马来西亚华文独中教科书

高中数学

（一下）

马来西亚董教总全国华文独中工委会课程局编纂

马来西亚华文独中教科书

高中数学

（一下）

董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

《高中数学》（一下）

行政编辑：梁翠芳
美术编辑：梁翠芳
封面设计：梁翠芳
版面设计：萧娇婵
电脑排版：萧娇婵

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Swan Printing Sdn Bhd.

版次：
2013年8月第1版

印次：
2020年11月第8次印刷

编辑说明

一、这套《高中数学》是根据董教总华文独中工委会统一课程委员会所拟定的数学课程标准编写而成。在拟订课程标准的过程中，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KBSM）及各国的课程标准和教材，并采用了旧版统一课本《普通数学》的课程内容。

二、这套《高中数学》是为全国各华文独中的高中文科及商科学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。每册内容依据每周六节，每节四十分钟的教学时间编写。

三、这套教材共有28章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学及微积分。全书是以综合方式编写。

四、本书是高一下册，供高中一年级下半年使用。内容包括：

三角学　— 任意角的三角函数、任意三角形的解法、三角恒等式与三角方程式

解析几何　— 直角坐标系、直线

五、本书设有"学习目标"、"注意"、"补充资料"、"随堂练习"及"思考题"栏目。设置上述栏目是为了使学生掌握学习重点，启发学生思考，增进学习效果。

六、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。习题的答案都附于书末。此外，本书附有中英名词对照，供学习参考。

七、除非另有说明，本书所有例题及习题的答案皆准确至两位小数。

八、本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会

《高中数学》编审小组

2013年8月

编审小组

学术顾问：林忠强博士　陈庆地博士
　　　　　钟美国博士　张丽萍博士

学科委员：林汶良　张锦发　苏民胜　萧子良　曾龙文
　　　　　陈授勤　沈祥清　王经纶　李鸿聪

责任编辑：蔡思盛

鸣 谢

本书承蒙编审小组、前学科秘书郑慧儒、姚和兴、张发财和黄耀弘等提供建设性意见，并协助编写与审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

目录

7. 任意角的三角函数

7.1 象限 2
7.2 任意角三角函数的定义 4
7.3 任意三角函数值的求法 7
7.4 三角函数的图像 24

8. 任意三角形的解法

8.1 正弦定律 32
8.2 余弦定律 38
8.3 三角测量问题 44
8.4 三角形的面积 53

9. 三角恒等式与三角方程式

9.1 三角函数的基本恒等式 62
9.2 两角之和与差的三角函数 68
9.3 倍角公式与半角公式 78
9.4 三角方程式 92

10. 直角坐标系

10.1 直角坐标系 110
10.2 距离公式 111
10.3 分比公式 116
10.4 三角形的面积 124
10.5 多边形的面积 128

11. 直线

11.1 斜率 134
11.2 直线方程式的几种形式 143
11.3 直线方程式的一般式 149
11.4 两条直线的交点 155
11.5 点到直线的距离、二平行线的距离 158

名词对照 165
答案 166

7. 任意角的三角函数

学习目标：

- 理解任意角三角函数的定义
- 能判断三角函数值的正负性及计算三角函数值
- 能辨识及理解三个三角函数（正弦、余弦、正切函数）的图像

7.1 象限

在直角坐标系上，x 轴及 y 轴将平面分成四个部分，称为象限，如图 7-1 所示。按逆时针方向计算，I为第一象限，II为第二象限，III为第三象限，IV为第四象限。在直角坐标系内讨论角，使角的顶点与坐标原点重合，角的始边固定在正 x 轴上。由此，我们可以根据一个角的终边所在的象限来决定这个角所属的象限。

注意

由于 x 轴及 y 轴不属于任何象限，所以终边落在 x 轴或 y 轴的角（如 0°，90°，180°，270°，360°等）不属于任何象限。

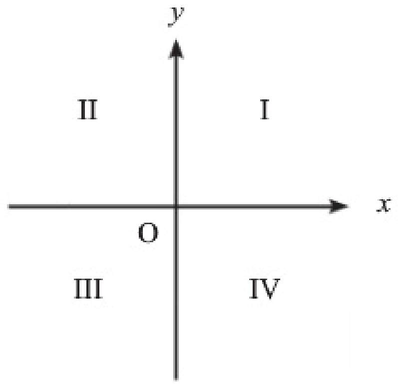


图7-1

在图 7-2 (a) 中，50° 及 −310° 的终边皆落在第一象限，所以 50° 及 −310° 都是第一象限的角；图 7-2 (b) 中的 220° 及 −140° 都是第三象限的角；图 7-2 (c) 中的 1020° 则属于第四象限的角。

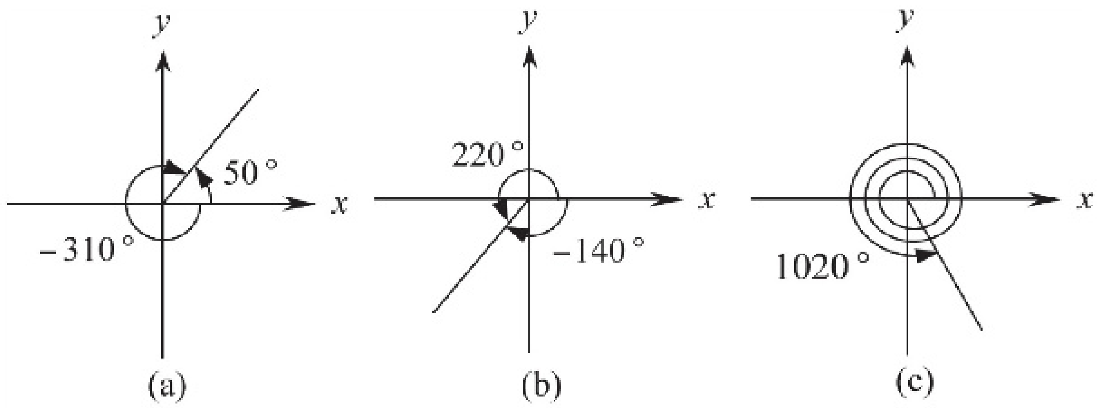


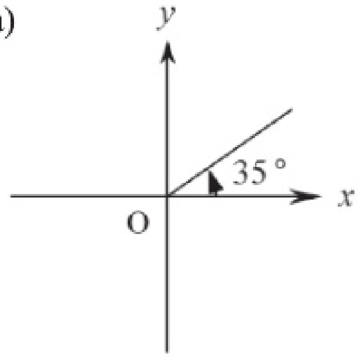
图7-2

例题 1

绘出下列各角并判别其所属的象限：

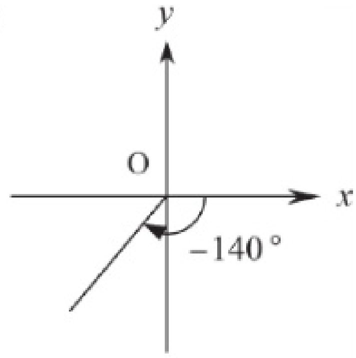
(a) 35°　　(b) -140°　　(c) 680°　　(d) $\frac{5\pi}{6}$

解 (a)



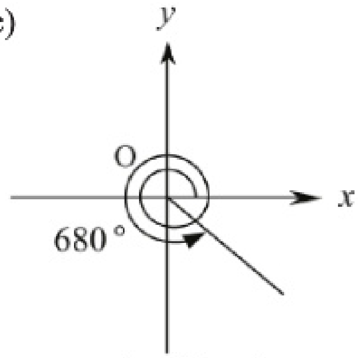
35° 属于第一象限

(b)



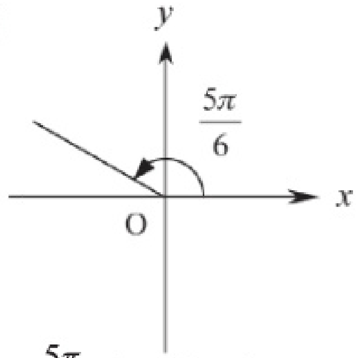
-140°属于第三象限

(c)



680° 属于第四象限

(d)



$\frac{5\pi}{6}$ 属于第二象限

随堂练习 1

1. 绘出下列各角并判别它们所属的象限：

   (a) $\frac{\pi}{3}$　　(b) -40°　　(c) -260°　　(d) 580°

2. 若$360^\circ<\theta<450^\circ$，则$\theta$属于第几象限角？

练习 7.1

1. 判别下列各角所属的象限：

   (a) 265°

   (b) 520°

   (c) 3900°

   (d) -230°

   (e) -843°

   (f) $2903^\circ 15'$

2. 若 $-90^\circ < \theta < 0^\circ$，则 θ 属于第几象限的角？

7.2 任意角三角函数的定义

在第6章，我们讨论了锐角的三角函数。在本章中，我们将三角函数的定义延伸到任意角。

当 α 为一个任意大小的角时，在角 α 的终边上任取一点P，设其坐标为 (x, y)，并令 $OP = r$，x 及 y 可为正值、负值或零，惟 $r > 0$，如图 7-3 所示：

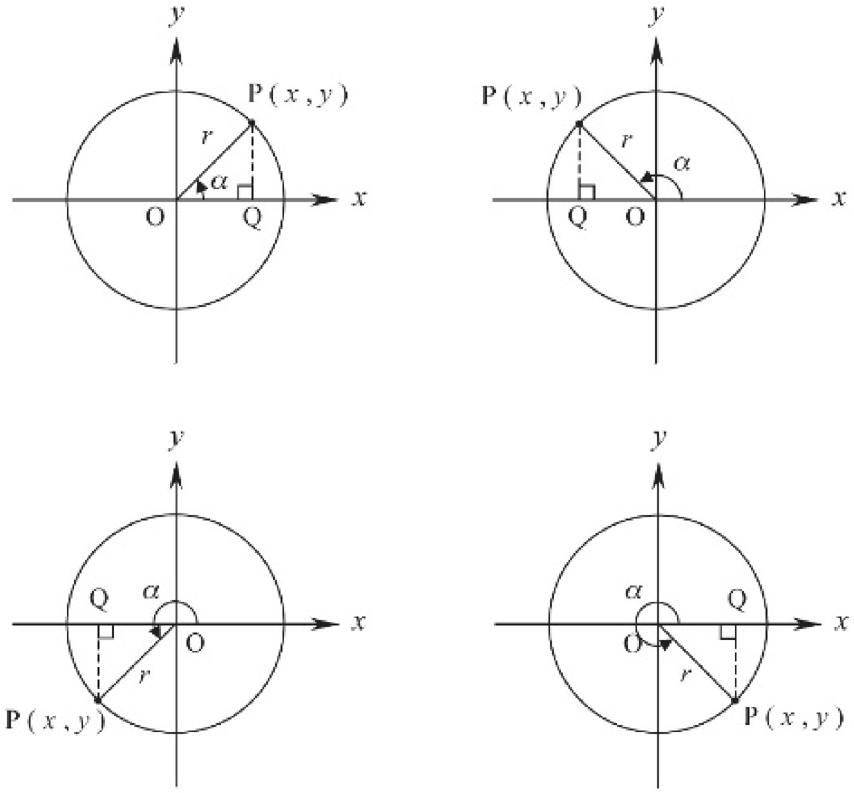


图7-3

以x，y及r定义任意角的三角函数如下：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r} \qquad \sec\alpha=\frac{r}{x}$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x} \qquad \cot\alpha=\frac{x}{y}$$

注意

当α的终边落在x轴上时，P点的y坐标为0。此时，$\cot\alpha$与$\operatorname{cosec}\alpha$的分母都是0。在此情况下，$\cot\alpha$与$\operatorname{cosec}\alpha$不存在。
当α的终边落在y轴上时，P点的x坐标为0。此时，$\tan\alpha$与$\sec\alpha$的分母都是0。在此情况下，$\tan\alpha$与$\sec\alpha$不存在。

例题 1

P(–3, 4) 是角 α 的终边上的一点。求角 α 的六个三角函数值。

解 $\because\ x=-3,\ y=4$

$\therefore\ r=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}$

$=5$

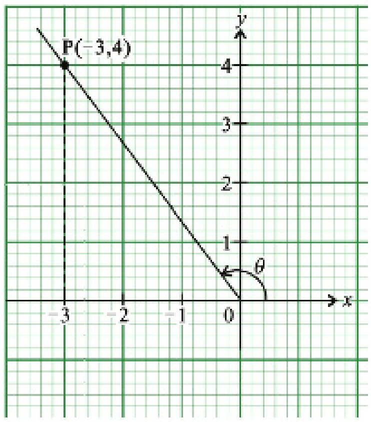


图7-4

$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{5}$　　$\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{r}{y}=\dfrac{5}{4}$

$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{3}{5}$　　$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}=-\dfrac{5}{3}$

$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=-\dfrac{4}{3}$　　$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}=-\dfrac{3}{4}$

随堂练习 2

已知 P(2, –3) 是角 α 的终边上的一点，求角 α 的六个三角函数值。

练习 7.2

已知下列各点是角 α 的终边上的点，求 α 的六个三角函数值：

(a) (8, 6)　(b) (–2, 1)　(c) $(-1, -\sqrt{3})$　(d) (24, –7)

7.3 任意三角函数值的求法

对于任何一个象限角 α，它的终边与 x 轴所夹的锐角 θ 叫做相伴锐角，如图7-5所示。

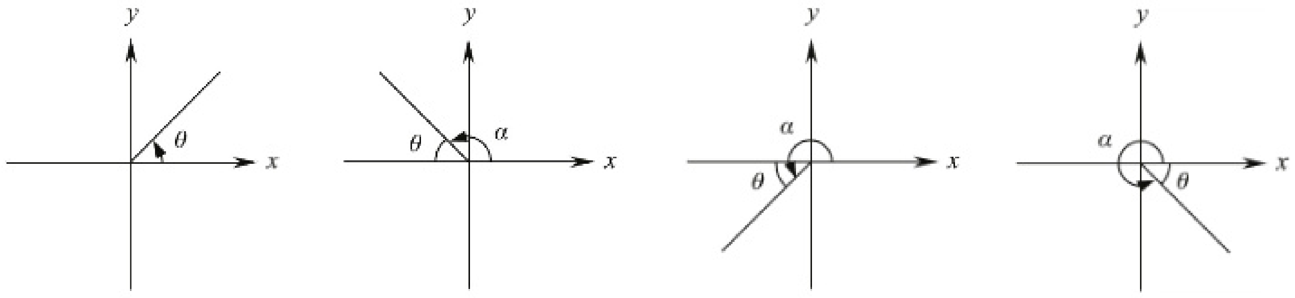


图7-5

在上一节中，我们以终边上的一个点 P 的坐标 (x, y) 及 OP 的长度 r 来定义三角函数。无论角 α 属于哪一个象限，r 恒为正值，而 x 与 y 的值则有正、负之分。因此，根据角 α 所属的象限，其三角函数值也有正负之分。

以下我们讨论 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 的正负性：

一、当 α 是第一象限的角时，x 与 y 都是正值，所以任何第一象限角的三角函数值都是正值。

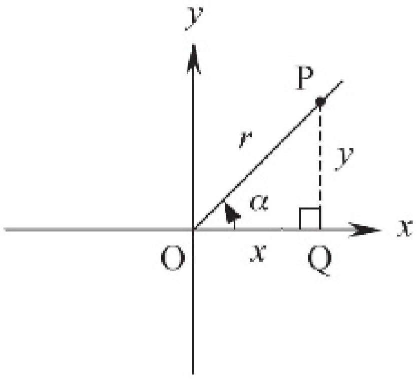


图7-6

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} = \text{正值}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{+}{+} = \text{正值}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{+}{+} = \text{正值}$$

二、当 α 是第二象限的角时，x 是负值，而 y 是正值，所以只有 $\sin\alpha$ 是正值。

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{+}{+}=\text{正值}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-}{+}=\text{负值}$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{+}{-}=\text{负值}$$

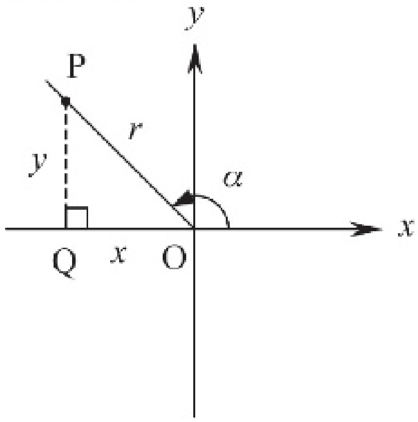


图7-7

三、当 α 是第三象限的角时，x 与 y 都是负值，所以只有 $\tan\alpha$ 是正值。

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-}{+}=\text{负值}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-}{+}=\text{负值}$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-}{-}=\text{正值}$$

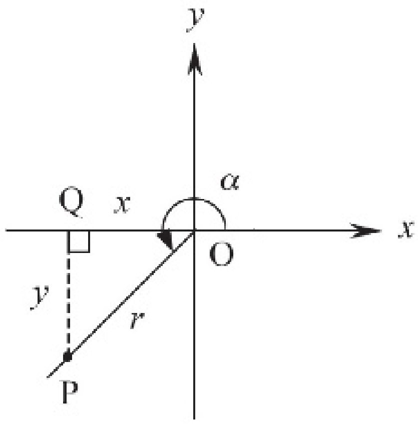


图7-8

四、当 α 是第四象限的角时，x 是正值，而 y 是负值，所以只有 $\cos\alpha$ 是正值。

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-}{+}=\text{负值}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{+}{+}=\text{正值}$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-}{+}=\text{负值}$$

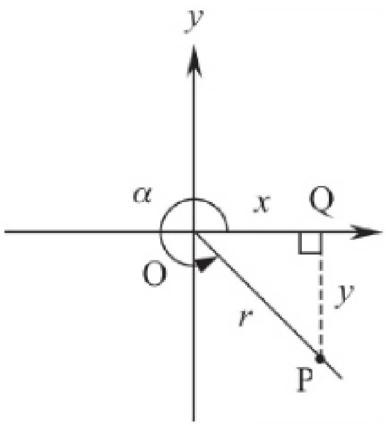


图7-9

为了帮助记忆，可将三个主要三角函数在不同象限中的正负值用图7-10归纳表示。

A：表示全部（All）是正值
S：表示 $\sin\alpha$ 是正值
T：表示 $\tan\alpha$ 是正值
C：表示 $\cos\alpha$ 是正值

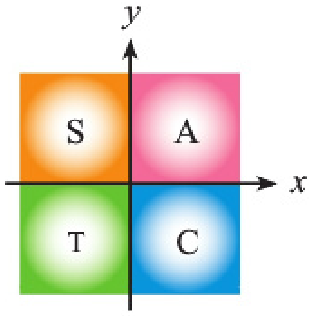


图7-10

注意

$\operatorname{cosec}\alpha$，$\sec\alpha$，$\cot\alpha$在各个象限中的正负号，依序与$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$相同。

以下列出终边落在坐标轴上的角的三角函数值：

	0°	90°	180°	270°
$\sin\theta$	0	1	0	–1
$\cos\theta$	1	0	–1	0
$\tan\theta$	0	没有定义	0	没有定义

例题 1

若 $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$，其中 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$，求 $\cos\alpha$ 及 $\tan\alpha$。

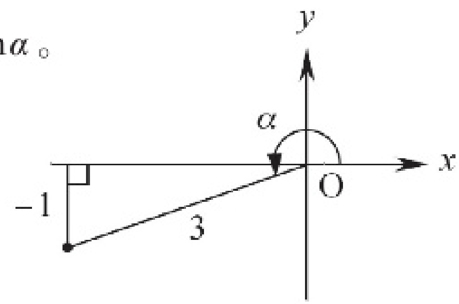


图7-11

解 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$，所以 α 是第三象限的角。

$\because \sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$

取 $r = 3$，$y = -1$

$x = -\sqrt{3^2 - 1^2}$ （α是第三象限的角，x是负值）

$= -\sqrt{8}$

$= -2\sqrt{2}$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{x}{r}$

$= -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$

$= \dfrac{-1}{-2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

例题 2

若 $\sec\alpha=\dfrac{3}{2}$ 且 $\tan\alpha<0$，求 $\operatorname{cosec}\alpha$ 及 $\cot\alpha$。

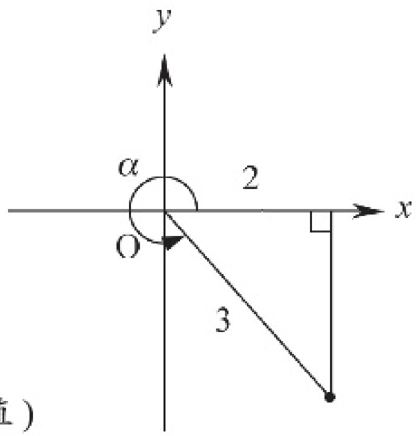


图7-12

解 $\sec\alpha>0$ 而 $\tan\alpha<0$，α 是第四象限的角。

$\because\ \sec\alpha=\dfrac{3}{2}$

取 $r=3$，$x=2$

$y=-\sqrt{3^2-2^2}$ （α 是第四象限的角，y是负值）

$=-\sqrt{5}$

$$\therefore\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}=\frac{3}{-\sqrt{5}}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{2}{-\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

例题 3

化下列各式为锐角的三角函数：

(a) $\sin 565^\circ$　　(b) $\operatorname{cosec}(-285^\circ)$

解 (a) 565°是第三象限的角，其相伴锐角是25°。

已知正弦函数在第三象限是负值，

$\therefore \sin 565^\circ = -\sin 25^\circ$

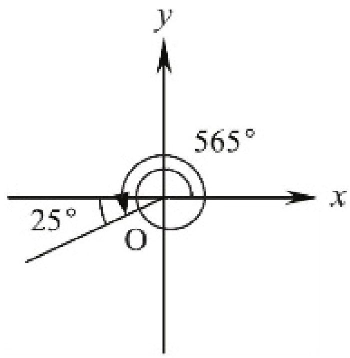


图7-13

(b) -285°是第一象限的角，其相伴锐角是75°。

已知任何三角函数在第一象限都是正值，

$\therefore \operatorname{cosec}(-285^\circ) = \operatorname{cosec} 75^\circ$

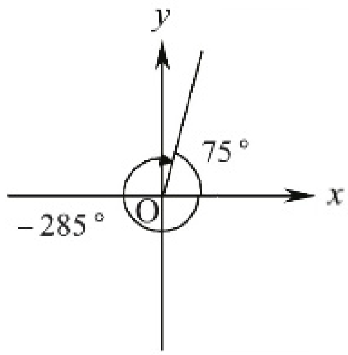


图7-14

例题 4

不使用计算机，求下列各三角函数的值：

(a) $\sin 210^\circ$　　(b) $\cos 300^\circ$

(c) $\tan(-150^\circ)$　　(d) $\cot(-480^\circ)$

解 (a) 210°是第三象限的角，其相伴锐角是 30°。

已知正弦函数在第三象限是负值，

$$\therefore \sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

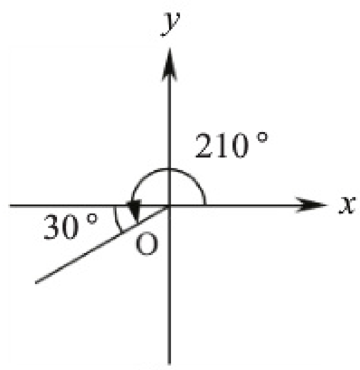


图7-15

(b) 300°是第四象限的角，其相伴锐角是 60°。

已知余弦函数在第四象限是正值，

$$\therefore \cos 300^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

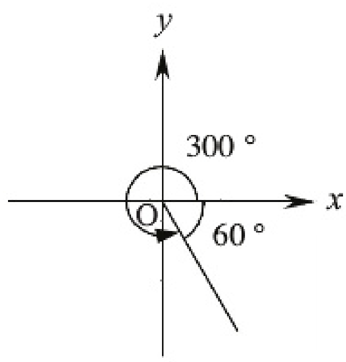


图7-16

(c) $$\tan(-150^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

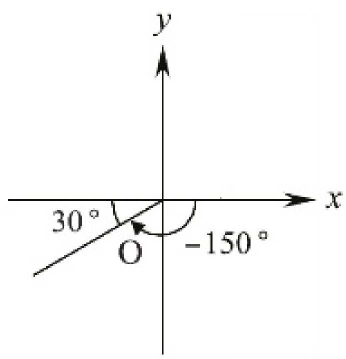


图7-17

(d) $\cot(-480^\circ) = \cot 60^\circ$

$= \dfrac{1}{\tan 60^\circ}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

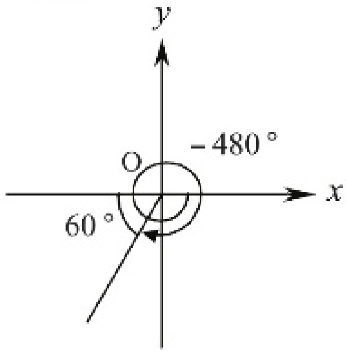


图7-18

随堂练习 3

1. 在下列各题中，判别角 θ 属于哪一个象限，并标明 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 的正负号。

	θ	象限	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
例	-20°	四	—	+	—
(a)	-120°				
(b)	48°				
(c)	162°				
(d)	210°				
(e)	330°				
(f)	530°				

2. 判别下列角 θ 所属的象限。

(a) $\cos\theta > 0$ θ 属于第________或________象限

(b) $\tan\theta < 0$ θ 属于第________或________象限

(c) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ θ 属于第________或________象限

(d) $\sin\theta\cos\theta > 0$ θ 属于第________或________象限

(e) $\sec\theta\tan\theta < 0$ θ 属于第________或________象限

3. 若角 α 属于第二象限，判别下列各式是正值或是负值：

(a) $\cos\alpha+\tan\alpha$ (b) $(3-\cos\alpha)\sin\alpha$

4. 若 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$ 且 $\sin\alpha>0$，求 $\cos\alpha$ 及 $\operatorname{cosec}\alpha$ 的值。

5. 不使用计算机，计算下列三角函数的值：

(a) $\sin 150^\circ$ (b) $\cos 210^\circ$

(c) $\cot 315^\circ$ (d) $\operatorname{cosec}(-1125^\circ)$

练习 7.3a

1. 不使用计算机，判别下列各三角函数是正值或负值：

(a) $\sin 210^\circ$ (b) $\cos 100^\circ$

(c) $\tan 250^\circ$ (d) $\cos 310^\circ$

(e) $\tan 640^\circ$ (f) $\sin 1060^\circ$

(g) $\cos(-45^\circ)$ (h) $\tan(-315^\circ)$

2. 根据下列各项条件，判别角 α 所属的象限。

(a) $\tan\alpha<0$ (b) $\sin\alpha>0$ 及 $\cos\alpha<0$

(c) $\sin\alpha$ 与 $\cot\alpha$ 同号 (d) $\cos\alpha$ 与 $\operatorname{cosec}\alpha$ 同号

(e) $\sin\alpha\cos\alpha<0$ (f) $\cot\alpha\sec\alpha>0$

3. 判别下列各题中角 α 所属的象限：

(a) $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ (b) $\cot\alpha=\frac{9}{5}$

(c) $\sin\alpha=0.5$ (d) $\tan^2\alpha=3$

4. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{4}$，求 $\sin\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 的值。

5. 已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ 且 $\cos\alpha>0$，求 $\tan\alpha$ 及 $\sec\alpha$。

6. 若 $\cot\alpha=-\frac{24}{7}$，求 $\cos\alpha$ 及 $\operatorname{cosec}\alpha$ 的值。

7. 若 $180^\circ<\alpha<270^\circ$ 且 $\operatorname{cosec}\alpha=-7$，求 $\cos\alpha$ 及 $\cot\alpha$。

8. 若 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$ 且 $\tan\theta>0$，求 $\cos\theta-\cot\theta$ 的值。

9. 若 $\cot\theta=\dfrac{1}{3}$ 且 $\sin\theta>0$，求 $\cos\theta+\operatorname{cosec}\theta$ 的值。

10. 若 $\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，求 $\dfrac{\tan\theta-\sin\theta}{\tan\theta+\sin\theta}$ 的值。

11. 若 $\sec\theta=-\dfrac{5}{2}$，求 $\sin^2\theta+3\cot^2\theta$ 的值。

12. 已知角 θ 终边上的一点为 $(3k,-4k)$。在下列条件下，求角 θ 的三角函数值：
 (a) $k>0$ (b) $k<0$

13. 将下列各式化为锐角的三角函数：
 (a) $\sin 675^\circ$ (b) $\cos 100^\circ$
 (c) $\tan(-590^\circ)$ (d) $\sec(-1000^\circ)$
 (e) $\operatorname{cosec} 930^\circ$

14. 不使用计算机，求下列各式的值：
 (a) $\sin 300^\circ$ (b) $\cos 150^\circ$
 (c) $\tan 315^\circ$ (d) $\sec(-330^\circ)$
 (e) $\operatorname{cosec}\dfrac{5\pi}{6}$ (f) $\sec\left(-\dfrac{17\pi}{6}\right)$
 (g) $\sin 1020^\circ$ (h) $\sin 660^\circ$
 (i) $\cot\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$ (j) $\operatorname{cosec} 13\pi$

15. 不使用计算机，求下列各式的值：
 (a) $\sin 210^\circ+\tan(-135^\circ)+\cos(-390^\circ)$
 (b) $\sin 60^\circ\cos 150^\circ-\cos 225^\circ\sin 315^\circ+\tan 300^\circ\sec 180^\circ$
 (c) $\sin 120^\circ+\cos^2 420^\circ+\tan 225^\circ-\operatorname{cosec}^2 240^\circ$
 (d) $\sec\dfrac{\pi}{3}+\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{6}-\left(\sin^2\dfrac{\pi}{4}+\cos^2\dfrac{\pi}{4}+1\right)$
 (e) $\tan\dfrac{8\pi}{3}\cos\dfrac{37\pi}{6}-\sin\dfrac{37\pi}{6}\cot\dfrac{17\pi}{4}$

正角与负角的三角函数关系

如图7-19所示，O是圆心，圆的半径是r。若任意角θ的终边交圆于点P（x, y），则$-\theta$的终边交圆于点P′($x, -y$)。因此，θ的终边与$-\theta$的终边在任何象限必定对x轴对称。

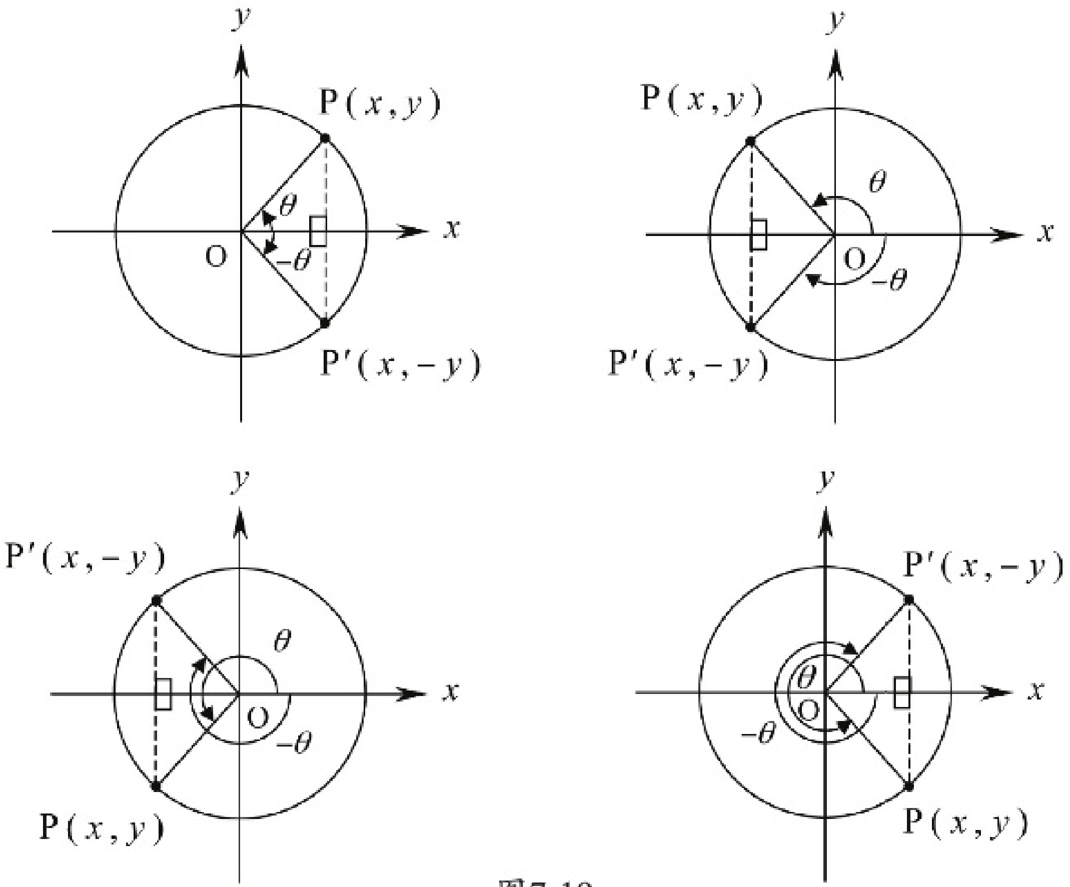


图7-19

无论θ属于哪个象限，根据三角函数的定义，我们可得

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \sin(-\theta)=-\frac{y}{r}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \cos(-\theta)=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \qquad \tan(-\theta)=-\frac{y}{x}$$

于是，我们得出以下正角与负角的三角函数关系：

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

补充资料

正角与负角的余割、正割及余切的关系可根据三角函数的倒数关系推导而得：

$$\operatorname{cosec}(-\theta)=\frac{1}{\sin(-\theta)}=-\operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(-\theta)=\frac{1}{\cos(-\theta)}=\sec\theta$$

$$\cot(-\theta)=\frac{1}{\tan(-\theta)}=-\cot\theta$$

$90^\circ\pm\theta$与θ的三角函数关系

如图7-20，设θ与$(90^\circ+\theta)$两个角的终边与圆分别相交于P与P′，则 OP＝OP′。自 P与 P′向x轴作垂线PQ与P′Q′，垂足分别为Q与Q′，那么$\Delta OPQ\cong\Delta OP'Q'$，则 PQ＝OQ′，OQ＝P′Q′。

考虑 P 与 P′ 在各个象限的符号，若 P 的坐标为(x, y)，则 P′ 的坐标就是 P′$(-y, x)$。

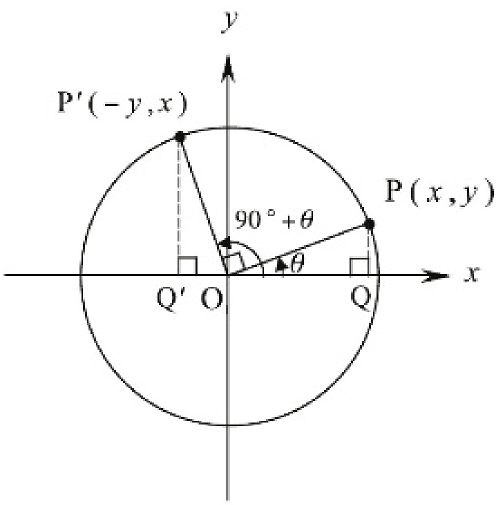


图7-20

根据三角函数的定义，

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \sin(90^\circ + \theta) = \frac{x}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \cos(90^\circ + \theta) = -\frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \tan(90^\circ + \theta) = -\frac{x}{y}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} \qquad \operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \frac{r}{x}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \sec(90^\circ + \theta) = -\frac{r}{y}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \qquad \cot(90^\circ + \theta) = -\frac{y}{x}$$

所以，我们得到以下公式：

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta \qquad \operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta \qquad \sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta \qquad \cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$$

在第6章，我们已经学习了 $90^\circ - \theta$ 与 θ 的三角函数关系：

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta \qquad \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \qquad \sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta \qquad \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$$

以上的三角函数关系对于任意角 θ 都成立。

事实上，将θ视为锐角，则$90^\circ+\theta$是第二象限的角，其相伴锐角是$90^\circ-\theta$。已知在第二象限中，正弦函数是正值。于是，我们得出以下关系：

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ+\theta)&=\sin(90^\circ-\theta)\\&=\cos\theta\end{aligned}$$

同理可得$90^\circ+\theta$与θ的其他三角函数关系。我们也可使用同样的方法写出$180^\circ\pm\theta$与θ，$270^\circ\pm\theta$与θ的三角函数关系，所导出的三角函数关系对于任意角θ都成立。

例题 5

化简下列各函数为θ的三角函数：

(a) $\operatorname{cosec}(720^\circ+\theta)$　　(b) $\cos(-\pi+\theta)$

(c) $\sec(-450^\circ+\theta)$　　(d) $\cot\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

解 (a) 将θ视为锐角，$720^\circ+\theta$是第一象限的角，其相伴锐角是θ。已知任何三角函数在第一象限的值都是正值。

$\therefore\ \operatorname{cosec}(720^\circ+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$

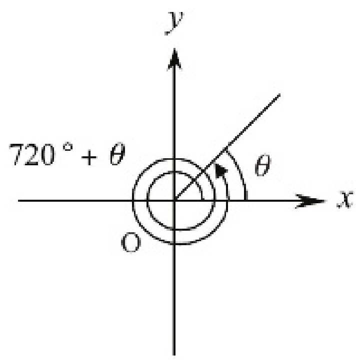


图7-21

(b) 将θ视为锐角，$-\pi+\theta$是第三象限的角，其相伴锐角是θ。已知余弦函数在第三象限是负值。

$\therefore\ \cos(-\pi+\theta)=-\cos\theta$

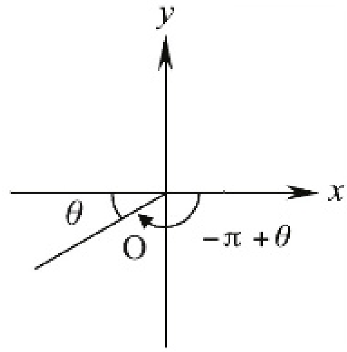


图7-22

(c) $\sec(-450^\circ+\theta)=\sec(90^\circ-\theta)$
$$=\operatorname{cosec}\theta$$

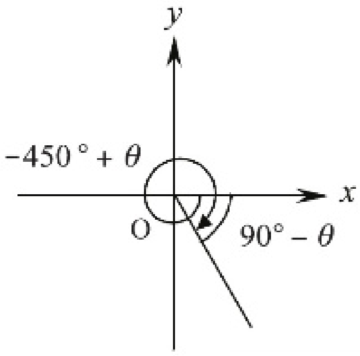


图7-23

(d) $\cot\left(-\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$
$$=\tan\theta$$

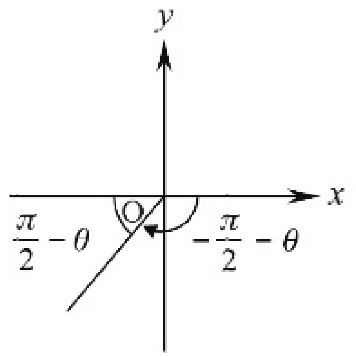


图7-24

随堂练习 4

1. 化下列各式为 θ 的三角函数：

(a) $\sin(450^\circ-\theta)$ (b) $\cos(\theta-270^\circ)$

(c) $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{7\pi}{2}-\theta\right)$ (d) $\cot(-5\pi-\theta)$

2. 若 $\sin\theta=\dfrac{15}{17}$ 且 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，求 $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi-\theta)}{\cos(-\theta)\tan(\pi+\theta)}$ 的值。

练习 7.3b

1. 化下列各式为 θ 的三角函数：

(a) $\sin(720^\circ-\theta)$　　(b) $\cos(630^\circ+\theta)$

(c) $\sec\left(\dfrac{5\pi}{2}-\theta\right)$　　(d) $\operatorname{cosec}(\theta-3\pi)$

(e) $\cot\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　(f) $\tan(4\pi+\theta)$

2. 化简下列各式：

(a) $\cos\theta\sec(360^\circ-\theta)$　　(b) $\sin(180^\circ+\theta)+\cos(270^\circ+\theta)$

(c) $\cos(360^\circ+\theta)-\cos(180^\circ-\theta)$　　(d) $\sec(90^\circ-\theta)+\cos(270^\circ+\theta)$

(e) $\dfrac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(270^\circ-\theta)}$　　(f) $\dfrac{\cot(360^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}$

3. 若 $\sin 10^\circ=k$，试以 k 表示下列各式：

(a) $\sin 190^\circ$　　(b) $\cos 350^\circ$

(c) $\tan(-10^\circ)$　　(d) $\sin 80^\circ$

4. 化简下列各式：

(a) $\cos(180^\circ+\theta)\sin(90^\circ+\theta)-\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$

(b) $\cos^2(90^\circ+\theta)-\sin(180^\circ+\theta)\cos(270^\circ+\theta)$

(c) $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(360^\circ-\theta)}-\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(90^\circ+\theta)}$

(d) $\cos(-\theta)\sec(270^\circ-\theta)+\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{\sin(180^\circ-\theta)}$

(e) $\dfrac{\sec(-\theta)}{\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)}+\dfrac{\cot(2\pi-\theta)}{\cot(\pi+\theta)}$

(f) $\dfrac{\cot\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)+\tan(3\pi+\theta)}{\sin(2\pi+\theta)\ \operatorname{cosec}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}$

5. 设 $0^\circ<\alpha<45^\circ$，求下列各式的值：

(a) $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(45^\circ-\alpha)$

(b) $\tan(45^\circ+\alpha)\tan(45^\circ-\alpha)$

6. 已知 $\sin\beta=\dfrac{8}{17}$，且 $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$。不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$

(b) $\cos(\beta-2\pi)$

(c) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}+\beta\right)$

(d) $\operatorname{cosec}(\beta-13\pi)+\sec\left(\dfrac{7\pi}{2}-\beta\right)$

(e) $\dfrac{\cos(\pi-\beta)\cos(2\pi-\beta)}{\cos(\pi+\beta)\cos(2\pi+\beta)}$

7. 已知 $\tan\theta=\dfrac{12}{5}$，且 $\sin\theta<0$。不使用计算机，求

$\dfrac{13\sin(\theta-270^\circ)}{12\operatorname{cosec}(-\theta)+5\tan(180^\circ+\theta)}$ 的值。

8. 若 $\dfrac{\sec^2(\pi-\theta)}{3\cot^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，求 $\cos\theta$ 的值。

9. 若 $\dfrac{\operatorname{cosec}^2(2\pi-\theta)}{\sec^2(\pi+\theta)}=3$，且 $\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，求 $\sin\theta$ 的值。

7.4 三角函数的图像

正弦函数 $y=\sin x$ 的图像

在 0 与 2π 之间任取一个角 x，我们都可以找出其所对应的正弦函数值 y。下表列出一些特别角的正弦函数值：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0

以每一组对应值作为点的坐标，在坐标平面上描出这些点，再用平滑的曲线将它们连接起来，就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在 $0\leq x\leq 2\pi$ 的图像。（见图7-25）

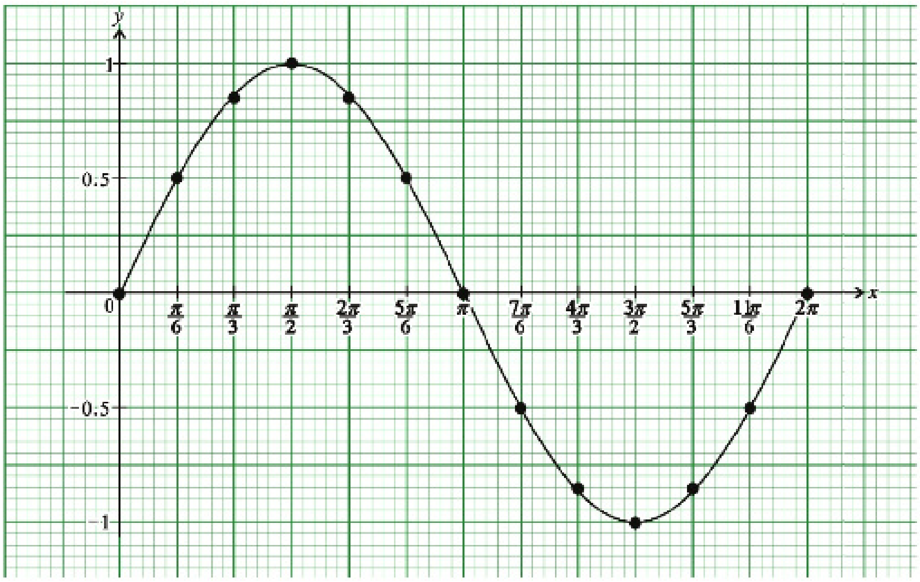


图7-25

从 $\sin(2\pi+x)=\sin x$ 得知，正弦函数 $y=\sin x$ 的图像每隔 2π 就重复出现，如图7-26所示。若一个函数的值在固定的间隔内重复出现，这个函数就称为周期函数，而这些重复的间隔就称为周期。正弦函数就是一个周期函数，其最小的正周期是 2π。

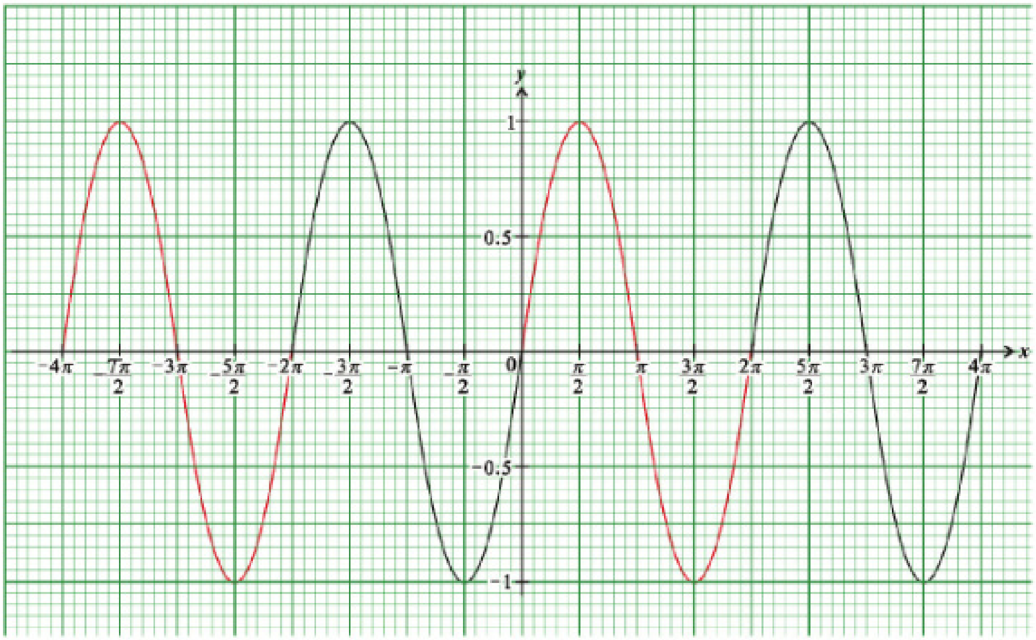


图7-26

从以上 $y=\sin x$ 的图像，我们可以观察到：

(1) 在 x 轴上，$\sin x=0$，则 $x=-2\pi$，$-\pi$，0，π 及 2π。

(2) 当 $x=-\dfrac{3\pi}{2}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 有最大值 1；

当 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 有最小值 -1。

所以，对于任何实数 x，$-1\le\sin x\le1$。

余弦函数 $y = \cos x$ 的图像

从 $\cos(2\pi + x) = \cos x$ 得知，$y = \cos x$ 也是一个以2π为周期的函数。通过在坐标平面上描点，可得到余弦函数 $y = \cos x$ 的曲线。

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0	0.5	0.87	0

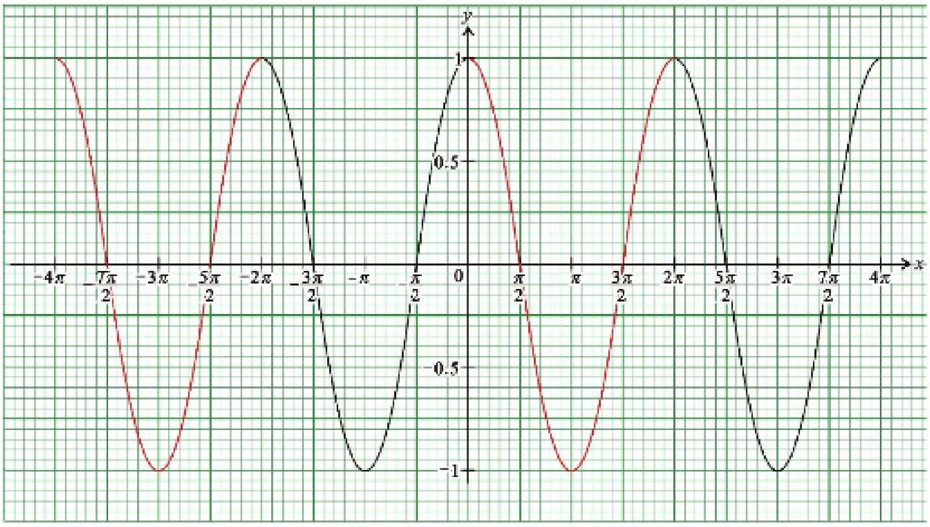


图7-27

从以上 $y = \cos x$ 的图像，我们可以观察到：

(1) 在 x 轴上，$\cos x = 0$，则 $x = -\frac{3\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$及 $\frac{3\pi}{2}$ 。

(2) 当 $x = -2\pi$ ，0 或 2π 时，$\cos x$ 有最大值 1 ；
当 $x = -\pi$ 或 π 时，$\cos x$ 有最小值 -1 。

所以，对于任何实数 x，$-1 \leq \cos x \leq 1$ 。

正切函数 $y=\tan x$ 的图像

从 $\tan(\pi+x)=\tan x$ 得知，$y=\tan x$ 是一个以 π 为周期的函数。图7-28所示是 $y=\tan x$ 的曲线。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	没有定义	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73	没有定义

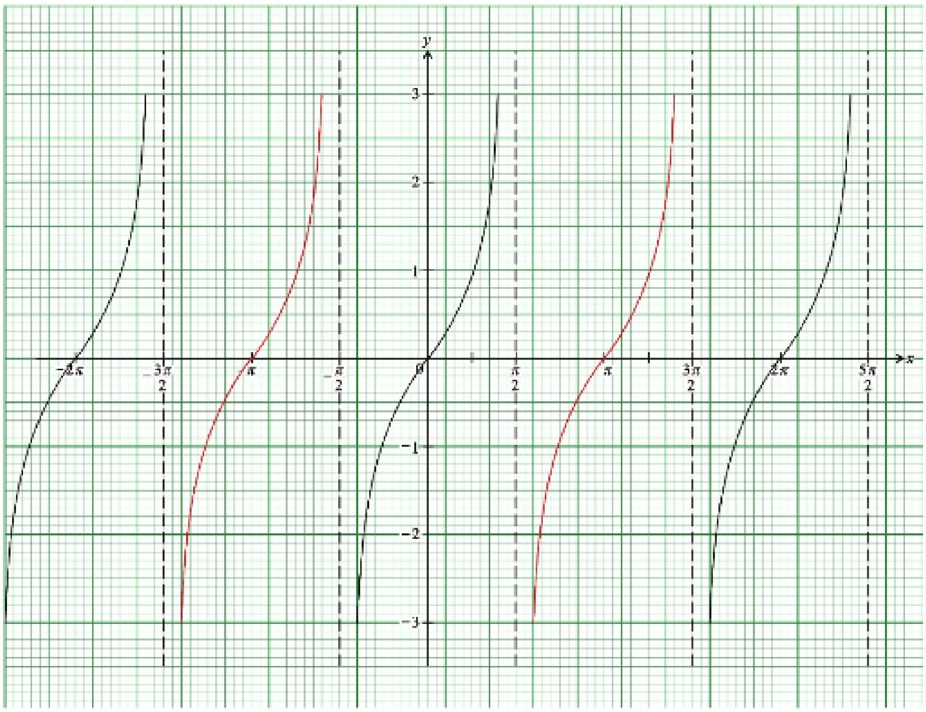


图7-28

从以上 $y=\tan x$ 的曲线，我们可以观察到：

(1) 在x轴上，$\tan x=0$，则 $x=-2\pi$，$-\pi$，0，π 及 2π。

(2) 与正弦函数及余弦函数不同，正切函数没有最大或最小值。

(3) 由于终边在 y 轴上的角的正切函数值（即 $\tan\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$，$\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\frac{\pi}{2}$ 等）没有定义，所以正切函数在 $x=-\frac{3\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{3\pi}{2}$ 出现不连续的现象。

补充资料

由于 $-\frac{3\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{3\pi}{2}$ 的正切函数都没有定义，当 x 的值趋近于这些角时，正切函数 $\tan x$ 的图像两端将无限延伸，如图 7-28 所示。图中的虚线称为函数 $\tan x$ 的渐近线。

总复习题 7

1. 判别下列各角所属的象限。

(a) 840°　　(b) -1100°　　(c) $\frac{13\pi}{12}$

(d) $-\frac{8\pi}{3}$　　(e) $\frac{11\pi}{4}$

2. 已知 P (12 , –5) 是角 θ 的终边上的一点，求 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 及 $\tan\theta$。

3. 已知 Q ($-\sqrt{2}$, 1) 是角 θ 的终边上的一点，求 θ 的六个三角函数值。

4. 已知 (–6 , y) 是角 θ 的终边上的一点，且 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$，求 y 及 $\tan\theta$ 的值。

5. 不使用计算机，判别下列各三角函数是正值或负值。

(a) $\sin 378^\circ$　　(b) $\cos 840^\circ$

(c) $\tan 1111^\circ$　　(d) $\cot 460^\circ$

(e) $\sec(-700^\circ)$　　(f) $\operatorname{cosec}(-1300^\circ)$

6. 设 $\tan\theta = \frac{8}{15}$，且 θ 是第三象限的角，求 $\cos\theta$ 及 $\operatorname{cosec}\theta$。

7. 已知 $\cos\theta = -\frac{5}{13}$，$\sin\theta < 0$，求 $\tan\theta$。

8. 设 $\tan A = \frac{15}{8}$，$\cos B = -\frac{8}{17}$，且 A 及 B 属同一象限的角，求：

(a) $\sin A$　　(b) $\cot(-B)$　　(c) $\frac{\tan B}{\cos A}$

9. 若 $\sin A = -\frac{24}{25}$，且 $-90^\circ < A < 0^\circ$，求：

(a) $\cos(-A)$　　(b) $\cot(90^\circ - A)$　　(c) $\sin(A - 180^\circ)$

10. 已知 $\tan\theta = -\frac{1}{2}$，求 $\frac{3\sin\theta + 2\cos\theta}{2\sin\theta + 3\cos\theta}$ 。

11. 已知 $4\tan\theta=-3$，$\cos\theta$ 为正值，求 $\dfrac{5\sin\theta+4\sec\theta}{3\cot\theta+10\cos\theta}$ 的值。

12. 设 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta<0$，求 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}-\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 的值。

13. 已知 $\dfrac{13\cos x+1}{2-4\cos x}=3$ 且 $\tan x<0$，求 $\sin x$ 的值。

14. 若 $\dfrac{1+\cos x}{1+\sec x}=\sin x$ 且 $\sin x>0$，$\cos x>0$，求 $\tan x$ 的值。

15. 设 $\sin 130^\circ=k$，试以 k 表示 $\sin 50^\circ$ 及 $\tan 40^\circ$ 的值。

16. 不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\tan 75^\circ\tan 15^\circ$　(b) $\dfrac{\sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}$　(c) $\sin 23^\circ-\cos 67^\circ$

17. 不使用计算机，求下列各三角函数的值：

(a) $\sin 240^\circ$　(b) $\cos 300^\circ$

(c) $\tan 810^\circ$　(d) $\sec(-270^\circ)$

(e) $\cos(-135^\circ)$　(f) $\tan(-600^\circ)$

(g) $\operatorname{cosec}\dfrac{13\pi}{4}$　(h) $\sec\dfrac{5\pi}{4}$

(i) $\cot\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$

18. 不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\sin 420^\circ\cos 750^\circ+\sin(-330^\circ)\cos(-660^\circ)$

(b) $5\sin 90^\circ+2\cos 0^\circ-3\sin 270^\circ+10\sin 180^\circ$

(c) $\dfrac{\sin 120^\circ+3\cos 210^\circ}{\operatorname{cosec} 330^\circ}$

(d) $\dfrac{\cot 120^\circ+2\sin 315^\circ}{\tan 210^\circ-\sec 225^\circ}$

(e) $\sin^2\dfrac{\pi}{4}-\cos^2\dfrac{\pi}{2}+6\tan^3\dfrac{3\pi}{4}+2\cos^2 2\pi$

19. 设 $\tan\theta = n$，且 θ 为一锐角，试以 n 表示下列各式：

(a) $\sin(180^\circ - \theta)$　　(b) $\sec(180^\circ - \theta)$

(c) $\tan(90^\circ - \theta)$　　(d) $\tan(360^\circ + \theta)$

20. 化简下列各式：

(a) $\sin(\alpha - 180^\circ) + \tan(\alpha - 180^\circ) - \cos(90^\circ + \alpha)$

(b) $\tan(\alpha - 360^\circ) - 2\sin(180^\circ + \alpha)\sin(90^\circ + \alpha) + \cot(270^\circ + \alpha)$

(c) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin(\alpha - 180^\circ)} - \dfrac{\cos(-\alpha)}{\sin(270^\circ - \alpha)}$

(d) $\dfrac{\cos(\pi - \alpha)\sin(2\pi - \alpha)\tan(4\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)\sin(2\pi + \alpha)\tan(4\pi + \alpha)}$

21. 已知 $4\tan\theta = -3$，$\cos\theta$ 为正值，求 $\dfrac{5\cos(90^\circ + \theta) + 4\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)}{3\tan(270^\circ - \theta) - 10\sin(270^\circ + \theta)}$。

22. 已知 $12\tan\theta = 5$ 且 $\cos\theta < 0$，求 $\dfrac{13\sin(180^\circ - \theta) - 12\sec(180^\circ + \theta)}{5\cot(-\theta) + 26\cos(360^\circ + \theta)}$。

23. 不使用计算机，求 $\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{3} - \cos\dfrac{4\pi}{3} - \tan\dfrac{5\pi}{3}}{\cos\dfrac{5\pi}{6} + \tan\dfrac{5\pi}{3} + \sin\dfrac{7\pi}{6}}$ 的值。

24. 化简 $\dfrac{\sin^2(\alpha + \pi)\cos(\pi + \alpha)\cot(\alpha - 2\pi)}{\tan(\pi + \alpha)\cos^3(-\alpha - \pi)}$。

8. 任意三角形的解法

学习目标：

- 掌握正弦定律及余弦定律，并利用正弦及余弦定律解任意三角形及测量问题
- 能使用三角形面积公式求任意三角形的面积

8.1 正弦定律

在第6章，我们讨论了用锐角三角函数来解直角三角形，即根据已知的边与角，求出未知的边与角。而对于任意三角形（锐角三角形、直角三角形或钝角三角形）的解法，则可使用正弦定律或余弦定律来阐述各边与各角之间的关系。

如图 8-1，Δ ABC 为锐角三角形。作垂线 AD 使 Δ ABC 分成两个直角三角形：Δ ABD 及 Δ ACD 。

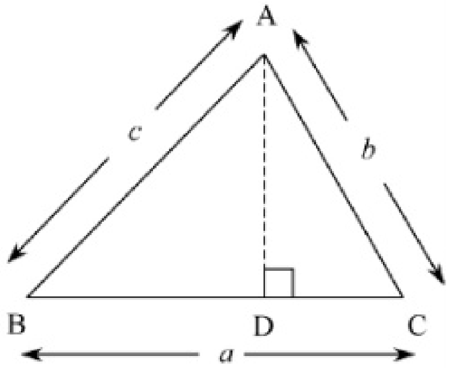


图 8-1

在 Δ ABD 中，$\sin B = \dfrac{AD}{c}$

$\therefore \quad AD = c \sin B \ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$

在 Δ ACD 中，$\sin C = \dfrac{AD}{b}$

$\therefore \quad AD = b \sin C \ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$

比较 (1) 及 (2)，得 $b \sin C = c \sin B$

$$\therefore \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

同理可证得 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ 及 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$。这些关系对于锐角三角形、直角三角形及钝角三角形均成立。

正弦定律 在一个三角形中，各边与其对角的正弦值的比相等。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

根据比例的基本性质，上述式子也可写成

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

即三角形的三边长之比等于其对角的正弦值之比。

三角形的外接圆半径

正弦定律也可用三角形外接圆半径的公式来推导。

一、在图 8-2 (a) 中，ΔABC 是一个直角三角形，O 是外接圆的圆心。设外接圆的半径为 R，则 $BC=2R=a$（a 为三角形顶点 A 所对的边），而 $\sin A=1$，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$。

二、图 8-2 (b) 中的 ΔABC 是锐角三角形。由点 B 作直径 BD，连接 CD，则 ΔBCD 是一个直角三角形。

由　$A=D$

得　$\sin D=\dfrac{a}{2R}=\sin A$

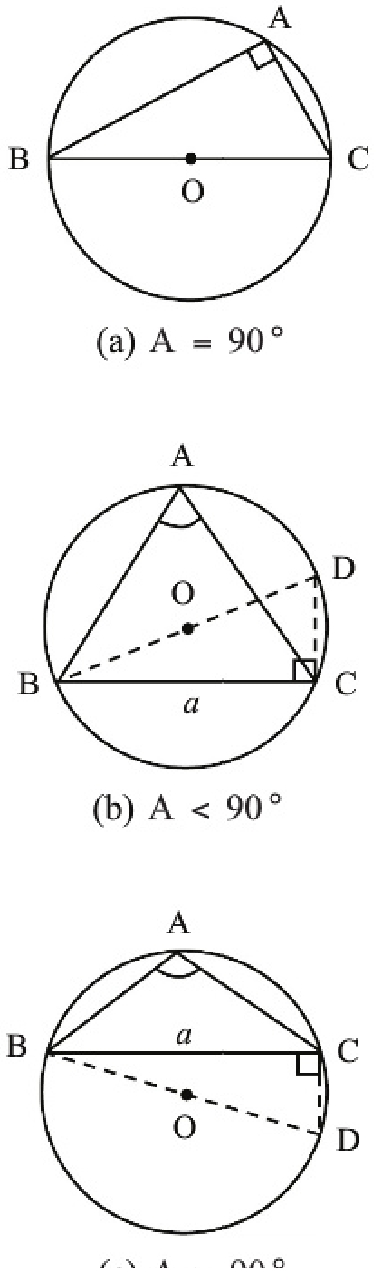
所以　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$

三、图 8-2 (c) 中的 ΔABC 是钝角三角形。由点 B 作直径 BD，连接 CD，则 ΔBCD 是一个直角三角形。

由　$A+D=180^\circ$

得　$\sin A=\sin(180^\circ-D)=\sin D=\dfrac{a}{2R}$

所以　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$



(a) $A=90^\circ$
(b) $A<90^\circ$
(c) $A>90^\circ$
图 8-2

由以上三种情形的论证得知，不论何种情形，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ 都成立。同理可证得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ 。所以，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

例题 1

在图 8-3 的 ΔABC 中，$AB=2.3$ cm， $B=72^\circ$ 及 $C=81^\circ$，求 AC 的长度。

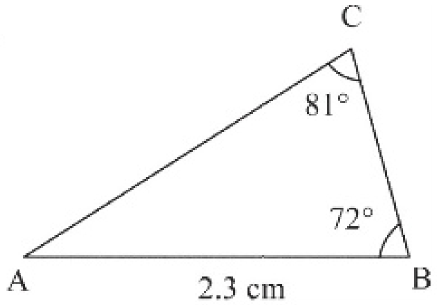


图 8-3

解 由正弦定律，得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$

$$AC=\frac{AB}{\sin C}\times\sin B$$

$$=\frac{2.3}{\sin 81^\circ}\times\sin 72^\circ$$

$$=2.21\text{ cm}$$

例题 2

如图 8-4 所示的 ΔPQR 中，$PQ=5.7$ cm，$PR=8.6$ cm，且 $Q=132^\circ$，求角 R 的值。

解 由正弦定律，得 $\dfrac{PQ}{\sin R}=\dfrac{PR}{\sin Q}$

$$\frac{5.7}{\sin R}=\frac{8.6}{\sin 132^\circ}$$

$$\sin R=\frac{5.7\times\sin 132^\circ}{8.6}$$

$$R=29.51^\circ \quad 或 \quad R=150.49^\circ$$

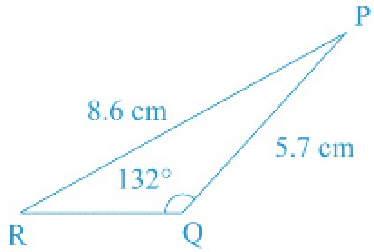


图 8-4

由题意得知，R是锐角。所以，$R=29.51^\circ$。

例题 3

在 ΔABC 中，已知 $A=30^\circ$，$AB=10\text{ cm}$，$BC=8\text{ cm}$。解 ΔABC。

解 由正弦定律，$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$

$$\sin C=\frac{AB}{BC}\times\sin A$$

$$=\frac{10}{8}\times\sin 30^\circ$$

$$C=38.68^\circ \quad \text{或} \quad C=180^\circ-38.68^\circ$$

$$=141.32^\circ$$

当 $C=38.68^\circ$ 时，$B=180^\circ-30^\circ-38.68^\circ$

$$=111.32^\circ$$

由正弦定律，得 $\dfrac{AC}{\sin 111.32^\circ}=\dfrac{8}{\sin 30^\circ}$

$$AC=\frac{8\times\sin 111.32^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$=14.91\text{ cm}$$

当 $C=141.32^\circ$ 时，$B=180^\circ-30^\circ-141.32^\circ$

$$=8.68^\circ$$

由正弦定律，得 $\dfrac{AC}{\sin 8.68^\circ}=\dfrac{8}{\sin 30^\circ}$

$$AC=\frac{8\times\sin 8.68^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$=2.41\text{ cm}$$

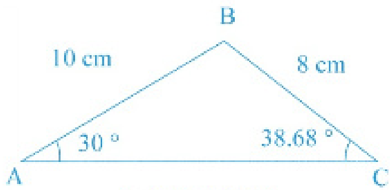
因此，$C=38.68^\circ$ 时，$B=111.32^\circ$，$AC=14.91\text{ cm}$

或 $C=141.32^\circ$ 时，$B=8.68^\circ$，$AC=2.41\text{ cm}$。

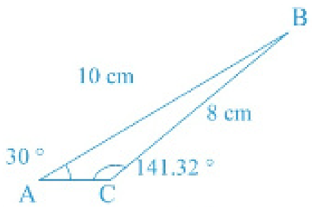
注意

在例题3中，由正弦定律，C的值是36.68°或141.32°，即C可以是一个锐角或一个钝角（见图8-5）。

不论C是取锐角或钝角，它们皆可构建出一个三角形。因此，例题3的条件实际上可解得两个不同的三角形。



(a) C是锐角

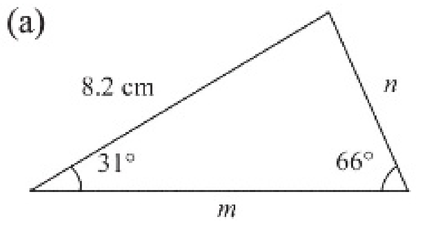


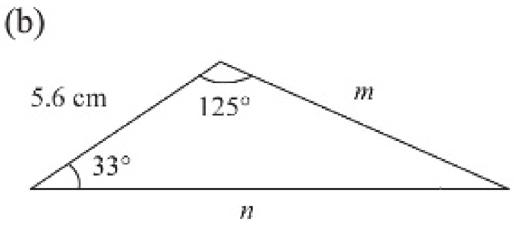
(b) C是钝角

图 8-5

随堂练习 1

1. 求下列各三角形中 m 及 n 的值：





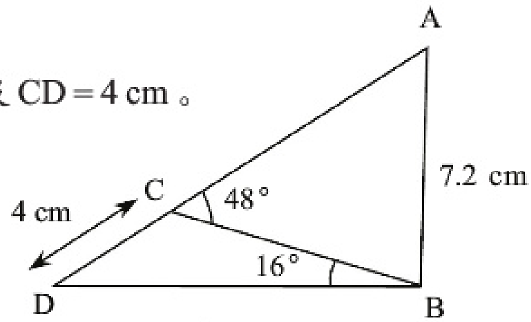
2. 在 ΔPQR 中，$\angle$QPR $=40^\circ$，PR $=10$ cm，RQ $=7$ cm，求$\angle$PQR。

3. 在 ΔABC 中，$a=25.56$ cm，$b=41.50$ cm，A $=33^\circ$，解 ΔABC。

练习 8.1

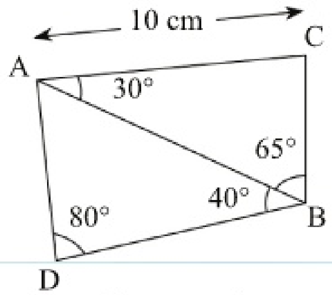
1. 根据下列条件，用正弦定律解 ΔABC：
   (a) $c=10$ cm，A $=45^\circ$，C $=30^\circ$
   (b) $a=10$ cm，$c=4$ cm，A $=30^\circ$
   (c) $a=60$ cm，$c=50$ cm，A $=38^\circ$
   (d) $a=32$ cm，$c=27$ cm，C $=52^\circ$
   (e) $a=9.3$ cm，$c=6.5$ cm，A $=124^\circ$
   (f) $c=8.65$ cm，A $=60^\circ$，B $=36^\circ$

2. 如右图所示，AD 是直线，$\angle$ACB $=48^\circ$，$\angle$CBD $=16^\circ$，$\angle$BAC是锐角，AB $=7.2$ cm 及 CD $=4$ cm。求
   (a) BC 的长；
   (b) $\angle$BAC；
   (c) ACD 的长。



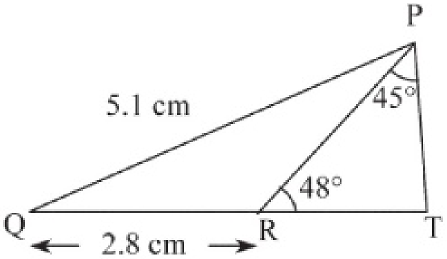
（第2题用图）

3. 如右图所示，$\angle BAC = 30^\circ$，$\angle ABC = 65^\circ$，$\angle ABD = 40^\circ$，$\angle ADB = 80^\circ$ 及 AC = 10 cm 。求 BD 的长。



（第3题用图）

4. 如右图所示，QRT是一直线，QR=2.8cm，PQ = 5.1cm，$\angle RPT = 45^\circ$ 及 $\angle PRT = 48^\circ$。求 RT的长。



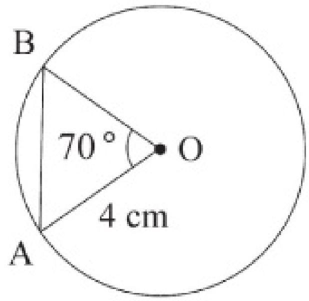
（第4题用图）

5. 平行四边形一条对角线长为 76 cm，此对角线与两边所成的角分别是 40° 及 52° 。求此平行四边形的边长。

6. 已知 ΔABC 是一个等边三角形。若其外接圆的直径是10 cm，求 ΔABC 的周长。

7. 在 ΔABC 中，已知 $A = 45^\circ$，$B = 120^\circ$，外接圆半径是 20 cm，求 a，b，c。

8. 右图是一个以 O 为圆心，半径为 4 cm 的圆。A、B 是圆上的两点，$\angle AOB = 70^\circ$。求弦 AB 的长。



（第8题用图）

9. ΔABC 的周长是 40 cm，若 $A : B : C = 1 : 2 : 6$，求 a，b，c。

8.2 余弦定律

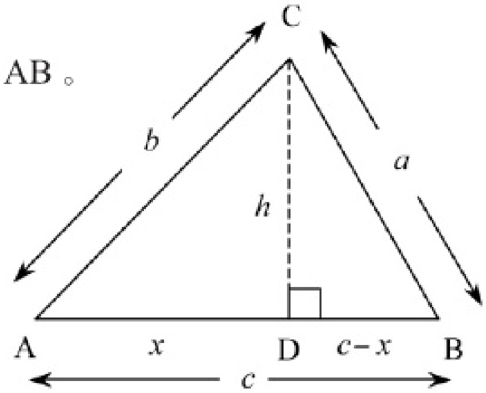


图 8-6

如图 8-6，ΔABC 是锐角三角形，作垂线使 CD$\perp$AB 。
设 CD$=h$ ，AD$=x$ 。因此，DB$=c-x$ 。

在ΔACD 中，$h^2=b^2-x^2$ ……………… (1)

在ΔBCD 中，$h^2=a^2-(c-x)^2$ ……………… (2)

比较 (1) 及 (2) ，得 $a^2-(c-x)^2=b^2-x^2$

$$a^2-c^2+2cx-x^2=b^2-x^2$$

$$a^2=b^2+c^2-2cx$$

在ΔACD 中，$\cos A=\dfrac{x}{b}$

$$x=b\cos A$$

$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

同理可证得 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ 及 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 。
这些关系对于锐角三角形、直角三角形及钝角三角形均成立。

余弦定律 已知一个三角形的任何两边与它们的夹角，即可求出第三边。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

上述余弦定律的式子亦可写成下列形式:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

由此可知，已知三角形的三边，可进一步求得三角形的各内角。

补充资料

当三角形的其中一个内角为直角时，由余弦定律可得

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= b^2+c^2-2bc\cos 90^\circ \\ &= b^2+c^2 \end{aligned}$$

由此可知，毕氏定理可视为余弦定律用于直角三角形的特例。

例题 1

在ΔABC中，$AB=4.3$ cm，$AC=2.6$ cm 及 $A=79^\circ$，解ΔABC。

解 由余弦定律，得 $BC^2 = AB^2+AC^2-2\,AB\cdot AC\cos A$

$$= 4.3^2+2.6^2-2(4.3)(2.6)\cos 79^\circ$$

$$BC = 4.58 \text{ cm}$$

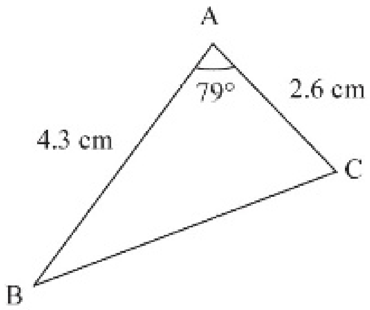


图 8-7

由余弦定律，得 $\cos B = \dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$

$$= \frac{(4.3)^2+(4.58)^2-(2.6)^2}{2(4.3)(4.58)}$$

$$B = 33.86^\circ$$

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ-79^\circ-33.86^\circ \\ &= 67.14^\circ \end{aligned}$$

$\therefore$ $BC=4.58$ cm，$B=33.86^\circ$，$C=67.14^\circ$

例题 2

在 ΔABC 中，已知 $a=7$，$b=10$ 及 $c=6$，求 ΔABC 的三个内角。

解 由余弦定律，得
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{10^2+6^2-7^2}{2(10)(6)}=\frac{87}{120}$$
$$A=43.53^\circ$$

同理，
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{6^2+7^2-10^2}{2(6)(7)}=-\frac{15}{84}$$
$$B=100.29^\circ$$

$$\therefore\ C=180^\circ-43.53^\circ-100.29^\circ=36.18^\circ$$

例题 3

在 ΔABC 中，$a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{4}:\sqrt{5}$，求此三角形的最大内角。

解 设 $a=\sqrt{3}k$, $b=\sqrt{4}k$, $c=\sqrt{5}k$。

已知大边对大角，因此，C为ΔABC的最大内角。

由余弦定律，

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{(\sqrt{3}k)^2+(\sqrt{4}k)^2-(\sqrt{5}k)^2}{2(\sqrt{3}k)(\sqrt{4}k)}\\ &= \frac{2k^2}{4\sqrt{3}k^2}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ C &= 73.22^\circ\end{aligned}$$

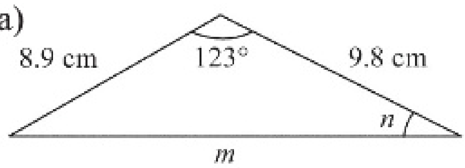
注意

在例题3中，
$a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{4}:\sqrt{5}$
是三角形各边长的比。
a，b 及 c 的实际长度分别是$\sqrt{3}k$,$\sqrt{4}k$及$\sqrt{5}k$（k是变数）。

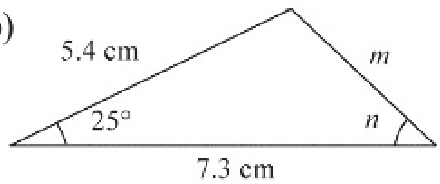
随堂练习 2

1. 求下列图形中的 m 与 n 的值：

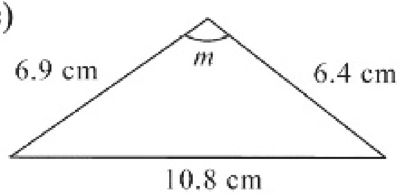
(a)



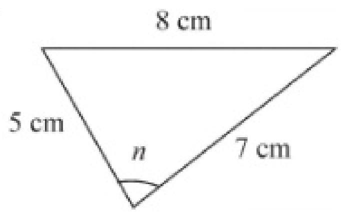
(b)



(c)



(d)



2. 求三边长分别是6 cm，10 cm 及 14 cm 的三角形的最小内角。

练习 8.2

1. 根据下列条件，用余弦定律解 ΔABC：

   (a) $b = 3$ cm，$c = 8$ cm，$A = 60^\circ$

   (b) $a = 3\sqrt{3}$ cm，$c = 2$ cm，$B = 150^\circ$

   (c) $a = 2.73$ cm，$b = 3.7$ cm，$c = 4.3$ cm

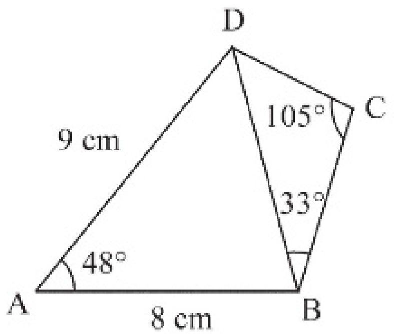
   (d) $a = \sqrt{8}$ cm，$b = \sqrt{12}$ cm，$C = 45^\circ$

   (e) $b = 4.1$ cm，$c = 6.3$ cm，$A = 30^\circ$

   (f) $a = 2$ cm，$b = \sqrt{2}$ cm，$c = (\sqrt{3} + 1)$ cm

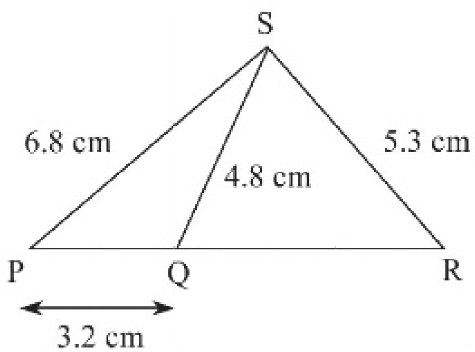
2. 三角形三边的长度为 24 cm，18 cm 及 12 cm，求其最大内角。

3. 如右图所示，ABCD 是一四边形，$AB = 8$ cm，$AD = 9$ cm，$\angle BAD = 48^\circ$，$\angle BCD = 105^\circ$，$\angle CBD = 33^\circ$，求 CD 的长。



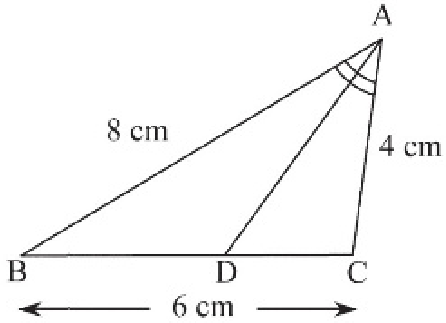
（第3题用图）

4. 如右图所示，PQR 是直线，$PS = 6.8$ cm，$PQ = 3.2$ cm，$QS = 4.8$ cm，$RS = 5.3$ cm，求 $\angle SRQ$。



（第4题用图）

5. 如右图所示，BDC 是直线，A D 是∠BAC 的角平分线。已知 AB＝8cm，BC＝6cm，AC＝4cm，求 AD 的长。



（第5题用图）

6. 已知平行四边形的两边长分别是 60 cm 及 45 cm，较短的对角线为 30 cm，求较长的对角线。
7. 在 ΔABC 中，若 $a^2-b^2-c^2=bc$，求 A。
8. 在 ΔABC 中，$a:b:c=2:3:4$，求其最小内角。
9. 在 ΔABC 中，若 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，求 A。

8.3 三角测量问题

在第 6.5 节的例题 4 中，我们学习了使用直角三角形的解法来求吉隆坡塔的高度。同样的问题，我们也可使用任意三角形的解法。例题 1 使用了正弦定律来求塔高。

例题 1

从平地上两点 P 及 Q 分别测得吉隆坡塔顶 R 的仰角是 68° 及 81°。已知P，Q 两点的距离为 103.42 m，求吉隆坡塔的高度。

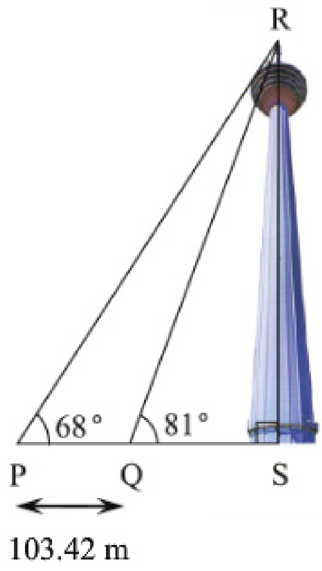


图 8-8

解

$$\angle PRQ = 81^\circ - 68^\circ$$
$$= 13^\circ$$

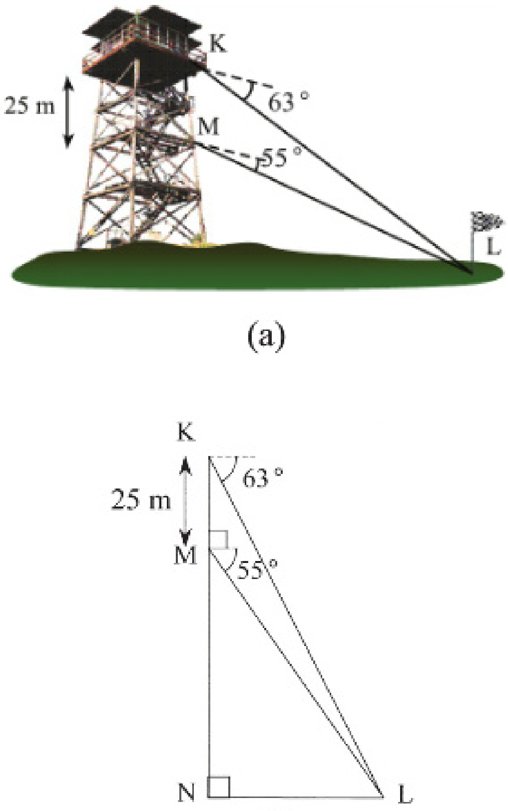
在 ΔPRQ 中，
$$\frac{QR}{\sin 68^\circ} = \frac{103.42}{\sin 13^\circ}$$
$$QR = \frac{103.42 \times \sin 68^\circ}{\sin 13^\circ}$$

在 ΔRQS 中，
$$RS = QR \times \sin 81^\circ$$
$$= \frac{103.42 \times \sin 68^\circ}{\sin 13^\circ} \times \sin 81^\circ$$
$$= 421.02 \text{ m}$$

∴ 吉隆坡塔的高度为 421.02 m。

例题 2

从观景塔的顶层 K 测得地面上一点 L 的俯角是 63°。
若从 K 往下 25 m 至 M 处，所测得L的俯角是 55°。
求观景塔与点 L 的距离。



(a)

(b)

图 8-9

解

$$\angle LKM = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$$

$$\angle KLM = 63^\circ - 55^\circ = 8^\circ$$

$$\angle KML = 90^\circ + 55^\circ = 145^\circ$$

在 ΔKLM 中，由正弦定律得，

$$\frac{KL}{\sin\angle KML} = \frac{KM}{\sin\angle KLM}$$

$$\frac{KL}{\sin 145^\circ} = \frac{25}{\sin 8^\circ}$$

$$KL = \frac{25\times\sin 145^\circ}{\sin 8^\circ}$$

$$\sin\angle LKM = \frac{LN}{KL}$$

$$LN = KL\times\sin\angle LKM$$

$$= \frac{25\times\sin 145^\circ}{\sin 8^\circ}\times\sin 27^\circ$$

$$= 46.78 \text{ m}$$

∴ 观景塔与点 L 的距离是 46.78 m。

例题 3

从平地上两点 A 及B 测得意大利比萨斜塔塔顶 C 的仰角分别是 80° 及 72°。已知点 A 与塔底中心点 D 的距离为 15.27 m，A，B 两点的距离为 8.32 m。求斜塔的高度及倾斜度。

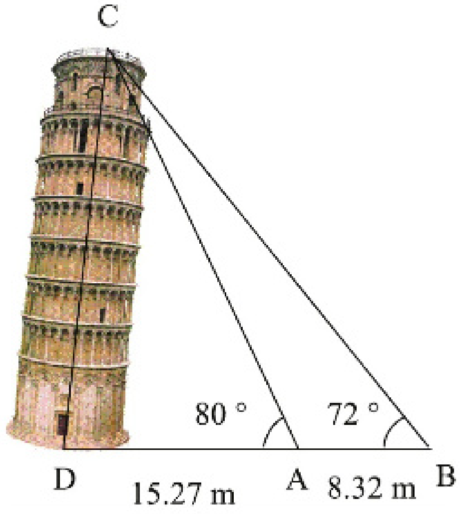


图 8-10

解

$$\angle ACB = 80^\circ - 72^\circ$$
$$= 8^\circ$$

在 ΔABC 中，由正弦定律得，

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{\sin\angle ACB}$$
$$\frac{AC}{\sin 72^\circ} = \frac{8.32}{\sin 8^\circ}$$
$$AC = \frac{8.32 \times \sin 72^\circ}{\sin 8^\circ}$$
$$= 56.86$$

在 ΔACD 中，由余弦定律得，

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2\,(AD)\,(AC)\ \cos\angle CAD$$
$$= (15.27)^2 + (56.86)^2 - 2\,(15.27)\,(56.86)\cos 80^\circ$$
$$CD = 56.26\text{ m}$$

（续） 由正弦定律得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$

$$\sin\angle ADC=\frac{AC\times\sin\angle CAD}{CD}$$

$$=\frac{56.86\times\sin 80^\circ}{56.26}$$

$$\angle ADC=84.45^\circ$$

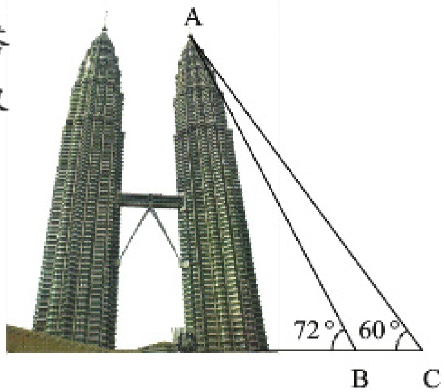
因此，斜塔的倾斜度 $=90^\circ-84.45^\circ$

$=5.55^\circ$

∴ 斜塔的高度是 56.26 m，倾斜度是 5.55°。

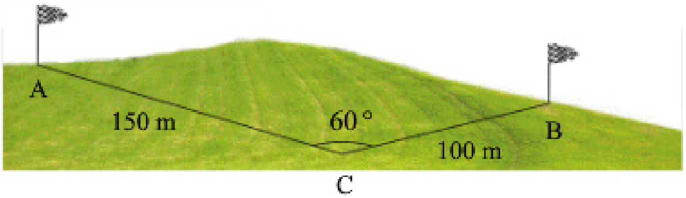
随堂练习 3

1. 如右图所示，从平地两点 B 及 C 测得国油双峰塔其中一座塔顶 A 的仰角分别是 72° 及 60°。已知双峰塔的高度是 452 m，求 B，C 两处的距离。



（第1题用图）

2. 如下图所示，A，B 是草地上的两点。某人站在点C 处，测得 $\angle ACB=60^\circ$，$AC=150$ m 及 $BC=100$ m。求 A，B 两点的距离。



（第2题用图）

例题 4

一艘货轮在海上以每小时35海里的速度沿着方位角为148°的方向航行。此货轮在B点观测灯塔A的方位角是126°，航行半小时后到达C点，观测灯塔A的方位角是078°，求货轮到达C点时与灯塔A的距离。

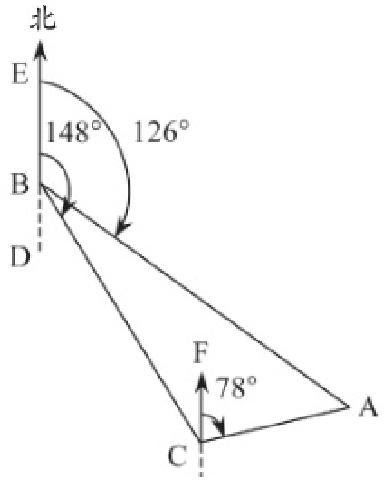


图 8-11

解 货轮的航行速度为每小时35海里，从B点航行到C点需半小时。

$$BC = 35 \times \frac{1}{2} = 17.5 \text{ 海里}$$

$$\angle DBC = 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$$

又 $BE \parallel CF$，故 $\angle BCF = 32^\circ$。

$$\therefore \angle BCA = 32^\circ + 78^\circ = 110^\circ$$

$$\angle ABC = 148^\circ - 126^\circ = 22^\circ$$

$$A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle BCA) = 180^\circ - (110^\circ + 22^\circ) = 48^\circ$$

（续）在 ΔABC 中，由正弦定律得

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

$$\frac{17.5}{\sin 48^\circ}=\frac{AC}{\sin 22^\circ}$$

$$AC=\frac{17.5\times\sin 22^\circ}{\sin 48^\circ}$$

$$=8.82 \text{ 海里}$$

∴ 货轮到达 C 点时与灯塔 A 的距离是 8.82 海里。

例题 5

有两座码头 A 及 B 。甲船由码头 A 以每小时 40 海里的速度往方位角为 070°的方向航行。乙船则以每小时 50 海里的速度由码头B 往方位角为 220° 的方向航行。若两船 45 分钟后在 C 处相遇，求两座码头的距离。

解 甲船的航行速度为每小时 40 海里，从码头 A 到 C 需时45 分钟，则

$$AC=40\times\frac{45}{60}$$

$$=30 \text{ 海里}$$

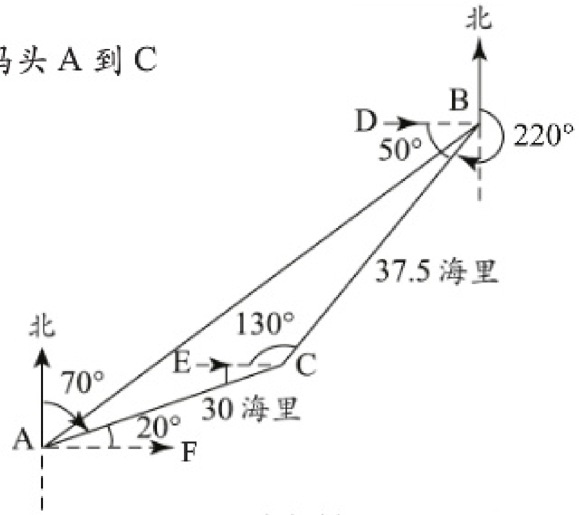


图 8-12

（续） 乙船以每小时50海里的速度航行45分钟，则

$$BC = 50 \times \frac{45}{60}$$

$$= 37.5 \text{ 海里}$$

$$\angle CBD = 270^\circ - 220^\circ$$

$$= 50^\circ$$

又 $BD \parallel CE \parallel AF$，故

$\angle BCE = 180^\circ - \angle CBD$（同旁内角互补）

$$= 180^\circ - 50^\circ$$

$$= 130^\circ$$

$\angle ACE = \angle CAF = 20^\circ$（内错角相等）

$$\therefore \angle ACB = \angle ACE + \angle BCE$$

$$= 20^\circ + 130^\circ$$

$$= 150^\circ$$

由余弦定律，

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos\angle ACB$$

$$= (30)^2 + (37.5)^2 - 2\,(30)(37.5)\cos 150^\circ$$

$AB = 65.23$ 海里

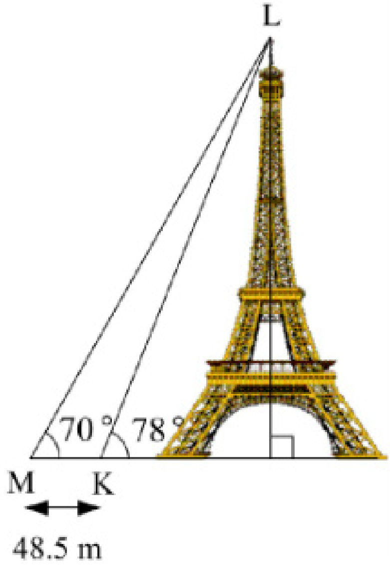
$\therefore$ 两座码头的距离是65.23海里。

随堂练习 4

一船在码头A 观测灯塔C 的方位角是060°。随后，该船由码头 A 以40 海里/小时的速度往正东方向航行。两个小时后，该船到达B 点，并在该处测得灯塔C 的方位角是340°。求BC 的距离。（答案准确至两位小数）

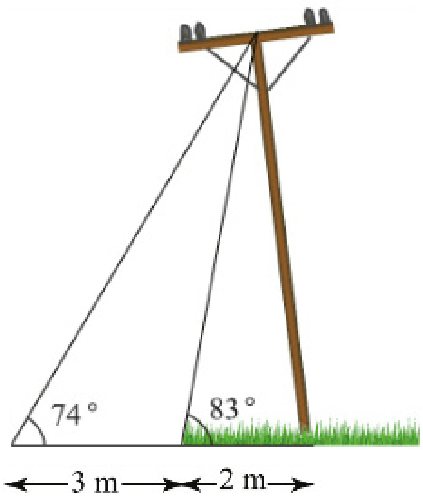
练习 8.3

1. 如右图所示，从平地两点K及M测得巴黎铁塔塔顶L 的仰角分别是78° 及70°。已知K，M 两点的距离是48.5m，求塔高。



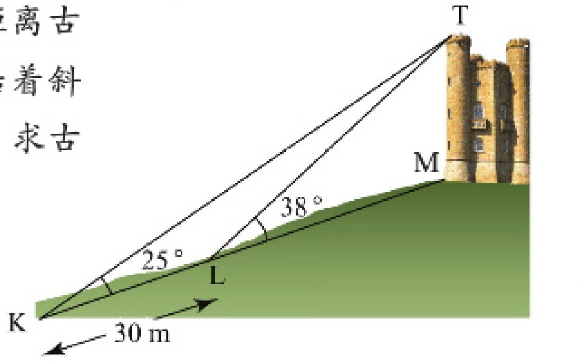
（第1题用图）

2. 如右图所示，某人在离一根倾斜的电线杆 2 m 处测得杆顶的仰角是83°，再往外走3 m 后则测得杆顶的仰角是74°。求电线杆的长度。



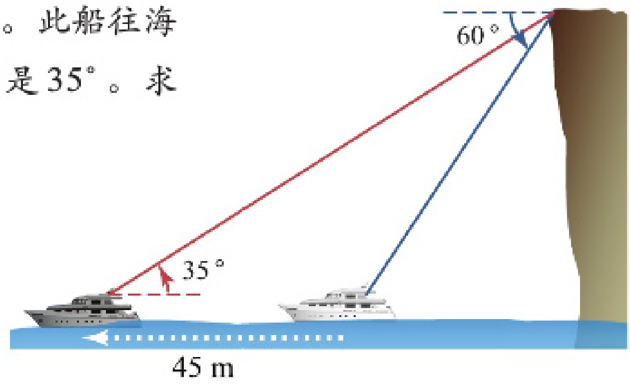
（第2题用图）

3. 如右图所示，一座古堡矗立在斜坡上。在距离古堡65 m 处的山坡底 K 测得∠TKM = 25°，沿着斜坡向古堡走了 30 m 后，测得∠TLM = 38°。求古堡的高度。



（第3题用图）

4. 从崖边观测海面上一艘船的俯角是60°。此船往海中方向航行 45 m 后，测得崖边的仰角是35°。求山崖距离海平面的高度。



（第4题用图）

5. 一艘船A以每小时45 海里的速度沿着方位角为150° 的方向航行。另一艘船 B 则同时以每小时 58 海里的速度朝方位角为130° 的方向航行。求
(a) 两艘船在两小时后的距离；
(b) 由船A观测船 B的方位角。

6. 一艘船从码头以每小时 50 海里的速度往正东方的一座岛屿 K 航行。45分钟后抵达岛 K，再继续以同样速度前往其东北方的另一座岛屿 L，并在 1小时后抵达岛 L。求码头与岛 L 的距离。

8.4 三角形的面积

一个任意三角形的面积可以根据其底与高求得。在三角形的高度未知的情况下，若已知三角形的两边及其夹角、两角及一边，或三角形的三边，也可以求得三角形的面积。

如图8-13，Δ ABC 是锐角三角形。作直线BD 使 BD $\perp$ AC 。当 Δ ABC 以 AC 为底时，BD 便是三角形的高。

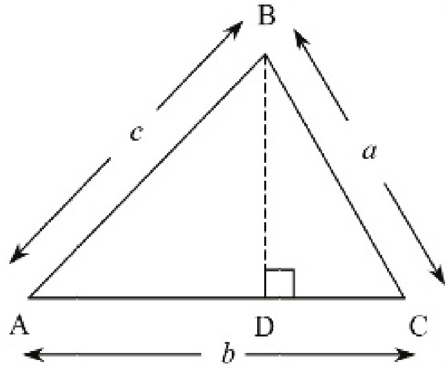


图 8-13

在 Δ ABC 中， $\frac{\mathrm{BD}}{a} = \sin \mathrm{C}$

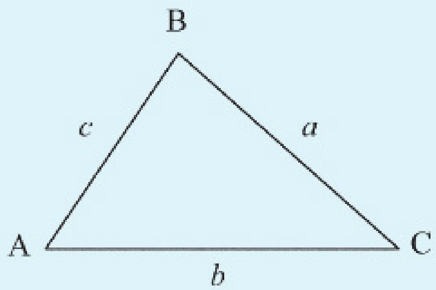
$$\therefore \quad \mathrm{BD} = a \sin \mathrm{C}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{ABC} \text{ 的面积 } &= \frac{1}{2} \times \mathrm{AC} \times \mathrm{BD} \\ &= \frac{1}{2} \times b \times a \sin \mathrm{C} \\ &= \frac{1}{2} a b \sin \mathrm{C} \end{aligned}$$

同理可证得 Δ ABC 的面积为 $\frac{1}{2} b c \sin \mathrm{A}$ 或 $\frac{1}{2} c a \sin \mathrm{B}$ 。这些公式对于锐角三角形、直角三角形及钝角三角形均成立。

所以，已知三角形的两边及其夹角，其面积公式：

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{ABC} \text{ 的面积 } &= \frac{1}{2} a b \sin \mathrm{C} \\ &= \frac{1}{2} b c \sin \mathrm{A} \\ &= \frac{1}{2} c a \sin \mathrm{B} \end{aligned}$$



例题 1

在 ΔPQR 中，PQ = 6.05 cm，PR = 9.68 cm，$\angle$QPR = 72°，求 ΔPQR 的面积。

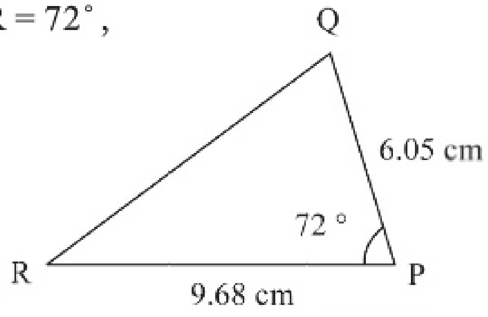


图 8-14

解

$$\Delta = \frac{1}{2} \times PR \times PQ \times \sin\angle QPR$$

$$= \frac{1}{2} \times 9.68 \times 6.05 \times \sin 72^\circ$$

$$= 27.85\ \text{cm}^2$$

若已知三角形的两角及一边，可使用三角形内角和为 180° 的性质求出第三个角，并根据正弦定律求出一边，后使用面积公式求出三角形的面积。

例题 2

在 ΔABC 中，已知 A = 45°，B = 65°，c = 5.8 cm，求 ΔABC 的面积。

解

$$C = 180^\circ - A - B$$

$$= 180^\circ - 45^\circ - 65^\circ$$

$$= 70^\circ$$

由正弦定律，得 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{5.8}{\sin 70^\circ}$$

$$a = \frac{5.8 \times \sin 45^\circ}{\sin 70^\circ}$$

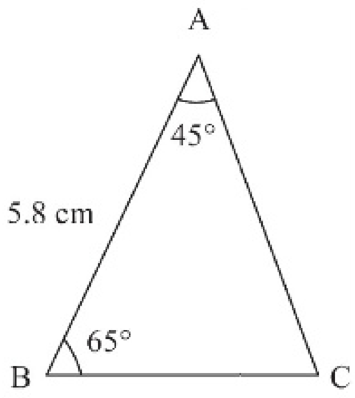


图 8-15

（续） 利用三角形面积公式，得 $\Delta = \dfrac{1}{2}\, a\, c \sin B$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5.8 \times \sin 45^\circ}{\sin 70^\circ} \times 5.8 \times \sin 65^\circ$$

$$= 11.47 \text{ cm}^2$$

若已知三角形的三个边长，则可应用余弦定律求出三角形的任何一个内角，再利用面积公式，求出三角形的面积。

例题 3

在 ΔABC 中，已知 $AB = 9.5$ cm，$AC = 8.1$ cm，$BC = 6$ cm，求 ΔABC 的面积。

解 由余弦定律，得

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos A$$

$$(6)^2 = (8.1)^2 + (9.5)^2 - 2(8.1)(9.5)\cos A$$

$$\cos A = \frac{(8.1)^2 + (9.5)^2 - (6)^2}{2 \times 8.1 \times 9.5}$$

$$A = 38.85^\circ$$

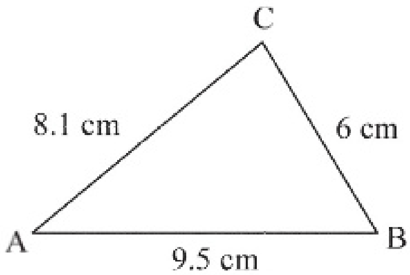


图 8-16

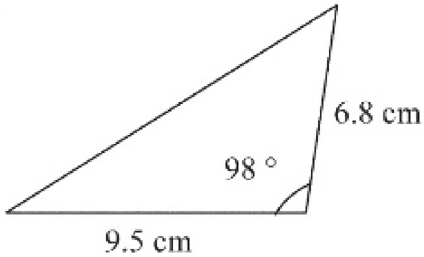
ΔABC 的面积 $= \dfrac{1}{2}(8.1)(9.5)\sin 38.85^\circ$

$$= 24.13 \text{ cm}^2$$

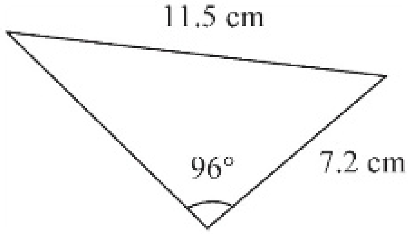
随堂练习 5

求下列各三角形的面积:

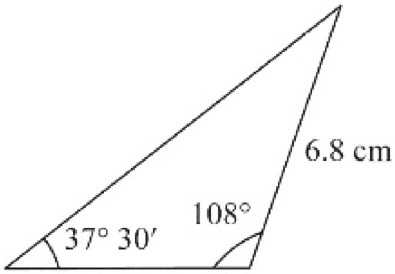
(a)



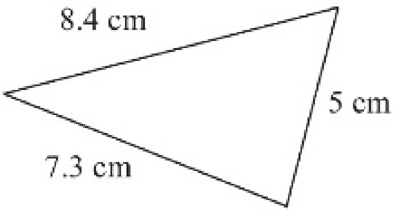
(b)



(c)



(d)



练习 8.4

1. 根据下列条件，求出 ΔABC 的面积:

   (a) $a = 5.94$ cm， $b = 2.15$ cm， $C = 42^\circ 45'$

   (b) $a = 13$ cm， $b = 20$ cm， $c = 25$ cm

   (c) $b = 10$ cm， $A = 60^\circ$，$C = 85^\circ$

   (d) $c = 25$ cm， $A = 16^\circ$，$C = 150^\circ$

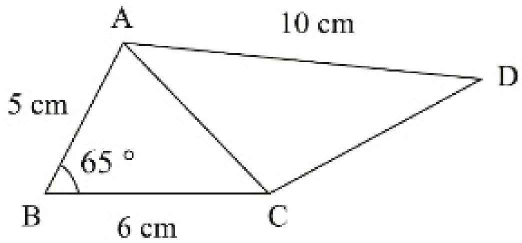
2. 已知 ΔABC 的面积是 28 cm^2，$C = 70^\circ$，$b = 8$ cm，求 a 的值。

3. 已知 ΔABC 的面积是 8 cm^2，$a = 5$ cm，$c = 6$ cm。若 B是钝角，求其值。

4. 一等腰三角形的腰长是 2 cm，面积是 1 cm^2，求这个三角形的顶角及底边长。

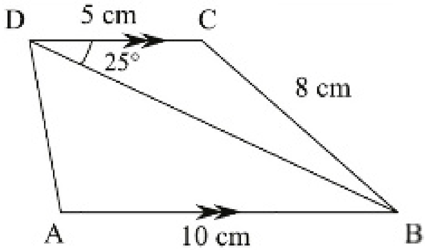
5. 平行四边形的边长各为 4.25 cm及7.5 cm，且其中一个内角为 118°，求此平行四边形的面积。

6. 如右图所示，AB = 5cm，AD =10cm，BC = 6cm，∠ABC = 65°。已知 ΔACD 的面积是 20 cm²，求
   (a) AC；
   (b) ∠CAD。



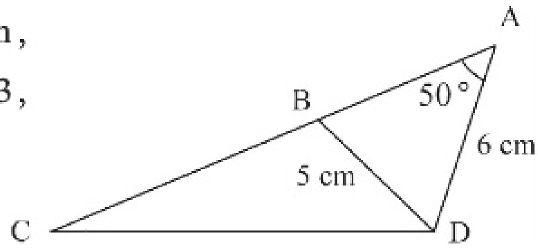
（第6题用图）

7. 如右图所示，ABCD 是一个梯形，其上底 CD 及下底 AB 分别是 5 cm 及 10 cm，其一腰长 8 cm，∠BDC = 25°。求 ΔABD 的面积。



（第7题用图）

8. 如右图所示，ABC 是一条直线，BD = 5 cm，AD = 6 cm，∠BAD = 50°。已知AB : BC = 2 : 3，求 ΔACD 的面积。



（第8题用图）

总复习题8

1. 根据下列条件，解 ΔABC：
   (a) $b = 8$ cm，$c = 5$ cm，$A = 60^\circ$
   (b) $a = 12$ cm，$b = 10$ cm，$A = 60^\circ$
   (c) $c = 7$ cm，$A = 25^\circ$，$B = 135^\circ$
   (d) $a = 5$ cm，$b = 7$ cm，$c = 8$ cm
   (e) $b = 13$ cm，$c = 16$ cm，$B = 50^\circ$

2. 根据下列条件，求ΔABC的面积：

   (a) $b=7$ cm，$c=4$ cm，$A=60^\circ$

   (b) $a=8$ cm，$b=9$ cm，$B=75^\circ$

   (c) $c=7$ cm，$A=55^\circ$，$C=50^\circ$

   (d) $a=3$ cm，$b=8$ cm，$c=10$ cm

   (e) $a=5.25$ cm，$b=9$ cm，$c=9.75$ cm

3. 三角形三边分别是4 cm，5 cm及6 cm，求其最小内角。

4. 一三角形三个内角的比是$5:10:21$，最小的角所对的边是35.64 cm，求最大的边。

5. 一三角形三边的比是$7:4\sqrt{3}:\sqrt{13}$，求此三角形的最大内角。

6. 在ΔABC中，已知$A:B:C=1:2:3$，求$a:b:c$。

7. 若ΔABC中，$a=12$ cm，$b=5$ cm，$\angle C$是钝角，求c的范围。

8. 在ΔABC中，若$\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{a}{b+c}=1$，求C的值。

9. 在ΔABC中，若$(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$，求$\sin A:\sin B:\sin C$。

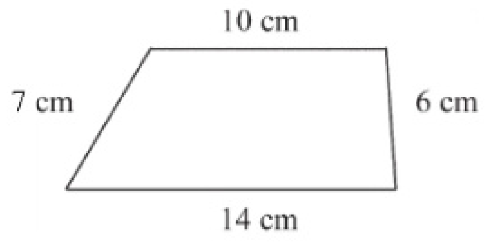
10. 在ΔABC中，$\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$，求$\cos A:\cos B:\cos C$。

11. 从灯塔观测海上一艘船A的方位角是040°；观测海上另一艘船B的方位角则是330°。已知船A距离灯塔1.8海里，船B距离灯塔3海里，求由船B观测船A的方位角。

12. 一锐角三角形的面积是8 cm²，AB = 4 cm，AC = 5 cm，求$\angle$BAC。

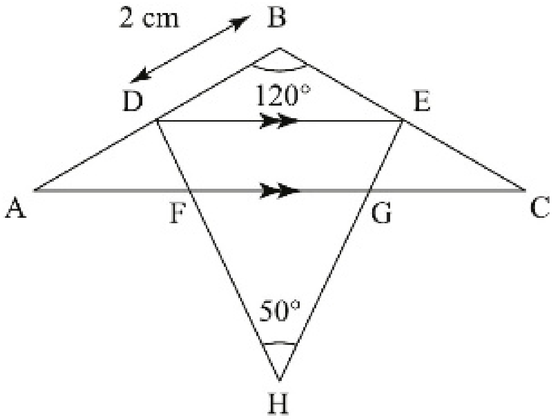
13. 已知ΔABC的面积是12 cm²，边长$a=6$ cm，$b=8$ cm，求c的边长。

14. 如右图所示，梯形的两底为10 cm及14 cm，两腰为6 cm及7 cm，求此梯形的各内角。



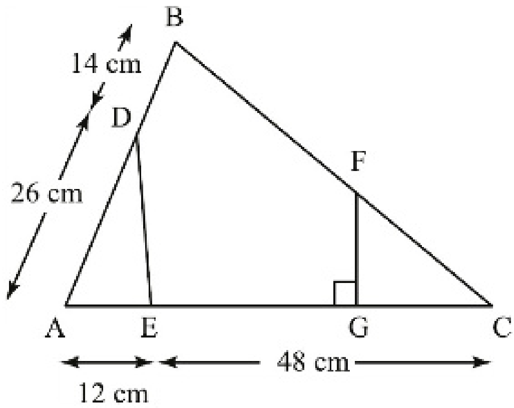
（第14题用图）

15. 右图所示的图形是由两个等腰三角形ABC及DEH叠合而成：在ΔABC中，$AB=BC$，$B=120^\circ$；在ΔDEH中，$DH=EH$，$H=50^\circ$。已知D及E分别是AB及BC的中点，且$BD=2$ cm，求
(a) DE；
(b) DF；
(c) 梯形DEGF的面积。



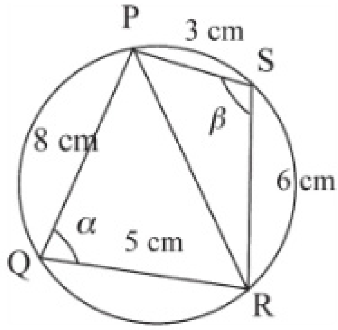
（第15题用图）

16. 如右图所示，AB，BC及AC都是直线，A是锐角且$\sin\angle BAC=\dfrac{12}{13}$。
(a) 求BC；
(b) 求$\angle BCA$；
(c) 若ΔFCG与ΔADE的面积相等，求GC。



（第16题用图）

17. 如右图所示，PQRS是一个圆内接四边形，$PQ=8$cm，$QR=5$cm，$PS=3$cm，$SR=6$cm，$\angle PQR=\alpha$，$\angle PSR=\beta$，证明$\cos\alpha=\dfrac{11}{29}$。



（第17题用图）

9. 三角恒等式与三角方程式

学习目标：

- 掌握同角三角函数的基本关系式，并能运用这些关系式化简三角函数式及证明三角恒等式
- 掌握三角函数公式（两角和、两角差、倍角公式），并能利用这些公式化简三角函数式及证明三角恒等式
- 掌握三角方程式有条件的解

9.1 三角函数的基本恒等式

在第6章，我们学习了六个三角函数的定义及它们之间的关系，即倒数关系及商数关系。在本节中，我们将学习这些三角函数的平方关系。

根据三角函数的定义，对于任意角A，恒有下列关系式：

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2$$
$$= \frac{x^2+y^2}{r^2}$$

而 $x^2+y^2=r^2$

∴ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ………… (1)

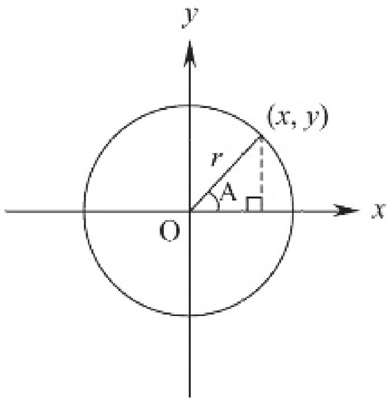


图 9-1

当 $\cos A \neq 0$ 时，将等式 (1) 左右两式都除以 $\cos^2 A$，可以得到

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

即 $\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos A}\right)^2$

∴ $1+\tan^2 A = \sec^2 A$

当 $\sin A \neq 0$ 时， 将等式 (1) 的左右两式除以 $\sin^2 A$，则可得到

∴ $1+\cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

以上含有三角函数的恒等式称为三角恒等式。

补充资料

其他三角函数的关系式：

倒数关系

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

商数关系

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

例题 1

已知 $\sin A=\frac{4}{5}$，求 $\cos A$的可能值。

解 由公式 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$$\begin{aligned}\cos^2 A&=1-\sin^2 A\\&=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2\\&=\frac{9}{25}\\\cos A&=\pm\frac{3}{5}\end{aligned}$$

因此，$\cos A$的可能值为 $\frac{3}{5}$ 及 $-\frac{3}{5}$。

思考题

在例题 1 中，$\cos A$ 的可能值也可以根据任意三角函数值的定义求得。试以此方法求 $\cos A$ 的可能值。

例题 2

已知 $x=\frac{1}{2}\sin\theta$ 及 $y=\frac{1}{3}\cos\theta$，求 x 与 y 的关系式。

解

$$x=\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\sin\theta=2x$$

$$y=\frac{1}{3}\cos\theta$$

$$\cos\theta=3y$$

由公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\begin{aligned}(2x)^2+(3y)^2&=1\\4x^2+9y^2&=1\end{aligned}$$

因此，x 与 y 的关系式是$4x^2+9y^2=1$。

例题 3

证明 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$。

证

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)^2&=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta\\&=1+2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

例题 4

证明 $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$。

证

$$\begin{aligned}\tan\theta+\cot\theta&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\\&=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\\&=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta\end{aligned}$$

例题 5

证明 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$ 。

证

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}&=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}\\&=\frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}\\&=\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}\\&=\frac{2\,(1+\cos\theta)}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}\\&=\frac{2}{\sin\theta}\\&=2\operatorname{cosec}\theta\end{aligned}$$

例题 6

证明 $\dfrac{1-2\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\tan A-\cot A$ 。

证 1

$$\begin{aligned}\tan A-\cot A&=\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\cos A}{\sin A}\\&=\frac{\sin^2 A-\cos^2 A}{\sin A\cos A}\\&=\frac{(1-\cos^2 A)-\cos^2 A}{\sin A\cos A}\\&=\frac{1-2\cos^2 A}{\sin A\cos A}\end{aligned}$$

证 2

$$\frac{1-2\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)-2\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin^2 A-\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\sin A\cos A}-\frac{\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$=\tan A-\cot A$$

证明三角恒等式可以按照由繁至简的原则，从左右两式的任何一边开始，证得它等于另一边（如例题6所示），也可以证明两式都等于同一个式子，从而证明三角恒等式。

随堂练习 1

证明下列各恒等式：

1. $\sec\theta-\tan\theta\sin\theta=\cos\theta$

2. $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta}=1$

练习 9.1

1. 已知 $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$，求 $\sin\theta$ 的可能值。

2. 已知 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，求 $\cos\theta$ 的可能值。

3. 化简 $(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)$。

   据此，若 $\sec\theta+\tan\theta=3$，求 $\sec\theta-\tan\theta$ 的值。

证明下列各恒等式（4至17）：

4. $\sin^2\theta-\cos^2\theta=2\sin^2\theta-1$

5. $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

6. $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

7. $(1-\cos^2\theta)\sec^2\theta=\tan^2\theta$

8. $(1+\tan^2\theta)(1-\sin^2\theta)=1$

9. $\sec x-\cos x=\sin x\tan x$

10. $(1+\tan\theta)^2+(1-\tan\theta)^2=2\sec^2\theta$

11. $\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta=\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta$

12. $\cos^2\theta\tan^2\theta+\cos^2\theta=1$

13. $\sin^4\theta-\cos^4\theta=2\sin^2\theta-1$

14. $\tan^2\theta-\cot^2\theta=\sec^2\theta-\operatorname{cosec}^2\theta$

15. $\dfrac{\sec\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\tan\theta}{\cot\theta}=1$

16. $1-\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}=\sin x$

17. $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x$

18. 已知 $x=3\sin\theta$ 及 $y=2\cos\theta$，求 x 与 y 的关系式。

9.2 两角之和与差的三角函数

在研究三角函数的问题时，我们常常需要使用两个角的和与差来进行三角函数的计算与化简。

如图 9-2 所示，S 是 P 到 QR 的垂足。那么 ΔPQR 的面积就是 ΔPSQ 及 ΔPSR 两个直角三角形面积的和：

ΔPQR 的面积 = ΔPQS 的面积 + ΔPRS 的面积

$$\frac{1}{2}qr\sin(A+B)=\frac{1}{2}QS\cdot PS+\frac{1}{2}RS\cdot PS$$

$$\frac{1}{2}qr\sin(A+B)=\frac{1}{2}r\sin A\cdot q\cos B+\frac{1}{2}q\sin B\cdot r\cos A$$

得 $\boxed{\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

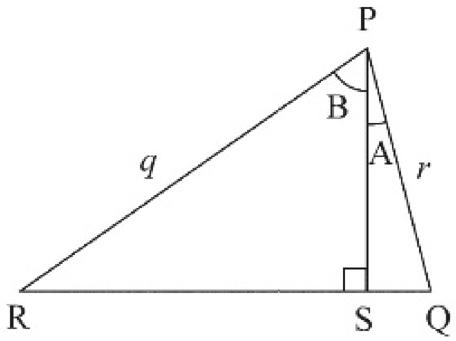


图 9-2

上述公式叫做两角和的正弦公式，它对于任意角A及B都成立。

将公式中的角 B 以 –B 代替，就可以得到两角差的正弦公式：

$$\begin{aligned}\sin(A-B)&=\sin[A+(-B)]\\&=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)\\&=\sin A\cos B-\cos A\sin B\end{aligned}$$

$\therefore$ $\boxed{\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B}$

从三角函数的余角关系可以推导出两角和与差的余弦公式：

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \sin\left[\frac{\pi}{2}-(A+B)\right]\\ &= \sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-B\right]\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos B-\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin B\\ &= \cos A\cos B-\sin A\sin B\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

将公式中的角 B 以 –B 代替，可得

$$\begin{aligned}\cos(A-B) &= \cos[A+(-B)]\\ &= \cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)\\ &= \cos A\cos B+\sin A\sin B\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

例题 1

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\sin 10^\circ\cos 50^\circ+\cos 10^\circ\sin 50^\circ$

(b) $\cos 85^\circ\cos 25^\circ+\sin 85^\circ\sin 25^\circ$

解 (a) $\sin 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 10^\circ \sin 50^\circ = \sin(10^\circ + 50^\circ)$

$= \sin 60^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\cos 85^\circ \cos 25^\circ + \sin 85^\circ \sin 25^\circ = \cos(85^\circ - 25^\circ)$

$= \cos 60^\circ$

$= \dfrac{1}{2}$

例题 2

不使用计算机，求下列三角函数的值：

(a) $\sin 75^\circ$ (b) $\cos 15^\circ$

解 (a) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$

$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

注意

两角和与差的三角函数不能视为两个三角函数值的和与差。一般上，

$\sin(A + B) \neq \sin A + \sin B$
$\cos(A + B) \neq \cos A + \cos B$
$\tan(A + B) \neq \tan A + \tan B$

另，$\sin A \sin B \neq \sin(A \cdot B)$
$\cos A \cos B \neq \cos(A \cdot B)$
$\tan A \tan B \neq \tan(A \cdot B)$

(b) $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

两角和与差的正切公式可根据三角函数的商数关系求得：

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

将上述公式中的 B 以 –B 代替，可得到

$$\tan(A-B) = \tan[A + (-B)]$$

$$= \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A \tan(-B)}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

例题 3

不使用计算机，求 $\dfrac{\tan 32^\circ + \tan 13^\circ}{1 - \tan 32^\circ \tan 13^\circ}$ 的值。

解

$$\begin{aligned}\frac{\tan 32^\circ + \tan 13^\circ}{1 - \tan 32^\circ \tan 13^\circ} &= \tan(32^\circ + 13^\circ) \\ &= \tan 45^\circ \\ &= 1\end{aligned}$$

例题 4

不使用计算机，求 $\tan 15^\circ$ 的值。

解

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \tan(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

随堂练习 2

不使用计算机，求下列各三角函数的值：

(a) $\sin 105^\circ$

(b) $\cos 15^\circ$

(c) $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$

(d) $\tan\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

例题 5

已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ ，$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$ ，且 α，β为锐角，求下列各式的值：

(a) $\sin(\alpha-\beta)$

(b) $\cos(\alpha+\beta)$

(c) $\tan(\alpha+\beta)$

解 因为 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ ，$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$ ，且 α，β为锐角，由图9-3 (a) 及 (b)可得

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ，　$\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ ；

$\cos\beta=\dfrac{12}{13}$ ，　$\tan\beta=\dfrac{5}{12}$ 。

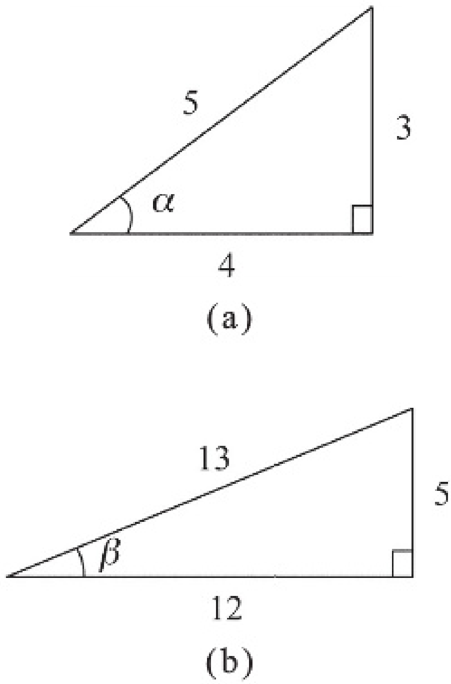


图 9-3

(a) $$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\&=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)\\&=\frac{16}{65}\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)\\&=\frac{33}{65}\end{aligned}$$

(c) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{3}{4}+\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}$$

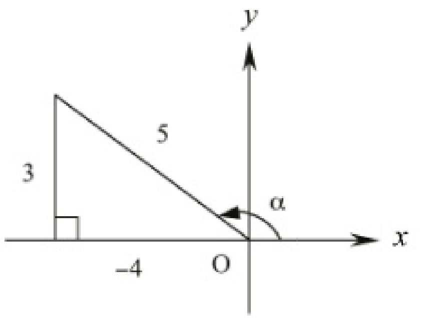
$$=\frac{56}{33}$$

例题 6

已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ ，$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$ ，且 $90^\circ<\alpha<180^\circ$ ，$270^\circ<\beta<360^\circ$，求下列各三角函数的值：

(a) $\sin(\alpha+\beta)$

(b) $\sec(\alpha-\beta)$



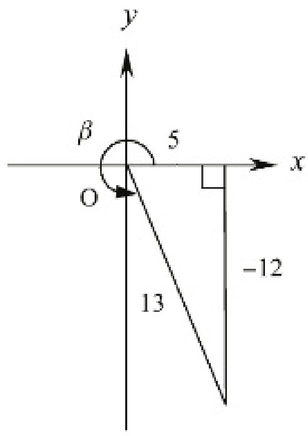
(a)

解 因 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ ，且 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，由图 9-4 (a) 得

$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$

$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$ ，且 $270^\circ<\beta<360^\circ$，由图 9-4 (b) 得

$\sin\beta=-\dfrac{12}{13}$



(b)

图 9-4

(a) $$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)\\ &= \frac{15}{65}+\frac{48}{65}\\ &= \frac{63}{65}\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)\\ &= -\frac{20}{65}-\frac{36}{65}\\ &= -\frac{56}{65}\end{aligned}$$

因此，$$\begin{aligned}\sec(\alpha-\beta) &= \frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}\\ &= \frac{1}{-\frac{56}{65}}\\ &= -\frac{65}{56}\end{aligned}$$

例题 7

证明 $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=\tan A-\tan B$。

证 $$\begin{aligned}\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}&=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B}\\&=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}\\&=\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin B}{\cos B}\\&=\tan A-\tan B\end{aligned}$$

随堂练习 3

1. 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，且 α 及 β 是同一象限的角，求下列各式的值：

   (a) $\cos(\alpha+\beta)$ (b) $\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)$

2. 证明 $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$。

练习 9.2

1. 不使用计算机，化简下列各式：

   (a) $\sin 56^\circ\cos 26^\circ-\cos 56^\circ\sin 26^\circ$

   (b) $\cos 68^\circ\cos 52^\circ-\sin 68^\circ\sin 52^\circ$

   (c) $\dfrac{\tan 85^\circ-\tan 25^\circ}{1+\tan 85^\circ\tan 25^\circ}$

2. 化简 $\cos(30^\circ + A)\cos(30^\circ - A) - \sin(30^\circ + A)\sin(30^\circ - A)$。

3. 已知 $\tan x = \dfrac{1}{2}$ ，$\tan y = \dfrac{1}{4}$ ，分别求出 $\tan(x+y)$ 及 $\tan(x-y)$ 的值。

4. 已知 $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$ ，$\sin\beta = \dfrac{12}{13}$，且 α 属于第三象限的角，β 属于第二象限的角，求下列各式的值：

   (a) $\sin(\alpha+\beta)$　　(b) $\tan(\alpha-\beta)$

5. 已知 $\sec\alpha = \dfrac{17}{8}$ ，$\operatorname{cosec}\beta = \dfrac{5}{4}$ ，且 α 及 β 分别为第一及第二象限的角，求 $\sec(\alpha+\beta)$。

6. 已知 $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{13}{5}$，$\tan\beta = -\dfrac{3}{4}$，且 α 及 β 是同一象限的角，求下列各式的值：

   (a) $\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)$　　(b) $\cot(\alpha+\beta)$

证明下列恒等式（7 至 17）：

7. $\sin(\alpha+45^\circ) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

8. $\cos(45^\circ-\alpha) - \sin(45^\circ+\alpha) = 0$

9. $\cos(60^\circ-\alpha) = \dfrac{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{2}$

10. $\tan\alpha + \cot\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

11. $1 - \tan\alpha\tan\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

12. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \cot\beta - \cot\alpha$

13. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sec\alpha} - \dfrac{\sin 2\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \cos 3\alpha$

14. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

15. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

16. $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=\cos\alpha$

17. $1+\tan 2\theta\tan\theta=\sec 2\theta$

9.3 倍角公式与半角公式

倍角公式

在上一节两角之和与差的三角函数公式中，当 $B=A$ 时，就可以得出相应的二倍角的三角函数公式。

$$\begin{aligned}\sin 2A&=\sin(A+A)\\&=\sin A\cos A+\sin A\cos A\\&=2\sin A\cos A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2A&=\cos(A+A)\\&=\cos A\cos A-\sin A\sin A\\&=\cos^2 A-\sin^2 A\end{aligned}$$

利用三角函数的平方关系 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，

$$\begin{aligned}\cos^2 A-\sin^2 A&=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A\\&=1-2\sin^2 A\end{aligned}$$

或 $$\begin{aligned}\cos^2 A-\sin^2 A&=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)\\&=2\cos^2 A-1\end{aligned}$$

二倍角的正切公式也同样可使用两角之和的正切公式导出。从以上的推导可以得知，二倍角公式实际上就是两角之和公式的特例。以下列出三组公式分别是二倍角的正弦、余弦及正切公式：

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A\\ &= 2\cos^2 A - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 A\end{aligned}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

补充资料

将三角函数的二倍角公式中的A以 $\frac{A}{2}$ 代替，可得到以下形式的二倍角公式：

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos A &= \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\\ &= 2\cos^2\frac{A}{2} - 1\\ &= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\end{aligned}$$

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

例题 1

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$ (b) $2\cos^2 15^\circ - 1$

(c) $1 - 2\sin^2 75^\circ$ (d) $\dfrac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$

解 (a)
$$\begin{aligned}2\sin 15^\circ\cos 15^\circ &= \sin(2\times 15^\circ)\\ &= \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) $2\cos^2 15^\circ - 1 = \cos(2 \times 15^\circ)$

$= \cos 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $1 - 2\sin^2 75^\circ = \cos(2 \times 75^\circ)$

$= \cos 150^\circ$

$= -\cos 30^\circ$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $\dfrac{2\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = \tan(2 \times 22.5^\circ)$

$= \tan 45^\circ$

$= 1$

例题 2

已知 $\sin A = \dfrac{3}{5}$，$90^\circ \leq A \leq 180^\circ$，求下列各式的值：

(a) $\sin 2A$

(b) $\cos 2A$

(c) $\tan 2A$

解 A 是第二象限的角，

$\therefore\ \cos A = -\dfrac{4}{5}$，$\tan A = -\dfrac{3}{4}$。

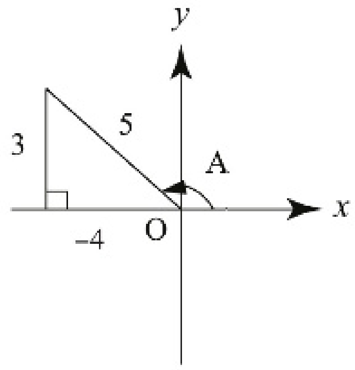


图 9-5

(a) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$$= 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= -\frac{24}{25}$$

(b) $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

$$= 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{7}{25}$$

(c) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$$= \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= -\frac{24}{7}$$

例题 3

已知 $\cos 2A = \frac{7}{25}$，式中 $270^\circ \leq 2A \leq 360^\circ$，求 $\sin A$ 的值。

解 已知式中 $270^\circ \leq 2A \leq 360^\circ$，则 $135^\circ \leq A \leq 180^\circ$。

由此可知，A 是第二象限的角。

$$\cos 2A = \frac{7}{25}$$

$$1 - 2\sin^2 A = \frac{7}{25}$$

$$\sin^2 A = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \sin A = \frac{3}{5}$$

注意

在例题 3 中，$270^\circ \leq 2A \leq 360^\circ$ 是 2A 的区间。因此，我们需要先找出角 A 的区间，从而鉴定 A 所在的象限。

例题 4

已知 $\sin A + \cos A = -\frac{7}{5}$，求 $\sin 2A$ 的值。

解

$$(\sin A + \cos A)^2 = \frac{49}{25}$$

$$\sin^2 A + 2\sin A\cos A + \cos^2 A = \frac{49}{25}$$

$$1 + \sin 2A = \frac{49}{25}$$

$$\sin 2A = \frac{24}{25}$$

随堂练习 4

1. 试使用两角之和的公式导出二倍角的正切公式。
2. 不使用计算机，求下列各式的值：
   (a) $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ$
   (b) $2\cos^2 112.5^\circ - 1$
   (c) $\dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$
3. 已知 $\cos A = \dfrac{4}{5}$，$270^\circ \le A \le 360^\circ$，求 $\sin 2A$ 及 $\sec 2A$ 的值。
4. 已知 $\tan A + \cot A = \dfrac{5}{2}$，求 $\sin 2A$ 的值。

例题 5

证明 $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$ 。

证

$$\begin{aligned}\cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)\\ &= \cos 2x\end{aligned}$$

例题 6

证明 $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$ 。

证

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\\ &= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x\\ &= 1 - \frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2\\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\end{aligned}$$

例题 7

证明 $\tan\theta+\cot\theta=2\operatorname{cosec}2\theta$ 。

证

$$\begin{aligned}\tan\theta+\cot\theta&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{2}{2\sin\theta\cos\theta}\\&=2\operatorname{cosec}2\theta\end{aligned}$$

三角函数的三倍角公式可以使用二倍角公式及两角之和公式导出。以下是三倍角的正弦及余弦公式的推导：

$$\begin{aligned}\sin 3A&=\sin(2A+A)\\&=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A\\&=(2\sin A\cos A)\cos A+(1-2\sin^2A)\sin A\\&=2\sin A(1-\sin^2A)+\sin A-2\sin^3A\\&=3\sin A-4\sin^3A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3A&=\cos(2A+A)\\&=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A\\&=(2\cos^2A-1)\cos A-2\sin^2A\cos A\\&=2\cos^3A-\cos A-2\cos A(1-\cos^2A)\\&=4\cos^3A-3\cos A\end{aligned}$$

随堂练习 5

1. 试导出三倍角的正切公式（即以 $\tan A$ 表示 $\tan 3A$）。

2. 证明 $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\cot x$ 。

3. 证明 $\dfrac{\tan 2x}{1+\sec 2x}=\tan x$ 。

半角公式

在二倍角的余弦公式 $\cos 2A=1-2\sin^2 A$ 及 $\cos 2A=2\cos^2 A-1$ 中，将 A 以 $\dfrac{A}{2}$ 替代，可以得到以下公式：

$$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$$

我们进而更换以上公式的主项，则可得到下列公式：

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$$

这两项公式分别是半角的正弦及余弦公式。由此可知，半角公式及二倍角公式实际上是同一公式的不同变形。

补充资料

在半角的正弦及余弦公式开方，可以得到以下形式的半角公式：

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

这些式子的正负号，可根据角 $\dfrac{A}{2}$ 终边所属的象限来决定。

例题 8

证明 $\tan^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$ 。

证 $\tan^2 A = \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$$= \frac{\dfrac{1-\cos 2A}{2}}{\dfrac{1+\cos 2A}{2}}$$

$$= \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$$

例题 9

已知 $\sin A = -\dfrac{4}{5}$ ，$180^\circ < A < 270^\circ$，求 $\sin\dfrac{A}{2}$ ，$\cos\dfrac{A}{2}$ 及 $\tan\dfrac{A}{2}$ 的值。

解 由图 9-6 得 $\cos A = -\dfrac{3}{5}$

$\because 180^\circ < A < 270^\circ$

$\therefore 90^\circ < \dfrac{A}{2} < 135^\circ$

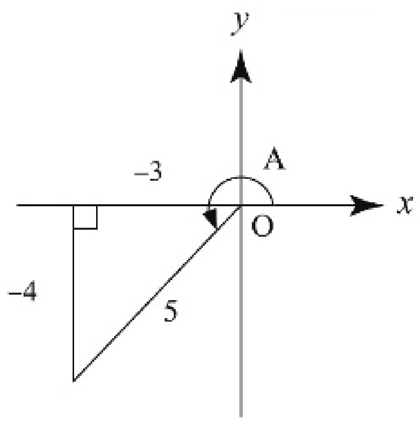


图 9-6

(续) 因此，$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$= -2$$

例题 10

使用半角公式求 $\sin 15^\circ$，$\tan 15^\circ$ 的值。

解

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$

注意

15° 是属于第一象限的角。任何属于第一象限的角的三角函数值都是正值。因此，例题11中的二次根式只取正值。

例题 11

证明 $\cot\dfrac{A}{2}-\tan\dfrac{A}{2}=2\cot A$ 。

证

$$\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos A}{\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\cos A}{\sin A}$$

$$=2\cot A$$

随堂练习 6

1. 已知 $\tan A=-\dfrac{5}{12}$ ，且 $270^\circ<A<360^\circ$，求 $\sin\dfrac{A}{2}$，$\cos\dfrac{A}{2}$ 及 $\tan\dfrac{A}{2}$ 的值。
2. 证明 $\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=\cot\dfrac{A}{2}$ 。
3. 不使用计算机，求 $\cos 75^\circ$ 的值。

练习 9.3

1. 不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $2\sin 165^\circ \cos 165^\circ$

(b) $1-2\sin^2 105^\circ$

(c) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

(d) $\dfrac{2\tan 157.5^\circ}{1-\tan^2 157.5^\circ}$

2. 若 $\sin A=\dfrac{2}{5}$，求 $\cos 2A$ 的值。

3. 若 A 是锐角，且 $\cos A=\dfrac{1}{3}$，求 $\sin 2A$ 的值。

4. 已知 $\tan A=-\dfrac{4}{3}$，且 A 是钝角，求 $\cos 2A$ 及 $\tan 2A$ 的值。

5. 已知 $\sin\theta=-\dfrac{5}{13}$，$180^\circ<\theta<270^\circ$，求 $\sin 2\theta$ 及 $\tan 2\theta$ 的值。

6. 已知 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，且 A 是第二象限的角，求 $\sin 3A$ 及 $\cos 3A$ 的值。

7. 已知 $\tan A=\dfrac{4}{3}$，且 $180^\circ<A<270^\circ$，求$\sin\dfrac{A}{2}$，$\cos\dfrac{A}{2}$ 及 $\tan\dfrac{A}{2}$ 的值。

8. 不使用计算机，证明 $\tan 22\dfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{2}-1$。

9. 不使用计算机，证明 $\sin 165^\circ=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$。

证明下列各式（10 至 24）：

10. $2\sin\dfrac{4\pi}{5}\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\sin\dfrac{3\pi}{5}$

11. $(1-\cos 2\theta)(\cot\theta)=\sin 2\theta$

12. $\dfrac{\sin 2A}{\cos 2A-1}=-\cot A$

13. $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2$

14. $(2\cos A+1)(2\cos A-1)=2\cos 2A+1$

15. $\cos 2A+\cos A=(2\cos A-1)(\cos A+1)$

16. $\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=\sec 2A-\tan 2A$

17. $\tan 2A-\sec A\sin A=\tan A\sec 2A$

18. $\sin 2A+2\sin A=4\sin A\cos^2\dfrac{A}{2}$

19. $\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2=1-\sin x$

20. $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=\cot^2\dfrac{\theta}{2}$

21. $\dfrac{2\tan\dfrac{A}{2}}{1+\tan^2\dfrac{A}{2}}=\sin A$

22. $\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}+\sin A}{1+\cos\dfrac{A}{2}+\cos A}=\tan\dfrac{A}{2}$

23. $\dfrac{\tan A}{1+\sec A}=\tan\dfrac{A}{2}$

24. $\cot\dfrac{A}{2}-\cot A=\operatorname{cosec} A$

9.4 三角方程式

一个含有未知数的三角函数的方程式叫做三角方程式，例如：

$\sin x = \frac{1}{2}$，$5\sin\theta = 4\cos\theta$，$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 等。

满足三角方程式的未知数的所有值叫做三角方程式的解。由于三角函数具有周期性，因此，一个三角方程式一般上有无穷多个解，例如：$\sin\theta = 0$ 的解计有 $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots\ldots$。

简易三角方程式的解法

三角方程式有多种形式，但是形如 $\sin x = a$，$\cos x = a$，$\tan x = a\,(a \in R)$ 等方程式为最基本的，称为最简三角方程式。因此，对于此类方程式，只需先求出它在一个周期的区间上的解，就可以找出它的所有解。

例题 1

解 $\sin x = \frac{1}{2}$，$0^\circ < x < 360^\circ$。

解 因为 $\sin x > 0$，所以 x 是第一或第二象限的角。

已知正弦为 $\frac{1}{2}$ 的相伴锐角是 30°。

因此，当 $\sin x = \frac{1}{2}$ 时，

$$x = 30^\circ,\ (180^\circ - 30^\circ)$$
$$= 30^\circ,\ 150^\circ$$

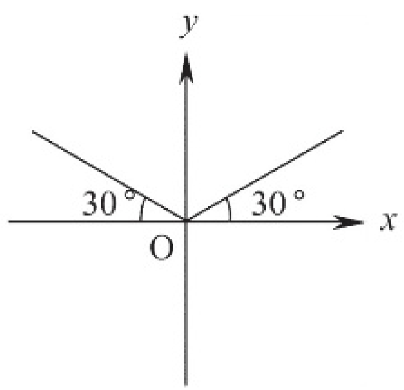


图 9-7

例题 2

解 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ ，$0^\circ<x<360^\circ$ 。

解 因为 $\sin x<0$，所以 x 是第三或第四象限的角。

已知正弦为 $\dfrac{1}{2}$ 的相伴锐角是 30° 。

因此，当 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ 时，

$$x=(180^\circ+30^\circ),\ (360^\circ-30^\circ)$$

$$=210^\circ,\ 330^\circ$$

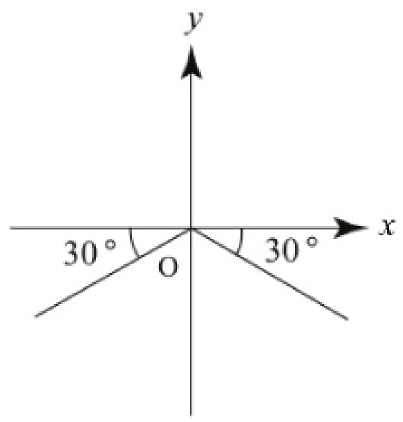


图 9-8

例题 3

解 $\tan\dfrac{x}{2}=-\sqrt{3}$ ，$0^\circ<x<360^\circ$ 。

解 已知 $0^\circ<x<360^\circ$，则 $0^\circ<\dfrac{x}{2}<180^\circ$ 。

因为 $\tan\dfrac{x}{2}<0$ ，所以$\dfrac{x}{2}$ 是第二象限的角。

已知正切为 $\sqrt{3}$ 的相伴锐角是 60°，

因此，当 $\tan\dfrac{x}{2}=-\sqrt{3}$ 时，

$$\frac{x}{2}=180^\circ-60^\circ$$

$$x=240^\circ$$

例题 4

解 $2\cos 2x = 1$ ，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 。

解 已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，则 $0 < 2x < \pi$。

因为 $\cos 2x > 0$ ，所以 $2x$ 是第一象限的角。

已知余弦为 $\frac{1}{2}$ 的相伴锐角是 $\frac{\pi}{3}$ ，

因此，当 $\cos 2x = \frac{1}{2}$ 时，

$$2x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

随堂练习 7

1. 若 $0^\circ < x < 360^\circ$，解下列方程式：

   (a) $\cos x = \frac{1}{2}$　　(b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 若 $-180^\circ < \theta < 180^\circ$，解下列方程式：

   (a) $\tan \theta = 1$　　(b) $\tan 2\theta = 1$

例题 5

解 $2\cos^2\theta - 2 = \sqrt{3}$ ，$0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ 。

解 将原方程式转化成 $2(\cos^2\theta - 1) = \sqrt{3}$

$$\cos^2\theta = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

已知 $-1 \le \cos\theta \le 1$，故 $\cos^2\theta \le 1$。

因此，原方程式无解。

例题 6

解 $\sin(270^\circ - x) = \cos 292^\circ$ ，$0^\circ < x < 360^\circ$ 。

解 由条件 $0^\circ < x < 360^\circ$，得知 $-90^\circ < 270^\circ - x < 270^\circ$。

$$\begin{aligned}\cos 292^\circ &= \cos(360^\circ - 68^\circ)\\ &= \cos 68^\circ\\ &= \sin 22^\circ > 0\end{aligned}$$

因为 $\sin(270^\circ - x) > 0$ ，所以 $(270^\circ - x)$ 是第一或第二象限的角。

因此，$270^\circ - x = 22^\circ, (180^\circ - 22^\circ)$

$$x = 248^\circ, 112^\circ$$

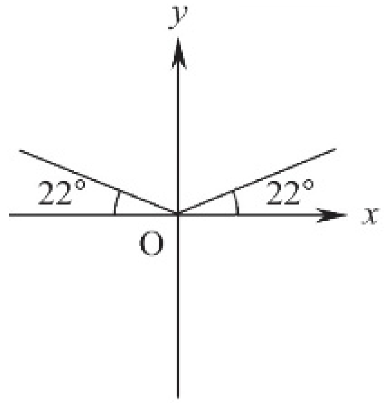


图 9-9

例题 7

解 $\tan(180^\circ - x) = 3\cot(-x)$，$-180^\circ < x < 180^\circ$。

解

$$\tan(180^\circ - x) = 3\cot(-x)$$

$$-\tan x = -\frac{3}{\tan x}$$

$$\tan^2 x = 3$$

$$\tan x = \pm\sqrt{3}$$

$$x = \pm 60^\circ, \pm 120^\circ$$

例题 8

解 $5\sin\theta = 4\cos\theta$，$0^\circ < \theta < 360^\circ$。

解

$$5\sin\theta = 4\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{5}$$

因为 $\tan\theta > 0$，所以 θ 是第一或第三象限的角。

因此，$\theta = 38^\circ 39'$，$(180^\circ + 38^\circ 39')$

$\theta = 38^\circ 39'$，$218^\circ 39'$

例题 9

解 $4\cos\theta = 3\sec\theta$，$0^\circ < \theta < 360^\circ$。

解

$$4\cos\theta = \frac{3}{\cos\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

θ 是任意象限的角（图 9-10）。

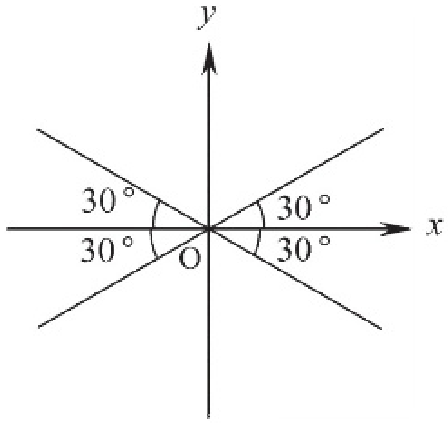


图 9-10

$$\theta = 30^\circ,\ (180^\circ - 30^\circ),\ (180^\circ + 30^\circ),\ (360^\circ - 30^\circ)$$

$$= 30^\circ,\ 150^\circ,\ 210^\circ,\ 330^\circ$$

随堂练习 8

解下列方程式：

1. $\sin\theta = -\cos\theta$，$0^\circ < \theta < 360^\circ$
2. $\cos(180^\circ + x) = \sin 125^\circ$，$0^\circ < x < 180^\circ$

例题 10

解 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ ，$0<x<2\pi$ 。

解 由条件 $0<x<2\pi$，得 $\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{13\pi}{3}$ 。

由于 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ ，

所以 $\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 是第二或第三象限的角。

$\therefore\ 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \frac{10\pi}{3}$

$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}$

练习 9.4a

若 $0\leq x<2\pi$，解下列三角方程式（1至8）：

1. $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $\tan x=-\sqrt{3}$
4. $2\tan x\cos x=\sqrt{3}$
5. $2\sin x=\sqrt{12}\cos x$
6. $\tan x=3\cos x\operatorname{cosec} x$
7. $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$
8. $2\sin\frac{2x}{3}=1$

若 $0^\circ \leq x < 360^\circ$，解下列三角方程式（9至18）：

9. $4\sin x = \operatorname{cosec} x$

10. $\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. $\tan 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

12. $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

13. $\tan 3x = 1$

14. $4\sin^2 2x = 3$

15. $\cos(2x + 30^\circ) = \dfrac{1}{2}$

16. $\sin(2x + 60^\circ) = -\dfrac{1}{2}$

17. $\cos(x - 50^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

18. $\tan(60^\circ - x) = 2$

其他三角方程式的解法

例题 11

解 $2\sin\theta = \tan\theta$，$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$。

解

$$2\sin\theta = \tan\theta$$

$$2\sin\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$$

$$2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\sin\theta = 0^\circ \quad \text{或} \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

当 $\sin\theta = 0$ 时，$\theta = 0^\circ$，180°

当 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ 时，$\theta = 60^\circ$，300°

$\therefore\ \theta = 0^\circ$，$60^\circ$，$180^\circ$，$300^\circ$。

注意

方程式 $2\sin\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 中的 $\sin\theta$ 含有未知数 θ，因此必须保留在式中，不可约简。

随堂练习 9

解下列方程式，式中 $0^\circ \leq x < 360^\circ$：

1. $2\sin x\cos x = \cos x$
2. $2\sin^2 x = \sin x$
3. $\tan x + 2\sin x = 0$
4. $\sin 2x = \cot x$

一些三角方程式可以通过因式分解法求解。

例题 12

解方程式 $3\tan^2 x - \tan x - 4 = 0$，$0^\circ < x < 360^\circ$。

解 将原方程式因式分解，得 $(3\tan x - 4)(\tan x + 1) = 0$。

$\therefore\ 3\tan x - 4 = 0$ 或 $\tan x + 1 = 0$

当 $3\tan x - 4 = 0$ 时，

$$\tan x = \frac{4}{3}$$

$$x = 53^\circ 8',\ 233^\circ 8'$$

当 $\tan x + 1 = 0$ 时，

$$\tan x = -1$$

$$x = 135^\circ,\ 315^\circ$$

$\therefore\ x = 53^\circ 8',\ 135^\circ,\ 233^\circ 8',\ 315^\circ$。

例题 13

解方程式 $\cos 2x+3\cos x+2=0$，$0\leq x<2\pi$ 。

解

$$\cos 2x+3\cos x+2=0$$

$$2\cos^2 x-1+3\cos x+2=0$$

$$2\cos^2 x+3\cos x+1=0$$

$$(2\cos x+1)(\cos x+1)=0$$

$\therefore\ 2\cos x+1=0$ 或 $\cos x+1=0$

当 $2\cos x+1=0$ 时，

$$\cos x=-\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$$

当 $\cos x+1=0$ 时，

$$\cos x=-1$$

$$x=\pi$$

$\therefore\ x=\dfrac{2\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{4\pi}{3}$ 。

例题 14

解方程式 $\sin 2x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$，$-\pi \leq x \leq \pi$。

解

$$\sin 2x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

$$2\sin x(\cos x - 1) + (\cos x - 1) = 0$$

$$(\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$

$\therefore \cos x = 1$ 或 $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

当 $\cos x - 1 = 0$ 时，

$$\cos x = 1$$

$$x = 0$$

当 $2\sin x + 1 = 0$ 时，

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{6}$$

$\therefore x = 0,\ -\dfrac{\pi}{6},\ -\dfrac{5\pi}{6}$。

练习 9.4b

解下列各三角方程式，式中 $0 \leq x < 2\pi$（1 至 4）：

1. $\sin^2 x + 2\cos^2 x = \sin x$
2. $\sin 2x - 2\tan x = 0$
3. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$
4. $\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$

解下列各三角方程式，式中 $-180^\circ \leq x < 180^\circ$（5 至 10）：

5. $\sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 0$
6. $\cos 2x - \sqrt{2}\cos x + 1 = 0$
7. $2\cos^2 x - \sqrt{2}\sin x = 2$
8. $\sin 2x - \sin x - \cos x = -\dfrac{1}{2}$
9. $\cos 4x + \cos 2x = 0$
10. $\sec x + \sqrt{3}\sin x = \cos x$

形如 $a\sin x + b\cos x = c$ 可使用两角和与差的正弦或余弦公式将原方程式进行转换。

例题 15

解方程式 $3\cos x + \sqrt{3}\sin x = 3$，$0^\circ \leq x < 360^\circ$。

解 设 $3\cos x + \sqrt{3}\sin x = R\cos(x - \alpha)$

$$3\cos x + \sqrt{3}\sin x = R\cos x\cos\alpha + R\sin x\sin\alpha$$

比较两边的系数，得 $R\cos\alpha = 3 \dots\dots\dots\dots(1)$

$$R\sin\alpha = \sqrt{3} \dots\dots\dots\dots(2)$$

（续） $(1)^2+(2)^2$： $R^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=12$

$$R=2\sqrt{3}$$

$$\frac{(2)}{(1)}:\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha=30^\circ$$

$$2\sqrt{3}\cos(x-30^\circ)=3$$

$$\cos(x-30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由条件 $0^\circ\leq x<360^\circ$，得 $-30^\circ\leq x-30^\circ<330^\circ$。

$\therefore$ $x-30^\circ=-30^\circ$，30°

$x=0^\circ$，60°

例题 16

解方程式 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$，$0^\circ<x\leq 360^\circ$。

解 设 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=R\sin(x-\alpha)$

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=R\sin x\cos\alpha-R\cos x\sin\alpha$

比较两边的系数，得 $R\cos\alpha=1$ ....(1)

$R\sin\alpha=\sqrt{3}$ ....(2)

$(1)^2+(2)^2$： $R^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=4$

$$R=2$$

（续） $\dfrac{(2)}{(1)}$:
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}$$
$$\tan\alpha=\sqrt{3}$$
$$\alpha=60^\circ$$

$$2\sin(x-60^\circ)=\sqrt{2}$$
$$\sin(x-60^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

由条件 $0^\circ<x\leq 360^\circ$，得 $-60^\circ\leq x-60^\circ<300^\circ$。

$\therefore$
$$x-60^\circ=45^\circ,\ 135^\circ$$
$$x=105^\circ,\ 195^\circ$$

随堂练习 10

1. 解方程式 $4\cos x-3\sin x=1$， $0^\circ<x<360^\circ$。
2. 解方程式 $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=1$， $-180^\circ<x<180^\circ$。

练习 9.4c

若 $0^\circ\leq x<360^\circ$，解下列各三角方程式：

1. $\cos x-\sin x=\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$
3. $3\cos x+4\sin x=5$
4. $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)=\sqrt{3}$
5. $\cos 3x+\sin 3x=\sqrt{2}$
6. $3\cos 3x+2\sin 3x=\sqrt{13}$
7. $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=1$
8. $2\cos\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}=\sqrt{2}$

总复习题 9

1. 化简 $(\sec^2 A - 1)\cot^2 A$。

2. 化简 $(\tan A \operatorname{cosec} A)^2 - (\sin A \sec A)^2$。

3. 已知 $\tan A = \dfrac{1}{3}$，求 $\tan 2A$的值。

4. 计算 $\cos A - \sin(A + 30^\circ) + \sin(A + 330^\circ)$ 的值。

5. 求 $\sin^2 A + \sin^2(120^\circ + A) + \sin^2(120^\circ - A)$的值。

证明下列各恒等式（ 6 至 13 ）：

6. $\operatorname{cosec}^2 A \tan^2 A - 1 = \tan^2 A$

7. $\cot^2 A(1 - \cos^2 A) = \cos^2 A$

8. $(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)(\tan\theta - \sin\theta) = \sec\theta - \cos\theta$

9. $\cos(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

10. $\cos x - \sin 2x \sin x = \cos x \cos 2x$

11. $\dfrac{1 - \tan^2\dfrac{A}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{A}{2}} = \cos A$

12. $\dfrac{2\cos\dfrac{\theta}{2} + 2\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\theta + \cos\theta + 1} = \sec\dfrac{\theta}{2}$

13. $\cos^6 A + \sin^6 A = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2A$

若 $0^\circ \leq x < 360^\circ$，解下列各三角方程式（14 至 24）：

14. $2\cos x = \sec x$

15. $4\sin x = \sec x$

16. $\sin\dfrac{3x}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

17. $\sec^2 x = \dfrac{4}{3}$

18. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$

19. $\tan^2 x = \sec x + 5$

20. $4\sec x + \tan x = 6\cos x$

21. $3\sin x = 2\sin 2x$

22. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

23. $\sqrt{3}\sin 2x = 2 + \cos 2x$

24. $12\sin x - 5\cos x = 13$

若 $-180^\circ < x < 180^\circ$，解下列各三角方程式（25至29）：

25. $12\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0$

26. $6\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

27. $\sec^2 x = 2\tan^2 x$

28. $\cot^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 3$

29. $\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \operatorname{cosec} x$

30. 求所有自 0° 到 360° 满足方程式 $\cos 2x = \sin x$ 的角。

31. 求满足方程式 $\sin x\cos x + \dfrac{1}{4} = 0$ 的所有自 0° 到 360° 的角。

32. 已知 $3\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ 且 $0^\circ < x < 360^\circ$，求 x 的值。

10. 直角坐标系

学习目标：

- 能利用距离公式计算两点之间的距离
- 掌握分比公式，计算分点的坐标及线段长度的比值
- 能利用三角形的顶点坐标计算三角形的面积及证明三点共线
- 能利用多边形的顶点坐标计算多边形的面积

10.1 直角坐标系

在初中，我们学过了直角坐标系，利用互相垂直的两条数轴——横轴即 x 轴，和纵轴即 y 轴，可以用一对有序实数，即序偶 (x, y) 来表示平面内的一个点的位置，从而把平面内的点和有序实数对建立起一一对应关系。这就是说，对于坐标平面内任意一点 P(见图10-1)，我们可以得出唯一的一对有序实数 (x, y) 与它对应；反过来，对于任何一对有序实数 (x, y)，在平面内就有唯一的一个点 P 与它对应。

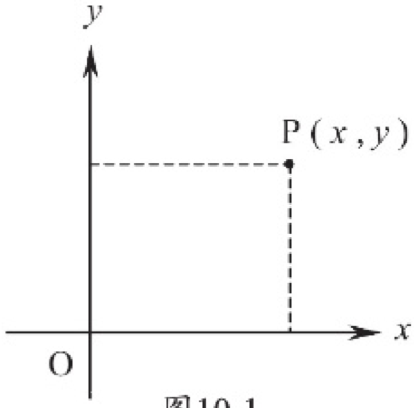


图10-1

横轴和纵轴的交点叫做原点，点的横坐标从原点向右为正，向左为负；纵坐标从原点向上为正，向下为负。

例如，图 10-2 中的点 A，B，C，D 及 E 分别与有序数对 $(3, 4)$，$(-3, -5)$，$(-4, 2)$，$(2, 0)$ 及 $(2, -3)$ 对应。

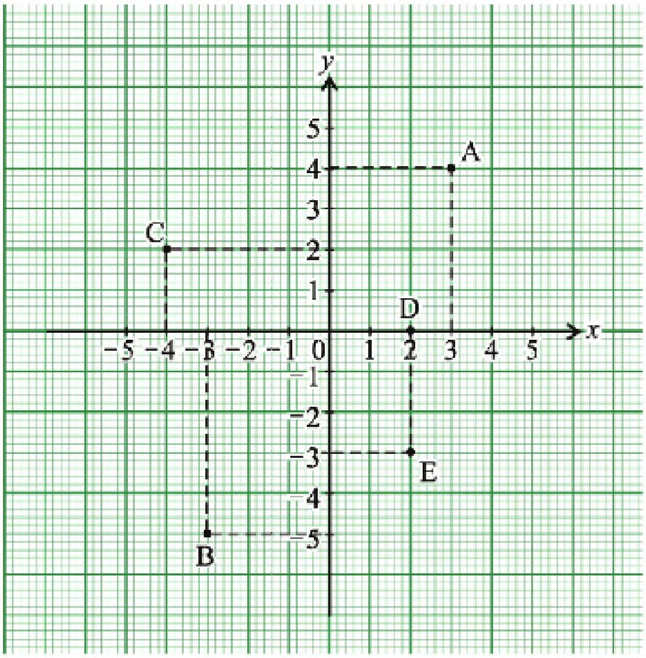
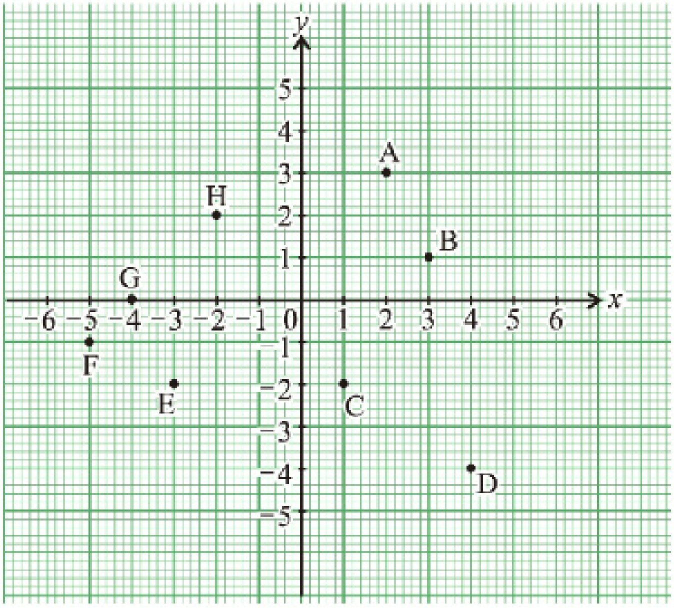


图10-2

利用直角坐标系，可以把平面内的点和有序数对互相对应，从而就可将几何问题与代数问题联系起来进行研究。

随堂练习 1

写出下图中各点的坐标。



10.2 距离公式

在坐标平面上，在得知任意两点的坐标后，可使用距离公式来求出两点之间的距离。

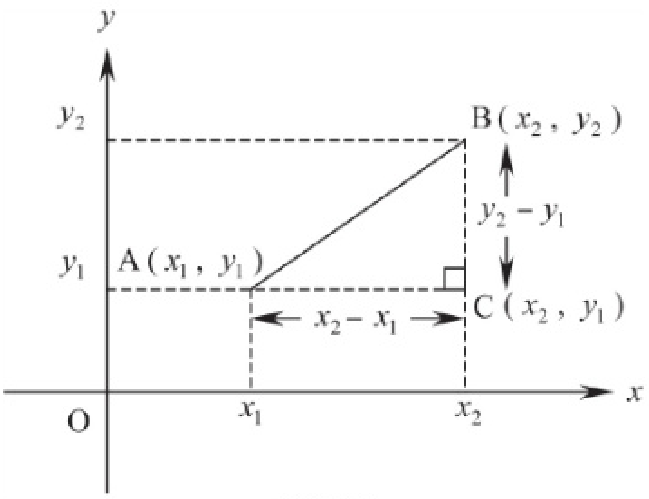


图10-3

如图10-3所示，A (x_1 , y_1) 与 B (x_2 , y_2) 是直角坐标系中的任意两点。作AC平行于x轴，BC平行于y轴，则C点的坐标是 (x_2 , y_1) 。因此，在直角三角形ABC中，由毕氏定理可得

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

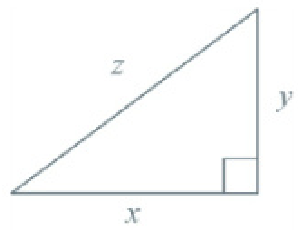
从而求得A，B两点之间的距离：

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

补充资料

毕氏定理

直角三角形两个直角边的平方和等于其斜边的平方。



$$x^2 + y^2 = z^2$$

图10-4

例题 1

求下列两点之间的距离：

(a) A (2, 4) , B (–3, 16)

(b) P (–4, 3) , Q (2, 11)

解 (a)
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-3-2)^2 + (16-4)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(-4-2)^2 + (3-11)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

思考题

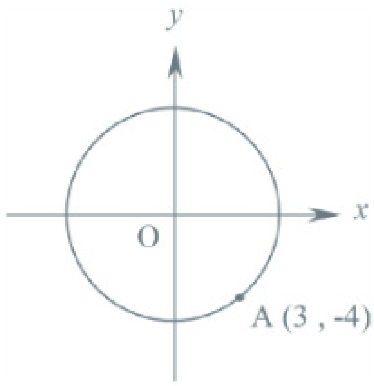


图10-5

在图10-5的圆中，O为圆心，A为圆上的一点。求此圆的半径。

例题 2

证明点 P(2, –2)，Q(–2, 2)及 R(0, 4)为一直角三角形的顶点坐标。

解

$$PQ = \sqrt{(-2-2)^2+(2+2)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$PR = \sqrt{(0-2)^2+(4+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$QR = \sqrt{(0+2)^2+(4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$\because$ $PQ^2+QR^2 = 32+8 = 40 = PR^2$

$\therefore$ P(2, –2)，Q(–2, 2)及 R(0, 4)为一直角三角形的顶点坐标。

随堂练习 2

1. 求连接下列两点线段的长度：

(a) (–1, 2), (–5, 5)　　(b) (0, 0), (3, 4)

(c) (–2, –3), (1, 1)　　(d) (4, –6), (–2, 2)

(e) (–1, 3), (11, –2)　　(f) (0, 1), (6, –7)

2. 求 A(–1, 3)与 B(–3, 4)之间的距离。

3. 若 A(m, 5)与 B(3, –5)两点的距离为 $2\sqrt{29}$，求 m 的值。

补充资料

直角坐标系的应用

身处陌生的环境中，地图往往发挥着极大的功用。除了用以辨别目的地所位于的方向，地图也可用来测量出发地与目的地之间的距离。

一幅城市地图是按照特定的比例尺，将实地的地理信息缩小绘制而成的。而地图上的图网 (grid) 是由许多纵横交错的方格线所组成的，这些方格线就是一个坐标系。

正如图10-6的吉隆坡市区地图中，若以国家档案局 (Arkib Negara Malaysia) 为原点 (0, 0)，则吉隆坡中环车站 (KL Sentral) 的坐标为 (–4, –2)，而精武体育馆的坐标则为 (3, 2) 。应用距离公式可求出国家档案局与吉隆坡中环车站之间的距离约为4.47单位。根据比例尺，地图上一方格的长度代表实地距离的200公尺，因此两地的实际距离是1.61公里。

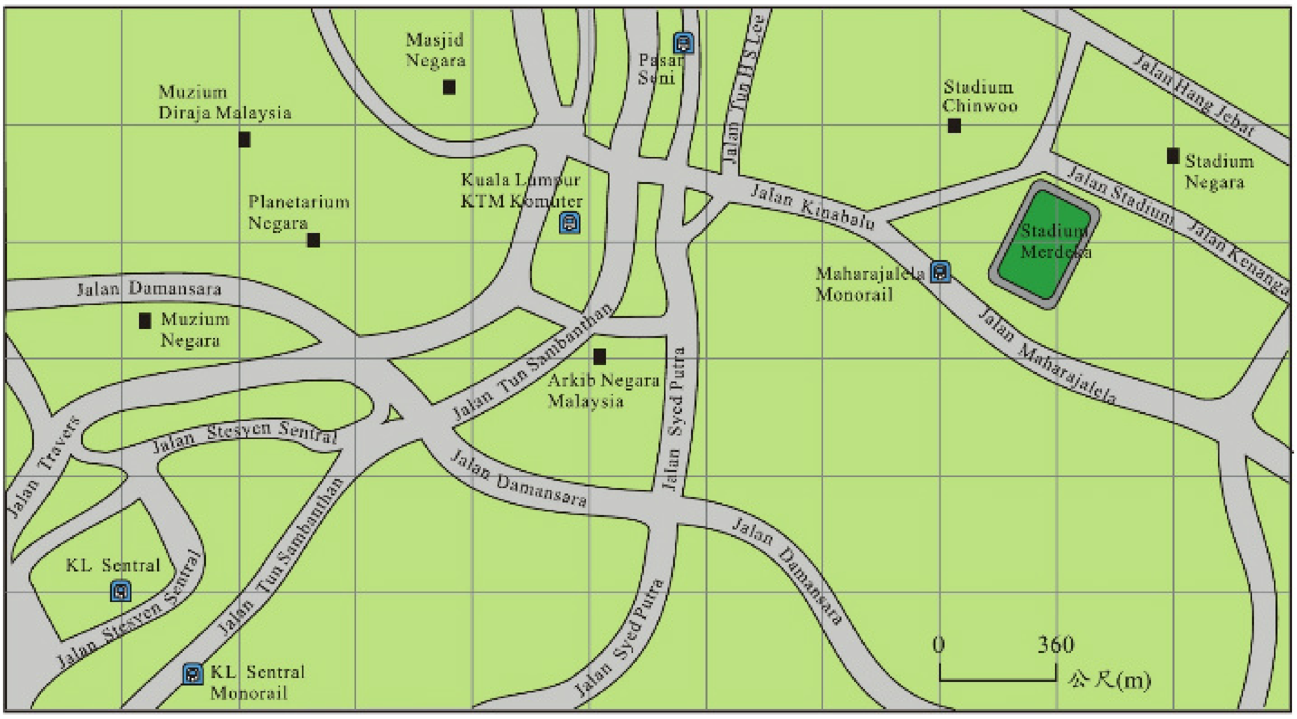


图10-6

试应用坐标计算吉隆坡中环车站与以下地点之间的实际距离：

(a) 吉隆坡火车站 (Kuala Lumpur KTM Komuter station)

(b) 独立广场 (Stadium Merdeka)

练习 10.2

1. 求下列两点之间的距离：

   (a) $(-2, -4)$，$(-2, 4)$

   (b) $(2, 0)$，$(4, 1)$

   (c) $(2, -3)$，$(-2, -4)$

   (d) $(-2, 3)$，$(-4, -3)$

2. $A(3, -7)$ 及 $B(-1, 4)$ 是一个正方形相邻的两个顶点，求这个正方形的面积。

3. 已知 P 是 x 轴上的一点且与 $A(3, 4)$ 及 $B(2, 9)$ 两点等距。求点 P 的坐标。

4. 若 $A(6, m)$ 及 $B(8, 9)$ 两点的距离为 $5\sqrt{5}$，求 m 的值。

5. 已知两点 $A(5, -2)$ 及 $B(0, -3)$。试在 x 轴上求一点 P 使 $PA = PB$。

6. 已知点 $M(m+1, 3m-5)$ 到 y 轴的距离是点 M 到 x 轴距离的一半，求 m 的值。

7. 已知点 P 到点 $A(3, 6)$ 的距离与 P 到两坐标轴的距离都相等，求点 P 的坐标。

10.3 分比公式

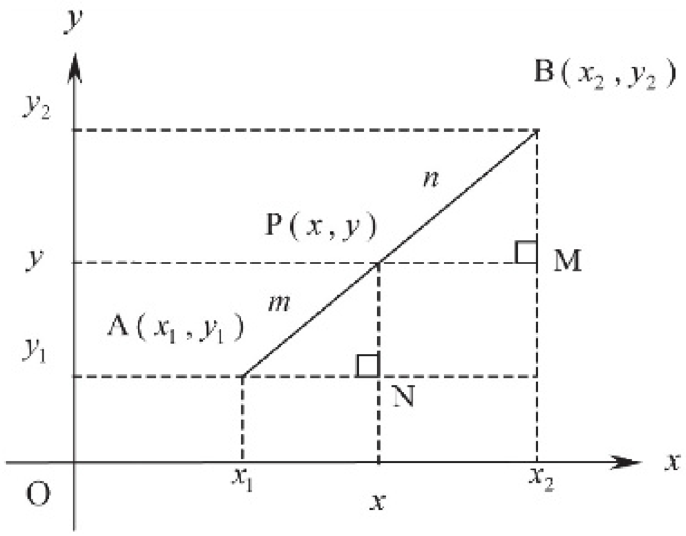


图 10-7

如图 10-7 所示，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 为线段 AB 的端点，点 $P(x, y)$ 内分线段 AB 成 $m:n(m, n>0)$。

因此，$\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$ ，点 P 称为内分点。

$$\because \quad \Delta PMB \backsim \Delta ANP$$

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{PM}$$

$$\frac{m}{n}=\frac{x-x_1}{x_2-x}$$

$$m(x_2-x)=n(x-x_1)$$

化简得 $$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

同理可得 $$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

∴ P 的坐标是 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$。

例题 1

已知A，B两点的坐标分别是（-5，2）及（7，4）。求内分线段 AB 成 2 : 1 的点 P 的坐标。

解 设内分点 P 的坐标为（x，y），则

$$x=\frac{(2)(7)+(1)(-5)}{2+1}=3 \qquad y=\frac{(2)(4)+(1)(2)}{2+1}=\frac{10}{3}$$

∴ 内分点 P 的坐标为 $\left(3,\ \frac{10}{3}\right)$。

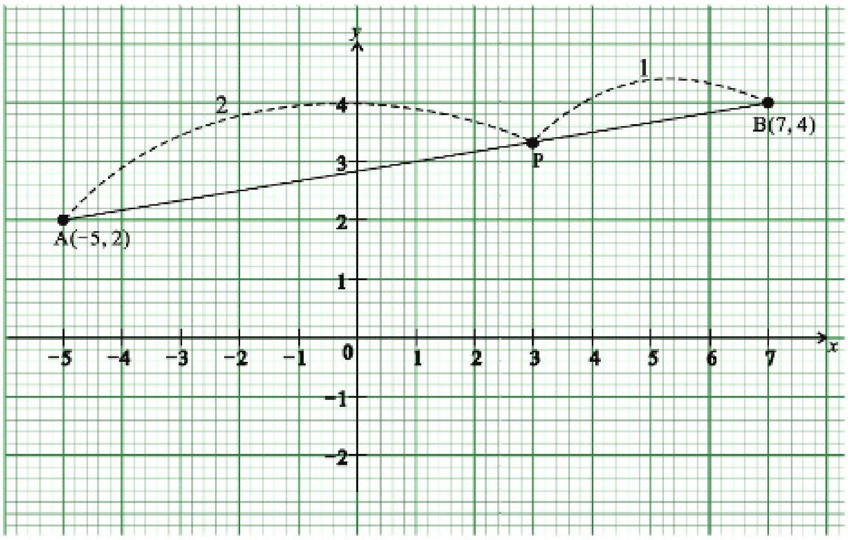


图 10-8

例题 2

已知两点 A (–7，1) 及 B (3，6) 。求内分 AB 成 3 : 2 的点 P 的坐标。

解 设点 P 的坐标为 (x，y)，则

$$x=\frac{(3)(3)+(2)(-7)}{3+2}=-1 \qquad y=\frac{(3)(6)+(2)(1)}{3+2}=4$$

∴ 内分点 P 的坐标为 (–1，4)。

例题 3

已知两点 A 及 B 的坐标是 (–2，5) 及 (p，q) 。若点 P (0，8) 内分线段 AB 成 1 : 3 ，求点 B 的坐标。

解 由分比公式得

$$0=\frac{(1)(p)+(3)(-2)}{1+3}=\frac{p-6}{4}$$

$$p=6$$

$$8=\frac{(1)(q)+(3)(5)}{1+3}$$

$$32=q+15$$

$$q=17$$

∴ 点 B 的坐标是 (6，17)。

当 P (x, y) 内分 AB 成 1 : 1 时，点 P 称为 AB 的中点：

$$P(x,\ y)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

上述公式称为中点坐标公式。

例题 4

求连接 (2，–3) 与 (8，–9) 两点之线段的中点坐标。

解 设中点坐标为 (x, y)，则

$$x=\frac{2+8}{2}=5 \qquad y=\frac{(-3)+(-9)}{2}=-6$$

∴ 中点坐标为 (5，–6)。

思考题

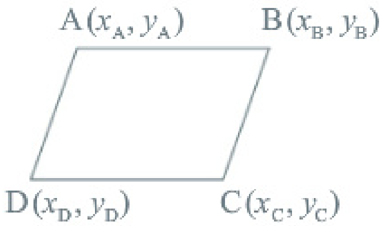


图10-9

A，B，C，D 是平行四边形的四个顶点。若已知平行四边形的其中三个顶点，该如何找出第四个顶点的坐标？

随堂练习 3

1. 已知点 A (–7，1) 及 B (3，6) 。求内分线段 AB 成 3 : 2 的点的坐标。

2. 已知 A，B 两点的坐标分别是 (5，0) 及 (–3，0)，且点 P 平分线段 AB 。试求点 P 的坐标。

若点 P (x, y) 在线段 AB 的延长线上，且 $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$，则 P 外分 AB 成 $m:n$，点 P (x, y) 称为外分点。

例题 5

若线段 AB 的端点坐标为 A(3, –4)及 B(–9, 2)，已知 P为其外分点且 $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{4}$，求 P 的坐标。

注意

从比值 $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{4}$，我们得知 AP < PB。因此，点 P 的位置较接近点 A。

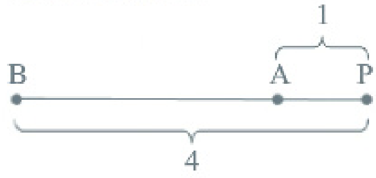


图10-11

解 设 P 的坐标为 (x, y)。把 A 看成内分点，则 BA : AP = 3 : 1 。根据内分点公式，得

$$\frac{(3)(x)+(1)(-9)}{3+1}=3 \qquad \frac{(3)(y)+(1)(2)}{3+1}=-4$$

$$x=7 \qquad y=-6$$

∴ 外分点 P 的坐标为 (7 , –6) 。

例题 6

已知两点 A (–7, 1) 及 B (3, 6)，若Q 外分AB 成 3 : 2，求点 Q 的坐标。

解 已知 $\frac{AQ}{QB}=\frac{3}{2}$，设Q的坐标为 (x, y)。把B看成内分点，则 AB : BQ = 1 : 2 。根据内分点公式，得

$$\frac{(1)(x)+(2)(-7)}{1+2}=3 \qquad \frac{(1)(y)+(2)(1)}{1+2}=6$$

$$x=23 \qquad y=16$$

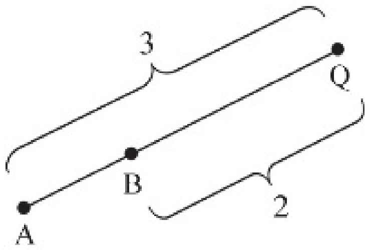


图10-12

∴ 外分点 Q 的坐标为 (23 , 16) 。

随堂练习 4

1. 已知 A (3, –1) 及 B (2, 1) 。若 P 外分 AB 成 3 : 2 ，求点 P 的坐标。
2. 已知 A (–3, 1), B (5, –4) ，点 P(x, y) 在 AB 的延长线上, 且 $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{3}$ ，求点 P 的坐标。

例题 7

已知 P (1, 3), Q (5, 11), R (9, 5) 为一个三角形的顶点坐标，求该三角形三条中线的长。

解 PQ 边的中点坐标 $=\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+11}{2}\right)$

$=(3, 7)$

∴ R 到 PQ 边的中线长 $=\sqrt{(9-3)^2+(5-7)^2}$

$=\sqrt{36+4}$

$=2\sqrt{10}$

QR 边的中点坐标 $=\left(\frac{5+9}{2}, \frac{11+5}{2}\right)$

$=(7, 8)$

∴ P 到 QR 边的中线长 $=\sqrt{(1-7)^2+(3-8)^2}$

$=\sqrt{36+25}$

$=\sqrt{61}$

RP 边的中点坐标 $=\left(\frac{9+1}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$

$=(5, 4)$

∴ Q 到 RP 边的中线长 $=\sqrt{(5-5)^2+(11-4)^2}$

$=7$

补充资料

由三角形的任意边的中点连接一条直线到其对角的顶点，这条直线就称为中线。图10-12的三角形中的三条虚线都是ΔPQR的中线。

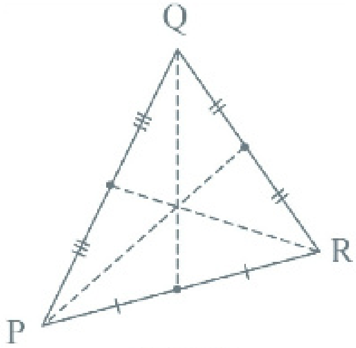


图10-13

例题 8

点 P(–2，3)， Q(3，5)， R(0，–6) 为一三角形的顶点坐标 。S 及 T 分别是 PQ 及 QR 的中点。证明 $ST=\frac{1}{2}PR$ 。

解

$$\text{S 的坐标} = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

$$\text{T 的坐标} = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{5-6}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$ST^2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left[4-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 1+\frac{81}{4} = \frac{85}{4}$$

$$PR^2 = (-2-0)^2+[3-(-6)]^2 = 4+81 = 85$$

$$\therefore \quad ST^2 = \frac{1}{4}PR^2$$

$$ST = \frac{1}{2}PR$$

随堂练习 5

已知 ΔABC 的三个顶点是 $A(-4, 4)$，$B(2, 6)$，$C(0, -6)$。求此三角形三条中线的长。

练习 10.3

1. 已知两点 $A(8, 1)$及 $B(3, 6)$。若点 P 内分 AB 成 $3:2$，求 P 的坐标。
2. 一个三角形的三个顶点分别是 $A(1, -3)$，$B(3, -5)$及 $C(-5, 7)$，求它的三边的中点坐标。
3. 一线段的两个端点分别是 $A(1, -3)$ 及 $B(4, 3)$。现将线段 AB 分成三等分，求两个分点的坐标。
4. 若一条线段的其中一个端点的坐标是 $(-1, 2)$，中点坐标是 $(2, 1)$，求这条线段另一个端点的坐标。
5. 已知 A，B 两点的坐标分别是 $(1, -2)$及 $(-5, 3)$。若点 Q 外分 AB 成 $2:1$，求Q 的坐标。
6. 若连接 $P(-6, 3)$，$Q(9, 13)$两点的线段与 y 轴相交于点 R，求 $PR:PQ$。
7. 已知 $A(7, -3)$，$B(11, 5)$及 $C(-1, 9)$是平行四边形 ABCD 的其中三个顶点，求线段 AC 的中点的坐标。据此，求顶点 D 的坐标。
8. 已知 $A(-6, -11)$及 $B(7, 15)$是平行四边形 ABCD 的其中两个顶点，且平行四边形的两条对角线相交于点 $M(9, 6)$。求 C，D 两个顶点的坐标。
9. 已知 $A(8, 20)$，$B(-7, 14)$及 C 是三角形 ABC 的顶点。若 AC 的中点位于 x 轴上，而 BC 的中点位于 y 轴上，求顶点 C 的坐标。

10.4 三角形的面积

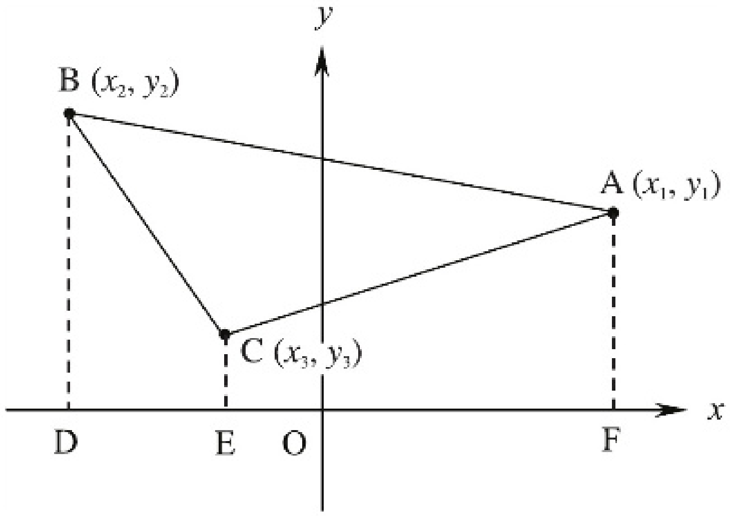


图10-14

如图10-13所示，设三角形的三个顶点分别是 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$。作 AF，CE 及 BD 三条垂直于 x 轴的直线，它们的垂足分别是 F，E 及 D。

$$
\begin{aligned}
\Delta ABC\text{的面积} &= \text{梯形FABD的面积} - \text{梯形ECBD的面积} - \text{梯形FACE的面积} \\
&= \frac{1}{2}(AF + BD) \times DF - \frac{1}{2}(CE + BD) \times DE - \frac{1}{2}(AF + CE) \times EF \\
&= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_1 - x_3) \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3) \\
&= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)]
\end{aligned}
$$

上述所得公式可以用以下方法帮助记忆：
将三角形各顶点的 x 坐标与 y 坐标由左至右排成以下形式，最后再重复第一个顶点的坐标。

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_1 \end{array}$$

将每条向下箭头的两数相乘的积相加，减去向上箭头的两数相乘的积，然后将结果除以 2，也可以得到三角形的面积公式。

利用上述方法求三角形的面积可得正值或负值的结果，视所取顶点的排列次序而定：若顶点按逆时针方向排列，所求得的结果为正值；若顶点按顺时针方向排列，所求得的结果为负值。但是，实际面积的值恒等于其绝对值，所以

$$\Delta ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right|$$

例题 1

求由三点 $(-2, -3)$，$(3, -1)$ 及 $(1, -5)$ 所形成的三角形面积。

解 三角形面积

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & & 3 & & 1 & & -2 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -3 & & -1 & & -5 & & -3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\Big|[(-2)(-1)+(3)(-5)+(1)(-3)] \\ &\quad -[(-3)(3)+(-1)(1)+(-5)(-2)]\Big| \\ &= \frac{1}{2}\left|(2-15-3)-(-9-1+10)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-16-0\right| \\ &= 8 \end{aligned}$$

例题 2

一三角形的面积为 3 平方单位，它的两个顶点为 A (3，1) 及 B (1，–3)，而第三个顶点 C 在 y 轴上，求 C 的坐标。

解 由于点 C 在 y 轴上，设其坐标为 (0，y)。

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & y & 1 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\left|(-9+y+0)-(1+0+3y)\right|=3$$

$$\frac{1}{2}\left|-10-2y\right|=3$$

$$\left|-10-2y\right|=6$$

$$-10-2y=\pm 6$$

$$y=-8 \quad \text{或} \quad y=-2$$

∴ 顶点 C 的坐标为 (0，–8) 或 (0，–2)。

例题 3

证明三点 (0，3)，(4，5) 及 (–8，–1) 共线。

解

$$\begin{array}{cccc} 0 & 4 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \end{array}$$

$$\text{面积}=\frac{1}{2}\left|(0-4-24)-(12-40+0)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-28+28\right|$$

$$=0$$

(0，3)，(4，5) 及 (–8，–1) 无法构成一个带有面积的图形，因此可以判断它们在同一直线上。

随堂练习 6

1. 求以下各点为顶点的三角形的面积：
   (a) $(2,\ -3)$，$(3,\ 2)$，$(-2,\ 5)$
   (b) $(-3,\ 2)$，$(5,\ -2)$，$(1,\ 3)$
   (c) $(3,\ -4)$，$(-2,\ 3)$，$(4,\ 5)$
   (d) $(-6,\ 7)$，$(-7,\ -2)$，$(2,\ -4)$

2. 证明 $(3,\ 0)$，$(-2,\ 5)$，$(1,\ 2)$ 三点共线。

练习 10.4

1. 一平行四边形的其中三个顶点为 $A(-2,\ 3)$，$B(3,\ -2)$ 及 $C(-3,\ 1)$，求它的面积。

2. 已知一三角形的面积是4平方单位，它的两个顶点为 $A(2,\ 1)$及 $B(3,\ -2)$，且第三个顶点 C 在 x 轴上。求 C 的坐标。

3. 若 $(p,\ 2)$，$(3,\ 5)$及 $(7,\ 11)$ 三点在一直线上，求 p 的值。

4. 若 $(p+1,\ 1)$，$(2p+1,\ 3)$ 及 $(2p+2,\ 2p)$ 三点共线，求 p 的值。

10.5 多边形的面积

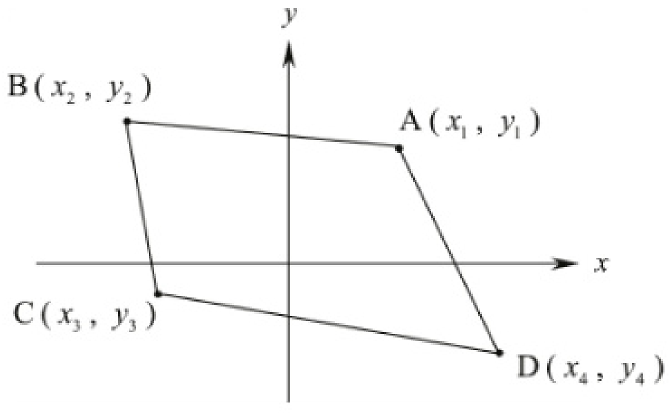


图10-15

$$\begin{aligned}\text{四边形ABCD的面积} &= \Delta\text{ABC的面积} + \Delta\text{ACD的面积}\\ &= \frac{1}{2}[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)]\\ &\quad+\frac{1}{2}[(x_1y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(x_3y_1+x_4y_3+x_1y_4)]\\ &= \frac{1}{2}[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4)]\end{aligned}$$

上述的四边形面积公式也可以使用以下方法帮助记忆：

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{array}$$

$$\text{ABCD的面积} = \frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4)\right|$$

五边形或多于五边的多边形的面积，都可仿照以上的方法计算。惟，求面积之前必须先确定各顶点在坐标平面上的位置。接着，取任一顶点作为起点，然后将其余顶点顺序排列后才进行面积计算。

例题 1

求一个以 $(-3,\ -1)$，$(-1,\ 4)$，$(4,\ 4)$，$(5,\ 0)$ 及 $(0,\ -2)$ 为顶点的五边形的面积。

解 五边形的面积

$$= \frac{1}{2}\left|\,(20+16+1+6+0)-(0-4-12+0-10)\,\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\,43+26\,\right|$$

$$= \frac{69}{2}$$

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 4 & -1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

随堂练习 7

求以下列各点为顶点的多边形的面积：

(a) $(2,\ -1)$，$(5,\ 6)$，$(3,\ 8)$，$(-4,\ 4)$

(b) $(0,\ 2)$，$(5,\ 5)$，$(7,\ 1)$，$(12,\ 4)$

(c) $(1,\ 3)$，$(1,\ 9)$，$(7,\ 8)$，$(8,\ 4)$，$(5,\ 2)$

(d) $(1,\ 5)$，$(-2,\ -4)$，$(-4,\ 0)$，$(5,\ 3)$，$(5,\ 0)$

练习 10.5

1. 已知五边形的顶点分别是(1, 0), (3, 1), (4, 3), (0, 4), (−2, 1)，求其面积。

2. 一个五边形 ABCDE 的面积是 44 平方单位，其顶点分别是 A(2, 4), B(−2, 4), C(−2, −4), D(2, −4) 及 E(p, 0)，求 p 的值。

3. 一个平行四边形 ABCD 的其中三个顶点分别是 A(7, 5), B(1, 7) 及 C(0, 2)，求它的面积。

4. 一个菱形 OABC 的其中三个顶点分别是 O(0, 0), A(2, 4) 及 B(6, 6)。求 C 的坐标及菱形的面积。

总复习题 10

1. 求在 x 轴上一点的坐标，它与点 A(2, −3) 的距离是 5 。

2. P(3, 5) 与 Q(1, −3) 是一个正方形中的两个相对顶点，求这个正方形的面积。

3. 求内分两点 (−3, 4) 及 (0, −1) 的连线成 2 : 1 的点的坐标。

4. 已知 A, B 两点的坐标分别是 (1, −2) 及 (−5, 4)。设点 C 外分 AB 成 3 : 5，求 C 的坐标。

5. 已知两点 A(1, −1) 及 B(−4, 5)。将 AB 之连线延长至点 C，使得 AC = 3AB，求点 C 的坐标。

6. 一平行四边形 ABCD 的其中三个顶点分别是 A(3, −5), B(5, −3), C(−1, 3)。求点 D 的坐标。

7. 已知A(1, 4)，B(3, –9)，C(–5, 2)是一个三角形的三个顶点。求由点B所作出的中线的长度。

8. 三角形ABC的三个顶点分别是A(3, 6)，B(2, –3)及C(–1, 4)。求由顶点B到AC边上的高。

9. 已知三角形三边的中点分别是(–2, –5)，(–1, 1)及(4, –1)，求此三角形各顶点的坐标。

10. 若(–1, –2)，(2, t)及(3, 6)三点共线，求t的值。

11. 若(p, –1)，(4, p)及(0, –4)三点同在一条直线上，求p的值。

12. 三角形三个顶点为A(–2, 0)，B(–7, 0)，C(–3, –2)。判断ΔABC是哪一种三角形，并求此三角形的面积。

13. 已知三角形三顶点为A(–1, 3)，B(2, 7)，C(6, 4)。判断ΔABC是哪一种三角形，并求ΔABC的面积。

14. 一个四边形的四个顶点分别是A(0, –3)，B(4, 1)，C(1, 3)及D(–2, –3)，求它的面积。

15. 一个五边形的顶点分别是(–1, –3)，(3, 0)，(1, 4)，(–2, 4)及(–4, 0)，求这个五边形的面积。

16. 一个筝形OABC的其中三个顶点分别是O(0,0)，A(4,0)及B(6,6)。求此筝形的面积。

17. 一个凸五边形ABCDE的顶点分别是A(4, 2)，B(0, 4)，C(–4, –2)，D(–1, –4)及E(2, t)，其面积是39平方单位。求t的值。

18. 一个菱形的ABCD的其中三个顶点分别是A(3, –2)，B$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$及C(6, 2)。求此菱形的面积。

11. 直线

学习目标：

- 理解斜率及倾斜角的定义
- 掌握两条直线平行与垂直的条件
- 能根据不同的已知条件求出直线的方程式
- 理解两条直线的交点的位置关系及掌握交点的求法
- 掌握点到直线的距离公式，并能灵活应用

11.1 斜率

在坐标平面上研究直线的性质，例如研究两条直线是否平行或垂直，常常需要研究直线相对于x轴的倾斜程度。一条直线的倾斜程度通常是用直线的倾斜角或斜率来表示。

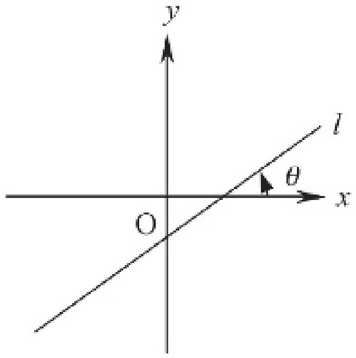


图11-1

如图11-1所示，设直线l由x轴按逆时针方向旋转θ，其中$0^\circ \leq \theta < 180^\circ$，那么$\theta$就称为直线$l$的倾斜角。当$\theta \neq 90^\circ$时，$\tan\theta$称为直线$l$的斜率。

当$\theta = 90^\circ$时，直线与x轴垂直，$\tan 90^\circ$无意义，因此与x轴垂直的直线斜率没有定义。当$\theta = 0^\circ$时，$\tan 0^\circ = 0$，直线与x轴平行，其斜率等于零。

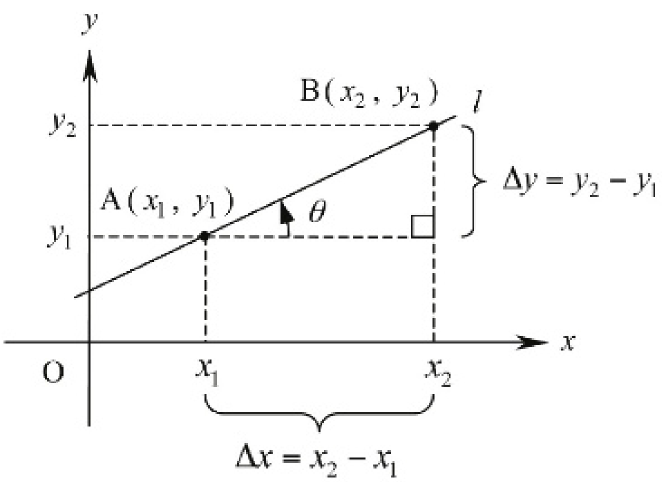


图11-2

如图11-2所示，设点 A (x_1，y_1) 及 B (x_2，y_2) 是直线 l 上的任意两点，θ 是直线 l 的倾斜角。根据三角函数的定义，$\tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。所以经过 A (x_1，y_1) 及 B (x_2，y_2) 两点的直线的斜率是

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

由此得知，直线的斜率可由直线上的任意两点求得。

例题 1

求经过下列两点的直线斜率：

(a) A (–3, 1) 及 B (6, 3)

(b) P (3, 5) 及 Q (6, 3)

(c) R (1, –2) 及 S (–1, 3)

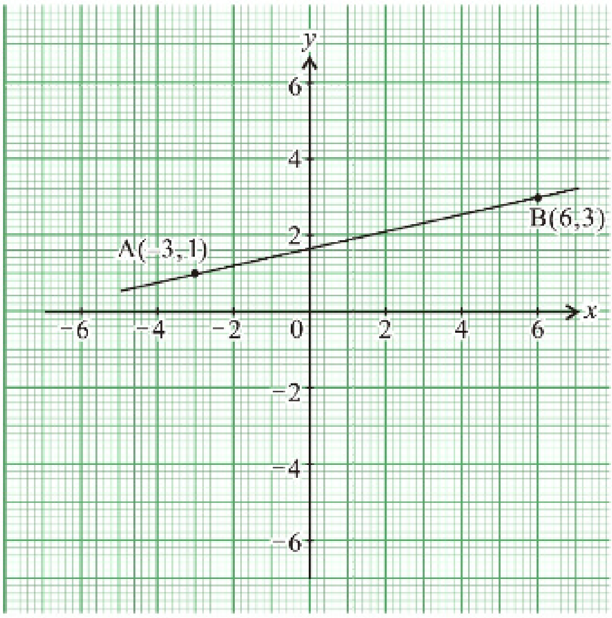


图11-3

解 (a) $m_{AB} = \dfrac{3-1}{6-(-3)}$

$= \dfrac{2}{9}$

(b) $m_{PQ} = \dfrac{3-5}{6-3}$

$= -\dfrac{2}{3}$

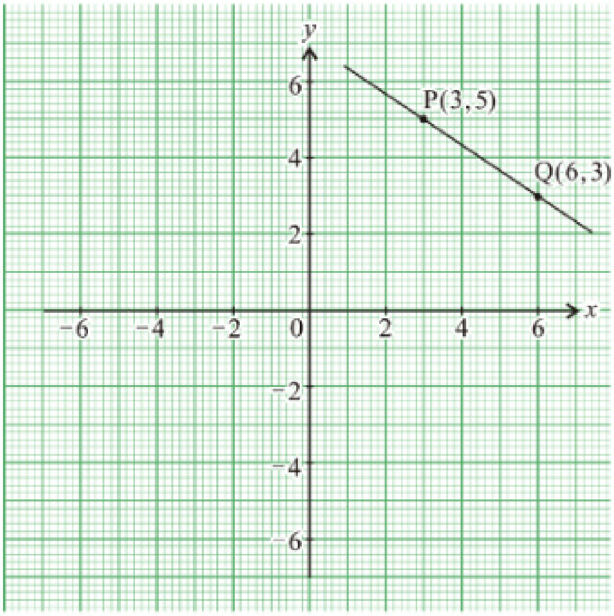


图11-4

(c) $m_{RS} = \dfrac{3-(-2)}{-1-1}$

$= -\dfrac{5}{2}$

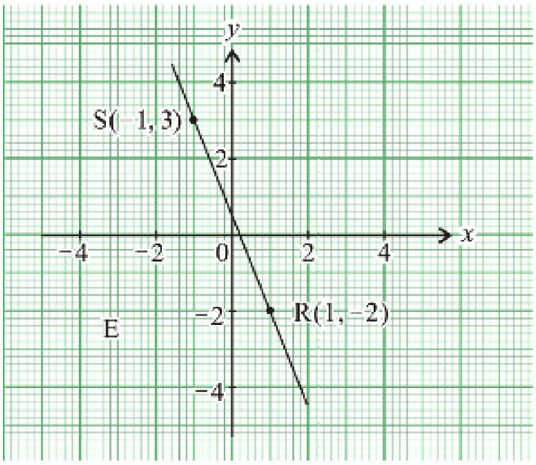


图11-5

补充资料

在例题1中，直线的斜率有正值及负值。

当直线的斜率是正值时，此直线与 x 轴的正向形成锐角（图11-6）。

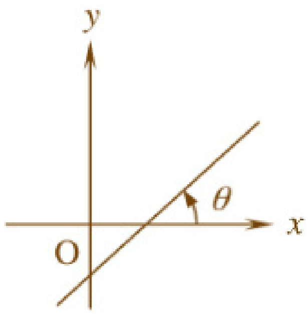


图11-6

当直线的斜率是负值时，此直线与 x 轴的正向形成钝角（图11-7）。

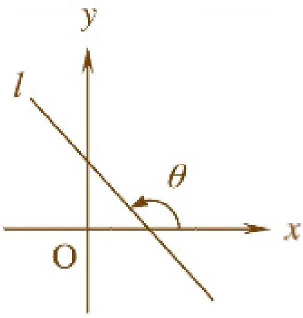


图11-7

随堂练习 1

求经过下列两点的直线的斜率：

(a) $(3, 5)$，$(-4, 12)$

(b) $(10, 8)$，$(4, -4)$

(c) $(-3, 2)$，$(-2, 3)$

两条直线的平行

设两条相异直线 l_1 及 l_2 的斜率分别是 m_1 及 m_2，则

$$l_1 // l_2 \iff m_1 = m_2$$

例题 2

若 A $(-3, -2)$，B $(0, 0)$ 及 C $(x, 8)$ 在同一直线上，求 x 的值。

解 A，B，C 三点共线，所以 $m_{AB} = m_{BC}$。

$$\text{AB的斜率 } m_{AB} = \frac{0-(-2)}{0-(-3)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{BC的斜率 } m_{BC} = \frac{8-0}{x-0} = \frac{8}{x}$$

$$m_{AB} = m_{BC}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$$

$$\therefore \quad x = 12$$

例题 3

设 A，B 及 C 三点的坐标分别是 $(-6, -2)$，$(3, 4)$ 及 $(12, 10)$。证明 A，B，C 三点共线。

解 AB的斜率 $m_{AB} = \dfrac{4-(-2)}{3-(-6)} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

BC的斜率 $m_{BC} = \dfrac{10-4}{12-3} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

线段 AB 与 BC 的斜率相等，且两线段有公共点 B 。

$\therefore$ A，B，C 三点共线。

例题 4

证明 $A(-2, -1)$，$B(1, 0)$，$C(4, 3)$ 及 $D(1, 2)$ 是一平行四边形的四个顶点。

解 $m_{AB} = \dfrac{0-(-1)}{1-(-2)} = \dfrac{1}{3}$

$m_{DC} = \dfrac{3-2}{4-1} = \dfrac{1}{3}$

$\because$ $m_{AB} = m_{DC}$

$\therefore$ AB // DC

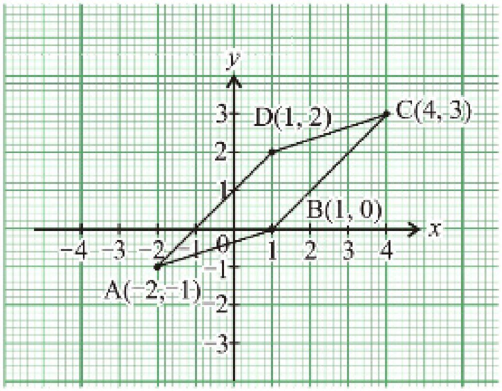


图11-8

（续）$m_{AD} = \dfrac{2-(-1)}{1-(-2)} = \dfrac{3}{3} = 1$

$m_{BC} = \dfrac{3-0}{4-1} = \dfrac{3}{3} = 1$

$\because\ m_{AD} = m_{BC}$

$\therefore\ AD \parallel BC$

$\therefore$ A，B，C 及 D 是平行四边形的四个顶点。

随堂练习 2

1. 若 A(−3, 4) 及 B(−1, 1) 的连线平行于 C(0, 5) 及 D(2, y) 的连线，求 y 的值。
2. 证明 A(3, −5)，B(5, −3)，C(−1, 3) 及 D(−3, 1) 是一平行四边形的四个顶点。

两条直线的垂直

如图11-9所示，设直线 l_1 及 l_2 的倾斜角分别是 θ_1 及 θ_2。直线 l_1 及 l_2 的斜率分别是 m_1 及 m_2。若 l_1 垂直于 l_2，则

$\theta_2 = 90^\circ + \theta_1$ （三角形外角等于内对角之和）

$$\tan\theta_2 = \tan(90^\circ + \theta_1)$$
$$= -\cot\theta_1$$
$$= -\frac{1}{\tan\theta_1}$$
$$\therefore\ m_2 = -\frac{1}{m_1}$$
$$m_1 m_2 = -1$$

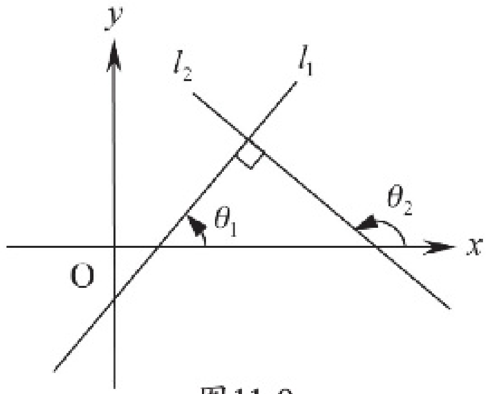


图11-9

设两条相异直线 l_1 及 l_2 的斜率分别是 m_1 及 m_2，则

$$l_1 \perp l_2 \iff m_1 m_2 = -1$$

例题 5

已知 A，B 及 C 三点的坐标分别是 $(-2, 5)$，$(k, -1)$ 及 $(5, 1)$。若 $AB \perp BC$，求 k 的值。

解

$\because AB \perp BC$

$\therefore m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$

$$\frac{-1-5}{k-(-2)} \cdot \frac{1-(-1)}{5-k} = -1$$

$$\frac{-6}{k+2} \cdot \frac{2}{5-k} = -1$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$(k-1)(k-2) = 0$$

$$k = 1 \quad 或 \quad k = 2$$

例题 6

已知四点 A，B，C，D 的坐标分别是 $(-1, -2)$，$(5, 1)$，$(4, 3)$，$(8, 5)$。证明 $AB \perp BC$ 及 $AB \parallel CD$。

解

AB 的斜率 $m_{AB} = \dfrac{1-(-2)}{5-(-1)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

BC 的斜率 $m_{BC} = \dfrac{3-1}{4-5} = -2$

CD 的斜率 $m_{CD} = \dfrac{5-3}{8-4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$

$\therefore AB \perp BC$

又，$m_{AB} = m_{CD}$

$\therefore AB \parallel CD$

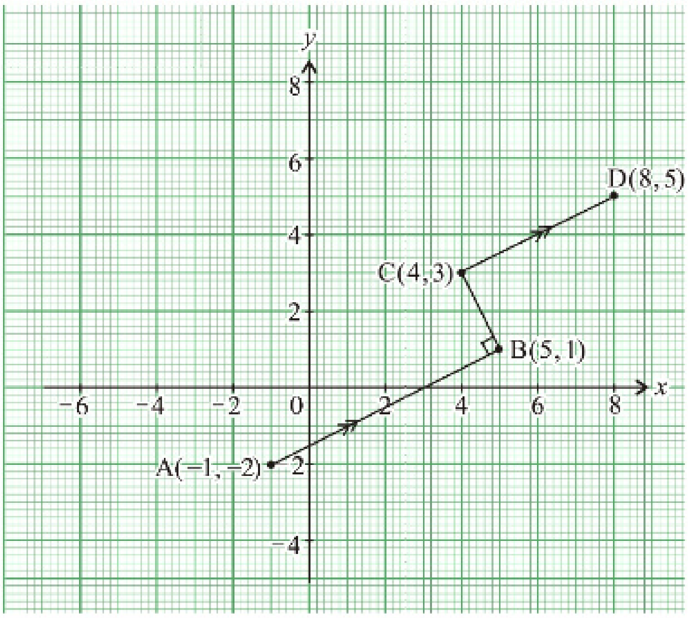


图11-10

例题 7

证明 A(2, –2), B(8, 4), C(5, 7) 及 D(–1, 1) 是一长方形的四个顶点。

解

$$m_{AB} = \frac{4-(-2)}{8-2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$m_{DC} = \frac{7-1}{5-(-1)} = \frac{6}{6} = 1$$

$\because\ m_{AB} = m_{DC}$

$\therefore\ AB \parallel DC$

$$m_{AD} = \frac{-2-1}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$m_{BC} = \frac{7-4}{5-8} = \frac{3}{-3} = -1$$

$\because\ m_{AD} = m_{BC}$

$\therefore\ AD \parallel BC$

又，$m_{AD} \cdot m_{DC} = -1$。所以，$AD \perp DC$。

$\because\ AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$ 及 $AD \perp DC$

$\therefore$ A, B, C, D 是一长方形的四个顶点。

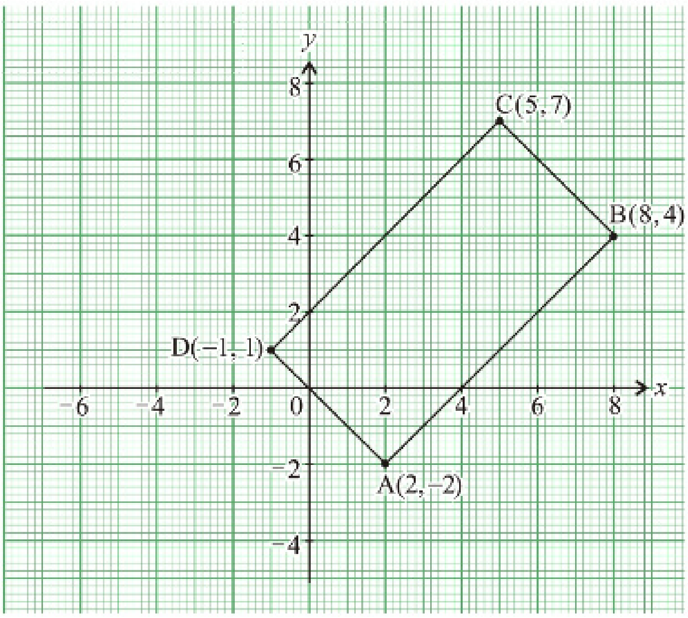


图11-11

随堂练习 3

1. 证明过点 A(0, 2) 及 B(–3, 0) 的直线与过点 C(4, 0) 及 D(0, 6) 的直线互相垂直。
2. 证明 A(2, 1), B(3, –2), C(–4, –1) 是一直角三角形的三个顶点。

练习 11.1

1. 证明三点 A(3, 2), B$\left(-3, \frac{7}{2}\right)$及 C(–5, 4)在同一直线上。
2. 证明以 A(3, 2), B(1, 13), C(7, 5)为顶点的三角形是一个直角三角形。
3. 证明 A(2, 3), B(4, –1), C(0, –5)及 D(–2, –1)是一平行四边形的四个顶点。
4. 证明 A(–3, –3), B(5, 1), C(3, 5)及 D(–5, 1)是一长方形的四个顶点。
5. 证明 A(2, 2), B(–1, 6), C(–5, 3)及 D(–2, –1)是一正方形的四个顶点。
6. 若过 A(a, –5), B(–4, a)两点的直线与过 C(3, a), D(a, 3)两点的直线互相垂直，求 a 的值。
7. 已知一直角三角形 ABC 中的顶点 A 在 x 轴上，且角 A 是直角，B 及 C 的坐标分别是(5, –3)及(4, 4)。求点 A 的坐标。
8. 已知 A(1, –3), B(–3, –5)及 C(–5, 7)是三角形的三个顶点。求 AB 及 AC 的中点 E 及 F 的坐标，并证明直线 EF 与直线 BC 平行。

11.2 直线方程式的几种形式

若以一个二元一次方程式的解为坐标的点都落在某条直线上，这个二元一次方程式就称为直线方程式。一条直线在直角坐标系上，可以由两个不同的条件来确定。

点斜式

如图11-12所示，设直线l的斜率是m，且过点A(x_1, y_1)，点P(x, y)是直线l上任意一点。当P不等于A时，PA的斜率就是直线l的斜率。根据经过两点的直线的斜率公式，得

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

上述公式可化成以下形式

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

以上方程式可根据直线上的一点及其斜率求得，称为直线方程式的点斜式。

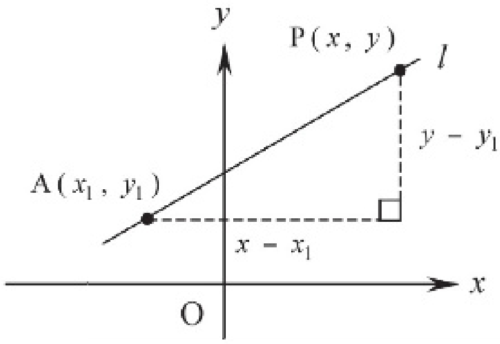


图11-12

例题 1

求过点A$(-2, 1)$且满足下列条件的直线方程式：

(a) 斜率是4　　(b) 斜率是0

解 (a) 已知$m = 4$。由点斜式，得

$y - 1 = 4[x - (-2)]$

$y - 1 = 4x + 8$

$\therefore$ 所求的直线方程式是$4x - y + 9 = 0$。

(b) 已知 $m=0$。由点斜式，得

$$y-1=0[x-(-2)]$$
$$y=1$$

$\therefore$ 所求的直线方程式是 $y=1$。

$y=1$ 是一条与 x 轴平行的直线。

思考题

若直线通过点 A (–2 , 1) 但斜率没有定义，则直线的方程式为何?

例题 2

一条直线过点 P (–5，–3)，倾斜角 $\theta=135^\circ$。求这条直线的方程式。

解 $m=\tan 135^\circ=-1$P (–5–3)

$$y-(-3)=-1[x-(-5)]$$
$$y+3=-x-5$$

$\therefore$ 所求的直线方程式是 $x+y+8=0$。

随堂练习 4

1. 求满足下列条件的直线方程式：
   (a) 过点 (–1，–7)，斜率 $m=3$
   (b) 过点 (2，–3)，斜率 $m=-5$
2. 求过点 (–3，0) 且满足下列条件的直线方程式：
   (a) 斜率 $m=0$
   (b) 斜率没有定义
   (c) 倾斜角是 45°

两点式

如图 11-13 所示，设 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 是直线 l 上的两点，且 $x_1 \neq x_2$，则直线 l 的斜率 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$。使用点斜式来求直线 l 的方程式，$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$。经整理，得

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

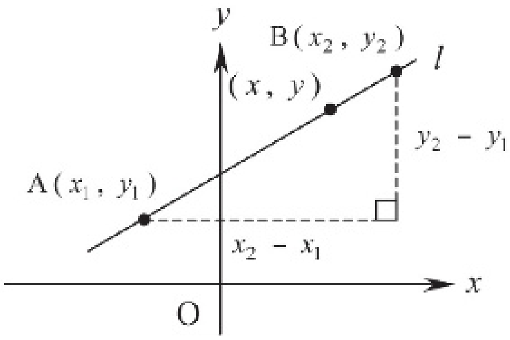


图11-13

以上方程式可由直线上任意两点求得，称为直线方程式的两点式。

思考题

若 $x_1 = x_2$，则直线的方程式为何？

例题 3

求过点 $A(-1, 3)$ 及 $B(4, -2)$ 的直线方程式。

解 由两点式，得 $\dfrac{y - 3}{x - (-1)} = \dfrac{-2 - 3}{4 - (-1)}$

$$\frac{y - 3}{x + 1} = -1$$

∴ 直线方程式是 $x + y - 2 = 0$。

随堂练习 5

求过下列两点的直线方程式。

(a) $A(0, 0)$，$B(2, -2)$

(b) $C(3, 4)$，$D(5, 6)$

(c) $E(-1, 3)$，$F(6, -7)$

斜截式

如图11-14所示，设直线 l 的斜率是 m，在 y 轴上的截距是 c，即直线 l 过点 $(0, c)$。点 $P(x, y)$ 是直线 l 上任意一点。由两点的斜率公式，得 $m = \dfrac{y-c}{x-0}$

即 $y = mx + c$

以上方程式可由直线的斜率及y截距求得，称为直线方程式的斜截式。

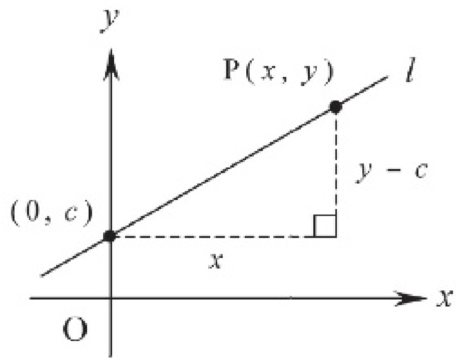


图11-14

例题 4

已知一直线的 y 截距是 -3，斜率是 $\dfrac{1}{2}$。求此直线方程式。

解 由斜截式，得 $y = \dfrac{1}{2}x + (-3)$

$\therefore$ 直线方程式是 $x - 2y - 6 = 0$。

例题 5

已知一条斜率为 2 的直线与 y 轴的交点是 $(0, 4)$。求此直线方程式。

解 已知直线的 y 截距是 4。由斜截式，得

$$y = 2x + 4$$

$\therefore$ 直线方程式是 $2x - y + 4 = 0$。

补充资料

在坐标系中，直线 l 与 x 轴的交点的横坐标称为 l 的 x 截距，与 y 轴的交点的纵坐标称为 l 的 y 截距。

如图 11-15 所示，直线 l 交 x 轴于点 $(a, 0)$，交 y 轴于点 $(0, b)$，则 a 称为 l 的 x 截距，b 称为 l 的y 截距。

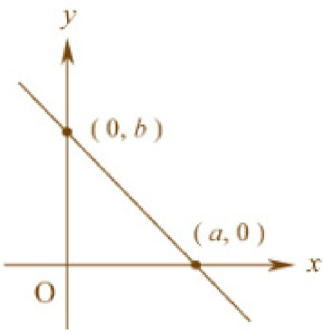


图11-15

随堂练习 6

求满足下列条件的直线方程式。

(a) 斜率 $m = 3$，y 截距 $= 0$

(b) 斜率 $m = -2$，y 截距 $= -5$

(c) 斜率 $m = \frac{2}{3}$，y 截距 $= 3$

(d) 斜率 $m = -\frac{3}{4}$，y 截距 $= 3$

截距式

如图 11-16 所示，设直线 l 在 x 轴及 y 轴上的截距分别是 a 及 b，其中 $a \neq 0$，$b \neq 0$。使用两点式来求直线 l 的方程式，得 $\frac{y-b}{x-0} = \frac{0-b}{a-0}$

经整理，得 $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

以上方程式可由直线的 x 截距及 y 截距求得，称为直线方程式的截距式。

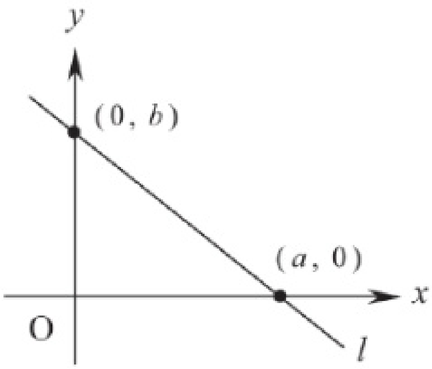


图11-16

例题 6

已知一直线在 x 轴上的截距是 -3，在 y 轴上的截距是 2。求此直线方程式。

解 由截距式，得 $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$

$$2x - 3y + 6 = 0$$

$\therefore$ 直线方程式是 $2x - 3y + 6 = 0$。

随堂练习 7

1. 求下列直线的斜率，x 截距及 y 截距。

(a) $2x+3y-12=0$ (b) $x-4=0$

(c) $x-3y=0$ (d) $2x+5=0$

2. 已知直线的 x 截距及 y 截距分别是 3 及 -4，求此直线的方程式。

练习 11.2

1. 已知一直线的 x 截距是 3，且斜率是 2。求直线的方程式。
2. 一直线的 x 截距是 3，y 截距是 2，求直线的方程式。
3. 若一条斜率为 2 的直线过 $(3,5)$，$(a,7)$ 及 $(-1,b)$ 三点，求 a，b 的值及直线的方程式。
4. 一直线过点 $(3,1)$，且其在两坐标轴上的截距相等。求直线的方程式。
5. 设 $A(0,1)$，$B(2,0)$ 及 $C(-1,-2)$ 是三角形的三个顶点。求三角形各边的直线方程式。
6. 设三角形三个顶点分别是 $A(-3,0)$，$B(4,-1)$ 及 $C(0,2)$。求三角形各边的直线的方程式。
7. 若一直线过点 $(-3,4)$，且其 x 截距及 y 截距之和为 12。求直线的方程式。
8. 求过点 $(1,2)$ 且与两坐标轴成直角等腰三角形的直线的方程式。
9. 已知一直线与两坐标轴的正半轴交于 A、B 两点。若 $OA+OB=5$（O是原点），且 ΔOAB 的面积是 3，求直线的方程式。
10. 一直线 l 过点 $P(3,2)$，且分别交两坐标轴的正轴于 A、B 两点。若 P 恰好是线段AB 的一个三等分点，求直线 l 的方程式。

11.3 直线方程式的一般式

在上一节，我们学习了直线方程式的几种形式。任何含 x 及 y 的一次方程式都可写成下列形式

$$Ax+By+C=0$$

其中 A，B，C 为常数，且 A 及 B 不同时为零。我们将这种形式的方程式称为直线方程式的一般式。

我们可从直线方程式的一般式得到直线的一些特征：

(a) **当 $A\neq 0$，$B\neq 0$ 时**，方程式 $Ax+By+C=0$ 可化成

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

的形式。将上式与斜截式 $y=mx+c$ 比较，可得直线的斜率是 $-\frac{A}{B}$，y 截距是 $-\frac{C}{B}$。

(b) **当 $A=0$，$B\neq 0$ 时**，方程式 $Ax+By+C=0$ 可化成 $y=-\frac{C}{B}$ 的形式。$y=-\frac{C}{B}$ 是一条与 x 轴平行或重合（当 $C=0$ 时）的直线。

(c) **当 $A\neq 0$，$B=0$ 时**，方程式 $Ax+By+C=0$ 可化成 $x=-\frac{C}{A}$ 的形式。$x=-\frac{C}{A}$ 是一条与 y 轴平行或重合（当 $C=0$ 时）的直线。

补充资料

若方程式 $Ax+By+C=0$ 中的 $C=0$，此方程式是一条通过原点的直线。

例题 1

求下列直线的斜率及 y 截距：

(a) $4x-3y-11=0$ (b) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

解 (a)

$$\begin{aligned}4x-3y-11&=0\\3y&=4x-11\\y&=\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}\end{aligned}$$

$\therefore$ 直线的斜率 $m=\frac{4}{3}$，y 截距是 $-\frac{11}{3}$ 。

(b)

$$\begin{aligned}-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}&=1\\\frac{y}{2}&=\frac{x}{3}+1\\y&=\frac{2}{3}x+2\end{aligned}$$

$\therefore$ 直线的斜率 $m=\frac{2}{3}$，y 截距是 2 。

例题 2

已知两条直线 l_1 及 l_2 的直线方程式分别是 $2x-y+7=0$ 及 $4x-2y+9=0$ 。证明 $l_1 // l_2$ 。

解 将 l_1 及 l_2 的方程式写成斜截式，得 $l_1: y=2x+7$，$l_2: y=2x+\frac{9}{2}$。

由此可得，l_1的斜率 $m_1=2$，l_2的斜率 $m_2=2$ 。

$\because$ $m_1=m_2$

$\therefore$ $l_1 // l_2$

例题 3

求过点 (1, 2) 且与直线 $2x+3y+4=0$ 平行的直线的方程式。

解 直线 $2x+3y+4=0$ 的斜率是 $-\frac{2}{3}$ 。

已知所求直线与已知直线平行，所以其斜率 $m=-\frac{2}{3}$ 。

由点斜式，得
$$\begin{aligned} y-2 &= -\frac{2}{3}(x-1) \\ 3(y-2) &= -2(x-1) \\ 2x+3y-8 &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ 所求直线的方程式是 $2x+3y-8=0$ 。

随堂练习 8

1. 已知两条直线的方程式分别是 $l_1: 2x+3y-2=0$ 及 $l_2: 4x+6y+7=0$ 。证明 $l_1 // l_2$ 。
2. 求过点 (–1, 5) 且与直线 $3x-2y-6=0$ 平行的直线的方程式。
3. 求过点 (1, –4) 且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线的方程式。

例题 4

已知两条直线 l_1 及 l_2 的方程式分别是 $l_1: 2x-4y+7=0$ 及 $l_2: 2x+y-5=0$。证明 $l_1 \perp l_2$。

解 将 l_1 及 l_2 的方程式写成斜截式，得 $l_1: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{4}$，

$l_2: y=-2x+5$。

由此可得，l_1 的斜率 $m_1=\dfrac{1}{2}$，l_2 的斜率 $m_1=-2$。

$\because\ m_1 \cdot m_2=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)=-1$

$\therefore\ l_1 \perp l_2$

例题 5

求过点 $(-3,-2)$ 且与直线 $5x-2y-1=0$ 垂直的直线的方程式。

解 直线 $5x-2y-1=0$ 的斜率 $m_1=\dfrac{5}{2}$。

所求直线垂直于已知直线，所以其斜率 $m_2=\dfrac{-1}{m_1}=-\dfrac{2}{5}$。

由点斜式，得 $y-(-2)=-\dfrac{2}{5}\left[x-(-3)\right]$

$$5(y+2)=-2(x+3)$$

$$2x+5y+16=0$$

$\therefore$ 所求直线的方程式是 $2x+5y+16=0$。

例题 6

若直线 $l_1: 2x + 3y - 7 = 0$ 与直线 $l_2: 9x + ky + 4 = 0$ 垂直，求 k 的值。

解 将直线 l_1 及 l_2 写成斜截式：

$l_1: y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$，　$l_2: y = -\frac{9}{k}x - \frac{4}{k}$ 。

由斜截式得知，

l_1 的斜率 $m_1 = -\frac{2}{3}$ ，l_2 的斜率 $m_2 = -\frac{9}{k}$ 。

已知两直线互相垂直，所以 $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{k}\right) = -1$$

$$3k = -18$$

$$k = -6$$

$\therefore$ k 的值是 -6 。

随堂练习 9

1. 已知两条直线的方程式分别是 $l_1: 2x - 3y + 7 = 0$ 及 $l_2: 6x + 4y + 9 = 0$ 。
   证明 $l_1 \perp l_2$ 。
2. 求过点 (2, 1) 且与直线 $3x - 2y - 6 = 0$ 垂直的直线方程式。

练习 11.3

1. 求下列直线的斜率及 y 截距。

   (a) $5x-y+3=0$ (b) $2x+3y-6=0$

   (c) $3x+2y=0$ (d) $y-3=0$

2. 判别下列直线中，哪些直线互相平行，哪些直线互相垂直。

   $l_1: x+2y-5=0$ $l_2: 6x-3y+7=0$

   $l_3: 2x-y-7=0$ $l_4: 4x+6y+3=0$

   $l_5: \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ $l_6: 2x+3y=0$

3. 若 $l_1: 3x+5y-10=0$ 与 $l_2: kx-(k-2)y-3=0$ 互相垂直，求 k 的值。

4. 若直线 $l_1: 2x+By+9=0$ 与 $l_2: 12x-9y+7=0$ 平行，求直线 l_1 的 y 截距。

5. 求过 $(0, 1)$ 且与直线 $2x+3y+4=0$ 垂直的直线的方程式。

6. 求过 $(1, -4)$ 且与 $2y+7=0$ 平行的直线的方程式。

7. 求过点 $(4, -5)$ 且与直线 $3x+4y+5=0$ 平行的直线的方程式。

8. 一个长方形其中的两边的方程式分别是 $2x-3y+5=0$ 及 $3x+2y-7=0$，而 $(2, -3)$ 是它的其中一个顶点的坐标。求此长方形另两边的方程式。

11.4 两条直线的交点

在初中，我们已经学习二元一次联立方程式的解法。在几何上，解联立方程式实际上就是求两条直线的交点。通过求出两直线方程式的公共解，就可得到两直线交点的坐标。

例题 1

求直线 $l_1: x+5y-35=0$ 与 $l_2: 3x+2y-27=0$ 的交点坐标。

解 解方程组 $\begin{cases} x+5y-35=0 \quad \cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x+2y-27=0 \quad \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

$(1)\times 3$: $3x+15y-105=0 \quad \cdots\cdots\cdots (3)$

由 $(3)-(2)$ 得，$13y-78=0$

$y=6$

将 $y=6$ 代入 (1) 得，$x=35-5\times 6$

$=5$

$\therefore$ l_1，l_2 交点坐标是 $(5, 6)$。

补充资料

已知两条直线 $l_1: y=m_1x+c_1$ 及 $l_2: y=m_2x+c_2$。两直线会有下列其中一种情况：

1. **两直线相交于一点**

两直线斜率不同，即 $m_1 \neq m_2$。它们有一个交点。（图11-17）

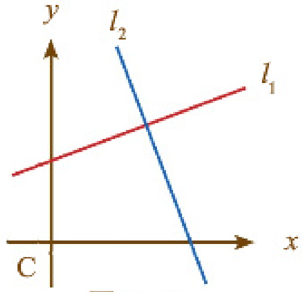


图11-17

2. **两直线平行但不重合**

两直线斜率相同，即 $m_1 = m_2$，但 y 截距不同，即 $c_1 \neq c_2$。它们无任何交点。（图11-18）

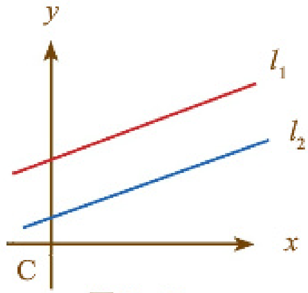


图11-18

3. **两直线重合**

两直线斜率及 y 截距都相同，即 $m_1 = m_2$，$c_1 = c_2$。它们有无限多个交点。（图11-19）

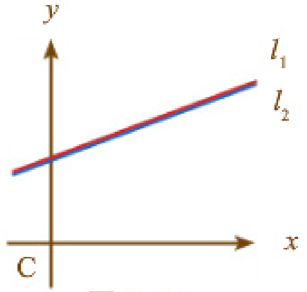


图11-19

例题 2

求直线 $l_1: 2x-4y+3=0$ 与 $l_2: x-2y=0$的交点。

解 将直线 l_1 及 l_2 写成斜截式：

$l_1: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$， $l_2: y=\dfrac{1}{2}x$ 。

直线 l_1 的斜率 $m_1=\dfrac{1}{2}$，截距 $c_1=\dfrac{3}{4}$；

直线 l_2的斜率 $m_2=\dfrac{1}{2}$，截距 $c_2=0$。

由于$m_1=m_2$，$c_1\neq c_2$，

$\therefore$ 两直线平行但不重合，即 l_1与 l_2 没有交点。

例题 3

已知直线 $2kx+(k+1)y-9=0$ 与 $(2k-1)x-y+3=0$ 的交点在 y 轴上。求 k 的值。

解 已知两直线的交点在 y 轴上，设交点的坐标为 $(0, b)$ 。

将交点坐标代入直线的方程式，得

$(k+1)b-9=0$

$$b=\frac{9}{k+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$-b+3=0$

$$b=3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2) 代入 (1) 得 $k=2$

$\therefore$ k 的值是 2 。

随堂练习 10

1. 求直线$l_1: 3x+2y-7=0$与$l_2: -x+6y-11=0$的交点坐标。
2. 求直线 $l_1: 3x+4y-2=0$ 与 $l_2: 2x+y+2=0$ 的交点坐标。
3. 已知直线 $kx-y+2k=0$ 与 $(k+1)x-ky+6=0$ 的交点在x轴上。求 k 的值。

练习 11.4

1. 求下列各直线对的交点。
   (a) $x-y+2=0$ 与 $3x+2y+6=0$
   (b) $x-2y=0$ 与 $x+y-6=0$
   (c) $x-3y-9=0$ 与 $2x+y-18=0$
   (d) $3x+2y-13=0$ 与 $2x+3y-12=0$
2. 求直线 $2x-3y-12=0$ 与两坐标轴的交点。
3. 已知直线 $(k+1)x+3y-10=0$ 与 $x-y-2k-1=0$ 的交点在 x 轴上。求 k 的值。
4. 已知直线 $2x+3y-4=0$ 与 $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+20=0$ 互相垂直，且它们的交点坐标是 $(-4, 4)$ 。求 A 及 B 的值。

11.5 点到直线的距离、二平行线的距离

点到直线的距离

根据定义，点 $P(x_0, y_0)$ 到直线的距离是点 P 到直线 l 的垂直线段的长度，如图 11-20 所示。

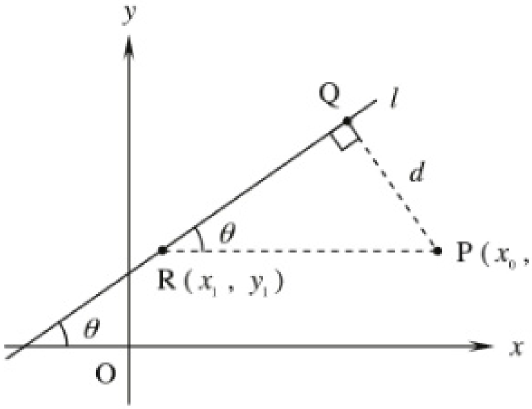


图 11-20

设直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的倾斜角是 θ。点 $R(x_1, y_1)$ 在直线 l 上，且 P，R 两点的连线与 x 轴平行。点Q是点 P 在直线 l 上的垂足。

∵ PR 与 x 轴平行，且 R 在直线 $l: Ax + By + C = 0$ 上，点 R 的坐标可表示成下列形式：

$$y_1 = y_0$$

$$x_1 = \frac{-By_0 - C}{A}$$

∴ $$PR = |x_0 - x_1|$$

$$= \left| x_0 - \frac{-By_0 - C}{A} \right|$$

$$= \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right|$$

已知直线的斜率 $\tan\theta = -\dfrac{A}{B}$ 。由三角函数的定义，得

$$\sin\theta = \left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| 。$$

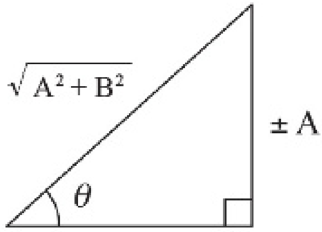


图 11-21

$$\begin{aligned}\therefore \quad PQ &= PR\sin\theta \\ &= \left|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}\right| \cdot \left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \\ &= \left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\end{aligned}$$

由此可得，平面上一点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$ 的距离公式：

$$d = \left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

例题 1

求点 P (2, –3) 到下列各直线的距离。

(a) $3x-4y+12=0$

(b) $3x=2$

解 (a)
$$\begin{aligned} d &= \left|\frac{3(2)-4(-3)+12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| \\ &= \frac{30}{5} \\ &= 6\end{aligned}$$

(b) 因为直线 $3x=2$ 与 y 轴平行，所以

$$d=\left|\frac{2}{3}-2\right|$$

$$=\frac{4}{3}$$

或

将 $3x=2$ 写成一般式 $3x-2=0$ 。

$$d=\left|\frac{3(2)+0(-3)-2}{\sqrt{3^2+0^2}}\right|$$

$$=\frac{4}{3}$$

例题 2

已知点 A $(a, 6)$ 到直线 $3x-4y=2$ 的距离是 4，求 a 的值。

解 点 A 到直线 l 的距离 $d=\left|\frac{3a-4(6)-2}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|$

$$4=\left|\frac{3a-26}{5}\right|$$

$$\frac{3a-26}{5}=\pm 4$$

$$\therefore\ a=\frac{46}{3}\quad 或\quad a=2$$

二平行线的距离

由平面几何的知识可知，两条平行线之间的距离处处相等。因此，我们只需要从任一直线上取一点，再计算这个点到另一直线的距离，便可得到两条平行线之间的距离。

例题 3

求两条平行 $l_1: 3x-4y-10=0$ 与 $l_2: 6x-8y+5=0$ 之间的距离。

解 在直线 $l_1: 3x-4y-10=0$ 上任取一点，如 $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$，则

两条平行线的距离即为点 $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$ 到直线

$l_2: 6x-8y+5=0$ 的距离。

$$\therefore \quad d=\left|\frac{6\left(\frac{10}{3}\right)-8(0)+5}{\sqrt{6^2+8^2}}\right|$$

$$=\frac{5}{2}$$

随堂练习 11

1. 求点 P ($-1, 2$) 到下列各直线的距离。

   (a) $2x + y - 10 = 0$

   (b) $3x = 2$

   (c) $2y = 5$

2. 求直线 $3x + 5y - 7 = 0$ 与 $3x + 5y + 2 = 0$ 之间的距离。

练习 11.5

1. 求原点到直线 $3x + 4y - 10 = 0$ 的距离。

2. 求点 ($1, 2$) 到直线 $4x - 3y = 20$ 的距离。

3. 求下列两平行线之间的距离。

   (a) $5x - 12y + 36 = 0$ 与 $5x - 12y - 13 = 0$

   (b) $4x - 3y + 15 = 0$ 与 $8x - 6y + 25 = 0$

4. 已知点 A ($a, 6$) 到直线 $3x - 4y = 2$ 的距离等于 4，求 a 的值。

5. 若从 y 轴上的一点到直线 $x - 2y - 1 = 0$ 的距离是 $\sqrt{5}$，求这点的可能坐标。

6. 已知三角形的三个顶点分别是 A ($-4, 2$)，B ($-1, 0$)，C ($3, -6$)，求从点 A 到 BC 边上的垂直距离。

7. 已知三角形的三边 AB，BC 及 CA的直线方程式分别是 $3x + 5y - 15 = 0$，$3x + 2y - 24 = 0$ 及 $x - y + 3 = 0$。求 B 至直线 AC 的距离。

总复习题11

1. 若一直线过两点 A (0, –9) 及 B (6, 0)，求直线的方程式。
2. 一直线过点 (–5, 0) 与点 (0, 6)，求直线的方程式。
3. 一直线的斜率是 $-\dfrac{1}{3}$ ，y 截距是 $\dfrac{2}{3}$ ，求直线的方程式。
4. 已知一直线的斜率是 $-\dfrac{3}{4}$ ，y 截距是 3 。求直线的方程式。
5. 一直线过点 (1, –2)，且其 x 截距与 y 截距的数值相等，求直线的方程式。
6. 求直线 $5x + 3y + 2 = 0$ 的斜率及其 y 截距。
7. 求直线 $2x + 7 = 0$ 的斜率及其 y 截距。
8. 当 a 为何值时，下列直线互相平行但不重合。

   (a) $ax - 5y = 9$，$2x - 3y = 15$

   (b) $x + 2ay - 1 = 0$，$(3a - 1)x - ay - 1 = 0$

   (c) $2x + 3y = a$，$4x + 6y - 3 = 0$
9. 当 b 为何值时，下列两方程式的直线互相垂直。

   (a) $4bx + y = 1$，$(b - 1)x + y = -1$

   (b) $bx + 3y = 2$，$3bx - 4y = 1$
10. 求与直线 $2x + 3y + 4 = 0$ 平行且通过点 (2, 1) 的直线的方程式。
11. 求通过点 (5, –3) 且与直线 $3x - 2y + 7 = 0$ 垂直的直线的方程式。
12. 求通过点 (2, 3) 且与直线 $4x - 3y - 10 = 0$ 垂直的直线的方程式。
13. 求过点 (2, –3)，且与两点 (5, 7) 及 (–6, 3) 的连线垂直的直线的方程式。
14. 已知两定点 P (2, 3) 及 Q (–1, 0)。求过点 Q 且与直线 PQ 垂直的直线的方程式。
15. 求 A (3, –1)，B (–5, 5) 的连线的垂直平分线。若点 (k , 1) 在此垂直平分线上，求 k 的值。

16. 若一直线过点 $(-1,4)$，且其 x 截距与 y 截距之和等于 6，求该直线的方程式。

17. 一直线过点 $M(-4,3)$。A，B 两点分别是直线在 x 轴及 y 轴上的截点。若点 M 分线段 AB 成 $5:3$，求直线的方程式。

18. 已知两直线的方程分别是 l_1：$(3+m)x+4y=5-3m$，l_2：$2x+(5+m)y=8$。当 m 为何值时，l_1 与 l_2 满足下列条件：

    (a) 平行；

    (b) 平行但不重合；

    (c) 相交于一点。

19. 求下列两直线的交点：

    (a) $4x-y-3=0$ 与 $x+2y-3=0$

    (b) $2x+3y=0$ 与 $3x-2y=0$

20. 已知直线 $3x-5y+22=0$，$2x+3y+2=0$ 及 $ax-3y-10=0$ 相交于一点。求 a 的值。

21. 求经过两条直线 $2x+5y-9=0$ 及 $4x-y+15=0$ 的交点，且与直线 $x-5y+6=0$ 平行的直线的方程式。

22. 求经过两条直线 $2x-y+1=0$ 及 $3x-y+3=0$ 的交点，且与直线 $5x-2y+7=0$ 垂直的直线的方程式。

23. 求两平行直线 $24x-10y+39=0$ 与 $12x-5y-26=0$ 之间的距离。

24. 一个三角形 ABC 的三个边 AB，BC 及 CA 分别在直线 $4x+3y-5=0$，$x-3y+10=0$ 及 $x-2=0$。求 AC 边上的高。

名词对照

7 任意角的三角函数

钝角 obtuse angle
象限 quadrant
任意角 arbitrary angle
正弦曲线 sine curve
余弦曲线 cosine curve
正切曲线 tangent curve

8 任意三角形的解法

锐角三角形 acute-angled triangle
直角三角形 right-angled triangle
钝角三角形 obtuse-angled triangle
正弦定律 sine rule
余弦定律 cosine rule
外接圆 circumscribed circle (circumcircle)
毕氏定理 Pythagoras theorem

9 三角恒等式与三角方程式

三角恒等式 trigonometric identity
倍角公式 double angle formula
半角公式 half angle formula
三角方程式 trigonometric equation
周期 period
最简方程式 simplest equation

10 直角坐标系

直角坐标系 rectangular coordinate system
横轴 horizontal axis
纵轴 vertical axis
序偶 ordered pair
分比 division of line segments
中点 midpoint
内分点 internal division point
外分点 external division point
中线 median

11 直线

倾斜角 angle of inclination
斜率 gradient / slope
平行 parallel
垂直 perpendicular
直线方程式 equation of straight line
点斜式 point-slope form
两点式 two-point form
斜截式 gradient-intercept form
截距式 intercept form / double-intercept form
截距 intercept
交点 point of intersection

答案

7. 任意角的三角函数

随堂练习 1 (P. 3)

1. (a) 第一象限　(b) 第四象限
   (c) 第二象限　(d) 第三象限
2. 第一象限

练习 7.1 (P. 4)

1. (a) 第三象限　(b) 第二象限
   (c) 第四象限　(d) 第二象限
   (e) 第三象限　(f) 第一象限
2. 第四象限

随堂练习 2 (P. 6)

$\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\tan\alpha = -\frac{3}{2}$

$\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\sec\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $\cot\alpha = -\frac{2}{3}$

练习 7.2 (P. 6)

	(a)	(b)	(c)	(d)
$\sin\theta$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{7}{25}$
$\cos\theta$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{24}{25}$
$\tan\theta$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{7}{24}$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{25}{7}$
$\sec\theta$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	-2	$\frac{25}{24}$
$\cot\theta$	$\frac{4}{3}$	-2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{24}{7}$

随堂练习 3 (P. 14)

	象限	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
1. (a)	三	−	−	+
(b)	一	+	+	+
(c)	二	+	−	−
(d)	三	−	−	+
(e)	四	−	+	−
(f)	二	+	−	−

2. (a) 一，四　(b) 二，四
   (c) 一，二　(d) 一，三
   (e) 三，四
3. (a) 负值　(b) 正值

4. $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$

5. (a) $\frac{1}{2}$　(b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) -1　(d) $-\sqrt{2}$

练习 7.3a

(P. 15)

1. (a) 负值　(b) 负值

(c) 正值　(d) 正值

(e) 负值　(f) 负值

(g) 正值　(h) 正值

2. (a) 第二或第四象限

(b) 第二象限

(c) 第一或第四象限

(d) 第一或第三象限

(e) 第二或第四象限

(f) 第一或第二象限

3. (a) 第二或第三象限

(b) 第一或第三象限

(c) 第一或第二象限

(d) 任何象限

4. $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan\alpha = \pm\sqrt{15}$

5. $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

6. $\cos\alpha = \pm\frac{24}{25}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{25}{7}$

7. $\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cot\alpha = 4\sqrt{3}$

8. $-\frac{32}{15}$　9. $\frac{13\sqrt{10}}{30}$

10. $\frac{2}{3}$　11. $\frac{247}{175}$

12. (a) $\sin\theta = -\frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$,
$\operatorname{cosec}\theta = -\frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = -\frac{3}{4}$

(b) $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$,
$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = -\frac{5}{3}$, $\cot\theta = -\frac{3}{4}$

13. (a) $-\cos 45°$ 或 $-\sin 45°$

(b) $-\sin 10°$ 或 $-\cos 80°$

(c) $-\cot 40°$ 或 $-\tan 50°$

(d) $\operatorname{cosec} 10°$ 或 $\sec 80°$

(e) $-\operatorname{cosec} 30°$ 或 $-\sec 60°$

14. (a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) -1　(d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(e) 2　(f) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(g) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(h) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) -1　(j) 没有定义

15. (a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　(b) $\frac{4\sqrt{3}-5}{4}$

(c) $\frac{6\sqrt{3}-1}{12}$　(d) 2

(e) -2

随堂练习 4 (P. 21)

1. (a) $\cos\theta$ (b) $-\sin\theta$
   (c) $-\sec\theta$ (d) $-\cot\theta$
2. $\frac{8}{17}$

练习 7.3b (P. 22)

1. (a) $-\sin\theta$ (b) $\sin\theta$
   (c) $\operatorname{cosec}\theta$ (d) $-\operatorname{cosec}\theta$
   (e) $-\tan\theta$ (f) $\tan\theta$
2. (a) 1 (b) 0
   (c) $2\cos\theta$ (d) $\operatorname{cosec}\theta+\sin\theta$
   (e) 1 (f) $\operatorname{cosec}\theta$
3. (a) $-k$ (b) $\sqrt{1-k^2}$
   (c) $-\frac{k\sqrt{1-k^2}}{1-k^2}$ (d) $\sqrt{1-k^2}$
4. (a) 0 (b) $2\sin^2\theta$
   (c) 0 (d) 0
   (e) -2 (f) 2
5. (a) 0 (b) 1
6. (a) $-\frac{15}{17}$ (b) $-\frac{15}{17}$
   (c) $\frac{15}{8}$ (d) $-\frac{17}{4}$
   (e) 1
7. $-\frac{1}{5}$ 8. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
9. $-\frac{1}{2}$

总复习题 7 (P. 28)

1. (a) 第二象限 (b) 第四象限
   (c) 第三象限 (d) 第三象限
   (e) 第二象限
2. $\sin\theta=-\frac{5}{13}$; $\cos\theta=\frac{12}{13}$; $\tan\theta=-\frac{5}{12}$
3. $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

   $\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{3}$; $\sec\theta=-\frac{\sqrt{6}}{2}$; $\cot\theta=-\sqrt{2}$
4. 当 $y=\frac{9}{2}$ 时，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$;
   当 $y=-\frac{9}{2}$ 时，$\tan\theta=\frac{3}{4}$
5. (a) 正值 (b) 负值
   (c) 正值 (d) 负值
   (e) 正值 (f) 正值
6. $\cos\theta=-\frac{15}{17}$; $\operatorname{cosec}\theta=-\frac{17}{8}$
7. $\frac{12}{5}$
8. (a) $-\frac{15}{17}$ (b) $-\frac{8}{15}$
   (c) $-\frac{255}{64}$
9. (a) $\frac{7}{25}$ (b) $-\frac{24}{7}$
   (c) $\frac{24}{25}$
10. $\frac{1}{4}$ 11. $\frac{1}{2}$
12. $\frac{5}{7}$ 13. $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$
14. 1
15. $\sin 50°=k$; $\tan 40°=\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

16. (a) 1　(b) 1
(c) 0

17. (a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(b) $\frac{1}{2}$
(c) 没有定义　(d) 没有定义
(e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　(f) $-\sqrt{3}$
(g) $-\sqrt{2}$　(h) $-\sqrt{2}$
(i) -1

18. (a) 1　(b) 10
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(d) -1
(e) $-\frac{7}{2}$

19. (a) $\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$　(b) $-\sqrt{1+n^2}$
(c) $\frac{1}{n}$　(d) n

20. (a) $\tan\alpha$　(b) $2\sin\alpha\cos\alpha$
(c) 2　(d) 1

21. 2　22. $\frac{1}{2}$

23. -1　24. 1

8. 任意三角形的解法

随堂练习 1 (P. 36)

1. (a) $m=8.91$ cm； $n=4.62$ cm
(b) $m=8.14$ cm； $n=12.25$ cm

2. $66.67°$ 或 $113.33°$

3. $B=62.16°$， $C=84.84°$， $c=46.74$ cm
或 $B=117.84°$， $C=29.16°$， $c=22.87$ cm

练习 8.1 (P. 36)

1. (a) $B=105°$， $a=14.14$ cm， $b=19.32$ cm
(b) $B=138.46°$， $C=11.54°$， $b=13.26$ cm
(c) $B=111.13°$， $C=30.87°$， $c=90.90$ cm
(d) $A=69.06°$， $B=58.94°$， $b=29.35$ cm
或 $A=110.94°$， $B=17.06°$， $b=10.05$ cm
(e) $B=20.59°$， $C=35.41°$， $b=3.95$ cm
(f) $C=84°$， $a=7.53$ cm， $b=5.11$ cm

2. (a) 7.69 cm　(b) $52.53°$
(c) 13.53 cm

3. 9.67 cm　4. 1.97 cm

5. 48.88 cm 及 59.93 cm

6. 25.98 cm

7. $a=28.28$ cm， $b=34.64$ cm， $c=10.35$ cm

8. 4.59 cm

9. $a=7.39$ cm， $b=13.89$ cm， $c=18.72$ cm

随堂练习 2 (P. 41)

1. (a) $m=16.44$ cm； $n=27.00°$
(b) $m=3.32$ cm； $n=43.49°$
(c) $m=108.53°$
(d) $n=81.79°$

2. $21.79°$

练习 8.2 (P. 42)

1. (a) $B=21.79°$， $C=98.21°$， $a=7$ cm
(b) $A=21.79°$， $C=8.21°$， $b=7$ cm
(c) $A=39.00°$， $B=58.54°$， $C=82.45°$

(d) A = 53.79°, B = 81.21°, c = 2.48 cm

(e) B = 36.71°, C = 113.29°, a = 3.43 cm

(f) A = 45°, B = 30°, C = 105°

2. 104.48°
3. 3.93 cm
4. 55.20°
5. 4.90 cm
6. 101.73 cm
7. 120°
8. 28.96°
9. 120°

随堂练习 3 (P. 47)

1. 114.10 m
2. 132.29 m

随堂练习 4 (P. 51)

40.62 海里

练习 8.3 (P. 51)

1. 320.31 m
2. 18.30 m
3. 35.95 m
4. 52.89 m
5. (a) 43.99 海里　(b) 085°36′
6. 80.98 海里

随堂练习 5 (P. 56)

(a) 31.99 cm^2　(b) 29.52 cm^2

(c) 20.46 cm^2　(d) 18.15 cm^2

练习 8.4 (P. 56)

1. (a) 4.33 cm^2　(b) 129.24 cm^2

   (c) 75.21 cm^2　(d) 41.68 cm^2
2. 7.45 cm
3. 147.77°
4. 30°, 1.04 cm 或 150°, 3.86 cm
5. 28.14 cm^2
6. (a) 5.97 cm　(b) 42.07°
7. 25.88 cm^2
8. 33.47 cm^2

总复习题 8 (P. 57)

1. (a) B = 81.79°, C = 38.21°, a = 7 cm

   (b) B = 46.19°, C = 73.81°, c = 13.31 cm

   (c) C = 20°, a = 8.65 cm, b = 14.47 cm

   (d) A = 38.21°, B = 60°, C = 81.79°

   (e) A = 59.47°, C = 70.53°, a = 14.62 cm

   或 A = 20.53°, C = 109.47°, a = 5.95 cm
2. (a) 12.12 cm^2　(b) 25.83 cm^2

   (c) 25.31 cm^2　(d) 9.92 cm^2

   (e) 23.38 cm^2
3. 41.41°
4. 81.46 cm
5. 76.10°
6. $1 : \sqrt{3} : 2$
7. 13 cm < c < 17 cm
8. 60°
9. 4 : 3 : 2
10. 12 : 9 : 2
11. 114.65°
12. 53.13°
13. 4.11 cm 或 13.53 cm
14. 58.81°, 86.42°, 93.58°, 121.19°
15. (a) 3.46 cm　(b) 1.10 cm

    (c) 3.00 cm^2
16. (a) 57.91 cm　(b) 39.61°

    (c) 18.65 cm

9. 三角恒等式与三角方程式

练习 9.1 (P. 67)

1. $\pm\frac{12}{13}$ 2. $\pm\frac{4}{5}$

3. 1；$\frac{1}{3}$ 18. $4x^2+9y^2=36$

随堂练习 2 (P. 72)

(a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(c) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

随堂练习 3 (P. 76)

1. (a) $\frac{16}{65}$ (b) $\frac{65}{33}$

练习 9.2 (P. 76)

1. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\sqrt{3}$

2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{6}{7}$；$\frac{2}{9}$

4. (a) $-\frac{16}{65}$ (b) $-\frac{56}{33}$

5. $-\frac{85}{84}$

6. (a) $\frac{65}{16}$ (b) $-\frac{33}{56}$

随堂练习 4 (P. 83)

2. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. $-\frac{24}{25}$；$\frac{25}{7}$ 4. $\frac{4}{5}$

随堂练习 5 (P. 85)

1. $\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

随堂练习 6 (P. 89)

1. $\frac{1}{\sqrt{26}}$；$-\frac{5}{\sqrt{26}}$；$-\frac{1}{5}$

3. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

练习 9.3 (P. 90)

1. (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) -1

2. $\frac{17}{25}$ 3. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

4. $-\frac{7}{25}$；$\frac{24}{7}$ 5. $\frac{120}{169}$；$\frac{120}{119}$

6. $\frac{117}{125}$；$\frac{44}{125}$ 7. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$；$-\frac{\sqrt{5}}{5}$；-2

随堂练习 7 (P. 94)

1. (a) $60°$，$300°$ (b) $150°$，$210°$

2. (a) $-135°$，$45°$

(b) $-157°30'$，$-67°30'$，$22°30'$，$112°30'$

随堂练习 8 (P. 97)

1. $135°$，$315°$ 2. $145°$

练习 9.4a (P. 98)

1. $\frac{5\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}$

3. $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$ 4. $\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$

5. $\frac{\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$

6. $\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$

7. $\frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$　　8. $\frac{\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}$

9. 30°，150°，210°，330°

10. 75°，105°，255°，285°

11. 75°，165°，255°，345°

12. 20°，40°，140°，160°，260°，280°

13. 15°，75°，135°，195°，255°，315°

14. 30°，60°，120°，150°，210°，240°，300°，330°

15. 15°，135°，195°，315°

16. 75°，135°，255°，315°

17. 20°，80°

18. 176°34′，356°34′

随堂练习 9 (P. 100)

1. 30°，90°，150°，270°

2. 0°，30°，150°，180°

3. 0°，120°，180°，240°

4. 45°，90°，135°，225°，270°，315°

练习 9.4b (P. 103)

1. $\frac{\pi}{2}$　　2. 0，π

3. $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$　　4. $\frac{\pi}{2}$

5. −90°，60°，90°，120°

6. −90°，−45°，45°，90°

7. −180°，−135°，−45°，0°

8. −60°，30°，60°，150°

9. −150°，−90°，−30°，30°，90°，150°

10. −180°，−60°，0°，120°

随堂练习 10 (P. 105)

1. 41°36′，244°40′

2. −135°，−75°，45°，105°

练习 9.4c (P. 105)

1. 315°

2. 30°，270°

3. 53°8′

4. 15°，75°

5. 15°，135°，255°

6. 11°14′，131°14′，251°14′

7. 180°

8. 210°

总复习题 9 (P. 106)

1. 1　　2. 1

3. $\frac{3}{4}$　　4. 0

5. $\frac{3}{2}$

14. 45°，135°，225°，315°

15. 15°，75°，195°，255°

16. 150°，210°

17. 30°，150°，210°，330°

18. 120°，240°

19. 70°32′，120°，240°，289°28′

20. 30°，150°，221°49′，318°11′

21. 0°，41°25′，180°，318°35′

22. 0°，120°

23. 60°，240°

24. 112°37′

25. −170°24′，−9°36′，30°，150°

26. −109°28′，−60°，60°，109°28′

27. −135°，−45°，45°，135°

28. $-135°$，$-45°$，$45°$，$135°$
29. $-60°$，$60°$
30. $30°$，$150°$，$270°$
31. $105°$，$165°$，$285°$，$345°$
32. $60°$，$131°49'$，$228°11'$，$300°$

10. 直角坐标系

随堂练习 1 (P. 111)

A(2, 3)；B(3, 1)；C(1, −2)；D(4, −4)；E(−3, −2)；F(−5, −1)；G(−4, 0)；H(−2, 2)

随堂练习 2 (P. 113)

1. (a) 5 (b) 5
 (c) 5 (d) 10
 (e) 13 (f) 10
2. $\sqrt{5}$
3. −1 或 7

练习 10.2 (P. 115)

1. (a) 8 (b) $\sqrt{5}$
 (c) $\sqrt{17}$ (d) $2\sqrt{10}$
2. 137
3. P(−30, 0)
4. −2 或 20
5. P(2, 0)
6. 7 或 $\frac{3}{5}$
7. P(3, 3) 或 P(15, 15)

随堂练习 3 (P. 119)

1. (−1, 4)
2. P(1, 0)

随堂练习 4 (P. 121)

1. P(0, 5)
2. $P\left(-7, \frac{7}{2}\right)$

随堂练习 5 (P. 123)

$\sqrt{41}$，$\sqrt{65}$，$\sqrt{122}$

练习 10.3 (P. 123)

1. P(5, 4)
2. (2, −4)，(−1, 1)，(−2, 2)
3. (2, −1)，(3, 1)
4. (5, 0)
5. Q(−11, 8)
6. 2 : 5
7. (3, 3)；D(−5, 1)
8. C(24, 23)；D(11, −3)
9. C(7, −20)

随堂练习 6 (P. 127)

1. (a) 14 (b) 12
 (c) 26 (d) 41.5

练习 10.4 (P. 127)

1. 15
2. $C\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ 或 C(5, 0)
3. 1
4. $-\frac{1}{2}$ 或 2

随堂练习 7 (P. 129)

(a) 39.5 (b) 26

(c) 38 (d) 46.5

练习 10.5 (P. 130)

1. 14.5
2. 5
3. 32
4. C(4, 2); 12

总复习题 10 (P. 130)

1. (−2, 0) 或 (6, 0)
2. 34
3. $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$
4. C(10, −11)
5. C(−14, 17)
6. D(−3, 1)
7. 13
8. $\frac{17\sqrt{5}}{5}$
9. (−7, −3), (3, −7), (5, 5)
10. 4
11. −6 或 2
12. 直角三角形；5
13. 直角等腰三角形；12.5
14. 16
15. 30.5
16. 24
17. −4
18. 25

11. 直线

随堂练习 1 (P. 137)

(a) −1 (b) 2 (c) 1

随堂练习 2 (P. 139)

1. 2

练习 11.1 (P. 142)

6. $-\frac{9}{2}$
7. A(1, 0) 或 A(8, 0)
8. E(−1, −4), F(−2, 2)

随堂练习 4 (P. 144)

1. (a) $3x-y-4=0$ (b) $5x+y-7=0$
2. (a) $y=0$ (b) $x=-3$
   (c) $x-y+3=0$

随堂练习 5 (P. 145)

(a) $x+y=0$ (b) $x-y+1=0$

(c) $10x+7y-11=0$

随堂练习 6 (P. 147)

(a) $3x-y=0$ (b) $2x+y+5=0$

(c) $2x-3y+9=0$ (d) $3x+4y-12=0$

随堂练习 7 (P. 148)

	斜率	x 截距	y 截距
1. (a)	$-\frac{2}{3}$	6	4
(b)	没有定义	4	无
(c)	$\frac{1}{3}$	0	0
(d)	没有定义	$-\frac{5}{2}$	无

2. $4x-3y-12=0$

练习 11.2 (P. 148)

1. $2x-y-6=0$
2. $2x+3y-6=0$
3. $a=4$；$b=-3$；$2x-y-1=0$
4. $x+y-4=0$
5. AB: $x+2y-2=0$， AC: $3x-y+1=0$；
   BC: $2x-3y-4=0$
6. AB: $x+7y+3=0$， AC: $2x-3y+6=0$；
   BC: $3x+4y-8=0$
7. $x+3y-9=0$ 或 $4x-y+16=0$
8. $x+y-3=0$ 或 $x-y+1=0$
9. $2x+3y-6=0$ 或 $3x+2y-6=0$
10. $x+3y-9=0$ 或 $4x+3y-18=0$

随堂练习 8 (P. 151)

2. $3x-2y+13=0$　　3. $2x+3y+10=0$

随堂练习 9 (P. 153)

2. $2x+3y-7=0$

练习 11.3 (P. 154)

	斜率	y 截距
1. (a)	5	3
(b)	$-\frac{2}{3}$	2
(c)	$-\frac{3}{2}$	0
(d)	0	3

2. $l_2 // l_3$， $l_4 // l_5 // l_6$； $l_1 \perp l_2$， $l_1 \perp l_3$
3. 5　　4. 6
5. $3x-2y+2=0$　　6. $y+4=0$
7. $3x+4y+8=0$
8. $2x-3y-13=0$ 及 $3x+2y=0$

随堂练习 10 (P. 157)

1. $(1, 2)$　　2. $(-2, 2)$
3. 0 或 2

练习 11.4 (P. 157)

1. (a) $(-2, 0)$　　(b) $(4, 2)$
   (c) $(9, 0)$　　(d) $(3, 2)$
2. $(6, 0)$ 及 $(0, -4)$
3. -3 或 $\frac{3}{2}$　　4. A $=3$； B $=-2$

随堂练习 11 (P. 162)

1. (a) $2\sqrt{5}$　　(b) $\frac{5}{3}$　　(c) $\frac{1}{2}$
2. $\frac{9\sqrt{34}}{34}$

练习 11.5 (P. 162)

1. 2　　2. $\frac{22}{5}$
3. (a) $\frac{49}{13}$　　(b) $\frac{1}{2}$
4. 2 或 $\frac{46}{3}$
5. $(0, -3)$ 或 $(0, 2)$
6. $\frac{5\sqrt{13}}{13}$　　7. $8\sqrt{2}$

总复习题11 (P. 163)

1. $3x-2y-18=0$
2. $6x-5y+30=0$
3. $x+3y-2=0$
4. $3x+4y-12=0$
5. $x+y+1=0$
6. $m=-\frac{5}{3}$； $c=-\frac{2}{3}$
7. 没有定义；y 截距不存在
8. (a) $\frac{10}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$
   (c) $a\in R$，$a\neq\frac{3}{2}$
9. (a) $\frac{1}{2}$ (b) ± 2
10. $2x+3y-7=0$
11. $2x+3y-1=0$
12. $3x+4y-18=0$
13. $11x+4y-10=0$
14. $x+y+1=0$
15. $4x-3y+10=0$； $-\frac{7}{4}$
16. $x+y-3=0$ 或 $4x-y+8=0$
17. $9x-20y+96=0$
18. (a) -7 或 -1 (b) -7
    (c) $m\neq-7$，$m\neq-1$
19. (a) $(1, 1)$ (b) $(0, 0)$
20. -4
21. $x-5y+18=0$
22. $2x+5y+19=0$
23. $\frac{7}{2}$
24. 3