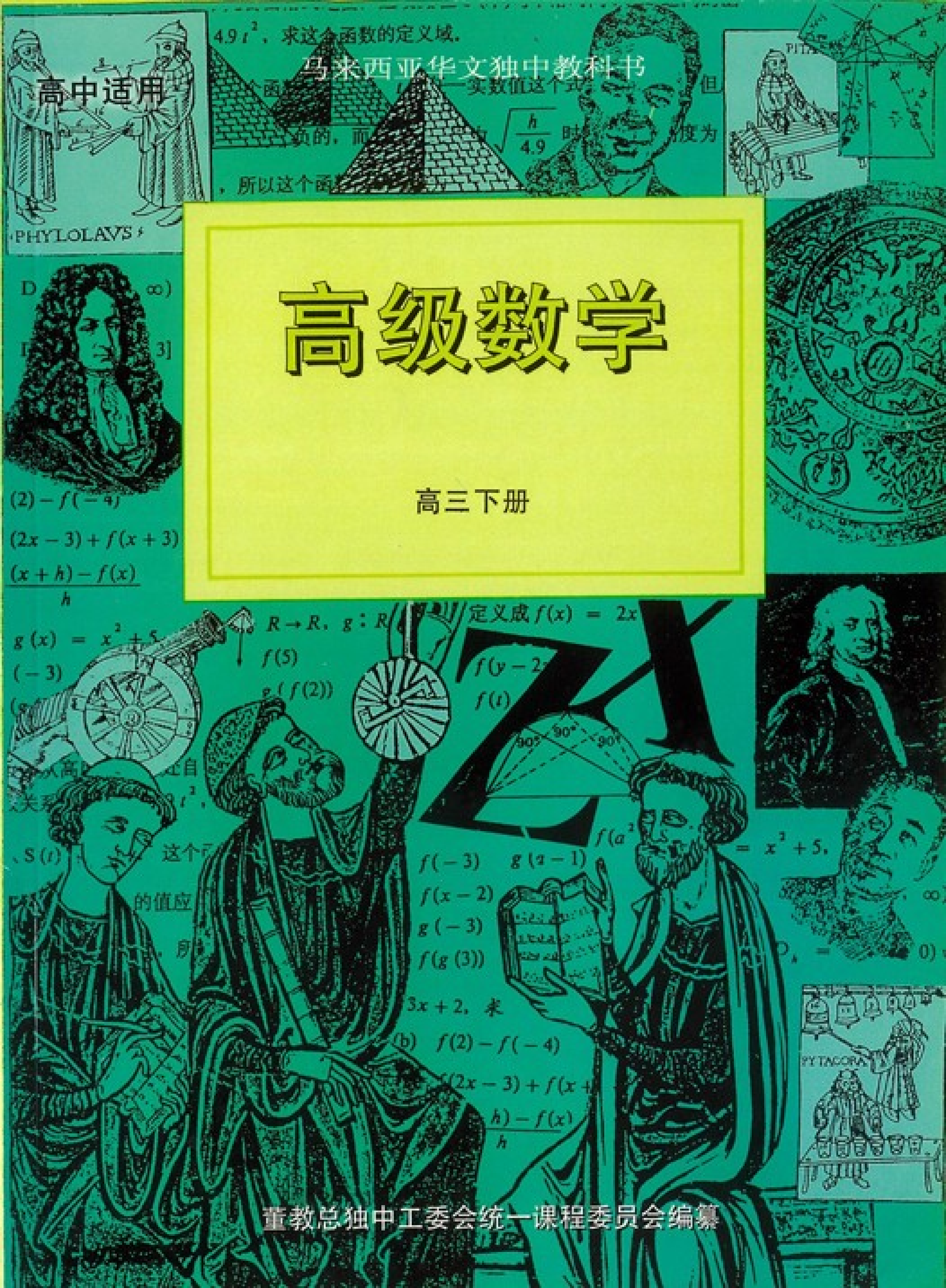


马来西亚华文独中教科书

高中适用

高级数学

高三下册

董教总独中工委会统一课程委员会编纂

10 微分法的应用(二)

10.1 曲线的作图法

● 曲线的凸向与拐点

为了更准确，更完美地描绘出函数所表示的曲线，除了掌握有关曲线的增减性及其极值外，还需知道曲线的各部份是怎样弯曲的，以及它们的分界点在什么地方，这就是本节所要讨论的曲线的凸向及拐点等问题。

一般地，如果函数 $f(x)$的曲线在某区间内，

(1) 其切线总是位于曲线的上方，则曲线在这个区间内是**上凸的**（convex upward/concave downward）（图 10－1）。

(2) 其切线总是位于曲线的下方，则曲线在这个区间内是**下凸的**（convex downward/concave upward）（图 10－2）。

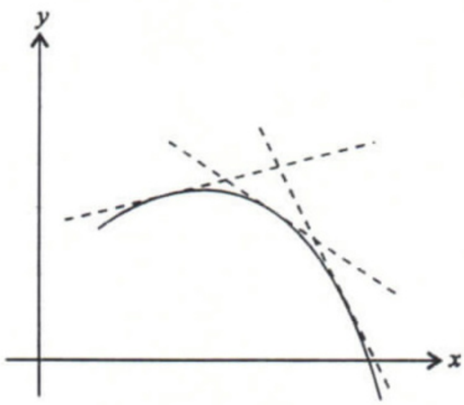


图 10－1

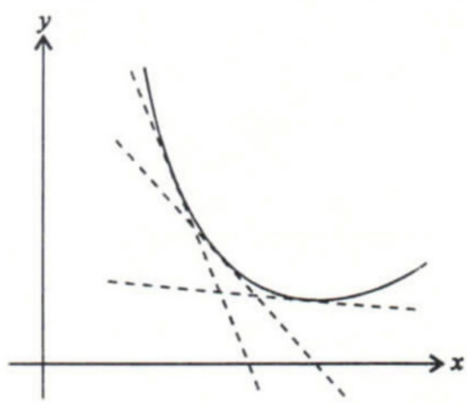


图 10－2

如果函数 $f(x)$ 的曲线在一点的两侧改变了凸向，那么，这个上凸、下凸的分界点叫做**拐点**（point of inflexion）。

如图 10－3，函数

$$f(x)=x^3$$

的图象在点 O 两侧是不一样的，左侧是上凸的，右侧是下凸的，点 O 是这两部分的分界点，点 O 就是拐点。

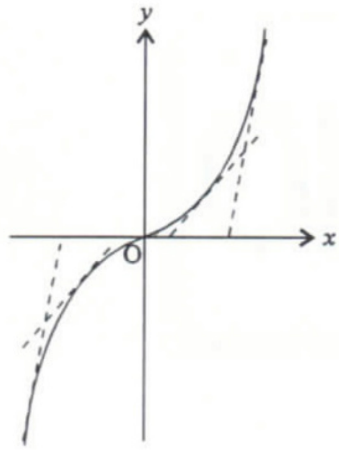


图 10－3

下面以图 10－4 的图象为例，讨论一下确定函数的凸向与拐点的方法。直观地看图象在 $x=x_0$ 的左侧是上凸的，右侧是下凸的。

进一步观察，在上凸的区间 $(-\infty, x_0)$ 内，曲线的切线从左到右分别切于 P_1，P_2，P_3 时，其切线的斜率分别为 m_1，m_2，m_3，它们是逐步减小的，即 $f'(x)$ 是减函数。由导数的性质可以知道，如果 $f''(x)<0$，就能判断 $f'(x)$ 是递减的，从而确定曲线是上凸的。在下凸的区间 (x_0, ∞) 内，曲线的切线从左到右分别切于 P_4，P_5，P_6 时，其切线的倾斜角为 m_4，m_5，m_6，它们是逐步增大的，即切线的斜率 $f'(x)$ 是增函数。由导数的性质可知，如果 $f''(x)>0$，就能判断 $f'(x)$ 是递增的，从而确定曲线是下凸的。

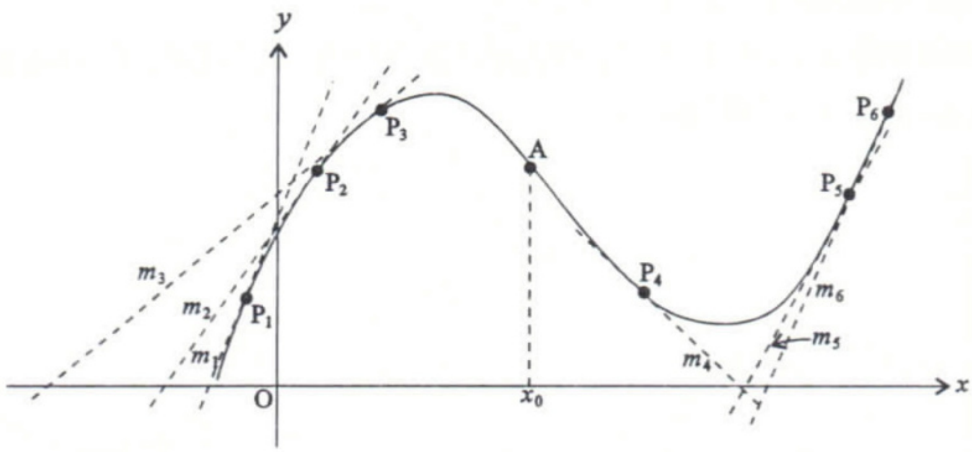


图 10－4

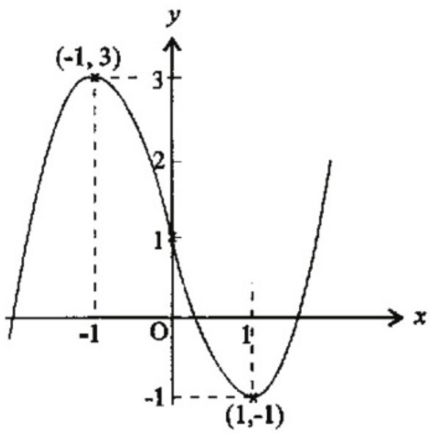
一般地，设函数 $f(x)$ 在某区间上有二阶导数 $f'(x)$

(1) 如果 $f''(x)<0$，那么曲线在这个区间内是上凸的；

(2) 如果 $f''(x)>0$，那么曲线在这个区间内是下凸的。

(3) 如果 $f''(x_0)=0$，并且在 x_0 两侧 $f''(x)$ 异号，那么 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点。

例1 判定曲线 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ 的凸向与拐点。



解 $f'(x)=3x^2-12x+9$

$f''(x)=6x-12$

$=6(x-2)$

令 $f''(x)=0$，得 $x=2$

当 $x\in(-\infty, 2)$时，$f''(x)<0$

$\therefore$ $f(x)$在$(-\infty, 2)$内是上凸的。

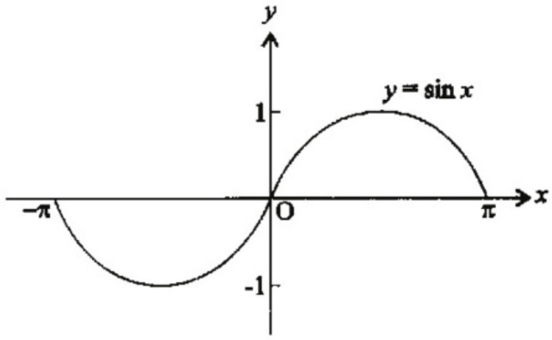
当 $x\in(2, \infty)$时，$f''(x)>0$，

$\therefore$ $f(x)$在$(2, \infty)$内是下凸的。

因 $f(2)=1$，且在$(2, 1)$两侧$f''(x)$导号，

$\therefore$ 点$(2, 1)$是拐点（如右图）。

例2 判定曲线 $f(x)=\sin x$ 在区间$(-\pi, \pi)$内的凸向与拐点。



解 $f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

令 $f''(x)=0$，得 $x=0$

当 $x\in(-\pi, 0)$时，$f''(x)>0$，

所以曲线 $f(x)$在$(-\pi, 0)$内下凸。

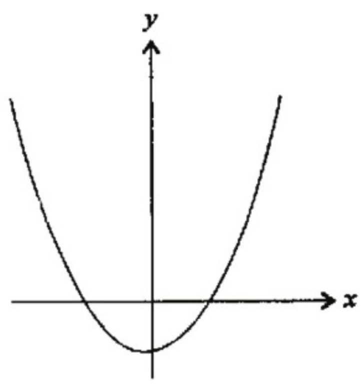
当 $x\in(\pi, 0)$时，$f''(x)<0$，

所以曲线 $f(x)$在$(0, \pi)$内上凸。

因 $f(0)=0$，并且，在$(0, 0)$两侧 $f''(x)$异号，

所以$(0, 0)$是拐点（如右图）。

例3 判定曲线 $f(x)=x^4-1$ 的凸向与拐点。



解 $f'(x)=4x^3$

$f''(x)=12x^2$

令 $f''(x)=0$，得 $x=0$

在区间$(-\infty, 0)$内，$f''(x)>0$，$\therefore f$ 是下凸的。

在区间$(0, \infty)$内，$f'(x)>0$，$\therefore$ f 是下凸的。

所以曲线 $f(x)=x^4-1$ 在$(-\infty, \infty)$内

总是下凸，故曲线没有拐点（如右图）。

习题 10a

判定下列曲线的凸向：

1. $f(x)=x^4-2x^3+1$
2. $f(x)=-(x-2)^3$
3. $f(x)=3x^2-x^3$
4. $f(x)=2x^3-3x^2-36x+25$

判定下列曲线的凸向与拐点：

5. $f(x)=-x^2+2x-1$
6. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$
7. $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$
8. $f(x)=x+\frac{1}{x}$
9. $f(x)=\frac{x}{x+1}$
10. $f(x)=x-\sin x\,(0<x<2\pi)$
11. $f(x)=e^{-2x^2}$
12. $f(x)=\ln(x^2+1)$
13. $f(x)=\ln x$
14. $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

● 曲线作图法

学习了导数之后，又了解了函数的增减性、极值以及曲线的凸向、拐点等，我们可以较准确的描绘出函数的图象。

以下，我们先把描绘函数 $y=f(x)$的图象的步骤列出，然后举例加以说明：

(1) 求出曲线与坐标轴的交点；

(2) 解方程 $f'(x)=0$，并确定所有的驻点；

(3) 解方程 $f''(x)=0$，并确定所有的拐点；

(4) 划分区间（列表），并确定曲线的增减性、极值、凸向和拐点；

(5) 描点作图。

上列的步骤，并不是一成不变的，实际应用时应根据具体情况灵活地掌握它们。

例4　试作函数 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 的图象。

解　(1) 当 $x=0$时，$f(0)=1$

当 $f(x)=0$时，$x=1$

$\therefore$ 有关曲线通过(0，1)及(1，0)。

(2) $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

令 $f'(x)=0$时，$x=0$，1；得驻点(0，1)，(1，0)。

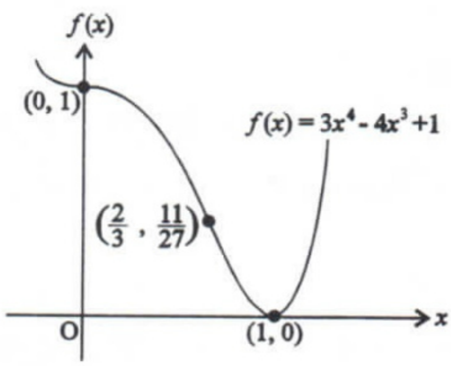
(3) $f''(x)=36x^2-24x=12x(3x-2)$,

令 $f''(x)=0$，得 $x=0$，$\frac{2}{3}$；$y=1$，$\frac{11}{27}$。

(4)

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	−	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	+	0	−	0	+	+	+
$f(x)$	↘	拐点 (0, 1)	↘	拐点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$	↘	极小点 (1, 0)	↗
凸性	下凸		上凸		下凸		下凸

(5) 综合以上，有关函数的图象绘出如下：



例5 作函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 的图象。

解 (1) 当 $x=0$ 时，$f(0)=1$；

(2) $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm 1$，驻点为 $(1, -1)$，$(-1, 3)$

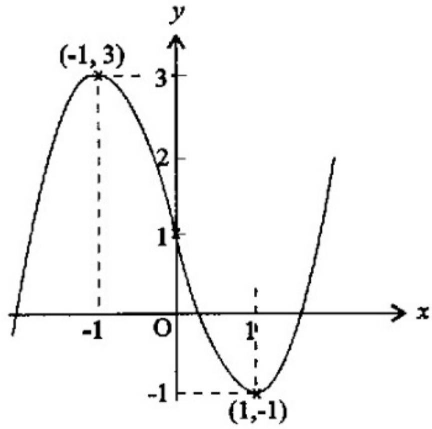
(3) $f''(x)=6x$

令 $f''(x)=0$，得 $x=0$，$y=1$。

(4)

x	$(-\infty, -1)$	−1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↗	极大点 (−1, 3)	↘	拐点 (0, 1)	↘	极小点 (1, −1)	↗
凸性	上凸		上凸		下凸		下凸

(5) 函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 的图象如下：



在函数作图时，往往会遇到函数的对称性和渐近线的问题。

(一) 函数对称性的判断法

若 $f(-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的图象对称于 y 轴，$f(x)$ 是偶函数。

若 $f(-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 的图象对称于原点，$f(x)$ 是奇函数。

(二) 渐近线 (asymptote)

如果当 $x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to a$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 或 $\lim\limits_{x\to b}f(x)=a$ 时，则直线 $y=a$ 就叫做曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线。

如果当 $x\to b$ 时，有下列任一条件获得满足，

(a) 当 $x\to b^+$ 时，$f(x)\to\infty$ 或 $-\infty$

(b) 当 $x\to b^-$ 时，$f(x)\to\infty$ 或 $-\infty$

则直线 $x=b$ 就叫做曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线。

例如图 10－5 中，曲线 $y=\dfrac{2}{x-5}$ 的水平渐近线为 $y=0$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x-5}=0$。

同时，此曲线有垂直渐近线 $x=5$，因为

$$\lim_{x\to5^+}\frac{2}{x-5}=\infty,$$

$$\lim_{x\to5^-}\frac{2}{x-5}=-\infty$$

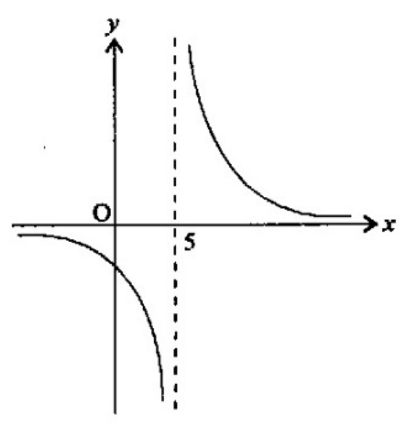


图 10－5

例6 作函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的图象。

解 （1）由 $f(0)=0$，知曲线 $f(x)$ 过原点。

（2）$f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，1；驻点为 $\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$。

（3）$f''(x)=\dfrac{2x\ (x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

令 $f''(x)=0$，得 $x=-\sqrt{3}$，0，$\sqrt{3}$；$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，0，$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。

（4）由 $f(-x)=-f(x)$，知 $f(x)$ 关于原点对称。

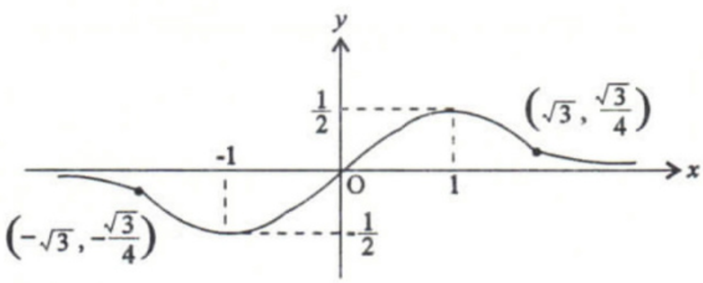
（5）没有垂直渐近线。

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$，所以有水平渐近线 $y=0$。

（6）

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f'(x)$	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↘	拐点	↘	极大点	↗	拐点	↗	极大点	↘	拐点	↘
凸向	上凸		下凸		下凸		上凸		上凸		下凸

（7）综合以上讨论，绘出函数的图象如下。



例7 作函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 的图象。

解 (1) 由 $f(0)=1$，知曲线 $f(x)$ 过点(0, 1)。

(2) $f'(x)=-2x\,e^{-x^2}$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$；驻点(0, 1)

(3) $f''(x)=e^{-x^2}(4x^2-2)$

令 $f''(x)=0$，得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；$y=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(4) 由 $f(-x)=f(x)$，知函数 $f(x)$是偶函数，曲线 $f(x)$关于 y 轴对称。

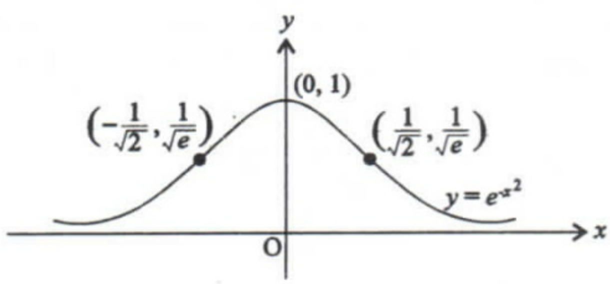
(5) 没有垂直渐近线。

由于$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$，所以有水平渐近线 $y=0$。

(6)

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	拐点	↗	极大点	↘	拐点	↘
凸向	下凸		上凸		上凸		下凸

(7) 综合以上讨论，绘出函数的图象如下。



例8 作函数$f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$的图象。

解 (1) 由$f(0)=1$，知曲线$f(x)$过点$(0, 1)$。

(2) $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

令$f'(x)=0$，无解，所以没有驻点。

(3) $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

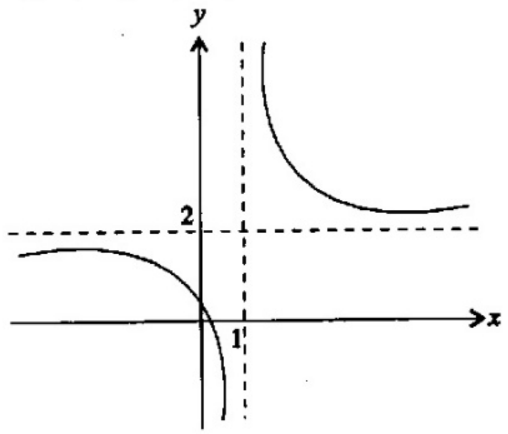
令$f''(x)=0$，无解。

(4) 函数$f(x)$不是奇函数，也不是偶函数。

(5) 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$，所以有水平渐近线$y=2$。

由于$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-1}{x-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-1}{x-1}=-\infty$，所以有垂直渐近线$x=1$。

(6) 综合以上讨论，绘出函数的图象如下。



例9 作函数$f(x)=\dfrac{3x-x^2}{(x-2)^2}$的图象。

解 (1) 当$x=0$，$f(x)=0$

当$f(x)=0$，$x=0$或$x=3$，

$\therefore$ 曲线过点$(0, 0)$及$(3, 0)$

(2) $f'(x)=\dfrac{x-6}{(x-2)^3}$

令$f'(x)=0$，得$x=6$；驻点为$\left(6, -\dfrac{9}{8}\right)$

(3) $f''(x)=\dfrac{2(8-x)}{(x-2)^4}$

令 $f''(x)=0$，得 $x=8$；$y=-\dfrac{10}{9}$

(4) 无奇偶性

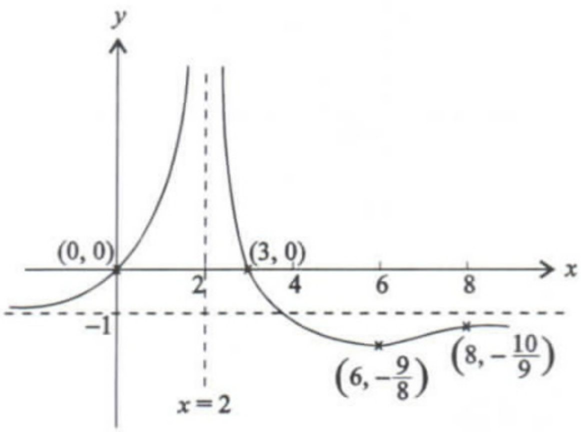
(5) 渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^2}{(x-2)^2}=-1$，$\therefore$ 水平渐近线为 $y=-1$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-x^2}{(x-2)^2}=\infty$，$\therefore$ 垂直渐近线为 $x=2$

(6)

x	$(-\infty, 2)$	$(2, 6)$	6	$(6, 8)$	8	$(8, \infty)$
$f'(x)$	+	−	0	+	+	+
$f''(x)$	+	+	+	+	0	−
$f(x)$	↗	↘	极小点	↗	拐点	↗
凸向	下凸	下凸		下凸		上凸

(7) 综合以上讨论，得 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{(x-2)^2}$ 的图象如下：



习题 10b

作下列各函数的图象：

1. $f(x)=x^3-3x^2+2$
2. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$
3. $f(x)=x^4-2x+10$
4. $f(x)=(x-1)^3(x-2)$
5. $f(x)=\frac{1}{(x-2)}$
6. $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$
7. $f(x)=\frac{8}{x^2+4}$
8. $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$
9. $f(x)=\frac{1}{x^4-x^2}$
10. $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2(x-3)}$
11. $f(x)=2^x+2^{-x}$
12. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

10.2 一元方程式的近似解

在解决实际问题时，常常需要求一元方程式 $f(x)=0$ 的解，但是精确的解往往不易求得，这就要求方程式的近似解，下面介绍一种求方程式近似解的方法——**牛顿法**（Newton's method）。

我们知道如果方程

$$f(x)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

有实根，那么函数 $y=f(x)$ 的图象必定与 x 轴有交点，而且交点的横坐标就是这方程的根。如图 10－6 所示，$y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标为 x_R，那么 x_R 就是 $f(x)=0$ 的根。但是由于绘图技术的限制以及从图中读取数值时可能引起的估计误差，要从图解法得出 x_R 的精确数值并不容易。牛顿采用了一种近似逼近的方法来求 x_R 的近似值。

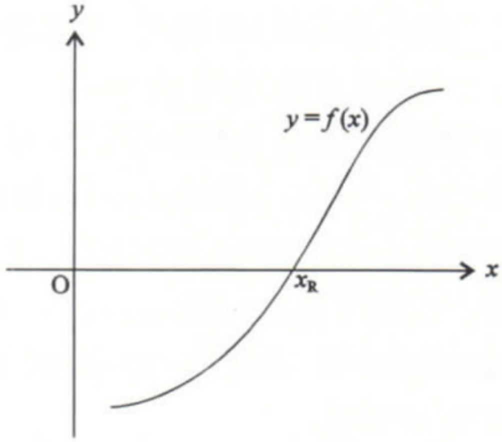


图 10－6

设 f 在 $[a,\ b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号时，则 $f(x)=0$ 在 $[a,\ b]$ 上有实数根 x_R。这时曲线的图象有下列四种情况，见图 10－7。

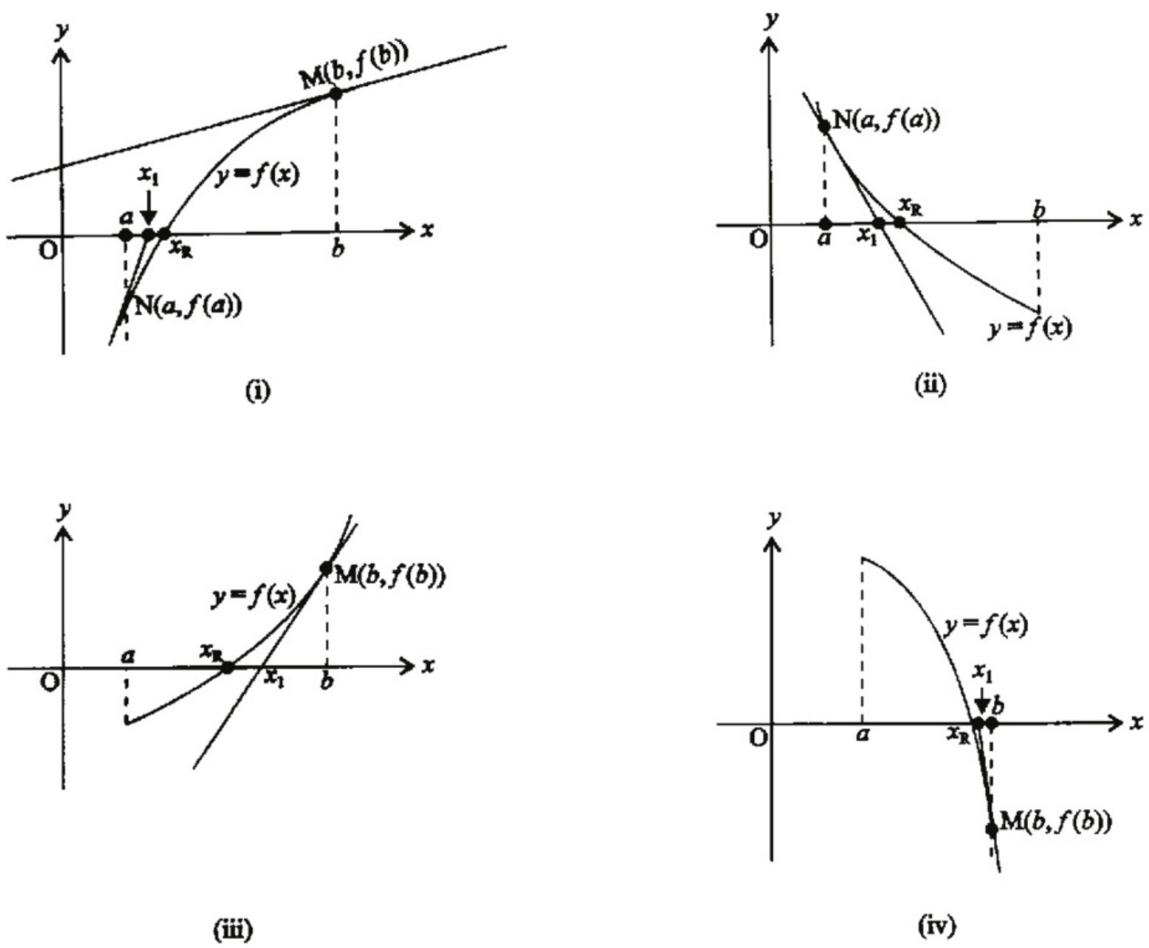


图 10－7

因为 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，它们之中必然有一个与 $f''(x)$ 同号。例如，在图 10－7(i) 中，$f(a)$ 与 $f''(x)$ 同号($f(a)<0$，曲线上凸，所以 $f''(x)<0$)，这时取点 $\mathrm{N}(a,\ f(a))$ 的切线代替曲线。这样的切线与 x 轴的交点 x_1 比 a 或 b 更靠近 x_R。如果不按以上方法取切线，切线与 x 轴的交点可能落在 $[a,\ b]$ 之外，如图 10－7(i) 中的点 $\mathrm{M}(b,\ f(b))$ 的切线与 x 轴的交点即不在 $[a,\ b]$ 内。所以，在取点的切线代替曲线时，需选 $f(x)$ 与 $f''(x)$ 同号的点。例如，图 10－7(ii) 中，$f(a)$ 与 $f''(a)$ 同号，这时取点 $\mathrm{N}(a,\ f(a))$ 的切线代替曲线。在图 10－7 中的 (iii) 与 (iv)，$f(b)$ 与 $f''(x)$ 同号，这时取点 $\mathrm{M}(b,\ f(b))$ 的切线代替曲线。

假设以点N(a，$f(a)$)为切点，则切线方程为

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

令 $y=0$，得切线与 x 轴的交点的横坐标

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)},\ f'(a)\neq 0$$

同样，如果以点M(b，$f(b)$)为切点，则切线方程为

$$y-f(b)=f'(b)(x-b)$$

令 $y=0$，得切线与 x 轴的交点的横坐标

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)},\ f'(b)\neq 0$$

x_1 是切线方程的根。

如果以 x_1 作为方程（1）的第一次近似根，就比以 a 或 b 作为方程（1）的根的近似值准确的多。如果 x_1 的准确度还不合要求，可以将 x_1 作为端点，过点(x_1，$f(x_1)$)作切线，用同样方法得方程（1）的第二次近似根 x_2，

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\ f'(x_1)\neq 0$$

如此继续作下去，直至求到满足预定准确度的近似根为止。第 n 次近似根 x_n 的公式如下：

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ f'(x_{n-1})\neq 0,\ n=1,\ 2\cdots\cdots$$

式中，当 $n=1$ 时，$x_{n-1}=x_0=a$ 或 b，x_0 称为有关方程的根的**初值**（initial value）。随着 n 的增大，x_n 越接近方程（1）的准确根 x_R。反复运用这个公式，可从 x_1 求出 x_2，再从 x_2 求出 x_3……。也就是说可以递推下去，所以这个公式又叫做**递推公式**（reccurence formula），它便于使用电子计算机进行计算。

例 10 求方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间[2，3]上的根，所求答案须准确到小数点后第二位（即 $|x_n-x_{n-1}|<\frac{1}{2}\times 10^{-2}$）。

解 设 $f(x)=x^3-2x-5$，

因 $f(2)=2^3-2(2)-5=-1$，$f(3)=3^3-2(3)-5=16$，

得知 $f(2)$ 与 $f(3)$ 异号且 f 是连续的，所以方程在[2，3]上有实根。

另外，$f'(x)=3x^2-2$，当 $x\in[2,\ 3]$ 时，$f'(x)\neq 0$，

而 $f''(x)=6x$，当 $x\in[2,\ 3]$ 时，$f''(x)>0$，此与 $f(3)$ 的符号相同。

所以通过曲线上点$(3, f(3))$作切线，可取得方程的第一次近似根：

$$x_1=3-\frac{f(3)}{f'(3)}=3-\frac{16}{25}=2.36$$

第二次近似根为 $x_2=2.36-\dfrac{f(2.36)}{f'(2.36)}=2.36-\dfrac{3.4242}{14.7088}\approx 2.1272$

第三次近似根为 $x_3=2.1272-\dfrac{f(2.1272)}{f'(2.1272)}\approx 2.0951$

第四次近似根为 $x_4=2.0951-\dfrac{f(2.0951)}{f'(2.0951)}\approx 2.0944$

由于$|x_4-x_3|=0.0007\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-2}$（小于小数点后第二位之数），

所以所求之方程式 $x^3-2x-5=0$ 的根 $x_R\approx 2.09$（准确至小数点后第二位）。

例 11 求方程 $x^5+x-11=0$ 在区间$[1, 2]$的根，所求答案须准确到小数点后第二位。

解 设$f(x)=x^5+x-11$，

令 $x=1$，得 $f(1)=-9$，

令 $x=2$，得 $f(2)=23$。

得知$f(1)$与$f(2)$异号且f是连续的，所以方程在$[1, 2]$上有实根。

另外，$f'(x)=5x^4+1$，当 $x\in[1, 2]$时，$f'(x)\neq 0$，

而 $f''(x)=20x^3$，当 $x\in[1, 2]$时，$f''(x)>0$，此与$f(2)$的符号相同，所以通过曲线上点$(2, f(2))$作切线，可取得方程的

第一次近似根为 $x_1=2-\dfrac{f(2)}{f'(2)}=2-\dfrac{23}{81}=1.7160$

第二次近似根为 $x_2=1.7160-\dfrac{f(1.7160)}{f'(1.7160)}=1.5898$

第三次近似根为 $x_3=1.5898-\dfrac{f(1.5898)}{f'(1.5898)}=1.5672$

第四次近似根为 $x_4=1.5672-\dfrac{f(1.5672)}{f'(1.5672)}=1.5665$

由于$|x_4-x_3|=|1.5665-1.5672|=0.0007\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-2}$（小于小数点后第二位之数），

所以所求的方程式 $x^5+x-11=0$ 的根 $x_R\approx 1.57$（准确至小数点后第二位）。

例 12 试验证方程式 $2\sin x = x$（x 为弧度）在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 之间有实根。试求此根，所求答案须准确至小数后两位。

解 设 $f(x) = 2\sin x - x$，

当 $x = 1$ 时，$f(1) = 2\sin 1 - 1 = 0.683$

当 $x = 2$ 时，$f(2) = 2\sin 2 - 2 = -0.182$

得知 $f(1)$ 与 $f(2)$ 异号且 f 是连续的，所以方程在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 之间有实根。

另外，$f'(x) = 2\cos x - 1$，当 $x \in [1, 2]$ 时，$f'(x) \neq 0$。

而 $f''(x) = -2\sin x$，当 $x \in [1, 2]$ 时，$f''(x) < 0$，此与 $f(2)$ 的符号相同，所以通过曲线上点 $(2, f(2))$ 作切线，可取得方程式的

第一次近似根： $x_1 = 2 - \dfrac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \dfrac{-0.1814}{-1.8322} = 1.901$

第二次近似根为 $x_2 = 1.901 - \dfrac{f(1.901)}{f'(1.901)} = 1.8955$

第三次近似根为 $x_3 = 1.8955 - \dfrac{f(1.8955)}{f'(1.8955)} = 1.8953$

由于 $|x_3 - x_2| = 0.0002 \leqslant \dfrac{1}{2} \times 10^{-2}$（小于小数点后第二位数），

所以所求的方程式 $2\sin x = x$ 的根是 1.90 （准确至两位小数）。

习题 10c

1. 已知方程 $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$ 有一根在 $[3, 4]$ 内，试计算此根的近似值至两位小数。
2. 试以初值 $x_0 = 2$ 求方程式的 $x^3 - 2x - 5 = 0$ 的一个近似根。所求答案应准确至三位小数。
3. 试求方程 $x^5 + x - 3 = 0$ 在 $[1, 2]$ 内的实根准确至三位小数。
4. $\sqrt{2}$ 的计算可用切线法解方程式 $x^2 - 2 = 0$ 而得。试取初值 $x_0 = 2$，求 $\sqrt{2}$ 准确至四位小数。
5. 在区间 $[0, 4]$ 里作函数 $y = x^3 - 6x^2 + 8$ 的图象，将 $x = 1$ 与 $x = 2$ 之间的曲线看作直线，求得这根的第一近似值，然后用切线法求第二近似值（准确至小数 2 位）。

用作图法确定下列（6 至 8）各方程式实根的个数与近似位置，然后用切线法计算各根至二位小数：

6. $x^3+2x-8=0$

7. $x^3-3x^2-4x+7=0$

8. $x^4+8x-12=0$

用作图法确定下列（9 和 10）各方程式实根的个数，然后用切线法计算其最小之根（须不为零者）：

9. $\cos x+x=0$

10. $\tan x-x=0$

总复习题 10

1. 判定下列曲线的凸向与拐点：

   (a) $f(x)=2x^3+3x^2+x+2$

   (b) $f(x)=x^4-6x^2-7$

   (c) $f(x)=2x^4-6x^2+1$

   (d) $f(x)=x^4-4x^3+16$

   (e) $f(x)=(x+2)^4+2x+1$

   (f) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

2. 已知曲线 $f(x)=x^3+ax^2-9x+4$ 在 $x=1$ 处有拐点，

   (a) 试确定系数 a

   (b) 求曲线的凸向区间与拐点

3. 已知点$(1,\ 3)$为曲线 $f(x)=ax^3+bx^2$ 的拐点，试确定系数 a，b。

4. 画出下列函数的图象：

   (a) $f(x)=-x^4+2x^2+8$

   (b) $f(x)=x(x-2)^2$

   (c) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$

   (d) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

   (e) $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-4x^2$

   (f) $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$

   (g) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

   (h) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$

5. 求方程 $x^3+6x^2+10x-2=0$ 在区间$[0,\ 1]$的近似解（结果精确到 0.01）。

6. 求方程 $x^4-10x^2-4x+8=0$ 在区间$[3,\ 4]$的近似解（结果精确到 0.01）。

7. 求方程 $x^5-x-0.2=0$ 在区间$[1,\ 2]$的近似解（结果精确到 0.01）。

8. 试取初值 $x_0=0$，计算方程式 $x^{50}-x^3-7=0$ 的一个近似根。所求答案应准确至三位小数。

用作图法确定下列各方程式实根的个数，然后用切线法计算其最小之根（须不为零者）：

9. $\cos 2x-x=0$

10. $2\sin x-x^2=0$

11 不定积分(二)

11.1 基本积分公式

在高二下半年，我们已经学过幂函数与三角函数的基本积分公式，即（其中 C 为任意常数）

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
2. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
3. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
4. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
5. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

下面，还有一些必须熟记的基本积分公式：

6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
9. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
10. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$
12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$

如要验证以上基本积分公式是否成立，只需对等号右边的表达式求导，看所得结果是否等于等号左边的被积函数。

例1 验证积分公式 7 与 9。

证明 因为 $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d(a^x)}{dx}+0$

$$=\frac{1}{\ln a}\cdot a^x\ln a$$

$$=a^x$$

所以 $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

对于积分公式 9 $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$

因为 $\frac{d}{dx}(\sec x+c)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}+C\right)$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+0$$

$$=\tan x\sec x$$

$\therefore\quad \int \tan x\sec x\,dx=\sec x+C$

例2 求 $\int\left(10^x-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)dx$。

解 原式 $=\int 10^x dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\frac{10^x}{\ln 10}-\frac{1}{2}\sin^{-1}x+C$$

例3 求 $\int\frac{a}{x}dx$ （其中 a 是常数）。

解 原式 $=a\int\frac{1}{x}dx$

$$=a\ln|x|+C$$

例4 求 $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$。

解 $$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx &= \int \left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= x - 2\tan^{-1}x + C\end{aligned}$$

习题 11a

求下列不定积分：

1. $\int 2e^x\,dx$
2. $\int 6^x\,dx$
3. $\int \frac{e^x+1}{2}dx$
4. $\int \left(e^x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$
5. $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx$
6. $\int \left(e^2+\frac{1}{4x}\right)dx$
7. $\int (2^x - x^2 + e^x - x^e)\,dx$
8. $\int \left(\frac{3}{x}+\sin x\right)dx$
9. $\int \frac{x^3-3x^2+2x+4}{x^2}dx$
10. $\int \left(\frac{1}{x}+3^x-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
11. $\int (\cos x - a^x)\,dx$
12. $\int \left(3-\frac{p}{x}\right)dx$（$p$ 为常数）
13. $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$
14. $\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
15. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$
16. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$
17. $\int \frac{2.3^x-5.2^x}{3^x}dx$
18. $\int \left(2x^2+\frac{1}{x}-\operatorname{cosec}^2 x\right)dx$
19. $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx$
20. $\int \sec x(\sec x-\tan x)\,dx$

换元积分法

例 5 求 $\int \frac{1}{3x-5}dx$。

解 设 $u = 3x - 5$，$du = 3dx$

$$\therefore \int \frac{1}{(3x-5)}dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-5| + C$$

例6 求 $\int x e^{x^2} dx$。

解 令 $u = x^2$，则 $du = 2x\,dx$。于是

$$原式 = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u du$$

$$= \frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

例7 求 $\int \cot x\, dx$。

解 $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

令 $u = \sin x$，则 $du = \cos x\, dx$。于是

$$原式 = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\, dx$$

$$= \int \frac{1}{u}du$$

$$= \ln|u| + C$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

例8 求 $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx$ 。

解 令 $u=x^2+3x+2$，则 $du=(2x+3)dx$

$$原式=\int \frac{1}{x^2+3x+2}\cdot(2x+3)dx$$

$$=\int \frac{1}{u}du$$

$$=\ln|u|+C$$

$$=\ln|x^2+3x+2|+C$$

例 9 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ 。

解 令 $u=\frac{x}{a}$，$a\,du=dx$

$$原式=\int \frac{1}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}dx$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(u)^2}du$$

$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}u+C$$

$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$$

例 10 求 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ 。

解 令 $x=u^2$，则 $dx=2u\,du$。于是

$$原式=\int \frac{\sin u}{u}\cdot 2u\,du$$

$$=2\int \sin u\,du$$

$$=-2\cos u+C$$

$$=-2\cos\sqrt{x}+C$$

习题 11b

求下列不定积分：

1. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}dx$

2. $\int \frac{2}{(2x+3)^2}dx$

3. $\int \frac{x}{(x-1)^3}dx$

4. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$

5. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

6. $\int \tan x\,dx$

7. $\int \sec 5x \tan 5x\,dx$

8. $\int -\operatorname{cosec} 3x \cot 3x\,dx$

9. $\int e^{-6t}\,dt$

10. $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

11. $\int \frac{1}{x\ln^4 x}\,dx$

12. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

13. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

14. $\int 2x\,e^{-x^2}\,dx$

15. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

16. $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx$

19. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

20. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

21. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

22. $\int \frac{dx}{4+x^2}$

23. $\int \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$

24. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

11.2 部分分式积分法

对于有理函数的不定积分，一般上有一定的规律可循。有理函数是指由多项式或分式所表示的函数，对多项式，只需使用分项积分法则，容易求出其不定积分。对假分式，由于假分式可用除法化成多项式与真分式的和，所以求其不定积分就化成求多项式的不定积分与求真分式的不定积分。这里重点讨论对真分式的不定积分。

在高一上半年，已经学过用待定系数法把一元真分式分成部分分式。若求一个真分式的不定积分，一般需先将它分解成部分分式的代数和，然后逐项求积分便可，这种积分的方法叫做**部分分式积分法**（integration by partial fraction）。

例 11 求 $\int \frac{1}{x^2-1}dx$。

解 先将被积函数分成部分分式：

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{-1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}$$

所以
$$\int \frac{1}{x^2-1}dx=\int \frac{-1}{2(x+1)}dx+\int \frac{1}{2(x-1)}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

例12 求 $\int \frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}dx$。

解 令 $\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{(2x-1)^2}$，

解得 $A=1$，$B=0$，$C=-2$

$$原式=\int \frac{1}{x+1}dx-\int \frac{2}{(2x-1)^2}dx$$
$$=\ln|x+1|+\frac{1}{2x-1}+C$$

例 13 求 $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$。

解
$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{(x-2)(x+2)}$$

令 $\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$

解得 $A=2$，$B=5$，$C=-3$

$$原式=\int \left(x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$$

例 14 求 $\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx$ 。

解 由于把一个分式分成部分分式的计算较繁，在具体解题时，应先考虑其他简便方法。本例可用换元积分法解。令 $x=t+1$，则 $dx=dt$。于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(t+1)^2}{t^3}dt \\
&= \int \frac{t^2+2t+1}{t^3}dt \\
&= \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{2}{t^2}dt + \int \frac{1}{t^3}dt \\
&= \ln|t| - \frac{2}{t} - \frac{1}{2t^2} + C \\
&= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C
\end{aligned}
$$

例 15 求 $\int \frac{4x^2-x+1}{x^3+1}dx$ 。

解 $\int \frac{4x^2-x+1}{x^3+1} = \int \frac{4x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$

令 $\frac{4x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

解得，$A=2$，$B=2$，$C=-1$

$$
\begin{aligned}
\therefore \int \frac{4x^2-x+1}{x^3+1}dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx \\
&= 2\ln|x+1| + \ln|x^2-x+1| + C
\end{aligned}
$$

习题 11c

求下列不定积分：

1. $\int \frac{1}{x(x-1)}dx$
2. $\int \frac{1}{x(x+1)}dx$
3. $\int \frac{x^2}{x+1}dx$
4. $\int \frac{x}{(x+1)(x-3)}dx$
5. $\int \frac{4x-13}{2x^2+x-6}dx$
6. $\int \frac{5x-1}{1-x^2}dx$
7. $\int \frac{1}{x^2-4}dx$
8. $\int \frac{2x+3}{x^2+x-2}dx$

9. $\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx$

10. $\int \frac{4x+23}{(x-3)(x+2)(x+4)}\,dx$

11. $\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx$

12. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$

13. $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

14. $\int \frac{1}{x+x^3}\,dx$

15. $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

16. $\int \frac{1}{(8x+7)^2}\,dx$

17. $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

18. $\int \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx$

19. $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

20. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx$

21. $\int \frac{2x}{x^2-5x+6}\,dx$

22. $\int \frac{2x-3}{x^2-5x+6}\,dx$

11.3 三角函数的积分法

在高二下半年，我们已学过一些最简单的三角函数的不定积分，本节要讨论一些比较复杂的三角函数的不定积分问题。

● $\sin x$，$\cos x$ 的偶次幂及奇次幂的积分法

求 $\sin x$，$\cos x$ 的偶次幂或奇次幂的积分时，经常要用到下列三角公式：

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}，\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

例 16 求 $\int \cos^2 x\,dx$。

解

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\\ &= \int \frac{1}{2}\,dx+\int \frac{\cos 2x}{2}\,dx\\ &= \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C\end{aligned}$$

例 17 求 $\int \sin^3 x\, dx$ 。

解 $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\, dx$

$= \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$ （令 $u=\cos x$， $du=-\sin x\, dx$）

$= -\int (1-u^2)\, du$

$= \frac{u^3}{3} - u + C$

$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$

例 18 求 $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$ 。

解 原式 $= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\, dx$

$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$ （令 $u=\sin x$， $du=\cos x\, dx$）

$= \int (u^2 - u^4)\, du$

$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

例 19 求 $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$ 。

解 $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx$

$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx$

$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx$

$= \frac{1}{8}x - \frac{\sin 4x}{32} + C$

例 20 求 $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$。

解
$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cdot \sin^2 x \, dx$$
$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (\sin^2 2x - \sin^2 2x \cos 2x) \, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} \, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx$$

而 $\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{16}\int u^2 du$ （令 $u = \sin 2x$，$du = 2\cos 2x \, dx$）
$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{u^3}{3}$$
$$= \frac{\sin^3 2x}{48}$$

$$\therefore \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C$$

习题 11d

求下列不定积分：

1. $\int \sin^2 x \, dx$
2. $\int \frac{1}{\sec^2 4x} \, dx$
3. $\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$
4. $\int \cos^2(3x-1) \, dx$
5. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$
6. $\int \sin^2 4x \cos 4x \, dx$
7. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \, dx$
8. $\int \cos^3 x \, dx$
9. $\int 2x \sin^3 x^2 dx$
10. $\int \cos^4 x \, dx$
11. $\int (2-\sin x)^2 dx$
12. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$
13. $\int (\sin^2 x + \cos x)^2 dx$
14. $\int \sin^4 ax \, dx$

● tan x，sec x 的高次幂积分法

我们已经学过 $\sec^2 x$ 的不定积分，这里讨论含 $\tan x$，$\sec x$ 高次幂的函数的更复杂的不定积分。

这里常常用到三角公式

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

例 21 求 $\int \tan x \sec^3 x \, dx$。

解 原式 $= \int \sec^2 x (\sec x \tan x) dx$ （令 $u = \sec x$，$du = \sec x \tan x \, dx$）

$$= \int u^2 du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

例 22 求 $\int \sec^4 x \, dx$。

解 原式 $= \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx$

$= \int (\tan^2 x + 1)\sec^2 x \, dx$ （令 $u = \tan x$，$du = \sec^2 x \, dx$）

$$= \int (u^2 + 1) du$$

$$= \frac{u^3}{3} + u + C$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

例 23 求 $\int \tan^4 x \, dx$。

解 $\int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$

而 $\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx = \int u^2 du$ （令 $u = \tan x$， $du = \sec^2 x \, dx$）

$$= \frac{u^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \tan x - x$$

$\therefore$ $\int \tan^4 x \, dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + c$

$\cot x$，$\operatorname{cosec} x$ 的高次幂积分法类似于 $\tan x$，$\sec x$ 的高次幂积分法。

例 24 求 $\int \cot^3 x \, dx$ 。

解 原式 $= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \cot x \, dx$

$$= \int \operatorname{cosec}^2 x \cot x \, dx - \int \cot x \, dx$$

而 $\int \operatorname{cosec}^2 x \cot x \, dx = -\int u \, d u$ （令 $u = \cot x$， $du = -\operatorname{cosec}^2 x \, dx$）

$$= -\frac{u^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\cot^2 x$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$$

$\therefore$ $\int \cot^3 x \, dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + C$

例 25 求 $\int (\tan x - \cot x)^5 (\tan x + \cot x)^2 dx$ 。

解 原式 $= \int (\tan x - \cot x)^5 (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx$

$= \int (\tan x - \cot x)^5 (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx$ （令 $u = \tan x - \cot x$，
$du = (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx$）

$$= \int u^5 du$$

$$= \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{1}{6}(\tan x - \cot x)^6 + C$$

习题 11e

求下列不定积分：

1. $\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$

2. $\int 3\cot^3 3x \operatorname{cosec}^2 3x \, dx$

3. $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$

4. $\int \tan^3 3x \, dx$

5. $\int \tan^4 x \sec^6 x \, dx$

6. $\int \tan^4 \frac{x}{2} \, dx$

7. $\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx$

8. $\int (1+\tan^2 x)(1-\tan^2 x) \, dx$

9. $\int \tan x \sec^5 x \, dx$

10. $\int \sec^4 \frac{x}{3} \, dx$

● 利用积化和、差的变换公式求积分

三角函数的积化和、差的变换公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

可用来帮助我们计算不定积分。

例 26 求 $\int \sin 5x \cos x \, dx$ 。

解 由三角函数的积化和、差公式，得

$$\int \sin 5x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 4x) \, dx$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x + C$$

例 27　求 $\int \sin mx \sin nx \, dx$ 。

解　原式 $= \int \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,dx$

$$= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$$

例 28　求 $\int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \, dx$ 。

解　原式 $= \int \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4} + \cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4} + \frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4} + \sin\frac{x}{4} + C$$

习题 11f

求下列不定积分：

1. $\int \sin 2x \cos x \, dx$
2. $\int 2\sin 3x \cos x \, dx$
3. $\int 2\cos 3x \cos x \, dx$
4. $\int 2\sin 5x \sin 3x \, dx$
5. $\int \frac{\sin x}{\sec 3x} \, dx$
6. $\int \frac{\cos 5x}{\operatorname{cosec} 2x} \, dx$
7. $\int 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3} \, dx$
8. $\int \sin(2x-1)\cos x \, dx$
9. $\int \cos mx \cos nx \, dx$
10. $\int \sin mx \cos nx \, dx$

● 含 sin x，cos x 的有理函数积分法

由三角函数和常数进行四则运算可得到含三角函数的有理函数，因为任何三角函数都可以用正弦、余弦函数表出，所以讨论含三角函数的有理函数的积分方法只

需讨论含 $\sin x$，$\cos x$ 的有理函数积分法就足够了。

在高一上半年，我们学过万能公式，即

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，有 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

这时，$x=2\tan^{-1}t$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

利用这几个公式作换元，可以求含 $\sin x$，$\cos x$ 的有理函数的不定积分。

例 29 求 $\int \frac{1}{4\sin x+3\cos x+5}\,dx$。

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$，于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{2}{8t+3-3t^2+5(1+t^2)}\,dt \\
&= \int \frac{1}{t^2+4t+4}\,dt \\
&= \int \frac{1}{(t+2)^2}\,dt \\
&= -\frac{1}{t+2}+C \\
&= -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+2}+C
\end{aligned}
$$

例 30 求 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$。

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1+t^2+2t}{1+t^2+1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt + \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt \\
&= t + \ln(1+t^2) + C \\
&= \tan\frac{x}{2} + \ln\left|1+\tan^2\frac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}
$$

例 31 令 $\tan x = t$，求 $\int \frac{1}{1-\tan^2 x}\,dx$ 。

解 令 $\tan x = t$，则 $x = \tan^{-1}t$，$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$。于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt \\
&= \int \frac{1}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}\,dt \\
&= \int \left(\frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{2(1+t^2)}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{4}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\tan^{-1}t + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right| + \frac{x}{2} + C
\end{aligned}
$$

【注】本题不宜用万能公式的变量替换 $t = \tan\frac{x}{2}$，否则不定积分的计算更繁。

习题 11g

求下列不定积分：

1. $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,dx$
2. $\int \frac{1}{4+5\cos x}\,dx$
3. $\int \frac{1}{5+4\sin x}\,dx$
4. $\int \frac{1+\sin x}{\sin x\,(1+\cos x)}\,dx$
5. $\int \frac{\cot x}{\sin x + \cos x - 1}\,dx$
6. $\int \frac{1}{5\sec x - 3}\,dx$
7. $\int \frac{\cos x}{1-\cos x}\,dx$
8. $\int \frac{1}{\sin x + \tan x}\,dx$
9. $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$
10. $\int \frac{\sec x}{2\tan x + \sec x - 1}\,dx$

11. 令 $\tan\theta = t$，求 $\int \frac{1}{2\cos^2\theta - 1}\,d\theta$

12. 令 $\tan x = t$，求 $\int \frac{\tan x}{3 - 4\sin^2 x}\,dx$ 。

含 $\sqrt{a^2 - x^2}$，$\sqrt{a^2 + x^2}$，$\sqrt{x^2 - a^2}$ 的无理函数积分法

当被积函数含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$，$\sqrt{a^2 + x^2}$，$\sqrt{x^2 - a^2}$ 时，可分别作变量代换 $x = a\sin\theta$，$x = a\tan\theta$，$x = a\sec\theta$，把不定积分化为三角函数的不定积分，求出结果后再代回原来的变量，这就是含 $\sqrt{a^2 - x^2}$，$\sqrt{a^2 + x^2}$，$\sqrt{x^2 - a^2}$ 的无理函数积分法。

例 32 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $(a > 0)$。

解 令 $x = a\sin\theta$，则 $dx = a\cos\theta\,d\theta$

于是，原式 $= \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\,a\cos\theta\,d\theta$

$$= \int \sqrt{a^2\cos^2\theta}\,a\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int a^2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4}\sin 2\theta + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}(a\sin\theta)(a\cos\theta) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

例 33 求 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}dx$ $(a>0)$。

解 令 $x=a\tan\theta$，则 $dx=a\sec^2\theta\ d\theta$

于是，原式 $=\int \frac{1}{a^2\tan^2\theta\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}}\cdot a\sec^2\theta d\theta$

$$=\int \frac{1}{a^2\tan^2\theta\sqrt{a^2\sec^2\theta}}\cdot a\sec^2\theta d\theta$$

$$=\int \frac{\sec\theta}{a^2\tan^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta \quad (\text{令 } u=\sin\theta,\ du=\cos\theta\ d\theta)$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{u^2}du$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{-1}{u}+C$$

$$=\frac{-1}{a^2\sin\theta}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}+C$$

例 34 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$ $(a>0)$。

解 令 $x=a\sec\theta$，则 $dx=a\sec\theta\tan\theta\ d\theta$

于是，原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}}\cdot a\sec\theta\tan\theta\ d\theta$

$$=\int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta}}d\theta$$

$$=\int \sec\theta\ d\theta$$

$$=\int \frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta$$

$$=\int \frac{\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta$$

$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C \quad (\text{其中 } C=C_1-\ln a)$$

习题 11h

求下列不定积分：

1. $\int \sqrt{1-4x^2}\, dx$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{49-5x^2}}\, dx$
4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\, dx$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{9+4x^2}}\, dx$
7. $\int \frac{x}{a^2+x^2}\, dx$
8. $\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$
9. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$
10. $\int x\sqrt{4-x^2}\, dx$
11. $\int \frac{1}{x\sqrt{81+x^2}}\, dx$
12. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\, dx$

11.4 分部积分法

我们知道，当 u，v 为可导函数时，它们的积的导数为

$$\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$

移项，得

$$u\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}(uv)-v\frac{du}{dx}$$

两边积分得

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx=\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx-\int v\frac{du}{dx}\,dx$$

即

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

这个公式叫做分部积分公式。如果求 $\int v\,du$ 比较容易时，就可以利用分部积分公式，将求 $\int u\,dv$ 形式的不定积分转化成求 $\int v\,du$ 形式的不定积分。用这个公式求不定积分的方法叫做**分部积分法**（integration by parts）。

在实际应用时，应把被积函数的哪一部分看作 u，哪一部分看作 dv，往往不是显而易见的，需经过一番练习后才能掌握到适当选取 u 和 dv 的技巧。

分部积分法可用来求形如$\int x\sin ax\,dx$，$\int x^k\ln x\,dx$，$\int x\,e^x dx$等两个函数乘积的积分，也可以用来推导出对数函数$\int \ln x\,dx$和反三角函数$\int \sin^{-1}ax\,dx$，$\int \cos^{-1}ax\,dx$等的基本积分公式，下面举几个例子。

例 35 求$\int x\sin x\,dx$。

解 令$u=x$，$du=dx$；令$dv=\sin x\,dx$，$v=-\cos x$。

于是由分部积分公式得

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int(-\cos x)dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C$$

例 36 求$\int x\,e^x dx$。

解 令$u=x$，$du=dx$；令$dv=e^x dx$，$v=e^x$。

于是由分部积分公式得

$$\int x\,e^x\,dx=x\,e^x-\int e^x dx$$
$$=x\,e^x-e^x+C$$

例 37 求$\int x^2\ln x\,dx$。

解 令$u=\ln x$，$du=\frac{1}{x}dx$；令$dv=x^2dx$，$v=\frac{x^3}{3}$。

于是由分部积分公式得

$$\int x^2\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\left(\frac{x^3}{3}\right)\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx$$
$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$

例 38 求 $\int x \tan^{-1}x \, dx$ 。

解 令 $u=\tan^{-1}x$，$du=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx$；令 $dv=x\,dx$，$v=\dfrac{x^2}{2}$。

于是由分部积分公式得

$$
\begin{aligned}
\int x \tan^{-1}x \, dx &= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C
\end{aligned}
$$

例 39 求 $\int \ln x \, dx$ 。

解 令 $u=\ln x$，$du=\dfrac{1}{x}\,dx$，令 $dv=dx$，$v=x$。

于是由分部积分公式得

$$
\begin{aligned}
\int \ln x \, dx &= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= x\ln x - \int dx \\
&= x\ln x - x + C
\end{aligned}
$$

例 40 试用分部积分公式推导 $\sin^{-1}x$ 和 $\tan^{-1}x$ 的基本积分公式。

解 (a) 求 $\int \sin^{-1}x \, dx$ 。

令 $u=\sin^{-1}x$，$du=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$；令 $dv=dx$，$v=x$ 。

于是，得

$$
\begin{aligned}
\int \sin^{-1}x \, dx &= x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

(b) 求 $\int \tan^{-1}x\,dx$ 。

令 $u=\tan^{-1}x$ ， $du=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx$；令 $dv=dx$， $v=x$ 。

$$\text{于是}\quad \int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx$$
$$=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$$
$$=x\tan^{-1}x-\ln\sqrt{1+x^2}+C$$

习题 11i

求下列不定积分：

1. $\int x\cos x\,dx$
2. $\int (x+1)\sin x\,dx$
3. $\int x\sin(x+1)\,dx$
4. $\int x\cos 3x\,dx$
5. $\int x\ln x\,dx$
6. $\int x e^{-x}\,dx$
7. $\int x\sin x\cos x\,dx$
8. $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$
9. $\int \ln(1+x^2)\,dx$
10. $\int x^2\tan^{-1}x\,dx$
11. $\int \cos^{-1}x\,dx$
12. $\int \ln x^2\,dx$
13. $\int xa^{2x}\,dx\,(a>0)$
14. $\int x\tan^2x\,dx$
15. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ （令 $t=\sqrt{x}$）

下面看一些连续应用部分积分公式求积分的例子。

例 41 求 $\int x^2\sin x\,dx$ 。

解 令 $u=x^2$，$du=2x\,dx$；$dv=\sin x\,dx$，$v=-\cos x$ 。

于是

$$\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x+\int\cos x\cdot 2x\,dx$$

$$=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$$

而 $$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=x\sin x+\cos x$$

$$\therefore\quad\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$

【注】本例用了两次分部积分公式，每用一次分部积分公式，被积函数中 x 的幂的次数就减少 1。

例 42 求 $\int x^2e^xdx$ 。

解 令 $u=x^2$，$du=2x\,dx$；$dv=e^xdx$，$v=e^x$。

于是

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx$$

而 $$\int x\,e^xdx=x\,e^x-\int e^xdx$$

$$=x\,e^x-e^x$$

$$\therefore\quad\int x^2e^xdx=x^2e^x-2(x\,e^x-e^x)+C$$

$$=x^2e^x-2x\,e^x+2e^x+C$$

我们还会遇到这样情况：当反复使用分部积分公式后，又回到原来所求的积分。这时也有可能求出结果。

例 43 求 $\int e^x \sin x\, dx$ 。

解 令 $u = e^x$，$du = e^x dx$；$dv = \sin x\, dx$，$v = -\cos x$ 。

于是

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

而 $$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$\therefore$ $$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

即 $$2\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

所以 $$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + C$$

例 44 求 $\int \sec^3 x\, dx$ 。

解 令 $u = \sec x$，$du = \sec x \tan x\, dx$；$dv = \sec^2 x\, dx$，$v = \tan x$ 。

于是

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx\end{aligned}$$

即 $$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$

所以 $$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x\, dx \\ &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

习题 11j

求下列不定积分：

1. $\int x^2 e^{-x} dx$
2. $\int x^2 \cos x \, dx$
3. $\int x^2 \cos^2 x \, dx$
4. $\int x^5 \sin x^2 dx$
5. $\int \sin(\ln x) dx$
6. $\int e^x \cos x \, dx$
7. $\int x^5 e^{x^2} dx$
8. $\int e^{2x} \cos x \, dx$
9. $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x \, dx$
10. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$

总复习题 11

求下列不定积分（1 ~ 32）：

1. $\int (2 \tan x + 3 \cot x)^2 dx$
2. $\int (2^x + 3^x)^2 dx$
3. $\int \dfrac{(x-1)^2}{x} dx$
4. $\int (ax^2 + b)^{\frac{1}{3}} x \, dx$
5. $\int \dfrac{x^2}{1-x} dx$
6. $\int \dfrac{2.3^x + 5.2^x}{3^x} dx$
7. $\int \dfrac{1}{(\sin^{-1} x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$
8. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} dx$
9. $\int \dfrac{1}{x \ln x} dx$
10. $\int \dfrac{1}{x^2 - 16} dx$
11. $\int \dfrac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx$
12. $\int \left(2 \sin \dfrac{x}{2} + 3\right)^2 \cos \dfrac{x}{2} dx$
13. $\int \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - 5} dx$
14. $\int x^3 \sqrt{1 - x^2} dx$
15. $\int \dfrac{1}{1 + \sqrt{1+t}} dt$（令 $u = \sqrt{1+t}$）
16. $\int \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$（令 $x = a \sec \theta$）
17. $\int \dfrac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$
18. $\int \dfrac{x^2 + 1}{(x-1)^3 (x+3)} dx$
19. $\int \dfrac{3x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^3 + x} dx$
20. $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$
21. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$
22. $\int \tan^4 x \sec^6 x \, dx$

23. $\int \sin 2x \cos 5x \, dx$

24. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \, dx$

25. $\int \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} \, dx$

26. $\int (x^2 + 2x + 3)\cos x \, dx$

27. $\int x^n \ln x \, dx \ (n \neq -1)$

28. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

29. $\int x \sin^{-1} x \, dx$

30. $\int \sin \sqrt{x} \, dx$(令 $t = \sqrt{x}$)

31. $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

32. $\int x \tan^2 x \, dx$

试求下列各不定积分（33 ~ 40）：

33. $\int (2x^3 + 5^x - 4 \cos x) dx$

34. $\int \sqrt{x} (ax^2 - \sqrt{5}) \, dx$

35. $\int 2^x e^x \, dx$

36. $\int (\sin x + \frac{5}{1 + x^2} + e^x) dx$

37. $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2 (1 + x^2)} \, dx$

38. $\int \sqrt{\frac{1}{3}x - 2} \, dx$

39. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \, dx$

40. $\int \frac{\ln (x + 1)}{x^2} \, dx$

41. 试求恒等式 $\frac{1}{x^2 (x - 1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - 1}$ 中的常数 A，B，C，并用此结果求 $\int \frac{dx}{x^2 (x - 1)}$。

42. 化 $\frac{5x^2 - 3x + 1}{x^2 (2x - 1)}$ 成部份分式 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x} + \frac{C}{2x - 1}$，并用此结果求 $\int \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^2 (2x - 1)} \, dx$。

试用括号内的换元（43 ~ 46）求：

43. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \quad \left(x = \sin \theta, \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

44. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \quad \left(x = a \sin \theta, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，其中 $a > 0$，答案以 θ 表示之；

45. $\int \frac{dx}{4 \cos^2 x - 9 \sin^2 x} \quad (t = \tan x)$

46. $\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x}$ 及 $\int \frac{dx}{3 - 5 \cos x} \quad \left(t = \tan \frac{x}{2}\right)$

12 定积分及其应用(二)

12.1 定积分的计算(二)

在高二我们已学过了定积分的计算，现在再来看一些例子。

例1 求定积分$\int_{-3}^{-2}\frac{1}{2x+1}\,dx$。

解
$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-2}\frac{1}{2x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\left[\ln|2x+1|\right]_{-3}^{-2}\\ &= \frac{1}{2}(\ln|-4+1|-\ln|-6+1|)\\ &= \frac{1}{2}(\ln 3-\ln 5)\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}\end{aligned}$$

例2 求定积分$\int_{0}^{3}\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$。

解 设$u=\sqrt{x+1}$，$x=u^2-1$；则$dx=2u\,du$

又当$x=0$时，$u=1$；当$x=3$时，$u=2$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \int_{0}^{3}\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int_{1}^{2}\frac{2u^2-3}{u}\cdot 2u\,du\\ &= \int_{1}^{2}(4u^2-6)\,du\\ &= \left[\frac{4u^3}{3}-6u\right]_{1}^{2}\\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

例3 计算$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ （设 $x=2\sin\theta$）。

解 设 $x=2\sin\theta$，$dx=2\cos\theta\,d\theta$

又当 $x=0$时，$\theta=0$；$x=2$时，$\theta=\frac{\pi}{2}$。

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta+1)\,d\theta \\
&= 2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\left[0+\frac{\pi}{2}\right] \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

习题 12a

1. $\int_1^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$
2. $\int_4^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}}$
3. $\int_{-6}^{-10} \frac{dx}{x+2}$
4. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
5. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2-9}$
6. $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$
7. $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ （设 $x=2\sin\theta$）
8. $\int_8^{27} \frac{dx}{x-x^{\frac{1}{3}}}$ （设 $u=x^{\frac{1}{3}}$）
9. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4}$
10. $\int_1^e \ln x\,dx$
11. $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$
12. $\int_{-2}^3 e^{-\frac{x}{2}}dx$
13. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin x\,dx$
14. $\int_0^{2\pi} \sin\frac{1}{2}t\,dt$
15. $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} x^2\sin 3x\,dx$
16. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{3+\cos 2x}$ （设 $t=\tan x$）

12.2 极坐标系下的面积计算

我们已经学习了直角坐标系下的面积计算。某些平面图形，用极坐标计算它们的面积比较方便。

设曲线由极坐标方程

$$r = r(\theta)$$

给出。由曲线 $r = r(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta$ 围成的图形通常称为曲边扇形（图 12－1(a)）。

现在我们来计算它的面积。

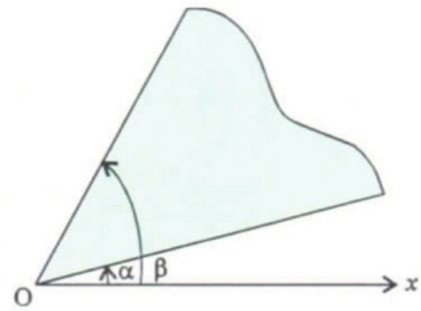
在$[\alpha, \beta]$中任取一个窄曲边扇形 OAB，它可以近似地看成半径为 $r(\theta)$，中心角为 $\Delta\theta$ 的圆扇形（图 12－1(b)），因此它的面积为

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}[r(\theta)]^2\Delta\theta$$

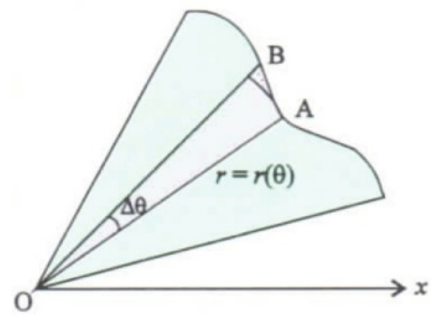
$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{2}[r(\theta)]^2$$

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}[r(\theta)]^2$$

$$\therefore \quad A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta$$



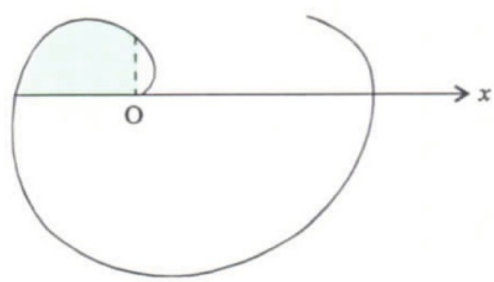
(a)



(b)

图 12－1

例4 求阿基米德螺线 $r = a\theta$ $(a > 0)$上 θ 从$\frac{\pi}{2}$ 变到 π 的一段孤及射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$，$\theta = \pi$ 围成的图形的面积。



解 利用公式得所求面积为

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\theta^2 d\theta$$

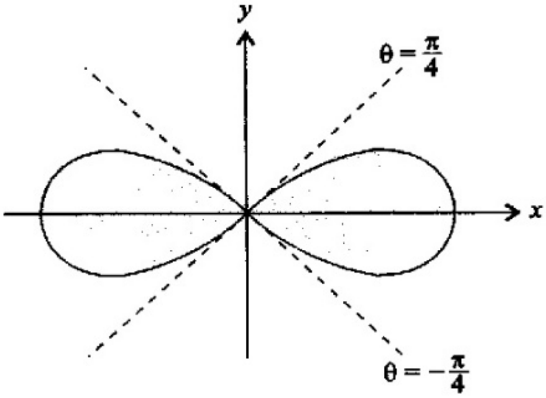
$$= \frac{1}{2}a^2\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{7}{48}a^2\pi^3$$

例5 求双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围图形的面积。

解 双纽线关于两个坐标轴都对称。双纽线围成区域的面积是第一象限部分面积的 4 倍。在第一象限中，θ 的变化范围是由 0 到$\frac{\pi}{4}$。

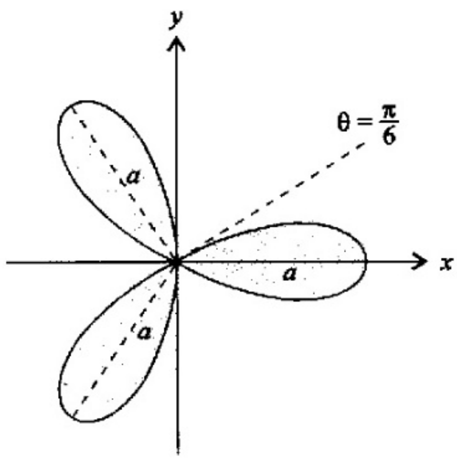
于是
$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\, d\theta$$
$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta$$
$$= 2a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= a^2\sin\frac{\pi}{2}$$
$$= a^2$$



例6 求三叶玫瑰线 $r = a\cos 3\theta$（$a > 0$）所围图形的面积。

解 三叶玫瑰线围成的三个叶全等，而且每个叶又是轴对称的，因此三叶玫瑰线围成图形的面积是第一象部分面积的 6 倍。在第一象限中，θ 的变化范围是由 0 到$\frac{\pi}{6}$。

于是
$$A = 6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}a^2\cos^2 3\theta\, d\theta$$
$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\, d\theta$$
$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta$$
$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{3}{2}a^2\left[\theta + \frac{1}{6}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{3}{2}a^2\left[\frac{\pi}{6} + 0\right]$$
$$= \frac{1}{4}\pi a^2$$



如果平面图形由曲线 $r=r_1(\theta)$，$r=r_2(\theta)$（$r_2(\theta)\leqslant r_1(\theta)$）及射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 围成（图 12－2），其面积为

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[(r_1(\theta))^2-(r_2(\theta))^2]d\theta$$

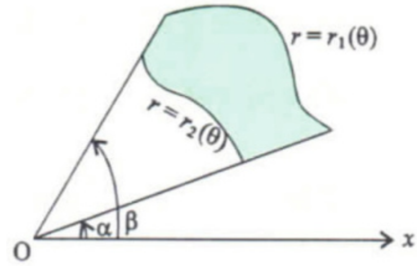
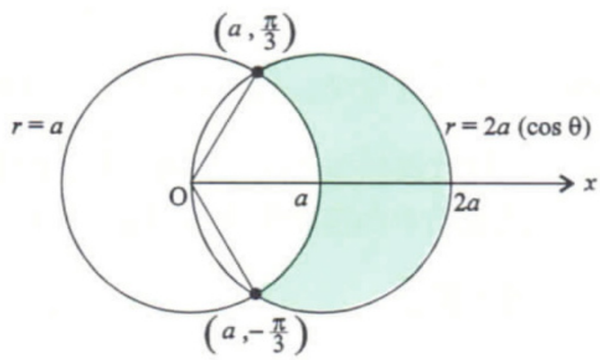


图 12－2

例7 右图中二圆的方程为 $r=a(a>0)$ 及 $r=2a\cos\theta(a>0)$，求阴影部分的面积。

解 解联立方程式 $\begin{cases} r=a \\ r=2a\cos\theta \end{cases}$



得交点 $\left(a,\ -\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(a,\ \frac{\pi}{3}\right)$

则所求之图形面积

$$A=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}[(2a\cos\theta)^2-a^2]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(4a^2\cos^2\theta-a^2)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(4\cos^2\theta-1)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left[4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)-1\right]d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(2\cos 2\theta+1)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}[\sin 2\theta+\theta]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\sin\frac{-2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

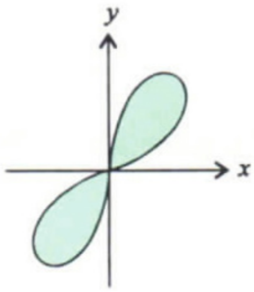
$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\frac{1}{3}\pi a^2$$

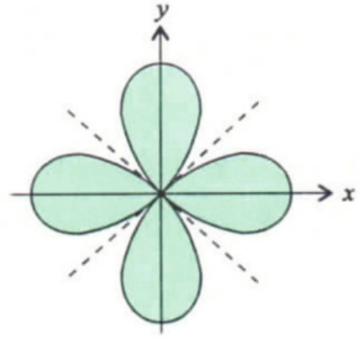
习题 12b

试求下列各曲线所围成的图形的面积（1 ~ 2）：

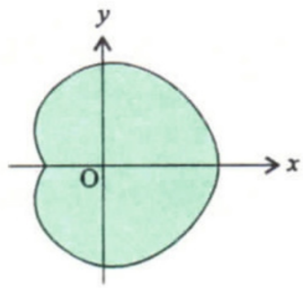
1. $r^2 = a^2\sin 2\theta$　（双纽线）



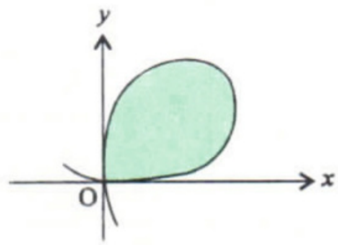
2. $r = a\cos 2\theta (a > 0)$　（四叶玫瑰线）



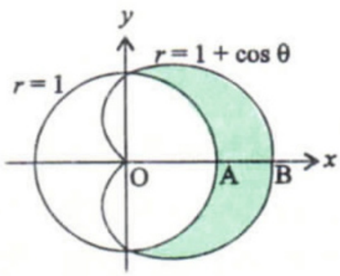
3. 求右图中，曲线 $r = 2 + \cos\theta$ 所围成的面积。



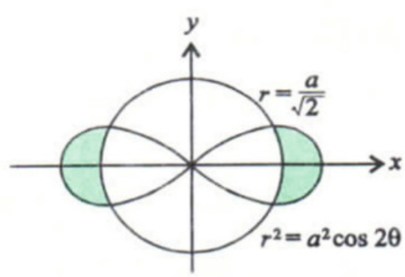
4. 求右图中，曲线 $r = \sin^2 2\theta$ 所围成的面积。



5. 求曲线 $r = 1 + \cos\theta$ 与圆 $r = 1$ 两者之间的面积（右图中阴影部分）。



6. 求介于圆 $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}} (a > 0)$ 外部及双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 内部的图形的面积。



7. 作出曲线 $r = a\sin 3\theta(a>0)$的图象，并求此曲线所围成的面积。

8. 求由曲线 $r = 6\sin\theta$ 及 $r = 12\sin\theta$ 所围成之面积。

12.3 旋转体的体积(二)

我们已经学习过由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 以及 x 轴所围曲边梯形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

$$V=\int_a^b \pi y^2 dx$$

由曲线 $x=g(y)$，直线 $y=a$，$y=b$ $(a<b)$ 以及 y 轴所围曲边梯形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积为

$$V=\int_a^b \pi x^2 dy$$

如果旋转体的旋转轴是 $y=c$(图 12－3)，它的体积如何计算呢?

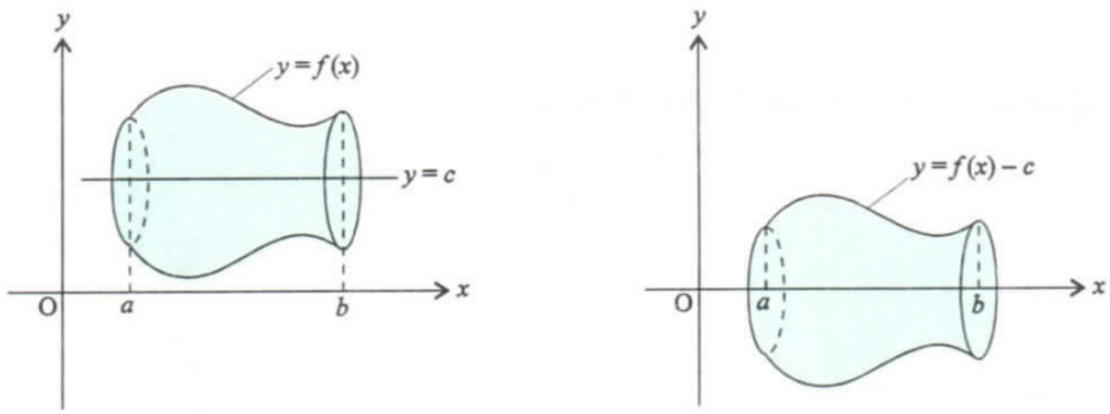


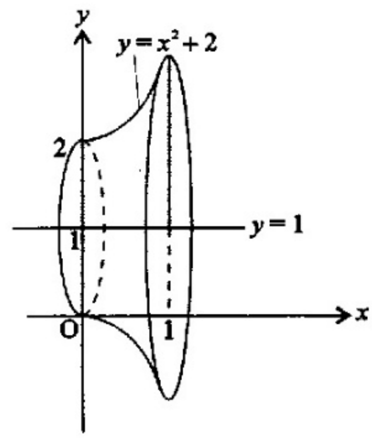
图 12－3

设旋转体由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b(a<b)$及 $y=c$ 所围曲边梯形绕 $y=c$ 旋转一周而成。我们可以将待旋转的曲边梯形及旋转轴一同沿 y 轴平移，将旋转轴平移到 x 轴。这样平移后的曲边梯形绕 x 轴旋转一周产生的旋转体的体积与原旋转体体积是相等的。曲线 $y=f(x)$平移后变为曲线 $y=f(x)-c$。于是旋转体的体积为

$$V=\int_a^b \pi[f(x)-c]^2 dx$$
$$=\pi\int_a^b [y-c]^2 dx$$

同理，若旋转体是绕 $x=c$ 旋转而成的，其体积为

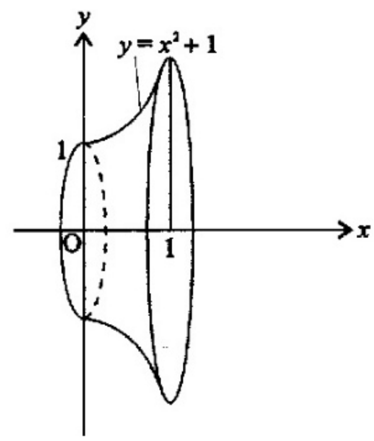
$$V=\pi\int_a^b[x-c]^2dy$$



例8 求抛物线 $y=x^2+2$ 及直线 $x=0$，$x=1$，$y=1$ 围成的面积绕直线 $y=1$ 旋转一周而成的旋转体的体积。

解 利用公式并参照右图，得旋转体体积为

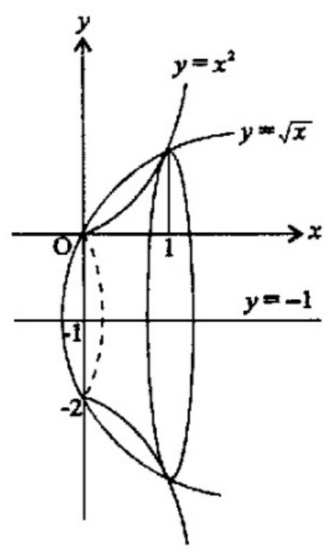
$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1[y-1]^2dx\\&=\pi\int_0^1[(x^2+2)-1]^2dx\\&=\pi\int_0^1(x^2+1)^2dx\\&=\pi\int_0^1(x^4+2x^2+1)dx\\&=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right]_0^1\\&=\frac{28}{15}\pi\end{aligned}$$



例9 求由曲线 $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$ 围成的面积绕直线 $y=-1$ 旋转一周而成的旋转体的体积。

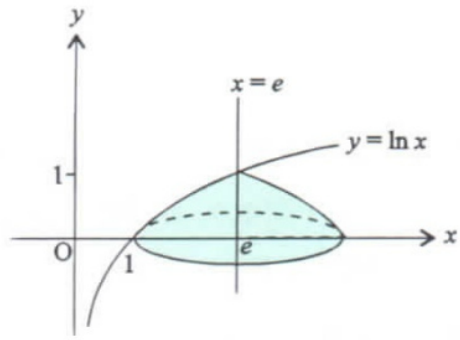
解 利用公式并参照右图得旋转体体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1[\sqrt{x}-(-1)]^2\,dx-\pi\int_0^1[x^2-(-1)]^2dx\\&=\pi\int_0^1(\sqrt{x}+1)^2\,dx-\pi\int_0^1(x^2+1)^2dx\\&=\pi\int_0^1(x+2\sqrt{x}+1)dx-\pi\int_0^1(x^4+2x^2+1)dx\\&=\pi\left[\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1-\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right]_0^1\\&=\frac{29}{30}\pi\end{aligned}$$



例 10 求由曲线 $y=\ln x$，$y=0$ 及 $x=e$ 围成的面积绕直线 $x=e$ 旋转一周而成的旋转体的体积。

解 $x=e$ 时，$y=1$



所求体积为

$$V=\pi\int_0^1[x-e]^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^1[e^y-e]^2\,dy$$

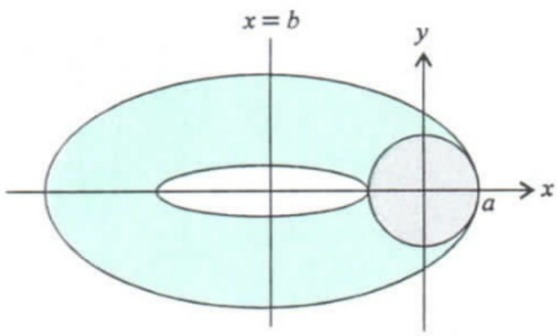
$$=\pi\int_0^1[e^{2y}-2ee^y+e^2]\,dy$$

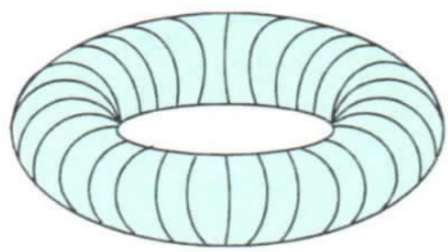
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}-2ee^y+e^2y\right]_0^1$$

$$=\pi\left(2e-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)$$

例 11 求圆 $x^2+y^2=a^2$ 绕直线 $x=-b(b>a>0)$ 旋转一周而成的旋转体的体积。

解





右半圆方程为 $x=\sqrt{a^2-y^2}$

左半圆方程为 $x=-\sqrt{a^2-y^2}$

所求体积为

$$V=\pi\int_{-a}^{a}[\sqrt{a^2-y^2}-(-b]^2dy-\pi\int_{-a}^{a}[-\sqrt{a^2-y^2}-(-b)]^2\,dy$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}[(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2-(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2]dy$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}[(a^2-y^2+2b\sqrt{a^2-y^2}+b^2)-(a^2-y^2-2b\sqrt{a^2-y^2}+b^2)]dy$$

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

令 $y=a\sin\theta$，则 $dy=a\cos\theta d\theta$

当 $y=-a$ 时，$\theta=-\frac{\pi}{2}$；当 $y=a$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$

于是 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=a^2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}$$

$\therefore\quad V=4\pi b\cdot\frac{\pi a^2}{2}=2\pi^2a^2b^2$

习题 12c

求下列曲线围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积（1～3）：

1. $y=1-x^2$，$y=0$
2. $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$
3. $y^2=4ax(a>0)$，$x=b(b>0)$

求下列曲线围成的图形绕 y 轴旋转所成旋转体的体积（4～6）：

4. $y=x^2$，$x=y^2$
5. $y=x$，$y=0$，$x=1$
6. $(x-5)^2+y^2=16$
7. 求由曲线 $y=e^x$，$y=1$，$x=1$ 围成的图形绕直线 $y=1$ 旋转一周所得旋转体的体积。
8. 求由曲线 $y=x^2$，$x=1$，$y=0$ 围成的图形绕直线 $x=1$ 旋转一周所得旋转体的体积。
9. 求由曲线 $y=x^3$，$y=\sqrt{x}$ 围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转一周所得旋转体的体积。
10. 求由曲线 $y^2=4(x-1)$，$y=2$，$x=1$ 围成的图形绕直线 $x=1$ 旋转一周所得旋转体的体积。
11. 求由曲线 $y=x^3+1$，$x=2$，$y=1$ 围成的图形绕直线 $y=1$ 旋转一周所得旋转体的体积。
12. 求由曲线 $x(y-1)=4$，$y=1$，$x=1$，$x=4$ 围成的图形绕直线 $y=1$ 旋转一周所得旋转体的体积。

12.4 定积分的近似计算

利用牛顿——莱布尼兹公式可以精确地计算定积分的值。但它仅适用于被积函数的原函数可以用初等函数表示出来的情形。在应用中有一些定积分不宜或不能用上述方法来计算。例如，有些被积函数难于用公式表示，而是用图形或表格给出的；有些被积函数的原函数不能用初等函数表示，或者从理论上说被积函数存在初等函数形式的原函数，但计算过程很复杂。所以，我们需要考虑定积分的近似计算问题。

由于定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (f(x)\leqslant 0)$$

的几何意义是一块曲边梯形的面积，因此，只要近似地算出相应的曲边梯形的面积，就得到定积分的近似值。于是人们找出种种求面积的近似方法，对每一种方法相应地就有一种求积分的近似公式。

下面介绍两种常用的定积分的近似计算方法，所导出的公式对于 $f(x)$在$[a,\ b]$上不是非负的情形同样适用。

● 梯形法（trapezium rule）

梯形法就是把曲边梯形分成若干个窄曲边梯形，然后用窄梯形来近似代替窄曲边梯形，以此求得定积分的近似值。具体做法如下：

对区间$[a,\ b]$作 n 等分的分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

每个小区间的长度为 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$，并记函数 $f(x)$对应于各分点的函数值为 y_0，y_1，$\cdots$，y_n。

过各分点作垂直于 x 轴的直线与曲线 $y=f(x)$依次交于 p_0，p_1，$\cdots$，p_n。将相邻两点联结起来得到弦线 P_0P_1，P_1P_2，$\cdots$，$P_{n-1}P_n$。于是我们得到 n 个小梯形（图 12－4）。每个小梯形的面积分别为

$$\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x,\ \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x,\ \cdots,\ \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

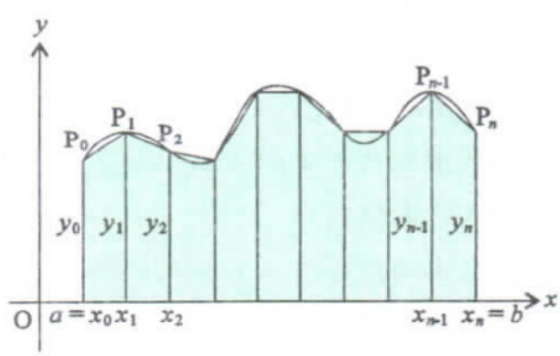


图 12－4

于是各个小梯形面积之和就是曲边梯形面积的近似值，也就是积分$\int_a^b f(x)\,dx$ 的近似值，所以

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

即
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$$

这个公式叫做梯形法公式。

例 12 将区间[0，1]分成十等分，用梯形法计算积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 的近似值。

解 这里被积函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$。

将区间[0，1]十等分，则分点

$$x_0=0,\ x_1=0.1,\ x_2=0.2,\ \cdots,\ x_9=0.9,\ x_{10}=1$$

将分点对应的函数值计算到四位小数，并列表表示如下：

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
y	1.0000	0.9901	0.9615	0.9174	0.8621	0.8000	0.7353	0.6711

x	0.8	0.9	1.0
y	0.6098	0.5525	0.5000

将它们代入梯形法公式有

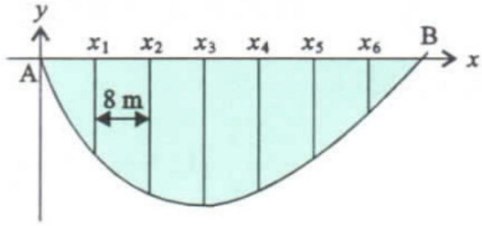
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}\left[\frac{1+0.5}{2}+0.9901+0.9615+\cdots+0.5525\right]$$
$$=0.7850$$

我们已经知道

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}=0.78539\cdots$$

与上述近似值相比较，可见前三位有效数字是准确的。

例 13 在水利建设中，常常要估计河流的截面积。设有一河流的截面如右图，取截面与水平面的交线作 x 轴，y 轴垂直向下，已知河宽 AB = 56 米，每隔 8 米测量一次深度 y，所得数据如下表，试估算河流的截面积 S。



x	0	8	16	24	32	40	48	56
y	0	3.53	5.90	6.39	5.37	4.61	1.37	0

解 根据题意 $\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{56}{7}=8$，对应于各分点的函数值是：

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
0	3.53	5.90	6.39	5.37	4.61	1.37	0

由梯形法公式得到

$$
\begin{aligned}
S &= 8\left(\frac{0+0}{2}+3.53+5.90+\cdots+1.37\right)\\
&= 8\times 27.17\\
&= 217.36\ (\text{米}^2)
\end{aligned}
$$

例 14 积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的被积函数的原函数不是初等函数，所以不能用牛顿——莱布尼兹公式来计算这个积分。现在用梯形法计算它的近似值。

解 把区间[0, 1]十等分，分点及所对应的函数值如下表所示

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1.00000	0.99005	0.96079	0.91393	0.85214	0.77880

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.69768	0.61263	0.52729	0.44486	0.36788

将它们代入梯形法公式有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2}dx &\approx \frac{1}{10}\left[\frac{1+0.36788}{2}+0.99005+0.96079+\cdots+0.44486\right]\\
&= 0.74621
\end{aligned}
$$

辛普逊法（Simpson's rule）

用梯形法计算定积分的近似值是通过许多直线段分别代替原来各曲线段，即把被积函数逐段用线性函数代替。为了提高精确度，可以考虑在小范围内用二次函数 $y = Ax^2 + Bx + C$ 来近似代替被积函数，即用对称轴平行于 y 轴的抛物线上的一段弧来近似代替原来的曲线弧，从而算出定积分的近似值。这种方法叫抛物线法。具体做法如下：

把区间$[a, b]$分为 $2n$ 等分

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} = b$$

每个小区间长度为

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n}$$

记函数 $f(x)$对应于各分点的函数值为

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{2n}$$

曲线上相应的点为

P_0，P_1，P_2，…，P_{2n} （图 12－5）

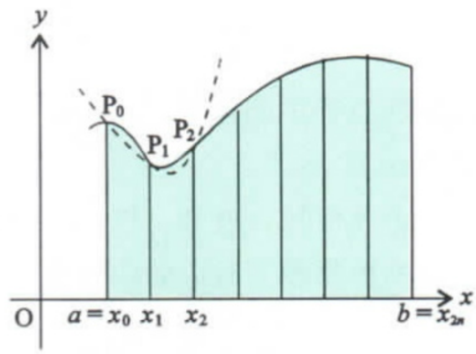


图 12－5

因为过三点可以确定一条抛物线 $y = Ax^2 + Bx + C$，在每两个相邻的小区间上经过曲线上相应的三个点可以做一条抛物线，这样可以得到以此抛物线为顶的曲边梯形。把这些曲边梯形的面积加起来就可以做为所求定积分的一个近似值。由于两个相邻区间决定一条抛物线，所以用这种方法时，必须将区间$[a, b]$等分成偶数个小区间。

我们先计算在区间$[x_0, x_2]$内，过三点 P_0，P_1，P_2 的抛物线 $y = Ax^2 + Bx + C$ 所形成的曲边梯形的面积。

过 P_0，P_1，P_2 的抛物线为 $y = Ax^2 + Bx + C$，则与各点对应的函数值分别为

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C$$

$$y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$$

$$y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C$$

于是所求面积为

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2}(Ax^2 + Bx + C)\,dx &= \left[\frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx\right]_{x_0}^{x_2} \\ &= \frac{A}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{B}{2}(x_2^2 - x_0^2) + C(x_2 - x_0) \\ &= \frac{x_2 - x_0}{6}[2A(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + 3B(x_2 + x_0) + 6C]\end{aligned}$$

$$=\frac{x_2-x_0}{6}[(Ax_2^2+Bx_2+C)+(Ax_0^2+Bx_0+C)$$

$$+A(x_2+x_0)^2+2B(x_2+x_0)+4C]$$

因为 $2x_1=x_2+x_0$，$x_2-x_0=2\Delta x=\frac{b-a}{n}$，

$$\therefore\quad \int_{x_0}^{x_2}(Ax^2+Bx+C)dx=\frac{b-a}{6n}[y_2+y_0+A\cdot 4x_1^2+2B\cdot 2x_1+4C]$$

$$=\frac{b-a}{6n}[y_0+4y_1+y_2]$$

这个曲边梯形的面积只与 P_0，P_1，P_2 点的纵坐标 y_0，y_1，y_2 及底边所在区间的长度 $2\Delta x$ 有关。

由此可知，过 P_0，P_1，P_2 三点；过 P_2，P_3，P_4 三点；…；过 P_{2n-2}，P_{2n-1}，P_{2n} 三点的抛物线所对应的曲边梯形的面积依次为

$$A_1=\frac{b-a}{6n}(y_0+4y_1+y_2)$$

$$A_2=\frac{b-a}{6n}(y_2+4y_3+y_4)$$

…

$$A_n=\frac{b-a}{6n}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$$

把上面几个曲边梯形的面积加起来，就得到定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的近似值：

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})]$$

这个公式叫抛物线法公式，也叫辛普逊公式。

例 15 利用辛普逊法计算 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值。

解 利用例 14 的数据，这里相应的取 $n=5$。

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\frac{1-0}{6\times 5}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{1}{30}[1.36788+4\times 3.74027+2\times 3.03790]$$

$$=\frac{1}{30}\times 22.40476$$

$$=0.74683$$

例 16 求 $\int_1^4 \frac{dx}{x}$ 的近似值。

解 将区间[1，4]等分为 6 个小区间，计算各分点处被积函数的对应值，并列表如下：

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	1.000	0.667	0.500	0.400	0.333	0.286	0.250

应用梯形法公式，这时 $n=6$，$b-a=3$，得

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{dx}{x} &\approx \frac{3}{6}\left[\frac{1+0.25}{2}+0.667+0.5+0.4+0.333+0.286\right]\\ &=\frac{1}{2}\times 2.811\\ &=1.405\end{aligned}$$

应用辛普逊公式，这时 $n=3$，得

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{dx}{x} &\approx \frac{3}{6\times 3}[1+0.25+4(0.677+0.4+0.286)+2(0.5+0.333)]\\ &=\frac{1}{6}[1.25+5.412+1.666]\\ &=1.388\end{aligned}$$

实际上，$\int_1^4 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^4$

$$\begin{aligned}&=\ln 4\\ &\approx 1.386\end{aligned}$$

可见，用辛普逊法计算积分近似值精确度较梯形法高些。

习题 12d

1. 利用梯形法公式近似计算下列定积分：

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\ (n=8)$　　　　(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\ dx\ (n=6)$

2. 利用辛普逊法公式近似计算下列定积分：

(a) $\int_1^9 \sqrt{x}\, dx\ (n=4)$　　　　(b) $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\, dx\ (n=6)$

3. 用两种方法计算 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ 以求 ln2 的近似值。(将区间 10 等分，被积函数取四位小数。)

4. 利用辛普逊法公式，用下表所列的函数 $f(x)$ 的值计算积分 $\int_{1.05}^{1.35} f(x)\,dx$。

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
y	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

5. 在一河流的某一横断面处测得河宽为 20 m，沿此河宽每隔 2 m 处测出河的深度如下表：

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0.2	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6	0.2

这里 x 是测量点到一岸的距离，y 是对应的深度，x 与 y 皆以 m 为单位。试用梯形法及辛普逊法求此横断面的近似面积。

总复习题 12

求下列曲线所围成的图形的面积（1 ~ 3）：

1. $r = 2a(2+\cos\theta)$

2. $r = a\sin 2\theta$

3. $r = 5\cos\theta$

分别求两曲线所围成的图形公共部分的面积（4 ~ 6）：

4. $r=\sqrt{2}\sin\theta$，$r^2=\cos 2\theta$

5. $r=\sqrt{2}\cos\theta$，$r^2=\sqrt{3}\sin 2\theta$

6. $r=a$，$r=2a\cos\theta$

求下列曲线围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转所成旋转体的体积（7 ~ 9）：

7. $y=x^3$，$x=2$，$y=0$

8. $x^2+y^2=1$，$y^2=\frac{3}{2}x$

9. $y=\sqrt{x}$，$x=1$，$x=4$，$y=0$

10. 求在区间 $[0,\pi]$ 上，曲线 $y=\sin x$ 与 x 轴围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转一周所得旋转体的体积。

11. 求曲线 $x(y-b)=a(a>0)$ 与直线 $x=a$，$x=2a$ 及 $y=b$ 所围图形绕直线 $y=b$ 旋转一周所得旋转体的体积。

12. 求曲线 $y=(x-1)^2$ 与 $y=1$ 围成的图形绕直线 $x=1$ 旋转一周所得旋转体的体积。

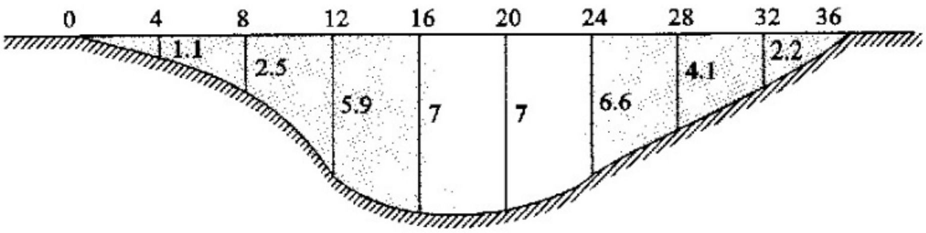
13. 求曲线 $y=1-x^2$ 与 x 轴围成的图形绕直线 $y=1$ 旋转一周所得旋转体的体积。

14. 把积分区间 10 等分，用辛普逊公式计算下列积分的近似值，计算到小数点后三位：

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}dx$ (b) $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$

15. 利用梯形法公式近似计算积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ $(n=10)$

16. 某河床的横断面如下图所示。为了计算最大排水量，需要计算它的断面积。试根据图示的测量数据（单位为米）用梯形法计算其断面积。



13 常微分方程式

13.1 常微分方程式

我们称含有未知函数及其导数（或微分）的方程式为**微分方程式**（differential equation）。例如：

$$2xy + \frac{dy}{dx} = 0$$

（x 是自变量，$y = y(x)$是未知函数，$\frac{dy}{dx}$ 是未知函数对 x 的导数）

$$y \sin t + \frac{dy}{dt}\cos t = 0$$

（t 是自变量，$y = y(t)$是未知函数，$\frac{dy}{dt}$ 是未知函数对 t 的导数）

下面我们举两个实际例子，说明怎样从实际问题列成微分方程的问题。

例1 求曲线，使它在每点处的切线斜率都等于该点的横坐标的二倍，并求出过点(1，1)的那一条曲线。

解 要求的是曲线，曲线方程是个未知函数，设 $y = y(x)$表示所求的曲线方程。

由题意可列方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

这是一个简单的微分方程，对 x 进行一次积分得

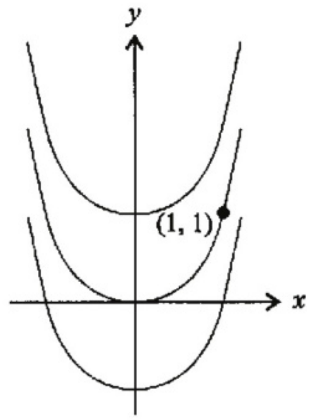
$$y = \int 2xdx$$

$$y = x^2 + C$$

其中 C 是任意常数。

可见满足要求的曲线是抛物线，当 C 任意取值时，就得到一个抛物线族。在

这一族抛物线中我们还要选出过(1，1)点的那一条曲线来(见右图)。实际上就是用“过(1，1)点”这个条件，确定任意常数C。



将 $x=1$，$y=1$ 代入 $y=x^2+C$ 中得

$$C=0$$

因此我们所求的过(1，1)点的那条曲线为 $y=x^2$

例2 一物体质量为 m，在距地面 s_0 处以初速度 v_0 竖直上抛。设此物体只受重力作用，试确定该物体运动的路程 s 与时间 t 的函数关系（以物体向上运动方向为正)。

解 路程函数 $s=s(t)$，它的一阶导数 $s'=s'(t)$ 代表物体的瞬时速度 $v=v(t)$；二阶导数 $s''=s''(t)$ 代表瞬时加速度 $a=a(t)$。根据右图，物体所受力为 $F=-mg$ 这里 g 是重力加速度。由牛顿第二定律 $ma=F$ 有

$$ms''=-mg$$

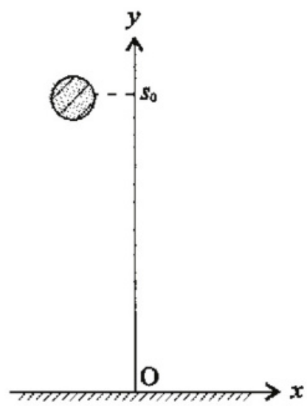
即 $$s''=-g$$

对 t 进行一次积分有

$$s'=-gt+C_1$$

其中 C_1 是一个任意常数。再对 t 进行一次积分有

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$$



其中 C_2 是另一个任意常数。

为了确定题中要求满足的函数关系，我们把

$$s(0)=s_0 \qquad s'(0)=v_0$$

代入函数关系中，得

$$C_2=s_0 \qquad C_1=v_0$$

于是 $$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$$

即为所求的函数关系。

从以上两个实例中我们看到了简单的微分方程的应用。下面我们介绍一些常用名词与基本概念。

凡是只涉及一个自变量的微分方程叫做**常微分方程式**（ordinary differential equation）。其中导数实际出现的最高阶数叫做常微分方程的**阶**（order）。例如，例 1 中的方程$\frac{dy}{dx}=2x$是一阶常微分方程，例 2 中的方程 $s''=-g$ 是二阶常微分方程。

由前面的例子我们看到，在研究某些实际问题时，首先要建立微分方程，然后找出满足微分方程的函数。也就是说，把这个函数代入微分方程能使该方程成为恒等式。这个函数就叫做该微分方程的解。例如，例 1 中 $y=x^2+C$ 是 $\frac{dy}{dx}=2x$ 的解；例 2 中 $s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是 $s''=-g$ 的解。

一般地说，如果微分方程的解中会有独立的任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的**通解**（general solution）。

由于通解中含有任意常数，我们得到的是无穷多个解。为了在其中确定我们需要的解，必须由特定条件来确定任意常数 C。

设微分方程中的未知函数是 $y=y(x)$，如果是一阶微分方程，通常用来确定任意常数的条件是

$$x=x_0\text{时}，y=y_0 \qquad \text{或写成} \qquad y(x_0)=y_0$$

其中 x_0，y_0 都是给定的值；如果是二阶微分方程，通常用来确定任意常数的条件是

$$x=x_0\text{时}，y=y_0，y'=y_0' \qquad \text{或写成} \qquad y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y_0'$$

其中 x_0，y_0，y_0' 都是给定的值。上述这种条件叫做**初始条件**（initial condition）。

确定了通解中的任意常数，就得到微分方程的**特解**（particular solution）。例 1 中的 $y=x^2$，例 2 中的 $s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$ 都是满足初始条件的特解。

例3 验证：函数 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ 是微分方程 $y''-9y=0$ 的解。

解 求出所给函数 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ 的导数

$$y'=3C_1e^{3x}-3C_2e^{-3x}$$

$$y''=9C_1e^{3x}+9C_2e^{-3x}$$

将 y''及 y 的表达式代入方程 $y''-9y=0$ 中，得

$$9C_1e^{3x}+9C_2e^{-3x}-9(C_1e^{3x}+C_2e^{-3x})\equiv 0$$

因此所给函数是微分方程的解。

例4 在例 3 中，所给函数 $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$ 是 $y'' - 9y = 0$ 的通解，求满足初始条件 $y(0) = 2$，$y'(0) = 0$ 的特解。

解 将 $x = 0$，$y = 2$ 代入通解 $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$ 中，得

$$C_1 + C_2 = 2$$

将 $x = 0$，$y' = 0$ 代入 $y' = 3C_1e^{3x} - C_2e^{-3x}$ 中，得

$$C_1 - C_2 = 0$$

由此解得 $$C_1 = C_2 = 1$$

将其代入通解 $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$ 中，得满足初始条件的特解

$$y = e^{3x} + e^{-3x}$$

习题 13a

1. 指出下列各微分方程的阶数：

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$　　(b) $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2\dfrac{dy}{dx} + 4x = 0$

   (c) $xy''' + 2y'' + x^2y = 0$　　(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + \sin y = 0$

2. 验证下列各题中函数是否为所给微分方程的解：

   (a) $xy' = 2y$，$y = 5x^2$

   (b) $y'' + y = 0$，$y = 3\sin x - 4\cos x$

   (c) $y'' - 2y' + y = 0$，$y = x^2e^x$

   (d) $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0$，$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$

3. 验证下面函数均为方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + w^2y = 0$ 的解，其中 $w > 0$ 是常数：

   (a) $y = \cos wx$　　(b) $y = C_1\cos wx$，C_1 是任意常数

   (c) $y = \sin wx$　　(d) $y = C_2\sin wx$，C_2 是任意常数

   (e) $y = C_1\cos wx + C_2\sin wx$ ，C_1、C_2 是任意常数

   (f) $y = A\sin(wx + B)$，A、B 是任意常数

13.2 三类一阶常微分方程式的解

● 变量分离微分方程（variable separable differential equation）

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

的方程，称为变量分离方程。

如果 $g(y)\neq 0$，我们可以将方程改写成

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

这时可以看到变量 x，y 分到等号的两边，两边积分，得到

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$$

如果存在 y_0，使 $g(y_0)=0$，则直接代入验证，可知 $y=y_0$ 也是原方程的解。

例5 求解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$。

解 将变量分离得 $y\,dy=x\,dx$

两边积分即得 $\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C_1$

因而，通解为 $y^2-x^2=C\qquad(C=2C_1)$

或 $y=\pm\sqrt{x^2+C}$

例6 求解方程 $\frac{dy}{dx}=y^2\cos x$。

解 将变量分离得 $\frac{dy}{y^2}=\cos x\,dx$

两边积分即得 $-\frac{1}{y}=\sin x+C$

因而，通解为 $y=-\frac{1}{\sin x+c}$

此外方程还有解 $y=0$。

【注】在分离变量时，用 y 除以方程的两端，可能出现丢解，如例 6。但在目前阶段，我们将不讨论丢解的问题，所以往后的例子不再考虑丢解。

例7 解方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$，并求满足初始条件：$x=0$ 时 $y=1$ 的特解。

解 将变量分离得 $$\frac{dy}{y}=2xdx$$

两边积分得 $$\ln|y|=x^2+C_1$$

$$y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$$

$$y=Ce^{x^2}\quad (C=\pm e^{C_1})$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入通解中，得

$$C=1$$

所以满足初始条件的特解为 $y=e^{x^2}$

例8 求解方程 $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$。

解 用 xy 除方程两端，变量可分离，得

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$$

两边积分得 $$\int\frac{1+x}{x}dx+\int\frac{1-y}{y}dy=C$$

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$$

$$\ln|xy|+x-y=C\qquad (C\text{ 是任意常数})$$

例9 求一曲线，使其具有如下性质：曲线上每点处的切线，切点与原点的联线及 x 轴可围成一个等腰三角形（以 x 轴为底），并且通过点(1，2)。

解 设所求曲线为 $y=y(x)$。

根据题意，过曲线上任意一点$(x，y)$的切线与 x 轴交于点$(2x，0)$，

切线斜率 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y-0}{x-2x}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

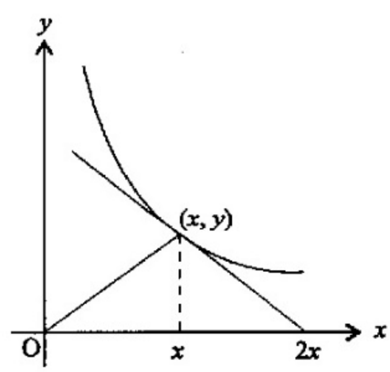
变量分离，得 $$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+C_1$$

得通解 $$xy=C\quad (C=e^{C_1})$$

将 $x=1$，$y=2$ 代入通解中，得 $C=2$

因此，所求曲线为 $xy=2$。



习题 13b

求解下列方程（1～10）：

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$

2. $(x+2)\dfrac{dy}{dx}=y$

3. $x\dfrac{dy}{dx}=\tan y$

4. $e^{-x}\dfrac{dy}{dx}=y^2-1$

5. $\dfrac{dy}{dx}=10^{x+y}$

6. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{e^{y^2+3x}}{y}=0$

7. $\tan y\,dx-\cot x\,dy=0$

8. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$

9. $(y+1)^2\dfrac{dy}{dx}+x^3=0$

10. $x\dfrac{dy}{dx}=y+xy$

求下列微分方程满足初始条件的特解（11～14）：

11. $y'=e^{2x-y}$，$y(0)=0$

12. $xdy+2ydx=0$，$y(2)=1$

13. $y^2dx+(x+1)dy=0$，$y(0)=1$

14. $(1+\cos 2x)\dfrac{dy}{dx}=2$，$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

15. 一曲线通过点$(2,3)$，它在两坐标轴间的任意切线线段均被切点所平分，求这曲线方程。

● 一阶齐次微分方程（first order homogeneous differential equation）

形如

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

的方程，叫做一阶齐次微分方程。

例如，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\left(\frac{x}{y}\right)^2$$

都是一阶齐次微分方程。有的方程需要整理一下。例如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}\qquad \text{可化为}\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

因此也是一阶齐次微分方程。

一阶齐次微分方程通过适当的变换后，可化为变量分离微分方程。

一般上，作变量变换，是令

$$u=\frac{y}{x}，即\ y=ux，$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$$

因此，齐次方程 $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ 可写成

$$x\frac{du}{dx}+u=g(u)$$

整理后，得到

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$$

这是变量分离型的方程。求得解后，代回原来的变量，即得一阶齐次微分方程的解。

例 10 求解方程 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$。

解 设 $u=\frac{y}{x}$，$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

代入方程 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$ 中，

得

$$x\frac{du}{dx}+u=\sqrt{1-u^2}+u$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{1-u^2}}{x}$$

分离变量得

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}$$

积分得

$$\sin^{-1}u=\ln|x|+C_1$$

$$Cx=e^{\sin^{-1}u}\quad(C=e^{C_1})$$

代回原变量，得到原方程的通解

$$Cx=e^{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

例 11 求解方程 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$。

解 原方程可写为
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$$

设 $u=\frac{y}{x}$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

于是方程变为 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}$
$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}$$

分离变量，得 $\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x}$

积分得 $u-\ln|u|+C=\ln|x|$
$$\ln|xu|=u+C$$

代回原变量，得原方程通解
$$\ln|y|=\frac{y}{x}+C$$

例 12 求解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$。

解 设 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

代入方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 中，得
$$u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u$$

将上式分离变量，即有
$$\cot u\,du=\frac{dx}{x}$$

两边积分，得 $\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$
$$\sin u=Cx \qquad (C=e^{C_1})$$

代回原变量，得原方程通解 $\sin\frac{y}{x}=Cx$

习题 13c

求解下列微分方程：

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x}$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-2y}{x}$

3. $(x+y)dx+xdy=0$

4. $xy\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$

5. $xy^2\dfrac{dy}{dx}=x^3-y^3$

6. $xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}$

7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$

8. $y'=\dfrac{2y-x}{2x-y}$

9. $x\dfrac{dy}{dx}=y\ln\dfrac{y}{x}$

10. $y\dfrac{dy}{dx}=-x+2y$

11. $x^2y'=3x^2+xy$

12. $xy\dfrac{dy}{dx}=x^2-y^2$

● 一阶线性微分方程（first order linear differential equation）

形如

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$$

的方程叫做一阶线性微分方程，其中 $p(x)$和 $Q(x)$是 x 的函数。由于 y 及其导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 是以一次形式出现，所以称为线性。

当 $Q(x)\equiv 0$时，方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 称为齐次的；

当 $Q(x)\not\equiv 0$时方程称为非齐次的。

例如，$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x}=0$ 与 $\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=0$ 是一阶线性齐次方程，而 $\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=x$ 与 $x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^4$ 是一阶线性非齐次方程。

为了求出非齐次线性方程的解，我们先解它对应的齐次线性方程。这里，我们介绍两个解一阶线性微分方程的方法。

(一) 参数变易法

一阶齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 是变量分离方程。分离变量后得

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

两边积分，得

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+C_1$$

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}\quad (C=e^{C_1})$$

这是对应的齐次线性方程的通解。

现在我们使用参数变易法来求非齐次线性方程的解。方法是把对应的齐次方程通解中的 C 换成 x 的未知函数 $\phi(x)$，即做变换

$$y=\phi(x)e^{-\int p(x)dx}$$

并设它为非齐次线性方程的通解。将此通解求导，得

$$\frac{dy}{dx}=\phi'(x)e^{-\int p(x)dx}-\phi(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

代入非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ 中，得

$$\phi'(x)e^{-\int p(x)dx}-\phi(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)\phi(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x)$$

$$\phi'(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x)$$

$$\phi'(x)=Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

积分得

$$\phi(x)=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$$

将上式代入 $y=\phi(x)e^{-\int p(x)dx}$ 中，便得到非齐次线性方程的通解

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

概括起来，一阶线性微分方程的解法步骤如下：

(1) 求对应的齐次线性方程的通解 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$

(2) 令 $y=\phi(x)e^{-\int p(x)dx}$ 代入非齐次方程中确定 $\phi(x)$；

(3) 求出 $\phi(x)$后，再代入到 $y=\phi(x)e^{-\int p(x)dx}$ 中，就得到非齐次线性方程的通解。

例 13 解方程 $y' - 2xy = e^{x^2}\cos x$。

解 (1) 先求 $y' - 2xy = 0$ 的通解

分离变量，得 $\dfrac{dy}{y} = 2xdx$

积分得 $\ln y = x^2 + C_1$

$$y = Ce^{x^2} \quad (C = e^{C_1})$$

(2) 令 $y = \phi(x)e^{x^2}$

对 y 求导得 $y' = \phi'(x)e^{x^2} + \phi(x) \cdot 2xe^{x^2}$

将 y，y'代入原方程 $y' - 2xy = e^{x^2}\cos x$ 中，得

$$\phi'(x)e^{x^2} + \phi(x) \cdot 2xe^{x^2} - 2x\phi(x)e^{x^2} = e^{x^2}\cos x$$

$$\phi'(x) = \cos x$$

积分得 $\phi(x) = \sin x + C$

(3) 原方程的通解为 $y = (\sin x + C)e^{x^2}$

例 14 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$。

解 (1) 先求 $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x+1} = 0$ 的通解

分离变量，得 $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2dx}{x+1}$

$$\ln|y| = 2\ln|x+1| + C_1$$

$$y = C(x+1)^2$$

(2) 令 $y = \phi(x)(x+1)^2$

$$y' = \phi'(x)(x+1)^2 + 2\phi(x)(x+1)$$

代入原方程中，得

$$\phi'(x)(x+1)^2 + 2\phi(x)(x+1) - \frac{2\phi(x)(x+1)^2}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$\phi'(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

积分得 $\phi(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

(3) 原方程的通解为 $y = \left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right](x+1)^2$

（二）积分因子法

我们用参数变易法求得非齐次线性方程的通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

对它我们做一点分析。把通解写为

$$y\,e^{\int p(x)dx}=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$$

对 x 求导得 $\dfrac{dy}{dx}e^{\int p(x)dx}+p(x)y\,e^{\int p(x)dx}=Q(x)e^{\int p(x)dx}$

消去 $e^{\int p(x)dx}$，得 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$

这就是原来的非齐次线性方程。如果记 $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$，用 $\mu(x)$乘非齐次线性方程的两端，把上面的步骤逆退而上，就可以得到非齐次线性方程的通解。而

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

就叫做方程的**积分因子**(integrating factor)。

例 15 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=xe^x$。

解 这里 $p(x)=-\dfrac{1}{x}$，积分因子为

$$\begin{aligned}\mu(x)&=e^{\int -\frac{1}{x}dx}\\&=e^{-\ln x}\\&=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

用它乘方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=xe^x$ 两边，得

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=e^x$$

乘了积分因子后，左式一定能写成 $\dfrac{d}{dx}(y\times$积分因子$)$的形式。

$$\therefore\qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x}\right]=e^x$$

积分得 $\dfrac{y}{x}=e^x+C$

即原方程的通解为 $y=x(e^x+C)$

例 16 求解方程 $y' - 2y = x^2 e^{2x}$。

解 这里 $p(x) = -2$，积分因子为

$$\mu(x) = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

用它乘方程 $y' - 2y = x^2 e^{2x}$ 两边，得

$$e^{-2x}y' - 2ye^{-2x} = x^2$$

$$\frac{d}{dx}[ye^{-2x}] = x^2$$

积分得原方程通解 $ye^{-2x} = \frac{1}{3}x^2 + C$

或 $y = e^{2x}\left(\frac{1}{3}x^2 + C\right)$

习题 13d

求解下列微分方程：

1. $\frac{dy}{dx} - 2y = 1$
2. $\frac{dy}{dx} - e^x y = 0$
3. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = 0$
4. $x\frac{dy}{dx} - 4y = -2nx$
5. $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = 1 - 2y$
6. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-2x}\cos x$
7. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$
8. $\frac{dy}{dx} - \frac{ny}{x} = e^x x^n$
9. $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$
10. $\frac{dy}{dx} - 2xy = xe^{-x^2}$
11. $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}$
12. $\frac{dy}{dx} = y + \sin x$

13.3 一阶常微分方程的应用

微分方程在自然科学和技术科学中有很多应用，在社会科学的一些领域里也存在着微分方程问题。微分方程与数学的其它分支关系也非常密切，它们往往互相联系、互相促进。下面我们举出一些微分方程在实际问题中应用的例子。

例 17 镭衰变的规律是衰变速率与镭所剩余的质量成正比。设在时刻 $t=t_0$ 时，镭的质量为 R_0，试确定在时刻 t 镭的存量。

解 设在时刻 t 时尚未衰变的镭质量为 R，则其衰变速率为 $-\frac{dR}{dt}$（"－"号表示当 t 增加时，R 反而减少。）因为速率与 R 成正比，我们得到，

$$-\frac{dR}{dt}=kR,\ k\text{ 为比例常数}$$

这是变量分离微分方程。

分离变量 $\frac{dR}{R}=-kdt$

两边积分得 $\ln R=-kt+C_1$

$$R=Ce^{-kt}$$

当 $t=t_0$ 时，$R=R_0$，代入上式得

$$R_0=C\,e^{-kt_0}$$

$$C=R_0\,e^{kt_0}$$

所以在时刻 t 镭的量是 $R=R_0\,e^{k(t_0-t)}$。

例 18 设将一温度高于室温 θ（θ 为常数）的物体移离热源而置于空气中。我们知道从这时起，该物体的温度 T 应逐渐下降。问 T 按怎样的规律随时间而变化？

解 根据物理学里牛顿的冷却定律，物体温度 T 在任何时刻与时间的变化率 $\frac{dT}{dt}$ 是和当时的温差 $(T-\theta)$ 成正比。设比例常数为 k（$k>0$），我们有方程

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-\theta)$$

这里考虑到 T 是 t 的减函数，因此方程右端出现了一个负号。

这是变量分离型微分方程。

分离变量 $\frac{dT}{T-\theta}=-k\,dt$

两边积分 $\int\frac{dT}{T-\theta}=\int -k\,dt$

$$\ln(T-\theta)=-kt+C_1$$

$$T-\theta=e^{-kt+C_1}$$

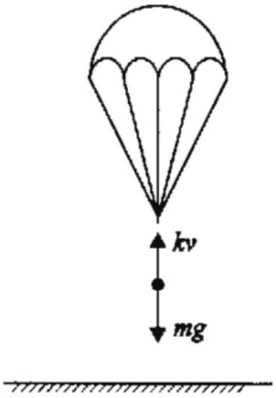
$$T=\theta+Ce^{-kt}$$

这是物体温度 T 与时间 t 的变化规律。

例 19 设跳伞员的质量为 m，降落伞的浮力与它下降的速度 v 成正比，求下降速度与时间的关系（以物体向下运动方向为正）。

解 设跳伞员下降的速度在时刻 t 为 v_0 此跳伞员下降时受到两个力的作用，一是动力 mg，一是浮力 kv。因此跳伞员所受的外力为

$$F = ma = mg - kv$$



由牛顿第二定律，跳伞员运动方程为

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

这是一个非齐次性的线性方程，用积分因子

$$\mu(t) = e^{\int\frac{k}{m}dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

乘方程 $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$ 两端，得

$$e^{\frac{k}{m}t}\frac{dv}{dt} + e^{\frac{k}{m}t}\frac{k}{m}v = e^{\frac{k}{m}t}g$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{k}{m}t}v\right) = g\,e^{\frac{k}{m}t}$$

积分得 $$e^{\frac{k}{m}t}v = \frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C$$

因此，跳伞运动方程的通解为

$$v = \frac{mg}{k} + C\,e^{-\frac{k}{m}t}$$

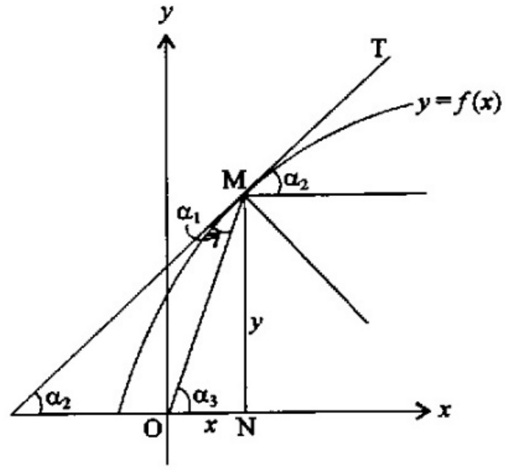
由此可见 $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{k}$ （常速）

这就是说，只要跳伞员在空中有足够长的停留时间，他到达地面时的速度近似地等于常速 mg/k。

例 20 （探照灯反射镜面的形状）

在制造探照灯的反射镜面时，要求将点光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性，试求反射镜面的几何形状。

解 设光源在坐标原点(如右图)，并取 x 轴平行于光的反射方向。如果所求的曲面由曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转而成，则求反射镜面的问题就相当于求曲线 $y=f(x)$ 的问题。



过曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $M(x, y)$ 作切线 MT，则由光的反射定律：入射角等于反射角，得到图中的 α_1 及 α_2 的关系为

$$\alpha_1=\alpha_2$$

且由图中(ΔOMN)可看出

$$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2=2\alpha_2$$

于是 $$\tan\alpha_3=\tan 2\alpha_2$$

$$=\frac{2\tan\alpha_2}{1-\tan^2\alpha_2}$$

但 $\tan\alpha_2=\frac{dy}{dx}$，$\tan\alpha_3=\frac{y}{x}$，代入上式得

$$\frac{y}{x}=\frac{2\frac{dy}{dx}}{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$y-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2x\frac{dy}{dx}$$

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$$

得 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

我们将其变形为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}}$$

这是齐次方程。

令 $u=\dfrac{x}{y}$，则 $x=yu$，这时 $\dfrac{dx}{dy}=u+y\dfrac{du}{dy}$。

代入上面方程，得

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{1}{-u+\sqrt{1+u^2}}$$

$$u+y\frac{du}{dy}=u+\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dy}{y}$$

积分得

$$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln|y|+C_1$$

或 $\quad u+\sqrt{1+u^2}=Cy$

由 $\quad (Cy-u)^2=1+u^2$

得 $\quad C^2y^2-2Cuy=1$

代回原变量，得 $\quad C^2y^2=2Cx+1$

这是抛物线，因此反射镜面为旋转抛物面。

习题 13e

1. 一函数 y 对于 x 之变率为 $\frac{1}{3}y$。当 $x=-1$ 时，$y=4$，试求联系 x 与 y 的规律。
2. 一函数 y 对于 x 之变率为 $2-y$。当 $x=0$ 时，. $y=8$，试求其规律。
3. 一曲线上任意点的切线斜率等于 xy，且这曲线通过(0，1)，试求它的方程。
4. 某物体的衰变规律是：衰变速率与某物体的剩余量成正比。当 $t=0$ 时，某物体的质量为 9 克，又知该物体在第一个小时后衰变了 1 克。问当物体衰变了 5 克时，需时多少？
5. 设某国的人口生长率与该年国家人口的总数成正比。已知在 1951 年，其人口总数为 150 万，在 1970 年为 200 万。试求
   a) 在 2000 年时的人口总数；
   b) 在哪一年（近似值）其人口总数为 1 千万。
6. 某樟脑丸的衰变速率是每三个星期衰变至其原体积的一半。开始时，其体积为 1cm^3。当其体积变至 0.1cm^3 时，此丸即失去效力。试求这樟脑丸的有效时间。

7. 在地球上空各点的大气压强 p 是海拔高度 h 的函数，它对 h 的变化率与 p 成正比。现设 $h=0$ 时，$p=1.033\times10^5$ N/m^2，$h=3048$ 米时，$p=6.88\times10^4$ N/m^2，求 $h=2000$ 米时的大气压强 p。
8. 一小船在静水中航行。水的阻力所产生的减速度与船的速度成正比。证船机停止 t 秒后船的速度是 $v=v_0e^{-kt}$，其 v_0 是船机停止时船的速度，k 是一比例常数。
9. 一正在放电的电容器，其电压 V 对时间的变化率与 V 成正比。而 V 随时间而递减。现已知比例常数 $k=40$，若 V 已减至其原值的百分之十，试求 t。
10. 某放射物体的衰变规律如下：衰变速度与它的现存量 R 成正比。从实验材料断定，该物体经过 1600 年后，只剩下原始量 R_0 的一半，试求该物体的量与时间 t 的关系。
11. 牛顿冷却定律指出，物体的温度对时间的变化率正比于该物体同外界温度之差。若一物体在 20 分钟后其温度从 80℃冷却至 60℃，求在 40 分钟后物体的温度(设外界温度恒保持在 20℃）。
12. 从实验中证得在柴油机汽缸中气体的压强 p 随其体积 V 的增大而减少；且 p 对 V 的变化率与 p 成正比，与 V 成反比。试求压强 p 与体积 V 的关系。
13. 一质量为 m 的潜水艇，从水面静止状态开始下降，所受阻力与下降速度成正比（比例常数为 k），求潜水艇下降深度 x 与时间 t 的关系。
14. 在一电路中，设电阻为 R，自感为 L，电动势 E （R,L，E 都是常数），那么在物理学中证得电流强度 i 和电动势 E 之间的关系是 $\mathrm{E}=\mathrm{R}i+\mathrm{L}\dfrac{di}{dt}$，试求其通解及当 $i(0)=0$ 时的特解。

13.4 二阶常系数线性微分方程

一般上，求二阶常微分方程的解要比求一阶者困难，这里我们只考虑一类较简单而又常用的二阶方程，即**二阶常系数线性微分方程**（second order linear equation with constant coefficients），它的形式是

$$ay''+by'+cy=0$$

式中 a，b，c 都是常数($a\neq0$)，对于这类方程，我们可以通过积分两次而得到它的解，为此我们先介绍特征方程的概念，我们称系数与二阶常系数线性齐次微分方程相同的一元二次代数方程 $am^2+bm+c=0$ 是微分方程 $ay''+by'+cy=0$ 的**特征方程**（auxiliary equation）。因为微分方程和相应的特征方程是具有同样的系数，所以

只要在方程 $ay''+by'+cy=0$ 中以 m^2 代替 y''，以 m 代替 y'，以 1 代替 y 即可得到其特征方程。从初等数学知道，特征方程有两个实数根 m_1 和 m_2：

$$m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

但
$$m_1+m_2=-\frac{b}{a},\quad m_1 m_2=\frac{c}{a},$$

据此，我们可以把微分方程写成

$$y''-(m_1+m_2)y'+m_1 m_2 y=0$$

并可进一步变换成
$$(y'-m_1y)'=m_2(y'-m_1y)$$

于是，如果我们第一步把整个表达式 $(y'-m_1y)$ 看成是未知的对象的话，则这是一个关于 $(y'-m_1y)$ 的可分离变量的一阶方程，故可求解而得

$$y'-m_1y=\mathrm{A}\,e^{m_2x}$$

式中 A 是任意常数，而这又是一个关于 y 的一阶线性方程，故第二步我们可按一阶线性方程的解法求得

$$y=e^{\int m_1dx}\left(\mathrm{B}+\int e^{-\int m_1dx}\mathrm{A}\,e^{m_2x}dx\right)\qquad(\text{B 也是任意常数})$$

因此
$$y=e^{m_1x}\left(\mathrm{B}+\int e^{-m_1x}\,\mathrm{A}e^{m_2x}\,dx\right)$$

$$y=\mathrm{B}\,e^{m_1x}+\mathrm{A}\,e^{m_1x}\int e^{(m_2-m_1)x}dx$$

$$=\begin{cases}\mathrm{B}e^{m_1x}+\mathrm{A}xe^{m_1x}, & \text{当 } m_1=m_2 \text{ 时；}\\ \mathrm{B}e^{m_1x}+\dfrac{\mathrm{A}}{m_2-m_1}e^{m_2x}, & \text{当 } m_1\neq m_2 \text{ 时。}\end{cases}$$

这样，通过了两次的积分，我们就求出了二阶常系数线性方程的解。把这些讨论归纳起来，就是：为了要解微分方程 $ay''+by'+cy=0$，可先写出其对应的特征方程 $am^2+bm+c=0$，并求出其两个根 m_1 和 m_2。如果 $m_1=m_2$，则微分方程的通解是 $y=e^{m_1x}(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2x)$；如果 $m_1\neq m_2$，则微分方程的通解是 $y=\mathrm{C}_1e^{m_1x}+\mathrm{C}_2e^{m_2x}$，$\mathrm{C}_1$，$\mathrm{C}_2$ 是两个任意常数。

以上所讨论的是特征方程有两个实数根的解法。假如，特征方程的两个根是复数根时，设 $m_1=\alpha+\beta i$，$m_2=\alpha-\beta i$，则微分方程的通解是 $y=\mathrm{C}_1e^{(\alpha+\beta i)x}+\mathrm{C}_2e^{(\alpha-\beta i)x}$。然而，实用上常常希望所求到的解是写成实数形式的。故根据欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

对这个复数形式进行化简后，可得微分方程的实数形式的通解是

$$y=e^{\alpha x}(\mathrm{C}_1\cos\beta x+\mathrm{C}_2\sin\beta x)$$

综合以上讨论的结果，我们把微分方程 $ay''+by'+cy=0$ 的通解列表如下：

特征方程 $am^2+bm+c=0$的根		微分方程 $ay''+by'+cy=0$的通解
$b^2-4ac=0$	两个相等的实根 $m_1=m_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{m_1x}$
$b^2-4ac>0$	两个不相等的实根 $m_1\neq m_2$	$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}$
$b^2-4ac<0$	一对共轭复根 $\begin{cases} m_1=\alpha+\beta i \\ m_2=\alpha-\beta i \end{cases}$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 22 求方程 $y''-3y'-10y=0$ 的通解。

解 特征方程为 $m^2-3m-10=0$

$$(m+2)(m-5)=0$$

$$m_1=-2,\ m_2=5$$

所以原方程通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{5x}$$

例 23 求方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解。

解 特征方程为 $m^2-4m+4=0$ 有二重根

$$m_1=m_2=2$$

所以原方程通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$$

例 24 求方程 $y''-4y'+13y=0$ 的通解。

解 特征方程为 $m^2-4m+13=0$

$$m=\frac{4\pm\sqrt{4-4(1)(13)}}{2}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$$

即 $m_1=2+3i$，$m_2=2-3i$

这里 $\alpha=2,\ \beta=3$

所以原方程通解为 $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

习题 13f

求解下列方程（1～10）：

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}-9y=0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$

4. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

6. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+5y=0$

7. $y''+3y'+y=0$

8. $y''+y'+y=0$

9. $y''+ay=0$ （a 是实常数）

10. $y''+\lambda y'+y=0$ （λ 是实常数）

11. 试确定常数 a，使得微分方程 $y''+ay=0$ 的一切解都是以 2π 为周期的周期函数。

总复习题 13

求解下列微分方程（1～15）：

1. $3x^2+5x-5y'=0$

2. $xydx+(x^2+1)dy=0$

3. $x\sec y\,dx+(x+1)dy=0$

4. $y'=\frac{y}{y-x}$

5. $x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$

6. $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

7. $(x^2+y^2)dx-xydy=0$

8. $\cos^2x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$

9. $\frac{dy}{dx}+2y=4x$

10. $xy'+y=x^2+3x+2$

11. $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$

12. $3y''-2y'-8y=0$

13. $y''+y=0$

14. $y''+6y'+13y=0$

15. $y''-2y'+y=0$

求下列微分方程满足初始条件的解（16～19）：

16. $\sin y\cos x\,dy=\cos y\sin x\,dx$，　$y(0)=\frac{\pi}{4}$

17. $(y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0$,　$y(0)=1$

18. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$,　$y(\pi)=1$

19. $y''-4y'+3y=0$　$y(0)=6$，$y'(0)=10$

20. 求曲线方程，使曲线上任意一点(x, y)处的切线垂直于此点与原点的联线。

21. 求一曲线方程，这曲线通过原点，并且每一点处的切线斜率等于 $2x+y$。

22. 设人口对时间 t 的增长率与当时的人口 x 和 $(a-x)$ 之乘积成正比（a 表示社会所能供养的人口的最高限度），设比例常数为 k（k 为正常数），试证

$x=\dfrac{a}{1+Ae^{-kat}}$ （A 为常数）满足此微分方程。

23. 若一曲线 $y=f(x)$的全部法线都通过原点，试用微分方程表示之，并解此微分方程。

24. 已知曲线 $y=f(x)$通过点$(2, 1)$，过点(x, y)的切线斜率为 $x\sqrt{y}$，试确定 $y=f(x)$。

25. 平面上的动点 $P(x, y)$从原点出发，t 秒后的坐标满足微分方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(x+1),\ \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}(y+1)$$

试求 t 秒后 $P(x, y)$的位置及速度的大小。

26. 某人把金额 y_0 元存入银行，其利息是以复利计算。

(a) 求需要多少的时间，其金额才会增两倍（答案以利率 r 表示之）；

(b) 设 $r=5\%$，求时期 t；

(c) 欲使其金额在十年后增至两倍，求利率 r。

（提示：复利定律为 $\dfrac{dy}{dx}=ky$）

27. 某一个甘榜正发生流行性感冒症。设 x 为染上流行性感冒者的巴仙率而 y 为没有染上此症的巴仙率。假如带病的人的活动不受限制，则流行性感冒的传染率 $\dfrac{dx}{dt}$ 与 x 和 y 的乘积成正比，设比例常数为 β，

(a) 试求 x 与时间 t 的关系；

(b) 设当 $t=0$ 时，$x=x_0$，试证 $x=\dfrac{x_0}{x_0+(1-x)e^{-\beta t}}$。

28. 已知某质点作直线运动，其加速度 $x''=-\dfrac{5}{4}x-x'$，且当 $t=0$ 时，$x=0$ 及 $x'=2$，求位移函数 x。

29. 求一曲线，使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标。

30. 摩托艇以 5 米/秒的速度在静水上运动，全速时停止了发动机，过了 20 秒后，艇的速度减至 $v_1=3$ 米/秒。确定发动机停止 2 分钟后艇的速度，假定水的阻力与艇的运动速度成正比。

31. 一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于零的时刻起，有一个和时间成正比（比例系数为 k_1）的力作用在它上面。此外质点又受到介质的阻力，这阻力和速度成正比（比例系数为 k_2）。试求此质点的速度与时间的关系。

名词对照

(注:本名词对照表按华文条目的汉语拼音字母的次序排列)

B

中　文	英　文	巫　文
部分分式积分法	integration by partial fraction	pengamiran secara pecahan separa
变量分离微分方程	variable separable differential equation	persamaan pembezaan dengan pembolehubah terpisahkan

C

初值	initial value	nilai awal
初始条件	initial condition	syarat awal
常微分方程	ordinary differential equation	persamaan pembezaan biasa

D

递推公式	recurrence formula	rumus jadi semula
梯形法	trapezium rule	petua trapezium

E

二阶常系数线性微分方程	second order linear differential equation with constant coefficients	persamaan pembezaan linear peringkat kedua dengan koefisien malar

F

分部积分法	integration by parts	pengamiran bahagian demi bahagian

G

拐点	point of inflexion	titik lengkuk balas

J

阶	order	peringkat
积分因子	integrating factor	faktor pengamir
渐近线	asymtote	asimptot

N

n 牛顿法	Newton's method	kaedah Newton

S

上凸	convex upward/concave downward	cembung ke atas

T

通解	general solution	penyelesaian am
特解	particular solution	penyelesaian khusus
特征方程	auxiliary equation	persamaan bantu

W

微分方程式	differential equation	persamaan pembezaan

X

辛普逊法	Simpson's rule	petua Simpson
下凸	convex downward/concave upward	cembung ke bawah

Y

一阶齐次微分方程	first order homogeneous differential equation	persamaan pembezaan homogen peringkat pertama
一阶线性微分方程	first order linear differential equation	persamaan pembezaan linear peringkat pertama

习题答案

第 10 章

习题 10a（P.4）

1. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$、$(1, \infty)$ 内下凸，在 $(0, 1)$ 内上凸。
2. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 内下凸，在 $(2, \infty)$ 内上凸。
3. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 内下凸，在 $(1, \infty)$ 内上凸。
4. 曲线 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 内上凸，在 $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ 内下凸。
5. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内上凸，没有拐点。
6. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 内上凸，在 $(1, \infty)$ 内下凸，点 $\left(1, -1\frac{2}{3}\right)$ 是拐点。
7. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$、$(0, \infty)$ 内下凸，在 $(-1, 0)$ 内上凸，点 $(-1, 0)$ 是拐点。
8. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内上凸，在 $(0, \infty)$ 内下凸，没有拐点。
9. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 内下凸，在 $(-1, \infty)$ 内上凸，没有拐点。
10. 曲线 $f(x)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 内上凸，在 $(0, \pi)$ 内下凸，点 (π, π) 是拐点。
11. 曲线 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$、$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ 内下凸，在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 内上凸，点 $\left(-\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$、$\left(\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 是拐点。
12. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$、$(1, \infty)$ 内上凸，在 $(-1, 1)$ 内下凸，点 $(-1, \ln 2)$、$(1, \ln 2)$ 是拐点。
13. 曲线 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 内上凸，没有拐点。
14. 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内下凸，没有拐点。

习题 10c（P.15）

1. 3.63　　2. 2.095　　3. 1.133　　4. 1.4142
5. 1.305　　6. 1.67　　7. -1.71，1.14，3.57
8. -2.36，1.22　　9. 一根，$x=-0.739$　　10. 无穷个根

总复习题 10（P.16）

1. (a) 曲线 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 内上凸，在 $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ 内下凸，点 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ 是拐点。
   (b) 曲线 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$、$(1, \infty)$ 内下凸，在 $(-1, 1)$ 内上凸，点 $(-1, -12)$、$(1, -12)$ 是拐点。

(c) 曲线 $f(x)$在$\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \infty\right)$ 内下凸，在$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 内上凸，点$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$、$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ 是拐点。

(d) 曲线 $f(x)$在$(-\infty,\ 0)$、$(2,\ \infty)$内下凸，在$(0,\ 2)$内上凸，点$(0,\ 16)$、$(2,\ 0)$是拐点。

(e) 曲线 $f(x)$在$(-\infty,\ \infty)$内下凸，无拐点。

(f) 曲线 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$ 内上凸，在 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$、$(0,\ \infty)$ 内下凸，点 $\left(-\frac{1}{2},\ e^{-2}\right)$ 是拐点。

2. (a) $a=-3$

(b) 曲线 $f(x)$在$(-\infty,\ 1)$内上凸，在$(1,\ \infty)$内下凸，点$(1,\ -7)$是拐点。

3. $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$　　5. 0.18　　6. 3.24

7. 1.04　　8. 1.043　　9. 一根，$x=0.515$

10. 二根，$x=1.404$

第 11 章

习题 11a (P.19)

1. $2e^x+C$　　2. $\frac{6^x}{\ln 6}+C$　　3. $\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}+C$　　4. $e^x+\cot x+C$

5. $5\sin^{-1}x+C$　　6. $e^2x+\frac{1}{4}\ln|x|+C$

7. $\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{3}x^3+e^x-\frac{1}{e+1}x^{e+1}+C$　　8. $3\ln|x|-\cos x+C$

9. $\frac{1}{2}x^2-3x+2\ln|x|-\frac{4}{x}+C$　　10. $\ln|x|+\frac{3^x}{\ln 3}-3\sin^{-1}x+C$

11. $\sin x-\frac{a^x}{\ln a}+C$　　12. $3x-p\ln|x|+C$

13. $\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x+C$　　14. $3\tan^{-1}x-2\sin^{-1}x+C$

15. $x^3+\tan^{-1}x+C$　　16. $\sin^{-1}x+C$

17. $2x-\frac{5}{\ln 3-\ln 2}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$　　18. $\frac{2}{3}x^3+\ln|x|+\cot x+C$

19. $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$　　20. $\tan x-\sec x+C$

习题 11b（P.22）

1. $2(x^2-4)^{\frac{1}{2}}+C$

2. $-\frac{1}{2x+3}+C$

3. $-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$

4. $\frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}+C$

5. $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

6. $-\ln|\cos x|+C$

7. $\frac{1}{5}\sec 5x+C$

8. $\frac{1}{3}\operatorname{cosec} 3x+C$

9. $-\frac{1}{6}e^{-6t}+C$

10. $e^{-\frac{1}{x}}+C$

11. $-\frac{1}{3\ln^3 x}+C$

12. $\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-2(1+x)^{\frac{1}{2}}+C$

13. $\ln|1+e^x|+C$

14. $-e^{-x^2}+C$

15. $2e^{\sqrt{x}}+C$

16. $\sqrt{2x}-\ln\left|1+\sqrt{2x}\right|+C$

17. $\sin^{-1}\frac{x}{3}+C$

18. $\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3}{5}x+C$

19. $x-2\sqrt{x}+2\ln|\sqrt{x}+1|+C$

20. $-2\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}x+C$

21. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x}{3}+C$

22. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

23. $\frac{a^2}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})+C$

24. $\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$

习题 11c（P.24）

1. $\ln|x-1|-\ln|x|+C$

2. $\ln|x|-\ln|x+1|+C$

3. $\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$

4. $\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\ln|x-3|+C$

5. $3\ln|x+2|-\ln|2x-3|+C$

6. $-3\ln|x+1|-2\ln|x-1|+C$

7. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

8. $\frac{5}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+2|+C$

9. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}+C$

10. $\ln|x-3|-\frac{3}{2}\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+4|+C$

11. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+C$

12. $-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$

13. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$

14. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$

15. $-\dfrac{1}{2(1+x^2)}+C$

16. $-\dfrac{1}{8(8x+7)}+C$

17. $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$

18. $-\dfrac{1}{x^2-1}+C$

19. $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$

20. $\ln|x^2-5x+6|+C$

21. $\ln\dfrac{(x-3)^6}{(x-2)^4}+C$

22. $\ln\left|\dfrac{(x-3)^3}{x-2}\right|+C$

习题 11d (P.27)

1. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+C$

2. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 8x}{16}+C$

3. $-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+\dfrac{1}{7}\cos^7 x+C$

4. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin(6x-2)}{12}+C$

5. $-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+\dfrac{1}{5}\cos^5 x+C$

6. $\dfrac{1}{12}\sin^3 4x+C$

7. $\dfrac{2}{3}\cos^3\dfrac{x}{2}-2\cos\dfrac{x}{2}+C$

8. $\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$

9. $\dfrac{1}{3}\cos^3 x^2-\cos x^2+C$

10. $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{32}\sin 4x+C$

11. $\dfrac{9x}{2}+4\cos x-\dfrac{\sin 2x}{4}+C$

12. $\dfrac{x}{8}-\dfrac{\sin 2x}{16}+C$

13. $\dfrac{7}{8}x+\dfrac{2\sin^3 x}{3}+\dfrac{\sin 4x}{32}+C$

14. $\dfrac{3x}{8}-\dfrac{\sin 2ax}{4a}+\dfrac{\sin 4ax}{32a}+C$

习题 11e (P.30)

1. $\dfrac{1}{5}\tan^5 x+C$

2. $-\dfrac{1}{4}\cot^4 3x+C$

3. $2\tan x+2\sec x-x+C$

4. $\dfrac{1}{6}\tan 2x+\dfrac{1}{3}\ln|\cos 3x|+C$

5. $\dfrac{1}{5}\tan^5 x+\dfrac{2}{7}\tan^7 x+\dfrac{1}{9}\tan^9 x+C$

6. $\dfrac{2}{3}\tan^2\dfrac{x}{2}-2\tan\dfrac{x}{2}+x+C$

7. $-\cot x-\dfrac{1}{3}\cot^3 x+C$

8. $\tan x-\dfrac{1}{3}\tan^3 x+C$

9. $\dfrac{1}{5}\sec^5 x+C$

10. $\tan^3\dfrac{x}{3}+3\tan\dfrac{x}{3}+C$

习题 11f (P.31)

1. $-\dfrac{1}{6}\cos 3x-\dfrac{1}{2}\cos x+C$

2. $-\dfrac{1}{4}\cos 4x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$

3. $\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$

4. $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 8x+C$

5. $-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

6. $\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{14}\cos 7x+C$

7. $\frac{3}{2}\sin\frac{x}{3}-\frac{3}{10}\sin\frac{5x}{3}+C$

8. $-\frac{1}{6}\cos(3x-1)-\frac{1}{2}\cos(x-1)+C$

9. $\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$

10. $-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C$

习题 11g (P.33)

1. $\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{1+3\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+C$

2. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$

3. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{4+5\tan\frac{x}{2}}{3}+C$

4. $\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

5. $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}+C$

6. $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}\tan^{-1}\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+C$

7. $-\cot\frac{x}{2}+C$

8. $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$

9. $\frac{-2}{\tan\frac{x}{2}-1}+C$

10. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|+C$

11. $\ln\sqrt{1-\tan^2\theta}+C$

12. $-\frac{1}{2}\ln|3-\tan^2 x|+C$

习题 11h (P.36)

1. $\frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{4}\sin^{-1}2x+C$

2. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

3. $\frac{1}{\sqrt{5}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{7}x+C$

4. $\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C$

5. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

6. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{9+4x^2}}{3}\right|+C$

7. $\frac{1}{2}\ln|a^2+x^2|+C$

8. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

9. $\sqrt{x^2-4}+C$

10. $-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

11. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{\sqrt{81+x^2}-9}{x}\right|+C$

12. $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x^2-1}{2x^2}}+C$

习题 11i (P.39)

1. $x\sin x+\cos x+C$
2. $\sin x-\cos x-x\cos x+C$
3. $-x\cos(x+1)+\sin(x+1)+C$
4. $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$
5. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$
6. $-e^{-x}(x+1)+C$
7. $-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$
8. $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$
9. $x\ln(1+x^2)-2x+2\tan^{-1}x+C$
10. $\frac{x^3}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln|1+x^2|+C$
11. $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C$
12. $2x\ln x-2x+C$
13. $\frac{a^{2x}}{2\ln a}\left(x-\frac{1}{2\ln a}\right)+C$
14. $x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$
15. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$

习题 11j (P.42)

1. $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$
2. $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$
3. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$
4. $-\frac{1}{2}x^4\cos x^2+x^2\sin x^2+\cos x^2+C$
5. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$
6. $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$
7. $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4-2x^2+2)+C$
8. $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$
9. $(x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2}+(2x+7)\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+C$
10. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

总复习题 11 (P.42)

1. $4\tan x-9\cot x-x+C$
2. $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2.6^x}{\ln 6}+C$
3. $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+C$
4. $\frac{3(ax^2+b)^{\frac{4}{3}}}{8a}+C$
5. $-\frac{x^2}{2}-x-\ln|1-x|+C$
6. $2x+\frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2-\ln 3}+C$
7. $-\frac{1}{\sin^{-1}x}+C$
8. $2\sqrt{\tan x}+C$
9. $\ln|\ln x|+C$
10. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C$

11. $\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C$

12. $\frac{1}{3}\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^3+C$

13. $\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-5|+C$

14. $\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

15. $2\left(\sqrt{1+t}-\ln\left|1+\sqrt{1+t}\right|\right)+C$

16. $\sqrt{x^2-a^2}-a\cos^{-1}\frac{a}{x}+C$

17. $\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C$

18. $-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| C$

19. $3x+\ln|x|+2\tan^{-1}x+C$

20. $\frac{1}{5}\sin^5x-\frac{2}{7}\sin^7x+\frac{1}{9}\sin^9x+C$

21. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$

22. $\frac{1}{5}\tan^5x+\frac{2}{7}\tan^7x+\frac{1}{9}\tan^9x+C$

23. $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$

24. $\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+3\sin\frac{x}{6}+C$

25. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}x\sin x+C$

26. $(x+1)^2\sin x+2(x+1)\cos x+C$

27. $\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$

28. $-\frac{2}{x}\ln^2x-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C$

29. $\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+\frac{2x^2-1}{4}\sin^{-1}x+C$

30. $2(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C$

31. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x+\frac{1}{2}x+C$

32. $-\frac{x^2}{2}+x\tan x+\ln|\cos x|+C$

33. $\frac{1}{2}x^4+\frac{5^x}{\ln 5}-4\sin x+C$

34. $\frac{2}{7}ax^{\frac{2}{7}}-\frac{2\sqrt{5}}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

35. $\frac{2^xe^x}{1+\ln 2}+C$

36. $-\cos x+5\tan^{-1}x+e^x+C$

37. $-\frac{1}{x}+\tan^{-1}x+C$

38. $2\left(\frac{1}{3}x-2\right)^{\frac{3}{2}}+C$

39. $-\ln|\sqrt{2}\cos x|+C$

40. $-\frac{1}{x}\ln|x+1|+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

41. $A=-1$, $B=-1$, $C=1$, $\frac{1}{x}-\ln|x|+\ln|x-1|+C$

42. $\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\ln|2x-1|+C$

43. $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

44. $\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)+C$

45. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3\tan x}{2-3\tan x}\right|+C$

46. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+3\tan\frac{1}{2}x}{3+\tan\frac{1}{2}x}\right|+C$, $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C$

第 12 章

习题 12a（P.45）

1. $21\frac{1}{3}$ 2. 6 3. $\ln 2$

4. 2 5. $\frac{1}{6}\ln 0.1$ 6. $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$

7. $\frac{3}{2}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 8. $\frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$ 9. $\frac{1}{4}\pi$ 10. 1

11. $\ln 2+\frac{1}{2}\pi-2$ 12. $-2\left(e^{-\frac{3}{2}}-e\right)$ 13. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 14. 4

15. $\frac{1}{27}(\pi^2-4)$ 16. $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$

习题 12b（P.49）

1. a^2 2. $\frac{1}{2}\pi a^2$ 3. $\frac{9\pi}{2}$ 4. $\frac{3}{32}\pi$

5. $2+\frac{\pi}{4}$ 6. $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 7. $\frac{1}{4}\pi a^2$ 8. 54π

习题 12c（P.53）

1. $\frac{16}{15}\pi$ 2. $\frac{3}{10}\pi$ 3. $2\pi ab^2$ 4. $\frac{3}{10}\pi$

5. $\frac{2}{3}\pi$ 6. 160π 7. $\pi\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^2-2e\right)$

8. $\frac{\pi}{6}$ 9. $\frac{25}{21}\pi$ 10. $\frac{2}{5}\pi$ 11. $\frac{128}{7}\pi$

12. 12π

习题 12d（P.59）

1. (a) 0.6932 (b) 1.4675 2. (a) 17.333 (b) 5.4024

3. 0.6938，0.6931 4. 0.9573 5. (a) $22\,\mathrm{m}^2$ (b) $21.87\,\mathrm{m}^2$

总复习题 12（P.60）

1. $18\pi a^2$ 2. $\frac{\pi}{2}a^2$ 3. $\frac{25}{4}\pi$ 4. $\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

5. $\frac{\pi}{6}$ 6. $a^2\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 7. $\frac{128}{7}\pi$，$\frac{64}{5}\pi$ 8. $\frac{19}{48}\pi$，$\frac{7\sqrt{3}}{10}\pi$

9. 7.5π，24.8π　　10. $\frac{3}{2}\pi^2+4\pi$　　11. $\frac{1}{2}\pi a$　　12. $\frac{\pi}{2}$

13. $\frac{8\pi}{5}$　　14. (a) 0.836　　(b) 1.089　　15. 0.8357

16. 145.6（平方米）

第 13 章

习题 13a（P.65）

1. (a) 1　　(b) 1　　(c) 3　　(d) 2

2. (a) 是　　(b) 是　　(c) 不是　　(d) 是

习题 13b（P.68）

1. $y=Cx$　　2. $y=C(x+2)$　　3. $x=C\sin y$　　4. $\ln\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}$

5. $10^{-y}+10^{x}=C$　　6. $3e^{-y^2}-2e^{3x}=C$　　7. $\sin y\cdot\cos x=C$　　8. $\sin^{-1}y=\sin x+C$

9. $3x^4+4(y+1)^3=C$　　10. $y=Cxe^{x}$　　11. $e^{y}=\frac{1}{2}(e^{2x}+1)$

12. $x^2y=4$　　13. $y=\frac{1}{1+\ln|1+x|}$　　14. $y=\tan x$

15. $xy=6$

习题 13c（P.71）

1. $x=Ce^{\frac{y}{x}}$　　2. $x^3-2yx^2=C$　　3. $x^2+2xy=C$　　4. $y^2=2x^2\ln|x|+Cx^2$

5. $\ln|x|+\frac{1}{6}\ln\left|1-\frac{2y^3}{x^3}\right|=C$　　6. $\sin^{-1}\frac{y}{x}=\ln|x|+C$

7. $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\tan^{-1}\frac{y}{x}}$　　8. $y-x=C(x+y)^3$　　9. $y=xe^{Cx+1}$

10. $\ln|y-x|-\frac{x}{y-x}=C$　　11. $x^3=Ce^{\frac{y}{x}}$　　12. $x^2(x^2-2y^2)=C$

习题 13d（P.75）

1. $y=-\frac{1}{2}+Ce^{2x}$　　2. $y=Ce^{ax}$　　3. $y=C(x+1)^{-2}$　　4. $y=\frac{2}{3}nx+Cx^4$

5. $y=\frac{1}{2}+Ce^{-x^2}$　　6. $y=e^{-2x}(\sin x+C)$　　7. $y=e^{-x}(x+C)$

8. $y=x^n(e^x+C)$　　9. $y=\frac{4x^3+3C}{3(x^2+1)}$　　10. $y=-\frac{1}{4}e^{-x^2}+Ce^{x^2}$

习题 13e（P.79）

1. $y=5.58\,e^{\frac{1}{3}x}$　2. $y=6e^{-x}+2$　3. $y=e^{\frac{1}{2}x^2}$　4. 6.9 小时

5. (a) 307.9万　(b) 2082 年　6. 10个星期　7. $7.91\times10^4\ \mathrm{N/m^2}$

9. 0.058　10. $R=R_0\,e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}$　11. 46.7℃　12. $p=\frac{C}{v^k}$

13. $x=\frac{mg}{k}\left(t-\frac{m}{k}+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)$　14. $i=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$，$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

习题 13f（P.83）

1. $y=Ae^x+B$　2. $y=Ae^{3x}+Be^{-3x}$　3. $y=Ae^{3x}+Be^{2x}$　4. $y=e^x(Ax+B)$

5. $y=A\cos x+B\sin x$　6. $y=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

7. $y=A\,e^{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}+B\,e^{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}$　8. $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

9. $a>0$ 时　$y=A\cos\sqrt{a}\,x+B\sin\sqrt{a}\,x$

$a=0$ 时　$y=A+Bx$

$a<0$ 时　$y=A\,e^{\sqrt{-a}x}+B\,e^{-\sqrt{-a}x}$

10. $|\lambda|>2$ 时　$y=A\,e^{\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}x}+B\,e^{\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}x}$

$|\lambda|=2$ 时　$y=e^{-\frac{\lambda}{2}x}(A+Bx)$

$|\lambda|<2$ 时　$y=e^{-\frac{\lambda}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}x+B\sin\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}x\right)$

11. 11^2

总复习题 13（P.83）

1. $y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+C$　2. $y\sqrt{1+x^2}=C$　3. $\sin y=\ln|1+x|-x+C$

4. $2xy-y^2=C$　5. $x-\sqrt{xy}=C$　6. $\ln Cx=-e^{-\frac{y}{x}}$

7. $y^2=x^2(C+\ln x^2)$　8. $y=(\tan x-1)+Ce^{-\tan x}$　9. $y=2x-1+Ce^{-2x}$

10. $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$　11. $y=(x+C)e^{-\sin x}$　12. $y=A\,e^{2x}+B\,e^{-\frac{4}{3}x}$

13. $y=A\cos x+B\sin x$　14. $y=e^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$

15. $y=(A+Bx)e^x$　16. $\cos x-\sqrt{2}\cos y=0$　17. $y^3=y^2-x^2$

18. $y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$　19. $y=4e^x+2e^{3x}$　20. $x^2+y^2=C$

21. $y=2(e^x-x-1)$　23. $x^2+y^2=C$

24. $y=\frac{x^4}{16}$

25. $P\left(e^{\frac{t}{2}}-1,\ e^{-\frac{t}{2}}-1\right)$, $\frac{1}{2}\sqrt{e^t+e^{-t}}$

26. (a) $t=\frac{\ln 2}{r}$年 (b) $t=13.86$年 (c) $r=6.93\ \%$

27. (a) $\frac{x}{1-x}=Ce^{\beta t}$

28. $x=2e^{-\frac{t}{2}}\sin t$

29. $y=Cx-x\ln|x|$

30. $v\approx 0.233$米／秒

31. $v=\frac{k_1}{k_2}\left(t-\frac{m}{k_2}+\frac{m}{k_2}e^{-\frac{k_2}{m}t}\right)$