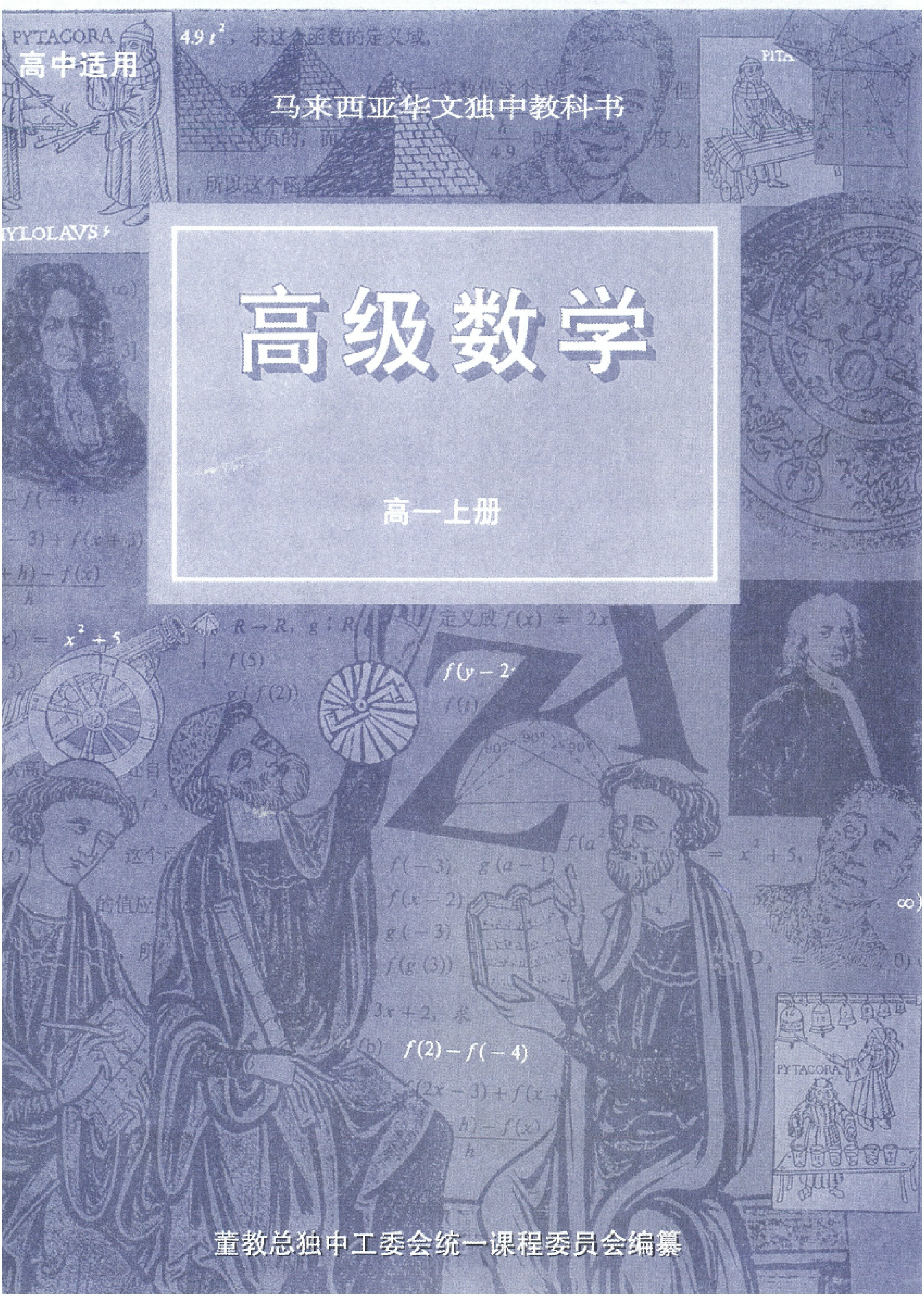


高中适用

马来西亚华文独中教科书

高级数学

高一上册

董教总独中工委会统一课程委员会编纂

高中适用

《高级数学》高一上册

© 郑重声明，此书版权归出版单位所有，未经允许，书上所有内容不得通过任何形式进行复制、转发、储存于检索系统，或翻译成其它语言的活动。

© Dong Zong
Hak cipta terpelihara. Mana-mana bahan atau bahagian dalam buku ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, atau ditukar kepada apa-apa bentuk atau apa-apa cara, baik dengan elektronik, mekanikal, fotokopi, rakaman, pengalihan bahasa dan sebagainya tanpa mendapat kebenaran secara menulis daripada pihak penerbit terlebih dahulu.

© Dong Zong
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, translated in any other languages, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Len & Hup Printing（M）Sdn. Bhd.

版次：
1994年12月第1版

印次：
2019年8月第15次印刷

编辑说明

一、这套《高级数学》是根据董教总独中工委会统一课程委员会所拟订的课程纲要而编写的。在拟订课程纲要的过程中，主要参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KBSM）及STPM的课程范围，此外，也参考了其他一些国家的课程纲要。

二、这套《高级数学》是以综合的方式编写，它将取代旧版的高级中学数学课本——《高中代数》上、下册，《三角学》，《解析几何》及《微积分》。

三、这套《高级数学》是为全国各华文独中的高中理科班学生编写的，全书分六册出版，分三年教完。每周上课8节（每节40分钟），惟各校可按个别情况处理。

四、本书是高一上册，供高中一年级上半年使用。内容包括：

代数——函数、一元二次方程式与二次函数、多项式、部分分式、无理式

三角——角的形成及单位、三角函数、任意三角形的解法、三角恒等式、三角方程式

五、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题。习题的答案都附于书后。其中附有“*”号者，是较难的题目，可按学生水准而取舍。

六、本书中某些章内的附录部分，各校可按学生水平与授课时间而自行取舍。

七、配合本书，另编有《高级数学教师手册》高一上册，供教师教学参考之用。

八、书中如有错误、遗漏或欠妥之处，祈望教师及其他读者予以指正。

鸣谢

本书承蒙国内外学者和数学教师协助编写与审稿，谨此统致谢忱。

董教总独中工委会统一课程委员会　启

1994年11月

目　录

1 函　数

1.1　函数

● 对应与映射（correspondence and mapping）

设 A ＝｛a，b，c，d｝，B ＝｛1，2，3，4｝。下面各图表示了 A 中的元素对应到 B 中的元素上的几种情形。

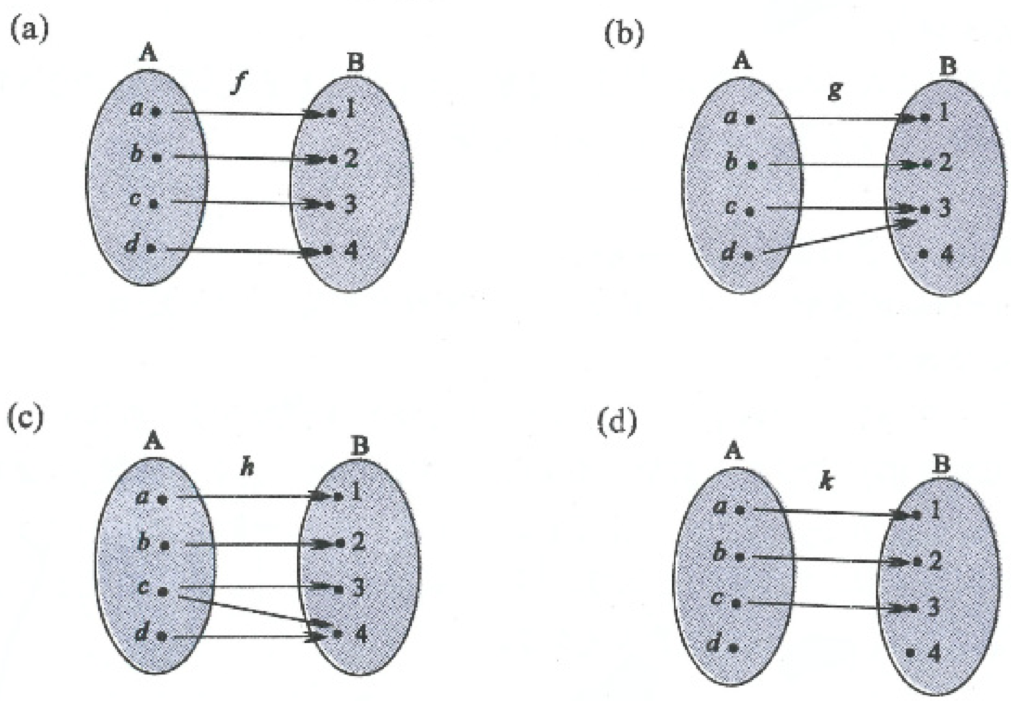


图 1−1

一般地，对于两个非空集合 A 与 B，若它们的元素之间依某种方式相互联系，即 A 中的元素（全部或部分）对应到 B 中的元素上，则称这两个集合之间存在某种对应关系。

图 1–1 中所示的四种 A、B 之间的对应关系分别以 f、g、h、k 记之。其中 f 和 g 两种对应具有如下性质：

A 中的任一元素都对应到 B 中的元素上，并且只对应到 B 中的一个元素上。

图 1–1 所示的 h 和 k 两种对应则不具有上述性质。在对应 h 中，A 中的元素 c 对应到 B 中的两个元素 3 和 4；在对应 k 中，A 中的元素 d 没有对应到 B 中的任一元素。

一般地，

> 设 A 与 B 是两个非空集合，若按照某种对应法则 f，对于 A 中任一元素，在 B 中都有唯一的元素和它对应，则这样的对应 f 叫做从集合 A 到集合 B 的一个映射，记作
>
> $$f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

根据上述映射的定义可知，图 1–1 中有两个映射，即

$$f: \mathrm{A} \to \mathrm{B} \quad \text{和} \quad g: \mathrm{A} \to \mathrm{B},$$

而 h 和 k 不是映射。

设有映射 $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$，$a$ 是 A 中任一元素，若 a 在 f 之下对应到 B 中的元素 b 上，则 b 叫做 a 在 f 之下的**映象**（image），记作

$$b = f(a);$$

而 a 叫做 b 在 f 之下的**原象**（preimage）。

在图 1–1 (a) 的映射 f 之下，a、b、c、d 的象分别为 1、2、3、4。而 1、2、3、4 的原象分别为 a、b、c、d。

在集合 A 到 B 的一个映射之下，A 中任一元素在 B 中都有唯一的映象，但不同的元素可能有相同的映象。例如，图 1–1 (b) 中的映射 g 之下，元素 c、d 有相同的映象 3。对于 B 中任一元素，并不要求它在 A 中有唯一的原象。B 中一个元素可能有不同的原象，也可能没有原象。例如上述映射 g 之下，B 中的元素 3 在 A 中有两个原象 c 和 d；B 中的元素 4 无原象。

例 1 判断下列对应是否映射:

(a) A = {0, 1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4}, A 到 B 的对应法则 f 为"加 1"(即 A 中各数对应到比其大 1 的数);

(b) A = Z (整数集), B = $Z^+ \cup \{0\}$, A 到 B 的对应法则 g 为"平方"(即 A 中各数对应到其平方数);

(c) A = $Z^+ \cup \{0\}$, B = R, A 到 B 的对应法则 h 为"开平方"(即 A 中各数对应到其平方根);

(d) A = {0, 1, 2}, B = {2, 4, 6}, A 到 B 的对应法则 k 为"乘以 2"(即 A 中各数对应到其 2 倍数)。

解 (a) f:A → B 是映射。

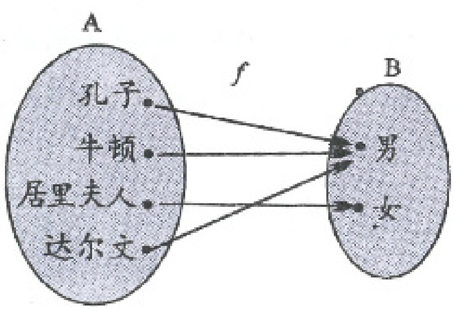
(b) g:A → B 是映射。

(c) 对应 h 不是映射,因为 A 中存在一正整数对应 B 中的两个数,例如 1 对应其平方根 1 和 −1。

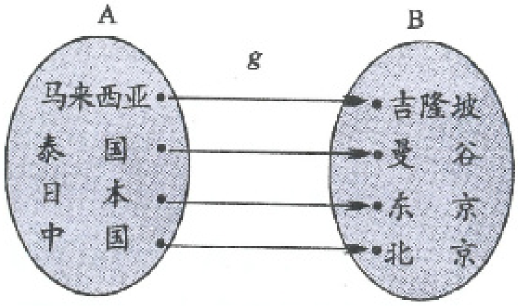
(d) 对应 k 不是映射,因为 A 中的数 0 的 2 倍数仍为 0,但它不在 B 中。

例 2 判断下列对应是否映射,若其为映射,则指出 A 中元素的映象及 B 中元素的原象。

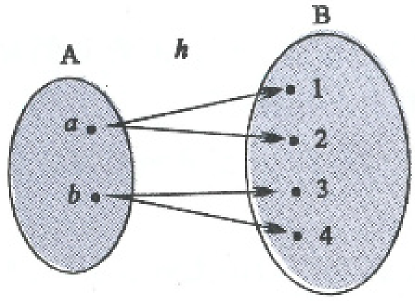
(a)



(b)



(c)



解 (a) f：A → B 是映射．A 中各元素的映象为其性别，即
f(孔子) = f(牛顿) = f(达尔文) = 男，f(居里夫人) = 女。
B 中的"男"有 3 个原象：孔子、牛顿、达尔文；"女"的原象为居里夫人。

(b) g：A → B 是映射．A 中各元素（国家）的映象为其首都，B 中各元素（城市）的原象为其所在的国家。

(c) 对应 h 不是映射，因为在A 中的元素 a 有两个映象 1，2。

习题 1a

1. 画图表示从集合 A 到 B 的对应：
   (a) A = {0, 3, 9, 12}，B = {0, 1, 2, 3}，对应法则为"除以 3"；
   (b) A = {−2, −1, 0, 1, 2}，B = {0, 1, 4, 9, 16}，对应法则为"4 次方"；
   (c) A = {−2, −1, 0, 1, 2}，B = {0, 1, 4}，对应法则为"平方"；
   (d) A = {30°, 45°, 60°}，B = $\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$，对应法则为"取正弦值"；
   (e) A = {−1, 0, 1, 2}，B = {−1, 0, 1}，对应法则为"3 次方"；
2. 在第 1 题的各对应中，哪些是从 A 到 B 的映射？
3. 在 f：$R \to R$ 中，$f(x) = x^4$，求 −1，0，1，2 在 f 之下的映象。
4. f：$R \to R$，$f(x) = x^2$，求 0，1，4 在 f 之下的原象。R 中哪些元素在 f 之下没有原象？

5. 在 $f: N \to N$ 中，$f(n) = n + 1$，n 是任一自然数．求 2 在 f 之下的映象和原象。N 中有无在 f 之下不存在原象的元素？

6. 设 $A = \{a, b, c, d\}$，其中 a、b 表示甲班的两名学生，c、d 表示乙班的两名学生；$B = \{x, y\}$，其中 x、y 分别为甲、乙两班的数学教师．画图表示下列对应：

   (a) A 到 B 的对应法则 f 为"每一学生对应到其数学教师"；

   (b) B 到 A 的对应法则 g 为"每一教师对应到他所教的学生"。

   以上两个对应中哪个是映射？是从哪个集合到另一集合的映射？

7. 设 $A = \{a, b\}$，$B = \{x, y\}$。试写出 A 到 B 的各种映射（可画图表示）。

● 函数（function）

在初中我们曾学习过函数的定义：

有两个变量 x，y，若 y 依 x 而变，且对于 x 的每一个值，y 都有唯一确定的值与它对应，那么就说 y 是 x 的函数．其中 x 叫做**自变量**（independent variable），y 叫做**因变量**（dependent variable）.

设变量 x 的取值范围为集合 A，它的函数 y 所取的对应值都是集合 B 中的元素。从映射的概念可知，上面所定义的函数实际上就是从集合 A 到集合 B 的一个映射 $f: A \to B$，其中 A，B 都是非空的数集．这里 x 的值相当于原象，它的对应值 $(y = f(x))$ 相当于 x 的映象．这就是说函数与映射的实质是相同的。

因此，运用映射的观点，函数的另一种定义方式可以叙述为：

> 设 A，B 是两个非空的数集，f 是 A 到 B 的一个映射，那么，以 A 为取值范围的变量 x，在 B 中都有唯一的数 y 与它对应，即
>
> $$x \xrightarrow{f} y$$
>
> 则这个映射 f 叫做从 A 映到 B 的一个函数，记作
>
> $$y = f(x)，其中\ x \in A，y \in B$$

式子 $y = f(x)$ 表示"y 是 x 的函数"，这里字母 f 叫做函数符号，它代表把变量 y 和 x 联系起来的对应法则．当同时研究两个或多个函数时，常用 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 等分别来表示。

应注意 $f: A \to B$ 这个函数符号表示了三个内容：集合 A，集合 B，由 A 到 B 的对应法则 f. f 可以被看作是个"加工器"，A 是原材料仓库，自变量 x 是原材料，B 是产品所在仓库，因变量 $y = f(x)$ 是加工后的产品。A 中任一件原材料都被加工成 B 中的唯一一件产品（图 1–2)。

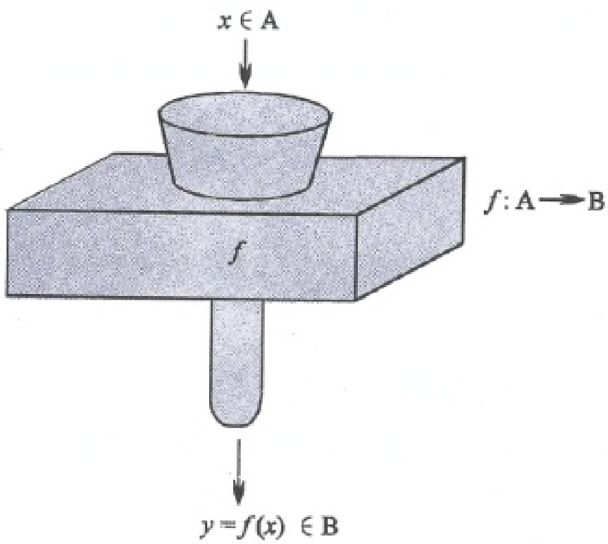


图 1–2

● 函数的表示法

常用的函数表示法有解析法、范氏图示法、图象法、列表法等。

(一) 解析法 (analytical method)

通过一个数学等式可以表示两个变量间的函数关系，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式。例如，

$$y = \sqrt{x-2} \ (x \geqslant 2)$$

$$f(x) = 1/x \quad (x \neq 0)$$

$$A = \pi r^2 (r \geqslant 0)$$

等都是用解析式表示函数的。

用解析法表示函数，可以清楚地反映函数关系，便于由自变量求出其函数的对应值，也便于利用对解析式的分析来研究函数的性质。

(二) 范氏图示法 (Venn diagram method)

通过在两个集合的范氏图上标注箭头也可以表示函数关系。

例如，图 1–3 就表示了从集合 A 映到集合 B 的一个函数 f：$A \to B$。

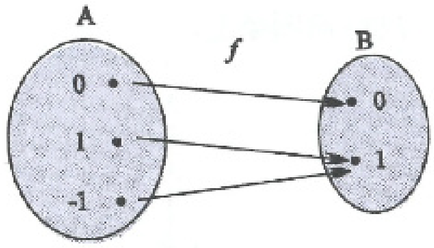


图 1–3

用范氏图示法表示函数，可以直接表示出自变量取不同值时所对应的函数值。例如，上图就明确地显示了 $f(0) = 0$，$f(1) = f(-1) = 1$。然而，当集合 A 中的元素个数很多时，用范氏图示法表示函数 f：$A \to B$ 往往有困难。例如，对于函数 f：$R \to R$，$f(x) = 2x$，就难以用范氏图完整地表示。

(三) 图象法 (graphical method)

通过图象也可以表示函数关系。

例如，图 1–4 中的气温曲线就反映了某天中气温 T 随时间 t 变化的函数关系。

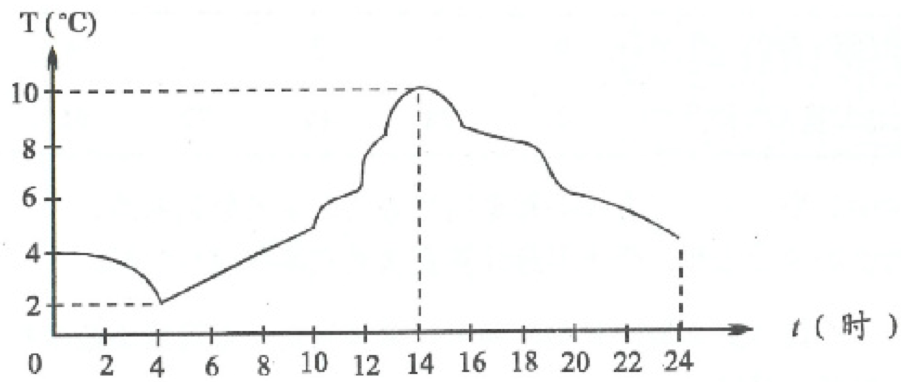


图 1–4

用图象法表示函数，可以直观形象地表示出函数关系的变化情况，便于利用几何知识来研究函数的性质。

已知函数 f：$A \to B$，将自变量 x 的一个值和与它对应的因变量 y 的值分别作为平面内点的横坐标和纵坐标，即用数对 (x, y) 在坐标平面内作出一个点，当 x 取遍集合 A 中的元素时，像上面那样得出的所有的点的集合就是函数 $y = f(x)$ $(x \in A)$ 的**图象** (graph)。

例如，函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x+1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

的图象是两条直线（图 1–5），图中实心点（0，1）在函数 $y = f(x)$ 的图象上，空心点 (0，1) 不在 $y = f(x)$ 的图象上。

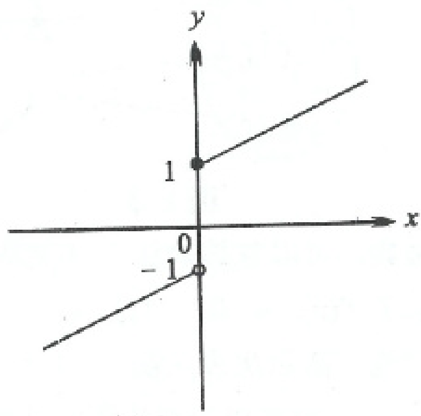


图 1–5

(四) **列表法**（tabulation method）

通过表格一一列出自变量 x 所取的值及与其相对应的因变量 y 的值，也可以表示函数关系。

下表表示了从管口流出的水量 Q（公升）和时间 t（秒）的函数关系：

时间 t (秒)	0	1	2	3	4	…
出水量 Q (公升)	0	24	48	72	96	…

数学中的平方表、立方表等都是用列表法表示函数关系的。

用列表法表示函数，便于不经计算直接查找函数的对应值。

对于一个具体的函数，采用何种方法来表示它，要根据函数本身的特点及解决问题时的需要而确定。

例 3 某种出租汽车的计价标准为：不超过 10 公里的路程收费 RM10，超过 10 公里后每公里再加收 RM1.50。当路程 x（公里）满足

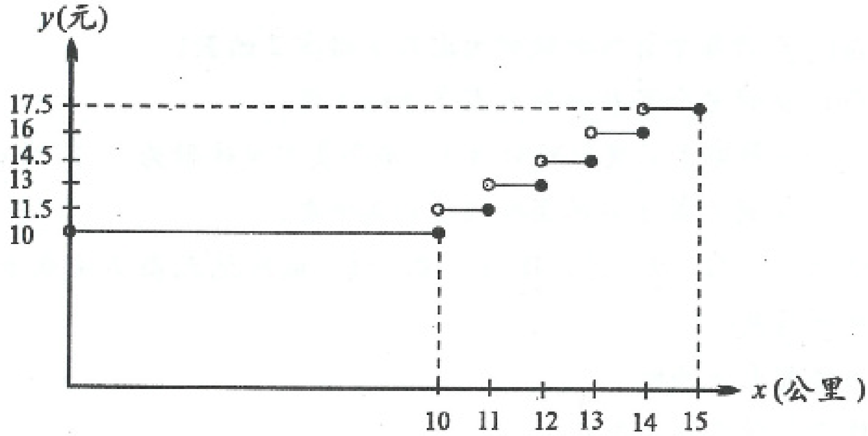
$$n < x \leqslant n+1 \quad (n \in N,\ n \geqslant 10)$$

时，按 $(n+1)$ 公里的路程计价。试用解析法和图象法表示出路程 x (公里) 与收费 y（RM）之间的函数关系（假设 $x \leqslant 15$)。

解　(a) 解析法

$$y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 10;\\ 11.5, & 10<x\leqslant 11;\\ 13, & 11<x\leqslant 12;\\ 14.5, & 12<x\leqslant 13;\\ 16, & 13<x\leqslant 14;\\ 17.5, & 14<x\leqslant 15\end{cases}$$

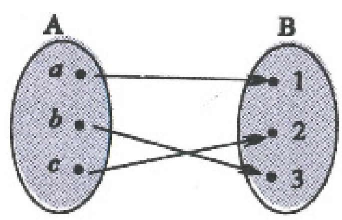
(b) 图象法



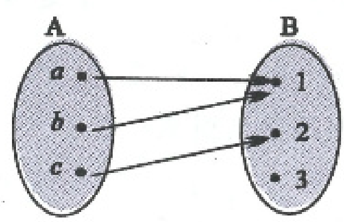
习题 1b

1. 下列各图所示的对应关系中，哪些是集合 A 映到集合 B 的函数关系？

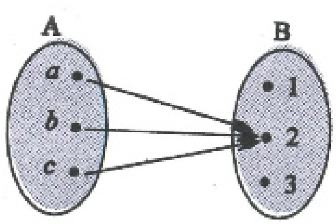
(a)



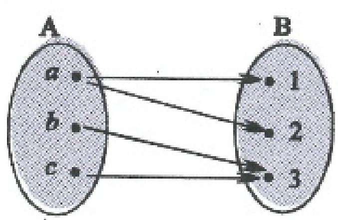
(b)



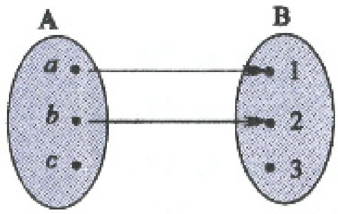
(c)



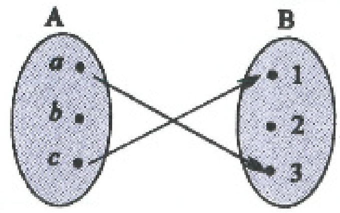
(d)



(e)



(f)



2. 对于第 1 题中表示 A 映到 B 的函数的图分别指出其中 a 的映象及 2 的原象各是什么。

3. 用解析法表示下列函数:

   (a) f 将每个自然数映射为比其 3 倍少 2 的数;

   (b) g 将每个实数映射为其平方的 5 倍;

   (c) h 将每个正实数映射为 1, 每个负实数映射为 -1, 0 映射为其自身;

   (d) k 将不等于 0 的实数映射为其倒数.

4. 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$, 试用范氏图示法表示出从 A 映到 B 的所有函数。

   问共有几个函数?

5. 作出下列函数的图象:

   (a) $f(x) = 2x, \quad x \in \{1, 2, 3\}$;

   (b) $f(x) = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$;

   (c) $f(x) = x^2, \quad -2 < x < 2$;

   (d) $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad 1 \leqslant x < 4$;

   (e) $f(x) = x + 2, \quad x \in R$.

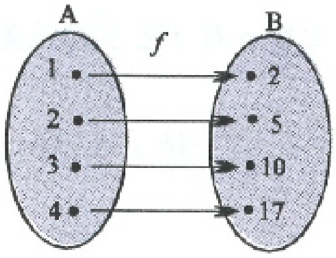
6. 作出下列函数的图象:

   (a) $$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

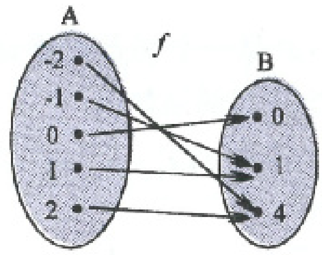
   (b) $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

7. 写出下列各图表示的函数的一个解析式：

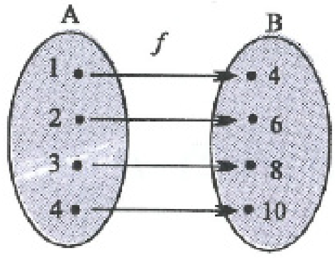
(a)



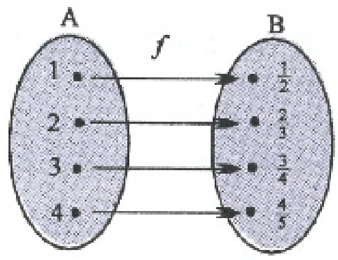
(b)



(c)



(d)

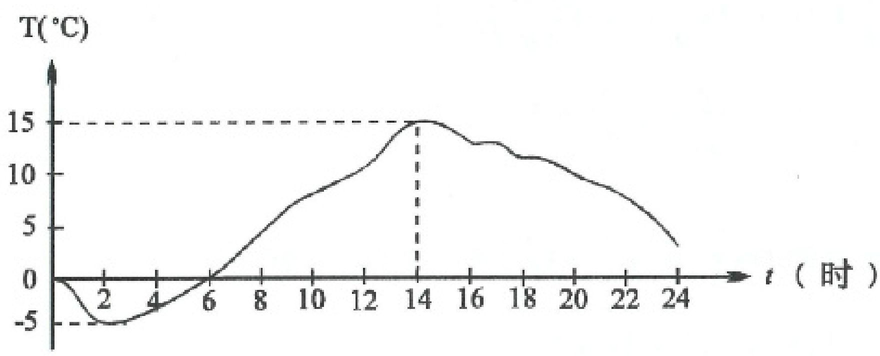


8. 下表是某地区内海拔高度与平均气温对照表。

高度 h（米）	0	500	1000	2000	3000
气温 T（℃）	10	7	4	−2	−8

根据这个表试写出高度 h（米）与气温 T（℃）之间的函数关系解析式（已知 T 是 h 的一次函数），并计算 1500 米处的平均气温。

9. 下图是某地区某天温度变化的图象，根据图象说明该地区该天的最高温度和最低温度各是多少，各发生在什么时刻。



10. 某种商品的售价为：10 kg 以内（包括 10 kg）每 kg 收 1 元，超过 10 kg 后超出部分每 kg 收 0.8 元。试写出购物数量 x (kg) 与售价 y（元）之间的函数解析式，并画出这个函数的图象（设 $0 < x \leqslant 20$）。

1.2 函数的定义域，值域

设 f：$A\rightarrow B$ 是一个函数，集合 A 中的任一元素 a 在 f 之下的映象 $f(a)$，叫做自变量取值为 a 时的函数值。

例如，对于函数 $f(x)=5x^2+2x+1\ (x\in R)$，自变量 x 取值为 0，1，2 时的函数值分别为

$$f(0)=5\times0^2+2\times0+1=1$$
$$f(1)=5\times1^2+2\times1+1=8$$
$$f(2)=5\times2^2+2\times2+1=25$$

例 4 已知函数 $f(x)=-2x^2+3x-1$，求 $f(2)$，$f(\sqrt{2})$，$f(-a)$，$f(a+1)$，$f(\frac{1}{a})$。

解
$$\begin{aligned}f(2)&=-2\times2^2+3\times2-1\\&=-3;\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}f(\sqrt{2})&=-2\times(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}-1\\&=3\sqrt{2}-5;\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}f(-a)&=-2(-a)^2+3(-a)-1\\&=-2a^2-3a-1;\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}f(a+1)&=-2(a+1)^2+3(a+1)-1\\&=-2a^2-a;\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}f(\frac{1}{a})&=-2(\frac{1}{a})^2+3\left(\frac{1}{a}\right)-1\\&=-\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a}-1;\end{aligned}$$

例 5 已知函数 $f(x)=x^2-3x+2$，求 $f(x-2)$。

解 $\because\ f(x)=x^2-3x+2$，
$$\begin{aligned}\therefore\ f(x-2)&=(x-2)^2-3(x-2)+2\\&=x^2-4x+4-3x+6+2\\&=x^2-7x+12\end{aligned}$$

设 f 是一个从集合 A 映到集合 B 的函数，则集合 A 叫做这个函数的定义域 (domain)，记作 D_f，就是说对于函数 f: A → B，有

$$D_f = A$$

集合 B 叫做这个函数的对应域；集合 A 中全体元素在 f 之下的映象的集合，记作 $f(A)$，就是说

$$f(A) = \{b \mid b = f(a),\ a \in A\}$$

$f(A)$ 叫做这个函数的值域 (range)，记作 R_f，就是说

$$R_f = f(A)$$

显然，函数的定义域就是自变量取值的范围，而函数的值域则是全部函数值的集合.

例 6 指出下列函数的定义域、对应域和值域:

(a) 函数 $f: R \to R$，$f(x) = 2x + 3$;

(b) 函数 $g: R \to R$，$g(x) = x^2$;

(c) 函数 $h: N \to N$，$h(x) = x + 1$;

解 (a) 定义域: $D_f = R$，对应域: R，值域: $R_f = R$;

(b) 定义域: $D_g = R$，对应域: R，值域: $R_g = R^+ \cup \{0\}$;

(c) 定义域: $D_h = N$，对应域: N，

值域: $R_h = \{x \mid x \in N 且 x \neq 1\}$.

从上面的例子可知，值域是对应域的子集，可能是真子集，也可能两者相等. 总之，对于函数 f: A→B，一定有 $f(A) \subseteq B$.

设函数 f: A→B 中的定义域 A ⊆ R，对应域 B ⊆ R，则这个函数叫做**实函数** (real-valued function)。本书中主要讨论实函数. 当一个实函数的定义域未注明而仅给出其对应法则时，其定义域被约定为所有使 $f(x)$ 有意义的实数 x 的集合。当一个函数的定义域和对应法则确定后，其值域也就随之确定了.

例 7 求下列函数的定义域和值域:

(a) $f(x) = \sqrt{x-1}$　　(b) $g(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

(c) $h(x) = 4 - x^2$　　(d) $k(x) = \log x$

解 (a) ∵ 当 $x \geqslant 1$ 时 $\sqrt{x-1}$ 有意义，

∴ 定义域 $D_f = \{x \mid x \in R,\ x \geqslant 1\}$.

值域 $R_f = \{y \mid y \in R,\ y \geqslant 0\}$.

(b) ∵ 当 $x \neq -\frac{1}{2}$ 时 $\frac{1}{2x+1}$ 有意义，

∴ 定义域 $D_g = \{x \mid x \in R,\ x \neq -\frac{1}{2}\}$.

值域 $R_g = \{y \mid y \in R,\ y \neq 0\}$.

(c) ∵ 对任一实数 x，$4-x^2$ 都有意义，

∴ 定义域 $D_h = R$

值域 $R_h = \{y \mid y \in R,\ y \leqslant 4\}$.

(d) ∵ 当 $x > 0$ 时 $\log x$ 有意义，

∴ 定义域 $D_k = \{x \mid x \in R,\ x > 0\}$.

值域 $R_k = R$.

为了更方便地讨论函数的定义域和值域，我们现在介绍区间这个概念。

设 a、b 是两个实数，且 $a < b$. 我们把

(1) 满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合表示为 $[a,\ b]$，叫做闭区间；

(2) 满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合表示为 $(a,\ b)$，叫做开区间；

(3) 满足 $a \leqslant x < b$，$a < x \leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做半开区间，分别表示为 $[a,\ b)$，$(a,\ b]$.

这里实数 a、b 叫做区间的端点。

实数集 R 也可用区间表示为 $(-\infty,\ \infty)$；我们还把满足 $x \geqslant a$，$x > a$，$x \leqslant b$，$x < b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a,\ \infty)$，$(a,\ \infty)$，$(-\infty,\ b]$，$(-\infty,\ b)$.

例 8 用区间表示下列函数的定义域：

(a) $f(x) = 2x+7$ (b) $g(x) = \sqrt{5x-1}$

(c) $h(x) = \frac{1}{x} + x$ (d) $k(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

解 (a) $D_f = (-\infty, \infty)$ (b) $D_g = [\frac{1}{5}, \infty)$

(c) $D_h = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (d) $D_k = (-2, 3]$

从实际问题中抽象出来的函数的定义域，往往要根据实际问题的具体意义来确定.

例 9 物体从高度为 h 米处自由落到地面，运动路程 S(米)与下落时间 t (秒) 之间的函数关系式为 $S = 4.9t^2$，求这个函数的定义域.

解 从 $S(t) = 4.9t^2$ 这个函数式本身看，t 取任一实数值这个式子都有意义。但从实际问题看，t 的值应为非负的，而且当 t 的值为 $\sqrt{\frac{h}{4.9}}$ 时物体落在高度为 0 米处（运动结束），所以这个函数的定义域为

$$D_s = \left[0, \sqrt{\frac{h}{4.9}}\right]$$

习题 1c

1. 设函数 $f: R \to R$ 定义成 $f(x) = x^2 + 3$，试求
   (a) $f(4)$ (b) $f(-3)$
   (c) $f(y-2z)$ (d) $f(x-2)$
   (e) $f(t)$
2. 设 $f: R \to R$ 定义成 $f(x) = x^2 - 3x + 2$，求
   (a) $f(-3)$ (b) $f(2) - f(-4)$
   (c) $f(a^2)$ (d) $f(2x-3) + f(x+3)$
   (e) $f(x^2 - 3x + 2)$ (f) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
3. 设 $f: R \to R$，$g: R \to R$ 定义成 $f(x) = 2x - 3$，$g(x) = x^2 + 5$，求
   (a) $f(5)$ (b) $g(-3)$
   (c) $g(f(2))$ (d) $f(g(3))$
   (e) $g(a-1)$

4. 求下列函数在 x 取 1，$-\dfrac{1}{2}$，0 时的函数值:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ 时} \\ 0, & x = 0 \text{ 时} \\ -1, & x < 0 \text{ 时} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为整数时} \\ 0, & x \text{ 为非整数时} \end{cases}$

5. 设函数 g：$R \to R$ 定义成

$$g(x) = \begin{cases} -4, & x < 1 \\ 2x^2 - 3, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

求 (a) $g(3)$　　(b) $g(0)$　　(c) $g(-1.5)$

(d) $g(1)$　　(e) $g(1.1)$

6. 设函数 f：$R \to R$ 定义成

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < -2 \\ x^2 - 2, & -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3x - 1, & x > 3 \end{cases}$$

求 (a) $f(-1)$　　(b) $f(-4)$　　(c) $f(-2)$

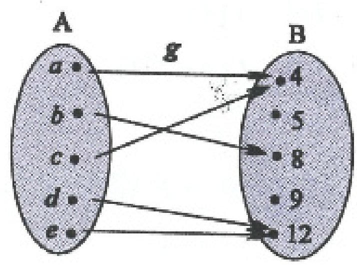
(d) $f(0)$　　(e) $f(1)$　　(f) $f(5)$

7. 设 $A = \{a, b, c, d, e\}$，

$B = \{4, 5, 8, 9, 12\}$

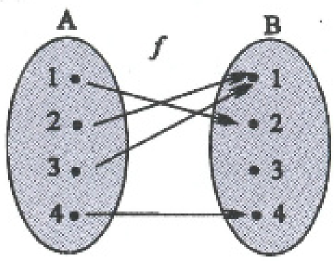
函数 g：$A \to B$ 的定义如右图所示。

试求函数 g 的定义域和值域。

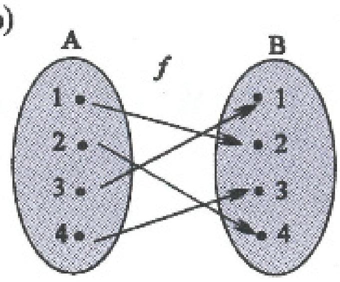


8. 求下列各图象所示之函数的值域。

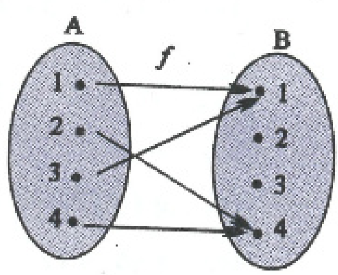
(a)



(b)



(c)



9. 设 A $= \{-1, 0, 1, 2\}$。

函数 f: $A \to R$ 定义成 $f(x) = 3x^2 - 2$，求

(a) f的定义域;

(b) f的值域。

10. 设 A $= \{-1, 0, 1\}$，f: $A \to R$，$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$，试求定义域 D_f 和值域 R_f。

11. 设 T $= [-3, 5]$，函数 f: $T \to R$ 定义成 $f(x) = 2x^2 - 7$，求

(a) $f(2)$ (b) $f(6)$ (c) $f(t-2)$

又，(c) 部分中的 t 应取何值才能使 $f(t-2)$ 有意义?

12. 设函数 f: $\{x \mid x \in R, -2 \leqslant x \leqslant 8\} \to R$，定义成 $f(x) = x - 2$。试求

(a) $f(4)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(0)$

(d) $f(t+2)$ (e) $f(-t)$

13. 求下列函数的定义域与值域:

(a) $f(x) = 2x$ (b) $f(x) = -4x + 5$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{4x+7}$ (d) $f(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = x^2$ (f) $f(x) = x^2 - 1$

14. 用区间表示下列函数的定义域:

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

(b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$

(d) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{4-2x}$

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x+2}$

15. 用区间表示下列函数的值域:

(a) $f(x) = 2x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

(c) $f(x) = (x+1)^2$ (d) $f(x) = 2x^2 - 1$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$

16. 求下列函数的定义域:

(a) $f(x) = (\sqrt{x})^2$　　(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2}$　　(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$

上述中哪个函数与 $f(x) = x$ 完全相同?

17. 下列各小题中两个函数的定义域是否相同?值域是否相同?

(a) $f(x) = x+1$, $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

(b) $f(x) = \sqrt{2}\,x$, $g(x) = \sqrt{2x^2}$

(c) $f(x) = x+1$, $g(x) = (\sqrt[3]{x+1})^3$

18. 设 $f_1:[-2, 2] \to R$;

$f_2:[0, 3] \to R$;

$f_3:[-3, 0] \to R$;

$f_4:(-\infty, 5] \to R$;

$f_5:[-1, 4] \to R$.

(a) 若函数 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 都是定义成 $f(x) = x^2$, 试求

(i) f_1　(ii) f_2　(iii) f_3　(iv) f_4　(v) f_5 的值域;

(b) 若函数 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 都是定义成 $f(x) = x^3$, 试求

(i) f_1　(ii) f_2　(iii) f_3　(iv) f_4　(v) f_5 的值域;

(c) 若函数 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 都是定义成 $f(x) = 2x+4$, 试求

(i) f_1　(ii) f_2　(iii) f_3　(iv) f_4　(v) f_5 的值域;

19. 设 $f(x) = x^3+1$, 当 x 在哪个区间取值时 $f(x)$ 有意义? x 在哪个区间取值时 $f(x) > 0$? x 在哪个区间取值时 $f(x) < 0$?

20. 修筑一个容积为 10000 米^3, 深为 10 米的长方体水池, 池壁每平方米造价为 a 元, 池底每平方米造价为 $2a$ 元。水池长不小于 50 米且不大于 100 米。试将水池总造价 y (元) 表示成水池长 x (米) 的函数, 并求其定义域。

21. 列车从远处以 30 米/秒的速度匀减速地驶向车站, 到达车站后停在站上。列车速度 V (米/秒) 与行车时间 t (秒) 之间的函数关系式为

$$\mathrm{V} = 30 - 0.1\,t$$

求这个函数的定义域。

1.3　函数及其图象

一般地，若 $y = f(x)$ 是一个函数，定义域是 A，则在平面直角坐标系 Oxy 中的点集

$$\{(x,\ f(x)) \mid x \in A\}$$

就是这个函数的图象。

由函数的定义可知，函数的图象与平行于 y 轴的直线的交点不能多于一个，这是因为对于 x 的一个值，函数 y 只有唯一确定的值与其对应（参阅图 1–6）。

函数的图象使我们有可能借助几何方法来讨论函数的性质。

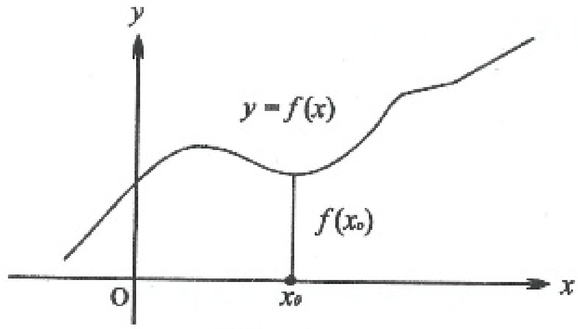


图 1–6

简单的函数图象

对于一般的函数 $y = f(x)$，我们可以通过描点法来画出它的图象，即先在定义域内给 x 取一些值，求出相应的 y 值，由此描出一些点 $(x,\ y)$，进而得出 $y = f(x)$ 的图象。

在初中，我们已知道一次函数

$$y = ax + b \qquad (a \neq 0)$$

的图象是一条直线。画一次函数 $y = f(x)$ 的图象时，只需取两点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 和 $P_2(x_2,\ y_2)$，画出直线 P_1P_2 即可。

例 10　画出一次函数 $y = 3x + 1$ 的图象。

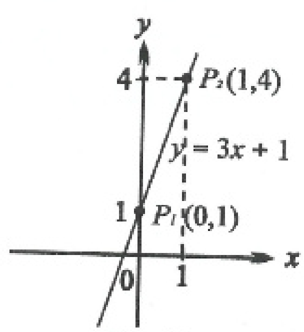


图 1–7

解　当 $x = 0$ 时，$y = 1$

当 $x = 1$ 时，$y = 4$

作出点 $P_1(0,\ 1)$ 和 $P_2(1,\ 4)$，并过这两点作一直线，这条直线即函数 $y = 3x + 1$ 的图象（图 1–7）。

一次函数中形如 $y = kx\ (k \neq 0)$ 的函数叫做**正比例函数**（direct variation），它的定义域为 R，图象为过原点的一条直线。

例 11 画出 $y = -2x$，且 $-2 \leqslant x < 2$ 的图象，并说出此函数的值域。

解 当 $x = -2$，$y = 4$

当 $x = 2$，$y = -4$

由点 $(-2, 4)$ 至 $(2, -4)$ 作一线段，这条线段就是所求的图象。

此函数的值域为 $(-4, 4]$。

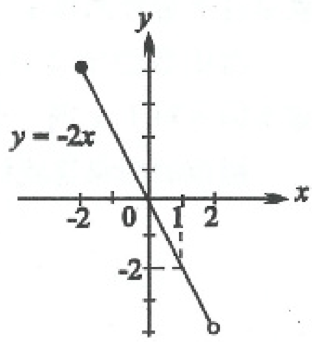


图 1–8

形如 $y = \dfrac{k}{x}\ (k \neq 0)$ 的函数叫做**反比例函数**（inverse variation），它的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$，图象为双曲线。

例 12 画出 $y = \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$ 的图象，并说出此函数的值域。

解 将 x 和 y 的对应值列表如下：

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

描出各点，并用曲线把各点连接，得到如图 1–9 的双曲线。

它的值域为：$R \setminus \{0\}$

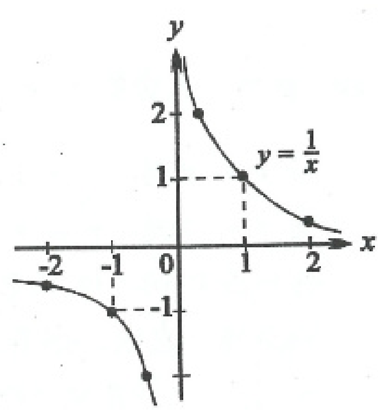


图 1–9

在初中，我们已知道二次函数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

的图象是一条抛物线．当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上；当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下．画二次函数 $y = f(x)$ 的图象时，一般可以先找出抛物线的几个点，再过这些点描出一条光滑的抛物线．

例 13 画出二次函数 $y = x^2 + 3x + 1$ 的图象，并求此函数的值域。

解 列表求出 x 和 y 的一些对应值：

x	…	−4	−3	−2	−1	0	1	…
y	…	5	1	−1	−1	1	5	…

先画出点 (−4，5) (−3，1) (−2，−1) (−1，−1) (0，1) 等，再描出抛物线 $y = x^2 + 3x + 1$ 的图象（图 1−10）。

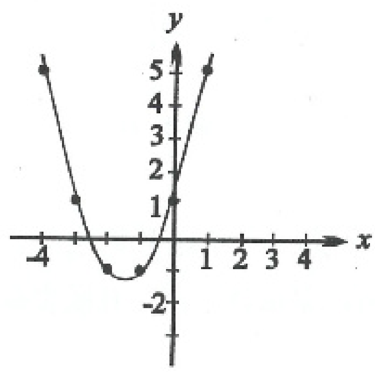


图 1−10

先将 $y = x^2 + 3x + 1$ 的右边配方，得

$$y = (x + \frac{2}{3})^2 - \frac{9}{4} + 1$$

$$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$$

当 $x = -\frac{3}{2}$ 时，y 有最小的值 $-\frac{5}{4}$。

∴ 此函数的值域为 $[-\frac{5}{4}, \infty)$。

在不同的区间上有不同的对应法则的函数叫做分段函数。分段函数的图象通常是由几段曲线组成的。

例 14 画出函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}\\ x^2+1, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\end{cases}$ 的图象。

解 $f(x)$ 的图象由三部分组成：直线、一个点、抛物线的一部分（半支）。图中的实心圆点在图象上，空心圆点不在图象上。

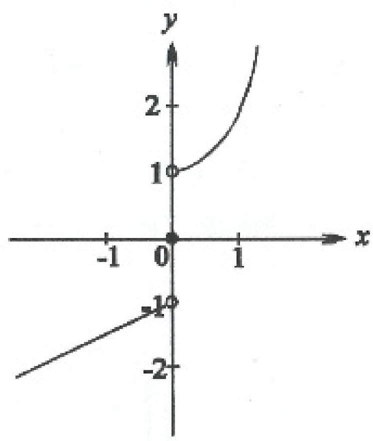


图 1–11

由以上几个例子，可以知道：一个函数的图象，可能是一条直线，可能是曲线（例如二次函数的图象），可能是由几个点，几段直线或曲线组成的图象。

● 绝对值函数及其图象

实数 x 的绝对值（absolute value）记为 $|x|$，它的定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}\\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

例如，$|2|=2$，$|0|=0$，$\left|-3\frac{1}{2}\right|=-\left(-3\frac{1}{2}\right)=3\frac{1}{2}$。

显然，$|x|$是非负的数，从几何意义上说，$|x|$就是数轴上表示 x 的点到原点的距离。

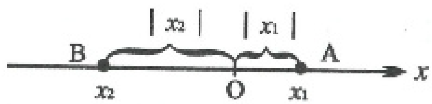


图 1–12

例 15 画出函数 $y = |x|$ 的图象。

解 $\because\ y = |x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$

$\therefore\ y = |x|$的图象由两条直线组成（图 1–13）

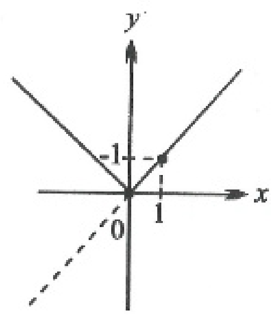


图 1–13

比较 $y = |x|$ 与 $y = x$ 的图象，可以发现只要将直线 $y = x$ 在 x 轴下方的所有点沿 x 轴对折到 x 轴上方，而其他各点不动，就得到 $y = |x|$ 的图象。

一般地，将函数 $y = f(x)$ 的图象在 x 轴下方的所有点沿 x 轴对折到 x 轴上方，而其他各点不动，就得到 $y = |f(x)|$ 的图象（图 1–14）。也就是说，函数 $y = |f(x)|$ 的图象上的各点都不在 x 轴的下方。

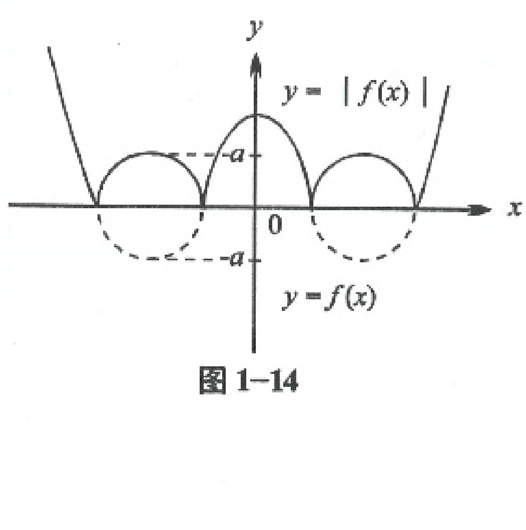


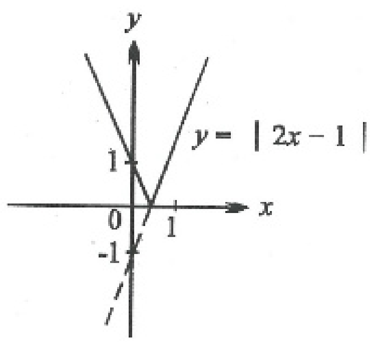
图 1–14

例 16 画出下列函数的图象，并说出它们的值域:

(a) $y = |2x-1|$ (b) $y = \left|\frac{1}{x}\right|$

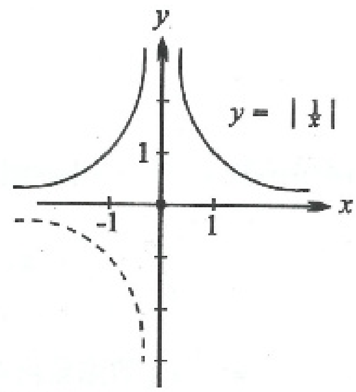
(c) $y = |x^2-1|$

解 (a)



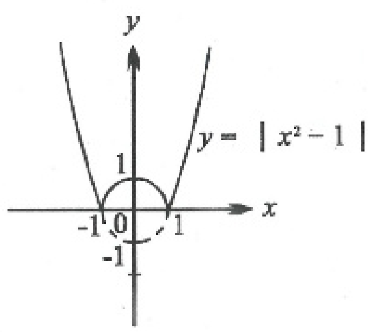
值域为 $[0, \infty)$

(b)



值域为 $(0, \infty)$

(c)

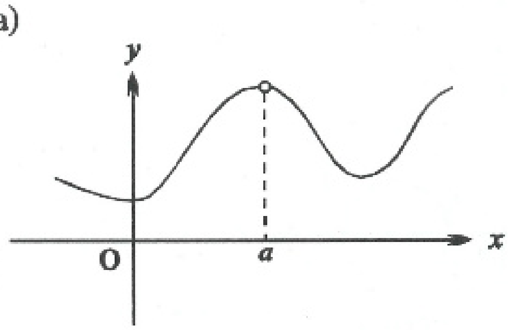


值域为 $[0, \infty)$

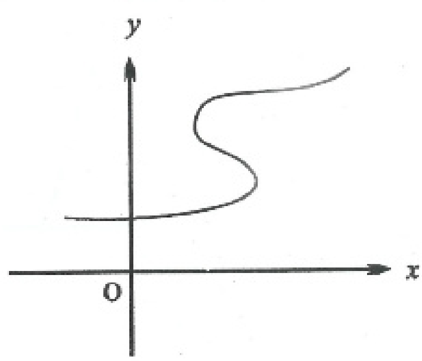
习题 1d

1. 下列曲线中哪些不是函数的图象？请说出理由。

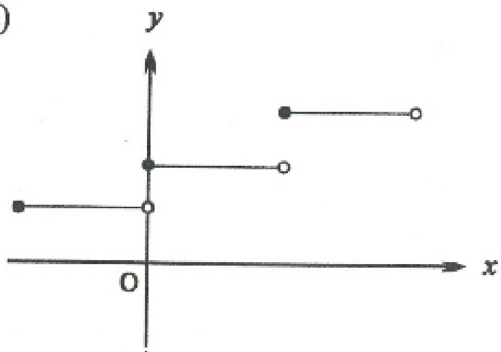
(a)



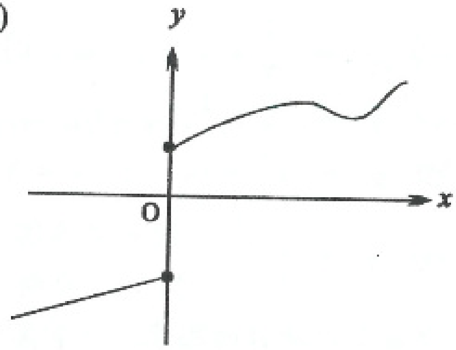
(b)



(c)

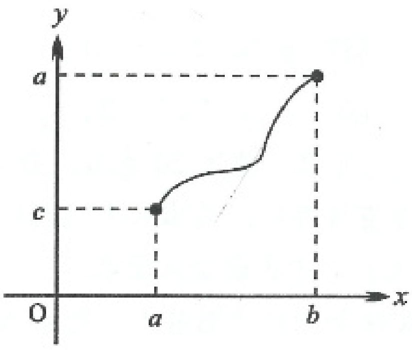


(d)

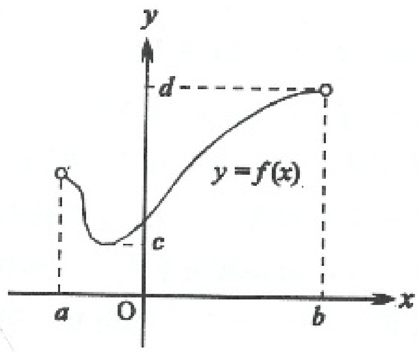


2. 根据下列函数的图象，确定函数的定义域和值域：

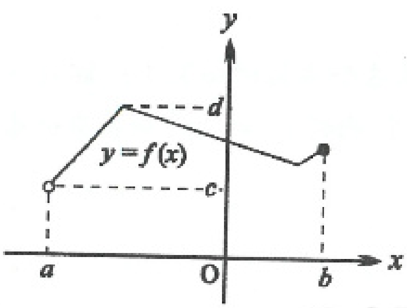
(a)



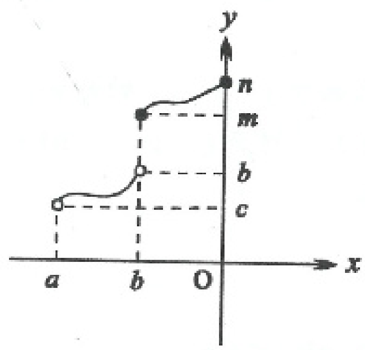
(b)



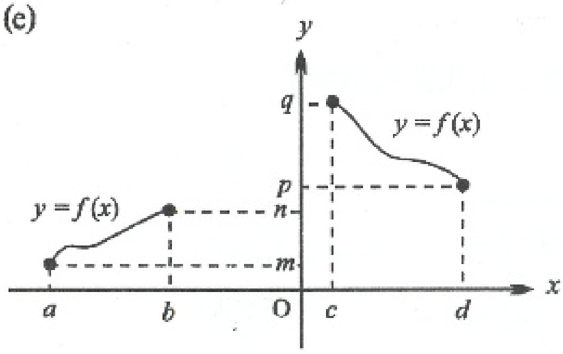
(c)



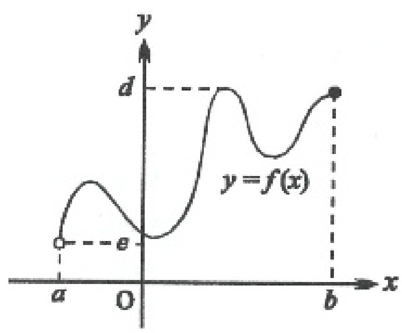
(d)



(e)



(f)



3. 画出下列函数的图象，并说出它们的值域。

(a) $y = x + 2,\ x \in [-1, 1)$

(b) $y = 2x - 3,\ x \in R$

(c) $y = -2x,\ x \in R$

(d) $y = \dfrac{2}{x}$，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(e) $y = -2x^2$，$x \in (0, \infty)$

(f) $y = x^2 + 2x - 1$，$x \in R$

(g) $y = \begin{cases} x^2, & 当\ x \leqslant 0\ 时 \\ x, & 当\ x > 0\ 时 \end{cases}$

4. 画出下列函数的图象，并求其值域。

(a) $y = \left|\dfrac{1}{2}x\right|$　　(b) $y = |-2x|$

(c) $y = |2x+1|$　　(d) $y = |-x-1|$

(e) $y = |-x^2+1|$　　(f) $y = |x^2-2|$

5. 寄信时，信件不超过 20 克的国际邮件贴 2 元邮票，超过 20 克后，每 20 克超重加贴 2 元邮票（不足 20 克的超重按 20 克超重计算）。写出邮资（元）与邮件重量（克）的函数关系式（设邮件不超过 60 克），并画出函数图象。

6. 画出函数 $y = x^2$ 的图象。若点 (a, b) 在这个函数的图象上，则 a 与 b 有什么关系？此时点 $(-a, b)$ 是否在此图象上？函数 $y = x^2$ 的图象是否关于 y 轴对称？

7. 画出函数 $y = x^3$ 的图象。若点 (a, b) 在这个函数的图象上，则 a 与 b 有什么关系？此时点 $(-a, -b)$ 是否在此图象上？函数 $y = x^3$ 的图象是否关于原点对称？

1.4 合成函数

设 f：A → B 与 g：B → C 这两个函数的范氏图表示如下：

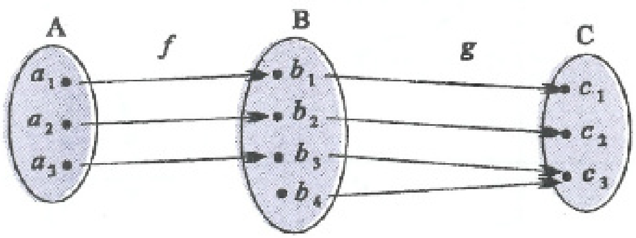


图 1–15

则有 $a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} c_1$，$a_2 \xrightarrow{f} b_2 \xrightarrow{g} c^2$，$a_3 \xrightarrow{f} b_3 \xrightarrow{g} c_3$。对于 A 中任一元素，通过两次映射 f 和 g，在 C 中有唯一确定的元素与 A 中这个元素对应。

一般地，设 A、B、C 是 3 个非空集合，f：A → B 和 g：B → C 是两个函数，对

于 A 中任一元素 x，通过 f，映到 B 中的 $f(x)$，再通过 g，映到 C 中的 $g(f(x))$。这就是说，A 中的 x 通过两次映射，映到 C 中的 $g(f(x))$，即

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

这两次映射合起来相当于从 A 映到 C 的一个函数，这个函数叫做 f 与 g 的**合成函数**（composite function），记作 $g \circ f$。在合成函数 $g \circ f$ 中，f 的值域必定包含于 g 的定义域内。即 $R_f \subseteq D_g$。

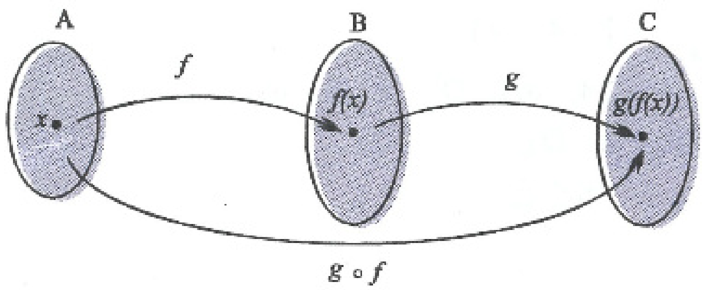


图 1–16

例 17 设 f：$R \to R$，$f(x) = 2x$；g：$R \to R^+ \cup \{0\}$，$g(x) = x^2$，求 $g \circ f$。

解

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)]\\ &= g(2x)\\ &= (2x)^2\\ &= 4x^2\end{aligned}$$

例 18 设 f：$R \to R$，$f(x) = x+1$；g：$R \to R$，$g(x) = 2x$。求 $(g \circ f)(x)$ 和 $(f \circ g)(x)$。

解

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)]\\ &= g(x+1)\\ &= 2(x+1)\\ &= 2x+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)]\\ &= f(2x)\\ &= 2x+1\end{aligned}$$

由例 18 可知，合成函数 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 的含义不同，一般地 $f \circ g \neq g \circ f$，即合成函数的合成不具有交换律。

例 19 若函数 f、g 的定义为 $f: R \to R$，$f(x) = x^2 - 4$，
$g: R^+ \cup \{0\} \to R$，$g(x) = \sqrt{x}$

(a) 求 $f \circ g$ 及其值域 $R_{f \circ g}$；

(b) 试说明为何 $g \circ f$ 不存在．

解 (a) $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f(\sqrt{x}) \\ &= x - 4\end{aligned}$$

$R_{f \circ g} = [-4, \infty)$

(b) $R_f = [-4, \infty)$，$D_g = [0, \infty)$

$\because$ $Rf \not\subset Dg$

$\therefore$ $g \circ f$ 不存在

例 20 已知 $f: x \to 2x + 1$，求函数 g 若 $f \circ g: x \to 6x + 11$．

解 已知 $f(x) = 2x + 1$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 6x + 11 \\ f[g(x)] &= 6x + 11\end{aligned}$$

即 $$\begin{aligned}2g(x) + 1 &= 6x + 11 \\ 2g(x) &= 6x + 10 \\ g(x) &= 3x + 5\end{aligned}$$

例 21 一函数 f 的定义是 $f: x \to x - 3$，另一函数 g 则使到
$g \circ f: x \to x^2 - 6x + 11$，求函数 g．

解 已知 $f(x) = x - 3$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= x^2 - 6x + 11 \\ g[f(x)] &= x^2 - 6x + 11 \\ g(x - 3) &= x^2 - 6x + 11\end{aligned}$$

设 $y = x - 3$

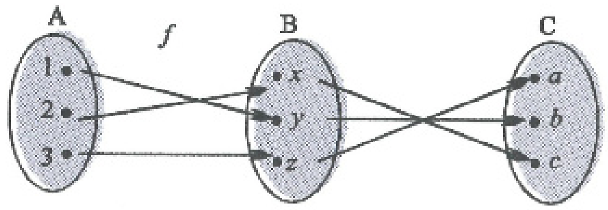
$x = y + 3$

$$\begin{aligned}\therefore\ g(y) &= (y + 3)^2 - 6(y + 3) + 11 \\ &= y^2 + 6y + 9 - 6y - 18 + 11 \\ &= y^2 + 2\end{aligned}$$

$\therefore$ $g(x) = x^2 + 2$

习题 1e

1. 函数 $f: A \to B$，$g: B \to C$ 定义如下：



试求 $g \circ f$的值域。

2. 设 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$，$bc + a^2 \neq 0$，试求$f \circ f$。

3. 实数函数 f 与 g 的定义如下。试分别求它们的合成函数 $f \circ g$ 与 $g \circ f$：

(a) $f: x \to 3x$，　　　　$g: x \to x - 1$

(b) $f: x \to 2x + 3$，　　$g: x \to x + 1$；

(c) $f: x \to 5x$，　　　　$g: x \to \dfrac{1}{5}x$；

(d) $f: x \to x^2$，　　　　$g: x \to x + 2$；

(e) $f: x \to 2x + 1$，　　$g: x \to x^2 - 2$；

4. 设 $f: R \to R$ 与 $g: R \to R$ 分别定义成

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ 与 $g(x) = 3x - 4$

试求 (a) $g \circ f$及 $f \circ g$；

(b) $g[f(2)]$，$f[g(2)]$，$(g \circ f)(2)$，$(f \circ g)(2)$。

5. 设 $f: x \to 3x - 2$，$g: x \to kx + 2$ 都是从 R 到 R 的函数。若 $g \circ f$与 $f \circ g$ 为同一函数，试求 k 之值。

6. 设 $f: R \to R$，$f(x) = 4 - x^2$；

$g: \{x \mid x \leqslant 4\} \to R$，$g(x) = \sqrt{4-x}$。

试分别检验 $f \circ g$ 及 $g \circ f$是否存在。

7. 设 $f: R \to R$，$f(x) = x^2 + 2$；

$g: \{x \mid x \leqslant 1\} \to R$，$g(x) = \sqrt{1-x}$。

(a) 试说明为何 $g \circ f$无意义；

(b) 试求 $f \circ g$ 及其值域。

8. 已知 $f: R^+ \to R$，$f(x) = \log_{10} x$；

$g: S \to R$，$g(x) = 2 - x$。

试定义 S 使 $f \circ g$ 有意义。

9. 设 $f: \{x \mid x \in R, x \neq 0, x \neq 1\} \to R$；

其定义为 $f: x \to \dfrac{x-1}{x}$，试证 $f \circ f \circ f \circ f = f$。

10. 设 $f: R \to R$，$g: R \to R$ 的对应法则如下，求 $g \circ f$ 与 $f \circ g$。

(a) $f(x) = |x|$，$g(x) = 3x + 1$；

(b) $f(x) = x^2 + 1$，$g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$；

11. 设 $f: R \to R$，$f(x) = x + 1$，求 $f \circ f(x)$ 和 $f \circ f \circ f(x)$。

12. 设 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$，且 $x \neq 1$，$x \neq 0$，求 $f \circ f(x)$，$f \circ f \circ f(x)$ 和 $f \circ f \circ f \circ f(x)$。

13. 设 $f: R \to R^+ \cup \{0\}$，$f(x) = x^2 + 1$，

$g: R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}$，$g(x) = \sqrt{x}$。

$g \circ f$ 是否存在？若存在，则求其解析式、定义域和值域。

14. 一函数 f 的定义是 $f: x \to x + 3$，另一函数 g 使到

$g \circ f: x \to x^2 + 6x + 2$，求函数 g。

15. 已知 $f: x \to x^2 + 2$，$f \circ g: x \to x^2 - 2x + 3$，求函数 g。

16. 一函数 h 的定义是 $h: x \to x^2 + 2$，另一函数 k 使到

$h \circ k: x \to x^2 + 6x + 11$，求函数 k。

17. 已知 $p = x \to x - 5$，$q \circ p: x \to x^2 - 10x - 2$，求函数 q。

1.5 一一映成函数

设函数 f：A→B 和 g：A→B 的范氏图表示如下：

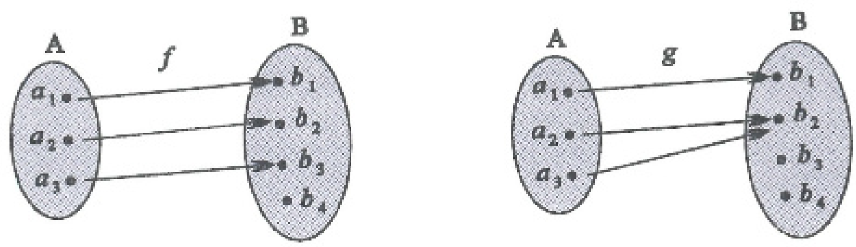


图 1–17

图中函数 f：$A \to B$ 有这样的特点：对应域 B 中的任一元素在定义域 A 中最多只有一个原象．函数 g：$A \to B$ 则没有这样的特点，b_2 在 g 之下有两个原象 a_2 和 a_3。

一般地，若函数 f：$A \to B$ 的对应域 B 中的任一元素在定义域 A 中最多只有一个原象，则 f：$A \to B$ 叫做**一对一函数**（one-one function）。图 1-17 中 f 是一对一函数，g 不是一对一函数。

例 22 下列从 R 映到 R 的函数中哪些是一对一函数？

(a) $f(x) = 2x$　　(b) $f(x) = |x|$

(c) $f(x) = x^3 + 1$　　(d) $f(x) = x^2 - 1$

解 (a) $f(x) = 2x$ 是一对一函数。

(b) $f(x) = |x|$ 不是一对一函数。因为 1 有两个原象 1 和 -1。

(c) $f(x) = x^3 + 1$ 是一对一函数。

(d) $f(x) = x^2 - 1$ 不是一对一函数。因为 0 有两个原象 1 和 -1。

设函数 f：$A \to B$ 和 g：$A \to B$ 的范氏图表示如下：

图 1-18

图中 f 这个函数有这样的特点：对应域 B 中任一元素都在定义域 A 中有原象。函数 g 则没有这样的特点，b_3 在 g 之下没有原象。

一般地，若函数 f：$A \to B$ 的对应域 B 中任一元素在 f 之下都有原象，则 f：$A \to B$ 叫做**映成函数**（onto function）。图 1-18 中 f 是映成函数，g 不是映成函数。对于映成函数来说，其值域等于其对应域。反过来，若一个函数的对应域等于其值域，则这个函数必是映成函数。

例 23 下列从 R 映到 R 的函数中哪些是映成函数?

(a) $f(x) = 2x$　　　　(b) $f(x) = x-1$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ 时} \\ 0, & x = 0 \text{ 时} \\ -1, & x < 0 \text{ 时} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \text{ 时} \\ x-1, & x < 0 \text{ 时} \end{cases}$

解 (a) $f(x) = 2x$ 是映成函数。

(b) $f(x) = x-1$ 是映成函数。

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ 时} \\ 0, & x = 0 \text{ 时} \\ -1, & x < 0 \text{ 时} \end{cases}$ 不是映成函数，例如实数 2 就不是任何实数在 f 之下的映象，即 $f(R) \neq R$。

(d) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \text{ 时} \\ x-1, & x < 0 \text{ 时} \end{cases}$ 不是映成函数，例如实数 $-\frac{1}{2}$ 就不是任何实数在 f 之下的映象，即 $f(R) \neq R$。

函数 f: A → B 是否映成函数，不仅与对应关系 f 有关，而且与对应域 B 有关。例如，函数 f: $R \to R$，$f(x) = x^2$ 不是映成函数，而函数 f: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$，$f(x) = x^2$ 是映成函数。

设函数 f: A → B 的范氏图表如下:

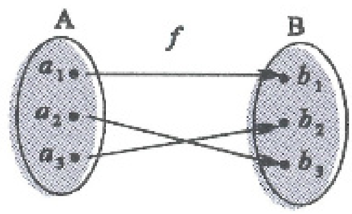


图 1–19

可以发现，这个函数既是一对一函数，又是映成函数。

若函数 f: A → B 既是一对一函数，又是映成函数，则它叫做从 A 映到 B 的**一一映成函数**（one–one onto function)。这时 B 中任一元素都在 A 中有原象（因 f 是映成的)，且只有唯一的原象（因 f 是一对一的)。

例 24 下列函数中哪些是一一映成函数?

(a) $f: R\rightarrow R$, $f(x) = 2x$

(b) $f: R\rightarrow R$, $f(x) = x^2$

(c) $f: R\rightarrow R^+\cup\{0\}$, $f(x) = x^2$

(d) $f: R^+\cup\{0\}\rightarrow R^+\cup\{0\}$, $f(x) = x^2$

解 (a) $f: R\rightarrow R$, $f(x) = 2x$ 是一一映成函数。

(b) $f: R\rightarrow R$, $f(x) = x^2$ 不是一一映成函数，因为它既不是一对一的，又不是映成的。

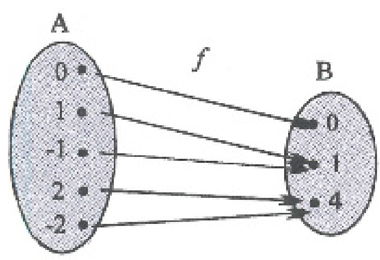
(c) $f: R\rightarrow R^+\cup\{0\}$, $f(x) = x^2$ 不是一一映成函数，因为它是映成的，但不是一对一的。

(d) $f: R^+\cup\{0\}\rightarrow R^+\cup\{0\}$, $f(x) = x^2$ 是一一映成函数。

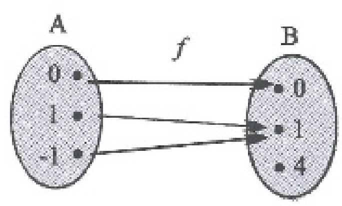
习题 1f

1. 下列函数中哪些是一对一函数？哪些是映成函数？

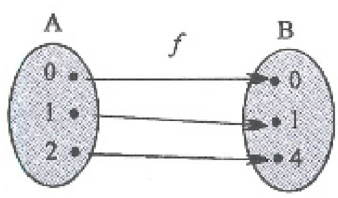
(a)



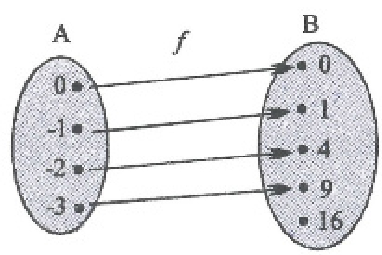
(b)



(c)

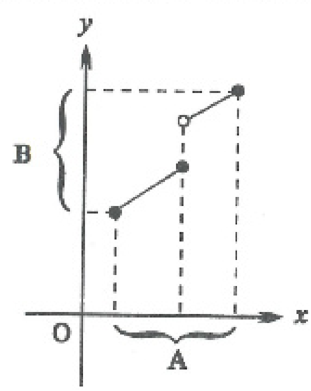


(d)

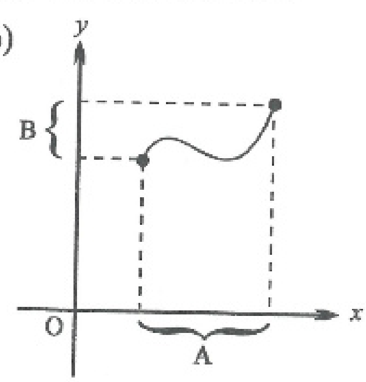


2. 判断下列从 A 到 B 的函数哪些是一对一函数，哪些是映成函数。

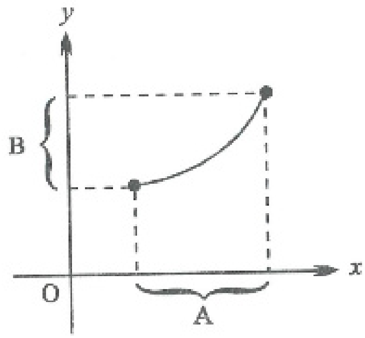
(a)



(b)



(c)



3. 设 A $=\{a_1, a_2\}$，B $=\{b_1, b_2, b_3\}$。

   (a) 写出从 A 到 B 的所有一对一函数；

   (b) A 到 B 有映成函数吗？

4. 设 A $=\{a_1, a_2, a_3\}$，B $=\{b_1, b_2\}$。

   (a) 写出从 A 到 B 的所有映成函数；

   (b) A 到 B 有一对一函数吗？

5. 设集合 A 有 m 个元素，集合 B 有 n 几个元素 $(m, n \in N)$。

   (a) 从 A 映到 B 的函数共有多少个？

   (b) 若存在从 A 映到 B 的一对一函数，则 m 与 n 之间的大小关系如何？

   (c) 若存在从 A 映到 B 的映成函数，则 m 与 n 之间的大小关系如何？

   (d) 若存在从 A 映到 B 的一一映成函数，则 m 与 n 之间的大小关系如何？

6. 设 A、B 两个集合各有 m 个元素 $(m \in N)$，f：A→B 是映成函数。这个函数是否一一映成函数？

7. 设 f：A→A 是一对一函数。

   (a) 当 A 中元素个数有限多时，证明 f 是一一映成函数；

   (b) 当 A 中元素个数无限多时，结合下例说明 f 不一定是一一映成函数。

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x<0 \text{ 时} \\ x+1, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时} \end{cases}$$

8. 下列函数中哪些是一一映成的？

   (a) $f: N \to N$，$f(x)=2x$；

   (b) $f: R \to R$，$f(x)=2x$；

   (c) $f: R \to R^+ \cup \{0\}$，$f(x)=|x|$；

   (d) $f: \{x \mid x \in R \text{ 且 } x \leqslant 0\} \to R^+ \cup \{0\}$，$f(x)=2|x|$；

1.6 反函数

设 f：$A \to B$ 是一个一一映成函数，即对每个 $y \in B$，都有唯一的一个 $x \in A$ 与它对应，那么，就存在着一个 g：$B \to A$，使得

$$(g \circ f)(x) = x, \quad x \in A$$

g 就叫做 f 的反函数（inverse function），记作 f^{-1}。

一般上，若一个一一映成函数 f 将 x 对应到 y，那么它的反函数 f^{-1} 则将 y 对应回 x（图 1–20）。

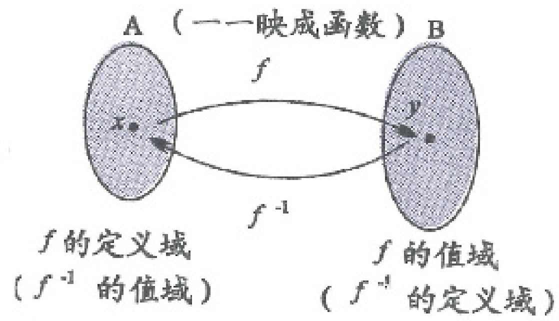
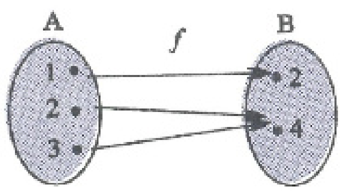


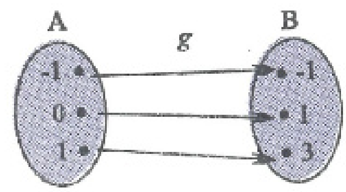
图 1–20

例 25 判断下列各函数是否有反函数。

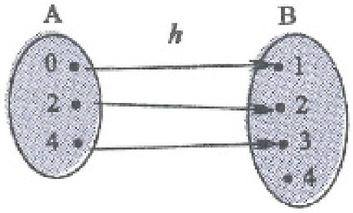
(a)



(b)



(c)



解 (a) 函数 f 没有反函数，因为 f 不是一个一一映成函数，B 的元素 4 有两个原象 2 和 3。

(b) 函数 g 有反函数 g^{-1}。

(c) 函数 h 没有反函数，因为 h 不是一个一一映成函数，B 的元素 4 没有原象。

例 26 已知 $f: R \to R$，定义成函数 $f(x) = 2x-1$，

$g: R \to R$，定义成 $g(x) = \dfrac{x+1}{2}$，

求 $(g \circ f)(x)$ 及 $(f \circ g)(x)$，并说出 f 和 g 的关系。

解 函数 f 为一一映成函数，且

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g[2x-1] \\ &= \frac{(2x-1)+1}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x\end{aligned}$$

因此，g 是 f 的反函数。

函数 g 为一一映成函数，且

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f\left[\frac{x+1}{2}\right] \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right)-1 \\ &= x+1-1 \\ &= x\end{aligned}$$

因此，f 是 g 的反函数。

由例 26 中，可以看出，f 与 g 互为反函数。一般上，函数 f 与它的反函数 f^{-1} 互为反函数。即

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

例 27 设 $f(x) = 2x+4$，$x \in R$，求 $f(x)$ 的反函数。

解一

$$
\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(x) &= x \\
f[f^{-1}(x)] &= x \\
2f^{-1}(x) + 4 &= x \\
2f^{-1}(x) &= x-4 \\
f^{-1}(x) &= \frac{x-4}{2}, \quad x \in R
\end{aligned}
$$

解二 设

$$
\begin{aligned}
y &= 2x+4 \\
y - 4 &= 2x \\
x &= \frac{y-4}{2}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}, \quad x \in R$$

例 28 下列函数中，哪些有反函数？求出这些反函数。

(a) $f: R \to R$，$f(x) = x^2$

(b) $g: R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}$，$g(x) = x^2$

(c) $h: R \to R$，$h(x) = |x| - 1$

(d) $k: R\backslash\{3\} \to R\backslash\{0\}$，$k(x) = \dfrac{2}{x-3}$

解 (a) 函数 f 没有反函数，因为它不是一一映成函数。

(b) $g(x) = x^2$ 有反函数，

$$
\begin{aligned}
(g \circ g^{-1})(x) &= x \\
g[g^{-1}(x)] &= x \\
g^{-1}(x)^2 &= x \\
g^{-1}(x) &= \sqrt{x}, \quad x \in R^+ \cup \{0\}
\end{aligned}
$$

(c) 函数 h 没有反函数，因为它不是一一映成函数。

(d) 函数 $k(x)=\dfrac{2}{x-3}$，$x\neq 3$ 有反函数。

$$(k\circ k^{-1})(x)=x$$
$$k[k^{-1}(x)]=x$$
$$\frac{2}{k^{-1}(x)-3}=x$$
$$k^{-1}(x)-3=\frac{2}{x}$$
$$k^{-1}(x)=\frac{2}{x}+3,\ x\neq 0$$

● 反函数的图象

先来看一个例子。

例 29 在同一直角坐标系里，作出下列函数及其反函数的图象。

(a) $f(x)=3x-2$　　　　(b) $g(x)=x^3$

解 (a)
$$(f\circ f^{-1})(x)=x$$
$$f[f^{-1}(x)]=x$$
$$3f^{-1}(x)-2=x$$
$$f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$$

它们的图象如图 1–21 所示。

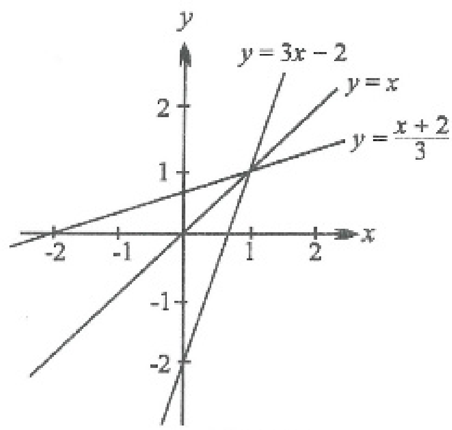


图 1–21

(b)
$$(g\circ g^{-1})(x)=x$$
$$g[g^{-1}(x)]=x$$
$$[g^{-1}(x)]^3=x$$
$$g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

它们的图象如图 1–22 所示。

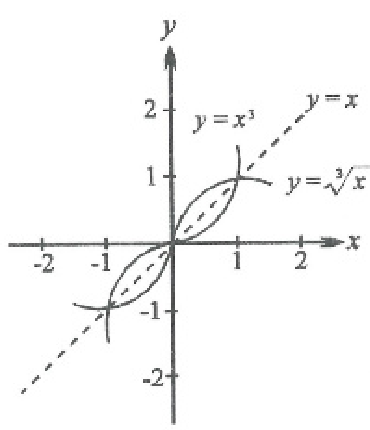


图 1–22

从上面例子中所画出的图象，可以发现：

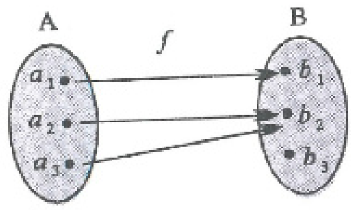
> 在同一平面直角坐标系里作出的函数 $y = f(x)$ 的图象和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象，关于直线 $y = x$ 对称。

利用这个关系，我们就可以从函数 $y = f(x)$ 的图象作出它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象，并且从函数 $y = f(x)$ 所具有的性质推出它的反函数所具有的性质。

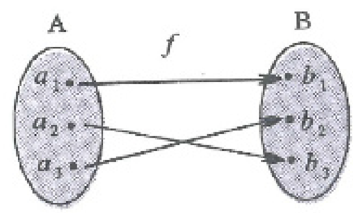
习题 1g

1. 判断下列函数是否有反函数，并说明理由。

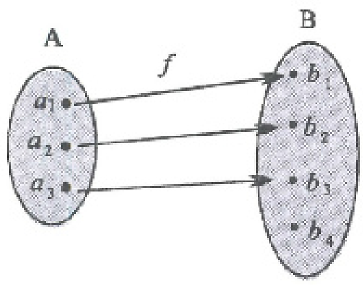
(a)



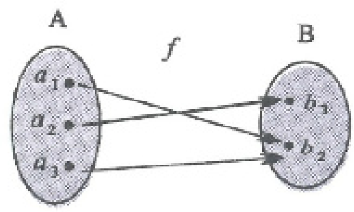
(b)



(c)



(d)



2. 下列函数的定义域及对应域都是 R，其中哪些函数有反函数？

(a) $f(x) = 4x - 2$　　(b) $f(x) = x^2 + 1$

(c) $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$　　(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ 时} \\ 0, & x = 0 \text{ 时} \end{cases}$

3. 求下列函数的反函数：

(a) $f(x) = 4x - 5$，$x \in R$　　(b) $f(x) = 3x^3 - 1$，$x \in R$

(c) $f(x) = x^4$，$x \in [0, \infty)$　　(d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$，$x \in (-\infty, 0)$

(e) $f(x) = \dfrac{3}{2x+1}$，$x \in R$ 且 $x \neq -\dfrac{1}{2}$

(f) $f(x) = \sqrt{2x-4}$，$x \in [2, \infty)$

4. 下列函数中哪些有反函数？求出这些反函数。

   (a) $y = |x|$，$(x, y) \in R$

   (b) $y = (x+1)^2$，$(x, y) \in R$

   (c) $y = (x+1)^2$，$(x, y) \in R^+ \cup \{0\}$

   (d) $y = \dfrac{1}{x}$，$(x, y) \in R \backslash \{0\}$

   (e) $y = \sqrt{x}$，$(x, y) \in R^+ \cup \{0\}$

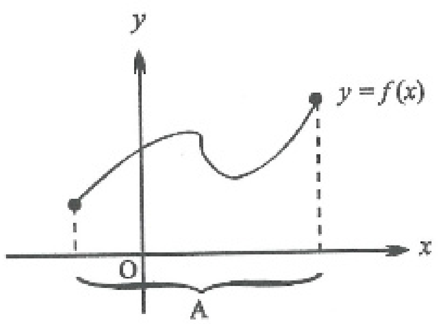
5. 证明函数 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数仍是这个函数。

6. 要使函数 $y = x^2$ 存在反函数，$y = x^2$ 的定义域可以取什么区间？写出相应的反函数。

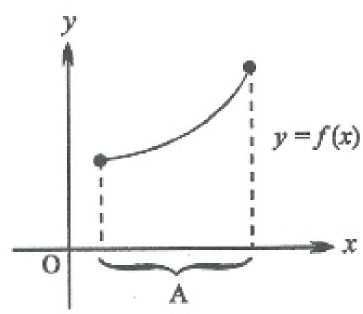
7. 函数 $y = \log x$，$x > 0$ 有没有反函数？若有，则求出反函数及其定义域与值域。

8. 下列图象所表示的函数的定义域为 A，其中哪些函数有从 $f(\text{A})$ 到 A 的反函数？说明理由。

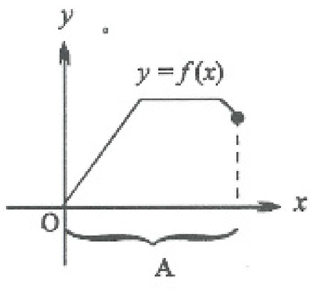
(a)



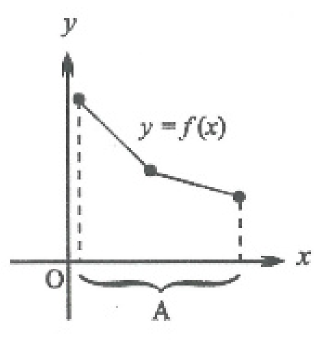
(b)



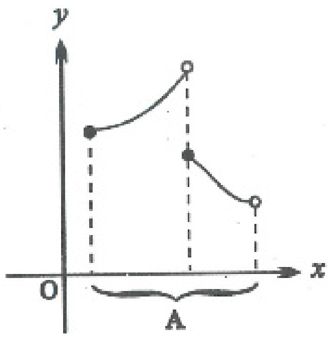
(c)



(d)



(e)



9. 设 f: $R \to R$，定义成 $f(x) = 2x - 3$，求 f 的反函数 f^{-1}。
10. 设 f: $R \to R$，定义成 $f(x) = x^3 + 5$，求 f 的反函数 f^{-1}。
11. 设 $A = R\backslash\{3\}$，$B = R\backslash\{1\}$，函数 f: $A \to B$ 定义成 $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$，试求 f 的反函数 f^{-1}。
12. 设 $A = \{x: x \in R, x \neq -\frac{1}{2}\}$，$B = \{x: x \in R, x \neq \frac{1}{2}\}$，$f$ 是从 A 到 B 的函数，其定义为 $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$，试求其反函数。
13. 设 f: $R \to R$，其定义为 $f(x) = ax + b$，$a \neq 0$，
    (a) 求 f^{-1}；
    (b) 若其反函数即为其本身，求 a，b 之值。
14. 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$，$x > 0$，
    (a) 求 f^{-1}
    (b) 作 f 与 f^{-1} 的图象
15. 设 $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ $x \in R$，
    (a) 求 f^{-1}
    (b) 作 f 与 f^{-1} 的图象

总复习题 1

1. 判断下列集合 A 到集合 B 的对应，哪些是映射，哪些不是映射，并说明理由。

   (a) A $=\{0, 1, 2\}$，B $=\{3\}$，对应法则 f：，$0\to3$，$1\to3$，$2\to3$；

   (b) A $=\{\alpha \mid 0° < \alpha < 90°\}$，B $=\{y \mid 0 < y < 1\}$，对应法则 f：$\alpha \to y = \sin\alpha$，$\alpha \in$ A，$y \in$ B；

   (c) A $= R$，B $= R^{+} \cup \{0\}$，对应法则 f：$x \to y = x^{2}$，$x \in$ A；

   (d) A $= N$，B $= N$，对应法则 f：$n \to 2n$，$n \in N$；

   (e) A $= R^{+} \cup \{0\}$，B $= R$，对应法则 f：$x \to y$，$|y| = x$，$x \in R^{+} \cup \{0\}$；

   (f) A $= R$，B $= Z$，对应法则 f：$x \to x$；

   (g) A $= R$，B $= R$，对应法则 f：$x \to \pm\sqrt{x}$。

2. 设函数 $f(x) = -x+1$，$x \in R$。a，$b \in R$ 且 $a < b$，试比较 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小。

3. 画出下列函数的图象：

   (a) $y = \dfrac{1}{x} + 1$，$x \in R$ 且 $x \neq 0$；

   (b) $y = 2x^{2} + 2$，$x \in \mathrm{R}^{+}$；

   (c) $y = \begin{cases} x-1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ x+1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \end{cases}$

   (d) $y = [x]$，$-2 \leqslant x \leqslant 2$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[\frac{1}{2}] = 0$，$[-1] = -1$，$[-3.95] = -4$，$[4.5] = 4$，$[4] = 4$。

4. 确定下列函数的定义域：

   (a) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x-1}$；

   (b) $f(x) = \sqrt{1-x^{2}}$；

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + \log(10 - \dfrac{x}{2})$。

5. 确定下列函数的值域:

(a) $f(x) = 3x^2 - 1$, $x \in R$;

(b) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$, $x \in R$ 且 $x \neq 0$;

(c) $f(x) = x^2 - 2x + 4$, $x \in R$;

6. 某公共汽车路线全长 20 km，票价规定如下：4 km 以下者收 RM 0.1 元，4 至 10 km 者收 RM 0.2，10 km 以上者收 RM 0.3。试将票价表示成路程的函数，并作出图象。求这个函数的定义域和值域。

7. 画出函数

$$y = \begin{cases} |x-2|, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \\ |-x^2+2|, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时} \end{cases}$$

的图象。当 x 等于何值时有 $y = 0$?

8. 设 $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+5}$，求

(a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;　　(b) $\dfrac{1}{f(x)}$.

9. 设 $f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{2+x}{2-x}$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 为多少?

10. 设 $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$，试证 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.

11. 设 $y = f(x) = \dfrac{x+2}{3x-1}$，试证 $x = f(y)$.

12. 若 $f(x) = -\dfrac{1}{1+x}$，则 $f \circ f = ?$

13. 已知 $f: x \to 2x-1$ 及 $g: x \to \dfrac{x}{2}$，求 $g \circ f$.

14. 若 $f(x) = \sqrt{x}$，$g(x) = x^4$，求 $g \circ f$ 及 $f \circ g$ 及其定义域。

15. 若 $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$，$x \neq 0$，又若 $f[g(x)] = x$，则 $g(x)$ 为何?

16. 一函数 f 的定义是 $f: x \to x-3$，另一函数 g 则使到 $g \circ f: x \to 4x^2 - 20x + 25$，那么 $g(x)$ 为何?

17. 设 $f: R \to R$，$f(x) = 2x$；$g: [2, \infty) \to R$，$g(x) = \sqrt{x-2}$。$g \circ f$ 与 $f \circ g$ 是否存在? 求其中存在的合成函数的解析式、定义域和值域。

18. 若 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^3, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 2, & x>2\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 3x, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 4, & x>2\end{cases}$

试求 $f\circ g$，$g\circ g$，$f\circ f$。

19. 设 f：$R\to R$ 定义成 $f(x)=\begin{cases}-2, & \text{当 } x\leqslant -3\\ |x|-2x, & \text{当 } -3<x<3\\ 2x-1, & \text{当 } x\geqslant 3\end{cases}$

试求 $f\circ f\circ f(-1000)$ 之值。

20. 已知 f，g：$R\to R$，其中 $f(x)=3x+1$，$(f\circ g)(x)=6x^2-9x+4$，求 $g(x)$。

21. 二函数的定义为 f：$x\to 2x^2$ 及 g：$x\to 3x-4$。若 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$，则 x 的值为何？

22. 若函数 f：A→B 没有反函数，但函数 f：A→C 有反函数，则 f：A→B 是否一对一函数？C 与 B 两集合有何关系？

23. 设 $f(x)=2x+1$，$x\in R$；$g(x)=3x+2$，$x\in R$。试求函数 h：$R\to R$，使得 $h\circ f=g$。

24. 如果 $f(x)=\dfrac{3x+5}{2}$，那么 $f^{-1}(2)=$ ？

25. 如果 $A=\{x\mid x\in R,\ x\neq 1\}$，$f$：A→A 及 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试求 f^{-1}。

26. 求下列函数的反函数，并指出反函数的定义域：

(a) $y=\dfrac{2}{x-1}$　$(x\neq 1)$；

(b) $y=x^3+1$　$(x\in R)$；

(c) $y=\sqrt{25-4x^2}$　$\left(x\in\left[0,\ \dfrac{5}{2}\right]\right)$；

(d) $y=-\dfrac{1}{x}+3$　$(x\neq 0)$；

(e) $y=\dfrac{x}{3x+5}$　$\left(x\neq -\dfrac{5}{3}\right)$；

(f) $y=x^5+1$　$(x\in R)$。

27. 证明函数 $y=\dfrac{ax-b}{cx-a}$ 的反函数是它本身。

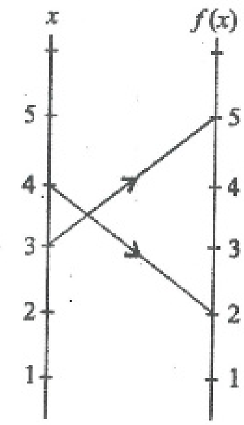
28. (a) 已知 $f: x \to 2x+3$ 及 $g: x \to 3-x$，试求

(i) $f \circ g$ (ii) f^{-1} (iii) g^{-1}；

并验证 $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$。

(b) 如右图所示，设函数 $f(x) = ax + b$。

试求 $f(2)$ 与 $f^{-1}(8)$ 之值。



(c) 设 $f(x) = x^2 + 5$，$-1 < x < 2$，x 为实数，试求 f 之值域。

29. (a) 函数 f 与 g 的定义如下：

$f: x \to x^2 + 2x$；$g: x \to 3x - 2$

求 $f(2)$，$g(2)$，$f \circ g(2)$ 及 $g \circ f(2)$ 之值。

(b) 函数 f 与 g 的定义如下：

$f: x \to 5x + 3$；$g: x \to 2x - 7$

求 (i) $f \circ g$ 与 $(f \circ g)^{-1}$；

(ii) f^{-1}，g^{-1} 与 $g^{-1} \circ f^{-1}$。

30. (a) 已知 $f: x \to x^2 - x + 1$，其定义域为 $-1 \leqslant x \leqslant 3$，试求其值域；

(b) 函数 f 之定义为 $f: x \to \dfrac{x}{2} + 1$。若设 $g \circ f^{-1}: x \to 4x^2 - 8x + 7$，试求函数 g。

2 一元二次方程式与二次函数

2.1 一元二次方程式的解法

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 的整式方程式，叫做**一元二次方程式**（quadratic equation in one variable）。例如，

$$x^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - 3x + 5 = 0$$
$$3x^2 - 5x = 0$$

等都是一元二次方程式。

一元二次方程式的一般形式为

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0),$$

其中 x 是未知数，ax^2 是二次项，bx 是一次项，c 是常数项，a、b、c 是已知数。

在初中，我们已学过一元二次方程式的解法。下面复习有关的三种常用解法。

● 因式分解法（solving by factorization）

将一元二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

的左边分解成两个因式的积，使方程式化为

$$(mx + n)(px + q) = 0$$

的形式，再由此得出

$$mx + n = 0 \text{ 或 } px + q = 0$$

于是得

$$x = -\frac{n}{m} \text{ 或 } x = -\frac{q}{p}$$

像上面这样解一元二次方程式的方法叫做因式分解法。

例 1 解方程式:

(a) $x^2-3x+2=0$　　(b) $6x^2+5x-4=0$

解 (a)
$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-2)(x-1)=0$$
$$x-2=0 \quad 或 \quad x-1=0$$
$$x=2 \quad 或 \quad x=1$$

(b)
$$6x^2+5x-4=0$$
$$(2x-1)(3x+4)=0$$
$$2x-1=0 \quad 或 \quad 3x+4=0$$
$$x=\frac{1}{2} \quad 或 \quad x=-\frac{4}{3}$$

例 2 求方程式的解集:

(a) $3x^2-5x-2=0$　　(b) $5x^2+6x=0$

(c) $9x^2-16=0$　　(d) $10x^2+3x+1=2$

解 (a)
$$3x^2-5x-2=0$$
$$(x-2)(3x+1)=0$$
$$x-2=0 \quad 或 \quad 3x+1=0$$
$$x=2 \quad 或 \quad x=-\frac{1}{3} \qquad 解集=\left\{2,-\frac{1}{3}\right\}$$

(b)
$$5x^2+6x=0$$
$$x(5x+6)=0$$
$$x=0 \quad 或 \quad 5x+6=0$$
$$x=0 \quad 或 \quad x=-\frac{6}{5} \qquad 解集=\left\{0,-\frac{6}{5}\right\}$$

(c)
$$9x^2-16=0$$
$$(3x+4)(3x-4)=0$$
$$3x+4=0 \quad 或 \quad 3x-4=0$$
$$x=-\frac{4}{3} \quad 或 \quad x=\frac{4}{3} \qquad 解集=\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$$

(d) $10x^2+3x+1 = 2$

$10x^2+3x-1 = 0$

$(2x+1)(5x-1) = 0$

$2x+1 = 0$ 或 $5x-1 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{1}{5}$ 解集 $= \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right\}$

● 配方法 (solving by completing the square)

将一元二次方程式

$$ax^2+bx+c = 0 \quad (a \neq 0)$$

变形为左边是完全平方式，右边是一个常数的方程式，即

$$(x+p)^2 = q$$

的形式，当常数 $q \geqslant 0$ 时，可得

$$x+q = \pm\sqrt{q}$$

∴ $x = -p+\sqrt{q}$ 或 $x = -p-\sqrt{q}$

像上面这样解一元二次方程式的方法叫配方法。

例 3 用配方法解方程式:

(a) $x^2-8x-4 = 0$ (b) $x^2+5x+1 = 0$

解 (a) $x^2-8x-4 = 0$

$x^2-8x = 4$

$x^2-8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4+\left(\frac{8}{2}\right)^2$

$(x-4)^2 = 20$

$x-4 = \pm 2\sqrt{5}$

$x = 4+2\sqrt{5}$ 或 $x = 4-2\sqrt{5}$

(b) $x^2+5x+1 = 0$

$x^2+5x = -1$

$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2 = -1+\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$(x+\frac{5}{2})^2 = \frac{21}{4}$

$$x+\frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$x = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \quad 或 \quad x = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$$

例 4 求方程式的解集:

(a) $2x^2+8x-3 = 0$ (b) $3x^2-5x-4 = 0$

解 (a)

$$\begin{aligned}
2x^2+8x-3 &= 0\\
2x^2+8x &= 3\\
x^2+4x &= \frac{3}{2}\\
x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2 &= \frac{3}{2}+\left(\frac{4}{2}\right)^2\\
(x+2)^2 &= \frac{11}{2}\\
x+2 &= \pm\frac{\sqrt{22}}{2}
\end{aligned}$$

$$x = -2+\frac{\sqrt{22}}{2} \quad 或 \quad x = -2-\frac{\sqrt{22}}{2}$$

$$解集 = \left\{-2+\frac{\sqrt{22}}{2}, -2-\frac{\sqrt{22}}{2}\right\}$$

(b)

$$\begin{aligned}
3x^2-5x-4 &= 0\\
3x^2-5x &= 4\\
x^2-\frac{5}{3}x &= \frac{4}{3}\\
x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{4}{3}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\\
\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{73}{36}\\
x-\frac{5}{6} &= \pm\frac{\sqrt{73}}{6}
\end{aligned}$$

$$x = \frac{5+\sqrt{73}}{6} \quad 或 \quad x = \frac{5-\sqrt{73}}{6}$$

$$解集 = \left\{\frac{5+\sqrt{73}}{6}, \frac{5-\sqrt{73}}{6}\right\}$$

● 公式法（solving by formula）

用配方法可以推导出一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

的求根公式。由上面的方程式可得

$$\begin{aligned}
ax^2+bx &= -c,\\
x^2+\frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a},\\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2},\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},
\end{aligned}$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

直接利用上述公式解一元二次方程式的方法叫做公式法。

例 5 用公式法解方程式:

(a) $x^2-3x-7=0$　　(b) $3x^2+7x+2=0$

解 (a) $x^2-3x-7=0$

$$\begin{aligned}
b^2-4ac &= (-3)^2-4(1)(-7)\\
&= 37
\end{aligned}$$

$$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{37}}{2}$$

(b) $3x^2+7x+2=0$

$$\begin{aligned}
b^2-4ac &= 7^2-4(3)2\\
&= 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ x &= \frac{-7\pm\sqrt{25}}{2(3)}\\
&= \frac{-7\pm 5}{6}
\end{aligned}$$

$$x = \frac{-7+5}{6} \quad \text{或} \quad x = \frac{-7-5}{6}$$

$$= -\frac{1}{3} \qquad\qquad = -2$$

习题 2a

1. 用因式分解法解下列方程式:

   (a) $x^2 - 5x + 4 = 0$
   (b) $x^2 + 5x + 6 = 0$
   (c) $x^2 + x - 20 = 0$
   (d) $x^2 - x - 12 = 0$;
   (e) $x^2 + 3x = 0$
   (f) $x^2 - 49 = 0$;
   (g) $2x^2 - 13x + 15 = 0$
   (h) $3x^2 + 2x - 5 = 0$
   (i) $6x^2 + 7x + 2 = 0$
   (j) $15x^2 + x - 6 = 0$

2. 用配方法解下列方程式:

   (a) $x^2 - 4x - 7 = 0$
   (b) $x^2 + 6x + 3 = 0$
   (c) $x^2 + 3x - 1 = 0$
   (d) $x^2 - 7x + 4 = 0$
   (e) $2x^2 + x - 9 = 0$
   (f) $3x^2 - 6x - 2 = 0$
   (g) $5x^2 - 6x - 3 = 0$
   (h) $4x^2 + 4x - 3 = 0$
   (i) $9x^2 - 6x - 4 = 0$
   (j) $7x^2 - x - 1 = 0$

3. 用公式法解下列方程式:

   (a) $x^2 - 2x - 10 = 0$
   (b) $x^2 - 8x + 4 = 0$
   (c) $3x^2 - 2x - 1 = 0$
   (d) $5x^2 + 10x + 2 = 0$
   (e) $5x^2 - 4x = 2$
   (f) $2x^2 = 3x + 5$
   (g) $3x - 2 = x^2$
   (h) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x = \sqrt{2}$

4. 用适当方法求下列方程式的解集:

   (a) $x^2 - 7x + 6 = 0$
   (b) $x^2 - 7x - 6 = 0$
   (c) $x^2 + 11x + 24 = 0$
   (d) $(x-1)(x+2) = 40$
   (e) $(3-t)^2 + t^2 = 9$
   (f) $(y+2)^2 = 5$
   (g) $(2z+3)^2 = 3(4z+3)$
   (h) $(u-\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2}u$
   (i) $(u+3)(2u-1) = 4$
   (j) $3w(w+2) = 2+4w$

2.2 一元二次方程式的根的判别式

对于任意一个一元二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

都可用配方法将其变形为

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

的形式。

因为 $a \neq 0$，所以 $4a^2 > 0$，于是有：

(一) 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，方程式的右边是一个正数，因此方程式有两个不相等的实数根，即

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}，\quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(二) 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，方程式的右边是 0，因此方程式有两个相等的实数根，即

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

(三) 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，方程式的右边是一个负数，但是对于任一实数 x，方程式的左边 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ 都不可能是一个负数，因此方程式没有实数根。

我们将 $b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ 的**根的判别式** (discriminant of roots)，通常用符号 Δ 来表示，即

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

例 6 不解方程式，判别下列方程式的根的情况：

(a) $3x^2 + 5x - 1 = 0$　　(b) $5x^2 + 7 = 0$

(c) $4y^2 + 9 = 12y$　　(d) $3(z^2 + 1) = 7z$

解 (a) $\because\ \Delta = 5^2 - 4(3)(-1)$

$$= 25 + 12$$

$$= 37 > 0$$

$\therefore$ 方程式 $3x^2 + 5x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根。

(b) $\because \quad \Delta = 0^2 - 4 \times 5 \times 7$

$= -140 < 0$

$\therefore$ 方程式 $5x^2 + 7 = 0$ 没有实数根

(c) 原方程式可变形为 $4y^2 - 12y + 9 = 0$

$\because \quad \Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9$

$= 144 - 144 = 0$

$\therefore$ 方程式 $4y^2 + 9 = 12y$ 有两个相等的实数根

(d) 原方程式可变形为 $3z^2 - 7z + 3 = 0$

$\because \quad \Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 3$

$= 49 - 36$

$= 13 > 0$

$\therefore$ 方程式 $3(z^2 + 1) = 7z$ 有两个不相等的实数根

例 7 k 取什么值时，以 x 为未知数的方程式 $x^2 - (2k + 1)x + (k^2 - 1) = 0$

(a) 有两个不相等的实数根；

(b) 有两个相等的实数根；

(c) 没有实数根.

解 $\Delta = [-(2k + 1)]^2 - 4(k^2 - 1)$

$= 4k + 5$

(a) 当方程式有两个不相等的实数根；

即 $\Delta > 0$

$4k + 5 > 0$

$k > -\frac{5}{4}$

(b) 当方程式有两个相等的实数根；

即 $\Delta = 0$

$4k + 5 = 0$

$k = -\frac{5}{4}$

(c) 当方程式没有实数根;

即 $\Delta < 0$

$$4k + 5 < 0$$

$$k < -\frac{5}{4}$$

例 8 求 m 的值，如果 $f(x) = 4x^2 - 28x + m$ 是一个完全平方式.

解 令 $f(x) = 4x^2 - 28x + m = 0$

由于 $f(x)$ 是一个完全平方式

∴ $f(x) = 0$ 有等根

∴
$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ (-28)^2 - 4(4)(m) &= 0 \\ m &= 49 \end{aligned}$$

例 9 证明关于 x 的方程式 $(m+3)x^2 - (m^2-8)x + (m-3) = 0$ 一定有实数根.

证
$$\begin{aligned} \Delta &= [-(m^2-8)]^2 - 4(m+3)(m-3) \\ &= m^4 - 20m^2 + 100 \\ &= (m^2-10)^2 \end{aligned}$$

不论 m 为任何实数，都有 $(m^2-10)^2 \geqslant 0$,

即 $\Delta \geqslant 0$

∴ 关于 x 的方程式 $(m+3)x^2 - (m^2-8)x + (m-3) = 0$ 一定有实数根.

习题 2b

1. 不解方程式，判别下列方程式的根的情况:

(a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ (b) $x^2 - 2x + 3 = 0$

(c) $25x^2 - 10x + 1 = 0$ (d) $\sqrt{2}x^2 - 12x + 4\sqrt{2} = 0$

(e) $2x = x^2 - 1$ (f) $4x(x-1) + 2 = 0$

(g) $(x-1)^2 = 2x + 3$ (h) $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{2}x$

(i) $\frac{1}{2}(x^2-2) = \frac{1}{3}(x+1)$ (j) $4(x-3)^2 = 3(x+1)^2$

2. 当 m 取什么值时，关于 x 的方程式 $mx^2+(2m-1)x+(m-2)=0\ (m\neq 0)$。
   (a) 有两个不相等的实数根；
   (b) 有两个相等的实数根；
   (c) 没有实数根。
3. p 取什么值时，关于 x 的方程式 $4x^2+(p+3)x+(p-1)=0$ 有两个相等的实数根。试求出这时方程式的根。
4. 证明关于 x 的方程式 $x^2+(2k-1)x-(k-\frac{1}{8})=0$ 有两个不相等的实数根。
5. 证明关于 x 的方程式 $(x-2)(x-1)=m^2$ 有两个不相等的实数根。
6. 证明关于 x 的方程式 $px^2+(p+q)x+q=0\ (p\neq 0)$ 一定有实数根。
7. 证明关于 x 的方程式 $a^2x^2+2ax+2=0$ 一定无实数根。
8. 如果方程式 $a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$ 有等根，求 a、b、c 的关系。
9. 如果方程式 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ 有等根，求 a、b、c 的关系。
10. 如果方程式 $(1-q+\frac{p^2}{2})x^2+p(1+q)x+q(q-1)+\frac{p^2}{2}=0$ 有等根，试证明 $p^2=4q$。
11. 如果下列各式是完全平方式，试求 m 的值：
    (a) $4x^2-4mx+5m$
    (b) $3mx^2-4mx+4$
12. 若方程式 $2x^2-7x+m=0$ 有实根，试求 m 的最大整数值。

2.3 一元二次方程式的根与系数的关系

由求根公式可知，一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

的两个根为

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

于是可得

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &= -\frac{2b}{2a}\\ &= -\frac{b}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\\ &= \frac{4ac}{4a^2}\\ &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

这就是说，一元二次方程式的根与系数存在下列关系：

> 设方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的两个根是 α，β，则有
>
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$
>
> $$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

例 10 已知方程式 $5x^2+17x-12=0$ 的一根是 $\frac{3}{5}$，求另一根。

解 设方程式 $5x^2+17x-12=0$ 的一根为 $\alpha=\frac{3}{5}$，另一根为 β，

则 $\alpha+\beta=-\frac{17}{5}$

$$\frac{3}{5}+\beta=-\frac{17}{5}$$

$\therefore$ $\beta=-4$

例 11 已知方程式 $3x^2+10x+k=0$ 的一个根是 -1，求它的另一个根以及常数 k 的值。

解 设方程式 $3x^2+10x+k=0$ 的一根是 $\alpha=-1$，另一个根是 β，则

$$\alpha+\beta = -\frac{10}{3}$$

$$(-1)+\beta = -\frac{10}{3}$$

$$\therefore \quad \beta = -\frac{7}{3}$$

$$\alpha\beta = \frac{k}{3}$$

$$(-1)\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{k}{3}$$

$$\therefore \quad k = 7$$

例 12 已知方程式 $ax^2+9x+2a=0$ $(a\neq 0)$ 的一个根是 -4，求它的另一个根及 a 的值。

解 设方程式 $ax^2+9x+2a=0$ 的一根为 $\alpha=-4$，另一根为 β，

则 $$\alpha\beta = \frac{2a}{a}$$

$$(-4)\beta = 2$$

$$\therefore \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

又 $$\alpha+\beta = -\frac{9}{a}$$

$$-4+\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{a}$$

$$\therefore \quad a = 2$$

例 13 已知 $x^2-6x+m=0$ 的一根比另一根大 2，求 m 的值。

解 设方程式 $x^2-6x+m=0$ 的一根为 α，另一根为 $\beta=2+\alpha$，

则
$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 6 \\ \alpha+2+\alpha &= 6 \\ \alpha &= 2 \\ \beta &= 4 \end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned} \alpha\beta &= m \\ 2(4) &= m \\ m &= 8 \end{aligned}$$

习题 2c

1. 下列各方程式中，两根的和与两根的积各是多少？

   (a) $x^2-5x+2=0$　　(b) $x^2=2x+1$

   (c) $3x^2-2x-1=0$　　(d) $2x^2-7x=0$

   (e) $5x^2=4$　　(f) $(x-1)(x+2)=3x$

2. 已知方程式 $x^2-19x+m=0$ 的一个根是 -1，求它的另一个根以及 m 的值。
3. 已知方程式 $2x^2-5x+n=0$ 的一个根是 $\frac{1}{2}$，求它的另一个根以及 n 的值。
4. 已知方程式 $3x^2+mx-5=0$ 的一个根是 3，求它的另一个根以及 m 的值。
5. 设方程式 $4x^2+px-1=0$ 的两根分别是 $a\,(a>0)$ 和 $-a$，求 p 与 a 的值。
6. 设方程式 $x^2-2x+q=0$ 的两根分别是 a 和 $\frac{1}{a}$，求 q 与 a 的值。
7. 设方程式 $ax^2+5ax+1=0$ 的一个根是 1，求它的另一个根以及 a 的值。
8. 设方程式 $(a-3)x^2-3x-4a+12=0$ 的一个根是 4，求它的另一个根以及 a 的值。
9. 方程式 $8x^2-18x+m=0$ 的一根是另一根的两倍，求此方程式的解集。
10. 如果方程式 $x^2+2mx+n=0$ 的一根比另一根大 1，试求 m 和 n 的关系式。

若已知 α，β 是一个一元二次方程式的根，则不解这个方程式，而利用它的根与系数的关系，也可以求出某些关于 α、β 的代数式的值.

例 14 已知 α，β 是方程式 $2x^2+7x-4=0$ 的两个根，且 $\alpha>\beta$，求

(a) $\alpha^2+\beta^2$　　(b) $\alpha^3+\beta^3$

(c) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(d) $\alpha-\beta$

解

$$\alpha+\beta = -\frac{7}{2}$$

$$\alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2$$

(a)
$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= \left(-\frac{7}{2}\right)^2-2(-2)\\ &= \frac{65}{4}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)\\ &= \left(-\frac{7}{2}\right)\left[\frac{65}{4}-(-2)\right]\\ &= -\frac{511}{8}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\\ &= \frac{-\frac{7}{2}}{-2}\\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\ &= \left(-\frac{7}{2}\right)^2-4(-2)\\ &= \frac{81}{4}\end{aligned}$$

$$\alpha-\beta = \frac{9}{2}\ (\alpha>\beta)$$

例 15 已知α，β是方程式 $x^2+(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ 的两个根，求

(a) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　　　　(b) $(\alpha+1)(\beta+1)$

解

$$\alpha+\beta = -(1+\sqrt{2})$$
$$\alpha\beta = \sqrt{2}$$

(a)
$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\\ &= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\\ &= \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-2\\ &= \frac{[-(1+\sqrt{2})]^2}{\sqrt{2}}-2\\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+1) &= \alpha\beta+\alpha+\beta+1\\ &= \sqrt{2}-(1+\sqrt{2})+1\\ &= 0\end{aligned}$$

若已知一个一元二次方程式，则可求它的根。反过来，若已知一个一元二次方程式的两个根，则可利用它的根与系数的关系，作出这个方程式。

例 16 求作一个以 1 和 2 为两个根的一元二次方程式。

解 设所求的方程式为 $x^2+px+q=0$，

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= -p\\ 1+2 &= -p\\ \therefore\quad p &= -3\\ \text{又}\quad \alpha\beta &= q\\ (1)(2) &= q\\ \therefore\quad q &= 2\end{aligned}$$

所求方程式为 $x^2-3x+2=0$。

例 17 已知方程式 $3x^2-4x-5=0$ 的两个根是 α 和 β，求作一个一元二次方程式，使它的两个根是 $\frac{1}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{\beta}$。

解 方程式 $3x^2-4x-5=0$ 的二根是 α 和 β，

$$\therefore \quad \alpha+\beta=\frac{4}{3}$$

$$\alpha\beta=-\frac{5}{3}$$

设二根为 $\frac{1}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{\beta}$ 的方程式为 $x^2+px+q=0$，

则 $$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-p$$

$$\begin{aligned} p &= -\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \\ &= -\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=q$$

$$\frac{1}{-\frac{5}{3}}=q$$

$$q=-\frac{3}{5}$$

所求作的方程式为 $x^2-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}=0$

即 $5x^2-4x-3=0$

例 18 已知一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 的两个根是 $2+\sqrt{2}$ 与 $2-\sqrt{2}$，求证 $b=-2c$。

证 设方程式为 $ax^2+bx+c=0\ \ (a\neq 0)$ 的二根是 α 和 β，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\because\quad (2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=-\frac{b}{a}$$

$$4=\frac{-b}{a}$$

$$\therefore\quad b=-4a$$

又

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=\frac{c}{a}$$

$$2=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\quad c=2a$$

因此，

$$\begin{aligned} b&=-2(2a)\\ &=-2c \end{aligned}$$

例 19 已知方程式 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 α 和 β，且 $\alpha\leqslant\beta$，方程式 $x^2+mx+n=0$ 的两个根是 α^2 和 $-\beta^2$，求证

$$m=-p\sqrt{p^2-4q}\,,\ n=-q^2$$

证 方程式 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 α 和 β，

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-p$$

$$\alpha\beta=q$$

方程式 $x^2+mx+n=0$ 的两个根是 α^2 和 $-\beta^2$，

$$\therefore\quad \alpha^2+(-\beta^2)=-m$$

$$\alpha^2-\beta^2=-m$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-m$$

$$-p(\alpha-\beta)=-m$$

$$m=p(\alpha-\beta)$$

$$\begin{aligned}
\text{由于}\quad (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\
&= (-p)^2-4q \\
&= p^2-4q
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \alpha-\beta = -\sqrt{p^2-4q}\quad (\alpha\leqslant\beta)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad m &= p(-\sqrt{p^2-4q}\,) \\
&= -p\sqrt{p^2-4q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{又}\quad \alpha^2(-\beta^2) &= n \\
-(\alpha\beta)^2 &= n
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad n = -q^2$$

习题 2d

1. 设 α，β 是方程式 $2x^2-6x+3=0$ 的两个根，求下列各式的值：

   (a) $2\alpha^2+2\beta^2$　　(b) $(\alpha-\beta)^2$

   (c) $\alpha^3+\beta^3$　　(d) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$

   (e) $(\alpha+2)(\beta+2)$　　(f) $\left(\alpha-\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta-\dfrac{1}{\alpha}\right)$

2. 设 α，β 是方程式 $x^2+px+q=0$ 的两个根，求证：

   (a) $\alpha^2+\beta^2=p^2-2q$　　(b) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}=\dfrac{3pq-p^3}{q^3}$

3. 设 α，β 是方程式 $x^2-5x-14=0$ 的两个根，且 $\alpha<\beta$，求下列各式的值：

   (a) $\beta-\alpha$　　(b) $\beta^2-\alpha^2$

   (c) $\beta^3-\alpha^3$　　(d) $\beta^4-\alpha^4$

4. 求作一元二次方程式，使它的两个根是

   (a) -2，$\dfrac{2}{3}$　　(b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

   (c) a，$2a$　　(d) b，$\dfrac{1}{b}$

5. 已知 α 与 β 的和为 $\sqrt{3}$，α 与 β 的积为 $-6-2\sqrt{3}$，求作一个以 α 和 β 为根的一元二次方程式。α 与 β 是相等的实数吗？

6. 已知 $-4+\sqrt{15}$ 和 $-4-\sqrt{15}$ 是一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根，求证 $b=8c$。

7. 求作一个一元二次方程式，使它的根是方程式 $2x^2+x-3=0$ 的各根的相反数。

8. 求作一个一元二次方程式，使它的根是方程式 $x^2+x-5=0$ 的各根的平方。

9. 求作一个一元二次方程式，使它的两根分别比方程式 $3x^2+6x+2=0$ 的两根大 3。

10. 已知 $\alpha^2+\beta^2=3$，$\alpha-\beta=1$，不求出 α、β 的值，求作以 α、β 为根的一元二次方程式。

11. 求作一个一元二次方程式，它的两根是 $3\alpha-2\beta$ 和 $3\beta-2\alpha$，其中 α，β 是方程式 $px^2+qx+r=0$ 的根。

12. 已知方程式 $x^2+mx+n=0$ 的两根是 α 和 β，试求以 $\dfrac{\alpha}{2\alpha+3\beta}$ 及 $\dfrac{\beta}{3\alpha+2\beta}$ 为根的方程式。

2.4 一元二次函数的图象及性质

在初中我们已经学习了一元二次函数的定义。

一般地，凡是可以写成

$$y=ax^2+bx+c\text{，其中 } a\text{，}b\text{，}c \text{ 为常数，且 } a\neq 0$$

这种形式的函数都是**一元二次函数**，简称**二次函数**（quadratic function）。

二次函数的图象是**抛物线**（(parabola)。

最简单的二次函数是 $y=x^2$，用描点法可以画出它的图象(图 2–1)。这条抛物线是开口向上的，y 轴是它的对称轴。对称轴与抛物线的交点叫做抛物线的**顶点**（vertex），抛物线 $y=x^2$ 的顶点是 O(0,0)。随着 x 的绝对值增大，抛物线 $y=x^2$ 从左右两边向上无限延伸。

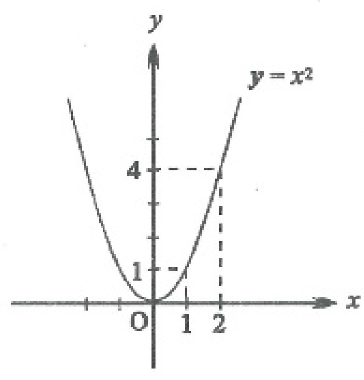


图 2–1

例 20 画出下列函数的图象：

(a) $y=2x^2$ (b) $y=-\dfrac{1}{2}x^2$

解　(a) 列表

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	18	8	2	0	2	8	18	…

描点画图，得出函数 $y=2x^2$ 的图象（图 2–2）。

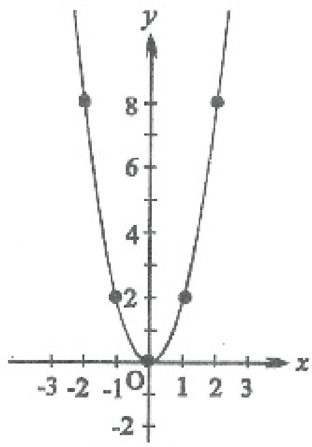


图 2–2

(b) 列表

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$-4\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-4\frac{1}{2}$	…

描点画图，得出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象（图 2–3）。

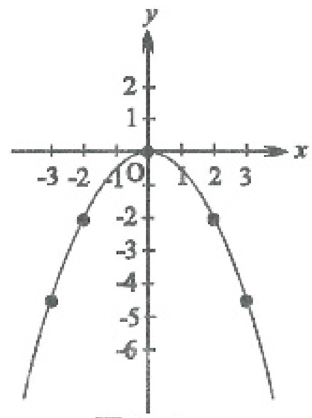


图 2–3

由例 20 可以看出，抛物线 $y=2x^2$ 开口向上，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 开口向下。它们都以 y 轴为对称轴，原点 O(0，0) 为顶点。

一般地，抛物线 $y=ax^2\ (a\neq 0)$ 的对称轴是 y 轴，顶点是原点；当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，顶点 (0，0) 为最低点；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，顶点 (0，0) 为最高点。

例 21 画出下列函数的图象：

(a) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+2$ (b) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$

解 (a) 列表

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
y	…	$6\frac{1}{2}$	4	$2\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	4	$6\frac{1}{2}$	…

描点画图，得出函数

$y=\frac{1}{2}(x+1)^2+2$

的图象（图 2–4）。

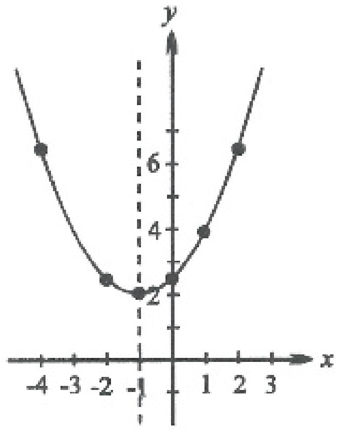


图 2–4

(b) 列表

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
y	…	$-5\frac{1}{2}$	-3	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-1\frac{1}{2}$	-3	$-5\frac{1}{2}$	…

描点画图，得出函数

$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$

的图象（图 2–5）。

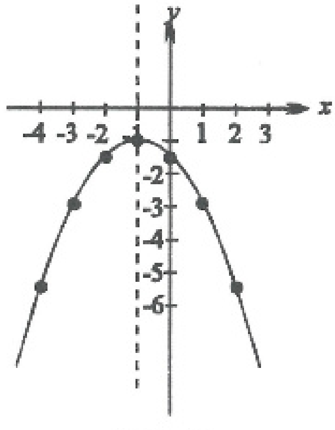


图 2–5

由例 21 可以看出，抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+2$ 的开口向上，对称轴是直线 $x=-1$，顶点为最低点 $(-1,2)$。抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的开口向下，对称轴是直线 $x=-1$，顶点为最高点 $(-1,-1)$。

一般地，二次函数 $y=a(x-m)^2+n\,(a\neq 0)$ 的图象是一条抛物线，当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，顶点为最低点，当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，顶点为最高点。

我们知道，在函数 $y=a(x-m)^2+n\,(a\neq 0)$ 中，不论 x 取何值，$(x-m)^2$ 恒大于或等于零。因此

(一) 当 $a>0$ 时，$a(x-m)^2$ 恒大于或等于零，

$\therefore\ y\geqslant n$

可知，当 $x=m$ 时，$y=a(x-m)^2+n$ 有最小值 n，

因而，(m,n) 是最低点，也就是抛物线的顶点。

(二) 当 $a<0$ 时，$a(x-m)^2$ 恒小于或等于零，

$\therefore\ y\leqslant n$

可知，当 $x=m$ 时，$y=a(x-m)^2+n$ 有最大值 n，

因而，(m,n) 是最高点，也就是抛物线的顶点。

在函数 $y=a(x-m)^2+n\,(a\neq 0)$ 中，$x=m$ 是它的图象的对称轴。其证明如下，

当 $x=m-h$，$y=a(m-h-m)^2+n$
$$=ah^2+n$$
当 $x=m+h$，$y=a(m+h-m)^2+n$
$$=ah^2+n$$
$\therefore\ x=m$ 是对称轴。

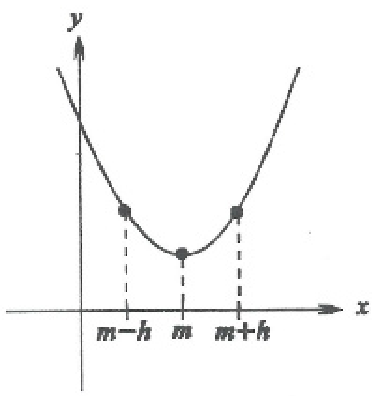


图 2–6

例 22 通过配方，写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标:

(a) $y = 3x^2 + 2x$　　　　(b) $y = -2x^2 + 8x - 8$

解 (a)
$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 2x \\ &= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) \\ &= 3\left[x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

抛物线 $y = 3x^2 + 2x$ 的开口向上，对称轴是直线 $x = -\frac{1}{3}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$。

(b)
$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x - 8 \\ &= -2(x^2 - 4x + 4) \\ &= -2(x - 2)^2 \end{aligned}$$

抛物线 $y = -2x^2 + 8x - 8$ 的开口向下，对称轴是直线 $x = 2$，顶点坐标是 $(2, 0)$。

知道了二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的开口方向，对称轴和顶点坐标，只需再找出当 $x = 0$ 时，y 的值（或 $y = 0$ 时，x 的值），就可以作出抛物线的简图。

例 23 作下列函数的简图:

(a) $y = 2x^2 - 7x - 3$　　　　(b) $y = (1 - 2x)(x + 3)$

解 (a)
$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 7x - 3 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{7x}{2}\right) - 3 \\ &= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - 3 - \frac{49}{8} \\ &= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{73}{8} \end{aligned}$$

函数 $y=2x^2-7x-3$ 的开口向上，对称轴是 $x=\frac{7}{4}$，顶点为 $\left(\frac{7}{4},\ -\frac{73}{8}\right)$。
当 $x=0$，$y=-3$。
由此，作出 $y=2x^2-7x-3$ 的简图（图 2－7）。

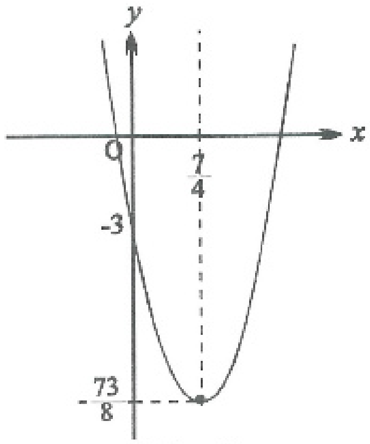


图 2－7

(b) $y=(1-2x)(x+3)$
x^2 的系数为负值，所以此抛物线的开口向上。
当 $y=0$，$x=\frac{1}{2}$ 或 -3。
$\frac{1}{2}$ 与 -3 的平均值为 $-\frac{5}{4}$
$\therefore$ 对称轴为 $x=-\frac{5}{4}$
由此，作出 $y=(1-2x)(x+3)$ 的简图（图 2－8）。

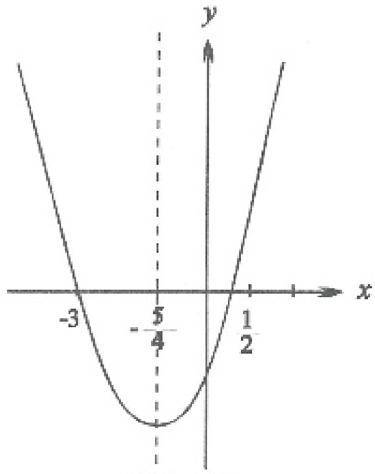


图 2－8

【注】当二次函数可以因式分解时，例 23 (b) 的作法才适用。

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，
(一) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个交点 P_1，P_2（图 2－9）；

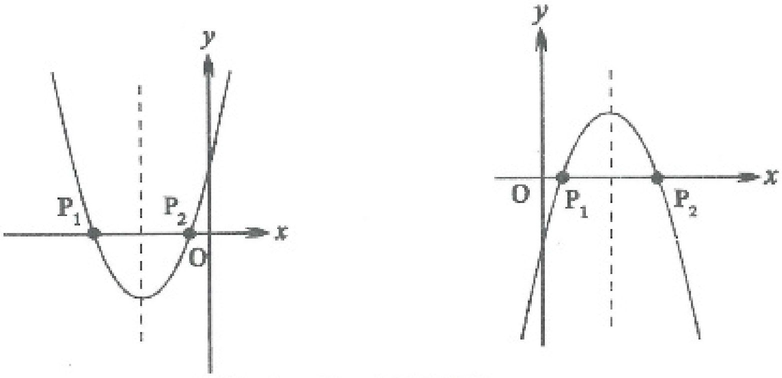


图 2–9　$\Delta>0$ 的情形

(二) 当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个公共点 P，点 P 也是抛物线的顶点（图 2 – 10）；

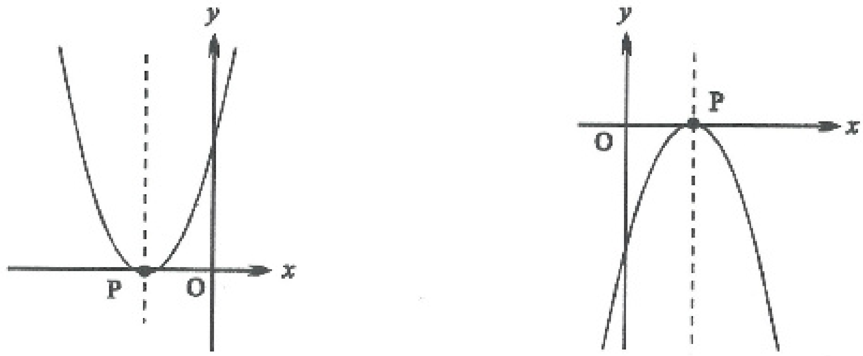


图 2–10　$\Delta = 0$ 的情形

(三) 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴没有公共点（图 2 – 11）。

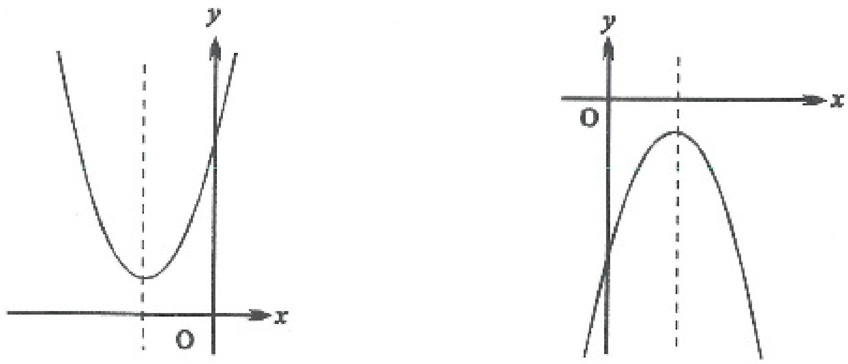


图 2–11　$\Delta < 0$ 的情形

习题 2e

1. 下列函数中，哪些是二次函数？

(a) $y = 3(x-1)^2$　　　(b) $y = (x+2)^2 - x^2$

(c) $y = 2(x+1)^2 - 2$　　　(d) $y = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

2. 画出下列函数的图象:

(a) $y=-x^2$　　(b) $y=\frac{1}{2}x^2$

(c) $y=x^2+2$　　(d) $y=-\frac{1}{2}x^2-1$

3. 画出下列函数的图象:

(a) $y=(x+1)^2$　　(b) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$

(c) $y=2(x+1)^2-1$　　(d) $y=2x^2-x+2$

4. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，并作简图:

(a) $y=x^2+5$　　(b) $y=2(x-3)^2$

(c) $y=3(x+2)^2-\frac{1}{2}$　　(d) $y=x^2+x+1$

(e) $y=2x^2-4x+2$　　(f) $y=-\frac{1}{4}x^2+x-4$

5. 指出下列抛物线与坐标轴的公共点，并作简图:

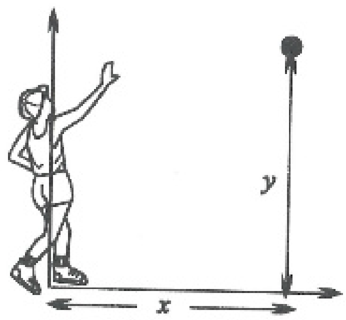
(a) $y=-4x^2+3x+2$　　(b) $y=9x^2-6x+1$

(c) $y=3x^2+x+6$　　(d) $y=-2x^2+3x$

6. 一学生推铅球，铅球行进高度 $y(m)$ 与水平距离 $x(m)$ 之间的函数关系是 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$。

(a) 画出函数图象;

(b) 求出铅球的落点与学生所站位置的距离。



2.5 一元二次函数的极值

二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的极值可由配方法求得。

通过配方法，可将 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 化成

$$y = a(x-m)^2+n$$

的形式。

当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，它的顶点 (m, n) 是最低点（图 2−12）．也就是说，当 $x=m$ 时，y 的值最小．我们说当 $x=m$ 时，二次函数

$$y = a(x-m)^2 + n$$

有极小值 (minimum value) $y_{min}=n$。

当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，它的顶点 (m, n) 是最高点（图 2−13）．也就是说，当 $x=m$ 时，y 的值最大．我们说当 $x=m$ 时，二次函数

$$y = a(x-m)^2 + n$$

有极大值 (maximum value) $y_{max}=n$。

二次函数的极大值或极小值统称为这个函数的极值 (extreme value)。

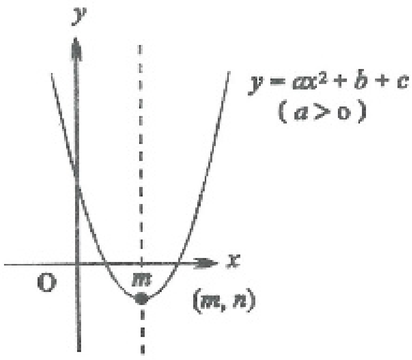


图 2−12

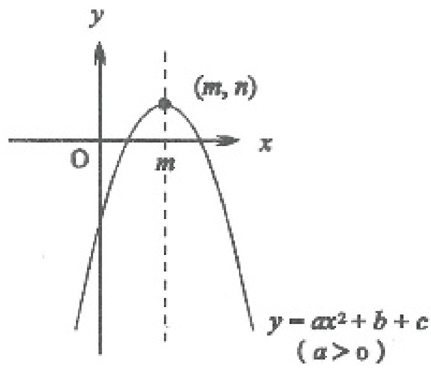


图 2−13

例 24 求下列函数的极值:

(a) $y=3x^2+2x+1$　　(b) $y=-2x^2-5x+6$

(c) $y=mx^2+4m^2x+5n\ (m\neq 0)$

解 (a)
$$\begin{aligned} y &= 3x^2+2x+1 \\ &= 3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left[x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right] \\ &= 3\left(x^2+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$a=3>0$，这个函数有极小值，

当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时，极小值 $y_{min}=\dfrac{2}{3}$。

(b) $$\begin{aligned} y &= -2x^2-5x+6 \\ &= -2\left(x^2+\frac{5}{2}x-3\right) \\ &= -2\left[x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2-3\right] \\ &= -2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{73}{8} \end{aligned}$$

$a=-2<0$，这个函数有极大值，

当 $x=-\frac{5}{4}$ 时，极大值 $y_{max}=9\frac{1}{8}$。

(c) $$\begin{aligned} y &= mx^2+4m^2x+5n \\ &= m\left(x^2+4mx+\frac{5n}{m}\right) \\ &= m\left[x^2+4mx+(2m)^2-(2m)^2+\frac{5n}{m}\right] \\ &= m(x+2m)^2-4m^3+5n \end{aligned}$$

当 $x=-2m$ 时，有极值 $y=5n-4m^3$。

当 $m>0$ 时，$y_{min}=5n-4m^3$；

当 $m<0$ 时，$y_{max}=5n-4m^3$。

例 25 已知一个矩形的周长是 24 m，求这个矩形的面积 S 的极大值。

解 设这个矩形的一边长为 x m，则另一边长为 $(12-x)$m，

面积 $$\begin{aligned} S &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x) \\ &= -[x^2-12x+(-6)^2-(-6)^2] \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

当 $x=6$ 时，S 有极大值

$S_{max}=36$

答：这个矩形的面积的最大值为 36 m^2。

习题 2f

1. 求下列函数的极值:

   (a) $y=2(x+1)^2+2$　　(b) $y=-3(x-1)^2+\frac{1}{2}$

   (c) $y=-(x+1)^2$;　　(d) $y=2(x-5)^2-3$。

2. 求下列函数的极值:

   (a) $y=3x^2+6x+7$　　(b) $y=-x^2-4x+5$

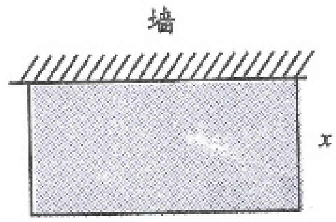
   (c) $y=2x^2+12x+18$　　(d) $y=-5x-6x-4$

3. 已知函数 $y=ax^2+bx+10$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 时有极值0，求 a、b 的值，并确定 0 是极大值还是极小值。

4. 已知抛物线 $y=ax^2+x+3$ 的对称轴是直线 $x=3$，求函数 $y=ax^2+x+3$ 的极值。

5. 已知二次函数 $y=ax^2+4ax+1$ 的极值等于5，求 a 的值。

6. 如右图，一边靠墙，另三边用 40 m 长的篱笆围一个长方形场地，当一边长 x 是多少时，长方形面积最大？求出这个最大值。



7. 某农夫想用长 80 公尺的篱笆围成一长方形的菜园，如何围法可使所围的面积为最大？

8. 试分 36 为两个整数，使它们的乘积为极大值。

9. 某学生向上掷一球，若上升的高度为 s 尺，时间为 t 秒，则有 $s=24t-16t^2$ 的关系式。问此球于掷出几秒后可达最高的高度？此球最高的高度是多少？

总复习题 2

1. 解下列方程式:

   (a) $25x^2-64=0$

   (b) $x^2+4x-5=0$

   (c) $(2x+1)^2+3(2x+1)+2=0$

(d) $(x+1)^2+3(x+1)(x-2)+2(x-2)^2 = 0$

(e) $(3x+1)^2+4(3x+1)-1 = 0$

(f) $5(x-1)^2+4 = (x-1)+7$

2. 证明方程式 $4mx^2+(4m+n)x+n=0\ (m\neq 0)$ 一定有实数根，并指出 m、n 有何种关系时方程式的两实根相等。
3. 当 k 满足什么条件时，方程式 $kx^2+2(k+1)x+k=0\ (k\neq 0)$

   (a) 有两不等实根　　(b) 有两相等实根

   (c) 没有实根
4. 如果方程式 $x^2+2(m+2)x+9m=0$ 有等根，试求 m 的值。
5. 如果 $x^2+2mx+3m$ 是完全平方式，试求 m 的值。
6. 若 a、c 两数一正一负，则方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情形如何？
7. 已知方程式 $x^2+px+6=0$ 的一个根是 -3，求它的另一根以及 p 的值。
8. 已知方程式 $2x^2+3kx+2=0$ 的两根分别为 α 与 2α，求 α 与 k 的值。
9. 如果方程式 $x^2-mx+15=0$ 的两根之差的平方是 4，求 m 的值。
10. 如果方程式 $x^2-9x+m=0$ 的两根之立方的和是 0，求 m 的值。
11. 如果 $x^2+mx+7=0$ 的两根是 α 和 β，且 $\alpha^2+\beta^2=22$，求 m 的可能值。
12. 已知方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的两根之比为 $2:3$，求证 $6b^2=25ac$。
13. 已知 α、β 是方程式 $x^2+27x+33=0$ 的两根，求

    (a) $\alpha^2+\beta^2$　　(b) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

    (c) $\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}$
14. 已知 α、β 是方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，且 $\alpha>\beta$，求

    (a) $\alpha^3+\beta^3$　　(b) $\alpha^3-\beta^3$

    (c) $\alpha^4-\beta^4$
15. 利用根与系数的关系，求作一个一元二次方程式，使它的根分别是方程式 $x^2+px+q=0$ 的各根的

    (a) 相反数；　(b) 倒数；　(c) 平方。
16. 已知方程式 $4x^2-(3n+2)x+n^2-1=0$ 的一根是另一根的 3 倍，利用根与系数的关系求出式中的整数 n。

17. 设 α，β 是一个一元二次方程式的两个正根，且 $\alpha^2+\beta^2=\dfrac{25}{36}$，

$(1-\alpha)(1-\beta)=\dfrac{1}{6}$，求这个方程式。

18. 一个二次方程式两根的差是 3，两根的平方和是 65，求这个二次方程式。

19. 如果方程式 $3x^2+mx+1=0$ 及 $2x^2+nx+1=0$ 有一个公共的根，求证 $2m^2+3n^2-5mn+1=0$。

20. 如果 $x^2+(m+2n-2)x-2m+n+2=0$ 的两根恰好是 $x^2+mx+n=0$ 的两根的平方，求 m 和 n 的值。

21. 作出下列函数的简图:

(a) $y=\dfrac{1}{2}x^2$　　(b) $y=4x^2+2$

(c) $y=(x-1)^2-3$　　(d) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-4$

22. 已知方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的两根是 2 和 3，且 $b+c=1$，求 a、b、c 的值。确定抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标和它与坐标轴的公共点。

23. 求下列函数的极值:

(a) $y=2x^2-4x+3$　　(b) $y=x^2-2x$

(c) $y=x(10-30x)$　　(d) $y=x^2+(x-1)^2$

24. 当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $y=ax^2+bx+6\,(a>0)$ 有极小值 -7，求 a 和 b 的值。

25. 当 $x=2$ 时，函数 $y=ax^2+bx-13$ 有极大值 -5，求 a 和 b 的值。

26. 已知 $b^2=24a$，求函数 $y=ax^2+bx+10$ 的极值。

27. 把 18 分成两数，使这两数的平方和为最小。

28. 已知圆的直径为 D，求它的内接矩形的最大面积。

29. 将一条长为 l 的线截为两段，每段分别围成一个圆，要使两圆面积之和最小，应怎样截这条线?

3 多项式

3.1 多项式

我们学过一元一次式 $ax+b$，

我们又学过一元二次式 ax^2+bx+c，

此外，还有一元三次式 ax^3+bx^2+cx+d，

一元四次式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，

…………。

设 x 是一个变数，具有下列形式的代数式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

叫做变数 x 的多项式（polynomial）或一元多项式，其中 n 是非负整数，a_n，a_{n-1}，$\cdots a_1$，a_0 都是常数，。在这个多项式中，a_ix^i 叫做这个多项式的 i 次项，a_i 叫做 i 次项的系数（coefficient）。

例如，$3x^5-4x^4+2x^3+4x-8$ 是一个一元多项式，

$3x^5$ 是它的五次项，系数是 3；

$-4x^4$ 是它的四次项，系数是 -4；

$2x^3$ 是它的三次项，系数是 2；

$0x^2$ 是它的二次项，系数是 0（系数是 0 的项可以略去不写）；

$4x$ 是它的一次项，系数是 4；

-8 是它的常数项，常数项 -8 也可看作是这个多项式的零次项，即把 -8 看作 $-8x^0$，这时，-8 就是这个多项式中零次项的系数。

例 1 下列代数式中，哪个不是多项式？

(a) x^2-x^4 (b) $-\dfrac{3}{5}$

(c) $(5x^3+4x^2-3x+7)^{-1}$　　(d) $\frac{1}{3}x^2-\frac{6}{11}x+\frac{17}{24}$

(e) $x^2+\frac{3}{x}$　　(f) $4x^3+x^2-x+3$

解　(c) 和 (e) 不是多项式，它们是分式。

【注】例 1 (b) 中的 $-\frac{3}{5}$ 也是多项式，它可以看作是只有一项 $-\frac{3}{5}x^0$ 的多项式。

在一个多项式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

中，如果最高次项 $a_n x^n$ 的系数 a_n 不等于零，那么这个系数 a_n 叫做这个多项式的**领导系数**（leading coefficient），n 叫做这个多项式的**次数**（degree），而这个多项式就叫做 n 次多项式。

例 2　说出多项式 $5x^3+4x-1$ 是几次多项式，并写出它的领导系数及常数项。

解　$5x^3+4x-1$ 是三次多项式，其领导系数是 5，常数项是 -1。

例 3　在下列条件下，多项式 ax^3+bx^2+cx+d 是几次多项式？

(a) $a\neq 0$　　(b) $a=0$，$b\neq 0$

(c) $a=b=0$，$c\neq 0$　　(d) $a=b=c=0$，$d\neq 0$

解　(a) 三次多项式　　(b) 二次多项式

(c) 一次多项式　　(d) 零次多项式

【注】像例 1 (b) 中的 $-\frac{3}{5}$，和例 3 (d) 中的数 d，可以分别写成 $-\frac{3}{5}x^0$ 和 dx^0，所以叫做**零次多项式**（polynomial of degree zero）。

数 0 也是一个多项式，但因不能确定它的次数，所以不能叫做零次多项式，而把它叫做**零多项式**（null polynomial）。零次多项式与零多项式是不同的多项式，但可以统称为常数多项式。

习题 3a

1. 下列代数式中，哪个是多项式？

   (a) $3x^3+5x-7+2x^{-1}$　　(b) $-\dfrac{1}{5}$

   (c) $1\div(2x^2+3x-1)$　　(d) $(3x+2)(x-1)$

2. 多项式 $4x^3-7x^2+6x-8$ 有哪些项？各项的次数分别是多少，系数分别是什么？

3. 说出下列多项式的领导系数，这些多项式各是几次多项式？

   (a) $4x^3-8x+10$　　(b) $5-2x-6x^2$

   (c) 18　　(d) $9x^3-x^5+123x^2$

4. 在下列条件下，多项式 $a+bx^2+cx^3+dx^5$ 是几次多项式？

   (a) $a=b=c=0$，$d\neq 0$　　(b) $a=d=0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$

   (c) $a=b=c=d=0$　　(d) $a\neq 0$，$b=c=d=0$

3.2 多项式的四则运算

● 加减法

有些函数的表达式，是自变量 x 的多项式，例如

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$
$$g(x)=6x^2-11x+7。$$

这样的函数叫做多项式函数（polynomial function）。

这里我们也用 $f(x)$，$g(x)$ 等等表示 x 的多项式。

例 4 设 $f(x)=3x^2-5x-8$，$g(x)=2x^3-x^2+6$，试求 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$。

解
$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= (3x^2-5x-8)+(2x^3-x^2+6)\\ &= 2x^3+(3-1)x^2-5x+(-8+6)\\ &= 2x^3+2x^2-5x-2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= (3x^2-5x-8)-(2x^3-x^2+6)\\
&= 3x^2-5x-8-2x^3+x^2-6\\
&= -2x^3+(3+1)x^2-5x+(-8-6)\\
&= -2x^3+4x^2-5x-14
\end{aligned}
$$

● 乘法

多项式的乘法可以用横式计算，或用竖式计算。

例 5 设 $f(x)=4x^2-3$，$g(x)=2x^2+6x-9$，求 $f(x)\cdot g(x)$。

解 [横式]

$$
\begin{aligned}
f(x)\cdot g(x) &= (4x^2-3)(2x^2+6x-9)\\
&= 4x^2(2x^2+6x-9)-3(2x^2+6x-9)\\
&= 8x^4+24x^3-36x^2-6x^2-18x+27\\
&= 8x^4+24x^3-42x^2-18x+27
\end{aligned}
$$

[竖式]

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^2 & +6x & -9\\
\times) & & 4x^2 & & -3\\
\hline
 & & -6x^2 & -18x & +27\\
8x^4 & +24x^3 & -36x^2 & & \\
\hline
8x^4 & +24x^3 & -42x^2 & -18x & +27
\end{array}
$$

$\therefore\ f(x)\cdot g(x)=8x^4+24x^3-42x^2-18x+27$

多项式的乘法也可以用分离系数法计算。

这就是，把各多项式整理后按降幂排列，遇到缺项，补写 0，然后略去变数的字母，只把系数按序写下，再按一般的乘法法则计算，最后在乘得的结果中，依次添上相应的变数字母。

例 6 设 $f(x)=4x^2-3$，$g(x)=2x^2+6x-9$，用分离系数法计算 $f(x)\cdot g(x)$。

解

$$\begin{array}{r}
2+6-9 \\
\times)\ 4+0-3 \\
\hline
-6-18+27 \\
8+24-36 \\
\hline
8+24-42-18+27
\end{array}$$

$$\therefore \quad f(x)\cdot g(x) = 8x^4+24x^3-42x^2-18x+27$$

● 除法

多项式的除法可以用竖式——长除法计算。

例 7 设 $f(x) = 8x^4+24x^3-42x^2-18x+27$，$g(x) = 2x^2+6x-9$，计算 $f(x)\div g(x)$。

解

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^2+0-3 \\
\cline{2-2}
2x^2+6x-9 & 8x^4+24x^3-42x^2-18x+27 \\
 & 8x^4+24x^3-36x^2 \\
\cline{2-2}
 & -6x^2-18x+27 \\
 & -6x^2-18x+27 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

$\therefore$ 商式为 $4x^2-3$，余式为 0，

$f(x)\div g(x) = 4x^2-3$。

当多项式 $f(x)$ 除以 $g(x)$，得商式 $Q(x)$，而余式 $R(x)$ 为零时，可以写作

$$f(x)\div g(x) = Q(x),$$

也可写作
$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x),$$

或
$$f(x) = g(x)\cdot Q(x).$$

这时，我们说 $g(x)$ 能整除 $f(x)$。又说 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**倍式**（multiple），$g(x)$ 是 $f(x)$ 的**因式**（factor）。

例 8 计算 $(8x^4+24x^3-42x^2)\div(2x^2+6x-9)$。

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 + 0 - 3 \\
\hline
2x^2+6x-9 & 8x^4+24x^3-42x^2 \\
 & 8x^4+24x^3-36x^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad -6x^2 \\
 & \qquad\qquad\quad -6x^2-18x+27 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 18x-27
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式为 $4x^2-3$，余式为 $18x-27$。

$$(8x^4+24x^3-42x^2)\div(2x^2+6x-9) = 4x^2-3+\frac{18x-27}{2x^2+6x-9}$$

或 $$\frac{8x^4+24x^3-42x^2}{2x^2+6x-9} = 4x^2-3+\frac{18x-17}{2x^2+6x-9}$$

多项式的除法，也可以用分离系数计算，注意事项与乘法的分离系数法相同。

例 9 用分离系数法计算：$(8x^4+24x^3-42x^2)\div(2x^2+6x-9)$。

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4+0-3 \\
\hline
2+6-9 & 8+24-42+0+0 \\
 & 8+24-36 \\
\hline
 & \qquad\quad -6+0+0 \\
 & \qquad\quad -6-18+27 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 18-27
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式为 $4x^2-3$，余式为 $18x-27$。

$$\frac{8x^4+24x^3-42x^2}{2x^2+6x-9} = 4x^2-3+\frac{18x-27}{2x^2+6x-9}$$

当多项式 $f(x)$ 除以 $g(x)$，得商式 $Q(x)$ 及余式 $R(x)$ 时，可以写作

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x)+\frac{R(x)}{g(x)},$$

或 $$f(x) = g(x)\cdot Q(x)+R(x),$$

其中 $R(x)$ 的次数低于 $g(x)$ 的次数。

例 10 被除式 $f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 3x^2 + 1$，除以除式 $g(x)$，得商式 $Q(x) = x^2 + 1$，余式 $R(x) = 7x - 2$。求 $g(x)$。

解 由 $f(x) = g(x) \cdot \mathrm{Q}(x) + \mathrm{R}(x)$，可得

$$f(x) - \mathrm{R}(x) = g(x) \cdot \mathrm{Q}(x)$$

$$\therefore \quad g(x) = \frac{f(x) - \mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$$

$$= \frac{(2x^5 - 5x^3 + 3x^2 + 1) - (7x - 2)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{2x^5 - 5x^3 + 3x^2 - 7x + 3}{x^2 + 1}$$

用分离系数法计算：

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 + 0 - 7 + 3 \\
\hline
1 + 0 + 1 & 2 + 0 - 5 + 3 - 7 + 3 \\
 & 2 + 0 + 2 \\
\hline
 & \quad\quad - 7 + 3 - 7 \\
 & \quad\quad - 7 + 0 - 7 \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad\quad 3 + 0 + 3 \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad 3 + 0 + 3 \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

$$\therefore \quad g(x) = 2x^3 - 7x + 3。$$

例 11 如果 $x^2 - 3x + 4$ 能整除 $4x^4 - 11x^3 + mx + n$，试求 m 与 n 之值。

解

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 + x - 13 \\
\hline
x^2 - 3x + 4 & 4x^4 - 11x^3 + 0 + mx + n \\
 & 4x^4 - 12x^3 + 16x^2 \\
\hline
 & \quad\quad x^3 - 16x^2 + mx \\
 & \quad\quad x^3 - 3x^2 + 4x \\
\hline
 & \quad\quad - 13x^2 + (m - 4)x + n \\
 & \quad\quad - 13x^2 + 39x - 52 \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad (m - 43)x + (n + 52)
\end{array}$$

根据整除的性质，$\mathrm{R}(x) = 0$

即 $(m - 43)x + (n + 52) = 0$

得 $m - 43 = 0$，$n + 52 = 0$

$\therefore \quad m = 43, \quad n = 52$

习题 3b

1. 计算:

   (a) $(x^2 - x^3 + 6x - 5) + (4 - 7x^4 + 8x^2 - 9x^3)$

   (b) $(y^4 - 8y^3 + y^5) - (16y - 24y^2 - 8y^3)$

2. 已知 $f(x) + g(x) = h(x)$

   (a) 设 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7$，$h(x) = x^4 + x^3 + 6x$，求 $g(x)$;

   (b) 设 $g(x) = -x^3 - x - 8$，$h(x) = x^5 - 8x^3 - x + 6$，求 $f(x)$。

3. 已知 $f(x) - g(x) = h(x)$

   (a) 设 $f(x) = -20x + x^3 - x^5$，$h(x) = 7 - 12x^2 - x^5$，求 $g(x)$;

   (b) 设 $g(x) = 11x^3 + 4x^2 - 6x + 8$，$h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 6x$，求 $f(x)$。

4. 计算:

   (a) $(3x^2 + 4x - 5)(3x^2 - 4x + 8)$

   (b) $(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$

   (c) $(x + a + b)(x - a + b)(x + a - b)(x - a - b)$

   (d) $(x^3 + 5x^2 - 6x)(x^2 - 5x + 6)$

5. 计算:

   (a) $(x^3 + 2x^2 - 4x + 8) \div (x - 2)$

   (b) $(x^4 + 5x^2 - 10x - 6) \div (x^2 + 5x - 3)$

   (c) $(2x^5 - 8x^3 + 6x - 9) \div (x^2 + 2x + 3)$

6. 由 $f(x) \cdot g(x) = h(x)$，

   (a) 设 $h(x) = 32x^4 - 2$，$f(x) = 4x^2 + 1$，求 $g(x)$;

   (b) 设 $h(x) = x^4 - 9x^2 + 18x - 9$，$g(x) = x^2 - 3x + 3$，求 $f(x)$。

7. 在下列各组多项式中，以第一式除第二式，试求其商式与余式：

(a) $2x-1$，$6x^2+5x-4$

(b) $2x+6$，$2x^3-20x-5$

(c) $x+1$，$2x^4-x^2+1$

(d) x^2-2x+4，$2x^5-6x^4+7x^3-8x^2-19x+20$

8. 被除式 $f(x)$ 除以除式 $g(x)=x^2-6x+8$，得商式 $Q(x)=2x+3$，余式 $R(x)=4x-5$，求 $f(x)$。

9. 如果 $2x^4+4x^3-3x^2+2x+a$ 能被 x^2+2x-2 整除，那么 a 等于多少？

10. 如果 $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+ax+b$ 能被 x^2-2x+4 整除，试求 a 与 b 之值。

11. 如果 $3x+2$ 是 $6x^4-5x^3+mx+10$ 的一个因式，试求 m 的值。

3.3 综合除法

我们知道，用分离系数法进行多项式的除法，比较简便。而当除式是 $x-a$ 的形式时，还有一种更简便的运算方法——**综合除法**（synthetic division）。

例如，$(2x^4-11x^3+7x^2+20x-19)\div(x-3)$ 可以用分离系数法计算如下：

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & 2 & -5 & -8 & -4 & \\
\cline{2-6}
1-3 & 2 & -11 & +7 & +20 & -19 \\
\multicolumn{1}{r}{} & 2 & -6 & & & \\
\cline{2-6}
\multicolumn{1}{r}{} & & -5 & +7 & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & -5 & +15 & & \\
\cline{3-6}
\multicolumn{1}{r}{} & & & -8 & +20 & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & -8 & +24 & \\
\cline{4-6}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & -4 & -19 \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & -4 & +12 \\
\cline{5-6}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & -31
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $=2x^3-5x^2-8x-4$，余式 $=-31$。

上面的算式还可进一步简化。

不写演算过程中重复的数字，然后加以缩短，改写如下：

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 2- & 5- & 8- & 4 & \\ \cline{2-6}
1-3) & 2-11+ & 7+ & 20- & 19 & \\
 & -6 & & & & \\ \cline{2-6}
 & -5 & & & & \\
 & & +15 & & & \\ \cline{2-6}
 & & -8 & & & \\
 & & & +24 & & \\ \cline{2-6}
 & & & -4 & & \\
 & & & & +12 & \\ \cline{2-6}
 & & & & -31 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr|l}
2- & 5- & 8- & 4 & & \\ \cline{1-5}
2-11+ & 7+ & 20- & 19 & & 1-3 \\
-6+ & 15+ & 24+ & 12 & & \\ \hline
-5- & 8- & 4- & 31 & &
\end{array}
$$

又因除式中的第一项 1 是固定的，可以不写，且第一行的商式中，除了首项 2，其余的重复出现于最下一行，所以将首项 2 写在最下一行，那么，第一行的商式也可省略。再把除式中的 -3 改变符号，那么演算时可将减法换成加法。就成下式：

$$
\begin{array}{l|l}
2-11+\ 7+20-19 & 3 \\
\quad +\ 6-15-24-12 & \\ \hline
2-\ 5-\ 8-\ 4-31 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $=2x^3-5x^2-8x-4$，余式 $=-31$。

从上述例子可得出综合除法的算法步骤：

1. 写出被除式按降幂排列的各项系数，缺项补零。
2. 除式是 $x-a$ 时，在右边写 a。
3. 直接写下被除式的第 1 项系数，作为商式的第 1 项系数，将第 1 项系数乘以 a，加上被除式的第 2 项系数，作为商式的第 2 项系数，依次进行。
4. 这样就得到商式的各项系数，最后一个数是余式。

例 12 用综合除法计算 $(x^4-2x^3+5x-7)\div(x-2)$。

解

$$
\begin{array}{l|l}
1-2+0+5-\ 7 & 2 \\
\quad +2+0+0+10 & \\ \hline
1+0+0+5+\ 3 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $=x^3+5$，余式 $=3$。

例 13 用综合除法计算 $(x^3+8x^2-10x+27)\div(x+5)$。

解

$$\begin{array}{r|l} 1+8-10+\ \ 27 & -5 \\ -5-15+125 & \\ \hline 1+3-25+152 & \end{array}$$

$\therefore$ 商式 $=x^2+3x-25$，余式 $=152$。

例 14 用综合除法计算 $(x^4-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8})\div(x+\frac{1}{2})$。

解

$$\begin{array}{r|l} 1+0-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0-\frac{1}{4} & \\ \hline 1-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}-\frac{3}{8} & \end{array}$$

$\therefore$ 商式 $=x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$，余式 $=-\frac{3}{8}$。

当除式不是 $x-a$ 的形式，而是 $ax-b$ 的形式时，仍可用综合除法计算。

这时，把 $ax-b$ 写成 $a(x-\frac{b}{a})$，先用综合除法计算被除式 $f(x)$ 除以除式 $(x-\frac{b}{a})$。如果得商式 $Q(x)$，余式 $R(x)$，那么

$$f(x)=(x-\frac{b}{a})Q(x)+R(x)$$

可以写成
$$f(x)=a(x-\frac{b}{a})\frac{Q(x)}{a}+R(x)$$

即
$$f(x)=(ax-b)\frac{Q(x)}{a}+R(x)$$

由此可见，$f(x)\div(ax-b)$ 所得的商式为 $\frac{Q(x)}{a}$，余式为 $R(x)$。

这就是说，计算 $f(x)\div(ax-b)$，可以用综合除法计算 $f(x)\div(x-\frac{b}{a})$，把所得的商式 $Q(x)$ 除以 a，即得 $f(x)\div(ax-b)$ 的商式，而余式 $R(x)$ 不变。

例 15 用综合除法计算 $(2x^3-7x^2+12x-9)\div(2x-3)$.

解

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 2 & -7 & +12 & -9 & \dfrac{3}{2} \\
 & & +3 & -6 & +9 & \\
\hline
2 & 2 & -4 & +6 & +0 & \\
\hline
 & 1 & -2 & +3 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $=x^2-2x+3$，余式 $=0$。

例 16 用综合除法计算 $(2x^4+x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2})\div(2x+1)$.

解

$$
\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 2 & +0 & +1 & -\dfrac{1}{2} & +\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\
 & & -1 & +\dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{4} & +\dfrac{5}{8} & \\
\hline
2 & 2 & -1 & +\dfrac{3}{2} & -\dfrac{5}{4} & +\dfrac{9}{8} & \\
\hline
 & 1 & -\dfrac{1}{2} & +\dfrac{3}{4} & -\dfrac{5}{8} & &
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $=x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{8}$，余式 $=\dfrac{9}{8}$.

例 17 已知 $6x^4-7x^3-3x^2-\dfrac{2}{3}x+m$ 能被 $2x-3$ 整除，求 m。

解 用综合除法计算:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6 & -7 & -3 & -\dfrac{2}{3} & +m & \dfrac{3}{2} \\
 & +9 & +3 & +0 & -1 & \\
\hline
6 & +2 & +0 & -\dfrac{2}{3} & +m-1 &
\end{array}
$$

因能整除，余式为零，所以 $m-1=0$

$$m=1$$

习题 3c

用综合除法计算:

1. $(x^5-1)\div(x-1)$
2. $(x^4+5x^3+6x^2-x-2)\div(x+2)$
3. $(2x^5-3x^4-20x^3-6x^2+17x-28)\div(x-4)$
4. $(3x^4+11x^3-47x^2-22x+23)\div(x+6)$
5. $(2x^4+x^3-15x^2+14x-35)\div(2x-5)$
6. $(6x^4+13x^3-13x^2+4x)\div(3x-4)$
7. $(8x^5-6x^4+7x^3-20x^2-18)\div(4x+3)$
8. $(3x^4-x^3-12x^2+\frac{9}{2}x-1)\div(x-2)$
9. $(x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{4}x+\frac{1}{2})\div(2x-3)$
10. $[x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc]\div(x+a)$

3.4 余数定理

我们先来看下面的例子。

例 18 设 $f(x)=x^3-5x^2+x+29$

(a) 求 $f(x)$ 除以 $(x-3)$ 的余数，

(b) 求 $f(3)$。

解 (a) 应用综合除法得

$$\begin{array}{r|l} 1-5+1+29 & 3 \\ 3-6-15 & \\ \hline 1-2-5+14 & \end{array}$$

$\therefore$ 余数 $=14$

(b) $$\begin{aligned} f(x) &= x^3-5x^2+x+29 \\ f(3) &= 3^3-5(3^2)+3+29 \\ &= 27-45+3+29 \\ &= 14 \end{aligned}$$

这里，可以看到，$f(x)$ 除以 $(x-3)$ 所得的余数正好是等于 $f(3)$ 的值．这不是偶然的巧合，事实上，对一般的多项式有下面的重要定理：

> **余数定理**（remainder theorem）
>
> 多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得余数等于 $f(a)$．

余数定理可以证明如下．

设多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的商式为 $Q(x)$，余数为 R，

则有 $\quad f(x) = (x-a)Q(x) + R$

以 $x = a$ 代入，

得 $\quad f(a) = (a-a)Q(a) + R$

$\quad\quad = 0 + R$

由此得出 $\quad f(a) = R$

对于形如 $ax-b$ 的除式，同样有下面的定理：

多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 所得余数等于 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$．

如果多项式 $f(x)$ 除以 $(ax-b)$，

则 $\quad f(x) = (ax-b)Q(x) + R$

以 $x = \dfrac{b}{a}$ 代入，

得 $\quad f\left(\dfrac{b}{a}\right) = \left(a \cdot \dfrac{b}{a} - b\right)Q(x) + R$

$\quad\quad = 0 + R$

由此得出 $\quad f\left(\dfrac{b}{a}\right) = R$

例 19 设 $f(x) = x^2 - 4x^2 + 9x - 43$，求 $f(x)$ 除以 $x-4$ 所得的余数．

解一 用综合除法

$$\begin{array}{l|l} 1-4+9-43 & 4 \\ \quad\ 4+0+36 & \\ \hline 1+0+9-\ 7 & \end{array}$$

$\therefore$ 余数 $= -7$．

解二 余数 $= f(4)$

$= 4^3 - 4(4)^2 + 9(4) - 43$

$= -7$

例 20 设 $f(x) = x^4 - 20x^3 + 37x^2 - 15x + 50$，求 $f(18)$。

解一 用综合除法

$$\begin{array}{r|l} 1 - 20 + 37 - 15 + 50 & 18 \\ + 18 - 36 + 18 + 54 & \\ \hline 1 - \ \ 2 + \ \ 1 + \ \ 3 + 104 & \end{array}$$

$\therefore \ f(18) = 104$

解二
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 20x^3 + 37x^2 - 15x + 50 \\ f(18) &= 18^4 - 20(18)^3 + 37(18)^2 - 15(18) + 50 \\ &= 104 \end{aligned}$$

例 21 求 $8x^5 - 17$ 除以 $2x - 1$ 的余数。

解
$$\begin{aligned} \text{余数} &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 8\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 17 \\ &= \frac{1}{4} - 17 \\ &= -16\frac{3}{4} \end{aligned}$$

例 22 已知 $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 14$，$f(x) \div (x - 2)$ 的余数为 18，求 a。

解 由余数定理，

$$\begin{aligned} f(2) &= 18 \\ \text{即} \quad 2^3 + 2(2)^2 - a(2) + 14 &= 18 \\ 30 - 2a &= 18 \\ 2a &= 12 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

例 23 设 $f(x)$ 为一多项式，$f(x)$ 除以 $x - 1$ 得余式 5，$f(x)$ 除以 $(x - 2)$ 得余式 7，求 $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x - 2)$ 的余式。

解　设所求余式为 $R(x) = ax+b$，

则　$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$

已知　$f(1) = 5$

即　$(1-1)(x-2)Q(x) + a + b = 5$

$$a + b = 5 \qquad (1)$$

已知　$f(2) = 7$

即　$(2-1)(2-2)Q(x) + 2a + b = 7$

$$2a + b = 7 \qquad (2)$$

$(2)-(1)$ 得　$a = 2$

$b = 3$

$\therefore$ 所求的余式为 $2x+3$

习题 3d

1. 求以 $x-3$ 除 $4x^3-5x^2-6x+6$ 所得的余式。
2. 设 $f(x)=2x^4+7x^3+9x^2+18x-20$，求 $f(-3)$。
3. 设 $f(x)=32x^4-60x^3+9x^2-16x-15$，求 $f(\frac{5}{4})$。
4. 求 $7x^6+8x^4-9x+10$ 除以 $x+1$ 的余数。
5. 求 $81x^6+29$ 除以 $3x-2$ 的余数。
6. 已知 $(x^3-7x^2+12x+a)\div(x+3)$ 的余数为 24，求 a。
7. 以 $x-2$ 除 $f(x)=x^3+2x^2+hx+4$ 的余数为 14，求 h 的值。
8. 若 $f(x)=x^3-4x^2+6x+k$，且 $f(3)=10$，求 k 的值。
9. 若 $f(x)=x^3+2kx^2-x+5$，且 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，求 k 的值。
10. 若 $f(x)=x^4+mx^3+mx^2-15$，当 $f(1)=0$，求 $f(-3)$ 的值。
11. 设 $f(x)=3x^2+hx+k$，若以 $x-2$ 除 $f(x)$ 得余数 13，以 $x+3$ 除得余数 48，求 h 与 k 的值。
12. 设 $f(x)$ 为一多项式，以 $x+1$ 除之余 2，以 $x-2$ 除之余 5，求 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-2)$ 的余式。
13. 求以 $(x+1)(x-1)$ 除 $2x^2-4x+5$ 所得的余式。
14. 以 $(x+1)^2$ 分别除 $x^4+3x^3+2x^2+ax+b$ 及 x^3+3x^2-5x+6 得相等的余式，求 a 与 b 的值。

3.5 因式定理

由余数定理可知，当 $f(a)=0$ 时，则 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 的余数也等于 0，即 $f(x)$ 能被 $x-a$ 所整除，因此 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式。

反之，如果 $(x-a)$ 是 $f(x)$ 的因式，则 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 的余数等于 0，即 $f(a)=0$。

这就有下面的因式定理。

因式定理（factor theorem）

如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式，那么 $f(a)=0$，反之，如果 $f(a)=0$，那么 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式。

证明 设 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 得

$$f(x) = (x-a)Q(x)+R$$

如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式，那么 $R=0$；

即 $$f(a) = (a-a)Q(a) = 0$$

反之，如果 $f(a)=0$，那么得

$$f(x) = (x-a)Q(x)+0 = (x-a)Q(x)$$

因此 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式

例 24 不用除法，试判断 $x-1$ 是否 x^4-5x^3+7x-3 的因式。

解 设 $f(x) = x^4-5x^3+7x-3$

$$f(1) = 1-5+7-3 = 0$$

$\therefore$ $x-1$ 是 x^4-5x^3+7x-3 的因式。

例 25 求证 x^n-a^n 有因式 $x-a$（n 为正整数）。

解 设 $f(x) = x^n-a^n$

则 $$f(a) = a^n-a^n = 0$$

$\therefore$ $f(x) = x^n-a^n$ 有因式 $x-a$。

对于形如 $ax-b$ 的因式，同样有下面的定理。

如果 $f(x)$ 有因式 $ax-b$，那么 $f(\frac{b}{a})=0$，反之，如果 $f(\frac{b}{a})=0$，那么 $f(x)$ 有因式 $ax-b$。这里 $a\neq 0$。

例 26 判断 $f(x)=27x^4+x-6$ 是否有因式 $3x-2$。

解
$$\begin{aligned} f(\frac{2}{3}) &= 27(\frac{2}{3})^4+\frac{2}{3}-6 \\ &= \frac{16}{3}+\frac{2}{3}-6 \\ &= 0 \end{aligned}$$
$\therefore$ $f(x)$ 有因式 $3x-2$。

一个多项式可能有不止一个一次因式。如果 $f(x)$ 有因式 $x-a$，则 $f(a)=0$；如果 $f(x)$ 又有因式 $x-b\ (a\neq b)$，则又有 $f(b)=0$；依此类推。反之，如果既有 $f(a)=0$，又有 $f(b)=0\ (a\neq b)$，则 $f(x)$ 既有因式 $x-a$，又有因式 $x-b$，既 $f(x)$ 有因式 $(x-a)(x-b)$；等等。

例 27 求证 $f(x)=x^n-a^n$（n 是正偶数）既有因式 $x-a$，又有因式 $x+a$。

解 因 n 是正偶数，所以
$$\begin{aligned} f(a) &= a^n-a^n \\ &= 0 \\ f(-a) &= (-a)^n-a^n \\ &= 0 \end{aligned}$$
$\therefore$ x^n-a^n 既有因式 $x-a$，又有因式 $x+a$。

例 28 已知 $x^4+kx^2-(k+2)x+16$ 能被 $x+2$ 整除，求 k。

解 设 $f(x) = x^4+kx^2-(k+2)x+16$。
$f(x)$ 能被 $x+2$ 整除，即 $x+2$ 是 $f(x)$ 的因式，
$$\begin{aligned} \therefore \qquad f(-2) &= 0 \\ \text{即}\quad (-2)^4+k(-2)^2-(k+2)(-2)+16 &= 0 \\ 16+4k+2k+4+16 &= 0 \\ 6k &= -36 \\ k &= -6 \end{aligned}$$

例 29 已知 $f(x)=4x^4+ax^2+9x+b$ 有因式 $2x^2+3x-2$，求 a 和 b。

解 $2x^2+3x-2 = (x+2)(2x-1)$

$f(x)$ 既有因式 $x+2$，又有因式 $2x-1$，应有

$$\begin{cases} f(-2) = 4(-2)^4+a(-2)^2+9(-2)+b = 0 \\ f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^4+a(\frac{1}{2})^2+9(\frac{1}{2})+b = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 46+4a+b = 0 \\ 19+a+4b = 0 \end{cases}$$

解方程式组，得

$$a = -11,\ b = -2$$

例 30 求一个三次多项式 $f(x)$，已知 $f(-1) = f(2) = 0$，$f(1) = -14$，$f(-2) = -8$。

解 因 $f(-1) = 0$，$f(2) = 0$，故 $f(x)$ 有因式 $(x+1)(x-2)$。

又 $f(x)$ 是三次多项式，所以可设

$$f(x) = (x+1)(x-2)(ax+b)$$

由 $f(1) = -14$，有

$$(1+1)(1-2)(a+b) = -14$$

$$-2(a+b) = -14$$

$$a+b = 7 \qquad (1)$$

由 $f(-2) = -8$，有

$$(-2+1)(-2-2)(-2a+b) = -8$$

$$4(-2a+b) = -8$$

$$-2a+b = -2 \qquad (2)$$

(1) − (2)，得

$$3a = 9$$

$$a = 3$$

$$b = 4$$

因此

$$f(x) = (x+1)(x-2)(3x+4) = 3x^3+x^2-10x-8$$

习题 3e

1. 若 $x-1$ 能整除 $f(x)=2x^4+x^3+2x^2-x+k$，求 k 的值。
2. 已知 $2x^3+mx^2+5x-100$ 有因式 $x-4$，求 m。
3. k 是何数，才能使 $f(y)=ky^4-(k-1)y^2+(k-2)y-(2k-3)$ 有因式 $y-1$。
4. 如果 $9x^3+kx+(k-1)$ 有因式 $3x-2$，那么 k 应是何数？
5. 已知 $x^4+ax^3-27x+b$ 既有因式 $x+1$，又有因式 $x-3$，求 a 和 b。
6. 设 $f(x)=2x^3+mx^2+nx+6$；若 $f(x)$ 能被 $x-2$ 及 $x-3$ 整除，试求 m 与 n 的值。
7. 设 $f(x)=ax^2+5x+c$；若 $f(x)$ 能被 $x-1$ 整除，且 $x+2$ 除 $f(x)$ 得余数 21，试求 a 与 c 的值。
8. 若 $3x^3+kx^2-7x-2$ 有一个因式 $3x+1$，试求 k 的值；并求以 $x+2$ 除此多项式所得的余数。
9. 若 $(x+2)(x+4)$ 是 $2x^3-x^2+ax+b$ 的因式，试求 a 与 b 的值。
10. 设 $f(y)=3y^4-my^3-11y^2-7y+(n-5)$ 有因式 y^2+y，
    (a) 求 m 和 n；
    (b) 把 $f(y)$ 分解因式。
11. 不用除法，确定 $x+2$ 是否 $x^4-3x-22$ 的因式。
12. 证明 $2x+1$ 是 $6x^4-x^3-2x^2+5x+\dfrac{5}{2}$ 的因式。
13. 判断 $x^2-(a+b)x+ab\ (a\neq b)$:
    (a) 有没有因式 $x-a$；
    (b) 有没有因式 $x-b$。
14. 证明 $a^6x^6-b^6$ 有因式 $ax+b$。
15. 求证 $f(x)=x^4-5x^2+4$ 既有因式 $x-1$，又有因式 $x+1$。
16. 判断 $f(y)=4y^4-y^2-6y+3$ 是否有因式 $2y^2-3y+1$。
17. 求一个二次多项式 $f(x)$，已知 $f(1)=0$，$f(-2)=0$，$f(4)=36$。
18. 求一个三次多项式 $f(x)$，已知 $f(3)=0$，$f(-5)=0$，$f(1)=12$，$f(4)=18$。

3.6 一元多项式的因式分解

在分解因式时，要特别注意数系的范围.

例如，在有理数范围内，多项式 x^4-9 可以分解成

$$x^4-9 = (x^2+3)(x^2-3)$$

在实数范围内，则可以分解为

$$x^4-9 = (x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

在本章中，除非特别声明外，所有的因式分解都在有理数范围内进行。

利用综合除法和因式定理，有利于对多项式进行因式分解.

例如，把多项式 $f(x) = x^4-2x^3+x^2+2x-2$ 分解因式.

由观察得知，$f(1) = 0$，因此 $f(x)$ 有因式 $x-1$。

进行综合除法，

$$\begin{array}{l|l} 1-2+1+2-2 & 1 \\ \quad +1-1+0+2 & \\ \hline 1-1+0+2+0 & \end{array}$$

$\therefore\ f(x) = (x-1)(x^3-x^2+2)$

设 $x^3-x^2+2=g(x)$，由观察得知，$g(-1)=0$，因此 $g(x)$ 有因式 $x+1$。

再进行综合除法，

$$\begin{array}{l|l} 1-1+0+2 & -1 \\ \quad -1+2-2 & \\ \hline 1-2+2+0 & \end{array}$$

$\therefore\ g(x) = (x+1)(x^2-2x+2)$

由此可得 $\quad f(x) = x^4-2x^3+x^2+2x-2$

$$= (x-1)(x+1)(x^2-2x+2)$$

对于整数系数多项式，为了便于发现因式，有下面的定理。

设 $f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整数系数多项式，如果 $x-q$ 是 $f(x)$ 的一个因式，其中 q 是整数，那么 q 必是 a_0 的一个因数。

证明 因为 $x-q$ 是 $f(x)$ 的一个因式，所以 $f(q)=0$，

即
$$a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}+\cdots+a_1q+a_0 = 0$$

上式可以写成
$$a_0 = -q(a_nq^{n-1}+a_{n-1}q^{n-2}+\cdots+a_1)$$

由此可见，q 是 a_0 的一个因数。

例 31 把 $f(x) = x^4-x^3-16x^2-17x-15$ 分解因式。

解 若 $x-q$ 是 $f(x)$ 的因式，根据定理，q 的可能因数为 ±1，±3，±5，±15。

用综合除法试除，得 $x+3$ 能够整除（余数 0 省略不写）。继续试除，得 $x-5$ 也能整除。

$$\begin{array}{l|l}
1-1-16-17-15 & -3 \\
\quad -3+12+12+15 & \\
\hline
1-4-\ \ 4-\ \ 5 & 5 \\
\quad +5+\ \ 5+\ \ 5 & \\
\hline
1+1+1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(x+3)\text{是因式} \\[2em]
(x-5)\text{是因式}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad f(x) &= x^4-x^3-16x^2-17x-15 \\
&= (x+3)(x-5)(x^2+x+1)
\end{aligned}$$

【注】(x^2+x+1) 在有理数范围内不能再分解。

例 32 分解因式 $f(x) = x^4-4x^3-x^2+16x-12$。

解 若 $x-q$ 是 $f(x)$ 的因式，q 的可能因数为 ±1，±2，±3，±4，…。

应用综合除法，

$$\begin{array}{l|l}
1-4-1+16-12 & 1 \\
\quad\ \ 1-3-\ \ 4+12 & \\
\hline
1-3-4+12 & 2 \\
\quad\ \ 2-2-12 & \\
\hline
1-1-6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(x-1)\text{是因式} \\[2em]
(x-2)\text{是因式}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad f(x) &= x^4-4x^3-x^2+16x-12 \\
&= (x-1)(x-2)(x^2-x-6) \\
&= (x-1)(x-2)(x+2)(x-3)
\end{aligned}$$

对于形如 $px-q$ 的因式，也有下面的定理。

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整数系数多项式，如果 $px-q$ 是 $f(x)$ 的一个因式，其中 p、q 是互质的整数（即 p、q 的 H.C.F. 为 1），那么 p 必是 a_n 的一个因数，q 必是 a_0 的一个因数。

这个定理的证明与关于形如 $x-q$ 的因式的定理的证明相仿。

例 33 分解因式 $f(x)=3x^4-12x^3+8x^2+4x-3$。

解 若 $px-q$ 是 $f(x)$ 的因式，根据定理，q 的可能因数为 ±1，±3，p 的可能因数为 ±1，±3，所以 $\dfrac{q}{p}$ 的可能因数为 ±1，±3，$\pm\dfrac{1}{3}$。

应用综合除法，

$$
\begin{array}{l|l}
3-12+8+4-3 & 1 \\
\quad +\ 3-9-1+3 & \qquad (x-1)\text{ 是因式} \\
\hline
3-\ 9-1+3 & 3 \\
\quad +\ 9+0-3 & \qquad (x-3)\text{ 是因式} \\
\hline
3+\ 0-1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad f(x)&=3x^4-12x^3+8x^2+4x-3\\
&=(x-1)(x-3)(3x^2-1)
\end{aligned}
$$

例 34 分解因式 $f(x)=3x^3+10x^2+4x-8$。

解 若 $px-q$ 是 $f(x)$ 的因式，q 的可能因数为 ±1，±2，±4，±8，p 的可能因数为 ±1，±3，所以 $\dfrac{q}{p}$ 的可能因数为 ±1，±2，±4，±8，$\pm\dfrac{1}{3}$，$\pm\dfrac{2}{3}$……。

应用综合除法，得

$$
\begin{array}{l|l}
3+10+4-8 & -2 \\
\quad -\ 6-8+8 & \qquad (x+2)\text{ 是因式} \\
\hline
3+\ 4-4 &
\end{array}
$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f(x) &= 3x^3 + 10x^2 + 4x - 8 \\ &= (x+2)(3x^2 + 4x - 4) \\ &= (x+2)(x+2)(3x-2) \\ &= (x+2)^2(3x-2) \end{aligned}$$

例 35 分解因式 $f(x) = 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$。

解 若 $px - q$ 是 $f(x)$ 的因式，q 的可能因数为 ± 1，± 3，p 的可能因数为 ± 1，± 2，± 3，± 4……，所以 $\dfrac{q}{p}$ 的可能因数为 ± 1，± 3，$\pm \dfrac{1}{2}$，$\pm \dfrac{3}{2}$，$\pm \dfrac{1}{3}$，……。

应用综合除法，得

$$\begin{array}{r|l} 12 + 16 - 5 - 3 & \dfrac{1}{2} \\ 6 + 11 + 3 & \\ \hline 2 \;\; \boxed{12 + 22 + 6} & \\ 6 + 11 + 3 & \end{array} \qquad (2x-1)\text{是因式}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f(x) &= 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 \\ &= (2x-1)(6x^2 + 11x + 3) \\ &= (2x-1)(2x+3)(3x+1) \end{aligned}$$

有些多项式的因式分解，需要用到一些特殊的技巧。如下例。

例 36 分解因式：$x^4 + x^2 + 1$。

解

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

习题 3f

分解因式（1～14）：

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
2. $x^4 + 4x + 3$
3. $x^4 - 2x^3 - x + 2$
4. $x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$
5. $x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 8x$
6. $x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 25x + 12$
7. $x^5 - 9x^3 - 10x^2 + 2x + 4$
8. $2x^4 - x^3 - 2x + 1$
9. $8x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
10. $12x^4 + 25x^3 - 11x^2 - 3x + 1$
11. $6x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 11x - 12$
12. $5x^6 - 7x^5 - 8x^4 - x^3 + 7x^2 + 8x - 4$
13. $x^6 - 64$
14. $x^4 + 4$
15. $x^4 - 3x^2 + 1$

3.7 解一元高次方程式

● 一元高次方程式

如果一个方程式只含一个未知数，且这个未知数的最高次数大于 2，这样的方程式就叫做**一元高次方程式**（equation of higher degree in one variable）。例如，

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$x^4 + 13x^2 + 36 = 0$$

等等，都是一元高次方程式。

设一元高次方程式可因式分解成

$$f(x) = (x-a)(x-b)\cdots(x-n) = 0$$

那么，$x=a$，$x=b$，…，$x=n$ 就是方程式 $f(x)=0$ 的根。

因此，上面所学的多项式因式分解的方法可以用于一元高次方程式的解法。

例 37 解方程式 $x^3+3x^2-4x-12=0$。

解 用综合除法将方程式左边因式分解

$$\begin{array}{r|l} 1+3-\ 4-12 & 2 \\ 2+10+12 & \\ \hline 1+5+\ 6 & \end{array} \quad (x-2)\text{ 是因式}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad x^3+3x^2-4x-12 &= 0 \\ \text{得}\quad (x-2)(x^2+5x+6) &= 0 \\ (x-2)(x+3)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore\quad x=2,\ x=-3,\ x=-2$

例 38 解方程式 $3x^4-7x^3-15x^2-18x-8=0$。

解

$$\begin{array}{r|l} 3-\ 7-15-18-\ 8 & 4 \\ +12+20+20+\ 8 & \\ \hline 3+\ 5+\ 5+\ 2 & -\frac{2}{3} \\ -\ 2-\ 2-\ 2 & \\ \hline 3\ |\ 3+\ 3+\ 3 & \\ \hline 1+\ 1+\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x-4\text{ 是因式} \\ \\ 3x+2\text{ 是因式} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad 3x^4-7x^3-15x^2-18x-8 &= 0 \\ \text{得}\quad (x-4)(3x+2)(x^2+x+1) &= 0 \end{aligned}$$

因为方程式 $x^2+x+1=0$ 在实数范围内无解，所以原方程式的根是

$$x=4,\ x=-\frac{2}{3}$$

例 39 求方程式 $x^4+5x^3+3x^2-5x-4=0$ 的解集。

解

$$\begin{array}{r|l} 1+5+3-5-4 & 1 \\ +1+6+9+4 & \\ \hline 1+6+9+4 & -1 \\ -1-5-4 & \\ \hline 1+5+4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} (x-1)\text{ 是因式} \\ \\ (x+1)\text{ 是因式} \end{array}$$

$\therefore\quad x^4+5x^3+3x^2-5x-4=0$

得 $\quad (x-1)(x+1)^2(x+4)=0$

$\therefore\quad x=1,\ x=-1,\ x=-1,\ x=-4$

原方程式的解集是 $\{1,\ -1,-4\}$

● 双二次方程式

有些一元高次方程式可以利用特殊的方法来解。例如这里所说的双二次方程式和下面要说的倒数方程式。

只含有未知数的偶次项及已知数的一元四次方程式，叫做**双二次方程式**(biquadratic equation)。它的标准形式是

$$ax^4+bx^2+c=0\,(a\neq 0)$$

如果用 $y=x^2$ 代人，双二次方程式就可化为 y 的一元二次方程式 $ay^2+by+c=0$。于是容易求得 y，从而可以求得 x。

像这样用一个变量代换另一个变量的方法，叫做**换元法**（method of changing the variable）。

例 40 解方程式 $x^4-x^2-20=0$。

解 设 $y=x^2$，原方程式成

$$y^2-y-20=0$$
$$(y-5)(y+4)=0$$
$$y=5,\ y=-4$$

当 $y=5$ 时，$x^2=5$

$$x=\pm\sqrt{5}$$

当 $y=-4$ 时，$x^2=-4$

x 没有实数根

$\therefore$ 原方程式的根是 $x=\sqrt{5},\ x=-\sqrt{5}$

有些方程式具有特殊的形式，可以仿照双二次方程式的解法，利用换元法来解。

例 41 求方程式 $(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$ 的解集。

解 设 $y=x^2-x$，原方程式成

$$y^2-4y-12=0$$
$$(y-6)(y+2)=0$$
$$y=6,\ y=-2$$

当 $y=6$ 时，$x^2-x=6$

$$x^2-x-6=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$
$$x=3,\ x=-2$$

当 $y=-2$ 时，$x^2-x=-2$

$$x^2-x+2=0$$

这个方程式没有实数根。

∴ 原方程式的解集是 $\{3,\ -2\}$。

例 42 解方程式 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=-15$。

解 原方程可以改写为

$$(x-1)(x-7)(x-3)(x-5)+15=0$$
$$(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+15=0$$
$$(x^2-8x)^2+22(x^2-8x)+120=0$$

设 $x^2-8x=y$，上式成

$$y^2+22y+120=0$$

解得 $y=-10,\ y=-12$

当 $y=-10$ 时，$x^2-8x=10$

$$x^2-8x+10=0$$

解得 $x=4+\sqrt{6},\ x=4-\sqrt{6}$

当 $y=-12$ 时，$x^2-8x=-12$

$$x^2-8x+12=0$$

解得 $x=2,\ x=6$

∴ 原方程式的根是 $x=2,\ x=6,\ x=4+\sqrt{6},\ x=4-\sqrt{6}$

习题 3g

解下列方程式:

1. $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0$
2. $x^4 + 5x^3 + x^2 - 11x + 4 = 0$
3. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8 = 0$
4. $2x^5 + x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x + 3 = 0$
5. $6x^5 + 13x^4 - 23x^3 - 6x^2 + 4x = 0$
6. $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$
7. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 42x - 42 = 0$
8. $27x^4 - 21x^2 + 4 = 0$
9. $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 30 = 0$
10. $(2x - 1)^4 + 4(2x - 1)^2 = 12$
11. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 360$
12. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 35$

● 倒数方程式

一个方程式的任何一个根的倒数，同时也是这个方程式的根，那么，这个方程式就叫做倒数方程式（reciprocal equation）。

一个方程式经过降幂整理排列如下后，

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

它的第一项的系数 a_n 与末项系数 a_0 相等，第二项的系数 a_{n-1} 与最后第二项的系数 a_1 相等……；或第一项的系数 a_n 与末项系数 a_0 互为相反数，第二项的系数 a_{n-1} 与最后第二项的系数 a_1 互为相反数，……；那么，这个方程就是倒数方程式。

例如，

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$$

等，都是倒数方程式。

倒数方程式中最基本的是次数为偶数而 $a_n = a_0$，$a_{n-1} = a_1$，$\cdots$ 的方程式．例如 $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$。这样的方程式可以利用换元法 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 来解。

例 43 解方程式 $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$。

解 两边除以 x^2，得

$$6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

即

$$6(x^2+\frac{1}{x^2})+5(x+\frac{1}{x})-38=0$$

设 $x+\dfrac{1}{x}=y$，则 $(x+\dfrac{1}{x})^2=y^2$，即 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$。

代入上式，得 $6(y^2-2)+5y-38=0$

$$6y^2+5y-50=0$$

$$(2y-5)(3y+10)=0$$

$$y=\frac{5}{2},\ y=-\frac{10}{3}$$

当 $y=\dfrac{5}{2}$ 时，$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$，

解得 $x=2$，$x=\dfrac{1}{2}$

当 $y=-\dfrac{10}{3}$ 时，$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{10}{3}$，

解得 $x=-3$，$x=-\dfrac{1}{3}$

∴ 原方程式的根是 $x=2$，$x=\dfrac{1}{2}$，$x=-3$，$x=-\dfrac{1}{3}$。

例 44 解方程式 $x^4-3x^3+3x-1=0$。

解 应用综合除法，

$$
\begin{array}{l|l}
1-3+0+3-1 & 1 \\
\quad +1-2-2+1 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
1-2-2+1 & -1 \\
\quad -1+3-1 & \\
\hline
1-3+1 &
\end{array}
$$

得 $(x-1)(x+1)(x^2-3x+1)=0$

$x^2-3x+1=0$ 的根是 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。

∴ 原方程式的根是 $x=1$，$x=-1$，$x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$x=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

【注】这个方程式是次数为偶数而 $a_n=-a_0$，$a_{n-1}=-a_1$，… 的倒数方程式，且必缺中间项。这样的方程式有根 $x=1$，$x=-1$。

例 45 解方程式 $6x^5-5x^4-29x^3-29x^2-5x+6=0$。

解 应用综合除法，

$$
\begin{array}{l|l}
6-\ \ 5-29-29-\ \ 5+6 & -1 \\
\quad -\ \ 6+11+18+11-6 & \\
\hline
6-11-18-11+\ \ 6 &
\end{array}
$$

得 $(x+1)(6x^4-11x^3-18x^2-11x+6)=0$

$x=-1$ 或 $6x^4-11x^3-18x^2-11x+6=0$

方程式 $6x^4-11x^3-18x^2-11x+6=0$ 两边除以 x^2，

得 $$6x^2-11x-18-\frac{11}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-11\left(x+\frac{1}{x}\right)-18=0$$

设 $x+\dfrac{1}{x}=y$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$，

代入得 $6(y^2-2)-11y-18=0$

$$6y^2-11y-30=0$$

$$(3y-10)(2y+3)=0$$

$$y=\frac{10}{3},\ y=-\frac{3}{2}$$

当 $y=\frac{10}{3}$ 时，$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$

解得 $x=3$，$x=\frac{1}{3}$

当 $y=-\frac{3}{2}$ 时，$x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$

这个方程式无实数解。

∴ 原方程式的解是 $x=-1$，$x=3$，$x=\frac{1}{3}$。

【注】这个方程式是次数为奇数而 $a_n=a_0$，$a_{n-1}=a_1$，…的倒数方程式，这样的方程式有根 $x=-1$。

例 46 求方程式 $6x^5+5x^4-51x^3+51x^2-5x-6=0$ 的解集。

解 应用综合除法

$$\begin{array}{rrrrrrl} 6 & +5 & -51 & +51 & -5 & -6 & \quad 1 \\ & +6 & +11 & -40 & +11 & +6 & \\ \hline 6 & +11 & -40 & +11 & +6 & & \end{array}$$

得 $(x-1)(6x^4+11x^3-40x^2+11x+6)=0$

$x=1$ 或 $6x^4+11x^3-40x^2+11x+6=0$

方程式 $6x^4+11x^3-40x^2+11x+6=0$ 两边除以 x^2，

得 $$6x^2+11x-40+\frac{11}{x}+\frac{6}{x}=0$$

$$6(x^2+\frac{1}{x^2})+11(x+\frac{1}{x})-40=0$$

设 $x+\frac{1}{x}=y$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$，

代入得 $6(y^2-2)+11y-40=0$

$$6y^2+11y-52=0$$

$$(y+4)(6y-13) = 0$$

$$y = -4,\ y = \frac{13}{6}$$

当 $y = -4$ 时，$x + \dfrac{1}{x} = -4$

解得 $x = -2+\sqrt{3}$，$x = -2-\sqrt{3}$

当 $y = \dfrac{13}{6}$ 时，$x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{13}{6}$

解得 $x = \dfrac{3}{2}$，$x = \dfrac{2}{3}$。

∴ 原方程式的解集为 $\{1, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}\}$。

【注】这个方程式是次数为奇数而 $a_n = -a_0$，$a_{n-1} = -a_1$，… 的倒数方程式。这样的方程式有根 $x = 1$。

习题 3h

解下列方程式：

1. $4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$
2. $6x^4 + x^3 - 58x^2 + x + 6 = 0$
3. $2x^4 - 3x^3 + 3x - 2 = 0$
4. $4x^6 + 8x^5 - 41x^4 + 41x^2 - 8x - 4 = 0$
5. $4x^5 - x^4 - 6x^3 - 6x^2 - x + 4 = 0$
6. $10x^5 - 11x^4 - 39x^3 + 39x^2 + 11x - 10 = 0$

总复习题 3

1. 多项式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$，
   (a) 如果是三次多项式，应有什么条件？
   (b) 如果是零次多项式，应有什么条件？
   (c) 如果是零多项式，应有什么条件？
2. 从什么多项式减去多项式 $\dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{5}$，才能得到差是多项式 $\dfrac{2}{3}x^4 - \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{5}$？

3. 计算:

(a) $(3x^4-2x^2-5)(2x^2-3x-5)$;

(b) $(6x^6-9x^5-19x^4+6x^3+8x^2)\div(2x^2-3x-5)$。

4. 多项式 $f(x) = 2x^5-x^3-6x^2-x+10$ 除以多项式 $g(x)$，得商式 $Q(x) = x^3+2x-3$，余式 $R(x) = 9x-5$。求除式 $g(x)$。

5. 计算:

(a) $(2x^5+3x^4-27x^3+28x^2-41x+100)\div(x+5)$

(b) $(12x^4-22x^3+23x^2-21x+8)\div(3x-4)$

6. 已知 $f(x) = 12x^4-x^3+9x^2+2x-5$，求 $f(-\frac{2}{3})$。

7. 设 $f(x) = 16x^5+9$，求 $f(x)\div(2x+1)$ 的余数。

8. 已知 $f(x) = x^3+kx^2-3x-2k$，$f(x)\div(x-2)$ 的余数为 10。求 $f(3)$。

9. $f(x) = 3x^3-4kx^2+2x+(k-3)$ 有因式 $3x+5$，求 k。

10. 如果 $(x-1)$ 能整除 $x^4-4x^3+6x^2-4x+m$，求 m 的值。

11. 如果 $2x^4-5x^2+m$ 能被 x^2-2 整除，求 m 的值。

12. 若 px^3+2x^2+qx-2 能被 $(x-1)$ 及 $(3x+2)$ 整除，求 p 与 q 的值。

13. 以 $(x+2)^2$ 分别除 $x^4-3x^3+2x^2+ax+b$ 及 x^3-3x^2+6x 得相等的余式，求 a 与 b 的值。

14. 如果以 $x-2$ 除 $f(x)$ 得余数 3，以 $x-4$ 除之得余数 5，求以 $(x-2)(x-4)$ 除 $f(x)$ 所得的余式。

15. 如果以 $x-a$ 除 $f(x)$ 得余式 A，以 $x-b$ 除 $f(x)$ 得余式 B，试求以 $(x-a)(x-b)$ 除 $f(x)$ 所得的余式。

16. 探讨 x^n+a^n 是否有因式 $x+a$（n 为正整数，$a\neq 0$）。

17. $f(x) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$ 是否等于 $(x+a)(x+b)(x+c)$?

18. 如果 n 是正整数，

(a) 证明 $(x+4)^n-1$ 能被 $x+3$ 整除；

(b) 求 $(x+2)^n-1$ 被 $x+3$ 除所得的余式。

19. 如果 m 与 n 都是正整数，证明 $x+5$ 是 $(x+b)^n+(x+4)^{2m+1}$ 的因式。

20. 试求一个一元三次多项式 $f(x)$，已知当 $x=2$ 及 3 时，它的值是 0；当 $x=0$ 时，它的值是 6，当 $x=1$ 时，它的值是 12。

21. 求 x 的一个四次多项式 $f(x)$，已知 $f(1)=f(2)=f(-2)=0$，$f(3)=40$，$f(-3)=40$。

22. 分解因式：

(a) $x^4-20x^2-21x-20$

(b) $x^5-x^4-8x^3+11x^2+7x-10$

(c) $9x^4-6x^3-2x^2+16x+8$

(d) x^8+x^4+1

解下列方程式（23～33）：

23. $2x^3-3x^2-3x+2=0$

24. $2x^4-7x^3-9x^2+22x-8=0$

25. $4x^4-5x^2+1=0$

26. $(x-2)^4-10(x-2)^2+9=0$

27. $4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0$

28. $3x^5-7x^4-10x^3+10x^2+7x-3=0$

29. $x^6-12x^4+47x^2-60=0$

30. $(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2$

31. $6x^6+x^5-34x^4+34x^2-x-6=0$

32. $15x^6+31x^5-254x^4-352x^3+329x^2+9x-18=0$

33. $(2x-3)(2x-1)(2x+1)(2x+3)=3465$

附录　轮换对称函数的因式分解

关于多元多项式的因式分解，情况就比关于一元多项式的因式分解复杂得多，这里介绍关于一种特殊的多元多项式——轮换对称函数的因式分解法。

我们看三元多项式

$$xy^2+yz^2+zx^2$$

在这个多项式中，如果把 x 换成 y，y 换成 z，z 换成 x，就是说，如果作下面的轮换，

那么得到多项式

$$yz^{2}+zx^{2}+xy^{2}$$

所得的多项式和原来的多项式相同。

如果一个代数式中的各个变数按照某一种顺序进行轮换，所得的代数式和原来的代数式相同，那么这个代数式就叫做这些变数的**轮换对称函数**（cyclic function）。

例如，上面的多项式 $xy^{2}+yz^{2}+zx^{2}$ 是关于三个变数 x、y、z 的一个轮换对称函数。

三个变数 x、y、z 的轮换对称函数，常见的因式有

$$x+y+z, \qquad xyz,$$
$$(x+y)(y+z)(z+x),\ (x-y)(y-z)(z-x),$$
$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$

等等。

因此，对这样的轮换对称函数分解因式时，可以先试验它有没有上面这样的一些因式，然后再求其他的因式。试验时仍可利用因式定理、综合除法等。

例 1 分解因式：$(x-y)^{3}+(y-z)^{3}+(z-x)^{3}$。

解 以 $x=y$ 代入，原式成 $(y-y)3+(y-z)3+(z-y)3=0$。

所以原式有因式 $x-y$，同理，又有因式 $y-z$，$z-x$。

设 $(x-y)^{3}+(y-z)^{3}+(z-x)^{3}=k(x-y)(y-z)(z-x)$

以 $x=3$，$y=2$，$z=1$ 代入，得

$$1+1-8=k(1)(1)(-2)$$

解得 $$k=3$$

$\therefore$ $(x-y)^{3}+(y-z)^{3}+(z-x)^{3}=3(x-y)(y-z)(z-x)$

例 2 分解因式：$(x+y+z)^{3}-(y+z-x)^{3}-(z+x-y)^{3}-(x+y-z)^{3}$。

解 以 $x=0$ 代入，原式成 $(y+z)^{3}-(y+z)^{3}-(z-y)^{3}-(y-z)^{3}=0$

所以原式有因式 x。同理，又有因式 y，z。

设 $(x+y+z)^{3}-(y+z-x)^{3}-(z+x-y)^{3}-(x+y-z)^{3}=kxyz$

以 $x=1$，$y=2$，$z=3$ 代入，得

$$6^{3}-4^{3}-2^{3}-0=k(1)(2)(3)$$

解得 $$k = 24$$

$\therefore\quad (x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3=24xyz$

例 3 分解因式：$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)$.

解 以 $x=y$ 代入，原式成 $0+yz(y^2-z^2)+yz(z^2-y^2)=0$

所以原式有因式 $x-y$。同理，又有因式 $y-z$，$z-x$。

因原式为 4 次式，所以可设

$$\begin{aligned}&xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)\\ =\ &k(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)\end{aligned}$$

以 $x=4$，$y=2$，$z=1$ 代入，得

$$4(2)(12)+2(1)(3)+1(4)(-15) = k(7)(2)(1)(-3)$$

解得 $$k = -1$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)\\ =\ &-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)\end{aligned}$$

例 4 分解因式：$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$。

解 以 $x=-y$ 代入，原式成 $(z)^3+y^3-y^3-z^3=0$。

所以原式有因式 $x+y$。同理，又有因式 $y+z$，$z+x$。

设 $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 = k(x+y)(y+z)(z+x)$

以 $x=1$，$y=3$，$z=2$ 代入，得

$$6^3-1^3-3^3-2^3 = k(4)(5)(3)$$

解得 $$k = 3$$

$\therefore\quad (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$

例 5 分解因式：$x^2y^2(x-y)+y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)$.

解 以 $x=y$ 代入，原式成 $y^2z^2(y-z)+z^2y^2(z-y)=0$.

所以原式有因式 $x-y$。同理，又有因式 $y-z$，$z-x$。

因原式为 5 次式，所以可设

$$\begin{aligned}&x^2y^2(x-y)+y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)\\ =\ &(x-y)(y-z)(z-x)[a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)]\end{aligned}$$

以 $x=1$，$y=2$，$z=0$ 代人，

$$-4=2(5a+2b) \qquad (1)$$

以 $x=3$，$y=2$，$z=1$ 代人，

$$36+4+9(-2)=(-2)(14a+aab) \qquad (2)$$

解 (1) 与 (2) 所成的方程式组，得

$$a=0,\ b=-1$$

$$\therefore\quad x^2y^2(x-y)+y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)$$
$$=\ -(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

习题

分解因式（1～6）：

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$
2. $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$
3. $(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$
4. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$
5. $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$
6. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$
7. 求证 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 有因式 $x+y+z$。再把它分解因式。
8. 分解因式：$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$。

4 部分分式

4.1 分式

我们学过分式，用 $\frac{A}{B}$ 的形式表示的代数式叫做分式，其中分子 A 是多项式，分母 B 是不为零的多项式，像 $\frac{x}{y}$，$\frac{x^2+3x+2}{x-1}$，都是分式。

要注意，一个分式中，如果分母的值为 0，分式就没有意义。例如，$\frac{x}{y}$ 中，y 不能等于 0，$\frac{x^2+3x+2}{x-1}$ 中，x 不能等于 1，否则分式就没有意义。

一个分式中，如果分子的次数低于分母的次数，这样的分式叫做**真分式**(proper fraction)。如果分子的次数高于或等于分母的次数，这样的分式叫做**假分式**（improper fraction)。假分式可用除法，把它化成一个多项式与一个真分式的和。

例如，将假分式 $\frac{x^2+3x+2}{x-1}$ 进行除法:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \quad +4 \\
\cline{2-2}
x-1 & x^2+3x+2 \\
 & x^2-x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x+2 \\
 & \qquad 4x-4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 6
\end{array}
$$

可以得到

$$\frac{x^2+3x+2}{x-1}=x+4+\frac{6}{x-1}$$

分式的四则运算

分式可以约分。例如，$\dfrac{4a^2b^3}{2ab^5}$ 约分得 $\dfrac{2a}{b^2}$。

几个分式可以通分。例如，$\dfrac{5x}{x-1}$，$\dfrac{3}{x+2}$，通分得

$$\frac{5x(x+2)}{(x-1)(x+2)},\quad \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

一般地，通分的公分母取各分式的分母的最低公倍式（L.C.M.）。

约分和通分的根据是：一个分式的分子和分母，同时乘以（或除以）一个不等于零的数或式，分式的值不变，这是分式的基本性质。

同分母分式相加减，把分子相加减，分母不变，最后结果化简。

例如，
$$\begin{aligned}\frac{3x}{x^2-1}+\frac{3}{x^2-1}&=\frac{3x+3}{x^2-1}\\&=\frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\frac{3}{x-1}\end{aligned}$$

异分母分式相加减，先通分，变为同分母分式相加减。

例如，
$$\begin{aligned}\frac{5x}{x-1}-\frac{3}{x+2}&=\frac{5x(x+2)}{(x-1)(x+2)}-\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+2)}\\&=\frac{5x(x+2)-3(x-1)}{(x-1)(x+2)}\\&=\frac{5x^2+7x+3}{(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

分式相乘，把分子相乘，分母相乘，能够约简的先约简。

例如，
$$\begin{aligned}&\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\times\frac{x-3}{x^2-3x+2}\\=&\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-3)}\times\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}\\=&\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}\\=&\frac{x+2}{x^2-1}\end{aligned}$$

除以一个分式，等于乘以这个分式的倒数.

例如，$\dfrac{x+y}{x^2-xy} \div \dfrac{x^2-y^2}{x^2} = \dfrac{x+y}{x^2-xy} \times \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$

$$= \frac{x+y}{x(x-y)} \times \frac{x^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{x}{(x-y)^2}$$

分式的乘方，把分子乘方，分母乘方.

例如，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$，$\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^3 = \dfrac{x}{(x+5)^3}$

例 1 把 $\dfrac{x^3-2x^2}{x^2+x+1}$ 化成多项式与真分式的和.

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^1 - 3 \\
\hline
x^2+x+1 & x^3 - 2x^2 \\
 & x^3 + x^2 + x \\
\hline
 & -3x^2 - x \\
 & -3x^2 - 3x - 3 \\
\hline
 & 2x + 3
\end{array}
$$

$\therefore \quad \dfrac{x^3-2x^2}{x^2+x+1} = x-3+\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}$

例 2 计算:

(a) $\dfrac{x}{3x+3} - \dfrac{x-3}{3x+3}$

(b) $\dfrac{3}{a+2b} - \dfrac{2}{a-2b}$

(c) $\dfrac{2c^2}{2c-d} \times \dfrac{2cd-d^2}{10\,cd}$

(d) $\left(\dfrac{x+y}{y^2}\right)^3$

(e) $\dfrac{x^2-9}{x^2+x-20} \div \dfrac{x^2+x-12}{x^2-16}$

解　(a) $\dfrac{x}{3x+3}-\dfrac{x-3}{3x+3}=\dfrac{x-(x-3)}{3x+3}$

$$=\frac{3}{3x+3}$$

$$=\frac{3}{3(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}$$

(b) $\dfrac{3}{a+2b}-\dfrac{2}{a-2b}=\dfrac{3(a-2b)-2(a+2b)}{(a+2b)(a-2b)}$

$$=\frac{a-10b}{(a+2b)(1-2b)}$$

(c) $\dfrac{2c^2}{2c-d}\times\dfrac{2cd-d^2}{10cd}=\dfrac{2c^2}{2c-d}\times\dfrac{d(2c-d)}{10cd}$

$$=\frac{c}{5}$$

(d) $\left(\dfrac{x+y}{y^2}\right)^3=\dfrac{(x+y)^3}{(y^2)^3}$

$$=\frac{(x+y)^3}{y^6}$$

(e) $\dfrac{x^2-9}{x^2+x-20}\div\dfrac{x^2+x-12}{x^2-16}$

$$=\frac{x^2-9}{x^2+x-20}\times\frac{x^2-16}{x^2+x-12}$$

$$=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+5)(x-4)}\times\frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-3)}$$

$$=\frac{x+3}{x+5}$$

例 3　化简:

(a) $\dfrac{1}{7x-x^2-12}-\dfrac{2}{4x-x^2-3}-\dfrac{3}{5x-x^2-4}$

(b) $\dfrac{7a+2}{a^2+a-2}+\dfrac{1}{a^2-4}\div\dfrac{4}{a^2-4a+4}$

(c) $\left[\dfrac{4ab}{a-b}+\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\div\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right]\times\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}$

(d) $\left(\dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}\right)^3\times\left(\dfrac{y^2-x^2}{x^3y^3}\right)^2$

(e) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}$

解 (a) $\dfrac{1}{7x-x^2-12}-\dfrac{2}{4x-x^2-3}-\dfrac{3}{5x-x^2-4}$

$$= -\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{3}{x^2-5x+4}$$

$$= -\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{2}{(x-1)(x-3)}+\frac{3}{(x-1)(x-4)}$$

$$= \frac{-(x-1)+2(x-4)+3(x-3)}{(x-1)(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{4x-16}{(x-1)(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{4(x-4)}{(x-1)(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{4}{(x-1)(x-3)}$$

(b) $\dfrac{7a+2}{a^2+a-2}+\dfrac{1}{a^2-4}\div\dfrac{4}{a^2-4a+4}$

$$= \frac{7a+2}{(a+2)(a-1)}+\frac{1}{(a+2)(a-2)}\times\frac{(a-2)^2}{4}$$

$$= \frac{7a+2}{(a+2)(a-1)}+\frac{a-2}{4(a+2)}$$

$$= \frac{4(7a+2)+(a-2)(a-1)}{4(a+2)(a-1)}$$

$$= \frac{a^2+25a+10}{4(a+2)(a-1)}$$

(c) $\left[\dfrac{4ab}{a-b}+\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\div\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right]\times\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}$

$$=\left[\frac{4ab}{a-b}+\frac{a^2-b^2}{ab}\times\frac{ab}{a+b}\right]\times\frac{1}{(a+b)^2}$$

$$=\left[\frac{4ab}{a-b}+a-b\right]\times\frac{1}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{4ab+(a-b)^2}{a-b}\times\frac{1}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{a-b}\times\frac{1}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{1}{a-b}$$

(d) $\left(\dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}\right)^3\times\left(\dfrac{y^2-x^2}{x^3y^3}\right)^2=\dfrac{x^6y^6}{(x^2-y^2)^3}\times\dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^6y^6}$

$$=\frac{1}{x^2-y^2}$$

(c) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}$

$$=\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)$$

$$=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}\div\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{4xy}{(x+y)(x-y)}\times\frac{(x+y)(x-y)}{2x^2+2y^2}$$

$$=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

或

$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\times(x+y)(x-y)}{\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}\right)\times(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2+(x-y)^2}$$

$$=\frac{4xy}{2x^2+2y^2}$$

$$=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

习题 4a

1. 要使下列分式有意义，x 不能取什么值？

(a) $\dfrac{x+4}{x-5}$　　　(b) $\dfrac{2x+3}{4x^2-1}$

2. x 取什么值时，可使下列分式的值为零？

(a) $\dfrac{x-1}{x+2}$　　　(d) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

3. 把下列假分式化成多项式与真分式的和：

(a) $\dfrac{3x^2-2x+7}{x^2+3}$　　　(b) $\dfrac{8x^2-4}{2x^2+3}$

(c) $\dfrac{x^4}{x^2-1}$　　　(d) $\dfrac{4x^3-4x^2-10x+10}{2x^2+x-3}$

计算（4～10）：

4. $\dfrac{2a-1}{2a+2}-\dfrac{a-2}{2a+2}$　　　5. $\dfrac{2y}{2x-y}+\dfrac{y}{y-2x}$

6. $\dfrac{a+3}{a+4}-\dfrac{a+1}{a+2}$　　　7. $\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}-\dfrac{2}{(x+1)(x+2)}$

8. $\dfrac{7}{x^2+x-12}-\dfrac{6}{x^2+2x-8}$

9. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+9x+20}\times\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$

10. $\dfrac{a^2-5a+6}{a}\div\dfrac{a-2}{a^2-3a}$

化简下列各式（11～18）：

11. $\dfrac{a-b}{a-c}\times\dfrac{b-c}{b-a}\times\dfrac{c-a}{c-b}$

12. $\dfrac{5}{2-2y}-\dfrac{4}{3+3y}+\dfrac{3}{1-y^2}$

13. $\left(\dfrac{a}{a+2}-\dfrac{a}{a-2}\right)\times\dfrac{a-2}{4a}$

14. $\left(1-\dfrac{x}{x+y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{x^2}\right)$

15. $\left(x-\dfrac{1}{x-y}\right)^2-\left(x+\dfrac{1}{x-y}\right)^2$

16. $\left[\dfrac{x^2+3x}{x^2-4}-\dfrac{(x+2)^2}{x^2+x-6}\right]\div\dfrac{3x+8}{2-x}$

17. $\dfrac{x+1+\dfrac{1}{x-1}}{x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}}$

18. $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}}{1-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-2xy+y^2}}$

● 分式方程式

在分母中含有未知数的方程式叫做**分式方程式**（fractional equation）。例如 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2x}{x^2-4}$，就是一个分式方程式。

解分式方程式时，可以把方程式的两边都乘以各分母的 L.C.M.，得到一个不含分母的方程式。解这个方程式，再检验所得的根能否适合原分式方程式。如果所得的根使到原分式方程式的任一分母为零时，则此根应舍弃。此类不适合原方程式的根叫做**增根**（extraneous root）。

例如，解分式方程式 $\frac{1}{3}+\frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$，

方程式的两边都乘以各分母的 L.C.M. $3(x+2)(x-2)$，

得
$$(x+2)(x-2)+3(x+2) = 6x$$
$$x^2-4+3x+6 = 6x$$
$$x^2-3x+2 = 0$$
$$(x-1)(x-2) = 0$$
$$x = 1 \qquad x = 2$$

把 $x = 1$ 代人原分式方程式，它不会使分母为 0，所以 $x = 1$ 是原分式方程式的根。

把 $x = 2$ 代人原分式方程式，$\frac{1}{x-2}$ 及 $\frac{2x}{x^2-4}$ 的分母为零，分式无意义。所以 $x = 2$ 是增根。

例 4 解分式方程式 $\frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}+\frac{2}{4-x^2}$

解
$$\frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}+\frac{2}{4-x^2}$$
$$\frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{1}{x(x-2)}-\frac{2}{(x+2)(x-2)}$$

两边乘以各分母的 L.C.M. $x(x+2)(x-2)$，

得
$$(x-4)(x-2) = x+2-2x$$
$$x^2-5x+6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0$$
$$x = 2 \qquad x = 3$$

经检验，$x = 3$ 是原分式方程式的根，$x = 2$ 是增根。

例 5 解分式方程式 $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}$

解
$$\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}$$

两边分别合并，得

$$\frac{-1}{(x-3)(x-4)} = \frac{-1}{(x-5)(x-6)}$$

$$x^2-11x+30 = x^2-7x+12$$

$$4x = 18$$

$$x = \frac{9}{2}$$

经检验，$x = \frac{9}{2}$ 是原分式方程式的根。

例 6 解分式方程式 $\frac{5(x^2+1)}{x+1} - \frac{3(x+1)}{x^2+1} = 2$

解 因为 $\frac{x^2+1}{x+1}$ 与 $\frac{x+1}{x^2+1}$ 互为倒数，所以可设 $\frac{x^2+1}{x+1}$ 为 y，

则 $\frac{x+1}{x^2+1}$ 为 $\frac{1}{y}$。

原分式方程式成为 $5y-\frac{3}{y} = 2$

$$5y^2-2y-3 = 0$$

$$y = 1 \quad 或 \quad y = -\frac{3}{5}$$

当 $y = 1$ 时，$\frac{x^2+1}{x+1} = 1$

$$x^2-x = 0$$

$$x = 0 \quad 或 \quad x = 1$$

当 $y = -\frac{3}{5}$ 时，$\frac{x^2+1}{x+1} = -\frac{3}{5}$

$$5x^2+3x+8 = 0$$

此方程式没有实数根。

经检验，$x = 0$，$x = 1$ 都是原分式方程式的根。

利用分式方程式的解法，可以解有关的应用问题。举例如下。

例 7 注满一个游泳池，单独用甲管比单独用乙管可以少用 15 小时。现在独开甲管 10 小时，再独开乙管 15 小时，可以注满游泳池的三分之二。问独开甲管和独开乙管，各需几小时注满游泳池？

解 设独开甲管，x 小时注满，则独开乙管，$(x + 15)$ 小时注满，每小时甲管注入 $\frac{1}{x}$，乙管注入 $\frac{1}{x+15}$。根据题意，列出方程式。

$$\frac{10}{x} + \frac{15}{x+15} = \frac{2}{3}$$

$$30(x+15) + 45x = 2x(x+15)$$

$$2x^2 - 45x - 450 = 0$$

$$(2x+15)(x-30) = 0$$

$$x = 30, \qquad x = -\frac{15}{2}$$

经检验，$x = 30$，$x = -\frac{15}{2}$ 都是原分式方程式的根。

但 $x = -\frac{15}{2}$ 不合实际，应舍去。

由 $x = 30$，得 $x + 15 = 45$，故知单开甲管，30 小时注满游泳池；单开乙管，45 小时注满游泳池。

例 8 A、B 两地相距 60 公里。甲从 A 去 B，3 小时后乙也从 A 去 B。结果甲比乙晚到 1 小时。已知甲每小时比乙少走 20 公里，求两人每小时各走多少公里。

解 设甲每小时走 x 公里，则乙每小时走 $(x + 20)$ 公里。走 60 公里的路程，甲比乙多用 4 小时。列出方程式，得

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+20} = 4$$

$$60(x+20) - 60x = 4x(x+20)$$

$$x^2 + 20x - 300 = 0$$

$$(x-10)(x+30) = 0$$

$$x = 10, \qquad x = -30$$

经检验，$x = 10$，$x = -30$ 都是原分式方程式的根。

但 $x = -30$ 不合实际，应舍去。

由 $x = 10$，得 $x + 20 = 30$，故知甲每小时走 10 公里，乙每小时走 30 公里。

由以上两例可以看到，应用问题有时可以列出分式方程式来解。列出分式方程式解应用题时，在解分式方程式的过程中所得的根，必须检验是否分式方程式的根，还须检验是否符合应用题的实际意义。

习题 4b

解下列分式方程式（1～16）：

1. $\dfrac{2x-3}{x-1} = \dfrac{4x-1}{2x+3}$

2. $\dfrac{2}{y+1} + \dfrac{3}{y-1} = \dfrac{6}{y^2-1}$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{5}{x-2}$

4. $\dfrac{14}{x^2-1} + 2 = \dfrac{7}{x-1}$

5. $\dfrac{x}{x+3} + \dfrac{3}{x-3} = \dfrac{18}{x^2-9}$

6. $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{2x+3} = \dfrac{3x+6}{2x^2+7x+6}$

求下列分式方程式的解集（7～8）：

7. $\dfrac{1}{2-x} - 1 = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{6-x}{3x^2-12}$

8. $\dfrac{36}{x^2-9} = 1 + \dfrac{x-3}{x+3}$

解下列分式方程式（9～12）：

9. $\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a-3} = \dfrac{1}{a-5} - \dfrac{1}{a-7}$

10. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-8} = \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{1}{x-6}$

11. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + 6 = 0$

12. $x^2 + x + 1 = \dfrac{2}{x^2+x}$　　（提示：可以设 $x^2 + x = y$。）

13. 锄草 20 公顷后，增加了机器，每小时锄草的公顷数比原来增加了 2 公顷。后来锄草 30 公顷的时间为原来锄草 20 公顷的时间的一半。原来每小时锄草多少公顷？

14. 贮煤 350 吨，按照原定计划可用若干天。现每天比原计划节约 2 吨，结果比原计划多用 20 天。问原计划每天用多少吨?

15. 计划在一定日期内读完 200 页书。5 天后改变计划，每天多读 5 页，结果提前一天读完。原计划每天读几页？后来每天读几页？

16. 绿化一片地区，甲队单独工作比乙队单独工作可以少用 5 天完成绿化任务。如果两队合作，6 天可以完成绿化任务。单独工作，甲队、乙队各需几天完成绿化任务？

17. 加工 150 个零件。加工完 40 个后，改进工作方法，每天比原来多加工 15 个，前后共用 3 天完成加工任务。原来每天加工多少个？后来每天加工多少个？

4.2 待定系数法

待定系数法是一种基本的数学方法，这里主要用以确定恒等式中字母系数的值。

两个代数式，如果当其中的字母取任何数值时，两式的值都能相等，那么这样的两个代数式叫做恒等。

例如，代数式 $(a+b)(a-b)$ 和代数式 a^2-b^2，不管 a、b 取什么数值，两式的值都能相等，我们说，代数式 $(a+b)(a-b)$ 与 a^2-b^2 恒等。

恒等用符号“≡”表示，这个符号叫做恒等号。

例如，代数式 $(a+b)(a-b)$ 与 a^2-b^2 恒等，可以记做

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$

像这样的等式叫做**恒等式**（identity）。

【注】在恒等的意义确定时，恒等号“≡”也可用等号“=”代替。

两个一元多项式，经过整理并按降幂（或升幂）排列后，如果同次幂的系数相等，那么这两个多项式恒等。

例如，多项式 $(x-3)(x-4)+6$ 与多项式 $(x-2)(x-5)+8$，经过整理并按降幂排列后，

$$\begin{aligned}(x-3)(x-4)+6 &= x^2-7x+12+6\\ &= x^2-7x+18\\ (x-2)(x-5)+8 &= x^2-7x+10+8\\ &= x^2-7x+18\end{aligned}$$

因为同次幂的系数相等，

∴　$(x-3)(x-4)+6 \equiv (x-2)(x-5)+8$。

反之，如果两个一元多项式恒等，那么经过整理并按降幂（或升幂）排列后，同次幂的系数相等。例如，

$$ax^2+bx+c \equiv x^2-7x+18$$

那么一定有　$a=1$，$b=-7$，$c=18$

上面所说，可以表示如下：

设　$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

　　$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

如果　$a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，…，$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$，

那么　$f(x) \equiv g(x)$；

反之，如果　$f(x) \equiv g(x)$，

那么　$a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，…，$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$。

根据恒等式的意义和性质，利用待定系数法确定恒等式中字母系数的值，可以有下面两种方法：

(一)　数值代入法

(二)　系数比较法

例 9　已知多项式 $2x+7$ 与 $a(x-1)+b(2x+1)$ 恒等，求 a、b。

解一　应用数值代入法：两式恒等，x 用任何数值代入，两式的值都相等。

$2x+7 \equiv a(x-1)+b(2x+1)$

用 $x=1$ 代入，

$2\times1+7 = a(1-1)+b(2\times1+1)$

$9 = 3b$

$b = 3$

用 $x = -\frac{1}{2}$ 代入，

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)+7 = a\left(-\frac{1}{2}-1\right)+b\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right]$$

$$6 = -\frac{3}{2}a$$

$$a = -4$$

解二 应用系数比较法：

$$2x+7 \equiv a(x-1)+b(2x+1)$$
$$\equiv (a+2b)x-a+b$$

于是得 $\begin{cases} a+2b = 2 \text{——(1)} \\ -a+b = 7 \text{——(2)} \end{cases}$

(1) + (2)，得 $3b = 9$

$$b = 3$$
$$a = -4$$

例 10 设 $2x^2-5x-1 \equiv \mathrm{A}(x-1)(x-2)+\mathrm{B}(x-2)(x-3)+\mathrm{C}(x-3)(x-1)$，求 A、B、C。

解 $2x^2-5x-1 \equiv \mathrm{A}(x-1)(x-2)+\mathrm{B}(x-2)(x-3)+\mathrm{C}(x-3)(x-1)$

当 $x = 1$，$-4 = 2\mathrm{B}$

$$\mathrm{B} = -2$$

当 $x = 2$，$-3 = -\mathrm{C}$

$$\mathrm{C} = 3$$

当 $x = 3$，$2 = 2\mathrm{A}$

$$\mathrm{A} = 1$$

例 11 求 a、b，使 $x^4+3x^3+x^2+ax+b$ 能被 x^2+2x-5 整除。

解 进行除法

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 4 \\ \hline
x^2+2x-5 & x^4 + 3x^3 + x^2 + ax + b \\
 & x^4 + 2x^3 - 5x^2 \\ \hline
 & \quad x^3 + 6x^2 + ax \\
 & \quad x^3 + 2x^2 - 5x \\ \hline
 & \qquad 4x^2 + (a+5)x + b \\
 & \qquad 4x^2 + 8x - 20 \\ \hline
 & \qquad\qquad (a-3)x + (b+20)
\end{array}$$

因除法为整除，故余式恒等于零。即

$$(a-3)x+(b+20) \equiv 0 \cdot x+0$$

比较系数，$a-3 = 0$，$b+20 = 0$

得 $a = 3$，$b = -20$

例 12 已知 $\dfrac{x-17}{(x+3)(x-2)} \equiv \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-2}$，求 A、B。

解 两个同分母的最简分式，如果恒等，则它们的分子恒等，反之，如果分子恒等，则分式恒等。

由
$$\frac{x-17}{(x+3)(x-2)} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$
$$\equiv \frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

可得
$$x-17 \equiv A(x-2)+B(x+3)$$
$$\equiv (A+B)x+(-2A+3B)$$

比较系数，得
$$\begin{cases} A+B = 1 \\ -2A+3B = -17 \end{cases}$$

由此解得
$$A = 4,\ B = -3$$

就是说，
$$\frac{x-17}{(x+3)(x-2)} \equiv \frac{4}{x+3} - \frac{3}{x-2}$$

习题 4c

1. 设 $-3x+19 \equiv a(x+3)+b(2x-1)$，求 a、b。
2. 已知 $4x^2+15x+15 \equiv A(x+2)(x+3)+B(x+3)(x+1)+C(x+1)(x+2)$，求 A、B、C。
3. 把 $4x+3y-8$ 化为 $a(x+2y-1)+b(2x-3y+2)+c(x-2y+3)$ 的形式。
4. 求多项式 x^3+ax^2+bx+c，使它恒等于 $(x+1)(x-1)(x+5)-6$。
5. 求多项式 $x^4-x^3-7x^2+ax+b$，使它能被 x^2-3x+1 整除。
6. 多项式 $x^4-x^3-x^2+ax+b$ 除以多项式 x^2+x-2，余式为 $-2x+2$，求 a 和 b。
7. 已知 $\dfrac{16-11x}{(x-1)(2-x)}$ 恒等于 $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$，求 A、B。

8. 设 $\dfrac{3x+20}{12x^2-5x-2} \equiv \dfrac{P}{3x-2}+\dfrac{Q}{4x+1}$，求 P、Q。

9. 已知 x^4+4x^3-8x+4 是一个二次式的平方，求这个二次式。

4.3 部分分式

利用 4.1 节中所说的分式的加减法，我们把

$$\frac{4}{x+3}+\frac{-3}{x-2}$$

化成了

$$\frac{x-17}{(x+3)(x-2)}$$

利用 4.2 节中所说的待定系数法，如例 12，我们又把

$$\frac{x-17}{(x+3)(x-2)}$$

化成了

$$\frac{4}{x+3}+\frac{-3}{x-2}$$

与分式的加减法相反，有时（如在微积分的积分法中）我们需要把一个真分式化成几个比较简单的真分式的和，这时各个分成的分式，都叫做原分式的**部分分式**（partial fractions）。例如 $\dfrac{4}{x+3}$ 和 $\dfrac{-3}{x-2}$ 都是 $\dfrac{x-17}{(x+3)(x-2)}$ 的部分分式。

下面我们说明把一个一元真分式分成部分分式的几种情况，举例指出怎样的真分式可以分成怎样的部分分式，至于其中的理论根据等等就不详述了。

● 分母为一次式的乘积

分母为一次式乘积的真分式，如

$$\frac{Q}{(ax+b)(cx+d)}$$

(分子 Q 的次数低于分母的次数)，可以分成各个分母为一次式的部分分式，其中分子为常数，如

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$$

例 13 把 $\dfrac{8x-13}{x^2-x-20}$ 分成部分分式。

解 $\dfrac{8x-13}{x^2-x-20}=\dfrac{8x-13}{(x-5)(x+4)}\equiv\dfrac{A}{x-5}+\dfrac{B}{x+4}$

可得

$$8x-13\equiv A(x+4)+B(x-5)$$

令 $x=5$，得 $40-13=9A$

$$A=3$$

令 $x=-4$，得 $-32-13=-9B$

$$B=5$$

因此 $$\frac{8x-13}{x^2-x-20}=\frac{3}{x-5}+\frac{5}{x+4}$$

例 14 把 $\dfrac{2x^2+x-7}{x^2-1}$ 分成部分分式。

解 先把原分式化成多项式与真分式的和。

$$\frac{2x^2+x-7}{x^2-1}=2+\frac{x-5}{x^2-1}$$

设 $\dfrac{x-5}{x^2-1}=\dfrac{x-5}{(x+1)(x-1)}$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

可得 $$x-5=A(x-1)+B(x+1)$$

令 $x=-1$，$-6=-2A$

$$A=3$$

令 $x=1$，$-4=-2B$

$$B=-2$$

因此 $$\frac{2x^2+x-7}{x^2-1}=2+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-1}$$

● 分母为一次式的乘幂

分母为一次式乘幂的真分式，如

$$\frac{Q}{(ax+b)^k}$$

可以分成分母分别为 $(ax+b)^k$，$(ax+b)^{k-1}$，$\cdots(ax+b)^2$，$(ax+b)$ 的部分分式，其中分子都为常数，例如

$$\frac{Q}{(ax+b)^3}=\frac{A}{(ax+b)^3}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{ax+b}$$

例 15 把 $\dfrac{x^2+2x-5}{(x-1)^3}$ 分成部分分式。

解一 设 $\dfrac{x^2+2x-5}{(x-1)^3}=\dfrac{A}{(x-1)^3}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}$

得 $x^2+2x-5=A+B(x-1)+C(x-1)^2$

$$=Cx^2+(B-2C)x+(A-B+C)$$

比较系数，

$$\begin{cases}C=1\\B-2C=2\\A-B+C=-5\end{cases}$$

解得 $A=-2$，$B=4$，$C=1$

$$\therefore\quad \frac{x^2+2x-5}{(x-1)^3}=\frac{-2}{(x-1)^3}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$$

解二 设 $x-1=y$，则 $x=y+1$，于是

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-5}{(x-1)^3}&=\frac{(y+1)^2+2(y+1)-5}{y^3}\\&=\frac{y^2+4y-2}{y^3}\\&=\frac{1}{y}+\frac{4}{y^2}-\frac{2}{y^3}\\&=\frac{1}{(x-1)}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{-2}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

例 16 把 $\dfrac{10x^2+3x+1}{x(2x+1)^2}$ 分成部分分式。

解 设 $\dfrac{10x^2+3x+1}{x(2x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{2x+1} + \dfrac{C}{(2x+1)^2}$

得 $$\begin{aligned} 10x^2+3x+1 &= A(2x+1)^2 + Bx(2x+1) + Cx \\ &= (4A+2B)x^2 + (4A+B+C)x + A \end{aligned}$$

比较系数，

$$\begin{cases} 4A+2B = 10 \\ 4A+B+C = 3 \\ A = 1 \end{cases}$$

解得 $A = 1,\ B = 3,\ C = -4$

$$\therefore \quad \frac{10x^2+3x+1}{x(2x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{2x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}$$

习题 4d

把下列分式分成部分分式（1～12）

1. $\dfrac{10x-9}{(2x+1)(3x-2)}$

2. $\dfrac{7x+1}{x^2-1}$

3. $\dfrac{14x+10}{15x^2+14x-8}$

4. $\dfrac{24}{4x^2-9}$

5. $\dfrac{48+4x-2x^2}{x^2-64}$

6. $\dfrac{2x-7}{(x-5)^2}$

7. $\dfrac{x^2+3x+3}{(x+2)^3}$

8. $\dfrac{x^3-2x^2-1}{(x-2)^2}$

9. $\dfrac{5x^2-x-1}{x^2(x-1)}$

10. $\dfrac{8x+2}{x-x^3}$

11. $\dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$

12. $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$

● 分母为二次式的乘积

相应于分母中每一个不可约的二次式因式 $ax^2+bx+c\ (b^2-4ac<0)$，可分出一个部分分式 $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$，其中 A、B 为常数。

例如，把真分式

$$\frac{Q}{(ax^2+bx+c)(dx+e)}$$

分成部分分式。相应于分母中的二次不可约因式，有一个部分分式 $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$，相应于分母中的一次因式，有一个部分分式 $\dfrac{C}{dx+e}$，因此，原分式可分成部分分式，

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{C}{dx+e}$$

例 17 把 $\dfrac{x^2+x-4}{(x^2+1)(x-1)}$ 分成部分分式。

解一 设 $\dfrac{x^2+x-4}{(x^2+1)(x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

得 $x^2+x-4=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$

令 $x=1$，$-2=2A$

$A=-1$

令 $x=0$，$-4=A-C$

$C=3$

令 $x=-1$，$-4=2A+2B-2C$

$B=2$

$$\therefore\ \frac{x^2+x-4}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+1}$$

解二 设 $\dfrac{x^2+x-4}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

则有 $x^2+x-4 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$ —— (1)

把 $x = 1$ 代入， $-2 = 2A$

$$A = -1$$

则 (1) 式成

$$x^2+x-4 = -x^2-1+(Bx+C)(x-1)$$
$$2x^2+x-3 = (Bx+C)(x-1)$$
$$(2x+3)(x-1) = (Bx+C)(x-1)$$

由此可得 $Bx+C = 2x+3$

因此 $\dfrac{x^2+x-4}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{-1}{x-1}+\dfrac{2x+3}{x^2+1}$

例 18 把 $\dfrac{12x^2-20x+20}{27x^3-8}$ 分成部分分式。

解 $27x^3-8 = (3x-2)(9x^2+6x+4)$

设 $\dfrac{12x^2-20x+20}{27x^3-8} = \dfrac{A}{3x-2}+\dfrac{Bx+C}{9x^2+6x+4}$

则有 $12x^2-20x+20$

$= A(9x^2+6x+4)+(Bx+C)(3x-2)$

$= (9A+3B)x^2+(6A-2B+3C)x+4A-2C$

比较系数，

$$\begin{cases} 9A+3B = 12 \\ 6A-2B+3C = -20 \\ 4A-2C = 20 \end{cases}$$

解得 $A = 1$、$B = 1$，$C = -8$

因此 $\dfrac{12x^2-20x+20}{27x^3-8} = \dfrac{1}{3x-2}+\dfrac{x-8}{9x^2+6x+4}$

● 分母为二次式的乘幂

分母为不可约二次式乘幂的真分式，如

$$\frac{Q}{(ax^2+bx+c)^2}$$

可以分成分母分别为 $(ax^2+bx+c)^2$，(ax^2+bx+c) 的部分分式，其中分子都是一次式，如

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}$$

例 19 把 $\dfrac{x^3+1}{(x^2+x+4)^2}$ 分成部分分式。

解 设 $\dfrac{x^3+1}{(x^2+x+4)^2}=\dfrac{Ax+B}{(x^2+x+4)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+4}$

则有

$$x^3+1=Ax+B+(Cx+D)(x^2+x+4)$$

$$x^3+1=Cx^3+(C+D)x^2+(4C+D+A)x+(4D+B)$$

比较系数，

$$\begin{cases} C=1 \\ C+D=0 \\ 4C+D+A=0 \\ 4D+B=1 \end{cases}$$

解得 $A=-3$，$B=5$，$C=1$，$D=-1$

因此

$$\frac{x^3+1}{(x^2+x+4)^2}=\frac{-3x+5}{(x^2+x+4)^2}+\frac{x-1}{x^2+x+4}$$

习题 4e

把下列分式分成部分分式:

1. $\dfrac{2x^2+5}{(x^2-x+1)(2x+3)}$

2. $\dfrac{x+14}{(x^2-3x+5)(x-4)}$

3. $\dfrac{3x+6}{8-x^3}$

4. $\dfrac{2x^3+x^2+3x}{(x^2+1)(x^2+2)}$

5. $\dfrac{2x^3}{(x^2+x+1)^2}$

6. $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$

7. $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}$

8. $\dfrac{4}{x^3+4x}$

总复习题 4

1. x 取什么值时，下列分式没有意义?

(a) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$ (b) $\dfrac{2x^2-5x-3}{2x^2+7x+3}$

2. 求使分式 $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{(2x+1)(x+3)}$ 的值为零的 x 的值。

3. 把分式 $\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$ 化成多项式与真分式的和。

化简下列各式 (4～10):

4. $\left[\dfrac{x}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}\right]\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

5. $\left(\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)\div\dfrac{3}{x^2-5x+4}$

6. $1\div\left[\dfrac{a-b}{a-c}\div\left(\dfrac{b-a}{b-c}\div\dfrac{c-a}{c-b}\right)\right]$

7. $\dfrac{x-y}{x+y}+\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2+\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^3$

8. $\dfrac{x^3-x^2-4x+1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x^3-2x^2-9x+21}{x^2-5x+6}+\dfrac{x^2-3x+8}{x^2-4x+3}$

9. $\dfrac{1-\dfrac{x-y}{x+y}}{1+\dfrac{x-y}{x+y}}$　　　　10. $\dfrac{1}{a-\dfrac{a^2-1}{a+\dfrac{1}{a-1}}}$

解下列分式方程式（11～13）：

11. $\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1-x}{2-x}-3$

12. $\dfrac{5x}{x^2+x-6}+\dfrac{2x-5}{x^2-x-12} = \dfrac{7x-10}{x^2-6x+8}$

13. $\dfrac{3}{x^2-5x+6} = \dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}$

求下列分式方程式的解集（14～16）：

14. $\dfrac{x+4}{x^2+2x}-\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2}{x}+1$

15. $\dfrac{x+5}{x+4}+\dfrac{x+7}{x+6} = \dfrac{x+8}{x+7}+\dfrac{x+4}{x+3}$

（提示：先把各分式化成整式与真分式的和。）

16. $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+14 = 0$

（提示：设 $x+\dfrac{1}{x} = y$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2} = y^2-2$。）

17. 预期在若干天内完成一件建筑工程。甲队单独施工，刚好如期完成；乙队单独施工，则要比预期天数多用 3 天才能完成。现在甲乙两队合作 2 天后，余下的工程由乙队单独施工，也正好如期完成。问单独施工，甲乙两队各需多少天才能完成这项建筑工程？

18. 甲乙两班同学，在一片校园种花。甲独种完成的天数比乙独种完成的天数的 2 倍少 5 天。现在两班合种 3 天后，再由乙班独种 5 天，可以完成全部种花任务。问两班独种，各需几天完成种花任务？

19. 已知 $(x^2+kx+2)^2 \equiv x^4+ax^3+8x^2+bx+4$，求 k、a、b。

把下列分式分成部分分式（20～25）：

20. $\dfrac{4x^2-9x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)}$

21. $\dfrac{2x^2+x}{(x+1)^3}$

22. $\dfrac{4x-1}{(x+1)(5x^2+x+1)}$

23. $\dfrac{2x^3}{x^4+x^2+1}$

24. $\dfrac{2x^3-3x^2}{(x^2-x+1)^2}$

25. $\dfrac{2x^3+x+34}{(x^2+1)^2(2x-3)}$

5 无理式

5.1 根式、无理式

在初中课本里，我们已经学过二次根式，现在进一步学习一般根式。

我们知道，如果一个数 x 的 n 次方（n 是大于 1 的整数）等于 a，即 $x^n=a$，这个数 x 就叫做 a 的 n 次方根。例如，

$5^2=25$，$(-5)^2=25$，5 和 -5 就叫做 25 的二次方根（或平方根）；

$4^3=64$，4 就叫做 64 的三次方根（或立方根）；

$2^4=16$，$(-2)^4=16$，2 和 -2 就叫做 16 的四次方根；

$(-3)^5=-243$，-3 就叫做 -243 的五次方根。

由上面的例子，我们可以看出：

(一) 当 n 是奇数时，a 的奇次方根只有一个，我们用一个符号 $\sqrt[n]{a}$ 来表示。例如，

64 的三次方根可用符号 $\sqrt[3]{64}$ 表示。

-243 的五次方根可用符号 $\sqrt[5]{-243}$ 表示。

(二) 当 n 是偶数时，正数 a 的偶次方根有两个，且互为相反数，我们用 $\sqrt[n]{a}$ 表示正的偶次方根，用 $-\sqrt[n]{a}$ 表示负的偶次方根。例如，

16 的四次方根有两个，我们用 $\sqrt[4]{16}$ 表示正的一个，就是 $+2$；用 $-\sqrt[4]{16}$ 表示负的一个，就是 -2。为了简便，也可写成 $\pm\sqrt[4]{16}$。

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做**根式** (radical)，n 叫做**根指数** (index of radical)，a 叫做**被开方数** (radicand)。根指数 n 等于 2 的根式是二次根式（这时根指数 2 省略不写）。n 等于 3，4，5，……时，相应的根式是三次，四次，五次，……根式。当 n 是奇数时，a 可以是任何实数；当 n 是偶数时，a 可以是任何非负数。应当注意，负数的偶次方根在实数范围内没有意义。

根号内含有字母的式子叫做**无理式** (irrational expression)。

根据方根的意义，可得

$$(\sqrt{5})^2 = 5,\quad (\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

一般上，如果 $\sqrt[n]{a}$ 有意义，那么

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

根据方根的意义，还可得

$$\sqrt[5]{2^5} = 2 \qquad \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$\sqrt{2^2} = 2 \qquad \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$\sqrt{(-2)^2} = 2 \qquad \sqrt[4]{(-3)^4} = 3$$

一般上，

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & (a \geqslant 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

例 1 计算：

(a) $(\sqrt[3]{a^2-1})^3$ (b) $(\sqrt[6]{b^2+1})^{12}$

(c) $\sqrt[5]{(x-2)^5}$ (d) $\sqrt{a^2+2ab+b^2} \quad (a < -b)$

解 (a) $(\sqrt[3]{a^2-1})^3 = a^2-1$

(b) $$\begin{aligned}(\sqrt[6]{b^2+1})^{12} &= [(\sqrt[6]{b^2+1})^6]^2 \\ &= (b^2+1)^2 \\ &= b^4+2b^2+1\end{aligned}$$

(c) $\sqrt[5]{(x-2)^5} = x-2$

(d) 当 $a < -b$ 时，$a+b<0$

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+2ab+b^2} &= \sqrt{(a+b)^2} \\ &= -(a+b) \\ &= -a-b\end{aligned}$$

习题 5a

1. 设 x 表示实数，求下列各式在什么条件下有意义：

(a) $\sqrt{x}$　　(b) $\sqrt{-x}$　　(c) $\sqrt[3]{x}$

(d) $\sqrt[3]{-x}$　　(e) $\sqrt[4]{1-x}$　　(f) $\sqrt[4]{x-1}$

计算下列各式（2～11）：

2. $(\sqrt[5]{x+2})^5$　　3. $(\sqrt[4]{a^2+3})^8$　　4. $(2\sqrt[3]{b})^6$

5. $\sqrt[3]{8x^3}$　　6. $\sqrt{16x^4}$　　7. $\sqrt[6]{64a^6}$　$(a<0)$

8. $\sqrt{x^2-2x+1}$　$(x\geqslant 1)$

9. $\sqrt[4]{(x^2-2x+1)^2}$　$(x<1)$

10. $\sqrt[3]{(1+x)^3}+\sqrt[3]{(1-x)^3}$

11. $\sqrt[4]{(m-2)^4}+\sqrt[6]{(m-3)^6}$　$(2\leqslant m\leqslant 3)$

5.2　根式的基本性质

● 根式的基本性质

因为负数的偶次方根没有意义，负数的奇次方根都可以化成被开方数是正数的同次方根的相反数，例如，$\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$，所以我们研究根式的性质时，只要研究算术根的性质就可以了．

【注】在本章里，如果没有特别说明，根号内出现的字母，都表示正数．

根据 $(\sqrt[n]{a})^n=a$，当 $a\geqslant 0$ 时，可以进行下面的计算：

$$(\sqrt[8]{a^6})^8=a^6$$

$$\begin{aligned}(\sqrt[4]{a^3})^8&=[(\sqrt[4]{a^3})^4]^2\\&=(a^3)^2\\&=a^6\end{aligned}$$

由此可知，$\sqrt[8]{a^6}$ 和 $\sqrt[4]{a^3}$ 都是 a^6 的 8 次算术根．而 a^6 的 8 次算术根只有一个．所以当 $a\geqslant 0$ 时，应当有

$$\sqrt[8]{a^6}=\sqrt[4]{a^3}$$

用同样的方法，可以推得

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geqslant 0)$$

和

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m \quad (a \geqslant 0)$$

这里 m 是正整数，n，p 都是大于 1 的整数。

这就是说，一个根式的被开方数如果是一个非负数的幂，那么这个根式的根指数与被开方数的指数都乘以或除以同一个正整数，根式的值不变。这个性质叫做根式的基本性质。

对于根式的基本性质，应当特别注意 $a \geqslant 0$ 这个条件，否则就没有这个性质。例如，$\sqrt[6]{(-8)^2} \neq \sqrt[3]{-8}$。

例 2 约简下列根式中被开方数的指数及根指数：

(a) $\sqrt[5]{a^{10}}$ (b) $\sqrt[6]{(-3)^2 x^4}$

解 (a) $\sqrt[5]{a^{10}} = \sqrt[5]{a^{2\times 5}} = a^2$

(b) $\sqrt[6]{(-3)^2 x^4} = \sqrt[6]{3^2 x^4} = \sqrt[6]{(3x^2)^2} = \sqrt[3]{3x^2}$

● 同次根式，异次根式

根指数相同的根式叫做**同次根式**；根指数不同的根式叫做**异次根式**。利用根式的基本性质，可以把异次根式化为同次根式。

例 3 把下列各题中的根式化为同次根式：

(a) $\sqrt{a}$，$\sqrt[3]{a^2 b}$，$\sqrt[6]{a}$ (b) $\sqrt[3]{-5}$，$\sqrt[4]{3}$

解 (a) $\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}$

$\sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[6]{(a^2 b)^2} = \sqrt[6]{a^4 b^2}$

$\sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a}$

(b) $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5} = -\sqrt[12]{5^4} = -\sqrt[12]{625}$

$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$

习题 5b

约简下列根式中被开方数的指数及根指数 (1～8) :

1. $\sqrt[4]{x^{2}}$　　2. $\sqrt[3]{y^{9}}$　　3. $\sqrt[12]{x^{4}y^{6}}$

4. $\sqrt[6]{(-5)^{4}a^{4}b^{2}}$　　5. $\sqrt[4]{16x^{8}y^{12}}$　　6. $\sqrt[16]{a^{4m}b^{8n}}$

7. $\sqrt[8]{(x+1)^{6}(x-1)^{6}}$　　8. $\sqrt[6]{m^{4}+2m^{3}n+m^{2}n^{2}}$

把下列各题中的根式化为同次根式 (9～14) :

9. $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{2}$　　10. $\sqrt[3]{6y^{2}}$, $\sqrt[5]{y}$

11. $\sqrt{2mn}$, $\sqrt[5]{6m^{2}n}$, $\sqrt[10]{5m}$　　12. $\sqrt{x+y}$, $\sqrt[4]{x^{2}+y^{2}}$, $\sqrt[6]{(x+y)^{5}}$

13. $\sqrt[12]{2a^{5}}$, $\sqrt[9]{-3b}$　　14. $\sqrt[3]{-x^{2}}$, $\sqrt[6]{4xy}$, $\sqrt[9]{8x^{4}y^{5}}$

15. 已知 $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{5}=2.236$, 求下列各式之值准确至小数二位:

(a) $\sqrt[6]{8}$　　(b) $2\sqrt[4]{4}$　　(c) $\sqrt[4]{9}$

(d) $3\sqrt[8]{81}$　　(e) $\sqrt[8]{625}$　　(f) $4\sqrt[6]{125}$

5.3　分数指数与根式的性质

在初中课本里，我们学过正数的正分数指数幂的意

$$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^{m}=\sqrt[n]{a^{m}}\ (a>0,\ m,\ n\ \text{都是}$$

正数的负分数指数幂的意义是

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{m}}\ (a>0,\ m,\ n\ \text{都是正整数},\ n>1)。$$

还知道，幂的运算性质对于有理数指数幂也同样适用。

当 m, n 都是正整数时，根据幂的运算性质可得

$$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\qquad(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\qquad(a\geqslant 0,\ b>0)$$

$$(a^{\frac{1}{n}})^{m}=a^{\frac{m}{n}}\qquad(a\geqslant 0)$$

$$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}\qquad(a\geqslant 0)$$

按照分数指数幂的意义，可以把这几个式子表示成根式的形式，即

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0)$$
$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geqslant 0)$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (a \geqslant 0)$$

例 4 计算：

(a) $\sqrt[3]{64 \times 27}$　　(b) $\sqrt[3]{\frac{b}{a^3}}$

(c) $(\sqrt[3]{5a})^2$　　(d) $\sqrt{\sqrt[3]{x+y}}$

解 (a) $\sqrt[3]{64 \times 27} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{27} = 4 \times 3 = 12$

(b) $\sqrt[3]{\frac{b}{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{a}$

(c) $(\sqrt[3]{5a})^2 = \sqrt[3]{(5a)^2} = \sqrt[3]{25a^2}$

(d) $\sqrt{\sqrt[3]{x+y}} = \sqrt[6]{x+y}$

习题 5c

计算下列各式（1～21）：

1. $\sqrt{121 \times 64 \times 256}$
2. $\sqrt[3]{-343 \times 512 \times 729}$
3. $\sqrt{a^2b^4}$
4. $\sqrt[3]{a^9b^3t^{12}}$
5. $\sqrt[4]{16a^8b^{12}}$
6. $\sqrt[n]{a^{2n}b^nc^{3n}}$
7. $\sqrt{\frac{2}{81}}$
8. $\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$
9. $\sqrt{\frac{n}{49m^4}}$
10. $\sqrt[4]{\frac{a^3}{16b^4}}$
11. $\sqrt[3]{\frac{8x^3y^6}{27a^6b^9}}$
12. $\sqrt[n]{\frac{a^nb^{2n}}{c^{3n}d^n}}$
13. $(\sqrt[3]{ab})^2$
14. $(3\sqrt[5]{ab^2})^2$
15. $(m\sqrt[4]{5n})^3$

16. $\left(-\dfrac{x}{y}\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}\right)^3$　　17. $\sqrt{\sqrt[3]{ab}}$　　18. $\sqrt[3]{\sqrt{28}}$

19. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$　　20. $\sqrt[n]{\sqrt{2^n}}$　　21. $(\sqrt[3]{\sqrt{a}})^4$

5.4　根式的化简

● 根号里面和外面因式的移动

我们知道，

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\quad(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$$

利用这个式子可以把根式里被开方数中能开得尽方的因式用与根指数相同次数的算术根代替移到根号外面，也可以把根号外面的非负因式乘方以后（乘方的次数与根指数相同）移到根号里面。

例 5　把下列各式中根号内能开得尽方的因式适当改变后移到根号外，使被开方数的每一个因式的指数都小于根指数：

(a) $\sqrt{a^2b}$　　(b) $\sqrt[3]{a^6b^5}$

解　(a) $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}$
$=a\sqrt{b}$

(b) $\sqrt[3]{a^6b^5}=\sqrt[3]{a^6b^3b^2}$
$=\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{b^2}$
$=a^2b\sqrt[3]{b^2}$

例 6　把下列各式中根号外面的非负因式适当改变后移到根号里面：

(a) $x\sqrt[3]{y^2}$　　(b) $x^3\sqrt{y}$

解　(a) $x\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{y^2}$
$=\sqrt[3]{x^3y^2}$

(b) $x^3\sqrt{y}=\sqrt{x^6}\sqrt{y}$
$=\sqrt{x^6y}$

● 化去根号里的分母

我们知道，

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

利用这个式子可以把根号里面的分母化去。

例 7 化去根号里的分母：

(a) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{27a^3}}$　　　　(b) $\sqrt[3]{\dfrac{3b}{4a}}$

解 (a) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{27a^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{27a^3}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3a}$

(b) $\sqrt[3]{\dfrac{3b}{4a}}=\sqrt[3]{\dfrac{3b\cdot 2a^2}{4a\cdot 2a^2}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{6a^2b}}{\sqrt[3]{8a^3}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{6a^2b}}{2a}$

● 最简根式

如果一个根式符合以下三项要求：

第一，被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

第二，被开方数不含分母；

第三，被开方数的指数和根指数是互质数；

这样的根式就叫做**最简根式**。例如根式 $\sqrt[3]{a^2b}$ 是最简根式，而 $\sqrt[3]{a^4b}$，$\sqrt[4]{a^2b^2}$，$\sqrt[5]{\dfrac{b}{a^3}}$ 都不是最简根式。计算结果用根式表示时，根式应为最简根式。

例 8 把下列根式化为最简根式：

(a) $\sqrt{\dfrac{20a^2b}{c}}$　　　　(b) $\sqrt[6]{\dfrac{64y^4}{x^2}}$

解 (a) $\sqrt{\dfrac{20a^2b}{c}}=\sqrt{\dfrac{20a^2bc}{c^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{4a^2\cdot 5bc}}{c}$

$=\dfrac{2a\sqrt{5bc}}{c}$

(b) $\sqrt[6]{\dfrac{64y^4}{x^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{64x^4y^4}{x^6}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{64x^4y^4}}{x}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{64}\ \sqrt[6]{x^4y^4}}{x}$

$=\dfrac{2\sqrt[3]{x^2y^2}}{x}$

习题 5d

把下列各式中根号内能开得尽方的因式适当改变后移到根号外，使被开方数的每一个因式的指数都小于根指数（1～6）：

1. $\sqrt{8a^3}$　　2. $\sqrt{16t^5}$　　3. $\frac{1}{2}\sqrt{64p^3q^7}$

4. $\sqrt[3]{2t^4}$　　5. $\sqrt[3]{27a^5}$　　6. $\sqrt[3]{16a^4b^5}$

把下列各式中根号外面的非负因式适当改变后移到根号里面（7～12）：

7. $5\sqrt{3}$　　8. $4b\sqrt{bc}$　　9. $x^2\sqrt{y}$

10. $2\sqrt[3]{9}$　　11. $x^3\sqrt[3]{xy}$　　12. $4\sqrt[n]{a^{n-1}}$

化去根号内的分母（13～18）：

13. $\sqrt{\frac{n^2}{8m}}$　　14. $\sqrt{\frac{1}{8x^3}}$　　15. $\sqrt[3]{\frac{b^2}{9a^2}}$

16. $\sqrt[3]{\frac{a^2}{2x^4}}$　　17. $\frac{1}{x}\sqrt[n]{\frac{1}{a^{n-2}}}$　　18. $\sqrt[n]{\frac{3}{y^{2n+1}}}$

把下列根式化成最简根式（19～24）：

19. $\sqrt{\frac{16c^3}{9a^5b}}$　　20. $\sqrt[3]{\frac{b^4}{54a^7}}$　　21. $x^2\sqrt[3]{\frac{3y^8}{2x^2}}$

22. $\sqrt[3]{\frac{ax^3}{27m^2n^3}}$　　23. $n\sqrt[4]{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}}$　　24. $\sqrt[6]{\frac{4y^2}{x^4}}$

计算（25～30）：

25. $(\sqrt[3]{a^2b})^2$　　26. $(3\sqrt[5]{a^4b^3})^2$　　27. $(m\sqrt[4]{mn^2})^3$

28. $\left(-\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^3$　　29. $\sqrt[3]{2\sqrt{7}}$　　30. $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$

5.5 根式的加、减法

● 同类根式

几个根式化成最简根式后，如果被开方数都相同，根指数也都相同，这几个根式就叫做同类根式。

例 9 下列各式中，哪些是同类根式？

$$\sqrt{12x},\ \sqrt[3]{\frac{x}{9}},\ \sqrt[8]{81x^4},\ \sqrt[6]{9x^2},\ \sqrt[3]{3x^2},\ 3\sqrt{x}$$

解 $\sqrt{12x} = \sqrt{4\cdot 3x} = 2\sqrt{3x}$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3x}{27}} = \frac{\sqrt[3]{3x}}{3}$$

$$\sqrt[8]{81x^4} = \sqrt[8]{(3x)^4} = \sqrt{3x}$$

$$\sqrt[6]{9x^2} = \sqrt[6]{(3x)^2} = \sqrt[3]{3x}$$

所以 $\sqrt{12x}$ 和 $\sqrt[8]{81x^4}$ 是同类根式，$\sqrt[3]{\frac{x}{9}}$ 和 $\sqrt[6]{9x^2}$ 是同类根式。

根式的加减法

根式相加减，先把各个根式化成最简根式，再把同类根式合并。

例 10 计算 $\sqrt{8}+\sqrt[3]{54}-6\sqrt[3]{\frac{2}{27}}+3\sqrt{18}$

解 $\sqrt{8}+\sqrt[3]{54}-6\sqrt[3]{\frac{2}{27}}+3\sqrt{18}$

$$= 2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}+9\sqrt{2}$$

$$= 11\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

例 11 计算 $\left(7b\sqrt[3]{a}-6\sqrt{\frac{b^2x}{9}}\right)-\left(b^2\sqrt[3]{\frac{27a}{b^3}}-5\sqrt{a^2x}\right)$

解 $\left(7b\sqrt[3]{a}-6\sqrt{\frac{b^2x}{9}}\right)-\left(b^2\sqrt[3]{\frac{27a}{b^3}}-5\sqrt{a^2x}\right)$

$$= 7b\sqrt[3]{a}-6\sqrt{\frac{b^2x}{9}}-b^2\sqrt[3]{\frac{27a}{b^3}}+5\sqrt{a^2x}$$

$$= 7b\sqrt[3]{a}-2b\sqrt{x}-3b\sqrt[3]{a}+5a\sqrt{x}$$

$$= 4b\sqrt[3]{a}+(5a-2b)\sqrt{x}$$

习题 5e

1. 下列各式中，哪些是同类根式？

(a) $\sqrt[4]{64}$，$\sqrt[3]{54}$，$\sqrt{\dfrac{1}{32}}$，$\sqrt[6]{\dfrac{1}{16}}$

(b) $\sqrt{x^{3}}$，$\sqrt[3]{x^{4}}$，$\sqrt[6]{\dfrac{1}{x^{5}}}$，$\sqrt[6]{x^{3}}$，$\sqrt[6]{x^{2}}$

(c) $\sqrt{a^{3}b}$，$\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$，$\sqrt[6]{\dfrac{a^{3}}{b^{3}}}$，$\sqrt[6]{a^{4}b^{2}}$

(d) $\sqrt{\dfrac{a^{3}}{3b}}$，$\sqrt[3]{\dfrac{b}{4a}}$，$\sqrt[6]{27a^{9}b^{9}}$，$\sqrt[6]{4a^{4}b^{2}}$

计算下列各式（2～13）：

2. $\sqrt[3]{24}-\sqrt{98}+2\sqrt{50}-\sqrt[3]{81}$

3. $\sqrt{45}+\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{81}}-\sqrt{125}$

4. $\sqrt{12}-2\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}-4\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\sqrt[3]{16}$

5. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}+2\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt[3]{48}-\dfrac{1}{5}\sqrt{54}$

6. $\sqrt{24}-\sqrt[3]{0.5}-2\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}+\sqrt{\dfrac{6}{25}}$

7. $10\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}+\dfrac{1}{4}\sqrt{63}-\sqrt[3]{625}+\sqrt{\dfrac{1}{28}}-\sqrt[3]{40}$

8. $x\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\sqrt[3]{8y}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}+y\sqrt[3]{\dfrac{1}{y^{2}}}$

9. $\dfrac{2}{a}\sqrt[3]{a^{4}b}-3a\sqrt{\dfrac{b}{a}}+4b\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^{2}}}+2\sqrt{9ab}$

10. $\dfrac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{xy^{2}}}-x^{2}\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

11. $5\sqrt[3]{x^{4}y}-2y\sqrt{xy}-6x\sqrt[3]{xy}+y^{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+x^{2}\sqrt[3]{\dfrac{y}{x^{2}}}$

12. $2a\sqrt{27a}-\dfrac{b}{6}\sqrt[3]{54a^{4}}+6a\sqrt{\dfrac{3a}{4}}+2ab\sqrt[3]{\dfrac{a}{8}}+2\sqrt{3a^{3}}$

13. $\sqrt{8x^{3}y^{3}}-x\sqrt[3]{16x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{4x^{2}}}+\sqrt{\dfrac{2}{xy}}+\sqrt{2x}$

5.6　根式的乘、除法

● 根式的乘法

我们知道

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

反过来，

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

这就是说，同次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变。

例 12　计算下列各式：

(a)　$5\sqrt[3]{20} \times 2\sqrt[3]{2}$　　　　(b)　$\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

解　(a)　$5\sqrt[3]{20} \times 2\sqrt[3]{2} = 10\sqrt[3]{20 \times 2}$

$= 10\sqrt[3]{40}$

$= 20\sqrt[3]{5}$

(b)　$\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}} = \sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a} \cdot \dfrac{b}{a}}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{b^3}{a^2}}$

$= \dfrac{b}{a}\sqrt[3]{a}$

异次根式相乘，可以根据根式的基本性质，先把异次根式化成同次根式，再相乘。

例 13　计算下列各式：

(a)　$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}$　　　　(b)　$\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{y}{x}}$

解　(a)　$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{4}$

$= \sqrt[6]{108}$

(b) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{y}{x}} = \sqrt[12]{\dfrac{x^3}{y^3}} \cdot \sqrt[12]{\dfrac{y^2}{x^2}}$

$$= \sqrt[12]{\frac{x}{y}}$$

$$= \frac{1}{y}\sqrt[12]{xy^{11}}$$

● 根式的除法

我们知道 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

反过来 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

这就是说，同次根式相除，把被开方数相除，根指数不变。如果是异次根式相除，先把异次根式化成同次根式再相除。

例 14 计算下列各式:

(a) $2\sqrt[3]{2} \div 5\sqrt[3]{4}$ (b) $\sqrt{3a} \div \sqrt[3]{3a}$

解 (a) $2\sqrt[3]{2} \div 5\sqrt[3]{4} = \dfrac{2}{5}\sqrt[3]{\dfrac{2}{4}}$

$$= \frac{1}{5}\sqrt[3]{4}$$

(b) $\sqrt{3a} \div \sqrt[3]{3a} = \sqrt[6]{(3a)^3} \div \sqrt[6]{(3a)^2}$

$$= \sqrt[6]{3a}$$

● 利用分数指数进行根式的乘除运算

我们知道，根式可以写成分数指数幂的形式。进行根式乘除运算时，可以先将根式写成分数指数幂的形式，再利用幂的运算性质进行运算。

例 15 利用分数指数计算下列各式:

(a) $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[10]{a^7}}$

(b) $(2\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b})(-6\sqrt{a}\sqrt[3]{b}) \div (-3\sqrt[6]{a}\sqrt[6]{b^5})$

解 (a) $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[10]{a^7}} = \dfrac{a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{10}}}$

$$= a^{2+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}}$$

$$= a^{\frac{7}{5}}$$

$$= \sqrt[5]{a^7}$$

$$= a\sqrt[5]{a^2}$$

(b) $(2\sqrt[3]{a^2}\ \sqrt{b})(-6\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b}) \div (-3\sqrt[6]{a}\ \sqrt[6]{b^5})$

$$= (2a^{\frac{2}{3}}\ b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}) \div (-3a^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{5}{6}})$$

$$= 4a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\ b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$$

$$= 4ab^0$$

$$= 4a$$

学了根式的加、减、乘、除法后，就可以进行根式的混合运算了。

例 16 计算下列各式：

(a) $(2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2})(2\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})$

(b) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a^2})^2$

(c) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt{125}) \div \sqrt[4]{5}$

解 (a) $(2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2})(2\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})$

$$= (2\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} + 6\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[6]{8} + 6\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{9} - 6$$

$$= 4\sqrt[3]{9} + 4\sqrt[6]{72} - 6$$

(b) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a^2})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2} + (\sqrt[3]{a^2})^2$

$$= a - 2\sqrt[6]{a^7} + \sqrt[3]{a^4}$$

$$= a - 2a\sqrt[6]{a} + a\sqrt[3]{a}$$

(c) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt{125}) \div \sqrt[4]{5} = \sqrt[3]{5} \div \sqrt[4]{5} - \sqrt{5^3} \div \sqrt[4]{5}$

$$= \sqrt[12]{5^4} \div \sqrt[12]{5^3} - \sqrt[4]{5^6} \div \sqrt[4]{5}$$

$$= \sqrt[12]{5} - \sqrt[4]{5^5}$$

$$= \sqrt[12]{5} - 5\sqrt[4]{5}$$

习题 5f

计算下列各式（1～30）：

1. $3\sqrt{5}\times 2\sqrt{10}$

2. $\sqrt{\frac{1}{8}}\times\sqrt{\frac{2}{3}}$

3. $-\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{12}$

4. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\times\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

5. $\sqrt[3]{a^2b^2}\cdot\sqrt[3]{ab^2}$

6. $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

7. $\sqrt[4]{32a^2b}\times\sqrt[4]{2a^2b^3}$

8. $\sqrt[n]{a^{n-2}b}\cdot\sqrt[n]{\frac{a^2}{b^{n-1}}}$

9. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}$

10. $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

11. $\sqrt{\frac{a}{b^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{b^5}{a}}$

12. $\sqrt[6]{x^5y^4}\cdot\sqrt[4]{x^3y^2}$

13. $\sqrt{\frac{x}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2x}}$

14. $\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\sqrt[6]{xy^4}$

15. $\sqrt[4]{\frac{4}{a}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a}{8}}$

16. $\sqrt[n]{a^{n-1}b}\cdot\sqrt[2n]{a^2b^{2n-2}}$

17. $\sqrt{18}\div\sqrt{2}$

18. $\sqrt{\frac{1}{7}}\div\sqrt{\frac{1}{49}}$

19. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\div\sqrt[3]{4}$

20. $\sqrt[3]{ax}\div\sqrt[3]{ax^2}$

21. $\sqrt[3]{9}\div\sqrt{3}$

22. $\sqrt{\frac{1}{2}}\div\sqrt[3]{4}$

23. $2\sqrt{a}\div 6\sqrt[4]{a}$

24. $\sqrt{\frac{x}{y}}\div\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}$

25. $(2\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt{3})$

26. $(\sqrt{2}-\sqrt[6]{5})(2\sqrt{2}+\sqrt[6]{5})$

27. $(2\sqrt{x}+3\sqrt[4]{y})(2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{y})$

28. $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{\frac{1}{a}})^2$

29. $(\sqrt{3}-\sqrt[4]{243})\div 2\sqrt[3]{3}$

30. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2})(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2})\div(-\sqrt[4]{a^3})$

利用分数指数计算下列各式（31～40）：

31. $2\times\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}$

32. $\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$

33. $\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a}\times\sqrt[8]{a^5}$

34. $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a^5}\div\sqrt{a}$

35. $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x}}$

36. $4\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}\div\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}\right)$

37. $\dfrac{-3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{b^3}c^2}{9\sqrt[3]{a}\sqrt{b}\sqrt{c^3}}$

38. $-15\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[4]{c^3}\div25\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[6]{c}$

39. $(\sqrt[3]{x^4}\sqrt{y^3}-\sqrt{x})\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}$

40. $2\sqrt[3]{x^2}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{x}-2\sqrt[5]{x^4}\right)$

5.7 有理化因式及有理化分母

可以看到，两个含有根式的代数式相乘，它们的积有时不含有根式。例如:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\times\sqrt{2} &= 2\\
(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) &= a^2-b\\
\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2} &= a\\
(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) &= a-b\\
(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) &= a+b\\
(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) &= a-b
\end{aligned}$$

两个含有根式的代数式相乘，如果它们的积不含有根式，我们说这两个代数式互为**有理化因式**（rationalizing factors）。在上面的例子中，等号左边的两个因式，都是互为有理化因式。

【注】一个根式的有理化因式可以有无数多个，例如，$\sqrt{2}$ 的有理化因式可以有 $\sqrt{2}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{32}$ ……等。通常，我们都是取最简单的有理化因式。

例 17 求下列各式的有理化因式:

(a) $3\sqrt{7}$

(b) $3-2\sqrt{3}$

(c) $2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$

(d) $\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3y}$

解　(a) 因为 $3\sqrt{7}\times\sqrt{7}=21$，

所以 $3\sqrt{7}$ 的有理化因式是 $\sqrt{7}$。

(b) 因为 $(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})=-3$，

所以 $3-2\sqrt{3}$ 的有理化因式是 $3+2\sqrt{3}$。

(c) 因为 $(2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(4\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=26$，

所以 $2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ 的有理化因式是 $4\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$。

(d) 因为 $(\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3y})(\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{6xy}+\sqrt[3]{9y^2})=2x-3y$，

所以 $\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3y}$ 的有理化因式是 $\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{6xy}+\sqrt[3]{9y^2}$。

我们知道，把分母中的根号去掉的过程叫做分母有理化。把分母有理化时，实际上是把分子和分母都乘以分母的有理化因式，从而使分母不含根号（有时也可利用约分，约去分母中的根式）。

例 18　把下列各式的分母有理化：

(a) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}}$　　(b) $\dfrac{\sqrt{5}\,a}{\sqrt{20a}}$

(c) $\dfrac{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}$　　(d) $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

解　(a)
$$\frac{1}{2\sqrt[3]{5}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{5^2}}{2\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{25}}{10}$$

(b)
$$\frac{\sqrt{5}\,a}{\sqrt{20a}}=\frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{a})^2}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{2}$$

(c)
$$\frac{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}=\frac{(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})^2}{(a\sqrt{x}-b\sqrt{y})(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})}=\frac{a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y}{a^2x-b^2y}$$

$$(d)\quad \frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{[(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}][(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}]}$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})^2-3}$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{2}$$

对于根式的除法，可以先写成分式的形式，然后通过有理化分母进行运算。

例 19 计算：

(a) $(2\sqrt[3]{7}-4\sqrt[3]{2})\div\sqrt[3]{3}$

(b) $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})\div(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$

解 (a) $(2\sqrt[3]{7}-4\sqrt[3]{2})\div\sqrt[3]{3} = \dfrac{2\sqrt[3]{7}-4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

$$= \frac{(2\sqrt[3]{7}-4\sqrt[3]{2})\times\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt[3]{63}-\frac{4}{3}\sqrt[3]{18}$$

(b) $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})\div(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}$$

$$= \frac{x+2\sqrt[3]{x^2y}+2\sqrt[3]{xy^2}+y}{x+y}$$

习题 5g

求下列各式的有理化因式（1～16）：

1. $\sqrt{40}$

2. $\sqrt[3]{x}$

3. $\sqrt[4]{a^3 b}$

4. $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

5. $\sqrt{2a} + \sqrt{3b}$

6. $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$

7. $\sqrt[3]{2} - 1$

8. $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}$

把下列各式的分母有理化（9～22）：

9. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$

10. $\dfrac{x^2}{\sqrt{4xy}}$

11. $\dfrac{2n}{3\sqrt{n}}$

12. $\dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{a+b}}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$

14. $\dfrac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$

15. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

16. $\dfrac{1}{x - \sqrt{1+x^2}}$

17. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

18. $\dfrac{x + 2\sqrt{2xy} + 2y}{\sqrt{x} + \sqrt{2y}}$

19. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} + 1}$

20. $\dfrac{6}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{4}}$

21. $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}$

22. $\dfrac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

计算（23～30）：

23. $6\sqrt{3} \div 3\sqrt{6}$

24. $\sqrt{3} \div (4 - 3\sqrt{5})$

25. $(14 + 6\sqrt{5}) \div (3 + \sqrt{5})$

26. $(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}) \div (\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})$

27. $2\sqrt[3]{3} \div 3\sqrt[3]{2}$

28. $\sqrt[3]{2} \div (\sqrt[3]{2} - 1)$

29. $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2b}) \div (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{2ab} + \sqrt[3]{4b^2})$

30. $(\sqrt{x} - 4) \div (\sqrt[4]{x} - 2)$

5.8 无理方程式

我们来看下面的方程式:

$$\sqrt{2x^2+7x}-2=x$$

这个方程式的未知数 x 含在根号内。像这样根号内含有未知数的方程式，叫**做无理方程式** (irrational equation)。

$$x-\sqrt{x-1}=3$$

$$\sqrt{2x-4}+1=\sqrt{x+5}$$

$$\sqrt{2x-3}+\frac{2}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{5x-1}$$

等都是无理方程式。但是像

$$x^2+2\sqrt{2}x-1=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{x-2}=1$$

等都不是无理方程式。

下面我们研究无理方程式的解法。

例如，解方程式 $\sqrt{2x^2+7x}-2=x$

解这个方程式，可以先移项，把 $\sqrt{2x^2+7x}$ 放在方程式的一边，得

$$\sqrt{2x^2+7x}=x+2$$

两边平方，去掉根号，得 $\quad 2x^2+7x=x^2+4x+4$

$$x^2+3x-4=0$$

$$(x-1)(x+4)=0$$

$$x=1 \quad 或 \quad x=-4$$

检验：把 $x=1$ 代入原方程式，左边 $=\sqrt{2(1)^2+7(1)}-2$

$=3-2$

$=1$

右边 $=1$

所以 $x=1$ 是原方程式的根；

把 $x=4$ 代入原方程式，左边 $=\sqrt{2(-4)^2+7(-4)}-2$

$=2-2$

$=0$

右边 $=-4$

所以 $x=-4$ 是增根

因此原方程式的根是 $x=1$。

从上例可知，在解无理方程式时，将方程式的两边都乘方相同的次数，把无理方程式变形为有理方程式，这样的变形有可能产生增根。因此，解无理方程式时，必须把变形后得到的有理方程式的根，代入原方程式进行检验，如果适合，就是原方程式的根，如果不适合，就是增根。

例 20 解方程式 $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$。

解 移项，得 $\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}$

两边平方，得 $2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5$

即 $x-10=2\sqrt{x+5}$

两边再平方，得 $x^2-20x+100=4(x+5)$

即 $x^2-24x+80=0$

$$(x-4)(x-20)=0$$

$$x=4 \quad 或 \quad x=20$$

检验：把 $x=4$，$x=20$ 分别代入原方程式，可知 $x=4$ 是增根，$x=20$ 是原方程式的根。

因此原方程式的根是 $x=20$。

例 21 解方程式 $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$。

解 这个方程式可写成

$$2x^2+3x+9-5\sqrt{2x^2+3x+9}-6=0$$

设 $\sqrt{2x^2+3x+9}=y$，那么原方程式可变为

$$y^2-5y-6=0$$

$$(y+1)(y-6)=0$$

$$y=-1 \quad 或 \quad y=6$$

当 $y=-1$ 时， $\sqrt{2x^2+3x+9}=-1$

根据算术根的定义，$\sqrt{2x^2+3x+9}$ 不可能等于一个负数，

所以方程式 $\sqrt{2x^2+3x+9}=-1$ 无解。

当 $y=6$ 时，$\sqrt{2x^2+3x+9}=6$

两边平方，得 $2x^2+3x+9=36$

即 $2x^2+3x-27=0$

$$(x-3)(2x+9)=0$$

$$x=3 \text{ 或 } x=-\frac{9}{2}$$

检验：把 $x=3$，$x=-\frac{9}{2}$ 分别代入原方程式都适合。

∴ 原方程式的根是 $x=3$，$x=-\frac{9}{2}$。

习题 5h

解下列无理方程式（1～27）：

1. $\sqrt{2x+3}=x$
2. $x+\sqrt{x-2}=2$
3. $\sqrt{x^2-5}=x-1$
4. $2(\sqrt{x-3}+3)=x$
5. $\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x-3}=0$
6. $\sqrt{1-x}+\sqrt{12+x}=5$
7. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}=3$
8. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{3}$
9. $\sqrt{x+7}-\sqrt{x}=1$
10. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-14}=5$
11. $\sqrt{3(2x+1)}+\sqrt{2(3x-1)}=5$
12. $2\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-2}=3$
13. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$
14. $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$
15. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x+4}=0$
16. $\sqrt{x+5}+\dfrac{3}{\sqrt{x+5}}=\sqrt{3x+4}$
17. $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=\dfrac{5}{2}$
18. $\sqrt{x^2+8x}+x^2+8x=12$
19. $x^2-3x-\sqrt{x^2-3x+5}=1$
20. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$
21. $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\dfrac{3}{2}(x+1)$
22. $(x-1)(x+4)+\sqrt{(x+1)(x+2)}=0$

23. $(x+3)(x-3)+3\sqrt{x^2+1} = 0$

24. $\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{x^2-3x-3} = 2$

25. $\sqrt{2x^2-17x+7}+\sqrt{2x^2-17x-5} = 6$

5.9 二次不尽根数的平方根

如果正数 a 的二次方根是无理数，则 $\sqrt{a}$ 叫做**二次不尽根数**（quadratic surd），如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ 等。

我们知道，

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 &= 3+2\sqrt{3\times 2}+2\\ &= 5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

也就是说，

$$5+2\sqrt{6} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

两边开平方，取算术平方根，得到

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

可以看出，左式中的 5 是右式中的 3 与 2 之和，6 是 3 与 2 之积。

一般上，对于 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$，如果能找到两个正数 x 与 y，使得，

$$\begin{cases}x+y = a\\ xy = b\end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned}\sqrt{a+2\sqrt{b}} &= \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\\ &= \sqrt{x}+\sqrt{y}\end{aligned}$$

例 22 计算：

(a) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$　　(b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(c) $\sqrt{61+24\sqrt{5}}$　　(d) $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{10}}$

解　(a) $$\begin{aligned}\sqrt{7+2\sqrt{10}} &= \sqrt{5+2\sqrt{5\times 2}+2}\\ &= \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}\\ &= \sqrt{5}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

(b) $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

(c) $\sqrt{61+24\sqrt{5}} = \sqrt{61+2\sqrt{5\times 12^2}}$

$$= \sqrt{61+2\sqrt{720}}$$

$$= \sqrt{16+2\sqrt{16\times 45}+45}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{16}+\sqrt{45})^2}$$

$$= \sqrt{16}+\sqrt{45}$$

$$= 4+3\sqrt{5}$$

(d) $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{10}} = \sqrt{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}$

$$= \sqrt{\sqrt{2}\,(3+\sqrt{5})}$$

$$= \sqrt{\sqrt{2}}\times\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt[4]{2}\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1)$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{200}+\sqrt[4]{8}}{2}$$

一般上，对于 $\sqrt{a-2\sqrt{b}}$，如果能找到两个正数 x 与 y，使得

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ xy &= b \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} \sqrt{a-2\sqrt{b}} &= \sqrt{x+y-2\sqrt{xy}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} \\ &= \sqrt{x}-\sqrt{y} \quad (x>y) \end{aligned}$$

例 23 计算：

(a) $\sqrt{11-2\sqrt{30}}$　　(b) $\sqrt{4-\sqrt{7}}$

(c) $\sqrt{33-18\sqrt{2}}$　　(d) $\sqrt{6+\sqrt{11}}+\sqrt{6-\sqrt{11}}$

解　(a)
$$\begin{aligned} \sqrt{11-2\sqrt{30}} &= \sqrt{6-2\sqrt{6\times 5}+5} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{6}-\sqrt{5} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \sqrt{4-\sqrt{7}} &= \sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{7-2\sqrt{7}+1}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \sqrt{33-18\sqrt{2}} &= \sqrt{33-2\sqrt{2\times 9^2}} \\ &= \sqrt{33-2\sqrt{162}} \\ &= \sqrt{27-2\sqrt{27\times 6}+6} \\ &= \sqrt{(\sqrt{27}-\sqrt{6})^2} \\ &= \sqrt{27}-\sqrt{6} \\ &= 3\sqrt{3}-\sqrt{6} \end{aligned}$$

(d) $\sqrt{6+\sqrt{11}}+\sqrt{6-\sqrt{11}}$

$$= \sqrt{\frac{12+2\sqrt{11}}{2}}+\sqrt{\frac{12-2\sqrt{11}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{11+2\sqrt{11}+1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{11-2\sqrt{11}+1}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{22}$$

习题 5i

计算（1～24）：

1. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$
2. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$
3. $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$
4. $\sqrt{5+\sqrt{21}}$
5. $\sqrt{10+\sqrt{91}}$
6. $\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$
7. $\sqrt{37+12\sqrt{7}}$
8. $\sqrt{52+16\sqrt{3}}$
9. $\sqrt{\sqrt{45}+\sqrt{40}}$
10. $\sqrt{48+10\sqrt{23}}$
11. $\sqrt{\sqrt{89+28\sqrt{10}}}$
12. $\sqrt{\sqrt{62+14\sqrt{13}}}$
13. $\sqrt{13-2\sqrt{22}}$
14. $\sqrt{17-2\sqrt{52}}$
15. $\sqrt{6-\sqrt{35}}$
16. $\sqrt{8-\sqrt{15}}$
17. $\sqrt{91-40\sqrt{3}}$
18. $\sqrt{66-24\sqrt{6}}$
19. $\sqrt{55-8\sqrt{39}}$
20. $\sqrt{50-4\sqrt{46}}$
21. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
22. $\sqrt{7+\sqrt{33}}+\sqrt{7-\sqrt{33}}$
23. $\sqrt{\frac{1}{7+4\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{1}{7-4\sqrt{3}}}$
24. $\sqrt{\sqrt{68-48\sqrt{2}}}$

总复习题 5

1. 根据下列条件计算 $a+\sqrt[6]{(a-1)^6}$：

   (a) $a\geqslant 1$　　　　(b) $a<1$

2. 指出下面的推导错在哪里：

   (a) 因为 $(-3)^4=3^4$

   所以 $\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt[4]{3^4}$

   因为 $\sqrt[4]{(-3)^4}=-3$，$\sqrt[4]{3^4}=3$

   所以 $-3=3$

   (b) 因为 $-2\sqrt{3}=\sqrt{(-2)^2\times 3}$

   $=\sqrt{12}$

   $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

   所以 $-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

   $-2=2$

把下列各式化为最简根式（3～11）：

3. $\sqrt{162a^4}$　　4. $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$　　5. $\sqrt[4]{x^6y^6}$

6. $\sqrt[n]{a^{2n+1}b}$　　7. $\sqrt{\frac{2}{3ab^2}}$　　8. $x^2\sqrt[3]{\frac{y}{4x}}$

9. $\sqrt[4]{\frac{y^5}{x^5}}$　　10. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$　　11. $\sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x-1}}$

计算（12～28）：

12. $(\sqrt{24}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{2}{3}})-(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt{\frac{1}{6}})$

13. $7\sqrt[3]{a}+5\sqrt{a^2x}-\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^2}}-6\sqrt{\frac{b^2x}{9}}$

14. $\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt[3]{3})$　　15. $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[6]{a^5})^2$

16. $(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})(2\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})$　　17. $(\sqrt{6}+\sqrt[3]{2})\div\sqrt[3]{3}$

18. $(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}})\div\sqrt{a}$　　19. $\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot a\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[4]{a^3}}$

20. $(2\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b})(3\sqrt{a}\sqrt[6]{b^5})\div(-6\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{b^2})$

21. $(5\sqrt{3}+2\sqrt{5})\div(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$

22. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})\div(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})\quad(a>b)$

23. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

24. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$

25. $\dfrac{\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3y}}{\sqrt[3]{4x^2}-\sqrt[3]{6xy}+\sqrt[3]{9y^2}}$

26. $\dfrac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

27. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

28. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$

解下列方程式（29～38）：

29. $\sqrt{3x+1}-1=\sqrt{2x-1}$

30. $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$

31. $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}=-2$

32. $\sqrt{\dfrac{5}{7}x+4}-\sqrt{x-3}=1$

33. $x^2+x+3+\sqrt{x^2+x+5}=28$

34. $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$

35. $\sqrt{1+\dfrac{9}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{x+9}}=2.05$

36. $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{2x-1}}=\dfrac{3}{2}$

37. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=2$

38. $\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-1}=2$

计算（39～43）：

39. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$

40. $\sqrt{18-6\sqrt{5}}$

41. $\sqrt{4+\sqrt{15}}$

42. $\sqrt{7-\sqrt{13}}$

43. $\sqrt{30+12\sqrt{6}}+\sqrt{30-12\sqrt{6}}$

6 角的形成及其单位

6.1 角

● 角的定义

任何一个角都可以看成是由一条线段绕着它的一个端点旋转而成的。如图 6－1，一条线段 OA 由原来的位置绕着它的端点 O 旋转到另一位置 OB，就形成角 α。旋转开始时的线段 OA 叫做角 α 的**始边**（initial side），旋转终止时的线段 OB 叫做角 α 的**终边**（terminal side），线段的端点 O 叫做角 α 的**顶点**（vertex）。

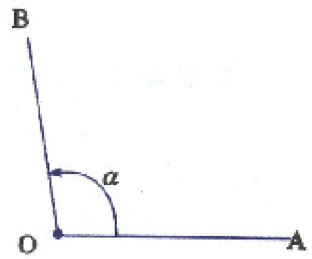


图 6–1

● 角的单位

角的量度单位通常采用下列两种：

(一) 角度制（degree measure）

把一个圆圈 360 等分，每一等分所对的圆心角叫做 **1 度**（degree）的角，记作 $1°$。把一度的角所对的弧 60 等分，每一等分所对的圆心角叫做 **1 分**（minute）的角，记作 $1'$。把一分的角所对的弧分成 60 等分，每一等分所对的圆心角叫做 **1 秒**（second）的角，记作 $1''$。所以

$$1\text{周角} = 360°$$
$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$

这种用度、分、秒来表示角的大小的方法，叫做角度制或**六十分制**（sexagesimal measure）。

(二) 弧度制（radian measure）

弧度制是在高等数学和其他许多科学研究与应用中经常用到的一种量度角的制度。

我们把等于半径长的圆弧所面对的圆心角叫做 1 弧度（radian）的角，或叫做 1 弪的角．如图 6–3 中，$\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 r，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是一弧度的角。

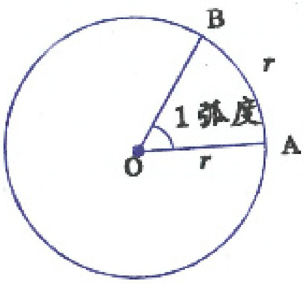


图 6–3

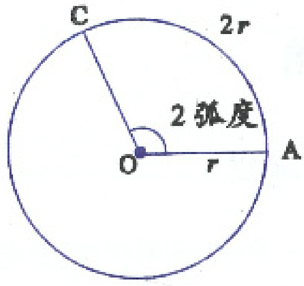


图 6–4

在图 6–4 中，圆心角 AOC 所对的 $\overset{\frown}{AC}$ 的长 $l=2r$，所以 $\angle AOC$ 的弧度数是

$$\frac{l}{r} = \frac{2r}{r} = 2\ (\text{弧度})$$

由于圆周长为 $2\pi r$，所以一周角的弧度数是

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ (\text{弧度})$$

● 弧度与角度的换算

一个角，用"弧度"为单位来度量与"度"为单位来度量，所得的量数是不同的(除零角外)．下面我们讨论它们之间的换算关系。

我们知道，一周角等于 360°，而在弧度制中，一周角等于 2π 弧度，所以

$$2\pi = 360^\circ \quad \text{弧度}$$

即

$$\boxed{\pi = 180^\circ \quad \text{弧度}}$$

由此可得：

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{弧度} \approx 0.01745\ \text{弧度}$$

$$1\ \text{弧度} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$$

例 1 将 $48^\circ 51'$ 化成弧度（答案准确到小数第二位）。

解 $$48^\circ 51' = 48\frac{51}{60} \times \frac{\pi}{180} \text{ 弧度}$$
$$= 0.85 \text{ 弧度}$$

例 2 将 1.53 弧度化成度（答案准确到分）。

解 $$1.53 \text{ 弧度} = 1.53 \times \frac{180^\circ}{\pi}$$
$$= 87^\circ 40'$$

例 3 把 $67^\circ 30'$ 化成弧度。

解 $$67^\circ 30' = 67^\circ 30' \times \frac{\pi}{180^\circ}$$
$$= \frac{3}{8}\pi \text{ 弧度。}$$

例 4 把 $\frac{3}{5}\pi$ 弧度化成度。

解 $$\frac{3}{5}\pi \text{ 弧度} = \frac{3}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi}$$
$$= 108^\circ$$

【注】用弧度表示角时，单位“弧度”通常省略不写，例如，我们通常写成 $90^\circ = \frac{\pi}{2}$。但如果用度表示角时，其单位不能省略。

下面是一些特殊角的度数和弧度数的对应表：

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

习题 6a

1. 一弧长和半径的比是3∶1，问此弧所对的圆心角是多少弧度？
2. 将下列各弧度化成度：

   (a) $\frac{5\pi}{24}$　　(b) $\frac{4\pi}{3}$　　(c) $\frac{7\pi}{6}$　　(d) $\frac{11\pi}{9}$
3. 将下列各弧度化为度（准确到分）：

   (a) 1.33　　(b) 2.51　　(c) 0.89　　(d) 1.11
4. 将下列各度化为弧度（准确到小数第二位）：

   (a) $32°13'$　　(b) $183°42'$　　(c) $93°11'$　　(d) $41°22'$
5. 将下列各度化为弧度（以 π 表示）：

   (a) $240°$　　(b) $300°$　　(c) $210°$　　(d) $22°30'$
6. 五点钟时，两针所成较小的角是多少度？多少弧度？
7. 一齿轮有 40 个齿，如果它旋转了

   (a) 30 个齿　　(b) 40 个齿　　(c) 70 个齿

   相等于旋转了多大的角？分别以弧度和角度表示。

6.2 弧长与扇形面积

● 弧长的公式

在初中，我们学过，在半径为 r，圆心角为 θ 的圆中，如果 θ 是以角度表示，则圆心角 θ 所对的弧长 l 的计算公式为：

$$l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r \quad (\theta \text{ 为角度})$$

如果 θ 是以弧度表示，又 $360° = 2\pi$，

则
$$l = \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r$$

∴
$$l = \theta r \qquad (\theta \text{ 为弧度})$$

例 5 在半径为 5 cm 的圆中，求圆心角为周角的 $\frac{2}{3}$ 的角所对圆弧的长（准确到 1 cm）。

解
$$\theta = 2\pi \times \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

所求弧长为
$$l = \theta r = \frac{4\pi}{3} \times 5 = 21\,(\text{cm})$$

例 6 一时钟的长针为 7 公分长，求 20 分钟后，其尖端所移动的距离。

解 钟面一周分为 60 格，每一分是一格，每一格所张的角是 $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$。20 分钟后，长针移动 20 格，所以长针所旋转的角是 $6^\circ \times 20 = 120^\circ$。

$\therefore$ 长针尖端移动了：
$$\frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}\text{（公分）}$$

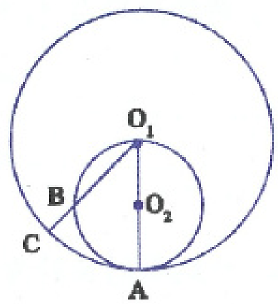
习题 6b

1. 一圆的半径为 4 公尺，圆心角为 80°，求所对的弧长。
2. 已知长为 50 cm 的弧含有 200° 的角，求这段弧所在圆的半径（答案准确至 0.1 cm）。
3. 已知圆的半径 $r = 46$ cm，求 $18^\circ 31'$ 的圆心角所对的弧长 l（准确到 1 mm）。
4. 有一段弯道是圆弧形的，道长是 12 m，弧所对的圆心角是 81°，求这段弧的半径 r（准确到 0.1 m）？
5. 火车机车上的主动轮直径为 1.2 米，主动轮每分转 400 转，火车每小时行几公里（准确到 1 公里）？

6. 飞轮的直径是 1.2 公尺，若它每分钟转 300 次，求
   (a) 飞轮每秒钟转过的圆心角；
   (b) 飞轮圆周上一点每秒钟所转过的弧长；
   (c) 飞轮旋转一周所需时间。

7. 某人循一圆形跑道作等速跑步，每分钟经过的弧所对的圆心角是 $2\frac{6}{7}$ 弧度，若此人于 14 分 40 秒内共跑了 5280 公尺，试求跑道的半径。

8. 如右图，大圆 O_1 的半径 O_1A 是小圆 O_2 的直径，O_1 的半径 O_1C 交 O_2 于点 B。求证：$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{AC}$ 的长相等。



9. 用度和弧度表示的弧长公式分别计算在半径为 1 m 的圆中，60° 的圆心角所对的圆弧的长。

10. 已知在半径为 120 mm 的圆上的一条弧的长是 144 mm，求这条弧所对的圆心角的弧度数和度数。

● 扇形面积

在初中，我们学过，在半径为 r（图 6–6），圆心角为 $\theta°$ 的圆中，如果 θ 以角度表示，则圆心角为 θ 的扇形面积的计算公式是：

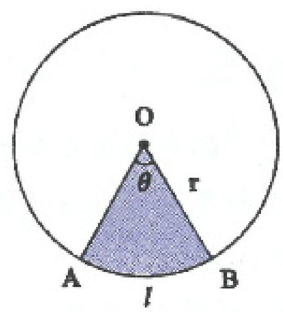


图 6–6

$$S = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2 \quad (\theta \text{ 为角度})$$

如果 θ 是以弧度表示，又 $360° = 2\pi$，

则
$$S = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2$$
$$= \frac{\theta}{2} r^2$$

即
$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad (\theta \text{ 为弧度})$$

而 $l = r\theta$，代入以上公式，

得
$$S = \frac{1}{2}lr$$

例 7 求半径为 40 cm，圆心角为 $48°42'$ 的扇形面积（准确到 0.01 cm^2）。

解 扇形面积为

$$S = \frac{48°42'}{360°} \times \pi \times 40^2$$
$$= 679.98\ (cm^2)$$

例 8 在一半径为 6 cm 的圆中，一扇形的面积为 $5\pi\ cm^2$，求此扇形的圆心角及周长。

解 将 $r = 6$ cm，$S = 5\pi\ cm^2$ 代入公式

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

得
$$5\pi = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta$$

所以
$$\theta = \frac{10\pi}{36}$$
$$= \frac{5\pi}{18}$$

扇形弧长
$$l = \theta r$$
$$= \frac{5\pi}{18} \times 6$$
$$= \frac{5\pi}{3}\ (cm)$$

所以，扇形的周长为

$$l + 2r = \frac{5\pi}{3} + 2 \times 6$$
$$= \frac{5\pi}{3} + 12\ (cm)$$

答：扇形的圆心角为 $\frac{5\pi}{18}$ 弧度，周长为 $\left(\frac{5\pi}{3} + 12\right)$ cm

例 9 如图 6–7，已知正三角形 ABC 的边长为 a，分别以 A、B、C 为圆心，以 $\frac{a}{2}$ 为半径的圆相切于点 P、Q、R。求 $\overset{\frown}{PQ}$、$\overset{\frown}{QR}$、$\overset{\frown}{RP}$ 围成的图形（图中阴影部分）的面积 S。

解

$$\begin{aligned}
S &= S_{\triangle ABC} - 3S_{扇形APR} \\
&= \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a - 3\left(\frac{1}{2}r^2\theta\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - 3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi a^2}{8} \\
&= \frac{2\sqrt{3}-\pi}{8}a^2
\end{aligned}$$

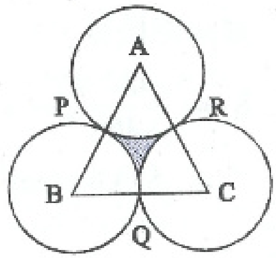


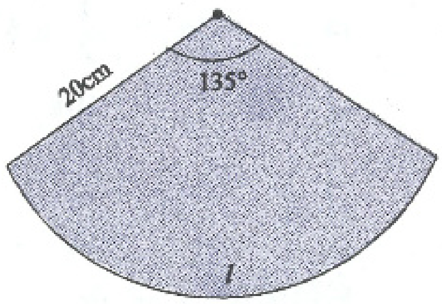
图 6–7

例 10 半径是 20 cm，圆心角是 135° 之扇形折成一空心的直圆锥。求这圆锥的底面半径及其高。

解 扇形的弧长 $l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$= \frac{135}{360} \times 2 \times \pi \times 20$$

$$= 15\pi \text{ (cm)}$$



l 为圆锥底面的圆周长，

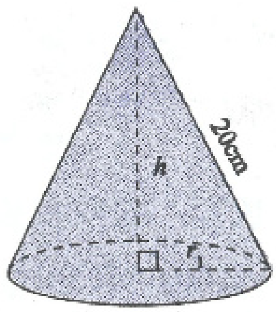
$\therefore \quad 15\pi = 2\pi r$

$\quad r_1 = 7.5 \text{ (cm)}$

又 $\quad h^2 = r^2 - r_1^2$

$\therefore \quad h = \sqrt{20^2 - 7.5^2}$

$\quad = 18.54 \text{ (cm)}$



答：圆锥的底面半径为 7.5 cm，高为 18.54 cm。

例 11 如图 6–8，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 的圆心都是 O，$AA' = d$，$\overset{\frown}{AB}$ 的长是 l，$\overset{\frown}{A'B'}$ 的长是 l'，求证：

(a) $\angle O = \dfrac{l - l'}{d}$ 弧度

(b) $S_{AA'B'B} = \dfrac{1}{2}(l + l')d$

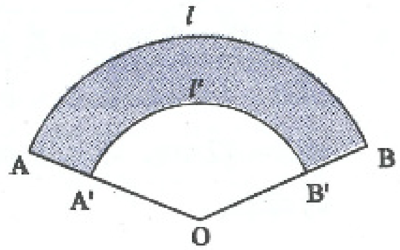


图 6–8

解 (a) 设 $\angle O = \theta$

$\because \quad l = OA\,\theta$

$l' = OA'\,\theta$

$\therefore \quad l - l' = (OA - OA')\theta$

即 $\quad l - l' = d\theta$

$\therefore \quad \theta = \dfrac{l - l'}{d}$

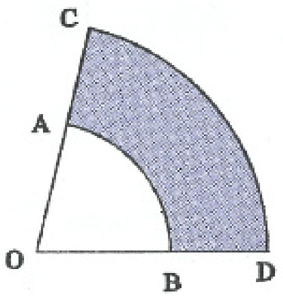
(b)
$$\begin{aligned} S_{AA'B'B} &= S_{\text{扇形 }OAB} - S_{\text{扇形 }OA'B'} \\ &= \frac{1}{2}OA^2\theta - \frac{1}{2}OA'^2\theta \\ &= \frac{1}{2}(OA - OA')(OA + OA')\theta \\ &= \frac{1}{2}d(l + l') \end{aligned}$$

习题 6c

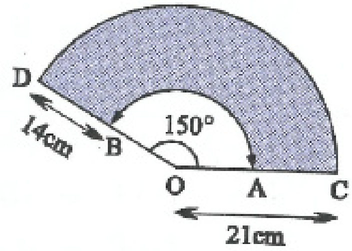
1. 已知扇形的圆心角是 150°，半径为 24 cm，求扇形的面积。
2. 一半径为 4 公分的圆，其扇形面积为 6π 平方公分，求此扇形的圆心角及周长。
3. 一扇形的半径为 10 cm，弧长为 20 cm，求扇形的圆心角和面积。
4. 一个扇形的半径等于一个圆的半径的 2 倍，且面积相等，求这个扇形的圆心角。

5. 一圆的半径是 14 公分，已知此圆一扇形的周长恰好等于此圆周长的一半，试求这扇形的圆心角及面积。

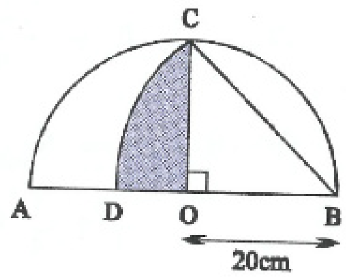
6. 如右图，两个同心圆被两条半径截得的 $\overset{\frown}{AB} = 6\pi$ cm，$\overset{\frown}{CD} = 10\pi$ cm，又 AC = 12 cm，求阴影部分 ABDC 的面积。



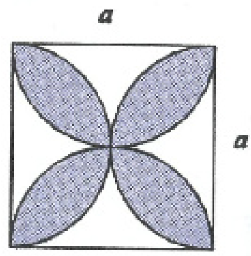
7. 在右图中，O 为圆心，OAB 与 OCD 均为扇形，且 $\angle COD = 150°$，OC = 21 cm，BD = 14 cm，求阴影部分的面积及其周长。



8. 在右图中，半径 OC 与直径 AB 互相垂直。以 B 为圆心，BC 为半径，作弧交 AB 于 D。若圆 ACB 之半径为 20 cm，求阴影部分的面积及其周长。



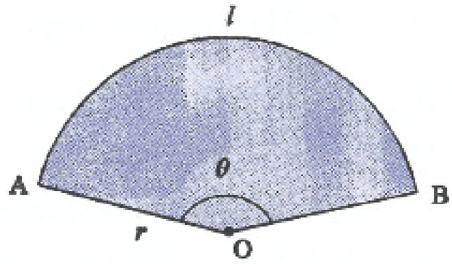
9. 如右图，正方形的边长为 a，以各边为直径在正方形内画半圆，求所围成的图形（阴影部分）的面积。



10. 一圆的半径是 10 公分，弧长是 x 公分，若此段弧长与二半径所围成的扇形面积是 22 平方公分，求 x 之值。若另一圆的周长恰好等于此段弧长，求此圆之半径。

11. 设圆的半径为 r 公分，弧 AB 所对的圆心角是 x 弧度，若弧 AB 与半径 OA，OB 所围成扇形的周长是 14 公分，面积是 6 平方公分，求 x 之值。

12. 如右图，扇形 OAB 的周长为 30 cm，面积为 $56.25\ cm^2$，求

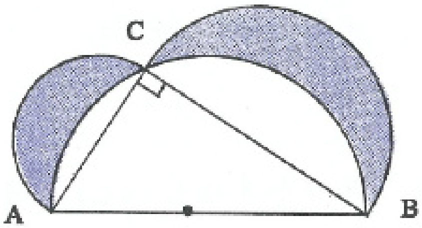


(a) 这扇形的半径，弧长及其圆心角(以度数表示)；

(b) 以这扇形所围成的直圆锥的底半径及其高（答案准确到 0.01 cm）。

13. 求证：圆心角相等的两个扇形面积的比等于半径的平方的比。

14. 如右图，求证以直角三角形各边为直径的三个半圆围成的两个新月形（阴影部分）的面积和，等于直角三角形的面积。



总复习题 6

1. 计算：(a) $48°39'+67°41'$

(b) $90° - 78°19'40''$

(c) $22°30'\times 8$

(d) $176°52'\div 3$（准确到分）

2. 圆的半径等于 240 mm，求这个圆上长 500 mm 的弧所对圆心角的度数。

3. 把下列各度化成弧度（以 π 表示）：

$18°$，$120°$，$135°$，$12.5°$，$10°$，$75°$，$19°48'$，$9°20'$。

4. 把下列各弧度化成度：

$\frac{7\pi}{6}$，$\frac{\pi}{15}$，$\frac{5\pi}{8}$，$\frac{5\pi}{3}$，5，1.4。

5. 航海罗盘将圆周分成 32 等份，把每一等份所对的圆心角的大小分别用度与弧度表示出来。

6. 要在半径为 OA = 100 cm 的圆形金属板上，截取一块 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 112 cm 的扇形板，应截取的圆心角 AOB 的度数是多少（准确到 $1°$）？扇形面积是多少？

7. 已知 $1°$ 的圆心角所对的弧的长为 1 米，这个圆的半径是多少？

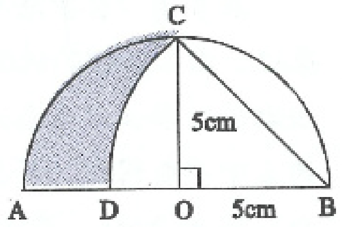
8. 一扇形的半径为 3 cm，圆心角为 $45°$，求其面积。

9. 一扇形的的半径为 4 cm，弧长为 $\frac{2\pi}{3}$ cm，求此扇形的面积。

10. 若一扇形的半径为 7 cm，面积是 $12\pi\,cm^2$，求它的圆心角及其周长。

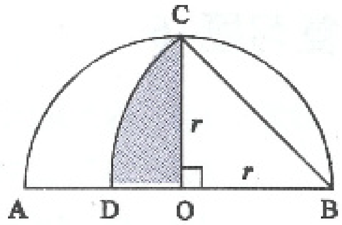
11. 一圆的半径是 10 公分，求长 12 公分之弧所对圆心角的弧度。又此段弧长与二半径所围成的扇形面积是多少？

12. 在右图中，半径 OC 与直径 AB 互相垂直。以 B 为圆心，BC 为半径，作弧交 AB 于 D。若圆 ACB 的半径为 5 cm，求阴影部分的面积。

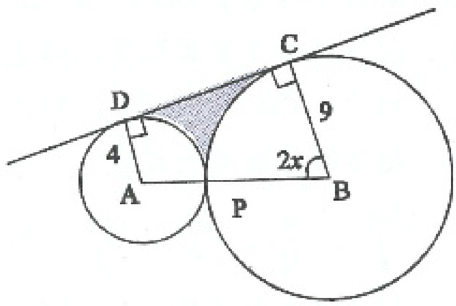


13. 将一个半径为 14 cm，圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度的扇形折成一个直圆锥体，试求它的底半径及高。

14. 在右图中，半径 OC 与直径 AB 互相垂直，以 B 为圆心，BC 为半径，作弧交 AB 于 D。若圆 ACB 之半径为 r，试以 r 写出阴影部分的面积。



15. 在右图中，A、B 是二圆的圆心，此二圆外切于 P。CD 是二圆的公切线。若半径 AD 及 BC 的长度分别是 4 公分及 9 公分，且 $\angle ABC = 2x$，试证明阴影部分的面积为 $(78 - 65x - 8\pi)$ 平方公分。



7 三角函数

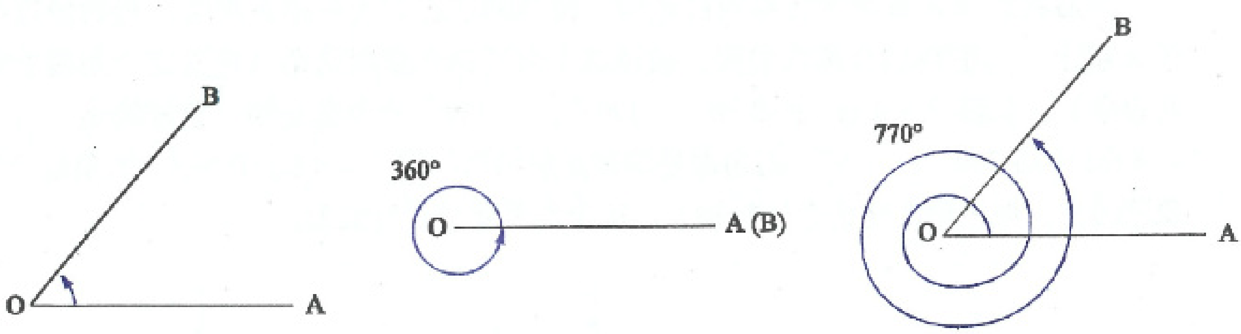
7.1 任意角的三角函数

● 角的概念的推广

我们在第 6 章中已经说过，角可以看做是由一条线段绕着它的一个端点旋转而成的。在图 7－1 (a) 里，角 AOB 就是由一条线段从 OA 的位置开始，绕着端点 O，旋转到 OB 而形成的。

如果图 7－1 (a) 中的线段绕着点 O 继续旋转，那么，形成的角 AOB 就逐渐增大，从锐角变成 90° 的角，再变成钝角，180° 的角等等。当线段旋转了一周而又与 OA 重合的时候，所得的角就等于 360°，如图 7－1 (b)。

设想图 7－1 (b) 中的线段旋转一周后再继续旋转，这样就会得到大于 360° 的角。旋转两周以后，再继续旋转，就得到大于 720° 的角。像这样继续下去，线段可以旋转三周，四周等等，而形成任何大小的角，如图 7－1 (c)。



(b)

图 7－1

假使我们再把线段旋转的方向也考虑进去，那么角的概念不但可以推广到任何大小的角，还可以推广到负角。通常我们规定：按照反时针方向旋转所成的角叫做**正角**（positive angle），如图 7－2 (a)，按照顺时针方向旋转所成的角叫做**负角** (negative angle)，如图 7－2 (b)。

(a) 正角　　　　　　　　(b) 负角

图 7－2

线段按顺时针方向旋转一周的过程，可形成从 0°到－360°的所有角；继续旋转第二周的过程中，又可形成－360°到－720°的所有角。这样下去，我们可以有任何大小的负角。

这样，我们就扩大了角的概念。我们有了任意大小的正角，负角和等于 0°的角（简称零角）。

● 象限角（quadrant angle）

在直角坐标系中，坐标轴分平面为四个部分，称为四象限（quadrant）。依逆时针方向计算（图 7－3），I 为第一象限，II 为第二象限，III 为第三象限，IV 为第四象限。

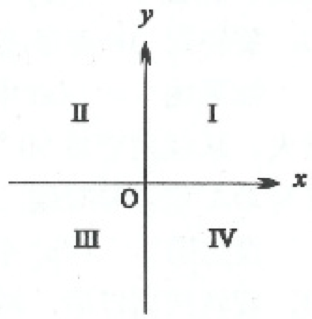
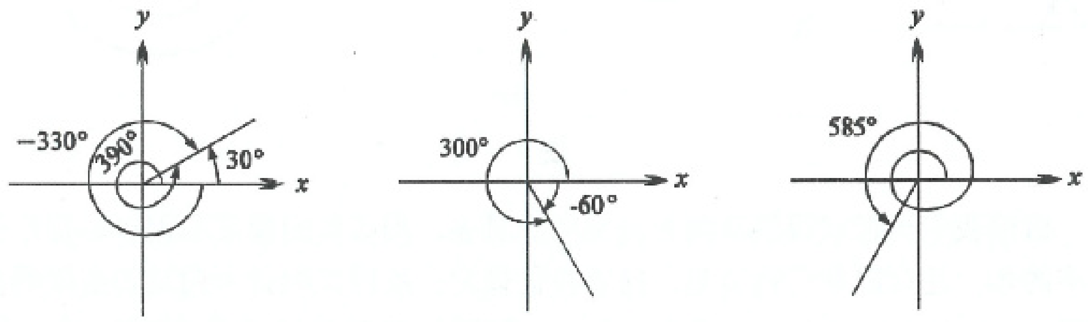


图 7－3

今后我们常在直角坐标系内讨论角，使角的顶点与坐标原点重合，角的始边在正 x 轴上。角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角（或说这个角属于第几象限），如图 7－4 (a) 中的 30°，390°，－330°的角都是第一象限的角；图 7－4 (b) 中的 300°，－60°的角都是第四象限的角；图 7－4 (c) 中 585°的角是第三象限的角。如果角的终边在坐标轴上，这个角不属于任何象限。



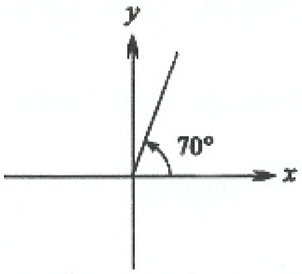
(a)　　　　(b)　　　　(c)

图 7－4

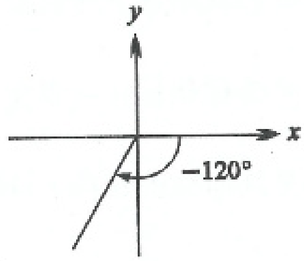
例 1 试判定下列各角是哪个象限的角．

(a) 70°　　(b) -120°　　(c) -950°　　(d) $\frac{7}{4}\pi$

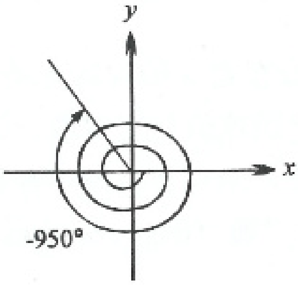
解 (a) 70° 是第一象限的角



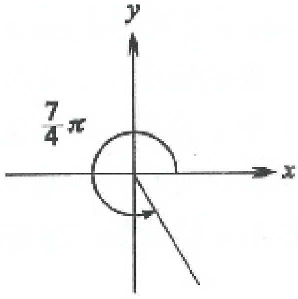
(b) -120° 是第三象限的角



(c) -950° 是第二象限的角



(d) $\frac{7}{4}\pi$ 是第四象限的角



● 任意角的三角函数的定义

在初中，我们已经讨论过锐角的三角函数．这里，将三角函数的定义推扩到任意角的情形．

设 α 是一个任意确定的角，以顶点为原点，角 α 的始边在正 x 轴上，建立平面直角坐标系后，在角 α 的终边上任取一点 $P(x, y)$，P 点到原点的距离为 r ($r>0$)，如图 7－5 所示。

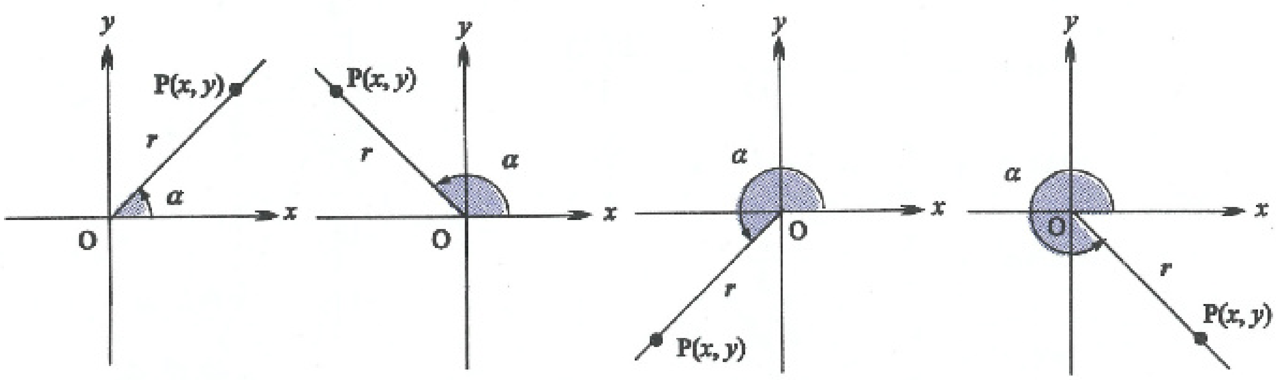


图 7－5

(1) 点P的纵坐标y与r的比，叫做角α的正弦，记作 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

(2) 点P的横坐标x与r的比，叫做角α的余弦，记作 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

(3) 点P的纵坐标y与横坐标x的比，叫做角α的正切，记作 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$；

(4) 点P的横坐标x与纵坐标y的比，叫做角α的余切，记作 $\cot\alpha=\frac{x}{y}$；

(5) 点P到原点的距离r与横坐标x的比，叫做角α的正割，记作 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$；

(6) 点P到原点的距离r与纵坐标y的比，叫做角α的余割，记作 $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}$；

($\operatorname{cosec}\alpha$ 也可记作 $\csc\alpha$)

对于确定的角α，这六个比值的大小和P点在角α的终边上的位置无关。这样，对于角α的每一个确定的值，都有唯一确定的比值与它对应，（当角α的终边在y轴上时，正切与正割不存在；终边在x轴上，余切和余割不存在。）所以这些比值都是角α的函数，这些函数称为角α的**三角函数**（trigonometric function）。

例 3 已知角α的终边经过点P(2, −3)，求角α的六个三角函数值（图 7－6）。

解 $\because x=2,\ y=-3,$

$$\begin{aligned}\therefore r&=\sqrt{x^2+y^2}\\&=\sqrt{2^2+(-3)^2}\\&=\sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin\alpha&=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}\\ \cos\alpha&=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}\\ \tan\alpha&=\frac{y}{x}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}\\ \cot\alpha&=\frac{x}{y}=-\frac{2}{3}\\ \sec\alpha&=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{13}}{2}\\ \operatorname{cosec}\alpha&=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{13}}{3}\end{aligned}$$

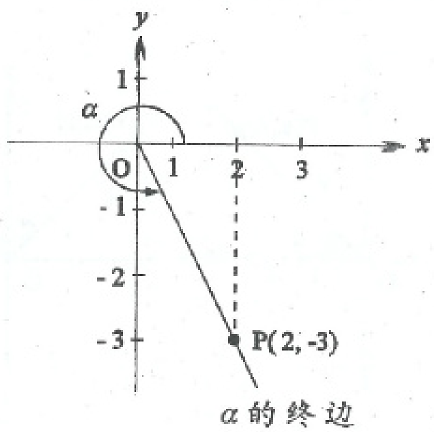


图 7－6

● 任意角的三角函数值

若 α 为任一象限角，它的终边与 x 轴之间的锐角 θ 叫做**相伴锐角**（associated acute angle），如图 7－7。

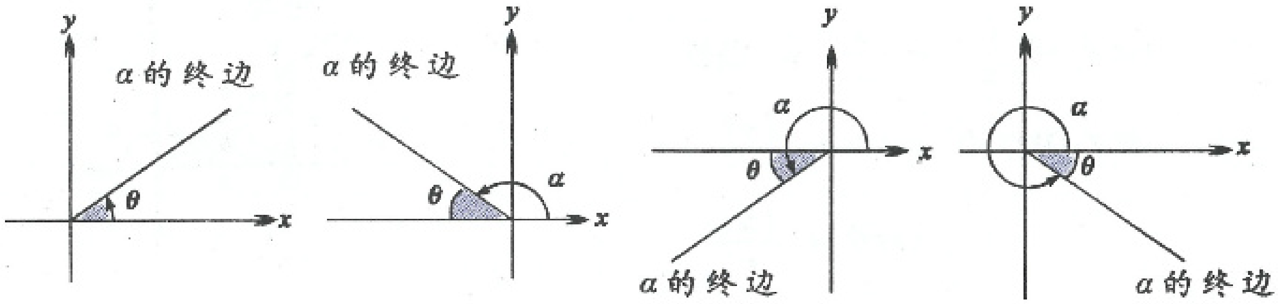


图 7－7

在定义任意角的三角函数时，角 α 的始边是固定在正 x 轴上，而它的终边，根据角 α 的大小，可以落在任何一个象限里，或坐标轴上。不论角 α 在什么象限，r 值恒为正，而 x 和 y 的值则有正、负之分。因此，三角函数的值依 α 所在象限的不同，而有正负之分。

利用相伴锐角及三角函数的正负符号，我们可以把求任意角的三角函数值的问题，转化为求锐角的三角函数值的问题。

(一) 若角 α 是第一象限角，x 和 y 都是正值，所以任何第一象限角的三角函数值都是正的。

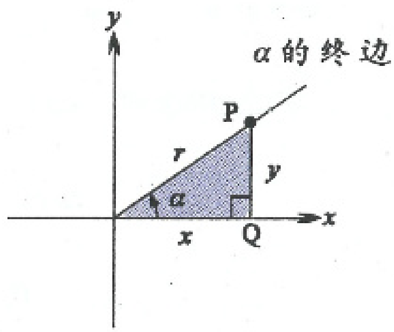


图 7－8

(二) 若角 α 是第二象限角，则 x 是负值，y 是正值，所以

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} = \text{正值}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-}{+} = \text{负值}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{+}{-} = \text{负值}$$

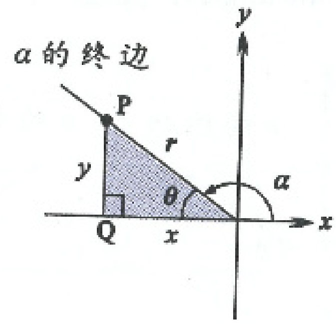


图 7－9

在 $\triangle OPQ$ 中，$\sin\theta = \dfrac{|y|}{r}$

$$\cos\theta = \frac{|x|}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{|y|}{|x|}$$

$$\therefore\quad \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{|y|}{r} = \sin\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-|x|}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{|y|}{-|x|} = -\tan\theta$$

(三) 若角 α 是第三象限角，则 x 和 y 都是负值，所以

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-}{+} = \text{负值}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-}{+} = \text{负值}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-}{-} = \text{正值}$$

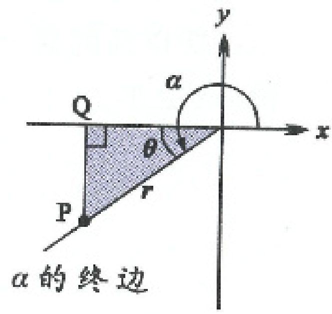


图 7－10

在 $\triangle OPQ$ 中，$\sin\theta = \dfrac{|y|}{r}$

$$\cos\theta = \frac{|x|}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{|y|}{|x|}$$

$$\therefore\quad \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-|y|}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-|x|}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-|y|}{-|x|} = \tan\theta$$

(四) 若角 α 是第四象限角，则 x 是正值，y 是负值，所以

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-}{+} = \text{负值}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{+}{+} = \text{正值}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-}{+} = \text{负值}$$

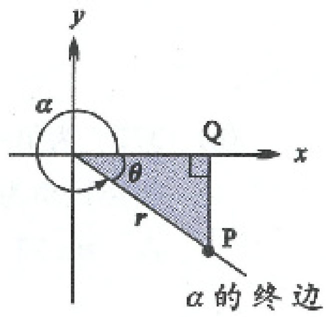


图 7 — 11

在 △OPQ 中，$\sin\theta = \dfrac{|y|}{r}$

$$\cos\theta = \frac{|x|}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{|y|}{|x|}$$

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-|y|}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{|x|}{r} = \cos\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-|y|}{|x|} = -\tan\theta$$

为了帮助记忆，可将三个主要三角函数值的正负号用图 7 — 12 表示。

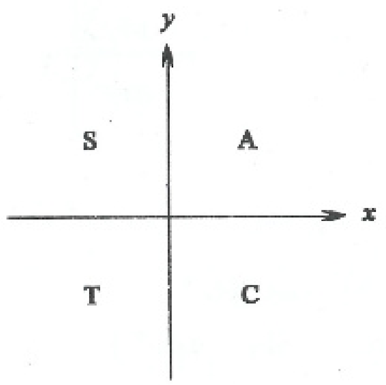


图 7 — 12

A: 所有的三角函数值都是正值

S: $\sin\theta$ 是正值

T: $\tan\theta$ 是正值

C: $\cos\theta$ 是正值

【注】$\operatorname{cosec}\theta$，$\sec\theta$，$\cot\theta$ 的值的正负号，依次与 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 相同。

例 4 化下列各三角函数为锐角三角函数：

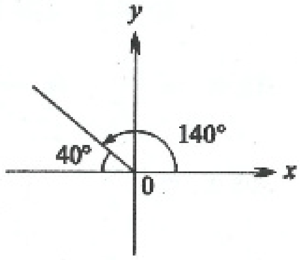
(a) $\cos 140^\circ$　　(b) $\sin 372^\circ$

(c) $\tan(-70^\circ)$　　(d) $\operatorname{cosec}(-210^\circ)$

解 (a) 140° 为第二象限角，$\cos 140^\circ$ 是负值，

相伴锐角为 40°，

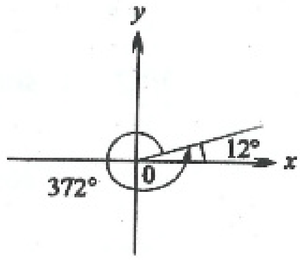
$\therefore\quad \cos 140^\circ = -\cos 40^\circ$



(b) 372° 为第一象限角，$\sin 372^\circ$ 是正值，

相伴锐角为 12°，

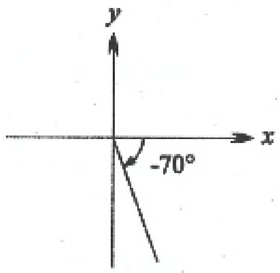
$\therefore\quad \sin 372^\circ = \sin 12^\circ$



(c) -70° 为第三象限角，$\tan(-70^\circ)$ 是负值，

相伴锐角为 70°，

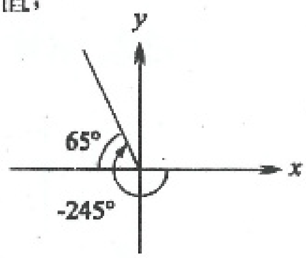
$\therefore\quad \tan(-70^\circ) = -\tan 70^\circ$



(d) -210° 为第二象限角，$\operatorname{cosec}(-210^\circ)$ 是正值，

相伴锐角为 30°，

$\therefore\quad \operatorname{cosec}(-210^\circ) = \operatorname{cosec} 30^\circ$



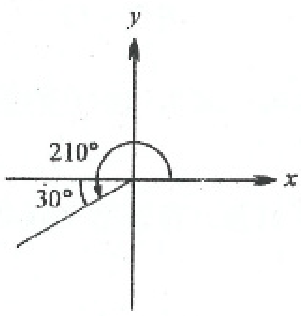
例 5 求下列各三角函数值：

(a) $\sin 210^\circ$ (b) $\cos 300^\circ$

(c) $\tan(-150^\circ)$ (d) $\cot(-480^\circ)$

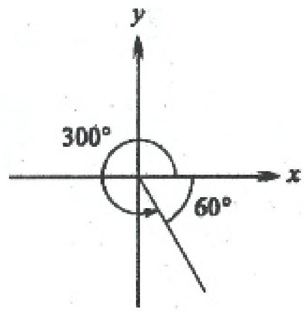
解 (a) $\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ$

$$= -\frac{1}{2}$$



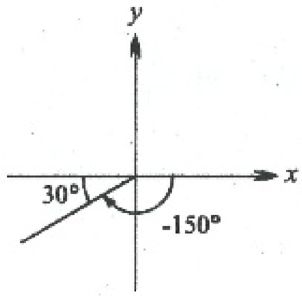
(b) $\cos 300° = \cos 60°$

$= \frac{1}{2}$



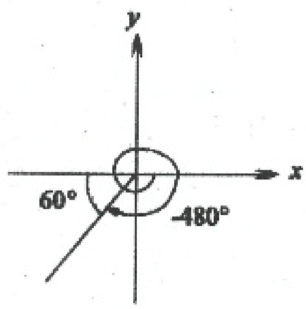
(c) $\tan(-150°) = \tan 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$



(d) $\cot(-480°) = \cot 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$



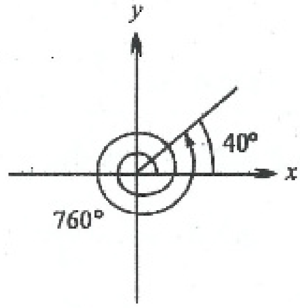
例 6 求下列各三角函数值:

(a) $\sin 760°$　　(b) $\cos \frac{9\pi}{4}$

(c) $\sin \frac{11}{10}\pi$　　(d) $\cos(-245°)$

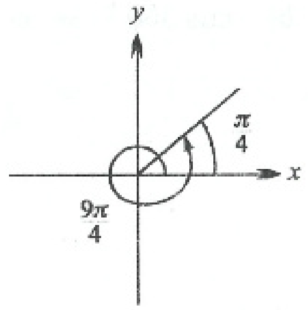
解 (a) $\sin 760° = \sin 40°$

$= 0.6428$



(b) $\cos\frac{9\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$

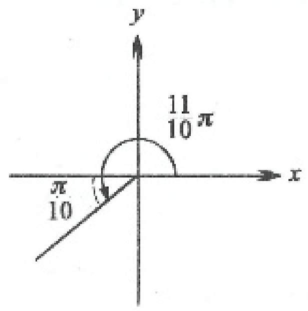
$= \frac{\sqrt{2}}{2}$



(c) $\sin\frac{11}{10}\pi = -\sin\frac{\pi}{10}$

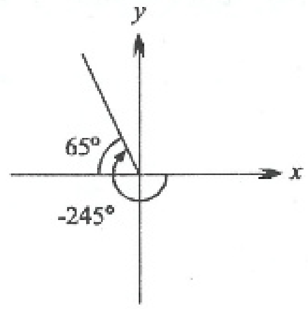
$= -\sin 18°$

$= -0.3090$



(d) $\cos(-245°) = -\cos 65°$

$= -0.4226$



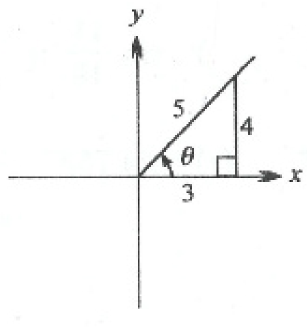
例 7 已知 $\sin\theta = \frac{4}{5}$，不许用计算机或查表，求 $\tan\theta$ 及 $\sec\theta$ 的值。

解 已知 $\sin\theta$ 为正值，所以 θ 是第一或第二象限角。

若 θ 是第一象限角，则

$\tan\theta = \frac{4}{3}$

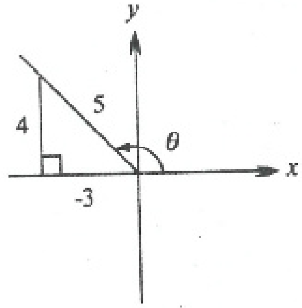
$\sec\theta = \frac{5}{3}$



若 θ 是第二象限角，

$\tan\theta = -\frac{4}{3}$

$\sec\theta = -\frac{5}{3}$



习题 7a

1. 在 $0°\sim360°$ 间，找出与下列各角终边相同的角，并判定各角是哪个象限的角：

   (a) $-265°$　(b) $1185°14'$　(c) $-1000°$
   (d) $-843°10'$　(e) $-15°$　(f) $3900°$
   (g) $560°24'$　(h) $2903°15'$

2. 已知角 α 的终边分别经过下列各点，求 α 的六个三角函数值：

   (a) $(-8,\ -6)$　(b) $(\sqrt{3},\ -1)$

3. 根据下列条件，确定 θ 是第几象限的角：

   (a) $\sin\theta>0$ 且 $\cos<0$　(b) $\sec\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$
   (c) $\dfrac{\sin\theta}{\cot\theta}>0$　(d) $\sin\theta\cos\theta>0$

4. 化下列各三角函数为锐角三角函数：

   (a) $\operatorname{cosec}186°$　(b) $\cot-505°$
   (c) $\sin 7.6\pi$　(d) $\tan\left(-\dfrac{23}{4}\pi\right)$
   (e) $\sec 940°$　(f) $\cos\left(-\dfrac{59}{17}\pi\right)$

5. 求下列各三角函数值：

   (a) $\cos 780°$　(b) $\sin\left(-\dfrac{67}{12}\pi\right)$
   (c) $\cot(-1400°)$　(d) $\tan\left(-\dfrac{11}{3}\pi\right)$
   (e) $\sec(-312°)$　(f) $\operatorname{cosec}(-120°)$
   (g) $\cot(-120°)$　(h) $\cos(-840°)$
   (i) $\sin 710°$　(j) $\tan\dfrac{11}{7}\pi$

6. 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{8}{17}$，$\alpha$ 是第三象限角，求 $\cos\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 的值。

7. 已知 $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta<0$，求 $\tan\theta$ 的值。

8. 若 $\sec A=-\dfrac{17}{15}$，求 $\operatorname{cosec}A$ 和 $\tan A$ 的值。

9. 设 $180°<A<270°$ 且 $\cot A=\dfrac{24}{7}$，求 $\sin A$ 和 $\sec A$ 的值。

10. 若 $\operatorname{cosec}A=-\dfrac{13}{12}$，$\sec A<0$，求 $\tan A$ 的值。

7.2 特别角的三角函数值

在初中，我们已学过了求特别角 30°，45°及 60°的三角函数值。下面，我们讨论 0°，90°，180°，270°的角的三角函数值（如图 7－13）。

（一） 当 $\alpha=0$ 时（或 $\alpha=360°$ 时），$x=r$，$y=0$。

$\therefore$ $\sin 0°=0$

$\cos 0°=1$

$\tan 0°=0$

（二） 当 $\alpha=90°$ 时，$x=0$，$y=r$。

$\therefore$ $\sin 90°=1$

$\cos 90°=0$

$\tan 90°$ 不存在

（三） 当 $\alpha=180°$ 时，$x=-r$，$y=0$。

$\therefore$ $\sin 180°=0$

$\cos 180°=-1$

$\tan 180°=0$

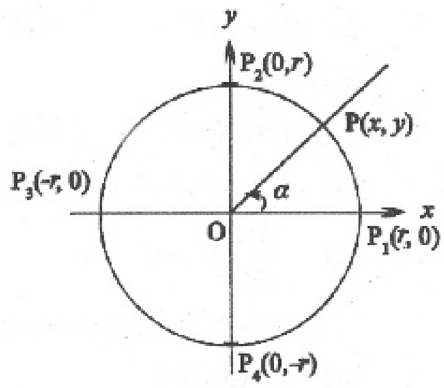


图 7－13

（四） 当 $\alpha=270°$ 时，$x=0$，$y=-r$。

$\therefore$ $\sin 270°=-1$

$\cos 270°=0$

$\tan 270°$ 不存在

由于终边相同的角的同一三角函数值相等，从上述讨论可知，终边在 y 轴上的角的正切与正割不存在，终边在 x 轴上的角的余切与余割不存在。

现将 0°，30°，45°，60°，90°，180°，270°的三角函数值列表于下：

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在

例 8 求下列各式的值:

(a) $\sin 30^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ + \cos 60^\circ \sec 60^\circ + \tan 45^\circ \cot 45^\circ$

(b) $\sin^2 150^\circ + \cos^2 210^\circ + \tan 60^\circ \cot 240^\circ$

(c) $\sec\frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} - \left(\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} + 1\right)^2$

(d) $\sin 1140^\circ \cos(-675^\circ)$

(c) $\tan\frac{8\pi}{3}\cos\frac{37\pi}{6} - \sin\frac{31\pi}{6}\cot\frac{17\pi}{4}$

解 (a) $\sin 30^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ + \cos 60^\circ \sec 60^\circ + \tan 45^\circ \cot 45^\circ$

$= \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times 2 + 1\times 1$

$= 3$

(b) $\sin^2 150^\circ + \cos^2 210^\circ + \tan 60^\circ \cot 240^\circ$

$= \sin^2 30^\circ + (-\cos 30^\circ)^2 + \tan 60^\circ \cot 60^\circ$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$= 2$

(c) $\sec\frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} - \left(\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} + 1\right)^2$

$= 2 + 2 - \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right]^2$

$= 0$

(d) $\sin 1140^\circ \cos(-675^\circ)$

$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4}$

(c) $\tan\frac{8\pi}{3}\cos\frac{37\pi}{6} - \sin\frac{31\pi}{6}\cot\frac{17\pi}{4}$

$= -\tan\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\cot\frac{\pi}{4}$

$= -\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times 1$

$= -1$

例 9 计算：(a) $5\sin 90° + 2\cos 0° - 3\sin 270° + 10\cos 180°$

(b) $8\cos 240° + 12\sin 315° - 2\cot 90° + 9\sec 180°$

解 (a) $5\sin 90° + 2\cos 0° - 3\sin 270° + 10\cos 180°$

$= 5\times 1 + 2\times 1 - 3(-1) + 10(-1)$

$= 0$

(b) $8\cos 240° + 12\sin 315° - 2\cot 90° + 9\sec 180°$

$= 8\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 12\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\times 0 - 9(-1)$

$= 5 - 6\sqrt{2}$

习题 7b

1. 填表：

θ	$\sin\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\cos\theta$	$\sec\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
$30°$						
$150°$						
$210°$						
$330°$						

2. 计算下列各式的值：

(a) $\sin^2 30° + \sin^2 45° + \sin^2 60°$

(b) $\tan^2 30° + \tan^2 45° + \tan^2 60°$

(c) $\sin 120° + \cos^2 60° + \tan 225° - \sec^2 30°$

(d) $\sin 315° \cos 225° + \operatorname{cosec} 45° \sec 45°$

(e) $\sin 30° \cos 60° + \cos 210° \sin 300°$

(f) $\cos^2 60° + \sin^2 240°$

3. 已知 $\theta = 30°$，试验证下列各式：

(a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(b) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

(c) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

4. 填表:

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
0						
$\frac{\pi}{2}$						
π						
$\frac{3\pi}{2}$						

5. 计算:

(a) $3\sin 450° + 2\cos 270° - 4\sin 630° + 5\cos 900°$

(b) $\sin 135° + \cos 225° + \sec 180° + \operatorname{cosec} 90°$

(c) $2\sin 0° + 3\cos 0° + 2\tan 0 + \cot 90° + 2\sec 180° + \operatorname{cosec} 270°$

(d) $\tan\pi + \cot\frac{3\pi}{2} - 2\sin\pi + \sin\frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

(e) $\sin 2\pi + \cos\frac{\pi}{2} + \sec\pi + \operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} + \tan\frac{7\pi}{4}$

(f) $5\sin\frac{7\pi}{3} + 3\tan\frac{9\pi}{4} - 7\cos\frac{25\pi}{6} - 2\sin\frac{9\pi}{2}$

6. 当 $a = 10$，$b = -9$ 时，求
$a^2\cos 720° - b^2\sin 630° + 2ab\tan 405°\cot 405°$ 的值。

7. 设 α，β，γ 为任意三角形的三个内角，试证:

(a) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = -1$

(b) $\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \tan\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}$

7.3 三角函数的诱导公式

对于 $90°\sim360°$ 间的角，可用下面的形式来表示:

设 $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$，那么

$90°\sim180°$ 间的角，可以写成 $180°-\alpha$ 或 $90°+\alpha$，

$180°\sim270°$ 间的角，可以写成 $180°+\alpha$ 或 $270°-\alpha$，

$270°\sim360°$ 间的角，可以写成 $360°-\alpha$ 或 $270°+\alpha$。

下面依次讨论 $-\alpha$，$90°\pm\alpha$，$180°\pm\alpha$，$270°\pm\alpha$，$360°\pm\alpha$ 的三角函数值与 α 的三角函数值之间的关系。为了使讨论更具有一般性，这里假定 α 为任意角。在这里主要讨论正弦、余弦、正切、余切等三角函数值的有关问题。并假定有关公式中的角的三角函数值存在。

如图 7－14，O 为圆心，圆的半径为 r。已知任意角 α 的终边与这个圆相交于点 $P(x,y)$。可知，$-\alpha$ 的终边与这个圆必相交于点 $P'(x,-y)$。根据三角函数的定义，可以得到：

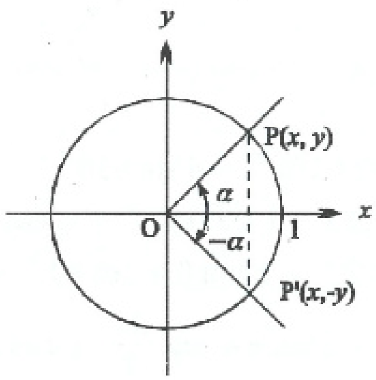


图 7－14

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\qquad \sin(-\alpha)=-\frac{y}{r},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\qquad \cos(-\alpha)=\frac{x}{r},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\qquad \tan(-\alpha)=-\frac{y}{x},$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y},\qquad \cot(-\alpha)=-\frac{x}{y}。$$

所以得到以下公式：

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,\qquad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha,$$

下面讨论 $90°+\alpha$ 的三角函数值与 α 的三角函数值之间的关系。

我们知道，角 $90°+\alpha$ 与角 α 相差 $90°$，那么角 α 的终边依次在第一、二、三、四象限内时，角 $90°+\alpha$ 的终边就相应地在第二、三、四、一象限内，如图 7－15 所示。

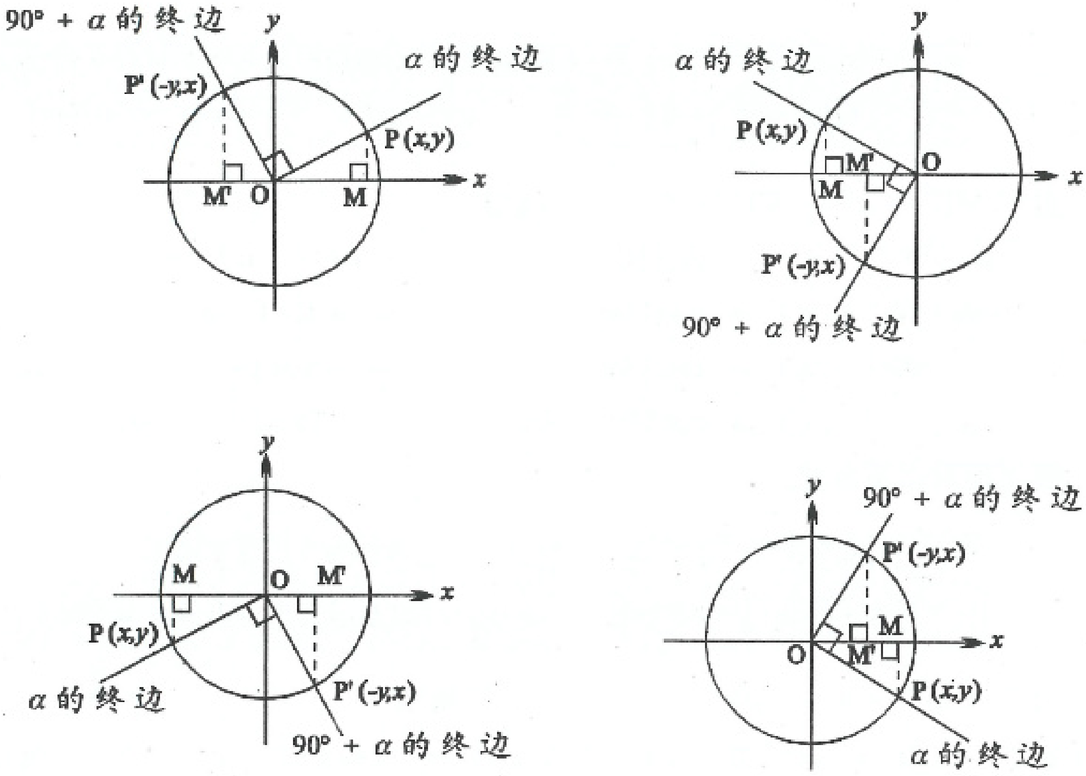


图 7－15

如果角 α 和角 90°＋α 的终边分别与圆交于 P 与 P′，则 OP＝OP′。自 P 与 P′ 向 x 轴作垂线 PM 与 P′M′，垂足分别为 M 与 M′，那么

$$\triangle OMP \equiv \triangle P'M'O$$

所以

$$MP = OM', \quad OM = M'P'$$

考虑 P 与 P′ 在各个象限的符号，若 P 的坐标为 $(x,\ y)$。则点 P′ 的坐标就是 $(-y,\ x)$。根据三角函数的定义，得

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r},$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y},$$

$$\sin(90^\circ+\alpha) = \frac{x}{r}, \qquad \cos(90^\circ+\alpha) = \frac{-y}{r},$$

$$\tan(90^\circ+\alpha) = -\frac{x}{y}, \qquad \cot(90^\circ+\alpha) = -\frac{y}{x}$$

所以得到以下公式:

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha,\quad \cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha.$$

由于 $90^\circ-\alpha=90^\circ+(-\alpha)$，所以

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\sin[90^\circ+(-\alpha)]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ-\alpha)=\cos[90^\circ+(-\alpha)]=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\tan(90^\circ-\alpha)=\tan[90^\circ+(-\alpha)]=-\cot(-\alpha)=\cot\alpha,$$
$$\cot(90^\circ-\alpha)=\cot[90^\circ+(-\alpha)]=-\tan(-\alpha)=\tan\alpha.$$

所以得到以下公式:

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha,\quad \cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha.$$

由于 $180^\circ+\alpha=90^\circ+(90^\circ+\alpha)$，所以

$$\sin(180^\circ+\alpha)=\sin[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(180^\circ+\alpha)=\cos[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]=-\sin(90^\circ+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(180^\circ+\alpha)=\tan[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]=-\cot(90^\circ+\alpha)=\tan\alpha,$$
$$\cot(180^\circ+\alpha)=\cot[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]=-\tan(90^\circ+\alpha)=\cot\alpha,$$

所以得到以下公式:

$$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(180^\circ+\alpha)=\tan\alpha,\quad \cot(180^\circ+\alpha)=\cot\alpha.$$

类似的，由于 $180^\circ-\alpha=180^\circ+(-\alpha)$，利用 $180^\circ+\alpha$，$-\alpha$ 的三角函数值与 α 的三角函数值的关系，可以得 $180^\circ-\alpha$ 的三角函数值与 α 的三角函数值之间有如下关系:

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha.$$

由于 $270^\circ+\alpha=180^\circ+(90^\circ+\alpha)$，利用以上的公式，可以得出 $270^\circ+\alpha$ 的三角函数值与 α 的三角函数值之间有如下的关系,

$$\sin(270^\circ+\alpha)=-\cos\alpha,\quad \cos(270^\circ+\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\tan(270^\circ+\alpha)=-\cot\alpha,\quad \cot(270^\circ+\alpha)=-\tan\alpha,$$

由于 $270^\circ-\alpha=180^\circ+(90^\circ-\alpha)$，所以有公式:

$$\sin(270^\circ-\alpha)=-\cos\alpha,\quad \cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\tan(270^\circ-\alpha)=\cot\alpha,\quad \cot(270^\circ-\alpha)=\tan\alpha.$$

由于 $360^\circ+\alpha$ 与 α 终边相同，所以它们的同名三角函值相同．即有以下公式:

$$\sin(360^\circ+\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(360^\circ+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(360^\circ+\alpha)=\tan\alpha,\quad \cot(360^\circ+\alpha)=\cot\alpha.$$

类似地，有公式:

$$\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\tan(360^\circ-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \cot(360^\circ-\alpha)=-\cot\alpha.$$

在以上的公式中，把正弦函数换成余割函数，同时把余弦函数换成正割函数，公式仍然成立。这些公式统称为诱导公式。

例 10 把下列各三角函数化为 α 的三角函数值。

(a) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)$ (b) $\tan(5\pi-\alpha)$

(c) $\sec\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)$ (d) $\operatorname{cosec}(1440^\circ-\alpha)$

(e) $\cot(-\alpha-180^\circ)$ (f) $\sin(\alpha-\pi)$

解 (a)
$$\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

(b)
$$\tan(5\pi-\alpha)=\tan(4\pi+\pi-\alpha)=\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

(c)
$$\sec\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=\sec\left[2\pi+\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\operatorname{cosec}\alpha$$

(d) $\operatorname{cosec}(1440° - \alpha) = \operatorname{cosec}(-\alpha)$
$= -\operatorname{cosec}\alpha$

(e) $\cot(-\alpha - 180°) = \cot[-(180° + \alpha)]$
$= -\cot(180° + \alpha)$
$= -\cot\alpha$

(f) $\sin(\alpha - \pi) = \sin[-(\pi - \alpha)]$
$= -\sin(\pi - \alpha)$
$= -\sin\alpha$

习题 7c

1. 填表:

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$					
$\pi-\alpha$		$-\cos\alpha$				
$\pi+\alpha$			$\tan\alpha$			
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$				$\tan\alpha$		
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$					$\operatorname{cosec}\alpha$	
$2\pi-\alpha$						$-\operatorname{cosec}\alpha$

2. 把下列各三角函数化为 α 的三角函数:

(a) $\cot(-\alpha + 180°)$　　(b) $\tan(7\pi - \alpha)$

(c) $\tan(720° - \alpha)$　　(d) $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$

(e) $\cos(540° + \alpha)$　　(f) $\sec(360° - \alpha)$

3. 已知 θ 为锐角，化下列各函数为锐角的三角函数：

(a) $\sec(90° - \theta)$　　(b) $\cos(\theta - 180°)$

(c) $\tan(\theta - 270°)$　　(d) $\sin(90° + \theta)$

(e) $\cos(270° + \theta)$　　(f) $\cot(450° - \theta)$

4. 化简下列各式：

(a) $\tan(\alpha + \pi) - \tan(\alpha - \pi)$　　(b) $\dfrac{\cos(\pi - \alpha)\cos(2\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)\cos(2\pi + \alpha)}$

5. 设 x 是锐角，化简

$$\frac{(a^2 - b^2)\cot(180° - x)}{\cot(180° + x)} + \frac{(a^2 + b^2)\tan(90° - x)}{\cot(180° - x)}$$

6. 设 A、B、C 是一个锐角三角形的三个内角，求证

(a) $\sin(A + B) = \sin C$　　(b) $\cos(B + C) = -\cos A$

(c) $\tan(A + C) = -\tan B$

7. 不用查表，计算 $\sin 68° \sin 22° + \cos 112° \sin 428°$

8. 求证 $\dfrac{\cot(-\alpha - \pi)\sin(\pi + \alpha)}{\cos(-\alpha)\tan(2\pi + \alpha)} = \cot\alpha$

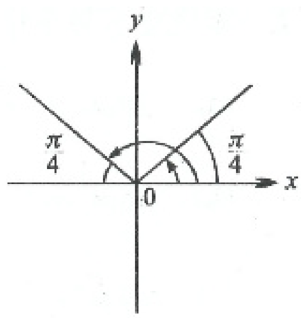
7.4　已知三角函数值求角

已知任意一个角（角必须使这个三角函数值存在），可以求出它的三角函数值；反过来，如果已知一个三角函数值，也可以求出与它对应的角。

例 11　已知 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且 $0 \leqslant \alpha < 2\pi$，求 α。

解　因为 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 为正值，所以 α 为第一、二象限的角，

由 $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得知相伴锐角是 $\dfrac{\pi}{4}$。



$\therefore\ \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

或 $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{4}\pi$

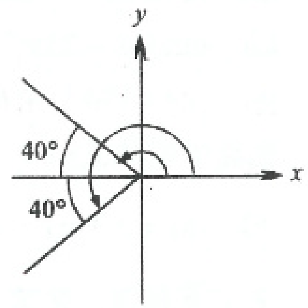
例 12 已知 $\cos\alpha = -0.7660$，且 $0 \leqslant \alpha \leqslant 360°$，求 α。

解 因为 $\cos\alpha = -0.7660$ 是负值，所以 α 是第二、三象限的角，

由 $\cos 40° = 0.7660$，得知相伴锐角为 $40°$。

$\therefore \quad \alpha = 180° - 40° = 140°$

或 $\quad \alpha = 180° + 40° = 220°$



例 13 已知 $\tan x = \dfrac{1}{3}$，且 $0° \leqslant x \leqslant 360°$，求 x 的值。

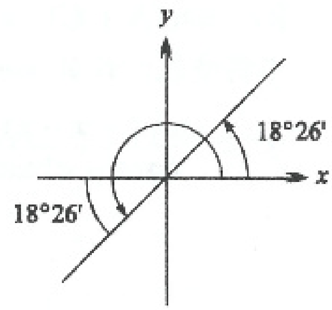
解 因为 $\tan x = \dfrac{1}{3}$ 是正值，所以 x 是第一、三象限的角，

由 $\tan 18°26' = \dfrac{1}{3}$，得知相伴锐角为 $18°26'$。

$\therefore \quad x = 18°26'$

或 $\quad x = 180° + 18°26'$

$\quad\quad = 198°26'$



习题 7d

1. 求下列的角 x，若 $0° \leqslant x \leqslant 360°$：

   (a) $\sin x = -1$ (b) $\cos x = 0$

   (c) $\sin x = \dfrac{12}{13}$ (d) $\tan x = -\sqrt{5}$

   (e) $\sec x = 4.023$ (f) $\cot x = 0.8594$

2. 求适合下列条件的 α:

   (a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

   (b) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$，且 $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

   (c) $\cot\alpha = 1$，且 $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

(d) $\sin\alpha = -0.8572$，且 $0° < \alpha < 360°$

(e) $\cos\alpha = -0.4099$，且 $0° < \alpha < 360°$

(f) $\tan\alpha = -4$，且 $0° < \alpha < 360°$

3. 根据下列条件，求三角形的内角 A:

(a) $\sin A = \dfrac{1}{2}$　　(b) $\cos A = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\tan A = 1$　　(d) $\cot A = -\sqrt{3}$

4. 求下列的角 x，若 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$:

(a) $\cot x + \sqrt{3} = 0$　　(b) $3\tan x - 1 = 0$

(c) $\cos(\pi - x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(d) $2\sin^2 x = 1$

5. 求满足下列各式的锐角 x 的值:

(a) $\tan^2 x - 3 = 0$　　(b) $2\sec x - \sqrt{8} = 0$

7.5 三角函数的图象

● 正弦函数、余弦函数及正切函数的图象

在 0 到 2π（即 $0°$ 到 $360°$）之间取 x 的一组等分点，求出其对应的正弦函数值 y，列表如下:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0

以每一组对应值作为点的坐标，描出各点，再用平滑的曲线把它们连接起来，就得到正弦函数 $y = \sin x$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 之间的图象（如图 7－16）。

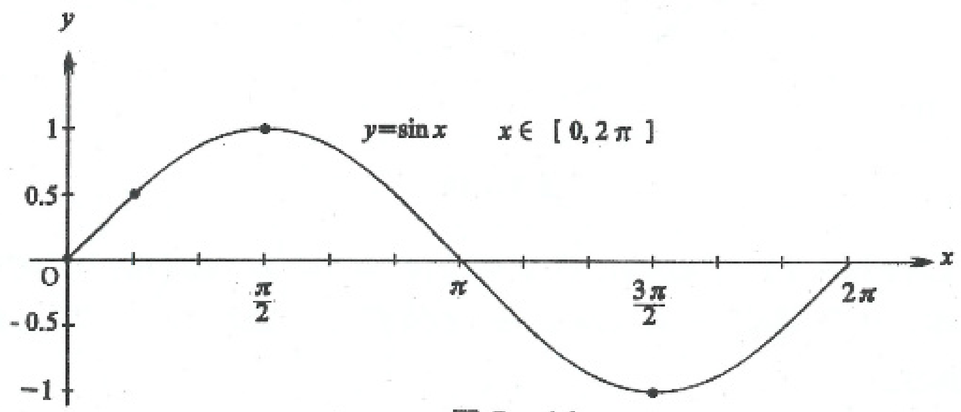


图 7－16

从 $\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$ 可知，正弦函数 $y=\sin x$ 的图象每间隔 2π 就重复出现．在 …，$x\in[-2\pi,\ 0]$，$x\in[2\pi,\ 4\pi]$，$x\in[4\pi,\ 6\pi]$，…… 时的图象，与 $y=\sin x$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 的图象的形状完全一样，只是位置不同．这样，我们把 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 时的图象向左或向右平行移动 2π，4π，……，就可以得到 $y=\sin x$，$x\in R$ 的图象（图 7－17），即得到**正弦曲线**（sine curve）．

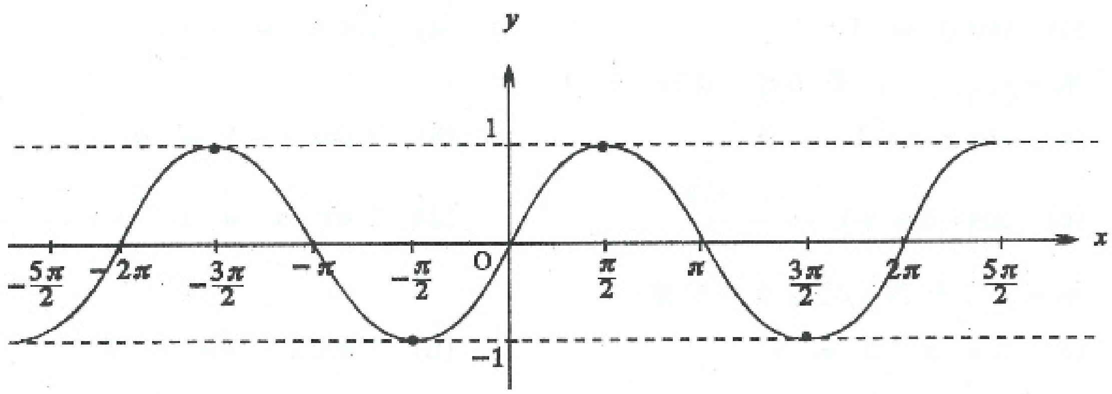


图 7－17

同样，通过列表描点，可以作出余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 时的图象（如图 7－18）。

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0	0.5	0.87	1

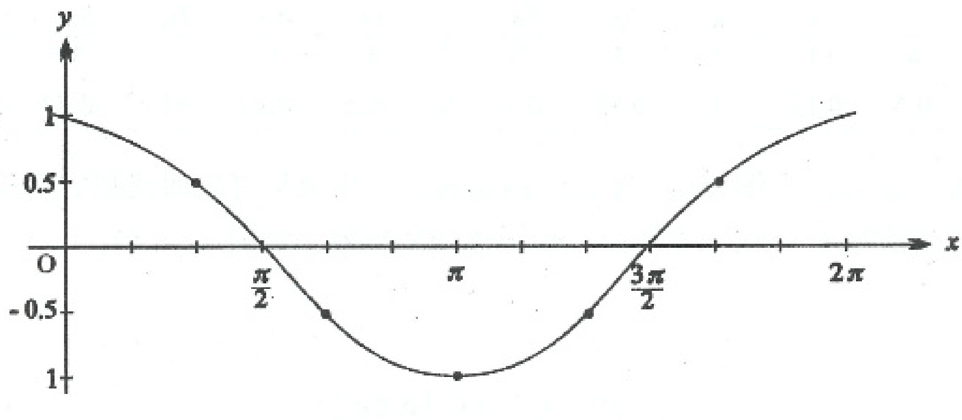


图 7－18

由于 $\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$，所以利用 $y=\cos x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 时的图象的左右平移，可以得到 $y=\cos x$，$x\in R$ 的图象（图 7－19），即**余弦曲线**（cosine curve）。

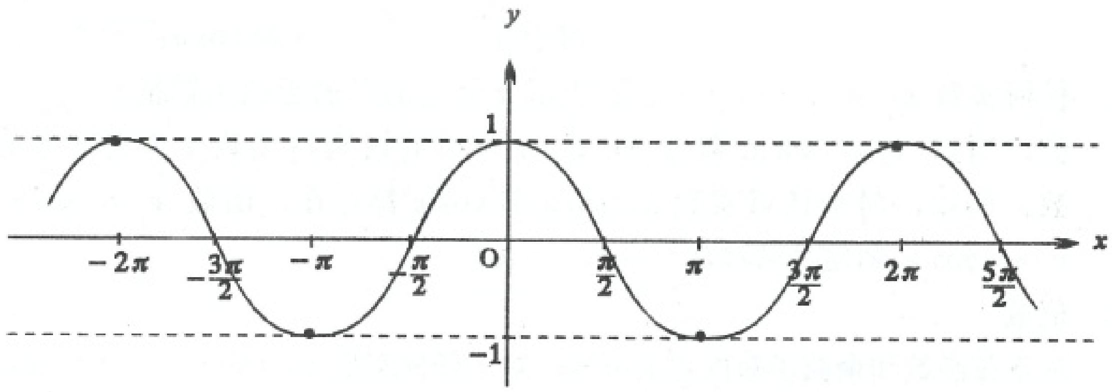


图 7－19

类似地，可以得到正切函数 $y = \tan x$，$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时的图象，并利用 $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$，得到 $y = \tan x$，$x \in R$，$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$（$n$ 为整数）时的图象（图 7－20），即**正切曲线**（tangent curve）。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	不存在	−1.73	−1	−0.58	0	0.58	1	1.73	不存在

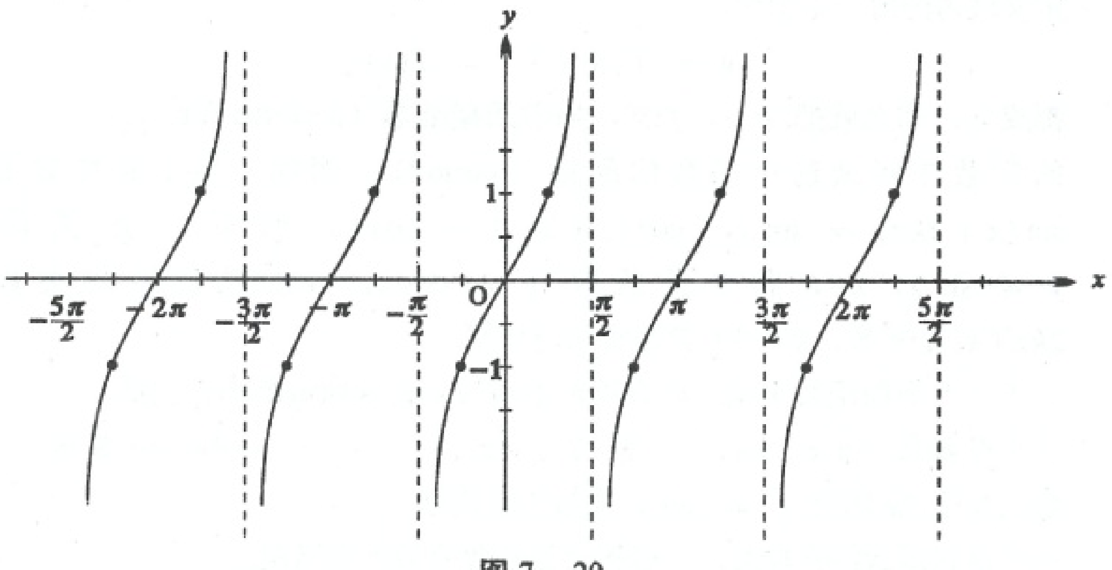


图 7－20

● 三角函数图象的性质

下面我们研究正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 的主要性质。

(一) 定义域

由正弦函数和余弦函数的定义，对于任意角 α，$\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 都存在。对于任何实数 x，$\sin x$ 和 $\cos x$ 分别表示 x 弧度的角的正弦函数值和余弦函数值，所以 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 可以看成为以实数 x 为自变量的函数。所以，对于任意实数 x，$\sin x$ 和 $\cos x$ 都存在，函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$。

(二) 值域

从正弦函数和余弦函数的定义可知，对于任何实数 x，$|\sin x| \leqslant 1$，$|\cos x| \leqslant 1$，即 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$，$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$，所以，函数 $y = \sin x$，$x \in R$ 及 $y = \cos x$，$x \in R$ 的值域都是 $[-1, 1]$。

函数 $y = \sin x$ 在 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，$k$ 是整数时取最大值 $y = 1$；在 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$，$k$ 是整数时取最小值 $y = -1$。

函数 $y = \cos x$ 在 $x = 2k\pi$，k 是整数时取最大值 $y = 1$；在 $x = -\pi + 2k\pi$，k 是整数时取最小值 $y = -1$。

(三) 周期性

一般上，对于函数 $y = f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得当 x 取定义域内的每一个值时，

$$y = f(x + \mathrm{T}) = f(x)$$

都成立，那么就把 $y = f(x)$，叫做周期函数（periodic function），不为零的常数 T 叫做这个函数的周期（period）。例如，当 k 是整数时，$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$，$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$，所以，正弦函数 $y = \sin x$，$x \in R$ 和余弦函数 $y = \cos x$，$x \in R$ 都是周期函数，$2k\pi$（k 是整数，$k \neq 0$）都是它们的周期。

对于一个周期函数来说，所有周期中的最小正数叫做最小正周期。例如，对于正弦函数 $\sin x$，$x \in R$ 来说，2π，4π，…，-2π，-4π，… 都是它的周期。其中 2π 叫做 $y = \sin x$ 的最小正周期。

今后谈到函数的周期时，一般指的是函数的最小正周期。

下面再研究 $y = \tan x$ 的性质。

同样，我们把 $y = \tan x$ 看成是以实数 x 为自变量的函数．由于终边在 y 轴上的角的正切函数值不存在，而这些角的集合可以表示成 $\{\alpha \mid \alpha = k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k$ 是整数 $\}$，所以 $y = \tan x$ 的定义域是 $x\in R$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，k 是整数．

从正切函数的图象（图 7－20）可以看出，当 x 小于 $\frac{\pi}{2}$，而无限接近于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x$ 无限增大，即可比指定的任何正数都大，我们把这种情况记作 $\tan x\to+\infty$（读作 $\tan x$ 趋向于正无穷大），当 x 大于 $\frac{\pi}{2}$，而无限接近于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x$ 无限减小，即取负值且它的绝对值可比指定的任何正数都大，我们把这种情况记作 $\tan x\to-\infty$（读作 $\tan x$ 趋向于负无穷大）．这就是说，$\tan x$ 可以取任何实数值，没有最大值和最小值，所以 $y = \tan x$ 的值域是 R．

由于 $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$，可以得到，对于任何整数 k，$\tan(k\pi+x) = \tan x$．所以函数 $y = \tan x$ $(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k$ 是整数$)$ 是周期函数．$k\pi$（k 是整数，$k\neq 0$）都是它的周期，π 是最小正周期．

习题 7e

1. 试根据所给的条件，描绘下列各三角函数的图象：
   (a) $y = \sin x\,(-180^\circ\leqslant x\leqslant 180^\circ)$
   (b) $y = \cos x\,(-180^\circ\leqslant x\leqslant 180^\circ)$
2. 试描绘下列各三角函数的图象．
   (a) $y = \cot x$　　(b) $y = \operatorname{cosec} x$　　(c) $y = \sec x$
3. 观察正弦曲线和余弦曲线，写出满足下列条件的 x 的区间：
   (a) $\sin x>0$　　(b) $\sin x<0$
   (c) $\cos x>0$　　(d) $\cos x<0$

总复习题 7

1. 由 0° 到 360°，写出与下列各角终边相同的角:

(a) $\dfrac{\pi}{4}$　(b) $-\dfrac{2\pi}{3}$　(c) $\dfrac{12}{5}\pi$

(d) 0　(e) -120°　(f) 540°

2. 确定下列各三角函数值的符号:

(a) $\sin 4$　(b) $\cos 5$

(c) $\tan 8$　(d) $\cot(-3)$

3. 已知 $\angle\theta$ 的终边上一点 $(12,\ -5)$，求 $\sin\theta$，$\sec\theta$ 及 $\tan\theta$ 之值。

4. 已知 $\angle\theta$ 的终边上一点 $(-6,\ y)$，又 $\cos\theta = \dfrac{-4}{5}$，求 y 及 $\tan\theta$ 之值。

5. 计算:

(a) $\sin 420^\circ \cos 750^\circ + \sin(-330^\circ)\cos(-660^\circ)$

(b) $\tan 675^\circ + \cot 765^\circ - \tan(-300^\circ) + \cot(-690^\circ)$

(c) $\sin\dfrac{25\pi}{6} + \cos\dfrac{25\pi}{3} + \tan\left(-\dfrac{25}{4}\pi\right)$

(d) $\sin 2 + \cos 3 + \tan 4$

(e) $5\sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ - 3\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ$

(f) $\sin^4\dfrac{\pi}{4} - \cos^2\dfrac{\pi}{2} + 6\tan^3\dfrac{3\pi}{4}$

(g) $a\sin 0^\circ + b\cos 90^\circ + c\tan 180^\circ$

(h) $-p^2\sec 180^\circ + q^2\sin 90^\circ - 2pq\cos 0^\circ$

6. 求下列各三角函数值:

(a) $\sin 378^\circ 21'$　(b) $\cos 840^\circ$　(c) $\tan 1111^\circ$

(d) $\cot 370^\circ 15'$　(e) $\cos\left(-\dfrac{11}{3}\pi\right)$　(f) $\tan\left(-\dfrac{15\pi}{4}\right)$

(g) $\cot(-1300^\circ)$　(h) $\sec(-700^\circ)$

7. 已知 $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$，求 $\sin\theta$，$\tan\theta$。

8. 已知 $\tan\theta = \dfrac{8}{15}$，$\theta$ 是第三象限的角，求 $\cos\theta$ 及 $\operatorname{cosec}\theta$ 之值。

9. 已知 $\cos\theta = \dfrac{-5}{13}$，$\sin\theta < 0$，求 $\tan\theta$ 之值。

10. 已知 $4\tan\theta = -3$，$\cos\theta$ 为正值，求 $\dfrac{5\sin\theta + 4\sec\theta}{3\cot\theta + 10\cos\theta}$ 之值。

11. 根据下列条件，求 x 的值，若 $0° \leqslant x \leqslant 360°$：

(a) $\sin x = 0$　　(b) $\cos x = -0.6124$　　(c) $\cos x = 0$

(d) $\tan x = -4$　　(e) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(f) $\cot x = 1$

(g) $\sec x = 4.023$　　(h) $\tan x = 8$

12. 根据下列条件，求三角形的内角 A:

(a) $\sin A = \dfrac{1}{2}$　　(b) $\cos A = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\tan A = 1$　　(d) $\cot A = -\sqrt{3}$

13. (a) 已知 $\cos x = -0.4848$，$\sin x > 0$，$500° < x < 900°$，求 x 之值；

(b) 已知 $0° \leqslant x < 360°$，$\sin x = 0.8$，$\sin 4x > 0$，求 x 之值。

14. 化简：

(a) $\sin(\alpha - 180°) + \tan(\alpha - 180°) - \cos(90° + \alpha)$

(b) $\tan(\alpha - 360°) - 2\sin(180° + \alpha)\sin(90° + \alpha) + \cot(270° + \alpha)$

(c) $\dfrac{\sin^2(\alpha + \pi)\cos(\pi + \alpha)\cot(\alpha + 2\pi)}{\tan(\pi + \alpha)\cos^3(-\alpha - \pi)}$

15. 下列各式能不能成立？为什么？

(a) $\cos^2 x = 1.5$　　(b) $\sin x - \cos x = 2.5$

(c) $\tan x + \cot x = 2$　　(d) $\sin^3 x = -\dfrac{\pi}{4}$

8 任意三角形的解法

在初中，我们已经学过利用锐角三角函数解直角三角形以及它们在测量中的一些简单应用。在生产实践和科学研究中，我们也常遇到要解任意三角形（锐角三角形，直角三角形或钝角三角形）的问题。为此，本章我们将介绍利用关于三角形边角关系的两个定律解任意三角形的问题以及它们在实际中的一些应用。

8.1 正弦定律

在 △ABC 中，通常把三个角 A、B、C 的对边的长分别用 a、b、c 表示。△ABC 中，三个角 A、B、C 的正弦函数值与三条边 a、b、c 之间有如下的关系：

正弦定律（sine rule）

在一个三角形中，各边和它所对的角的正弦比相等。

即
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

证明： 作 △ABC 的高 AD。

(i) 如果 B 是锐角（图 8－1），那么

在直角 △ABD 中，$AD = c\sin B$

在直角 △ACD 中，$AD = b\sin C$

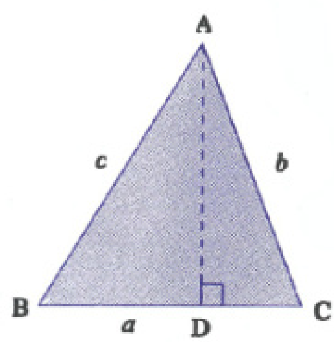


图 8－1

(ii) 如果 B 是钝角（图 8－2），那么

在直角 △ABD 中，$AD = c\sin(180° - B)$

$= c\sin B$

在直角 △ACD 中，$AD = b\sin C$

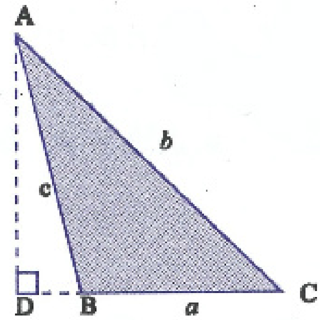


图 8－2

(iii) 如果 B 是直角（图 8－3），那么

$$
\begin{aligned}
AD &= AB \\
&= c \\
&= c\sin 90° \\
&= c\sin B
\end{aligned}
$$

$AD = b\sin C$

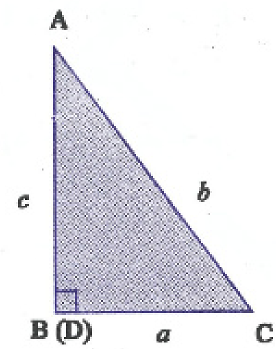


图 8－3

因此，不论哪一种情形都有

$AD = c\sin B = b\sin C$

$$\therefore \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

过点 B 作 AC 的高，同理可证

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

于是，可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

利用正弦定律和三角形内角和定理，可以解决以下两类解任意三角形的问题。

(一) 已知两角和任一边，求其他两边和一角；

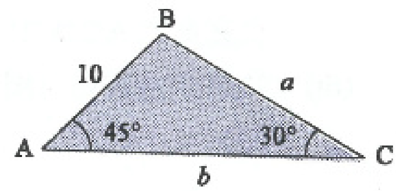
(二) 已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，从而进一步求出其他的边和角。

(一) 已知两角和任一边

一般地，已知两角和任一边解三角形，可以先用三角形内角和定理求出第三个角，再用正弦定律求出其余两边。

例 1 在△ABC 中，已知 $c = 10$，$A = 45°$，$C = 30°$，求 a、b。

解 由正弦定律，得 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$



$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{10 \sin 45°}{\sin 30°} = 10\sqrt{2}$$

$$B = 180° - 45° - 30° = 105°$$

由正弦定律，得 $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{10 \sin 105°}{\sin 30°} = 19.318$$

(二) 已知两边和其中一边的对角

一般地，已知两边和其中一边的对角解三角形，可以先用正弦定律求出一角，然后再分别用三角形内角和定理和正弦定律求出第三角和第三边。

例 2 在△ABC 中，已知 $a = 20$ cm，$b = 28$ cm，$A = 40°$，求 B（准确至 1°）和 C（准确至两个有效数字）。

解 由正弦定律 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

得 $$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{28 \sin 40°}{20} = 0.8999$$

$\therefore$ $B = 64°$ 或 $116°$

在此，需检验 116° 是否是 B 的一个解。

由于 $A+B = 40^\circ + 116^\circ$

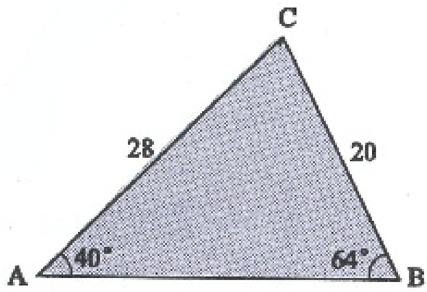
$= 156^\circ\ (<180^\circ)$

$\therefore$ 116° 也是 B 的一个解。

当 $B = 64^\circ$ 时，

$C = 180^\circ - (40^\circ + 64^\circ)$

$= 76^\circ$



由正弦定律 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

得 $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$

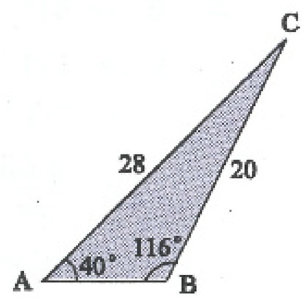
$= \dfrac{20 \sin 76^\circ}{\sin 40^\circ}$

$\approx 30\ (\text{cm})$

当 $B = 116^\circ$ 时，

$C = 180^\circ - (116^\circ + 40^\circ)$

$= 24^\circ$



$\therefore$ $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$

$= \dfrac{20 \sin 24^\circ}{\sin 40^\circ}$

$\approx 13\ (\text{cm})$

故得 $B = 64^\circ$，$c = 30$ cm，$C = 76^\circ$

或 $B = 116^\circ$，$c = 13$ cm，$C = 24^\circ$

例 2 的这种情况，用作图法可以更容易理解。在图 8－4 中，我们画 $A = 40^\circ$ 及画 $AC = b = 28$，以 C 为圆心，$a = 20$ 为半径画弧。此弧与 AP 相交于两点 B_1、B_2，因而可以作出两个三角形，即 AB_1C 和 AB_2C，这就表示例 2 有两解。

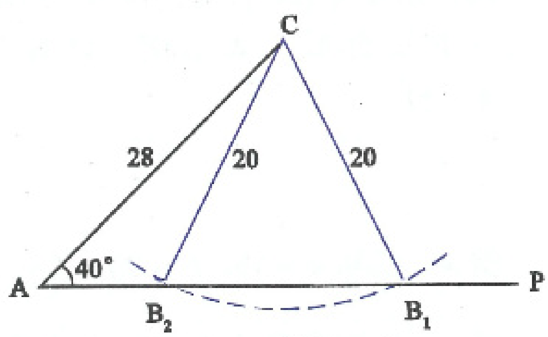


图 8－4

例 3 在△ABC 中，已知 $a = 60$，$b = 50$，$A = 38°$，解△ABC。

解 由正弦定律 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

得
$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$
$$= \frac{50 \sin 38°}{60}$$
$$= 0.5131$$
$$B = 31° \quad 或 \quad 149°$$

在此，需检验 149° 是否是 B 的一个解。

由于 $A + B = 38° + 149°$
$$= 187° \ (>180°)$$

∴ 149° 不是 B 的一个解

∴ $B = 31°$
$$C = 180° - (38° + 31°)$$
$$= 111°$$
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$
$$= \frac{60 \sin 111°}{\sin 38°}$$
$$\approx 91$$

故得 $B = 31°$，$C = 111°$，$c = 91$。

在例 3 中，我们画 $AC = b = 50$ 及 $A = 38°$，以 C 为圆心，$a = 60$ 为半径画弧。此弧与 AP 相交于点 B，因而可以作出一个三角形，表示例 3 只有一解（图 8－5）。

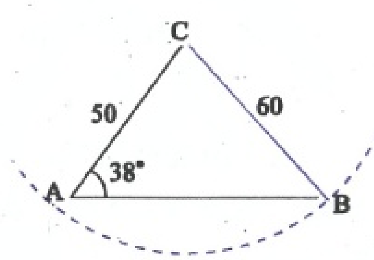


图 8－5

例 4 已知 $a = 18$，$b = 20$，$A = 150°$，试解△ABC。

解 由三角形中大边对大角的关系可知，$A < B$，故 B 也应是钝角，这样，△ABC 有二个内角是钝角，这不可能。因此本题无解。

一般上，已知两边 a、b 和角 A 解三角形，可能有两解、一解和无解三种情况。

(一) 当 $A<90°$ 时，

(a) 如果 $a \geqslant b$，则 $A \geqslant B$，A 为锐角，B 必为锐角，故只有一解（图 8－6 (a)）；

(b) 如果 $a<b$，且

(i) $\sin B<1$，B 可取二值，故有二解（图 8－6 (b)）；

(ii) $\sin B=1$，则 $B=90°$，故有一解，$\triangle ABC$ 为一直角三角形（图 8－6 (c)）；

(iii) $\sin B>1$，无解（图 8－6 (d)）。

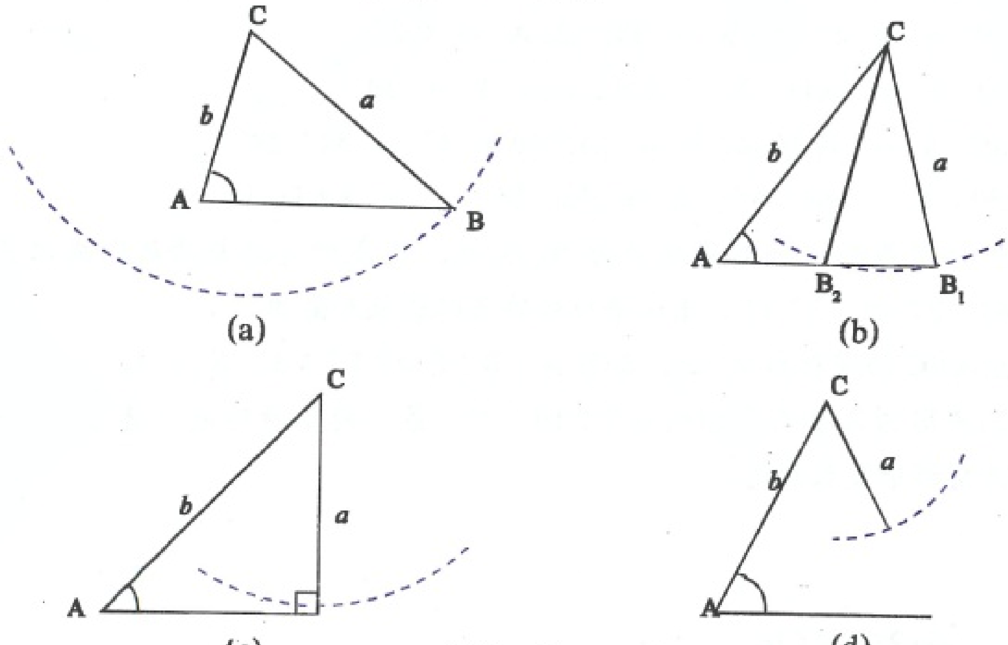


图 8－6

(二) 当 $A \geqslant 90°$ 时，

(a) 如果 $a>b$，则 $A>B$，B 必为锐角，故有一解（图 8－7 (a)）；

(b) 如果 $a \leqslant b$，则 $A \leqslant B$，B 是直角或钝角，这不可能，故无解（图 8－7 (b)）。

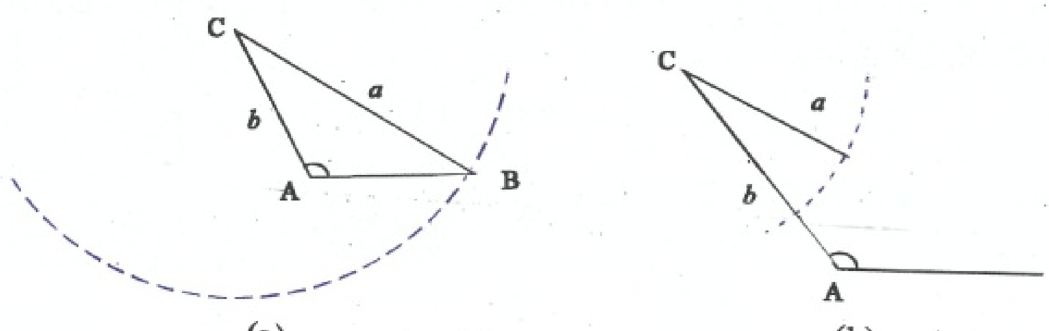


图 8－7

习题 8a

1. 在△ABC 中:
   (a) 已知 $c = 3$, $A = 45°$, $B = 60°$, 求b.
   (b) 已知 $b = 12$, $A = 30°$, $B = 120°$, 求a, c.
2. 根据下列条件解三角形 (如果有解, 角度准确到 1′, 边长准确到小数二位):
   (a) $a = 15$, $b = 10$, $A = 60°$
   (b) $b = 11$, $a = 25$, $B = 30°$
   (c) $b = 40$, $c = 20$, $C = 25°$
   (d) $b = 54$, $c = 39$, $C = 100°$
   (e) $a = 2\sqrt{2}$, $b = 10$, $\sin A = 0.25$
   (f) $a = 2\,\text{cm}$, $b = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$, $A = 30°$
   (g) $a = 32.16\,\text{m}$, $c = 27.08\,\text{cm}$, $C = 52°24'$
   (h) $A = 59°57'$, $B = 36°24'$, $c = 8.65\,\text{cm}$
3. 平行四边形一条对角线长为 76.33 cm, 这条对角线与两边所成的角分别为 $41°27'$ 和 $52°12'$, 求此平行四边形的边长和面积.
4. △ABC 的周长为 40 cm, 如果 A∶B∶C=1∶2∶6, 求a, b, c.
5. 三角形的三个内角的比是 5∶10∶21, 最小的角所对的边是 35.64 cm. 求此三角形中最长的边.

8.2 余弦定律

三角形的边与角的余弦函数值之间有如下的关系:

余弦定律 (cosine rule)

三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

证明：作△ABC 的高 AD。

(i) 如果 B 是锐角（图 8－8），由毕氏定理可知

$$
\begin{aligned}
b^2 &= AD^2 + DC^2 \\
&= (c^2 - BD^2) + DC^2 \\
&= c^2 - BD^2 + (a - BD)^2 \\
&= c^2 + a^2 - 2aBD
\end{aligned}
$$

而 $BD = c\cos B$

$\therefore\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

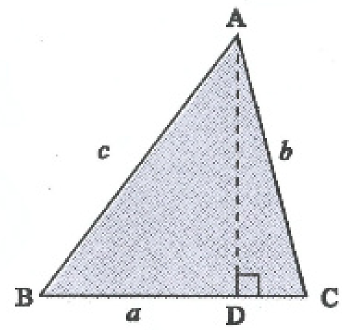


图 8－8

(ii) 如果 B 是钝角（图 8－9），由毕氏定理有

$$
\begin{aligned}
b^2 &= AD^2 + DC^2 \\
&= c^2 - BD^2 + DC^2 \\
&= c^2 - BD^2 + (BD + a)^2 \\
&= c^2 + a^2 + 2a \cdot BD
\end{aligned}
$$

而 $BD = c\cos(180° - B)$

$= -c\cos B$

$\therefore\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

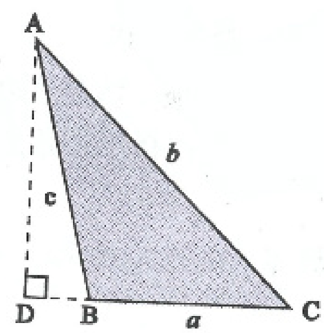


图 8－9

(iii) 如果 B 是直角（图 8－10），那么

$$b^2 = a^2 + c^2$$

这时 $\cos B = \cos 90° = 0$

$\therefore\ 2ca\cos B = 0$

即 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

因此，不论 B 是锐角、钝角或直角，都有

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

同样可以证明

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

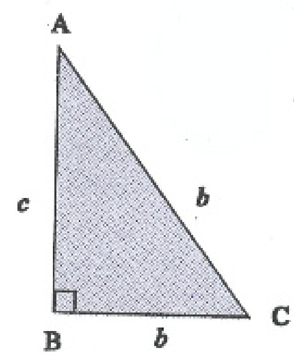


图 8－10

从上面的证明还可以看出，余弦定律是毕氏定理的推广，而毕氏定理只是余弦定律的特例。

把余弦定律的三个式子变形，还可以得到下面三个公式：

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

利用余弦定律可以解决以下两类解任意三角形的问题：

(一) 已知三边，求三个角；

(二) 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角。

(一) 已知三边

一般地，已知三边解三角形，可以用余弦定律求出各角；也可以先用余弦定律求出一角，再用正弦定律和三角形内角和定理求出另外两个角。

例 6 在△ABC中，已知 $a=7$，$b=10$，$c=6$，求A，B和C（准确到1°）。

解 由余弦定律得

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2ac} = \frac{10^2+6^2-7^2}{2\times10\times6} = 0.7250$$

∴ $A \approx 44°$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{6^2+7^2-10^2}{2\times6\times7} = -0.1786$$

即 $B \approx 100°$

$C = 180° - (A+B) = 36°$

故得 $A = 44°$，$B = 100°$，$C = 36°$

例 7 在△ABC 中，已知 $a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，解这个三角形.

解 由余弦定律得

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(2\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

∴ $B=45°$

由正弦定律得

$$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{3}\sin 45°}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ $A=60°$ （由于 $a<c$，故 A 是锐角）

$C=180°-(60°+45°)=75°$

故得 $A=60°$，$B=45°$，$C=75°$

(二) 已知两边及其夹角

一般地，已知两边和它们的夹角解三角形，可以先用余弦定律求出第三边，然后再用正弦律和三角形内角和定理求出其他两个角.

例 8 在△ABC 中，已知 $a=2\sqrt{3}$ cm，$c=(3+\sqrt{3})$ cm，$B=30°$，解这个三角形.

解 由余弦定律 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

得

$$\begin{aligned}b^2&=(3+\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2(3+\sqrt{3})(2\sqrt{3})\cos 30°\\&=9+6\sqrt{3}+3+12-2(3+\sqrt{3})(2\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=24+6\sqrt{3}-18-6\sqrt{3}\\&=6\ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

∴ $b=\sqrt{6}$ (cm)

由正弦定律 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

得 $$\sin A = \frac{2\sqrt{3}\sin 30^\circ}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ $A = 45^\circ$ （因 $a<c$，所以 A 是锐角）

$C = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ)$

$= 105^\circ$

故得 $b = \sqrt{6}$ cm，$A = 45^\circ$，$C = 105^\circ$

例 9 求证△ABC 的六个元素间有下列关系：

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

证明 由余弦定律知

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\therefore\ b\cos C + c\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2}{2a}$$

$$= \frac{2a^2}{2a}$$

$$= a$$

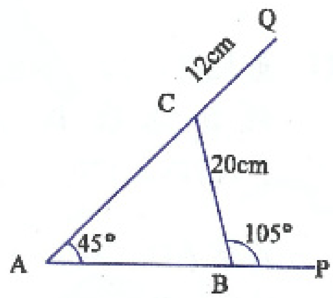
即 $a = b\cos C + c\cos B$

同样可证 $b = a\cos C + c\cos A$

$c = a\cos B + b\cos A$

习题 8b

1. 在△ABC 中：
   (a) 已知 $a=20$，$b=29$，$c=21$，求 B；
   (b) 已知 $b=8$ cm，$c=3$ cm，$A=60°$，求 a，B。
2. 根据下列条件解△ABC:
   (a) $a=3\sqrt{3}$，$b=2$，$c=7$
   (b) $a=56$ cm，$b=65$ cm，$c=33$ cm
   (c) $a=41$，$c=59$，$B=85°$
   (d) $b=38$，$c=40$，$A=106°$
   (c) $a=2$ cm，$b=\sqrt{2}$ cm，$c=(\sqrt{3}+1)$ cm
   (f) $a=55.55$ cm，$b=66.66$ cm，$C=77°42'$
3. 三角形三边分别为 24 cm，18 cm 及 12 cm，求其最大的角。
4. 三角形三边的比是 $7:4\sqrt{3}:\sqrt{13}$，求此三角形最小的角。
5. 已知平行四边形的两边分别为 60 cm 和 45 cm，较短的对角线为 30 cm，求较长的对角线的长。
6. 在△ABC 中，$a=2x$，$b=3x$，$B=95°$ 求 c 及最小的角。
7. 在平行四边形 ABCD 中，$AB=2$ cm，$AC=3$ cm，$AD=2.5$ cm，求∠CBA。
8. 右图中，求 AQ 及 BQ 之长。



8.3 平面三角测量问题

平面三角测量问题，实际上就是解任意三角形的问题。

例 10 从平地上用 AB 和 CD 两个测角器同时望见气球 E 在它们的正西方，分别测得气球的仰角是 42° 和 32°，已知 B、D 间的距离是 20 m，测角器的高是 1.5 m，求气球的高 EF（图 8－11）（准确到 0.1 m）。

解　如图 8－11，因为 42° 是 $\triangle AEC$ 的一个外角，

$\therefore\quad 42° = \angle AEC + 32°$

$\therefore\quad \angle AEC = 42° - 32° = 10°$

在 $\triangle AEC$ 中，由正弦定律得

$$\frac{AC}{\sin\angle AEC} = \frac{AE}{\sin 32°}$$

$$\therefore\quad AE = \frac{AC\sin 32°}{\sin\angle AEC} = \frac{20\sin 32°}{\sin 10°} = 61.0\,(\text{m})$$

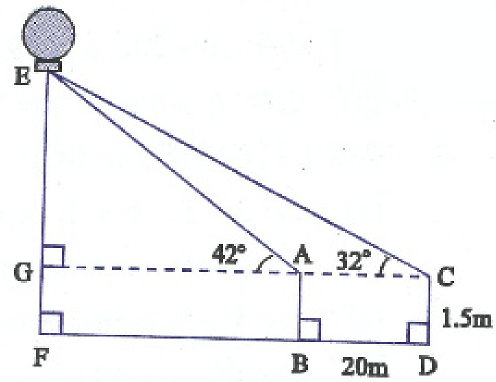


图 8－11

在 $\triangle AEG$ 中，$EG = AE\sin 42° = 61.0\times\sin 42° = 40.8\,(\text{m})$

$\therefore\quad EF = EG + GF = 40.8 + 1.5 = 42.3\,(\text{m})$

答：气球的高度是 42.3 m。

例 11　如图 8－12，要测被障碍物隔开的两点 A、D 之间的距离，在障碍物两侧选取 B、C 两点，测得 $AB = AC = 50$ m，$\angle BAC = 60°$，$\angle ABD = 120°$，$\angle ACD = 135°$，求 A、D 之间的距离（准确到 1 m）。

解　连结 AD、BC；

由于 $AB = AC = 50$ m，且 $\angle BAC = 60°$，

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形。

于是 $\angle ACB = \angle ABC = 60°$

$BC = 50$ m

$\angle DCB = 135° - 60° = 75°$

$\angle DBC = 120° - 60° = 60°$

$\angle BDC = 180° - 75° - 60° = 45°$

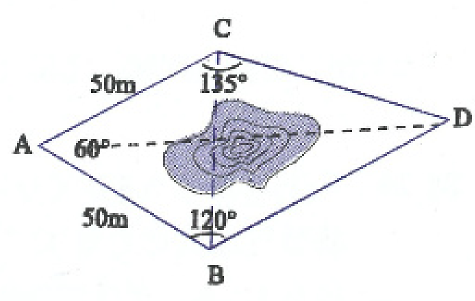


图 8－12

在△DBC 中，由正弦定律得

$$\begin{aligned} CD &= \frac{BC \sin \angle DBC}{\sin \angle BDC} \\ &= \frac{50 \times \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \\ &= 25\sqrt{6} \end{aligned}$$

在△ACD 中，由余弦定律得

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2\,AC \cdot CD \cdot \cos \angle ACD \\ &= 50^2 + (25\sqrt{6})^2 - 2 \times 50 \times 25\sqrt{6} \times \cos 135^\circ \\ &= 625\,(10 + 4\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad AD = 25\sqrt{10 + 4\sqrt{3}} \approx 103 \text{ m}$$

答：A、D 之间的距离为 103 m。

● 方位角（bearing）

如图 8－13，从某点 O 的指北方向线起，顺时针方向旋转至目标 P 的方向线所形成的角，叫做 P 点对 O 点的**方位角**。

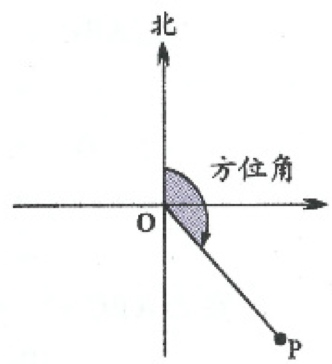


图 8－13

例如，在图 8－14 中，
A 对 O 的方位角是 070°，
B 对 O 的方位角是 150°，
C 对 O 的方位角是 270°，
D 对 O 的方位角是 220°。

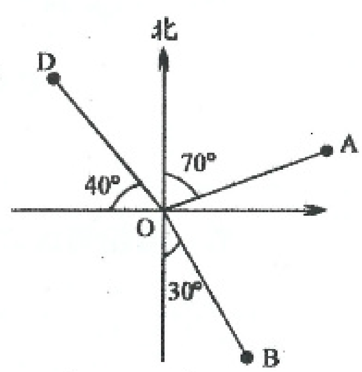


图 8－14

例 12 如图 8－15，货轮在海上以 35 海里／小时的速度沿着方位角为 148° 的方向航行．此货轮在 B 点观测灯塔 A 的方位角是 126°，航行半小时后到达 C 点，观测灯塔 A 的方位角是 78°，求货轮到达 C 点时与灯塔 A 的距离(准确到 0.1 海里)．

解 如图 8－15，船的航行速度为 35 海里／小时，船从 B 航行到 C 需要半小时，

$$\therefore \quad BC = 35 \times \frac{1}{2} = 17.5 \text{（海里）}$$

$$\angle DBC = 180° - 148° = 32°$$

又 BE // CF，故

$$\angle BCF = 32°$$

$$\therefore \quad \angle BCA = 32° + 78° = 110°$$

$$\angle ABC = 148° - 126° = 22°$$

$$A = 180° - (\angle ABC + \angle BCA) = 180° - (110° + 22°) = 48°$$

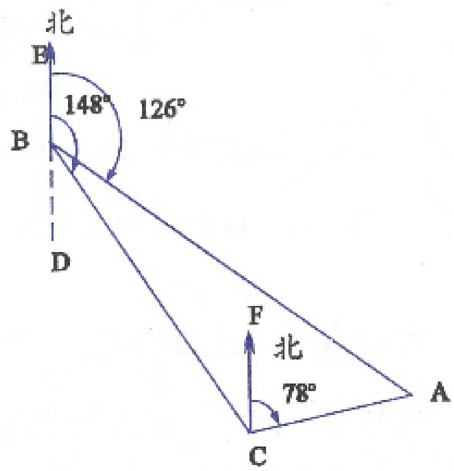


图 8－15

在 △ABC 中，由正弦定律得

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin \angle ABC}$$

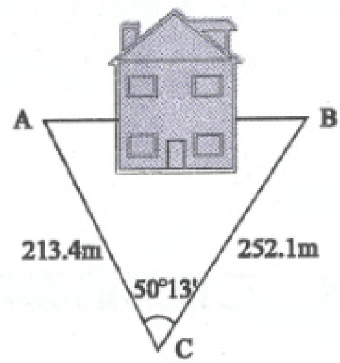
$$\therefore \quad \frac{17.5}{\sin 48°} = \frac{CA}{\sin 22°}$$

$$CA = \frac{17.5 \sin 22°}{\sin 48°} \approx 8.8 \text{（海里）}$$

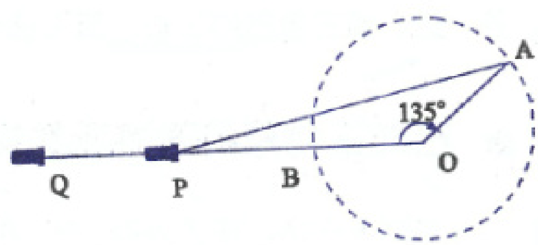
答：货轮到达 C 点时与灯塔 A 的距离为 8.8 海里．

习题 8c

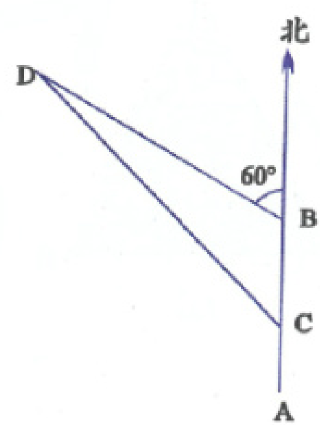
1. 一船向正西航行，航程与岸平行，初见岸边一树在其 315° 的方向，行驶 1 公里后，见树在其 060° 的方向，求船离岸的距离。
2. B 在 A 之 032° 方向且相距 7 公里，C 在 A 之 045° 方向，在 B 之 066° 方向，试求 ∠ACB 及 A、C 之距离。
3. 在 325° 方向的路上有三点 A、B 及 C，AB = 7 公里。在 A 之正南有一点 D，AD = 8 公里，AC = 17 公里，求 C 对 D 的方位及 B、D 之距离。
4. 一塔高 50 公尺位于河边山崖上，由塔顶望对岸一点得俯角为 30°，由塔底望同一点得俯角为 15°，求河宽及崖高。
5. 一观察者在高于海平面 h 公尺之崖顶，测得停泊在海面之两船之俯角分别为 29° 及 48°，两船之连线垂直于崖底。若两船之距离为 100 公尺，求 h 之值。
6. 如右图，为了测量两点 A，B（这两点之间不能互相看到，也不能直达）间的距离，在地面上选择适当的点 C，测得 AC = 213.4 m，BC = 252.1 m，∠ACB = 50°13′，求 AB 的长（准确至 0.1 m）。



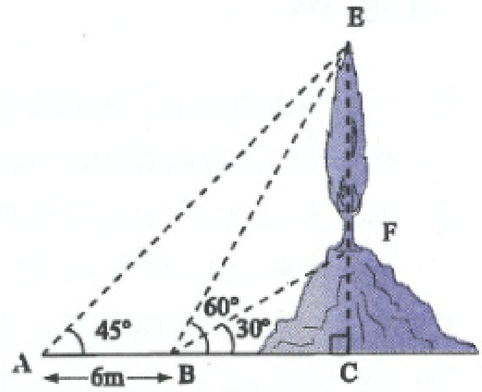
7. 右图为曲柄连杆机构示意图，当曲柄 OA 在水平位置 OB 时，连杆端点 P 在 Q 的位置；如果 OA = 25 cm，AP = 125 cm，求当 OA 自 OB 按顺时针方向旋转 135° 时，P 和 Q 之间的距离。



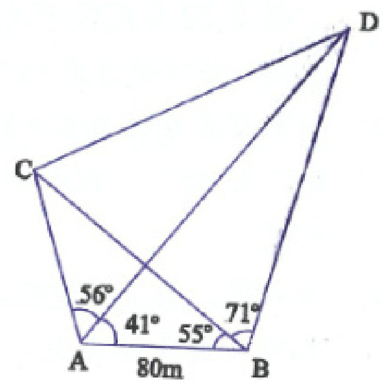
8. 如右图，甲船在某岛 B 的正南方 A 处，以 4 海里／小时的速度向正北方向航行，且 A 到 B 的距离为 12 海里；同时，乙船以 6 海里／小时的速度自 B 岛出发，向岛的北偏西 60° 的方向驶去，问 2 小时后，两船相距多少海里？



9. 如右图，土墩上有一颗树，观察者先在A处测得其顶点E的仰角为45°，再从A处正对这树沿水平方向走6米到达B处，在B处测得树的顶点E与根底F的仰角分别为60°及30°，求树高EF。



10. 如右图，C、D是停泊在海上的两条船，从岸边相距80 m的两个点A、B测得$\angle CAD = 56°$，$\angle DAB = 41°$，$\angle CBA = 55°$，$\angle CBD = 71°$，求两只船的距离（准确至0.1 m）。



8.4 三角形的面积

这里，我们研究求三角形的面积问题。如果已知三角形两边及其夹角、两角及一边，或三角形的三边，那么就可以求得三角形的面积。

已知三角形的两边及其夹角，求面积。

如图 8－16，在△ABC 中，作 AB 边上的高。

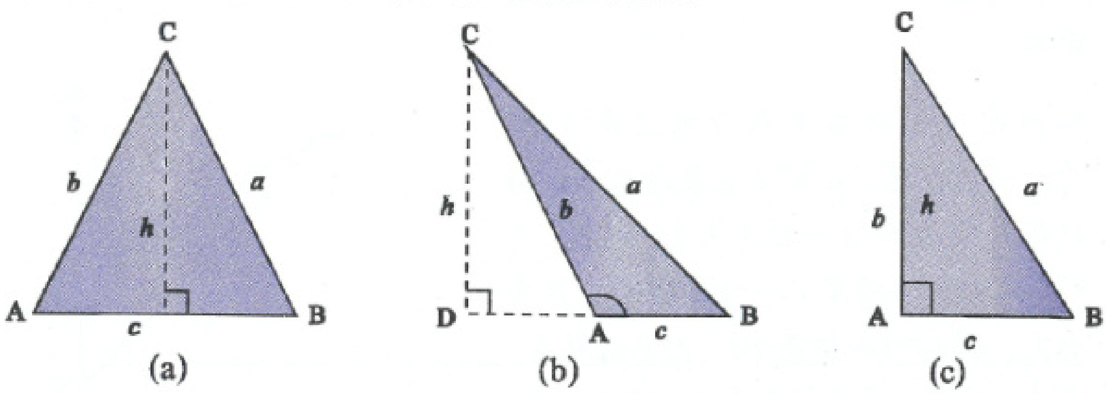


图 8－16

如果角 A 是锐角（图 8–16 (a)），那么

$$h = b\sin A$$

如果角 A 是钝角（图 8–16 (b)），那么

$$h = b\sin(180° - A) = b\sin A$$

如果角 A 是直角（图 8–16 (c)），那么 $\sin A = 1$，因此

$$h = b = b\sin A$$

这就是说在所有情况下，都有 $h = b\sin A$，所以

$$\Delta = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc\sin A$$

同理可证

$$\Delta = \frac{1}{2}ca\sin B，\ \Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$$

这就是说，已知三角形的两边及其夹角，求其面积的公式是：

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$$

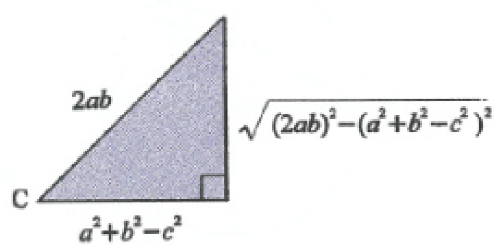
$$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$\Delta = \frac{1}{2}ca\sin B$$

● 已知三角形的三边，求面积

我们知道 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$

由余弦定理，



可得 $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

所以
$$\sin C = \frac{\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}}{2ab}$$

令 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$,

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

这就是说，已知三角形的三边，求其面积的公式是：

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{其中 } s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

8.5 三角形的外接圆半径和内切圆半径

● 三角形的外接圆半径

设 △ABC 的外接圆 O 的半径为 R，则

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

证明：先证 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 成立．下面分 (i) $A=90°$，(ii) $A<90°$，(iii) $A>90°$ 三种情形来证明，如图 8 – 17 所示．

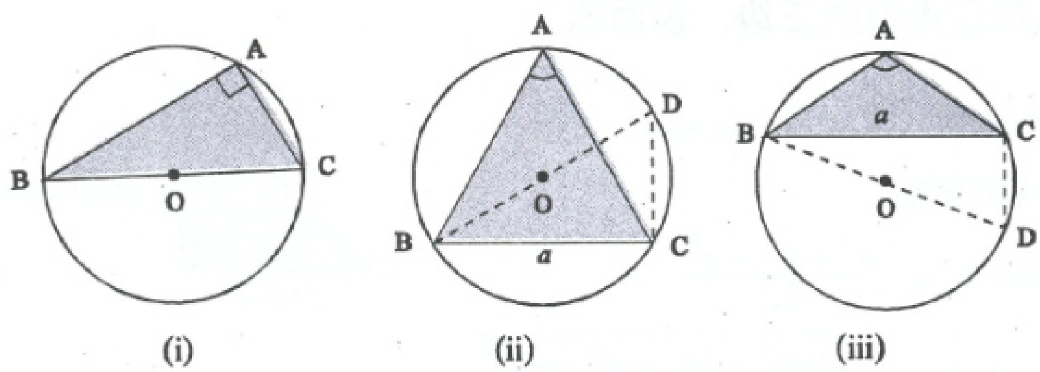


图 8 – 17

(i) 这时 $BC = 2R = a$，而 $\sin A = 1$，所以 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$；

(ii) 由点 B 作直经 BD，连结 CD，则 $\triangle BCD$ 是一个直角三角形，

由 $\quad A = D$

得 $\quad \sin D = \dfrac{a}{2R} = \sin A$，

所以 $\quad \dfrac{a}{\sin A} = 2R$；

(iii) 由点 B 作直经 BD，连结 CD，则 $\triangle BCD$ 是一个直角三角形，

由 $\quad A + D = 180°$

得 $\quad \sin A = \sin(180° - D) = \sin D = \dfrac{a}{2R}$，

所以 $\quad \dfrac{a}{\sin A} = 2R$。

由以上 (i)，(ii)，(iii) 的论证，知不论任何情形，$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ 都成立。

同理可证 $\quad \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

所以 $\quad \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

【注】以上的证明过程也是正弦定律的又一种证明方法。

由此可知，三角形的外接圆半径等于任意一边与它的对角的正弦的比的一半。

即 $$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

三角形的内切圆半径

如图 8-17，圆 O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，它的半径为 r。那么 $\triangle ABC$ 的面积为

$$\begin{aligned}\Delta &= \triangle OBC\text{ 面积} + \triangle OCA\text{ 面积} + \triangle OAB\text{ 面积}\\ &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr\\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)r\end{aligned}$$

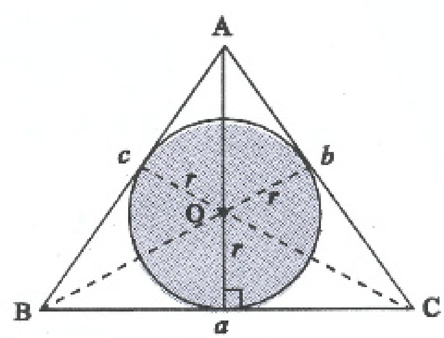


图 8-17

$\because \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$\therefore \quad r = \frac{\Delta}{s}$

$$= \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

这就是说，求三角形内切圆的半径的公式是:

$$r = \frac{\Delta}{s}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \qquad \text{其中 } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

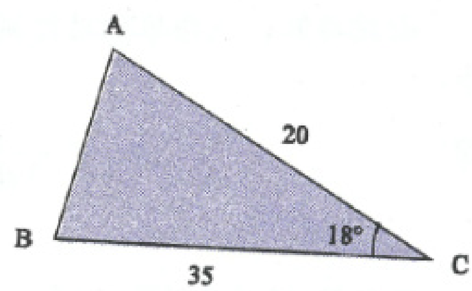
例 13 求下列三角形的面积:

(a) $a = 35$, $b = 20$, $C = 18°$

(b) $c = 10$, $A = 6°$, $C = 150°$

(c) $a = 41$, $b = 416$, $c = 425$

解 (a) 应用公式 $\triangle = \frac{1}{2} ab \sin C$，得



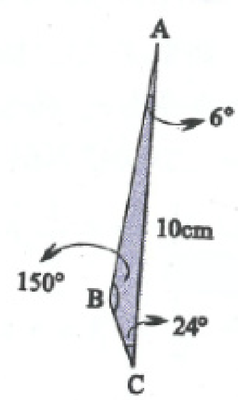
$$\Delta = \frac{1}{2} \times 35 \times 20 \times \sin 18°$$

$$= 108.2$$

(b) $\frac{a}{\sin 6°} = \frac{10}{\sin 150°}$

$$a = \frac{10 \sin 6°}{\sin 150°}$$

应用公式 $\Delta = \frac{1}{2} ac \sin B$



得 $\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \sin 6°}{\sin 150°} \cdot 10 \cdot \sin 24°$

$$= 4.3$$

(c) 应用公式 $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，

$s = \dfrac{1}{2}(41+416+425) = 441$，得

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{441(441-41)(441-416)(441-425)} \\ &= \sqrt{441 \times 400 \times 25 \times 16} \\ &= 8400\end{aligned}$$

例 14 设 R 是 △ABC 的外接圆的半径，求证：

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

证明 由正弦定律，得 $\sin A = \dfrac{a}{2R}$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \Delta &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad R &= \frac{abc}{4\Delta} \\ &= \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\end{aligned}$$

例 15 已知三角形三边的长为 13、14、15，求这个三角形的面积以及它的外接圆半径和内切圆半径。

解 由 $a=13$，$b=14$，$c=15$，$s=\dfrac{1}{2}(13+14+15)=21$，

得

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} \\ &= 84\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R &= \frac{abc}{4\Delta} \\ &= \frac{13 \times 14 \times 15}{4 \times 84} \\ &= 8\frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$r = \frac{\Delta}{s}$$

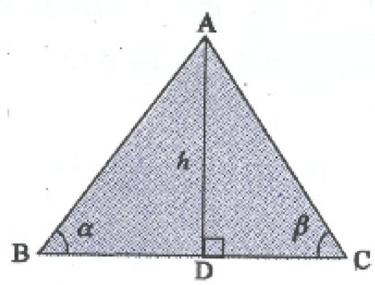
$$= \frac{84}{21}$$

$$= 4$$

习题 8d

求下列三角形的面积（1～5）：

1. $a = 8$，$c = 5$，$B = 60°$
2. $b = 8.00$，$c = 5.00$，$A = 37.3°$
3. $c = 25$，$A = 16°$，$C = 150°$
4. $a = 13$，$b = 20$，$c = 25$
5. $a = 6.04$，$c = 9.67$，$B = 53.13°$
6. 已知 $b = 16$，$A = 72°$，$C = 41°$，求 c。
7. 已知 $b = 37$，$c = 44$，$B = 53°$，求 C。
8. 设三角形的三边为 m，n 和 $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$，求这个三角形的最大角。
9. 已知 $a = 40$ cm，$b = 35$ m，$C = 112°$，求 △ABC 的外接圆半径 R。
10. 在 △ABC 中，已知 $A = 45°$，$B = 120°$，外接圆半径为 20 cm，求 a，b，c。
11. 等腰三角形的腰长为 2 cm，面积为 1 cm^2，求顶角和底边。
12. 已知 △ABC 的外接圆半径为 R，求证 $\Delta = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$。
13. 如图，一个锐角三角形的两个角分别为 α 及 β，由第三个角的顶点所引的高等于 h，求证这个三角形外接圆的周长为 $L = \dfrac{\pi h}{\sin\alpha \sin\beta}$。



总复习题 8

1. 根据下列条件，解 △ABC:
   (a) $a=26$，$c=15$，$C=23°$；
   (b) $b=100$，$a=40$，$A=60°$；

(c) $a=48.72$ cm，$b=59.19$ cm，A＝100°；

(d) $a=\sqrt{8}$，$c=\sqrt{12}$，A＝45°；

(e) $a=60.16$ cm，$b=75.20$ cm，C＝124.08 cm;

(f) $a=30.69$ cm，B＝55°，C＝62°。

2. 在△ABC中，已知$a=56$，$b=65$，$c=33$，求最小的角和外接圆的半径。

3. 一三角形三个内角的比是5∶10∶21，最小的角所对的边是35.64 cm，求最大的边。

4. 在△ABC中，如果$a:b:c=3:5:7$，且最小的边为14，求A、B、C。

5. 在平行四边形ABCD中，如果$AB^2=16$，$BC^2=36$，$AC^2=52-24\sqrt{2}$，求各内角的度数。

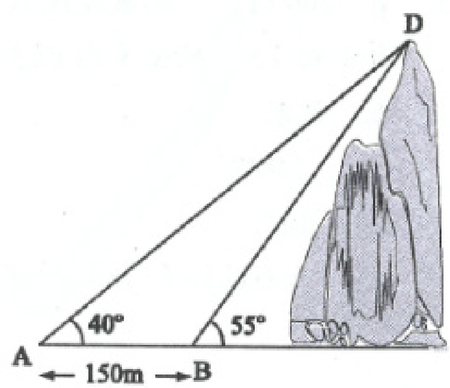
6. 已知△ABC的面积为12 cm^2，边长$a=6$ cm，$b=8$ cm，求边长c。

7. 在△ABC中，$AB=\sqrt{3}$，AC＝4，BC＝3，BD是AC边上的中线，求BD的长。

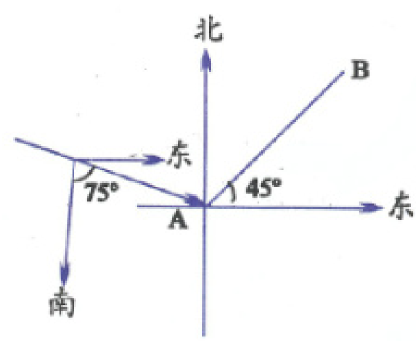
8. 在△ABC中，AD是角A的平分线，用正弦定律证明：

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

9. 如右图，要测量一座山高，先在山外一点A测得山顶D的仰角为40°，再前进150米至B点（A、B都在水平线上），测得D的仰角为55°，求山高。



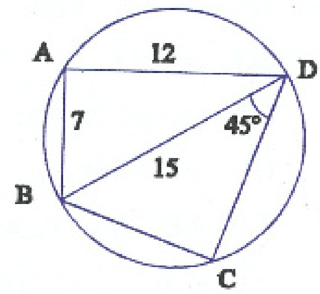
10. 如右图，已知货轮在海面上沿着南偏东75°的方向以每小时18海里的速度航行，货轮在A处测得灯塔B在北偏东45°的方向上。若货轮按原来航向和航速继续航行$\frac{4}{3}$小时后达到C处，观测灯塔B正好在正北方向上。



(a) 在图中标出C处的位置；

(b) 求BC的长（精确到0.1海里）。

11. 如图，在圆内接四边形 ABCD 中，$AB = 7$，$AD = 12$，$BD = 15$，$\angle BDC = 45^\circ$。求 A 的度数和 BC 的长（长度精确到 0.1，角度准确到 1°）。



12. 在△ABC 中，已知 B 的 2 倍等于其他两角的和，最长边的长与最短边的长的和是 8 cm，最长边的长与最短边的长的积是 $15\,cm^2$，求这个三角形的面积和角 B 所对的边的长。

13. 在一由北至南的海岸线上有 A、B 两点，A 在 B 之正北且相距 7 公里，有一船被发现在 A $145^\circ 34'$ 的方向，在 B $082^\circ 42'$ 的方向。试证明此船与 A 之距离大约为 7.8 公里。现此船以每小时 15 公里的速率行驶，45 分钟后此船被发现在 A $035^\circ 48'$ 的方向，求此船行驶的方向。

14. 某人在山脚，测得山顶的仰角是 10°，再沿倾斜角 7° 的斜坡行 3 公里后，又测得山顶的仰角是 15°，求山高。

15. 在 1200 时，一船被发现在 A 地 255° 的方向的一点 B，且相距 6 里，此船以每小时 12 里的速率向 015° 方向行驶，最后到达在 A 地 310° 的方向的一点 C，试求

(a) $\angle BAC$;

(b) BC;

(c) 此船到达 C 点的时间。

9 三角恒等式

9.1 同角三角函数的基本关系式

一个角的各三角函数的值，互相是有联系的．它们的联系表现在以下基本关系式中．

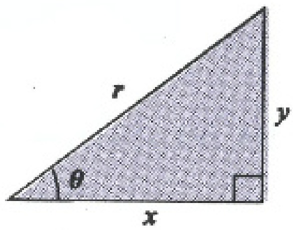
● 倒数关系

根据三角函数的定义可知

$$\sin\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = \frac{y}{r} \cdot \frac{r}{y} = 1$$

$$\cos\theta \cdot \sec\theta = \frac{x}{r} \cdot \frac{r}{x} = 1$$

$$\tan\theta \cdot \cot\theta = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$$



就是

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

● 商的关系

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y} = \cot\theta$$

就是

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

● 平方关系

因为 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2$

$$= \frac{x^2+y^2}{r^2}$$

$$= \frac{r^2}{r^2}$$

$$= 1$$

将 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 的两边分别除以 $\cos^2\theta$、$\sin^2\theta$，可以得到

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2 + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$$

就是

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

以上八个等式都是在左右两边的函数都有意义的条件下才成立。例如取 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\tan\theta$ 没有意义，因此 $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 这个式子不成立。但是对于使等式都有意义的那些角来说，不论取什么值，等式都成立，所以它们都是恒等式。这些恒等式都是含有三角函数的恒等式，叫做**三角恒等式**（trigonometric identity）。

利用这些恒等式，可以根据一个角的某一个三角函数值，求出这个角的其他函数值，还可化简三角函数式，证明其他一些三角恒等式，等等。

例 1 化简下列各式:

(a) $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$

(b) $\operatorname{coscc} A \tan A \sec A \sin A \cos A \cot A$

解 (a) $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$

$$\begin{aligned}&= \sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A+\cos^2 A\\&= 2(\sin^2 A+\cos^2 A)\\&= 2\end{aligned}$$

(b) $\operatorname{cosec} A \tan A \operatorname{scc} A \sin A \cos A \cot A$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sin A}\cdot\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos A}\cdot\sin A\cos A\cdot\frac{\cos A}{\sin A}\\&= 1\end{aligned}$$

例 2 求证 $\cot^2\theta(\tan^2\theta-\sin^2\theta) = \sin^2\theta$。

证明
$$\begin{aligned}\cot^2\theta(\tan^2\theta-\sin^2\theta) &= \cot^2\theta\tan^2\theta-\cot^2\theta\sin^2\theta\\&= (\cot\theta\tan\theta)^2-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\sin^2\theta\\&= 1-\cos^2\theta\\&= \sin^2\theta\end{aligned}$$

例 3 求证 $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta} = \cot\theta$。

证明
$$\begin{aligned}\frac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta} &= \frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{1-\cos^2\theta+\sin^2\theta-\sin\theta}\\&= \frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{2\sin^2\theta-\sin\theta}\\&= \frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{\sin\theta(2\sin\theta-1)}\\&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&= \cot\theta\end{aligned}$$

例 4 求证 $\sin^2\theta\cos^2\theta = \dfrac{1}{\sec^2 + \operatorname{cosec}^2\theta}$

证明
$$\frac{1}{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}$$
$$= \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$$
$$= \sin^2\theta\cos^2\theta$$

例 5 求证 $\dfrac{1-2\cos^2 A}{\sin A\cos A} = \tan A - \cot A$.

证明一
$$\tan A - \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\cos A}{\sin A}$$
$$= \frac{\sin^2 A - \cos^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$= \frac{1-\cos^2 A - \cos^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$= \frac{1-2\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

证明二
$$\frac{1-2\cos^2 A}{\sin A\cos A} = \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) - 2\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$= \frac{\sin^2 A - \cos^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$= \frac{\sin^2 A}{\sin A\cos A} - \frac{\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$= \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\cos A}{\sin A}$$
$$= \tan A - \cot A$$

例 6 求证 $\dfrac{\cos^2\theta+\tan^2\theta-1}{\sin^2\theta}=\tan^2\theta$。

证明

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos^2\theta+\tan^2\theta-1}{\sin^2\theta} &= \frac{\cos^2\theta-1}{\sin^2\theta}+\frac{\tan^2\theta}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\
&= -1+\sec^2\theta \\
&= \tan^2\theta
\end{aligned}
$$

例 7 求证 $\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=\dfrac{1-\cot\theta}{1+\cot\theta}$

证明 $\because$

$$
\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=\frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}
$$

$$
\frac{1-\cot\theta}{1+\cot\theta}=\frac{1-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}
$$

$$
\therefore\quad \frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=\frac{1-\cot\theta}{1+\cot\theta}
$$

从上面的例子可以看到，证明三角恒等式，可以从任何一边开始，证得它等于另一边，也可以证明左右两边都等于同一个式子，从而证明三角恒等式。要在熟练掌握各基本公式的基础上，按照由繁到简的原则，灵活地运用各种证法。

习题 9a

化简 (1～6)：

1. $\cos\theta\tan\theta$

2. $\dfrac{2\cos^2\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$

3. $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$

4. $\sec^2 A-\tan^2 A-\sin^2 A$

5. $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\cos\alpha\sec\alpha$

6. $\dfrac{\sin A+\cos A}{\sec A+\operatorname{cosec} A}$

证明下列恒等式 (7～30)：

7. $\sin A\sec A = \tan A$

8. $(\sin\theta-\cos\theta)^2 = 1-2\sin\theta\cos\theta$

9. $\sin^4 A+\sin^2 A\cos^2 A+\cos^2 A = 1$

10. $\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta$

11. $\cot^2\theta(1-\cos^2\theta) = \cos^2\theta$

12. $(\sec^2 A-1)\cot^2 A = 1$

13. $\dfrac{1}{\tan\alpha+\cot\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$

14. $\dfrac{\sin\alpha+\cot\alpha}{\tan\alpha+\operatorname{cosec}\alpha} = \cos\alpha$

15. $(1+\tan\theta)^2+(1-\tan\theta)^2 = 2\sec^2\theta$

16. $(\tan\alpha+\cot\alpha)^2 = \sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha$

17. $\sec^4\alpha-\sec^2\alpha = \tan^4\alpha+\tan^2\alpha$

18. $(1-\sin^2\alpha)(\sec^2\alpha-1) = \sin^2\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha-\cot^2\alpha)$

19. $(1+\cot\alpha)^2+(1-\cot\alpha)^2 = 2\operatorname{cosec}^2\alpha$

20. $(\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)^2+(\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)^2 = 2\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha$

21. $\sin\alpha(1+\tan\alpha)+\cos\alpha(1+\cot\alpha) = \sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$

22. $\dfrac{\tan\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha+\tan\beta} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$

23. $(\sin A-\operatorname{cosec} A)(\cos A-\sec A) = \dfrac{1}{\tan A+\cot A}$

24. $\dfrac{1+\tan^2\alpha}{1+\cot^2\alpha} = \left(\dfrac{1-\tan\alpha}{1-\cot\alpha}\right)^2$

25. $\dfrac{\tan^2\alpha-\cot^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha$

26. $\dfrac{\tan\alpha\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha} = \dfrac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\tan\alpha\sin\alpha}$

27. $\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta} = \sec\theta+\tan\theta$

28. $(\sin\alpha+\sec\alpha)^2+(\cos\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)^2 = (1+\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha)^2$

29. $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\beta-\cot\alpha} = \dfrac{\tan\beta}{\cot\alpha}$

30. $(\sec\theta+\tan\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

9.2 两角和与差的三角函数

● 两角和与差的余弦

关于两角和的余弦，我们有下面的重要公式：

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

证明：如图 9–1，以原点为圆心，作单位圆 O，并作 α，β 和 $-\beta$ 角；使 α 角的始边为 Ox，交圆 O 于 P_1，终边交圆 O 于 P_2；β 角的始边为 OP_2，终边交圆 O 于 P_3，$-\beta$ 角的始边为 OP_1，终边交圆 O 于 P_4。这时 P_1，P_2，P_3，P_4 的坐标分别是：

$P_1(1,\ 0)$;

$P_2(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$;

$P_3(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$;

$P_4(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$;

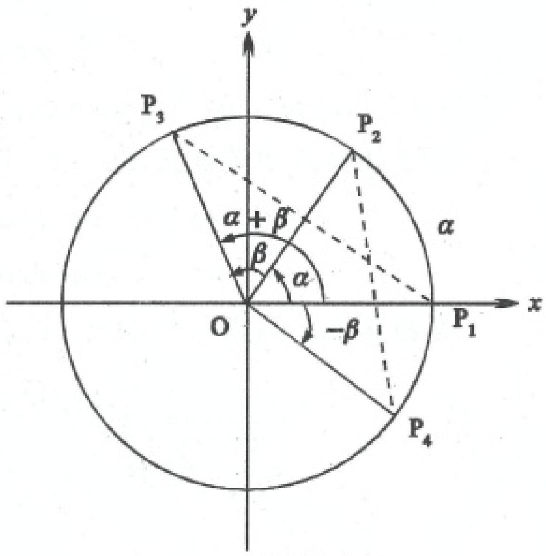


图 9–1

由 $|P_1P_3| = |P_2P_4|$ 及两点间距离公式，得

$$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta) = [\cos(-\beta)-\cos\alpha]^2+[\sin(-\beta)-\sin\alpha]^2$$

展开，整理得

$$2-2\cos(\alpha+\beta) = 2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

所以

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

把上述公式中的 β 换成 $-\beta$，就得到

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

综上所述，两角和与差的余弦公式就是：

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

● 两角和与差的正弦

因为

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]\\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

所以 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

把上述公式中的 β 换成 $-\beta$，得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

这就是说，两角和与差的正弦公式是：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

例 8 不查表，求 $\cos 105°$ 及 $\cos 15°$ 的值.

解

$$\begin{aligned}\cos 105° &= \cos(60°+45°)\\ &= \cos 60°\cos 45°-\sin 60°\sin 45°\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

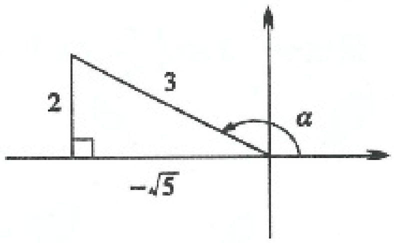
$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

例 9 不查表，求 $\sin 75^\circ$ 的值。

解
$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

例 10 已知 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$，$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，$\cos\beta = -\frac{3}{4}$，$\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 及 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值。

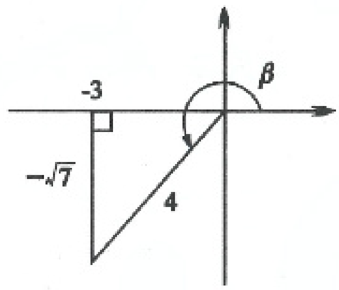
解 由 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$，$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，得



$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

又由 $\cos\beta = -\frac{3}{4}$，$\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$，得

$$\sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$



$$\begin{aligned}\therefore \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ &= \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{35}}{12}\end{aligned}$$

例 11 求证 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\beta} = 1-\cot^2\alpha\tan^2\beta$

证明

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\beta} \\ =\ &\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\beta} \\ =\ &\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta} \\ =\ &1-\frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta} \\ =\ &1-\cot^2\alpha\tan^2\beta\end{aligned}$$

例 12 求证 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)$

证法一

$$\begin{aligned}2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) &= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) \\ &= \cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\end{aligned}$$

证法二

$$\begin{aligned}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta &= 2\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) \\ &= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\end{aligned}$$

例 13 求证 $\cos 4\theta \cos\theta + \sin 4\theta \sin\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$

证明
$$\begin{aligned}\cos 4\theta \cos\theta + \sin 4\theta \sin\theta &= \cos(4\theta - \theta)\\ &= \cos 3\theta\\ &= \cos(2\theta + \theta)\\ &= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta\end{aligned}$$

习题 9b

1. 不查表，求 $\cos 75°$ 的值。
2. 不查表，求 $\sin 105°$ 的值。
3. 不查表，求 $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ 的值。
4. 不查表，求下列的值:
   (a) $\cos 80° \sin 20° + \cos 80° \cos 20°$；
   (b) $\sin 7° \cos 23° + \cos 7° \sin 23°$；
   (c) $\sin 73° \cos 28° - \cos 73° \sin 28°$；
   (d) $\cos 75° \cos 45° - \sin 75° \sin 45°$。
5. 不查表，求 $\cos^2 15° - \sin^2 15°$ 的值。
6. 已知 $\sin\theta = \frac{15}{17}$，$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$ 的值。
7. 已知 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$，$\cos\beta = -\frac{3}{4}$，且 α，β 都是第二象限角，求 $\sin(\alpha - \beta)$ 及 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值。
8. 已知 $\cos\theta = -\frac{5}{13}$，求 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。
9. 已知 $\sec A = \frac{17}{8}$，$\csc B = \frac{5}{4}$，且 A 是第一象限角，B 是第二象限角，求 $\sec(A + B)$ 的值。
10. 已知 $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$，$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}，2\pi\right)$，$\sin\beta = \frac{12}{13}$，$\beta \in \left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$，求 $\sin(\alpha + \beta)$ 及 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值。

证明下列恒等式（11～20）：

11. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

12. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

13. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta$

14. $\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\beta - \sin\beta)$

15. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \dfrac{1}{2}\cos\alpha = \sin(\alpha - \dfrac{\pi}{6})$

16. $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

17. $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos(45^\circ + \theta)$

18. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{6} + \alpha\right) = \cos\alpha$

19. $\sin 3A\cos A - \cos 3A\sin A = \sin 2A$

20. $\dfrac{\cos 2A}{\sec A} - \dfrac{\sin 2A}{\operatorname{coscc} A} = \cos 3A$

● 两角和与差的正切

利用两角和与差的正弦、余弦公式，很容易得到两角和与差的正切公式。

由 $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$，可知

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \quad (\cos\alpha \neq 0,\ \cos\beta \neq 0)$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

把上述公式中的 β 换成 $-\beta$，得

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

这就是说，两角和与差的正切公式是：

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

在上述公式中，α、β 的取值范围应该使 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 和 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 都有意义的那些值，即 α、β 和 $\alpha\pm\beta$ 都不能是 $\frac{\pi}{2}+n\pi$ （n 是整数）。

例如 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，如果求 $\tan(\alpha+\beta)$ 就不能用上述公式。但可用另外方法求得，即

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

例 14 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，求 $\alpha+\beta$ 的值（其中 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，$90^\circ<\beta<180^\circ$）。

解 由 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，得

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{3}-2}{1-\frac{1}{3}(-2)} = -1$$

又因 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，$90^\circ<\beta<180^\circ$，所以

$$90^\circ<\alpha+\beta<270^\circ$$

在 90° 与 270° 之间，只有 135° 的正切的值为 -1，

$\therefore\ \alpha+\beta=135^\circ$

例 15 计算 $\dfrac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}$ 的值。

解 $\because\ \tan 45^\circ = 1,$

$$\therefore\ \frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 75^\circ}{1-\tan 45^\circ\ \tan 75^\circ}$$

$$= \tan(45^\circ + 75^\circ)$$

$$= \tan 120^\circ$$

$$= -\sqrt{3}$$

例 16 若 $1-\tan 2\theta\tan\theta \neq 0$，求证：

$$\tan 3\theta - \tan 2\theta - \tan\theta = \tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta$$

证明 $\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta)$

$$= \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$$

$\because\ 1-\tan 2\theta\tan\theta \neq 0$

$\therefore\ \tan 3\theta(1-\tan 2\theta\tan\theta) = \tan 2\theta + \tan\theta$

$\tan 3\theta - \tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta = \tan 2\theta + \tan\theta$

$\tan 3\theta - \tan 2\theta - \tan\theta = \tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta$

例 17 设 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c = 0\ (b\neq 0)$ 的两个根，求 $\cot(\alpha+\beta)$ 的值。

解 在一元二次方程 $ax^2+bx+c = 0$ 中，$a\neq 0$。由一元二次方程根与系数的关系，得

$$\tan\alpha + \tan\beta = -\frac{b}{a}$$

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{c}{a}$$

而 $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}$

$$= \frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

因为 $b \neq 0$（题设），所以 $\tan\alpha + \tan\beta \neq 0$，代入，得

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{1-\dfrac{c}{a}}{-\dfrac{b}{a}} = \frac{a-c}{-b} = \frac{c-a}{b}$$

习题 9c

1. 不查表，求 $\tan 75°$、$\cot 105°$ 的值。
2. 不查表，求 $\dfrac{\tan 12° + \tan 33°}{1-\tan 12° \tan 33°}$ 的值。
3. 不查表，求 $\dfrac{1-\tan 15°}{1+\tan 15°}$ 的值。
4. 已知 $\tan\alpha = 2$，求 $\tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值。
5. 已知 $\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 3$，并且 α，β 都是锐角，求证 $\alpha + \beta = 135°$。
6. 已知 $\tan\alpha = -\dfrac{4}{3}$，$\tan\beta = \dfrac{8}{15}$，$\alpha$ 在第四象限内，β 在第三象限内。求 $\cos(\alpha-\beta)$ 及 $\cot(\alpha+\beta)$ 之值。
7. 求证 $\tan(x+y)\tan(x-y) = \dfrac{\tan^2 x - \tan^2 y}{1-\tan^2 x \tan^2 y}$
8. 求证 $\dfrac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$
9. 求证 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \tan\alpha + \tan\beta$
10. 求证 $\dfrac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta} = \tan\alpha$
11. 求证 $1 + \tan 2\theta \tan\theta = \sec 2\theta$
12. 已知 $a\sin(\theta+\alpha) = b\sin(\theta+\beta)$，求证 $\tan\theta = \dfrac{b\sin\beta - a\sin\alpha}{a\cos\alpha - b\cos\beta}$

9.3 倍角及半角的三角函数

● 倍角的正弦、余弦、正切

在 9.2 节两角和的三角函数公式中，当 $\alpha=\beta$ 时，就可以得出相应的二倍角 (double angle) 的三角函数公式。

当 $\alpha=\beta$ 时，则有

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha) \\
&= \sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha) \\
&= \cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha \\
&= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha-1 \\
&= 1-2\sin^2\alpha \\
\tan 2\alpha &= \tan(\alpha+\alpha) \\
&= \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} \\
&= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

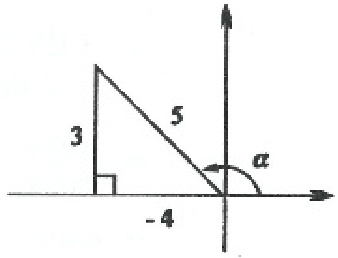
这就是说，倍角的正弦、余弦、正切公式是:

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha-1 \\
&= 1-2\sin^2\alpha \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

例 18 已知 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2}，\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值。

解 因为 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，且 α 在第二象限内，所以

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$$



$$\begin{aligned}
\therefore\quad \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&= 2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right) \\
&= -\frac{24}{25} \\
\cos 2\alpha &= 1-2\sin^2\alpha \\
&= 1-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2 \\
&= \frac{7}{25} \\
\tan 2\alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \\
&= \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} \\
&= -\frac{24}{7}
\end{aligned}$$

例 19 用 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 分别表示 $\sin 3\alpha$、$\cos 3\alpha$。

解

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) \\
&= \sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha \\
&= 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \\
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) \\
&= \cos 2\alpha\cos\alpha-2\sin 2\alpha\cos\alpha \\
&= (2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \\
&= 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha
\end{aligned}$$

例 20 求证 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \cot\alpha$。

证明
$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-(1-2\sin^2\alpha)}\\ &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}\\ &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\ &= \cot\alpha\end{aligned}$$

习题 9d

1. 已知 $\sin\theta = 0.8$，$\theta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ 的值。

2. 已知 $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$，求 $\tan 2\alpha$，$\cot 2\alpha$ 的值。

3. 已知 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，求 $\sin 3\alpha$ 的值。

4. 不查表，求下列各式的值：

   (a) $2\sin 67°30'\cos 67°30'$　　(b) $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8}$

   (c) $\sin 15°\cos 15°$　　(d) $1-2\sin^2 75°$

   (e) $\dfrac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$　　(f) $\dfrac{2\tan 150°}{1-\tan^2 150°}$

证明下列恒等式（5～20）

5. $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

6. $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

7. $2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha) = \sin 2\alpha$

8. $\cos^4\dfrac{x}{2} - \sin^4\dfrac{x}{2} = \cos x$

9. $1+2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 2$

10. $\cot\alpha - \cot 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha$

11. $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} = -\dfrac{1}{2}\tan 2\alpha$

12. $\tan\theta-\cot\theta = -2\cot 2\theta$

13. $\dfrac{\operatorname{cosec}^2\alpha-2}{\operatorname{cosec}^2\alpha} = \cos 2\alpha$

14. $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

15. $\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan^2\theta$

16. $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A} = 2$

17. $\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A} = \sec 2A-\tan 2A$

18. $\dfrac{\sin x}{\cos x-\sin x}+\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x} = \sec 2x$

19. $\cot 2\theta+\operatorname{cosec} 2\theta = \cot\theta$

20. $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\cos x+\sin x} = 2\cos x$

● 半角的正弦、余弦、正切

在上述的二倍角的三角函数公式中，若令 $2\alpha = \theta$，$\alpha = \dfrac{\theta}{2}$，我们可得下列**半角公式**（half angle formula）:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

例 21 已知 $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$，并且 $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，求 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 的值.

解 因为 $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，所以 $\dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \pi$，$\dfrac{\alpha}{2}$ 是第二象限的角.

由公式 $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

得
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

由公式 $\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$

得
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+\frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{13}}{13}}{-\frac{3\sqrt{13}}{13}} = -\frac{2}{3}$$

例 22 已知 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$，并且 $180^\circ < \theta < 270^\circ$，求 $\tan\frac{\theta}{2}$。

解 因为 $180^\circ < \theta < 270^\circ$，所以 $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$，即 $\frac{\theta}{2}$ 是第二象限的角。

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

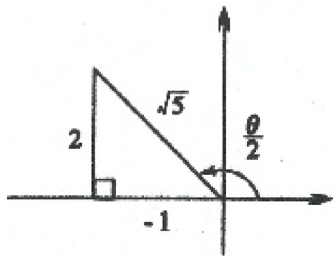
$$-\frac{3}{5} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2}{5}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{\theta}{2} = -2$$



例 23 求证 $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$

解
$$\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \tan\frac{\alpha}{2}$$

例 24 求证 $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$。

证法一 $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$

$$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

证法二 $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)+\frac{1}{8}(2\cos^2 2x-1)$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}+\sin^2 x+\frac{1}{4}\cos^2 2x-\frac{1}{8}$$

$$=-\frac{1}{4}+\sin^2 x+\frac{1}{4}(1-2\sin^2 x)^2$$

$$=-\frac{1}{4}+\sin^2 x+\frac{1}{4}(1-4\sin^2 x+4\sin^4 x)$$

$$=-\frac{1}{4}+\sin^2 x+\frac{1}{4}-\sin^2 x+\sin^4 x$$

$$=\sin^4 x$$

例 25 求证 $\dfrac{\cos^2\alpha}{\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha$

证明 $\dfrac{\cos^2\alpha}{\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos^2\alpha\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\cos^2\alpha\cdot\tan\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2\alpha$$

例 26 用 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 表示 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$。

解

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ &= 2\tan\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\\ &= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}\\ &= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\\ &= \frac{2}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}-1\\ &= \frac{2}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}-1\\ &= \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

若令 $t = \tan\frac{\alpha}{2}$，例 26 的公式可表示如下：

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

这几个公式通常叫做万能公式．这是因为，不论 α 角的哪一种三角函数，都可以用这几个公式把它化为 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 的有理式，这样就可以把问题转化为以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 为变量的一元函数，这往往有助于问题的解决．

我们用万能公式来证明例 25:

$$\text{右式} = \frac{1}{4}\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\text{左式} = \frac{\cos^2\alpha}{\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}{\frac{1}{t}-t} = \frac{t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}{1-t^2} = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$\therefore$ 左式 $=$ 右式

例 27 已知 $\tan\dfrac{1}{2}\theta = -\dfrac{1}{3}$，求 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 的值。

解一 设 $t = \tan\dfrac{1}{2}\theta$，$\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$$= \frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2}{3}\times\frac{9}{10} = -\frac{3}{5}$$

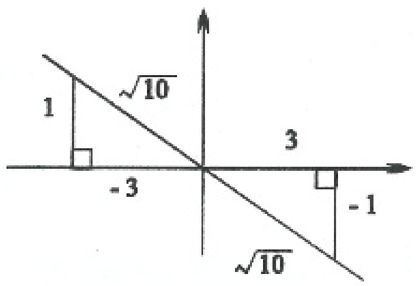
$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$= \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{8}{9} \times \frac{9}{10}$$

$$= \frac{4}{5}$$

解二 $\tan\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}\theta$ 在第二或第四象限，



$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\mp\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= -\frac{6}{10}$$

$$= -\frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$= 2\left(\mp\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 1$$

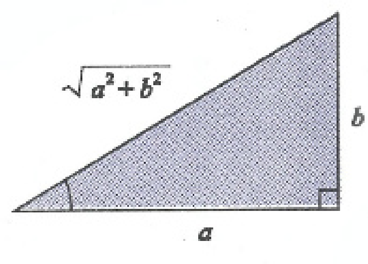
$$= \frac{9}{5} - 1$$

$$= \frac{4}{5}$$

例 28 已知 $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$，求证 $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = a$。

解一
$$a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + b\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$$
$$= a\left(\frac{1-\dfrac{b^2}{a^2}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}\right) + \frac{2b\left(\dfrac{b}{a}\right)}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$$
$$= \frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2} + \frac{2ab^2}{a^2+b^2}$$
$$= \frac{a(a^2-b^2+2b^2)}{a^2+b^2}$$
$$= \frac{a(a^2+b^2)}{a^2+b^2}$$
$$= a$$

解二
$$a\cos 2\theta + b\sin 2\theta$$
$$= a(2\cos^2\theta - 1) + 2b\sin\theta\cos\theta$$
$$= a\left(2\frac{a^2}{a^2+b^2} - 1\right) - 1 + 2b\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$= \frac{2a^3 - a^3 - ab^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab^2}{a^2+b^2}$$
$$= \frac{a^3+ab^2}{a^2+b^2}$$
$$= \frac{a(a^2+b^2)}{a^2+b^2}$$
$$= a$$



习题 9e

1. 已知 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$。

2. 已知 $\cos\theta = \frac{4}{5}$，且 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$，求 $\tan\frac{\theta}{2}$。

3. 已知 $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$，求 $m\cos\alpha + n\sin\alpha$ 之值。

4. 求证：

   (a) $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$　　(b) $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

   (c) $\tan 67^\circ 30' = \sqrt{2}+1$

5. 若 $t = \tan\frac{\theta}{2}$，以 t 表示下列各式：

   (a) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$　　(b) $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

   (c) $\cot\theta\cot\frac{\theta}{2}$　　(d) $\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{3\sin\theta+4\cos\theta-1}$

证明下列恒等式 (6～15)：

6. $\csc\alpha - \cot\alpha = \tan\frac{\alpha}{2}$

7. $1+\tan\alpha\tan\frac{\alpha}{2} = \sec\alpha$

8. $\tan\alpha + \sec\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

9. $\cos^4\theta = \frac{1}{8}(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)$

10. $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

11. $\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta) = 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

12. $\frac{\cos\alpha}{\sec\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

13. $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

14. $1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

15. $\dfrac{\cos A}{\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}} = \frac{1}{2}\sin A$

9.4 三角函数的积化和差

在计算或化简的过程中，有时需要把三角函数的积化成和差的形式．下面我们就来研究这种化法．

我们已经知道，

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \text{ ——— } (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \text{ ——— } (2)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \text{ ——— } (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \text{ ——— } (4)$$

(1) + (2) 得 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;

(1) − (2) 得 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$;

(3) + (4) 得 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$;

(3) − (4) 得 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$.

由此可以得到三角函数的积化和差公式:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

例 29 不查表，求 $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ 的值。

解一
$$\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

解二
$$\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$$
$$=\cos^2\frac{\pi}{12}$$
$$=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}$$
$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

例 30 将 $\sin(\alpha-2\beta)\cos(\alpha+2\beta)$ 化为和或差。

解 $\sin(\alpha-2\beta)\cos(\alpha+2\beta)$
$$=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-2\beta+\alpha+2\beta)+\sin(\alpha-2\beta-\alpha-2\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha-\sin 4\beta)$$

例 31 求证 $\sin 15^\circ\ \sin 30^\circ\ \sin 75^\circ=\frac{1}{8}$。

证法一 $\sin 15^\circ\ \sin 30^\circ\ \sin 75^\circ$
$$=\frac{1}{2}\sin 15^\circ\ \sin 75^\circ$$
$$=-\frac{1}{4}[\cos(15^\circ+75^\circ)-\cos(15^\circ-75^\circ)]$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos 90° - \cos 60°)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}$$

证法二 $\sin 15°\ \sin 30°\ \sin 75° = \frac{1}{2}\sin 15°\ \sin 75°$

$$= \frac{1}{2}\sin 15°\ \cos 15°$$

$$= \frac{1}{4}\sin 30°$$

$$= \frac{1}{8}$$

例 32 求证 $\sin 3\alpha \sin^3\alpha + \cos 3\alpha \cos^3\alpha = \cos^3 2\alpha$。

证明 $\sin 3\alpha \sin^3\alpha + \cos 3\alpha \cos^3\alpha$

$$= \sin^2\alpha(\sin 3\alpha \sin\alpha) + \cos^2\alpha(\cos 3\alpha \cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}[\sin^2\alpha(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \cos^2\alpha(\cos 4\alpha + \cos 2\alpha)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos 4\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha \cos 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2\alpha(1 + \cos 4\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\alpha$$

$$= \cos^3 2\alpha$$

习题 9f

1. 不查表，求下列各式的值:

(a) $\sin 105°\ \cos 75°$ (b) $2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13}$

(c) $2\sin 75°\ \sin 15°$ (d) $\cos 10°\ \cos 30°\ \cos 50°\ \cos 70°$

(e) $\tan 10°\ \tan 50°\ \tan 70°$

2. 化下列各式为和或差的形式:

(a) $2\sin 3\theta\cos\theta$ (b) $2\cos 6\theta\sin 3\theta$

(c) $2\sin 9\theta\sin 3\theta$ (d) $\sin 3\alpha\sin\alpha$

(e) $\cos(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)$

3. 求证 $\sin 20°\cos 70°+\sin 10°\sin 50° = \frac{1}{4}$

4. 求证 $\sin 20°\sin 40°\sin 80° = \frac{1}{8}\sqrt{3}$

证明下列各恒等式 (5～10) :

5. $\sin 7\alpha\sin 3\alpha = \sin^2 5\alpha-\sin^2 2\alpha$

6. $\cos 2\alpha\cos 5\alpha = \cos^2\frac{7\alpha}{2}-\sin^2\frac{3\alpha}{2}$

7. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \cos 2\alpha$

8. $2\sin(60°+\alpha)\cos(60°-\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\alpha$

9. $\cos 4x\cos 2x-\cos^2 3x = -\sin^2 x$

10. $4\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A) = \cos 3A$

9.5 三角函数的和差化积

在积化和差的各公式中，如果令 $\alpha+\beta = x$，$\alpha-\beta = y$，则

$$\alpha = \frac{x+y}{2},\ \beta = \frac{x-y}{2}$$

把 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$，α，β 的值分别代入积化和差各公式中，得

$$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

这四个公式叫做和差化积公式。

例 33 把下列各式化为积的形式:

(a) $\sin 104° + \sin 16°$

(b) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

解 (a) $\sin 104° + \sin 16°$

$$= 2\sin\frac{104°+16°}{2}\cos\frac{104°-16°}{2}$$

$$= 2\sin 60°\cos 44°$$

$$= \sqrt{3}\cos 44°$$

(b) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

$$= 2\cos\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\cos\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

$$= 2\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{2}\cos\alpha$$

例 34 求证 $\sin 75° - \sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}$。

证明 $\sin 75° - \sin 15° = 2\cos\frac{75°+15°}{2}\sin\frac{75°-15°}{2}$

$$= 2\cos 45°\sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 35 把下列各式化为积的形式:

(a) $\sin 14\alpha + \sin 6\alpha$ (b) $\cos\alpha + \cos 8\alpha$

(c) $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sin x + \cos x$

解 (a) $\sin 14\alpha + \sin 6\alpha = 2\sin\frac{14\alpha+6\alpha}{2}\cos\frac{14\alpha-6\alpha}{2}$

$$= 2\sin 10\alpha\cos 4\alpha$$

(b) $\cos\alpha + \cos 8\alpha = 2\cos\frac{9\alpha}{2}\cos\left(-\frac{7\alpha}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{9\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2}$

(c) $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos x - \cos\frac{\pi}{6}$

$= -2\sin\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}$

$= -2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$

(d) $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(90° - x)$

$= 2\sin 45°\cos(x-45°)$

$= \sqrt{2}\cos(x-45°)$

或

$\sin x + \cos x = \cos(90° - x) + \cos x$

$= 2\cos 45°\cos(45°-x)$

$= \sqrt{2}\cos(45°-x)$

例 36 求 $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$ 的值。

解 $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$

$= \cos 20° + 2\cos 120°\cos 20°$

$= \cos 20° + 2x\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 20°$

$= \cos 20° - \cos 20°$

$= 0$

例 37 求证 $\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 4\alpha\sin\alpha = \cos 3\alpha\cos 2\alpha$。

证明 $\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 4\alpha\sin\alpha$

$= \frac{1}{2}(\cos 3\alpha + \cos\alpha) - \frac{1}{2}(\cos 3\alpha - \cos 5\alpha)$

$= \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos 5\alpha)$

$= \cos 3\alpha\cos 2\alpha$

例 38 求证 $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$。

证明 由于等式两边有两个同分母的分式，可以先证明

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=2\cos(\alpha+\beta)$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}&=\frac{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}{\sin\alpha}\\&=\frac{2\cos\dfrac{2\alpha+\beta+\beta}{2}\sin\dfrac{2\alpha+\beta-\beta}{2}}{\sin\alpha}\\&=\frac{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\alpha}\\&=2\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

例 39 在△ABC 中，求证

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

证法一 $\sin A+\sin B+\sin C$

$$\begin{aligned}&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)\\&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\\&=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\\&=2\cos\frac{C}{2}\cdot2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{-B}{2}\right)\\&=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

证法二 $4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$\begin{aligned}&=\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)2\cos\frac{C}{2}\\&=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}+2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$= \sin C + \sin A + \sin B$$
$$= \sin A + \sin B + \sin C$$

例 40 在△ABC 中，求证

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

证明 $\cos A + \cos B + \cos C$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$$
$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$
$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

习题 9g

1. 不许用对数表或计算机，求下列各式的值：
   (a) $\sin 20° + \sin 40° - \sin 80°$
   (b) $\dfrac{\sin 20° - \cos 50°}{\cos 20° - \cos 40°}$
   (c) $\cos 40° + \cos 60° + \cos 80° + \cos 160°$
   (d) $\dfrac{\cos 80° - \cos 20°}{\sin 80° + \sin 20°}$
2. 把下列各式化成积的形式：
   (a) $\sin 8\theta + \sin 4\theta$　　(b) $\cos 5\alpha - \cos\alpha$
   (c) $\cos 2A + \cos 9A$　　(d) $\sin 7\theta - \sin 5\theta$
   (e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha$

证明下列恒等式（3～11）：

3. $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=\tan 2\alpha$

4. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

5. $\dfrac{\sin x+\sin y}{\cos x-\cos y}=\cot\dfrac{y-x}{2}$

6. $\dfrac{\sin x-\sin y}{\sin(x+y)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(x-y)}{\sin\frac{1}{2}(x+y)}$

7. $\sin 3\theta-\sin\theta-\sin 5\theta=\sin 3\theta(1-2\cos 2\theta)$

8. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\tan 3\alpha$

9. $\cos^2 A+\cos^2(60°-A)+\cos^2(60°+A)=\dfrac{3}{2}$

10. $\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{7\alpha}{2}+\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin\dfrac{11\alpha}{2}=\sin 2\alpha\sin 5\alpha$

11. $(\cos x+\sin x)(\cos 2x+\sin 2x)=\cos x+\sin 3x$

在△ABC中，求证（12～16）：

12. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

13. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

14. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

15. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

16. $\dfrac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$

总复习题 9

1. 已知 $\sin x=-\dfrac{1}{3}$，求 $\cos x$ 及 $\tan x$。

2. 已知 $\tan\alpha=2$，求 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值。

3. 已知 $\operatorname{cosec}\alpha=t$，求 $\cos\alpha$。

4. 已知 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，$\cos\beta = \frac{5}{13}$，$\beta\in\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 及 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值。

5. 已知 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，求 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值。

6. 已知 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$，$\tan\beta = \frac{1}{3}$，并且 α，β 都是锐角，求证

$$\alpha+\beta = 45^\circ$$

7. 已知 $\cos\theta = \frac{12}{13}$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，求 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$，$\cot 2\theta$ 的值。

8. 已知 $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$，且 α 为第四象限的角，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$。

9. 已知 $\tan\theta = 2$，求 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$ 的值。

10. 化简下列各式:

(a) $\frac{1}{\sec^2\theta}+\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}$　　(b) $\frac{\tan\theta+\cot\theta}{\sec\theta\operatorname{cosec}\theta}$

(c) $\operatorname{cosec}^2\theta-\tan\theta\cot\theta$

(d) $(\tan\beta+\cot\beta)^2-(\tan\beta-\cot\beta)^2$

(e) $\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$

11. 不许查表或用计算机，求下列的值:

(a) $\cos 165^\circ$

(b) $\sin 13^\circ\cos 17^\circ+\cos 13^\circ\sin 17^\circ$

(c) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$

(d) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$

12. 已知 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+a = 0$ 的两个实数根，试求 a 的值。

13. 已知 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 是方程 $x^2+6x+7 = 0$ 的两个根，求证: $\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$。

14. 求出用 $\tan\alpha$ 表示 $\tan 3\alpha$ 的公式。

15. 求证: $\tan 15^\circ+\cot 15^\circ = 4$。

证明下列恒等式（16～26）：

16. $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A$。

17. $(1 + \tan^2 A)\cos^2 A = 1$。

18. $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta$

19. $\dfrac{\sin^2 x}{\sec^2 x - 1} + \dfrac{\cos^2 x}{\csc^2 x - 1} = 1$。

20. $\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha$。

21. $\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin 2\beta$。

22. $\dfrac{1}{2}(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha) = \cos(60° - \alpha)$。

23. $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$。

24. $\cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 5\alpha \sin 2\alpha = \cos 4\alpha \cos 3\alpha$。

25. $\dfrac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{1 + \cos 2(\alpha + \beta)} = \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$。

26. $\sec\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\sec\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\sec 2\alpha$。

27. 若 $A + B + C = 180°$，求证:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

28. 已知 $\tan^2\alpha = 2\tan^2\beta + 1$，求证 $\cos 2\alpha + \sin^2\beta = 0$。

29. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\sin B \sin C = \cos^2\dfrac{A}{2}$，求证这个三角形是等腰三角形。

30. 在 $\triangle ABC$ 中，求证:

(a) $\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{\cos\dfrac{A - B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$

(b) $\dfrac{a - b}{c} = \dfrac{\sin\dfrac{A - B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$

10 三角方程式

10.1 简易三角方程式有条件的解

含有未知数的三角函数的方程式叫做**三角方程式**（trigonometric equation）。例如，

$$2\sin x - 1 = 0$$
$$\sin x + \cos x = 1$$
$$3\tan^2 x - \sec^2 x = 1$$

等，都是三角方程式。

解三角方程式就是求出适合于三角方程式的未知数的一切值。这些值叫做三角方程式的解（solution）。若未知数的任何值都不适合于求解的三角方程式时，就说这个三角方程式无解。

在解决实际问题的过程中，往往只需求有条件的三角方程式的解。

例 1 解方程式 $2\sin x = 1$ $(0° \leqslant x \leqslant 360°)$.

解 $2\sin x = 1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

因为 $\sin x = \frac{1}{2}$ 正值，所以 x 是第一象限或第二象限的角，

$\therefore \quad x = 30°，150°$

例 2 解方程式 $4\sin^2 x = 3\ (0° \leqslant x \leqslant 180°)$。

解 $4\sin^2 = 3$

$\sin^2 x = \frac{3}{4}$

$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

因为 $0° \leqslant x \leqslant 180°$，所以只解

$\sin x = +\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ x = 60°,\ 120°$

例 3 解方程式 $4\sin^2 x = 3\sin x\ (0° \leqslant x \leqslant 180°)$。

解 移项，得

$$4\sin^2 x - 3\sin x = 0$$

$$\sin x\,(4\sin x - 3) = 0$$

当 $\sin x = 0$

得 $x = 0°,\ 180°$

由 $4\sin x - 3 = 0$

$$\sin x = \frac{3}{4} = 0.75$$

得 $x = 48.59°,\ 131.41°$

所以 $x = 0°,\ 48.59°,\ 131.41°,\ 180°$

例 4 解方程式 $\tan\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + 1 = 0\ \left(-\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

解 $\tan\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + 1 = 0$

$\tan\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -1$

由条件 $-\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{11\pi}{12} \leqslant x + \frac{\pi}{12} \leqslant \frac{7\pi}{12}$.

$\therefore\quad x+\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{4}$

$\therefore\quad x=-\frac{\pi}{3}$

因此，方程式的解为 $x=-\frac{\pi}{3}$

例 5 解方程式 $2\cos^2 x-3\cos x-2=0\ (0^\circ\leqslant x\leqslant 180^\circ)$.

解 $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$

$(2\cos x+1)(\cos x-2)=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 或 $\cos x=2$

由 $\cos x=-\frac{1}{2}$

得 $x=120^\circ$ (240° 不符合 $0\leqslant x\leqslant 180^\circ$ 的条件)

因为 $\cos x=2>1$，所以无解.

$\therefore\quad x=120^\circ$

习题 10a

解下列方程式（1～4）：

1. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (0^\circ\leqslant x\leqslant 360^\circ)$
2. $\tan x=1\ (0^\circ\leqslant x\leqslant 360^\circ)$
3. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (0^\circ\leqslant x\leqslant 180^\circ)$
4. $\cot x=\sqrt{3}\ (0^\circ\leqslant x\leqslant 180^\circ)$

解下列方程式 $(0^\circ\leqslant x\leqslant 180^\circ)$（5～10）：

5. $\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $2\sin^2 x=1$
7. $2\cos x-1=0$
8. $3\tan\frac{x+20^\circ}{3}=\sqrt{3}$
9. $\cot(x+30^\circ)+1=0$
10. $\tan 2x-1=0$

解下列方程式 $(0^\circ\leqslant x\leqslant 360^\circ)$（11～13）：

11. $\sin^2 x+2\sin x-3=0$
12. $2\sin^2 x+\sin x=0$
13. $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$

10.2 基本三角方程式的一般解

三角方程式的形式是多种多样的，但是

$$\sin x = a$$

$$\cos x = a$$

$$\tan x = a$$

这三个方程式是最基本的。其他三角方程式往往可以化成一个或几个这样的方程式。这样的三角方程式叫做基本三角方程式。现在来分别讨论这三个基本三角方程式的一般解（general solution）。

(一)　$\sin x = a$ 的一般解

因为正弦函数的绝对值不能大于1，所以当 $|a| > 1$ 时，方程式 $\sin x = a$ 无解。

现在讨论，当 $|a| \leqslant 1$ 时，$\sin x = a$ 的一般解。

我们先来解方程式 $\sin x = \frac{1}{2}$。

因为 $\sin x = \frac{1}{2} > 0$，所以 x 是第一象限或第二象限的角，如图 10－2。

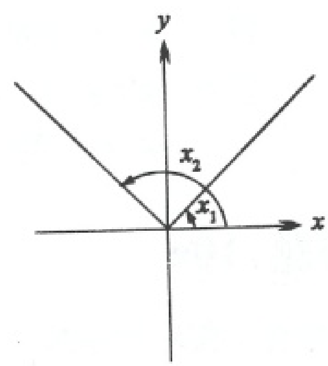


图 10－2

得　　$x_1 = \frac{\pi}{6}$，

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6}.$$

这是在一个周期内适合方程式 $\sin x = \frac{1}{2}$ 的两个解。

由于正弦函数的周期是 2π，因此，对 x_1 和 x_2 各加上 $2k\pi$（k 是整数），就得到方程式 $\sin x = \frac{1}{2}$ 的一切解，所以

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \qquad (1)$$

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \qquad (2)$$

以上式子中，$2k$ 是偶数，$2k+1$ 是奇数．设 n 为整数，在 n 为偶数时，$(-1)^n=+1$，在 n 为奇数时，$(-1)^n=-1$，所以 (1)、(2) 两个式子可以合并成

$$x = n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

这就是说，方程式 $\sin x=\frac{1}{2}$ 的一般解是

$$x = n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

同理，$\sin x=-\frac{1}{2}$ 的一般解是

$$x = n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

【注】在本章中，字母 n 都表示整数．

一般地，

> $\sin x = a$ 的一般解是
>
> $x = n\pi+(-1)^n\alpha$，$\frac{-\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 且 $\sin\alpha=a$

但是，当 $a=0$，$a=1$，$a=-1$ 时，从图 10–3 很容易看出：

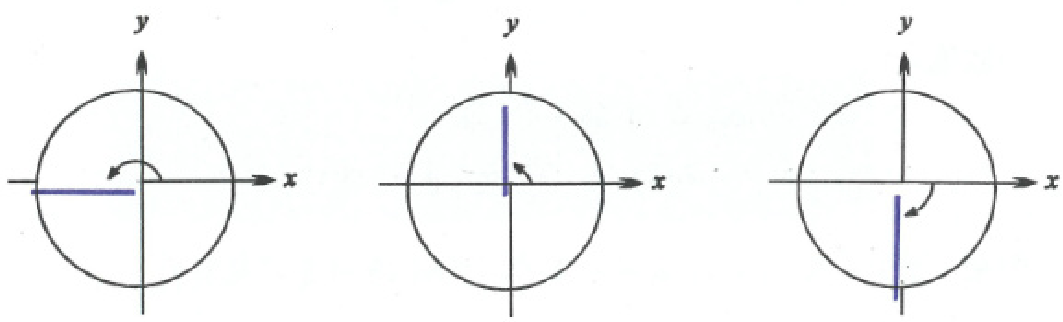


图 10–3

$\sin x=0$ 的解集是：$\{x\mid x=n\pi\}$

$\sin x=1$ 的解集是：$\{x\mid x=2n\pi+\frac{\pi}{2}\}$

$\sin x=-1$ 的解集是：$\{x\mid x=2n\pi-\frac{\pi}{2}\}$

(二) $\cos x=a$ 的一般解

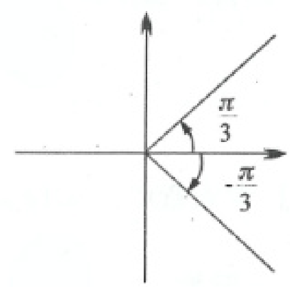
因为余弦函数的绝对值不能大于 1，所以当 $|a|>1$ 时，方程式 $\cos x=a$ 无解。

现在讨论，当 $|a|\leqslant 1$ 时，$\cos x=a$ 的一般解。

我们先来解方程式 $\cos x=\dfrac{1}{2}$。

因为 $\cos x=\dfrac{1}{2}>0$，所以 x 是第一象限或第四象限的角．在第一象限的角为

$$x = 2n\pi+\frac{\pi}{3}$$



在第四象限的角为 $$x = 2n\pi-\frac{\pi}{3}$$

上列两个式子可以合并成 $$x = 2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

这就是说，$\cos x=\dfrac{1}{2}$ 的一般解是

$$x = 2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

同理，$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 的一般解是

$$x = 2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

一般地，

> $\cos x = a$ 的一般解是
> $x = 2n\pi\pm\alpha$，$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ 且 $\cos\alpha=a$

但是，当 $a=0$，$a=1$，$a=-1$ 时，从图 10-4 很容易看出:

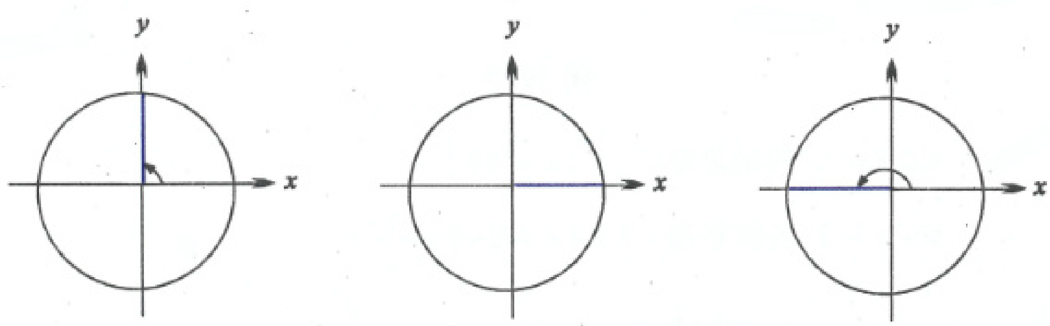


图 10-4

$\cos x=0$ 的解集是：$\{x \mid x=n\pi+\frac{\pi}{2}\}$

$\cos x=1$ 的解集是：$\{x \mid x=2n\pi\}$

$\cos x=-1$ 的解集是：$\{x \mid x=2n\pi+\pi\}$

(三) $\tan x=a$ 的一般解

我们先来解方程式 $\tan x=1$。

因为 $\tan x=1>0$，所以 x 是第一象限或第三象限的角。

在第一象限的角为 $$x = 2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

在第三象限的角为 $$\begin{aligned} x &= 2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4} \\ &= (2k+1)\pi+\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

以上两式中 $2k$ 为偶数，$2k+1$ 为奇数。因此，当 n 为整数时，上列两式可以合并成 $$x = n\pi+\frac{\pi}{4}$$

这就是说，$\tan x=1$ 的一般解是

$$x = n\pi+\frac{\pi}{4}$$

同理，$\tan x=-1$ 的一般解是

$$x = n\pi-\frac{\pi}{4}$$

一般地，

> $\tan x = a$ 的解集是
>
> $x = n\pi+\alpha$，$\frac{-\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 且 $\tan\alpha=a$

例 6 解方程式 $\sin(2x+30°)=-1$。

解

$$\begin{aligned} \sin(2x+30°) &= -1 \\ 2x+30° &= 2n\cdot 180°-90° \\ 2x &= 2n\cdot 180°-120° \\ \therefore\quad x &= n\cdot 180°-60° \end{aligned}$$

例 7 解方程式 $2\sin 2x=\sqrt{3}$.

解
$$
\begin{aligned}
2\sin 2x &= \sqrt{3} \\
\sin 2x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
2x &= n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3} \\
\therefore\quad x &= \frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

例 8 解方程式 $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解
$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3} &= 2n\pi\pm\frac{3\pi}{4} \\
\frac{x}{2} &= 2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3} \\
\therefore\quad x &= 4n\pi\pm\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{3} \\
&= 4n\pi+\frac{13\pi}{6}\quad \text{或}\quad 4n\pi-\frac{5\pi}{6}
\end{aligned}
$$

例 9 解方程式 $3\tan\frac{x+20^\circ}{3}=\sqrt{3}$.

解
$$
\begin{aligned}
3\tan\frac{x+20^\circ}{3} &= \sqrt{3} \\
\tan\frac{x+20^\circ}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\frac{x+20^\circ}{3} &= n\cdot 180^\circ+30^\circ \\
x+20^\circ &= n\cdot 540^\circ+90^\circ \\
\therefore\quad x &= n\cdot 540^\circ+70^\circ
\end{aligned}
$$

例 10 求 $\sin(3x+2) = \frac{1}{2}$ 的解集。

解
$$\sin(3x+2) = \frac{1}{2}$$
$$3x+2 = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$$
$$3x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6} - 2$$
$$x = \frac{1}{3}\left[n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6} - 2\right]$$
$$\therefore \text{解集} = \left\{x \mid x = \frac{1}{3}\left[n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6} - 2\right]\right\}$$

习题 10b

解下列方程式（1～6）：

1. $2\sin x = \sqrt{3}$
2. $2\sin(x+45°) = \sqrt{2}$
3. $2\cos 3x + 1 = 0$
4. $\tan(\frac{x}{4} + 30°) = -1$
5. $\sin x = \sin\frac{4\pi}{3}$
6. $\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

求下列方程式的解集（7～10）：

7. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
8. $\cot x = \sqrt{3}$
9. $\sin(x+\frac{\pi}{6}) + \cos(x+\frac{\pi}{6}) = 0$
10. $\cos(2x+\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

10.3 解三角方程式

我们已经知道，三角方程式是多种多样的。在前两节，我们已经解过一些三角方程式。下面我们将进一步研究几种三角方程式的解法。

● 可化为同角同名三角函数的方程式

例 11 解方程式 $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$。

解

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + 3\cos x &= 0 \\ 2(1-\cos^2 x) + 3\cos x &= 0 \\ 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 &= 0 \\ (\cos x - 2)(2\cos x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ $\cos x = 2$（无解）

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$

解得 $x = 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$

例 12 解方程式 $\sin x = \cos x$。

解 因为 $\cos x = 0$ 的解不是这个方程式的解，所以我们可以把方程式的两边都除以 $\cos x$，得

$\tan x = 1$

$\therefore$ $x = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$

例 13 解方程式 $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ （$0° \leqslant x \leqslant 360°$）。

解

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos x + 1 &= 0 \\ (2\cos^2 x - 1) + \cos x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

化简，得

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + \cos x &= 0 \\ \cos x(2\cos x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

所以 $\cos x = 0$ 或 $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

由 $\cos x = 0$

得 $x = 90°，270°$

由 $\cos x = -\frac{1}{2}$

得 $x = 120°,240°$

所以原方程式的解是

$$x = 90°,120°,240°,270°$$

例 14 解方程式 $\frac{\sin x}{1-\cos x}=0$.

解 把方程式的两边都乘以 $1-\cos x$，得

$$\sin x = 0$$

$$\therefore \quad x = 2n\pi,\ x = (2n+1)\pi$$

我们知道，$\sin x=0$，可以给出解 $x=n\pi$。但因这里方程式的两边都乘以 $1-\cos x$，可能有增根，为了便于检验，所以给出上边的形式。检验后知道 $x=2n\pi$ 是增根，因此原方程式的解是

$$x = (2n+1)\pi$$

习题 10c

设 $0°\leqslant x\leqslant 360°$，解下列方程式（1～6）：

1. $3\sin x = 2\cos^2 x$
2. $\sin^2 x-\cos^2 x = \cos x$
3. $2\cos x = \sec x$
4. $\sin x+\cos x = 0$
5. $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 1$
6. $\frac{\sin x}{1+\cos x} = 1$

解下列方程式（7～16）：

7. $3\sin x+\cos 2x = 2$
8. $3\sin x = 1-\sqrt{3\cos^2 x-2}$
9. $\sin x\cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$
10. $2\cos^2\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}+1 = 0$
11. $1+\cos x = \sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$
12. $\cos 2x-\sin x = 0$
13. $1-\cos x = 2\sin\frac{x}{2}$
14. $3\tan^2 x-\sec^2 x = 1$
15. $\tan(\pi-x) = 3\cot(-x)$
16. $\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = 0$

● 可因式分解的三角方程式

例 15 解方程式 $\sin 2x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0 \ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$.

解

$$\begin{aligned} \sin 2x - 2\sin x + \cos x - 1 &= 0 \\ 2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 &= 0 \\ 2\sin x(\cos x - 1) + (\cos x - 1) &= 0 \\ (\cos x - 1)(2\sin x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\cos x = 1 \quad 或 \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

由 $\cos x = 1$

解得 $x = 0$

由 $\sin x = -\frac{1}{2}$

解得 $x = -\frac{\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{6}$

∴ 原方程式的解是

$$x = 0,\ -\frac{\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{6}$$

例 16 解方程式 $\cos x - \cos 2x\cos x + \sin 2x = 0$.

解

$$\begin{aligned} \cos x - \cos 2x\cos x + \sin 2x &= 0 \\ \cos x - (1 - 2\sin^2 x)\cos x + 2\sin x\cos x &= 0 \\ 2\sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos x &= 0 \\ \sin x\cos x(\sin x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

因此，$\sin x = 0$ 或 $\cos x = 0$ 或 $\sin x = -1$

∴ $x = n\pi$ 或 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 或 $x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

例 17 解方程式 $\sin 4x - \sin x = 0$.

解一 $\sin 4x - \sin x = 0$

$$2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0$$

$$\therefore \quad \cos\frac{5x}{2} = 0 \qquad 或 \quad \sin\frac{3x}{2} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{5x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \qquad 或 \quad \frac{3x}{2} = n\pi$$

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{5} \qquad 或 \quad x = \frac{2}{3}n\pi$$

解二 $\sin 4x - \sin x = 0$

$$\sin 4x = \sin x$$

$$4x = n\pi + (-1)^n x$$

当 n 是偶数 $2k$ 时，$4x = 2k\pi + x$

$$x = \frac{2}{3}k\pi$$

当 n 是奇数 $2k+1$ 时，$4x = (2k+1)\pi - x$

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{5}$$

例 18 $\cos 3x = \sin 2x \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$。

解 $\cos 3x = \sin 2x$

$$\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$3x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

由 $3x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 2x$

得 $x = \frac{1}{5}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

使 $n = 0，1，2，3，4$

得 $x = \frac{\pi}{10}，\frac{\pi}{2}，\frac{9\pi}{10}，\frac{13\pi}{10}，\frac{17\pi}{10}$

由 $3x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2x$

得 $x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

使 $n = 1$，得 $x = \frac{3\pi}{2}$

$\therefore$ 所求 x 的值是 $\frac{\pi}{10}，\frac{\pi}{2}，\frac{9\pi}{10}，\frac{13\pi}{10}，\frac{3\pi}{2}，\frac{17\pi}{10}$

例 19 解方程式 $\cos x\cos 3x = \cos 5x\cos 7x$.

解

$$\cos x\cos 3x = \cos 5x\cos 7x$$
$$\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 12x+\cos 2x)$$
$$\cos 12x-\cos 4x = 0$$
$$-2\sin 8x\sin 4x = 0$$

因此，$\sin 8x = 0$ 或 $\sin 4x = 0$

$\therefore$ $x = \dfrac{n\pi}{8}$ 或 $x = \dfrac{n\pi}{4}$

但 $\dfrac{n\pi}{4}$ 已包括在 $\dfrac{n\pi}{8}$ 内，所以原方程式的解可以写成 $x=\dfrac{n\pi}{8}$

习题 10d

解下列方程式（1～4）：

1. $4\cos^2 x+5\sin x = 3 \quad (-180° \leqslant x \leqslant 180°)$
2. $\sin 2x+\sin x = 0 \quad (0° \leqslant x \leqslant 180°)$
3. $\sin 7x = \sin 2x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$
4. $\cos(2x+60°) = \sin x \quad (-180° \leqslant x \leqslant 180°)$

解下列方程式（5～17）：

5. $\sin x\cos x = \sin x+\cos x-1$
6. $4\sin x\cos^2 x-2\cos^2 x = \cos x-2\sin x\cos x$
7. $2\sqrt{2}-\sqrt{6}\cos x = 2\sqrt{2}\sin^2 x - 2\cos x+\sqrt{3}$
8. $\sin 2x-\cos 2x-\sin x+\cos x = 0$
9. $\cos 4x+\cos 2x+\cos x = 0$
10. $\sin(x+1)\cos 2(x+1) = \sin 3(x+1)\cos 4(x+1)$
11. $\sin 4x+\sin 2x = \sin 6x$
12. $\sin^2 x+\sin^2 2x = \sin^2 3x$
13. $\cos 2x\tan x = 0$
14. $2\cot x\sin x+\cot x = 0$
15. $2\sin^2 x-\sin^2 2x = 0$
16. $\sin 5x = \sin 4x$
17. $\cos x+\cos 3x = \cos 5x+\cos 7x$

● 关于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的齐次方程式

例 20 解方程式 $4\sin^2 x+7\sin x\cos x+3\cos^2 x = 0$.

解 这是一个关于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的齐次方程式．在这个方程式中，$\cos x\neq 0$. 因为，如果 $\cos x=0$，则 $4\sin^2 x=0$，于是 $\sin x=0$．但对于任何 x 值，都不可能使 $\cos x$ 和 $\sin x$ 同时为零，因此，$\cos x$ 必不为零．这就是说，关于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的齐次方程式，都可以在方程式的两边同除以 $\cos x$，化为 $\tan x$ 的方程式求解．

$4\sin^2 x+7\sin x\cos x+3\cos^2 x = 0$

因为 $\cos x\neq 0$，所以把方程式的两边都除以 $\cos^2 x$，得

$$4\tan^2 x+7\tan x+3 = 0$$

$$(4\tan x+3)(\tan x+1) = 0$$

$$4\tan x+3 = 0 \quad 或 \quad \tan x+1 = 0$$

解这两个方程式，得

$$x = n\cdot 180^\circ - 36^\circ 52' \quad 或 \quad x = n\cdot 180^\circ - 45^\circ$$

例 21 解方程式 $2\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x = 0$.

解 因为 $\cos x\neq 0$，所以把方程式的两边都除以 $\cos^2 x$，得

$$2\tan^2 x+3\tan x+1 = 0$$

$$(\tan x+1)(2\tan x+1) = 0$$

$$\tan x+1 = 0 \quad 或 \quad 2\tan x+1 = 0$$

解这两个方程式，得

$$x = n\cdot 180^\circ - 45^\circ \quad 或 \quad x = n\cdot 180^\circ - 26^\circ 34'$$

例 22 解方程式 $\sin 2x=\cos 2x-4\sin^2 x+1$.

解

$$\sin 2x = \cos 2x-4\sin^2 x+1$$

$$2\sin x\cos x = \cos^2 x-\sin^2 x-4\sin^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x$$

移项，整理，得

$$2\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x = 0$$

因为 $\cos x \neq 0$，所以把方程式的两边都除以 $\cos^2 x$，得

$$2\tan^2 x + \tan x - 1 = 0$$

$$(2\tan x - 1)(\tan x + 1) = 0$$

$$2\tan x - 1 = 0 \quad \text{或} \quad \tan x + 1 = 0$$

解这两个方程式，得

$$x = n \cdot 180° + 26°34' \quad \text{或} \quad x = n \cdot 180° - 45°$$

习题 10e

解下列方程式:

1. $2\sin^2 x + 7\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$
2. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$
3. $(\sin x - \cos x)^2 - 2\cos^2 x + \sin 2x = 0$
4. $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$
5. $6(\sin^2 x - \cos^2 x) - 5\sin x\cos x = 0$
6. $5\sin^2 x - 13\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 1$
7. $1 + \sin^2 x = 3\sin x\cos x$
8. $\sin 2x = \cos 2x - \cos^2 x + 1$

● 形如 $a\sin x + b\cos x = c$ 的三角方程式的解法

形如 $a\sin x + b\cos x = c$ 的方程式，解法不止一种，下面的例题，给出二种解法。

例 23 解方程式 $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$。

解一 设 $\sqrt{3}\cos x - \sin x \equiv R\cos(x+\alpha)$ (R 为常数，α 为锐角)，

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x \equiv R\cos\alpha\cos x - R\sin\alpha\sin x$$

故得 $R\cos\alpha = \sqrt{3}$ ———— (1)

$R\sin\alpha = 1$ ———— (2)

$(1)^2 + (2)^2$，$R^2(\cos^2 x + \sin^2\alpha) = 4$

即 $R^2 = 4$，$R = 2$

$$(2) \div (1),\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

即 $$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\quad \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

即 $$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \quad 或 \quad 2n\pi - \frac{\pi}{2}$$

【注】若三角方程式为 $a\sin x \pm b\cos x = c$ 的形式，可设

$$a\sin x \pm b\cos x = R\sin(x \pm \alpha)$$

若为 $a\cos x \pm b\sin x = c$ 的形式，可设

$$a\cos x \pm b\sin x = R\cos(x \mp \alpha)$$

解二 设 $\tan\frac{x}{2} = t$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

原式 $$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$$

可写为 $$\sqrt{3}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - \frac{2t}{1+t^2} = 1$$

$$\sqrt{3}(1-t^2) - 2t = 1 + t^2$$

$$(\sqrt{3}+1)t^2 + 2t + (1-\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore\quad t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3}}}{2(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

$$= 2 - \sqrt{3} \quad 或 \quad -1$$

即 $\tan\dfrac{x}{2} = 2-\sqrt{3}$ 或 -1

由 $\tan\dfrac{x}{2} = 2-\sqrt{3}$，得 $\dfrac{x}{2} = n\pi+\dfrac{\pi}{12}$

$$x = 2n\pi+\frac{\pi}{6}$$

由 $\tan\dfrac{x}{2} = -1$，得 $\dfrac{x}{2} = n\pi-\dfrac{\pi}{4}$

$$x = 2n\pi-\frac{\pi}{2}$$

$\therefore\ x = 2n\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 或 $2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$

例 24 解方程式 $\sin x-\cos x=1$。

解一 设 $\sin x-\cos x \equiv R\sin(x-\alpha)$ （R 为常数，α 为锐角）

$$\equiv R\sin x\cos\alpha - R\cos x\sin\alpha$$

$\therefore\ R\cos\alpha = 1$ ——— (1)

$R\sin\alpha = 1$ ——— (2)

$(1)^2+(2)^2$，$R^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = 2$

$$R = \sqrt{2}$$

$(2)\div(1)$，$\tan\alpha = 1$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore\ \sin x-\cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

即 $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$x-\frac{\pi}{4} = n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$$

$$x = n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$$

解二 设 $t = \tan\dfrac{1}{2}x$，

则 $\sin x-\cos x = 1$

可写成 $$\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$2t-1+t^2 = 1+t^2$$

当 t^2 被消去时，我们会失去 $t=\infty$ 的解。所以，t 的解应写成

$$t=\infty \quad 或 \quad t=1$$

即 $\tan\frac{1}{2}x = \infty$ 或 $\tan\frac{1}{2}x = 1$

由 $\tan\frac{1}{2}x = \infty$，得 $\frac{1}{2}x = n\pi+\frac{1}{2}\pi$

$$x = 2n\pi+\pi$$
$$= (2n+1)\pi$$

由 $\tan\frac{1}{2}x = 1$，得 $\frac{1}{2}x = n\pi+\frac{\pi}{4}$

$$x = 2n\pi+\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ $x = (2n+1)\pi$，$2n\pi+\frac{\pi}{2}$

例 24 的两种解法，虽然解的表示形式不同，但在解一中，当 n 是偶数 $2k$ 时，$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$ 成为 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$；当 n 是奇数 $2k+1$ 时，$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$ 成为 $(2k+1)\pi$，所以它们实质上是相同的。

习题 10f

解下列方程式（1～4）：

1. $\sin x+\cos x = 1$
2. $\cos x-\sin x = \sqrt{2}$
3. $\sin x = 1-\sqrt{3}\cos x$
4. $\sqrt{3}\sin x = \cos x+\sqrt{2}$

解下列方程式，若 $0° \leqslant x \leqslant 360°$（5～7）：

5. $\cos x+\sqrt{3}\sin x = 1$
6. $\sqrt{3}\cos x-\sin x = 1$
7. $3\cos x-4\sin x = 5$

解下列方程式（8～10）：

8. $\cos 2x = \cos x+\sin x$
9. $\tan x-\sec x = \sqrt{3}$
10. $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2} = 1$

10.4 三角函数的图象

我们在第 7 章三角函数一章中，已经学习了三角函数的图象，以及正弦、余弦、正切函数的定义域、值域、周期性等.

我们知道，$y=\sin x$ 的图象（图 10－5）是一个波形曲线，

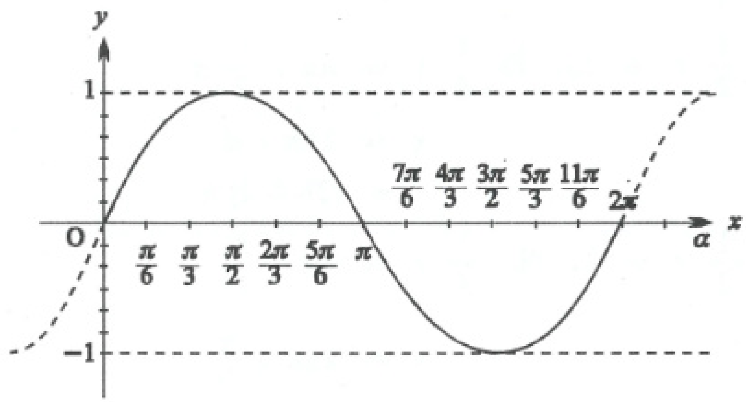


图 10－5

它从 0 开始，y 随着 x 增加而增加，增加到 1，再下降到 0，然后再下降到 -1，最后又上升到 0（这是 x 由 0 变到 2π 时 y 的变化）．可以看出，波形曲线的波幅（也就是曲线至 x 轴的最大距离）为 1．因为 $y=\sin x$ 的周期是 2π，所以上面画出的这张图象，每过 2π 又重复出现．

我们也知道了余弦函数、正切函数的图象及其简单的性质.

本节是在第 7 章学习的基础上，进一步研究三角函数的图象．我们设 $f(x)$ 为三角函数．下面研究如何由 $y=f(x)$ 的图象画出 $y=rf(x)$，$y=f(kx)$ $(k>0)$，$y=f(x+\alpha)$ 的图象.

(一) $y=rf(x)$ 的图象

我们已经知道 $y=\sin x$ 的图象为一条波形曲线，$y=3\sin x$ 则是另一条波形曲线（图 10－6），其波幅为 3，周期 2π。

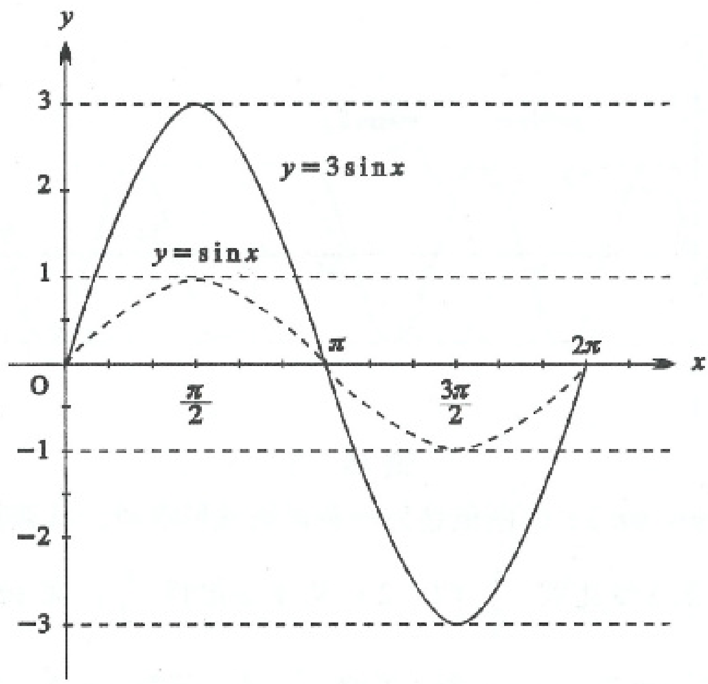


图 10－6

从图中可以看出，对于任何 x 值，在 $y=3\sin x$ 中，y 的波幅为 $y=\sin x$ 中 y 的波幅的 3 倍．系数 3 只不过是使正弦曲线的高度增加到三倍，而不影响它的周期．

(二)　$y=f(kx)\,(k>0)$ 的图象

我们仍以正弦的波形曲线加以说明．如 $y=\sin 2x$．可以看出，对于任何 x 值，$y=\sin 2x$ 等于 $y=\sin x$ 在 x 的 2 倍时的值．如

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin x$	0	$\sin\frac{\pi}{16}$	$\sin\frac{\pi}{8}$	$\sin\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{2}$	$\sin\pi$	$\sin 2\pi$
$\sin 2x$	0	$\sin\frac{\pi}{8}$	$\sin\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{2}$	$\sin\pi$	$\sin 2\pi$	$\sin 4\pi$

这说明，$y=\sin 2x$ 比 $y=\sin x$ 在短一倍的间隔就能取得同样的值．因此，$y=\sin 2x$ 的图象可以把 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴向原点压缩而成，如图 10－7．

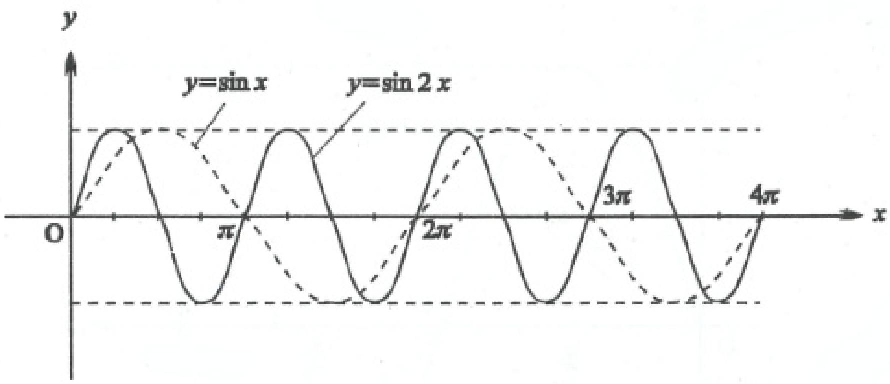


图 10 − 7

这就是说，$y=\sin 2x$ 的图象是另一条正弦波形曲线，其波幅为 1，但周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$。当 x 从 0 变化到 $\frac{\pi}{4}$ 时，$2x$ 从 0 变化到 $\frac{\pi}{2}$，而 $\sin 2x$ 从 0 增大到 1。系数 2 使曲线沿水平方向（x 轴）压缩 $\frac{1}{2}$ 倍。函数 $\sin 2x$ 的周期为 $\sin x$ 的周期的一半（变化快一倍）。

一般地，因为 $\sin\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\sin\omega x$，所以 $\sin\omega x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$，当 $\omega>1$ 时，它的图象是把 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴向原点压缩而成，它的周期为原来的 $\frac{1}{\omega}$，ω 越大，周期越小。

例 25 作 $y=3\sin 2x$ 的图象。

解 $y=3\sin 2x$ 的图象就是我们前面研究过的 $y=3\sin x$、$y=\sin 2x$ 的图象的综合，如图 10 − 8。

可以看出，这是一条正弦波曲线，其波幅为 3，周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$。

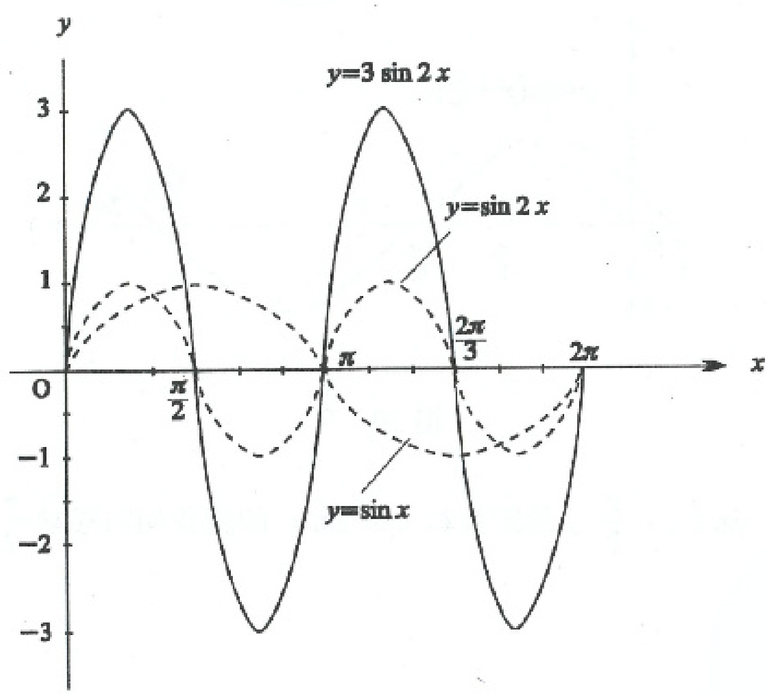


图 10－8

(三) $y=f(x+\alpha)$ 的图象

我们先来研究 $y=\sin(x+30°)$的图象。

我们给定一些 x 的值，并把它与 $y=\sin x$ 进行比较如下:

x	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150° …
$\sin x$	0		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$ …
$\sin(x+30°)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$		…

事实上，我们可以利用 $y=\sin(x+30°)$画出尽可能多的点，并与 $y=\sin x$ 进行比较。可以看出：$y=\sin(x+30°)$中 y 取得的值相同，只是起始点不同而已。这就是说，要得到 $y=\sin(x+30°)$的图象，可以将 $y=\sin x$ 的图象向左移动 30° 或 $\frac{\pi}{6}$ （图 10–9）。

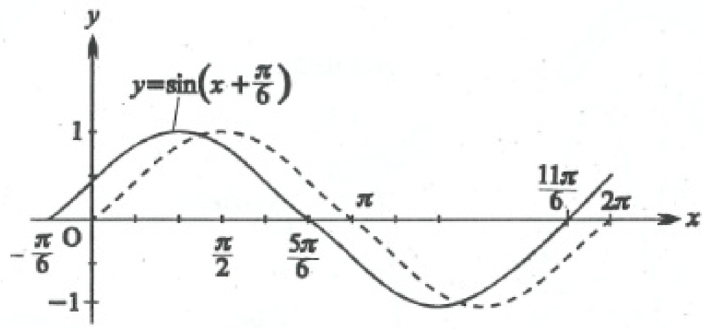


图 10－9

又如，$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象和 $y=\sin x$ 的图象向右移动 $\frac{\pi}{2}$ 的图象相同（图 10－10）：

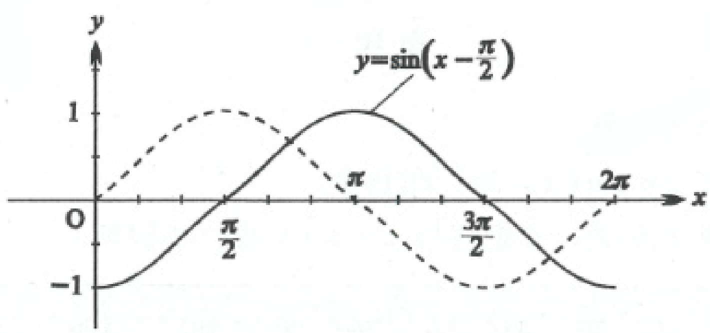


图 10－10

一般上，要得到 $y=\sin(x+\alpha)$ 的图象，可将 $y=\sin x$ 的图象移动一段距离 $|\alpha|$，如果 α 是正值，则向左移；如果 α 是负值，则向右移.

例 26 作 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

解 由 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 可知:

(1) 把 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴向原点压缩，使周期为原来的 $\frac{1}{2}$，得 $y=\sin 2x$ 的图象；

(2) 把 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$，得 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；

即 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象（图 10－11）。

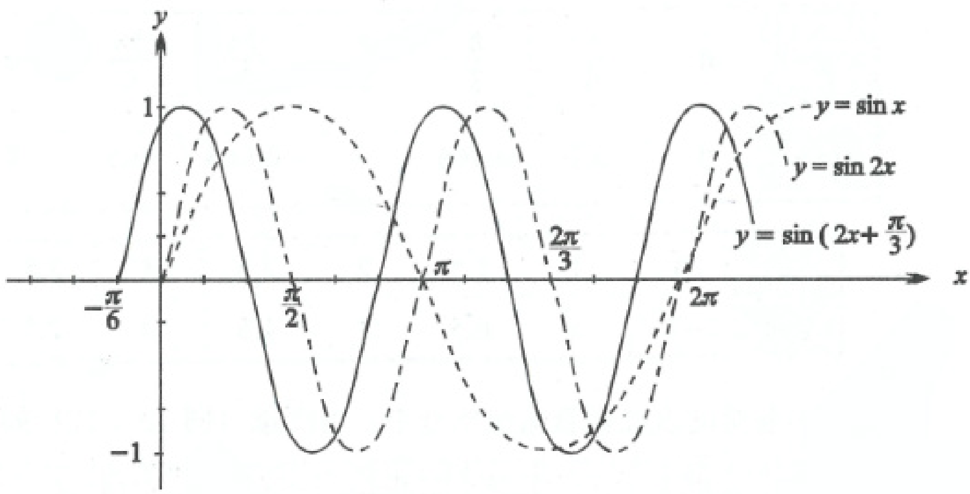


图 10－11

习题 10g

指明下列函数的波幅和周期，并说明怎样变换 $y=\sin x$ 的图象可得下列各函数的图象；画出下列各函数的图象：

1. $y = 6\sin x$
2. $y = \sin 3x$
3. $y = \frac{1}{2}\sin x$
4. $y = \sin\frac{x}{2}$
5. $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$
6. $y = \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
7. $y = 4\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$
8. $y = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

10.5 三角方程式的图解法

将方程式 $f(x)=0$ 改写成二个函数 $y=g(x)$，$y=h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)-h(x)=0$$

则 $f(x)=0$ 的解，就是函数 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 的值相同时，自变量 x 的值。由此可知，将函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在直角坐标系中画出图象，这些图象（通常是一曲线及一直线，或二曲线）的交点的x 坐标就是原方程式 $f(x)=0$ 的解。

例 27 用图解法解方程式 $\sin x - x + 1 = 0\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 的图象。

解 将方程变形为 $\sin x = x - 1$。

令 $y_1 = \sin x$， $y_2 = x - 1$。

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	0.5	0.866	1	0.866	0.5	0

x	0	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$x-1$	−1	0	0.5	1	1.5	2	2.5

将上表中各组的点描在直角坐标系中，得图象（图 10 – 12）如下：

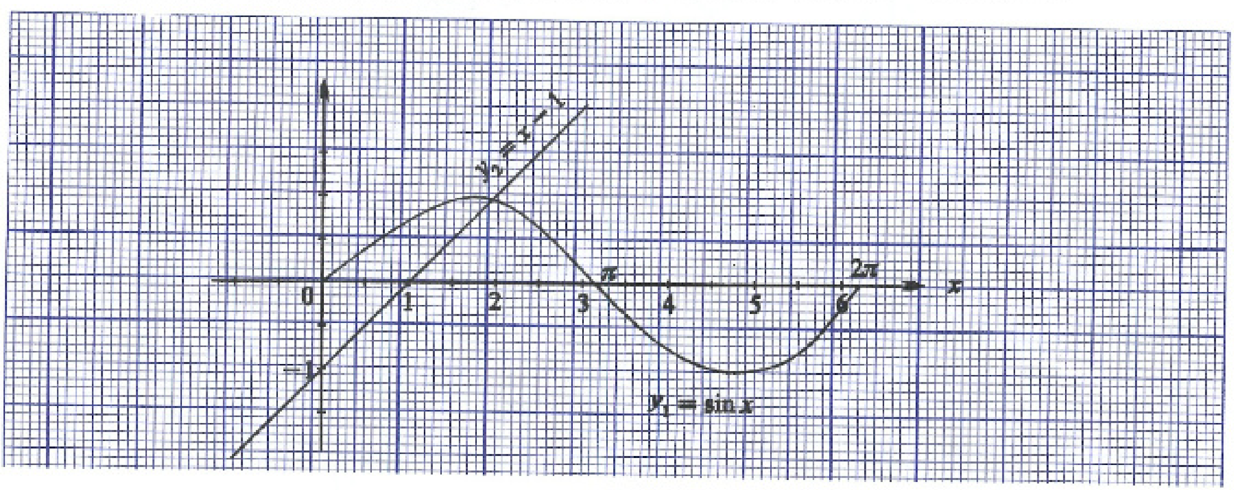


图 10 – 12

由图 10 – 12 中得知 x 的近似值为 1.93。

例 28 用图解法解方程式 $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}\ (0° \leqslant x \leqslant 180°)$

解 将原方程式变形为 $\sin(x + 45°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$。

令 $y_1 = \sin(x + 45°)$， $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$。

我们已经知道，$y_1 = \sin(x + 45°)$ 的图象是 $\sin x$ 的图象向左移动 45°，$y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 是一条平行于 x 轴的直线（图 10 – 13）。

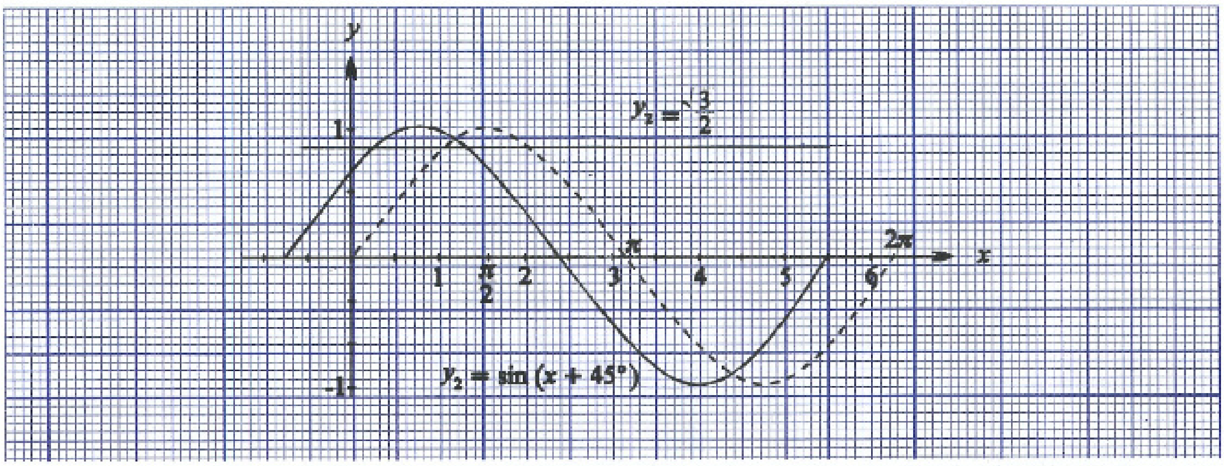


图 10－13

由图 10－13 中得知 x 的近似值为 0.26 （15°）或 1.31 （75°）.

例 29 用图解法解方程式 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-4\cos x+1=0$

$(0° \leqslant x \leqslant 180°)$.

解 将方程式变形为

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2\cos x+\frac{1}{2}=0,$$

移项，得

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos 2x-\frac{1}{2}.$$

令 $y_1=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad y_2=2\cos 2x-\frac{1}{2}$.

我们可以作出 $\sin x$，$\cos x$ 的图象后，再用变化波幅、压缩、平移等方法作出 y_1，y_2 图象，在规定的区间内找出交点．下面，我们列表确定 x，y 的一些值，然后画出图象（图 10－14）找出交点．

$y_1=\sin(2x+60°)$

x	0°	15°	30°	60°	90°	105°	120°	135°	150°	180°
y	0.87	1	0.87	0	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0	0.87

$y_2 = 2\cos 2x - \frac{1}{2}$

x	0°	15°	30°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
y	1.5	1.23	0.5	−1.5	−2.5	−1.5	−0.5	0.5	1.5

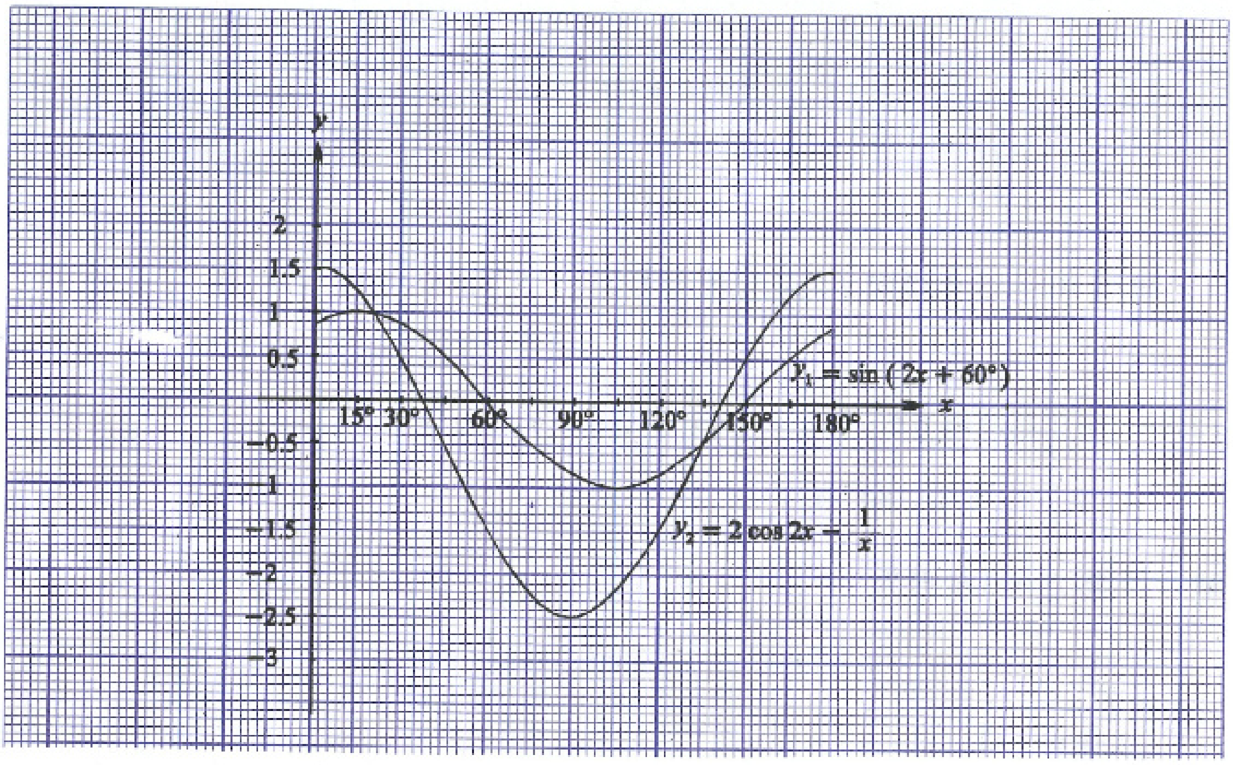


图 10 − 14

由图 10 − 14 中得知 x 的近似值为 21° 或 135°。

习题 10h

用图象法解下列方程式:

1. $\sin(x-1) = x-1$
2. $\cos x - x = \frac{\pi}{2}$
3. $\sin x + x = 0$
4. $\sin x + \sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$
5. $\sin x + \cos x = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$

6. $3\sin x+\cos 2x = 2$ $(0° \leqslant x \leqslant 90°)$

7. $1+\cos x = 2\sin\frac{x}{2}$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$

8. $\sin 4x+\sin x = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$

9. 下列各方程有多少实根?

(a) $\cos x-x = 0$ (b) $x^2-\sin x = 0$

总复习题 10

1. 解下列方程式，若 $0° \leqslant x \leqslant 180°$：

(a) $2\sin x = \sqrt{3}$ (b) $2\cos 2x-1 = 0$

(c) $2\sin(x+45°) = 1$ (d) $9\tan^2 x-25 = 0$

(e) $\sin 2x+\sin x+2\cos x+1 = 0$

2. 解下列方程式，若 $0° \leqslant x \leqslant 360°$：

(a) $\tan\left(\frac{x}{2}-40°\right) = 3.9781$ (b) $3\cos^2 x+5\sin^2 x-1 = 0$

(c) $\cos^2(2x+30°) = \frac{1}{4}$ (d) $\tan^2 x-\sec x = 5$

(e) $\cos x+\sqrt{3}\sin x = 1$

3. 解下列方程式，若 $-180° \leqslant x \leqslant 180°$：

(a) $4\cos x-3\sec x+1 = 0$ (b) $\sec 2x = \operatorname{cosec} 300°$

(c) $2\tan x = 3\tan(45°-x)$ (d) $3\cos 2x+5\sin x = 2$

(e) $\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = 2-\sqrt{3}$

4. 解下列方程式，若 $0 \leqslant x \leqslant \pi$:

(a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$ (b) $\tan 3x = \tan x$

(c) $\sin 3x+\sin x = \sin 2x$ (d) $\cos 3x+2\cos 2x+\cos x = 0$

(e) $4\sin x\sin 3x = 1$

5. 解下列方程式:

(a) $2\sqrt{2}\cos^2 x-(2-\sqrt{2})\cos x-1 = 0$

(b) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x = 1+\cos x+\cos 2x$

(c) $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 2\cot x$

(d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$

(e) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$

(f) $3\sin^2 x - 7\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 1$

6. 求下列方程式的一般解:

(a) $5\sec x - \tan x = 7$

(b) $\sin 11x \sin 4x + \sin 5x \sin 2x = 0$

(c) $\cos 4x = \sin 3x$

(d) $5\cos 2x - 2\sin 2x = 2$

(e) $2\cos 2x = \cos x - \sin x$

(f) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

7. 解方程式 $2\sin 3x \tan 2x - \tan 2x - 2\sin 3x + 1 = 0\,(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

8. 作出下列函数的图象:

(a) $y = \sin x + \cos x$　　(b) $y = 3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$

9. 用图象法解下列方程式:

(a) $2\cos x = 1 + x \quad (0° \leqslant x \leqslant 270°)$

(b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin x + \cos x = 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $\sin x + 2\cos x = 1.5 \quad (0° \leqslant x \leqslant 180°)$

(d) $\cos 2x = \cos x - x \quad (0° \leqslant x \leqslant \pi)$

10. 下列各方程式有多少个实根?

(a) $\tan x - x = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 720°)$

(b) $\cos 2x - \frac{1}{2x} = 0 \quad (-180° \leqslant x \leqslant 180°)$

11. 试证明 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. 若 $x = 2\sqrt{3}\cos\theta$, 利用代入法, 解方程式 $x^3 - 9x + 4 = 0$.

名词对照

(注：本名词对照表按华文条目的汉语拼音字母的次序排列)

B

华　文	英　文	国　文
倍式	multiple	gandaan
倍角	double angle	sudut gandaan
部分分式	partial fractions	pecahan separa
被开方数	radicand	radikan
半角公式	half angle formula	rumus sudut separuh

C

次数	degree	darjah

D

对应	correspondence	perpadanan / kesepadanan
定义域	domain	domain
顶点	vertex	bucu
多项式	polynomial	polinomial
多项式函数	polynomial function	fungsi polinomial
倒数方程式	reciprocal equation	persamaan angkasaling
度	degree	darjah

E

二次函数	quadratic function	fungsi kuadratik
二次不尽根数	quadratic surd	surd kuadratik

F

范氏图示法	Venn diagram method	kaedah gambarajah Venn
反函数	inverse function	fungsi songsang
分式方程式	frational equation	persamaan pecahan
分	minute	minit
负角	negative angle	sudut negatif
方位角	bearing	bearing

G

公式法	solving by formula	menyelesaikan dengan rumus
根的判别式	discriminant of roots	pembezalayan punca
根式	radical	radikal
根指数	index of radical	indeks radikal

H

函数	function	fungsi
合成函数	composite function	fungsi gubahan
换元法	method of changing the variable	kaedah pertukaran pembolehubah
恒等式	identity	identiti
弧度制	circular / radian measure	ukuran radian
弧度	radian	radian

J

解析法	analytical method	kaedah beranalisis
绝对值	absolute value	nilai mutlak
极小值	minimum value	nilai minimum
极大值	maximum value	nilai maksimum
极值	extreme value	nilai ekstrim
假分式	improper fration	pecahan tak wajar
角度制	degree measure	ukuran darjah
解	solution	penyelesaian

L

列表法	tabulation method	kaedah penjadualan
领导系数	leading coefficient	pekali pelopor
零次多项式	polynomial of degree zero	polinomial berdarjah sifar
零多项式	null polynomial	polinomial nol
轮换对称函数	cyclic function	fungsi berkitar
六十分制	sexagesimal measure	ukuran perenampuluhan

M

秒	second	saat

P

配方法	solving by completing the square	menyelesaikan dengan melengkapkan kuasa dua
抛物线	parabola	parabola

S

实函数	real–valued function	fungsi nyala
双二次方程式	biquadratic equation	persamaan bikuadratik
始边	initial side	sisi awal
三角函数	trigonometric function	fungsi trigonometric
三角恒等式	trigonometric identity	identiti trigonometric
三角方程式	trigonometric equation	persamaan trigonometric

T

图象法	graphical method	kaedah graf
图象	graph	graf

W

无理式	irrational expression	ekspresi takrasinal

X

系数	coefficient	pekali / koefisien
象限角	quadrant angle	sudut sukuan
象限	quadrant	sukuan
相伴锐角	associated acute angle	sudut berkait

Y

映射	mapping	pemetaan
映象	image	imej
映成函数	onto function	fungsi keseruluh

Y

原象	preimage	pra–imej
因变量	dependent variable	pembolehubah bersandar
因式分解法	solving by factorization	menyelesaikan dengan pemfaktoran
因式	factor	faktor
因式定理	factor theorem	teorem faktor
一对一函数	one–one function	fungsi satu ke–satu
一一映成函数	one–one onto function	fungsi satu ke–satu dan keseruluh
一元二次方程式	quadratic equation in one variable	persamaan kuadratik dalam satu anu
一元高次方程式	equation of higher degree in one variable	persamaan berdarjah tinggi dalam satu anu
一般解	general solution	penyelesaian am
有理化因式	rationalizing factors	faktor berasinal
余数定理	remainder theorem	teorem baki
余弦定律	cosine rule	petua kosinus
余弦曲线	cosine curve	lengkungan kosinus

Z

自变量	independent variable	pembolehubah tak bersandar
值域	range	julat
综合除法	synthetic division	pembahagian sintesis
真分式	proper fraction	pecahan wajar
最低公倍式	L.C.M.	G.S.T.K.
增根	extraneous root	punca tambahan
终边	terminal side	sisi terminal
正角	positive angle	sudut positif
正弦定律	sine rule	petua sinus
正弦曲线	sine curve	lengkungan sinus
正切曲线	tangent curve	lengkungan tangen
周期函数	periodic function	fungsi berkala
周期	period	kalaan

习题答案

第 1 章

习题 1a (P.4)

2. 第 1 题的 (b)、(c)、(d) 是映射。
3. $f(-1) = 1$，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$，$f(2) = 16$。
4. $f^{-1}(0) = 0$，$f^{-1}(1) = \pm 1$，$f^{-1}(4) = \pm 2$。R 中全部负实数在 f 之下没有原象。
5. $f(2) = 3$，$f^{-1}(2) = 1$。$f^{-1}(1)$ 不存在，即 1 无原象。
6. (a) 是从 A 到 B 的映射。

习题 1b (P.9)

1. (a)，(b)，(c) 是函数关系。
2. (a) 中 a 的映象是 1，2 的原象是 c；(b) 中 a 的映象是 1，2 的原象是 c；(c) 中 a 的映象是 2，2 的原象是 a、b、c。
3. (a) $f(n) = 3n-2$，$n \in N$；　　(b) $g(x) = 5x^2$，$x \in R$；

   (c) $h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ 时} \\ 0, & x = 0 \text{ 时} \\ -1, & x < 0 \text{ 时} \end{cases}$；　　(d) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$，$x \in R$ 且 $x \neq 0$。
4. 共 8 个函数。
7. (a) $f(x) = x^2+1$　　(b) $f(x) = x^2$

   (c) $f(x) = 2x+2$　　(d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
8. $T = \dfrac{-3}{500}h + 10$，1500 米处平均气温是 1℃。
9. 最高 15℃，发生在 14 时；最低 -5℃，发生在 2 时。
10. $y = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 10 \\ 2+0.8x, & 10 < x \leqslant 20 \end{cases}$

习题 1c (P.15)

1. (a) 19　(b) 12

   (c) $y^2 - 4yz + 4z^2 + 3$　(d) $x^2 - 4x + 7$

   (e) $t^2 + 3$

2. (a) 20　(b) -30

   (c) $a^4 - 3a^2 + 2$　(d) $5x^2 - 15x + 22$

   (e) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$　(f) $2x + h - 3$

3. (a) 7　(b) 14

   (c) 6　(d) 25

   (e) $a^2 - 2a + 6$

4. (a) $f(1) = 1$，$f(-\frac{1}{2}) = -1$，$f(0) = 0$

   (b) $f(1) = 1$，$f(-\frac{1}{2}) = 0$，$f(0) = 1$

5. (a) 15　(b) -4

   (c) -4　(d) -1

   (e) -0.58

6. (a) -1　(b) -5

   (c) 2　(d) -2

   (e) -1　(f) 14

7. 定义域 $= \{a, b, c, d, e\}$，值域 $= \{4, 8, 12\}$.

8. (a) $\{1, 2, 4\}$　(b) $\{1, 2, 3, 4\}$

   (c) $\{1, 4\}$

9. (a) $\{-1, 0, 1, 2\}$　(b) $\{1, -2, 10\}$

10. $d_f = A = \{-1, 0, 1\}$，$r_f = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$.

11. (a) 1　(b) 无意义

    (c) $2t^2 - 8t + 1$，$-1 \leqslant t \leqslant 7$

12. (a) 2　(b) 无意义

    (c) -2　(d) t，当 $-4 \leqslant t \leqslant 6$

    (e) $-t - 2$，当 $-8 \leqslant t \leqslant 2$

13. (a) 定义域：$(-\infty, \infty)$，值域：$(-\infty, \infty)$

(b) 定义域：$(-\infty, \infty)$，值域：$(-\infty, \infty)$

(c) 定义域：$(-\infty, \infty)\backslash\left\{-\frac{7}{4}\right\}$，值域：$(-\infty, \infty)\backslash\{0\}$

(d) 定义域：$[0, \infty)$，值域：$[0, \infty)$

(e) 定义域：$(-\infty, \infty)$，值域：$[0, \infty)$

(f) 定义域：$(-\infty, \infty)$，值域：$[-1, \infty)$

14. (a) $(-\infty, \infty)$ (b) $[2, \infty)$

(c) $(-\infty, -\frac{3}{2})\cup(-\frac{3}{2}, \infty)$ (d) $[\frac{1}{2}, 2]$

(e) $[-3, -2)\cup(-2, \infty)$

15. (a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$

(c) $[0, \infty)$ (d) $[-1, \infty)$

(e) $[-1, \infty)$ (f) $[0, \infty)$

16. (a) $x\in R$ 且 $x\geqslant 0$ (b) $x\in R$ 且 $x\neq 0$

(c) $x\in R$ (d) $x\in R$

$f(x) = \sqrt[3]{x^3}$ 与 $f(x) = x$ 的对应法则及定域完全相同。

17. (a) 定义域不同，值域也不同； (b) 定义域相同，值域不同；

(c) 定义域、值域都相同。

18. (a) (i) $[0, 4]$ (ii) $[0, 9]$

(iii) $[0, 9]$ (iv) $[25, \infty)$

(v) $[0, 16)$

(b) (i) $[-8, 8]$ (ii) $[0, 27]$

(iii) $[-27, 0]$ (iv) $(-\infty, 125]$

(v) $[-1, 64)$

(c) (i) $[0, 8]$ (ii) $[4, 10]$

(iii) $[-2, 4]$ (iv) $(-\infty, 14]$

(v) $[2, 12)$

19. $x\in(-\infty, \infty)$ 时，$f(x)$ 有意义；$x\in(-1, \infty)$ 时，$f(x) > 0$；$x\in(-\infty, -1)$ 时，$f(x)<0$。

20. $y = 2000a + 20ax + \frac{20000a}{x}$，$x\in[50, 100]$。

21. $t\in[0, 300]$。

习题 1d (P.24)

1. (b) 不是函数图象，因平行于 y 轴的直线中有些与曲线的交点不只有一个。
   (d) 不是函数图象，$x = 0$ 对应两个 y 值。
2. (a) $d_f = [a, b]$，$r_f = [c, d]$
   (b) $d_f = (a, b)$，$r_f = [c, d)$
   (c) $d_f = (a, b]$，$r_f = (c, d]$
   (d) $d_f = (a, 0]$，$r_f = (c, d) \cup [m, n]$
   (e) $d_f = [a, b] \cup [c, d]$，$r_f = [m, n] \cup [p, q]$
   (f) $d_f = (a, b]$，$r_f = (c, d]$
3. (a) $[1, 3)$ (b) $(-\infty, \infty)$ (c) $(-\infty, \infty)$
   (d) $R \setminus \{0\}$ (e) $(-\infty, 0)$ (f) $[-2, \infty)$
   (g) $[0, \infty)$
4. (a) $[0, \infty)$ (b) $[0, \infty)$ (c) $[0, \infty)$
   (d) $[0, \infty)$ (e) $[0, \infty)$ (f) $[0, \infty)$
5. $$y = \begin{cases} 2 & 0 < x \leqslant 20 \\ 4 & 20 < x \leqslant 40 \\ 6 & 40 < x \leqslant 60 \end{cases}$$
6. $b = a^2$，$(-a, b)$ 也在此图象上。
   关于 y 轴对称，因 $f(x) = f(-x)$，(x, y) 与 $(-x, y)$ 同在曲线上，或都不在曲线上。
7. $b = a^3$，$(-a, -b)$ 也在此图象上。
   关于原点对称，因 $f(-x) = -f(x)$，(x, y) 与 $(-x, -y)$ 同在曲线上，或都不在曲线上。

习题 1e (P.29)

1. $R_{g \circ f} = \{a, b, c\}$
2. $(f \circ f)(x) = x$
3. (a) $f \circ g: x \to 3(x-1)$，$g \circ f: x \to 3x - 1$
   (b) $f \circ g: x \to 2x + 5$，$g \circ f: x \to 2x + 4$
   (c) $f \circ g: x \to x$，$g \circ f: x \to x$
   (d) $f \circ g: x \to (x+2)^2$，$g \circ f: x \to x^2 + 2$

(e)　$f \circ g: x \to 2x^2 - 3$，$g \circ f: x \to 4x^2 + 4x - 1$

4.　(a)　$(g \circ f)(x) = 3x^2 + 6x - 13$，$(f \circ g)(x) = 9x^2 - 18x + 5$

(b)　11，5，11，5

5.　$k = -1$

6.　$f \circ g$ 及 $g \circ f$ 都存在

7.　(a)　$R_f \not\subset D_g$　　　(b)　$(f \circ g)(x) = 3 - x$，$R_{f \circ g} = [2, \alpha)$

8.　$S = \{x \mid x < 2\}$

10.　(a)　$(g \circ f)(x) = 3|x| + 1$，$(f \circ g)(x) = |3x + 1|$

(b)　$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2 + 1}$，$(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2} + 1$

11.　$(f \circ f)(x) = x + 2$，$(f \circ f \circ f)(x) = x + 3$

12.　$(f \circ f)(x) = \dfrac{x-1}{x}$，$(f \circ f \circ f)(x) = x$，$(f \circ f \circ f \circ f)(x) = \dfrac{1}{1-x}$

13.　$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$，定义域为 R，值域为 $[1, \infty)$

14.　$g(x) = x^2 - 7$　　　15.　$g(x) = (x-1)$ 或 $(1-x)$

16.　$k(x) = \pm(x+3)$　　　17.　$q(x) = x^2 - 27$

习题 1f (P.33)

1.　(c)、(d) 是一对一函数；(a)、(c) 是映成函数。

2.　(a)、(c) 是一对一函数；(b)、(c) 是映成函数。

3.　(a)　共 6 个一对一函数；　(b)　没有映成函数。

4.　(a)　共 6 个映成函数；　(b)　没有一对一函数。

5.　(a)　n^m 个；　(b)　$m \leqslant n$；　(c)　$m \geqslant n$；　(d)　$m = n$

6.　是。

7.　(a)　设 A 中有 n 个元素，由 f 是一对一的可知 $f(A)$ 有 n 个元素，
$f(A) \subseteq A$（已知），故 $f(A) = A$，f 是映成的。

(b)　$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \\ x + 1, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时} \end{cases}$ 是一对一的，但不是从 R 到 R 的映成函数，
例如没有 x 能使 $f(x) = 0$ 成立。

8.　(b)，(d) 是一一映成的。

习题 1g (P.39)

1. (b) 是反函数，其他不是反函数。

2. (a) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{4}$，$x\in R$ (b) $f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x-1}$，$x\geqslant 1$

   (c) $f^{-1}(x)=\pm 2x$，$x\geqslant 0$ (d) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

   (a)、(d) 有反函数。

3. (a) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}(x+5)$，$x\in R$ (b) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{3}}$，$x\in R$

   (c) $f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x}$，$x\in[0,\ \infty)$ (d) $f^{-1}(x)=\dfrac{2}{x}$，$x\in(-\infty,\ 0)$

   (e) $f^{-1}(x)=\dfrac{3-x}{2x}$，$x\in R$ 且 $x\neq 0$ (f) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{2}+2$，$x\in[0,\ \infty)$

4. (a) 无反函数 (b) 无反函数

   (c) 有反函数 $y=\sqrt{x}-1$，$x\in[1,\ \infty)$

   (d) 有反函数 $y=\dfrac{1}{x}$，$x\in R$ 且 $x\neq 0$

   (e) 有反函数 $y=x^2$，$x\in R^+\cup\{0\}$

6. $y=x^2$ 有反函数时，定义域为 $[0,\ \infty)$，反函数为 $y=\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$；或者定义域为 $(-\infty,\ 0]$，反函数为 $y=-\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$。

7. 反函数 $y=10^x$，其定义域为 $(-\infty,\ \infty)$，值域为 $(0,\ \infty)$。

8. (b)、(d)、(c) 因这些函数是其定义域到其值域的一一映成函数，故有从 $f(A)$ 到 A 的反函数。

9. $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2}$，$x\in R$

10. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-5}$，$x\in R$

11. $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$，$x\in R\backslash\{1\}$

12. $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{1-2x}$，$x\in R\backslash\{\dfrac{1}{2}\}$

13. (a) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$ (b) $a=-1$，$b\in R$

14. (a) $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$，$0<x\leqslant 1$

15. (a) $f^{-1}(x)=2x+1$，$x\in R$

总复习题 1 (P.42)

1. (a)、(b)、(c)、(d) 是映射，其他不是映射。

2. $f(a)-f(b)=(-a+1)-(-b+1)=b-a>0$，$f(a)>f(b)$。

4. (a) $[0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$　　(b) $[-1,\ 1]$　　(c) $(2,\ 20)$

5. (a) $[-1,\ \infty)$　　(b) $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$　　(c) $[3,\ \infty)$

6. $y=\begin{cases}0.1, & 0<x<4\\ 0.2, & 4\leqslant x\leqslant 10\\ 0.3, & 10<x\leqslant 20\end{cases}$　定义域 $(0,\ 20]$，值域 $\{0.1,\ 0.2,\ 0.3\}$。

7. 当 $x=\sqrt{2}$ 时，$y=0$

8. (a) $\dfrac{1-x}{3+5x}$　　(b) $\dfrac{3x+5}{x-1}$

9. $\dfrac{5}{7}$

12. $\dfrac{1+x}{x}$

13. $(g\circ f)(x)=x-\dfrac{1}{2}$

14. $(g\circ f)(x)=x^2$，定义域 $[0,\ \infty)$；$(f\circ g)(x)=x^2$，定义域 $(-\infty,\ \infty)$

15. $\dfrac{1}{x-1}$

16. $(2x+1)^2$

17. 当 $x<1$ 时，$\sqrt{2x-1}$ 无意义，故 $g\circ f$ 不存在；$f\circ g\,(x)=2\sqrt{x-2}$，定义域 $[2,\ \infty)$，值域 $[0,\ \infty)$。

18. $f\circ g=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\\ 27x^3, & \text{当 } 0\leqslant x<\dfrac{2}{3} \text{ 时}\\ 2, & \text{当 } x>\dfrac{2}{3} \text{ 时}\end{cases}$；$g\circ g=\begin{cases}-1, & \text{当 } x<0\\ 9x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}\\ 4, & \text{当 } x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$

$$f\circ f=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0\\ x^9, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant\sqrt[3]{2}\\ 2, & \text{当 } x>\sqrt[3]{2}\end{cases}$$

19.　11

20.　$2x^2-3x+1$

21.　1，3

22.　f：A → B 是一对一函数，C ⊆ B。

23.　$h(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$，$x\in R$。

24.　$-\frac{1}{3}$

25.　$\frac{x}{x-1}$，$x\neq 1$

26.　(a)　$y=\frac{2}{x}+1$，$x\in R$ 且 $x\neq 0$　　(b)　$y=\sqrt[3]{x-1}$，$x\in R$

(c)　$y=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$，$x\in[0,\ 5]$　　(d)　$y=\frac{1}{3-x}$，$x\in R$ 且 $x\neq 3$

(e)　$y=\frac{5x}{1-3x}$，$x\in R$ 且 $x\neq\frac{1}{3}$　　(f)　$y=\sqrt[3]{x-1}$，$x\in R$

28.　(a)　(i)　$-2x+9$　　(ii)　$\frac{x-3}{2}$

(iii)　$3-x$

(b)　$a=-3$，$b=14$，$f(2)=8$，$f^{-1}(8)=2$

(c)　$r_f=[5,\ 9)$

29.　(a)　8，4，24，22

(b)　(i)　$10x-32$，$\frac{x+32}{10}$　　(ii)　$\frac{x-3}{5}$，$\frac{x+7}{2}$，$\frac{x+32}{10}$

30.　(a)　$R_f=\{y:\frac{3}{4}\leqslant y\leqslant 7\}$　　(b)　x^2+3

第 2 章

习题 2a (P.51)

1.　(a)　1，4　　(b)　-2，-3　　(c)　-5，4

(d)　4，-3　　(e)　0，-3　　(f)　-7，7

(g)　$\frac{3}{2}$，5　　(h)　1，$-\frac{5}{3}$　　(i)　$-\frac{1}{2}$，$-\frac{2}{3}$

(j)　$\frac{3}{5}$，$-\frac{2}{3}$

2. (a) $2\pm\sqrt{11}$　(b) $-3\pm\sqrt{6}$　(c) $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

(d) $\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$　(e) $\frac{-1\pm\sqrt{73}}{4}$　(f) $1\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$

(g) $\frac{3\pm2\sqrt{6}}{5}$　(h) $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$　(i) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{3}$

(j) $\frac{1\pm\sqrt{29}}{14}$

3. (a) $1\pm\sqrt{11}$　(b) $4\pm2\sqrt{3}$　(c) 1, $-\frac{1}{3}$

(d) $-1\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$　(e) $\frac{2\pm\sqrt{14}}{5}$　(f) $\frac{5}{2}$, -1

(g) 1, 2　(h) $\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{22}}{4}$

4. (a) $\{1, 6\}$　(b) $\left\{\frac{7+\sqrt{73}}{2}, \frac{7-\sqrt{73}}{2}\right\}$

(c) $\{-3, -8\}$　(d) $\{6, -7\}$

(e) $\{0, 3\}$　(f) $\{-2+\sqrt{5}, -2-\sqrt{5}\}$

(g) $\{0\}$　(h) $\{2\sqrt{2}+\sqrt{6}, 2\sqrt{2}-\sqrt{6}\}$

(i) $\left\{-\frac{7}{2}, 1\right\}$　(j) $\left\{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right\}$

习题 2b (P.54)

1. (a) 有两不等实根　(b) 无实根　(c) 有两相等实根

(d) 有两不等实根　(e) 有两不等实根　(f) 无实根

(g) 有两不等实根　(h) 无实根　(i) 有两不等实根

(j) 有两不等实根

2. (a) $-\frac{1}{4}<m<0$ 或 $m>0$　(b) $m=-\frac{1}{4}$

(c) $m<-\frac{1}{4}$

3. $p=5$, $x_1=x_2=-1$

7. 若 $a=0$，则有 $2=0$，矛盾；当 $a\neq0$ 时，$\Delta=-4a^2<0$

8. $a^2+b^2-c^2=0$　9. $(c-a)^2=4(b-c)(a-b)$

11. (a) $m = 0, m = 5$　(b) $m = 0, m = 3$

12. 6

习题 2c (P.58)

1. (a) $\alpha+\beta = 5, \alpha\beta = 2$　(b) $\alpha+\beta = 2, \alpha\beta = -1$
   (c) $\alpha+\beta = \frac{2}{3}, \alpha\beta = -\frac{1}{3}$　(d) $\alpha+\beta = \frac{7}{2}, \alpha\beta = 0$
   (e) $\alpha+\beta = 0, \alpha\beta = -\frac{4}{5}$　(f) $\alpha+\beta = 2, \alpha\beta = -2$
2. $20, m = -20$
3. $2, n = 2$
4. $-5, m = 14$
5. $p = 0, a = \frac{1}{2}$
6. $q = 1, a = 1$
7. $-6, a = -\frac{1}{6}$
8. $-1, a = 4$
9. $x = \frac{3}{4}$ 或 $\frac{3}{2}$
10. $4m^2 = 4n+1$

习题 2d (P.63)

1. (a) 12　(b) 3　(c) $\frac{27}{2}$
   (d) 9　(e) $\frac{23}{2}$　(f) $\frac{1}{6}$
3. (a) 9　(b) 45　(c) 351
   (d) 2385
4. (a) $3x^2+4x-4 = 0$　(b) $2x^2-2x-1 = 0$
   (c) $x^2-3ax+2a^2 = 0$　(d) $bx^2-(b^2+1)x+b = 0$
5. $x^2-\sqrt{3}x-6-2\sqrt{3} = 0, \Delta>0, \alpha\neq\beta$
7. $2x^2-x-3 = 0$
8. $x^2-21x+25 = 0$
9. $3x^2-12x+11 = 0$
10. $x^2\pm\sqrt{5}x+1 = 0$
11. $p^2x^2+pqx+25pr-6q^2 = 0$
12. $(6m^2+n)x^2-(3m^2-2n)x+n = 0$

习题 2e (P.70)

1. (a)，(c)

6. (a) 开口向上，顶点 (0，5)

   (b) 开口向上，对称轴 $x = 3$，顶点 (3，0)

   (c) 开口向上，对称轴 $x = -2$，顶点 $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

7. (a) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2+2$，开口向上，对称轴 $x = 2$，顶点 (2，2)；

   (b) $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2-3$，开口向下，对称轴 $x = 2$，顶点 (2，-3)；

8. (a) $\left(\frac{3+\sqrt{41}}{8}, 0\right)$，$\left(\frac{3-\sqrt{41}}{8}, 0\right)$ 和 (0，2)

   (b) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$，(0，1)　　(c) (0，6)　　(d) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，(0，0)

9. (b) 10 m

习题 2f (P.74)

1. (a) 当 $x = -1$ 时，$y_{min} = 2$　　(b) 当 $x = 1$ 时，$y_{max} = \frac{1}{2}$

   (c) 当 $x = -1$ 时，$y_{max} = 0$　　(d) 当 $x = 5$ 时，$y_{min} = -3$

2. (a) 当 $x = -1$ 时，$y_{min} = 4$

   (b) 当 $x = -2$ 时，$y_{max} = 9$

   (c) 当 $x = -3$ 时，$y_{min} = 0$

   (d) 当 $x = -\frac{3}{5}$ 时，$y_{max} = -\frac{11}{5}$

3. $a = 40$，$b = 40$，$y_{min} = 0$

4. 当 $x = 3$ 时，$y_{max} = \frac{9}{2}$

5. $a = -1$

6. 当 $x = 10$ m 时，$y_{max} = 200\ \text{m}^2$

7. 当每边长 20 公尺时

8. 此两个整数都是 18

9. $t = \frac{3}{4}$ 秒，$S_{max} = 9$ 公尺

总复习题 2 (P.74)

1. (a) $\frac{8}{5}$, $-\frac{8}{5}$　(b) 1, -5　(c) -1, $-\frac{3}{2}$

   (d) $\frac{1}{2}$, 1　(e) $-1\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$　(f) $\frac{11\pm\sqrt{61}}{10}$

2. $\Delta = (4m-n)^2 \geqslant 0$，有实根；$4m = n$ 时，两根相等。

3. (a) $-\frac{1}{2}<k<0$ 或 $k>0$　(b) $k = -\frac{1}{2}$　(c) $k<-\frac{1}{2}$

4. $m = 4$ 或 1

5. $m = 0$ 或 3

6. $\Delta = b^2-4ac>0$，方程式有两不等实根。

7. -2, $p = 5$

8. $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $k = -2$ 或 $\alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $k = \sqrt{2}$

9. $m = \pm 8$

10. $m = 27$

11. $m = \pm 6$

13. (a) 663　(b) -891　(c) $-\frac{18}{11}$

14. (a) $\alpha^3+\beta^3 = \frac{3abc-b^3}{a^3}$

    (b) $\alpha^3-\beta^3 = \frac{b^2-ac}{a^3}\sqrt{b^2-4ac}$

    (c) $\alpha^4-\beta^4 = \frac{b(2ac-b^2)}{a^4}\sqrt{b^2-4ac}$

15. (a) $x^2-px+q = 0$

    (b) $qx^2+px+1 = 0$

    (c) $x^2+(p^2-2q)x+q^2 = 0$

16. $n = 2$

17. $6x^2-7x+2 = 0$ 或 $6x^2-5x = 0$

18. $x^2\pm 11x+28 = 0$

20. $m = -2$, $n = 3$ 或 -2；$m = 1$, $n = 0$ 或 1

22. $a=1$，$b=-5$，$c=6$，$y=x^2-5x+6$，开口向上，对称轴 $x=\frac{5}{2}$，

顶点 $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$，与坐标轴的公共点 (2，0)，(3，0)，(0，6)。

23. (a) $y_{min}=1$　　(b) $y_{min}=-1$　　(c) $y_{max}=\frac{5}{6}$

(d) $y_{min}=\frac{1}{2}$

24. $a=52$，$b=-52$

25. $a=-2$，$b=8$

26. $a=\frac{b^2}{24}>0$，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{min}=4$。

27. 此二数都是 9。

28. $x=\sqrt{\frac{R^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$ 时，$S_{max}=\frac{R^2}{2}$，其中 x 为矩形一边长。

29. 当 $x=\frac{l}{2}$ 时，y 的值最小。

第 3 章

习题 3a (P.79)

1. (b)，(d)
2. 有 4 项 $4x^3$，$-7x^2$，$6x$，-8。次数分别是 3，2，1，0；系数分别是 4，-7，6，-8。
3. (a) 领导系数 4，三次多项式；　(b) 领导系数 -6，二次多项式；
   (c) 领导系数 18，零次多项式；　(d) 领导系数 -1，五次多项式。
4. (a) 五次多项式；　(b) 三次多项式；
   (c) 没有次数，是零多项式；　(d) 零次多项式。

习题 3b (P.84)

1. (a) $-7x^4-10x^3+9x^2+6x-1$　(b) $y^5+y^4+24y^2-16y$
2. (a) x^4+2x^2+6x-7　(b) x^5-7x^3+14
3. (a) $x^3+12x^2-20x-7$　(b) $2x^4+4x^2+8$
4. (a) $9x^4-7x^2+52x-40$　(b) x^4-16

(c) $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

(d) $x^5 - 25x^3 + 60x^2 - 36x$

5. (a) 商式：$x^2 + 4x + 4$，余式：16

(b) 商式：$x^2 - 5x + 33$，余式：$-190x + 93$

(c) 商式：$2x^3 - 4x^2 - 6x + 24$，余式：$-24x - 81$

6. (a) $g(x) = 8x^2 - 2$　　(b) $f(x) = x^2 + 3x - 3$

7. (a) 商式 $= 3x + 4$，余式 $= 0$

(b) 商式 $= x^2 - 3x - 1$，余式 $= 1$

(c) 商式 $= 2x^3 - 2x^2 + x - 1$，余式 $= 2$

(d) 商式 $= 2x^3 - 2x^2 - 5x - 10$，余式 $= -19x + 60$

8. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2x + 19$

9. $a = -2$

10. $a = 8$，$b = -24$

11. $m = 19$

习题 3c (P.89)

1. 商式：$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$，余式：0

2. 商式：$x^3 + 3x^2 - 1$，余式：0

3. 商式：$2x^4 + 5x^3 - 6x - 7$，余式：-56

4. 商式：$3x^3 - 7x^2 - 5x + 8$，余式：-25

5. 商式：$x^3 + 3x^2 + 7$，余式：0

6. 商式：$2x^3 + 7x^2 + 5x + 8$，余式：32

7. 商式：$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 8x + 6$，余式：$-36$

8. 商式：$3x^3 + 5x^2 - 2x + \frac{1}{2}$，余式：$0$

9. 商式：$\frac{x}{2}^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{5}{16}$，余式：$-\frac{7}{16}$

10. 商式：$x^2 + (b + c)x + bc$，余式：0

习题 3d (P.92)

1. 51
2. $f(-3) = -20$
3. $f\left(\frac{5}{4}\right) = -60$
4. 34
5. $36\frac{1}{9}$
6. $a = 150$
7. $h = -3$
8. $k = 1$
9. $k = -2$
10. $f(-3) = -60$
11. $h = -4$, $k = 9$
12. $x + 3$
13. $-4x + 7$
14. $a = -9$, $b = 4$

习题 3e (P.96)

1. $k = -4$
2. $m = -3$
3. $k = 2$
4. $k = -1$
5. $a = 1$, $b = -27$
6. $m = -9$, $n = 7$
7. $a = 12$, $c = -17$
8. $k = -2$, 余数 $= -20$
9. $a = -62$, $b = -104$
10. (a) $m = 1$, $n = 5$　(b) $f(y) = y(y+1)^2(3y-7)$
11. 是
13. (a) 有　(b) 有
16. 有。
17. $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$。 提示：可设 $f(x) = k(x-1)(x+2)$。
18. $f(x) = (x-3)(x+5)(x-2) = x^3 - 19x + 30$

习题 3f (P.101)

1. $(x-1)(x-2)(x-3)$
2. $(x+1)^2(x^2-2x+3)$
3. $(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$
4. $(x+1)^2(x+2)(x-3)$
5. $x(x+2)(x-2)(x^2+2x+2)$
6. $(x+3)(x-4)(x^2-2x-1)$
7. $(x+1)^2(x+2)(x^2-4x+2)$
8. $(x-1)(2x-1)(x^2+x+1)$
9. $(2x+1)(2x-1)(2x^2+2x+1)$
10. $(3x+1)(4x-1)(x^2+2x-1)$
11. $(2x-3)(3x+4)(x^2-x+1)$
12. $(x+1)(x-1)(x-2)(5x-2)(x^2+x+1)$
13. $(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$
14. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

    提示：$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = \cdots$

15. $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

提示：$x^4-3x^2+1 = x^4-2x^2+1-x^2 = (x^2-1)^2-x^2 = \cdots$

习题 3g (P.105)

1. $x=2$，$x=3$，$x=-\dfrac{1}{2}$
2. $x=1$，$x=-4$，$x=-1+\sqrt{2}$，$x=-1-\sqrt{2}$
3. $x=2$，$x=-2$
4. $x=1$，$x=-\dfrac{3}{2}$
5. $x=0$，$x=\dfrac{1}{3}$，$x=-\dfrac{1}{2}$，$x=-1+\sqrt{5}$，$x=-1-\sqrt{5}$
6. $x=4$，$x=-4$，$x=\sqrt{5}$，$x=-\sqrt{5}$
7. $x=-1$，$x=\sqrt{6}$，$x=-\sqrt{6}$

   提示：提出因式 $x+1$ 后，再按双二次方程式的解法求解。
8. $x=\dfrac{2}{3}$，$x=-\dfrac{2}{3}$，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
9. $x=1+\sqrt{6}$，$x=1-\sqrt{6}$，$x=1+\sqrt{7}$，$x=1-\sqrt{7}$
10. $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
11. $x=2$，$x=-7$

    提示：化成 $[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] = 360$
12. $x=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{29}}{2}$，$x=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{29}}{2}$

习题 3h (P.109)

1. $x=-2$，$x=-\dfrac{1}{2}$
2. $x=3$，$x=\dfrac{1}{3}$，$x=\dfrac{-7+\sqrt{33}}{4}$，$x=\dfrac{-7-\sqrt{33}}{4}$
3. $x=1$，$x=-1$
4. $x=1$，$x=-1$，$x=2$，$x=\dfrac{1}{2}$，$x=\dfrac{-9+\sqrt{65}}{4}$，

   $x=\dfrac{-9-\sqrt{65}}{4}$

5. $x = \frac{1}{8}(9+\sqrt{17})$，$x = \frac{1}{8}(9-\sqrt{17})$，$x = -1$

6. $x = 1$，$x = 2$，$x = \frac{1}{2}$，$x = \frac{1}{5}(-6+\sqrt{11})$，$x = \frac{1}{5}(-6-\sqrt{11})$

总复习题 3 (P.109)

1. (a) $a = 0$，$b \neq 0$

   (b) $a = b = c = d = 0$，$e \neq 0$

   (c) $a = b = c = d = e = 0$

2. $\frac{7}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x - 1$

3. (a) $6x^6 - 9x^5 - 19x^4 + 6x^3 + 15x + 25$

   (b) 商式：$3x^4 - 2x^2 - 1$，余式：$-3x-5$

4. $2x^2 - 5$

5. (a) 商式：$2x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 12x + 19$，余式：5

   (b) 商式：$4x^3 - 2x^2 + 5x - \frac{1}{3}$，余式：$\frac{20}{3}$

6. $\frac{1}{3}$　　7. $\frac{17}{2}$　　8. $f(3) = 46$

9. $k = -2$　　10. $m = 1$　　11. $m = 2$

12. $p = 3$，$q = -3$　　13. $a = 106$，$b = 132$　　14. $x + 1$

15. $\frac{A-B}{a-b}x + \frac{aB-Ab}{a-b}$

16. 当 n 为正奇数时，$x^n + a^n$ 有因式 $x + a$；n 为正偶数时，$x^n + a^n$ 没有因式 $x + a$。

17. 是

18. (b) 当 n = 偶数，余数 = 0；当 n = 奇数，余数 = -2

20. $5x^3 - 24x^2 + 25x + 6$

21. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

22. (a) $(x+4)(x-5)(x^2+x+1)$

    (b) $(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+x-5)$

    (c) $(3x+2)^2(x^2-2x+2)$

    (d) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

    提示：$x^8 + x^4 + 1 = (x^4+1)^2 - x^4 = (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1) = \cdots$

23. $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$

24. $x=1$, $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=4$

25. $x=\pm 1$, $x=\pm\frac{1}{2}$

26. $x=3$, $x=1$, $x=5$, $x=-1$

27. $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

28. $x=1$, $x=-1$, $x=\frac{1}{3}$, $x=3$

29. $x=2$, $x=-2$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{5}$, $x=-\sqrt{5}$

30. $x=-4$, $x=-6$, $x=\frac{1}{2}(-15+\sqrt{129})$, $x=\frac{1}{2}(-15-\sqrt{129})$

提示：把原方程式写成 $[(x^2+24)+14x][(x^2+24)+11x]=4x^2$

31. $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}(-4+\sqrt{7})$,

$x=\frac{1}{3}(-4-\sqrt{7})$

32. $x=-2$, $x=\frac{3}{5}$, $x=2+\sqrt{3}$, $x=2-\sqrt{3}$,

$x=\frac{1}{3}(-7+2\sqrt{10})$, $x=\frac{1}{3}(-7-2\sqrt{10})$

33. $x=4$, $x=-4$

习题 (P.114)

1. $-(x-y)(y-z)(z-x)$
2. $-(x-y)(y-z)(z-x)$
3. $(x+y)(y+z)(z+x)$
4. $-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$
5. $-2(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$
6. $(x+y)(y+z)(z+x)$
8. $(x-y)(y-z)(z-x)[5(x^2+y^2+z^2)-5(xy+yz+zx)]$

第 4 章

习题 4a (P.121)

1. (a) $x \neq 5$　　(b) $x \neq \frac{1}{2}$，$x \neq -\frac{1}{2}$

2. (a) $x = 1$

   (b) $x = 1$　（注意：$x = 2$ 使分式无意义，不能使分式的值为零。）

3. (a) $3 - \frac{2x+2}{x^2+3}$　　(b) $4 - \frac{16}{2x^2+3}$

   (c) $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}$　　(d) $2x - 3 - \frac{x-1}{2x^2+x-3}$

4. $\frac{1}{2}$

5. $\frac{y}{2x-y}$

6. $\frac{2}{(a+2)(a+4)}$

7. $\frac{x+10}{(x+1)(x+2)(x-2)}$

8. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$

9. $\frac{x+1}{x+5}$

10. $(a-3)^2$

11. -1

12. $-\frac{23y+25}{6(y+1)(y-1)}$

13. $\frac{-1}{a+2}$

14. $\frac{y}{x^2}$

15. $\frac{-4x}{x-y}$

16. $\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

17. $\frac{1}{x}$

18. $\frac{2(x-y)}{x+y}$

习题 4b (P.126)

1. $x = 2$

2. 无解

3. $x = \frac{1}{3}$

4. $x = \frac{5}{2}$

5. 无解

6. $x = -1$

7. $\{-3, \frac{2}{3}\}$

8. $\{6\}$

9. $a = 4$

10. $x = 5$

11. $x=-\frac{2}{3}$，$x=-\frac{3}{4}$

12. $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

13. 原来每小时锄草 1 公顷。

14. 原计划每天用煤 7 吨。

15. 原计划每天读 20 页，后来每天读 25 页。

16. 单独工作，甲队用 10 天，乙队用 15 天完成绿化任务。

17. 原来每天加工 40 个，后来每天加工 55 个。

习题 4c (P.130)

1. $a=5$，$b=4$

2. $A=2$，$B=-1$，$C=3$

3. $4x+3y-8\equiv 2(x+2y-1)+3(2x-3y+2)-4(x-2y+3)$

4. x^3+5x^2-x-11

5. $x^4-x^3-7x^2+8x-2$

6. $a=5$，$b=-4$

7. $A=5$，$B=6$

8. $P=6$，$Q=-7$

9. 这个二次式是 x^2+2x-2 或 $-x^2-2x+2$。
   提示：可设这个二次式为 ax^2+bx+c。

习题 4d (P.134)

1. $\frac{4}{2x+1}-\frac{1}{3x-2}$

2. $\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x-1}$

3. $\frac{3}{5x-2}+\frac{1}{3x+4}$

4. $\frac{4}{2x-3}-\frac{4}{2x+3}$

5. $\frac{7}{x+8}-\frac{3}{x-8}-2$

6. $\frac{2}{x-5}+\frac{3}{(x-5)^2}$

7. $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+2)^3}$

8. $x+2+\frac{4}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}$

9. $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

10. $\frac{2}{x}+\frac{3}{1+x}+\frac{5}{1-x}$

11. $\frac{-3}{2x}-\frac{1}{6(x+2)}+\frac{5}{3(x-1)}$

12. $x+2-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}$

习题 4c (P.138)

1. $\dfrac{2}{2x+3}+\dfrac{1}{x^2-x+1}$

2. $\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{2x+1}{x^2-3x+5}$

3. $\dfrac{x+1}{x^2+2x+4}-\dfrac{1}{x-2}$

4. $\dfrac{x-1}{x^2+1}+\dfrac{x+2}{x^2+2}$

5. $\dfrac{2x-2}{x^2+x+1}+\dfrac{2}{(x^2+x+1)^2}$

6. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x^2+x+1}$

7. $\dfrac{-4}{2x^2+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

8. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+4}$

总复习题 4 (P.138)

1. (a) $x=2$，$x=-2$ 时，分式无意义；

   (b) $x=-3$，$x=-\dfrac{1}{2}$ 时，分式无意义。

2. $x=3$

3. $x-1+\dfrac{3x-3}{x^2+x-2}$

4. $\dfrac{1}{x(1-x)}$

5. 1

6. -1

7. $\dfrac{(x-y)(3x^2+y^2)}{(x+y)^3}$

8. $\dfrac{1}{x-3}$　提示：先把各分式化成多项式与真分式的和。

9. $\dfrac{y}{x}$

10. $\dfrac{a^2-a+1}{2a-1}$

11. 无解（$x=2$ 是增根）

12. $x=1$

13. 无解（$x=2$，$x=3$ 都是增根）

14. $\{-4\}$　（$x=0$ 是增根）

15. $\{-5\}$

16. $\{1, 2, \dfrac{1}{2}\}$

17. 单独施工，甲队需用 6 天完成工程，乙队需用 9 天完成工程。

18. 甲班独种，15 天完成；乙队独种，10 天完成种花任务。

19. $k=2$，$a=4$，$b=8$ 或 $k=-2$，$a=-4$，$b=-8$。

20. $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$

21. $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}$

22. $\dfrac{5x}{5x^2+x+1}-\dfrac{1}{x+1}$

23. $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$　　[注：$x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2$
$= (x^2+1)^2-x^2$
$= (x^2+x+1)(x^2-x+1)$]

24. $\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}-\dfrac{3x-1}{(x^2-x+1)^2}$　　25. $\dfrac{4}{2x-3}-\dfrac{2x+2}{x^2+1}-\dfrac{5x+8}{(x^2+1)^2}$

第 5 章

习题 5a (P.143)

1. (a) $x \geqslant 0$　(b) $x \leqslant 0$　(c) x 为一切实数
   (d) x 为一切实数　(e) $x \leqslant 1$　(f) $x \geqslant 1$
2. $x+2$
3. a^4+6a^2+9
4. $64b^2$
5. $2x$
6. $4x^2$
7. $-2a$
8. $x-1$
9. $1-x$
10. 2
11. 1

习题 5b (P.145)

1. $\sqrt{x}$
2. y^3
3. $\sqrt[6]{x^2y^3}$
4. $\sqrt[3]{25a^2b}$
5. $2x^2y^3$
6. $\sqrt[4]{a^mb^{2n}}$
7. $\sqrt[4]{(x+1)^3(x-1)^3}$
8. $\sqrt[3]{m^2+mn}$
9. $\sqrt[4]{25}$，$\sqrt[4]{2}$
10. $\sqrt[15]{6^5y^{10}}$，$\sqrt[15]{y^3}$
11. $\sqrt[10]{32m^5n^5}$，$\sqrt[10]{36m^4n^2}$，$\sqrt[10]{5m}$
12. $\sqrt[12]{(x+y)^6}$，$\sqrt[12]{(x^2+y^2)^3}$，$\sqrt[12]{(x+y)^{10}}$
13. $\sqrt[36]{8a^{15}}$，$\sqrt[36]{81b^4}$，$-\sqrt[36]{81b^4}$
14. $-\sqrt[18]{x^{12}}$，$\sqrt[18]{64x^3y^3}$，$\sqrt[18]{64x^8y^{10}}$
15. (a) 1.41　(b) 2.83　(c) 1.73
    (d) 5.20　(e) 2.24　(f) 8.94

习题 5c (P.146)

1. 1408
2. -504
3. ab^2
4. a^3bt^4
5. $2a^2b^3$
6. a^2bc^3

7. $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$ 8. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$ 9. $\dfrac{\sqrt{n}}{7m^2}$

10. $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{2b}$ 11. $\dfrac{2xy^2}{3a^2b^3}$ 12. $\dfrac{ab^2}{c^3d}$

13. $\sqrt[3]{a^2b^2}$ 14. $9\sqrt[5]{a^2b^4}$ 15. $m^3\sqrt[4]{125n^3}$

16. $-\dfrac{x^3}{y^3}\sqrt[4]{\dfrac{y^3}{x^3}}$ 17. $\sqrt[6]{ab}$ 18. $\sqrt[6]{28}$

19. $\sqrt[3]{a}$ 20. $\sqrt{2}$ 21. $\sqrt[3]{a^2}$

习题 5d (P.149)

1. $2a\sqrt{2a}$ 2. $4t^2\sqrt{t}$ 3. $4pq^3\sqrt{pq}$

4. $t\sqrt[3]{2t}$ 5. $3a\sqrt[3]{a^2}$ 6. $2ab\sqrt{2ab^2}$

7. $\sqrt{75}$ 8. $\sqrt{16b^3c}$ 9. $\sqrt{x^4y}$

10. $\sqrt[3]{72}$ 11. $\sqrt[3]{x^{10}y}$ 12. $\sqrt[n]{4^na^{n-1}}$

13. $\dfrac{n}{4m}\sqrt{2m}$ 14. $\dfrac{1}{4x^2}\sqrt{2x}$ 15. $\dfrac{1}{3a}\sqrt{3ab^2}$

16. $\dfrac{1}{2x^2}\sqrt[3]{4a^2x^2}$ 17. $\dfrac{1}{ax}\sqrt[n]{a^2}$ 18. $\dfrac{1}{y^3}\sqrt[n]{3y^{n-1}}$

19. $\dfrac{4c}{3a^3b}\sqrt{abc}$ 20. $\dfrac{b}{6a^3}\sqrt[3]{4a^2b}$ 21. $\dfrac{xy^2}{2}\sqrt[3]{12xy^2}$

22. $\dfrac{x}{3mn}\sqrt[3]{am}$ 23. $\sqrt[4]{n^2+1}$ 24. $\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{2xy}$

25. $a\sqrt[3]{ab^2}$ 26. $9ab\sqrt[5]{a^3b}$ 27. $m^3n\sqrt[4]{m^3n^2}$

28. $-\dfrac{x}{y^2}\sqrt{xy}$ 29. $\sqrt[6]{28}$ 30. $\sqrt[3]{a^2}$

习题 5e (P.151)

1. (a) $\sqrt[4]{64}$ 和 $\sqrt{\dfrac{1}{32}}$; $\sqrt[3]{54}$ 和 $\sqrt[6]{\dfrac{1}{16}}$

   (b) $\sqrt{x^3}$ 和 $\sqrt[6]{x^3}$; $\sqrt[3]{x^4}$ 和 $\sqrt[6]{x^2}$

   (c) $\sqrt{a^3b}$ 和 $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^3}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$ 和 $\sqrt[6]{a^4b^2}$

(d) $\sqrt{\dfrac{a^3}{3b}}$ 和 $\sqrt[6]{27a^9b^9}$；$\sqrt[3]{\dfrac{b}{4a}}$ 和 $\sqrt[6]{4a^4b^2}$

2. $3\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$

3. $\dfrac{7}{9}\sqrt[3]{9}-2\sqrt{5}$

4. $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$

5. $\dfrac{1}{15}\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{6}$

6. $\dfrac{23}{15}\sqrt{6}-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{4}$

7. $\dfrac{23}{28}\sqrt{7}-5\sqrt[3]{5}$

8. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}$

9. $3\sqrt{ab}+6\sqrt[3]{ab}$

10. $x\sqrt{x}+\left(6+\dfrac{1}{xy}\right)\sqrt[3]{x^2y}$

11. $-y\sqrt{xy}$

12. $11a\sqrt{3a}+ab\sqrt[3]{a}-\dfrac{ab}{2}\sqrt[3]{2a}$

13. $\left(2xy+\dfrac{1}{xy}\right)\sqrt{2xy}+\left(-2x+\dfrac{1}{2x}\right)\sqrt[3]{2x}+\sqrt{2x}$

习题 5f (P.155)

1. $30\sqrt{2}$

2. $\dfrac{1}{6}\sqrt{3}$

3. $-3\sqrt[3]{4}$

4. $\dfrac{1}{6}\sqrt[3]{3}$

5. $ab\sqrt[3]{b}$

6. $\dfrac{1}{ab}\sqrt[3]{a^2b^2}$

7. $2ab\sqrt{2}$

8. $\dfrac{a}{b}\sqrt[n]{b^2}$

9. $\sqrt[6]{72}$

10. $a\sqrt[12]{a^5}$

11. $\dfrac{1}{b}\sqrt[6]{a^2b^5}$

12. $xy\sqrt[12]{x^7y^2}$

13. $\dfrac{1}{2}\sqrt[6]{2x}$

14. $\dfrac{y}{x}\sqrt[6]{x^4y}$

15. $\dfrac{1}{a}\sqrt[12]{a^{11}}$

16. ab

17. 3

18. $\sqrt{7}$

19. $\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{4}$

20. $\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{x^2}$

21. $\sqrt[6]{3}$

22. $\dfrac{1}{4}\sqrt[6]{32}$

23. $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{a}$

24. $\dfrac{1}{x}\sqrt[6]{x^5y}$

25. $4\sqrt[3]{4}-4\sqrt[6]{108}-9$

26. $4-\sqrt[6]{40}-\sqrt[6]{25}$

27. $4x-9\sqrt{y}$

28. $\sqrt[3]{a^2}-2+\dfrac{1}{a}\sqrt[3]{a}$

29. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{3}-\frac{1}{2}\sqrt[12]{3^{11}}$

30. $-\sqrt[4]{a}+\sqrt[12]{a^{7}}$

31. $2\sqrt[5]{128}$

32. 3

33. a

34. $\sqrt[3]{a^{2}}$

35. 1

36. $-6\sqrt[3]{a}\sqrt[12]{b}$

37. $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt{c}$

38. $-\frac{3}{5}\sqrt[4]{a}\sqrt[12]{b}\sqrt[12]{c^{7}}$

39. $xy\sqrt[12]{x^{7}}\sqrt[12]{y}-\sqrt[4]{x^{3}}\sqrt[3]{y}$

40. $\sqrt[12]{x^{11}}-4x\sqrt[15]{x^{7}}$

习题 5g (P.159)

1. $\sqrt{40}$

2. $\sqrt[3]{x^{2}}$

3. $\sqrt[4]{ab^{3}}$

4. $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

5. $\sqrt{2a}-\sqrt{3b}$

6. $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$

7. $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

8. $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$

9. $\frac{\sqrt{30}}{20}$

10. $\frac{x\sqrt{xy}}{2y}$

11. $\frac{2\sqrt{n}}{3}$

12. $(a-b)\sqrt{a+b}$

13. $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

14. $\sqrt[4]{a}$

15. $-3-2\sqrt{2}$

16. $-(x+\sqrt{1+x^{2}})$

17. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

18. $\sqrt{x}+\sqrt{2y}$

19. $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{4}$

20. $2\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{28}+2\sqrt[3]{16}$

21. $\frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}+\sqrt{70}}{20}$

22. $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

23. $\sqrt{2}$

24. $-\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{29}$

25. $3+\sqrt{5}$

26. $\frac{a+\sqrt{a^{2}-b^{2}}}{b}$

27. $\frac{\sqrt[3]{12}}{3}$

28. $2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$

29. $\frac{\sqrt[3]{a^{2}}-\sqrt[3]{4b^{2}}}{a+2b}$

30. $\sqrt[4]{x}+2$

习题 5h (P.162)

1. $x=3$

2. $x=2$

3. $x=3$

4. $x=12$

5. 无解

6. $x=-3$，$x=-8$

7. $x=1$

8. $x=73$

9. $x=9$

10. $x=15$

11. $x=1$

12. $x=\frac{9}{16}$

13. $x=2$，$x=3$　　14. $x=7$　　15. $x=1$

16. $x=4$　　17. $x=2$，$x=-3$

18. $x=-9$，$x=1$　　19. $x=4$，$x=-1$

20. $x=0$，$x=-5$　　21. $x=\frac{1}{2}$，$x=1$

22. $x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$，$x=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$　　23. $x=\sqrt{3}$，$x=-\sqrt{3}$

24. $x=4$，$x=-1$　　25. $x=9$，$x=-\frac{1}{2}$

习题 5i (P.166)

1. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$　　2. $2+\sqrt{2}$　　3. $\sqrt{3}+\sqrt{6}$

4. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2}$　　5. $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{26}}{2}$　　6. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

7. $3+2\sqrt{7}$　　8. $2+4\sqrt{3}$　　9. $\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{20}$

10. $5+\sqrt{23}$　　11. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$　　12. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{26}}{2}$

13. $\sqrt{11}-\sqrt{2}$　　14. $\sqrt{13}-2$　　15. $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}$

16. $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}$　　17. $5\sqrt{3}-4$　　18. $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

19. $\sqrt{39}-4$　　20. $\sqrt{46}-2$　　21. $2\sqrt{5}$

22. $\sqrt{22}$　　23. 4　　24. $2-\sqrt{2}$

总复习题 5 (P.167)

1. (a) $2a-1$　　(b) 1

2. (a) 错在 $\sqrt[4]{(-3)^4}=-3$

   (b) 错在 $-2\sqrt{3}=\sqrt{(-2)^2\times 3}$

3. $9a^2\sqrt{2}$　　4. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$　　5. $xy\sqrt{xy}$

6. $a^2\sqrt[5]{ab}$　　7. $\frac{1}{3ab}\sqrt{6a}$　　8. $\frac{x}{2}\sqrt[3]{2x^2y}$

9. $\frac{y}{x^2}\sqrt[4]{x^3y}$　　10. $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$　　11. $\frac{x+1}{x-1}\sqrt[3]{x^4-2x^2+1}$

12. $\frac{17}{6}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{4}$

13. $6\sqrt[3]{a}+(5a-2b)\sqrt{x}$

14. $\sqrt{6}-\sqrt[6]{72}$

15. $a\sqrt[3]{a}+2a\sqrt{a}+a\sqrt[3]{a^2}$

16. $2\sqrt[3]{4}-\sqrt[6]{108}-3$

17. $\sqrt[6]{24}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$

18. $\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\sqrt[6]{a^5}$

19. $\sqrt[12]{a^7}$

20. $-\sqrt[12]{a^5b^8}$

21. $\frac{40+9\sqrt{15}}{7}$

22. $\frac{a}{b}+\frac{1}{b}\sqrt{a^2b^2}$

23. $\sqrt{15}-\frac{1}{2}\sqrt{5}-4\sqrt{3}-\frac{11}{2}$

24. $-(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})$

25. $\frac{\sqrt[3]{4x^2}-\sqrt[3]{9y^2}}{2x+3y}$

26. $\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1$

27. $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{30}}{12}$

28. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{4}$

29. $x_1 = 1,\ x_2 = 5$

30. $x_1 = 2,\ x_2 = 34$

31. $x_1 = 1,$

32. $x_1 = 7$

33. $x_1 = 4,\ x_2 = -5$

34. $x_1 = -1,\ x_2 = 3$

35. $x_1 = 16,\ x_2 = -25$

36. $x = -\frac{5}{2}$

37. $x = \frac{5}{4}$

38. $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

39. $2+\sqrt{2}$

40. $\sqrt{15}-\sqrt{3}$

41. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}$

42. $\frac{\sqrt{26}-\sqrt{2}}{2}$

43. $6\sqrt{2}$

第 6 章

习题 6a (P.172)

1. 3
2. (a) $37°30'$ (b) $240°$ (c) $210°$ (d) $220°$

3. (a) $76°12'$ (b) $143°49'$ (c) $51°0'$ (d) $63°36'$

4. (a) 0.56 (b) 3.21 (c) 1.63 (d) 0.72

5. (a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) $\frac{5\pi}{3}$ (c) $\frac{7\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{8}$

6. (a) $150°$，$\frac{5}{6}\pi$

7. (a) $270°$，$\frac{3}{2}\pi$ (b) $360°$，2π (c) $630°$，$\frac{7}{2}\pi$

习题 6b (P.173)

1. 5.59 公尺
2. 14.3 cm
3. 14.9 cm
4. 8.5 m
5. 约 90 公里
6. (a) $1800°$ (b) 6π 公尺 (c) 0.2分钟或 12 秒
7. 126 公尺
9. $\frac{\pi}{3}$ 米
10. 1.2 弧度，$68°45'$

习题 6c (P.177)

1. $240\pi\ cm^2$
2. $135°$，$(3\pi+8)$ cm
3. 2 弧度，$100\ cm^2$
4. $90°$
5. $\frac{8}{7}$ 弧度，112 平方公分
6. $96\pi\ cm^2$
7. $513.3\ cm^2$,101.3 cm
8. $114.16\ cm^2$，50.5 cm
9. $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$
10. 4.4 公分 0.7 公分
11. $r=1$ 或 6，$x=12$ 或 $\frac{1}{3}$
12. (a) 7.5 cm，15 cm，$114°36'$ (b) 2.39 cm，7.11 cm

总复习题 6 (P.179)

1. (a) $116°20'$ (b) $11°40'20''$
   (c) $180°$ (d) $58°57'$
2. $119°22'$
3. $\frac{\pi}{10}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{72}$，$\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{12}$，$\frac{11\pi}{100}$，$\frac{7\pi}{135}$

4. $210°$，$12°$，$112°30'$，$300°$，$286°28'$，$80°12'51''$

5. $11°15'$，$\frac{\pi}{16}$

6. $64°$，$5600\ \text{cm}^2$

7. 约 57.3 m

8. $3.53\ \text{cm}^2$

9. $\frac{4\pi}{3}\ \text{cm}^2$

10. $\frac{24}{49}\pi$ 弧度或 $88°10'$，24.8 cm

11. 1.2 弧度，60 平方公分

12. 12.5

13. 底半径为 4.7 cm，高 13.2 cm

14. $\frac{2}{7}r^2$

第 7 章

习题 7a (P.191)

1. (a) $95°$，第二象限　(b) $105°14'$，第二象限
   (c) $80°$，第一象限　(d) $236°50'$，第三象限
   (e) $345°$，第四象限　(f) $300°$，第四象限
   (g) $200°24'$，第三象限　(h) $23°15'$，第一象限

2. (a) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{3}{4}$，
   $\cot\alpha=\frac{4}{3}$，$\sec\alpha=-\frac{5}{4}$，$\operatorname{cosec}\alpha=-\frac{5}{3}$
   (b) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，
   $\cot\alpha=-\sqrt{3}$，$\sec\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，$\operatorname{cosec}\alpha=-2$

3. (a) θ 是第二象限的角　(b) θ 是第三象限的角
   (c) θ 是第一、第四象限的角　(d) θ 是第一、第三象限的角

4. (a) $-\operatorname{cosec}6°$　(b) $\cot 35°$
   (c) $-\sin 0.4\pi$　(d) $\tan\frac{\pi}{4}$
   (e) $-\sec 40°$　(f) $-\cos\frac{8}{17}\pi$

5. (a) $\frac{1}{2}$　(b) 0.9659
   (c) 1.1917　(d) $\sqrt{3}$
   (e) 1.4945　(f) -1.1547

(g) 0.5774　　　　(h) -0.5

(i) -0.1736　　　　(j) -4.3813

6. $\cos\alpha = -\dfrac{15}{17}$，$\tan\alpha = \dfrac{8}{15}$

7. $\dfrac{4}{3}$

8. $\operatorname{cosec} A = \pm\dfrac{17}{8}$，$\tan A = \pm\dfrac{8}{15}$

9. $\sin A = -\dfrac{7}{25}$，$\sec A = \dfrac{25}{24}$

10. $\dfrac{12}{5}$

习题 7b (P.194)

1.

θ	$\sin\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\cos\theta$	$\sec\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
150°	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
330°	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

2. (a) $1\frac{1}{2}$　　(b) $4\frac{1}{3}$　　(c) $\dfrac{6\sqrt{3}-1}{12}$

(d) $2\frac{1}{2}$　　(e) 1　　(f) 1

4.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
0	0	1	0	不存在	1	不存在
$\frac{\pi}{2}$	1	0	不存在	0	不存在	1
π	0	-1	0	不存在	-1	不存在
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	不存在	0	不存在	-1

5. (a) 2 (b) 0 (c) 0
   (d) 0 (e) -3 (f) $1-\sqrt{3}$
6. 1

习题 7c (P.200)

1.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$

2. (a) $-\cot\alpha$ (b) $-\tan\alpha$ (c) $-\tan\alpha$
   (d) $-\cos\alpha$ (e) $-\cos\alpha$ (f) $\sec\alpha$
3. (a) $\operatorname{cosec}\theta$ (b) $-\cos\theta$ (c) $-\cot\theta$
   (d) $\cos\theta$ (e) $-\sin\theta$ (f) $-\tan\theta$
4. (a) 0 (b) 1
5. $-2a^2$
7. 0

习题 7d (P.202)

1. (a) 270° (b) 90°，270°
   (c) 67°23′或 112°37′ (d) 114°6′或 294°6′
   (e) 75°36′或 284°24′ (f) 49°19′或 229°19′
2. (a) $\frac{11\pi}{6}$ (b) $\frac{7\pi}{6}$ (c) $\frac{5\pi}{4}$
   (d) 239°和 301° (e) 245°48′和 114°12′ (f) 104°2′，284°2′

3. (a) $30°$ 或 $150°$　(b) $135°$　(c) $45°$
   (d) $150°$
4. (a) $\frac{5}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$　(b) $0.102\pi, 1.102\pi$　(c) $\frac{1}{6}\pi$ 或 $\frac{11}{6}\pi$
   (d) $\frac{1}{4}\pi$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$
5. (a) $60°$　(b) $45°$

习题 7e (P.207)

3. (a) $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$；k 是整数；
   (b) $(2k\pi-\pi,\ 2k\pi)$；k 是整数；
   (c) $(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2})$；$k$ 是整数；
   (d) $(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2})$；$k$ 是整数；

总复习题 7 (P.208)

1. (a) 无　(b) $\frac{4}{3}\pi$　(c) $\frac{2}{5}\pi$
   (d) $360°$　(e) $240°$　(f) $180°$
2. (a) $\sin 4<0$　(b) $\cos 5>0$　(c) $\tan 8<0$
   (d) $\cot(-3)>0$
3. $\sin\theta = \frac{-5}{13}$　$\sec\theta = \frac{13}{12}$　$\tan\theta = \frac{-5}{12}$
4. $y = \pm\frac{9}{2}$　$\tan\theta = \pm\frac{3}{4}$
5. (a) 1　(b) 0　(c) 0
   (d) 1.07　(e) 0　(f) $-\frac{23}{4}$
   (g) 0　(h) p^2+q^2-2pq
6. (a) 0.3148　(b) -0.5　(c) 0.6009
   (d) 5.5301　(e) 0.5　(f) 1
   (g) -1.1918　(h) 1.0642
7. $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，　$\tan\theta = \pm\sqrt{15}$

8. $\cos\theta = -\dfrac{15}{17}$，　　$\operatorname{cosec}\theta = -\dfrac{17}{8}$

9. $\tan\theta = \dfrac{12}{5}$　　10. $\dfrac{1}{2}$

11. (a) $0°$，$180°$，$360°$　　(b) $127°46'$，$232°14'$
 (c) $90°$，$270°$　　(d) $104°2'$，$284°2'$
 (e) $240°$，$300°$　　(f) $45°$，$225°$
 (g) $75°36'$，$284°24'$　　(h) $82°52'$，$262°52'$

12. (a) $30°$或$150°$　　(b) $135°$
 (c) $45°$　　(d) $150°$

13. (a) $839°$　　(b) $126.87°$

14. (a) $\tan\alpha$　　(b) $2\sin\alpha\cos\alpha$　　(c) 1

15. (a) 不能，$\cos x$ 的绝对值不能大于 1
 (b) 不能，$\sin x$ 的最大值是 1，$\cos x$ 的最小值是 -1，
 $\sin x - \cos x$ 的最大值是 $1-(-1)=2$
 (c) 能，$\tan x$ 和 $\cot x$ 都等于 1
 (d) 能，$\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}}$ 的绝对值小于 1

第 8 章

习题 8a (P.215)

1. (a) $b = 2.6897$　　(b) $a = c = 4\sqrt{3}$

2. (a) $B = 35°16'$，$C = 84°44'$，$c = 17.25$
 (b) $\sin A = \dfrac{25}{22} > 1$，故无解
 (c) $A = 97°18'$，$B = 57°42'$，$a = 46.94$
 或 $A = 32°42'$，$B = 122°18'$，$a = 25.57$
 (d) $\sin B = 1.36 > 0$，故无解
 (e) $A = 14°29'$，$B = 62°7'$，$C = 103°24'$，$c = 11.01$
 或 $A = 14°29'$，$B = 117°53'$，$C = 47°38'$，$c = 8.36$
 (f) $B = 45°$，$C = 105°7'$，$c = 3.86\text{ cm}$
 或 $B = 135°$，$C = 15°$，$c = 1.06\text{ cm}$

(g) A = 70°12′，B = 57°24′，b = 28.79 cm

或 A = 109°48′，B = 17°48′，b = 10.45 cm

(h) a = 7.53 cm，b = 5.16 cm，c = 83°39′

3. 两边为 50.63 cm 与 60.44 cm，面积为 3054 cm^2
4. a = 7.39 cm，b = 13.89 cm，c = 18.72 cm
5. 81.46 cm

习题 8b (P.220)

1. (a) B = 90°

   (b) a = 7 cm，B = 98°13′
2. (a) A = 21°47′，B = 8°13′，C = 150°

   (b) A = 59°29′，B = 90°，C = 30°31′

   (c) b = 68.85，A = 36°23′，C = 58°37′

   (d) a = 62.31，B = 35°54′，C = 38°6′

   (e) A = 45°，B = 30°，C = 105°

   (f) c = 77.15 cm，A = 44°42′，C = 57°36′
3. 最大的角是 104°29′
4. 30°
5. 101.73 cm
6. 2.07 x，41°37′
7. 82°49′
8. AQ = 39.32 cm，BQ = 28.00 cm

习题 8c (P.224)

1. 0.366 km
2. ∠ACB = 21°，AC = 10.92 km
3. C 对 D 的方位是 336°，BD = 14.31 km
4. 河宽 161.6 m，崖高 43.3 m
5. 110.66 公尺
6. 200.6 m
7. 44.6 cm
8. 14.42 海里
9. 9.46 米
10. 239.5 米

习题 8d (P.232)

1. $10\sqrt{3}$　　2. 12.1　　3. 41.7

4. $24\sqrt{29}$　　5. 23.4　　6. 11

7. $72°$ 或 $108°$　　8. $120°$　　9. 33.6 cm

10. $a = 20\sqrt{2}$ cm　　$b = 20\sqrt{3}$ cm　　$c = 10(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm

11. $30°$, $(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm　或　$150°$, $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ cm

总复习题 8 (P.233)

1. (a) $A = 42°38'$, $B = 114°22'$, $b = 34.96$
   或 $A = 137°22'$, $B = 19°38'$, $b = 12.90$
   (b) 无解
   (c) 无解
   (d) $b = \sqrt{6}+\sqrt{2}$, $B = 75°$, $C = 60°$
   或 $b = \sqrt{6}-\sqrt{2}$, $B = 15°$, $C = 120°$
   (e) $A = 20°56'$, $B = 26°30'$, $C = 132°34'$
   (f) $A = 63°$, $b = 28.22$ cm, $c = 30.41$ cm
2. 最小角 C 为 $30°31'$，外接圆的半径为 32.5
3. 81.46 cm
4. $A = 21°47'$, $B = 38°13'$, $C = 120°$
5. $A = 135°$, $B = 45°$, $C = 135°$, $D = 45°$
6. 4.11 cm 或 13.53 cm
7. $\sqrt{2}$
9. 305.2 米
10. (b) 29.4 海里
11. $A = 101°$, $BC = 10.8$
12. $S_{\Delta} = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ cm^2　　$b = \sqrt{19}$ cm
13. $355.1°$
14. 831.9 m
15. (a) $55°$　　(b) 5.42 里　　(c) 1227 时

第 9 章

习题 9a (P.240)

1. $\sin\theta$
2. 1
3. 1
4. $\cos^2 A$
5. $\sec^2\alpha$
6. $\cos A\sin A$

习题 9b (P.245)

1. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
2. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
3. $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
4. (a) $\dfrac{1}{2}$　(b) $\dfrac{1}{2}$　(c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   (d) $-\dfrac{1}{2}$
5. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\dfrac{15\sqrt{3}-8}{34}$
7. $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{\sqrt{35}-6}{12}$, $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$
8. $\dfrac{-5\sqrt{3}\pm 12}{26}$
9. $-\dfrac{85}{84}$
10. $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{56}{65}$, $\cos(\alpha-\beta) = -\dfrac{63}{65}$

习题 9c (P.249)

1. $2+\sqrt{3}$、$-2+\sqrt{3}$
2. 1
3. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
4. $\dfrac{1}{3}$
6. $-\dfrac{13}{85}$, $-\dfrac{77}{36}$

习题 9d (P.252)

1. $\sin 2\theta = 0.96$, $\cos 2\theta = -0.28$
2. $\tan 2\alpha = 1\dfrac{1}{3}$, $\cot 2\alpha = \dfrac{3}{4}$
3. $\dfrac{117}{125}$

4. (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$

(d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) 1 (f) $-\sqrt{3}$

习题 9e (P.261)

1. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$, $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

2. $-\frac{1}{3}$ 3. $\frac{m(3n^2-m^2)}{m^2+n^2}$

5. (a) t^2 (b) $\frac{1}{t}$ (c) $\frac{1-t^2}{2t^2}$

(d) $\frac{1}{5t^2-6t-3}$

习题 9f (P.264)

1. (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{3}{16}$ (e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. (a) $\sin 4\theta + \sin 2\theta$ (b) $\sin 9\theta - \sin 3\theta$

(c) $-\cos 12\theta + \cos 6\theta$ (d) $-\frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 2\alpha)$

(e) $\frac{1}{2}(\sin 120^\circ - \sin 2\alpha)$

习题 9g (P.269)

1. (a) 0 (b) $-\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$

2. (a) $2\sin 6\theta\cos 2\theta$ (b) $-2\sin 3\alpha\sin 2\alpha$

(c) $2\cos\frac{11A}{2}\cos\frac{7A}{2}$ (d) $2\cos 6\theta\sin\theta$

(e) $2\cos\frac{45^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{45^\circ-\alpha}{2}$

16. 证明: $$\frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B} = \frac{1-\cos(A-B)\cos(A+B)}{1-\cos(A-C)\cos(A+C)}$$

$$= \frac{2-\cos 2A-\cos 2B}{2-\cos 2A-\cos 2C}$$

$$= \frac{2-(1-2\sin^2 A)-(1-2\sin^2 B)}{2-(1-2\sin^2 A)-(1-2\sin^2 C)}$$

$$= \frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 C}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2}{\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$$

总复习题 9 (P.270)

1. $\cos x = \mp\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\tan x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

2. 3

3. $\pm\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}$

4. $\frac{63}{65}$, $\frac{16}{65}$

5. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

7. $-\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$, $-\frac{120}{119}$, $-\frac{119}{120}$

8. $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{1}{2}$

9. $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{4}{3}$

10. (a) 1　(b) 1　(c) $\cot^2\theta$

(d) 4　(e) $\operatorname{cosec}^2\frac{\alpha}{2}$

11. (a) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(b) $\frac{1}{2}$　(c) $\frac{3}{4}$

(d) 0　(e) $\frac{3}{16}$

12. $a = 1-\sqrt{2}$

14. $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

31. 证明：(a) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\sin A + \sin B}{\sin C}$

$$= \frac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

但 $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$

$\therefore\quad \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$

(b) $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin A - \sin B}{\sin C}$

$$= \frac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

$$= \frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$$

第 10 章

习题 10a (P.275)

1. $x = 45°, 135°$
2. $x = 45°, 225°$
3. $x = 30°$
4. $x = 30°$
5. $x = 67.5°, 157.5°$
6. $x = 45°, 135°$
7. $x = 60°$
8. $x = 70°$
9. $x = 105°$
10. $x = 22.5°, 112.5°$
11. $x = 90°$
12. $x = 0°, 180°, 210°, 330°, 360°$
13. $x = 120°, 240°$

习题 10b (P.281)

1. $x = n\pi + (-1)^n\dfrac{\pi}{3}$
2. $x = n.180° + (-1)^n 45° - 45°$

3. $x = \frac{2}{3}n\pi \pm \frac{2}{9}\pi$

4. $x = n.720^\circ - 300^\circ$

5. $x = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

6. $x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{8}$

7. $\{x \mid x = n\pi - \frac{\pi}{6}\}$

8. $\{x \mid x = n\pi + \frac{\pi}{6}\}$

9. $\{x \mid x = n\pi - \frac{5\pi}{12}\}$

10. $\{x \mid x = n\pi + \frac{\pi}{6}\} \cup \{x \mid x = n\pi - \frac{\pi}{2}\}$

习题 10c (P.283)

1. $x = 30^\circ$，150°

2. $x = 60^\circ$，180°，300°

3. $x = 45^\circ$，135°，225°，315°

4. $x = 135^\circ$，315°

5. 60°，300°

6. 90°

7. $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，$x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

8. $x = n\pi$；$x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$；$x = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{6}$。

   检验后知道，$x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ 和 $x = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{6}$ 都是增根，因此原方程的解是 $x = n\pi$。

9. $x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{8}$

10. $x = 2\pi(2n+1)$，$x = 4n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

11. $x = 2n\pi + \pi$，$x = 4n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

12. $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$，$x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

13. $x = 2n\pi$，$x = 4n\pi + \pi$

14. $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

15. $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

16. $x = n\pi$

习题 10d (P.286)

1. $-10.1°$，$-169.9°$

2. $x=0°$，$120°$，$180°$

3. 0，$\frac{1}{9}\pi$，$\frac{2}{5}\pi$，$\frac{1}{3}\pi$，$\frac{5}{9}\pi$，$\frac{7}{9}\pi$，$\frac{4}{5}\pi$，π

4. $-150°$，$-110°$，$10°$，$130°$

5. $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$；$x=2n\pi$

6. $x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$；$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$；$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

7. $x=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$；$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$

8. $x=2n\pi$；$x=(4n-1)\frac{\pi}{6}$

9. $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$；$x=\frac{2n\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{9}$

10. $x=\frac{n\pi}{5}+\frac{\pi}{10}-1$；$x=\frac{n\pi}{2}-1$

11. 解得 $x=\frac{n\pi}{3}$；$x=n\pi$；$x=\frac{n\pi}{2}$

 因为 $n\pi$ 包含在$\frac{n\pi}{2}$内，所以原方程式的解是 $x=\frac{n\pi}{3}$；$x=\frac{n\pi}{2}$。

12. 解得 $x=n\pi$；$x=\frac{n\pi}{2}$，$x=\frac{1}{6}(2n\pi+\pi)$

 因 $n\pi$ 包含在$\frac{n\pi}{2}$内，∴解是 $x=\frac{n\pi}{2}$，$x=\frac{1}{6}(2n\pi+\pi)$

13. $x=n\pi$，$2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$，$2n\pi\pm\frac{3}{4}\pi$

14. $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

15. $x=n\pi$，$2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$

16. $x=\frac{2}{9}n\pi+\frac{\pi}{9}$，$2n\pi$

17. $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{n\pi}{4}$

习题 10e (P.287)

1. $x=n.180°+63°26'$；$x=n.180°+56°19'$

2. $x=n.180°-45°$；$x=n.180°+71°34'$

3. $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

4. $x=n.180°-45°$；$x=n.180°+59°2'$

5. $x=n.180°+56°19'$；$x=n.180°-33°41'$

6. $x = n.180° + 14° 2'$; $x = n.180° + 71° 34'$
7. $x = n.180° + 45°$; $x = n.180° + 26° 35'$
8. $x = n.180° + 90°$; $x = n.180° + 26° 34'$

习题 10f (P.291)

1. $x = 2n\pi$; $x = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{2}$
2. $x = 2n\pi - \frac{\pi}{4}$
3. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
4. $x = 2n\pi + \frac{5\pi}{12}$; $x = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{12}$
5. $x = 0°, 120°, 360°$
6. $x = 30°, 270°$
7. $x = 0°, 135°, 270°, 315°, 360°$
8. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$
9. $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，$x = 2n\pi + \frac{7}{6}\pi$
10. $x = (4n+1)\pi$，$x = (2n+1)2\pi$

习题 10g (P.297)

1. 波幅为 6，周期为 2π。把 $y = \sin x$ 的图象上每点纵坐标乘以 6，即得 $y = 6\sin x$ 的图象。图象略。
2. 波幅为 1，周期为 $\frac{2\pi}{3}$。把 $y = \sin x$ 的图象沿 x 轴向原点压缩 $\frac{1}{3}$ 倍，即得 $y = \sin 3x$ 的图象。
3. 波幅为 $\frac{1}{2}$，周期为 2π。把 $y = \sin x$ 的图象上每点纵坐标乘以 $\frac{1}{2}$，即得 $y = \frac{1}{2}\sin x$ 的图象。
4. 波幅为 1，周期为 4π。把 $y = \sin x$ 的图象沿水平方向伸展 2 倍，即得 $y = \sin\frac{x}{2}$ 的图象。

5. 波幅为 1，周期为 2π。把 $y=\sin x$ 的图象向左移动 $\frac{\pi}{3}$，即得 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象。
6. 波幅为 1，周期为 2π。把 $y=\sin x$ 的图象向右移动 $\frac{\pi}{3}$，即得 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象。
7. 波幅为 4，周期为 $\frac{2\pi}{3}$。把 $y=\sin x$ 的图象的纵坐标都乘以 4，再沿 x 轴向原点压缩 $\frac{1}{3}$ 倍，然后向左移动 $\frac{\pi}{6}$，即得 $y=4\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象。
8. 波幅为 2，周期为 π。把 $y=\sin x$ 的图象的纵坐标都乘以 2，再沿 x 轴向原点压缩 $\frac{1}{2}$ 倍，然后向左移动 $\frac{\pi}{12}$，即得 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象。

习题 10h (P.301)

1. 1
2. $-\frac{\pi}{2}$
3. 0
4. x 的近似值为 0 与 2.74
5. 由图象可得，x 为 $\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$
6. 由图象可得，符合 $0^\circ \leqslant x \leqslant 90^\circ$ 的 x 为 30° 或 90°
7. 0，π
8. 0°，60°，72°，144°，180°
9. (a) 一个　　(b) 二个

总复习题 10 (P.301)

1. (a) $x = 60^\circ, 120^\circ$
   (b) $x = 30^\circ, 150^\circ$
   (c) $x = 105^\circ$
   (d) $x = 59^\circ 2', 239^\circ 2', 120^\circ 58', 300^\circ 58'$
   (e) 120°
2. (a) 57.95°，147.95°，237.95°，312.95°
   (b) 无解
   (c) 15°，45°，105°，135°，195°，225°，285°，315°
   (d) 70.53°，120°，240°，289.47°
   (e) 0°，120°，360°

3. (a) $-41.41°$，$41.41°$，$180°$，$-180°$

   (b) $75°$，$105°$，$-75°$，$-105°$

   (c) $-153.43°$，$-71.56°$，$26.57°$，$108.43°$

   (d) $-9.6°$，$-170.41°$，$90°$

   (e) $-30°$，$150°$

4. (a) $\frac{2}{3}\pi$ (b) 0, $\frac{\pi}{2}$, π (c) 0, $\frac{1}{3}\pi$, π

   (d) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, π (e) $\frac{\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}$, $\frac{9\pi}{10}$

5. (a) $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

   (b) $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$; $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

   (c) $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$

   (d) $x = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$

   (e) $x = 2n\pi$; $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

   (f) $x = n.180° + 68°12'$; $x = n.180° + 45°$

6. (a) $n.360° + 36.87°$; $n.360° - 53.13'$

   (b) $\frac{n\pi}{9}$, $\frac{n\pi}{6}$

   (c) $\frac{2n\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$; $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

   (d) $n.180° + 23.2°$; $n.180° - 45°$

   (e) $n\pi + \frac{1}{4}\pi$; $x = 2n.180° \pm 114.3°$

   (f) $n\pi - \frac{1}{4}\pi$, $n\pi$

7. $\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{18}$, $\frac{17\pi}{18}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{25\pi}{18}$, $\frac{13\pi}{8}$, $\frac{29\pi}{18}$

9. (a) $35.75°$ (b) -0.216π (c) $74°26'$ (d) 0

10. (a) 4 个 (b) 3 个

11. $x = -3.20$，0.46 或 2.75