

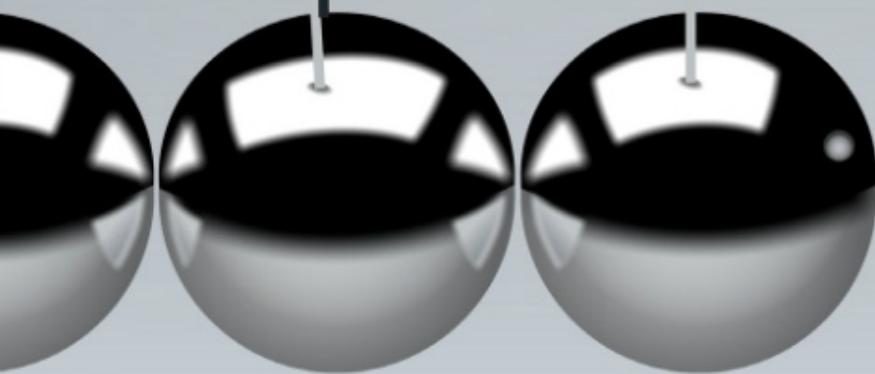
物理 好帮手



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂



物理好帮手



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

核心素养图



高中参考书

物理好帮手

行政编辑 : 黄宝玉
美术设计 : 赖虹坊

© 郑重声明，此电子书版权归出版单位所有，未经允许，书上所有内容不得通过任何形式进行复制、转发、储存于检索系统，或翻译成其它语言的活动。

© Dong Zong

Hak cipta terpelihara. Mana-mana bahan atau bahagian dalam buku digital ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, atau ditukar kepada apa-apa bentuk atau apa-apa cara, baik dengan elektronik, mekanikal, fotokopi, rakaman, pengalihan bahasa dan sebagainya tanpa mendapat kebenaran secara menulis daripada pihak penerbit terlebih dahulu.

© Dong Zong

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, translated in any other languages, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

eISBN:

978-983-169-515-9

编辑单位：

董教总华文独中工委会统一课程委员会

Unified Curriculum Committee of

Malaysian Independent Chinese Secondary School (MICSS) Working Committee

出版者：

马来西亚华校董事联合会总会（董总）

United Chinese School Committees' Association of Malaysia (Dong Zong)

Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang, Selangor Darul Ehsan, Malaysia.

Tel: 603-8736 2337 Fax: 603-8736 2779

Website: www.dongzong.my Email: support@dongzong.my

版次：

2022 年 8 月第 1 版

编审团队

学科顾问：谢上才

编审委员：吴德安、陈陆东、陈子响、
涂振兴、黄树群、傅蔷蓓

责任编辑：许中志、吴德安

(按姓氏笔画顺序排列)

鸣谢

本参考书承蒙谢上才校长义务将 2020 年新冠疫情期间，在线上引导独中生探索物理世界的精彩内容编撰而成。感谢谢校长将本书的版权与编撰费赠予董总。谨此致以谢忱。

董教总华文独中工委统一课程委员会 启
2022 年 8 月

编辑说明

1

本参考书主要依据董教总华文独中工委会统一课程委员会公布的高中物理课程编写而成，其目标是提供学生学习物理的方法与技巧，并掌握学习重点，借此提升学生物理思维能力及掌握物理的重要概念，促进学生对物理知识的深度学习（deep learning）。

2

本书的使用对象是具备基础物理知识的高中理科生。学生们使用董总出版的高中《物理》课本之余，若补以这本《物理好帮手》，将大幅提升学习成效和物理素养。

3

本书的设计以学生为中心，图文并茂，整合知识点，以创新的手法来呈现概念，着重学生的自主学习，协助学生融会贯通及发掘学习物理的乐趣。

4

本书除了概括一般的物理主题，如：力、热、光、波、电、磁、核、量、相，还附有一般课本鲜少编写的内容，如：黑洞及应用高阶思维的习题。本书不仅是学生的“好帮手”，也能让物理教师从中获益。

5

凡有标注‘自选’处是增广见闻的知识点。

6

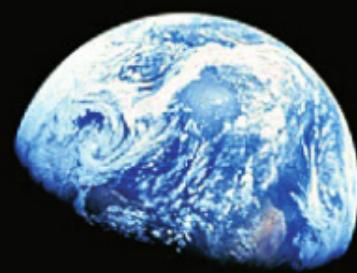
本书若有错误、遗漏或欠缺之处，请不吝指教，以供再版修订参考。

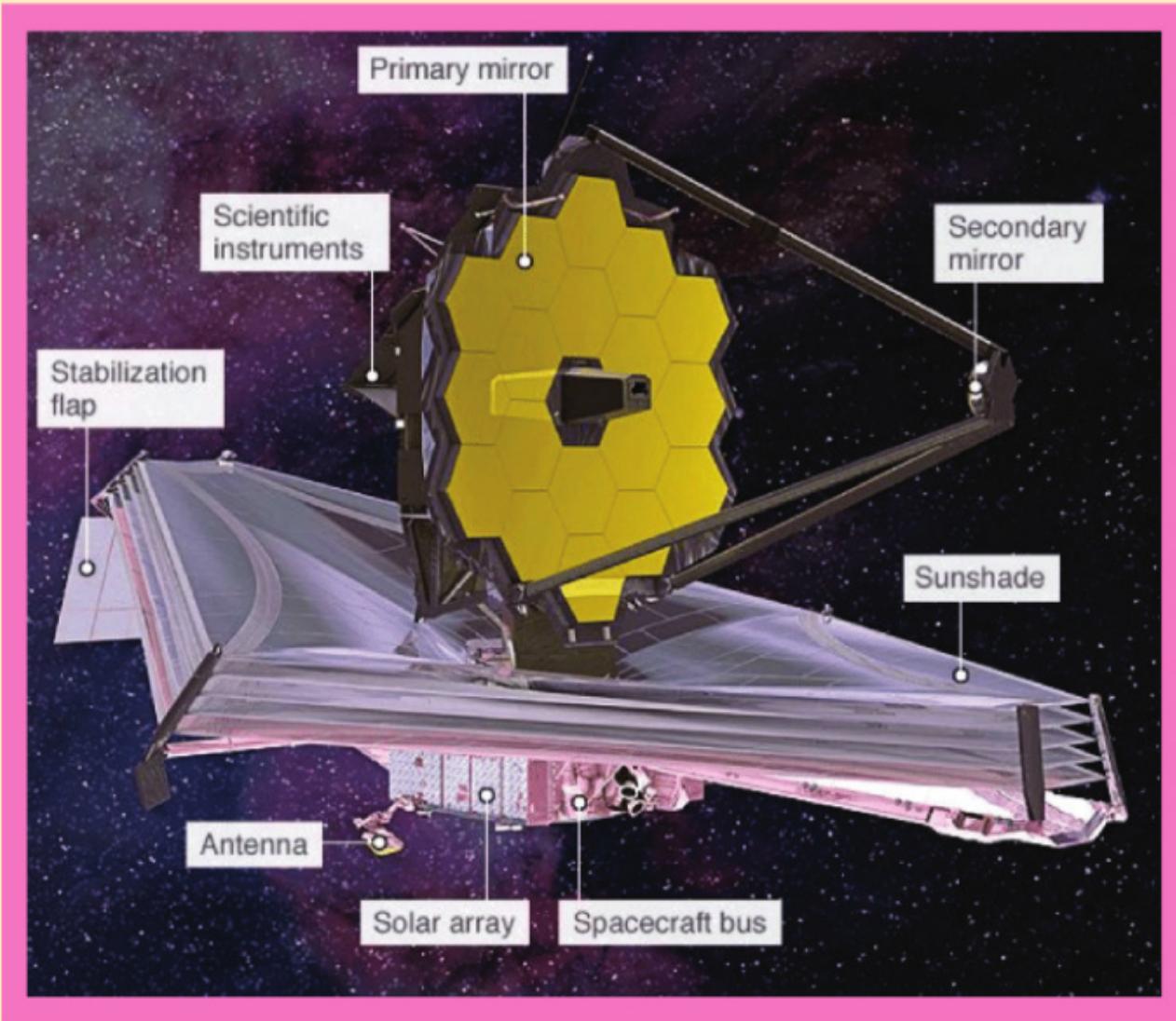
给学生的话

物理学是研究时间、空间、物质、能量和物质间的相互作用和转化的学科。

人类为了生存要从物质世界获得生活所需的资源、能量和动力。

欢迎您拿起《物理好帮手》这本书，开始走进自学中学物理的课堂！本书引领读者去理解高中物理学的主题思想，为独中物理上、中、下三册课本的同步学习的精简“好帮手”及“领航者”！





本书的特色

甲 八种图形

为了更直观地呈现物理学中奥秘的知识点，我们精心制作了八种图形来作为您学习的“好帮手”：

- 1 经典物理与近代物理的“力、热、光、波、电、磁、核、量、相”各主要章节的「知识框图」有利于帮助读者更直观 (visualization) 及系统性的概化 (conceptualization) 各单元的层次与脉络。

- 2 各种各样物理量之间的「关系图」引导读者掌握各基本物理知识、概念与规律，并了解该知识在不同领域的对比与联系，以及它们之间的相似性及独特性。
- 3 研究简谐运动中能量守恒的「相空间图」。
- 4 研究气体热力学定律的「 pV 图」。
- 5 研究电路运行的完整「电势走位图」。
- 6 可以详细解释各光谱系特征的氢原子「能阶图」。
- 7 研究相对论能量-动量方程的「相对论三角形」。
- 8 可以用来简化分析复杂的实验数据之「半对数图」及「全对数图」。

如果学生能完全掌握以上的各图形的内涵及核心知识，一定会在学习物理的道路上达到事半功倍的效果。

乙 学习工具

过去您在物理解题的过程中，一定用过很多普通的几何、代数、微积分或三角的数学工具，但是在这本书中，您须要使用全新的矢量微积分 (vector calculus) 来处理 3D 的问题。您须要运用如旋度 (curl)、散度 (divergence)、梯度 (gradient)、拉普拉斯算子 (Laplacian)、算子 (operators) 来解偏微方程式 (partial differential equation)。这样会开启您认识物理世界的新篇章，并会更客观、更深刻及更全面地了解物理知识中的奥秘所在。



相对三册课本，这本“好帮手”的内容稍有扩展，我们精心挑选了国内外大学先修班考试，“成大数理比赛”及“国际奥林匹克竞赛”的一些题目，包括最前沿及最能激发读者群兴趣的天文宇宙学如霍金的黑洞猜想等素材。有利于开拓读者的思路和境界，希望读者能常读常新，并且举一反三，积极启动高阶思维，从而倡导更多有利民生的跨界创新发明！

这本书里“解题指导”的例题帮助读者提高分析、思考问题及计算能力，以增强读者导出结论的能力。本书特别强调物理学独有的“数感”，对于验算数字的正确性，物理人有特别敏锐的直觉！

整体而言，这本书的编辑重点是精心整理出浩瀚的物理知识中的系统性、知识性、趣味性、启发性、有效性和实用性的课题。

目录

1 总纲 01
2 力 05
3 振动 13
4 热学 27

5 波动学 40
6 静电学 57
7 稳定电流 68

8 磁学 87
9 量子 104
10 相对论 119

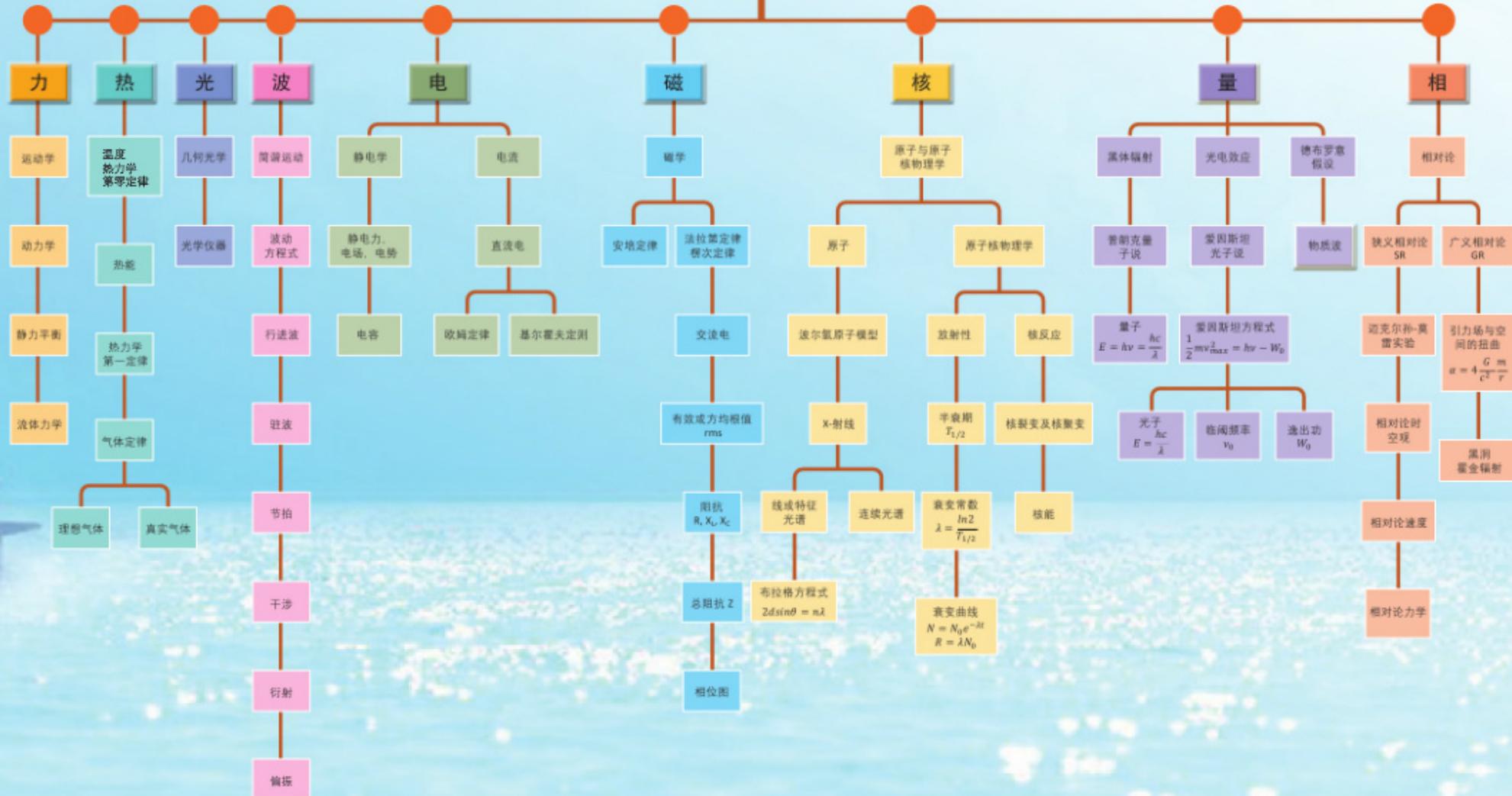


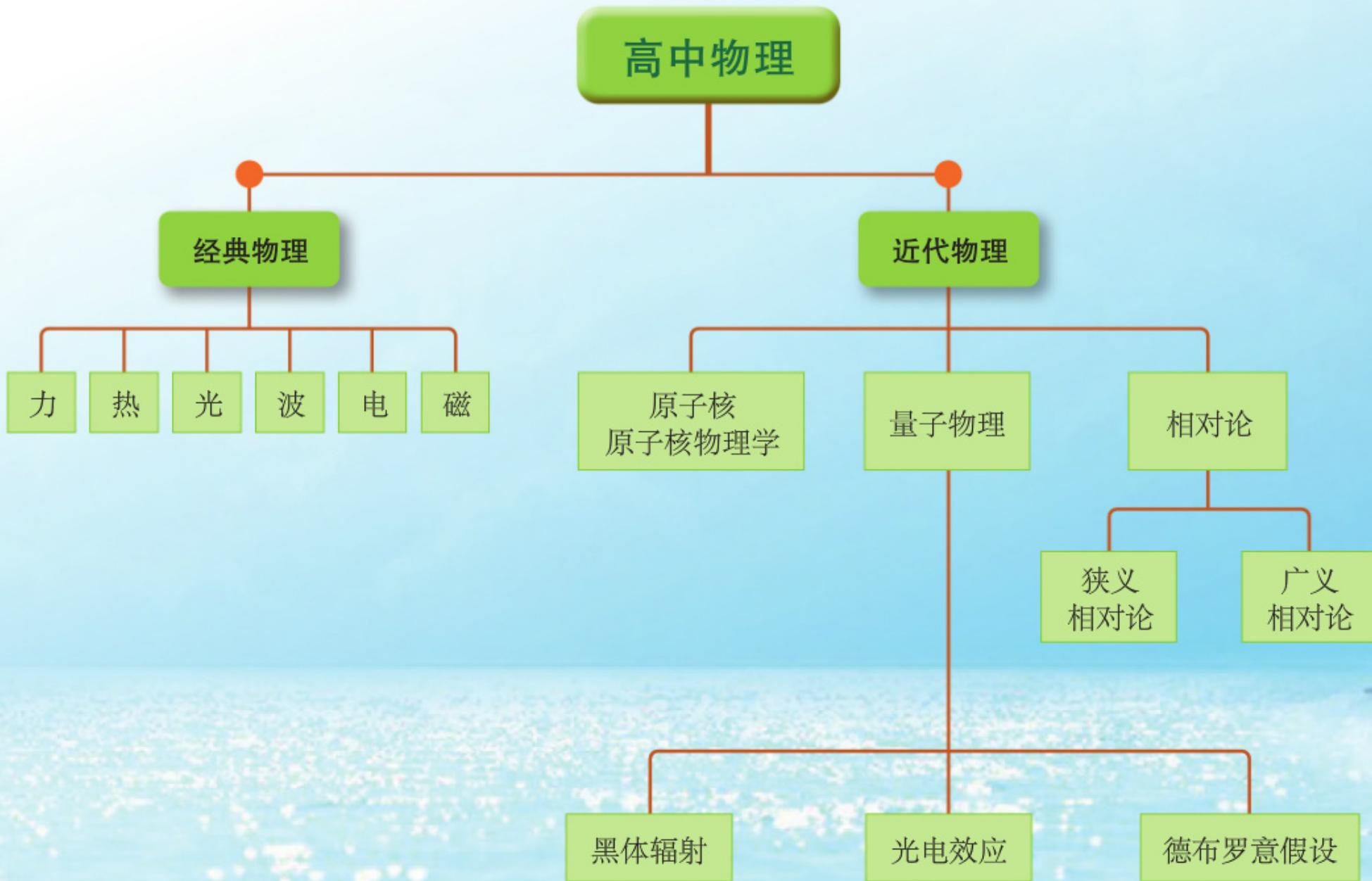
11 黑洞 138
12 原子核物理 146
13 物理学习工具 151



总纲

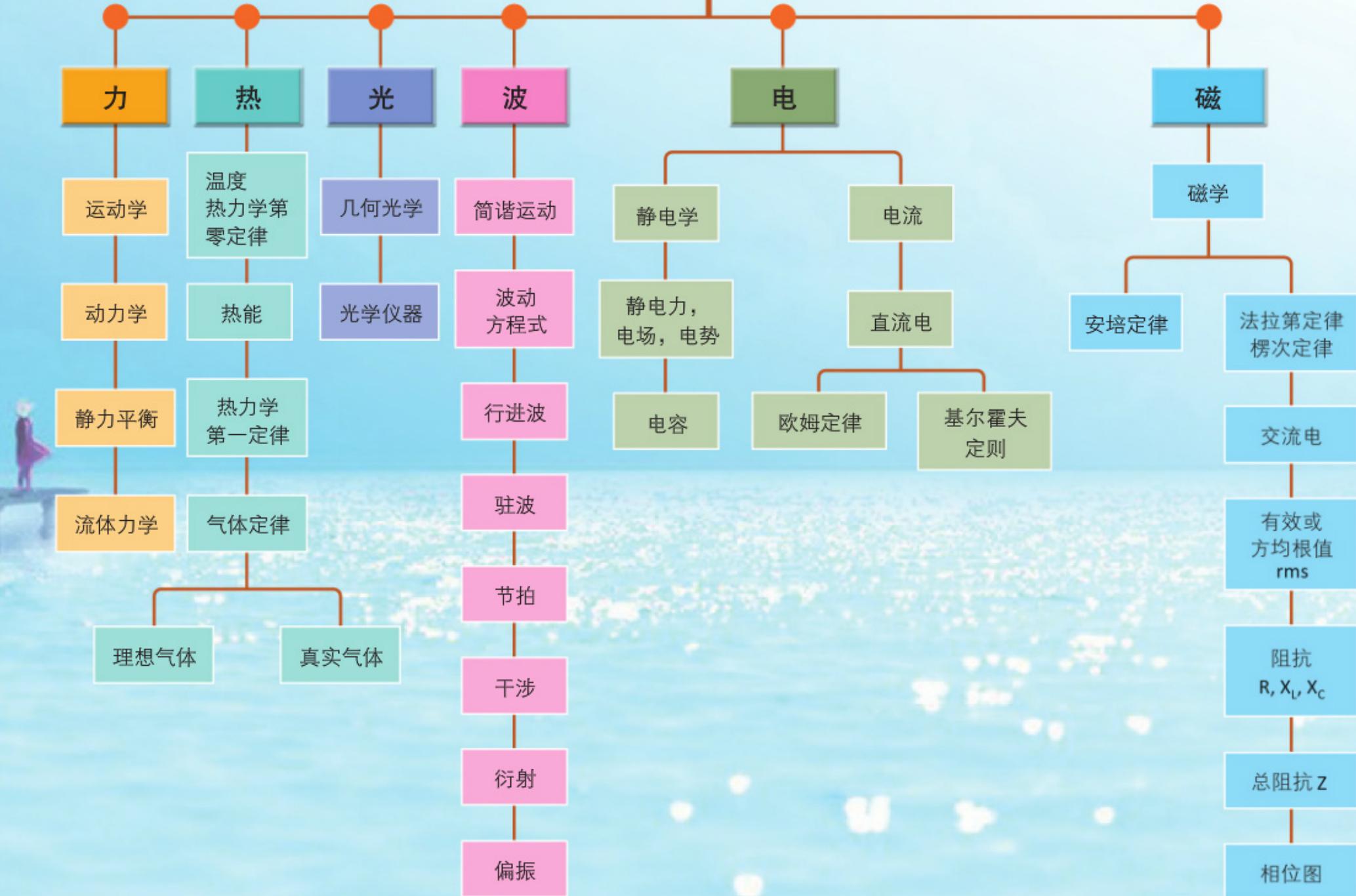
高中物理





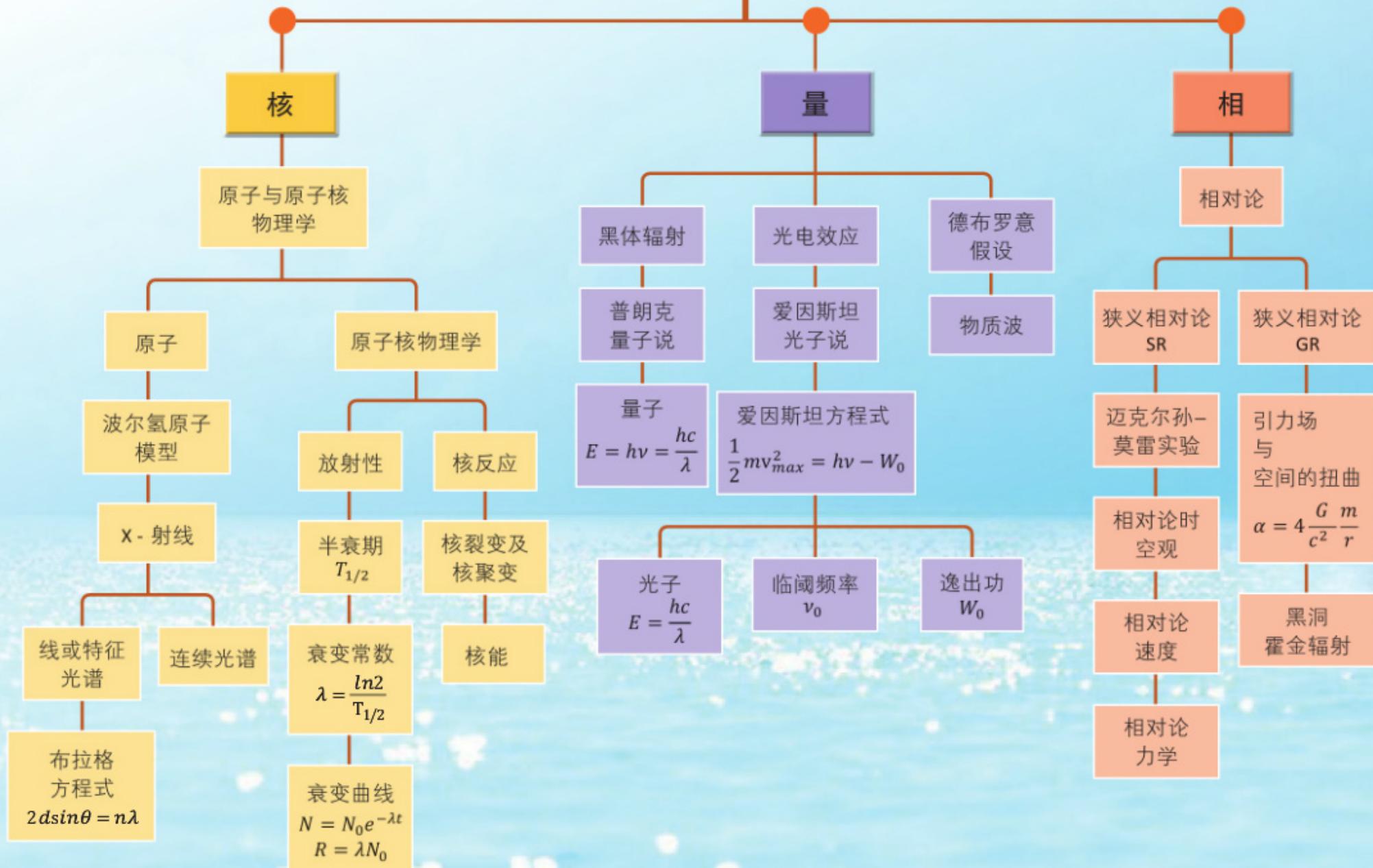


经典物理





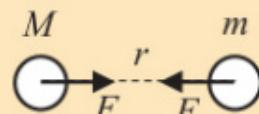
近代物理





力(矢量)

牛顿万有引力



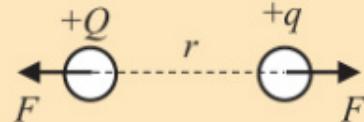
$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}$$

G : 引力常数
 $6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

 M, m : 两物体的质量 r : 两物体间的距离

只有吸引力，没有排斥力

库仑电力



$$F_e = k \frac{Qq}{r^2}$$

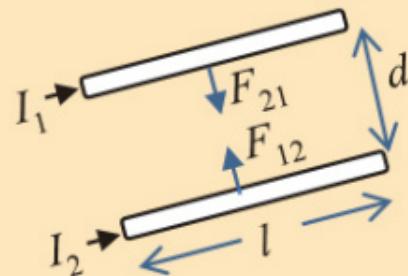
$$k : \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

$$= 10^{-7} c^2$$

ϵ_0 : 介电常量或真空电导率
 $8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

 Q, q : 两带电体的电荷量 r : 两带电体间的距离 c : 光速

电磁安培力



$$F_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l$$

μ_0 : 介磁常量或真空磁导率
 $4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$

 I_1, I_2 : 两导线上各自的电流 d : 两导线的距离

不符合距离平方反比定律

光速的导出(一),

$$k = \frac{1}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})}$$

$$= 9 \times 10^9$$

$$= 10^{-7} c^2$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{4\pi \times (10^{-7} c^2)} \times 4\pi \times 10^{-7}$$

$$= \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

$$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{Maxwell 电磁波定理})$$

光速的导出(二),

从介电常量与介词常量的单位可得,

$$\epsilon_0 \mu_0 \text{ 的单位} = \text{N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2 \times \text{N A}^{-2}$$

$$= \text{m}^{-2} (\text{As})^2 \times \text{A}^{-2}$$

$$= \text{m}^{-2} \text{ s}^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\epsilon_0 \mu_0)}} \text{ 的单位} = \text{m s}^{-1}$$

电流强度 1 安培的定义:

在真空中两条相距 1 m, 带有 $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$, 的导线之间单位长度导线所受磁力 $\frac{F}{l} = 2 \times 10^{-7} \text{ N m}^{-1}$ 。

$$\frac{F_m}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

$$2 \times 10^{-7} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{d} \right)$$

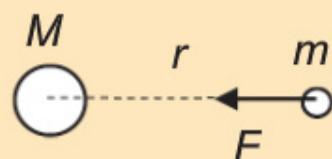
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

它是唯一从定义导出的物理常数，所以它一定是唯一值；例如不可以将 π 以近似值 ($\frac{22}{7} = 3.1412$) 带入。



场 (矢量)

万有引力场



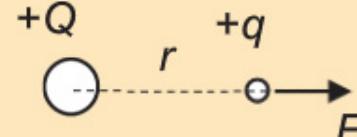
$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

 G : 引力常数

$$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

 M, m : 两物体的质量 r : 两物体间的距离单位: N kg^{-1}

电场



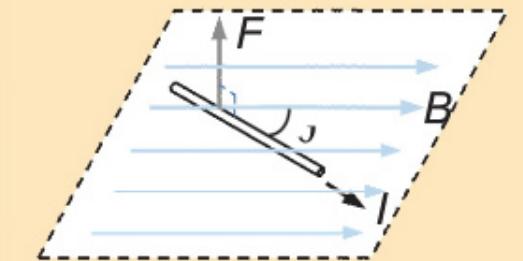
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$k : \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ F m}^2 \text{ C}^{-2} = 10^{-7} c^2$$

$$\epsilon_0 : \text{介电常量或真空电导率 } 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

 Q, q : 两带电体的电荷量 r : 两带电体间的距离

磁场



$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_m}{Il \sin \theta}$$

 I : 通过导线的电流强度 l : 导线正对磁场的长度 θ : 导线与磁场之间的夹角单位: $\text{N (mA)}^{-1} = \text{T}$ (大数量级单位)

$$1 \text{ G} = 1 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$B_{Earth} \approx 0.5 \text{ G}$$

$$B_{\text{强磁体}} \approx 2.0 \text{ T}$$

$$B_{\text{超导体}} \approx 10.0 \text{ T}$$

【例】

氢原子的电场强度与万有引力场强度之比。

$$\begin{aligned} \left| \frac{E}{g} \right| &= \frac{k \frac{Q}{r^2}}{G \frac{M_p}{r^2}} \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 1.60 \times 10^{-19}}{6.67 \times 10^{-11} \times 1.67 \times 10^{-27}} \\ &= 1.29 \times 10^{28} \end{aligned}$$

相对于电场，引力场非常弱，但是在宏观现象却是影响深远。

由于力/场是矢量，求取合力/场必须考量到各力/场的方向，因此取它们的矢量和 (vector sum)



能量(标量)



平移动能

$$E_{k,tr} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{k,tr} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

 m : 物体的质量 v : 物体的运动速率 p : 物体的动量

转动动能

$$E_{k,rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$E_{k,rot} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}$$

 I : 物体的转动惯量 ω : 物体的转动角速率 L : 物体的角动量

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U_s = \frac{1}{2}Fx$$

 k : 弹性系数 x : 弹簧的伸长量 F : 弹力

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2$$

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$U_E = \frac{1}{2}QV$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

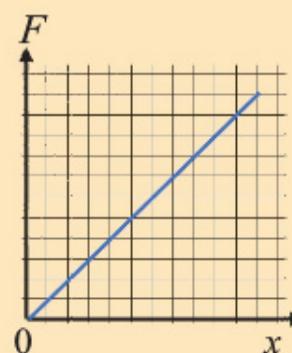
 L : 电感器电感值 I : 电感器电流 Φ : 电通量 N : 电感器的匝数没有 $\frac{1}{2}$ 项的能量

电能:

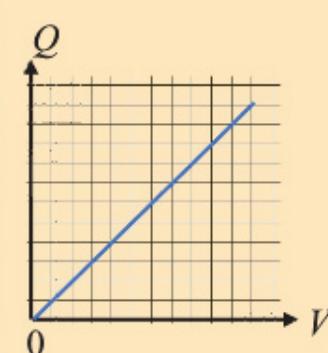
$$E = VIt = \frac{V^2}{R}t = I^2Rt$$

核能:

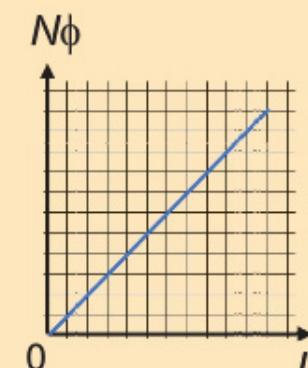
$$E = \Delta m c^2$$

其中 Δm 为质量亏损

$$k = \frac{F}{x} = \text{斜率}$$



$$C = \frac{Q}{V} = \text{斜率}$$



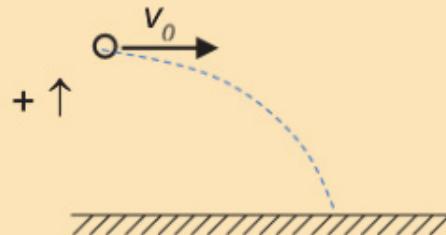
$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

由于能量是标量, 求取总能量是直接取各能量的代数和 (algebraic sum)



牛顿运动定律的应用

【例一】



运动自由度 (DOF): $\vec{r} = (x, y)$

运动方程式 (EOM): $\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
 $\vec{F} = (0, -mg)$

$$\begin{aligned} 0 &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= v_0 \end{aligned}$$

$$x = v_0 t + x_0$$

$$\begin{aligned} -mg &= m \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g \\ \frac{dy}{dt} &= -gt + v_{y0} \end{aligned}$$

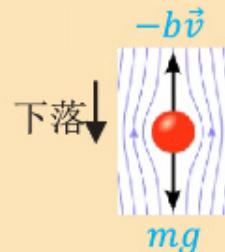
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0$$

必须符合以下的条件:

- (1) 物体不是太轻
- (2) 没有空气阻力 (只受重力作用)
- (3) 不是抛得很远 (确保地面是平的)
- (4) 没有侧风 (物体降落在垂直地面的平面上)

【例二】

球形物体下落速度不大,
遵守 Stoke's Law, 不计空气浮力



运动自由度 (DOF): y

运动方程式 (EOM):

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - b \frac{dy}{dt} \quad [v = \frac{dy}{dt}]$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} \left(v - \frac{mg}{b} \right)$$

$$\frac{dv}{v - \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m} dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \frac{mg}{b}} = \int_0^t -\frac{b}{m} dt$$

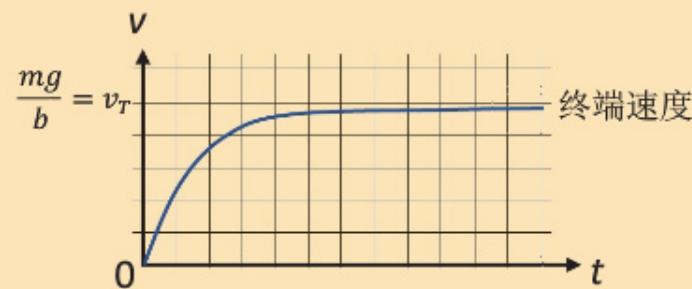
$$[\ln(v - \frac{mg}{b})]_0^v = [-\frac{b}{m}]_0^t$$

$$v = \frac{mg}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m}t})$$

$$\text{当 } t = 0, v = \frac{mg}{b} (1 - e^0) = 0$$

$$\text{当 } t = \infty, v = \frac{mg}{b} (1 - e^{-\infty}) = \frac{mg}{b} = v_T$$

当时间 t 增大时, v 也随着增大。





牛顿第三运动定律的适用性

【例】

牛顿第三运动定律指出物体间的作用是相互的，即力是成对出现的，作用力与反作用力的性质是相同，也是同时出现与消失的。它们始终大小相等、方向相反，沿同一作用线分别作用在两个不同的物体上。

两个带有质量的物体之间的引力，

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -\vec{r}_{12}$$

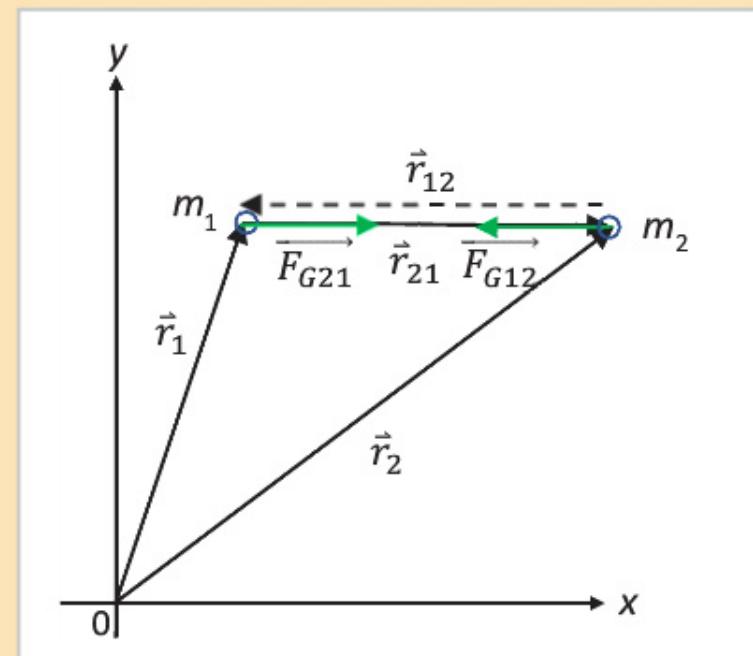
$$\vec{F}_{G12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}; \quad \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}; \quad |\hat{r}_{12}| = 1$$

$$\vec{F}_{G21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

由于 $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$ 及 $|\hat{r}_{12}| = |\hat{r}_{21}| = 1$,

$$\vec{F}_{G12} + \vec{F}_{G21} = 0 \quad [\text{系统内合力}]$$

符合牛顿第三运动定律



两个带有电量的物体之间的电力，

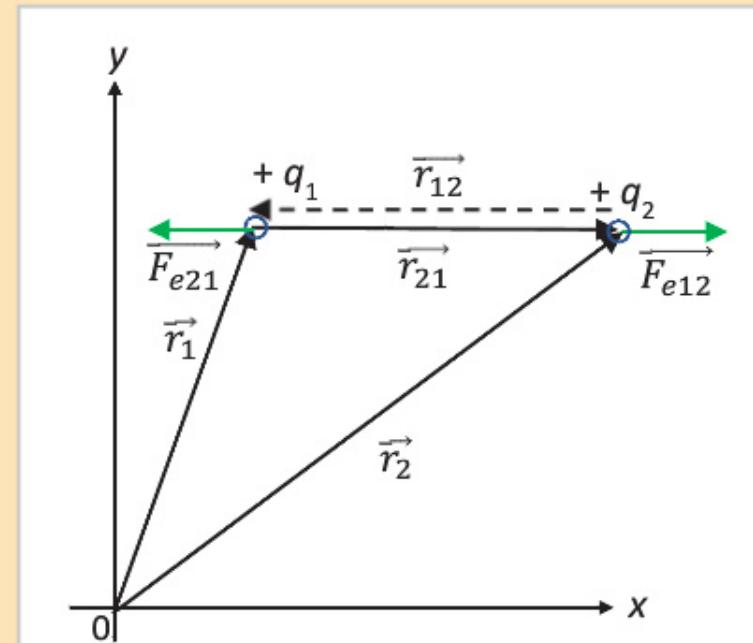
$$\vec{F}_{e12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{e21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

由于 $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$ 及 $|\hat{r}_{12}| = |\hat{r}_{21}| = 1$,

$$\vec{F}_{e12} + \vec{F}_{e21} = 0 \quad [\text{系统内合力}]$$

符合牛顿第三运动定律





【例】天体运动学

质量为 m 行星，靠近另一个质量为 M 的恒星运动。

(a) 两星体间的作用力

$$\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

(b) 行星的运动方程式 EOM,

$$\begin{aligned}\vec{F}_G &= m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} &= m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ -G \frac{M}{r^2} \hat{r} &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

从行星的运动方程式可得知行星的轨迹与它的质量无关。

又

$$\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (\text{引力是矢量})$$

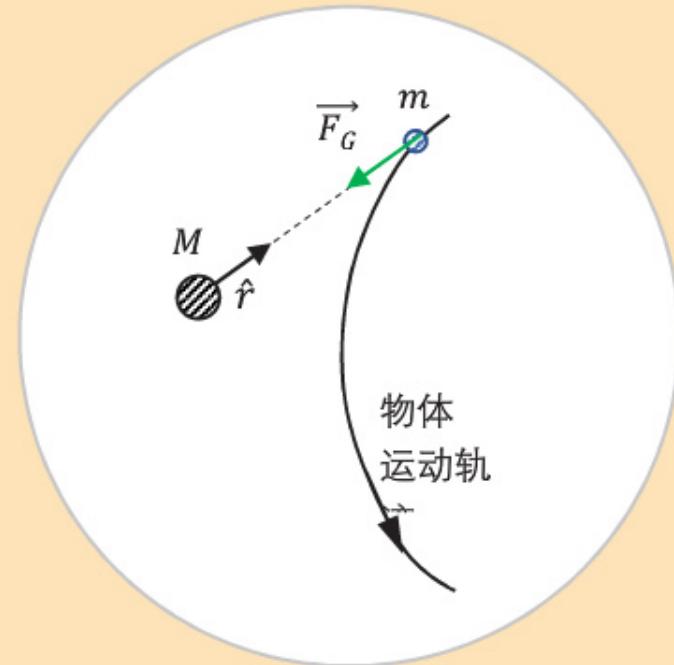
$$V_G = -G \frac{Mm}{r} \quad (\text{引力场势能是标量})$$

由于引力是保守力，它与运动过程所经过的路径无关，只与运动前后位置有关，

$$\Delta V_G = V_G(\hat{r}_2) - V_G(\hat{r}_1) = - \int \vec{F}_G \cdot d\vec{r}$$

则，

$$\vec{F}_G = \left(-\frac{\partial V_G}{\partial x}, -\frac{\partial V_G}{\partial y}, -\frac{\partial V_G}{\partial z} \right) \equiv -\nabla V_G \quad (\nabla \text{grad, 梯度})$$





【例】

一个质量为 m 的物体，绕着圆心 O 点，半径为 r 做匀速率圆周运动。

将圆周运动物体当作 2 维空间运动，物体的水平与纵轴位移各为，

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

运动方程式 (EOM):

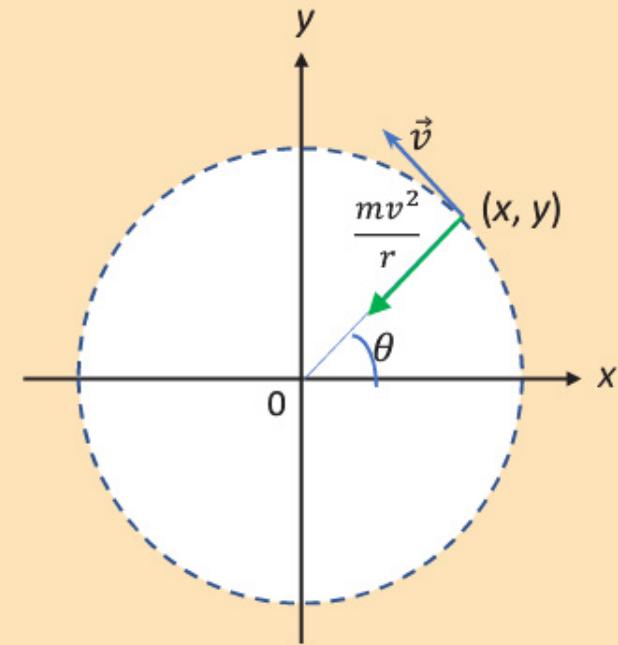
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r \frac{d}{dt} \cos \theta \\ &= -r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -r \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} \sin \theta \\ &= -r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta \\ &= -\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 x \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= r \frac{d}{dt} \sin \theta \\ &= r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -r \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} \cos \theta \\ &= -r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \\ &= -\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 y \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 y &= 0 \end{aligned}$$

上两式都符合简谐运动的运动方程式: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$,

其中，

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}{r^2} = \frac{v^2}{r^2} \\ \omega &= \frac{v}{r} \end{aligned}$$





力的作用效应

力作用的时间效应

$$\vec{F} dt = d\vec{p}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p}$$

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1)$$

$= \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (是为一个矢量)

(A) 物体在运动过程中所受合力的冲量等于该物体动量的增量 (冲量-动量原理)

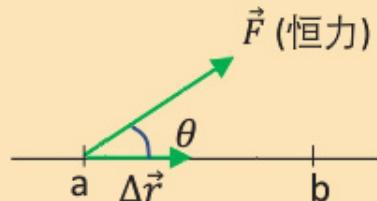
(B) 如果系统所受到的合外力为零 ($\sum_i \vec{F}_i = 0$), 系统的总动量保持不变, 即

$$\sum_i m_i v_i = \sum_i m_i v_{io}$$

这就是动量守恒定律, 即当外力远小于内力时, 可以忽略外力对系统的作用, 例如碰撞、打击、爆炸类问题, 系统的动量是守恒的!

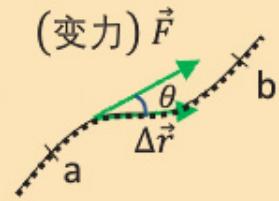
力作用的空间效应

(A) 力所作功,



恒力所作的功: $W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F s \cos \theta$

变力所作的功: $W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F \cos \theta ds$



(B) 功率是描述力作用的功效,

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{功率是标量})$$

(C) 动能定理,

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_a^b m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{v_a}^{v_b} mv dv \\ &= \frac{1}{2} mv_b^2 - \frac{1}{2} mv_a^2 \end{aligned}$$

力对物体做功的结果是引起 $\frac{1}{2} mv^2$ 量的改变, 用

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 \quad (\text{物体的动能})$$

此作用效果适用于恒力与变力。



简谐振动

四种不同格式的特征方程

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$(2) \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{[最常用式子]}$$

$$(3) x_{tt} + \omega^2 x = 0$$

$$(4) f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$$

几种常见的振动方程式

$$* x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$* x = A \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$* x = A e^{i(\omega t + \phi_0)}$$

初始条件(也称为边界条件):

即是当时间 $t = 0$ 时的位移 x_0 、 v_0 、 a_0 、 ϕ_0 。

用来描述振动快慢的物理量

$$\omega = \sqrt{\frac{\text{恢复力系数}}{\text{惯性系数}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

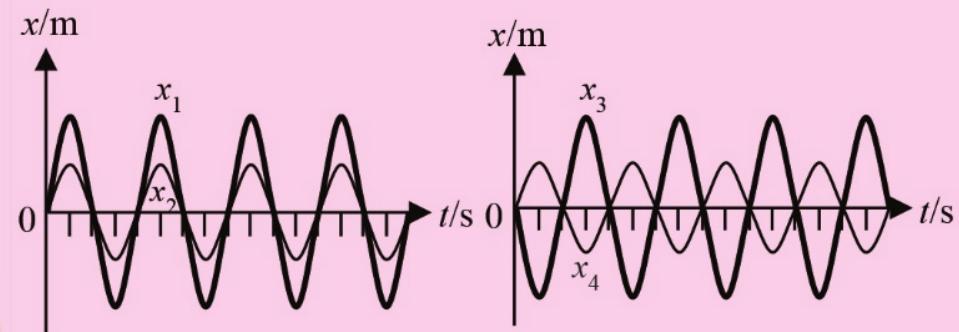
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

用来描述振动大小的物理量

振幅: $A = x_m$

例如下图中的 x_1 的振动比 x_2 的大, x_3 的振动比 x_4 的大。



用来比较两个振动先后顺序的物理量

相位差: $\Delta\phi$

例如上图中 x_1 与 x_2 的振动是同相位的, x_3 与 x_4 的振动是反相位的。

假设弹簧的振动在弹性限度内, 则振子收到的恢复力为

$$F = -kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\omega x$$

注: 胡可定律只适用于形变小的弹簧, 如果弹簧的形变太大超过它的弹性限度, 则弹簧就损坏了。



简谐振动



机械振动

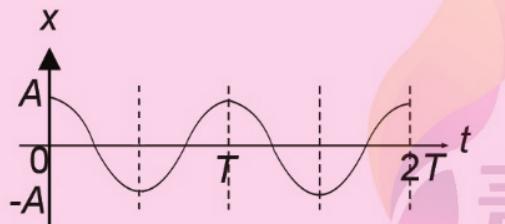
质量弹簧系统



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$v = \frac{dx}{dt}$$

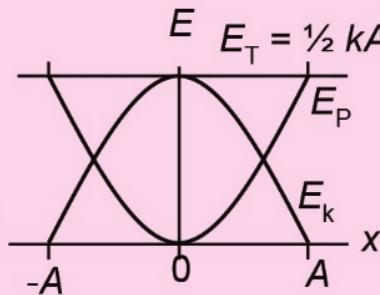
$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\text{动能 } E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{势能 } E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k + E_p = E_T$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$



电磁振动

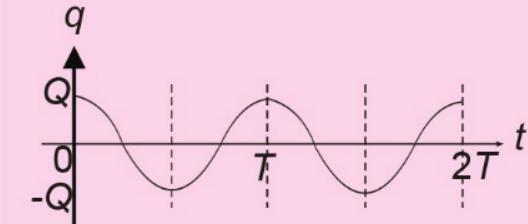
电感电容电路



$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$q = Q \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



$$i = \frac{dq}{dt}$$

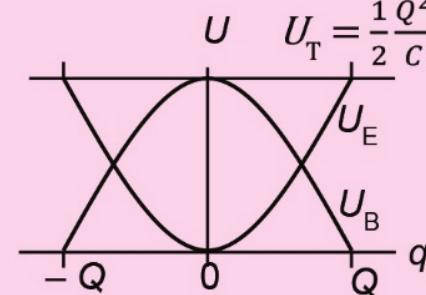
$$i = \pm \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{Q^2 - q^2}$$

$$\text{磁能 } U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

$$\text{电能 } U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$U_B + U_E = U_T$$

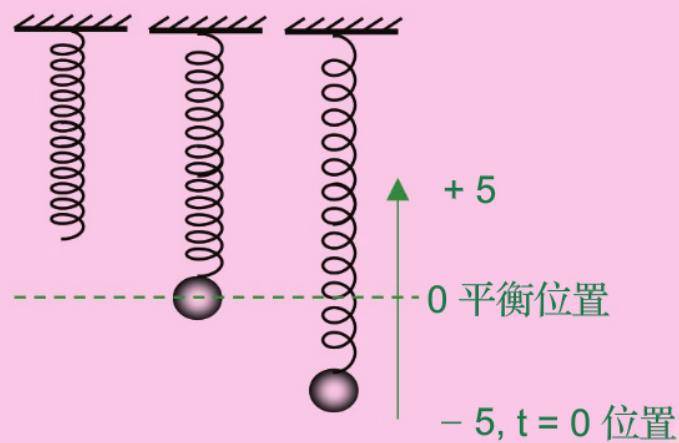
$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}$$





【例】

将一个重物悬挂在竖直弹簧的下端，然后向下拉到距离它的平衡位置 5 个单位处开始释放，接着它沿着竖直方向以角频率 ω 上下振动。



它的位置为

$$y(t) = -5 \cos \omega t$$

速度为，

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = 5\omega \sin \omega t$$

加速度为，

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 5\omega^2 \cos \omega t$$

在运动学中(kinematics) 用

位移：描述某段时间内质点始末位置的变化；

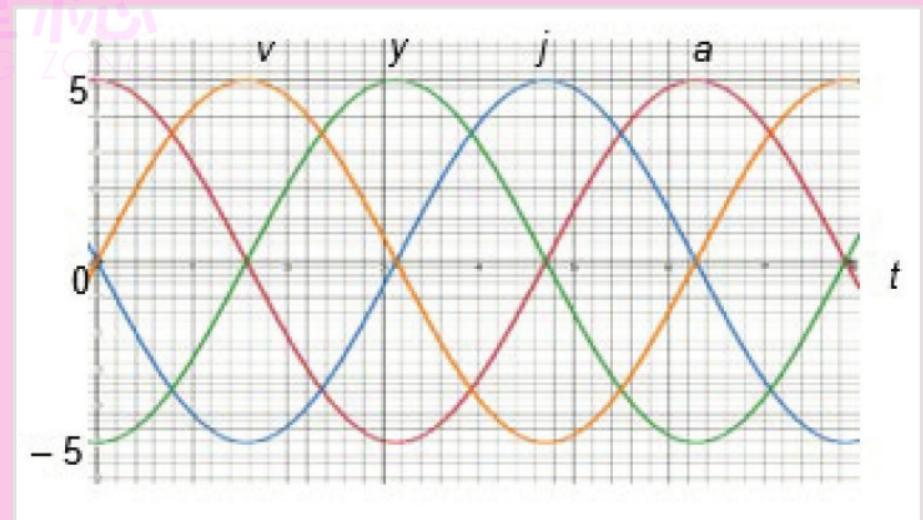
速度：描写物体运动的快慢和方向；

加速度：描写速度变化的快慢和方向变化。

然而在一般情况下，物体受到作用力是变化的，因而加速度也是变化的。所以在车辆座椅、铁路设计中都要考虑加速度的变化！鉴于加速度变化率在工程问题的重要性，学术界把加速度的时间变化率命名“加加速度”(jerk)，用 j 来表示，它的单位为 m s^{-3} ，

$$j(t) = \frac{da}{dt} = -5\omega^3 \sin \omega t$$

当物体处于平衡位置时， j 最大，加速度瞬间改变方向及其正负号。





简谐振动图像

【例】

(a) 振幅: $A = y_{max} = 2 \text{ m}$

(b) 最大加速度: $a_{max} = 8 \text{ m s}^{-2}$

(c) 角频率:

$$a_{max} = A\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \text{ (rad s}^{-1}\text{)}$$

(d) 周期:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ s}$$

(e) 方程式:

(i) 位置 - 时间方程:

$$y = 2 \cos(2t + \phi_0) \text{ m}$$

(ii) 速度 - 时间方程:

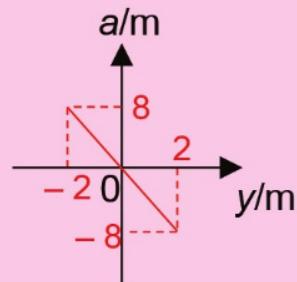
$$v = -4 \sin(2t + \phi_0) \text{ m s}^{-1}$$

(iii) 加速度 - 时间方程:

$$a = -8 \cos(2t + \phi_0) \text{ m s}^{-2}$$

(iv) 速度 - 位置方程:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - y^2} = \pm 2\sqrt{2^2 - y^2}$$



【例】

右图所示为一个质量为 2 kg 的振子的加速度相对于位移的变化图。求

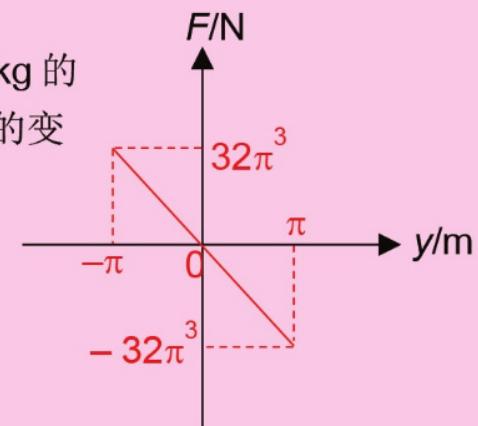
(a) 振幅,

(b) 角频率,

(c) 振动周期,

(d) 最大动能,

(e) 在同一图能绘出其动能、势能及总机械能相对于位移的变化图。



(a) $A = \pi \text{ m}$

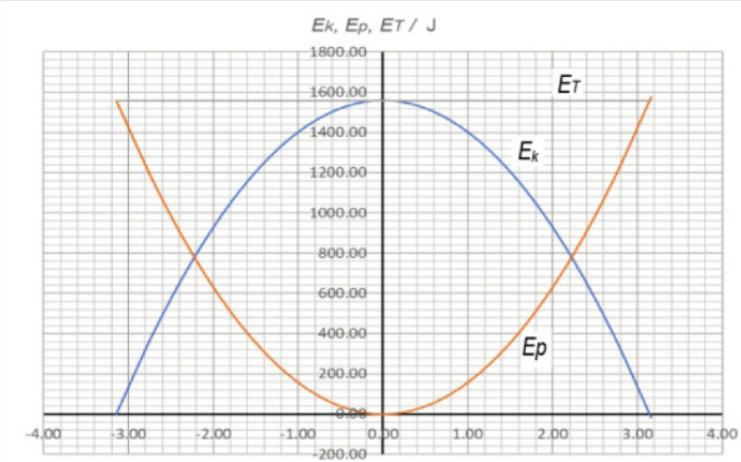
(b) $F_{max} = mA\omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{F_{max}}{mA}} = \sqrt{\frac{32\pi^3}{2\pi}} = 4\pi \text{ rad s}^{-1}$$

(c) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5 \text{ s}$

(d) $E_{k,max} = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (\pi \times 4\pi)^2 = 16\pi^4 \text{ J}$

(e)





简谐振动中的守恒物理量

假设做简谐运动振子的位移为

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

则，

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x^2 + v^2 &= A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) \\ &= A^2 \omega_0^2 (1) \\ &= \text{常数} \end{aligned}$$

对一弹簧-质量系统而言，

$$\frac{k}{m} x^2 + v^2 = \text{常数}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(kx^2 + mv^2) &= \text{新常数} \times \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \text{总能量 } E &= \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \text{常数} \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = x_0, E_k = \frac{1}{2} mv_0^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$\text{当 } v = v_0, E_k = \frac{1}{2} mv_0^2 \Rightarrow p_0 = \sqrt{2mE}$$

则

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{mv}{mv_0}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 = 1$$

相空间图 phase space diagram

面积

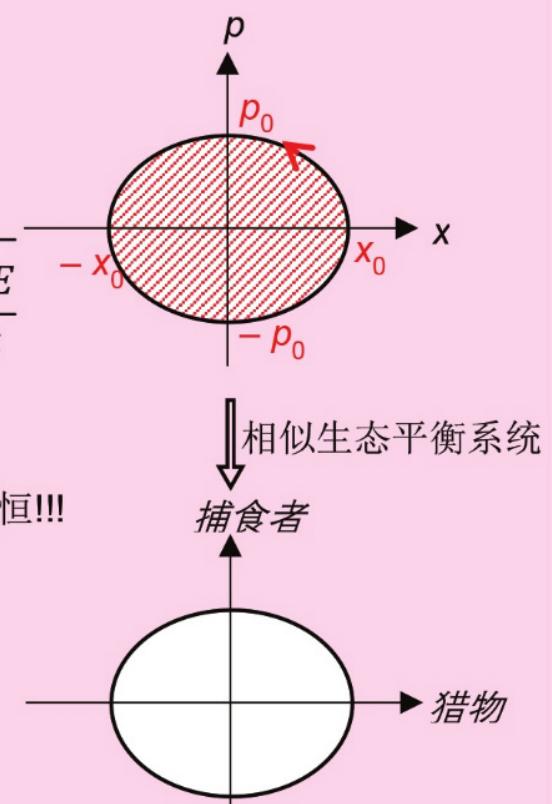
$$A = \oint pdx$$

$$= \pi p_0 x_0$$

$$= \pi \times \sqrt{2mE} \times \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_0} E$$

上式可形象化为能量守恒!!!



对量子系统而言

DONG ZONG

$$\oint pdx = \left(n + \frac{1}{2}\right) h, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{2\pi}{\omega_0} E = \left(n + \frac{1}{2}\right) h$$

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) h \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) hf_0$$

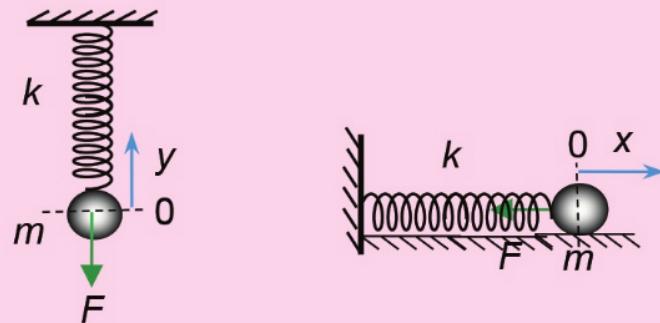
$$= \frac{1}{2} hf_0, \frac{3}{2} hf_0, \frac{5}{2} hf_0, \dots$$

其中 $\frac{1}{2} hf_0$ 称为零点能量(Zero-point energy)



简谐振动 – 无处不在的运动

弹簧



恢复力

$$-F = ky$$

$$-m \frac{d^2y}{dt^2} = ky$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2y$$

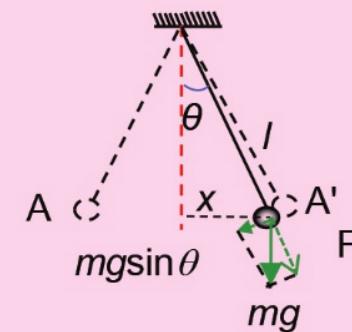
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}}$$

单摆



恢复力

$$F = -mgsin\theta$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mgsin\theta$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \frac{x}{l}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

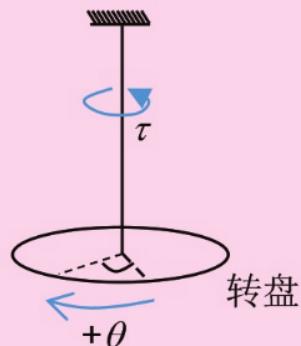
$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

单摆的振动具有等时性，所以它适于用来计时。



简谐振动 – 无处不在的运动

扭摆



恢复转矩

$$\tau = -c\theta$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{c}{I}\theta$$

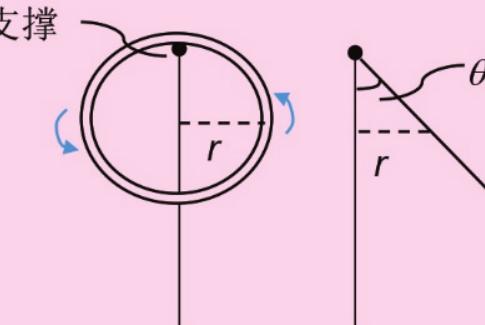
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}$$

圆环



恢复转矩

$$\tau = -mgr\sin\theta$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgr\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgr}{I}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I}}$$

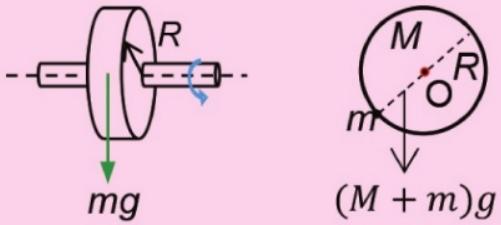
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}}$$

董總
DONG ZONG



简谐振动



相对于 O 点的总力矩,

$$mgR = (M+m)g\bar{r}$$

$$\bar{r} = \frac{m}{M+m}$$

$$\tau = -(M+m)g\bar{r}\sin\theta$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M+m)g\bar{r}\sin\theta$$

$$I = I_0 + mR^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{(M+m)gr}{I_0 + mR^2} \frac{mR}{M+m} \theta$$

当 θ 为小角度时,

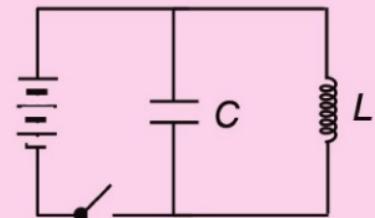
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgR}{I_0 + mR^2} \theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_0 + mR^2}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + mR^2}{mgR}}$$

$$T = \sqrt{\frac{\text{惯性因素}}{\text{恢复力因素}}}$$

电磁振荡



$$V_L + V_C = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L \frac{d}{dt} \left(\frac{dQ}{dt} \right) + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

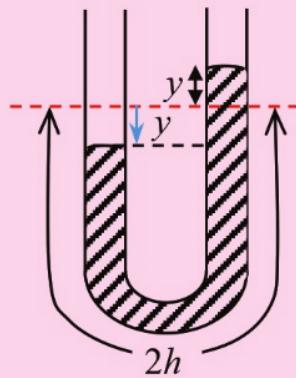
$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{L}{C}}$$

董總
DONG ZONG



当左管内液面向下移 y 时，

$$-\Delta W = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$-\rho A \Delta y g = \rho A \times 2h \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$-2yg = 2h \frac{d^2y}{dt^2}$$

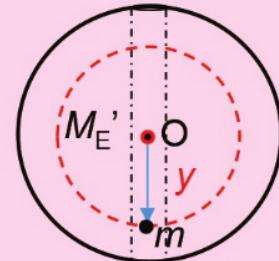
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{h}y$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

地轴隧道



当物质 m 离地心 y 时，物体所受万有引力为

$$F'_G = -G \frac{mM_E'}{y^2}$$

其中 M_E' 为以 y 为半径的地球内层质量，此半径以外的地球外壳对物体的引力因相抵消可忽略不计。

$$-G \frac{mM_E'}{y^2} = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -G \frac{\frac{4}{3}\pi y^3 \rho}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho y$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho}$$

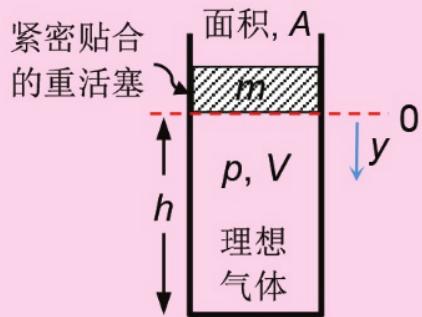
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{3}{4\pi G \rho}}$$

董總
DONG ZONG



活塞



平衡位置

$$mg = pA = \frac{c}{V}A = \frac{c}{Ah}A = \frac{c}{h}$$

活塞稍微下移 y 时，

$$mg - p'A = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - p'A$$

$$= \frac{c}{h} - \frac{c}{V'}A$$

$$= \frac{c}{h} - \frac{c}{(h-y)}$$

$$= \frac{c}{h} - c(h-y)^{-1}$$

董總
DONG ZONG

$$\begin{aligned} m \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{c}{h} - \frac{c}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{-1} \\ &= \frac{c}{h} - \frac{c}{h} - \frac{cy}{h^2} \\ &= -\frac{cy}{h^2} \\ &= -\frac{c}{h} \frac{y}{h} \end{aligned}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \frac{y}{h}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{h}y$$

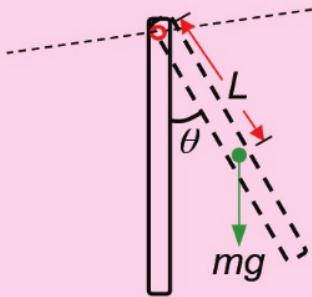
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$



老爷钟



恢复转矩

$$I\alpha = -\tau$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL\sin\theta}{I}$$

如果 θ 很小,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{I}\theta$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$$



对一把米尺而言,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}mL^2 \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg \times \frac{1}{2}L}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} \\ &= 1.64 \text{ s} \end{aligned}$$

对于成人的手臂长约为 66 cm,

$$T = 1.3 \text{ s}$$

对于一般成人的腿长约为 86 cm,

$$T = 1.5 \text{ s}$$

对单摆而言, 其完整的表达式:

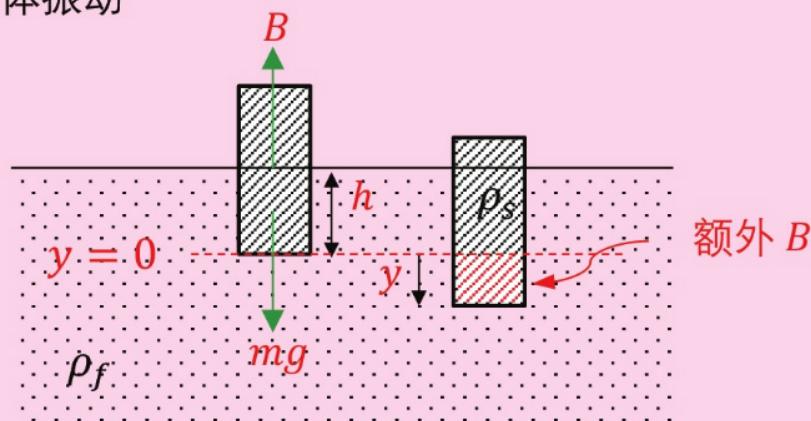
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta_M}{2}\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{\theta_M}{2}\right) + \dots \right]}$$

$\theta_M = 30^\circ$, 其误差为 1.79%;

$\theta_M \leq 23^\circ$, 其误差与振幅无关且小于 1.00 %。



浮体振动



当浮体在平衡位置时,

$$mg - \rho_f Ahg = 0$$

$$mg = \rho_f Ahg$$

当浮体稍微向下移 y 时,

$$mg - \rho_f A(h + y)g = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

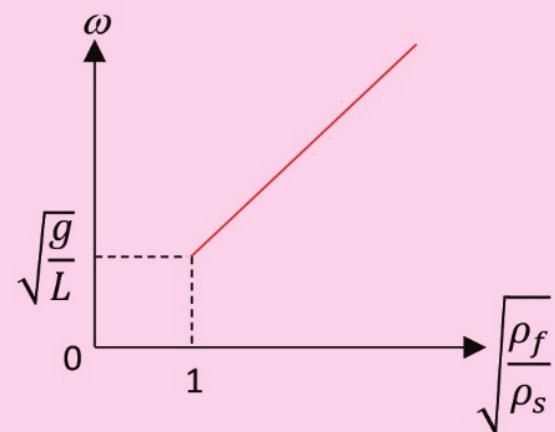
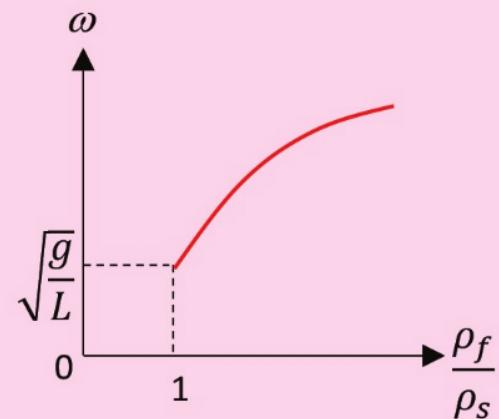
$$-\rho_f Agy = \rho_s AL \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\rho_f g}{\rho_s L} y$$

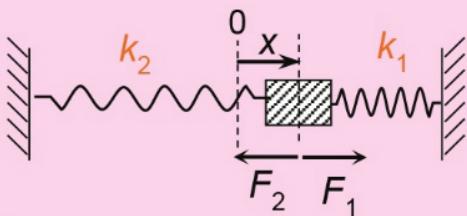
$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_f g}{\rho_s L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_s L}{\rho_f g}}$$

董總
DONG ZONG



$\frac{\rho_f}{\rho_s} < 1$, 物体会浮在液面上, 不可能有振动, 因此曲线的水平值 $\frac{\rho_f}{\rho_s}$ 不能小于 1。



假设振子在平衡位置时，两弹簧都是伸张 e 。

当振子向右移 x 时，恢复力

$$\begin{aligned}\sum F &= m\ddot{x} \\ F_1 - F_2 &= m\ddot{x} \\ m\ddot{x} &= k_1(e - x) - k_2(e + x) \\ m\ddot{x} &= -(k_1 + k_2)x\end{aligned}$$

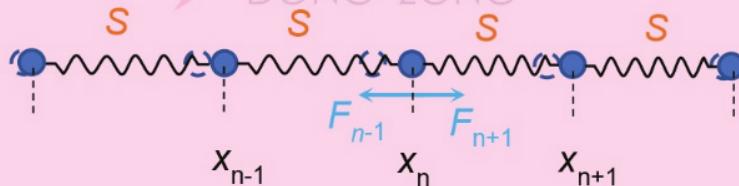
如果两个弹簧是相同的，则

$$m\ddot{x} = -2kx$$

董總
DONG ZONG

上述弹簧组合可扩展到一维晶格的振动，

设： S 为晶格间作用力的力常数



第 n 个晶格所受合力为

$$\begin{aligned}\sum F &= S(x_{n+1} - x_n) - S(x_n - x_{n-1}) \\ m\ddot{x} &= Sx_{n+1} - Sx_n - Sx_n + Sx_{n-1} \\ &= Sx_{n+1} - 2Sx_n + Sx_{n-1}\end{aligned}$$



假设晶格的位置为,

$$x_n = A e^{i(kx_n - \omega t)} \dots \dots \dots (1)$$

晶格处于平衡状态时, 两个晶格间的距离为 a , 则第 n 个晶格的位置为

$$\begin{aligned} x_n &= na \\ x_n &= A e^{i(kna - \omega t)} \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= A(-i\omega) e^{i(kna - \omega t)} \\ \ddot{x}_n &= A(-i\omega)^2 e^{i(kna - \omega t)} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$x_{n-1} = A e^{i[k(n-1)a - \omega t]} \dots \dots \dots (3)$$

$$x_{n+1} = A e^{i[k(n+1)a - \omega t]} \dots \dots \dots (4)$$

将(1)、(2)、(3)、(4)带入之前导出的式子,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= S(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \\ mA(-i\omega)^2 e^{i(kna - \omega t)} &= S(A e^{i[k(n+1)a - \omega t]} - 2A(-i\omega) e^{i(kna - \omega t)} + A e^{i[k(n-1)a - \omega t]}) \\ -mA\omega^2 e^{ikna} e^{-i\omega t} &= SAe^{ik(n+1)a} e^{-i\omega t} - 2SAe^{ikna} e^{-i\omega t} + SAe^{ik(n-1)a} e^{-i\omega t} \\ -m\omega^2 e^{ikna} &= Se^{ik(n+1)a} - 2Se^{ikna} + Se^{ik(n-1)a} \\ -m\omega^2 &= Se^{ika} - 2S + Se^{-ika} \end{aligned}$$

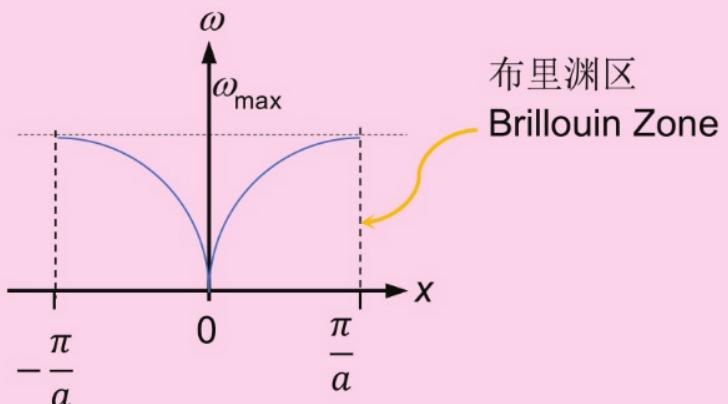
$$-m\omega^2 = S(\cos ka + i \sin ka - 2 + \cos ka - i \sin ka)$$

$$\begin{aligned} m\omega^2 &= 2S(1 - \cos ka) \\ &= 2S(1 + 2 \sin^2 \frac{ka}{2} - 1) \end{aligned}$$

$$m\omega^2 = 4S \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4S}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (\text{色散关系})$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{4S}{m}}$$

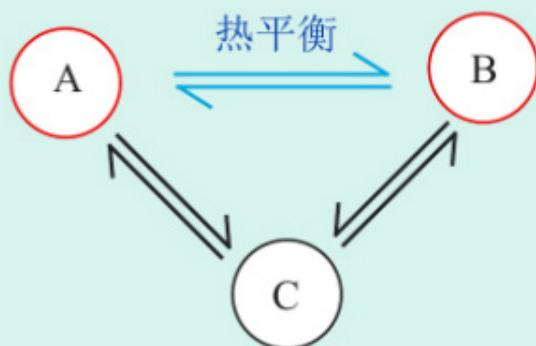




温度

热力学第零定律

如果物体 C 最初与物体 A 和物体 B 处于热平衡状态，则物体 A 和物体 B 也彼此处于热平衡状态。



只有当 2 个系统具有相同的温度时，它们才会处于热平衡

液体温度计

$$\theta = \frac{\ell_\theta - \ell_0}{\ell_{100} - \ell_0} \times 100^\circ\text{C}$$

ℓ_{100} : 标准压下水的沸点时，液柱的长度

ℓ_0 : 标准压下水的冰点时，液柱的长度

气体温度计

$$T = \frac{p}{p_{tr}} \times 273.16\text{K}$$

p_{tr} : 水三相点时的压强

量热学

热容量

$$Q = C(T_2 - T_1)$$

物体同一状态改变温度

C: 由质量及材料决定

比热容量

$$Q = mc(T_2 - T_1)$$

物体同一状态改变温度

c: 由材料决定

$$c_w = 4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ (水)}$$

熔化 / 汽化潜热

$$Q = mL$$

物体同一温度下 (沸点或熔点) 改变物质状态

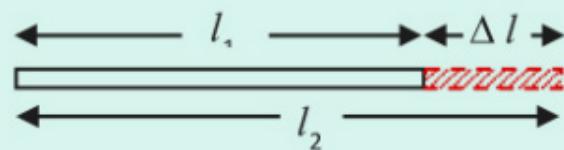
$$\text{冰} \rightarrow \text{水}: L_{fw} = 3.34 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$$

$$\text{水} \rightarrow \text{水蒸气}: L_{vw} = 2.26 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$$



物体的热膨胀

线膨胀系数



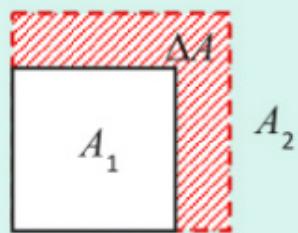
$$\alpha = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1(T_2 - T_1)}$$

$$\ell_2 = \ell_1[1 + \alpha(T_2 - T_1)]$$

$$\begin{aligned}\Delta\ell &= \ell_2 - \ell_1 \\ &= \ell_1\alpha(T_2 - T_1)\end{aligned}$$

线膨胀

面膨胀系数



$$A = l^2$$

$$\beta = \frac{A_2 - A_1}{A_1(T_2 - T_1)}$$

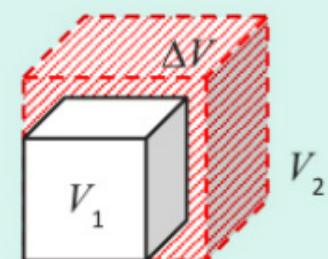
$$A_2 = A_1[1 + \beta(T_2 - T_1)]$$

$$\Delta A = A_2 - A_1$$

$$= A_1\beta(T_2 - T_1)$$

体膨胀

体膨胀系数



$$V = l^3$$

$$\gamma = \frac{V_2 - V_1}{V_1(T_2 - T_1)}$$

$$V_2 = V_1[1 + \gamma(T_2 - T_1)]$$

$$\Delta V = V_2 - V_1$$

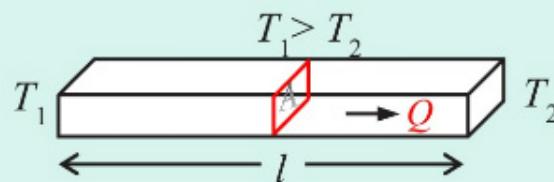
$$= V_1\gamma(T_2 - T_1)$$



热传递



热传导



$$\frac{Q}{t} = kA \frac{T_1 - T_2}{l}$$

k : 热导率 $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$

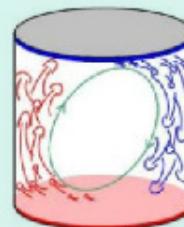
$$k_{\text{银}} = 420 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$k_{\text{砖/绝缘体}} = 0.13 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$k_{\text{空气}} = 0.024 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\frac{T_2 - T_1}{l} : \text{温度梯度 } \text{K m}^{-1}$$

热对流



自然热对流

四分之五指数定律

$$\frac{Q}{t} \propto (T - T_s)^{\frac{5}{4}}$$

T : 物体温度

T_s : 外界温度

强迫热对流

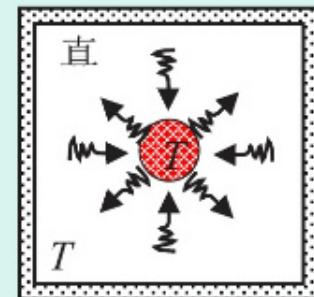
牛顿冷却定律

$$\frac{Q}{t} \propto (T - T_s)$$

T : 物体温度

T_s : 外界温度

热辐射



净热辐射功率

$$\frac{Q}{t} = \varepsilon \sigma A (T^4 - T_s^4)$$

ε : 辐射率, 介于 $0 \sim 1$,

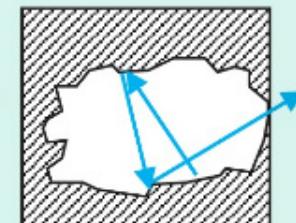
理想黑体 $\varepsilon = 1$

σ : 史蒂芬-玻尔兹曼常数

$$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

A : 物体表面积

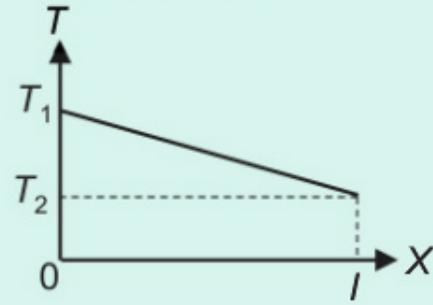
T_s : 外界温度



理想吸热器也是理想的放热器

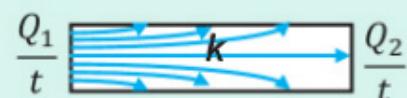


裹上良好绝热外套

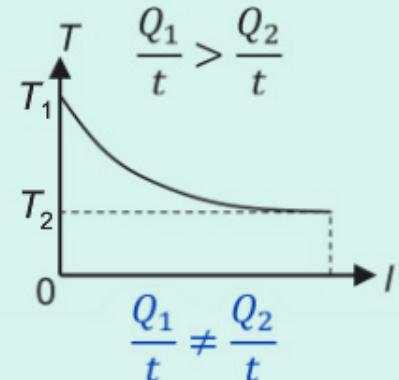


$$\frac{Q}{t} = kA \frac{T_1 - T_2}{l} = \text{常数}$$

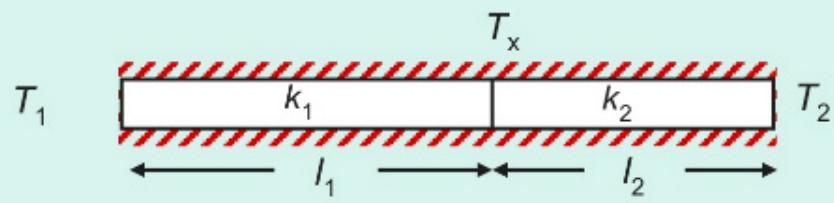
没有裹上良好绝热外套



$$\frac{Q_1}{t} > \frac{Q_2}{t}$$



$$\frac{Q_1}{t} \neq \frac{Q_2}{t}$$

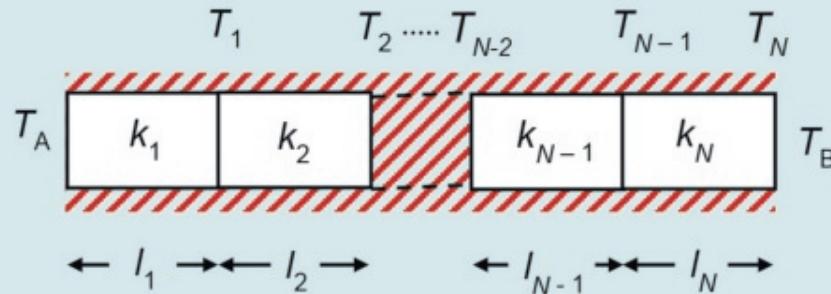


$$\frac{Q_1}{t} = k_1 A \frac{T_1 - T_x}{\ell_1}$$

$$\frac{Q_2}{t} = k_2 A \frac{T_x - T_2}{\ell_2}$$

$$\frac{k_1}{\ell_1} (T_1 - T_x) = \frac{k_2}{\ell_2} (T_x - T_2)$$

$$T_x = \frac{\frac{k_1}{\ell_1} T_1 + \frac{k_2}{\ell_2} T_2}{\frac{k_1}{\ell_1} + \frac{k_2}{\ell_2}}$$



对 k_1 而言, $\frac{Q_1}{t} = k_1 A \frac{T_A - T_1}{\ell_1} \Rightarrow (T_A - T_1) = \frac{Q_1}{tA} \frac{\ell_1}{k_1}$

对 k_2 而言, $\frac{Q_2}{t} = k_2 A \frac{T_1 - T_2}{\ell_2} \Rightarrow (T_1 - T_2) = \frac{Q_2}{tA} \frac{\ell_2}{k_2}$

..

..

对 k_{N-1} 而言, $\frac{Q_{N-1}}{t} = k_{N-1} A \frac{T_{N-2} - T_{N-1}}{\ell_{N-1}} \Rightarrow (T_{N-2} - T_{N-1}) = \frac{Q_{N-1}}{tA} \frac{\ell_{N-1}}{k_{N-1}}$

对 k_N 而言, $\frac{Q_N}{t} = k_N A \frac{T_{N-1} - T_B}{\ell_N} \Rightarrow (T_{N-1} - T_B) = \frac{Q_N}{tA} \frac{\ell_N}{k_N}, T_N = T_B$

由于系统有良好绝热, 因此 $\frac{Q_1}{tA} = \frac{Q_2}{tA} = \frac{Q_3}{tA} = \dots = \frac{Q_N}{tA}$

总和,

$$T_A - T_B = \frac{Q}{tA} \left(\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \dots + \frac{l_N}{k_N} \right)$$

$$T_A - T_B = \frac{Q}{tA} \sum_{i=1}^N \frac{l_i}{k_i}$$

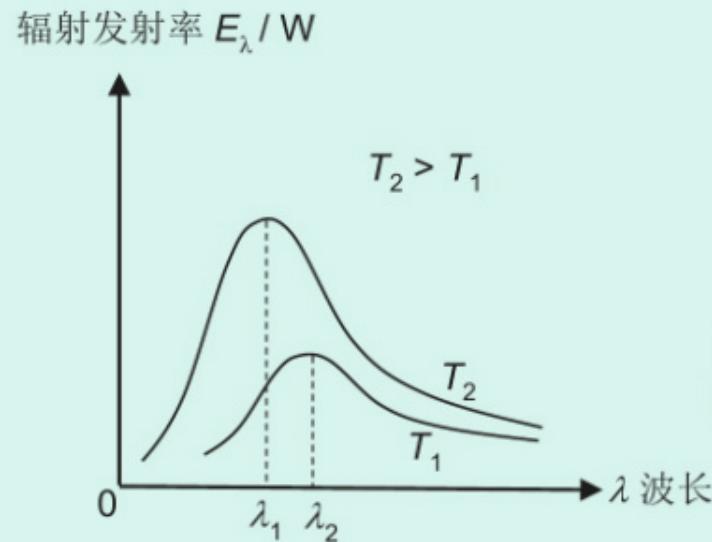
$$\frac{Q}{t} = A \frac{T_A - T_B}{\sum_{i=1}^N \frac{l_i}{k_i}}$$





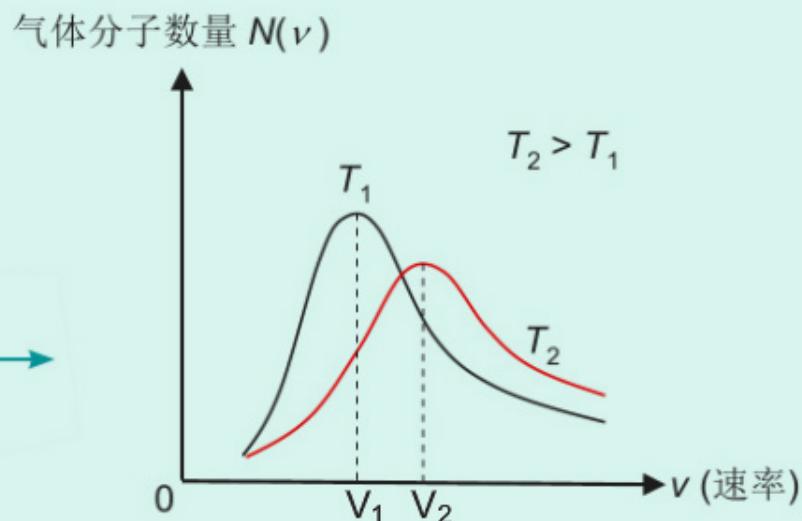
两种不同分布曲线图

史蒂芬-玻尔兹曼定律



$A_2 > A_1$, 曲线下与水平轴所围面积

麦克斯韦-玻尔兹曼分布律



$A_2 = A_1$, 曲线下与水平轴所围面积
总粒子数量是相同的

每一条曲线反映了在一定温度下，黑体的单色辐出度随波长分布的情况。

曲线下的面积等于总辐出度，

$$A = \int_0^\infty M(T) d\lambda = \sigma T^4$$

每一曲线上，有一最大峰值，相应于 T_1 最大的单色辐出度，叫作“峰值波长” λ_1 ，随着温度 T 增高， λ 向短波方向移动，

$$T_1 \lambda_1 = T_2 \lambda_2 = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

v_1 、 v_2 是对应 $N(v)$ 极大值，叫作分子的最概然速率/最大可能速率 (the most probable speed)。

分子在做热运动时，它们之间的相互碰撞是随机的，但大量分子整体运动遵循统计规律，在平衡态下，分子的速度具有确定的分布！

在一定温度下的气体，气体分子的速率分布函数是

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

用归一化条件 $\int_0^\infty f(v) dv = 1$ ，速率曲线下的面积是 1。



气体定律

理想气体定律

$$pV = nRT$$

n : 摩尔数

R : 摩尔气体常量 / 普适
气体常量

$8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

标准状态:

$p_0 = 101325 \text{ Pa}$

$T_0 = 273 \text{ K}$

$V_0 = 22.4 \text{ L mol}^{-1}$

室温状态:

$p_0 = 101325 \text{ Pa}$

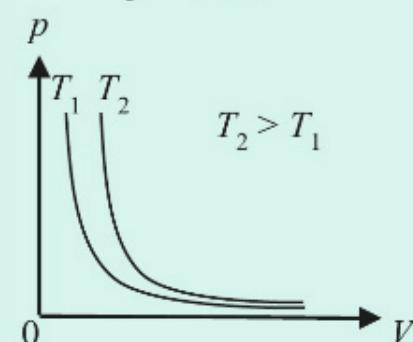
$T_0 = 298 \text{ K}$

$V_0 = 24.0 \text{ L mol}^{-1}$

波义耳定律

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (n, T \text{ 不变})$$

$p - V$ 图



查理定律

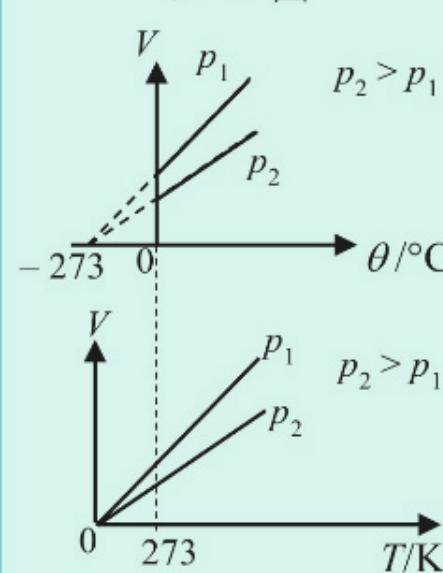
$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (n, p \text{ 不变})$$

$$\frac{V_1}{273 + \theta_1} = \frac{V_2}{273 + \theta_2}$$

$$V_2 = V_0 \left(1 + \frac{1}{273} \theta\right)$$

V_0 : 0°C 时的体积

$V - T$ 图



$V - T$ 图

压强定律

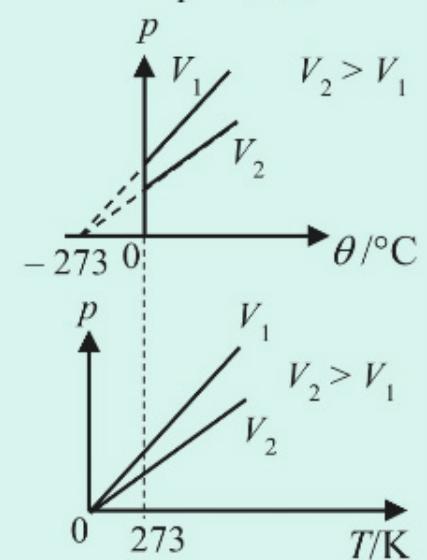
$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (n, V \text{ 不变})$$

$$\frac{p_1}{273 + \theta_1} = \frac{p_2}{273 + \theta_2}$$

$$p_2 = p_0 \left(1 + \frac{1}{273} \theta\right)$$

p_0 : 0°C 时的压强

$p - T$ 图





理想气体分子运动论曲线图

理想气体分子运动论

$$p = \frac{1}{3} \rho \bar{v^2}$$

$$p = \frac{1}{3} \frac{M}{V} \rho \bar{v^2}$$

$$\frac{3}{2} \times pV = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} M \bar{v^2}$$

$$\frac{3}{2} pV = \frac{1}{2} M \bar{v^2} = K_{tr}$$

$$pV = \frac{3}{2} K_{tr}$$

$$nRT = \frac{2}{3} K_{tr} \Rightarrow K_{tr} = \frac{3}{2} nRT$$

$$K_{tr} = \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} RT$$

$$\frac{K_{tr}}{N} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

$$\frac{1}{2} m \bar{v^2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

$$\frac{1}{2} m \bar{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$E_{k,tr} = \frac{3}{2} kT$$

波尔兹曼常数, $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

方均根速率:

$$v_{rms} = \sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

m : 单个气体分子质量

M : 气体相对分子质量

ρ : 气体的密度

宏观 微观

$$p = \frac{1}{3} \rho \bar{v^2}$$

$$T = \frac{2 E_{k,tr}}{3 k}$$

	$E_{k,tr}$
单个单原气体	$\frac{3}{2} kT$
N 个单原气体	$N \times \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} N kT$
n 摩尔气体	$\frac{3}{2} nRT$

气体分子的内能

$$U = E_k + E_p = E_k$$

理想气体分子间的势能(E_p)为 0.

	$E_{k,tr}$	$E_{k,rot}$	E_k
单原子气体	$\frac{3}{2} kT$	-	$\frac{3}{2} kT$
双原子气体 (包括 CO_2)	$\frac{3}{2} kT$	$2 \times \frac{1}{2} kT$	$\frac{5}{2} kT$
多原子气体 ($\text{NH}_3, \text{H}_2\text{O}, \dots$)	$\frac{3}{2} kT$	$3 \times \frac{1}{2} kT$	$\frac{6}{2} kT$

$E_{k,tr}$: 平移动能

$E_{k,rot}$: 转动动能



热力学第一定律

$$Q = \Delta U + W$$

Q: 所吸收/释放热量

ΔU : 气体内能变化量

W: 气体所做功

气体所吸收/释放热量

$Q > 0$, 气体吸收热能

$Q < 0$, 气体释放热能

等容变化: $Q = nc_V \Delta T$

等压变化: $Q = nc_p \Delta T$

等温变化: $Q = W$ ($\Delta U = 0$)

绝热变化: $Q = 0$

气体内能变化量

$$\Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

$$\Delta T = T_f - T_i$$

自由度 $f = 3, 5, 6$

$$\text{等容变化: } \Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

$$\text{等压变化: } \Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

等温变化: $\Delta U = 0$

$$\text{绝热变化: } \Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

注: $\Delta T > 0, \Delta U > 0$ 气体内能增加
 $\Delta T < 0, \Delta U < 0$ 气体内能减少

气体所做功

$$W = p\Delta V \text{ (可逆性变化)}$$

等容变化: $W = 0$

等压变化: $W = p\Delta V = nR\Delta T$

$$\text{等温变化: } W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

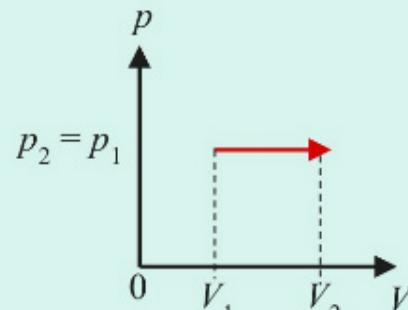
$$\text{绝热变化: } W = -\Delta U = -\frac{f}{2} nR\Delta T$$

注: $\Delta V > 0, W > 0$, 气体做功
 $\Delta V < 0, W < 0$, 外界对气体做功



理想气体热力学

等压变化



遵守查理定律

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

$$W = p\Delta V = nR\Delta T$$

$$Q = \Delta U + W$$

$$= \frac{f}{2} nR\Delta T + nR\Delta T$$

$$= \frac{f+2}{2} nR\Delta T$$

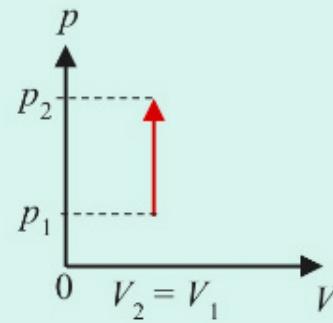
$$nc_p\Delta T = \frac{f+2}{2} nR\Delta T$$

等压摩尔比热,

$$c_p = \frac{f+2}{2} R$$

$$c_p = \frac{5}{2} R, \frac{7}{2} R, \frac{8}{2} R$$

等容变化



遵守压强定律

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$\Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

$$W = p\Delta V = 0$$

$$Q = \Delta U + W$$

$$= \frac{f}{2} nR\Delta T + 0$$

$$= \frac{f}{2} nR\Delta T$$

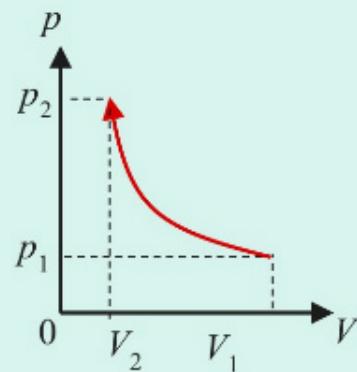
$$nc_V\Delta T = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

等容摩尔比热,

$$c_V = \frac{f}{2} R$$

$$c_V = \frac{3}{2} R, \frac{5}{2} R, \frac{6}{2} R$$

等温变化



遵守波义尔定律

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$\Delta U = 0$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV$$

$$= nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

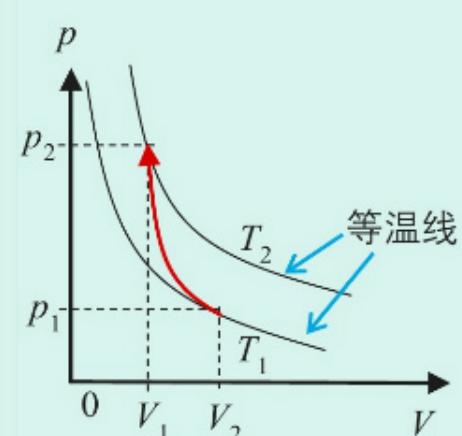
$$= nRT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$Q = \Delta U + W = W$$

$$= 0 + nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$= nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

绝热变化



$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f}$$

$$= \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{8}{6}$$

$$Q = 0$$

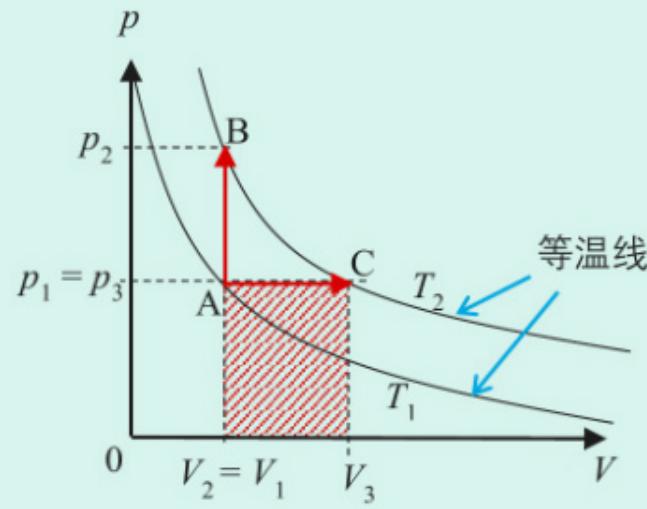
$$\Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

$$Q = \Delta U + W$$

$$0 = \frac{f}{2} nR\Delta T + W$$

$$W = -\Delta U$$

$$= -\frac{f}{2} nR\Delta T$$



$A \rightarrow B$ 等容变化: $W = 0, Q = \Delta U_1$

$A \rightarrow C$ 等压变化: $W = p(V_3 - V_1), Q = \Delta U_2 + W$

由于它是理想气体，两者温度变化一样，则

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = \Delta U$$

$$c_p = \frac{f+2}{2}R$$

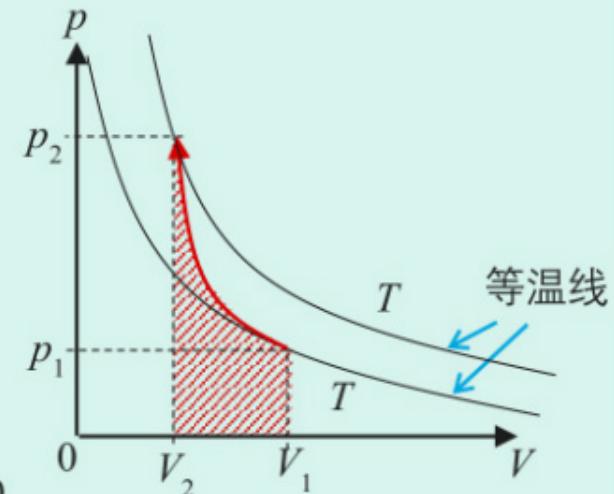
$$c_V = \frac{f}{2}R$$

$$c_p - c_V = R$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

$$\frac{c_p}{c_V} - \frac{c_V}{c_V} = \frac{R}{c_V}$$

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$



绝热变化, $Q = 0$

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

$$V_1^{\gamma-1} T_1 = V_2^{\gamma-1} T_2$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{8}{6}$$

$$\Delta U = -W$$

$$\frac{f}{2} n R \Delta T = -W$$

$$W = -\frac{f}{2} n R \Delta T$$

$$= -n c_V (T_2 - T_1)$$

$$= n c_V (T_1 - T_2)$$

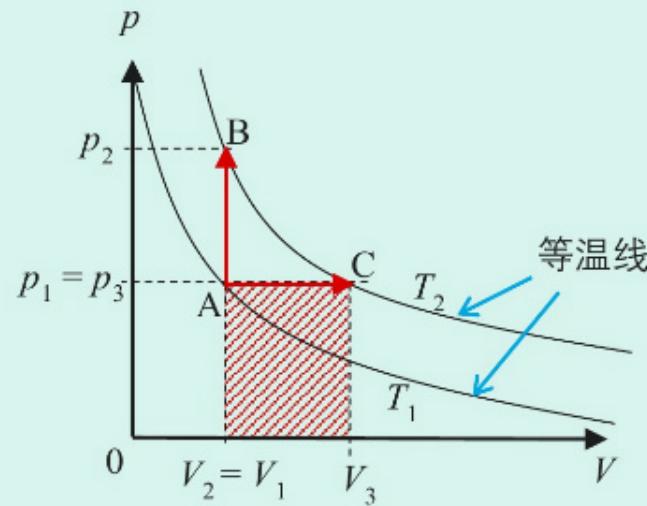
$$= c_V \left(\frac{p_1 V_1}{R} - \frac{p_2 V_2}{R} \right)$$

$$= \frac{c_V}{R} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

不加热的“升温”、不放热“降温”，

不加热的“升温”即是绝热下，靠外界对系统做功来升高温度；不放热“降温”即是绝热下，靠系统对外界做功来降低温度。



$A \rightarrow B$ 等容变化:

$$\Delta V = 0 \Rightarrow W = 0,$$

$$Q = \Delta U + W$$

$$nc_V \Delta T = \Delta U$$

$A \rightarrow C$ 等压变化: $W = p \Delta V = nR \Delta T$,

$$Q = \Delta U + W$$

$$nc_p \Delta T = nc_V \Delta T + nR \Delta T$$

$$c_p = c_v + R$$

上式为 Mayer's formula 迈耶方程，它仅适用于理想气体。

又从等容变化可得，

$$\Delta U = nc_V \Delta T$$

又

$$c_p = \frac{f+2}{2} R$$

$$c_V = \frac{f}{2} R$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f}$$

$$= 1 + \frac{2}{f}$$

f : 气体分子运动自由度

在 $T = 273\text{ K}$ 时，

单原子气体: $f = 3 + 0 = 3 \Rightarrow c_V = \frac{3}{2} R, \gamma = \frac{5}{3}$

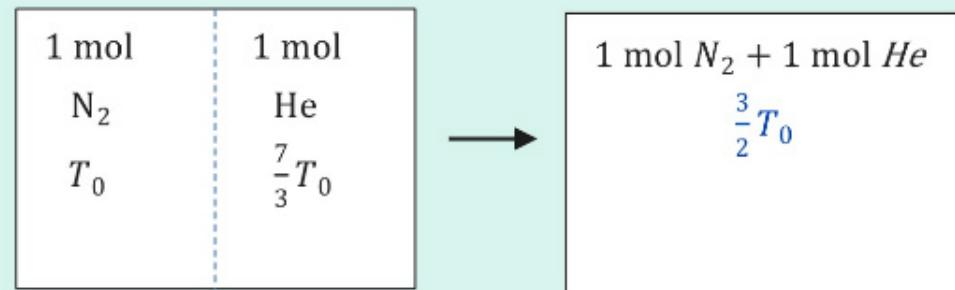
双原子气体: $f = 3 + 2 = 5 \Rightarrow c_V = \frac{5}{2} R, \gamma = \frac{7}{5}$

多原子气体: $f = 3 + 3 = 6 \Rightarrow c_V = \frac{6}{2} R, \gamma = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

注: CO_2 属于线性结构，所以它的自由度 $f = 5$.



1 mol 初始温度为 T_0 的 N_2 与 1 mol 初始温度 $\frac{7}{3}T_0$ 的 He 均匀混合，混合气体的最终温度为多少？



$$U = nc_v T$$

$$\text{对于属于双原子气体的 } N_2: 1 \left(\frac{5}{2}R\right) T_0 = \frac{5}{2}RT_0$$

$$\text{对于属于单原子气体的 } He: 1 \left(\frac{3}{2}R\right) \left(\frac{7}{3}T_0\right) = \frac{7}{2}RT_0$$

所以两种气体混合后的总内能为

$$\begin{aligned} U_{T_0} &= \frac{5}{2}RT_0 + \frac{7}{2}RT_0 \\ &= 6RT_0 \end{aligned}$$

两种气体混合后的总动能等效，

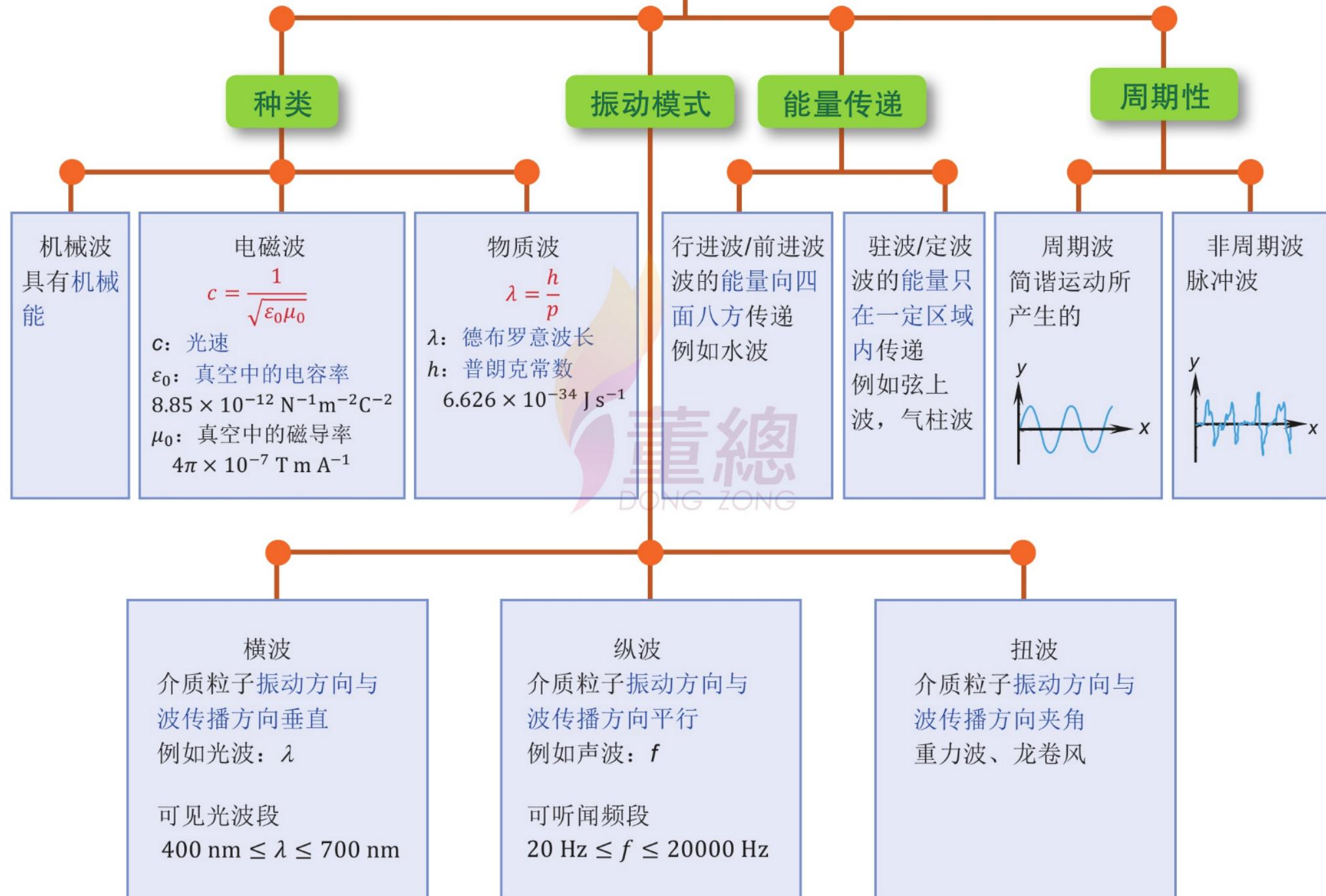
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}RT + \frac{5}{2}RT &= 6RT_0 \\ 4T &= 6T_0 \\ T &= \frac{3}{2}T_0 \end{aligned}$$





波动学

分类



重總
DONG ZONG



行进波方程式

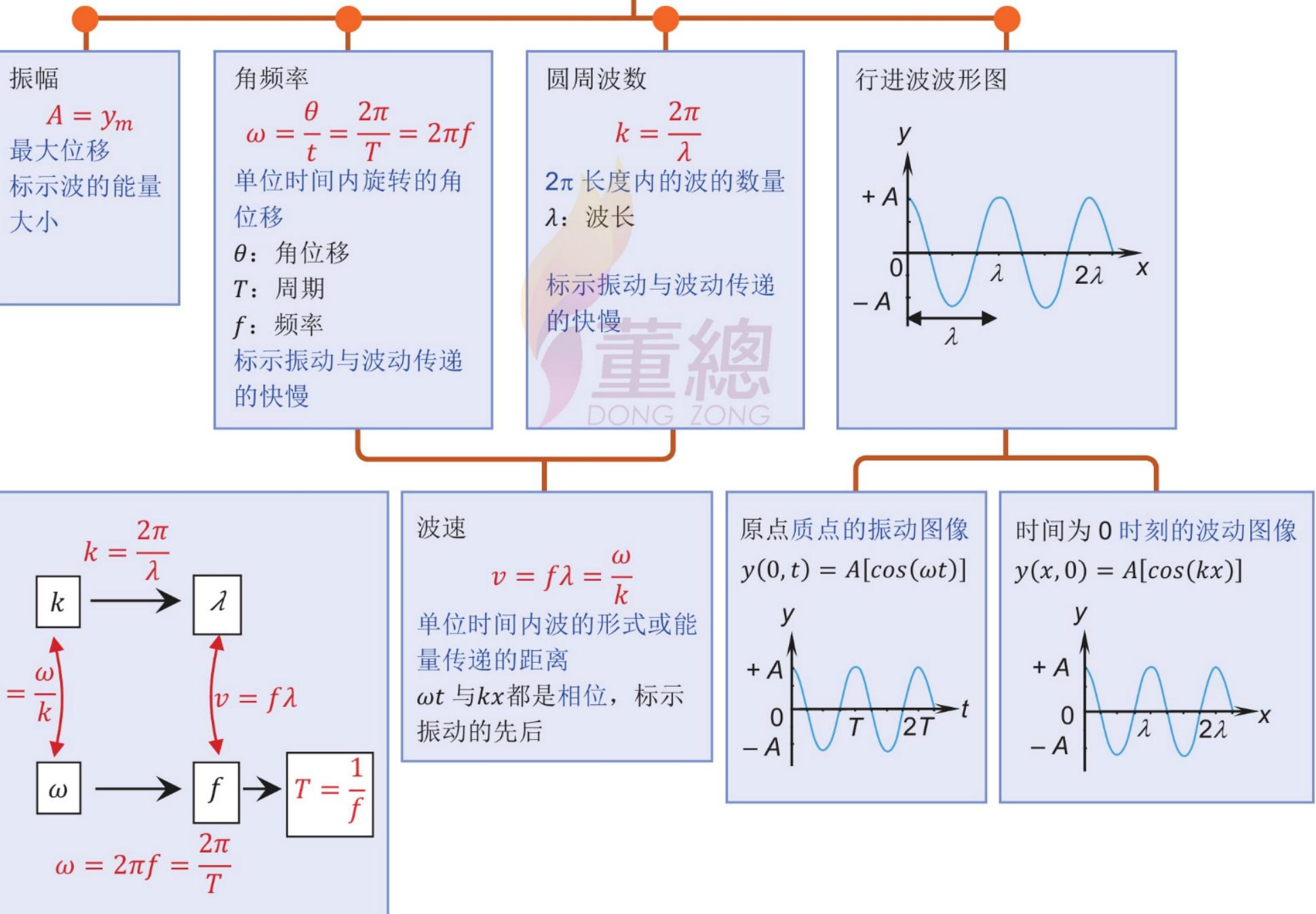
$$y(x, t) = A[\cos(\omega t - kx)] = A\cos[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)]$$

y : 位移 A : 振幅 ω : 角频率 T : 周期

t : 时间 k : 圆周波数 λ : 波长

x : 相对于原点的位置

$\cos(\omega t - kx)$ 、 $\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$: 振动项





【例】

一个简谐波的位移可表示为

$$y = 0.025 \cos 2\pi \left(\frac{t}{0.020} + \frac{x}{4.0} \right)$$

其中 y 及 x 以 m 为单位, t 以 s 为单位。

求, 波动的

- (a) 振幅、
- (b) 频率、周期、角频率
- (c) 圆周波数、波长
- (d) 波的传递速度
- (e) 波的传递方向。

(a) 波动的振幅

$$A = y_m = 0.025 \text{ m}$$

(b) 波动的频率、周期、角频率

$$2\pi f = \frac{2\pi}{0.020}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.020}$$

$$T = 0.02 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{0.020} = 100\pi \text{ rad s}^{-1}$$

(c) 圆周波数、波长

$$k = \frac{2\pi}{4.0} = \frac{\pi}{2} \text{ rad m}^{-1}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4.0}$$

$$\lambda = 4.0 \text{ m}$$

(d) 波的传递速度

$$v = f\lambda = 50 \times 4 = 200 \text{ m s}^{-1}$$

或

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{0.020}}{\frac{2\pi}{4.0}} = 200 \text{ m s}^{-1}$$

(e) 从括号内的相位是相加的, 表示在原点右侧介质粒子的振动领先原点粒子的振动, 所以该简谐波是由右向左传递的。

或

求取介质粒子振动的速度,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0.025 \left[-\sin 2\pi \left(\frac{t}{0.020} + \frac{x}{4.0} \right) \right] \frac{d}{dt} \left[2\pi \left(\frac{t}{0.020} + \frac{x}{4.0} \right) \right] \\ &= -0.025 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0.020} + \frac{x}{4.0} \right) \left(\frac{2\pi}{0.020} + \frac{2\pi}{4.0} \frac{dx}{dt} \right) \end{aligned}$$

为了方便考虑波在水平方向上的传递, 假设竖直方向上的振动速度为 0,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \left(\frac{2\pi}{0.020} + \frac{2\pi}{4.0} \frac{dx}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{4.0}{0.02} \\ &= -200 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

波在水平方向上的传递速度为 200 m s^{-1} 向左。



驻波方程式

$$y(x, t) = 2A \cos \omega t \cos kx$$

y : 位移

A : 振幅

ω : 角频率

t : 时间

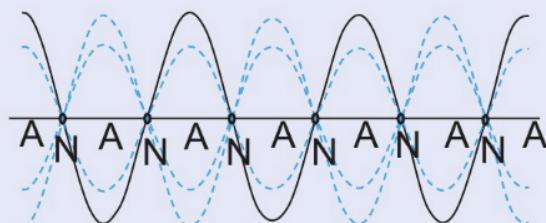
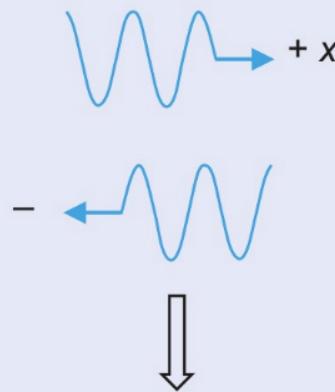
k : 圆周波数

x : 相对于原点的位置



形成条件

两个相同的波向相反方向传递叠加而成



N: 波节, 振幅为 0 的位置

A: 波复, 最大振幅位置

叠加原理

$$y_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$= A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx)$$

$$= 2A \cos \frac{(\omega t - kx) + (\omega t + kx)}{2} \cos \frac{(\omega t - kx) - (\omega t + kx)}{2}$$

$$= 2A \cos \omega t \cos(-kx)$$

$$= [2A \cos kx] \cos \omega t$$

$$2A \cos kx = \pm 2A$$

$$\cos kx = \pm 1$$

$$kx = n\pi, n = 0, 1, 2, 3, \dots \dots$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi$$

$$x = n \frac{\lambda}{2}$$

波节位置,

$$2A \cos kx = 0$$

$$\cos kx = 0$$

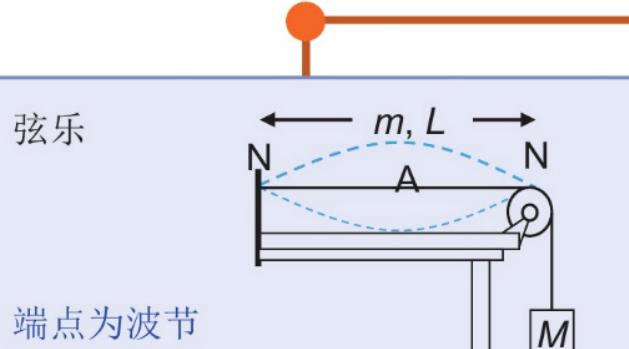
$$kx = (n + 1) \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, 3, \dots \dots$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = (n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$x = (n + 1) \frac{\lambda}{4}$$



乐音



端点为波节

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\frac{m}{L}}} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{m}{L}}}$$

T : 线上张力

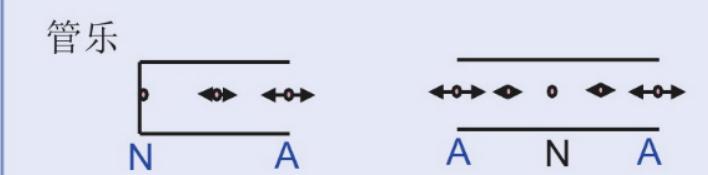
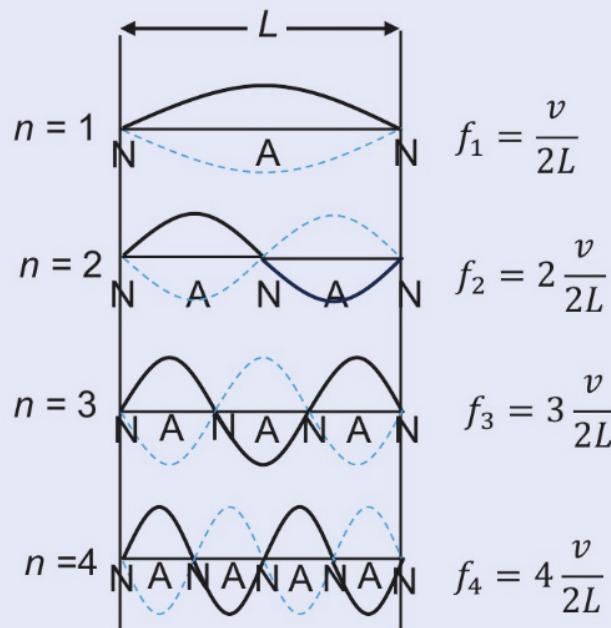
μ : 弦的线性密度(1维密度)

$$L = n \frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = n \frac{v}{2L}$$

可以有任何倍数的谐音



开口端是波复，闭口端一定是波节
声速为声音在空气中传递的速度 v

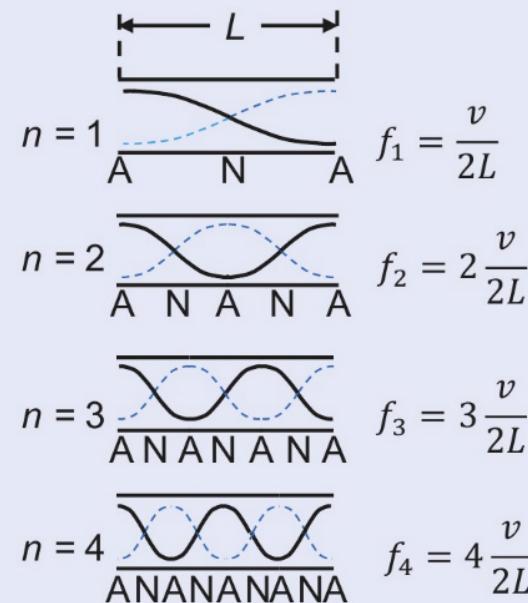
开管，

$$L = n \frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = n \frac{v}{2L}$$

可以有任何倍数的谐音



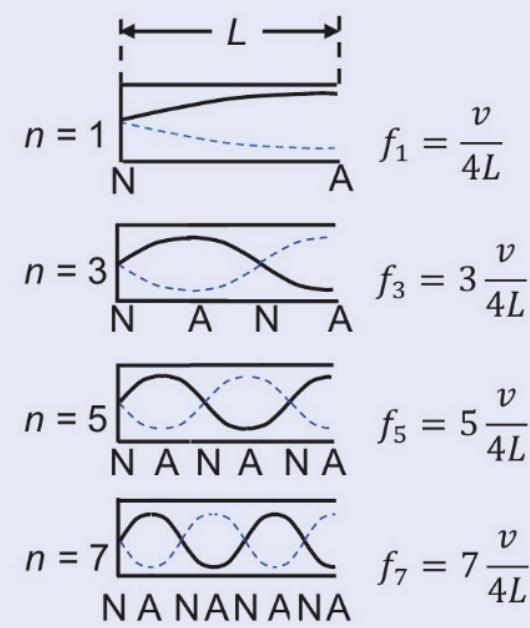
闭管，

$$L = n \frac{\lambda}{4}, n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\lambda = \frac{4L}{n}$$

$$f_n = n \frac{v}{4L}$$

可以有任何奇数倍的谐音





乐音

管乐



作为声源的音叉操作时必定稍为离开管乐器的开口，所以计算时必须考虑到管乐器的末端修正(end-correction, e)。

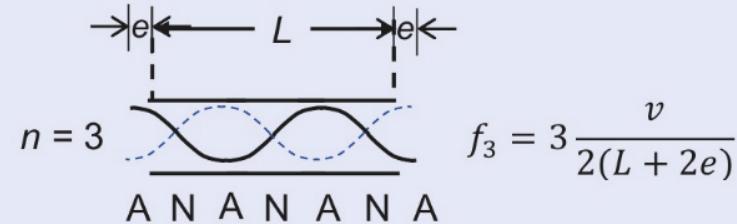
末端修正必定大于 0，约为管口直径的 0.3 倍，同时也受温度影响。

开管，

$$L + 2e = n \frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, \dots \dots$$

$$\lambda = \frac{2(L + 2e)}{n}$$

$$f_n = n \frac{v}{2(L + 2e)}$$



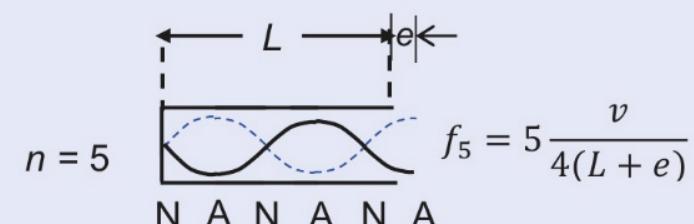
董總
DONG ZONG

闭管，

$$L + e = n \frac{\lambda}{4}, n = 1, 3, 5, \dots \dots$$

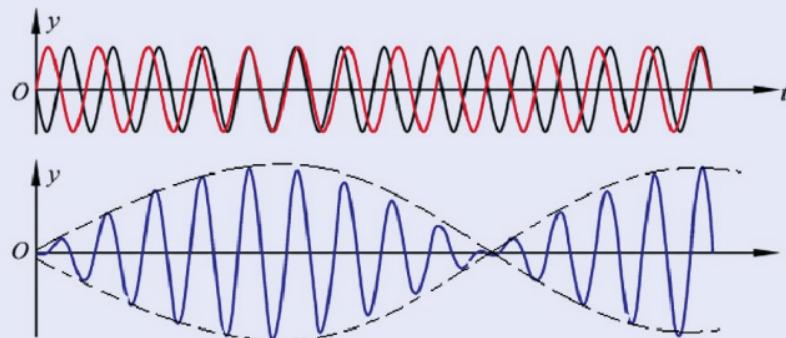
$$\lambda = \frac{4(L + e)}{n}$$

$$f_n = n \frac{v}{4(L + e)}$$





拍



两个频率稍有差异的简谐振动叠加造成时而加强时而减弱的现象

$$y_1 = A \cos 2\pi f_1 t$$

$$y_2 = A \cos 2\pi f_2 t$$

$$y = y_1 + y_2 = A[\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t]$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\therefore y = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1+f_2}{2}\right) t \cos 2\pi \left(\frac{f_1-f_2}{2}\right) t$$

$$\therefore y = \left[2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1+f_2}{2}\right) t \right] \cos 2\pi \left(\frac{f_1-f_2}{2}\right) t$$

由于两个振动频率相差不大，叠加后的振动频率就是 $\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)$ ，而驻波的最大振幅包含在 0 与 $2A$ 之间，此拍的频率 $f_b = 2 \left| \frac{f_1-f_2}{2} \right| = |f_1 - f_2|$ 。

【例】

两个振动的方程式为: $y_1 = 6\sin 800\pi t \mu\text{m}$, $y_2 = 5\sin 804\pi t \mu\text{m}$ 。

求它们两个同时振动所产生的拍频及合振动频率。

$$2\pi f_1 = 800\pi, 2\pi f_2 = 804\pi$$

$$f_b = |f_1 - f_2| = \left| \frac{800}{2} - \frac{804}{2} \right| = 2 \text{ Hz}$$

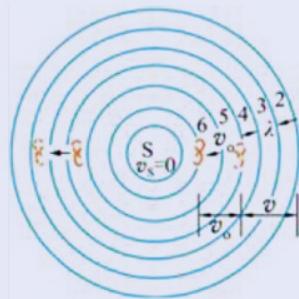
$$f_R = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{400 + 402}{2} = 401 \text{ Hz}$$



多普勒效应

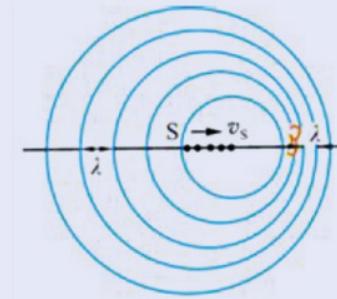
因为观察者与波源之间相对运动
造成观测到的频率变化的现象

观察者运动造成观测到的波速变化



观察者靠近波源，观测到的波速 $v_{\text{观}} = v + v_0$
观察者远离波源，观测到的波速 $v_{\text{观}} = v - v_0$

波源运动造成观测到的波长变化



波源靠近观察者，观测到的波长变短
波源远离观察者，观测到的波长变长

多普勒效应计算

$$f_o = \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \right) f_s$$

靠近 远离

f_o : 观测到的频率

f_s : 波源的频率

v : 波在介质中的速率

v_o : 观察者运动速率

v_s : 波源运动速率

两者相对靠近， $f_o > f_s$ ；

两者相对远离， $f_o < f_s$ 。



波源静止不动, $v_s = 0$,

$$f_o = \frac{v + v_o}{v} f_s$$



$$f_o = \frac{v - v_o}{v} f_s$$

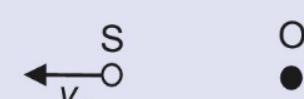


观察者静止不动, $v_o = 0$,

$$f_o = \frac{v}{v - v_s} f_s$$

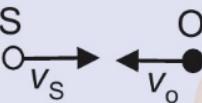


$$f_o = \frac{v}{v + v_s} f_s$$



两者反向,

$$f_o = \frac{v + v_o}{v - v_s} f_s$$



$$f_o = \frac{v - v_o}{v + v_s} f_s$$



两者同向,

$$f_o = \frac{v - v_o}{v - v_s} f_s$$



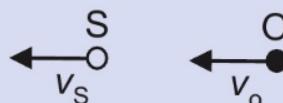
$$f_o = \frac{v + v_o}{v + v_s} f_s$$



【例】

一警笛发出频率为 1500 Hz 的声波，并且警笛以 22 m s^{-1} 的速度向某方向运动。某人以 6 m s^{-1} 的速度向跟随其后，求他听到的警笛的频率。（假设没有风吹，且声速为 330 m s^{-1} ）

$$\begin{aligned} f_o &= \frac{v + v_o}{v + v_s} f_s \\ &= \frac{330 + 6}{330 + 22} \times 1500 \\ &= 1432 \text{ Hz} \end{aligned}$$





光的干涉

相干波源

两波：相位差保持不变

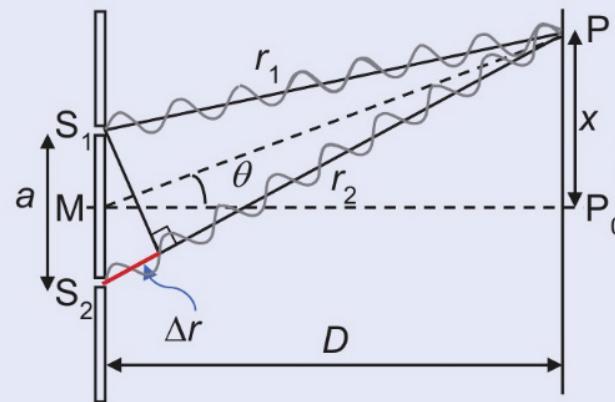
频率、振幅都相同（波阵面分割法、振幅分割法）

建设性/增强性干涉

两波叠加后，振动加强，形成亮条纹。

同相位相干波源下，路径长度差

$$\Delta r = m\lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$



$$x_m = m \frac{D}{a} \lambda$$

x_m : 亮纹到中央亮纹之间的距离

m : 级数 D : 双缝与光屏的距离

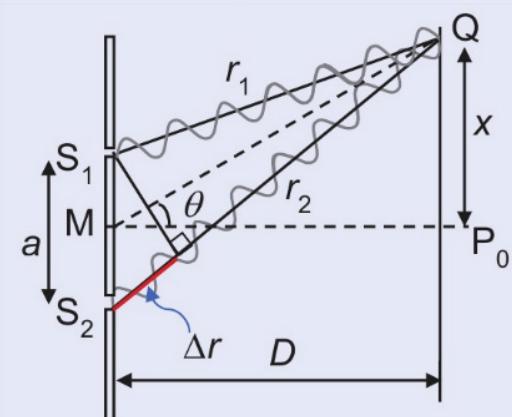
λ : 波长 a : 双缝之间的距离

破坏性/减弱性干涉

两波叠加后，振动抵消，形成暗条纹。

同相位相干波源下，路径长度差

$$\Delta r = (m + \frac{1}{2})\lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$



$$x_m = (m + \frac{1}{2}) \frac{D}{a} \lambda$$

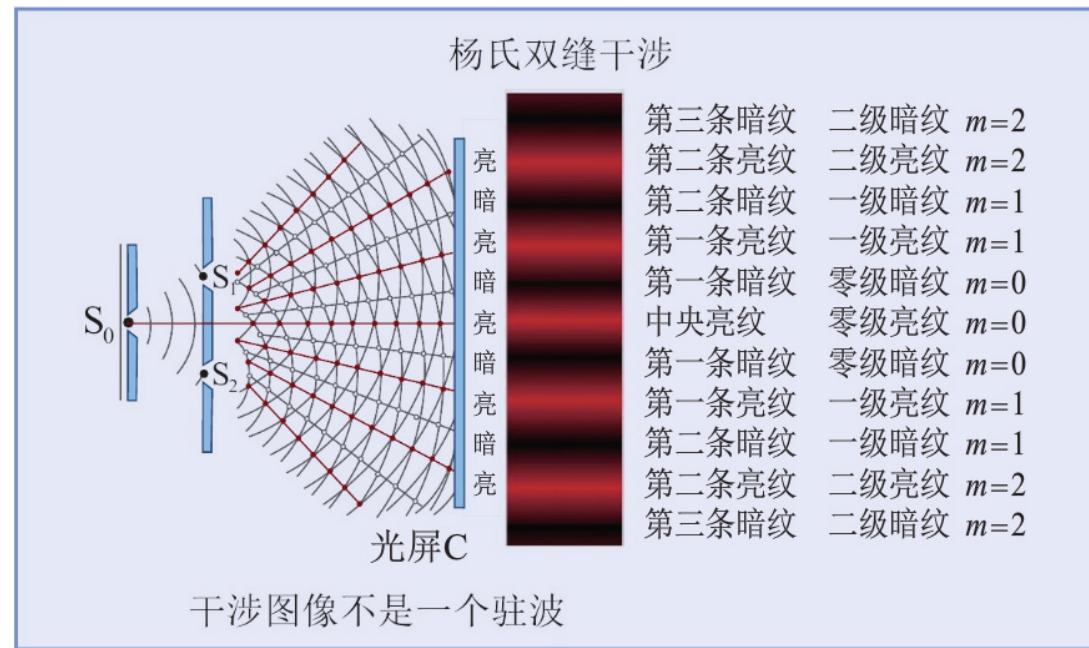
x_m : 暗纹到中央亮纹之间的距离

m : 级数 D : 双缝与光屏的距离

λ : 波长 a : 双缝之间的距离

相邻亮纹间距或相邻暗纹间距

$$x = \frac{D}{a} \lambda$$



杨氏双缝干涉
在空气或真空中进行
相邻亮纹间距或相邻暗纹间距

$$x = \frac{D}{a} \lambda$$

如果在双缝与光屏间填折射率为 n 的介质，

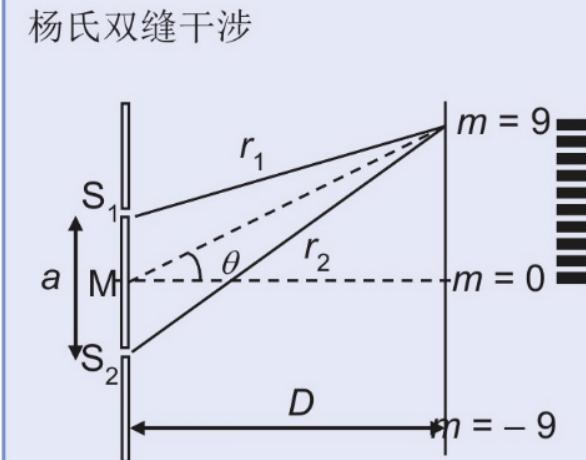
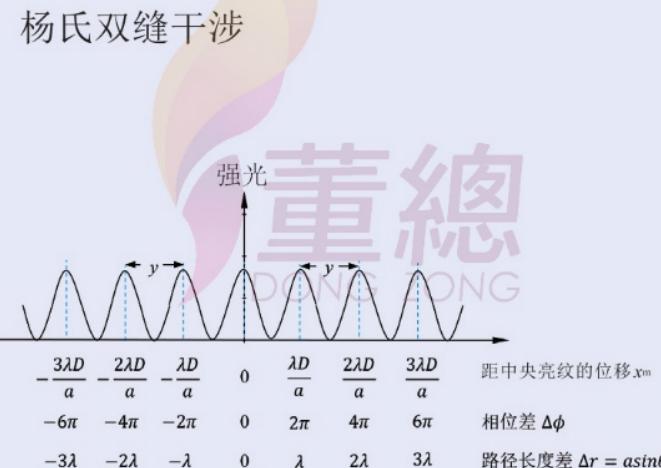
$$\text{亮纹 } \Delta(nr) = m\lambda$$

$$\text{暗纹 } \Delta(nr) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

相邻亮纹间距或相邻暗纹间距

$$x = \frac{D \lambda}{a n}$$



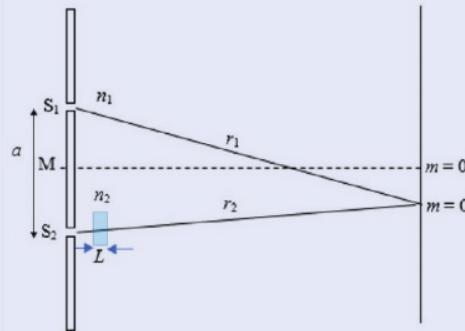
如果 10 个亮纹之间的距离是 x , 则相邻纹距

$$\Delta x = \frac{x}{9}$$



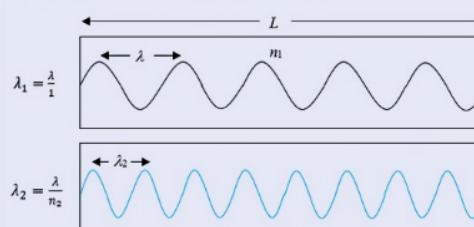
杨氏双缝干涉

杨氏双缝干涉



原本双缝与光屏间没有介质，双缝到光屏的路径长度差 $\Delta r = r_1 - r_2 = 0$ 。

现用一片折射率为 n_2 的透明板遮盖着其中一个缝。光在空气中传递的情形没有差异，只有在同样透明介质中传递有所不一样。



在介质 1(空气)中的波长数量

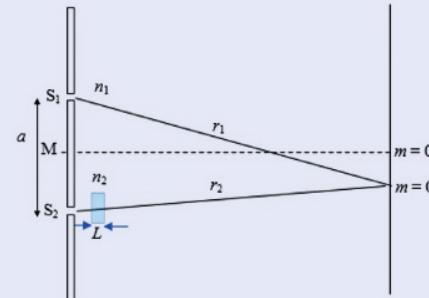
$$N_1 = \frac{L}{\lambda_1/n_1} = \frac{L}{\lambda} n_1$$

在介质 2 中的波长数量

$$N_2 = \frac{L}{\lambda_2} = \frac{L}{\lambda} n_2$$

$$N_2 - N_1 = \frac{L}{\lambda} (n_2 - n_1)$$

等效相位差 $\Delta\phi = 2\pi(N_2 - N_1)$



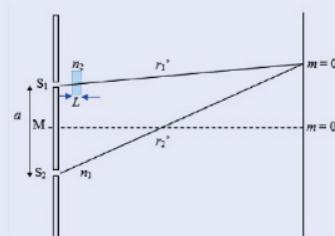
原本双缝与光屏间是空气，中央亮纹的光程差等于路径长度差 $\Delta r = r_1 - r_2 = 0$ 。现用一片折射率为 n_2 的透明板遮盖着 S_2 缝，光程差有所不一样，

$$r'_1 = n_1 r_1$$

$$\begin{aligned} r'_2 &= (r_2 - L)n_1 + n_2 L \\ &= n_1 r_2 + (n_2 - n_1)L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta r' &= r'_1 - r'_2 \\ &= n_1 r_1 - n_1 r_2 - (n_2 - n_1)L \\ &= -(n_2 - n_1)L \end{aligned}$$

因此中央亮纹往下移，整个图像也跟着往下移。



同理透明板遮盖着 S_1 缝，光程差，

$$r'_1 = (r_1 - L)n_1 + n_2 L$$

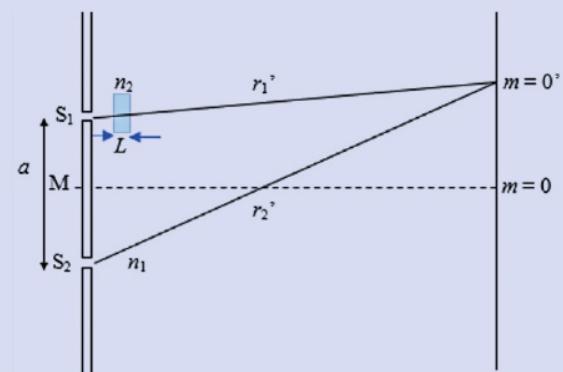
$$= n_1 r_1 + (n_2 - n_1)L$$

$$r'_2 = n_1 r_2$$

$$\begin{aligned} \Delta r' &= r'_1 - r'_2 \\ &= r_1 n_1 + (n_2 - n_1)L - n_1 r_2 \\ &= (n_2 - n_1)L \end{aligned}$$

因此中央亮纹往上移，整个图像也跟着往上移。

【例】



在杨氏双缝干涉实验中，利用波长为 500 nm 单色光的入射时，可以在光屏上呈现清晰的干涉图纹。如果用一片折射率为 1.5 的透明板将 S_1 缝遮盖起来，则中央亮纹的位置会移到第 9 条亮纹处，求透明板的厚度。

$$\Delta r' = r'_1 - r'_2$$

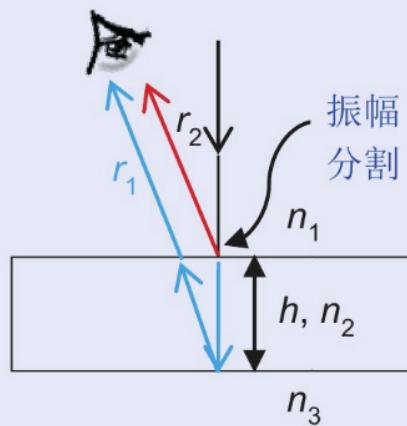
$$9\lambda = [r_1 n_1 + (n_2 - n_1)L] - n_1 r_2$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{9\lambda}{(n_2 - n_1)} \\ &= \frac{9 \times 500}{(1.50 - 1)} \\ &= 9000 \text{ nm} \end{aligned}$$



薄膜干涉

薄膜干涉



光发生“硬”反射，波传递快的介质($n_{\text{小}}$)到慢的介质($n_{\text{大}}$)，会有 π 相位的相位移或半波迁移，如薄膜上层表面的反射；
光发生“软”反射，波传递慢的介质($n_{\text{大}}$)到快的介质($n_{\text{小}}$)，就没有相位移或半波迁移，如薄膜下层表面的反射。

两个反射光的路径长度差

$$r_1 = 2h + x_a$$

$$r_2 = x_a$$

$$\Delta r = r_1 - r_2 = 2h$$

光程差发生所在介质的折射率 n_2 ,

$$\Delta n_2 r = r_1 - r_2 = 2h$$

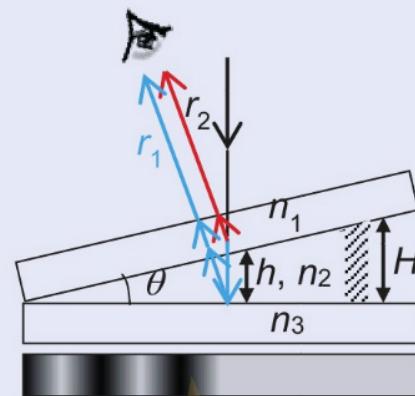
明纹条件,

$$\Delta n_2 r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$

暗纹条件,

$$\Delta n_2 r = m\lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$

薄膜干涉



光发生“硬”反射，空气层下表面的反射波，会有 π 相位的相位移或半波迁移；

光发生“软”反射，空气层上表面的反射波，就没有相位移或半波迁移。两个反射光的路径长度差

$$r_1 = 2h + x_g + x_a$$

$$r_2 = x_g + x_a$$

$$\Delta r = r_1 - r_2 = 2h$$

光程差发生所在介质的折射率 n_2 ,

$$\Delta n_2 r = r_1 - r_2 = 2h$$

明纹条件,

$$\Delta n_2 r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$

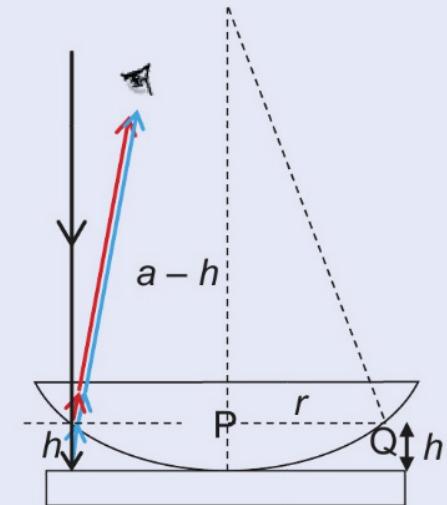
暗纹条件,

$$\Delta n_2 r = m\lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$

此处，空气层的厚度变化是有规律的



薄膜干涉



明纹条件,

$$2h = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$

暗纹条件,

$$2h = m\lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$

此处，空气层的厚度是曲线变化的

$$a^2 - (a - h)^2 = r^2$$

$$a^2 - (a^2 - 2ah + h^2) = r^2$$

$$(2a - h)h = r^2$$

$$\therefore 2a \geq h \quad h \approx \frac{r^2}{2a}$$

暗环半径, $r = \sqrt{2ah} = \sqrt{ma\lambda}$

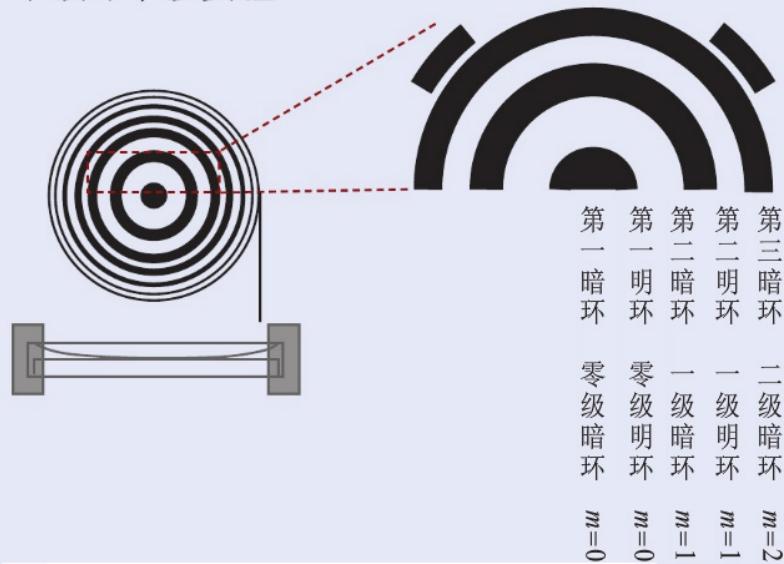
亮环半径,

$$r = \sqrt{2ah} = \sqrt{(m + \frac{1}{2})a\lambda}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$



牛顿环干涉实验

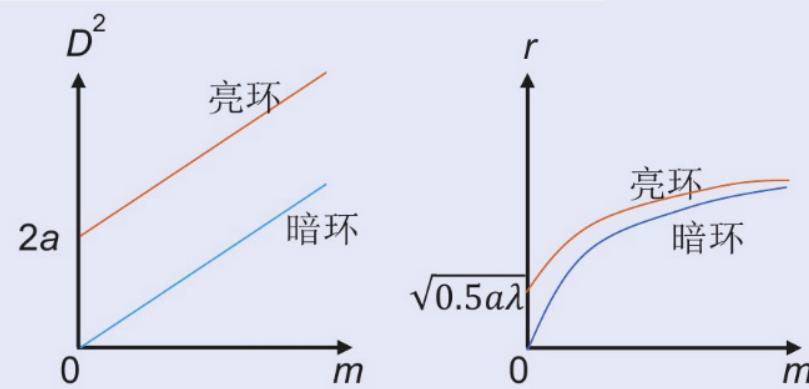


对亮环而言，

$$\begin{aligned} r^2 &= 2ah = \left(m + \frac{1}{2}\right)a\lambda \\ D^2 &= 4r^2 \\ &= 4\left(m + \frac{1}{2}\right)a\lambda \\ &= 4a\lambda m + 2a\lambda \end{aligned}$$

对暗环而言，

$$\begin{aligned} r^2 &= 2ah = ma\lambda \\ D^2 &= 4r^2 \\ &= 4ma\lambda \end{aligned}$$



m 越大时，两环的半径越来越接近，各环间逐渐密集。

统考 2017 P1 Q16

在同一介质中有两个频率及振幅均相同，单反相振动的波源分别置于 A、B 两点。已知波源的频率为 100 Hz，A、B 两点相距 10 m，波速为 400 m s^{-1} 。在 A、B 连线上有多少个点始终静止不动？

已知： $f = 100 \text{ Hz}$, $\Delta s = 10 \text{ m}$, $v = 400 \text{ m s}^{-1}$,
反相位的相干波源，

$$\begin{aligned} v &= f\lambda \\ \lambda &= \frac{v}{f} = \frac{400}{100} = 4 \text{ m} \end{aligned}$$

假设该点与 A 点的距离为 x ,发生破坏性干涉的条件是

$$\Delta s = |AP - BP| = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} |AP - BP| &= m\lambda \\ |x - (10 - x)| &= 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda \\ 2x - 10 &= 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |2x - 10| &= 0 \\ x &= 5 \text{ m} \end{aligned}$$

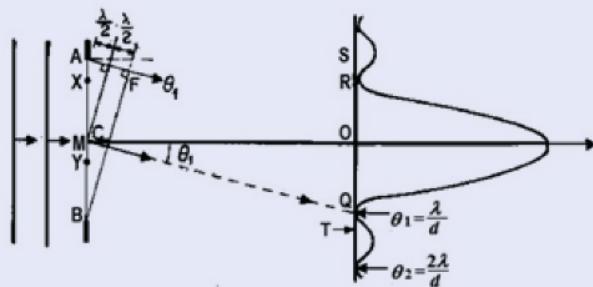
$$\begin{array}{ll} |x - (10 - x)| = 4 & |x - (10 - x)| = 8 \\ 2x - 10 = 4 & 2x - 10 = 8 \\ x = 7 \text{ m} & x = 9 \text{ m} \\ 2x - 10 = -4 & 2x - 10 = -8 \\ x = 3 \text{ m} & x = 1 \text{ m} \end{array}$$



光的衍射

单缝衍射

最暗纹



根据惠更斯原理，光线通过单缝时，可视为许多小光源在该处发光，进而在光屏上发生干涉现象。

当将单缝分为两等份且 A 点与 M 点的光源到光屏的光程差，

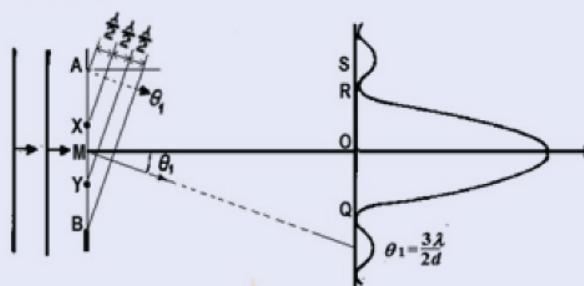
$$\frac{d}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$ds \sin \theta = \lambda$$

两光源在光屏会互相抵消，形成第一级暗纹。依此类推，将单缝分为偶数等份下，都会形成暗纹，即

$$ds \sin \theta = m\lambda, m = 1, 2, \dots$$

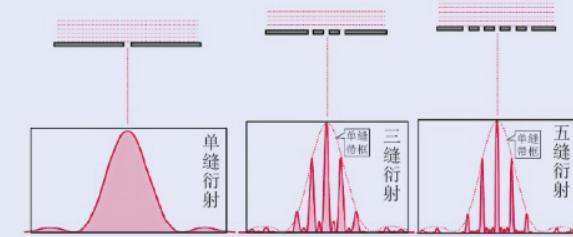
最亮纹



当将单缝分为三等份且 A 点与 X 点的光源到光屏的光程差为 $\frac{\lambda}{2}$ ，在光屏会互相抵消。仅剩下三分之一等份的光在光屏上叠加，形成第一级亮纹。依此类推，将单缝分为奇数等份下，都会形成亮纹，即

$$ds \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, m = 1, 2, \dots$$

多缝衍射



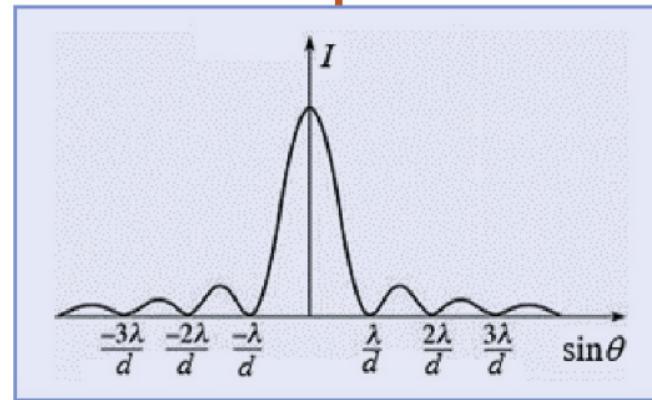
衍射光栅是由许多等宽的狭缝等距离地排列而形成的光学。假设光栅上 1 cm 有 N 条狭缝，则光栅常数或相邻两缝间距为

$$a = \frac{1 \times 10^{-2}}{N} \text{ m}$$

当所有相邻的狭缝到光屏某点的光程差为入射光波长的整数倍时，会出现亮纹，即

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

当光栅上的狭缝数量越多时，亮纹的宽度会越尖细。





【例】

一个衍射光栅上每 1 mm 刻有 625 条细缝，现用波长为 $5.89 \times 10^{-7} \text{ m}$ 的黄光垂直照射到其表面上，求

- (a) 衍射光栅的光栅常数，
- (b) 各级亮纹的衍射角，
- (c) 光屏可见到的最大亮纹级数，
- (d) 光屏可看到几条亮纹。

已知：1 mm 刻有 625 条细缝，

$$\lambda = 5.89 \times 10^{-7} \text{ m}$$

- (a) 衍射光栅的光栅常数，

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 \text{ mm}}{N} \\ &= \frac{1 \times 10^{-3}}{625} \text{ m} \\ &= 1.67 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

- (b) 各级的衍射角，

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{m \times 5.89 \times 10^{-7}}{1.67 \times 10^{-6}} \\ &= 0.3527m \end{aligned}$$

$$\theta = 0, \pm 20.65^\circ, \pm 44.86^\circ$$

- (c) 光屏可见到的最大亮纹级数，

$$\sin \theta = 0.3527m \leq 1$$

$$m \leq 2.84$$

$$m_{max} = \pm 2$$

- (d) $m = 0, \pm 1, \pm 2$, 光屏可看到 5 条亮纹，



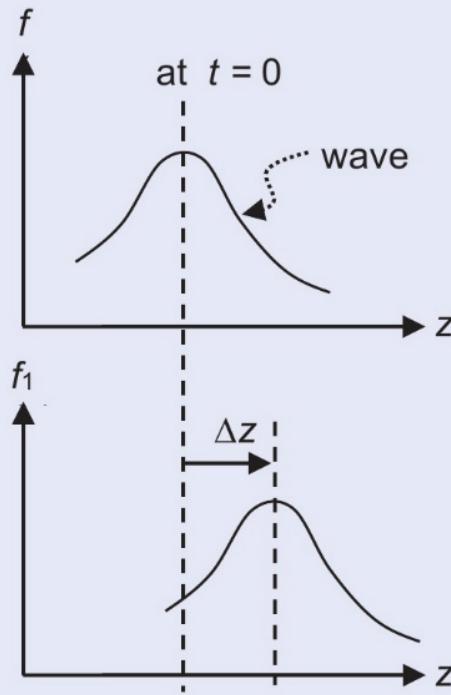


波动方程式 (自选)

波动是空间上一些物理量随时间变化的物理现象。

波动方程式可表述为

$$\psi(z, t) = f(z - vt)$$



其中 $\Delta z = vt$ 、 v 波速，因此新的波动方程式为

$$\begin{aligned}f_1(z') &= f(z - \Delta z) \\&= f(z - vt)\end{aligned}$$

将上式进行偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

可得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

波动方程的通式可表述为

$$\psi(z, t) = f(z \pm vt)$$

最常见的波动方程式为

$$\begin{aligned}\psi(z, t) &= A \cos(kz - \omega t) \\&= A \cos k \left(z - \frac{\omega}{k} t \right) \\&= A \cos k(z - vt)\end{aligned}$$

验证：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial z} &= -kA \sin k(z - vt) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= -k^2 A \cos k(z - vt) \dots \dots (1)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = kvA \sin k(z - vt)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -k^2 v^2 A \cos k(z - vt) \dots \dots (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)}$$

$$\frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} = \frac{-k^2 A \cos k(z - vt)}{-k^2 v^2 A \cos k(z - vt)} = \frac{1}{v^2}$$

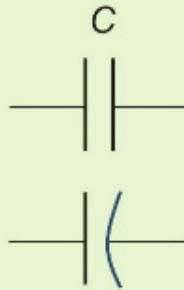
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$



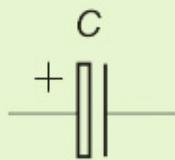
电容器



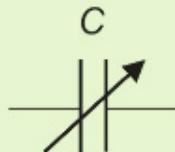
符号
平行板电容器



电解电容器



可调节电容器

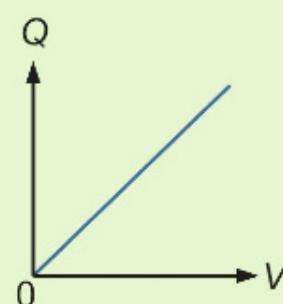


电容

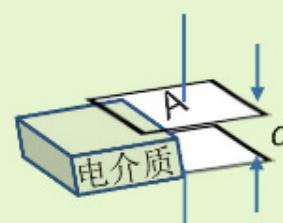
电容器所贮存电荷量与它两极板间电势差的比值

$$C = \frac{Q}{V}$$

单位: CV^{-1} 或 F (法拉)



平行板电容器



平行板电容器之间是空气或真空，两端接上电源时，两极板很快就会充满电荷。两极板间会建立起一个均匀的电场，

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{V}{d}$$

其电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

ϵ_0 : 真空中电容率

$8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^2$

A: 两极板的正对面积

d: 两极板间的距离

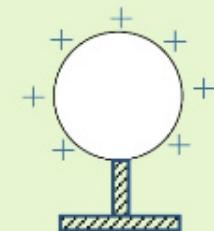
将电介质填充进入两极板间，其电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

ϵ_r : 电介质的相对介电常数



带电孤立金属球



半径为 r 的金属球，带有电荷 Q，其电势为

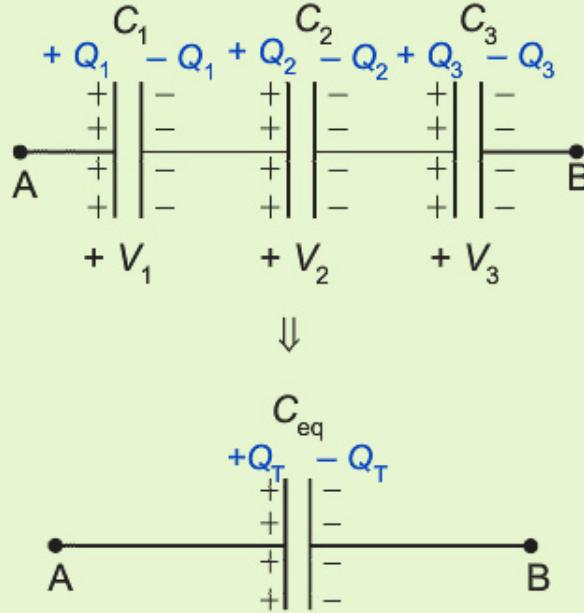
$$V = \frac{kQ}{r}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \\ &= \frac{Q}{\frac{kQ}{r}} \\ &= \frac{r}{k} \\ &= 4\pi\epsilon_0 r \end{aligned}$$



电容器组合

串联



电容器正极板与负极板依次按序连接，

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_T$$

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3$$

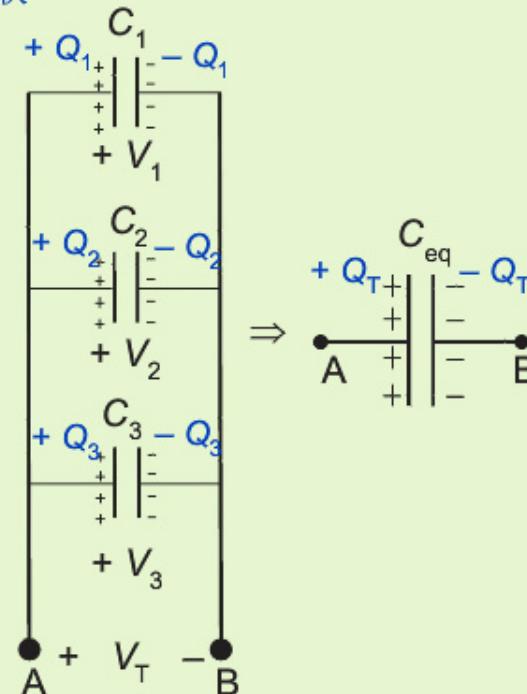
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

串联电容器的等效电容的倒数等于各个电容的倒数之和。

串联电容器的等效电容一定小于各个的电容，但它能承受的电压增大了。

并联



各个电容器的正极板与正极板、负极板与负极板连接在一起，

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_T$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

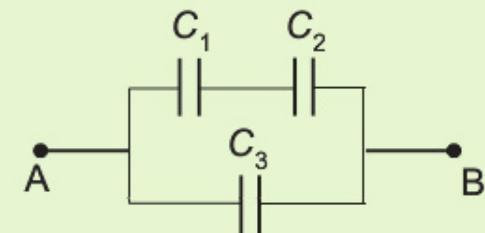
$$C_{eq}V_T = C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

并联电容器的等效电容等于各个电容之和。

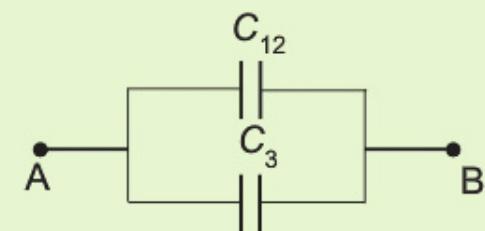
并联电容器的等效电容一定大于各个的电容。

混联



$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



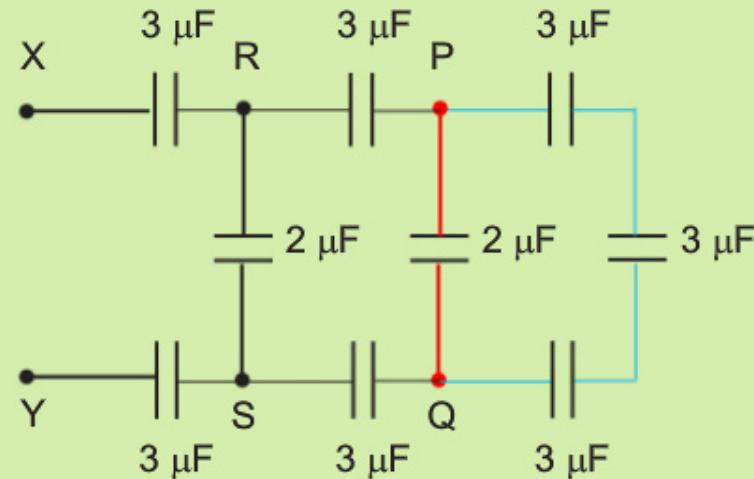
$$C_{AB} = C_{12} + C_3$$

$$= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3$$

$$= \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_1 + C_2}$$

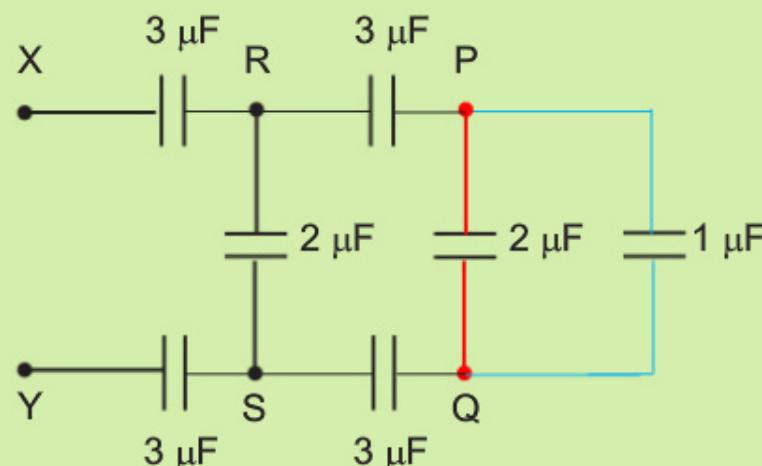
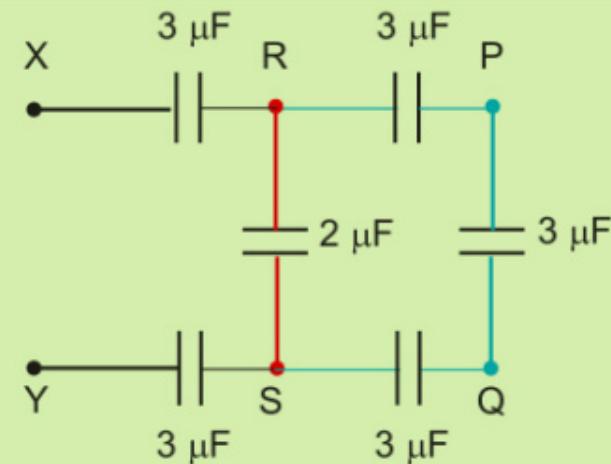


【例】

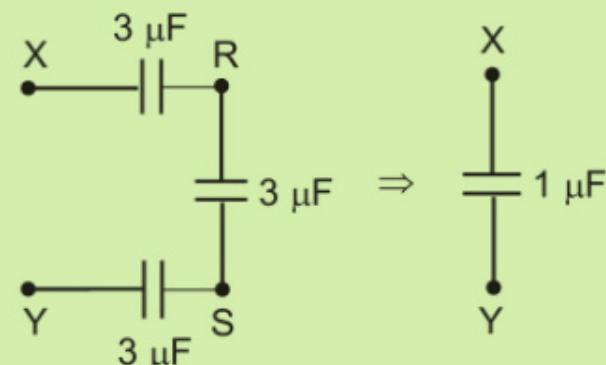


求图中

- (a) XY 两端的等效电容, C_{XY} ,
 (b) 如果 $V_{XY} = 900 \text{ V}$, PQ 两端的电势差 V_{PQ} 。
 (a) 首先, 可以将 PQ 左边三个串联的总电容算出来,
 得 $1 \mu\text{F}$ 。

接着将 $1 \mu\text{F}$ 及 $2 \mu\text{F}$ 两者并联, 得 $C_{PQ} = 3 \mu\text{F}$ 。

重复上述步骤,

得 $C_{RS} = 3 \mu\text{F}$ $C_{XY} = 1 \mu\text{F}$ 。

- (b) 如果
- $V_{XY} = 900 \text{ V}$
- , PQ 两端的电势差
- V_{PQ}
- 。

$$Q_T = C_{XY}V_{XY} = 1 \times 900 = 900 \mu\text{C}$$

$$Q_{RS} = Q_T = 900 \mu\text{C}$$

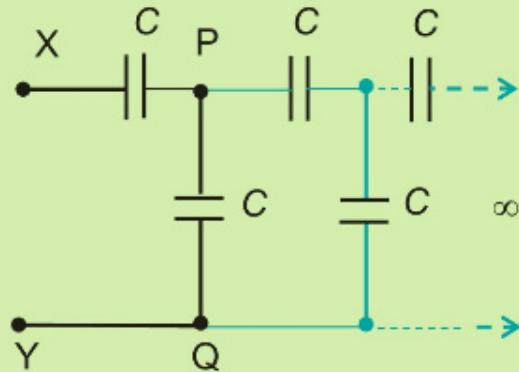
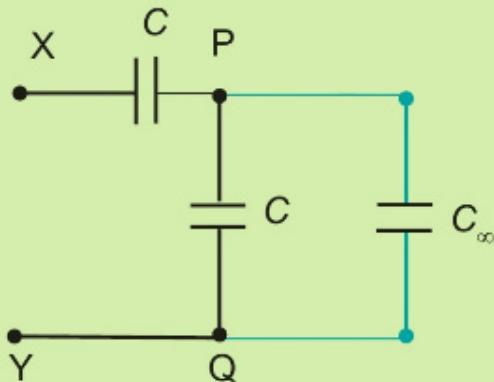
$$V_{RS} = \frac{Q_{RS}}{C_{RS}} = \frac{900 \mu}{3 \mu} = 300 \text{ V}$$

$$Q_{PQ} = 1 \mu \times V_{RS} = 1 \times 300 = 300 \mu\text{C}$$

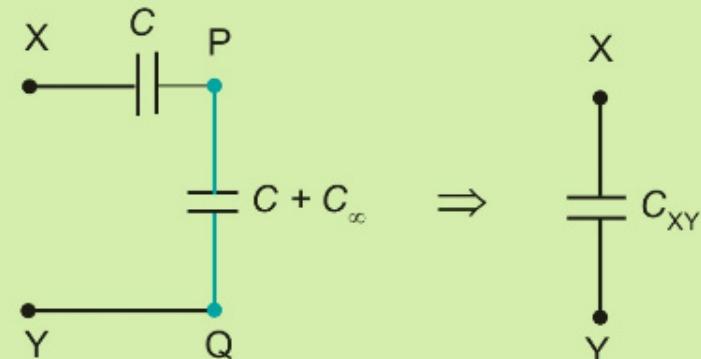
$$V_{PQ} = \frac{Q_{PQ}}{C_{PQ}} = \frac{300 \mu}{3 \mu} = 100 \text{ V}$$



【例】

求图中 XY 两端的等效电容, C_{XY} ,首先, 可以将 PQ 左边所有的总电容设定为 C_∞ ,接着将 C 及 C_∞ 两者并联, 得

$$C_{PQ} = C + C_\infty$$



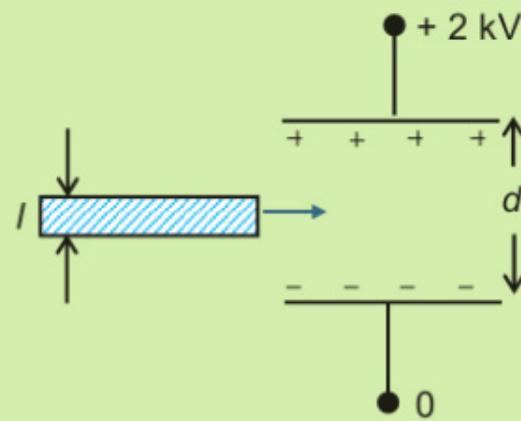
$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{XY}} &= \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_\infty} \\ C_{XY} &= \frac{C(C + C_\infty)}{C + C + C_\infty} \\ &= \frac{C(C + C_\infty)}{2C + C_\infty}\end{aligned}$$

由于有无穷多个相同电容组重复连接, 多一个或少一个不会影响最终的电容, 因此 $C_{XY} = C_\infty$,

$$\begin{aligned}C_{XY} &= \frac{C(C + C_{XY})}{2C + C_{XY}} \\ 2CC_{XY} + C_{XY}^2 &= C^2 + CC_{XY} \\ C_{XY}^2 + CC_{XY} - C^2 &= 0 \\ C_{XY} &= \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4(1)(-C^2)}}{2(1)} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}C \quad \text{或} \quad \frac{-\sqrt{5}-1}{2}C \text{ (忽略)} \\ &= 0.618C\end{aligned}$$



【例】



一个平行板电容器两个极板的相对面积是 0.400 m^2 , 相距 6.00 mm , 两极板接到 2 kV 的直流电源。现在在断开电源情况下, 将一片厚 2.00 mm 、面积相同的金属板镶入该电容器两极板之间, 求,

- (a) 原电容器的电容,
- (b) 原电容器上的电荷量,
- (c) 新电容器的等效电容,
- (d) 镶入金属板过程所需功。

$$(a) \text{已知: } A = 0.400 \text{ m}^2, d = 6.00 \text{ mm}, V = 2000 \text{ V}, l = 2 \text{ mm}$$

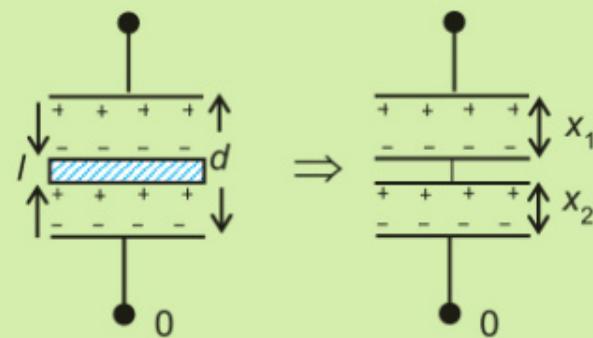
原电容器的电容,

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0 \frac{A}{d} \\ &= 8.85 \times 10^{-12} \times \frac{0.400}{6.0 \times 10^{-3}} \\ &= 5.90 \times 10^{-10} \text{ F} \end{aligned}$$

(b) 原电容器上的电荷量,

$$\begin{aligned} Q &= CV \\ &= 5.90 \times 10^{-10} \times 2000 \\ &= 1.18 \times 10^{-6} \text{ C} \end{aligned}$$

(c) 新电容器的等效电容,



新的电容器可视为两个电容器在串联,

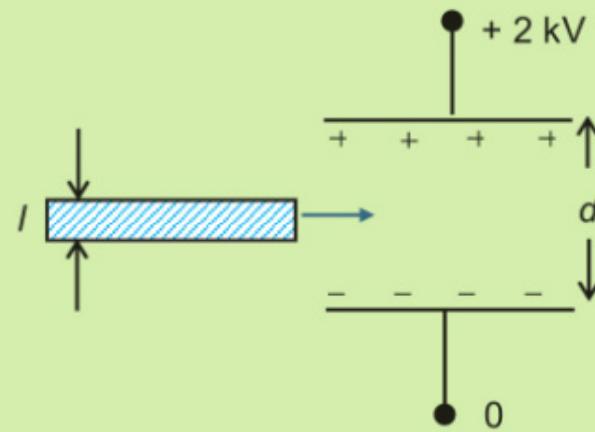
$$\begin{aligned} C_1 &= \epsilon_0 \frac{A}{x_1}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{A}{x_2} \\ \frac{1}{C'} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ &= \frac{x_1}{\epsilon_0 A} + \frac{x_2}{\epsilon_0 A} \\ &= \frac{x_1 + x_2}{\epsilon_0 A} \\ &= \frac{d - l}{\epsilon_0 A} \\ C' &= \frac{\epsilon_0 A}{d - l} \\ &= \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 0.400}{6 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-3}} \\ &= 8.85 \times 10^{-10} \text{ F} \end{aligned}$$

(d) 断开电源情况下, 电荷量保持不变, 镶入金属板过程所需功,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{Q'^2}{C'} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{8.85} - \frac{1}{5.90} \right) \times 10^{10} \right] \times (1.18 \times 10^{-6})^2 \\ &= -3.93 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$



【例】



一个平行板电容器两个极板的相对面积是 0.400 m^2 , 相距 6.00 mm , 两极板接到 2 kV 的直流电源。现在在电源仍接通情况下, 将一片厚 2.00 mm 、面积相同的金属板镶入该电容器两极板之间, 求,

- (a) 原电容器的电容,
- (b) 原电容器上的电荷量,
- (c) 新电容器的等效电容,
- (d) 镶入金属板过程所需功。
- (a) 已知: $A = 0.400 \text{ m}^2, d = 6.00 \text{ mm}, V = 2000 \text{ V}, l = 2 \text{ mm}$

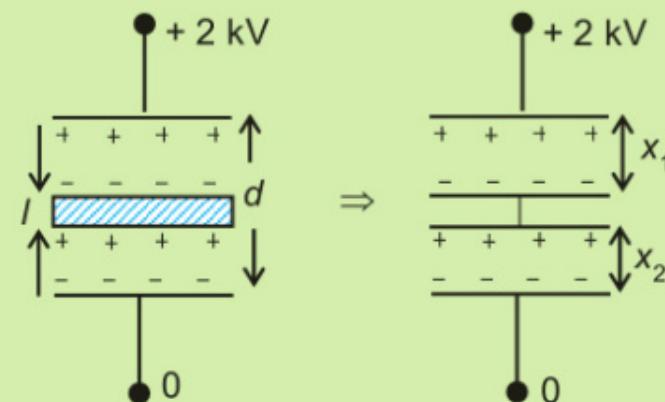
原电容器的电容,

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\ &= 8.85 \times 10^{-12} \times \frac{0.400}{6.0 \times 10^{-3}} \\ &= 5.90 \times 10^{-10} \text{ F} \end{aligned}$$

(b) 原电容器上的电荷量,

$$\begin{aligned} Q &= CV \\ &= 5.90 \times 10^{-10} \times 2000 \\ &= 1.18 \times 10^{-6} \text{ C} \end{aligned}$$

(c) 新电容器的等效电容,



新的电容器可视为两个电容器在串联,

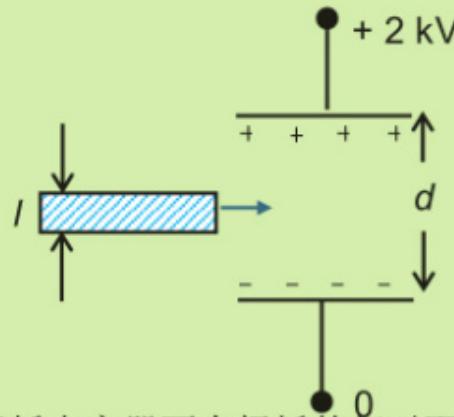
$$\begin{aligned} C_1 &= \varepsilon_0 \frac{A}{x_1}, \quad C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{x_2} \\ \frac{1}{C'} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ &= \frac{x_1}{\varepsilon_0 A} + \frac{x_2}{\varepsilon_0 A} \\ &= \frac{x_1 + x_2}{\varepsilon_0 A} \\ &= \frac{d - l}{\varepsilon_0 A} \\ C' &= \frac{\varepsilon_0 A}{d - l} \\ &= \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 0.400}{6 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-3}} \\ &= 8.85 \times 10^{-10} \text{ F} \end{aligned}$$

(d) 电源仍接通, V 保持不变, 镶入金属板过程所需功,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} CV^2 - \frac{1}{2} C' V'^2 \\ &= \frac{1}{2} (8.85 - 5.90) \times 10^{-10} \times 2000^2 \\ &= 5.90 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$



【例】



一个平行板电容器两个极板的相对面积是 0.400 m^2 , 相距 6.00 mm , 两极板接到 2 kV 的直流电源。现在在电源仍接通情况下, 将一片厚 2.00 mm 、面积相同的电介质 ($\epsilon_r = 2$) 镶入该电容器两极板之间, 求,

- (a) 原电容器的电容,
- (b) 原电容器上的电荷量,
- (c) 新电容器的等效电容,

(a) 已知: $A = 0.400 \text{ m}^2$, $d = 6.00 \text{ mm}$, $V = 2000 \text{ V}$, $l = 2 \text{ mm}$

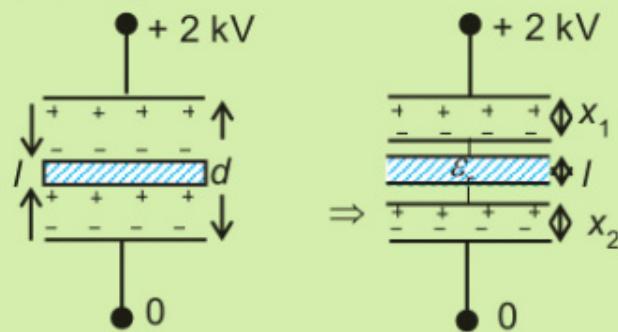
原电容器的电容,

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0 \frac{A}{d} \\ &= 8.85 \times 10^{-12} \times \frac{0.400}{6.0 \times 10^{-3}} \\ &= 5.90 \times 10^{-10} \text{ F} \end{aligned}$$

(b) 原电容器上的电荷量,

$$\begin{aligned} Q &= CV \\ &= 5.90 \times 10^{-10} \times 2000 \\ &= 1.18 \times 10^{-6} \text{ C} \end{aligned}$$

(c) 新电容器的等效电容,



新的电容器可视为三个电容器在串联,

$$\begin{aligned} C_1 &= \epsilon_0 \frac{A}{x_1}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{A}{x_2}, \quad C_3 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{l}, \\ \frac{1}{C'} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \\ &= \frac{x_1}{\epsilon_0 A} + \frac{x_2}{\epsilon_0 A} + \frac{l}{\epsilon_0 \epsilon_r A} \\ &= \frac{\epsilon_r(x_1 + x_2) + l}{\epsilon_0 \epsilon_r A} \\ &= \frac{\epsilon_r(d - l) + l}{\epsilon_0 \epsilon_r A} \\ &= \frac{\epsilon_r d - (\epsilon_r - 1)l}{\epsilon_0 \epsilon_r A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{\epsilon_r d - (\epsilon_r - 1)l} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 2 \times 0.400}{2 \times 6 \times 10^{-3} - (2 - 1)2 \times 10^{-3}} \\ &= 7.08 \times 10^{-10} \text{ F} \end{aligned}$$

(d) 电源仍接通, V 保持不变, 镶入金属板过程所需功,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} CV^2 - \frac{1}{2} C' V'^2 \\ &= \frac{1}{2} (7.08 - 5.90) \times 10^{-10} \times 2000^2 \\ &= 2.36 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$



		镶入金属板			
		电源断开		电源仍接通	
	镶入前	镶入后		镶入前	镶入后
Q	CV_0	CV_0 (不变)		CV_0	$Q' = C'V'$ $= \left(\frac{d}{d-l}\right) \frac{\epsilon_0 A}{d} V_0$ $= \left(\frac{d}{d-l}\right) Q$ (变大)
V	V_0	$\frac{Q'}{C'} = \frac{CV_0}{C'}$ $= \left(\frac{d-l}{d}\right) V_0$ (变小)		V_0	V_0 (不变)
E	$\frac{V_0}{d}$	$\frac{V'}{d'} = \frac{(d-l)}{d} \frac{V_0}{d-l} = \frac{V_0}{d}$ (不变)		$\frac{V_0}{d}$	$\frac{V'}{d'} = \frac{d}{d-l} \frac{V_0}{d}$ (变大)
C	$\frac{\epsilon_0 A}{d}$	$\frac{\epsilon_0 A}{d-l} = \left(\frac{d}{d-l}\right) \frac{\epsilon_0 A}{d}$ (变大)		$\frac{\epsilon_0 A}{d}$	$\frac{\epsilon_0 A}{d-l} = \left(\frac{d}{d-l}\right) \frac{\epsilon_0 A}{d}$ (变大)
$E_{\text{能量}}$	$\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$	$\frac{1}{2} \frac{Q'^2}{C'} = \left(\frac{d-l}{d}\right) \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$ (变小)		$\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$	$\frac{1}{2} \frac{Q'^2}{C'} = \left(\frac{d}{d-l}\right) \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$ (变大)
Φ	$\frac{Q}{\epsilon_0}$	$\frac{Q'}{\epsilon_0} = \left(\frac{d}{d-l}\right) \frac{Q}{\epsilon_0}$ (不变)		$\frac{Q}{\epsilon_0}$	$\frac{Q'}{\epsilon_0} = \left(\frac{d}{d-l}\right) \frac{Q}{\epsilon_0}$ (变大)

可设定 $l = 0$, 即是没有金属板情况, $l = d$, 即是金属板连接两极板的情况来检验方程式是否有误。



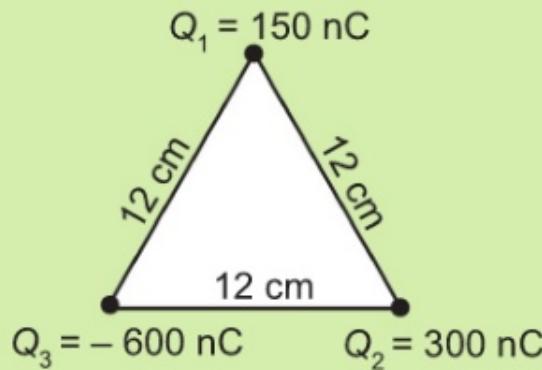
		镶入电介质 ϵ_r			
		电源断开		电源仍接通	
	镶入前	镶入后		镶入前	镶入后
Q	CV_0	CV_0 (不变)		CV_0	$Q' = C'V'$ $= \frac{1}{1 - \frac{l}{d}(1 - \frac{1}{\epsilon_r})} CV_0$ (变大)
V	V_0	$\frac{Q'}{C'} = \frac{CV_0}{C'} = [1 - \frac{l}{d}(1 - \frac{1}{\epsilon_r})]V_0$ (变小)		V_0	V_0 (不变)
E	$\frac{V_0}{d} = \frac{Q}{A}$	$E' = \frac{E}{\epsilon_r}$ (变小)		$\frac{V_0}{d}$	$E' = \frac{E}{\epsilon_r}$ (变小)
C	$\frac{\epsilon_0 A}{d}$	$\frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{\epsilon_r d - l(\epsilon_r - 1)}$ $= \frac{\epsilon_0 A}{[1 - \frac{l}{d}(1 - \frac{1}{\epsilon_r})]d}$ (变大)		$\frac{\epsilon_0 A}{d}$	$\frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{\epsilon_r d - l(\epsilon_r - 1)}$ $= \frac{\epsilon_0 A}{[1 - \frac{l}{d}(1 - \frac{1}{\epsilon_r})]d}$ (变大)
$E_{\text{能量}}$	$\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$	$\frac{1}{2} \frac{Q'^2}{C'} = [1 - \frac{l}{d}(1 - \frac{1}{\epsilon_r})] \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$ (变小)		$\frac{1}{2} CV_0^2$	$\frac{1}{2} C'V_0^2 = \frac{1}{1 - \frac{l}{d}(1 - \frac{1}{\epsilon_r})} \frac{1}{2} CV_0^2$ (变大)
Φ	$\frac{Q}{\epsilon_0}$	$\frac{Q'}{\epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_r}$ (变小)		$\frac{Q}{\epsilon_0}$	$\frac{Q'}{\epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_r - \frac{l}{d}(\epsilon_r - 1)} CV_0$ (变小)

可设定 $\epsilon_r = 1$, 即是没有填充物的情况来检验方程式是否有误。

可设定 $l = 0$, 即是没有电介质情况, $l = d$, 即是电介质完全填满两极板间的情况来检验方程式是否有误。



【例】



如图所示，有一个边长为 12 cm 的等边三角形，三个顶点分别放置着 +150 nC、+300 nC 及 -600 nC 的点电荷。设无穷远处的电势能为零，求此系统的电势能。

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{i < j} k \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \\
 &= k \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + k \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}} + k \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} \\
 &= 9 \times 10^9 \left(\frac{150 \times 300}{0.12} + \frac{300 \times (-600)}{0.12} + \frac{(-600) \times 150}{0.12} \right) \times 10^{-18} \\
 &= -1.7 \times 10^{-2} \text{ J}
 \end{aligned}$$

由上述计算可得，欲建构此系统静电力必须做 $1.7 \times 10^{-2} \text{ J}$ 的功，即它是一个结合系统。



【例】

如图所示，有一个边长为 $2a$ 的正方形，各个顶点分别交替放置着 $+Q$ 及 $-Q$ 的点电荷。设无穷远处的电势为零，求

- 中心点 O 的电势，
- 此系统的电势能，
- 将系统变成边长为 $1.5a$ 正方形所需的功。
- 中心点 O 的电势，

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{2}a$$

$$\begin{aligned} V &= k \frac{Q_1}{r_1} + k \frac{Q_2}{r_2} + k \frac{Q_3}{r_3} + k \frac{Q_4}{r_4} \\ &= \frac{k}{\sqrt{2}a} [Q + (-Q) + Q + (-Q)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 此系统的电势能，

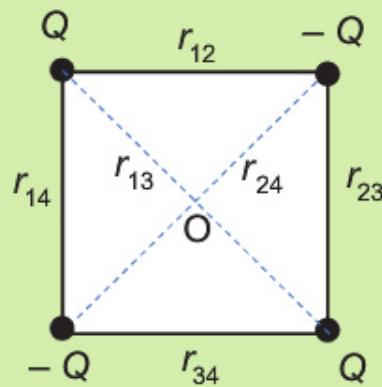
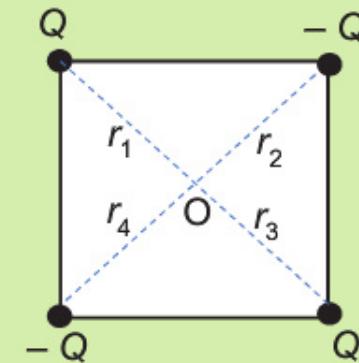
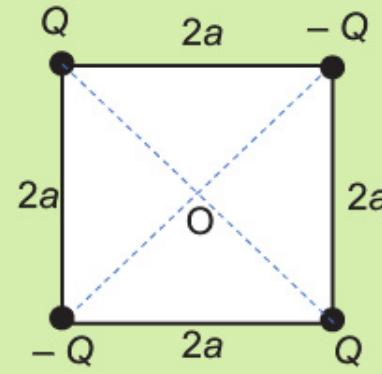
$$\begin{aligned} U &= k \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + k \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + k \frac{Q_1 Q_4}{r_{14}} + k \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}} + k \frac{Q_2 Q_4}{r_{24}} + k \frac{Q_3 Q_4}{r_{34}} \\ &= k \left(\frac{-Q^2}{2a} + \frac{Q^2}{2\sqrt{2}a} + \frac{-Q^2}{2a} + \frac{-Q^2}{2a} + \frac{Q^2}{2\sqrt{2}a} + \frac{-Q^2}{2a} \right) \\ &= \frac{kQ^2}{2a} (\sqrt{2} - 4) \end{aligned}$$

- 将系统变成边长为 $1.5a$ 正方形所需的功，

$$U' = \frac{kQ^2}{1.5a} (\sqrt{2} - 4)$$

$$W = U' - U$$

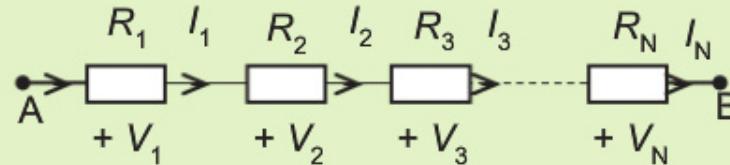
$$\begin{aligned} &= \frac{kQ^2}{1.5a} (\sqrt{2} - 4) - \frac{kQ^2}{2a} (\sqrt{2} - 4) \\ &= \frac{kQ^2}{6a} (\sqrt{2} - 4) \end{aligned}$$





电阻器与电容器串并联的比较

串联



电阻器正极与负极依次按序连接，

$$I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_N = I$$

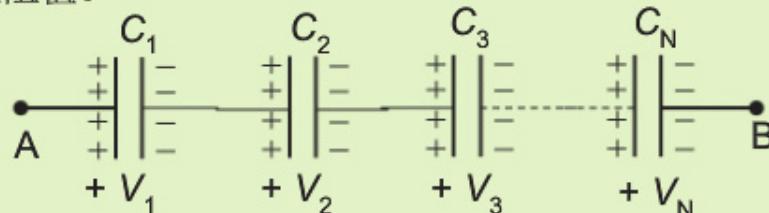
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_N$$

$$IR_s = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \dots + IR_N$$

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N$$

$$P = I^2 R_1 + I^2 R_2 + I^2 R_3 + \dots + I^2 R_N = I^2 R_s$$

串联电阻的等效电阻值等于各个电阻值之和，一定大于各电阻值。



$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_T$$

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_N$$

$$\frac{Q_T}{C_s} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} + \dots + \frac{Q_N}{C_N}$$

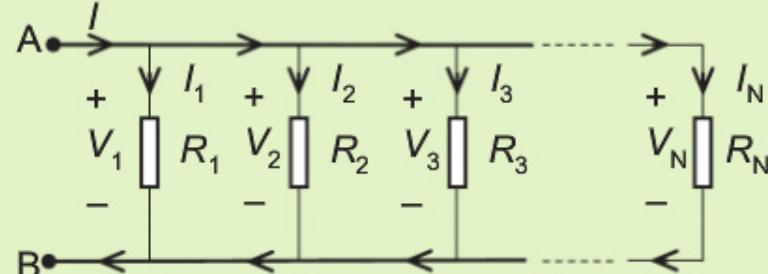
$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

$$E = \frac{Q^2}{2C_1} + \frac{Q^2}{2C_2} + \dots + \frac{Q^2}{2C_N} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_s}$$

串联电容器的等效电容值的倒数等于各个电容值的倒数之和。

串联电容器的等效电容值一定小于各个的电容值，但它能承受的电压增大了。

并联



各个电容器的正极板与正极板、负极板与负极板连接在一起，

$$V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_N = V$$

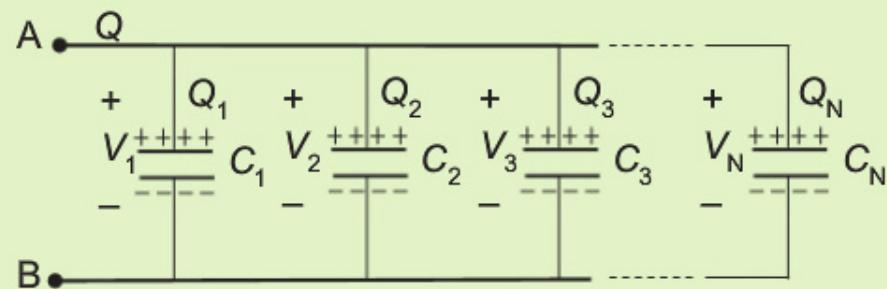
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_N$$

$$\frac{V}{R_p} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \dots + \frac{V}{R_N}$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

$$P = \frac{V^2}{R_1} + \frac{V^2}{R_2} + \frac{V^2}{R_3} + \dots + \frac{V^2}{R_N} = \frac{V^2}{R_p}$$

串联电阻器的等效电阻值的倒数等于各个电阻值的倒数之和。



$$V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_N = V_T$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_N$$

$$C_p V = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N$$

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N$$

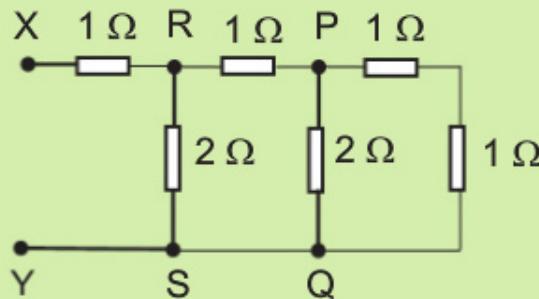
$$E = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 + \dots + \frac{1}{2} C_N V^2 = \frac{1}{2} C_T V^2$$

并联电容器的等效电容值等于各个电容值之和，一定大于各个的电容值。



无限循环回路

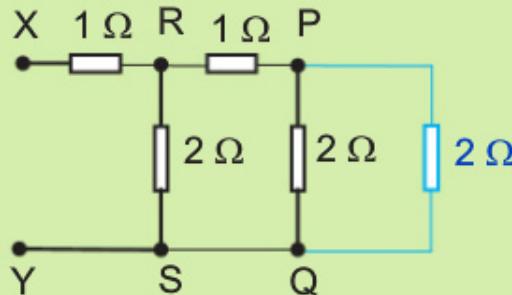
【例】



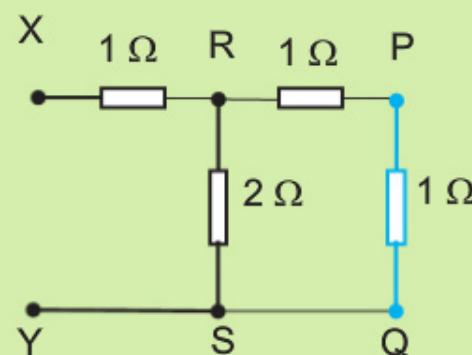
求图中

- (a) XY 两端的等效电阻值, R_{XY} ,
- (b) 如果 $V_{XY} = 12 \text{ V}$, PQ 两端的电势差 V_{PQ} 。

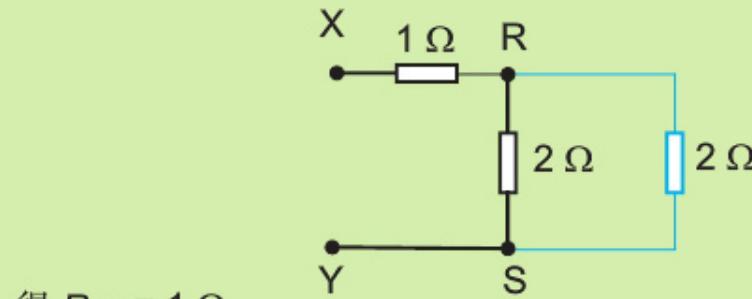
(a) 首先, 可以将 PQ 左边三个串联的电容组值算出来, 得 2Ω 。



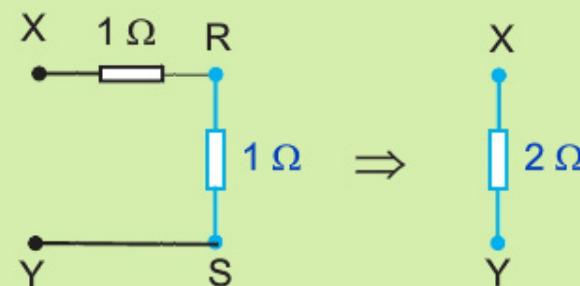
接着将 2Ω 及 2Ω 两者并联, 得 $R_{PQ} = 1\Omega$ 。



重复上述步骤,



得 $R_{RS} = 1\Omega$



$R_{XY} = 2\Omega$ 。

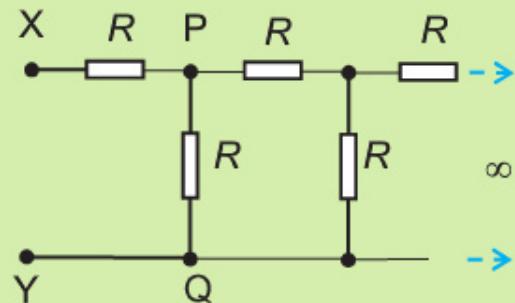
- (b) 如果 $V_{XY} = 12 \text{ V}$, PQ 两端的电势差 V_{PQ} 。
根据分压公式 (potential divider formula),

$$V_{RS} = \frac{1}{1+1} V_{XY} = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{ V}$$

$$V_{PQ} = \frac{1}{1+1} V_{RS} = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ V}$$

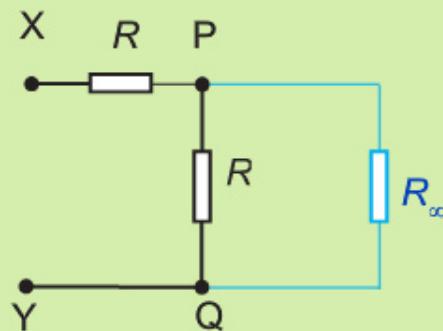


【例】



求图中 XY 两端的等效电阻值, R_{XY} ,

首先, 可以将 PQ 左边所有的电容组值设定为 R_∞ ,

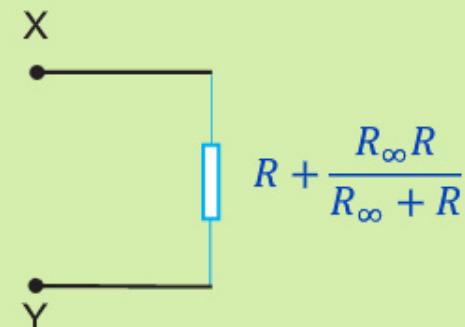
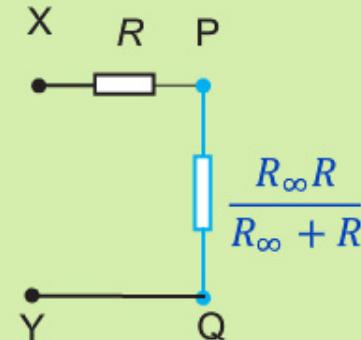


接着将 R 及 R_∞ 两者并联, 得

$$\frac{1}{R_{PQ}} = \frac{1}{R_\infty} + \frac{1}{R}$$

$$= \frac{R + R_\infty}{R_\infty R}$$

$$R_{PQ} = \frac{R_\infty R}{R_\infty + R}$$



$$R_{XY} = R + \frac{R_\infty R}{R_\infty + R}$$

由于有无穷多个相同电阻组重复连接, 多一个或少一个不会影响最终的电阻, $R_{XY} = R_\infty$, 、

$$R_{XY} = R + \frac{R_{XY} R}{R_{XY} + R}$$

$$R_{XY}^2 + RR_{XY} = RR_{XY} + R^2 + RR_{XY}$$

$$R_{XY}^2 - RR_{XY} - R^2 = 0$$

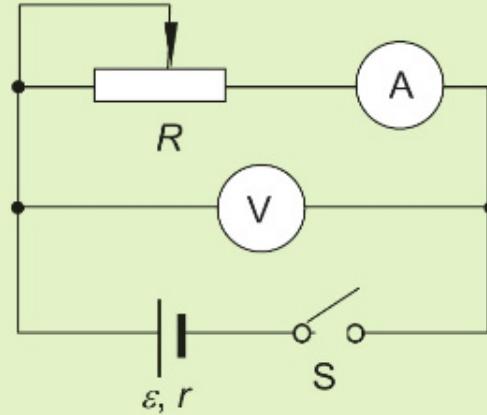
$$R_{XY} = \frac{R \pm \sqrt{(-R)^2 - 4(1)(-R^2)}}{2(1)}$$

$$R_{XY} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} R \text{ 或 } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} R \text{ (忽略)}$$

$$= 1.62R$$



电动势与内电阻



当电键 K 接通，端电压

$$\varepsilon = I(R + r)$$

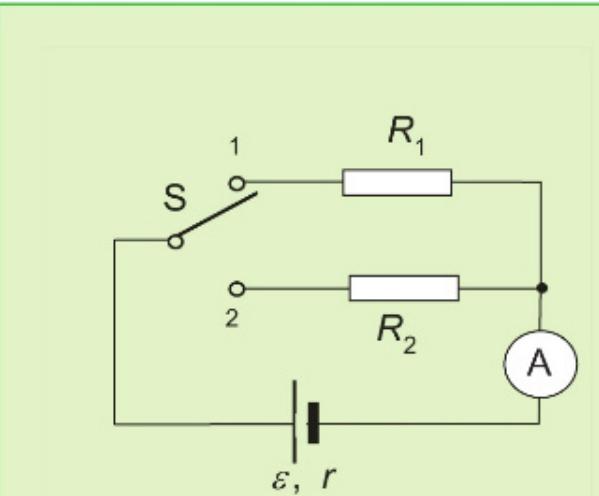
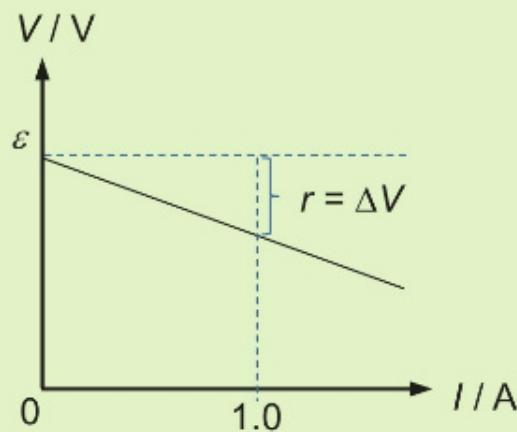
$$\varepsilon = V + Ir$$

$$V = \varepsilon - Ir$$

电源两端降低的电压，

$$\text{压降} = \Delta V = \varepsilon - V = Ir$$

由此可导出内电阻与压降成正比。



当电键 S 接到 1 处，

$$\varepsilon = I_1 R_1 + I_1 r \dots \dots (1)$$

当电键 S 接到 2 处，

$$\varepsilon = I_2 R_2 + I_2 r \dots \dots (2)$$

$$(1) - (2)$$

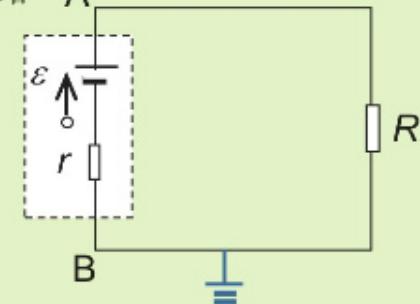
$$I_1 R_1 + I_1 r = I_2 R_2 + I_2 r$$

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}$$

带入 (1)

$$\varepsilon = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_2 - I_1}$$

接地电路



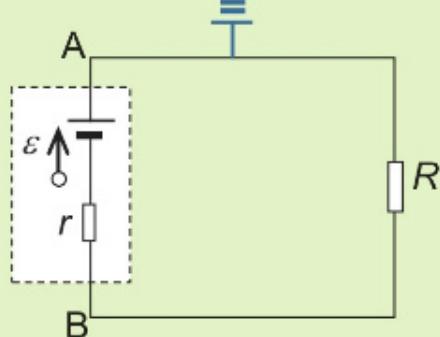
将 B 端接地，则

$$V_B = 0$$

$$V_A - V_B = \varepsilon - Ir$$

$$V_A = \varepsilon - Ir$$

$$= \frac{R}{R+r} \varepsilon \\ = IR$$



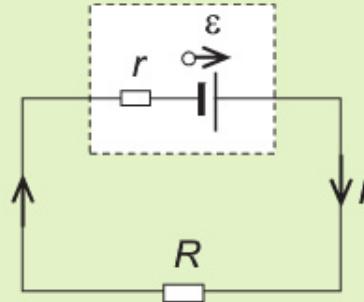
将 A 端接地，则

$$V_A = 0$$

$$V_A - V_B = \varepsilon - Ir$$

$$V_B = -(\varepsilon - Ir)$$

$$= -\frac{R}{R+r} \varepsilon \\ = -IR$$



1. 根据能量守恒原理，

电池化学能转化为电能功率

$$I\epsilon = I^2R + I^2r$$

2. 总电动势

$$\epsilon = I(R + r) = V - Ir$$

3. “降低电势”

$$\epsilon - V = Ir$$

4. 电流强度

$$I = \frac{\epsilon}{R + r}$$

5. 负载输出功率

$$P_{out} = I^2R = \frac{\epsilon^2R}{(R + r)^2}$$

6. 工作效率

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \times 100\% = \frac{I^2R}{I\epsilon} = \frac{I^2R}{I^2(R + r)} = \frac{R}{R + r}$$

功耗优化

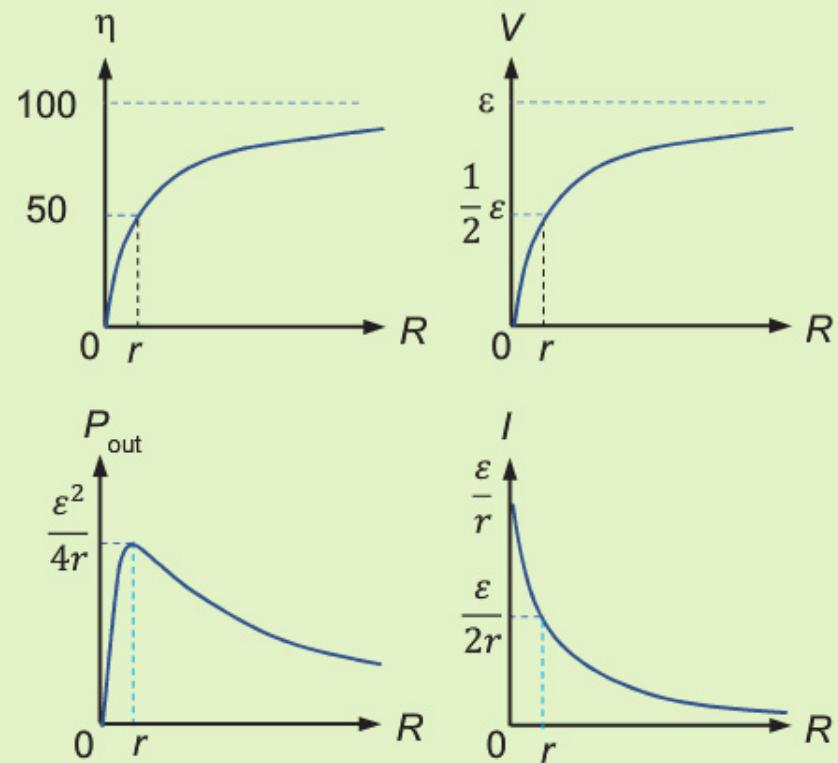
欲使系统的能量转换效率达到最优化，可以采取以下的步骤，

$$\begin{aligned} P_{out} &= \frac{\epsilon^2R}{(R + r)^2} \\ \frac{d}{dR}P_{out} &= \frac{d}{dR} \frac{\epsilon^2R}{(R + r)^2} \\ &= \epsilon^2 \left[\frac{(R + r)^2 - R \times 2(R + r)(1)}{(R + r)^4} \right] \\ &= \epsilon^2 \frac{R^2 + 2Rr + r^2 - 2R^2 - 2Rr}{(R + r)^4} \\ &= \frac{r^2 - R^2}{(R + r)^4} \epsilon^2 \end{aligned}$$

设 $\frac{d}{dR}P_{out} = 0$ ，可求得最大输出功率时的 R 值，

$$r^2 - R^2 = 0$$

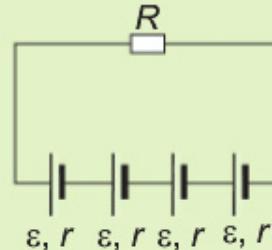
$$R = r$$





电池的组合

串联



上图中各电池的电动势及内电阻为 1.5 V 及 0.5 Ω，电阻 R 的阻值为 10 Ω。求

- (a) 电路上的电流强度，
- (b) 外电路的电功率，
- (c) 此电路的工作效率，
- (d) 电路上的电流强度。

$$\varepsilon_T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 4 \times 1.5 = 6 \text{ V}$$

$$r_T = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 4 \times 0.5 = 2 \Omega$$

$$\varepsilon_T = I(R + r_T)$$

$$I = \frac{6}{10 + 2} = 0.5 \text{ A}$$

(b) 外电路的电功率，

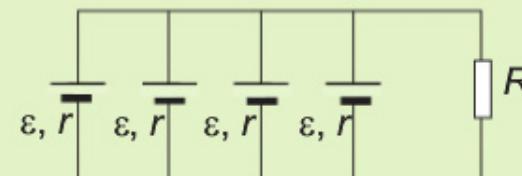
$$P_{ext} = I^2 R = 0.5^2 \times 10 = 2.5 \text{ (W)}$$

(c) 此电路的工作效率，

$$\eta = \frac{P_{ext}}{I\varepsilon_T} \times 100\% \\ = \frac{2.5}{0.5 \times 6} \times 100\% \\ = 83.33\%$$

其中 16.67% 的能量消耗在内电阻上。

并联



上图中各电池的电动势及内电阻为 1.5 V 及 0.5 Ω，电阻 R 的阻值为 10 Ω。求

- (a) 电路上的电流强度，
- (b) 外电路的电功率，
- (c) 此电路的工作效率，
- (d) 电路上的电流强度。

$$\varepsilon_T = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1.5 \text{ V}$$

$$r_T = \frac{r}{4} = \frac{0.5}{4} = 0.125 \Omega$$

$$\varepsilon_T = I(R + r_T)$$

$$I = \frac{1.5}{10 + 0.125} = 0.148 \text{ A}$$

(b) 外电路的电功率，

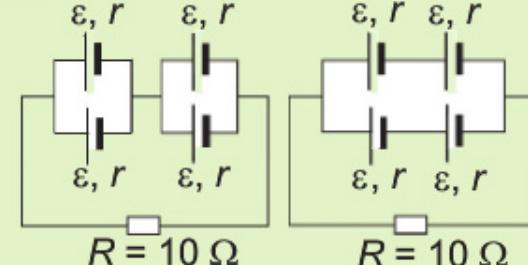
$$P_{ext} = I^2 R = 0.148^2 \times 10 = 0.219 \text{ W}$$

(c) 此电路的工作效率，

$$\eta = \frac{P_{ext}}{I\varepsilon_T} \times 100\% \\ = \frac{0.219}{0.148 \times 1.5} \times 100\% \\ = 98.65\%$$

其中 1.35% 的能量消耗在内电阻上。

混联



上图中各电池的电动势及内电阻为 1.5 V 及 0.5 Ω，电阻 R 的阻值为 10 Ω。求

- (a) 电路上的电流强度，
- (b) 外电路的电功率，
- (c) 此电路的工作效率，
- (d) 电路上的电流强度。

$$\varepsilon_T = 2\varepsilon = 2 \times 1.5 = 3.0 \text{ V}$$

$$r_T = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r = 0.5 \Omega$$

$$\varepsilon_T = I(R + r_T)$$

$$I = \frac{3.0}{10 + 0.5} = 0.286 \text{ A}$$

(b) 外电路的电功率，

$$P_{ext} = I^2 R = 0.286^2 \times 10 = 0.818 \text{ W}$$

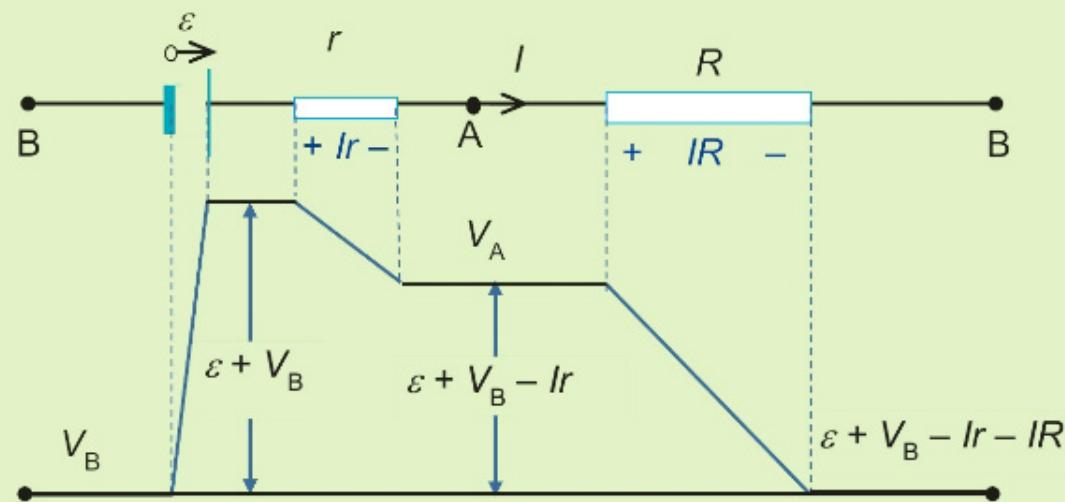
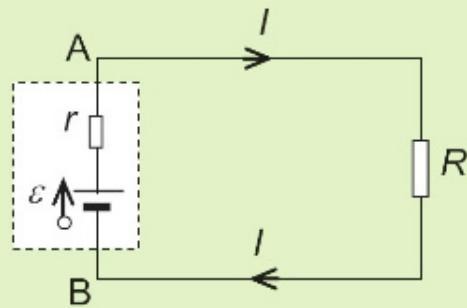
(c) 此电路的工作效率，

$$\eta = \frac{P_{ext}}{I\varepsilon_T} \times 100\% \\ = \frac{0.818}{0.286 \times 3.0} \times 100\% \\ = 95.33\%$$

其中 4.67% 的能量消耗在内电阻上。



电势“走位”图



$$V_B = \epsilon - Ir - IR - V_B$$

$$\Rightarrow I = \frac{\epsilon}{R + r}$$

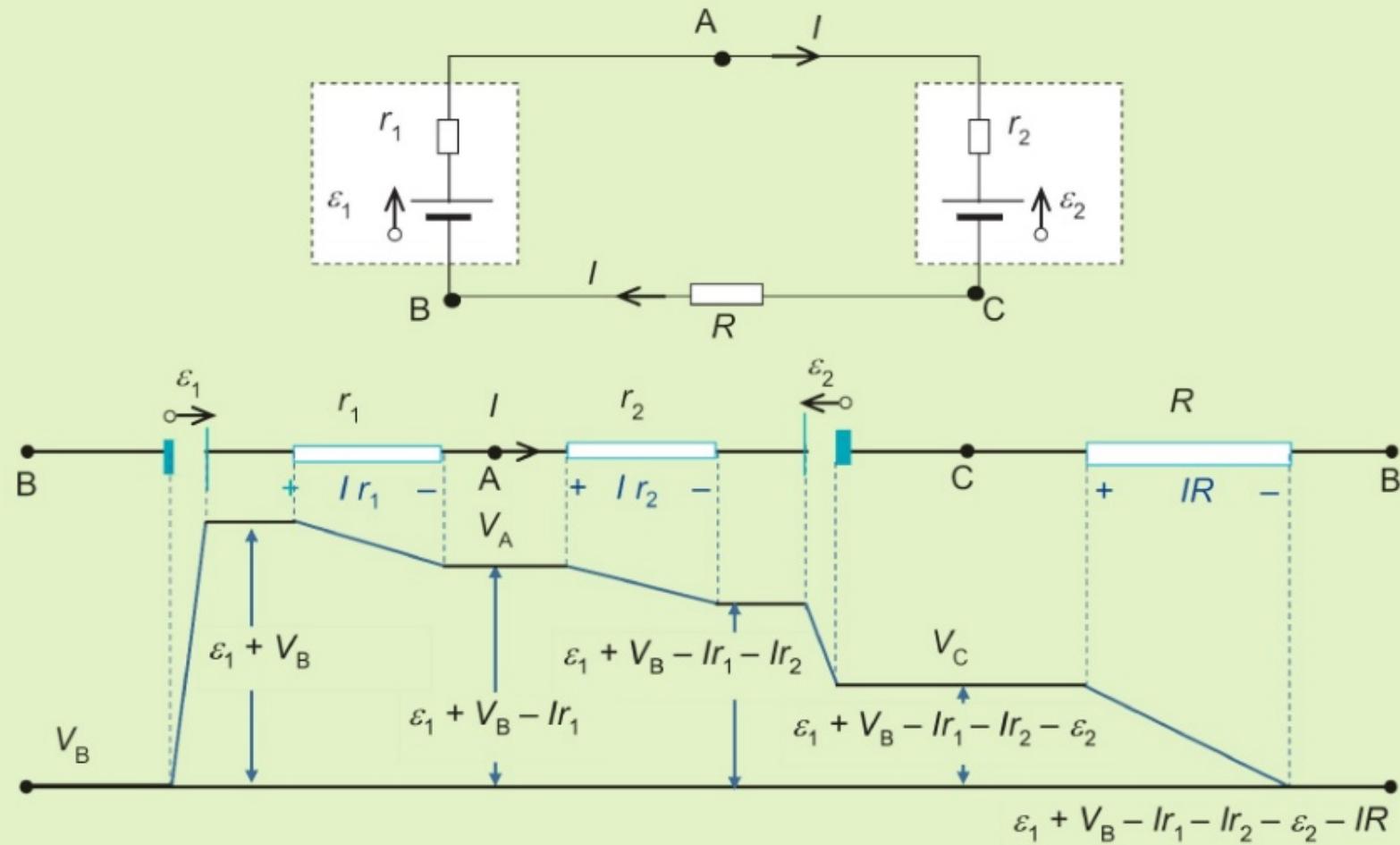
$$V_A = \epsilon + V_B - Ir$$

$$V_A - V_B = \epsilon - Ir$$

$$V_{AB} = \epsilon - \frac{\epsilon}{R+r}r = \frac{\epsilon}{R+r}R = IR$$



电势“走位”图



$$V_B = \varepsilon_1 + V_B - Ir_1 - Ir_2 - \varepsilon_2 - IR$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2}$$

$$V_A = \varepsilon_1 + V_B - Ir_1$$

$$V_A - V_B = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2} r_1$$

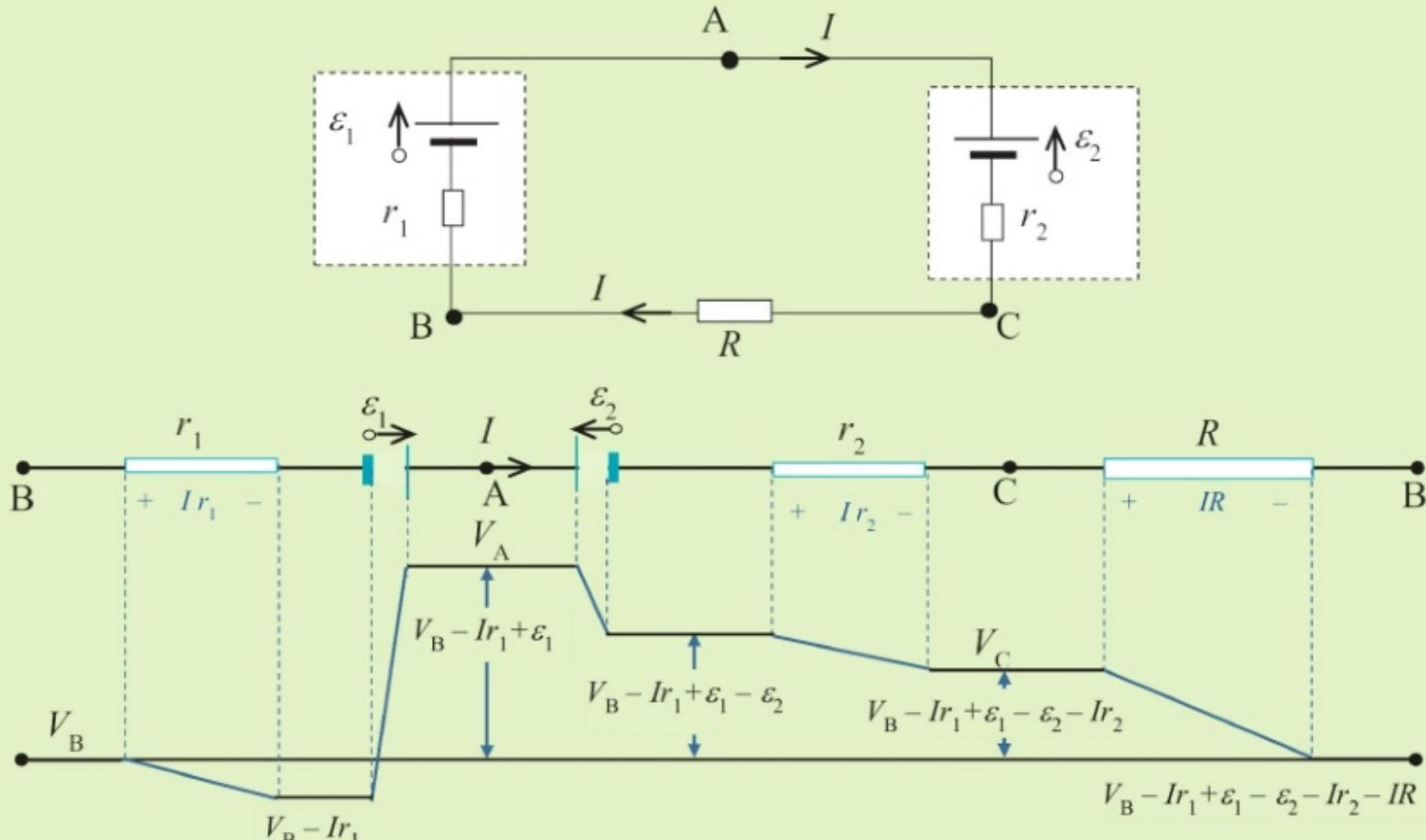
$$V_{AB} = \frac{\varepsilon_1(R + r_1 + r_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)r_1}{R + r_1 + r_2}$$

$$= \frac{\varepsilon_1 R + \varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{R + r_1 + r_2}$$

$$V_{CB} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R}{R + r_1 + r_2} = IR$$



电势“走位”图



$$V_B = V_B - Ir_1 + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - Ir_2 - IR \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}$$

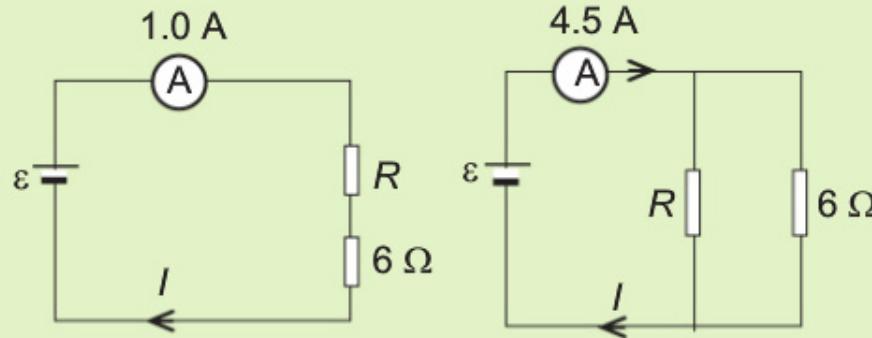
$$V_A = V_B - Ir_1 + \mathcal{E}_1$$

$$V_A - V_B = \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} r_1$$

$$V_{AB} = \frac{\mathcal{E}_1(R + r_1 + r_2) - (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)r_1}{R + r_1 + r_2}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_1 R + \mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{R + r_1 + r_2}$$

$$V_{CB} = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)R}{R + r_1 + r_2} = IR$$



如上两图所示，两个电阻分别以不同的方式连接到电路上。各电路上的电流强度如图中电流计所示。
求电池的电动势与电阻 R 的电阻值。

左电路图中，

$$\begin{aligned}\varepsilon &= I(R + 6) \\ \varepsilon &= 1.0(R + 6) \dots \dots (1)\end{aligned}$$

右电路图中，

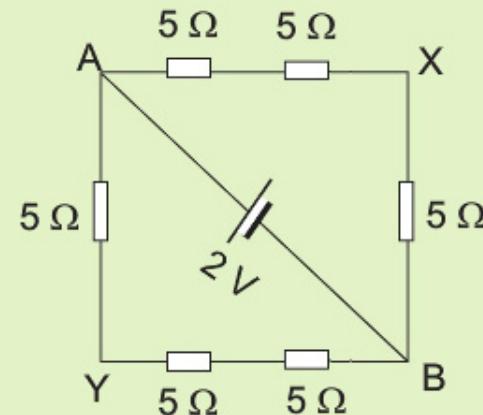
$$\begin{aligned}\varepsilon &= I \times \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{6}\right)^{-1} \\ \varepsilon &= 4.5 \times \frac{6R}{R + 6} \dots \dots (2)\end{aligned}$$

$$(1) = (2)$$

$$\begin{aligned}1.0(R + 6) &= 4.5 \times \frac{R \times 6}{R + 6} \\ R^2 + 12R + 36 &= 27R \\ R^2 - 15R + 36 &= 0\end{aligned}$$

$$R = 3 (\Omega) \quad \text{或} \quad R = 12 \Omega$$

$$\varepsilon = 9 (\text{V}) \quad \text{或} \quad V = 18 \text{ V}$$



求上图中 XY 两点间的电势差， V_{XY} 。

上图可化简为右图，因此

$$I_X = \frac{2}{5 + 5 + 5} = \frac{2}{15} \text{ A}$$

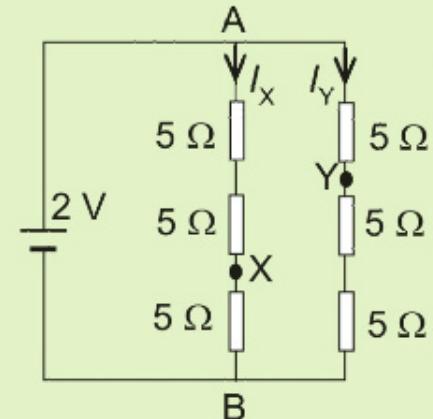
$$I_Y = \frac{2}{5 + 5 + 5} = \frac{2}{15} \text{ A}$$

则

$$V_{XB} = 5I_X = 5 \times \frac{2}{15} = \frac{2}{3} \text{ V}$$

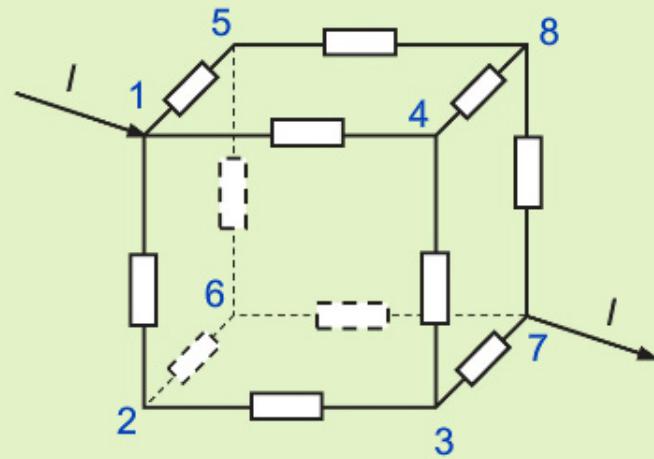
$$V_{YB} = (5 + 5)I_Y = 10 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{3} \text{ V}$$

$$V_{XY} = V_{XB} - V_{YB} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \text{ V}$$





12个相同的电阻在立方体上的等效电阻



由于电路上的电阻是对称分布的，利用电流分流法可知

通过支路 12、14 及 15 的电流大小一样，都等于 $\frac{1}{3}I$ ；通过支路 23、26、43、48、56 及 58 的电流大小一样，都等于 $\frac{1}{6}I$ ；通过支路 37、67 及 87 的电流大小一样，都等于 $\frac{1}{3}I$ 。

再由欧姆定律可得，

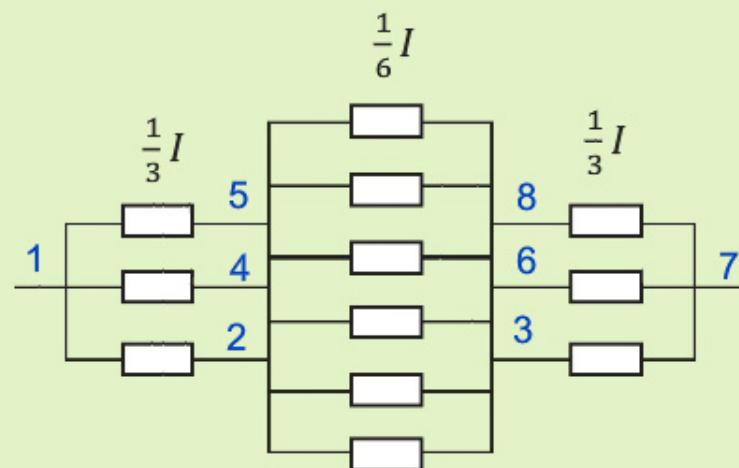
$$V_{12} = V_{14} = V_{15}$$

因此三点的电势也会相等，

$$V_2 = V_4 = V_5$$

可以将此三点连接起来。同理， $V_3 = V_6 = V_8$ ，此三点也可以连接起来。

等效电路图可化简如下，

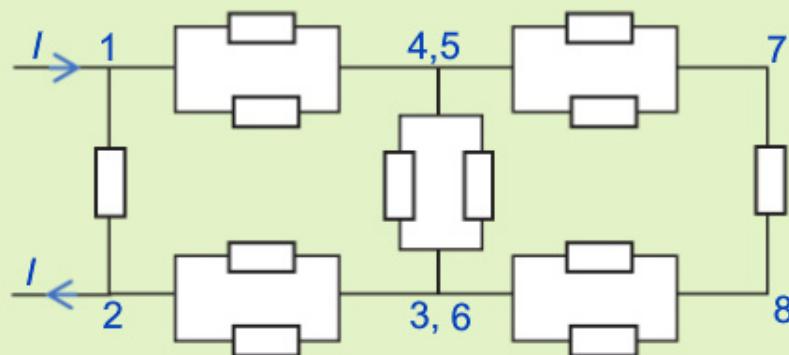
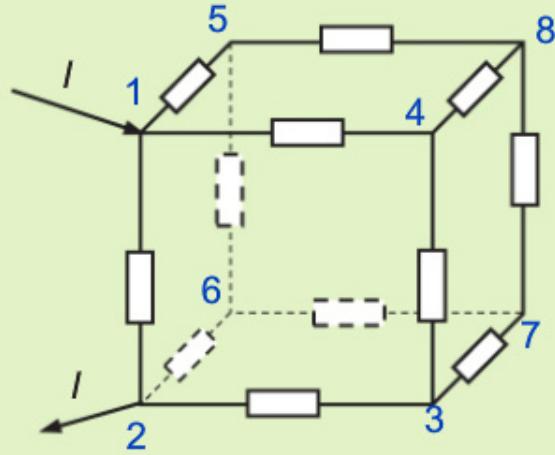


$$\begin{aligned} V_{17} &= IR_{17} \\ &= V_{14} + V_{46} + V_{67} \\ &= \frac{I}{3}R + \frac{I}{6}R + \frac{I}{3}R \\ &= I\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)R \end{aligned}$$

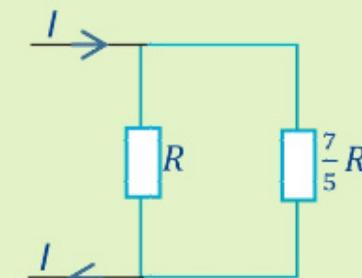
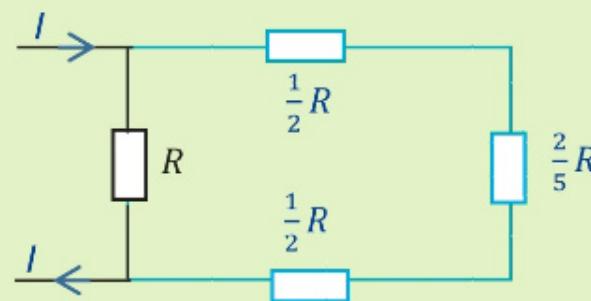
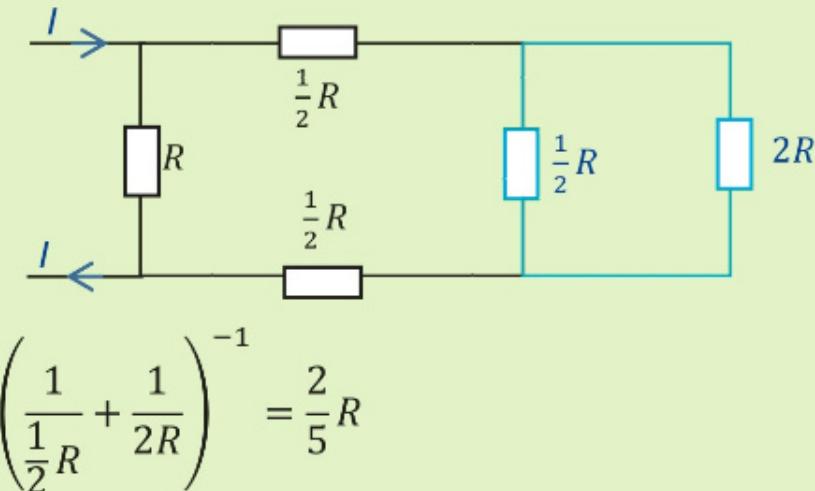
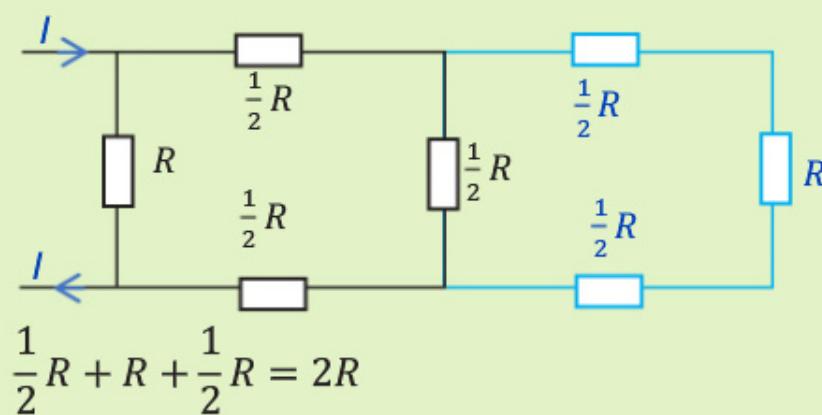
$$R_{17} = \frac{5}{6}R$$



12个相同的电阻在立方体上的等效电阻



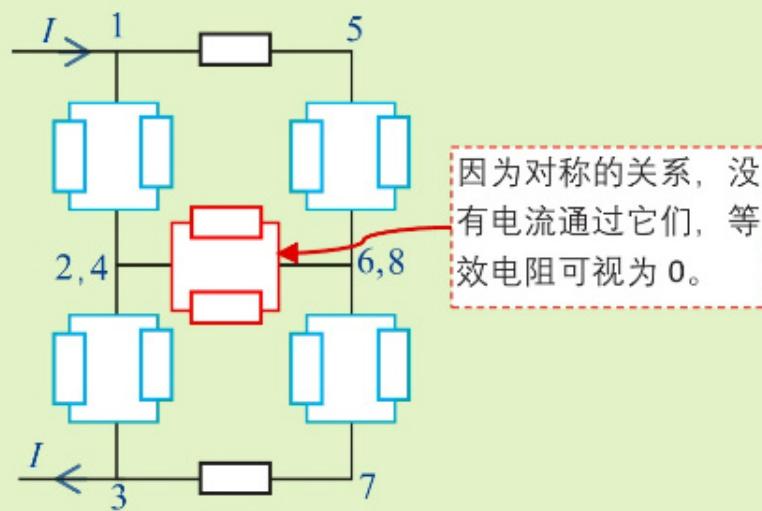
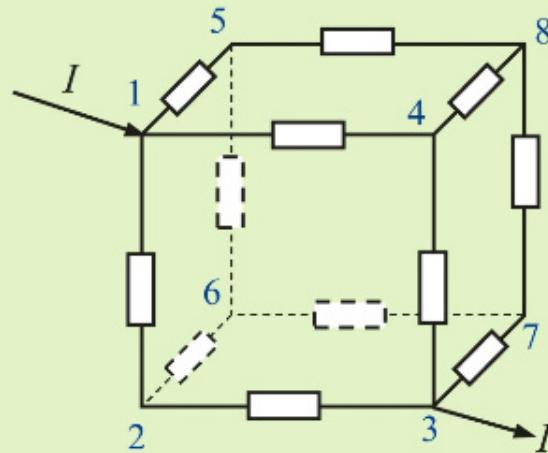
$$\text{两个相同电阻并联的等效电阻: } \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{1}{2}R$$



$$R_{12} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{7}{5}R}\right)^{-1} = \frac{7}{12}R$$

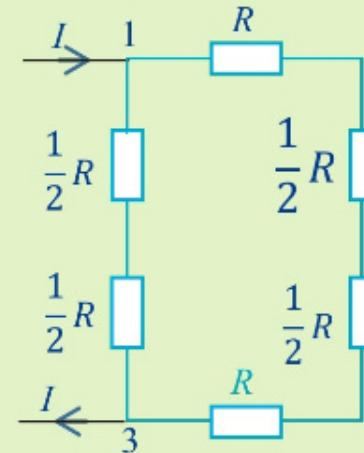


12个相同的电阻在立方体上的等效电阻



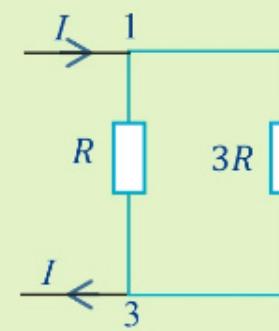
由于对称关系，24与68之间没有电流流通，

$$R_{12} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{1}{2}R$$



$$R_{13} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = R$$

$$R_{13}' = \frac{1}{2R} + R + \frac{1}{2R} = 3R$$



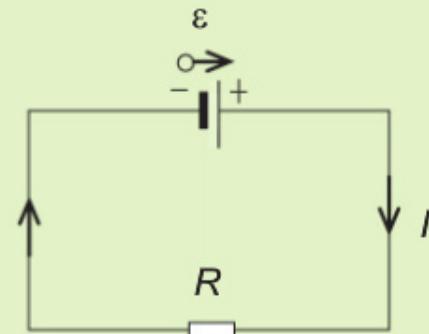
$$R_{13} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}\right)^{-1} = \frac{3}{4}R$$



电路内电势的变化

电池的电动势 ε 会随着电池使用时间而变得越来越降低。同时，随着电流通过电阻器 R 也会使得电阻值越来越大。因此，

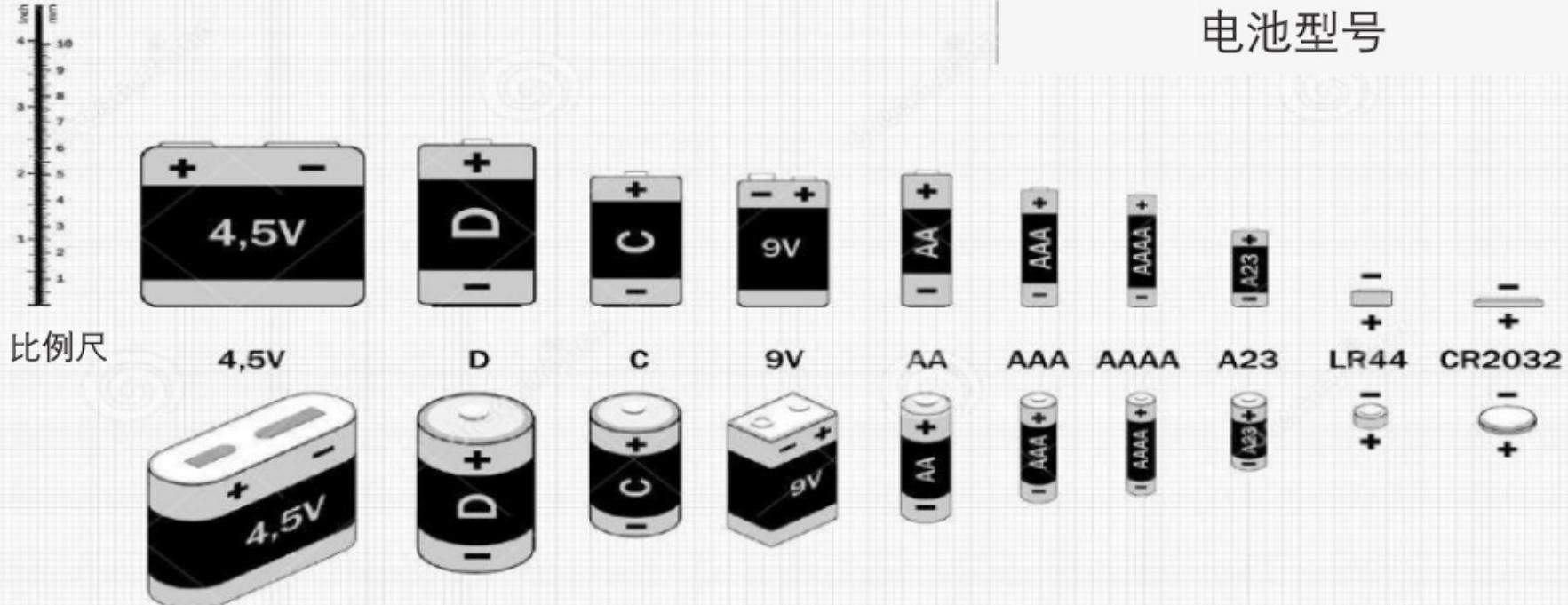
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \frac{dR}{dt}$$



假设上图中 $R = 600 \Omega$, $I = 0.04 \text{ A}$, $\frac{dR}{dt} = 0.5 \Omega \text{ s}^{-1}$ 及 $\frac{d\varepsilon}{dt} = -0.01 \text{ V s}^{-1}$ 。求 $\frac{dI}{dt}$ 。

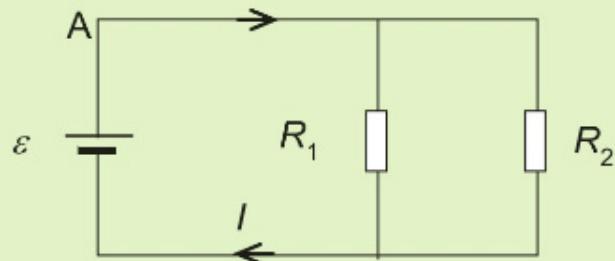
$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \frac{dR}{dt} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= R \frac{dI}{dt} + I \frac{dR}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-0.01 &= 600 \frac{dI}{dt} + 0.04 \times 0.5 \\ \frac{dI}{dt} &= -5.0 \times 10^{-5} \text{ A s}^{-1}\end{aligned}$$





变化电阻



上述电路由两个阻值会改变的 R_1 及 R_2 并联，则

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$(-1) \frac{1}{R^2} dR = (-1) \frac{1}{R_1^2} dR_1 + (-1) \frac{1}{R_2^2} dR_2$$

$$dR = \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2} \right)^2 dR_2$$

(a) 假设 $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 400 \Omega$,

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \times 400}{100 + 400} = 80 \Omega$$

$$dR = \left(\frac{80}{100} \right)^2 dR_1 + \left(\frac{80}{400} \right)^2 dR_2 \\ = 0.64 dR_1 + 0.04 dR_2$$

由上式可看出总电阻受 R_1 的变化影响较大。

(b) 假设 R_1 从 20.0Ω 变为 20.1Ω , 而 R_2 从 25.0Ω 变为 24.9Ω , 则

上述电路的总电阻,

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20.0 \times 25.0}{20.0 + 25.0} \\ = 11.1 \Omega$$

$$dR = \left(\frac{11.1}{20.0} \right)^2 (0.1) + \left(\frac{11.1}{25.0} \right)^2 (-0.1) \\ = 0.031 - 0.0197 \\ = 0.011$$

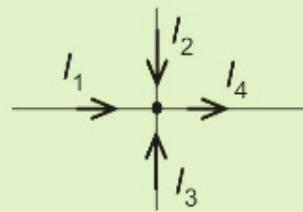
由上式可得总电阻的变化百分比为

$$\frac{dR}{R} \times 100\% = \frac{0.011}{11.1} \times 100\% \\ = 0.10\%$$



基尔霍夫定则 Kirchhoff's Laws

基尔霍夫定则(1) 节点定则/电流定则 (KCL)



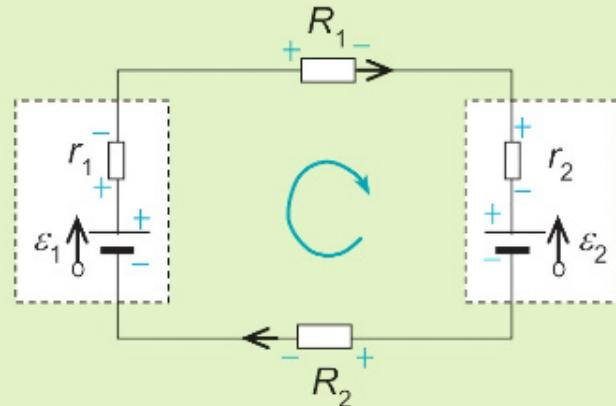
根据电荷量守恒原理，

设定流入节点的电流为正，流出的为负，则对任何一个节点的总电流之和为零。

$$\sum I = 0$$

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

基尔霍夫定则(2) 回路定则 (KVL)

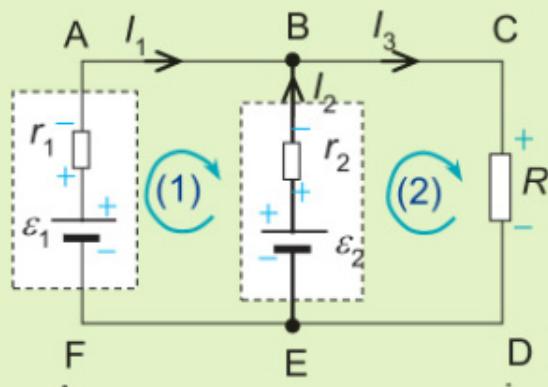


根据能量守恒原理，

设定电势差增加为正，电势差减少的为负，则对任何一个回路的总电势差之和为零。

$$\sum V = 0$$

$$\varepsilon_1 - I r_1 - I R_1 - I r_2 - \varepsilon_2 - I R_2 = 0$$



上图的电路中， $\varepsilon_1 = 6 \text{ V}$, $\varepsilon_2 = 3 \text{ V}$, $r_1 = r_2 = 1 \Omega$, $R = 10 \Omega$.

求各支路上的电流。

$$\text{对节点 B: } I_1 + I_2 - I_3 = 0 \dots \dots (1)$$

$$\text{对回路 (1): } \varepsilon_1 - I_1 r_1 + I_2 r_2 - \varepsilon_2 = 0$$

$$6 - I_1 + I_2 - 3 = 0$$

$$I_1 - I_2 + 0 = -3 \dots \dots (2)$$

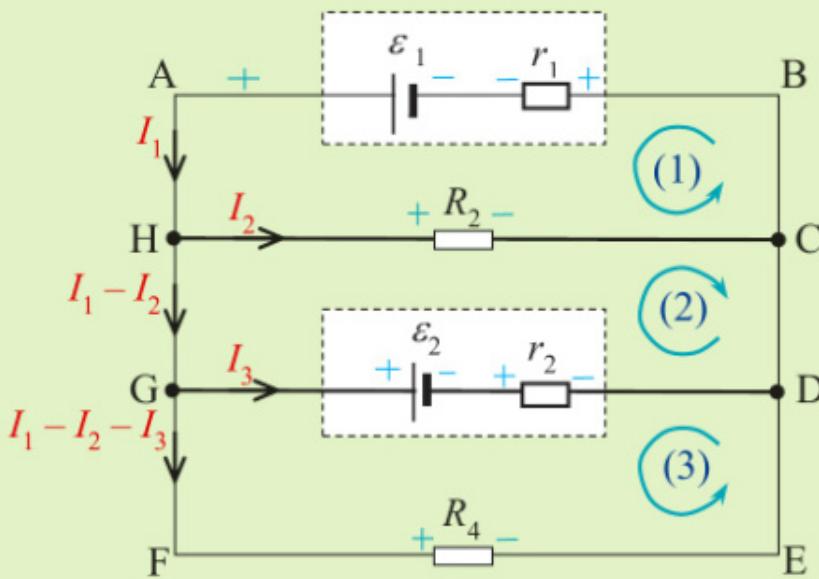
$$\text{对回路 (2): } \varepsilon_2 - I_2 r_2 - I_3 R = 0$$

$$3 - I_2 - 10I_3 = 0$$

$$0 + I_2 + 10I_3 = 3 \dots \dots (3)$$

可由上三式解得，

$$I_1 = 1.714 \text{ A}, I_2 = -1.286 \text{ A}, I_3 = 0.428 \text{ A}$$



上图中 $\varepsilon_1 = 3 \text{ V}$, $r_1 = 1 \Omega$, $\varepsilon_2 = 2 \text{ V}$, $r_2 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, 求 I_1 , I_2 及 I_3 。

对回路 (1) 而言,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 - I_2 R_2 - I_1 r_1 &= 0 \\ 3 - I_2 \times 2 - I_1 \times 1 &= 0 \\ I_1 + 2I_2 + 0 &= 3 \dots \dots (1)\end{aligned}$$

对回路 (2) 而言,

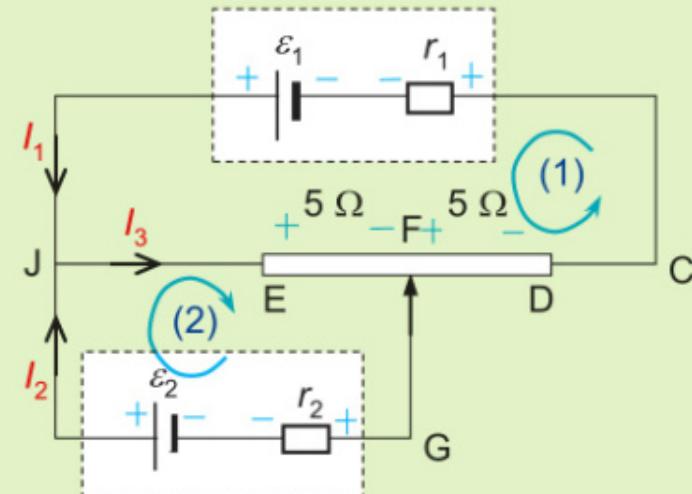
$$\begin{aligned}\varepsilon_2 - I_2 R_2 + I_3 r_2 &= 0 \\ 2 - I_2 \times 2 + I_3 \times 1 &= 0 \\ 0 + 2I_2 - I_3 &= 2 \dots \dots (2)\end{aligned}$$

对回路 (3) 而言,

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 - (I_1 - I_2 - I_3)R_4 + I_3 r_2 &= 0 \\ 2 - (I_1 - I_2 - I_3) \times 4 + I_3 \times 1 &= 0 \\ 4I_1 - 4I_2 - 5I_3 &= 2 \dots \dots (3)\end{aligned}$$

可由上三式解得,

$$I_1 = 1.18 \text{ A}, I_2 = 0.91 \text{ A}, I_3 = -0.18 \text{ A}$$



上图中 $\varepsilon_1 = 10 \text{ V}$, $r_1 = 2 \Omega$, $\varepsilon_2 = 3 \text{ V}$, $r_2 = 3 \Omega$, $R_{EF} = 5 \Omega$, $R_{FD} = 5 \Omega$, 求 I_1 , I_2 , I_3 及 V_{HB} 。

由上图可看出 $I_{EF} = I_3$, $I_{FD} = I_1$, $I_{FG} = I_2$
对节点 J 而言,

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \dots \dots (1)$$

对回路 (1) 而言,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 - I_{EF} R_{EF} - I_{FD} R_{FD} - I_1 r_1 &= 0 \\ 10 - I_3 \times 5 - I_1 \times 5 - I_1 \times 2 &= 0 \\ 7I_1 + 0 + 5I_3 &= 10 \dots \dots (2)\end{aligned}$$

对回路 (2) 而言,

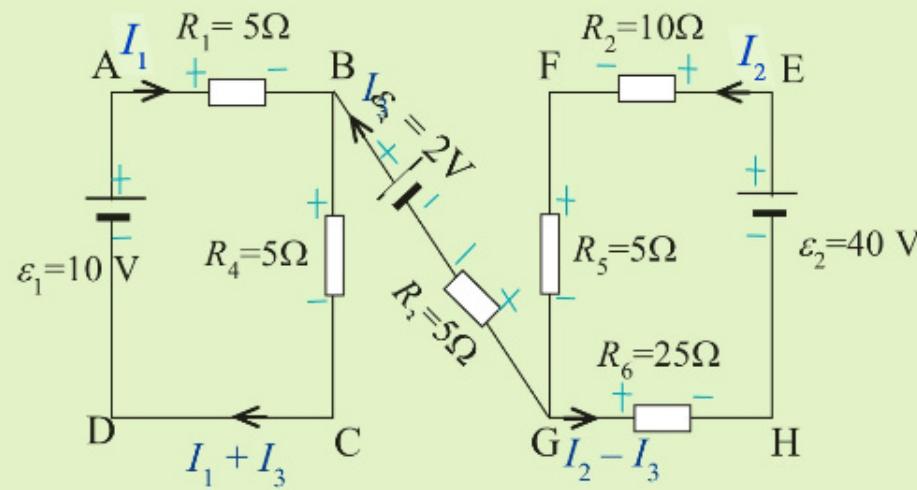
$$\begin{aligned}\varepsilon_2 - I_{EF} R_{EF} - I_2 r_2 &= 0 \\ 3 - I_3 \times 5 - I_2 \times 3 &= 0 \\ 0 + 3I_2 + 5I_3 &= 3 \dots \dots (3)\end{aligned}$$

可由上三式解得,

$$I_1 = \frac{65}{71} \text{ A}, I_2 = -\frac{14}{71} \text{ A}, I_3 = \frac{51}{71} \text{ A}$$

从图中沿 HJEFDB 分析, $V_H - I_{EF} R_{EF} - I_{FD} R_{FD} = V_B$

$$\begin{aligned}V_H - V_B &= I_{EF} R_{EF} + I_{FD} R_{FD} = \frac{51}{71} \times 5 + \frac{65}{71} \times 5 \\ &= 8 \frac{12}{71} \text{ V}\end{aligned}$$



各电池的电动势及电阻的阻值如图所示，求 V_{CF} 。

由于 ABCDA 及 EFGHE 是两个个别独立的回路，它们之间的连接 (B、G 两点) 不是一个完整的环路，所以没有电流的流通，即 $I_3 = 0$ 。

对回路 ABCDA 而言，

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 - I_1 R_1 - I_1 R_4 &= 0 \\ 10 - 5I_1 - 5I_1 &= 0 \\ I_1 &= 1 \text{ A}\end{aligned}$$

对回路 EHGFE 而言，

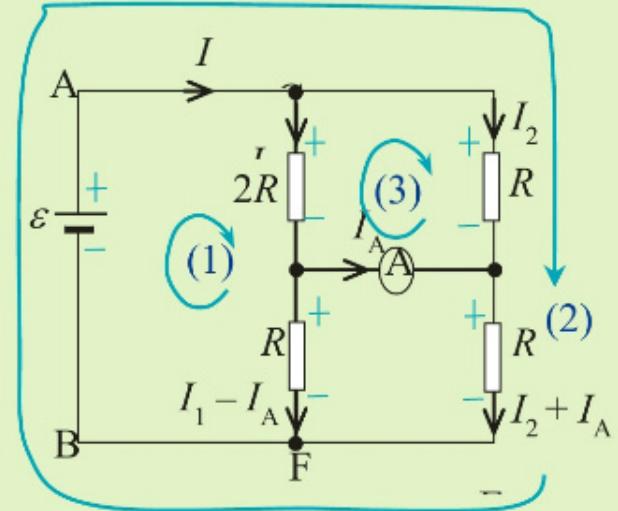
$$\begin{aligned}\varepsilon_2 - I_2 R_2 - I_2 R_5 - I_2 R_6 &= 0 \\ 40 - 10I_2 - 5I_2 - 25I_2 &= 0 \\ I_2 &= 1 \text{ A}\end{aligned}$$

从 C 点开始沿 N 线路一直到 F 点，

$$\begin{aligned}V_C + I_1 R_4 - \varepsilon_3 + I_3 R_3 + I_2 R_5 &= V_F \\ V_C + 1 \times 5 - 2 + 5 \times 0 + 5 \times 1 &= V_F \\ V_C - V_F &= -8 \text{ V}\end{aligned}$$

假设 $V_C = 0$ ，

则 $V_A = 10 \text{ V}, V_B = 5 \text{ V}, V_G = 3 \text{ V}, V_F = 8 \text{ V}, V_E = 18 \text{ V}, V_H = -22 \text{ V}$ 。



以 ε 及 R 表示通过电流计的电流 I_A 。

对回路(1)而言，

$$\begin{aligned}\varepsilon - I_1 \times 2R - (I_1 - I_A)R &= 0 \\ 3RI_1 + 0 - RI_A &= \varepsilon \dots \dots (1)\end{aligned}$$

对回路(2)而言，

$$\begin{aligned}\varepsilon - I_2 \times R - (I_2 + I_A)R &= 0 \\ 0 + 2RI_2 + RI_A &= \varepsilon \dots \dots (2)\end{aligned}$$

对回路(3)而言，

$$\begin{aligned}I_1 \times 2R - I_2 \times R &= 0 \\ 2I_1 &= I_2 \dots \dots (3)\end{aligned}$$

带入(2)

$$\begin{aligned}0 + 2R \times 2I_1 + RI_A &= \varepsilon \\ 0 + 4RI_1 + RI_A &= \varepsilon \dots \dots (4)\end{aligned}$$

$$3(4) - 4(1)$$

$$\begin{aligned}3RI_A + 4RI_A &= -\varepsilon \\ I_A &= -\frac{\varepsilon}{7R}\end{aligned}$$



启动汽车的跳线

当汽车就蓄电池 ($\varepsilon_2 = 10.1 \text{ V}$, $r_2 = 0.10 \Omega$) 使用一段时间变“弱”后，会发生无法启动的情况。可以利用跳线的方式，将一个新的蓄电池 ($\varepsilon_1 = 12.5 \text{ V}$, $r_2 = 0.02 \Omega$) 与它并联，这样就可以让它重新启动。假设每条跳线的长度、直径及电阻率分别为 3.0 m , 0.50 cm 及 $1.68 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ 。启动器的电阻 R 为 0.15Ω 。求，

- (a) 跳线的电阻
- (b) 启动时，通过各蓄电池的电流。

(a) 已知: $l = 3.0 \text{ m}$, $r = 0.25 \times 10^{-2} \text{ m}$, $\rho = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$,

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{l}{A} \\ &= 1.68 \times 10^{-8} \times \frac{3.0}{\pi \times (0.25 \times 10^{-2})^2} \\ &= 2.57 \times 10^{-3} \Omega \end{aligned}$$

(b) 启动时，通过各蓄电池的电流。

根据回路定则，

对大回路而言，

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - 2I_1 R_j - I_1 r_1 - (I_1 + I_2)R &= 0 \\ 12.5 - I_1(2 \times 0.00257 + 0.020) - (I_1 + I_2)0.15 &= 0 \\ 0.17514I_1 + 0.15I_2 &= 12.5 \dots (1) \end{aligned}$$

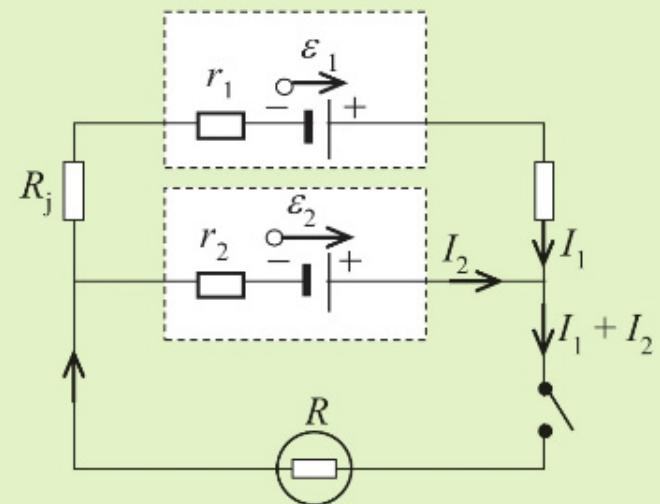
对小回路而言，

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 - I_2 r_2 - (I_1 + I_2)R &= 0 \\ 10.1 - I_2(0.10) - (I_1 + I_2)0.15 &= 0 \\ 0.15I_1 + 0.25I_2 &= 10.1 \dots \dots (2) \end{aligned}$$

解 (1) 及 (2)

$$I_1 = 75.64 \text{ (A)}, I_2 = -4.98 \text{ A}$$

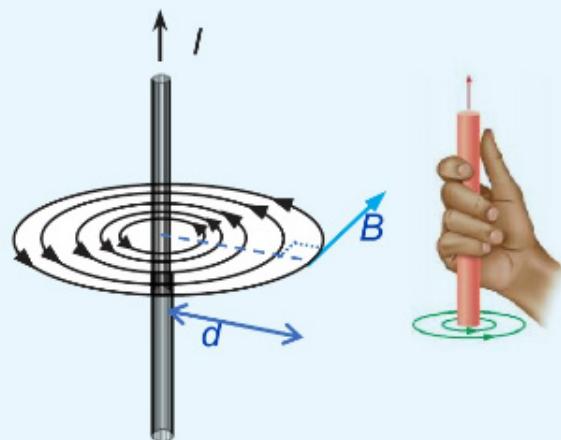
其中 I_2 的电流方向与所设定的方向相反。





磁场

通电长直导线



通电长直导线磁感应强度的大小,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

 μ_0 : 真空中的磁导率,

$$4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$$

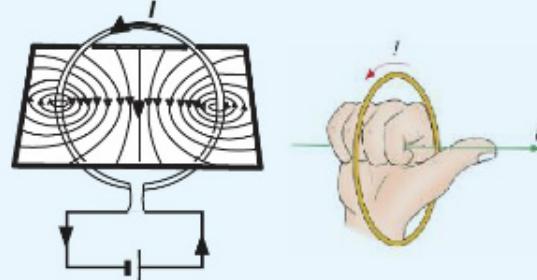
I: 通过导线的电流强度

d: 该点与导线的垂直距离

通电长直导线感应的磁场方向可用安培右手螺旋定则来判断:

用右手握着导线, 伸直的拇指指向电流方向, 弯曲的四根手指方向即是感应磁场方向。

通电环形电路



通电环形电路中央磁感应强度的大小,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

 μ_0 : 真空中的磁导率,

$$4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$$

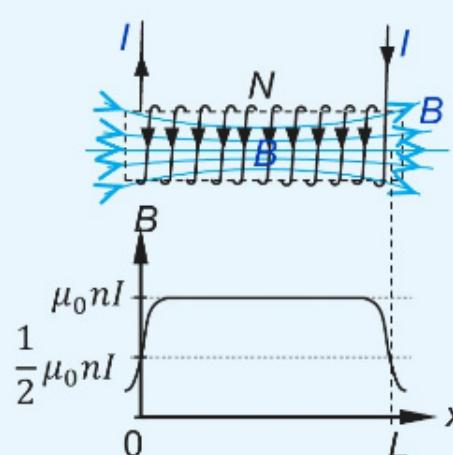
I: 通过导线的电流强度

r: 环形电路的半径

通电长直导线感应的磁场方向可用安培右手螺旋定则来判断:

用右手握着导线, 伸直的拇指指向电流方向, 弯曲的四根手指方向即是感应磁场方向。

通电螺线管



通电螺线管内部磁感应强度的大小,

$$B_{\text{内}} = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

通电螺线管边缘磁感应强度的大小,

$$B_{\text{边}} = \frac{1}{2} \mu_0 n I = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N}{L} I$$

通电长直导线感应的磁场方向可用安培右手螺旋定则变型来判断:

用右手握着导线, 伸直的拇指指向电流方向, 弯曲的四根手指方向即是感应磁场方向。

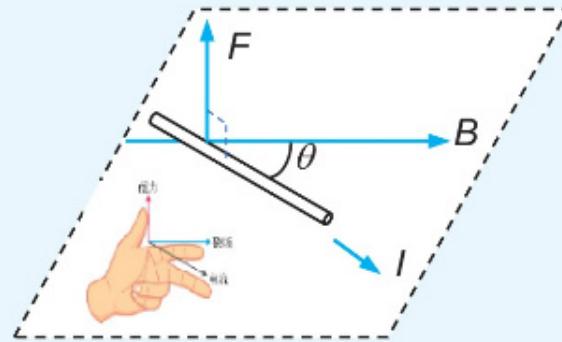
通电电路磁感应强度受电流强度, 导线的几何形状及介质的磁导率影响

如果有介质存在的情形下, 上述公式中的磁导率 $\mu = \mu_0 \mu_r$, 其中 μ_r 为介质的相对磁导率



磁力 (一)

通电长直导线的磁力



磁场对通电导线的安培力,

$$\vec{F} = \vec{I} \vec{L} \times \vec{B}$$

磁力的大小

$$F = ILB \sin\theta$$

I : 电流强度

L : 导线相对于磁场的长度

B : 磁感应强度

θ : 磁感应强度与电流间的夹角

$\theta = 90^\circ, F = ILB$

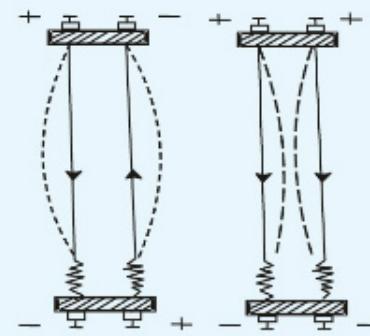
$\theta = 0, F = 0$

磁场对通电导线的安培力的方向可用**佛林民左手定则**判断:

伸展左手的食指、中指与拇指，使得三指互相垂直，以食指、中指分别代表磁场及电流的方向，则拇指的指向就是磁力的方向。

注：磁场与电流方向可不垂直

两平行通电直导线



两条通电导线之间也可以理解为各自导线感应磁场，另一条带电导线置于其内，单位长度导线所受安培力的大小

$$F = I_1 LB_2$$

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

I_1, I_2 : 各导线的电流强度

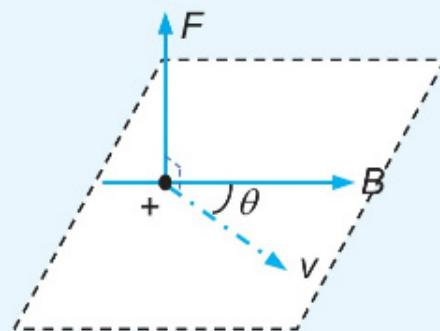
d : 两导线间的距离

磁场对通电导线的安培力的方向可用**佛林民左手定则**判断；或更简洁，当两电流同向时，两导线相吸，反之相斥。



磁力 (二)

磁场中的运动电荷



运动中的带电粒子就好似带电导线在磁场内，它在磁场内所受到的洛伦兹力为，

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

磁力大小为，

$$F = qvB \sin\theta$$

q : 电荷量

v : 电荷运动速率

θ : 磁感应强度与电荷运动方向的夹角

其方向可用**佛林民左手定则**判断。

如果 $v // B$, $F = 0$

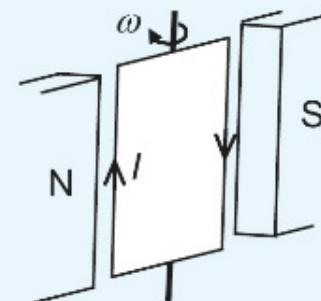
$F \perp B, F \perp v$, 因此磁力对运动中的电荷没有做功。

由于 $F \perp v$, 因此磁力为一向心力, 电荷做匀速率圆周运动,

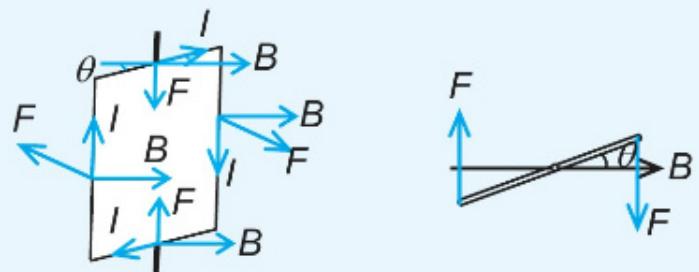
$$qvB = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

$$r = \frac{mv}{qB}; T = \frac{2m\pi}{qB}$$

绕组线圈



绕组线圈在磁场中各边各自受力，



磁力使线圈绕着转轴产生转矩，

$$\tau = BINAc \cos\theta$$

B : 磁感应强度

I : 线圈电流强度

N : 线圈匝数

A : 线圈面积, 可任意形状

θ : 磁感应强度与线圈的夹角

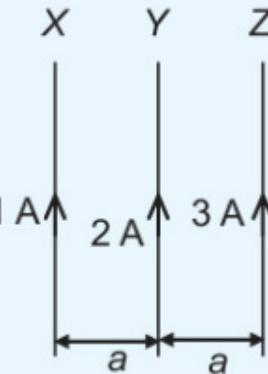
注: 无论线圈形状如何, A 一定会导回长方形面积

此绕组线圈多应用在直流马达、扩音器、动圈式仪表 ($\tau = k\theta$) 等。



如图所示，三条平行导线上的电流各为 1 A、2 A 及 3 A，求它们所受的磁力之比， $F_X:F_Y:F_Z$ 。

$$\begin{aligned} F_X &= F_{YX} + F_{ZX} \\ &= \frac{\mu_0 I_X I_Y}{2\pi d_{XY}} L + \frac{\mu_0 I_X I_Z}{2\pi d_{XZ}} L \\ &= \frac{\mu_0 (1 \times 2)}{2\pi a} L + \frac{\mu_0 (1 \times 3)}{2\pi \times 2a} L \\ &= \frac{7}{2} \times \frac{\mu_0}{2\pi a} L \quad (\rightarrow) \end{aligned}$$



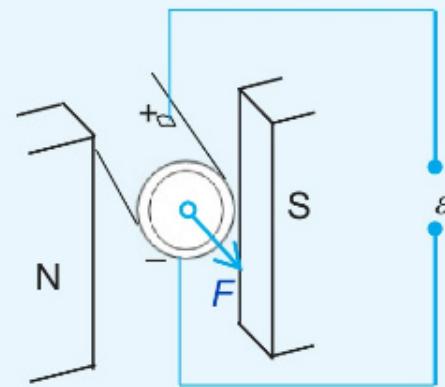
同理，

$$\begin{aligned} F_Y &= F_{ZY} - F_{XY} \\ &= \frac{\mu_0 (2 \times 3)}{2\pi a} L - \frac{\mu_0 (1 \times 2)}{2\pi a} L \\ &= 4 \times \frac{\mu_0}{2\pi a} L \quad (\rightarrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Z &= F_{XZ} + F_{YZ} \\ &= \frac{\mu_0 (1 \times 3)}{2\pi \times 2a} L + \frac{\mu_0 (2 \times 3)}{2\pi a} L \\ &= \frac{15}{2} \times \frac{\mu_0}{2\pi a} L \quad (\leftarrow) \end{aligned}$$

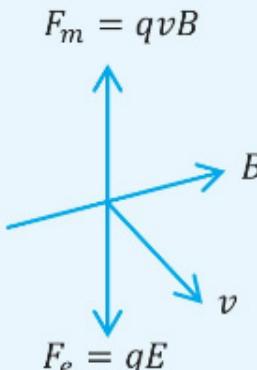
$$F_X:F_Y:F_Z = \frac{7}{2}:4:\frac{15}{2} = 7:8:15$$

人工心脏的电磁泵浦



对血液中的正离子而言，

$$\begin{aligned} F_e &= F_m \\ qE &= qvB \\ v &= \frac{E}{B} \end{aligned}$$



所以我们可以利用电场与磁场强度来控制血液中带电离子的流速。假设血管的直径 2.0 mm，磁场为 0.080 T，上下两端的电压为 0.10 mV，求血液中带电离子的流速。

$$\begin{aligned} v &= \frac{E}{B} \\ &= \frac{V}{d} \\ &= \frac{0.10 \times 10^{-3}}{2.0 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{0.080}{0.080} \\ &= 0.63 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$



质谱仪是一种测定带电粒子质量和分析同位素的重要设备，它的构造原理如图所示。设离子源 A 产生电荷量为的离子束（速度可看作为零），经电压为 V 的电场加速后，进入一平行板电容器 C 中，电场和磁场 B_1 互相垂直，具有某一速度的离子将沿着图中虚直线穿过两极板之间的空间而不发生偏转。

最后，穿过小孔 S 的离子在进入磁感应强度为 B_2 的匀强磁场，经过半个圆周，打到照相底片上的 P 点，测得 $PS = d$ ，问：

- (a) 离子带正电还是负电？
 - (b) 离子进入磁场 B_2 时的速度是多少？
 - (c) 离子的质量是多少？
- (a) 由于磁力必须与静电力互相抵消，所以可判断离子是带正电的。

(b) 离子束是由离子源 A 的电压 V 从静止加速到 v，

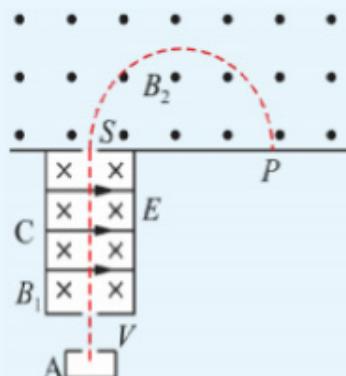
$$qV = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

离子在电容器中的磁力必须与静电力互相抵消，

$$qvB_1 = qE$$

$$v = \frac{E}{B_1}$$



董总编高中物理下册

离子在进入磁感应强度为 B_2 的匀强磁场，

$$qvB_2 = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \frac{qB_2 d}{2m}$$

或

$$qvB_2 = \frac{mv^2}{r} = \frac{2qV}{\frac{d}{2}}$$

$$v = \frac{4V}{B_2 d}$$

(c) 离子的质量，

$$r = \frac{mv}{qB_2}$$

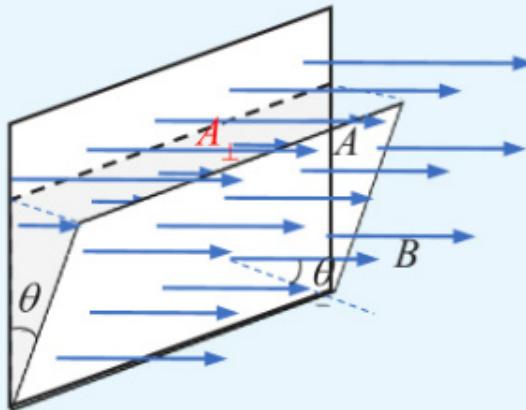
$$m = \frac{qB_2 r}{v} = \frac{qB_2 \frac{d}{2}}{\frac{E}{B_1}} = \frac{qB_1 B_2 d}{2E}$$

或

$$m = \frac{qB_2 r}{v} = \frac{qB_2 \frac{d}{2}}{\frac{4V}{B_2 d}} = \frac{qB_2^2 d^2}{8V}$$



磁通量

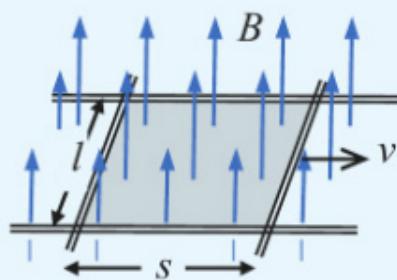


通过某一封闭面积的磁场线的数量

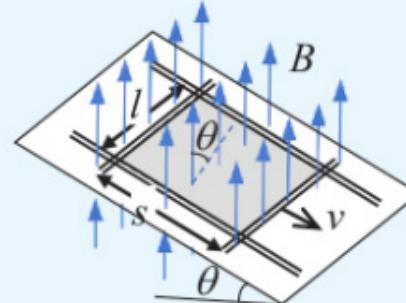
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA_{\perp} = BA \cos \theta$$

B : 磁通量密度 A : 封闭面积 θ : 磁场线与面积的法线间的夹角

通电轨道

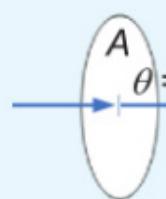


$$\Phi = BA \cos 0^\circ = Bls$$

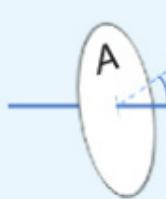


$$\Phi = BA \cos \theta = Bls \cos \theta$$

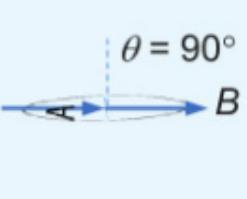
通电线圈



$$\Phi = BA \cos 0^\circ = Bls$$



$$\Phi = BA \cos \theta = Bls \cos \theta$$



$$\Phi = BA \cos 90^\circ = 0$$

物理量	符号	SI制单位
磁通量密度	B	T 或 Wb m^{-2}
磁通量	Φ	Wb
面积	A	m^2



电磁感应

磁通量随时间持续变化即会感应电动势，

法拉第电磁感应定律

任何封闭回路中的感应电动势的大小，与穿过回路的磁通量变化率成正比，与线圈的匝数成正比。

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{dB A \cos\theta}{dt}$$

楞次定律

感应电流的方向，即是所感应出来的磁场总是阻碍初始磁场的变化。



N 持续在变化

如果线圈法线与磁场夹角为 θ ，

$$\varepsilon = -BA \cos\theta \frac{dN}{dt}$$

B 持续在变化



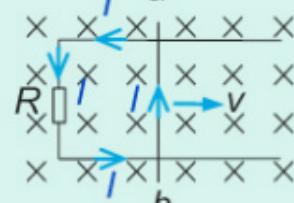
垂直进入的
磁场 B 持续
变化

N 线圈法线与磁场夹角
为 0° ，

$$\varepsilon = -NA \cos\theta \frac{dB}{dt}$$

$$= NA \frac{dB}{dt}$$

A 持续在变化



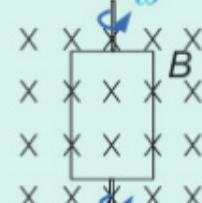
一个线圈法线与磁场夹角
为 0° ，

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -B \cos\theta \frac{dA}{dt} \\ &= Blv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= B \left(\frac{1}{2} L^2 \delta\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} BL^2 \omega \delta t \quad (\text{转盘}) \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} BL^2 \omega$$

θ 持续在变化



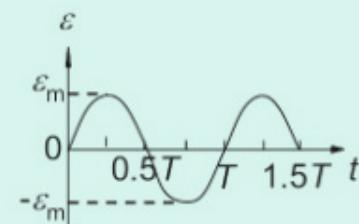
(发电机)

N 线圈法线与磁场中旋转，

$$\varepsilon = -NBA \frac{dcos\omega t}{dt}$$

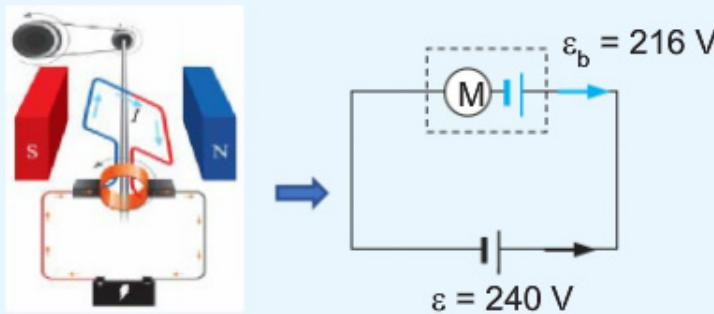
$$= NBA\omega sin\omega t$$

$$= \varepsilon_m sin\omega t$$





直流电动机的反势



直流电动机起动后，线圈转动时会持续切割磁感线，根据楞次定律，它会感应出与原电动机驱动电动势方向相反的反电动势， ε_b 。此反电动势会阻碍驱动电动机的转动。

注意：电动机，开始启动时，线圈的转速很慢，感应的反电动势很小，可以忽略不计。当它快速转动时，感应的反电动势就一定要列入考量。

【例】

某一额定电压为 240 V 电动机内绕组的阻值为 10.0Ω 。正常工作时的反电动势为 216 V。求

- (a) 电动机开始转动时的电路上电流，
- (b) 电动机全速转动时的电路上的电流，
- (c) 电动机的输出功率。

(a) 电动机开始转动时的电路上电流，

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{240}{10} = 10 \text{ A}$$

(b) 电动机全速转动时的电路上的电流，

$$\begin{aligned} I &= \frac{\varepsilon - \varepsilon_b}{R} \\ &= \frac{240 - 216}{10} \\ &= 2.4 \text{ A} \end{aligned}$$

(c) 电动机的输出功率。

$$\begin{aligned} P_{\text{输出}} &= P_{\text{输入}} - P_{\text{消耗}} \\ &= I\varepsilon - I^2R \\ &= 2.4 \times 240 - 2.4^2 \times 10 \\ &= 518.4 \text{ W} \end{aligned}$$

注意：

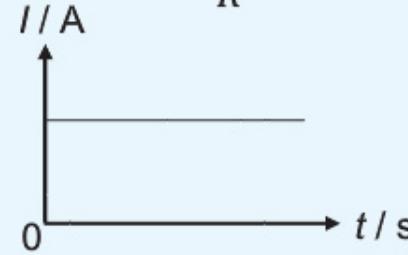
电动机开始启动时的操作电流非常大 (24 A)，经常会造成灯管“闪烁”一下。如果这启动刹那时，马达的线圈卡住没有转动，在驱动电源的驱动下，马达处于超载情况，它可能会将“烧坏”或“熔掉”马达。



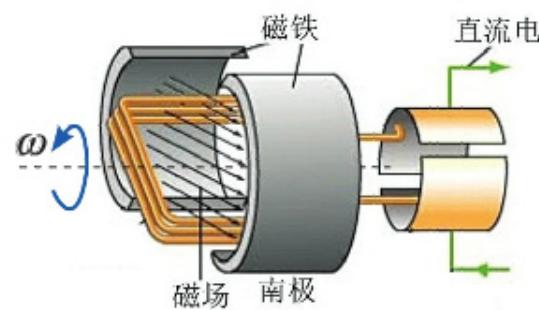
稳定电流



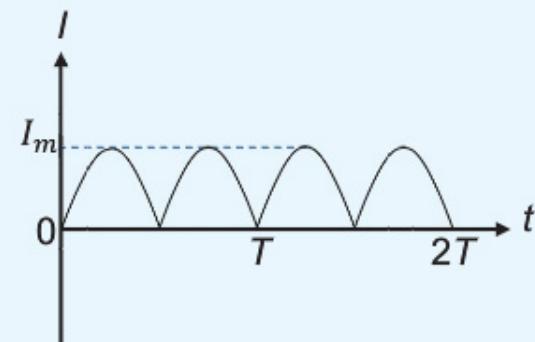
$$I = \frac{\epsilon}{R}$$



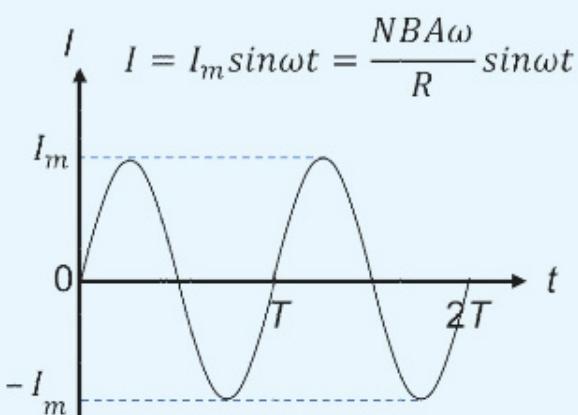
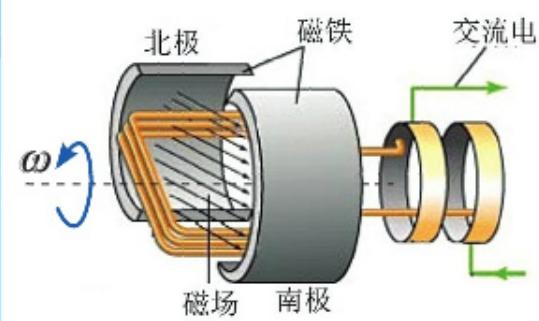
直流电流



$$I = |I_m \sin \omega t|$$



交流电流



交流电参数

N: 线圈匝数

B: 磁感应强度

A: 线圈横截面积

ω: 线圈的转速

R: 电路上的阻抗

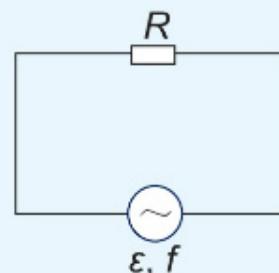
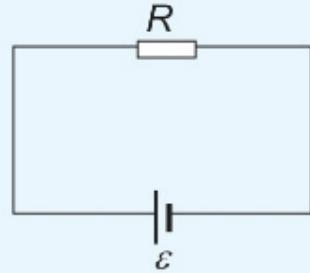




交流电的有效值或方均根值



交流电的有效值或方均根值



让交流电流及稳定电流通过相同阻值的电阻 R ，如果在相同的时间内直流电流与稳定电流对电阻所做的功相等，则此时稳定电流的电流值即为交流电流的有效值或称方均根值， I_{rms} 。

$$\overline{P}_{sc} = \overline{P}_{ac}$$

$$I_{sc}^2 R = I_{ac}^2 R$$

$$I_{sc}^2 = (I_m \sin \omega t)^2$$

$$I_{sc}^2 = I_m^2 \sin^2 \omega t$$

$$= I_m^2 \times \frac{1}{2}$$

$$I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m = 0.707 I_m$$

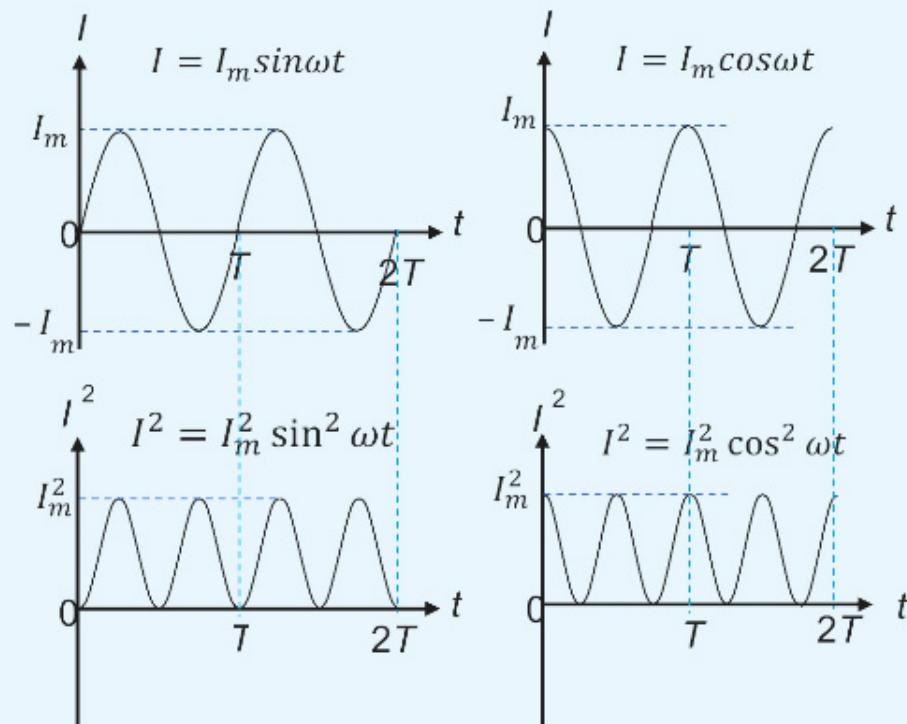
$$V_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m = 0.707 V_m$$

其中 I_m 为交流电流的峰值， V_m 为交流电动势的峰值。

电阻的平均电功率为，

$$\bar{P} = I_{rms} V_{rms} = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} = \frac{1}{2} I_m V_m$$

正弦与余弦平方的平均值，



从图可看出， $\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t}$
且

$$\overline{\sin^2 \omega t} + \overline{\cos^2 \omega t} = 1$$

$$2 \overline{\sin^2 \omega t} = 1$$

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}$$

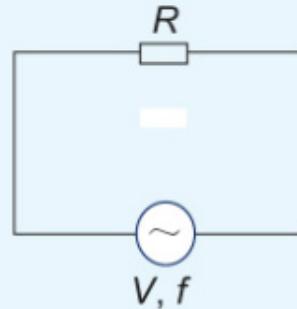
注意：

马来西亚的家庭电源为 240 V 交流电，则其峰值， $V_m = \sqrt{2} \times 240 = 340$ V。如果将美国 ($V_{ac} = 120$ V)、1500 W 的吹风机直接接上我国的电源，则它的平均功率将会变为原来的 4 倍，这会熔断吹风机的加热器或马达的绕线。



交流电路与电抗

电阻



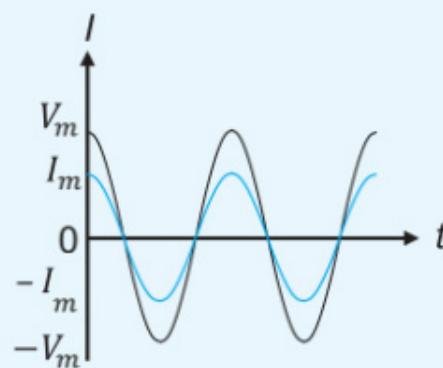
$$V = V_m \cos 2\pi f t$$

$$I = I_m \cos 2\pi f t$$

$$\bar{P} = \overline{IV}$$

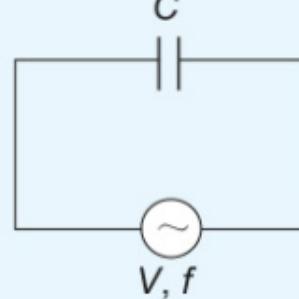
$$= I_{rms}^2 R$$

$$= \frac{V_{rms}^2}{R}$$



对电阻而言，电流与电压是同相位的。

电容器



$$V = V_m \cos 2\pi f t$$

$$V - \frac{Q}{C} = 0$$

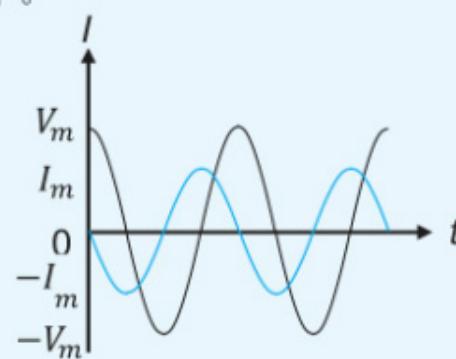
$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_m \cos 2\pi f t}{dt}$$

$$= -2\pi f C V_m \sin 2\pi f t$$

$$X_c = \frac{V_m}{I_m} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\omega C}$$

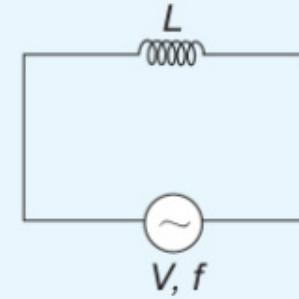
当电压为0时，电容器电板上的电荷为0。电压开始增加时，电荷容易开始在电板上积累，电流最大，即V最小时，I最大。

当电压接近最大值 V_m 时，积累在电板上的电荷会阻止更多的电荷流向电容器，因此电流为0，即V最大时，I最小。



对电容器而言，电流领先电压是 90° 。

电感器



$$V = V_m \cos 2\pi f t$$

$$V - L \frac{dI}{dt} = 0$$

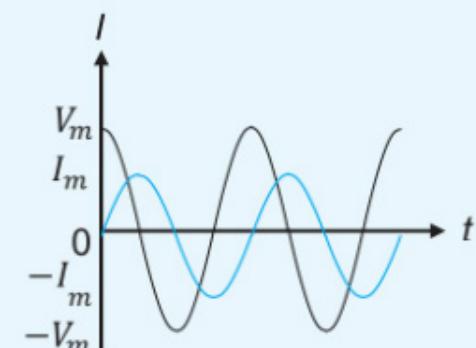
$$I = \int \frac{V_m \cos 2\pi f t}{L} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi f L} V_m \sin 2\pi f t$$

$$X_L = \frac{V_m}{I_m} = 2\pi f L = \omega L$$

当电压为最大值 $+V_m$ 时，I的变化率最大。

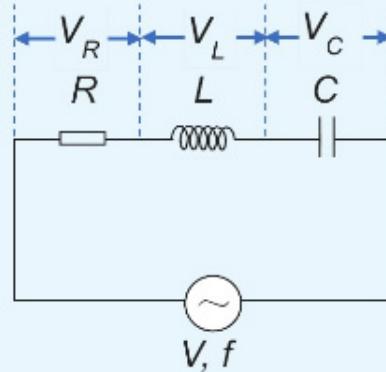
当电压为负最大值 $-V_m$ 时，I的变化率最小。



对电感器而言，电压领先电流是 90° 。



R, L, C 串联交流电路



三者是串联在电路上，所以电流是一样的。

对电阻而言，电流与电压是同相位的。

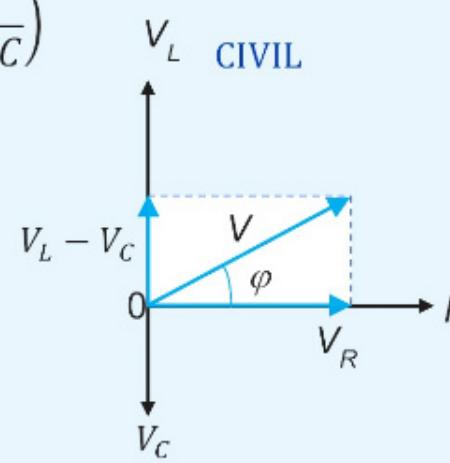
对电容器而言，电流领先电压是 90° (CIV)。

对电感器而言，电压领先电流是 90° (IVL)。

因此它的相应相位图为，

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \\ &= \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} \\ &= I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2} \end{aligned}$$



交流电压与电流的相位差 φ ，

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{V_L - V_C}{V_R} \\ &= \frac{IX_L - IX_C}{IR} \\ &= \frac{X_L - X_C}{R} \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R} \end{aligned}$$

注意：

1. 由于相位差，各个元件电压的峰值或方均根值不是代数和，而是矢量和。
2. 由于电荷不会堆积在电线中，因此每个元件中的电流是同相位的。

交流电路的平均功率为消耗在电阻的平均功率。

对电阻而言，其瞬间功率为

$$P = I^2 R = [I_m \cos(2\pi ft - \varphi)]^2 R$$

则它的平均功率为，

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \overline{[I_m \cos(2\pi ft - \varphi)]^2 R} \\ &= I_m^2 R \overline{[\cos(2\pi ft - \varphi)]^2} \\ &= \frac{1}{2} I_m^2 R \\ &= I_{rms}^2 R \\ &= \frac{V_{rms}}{Z} I_{rms} R \\ &= I_{rms} V_{rms} \cos\varphi \end{aligned}$$

其中 $\cos\varphi$ 是功率因子



【例】

在一个 RLC 串联交流电路接上 200 V 的电源时，电阻器的阻值 $R = 40\Omega$ ，电容器的容抗 $X_C = 60\Omega$ ，电感器的感抗 $X_L = 90\Omega$ 。求电路中的总阻抗 Z ，电流 I ，相角 φ 及平均功率。

(a) 电路中的总阻抗 Z ，

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{40^2 + (90 - 60)^2} \\ &= 50\Omega \end{aligned}$$

(b) 电路中的电流 I ，

$$\begin{aligned} I_{rms} &= \frac{V_{rms}}{Z} \\ &= \frac{200}{50} \\ &= 4\text{ A} \end{aligned}$$

(c) 电路中的相角，

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{X_L - X_C}{R} \\ &= \frac{90 - 60}{40} \\ &= \frac{3}{4} \\ \varphi &= 36.87^\circ \end{aligned}$$

(d) 平均功率

$$\begin{aligned} \bar{P} &= I_{rms} V_{rms} \cos \varphi \\ &= 4 \times 200 \times \cos 36.87^\circ \\ &= 640\text{ W} \end{aligned}$$





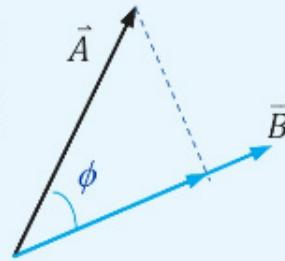
矢量的乘积

矢量的内积/标量积/点积

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\phi$$



ϕ : \vec{A} 与 \vec{B} 之间的夹角

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad (\cos\phi = \cos 0^\circ = 1)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \quad (\cos\phi = \cos 90^\circ = 0)$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k} \\ &\quad + A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k} \\ &\quad + A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

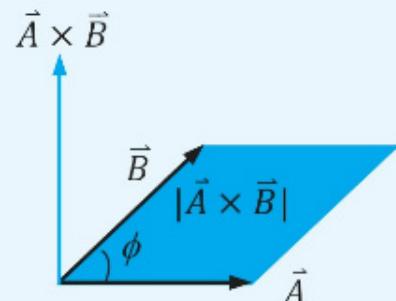
矢量的内积等于相对应的分量的乘积之和。

矢量的外积/矢量积/叉积

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

外积的运算结果是一个向量而不是一个标量，它的方向垂直于 \vec{A} ，同时也垂直与 \vec{B} 。

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\phi$$



$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

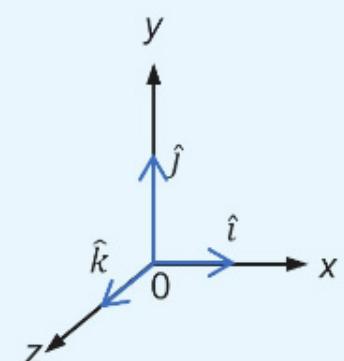
$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}\end{aligned}$$



注意: $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$



2018 年 成大数理比赛 Q9

一个质量为 m 的物体的速度 $\vec{v} = v_0(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$, 它的位移向量 $\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$, 则角动量的 z 分量为何?

角动量,

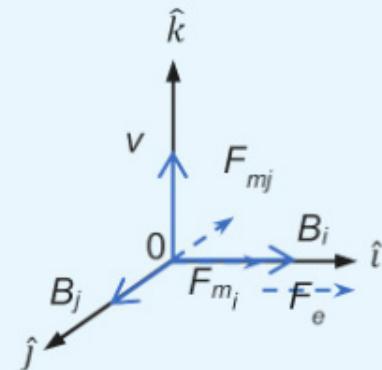
$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{v} \\ &= m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ v_0 \cos\theta & v_0 \sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= m[(0 - zv_0 \sin\theta)\hat{i} + (zv_0 \cos\theta - 0)\hat{j} \\ &\quad + (xv_0 \sin\theta - yv_0 \cos\theta)\hat{k}] \\ &= m[-zv_0 \sin\theta\hat{i} + zv_0 \cos\theta\hat{j} \\ &\quad + (xv_0 \sin\theta - yv_0 \cos\theta)\hat{k}]\end{aligned}$$

因此角动量在 z 的分量为,

$$\begin{aligned}L_z &= m(xv_0 \sin\theta - yv_0 \cos\theta) \\ &= mv_0(x \sin\theta - y \cos\theta)\end{aligned}$$

2018 年 成大数理比赛 Q19

电场 $\vec{E} = E\hat{i}$ 及 $\vec{B} = B(\hat{i} + \hat{j})$. 当质量为 m 的电荷 q 以速度 $\vec{v} = v\hat{k}$ 运动, 则它在 x 方向上的加速度为何?



洛伦兹力,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= qE\hat{i} + q[v\hat{k} \times B(\hat{i} + \hat{j})] \\ &= qE\hat{i} + q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & v \\ B & B & 0 \end{vmatrix} \\ &= qE\hat{i} + q(vB\hat{i} + vB\hat{j}) \\ m\vec{a} &= (qE + qvB)\hat{i} + qvB\hat{j}\end{aligned}$$

因此加速度在 x 的分量为,

$$\overrightarrow{a_x} = \frac{q}{m}(E + vB)$$



麦克斯韦方程组

电场中的高斯定律: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (1)

磁场中的高斯定律: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (2)

法拉第定律: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ (3)

安培 - 麦克斯韦定律: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(J + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$.. (4)

如果电量为 0, 则式(1)及(4)可化简为,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \text{ (5)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \text{ (6)}$$

由式(3),

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

应用矢量外积公式 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

左式: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$

右式: $-\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$$

$$= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{E} = 0$$

上式为一电场波动方程式, 可得光速

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

由式(6),

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$\text{左式: } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

$$\text{右式: } \vec{\nabla} \times \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right)$$

$$= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{B} = 0$$

上式为一磁场波动方程式, 可得光速

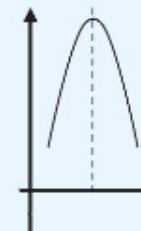
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

备注: 波动方程式:

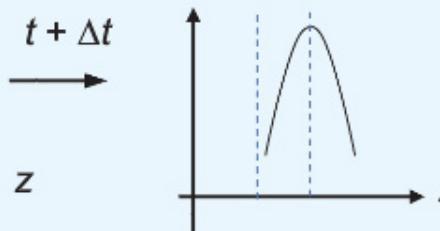
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

其中 $\psi(z, t) = f(z \pm ct)$ 。

$$f(z)$$



$$f(z)$$





电场中的高斯定律: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enclosed}}{\epsilon_0}$ (1)

磁场中的高斯定律: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ (2)

法拉第定律: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Phi_B}$ (3)

安培 – 麦克斯韦定律: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I_{enclosed} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Phi_E})$ (4)

19世纪中期确立了电荷, 电流和电场, 磁场之间的普遍关系后, 麦克斯韦建立了统一的电磁场理论。他提出两项突破性的新概念: “位移电流” 及 “感应电场” (又称涡旋电场) 并在此基础上提出了电磁理论的完整数学表述, 今天被称为“麦克斯韦方程组”。

麦克斯韦方程组可以用微分形式或积分形式来呈现, 他们是极其简洁, 工整, 优美与对称的; 是经典物理发展史上一个里程碑式的杰作!



James Clerk Maxwell (1831 – 1879)



黑体辐射(乌云一)

具有温度的物体发出电磁波的现象叫热辐射。对于电磁波吸收率是 100% 的物体叫作「黑体」！黑体是一种理想的物体，现实中不存在。黑体发出的热辐射就是「黑体辐射」

加热一个物体本质上是增大物体里原子的动能，这部分的能量也会增高原子内电子的能量。可是高能量状态是不稳定的，它倾向于回到低能量的状态。当电子掉回低能量状态的同时会释放出电磁波，如果用一个探测器去测量一个被加热的物体发出的不同频率的光的能量强度，再把能量强度作为频率函数就能画出物体辐射强度相对于辐射频率变化的曲线，实验结果测得两头小，中间大而且左右不对称的曲线！

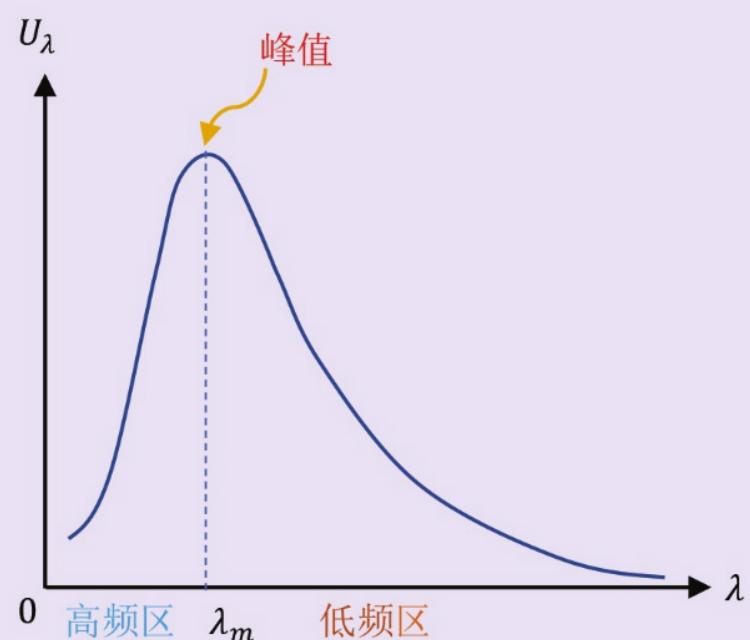
在特定的温度下，极高频率和极低频率的辐射强度都较小，只有中等频率的辐射强度最大！而且随着物体温度的升高，中等频率的峰值会往高频率方向移动！只是当温度高到一定程度后，物体反而看似不明亮了，这是因为它的中心频率往肉眼看不到的紫外线方向移动！

经典物理完全无法解释这条曲线的形状，尤其是根据经典理论的计算法，紫外线区域的辐射能量趋向无穷大！这与实验结果和常识都不符，所以被称为「紫外灾难」！

普朗克破天荒的把电磁波的能量「量子化」也就是说在热辐射过程中，电磁波不是像流水般连续地流淌出来而是像子弹般一颗颗地飞出。普朗克计算电磁波能量时是将 n 倍的单个光子能量做加法， $E = nh\nu$, ... n 为整数 1, 2, 3, ...。

经过一通计算后，得出热辐射能量强度随频率变化的规律跟实验结果完全吻合，进而解决了「紫外灾难」这朵乌云。

根据普朗克量子说， $E = h\nu$ ，在高频率下，量子的发射所需要的能量比可供给能量还来得更多。因此，高频的辐射将会比较少，这就是为什么黑体辐射率光谱总是在左侧(频率较高侧)变小的原因！





普朗克黑体辐射公式的推导(自选)

假设在真空室的处于热平衡状态的一组谐振子 n_0, n_1, n_2, \dots , 具有 $0, 1, 2, \dots$ 单位的能量,

总谐振子的数量,

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n_1 + n_2 + \dots \dots \dots \\ &= n_0 + n_0 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} + n_0 e^{-\frac{2h\nu}{k_B T}} + \dots \dots \dots \\ &= n_0 (1 + e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} + e^{-\frac{2h\nu}{k_B T}} + \dots \dots \dots) \end{aligned}$$

设: $e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} = x, e^{-\frac{2h\nu}{k_B T}} = x^2$
 $\therefore n = n_0 (1 + x + x^2 + \dots \dots \dots)$

设:

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + \dots \dots \dots \\ xS &= x + x^2 + x^3 + \dots \dots \dots \\ S - xS &= 1 \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} n &= n_0 S = n_0 \frac{1}{1-x} \\ n_0 &= n(1-x) \\ &= n \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right) \end{aligned}$$

总能量,

$$\begin{aligned} E &= n_0(0) + n_1(h\nu) + n_2(2h\nu) + \dots \dots \dots \\ &= 0 + n_0 h v e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} + n_0 2 h v e^{-\frac{2h\nu}{k_B T}} + \dots \dots \dots \\ &= n_0 h v e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} (1 + 2e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} + 3e^{-\frac{2h\nu}{k_B T}} + \dots \dots \dots) \end{aligned}$$

设: $e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} = x, e^{-\frac{2h\nu}{k_B T}} = x^2$
 $\therefore E = n_0 h v x (1 + 2x + 3x^2 + \dots \dots \dots)$

设:

$$S' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots \dots \dots$$

$$xS' = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots \dots \dots$$

$$S' - xS' = 1 + x + x^2 + \dots \dots \dots$$

$$(1-x)S' = S = \frac{1}{1-x}$$

$$S' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

因此,

$$\begin{aligned} E &= n_0 h v e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}} \right)^2 \\ E &= n_0 h v e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \right)^2} \\ &= \frac{n \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right) h v e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}}{\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right)^2} \\ &= \frac{n h v}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \end{aligned}$$

每个振子的平均能量,

$$\bar{E} = \frac{E}{n} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

能量密度频谱,

$$\begin{aligned} U_\nu(\nu, T) &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E} \\ &= \frac{8h\pi\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \end{aligned}$$



几种个不同普朗克黑体辐射公式的表达式

$$U_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\nu}{k_B T}} - 1}$$

如果 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, V 为辐射黑体的体积, $\omega = 2\pi\nu$,

$$d\vec{E}_\omega = \frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

能量密度

$$\rho_\nu(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\frac{\hbar\nu}{k_B T}} - 1}$$

$$U(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\left(e^{\frac{\hbar c}{\lambda k_B T}} - 1\right)}$$

或

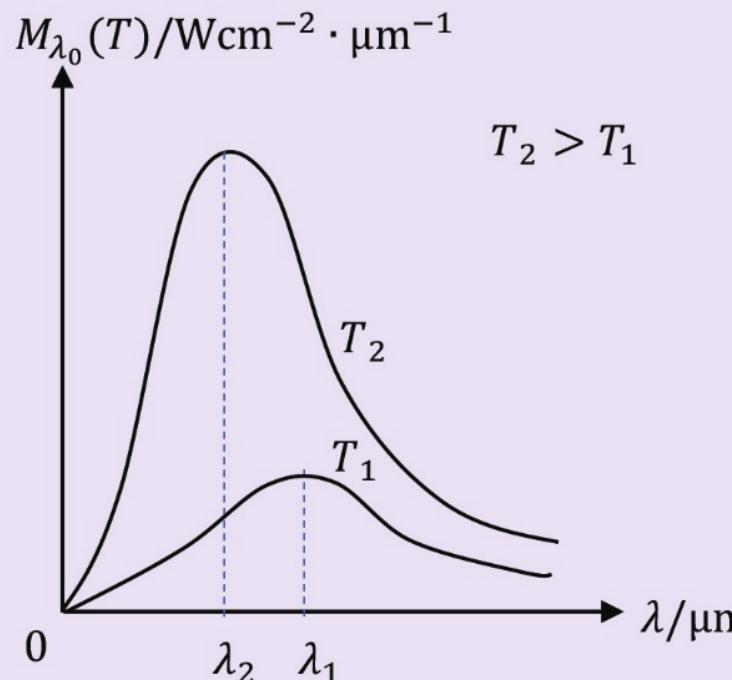
单色辐出度

$$M_{\lambda\nu}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\left(e^{\frac{\hbar c}{\lambda k_B T}} - 1\right)}$$

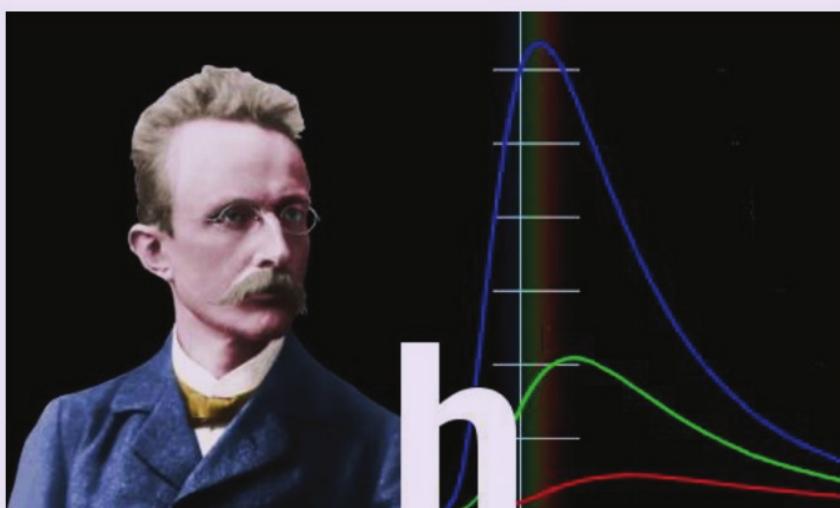
其中总辐出度,

$$M_0(T) = \int_0^\infty M_{\lambda_0}(T)d\lambda = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$



曲线下与水平轴所围的面积与温度的 4 次方成正比，这是斯特藩-玻爾茲曼定律 (Stefan-Boltzmann law)。



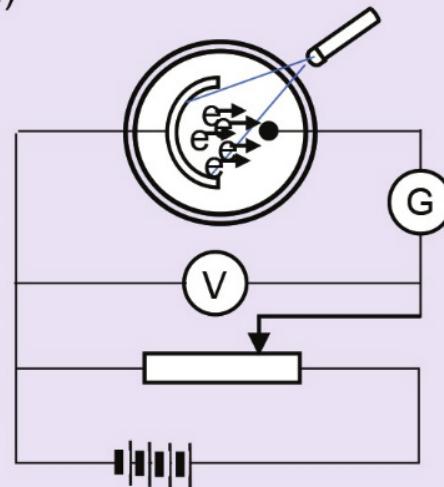
Max Planck (1858 – 1947)



光电效应与光子说(乌云二)

实验操作,

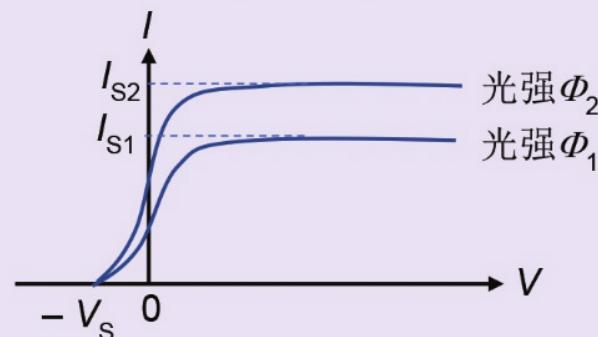
电池正极在右, 将会加速光电子的逸出, 光电流会变大直达一个饱和值; 反之, 将电池反向连接, 即提供反向电压, 光电流会减小。当光电流为0时, 此反向电压的值称为遏止电压(stopping voltage, V_s)。



当能量足够大(频率够大/波长够短)的光照射到金属表面时, 导致金属表面上的电子逸出的现象, 称为光电效应。

光电效应实验可归纳出如下的规律:

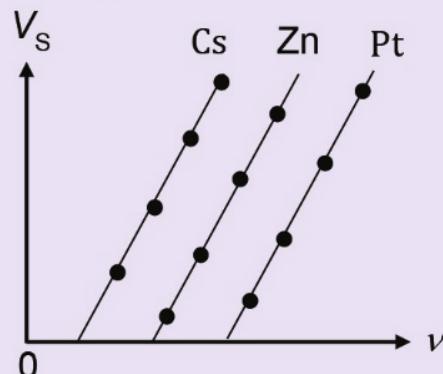
(1) 对同一个金属表面, 当入射光的频率固定不变时, 其饱和光电流与入射光的强度成正比。



(2) 对同一个金属表面, 光电子的最大初动能随入射光频率增大而增大, 与入射光强度无关。

$$E_{k,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = h\nu - W_0$$

(3) 如果用不同频率的入射光照在同一种金属材料上, 即可发现遏止电压随入射光的频率的增加而增加, 与入射光的强度无关。

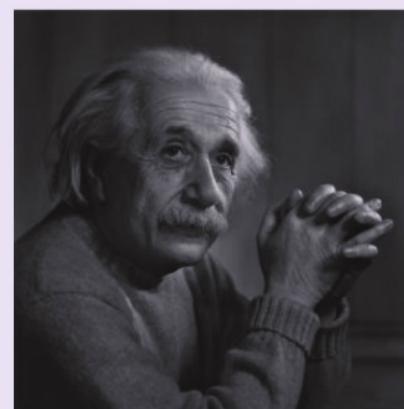


(4) 不同金属材料产生光电效应的最低频率不同, 该频率称为临界频率(threshold frequency, ν_0) (水平轴截距), 相对应波长称为截止波长(cutoff wavelength, λ_0)。如果入射光的频率低于临界频率, 不论光的强度多大、照射时间多长, 都不会产生光电效应。

$$W_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

(5) 光电效应的产生是瞬间的, 约 10^{-6} s, 不论光的强度多弱。

爱因斯坦完美地解释以上五个光电效应的规律, 因而在1921年荣获诺贝尔物理奖。



Albert Einstein
(1879 – 1955)



爱因斯坦光电效应实际上也是能量守恒的一个范例，因此光电效应方程式：

$$E_{\text{输入}} = E_{\text{用掉}} + E_{\text{剩下}}$$

$$h\nu = W_0 + E_{k,\max}$$

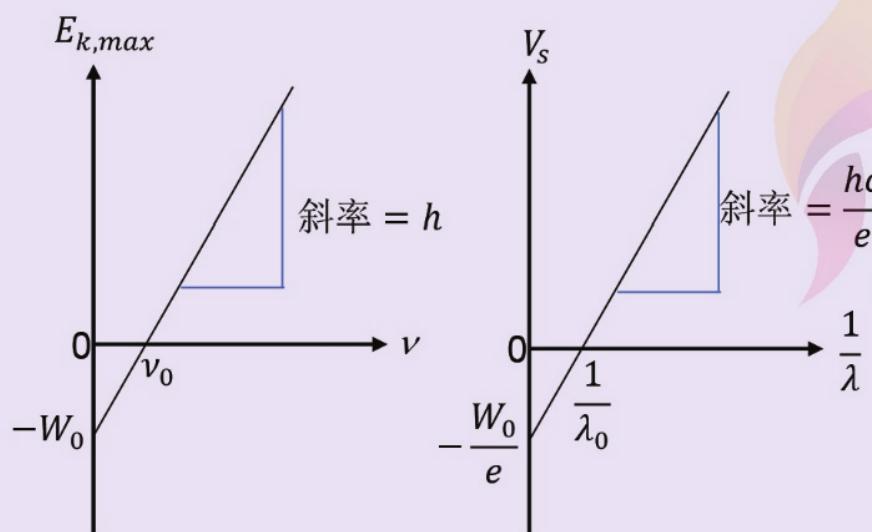
$$E_{k,\max} = h\nu - h\nu_0$$

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = h\nu - h\nu_0$$

$$eV_s = h\nu - h\nu_0$$

$$V_s = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)$$

$$= \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$$



波动原理无法解释的光电效应的四个现象：

- (1) 光电效应的频率效应
- (2) 临阈频率的存在
- (3) 光电子的最大初动能与入射光强度无关
- (4) 光电效应发生的瞬间性

因此爱因斯坦的光子说，说明了光除了具有波动性以外还具有粒子性，而且它的能量是量子化的。

【例】

激光



某激光器的功率为 1.5 mW，发出波长为 626 nm 的光波。求

- (a) 所发出光子的能量；
- (b) 每秒钟从光源发出的光子数量；
- (c) 所发出个别光子的动量及每秒钟的总动量。

(a) 所发出光子的能量，

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{626 \times 10^{-9}} = 3.18 \times 10^{-19} \text{ J}$$

(b) 每秒钟从光源发出的光子数量，

$$P = \frac{E_T}{t} = \frac{NE}{t}$$

$$\frac{N}{t} = \frac{P}{E} = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{3.18 \times 10^{-19}} = 4.72 \times 10^{15} \text{ 光子每秒}$$

(c) 所发出个别光子的动量，

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{626 \times 10^{-9}} = 1.06 \times 10^{-27} \text{ kg m s}^{-1}$$

每秒钟的总动量，

$$\frac{p_T}{t} = \frac{N}{t} p = 4.72 \times 10^{15} \times 1.06 \times 10^{-27} \\ = 5.00 \times 10^{-12} \text{ kg m s}^{-1}$$

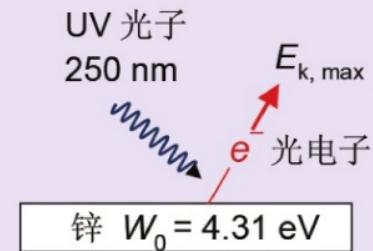


不同能量的光子与金属的作用 --- 光电效应(eV)、康普顿效应(keV)与成对创生(MeV)

光子能量较低 (eV) --- 光电效应

在足够能量的光照射作用下，金属表面电子逸出形成光电流的现象叫做外光电效应。

$$\begin{aligned} E_{k,max} &= \frac{hc}{\lambda} - W_0 \\ &= \frac{1.234 \times 10^{-3} \text{ eV nm}}{250 \text{ nm}} - 4.31 \\ &= 4.97 - 4.31 \\ &= 0.66 \text{ eV} \end{aligned}$$



光子能量中等 (keV) --- 康普顿效应(Compton Effect)

在原子物理学中，当X射线或 γ 射线的光子跟物质相互作用，因失去能量而导致波长变长的现象。

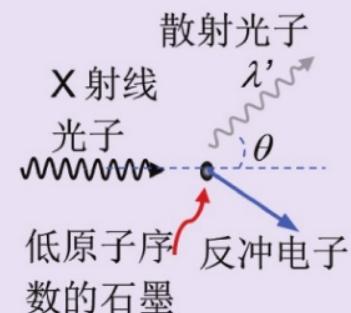
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$$

其中 $\frac{h}{m_e c}$ = 电子的康普顿波长 = 0.0243 \AA

如果 $\theta = 45^\circ$,

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= 0.0243(1 - \cos 45^\circ) = 5.82 \times 10^{-3} \text{ \AA} \\ \% \frac{\Delta\lambda}{\lambda} &= \frac{5.82 \times 10^{-3}}{0.71} \times 100\% \\ &= 0.82\% \end{aligned}$$

董總



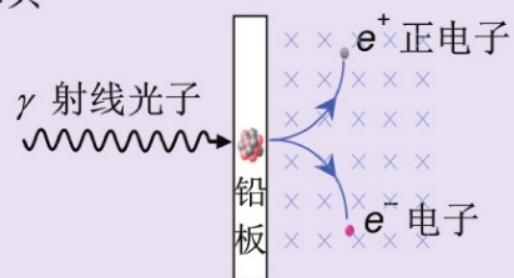
高能量光子 (MeV) --- 成对创生 (pair-production) (自选)

在原子核物理学中，一个高能量光子，与原子核相互作用时，创生基本粒子和其反粒子的现象，称为成对创生(pair production)。

创生电子与其反粒子正电子

它们的总静止能量为 $2m_0c^2 = 1.022 \text{ MeV}$

(这是能量转化为物质的典范)





波粒二象性

1924 年法国物理学家德布罗意类比与光的二象性提出微细粒子，如电子、质子、中子等也具有波动性，即每一个运动的粒子都与每个对应的波相联系，而且粒子动量跟它所对应的波的波长为，

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

这种波称为德布罗意波，也叫物质波。

	波动性质	粒子性质
光子	$c = \nu\lambda$	$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$
电子	$p = \frac{h}{\lambda}$	$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$

$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$ 普朗克常数(Planck constant)

虽然 h 是一个微不足道的尺度/小尺度，但它是波动与粒子性质的连接因子，而且只要某式子有 h 或 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (约化普朗克常数 reduced Planck constant) 的出现就必然是量子物理的范畴。

德布罗意波 或 物质波

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

对电中性的中子而言，它具有 3 个自由度，

$$E = \frac{3}{2}kT$$

$$p = \sqrt{2m\left(\frac{3}{2}kT\right)} = \sqrt{3mkT}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

物质波的应用：

目前最好的光学显微镜的放大率大约， $M \approx 2000$ 能够分辨出大小约 100 nm 的物体，而基于电子物质波为基础而制作的电子显微镜的放大率可达 1000000，能够分辨出大小约 0.2 nm 的物体，可直接观看到新冠病毒 (covid-19) 的结构。



新冠肺炎病毒的结构图



汤姆生实验

速度选择器

电荷在电磁场中受到磁力作用, $F_m = qvB$ (\uparrow)

电荷在电磁场中受到电力作用, $F_e = qE$ (\downarrow),

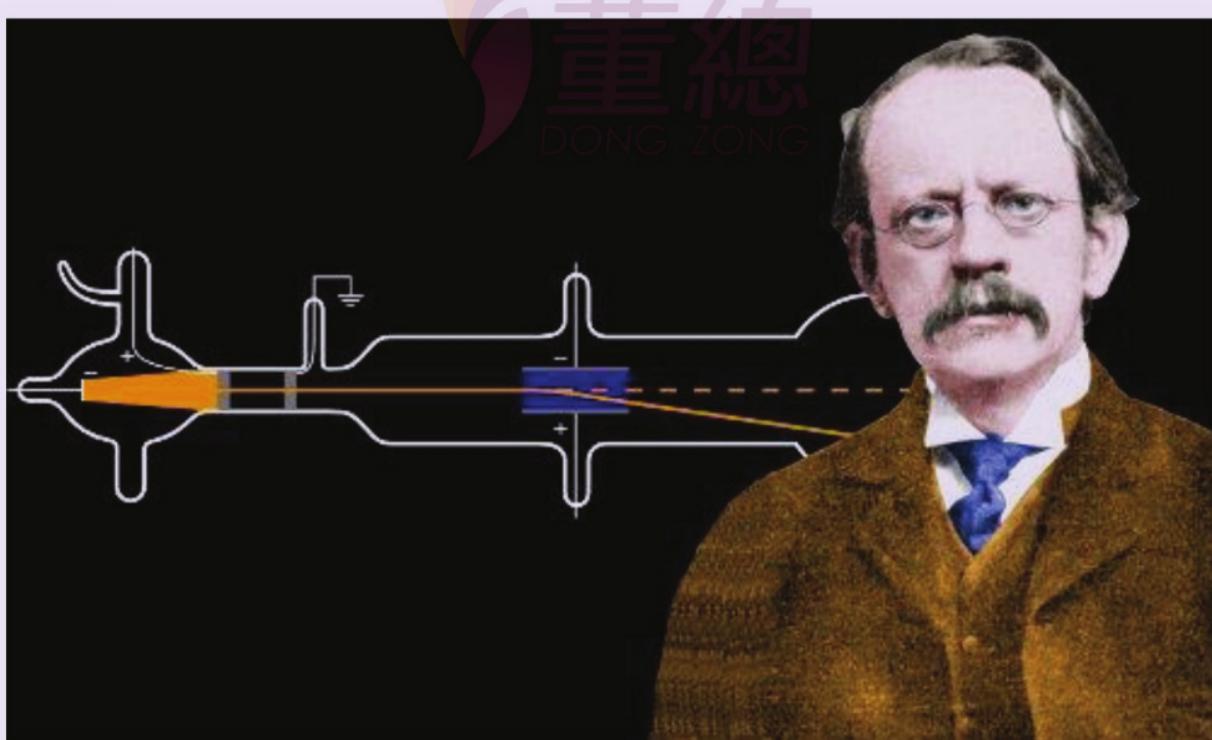
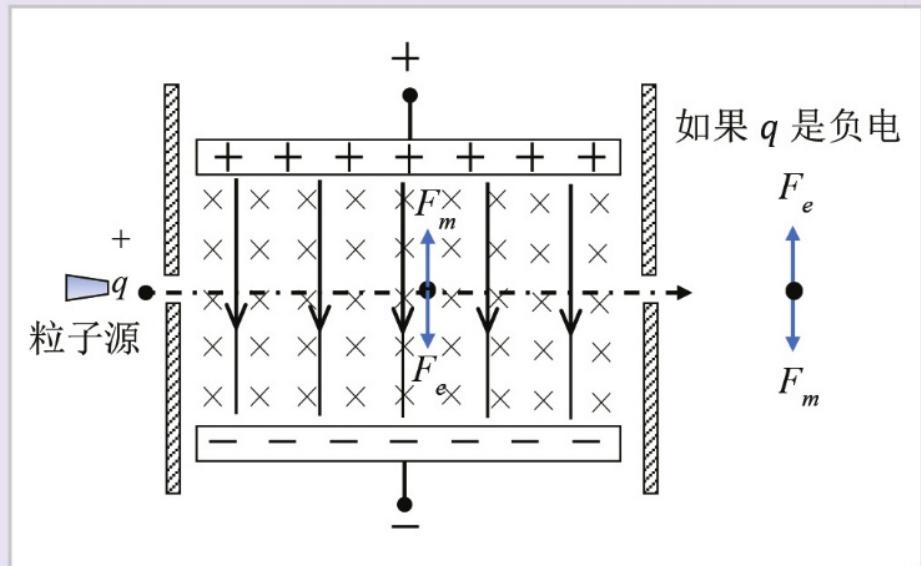
当 $F_m = F_e$ 时,

$$qvB = qE$$

$$v = \frac{E}{B}$$

即当电荷的速度等于上式时, 它将沿着图中虚线通过速度选择器。

而那些速度比 $\frac{E}{B}$ 大或小的离子, 都发生偏转落到正极或负极板上, 这种装置叫做速度选择器。



J.J. Thomson (1856 - 1940)

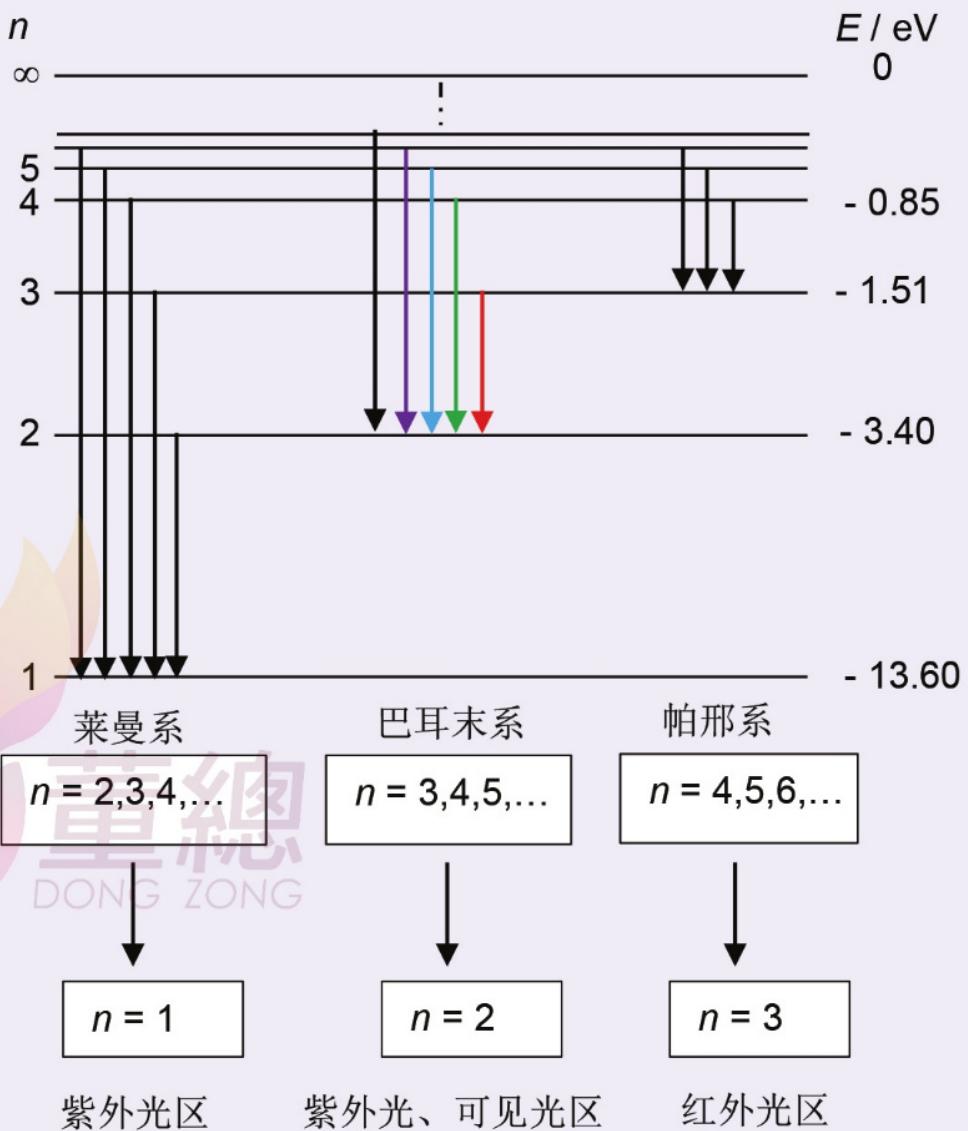


氢原子线光谱

氢原子能阶图
线距之比为 $1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{9} : \frac{1}{16} \dots \dots$

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

其中 E_1 为氢原子稳定态时的能量



氢原子电子跃迁放射线谱的波长,

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_{\text{低}}^2} - \frac{1}{n_{\text{高}}^2} \right)$$

其中 R_H 为里德伯常量, $1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

序列	跃迁能阶	最低能光子波长	最高能光子波长	放射光种类
莱曼系	$2,3,4,\dots \rightarrow 1$	$R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)^{-1} = 121.5 \text{ nm}$	$R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)^{-1} = 91.16 \text{ nm}$	UV
巴耳末系	$3,4,5,\dots \rightarrow 2$	$R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)^{-1} = 653.3 \text{ nm}$	$R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)^{-1} = 364.6 \text{ nm}$	可见光及 UV
帕邢系	$4,5,6,\dots \rightarrow 3$	$R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right)^{-1} = 1875.2 \text{ nm}$	$R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)^{-1} = 820.4 \text{ nm}$	IR



海森堡不确定性原理 (自选)

(此处的不确定性与测量工具的误差无关的)

1927年，德国理论物理学家维尔纳海森堡提出了不确定性原理，他认为我们的科学度量的能力在理论上存在的某些局限性，要同时准确测量到粒子的某几对物理量（即共轭变量）如位置与动量、时间与能量、角位移与角动量是不可能的。

对其中一个量测得越准确，则对另一个量的测量就得越不准确。

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\text{或 } \Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\text{或 } \Delta \theta \Delta L \geq \frac{\hbar}{2} \geq \frac{h}{4\pi}$$

其中

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}$$



Werner Heisenberg (1901 - 1976)

现列出三个例子举出物理的测量有其局限性：

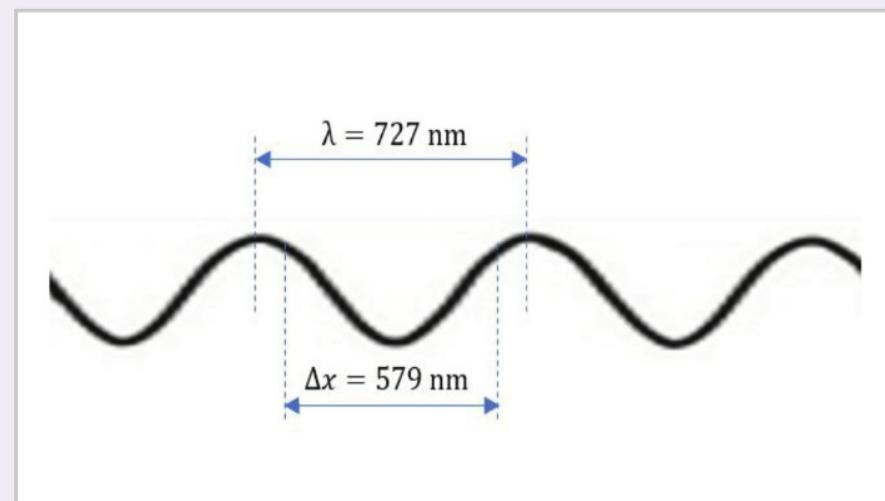
【例】

如果电子的速度 $v = 1000 \text{ m s}^{-1}$, $\Delta v = 100 \text{ m s}^{-1}$, 则 Δx 为多少?

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta x &\geq \frac{\hbar}{2m\Delta v} \\ &\geq \frac{1.054 \times 10^{-34}}{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 100} \\ &\geq 5.79 \times 10^{-7} \text{ m}\end{aligned}$$

如果应用德布罗意假设来计算,

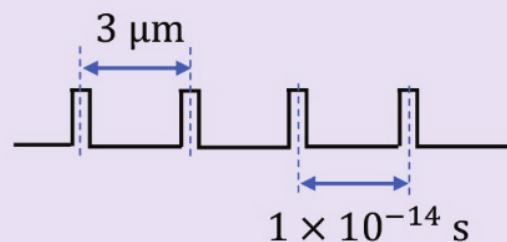
$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6.626 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 1000} \\ &= 727 \text{ nm}\end{aligned}$$





【例】

某雷射光的波长 $\lambda = 650 \text{ nm}$, 脉冲时间间隔 $\Delta t = 1 \times 10^{-14} \text{ s}$, 脉冲波长 $\lambda = 3 \mu\text{m}$, 则 ΔE 为多少?



$$\begin{aligned} E &= hf \\ &= \frac{hc}{\lambda} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{650 \times 10^{-9}} (3.00 \times 10^8) \\ &= 3.058 \times 10^{-19} \text{ J} \\ &= 1.91 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta t \Delta E &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta E &\geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 1 \times 10^{-14}} \\ &= 5.275 \times 10^{-21} \text{ J} \\ &= 0.033 \text{ eV} \\ \% \frac{\Delta E}{E} &= 1.7\% \end{aligned}$$

【例】

原子的激发态只能持续 10^{-9} 秒。因此激发能量的任何测量都必须在此时间内完成。所以 $\Delta t = 10^{-9} \text{ s}$,

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1.055 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-9}} = 5 \times 10^{-26} \text{ J}$$

由于典型的 E 为 10^{-18} J , 因此激发能量只能在 10^8 分之 1 以内确定, 但是测量值是精确的!

在此频率光束下的相应不确定是

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} \geq \frac{5 \times 10^{-26}}{6.63 \times 10^{-34}} \text{ Hz} \approx 10^8 \text{ Hz}$$

结果, 来自一组受激原子的辐射不会以精确的频率出现在实践中, 多普勒效应、引力红移或蓝移等其他现象对谱线展宽的贡献更大



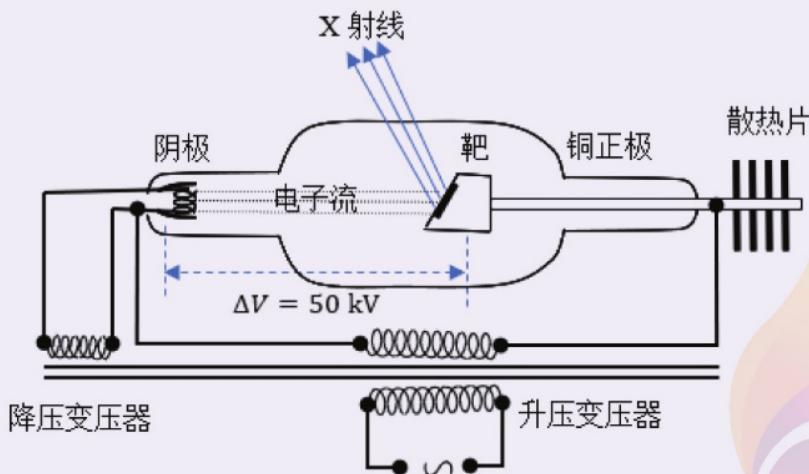


X-射线

X-射线的产生

利用低压电源将阴极 K 的钨丝加热达到炙热状态，再经由高压电源建立强电场将阴极上的电子加速射到靶上而激发出 X- 射线。

X-射线的研究成就了 25 项诺贝尔奖的奖项。



X-射线光谱

(a) 连续性光谱：在 X-射线管中，这种电子到达阳极急剧减速而释放能量形成 X-射线的现象，成为轫致辐射 (bremsstrahlung radiation)。由于多种因素的影响，发生弹性碰撞后的电子的速度可以从零到初速连续取值，因而出现了连续光谱，即 X-射线包含最短的截止波长(λ_{min}) 到某极大值。最短的截止波长(λ_{min}) 取决于加在射线管的高压电源 (V)，

$$eV = \frac{1}{2}mv^2 = h\nu_{max} = h\frac{c}{\lambda_{min}}$$

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$

【例】

X-射线管的加速电压为 30 kV，电流为 2.0 mA，求

- (a) 每秒有阴极到阳极的电子数
- (b) 电子到达阳极时的动能
- (c) 所产生 X-射线的截止波长

(a) 每秒有阴极到阳极的电子数，

$$\begin{aligned} I &= \frac{Ne}{t} \\ \frac{N}{t} &= \frac{I}{e} \\ &= \frac{2.0 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 1.25 \times 10^{16} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

(b) 电子到达阳极时的动能

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= eV \\ &= 1.6 \times 10^{-19} \times 30000 \\ &= 4.8 \times 10^{-15} \text{ J} \end{aligned}$$

(c) 所产生 X-射线的截止波长

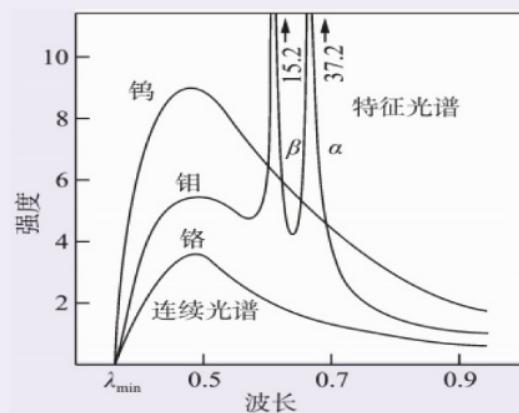
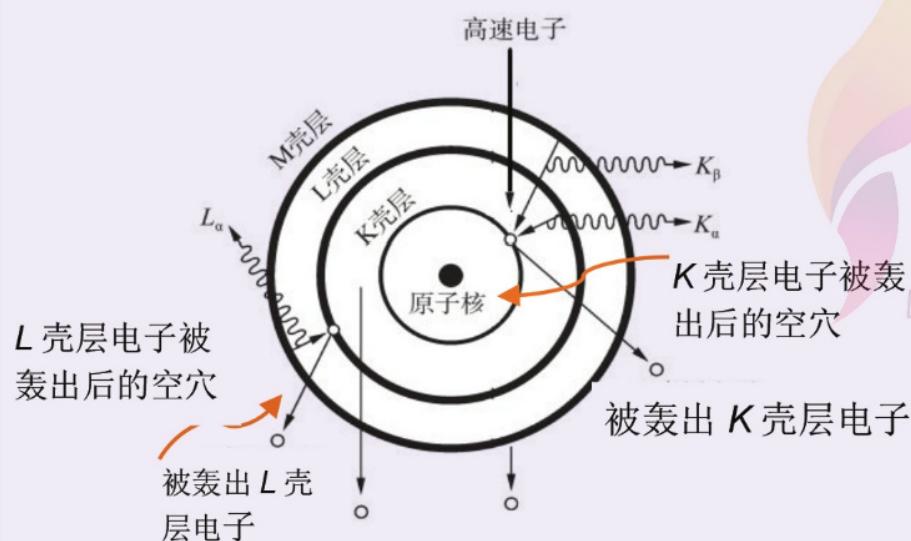
$$\begin{aligned} eV &= h\frac{c}{\lambda_{min}} \\ \lambda_{min} &= \frac{hc}{eV} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \times 30000} \\ &= 4.14 \times 10^{-11} \text{ m} \end{aligned}$$



(b) 特征光谱：取决于阳极元素，与射线管的操作因素无关。

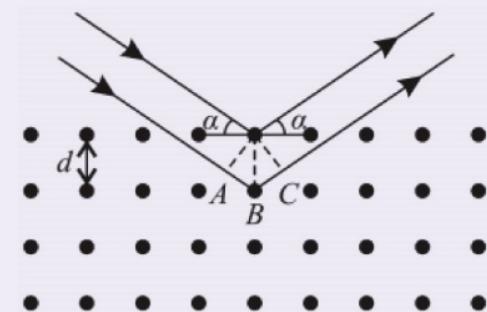
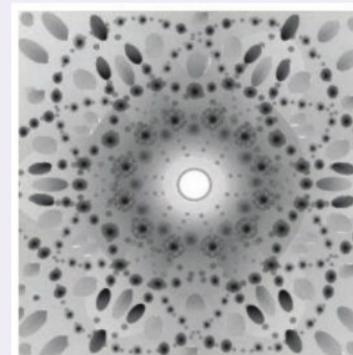
能量足够高的电子流轰击到阳极的靶面时，靶内一些原子的内层电子会被轰出，使原子处于能级较高的激发态，如 K 层电子被轰出即为 K 激发态、L 层电子被轰出即为 L 激发态、M 层电子被轰出即为 M 激发态等激发态，此时该内层轨道上出现一个“空穴”，它很快地被离核较远轨道上的外层电子补充，使原子能级降低，因而多余的能量便以不同的频率的 X 射线辐射出来，如 $K_{\alpha}, K_{\beta}, L_{\alpha}, L_{\beta}, \dots$ 等。

这种方式辐射出来的射线的波长只与原子所处能级发生电子跃迁的能级差有关，完全由原子的结构决定，所以称特征光谱。



X-射线的衍射：

X-射线的波长极短，一般的实验看不到它的衍射现象。1912年，德国科学家劳厄 (Laue) 建议采用晶体作为衍射光栅，其同事 Friedrich 和 Knipping 用实验证明了 X-射线是一波长很短的电磁波。



后来，Bragg 父子共同用晶体片作为反射光栅的实验，并得出 X-射线衍射的 Bragg 方程式，

$$\begin{aligned} \text{光程差 } \delta &= AB + BC \\ &= 2AB \\ &= 2ds \sin \alpha \end{aligned}$$

其中 d 是两层原子间的距离，叫作晶体的点阵常数 (crystal lattice constant); α 是掠射角
对亮纹而言，

$$2ds \sin \alpha = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ (Bragg's 方程式)}$$

X-射线的应用

波长越短，能量越大，贯穿物质的本领就越大，叫 X-射线的硬度

X-射线种类	波长	用途
超硬	$\lambda < 0.01 \text{ nm}$	高能物理研究
硬	$0.01 \text{ nm} < \lambda < 0.1 \text{ nm}$	X-射线晶体学， 乳房 X-射线照相术， 医用断层扫描摄像仪， 机场安检
软	$0.1 \text{ nm} < \lambda < 10 \text{ nm}$	普通实验用



Bragg's Law 布拉格定律

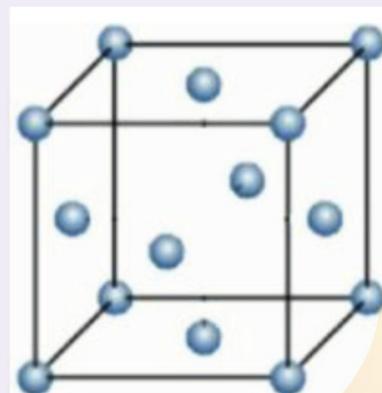
亮纹衍射条件: $2ds\sin\alpha = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$

对铜而言,

$$\rho_{Cu} = 8.96 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$M = 0.0635 \text{ kg mol}^{-1}$$

$$d = 0.36 \text{ nm}$$



FCC 型的铜结构图

原子数量:

角	$8 \times \frac{1}{8} = 1$
面	$6 \times \frac{1}{2} = 3$
有效	$1 + 3 = 4$

单元格(unit cell)可重复组合成一整体结构, 就好像乐高模块一样。

$$\rho = \frac{4 \times \frac{0.0635}{N_A}}{(0.036 \times 10^{-9})^3}$$

$$N_A = \frac{4 \times 0.0635}{8.96 \times 10^3 \times (0.036 \times 10^{-9})^3}$$

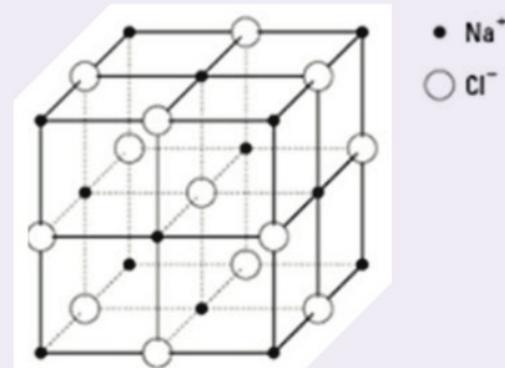
$$= 6.08 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

对氯化钠 NaCl 而言,

$$\rho_{NaCl} = 2.17 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$M = 0.0585 \text{ kg mol}^{-1}$$

$$d = 0.282 \text{ nm}$$



• Na^+
○ Cl^-

分子数量:

	Na^+	Cl^-
角	$8 \times \frac{1}{8} = 1$	
面	$6 \times \frac{1}{2} = 3$	
边		$12 \times \frac{1}{4} = 3$
中心		$1 \times 1 = 1$
有效	4	4

$$\rho = \frac{4 \times \frac{0.0585}{N_A}}{(2 \times 0.0282 \times 10^{-9})^3}$$

$$N_A = \frac{4 \times 0.0585}{2.17 \times 10^3 \times (2 \times 0.0282 \times 10^{-9})^3}$$

$$= 6.01 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

以上两项实验结果是证明“原子论”的一大成就。



K_α, K_β X射线的莫塞莱曲线图(自选)
(此研究对元素周期表的排序有很大的贡献)

氢原子(单电子原子)的轨域能,

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

多电子原子的轨域能,

$$E_n = -\frac{13.6(Z-1)^2}{n^2} \text{ eV}$$

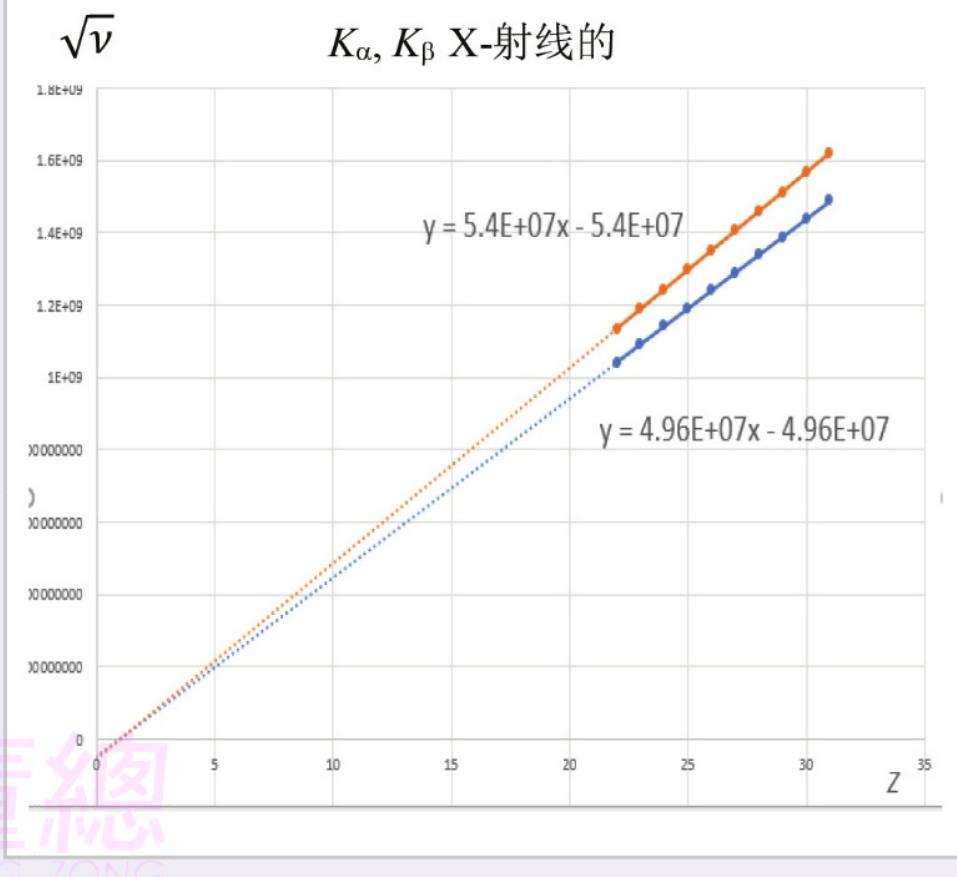
对 K_α X射线而言,

$$\begin{aligned}\Delta E &= |E_1 - E_2| \\ &= \left| -\frac{13.6(Z-1)^2}{1^2} - \frac{-13.6(Z-1)^2}{2^2} \right| \\ &= 10.2(Z-1)^2 \text{ eV}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\Delta E}{h} \\ &= \frac{10.2(Z-1)^2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} \\ &= 2.46 \times 10^{15}(Z-1)^2 \text{ Hz} \\ \sqrt{\nu} &= 4.96 \times 10^7(Z-1) \text{ Hz}^{1/2}\end{aligned}$$

同理对 K_β X射线而言,

$$\begin{aligned}\Delta E &= |E_1 - E_3| = 12.09(Z-1)^2 \text{ eV} \\ \nu &= \frac{12.09(Z-1)^2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} \\ &= 2.92 \times 10^{15}(Z-1)^2 \text{ Hz} \\ \sqrt{\nu} &= 5.40 \times 10^7(Z-1) \text{ Hz}^{1/2}\end{aligned}$$



Henry Moseley (1887 - 1915)



爱因斯坦狭义相对论

狭义相对论的两个基本假设

(1) 狹义相对性原理：一切物理定律在不同惯性系下都是相同的。

物体的运动状态都是相对于参照系而定的，为了方便考虑，将静止或匀速直线运动的参照系定为惯性参照系。在经典力学中，联系任意两个惯性系之间的坐标变换是伽利略变换(Galilean transformation)。

当惯性系 Σ' 相对于惯性系 Σ 以速度 v 平行于 x 轴运动时，

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

伽利略相对性原理：在伽利略变换下，一切物理定律在不同惯性系下都是相同的。

以此原理为基础的经典力学中，空间和时间是绝对的、相互分离的；物体的大小与参照系无关；时间不因参照系的改变而改变；不同地点的同时性是绝对不变的，即发生在不同地点的两件事，如果在一个惯性系中是同时发生的，那么在其他惯性系中也是同时发生的。

然而，在电磁现象中，出现了与伽利略相对性原理相抵触的情况，它无法解释某些电磁现象。或者说，伽利略相对性原理应该修改为：在伽利略变换下，一切力学定律在不同惯性系下都是相同的。

20世纪初，许多物理学家在经典力学的框架下修正牛顿理论，提出新的坐标变换关系式 --- 洛伦兹变换 (Lorentz transformation)。爱因斯坦在他的相对性原理中也采用了洛伦兹变换作为狭义相对论下的基本坐标变化式。在 Σ' 相对于 Σ 惯性系沿 x 轴方向以速度 v 在运动时，洛伦兹变换式如下：

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma(x-vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t-\frac{v^2}{c^2}\frac{x}{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2}x \right) = \gamma(t - \frac{v^2}{c^2}\frac{x}{v}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma(x'+vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t'+\frac{v^2}{c^2}\frac{x'}{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2}x' \right) = \gamma \left(t' + \frac{v^2}{c^2}\frac{x'}{v} \right) \end{cases}$$

其中 c 是光速， v 是惯性系 Σ' 相对于惯性系 Σ 在平行于 x 轴方向上的运动速度， $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 为洛伦兹因子 (Lorentz factor or Lorentz term)。



(2) 光速不变原理：在任何相对于光源静止或匀速直线运动的惯性系中观察，真空中的光速都是相同的。

运动物体的动量与物体运动速度成正比：

$$p \propto v$$

写成等式，

$$p = kv$$

其中 k 即是动量与速度的比例是物体的惯性质量 (inertia mass, m)

$$p = mv$$

当速度增加时，动量也会跟着增加，

$$\Delta p = m\Delta v$$

同时，它的能量也在不断增加，能量与质量之间按相对论中质能方程为，

$$\Delta E = c^2 \Delta m$$

$$\Delta F_s = c^2 \Delta m$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} v \Delta t = c^2 \Delta m$$

$$v \Delta p = c^2 \Delta m$$

$$\frac{p}{m} \Delta p = c^2 \Delta m$$

$$c^2 m \Delta m = p \Delta p$$

$$\int_{m_0}^m c^2 m dm = \int_0^p p dp$$

$$\left[\frac{1}{2} c^2 m^2 \right]_{m_0}^m = \left[\frac{1}{2} p^2 \right]_0^p$$

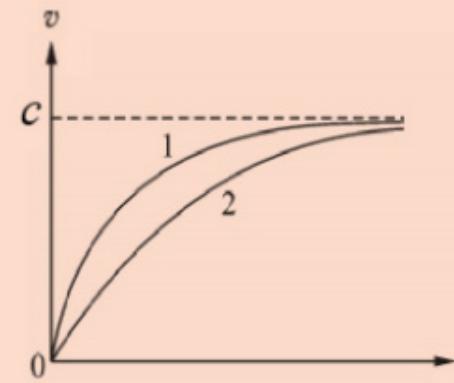
$$c^2 (m^2 - m_0^2) = p^2 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}}$$

$$\frac{p}{v} = \sqrt{\frac{(m_0^2 c^2 + p^2)}{c^2}}$$

$$v = \frac{cp}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}$$

其中 m_0 为物体的静止质量。



两个 m_0 不同的物体的 v - p 图线

当 p 很小时，图线几乎是直线 $v = \frac{p}{m_0}$ ；当 p 很大时，所有物体的速度都有一个相同的极限值，即光速 c 。静止质量较小物体的速度 (曲线 1) 先趋近极限值。

从式(1)，我们也可以导出物体速度与光速的关系，

$$c^2 (m^2 - m_0^2) = (mv)^2$$

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}}$$

其中 m_0 为物体的静止质量， m 为物体速度为 v 时的质量。

光子的静止质量为 0，因此光在真空中速为 c 。

其它物体的静止质量很小，因此它们的速度极限值也是 c 。



相对论的力学规律

质量与速度的关系式,

$$c^2(m^2 - m_0^2) = p^2$$

$$c^2(m^2 - m_0^2) = m^2 v^2$$

$$m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2$$

$$m = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$ 为物体的速度与光速之比;

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$
 为洛伦兹因子

同理,

物体的相对论性总能量: $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$

物体的相对论性动量: $p = mv = \gamma m_0 v$

物体相对论性总能量与相对论性动量之间的关系,

$$c^2(m^2 - m_0^2) = p^2$$

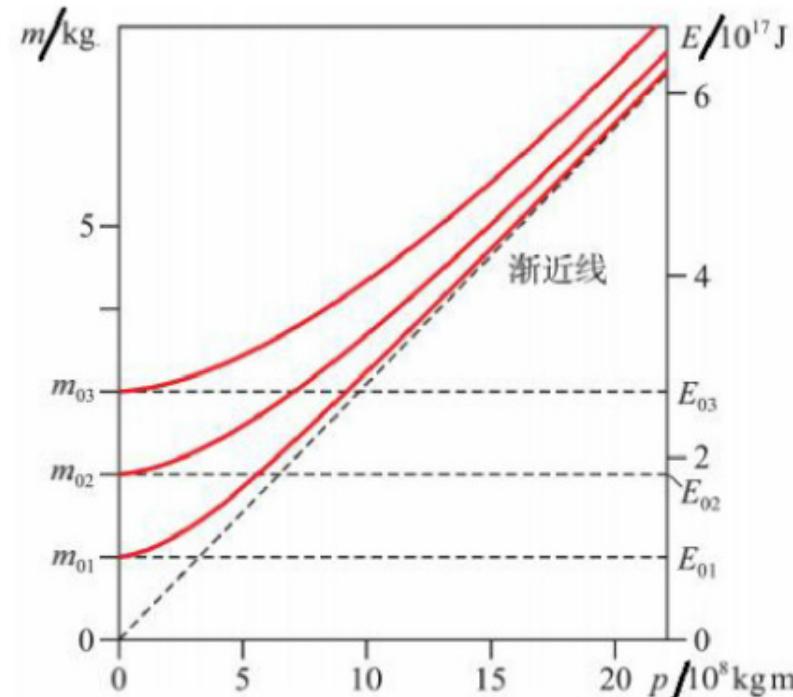
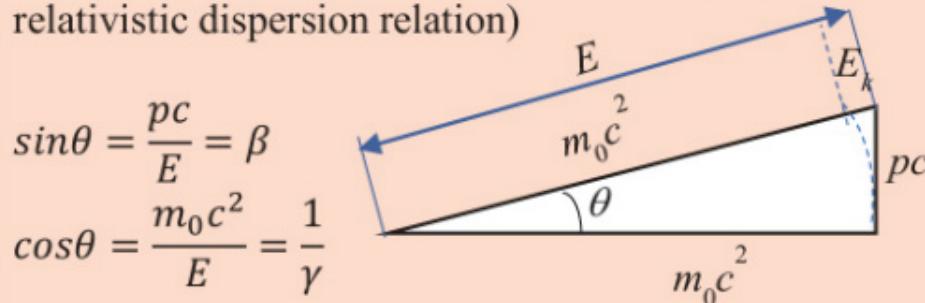
$$m^2 c^2 = p^2 + m_0^2 c^2$$

$$m^2 c^4 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

上式称为相对论性能量-动量方程或相对论性色散关系 (relativistic energy-momentum equation or relativistic dispersion relation)



不同静止质量的物体的能量与动量关系图线

物体的动能,

根据能量守恒定律, 物体的相对论性动能为

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0 c^2 \\ &= \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \\ &= (\gamma - 1)m_0 c^2 \end{aligned}$$

物体长度的收缩性,

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0$$

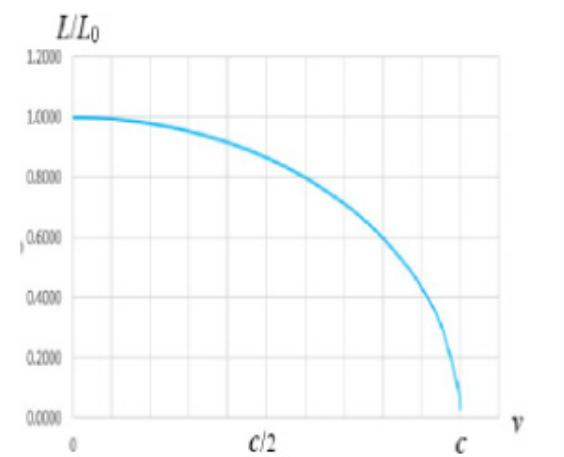
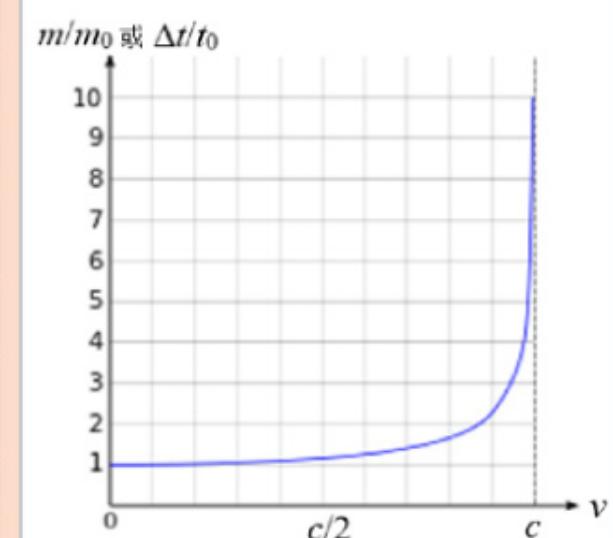
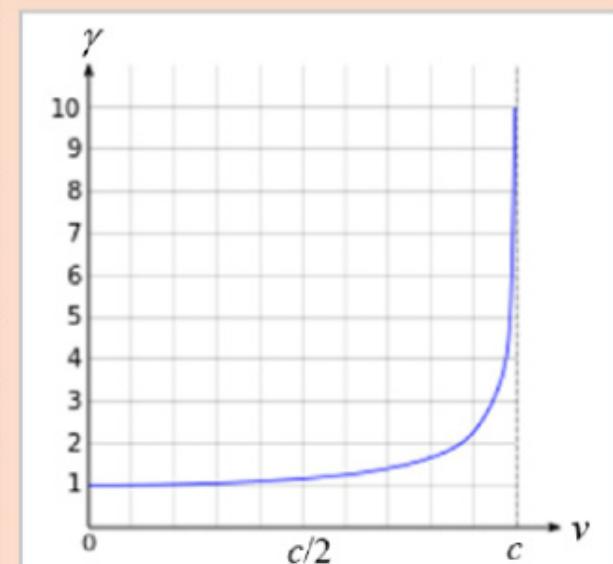
物体时间的膨胀性

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$



洛伦兹因子 (数值感应, number sense)

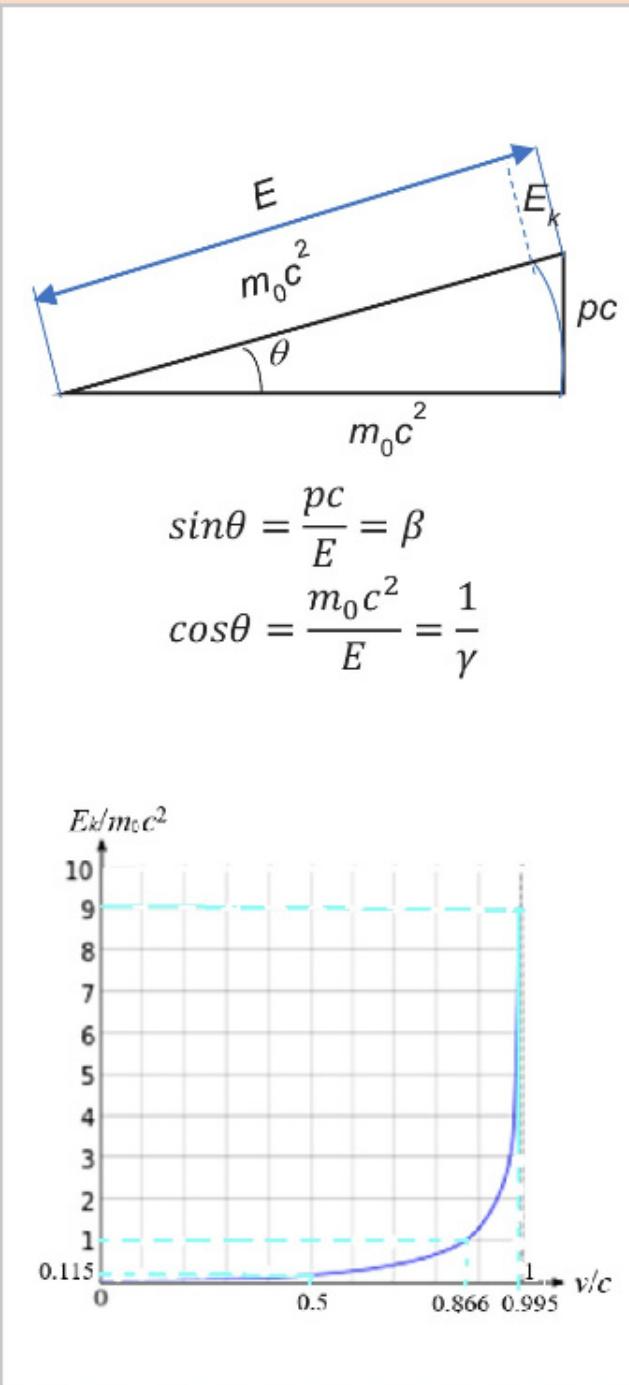
速度比 $\beta = \frac{v}{c}$	洛伦兹因子 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	相对论性时间/ Δt_0 $\Delta t = \gamma \Delta t_0$	相对论性长度/ L_0 $L = \frac{1}{\gamma} L_0$
0.000	1.000	1.000	1.0000
0.010	1.0005	1.0005	0.9999
0.050	1.001	1.001	0.9987
0.100	1.005	1.005	0.9950
0.200	1.021	1.021	0.9798
0.300 (约 1/3)	1.048 (改变 5%)	1.048	0.9539
0.400	1.091	1.091	0.9165
0.500 (1/2)	1.155	1.155	0.8660
0.600	1.250	1.250	0.8000
0.707 ($\frac{1}{\sqrt{2}}$)	1.414 ($\sqrt{2}$)	1.417	0.7071
0.800	1.667	1.667	0.6000
0.866 ($\frac{\sqrt{3}}{2}$)	2.000	2.000	0.5000
0.900	2.294	2.294	0.4359
0.943 ($\frac{2\sqrt{2}}{3}$)	3.005	7.089	0.1411
0.999	22.366	22.366	0.0447
0.9999	70.712	70.712	0.0141
0.99995	100.001	100.001	0.0100
0.99999	223.607	223.607	0.0045
0.999995	316.228	316.228	0.0032
0.999999	707.107	707.107	0.0014





洛伦兹因子 (续)

速度比 $\beta = \frac{v}{c}$	速度占 c 的百分比 $\beta \times 100\%$	洛伦兹因子 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	相对论性动能/ $m_0 c^2$ $\frac{E_k}{m_0 c^2}$
0.000	0	1.000	0.000
0.050	5%	1.001	0.001
0.100	10%	1.005	0.005
0.200	20%	1.021	0.021
0.300	30%	1.048	0.048
0.400	40%	1.091	0.091
0.500	50%	1.155	0.155
0.600	60%	1.250	0.250
0.700	70%	1.400	0.400
0.800	80%	1.667	0.667
0.866	86.6%	2.000	1.000
0.900	90%	2.294	1.294
0.990	99%	7.089	6.089
0.999	99.9%	22.366	21.366
0.995	99.5%	10.013	9.013
0.99995	99.995%	100.001	99.001
0.9999995	99.99995%	1000.000	999.000
0.999999995	99.9999995%	10000.000	9999.000





洛伦兹因子(续)

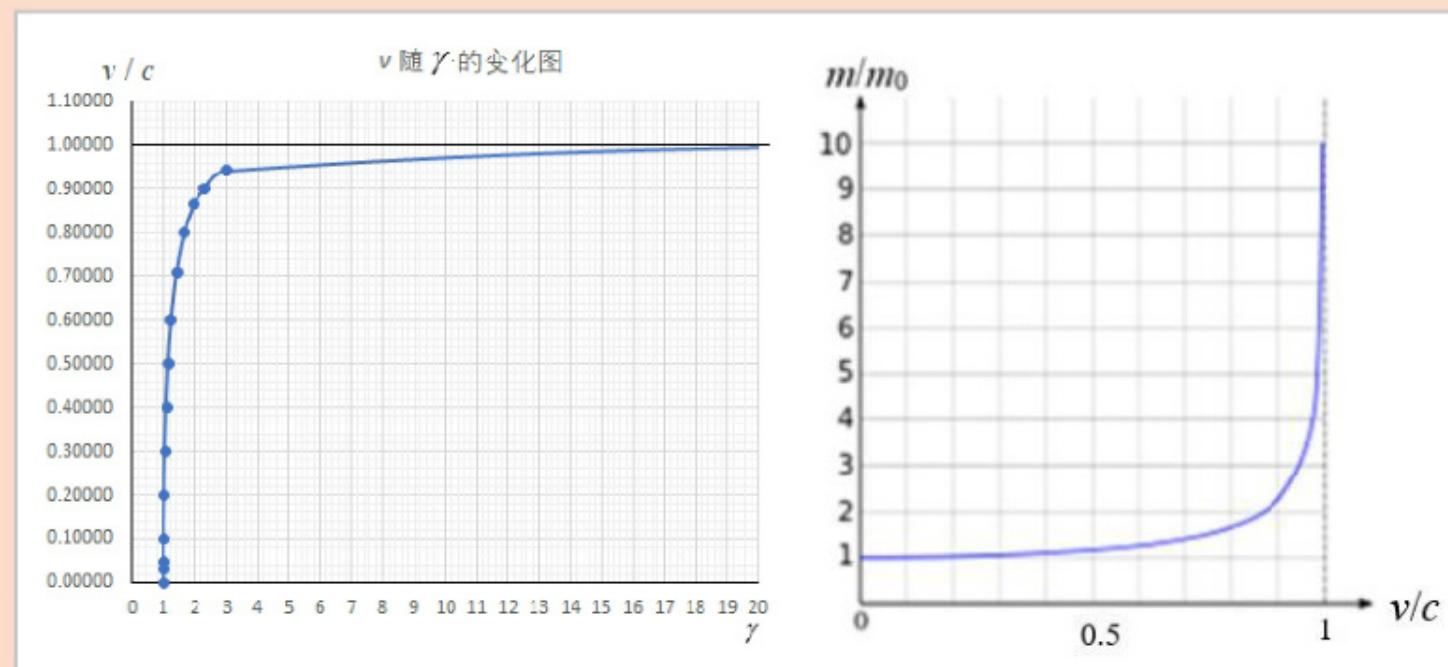
洛伦兹因子 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	相对论性质量/ m_0 $\frac{m}{m_0}$	质量增加百分比/% $\frac{m - m_0}{m_0} \times 100\%$	物体速度/ c $v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$
1.01	1.01	1%	0.140
1.10	1.10	10%	0.417
2.00	2.00	100%	0.866
10.00	10.00	900%	0.995
100.00	100.00	9900%	0.99995
1000.00	1000.00	99900%	0.9999995
10000.00	10000.00	999900%	0.999999995

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$



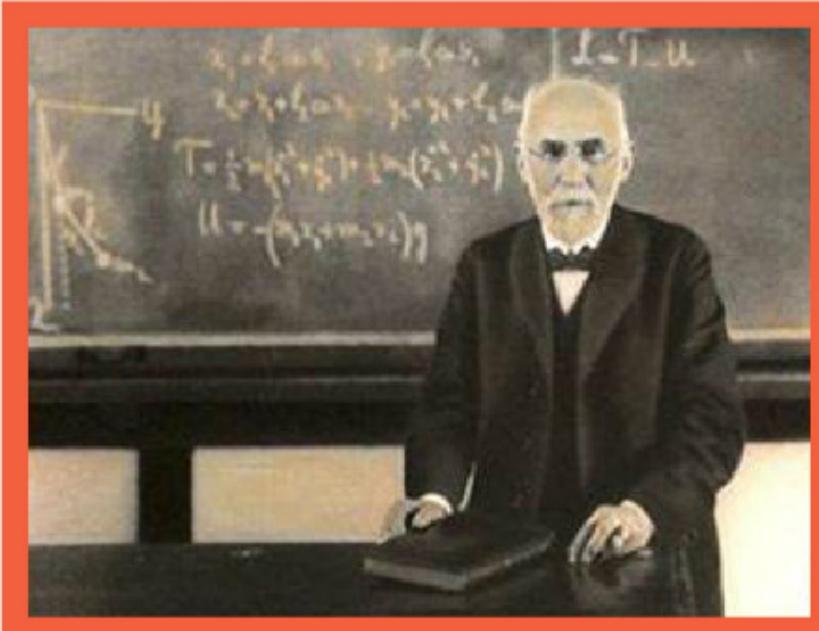


洛伦兹因子(续)

洛伦兹因子 $\gamma = 2$ 的特殊性

如果速度比 $\beta = \frac{6}{7}$,

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{6}{7}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{36}{49}}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{13}} \approx 2\end{aligned}$$



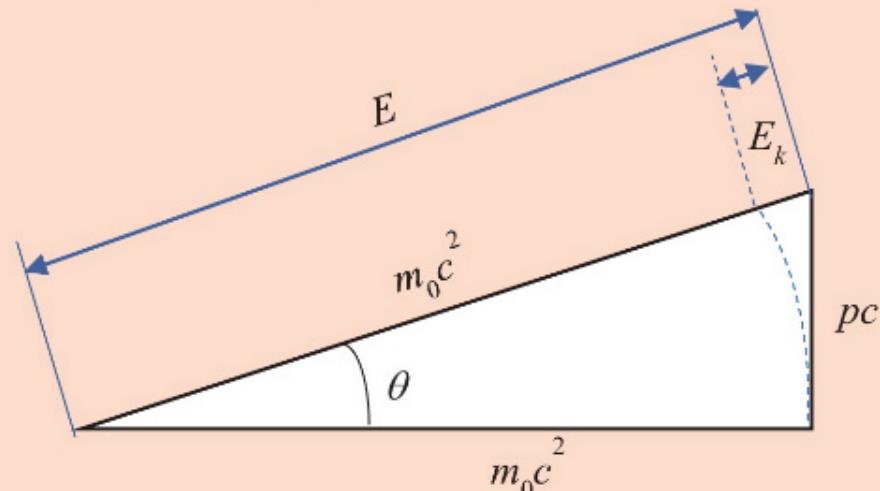
Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928)

相对论三角形

物体相对论总能量与动量之间的关系,

$$\begin{aligned}c^2(m^2 - m_0^2) &= p^2 \\ m^2 c^2 &= p^2 + m_0^2 c^2 \\ m^2 c^4 &= p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \\ E^2 &= (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \\ E &= \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}\end{aligned}$$

上式称为相对论能量-动量方程 (relativistic energy-momentum equation)



$$\sin \theta = \frac{pc}{E} = \frac{(\gamma m_0 v)c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{v}{c} = \beta$$

$$\cos \theta = \frac{m_0 c^2}{E} = \frac{1}{\gamma}$$

物体的相对论动量:

$$p = mv = \gamma m_0 v$$

物体的相对论总能量:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

物体的相对论动能:

$$E_k = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1)m_0 c^2$$

物体长度的收缩性:

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0$$

物体时间的膨胀性:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$



【例】

求下列洛伦兹因子值的速度与光速比: 1.01, $\sqrt{2}$, 2, 3, 10.0, 100, 1000。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$1 - \beta^2 = \gamma^{-2}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$$

$$(a) \beta = \sqrt{1 - (1.01)^{-2}} = 0.140$$

$$(b) \beta = \sqrt{1 - (\sqrt{2})^{-2}} = 0.707$$

$$(c) \beta = \sqrt{1 - 2^{-2}} = 0.866$$

$$(d) \beta = \sqrt{1 - 3^{-2}} = 0.943$$

$$(e) \beta = \sqrt{1 - (10.0)^{-2}} = 0.9950$$

$$(f) \beta = \sqrt{1 - (100)^{-2}} = 0.999950$$

$$(g) \beta = \sqrt{1 - (1000)^{-2}} = 0.99999950$$

【例】

求下列情况下的洛伦兹因子:

$$(a) v = \frac{\sqrt{3}}{2} c; (b) \beta = 0.600$$

$$(a) \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} = 2$$

$$(b) \beta = 0.600$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.600)^2}} = 1.25$$



【例】

一个电子的动能为 2.53 MeV。求

- (a) 电子的相对论总能量,
- (b) 电子的相对论动量的值(以 $\frac{\text{MeV}}{c}$ 表示)。

(a) 电子的相对论总能量,

$$\begin{aligned} E &= m_0 c^2 + E_k \\ &= 9.109 \times 10^{-31} \times (2.998 \times 10^8)^2 \text{ J} + 2.53 \text{ MeV} \\ &= \frac{9.109 \times 10^{-31} \times (2.998 \times 10^8)^2}{1 \times 10^6 \times 1.602 \times 10^{-19}} + 2.53 \text{ MeV} \\ &= 0.511 + 2.53 \text{ MeV} \\ &= 3.041 \text{ MeV} \end{aligned}$$

(b) 电子的相对论动量的值,

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \\ pc &= \sqrt{E^2 - (m_0 c^2)^2} \\ &= \sqrt{3.041^2 - 0.511^2} \\ &= 2.998 \text{ MeV} \\ p &= 2.998 \frac{\text{MeV}}{c} \end{aligned}$$

【例】

一个静止质量为 $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 的质子的相对论总能量为其静止能量的 3 倍。求

- (a) 质子的相对论动量,
- (b) 质子的相对论速度,
- (c) 质子的相对论动能。

(a) 质子的相对论动量,

$$\begin{aligned} E_0 &= m_0 c^2 = 1.67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} \\ &= 938.20 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$(3E_0)^2 = (pc)^2 + (E_0)^2$$

$$(pc)^2 = 8(E_0)^2$$

$$pc = \sqrt{8} \times 938.20 \text{ MeV}$$

$$p = 2653.63 \frac{\text{MeV}}{c}$$

(b) 质子的相对论速度,

$$\begin{aligned} E &= \gamma m_0 c^2 = 3m_0 c^2 \\ \gamma &= 3 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 3$$

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$v = 2.83 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

(c) 质子的相对论动能,

$$\begin{aligned} E_k &= E - m_0 c^2 \\ &= 3E_0 - E_0 \\ &= 2 \times 938.20 \\ &= 1876.40 \text{ MeV} \end{aligned}$$



【例】

兆电子伏特加速器 (Tevatron particle accelerator) 又译为正负质子对撞机，是一座圆形粒子加速器(或称同步回旋加速器(synchrotron))，兆电子伏特加速器将质子与反质子于 6.3 km 的环中加速，使其动能达到 $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ ，求此时质子的速度。

已知质子的静止能量， $E_0 = 938.20 \text{ MeV}$ 远小于它的动能 $10^{12} \text{ eV} = 1 \times 10^6 \text{ MeV}$ ，所以静止能量可忽略不计，

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_k \approx E_k \\ \gamma E_0 &= E_k \\ \gamma \times 938.20 &= 1 \times 10^6 \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} &= 1065.87 \\ 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 &= \frac{1}{1065.87^2} \\ v &= c \sqrt{1 - \frac{1}{1065.87^2}} = 0.99999956c \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_k \\ \gamma \times 938.20 &= 938.20 + 1 \times 10^6 \\ \gamma &= 1066.87 \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} &= 1066.87 \\ 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 &= \frac{1}{1066.87^2} \\ v &= c \times \sqrt{1 - \frac{1}{1066.87^2}} = 0.99999956c \end{aligned}$$

【例】

一个粒子加速器将电子加速到 10 MeV ，则此情况下电子的最大速度为多少？

电子的静止能量，

$$\begin{aligned} E_0 &= m_0 c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} \\ &= 0.512 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_k \\ \gamma \times 0.512 &= 0.512 + 10 \\ \gamma &= 20.53 \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} &= 20.53 \\ 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 &= \frac{1}{20.53^2} \\ v &= c \times \sqrt{1 - \frac{1}{20.53^2}} \\ &= 0.9988c \\ &= 2.996 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$



【例】

一个质子的速度为 $0.999c$, 则它的相对性动量为多少?

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.999^2}} = 22.366$$

$$\begin{aligned} p &= mv \\ &= \gamma m_0 v \\ &= 22.366 \times (1.67 \times 10^{-27}) \times 0.999 \times (3 \times 10^8) \\ &= 1.12 \times 10^{-17} \text{ kg m s}^{-1} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} E^2 &= (pc)^2 + E_0^2 \\ p &= \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c} \\ &= \frac{\sqrt{(\gamma E_0)^2 - E_0^2}}{c} \\ &= \frac{m_0 c^2}{c} \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= 1.67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8) \sqrt{22.366^2 - 1} \\ &= 1.12 \times 10^{-17} \text{ kg m s}^{-1} \end{aligned}$$

【例】

一个光子的波长为 500 nm , 则它的动量为多少?

根据德布罗意假说,

$$\begin{aligned} p &= \frac{h}{\lambda} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{500 \times 10^{-9}} \\ &= 1.33 \times 10^{-27} \text{ kg m s}^{-1} \end{aligned}$$

或

已知光子的静止能量为 0,

$$\begin{aligned} E^2 &= (pc)^2 + E_0^2 \\ \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 &= (pc)^2 + 0 \\ p &= \frac{h}{\lambda} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{500 \times 10^{-9}} \\ &= 1.33 \times 10^{-27} \text{ kg m s}^{-1} \end{aligned}$$



【例】

质量为 1 kg 的物体以 $0.5c$ 运动，则它的动能为多少？

非相对论性条件下，物体运动速度远小于光速，

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times (0.5 \times 3 \times 10^8)^2 \\ &= 1.125 \times 10^{16} \text{ J} \quad \text{错误的！} \end{aligned}$$

[如果 $v > 0.1c$, 相对理论性原理就可以]

相对论性条件下，物体运动速度接近于光速，

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}\gamma mv^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{0.5c}{c})^2}} \times 1 \times (0.5 \times 3 \times 10^8)^2 \\ &= 1.299 \times 10^{16} \text{ J} \quad \text{错误的！} \end{aligned}$$

正解：

$$\begin{aligned} E_k &= E_T - E_0 \\ &= (\gamma - 1)m_0c^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{0.5c}{c})^2}} - 1 \right) \times 1 \times (3 \times 10^8)^2 \\ &= 1.392 \times 10^{16} \text{ J} \end{aligned}$$

【例】

(a) 在宇宙射线中观测到质子的动能为 $3.0 \times 10^{20} \text{ eV}$ ，则它的速度为多少？

(b) 这个质子穿过直径为 9.8×10^4 光年的银河系所需的时间是多少？

(a) 已知质子的静止能量 $E_0 = 938.20 \text{ MeV}$ 质子的相对论性总能量，

$$\begin{aligned} E_T &= E_0 + E_k \\ \gamma E_0 &= E_0 + E_k \\ \gamma &= \frac{938.2 \times 10^6 + 3.0 \times 10^{20}}{938.2 \times 10^6} \\ &= 3.198 \times 10^{11} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \beta)(1 - \beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1 - \beta)}} \\ 1 - \beta &= \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{2(3.198 \times 10^{11})^2} = 4.9 \times 10^{-24} \\ &= 5 \times 10^{-24} \\ \beta &= 1 - 5 \times 10^{-24} \\ v &= \beta c = 0.999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 995c \end{aligned}$$

(b) 相对于地球而言， $\Delta t = 9.8 \times 10^4 \text{ y}$

所以相对于该质子而言，

$$\begin{aligned} \Delta t_0 &= \frac{\Delta t}{\gamma} \\ &= \frac{9.8 \times 10^4}{3.198 \times 10^{11}} \text{ y} \\ &= \frac{9.8 \times 10^4}{3.198 \times 10^{11}} \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s} \\ &= 9.67 \text{ s} \end{aligned}$$

它们之间存在着巨大的差异。

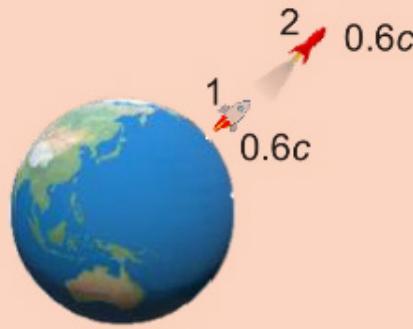


【例】

如图所示，火箭 1 以 $v = 0.6c$ 的速度离开地球，火箭 2 以 $u' = 0.6c$ 的速度从火箭 1 发射出去，则火箭 2 相对于地球的速度为多少？

$$\begin{aligned} u &= \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \\ &= \frac{0.60c + 0.60c}{1 + \frac{(0.60c)(0.60c)}{c^2}} \\ &= \frac{1.20c}{1.36} \\ &= 0.88c \end{aligned}$$

火箭 2 与火箭 1 的运动方向相同。



【例】

一个人乘坐在相对于地球 $0.40c$ 的速度行驶火箭上，他观察到一个流星以相对于地球 $0.4c$ 的速度从他从后面追越过。流星相对于地球移动的速度为多少？

$$\begin{aligned} u &= \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \\ u &= \frac{0.40c + 0.40c}{1 + \frac{0.40c \times 0.40c}{c^2}} \\ &= \frac{0.80c}{1 + 0.16} \\ &= 0.69c \end{aligned}$$

【例】

一艘太空船飞船正在以 $v = 0.65c$ 离开地球，第二艘太空船飞船以相对于第一艘 $u' = 0.82c$ 的速度远离而直接向后朝地球发射，则太空船 2 相对于地球的速度为多少？

$$\begin{aligned} u &= \frac{v - u'}{1 - \frac{vu'}{c^2}} \\ &= \frac{0.65c - 0.82c}{1 - \frac{(0.65c)(0.82c)}{c^2}} \\ &= \frac{-0.17c}{0.467} \\ &= -0.36c \end{aligned}$$

太空船 2 正在返回地球。



广义相对论 General relativity theory

一切物理定律在任何参照系下都是相同的
(将相对论扩大到非惯性参照系、导入引力问题)

等效原理 Equivalence principle

一个均匀的引力场与一个做匀加速度直线运动的参照系在物理上完全等效
对于一个在引力场中自由下落的物体，

$$m_i a = m_g g$$

其中 m_i 是物体的惯性质量， a 事物的加速度(与参照系有关)； m_g 是引力质量， g 是引力场强度

上式揭示了引力场与参照系之间的关系，以及惯性质量与引力质量的等效性。

引力场与参照系有关

甲学生站在自由下落的电梯中，
乙学生站在电梯外的平台上。

甲学生感觉处于失重状态，他所释放的物体都漂浮在空中，所以甲学生得到的结论：重力场强度为0。

乙学生观察到甲学生与他所释放的物体都在与电梯一起加速落向地面，所以乙学生得到的结论：重力场强度不为零。

引力场强度与参照系有关：

在自由下落的电梯参照系中，引力场强度等于零；
在地面参照系中，引力场强度不等于零。



惯性质量等于引力质量

甲学生站在自由下落的电梯中，乙学生站在电梯外的平台上，手中拿着一个挂有重物的弹簧测力计。



对甲学生来说，所处重力场强度为零，弹簧之所以会伸长，是由于乙学生向上做加速度运动。物体的质量度量其阻碍加速度的性质，即是惯性质量 m_i 。

对乙学生来说，所处重力场强度不为零，弹簧之所以会伸长，是由于引力场对重物施加了引力。物体的质量度量了其受引力的性质，即是引力质量 m_g 。

惯性质量等于引力质量

在不同的参照系下，质量可以表示出不同的特性：有时为轻重的引力质量，有时为阻碍运动的惯性质量，但它们都是等效的。



广义相对论的实证

假设在外层空间的宇宙飞船中，没有引力场施加引力情况下将一小球平行于飞船底部沿水平方向被抛出。

如果关闭飞船的发动机，在飞船内部看来，它的轨迹是水平直线的。

如果开启飞船的发动机，使飞船以 $a = g$ 的加速度向上运动：

在飞船外部看来，小球的轨迹仍是水平直线的；

在飞船内部看来，小球的轨迹与在地球表面平抛物体的情况是一样的。

由此可知，根据等效原理，向上加速的参照系等效于向下的引力场，或另一说法为在向上加速的飞船参照系的引力场强度为向下的 g ，因此水平抛出的小球在飞船内部看来受到向下的引力作用，造成其运动轨迹为一抛物线。

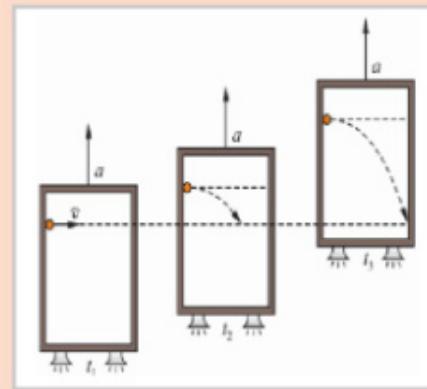
如果上述小球是一光束，这束光在引力场的作用下也会弯曲的，尤其是强引力场的等效原理下，例如太阳的引力场。

广义相对论中，光在引力场中弯曲的偏折角的计算公式为

$$\alpha = 4 \frac{G m}{c^2 r}$$

其中 G 和 c 为普适常量(引力常量和极限速度)， m 是中心物体的质量， r 是与中心物体中心的距离

质量越大则引力就越强，引力越大则空间弯曲得越厉害，偏折角就越大。



【例】

计算在下列情况下的光的偏折角：

- (a) 光通过质量 $m = 3 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、半径 $R = 10 \text{ km}$ 的中子星的边缘
- (b) 光通过太阳的边缘。 $m = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、半径 $R = 6.96 \times 10^5 \text{ km}$

(a) 光通过中子星边缘的偏折角，

$$\begin{aligned}\alpha &= 4 \frac{G m}{c^2 r} \\ &= 4 \times \frac{6.67 \times 10^{-11}}{(3 \times 10^8)^2} \times \frac{3 \times 10^{30}}{10 \times 10^3} \\ &= 0.889 \text{ rad}\end{aligned}$$

(b) 光通过太阳边缘的偏折角，

$$\begin{aligned}\alpha &= 4 \frac{G m}{c^2 r} \\ &= 4 \times \frac{6.67 \times 10^{-11}}{(3 \times 10^8)^2} \times \frac{1.99 \times 10^{30}}{6.96 \times 10^8} \\ &= 8.48 \times 10^{-6} \text{ rad}\end{aligned}$$



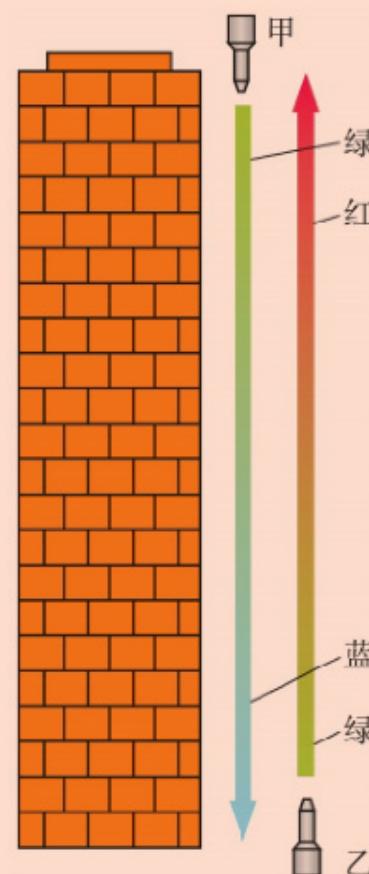
光的引力红移

根据极限速度原理，光的速度已达到极限，因此当光子的能量改变时，其速度不会相应地改变，而是它的频率会相应地改变，造成光的颜色随着改变。

如果光的能量增加时，其频率会相应增加，光的颜色偏向紫光方向变化，称为光的蓝移；反之，其频率会相应减小，光的颜色相红光方向变化，成为光的红移。

如图甲、乙两位学生各别在屋顶及地面上用激光器向下及向下发射一束绿色激光。向下的绿光由于不断的吸收引力场的能量，频率不断增加，到达地面时变成了蓝光，此光在引力场中传播时频率增大的现象叫作光的引力蓝移(gravitational blue shift)；而向上的绿光由于不断的向引力场的释放能量，频率不断减小，到达屋顶时变成了红光，此光在引力场中传播时频率减小的现象叫作光的引力红移(gravitational red shift)。

[上述频率变化现象只有在光经过强引力场附近时才能观察到]

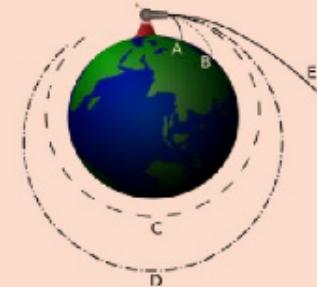


黑洞 – 史瓦西半径(Schwarzschild radius)

逃逸速度 (Escape velocity)，是指在地球上发射的物体摆脱地球引力束缚，飞离地球所需的最小初始速度。

假设无穷远处的物体的势能为 0，则它距离地心为 R 的地表处的势能为 $-\frac{GMm}{R}$ 。若要脱离地球的引力场，就得要给该物体一定的动能来抵消它在地球表面的重力势能，恰好完全抵消时，

$$\begin{aligned} E_k + U &= 0 \\ \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} &= 0 \\ v &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\ R &= \frac{2GM}{v^2} \end{aligned}$$



如果物体的速度接近与光速 c ，

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

其中 r_s 为史瓦西半径，一个物体的史瓦西半径与其质量呈正比，其比例常数中仅有万有引力常数和光速出现。此透过广义相对论正确推导出史瓦西半径与牛顿力学导出相同结果，纯粹是巧合而已，但也有人认为这暗示着尚未被发现的理论。



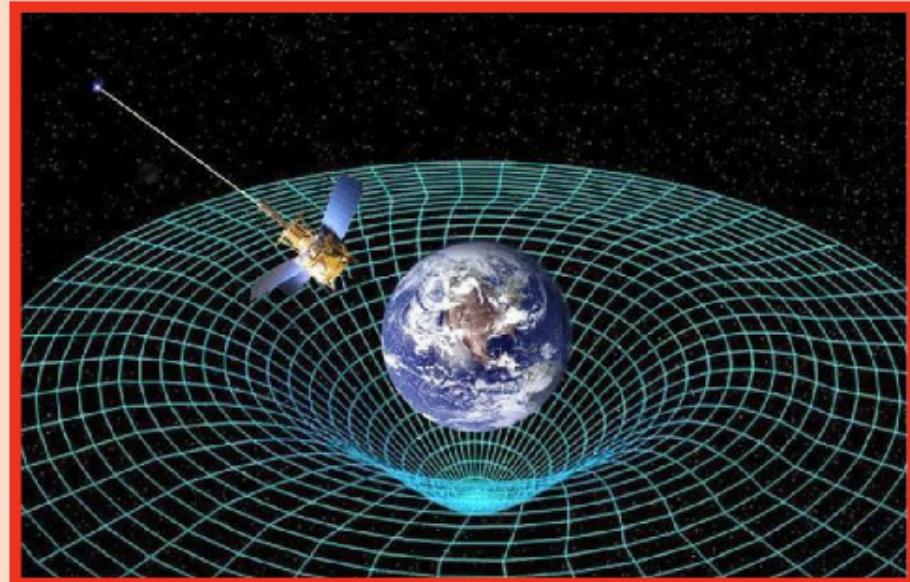
引力场中的时间

在引力场中不同位置的时钟走的快慢，在地表附近海拔较高处的时钟比海拔较低处的时钟走得快。

下面的公式对于所有球星天体都成立，

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \Delta t_0$$

其中 Δt_0 是在远离天体处测得的时间间隔， Δt 是离天体中心为 r 处测得的时间间隔



引力场造成的时空弯曲

【例】

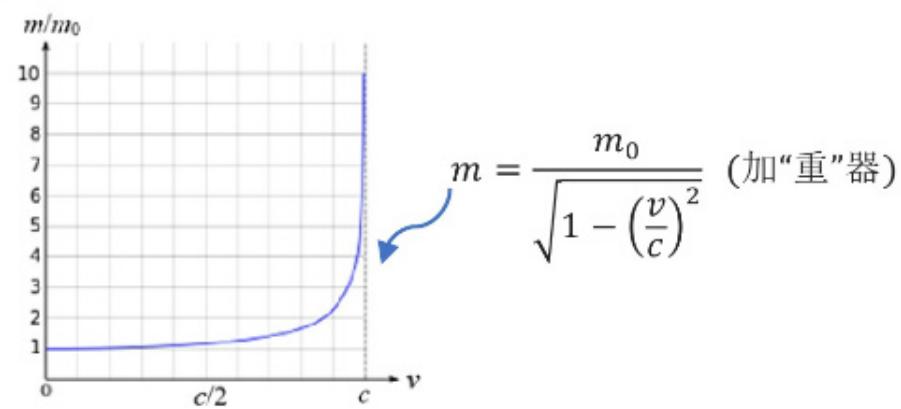
中子星的质量 $m = 3 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、半径 $R = 10 \text{ km}$ ，求其史瓦西半径及在近中子星与远离中子星出的时间间隔的关系式。

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{2GM}{c^2} \\ &= \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 3 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2} \\ &= 4.5 \times 10^3 \text{ (m)} \\ &= 4.5 \text{ (km)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta t &= \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \Delta t_0 \\ &= \sqrt{1 - \frac{4.5}{10}} \Delta t_0 \\ &= 0.74 \Delta t_0 \end{aligned}$$



$E = \Delta mc^2$ 的证明(一)



质点运动

物体动量 $p = mv$

对光或电磁波 $E = pc$

“思想”实验中，

对光子而言 $p_1 = \frac{E}{c}$ (\rightarrow)

对箱子而言 $p_2 = \frac{E}{c}$ (\leftarrow)

$$v_2 = \frac{p_2}{M} = \frac{E}{Mc} \ll c$$

$$s_1 \approx L$$

$$s_2 = vt = \frac{E}{Mc} \times \frac{L}{c} = \frac{EL}{Mc^2}$$

根据等效原理，

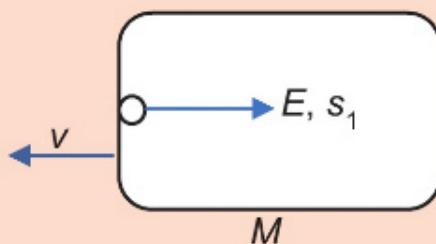
$$mv_1 = Mv_2$$

$$m \frac{s_1}{t} = M \frac{s_2}{t}$$

$$ms_1 = Ms_2$$

$$mL = M \frac{EL}{Mc^2}$$

$$E = mc^2$$



$E = \Delta mc^2$ 的证明(二)

对光子而言

$$E = mc^2 = pc$$

$$p = mc$$

对粒子而言

$$\begin{cases} E = mc^2 \\ p = mv \end{cases} \quad E = \frac{pc^2}{v}$$

假设粒子在 F 的作用下，移动了一小段距离，

$$dW = Fdx$$

$$dE = \frac{dp}{dt} \times dx$$

$$dE = dp \times v$$

$$dE = vdp$$

$$dE = \frac{pc^2}{E} dp$$

$$\int_{E_0}^E dE = \int_0^p pc^2 dp$$

$$\left[\frac{1}{2} E^2 \right]_{E_0}^E = \left[\frac{1}{2} c^2 p^2 \right]_0^p$$

$$E^2 - E_0^2 = p^2 c^2$$

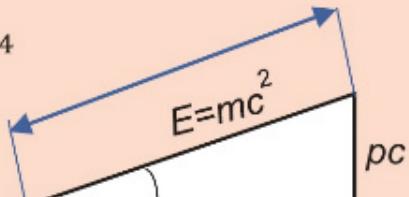
$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$= \frac{E^2 v^2}{c^4} \times c^2 + m_0^2 c^4$$

$$= \frac{E^2 v^2}{c^2} + m_0^2 c^4$$

$$E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2 c^4$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v^2}{c^2})}} = mc^2$$





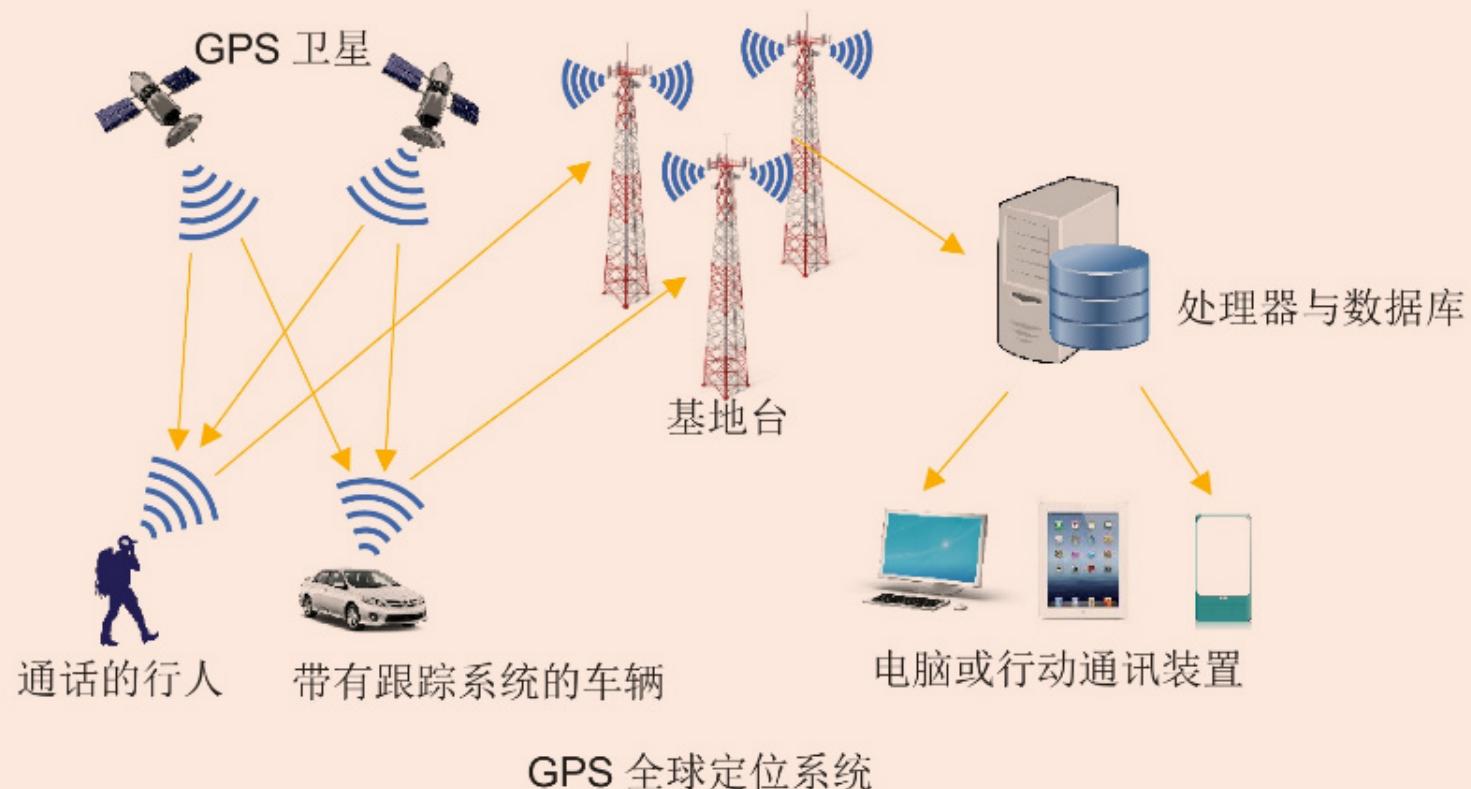
相对论的生活应用 --- 全球定位系统(GPS)

在地球上确定一个位置需要四个坐标，三个空间坐标对应的是经度、緯度以及海拔和一个時間坐标。

通过至少四颗载有铯原子钟的卫星，向外广播自己的時钟時刻以及目前的坐标位置，在手机接收到信号之后，立刻与自己的時钟进行比对，算出時間差，根据光速不变原理就能算出自己和每颗卫星之间的距离。

由于卫星飛行速度極高，時間差会受到狭义相对论的影响而且根据广义相对论，电磁波在地球的引力场中走的不是直线而是曲线！这是因为一束电磁波既然有能量，那么它就有相应的质量，有质量的物体在通过引力场的过程中，会受到引力的影响而改变运行路线！

在这种情况下，如果不把两种相对论的影响算进去，算出来的位置就会有至少 1 km 以上的误差，这样精准定位就失效了！





量纲分析

量纲 (Dimension) 是用若干个基本物理量的乘方之积将一个物理导出量的表达出来, 例如速度 v 的量纲为 $[v] = LT^{-1}$ 。因此量纲可以定性表示出物理量与基本量之间的关系, 可以有效地应用它来推知某些物理规律, 特别是用在宇宙最神秘的天体-黑洞的研究!

在大爆炸宇宙模型下的普朗克纪元(Planck Epoch), 所有的物理量可用以下的 5 个主要宇宙常数导出

$$\text{万有引力常数 } [G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$$

$$\text{约化普朗克常数 } [\hbar] = \left[\frac{\hbar}{2\pi} \right] = M L^2 T^{-1}$$

$$\text{库仑常数 } [k_e] = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] = M L^3 (IT)^{-2} T^{-2}$$

$$\text{玻尔兹曼常数 } [k_B] = \left[\frac{R}{N_A} \right] = M L^2 T^{-2} \theta^{-1}$$

$$\text{光速 } [c] = L T^{-1}$$

普朗克长度式子的推导

$$[G\hbar] = M^{-1} L^3 T^{-2} \times M L^2 T^{-1} = L^5 T^{-3}$$

$$\left[\frac{G\hbar}{c^3} \right] = \frac{L^5 T^{-3}}{L^3 T^{-3}} = L^2$$

$$x_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

普朗克质量式子的推导

$$\left[\frac{\hbar}{G} \right] = \frac{M L^2 T^{-1}}{M^{-1} L^3 T^{-2}} = M^2 L^{-1} T^1$$

$$\left[\frac{\hbar c}{G} \right] = M^2 L^{-1} T^1 \times L T^{-1} = M^2$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

普朗克时间式子的推导

$$t_p = \frac{x_p}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$$

董總
DONG ZONG



普朗克电荷量式子的推导

$$[\hbar c] = M L^2 T^{-1} \times L T^{-1} = M L^3 T^{-2}$$

$$\left[\frac{\hbar c}{k_e} \right] = \frac{M L^3 T^{-2}}{M L^3 (IT)^{-2} T^{-2}} = (IT)^2$$

$$q_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{k_e}}$$

普朗克温度式子的推导

$$[k_B] = M L^2 T^{-2} \theta^{-1}$$

$$\theta = \frac{M L^2 T^{-2}}{[k_B]} = \frac{\left[\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \right] \times \left[\frac{G \hbar}{c^3} \right] \times \left[\frac{c^5}{G \hbar} \right]}{[k_B]}$$

$$T_p = \frac{\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}}{k_B} = \frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$$

普朗克基本单位

物理量	量纲	表达式	数值
普朗克长度	L	$x_p = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}}$	$1.61 \times 10^{-35} \text{ m}$
普朗克质量	M	$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$2.18 \times 10^{-8} \text{ kg}$
普朗克时间	T	$t_p = \frac{x_p}{c} = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^5}}$	$5.39 \times 10^{-44} \text{ s}$
普朗克电荷	Q	$q_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{k_e}}$	$1.88 \times 10^{-18} \text{ C}$
普朗克温度	θ	$T_p = \frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$	$1.42 \times 10^{32} \text{ K}$ (亿亿亿) 注: 1亿 = 1万万



黑洞 (自选)

黑洞是一种天体，它的引力场非常强，就连光也不能逃脱出来。

根据爱因斯坦广义相对论，当恒星的半径越小，即恒星密度越大，它对周围的时空弯曲作用就越大！

当恒星半径小到天文学称为「史瓦西半径」时，就连垂直表面发射的光都被捕获了，在这情况下恒星就变成了黑洞！

任何物质一旦进入黑洞区域，就再不能逃出！

可以用量纲分析法来探究关于黑洞的课题。[IPhO 2007]

课题一

根据斯特藩-玻尔兹曼定律，黑洞每秒钟每单位面积辐射出来的能量等于 σT^4 ，其中 σ 为斯特藩-玻尔兹曼常数， T 为黑洞的绝对温度，求 σ 的量纲，并且进一步求出斯特藩-玻尔兹曼常数 σ 与 k_B , \hbar , c 及 G 的关系。

$$P = \sigma A T^4$$

$$\sigma = \frac{P}{AT^4}$$

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[A][T]^4} = \frac{\frac{M L^2 T^{-2}}{T}}{L^2 \theta^4} = M L^0 T^{-3} \theta^{-4}$$



$$[\sigma] = [k_B]^w [\hbar]^x [c]^y [G]^z$$

$$M L^0 T^{-3} \theta^{-4} = [M L^2 T^{-2} \theta^{-1}]^w [M L^2 T^{-1}]^x [L T^{-1}]^y [M^{-1} L^3 T^{-2}]^z$$

$$M L^0 T^{-3} \theta^{-4} = M^{(w+x-z)} L^{(2w+2x+y+3z)} T^{(-2w-x-y-2z)} \theta^{-w}$$

$$\begin{cases} w + x - z = 1 \\ 2w + 2x + y + 3z = 0 \\ -2w - x - y - 2z = -3 \\ -w = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = 4 \\ x = -3 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\sigma = k_B^4 \hbar^{-3} c^{-2} G^0$$

$$= \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2}$$



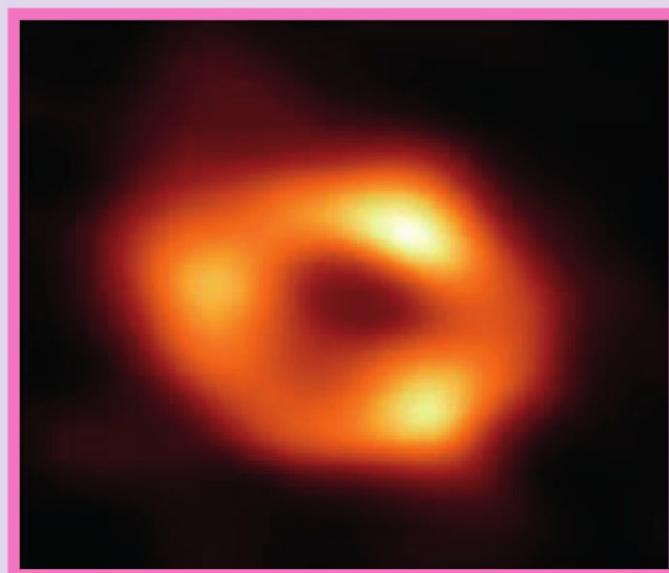
课题二

探求黑洞事件视界 (event horizon) 区域的面积

根据“no hair theorem”无毛定理，对于一个不旋转不带电的黑洞，它的事件视界区域的面积只取决于该黑洞的质量。

已知事件视界区域的面积与相关物理量的关系如下，

$$\begin{aligned} A &\propto G^x c^y m^z \\ [A] &= [G]^x [c]^y [m]^z \\ L^2 &= (M^{-1} L^3 T^{-2})^x (L T^{-1})^y (M)^z \\ M^0 L^2 T^0 &= M^{-x+z} L^{3x+y} T^{-2x-y} \\ -x + z &= 0 \\ 3x + y &= 2 \\ -2x - y &= 0 \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \\ z = 2 \end{cases} \\ A &= \frac{m^2 G^2}{c^4} \end{aligned}$$



银河系中心的黑洞 --- 人马座 A*

课题三

探求黑洞的熵与事件视界的区域的面积的关系。

从经典的角度来看，没有任何东西可以从黑洞中逃脱，因此事件视野的区域只能增加。Jacob Bekenstein 按热力学的第二定律的推演，将熵 S 导入了黑洞，即与其事件视界区域的面积成正比，即 $S = \eta A$ 。

探求黑洞的熵与事件视界的区域的面积的关系，并以 c, k_B, G, \hbar 表示。

熵，

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} \\ [S] &= M L^2 T^{-2} \theta^{-1} \end{aligned}$$

由于，

$$S = \eta A \dots (1) \text{ (BH Bekenstein-Hawking 假设)}$$

$$\begin{aligned} [\eta] &= \frac{[S]}{[A]} \\ &= M L^0 T^{-2} \theta^{-1} \end{aligned}$$

从量纲带入基本量，

$$\begin{aligned} \eta &= k \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \times \left(\sqrt{\frac{G \hbar}{c^5}} \right)^{-2} \times \left(\frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \right)^{-1} \\ &= k \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \times \frac{c^5}{G \hbar} \times k_B \sqrt{\frac{G}{\hbar c^5}} \\ &= k \frac{c^3 k_B}{G \hbar} \end{aligned}$$

带入假设(1)，其中 $k = \frac{1}{4}$

$$S = \frac{c^3 k_B}{4 G \hbar} A$$



课题四

霍金假设黑洞辐射与“霍金温度”黑体辐射是一样的。假设黑洞没有对外界做功，应用 $E = mc^2$ 及热力学第一、第二定律以其质量及基本常量导出霍金温度 T_H 。

如果黑洞没有对外界做功，

$$dE = dQ + dW \quad (dW = 0)$$

$$dE = dQ$$

由于 $dS = \frac{dQ}{T_H}$, $dE = c^2 dm$,

$$c^2 dm = T_H dS$$

$$T_H = c^2 \left(\frac{dS}{dm} \right)^{-1}$$

$$= c^2 \left(\frac{d}{dm} \eta A \right)^{-1}$$

$$= c^2 \left(\frac{d}{dm} \frac{c^3 k_B}{G \hbar} \times \frac{m^2 G^2}{c^4} \right)^{-1}$$

$$= c^2 \times \frac{\hbar c}{2mGk_B}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\hbar c^3}{Gk_B} \left(\frac{1}{m} \right)$$

由此可知当黑洞的质量越来越小时，它的温度反而会越来越高。

因此，对一孤立黑洞而言，

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -\frac{k_B^4 G^2}{\hbar^3 c^8} \left[\frac{1}{2} \frac{\hbar c^3}{Gk_B} \left(\frac{1}{m} \right) \right]^4 m^2 \\ &= -\frac{1}{16} \frac{\hbar c^4}{G^2} \left(\frac{1}{m^2} \right) \end{aligned}$$

由此可知当黑洞损失质量时，它的温度和损失率增加，因而它的质量损失得更快。

课题五

为什么宇宙初期製造出来的微型黑洞现在不存在了？霍金認為黑事件视界附近的真空能量会创生粒子和反粒子的现象，而这些粒子对还没有互相黏合前就会被拆散，由于动量守恒粒子和反粒子各別朝反方向飛开，于是黑洞自己的能量就因创生变成粒子向外逸散！如果黑洞很小，像这样放出能量，黑洞在短時間内蒸发了！这就是著名的霍金黑洞蒸发现论。

由于进行霍金辐射，孤立黑洞的质量必定会随时间而有所变化，应用斯特藩-玻尔兹曼定律 Stefan – Boltzmann's Law 以其质量及基本常量导出“孤立黑洞”质量变化率对霍金温度的关系。

对一孤立黑洞，斯特藩-玻尔兹曼定律，

$$\begin{aligned} P &= -\sigma A T_H^4 \\ \frac{dE}{dt} &= -\left(\frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2} \right) \left(\frac{m^2 G^2}{c^4} \right) T_H^4 \\ c^2 \frac{dm}{dt} &= -\left(\frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2} \right) \left(\frac{m^2 G^2}{c^4} \right) T_H^4 \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{k_B^4 G^2}{\hbar^3 c^8} T_H^4 m^2 \end{aligned}$$

上式中的温度 T_H 还受熵影响。

如果它暴露在温度 T_B 的宇宙背景辐射 (CBR) 下，此时“此非孤立黑洞”将通过霍金辐射失去能量并从宇宙背景辐射中获得能量，

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{k_B^4 G^2}{\hbar^3 c^8} (T_B^4 - T_H^4) m^2$$



课题六

导出孤立黑洞蒸发的时间 t^* , 即是将其完全蒸发所需要的时间,

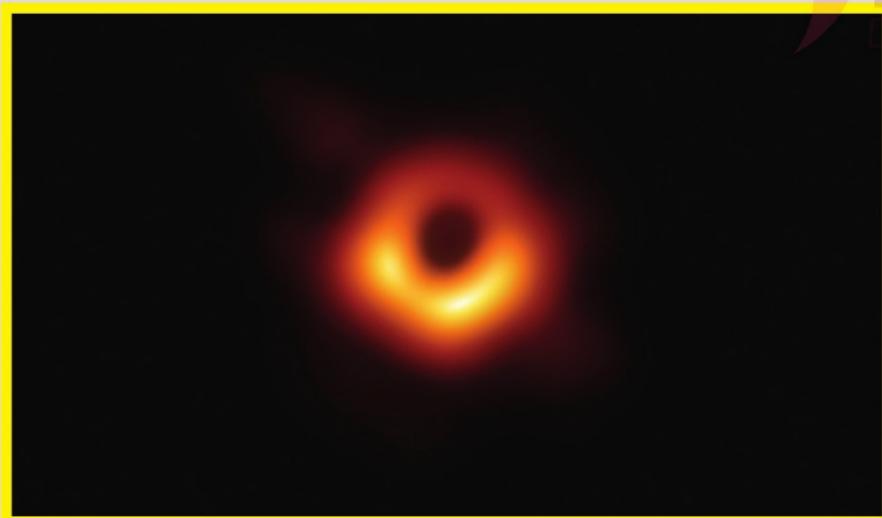
$$\int_{m_0}^m m^2 dm = - \int_0^t \frac{c^4 \hbar}{16G^2} dt$$

$$m^3(t) - m_0^3(0) = - \frac{3}{16} \frac{c^4 \hbar}{G^2} t$$

当时间 $t = t^*$ 时, 孤立黑洞将会完全蒸发, 即 $m(t^*) = 0$

$$\therefore t^* = \frac{16G^2}{3c^4\hbar} m_0^3$$

因此黑洞质量越小, 它的寿命就越短。



董總
DONG ZONG

课题七

从热力学的观点来看, 黑洞具有等容放热性质。导出孤立黑洞的等容热容量

等容变化, $dW = 0, dE = c^2 dm, T = \frac{1}{2} \frac{\hbar c^3}{G k_B} \left(\frac{1}{m}\right)$

$$dQ + dW = dE$$

$$C_V dT = dE$$

$$C_V = \frac{dE}{dT}$$

$$E = mc^2$$

$$dE = c^2 dm$$

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{c^3 \hbar}{G k_B} \left(\frac{1}{m}\right)$$

$$d\theta = - \frac{c^3 \hbar}{2 G k_B} m^{-2} dm$$

$$C_V = \frac{c^2 dm}{-\frac{c^3 \hbar}{2 G k_B} m^{-2} dm}$$

$$= - \frac{2 G k_B}{c \hbar} m^2$$

负的热容量表示放热性质

而依据 $Q = cm\Delta\theta$, 当 c 为负时, 吸收热量 $Q > 0$, 温度会降低 $\Delta\theta < 0$, 即吸收越多热量, 温度降得更低! 这是无法平衡的!



课题八

由于黑洞完全暴露在宇宙背景辐射中。因此黑洞放射能量的同时也吸收来自宇宙射线的能量。导出在宇宙背景辐射 CBR 温度 T_B 下的黑洞质量的变化率，并估算宇宙背景辐射的温度。

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma A T^4 + \sigma A T_B^4$$

$$E = mc^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt}$$

$$= -\frac{\sigma A}{c^2} T^4 + \frac{\sigma A}{c^2} T_B^4$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{c^4 \hbar}{G^2} \left(\frac{1}{m^2} \right) + \frac{k_B^4}{c^2 \hbar^3} \left(\frac{m^2 G^2}{c^4} \right) \times \frac{1}{c^2} \times T_B^4$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{c^4 \hbar}{G^2} \left(\frac{1}{m^2} \right) + \frac{G^2}{c^8 \hbar^3} (k_B T_B)^4 m^2$$

假设黑洞质量的变化率为 0, $\frac{dm}{dt} = 0$

$$-\frac{c^4 \hbar}{16G^2} \left(\frac{1}{m^*} \right)^2 + \frac{G^2}{c^8 \hbar^3} (k_B T_B)^4 m^{*2} = 0$$

$$\frac{c^4 \hbar}{16G^2} \left(\frac{1}{m^*} \right)^2 = \frac{G^2}{c^8 \hbar^3} (k_B T_B)^4 m^{*2}$$

$$(m^*)^4 = \frac{c^{12} \hbar^4}{16(k_B T_B)^4 G^4}$$

$$\Rightarrow m^* = \frac{c^3 \hbar}{2Gk_B} \left(\frac{1}{T_B} \right)$$

$$\Rightarrow T_B = \frac{c^3 \hbar}{2Gk_B} \left(\frac{1}{m^*} \right)$$

由此可以估算宇宙背景辐射的温度。

课题九

当黑洞与宇宙背景辐射处于热平衡的温度，进一步判断这个系统是否处于热平衡？

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -\frac{1}{16} \frac{c^4 \hbar}{G^2} \left(\frac{1}{m^2} \right) + \frac{G^2}{c^8 \hbar^3} (k_B T_B)^4 m^2 \\ &= -\frac{1}{16} \frac{c^4 \hbar}{G^2} \left(\frac{1}{m^2} \right) + \frac{G^2}{c^8 \hbar^3} k_B^4 \left(\frac{c^3 \hbar}{2Gk_B} \times \frac{1}{m^*} \right)^4 m^2 \\ &= -\frac{1}{16} \frac{c^4 \hbar}{G^2} \left(\frac{1}{m^2} \right) + \frac{G^2}{c^8 \hbar^3} k_B^4 \frac{c^{12} \hbar^4}{16G^4 k_B^4} \left(\frac{1}{m^*} \right)^4 m^2 \\ &= -\frac{1}{16} \frac{c^4 \hbar}{G^2} \left(\frac{1}{m^2} \right) + \frac{c^4 \hbar}{16G^2} \left(\frac{1}{m^*} \right)^4 m^2 \\ &= -\frac{1}{16} \frac{c^4 \hbar}{G^2} \left(\frac{1}{m^2} \right) (1 - \frac{m^4}{m^{*4}}) \end{aligned}$$

当黑洞与宇宙背景辐射处于热平衡时，黑洞的温度与宇宙背景辐射的温度是相等的，且 $m = m^*$ ，则

$$T_B = T_H = \frac{c^3 \hbar}{2Gk_B} \left(\frac{1}{m^*} \right)$$

注：

如果 $m > m^*$ 则 $\frac{dm}{dt} < 0$; $m < m^*$, 则 $\frac{dm}{dt} > 0$ 。无论是哪一种状况，系统总是偏离平衡而进行，所以它是一个不稳定平衡。



黑洞的“引力撕裂”---潮汐力 (tidal force)

一艘飞船刚跨入黑洞事件视界时会有什么结果？

根据平方反比定律，引力场强度

$$g(h) = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} = \frac{GM}{R^2} \left(1 - 2\frac{h}{R} + \dots\right)$$

$$\Delta g = -\frac{2h}{R} g_{BH},$$

其中 $g_{BH} = \frac{GM}{R^2}$

【例】

某黑洞的质量为 $6 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，一个长度为 85 m 的飞船，距离该黑洞 $13,500 \text{ km}$ ，求飞船前后的引力强度差。

$$\Delta g = -\frac{2h}{R} g_{BH}$$

$$= \frac{2 \times 85}{13500 \times 10^3} \times 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{6 \times 10^{30}}{(13500 \times 10^3)^2}$$

$$= 27.65 \text{ N kg}^{-1}$$

这飞船前后的引力强度差非常大，所以黑洞可以轻易将它“撕裂”。

如果用时空扭曲来解释，飞船进入黑洞事件视界内，比较靠近黑洞的空间压缩更为激烈，而较远离黑洞的压缩较小，因此整个飞船的形状就会发生改变，变成一个指向黑洞的细长圆锥，因而感受到伴随形变而来且非常强大的潮汐力撕裂。



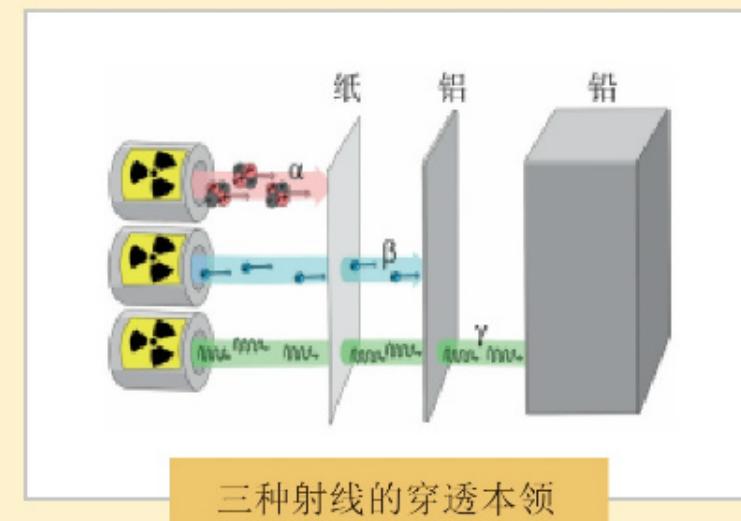
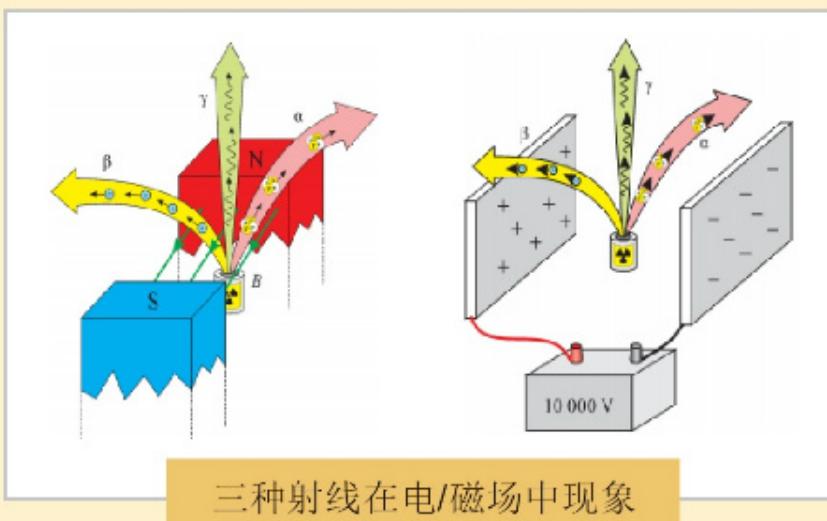


放射性现象

放射性衰变的特征

- 背景辐射需被考虑
- 具有空间与时间的随机性的特点
- 三种辐射(α , β , γ)
- 辐射线的穿透能力 ($\gamma > \beta > \alpha$)
- 辐射线的游离气体能力($\alpha > \beta > \gamma$)

种类	本质	带电量	在电/磁场中	穿透本领	游离气体能力
α 射线	高速氦核流 ${}_{2}^{4}\text{He}$ 速度 $\approx 0.1c$	正电 $+2e$	偏转	最弱 0.0005 cm 纸张可挡	最强 动能最大
β 射线	高速电子流 ${}_{-1}^{0}e$ 速度 $\approx 0.99c$	负电 $-e$	与 α 粒子偏转方向相反	次之 0.05 cm 铝板可挡	次之
γ 射线	高频光子, 即波长极短的电磁波 速度 $\approx c$	不带电	不偏转	最强 8 cm 铅板可挡	最弱 动能最小





放射性同位素的应用

- 穿透力的应用
 - 金属探伤仪
 - 射线测厚仪
 - 医学诊断仪
 - 故障检测（水管故障）
- 细胞损伤的应用
 - 放射治疗
 - 辐射灭菌
 - 农产品基因改良
- 示踪的应用
 - 农业产品磷肥的追踪
 - 医用同位素示踪诊断法
 - 工业产品维修
- 放射性衰变期的应用
 - 放射性碳定年法（5730 年）适用于文物的鉴定
 - 其他放射性定年法 适用于地质的鉴定
钾-氩定年 (K-Ar) 1.26×10^9 a
 - Rb-Sr 4.7×10^{10} a
 - U-Pb, 4.51×10^9 a
 - U-Th, 7.13×10^9 a

[地球、月球的化石的年龄大约 $(4.5\sim4.6) \times 10^9$ a]

常用时间单位: s(秒)、h(小时)、d(天)、a(年)





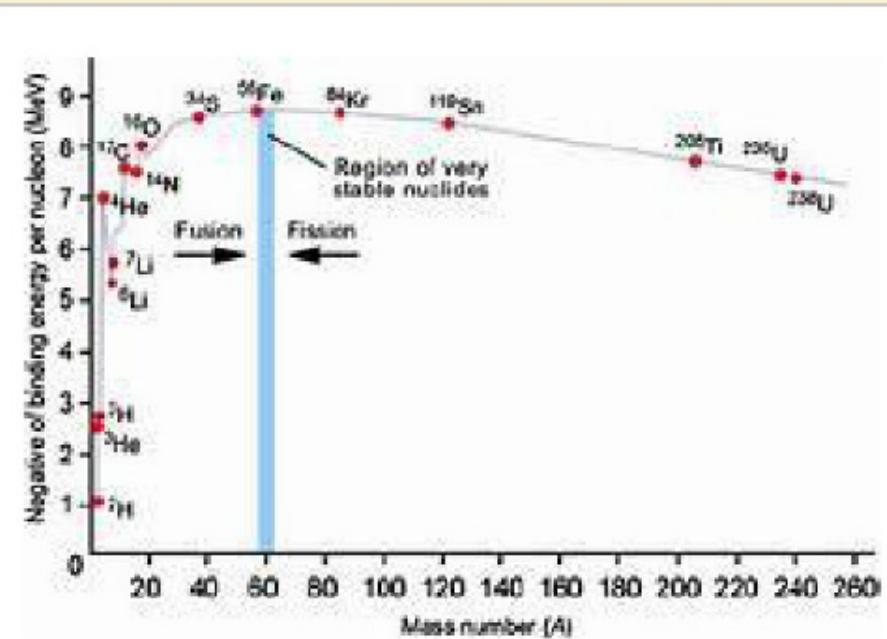
结合能

结合能(Binding Energy)是指两个或多个粒子结合成更大的微粒释放的能量，或相应的微粒分解成原来的粒子需要吸收的能量。

一个原子核的结合能与其中核子数量(质子与中子数量之和)的比值称为原子核的平均结合能 (Binding energy per nucleon)。

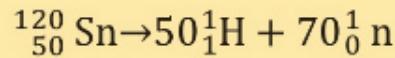
例如质子和中子结合成原子核时放出的能量，或原子核完全分解成质子和中子时吸收的能量，就是这种原子核的结合能。在结合成原子核的过程中，结合之前质子与中子质量之和大于结合之后原子核的质量，出现质量亏损，放出能量。放出的能量可以用质能方程 $E = \Delta m c^2$ 计算。

平均结合能越大的原子就稳定， $^{56}_{26}\text{Fe}$ 。



【例】

求出 $^{120}_{50}\text{Sn}$ 的平均结合能



已知：

$$m_{\text{Sn}} = 119.902197 \text{ u}$$

$$m_{\text{H}} = 1.007825 \text{ u}$$

$$m_{\text{n}} = 1.008665 \text{ u}$$

$$c^2 = 931.494013 \text{ MeV/u}$$

$$\begin{aligned}\Delta E &= [50(1.007825) + 70(1.008665) - 119.902197](931.494013) \text{ MeV} \\ &= 1020.5 \text{ MeV}\end{aligned}$$



半衰期短的材料更安全吗？(辐射元素的安全性)

1.49 μg 的纯 $^{13}_7\text{N}$ 样本，它的半衰期 $T_{\frac{1}{2}} = 10.0 \text{ min} = 600 \text{ s}$,

(a) 它的初始原子数量 N_0 ,

$$N_0 = \frac{m}{M} N_a = \frac{1.49 \times 10^{-6}}{13} \times 6.02 \times 10^{23} = 6.90 \times 10^{16} \text{ 原子核}$$

(b) 它的初始衰变率 R_0 ,

$$R_0 = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{600} \times 6.90 \times 10^{16} = 7.97 \times 10^{13} \text{ (Bq)} = 2.15 \text{ (kCi)}$$

(c) 它 1 h 后的衰变率 R ,

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}$$

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3600}{600}} \times 7.97 \times 10^{13} = 1.25 \times 10^{12} \text{ Bq} = 33.78 \text{ Ci}$$

(d) 它的衰变率变为 1 Bq 所需的时间,

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}$$

$$\frac{1}{7.97 \times 10^{13}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{600}}$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{1}{7.97 \times 10^{13}}} \times 600 = 27707.79 \text{ s} = 7.70 \text{ h}$$



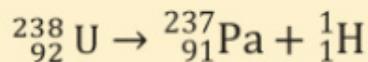
更短的半衰期意味着衰变较快及更多的“放射性”，会造成更多的生物损害。需要很短的时间间隔就能达到安全的活动水平(更少的存储问题)。

1 Bq (becquerel) = 1 decay / s, 1 Ci (curie) = 3.7×10^{10} Bq, [安全水平 $\leq 10 \mu\text{Ci}$]



质子不会从 $^{238}_{92}\text{U}$ 原子核中泄漏出来，为什么？

如果 $^{238}_{92}\text{U}$ 释放出一个质子，



则它所牵涉到的能量变化为

已知：

$$m_{^{238}_{92}\text{U}} = 238.05079 \text{ u}$$

$$m_{^{237}_{91}\text{U}} = 237.05121 \text{ u}$$

$$m_{^1_1\text{H}} = 1.00783 \text{ u}$$

$$\begin{aligned} E &= [238.05079 - (237.05121 + 1.00783)] \text{u} \times \frac{(931.494013) \text{MeV}}{\text{u}} \\ &= -7.68 \text{ MeV} \end{aligned}$$

这表示必须先将 7.68 MeV 的能量加入 $^{238}_{92}\text{U}$ 原子核，才能释放质子出来，所以 $^{238}_{92}\text{U}$ 不会自发性地释放质子。这也说明了，核子间的强作用力远大于质子与质子间的排斥力，所以质子不会自发性的逸出。



作图 (物理学习工具一)

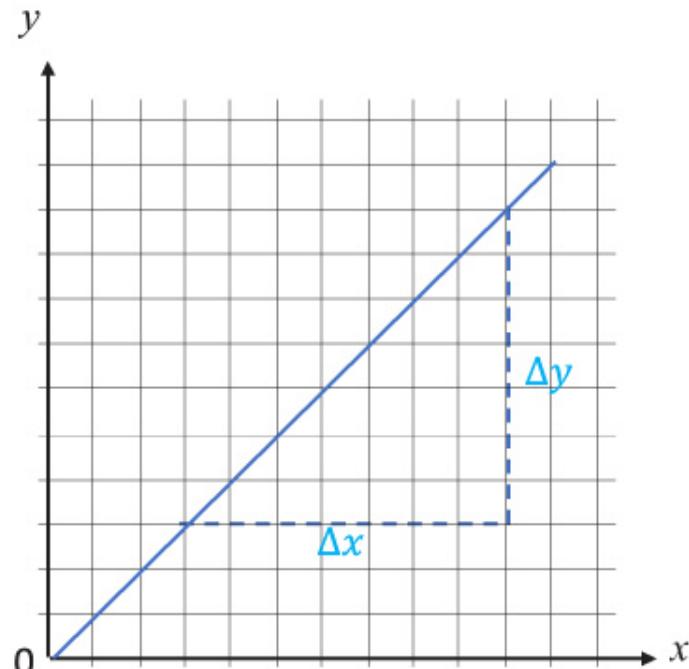
物理量之间的关系除了可应用方程式表达之外，还可以用图来表示

(一) 正比图

$$y = mx$$

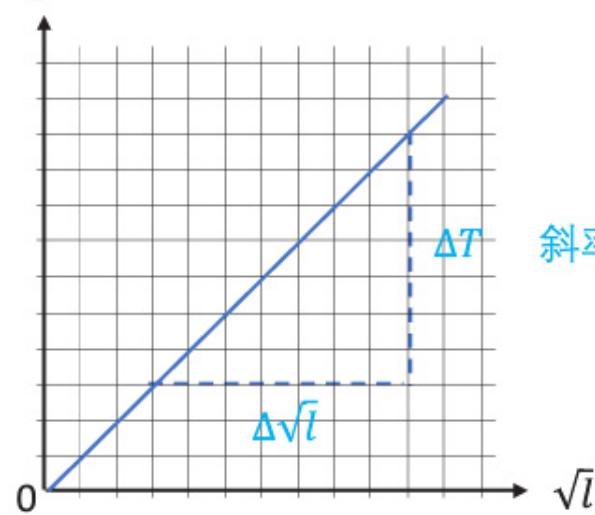
$$m = \text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

例如，在同一地点，物体的重量与质量的关系。



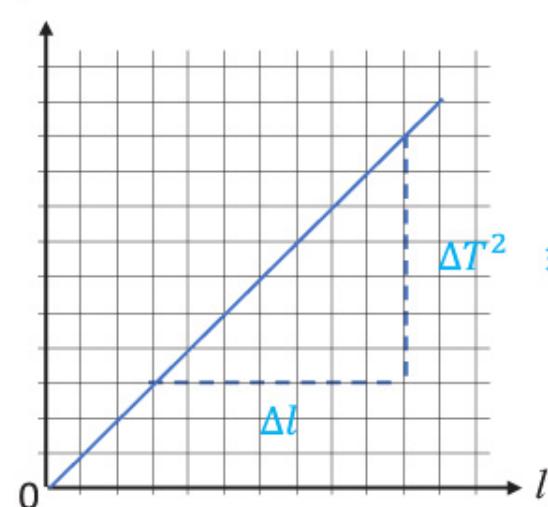
【例】

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{l};$$



$$\text{斜率} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$



$$\text{斜率} = \frac{4\pi^2}{g}$$

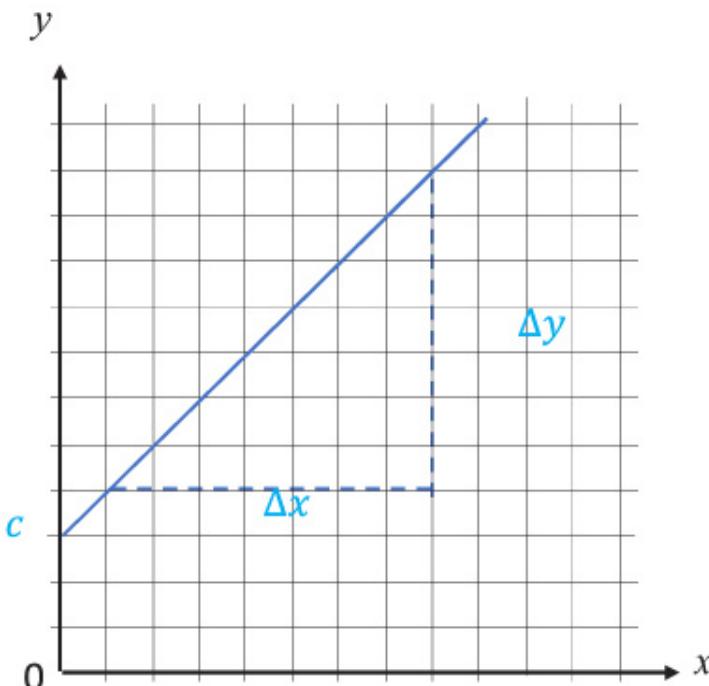


(二) 线性关系图 (linear relationship)

$$y = mx + c$$

$$m = \text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

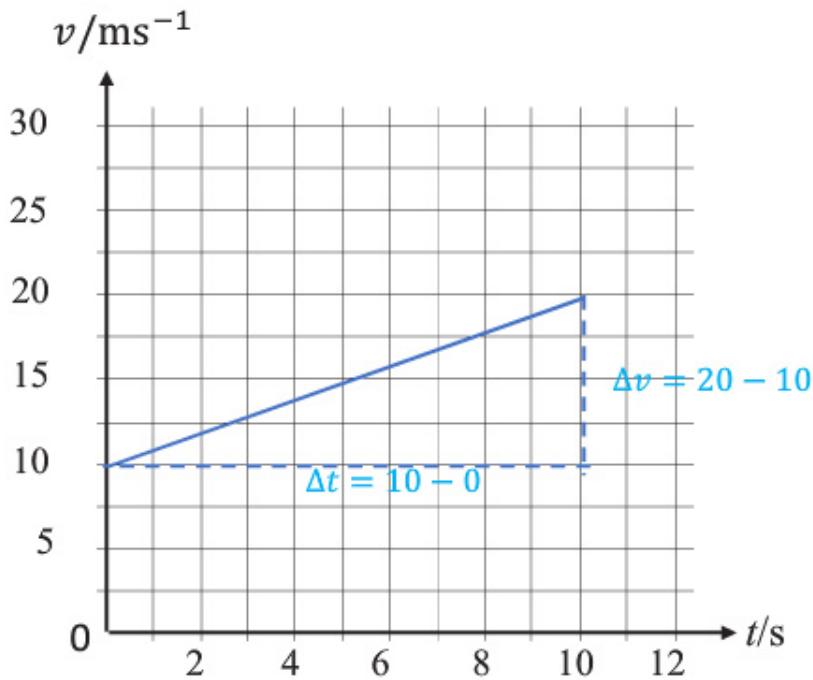
c = y 轴截距



例如，一辆从初速为 10 m s^{-1} 的车子以 1 m s^{-2} 匀加速了 10 s ，它的速度可表示为 $v = at + u = t + 10$ ，则其速度相对于时间的关系图如下：

$$a = \text{斜率} = \frac{20 - 10}{10 - 0} = 1 \text{ m s}^{-2}$$

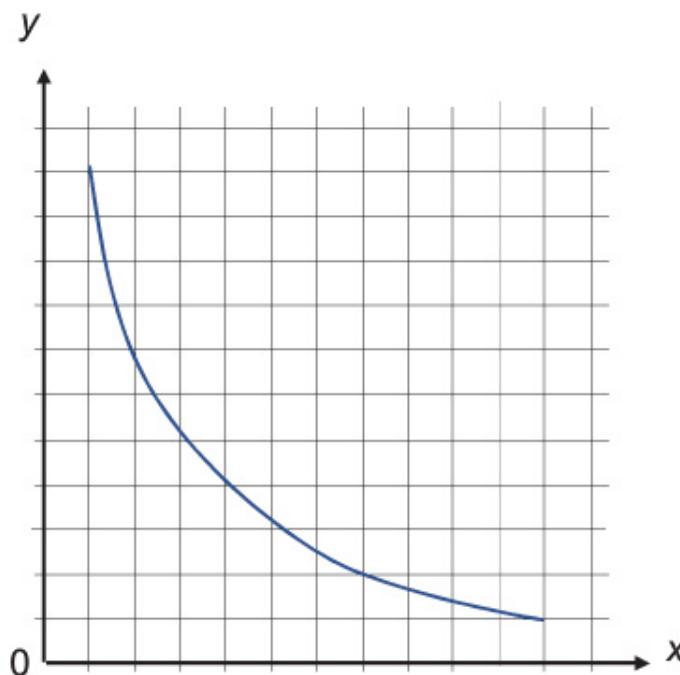
$$u = y \text{ 轴截距} = 10 \text{ m s}^{-1}$$





(三) 反比图

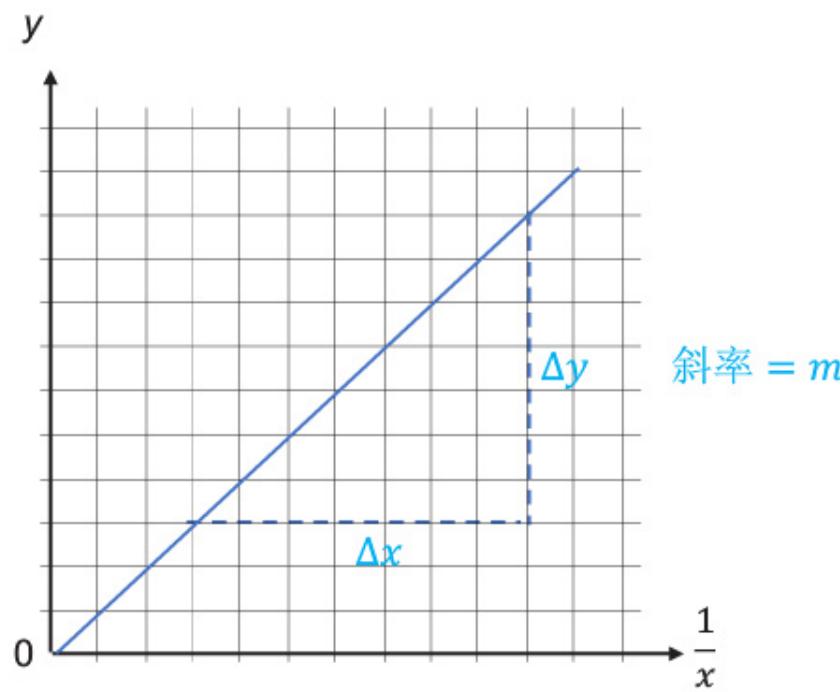
$$y = \frac{m}{x}$$



例如，在同一温度下，一定质量的理想气体的压强与体积的关系。

也可以将曲线的图形转换为直线的图形，即变换轴的物理量，如下图将水平轴的物理量变为 $\frac{1}{x}$ 。

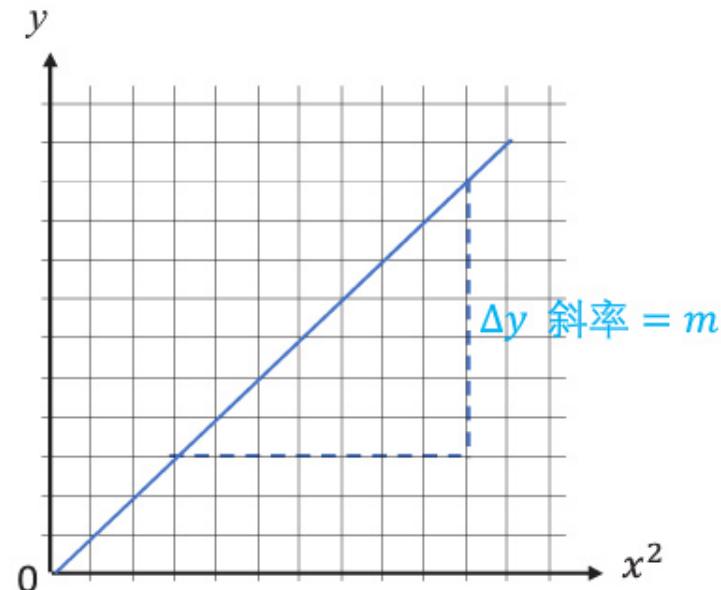
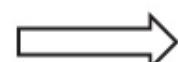
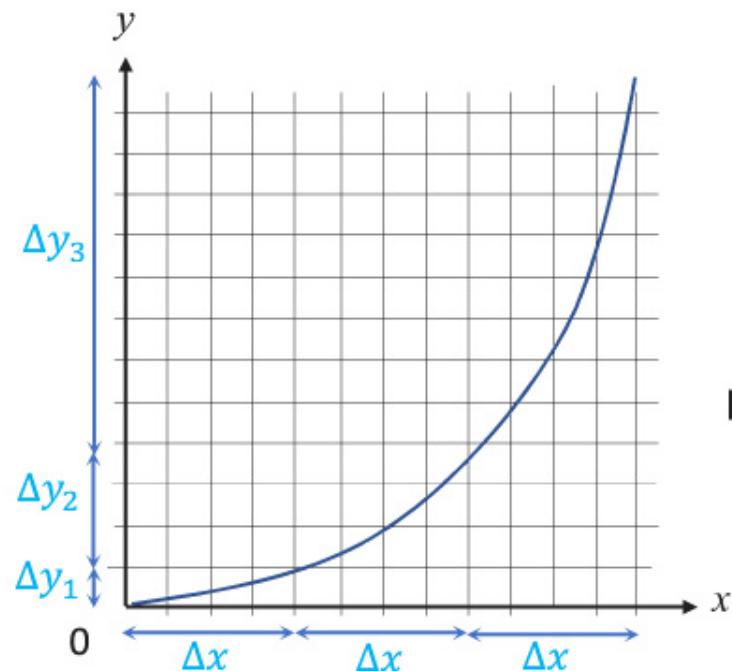
$$y = m \frac{1}{x}$$



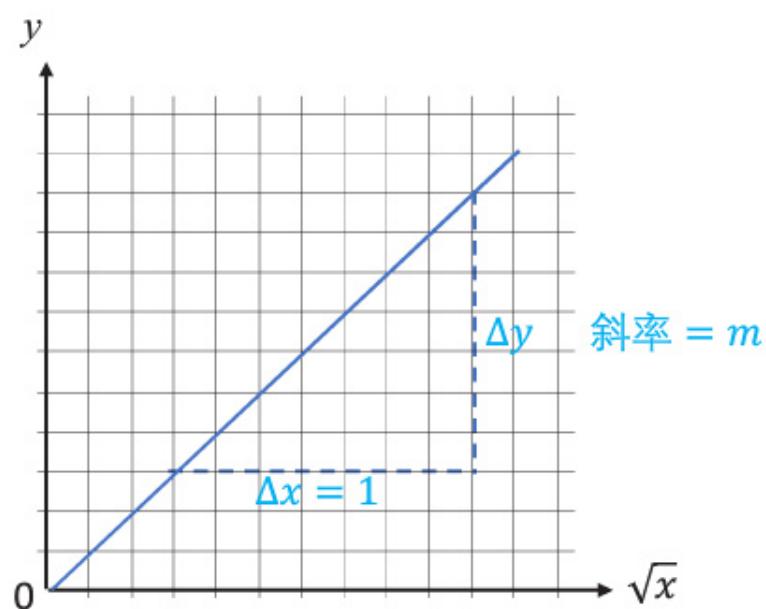
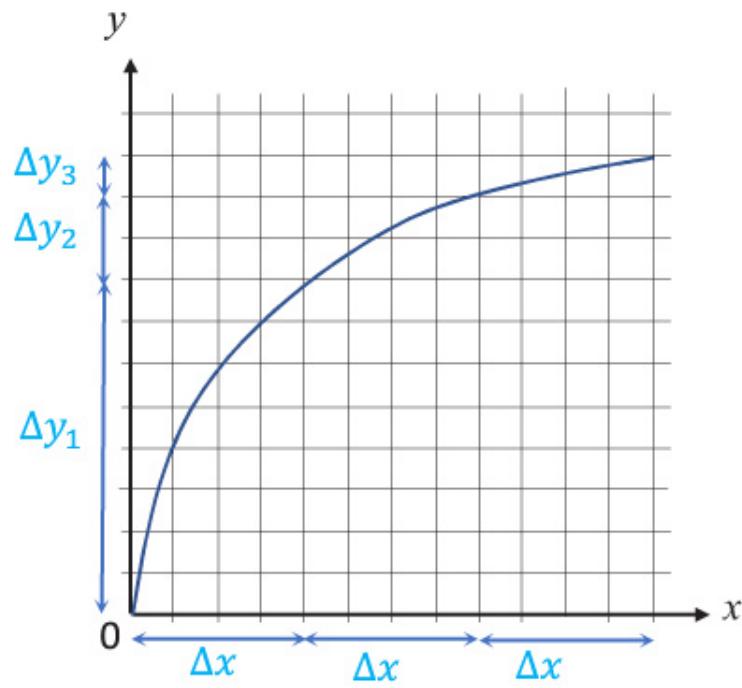


(四) 非线性关系图

$$y = mx^2 \text{ (y的增加量持续增加)}$$



$$y = m\sqrt{x} \text{ (增加量持续减少)}$$

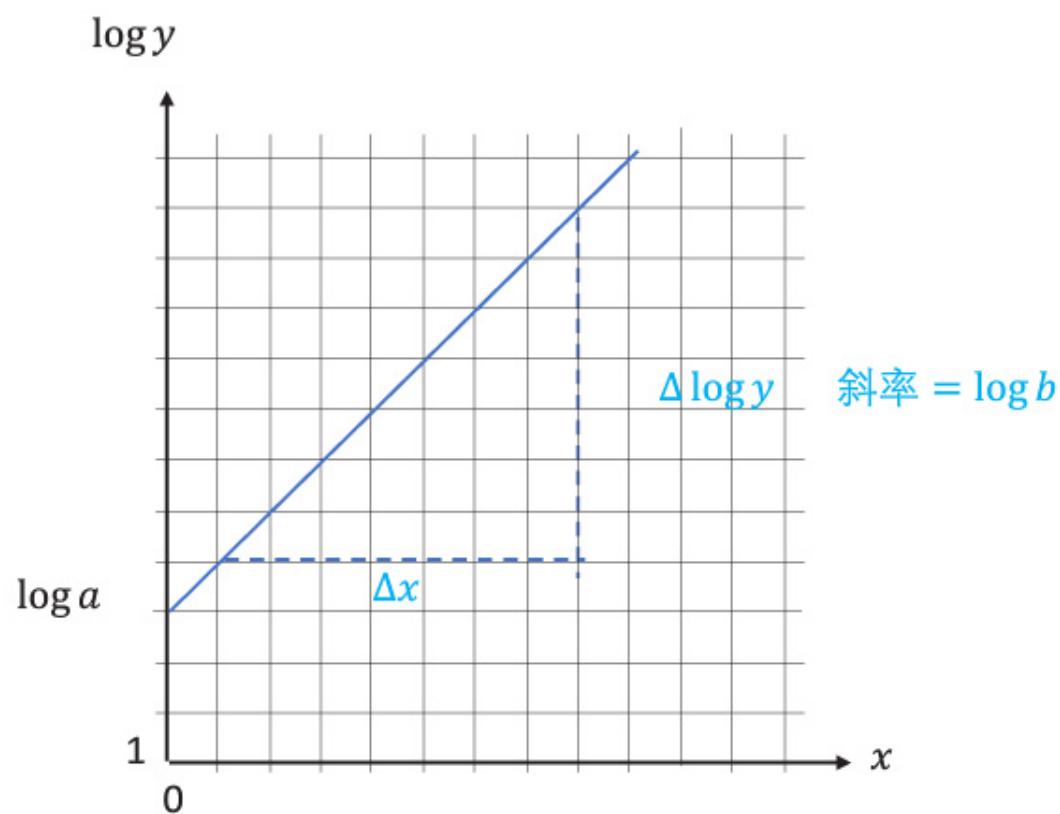




(五) 半对数图

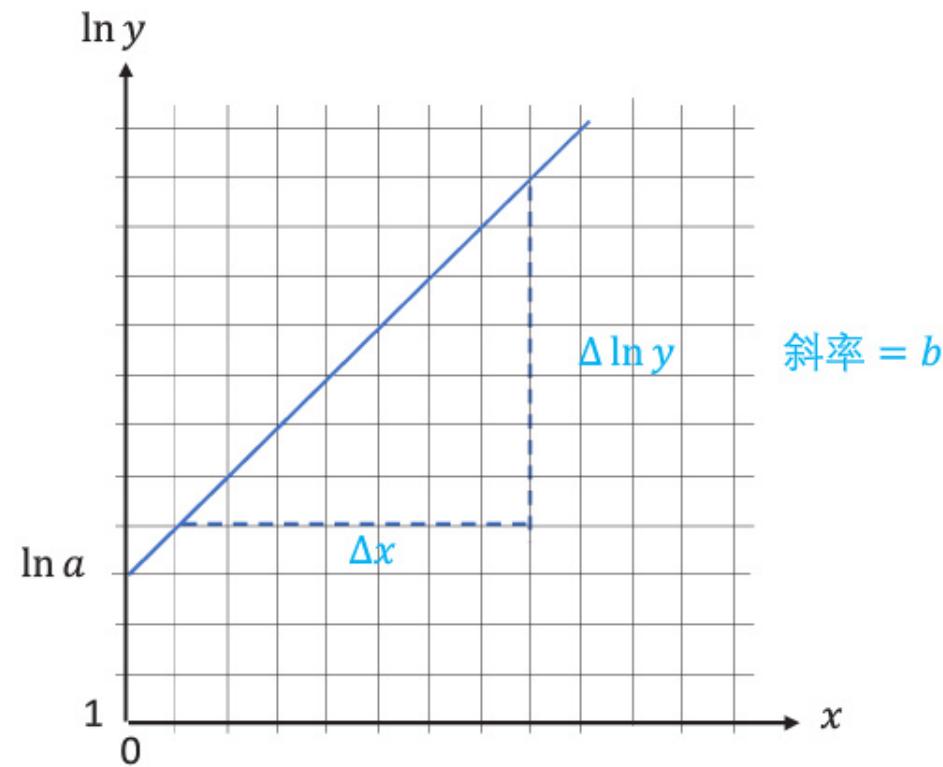
$$y = ab^x$$

$$\log y = \log a + x \log b$$



$$y = ae^{bx}$$

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln a + bx \ln e \\ &= \ln a + bx \end{aligned}$$

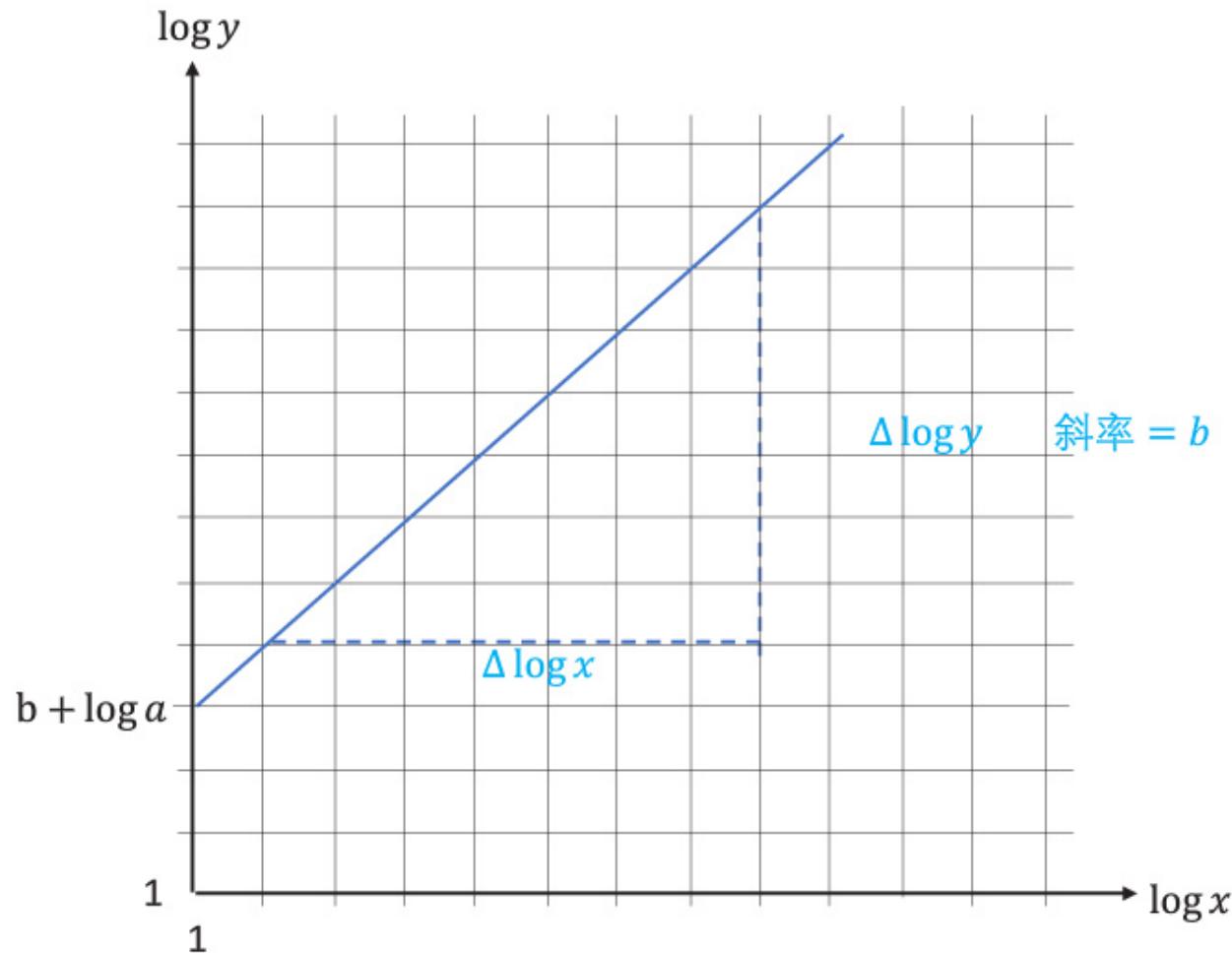




(六) 全对数图

$$y = ax^b$$

$$\log y = \log a + b \log x$$



** 注意：起点不是 $(0, 0)$





半对数图

V/V	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60
I/mA	0.0498	0.0616	0.0762	0.0944	0.1171	0.1461	0.1806	0.2249	0.2781	0.3438	0.4270	0.5390	0.6535	0.8108	1.0052

V/V	0.61	0.62	0.63	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	0.73	0.74	0.75
I/mA	1.2419	1.5187	1.8753	2.3090	2.8420	3.4760	4.2140	5.1650	6.2180	7.4700	8.9750	10.770	12.833	15.140	17.750

上述实验数据为通过一个二极管的电流及其相对应的电压，它们的关系式如下：

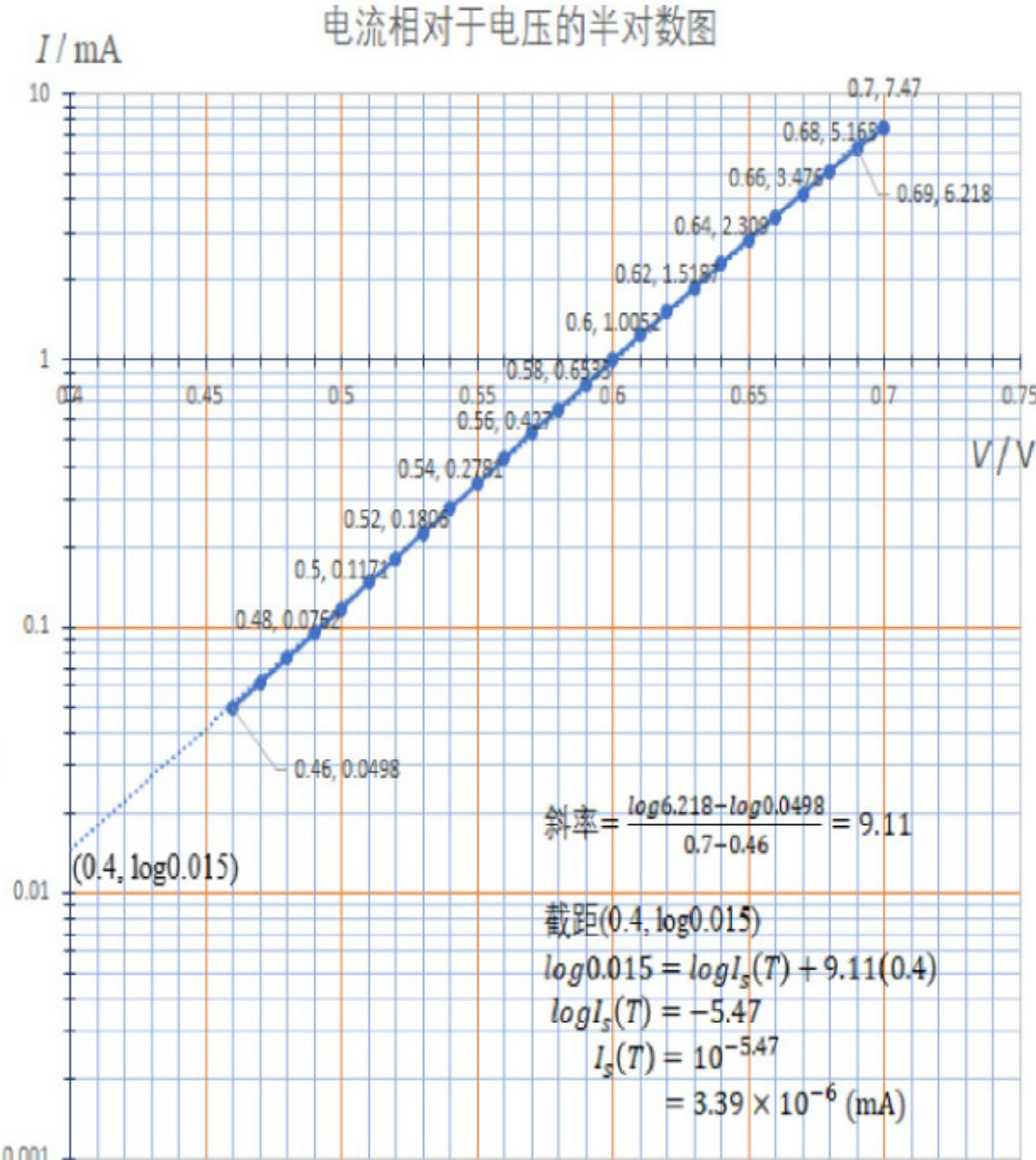
$$I = I_s(T) e^{\frac{qV}{nk_B T}}$$

其中 $I_s(T)$ 为随温度变化的反向饱和电流， q 为电子的电荷量， V 为二极管两端的电压， k_B 为玻尔兹曼常量， T 为凯氏温度。如果 $q = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$; $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$; $T = 24.5^\circ\text{C}$ ，求 n 的值。

$$I = I_s(T) e^{\frac{qV}{nk_B T}}$$

$$\log I = \log I_s(T) + \frac{q \log e}{nk_B T} V$$

$$n = \frac{1.602 \times 10^{-19} \times \log 2.7183}{9.11 \times 1.381 \times 10^{-23} \times (273 + 24.5)} \\ = 1.86$$





全对数图

l/m	0.970	0.805	0.602	0.405	0.205
\bar{T}/s	1.163	1.054	0.906	0.741	0.531
$\ln l$	-0.0305	-0.2169	-0.5075	-0.9039	-1.5847
$\ln \bar{T}$	0.1510	0.0526	-0.0987	-0.2998	-0.6330

$$T = 2\pi \left(k \frac{l}{g} \right)^n, \text{ 求 } n \text{ 及 } k?$$

$$\log T = \log 2\pi \left(\frac{k}{g} \right)^n + n \log l$$

由图可得

$$\text{斜率 } n = \frac{\log 1.6 - \log 0.4}{\log 2 - \log 0.115} = 0.485$$

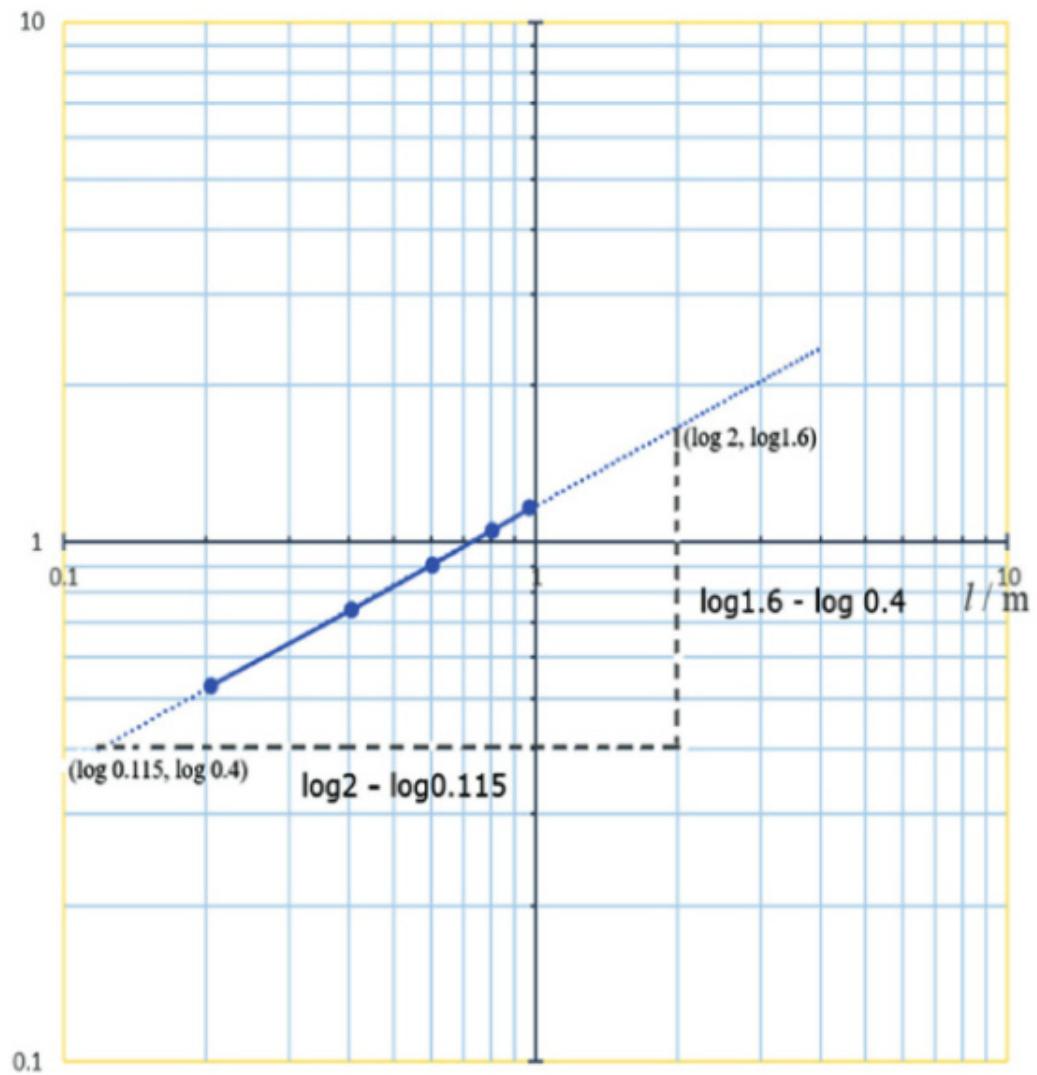
$$\log 0.4 = \log 2\pi \left(\frac{k}{g} \right)^{0.485} + 0.485(\log 0.115)$$

$$\log 2\pi \left(\frac{k}{g} \right)^{0.485} = 0.576$$

$$2\pi \left(\frac{k}{g} \right)^{0.485} = 10^{0.576}$$

$$k = 0.292$$

扭转周期相对于长度的全对数变化图





指数衰减 (物理学习工具二)

放射性衰减

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

其中

λ : 衰变恒量 decay constant

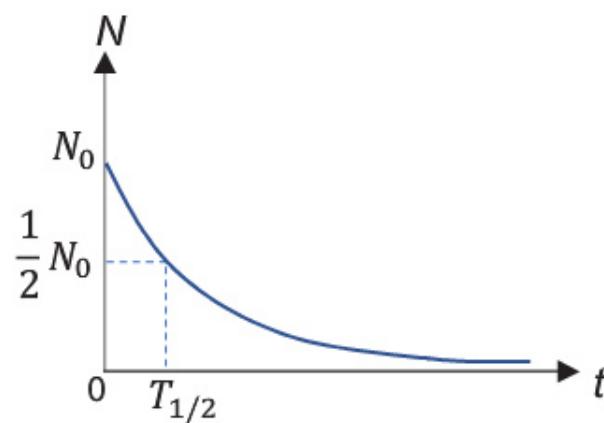
$T_{1/2}$: 半衰期 half-life

τ : 时间常数/平均寿命 time constant/mean life

$$N_0 \rightarrow \frac{1}{2} N_0 \rightarrow \frac{1}{4} N_0 \rightarrow \frac{1}{8} N_0$$

$$N = \left(\frac{1}{2}\right)^n N_0$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} N_0$$



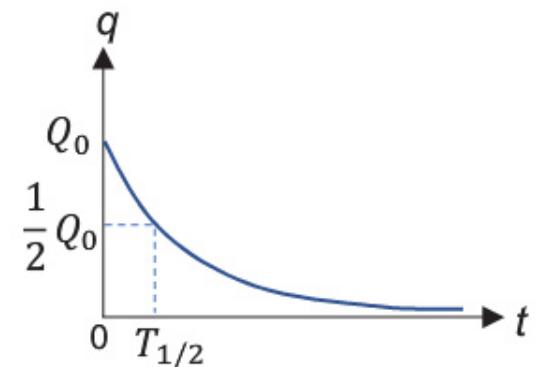
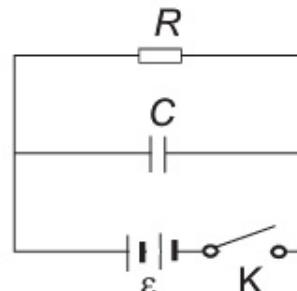
定时电路(1)

放电过程,

$$q = Q_0 e^{-t/\tau}$$

$$Q_0 = C\varepsilon$$

$$\tau = RC$$

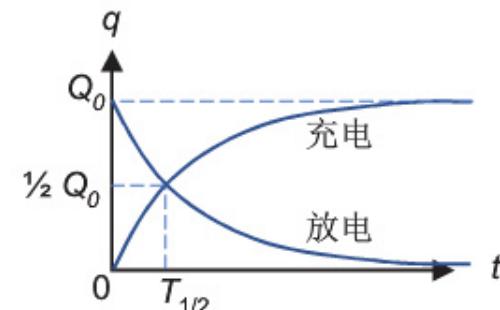
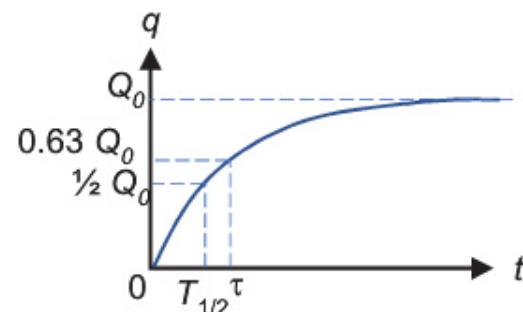


充电过程,

$$q = Q_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

当 $t = \tau$,

$$q = Q_0 (1 - e^{-1}) = 0.63 Q_0$$



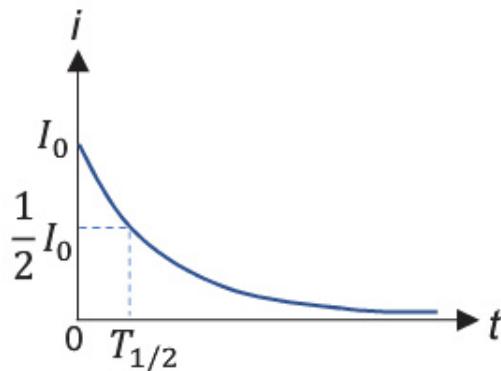
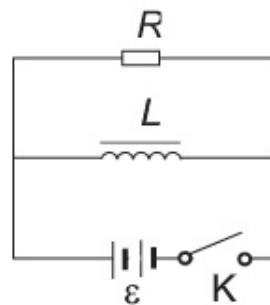


指数衰减 (物理学习工具二)

定时电路(2)

放电过程,

$$\begin{aligned} i &= I_0 e^{-t/\tau} \\ I_0 &= \frac{\varepsilon}{R} \\ \tau &= \frac{L}{R} \end{aligned}$$



充电过程,

$$i = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

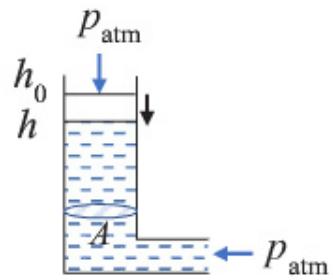
当 $t = \tau$,

$$i = I_0 (1 - e^{-1}) = 0.63I_0$$

当电路“打开”或“关闭”时，操作总有一些“滞后时间”。

假设

液体的流率为 F ,
液体的密度为 ρ ,
液体的横截面积为 A ,
液体的移动距离为 h ,



$$\begin{aligned} \frac{d(Ah)}{dt} &= -F(\rho gh) \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{F\rho gh}{A} \\ \Rightarrow h &= h_0 e^{-(\frac{F\rho gh}{A})t} \end{aligned}$$

当 $t \times \frac{F\rho gh}{A} = 1$

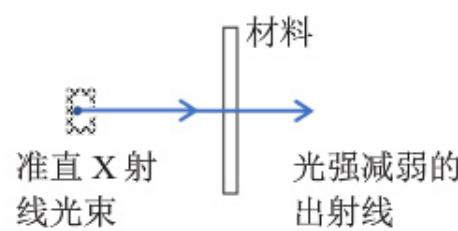
$$t = \frac{A}{F\rho gh} = \tau$$

$$h = \frac{1}{e} h_0 = 0.369 h_0$$



指数衰减 (物理学习工具二)

X 射线准直光束



衰减效应

$$\frac{dI}{dt} = -kI \\ \Rightarrow I = I_0 e^{-kx}$$

其中，

k : 衰减系数

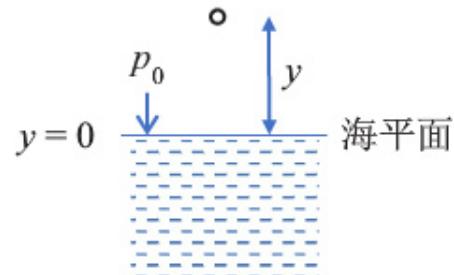
x : 材料厚度

对薄纸巾, $k = 50 \text{ m}^{-1}$

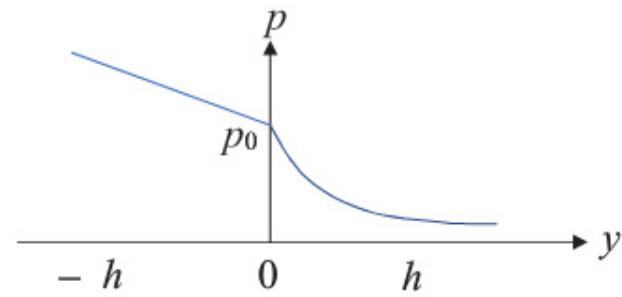
对骨头, $k = 250 \text{ m}^{-1}$

衰减系数受材料的密度影响

压强,



$$pV = \frac{m}{M} RT \\ \rho = \frac{m}{V} \\ dp = -\rho g dy \\ = -\frac{m}{V} g dy \\ = -\frac{pM}{RT} g dy \\ \Rightarrow dp = -\frac{pM}{RT} g dy \\ \int_{p_0}^P \frac{dp}{p} = \int_0^y -\frac{Mg}{RT} dy \\ \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT} y \\ p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT} y}$$





指数衰减 (物理学习工具二)

指数曲线

$$\text{指数衰减: } N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{指数增长: } N = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

数感:

$$\ln 10 = 2.3036 \Rightarrow e^{2.3} \simeq 10$$

$$\ln 2 = 0.69315 \Rightarrow e^{0.7} \simeq 2$$

$$e^1 = 2.71828$$

于是

$$e^{3.3} = e^1 \times e^{2.3} = 2.71828 \times 10 = 27.1828$$

$$e^{3.0} = e^{0.7} \times e^{2.3} = 2 \times 10 = 20$$

$$e^{1.4} = e^{0.7} \times e^{0.7} = 2 \times 2 = 4$$

当 $\lambda t = 3$,

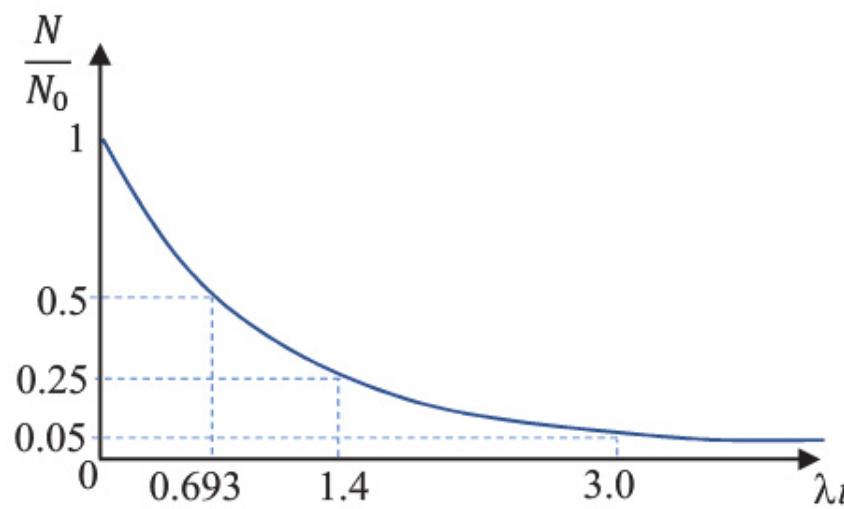
$$\frac{N}{N_0} \times 100\% = \frac{1}{e^3} \times 100\% = \frac{1}{20} \times 100\% = 5\%$$

当 $\lambda t = 1.4$,

$$\frac{N}{N_0} \times 100\% = \frac{1}{e^{1.4}} \times 100\% = \frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$$

当 $\lambda t = \ln 2 = 0.693$,

$$\frac{N}{N_0} \times 100\% = \frac{1}{e^{\ln 2}} \times 100\% = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$$



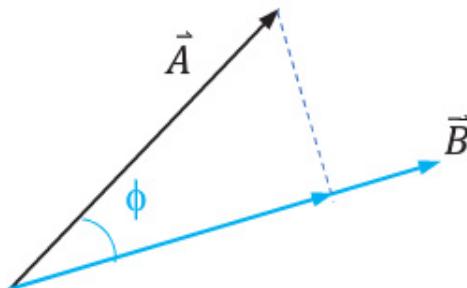


矢量的乘积(物理学习工具三)

矢量的内积/标量积/点积

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$$

ϕ : \vec{A} 与 \vec{B} 之间的夹角

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad (\cos \phi = \cos 0^\circ = 1)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \quad (\cos \phi = \cos 90^\circ = 0)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k}$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

矢量的内积等于相对应的分量的乘积之和。



物理常数和天文常数(物理学习工具)

物理常数和天文常数表 [Particle Data Group 提供]

物理量	物理量符号/方程式	数值	不确定性 / 10^{-9}
^{131}Cs , 铯-133 原子不被扰动的基态下的两个超精细能阶跃迁所对应的辐射频率	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9192631770 Hz	精确
真空中的光速	c	299 792 458 m s ⁻¹	精确
普朗克常数	h	$6.626\ 070\ 15 \times 10^{-34} \text{ J s (or J/Hz)}$	精确
基本电荷量	e	$1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19} \text{ C}$	精确
玻尔玻尔兹曼常数	k	$1.380\ 649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	精确
阿伏伽德罗常数	N_A	$6.022\ 140\ 76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	精确
牛顿万有引力常数	G	$6.674\ 30(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ $6.708\ 83(15) \times 10^{-39} \text{ hc (GeV/c}^2)^{-2}$	2.2×10^4 2.2×10^4
地球海平面引力加速度	g	9.806 65 m s ⁻²	精确
理想气体摩尔体积 (S.T.P.)	$\frac{N_A k(273.15 \text{ K})}{101325 \text{ Pa}}$	$22.413\ 969\ 54\dots \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$	精确
维恩位移定律常数	$b = \lambda_{max} T$	$2.897\ 771\ 955\dots \times 10^{-3} \text{ m K}$	精确
斯特藩-玻爾茲曼常數	$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 h^3 c^2}$	$5.670\ 374\ 419\dots \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	精确
真空介电常数	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8.854\ 187\ 8128(13) \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$	0.15
真空磁导率	$\frac{\mu_0}{4\pi \times 10^{-7}}$	$1.000\ 000\ 000\ 55(15) \text{ N A}^{-2}$	0.15
电子质量	m_e	$0.510\ 998\ 950\ 00(15) \text{ MeV/c}^2$ $= 9.109\ 383\ 7015(28) \times 10^{-31} \text{ kg}$	0.30
质子质量	m_p	$938.272\ 088\ 16(29) \text{ MeV/c}^2$ $= 1.672\ 621\ 923\ 69(51) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $= 1.007\ 276\ 466\ 621(53) \text{ u}$ $= 1836.152\ 673\ 43(11) m_e$	0.31 0.053 0.060
中子质量	m_n	$939.565\ 420\ 52(54) \text{ MeV/c}^2$ $= 1.008\ 664\ 915\ 95(49) \text{ u}$	0.57 0.48
氘核质量	m_d	$1875.612\ 942\ 57(57) \text{ MeV/c}^2$	0.30
原子质量单位	$u = \frac{^{12}\text{C原子质量}}{12}$	$931.494\ 102\ 42(28) \text{ MeV/c}^2$ $= 1.660\ 539\ 066\ 60(50) \times 10^{-27} \text{ kg}$	0.30 0.30



精细结构常数	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$	$7.297\ 352\ 5693(11) \times 10^{-3}$ $= 1/137.035\ 999\ 084(21)$	0.15
经典电子半径	$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$	$2.817\ 940\ 3262(13) \times 10^{-15} \text{ m}$	0.45
电子康普顿波长 $\frac{\lambda}{2\pi}$	$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_e c} = r_e \alpha^{-1}$	$3.861\ 592\ 6796(12) \times 10^{-13} \text{ m}$	0.30
波尔半径($m_{nucleus} = \infty$)	$a_\infty = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = r_e \alpha^{-2}$	$0.529\ 177\ 210\ 903(80) \times 10^{-10} \text{ m}$	0.15
里德伯能量	$hcR_\infty = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}$ $= \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2}$	$13.605\ 693\ 122\ 994(26) \text{ eV}$	1.9×10^{-3}
普朗克质量	$M_p = \sqrt{\hbar c/G}$	$1.220\ 890(14) \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$ $= 2.176\ 434(24) \times 10^{-8} \text{ kg}$	
普朗克长度	$l_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$	$1.616\ 255(18) \times 10^{-35} \text{ m}$	
天文单位 (日地距离)	au	$149\ 597\ 870\ 700 \text{ m}$	精确
秒差距 (1 au / 1 弧秒)	pc	$3.085\ 677\ 581\ 49... \times 10^{16} \text{ m}$ $= 3.261\ 56... \text{ ly}$	精确
太阳年	yr	$31\ 556\ 925.2 \text{ s} = 365.242\ 189 \text{ days}$	
平均恒星日		$23^h\ 56^m\ 04^s.090\ 53$	精确
光年	ly	$0.306\ 601... \text{ pc}$ $= 0.946\ 073... \times 10^{16} \text{ m}$	
地球赤道半径	R_E	$6.378\ 137 \times 10^6 \text{ m}$	精确
地球质量	M_E	$5.972\ 6(7) \times 10^{24} \text{ kg}$	精确
月球质量	M_m	$7.342 \times 10^{22} \text{ kg}$	
地球与月球平均距离	r_{ME}	384400 km	
太阳史瓦西半径	$2GM/c^2$	$2.953\ 250\ 1 \text{ km}$	
太阳质量	M	$1.988\ 41(4) \times 10^{30} \text{ kg}$	
太阳赤道半径	R_S	$6.957 \times 10^8 \text{ m}$	精确
太阳常数	S	$1\ 361 \text{ W m}^{-2}$	精确
太阳光球温度	T	$5\ 772 \text{ K}$	精确
当今宇宙背景 CMB 温度	T_0	$2.7255(6) \text{ K}$	
宇宙年龄	t_0	$13.797(23) \text{ Gyr}$	



麦克斯韦方程组(物理学习工具四)

电场中的高斯定律: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (1)

磁场中的高斯定律: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (2)

法拉第定律: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ (3)

安培 - 麦克斯韦定律: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(J + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E})$ (4)

如果在真空中电荷量为 0, 则式(1)及(4)可化简为,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \text{ (5)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \text{ (6)}$$

由式(3),

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

应用矢量外积公式 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

左式: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$

右式: $-\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{E} = 0$$

上式为一电场波动方程式, 可得光速

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$





麦克斯韦方程组(物理学习工具四)

(续上页)

由式(6),

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

左式: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$

右式: $\vec{\nabla} \times \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{B} = 0$$

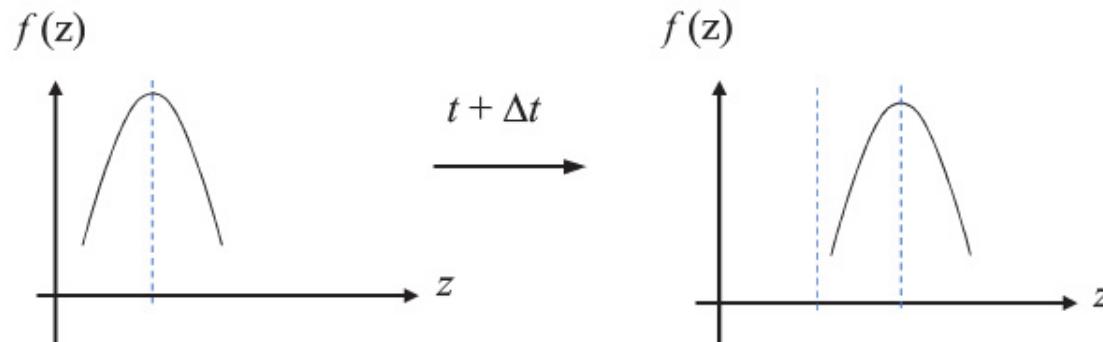
上式为一磁场波动方程式, 可得光速

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

备注: 波动方程式:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

其中 $\psi(z, t) = f(z \pm ct)$ 。





麦克斯韦方程组(物理学习工具四)

麦克斯韦方程组

	积分方程组	微分方程组
电场中的高斯定律	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{封闭}}}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
磁场中的高斯定律	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
法拉第定律	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Phi_B}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
安培 - 麦克斯韦定律	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{封闭}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Phi_E}$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

19世纪中期确立了电荷, 电流和电场, 磁场之间的普遍关系后, 麦克斯韦建立了统一的电磁场理论. 他提出两项突破性的新概念: “位移电流” 及 “感应电场” (又称涡旋电场) 并在此基础上提出了电磁理论的完整数学表述, 今天被称为“麦克斯韦方程组”。

他认为变化的电场必然会激发磁场, 变化的磁场又会激发电场, 这就是说, 变化的电场和变化的磁场都不是彼此孤立的, 它们相互联系又相互激发组成一个统一的“电磁场”

他也预言了“电磁波”的存在并论证了光的电磁波性质.

麦克斯韦方程组可以用微分形式或积分形式来呈现, 他们是极其简洁, 工整, 优美与对称的; 是经典物理学史上一个里程碑式的杰作!

如果说牛顿的万有引力统一了天上的月亮与地上的苹果的运动规律, 开启了人类宇宙探险的篇章, 而爱因斯坦的相对论统一了时间与空间, 创立了崭新的时空观, 那么麦克斯韦方程组统一了电场与磁场, 预测了电磁波的存在, 以上三人都可以说是至今为止人类科学智慧的最高成就!



麦克斯韦方程组(物理学习工具四)

在麦克斯韦方程组和波动方程的公式中，使用了一些专门的符号来简化偏微分的表达， ∇ （通常发音为“del”，虽然它的官方名称是“nabla”，来自希腊语，意为竖琴）表示偏微分的运算符号，但其含义会根据其用途而有所变化，例如在旋度 curl ($\nabla \times$)、divergence 散度 div ($\nabla \bullet$)、gradient 梯度 grad (∇) 和 Laplacian 拉普拉斯算子 $\nabla^2 = \text{div}(\text{grad}(\nabla))$ 。它们的定义和一些性质如下：

假设在笛卡尔坐标 (x, y, z) 中， $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是 x, y, z 递增方向的单位向量。 M, N, P 是 $f(x, y, z)$ 在 x, y, z 方向上的相应标量分量。

梯度 gradient	$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}\end{aligned}$	矢量
散度 divergence	$\begin{aligned}\nabla \bullet f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet (f_x, f_y, f_z) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}$	标量
旋度 curl	$\begin{aligned}\nabla \times f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times f \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}\end{aligned}$	矢量
拉普拉斯算子 Laplacian	$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$	标量



偏微分(物理学习工具五)

假如：

$$\psi(z, t) = A \cos(kz - \omega t)$$

对上式进行偏微分，

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A \sin(kz - \omega t)(-\omega) = -A\omega \sin(kz - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -A\omega \cos(kz - \omega t)(-\omega) = A\omega^2 \cos(kz - \omega t) = \omega^2 \psi \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = A \sin(kz - \omega t)(k) = Ak \omega \sin(kz - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = Ak \cos(kz - \omega t)(k) = Ak^2 \cos(kz - \omega t) = k^2 \psi \dots \dots (2)$$

(1)/(2)

$$\frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

上式为一波动方程式。





偏微分(物理学习工具五)

假如：

$$U(x, t) = \sin(\alpha x)e^{-\beta t}$$

对上式进行偏微分，

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sin(\alpha x)e^{-\beta t}(-\beta) = -\beta \sin(\alpha x)e^{-\beta t} = -\beta U \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{-\beta t} \cos(\alpha x)(\alpha) = e^{-\beta t} \alpha \cos(\alpha x)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = e^{-\beta t} \alpha [-\sin(\alpha x)](\alpha) = -e^{-\beta t} \alpha^2 \sin(\alpha x) = -\alpha^2 U \dots \dots (2)$$

(1)/(2)

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial t}}{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}} = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

假设 $\beta = \alpha^2$,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

上式为一维热传导方程式。