 2)$
10. $(5, 2)$, $(-2, -5)$
11. $(5, 7)$, $(7, 5)$
12. $(2, 1)$, $(\frac{14}{3}, -\frac{13}{3})$

13. $(1,\ 3)$，$(-\frac{7}{2},\ 12)$，$(-1,\ -3)$，$(\frac{7}{2},\ -12)$

14. $(5,\ 2)$，$(-\frac{7}{2},\ -\frac{11}{3})$

15. $(\frac{18}{5},\ \frac{7}{5})$，$(-\frac{13}{5},\ -\frac{12}{5})$

16. $(6,\ 4)$，$(6,\ -2)$，$(-2,\ 4)$，$(-2,\ -2)$

17. $(1,\ 3)$，$(1,\ -3)$，$(-3,\ -1)$

18. $(0,\ -1)$，$(1,\ -1)$，$(1,\ 2)$，$(3,\ 2)$

# 第 14 章

## 习题 14a (P.68)

1. $(x+5)(x+7)<(x+6)^2$
2. $(x-9)^2>(x-8)(x-10)$
3. $(x-1)(x^2+x+1)<(x+1)(x^2-x+1)$
4. $a^2+12>6a$
5. $(y^2+\sqrt{2}\,y+1)(y^2-\sqrt{2}\,y+1)<(y^2+y+1)(y^2-y+1)$

## 习题 14b (P.74)

1. (a) 不能　　(b) 不能

## 习题 14c (P.77)

1. $x>1$
2. $x\leqslant-\frac{1}{2}$
3. $x>-\frac{5}{2}$
4. $x\leqslant-\frac{267}{60}$
5. $x\leqslant\frac{1}{11}$
6. $-4<x\leqslant1$
7. $\frac{7}{5}<t<\frac{15}{4}$
8. $-\frac{5}{6}\leqslant x<1$
9. $2<x<5$
10. $-\frac{1}{2}<x\leqslant2$

## 习题 14d (P.81)

1. $-1<x<8$
2. $x<-\frac{5}{6}$ 或 $x>1$
3. $x\geqslant\frac{2}{3}$ 或 $x\leqslant-\frac{2}{3}$
4. $-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$

5. $-4<x<1$

6. $-\frac{1}{2}<x<1$

7. 全体实数

8. $x$ 为实数且 $x\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. 全体实数

10. 无解

## 习题 14e (P.83)

1. $x<-2$

2. $-1<x<1$

3. $2\leqslant x<6$

4. $x>4$ 或 $2<x<3$ 或 $x<1$

5. 无解

## 习题 14f (P.86)

1. $x<-5$ 或 $1<x<2$

2. $x>-3$ 但 $x\neq 1$

3. $x<-\frac{1}{3}$ 或 $1<x<2$

4. $\frac{1}{2}<x<3$

5. $x\leqslant-\frac{7}{2}$ 或 $x\geqslant 1$

6. $-2<x<0$ 或 $x>2$

7. $x\leqslant-2$ 或 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$

8. $x<-\sqrt{3}$ 或 $-1<x<\sqrt{3}$ 或 $x>4$

9. $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}$

10. $-4<x<-2-\sqrt{3}$ 或 $x>-2+\sqrt{3}$

11. $x<\frac{2}{3}$ 或 $1<x<2$

12. $x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 或 $1<x<2$ 或 $x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

13. $x<-2$ 或 $x>3$

14. $-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 或 $x<6$

## 习题 14g (P.89)

1. $x>11$

2. $\frac{5}{3}\leqslant x<\frac{7}{4}$

3. $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}$

4. 无解

5. $x>3$ 或 $x<-2$

6. $x<-9$ 或 $x>1$

7. $-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant-2$ 或 $x>2$

8. $x<5$

9. $5\leqslant x<\frac{74}{13}$ 或 $x\leqslant-2$

10. $-\frac{1}{3}\leqslant x<5+2\sqrt{7}$

11. $x<-\frac{13}{17}$

12. $x>1$

## 习题 14h (P.91)

1. $-3<x<7$
2. $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 5$
3. $-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$
4. $0<x<6$
5. $x>4$ 或 $x<-1$ 或 $1<x<2$
6. $-2\leqslant x\leqslant 3$
7. $4<x<7$ 或 $-1<x<2$
8. $-2<x\leqslant 1$ 或 $4\leqslant x<7$
9. $x>6$ 或 $\frac{2}{3}<x<2$
10. $-5\leqslant x\leqslant 3$ 且 $x\neq -1$

## 习题 14i (P.93)

1. 最小值为 2。
2. 最大值为 $\frac{9}{8}$。
3. 无最大值或最小值。
4. 最小值为 $-3$，最大值为 1。
5. (a) $x=1$ 时，有最小值 $\frac{1}{3}$，$x=-1$ 时，有最大值 3。

   (b) $x=\pm\sqrt{2}$ 时，有最小值 3。
8. $m=\pm 1$
9. 当 $a=b=10$ 时，有最小值 200。

## 总复习题 14 (P.94)

1. (a) $(x^2+1)^2\geqslant x^4+x^2+1$　　(b) $(\sqrt{x}+1)^2>(\sqrt{x}-1)^2$

   (c) $(x+\frac{1}{2})(x^2+x+1)<(x+1)(x^2+\frac{x}{2}+1)$
2. (a) 不成立　　(b) 不成立

   (c) 成立　　(d) 不成立

   (e) 不成立
6. (a) $x<26\frac{1}{2}$　　(b) $x\leqslant\frac{7}{5}$

   (c) $2<x<6$　　(d) 空集

   (e) $x<-2$ 或 $3<x<8$　　(f) $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 1$

   (g) $x<1-\sqrt{6}$ 或 $2<x\leqslant 1+\sqrt{6}$　　(h) $2<x<3$ 或 $4<x<6$

   (i) $-3\leqslant x<2$，$x\geqslant 5$　　(j) $-\frac{1}{3}\leqslant x<2$

7. (a) $\dfrac{11}{2}<x<8$ (b) $1<x<\dfrac{3}{2}$

(c) $-4<x<1$

8. (a) $-4\leqslant x\leqslant -2$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 1$ (b) $x<-2$

(c) $-2\leqslant x\leqslant 2$ (d) $-2\leqslant x\leqslant 1$ 或 $9\leqslant x\leqslant 12$

9. $m>9$ 或 $m<1$

(提示：当 $\triangle=(m-3)^2-4m=m^2-10m+9>0$ 时，方程式有两个不相等的实数根。)

10. 最小值是 $\dfrac{1}{2}$，最大值是 $\dfrac{11}{2}$。

12. 当房屋的边长分别为 6 米，4 米 时，建房造价最低；最低建房造价为 $48a$。

# 第 15 章

## 习题 15b (P.101)

9. $y\geqslant x+2$

10. $x-y\geqslant 1$

11. $\begin{cases} y\geqslant 2 \\ y\leqslant 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x\geqslant 3 \\ y<x \end{cases}$

13. $\begin{cases} y\leqslant 3 \\ x+y>4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y<2x+2 \\ 2y\geqslant x \\ 2x+y\leqslant 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x-2y+4\geqslant 0 \\ 4x+y\geqslant 4 \\ x-4y<0 \\ x<4 \end{cases}$

## 习题 15c (P.109)

1. 当 $x=3$，$y=6$ 时，$z$ 有极大值，且 $z_{max}=21$。
2. 当 $x=5$，$y=1$ 时，W 有极小值，且 $z_{min}=60$。
3. 从甲厂取 550 箱，乙厂取 300 箱时，收费最多，为 2110 元。
4. 每瓶涂料用 300 克 A 种原料，200 克 B 种原料，能使成本最低，为 3 元 5 角。
5. 生产 37.5 吨 A 产品，15 吨 B 产品时，能使产值最大，为 570 万元。
6. 大房 3 间，小房 8 间或大房 0 间，小房 12 间。

## 总复习题 15 (P.110)

3. 当 $x=6$，$y=9$ 时，$z$ 有极大值，且 $z_{max}=195$。
4. 当 $x=1$，$y=3$ 时，$w$ 有极小值，且 $w_{min}=7$。
5. 生产 A 产品 5 个，B 产品 3 个时，能获得最大的利润，为 5 万元。
6. 平均每天使用饲料 A 4 千克，B 3.5 千克，能使饲料费最小，为 2600 元。
7. (a) 生产 A 产品 4 单位，B 产品 2 单位时，能获得最大利润，为 16 万元。
   (b) 最大利润将减少 2 万元。
8. 建 16 间 A 型房屋和 1 间 B 型房屋或建 12 间 A 型和 3 间 B 型或建 10 间 A 型和 4 间 B 型。最高利润为 RM360，000。

# 第 16 章

## 习题 16a (P.114)

1. (a) 81，243，729　　(b) 18，29，47
   (c) $16a^8$，$-32a^9$，$64a^{10}$　　(d) $\frac{6}{13}$，$\frac{7}{15}$，$\frac{8}{17}$
2. (a) 5，7，9，11，13　　(b) 9，27，81，243，729
   (c) $\frac{1}{7}$，$\frac{2}{10}$，$\frac{3}{13}$，$\frac{4}{16}$，$\frac{5}{19}$　　(d) $-1$，$-1$，$-1$，$-1$，$-1$
3. (a) $a_n=3n$　　(b) $a_n=2^n$
   (c) $\frac{n+1}{n}$　　(d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. (a) $0+2+6+12+20$
   (b) $\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{3^8}$
5. (a) $\sum\limits_{n=1}^{50} n^3$　　(b) $\sum\limits_{n=1}^{n=5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

## 习题 16b (P.118)

1. (a) $3n+2$　　(b) $1-\frac{1}{2}n$
2. (a) 15　　(b) 17
3. 4　　4. 第 41 项　　5. 17，16，15
6. $a=15$，$d=3$，前 4 项为 15，18，21，24

7. (a) 50　　(b) 4

(c) $a+10d$　　(d) $a^2$

8. (a) 31，40，49　　(b) 28，34，40，46，52

9. 第 27 项　　10. 3，5，7

12. 3，4，5；直角三角形

## 习题 16c (P.121)

1. 0　　2. $\frac{79}{2}$

3. (a) 250　　(b) $820a-1720b$

(c) $1274\sqrt{3}$　　(d) $16e+256f$

4. 64　　5. 70

6. 首项为 4，公差为 4，末项为 1000，可求得项数为 250，各项的和为 125500。

7. $\begin{cases} a+3d=9, \\ a+7d=-7 \end{cases}$ $a=21$，$d=-4$，$n=10$，$S=30$

8. $\frac{n}{2}[24+(n-1)(-3)]=12$，$n=1$ 或 $n=8$，项数为 1 或 8。

9. 1275 支　　10. 第 19 项　　11. 第 15 项

12. 第 9 项　　13. 195，45　　14. 1，5，9，……，49

15. 510　　16. $\frac{q(1+2ab+q)}{2a}$　　17. 171

18. $n=8$　　19. 6　　20. $n=7$

21. $6r-1$　　22. 125　　23. 1600000

24. 18∶5

## 习题 16d (P.126)

1. (a) $3(-2)^{n-1}$　　(b) $20(-\frac{1}{2})^{n-1}$

2. (a) $n=10$　　(b) 15

3. $\frac{1}{8}$　　4. $-\frac{2048}{2187}$　　5. 48

6. 第 6 项　　7. $-\frac{1}{2}$

8. 首项 $a=1$，公比 $r=\pm 2$，第 8 项 $a_8=\pm 128$。

9. $\pm 6$　　10. $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$　　11. $\pm\sqrt{12}$

12. $a=\pm 6$，$b=\pm 2$　　13. 3　　14. 2，8，32

## 习题 16e (P.128)

1. (a) 255　　(b) $-85$

(c) $53\frac{11}{48}$　　(d) $\dfrac{9[1-(\frac{4}{3})^{2n}]}{7}$

2. 公比 $r=\frac{1}{2}$，项数 $n=6$　　3. 项数 $n=8$，末项 $a_n=-1$

4. $r=2$，$\sum\limits_{n=1}^{6} a_n=315$　　5. $n=6$，$\sum\limits_{n=1}^{n} a_n=315$

6. $a_4=8$，$\sum\limits_{i=1}^{4} a_i=65$　　7. $r=2$

8. 33.33%，1440 台　　9. 73205 吨，305255 吨

## 习题 16f (P.130)

1. 3，5，7　　2. 17，10，3 或 8，10，12

3. 45，15，5 或 5，15，45　　4. 12，16，20，25

5. 5，12，19，26　　6. $\frac{1}{2}$，$\frac{16}{9}a\left(\frac{1}{2}\right)^n$

7. $x=20$，$y=200$

## 习题 16g (P.134)

1. (a) $20\frac{1}{4}$　　(b) $\frac{8}{5}$

2. 128　　3. 27　　4. 没有

5. (a) $\frac{1}{3}$　　(b) $\frac{1}{99}$

(c) $\frac{5}{11}$　　(d) $\frac{1}{27}$

6. $\frac{1}{18000}$　　7. 2　　8. $\frac{4}{3}$

## 习题 16h (P.137)

1. (a) 204 (b) 1210
   (c) 3025 (d) 6048

2. (a) $n^2(n+1)$ (b) $\dfrac{n(n+1)(3n^2-7n-5)}{6}$
   (c) $n^4$ (d) $\dfrac{n(n+1)(n^2+13n+60)}{4}+27n$

3. $\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

4. $n(n+1)^2$

5. (a) $\dfrac{n(n+1)(n+6)(n+7)}{4}$ (b) $\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

6. (a) 3135 (b) 8428

## 习题 16i (P.141)

1. $-1+2^{21}-\dfrac{1}{2^{20}}$

2. $\dfrac{1}{2}n(3n-1)+\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3^n})$

3. $\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}+\dfrac{an(n+1)}{2}$

4. $\dfrac{5}{4}$

5. $\dfrac{x-(4n-3)x^{n+1}}{1-x}+\dfrac{4x^2(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}$

6. $\dfrac{n}{3n+1}$

7. $\dfrac{3n^2+5n}{8(3n+1)(3n+4)}$

8. $\dfrac{n}{2(3n+2)}$

9. $\dfrac{n}{2n+1}$

10. $\dfrac{1+3^{11}}{2}$ 或 88574

## 总复习题 16 (P.142)

1. (a) $\sum\limits_{n=1}^{50}\dfrac{2n-1}{2n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+5)$

2. (a) $d=\dfrac{a_n-a}{n-1}$ (b) $n=\dfrac{2Sn}{a+a_n}$ (c) 60

3. (a) $r=\sqrt[n-1]{\dfrac{a_n}{a}}$ (b) $a_n=\dfrac{a-Sn(1-r)}{r}$

4. 40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm，75 cm，82 cm，89 cm，96 cm，103 cm

5. 4 年

6. 第 8 项

7. (a) 第 18 项 (b) 第 35 项
8. 83855
9. 400000
10. 330850
11. 1∶5∶25
12. 2，6，10 或 18，6，$-6$
13. 29
14. 9
15. $-23$
16. 第 8 项
17. 2 或 $\frac{1}{2}$
18. $a=10$，$b=25$，$c=40$
19. (a) $2n$ (b) 2 (c) 24
20. $a_n=3n-1$，$a_{200}=599$
21. 5778
22. $\frac{1}{9\times10^{20}}$
23. (a) $\frac{7}{11}$ (b) $1\frac{5}{11}$ (c) $\frac{217}{270}$ (d) $2\frac{101}{110}$
24. $a=6$，$r=-\frac{1}{3}$
25. 1
26. (a) $\frac{1}{2}n(3n+1)+1-\frac{1}{2^n}$ (b) $n^2+1-\frac{1}{2^n}$
(c) $\frac{3x^2-3x^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{(3n-2)x^{n+1}-x}{(1-x)}$ (d) $\frac{n(4n^2+21n+35)}{6}$
(e) $\frac{n}{5n+1}$ (f) $\frac{5n^2+7n}{12(5n+1)(5n+6)}$
(g) $\frac{5}{81}(10^{n+1}-9n-10)$ (h) $\frac{1}{81}(9n-1+\frac{1}{10^n})$
27. 65∶12
28. 306
29. $167\frac{1}{2}$

## 习题 (P.146)

1. $-\frac{28}{15}$
2. (a) 5 (b) 1
3. (a) $\frac{15}{4}$ (b) $-\frac{56}{11}$ (c) $\frac{2}{x+y}$
4. $\frac{6}{5}$，$\frac{3}{2}$，2，3
5. 2 和 8

# 第 17 章

## 习题 17a (P.149)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $-9$ | 2. $\frac{7}{32}$ | 3. $4$ | 4. $2$ |
| 5. $3$ | 6. $7$ | 7. $\frac{1}{a}$ | 8. $\frac{1}{b^2}$ |
| 9. $a^6$ | 10. $1$ | 11. $\frac{1}{x^2y^2}$ | 12. $\frac{q^2}{p^2}$ |
| 13. $\frac{x^2}{y}$ | 14. $\frac{9}{a^4}$ | 15. $1$ | 16. $\frac{b^2c^4}{9a^2}$ |
| 17. $\frac{b^4c}{a^3}$ | 18. $\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ | 19. $\frac{1}{ab}$ | 20. $x^2-\frac{1}{x^2}$ |
| 21. $y^2-x^2$ | 22. $\frac{5}{9}$ | 23. $9$ | 24. $\frac{1}{2}$ |
| 25. $\frac{125}{8}$ | 26. $10$ | 27. $a$ | 28. $a^{\frac{5}{3}}$ |
| 29. $\frac{x^3}{y^2}$ | 30. $-6a$ | 31. $\frac{3}{2}ab^2$ | 32. $24y$ |
| 33. $2xy^{\frac{1}{3}}$ | 34. $-\frac{3ab}{5c^2}$ | 35. $1-\frac{4}{x}$ | 36. $4x-9y^{-\frac{1}{2}}$ |
| 37. $48$ | 38. $4$ | 39. $\frac{79}{7}$ | 40. $\frac{a^2-a-2a^{\frac{1}{2}}-1}{a}$ |
| 41. $2\sqrt{2}-1$ | 42. (a) $\sqrt[3]{x}$ | (b) $a+b$ | (c) $1$ |
| (d) $\sqrt{x^{13}y^5}$ | (e) $4$ | | |

## 习题 17b (P.153)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $2$ | 2. $-4$ | 3. $5$ | 4. $0$ |
| 5. $1$ | 6. $-12$ | 7. $\frac{2}{3}$ | 8. $\frac{2}{3}$ |
| 9. $7$ | 10. $-3$ | 11. $-\frac{1}{4}$ | 12. $-\frac{1}{2}$ |

13. $\log_a x+\log_a y+\log_a z$

14. $1+\log_a x+2\log_a y-\log_a z$

15. $\frac{1}{2}\log_a x-2\log_a y-\log_a z$

16. $\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y-\frac{2}{3}\log_a z$

17. 0　　18. $-1$　　19. $-1$　　20. $\frac{1}{n}+n$

21. $-\frac{2}{3}$　　22. $\frac{31}{18}$　　23. 1　　24. $-3$

25. $-\frac{3}{4}$　　26. 1　　27. 12　　28. 1

29. 4　　30. 14　　31. 2　　32. 3

33. $\frac{1}{3}$　　34. $\frac{11b-2a}{5}$，$2b-a-1$

## 习题 17c (P.158)

1. (a) 1.585　　(b) 1.613　　(c) 1.4　　(d) $-4.258$

10. 3　　11. $\frac{4}{3}$　　12. $-2$　　13. $-12$

14. $-\frac{3}{2}$　　15. $\frac{1}{4}$　　16. $\frac{3}{2}$　　25. $\frac{1+ab}{1+a+ab}$

## 习题 17d (P.161)

1. $x=4$　　2. $x=\frac{1}{2}$　　3. $x=3$

4. $x=1$ 或 $x=-2$　　5. $x=\frac{2}{5}$　　6. $x=4$

7. $x=\frac{2}{3}$　　8. $x=-1$ 或 $x=\frac{7}{2}$　　9. $x=2$

10. $x=2.322$　　11. $x=0.3856$　　12. $x=-0.4899$

13. $x=1$ 或 $x=-1$　　14. $x=0$　　15. 无解

16. 无解　　17. 无解　　18. $x=0$

19. $x=-1$　　20. $x=1$ 或 $x=-1$　　21. $x=-8.827$

22. $x=0$ 或 $x=1.262$　　23. $x=0.6563$ 或 $x=-0.6563$

24. $x=\frac{\log_a c}{1-\log_a b}$　　25. $x=-\log_a b$　　26. $x=0$

27. $x=2$　　28. $x=0$ 或 $x=1$　　29. $x=-2$

30. $x=3$　　31. $x=-2$　　32. $x=1$ 或 $x=3$

33. $x=0$ 或 $x=1$　　34. $x=0$　　35. $x=1$

36. $x=\frac{2}{3}$　　37. $x=1$　　38. $x=0$

39. 1，$-1$，0

40. $\pm 1$

## 习题 17c (P.165)

1. $x=32$
2. $x=8$
3. $x=\sqrt{7}$
4. $x=5$
5. $x=1$
6. $x=4$
7. $x=16$
8. $x=\frac{5}{2}$
9. $x=-\frac{2}{3}$
10. $x=2$ 或 $x=-2$
11. $x=-1$ 或 $x=4$
12. $x=1$
13. $x=-4$
14. $x=4$
15. $x=\sqrt{2}$
16. $x=5$
17. $x=4$ 或 $x=5$
18. $x=4$
19. $x=\sqrt{3}$ 或 $x=\frac{1}{3}$
20. $x=10$ 或 $x=0.0001$
21. $x=\frac{1}{25}$ 或 $x=5\sqrt[3]{5}$
22. $x=2$ 或 $x=16$
23. $x=10$ 或 $x=\frac{\sqrt{10}}{10}$
24. $x=2$
25. $x=343$
26. $x=\sqrt{5}$
27. 1，4
28. 25

## 习题 17f (P.168)

2. $y=a(1+p\%)^x$ ($x$ 为正整数 $x\leqslant m$)
3. (a) $3^{0.8}>3^{0.7}$　(b) $0.75^{-0.1}>0.75^{0.1}$
   (c) $1.01^2<1.01^{3.5}$　(d) $0.99^3>0.99^{4.5}$
4. $x=-\frac{1}{7}$
5. $x=\frac{1}{3}$

## 习题 17g (P.172)

7. $x\in R$，$x\neq 0$
8. $(0,\ \infty)$
9. $(-1,\ \infty)$
10. $(-\infty,\ 2)$
11. $R$
12. $x\in R$，$x>1$ 或 $x<-1$
13. $(0,\ \infty)$
14. $(-\infty,\ \frac{1}{3})$
15. $x\in R$，$x>0$ 且 $x\neq 1$
16. $-3<x<3$ 且 $x\neq\pm 2$
17. $(0,\ \infty)$
18. $[1,\ \infty)$

19. $(\frac{3}{4}, 1)$

20. $(0, 1)$

21. $\log 6 < \log 8$

22. $\log_{0.5} 6 < \log_{0.5} 4$

23. $\log_{\frac{2}{3}} 0.5 > \log_{\frac{2}{3}} 0.6$

24. $\log_{1.5} 1.6 > \log_{1.5} 1.4$

25. $\log_2 3 > \log_6 5$

26. $\log_{0.2} 0.3 < \log_{0.6} 0.5$

27. $\log_{0.7} 4 < \log_5 4.8$

28. $\log_{0.1} 0.7 > \log_{1.2} 0.9$

29. $\log_2 1.6 > \log_4 2.5$

30. $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{8}} 25$

31. $x = 2$

32. $x = -3$

33. $x = 2$

34. $x = 1$

## 总复习题 17 (P.174)

1. (a) $5\frac{1}{4}$ (b) $8$ (c) $-\frac{1}{8a^3}$ (d) $2\sqrt{5}$
   (e) $\frac{1}{3}a + a^{\frac{1}{2}} - 3$ (f) $x - \frac{1}{y}$ (g) $a^2 + a^{-2}$ (h) $\frac{7}{15}$
   (i) $\sqrt{3}$ (j) $\sqrt[8]{p^3}$

2. (a) $0$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{1}{3}$ (d) $1$
   (e) $\frac{5}{4}$ (f) $3$ (g) $6$ (h) $2$
   (i) $\frac{3}{2}$ (j) $5$ (k) $3$ (l) $\frac{1}{3}$

4. (a) $x = \frac{5}{2}$ (b) $x = -2$ (c) $x = 1$
   (d) $x = 0$ 或 $x = 2$ (e) $x = 3$ (f) $x = 1$
   (g) $x = 1.585$ (h) $x = 2.151$ (i) $x = 1$ 或 $x = -1$
   (j) $x = 2$ (k) $x = -2$ (l) $x = -\frac{1}{2}$
   (m) $x = 0$ (n) $x = 2$ (o) $x = 0$
   (p) $x = 1$

5. (a) $x = 8$ (b) $x = 2$ (c) $x = 8$ 或 $x = \frac{1}{4}$
   (d) $x = 9$ 或 $x = 27$ (e) $x = 2$ (f) $x = 10$
   (g) 无解 (h) $x = 2$ 或 $x = 3$ (i) $x = 125$

(j) $7^3$　　(k) $x=4$　　(l) $x=5$

(m) $x=5$ 或 $x=\frac{10}{3}$　　(n) $x=1$ 或 $x=\frac{1}{6}$

6. (a) $R$　　(b) $x\in R$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$　　(c) $(-\infty,\ 0]$

(d) $(-\infty,\ 1]$　　(e) $(-\frac{1}{2},\ \infty)$　　(f) $x\in R$，$x\neq 1$

(g) $x\in R$，$x<-1$ 或 $x>0$　　(h) $(-\infty,\ 2)$

(i) $x\in R$，$x>-1$ 且 $x\neq 9$　　(j) $(1,\ \infty)$

(k) $[2,\ \infty)$　　(l) $(0,\ 10)$

7. (a) $2^{0.1}<2^{0.12}$　　(b) $0.81^{3.1}>0.81^{3.2}$　　(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<2^{-\frac{3}{5}}$

(d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{1.1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-1.2}$　　(e) $\log_2 1.1<\log_2 1.2$　　(f) $\log_{\frac{1}{3}}4>\log_{\frac{1}{3}}5$

(g) $\log_2 3>\log_3 2$　　(h) $\log_4 3>\log_2 1.7$