马来西亚华文独中教科书

高级数学

高二
上册

董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

马来西亚华文独中教科书

高级数学

高二
上册

董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

《高级数学》高二上册

行政编辑：黄宝玉
美术编辑：曹薇华
排　　版：梁翠芳

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School（MICSS）Working Committee

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
United Mission Press Sdn. Bhd.

版次：
2024 年 11 月第 1 版

印次：
2024 年 11 月第 1 次印刷

编审团队

学科顾问 ：刘建华　郑章华
编审委员 ：纪露结　陈玉丽　陈美溢　陈盈颖　苏民胜　李鸿聪
张锦发　林艾嘉　林汶良　姚和兴　萧子良　黄书丰
编写人员 ：苏民胜　李鸿聪　林汶良　萧子良　黄书丰
责任编辑 ：林方馨
（按姓氏笔画排列）

鸣　谢

本书承蒙国内外学者、独中数学科教师等提供建设性意见，并协助编写及审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

2024 年 8 月

编辑说明

1. 这套《高级数学》是根据董教总全国华文独中工委会统一课程委员会所拟定的“高级数学课程标准”编写而成。在拟定课程标准的过程中，除采用部分旧版《高级数学》的课程内容，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KSSM）、SPM、STPM及各国的课程标准和教材。

2. 这套《高级数学》是为全国华文独中的高中理科班学生编写的。全套教材共分六册，分三年使用。高一及高二的每册内容依据每周7节、每节 40 分钟的教学时间编写；而高三每册内容依据每周 5 节、每节 40 分钟的教学时间编写。各校可按个别情况安排授课时数。

3. 这套教材共有35章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学与微积分等。

4. 本书是高二上册，提供高中二年级上半年使用。

5. 本书设有“学习目标”、“想一想”、“数学橱窗”、“补充资料”、“注意”及“探索活动”栏目。设置以上栏目，是为了方便学生掌握学习重点、启发学生思考，并增进学习效果。

6. 本书每节都设有随堂练习及习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。

7. 本书附有中英名词对照，供学习参考。习题的答案也都附在书末。

8. 本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会
《高级数学》编审小组
2024 年 8 月

目录

17 平面向量

18 立体几何

行列式是一个非常有用的数学工具，不仅在理论上有深远的意义，还在数学的很多领域也有广泛的用途。在本章，我们将学习行列式的定义、计算及基本性质。行列式能够协助我们判断线性方程组是否有解。往后的章节，如矩阵、空间向量等，我们将陆续看到其用途。

14

行列式

学习目标

- 理解行列式的意义
- 能展开二阶及三阶行列式
- 能计算行列式的值
- 能掌握行列式的性质
- 能运用克兰姆法则解线性方程组

14.1 行列式

二阶行列式

把四个数 a，b，c，d 排成两行两列，并在两旁各加上一条竖线如下：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 就叫做行列式 (determinant)。

行列式每一横排的数叫做行 (row)，每一纵排的数叫做列(column)，行列式的行数一定等于列数，这个数就叫做行列式的阶(order)。所以上面的行列式是一个二阶行列式 (second order determinant) 。

将行列式展开得 $ad-bc$，这个展开式就是这个行列式的值。利用对角线法则可展开二阶行列式，即将主对角线（实线）上两数的积，减去副对角线（虚线）上两数的积，如下所示：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

例题 1

求下列二阶行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$

解 (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4-2\times3$

$= -2$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\times0-4\times(-2)$

$= 8$

注意

不要把行列式的符号与绝对值的符号混淆。

随堂练习 14.1a

求下列二阶行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$　　　　(b) $\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

三阶行列式

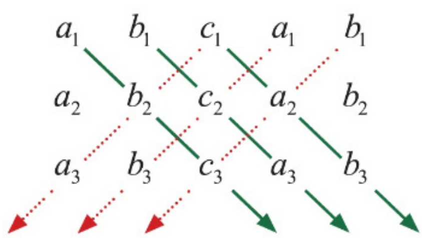
仿照二阶行列式的表示法，把九个数排成三行三列，并在两旁各加上一条竖线如下：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

这个三阶行列式 (third order determinant) 的展开式是

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

三阶行列式可利用萨拉斯法 (Sarrus' Rule) 展开：依序将行列式的第一与第二列重抄于数组的右边，成为第四与第五列，如图 14–1 所示。将这 15 个数中位于斜线上的每三个数相乘。各实线上的三个数的积相加后，再逐一减去各虚线上的三个数的积，便可求得三阶行列式的值。



$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3$$
$$- c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

图14–1

注意

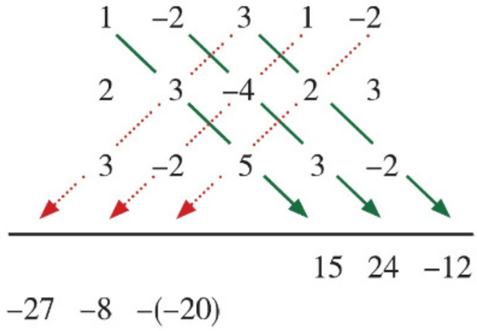
萨拉斯法只适用于三阶行列式。

例题 2

求三阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$的值。

解 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 15+24-12-27-8+20$

$= 12$



随堂练习 14.1b

求三阶行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$的值。

按行（或列）展开三阶行列式

将行列式中某元素所在的行及列删去，余下的元素所组成的行列式就叫做该元素的余子式(minor)。以行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$为例，$a_1$的余子式是$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$c_2$的余子式是$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$。将第 i 行，第 j 列的元素的余子式乘以$(-1)^{i+j}$所得的式子就叫做该元素的代数余子式(cofactor)。在上述例子中，a_1的代数余子式是$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$c_2$的代数余子式是$(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$。

设 A_1、B_1、C_1 分别是 a_1、b_1、c_1 的代数余子式，则

$$A_1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$B_1=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$C_1=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

补充资料

各元素的代数余子式的正负号可取决于该元素所在的位置，如图所示：$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

可得 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1$，即行列式的值是第一行的元素与其代数余子式的乘积的和。

定理 1

行列式的值等于其任意一行（或列）的元素与其代数余子式的乘积之和。

由定理 1 可知，行列式可按任意一行（或列）展开，即

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 \\ &= a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 \\ &= a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \\ &= a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 \\ &= b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 \\ &= c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3\end{aligned}$$

补充资料

任意阶的行列式也可定义成其任意一行(或列)的元素与其代数余子式的乘积之和。

例题 3

求行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$的值。

解法一 按第一行展开，得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= 2\times\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\times\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2\times(-4) - 1\times 2 - 3\times 10 \\ &= -40\end{aligned}$$

解法二 考虑第二行有一个 0，按第二行展开，得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= -1\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\times\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -1\times 14 - 2\times 13 - 0 \\ &= -40\end{aligned}$$

随堂练习 14.1c

1. 求行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$第一行的元素与第二行对应元素的代数余子式的乘积之和。
2. 利用行列式的展开式做适当的分组抽取公因式来验证定理 1。

习题 14.1

1. 求下列二阶行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} \log 4 & -2 \\ \log 5 & 1 \end{vmatrix}$　　(d) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}$

2. 展开下列二阶行列式，并化简：

(a) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ b & -a+b \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & \sqrt{10} \\ 3\sqrt{2} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$

3. 求下列三阶行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$　　(c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$　　(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$　　(f) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 32 & -21 & 10 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

14.2 行列式的性质

利用行列式的性质，可以简化其值的计算。在此以三阶行列式为例。

性质 1

将行列式的行与列依次对调，其值不变。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明：将这两个行列式展开，即可得证。

性质2

将行列式的任意两行（或列）对调，其值变号。

例：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ （第一、二行对调）

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$ （第一、三列对调）

证明：将等号左右两边的行列式展开，即可得证。

随堂练习 14.2a

验证下列各式：

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

性质3

若行列式中任意两行（或列）的对应元素相同，则其值为零。

证明：将行列式中对应元素相同的两行(或列)对调，行列式保持不变。根据性质 2，行（或列）对调后，其值变号。设行列式的值为 x，得

$$x = -x,$$

因此 $x = 0$。

性质4

将行列式的任意一行（或列）的所有元素都乘以同一常数，所得的行列式等于原行列式与该常数的乘积。

例：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明：将等号左右两边的行列式展开，即可得证。

想一想 1

行列式$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$的值是不是行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$的值的两倍？

随堂练习 14.2b

证明$\begin{vmatrix} 10 & -14 & 2 \\ -15 & 21 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 210\times\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$。

想一想 2

若行列式的其中一行（或列）的元素都是零，则此行列式的值为何？

想一想 3

若行列式某两行（或列）的对应元素成比例，则此行列式的值为何？

性质5

若行列式的任意一行（或列）的所有元素都是两部分之和，则此行列式等于将这些元素各取一部分作为相应的行（或列），而其余的行（或列）不变的两个行列式之和。

例：$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明：按第一列展开行列式，然后利用分配律分成适当的两个部分，重新分配后即可得证。

性质6

将行列式的任意一行（或列）的所有元素都乘以同一常数，加到另一行（或列）对应的元素上，行列式的值不变。

例：$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明：$$\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ （第一行与第二行相同）

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

随堂练习 14.2c

利用行列式的性质，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$。

例题 4

证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$。

证 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)((b+c)-(a+b))$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)$$

例题 5

因式分解 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$。

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ bc-ca & ca-ab & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b & b+c & c \\ -c & -a & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b & c-a & c \\ -c & c-a & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b & 1 & c \\ -c & 1 & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

例题 6

解方程式 $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-2 \\ x-3 & x-6 & x \\ x-3 & x-1 & x-5 \end{vmatrix}=0$ 。

解

$$\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-2 \\ x-3 & x-6 & x \\ x-3 & x-1 & x-5 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ x-3 & x-6 & x \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}=0$$

（第二行乘 -1 加去第一行，第二行乘 -1 加去第三行。）

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ x-3 & 2x-6 & x \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0$$

（第三列加去第二列。）

$$-10(2x-6)+25(x-3)=0$$

$$x=3$$

随堂练习 14.2d

解方程式 $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ x-2 & 3 & 2 \\ x-3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 。

习题 14.2

1. 计算下列两个行列式的值，并求出它们之间的关系式。

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ k & k & -2k \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 利用行列式的性质化简下列各式：

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & b^2+ca \\ ab & a^2 & a^2+bc \\ ca & ab & c^2+ab \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1+x & y & y \\ x & 1+y & x \\ 1 & 1 & x+y \end{vmatrix}$

3. 证明下列各式：

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(b) $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

4. 因式分解下列各式：

(a) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$

5. 解下列方程式：

(a) $\begin{vmatrix} 2x-7 & 6 & 9 \\ 3x-5 & 5 & 4 \\ x-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 7-x & 14 & 13 \\ 11-3x & 17 & 16 \end{vmatrix} = 0$

(c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & 2-x & 1 \\ x & 0 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ (d) $\begin{vmatrix} x-3 & 4 & 3x-1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 2 & x-2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

14.3 克兰姆法则

当 $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$ 时，二元一次方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解为

$\begin{cases}x=\dfrac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}\\y=\dfrac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}\end{cases}$。这个解可以写成 $x=\dfrac{\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$，$a_1b_2-b_1a_2\neq 0$。

设 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}$，则 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$。

这个解线性方程组的方法就叫做克兰姆法则 (Cramer's rule)。在使用这一法则时，线性方程组的系数行列式 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$ 必须不等于零。

想一想 4 若 $a_1b_2-b_1a_2=0$，方程式的解为何？

例题 7

利用克兰姆法则解方程组 $\begin{cases}2x+5y=22\\3x-7y=4\end{cases}$。

解 $\Delta=\begin{vmatrix}2&5\\3&-7\end{vmatrix}=-29$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}22&5\\4&-7\end{vmatrix}=-174$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&22\\3&4\end{vmatrix}=-58$

$$\therefore\ x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-174}{-29}=6\ ,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-58}{-29}=2$$

例题 8

利用克兰姆法则解方程组$\begin{cases}4x-3y-13=0\\7x+4y+5=0\end{cases}$。

解 $\begin{cases}4x-3y=13\\7x+4y=-5\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & -3\\7 & 4\end{vmatrix}=37,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}13 & -3\\-5 & 4\end{vmatrix}=37,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}4 & 13\\7 & -5\end{vmatrix}=-111$$

$$\therefore\quad x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{37}{37}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-111}{37}=-3$$

随堂练习 14.3a

利用克兰姆法则解方程组$\begin{cases}3x-y=11\\2x+5y=-4\end{cases}$。

在三元一次方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$中，

设系数行列式$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$，用常数项$d_1$，$d_2$，$d_3$顺次代替$\Delta$中未知数$x$，$y$，$z$的系数，所得的三个行列式分别为

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\d_2 & b_2 & c_2\\d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\a_2 & d_2 & c_2\\a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\a_2 & b_2 & d_2\\a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}。$$

利用行列式的性质，可得

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=x\Delta$$

$\therefore\ x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，同理可得 $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$。

例题 9

利用克兰姆法则解方程组 $\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 3x-2y-z=7 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases}$。

解 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$=-6+12-12-16-27-2$

$=-51$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$=-24+28-15-20-63-8$

$=-102$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

$=21-16-30+56-36+5$

$=0$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$=-10+84-24+32-45+14$

$=51$

$\therefore\ x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-102}{-51}=2$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{0}{-51}=0$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{51}{-51}=-1$

随堂练习 14.3b

利用克兰姆法则解下列各方程组：

(a) $\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 3x+4y+5z=2 \\ 4x+5y+2z=3 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 2x+3y-z=0 \\ 3x-2y+z=-1 \end{cases}$

习题 14.3

利用克兰姆法则解下列各方程组：

1. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x-5y=21 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x+7y-5=0 \\ 2x-5y+6=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{7x}{6}+\dfrac{5y}{3}=34 \\ \dfrac{7x}{8}+\dfrac{y}{8}=12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{7}{x}+\dfrac{5}{y}=9 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{y}=13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x-y=14 \\ 2y+z=5 \\ 5z-x=10 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+3y-5z=-4 \\ 4x-y+3z=2 \\ 3x+2y+4z=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-2y-3z=4 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=3 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=13 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z}=-9 \end{cases}$

总复习题 14

求下列各行列式的值（1 至 6）：

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 123 & 654 & 543 \\ 234 & 543 & 432 \\ 345 & 432 & 321 \end{vmatrix}$

证明下列各式（7 至 8）：

7. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & b+c \\ 1 & b^2 & c+a \\ 1 & c^2 & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

8. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & bc & c^2 \\ c^2 & ca & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$

因式分解下列各式（9 至 10）：

9. $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ab & bc & ca \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}$

解下列方程式（11 至 14）：

11. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

12. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

13. $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & x+3 \\ x+2 & 3 & x-1 \\ x-3 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

14. $\begin{vmatrix} x & 2 & x-1 \\ 2 & x-1 & x \\ x-1 & x & 2 \end{vmatrix} = 0$

利用克兰姆法则解下列各方程组（15 至 20）：

15. $\begin{cases} 2x-7y-8=0 \\ 4x-9y-18=0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+2y=3 \\ \dfrac{2}{x}-3y=15 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x-y-3z=-7 \\ 3x+z=9 \\ 4y-z=5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x-3y+2=0 \\ 2y+5z-19=0 \\ 7z-5x-16=0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x+4y-3z=-7 \\ 2x+3y+5z=-3 \\ 3x-y+7z=-5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{3}{x+2}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}=3 \\ \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=-9 \\ \dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=8 \end{cases}$

一家披萨店，只卖一种披萨，每天卖出1000盒，且规定每位顾客限购三盒，而购买一盒、两盒或三盒的价格分别是RM8、RM15、RM21。某一天，在卖完披萨后，老板对老板娘说："赚钱真辛苦，一盒披萨的成本就要RM5，每天到底赚了多少？"老板娘看了记录，说："我给每位顾客都开了一张收据，

周一开了392张收据，收了 RM 7,139；

周二开了700张收据，收了 RM 7,580；

周三开了380张收据，收了 RM 7,080；

周四开了500张收据，收了 RM 7,350；

周五开了390张收据，收了 RM 7,145。

周六周日我们休息，没有开单，你自己算吧。"

请问每天有多少位顾客购买了一盒、两盒及三盒的披萨？他们又净赚了多少？

15

矩阵

学习目标

- 理解矩阵的概念
- 掌握矩阵运算（矩阵的加减法、矩阵的纯量积、矩阵的乘法）
- 理解逆矩阵的意义，并掌握二阶及三阶方阵逆矩阵的求法
- 应用逆矩阵或高斯消元法解二元或三元一次方程组

15.1 矩阵

生活上，我们经常以列表的形式记录许多数据。举个例子，佳家电器行售卖了三款电冰箱。店员将三月至五月的销售量记录下来，如下：

三月的销售量			
	P牌	M牌	T牌
实体店	18	20	10
网络商店	7	18	8

四月的销售量			
	P牌	M牌	T牌
实体店	20	14	8
网络商店	8	19	4

五月的销售量			
	P牌	M牌	T牌
实体店	15	21	10
网络商店	10	24	8

若我们将其每个月的数据提炼出来，可以写成以下形式：

$$\begin{pmatrix} 18 & 20 & 10 \\ 7 & 18 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 20 & 14 & 8 \\ 8 & 19 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 15 & 21 & 10 \\ 10 & 24 & 8 \end{pmatrix}$$

在数学上，这些由数所排成的矩形阵列叫做矩阵 (matrix)，例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 24 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -4 \\ 22 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -32 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}。$$

矩阵的一般形式如下：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

注意

行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 不同。行列式是一个值，而矩阵是数的阵列。

一般上，矩阵使用大写字母来简记，例如 A。

在一个矩阵中，横向的叫做行，纵向的叫做列，矩阵中的每一个数叫做此矩阵的元素 (element)，其中位于第 i 行第 j 列的元素以 a_{ij} 表示。例如，a_{24} 表示矩阵第二行第四列的元素。所以，一个矩阵也可用 $\left(a_{ij}\right)$ 表示，或用 $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 来表示矩阵有 m 行 n 列。

一个有 m 行 n 列的矩阵叫做 $m\times n$ 矩阵，而 $m\times n$ 称为矩阵的阶 (order)。例如，$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 是 2×3 矩阵，$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 是 3×2 矩阵。

当 $m=n$ 时，$n\times n$ 矩阵也称为n阶方阵 (square matrix)。当 $m=1$时，$1\times n$ 矩阵只有一行，叫做行矩阵 (row matrix)。当 $n=1$ 时，$m\times 1$ 矩阵只有一列，叫做列矩阵 (column matrix)。例如，

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 是一个二阶方阵，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个行矩阵，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是一个列矩阵。

随堂练习 15.1a

1. 写出下列各矩阵的阶：

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$　　(c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. 若 $A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$，则元素 $a_{23}=$________，$a_{34}=$________。

零矩阵

所有的元素都是零的矩阵叫做零矩阵 (zero matrix)，记作 O。例如，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个 2×3 零矩阵，而 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个 2×2 零矩阵，或称二阶零方阵。

单位矩阵

由左上角至右下角的主对角线上的元素都是 1，其余元素都是零的方阵叫做单位矩阵 (identity matrix)，记作 I。例如，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是二阶单位矩阵，而 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是三阶单位矩阵。

相等矩阵

若两个矩阵 A 及 B 的阶相同，且所有对应的元素都相等，那么 A 及 B 就叫做相等矩阵，记作 $A=B$。

例题 1

若 $\begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$，求 a 的值。

解 根据相等矩阵的定义，得

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ a+1 = -1 \end{cases}$$

解方程组，可得 $a=-2$。

转置矩阵

将一个矩阵 A 的行与列依次对调，所得的矩阵叫做 A 的转置矩阵 (transpose matrix)，记作 A^T ，A^t 或 A' 。也就是说，

$$若\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}，则\ A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}。$$

显然地，若 A 是 $m\times n$ 矩阵，那么 A^T 是 $n\times m$ 矩阵。

例题 2

若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$，求 A^T 。

解 $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$。

想一想 **1** 已知一矩阵 A，那么 $\left(A^T\right)^T=?$

随堂练习 15.1b

1. 若 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & x \end{pmatrix}$，求 a、b 及 x 的值。

2. 若一矩阵 A 使得 $A^T=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$，求矩阵 A。

习题 15.1

1. 求 x，y 的值：

(a) $\begin{pmatrix} 2+x \\ 3-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 3+x \\ 4-y & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

2. 设 $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$，求 $\left(\left(B^T\right)^T\right)^T$。

3. 若一 n 阶方阵 A 满足 $A^T=I$，求矩阵 A。

15.2 矩阵的运算

矩阵的加减法

观察佳家电器行在三月与四月的电冰箱销量，并计算其销量总和与销量差。

三月的销售量			
	P牌	M牌	T牌
实体店	18	20	10
网络商店	7	18	8

四月的销售量			
	P牌	M牌	T牌
实体店	20	14	8
网络商店	8	19	4

三月与四月的总销量			
	P牌	M牌	T牌
实体店			
网络商店			

三月与四月的销量差			
	P牌	M牌	T牌
实体店			
网络商店			

不难发现，计算三月与四月的总销售量时，实际上是计算两个矩阵对应元素的和，可以写成：

$$\begin{pmatrix} 18 & 20 & 10 \\ 7 & 18 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 20 & 14 & 8 \\ 8 & 19 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 38 & 34 & 18 \\ 15 & 27 & 12 \end{pmatrix}。$$

而计算三月与四月的销量差额时，实际上是计算两个矩阵对应元素的差，可以写成：

$$\begin{pmatrix} 20 & 14 & 8 \\ 8 & 19 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 20 & 10 \\ 7 & 18 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}。$$

其矩阵的加减法即为对应元素的加减法。

一般地，设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 及 $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ 是两个 $m\times n$ 矩阵。

A 与 B 之和是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$，记作 $A+B$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$；

而 A 减 B 所得的差是一个 $m\times n$ 矩阵 $D=\left(d_{ij}\right)_{m\times n}$，记作 $A-B$，其中 $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$。

例题 3

计算 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$。

解 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & (-2)+1 & 3+(-6) \\ 0+1 & 4+3 & 5+7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

探索活动 1

目的：检验矩阵加法的性质

工具：纸、笔

步骤：

1．假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 及 $C=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$。

2. 计算并比较下列矩阵的和：
   (a) $A+B$ 及 $B+A$；
   (b) $(A+B)+C$ 及 $A+(B+C)$；
   (c) $A+O$ 及 $O+A$，其中 O 是零矩阵。
3. 改变步骤 1 中的矩阵（可将其改变成不同阶的矩阵），并重复步骤 2。
4. 讨论对于一般的矩阵 A，B，C，其步骤 2 的结果。

由探索活动 1，我们知道矩阵的加法有以下性质：

① 交换律：$A+B=B+A$

② 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$

③ $A+O=A$，$O+A=A$，其中 O 为零矩阵

例题 4

计算 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$。

解 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2 & (-2)-1 & 3-(-6) \\ 0-1 & 4-3 & 5-7 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

随堂练习 15.2a

1. 计算：

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 20 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

2. 若 $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 X。

矩阵的纯量积

当 n 为自然数时，

$$nA = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{n\text{次}}$$

不难发现，矩阵 nA 中的各元素是矩阵 A 中对应的元素乘以 n 后的积。

一般地，设矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$k$ 为任一常数，我们定义 $kA = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，其中 $b_{ij} = ka_{ij}$。我们称 kA 为矩阵 A 与纯量 k 的纯量积 (scalar product)。

例题 5

计算下列各式：

(a) $2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

解 (a) $2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 16 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

探索活动 2

目的：检验矩阵纯量积的性质

工具：纸、笔

步骤：1. 假设实数 $k=3$，$l=-1$，及矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\3 & -1\end{pmatrix}$。

2. 计算并比较下列矩阵的纯量积：

(a) $k(A+B)$ 及 $kA+kB$；

(b) $(k+l)A$ 及 $kA+lA$；

(c) $k(lA)$ 及 $(kl)A$。

3. 改变步骤 1 中的实数 k，l 及矩阵 A，B（可将其改变成不同阶的矩阵），并重复步骤 2。

4. 讨论对于一般的实数 k，l 及矩阵 A，B，其步骤 2 的结果。

由探索活动 2，我们知道矩阵的纯量积有以下性质：

① 分配律：$k(A+B)=kA+kB$

$(k+l)A=kA+lA$

② 结合律：$k(lA)=(kl)A$

例题 6

设 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\0 & -1 & 3\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\5 & 1 & -1\end{pmatrix}$。若 $3X-2B=X+4A$，求矩阵 X。

解
$$\begin{aligned}3X-2B&=X+4A\\2X&=4A+2B\\X&=2A+B\\&=2\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\0 & -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\5 & 1 & -1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\0 & -2 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\5 & 1 & -1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-5 & 4 & 3\\5 & -1 & 5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

随堂练习 15.2b

设 $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$，计算下列各式：

(a) $3A+B$　　(b) $2A-3B$　　(c) $4B-2A$　　(d) A^T-2B^T

矩阵的乘法

观察佳家电器行在三月电冰箱的销售量，及每台电冰箱的售价及其可得的佣金：

三月的销售量			
	P牌	M牌	T牌
实体店	18	20	10
网络商店	7	18	8

	售价 (RM)	佣金 (RM)
P牌	1500	160
M牌	1000	100
T牌	2500	300

计算店员在实体店及网络商店分别可获得的佣金：

	营业额 (RM)	佣金 (RM)
实体店		
网络商店		

不难计算，

实体店的营业额是 $18\times1500+20\times1000+10\times2500=\text{RM }72000$，

网络商店的营业额是 $7\times1500+18\times1000+8\times2500=\text{RM }48500$。

实体店的佣金是 $18\times160+20\times100+10\times300=\text{RM }7880$，

网络商店的佣金是 $7\times160+18\times100+8\times300=\text{RM }5320$。

不难发现，计算三月的营业额及其佣金时，实际上是计算将第一个矩阵的对应行的各元素与第二个矩阵对应列的各元素乘积的和，可以依序写成：

$18\times1500+20\times1000+10\times2500=72000$

$$\begin{pmatrix}18 & 20 & 10\\ 7 & 18 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1500 & 160\\ 1000 & 100\\ 2500 & 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}72000 & \square\\ \square & \square\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}18 & 20 & 10\\ 7 & 18 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1500 & 160\\ 1000 & 100\\ 2500 & 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}72000 & \square\\ 48500 & \square\end{pmatrix}$$

$7\times1500+18\times1000+8\times2500=48500$

$18\times160+20\times100+10\times300=7880$

$$\begin{pmatrix}18 & 20 & 10\\ 7 & 18 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1500 & 160\\ 1000 & 100\\ 2500 & 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}72000 & 7880\\ 48500 & \square\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}18 & 20 & 10\\ 7 & 18 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1500 & 160\\ 1000 & 100\\ 2500 & 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}72000 & 7880\\ 48500 & 5320\end{pmatrix}$$

$7\times160+18\times100+8\times300=5320$

一般地，设 $A=\left(a_{ij}\right)$ 是一个 $m\times p$ 矩阵，$B=\left(b_{ij}\right)$ 是 $p\times n$ 矩阵，则 A 与 B 之乘积 AB 是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=\left(c_{ij}\right)$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$。

$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1p}b_{p1}$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}$$

$c_{2n}=a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2p}b_{pn}$

例题 7

计算下列各式：

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$　　　(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 (a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)(-5)+0(9) \\ 1(3)+3(-5)+4(9) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ 24 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1)+0(-2) & 2(4)+0(0) & 2(3)+0(1) \\ 4(1)+1(-2) & 4(4)+1(0) & 4(3)+1(1) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

随堂练习 15.2c

计算下列各式：

1. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　　　2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$　　　4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

两个矩阵相乘，第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数，否则就不能相乘。

$A_{m\times p}$ 与 $B_{p\times n}$ 可以相乘，因为 A 有 p 列而 B 有 p 行，其乘积 C 是一个 $m\times n$ 矩阵，即

$$A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

例题 8

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$AB$ 及 BA 是否有意义？若有意义，求它们的积。

解 A 是一个 2×3 矩阵，B 是一个 3×1 矩阵。

A 的列数与 B 的行数相同，所以 AB 有意义。

$$\begin{aligned}AB&=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1(1)+2(0)+3(-1)\\0(1)+1(0)+1(-1)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

B 的列数不等于 A 的行数，所以 BA 没有意义。

由例题 8 可知，AB 有意义时，BA 不一定有意义。但如果 BA 也有意义，那么 AB 与 BA 是否会相等呢？

探索活动 3

目的：矩阵乘积是否具有交换律

工具：纸、笔

步骤：1. 假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$。

2. 计算 AB 及 BA 。

3. 改变步骤 1 中的矩阵 A，B 成

(a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$；

(b) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 5\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$；

(c) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$，

并重复步骤 2。

4. 讨论其结果，并作出结论。

由探索活动 3，我们可以看出矩阵的乘法不一定具有交换律，即 $AB\neq BA$。

想一想 2 我们还学过哪一些没有交换律的运算？

例题 9

设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\1 & -4 & 1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ 及 $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 3\end{pmatrix}$。

求 $(AB)C$ 及 $A(BC)$。

解

$$(AB)C=\left[\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&2\\5&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&7\\7&-8\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-4&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0&-2\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\-1&1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&7\\7&-8\end{pmatrix}$$

一般上，若 A、B 及 C 为矩阵，I 为单位矩阵，k 为实数，则满足下列性质：

① 结合律：$(AB)C=A(BC)$

② 分配律：$A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$

③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

④ $IA=A$， $AI=A$

想一想 **3** 在④中，$IA=A$ 中的单位矩阵 I 与 $AI=A$ 中的单位矩阵 I 相同吗？

随堂练习 15.2d

设 $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\\1&-2\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}-1&1&3\\4&-2&1\end{pmatrix}$，求 $(AB)^T$、A^TB^T 及 B^TA^T。

例题 10

已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，求 A^2 及 A^3，其中 $A^2=AA$， $A^3=AAA$。

解
$$\begin{aligned}A^2&=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\\&=7I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^3&=A^2A\\&=7IA\\&=7A\\&=7\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}7 & 21\\ 14 & -7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

随堂练习 15.2e

计算 $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2$，$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^3$，$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^4$，据此，求 $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$。

习题 15.2

1. 若 $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}$。求

   (a) $A+B$　　(b) $2A-B$

2. 已知矩阵A、B。判断 AB 及 BA 是否有意义。若有意义，计算之。

   (a) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -5\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$　　(b) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\-3 & 1\end{pmatrix}$及$C=\begin{pmatrix}5 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$。计算下列各式：

(a) $A(B+C)$　　(b) $B(2A^T+3C)$

4. 计算：$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & 4\\-1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\3 & -3 & 0\\1 & 4 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & 4\\-1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 7\\3 & -4 & 0\\1 & 4 & -6\end{pmatrix}$。

5. 求下列等式中，w，x，y，z 的值：

(a) $6\begin{pmatrix}3 & -w\\x & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}4 & 1\\5 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z & 3\\9 & 6\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}x & 1\\-1 & y\end{pmatrix}^2=O$

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$及$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}$。求下列各式中的矩阵 X：

(a) $X+4A=3(X+B)-A$　　(b) $2A-B+X^T=B$

15.3 逆矩阵及其应用

逆矩阵

若两个矩阵A与B满足

$$AB=BA=I$$

那么，我们称 B 为 A 的逆矩阵 (inverse matrix)，记为 A^{-1}，即

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

> 想一想 4
> 若B为A的逆矩阵，那么A是否也是B的逆矩阵呢？为什么？

欲使等式 $AB=BA$ 成立，A 与 B 必为同阶方阵。因此，只有方阵才可能有逆矩阵。另外，如果一个矩阵 A 有逆矩阵，那么 A 是一个可逆矩阵 (invertible matrix)，且其逆矩阵是唯一的。

二阶方阵的逆矩阵

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$有逆矩阵，其逆矩阵 $B=\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$。

由 $AB=I$，得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

根据矩阵相等，得

$$\begin{cases} aw+by=1 & \text{------}(1) \\ cw+dy=0 & \text{------}(2) \end{cases} \text{及} \begin{cases} ax+bz=0 & \text{------}(3) \\ cx+dz=1 & \text{------}(4) \end{cases}$$

解上述两个方程组，可得

$$w=\frac{d}{ad-bc}, \quad y=\frac{-c}{ad-bc}, \quad x=\frac{-b}{ad-bc}, \quad z=\frac{a}{ad-bc}$$

因此，得

$$B=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

所以，$B=A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$。

由上面推导的过程得知，若 $ad-bc=0$，则 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 没有逆矩阵。若 $ad-bc\neq 0$，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (ad-bc\neq 0)$$

不难发现，式中 $ad-bc$ 为行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的值，故 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 也称为矩阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$。

据此，A 的逆矩阵可进一步简化成

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (|A|\neq 0)$$

数学橱窗

利用计算机求逆矩阵

https://bit.ly/3VWxO4s

例题 11

判断下列二阶方阵有没有逆矩阵？如果有，写出它的逆矩阵。

(a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$　　(b) $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$

解 (a) $|A|=2(-7)-8(-3)$
$=10\neq 0$

所以，矩阵 A 有逆矩阵，且其逆矩阵 $A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$。

(b) $|B|=3(20)-15(4)=0$

所以，矩阵 B 没有逆矩阵。

例题 12

若矩阵 $A=\begin{pmatrix}5-x & 4\\ 2 & 3-x\end{pmatrix}$ 的逆矩阵不存在，求 x 的值。

解 因为矩阵 A 的逆矩阵不存在，所以 $|A|=0$。

$$\begin{aligned}(5-x)(3-x)-2(4)&=0\\ x^2-8x+15-8&=0\\ x^2-8x+7&=0\\ (x-1)(x-7)&=0\\ x=1 \text{ 或 } x&=7\end{aligned}$$

例题 13

若 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$，求矩阵 X 使得 $XA=I$。

解

$$\begin{aligned}XA&=I\\ XAA^{-1}&=IA^{-1}\\ XI&=A^{-1}\\ X&=A^{-1}\\ &=\frac{1}{2(5)-1(3)}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{5}{7} & -\frac{3}{7}\\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

注意

由于矩阵的乘法不具交换律，所以 A^{-1} 必须乘于等式两边矩阵的同一侧。

例题 14

设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -3\end{pmatrix}$。

(a) 若 $AX=B$，求矩阵 X。

(b) 若 $YA=B$，求矩阵 Y。

解 (a)

$$AX=B$$
$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$
$$X=A^{-1}B$$
$$A^{-1}=\frac{1}{2(3)-1(5)}\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}$$

所以，$X=A^{-1}B$

$$=\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-5 & 9\\9 & -16\end{pmatrix}$$

(b)

$$YA=B$$
$$YAA^{-1}=BA^{-1}$$
$$Y=BA^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-13 & 5\\21 & -8\end{pmatrix}$$

随堂练习 15.3a

1．判断下列各矩阵是否有逆矩阵。若有，求其逆矩阵。

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$　　(c) $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

2．若矩阵 $\begin{pmatrix} 2b+1 & 2 \\ -3b-3 & -4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵不存在，求 b 的值。

3．若 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 13 & 39 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 X。

三阶方阵的逆矩阵

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$。将其行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 中各数的代数余子式按其对应的位置排成一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

此矩阵的转置矩阵叫做 A 的伴随矩阵 (adjoint matrix)，记作 $\operatorname{adj} A$，即

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

那么，由行列式的定理与性质，可得

$$
\begin{aligned}
A\cdot\operatorname{adj}A &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 & a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3 & a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3 \\ b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3 & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 & b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3 \\ c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3 & c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3 & c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} \\
&= |A|I
\end{aligned}
$$

同理可得，$\operatorname{adj}A\cdot A=|A|I$。

当 $|A|\neq 0$，以上式子可化成

$$A\left(\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A\right)=\left(\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A\right)A=I$$

由以上结果得知，若 $|A|\neq 0$，矩阵 A 的逆矩阵是

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A \qquad (|A|\neq 0)$$

例题 15

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}。

解 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}$

$=2+(-9)+8-3-12-(-4)$

$=-10$

将 $|A|$ 中各数的代数余子式按其对应的位置列成一个矩阵：

$$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 5 & 5\\ 6 & -1 & -7\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

所以，$\operatorname{adj}A=\begin{pmatrix}-10 & 5 & 5\\ 6 & -1 & -7\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}^T$

$=\begin{pmatrix}-10 & 6 & -4\\ 5 & -1 & -1\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-10}\begin{pmatrix}-10 & 6 & -4\\ 5 & -1 & -1\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

随堂练习 15.3b

求下列矩阵的逆矩阵（1 至 3）

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 14 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

习题 15.3

1. 已知矩阵$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & x \end{pmatrix}$的逆矩阵是$\begin{pmatrix} x & y \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，求 x 及 y 的值。

2. 若矩阵$\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & x-1 & -2 \\ 1-x & 1 & 1 \end{pmatrix}$的逆矩阵不存在，求 x 的值。

判断下列各方阵是否有逆矩阵。若有，求它们的逆矩阵：（3 至 8）

3. $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

9. 已知单位矩阵 $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 及 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$。若 $AJA=J$，且 $A+A^{-1}=3I$，求 A。

10. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 及 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。若 $AB=C$，求 A。

15.4 线性方程组

以下讨论以逆矩阵及高斯消元法解二元及三元线性方程组。

（一）用逆矩阵解线性方程组

例题 16

解方程组 $\begin{cases}4x+7y=3\\2x-5y=-7\end{cases}$。

解 以矩阵来表示方程组，可得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}4 & 7\\2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}4 & 7\\2 & -5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{4(-5)-2(7)}\begin{pmatrix}-5 & -7\\-2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{-34}\begin{pmatrix}34\\-34\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以，$x=-1$，$y=1$。

例题 17

解方程组 $\begin{cases} 2x-y-2z=5 \\ 4x+y+2z=7 \\ 8x-y+z=20 \end{cases}$。

解 以矩阵来表示方程组，可得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}$$

设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，得

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{vmatrix}=18$$

将 $|A|$ 中各数的代数余子式按其对应的位置列成一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 12 & -12 \\ 3 & 18 & -6 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

所以，$\operatorname{adj}A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 12 & 18 & -12 \\ -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}$，故 $A^{-1}=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 12 & 18 & -12 \\ -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}$。

因此，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}&=A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 12 & 18 & -12 \\ -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 36 \\ -54 \\ 18 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以，$x=2$，$y=-3$，$z=1$。

例题 18

在早市及夜市中皆有小食摊位。下表显示在这两个市场中一天内所售出的椰浆饭与炒面的份数：

	椰浆饭	炒面
早市	52	60
夜市	48	40

已知小明在早市中的盈利为 RM 250，在夜市中的盈利为 RM 200。求小明一份椰浆饭与一份炒面的利润。

解 设一份椰浆饭的盈利为 RM x，一份炒面的盈利为 RM y。

以方程组表示，得 $\begin{cases} 52x+60y=250 \\ 48x+40y=200 \end{cases}$。

以矩阵来表示此方程组，可得

$$\begin{pmatrix} 52 & 60 \\ 48 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 52 & 60 \\ 48 & 40 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{52(40)-48(60)}\begin{pmatrix} 40 & -60 \\ -48 & 52 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-800}\begin{pmatrix} -2000 \\ -1600 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

所以，$x=2.5$，$y=2$。

因此，一份椰浆饭的利润为 RM 2.50，一份炒面的利润为 RM 2.00。

随堂练习 15.4a

利用逆矩阵，解下列方程组：

1. $\begin{cases} 7x-2y=29 \\ 7x+y=38 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=9 \\ 3x+y-2z=1 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

（二）用高斯消元法解线性方程组

在初中，我们已学习使用加减消元法来解线性方程组。但面对更复杂的问题，如具有多个未知数及多个方程的线性方程组，我们需要一种更有效的求解方法，并且能将过程系统化为一系列操作步骤，进而更容易地将其转化为可以被电脑执行的算法。这种优化的方法不仅提高了解线性方程组的效率，还使得我们能

够更便捷地在电脑上求解复杂的线性方程组。

以方程组$\begin{cases}3x-y=1\\2x+5y=-2\end{cases}$为例，将一个线性方程组所对应的系数矩阵$\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 5\end{pmatrix}$与等号右端的常数列$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$合并成一个新的矩阵，称为增广矩阵 (augmented matrix)。所以，方程组$\begin{cases}3x-y=1\\2x+5y=-2\end{cases}$的增广矩阵为$\left(\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 1\\2 & 5 & -2\end{array}\right)$。以此方程组为例，比较线性方程组的解法与其增广矩阵：

	线性方程组	增广矩阵
	$\begin{cases}3x-y=1\\2x+5y=-2\end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c}3 & -1 & 1\\2 & 5 & -2\end{array}\right)$
将第 1 行乘以 5，加到第 2 行	$\begin{cases}3x-y=1\\17x=3\end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c}3 & -1 & 1\\17 & 0 & 3\end{array}\right)$
将第 2 行除以 17	$\begin{cases}3x-y=1\\x=\dfrac{3}{17}\end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c}3 & -1 & 1\\1 & 0 & \dfrac{3}{17}\end{array}\right)$
将第 2 行乘以 –3，加到第 1 行	$\begin{cases}-y=\dfrac{8}{17}\\x=\dfrac{3}{17}\end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c}0 & -1 & \dfrac{8}{17}\\1 & 0 & \dfrac{3}{17}\end{array}\right)$
将第 1 行乘以 –1	$\begin{cases}y=-\dfrac{8}{17}\\x=\dfrac{3}{17}\end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c}0 & 1 & -\dfrac{8}{17}\\1 & 0 & \dfrac{3}{17}\end{array}\right)$
将两行对调	$\begin{cases}x=\dfrac{3}{17}\\y=-\dfrac{8}{17}\end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c}1 & 0 & \dfrac{3}{17}\\0 & 1 & -\dfrac{8}{17}\end{array}\right)$

从增广矩阵的角度来看，求线性方程组的解，可以通过以下初等行运算 (elementary row operation) 来获得：

(1) 将任意两行互调：例如，将矩阵的第二、三行对调，记为 $R_2 \leftrightarrow R_3$；

(2) 将某一行的所有元素乘以一个非零常数：例如，将第二行乘以 2，记为 $R_2 \to 2R_2$；

(3) 将某一行乘上一常数后，加到另一行：例如，将第三行乘以 -3 后，加到第一行，记为 $R_1 \to -3R_3 + R_1$。

据此，上述增广矩阵的变化，可以进一步写成：

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{array}\right)
\xrightarrow{R_2 \to 5R_1 + R_2}
\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 17 & 0 & 3 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{17} R_2}
\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{3}{17} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_1 \to -3R_2 + R_1}
\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & \frac{8}{17} \\ 1 & 0 & \frac{3}{17} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_1 \to -R_1}
\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{8}{17} \\ 1 & 0 & \frac{3}{17} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{17} \end{array}\right)
$$

将矩阵用初等行运算来变换的方法，称为高斯消元法 (Gaussian elimination)。

例题 19

解方程组 $\begin{cases} y-z=-2 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x-y-3z=1 \end{cases}$。

解 $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_1 \to -R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3 \to -2R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -11 & -7 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3 \to 7R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -18 & -21 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{18}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array}\right)$

一般上，在使用高斯消元法时，我们将主对角线上的元素都化为1，且主对角线左下方的元素化为0。其增广矩阵所对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x+3y+4z=4 \\ y-z=-2 \\ z=\frac{7}{6} \end{cases}。$$

据此，得 $z=\frac{7}{6}$。

将 $z=\frac{7}{6}$ 代入 $y-z=-2$，得 $y=-\frac{5}{6}$。

将 $y=-\frac{5}{6}$，$z=\frac{7}{6}$ 代入 $x+3y+4z=4$，得 $x=\frac{11}{6}$。

所以，$x=\frac{11}{6}$，$y=-\frac{5}{6}$，$z=\frac{7}{6}$。

我们可以使用初等行运算，继续将系数矩阵转换成单位矩阵，以求得未知数的值。将上例继续进行初等行运算：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to -4R_3+R_1]{R_1 \to -4R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -3R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array}\right)$$

由此同样可得，$x=\frac{11}{6}$，$y=-\frac{5}{6}$，$z=\frac{7}{6}$。

随堂练习 15.4b

利用高斯消元法，解下列方程组：

1. $\begin{cases} 10x-3y=26 \\ 8x+3y=18 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x+y-3z=8 \\ x+4y-z=0 \end{cases}$

用高斯消元法求逆矩阵

我们也可以使用高斯消元法求逆矩阵。

例如，若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，其逆矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$。

由 $AB=I$，即

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由以上等式，可以得三个三元一次方程组：

$$\begin{cases} 2b_{11}-b_{21}-2b_{31}=1 \\ 4b_{11}+b_{21}+2b_{31}=0 \\ 8b_{11}-b_{21}+b_{31}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b_{12}-b_{22}-2b_{32}=0 \\ 4b_{12}+b_{22}+2b_{32}=1 \\ 8b_{12}-b_{22}+b_{32}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b_{13}-b_{23}-2b_{33}=0 \\ 4b_{13}+b_{23}+2b_{33}=0 \\ 8b_{13}-b_{23}+b_{33}=1 \end{cases}$$

这三个方程组的系数矩阵相同，我们可以用相同的行运算来变换增广矩阵。所以，我们可以将它们的增广矩阵与系数矩阵并排，表示成以下形式：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

将矩阵进行运算：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to -4R_1+R_3]{R_2\to -2R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to -R_2+R_3]{R_1\to \frac{1}{3}R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -2R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to \frac{1}{3}R_3]{R_1\to \frac{1}{2}R_1,\ R_2\to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

故此，得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$是一个可逆矩阵，我们可以利用增广矩阵

$$\left(A \mid I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

经过行运算，将左边的 A 化为单位矩阵时，即化为$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)$时，右边的矩阵$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$即为逆矩阵 A^{-1}。

例题 20

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3 \to -3R_1 + R_3]{R_2 \to -2R_1 + R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 7 & -1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 7 & -1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -7R_2 + R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{3}{10}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{10}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to -\frac{1}{3}R_3 + R_2]{R_1 \to -R_3 + R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{10}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_2 + R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{10}\end{array}\right)$$

因此，$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{3}{5} & \dfrac{2}{5}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{7}{10} & -\dfrac{3}{10}\end{pmatrix}$。

随堂练习 15.4c

利用高斯消元法，求 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

习题 15.4

利用逆矩阵，解下列方程组：

1. $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+4y-3z=3 \\ 3x-8y+6z=1 \\ 8x-2y-9z=4 \end{cases}$

利用高斯消元法，解下列方程组：

3. $\begin{cases} 2x-7y=8 \\ 9x-4y=-19 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x-y=14 \\ 2y+z=5 \\ 5z-x=10 \end{cases}$

利用高斯消元法，求下列矩阵的逆矩阵：

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 14 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

总复习题 15

1. 已知 $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，求 x 及 y 的值。

2. 已知 $A=\begin{pmatrix} a & 3a \\ 2b & b \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，且 $AB=\begin{pmatrix} 40 \\ 42 \end{pmatrix}$，求 a 及 b 的值。

3. 设 $M=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 及 $N=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -1 \\ -44 & -58 \end{pmatrix}$。求下列各式中的矩阵 X：

   (a) $2N-3M=2M-X$

   (b) $3N^T-M^T=2X$

   (c) $MX=N$

4. 判断下列各矩阵，AB 及 BA 是否有意义。若有，求它们的乘积。

(a) $A=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

(b) $A=\begin{pmatrix}-5&4&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&0\\1&-4\end{pmatrix}$

5. 若下列矩阵没有逆矩阵，求 a 的值：

(a) $\begin{pmatrix}5a+2&4\\6&a\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}-7&a&3\\2&-3&1\\0&-a&4\end{pmatrix}$

6. 求下列矩阵的逆矩阵：

(a) $\begin{pmatrix}6&-7\\15&-2\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}2&5\\2&3\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&9\\-2&2&-4\end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&-3&0\\1&0&3\end{pmatrix}$

7. 已知 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\end{pmatrix}$，求

(a) $\left(A^T\right)^{-1}$　　(b) $\left(A^{-1}\right)^T$

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-2\\-1&1\end{pmatrix}$。

(a) 证明 $A^2=A+2I$，其中 I 为单位矩阵。

(b) 据此，求 A^{-1} 及 A^4。

9. 若 $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 X。

10. 若 $X \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 X。

11. (a) 设 $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，求 R^2 及 R^3。据此，写出 R^n。

(b) 计算 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^6$。

12. 若 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，对于任意的 x，y，u，v 都成立，求 a，b，c，d 的值。

13. 利用逆矩阵，或用高斯消元法，解下列方程组：

(a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$

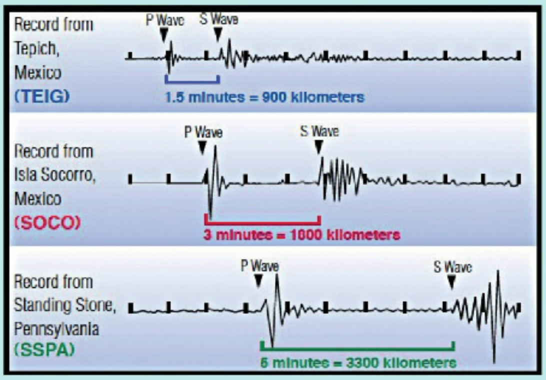
(b) $\begin{cases} u + 6v = -5 \\ u - 9v = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -4x + y + 12 = 0 \\ y + 2z + 1 = 0 \\ x - 6z - 6 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{5}{y} + \frac{4}{z} = -3 \\ \frac{4}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = 7 \\ \frac{7}{x} - \frac{3}{z} = 4 \end{cases}$

14. 回到引言中的披萨问题。用矩阵来求出每日购买一盒、两盒及三盒披萨的顾客人数及每日净赚的数额。

在地震发生时，地震学家先从位于发生地震的地点周围的地震仪读取地震所产生的震波图（如右图），每一张地震震波图可计算出地震仪与震央之间的距离。



接着，画出已计算出来的的地震仪与震央之间的距离为半径，地震仪为中心的圆。通过所绘得的圆的交点（如下图），测得震央地点。为了能够更准确的测得震央所在地，他们需要至少三部地震仪的数据。

如果我们以坐标来代表地震仪的地点，在不作图的情况下，根据各地震仪所测得与震央的距离，我们是否能够测得震央的位置？

16

圆

学习目标

- 掌握轨迹的概念及其方程式的求法
- 掌握圆的方程式的求法
- 能由圆的方程式求出其圆心与半径
- 掌握点与圆位置关系的条件
- 掌握直线与圆位置关系的条件
- 能求出圆的切线方程式
- 掌握两圆位置关系的条件

16.1 轨迹方程式

符合一定条件的所有点所形成的图形称为满足该条件的点的轨迹 (locus) 。

在解析几何中，我们利用坐标来描述平面上的点，因此我们可以用方程式来描述在一平面上的轨迹各点的 x 坐标与 y 坐标的关系，所得的关系式称为该轨迹的方程式 。

探索活动 1

在坐标系上，描绘出符合以下各条件的动点的轨迹图像：

(a) 动点 P 分别与定点 $A(-3,1)$ 及 $B(5,-3)$ 的距离相等。

https://www.geogebra.org/m/h3s7prek

(b) 已知定点 $A(-3,2)$ 及 $B(5,-4)$。动点 P 使得 $\angle APB=90°$ 。

https://www.geogebra.org/m/q4zbsujj

(c) 动点 P 与直线 $3x-4y+8=0$ 距离恒等于 2。

https://www.geogebra.org/m/dfjgqayj

例题 1

已知平面上两点 $A(-3,1)$ 及 $B(5,-3)$。若动点 P 与 A、B 两点等距离，求点 P 的轨迹方程式。

解 设点 P 的坐标为 (x, y)。

$$PA = PB$$
$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y+3)^2}$$
$$x^2+y^2+6x-2y+10 = x^2+y^2-10x+6y+34$$
$$16x-8y-24=0$$
$$2x-y-3=0$$

∴ 点 P 的轨迹方程式为 $2x-y-3=0$。
由探索活动 1 (a) 的图像结果，$2x-y-3=0$ 为线段 AB 的垂直平分线。

例题 2

已知 $A(-3,2)$ 及 $B(5,-4)$ 两点。若 P 是一动点使得 $\angle APB = 90°$，求点 P 的轨迹方程式。

解 设 $P(x, y)$，
已知 $\angle APB = 90°$，所以 AP 与 PB 互相垂直，

$$\therefore m_{AP} \cdot m_{PB} = -1$$
$$\frac{y-2}{x+3}\cdot\frac{y+4}{x-5} = -1$$
$$y^2+2y-8 = -(x^2-2x-15)$$
$$x^2+y^2-2x+2y-23=0$$

∴ 点 P 的轨迹方程式为 $x^2+y^2-2x+2y-23=0$。
由探索活动 1 (b) 的图像结果，$x^2+y^2-2x+2y-23=0$ 为一圆。

随堂练习 16.1

1. 已知点 $A(2,1)$ 及点 $O(0,0)$。若 P 是一动点使得 $OP=2AP$，求点 P 的轨迹方程式。
2. 已知一定点 $A(3,2)$ 及直线 $L: y=-2$。若 P 是一动点使得点 P 到点 A 的距离等于点 P 到直线 L 的距离，求点 P 的轨迹方程式，并描述其几何意义。

习题 16.1

1. 已知点 A 的坐标为 $(-3,4)$。若动点 P 与点 A 的距离为6，求点 P 的轨迹方程式。

2. 已知 $A(8,-4)$ 与 $B(-2,3)$ 两点。若动点 P 与 A、B 两点的距离相等，求点 P 的轨迹方程式。

3. 已知点 $A(2,1)$ 与点 $B(-2,1)$。若 P 是一动点使得 $2AP=3BP$，求点 P 的轨迹方程式。

4. 已知 $A(1,-2)$ 与 $B(5,8)$ 两点。若 P 是一动点使得 $\angle APB=90^\circ$，求点 P 的轨迹方程式。

5. 已知点 $A(3,-4)$ 及直线 $L: y=x+1$。若 P 是一动点使得点 P 到点 A 的距离等于点 P 到直线 L 的距离，求点 P 的轨迹方程式。

6. 已知点 $A(-1,-4)$ 及直线 $L: x=2$。若 P 是一动点使得点 P 到点 A 的距离等于点 P 到直线 L 的距离的两倍，求点 P 的轨迹方程式。

16.2 圆的方程式

圆的标准方程式

在平面上与一个定点等距离的点的轨迹叫做圆，此定点叫做圆心 (centre of a circle)，此等距离叫做圆的半径 (radius)。

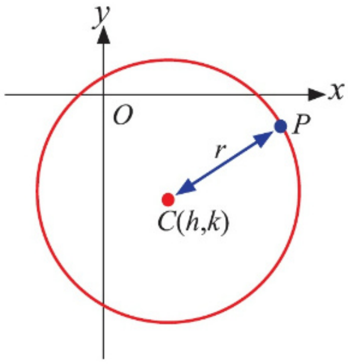


图16–1

设 $C(h,k)$ 为圆心，r 为圆的半径，$P(x,y)$ 为圆上任意动点，如图 16–1。根据圆的定义，

$$CP = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r,\quad r>0$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

以上方程式称为圆的标准方程式。

例题 3

已知一圆的圆心是 $(-2,3)$，半径是 4，求圆的标准方程式。

解 圆的标准方程式是 $[x-(-2)]^2+(y-3)^2 = 4^2$

$$(x+2)^2+(y-3)^2 = 16$$

例题 4

已知两点 $A(-2,3)$ 及 $B(4,1)$。求以线段 AB 为直径的圆的标准方程式。

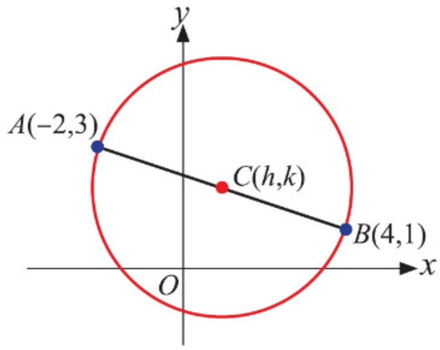
解 设圆心 $C(h,k)$ 是 AB 的中点，

因此，$h=\frac{-2+4}{2}=1$，$k=\frac{3+1}{2}=2$。

半径 $r=AC$

$=\sqrt{(-2-1)^2+(3-2)^2}$

$=\sqrt{10}$



$\therefore$ 圆的标准方程式是 $(x-1)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$

$(x-1)^2+(y-2)^2=10$。

例题 5

一圆过点 $A(3,1)$ 及 $B(-1,3)$，且圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上，求圆的方程式。

解法一 设圆的圆心为 $C(h,k)$。

$\because$ 圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上

$\therefore$ $3h-k-2=0$

$k=3h-2$ ------(1)

$\because$ 圆心到 $A(3,1)$ 及 $B(-1,3)$ 两点的距离相等，

$\therefore$ $\sqrt{(h-3)^2+(k-1)^2}=\sqrt{(h+1)^2+(k-3)^2}$

$h^2-6h+9+k^2-2k+1=h^2+2h+1+k^2-6k+9$

$8h-4k=0$

$k=2h$ ------(2)

解方程组 (1) 及 (2)，得 $h=2$， $k=4$。

半径 $r=AC$

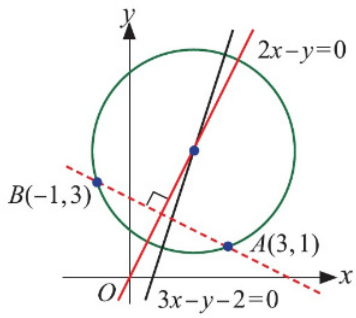
$$=\sqrt{(2-3)^2+(4-1)^2}$$

$$=\sqrt{10}$$

∴ 圆的方程式是 $(x-2)^2+(y-4)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$

$$(x-2)^2+(y-4)^2=10。$$

解法二 如图所示，圆上两点 $A(3,1)$ 及 $B(-1,3)$ 的垂直平分线经过圆心。



线段 AB 的中间点坐标 $(1,2)$，

斜率 $m_{AB}=\dfrac{3-1}{-1-3}=-\dfrac{1}{2}$

∴ 线段 AB 的垂直平分线的斜率 $m=2$，

线段 AB 的垂直平分线是 $2x-y=0$。

已知圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上，即圆心为直线 $2x-y=0$ 与直线 $3x-y-2=0$ 的交点。

解方程组 $\begin{cases}2x-y=0\\3x-y-2=0\end{cases}$ 得 $x=2$， $y=4$。

圆心为 $(2,4)$，半径 $r=\sqrt{(3-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$。

∴ 圆的方程式是 $(x-2)^2+(y-4)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$

$$(x-2)^2+(y-4)^2=10。$$

随堂练习 16.2 a

1. 求过点 $(1,9)$，圆心为 $(6,-3)$ 的圆的标准方程式。
2. 已知 $A(4,9)$ 与 $B(6,3)$ 两点，求以线段 AB 为直径的圆的方程式。
3. 求经过 $A(-5,-1)$， $B(1,7)$ 两点，且圆心在直线 $x+y=2$ 上的圆的方程式。

圆的一般方程式

我们将圆的标准方程式 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 展开，经过整理得 $x^2+y^2-2hx-2ky+\left(h^2+k^2-r^2\right)=0$。我们以

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

表示圆的方程式，此方程式称为圆的一般方程式。

注意

圆的一般方程式有以下特点：

- 它是一个二元二次方程式；
- 式中 x^2 与 y^2 项的系数相同；
- 没有 xy 项。

反之，应用配方法，圆的一般式可化成圆的标准方程式，

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

$$x^2+Ax+\left(\frac{A}{2}\right)^2+y^2+By+\left(\frac{B}{2}\right)^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$$

其中，圆心为 $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$，半径 $r=\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C}$。

例题 6

已知一圆的方程式为 $16x^2+16y^2-64x-40y+25=0$，求其圆心与半径。

解 $16x^2+16y^2-64x-40y+25=0$

$$x^2+y^2-4x-\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}=0$$

应用配方法，

$$x^2-4x+2^2+y^2-\frac{5}{2}y+\left(\frac{5}{4}\right)^2=-\frac{25}{16}+2^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=2^2$$

$\therefore$ 圆心为 $\left(2,\frac{5}{4}\right)$，半径 $=2$。

例题 7

方程式 $x^2+y^2-10x-8y+52=0$ 的图像是否是一个圆？

解 $x^2+y^2-10x-8y+52=0$

$$x^2-10x+5^2+y^2-8y+4^2=-52+5^2+4^2$$

$$(x-5)^2+(y-4)^2=-11$$

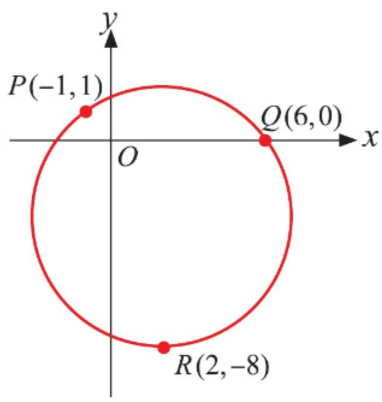
因为 $(x-5)^2+(y-4)^2$ 的值必须大于零，所以 $x^2+y^2-10x-8y+52=0$ 的图象不是一个圆。

例题 8

求经过 $P(-1,1)$，$Q(6,0)$ 及 $R(2,-8)$ 三点的圆的方程式。

解 设圆的方程式为 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$。

点 $P(-1,1)$，$Q(6,0)$ 及 $R(2,-8)$ 在圆上，



$$因此\begin{cases}1+1-A+B+C=0\\36+6A+C=0\\4+64+2A-8B+C=0\end{cases}$$

$$即\begin{cases}-A+B+C=-2\\6A+C=-36\\2A-8B+C=-68\end{cases},$$

解方程组得 $A=-4$，$B=6$，$C=-12$。

$\therefore$ 圆的方程式为 $x^2+y^2-4x+6y-12=0$。

想一想 1

利用所求得的圆的方程式，可以求出圆心和半径。在不求出圆方程式的情况下，是否也可以找到圆的圆心坐标和半径？

随堂练习 16.2 b

1. 化方程式 $x^2+y^2-4x+8y=29$ 为圆的标准式，并求出其圆心及半径。
2. 已知一圆的方程式为 $3x^2+3y^2-6x+10y-45=0$，求其圆心与半径。
3. 求经过 $P(-8,-6)$，$Q(2,-6)$ 及 $R(4,0)$ 三点的圆的方程式，并求其圆心与半径。

习题 16.2

1. 求经过 $A(1,4)$ 及 $B(0,-3)$ 两点，且圆心在直线 $x-2y=4$ 上的圆的方程式。

2. 求以 $P(-3,4)$ 及 $Q(-9,2)$ 为直径两个端点的圆的方程式。如果 PR 是该圆的弦，且其斜率是 1，求 PR 的长。

3. 求圆 $9x^2+9y^2+2x-6y-6=0$ 的圆心与半径。

4. 求经过 $A(-4,-3)$，$B(4,-9)$ 及 $C(8,-7)$ 三点的圆的方程式。

5. 已知一圆经过 $A(2,2)$，$B(5,3)$ 两点，且与直线 $x+y=4$ 相交于 y 轴，求此圆的方程式。

6. 设三角形三边的方程式分别是 $x-6=0$，$x+2y=0$ 及 $x-2y-8=0$。求这个三角形外接圆的方程式。

7. 已知动点到定点 $(0,3)$ 及 $(0,-3)$ 的距离的平方和等于 68。证明动点的轨迹为一圆，并求出圆的圆心及半径。

8. 已知动点到定点 $(5,4)$ 及 $(-2,1)$ 的距离的平方比为 2:3。证明动点的轨迹为一圆，并求出圆的圆心及半径。

16.3 点与圆的位置关系

已知圆的圆心为 C，半径为 r，P 为平面上任意一点。

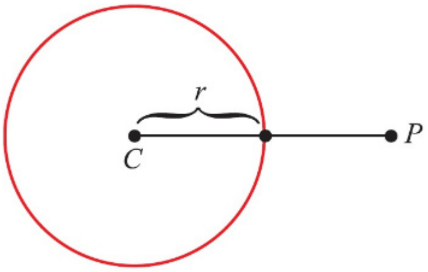


图16–2(a)

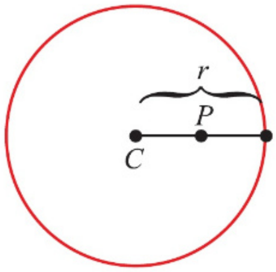


图16–2(b)

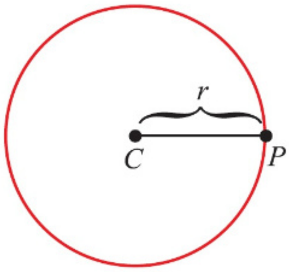


图16–2(c)

我们可以通过点 P 与圆心 C 的距离和圆半径 r 做比较来判断点 P 的位置。如果 $PC > r$，则 P 在圆外，如图 16–2 (a) 所示。如果 $PC < r$，则P在圆内，如图 16–2 (b) 所示。如果 $PC = r$，则 P 在圆上，如图 16–2(c) 所示。

例题 9

求点 $P(-4, 5)$ 到圆 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ 的最长及最短距离。

解 圆心为 $C(2,-3)$，半径 $r=4$。

$$PC=\sqrt{[2-(-4)]^2+(-3-5)^2}$$

$$=\sqrt{6^2+(-8)^2}$$

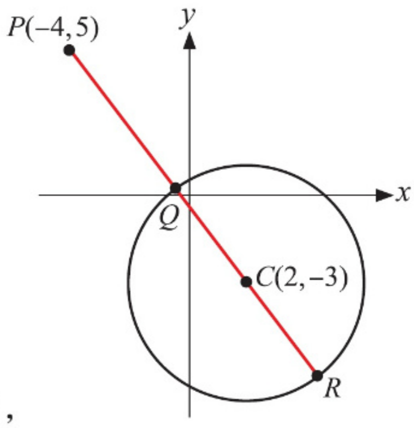
$$=10>4$$

$\therefore$ 点 P 在圆外。

如右图所示，

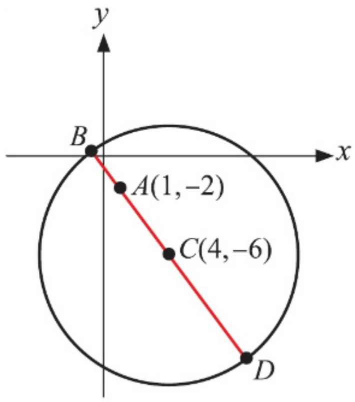
点 P 到圆的最短距离 $PQ = PC - r = 10 - 4 = 6$，

点 P 到圆的最长距离 $PR = PC + r = 10 + 4 = 14$。



例题 10

求点 $A(1,-2)$ 到圆 $(x-4)^2+(y+6)^2=8^2$ 的最长及最短距离。



解 圆心为 $C(4,-6)$，半径 $=8$。

$$AC=\sqrt{(4-1)^2+[-6-(-2)]^2}$$
$$=5<8$$

$\therefore$ 点 A 在圆内。

点 A 到圆的最短距离，$AB=r-AC=8-5=3$，

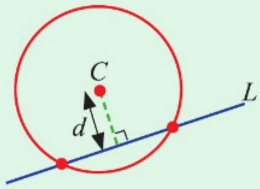
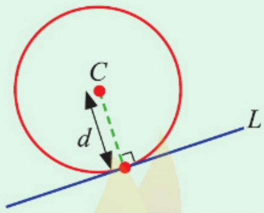
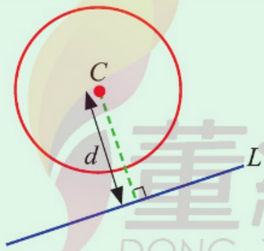
点 A 到圆的最长距离，$AD=AC+r=5+8=13$。

随堂练习 16.3

1. 求点 $P(4,-5)$ 到圆 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ 的最长与最短距离。
2. 求由点 $Q(1,1)$ 到圆 $x^2+y^2+4x+6y-131=0$ 的最长与最短距离。

16.4 圆与直线的位置关系

我们可以通过圆心点 C 到直线 L 的距离 d 与圆半径 r 的关系判断圆与直线的位置关系。

条件	图示	圆与直线的位置关系
$d<r$		相交于两点
$d=r$		相切 / 相交于一点
$d>r$		不相交

例题 11

已知圆 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$ 及直线 $x+2y+m=0$。求 m 的取值范围使得圆与直线相交于两点。

解 圆心为 $(-1,3)$，半径 $r=\sqrt{5}$。

圆心到直线 $x+2y+m=0$ 的距离，$d=\dfrac{|(-1)+2(3)+m|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|m+5|}{\sqrt{5}}$。

若圆与直线相交于两点，则 $d<r$，

$$\frac{|m+5|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$$

$$|m+5|<5$$

$$-10<m<0$$

$\therefore$ m 的取值范围为 $-10<m<0$。

例题 12

证明直线 $3x+4y+16=0$ 与圆 $x^2+y^2-2y-15=0$ 相切。

证法一 圆 $x^2+y^2-2y-15=0$，即 $x^2+(y-1)^2=4^2$，得圆心为 $(0,1)$，半径为 4。

圆心 $(0,1)$ 到直线 $3x+4y+16=0$ 的距离 $=\dfrac{|3(0)+4(1)+16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$。

$\because$ 圆心到直线的距离相等于圆的半径，

$\therefore$ 直线 $3x+4y+16=0$ 与圆 $x^2+y^2-2y-15=0$ 相切。

证法二 $3x+4y+16=0$ ------(1)

$x^2+y^2-2y-15=0$ ------(2)

将 (1) 代入 (2) 得 $25x^2+120x+144=0$ ------(3)

$$\begin{aligned}\text{判别式 } \Delta &= b^2-4ac\\ &=(120)^2-4(25)(144)\\ &=0\end{aligned}$$

$\therefore$ 方程式 (3) 有相等实根，所以直线 $3x+4y+16=0$ 与圆 $x^2+y^2-2y-15=0$ 只有一个交点，即直线与圆相切。

例题 13

求以点 $(1,-1)$ 为圆心，且与直线 $3x+4y-9=0$ 相切的圆的方程式。

解 以 $(1,-1)$ 为圆心的圆与直线 $3x+4y-9=0$ 相切，

圆半径 $=\dfrac{|3(1)+4(-1)-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

圆的方程式是 $(x-1)^2+[y-(-1)]^2=2^2$

$(x-1)^2+(y+1)^2=4$

随堂练习 16.4a

1. 证明下列直线 $3x-y-5=0$ 与圆 $x^2+y^2-16x+2y+25=0$ 相切。
2. 已知下列直线与圆相切，求 k 的值：

   (a) $5x-12y+k=0$， $x^2+y^2-6x-4y-3=0$

   (b) $x+3y+k=0$， $2x^2+2y^2+12y+13=0$
3. 求 r 的取值范围使得圆 $(x-3)^2+(y+5)^2=r^2$ 与直线 $4x-3y-2=0$ 相离。
4. 求以 $A(-5,4)$ 为圆心，且与 x 轴相切的圆的方程式。

例题 14

已知斜率为 -2 的直线与圆 $x^2+y^2-6x+10y+29=0$ 相切。求此直线的方程式。

解 设直线方程式为 $y=-2x+c$， 即 $2x+y-c=0$。

$x^2+y^2-6x+10y+29=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y+5)^2=5$，

得圆心为 $(3,-5)$，半径为 $\sqrt{5}$。

$$\because \frac{|2(3)+(-5)-c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

$$|1-c|=5$$

$$1-c=-5 \quad \text{或} \quad 1-c=5$$

$$c=6 \qquad\qquad c=-4$$

$\therefore$ 所求的直线方程式是 $2x+y-6=0$ 或 $2x+y+4=0$。

随堂练习 16.4b

1. 求斜率为 $-\dfrac{4}{3}$ 且与圆 $x^2+y^2=25$ 相切的直线方程式。
2. 求平行于 $2x-y+2=0$，且与圆 $x^2+y^2+6x-2y-10=0$ 相切的直线方程式。

例题 15

从圆 $x^2+y^2+2x-19=0$ 外一点 $(1,6)$ 向圆引切线，求切线的方程式。

解 $x^2+y^2+2x-19=0 \Rightarrow (x+1)^2+y^2=20$，得圆心为 $(-1,0)$，半径为 $\sqrt{20}$ 。

设切线为 $y=mx+c$，

切线过点 $(1,6)$，则 $6=m(1)+c$

$$c=6-m$$

即 $mx-y+6-m=0$。

$\because$ 圆心到切线的距离等于圆的半径，

$$\therefore \frac{|m(-1)-(0)+6-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{20}$$

$$(6-2m)^2=20(m^2+1)$$

$$16m^2+24m-16=0$$

$$(m+2)(2m-1)=0$$

$$m=-2 \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

所求切线方程式为 $(-2)x-y+6-(-2)=0$ 或 $\left(\frac{1}{2}\right)x-y+6-\left(\frac{1}{2}\right)=0$，

即 $2x+y-8=0$ 或 $x-2y+11=0$。

从例题 15，可以知道从圆外一点，可作出两条切线（图 16–3）。

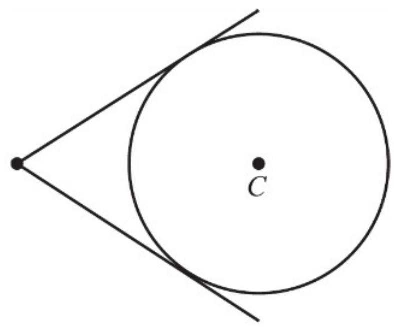
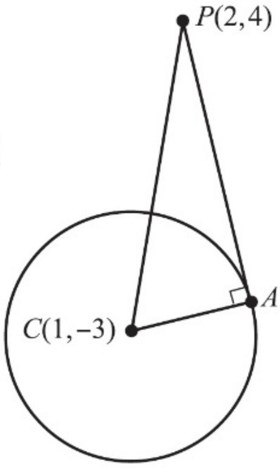


图16–3

例题 16

已知 $P(2,4)$ 为圆 $x^2+y^2-2x+6y+9=0$ 外一点。从点 P 向圆引的切线相切于点 A，求点 P 到圆的切线长 AP。



解 $x^2+y^2-2x+6y+9=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=1$，

得圆心 $C(1,-3)$，半径为 1。

如图所示，因为 ΔCAP 为直角三角形，应用毕氏定理

$$CP^2=AC^2+AP^2$$

$$(1-2)^2+(-3-4)^2=1^2+AP^2$$

$$AP^2=49$$

$$AP=7$$

$\therefore$ 切线长 AP 为 7。

随堂练习 16.4c

1. 在直角坐标系上绘出从以下各点引到圆 $x^2+y^2=25$ 的切线，并求其切线的方程式：

   (a) $P(-5,3)$　　(b) $Q(4,5)$　　(c) $R(7,1)$

2. 已知点的坐标和圆的方程式，求从点到圆的切线长：

   (a) $(-2,3)$，$x^2+y^2-6x-2y=0$

   (b) $(2,2)$，$2x^2+2y^2+2x+4y-3=0$

习题 16.4

1. 已知圆 $x^2+y^2-2x-4y+a=0$ 和直线 $2x+y-1=0$。当 a 为何值时，直线与圆相交两点、相切？

2. 已知圆 $x^2+y^2-6x-4y+k=0$ 与 y 轴相切，求 k 的值及切点的坐标。

3. 求与圆 $x^2+y^2+6x-8y-11=0$ 相切且与直线 $3x-4y+8=0$ 平行的直线方程式。

4. 求与直线 $4x+3y+9=0$ 垂直，且与圆 $x^2+y^2=16$ 相切的直线方程式。

5. 求与圆 $x^2+y^2-6x-8y+9=0$ 同圆心，且与直线 $6x+8y=15$ 相切的圆的方程式。

6. 已知一圆经过点 $A(1,1)$ 且与直线 $x+2y-3=0$ 及直线 $x+2y-13=0$ 相切，求此圆的方程式。

7. 已知一圆的方程式为 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$，l_1 与 l_2 分别为圆在 $P_1(4,2)$ 及 $P_2\left(\frac{4}{5},\frac{18}{5}\right)$ 两点的切线，l_1 与 l_2 相交于点 Q，求点 Q 的坐标。

8. 求经过点 $A(4,-3)$ 且与圆 $x^2+y^2-2x-4y-12=0$ 相切的直线方程式。

9. 已知圆 $x^2+y^2+8x-4y+15=0$ 上点 $A(-2,3)$ 和点 $B(-3,0)$ 的切线交于点 C。证明 $\angle ACB$ 为直角。

10. 已知 l_1 及 l_2 是由点 $P(6,-4)$ 到圆 $x^2+y^2+8x-2y+13=0$ 的两条切线，求 l_1 与 l_2 的方程式。

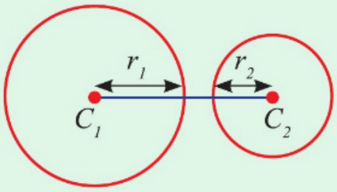
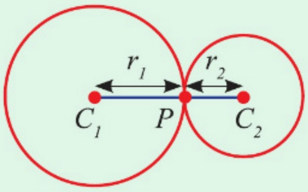
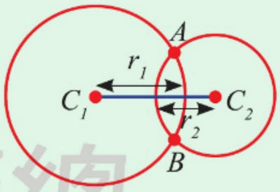
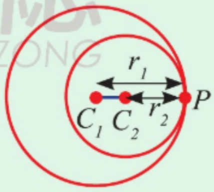
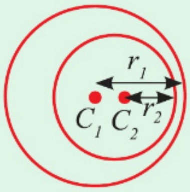
11. 已知一直线 $3x+4y=10$ 及圆 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$。
   (a) 判断直线与圆的位置关系；
   (b) 若 P 是圆上的一点使得 P 到直线 $3x+4y=10$ 的距离最短，求点 P 的坐标，并求此最短距离。

12. 已知 l_1 及 l_2 是由点 $P(-6,-8)$ 到圆 $x^2+y^2=25$ 的两条切线，它们与圆分别切于点 A 及点 B，求直线 AB 的方程式。

13. 直线 l 与圆 $x^2+y^2+6x+12y+40=0$ 相切于点 $(-5,-5)$，交圆 $x^2+y^2=10$ 于点 P 和点 Q。证明圆 $x^2+y^2=10$ 上点 P 和点 Q 的切线互相垂直。

16.5 两圆的位置关系

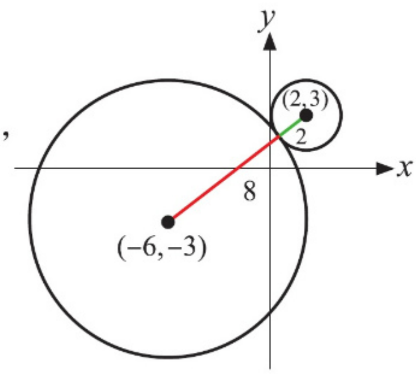
我们可以通过圆心距 C_1C_2 与 r_1 及 r_2 之间的关系，来判断两圆的位置关系。

两圆的位置关系	图示
两圆外离	
两圆外切	
两圆相交于两点	
两圆内切	
两圆内含	

例题 17

证明圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 与圆 $(x+6)^2+(y+3)^2=64$ 外切。

证 圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 的圆心 $C_1=(2,3)$，
半径 $r_1=2$。
圆 $(x+6)^2+(y+3)^2=64$ 的圆心 $C_2=(-6,-3)$，
半径 $r_2=8$。



$$C_1C_2=\sqrt{[2-(-6)]^2+[3-(-3)]^2}=10$$

$$r_1+r_2=2+8=10$$

$\because\ C_1C_2=r_1+r_2$

$\therefore$ 两圆外切。

例题 18

证明圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 与 $(x+1)^2+(y+3)^2=1$ 相交。

证 设 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ ------(1)

$(x+1)^2+(y+3)^2=1$ ------(2)

解方程组 (1) 和 (2) 得 $4x+2y+8=0$

$$y=-2x-4 \quad \text{------(3)}$$

想一想 2 不解方程组，用其他方法来证明两圆相交。

将 (3) 代入 (1) 得 $(x-1)^2+[(-2x-4)+2]^2=4$

$$(x-1)^2+(-2x-2)^2=4$$

$$5x^2+6x+1=0 \quad \text{------(4)}$$

判别式 $\Delta=(6)^2-4(5)(1)$

$=16>0$

方程式 (4) 有相异实根，所以圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 与圆 $(x+1)^2+(y+3)^2=1$ 有两个交点，即两圆相交。

例题 19

若圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=5-a$ 与圆 $(x-2)^2+(y-6)^2=6^2$ 内切，求 a 的值，并求切点的坐标。

解 两圆的圆心分别是 $C_1=(-1,2)$ 及 $C_2=(2,6)$，$C_1C_2=\sqrt{\left[2-(-1)\right]^2+(6-2)^2}=5$

两圆的半径分别是 $r_1=\sqrt{5-a}$ 及 $r_2=6$。

两圆内切，$|r_1-r_2|=5$

$$\left|\sqrt{5-a}-6\right|=5$$

即 $\sqrt{5-a}-6=5$ 或 $\sqrt{5-a}-6=-5$

得 $a=-116$ $\quad a=4$

将 $a=-116$ 和 $a=4$ 分别代入 $(x+1)^2+(y-2)^2=5-a$ 中，

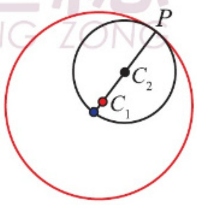
得 $(x+1)^2+(y-2)^2=121$ 和 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$。

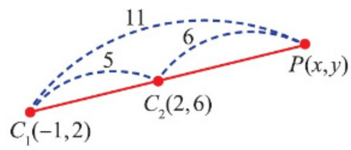
当 $a=-116$，$r_1=11$，切点 P 为外分线段 C_1C_2 成 $11:6$ 的点。

因此 $\left(\dfrac{6(-1)+5(x)}{6+5},\dfrac{6(2)+5(y)}{6+5}\right)=(2,6)$

得 $x=\dfrac{28}{5}$，$y=\dfrac{54}{5}$，

即切点为 $\left(\dfrac{28}{5},\dfrac{54}{5}\right)$。



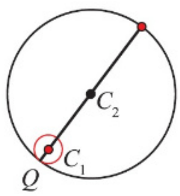


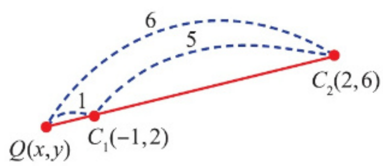
当 $a=4$，$r_1=1$，切点 Q 为外分线段 C_1C_2 成 $1:6$ 的点。

因此 $\left(\dfrac{1(2)+5(x)}{1+5},\dfrac{1(6)+5(y)}{1+5}\right)=(-1,2)$

得 $x=-\dfrac{8}{5}$，$y=\dfrac{6}{5}$，

即切点为 $\left(-\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5}\right)$。





随堂练习 16.5

1. 判断两圆的位置关系：

   (a) $(x+1)^2+(y-2)^2=32$，$(x-1)^2+y^2=8$。

   (b) $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，$x^2+y^2-1=0$。

2. 若圆 $x^2+y^2+2x-4y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2-14x-16y+77=0$ 外切，

   (a) 求 a 的值。

   (b) 在坐标图上，绘出两圆的图像，并求出两圆的切点坐标。

   (c) 从 (b) 的图像，绘出两圆的所有公切线。

习题 16.5

1. 已知两圆的方程式为 $x^2+y^2=4$ 及 $x^2+y^2-2ax+6y+a^2=0$。问，

   (a) 当 a 为何值时两圆外切？

   (b) 当 a 为何值时两圆内切？

2. 已知一圆的圆心为 $(3,-1)$，且与圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 外切。求此圆的方程式。

3. 已知一圆的半径为 4，且与圆 $x^2+y^2+8x-10y-23=0$ 内切于点 $(4,5)$。求此圆的方程式。

4. 若圆 $x^2+y^2-4x+6y+c=0$ 与圆 $x^2+y^2+10x+4y-43=0$ 内切，求 c 的值、切点的坐标及公切线的方程式。

5. 在两圆的交点 A 处做两圆的切线，如果这两条切线互相垂直，则称此两圆正交。

   (a) 如果两圆正交于点 A，描述点 A 与两圆圆心点形成的几何图形。

   (b) 应用 (a) 所得的几何图像的性质，证明圆 $x^2+y^2-x+4y-3=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2y=0$ 正交。

总复习题 16

1. 已知 $A(3,-4)$ 及 $B(4,5)$ 两点，若 P 是一动点使得 $AP^2+BP^2=60$，求点 P 的轨迹方程式，并描述其几何意义。

2. 已知点 $A(1,2)$ 及直线 $x=-3$，若 P 是一动点使得点 P 到点 A 的距离等于点 P 到直线 l 的距离，求点 P 的轨迹方程式。

3. 已知两条直线 $l_1: 2x+y=2$ 及 $l_2: x-2y=6$。若动点 P 到 l_1 及 l_2 的距离之比为 $1:2$，求点 P 的轨迹方程式。

4. 已知 P 是圆 $x^2+y^2=9$ 上的一动点，$Q(9,12)$ 是一定点。若点 R 内分线段 PQ 成 $2:1$，求点 R 的轨迹方程式，并说明其几何意义。

5. 已知直线 l 经过点 $(1,2)$ 且与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A、B 两点，M 是线段 AB 的中点。若直线 l 的斜率为 m，
   (a) 求点 M 的坐标。（以 m 表示）
   (b) 当 m 变动时，求点 M 的轨迹方程式。

6. 已知一等腰三角形 ABC 的顶点是 $A(4,2)$，且其底边的其中一个端点是 $B(3,5)$，求底边另一个端点 C 的轨迹方程式，并说明其几何意义。

7. 已知一圆经过点 $A(5,-7)$ 及点 $B(7,7)$，且其在点 A 的切线斜率为 $\frac{13}{9}$，求此圆的方程式。

8. 求过圆 $x^2+y^2-2x=0$ 与直线 $x+2y=3$ 的交点，且圆心在 y 轴上的圆的方程式。

9. 求经过圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $x^2+y^2+2x=0$ 的两个交点及点 $(3,2)$ 的圆的方程式。

10. 求以两圆 $x^2+y^2+2x-6y+9=0$ 及 $2x^2+2y^2+3x+y-9=0$ 的圆心为直径的两端点的圆的方程式。

11. 一圆过点 $(2,1)$ 及圆 $x^2+y^2=2x$ 与圆 $x^2+y^2-6y=0$ 的交点。求此圆的方程式。

12. 已知点 $P(11,7)$，若点 Q 是圆 $x^2+y^2-12x+10y+36=0$ 上的一点使得 PQ 的值最大，求点 Q 的坐标。

13. 若圆 $x^2+y^2+4x-8y+c=0$ 与直线 $3x+4y+5=0$ 相交于两点，求 c 的取值范围。

14. 已知直线 $y=k(x-3)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，求 k 的值。

15. 已知直线 l 与直线 $4x+3y+9=0$ 垂直，且与圆 $x^2+y^2-10y=0$ 相切，求直线 l 的方程式。

16. 已知圆过点 $(6,-3)$ 和 $(8,-3)$，且与直线 $2x+y=4$ 相切，求此圆的方程式。

17. 已知一圆经过点 $(2,0)$ 且与直线 $x+y=6$ 相切，求此圆的圆心的轨迹方程式。

18. 一动点 P 到圆 $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ 的切距与该圆的半径相等，求点 P 的轨迹方程式。

19. 圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点有几个？

20. 设三角形三边所在直线的方程式为 $3x-4y+16=0$，$4x+3y+8=0$ 及 $x+8=0$。求其内切圆的方程式。

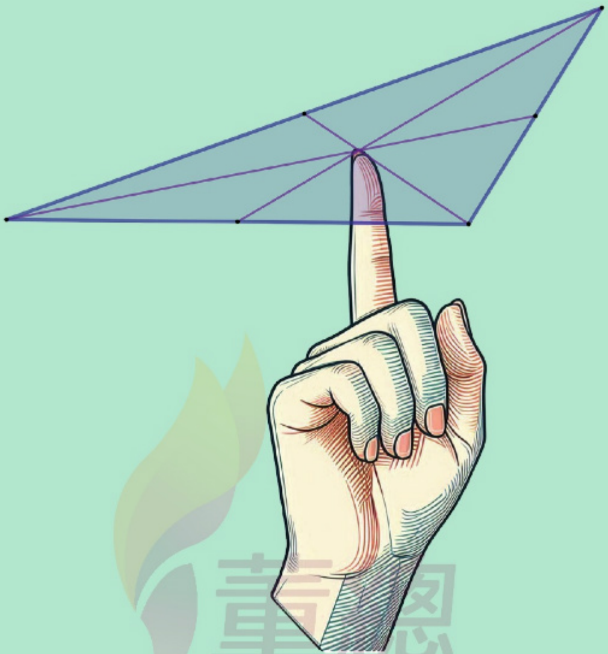
21. 从点 $A(-3,3)$ 所发出的光线 l 射到 x 轴上，经 x 轴反射后，其反射光线所在的直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求直线 l 的方程式。

22. 已知两圆 $x^2+y^2-2mx+4y+\left(m^2-5\right)=0$ 及 $x^2+y^2+2x-2my+\left(m^2-3\right)=0$。在下列各情况下，求 m 的值。
    (a) 两圆外切。
    (b) 两圆内切。
    (c) 两圆相交。

23. 地震学家可应用三个圆的交点寻获震央的位置。其中圆半径为震央与地震仪的距离，圆心为各地震仪的位置。若三个地震仪分别位于平面上 $(1,4)$，$(4,2)$ 及 $(-2,-2)$，而各地震仪和央中的距离分别是 2，3 及 5。求出震央的位置坐标。

24. 已知圆 $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ 与 $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$。
    (a) 如果此两圆正交，证明 $2(g_1g_2+f_1f_2)=c_1+c_2$。
    (b) 如果圆 $x^2+y^2+x-3y=0$ 与圆 $x^2+y^2+by-3=0$ 正交，应用 (a) 的结果，求 b 的值。

在初中，我们学过三角形的三条中线会相交于一点，这点称为该三角形的重心。利用本章的知识我们可以很容易的证明这个性质。



在物理，我们学过标量与矢量的分别。像温度、时间、长度、面积等物理量，只需用一个数字来描述，我们称它们为标量或纯量，而像位移及力这些物理量，除了需要用数字来描述它们的大小，也需要描述它们的方向，我们称它们为向量或矢量。本章中，我们将从数学的角度重温这个熟悉的观念，并探讨二维空间中向量的代数运算及应用。

17

平面向量

学习目标

- 掌握平面向量的概念
- 掌握平面向量的加减法及数乘
- 掌握直角坐标系中的向量表示法及运算
- 能求向量的长度
- 能应用向量解决问题

17.1 向量

如图17–1所示，可以用一个有向的线段来表示一个向量 (vector)，有向线段的长度与方向分别表示向量的大小 (magnitude) 与方向 (direction)。若有向线段的端点是 A 与 B，方向是由 A 指向 B，如图 17–1 所示，则我们可以将这个向量写成 $\overrightarrow{AB}$，A 是向量的起点，B 是向量的终点。我们可以将它想象成由点 A 运动至点 B 的物体的位移 (displacement)。另外，我们也常用 $\underline{a}$，$\underset{\sim}{a}$，$\vec{a}$ 或 $\boldsymbol{a}$ 来表示一个向量。

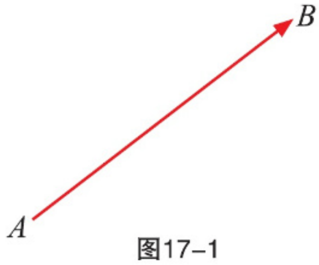


图17–1

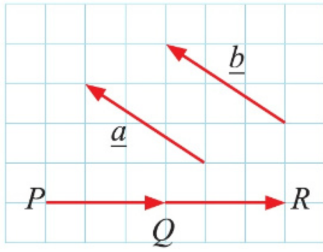
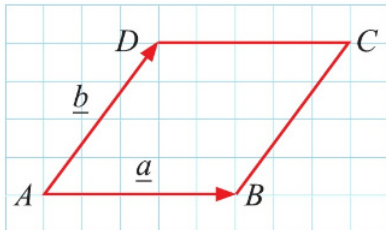


图17–2

两个向量相等，若且唯若它们的大小相等，方向相同。如图17–2中，$\underline{a}=\underline{b}$，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QR}$。

例题 1

右图中，$ABCD$ 是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AD}=\underline{b}$。以 $\underline{a}$ 及 $\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$ 及 $\overrightarrow{DC}$。



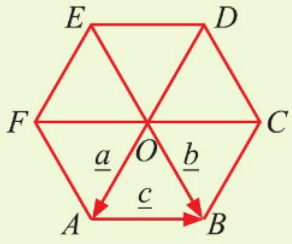
解 $\overrightarrow{BC}=\underline{b}$

$\overrightarrow{DC}=\underline{a}$

想一想 1 在正方形 $ABCD$ 中，向量 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ 吗?

随堂练习 17.1a

右图中，$ABCDEF$ 是正六边形，O 是其中心。已知 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，$\overrightarrow{AB}=\underline{c}$。以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 及 $\underline{c}$ 表示下列各向量。



$\overrightarrow{OC}$		$\overrightarrow{CB}$		$\overrightarrow{FA}$	
$\overrightarrow{DO}$		$\overrightarrow{DC}$		$\overrightarrow{ED}$	
$\overrightarrow{EO}$		$\overrightarrow{FO}$		$\overrightarrow{EF}$	

向量的加法

图 17–3 中，$\overrightarrow{PQ}=\underline{a}$，$\overrightarrow{QR}=\underline{b}$。若小明在一小时内由点 P 运动至点 Q，然后在下一小时内由点 Q 运动至点 R，则向量 $\underline{a}$ 为他在第一小时内的位移，而向量 $\underline{b}$ 为他在第二小时内的位移。显然的，他在这两个小时内的位移为向量 $\overrightarrow{PR}$。由此可知，我们应该定义向量 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的和 $\underline{a}+\underline{b}$ 为 $\overrightarrow{PR}$。

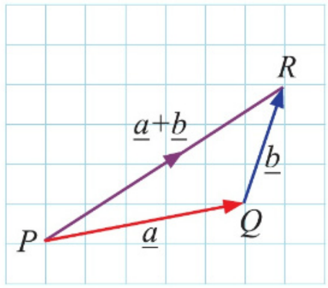


图17–3

换言之，若我们要求向量 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的和 $\underline{a}+\underline{b}$，我们将向量 $\underline{b}$ 的起点放在向量 $\underline{a}$ 的终点，则以向量 $\underline{a}$ 的起点为起点，向量 $\underline{b}$ 的终点为终点的向量就是 $\underline{a}+\underline{b}$。这个求向量和的方法称为向量求和的三角形法则 (triangle rule)。

在图 17–4 中，我们将向量 $\underline{b}$ 的起点平移至向量 $\underline{a}$ 的起点使得 $\overrightarrow{PS}=\underline{b}$，则 $PQRS$ 为平行四边形。这告诉我们，若两个向量的起点相同，这两个向量的和就是由这两个向量所张出的平行四边形的对角线。这个求向量和的方法称为向量求和的平行四边形法则 (parallelogram rule)。

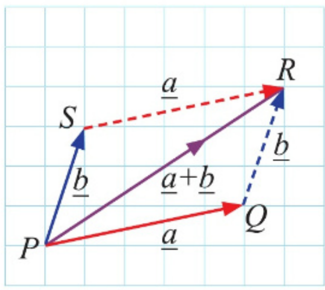


图17–4

由图 17–5 可以看出，

$$\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{a}$$

换言之，向量的加法满足交换律。

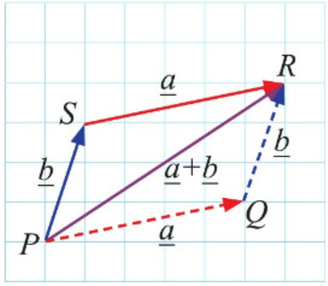


图17–5

在图 17–6 中，$\overrightarrow{OP}=\underset{\sim}{a}$，$\overrightarrow{PQ}=\underset{\sim}{b}$，$\overrightarrow{QR}=\underset{\sim}{c}$。

$$(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b})+\underset{\sim}{c}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\right)+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}$$

$$\underset{\sim}{a}+(\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c})=\overrightarrow{OP}+\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}\right)=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}$$

因此，向量的加法也满足结合律:

$$(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b})+\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{a}+(\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c})$$

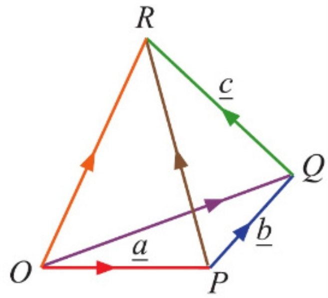


图17–6

由此可得，多个向量相加，我们可以按任意的顺序让它们首尾相接，第二个向量的起点接在第一个向量的终点，第三个向量的起点接在第二个向量的终点，依此类推。那么以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点的向量，就是这些向量的和。

向量加法与标量加法的区别

向量加法与标量加法在概念上有着明显的区别。为了更直观地理解这一点，让我们通过两个实际例子来进行阐释。

首先，考虑一次简单的旅行。如果你从吉隆坡国际机场出发，乘坐计程车到谷中城，行驶了 56 公里。在谷中城稍作停留后，你继续前往加影，再行驶了 24 公里。整个旅程的总距离，就是将两段距离简单相加，即 56 公里 + 24 公里 = 80 公里。在这里，我们仅关注距离的累积总和，而不关心行进的方向，这正是标量加法的特点。

再来一个与方向相关的例子：拔河比赛。假设 A 队向东方向施加了 1500 N（牛顿）的力，而 B 队向相反方向，即西方向施加了 1600 N 的力。在这

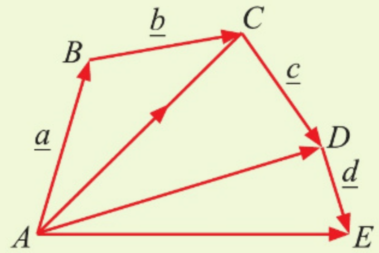
种情况下，两队的合力是两个力的向量和，可以通过相反的力量值相抵消来计算，即 1500 N − 1600 N = − 100 N 。这意味着合力的方向指向西方，并且其大小为 100 N 。这里，我们不仅关注力的大小，还关注力的方向，因此这是一个向量加法的例子。

通过这两个例子，我们可以看出，标量加法关注的是量的累积，而向量加法则同时考虑了量的大小和方向。

随堂练习 17.1b

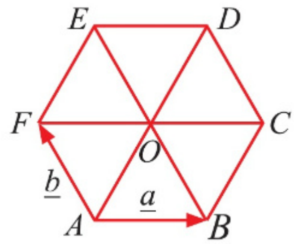
右图中，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{BC}=\underline{b}$，$\overrightarrow{CD}=\underline{c}$，$\overrightarrow{DE}=\underline{d}$。以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 及 $\underline{c}$ 表示下列各向量。

(a) $\overrightarrow{AC}$　　(b) $\overrightarrow{AD}$　　(c) $\overrightarrow{AE}$



例题 2

右图中，$ABCDEF$ 是正六边形，O 是其中心。已知 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AF}=\underline{b}$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{BC}$，并说出这两个向量的关系。



解 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\underline{a}+\underline{b}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\underline{b}+\underline{a}$

$\therefore\ \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}$

零向量与逆向量

若 $\overrightarrow{AB}$ 是一向量，则 $\overrightarrow{BA}$ 是与 $\overrightarrow{AB}$ 长度相等，方向相反的向量，如图 17–7 所示。按照向量相加的法则，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ 是以 A 为起点，也以 A 为终点的向量，因此它的长度等于 0。

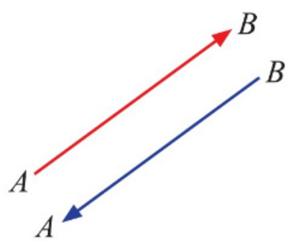


图17–7

我们称长度等于 0 的向量为零向量 (zero vector)，以 $\vec{0}$，$\underline{0}$，$\underset{\sim}{0}$ 或 $\mathbf{0}$ 表示。我们有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$$

想一想 2 零向量与零一样吗?

因此，我们称 $\overrightarrow{BA}$ 为 $\overrightarrow{AB}$ 的逆向量 (inverse vector)，以 $-\overrightarrow{AB}$ 表示，即

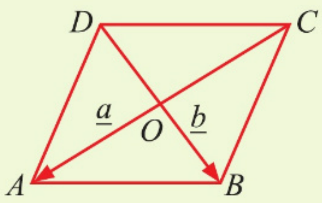
$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

补充资料 零向量的方向是任意的。

同时，逆向量的概念也可以用 $-\underline{v}$ 来表示，它与原向量 $\underline{v}$ 大小相同但方向相反。因此，我们有 $\underline{v}+(-\underline{v})=\underline{0}$ 。

随堂练习 17.1c

右图中，$ABCD$ 是平行四边形。已知 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OD}$ 。



向量的减法

向量的减法就是与逆向量的加法，即 $\underline{a}-\underline{b}=\underline{a}+(-\underline{b})$，其步骤如图 17–8。

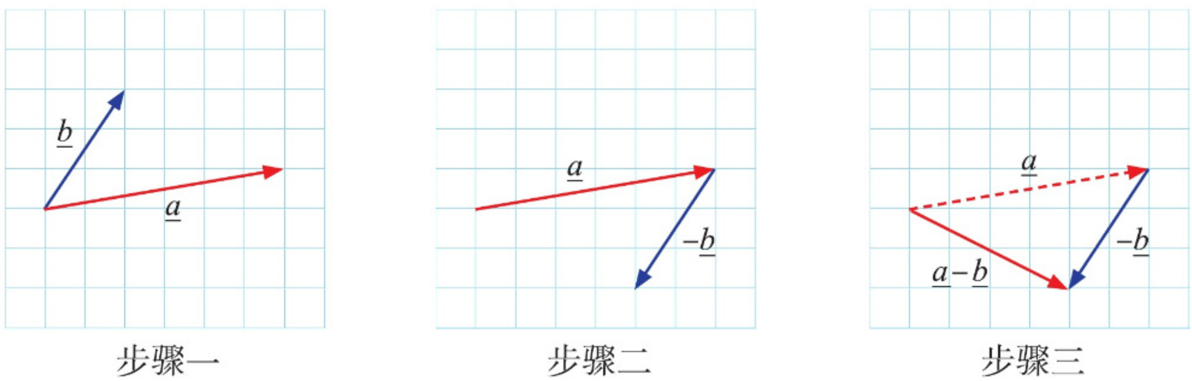
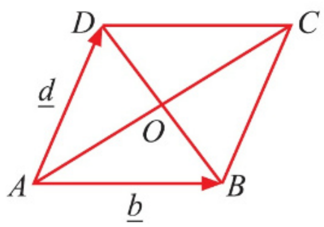


图17–8

例题 3

右图中，$ABCD$ 是平行四边形。已知 $\overrightarrow{AB}=\underline{b}$，$\overrightarrow{AD}=\underline{d}$，以 $\underline{b}$，$\underline{d}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{BD}$。



解 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\underline{b}+\underline{d}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\underline{b}+\underline{d}=\underline{d}-\underline{b}$

向量的数乘

向量可以通过数乘进行伸缩。如图 17–9 所示，$\overrightarrow{PQ}=2\underline{a}$ 表明 $\overrightarrow{PQ}$ 是原始向量 $\underline{a}$ 的两倍长度。同理，$\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\underline{a}$ 的长度是 $\underline{a}$ 的一半。对于 $\overrightarrow{TU}=-\underline{a}$，这表示 $\overrightarrow{TU}$ 与 $\underline{a}$ 等长但方向相反。

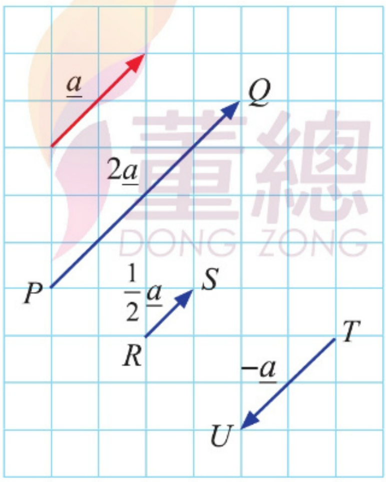


图17–9

对于任意的实数 k，我们定义

- ▶ 如果 $k>0$，$k\underline{a}$ 是与 $\underline{a}$ 的方向相同，长度等于 $\underline{a}$ 的长度的 k 倍的向量。
- ▶ 如果 $k<0$，$k\underline{a}$ 是与 $\underline{a}$ 的方向相反，长度等于 $\underline{a}$ 的长度的 $|k|$ 倍的向量。
- ▶ $0\underline{a}=\underline{0}$。

我们注意到，

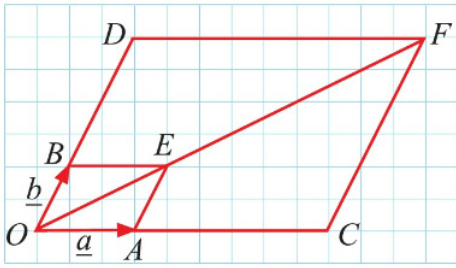
> 向量 $\underline{a}$ 与向量 $\underline{b}$ 平行 $\Leftrightarrow$ 存在非零常数 k 使得 $\underline{b}=k\underline{a}$。

另一方面，向量的数乘 (multiplication of vector by a scalar) 有以下的性质：

$$k(l\underline{a}) = (kl)\underline{a} = kl\underline{a}$$
$$(k+l)\underline{a} = k\underline{a} + l\underline{a}$$
$$k(\underline{a}+\underline{b}) = k\underline{a} + k\underline{b}$$

例题 4

右图中，已知 $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$，$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$。以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ 及 $\overrightarrow{OF}$。



解 由向量求和的平行四边形法则，

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \underline{a} + \underline{b}$$

$OC = 3OA$ 且 $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的方向相同，

$$\therefore \quad \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} = 3\underline{a}$$

$OD = 3OB$ 且 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的方向相同，

$$\therefore \quad \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OB} = 3\underline{b}$$

由向量求和的平行四边形法则，

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 3\underline{a} + 3\underline{b}$$

在例题 4 中，我们观察到，$OF = 3OE$ 且 $\overrightarrow{OF}$ 与 $\overrightarrow{OE}$ 的方向相同。因此，我们也有

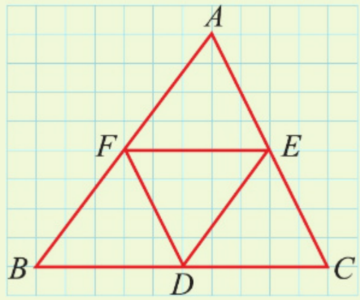
$$\overrightarrow{OF} = 3\overrightarrow{OE} = 3(\underline{a}+\underline{b})$$

换言之，我们验证了

$$3(\underline{a}+\underline{b}) = 3\underline{a} + 3\underline{b}$$

随堂练习 17.1d

右图中，已知 $\overrightarrow{AB}=\underset{\sim}{b}$， $\overrightarrow{AC}=\underset{\sim}{c}$。以 $\underset{\sim}{b}$， $\underset{\sim}{c}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$， $\overrightarrow{DF}$， $\overrightarrow{DE}$ 及 $\overrightarrow{FE}$。



习题 17.1

1. 化简下列各式：

(a) $3(-4\underset{\sim}{a})$ (b) $-2(-5\underset{\sim}{b})$

(c) $\underset{\sim}{a}-6\underset{\sim}{a}$ (d) $-\frac{1}{2}\underset{\sim}{b}-\frac{1}{3}\underset{\sim}{b}$

(e) $2(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b})-3(\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b})$ (f) $\frac{1}{2}(\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b})+\frac{1}{3}(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b})$

2. (a) 求向量 $\underset{\sim}{x}$ 使得 $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{b}-\underset{\sim}{x}$。
(b) 求向量 $\underset{\sim}{x}$ 使得 $2\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{a}=3\underset{\sim}{b}+5\underset{\sim}{x}$。

3. 根据右图，填空：

(a) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=$ ________

(b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=$ ________

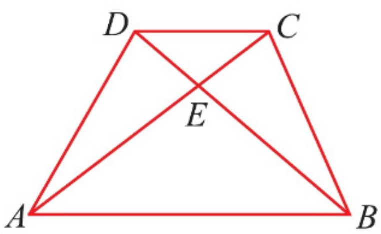
(c) $\overrightarrow{AE}+$ ________ $=\overrightarrow{AB}$

(d) $\overrightarrow{AD}+$ ________ $+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$

(e) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=$ ________

(f) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=$ ________

(g) $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}=$ ________

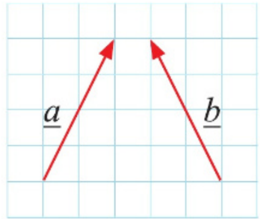


第3题用图

4. 右图所示为向量 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$。若

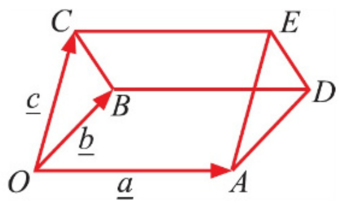
$$(h-3)\underline{a}=(k+2)\underline{b}$$

求 h 及 k 的值。



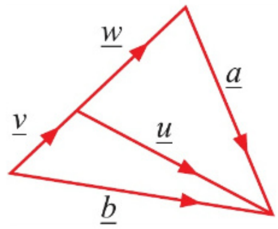
第4题用图

5. 右图中，$OADB$ 与 $OAEC$ 是平行四边形，$\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，$\overrightarrow{OC}=\underline{c}$。以 $\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{OD}$ 及 $\overrightarrow{OE}$。



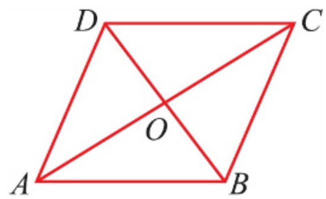
第5题用图

6. 根据右图，
   (a) 化简 $\underline{a}-\underline{u}$。
   (b) 化简 $\underline{v}+\underline{u}-\underline{b}$。
   (c) 求 $\underline{x}$ 使得 $\underline{x}+\underline{w}=\underline{u}$。
   (d) 求 $\underline{x}$ 使得 $\underline{x}-\underline{a}=\underline{v}+\underline{w}$。
   (e) 求 $\underline{x}$ 使得 $\underline{w}-\underline{x}=\underline{b}-\underline{a}$。



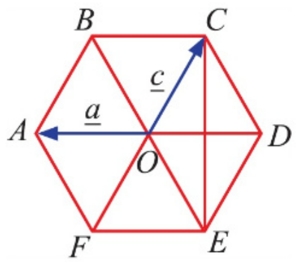
第6题用图

7. 右图中，$ABCD$ 是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{DB}=\underline{b}$。以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{OA}$。



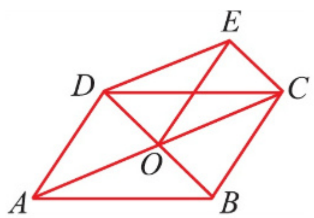
第7题用图

8. 右图中，$ABCDEF$ 是正六边形，$\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OC}=\underline{c}$。以 $\underline{a}$，$\underline{c}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{BE}$ 及 $\overrightarrow{CE}$。



第8题用图

9. 右图中，$ABCD$ 是平行四边形，O 是 AC 与 BD 的交点，$OCED$ 也是平行四边形。若 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{BO}=\underline{b}$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$ 及 $\overrightarrow{OE}$。



第9题用图

17.2 直角坐标系中的向量

在上一节，我们发现，若将两个向量放在“方格”纸上，便很容易判断这两个向量是否平行。在这一节，我们将详细讨论在直角坐标系中研究向量的方法。

位置向量

如图 17–10 所示，在平面上固定一点 O 为参考点，平面上的一点 P 便对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，称为点 P 相对于点 O 的位置向量 (position vector)。由于位置向量有相同的起点，因此两个位置向量相同，若且唯若它们所对应的点相同。因此，通过位置向量，我们便建立起平面上的点与平面向量的一一对应关系。

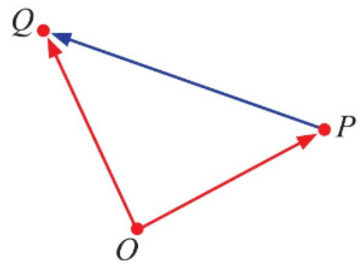


图17–10

若点 Q 是平面上的另一点，它对应的位置向量便是 $\overrightarrow{OQ}$，而向量 $\overrightarrow{PQ}$ 就可以用位置向量表示：

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

直角坐标系中的向量

在初中，我们已学过用序偶 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 来表示一个平移。在平面上建立一个直角坐标系，以坐标系的原点 O 作为位置向量的起点，则点 $P(x, y)$ 对应的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 可以用序偶表示：$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，称为向量的坐标表示法。

在图 17–11 中，可得 $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$。

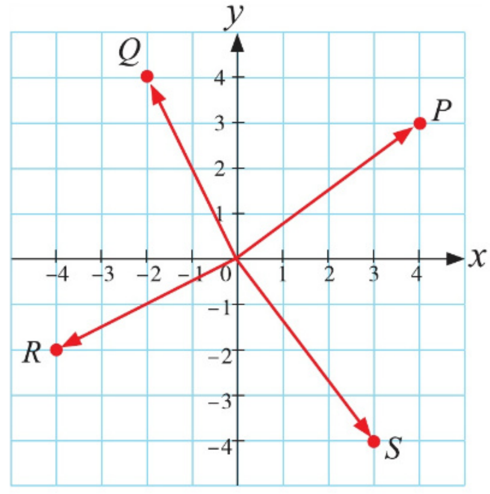


图17–11

如图 17–12 所示，我们以 $|\underline{a}|$ 来表示向量 $\underline{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 的大小 (magnitude) 或长度，它是连接点 (x, y) 与原点的线段的长度。由距离公式可得，

> 向量 $\underline{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 的大小为 $|\underline{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

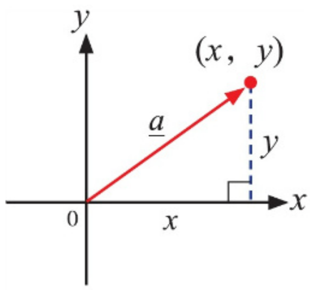


图17–12

例题 5

求向量 $\underline{p}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ 的大小。

解 $|\underline{p}|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}$

随堂练习 17.2a

求下列各向量的大小：

(a) $\underline{a}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ (b) $\underline{b}=\begin{pmatrix}-12\\-5\end{pmatrix}$

长度为 1 的向量称为单位向量(unit vector)。如图 17–13 所示，在直角坐标系中，有两个特殊的单位向量，分别是方向指向正 x 轴及正 y 轴的单位向量，它们是对应于点 $(1,0)$ 与点 $(0,1)$ 的位置向量，以 $\underline{i}$ 及 $\underline{j}$ 表示，即

$$\underline{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \underline{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

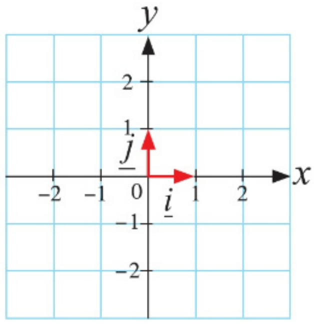


图17–13

利用 $\underline{i}$ 及 $\underline{j}$，任何向量 $\underline{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 可以表示成

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\underline{i}+y\underline{j}$$

$x\underline{i}$ 及 $y\underline{j}$ 分别是向量 $\underline{a}$ 在 $\underline{i}$ 及 $\underline{j}$ 方向的分量(component vector)。如图 17–14 所示的向量 $\overrightarrow{OP}$ 可以表示成 $4\underline{i}+3\underline{j}$。

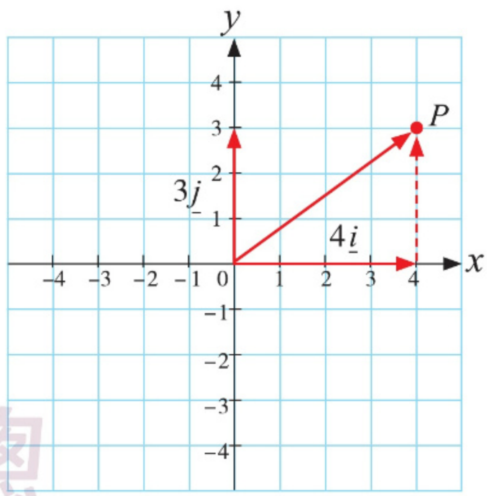


图17–14

以坐标表示后，向量的加法与数乘便可以很容易地计算。

$$\begin{aligned}k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=k\left(x\underline{i}+y\underline{j}\right)\\&=kx\underline{i}+ky\underline{j}\\&=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}&=x_1\underline{i}+y_1\underline{j}+x_2\underline{i}+y_2\underline{j}\\&=\left(x_1+x_2\right)\underline{i}+\left(y_1+y_2\right)\underline{j}\\&=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$$

补充资料

在物理中，将一个力 $\vec{F}$ 写成 $\vec{F}=\vec{F}_x+\vec{F}_y=F_x\underline{i}+F_y\underline{j}$ 就是将一个力分解成水平与垂直方向的分力。

如图 17–15 所示，若 $P(x_1, y_1)$ 与 $Q(x_2, y_2)$ 是平面上两点，则

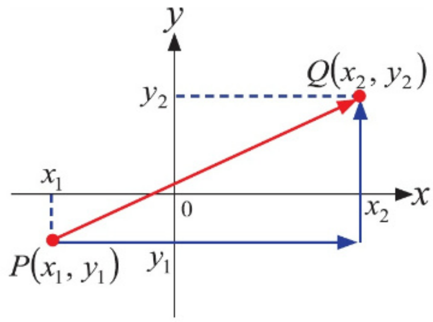


图17–15

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}=(x_2-x_1)\underline{i}+(y_2-y_1)\underline{j}$$

它的大小为 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 。

例题 6

已知向量 $\underline{a}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$， $\underline{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$，求常数 k 与 l 使得 $\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}=k\underline{a}+l\underline{b}$ 。

解

$$k\underline{a}+l\underline{b}=\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}$$

$$k\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2k\\5k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2l\\3l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2k-2l\\5k+3l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}$$

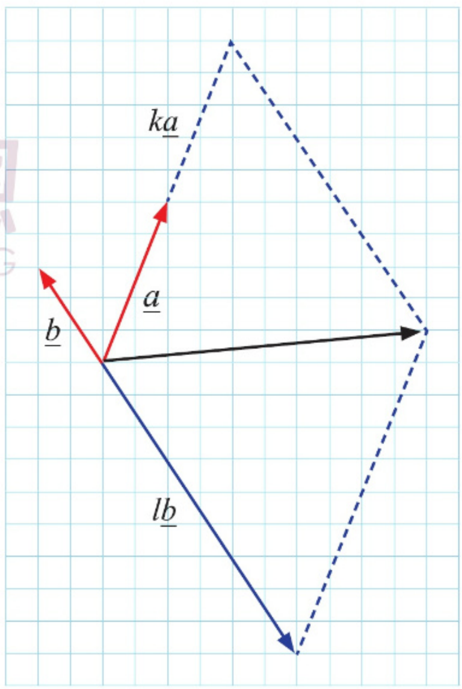
$$\therefore \begin{cases}2k-2l=10 & \text{------}(1)\\5k+3l=1 & \text{------}(2)\end{cases}$$

由 (1) 得： $k-l=5$ ------(3)

$(2)+(3)\times 3$ 得： $8k=16$

$k=2$

$l=-3$



随堂练习 17.2b

已知 $\underset{\sim}{a}+2\underset{\sim}{b}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$，$2\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$，求向量 $\underset{\sim}{a}$ 及 $\underset{\sim}{b}$。

例题 7

已知向量 $\underset{\sim}{a}=m\underset{\sim}{i}-4\underset{\sim}{j}$ 及 $\underset{\sim}{b}=3\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$。若向量 $\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$ 平行，求 m 的值。

解 由于向量 $\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$ 平行，存在常数 k 使得

$$\underset{\sim}{a}=k\underset{\sim}{b}$$

$$\begin{pmatrix}m\\-4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{cases}m=3k\\-4=2k\end{cases}$$

$$\frac{m}{3}=-\frac{4}{2}$$

$$\therefore\ m=-6$$

补充资料：例题 7 中，我们可以直接由 $\underset{\sim}{a}=m\underset{\sim}{i}-4\underset{\sim}{j}$ 与 $\underset{\sim}{b}=3\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$ 平行而得 $\frac{m}{3}=\frac{-4}{2}$。

随堂练习 17.2c

已知向量 $\underset{\sim}{a}=(2k+1)\underset{\sim}{i}-k\underset{\sim}{j}$ 与向量 $\underset{\sim}{b}=9\underset{\sim}{i}-6\underset{\sim}{j}$ 平行，求 k 的值。

例题 8

已知 $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$。若点 C 的坐标为 $(1,4)$，求点 A 及点 B 的坐标，并求向量 $\overrightarrow{AC}$。

解

$$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

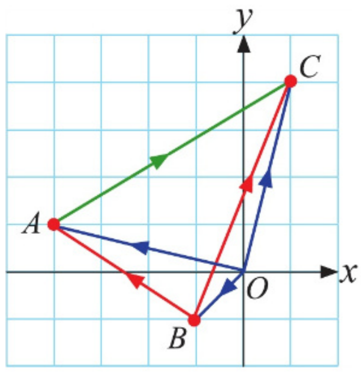
$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-1,-1)$。

$$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$$



$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-4,1)$。

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

随堂练习 17.2d

已知 $A(-3,5)$，$B(7,6)$ 及 $C(4,-3)$ 三点，求 $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$。

由向量的数乘的定义可知，若 k 是一常数，向量 $k\underset{\sim}{a}$ 的大小是向量 $\underset{\sim}{a}$ 的 $|k|$ 倍，即

$$\left|k\underset{\sim}{a}\right| = |k|\left|\underset{\sim}{a}\right|$$

注意

$|k|$ 表示实数 k 的绝对值，$\left|\underset{\sim}{a}\right|$ 表示向量 $\underset{\sim}{a}$ 的大小。

因此，若 $\underset{\sim}{a}$ 是一非零向量，与 $\underset{\sim}{a}$ 同方向的单位向量为

$$\hat{\underset{\sim}{a}} = \frac{\underset{\sim}{a}}{\left|\underset{\sim}{a}\right|}$$

例题 9

已知向量 $\underset{\sim}{a} = 3\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}$，

(a) 求与 $\underset{\sim}{a}$ 同方向的单位向量。

(b) 求方向与 $\underset{\sim}{a}$ 相反，大小等于 20 的向量 $\underset{\sim}{b}$。

(c) 求与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量。

解 (a) $\left|\underset{\sim}{a}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

与 $\underset{\sim}{a}$ 同方向的单位向量 $\hat{\underset{\sim}{a}} = \dfrac{\underset{\sim}{a}}{\left|\underset{\sim}{a}\right|} = \dfrac{3}{5}\underset{\sim}{i} - \dfrac{4}{5}\underset{\sim}{j}$。

(b) $\underset{\sim}{b} = -20\hat{\underset{\sim}{a}}$

$$= -20\left(\frac{3}{5}\underset{\sim}{i} - \frac{4}{5}\underset{\sim}{j}\right)$$

$$= -12\underset{\sim}{i} + 16\underset{\sim}{j}$$

(c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$= \left(-12\underset{\sim}{i} + 16\underset{\sim}{j}\right) - \left(3\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}\right)$$

$$= -15\underset{\sim}{i} + 20\underset{\sim}{j}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-15)^2 + 20^2} = 25$$

与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{1}{25}\left(-15\underset{\sim}{i} + 20\underset{\sim}{j}\right) = -\dfrac{3}{5}\underset{\sim}{i} + \dfrac{4}{5}\underset{\sim}{j}$。

随堂练习 17.2e

已知 $A(-2,5)$，$B(-7,-7)$ 两点。求与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量。

习题 17.2

1. 求下列各向量的大小：

   (a) $\underset{\sim}{a}=\begin{pmatrix}-8\\15\end{pmatrix}$ (b) $\underset{\sim}{b}=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$

   (c) $\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{i}-2\underset{\sim}{j}$ (d) $\underset{\sim}{d}=-\sqrt{3}\underset{\sim}{i}-2\underset{\sim}{j}$

2. 已知 $\underset{\sim}{a}=6\underset{\sim}{i}-5\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{b}=7\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$，求下列各向量：

   (a) $5\underset{\sim}{a}+3\underset{\sim}{b}$ (b) $7\underset{\sim}{a}-6\underset{\sim}{b}$

3. 已知向量 $\underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{b}=-2\underset{\sim}{i}+3\underset{\sim}{j}$ 及 $\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{i}$，求常数 k 及 l 使得 $\underset{\sim}{c}=k\underset{\sim}{a}+l\underset{\sim}{b}$。

4. 已知 $3\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$，$-\underset{\sim}{a}+2\underset{\sim}{b}=\begin{pmatrix}9\\-16\end{pmatrix}$，求 $\underset{\sim}{a}$ 及 $\underset{\sim}{b}$。

5. 已知 $A(-2,-3)$，$B(-4,6)$ 及 $C(8,-5)$ 三点，求 $3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{CB}$。

6. 已知 $\overrightarrow{AB}=5\underset{\sim}{i}-4\underset{\sim}{j}$，$\overrightarrow{AC}=-6\underset{\sim}{i}-2\underset{\sim}{j}$，点 B 的坐标为 $(-1,-2)$，求点 A 及点 C 的坐标，并求 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\left|\overrightarrow{BC}\right|$。

7. 已知 $A(-2,-3)$，$B(-4,6)$ 及 $C(8,-5)$ 三点，若 $\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{BA}$，求点 P 的坐标。

8. 已知向量 $\underset{\sim}{a}=4\underset{\sim}{i}-6\underset{\sim}{j}$ 与向量 $\underset{\sim}{b}=-6\underset{\sim}{i}+k\underset{\sim}{j}$ 平行，求 k 的值。

9. 若向量 $\underset{\sim}{a}=2\underset{\sim}{i}+p\underset{\sim}{j}$ 与向量 $\underset{\sim}{b}=(7+p)\underset{\sim}{i}+4\underset{\sim}{j}$ 平行，求 p 的值，并求 $|\underset{\sim}{a}|:|\underset{\sim}{b}|$。

10. 已知 $A(2,6)$，$B(-3,5)$，$C(6,-4)$ 及 $D(-4,-6)$，

    (a) 求 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{CD}$。 (b) 证明 $AB/\!/CD$。 (c) 求 $AB:CD$。

11. 已知 $\underset{\sim}{a}=-3\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{b}=3\underset{\sim}{i}+5\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{c}=m\underset{\sim}{a}+(1-m)\underset{\sim}{b}$。若 $\underset{\sim}{c}$ 与 $\underset{\sim}{i}$ 平行，求 m 的值。

12. 已知 $\underset{\sim}{b}=-\underset{\sim}{i}+3\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{c}=5\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{j}$，$2\underset{\sim}{a}+3\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{0}$，求 $|\underset{\sim}{a}|$。

13. 已知向量 $\underset{\sim}{a}=6\underset{\sim}{i}-8\underset{\sim}{j}$，
(a) 求与 $\underset{\sim}{a}$ 的方向相同的单位向量。
(b) 求与 $\underset{\sim}{a}$ 的方向相同，长度等于 15 的向量 $\underset{\sim}{b}$。
(c) 求与 $\underset{\sim}{a}$ 的方向相反，长度等于 5 的向量 $\underset{\sim}{c}$。

14. 已知 $A(2,6)$，$B(-3,-6)$ 两点。求方向与 $\overrightarrow{AB}$ 相同，长度等于 10 的向量。

17.3 平面向量的简单应用

向量可以用来解一些平面几何、解析几何及物理的问题。

例题 10

已知平行四边形 $ABCD$ 其中三个顶点的坐标为 $A(1,2)$，$B(5,3)$ 及 $C(7,5)$，求点 D 的坐标。

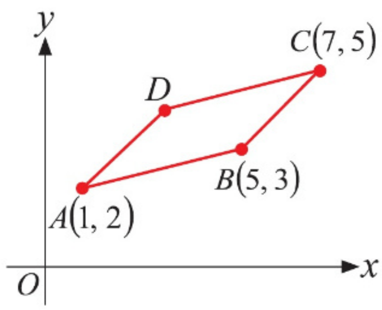
解 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $CD=BA$ 且 $CD//BA$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$



$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(3,4)$。

随堂练习 17.3a

已知 $A(-3,5)$，$B(7,6)$，$C(4,-3)$ 三点。若 D 是平面上一点使得直线 CD 与直线 AB 平行，且 $CD=2AB$，求点 D 的坐标。

例题 11

已知 $A(-3,5)$，$B(7,11)$，$C(h,2)$ 三点共线。求

(a) h 的值。

(b) $AB:BC$。

想一想 3 还有其他方法求 h 吗？

解 (a) $\overrightarrow{BC}=(h-7)\underline{i}-9\underline{j}$

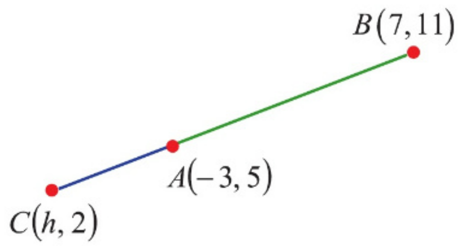
$\overrightarrow{AB}=10\underline{i}+6\underline{j}$

由于 A，B，C 三点共线，

$$\frac{h-7}{10}=\frac{-9}{6}$$

$$h-7=-10\times\frac{3}{2}$$

$$h=-8$$



(b) $\dfrac{AB}{BC}=\left|\dfrac{6}{-9}\right|=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\quad AB:BC=2:3$

随堂练习 17.3b

已知 $P(3,-2)$，$Q(-4,12)$ 及 $R(0,k)$ 三点共线，求

(a) k 的值。

(b) $PR:QR$。

由例题 12 的 (b) 可以看出，向量可以用来求内分点的坐标。

已知 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 两点，若点 P 内分线段 AB 成 $m:n$，如图 17–16 所示，则

$$\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$$

$$n\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{PB}$$

$$n\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)=m\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\right)$$

$$(m+n)\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}$$

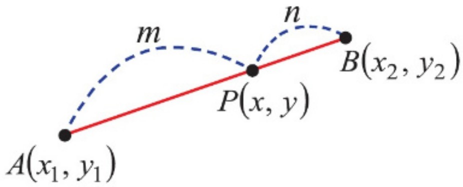


图17–16

因此，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$$

这个形式与高一所学的分点公式是一样的。即，点 P 的坐标为

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)。$$

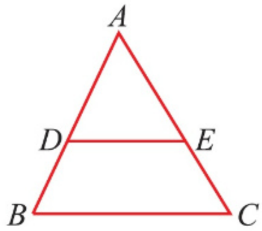
随堂练习 17.3c

已知 $A(8,1)$， $B(-2,-9)$ 两点，用向量的方法求将线段 AB 内分成 $3:2$ 的点 P 的坐标。

向量可以用来证明两直线平行，如例题 12 所示。

例题 12

右图中，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$。证明 $DE/\!/BC$ 且 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$。



解 设 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=m$，则

$$\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}\ ,\quad \overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\\&=m\overrightarrow{AC}-m\overrightarrow{AB}\\&=m\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=m\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

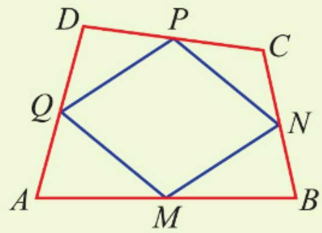
$\therefore\quad DE/\!/BC$ 且 $\dfrac{DE}{BC}=m=\dfrac{AD}{AB}$。

随堂练习 17.3d

右图中，$ABCD$ 是一四边形，M，N，P，Q 分别是 AB，BC，CD 及 DA 的中点。

(a) 证明 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$。

(b) 据此，证明 $MNPQ$ 是平行四边形。



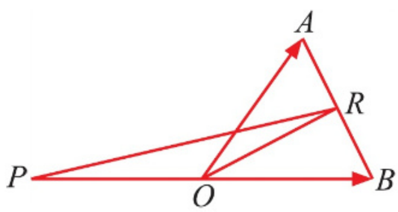
以下的例题是利用向量来证明三点共线。

例题 13

右图中，R 为线段 AB 的中点，Q 是线段 QA 上的一点使得 $OQ=\dfrac{1}{3}OA$。若 $\overrightarrow{OA}=\underset{\sim}{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underset{\sim}{b}$，

(a) 用 $\underset{\sim}{a}$，$\underset{\sim}{b}$ 表示 $\overrightarrow{PQ}$ 及 $\overrightarrow{QR}$。

(b) 据此，证明 P，Q，R 三点共线。



解 (a) $\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OB}=-\underset{\sim}{b}$

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\underset{\sim}{a}$

$\therefore\quad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}$

$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}\right)$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{QR}&=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}\\&=\frac{1}{2}\underset{\sim}{a}+\frac{1}{2}\underset{\sim}{b}-\frac{1}{3}\underset{\sim}{a}\\&=\frac{1}{6}\underset{\sim}{a}+\frac{1}{2}\underset{\sim}{b}\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\overrightarrow{QR}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}\right)\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

$\therefore\quad QR//PQ$

又 QR 与 PQ 有公共点 Q，

$\therefore\quad P$，Q，R 三点共线。

补充资料

要证明 P，Q，R 三点共线，只需证明 PQ、QR、PR 中，其中两个平行即可。

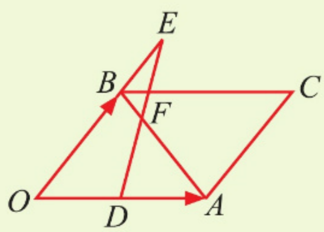
随堂练习 17.3e

右图中，$OACB$ 是平行四边形，D 是线段 OA 的中点，点 E 在 OB 的延长线上，$OB:BE=2:1$，点 F 在 AB 上，$BF:FA=1:3$。若 $\overrightarrow{OA}=\underset{\sim}{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underset{\sim}{b}$，

(a) 以 $\underset{\sim}{a}$，$\underset{\sim}{b}$ 表示 $\overrightarrow{DF}$ 及 $\overrightarrow{EF}$。

(b) 证明 D，E，F 三点共线。

(c) 求 $DE:EF$。



线段上的一点将线段分成两段，这两段线段的长度比可以用向量求得，如以下的例题所示。

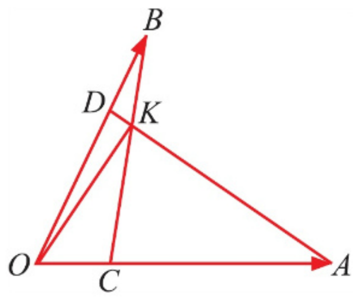
例题 14

右图中，设点 K 是直线 AD 与 BC 的交点。$\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$。$C$，$D$ 分别是 OA 及 OB 上的点使得 $OC:OA=1:4$，$OD:OB=2:3$。

(a) 若 $DK:AK=1:m$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 及 m 表示 $\overrightarrow{OK}$。

(b) 若 $BK:CK=1:n$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 及 n 表示 $\overrightarrow{OK}$。

(c) 据此，求 m 及 n 的值。



解 (a)
$$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\underline{b}$$
$$\because\quad DK:AK=1:m$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{OK}=\frac{\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OD}}{1+m}$$
$$=\frac{1}{1+m}\underline{a}+\frac{2m}{3(1+m)}\underline{b} \qquad \text{------(1)}$$

(b)
$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{4}\underline{a}$$
$$\because\quad BK:CK=1:n$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{OK}=\frac{\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OB}}{1+n}$$
$$=\frac{1}{4(1+n)}\underline{a}+\frac{n}{1+n}\underline{b} \qquad \text{------(2)}$$

(c) 由 (1) 及 (2) 得：
$$\frac{1}{1+m}\underline{a}+\frac{2m}{3(1+m)}\underline{b}=\frac{1}{4(1+n)}\underline{a}+\frac{n}{1+n}\underline{b}$$
$$\therefore\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1+m}=\dfrac{1}{4(1+n)} & \text{------(3)} \\ \dfrac{2m}{3(1+m)}=\dfrac{n}{1+n} & \text{------(4)} \end{cases}$$

由 (3) 得： $m+1=4+4n$

$$m=4n+3 \quad -----(5)$$

将 (5) 代入 (4) 得：

$$\frac{2(4n+3)}{12(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$4n+3=6n$$

$$\therefore \quad n=\frac{3}{2}$$

$$m=9$$

以下的例题是介绍平面向量在物理学中的应用。

例题 15

河水从南向北流，流速为 3 m/s。一船以 4 m/s 的速度从西向东航行，求该船的实际航行速度。

解 设 $\underline{a}=$ “向北方向，3 m/s” $=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$，$\underline{b}=$ “向东航行，4 m/s” $=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$，

$$\underline{a}+\underline{b}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$|\underline{a}+\underline{b}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

答：实际航行速度为 $4\underline{i}+3\underline{j}$， 大小为 5 m/s。

例题 16

已知三个力 $\overrightarrow{F_1}=3\underline{i}-4\underline{j}$，$\overrightarrow{F_2}=-6\underline{i}+8\underline{j}$，$\overrightarrow{F_3}=-3\underline{i}-2\underline{j}$，同时作用于某一质点，其中力的单位为牛顿 ($N$)。

(a) 求物体所受到的合力。

(b) 为使物体保持平衡，现加上一个力 $\overrightarrow{F_4}$，求 $\overrightarrow{F_4}$。

解 (a) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$
$=(3i-4j)+(-6\underset{\sim}{i}+8\underset{\sim}{j})+(-3\underset{\sim}{i}-2\underset{\sim}{j})$
$=-6\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$

(b) 物体保持平衡，合力为零，即
$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{F_4}=-\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right)$
$=-(-6\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j})$
$=6\underset{\sim}{i}-2\underset{\sim}{j}$

答：(a) 合力为 $-6\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$ N。 (b) $\overrightarrow{F_4}$ 为 $6\underset{\sim}{i}-2\underset{\sim}{j}$ N。

习题 17.3

用向量的方法来解下列各题：

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 其中三点的坐标为 $A(0,2)$，$B(-7,3)$ 及 $C(1,5)$，求点 D 的坐标。

2. 已知 $P(h,9)$，$Q(1,3)$，$R(7,-2)$，$S(4,k)$ 为平行四边形 $PQRS$ 的顶点，求 h 与 k 的值。

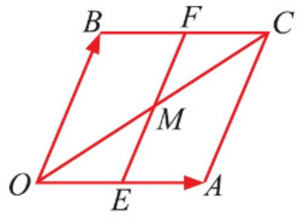
3. 已知 $P(h,3)$，$Q(-2,8)$，$R(14,0)$ 三点共线，
(a) 求 h 的值。
(b) 求 $PQ:PR$。

4. 已知 $B(14,k)$，$C(h,3)$ 两点，点 $A(4,6)$ 内分线段 BC 成 $5:3$，求 h 与 k 的值。

5. 若 $\overrightarrow{OA}=3\underset{\sim}{i}-7\underset{\sim}{j}$，$\overrightarrow{OB}=-4\underset{\sim}{i}+7\underset{\sim}{j}$，$\overrightarrow{OC}=\underset{\sim}{i}-7\underset{\sim}{j}$，$\overrightarrow{BD}=12\underset{\sim}{i}-28\underset{\sim}{j}$，证明 $ABCD$ 是平行四边形。

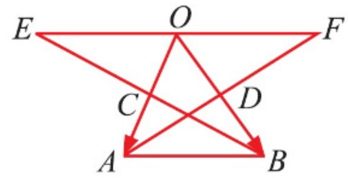
6. 已知 $P(0,5)$，$Q(1,1)$，$R(7,3)$ 是梯形 $PQRS$ 的其中三个顶点，$PS//QR$，$PS:QR=3:2$，求点 S 的坐标。

7. 右图中，$OACB$ 是平行四边形，E，F，M 分别是线段 OA，BC 及 OC 的中点，$\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$。
(a) 以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{EM}$ 及 $\overrightarrow{FM}$。
(b) 证明 E，F，M 三点共线且 $EM=FM$。



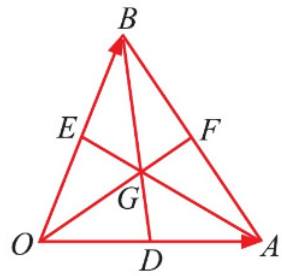
第7题用图

8. 右图中，C，D 分别是线段 OA 及 OB 的中点。分别延长 BC 及 AD 至点 E 及 F 使得 $BC=CE$，$AD=DF$。若 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，
(a) 以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{OE}$ 及 $\overrightarrow{OF}$。
(b) 证明 O，E，F 三点共线。
(c) 证明 $EF//AB$。



第8题用图

9. 右图中，D，E，F 分别是线段 OA，OB 及 AB 的中点。点 G 是直线 AE 与 BD 的交点。$\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$。
(a) 若 $AG:GE=m:1$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 及 m 表示 $\overrightarrow{OG}$。
(b) 若 $BG:GD=n:1$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 及 n 表示 $\overrightarrow{OG}$。
(c) 据 (a) 与 (b)，证明 $m=n=2$。
(d) 证明 O，G，F 三点共线。

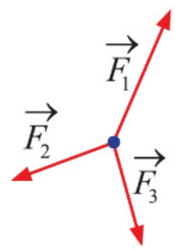


第9题用图

10. 已知 $\underline{a}=4\underline{i}-5\underline{j}$，$\underline{b}=-3\underline{i}+6\underline{j}$，$\underline{c}=5\underline{i}-4\underline{j}$。若 $\underline{c}=h\underline{a}+k\underline{b}$，求 h，k 的值。

11. 河水从西向东流，流速为 5 m/s，一船以 6 m/s 的速度垂直于水流方向向北航行，求该船的
(a) 实际航行速度；
(b) 实际航行速度的大小。

12. 右图中，已知三个力 $\overrightarrow{F_1}=2\underline{i}+h\underline{j}$，$\overrightarrow{F_2}=k\underline{i}-\underline{j}$，$\overrightarrow{F_3}=\underline{i}-3\underline{j}$，同时作用于某一质点，且物体保持平衡，其中力的单位为牛顿 (N)，
(a) 求 h，k 的值。
(b) 若从系统中移除 $\overrightarrow{F_3}$，求作用在物体上的合力大小。
（答案以根式表示）



第12题用图

总复习题 17

1. 是非题：
   (a) 菱形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$。
   (b) 等边三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AB}$ 的长度等于 $\overrightarrow{BC}$ 的长度。
   (c) 两个向量的和的长度总是等于这两个向量长度的和。
   (d) 如果两个向量的长度相等，那么这两个向量一定相等。
   (e) 如果 $\underset{\sim}{v}$ 的每个分量都乘以 -2，则新向量的长度是原来的两倍。
   (f) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\underset{\sim}{0}$
   (g) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
   (h) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$
   (i) $0\overrightarrow{AB}=0$

2. 已知 $\overrightarrow{OA}=\underset{\sim}{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underset{\sim}{b}$，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\underset{\sim}{a}+\frac{2}{3}\underset{\sim}{b}$。证明 A，B，C 三点共线，并求 $AB:BC$。

3. 已知 $A(2,1)$，$B(3,-2)$ 两点，O 是原点。
   (a) 若 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$，求点 C 的坐标。
   (b) 若点 D 的坐标是 $(13,-4)$，求常数 p 与 q 的值使得 $\overrightarrow{OD}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$。

4. 已知 $4\underset{\sim}{a}-5\underset{\sim}{b}=h\underset{\sim}{a}+(k-3)\underset{\sim}{b}$，且 $\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$ 不平行，求 h 与 k 的值。

5. 已知 $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\a\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$，
   (a) 若 O，A，B 三点共线，求 a 的值。
   (b) 若 $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$，求 a 的值。

6. 已知向量 $\underset{\sim}{a}=2\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{i}-2\underset{\sim}{j}$。
   (a) 若 $h\underset{\sim}{a}=k\underset{\sim}{b}$，求 h 与 k 的值。
   (b) 若 $\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{a}+2\underset{\sim}{b}$，求 $\underset{\sim}{c}$ 的单位向量 $\hat{\underset{\sim}{c}}$，并验证 $\hat{\underset{\sim}{c}}$ 的长度为 1。
   (c) 若向量 $\underset{\sim}{d}=10\underset{\sim}{i}+y\underset{\sim}{j}$ 与向量 $\underset{\sim}{a}+2\underset{\sim}{b}$ 平行，求 y 的值。

7. 已知 ΔABC 中，D，E，F 分别是线段 BC，AC 及 AB 的中点。证明 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$。

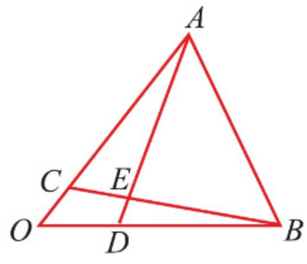
8. 如右图所示，ΔOAB 中，C 及 D 分别是 OA 及 OB 上的点，$OC:CA=1:4$，$OD:DB=1:2$。直线 AD 与 BC 相交于点 E。若 $\overrightarrow{OA}=10\underline{p}$，$\overrightarrow{OB}=9\underline{q}$，

(a) 以 $\underline{p}$，$\underline{q}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$ 及 $\overrightarrow{BC}$。

(b) 若 $\dfrac{AD}{ED}=h$，以 $\underline{p}$，$\underline{q}$ 及 h 表示 $\overrightarrow{OE}$。

(c) 若 $\dfrac{BC}{EC}=k$，以 $\underline{p}$，$\underline{q}$ 及 k 表示 $\overrightarrow{OE}$。

(d) 据此，求 h 及 k 的值。



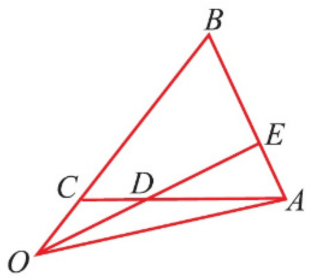
第8题用图

9. 如右图所示，C，D，E 分别是线段 OB，CA 与 AB 上的点，$OC:CB=1:3$，$CD:CA=1:3$，$AE:AB=1:3$。若 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OC}=\underline{c}$，

(a) 以 $\underline{a}$ 及 $\underline{c}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OD}$ 及 $\overrightarrow{OE}$。

(b) 证明 O，D，E 三点共线。

(c) 求 $\dfrac{OD}{OE}$。

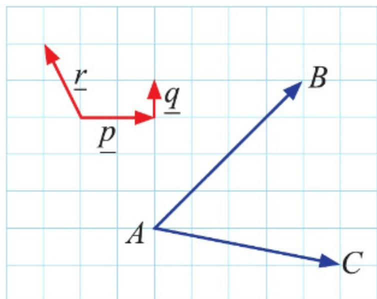


第9题用图

10. 右图中，有三个互不平行的向量 $\underline{p}$，$\underline{q}$ 及 $\underline{r}$。

(a) 以 $\underline{p}$，$\underline{q}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$。

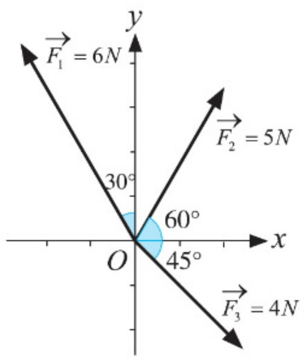
(b) 以 $\underline{q}$，$\underline{r}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$。



第10题用图

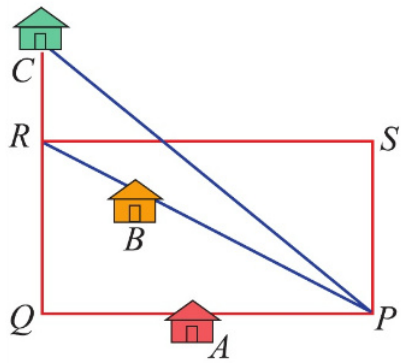
11. 一艘帆船所受的风力方向为北偏东 60°，速度为 20 km/h，此时水的流向是正东，流速为 20 km/h，若不考虑其他因素，求帆船的速度。

12. 如右图所示，三力同时作用于某一质点 O，
(a) 求物体所受到的合力。
(b) 为使物体保持平衡，现加上一个力 $\overrightarrow{F_4}$，求 $\overrightarrow{F_4}$。（答案以根式表示）



第12题用图

13. 右图显示一开发区的道路布局，其形状为矩形 $PQRS$。建筑物 A 为 PQ 的中点且 PA 长 200 m，建筑物 B 在 PR 且 $PB = \frac{3}{4}PR$，建筑物 C 在 QR 的延长路上，$QR = 250$ m 且 $RC = \frac{1}{2}QR$。
(a) 假设 $\underset{\sim}{u}$ 表示从 P 沿 PQ 方向 100 m 的向量，$\underset{\sim}{v}$ 表示从 P 沿 PS 方向 50 m 的向量，以 $\underset{\sim}{u}$，$\underset{\sim}{v}$ 来表示
(i) $\overrightarrow{PR}$
(ii) $\overrightarrow{PB}$
(iii) $\overrightarrow{PC}$
(iv) $\overrightarrow{AB}$
(b) 建筑物 A，B 及 C 是否在同一直线上？

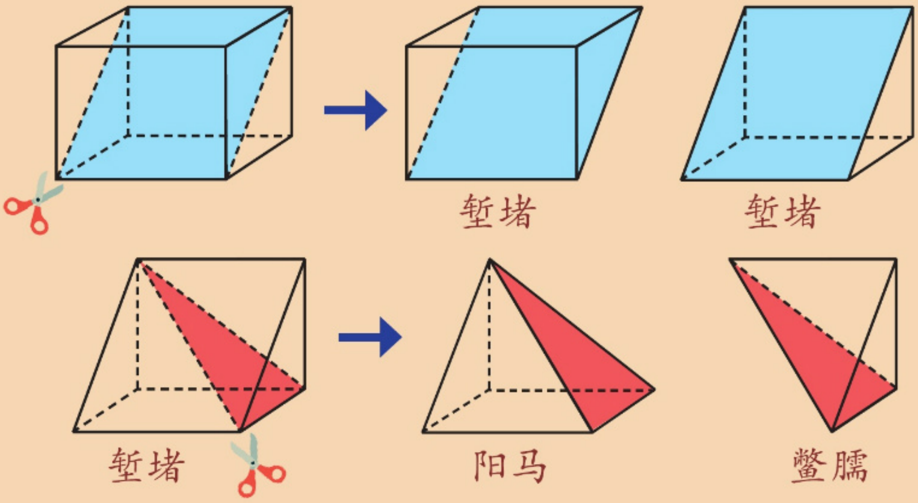


第13题用图

董總
DONG ZONG

《九章算术·卷五》写道：“斜解立方，得两堑堵（qiàn dǔ）。斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑（biē nào）。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。”

上述的“阳马”是底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥，而“鳖臑”是四个面都是直角三角形的四面体。该句子的意思是：把长方体沿着对角面切开，得到堑堵（三角柱体）。再沿堑堵的一个顶点和相对的棱将其剖开，则可得一个阳马和一个鳖臑，它们的体积之比为 2 : 1，如下图所示。



18

立体几何

学习目标

- 能求直线与平面及两个平面所成的角
- 能解立体几何应用问题

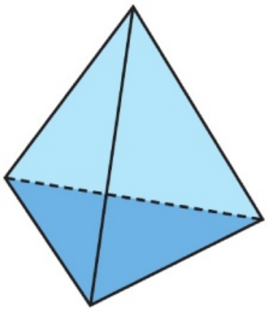
18.1 立体图形

多面体

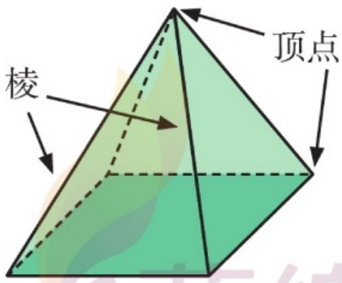
由平面多边形相连接而成的立体 (solid) 称为多面体 (polyhedron)，如图 18–1 所示，有 n 个面的多面体称为 n 面体。

围成多面体的各个平面称为多面体的面，相邻两个平面的公共边叫做棱 (edge) 或边，棱与棱的公共点叫做顶点 (vertex)。

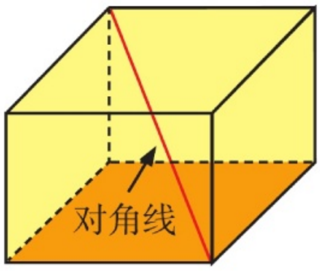
不在同一平面上的两个顶点所连接的线段称为对角线 (diagonal)。



(a) 四面体
(tetrahedron)



(b) 五面体
(pentahedron)

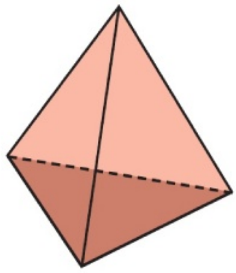
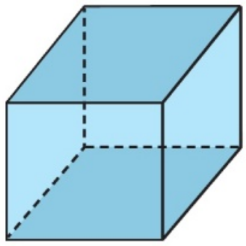
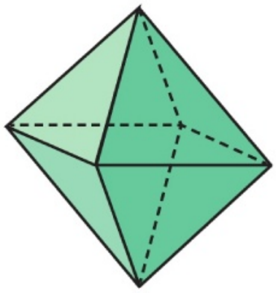
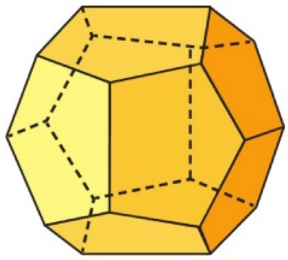
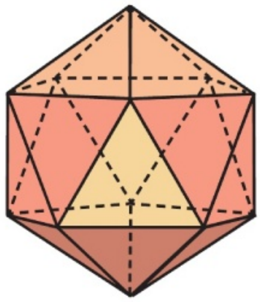


(c) 六面体
(hexahedron)

图18–1

正多面体

每个面都是全等的正多边形，每个顶点所连接的面数相同的多面体称为正多面体 (regular polyhedron)。早在古希腊时代就已经知道正多面体只有五种，它们被统称为柏拉图立体。设 V 、E 、F 为多面体中顶点、边及面的数量，下表列出五种正多面体的性质及图像。

正多面体	V	E	F	图示
正四面体 (regular tetrahedron)	4	6	4	
正六面体 (regular hexahedron)	8	12	6	
正八面体 (regular octahedron)	6	12	8	
正十二面体 (regular dodecahedron)	20	30	12	
正二十面体 (regular icosahedron)	12	30	20	

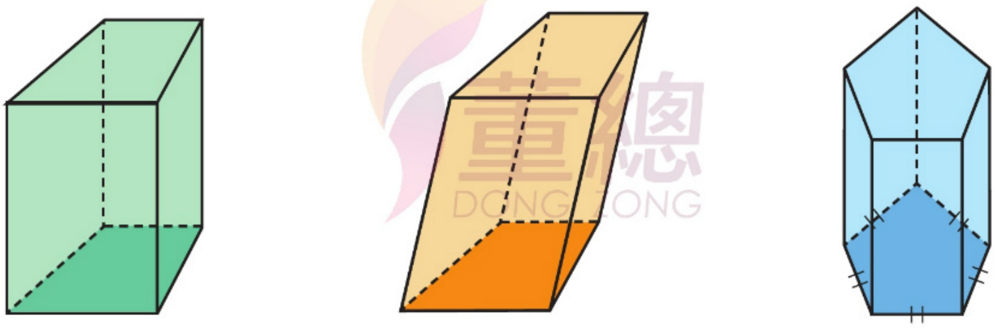
随堂练习 18.1

求上表五个正多面体的$V-E+F$。

棱柱（角柱）

若一个多面体的其中两个面互相平行，其余的各面顺次相交而得的边也互相平行，这种多面体称为棱柱体 (prism)。平行的两个面称为底面 (base)，它们是全等的多边形，而其余的各面称为侧面 (lateral face)。两个侧面的公共边称为侧棱 (lateral edge)，两个底面之间的距离称为高。若一棱柱有 n 个侧面，我们称它为 n 棱柱。

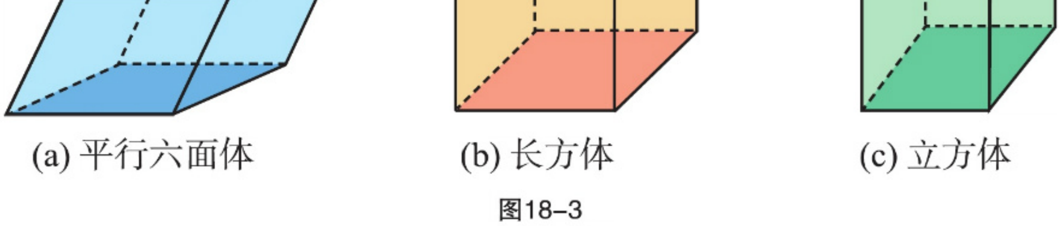
如图 18–2，若棱柱的侧棱与底面垂直，我们称它为直棱柱 (regular prism)，否则称它为斜棱柱 (oblique prism)。若直棱柱的底面是正多边形，我们称它为正棱柱 (right prism)。



(a) 直四棱柱　(b) 斜四棱柱　(c) 正五棱柱

图18–2

如图 18–3，两个底面为平行四边形的棱柱称为平行六面体 (parallelepiped)；每个面都是长方形 (rectangle) 的平行六面体称为长方体；每个面都是正方形的平行六面体称为立方体 (cube)。



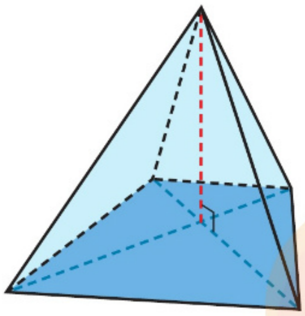
(a) 平行六面体　(b) 长方体　(c) 立方体

图18–3

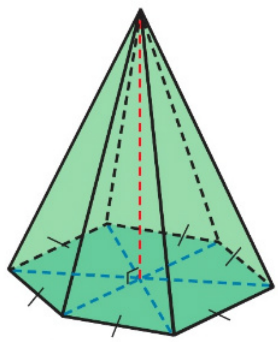
棱锥 (角锥)

若一个多面体的其中一个面是多边形，其余各面为有一个公共点的三角形，这种多面体称为棱锥或角锥 (pyramid)。以图 18–4 (a) 为例，这里的多边形称为底面，其余各面称为侧面，侧面的公共点称为顶点。由顶点至底面的垂直距离称为高。

若由顶点到底面的垂足是底面的中心，这种棱锥称为直棱锥。若直棱锥 (right pyramid) 的底面是正多边形，这种棱锥称为正棱锥 (regular pyramid)，如图 18–4(b)。



(a) 直棱锥



(b) 正棱锥

图18–4

直圆柱

图 18–5 所示为一直圆柱 (right circular cylinder)，它是由矩形 $XYAB$ 绕着边 XY 旋转一周而得，因此 XY 称为直圆柱的轴。直圆柱的上下底面是两个全等且平行的圆，两个底面之间的距离称为高。由 AB 旋转而得的面称为侧面。

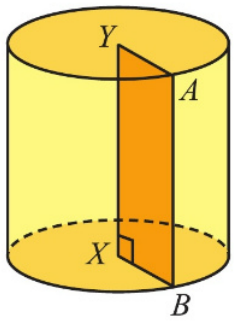


图18–5

直圆锥

图 18–6 所示为一直圆锥 (right circular cone)，它是由直角三角形 XYA 绕着直角边 XY 旋转一周而得，因此 XY 称为直圆锥的轴。直圆锥的底面是一个圆，顶点 Y 到底面的距离称为高。由 AY 旋转而得的曲面称为圆锥的侧面。

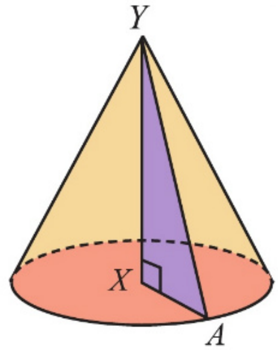


图18–6

球

图 18–7 所示是一个球体 (sphere)，它是由球面 (spherical surface) 包围而成的，而球面是由一半圆绕着其直径旋转一周而得。半圆的圆心 O 是球体的球心 (centre of a sphere)，半圆的半径也是球体的半径。

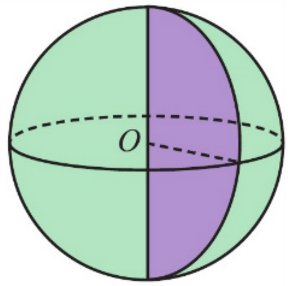


图18–7

如图 18–8，用一个平面截一个球，所得的截面是一个圆面。它有以下的性质：

一、球心与截面圆心的连线垂直于截面；

二、球心至截面的垂直距离 d，球的半径 R 及截面的半径 r 有以下的关系：

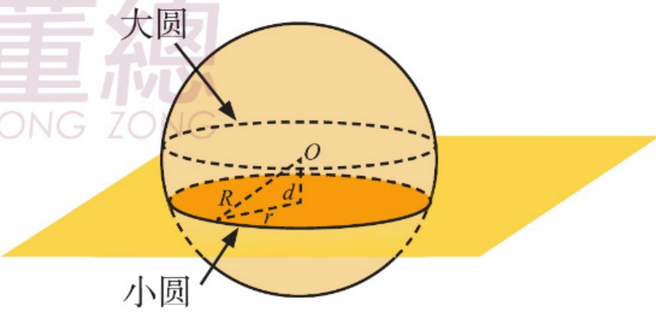


图18–8

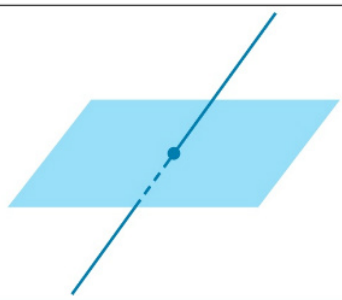
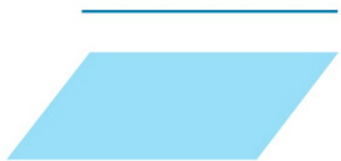
$$d=\sqrt{R^2-r^2}$$

由经过球心的平面所截得的圆称为大圆 (great circle)，不经过球心的平面所截得的圆称为小圆。

18.2 直线与平面所成的角

平面与直线的位置关系

一条直线与一个平面有以下三种位置关系:

		
(a) 直线在平面上	(b) 直线与平面相交于一点	(c) 直线与平面平行但不在平面上

直线与平面所成的角

如图 18–9 所示，自一点 P 向平面 π 引垂线，垂足 N 叫做点 P 在平面上的正射影。

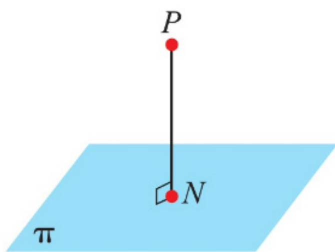


图18–9

一直线与它在一平面上的正射影所成的角，叫做此直线与平面所成的角。从这个角可判断直线对平面的倾斜程度，因此这个角也叫做直线对平面的倾斜角。

如图 18–10 所示，直线 PQ 在平面 π 的正射影是直线 NQ，则 $\angle PQN$ 是直线 PQ 与平面 π 所成的角。

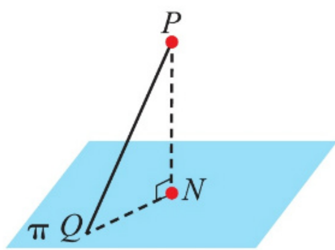
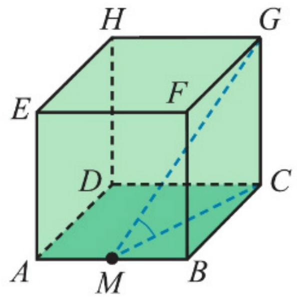


图18–10

例题 1

右图所示是一个边长为 8 cm 的正方体，M 是 AB 的中点。求
(a) 线段 MC 的长；
(b) MG 与平面 $ABCD$ 所成的角。



解 (a) $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{4^2 + 8^2}$

$= 4\sqrt{5}$ cm

(b) MG与平面 $ABCD$ 所成的角是 $\angle GMC$ 。

在 ΔMCG 中，$\tan \angle GMC = \dfrac{GC}{MC} = \dfrac{8}{4\sqrt{5}}$

$\therefore \quad \angle GMC = 41.81°$

想一想 1

如果例题1中正方体的边长不是8 cm，(b)的答案会否不同？

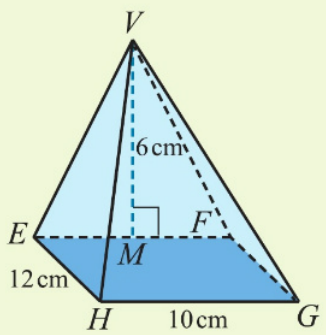
探索活动 1

观察点 M 移动时 $\angle GMC$ 的变化。

https://www.geogebra.org/m/pr2hzsqe

随堂练习 18.2a

右图所示为一棱锥，它的底面 $EFGH$ 是一长方形，其中 $EH = 12$ cm ，$GH = 10$ cm 。点 M 是 EF 的中点，点 V 位于点M的正上方，$VM = 6$ cm 。求 VG 与平面 $EFGH$ 所成的角。

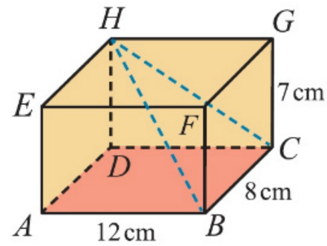


例题 2

右图所示的长方体中，$AB = 12\text{ cm}$，$BC = 8\text{ cm}$，$CG = 7\text{ cm}$。求

(a) CH 与平面 $ABCD$ 所成的角；

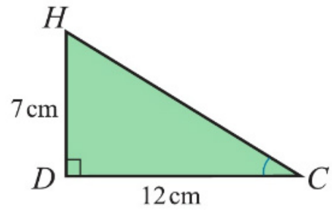
(b) BH 与平面 $CDHG$ 所成的角。



解 (a) CH 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle HCD$。

在 ΔHCD 中，$\tan\angle HCD = \dfrac{HD}{CD} = \dfrac{7}{12}$

$\therefore\ \angle HCD = 30.26°$

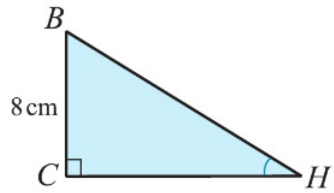


(b) BH 与平面 $CDHG$ 所成的角为 $\angle BHC$。

在 ΔHCD 中，$CH = \sqrt{7^2 + 12^2} = \sqrt{193}$

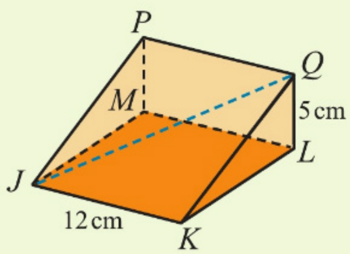
在 ΔBHC 中，$\tan\angle BHC = \dfrac{BC}{CH} = \dfrac{8}{\sqrt{193}}$

$\therefore\ \angle BHC = 29.94°$



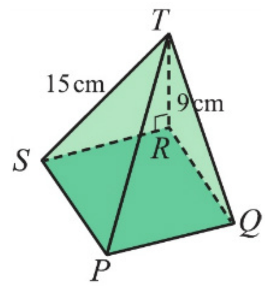
随堂练习 18.2b

右图所示是一直棱柱，其底面 KQL 是一个直角三角形，侧面 $JKLM$ 是一正方形。已知 $JK = 12\text{ cm}$，$LQ = 5\text{ cm}$，求 JQ 与平面 $PQLM$ 所成的角。



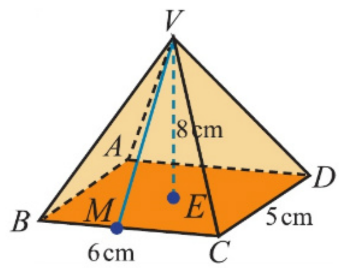
习题 18.2

1. 右图所示是一个棱锥，其底面 $PQRS$ 是一正方形，TR 垂直于底面。已知 $TR = 9$ cm，$TS = 15$ cm。求
   (a) RS 的长；
   (b) 斜棱 PT 与底面 $PQRS$ 所成的角。



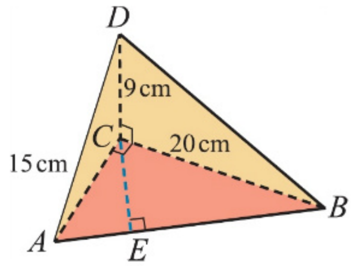
第1题用图

2. 右图所示为一高 8 cm 的直棱锥，其底面 $ABCD$ 是一矩形，点 E 是点 V 至底面的垂足，点 M 是 BC 的中点。已知 $CD = 5$ cm，$BC = 6$ cm。求
   (a) VA 与 VE 所成的角；
   (b) VC 与底面 $ABCD$ 所成的角；
   (c) VM 与 VE 所成的角；
   (d) VM 与底面 $ABCD$ 所成的角。



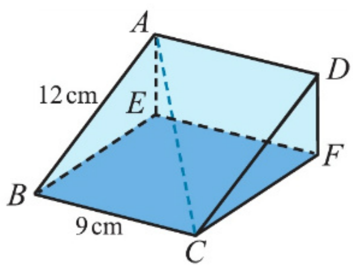
第2题用图

3. 右图所示的棱锥中，ΔABC 是直角三角形，CD 垂直于平面 ABC，CE 与 AB 垂直。已知 $AC = 15$ cm，$BC = 20$ cm，$CD = 9$ cm。求
   (a) $\angle DEC$；
   (b) AD 与平面 ABC 所成的角。



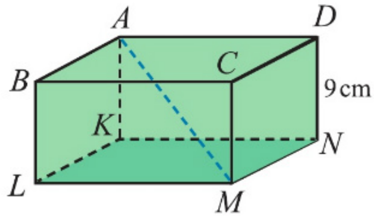
第3题用图

4. 右图所示为一直棱柱，其底面 CDF 是一直角三角形。已知 $BC = 9$ cm，$AB = 12$ cm，$CF = 2DF$。求
   (a) AB 与平面 $BCFE$ 所成的角；
   (b) AC 与平面 $BCFE$ 所成的角。



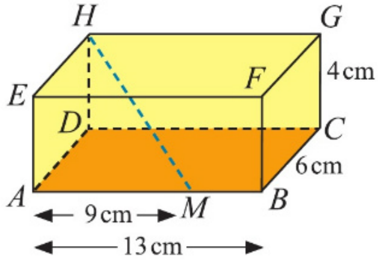
第4题用图

5. 右图所示是一长方体，其体积是 300 cm^3。已知 $AD=2CD$ 及 $DN=9$ cm，求 AM 与平面 $KLMN$ 所成的角。



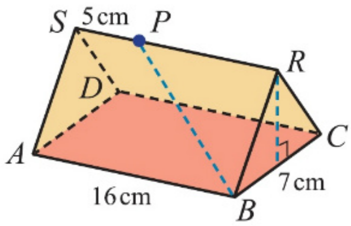
第5题用图

6. 右图所示是一个长方体，$AB=13$ cm，$BC=6$ cm，$CG=4$ cm，M为AB上的一点使得 $AM=9$ cm。求
(a) HM 与平面 $ABCD$ 所成的角；
(b) HM 与平面 $HDAE$ 所成的角。



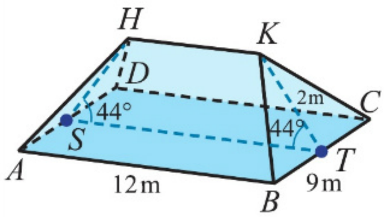
第6题用图

7. 右图所示是一正棱柱，其底面是边长为 7 cm 的等边三角形。若 $AB=16$ cm，P是线段RS上的一点使得 $PS=5$ cm，求
(a) 线段 BP 的长；
(b) BP 与平面 $ABCD$ 所成的角。



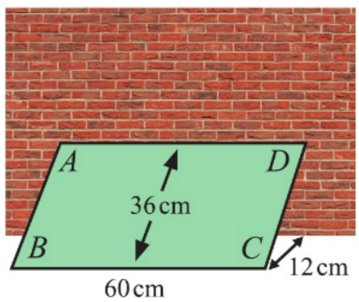
第7题用图

8. 右图所示的屋顶中，HK 是屋脊，四条棱 HA、HD、KB、KC 等长。S、T 分别为 AD 及 BC 的中点，$\angle HST=\angle KTS=44°$，$AB=12$ m，$BC=9$ m，$KT=2$ m。求
(a) 屋脊 HK 与平面 $ABCD$ 的距离；
(b) 屋脊 HK 的长；
(c) 斜棱 HA 与平面 $ABCD$ 所成的角。



第8题用图

9. 右图中，$ABCD$ 是一长 60 cm，宽 36 cm 的长方形木板，其底部 BC 位于地面上而其顶部则靠墙。若 BC 距离墙脚 12 cm，求木板的对角线 BD 与地面所成的角。

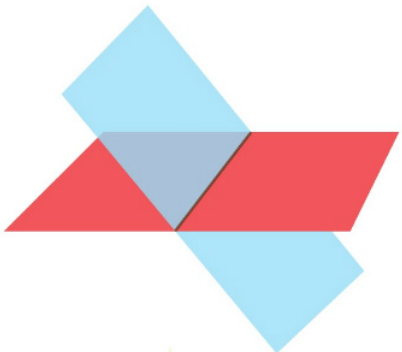


第9题用图

18.3 两个平面所成的角

平面与平面的位置关系

两个平面有以下三种位置关系:

		
(a) 两平面重合	(b) 两平面相交于一直线	(c) 两平面平行但不重合

平面与平面所成的角

如图18–11所示，平面 π_1 与平面 π_2 相交于直线 PQ。在直线 PQ 上取一点 A，分别在平面 π_1 及平面 π_2 内作直线 AB 及 AC，使得 AB 及 AC 分别与直线 PQ 垂直，则平面 π_1 与平面 π_2 的夹角为 $\angle BAC$。

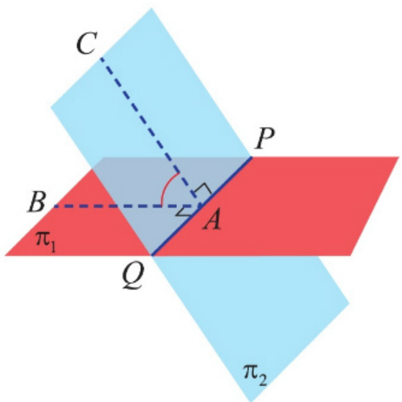


图18–11

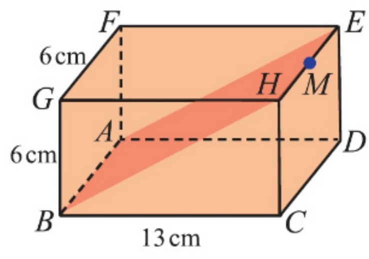
例题 3

右图所示为一长方体，点 M 是 EH 的中点，$ABGF$ 是一边长为 6 cm 的正方形，$BC = 13$ cm。求

(a) 平面 $ABHE$ 与平面 $ABCD$ 所成的角；

(b) 平面 MBA 与平面 $ABGF$ 所成的角；

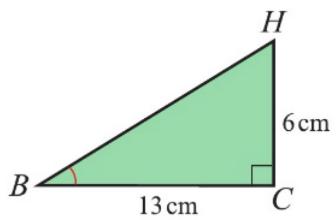
(c) 平面 MBA 与平面 $CDEH$ 所成的角。



解 (a) AB 为平面 $ABHE$ 与平面 $ABCD$ 的公共棱，且 $BH \perp AB$，$BC \perp AB$，因此平面 $ABHE$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle HBC$。

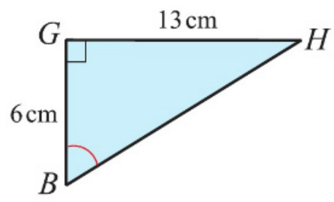
在 ΔHBC 中，$\tan \angle HBC = \dfrac{HC}{BC} = \dfrac{6}{13}$

$\therefore \quad \angle HBC = 24.78°$



(b) 平面 MBA 在平面 $ABHE$ 内，因此平面 MBA 与平面 $ABGF$ 所成的角等于平面 $ABHE$ 与平面 $ABGF$ 所成的角，即 $\angle HBG$。

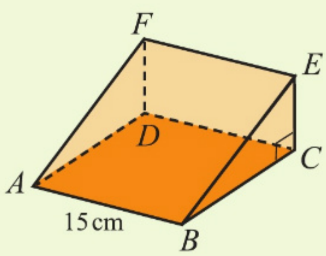
$\angle HBG = 90° - \angle HBC = 65.22°$



(c) 平面 $CDEH$ 与平面 $ABGF$ 平行，因此平面 MBA 与平面 $CDEH$ 所成的角等于平面 MBA 与平面 $ABGF$ 所成的角，即 $65.22°$ 。

随堂练习 18.3a

右图所示是以直角三角形为底面的直棱柱。已知 $AB = 15$ cm，$BC = \dfrac{2}{3}AB$，$CE = \dfrac{1}{5}AB$，求平面 $ABEF$ 与平面 $ABCD$ 所成的角。



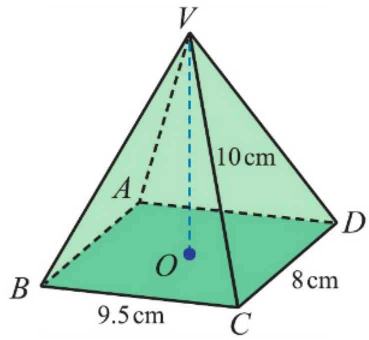
例题 4

右图所示是一直棱锥，其底面 $ABCD$ 是一矩形。棱锥的高 $VO=10\text{ cm}$，$BC=9.5\text{ cm}$，$CD=8\text{ cm}$。求

(a) 平面 VBC 与平面 $ABCD$ 所成的角；

(b) 平面 VAB 与平面 VCD 所成的角；

(c) 平面 VCB 与平面 VCD 所成的角。

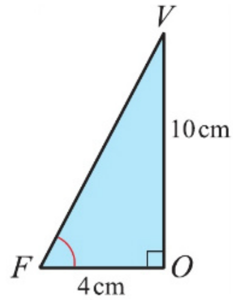


解 设 E、F、G 分别为 AB、BC、CD 的中点，则 $VE\perp AB$，$VF\perp BC$，$VG\perp CD$。

(a) 平面 VBC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle VFO$。

在 ΔVFO 中，$\tan\angle VFO=\dfrac{VO}{FO}=\dfrac{10}{4}$

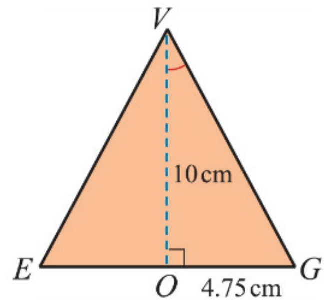
$\therefore\ \angle VFO=68.20^\circ$



(b) 平面 VAB 与平面 VCD 所成的角为 $\angle EVG=2\angle GVO$。

在 ΔGVO 中，$\tan\angle GVO=\dfrac{GO}{VO}=\dfrac{4.75}{10}$

$\therefore\ \angle EVG=2\angle GVO=50.82^\circ$



(c) $OC=\dfrac{1}{2}\sqrt{9.5^2+8^2}=6.21$

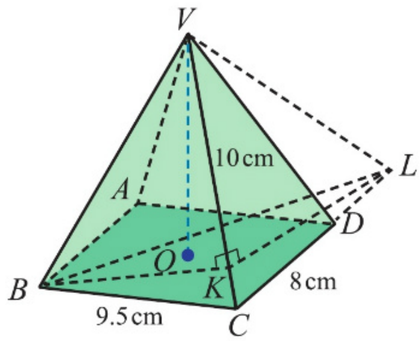
$VC=\sqrt{10^2+6.21^2}=11.77$

$VA=VB=VC=VD=11.77$

在 ΔVBC 中，

$$\cos\angle VCB=\frac{9.5^2+11.77^2-11.77^2}{2(9.8)(11.77)}$$

$\therefore\angle VCB=66.20^\circ$



VC 上取一点 K，使得 $VC \perp KB$。
在 ΔBCK 中，

$$\sin 66.20° = \frac{BK}{9.5} \qquad \therefore BK = 8.69$$

$$\cos 66.20° = \frac{CK}{9.5} \qquad \therefore CK = 3.83$$

在 ΔVCD 中，

$$\cos\angle VCD = \frac{8^2 + 11.77^2 - 11.77^2}{2(9.8)(11.77)}$$

$$\therefore \angle VCD = 70.13°$$

延长线段 CD 至 L，使得 $VC \perp KL$。
在 ΔLKC 中，

$$\tan 70.13° = \frac{KL}{3.83} \qquad \therefore KL = 10.60$$

$$\cos 70.13° = \frac{3.83}{CL} \qquad \therefore CL = 11.27$$

在 ΔBCL 中，

$$BL = \sqrt{9.5^2 + 11.27^2} = 14.74$$

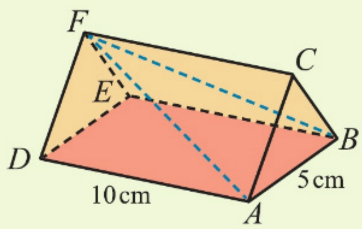
在 ΔBKL 中，

$$\cos\angle BKL = \frac{8.69^2 + 10.6.^2 - 14.74^2}{2(8.69)(10.60)}$$

$$\therefore \angle BKL = 99.18°$$

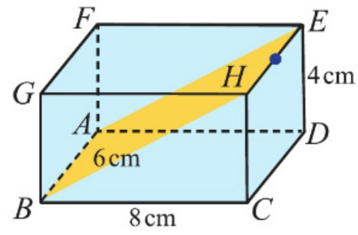
随堂练习 18.3b

右图所示是一正棱柱，其底面是边长为 5 cm 的等边三角形，高等于 10 cm，求平面 ABF 与平面 ABC 所成的角。



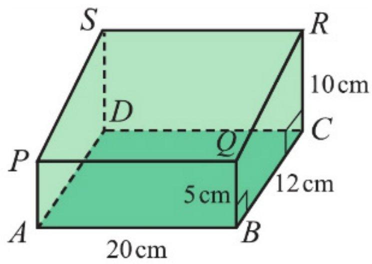
习题 18.3

1. 右图所示是一长方体，其中 $AB=6\text{ cm}$，$BC=8\text{ cm}$，$DE=4\text{ cm}$。求平面 $ABHE$ 与平面 $ABGF$ 的夹角。



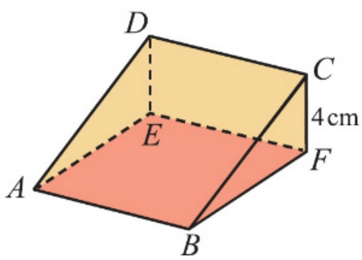
第1题用图

2. 右图所示是一直棱柱，其底面是一直角梯形，$AB=20\text{ cm}$，$BC=12\text{ cm}$，$BQ=5\text{ cm}$，$CR=10\text{ cm}$。求平面 $PQRS$ 与平面 $ABCD$ 所成的角。



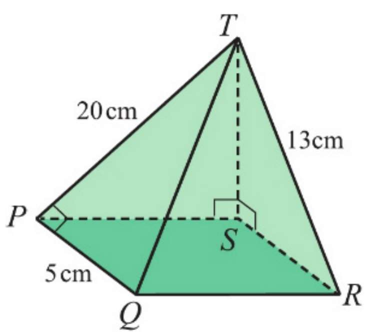
第2题用图

3. 右图所示是一直棱柱，其底面是一直角三角形。已知 $CF=4\text{ cm}$，$EF=4CF$，$BF=\dfrac{2}{3}EF$，求平面 $ABCD$ 与平面 $ABEF$ 所成的角。



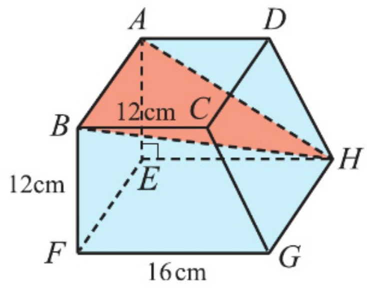
第3题用图

4. 右图所示的棱锥中，PQT，SPT 及 SRT 都是直角三角形，$PQRS$ 是一矩形。已知 $PQ=5\text{ cm}$，$PT=20\text{ cm}$，$RT=13\text{ cm}$。求
   (a) 棱锥的高；
   (b) TQ 与平面 PST 所成的角；
   (c) 平面 RST 与平面 PQT 所成的角。



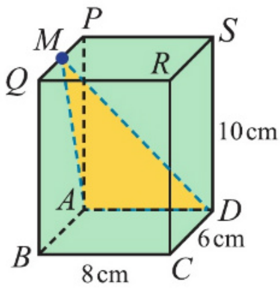
第4题用图

5. 右图所示是一个直棱柱，其底面 $BCGF$ 是一个直角梯形，其中 $BC = BF = 12\text{ cm}$，$FG = 16\text{ cm}$。棱柱的侧面 $EFGH$ 是一个正方形。求
(a) 平面 $CDHG$ 与平面 $EFGH$ 所成的角；
(b) 平面 ABH 与平面 $ABEF$ 所成的角。



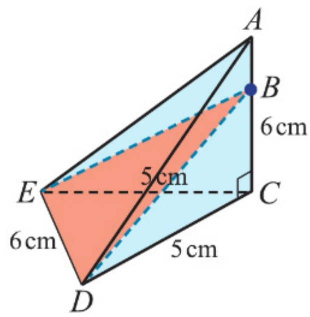
第5题用图

6. 右图所示的长方体中，$BC = 8\text{ cm}$，$CD = 6\text{ cm}$，$DS = 10\text{ cm}$，M 是 PQ 的中点。求
(a) MD 与平面 $PQBA$ 所成的角；
(b) 平面 AMD 与平面 $ABCD$ 所成的角。



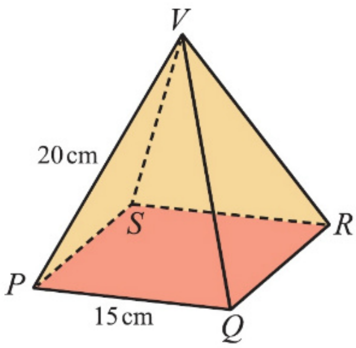
第6题用图

7. 右图所示是一棱锥，其底面 ΔCDE 是等腰三角形，$CD = CE = 5\text{ cm}$，$DE = AC = 6\text{ cm}$。ΔACD 是一个直角三角形，$AB : BC = 1 : 2$。求
(a) 平面 BDE 与平面 CDE 所成的角；
(b) 平面 ADE 与平面 CDE 所成的角。



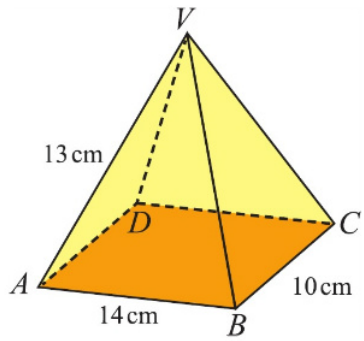
第7题用图

8. 右图所示是一正棱锥，其底面是一边长为 15 cm 的正方形，侧棱 PV 的长为 20 cm。求
(a) PV 与平面 $PQRS$ 所成的角；
(b) 侧面与底面所成的角；
(c) 侧面 VPQ 与侧面 VQR 所成的角。



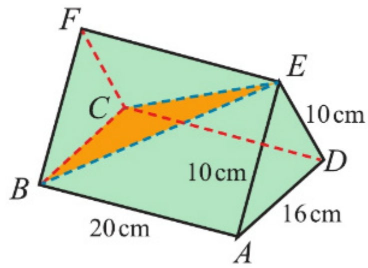
第8题用图

9. 右图所示是一直棱锥，侧棱长 13 cm，底面是一长 14 cm，宽 10 cm的长方形。求
(a) 平面 VBC 与平面 $ABCD$ 所成的角；
(b) 平面 VAD 与平面 VBC 所成的角。



第9题用图

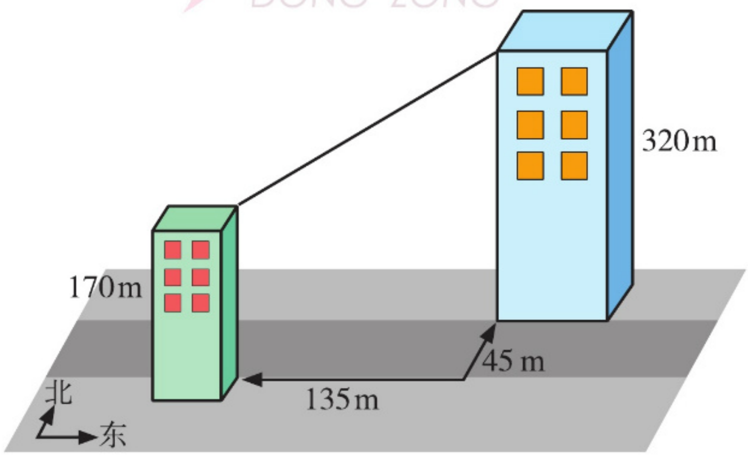
10. 右图所示是一截面为等腰三角形的直棱柱，$EA=ED=10$ cm， $AD=16$ cm， $AB=20$ cm 。求
(a) EB 与平面 $ABCD$ 所成的角；
(b) 平面 EBC 与平面 $ABCD$ 所成的角。



第10题用图

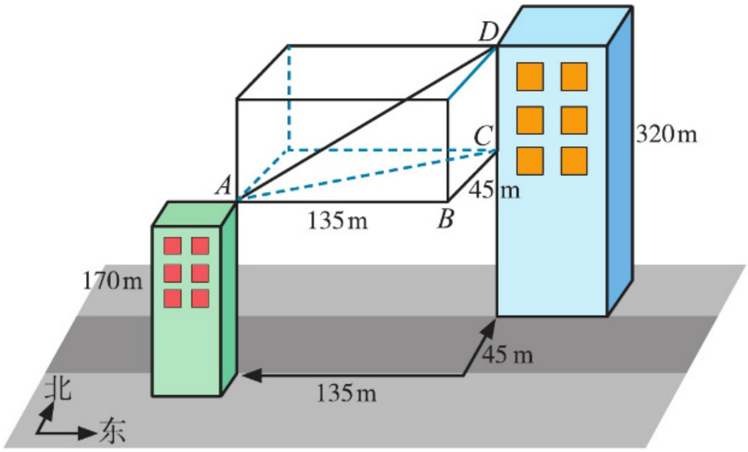
18.4 立体应用问题

例题 5



如上图所示，一座 320 m 高的摩天大楼附近有一座 170 m 高的大厦，大厦与摩天楼之间相隔一条宽 45 m 的东西向街道。大厦在大楼西侧，两座建筑物之间的水平距离是 135 m。若要在两座大楼的顶层拉一条紧急救生索，则这救生索拉直后与地面的夹角是多少？ 这条救生索最少需要多长？

解



如上图所示，救生索拉直后与地面的夹角为 $\angle DAC$。

$CD = 320 - 170 = 150$ m

在 ΔABC 中， $AC = \sqrt{135^2 + 45^2} = 45\sqrt{10}$ m

在 ΔACD 中， $\tan\angle DAC = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{150}{45\sqrt{10}}$

$\therefore\ \angle DAC = 46.51°$

在 ΔACD 中， $AD = \sqrt{150^2 + 135^2 + 45^2} = 206.76$ m

$\therefore$ 这条救生索最少需 207 m。

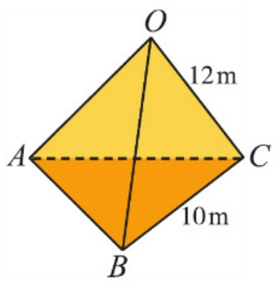
例题 6

右图所示的建筑物 $OABC$，其外形是一正棱锥，底面是一边长为10 m 的等边三角形，侧棱的长是 12 m。求

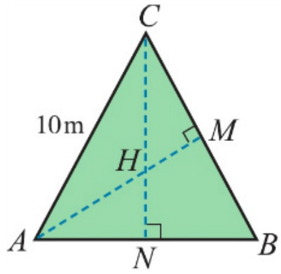
(a) 建筑物的高；

(b) 由点 A 望向建筑物顶端 O 点的仰角；

(c) 侧面 OAB 与底面 ABC 所夹的角的度数。



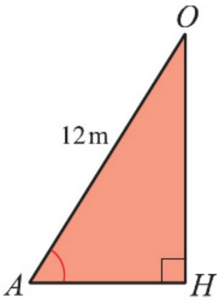
解 (a) 设 M 是 BC 的中点，N 是 AB 的中点，则 H 是等边三角形 ABC 的中心，则 OH 是建筑物的高。



$$AH=\frac{2}{3}AM$$
$$=\frac{2}{3}AB\sin 60^\circ$$
$$=\frac{10\sqrt{3}}{3}\text{ m}$$

在 ΔOAH 中，$OH=\sqrt{12^2-\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$\therefore$ 建筑物的高为 10.52 m。

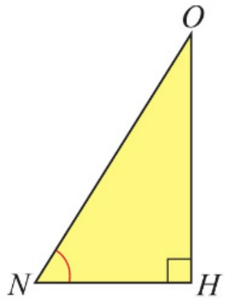


(b) 由点 A 望向建筑物顶端 O 的仰角为 $\angle OAH$ 。

在 ΔOAH 中，$\cos\angle OAH=\frac{AH}{OA}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$

$\therefore\ \angle OAH=61.24^\circ$

(c) 侧面 OAB 对底面 ABC 的倾斜角为 $\angle ONH$ 。



$$HN=HM=\frac{1}{2}AH=\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ m}$$

在 ΔONH 中，$\tan\angle ONH=\frac{OH}{HN}$

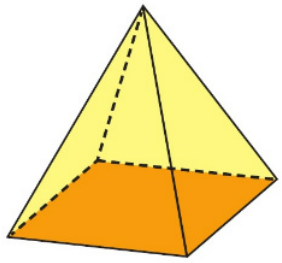
$\therefore\ \angle ONH=74.66^\circ$

随堂练习 18.4

有一飞机的飞行高度是 h km。在飞机正南的一点 A 测得飞机的仰角是 60°，在点 A 的正东一点 B 测得飞机的仰角是 45°。若 A 、B 相距 $\sqrt{6}$ km，求 h 。

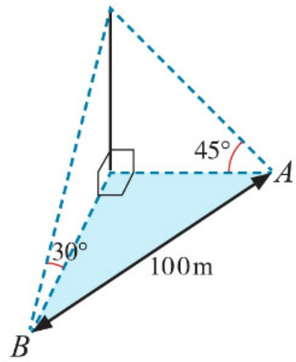
习题 18.4

1. 如右图所示，底面是正方形，侧面是等边三角形的金字塔。求
   (a) 侧棱与底面的夹角；
   (b) 侧面与底面的夹角；
   (c) 相邻两面墙的夹角。



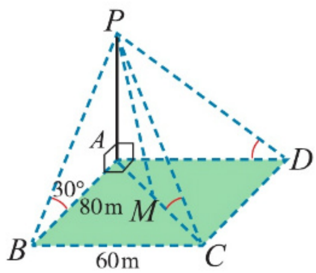
第1题用图

2. 如右图所示，在一塔的正东一点 A 处测得塔顶的仰角是 45° ，在其正南一点 B 处测得塔顶的仰角是30°。若 A 、B 两地相距 100 m，求塔高。



第2题用图

3. 右图中，$ABCD$ 是一长方形广场，M 是 AC 的中点，$AB=80$ m，$BC=60$ m。在 A 处竖立一旗杆 AP，由点 B 处望向杆顶 P 的仰角为 30°，求由点 C，点 D 及点 M望向杆顶的仰角。



第3题用图

4. 一塔 PQ 高 35m，从塔顶 P 观测平面上的两点 A 及 B，俯角分别为 35° 及 42°。已知 A 位于塔之正南，B 位于塔之西南，求 A 、B 之间的距离。

5. 小明在便利店选购了一款新推出的果汁饮料。该饮料盒为直立长方体，尺寸为高 13 cm，底面 5.5 cm × 3.5 cm。饮料配备一次性吸管，平时可弯曲并贴附在盒外侧。吸管插入口位于上方一角，考虑吸管伸直时为 16 cm。

(a) 吸管至少要多长，才能达到离插入口的最远处？

(b) 除了可弯曲外，吸管还可以采取何种设计？

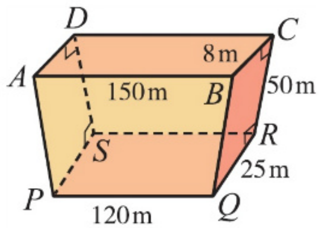
第5题用图

6. 右图所示是山谷间的一座水坝。水坝的顶面 $ABCD$ 及底面 $PQRS$ 是长方形，临水面 $CDSR$ 与水平面垂直，两个靠山坡的面 $ADSP$ 及 $BCRQ$ 的坡度相同。若 $AB = 150$ m， $PQ = 120$ m， $QR = 25$ m， $CR = 50$ m， $BC = 8$ m，求

(a) 山坡的坡度；

(b) 背水面 $APBQ$ 的坡度；

(c) AP 与顶面 $ABCD$ 的夹角。



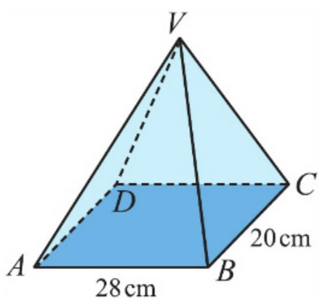
第6题用图

总复习题 18

1. 右图所示是一直棱锥，其底面是一长 28 cm，宽 20 cm 的长方形。若平面 VBC 与底面成 $60°$ 角，求

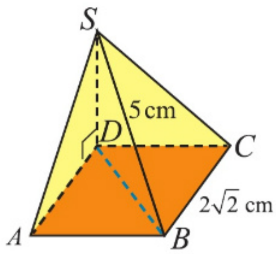
(a) 平面 VAB 与底面所成的角；

(b) VD 与底面所成的角。



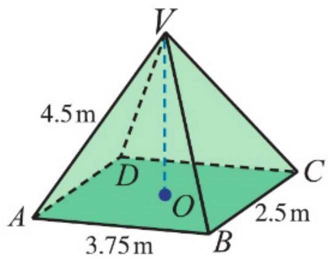
第1题用图

2. 右图所示是一棱锥，底面是一正方形，侧棱 SD 垂直于底面。已知 $BC=2\sqrt{2}$ cm，$SB=5$ cm，求
(a) 平面 SAD 与平面 SBD 所成的角；
(b) 侧棱 SA 与底面所成的角；
(c) 平面 SAC 与底面所成的角。



第2题用图

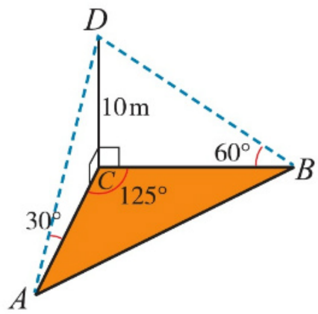
3. 右图所示是一座帐篷，其外形是一个直棱锥，其中底面 $ABCD$ 是一长 3.75 m，宽 2.5 m 的长方形，斜边 VA 长 4.5 m。求
(a) 帐篷的高；
(b) 斜面 VAB 的倾斜角；
(c) 斜面 VAD 与 VBC 所成的角。



第3题用图

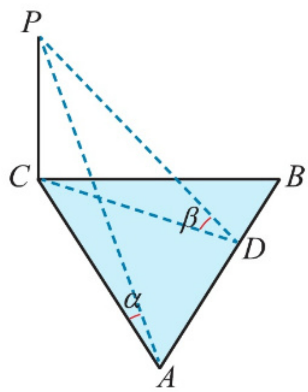
4. 一塔高 200 m，点 A 及点 B 分别在塔的正东及东南。若由点 A 及点 B 测得塔顶的仰角分别为 $60°$ 及 $30°$，求 A、B 两点之间的距离。

5. 右图中，ABC 是一三角形草场，在点 C 处竖立着一长 10 m 的旗杆 CD，由点 A 及点 B 处测得杆顶的仰角分别为 $30°$ 及 $60°$。若 $\angle BAC=125°$，求
(a) 草场的面积；
(b) A、B 之间的距离。



第5题用图

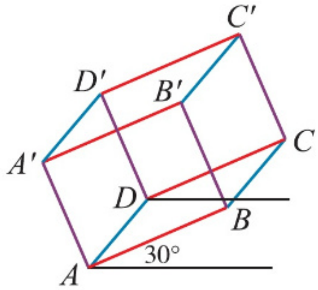
6. 右图中，ABC 是形为等边三角形的泥地，D 是 AB 上的一点使得 $AD=kAB$。旗杆 CP 竖立在点 C 处。若在点 A 及点 D 处测得杆顶 P 的仰角分别为 α 及 β，证明 $\cot^2\beta=\left(1-k+k^2\right)\cot^2\alpha$。



第6题用图

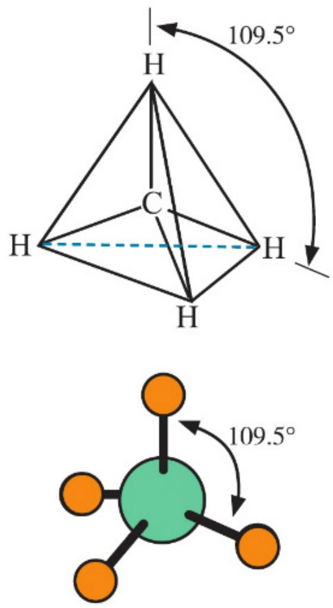
7. A、B、C 是地面上三点。点 B 及点 C 分别在点 A 的正北及西北。在点 A 处耸立着一栋大厦。由点 B 及点 C 测得大厦顶端的仰角分别为 $14°$ 及 $12°$，求由点 C 处测得点 B 的方位角。

8. 右图中，一个立方体的一端被抬起，使得其底部 $ABCD$ 与水平地面形成 $30°$ 角，同时边 AD 位于地面上。求
(a) AC 与水平地面所成的角；
(b) AC' 与水平地面所成的角。



第8题用图

9. 甲烷（CH_4）在自然界的分布很广，是天然气、沼气、坑气等的主要成分，俗称瓦斯。已知甲烷分子的四个氢原子（H）是正四面体的四个顶点，且碳原子（C）位于正四面体的中心，如图所示。在一甲烷分子中，4 个 C – H 键角都是 $109.5°$，键长都是 1.09×10^{-10} m。求
(a) 甲烷中两个氢原子之间的距离；
(b) C – H 键与正四面体相邻一面之间的角度；
(c) 两个正四面体的两个面之间的角。



第9题用图

在现代社会中，信息的安全至关重要。无论是个人隐私、银行账户信息，还是国家机密，都需要复杂的密码来保护。然而，为什么复杂的密码能有效地保护信息呢？答案就在于排列与组合的数学原理。通过理解这些原理，我们可以看到复杂密码是如何增加破解难度，从而提高信息安全性的。

考虑一种情况，系统需要我们利用 26 个英文字母来设定五位密码。我们决定使用“A、B、C、D、E”这五个字母来排出五位字母各异的密码，这样能生成多少种不同的密码？如果骇客不知道我们选择了哪些英文字母来设定密码，那么他需要尝试多少种可能才能破解密码？如果增加密码的长度，从五位增加到六位，那么骇客所需尝试的次数有什么变化？

通过这些问题的探讨，我们不仅能深入理解排列与组合的原理，还能明白它们在实际生活中的重要应用。无论是设计安全系统、优化资源配置，还是解决日常问题，排列与组合都是不可或缺的数学工具。

19

排列与组合

学习目标

- 掌握加法原理与乘法原理
- 掌握排列数公式及线性排列问题的解法
- 掌握相异元素可重复的排列问题的解法
- 掌握环形排列问题的解法
- 掌握不尽相异元素的全排列问题的解法
- 掌握组合数公式及组合问题的解法

19.1 加法原理与乘法原理

在日常生活中，我们经常需要计算出有多少种不同的方法来完成某任务。这些计算涉及两个基本原理，即加法原理与乘法原理。

加法原理

例题 1

菜单		
A. 饭食	B. 热炒	C. 汤面
A1. 泰式鸡扒饭	B1. 炒米粉	C1. 瓦煲伊面
A2. 酸甜鱼片饭	B2. 炒粿条	C2. 清汤面线
A3. 宫保鸡丁饭	B3. 炒面	C3. 板面汤
A4. 叁巴炒饭	B4. 炒冬粉	C4. 咖喱面
A5. 凤梨炒饭	B5. 炒老鼠粉	
A6. 苦瓜焖饭	B6. 炒伊面	
A7. 姜葱鱼片饭		

小凯想从菜单中挑选一个餐点作为午餐。问小凯有多少种不同的选择？

解 饭食有 7 种选择，热炒系列有 6 种选择，汤面有 4 种选择，因此小凯共有 $7+6+4=17$ 种选择。

一般来说，有以下的原理：

加法原理

若完成一件事情，恰有n类互斥的情况，在第一类情况中有 m_1 种不同的方法来完成，在第二类情况中有 m_2 种不同的方法来完成，…，在第 n 类情况中有 m_n 种不同的方法来完成。那么，完成这件事共有

$$m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种方法。

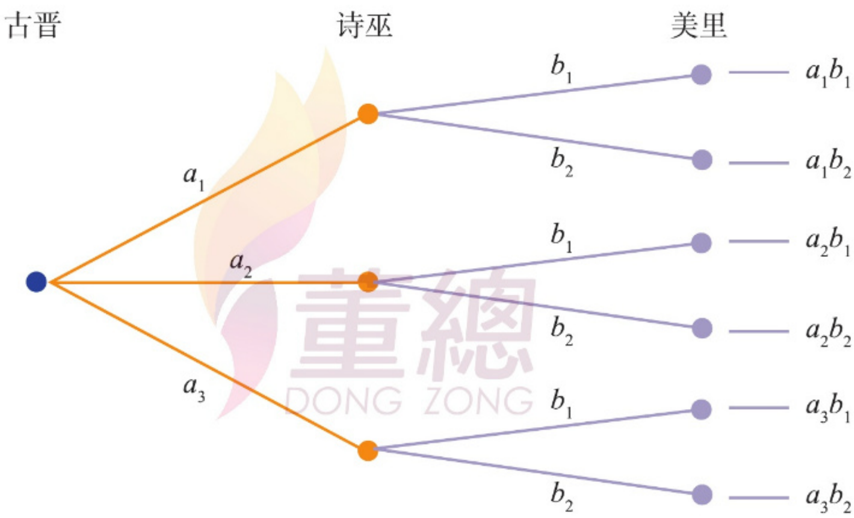
补充资料

若两事件不可能同时发生，我们称这两个事件互斥。

例题 2

小凯计划从古晋开车经诗巫前往美里。已知从古晋到诗巫有3条路线，而从诗巫到美里有2条路线。问小凯从古晋开车经诗巫前往美里有几种不同的路线？

解 从古晋到诗巫有 3 种不同的路线，即 a_1，a_2 及 a_3。而无论选择了哪一种路线到达诗巫后，又各有 2 种不同的路线，即 b_1 及 b_2 前往美里。所以，从古晋经诗巫前往美里的开车路线有 $3\times2=6$ 种。



以上的排列方式，叫做“树图”(tree diagram)。

一般来说，有以下的原理：

乘法原理

若完成一件事情，要分成 n 个步骤，第一步骤有 m_1 种不同的方法，第二步骤有 m_2 种不同的方法，…，第 n 步骤有 m_n 种不同的方法。那么，完成这件事共有

$$m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种方法。

例题 3

5 名高一学生，6 名高二学生及 7 名高三学生组成一个研究小组，问

(a) 选其中一人当组长，有多少种不同的选法?

(b) 每一年级选一名组长，有多少种不同的选法?

解 (a) 要选一人当组长，有三类情况：

情况一：选高一学生，有 5 种选法；

情况二：选高二学生，有 6 种选法；

情况三：选高三学生，有 7 种选法。

应用加法原理，一共有 $5+6+7=18$ 种不同的选法。

(b) 从每一年级中选一名组长，可分为三个步骤：

步骤一：选高一的组长，有 5 种选法；

步骤二：选高二的组长，有 6 种选法；

步骤三：选高三的组长，有 7 种选法。

应用乘法原理，一共有 $5\times6\times7=210$ 种不同的选法。

随堂练习 19.1

1. 某角色扮演闯关游戏在开局时有三种难度模式：简单、普通、困难。在简单模式中，玩家可在 3 种不同的角色中选择一个，而在普通模式及困难模式中则各有 4 种不同的角色供选择。若不同的难度模式及角色皆会触发不同的开局，则玩家可以体验多少种不同的开局?

2. 小明要从书架上的 5 本不同的中文书，3 本不同的英文书及 4 本不同的马来文书中各选一本带出门，问他共有几种不同的选法?

习题 19.1

1. 小玲去旅游时，买了 5 个不同的杯子，3 条不同的项链及 6 张不同的明信片。她要从中选出一样来当手信送给小凯，问她有几种选法？

2. 小美有 13 件上衣及 6 件裙子，问她有多少种不同的搭配法？

3. 一间教室有 4 个门，小凯与小江可以从任何一个门进入教室。问他们进入教室的方法有几种？

4. 阿伟欲签订电信配套。已知电信商 C 提供了 4 种配套，电信商 M 提供了 5 种配套，电信商 U 提供了 3 种配套，而电信商 X 则提供了 2 种配套。问阿伟有几种签订选择？

5. 某餐厅推出了套餐优惠，食客可以从 6 种不同的主餐，5 种不同的饮料及 2 种不同的甜品各挑一种，组成套餐。

套餐优惠 (A + B + C)		
A. 主食	B. 饮料	C. 甜品
A1. 泰式炒饭 A2. 椰浆饭 A3. 星洲米粉 A4. 干捞云吞面 A5. 韩式鸡汤面 A6. 咖喱面	B1. 清茶 B2. 柠檬水 B3. 柠檬茶 B4. 奶茶 B5. 美禄	C1. 巧克力布丁 C2. 龟苓膏

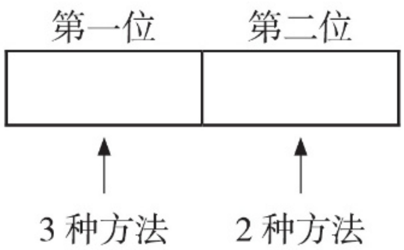
问可配成多少种不同的套餐？

19.2 排列与排列数公式

例题 4

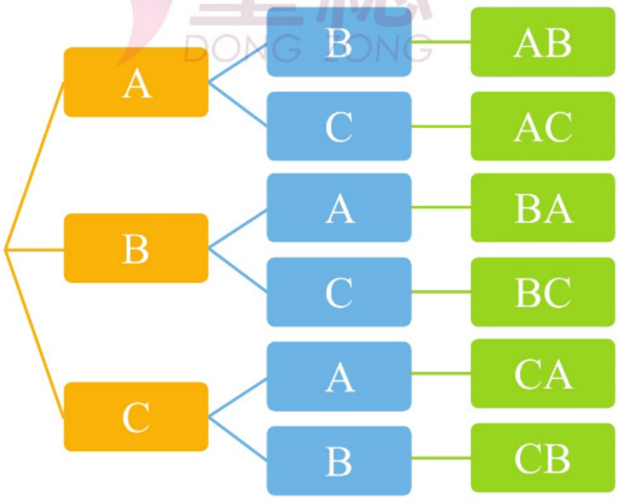
从 3 个字母 A、B、C 中，选取 2 个字母作排列，问有多少种不同的排法？

解 完成排列，可分成两个步骤：

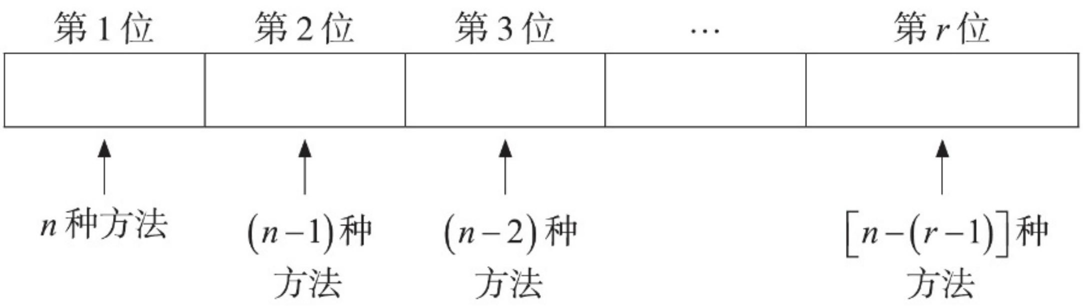


步骤一：从三个字母中任选一个排在第一位，有3种方法；
步骤二：从剩余的两个字母中任选一个排在第二位，有2种方法。
根据乘法原理，从三个字母中任选两个字母作排列，共有 $3\times2=6$ 种方法。

这6种方法的排列如下：



一般地，若从 n 个不同的元素中任取 r 个排成一列，有多少种排法呢？这个排列 (permutation) 问题，可以视为在 r 个空格中填入 n 个不同的元素，也就是说这件事有 r 个步骤要完成。



步骤一：从 n 个元素中任选一个填入第一个空格，有 n 种方法；
步骤二：从剩余的 $n-1$ 个元素中任选一个填入第二个空格，有 $n-1$ 种方法；
步骤三：从剩余的 $n-2$ 个元素中任选一个填入第三个空格，有 $n-2$ 种方法。

依此类推，当前面的 $r-1$ 个空格都填满后，第 r 个空格只能从剩余的 $n-(r-1)$ 个元素中任选一个填上，有 $n-(r-1)$ 种方法。根据乘法原理，要填完 r 个空格有

$$n(n-1)(n-2)\cdots[n-(r-1)]$$

种方法。因此，从 n 个不同的元素中任取 r 个排成一列，共有 $n(n-1)(n-2)\cdots[n-(r-1)]$ 种不同的排列法，记作 ${}^{n}P_{r}$，也可记作 ${}_{n}P_{r}$ 或 P_{r}^{n}。

$${}^{n}P_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(r-1)]$$

其中 $r\leq n$，$n,r\in Z^{+}$。以上公式叫做排列数公式。

当 $r=n$ 时，即将 n 个元素全排列时，

$${}^{n}P_{n}=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

因此，从 n 个不同的元素中全取的排列数，等于自然数 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的阶乘 (factorial)，以 $n!$ 表示。

$$n! = {}^{n}P_{n} = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

其中 $n \in Z^{+}$。

数学橱窗 1

我们可以使用计算机来得到 ${}^{n}P_{r}$ 及 $n!$ 的值。

https://bit.ly/3xNtZW2

应用阶乘，排列数 ${}^{n}P_{r}$ 可作以下变形：

$$\begin{aligned}{}^{n}P_{r} &= n(n-1)(n-2)\cdots[n-(r-1)]\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\\ &= \frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

因此，排列数公式也可以写成以下形式：

$${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

为了使这个公式在 $n = r$ 时也能成立，因此规定

$$0! = 1$$

例题 5

化简：

(a) $\dfrac{{}^{n}P_{n}}{n}$　　　　(b) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

解 (a)
$$\begin{aligned}\frac{{}^{n}P_{n}}{n}&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n}\\&=(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\\&=(n-1)!\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-2)!}&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\\&=n(n-1)\end{aligned}$$

例题 6

若 $52\left({}^{n}P_{2}\right)={}^{2n}P_{3}$，求 n 的值

解
$$\begin{aligned}52\left({}^{n}P_{2}\right)&={}^{2n}P_{3}\\52n(n-1)&=2n(2n-1)(2n-2)\\52n(n-1)&=4n(2n-1)(n-1)\end{aligned}$$

想一想 **1** 为什么 $n\neq 0$ 且 $n\neq 1$？

因为 $n\neq 0$ 且 $n\neq 1$，所以
$$\begin{aligned}13&=2n-1\\n&=7\end{aligned}$$

随堂练习 19.2a

1. 求下列各数的值：

   (a) ${}^{5}P_{4}$　　　　(b) $3!$

2. 若 $100\left({}^{n}P_{2}\right)={}^{2n}P_{3}$，求 n 的值。

3. 证明 $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{n}{(n+1)!}$。

例题 7

由 1、2、3、4 这四个数字可组成多少个数字不重复的二位数？列出这些二位数。

解 从四个数字中选出两个数字排成二位数，共有 ${}^4P_2=12$ 种排法。

因此，由 1、2、3、4 这四个数字可组成 12 个数字不重复的二位数，其二位数有：12、13、14、21、23、24、31、32、34、41、42、43。

例题 8

从英文字“VOLUME”中任取三个字母排成一行，问共有多少种不同的排法？

解 从 6 个字母中选出 3 个字母排成一行，共有 ${}^6P_3=120$ 种排法。

例题 9

一教室里有 40 个座位。甲、乙、丙三名学生进入教室里入座，有多少种不同的坐法？

解 将教室里 40 个座位编上号码 1 至 40。从这 40 个号码中任取 3 个给甲、乙、丙三名学生，所以他们的坐法有 ${}^{40}P_3=59280$ 种。

随堂练习 19.2b

巴士上有30个座位，问让30名乘客就座的方法有多少种？

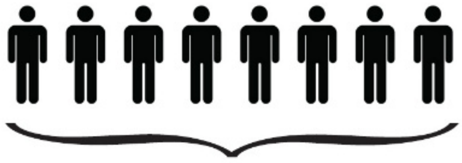
例题 10

有 8 个人排队，问

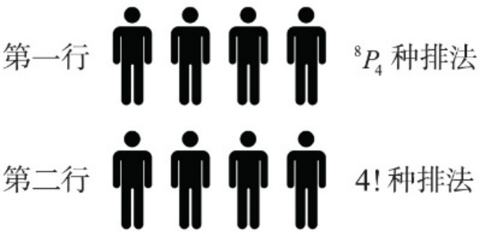
(a) 排成一行，有多少种不同的排法？

(b) 排成前后两行，每行 4 人，有多少种不同的排法？

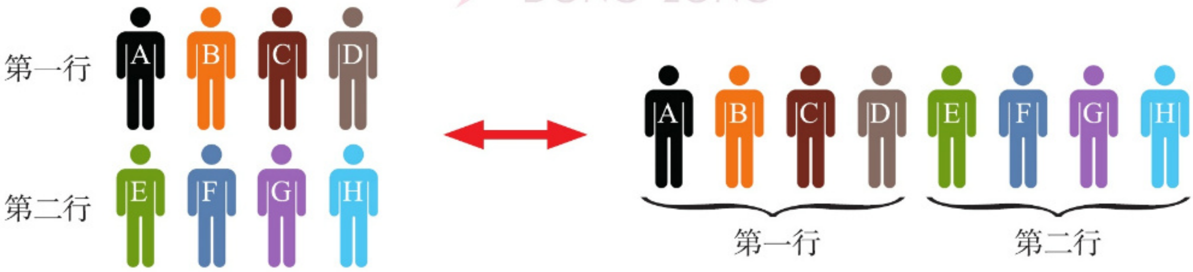
解 (a) 8 个人全排成一列，共有 $8!=40320$ 种不同的排法。



(b) 先从 8 人中选出 4 人排在第一行，有 ${}^{8}P_{4}$ 种排法；再将其余的 4 人全排在第二行，有 4! 种排法。根据乘法原理，共有 ${}^{8}P_{4}\times 4!=40320$ 种不同的排法。



在例题 10 中，将 8 个人排成两行的每个情况，可以与将 8 个人排成一排的情况一一对应，例如：



由于这两种排列皆可一一对应，所以它们应该有同样的排法数。因此，在例题 10 (b) 中，我们也可以将其排法数写成 $8!=40320$。事实上，我们也能从算式中发现 ${}^{8}P_{4}\times 4!=(8\times 7\times 6\times 5)\times(4\times 3\times 2\times 1)=8!$。

例题 11

若将 4 个不同的母音及 4 个不同的子音共 8 个字母排成一行，问两端为母音的排法有多少种？

解 完成排列，可分为两个步骤：

步骤一：将 4 个母音选出 2 个排在两端，有 ${}^4P_2$ 种排法；

步骤二：将剩余的 6 个字母全排在中间，有 6! 种排法。

根据乘法原理，两端为母音的排法有 ${}^4P_2 \times 6! = 8640$ 种。

例题 12

由 1、2、3、4、5、6、7 这七个数字可组成多少个数字不重复的

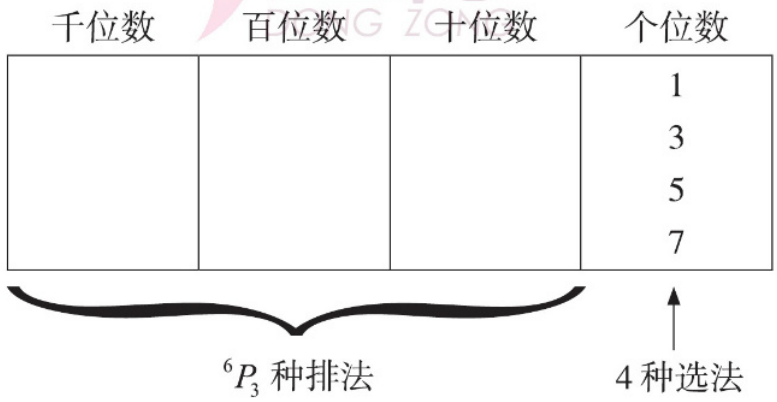
(a) 四位数；

(b) 四位奇数；

(c) 两端都是奇数的四位数？

解 (a) 从 7 个数字种任选 4 个组成四位数，有 ${}^7P_4 = 840$ 个。

(b) 组成四位奇数，可分为两个步骤：

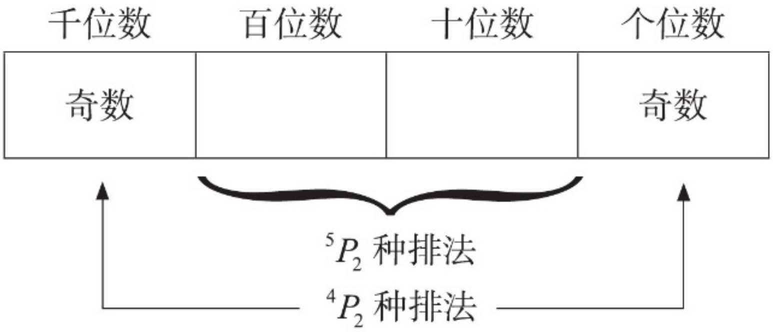


步骤一：末位数为奇数，即从 1、3、5、7 这 4 个数中任选1个，有 ${}^4P_1$ 种选法；

步骤二：将剩余的 6 个数字中任选 3 个排在其余的三个空格内，有 ${}^6P_3$ 种排法。

根据乘法原理，所求的四位奇数共有 ${}^4P_1 \times {}^6P_3 = 480$ 个。

(c) 组成两端都是奇数的四位数，可分为两个步骤：



步骤一：两端从 1、3、5、7 这 4 个数中任选2个排在两端，有 ${}^4P_2$ 种排法；

步骤二：将剩余的 5 个数字中任选 2 个排在其余的两个空格内，有 ${}^5P_2$ 种排法。

根据乘法原理，所求两端都是奇数的四位数共有 ${}^4P_2 \times {}^5P_2 = 240$ 个。

随堂练习 19.2c

1. 若将 9 个人排成 3 行，第一行 2 人，第二行 3 人，第三行 4 人，共有多少种排法？
2. 若数字不重复，由 1、2、3、4、5 这五个数字，可组成多少个
   (a) 三位数；
   (b) 三位偶数；
   (c) 能被 5 整除的三位数？

例题 13

由数字 1、2、3 可组成多少个数字不重复的自然数?

解 由数字 1、2、3 所组成的自然数，可分为三种情况：

情况一：一位数的自然数，有 ${}^3P_1=3$ 个；

情况二：二位数的自然数，有 ${}^3P_2=6$ 个；

情况三：三位数的自然数，有 ${}^3P_3=6$ 个。

根据加法原理，所组成的自然数共有 ${}^3P_1+{}^3P_2+{}^3P_3=3+6+6=15$ 个。

例题 14

由 0、1、2、3、4、5 这六个数字可组成多少个数字不重复的三位数?

解法一 百位上的数字不能是 0，所以只能从 1、2、3、4、5 这五个数字中任取一个，有 ${}^5P_1$ 种取法；十位及个位上的数字可以从剩余的 5 个数字中任选 2 个来排列，有 ${}^5P_2$ 种排法。

百位数	十位数	个位数
1 2 3 4 5		

${}^5P_1$ 种取法　　$\underbrace{\text{十位数　个位数}}_{{}^5P_2\text{ 种排法}}$

根据乘法原理，可组成的三位数有 ${}^5P_1\times{}^5P_2=100$ 个。

解法二 由 0、1、2、3、4、5 这六个数字中任选三个排成一排，有 ${}^6P_3$ 种排法；其中百位数字是 0 的排列数是 ${}^5P_2$，但百位数为 0 的数不能视为三位数。因此，所求的三位数的个数为 ${}^6P_3-{}^5P_2=100$。

例题 15

由 0、1、2、3、4、5 这六个数字可组成多少个数字不重复的四位偶数？

解 偶数的个位数应取 0、2、4 中的一个。由于 0 不能排在千位上，我们可以将所求的数分为两种情况：

情况一：个位数字为 0

千位数	百位数	十位数	个位数
			0

$\underbrace{\text{千位数 百位数 十位数}}_{{}^5P_3\text{ 种排法}}$

从 1、2、3、4、5这五个数字中任选三个排在前三个空位，有 ${}^5P_3$ 种排法。因此，可组成的四位偶数有 ${}^5P_3 = 60$ 个。

情况二：个位数字为 2 或 4

千位数	百位数	十位数	个位数
不是 0			2 4

4 种取法　　${}^4P_2$ 种排法　　2 种取法

从 2、4 中选取一个数字放在个位上，有 2 种取法；千位数必须从 0 及个位数字以外的 4 个数字中任取1个，有 4 种取法；再从剩余的 4 个数字中任取 2 个排在百位及十位上，有 ${}^4P_2$ 种排法。因此，可组成的四位偶数有 $2\times4\times{}^4P_2 = 96$ 个。

根据加法原理，可组成的四位偶数有 $60+96=156$ 个。

例题 16

从 4000 到 9000，共有多少个数字不重复的奇数？

解 所求的数是四位数。个位数字应取 1、3、5、7、9 中的一个；千位数字应取 5、6、7、8 种的一个。其中 5、7 是重复的数字，为了避免重复现象，我们可以将所求的数分为两种情况：

情况一：千位数字为 5 或 7

千位数	百位数	十位数	个位数
5			1/3/7/9
7			1/3/5/9
2 种取法	$^8P_2$ 种排法		4 种取法

从 5、7 中选取一个数字排在千位上，有 2 种取法；个位数必须从 1、3、5、7、9 中除了千位数字以外的 4 个数字中任取 1 个，有 4 种取法；再从剩余的 8 个数字中任取2个排在百位及十位上，有 $^8P_2$ 种排法。因此，根据乘法原理，得 $2\times4\times{}^8P_2=448$ 个。

情况二：千位数字为 6 或 8

千位数	百位数	十位数	个位数
4			1
6			3
8			5
			7
			9
3 种取法	$^8P_2$ 种排法		5 种取法

从 4、6、8 中选取一个数字排在千位上，有 3 种取法；个位数必须从 1、3、5、7、9 这 5 个数字中任取1个，有 5 种取法；再从剩余的 8 个数字中任取 2 个排在百位及十位上，有 ${}^{8}P_{2}$ 种排法。因此，根据乘法原理，得 $3\times5\times{}^{8}P_{2}=840$ 个。

根据加法原理，所求的数共有 $448+840=1288$ 个。

想一想 2 除了按上述解中的情况分类，你能想到不同的情况分类吗？

例题 17

在步操训练时，有 8 名学生排成一列。若其中小凯不能站在第一个位，也不能站在最后一个位，问这 8 名学生有几种列队方法？

解法一 由于小凯只能站在除了首、尾两位置以外的 6 个位置上，所以有 6 种选择；其余 7 人皆可任意排列在剩余的 7 个位置上，其排法有 7! 种。根据乘法原理，得其排列方法数为

$$6\times7!=30240$$

解法二 8 人的全排列数为 8!。若小凯站在第一个位置或最后一个位置，则排列数有 $2\times7!$ 种排法。因此，所求排列的方法个数为

$$8!-2\times7!=30240$$

随堂练习 19.2d

若数字不重复，由 0、1、2、3、4、5 这六个数字，可组成多少个

(a) 三位数；

(b) 三位奇数；

(c) 能被 5 整除的四位数？

例题 18

5 男 5 女排成一行，问

(a) 其中小玲与小敏这两个女生必须相邻的排法有多少种？

(b) 其中小玲与小敏这两个女生不相邻的排法又有多少种？

解 (a) 当小玲与小敏相邻时，可以将此二女视为一人，所以 9 人的排法有 $9!$ 种；由于两女的位子可互相调换，故二女的排法又有 $2!$ 种。根据乘法原理，小玲与小敏这两个女生相邻的排法数为

$$9!\times 2!=725760$$

(b) 10 人全排列时，有 $10!$ 种排法。由于小玲与小敏相邻的排法有 $9!\times 2!$ 种，所以小玲与小敏这两个女生不相邻的排法数为

$$10!-9!\times 2!=2903040$$

随堂练习 19.2e

5 男 5 女排成一列，问

(a) 女生们完全相邻的排法有多少种？

(b) 男女相间的排法有多少种？

习题 19.2

1. 有六张不同的椅子分配给四个人坐，问一共有多少种分配法？

2. 从数字 2、3、5、7、8、9 中任取 3 个数字组成数字不重复的三位数，问
   (a) 可组成多少个三位数？
   (b) 可组成多少个大于 500 的三位数？

3. 6 名同学排成一列拍照，有多少种排法？

4. 已知从 n 个不同的元素中取出 2 个元素的排列数是 56，求 n 的值。

5. 将 a，b，c，d，e，f，i 全取而排列时，可组成多少个不同的字串？若子音都不能相邻，又可组成多少个不同的字串？

6. 某文艺晚会里共有 7 个演出节目，若规定某个相声节目必须作为开场，而另一个大合唱节目必须安排在最后一个节目。问文艺晚会的节目流程共有多少种不同的安排方法？

7. 有 9 件商品要陈列在架上，并排成一列。
   (a) 如果某一商品必须放在中间，有多少种排法？
   (b) 如果某一商品不能放在中间，有多少种排法？
   (c) 如果某一商品只能放在两端，有多少种排法？
   (d) 如果某一商品既不能放在中间，也不能放在两端，又有多少种排法？
   (e) 如果某两件商品不能相邻摆放，有多少种排法？
   (f) 如果某两件商品不能放在两端，有多少种排法？

8. 8 个人并排站成一列：
   (a) 若甲、乙两人必须站在两端，有多少种排法？
   (b) 若甲、乙两人必须相邻，有多少种排法？
   (c) 若甲、乙两人必须相邻，且甲必须站在乙的右边，有多少种排法？

9. 将英文字“EQUATION”中的所有字母加以排列，问有多少种排法？若 E 排首，N 排尾，又有多少种排法？

10. 由 2，3，4，5，6，7 可组成多少个没有重复数字的五位偶数？

11. 由 0，2，3，4，6，8，9 可组成多少个没有重复数字的四位数？又可组成多少个大于 50000 且没有重复数字的数？

12. 由 0，1，2，3，4，5，6，7 这八个数字，可以组成多少个数字不重复，且能被 25 整除的五位数？

13. 若有两排座位，每排 4 个座位。8 人入座，若小凯与小明必须坐在前排，而小敏必须坐在后排。问有多少种入座方式？

19.3 相异元素可重复的排列

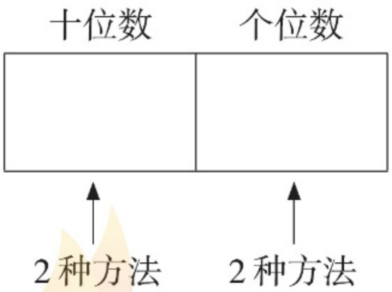
例题 19

由数字 1，2 可以组成

(a) 多少个二位数？

(b) 多少个三位数？

解 (a) 组成二位数，可分成两个步骤：

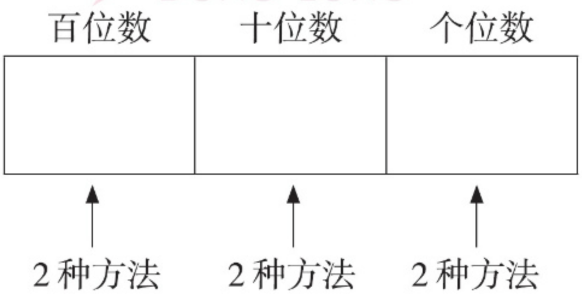


步骤一：十位的数字可以从 1、2 中任取一个，有 2 种方法；

步骤二：个位的数字也可以从 1、2 中任取一个，有 2 种方法。

根据乘法原理，可以组成的二位数有 $2\times2=4$ 个 。

(b) 组成三位数，可分成三个步骤：



步骤一：百位的数字可以从 1、2 中任取一个，有 2 种方法；

步骤二：十位的数字可以从 1、2 中任取一个，有 2 种方法；

步骤三：个位的数字可以从 1、2 中任取一个，有 2 种方法。

根据乘法原理，可以组成的二位数有 $2\times2\times2=8$ 个。

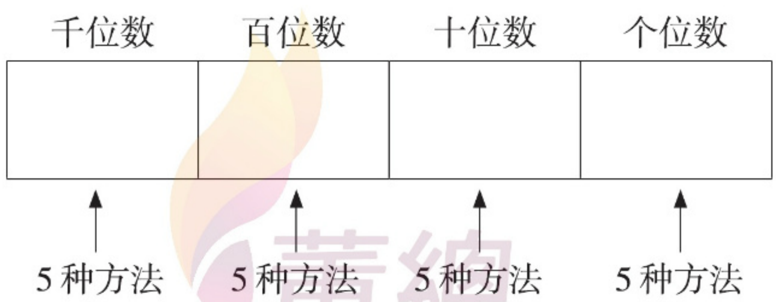
一般地，若有 n 个不同的元素，每个元素可重复使用，则取出第一个元素有 n 种方法；取出第二个元素有 n 种方法；取出第三个元素有 n 种方法；…；取出第 r 个元素有 n 种方法。根据乘法原理，若元素可重复提取，从 n 个元素中任取 r 个元素的排列数为

$$\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{ 个}}=n^r$$

例题 20

若数字可重复使用，由 1、3、5、7、9 这五个数字，可以组成多少个不同的四位数？

解

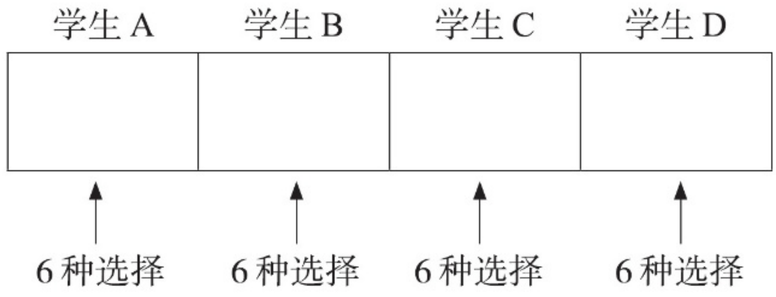


由于五个数字可重复使用，个位、十位、百位、千位都各有 5 种选法。因此，可组成不同的四位数有 $5^4=625$ 个。

例题 21

每个高三学生都须在 6 个选修课中选择一个参加。现有 4 名高三生，那么他们会有几种不同的选择方法？

解



由于每个学生都有 6 个选择，因此一共有 $6^4 = 1296$ 种选择方法。

想一想 3 为什么在例题21中，是按4个学生化成四格，而不是按6个课程化成六格？

随堂练习 19.3a

若所有礼物都必须分完，且每个人皆可能获得任意数量的礼物，那么
(a) 将 3 份不同的礼物分给 6 个人，共有多少种分法？
(b) 将 6 份不同的礼物分给 3 个人，共有多少种分法？

例题 22

用 2、3、4、5、9 五个数字，可以排出多少个大于 5000 的四位数？

解

学生 A	学生 B	学生 C	学生 D
5 9			
2 种取法	5 种取法	5 种取法	5 种取法

大于 5000 的四位数，其千位数只能是 5 或 9，有 2 种取法。由于数字可重复，故百位、十位、个位各都有 5 种取法。因此，可排出大于 5000 的四位数共有 $2\times5^3=250$ 个。

例题 23

从 0、1、2、…、9 这十个数字中任取四个数字组成编码，但不能编出四个数字皆相同的编码。问可编成多少个不同的编码？

解

第一位数	第二位数	第三位数	第四位数
10 种取法	10 种取法	10 种取法	10 种取法

若四位数字皆可从 0 到 9 这十个数字中任取四个数字组成编码，有 10^4 种。其中四个数字皆相同的编码有 10 个。因此，可编成的编码共有 $10^4-10=9990$ 个。

随堂练习 19.3b

用 0、1、2、4、5 组成三位数。
(a) 如果三位数中的数字不能重复，问共有多少个？
(b) 如果三位数中的数字可以重复，问共有多少个？

习题 19.3

1. 某公司的文件是使用首四个英文字母 A，B，C，D 中的其中两个字母组成的代号加以区别。若个别字母可重复使用，问可组成多少个不同的代号？

2. 已知古晋与诗巫之间有三条路径。小凯从古晋开车到诗巫，再从诗巫开回古晋。问有多少种不同的走法？

3. 有 4 位学生同时竞夺三项比赛的冠军，问三项比赛的冠军得主的可能情况有多少种？

4. 某餐厅推出 7 种套餐。若有 3 人到该餐厅用餐，并且每人点了一份套餐，问可能会出现多少种不同的点餐情况？

5. 用 3、4、5、7 这四个数字组成四位数，其中千位数字与个位数字必须相同，问可以组成多少个不同的四位数？

6. 将 6 本不同的书分送给 3 个人。
   (a) 如果每个人只能拿到一本，问有几种分法？
   (b) 如果这 6 本书都分完，但不限定每个人都要得到，问有几种分法？

7. 由 0、1、2、…、5 这六个数字，可以组成多少个数字可重复的六位奇数？

8. 某国的电话号码规定号码的第一个数字不能是 0 或 1。今将电话号码从七位数调整至八位数，问调整后会增加多少个电话号码？

19.4 相异元素的环形排列

在前面所讨论的排列中，元素都可视为排在直线上，这种排列叫做线性排列(linear permutation)。而现在我们要讨论的是，将元素沿着圆周排成环状，这种排列叫做环形排列 (circular permutation)。

例题 24

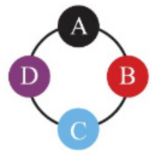
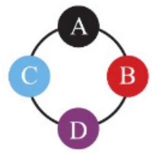
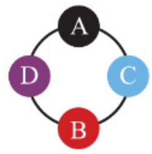
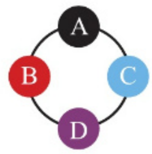
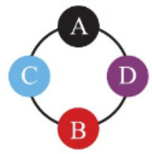
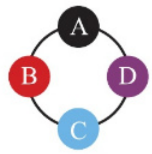
四个人围圆桌而坐，问有多少种不同的坐法？

解法一 设这四人分别是 A、B、C、D。若四人沿直线排列，则其排法有 4! 种。

观察以下四种排列：

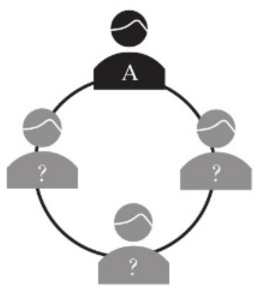
由于四人的相对位置皆相同（A 的右边是 B、B 的右边是 C、C 的右边是 D、D 的右边是 A），因此可视为是相同的环形排法，如下图所示：

由此可知，每一个环形排列可对应四种不同的线性排列，如下表所示：

线性排列	环形排列
ABCD　BCDA　CDAB　DABC	
ABDC　BDCA　DCAB　CABD	
ACBD　CBDA　BDAC　DACB	
ACDB　CDBA　DBAC　BACD	
ADBC　DBCA　BCAD　DBCA	
ADCB　DCBA　CBAD　DCBA	

因此，四人围坐圆桌的方法有 $\dfrac{4!}{4}=3!=6$ 种。

解法二 当四个人围圆桌而坐时，每人依序按顺时针方向或逆时针方向移动位子均不会改变各人之间的左右关系，即视为同一种环状排列。



因此，可以先将其中一人的座位固定，剩余的三个座位则分配给其余的三人随意就坐，就有 3! 种。由此，也可得四人围圆桌而坐的方法有 3! 种。

一般地，可得以下结论：

若将 n 个不同的元素按环形排列，其排列数为

$$\frac{{}^{n}P_{n}}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

若将 n 个不同的元素中任取 r 个元素按环形排列，其排列数为

$$\frac{{}^{n}P_{r}}{r}=\frac{n!}{r\times(n-r)!}$$

例题 25

从 6 盆不同的花，选出若干盆放置在圆形展览台的周围。问在下列情况下，各有多少种不同的放置方法？

(a) 6 盆全选；

(b) 选出 3 盆。

解 (a) 6 盆全取按环状排列，有 $(6-1)!=5!=120$ 种放置方法。

(b) 从 6 盆中选出 3 盆按环状排列，有 $\frac{{}^{6}P_{3}}{3}=40$ 种放置方法。

随堂练习 19.4a

1. 5 人围圆桌而坐，问有多少种不同的坐法？
2. 从 6 男 5 女中任选 5 人围成一圈，问有多少种围法？

例题 26

小凯与爸爸、妈妈、爷爷、奶奶 5 人围坐圆桌吃团圆饭。

(a) 若没有任何限制，有多少种坐法？

(b) 若爸爸与妈妈，爷爷与奶奶须相邻而坐，有多少种坐法？

(c) 若小凯须坐在爸爸与妈妈之间，有多少种坐法？

解 (a) 5 人围圆桌排列，有 $(5-1)!=4!=24$ 种坐法。

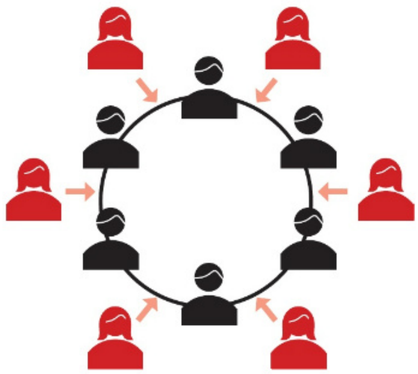
(b) 爸爸与妈妈相邻而坐，可视为一人；爷爷与奶奶相邻而坐，也可视为一人。3 人围圆桌排列，有 $(3-1)!$ 种排法；而爸爸与妈妈可交换位置，有 $2!$ 种排法；爷爷与奶奶也可交换位置，有 $2!$ 种排法。因此，所求的坐法共有 $(3-1)!\times2!\times2!=8$ 种。

(c) 爸爸、妈妈与小凯三人相邻而坐，可视为一人。3 人围圆桌排列，有 $(3-1)!$ 种排法；而爸爸与妈妈可交换位置，有 $2!$ 种排法。因此，所求的坐法共有 $(3-1)!\times2!=4$ 种。

例题 27

6 男 6 女围圆桌而坐，如果同性不能相邻而坐，问有多少种坐法？

解 先让 6 个男生入座，其排列数为 $(6-1)!$ 种；然后，再将 6 个女生安置在男生之间（如图），其排列方法有 $6!$ 种。故 6 男 6 女的坐法有 $(6-1)!\times6!=86400$ 种。



例题 28

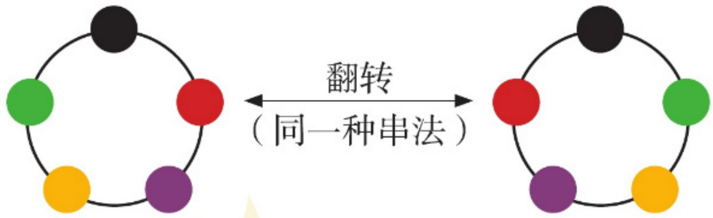
有 5 颗颜色不同的珠子，

(a) 把这 5 颗珠子放在桌面上围成一圈，有多少种围法？

(b) 用线把它们串成珠圈，有多少种串法？

解 (a) 5 颗珠子围成一圈，有 $(5-1)!=4!=24$ 种围法。

(b) 将一个串好的珠串放在桌面上，将之翻转过来后，会得到另一个环状排列。



这两种不同的环状排列实为同一种串法，所以用线串好的珠圈共有 $\dfrac{(5-1)!}{2}=\dfrac{24}{2}=12$ 种。

随堂练习 19.4b

6 男 4 女围一圆桌而坐，其中女生不能相邻，问有多少种坐法？

习题 19.4

1. 有 6 人举行圆桌会议，有几种坐法？若其中领导必须安排在主位，又有几种坐法？

2. 五个大人与五个小孩围坐一张圆桌，若小孩不能相邻而坐，问有几种坐法？

3. 3 男 4 女围成一圈，若任何两男不能相邻，问有多少种围法？

4. 8 人围一圆桌开会，其中正、副组长各 1 人，记录员 1 人。
   (a) 如果正、副组长须相邻而坐，共有多少种坐法？
   (b) 如果记录员须坐在正、副组长之间，共有多少种坐法？

5. 4 对夫妇与一小孩围坐于一圆桌，如果夫妇都必须相邻，共有多少种坐法？

6. 小凯有 10 颗不同的珠子，想要把它们串成珠圈。
   (a) 若小凯使用所有的 10 颗珠子串成珠圈，有多少种不同的串法？
   (b) 若小凯任意选取其中的 5 颗珠子串成珠圈，又有多少种不同的串法？

19.5 不尽相异元素的排列

前面讨论的排列问题，所给定的元素都是相异的。若所给定的元素当中有一些是相同的，这种情况就属于不尽相异元素的排列问题了。

例题 29

将 x，x，x，y 四个元素全取排列，共有多少种排列方法？

解 先将三个相同的元素 x 看成三个不同的 x_1、x_2、x_3。那么，四个不同元素 x_1、x_2、x_3、y 的全排列有 $4!=24$ 个。列出如下：

$x_1\ x_2\ x_3\ y$	$x_1\ x_2\ y\ x_3$	$x_1\ y\ x_2\ x_3$	$y\ x_1\ x_2\ x_3$
$x_1\ x_3\ x_2\ y$	$x_1\ x_3\ y\ x_2$	$x_1\ y\ x_3\ x_2$	$y\ x_1\ x_3\ x_2$
$x_2\ x_1\ x_3\ y$	$x_2\ x_1\ y\ x_3$	$x_2\ y\ x_1\ x_3$	$y\ x_2\ x_1\ x_3$
$x_2\ x_3\ x_1\ y$	$x_2\ x_3\ y\ x_1$	$x_2\ y\ x_3\ x_1$	$y\ x_2\ x_3\ x_1$
$x_3\ x_1\ x_2\ y$	$x_3\ x_1\ y\ x_2$	$x_3\ y\ x_1\ x_2$	$y\ x_3\ x_1\ x_2$
$x_3\ x_2\ x_1\ y$	$x_3\ x_2\ y\ x_1$	$x_3\ y\ x_2\ x_1$	$y\ x_3\ x_2\ x_1$
$xxxy$	$xxyx$	$xyxx$	$yxxx$

观察以上四组，在每一组中，y 的位置都是固定的，x_1、x_2、x_3 则有 $3!=6$ 种不同的排法。若将上表中的 x_1、x_2、x_3 都换回 x，则每一列中的六个排列方法皆为同一种排列方法。因此，四个元素 x、x、x、y 的全排列只有 $\dfrac{4!}{3!}=4$ 种。

一般地，若有 n 个元素：

$$\underbrace{a_1, a_1, \cdots, a_1}_{n_1\text{个}}; \underbrace{a_2, a_2, \cdots, a_2}_{n_2\text{个}}; \cdots; \underbrace{a_r, a_r, \cdots, a_r}_{n_r\text{个}}$$

其中 a_1 有 n_1 个，a_2 有 n_2 个，…，a_r 有 n_r 个，且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则这 n 个元素的全排列数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

例题 30

有 6 面彩旗，其中红旗 3 面，黄旗 2 面及白旗 1 面。若将 6 面旗子排成一行，问有多少种排法？

解 这六面彩旗的排列法有 $\dfrac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=60$ 种。

例题 31

将“MISSISSIPPI”一字的字母全取重新排列，有多少种排法？

解 这 11 个字母中有 1 个 M，4 个 I，4 个 S 及 2 个 P。所以，其排法数是 $\dfrac{11!}{1!\times 4!\times 4!\times 2!}=34650$。

随堂练习 19.5

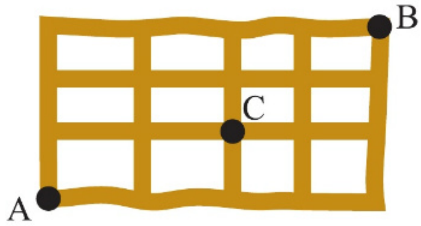
求 A，B，B，B，C，C，C，C 八个字母全取的排列数。

例题 32

如右图所示，某市区有 5 条南北向的大道，4 条东西向的大道。

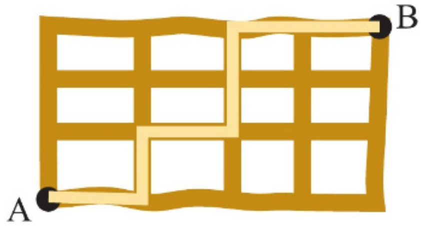
(a) 小凯欲从 A 处走向 B 处，问有多少条最短路径可走？

(b) 小凯欲从 B 处，经 C 处回到 A 处，又有多少条最短路径可走？



解 (a) 从 A 处开始，每到一个交叉路口就必须选择向东或向北（不能向西或向南，否则就不是走最短的路径）。而 5 条南北向的大道被分为 3 段，4 条东西向的大道被分为 4 段。

从 A 处到 B 处，沿最短路径，无论如何都要经过 4 个“东”横段及 3 个“北”纵段。例如，右图所示的路径可表示成“东北东北北东东”。



所以，这个问题可归类为 7 个不尽相异元素“东、东、东、东、北、北、北”的全排列问题。

因此，从 A 到 B 的最短路径有 $\dfrac{7!}{4!\times 3!}=35$ 条。

(b) 由 B 到 C 的走法有 $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 种；

由 C 到 A 的走法有 $\dfrac{3!}{2!\times 1!}=3$ 种；

因此，有 B 经 C 到 A 的最短路径共有 $6\times 3=18$ 条。

习题 19.5

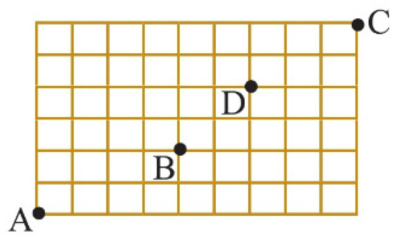
1. 将 4 支铅笔，5 支原子笔及 2 支钢笔分给 11 个小孩，问每个小孩得到一支笔的分配方法有多少种？

2. 求“EXPRESSION”一字的字母全取的排列数。

3. 将“1、1、2、2、3、3、4、5”这八个数字加以排列，问可排出多少个不同的八位数？

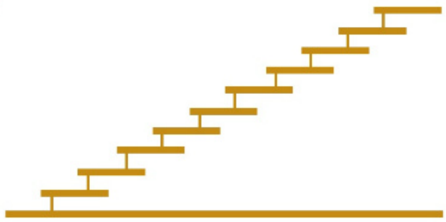
4. 将“MALAYSIA”一字的所有字母加以排列，使其中的三个“A”不完全在一起，问有多少种不同的排法？

5. 棋盘形的街道如图所示，有 10 条直街，7 条横街。
   (a) 小凯由A点处走到C处，若要取径最短，问有多少种走法？
   (b) 小敏由 C 处，经 D 及 B 处，打算走到 A 点处，若要取径最短，问有多少种走法？



（第5题用图）

6. 右图为 10 个梯级的楼梯。某人上楼时，有时一步跨一个梯级，有时一步跨两个梯级。问此人共有多少种上楼的方法？


（第6题用图）

19.6 组合与组合数公式

从n个不同元素中，任取 $r\,(r \le n)$ 个元素，若不考虑组成顺序并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 r 个元素的一个组合 (combination)。所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 r 个元素的组合数，记作 ${}^{n}C_{r}$，也可记作 ${}_{n}C_{r}$，C_{r}^{n} 或 $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$。

例题 33

从 a、b、c、d 四个不同的元素中任取三个作为一组，有多少种组法？

解 从 a、b、c、d 四个不同的元素中任取 3 个元素的排列与组合的关系如下表所示：

组合		排列					
$a\ b\ c$	$\longrightarrow$	abc	acb	bac	bca	cab	cba
$a\ b\ d$	$\longrightarrow$	abd	adb	bad	bda	dab	dba
$a\ c\ d$	$\longrightarrow$	acd	adc	cad	cda	dac	dca
$b\ c\ d$	$\longrightarrow$	bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

由表中可以看出，对于每一个组合都有 $3!=6$ 个不同的排列。因此，从 4 个不同的元素中取 3 个元素的排列数 ${}^4P_3$，可以按以下两步来考虑：

第一步：从 4 个不同元素中任取 3 个元素作组合，有 ${}^4C_3$ 个组合；

第二步：对每一个组合中的 3 个元素，作全排列，各有 $3!$ 种方法。

根据乘法原理，得 ${}^4P_3 = {}^4C_3 \times 3!$

$$
\begin{aligned}
{}^4C_3 &= \frac{{}^4P_3}{3!} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

即，从 a、b、c、d 四个不同的元素中任取 3 个组成一组，共有 ${}^4C_3=4$ 种组法。

一般地，从 n 个不同的元素中任取 r 个元素的排列数 ${}^nP_r$ 的求法，可按以下两个步骤考虑：

步骤一：先从 n 个不同的元素中取出 r 个作组合，有 ${}^nC_r$ 个组合；

步骤二：每一个组合中的 r 个元素的全排列，有 $r!$ 种方法。

根据乘法原理， ${}^nP_r = {}^nC_r \times r!$

$${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$$

因此，从 n 个不同的元素中取出 r 个作组合数

$$\begin{aligned}{}^nC_r &= \frac{{}^nP_r}{r!}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(r-1)]}{r!}\end{aligned}$$

其中 $n, r \in Z^+$ 且 $r \le n$。又因为

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

可得

$${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

数学橱窗 2

我们可以使用计算机来得到 ${}^nC_r$ 的值。

https://bit.ly/3xNtZW2

想一想 4 ${}^nC_0$ 及 ${}^nC_n$ 的值分别是多少？举例说明这两个组合数的组合意义。

随堂练习 19.6a

求 ${}^8C_2$ 的值。

例题 34

从 20 人中选出 5 人组成一个代表团，问有多少种不同的选法？

解 从 20 人中挑选 5 人作组合，有 ${}^{20}C_5 = 15504$ 种不同的选法。

例题 35

从 25 男 15 女中选出 5 人组成一个 3 男 2 女的委员会，有多少种不同的选法？

解 从 25 个男生中选出 3 人，有 ${}^{25}C_3$ 种方法；

从 15 个女生中选出 2 人，有 ${}^{15}C_2$ 种方法。

根据乘法原理，组成委员会的选法有 ${}^{25}C_3 \times {}^{15}C_2 = 241500$ 种。

例题 36

平面上有 15 个点，其中没有任何 3 点是共线的，问

(a) 这些点可以确定多少条不同的直线？

(b) 从任意 3 点作为三角形的顶点，可作出多少个不同的三角形？

解 (a) 因为两点确定一条直线，所以可以确定 ${}^{15}C_2 = 105$ 条不同的直线。

(b) 因为不共线的三点可以确定一个三角形，所以可作出 ${}^{15}C_3 = 455$ 个不同的三角形。

随堂练习 19.6b

1. 从 50 件不同的商品中挑选出 8 个来组成礼篮，问可组成多少种不同的礼篮？
2. 在某国的六个城市中，各城市之间都恰有一条陆路交通连接。问这六个城市之间共有多少条公路连接？
3. 一公司欲聘请男女销售员各六名。问在 9 个女应征者及 8 个男应征者中挑选的方法有多少种？

组合数的性质

例题 37

已知某个研究团队有10人。

(a) 若从团队中挑选 4 人负责留守实验室，有多少种不同的选法？

(b) 若从团队中挑选 6 人不需留守实验室，又有多少种不同的选法？

解 (a) 从 10 人中挑选出 4 人，有 ${}^{10}C_4 = 210$ 种选法。

(b) 从 10 人中挑选出 6 人，有 ${}^{10}C_6 = 210$ 种选法。

从例题 37 中，可以看出 (a) 小题的情况与 (b) 小题的情况是呼应的，若团队中选择 A、B、C、D 四人留守实验室，等同于选择了其他 6 人不需留守实验室。这样看来，我们可以知道，其选法数 ${}^{10}C_4$ 及 ${}^{10}C_6$ 必然相同。

一般地，我们有

$$ {}^{n}C_r = {}^{n}C_{n-r} $$

此关系式可以由组合数的定义 ${}^{n}C_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ 中得出：

$$ \begin{aligned} {}^{n}C_{n-r} &= \frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= {}^{n}C_r \end{aligned} $$

例题 38

从 21 人的选拔队中选取 5 人组队参加比赛，
(a) 若队长必须参赛，问有多少种不同的选法？
(b) 若队长不需参赛，问有多少种不同的选法？
(c) 若任意挑选，又有多少种不同的选法？

解 (a) 因为队长必须参赛，所以只需从剩余 20 人中挑选出 4 人即可，即有 $^{20}C_4 = 4845$ 种选法。

(b) 因为队长不需参赛，所以只需从剩余 20 人中挑选出 5 人即可，即有 $^{20}C_5 = 15504$ 种选法。

(c) **解法一**

根据 (a)、(b) 小题，若队长参赛，有 $^{20}C_4 = 4845$ 种选法；若队长不参赛，则有 $^{20}C_5 = 15504$ 种选法。若任意挑选，那么一共有 $^{20}C_4 + {}^{20}C_5 = 4845 + 15504 = 20349$ 种选法。

解法二

由于可任意挑选，所以可直接从20人中挑选出5人即可，即有 $^{21}C_5 = 20349$ 种选法。

从例题 38 中，得出 $^{20}C_4 + {}^{20}C_5 = {}^{21}C_5$。一般地，我们有

$$^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_r = {}^{n+1}C_r$$

我们也可以由组合数的定义，得到相同结论：

$$
\begin{aligned}
{}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_{r} &= \frac{n!}{(r-1)!\left[n-(r-1)\right]!}+\frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!\times r+n!\times(n-r+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n!\times\left[r+(n-r+1)\right]}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n!\times(n+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{r!\left[(n+1)-r\right]!} \\
&= {}^{n+1}C_{r}
\end{aligned}
$$

例题 39

集合 $S=\{a,b,c,d,e\}$ 有多少个子集？

解法一 将集合 S 的子集按元素的个数分成以下几种情况：

0 个元素的子集，有 ${}^{5}C_{0}$ 个；
1 个元素的子集，有 ${}^{5}C_{1}$ 个；
2 个元素的子集，有 ${}^{5}C_{2}$ 个；
3 个元素的子集，有 ${}^{5}C_{3}$ 个；
4 个元素的子集，有 ${}^{5}C_{4}$ 个；
5 个元素的子集，有 ${}^{5}C_{5}$ 个。

因此，一共有 ${}^{5}C_{0}+{}^{5}C_{1}+{}^{5}C_{2}+{}^{5}C_{3}+{}^{5}C_{4}+{}^{5}C_{5}=32$ 个子集。

解法二 对于一个子集，它有包含 a 或没有包含 a 两种选择，包含 b 或没包含 b 两种选择，…，包含 e 或没包含 e 两种选择。根据乘法原理，会有 $2^5=32$ 种不同的子集。

从例题 39 中，得出 ${}^5C_0+{}^5C_1+{}^5C_2+{}^5C_3+{}^5C_4+{}^5C_5=2^5$。一般地，我们有

$${}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+\cdots+{}^nC_n=2^n$$

例题 40

小凯想邀请他 6 位朋友中至少一位朋友来参加生日派对，问共有多少种邀请法？

解法一 若小凯选择邀请 k 个人参加，有 ${}^6C_k$ 种选法 ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$)。
根据加法原理，邀请法共有 ${}^6C_1+{}^6C_2+{}^6C_3+{}^6C_4+{}^6C_5+{}^6C_6=63$ 种。

解法二 对于那六位朋友，皆有“邀请”及“不邀请”两种选择。故，邀请法共有 2^6 种。惟在这邀请的方法数中要减去“每个人都不邀请”这一种情况。因此，小凯共有 $2^6-1=63$ 种邀请法。

例题 41

一支羽球队有 5 名男队员及 4 名女队员。现欲安排双打训练，问
(a) 选出一对男双与一对女双进行对打，有多少种不同的选法？
(b) 选出两队混双对打，有多少种不同的选法？

解 (a) 先从 5 名男队员中选出 2 人，有 ${}^5C_2$ 种选法；
再从 4 名女队员中选出 2 人，有 ${}^4C_2$ 种选法。
根据乘法原理，所求的选法有 ${}^5C_2\times{}^4C_2=60$ 种。

(b) 先从 5 名男队员中选出 2 人，有 ${}^5C_2$ 种选法；
再从 4 名女队员中选出 2 人，有 ${}^4C_2$ 种选法；
然后将选出的 2 男与 2 女配对成两队混双，有 $2!$ 种配法。
根据乘法原理，所求的选法有 ${}^5C_2\times{}^4C_2\times2!=120$ 种。

例题 42

从 7 名男医生及 4 名女医生中选出 5 人组成一个研究小组。根据下列要求，可组成多少种不同的小组？

(a) 至少有 2 名女医生；

(b) 最多有 3 名女医生。

解 (a) 至少有2名女医生，可以分为三种情况：

选 2 名女医生，3 名男医生，有 ${}^{4}C_{2}\times{}^{7}C_{3}$ 种选法；

选 3 名女医生，2 名男医生，有 ${}^{4}C_{3}\times{}^{7}C_{2}$ 种选法；

选 4 名女医生，1 名男医生，有 ${}^{4}C_{4}\times{}^{7}C_{1}$ 种选法。

根据加法原理，至少有 2 名女医生的选法有

${}^{4}C_{2}\times{}^{7}C_{3}+{}^{4}C_{3}\times{}^{7}C_{2}+{}^{4}C_{4}\times{}^{7}C_{1}=301$ 种。

(b) 最多有 3 名女医生，可以分为四种情况：

选 3 名女医生，2 名男医生，有 ${}^{4}C_{3}\times{}^{7}C_{2}$ 种选法；

选 2 名女医生，3 名男医生，有 ${}^{4}C_{2}\times{}^{7}C_{3}$ 种选法；

选 1 名女医生，4 名男医生，有 ${}^{4}C_{1}\times{}^{7}C_{4}$ 种选法；

只选择 5 名男医生，有 ${}^{7}C_{5}$ 种选法。

根据加法原理，最多有 3 名女医生的选法有

${}^{4}C_{3}\times{}^{7}C_{2}+{}^{4}C_{2}\times{}^{7}C_{3}+{}^{4}C_{1}\times{}^{7}C_{4}+{}^{7}C_{5}=455$ 种。

例题 43

在 52 张扑克牌中，有 13 张红心。现任意抽取 5 张：

(a) 一共有多少种抽法？

(b) 抽取出的 5 张牌中，恰好有 2 张红心的抽法有多少种？

(c) 抽取出的 5 张牌中，至少有 1 张红心的抽法有多少种？

解 (a) 从 52 张扑克牌中任意抽取 5 张，共有 ${}^{52}C_{5}=2598960$ 种抽法。

(b) 从 13 张红心中抽取 2 张，有 ${}^{13}C_{2}$ 种方法；

从 39 张其他牌中抽取 3 张，有 ${}^{39}C_{3}$ 种方法。

因此，恰好有 2 张红心牌的抽法有 ${}^{13}C_{2}\times{}^{39}C_{3}=712842$ 种。

(c) 从 52 张扑克牌中抽取 5 张，有 ${}^{52}C_5$ 种方法。若完全不抽红心牌，而从其余的 39 张中抽取 5 张，则有 ${}^{39}C_5$ 种方法。因此，至少有1张红心牌的抽法有 ${}^{52}C_5 - {}^{39}C_5 = 2023203$ 种。

想一想 5 例题43(c)还有其他解法吗？

例题 44

若从 25 个男同学中选 3 人，12 个女同学中选 2 人来组成委员会，并担任正、副主席，文书，财政及总务这五个职务，问有几种选法？

解 可以分成两个步骤完成：

步骤一：从25个男同学中选3人，12个女同学中选2人，有 ${}^{25}C_3 \times {}^{12}C_2$ 种方法；

步骤二：将选出的 5 人分配至五个职务，有 5! 中方法。

根据乘法原理，共有 ${}^{25}C_3 \times {}^{12}C_2 \times 5! = 18216000$ 种选法。

例题 45

有 12 本不同的书，

(a) 平均分给甲、乙、丙三人，共有多少种分法？

(b) 平均分成三堆，共有多少种分法？

解 (a) 先让甲从 12 本书中任意选取 4 本，有 ${}^{12}C_4$ 种方法；

再让乙从剩余的 8 本书种任意选取 4 本，有 ${}^{8}C_4$ 种方法；

最后将剩余的 4 本书给丙，有 ${}^{4}C_4$ 种方法。

根据乘法原理，所求分法数是 ${}^{12}C_4 \times {}^{8}C_4 \times {}^{4}C_4 = 34650$ 。

(b) 设将 12 本书平均分成三堆，有 N 种方法；

将这三堆书分给甲、乙、丙，有 3! 种方法。

所以，将12本书平均分给甲、乙、丙共有 $N \times 3!$ 种。由 (a) 的结果得知，

$$N \times 3! = {}^{12}C_4 \times {}^{8}C_4 \times {}^{4}C_4$$

$$N = \frac{{}^{12}C_4 \times {}^{8}C_4 \times {}^{4}C_4}{3!}$$

$$= 5775$$

因此，将 12 本书平均分成三堆，有 5775 种方法。

例题 46

有 10 本不同的书，分给甲、乙、丙三人。

(a) 若分给甲 5 本，乙 3 本，丙 2 本，共有多少种分法？

(b) 若一人分得 5 本，一人分得 3 本，一人分得 2 本，共有多少种分法？

解 (a) 先让甲从 10 本书中任意选取 5 本，有 ${}^{10}C_5$ 种方法；

再让乙从剩余的 5 本书种任意选取 3 本，有 ${}^{5}C_3$ 种方法；

最后将剩余的 2 本书给丙，有 ${}^{2}C_2$ 种方法。

根据乘法原理，所求分法数是 ${}^{10}C_5 \times {}^{5}C_3 \times {}^{2}C_2 = 2520$ 。

(b) 可以分成以下六种情况：

甲得 5 本，乙得 3 本，丙得 2 本；

甲得 5 本，丙得 3 本，乙得 2 本；

乙得 5 本，甲得 3 本，丙得 2 本；

乙得 5 本，丙得 3 本，甲得 2 本；

丙得 5 本，甲得 3 本，乙得 2 本；

丙得 5 本，乙得 3 本，甲得 2 本。

无论是哪种情况，皆各有 ${}^{10}C_5 \times {}^{5}C_3 \times {}^{2}C_2$ 种分法。而上述情况的数量，可视为“甲、乙、丙”三元素全排列的数量，即为 3!。因此，若一人分得 5 本，一人分得 3 本，一人分得 2 本，共有 ${}^{10}C_5 \times {}^{5}C_3 \times {}^{2}C_2 \times 3! = 15120$ 种分法。

在例题 46 (b) 中，“乙得 5 本，甲得 3 本，丙得 2 本”，也可视为“甲得 3 本，乙得5本，丙得 2 本”，因此 ${}^{10}C_5 \times {}^{5}C_3 \times {}^{2}C_2$ 与 ${}^{10}C_3 \times {}^{7}C_5 \times {}^{2}C_2$ 的结果相同。

例题 47

在下图所示的 20 张数字牌中，任取 4 张组成四位数，问可得多少个不同的数？

1	1	2	2	2	3	3	4	4	4
5	6	7	7	8	8	9	9	9	9

解 在这些数字牌中，有 2 张相同的 1、3、7、8，有 3 张相同的 2、4，有 4 张相同的 9。其可能组成的不同的四位数有以下五种情况：

数字完全相同的四位数，有 ${}^{9}C_1 \times \dfrac{4!}{4!} = 1$ 个；

数字有三个相同一个不同的四位数，有 ${}^{3}C_1 \times {}^{8}C_1 \times \dfrac{4!}{3!1!} = 96$ 个；

数字有两对相同的四位数，有 ${}^{7}C_2 \times \dfrac{4!}{2!2!} = 126$ 个；

数字有两个相同两个不同的四位数，有 ${}^{7}C_1 \times {}^{8}C_2 \times \dfrac{4!}{2!1!1!} = 2352$ 个；

数字完全不同的四位数，有 ${}^{9}C_4 \times 4! = 3024$ 个。

根据加法原理，可组成 $1 + 96 + 126 + 2352 + 3024 = 5599$ 个四位数。

随堂练习 19.6c

1. 将 10 名学生分成两组，每组人数相等，有多少种分法？

2. 将 4 本不同的书，分给甲、乙二人。
   (a) 每人得 2 本，有多少种分法？
   (b) 甲得 1 本，乙得3本，有多少种分法？
   (c) 一人得 1 本，另一人得3本，又有多少种分法？

3. 用 2，3，3，3，4，4，4，5，5，6，7，8 这 12 个数字，可以组成多少个四位数？

习题 19.6

1. 在某次数学测验中，学生可从 10 个考题里任选7题作答，问考生共有多少种不同的选法？

2. 圆上有 10 个点：
   (a) 过每两点可画一条弦，一共可画多少条弦？
   (b) 过三点可画一个圆内接三角形，一共可画多少个圆内接三角形？

3. 凸九边形有多少条对角线？

4. 某班有 6 名学生负责卫生工作，一名负责擦黑板，一名负责倒垃圾，两名负责扫地及两名负责排桌椅。问有多少种方法编排工作？

5. 从 5 对夫妇中选出 4 人，任何一对夫妇不能同时被选，问有多少种选法？

6. 从 9 名数学系学生及 4 名教育系学生中，选出 6 人组成一个数学教育考察团。问在下列情况中，各有多少种组团方法？
   (a) 团员中恰有 2 名教育系学生；
   (b) 团员中至少有 3 名教育系学生；
   (c) 团员中至少有 1 名教育系学生。

7. 某班有 40 名学生，其中班委有 10 人，现派 5 名学生参加某校外活动：
   (a) 如果班委中只有一人在内，有多少种选派法？
   (b) 如果班委都不能在内，有多少种选派法？
   (c) 如果班委中至少有一人在内，有多少种选派法？

8. 某团队中有 5 名工程师，4 名技术人员，另外 2 名既是工程师又是技术人员，若要从这团队中委派 2 名工程师及 2 名技术人员外出完成任务，问有多少选派方法？

9. 有 6 份不同的礼物，
   (a) 若平均分成两堆，有几种堆法？
   (b) 若分成 2 本一堆，4 本一堆，有几种堆法？

10. 由“MATHEMATICAL”一字的字母中，每次选取四个，共有多少种不同的选取法？又有多少种不同的排列法？

总复习题 19

1. 将“乐教爱学成就孩子”这八个字重组排列，有多少种排列法？

2. 将“CHOOSE”一字的字母全取排列，有多少种排法？两个 O 不相邻的排法有多少种？

3. 将“I LOVE U”中字母全取排列，其子音字母不相邻的排法有几种？

4. 由数字 1、2、3、4、5、6 可组成多少个没有重复数字的自然数？若数字可重复，可组成多少个四位奇数？

5. 用数字 0、1、2、3、4、5 组成没有重复数字的数：
   (a) 能组成多少个六位数？
   (b) 能组成多少个五位偶数？

6. 把数字 1、2、3、4、5、6、7、8 排成一列：
   (a) 数字 1、2、3 要排在一起，有多少种排法？
   (b) 数字 1、2、3 不完全排在一起，由多少种排法？
   (c) 偶数要排在一起，奇数要排在一起又有多少种排法？

7. 一集合有 8 个元素，那么这个集合中含 3 个元素的子集有几个？

8. 从“VOLUME”一字中任取二个子音字母及一个母音字母组成一个字串，问可组成多少个字串？

9. 某委员会成员必须从 3 位律师，6 位工程师及 7 位医生中选出一位律师，两位工程师及两位医生组成，问有多少种组成方法？

10. 六种不同面额的纸币RM 1、RM 5、RM 10、RM 20、RM 50、RM 100各一张，可组成多少种不同的币值？

11. 将六个不同颜色的杯子及四个不同颜色的碗沿着圆盘边缘摆成环形，其中碗不能相邻，问有多少种摆法？

12. 若数字不重复，由 0、1、2、3、4、5、6、7 这 8 个数字，可组成多少个介于 4000 与 7000 之间，可被 10 整除的数？

13. 从 10 名班委中，委派至少 2 名，最多 5 名代表参加学校会议，问有多少种委派法？

14. 某国的车牌编号是由三个英文字母及四个数字按着图中所示的次序编排而成。车牌编号的选择规则如下：
   ① 英文字母皆不能是 “I” 或 “O”；
   ② 第一个数字不能是 “0”；
   ③ 四个数字不能完全相同。

第14题用图

问按照这样的编号规则，该国可以有多少个车牌编号可以使用？

15. 有 9 本不同的书。问下列情况下，有多少种不同的分法？
   (a) 分给甲、乙、丙三人，每人各得 3 本；
   (b) 分给甲、乙、丙三人，甲得 2 本、乙得 3 本、丙得 4 本；
   (c) 分给甲、乙、丙三人，一人得 2 本、一人得 3 本、一人得 4 本；
   (d) 分成三堆，每堆 3 本。

16. 若从 n 个不同产品中挑选 2 个的选法数是 36，求 n 的值。

17. 空间中有 10 个点，其中任何 4 点不共面，以每 4 个点为顶点作一个四面体，一共有多少个四面体？

18. 4 男 4 女围成一圈，男生须相邻而坐，有多少种坐法？

19. 用线将 8 颗不同的珠子串成一手环，如果指定三颗必须在一起，问有多少种串法？

20. 投掷三枚不同的硬币，会出现多少种不同的结果？

21. 投掷三颗不同的骰子，会出现多少种不同的结果？

22. 从一面红旗，两面黄旗及三面蓝旗共六面旗中任选三面旗作信号，问有多少种方法？

23. 回顾引言中的问题，某系统需要我们利用 26 个大写英文字母来设定五位密码。
    (a) 若我们决定使用“A、B、C、D、E”这五个字母来排出五位字母各异的密码，这样我们能生成多少种不同的密码？
    (b) 如果骇客不知道我们选择了哪些英文字母来设定密码，那么他最多需要尝试多少种可能才能破解这五位密码？
    (c) 如果仍然需使用 26 个大写英文字母来设定密码，但增加密码的长度，从五位增加到六位，那么骇客最多所需尝试的次数增加了多少？

董總
DONG ZONG

二项式定理在数学中有许多应用，其中包括展开多项式，特别是形如 $(a+b)^n$ 的形式，其中 a 和 b 是实数或变量，n 是一个非负整数。这在代数中很常见，一般用于简化复杂的多项式。

在 $(a+b)^n$ 的展开式中，我们知道

$$(a+b)^1 = a+b,$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$

而且，

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

20

二项式定理

学习目标

- 能展开指数为自然数的二项式
- 掌握二项展开式的通项公式
- 能展开指数为有理数的二项式
- 掌握二项式定理在近似计算中的应用

20.1 指数为自然数的二项式定理

先观察当 n 是自然数时，$(a+b)^n$ 的展开式。显然的，

- 当 $n=1$ 时，$(a+b)^1=a+b$
- 当 $n=2$ 时，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- 当 $n=3$ 时，$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$

$$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$$

即，$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & a^2 & +\,2ab & +\,b^2 \\
\times & & & a & +\,b \\
\hline
 & a^3 & +\,2a^2b & +\,ab^2 & \\
+ & & a^2b & +\,2ab^2 & +\,b^3 \\
\hline
 & a^3 & +\,3a^2b & +\,3ab^2 & +\,b^3
\end{array}$$

- 当 $n=4$ 时，$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

在 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 中，中间两项 $3a^2b$ 及 $3ab^2$ 的系数 3 及 3，都是 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 中相邻两项的系数之和。在 $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ 中，中间三项的 a^3b、a^2b^2 及 ab^3 系数分别是 4、6 及 4，都是中间相邻两项的系数之和，由此，

我们有

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

随堂练习 20.1a

求 $(a+b)^5$ 的展开式。

用以上的方法，我们可以依次算出 $(a+b)^n$ 的展开式中各项的系数。

- 展开式的第一项是 a^n，最后一项是 b^n。
- 每一项中 a 及 b 的次幂之和是 n。
- 由左至右，a 的次幂逐项依次减 1，b 的次幂逐项依次加 1。
- $(a+b)^n$ 的展开式中每一项的系数是 $(a+b)^{n-1}$ 的展开式中相邻两项的系数之和。

由以上的讨论可知，二项展开式的系数可以用下图算出：

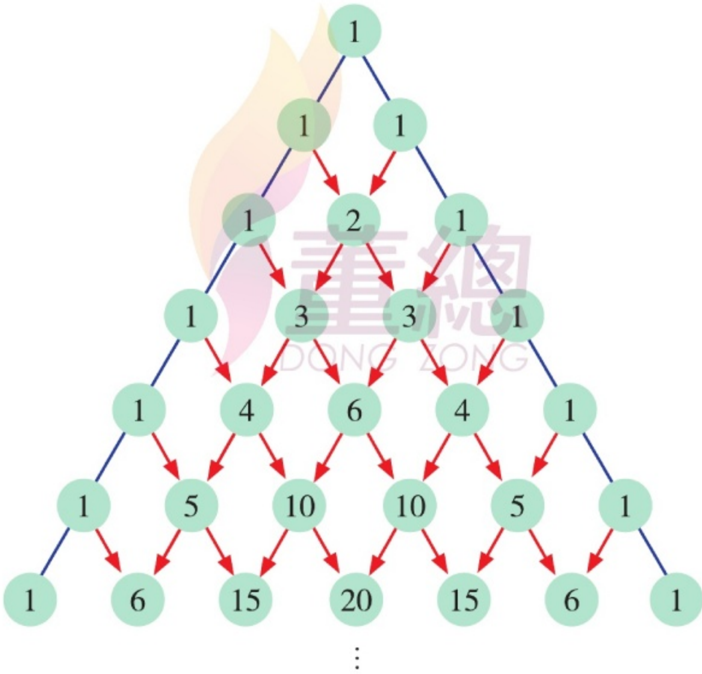


图20-1

如图20-1，这个图出现在宋朝数学家杨辉在 1261 年所著的《详解九章算术》一书中。在书中提到，此图是引用贾宪所著的《释锁算术》。因此，此图被称为杨辉三角或贾宪三角。

法国数学家巴斯卡 (Blaise　Pascal) 在 1653 年发现此规律。因此也有许多人称此图为巴斯卡三角形。

以上计算二项展开式系数是用递归法。我们也可以用组合的方法来直接求二项展开式的系数。例如，

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$$

因此，$(a+b)^3$ 的展开式中的每一项都是从每一个括号中取 a 或 b，然后将从 3 个括号中所选取的字母相乘而得，因此每一项都是 3 次项。

- a^3 项是从 3 个括号都取 a，而不取 b，相乘而得。因此 a^3 的系数是从 3 个括号中选取 0 个 b 的方法数，即 a^3 的系数是 ${}^3C_0$。
- a^2b 项是从 2 个括号取 a，1 个括号取 b，相乘而得。因此 a^2b 的系数是从 3 个括号中选取 1 个 b 的方法数，即 a^2b 的系数是 ${}^3C_1$。
- ab^2 项是从 1 个括号取 a，2 个括号取 b，相乘而得。因此 ab^2 的系数是从 3 个括号中选取 2 个 b 的方法数，即 ab^2 的系数是 ${}^3C_2$。
- b^3 项是从 3 个括号中都不取 a，全部取 b，相乘而得。因此 b^3 的系数是从 3 个括号中选取 3 个 b 的方法数，即 b^3 的系数是 ${}^3C_3$。

由此可得，

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= {}^3C_0\,a^3+{}^3C_1\,a^2b+{}^3C_2\,ab^2+{}^3C_3\,b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

推广到一般的情况，对于任意的整数 n，$(a+b)^n$ 的展开式包含 $a^{n-r}b^r$，其中 $0\le r\le n$，因此一共有 $n+1$ 项。含 $a^{n-r}b^r$ 项的系数为从 n 个括号中选取 r 个 b 的方法数，即 ${}^nC_r$。

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}^nC_0\,a^n+{}^nC_1\,a^{n-1}b+{}^nC_2\,a^{n-2}b^2+\cdots+{}^nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}^nC_nb^n\\ &=\sum_{r=0}^{n}{}^nC_ra^{n-r}b^r\end{aligned}$$

这就是指数为自然数的二项式定理 (binomial theorem)，其中 ${}^nC_ra^{n-r}b^r$ 称为二项展开式的通项公式。

二项展开式中各项的系数称为二项式系数，它们就是第 19 章所学的组合数。利用巴斯卡三角形求二项式系数，其实就是以下在第 19 章所提过的公式：

$$^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$$

在二项式定理中，令 $a=1$，$b=x$，我们便得到

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\,x + {}^nC_2\,x^2 + \cdots + {}^nC_r\,x^r + \cdots + {}^nC_n\,x^n$$

例题 1

展开 $(2x+3y)^4$。

解 $$\begin{aligned}(2x+3y)^4 &= (2x)^4 + {}^4C_1\,(2x)^3(3y) + {}^4C_2\,(2x)^2(3y)^2 + {}^4C_3\,(2x)(3y)^3 + {}^4C_4\,(3y)^4 \\ &= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4\end{aligned}$$

例题 2

展开 $(1-x)^5$。

解 $$\begin{aligned}(1-x)^5 &= 1 + {}^5C_1(-x) + {}^5C_2(-x)^2 + {}^5C_3(-x)^3 + {}^5C_4(-x)^4 + {}^5C_5(-x)^5 \\ &= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5\end{aligned}$$

例题 3

展开 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$。

解 $$\begin{aligned}\left(x-\frac{2}{x}\right)^6 &= x^6 + {}^6C_1\,x^5\left(-\frac{2}{x}\right) + {}^6C_2\,x^4\left(-\frac{2}{x}\right)^2 + {}^6C_3\,x^3\left(-\frac{2}{x}\right)^3 \\ &\quad + {}^6C_4\,x^2\left(-\frac{2}{x}\right)^4 + {}^6C_5\,x\left(-\frac{2}{x}\right)^5 + \left(-\frac{2}{x}\right)^6 \\ &= x^6 - 12x^4 + 60x^2 - 160 + \frac{240}{x^2} - \frac{192}{x^4} + \frac{64}{x^6}\end{aligned}$$

想一想 1

例题3中，在不展开的情况下，能不能写出展开式中 x 的最高及最低次项?

例题 4

展开$\left(3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4$。

解 $\left(3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4=\left[\frac{1}{\sqrt{x}}(3x-2)\right]^4$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4(3x-2)^4$$

$$=\frac{(3x)^4+4(3x)^3(-2)+6(3x)^2(-2)^2+4(3x)(-2)^3+(-2)^4}{x^2}$$

$$=\frac{81x^4-216x^3+216x^2-96x+16}{x^2}$$

$$=81x^2-216x+216-\frac{96}{x}+\frac{16}{x^2}$$

随堂练习 20.1b

展开下列各式：

1. $\left(3x-\frac{y}{3}\right)^4$
2. $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^5$
3. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$
4. $(1-3x)^4$

例题 5

证明 (a) ${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 + \cdots + {}^{n}C_r + \cdots + {}^{n}C_n = 2^n$ 。

(b) ${}^{n}C_0 - {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 - \cdots + (-1)^r\, {}^{n}C_r + \cdots + (-1)^n\, {}^{n}C_n = 0$ 。

据此，求 ${}^{10}C_0 + {}^{10}C_2 + {}^{10}C_4 + {}^{10}C_6 + {}^{10}C_8 + {}^{10}C_{10}$。

证 (a) $(1+x)^n = {}^{n}C_0 + {}^{n}C_1\, x + {}^{n}C_2\, x^2 + \cdots + {}^{n}C_r\, x^r + \cdots + {}^{n}C_n\, x^n$

令 $x=1$， ${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 + \cdots + {}^{n}C_r + \cdots + {}^{n}C_n = (1+1)^n = 2^n$

(b) 令 $x=-1$， ${}^{n}C_0 - {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 - \cdots + (-1)^r\, {}^{n}C_r + \cdots + (-1)^n\, {}^{n}C_n = (1-1)^n = 0$

$${}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 + \cdots + {}^{10}C_{10} = 2^{10} = 1024 \qquad \text{-----(1)}$$

$${}^{10}C_0 - {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 - {}^{10}C_3 + \cdots + {}^{10}C_{10} = 0 \qquad \text{-----(2)}$$

$(1)+(2)$， $2\left({}^{10}C_0 + {}^{10}C_2 + {}^{10}C_4 + {}^{10}C_6 + {}^{10}C_8 + {}^{10}C_{10}\right) = 1024$

$\therefore \quad {}^{10}C_0 + {}^{10}C_2 + {}^{10}C_4 + {}^{10}C_6 + {}^{10}C_8 + {}^{10}C_{10} = 512$

随堂练习 20.1c

不使用计算机，求 ${}^{12}C_0 + {}^{12}C_2 + {}^{12}C_4 + {}^{12}C_6 + {}^{12}C_8 + {}^{12}C_{10} + {}^{12}C_{12}$ 的值。

例题 6

展开 $(1-x+x^2)^3$ 。

解 $(1-x+x^2)^3 = \left[(1-x)+x^2\right]^3$

$$= (1-x)^3 + 3(1-x)^2(x^2) + 3(1-x)(x^2)^2 + (x^2)^3$$

$$= 1-3x+3x^2-x^3+3x^2(1-2x+x^2)+3x^4-3x^5+x^6$$

$$= 1-3x+6x^2-7x^3+6x^4-3x^5+x^6$$

例题 7

按升幂展开 $(1-x+2x^2)^7$ 至 x^3 项。

解 $(1-x+2x^2)^7$

$=(1-x)^7+{}^7C_1(1-x)^6(2x^2)+\cdots$

$=1+{}^7C_1(-x)+{}^7C_2(-x)^2+{}^7C_3(-x)^3+\cdots+14x^2\left[1+{}^6C_1(-x)+\cdots\right]+\cdots$

$=1-7x+21x^2-35x^3+14x^2-84x^3+\cdots$

$=1-7x+35x^2-119x^3+\cdots$

想一想 2 例题7中，有没有其他解法？或者验证其他的展开方法也能得到相同的答案？

随堂练习 20.1d

1. 展开 $(a+b+c)^3$。
2. 按升幂展开 $(1-2x+2x^2)^8$ 至 x^3 项。

习题 20.1a

展开下列各式（1 至 6）：

1. $(x+2y)^3$
2. $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^4$
3. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$
4. $(1+x)^4(1-x)^4$
5. $(2+x)^8-(2-x)^8$
6. $(1-2x+x^2)^4$
7. 不使用计算机，求 $\left(\sqrt{2}+1\right)^7-\left(\sqrt{2}-1\right)^7$ 的值。
   据此，求小于 $\left(\sqrt{2}+1\right)^7$ 的最大整数。
8. 按 x 的升幂排列展开 $(1+x)(1-x)^9$ 至 x^3 项。
9. 按 x 的升幂排列展开 $(1+x)^2(1-5x)^7$ 至 x^2 项。

10. 已知 n 是正整数，$(1+px)^n=1+12x+64x^2+\cdots$，求 n 及 p 的值。

11. 已知 n 是正整数，$(1+ax)^n=1+20x+45a^2x^2+kx^3+\cdots$，求 n，a 及 k 的值。

例题 8

求 $(5x-2y)^7$ 的展开式中含 x^5y^2 项的系数。

解 $(5x-2y)^7$ 的展开式的通项公式为

$$\begin{aligned}&{}^7C_r(5x)^{7-r}(-2y)^r\\&=(-1)^r\ {}^7C_r\times5^{7-r}\times2^r\times x^{7-r}y^r\end{aligned}$$

对于含有 x^5y^2 的项，$r=2$

$\therefore$ 含有 x^5y^2 的项的系数为 $(-1)^2\ {}^7C_2\times5^5\times2^2=262500$。

例题 9

求 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中含 x^3 项的系数。

解 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^9$ 的展开式的通项公式为 ${}^9C_r\ x^{9-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r$

$$=(-1)^r\ {}^9C_r\ x^{9-2r}$$

对于含有 x^3 的项，$9-2r=3$

$\therefore\quad r=3$

$\therefore$ 含有 x^3 项的系数为 $(-1)^3\ {}^9C_3=-84$。

例题 10

求 $\left(x^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式中的常数项。

解 $\left(x^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式的通项公式为

$$^{10}C_r\left(x^2\right)^{10-r}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r\ {}^{10}C_r\times\frac{1}{2^r}\times x^{20-\frac{5}{2}r}$$

对于常数项，x 的指数为0，即 $20-\dfrac{5}{2}r=0$

$$\therefore\quad r=8$$

$\therefore$ 常数项为 $(-1)^8\ {}^{10}C_8\times\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{45}{256}$。

随堂练习 20.1e

求 $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中的

(a) $\dfrac{1}{x^2}$ 项的系数

(b) 常数项

例题 11

求 $(1+2x)(3-x)^5$ 的展开式中 x^4 项的系数。

解 $(1+2x)$ 中的常数项1必须乘以 $(3-x)^5$ 中的 x^4 项才能得到 x^4 项；$(1+2x)$ 中的一次项 $2x$ 必须乘以 $(3-x)^5$ 中的 x^3 项才能得到 x^4 项。

$$\begin{aligned}(3-x)^5&=\cdots+{}^5C_3\,3^{5-3}(-x)^3+{}^5C_4\,3^{5-4}(-x)^4+\cdots\\&=\cdots-90x^3+15x^4+\cdots\end{aligned}$$

$$(1+2x)(3-x)^5=(1+2x)\left(\cdots-90x^3+15x^4+\cdots\right)$$

x^4 项的系数 $=2(-90)+15=-165$。

随堂练习 20.1f

求 $(2+x)(1-3x)^6$ 的展开式中 x^3 项的系数。

例题 12

不使用计算机，计算 1.02^4 准确至四位小数。

解
$$\begin{aligned}1.02^4 &= (1+0.02)^4\\ &= 1+4(0.02)+6(0.02)^2+4(0.02)^3+(0.02)^4\\ &= 1+0.08+0.0024+0.000032+\cdots\\ &\approx 1.0824\end{aligned}$$

随堂练习 20.1g

不使用计算机，计算 2.03^5 准确至两位小数。

习题 20.1b

1. 求 $(2x+3y)^6$ 的展开式中含 x^2y^4 项的系数。

2. 求 $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^9$ 的展开式中含 $\dfrac{1}{x}$ 项的系数。

3. 求 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{3}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ 的展开式中的
   (a) 常数项；　　(b) x^4 项的系数。

4. 求 $\left(2x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$ 的展开式中的常数项。

5. 求 $\left(x-4+\dfrac{4}{x}\right)^5$ 的展开式中含 x^2 项的系数。

6. 求 $(1-x)(1+2x)^6$ 的展开式中含 x^3 项的系数。

7. 若 $(1+ax)^5$ 的展开式中 x^4 项的系数为 80，求 a 的值。

8. 若 $(3-2x)^7$ 的展开式中 x^4 项的系数等于 $(2+kx)^7$ 中 x^3 项的系数，求 k 的值。

9. 若 $(a-x)(1+3x)^6$ 的展开式中含 x^2 项的系数是 252，求 a 的值。

10. 已知 $(1+kx)(2-x)^5$ 的展开式中不含 x^2 项，求 k 的值。

11. 已知 $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 按降幂排列的展开式中的第 4 项与第 13 项的系数相同，求
(a) n 的值。
(b) 展开式中的常数项。

12. 若 $(1+3x)^5(2+ax)^3$ 的展开式中 x^2 项的系数为 234，求 a 的值。

13. 已知在 $(1+ax)^5(b+x)^3$ 的展开式中，常数项及含 x 项的系数分别为 27 及 -243，求
(a) a 及 b 的值。
(b) 展开式中 x^2 的系数。

14. 不使用计算机，计算 0.9995^5 准确至四位小数。

15. 不使用计算机，计算 2.002^{10} 准确至两位小数。

16. 若 n 是偶数，证明 ${}^nC_0+{}^nC_2+{}^nC_4+\cdots+{}^nC_{n-2}+{}^nC_n=2^{n-1}$。

17. 若 n 是自然数，证明 $(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除。

18. 考虑 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$ 两边的展开式中 x^n 项的系数，证明
$$\left({}^nC_0\right)^2+\left({}^nC_1\right)^2+\left({}^nC_2\right)^2+\cdots+\left({}^nC_{n-1}\right)^2+\left({}^nC_n\right)^2={}^{2n}C_n$$

20.2 指数为有理数的二项式定理

在前上一节，我们已经学过

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1+ {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \cdots + {}^nC_r\, x^r + \ldots + {}^nC_n\, x^n \\
&= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots+x^n
\end{aligned}
$$

事实上，若 n 是有理数，我们仍有相同的展开式：

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots$$

但须注意的是，若 n 是有理数而不是自然数时，等式的右边是一个无穷级数。在 $|x|<1$ 时，等式成立；在 $|x|\geq 1$ 时，等式的右边没有意义。因此，若 n 是有理数而不是自然数时，我们说此等式中 x 的限制范围是 $|x|<1$。

例题 13

按 x 的升幂展开 $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 至 x^3 项，并求出 x 的限制范围。

解

$$
\begin{aligned}
(1-x)^{\frac{3}{2}} &= 1+\frac{3}{2}(-x)+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{3!}(-x)^3+\cdots \\
&= 1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots
\end{aligned}
$$

x 的限制范围是 $|x|<1$。

例题 14

按 x 的升幂展开 $\dfrac{1}{2+x}$ 至 x^4 项，并求 x 的限制范围。

解
$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x}&=\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}\\&=\frac{1}{2}\left[1+(-1)\frac{x}{2}+\frac{(-1)(-2)}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{4!}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^4}{32}+\cdots\end{aligned}$$

x 的限制范围是 $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$，即 $|x|<2$。

注意

在展开 $(a+x)^n$ 之前，需先将它先写成 $a^n\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^n$。展开式中 x 的限制范围是 $\left|\dfrac{x}{a}\right|<1$。

补充资料

当 $n=-1$ 时，若 $|x|<1$，

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1}&=1+(-1)x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{4!}x^4+\cdots\\&=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\end{aligned}$$

将 x 换成 $-x$ 得：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$

这其实也是无穷等比级数的求和公式。

随堂练习 20.2a

按 x 的升幂展开 $\sqrt{4-2x}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。据此，不使用计算机，计算 $\sqrt{3.92}$ 准确至四位小数。

例题 15

按 x 的升幂展开 $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 至 x^6 项。

据此，不使用计算机，计算 $\sqrt{\dfrac{11}{9}}$ 准确至四位小数。

解 $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-x^2\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-x^2\right)^3+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=(1+x)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots+x+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^5+\cdots$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{16}x^6+\cdots$$

若 $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{11}{9}$

则 $x=\dfrac{1}{10}$

将 $x=\dfrac{1}{10}$ 代入 $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 的展开式得：

$$\sqrt{\frac{11}{9}}=1+0.1+\frac{0.1^2}{2}+\frac{0.1^3}{2}+\frac{3}{8}\times0.1^4+\cdots$$

$$=1.1+0.005+0.0005+0.0000375+\cdots$$

$$\approx1.1055$$

例题 16

已知 $\dfrac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)}=\dfrac{2}{1-3x}+\dfrac{3}{1+2x}$。按 x 的升幂展开 $\dfrac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

解

$$\frac{2}{1-3x}=2\left[1+3x+(3x)^2+(3x)^3+\cdots\right]$$
$$=2+6x+18x^2+54x^3+\cdots$$

$$\frac{3}{1+2x}=3\left[1+(-2x)+(-2x)^2+(-2x)^3+\cdots\right]$$
$$=3-6x+12x^2-24x^3+\cdots$$

$$\frac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)}=\left(2+6x+18x^2+54x^3+\cdots\right)+\left(3-6x+12x^2-24x^3+\cdots\right)$$
$$=5+30x^2+30x^3+\cdots$$

展开 $\dfrac{2}{1-3x}$ 时，x 的限制范围是 $|3x|<1$，即 $|x|<\dfrac{1}{3}$。

展开 $\dfrac{3}{1+2x}$ 时，x 的限制范围是 $|2x|<1$，即 $|x|<\dfrac{1}{2}$。

因此，$\dfrac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)}$ 的展开式中，x 的限制范围是 $|x|<\dfrac{1}{3}$。

想一想 3

如果 $\dfrac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)}$ 不拆成两项的话，容易展开吗？

此外，由图 20-2 可知，在限制范围内，省略高次方项对近似的影响是很小的。只有在限制范围内，展开式才是原来函数的近似，在限制范围外，无论取多少项，都不会是好的近似。

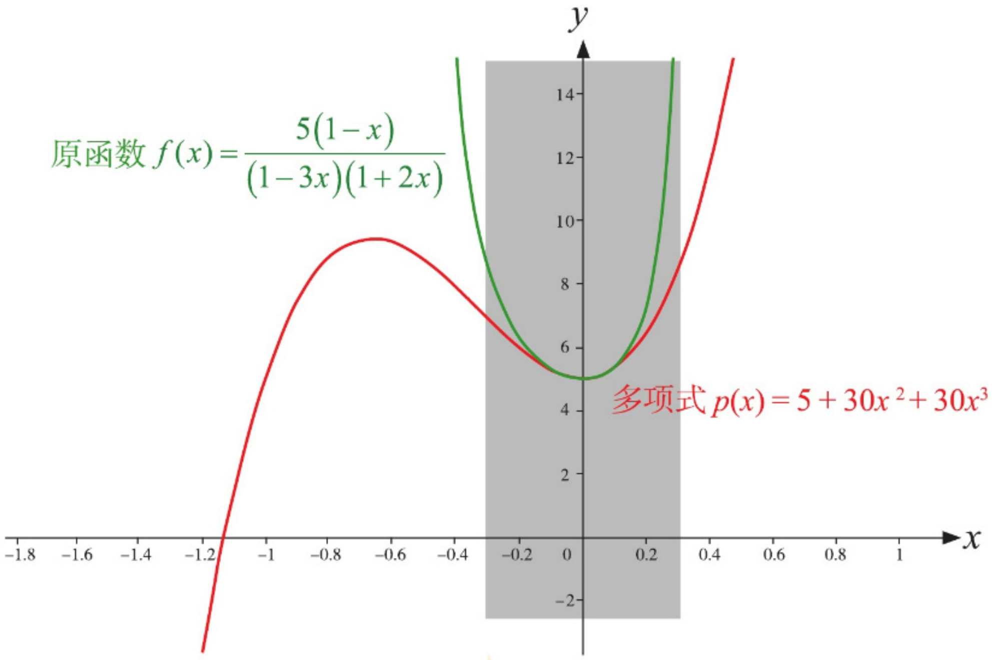


图20–2

随堂练习 20.2b

已知 $\dfrac{4+x}{(2-x)(1+x)}=\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{1+x}$。按 x 的升幂展开 $\dfrac{4+x}{(2-x)(1+x)}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

习题 20.2

将下列各式按 x 的升幂排列展开至 x^n 项，并求出 x 的限制范围（1 至 4）：

1. $\dfrac{1}{(1+2x)^2}$； $n=3$

2. $\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$； $n=6$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$； $n=3$

4. $\sqrt[3]{1+3x}$； $n=3$

5. 将 $\dfrac{x+2}{x-1}$ 写成整式与真分式的和。

   据此，展开 $\dfrac{x+2}{x-1}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

6. 按 x 的升幂展开 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ 至 x^3 项。

据此，计算 $\dfrac{1}{\sqrt{103}}$ 准确至四位小数。

7. 按 x 的升幂展开 $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-2x}}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

8. 按 x 的升幂展开 $\sqrt[3]{8+x}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

据此，计算 $\sqrt[3]{7}$ 与 $\sqrt[3]{9}$ 准确至三位小数。

9. 已知 $f(x)=(1-2x)\sqrt{1+ax}$ 按升幂排列的展开式中不含 x 的项，

(a) 求 a 的值。

(b) 按 x 的升幂展开 $f(x)$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

10. 按 x 的升幂展开 $\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$ 至 x^5 项，并求 x 的限制范围。

据此，计算 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 准确至四位小数。

11. 按 x 的升幂展开 $\dfrac{1}{(1-ax)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$，第一项是 x^2 项。求

(a) a 的值。

(b) x^2 及 x^3 项的系数。

12. 已知 a 是非零的常数，且在 $\dfrac{1}{(1-ax)^3}$ 的展开式中，x 的系数与 x^2 项的系数相同。

(a) 求 a 的值。

(b) 按 x 的升幂展开 $\dfrac{1}{(1-ax)^3}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

13. 按 x 的升幂展开 $\dfrac{3}{(1-2x)(2-x)}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

总复习题 20

展开下列各式（1 至 2）：

1. $(1-2x)^5$　　　2. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^4$

将下列各式按 x 的升幂排列展开式至 x^3 项，并求 x 的限制范围（3 至 4）：

3. $\sqrt{4+2x}$　　　4. $\dfrac{x+2}{\sqrt{1-2x}}$

5. 按 x 的升幂展开 $(1+x+x^2)^6$ 至 x^4 项。
   据此，计算 1.11^6 准确至两位小数。

6. 按 x 的升幂展开 $(1-x+x^2)(2+x)^5$ 至 x^3 项。

7. 求 $\left(x-\dfrac{8}{x^2}\right)^8$ 的展开式中 $\dfrac{1}{x^4}$ 的系数。

8. 求 $\left(2x^3-\dfrac{1}{3x}\right)^8$ 的展开式中不含 x 的项。

9. 求 $\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)^9$ 的展开式中 x^6 的系数。

10. 求 $(1-3x)^5(1+2x)^6$ 的展开式中 x^2 的系数。

11. 已知 n 是大于 3 的正整数，$(1+x)^n$ 按 x 的升幂排列的展开式中 x，x^2 及 x^3 的系数成等差数列，求 n 的值。

12. 按 x 的升幂展开 $(8+x)^{\frac{2}{3}}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。
    据此，计算 $\sqrt[3]{81}$ 准确至三位小数。

13. 若 $\dfrac{2-3x}{\sqrt{1+ax}}$ 的展开式中不含 x 的项，求 a 的值。
    据此，按 x 的升幂展开 $\dfrac{2-3x}{\sqrt{1+ax}}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

14．按 x 的升幂展开 $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ 至 x^4 项，并求 x 的限制范围。

据此，计算 $\sqrt{\dfrac{19}{21}}$ 准确至四位小数。

15．求 89^{10} 除以 88 的余数。

中英名词对照 Glossary

本名词对照表按华文条目的汉语拼音字母的次序排列

https://bit.ly/43XpHoW

B

半径 radius 69
伴随矩阵 adjoint matrix 45

C

侧棱 lateral edge 126
侧面 lateral face 126
长方形 rectangle 126
初等行运算 elementary row operation 54
纯量积 scalar product 31

D

大圆 great circle 128
单位矩阵 identity matrix 26
单位向量 unit vector 103
代数余子式 cofactor 6
底面 base 126
顶点 vertex 124
对角线 diagonal 124
多面体 polyhedron 124

E

二阶行列式 second order determinant 4
二项式定理 binomial theorem 202

F

方阵 square matrix 25

G

高斯消元法 Gaussian elimination 54
轨迹 locus 66

H

行 row 4
行列式determinant 4
行矩阵 row matrix 25
环形排列 circular permutation 173

J

角锥 pyramid 127
阶 order 25
阶乘 factorial 156
矩阵 matrix 24

K

克兰姆法则 Cramer's rule 16
可逆矩阵 invertible matrix 40

L

棱 edge 124
棱柱体 prism 126
立方体 cube 126

答案

第14章 行列式

随堂练习 14.1a P.5

(a) -13　　(b) 13

随堂练习 14.1b P.6

-13

随堂练习 14.1c P.8

1. 0

习题 14.1 P.9

1. (a) 25　(b) -27　(c) 2　(d) -1
2. (a) $-a^2-b^2$　(b) 0
3. (a) -1　(b) -14　(c) 118
   (d) -11　(e) -72　(f) 190

随堂练习 14.2d P.14

$x=4$

习题 14.2 P.14

1. -50，$-50k$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ k & k & -2k \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

2. (a) 0　(b) 0　(c) xy　(d) $4xy$
4. (a) $(a+2b)(a-b)^2$
   (b) $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$
5. (a) 2　(b) 4
   (c) 0，1，2　(d) -1，2

随堂练习 14.3a P.17

$x=3$， $y=-2$

随堂练习 14.3b P.19

(a) $x=-15$， $y=13$， $z=-1$

(b) $x=-\frac{1}{2}$， $y=\frac{3}{2}$， $z=\frac{7}{2}$

习题14.3 P.19

1. $x=4$， $y=-1$
2. $x=-\frac{1}{2}$， $y=1$
3. $x=12$， $y=12$
4. $x=\frac{1}{2}$， $y=-1$
5. $x=5$， $y=1$， $z=3$
6. $x=0$， $y=-\frac{1}{2}$， $z=\frac{1}{2}$
7. $x=\frac{11}{5}$， $y=0$， $z=-\frac{3}{5}$
8. $x=\frac{1}{3}$， $y=-\frac{1}{2}$， $z=\frac{1}{4}$

总复习题 14 P.20

1. -24　2. 5　3. -14
4. 1　5. $\frac{35}{2}$　6. 0

9. $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

10. $(a-b)(b-c)(c-a)$

11. -2，1　　12. 2，3　　13. 7

14. $-\frac{1}{2}$　　15. $x=\frac{27}{5}$，$y=\frac{2}{5}$

16. $x=\frac{1}{3}$，$y=-3$

17. $x=2$，$y=2$，$z=3$

18. $x=1$，$y=2$，$z=3$

19. $x=-4$，$y=0$，$z=1$

20. $x=-3$，$y=-\frac{1}{2}$，$z=-\frac{1}{4}$

第15章 矩阵

随堂练习 15.1a P.25

1. (a) 3×1　(b) 2×4　(c) 3×3

2. $a_{23}=3$，$a_{34}=7$

随堂练习 15.1b P.27

1. $a=0$，$b=x=1$

2. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

习题 15.1 P.28

1. (a) $x=-1$，$y=3$；(b) $x=-2$，$y=7$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$　　3. I

随堂练习 15.2a P.30

1. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$；(b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$；

(c) $\begin{pmatrix} 17 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

随堂练习 15.2b P.33

(a) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -12 & 22 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 14 & -26 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

随堂练习 15.2c P.35

1. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 12 & -9 & 14 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & 14 & 18 \\ 28 & -12 & 5 \end{pmatrix}$　4. $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}$

随堂练习 15.2d P.38

$(AB)^T=\begin{pmatrix} -2 & 13 & -9 \\ 2 & -7 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^TB^T=\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$

$B^TA^T=\begin{pmatrix} -2 & 13 & -9 \\ 2 & -7 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

随堂练习 15.2e P.39

$$\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & na\\0 & 1\end{pmatrix}$$

习题 15.2 P.39

1. (a) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，　(b) $\begin{pmatrix}6 & -9 & 0\\9 & 3 & -6\end{pmatrix}$

2. (a) AB与BA皆有意义，$AB=(-7)$，

$$BA=\begin{pmatrix}4 & 8 & -10\\2 & 4 & -5\\6 & 12 & -15\end{pmatrix}。$$

(b) AB有意义，$AB=\begin{pmatrix}11 & -4 & 8\\-5 & -2 & -3\end{pmatrix}$；

BA没有意义。

3. (a) $\begin{pmatrix}3 & 9\\-9 & 9\end{pmatrix}$，　(b) $\begin{pmatrix}-34 & 18\\-55 & 3\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & 4\\-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

5. (a) $w=-1$，$x=4$，$y=2$，$z=6$

(b) $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

6. (a) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 3\\-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & 2\\0 & -2\end{pmatrix}$

随堂练习 15.3a P.45

1. (a) $\begin{vmatrix}6 & 3\\7 & 5\end{vmatrix}=9\neq 0$，故$\begin{pmatrix}6 & 5\\7 & 5\end{pmatrix}$有逆矩阵，

且$\begin{pmatrix}6 & 3\\7 & 5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{9} & -\frac{1}{3}\\-\frac{7}{9} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix}-3 & -2\\6 & 4\end{vmatrix}=0$，故$\begin{pmatrix}-3 & -2\\6 & 4\end{pmatrix}$没有逆矩阵

(c) $\begin{vmatrix}2 & -6\\3 & -5\end{vmatrix}=8\neq 0$，故$\begin{pmatrix}2 & -6\\3 & -5\end{pmatrix}$有逆矩阵，

且$\begin{pmatrix}2 & -6\\3 & -5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{8} & \frac{3}{4}\\-\frac{3}{8} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

2. $b=1$　　3. $\begin{pmatrix}5 & 3\\2 & 9\end{pmatrix}$

随堂练习 15.3b P.48

1. $\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\\frac{13}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{5}{16}\\\frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16}\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{14}{5}\\\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5}\\\frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5}\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}-\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9}\end{pmatrix}$

习题 15.3 P.48

1. $x=-3$，$y=-5$　　2. -2，$\frac{1}{2}$

3. $\begin{pmatrix}9 & 5\\7 & 4\end{pmatrix}$

4. 逆矩阵不存在

5. 逆矩阵不存在

6. $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -7 & 20 & 5 \end{pmatrix}$

随堂练习 15.4a P.52

1. $x=5$，$y=3$

2. $x=2$，$y=3$，$z=4$

随堂练习 15.4b P.56

1. $x=\dfrac{22}{9}$，$y=-\dfrac{14}{27}$

2. $x=3$，$y=-1$，$z=-1$

随堂练习 15.4c P.59

$\begin{pmatrix} \frac{17}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

习题 15.4 P.60

1. $x=1$，$y=-1$

2. $x=1$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{1}{3}$

3. $x=-3$，$y=-2$

4. $x=5$，$y=1$，$z=3$

5. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{14}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}$

总复习题 15 P.60

1. $x=17$，$y=\dfrac{3}{2}$

2. $a=\dfrac{40}{11}$，$b=6$

3. (a) $\begin{pmatrix} -11 & -12 \\ 6 & -8 \\ 98 & 136 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & \frac{17}{2} & -67 \\ 9 & -\frac{1}{2} & -89 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -\frac{19}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$

4. (a) AB无意义，$BA=\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$；

(b) $AB=\begin{pmatrix} 1 & -17 \\ -5 & -11 \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} 11 & -6 & -3 \\ 15 & -12 & -9 \\ -9 & -4 & -9 \end{pmatrix}$

5. (a) 2 或 $-\frac{12}{5}$ (b) 4

6. (a) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{93} & \frac{7}{93} \\ -\frac{5}{31} & \frac{2}{31} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -11 & 3 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

7. (a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

8. (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$

11. (a) $R^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$,

$R^3 = \begin{pmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}$,

$R^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $a = 2$，$b = -\frac{5}{2}$，$c = -1$，$d = \frac{3}{2}$

13. (a) $x_1 = 1$，$x_2 = -1$

(b) $u = -3$，$v = -\frac{1}{3}$

(c) $x = 3$，$y = 0$，$z = -\frac{1}{2}$

(d) $x = \frac{1}{3}$，$y = \frac{3}{19}$，$z = \frac{3}{17}$

14. 每日购买一盒、两盒、三盒的顾客人数及净赚数额分别是：
周一37位、102位、253位，RM 2,139；
周二520位、60位、120位，RM 2580；
周三60位、20位、300位，RM 2080；
周四150位、200位、150位，RM 2350；
周五25位、120位、245位，RM 2145。

第16章 圆

随堂练习 16.1 P.68

1. $3x^2 + 3y^2 - 16x - 8y + 20 = 0$
2. $y = \frac{1}{8}(x-3)^2$，以直线 $x = 3$ 为对称轴，$(3, 0)$ 为顶点，开口向上的抛物线。

习题 16.1 P.68

1. $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$
2. $20x - 14y = 67$
3. $5x^2 + 5y^2 + 52x - 10y + 25 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 11 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 14x + 18y + 2xy + 49 = 0$
6. $3x^2 - y^2 - 18x - 8y - 1 = 0$

随堂练习 16.2a P.71

1. $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 169$
2. $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 10$
3. $(x-2)^2 + y^2 = 50$

随堂练习 16.2b P.74

1. $(x-2)^2+(y+4)^2=7^2$，圆心 $(2,-4)$；半径 $=7$
2. $\left(1,-\frac{5}{3}\right)$，$\frac{13}{3}$
3. $(x+3)^2+(y+1)^2=50$，$(-3,-1)$，$5\sqrt{2}$

习题 16.2 P.74

1. $x^2+y^2-8x-9=0$
2. $(x+6)^2+(y-3)^2=10$，$4\sqrt{2}$
3. $\left(-\frac{1}{9},\frac{1}{3}\right)$，$\frac{8}{9}$
4. $x^2+y^2-6x+4y-37=0$
5. $2x^2+2y^2-11x-19y+44=0$
6. $2x^2+2y^2-21x+8y+60=0$
7. $x^2+y^2=25$，圆心 $(0,0)$；半径 $=5$
8. $x^2+y^2-38x-20y+113=0$，圆心 $(19,10)$；半径 $=2\sqrt{87}$

随堂练习 16.3 P.76

1. 12，8　　2. 17，7

随堂练习 16.4a P.79

2. (a) 61，-43　　(b) 4，14
3. $0<r<5$
4. $(x+5)^2+(y-4)^2=4^2$

随堂练习 16.4b P.79

1. $4x+3y=\pm 25$
2. $2x-y-3=0$，$2x-y+17=0$

随堂练习 16.4c P.81

1. (a) $8x-15y+85=0$，$x=-5$
   (b) $40x+9y-205=0$，$y=5$
   (c) $3x+4y-25=0$，$4x-3y-25=0$
2. (a) $\sqrt{19}$　　(b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

习题 16.4 P.81

1. 当 $a<\frac{16}{5}$ 时，圆与直线相交；当 $a=\frac{16}{5}$ 时圆与直线相切
2. 9，$(0,3)$
3. $3x-4y+55=0$ 或 $3x-4y-5=0$
4. $3x-4y\pm 20=0$
5. $4x^2+4y^2-24x-32y+51=0$
6. $(x-2)^2+(y-3)^2=5$
7. $(4,6)$
8. $x+4y+8=0$，$4x-y=19$
10. $3x+4y-2=0$，$7x+24y+54=0$
11. (a) 相离　　(b) $\left(-\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$，$\frac{4}{5}$
12. $6x+8y+25=0$

随堂练习 16.5 P.86

1. (a) 内切　　(b) 相交
2. (a) -11　　(b) $\left(\frac{11}{5},\frac{22}{5}\right)$

习题 16.5 P.86

1. 两圆外切，$|a|=4$；无论 a 为何值，两圆不内切
2. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

3. $x^2+(y-5)^2=16$

4. 当 $c=11$ 时，切点 $\left(\frac{17}{5},\frac{-16}{5}\right)$，公切线 $7x-y-27=0$；

当 $c=-229$ 时，切点 $\left(\frac{-67}{5},\frac{-4}{5}\right)$，公切线 $7x-y+93=0$。

总复习题 16 P.87

1. $x^2+y^2-7x-y+3=0$，以 $\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为圆心，半径为 $\frac{\sqrt{38}}{2}$ 的圆
2. $y^2-4y-8x-4=0$
3. $x=2$ 或 $3x+4y+2=0$
4. $(x-6)^2+(y-8)^2=1$，以点 $(6,8)$ 为圆心，半径等于1的圆
5. (a) $\left(\frac{m}{2},\frac{m^2-2m+4}{2}\right)$

   (b) $y=2x^2-2x+2$
6. $x^2+y^2-8x-4y+10=0$，以 $(4,2)$ 为圆心，半径等于 $\sqrt{10}$ 的圆
7. $(x+8)^2+(y-2)^2=250$
8. $x^2+(y+2)^2=10$
9. $7x^2+7y^2-24x-19=0$
10. $4x^2+4y^2+7x-11y=0$
11. $x^2+y^2-x-3y=0$
12. $\left(\frac{53}{13},-\frac{125}{13}\right)$
13. $c<11$　　14. $\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$
15. $3x-4y-5=0$，$3x-4y+45=0$
16. $x^2+y^2-14x-5y+24=0$，

    $x^2+y^2-14x+10y+69=0$
17. $x^2-2xy+y^2+4x+12y-28=0$
18. $x^2+y^2-4x-6y-19=0$
19. 3个
20. $x^2+y^2+12x-4y+36=0$
21. $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$
22. (a) 2，-5　　(b) -1，-2

    (c) $m<-2, m>-1$ 或 $-5<m<2$
23. $(1,2)$　　24. (b) 2

第17章 平面向量

随堂练习 17.1a P.93

$\overrightarrow{OC}$	$\underline{c}$	$\overrightarrow{CB}$	$\underline{a}$	$\overrightarrow{FA}$	$\underline{b}$
$\overrightarrow{DO}$	$\underline{a}$	$\overrightarrow{DC}$	$\underline{b}$	$\overrightarrow{ED}$	$\underline{c}$
$\overrightarrow{EO}$	$\underline{b}$	$\overrightarrow{FO}$	$\underline{c}$	$\overrightarrow{EF}$	$\underline{a}$

随堂练习 17.1b P.95

$\overrightarrow{AC}=\underline{a}+\underline{b}$，$\overrightarrow{AD}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$，

$\overrightarrow{AE}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}$

随堂练习 17.1c P.96

$\overrightarrow{OC}=-\underline{a}$，$\overrightarrow{OD}=-\underline{b}$

随堂练习 17.1d P.99

$\overrightarrow{BC}=-\underline{b}+\underline{c}$，$\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\underline{c}$，

$\overrightarrow{DE}=-\frac{1}{2}\underline{b}$，$\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{2}\underline{b}+\frac{1}{2}\underline{c}$

习题 17.1 P.99

1. (a) $-12\underline{a}$ (b) $10\underline{b}$ (c) $-5\underline{a}$
   (d) $-\frac{5}{6}\underline{b}$ (e) $-\underline{a}+5\underline{b}$ (f) $\frac{5}{6}\underline{a}-\frac{1}{6}\underline{b}$
2. (a) $-\frac{1}{2}\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}$ (b) $\frac{1}{3}\underline{a}-\underline{b}$
3. (a) $\overrightarrow{DE}$ (b) $\overrightarrow{AC}$ (c) $\overrightarrow{EB}$
   (d) $\overrightarrow{DE}$ (e) $\overrightarrow{ED}$ (f) $\overrightarrow{BA}$
   (g) $\overrightarrow{DB}$
4. $h=3$，$k=-2$
5. $\overrightarrow{AD}=\underline{b}$，$\overrightarrow{BC}=-\underline{b}+\underline{c}$，$\overrightarrow{ED}=\underline{b}-\underline{c}$，
   $\overrightarrow{OD}=\underline{a}+\underline{b}$，$\overrightarrow{OE}=\underline{a}+\underline{c}$
6. (a) $-\underline{w}$ (b) $\underline{0}$ (c) $\underline{a}$
   (d) $\underline{b}$ (e) $-\underline{v}$
7. $\overrightarrow{AD}=\underline{a}-\underline{b}$，$\overrightarrow{AC}=2\underline{a}-\underline{b}$，
   $\overrightarrow{OA}=-\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}$
8. $\overrightarrow{DE}=-\underline{c}$，$\overrightarrow{AD}=-2\underline{a}$，$\overrightarrow{AF}=-\underline{a}-\underline{c}$
   $\overrightarrow{BE}=-2\underline{a}-2\underline{c}$，$\overrightarrow{CE}=-\underline{a}-2\underline{c}$，
9. $\overrightarrow{BC}=\underline{a}+2\underline{b}$，$\overrightarrow{OE}=\underline{a}+2\underline{b}$

随堂练习 17.2a P.102

(a) 5 (b) 13

随堂练习 17.2b P.105

$\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$，$\underline{b}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

随堂练习 17.2c P.105

-2

随堂练习 17.2d P.106

$-\underline{i}+26\underline{j}$

随堂练习 17.2e P.108

$-\frac{5}{13}\underline{i}-\frac{12}{13}\underline{j}$

习题17.2 P.108

1. (a) 17 (b) $\sqrt{41}$
   (c) $\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{7}$
2. (a) $51\underline{i}-19\underline{j}$ (b) $-47\underline{j}$
3. $k=\frac{3}{7}$，$l=-\frac{2}{7}$
4. $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$，$\underline{b}=\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}$
5. $54\underline{i}-28\underline{j}$
6. $A(-6, 2)$，$C(-12, 0)$，$\overrightarrow{BC}=-11\underline{i}+2\underline{j}$，
   $\left|\overrightarrow{BC}\right|=5\sqrt{5}$
7. $(12, -23)$ 8. 9
9. $p=1$，$1:4$ 或 $p=-8$，$2:1$
10. (a) $\overrightarrow{AB}=-5\underline{i}-\underline{j}$，$\overrightarrow{CD}=-10\underline{i}-2\underline{j}$
    (c) $1:2$
11. $\frac{5}{3}$ 12. $\sqrt{26}$
13. (a) $\frac{3}{5}\underline{i}-\frac{4}{5}\underline{j}$ (b) $9\underline{i}-12\underline{j}$
    (c) $-3\underline{i}+4\underline{j}$
14. $-\frac{50}{13}\underline{i}-\frac{120}{13}\underline{j}$

随堂练习 17.3a P.110

$(24, -1)$，$(-16, -5)$

随堂练习 17.3b P.110

(a) 4 (b) $3:4$

随堂练习 17.3c P.111

$(2,-5)$

随堂练习 17.3e P.113

(a) $\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{4}\underline{a}+\frac{3}{4}\underline{b}$，$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}\underline{a}-\frac{3}{4}\underline{b}$

(c) $2:1$

习题 17.3 P.116

1. $(8,4)$
2. $h=-2$，$k=4$
3. (a) 8 (b) $5:8$
4. $h=-2$，$k=11$
6. $(9,8)$
7. (a) $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\underline{a}+\underline{b}$，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}$，

   $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\underline{b}$，$\overrightarrow{FM}=-\frac{1}{2}\underline{b}$
8. (a) $\overrightarrow{OE}=\underline{a}-\underline{b}$，$\overrightarrow{OF}=-\underline{a}+\underline{b}$
9. (a) $\frac{1}{1+m}\underline{a}+\frac{m}{2(1+m)}\underline{b}$

   (b) $\frac{n}{2(1+n)}\underline{a}+\frac{1}{1+n}\underline{b}$
10. $h=2$，$k=1$
11. (a) $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ m/s (b) $\sqrt{61}$ m/s
12. (a) $h=4$，$k=-3$ (b) $\sqrt{10}N$

总复习题 17 P.118

1. (a) ✗ (b) ✓ (c) ✗ (d) ✗ (e) ✓

   (f) ✓ (g) ✓ (h) ✗ (i) ✗
2. $3:1$
3. (a) $(1,-3)$ (b) $p=2$，$q=3$
4. $h=4$，$k=-2$
5. (a) $\frac{2}{3}$ (b) 9 或 -5
6. (a) $h=0$，$k=0$

   (b) $\frac{4}{5}\underline{i}-\frac{3}{5}\underline{j}$ (c) $-\frac{15}{2}$
8. (a) $\overrightarrow{AD}=-10\underline{p}+3\underline{q}$，$\overrightarrow{BC}=2\underline{p}-9\underline{q}$

   (b) $\frac{10}{h}\underline{p}+\frac{3(h-1)}{h}\underline{q}$

   (c) $\frac{2(k-1)}{k}\underline{p}+\frac{9}{k}\underline{q}$

   (d) $h=7$，$k=\frac{7}{2}$
9. (a) $\overrightarrow{AB}=-\underline{a}+4\underline{c}$，$\overrightarrow{AC}=-\underline{a}+\underline{c}$，

   $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\underline{a}+\frac{2}{3}\underline{c}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\underline{a}+\frac{4}{3}\underline{c}$

   (c) $\frac{1}{2}$
10. (a) $2\underline{p}+4\underline{q}$ (b) $9\underline{q}-5\underline{r}$
11. $(20+10\sqrt{3})\underline{i}+10\underline{j}$ km/h
12. (a) $\left(-\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)\underline{i}+\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{2}\right)\underline{j}$ N

    (b) $\left(\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\right)\underline{i}+\left(-\frac{11\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{2}\right)\underline{j}$ N
13. (a) (i) $4\underline{u}+5\underline{v}$ (ii) $3\underline{u}+\frac{15}{4}\underline{v}$

    (iii) $4\underline{u}+\frac{15}{2}\underline{v}$ (iv) $\underline{u}+\frac{15}{4}\underline{v}$

第18章 立体几何

随堂练习 18.1 P.126

2，2，2，2，2

随堂练习 18.2a P.130

24.78°

随堂练习 18.2b P.131

42.71°

习题 18.2 P.132

1．(a) 12 cm (b) 27.94°

2．(a) 26.02° (b) 63.98°

(c) 17.35° (d) 72.65°

3．(a) 36.87° (b) 30.96°

4．(a) 26.57° (b) 20.96°

5．44.59°

6．(a) 20.29° (b) 51.30°

7．(a) $\sqrt{170}$ cm (b) 27.71°

8．(a) 1.39 m (b) 9.22 m

(c) 16.40°

9．29.02°

随堂练习 18.3a P.135

16.70°

随堂练习 18.3b P.137

66.59°

习题 18.3 P.138

1．63.43° 2．22.62° 3．20.56°

4．(a) 12 cm (b) 67.99°

(c) 53.13°

5．(a) 71.57° (b) 53.13°

6．(a) 37.46° (b) 73.30°

7．(a) 45° (b) 56.31°

8．(a) 57.97° (b) 66.14°

(c) 99.42°

9．(a) 54.31° (b) 71.37°

10．(a) 15.56 (b) 16.70°

随堂练习 18.4 P.142

3 km

习题 18.4 P.143

1．(a) 45° (b) 54.74° (c) 109.47°

2．50 m

3．点C：24.79°

点D：37.59°

点M：42.73°

4．35.52 m

5．14.54 cm；满足需求；伸缩

6．(a) 72.54° (b) 70.38° (c) 64.58°

总复习题 18 P.144

1. (a) 67.59° (b) 54.64°
2. (a) 45° (b) 46.69° (c) 56.31°
3. (a) 3.90m (b) 72.21° (c) 51.41°
4. 277.06m
5. (a) $40.96 m^2$ (b) 21.17m
7. 078°23′
8. (a) 20.70° (b) 52.06°
9. (a) 1.78×10^{-10} (b) 19.47°
   (c) 70.53°

第19章 排列与组合

随堂练习 19.1 P.152

1. 11 2. 60

习题 19.1 P.153

1. 14 2. 78 3. 16
4. 14 5. 60

随堂练习 19.2a P.157

1. (a) 120 (b) 6
2. 13

随堂练习 19.2b P.158

30!

随堂练习 19.2c P.161

1. 362880
2. (a) 60 (b) 24 (c) 12

随堂练习 19.2d P.165

(a) 100 (b) 48 (c) 108

随堂练习 19.2e P.166

(a) 86400 (b) 28800

习题 19.2 P.166

1. 360
2. (a) 120 (b) 80
3. 720 4. 8
5. 5040，144 6. 120
7. (a) 40320 (b) 322560
   (c) 80640 (d) 241920
   (e) 282240 (f) 211680
8. (a) 1440 (b) 10080 (c) 5040
9. 40320；720 10. 360
11. 720；9720 12. 320
13. 5760

随堂练习 19.3a P.170

(a) 216 (b) 729

随堂练习 19.3b P.172

1. 48 2. 100

习题 19.3　P.172

1．16　　2．9
3．64　　4．343
5．64　　6．(a) 120　(b) 729
7．19440　　8．7.2×10^{7}

随堂练习 19.4a　P.175

1．24　　2．11088

随堂练习 19.4b　P.177

43200

习题 19.4　P.177

1．120；120　　2．2880　　3．144
4．(a) 1440　(b) 240　　5．384
6．(a) 181400　(b) 3024

随堂练习 19.5　P.179

280

习题 19.5　P.181

1．6930　　2．907200
3．5040　　4．6000
5．(a) 5005　(b) 900
6．89

随堂练习 19.6a　P.183

28

随堂练习19.6b　P.184

1．536878650　　2．15　　3．2352

随堂练习 19.6c　P.192

1．126
2．(a) 6　(b) 4　(c) 8
3．1446

习题 19.6　P.193

1．120　　2．(a) 45　(b) 120
3．27　　4．180　　5．80
6．(a) 756　(b) 372　(c) 1632
7．(a) 274050　(b) 142506　(c) 515502
8．256　　9．(a) 10　(b) 15
10．143；2482

总复习题 19　P.194

1．40320　　2．360；240　　3．480
4．720；648　　5．(a) 600　(b) 312
6．(a) 4320　(b) 36000　(c) 1152
7．56　　8．54　　9．945
10．63　　11．43200　　12．90
13．627　　14．124291584
15．(a) 1680　(b) 1260　(c) 7560　(d) 280
16．9　　17．210　　18．576
19．360　　20．8　　21．216
22．19
23．(a) 120　(b) 11881376　(c) 297034400

第20章 二项式定理

随堂练习 20.1a P.201

$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

随堂练习 20.1b P.204

1. $81x^4-36x^3y+6x^2y^2-\dfrac{4}{9}xy^3+\dfrac{y^4}{81}$
2. $32x^{10}+80x^7+80x^4+40x+\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{1}{x^5}$
3. $x^3+6x^2+15x+20+\dfrac{15}{x}+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$
4. $1-12x+54x^2-108x^3+81x^4$

随堂练习 20.1c P.205

2048

随堂练习 20.1d P.206

1. $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$
2. $1-16x+128x^2-672x^3+\cdots$

习题 20.1a P.206

1. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$
2. $16x^4-32x^2+24-\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$
3. $x^3-12x^2+60x-160+\dfrac{240}{x}-\dfrac{192}{x^2}+\dfrac{64}{x^3}$
4. $1-4x^2+6x^4-4x^6+x^8$
5. $2048x+3584x^3+896x^5+32x^7$
6. $1-8x+28x^2-56x^3+70x^4-56x^5+28x^6-8x^7+x^8$
7. 478，478
8. $1-8x+27x^2-48x^3+\cdots$
9. $1-33x+456x^2+\cdots$
10. $n=9$， $p=\dfrac{4}{3}$
11. $n=10$， $a=2$， $k=960$

随堂练习 20.1e P.208

(a) 3360 (b) -8064

随堂练习 20.1f P.209

-945

随堂练习 20.1g P.209

34.47

习题 20.1b P.209

1. 4860
2. -252
3. (a) 924 (b) $\dfrac{22}{2187}$
4. 3360
5. -960
6. 100
7. ± 2
8. 3
9. 2
10. 1
11. (a) 15 (b) 3003
12. -3，-27
13. (a) $a=-2$， $b=3$ (b) 819
14. 0.9975
15. 1034.29

随堂练习 20.2a P.212

$2-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{x^3}{64}+\cdots$， $|x|<2$， 1.9799

随堂练习 20.2b P.215

$2-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{7}{8}x^3+\cdots$， $|x|<1$

习题 20.2　P.215

1. $1-4x+12x^2-32x^3+\cdots$，$|x|<\frac{1}{2}$

2. $1+\frac{3}{2}x^2+\frac{15}{8}x^4+\frac{35}{16}x^6+\cdots$，$|x|<1$

3. $1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+\cdots$，$|x|<\frac{1}{2}$

4. $1+x-x^2+\frac{5}{3}x^3+\cdots$，$|x|<\frac{1}{3}$

5. $1-\frac{3}{1-x}$，$-2-3x-3x^2-3x^3+\cdots$，$|x|<1$

6. $1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots$，0.0985

7. $1+2x+\frac{5}{2}x^2+4x^3+\cdots$，$|x|<\frac{1}{2}$

8. $2+\frac{x}{12}-\frac{x^2}{288}+\frac{5}{20736}x^3+\cdots$，$|x|<8$，1.913，2.080

9. (a) 4　　(b) $1-6x^2+8x^3+\cdots$，$|x|<\frac{1}{4}$

10. $1-2x+2x^2-4x^3+6x^4-12x^5+\cdots$，$|x|<\frac{1}{2}$，0.8165

11. (a) 1　　(b) -3，-16

12. (a) $\frac{1}{2}$

    (b) $1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{4}x^3+\cdots$，$|x|<2$

13. $\frac{3}{2}+\frac{15}{4}x+\frac{63}{8}x^2+\frac{255}{16}x^3+\cdots$，$|x|<\frac{1}{2}$

总复习题 20　P.217

1. $1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5$

2. $x^8-4x^5+6x^2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^4}$

3. $2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{64}+\cdots$，$|x|<2$

4. $2+3x+4x^2+\frac{13}{2}x^3+\cdots$，$|x|<\frac{1}{2}$

5. $1+6x+21x^2+50x^3+90x^4+\cdots$，1.87

6. $32+48x+32x^2+40x^3+\cdots$

7. 286720　　8. $\frac{112}{729}$　　9. 489888

10. -30　　11. 7

12. $4+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{144}+\frac{x^3}{2592}+\cdots$，$|x|<8$，4.327

13. -3，$2+\frac{9}{4}x^2+\frac{27}{4}x^3+\cdots$，$|x|<\frac{1}{3}$

14. $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\frac{3}{128}x^4+\cdots$，$|x|<2$，0.9512

15. 1

图片出处

本教材使用了网站或作者注明可免费使用的图片与照片，谨致谢意。

页码/图次	出处
22	OpenAI. (2023). ChatGPT (Mar 14 version) [Large language model]. https://chat.openai.com/chat
64	Geological and Mining Engineering and Sciences, Michigan Technological University, Earthquake Epicenter, https://www.mtu.edu/geo/community/seismology/learn/earthquake-epicenter/
90	Microsoft Copilot. (2024). A woman's finger pointing up, line art, the gesture of attention in business on white background, vector illustration with colors. Copilot.
122	Microsoft Copilot. (2024).A cartoon-style illustration of a student thinking with a blank thought bubble and many question marks around. Copilot.
148	Olesia_g, 15 Nov 2021, Personal data security. Laptop screen with lock. 3D Web Vector Illustrations. Retrieved from https://www.shutterstock.com/image-vector/personal-data-security-laptop-screen-lock-2074919221
198	Microsoft Copilot. (2024).一个老师在黑板前，左手拿粉笔，跟两个学生解释。一个男学生，一个女学生。两个学生的眼神充满疑惑，头上有好几个问号. Copilot.

本会已尽力追溯图片来源，但仍有部分图片未能查明出处，如有侵犯版权，谨此致歉，并欢迎告知。