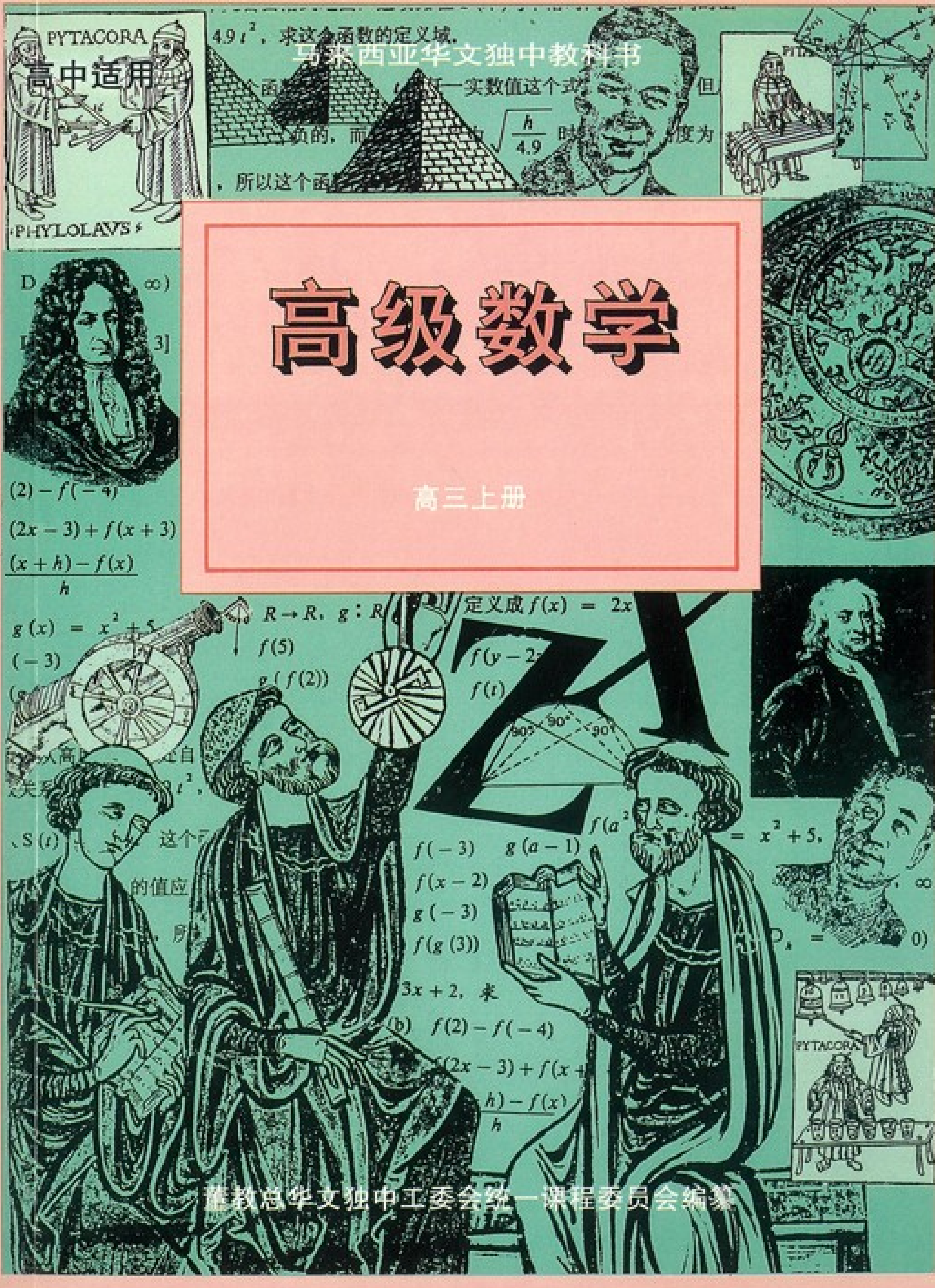
马来西亚华文独中教科书

高中适用

高级数学

高三上册

董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂



1 数学归纳法

1.1 数学归纳法

我们来观察如下实例：

$$1^3=1=1^2$$
$$1^3+2^3=9=(1+2)^2$$
$$1^3+2^3+3^3=36=(1+2+3)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=100=(1+2+3+4)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225=(1+2+3+4+5)^2$$
$$\cdots\cdots$$

由此可知，

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

象这种由一系列个别事例，得出一般结论的推理方法，叫做**归纳法**(induction)。用归纳法可以帮助我们从具体的事例中发现一般规律。但是，仅根据一系列个别事例，所得出的一般结论，有时是不正确的。例如，

$$a_n=(n^2-5n+5)^2$$

容易验证

$$a_1=(1^2-5+5)^2=1$$
$$a_2=(4-10+5)^2=1$$
$$a_3=(9-15+5)^2=1$$
$$a_4=(16-20+5)^2=1$$

如果由此作出结论：对于任何自然数 n，

$$a_n=(n^2-5n+5)^2=1$$

都成立，就不正确了。事实上，

$$a_5=(25-25+5)^2=25\neq1$$

这就是说，用归纳法得到的与自然数有关命题的一般性结论，有时正确，有时不正确。为了证明其正确性，我们通常采用下面的方法。

首先证明当 n 取第一个值 n_1（例如 $n_1=1$）时命题成立，然后假设当 $n=k$ ($k\in\mathbf{N}$，$k\geqslant n_1$)时成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立。证明了这一点，就可以断定这个命题对于 n 取第一个值后面的所有自然数也都成立。这种证明方法叫做**数学归纳法**(mathematical induction)。

例如，我们用数学归纳法证明下式对于所有自然数都成立：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(1) 当 $n=1$ 时，左边是 $1^3=1$，右边是$\left[\frac{1\times(1+1)}{2}\right]=1$，

等式是成立的。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，就是

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3&=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3\\&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4}\\&=\frac{(k+1)^2[k^2+4(k+1)]}{4}\\&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\&=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也是成立的。

根据（1），$n=1$ 时，等式成立，再根据（2），$n=1+1=2$ 时，等式也成立。由于 $n=2$ 时等式成立，再根据（2），$n=2+1=3$ 时，等式也成立。这样递推下去，就知道 $n=4，5，6，\cdots$时，等式都成立，因此根据（1）和（2），可以断定，等式对任何 $n\in\mathbf{N}$ 都成立。

从上面的例子看到，用数学归纳法证明一个与自然数有关的命题的步骤是：

(1) 证明当 n 取第一个值 n_1（例如 $n_1=1$ 或 2 等）时，命题正确；

(2) 假设当 $n=k$（$k\in\mathbf{N}$，且 $k\geqslant n_1$）时，命题正确，证明当 $n=k+1$ 时，命题也正确。

在完成了这两个步骤以后，就可以断定命题对于从 n_1 开始的所有自然数 n 都正确。

应当注意，上述两个步骤是一个完整的整体，缺一不可。从前面计算

$$a_n=(n^2-5n+5)^2$$

各项的值可以看到，只完成步骤（1）而缺少步骤（2），就可能得出不正确的结论，因为单靠步骤（1），我们无法递推下去，所以对于 n 取 2，3，4，5，…时命题是否正确，我们无法判定。同样，只有步骤（2）而缺少步骤（1），也可能得出不正确的结论。

例如，假设 $n=k$ 时，等式 $2+6+10+\cdots+2(2n-1)=2n^2+2$ 成立，

就是

$$2+6+10+\cdots+2(2k-1)=2k^2+2$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}2+6+10+\cdots+2(2k-1)+2[2(k+1)-1]&=2k^2+2+4(k+1)-2\\&=2k^2+2+4k+2\\&=2(k+1)^2+2\end{aligned}$$

这就是说，如果 $n=k$ 时等式成立，那么 $n=k+1$ 时等式也成立。但如果仅根据这一步，就得出等式对于任何 $n\in\mathbf{N}$ 都成立的结论，那就错了。事实上，

当 $n=1$ 时，上式的左边 $=2$，右边 $=2\times1^2+2=4$，

左边 $\neq$ 右边。

这也说明，如果缺少步骤（1）这个基础，步骤（2）就没有意义了。

例1 用数学归纳法证明 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

解 （1）当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1$，

等式成立。

（2）假设当 $n=k$ 时，等式成立，就是

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\&=k^2+[2(k+1)-1]\\&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立。

根据（1）和（2），可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}$ 都成立。

例2 用数学归纳法证明 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

解 (1) 当 $n=1$ 时，左边是 $1^2=1$，右边是 $\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$，

等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，就是

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\&=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立。

根据 (1) 和 (2)，可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}$ 都成立。

习题 1a

用数学归纳法证明下列各题（1～7）

1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

3. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$

4. $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$

5. $2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+(n+1)\cdot2^n=n\cdot2^{n+1}$

6. $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

1.2　数学归纳法的应用

数学归纳法适用于证明含有任意自然数的命题。在 1.1 一节中，我们通过数学归纳法的介绍，已经列举例 1、例 2 说明了它在证明恒等式方面的应用。下面我们通过例题进一步说明它证明恒等式以及其他方面的应用。

例3　用数学归纳法证明

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\ (n>1 \text{ 且 } n\in\mathbf{N})$$

解　（1）当 $n=2$ 时，左边是 $\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

右边是 $\frac{2+1}{2\times 2}=\frac{3}{4}$

等式成立。

（2）假设当 $n=k$ 时，等式成立，就是

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$$

$$=\frac{k+1}{2k}\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$$

$$=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立。

根据（1）和（2），等式对任何 $n>1$ 且 $n\in\mathbf{N}$ 都成立。

例4 用数学归纳法证明 $x^{2n}-y^{2n}(n\in\mathbb{N})$ 能被 $x+y$ 整除。

解 (1) 当 $n=1$ 时，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 能被 $x+y$ 整除，

因此，命题成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时，命题成立，即

$x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x+y$ 整除，

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}&=x^2\cdot x^{2k}-y^2\cdot y^{2k}\\&=x^2\cdot x^{2k}-x^2y^{2k}+x^2y^{2k}-y^2y^{2k}\\&=x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2)\end{aligned}$$

因为 $x^{2k}-y^{2k}$ 与 x^2-y^2 都能被 $x+y$ 整除，

所以上面的和 $x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2)$ 也能被 $x+y$ 整除。

这就是说，当 $n=k+1$ 时，$x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}$ 能被 $x+y$ 整除。

根据（1）和（2），可知命题对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。

例5 若 p 为一个大于 -1 的定数，则对于所有的自然数 n，$(1+p)^n\geqslant 1+np$ 都成立。

解 (1) 当 $n=1$ 时，左边是 $(1+p)^1=1+p$，

右边是 $1+np=1+p$，

原不等式成立。

(2) 假设 $n=k$ 时，不等式成立，就是

$$(1+p)^k\geqslant 1+kp,$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}(1+p)^{k+1}&=(1+p)^k(1+p)\\&\geqslant(1+kp)(1+p)\\&=1+p+kp+kp^2\\&\geqslant 1+(k+1)p\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，不等式也可成立。

根据（1）和（2），可知原不等式对于所有的自然数 n 都成立。

例6 平面内有 n 条直线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点，证明交点的个数 $V_n=\frac{1}{2}n(n-1)$，$n\geqslant 2$。

解 （1）当 $n=2$ 时，两条直线的交点只有1个，即 $V_2=1$。

又当 $n=2$ 时，$\frac{1}{2}\times 2\times(2-1)=1$

因此命题成立。

（2）假设 $n=k(k\geqslant 2)$时命题成立，就是说，平面内满足题设的 k 条直线的交点的个数为 $V_k=\frac{1}{2}k(k-1)$ 个。

现在来考虑平面内多添上一条直线，即 $k+1$ 条直线的情况。新添上的这条直线必与平面内其他 k 条直线都相交，即有 k 个新的交点；从而平面内的交点的个数是

$$
\begin{aligned}
V_{k+1}=V_k+k&=\frac{1}{2}k(k-1)+k\\
&=\frac{1}{2}k[(k-1)+2]\\
&=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1]
\end{aligned}
$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立。

根据（1）和（2），可知命题对任何 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}$ 都成立。

例7 证明 $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 能被14整除，$n\geqslant 0$，$n\in\mathbf{Z}$。

解 （1）当 $n=0$ 时，$3^2+5^1=14$ 能被14整除，

即 $n=0$ 时命题成立。

（2）假设当 $n=k$ 时，命题成立，即 $3^{4k+2}+5^{2k+1}$ 能被14整除。

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}&=3^{4k+2+4}+5^{2k+1+2}\\
&=81\cdot 3^{4k+2}+25\cdot 5^{2k+1}\\
&=81(3^{4k+2}+5^{2k+1})-56\cdot 5^{2k+1}
\end{aligned}
$$

因为 $3^{4k+2}+5^{2k+1}$ 和 $56\cdot 5^{2k+1}$ 都能被14整除，

所以 $3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}$ 能被14整除，

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立。

根据（1）和（2），命题对于任何 $n\geqslant 0$，$n\in\mathbf{Z}$ 都能成立。

例8 用数学归纳法证明 $\sum 2^{n-1}=2^n-1$，$n\in\mathbf{N}$。

解 （1）当 $n=1$ 时，左式 $=2^{1-1}=1$

右式 $=2^1-1=1$

$\therefore$ 公式成立。

（2）假设当 $n=k$ 时，公式成立，即 $2^0+2^1+2^2+\cdots 2^{k-1}=2^k-1$

那么，当 $n=k+1$ 时，$2^0+2^1+2^2+\cdots 2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k$

$$=2\cdot 2^k-1$$

$$=2^{k+1}-1$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，公式也成立。

根据（1）和（2），可知公式对于任何 $n\in\mathbf{N}$ 都成立。

习题 1b

用数学归纳法证明下列各题：

1. $-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n\cdot n$
2. $\sum(5n-1)=\dfrac{n(5n+3)}{2}$，$n\in\mathbf{N}$
3. $\sum 3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$，$n\in\mathbf{N}$
4. $2^n>n^2$，$n>4$ 且 $n\in\mathbf{N}$
5. $2^n+2>n^2$，$n\in\mathbf{N}$
6. n 边形的内角和等于$(n-2)\pi$，$n\geqslant 3$。
7. (a^n-b^n)可以被$(a-b)$整除。
8. $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 能被 x^2+x+1 整除，$n\geqslant 0$ 且 $n\in\mathbf{Z}$。
9. $x^n+5n(n\in\mathbf{N})$ 能被 6 整除。
10. 三个连续自然数的立方和能被 9 整除。
11. 对于所有自然数 n，9^n-8n-1 都是 64 的倍数，$n\geqslant 2$。
12. 猜测下列形式的一般式，并用数学归纳法证明：

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
3+5 &= 8\\
7+9+11 &= 27\\
13+15+17+19 &= 64\\
21+23+25+27+29 &= 125
\end{aligned}$$

2 反三角函数

2.1 反三角函数的定义及图象

● 反正弦函数的定义及图象

前面已经学习过正弦函数的定义及其图象（图 2－1）。从图象看到，对于 x 在定义域 $\mathbb{R}$ 内的每一个值，y 都在 $[-1, 1]$ 上有唯一的值与它对应。例如，对于 $x=\frac{\pi}{6}$，有 $y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 与它对应。反过来，由于正弦函数的周期性，对于 y 在 $[-1, 1]$ 上的每一个值，在 $\mathbb{R}$ 内的 x 都有无穷多个值与它对应。例如，对于 $y=\frac{1}{2}$，x 有 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$ …… 等无穷多个值与它对应。

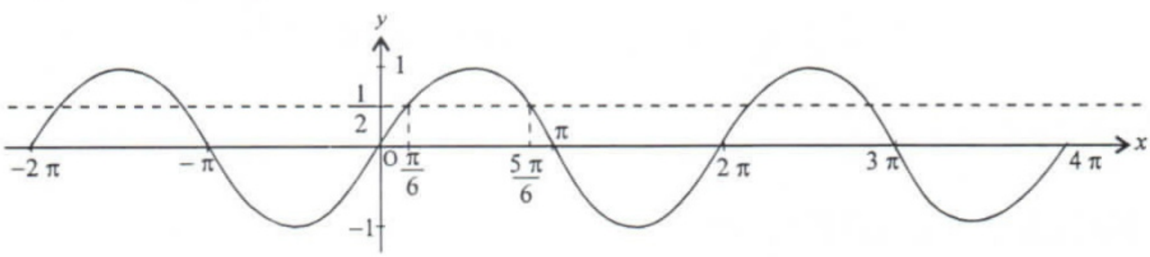


图 2－1

但是，当 x 在正弦函数的一个单调上升（或下降）的区间内取值时，对于 y 在 $[-1, 1]$ 上的每一个取值，x 却只有唯一的值与它对应。例如，$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是正弦函数的一个单调区间，当 x 在这个区间由小到大取值时，y 的值从 -1 逐渐增大到 1。相反，对于 y 在 $[-1, 1]$ 上的每一个值，x 有唯一的值与它对应（图 2－2）。例如，当 $y=1$ 时，

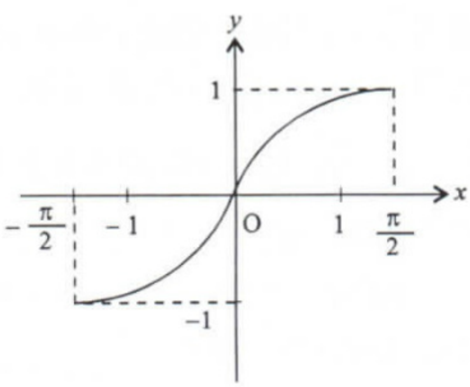


图 2－2

x 有唯一的 $\frac{\pi}{2}$ 与它对应；当 $y=\frac{1}{2}$ 时，x 有唯一的 $\frac{\pi}{6}$ 与它对应。这就是说，$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 是一个一一映成函数，因而它有反函数。

函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数叫做**反正弦函数**（inverse sine function），记作 $x=arc\sin y$。由于习惯上用字母 x 表示自变量，用 y 表示函数，反正弦函数一般写成

$$y=arc\sin x \quad 或 \quad y=\sin^{-1}x$$

定义域是 $[-1,\ 1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$。

这样，对于 $[-1,\ 1]$ 的每一个 x 值，$\sin^{-1}x$ 就表示 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 的唯一确定的值，它的正弦正好等于已知的 x。例如，对于 $x=\frac{1}{2}$，$y=\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 就表示 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上使 $\sin y=\frac{1}{2}$ 的唯一确定的值 $\frac{\pi}{6}$。于是可以得到

$$\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

一般地，根据反正弦函数的定义，可以得到

$$\sin(\sin^{-1}x)=x, \qquad x\in[-1,\ 1]$$

【注】$\sin^{-1}x$ 不表示 $\frac{1}{\sin x}$。

下面来研究反正弦函数的图象。

前面我们知道，在同一平面直角坐标系里作出的互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称。因此，反正弦函数 $y=\sin^{-1}x$ 的图象，就是与正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的一段图象关于直线 $y=x$ 对称的图形，如图 2-3 所示。

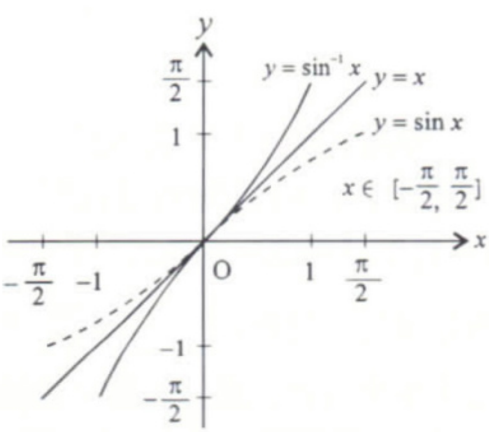


图 2-3

从图 2-3 看到，反正弦函数的图象是关于原点对称的，即有

$$\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x, \quad x\in[-1,\ 1]$$

根据反正弦函数的定义，可以求出当自变量取给定值时相应的反正弦函数值。

例1 求下列反正弦函数值：

(a) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\sin^{-1} 0.2672$

解 (a) 因为在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\quad \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

(b) 已知 $\sin 15°\,30'=0.2672$，且 $15°\,30'\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，

$\therefore\quad \sin^{-1} 0.2672=15°\,30'$

例2 求下列反正弦函数值：

(a) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (b) $\sin^{-1}[-0.1]$

解 (a) 因为在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\quad \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$

本题也可以这样求解：$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{\pi}{3}$

(b) 因为在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin 5°\,44'=0.1$

$\therefore\quad \sin^{-1}(-0.1)=-\sin^{-1}0.1$

$=-5°\,44'$

例3 求下列各式的值：

(a) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$ (b) $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

解 (a) $\because\quad x=\frac{2}{3}\in[-1, 1]$

$\therefore\quad \sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$

(b) $\because\quad x=-\frac{1}{2}\in[-1, 1]$

$\therefore\quad \sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{1}{2}$

习题 2a

1. 用反正弦的形式把下列各式中的 x $\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 表示出来：

 (a) $\sin x=\frac{2}{5}$ (b) $\sin x=-\frac{1}{3}$

 (c) $\sin x=0.3147$ (d) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

2. (a) $\sin^{-1}\frac{\pi}{3}$ 有意义吗？

 (b) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 成立吗？

3. 求下列反正弦函数值：

 (a) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

 (c) $\sin^{-1}0.6959$ (d) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

4. 求下列各式的值：

 (a) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$ (b) $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

 (c) $\sin(\sin^{-1}0)$ (d) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{\pi}{4}\right)$

● 反余弦函数的定义及图象

用与上一小节相同的方法，我们来研究反余弦函数。

从余弦函数的图象（图 2－4）可以看到，虽然对于每一个余弦值 $\cos x$，有无穷多个 x 与之对应，但在区间 $[0,\ \pi]$ 上，$y=\cos x$ 是一一映成函数，对于不同的 x 值，y 有不同的值与它对应，并且随着 x 从 0 增大到 π，y 由 1 减小到 -1，取得值域 $[-1,\ 1]$ 上的一切值，因此 $y=\cos x$，$x\in[0,\ \pi]$ 有反函数。

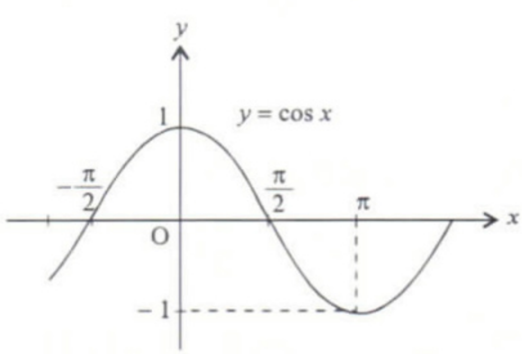


图 2－4

函数 $y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$的反函数叫做**反余弦函数**(inverse cosine function)，记作

$$y=arc\cos x \quad 或 \quad y=\cos^{-1}x$$

定义域是$[-1,1]$，值域是$[0,\pi]$。

这样，对于$[-1,1]$的每一个 x 值，$\cos^{-1}x$ 就表示属于$[0,\pi]$的唯一确定的一个值，它的余弦正好等于已知的 x。例如，对于 $x=\frac{1}{2}$，$y=\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 就表示$[0,\pi]$上使其余弦值正好等于 $\frac{1}{2}$ 的唯一确定的值$\frac{\pi}{3}$。于是我们得到

$$\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

一般地，根据反余弦函数的定义，可以得到

$$\cos(\cos^{-1}x)=x, \qquad x\in[-1,1]$$

反余弦函数 $y=\cos^{-1}x$ 的图象如图 2－5 所示。它与余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的一段图象关于直线 $y=x$ 对称。

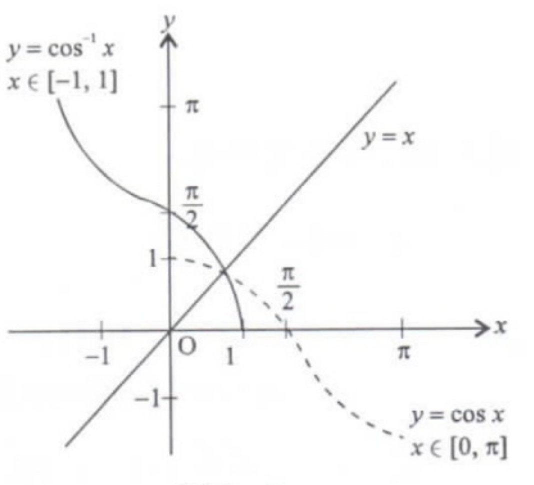


图 2－5

从图象上看到，反余弦函数是减函数，当 x 从 -1 增大到 1 时，$\cos^{-1}x$ 从 π 减到 0。

我们知道，

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

即互为补角的两个角的余弦互为相反数。反过来，在区间$[-1,1]$上的相反数的反余弦函数值互为补角，即有

$$\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x, \qquad x\in[-1,1]$$

事实上，$0\leqslant\cos^{-1}(-x)\leqslant\pi$

且 $\quad 0\leqslant\pi-\cos^{-1}x\leqslant\pi$

又 $\quad \cos[\cos^{-1}(-x)]=-x$

$$\cos(\pi-\cos^{-1}x)=-\cos(\cos^{-1}x)=-x$$

所以 $\quad \cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$

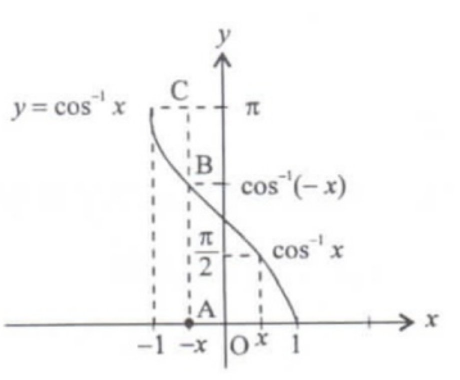


图 2－6

上述结论，也可从图 2－6 中看出，即 AB = AC － BC。

例4 求下列反余弦函数值：

(a) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(b) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

解 (a) 因为在 $[0, \pi]$ 上，$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\quad \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

(b) 因为在 $[0, \pi]$ 上，$\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\quad \cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$

本题也可以这样求解：

$$\begin{aligned}\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)&=\pi-\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\pi-\frac{\pi}{4}\\&=\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

例5 求下列各式的值：

(a) $\cos(\cos^{-1}0.95)$　　　　(b) $\cos\left[\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

解 (a) $\because\quad 0.95\in[-1, 1]$，

$\therefore\quad \cos(\cos^{-1}0.95)=0.95$

(b) $\because\quad -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\in[-1, 1]$，

$\therefore\quad \cos\left[\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

习题 2b

1. 用反余弦的形式把下列各式中的 $x\ (x\in[0, \pi])$ 表示出来：

(a) $\cos x=0.8065$　　　　(b) $\cos x=-\dfrac{1}{5}$

2. (a) $\cos^{-1}\sqrt{2}$ 有意义吗?

(b) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 是否成立吗?

3. 求下列反余弦函数值:

(a) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\cos^{-1}0$

(c) $\cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$ (d) $\cos^{-1}(-0.0471)$

4. 求下列各式的值:

(a) $\cos(\cos^{-1}0.8795)$ (b) $\cos\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

● 反正切函数及反余切函数的定义及图象

正切函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内是一一映成函数，它的反函数叫做**反正切函数**(inverse tangent function)，记作

$y=arc\tan x$ 或 $y=\tan^{-1}x$

定义域是$(-\infty,\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$。

余切函数 $y=\cot x$ 在$(0,\ \pi)$内是一一映成函数，它的反函数叫做**反余切函数**(inverse cotangent function)，记作

$y=arc\cot x$ 或 $y=\cot^{-1}x$

定义域是$(-\infty,\infty)$，值域是$(0,\ \pi)$。

由反正切函数和反余切函数的定义得到

$\tan(\tan^{-1}x)=x$

$\cot(\cot^{-1}x)=x$ 其中 $x\in(-\infty,\infty)$

反正切函数和反余切函数的图象如图 2－7 和图 2－8 所示。

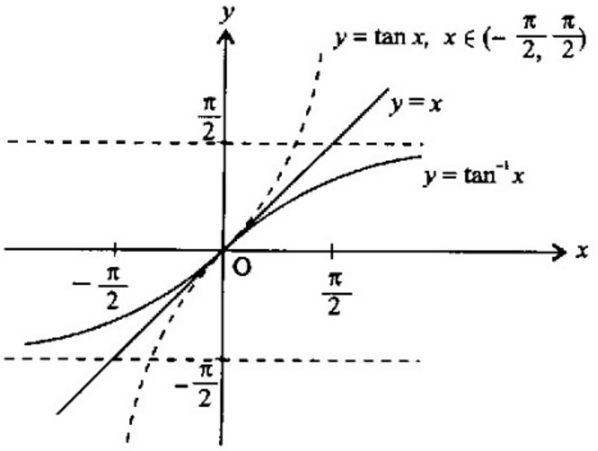


图 2－7

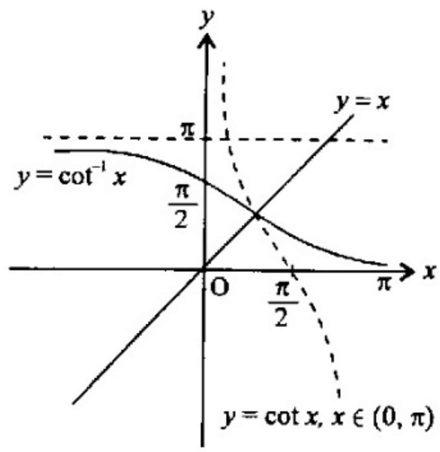


图 2－8

从图象上可以看到：

(1) 反正切函数是增函数，当 x 从 $-\infty$ 增大到 $+\infty$ 时，$y=\cot^{-1}x$ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$；反余切函数是减函数，当 x 从 $-\infty$ 增大到 $+\infty$ 时，$y=\cot^{-1}x$ 从 π 减到 0。

(2) 与反正弦函数类似，对于反正切函数来讲，有 $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

(3) 与反余弦函数类似，对于反余切函数来讲，有 $\cot^{-1}(-x)=\pi-\cot^{-1}x$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数都叫做**反三角函数**(inverse trigonometric function)。

例6 求下列各式的值：

(a) $\tan^{-1}0$　　　　(b) $\cot^{-1}\sqrt{3}$

解 (a) $\tan^{-1}0=0$

(b) $\cot^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$

例7 求下列各式的值：

(a) $\tan^{-1}(-2)$　　　　(b) $\cot^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

解 (a) $\tan^{-1}(-2)=-\tan^{-1}2$

$$=-63°26'$$

(b) $$\cot^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi-\cot^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\pi-\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{2\pi}{3}$$

例8 求下列各式的值：

(a) $\tan(\tan^{-1}2.84)$　　　　(b) $\cot\left[\cot^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

解 (a) $\tan(\tan^{-1}2.84)=2.84$

(b) $\cot\left[\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]=-\dfrac{1}{2}$

习题 2c

1. 用反正切或反余切的形式把下列各式中的 x 表示出来：

(a) $\tan x=0.6$,　　$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $\tan x-\sqrt{5}=0$,　　$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $\cot x=3$,　　$x\in(0,\ \pi)$

(d) $3\cot x=-1$,　　$x\in(0,\ \pi)$

2. 求下列各式的值：

(a) $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　(b) $\tan^{-1}(-2.689)$

(c) $\cot^{-1}0$　　　　(d) $\cot^{-1}(-7.238)$

3. 求下列各式的值：

(a) $\cot(\cot^{-1}\sqrt{3})$　　　　(b) $\tan(\tan^{-1}0.4)$

2.2 反三角函数的运算

我们知道，

$$\sin(\sin^{-1}x)=x \qquad \tan(\tan^{-1}x)=x$$

$$\cos(\cos^{-1}x)=x \qquad \cot(\cot^{-1}x)=x$$

同样的，有

$$\sin^{-1}(\sin x)=x \quad , \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos^{-1}(\cos x)=x \quad , \quad x\in[0,\ \pi]$$

$$\tan^{-1}(\tan x)=x \quad , \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cot^{-1}(\cot x)=x \quad , \quad x\in[0,\ \pi]$$

如果 x 不在反三角函数的取值范围内，应将 x 换成与其函数值相同的一个值，且这个值是属于反三角函数的取值范围内。

例9 求下列各式的值：

(a) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right]$ (d) $\tan^{-1}\left[\tan\frac{3\pi}{5}\right]$

解 (a) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$

(b) $\because$ $\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}$，且 $\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\pi}{3}$

(c) $\because$ $\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$，且 $\frac{3\pi}{5}\in[0,\ \pi]$

$\therefore$ $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right]=\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)$

$=\frac{3\pi}{5}$

(d) $\because \quad \tan\frac{3\pi}{5} = \tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$，且 $-\frac{2\pi}{5} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

$$= -\frac{2\pi}{5}$$

现在我们来研究如何求反三角函数的其他三角函数。

例 10 求下列各式的值:

(a) $\tan\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (b) $\sin[\tan^{-1}(-\sqrt{3})]$

(c) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$ (b) $\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

解 (a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60°$,

$$\therefore \quad \tan\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tan 60°$$

$$= \sqrt{3}$$

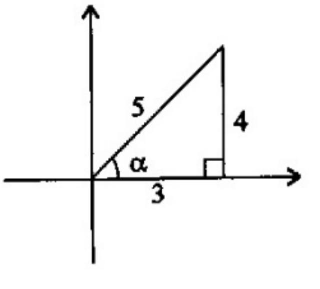
(b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -60°$,

$$\therefore \quad \sin[\tan^{-1}(-\sqrt{3})] = \sin(-60°)$$

$$= -\sin 60°$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) 设 $\sin^{-1}\frac{4}{5} = \alpha \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，



那么 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

因为 $\sin\alpha > 0$，$\therefore$ α 的终边在第一象限内，

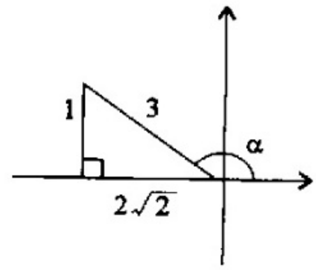
$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad \cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = \cos\alpha$$

$$= \frac{3}{5}$$

(d) 设 $\cos^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\alpha\ (0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，

那么 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$



因为 $\cos\alpha\geqslant 0$，$\therefore$ α 的终边在第二象限内，

$\therefore\quad \tan\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

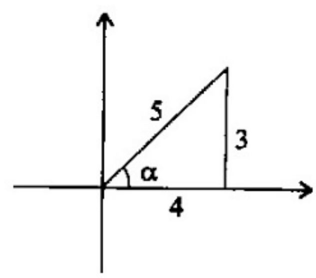
$\therefore\quad \tan\left[\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]=\tan\alpha$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

例 11 求 $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ 的值。

解 设 $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

那么 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，α 的终边在第一象限



又 $\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\quad \sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

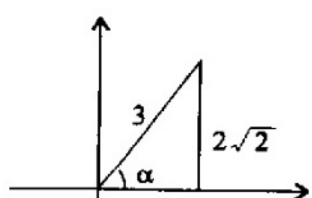
$$=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$$

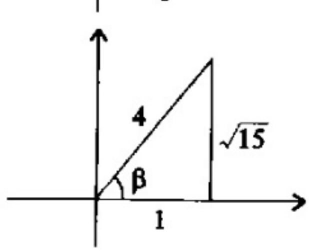
例 12 求 $\cos\left(2\cos^{-1}\frac{1}{3}-\cos^{-1}\frac{1}{4}\right)$ 的值。

解 设 $\cos^{-1}\frac{1}{3}=\alpha$，$\cos^{-1}\frac{1}{4}=\beta$，$\alpha$，$\beta$ 均属于 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$



则 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{1}{4}$

那么 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$



$$\therefore \quad \cos\left(2\cos^{-1}\frac{1}{3}-\cos^{-1}\frac{1}{4}\right)=\cos(2\alpha-\beta)$$

$$=\cos 2\alpha\cos\beta+\sin 2\alpha\sin\beta$$

$$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\beta+(2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\beta$$

$$=\left(\frac{2}{9}-1\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{30}-7}{36}$$

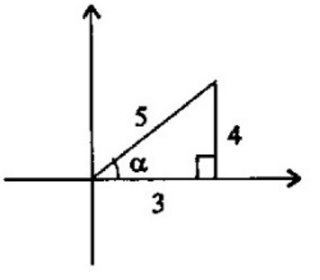
对于两个给定的反三角函数的和与差，由于可以施行任意的三角运算，所以这个和与差也可以用任意一个反三角函数来表示。

例 13 求下列各式的值：

(a) $\cos^{-1}\frac{3}{5}-\tan^{-1}\frac{3}{4}$　　　　(b) $\tan^{-1}3+\tan^{-1}2$

解　(a) 设 $\cos^{-1}\frac{3}{5}=\alpha$，$\tan^{-1}\frac{3}{4}=\beta$，那么 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan\beta=\frac{3}{4}$，

其中 α，β 都属于$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$。



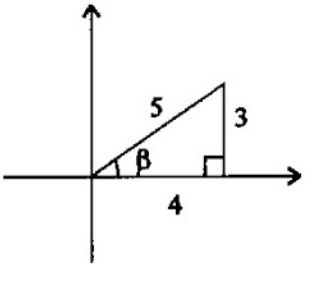
$$\therefore \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$$

$$=\frac{7}{25}$$

由于 α，β 都属于$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，且 $\alpha>\beta$，

所以 $\alpha-\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$



$$\therefore \quad \alpha-\beta=16.26°$$

即 $\cos^{-1}\frac{3}{5}-\tan^{-1}\frac{3}{4}=16.26°$

(b) 设 $\tan^{-1}3=\alpha$，$\tan^{-1}2=\beta$，那么 $\tan\alpha=3$，$\tan\beta=2$，

其中 α，β 属于$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$。

$$\begin{aligned}\therefore\qquad \tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{3+2}{1-3\times2}\\&=-1\end{aligned}$$

由于 α，β 都属于$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$

$$\therefore\qquad \alpha+\beta=\frac{3}{4}\pi$$

即 $\tan^{-1}3+\tan^{-1}2=\frac{3}{4}\pi$

习题 2d

1. 求下列各式的值：

(a) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$　　(b) $\tan\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(c) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$　　(d) $\tan\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$

(e) $\sin\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$　　(f) $\cot\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$

(g) $\cos\left[\cot^{-1}(-5)\right]$　　(h) $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

2. 求下列各式的值：

(a) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$　　(b) $\sin^{-1}\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

(c) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{9}\right)$　　(d) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{15\pi}{4}\right)$

(e) $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$　　(f) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{10\pi}{7}\right)$

(g) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$　　(h) $\cot^{-1}\left[\cot\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$

3. 求下列各式的值：

(a) $\cos^{-1}(\cos 0)$　　(b) $\sin^{-1}(\sin 1)$

(c) $\tan^{-1}(\tan 5)$　　(d) $\cot^{-1}\left[\cot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

4. 求列各式的值：

(a) $\cos\left[2\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$　　(b) $\tan\left(5\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(c) $\sin\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(d) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

(e) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}\right)$　　(f) $\tan\left(\tan^{-1}\frac{5}{6}-\tan^{-1}\frac{3}{8}\right)$

(g) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$　　(h) $\tan\left[\left(\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)+\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)\right]$

5. 求下列各式的值：

(a) $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}$　　(b) $\cos^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{9}{11}$

(c) $\tan^{-1}1+\tan^{-2}2$　　(d) $2\cot^{-1}\frac{1}{5}+\cot^{-1}\frac{1}{4}$

2.3 反三角函数的恒等式

反三角函数间的关系是多种多样的，它们常以恒等式的形式表达出来。我们来看下面的关系式。

例 14 证明 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$，其中 $x\in[-1,1]$。

解 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ 可以转为证明

$$\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x$$

在上式两边取正弦，得 左式为：$\sin(\sin^{-1}x)=x$，

右式为：$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x\right)=\cos(\cos^{-1}x)=x$，

$\therefore\ \sin(\sin^{-1}x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x\right)$

又 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\sin^{-1}x\leqslant\frac{\pi}{2}$

且 $0\leqslant\cos^{-1}x\leqslant\pi$

$-\pi\leqslant-\cos^{-1}x\leqslant0$

$\therefore\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x\leqslant\frac{\pi}{2}$

即　$\sin^{-1}x$ 与 $\frac{\pi}{2}-\cos x$ 都属于$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，于是得到

$$\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x$$

即　$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$，$x\in[-1, 1]$

【注】证明两个反三角函数值相等，通常证明它们的同一三角函数值相等，且它们同属于这个三角函数的同一区间内。

例 15　证明　$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$，其中 x 为任何实数。

证明　$\tan(\tan^{-1}x)=x$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x\right)=\cot(\cot^{-1}x)=x$$

$\therefore$　$\tan(\tan^{-1}x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x\right)$

又　$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$

且　$0<\cot^{-1}x<\pi$

$\therefore$　$-\pi<-\cot^{-1}x<0$

$\therefore$　$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x<\frac{\pi}{2}$

即　$\tan^{-1}x$ 与 $\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}$ 同属于$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$　$\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x$

即　$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

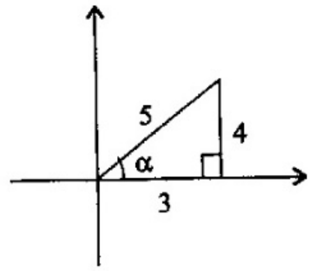
上面例 14，例 15 中的关系式

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\quad,\quad x\in[-1, 1]$$

$$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}\quad,\quad x\text{ 为任何实数}$$

叫做反三角函数值的互余关系。

例 16 证明 $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}-\sin^{-1}\dfrac{5}{13}=\sin^{-1}\dfrac{33}{65}$



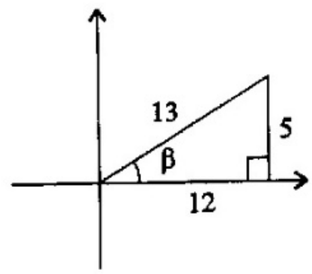
解 设 $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}=\alpha$，$\sin^{-1}\dfrac{5}{13}=\beta$，

那么 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$，

$$\therefore\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}$$

$$=\frac{33}{65}$$



因为 α，β 均属于$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\alpha>\beta$，

所以 $\alpha-\beta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，

于是得到， $\alpha-\beta=\sin^{-1}\dfrac{33}{65}$

即 $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}-\sin^{-1}\dfrac{5}{13}=\sin^{-1}\dfrac{33}{65}$

例 17 证明 $\tan^{-1}\dfrac{1}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{4}=\tan^{-1}\dfrac{7}{11}$。

解 设 $\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\alpha$，$\tan^{-1}\dfrac{1}{4}=\beta$，那么 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{4}$，

$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}}$$

$$=\frac{7}{11}$$

因为 α，β 均属于$\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\tan^{-1}\frac{7}{11}$$

即 $\tan^{-1}\dfrac{1}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{4}=\tan^{-1}\dfrac{7}{11}$

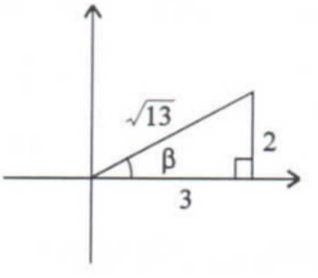
例 18 求证 $\cos^{-1}\frac{5}{13}=2\tan^{-1}\frac{2}{3}$。

解 设 $\cos^{-1}\frac{5}{13}=\alpha$，$\tan^{-1}\frac{2}{3}=\beta$，那么 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$\tan\beta=\frac{2}{3}$，

在等式两边取余弦函数，

左式：$\cos\left(\cos^{-1}\frac{5}{13}\right)=\cos\alpha$

$$=\frac{5}{13}$$



右式：$\cos\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)=\cos 2\beta$

$$=2\cos^2\beta-1$$

$$=2\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2-1$$

$$=\frac{5}{13}$$

$\because$ $\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$，$2\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ α，2β 都属于$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ $\cos\alpha=\cos 2\beta$

$$\cos\left(\cos^{-1}\frac{5}{13}\right)=\cos\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

即 $\cos^{-1}\frac{5}{13}=2\tan^{-1}\frac{2}{3}$

习题 2e

1. 不用计算，求下列各式的值：
   (a) $\sin^{-1}0.5+\cos^{-1}0.5$　　(b) $\tan^{-1}1+\cot^{-1}1$

证明下列各反三角函数的等式：

2. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

3. $\sin^{-1}\frac{40}{41}+\cos^{-1}\left(-\frac{9}{41}\right)=\pi$

4. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{55}$

5. $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{16}{65}$

6. $\cot^{-1}\frac{3}{4}+\cot^{-1}\frac{1}{7}=\frac{3\pi}{4}$

7. $2\sin^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{24}{25}$

8. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{3}{4}$

2.4 反三角函数方程式

我们来看方程式 $\sin^{-1}x - \cos^{-1}\frac{x}{2} = 0$，这种方程式的特点是在反三角函数符号下含有未知数。我们把这种在反三角函数符号下含有未知数的方程式叫做**反三角函数方程式**(inverse trigonometric equation)。

先来看反三角函数的几种最简方程式：

$$\sin^{-1}x = \theta,\ \cos^{-1}x = \theta,$$

$$\tan^{-1}x = \theta,\ \cot^{-1}x = \theta。$$

这些方程式的特点是，要求根据某种反三角函数的值来求未知量。

根据反正弦函数的定义，$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，即方程式 $\sin^{-1}x = \theta$ 在 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时才有解。这时，得到方程的唯一解：$x = \sin\theta$。

例如，当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，$\sin^{-1}x = \frac{\pi}{4}$

$$x = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

类似地，方程式 $\cos^{-1}x = \theta$ 在 $\theta \in [0, \pi]$ 时有唯一解 $x = \cos\theta$。否则，如果 $\theta \notin [0, \pi]$ 则方程式无解。

方程式 $\tan^{-1}x = \theta$ 当 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时有唯一解 $x = \tan\theta$，而当 $\theta \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时无解。

方程式 $\cot^{-1}x = \theta$ 当 $\theta \in (0, \pi)$ 时有唯一解 $x = \cot\theta$，而当 $\theta \notin (0, \pi)$ 时无解。

上述结果可以整理如下：

最简方程式	限制条件	唯一解
$\sin^{-1}x = \theta$	$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$x = \sin\theta$
$\cos^{-1}x = \theta$	$\theta \in [0, \pi]$	$x = \cos\theta$
$\tan^{-1}x = \theta$	$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$x = \tan\theta$
$\cot^{-1}x = \theta$	$\theta \in [0, \pi]$	$x = \cot\theta$

例 19 判断下列方程式是否有解，如果有解，求出方程式的解。

(a) $\cos^{-1}x = 3$　　　　　　　　(b) $\tan^{-1}x = 2$

解　(a) $\because$ $3 \in [0, \pi]$

$\therefore$ 方程式 $\cos^{-1}x = 3$ 有唯一解

即

$$\begin{aligned} x &= \cos 3 \\ &= -0.99 \end{aligned}$$

(b) $\because$ $2 \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ 方程式 $\tan^{-1}x = 2$ 无解。

例 20 解下列方程式：

(a) $\sin^{-1}(x-1) = \frac{\pi}{6}$　　　　　　　　(b) $4\tan^{-1}(x^2 + 3x + 3) - \pi = 0$

解　(a) $\because$ $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ $\sin^{-1}(x-1) = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} x - 1 &= \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) $4\tan^{-1}(x^2 + 3x + 3) - \pi = 0$　　可变形为

$$\tan^{-1}(x^2 + 3x + 3) = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 3 &= \tan\frac{\pi}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$\therefore$ $x = 1$　或　$x = 2$

即原方程式的解为 $x = 1$ 或 $x = 2$。

习题 2f

1. 判断下列方程式是否有解，如果有解，求出方程式的解。

   (a) $\sin^{-1}x = \sqrt{2}$　　(b) $\cos x = \pi$

2. 解下列方程式：

   (a) $\sin^{-1}4x = \dfrac{1}{5}$　　(b) $\cos^{-1}(3x+2) = \dfrac{\pi}{3}$

   (c) $(\tan^{-1}x)^2 = \dfrac{1}{4}$　　(d) $\cot^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{4}$

   (e) $\tan^{-1}x^2 = \dfrac{\pi}{4}$　　(f) $\tan^{-1}\sqrt{3} = \cot^{-1}x$

3. 解下列方程式：

   (a) $2\sin^{-1}(x-1) = \pi$　　(b) $3-\cos^{-1}x^2 = 0$

   (c) $\pi - 4\tan^{-1}(3x+2) = 0$　　(d) $\cot^{-1}(x^2-2x+1) = \dfrac{\pi}{4}$

   (e) $3\sin^{-1}\sqrt{x} - \pi = 0$　　(f) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\cos^{-1}x$

例 21 解方程式　$\tan^{-1}(x+2) - \tan^{-1}(x+1) = \dfrac{\pi}{4}$

解　设　$\alpha = \tan^{-1}(x+2)$，$\tan\alpha = x+2$；

$\beta = \tan^{-1}(x+1)$，$\tan\beta = x+1$。

在原方程式的两边取正切，得到

$$\tan(\alpha-\beta) = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = 1$$

$$\therefore\quad \frac{(x+2)-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)} = 1$$

整理得　$x^2+3x+2=0$

解得　$x=-1$　或　$x=-2$

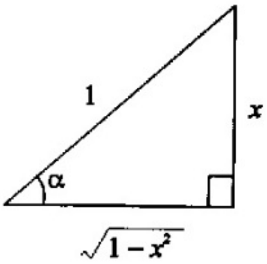
由于在方程式的变形中可能会产生增根，所求出的根还应代入到原方程式中进行检验。

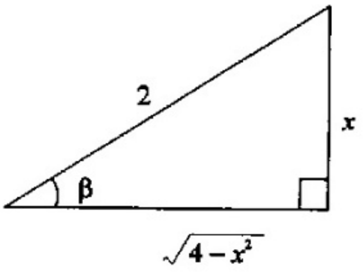
经检验知，$x=-1$，$x=-2$ 均适合原方程式，

即原方程式的解为　$x=-1$　或　$x=-2$

例 22 解方程式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3}$

解 设 $\sin^{-1}x=\alpha$，$\sin^{-1}\frac{x}{2}=\beta$，则 $\sin\alpha=x$，$\sin\beta=\frac{x}{2}$





在原方程式的两边取余弦，得到

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{4-x}-x\cdot\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}=-1+x^2$$

$$(1-x^2)(4-x^2)=(1-x^2)^2$$

$$(1-x^2)[(4-x^2)-(1-x^2)]=0$$

$$x^2=1$$

$$x=1 \quad 或 \quad x=-13$$

经检验知，$x=1$ 是原方程式的根，$x=1$ 为增根应该舍去。

即原方程式的解为 $x=1$。

上面例 22 中，在原方程式的两边取余弦，可使其中仅一项含有根号，使得两边仅平方一次就可将方程式有理化；而如果在原方程式两边取正弦，则方程式中有两项含有根号，往下运算时显得更为复杂。

例 23 解方程式 $\sin^{-1}x+3\cos^{-1}x=\frac{7\pi}{6}$。

解 运用公式 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$，

可将原方程式化简为 $\frac{\pi}{2}+2\cos^{-1}x=\frac{7\pi}{6}$

$$2\cos^{-1}x=\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \cos^{-1}x=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad x=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}$$

例 24 解方程式 $2\sin^{-1}x = \cos^{-1}2x$。

解 设 $\alpha = \sin^{-1}x$，则 $\sin\alpha = x$，

在方程式的两边取余弦，得

$$\cos(2\alpha) = \cos(\cos^{-1}2x)$$

$\therefore$ $1 - 2\sin^2\alpha = 2x$

即 $1 - 2x^2 = 2x$

$\therefore$ $2x^2 + 2x - 1 = 0$

解得 $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$，$x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

因为 x_1，$2x_1$ 均属于 $[-1, 1]$，且 $2\sin^{-1}x_1$ 与 $\cos^{-1}2x_1$ 均属于 $(0, \pi)$，而在这个区间内余弦值相等可推出相应的两个角相等，所以 $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 是原方程式的解。而 $|x_2| > 1$，所以 $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ 是增根。

从上面看到，求解反三角函数方程式的基本方法是通过对方程两边施行某一三角运算将方程式先变形，然后再求解。由于变形后的方程式与原方程式不一定等价，所求得的结果要代入到原方程式中进行检验。

习题 2g

1. (a) 方程式 $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \dfrac{2\pi}{3}$ 有解吗？

   (b) 方程式 $\cos^{-1}x + \cos^{-1}(-x) = \dfrac{\pi}{2}$ （$|x| \leqslant 1$） 有解吗？

2. 解下列方程式：

   (a) $\tan^{-1}x + 3\cot^{-1}x = \dfrac{3\pi}{4}$

   (b) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{\pi}{4}$

   (c) $\cot^{-1}x + \cot^{-1}(5-x) = \cot^{-1}1$

   (d) $2\sin^{-1}x + \cos^{-1}(1-x) = 0$

   (e) $\sin^{-1}\dfrac{5}{x} + \sin^{-1}\dfrac{12}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

   (f) $\sin^{-1}2x + \sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{3}$

   (g) $\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \cot^{-1}x$

   (h) $\sin^{-1}x = \sin^{-1}2x$

   (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}\dfrac{x}{2} = \dfrac{5\pi}{6}$

   (j) $\tan^{-1}4 - \tan^{-1}x = \tan^{-1}2$

总复习题 2

1. 求下列各式的值：

(a) $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$　　(b) $\cot[\cot^{-1}(-\sqrt{13})]$

(c) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{11}\right)$　　(d) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{2}{7}\right)$

(e) $\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{7}\right)$　　(f) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{5}{13}+\frac{\pi}{6}\right)$

(g) $\tan(\sin^{-1}x)$，$x\in[-1, 1]$　　(h) $\cot(\cos^{-1}x)$，$x\in(-1, 1)$

2. 求下列各式的值：

(a) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$　　(b) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7}{8}\pi\right)$

(c) $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right]$　　(d) $\cot^{-1}\left[\cot\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$

3. 求下列各式的值：

(a) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{15}{17}\right)$　　(b) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$

4. 求下列各式的值：

(a) $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{5}{13}$　　(b) $\sin^{-1}\frac{5}{13}-\sin^{-1}\frac{3}{5}$

(c) $\tan^{-1}3+\tan^{-1}\frac{1}{2}$　　(d) $2\tan^{-1}\frac{1}{4}$

5. 证明：

(a) $\cos^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{7}=\cos^{-1}\left(-\frac{11}{4}\right)$

(b) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}+\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}=\tan^{-1}(\sqrt{2}+1)^2$

(c) $\tan^{-1}3+\cot^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)=\pi-\tan^{-1}\frac{1}{8}$

(d) $\cot^{-1}\sqrt{3}+\cot^{-1}(2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{4}$

(e) $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

6. 解下列方程式：

(a) $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{3\pi}{4}$

(b) $\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(\sqrt{3}x)$

(c) $3\tan^{-1}(2-\sqrt{3})-\tan^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{3}$

(d) $\sin^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{3x}-\sin^{-1}\sqrt{1-x}=\sin^{-1}\frac{1}{3}$

7. 证明：

(a) $\sin(\cos^{-1}x)=\sqrt{1-x^{2}}$，$|x|\leqslant 1$

(b) $\sin(\tan^{-1}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$

(c) $\tan(\cos^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^{2}}}{x}$，$0<|x|\leqslant 1$

(d) $\cot(\cos^{-1}x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}$，$|x|<1$

3 微分法(二)

3.1 隐函数微分法

如果变量 x，y 之间的函数关系是由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的，那么，这样确定的函数就叫做**隐函数**(implicit function)。

例如，分别由方程 $y^2-2px=0$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所确定的函数就是隐函数。

在求隐函数的导数时，可把 y 看做是由 $F(x, y)=0$ 这方程确定的 x 的函数，因此可以把这个方程看做是恒等式，再应用链导法，在两边对 x 求导数，然后解出 $\frac{dy}{dx}$。

例1 已知 $y^2-2px=0$，求$\frac{dy}{dx}$。

解 对方程两边求导，得

$$\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(2px)=0$$

这里 $\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$

$$=2y\frac{dy}{dx}$$

$$=2y\frac{dy}{dx}$$

$\therefore \quad 2y\frac{dy}{dx}-2p=0$

即 $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$

例2 已知 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解 对方程两边求导，得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

即 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

例3 已知 $x^5+2x^2y^3+y^5=0$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解 对 x 求导数，得

$$\frac{d}{dx}(x^5)+\frac{d}{dx}(2x^2y^3)+\frac{d}{dx}(y^5)=0$$

即 $$5x^4+6x^2y^2\frac{dy}{dx}+4xy^3+5y^4\frac{dy}{dx}=0$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}(6x^2y^2+5y^4)=-4xy^3-5x^4$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=-\frac{4xy^3+5x^4}{6x^2y^2+5y^4}$$

例4 已知 $xy=2\cos 2x$，证明 $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4xy=0$。

解 $$xy=2\cos 2x$$

$$y+x\frac{dy}{dx}=-4\sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}=-8\cos 2x$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=-4xy$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4xy=0$$

习题 3a

已知下列方程，求$\frac{dy}{dx}$：

1. $y^2-4x=0$

2. $3x^2-2y=y^2$

3. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

4. $xy=1$

5. $x^2+y^2=4$

6. $x^2+2xy-y^2=2x$

7. $y^2(x+1)=x^2$

8. $xy-y^2=\frac{1}{x}$

9. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

10. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

11. $y^3=3(x-2)$

12. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

13. 已知 $xy=a\sin 2x$，证明 $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4xy=0$

14. 已知 $y^2=1+\cos x$，证明 $2y\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=1$

15. 已知 $x^2y=4\cos x$，证明 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+(2+x^2)y=0$

3.2 反三角函数的导数

● 反函数的导数

我们已经学习了三角函数的导数的求法，能否利用三角函数的导数求反三角函数的导数呢？下面先来研究互为反函数的两个函数的导数之间的关系。

看一个例子。设 $y=f(x)=2x-3$

那么 $$\frac{dy}{dx}=2$$

其反函数 $$f^{-1}(y)=x=\frac{y+3}{2}$$

那么 $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

一般地，如果 $y=f(x)$，$f'(x)$存在且 $f'(x)\neq 0$，$x=f^{-1}(y)$是 $y=f(x)$的反函数，那么

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

反三角函数的导数

利用互为反函数的两个函数的导数之间的关系，可以求出反三角函数的导数。

看函数 $y=\sin^{-1}x$，$x\in[-1, 1]$

它的反函数是 $x=\sin y$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

当 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dx}{dy}=\cos y>0$，得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\\&=\frac{1}{\cos y}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cos^{-1}x&=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\\frac{d}{dx}\tan^{-1}x&=\frac{1}{1+x^2}\\\frac{d}{dx}\cot^{-1}x&=-\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

例5 求 $y=\sin^{-1}\frac{x}{3}$ 的导数。

解
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{3}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\end{aligned}$$

例6 求 $y=\tan^{-1}\frac{x}{1-x^2}$ 的导数。

解
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)\\&=\frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+x^2}\cdot\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\\&=\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\end{aligned}$$

习题 3b

求下列函数的导数：

1. (a) $y=\sin^{-1}2x$　　(b) $y=\cos^{-1}\frac{x}{2}$

   (c) $y=\tan^{-1}\frac{x}{3}$　　(d) $y=\cot^{-1}\frac{3x}{4}$

2. (a) $y=\sin^{-1}\sqrt{x}$　　(b) $y=\tan^{-1}x^{\frac{5}{2}}$

   (c) $y=\cos^{-1}\frac{3}{2x}$　　(d) $y=\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{x}}$

3. (a) $y=\sin^{-1}(2x-3)$　　(b) $y=\tan^{-1}(3-4x)$

   (c) $y=\sin^{-1}\left(\frac{2x+3}{7}\right)$　　(d) $y=\cos^{-1}\left(\frac{4-x}{\sqrt{3}}\right)$

4. (a) $y=2\sin^{-1}x^2$　　(b) $y=(\tan^{-1}x)^2$

   (c) $y=\sin^{-1}(\cos x)$　　(d) $y=\cot^{-1}x^2$

5. (a) $y=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$　　(b) $y=(4+x^2)\tan^{-1}\frac{x}{2}$

   (c) $y=x\sqrt{16-x^2}+16\sin^{-1}\frac{x}{4}$　　(d) $y=x+\frac{8x}{x^2+4}-4\tan^{-1}\frac{x}{2}$

3.3 对数函数的导数

● 求极限 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

我们可以从下表看出当 $x \to 0^+$ 时函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的变化趋势。

x	$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$f(x)$的近似值
1	$1+1$	2
0.1	$(1+0.1)^{10}$	2.59374
0.01	$(1+0.01)^{100}$	2.70481
0.001	$(1+0.001)^{1000}$	2.71692
0.0001	$(1+0.0001)^{10000}$	2.71815
0.00001	$(1+0.00001)^{100000}$	2.71827
……	……	……

而当 $x \to 0^-$ 时函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 有相同的变化趋势。这表明当 $x \to 0$ 时函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 趋近一个常数，用 e 表示这个常数，则有

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

e 是无理数，它的近似值是 2.71828182845…，e 还是自然对数的底，在数学与其他科技领域常常会用到它。

另外，如果设 $y=\frac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时，$y \to \infty$，于是又得到

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y \to \infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$

例7 求 (a) $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

解 (a) $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}$

$$=\frac{1}{e}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}$

$$=\lim_{x\to 0}[(1+(-2x))^{-\frac{1}{2x}}]^{-2}$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right]^{-2}$$

$$=e^{-2}$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{1+x}\cdot\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(1+x)}\right)^{-(1+x)}\right]^{-1}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-1}$$

$$=e^{-1}\cdot 1$$

$$=e^{-1}$$

习题 3c

求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$

2. $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{-y}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-8}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

9. $\lim\limits_{y\to 0}(1-2y)^{\frac{1}{y}}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x}$

自然对数的求导公式

设 $y = \ln x$

则有 $y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x$$

$$= \ln\frac{x + \Delta x}{x}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$\therefore$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\ln e$$

$$= \frac{1}{x}$$

即

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

例9 求 $y = \ln(2x^2 + 3x + 1)$的导数。

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^2 + 3x + 1}\frac{d}{dx}(2x^2 + 3x + 1)$$

$$= \frac{4x + 3}{2x^2 + 3x + 1}$$

例 10 求 $y=\log_a x$ 的导数。

解

$$\begin{aligned} y &= \log_a x \\ &= \frac{\ln x}{\ln a} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x\ln a} \end{aligned}$$

一般而言，求对数函数的导数，可先把所给的对数换成自然对数后，再求导数。

例 11 求 $y=\log_a\cos x$ 的导数。

解

$$\begin{aligned} y &= \log_a\cos x \\ &= \frac{\ln\cos x}{\ln a} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(\ln\cos x) \\ &= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot -\sin x \\ &= -\frac{\tan x}{\ln a} \end{aligned}$$

例 12 求 $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 的导数。

解

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \\ &= \frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)] \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-x^2}\right) \\ &= \frac{1}{(1-x^2)} \end{aligned}$$

例 13 求下列函数的导数：

(a) $y = x^3 \ln x$

(b) $y = (\log x)^3$

解 (a)
$$y = x^3 \ln x$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x}$$
$$= 3x^2 \ln x + x^2$$

(b)
$$y = (\log x)^3$$
$$= \left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)^3$$
$$= \frac{1}{(\ln 10)^3}(\ln x)^3$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\ln 10)^3} \cdot 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}$$
$$= \frac{3(\ln x)^2}{x(\ln 10)^3}$$

习题 3d

1. 求下列函数的导数：

(a) $\ln(3x+5)$

(b) $\ln ax$

(c) $\ln \dfrac{1}{x}$

(d) $\ln(3x^2 - 2x - 4)$

(e) $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$

(f) $\ln \sqrt{\dfrac{1-2x}{x+1}}$

(g) $\ln \tan x$

(h) $\ln \sin^2 x$

2. 求下列函数的导数：

(a) $y = \log 3x$

(b) $y = \log_a \sin x$

(c) $y = \log_a(2x^3 + 3x^2)$

(d) $y = \log(1 + \cos x)$

(e) $y = \log_a \sqrt{1+x}$

(f) $y = \log_a x^2$

3. 求下列函数的导数：

(a) $y = \ln(\ln x)$

(b) $y = x \ln x$

(c) $y = x \log_3 x$

(d) $y = x(\ln^2 x)$

(e) $y = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

(f) $y = \ln \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$

3.4 指数函数的导数

● 指数函数 $y = e^x$ 的求导公式

先对 $y = e^x$ 两边取自然对数，得 $\ln y = x$

对 x 微分，得
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$

即
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

例 14 求 $y = e^{5x}$ 的导数。

解
$$\frac{dy}{dx} = e^{5x} \cdot 5 = 5e^{5x}$$

例 15 求 $y = e^{2x}\cos 3x$ 的导数。

解
$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}(\cos 3x) + e^{2x}(-3\sin 3x) = e^{2x}(2\cos 3x - 3\sin 3x)$$

● 其他指数函数的导数

设 $y = a^x \quad (a > 0)$

两边取自然对数，得 $\ln y = x \ln a$

对 x 微分，得
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a$$
$$\frac{dy}{dx} = y \ln a$$

即
$$\frac{dy}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

一般而言，求指数函数的导数，可先（两边）取自然对数，然后再两边求导数，整理后即得。

例16 求 $y = a^{5x}$ 的导数。

解一 $\ln y = 5x\ln a$ （两边取自然对数）

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 5\ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = 5y\ln a$$

$$= 5a^{5x}\ln a$$

解二 $y = a^{5x}$

$$\frac{dy}{dx} = (a^{5x}\ln a)(5)$$

$$= 5a^{5x}\ln a$$

习题 3e

1. 求下列函数的导数：

   (a) $2e^x$　　(b) $\frac{1}{e^x}$　　(c) $y = e^{3x}$

   (d) e^{-4x}　　(e) $\frac{1}{\sqrt{e^x}}$　　(f) $\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)^2$

2. 求下列函数的导数：

   (a) 3^x　　(b) 10^{-x}　　(c) a^{2x}　　(d) $a^{\sin x}$

   (e) $e^{\tan x}$　　(f) e^{x^2}　　(g) $e^{\sqrt{x}}$　　(h) $e^{-\frac{1}{x}}$

3. 求下列函数的导数：

   (a) $y = x^3e^x$　　(b) $y = e^x\sin x$

   (c) $y = x^ne^{-x}$　　(d) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

   (e) $y = e^{2x}\ln x$　　(f) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

   (g) $y = e^{-3x}\sin 2x$

4. 求下列函数的导数：

   (a) $y = x^3 + 3^x$　　(b) $y = 2^xe^x$

   (c) $y = x\,a^x$　　(d) $y = \frac{1+x}{2^x}$

   (e) $e^y = x^2 + 1$　　(f) $y = e^{e^x}$

3.5 对数微分法

如果一个函数是几个函数的乘积，或者函数的指数又是函数，例如，

$$y=\frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-1)},\quad y=(\sin x)^{x},\quad y=x^{2x}$$

等，直接求它们的导数可能有困难,可以先两边取对数，然后再求导。这种方法叫做对数微分法。

例 17 求 $y=\frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-1)}$ 的导数。

解 两边取对数，得

$$\ln y=\ln(x+1)+\ln(x-3)-\ln(x+3)-\ln(x-1)$$

两边求导，得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}$$

$$=\frac{4(x^{2}+3)}{(x^{2}-1)(x^{2}-9)}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{4(x^{2}+3)}{(x^{2}-1)(x^{2}-9)}\cdot\frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\frac{4(x^{2}+3)}{(x+3)^{2}(x-1)^{2}}$$

例 18 求 $y=(\sin x)^{x}$ 的导数。

解 两边取对数，得

$$\ln y=x\ln\sin x$$

两边求导，得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x\frac{d}{dx}(\ln\sin x)+\ln\sin x$$

$$=x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}+\ln\sin x$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=(\sin x)^{x}(x\cot x+\ln\sin x)$$

习题 3f

1. 求下列函数的导数：

(a) $y=\dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$　　(b) $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$

(c) $y=\dfrac{x-1}{x\sqrt{x^2+1}}$　　(d) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

2. 求下列函数的导数：

(a) $y=x^x$　　(b) $y=x^{e^x}$　　(c) $y=x^{\sin x}$

(d) $y=(\ln x)^{e^x}$　　(e) $x^y=y^x$

3. 已知：$y=u^v(u>0)$，其中 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 可导。

求证：$\dfrac{dy}{dx}=u^v\left(\dfrac{v}{u}\dfrac{du}{dx}+\ln u\dfrac{dv}{dx}\right)$。

3.6 罗比达法则

我们有时需要研究两个趋向于零或趋向于无穷大的函数 $f(x)$与 $g(x)$的比值

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

的极限，这样的式子通常表示成

$$\frac{0}{0}\ 或\ \frac{\infty}{\infty}$$

而称为不定式。

下面，我们将用**罗比达法则**(L' Hospital's rule)来求一些不定式的极限。

罗比达法则

若 ① $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$;

② f 与 g 在所考虑的区间内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在；

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

● $\frac{0}{0}$ 型不定式

像我们前面学习过的极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ 等，由罗比达法则可以容易地求得。

例 19 求 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$。

解 当 $x = 2$ 时，这分式是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式。

用罗比达法则，得

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{2x + 1} = \frac{4}{5}$$

例 20 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$。

解 由罗比达法则，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos 2x}{3 \cos 3x} = \frac{2}{3}$$

例 21 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$。

解 由罗比达法则，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

在例 21 中，我们接连三次使用了罗比达法则。

● $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

求$\frac{\infty}{\infty}$型不定式的极限，同样可以使用罗比达法则，只不过要把法则中的条件

①由 $$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$

换成 $$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

例 22 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$。

解 由罗比达法则，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\\&=0\end{aligned}$$

习题 3g

1. 求下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$

(b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$

(c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cot^{-1}x-1}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$

(e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}{x-1}$

(f) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^7-1}{x^3-1}$

2. 求下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}$

(d) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x\left(即\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln x}$

(f) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3}{2^x}$

总复习题 3

1. 已知下列方程，求 $\dfrac{dy}{dx}$：

(a) $y^3-3y+2ax=0$　　(b) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

2. 求下列函数的导数：

(a) $y=\sin e^x$　　(b) $y=e^{\cos 3x}$

(c) $y=\tan^{-1}4x^2$　　(d) $y=\sin^{-1}\sqrt{x}$

(e) $y=\ln(e^x+e^{-x})$　　(f) $y=x^a+a^x$

(g) $y=2(2e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$　　(h) $y=a^{2x+1}$

3. 求下列函数的导数：

(a) $y=\log(x^2+x+1)$　　(b) $y=\ln(\cos^2x)+2x\tan x-x^2$

(c) $y=\tan^{-1}\dfrac{x-a}{x+a}$　　(d) $y=\ln(\ln x)-\dfrac{1}{\ln x}$

4. 当 $x=0$ 时，下列各函数的导数值为何？

(a) $y=\tan^{-1}x+(\cot x)^{-1}$　　(b) $y=\sin^{-1}(x^2)+(\sin^{-1}x)^2$

5. 求下列各导数值：

(a) $\dfrac{d}{dx}(e^{1+x^2})$，当 $x=0$ 时　　(b) $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$，当 $x=1$ 时

(c) $\dfrac{d^2}{dx^2}\ln(1+x)$，当 $x=1$ 时　　(d) $\dfrac{d}{dx}(x\,e^x)$，当 $x=0$ 时

6. 用两边取对数，再求导数的方法，求下列各函数的导数：

(a) $y=(x^2-1)(x^2-3)(x^2-5)$　　(b) $y=\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$

(c) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$　　(d) $y=(\ln x)^x$

(e) $y=\left(\dfrac{a}{x}\right)^x$　　(f) $y=(\sin 2x)^x$

(g) $y=a^{\tan x}$

7. 求下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$　　(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$　　(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$

8. 若 $y=e^{-x}\sin 2x$，试证 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+5y=0$。

9. 若 $y=e^{2x}(ax+b)$，a，b 为常数，求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$，并用此结果求

$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$ 中的 p 与 q 之值。

10. 若 $y\cos x=e^x$，证明 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\tan x\frac{dy}{dx}-2y=0$。

4 坐标变换

4.1 坐标轴的平移(移轴)

点的坐标和曲线的方程式是对一定的坐标系来说的。例如，在图 4－1 的圆中，其圆心 O′ 在坐标系 xOy 中的坐标是 (3, 2)，其方程式是 $(x-3)^2+(y-2)^2=5^2$；如果取坐标系 $x'O'y'$($O'x' /\!/ Ox$, $O'y' /\!/ Oy$)，那么在这个坐标系中，它们就分别变成(0, 0)和 $x'^2+y'^2=5^2$。

这就是说，对于同一点或者同一曲线，由于选取的坐标系不同，点的坐标或曲线的方程式也不同。从上面例子我们看出，把一个坐标系变换为另一个适当的坐标系，可以使曲线的方程式化简，从而便于研究曲线的性质。

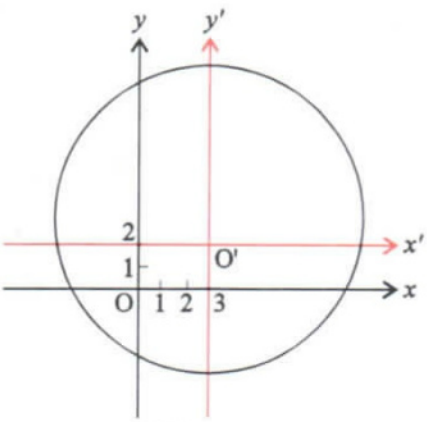


图 4－1

坐标轴的方向和长度单位都不改变，只改变原点的位置，这种坐标系的变换叫做坐**标轴的平移**，简称**移轴**(translation of axes)。

下面研究在平移情况下，同一个点在两个不同的坐标系中坐标之间的关系。

设 O′在原坐标系 xOy 中的坐标为(h, k)，以 O′为原点平移坐标轴，建立新坐标系 $x'O'y'$。如图 4－2，平面内任意一点 P 在原坐标系中的坐标为(x, y)，在新坐标系中的坐标为(x', y')，点 P 到 x 轴、y 轴的垂足分别是 M、N，可以看出，

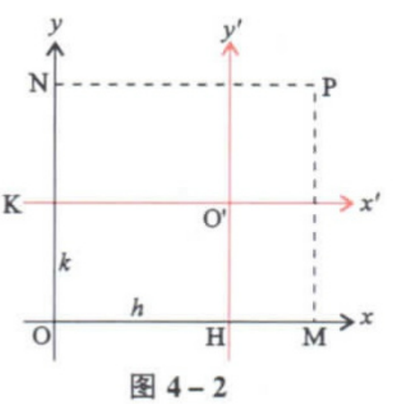


图 4－2

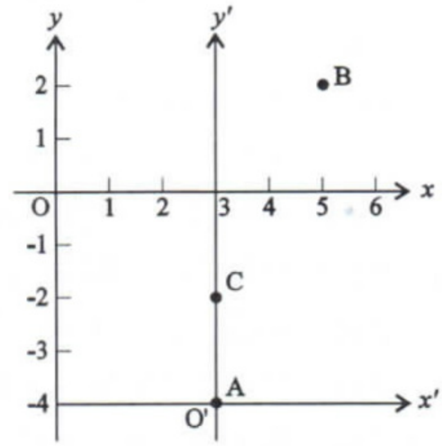
$$
\begin{aligned}
x &= OH + HM \\
&= h + x' \\
y &= OK + KN \\
&= k + y'
\end{aligned}
$$

因此，点 P 的原坐标、新坐标之间，有下面的关系：

$$x = x' + h,\ y = y' + k$$

上面的公式叫做平移(移轴)公式。

例 1 平移坐标轴，把原点移到 O′(3，－4)(如右图)，求下列各点的新坐标：O(0，0)、A(3，－4)、B(5，2)、C(3，－2)。



解 把已知各点的原坐标分别代入

$x = x' + 3$

$y = y' - 4$

得到它们的新坐标：

O(－3，4)、A(0，0)、B(2，6)、C(0，2)。

4.2 利用坐标轴的平移化简二元二次方程式

现在，我们研究如何选择坐标系来化简方程式。先看下面的例子。

例 2 平移坐标轴，化简方程式 $x^2 - y^2 + 8x - 14y - 133 = 0$。

解一 把 $x = x' + h$，$y = y' + k$ 代入方程式，得

$$(x' + h)^2 - (y' + k)^2 + 8(x' + h) - 14(y' + k) - 133 = 0$$

就是

$$x'^2 - y'^2 + (2h + 8)x' - (2k + 14)y' + h^2 - k^2 + 8h - 14k - 133 = 0 \cdots\cdots(1)$$

设 $2h + 8 = 0$，$2k + 14 = 0$； 得 $h = -4$， $k = -7$

代入方程(1)得 $x'^2 - y'^2 = 100$

解二 将方程式 $x^2 - y^2 + 8x - 14y - 133 = 0$ 配方

得 $x^2 + 8x - (y^2 + 14y) = 133$

$(x + 4)^2 - (y + 7)^2 = 100$

设 $x' = x + 4$，$y' = y + 7$；得 $x^{12} - y^{12} = 100$

上面的例 2 说明，对于缺 xy 项的二元二次方程，

$$ax^2+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad (a\text{、}b\text{ 不同时为零})$$

我们可利用坐标轴平移，将它化简。

习题 4a

1. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(4, 5)$。求下列各点的新坐标，并画出新坐标轴和各点：

   $A(3, -6)$、$B(7, 0)$、$C(-4, 5)$、$D(0, -8)$
2. 当坐标轴平移后，点 $(-1, 2)$ 的新坐标为 $(4, -3)$，求新原点的原坐标。
3. 当坐标轴平移后，点 $(3, -3)$、$(-2, 2)$ 的新坐标为 $(2, -1)$、(a, b)，求 a 与 b。
4. 当坐标轴平移后，点 $(-4, 2)$、$(6, -2)$ 的新坐标为 $(6, \alpha)$、$(\beta, 4)$，求 α 与 β。
5. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(2, -3)$。求 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 在新坐标系中的方程，并画出坐标轴和图形。
6. 利用平移变换，化简下列方程

   (a) $x^2+y^2-6x+12y-4=0$

   (b) $8x^2-9y^2-16x+36y-77=0$

   (c) $x^2+y^2-2x+6y-6=0$

   (d) $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$
7. 平移坐标轴后，原点移到 $O'(1, -2)$，A、B、C、D 各点的新坐标分别是 $(-1, 1)$、$(0, -2)$、$(3, 2)$、$(2, 0)$，求它们的原坐标，并画出原坐标轴和各点。
8. 经过坐标轴平移后，点 A 的坐标由 $(2, -1)$ 变为 $(-2, 1)$，求坐标原点在新坐标系中的坐标。

4.3 坐标轴的旋转（转轴）

如果坐标轴的原点和长度单位不变，只是坐标轴按同一方向绕原点旋转同一角度，这种坐标系的变换叫做**坐标轴的旋转**，简称**转轴**(rotation of axes)。

我们来求转轴时的坐标变换公式。

设坐标轴旋转角为 θ。在平面内任取一点P，它在坐标系 xOy 和 $x'Oy'$ 中的坐标分别为 (x, y) 和 (x', y')，如图 4－3。

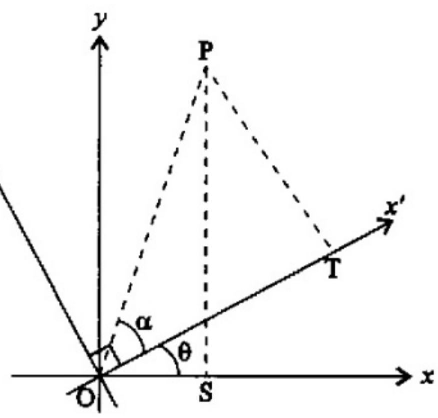


图 4－3

作 PS、PT 分别垂直于 x 轴、x' 轴。连结 OP，设 $\angle POT=\alpha$，那么

$$x'=|OP|\cos\alpha$$

$$y'=|OP|\sin\alpha$$

所以

$$\begin{aligned} x &= |OP|\cos(\theta+\alpha) \\ &= |OP|(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha) \\ &= x'\cos\theta-y'\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= |OP|\sin(\theta+\alpha) \\ &= |OP|(\sin\theta\cos\alpha+\cos\alpha\sin\theta) \\ &= x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{aligned}$$

上面的公式叫做旋转(转轴)公式。

例 3 把坐标轴旋转 $\frac{\pi}{6}$，求点 $P(-1, \sqrt{3})$ 在新坐标系中的坐标。

解 把 $\theta=\frac{\pi}{6}$，$x=-1$，$y=\sqrt{3}$ 代入转轴公式，得

$$-1=x'\cos\frac{\pi}{6}-y'\sin\frac{\pi}{6}$$

$$-2=\sqrt{3}x'-y' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及

$$\sqrt{3}=x'\sin\frac{\pi}{6}+y'\cos\frac{\pi}{6}$$

$$2\sqrt{3}=x'+\sqrt{3}y' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)×$\sqrt{3}$，得

$$-2\sqrt{3}=3x'-\sqrt{3}y' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)+(3)，得

$$x'=0$$

$$y'=2$$

∴ 点 P 在新坐标系中的坐标是 $(0, 2)$。

例 4　将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{3}$，求曲线 $2x^2-\sqrt{3}xy+y^2=10$ 在新坐标系中的方程。

解　把 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入转轴公式，得

$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos\frac{\pi}{3}-y'\sin\frac{\pi}{3}\\
&=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'\\
y &= x'\sin\frac{\pi}{3}+y'\cos\frac{\pi}{3}\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'
\end{aligned}
$$

代入原方程式，得新坐标系的方程式

$$
2\left(\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)^2=10
$$

化简，得　$\frac{x'^2}{20}+\frac{y'^2}{4}=1$

习题 4b

1. 设旋转角 $\theta=-\frac{\pi}{4}$，求新坐标系中的两点 $A(-3,2)$，$B(1,0)$ 在原坐标系的坐标。
2. 设旋转角 $\theta=\frac{\pi}{6}$，求原坐标系中的两点 $C(2,-1)$，$D(0,1)$ 在新坐标系的坐标。
3. 按所给的角 θ 旋转坐标轴，变换下列方程：

   (a) $x+y=0$，　$\theta=\frac{\pi}{4}$；

   (b) $x-y=0$，　$\theta=\frac{\pi}{2}$；

   (c) $x^2+y^2=9$，　$\theta=-\frac{\pi}{3}$；

   (d) $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2=8$，　$\theta=-\frac{\pi}{3}$。
4. 如果坐标原点不动，把坐标轴旋转怎样的角，才能使点 $A(-2,3)$ 落在坐标系的纵坐标轴上？

总复习题 4

1. (a) 平移坐标轴，把原点分别移到何处，点的坐标变化如下：

$$A(1,\ 0)\to A(4,\ 3);\ B(2,\ 4)\to B(2,\ -3)$$

(b) 经过坐标轴平移，把原点移到 $O'(3,\ -2)$后，A、B、C、D 各点的新坐标分别是$(0,\ 2)$、$(-3,\ 0)$、$(-1,\ 3)$、$(1,\ 1)$，求它们的原坐标，并画出新坐标轴和各点。

2. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(-4,\ 2)$，求下列各点的新坐标，并画出新坐标轴和各点：

$$A(-8,\ 3);\ B(2,\ 3);\ C(-4,\ 2);\ O(0,\ 0)。$$

3. 平移坐标轴，把原点移到 O'。求下列各曲线的新方程式。

(a) $y=3$, $O'(-2,\ 1)$

(b) $3x-4y=6$, $O'(3,\ 0)$

(c) $x^2+y^2-4x-2y=0$, $O'(2,\ 1)$

(d) $x^2+6x-y+11=0$, $O'(-3,\ 2)$

4. 平移坐标轴化简方程式：

(a) $x^2+y^2+4x+8y-5=0$

(b) $x^2+2y^2-4x+8y-5=0$

(c) $4x^2-9y^2+16x-54y-29=0$

(d) $x^2-4x-y+5=0$

5. 把点 $A(4,\ 3)$的坐标变成$(3,\ 4)$，坐标轴应旋转多大角度？

6. 坐标轴旋转多大角度，才能使点 $M(1,\ 2+\sqrt{3})$的横纵坐标相等？求出点 M 的新坐标。

7. 将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后，点 M 的坐标变为$(1,\ 2)$，求点 M 在原坐标系的坐标。

8. 将坐标轴旋转 $-\frac{\pi}{2}$，求曲线 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 在新坐标系中的方程式。

9. 将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{2}$，求曲线 $y^2=2px$ 在新坐标系中的方程式。

*10. 证明，不论坐标轴转多大角度，方程 $x^2+y^2=r^2$ 的形式不变。

附录Ⅰ 利用坐标轴的旋转化简二元二次方程式

从上节例4我们看到，把坐标轴旋转一个适当的角度，可以化简二元二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad (2h\neq 0) \tag{1}$$

使新方程没有 $x'y'$ 项。如何选择旋转角呢？下面我们来研究这个问题。

使坐标轴旋转 θ 角，这时

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

代入方程式(1)，可得

$$Ax'^2+2Hx'y'+By'^2+2Gx'+2Fy'+C=0 \tag{2}$$

这里

$$A=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$$

$$2H=-2a\sin\theta\cos\theta+2h\cos^2\theta-2h\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta$$

$$B=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$$

$$2G=2g\cos\theta+2f\sin\theta$$

$$2F=-2g\sin\theta+2f\cos\theta$$

为了使 $2H=0$，即

$$-2a\sin\theta\cos\theta+2h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2b\sin\theta\cos\theta=0$$

也就是使

$$2h\cos 2\theta=(a-b)\sin 2\theta$$

只需取 θ 满足下式就可以了：

$$\cot 2\theta=\frac{a-b}{2h}$$

取满足上述公式的角 θ，作旋转变换，就可以使方程式(2)中没有 $x'y'$ 项。

由于旋转公式里只用到 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值，因此不一定要求出 θ 角的度数，有时可在求出 $\cos 2\theta$ 后，再直接利用下列三角恒等式来计算 $\sin\theta$、$\cos\theta$。

$$\begin{cases}\sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}\\[2ex]\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}\end{cases} \tag{3}$$

要使新方程不含 $x'y'$ 项，只要取 2θ 的最小正值即可，也就是取 $0<2\theta<\pi$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，这时 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都是正值，因此，(3)式根号前都取正号。

例 5　利用坐标轴的旋转化简方程式　$2x^2+4xy+5y^2-22=0$。

解
$$\cot 2\theta=\frac{2-5}{4}=-\frac{3}{4}$$
$$\cos 2\theta=-\frac{3}{5}$$
$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

因此旋转公式是　$x=\dfrac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$，$y=\dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$

代入原方程式，得
$$2\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)+5\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)^2-22=0$$

即
$$6x'^2+y'^2-22=0$$

例6　利用坐标轴的旋转，化简方程式　$x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0$。

解　$\cot 2\theta=\dfrac{1-1}{2}=0$

$\therefore\quad 2\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\quad \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

因此旋转公式是　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$

代入原方程得
$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\right]^2+2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right]+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right]^2$$
$$-2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\right]+2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right]=0$$

整理后得
$$x'^2+2y'=0$$

附录Ⅱ　一般二元二次方程式的化简

我们已经知道，坐标轴旋转适当的角度，可以化简二元二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+C=0 \quad (a、2h、b\text{不全为零})$$

使新方程中没有 $x'y'$项。对于不含 $x'y'$项的二次方程，通过平移还可以继续化简。

例 7　化简方程式 $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$

解　$\cot 2\theta=\dfrac{1-1}{2}=0$

$\therefore\quad 2\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\quad \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以，转轴公式是　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$

代入原方程，化简得　$2x'^2+2\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'=0$

再作平移变换，

将上式配方，得　$2\left(x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\sqrt{2}\left(y'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

设　$x''=x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y''=y'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

代入上式得　$2x''^2=\sqrt{2}y''$

即　$2x''^2-\sqrt{2}y''=0$

习题

1. 利用坐标轴的旋转化简下列方程：

(a) $x^2-2xy+y^2=12$　　(b) $x^2+4xy+y^2=16$

(c) $4x^2+8xy-2y^2-7=0$　　(d) $21x^2-10\sqrt{3}xy+31y^2=144$

2. 化简下列方程式：

(a) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 26x - 22y + 35 = 0$

(b) $4xy - 3x^2 + 4 = 0$

(c) $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0$

(d) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x - 140y + 200 = 0$

5 圆锥曲线

5.1 圆锥曲线

用一个不经过圆锥顶点的平面截圆锥面，根据相交位置的不同，如图 5－1，可以得到一些形状不同的曲线，这些曲线统称**圆锥曲线**(conic sections)。

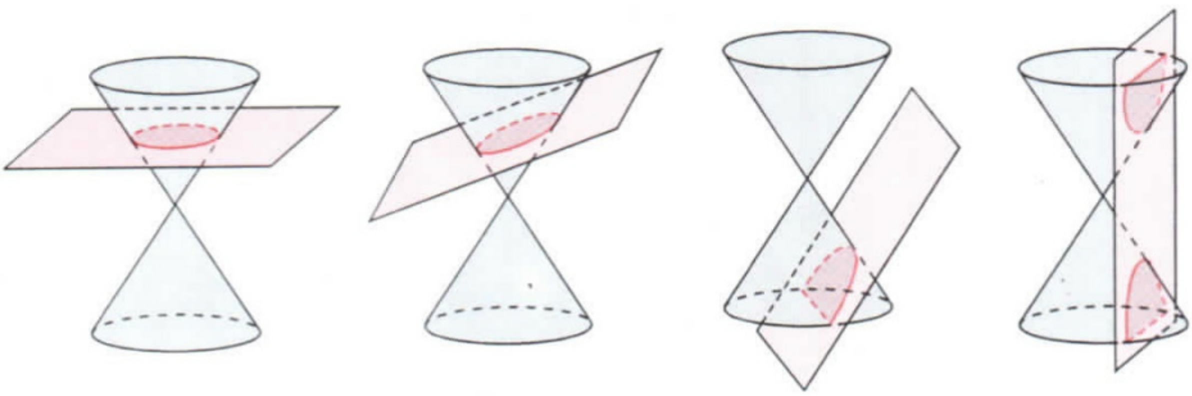
设截面与圆锥的轴所成的角为 θ，圆锥的顶角的一半为 α，那么

(1) 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，截得的曲线是**圆**(circle)；

(2) 当 $\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，截得的曲线是**椭圆**(ellipse)；

(3) 当 $\theta=\alpha$ 时，截得的曲线是**抛物线**(parabola)；

(4) 当 $0<\theta<\alpha$ 时，截得的曲线是**双曲线**(hyperbola)。



(a) 圆　(b) 椭圆　(c) 抛物线　(d) 双曲线

图 5－1

在平面内，圆锥曲线可表示为满足某种条件的动点的轨迹，与一定点及一定直线的距离的比为一常数的动点的轨迹叫做圆锥曲线，此定点叫做**焦点**(focus)，此定直线叫做**准线**(directrix)，此常数叫做**离心率**(eccentricity)。因为距离是一个非负数，所以圆锥曲线的离心率 e 是非负数。

当圆锥曲线的离心率，

(1) e 小于 1 时，曲线是椭圆；

(2) e 等于 1 时，曲线是抛物线；

(3) e 大于 1 时，曲线是双曲线。

根据轨迹的条件，可以写出坐标系中圆锥曲线的方程式。

例1 已知动点 P 与定点 $(-2, 3)$ 及定直线 $x-y+4=0$ 的比等于 2。说明动点 P 的轨迹是哪一种圆锥曲线，并求其方程式。

解 由圆锥曲线的定义知，动点 P 的轨迹是圆锥曲线，又因为比值为 2，离心率大于 1，所以轨迹是双曲线。

设动点 P 的坐标为(x, y)，依题意有

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}{\dfrac{|x-y+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}}=2$$

两边平方后，得 $(x+2)^2+(y-3)^2=4\cdot\dfrac{(x-y+4)^2}{2}$

化简得 $x^2+y^2-4xy+12x-10y+19=0$

例2 已知抛物线的焦点坐标为$(1, 0)$，准线方程式为 $x+1=0$，求其方程式。

解 由已知条件得 $$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\dfrac{|x+1|}{\sqrt{1^2+0}}}=1$$

化简得

$$(x-1)^2+y^2=(x+1)^2$$

$$y^2=4x$$

习题 5a

1. 已知定点的坐标为$(-1, 2)$，定直线的方程式为 $x-y+4=0$，动点 P 与定点及定直线的距离的比为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。说明动点 P 的轨迹的图象，并求其方程。
2. 动点 P 到点 A$(0, 2)$及 x 轴的距离相等，求动点 P 的轨迹的方程式。

3. 已知圆锥曲线的焦点坐标、准线方程、离心率，求其方程式：

(a) $(1, 1)$，$x-y-1=0$，$e=1$

(b) $(1, 0)$，$2x+y=0$，$e=1$

(c) $(2, 0)$，$x=0$，$e=1$

(d) $(0, 0)$，$3x+3y+1=0$，$e=\frac{2}{3}$

(e) $(-4, 0)$，$y+3=0$，$e=\frac{1}{4}$

(f) $(1, 2)$，$x+y+1=0$，$e=2$

(g) $(0, -1)$，$x+2y-1=0$，$e=\sqrt{3}$

5.2 抛物线

抛物线及其标准方程

图 5－2 中是一条抛物线，F 是它的焦点，l 是它的准线。取过点 F 垂直于 l 的直线为 x 轴，x 轴交 l 于点 K，取线段 FK 的垂直平分线为 y 轴，建立坐标系如图 5－2。

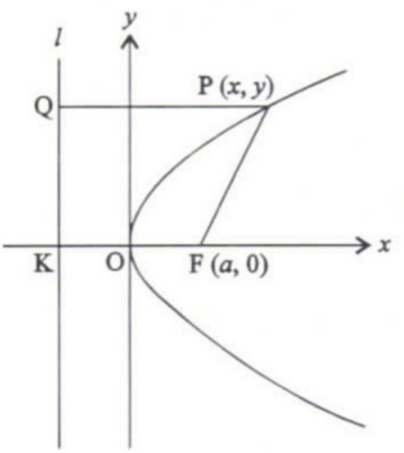


图 5－2

如果 $|KF|=2a$，则焦点 F 的坐标为 $(a, 0)$，准线的方程式为 $x=-a$，即 $x+a=0$。设点 P (x, y) 为抛物线上任意一点，过点 P 作 $PQ \perp l$，交 l 于点 Q，连结 PF，由抛物线的离心率为 1，得

$$\frac{|PF|}{|PQ|}=1$$

即 $$|PF|=|PQ|$$

$\therefore$ $$(x-a)^2+y^2=\left(\frac{x+a}{\sqrt{1}}\right)^2$$

整理得

$$y^2=4ax$$

这就是抛物线的标准方程。

如果抛物线的焦点在 y 轴上，还可以求出抛物线的另一种标准方程(图 5－3)：

$$x^2 = 4ay，焦点 F 的坐标为(0, a)$$

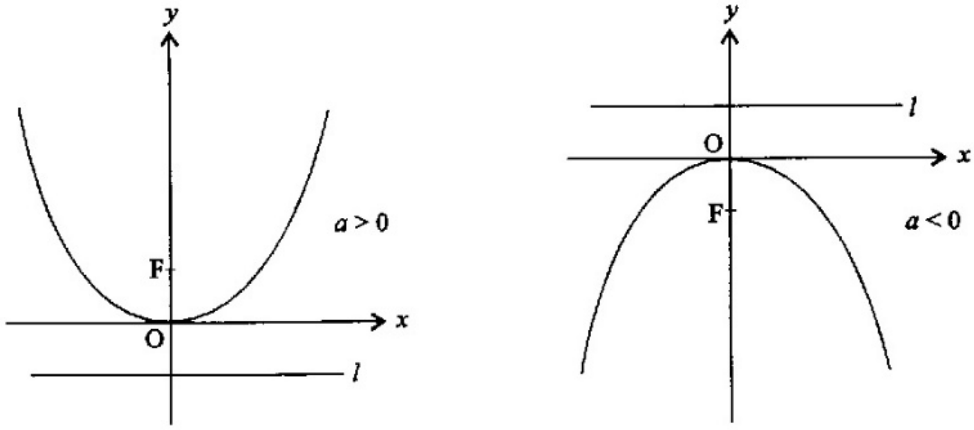


图 5－3

例3 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程式，并画曲线的略图：

(a) $y^2 = 20x$　　　　(b) $x^2 + 8y = 0$

解 (a) $y^2 = 20x$

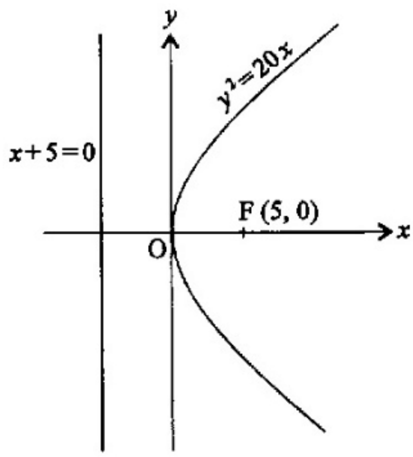
$= 4(5)x$

$\therefore \quad a = 5$

焦点坐标为(5, 0)，

准线方程式为 $x = -5$。

其图象如右图所示。



(b) 将方程式变形为

$x^2 + 8y = 0$

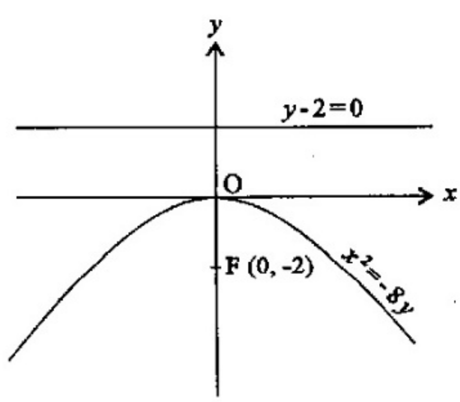
$x^2 = 4(-2)y$

$\therefore \quad a = -2$

焦点坐标为(0, －2)，

准线方程为 $y = 2$。

图象如右图所示。



例4 抛物线的焦点在 x 轴上，并且经过点$(-4, 2)$，求其标准方程。

解 因为抛物线的焦点在 x 轴上，所以可设它的标准方程式为

$$y^2 = 4ax$$

将$(-4, 2)$代入方程式，得 $4 = -16a$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$\therefore$ 所求的抛物线的标准方程为 $y^2 = -x$。

● 抛物线的几何性质

我们根据抛物线的标准方程 $y^2 = 4ax$，来讨论抛物线的几何性质。

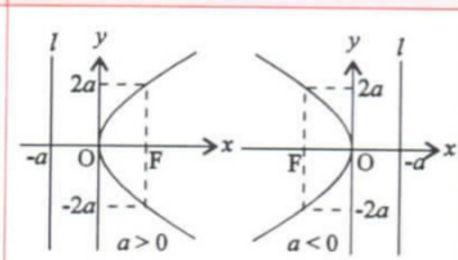
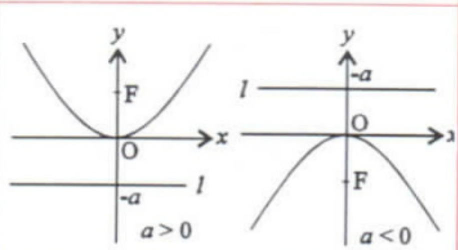
(1) 以 $-y$ 代 y，原方程式 $y^2 = 4ax$ 不变，说明抛物线 $y^2 = 4ax$ 关于 x 轴对称，所以 x 轴是抛物线的对称轴。

(2) 抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的**顶点**(vertex)，抛物线 $y^2 = 4ax$ 的顶点是坐标原点。

(3) 如果 $a > 0$ 时，抛物线 $y^2 = 4ax$ 的图象在 y 轴的右边；如果 $a < 0$，则抛物线的图象在 y 轴的左边。

(4) 过焦点 F 且与抛物线的对称轴垂直的弦称为**正焦弦**或**通径**(latus rectum)，它与抛物线 $y^2 = 4ax$ 的交点为 $A(a, 2a)$，$B(a, -2a)$，则 $AB = |4a|$。所以，正焦弦的长度为$|4a|$。

类似地，可以得出抛物线 $x^2 = 4ay$ 的几何性质。它们的顶点，焦点坐标，对称轴，准线的方程式，正焦弦以及图象如下表：

方程式	顶点	焦点	对称轴	准 线	正焦弦长	图 象
$y^2 = 4ax$	$(0, 0)$	$(a, 0)$	$y = 0$	$x + a = 0$	$\|4a\|$	
$x^2 = 4ay$	$(0, 0)$	$(0, a)$	$x = 0$	$y + a = 0$	$\|4a\|$	

例5 求下列抛物线的顶点、焦点坐标、准线方程式、对称轴及正焦弦的长度。

(a) $y^2=-8x$　　　　　　　　(b) $x^2=16y$

解 (a) $y^2=-8x$

$a=-2$

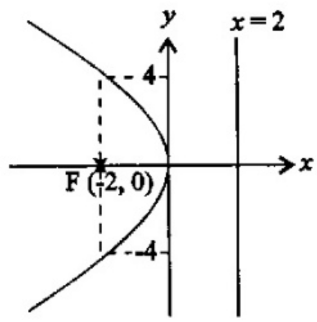
顶点坐标为(0, 0),

焦点坐标为(−2, 0),

准线方程式为 $x-2=0$,

对称轴为 x 轴,

正焦弦长为 $|4\times(-2)|\neq 8$。



(b) $x^2=16y$

$a=4$

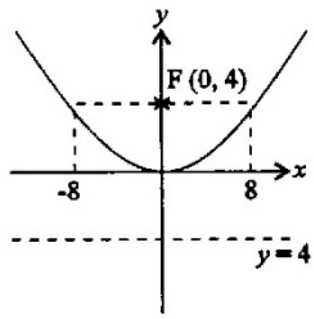
顶点坐标为(0, 0),

焦点坐标为(0, 4),

准线方程式为 $y+4=0$,

对称轴为 y 轴,

正焦弦长为 $|4\times 4|=16$。



例6 已知抛物线的方程式 $y^2-8x-2y-7=0$，求它的顶点、焦点坐标、对称轴、准线的方程式，并画出图象。

解 将抛物线的方程 $y^2-8x-2y-7=0$ 配方,

得 $(y-1)^2=8(x+1)$

设 $x'=x+1$, $y'=y-1$

得 $y_1^2=8x'$

其顶点为(0, 0)，焦点为(2, 0)，对称轴为 $y'=0$，准线方程为 $x'=-2$。

在原方程式中,

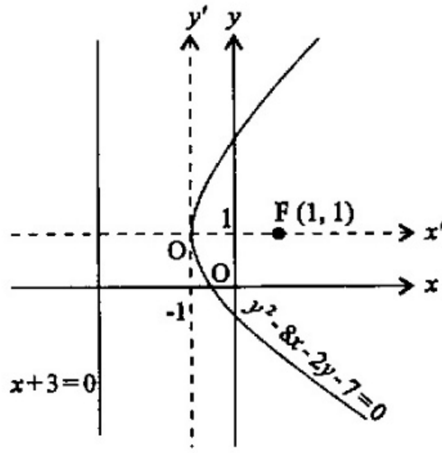
顶点坐标为 $\begin{cases}0=x+1\\0=y-1\end{cases}$，即 (−1, 1)

焦点坐标为 $\begin{cases}2=x+1\\0=y-1\end{cases}$，即 (1, 1)

对称轴为 $0=y-1$，即 $y=1$

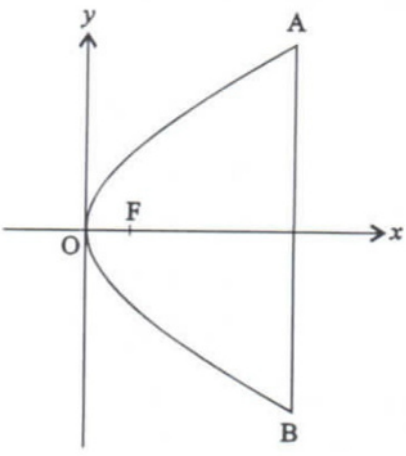
准线方程为 $-2=x+1$，即 $x=-3$

图象如右图所示。



例7 探照灯反射镜的纵断面是抛物线的一部分。灯口直径是 60 cm，灯深 40 cm。求抛物线的标准方程和焦点的位置。

解 在纵断面内，以反射镜的顶点(即抛物线的顶点)为坐标原点，过顶点垂直于灯口直径的直线为 x 轴，建立直角坐标系 xOy(如右图)。



设抛物线的标准方程式为 $y^2 = 4ax$。

因为点 A 的坐标为(40, 30)，代入方程式，得

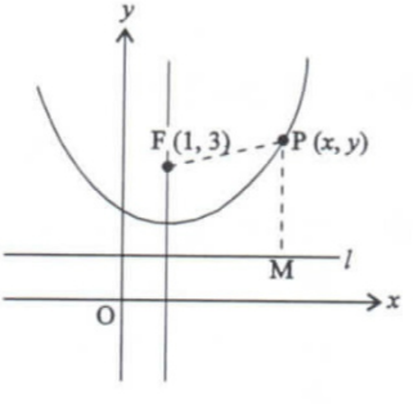
$$30^2 = 4a(40)$$

解得 $$a = \frac{45}{8}$$

所以抛物线的方程式是 $y^2 = \frac{45}{2}x$，焦点坐标为$\left(\frac{45}{8}, 0\right)$。

例8 已知一抛物线的顶点为(1, 2)，焦点为(1, 3)，求此抛物线的方程式。

解 由于顶点为(1, 2)，焦点为(1, 3)，得知准线方程式为 $y = 1$。



令抛物线上动点的坐标为 P(x, y)

根据定义 $$|PF| = |PM|$$

得 $$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = y - 1$$

两边平方并化简，得

$$(x-1)^2 = 4(y-2)$$

习题 5b

1. 求顶点在(0, 0)且满足以下条件的抛物线的方程式：

   (a) 焦点是(0, 3)

   (b) 准线方程式是 $x - \frac{1}{4} = 0$

   (c) 焦点在 x 轴上，且经过点(5, −4)

   (d) 焦点在 y 轴上，且经过点(−4, 2)

   (e) 焦点到准线的距离是 2

2. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程式，并画出图象：

(a) $2y^2+5x=0$　　(b) $x^2-\frac{1}{2}y=0$

3. 求下列抛物线的顶点坐标、焦点坐标、对称轴、准线方程式和通径，并画出图象：

(a) $y^2-6x=0$　　(b) $4x^2+3y=0$

(c) $y^2+4x-4y=0$　　(d) $x^2-4x-y+5=0$

4. 抛物线 $y^2=12x$ 上一点与焦点的距离为 9，求此点的坐标。

5. 求以 $(3,-2)$ 为顶点，$y+8=0$ 为准线的抛物线的方程式，并画出图象。

6. 求以 $(2,4)$ 为顶点，以 $(2,2)$ 为焦点的抛物线的方程式，并画出图象。

7. 已知一抛物线的顶点为 $(-1,3)$，焦点为 $(2,3)$，求此抛物线的方程式。

8. 一动点与点 $(3,6)$ 的距离比它到 $x+5=0$ 的距离少 4，求这点的轨迹方程式，并画出图象。

* 9. 有一等边三角形的两个顶点在抛物线 $y^2=4ax$ 上，另一个顶点在坐标原点，求这个三角形的边长。

* 10. 试证抛物线上任一点，到它的对称轴的垂线段之长，为通径的长度与垂足到顶点距离的比例中项。

5.3 椭圆

● 椭圆及其标准方程

设椭圆的焦点为 F，准线为 l，离心率为 $e(e<1)$。过点 F 作 FK $\perp$ l，交 l 于点 K，交椭圆于点 A′、A。

取直线 FK 为 x 轴，线段 A′A 的中点为坐标原点建立坐标系 xOy（图 5－4）。

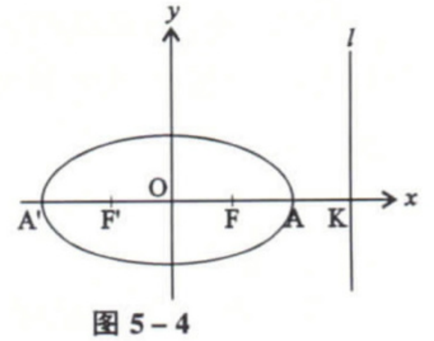


图 5－4

∵　点 A′、A 在椭圆上，

∴　$\dfrac{|A'F|}{|A'K|}=e$，$\dfrac{|AF|}{|AK|}=e$

即　$|A'F|=e\,|A'K|$ ……………… (1)

$|AF|=e\,|AK|$ ……………………… (2)

(1) + (2)，得 $\quad |A'F| + |AF| = e(|A'K| + |AK|)$

$$|A'A| = e(2|OA| + 2|AK|)$$

即 $$|OA| = e(|OK|)$$

(1) − (2)，得 $\quad |A'F| - |AF| = e(|A'K| - |AK|)$

$$2|OF| = 2e|OA|$$

即 $$|OF| = e|OA|$$

令 $|OA| = a\ (a>0)$，则 $|OF| = ae$

$$|OK| = \frac{a}{e}$$

∴ 焦点 F 的坐标为$(ae,\ 0)$，

准线的方程式为 $x = \frac{a}{e}$，即 $x - \frac{a}{e} = 0$。

设椭圆上任意一点 P 的坐标为$(x,\ y)$，过点 P 作 $PM \perp l$，垂足为 M，则

$$\frac{|PF|}{|PM|} = e$$

∴ $$(x-ae)^2 + y^2 = e\left(\frac{x-\frac{a}{e}}{\sqrt{1}}\right)^2$$

化简得 $$(1-e^2)x^2 + y^2 = a^2(1-e^2)$$

由 $e<1$ 知 $1-e^2 \neq 0$，

∴ $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

令 $b^2 = a^2(1-e^2)$ （$b>0$，则 $b<a$），得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1，其中\ b^2 = a^2(1-e^2)\quad 且\quad a>b>0$$

当点 F、K 在 y 轴左侧时，用同样方法也可以得到上述方程式。上述方程式叫做椭圆的标准方程。

如果取垂直于准线的直线为 y 轴建立类似的坐标系（图 5－5），则可得椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

其中 $b^2 = a^2(1-e^2)$且 $a>b>0$

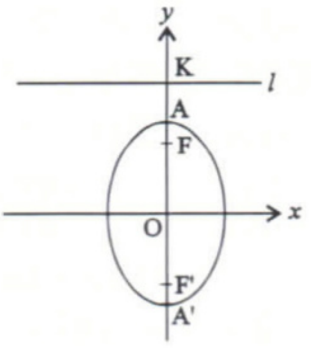


图 5－5

例9 求适合下列条件的椭圆的标准方程，并画出其图象：

(a) $a=4$，$b=1$，焦点在 x 轴上；

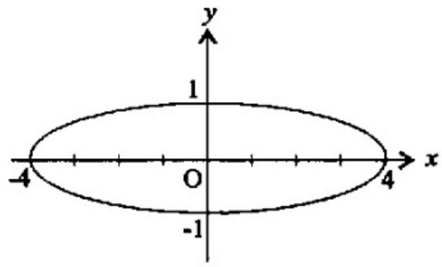
(b) 两焦点的坐标为$(0,-2)$、$(0,2)$，经过点 $P\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$。

解 (a) 因为焦点在 x 轴上，$a=4$，$b=1$，

所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{16}+y^2=1$$

其图象如右图所示。



(b) 因为焦点在 y 轴上，所以设椭圆的标准方程式为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

由焦点坐标为$(0,-2)$、$(0,2)$可知，$ae=2$，$a^2e^2=4$。

$\therefore$ $b^2=a^2-a^2e^2$

$b^2=a^2-4$ ……………………(1)

将点 $P\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ 代入方程式 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 中，

得 $$\frac{\frac{9}{4}}{b^2}+\frac{\frac{25}{4}}{a^2}=1$$

化简得 $9a^2+25b^2=4a^2b^2$……(2)

(1)代入(2)，得

$$9a^2+25(a^2-4)=4a^2(a^2-4)$$

化简，得

$$2a^2-25a^2+50=0$$

$$(2a^2-5)(a^2-10)=0$$

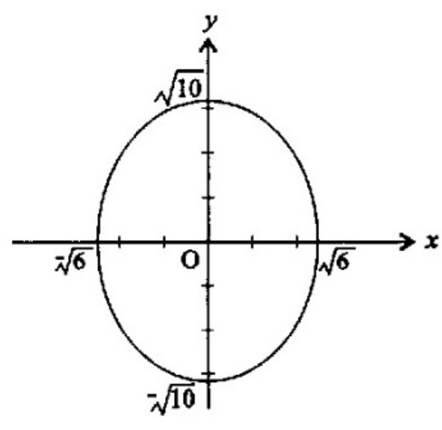
$a^2=\frac{5}{2}$(不合) 或 $a^2=10$

当$a^2=10$，$b^2=6$

$\therefore$ 椭圆的方程式为

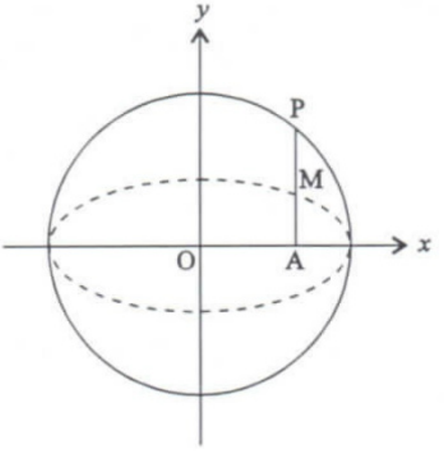
$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{10}=1$$

其图象如右图所示。



例 10 由半径为 2，圆心在坐标原点的圆上任意一点，向 x 轴作垂线段，求垂线段中点的轨迹方程，并画出图象。

解 如右图，过圆上一点 $P(x_1, y_1)$ 作 x 轴的垂线段，垂足为 A，A 坐标为 $(x_1,0)$。设线段 PA 的中点为 M，它的坐标为 (x, y)，



则 $x = x_1$，$y = \dfrac{y_1}{2}$

即 $x_1 = x$，$y_1 = 2y$

∵ 点 P 在圆上，

∴ $x_1^2 + y_1^2 = 4$

将 $x_1 = x$，$y_1 = 2y$ 代入得

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

即 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

所以点 M 的轨迹为椭圆，图象如右图所示。

椭圆的几何性质

我们根据椭圆的标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ 来研究椭圆的几何性质。

(1) 在方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 中，以 $-x$ 代 x，或以 $-y$ 代 y，或以 $-x$、$-y$ 同时代 x、y，此方程式不变，所以椭圆关于 y 轴、x 轴和坐标原点都是对称的。这时，坐标轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的中心(图 5－6)。

(2) 在方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 中，

令 $x = 0$，得 $y = \pm b$

令 $y = 0$，得 $x = \pm a$

这说明椭圆交 x 轴于 $A(a, 0)$、$A'(-a, 0)$ 两点，交 y 轴于 $B(0, b)$、$B'(0, -b)$ 两点。因为 x 轴、y 轴是椭圆的对称轴，所以这四个交点叫做椭圆的顶点，如图 5－6。

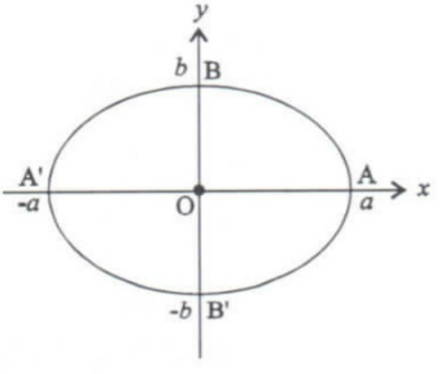


图 5－6

线段 $A'A$、$B'B$ 分别叫做椭圆的**长轴**(major axis)和**短轴**(minor axis)。它们的长分别等于 $2a$ 和 $2b$，a 和 b 分别叫做椭圆的半长轴和半短轴。

(3) 由椭圆的对称性可知，与焦点 F$(ae, 0)$ 对称的点 F$'(-ae, 0)$也是椭圆的焦点。椭圆有两个焦点。椭圆的焦点一定在长轴上。

由 $b^2=a^2(1-e^2)$，可得

$$ae = \sqrt{a^2-b^2}$$

$$e = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}$$

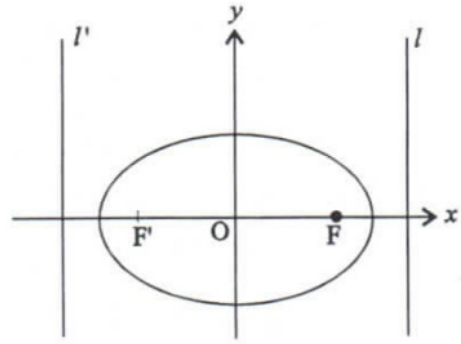
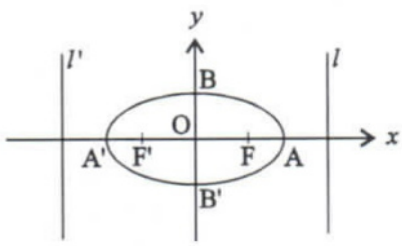
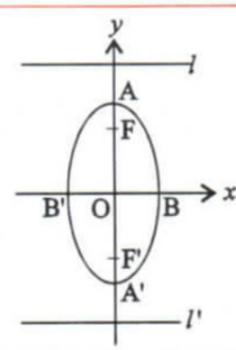


图 5－7

与准线 l：$x-\frac{a}{e}=0$ 对称的直线 l'：$x+\frac{a}{e}=0$ 也是椭圆的准线。椭圆有两条准线(图 5－7)。

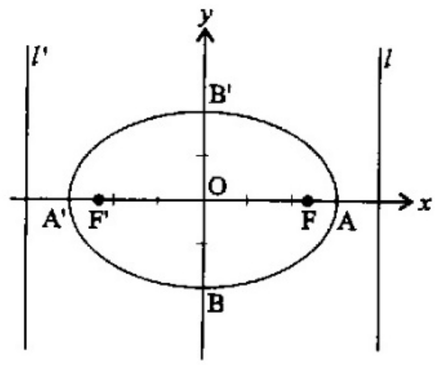
类似地，可以得出椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 的几何性质，这些性质如下表所示。

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$
图象		
顶点	$(-a, 0)$、$(a, 0)$、$(0, -b,)$、$(0, -b)$	$(-b, 0)$、$(b, 0)$、$(0, -a)$、$(0, a)$
焦点	$(-ae, 0)$、$(ae, 0)$	$(0, -ae)$、$(0, ae)$
准线	$x\pm\frac{a}{e}=0$	$y\pm\frac{a}{e}=0$
对称轴	x轴、y轴	x轴、y轴
轴长	半长轴长a（x轴） 半短轴长 b（y轴）	半长轴长a（y轴） 半短轴长b（x轴）
离心率	$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}<1$	$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}<1$

例 11 求下列椭圆的中心、半长轴的长、半短轴的长、离心率、顶点、焦点、准线、对称轴，并画出图象：

(a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (b) $25x^2+16y^2-150x+32y-159=0$

解 (a) 中心为(0, 0)



半长轴的长 $a=3$

半短轴的长 $b=2$

离心率 $e=\dfrac{1}{3}\sqrt{3^2-2^2}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

顶点为 $(-3,0)$、$(3,0)$、$(0,-2)$、$(0,2)$

焦点为 $F'(-\sqrt{5},0)$、$F(\sqrt{5},0)$

准线方程式为 $x\pm\dfrac{9\sqrt{5}}{5}=0$

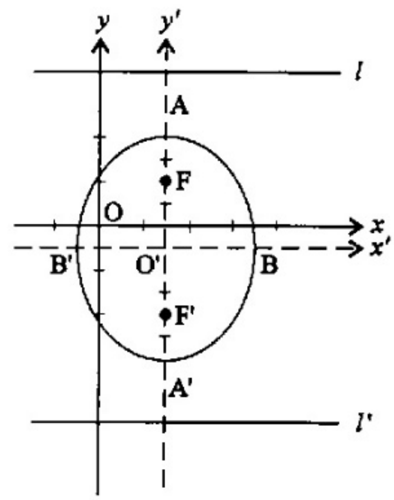
对称轴为 $y=0$，$x=0$

其图象如右图所示。

(b) 将原方程式配方，得

$$25(x-3)^2+16(y+1)^2=400$$

即 $\dfrac{(x-3)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{25}=1$



设 $x'=x-3$，$y'=y+1$

于是得椭圆在新坐标系 $x'Oy'$中的方程式为

$$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{25}=1$$

其中，$a=5$，$b=4$，即长轴落在 y 轴上。

故得

坐标系	新坐标系 $x'Oy'$	原坐标系 xOy
椭圆方程式	$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{25}=1$	$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$
中　心	$(0, 0)$	$(3, -1)$
半长轴长	$a=5$	$a=5$
半短轴长	$b=4$	$b=4$
离心率	$e=\frac{1}{5}\sqrt{25-16}=\frac{3}{5}$	$e=\frac{3}{5}$
顶　点	$(0, -5)$、$(0, 5)$、$(-4, 0)$、$(4, 0)$	$(-1, -1)$、$(7, -1)$、$(3, -6)$、$(3, 4)$
焦　点	$(0, -3)$、$(0, 3)$	$(3, -4)$、$(3, 2)$
准　线	$y\pm\frac{25}{3}=0$	$3y+28=0$，$3y-22=0$
对称轴	$x=0$ $y=0$	$x=3$ $y=-1$

例 12　求长轴的长是短轴长的 3 倍，且经过点 P(3, 0)的椭圆的标准方程。

解　设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0) \quad 或 \quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

将点 P 的坐标分别代入上面两个方程式，得

$$a^2=9 \quad 或 \quad b^2=9$$

因为 $a=3b$，即 $a^2=9b^2$

$\therefore$ 当 $a^2=9$ 时，$b^2=1$

$\therefore$ 当 $b^2=9$ 时，$a^2=81$

所以所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1 \quad 或 \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{81}=1。$$

例 13 求长轴长为 12，短轴长为 6，中心在$(-2,-1)$，且长轴平行于 y 轴的椭圆方程式。

解 将坐标原点移至$(-2,-1)$处，得新坐标系 $x'Oy'$，

则 $x'=x+2$，$y'=y+1$，长轴在 y 轴上。

设椭圆坐标系中 $x'Oy'$中的方程为

$$\frac{y'^2}{a^2}+\frac{x'^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

由于 $2a=12$，$a=6$

$2b=6$，$b=3$

再将 $x'=x+2$，$y'=y+1$ 代入方程式(1)，得椭圆在原坐标系中的方程为

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$$

习题 5c

1. 求满足下列条件的椭圆的标准方程：

(a) 经过点 $P(-2\sqrt{2}, 0)$、$Q(0, \sqrt{5})$；

(b) 焦点坐标是$(-2\sqrt{3}, 0)$和$(2\sqrt{3}, 0)$，并且经过点 $P(\sqrt{5}, -\sqrt{6})$；

(c) 准线方程为 $y\pm\frac{25}{3}=0$，经过点$(4, 0)$；

(d) 离心率等于 $\frac{4}{5}$，两焦点的距离为 8。

2. ΔABC 的一边的两个顶点是 $B(0, 6)$和 $C(0, -6)$，另两边的斜率的乘积是 $-\frac{4}{9}$，求顶点 A 的轨迹。

3. 点 M 与椭圆 $\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$ 的两个焦点的距离的比为 $\frac{2}{3}$，求点 M 的轨迹方程，并画出图象。

4. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 上一点 $M\left(\frac{12}{5}, 4\right)$ 与焦点的距离。

5. 求下列各椭圆的中心、长轴的长、短轴的长、对称轴、顶点、离心率、焦点、准线，并画出图象。

(a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ (b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

(c) $x^2+2y^2-8y+6=0$ (d) $9x^2+y^2+10y+16=0$

6. 求短轴之长为 8，焦点为(1, 5)与(4, 5)的椭圆方程式。

7. 求短轴之长为$2\sqrt{2}$，长轴的两端分别为(-2, 2)与(8, 2)的椭圆方程式。

8. 地球运行的轨道是半长轴长 $a=1.50\times10^{8}$ km，离心率 $e=0.0192$ 的椭圆，太阳在这个椭圆的一个焦点上，求地球到太阳最大和最小的距离。

9. 求下列椭圆的离心率：

(a) 从焦点看短轴两端点的视角为 60°

(b) 从短轴的一个端点看两焦点的视角为直角。

10. 计算内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的正方形的边长。

*11. 求证两椭圆 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$，$a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2=0\ (a>b>0)$ 的交点在以原点为中心的圆周上，并求这个圆的方程。

5.4 双曲线

● 双曲线及其标准方程

设双曲线的焦点为 F，准线为 l，离心率为 $e(e>1)$。过点 F 作 FK$\perp l$，交 l 于点 K，交双曲线于点 A′、A。

取直线 FK 为 x 轴，线段 A′A 的中点 O 为坐标原点，使点 A 在 y 轴右侧建立坐标系 xOy(图 5-8)。

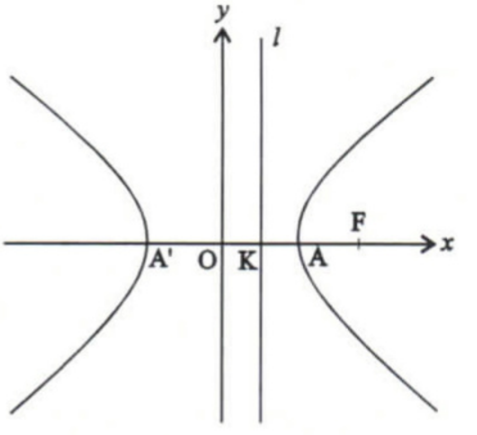


图 5-8

∵ 点 A′、A 在双曲线上，

$$\therefore\quad \frac{|A'F|}{|A'K|}=e,\quad \frac{|AF|}{|AK|}=e$$

即
$$|A'F|=e\,|A'K|\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$|AF|=e\,|AK|\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

将式（1）、（2）相加，得

$$|A'F|+|AF|=e(|A'K|+|AK|)$$
$$|OA'|+|OF|+|OF|-|OA|=e(|OA'|+|OK|+|OA|-|OK|)$$

即
$$|OF|=e(|OA|)$$

将式（1）、（2）相减，得

$$|A'F|-|AF|=e(|A'K|-|AK|)$$

$$|OA|+|OF|-|OF|+|OA|=e(|OA'|+|OK|-|OA|+|OK|)$$

即 $$|OA|=e|OK|$$

令 $|OA|=a(a>0)$，则

$|OF|=ae$，$|OK|=\frac{a}{e}$。

∴ 焦点 F 的坐标为$(ae,0)$，

准线方程式为 $x=\frac{a}{e}$，即 $x-\frac{a}{e}=0$。

设双曲线上任意一点 P 的坐标为(x,y)，过点 P 作 $PM\perp l$，垂足为 M，则

$$\frac{|PF|}{|PM|}=e$$

$$|PF|=e|PM|$$

即 $$\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=e\left|\frac{x-\frac{a}{e}}{\sqrt{1}}\right|$$

两边平方，得 $$(x-ae)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

化简后得 $$(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2)$$

由 $e>1$ 知 $1-e^2\neq 0$，∴ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$

令 $b^2=a^2(e^2-1)$ $(b>0)$，则上述方程式变为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1，其中\ b^2=a^2(e^2-1)且\ a>0,\ b>0$$

这就是双曲线的标准方程。

如果取垂直于准线的直线为 y 轴建立坐标系（图 5-9），则双曲线的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

其中 $b^2=a^2(e^2-1)$且 $a>0$，$b>0$

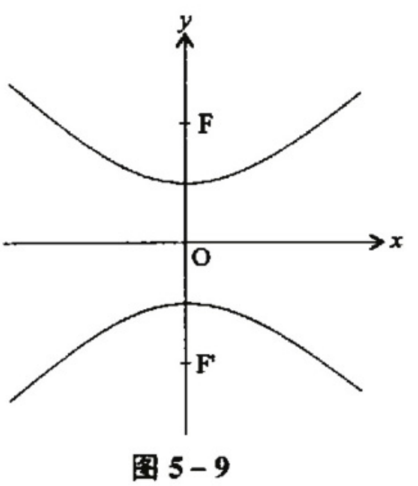


图 5-9

【注】因为 $e>1$，所以 b 不一定小于 a，这一点与椭圆的标准方程不同。

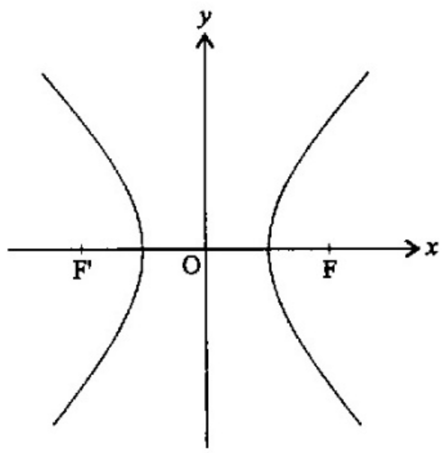
例 14 求适合下列条件的双曲线的标准方程，并画出其图象：

(a) 焦点坐标为(5, 0)、(−5, 0)，离心率 $e=\dfrac{5}{3}$；

(b) 经过点 P$(-3, 2\sqrt{7})$、Q$(-6\sqrt{2}, -7)$，焦点在 y 轴上。

解 (a) 因为双曲线的焦点在 x 轴上，所以设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$



$\because \quad ae=5,\ e=\dfrac{5}{3}$

$\therefore \quad a=3,\ a^2=9$

$$b^2=9\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2-1\right]=16$$

所以所求双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

其图象如右图所示。

(b) 因为双曲线的焦点在 y 轴上，所以设它的标准方程式为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

将点 P、Q 的坐标代入方程式，

得 $$\frac{28}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$$

$$28b^2-9a^2=a^2b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $$\frac{49}{a^2}-\frac{72}{b^2}=1$$

$$49b^2-72a^2=a^2b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)×8，得 $224b^2-72a^2=8a^2b^2 \cdots\cdots\cdots(3)$

(3)−(1)，得 $175b^2=7a^2b^2$

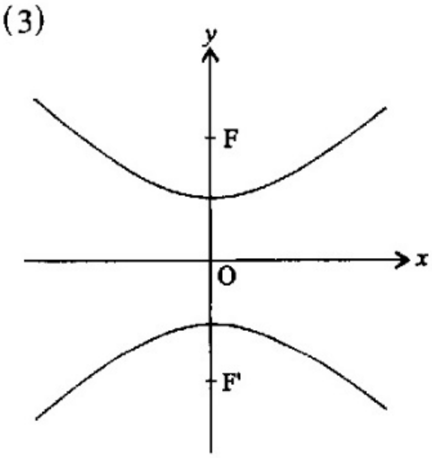
解得 $a^2=25$

$b^2=75$

所求双曲线的标准方程为

$$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{75}=1$$

图象如右图所示。



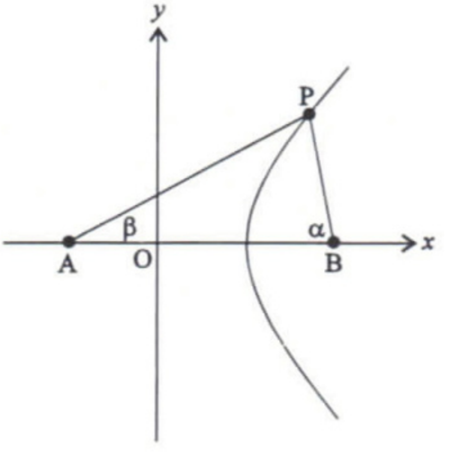
例 15 点 A(- 1, 0) 和 B(2, 0) 是两个定点，动点 P 满足条件 $\angle PBA = 2\angle PAB$，求点 P 的轨迹方程式，并说明它是什么样的曲线。

解 设 $\angle PBA = \alpha$，$\angle PAB = \beta$（$\alpha > 0$，$\beta > 0$），点 P 的坐标为 (x, y)。

$\because \quad \alpha = 2\beta$

$\therefore \quad \tan\alpha = \tan 2\beta$

$$= \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$



当点 P 在 x 轴上方时，

$\tan\alpha = -\dfrac{y}{x-2}$，$\tan\beta = \dfrac{y}{x+1}$

$\therefore \quad -\dfrac{y}{x-2} = \dfrac{\dfrac{2y}{1+x}}{1-\dfrac{y^2}{(x+1)^2}}$

化简得 $\quad 3x^2 - y^2 = 3$

即 $\quad x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$

当点 P 在 x 轴下方时，$\tan\alpha = \dfrac{y}{x-2}$，$\tan\beta = -\dfrac{y}{x+1}$，仍可得到上面的方程。

又 $\because \quad \alpha = 2\beta$，$\therefore \quad |AP| > |BP|$

所以点 P 的轨迹是双曲线的一支，其方程式为 $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1\ (x \geqslant 1)$。

● 双曲线的几何性质

仿照研究椭圆几何性质的方法，利用双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

来研究双曲线的几何性质。

(1) 双曲线关于 y 轴、x 轴和坐标原点都是对称的，所以坐标轴是双曲线的对称轴，坐标原点是双曲线的对称中心。双曲线的对称中心叫做双曲线的中心。

(2) 在方程式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，

$$令\ y=0,\ 得\quad x=\pm a$$

因此双曲线与 x 轴有两个交点 $A(a,0)$、$A'(-a,0)$。因为 x 轴是双曲线的对称轴，所以这两个交点叫做双曲线的顶点。线段 AA'叫做双曲线的**实轴**(real axis)，其长等于 $2a$。

$$令\ x=0,\ 得\quad y=\pm bi$$

是两个虚数，所以双曲线与 y 轴没有交点，为方便讨论，我们还是在 y 轴上取两点 $B(0,\ b)$、$B'(0,\ -b)$，线段 BB'叫做双曲线的**虚轴**(imaginary axis)，其长等于 $2b$(图 5-10)。

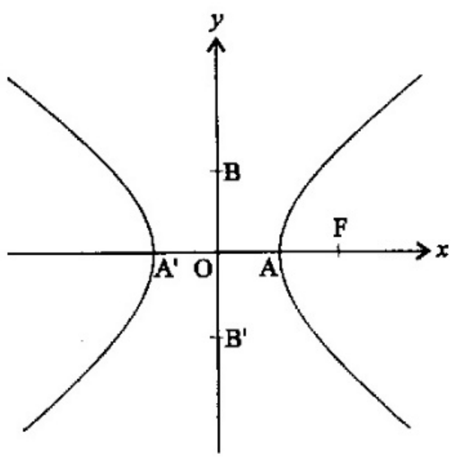


图 5-10

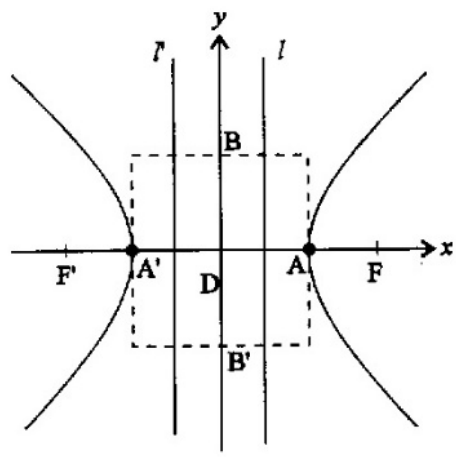


图 5-11

(3) 由双曲线的对称性可知，与焦点 $F(ae,\ 0)$对称的点 $F'(-ae,\ 0)$也是双曲线的焦点。双曲线有两个焦点。

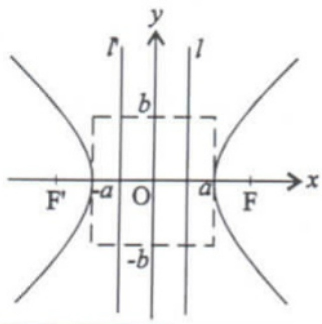
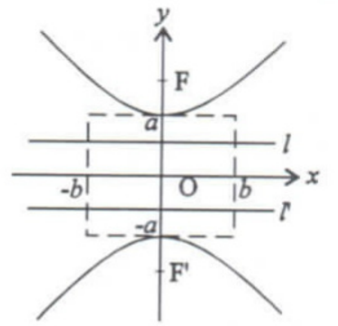
由 $b^2=a^2(e^2-1)$可得

$$ae=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}$$

与准线 l：$x-\frac{a}{e}=0$ 对称的直线 l：$x+\frac{a}{e}=0$ 也是双曲线的准线，双曲线有两条准线(图 5-11)。

类似地，可以得出双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的几何性质，这些性质如下表所示：

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$
图象		
顶点	$(-a,\ 0)$、$(a,\ 0)$	$(0,\ -a)$、$(0,\ a)$
焦点	$(-ae,\ 0)$、$(ae,\ 0)$	$(0,\ -ae)$、$(0,\ ae)$
准线	$x\pm\frac{a}{e}=0$	$y\pm\frac{a}{e}=0$
对称轴	x轴　实轴长 $2a$ y轴　虚轴长 $2b$	x轴　虚轴长 $2b$ y轴　实轴长 $2a$
离心率	$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}>1$	$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}>1$

双曲线的渐近线

将双曲线方程式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 改写成

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}$$

则当 $|x|$ 趋向于无穷大时，$\frac{a^2}{x^2}$ 趋近于零，这就是说，当 $|x|$ 越来越大时，则双曲线就越来越接近下列直线

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

我们把这两条直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 叫做双曲线的**渐近线**(asymptotes)，见图 5-12。渐近线不是双曲线轨迹的一部分，但它是描绘双曲线图象的准绳。

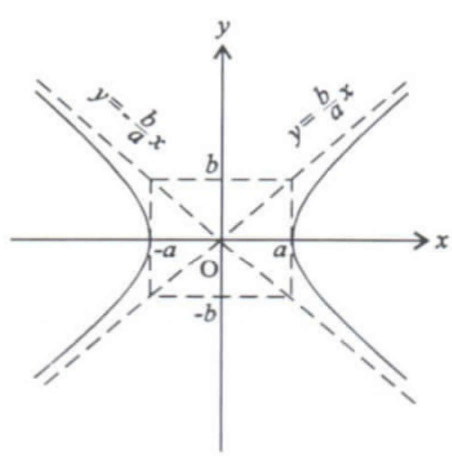


图 5-12

【注】此渐近线方程式 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 可写成

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$$

即 $$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$$

即 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

即在双曲线的标准方程式中，以 0 取代 1，因式分解后就可得出双曲线的渐近线。

例 16 求双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线。

解 令其右边为 0，即 $$\frac{x^2}{4}-y^2=0$$

因式分解 $$\left(\frac{x}{2}-y\right)\left(\frac{x}{2}+y\right)=0$$

得 $$y=\frac{x}{2}\quad 或\quad y=-\frac{x}{2}$$

这就是双曲线的两条渐近线。

例 17 求双曲线 $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-5)^2}{25}=1$ 的渐近线。

解 令其右边为 0，即 $$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-5)^2}{25}=0$$

因式分解 $$\left(\frac{x+1}{2}-\frac{y-5}{5}\right)\left(\frac{x+1}{2}+\frac{y-5}{5}\right)=0$$

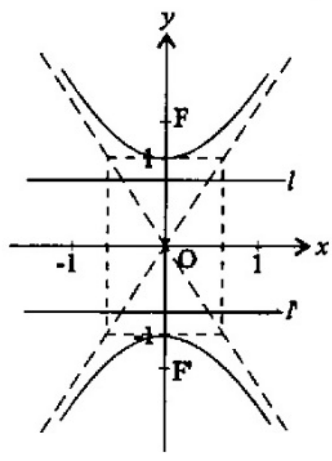
得双曲线的渐近线方程为

$$5x-2y+15=0\quad 或\quad 5x+2y-5=0$$

例 18 求下列双曲线的中心、顶点、对称轴、半实轴长、半虚轴长、离心率、焦点、准线及渐近线，并画出其图象：

(a) $y^2-4x^2=1$； (b) $4x^2-9y^2-16x-18y-29=0$。

解 (a) 将方程式化为 $y^2-\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{4}}=1$



它的中心为 (0, 0)

顶点为 (0, −1)、(0, 1)

对称轴为 $y=0$，$x=0$

半实轴长 $a=1$

半虚轴长 $b=\dfrac{1}{2}$

离心率 $e=\dfrac{1}{1}\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

焦点为 $\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$、$\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

准线为 $y\pm\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=0$，即 $y\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=0$

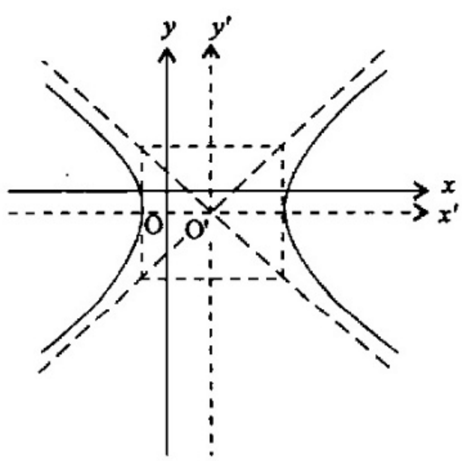
渐近线为 $y=2x$，$y=-2x$

图象如右图所示。

(b) 将原方程式配方，得

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

设 $\begin{cases}x=x-2\\y=y+1\end{cases}$



于是得双曲线在新坐标系中的方程式为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

实轴落在 x' 轴中。

故得

	新坐标系 $x'Oy'$	原坐标系 xOy
方程式	$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$	$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$
中　心	$(0, 0)$	$(2, -1)$
顶　点	$(-3, 0)$、$(3, 0)$	$(-1, -1)$、$(5, -1)$
半实轴长	$a = 3$	$a = 3$
半虚轴长	$b = 2$	$b = 2$
对称轴	$x' = 0$，$y' = 0$	$x - 2 = 0$，$y + 1 = 0$
离心率	$e = \frac{1}{3}\sqrt{3^2 + 2^2} = \frac{1}{3}\sqrt{13}$	$e = \frac{1}{3}\sqrt{3^2 + 2^2} = \frac{1}{3}\sqrt{13}$
焦　点	$(-\sqrt{13}, 0)$、$(\sqrt{13}, 0)$	$(2-\sqrt{13}, -1)$、$(2+\sqrt{13}, -1)$
准　线	$x' \pm \frac{9\sqrt{13}}{13} = 0$	$x + 2 \pm \frac{9\sqrt{13}}{13} = 0$
渐近线	$y' \pm \frac{2}{3} = x'$	$2x + 3y - 1 = 0$ $2x - 3y - 7 = 0$

习题 5d

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

   (a) $a = 4$，$b = 3$，焦点在 x 轴上；

   (b) $a = 2\sqrt{5}$，经过点 $A(2, -5)$，焦点在 y 轴上；

   (c) 焦点坐标是 $(0, -5)$、$(0, 5)$，离心率是 $\frac{5}{4}$；

   (d) 焦点在 x 轴上，经过点 $A(-8, 2)$、$B(4\sqrt{3}, -\sqrt{2})$；

2. 求焦点为 $(-2, 0)$、$(6, 0)$，离心率为 2 的双曲线的方程式。

3. 求与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有公共焦点，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的双曲线的方程式。

4. 求下列双曲线的渐近线：

   (a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$　　(b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

   (c) $4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y - 29 = 0$　　(d) $\frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$

5. 求下列双曲线的中心、实轴长、虚轴长、离心率、焦点、准线及渐近线，并画出图象。

(a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$　　(b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}+1=0$

(c) $x^2-2y^2-4x-4y=0$

6. 求符合下列条件的双曲线的方程式：

(a) 中心在坐标原点，焦点在坐标轴上，离心率 $e=\sqrt{2}$，经过点 $M(-5,3)$

(b) 虚轴长为 4，焦点为 $(0,2)$、$(0,-10)$

(c) 虚轴长为 6，顶点为 $(3,2)$、$(-5,2)$

7. 求以椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ 的焦点为顶点，而以椭圆的顶点为焦点的双曲线的方程式。

8. 一双曲线经过一点 $(0,3)$，且其渐近线方程式为 $2x-y-3=0$ 与 $2x+y-5=0$，试求它的方程式。

9. 求焦点为 $(-2,-2)$ 及 $(8,-2)$ 且其一渐近线的斜率为 $\frac{3}{4}$ 的双曲线的方程式。

10. (a) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一弦的中点为 (α,β)，求证此弦的方程式为

$$y-\beta=\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}(x-\alpha)$$

(b) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 一动弦通过定点 (h,k)，求证此弦中点的轨迹为双曲线，且中心为 $\left(\frac{h}{2},\frac{k}{2}\right)$。

● 直角双曲线

在方程式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，$a=b$，则双曲线的方程式变为 $x^2-y^2=a^2$，这时它的渐近线的方程式为 $x\pm y=0$，它们互相垂直。渐近线互相垂直的双曲线叫做**直角双曲线**，也称**等轴双曲线**(rectangular hyperbola)。

由定义可知，直角双曲线的实轴和虚轴相等，并且它的两条渐近线平分实轴和虚轴的夹角(图 5－13)。

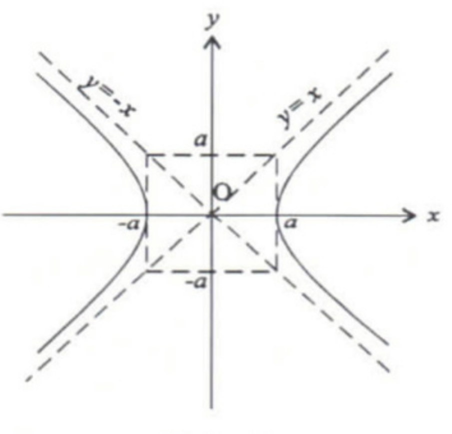


图 5－13

例 19 求证：直角双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$。

证明 设直角双曲线的标准方程为 $x^2-y^2=a^2$

则
$$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}$$
$$=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+a^2}$$
$$=\frac{a}{a}\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}$$

【注】由例 19 可知，任意直角双曲线的离心率都等于 $\sqrt{2}$。

例 20 求证：方程式 $xy=k\ (k>0)$ 的图形是以坐标轴为渐近线的直角双曲线。

证明 把 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 代入转轴公式，得

$$x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$$

$$y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

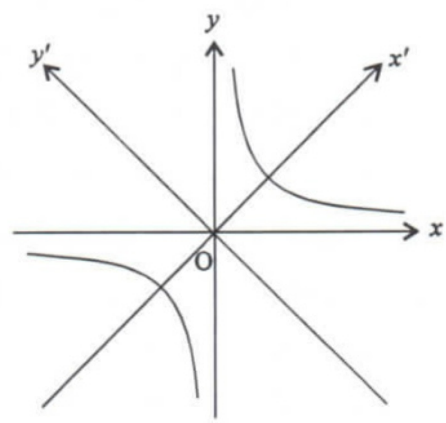
代入方程式 $xy=k$，得

$$\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}=k$$

即
$$y'^2-x'^2=2k$$

这是一个直角双曲线，原坐标轴是它的两条渐近线。

它的图象如右图所示。



习题 5e

1. 求满足下列条件的直角双曲线方程式：

   (a) 顶点坐标为 $(-2,0)$、$(2,0)$；

   (b) 焦点坐标为 $(0,0)$、$(0,4)$。

2. 已知直角双曲线两条渐近线的方程式为 $x-y-1=0$ 和 $x+y-3=0$，并且经过点 $(4,1+\sqrt{3})$，求它的方程式。

3. 在直角双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支上求一点 $P(a, b)$，使点 P 到直线 $x-y=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$。

4. 证明直角双曲线上任何一点到两焦点的距离的乘积等于该点到双曲线中心的距离。

总复习题 5

1. 圆锥曲线的方程式如下，指出它的图象是什么曲线，并求其离心率 e：

   (a) $2x^2-y^2+6x+2y+3=0$　　(b) $y^2-4y-4x+16=0$

   (c) $x^2+4y^2+8x-16y-17=0$　　(d) $x^2-y^2-4x+2y-1=0$

2. 讨论 $kx^2+2y^2-8x=0$ 所表示的圆锥曲线。(分 $k>0$，$k=0$，$k<0$ 三种情况讨论)

3. 求适合下列条件的曲线方程式：

   (a) 中心为 $O'(-2, 1)$，半长轴长为 10，焦点在平行于 x 轴的直线上，且两焦点之间的距离为 12 的椭圆；

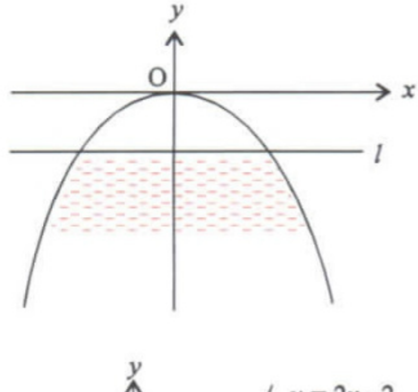
   (b) 虚轴长是 8，两顶点是 $A(2, 1)$和 $A'(2, -5)$的双曲线；

   (c) 焦点是 $F(3, -3)$，准线方程式是 $y=1$ 的抛物线。

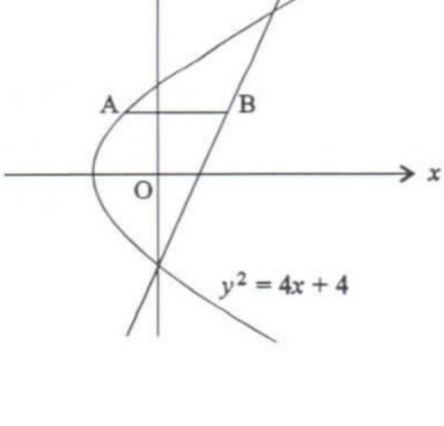
4. 求抛物线 $y=x^2+4x$ 的焦点及准线，并画出图象。

5. 过抛物线 $y^2=4ax$ 的焦点的一条直线和这条抛物线相交，两交点的纵坐标为 y_1、y_2。求证 $y_1 \cdot y_2=-4a^2$。

6. 右图中为抛物线形拱桥。当水面在 l 时，拱顶离水面 2m，水面宽 4m，水面下降 1m 后，水面宽是多少？



7. 图中的抛物线 $y^2=4x+4$ 和直线 $y=2x-2$ 相交。弦 AB 平行于 x 轴，弦上各点的 y 坐标为 t。求 t 的取值范围及弦 AB 的长。



8. 一线段 AB 的长为 1，两个端点 A、B 分别在 x 轴，y 轴上滑动，P 为 AB 上一点，且 $|PA|:|PB|=m:n$。求点 P 的轨迹方程式，并说明它是什么曲线。

9. 在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上找一点，使它与两个焦点连线的夹角为直角。

10. 已知抛物线的顶点在椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 的中心，焦点在椭圆的右焦点上。求椭圆与抛物线的交点。

11. 求与椭圆 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 有公共焦点，离心率 $e=\frac{5}{4}$ 的双曲线的方程式。

12. 油罐车上的油罐横截面是椭圆，它的长轴长是 1.5m，短轴长是 1m。如果油罐的长是 4m，求它的容积。已知椭圆面积公式 $S=\pi ab$（a、b 分别为半长轴和半短轴的长），汽油的密度是 0.7 g/cm^3。这一油罐最多能装汽油多少 kg?

13. 已知两个椭圆的方程式分别为 C_1：$x^2+9y^2-45=0$,

C_2：$x^2+9y^2-6x-27=0$。

(a) 求这两个椭圆的中心、焦点坐标；

(b) 求经过这两个椭圆的交点，且与直线 $x-2y+11=0$ 相切的圆的方程式。

14. 已知双曲线的离心率为 2，求它的两条渐近线的夹角。

15. 双曲线 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P，它到右焦点的距离是 8，求它到左准线的距离。

16. 在直角双曲线 $3x\pm4y=0$，一条准线的方程式是 $5y+3\sqrt{3}=0$。求双曲线的方程式及离心率。

17. 双曲线 $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{13}=1$ 的一支上不同的三点 A (x_1, y_1)、B $(\sqrt{26}, 6)$、C (x_2, y_2)与焦点 F (0, 5)的距离成等差数列。

(a) 求 y_1+y_2；

(b) 证明线段 AC 的垂直平分线经过一定点；

(c) 求定点坐标。

18. 双曲线的中心在坐标原点 O，焦点在 x 轴上，过双曲线右焦点且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于点 P、Q。若 $OP\perp OQ$，$|PQ|=4$，求双曲线的方程式。

6 圆锥曲线的切线

6.1 过圆锥曲线上一点的切线

设圆锥曲线的一般方程式为

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

且点 P (x_1, y_1)为圆锥曲线上的一点。

圆锥曲线的切线斜率为

$$2ax+2hy+2hx\frac{dy}{dx}+2by\frac{dy}{dx}+2g+2f\frac{dy}{dx}=0$$

$$2\frac{dy}{dx}(hx+by+f)=-2(ax+hy+g)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$$

在点 P(x_1, y_1)，斜率　$m=-\dfrac{ax_1+hy_1+g}{hx_1+by_1+f}$

因此过 P 点的切线方程式为

$$y-y_1=-\frac{ax_1+hy_1+g}{hx_1+by_1+f}(x-x_1)$$

即　$ax_1x+h(y_1x+x_1y)+by_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)-(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1)=0$

P(x_1, y_1)在曲线上，∴　$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1=-c$，代入上式，

得　$$ax_1x+h(y_1x+x_1y)+by_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

故在曲线 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 上一点 P(x_1, y_1)的切线方程式为

$$ax_1x+2h\left(\frac{x_1y+y_1x}{2}\right)+by_1y+2g\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+2f\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+c=0$$

比较圆锥曲线和它的切线方程式，可以发现下面的规律：

在曲线的方程式中，以 x_1x 代 x^2，y_1y 代 y^2，$\frac{x_1y+y_1x}{2}$ 代 xy，$\frac{x+x_1}{2}$ 代 x，$\frac{y+y_1}{2}$ 代 y，常数不变，就得到曲线在点 (x_1, y_1) 的切线方程式。

由此，可推出抛物线、椭圆、双曲线的切线如下：

曲　线	曲线方程式	过切点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程式
抛物线	$y^2=4ax$	$y_1y=4a\left(\frac{x+x_1}{2}\right)$
椭　圆	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$
双曲线	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

例1　求过抛物线 $y^2=8x$ 上一点 $P(2,-4)$ 的切线与法线方程式。

解　过点 $P(2,-4)$ 的切线方程式为

$$-4y=4(x+2)$$

即　$x+y+2=0$

切线的斜率为 -1，则过点 P 的法线的斜率为 1，

所以法线的方程式为　$y+4=x-2$

即　$x-y-6=0$

例2　求过椭圆 $4x^2+9y^2=20$ 上一点 $P\left(1,\frac{4}{3}\right)$ 的切线和法线方程式：

解　过点 $P\left(1,\frac{4}{3}\right)$ 的切线方程式为

$$4(1)(x)+9\left(\frac{4}{3}\right)(y)=20$$

即　$x+3y-5=0$

切线的斜率为 $-\frac{1}{3}$，所以法线的斜率为 3，

所以法线的方程式为　$y-\frac{4}{3}=3(x-1)$

即　$9x-3y-5=0$

例3 求过曲线 $xy=8$ 上一点 P$(-2,-4)$的切线方程式。

解 过点 P$(-2,-4)$的切线方程式为 $\dfrac{(-4)x+(-2)y}{2}=8$

$$-2x-y=8$$

$$2x+y+8=0$$

例4 已知 $x-y+k=0$ 是抛物线 $x^2+4x-8y+28=0$ 的切线，求 k 的值，并求切点的坐标。

解 因为 $x-y+k=0$ 是抛物线的切线，所以方程组

$$\begin{cases} x-y+k=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2+4x-8y+28=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

的两组实数解必相等。

由(1)，得 $y=x+k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(3)代入(2)中，得 $x^2-4x+(28-8k)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

这个方程的根的判别式 $\Delta=0$

即 $(-4)^2-4(28-8k)=0$

解得 $k=3$

以 $k=3$ 代入(4)中，得 $x^2-4x+4=0$

$$x=2$$

以 $x=2$，$k=3$ 代入(3)，得 $y=5$

所以 k 的值是 3，切点的坐标是(2, 5)。

例5 若 $y=mx+c$ 是抛物线 $y^2=4ax$ 的切线，证明 $c=\dfrac{a}{m}$。

解

$$\begin{cases} y=mx+c \cdots\cdots\cdots (1) \\ y^2=4ax \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)代入(2)，得 $(mx+c)^2=4ax$

整理得 $m^2x^2+(2cm-4a)x+c^2=0$

由于直线是抛物线的切线，只有一个交点，

$\therefore$ 判别式 $\Delta=(2cm-4a)^2-4m^2c^2=0$

化简，得 $cm-a=0$

$$c=\frac{a}{m}$$

习题 6a

1. 求过曲线上一点 P 的切线和法线的方程式：

   (a) $y^2+2x=0$, P $(-18, -6)$

   (b) $x^2=y$, P $(-2, 4)$

   (c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$, P $(-1, 3)$

   (d) $x^2+9y^2=40$, P $(-2, 2)$

   (e) $x^2-9y^2=16$, P $(5, -1)$

   (f) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, P $(5, 4)$

   (g) $xy=16$, P $(-2, -8)$

   (h) $4xy-3x^2+4=0$, P $(2, 1)$

2. 已知直线 $x-2y+k=0$ 是抛物线 $y^2-2x+2y+3=0$ 的切线，求 k 的值，并求切点的坐标。

3. 已知直线 $y=x+2$ 是抛物线 $y^2=kx$ 的切线，求 k 的值。

4. 已知过抛物线 $y^2=4ax$ 上一点 P $(4a, 4a)$ 的法线交抛物线于另一点 Q。

   (a) 求点 Q 的坐标；

   (b) 证明弦 PQ 对焦点 $(a, 0)$ 的张角为一直角。

5. 点 $(1, 6)$ 和点 $(81, -54)$ 都在抛物线 $y^2=36x$ 上，

   (a) 求在此二点的切线方程式；

   (b) 证明此二切线互相垂直；

   (c) 求此二切线的交点。

6. 证明直线 $x+2y+4=0$ 与曲线 $y^2=4x$ 相切。

7. 证明直线 $x-ty+at^2=0$ 为抛物线 $y^2=4ax$ 的切线，并求切点的坐标。

8. 求直线 $y=mx+c$ 与抛物线 $y^2=4ax$ 相切的条件。由此求 m 的值，使直线 $y=mx+3$ 是曲线 $y^2=24x$ 的切线。

9. 证明 $4x+3y-11=0$ 为椭圆 $2x^2+3y^2=11$ 的切线，并求其切点。

10. 求过椭圆 $4x^2+y^2=1$ 与直线 $x=y$ 的交点的切线方程。

11. 如果直线 $lx+my+n=0$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的切线，证明 $a^2l^2+b^2m^2=n^2$。

12. 若 $y=3x+c$ 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的切线，求 c 的值。

13. 若 $y=mx+c$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的切线，证明 $c^2=b^2+a^2m^2$。

14. 已知直线切于椭圆 $5x^2+3y^2=137$，切点的 y 坐标为 2，求此直线的方程。

15. 求双曲线 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ 与直线 $3x-5y=0$ 的交点，并求在交点处的切线和法线方程式。

16. 若直线 $y=mx+c$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切，试以 a，b，m 表示 c。

17. 过双曲线上一点 P 的切线，交实轴于点 T_1，过点 P 与中心的直线交双曲线顶点 A 处的切线于点 T_2。证明 $T_1T_2 /\!/ PA$。

6.2 已知斜率的切线方程式

我们知道，圆锥曲线的方程式是一个二次方程式，直线与圆锥曲线相交，最多有两个交点，当这两个交点重合时，直线就是圆锥曲线的切线。根据这个道理，我们研究已知斜率，求抛物线、椭圆、双曲线的切线方程式。

例6 已知椭圆 $3x^2+y^2=9$ 的切线的斜率为 3，求此切线方程式。

解 设切线方程式为 $y=3x+c$，

代入椭圆 $3x^2+y^2=9$ 中，得

$$3x^2+(3x+c)^2=9$$

整理，得 $$12x^2+6cx+c^2-9=0$$

$\because$ 直线与椭圆相切

$\therefore$ $$\Delta=(6c)^2-4(12)(c^2-9)=0$$

$$-12c^2+432=0$$

$$c^2=36$$

$$c=\pm 6$$

所以，所求的切线方程式为

$$y=3x+6 \quad 或 \quad y=3x-6$$

即 $$3x-y+6=0 \quad 或 \quad 3x-y-6=0$$

例7 求抛物线 $y^2=5x$ 和圆 $9x^2+9y^2=16$ 的公切线。

解 设公切线为 $y=mx+c$，

将 $y=mx+c$ 代入抛物线 $y^2=5x$ 中，

得 $$(mx+c)^2=5x$$

即 $m^2x^2+(2cm-5)x+c^2=0$

判别式 $\Delta=(2cm-5)^2-4m^2c^2=0$

解得 $$c=\frac{5}{4m} \quad \cdots\cdots (1)$$

又将 $y=mx+c$ 代入圆 $9x^2+9y^2=16$ 中，得

$$9x^2+9(mx+c)^2=16$$

$$(9+9m^2)x^2+18cmx+(9c^2-16)=0$$

判别式 $\Delta=(18cm)^2-4(9+9m^2)(9c^2-16)=0$

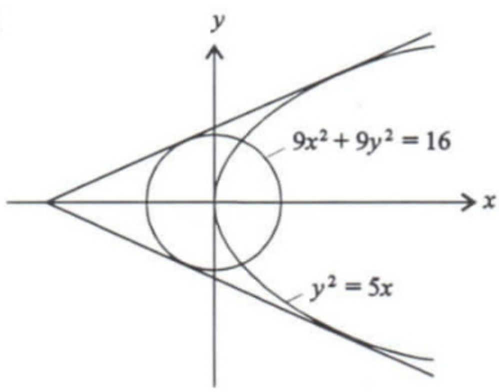
化简后，得 $$9c^2=16+16m^2 \quad \cdots\cdots (2)$$

将(1)代入(2)中，得 $$9\left(\frac{5}{4m}\right)^2=16+16m^2$$

$$256m^4+256m^2-225=0$$

解得 $m^2=\frac{9}{16}$ 或 $m^2=-\frac{25}{16}$ （舍去）

$\therefore \quad m=\pm\frac{3}{4}$



以 m 值代入(1)式中，得 $c=\pm\frac{5}{3}$

所以所求的公切线方程是

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{3} \quad 和 \quad y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{3}$$

即 $9x-12y+20=0$ 和 $9x+12y+20=0$

习题 6b

1. 已知切线的斜率 m，求曲线的切线方程式：

   (a) $3x^2+y^2=9$, $\quad m=3$

   (b) $x^2-4y^2=9$, $\quad m=-2$

   (c) $y^2=5x$, $\quad m=-\frac{3}{4}$

2. 已知切线的倾斜角 θ，求曲线的切线方程式：

(a) $y^2 = 4x$，　　$\theta = 30°$

(b) $2y^2 - 16x^2 = 1$，　　$\theta = \tan^{-1} 2$

(c) $9x^2 + 16y^2 = 144$，　　$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

3. 求与直线 $3x - y + 5 = 0$ 平行，并且与抛物线 $y^2 = 12x$ 相切的直线的方程式。

4. 在双曲线 $x^2 - 2y^2 - 17 = 0$ 上求一点，使过此点的切线垂直于直线 $4x + 5y - 2 = 0$。

5. 求抛物线 $y^2 = 64x$ 上与直线 $4x + 3y + 46 = 0$ 最近的点的坐标。

6. 当 k 为何值时，下列直线相交、相切、不相交？

(a) 直线 $kx - y - 1 = 0$ 与抛物线 $x^2 = 4y$

(b) 直线 $3x - 4y + 10 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = k^2 (k > 0)$

(c) 直线 $y = kx$ 与双曲线 $4x^2 - y^2 = 16$

7. 求圆 $25x^2 + 25y^2 = 16$ 与抛物线 $x^2 = 3y$ 的公切线的方程式。

8. 求椭圆 $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ 与抛物线 $y^2 = \frac{20}{3}x$ 的公切线的方程式。

9. 椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上两点 A、A′的切线，都与直线 $x - y = 1$ 平行。

(a) 求点 A、A′的坐标；

(b) 证明四边形 AFA′F′为平行四边形，其中 F、F′为椭圆的焦点；

(c) 设 B，B′为已知椭圆与直线的交点，O 为坐标原点，求 ΔOBB′的面积。

10. (a) m、c 为何值时，直线 $y = mx + c$ 是抛物线 $y^2 = 8x$ 与 $x^2 = 8y$ 的公切线；

(b) 求两切点的坐标；

(c) 求顶点为原点及两个切点的三角形的面积。

6.3 过圆锥曲线外一点的切线方程式

从圆锥曲线外一点可以作圆锥曲线的两条切线。

求过圆锥曲线外一点的切线方程式有两种方法，请看下面的例子。

例8 求过 A$(-6,3)$点，且切于抛物线 $2y^2=9x$ 的直线方程。

解一 因为 $2(3)^2\neq 9(-6)$，所以 A 点不在抛物线 $2y^2=9x$ 上，我们不能直接写出切线的方程。但我们可以设切线的斜率为 m，将切线的方程写成

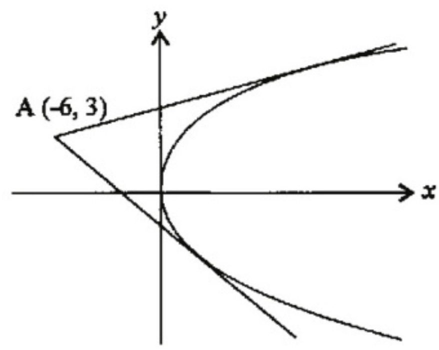
$$y-3=m(x+6)$$

即
$$x=\frac{y-3}{m}-6$$

将上式代入抛物线 $2y^2=9x$ 中，得

$$2y^2=9\left(\frac{y-3}{m}-6\right)$$

整理后，得 $2my^2-9y+(27+54m)=0$



$\because$ 切线与抛物线有且只有一个公共点，

$\therefore$ $\Delta=(-9)^2-4(2m)(27+54m)=0$

$$16m^2+8m-3=0$$

$$(4m-1)(4m+3)=0$$

$$m=\frac{1}{4}\quad 或 \quad m=-\frac{3}{4}$$

所以，所求切线的方程是

$$y-3=\frac{1}{4}(x+6)\quad 和 \quad y-3=-\frac{3}{4}(x+6)$$

即 $x-4y+18=0$ 和 $3x+4y+6=0$

解二 设切点的坐标为(x_1,y_1)。则切线的方程是

$$2y_1y=9\left(\frac{x+x_1}{2}\right)$$

因为这切线过 A 点$(-6,3)$，所以

$$2y_1(3)=9\left(\frac{-6+x_1}{2}\right)$$

即
$$x_1=\frac{4y_1+18}{3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又因为(x_1,y_1)在抛物线 $2y^2=9x$ 上，所以

$$2y_1^2=9x_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

将(1)代入(2)中，得 $2y_1^2=3(4y_1+18)$

即 $y_1^2-6y_1-27=0$

解得 $y_1=9$ 或 -3

代入(1)式中，得 $x_1=18$ 或 2

于是有两个切点 (18, 9) 和 (2, −3)

所以切线的方程是

$$2(9)y=9\left(\frac{x+18}{2}\right) \quad 或 \quad 2(-3)y=9\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

即 $$x-4y+18=0 和 3x-4y+6=0$$

例9 求过 P(−2, −1)点，且切于椭圆 $5x^2+y^2=5$ 的切线方程。

解一 因为 $5(-2)^2+(-1)^2\neq 5$，所以点 P(−2, −1)不在椭圆上。

设切线方程为 $y+1=m(x+2)$

即 $$y=mx+2m-1$$

将上式代入椭圆方程中，得

$$5x^2+(mx+2m-1)^2=5$$

$$(5+m^2)x^2+2m(2m-1)x+(2m-1)^2-5=0$$

∵ 切线与椭圆有且只有一个公共点

∴ $\Delta=4m^2(2m-1)^2-4(5+m^2)[(2m-1)^2-5]=0$

化简为 $$3m^2-4m-4=0$$

解得 $$m=-\frac{2}{3} 或 m=2$$

$m=-\frac{2}{3}$ 时，切线的方程为 $y+1=-\frac{2}{3}(x+2)$

即 $$2x+3y+7=0$$

$m=2$ 时，切线的方程为 $y+1=2(x+2)$

即 $$2x-y+3=0$$

解二 设切点的坐标是(x_1, y_1)，则切线的方程为

$$5x_1x+y_1y=5$$

因为它过(−2, −1)点，

所以 $-10x_1-y_1=5$ ……………(1)

又点(x_1, y_1)在椭圆 $5x^2+y^2=5$ 上，所以

$5x_1^2+y_1^2=5$ ……………(2)

由(1)，得 $y_1=-10x-5$ ……………(3)

(3)代入(2)，得 $5x_1^2+(-10x_1-5)^2=5$

化简得 $21x_1^2+20x_1+4=0$

解得 $x_1=-\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{2}{7}$

代入(3)，得 $y_1=-\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{2}{7}$

所以切点为 $\left(-\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ 和 $\left(-\frac{2}{7},\ \frac{-15}{7}\right)$

因此切线的方程为

$5\left(-\frac{2}{3}\right)x+\left(\frac{5}{3}\right)y=5$ 和 $5\left(-\frac{2}{7}\right)x+\left(-\frac{15}{7}\right)y=5$

即 $2x-y+3=0$ 和 $2x+3y+7=0$

例 10 试证过抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P(1, −2)的切线经过点 A(−2, 1)，并求由点 A 到抛物线的另一条切线的方程式。

解 抛物线上一点 P(1, −2)的切线方程式为

$$-2y=4\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

即 $x+y+1=0$ ……………(1)

将点 A 的坐标代入(1)式，得

$$-2+1+1=0$$

∴ 过 P 点的切线通过点 A。

设过点 A 的抛物线的切线斜率为 m，则切线方程式为

$$y-1=m(x+2)$$

即 $x=\frac{y-1}{m}-2$

将上式代入抛物线 $y^2=4x$

得 $y^2=4\left(\frac{y-1}{m}-2\right)$

整理得 $my^2-4y+4(2m+1)=0$

∵ 切线与抛物线有且只有一个公共点

∴ $\Delta=(-4)2-4(m)[4(2m+1)=0$

化简得 $2m^2+m-1=0$

解得 $m=-1$ 或 $\frac{1}{2}$

当 $m=-1$ 时，切线方程即为方程式(1)；

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，切线方程式为 $y=\frac{1}{2}x+2$

即 $x-2y+4=0$

【注】利用切线的斜率求切线方程式时，要注意斜率不存在的情况，遇有此情况时，要根据点的坐标补上另一条切线的方程式。

习题 6c

1. 已知曲线外一点和曲线的方程式，求切线的方程式：
   (a) $(0,-1)$, $x^2=4y$
   (b) $(3,2)$, $y^2+4x=0$
   (c) $(0,2)$, $6x^2-5y^2=60$
   (d) $(2,2)$, $x^2-4y^2=4$
2. 已知曲线的切线经过点 P，求切点坐标：
   (a) $7x^2+3y^2=28$, P $\left(2,\frac{14}{3}\right)$
   (b) $y^2=4x$, P $(2,3)$
3. 如果双曲线 $9x^2-y^2=36$ 的切线交 x 轴于点 $(1,0)$，求切线的方程和切点坐标。

总复习题 6

1. 直线 l：$x-y-2=0$ 与抛物线 $y^2=2x+4$ 相交于点 B、C，过抛物线上一点 A 的切线平行于直线 l。
   (a) 求点 A 的坐标；
   (b) 求 $\triangle ABC$ 的面积。
2. 求直线 $Ax+By+C=0$ 与下列圆锥曲线相切的条件。
   (a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
   (c) $y^2=4ax$
3. 一双曲线与直线 $x-y-2=0$ 相切于点 P $(4,2)$，求双曲线的方程式。

4. (a) 试求双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 的离心率。

(b) 试证点 $P(3\sqrt{2},-2)$ 在双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 上；并求这双曲线在点 P 的切线及法线方程式。

5. 求与椭圆 $16x^2+9y^2=144$ 相切，并且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程式。

6. 在抛物线 $y=x^2$ 上求一点，使它与直线 $2x-y-4=0$ 的距离最短。

7. 在椭圆 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ 上求一点，使它到直线 $2x-3y+25=0$ 的距离最短。

8. 过椭圆外一点 A(2, 2)作椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的切线，求切点的坐标。

9. 证明 $3y=2x+5$ 为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的切线。

10. 求与直线 $6x-4y+9=0$ 垂直，并切于抛物线 $x^2=8y$ 的直线方程式。

11. 在双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的切线平行于直线 $4x-y-14=0$，求切线的方程。

12. 设双曲线的渐近线是 $y=\pm\frac{1}{2}x$，它的一条切线是 $5x-6y-8=0$，求这双曲线方程。

13. 试求曲线 $y=4x^2-6x$ 的切线，已知切线斜率为 2。求此切线与 x 轴、y 轴的交点。

14. 求椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 及双曲线 $7x^2-32y^2=224$ 的公切线。

15. 抛物线 $y^2=4x-4$ 的切线过原点，求它的方程。

7 参数方程式

7.1 参数方程式

前面我们所研究的曲线方程式 $F(x,y)=0$，都是表示曲线上任意一点的坐标 x、y 之间的直接关系的。但是在解决某些问题时，曲线上点的坐标 x、y 之间这种关系往往不容易发现，而通过另一个变数间接地表示 x、y 之间的关系却比较方便。下面我们看一个例子。

设炮弹的发射角为 α，发射的初速度为 v_0，求弹道曲线的方程（不计空气阻力）。

弹道曲线是炮弹飞行的轨迹，它上面的各个点都表示炮弹发射后某个时刻的位置，当这个时刻确定后，炮弹的位置就确定了。

取炮口为原点，水平方向为 x 轴，建立直角坐标系（图 7－1）。设炮弹发射后某时刻 t 的位置在点 $M(x,y)$，因为炮弹在 Ox 方向作速度为 $v_0\cos\alpha$ 的匀速直线运动，在 Oy 方向作初速度为 $v_0\sin\alpha$ 的竖直上抛运动。按匀速直线运动和竖上抛运动位移公式，得

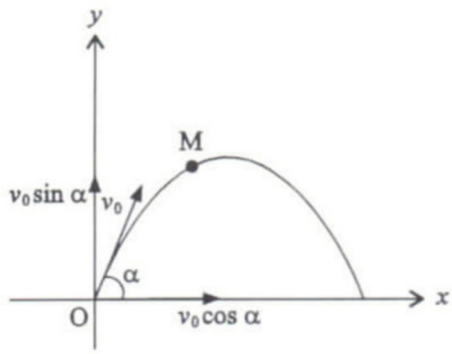


图 7－1

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

g 是重力加速度（取 9.8 米/秒^2）。

这里，v_0、α 和 g 都是常数，当 t 取某一个允许值时，由方程组（I）就可以确定当时炮弹所在的位置。这就是说，当 t 确定时，点的位置也就随着确定了。这

样建立 t 与 x、y 之间的关系不仅方便，而且还反映变数的实际意义。如方程组（I）中的两个方程式就分别反映出炮弹飞行的水平距离、高度与时间的关系。

一般地，在取定的坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 x、y 都是某个变数 t 的函数

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \tag{II}$$

并且对于 t 的每一个允许值，由方程组（II）所确定的点 M（x，y）都在这条曲线上，那么方程组（II）就叫做这条曲线的**参数方程式**（parametric equation），联系 x、y 之间关系的变数叫做**参变数**，简称**参数**（parameter）。

相对于参数方程式来说，前面学过的直接给出曲线上的点的坐标关系的方程式，叫做曲线的**普通方程式**或**卡氏方程式**（cartesian equation）。

例1 求圆心在 C（h，k），半径为 r 的圆的参数方程。

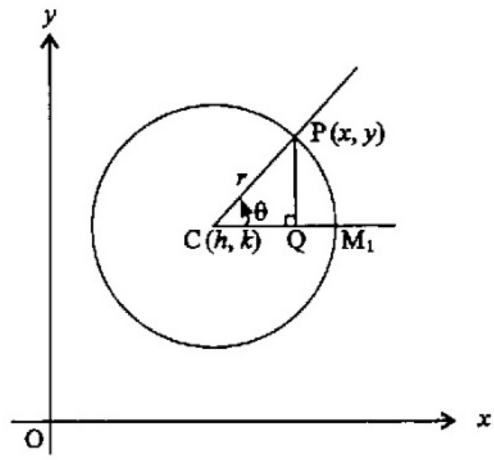
解 设 P（x，y）是圆上任意一点，过点 P 作 y 轴的平行线，过点 C 作 x 轴的平行线，两直线相交于点 Q（如下图）。取以 CQ 为始边，CP 为终边的角 θ 为参数。

根据三角函数的定义，有

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x-h}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y-k}{r} \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} x = h + r\cos\theta \\ y = k + r\sin\theta \end{cases}$$

这就是所求的圆的参数方程。



特别地，圆心在原点，半径为 r 的圆的参数方程是

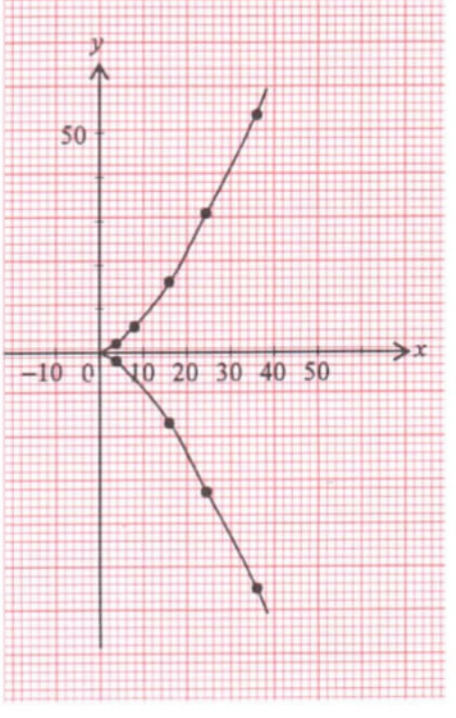
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

例2 描绘参数方程式 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{1}{4}t^3 \end{cases}$ 所表示的图形。

解 根据所给方程式，列出 t，x，y 的对应值表如下：

t	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	$\to \pm\infty$
x	0	1	4	9	16	25	36	$\to \infty$
y	0	$\pm\dfrac{1}{4}$	± 2	$\pm 6\dfrac{3}{4}$	± 16	$\pm 31\dfrac{1}{4}$	± 54	$\to \pm\infty$

图象如下图所示：



7.2 参数方程和普通方程的互化

参数方程和普通方程是曲线方程的不同形式，它们都表示曲线上点的坐标之间的关系。一般情况下，我们可以通过消去参数方程中的参数，得到直接表示 x、y 之间关系的普通方程；也可以选择一个适当的参数将普通方程变成参数方程的形式，如果参数选择得适当，方程可能比较简单或者较明显地反映出物理、几何意义。

例3 把弹道曲线的参数方程 $\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ 化为普通方程，并求出炮弹水平射程的公式。

解
$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

由(1)得 $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

代入(2)，消去参数 t，得普通方程

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x$$

令 $y=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$

炮弹的水平射程的公式为 $s = x_2 - x_1$

$$= \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

例4 把参数方程 $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$ $(a > b > 0)$ 化为普通方程。

解 分别将两方程变形得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\varphi \\ \dfrac{y}{b} = \sin\varphi \end{cases}$$

再将两方程的两边平方后相加，得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$$

即 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

这是中心在原点，焦点在 x 轴上的椭圆方程。

例5 把方程 $xy=a^2$ 化成参数方程。

解 设 $x=a\cot\theta$，把它代入原方程，得

$$ya\cot\theta=a^2$$

$$y=a\tan\theta$$

得到参数方程为 $$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\tan\theta\end{cases}$$

若设 $x=at$，把它代入 $xy=a^2$，得

$$aty=a^2$$

$$y=\frac{a}{t}$$

得到参数方程为 $$\begin{cases}x=at\\y=\dfrac{a}{t}\end{cases}$$

【注】由普通方程化成参数方程，所求的参数方程不是唯一的。取不同的参数，会有不同的参数方程。

习题 7a

1. 把下列参数方程化成普通方程（θ、t 是参数），并说明它们各表示什么曲线：

(a) $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$ (b) $\begin{cases}x=at^2\\y=2at\end{cases}$

(c) $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1-4t\end{cases}$ (d) $\begin{cases}x=x_1+at\\y=y_1+at\end{cases}$

(e) $\begin{cases}x=4\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$ (f) $\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\\y=\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$

(g) $\begin{cases}x=2+r\cos 60°\\y=-1+r\sin 60°\end{cases}$

2. 根据所给条件，把下列各方程化成参数方程（θ、t 是参数）：

(a) $xy=a^2$，设 $x=a\tan\theta$

(b) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，设 $y=b\tan\theta$

(c) $y^2=4x^2-5x^3$，设 $y=tx$

3. 求椭圆 $4x^2+y^2=16$ 的参数方程：

(a) 设 $x=2\cos\theta$，θ 是参数

(b) 设 $y=tx+4$，t 是参数

4. 一曲线的方程式为 $9x^2+4y^2=36$。若 $x=2\cos\theta$，θ 是参数，以此参数 θ 表示 y，且当 $\theta=0$ 时，$y=-3$。

5. 画出以参数方程式 $x=1+2t$，$y=2+3t$ 所表示的曲线的图象，并求其普通方程式。

6. 用描点法画出下列参数方程所表示的图形：

(a) $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$

7.3 参数方程式与轨迹

应用参数方程式可解决一些比较复杂而又常见的平面几何轨迹问题。

例6 设 A 点为 $(2t, 0)$，B 为 $\left(0, \dfrac{2}{t}\right)$。若 M 为 AB 的中点，求 M 点的坐标，以 t 表示。据此，求 M 的轨迹方程式，并画出其图象。

解 M 点为 AB 的中点，其坐标为

$$\left(\frac{2t+0}{2}, \frac{0+\frac{2}{t}}{2}\right)=\left(t, \frac{1}{t}\right)$$

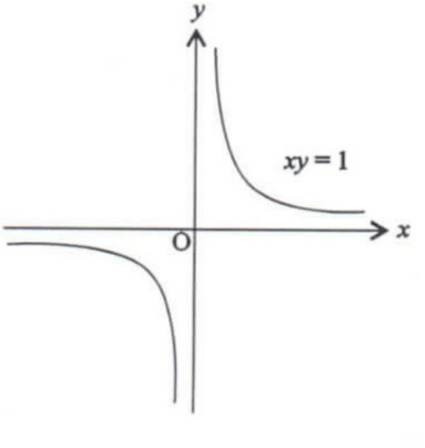
即 $$\begin{cases} x=t & \cdots\cdots(1) \\ y=\dfrac{1}{t} & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)代入(2)，得 $y=\dfrac{1}{x}$

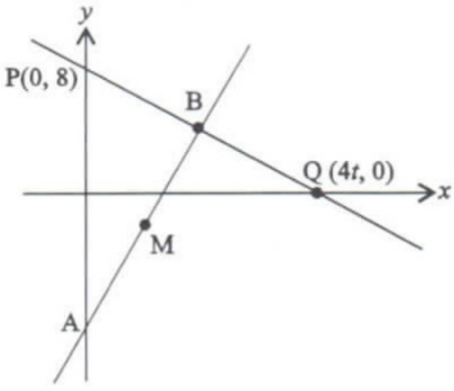
$xy=1$

即 M 的轨迹方程式为 $xy=1$

其图象如右图所示。



例7 P 点为(0, 8)，Q 为一动点($4t$, 0)。PQ 的垂直平分线交 PQ 于 B，交 y 轴于 A。求 AB 的中点 M 的坐标，以 t 表示。接着，求 M 的轨迹方程式。



解 $M_{PQ}=\dfrac{8-0}{0-4t}=-\dfrac{2}{t}$

∴ 垂直平分线的斜率为 $\dfrac{t}{2}$

PQ 的中点 B 的坐标为 $(2t, 4)$

∴ PQ 的垂直平分线的方程式为

$$\frac{y-4}{x-2t}=\frac{t}{2}$$

$$2y=xt-2t^2+8$$

此线交 y 轴于 A，所以 A 的 x 坐标 $=0$，

$$2y=(0)t-2t^2+8$$

$$y=-t^2+4$$

即 A 点的坐标为 $(0, -t^2+4)$

AB 的中点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{2t+0}{2},\ \dfrac{4+(-t^2+4)}{2}\right)$

$$=\left(t,\ \frac{-t^2+8}{2}\right)$$

即 $\begin{cases} x=t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y=\dfrac{-t^2+8}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1)代入(2)，得 $y=\dfrac{-(x)^2+8}{2}$

$$2y=-x^2+8$$

即 M 的轨迹方程式为 $x^2+2y-8=0$

习题 7b

1. 设 A 点为$(t, 2)$，B 点为$(0, 2t)$，其中 t 为参数。若 M 为 AB 的中点，求 M 点的坐标，以 t 表示。然后，求 M 的轨迹方程式。
2. 设 P 点$(t^2, 4t)$为一动点，O 为原点，求 OP 的中点坐标 Q。据此，求 Q 的轨迹方程式，并画出图象。
3. A 点为(0, 6)，B 为一动点$(2t, 0)$。AB 的中垂线交 AB 于 P，交 y 轴于 Q。求 PQ 的中点坐标 M，以 t 表示，并求点 M 的轨迹方程式。

4. 一直线 $x+y=m$ 与另一直线 $y=mx+1$ 相交于 A 点，求 A 点的坐标，以 m 表示。据此证明 A 点的轨迹方程式为 $y-xy=x^2+1$。
5. 求一斜率为 m，且经过点(3, 1)的直线的方程式。此直线截 x 轴于 P，截 y 轴于 Q，求 P 和 Q 的坐标，以 m 表示。据此，求 PQ 的中点 K 的轨迹方程式。
6. 一直线的斜率为 $\frac{1}{t}$，且经过点$(t^2, 3t)$，求此直线的方程式。此直线与另一直线 $2y+x=8-4t^2$ 相交于 A 点，证明 A 点的 y 坐标为 $4-2t$。
   据此，求 A 点的轨迹方程式。
7. 一曲线的方程式为 $y=x^2-4$。
   (a) 求当 $x=2t$ 时的切线方程式；
   (b) 若此切线经过点$(3, -4)$，求 t 的值；
   (c) A 和 B 为此曲线上的两个点，它们的 x 坐标分为 $x=t$，$x=3t$。若 M 为 AB 的中点，求 M 的轨迹方程。
8. 一曲线的方程式为 $y=(x+3)^2$，求此曲线在 $x=t+3$ 时的切线方程式。此切线方程式截 x 轴及 y 轴于 P 及 Q，若 M 为 PQ 的中点，求 M 的轨迹方程式并画出其图象。

7.4 参变函数的微分法

如果两个变量 y 与 x，y 是 x 的函数，它们的对应关系由参数方程

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

确定，且函数 $f(t)$，$g(t)$可导，$f'(t)\neq 0$，则

由链导法可得 $$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

例8 设参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 并以 θ 表示。

解 $\dfrac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}$$

例9 设 $x = t(3-t)$，$y = 5t^4$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 并以 t 表示。

解 $\dfrac{dx}{dt} = 3-2t$，$\dfrac{dy}{dt} = 20t^3$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{20t^3}{3-2t}$$

例 10 求曲线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$，（$a$ 为常数）在点 $t = \dfrac{\pi}{3}$ 时的切线方程。

解 $\dfrac{dx}{dt} = a - a\cos t$，$\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a-a\cos t} = \cot\frac{t}{2}$$

当 $t = \dfrac{\pi}{3}$ 时，$\dfrac{dy}{dx} = \cot\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

当 $t = \dfrac{\pi}{3}$ 时，曲线上的点为 $P\left(a\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \dfrac{1}{2}a\right)$，

所以曲线在点 P 处的切线方程为

$$y - \frac{1}{2}a = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

即 $6\sqrt{3}x - 6y + 2a(6-\pi\sqrt{3}) = 0$

例 11 一曲线的参数方程式为 $\begin{cases} x = t + t^2, \\ y = t - t^2 \end{cases}$

(a) 求在点 $t = 2$ 时的切线和法线方程式，

(b) 求与直线 $x + 2y = 1$ 平行的切线方程式。

解 (a) $\dfrac{dx}{dt} = 1 + 2t$，$\dfrac{dx}{dt} = 1 - 2t$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1 - 2t}{1 + 2t}$$

当 $t = 2$ 时，$m = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{5}$

当 $t = 2$ 时，$x = 6$，$y = -2$

∴ 在点$(6, -2)$处的切线方程式为

$$\frac{y + 2}{x - 6} = -\frac{3}{5}$$

即 $3x + 5y - 8 = 0$

法线的斜率为 $\dfrac{5}{3}$，

∴ 在点$(6, -2)$的法线方程式为

$$\frac{y + 2}{x - 6} = \frac{5}{3}$$

即 $5x - 3y - 36 = 0$

(b) $x + 2y = 1$ 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - 2t}{1 + 2t} = -\frac{1}{2}$$

$$t = 3$$

当 $t = 3$ 时，$x = 12$，$y = -6$

∴ 在点$(12, -6)$处的切线方程式为

$$\frac{y + 6}{x - 12} = -\frac{1}{2}$$

即 $x + 2y = 0$

习题 7c

1. 求下列参数方程的导数$\dfrac{dy}{dx}$，并以 t 表示之：

(a) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = (t+1)^2 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$

(c) $x = \cos^4 t$，$y = \sin^4 t$

(d) $x = \dfrac{t}{1+t}$，$y = \dfrac{1-t}{1+t}$

2. 求下列各曲线在指定点处的切线方程：

(a) $x = 2t - 5$，$y = t^2 + 1$；　$t = 2$

(b) $x = t$，$y = \dfrac{1}{t}$；　$t = 3$

(c) $\begin{cases} x = \ln \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$；　$t = \dfrac{\pi}{2}$

(d) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$；　$t = 2$

3. 一曲线的参数方程式为 $x = (1+t)^2$，$y = t^3$。此曲线上两点 A 和 B 的坐标分别为 $t = 2$，$t = -2$，求与弦 AB 平行的切线方程式。

4. 一曲线的参数方程式为 $x = 2t^2$，$y = 3t$，此曲线与直线 $2x + y = 1$ 相交于点 A 和 B，求于点 A 和 B 处的 t 值。在点 A 和点 B 处的切线相交于 T，求 T 的坐标。

5. 一曲线的参数方程式为 $x = t + \dfrac{1}{t}$，$y = (t+1)^2$。

(a) 证明 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t^2}{t-1}$，

(b) 求与直线 $y = 8x$ 平行的切线的切点坐标，

(c) 求在此切点处的法线方程式。

7.5 圆锥曲线的参数方程式

● 抛物线的参数方程式

抛物线方程的标准方程为　　$y^2 = 4ax$

若令 $y = 2at$，t 为一参数，则得　$(2at)^2 = 4ax$

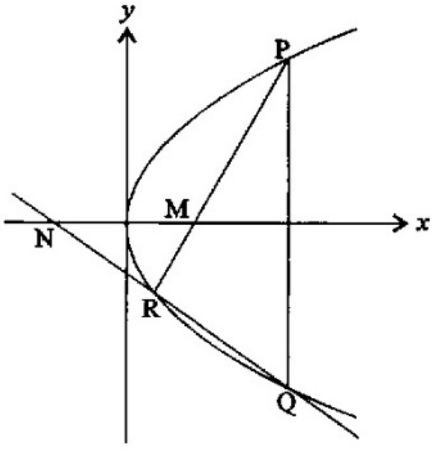
即　　$x = at^2$

所以，抛物线的一种参数方程式为

$$\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases}，t \text{ 为参数}$$

例 12 设 PQ 是抛物线 $y^2=4ax$ 平行于准线的一条弦，R 是抛物线上与 P、Q 不重合的一点，PR、QR 与抛物线的轴相交于 M、N(如下图)，求证：线段 MN 的中点是抛物线的顶点。

证明 设点 P 的坐标为$(at^2, 2at)$，则点 Q 的坐标为$(at^2, -2at)$。又设点 R 的坐标为$(ar^2, 2ar)$，则直线 PR 的方程为



$$\frac{y-2ar}{x-ar^2}=\frac{-2at-2ar}{at^2-ar^2}$$

即 $y-2ar=\dfrac{2}{t+r}(x-ar^2)$

令 $y=0$，得 $x=-art$

∴ 点 M 的坐标为 $(-art, 0)$。

直线 QR 的方程为

$$\frac{y-2ar}{x-ar^2}=\frac{-2at-2ar}{at^2-ar^2}$$

即 $y-2ar=\dfrac{-2}{t-r}(x-ar^2)$

令 $y=0$，得 $x=art$

∴ 点 N 的坐标为$(art, 0)$

∴ 线段 MN 的中点坐标为 $x=\dfrac{art+(-art)}{2}$

$$=0$$

$$y=0$$

又抛物线 $y^2=4ax$ 的顶点为$(0, 0)$，

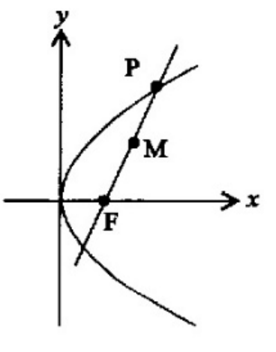
∴ 线段 MN 的中点是抛物线的顶点。

例 13 P 为一抛物线 $y^2=4ax$ 上一点，F 为其焦点，M 为 FP 之中点，试证 M 点的轨迹为一抛物线；且求此轨迹的顶点及通径长度。

解 P 点的参数坐标为$(at^2, 2at)$，

F 的坐标为$(a, 0)$，

FP 的中点 M 的坐标为



$$\left(\frac{at^2+a}{2}, \frac{2at}{2}\right)=\left(\frac{at^2+a}{2}, at\right)$$

$\therefore$ M 的轨迹方程式为 $\begin{cases} x = \dfrac{at^2 + a}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y = at \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

由(2)式得，$\qquad t = \dfrac{y}{a}$

代入(1)得 $\qquad 2x = a + a\left(\dfrac{y}{a}\right)^2$

即 $\qquad y^2 = 2ax - a^2$

$$= 2a\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

根据方程式可知 M 点的轨迹为一抛物线；

其顶点为 $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$，通径长度为 $2a$。

例 14 求经过点 M (15, 2)的抛物线 $y^2 = 4x$ 的法线方程式。

解 将点 M 的坐标代入抛物线 $y^2 = 4x$ 中，得 $\quad 12^2 \neq 4 \times 15$

所以点 M 不在抛物线上。

设抛物线 $y^2 = 4x$ 上的切点的坐标为$(t^2, 2t)$，

而 $\quad 2y\dfrac{dy}{dx} = 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

$\therefore$ 过点$(t^2, 2t)$的切线斜率为$\dfrac{1}{t}$，则过此点的法线斜率为 $-t$，

$\therefore$ 过点$(t^2, 2t)$的法线方程式为 $\quad y - 2t = -t(x - t^2)$

$$tx + y = 2t + t^3$$

此法线经过点 M (15, 12)，$\therefore \quad 15t + 12 = 2t + t^3$

$$t^3 - 13t - 12 = 0$$

$$(t+1)(t+3)(t-4) = 0$$

$$t = -1,\ -3 \text{ 或 } 4$$

$\therefore$ 过点 M (15, 12)的法线有三条，它们的方程式分别为

$-x + y = -2 - 1$，即 $\quad x - y - 3 = 0$

$-3x + y = -6 - 27$，即 $\quad 3x - y - 33 = 0$

$4x + y = 8 + 64$，即 $\quad 4x + y - 72 = 0$

例 15 (a) 证明抛物线 $y^2=4ax$ 上任意一点 $(at^2,\ 2at)$ 的切线方程式为 $y=\frac{1}{t}x+at$。

(b) P、Q 为抛物线 $y^2=4ax$ 上任意两点，TP、TQ 为它的两条切线，且 $\triangle$TPQ 的面积为 $4a^2$，求点 T 的轨迹。

解 (a)

$$y^2=4ax$$

$$2y\frac{dy}{dx}=4a$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$$

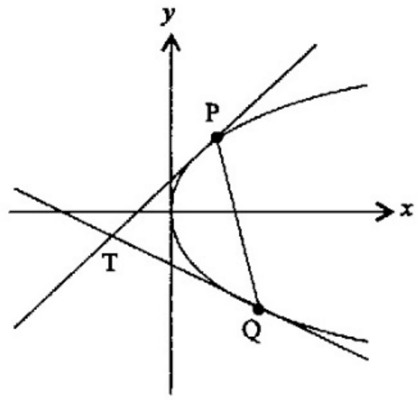
在点 $(at^2,\ 2at)$ 的切线斜率为 $\qquad m=\frac{2a}{2at}=\frac{1}{t}$

$\therefore$ 在点 $(at^2,\ 2at)$ 的切线方程式为 $\quad y-2at=\frac{1}{t}(x-at^2)$

$$y=\frac{1}{t}x+at$$

(b) 设点 P、Q 的坐标分别为 $(ap^2,\ 2ap)$、$(aq^2,\ 2aq)$，

则过点 P、Q 的切线方程式分别为



$$y=\frac{1}{p}x+ap\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=\frac{1}{q}x+aq\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) = (2)，得

$$\frac{1}{p}x+ap=\frac{1}{q}x+aq$$

$$qx+ap^2q=px+apq^2$$

$$(q-p)x=apq(q-p)$$

解得 $\quad x=apq,\ y=a(p+q)$

即 T 点的坐标为 $(apq,\ a(p+q))$

$$\begin{array}{cccc} ap^2 & aq^2 & apq & ap^2 \\ 2ap & 2a & a(p+q) & 2ap \end{array}$$

$\triangle$TPQ 的面积 $=4a^2$

即 $\frac{1}{2}\mid 2a^2p^2q+a^2q^2(p+q)+2a^2p^2q$

$$-2a^2pq^2-2a^2pq^2-a^2p^2(p+q)\mid=4a^2$$

$$|4a^2p^2q-4a^2pq^2+a^2(p+q)(q^2-p^2)|=8a^2$$

$$|4pq(p-q)-(q+p)^2(p-q)|=8$$

$$|(p-q)[4pq-(p+q)^2]|=8$$

$$|(p-q)(p-q)^2|=8$$

$$|(p-q)|=2$$

将 T 点的坐标 $x=apq$，$y=a(p+q)$变形为

$$\frac{x}{a}=pq \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\frac{y}{b}=p+q \quad \cdots\cdots (4)$$

$(4)^2-4\times(3)$，得 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{4x}{a}=(p+q)^2-4pq$

$$=(p-q)^2$$

$$=4$$

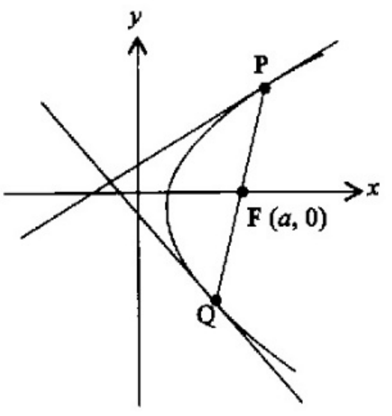
$$y^2-4ax=4a^2$$

即点 T 的轨迹方程式为 $\quad y^2=4ax+4a^2$

例 16 证明过抛物线 $y^2=4ax$ 的焦点的任意一条弦的两个端点的切线互相垂直。

解 设弦的两个端点为 $P(ap^2, 2ap)$和 $Q(aq^2, 2aq)$，焦点为 $F(a, 0)$。

P、F、Q 三点共线，



$\therefore \quad m_{PF}=m_{FQ}$

$$\frac{2ap}{ap^2-a}=\frac{-2aq}{a-aq^2}$$

$$p-pq^2=-qp^2+q$$

$$p-q-pq^2+pq^2=0$$

$$(p-q)(1+pq)=0$$

$p\neq q$，$\therefore \quad pq=-1$

切线的斜率为 $\quad 2y\dfrac{dy}{dx}=4a$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$$

在 P 点$(ap^2, 2ap)$的斜率 $\quad m_1=\dfrac{1}{p}$

在 Q 点$(aq^2, 2aq)$的斜率 $\quad m_2=\dfrac{1}{q}$

$$m_1\times m_2=\frac{1}{p}\times\frac{1}{q}$$

$$=\frac{1}{pq} \qquad (pq=-1)$$

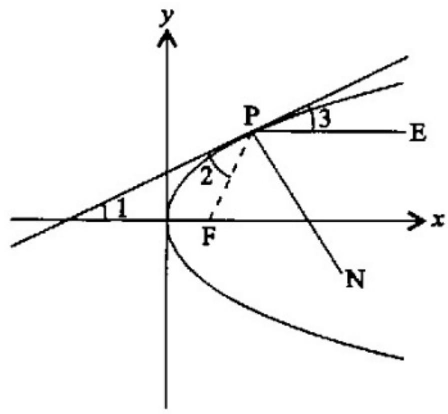
$$=-1$$

$\therefore$ 过点 P 和点 Q 的切线互相垂直。

例 17 如下图，已知点 P 是抛物线 $y^2=4ax$ 上任意一点，T 是过点 P 的切线与 x 轴的交点，PN 是法线，PE 平行于 x 轴，F 是焦点。求证：法线 PN 平分 $\angle$FPE。

解 设点 P 为$(ap^2, 2ap)$，

则过点 P 的切线为



$$2apy=2a(x+ap^2)$$

$$yp=x+ap^2$$

当 $y=0$，$x=-ap^2$

$\therefore$ T 点的坐标为$(-ap^2, 0)$

$$TF=a+ap^2=a(1+p^2)$$

$$\begin{aligned}PF&=\sqrt{(a-ap^2)^2+(0-2ap)^2}\\&=a\sqrt{1+2p^2+p^4}\\&=a\sqrt{(1+p^2)^2}\\&=a(1+p^2)\\&=TF\end{aligned}$$

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$

$\angle 3=\angle 1$ （PE// x 轴）

$=\angle 2$

$\therefore$ $\angle$FPN $=\angle$EPN

$\therefore$ 法线 PN 平分$\angle$FPE。

例 17 的结论说明了抛物线的法线的一个重要性质：经过抛物线上任意一点 P 作抛物线的轴的平行线，则过点 P 的法线平分这条直线与 PF 连线的夹角。这个性质在技术上有广泛的应用。如光源、声源或热源放在抛物镜的焦点 F 处(图 7－2)，则反射角等于入射角(即 $\alpha_1=\alpha_2$)。当从焦点射出的光线经过抛物镜反射，变成了平行光线；反过来，平行光线射到抛物镜，经过反射，光线都焦中到焦点 F 上。利用这个原理可以设计探照灯和太阳灶等。

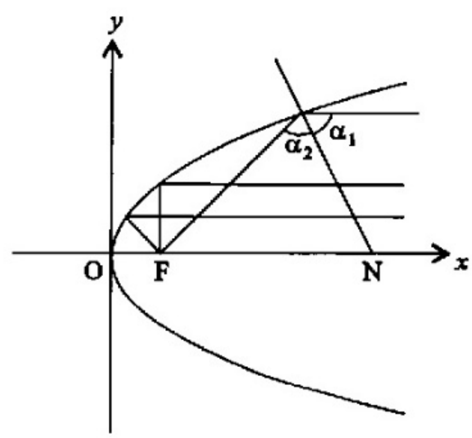


图 7－2

习题 7d

1. P(at^2, $2at$)为抛物线 $y^2=4ax$ 上一点，F 为焦点，PF 与此抛物线交于另一点 Q，试证点 Q 为$\left(\frac{a}{t^2}, \frac{-2a}{t}\right)$。
2. PQ 为抛物线 $y^2=4ax$ 的弦，且 Q 点的 y 坐标为 P 点 y 坐标的两倍，M 为 PQ 之中点，试求 M 点的轨迹。
3. P 为抛物线 $y^2=4ax$ 上一点，其焦点为 F，顶点为 O，Q 为 FP 之中点，R 为 OQ 之中点，求 R 点的轨迹。
4. P 与 Q 为抛物线 $y^2=4ax$ 上的两点，O 为其顶点，且 OP⊥OQ，M 为 PQ 之中点，求 M 点的轨迹。
5. 已知抛物线$\begin{cases} x=at^2 \\ y=2at \end{cases}$上的两点所对应的参数是 t_1 和 t_2。
   (a) 求连结这两点的直线方程；
   (b) 如果 $t_1t_2=-\frac{1}{4}$，求证这条直线经过其焦点。
6. M 是抛物线 $y^2=4ax$ 上一点 P 到其对称轴的垂足，过 P 点的切线交此对称轴于 T，证明抛物线的顶点为 TM 之中点。
7. 抛物线上的一点 P 的切线交其对称轴于 T 点，F 为此抛物线的焦点，证明 ∠SPT = ∠STP。
8. P 是抛物线上的任意点，F 为焦点，A 为顶点，过 P 点与 A 点的切线相交于 Z，证明 $FZ^2=FA\cdot FP$。
9. P 是抛物线上任意点，F 为其焦点，由 F 到过 P 点的切线的垂足为 Z，求 Z 点的轨迹。
10. P 及 Q 是抛物线上任意两点，TP 为其切线，TQ 与其对称轴平行，证明 TP 中点的轨迹为此抛物线之准线。
11. P 及 Q 为抛物线 $y^2=4ax$ 上的点，TP 及 TQ 为其切线，NP 及 NQ 为其法线，试证 TN 之中点的轨迹为 $2y^2=25a(x-a)$。
12. 点 P 为抛物线 $y^2=4ax$ 上的一点，F 为其焦点，过焦点 F 的直线 l 与 PF 互相垂直。证明过点 P 的切线与直线 l 的交点 Q 一定在抛物线的准线上。
13. (a) 求抛物线 $y^2=4ax$ 在点 P(at^2, $2at$)的切线方程式。
    (b) 已知过坐标原点 O 且与在 P 点的切线平行的直线交抛物线于另一点 Q，证明过点 P 平行于 x 轴的直线通过线段 OQ 的中点。
14. 证明过点($5a$, $2a$)的抛物线的法线只有两条。

15. $y^2=4x$ 在点 $P(t^2, 2t)$ 的法线与抛物线交于另一点 Q。证明 $|PQ|^2=\dfrac{16(t^2+1)^3}{t^4}$。

16. 抛物线 $y^2=4ax$ 在点 $P(ap^2, 2ap)$ 及 $Q(aq^2, 2aq)$ 的切线相交于点 R，试求 R 的坐标，并证明 ΔPQR 的面积为 $\left|\dfrac{1}{2}a^2(p-q)^3\right|$。

17. 试求抛物线 $y^2=4ax$ 上之点 $(at^2, 2at)$ 的法线方程式。试证此抛物线之任意两正交之法线的交点落在抛物线 $y^2=a(x-3a)$ 上。

● 椭圆的参数方程式

把椭圆的标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 写成

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

如果令

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\cos\theta\\[2mm]\dfrac{y}{b}=\sin\theta\end{cases}$$

就得到一种参数方程

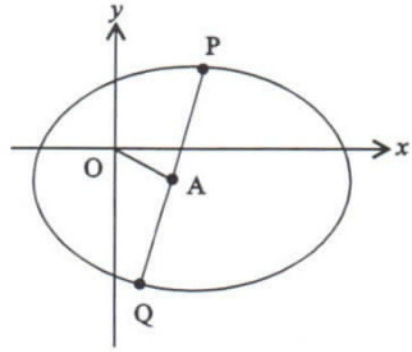
$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases},\ \theta\text{ 为参数}$$

例 18 P 与 Q 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上两点，A 为 PQ 的中点，椭圆的中心为 O，试证 OA 与 PQ 的斜率的乘积为一常数。

解 设 P 点的坐标为 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$；Q 点坐标为 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$。

PQ 的中点 A 的坐标为

$$\left(\frac{a(\cos\theta+\cos\alpha)}{2}, \frac{b(\sin\theta+\sin\alpha)}{2}\right)$$



$$m_{PQ}=\frac{b\sin\theta-b\sin\alpha}{a\cos\theta-a\cos\alpha}$$

$$=\frac{b(\sin\theta-\sin\alpha)}{a(\cos\alpha-\cos\alpha)}$$

$$m_{OA}=\frac{b(\sin\theta+\sin\alpha)}{a(\cos\theta+\cos\alpha)}$$

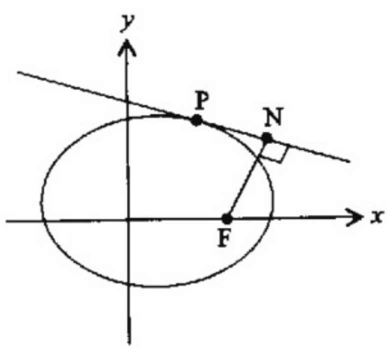
$$m_{PQ} \times m_{OA} = \frac{b(\sin\theta - \sin\alpha)}{a(\cos\theta - \cos\alpha)} \times \frac{b(\sin\theta + \sin\alpha)}{a(\cos\theta + \cos\alpha)}$$
$$= \frac{b^2(\sin^2\theta - \sin^2\alpha)}{a^2(\cos^2\theta - \cos^2\alpha)}$$
$$= \frac{b^2(\sin^2\theta - \sin^2\alpha)}{a^2[(1-\sin^2\theta) - (1-\sin^2\alpha)]}$$
$$= \frac{b^2(\sin^2\theta - \sin^2\alpha)}{a^2(\sin^2\alpha - \sin^2\theta)}$$
$$= -\frac{b^2}{a^2}$$

∴ OA 与 PQ 的斜率的乘积为一常数。

例 19 从椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点 F 作椭圆的切线的垂线，求垂足 N 的轨迹。

解 设 P 点为 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$，焦点 F 为 $(ae, 0)$。过 P 点的切线方程式为

$$\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$$



即 $bx\cos\theta + ay\cos\theta = ab$ ………………(1)

切线的斜率为 $-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$

∴ FN 的斜率为 $\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}$

FN 的方程式为 $y = \frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}(x - ae)$

即 $by\cos\theta - ax\sin\theta = a^2 e\sin\theta$ ………(2)

由 $(1)^2$，得 $b^2x^2\cos^2\theta + 2ab\,xy\cos\theta\sin\theta + a^2y^2\sin^2\theta = a^2b^2$ ………… (3)

由 $(2)^2$，得 $b^2y^2\cos^2\theta - 2ab\,xy\cos\theta\sin\theta + a^2x^2\sin^2\theta = a^2e^2\sin^2\theta$ …… (4)

(3) + (4)，得 $b^2\cos^2\theta(x^2+y^2) + a^{2\sin 2}\theta(y^2+x^2) = a^2(b^2 + e^2\sin^2\theta)$

$$(x^2+y^2)(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) = a^2[b^2 + (a^2-b^2)\sin^2\theta]$$
$$x^2 + y^2 = \frac{a^2(b^2 + a^2\sin^2\theta - b^2\sin^2\theta)}{b^2(1-\sin^2\theta) + a^2\sin^2\theta}$$
$$= \frac{a^2(b^2 + a^2\sin^2\theta - b^2\sin^2\theta)}{b^2 - b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$
$$= a^2$$

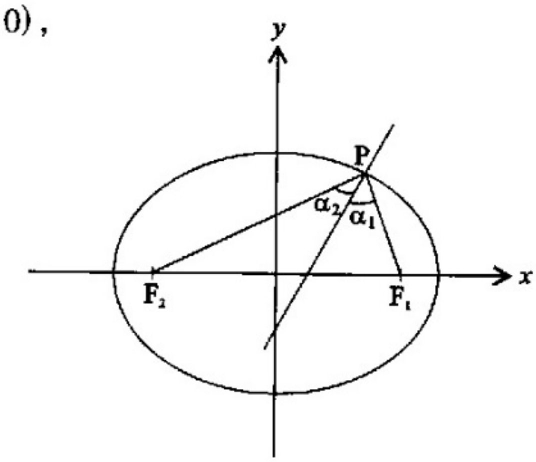
∴ 垂足 N 的轨迹为 $x^2 + y^2 = a^2$

例 20 已知P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任意一点,PN是过点P的法线，$F_1$、$F_2$是椭圆的两个焦点。求证PN平分$\angle F_1PF_2$。

解 过点$P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$的切线斜率为 $m_1=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$

法线斜率为 $m_2=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}$

点F_1、F_2的坐标分别为$(ae,\ 0)$，$(-ae,\ 0)$，



所以 $m_{PF_1}=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-ae}$

$$m_{PF_2}=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+ae}$$

$$\tan\alpha_1=\frac{m_{PF_1}-m_2}{1+m_{PF_1}m_2}$$

$$=\frac{\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-ae}-\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}}{1+\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-ae}\cdot\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}}$$

$$=\frac{b^2\sin\theta\cos\theta-a^2\sin\theta\cos\theta+a^2e\sin\theta}{ab\cos^2\theta-ab\,e\cos\theta+ab\sin^2\theta}$$

$$=\frac{-a^2e^2\sin\theta\cos\theta+a^2e\sin\theta}{ab\,(1-e\cos\theta)}$$

$$=\frac{a^2e\sin\theta(1-e\cos\theta)}{ab\,(1-e\cos\theta)}$$

$$=\frac{ae\sin\theta}{b}$$

$$\tan\alpha_2=\frac{m_2-m_{PF_2}}{1+m_2m_{PF_2}}$$

$$=\frac{\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}-\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+ae}}{1+\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}\cdot\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+ae}}$$

$$=\frac{a^2\sin\theta\cos\theta+a^2e\sin\theta-b^2\sin\theta\cos\theta}{ab\cos^2\theta+ab\,e\cos\theta+ab\sin^2\theta}$$

$$=\frac{a^2e^2\sin\theta\cos\theta+a^2e^2\sin\theta}{ab\,(1+e\cos\theta)}$$

$$=\frac{a^2e\sin\theta(e\cos\theta+1)}{ab\,(1+e\cos\theta)}$$

$$=\frac{ae\sin\theta}{b}$$

$\therefore$ $\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$

$\therefore$ $\alpha_1=\alpha_2$

例 20 的结论说明，经过椭圆上任意一点 P 的法线，平分点 P 与两焦点连线的夹角。

这个性质同样可以应用到光学或声学中。如图 7－3，由于入射角等于反射角，所以从椭圆的一个焦点发出的光线或声波，经过反射，都集中到另一个焦点上。

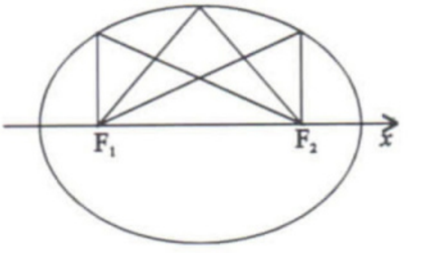


图 7－3

习题 7e

1. P 为椭圆上的一点，F 为其一焦点，M 为 FP 之中点，试证 M 点的轨迹为一椭圆，并求此椭圆之中心。
2. P 为椭圆上一点，F 与 F′为其焦点，试证 PF 与 PF′的和恒等于长轴之长度。
3. 设点 M 在圆 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 上运动，过 M 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 Q，求线段 QM 的中点 P 的轨迹的参数方程，并指出这是什么曲线。
4. 设 AB 是椭圆 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 的弦，其两端点所对应的参数是 α、β，它与长轴的交点到其中心的距离为 d，椭圆长轴的长为 $2a$，求证 $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{d-a}{d+a}$。
5. 设点$(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$、$(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两点，过这两点的切线交于点 R，求点 R 的坐标。
6. P 是椭圆上的任意点，其焦点为 F，离心率为 e，且过 P 点的法线交长轴于 G，证明 $GF = eFP$。
7. 椭圆上一点 P 的法线交长轴于 N，F 为其焦点，自 N 作 PF 之垂线，其垂足为 H，试证 $PH = \frac{b^2}{a}$。
8. P 为椭圆上一点，M 为自 P 到长轴的垂足，过 P 点的切线交长轴于 T，试证 OM · OT 为一常数。
9. 点 P 是椭圆上任意一点，过点 P 的切线分别与过椭圆长轴两个端点 A′、A 的切线相交于点 M、N。证明 $MA \cdot NA = b^2$（b 为半短轴的长）。
10. 求椭圆的两条互相垂直的切线交点的轨迹。

11. 证明：自椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的短轴上与中心相距 $\sqrt{a^2-b^2}$ 的两点，到椭圆上任意一点的切线的距离的平方和等于 $2a^2$。

12. 有一个光源在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点上，光线从光源射出后，在椭圆的点 P 处反射。如果点 P 的横坐标为 2，求入射线和反射线所在直线的方程式。

● 双曲线和直角双曲线的参数方程式

把双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

写成

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

如果令

$$\begin{cases}\frac{x}{a}=\sec\theta\\ \frac{y}{b}=\tan\theta\end{cases}$$

就得到双曲线的一种参数方程

$$\begin{cases}x=a\sec\theta\\ y=b\tan\theta\end{cases}，\theta \text{ 为参数}$$

我们知道 $x^2-y^2=a^2$ 叫做直角双曲线(图 7－4)。将 $x^2-y^2=a^2$ 的坐标轴旋转$\frac{\pi}{2}$，可以将 $x^2-y^2=a^2$ 化成 $xy=c^2\left(c=\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$。$xy=c^2$ 是中心在坐标原点，渐近线是两坐标轴的直角双曲线。

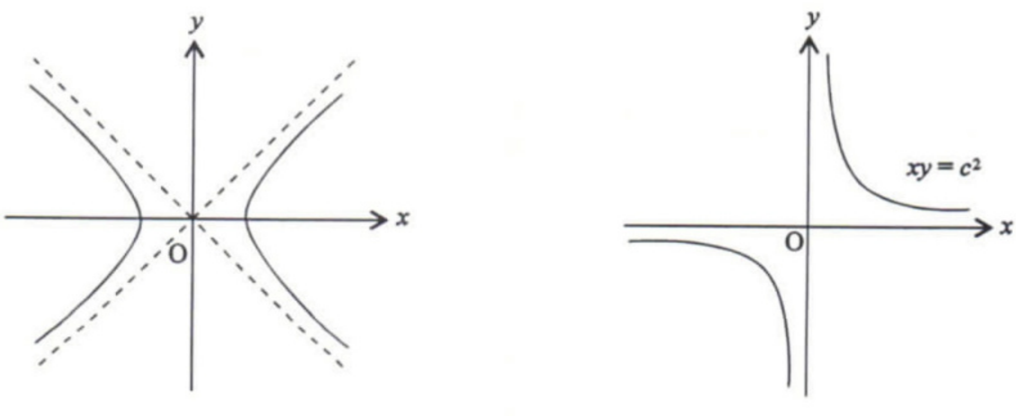


图 7－4

设　$x=ct$，代入　$xy=c^2$

得　　　　$(ct)y=c^2$

$$y=\frac{c}{t}$$

所以直角双曲线 $xy=c^2$ 的一种参数方程式为

$$\begin{cases}x=ct\\ y=\dfrac{c}{t}\end{cases}，t 为参数$$

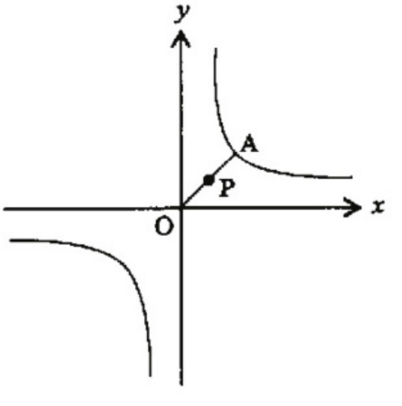
例 21　已知 A 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一个动点，求 OA 中点 P 的轨迹方程。

解　设线段 OA 的中点 P 的坐标为 (x, y)，A 点的坐标为$(a\sec\theta, b\tan\theta)$，其中 θ 为参数。

点 P 是线段 OA 的中点，其坐标为

$$x=\frac{0+a\sec\theta}{2}$$

$$y=\frac{0+b\tan\theta}{2}$$



即 $$\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\sec\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ y=\dfrac{b}{2}\tan\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

由(1)，得　$\frac{2x}{a}=\sec\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

由(2)，得　$\frac{2y}{b}=\tan\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$(3)^2-(4)^2$，得　$\left(\frac{2x}{a}\right)^2-\left(\frac{2y}{b}\right)^2=1$

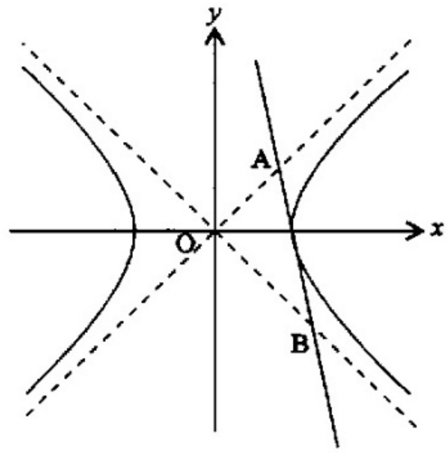
即点 P 运动轨迹的方程为　$\frac{4x^2}{a^2}-\frac{4y^2}{b^2}=1$

例 22 试证双曲线的任意一条切线与渐近线围成的三角形的面积为一定值。

解 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 P 的坐标为$(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$，

则过点 P 的切线的方程式为 $\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$

双曲线的两条渐近线的方程式为



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

即 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

解方程组

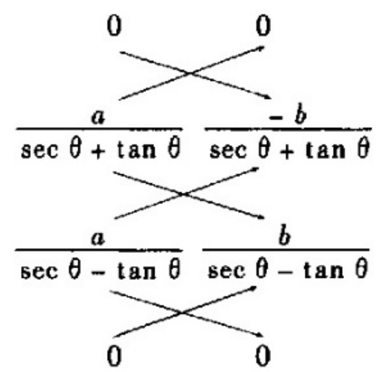
$$\begin{cases}\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\end{cases}$$

和 $$\begin{cases}\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\end{cases}$$

得切线与两条渐近线的交点 A、B 的坐标分别为

$$\left(\frac{a}{\sec\theta+\tan\theta},\ \frac{-b}{\sec\theta+\tan\theta}\right)、$$

$$\left(\frac{a}{\sec\theta-\tan\theta},\ \frac{b}{\sec\theta-\tan\theta}\right)$$



又 两条渐近线交点坐标为(0, 0)，

∴ ΔABO 的面积

$$=\left|\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}-\frac{-ab}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}\right)\right|$$

$$=ab$$

所以 ΔABO 的面积为一常数。

例 23 设点 $P\left(cp, \frac{c}{p}\right)$ 和 $Q\left(cq, \frac{c}{q}\right)$ 是直角双曲线 $xy = c^2$ 上的两点，求证过 P、Q 两点的切线的交点在直线 $x = pqy$ 上。

证 过 $P\left(cp, \frac{c}{p}\right)$、$Q\left(cq, \frac{c}{q}\right)$ 两点的切线的方程式分别为

$$\left(\frac{c}{p}\right)x + (cp)y = 2c^2$$

$$\frac{1}{p}x + py = 2c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及
$$\left(\frac{c}{q}\right)x + (cq)y = 2c^2$$

$$\frac{1}{q}x + qy = 2c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)，得 $\quad x = 2cp - p^2y \cdots\cdots(3)$

(3)代入(2)，得 $\quad 2cp - p^2y + q^2y = 2cq$

$$y(q^2 - p^2) = 2c(q - p)$$

$$y = \frac{2c}{p+q}$$

代入(3)，得 $\quad x = \frac{2cpq}{p+q}$

将 $x = \frac{2cpq}{p+q}$，$y = \frac{2c}{p+q}$ 代入方程式 $x = pqy$ 中，

得 $\quad \frac{2cpq}{p+q} = pq \times \frac{2c}{p+q}$

所以交点在直线 $x = pqy$ 上。

例 24 抛物线 $y^2 = 4ax$ 的切线交直角双曲线 $xy = c^2$ 于点 P、Q，求线段 PQ 中点的轨迹。

解 抛物线 $y^2 = 4ax$ 上任意一点$(at^2, 2at)$的切线方程式为

$$y(2at) = 4a\left(\frac{x + at^2}{2}\right)$$

$$yt = x + at^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy = c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)，得 $\quad x = yt - at^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

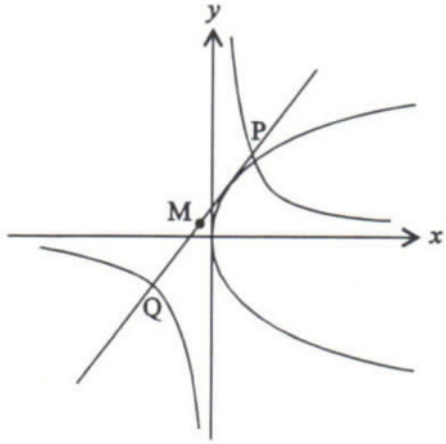
(3)代入(2)，得 $\quad ty^2 - at^2y - c^2 = 0$

由一元二次方程式根与系数的关系可知，

$$y_1 + y_2 = at$$

∴ PQ 的中点的 y 坐标为

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{at}{2}$$



PQ 的中点在切线上，

∴ 将 $y = \frac{at}{2}$ 代入(1)，得

$$x = \frac{at^2}{2} - at^2$$

$$= -\frac{1}{2}at^2$$

∴ 线段 PQ 的中点的坐标为 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}at^2 \\ y = \frac{at}{2} \end{cases}$

由 $t = \frac{2y}{2}$，得 $x = -\frac{1}{2}a\left(\frac{2y}{a}\right)^2$

$$ax = -2y^2$$

∴ PQ 的中点的轨迹方程式为 $y^2 = -\frac{a}{2}x$

习题 7f

1. 已知双曲线 $\begin{cases} x = a\ \sec\theta \\ y = b\ \tan\theta \end{cases}$ 上两点所对应的参数是 θ_1、θ_2，求证连结这两点的直线方程为 $\frac{x}{a}\cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} - \frac{y}{b}\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$
2. 已知经过双曲线 $\begin{cases} x = a\ \sec\theta \\ y = b\ \tan\theta \end{cases}$ 上 P、Q 两点的直线交渐近线于 R、S，证明：$|PR| = |QS|$
3. P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的一点，A 为点$(a, 0)$，Q 为 PA 之中点，证明 Q 点的轨迹为一双曲线，并求其中心。
4. P 为双曲线上一点，F 与 F′为其焦点，试证 PF 与 PF′的差恒等于实轴长度。

5. 试证自双曲线上任何点到二渐近线之距离的乘积为一常数。

6. 已知 P 是直角双曲线 $xy=c^2$ 上一动点，求 OP 中点 M 的轨迹方程。

7. 证明直线 $AX+BY+C=0$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的法线的条件是

$\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{C^2}$。

8. P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点，过点 P 的法线分别交 x 轴、y 轴于点 A、B，若四边形 OAQB 为一矩形，证明点 Q 的轨迹为
$a^2x^2-b^2y^2=(a^2+b^2)^2$。

9. 点 $P\left(2t,\frac{2}{t}\right)$ 为直角双曲线 $xy=4$ 上的一点，过点 P 的切线交 x 轴、y 轴于点 A、B。求线段 AB 中点的坐标。

10. 点 $P\left(cp,\frac{c}{p}\right)$ 和 $Q\left(cq,\frac{c}{q}\right)$ 是在双曲线 $xy=c^2$ 上，证明PQ 之中点与P 和 Q 之切线的交点同在直线 $x=pqy$ 上。

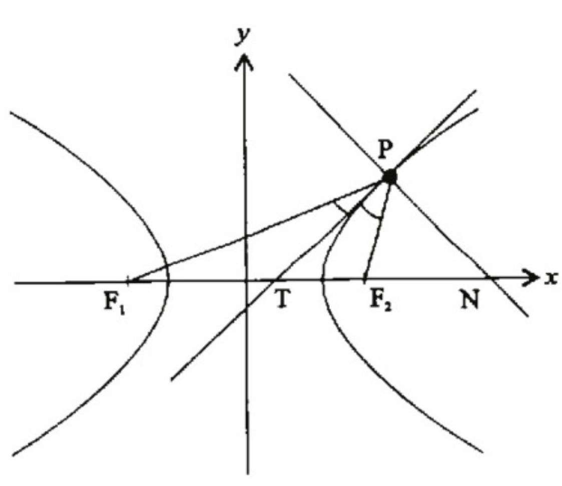
11. P 是双曲线上一点，如果点P 与焦点的连线平行于渐近线，证明渐近线、准线及过点P 的切线共点。

12. P 是双曲线上一点，通过点P 的切线交准线于点T，试证线段PT 在焦点的张角为一直角。

13. 证明：双曲线的一条切线被两条渐近线截得的线段为MN，则切点P 为MN 的中点。

14. 由原点O 向双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上任意一点 $P(x_1,y_1)$ 的切线作垂线，交切线于点M，延长OM 交双曲线于点N，证明 $OM\cdot ON=a^2$。

15. 如右图，P 是双曲线上任意一点，PT、PN 分别是切线和法线，F_1、F_2 是两个焦点。
证明：$\angle F_1PT=\angle F_2PT$。



总复习题 7

1. 设 t 和 θ 为参数，化下列各参数方程为普通方程，并且画出它们的图形：

(a) $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 5\cos\theta + 2 \\ y = 2\sin\theta - 3 \end{cases}$

2. 用描点法画出下列参数方程所表示的图形：

(a) $\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = t^3 - t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

3. 已知曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{t} + 1 \\ y = \sqrt{t} - 1 \end{cases}$ （t 为参数），求曲线的普通方程，并画图。

4. 一颗人造地球卫星的运行轨道是一个椭圆，长轴长为 15565 公里，短轴长为 15443 公里，取椭圆中心为坐标原点，求卫星轨道的参数方程。

5. 求由下列参数方程确定的函数 $y = f(x)$ 的导数：

(a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = \sqrt{1+\theta} \\ y = \sqrt{1-\theta} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at}{1+t^2} \end{cases}$

6. Q 为点(3, 4)，P 为曲线上的一点，此曲线的参数方程式为

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, \ t \text{ 为一参数。}$$

试以 t 表达 PQ 中点的坐标，并求当 P 在曲线上移动时 PQ 中点的轨迹。又当 $t = 0$ 时，求此曲线的切线方程式，同时判定此切线是否通过 PQ 中点的轨迹，并写出理由。

7. 一曲线 P 的参数方程式为 $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 7 \end{cases}$，$t$ 为一参数；

另一曲线 Q 的参数方程式为 $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \end{cases}$，$t$ 为一参数。

求此二曲线的交点。

8. 求经过点$(t, 0)$，斜率为 t 的直线方程式；同时，求过$(0, t)$，斜率为 $-t$ 的直线方程式。若此二直线相交于点 P，求 P 点的轨迹方程。

9. 证明曲线 $y=(x+2a)^3$ 在点 $y=a^3$ 处的切线方程式为 $y=3a^2x+4a^3$。

10. 从抛物线 $y^2=4ax$ 上各点，作 x 轴的垂线段，求线段中点的轨迹。

11. 求抛物线 $y^2=4ax$ 上各点与焦点连线的中点的轨迹。

12. $P(ap^2, 2ap)$ 为抛物线上的一点，F 为焦点 $(a, 0)$。直线 PF 交此抛物线于另一点 Q。求 PQ 的中点 M 的轨迹方程式。

13. 试证自抛物线 $y^2=4ax$ 的顶点所作各弦之中点的轨迹为抛物线 $y^2=2ax$。

14. 求证从抛物线 $y^2=2px$ 的顶点到此抛物线各切线的垂足之轨迹为 $(x^2+y^2)2x+py^2=0$。

15. 已知经过抛物线通径的两端的切线相交于点 T。证明点 T 在此抛物线的准线上。

16. 已知一直角的两边同时与一抛物线相切，证明直角的顶点在此抛物线的准线上，并且两切点的连线必经过焦点。

17. 过抛物线 $y^2=4ax$ 的焦点的直线与此抛物线相交于 P 点、Q 点。过点 P 及抛物线顶点的直线交准线于点 M。求证：MQ 平行于 x 轴。

18. 曲线 $x^2=\frac{1}{2}y$ 在点 $P(t, 2t^2)$ 之切线与 x 轴相交于 R 点，与 y 轴相交于 S 点。

若 M 为 RS 的中点，试求当 P 点在该曲线移动时，M 点所形成的轨迹的方程式。

19. $P(ap^2, 2ap)$ 和 $Q(aq^2, 2aq)$ 为抛物线 $y^2=4ax$ 上两点，试求弦 PQ 之方程式，并导出 P 点之切线方程式。

设 PQ 为抛物线 $y^2=4ax$ 之一变动弦，若 PQ 在抛物线顶点处之张角为一直角，试证 PQ 和抛物线之轴相交于一固定点，并证 P 和 Q 之切线相交于一固定直线上。

20. 求通过点 $(9a, 6a)$ 且为抛物线 $y^2=4ax$ 的法线的三条直线。

21. 点 P 和 Q 为抛物线 $y^2=4ax$ 上之两点，若弦 PQ 的中点为 (α, β)。试证 PQ 的方程式为 $2ax-\beta y=2\alpha a-\beta^2$。

22. 设椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $(a>b)$ 的一弦之中点为 $M(\alpha, \beta)$，其中 $\alpha\neq0$，$\beta\neq0$，试求此弦的方程式。

设由该椭圆的中心到椭圆上一任意点 P 之切线的垂直线与连接 P 及焦点 $(ae, 0)$ 的直线相交于 Q，证明 Q 点的轨迹为圆 $x^2+y^2-2aex=b^2$。

（提示：$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$）

23. 试证连接椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的两点 $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$和 $Q(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$之弦的方程式为 $\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\varphi}{2}=\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$。

若弦 PQ 与圆 $x^2+y^2=b^2$ 相切，试证

$$a^2\cos^2\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)=b^2\cos^2\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)+a^2\sin^2\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)。$$

由此结果证明，若 $\sin(\theta-\phi)\geqslant 0$，则 PQ 之长为 $a\sin(\theta-\phi)$。

24. 双曲线上一点 P 的切线交其实轴于 T_1，过 P 与中心的直线交顶点 A 之切线于 T_2，试证 T_1T_2 平行于 PA。

25. P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一点，过 P 点的切线交其虚轴于 T′，自 P 点到虚轴的垂线的垂足为 N′，O 为其中心，试证 $ON'\cdot OT'=b^2$。

8 极坐标

8.1 极坐标系

前面我们所使用的平面坐标系是直角坐标系，它是最简单和最常用的一种坐标系，但不是唯一的坐标系。有时利用别的坐标系比较方便。例如，炮兵射击时是以大炮为基点，利用目标的方位角及目标与大炮的距离来确定目标的位置的。在航空、航海中也常使用类似的方法。下面研究如何利用角和距离来建立坐标系。

在平面内取一个定点，叫做**极点**(pole)，引一条射线 Ox，叫做**极轴**(polar axis)，再选定一个长度单位和角度的正方向(通常取逆时针方向)(图 8－1)。对于平面内任意一点 P，用 r 表示线段 OP 的长度，θ 表示从 Ox 到 OP 的角度，r 叫做点 P 的**极半径**(polar radius)，θ 叫做点 P 的**极角**(polar angle)，有序数对(r, θ)就叫做点 P 的**极坐标**(polar coordinates)。这样建立的坐标系叫做**极坐标系**(polar coordinates system)。极坐标为(r, θ)的点 P，可表示为 $P(r, \theta)$。

当点 P 在**极点**时，它的极坐标 $r=0$，θ 可以取任意值。

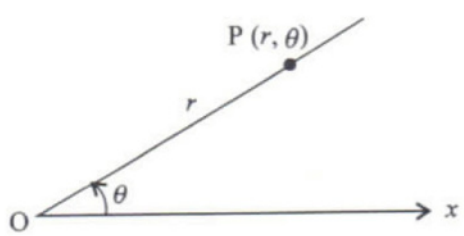


图 8－1

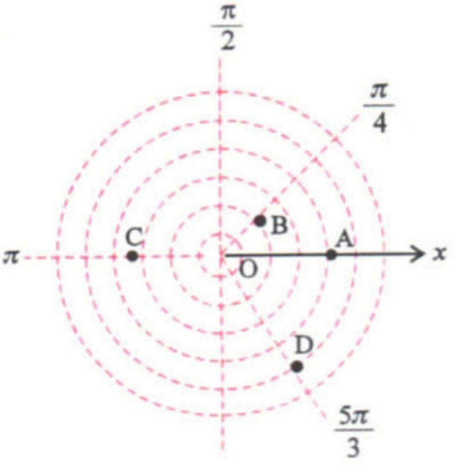


图 8－2

如图 8－2，在极坐标系中，A、B、C、D 各点的极坐标分别是(4, 0)、

$\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$、$(3.5,\ \pi)$、$\left(5,\ \frac{5\pi}{3}\right)$。角也可以取负值，例如点 D 的坐标也可以写作 $\left(5,\ -\frac{1}{3}\pi\right)$。

在一般情况下，极半径都是取正值。但是在某些必要的情况下，也允许取负值。

当 $r<0$ 时，点 $P(r,\ \theta)$ 的位置就在与 Ox 形成角 θ 的射线 OA 的反向延长线上(图 8－3)。

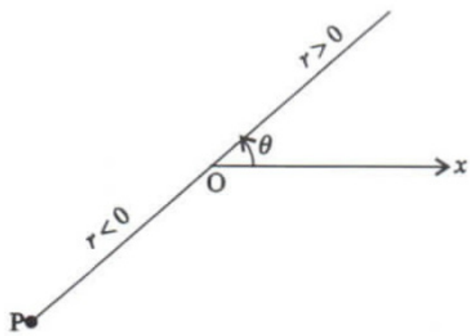


图 8－3

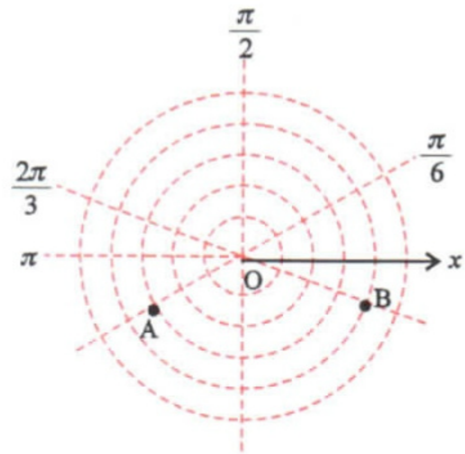


图 8－4

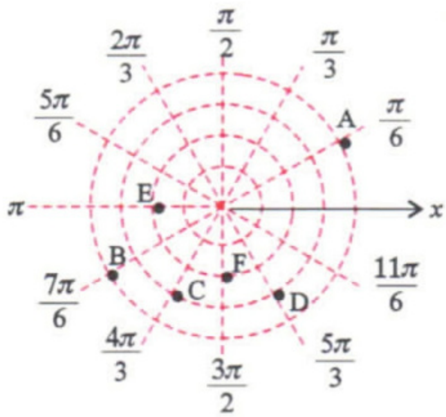
例如，图 8－4 所示为点 A $\left(-3,\ \frac{\pi}{6}\right)$、点 B $\left(-4,\ \frac{2\pi}{3}\right)$ 的位置。由图可知，点 A $\left(-3,\ \frac{\pi}{6}\right)$ 也可写作 $\left(3,\ \frac{7\pi}{6}\right)$，点 B $\left(-4,\ \frac{2\pi}{3}\right)$ 也可写作 $\left(4,\ \frac{5\pi}{3}\right)$。

一般上，当 $r>0$ 时，$(-r,\theta)\equiv(r,\theta+\pi)$。

建立极坐标系后，给定 r 和 θ，就可以在平面内确定唯一点 P；反过来，给定平面内一点，也可以找到它的极坐标 $(r,\ \theta)$。但和直角坐标系不同的，平面内一个点的极坐标可以有无数种表示法。比如，$\left(6,\ \frac{\pi}{6}\right)$、$\left(-6,\ \frac{\pi}{6}+\pi\right)$ 以及 $\left(6,\ \frac{\pi}{6}+2\pi\right)$、$\left(6,\ \frac{\pi}{6}-2\pi\right)$、$\left(-6,\ \frac{\pi}{6}+3\pi\right)$、$\left(-6,\ \frac{\pi}{6}-\pi\right)$ 等等，都是同一点的极坐标。

习题 8a

1. 写出图中 A、B、C、D、E、F、G 各点的极坐标($r>0$, $0\leqslant\theta<2\pi$)。



2. 在极坐标系中，作出下列各点：

(a) $A\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$、$B(6,\ -120°)$、$C\left(1,\ \frac{\pi}{3}\right)$、$D\left(4,\ -\frac{3\pi}{4}\right)$、$E(4,\ 0)$、$F(2.5,\ 180°)$；

(b) $A\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$、$B\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$、$C\left(3,\ \frac{\pi}{2}\right)$、$D(3,\ \pi)$、$E\left(3,\ \frac{3\pi}{2}\right)$，并说明这五个点有着什么关系；

(c) $A\left(-2,\ \frac{\pi}{6}\right)$、$B\left(-1,\ \frac{\pi}{6}\right)$、$C\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$、$D\left(4.5,\ \frac{\pi}{6}\right)$、$E\left(5,\ \frac{\pi}{6}\right)$，并说明这五个点有什么关系。

3. 在极坐标系中，画出点 $A\left(5,\ \frac{\pi}{3}\right)$ 以及点 $B\left(5,\ -\frac{\pi}{3}\right)$、$C\left(-5,\ -\frac{\pi}{3}\right)$、$D\left(-5,\ \frac{\pi}{3}\right)$，并说明点 A 和 B、C、D 分别有怎样的相互位置关系。

4. 已知 $A(r,\ \theta)$、$B(r,\ -\theta)$、$C(-r,\ -\theta)$、$D(-r,\ \theta)$，点 A 和 B、C、D 分别有怎样的相互位置关系？

8.2 曲线的极坐标方程

在极坐标当中，曲线可以用含有 r、θ 这两个变数的方程 $g(r,\ \theta)=0$ 来表示，这种方程叫做曲线的**极坐标方程式**(polar equation)。这时，以这个方程的每一个解为坐标的点都是曲线上的点。

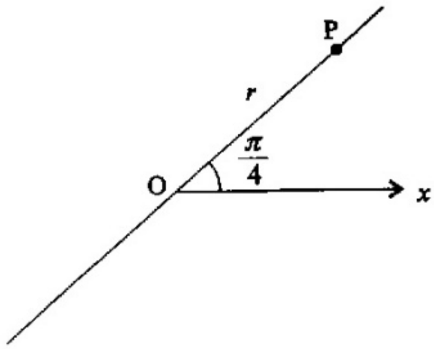
求曲线的极坐标方程的方法和步骤，和求直角坐标方程类似，就是把曲线看作适合某种条件的点的集合或轨迹，将已知条件用曲线上点的极坐标 r、θ 的关系式 $g(r,\ \theta)=0$ 表示出来，就得到曲线的极坐标方程。

例1 求通过极点，倾斜角是 $\frac{\pi}{4}$ 的直线的极坐标方程。

解 设 $P(r, \theta)$ 为直线上任意一点（如右图），则直线上的任意点 P 的极坐标为

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \ r \text{ 为任意值}$$

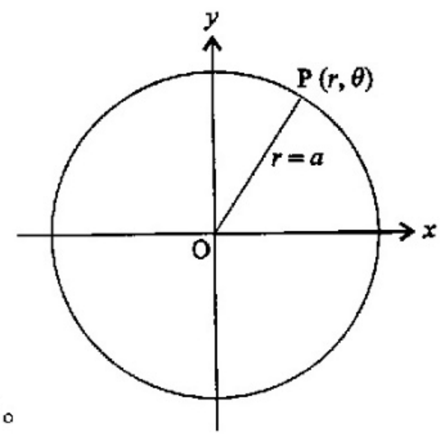
所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 就是所求的直线的极坐标方程。方程中不含 r，说明直线上点的极坐标中的 r，无论取任何值，θ 的对应值都是 $\frac{\pi}{4}$。



【注】如果 r 不允许取负值，例 1 中的直线就要用两个方程 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 来表示。

例2 求圆心是 O，半径是 a 的圆的极坐标方程。

解 设 $P(r, \theta)$ 为圆上任意一点（如右图），则在极坐标中，不论 θ 取何值，只要 $r = a$，点 P 就在此圆上。
所以，$r = a$ 就是所求的圆的极坐标方程。



例3 求圆心是 $C(a, 0)$，半径是 a 的圆的极坐标方程。

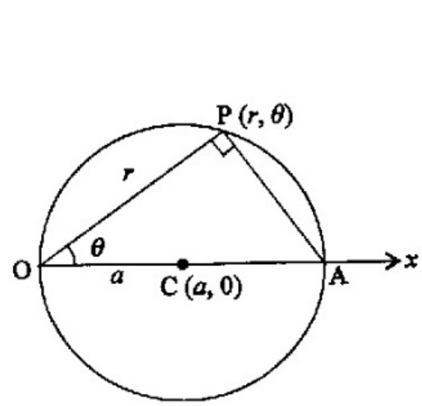
解 由已知条件，圆心在极轴上，圆经过极点 O。设圆和极轴的另一个交点是 A（如右图），那么 $|OA| = 2a$。
设 $P(r, \theta)$ 是圆上任意一点，则 $OP \perp AP$，可得

$$|OP| = |OA| \cos \theta$$

用极坐标表示已知条件可得方程

$$r = 2a \cos \theta$$

这就是所求的圆的极坐标方程。



习题 8b

1. 求过极点，倾斜角是 $\frac{\pi}{6}$ 的直线的极坐标方程。
2. 求适合下列条件圆的极坐标方程：
   (a) 圆心在极点，半径为 3；
   (b) 圆心在点 A$\left(a,\ \frac{\pi}{3}\right)$，半径为 a。
3. 说明下列极坐标方程表示什么曲线，并画图。
   (a) $r = 3$　　(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$

8.3 极坐标和直角坐标的互化

极坐标系和直角坐标系是两种不同的坐标系。同一个点可以有极坐标，也可以有直角坐标；同一条曲线可以有极坐标方程，也可以有直角坐标方程。

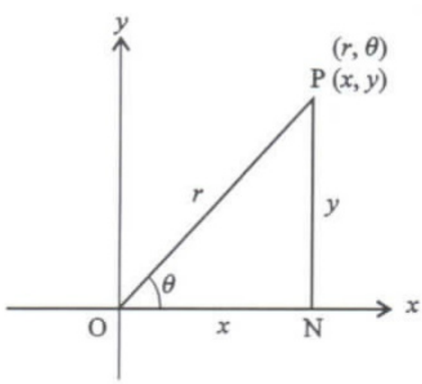


图 8－5

如图 8－5，把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴，并在两种坐标系中取相同的长度单位。设 P 是平面内任意一点，它的直角坐标是 P$(x,\ y)$，极坐标是 $(r,\ \theta)$。从点 P 作 PN ⊥ Ox，由三角函数定义，可以得出 x、y 与 r、θ 之间的关系：

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

由上述关系式，可以得出下面的关系式：

$$r^2 = x^2 + y^2,\ \tan\theta = \frac{y}{x}\,(x \neq 0)$$

在一般情况下，由 $\tan\theta$ 确定角 θ 时，可根据点 P 所在的象限取最小正角。

例4 把点 A 的极坐标 $\left(-5,\ \frac{\pi}{6}\right)$ 化成直角坐标。

解 $x = -5\cos\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$y = -5\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{5}{2}$

$\therefore$ 点 A 的直角坐标是 $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3},\ -\frac{5}{2}\right)$。

例5 把点 B 的直角坐标$(-\sqrt{3}, -1)$化成极坐标。

解 $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$

$= 2$

$\tan\theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\because$ 点 B 在第三象限，$r > 0$,

$\therefore$ 最小正角 $\theta = \frac{7\pi}{6}$。

因此，点 B 的极坐标是$\left(2,\ \frac{7\pi}{6}\right)$。

例6 化下列直角坐标方程为极坐标方程：

(a) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$　　　(b) $xy + 6 = 0$

解 (a) 将 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 代入原方程，得

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2ar\cos\theta = 0$$

就是

$$r = 2a\cos\theta$$

(b) 将 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 代入原方程，得

$$(r\cos\theta)(r\sin\theta) + 6 = 0$$

$$2r^2\cos\theta\sin\theta + 12 = 0$$

即

$$r^2\sin 2\theta + 12 = 0$$

例7 化下列极坐标方程为直角坐标方程。

(a) $r=4\sin\theta$ (b) $r=a\sec\theta+b$

解 (a) $y=r\sin\theta$，即 $\sin\theta=\frac{y}{r}$，$\therefore$ $r=4\sin\theta$

$$=\frac{4y}{r}$$

$$r^2=4y$$

由于 $r^2=x^2+y^2$，$\therefore$ $x^2+y^2=4y$

即直角坐标方程式为 $x^2+y^2-4y=0$

(b)
$$r=a\sec\theta+b$$

$$=\frac{a}{\cos\theta}+b$$

即
$$r\cos\theta=a+b\cos\theta$$

由于 $x=r\cos\theta$，即 $\cos\theta=\frac{x}{r}$，代入上式，

得
$$x=a+b\frac{x}{r}$$

$$xr=ar+bx$$

$$r(x-a)=bx$$

$$r^2(x-a)^2=b^2x^2$$

由于 $r^2=x^2+y^2$

$\therefore$ $(x^2+y^2)(x-a)^2=b^2x^2$

即为所求的直角坐标方程式。

习题 8c

1. 已知各点的极坐标为$\left(4,\ \frac{\pi}{4}\right)$、$\left(2,\ \frac{4\pi}{3}\right)$、$(-7,\pi)$、$\left(5,\ \frac{\pi}{2}\right)$、$\left(-2,\ -\frac{\pi}{6}\right)$，求它们的直角坐标。
2. 已知各点的直角坐标为$(-1,-1)$、$(4,-4\sqrt{3})$、$(-3,4)$、$(0,-4)$，求它们的极坐标。

3. 把下列直角坐标方程化成极坐标方程：

(a) $x = 5$　　(b) $y + 4 = 0$

(c) $2x - 5y = 0$　　(d) $x^2 + y^2 = 25$

(e) $xy = a$　　(f) $x^2 + y^2 + 2y = 0$

(g) $x^2 - y^2 = a^2$

4. 把下列极坐标方程化成直角坐标方程：

(a) $r = 7$　　(b) $\theta = \frac{\pi}{4}$ （r 可取负值）

(c) $r = 4\cos\theta$　　(d) $r^2\cos 2\theta = 16$

(e) $r = \frac{5}{\cos\theta}$　　(f) $r(2\cos\theta - 5\sin\theta) = 3$

(g) $r = \frac{6}{1 - 2\cos\theta}$　　(h) $r^2 = a^2\sin 2\theta$

8.4　极坐标方程的讨论及作图

要作出一个极坐标方程式的曲线，可以先对极坐标方程式作讨论，由极坐标方程的一些特征去判定曲线的特征，然后再作出曲线。

(1) 因为$(r, -\theta)$与(r, θ)关于极轴对标，所以，如果$f(r, -\theta) \equiv f(r, \theta)$，那么极坐标方程式$f(r,\theta) = 0$的曲线关于极轴对称；

(2) 因为$(-r, \theta)$与(r, θ)关于极点对称，所以，如果$f(-r, \theta) \equiv f(r, \theta)$，那么极坐标方程式$f(r,\theta) = 0$的曲线关于极点中心对称；

(3) 因为(r, θ)与$(r, \pi - \theta)$关于直线$\theta = 90°$对称，所以，如果$f(r, \pi - \theta) \equiv f(r, \theta)$，那么极坐标方程式$f(r,\theta) = 0$的曲线关于直线$\theta = 90°$对称。

例8　试作出方程式$r = 4(1 + \cos\theta)$的曲线。

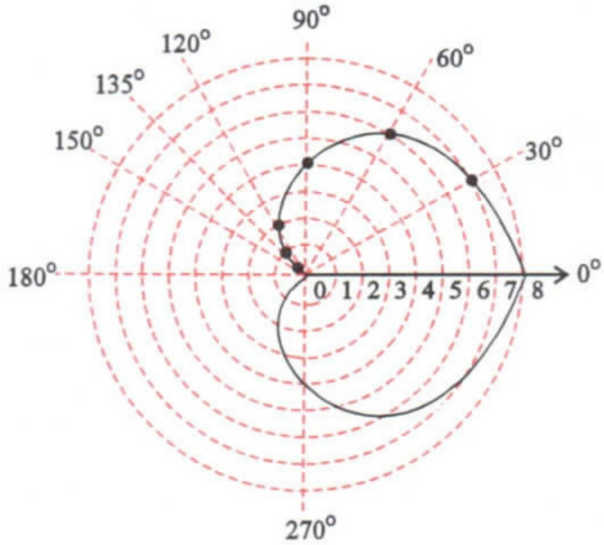
解　以$-\theta$代θ，方程式$r = 4(1 + \cos\theta)$保持不变，所以曲线关于极轴对称。

又因$|\cos\theta| \leqslant 1$，所以$0 \leqslant r \leqslant 8$。

列表：

θ	0°	30°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	8	7.4	6	4	2	1.2	0.5	0

由上表可以作出曲线 $r=4(1+\cos\theta)$ 在极轴上方的部分，根据曲线关于极轴的轴对称性，可以作出其在极轴下方的部分。图象如下图所示。



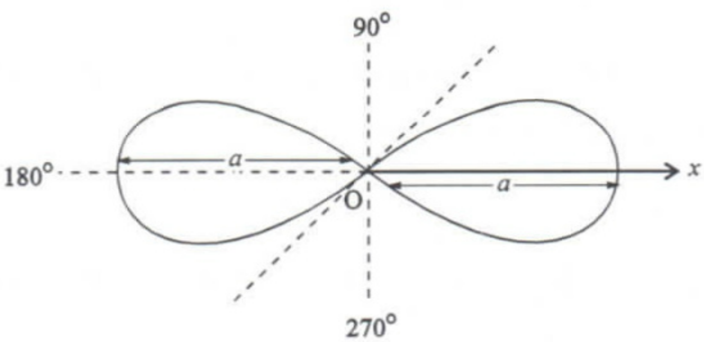
例9 试作出方程式 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 的曲线。

解 在方程 $r^2=a^2\cos2\theta$ 中，以 $-r$ 代 r，以 $-\theta$ 代 θ，以 $\pi-\theta$ 代 θ，方程保持不变，所以曲线关于极点中心对称，也关于极轴对称，因而也关于直线 $\theta=90°$ 对称。列表：

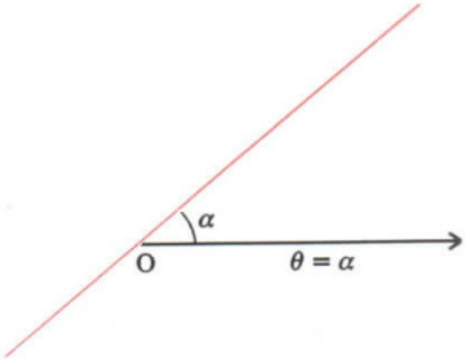
θ	0°	15°	30°	45°
r	a	$0.93a$	$0.7a$	0

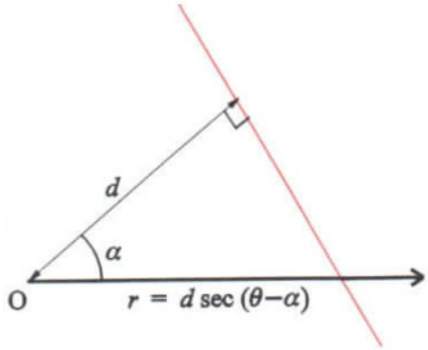
当 $45°<\theta<90°$ 时，$\cos 2\theta<0$，方程 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 无解，所以，在 $45°<\theta<90°$ 的区域内，方程 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 不存在曲线的点。

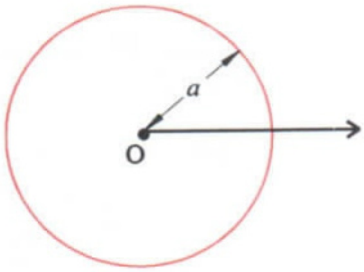
根据上表可作出 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 在第一象限内的曲线，然后根据曲线的对称性，作出在其他象限内的曲线，如下图。



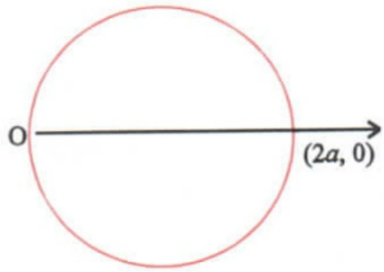
下面为一些较普遍的极坐标方程的图形：



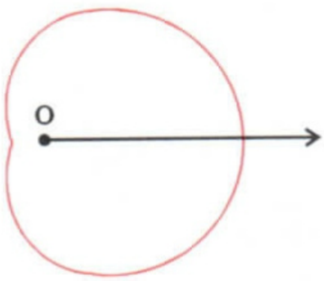




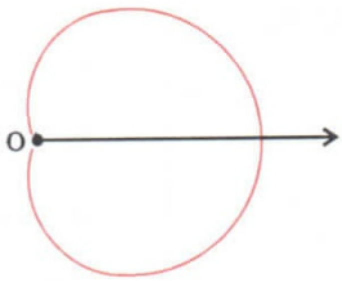
$r = a$



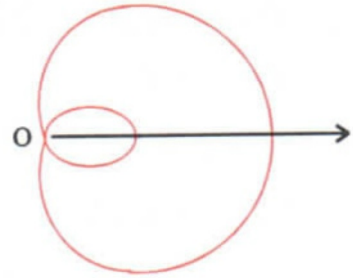
$r = 2a\cos\theta$



$a > b$

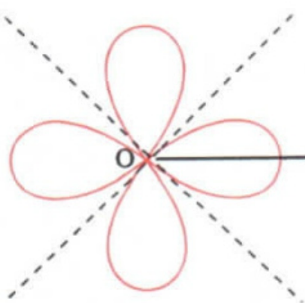


$a = b$

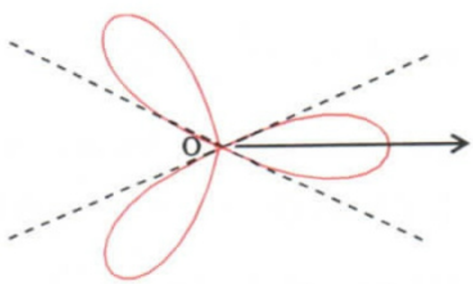


$a < b$

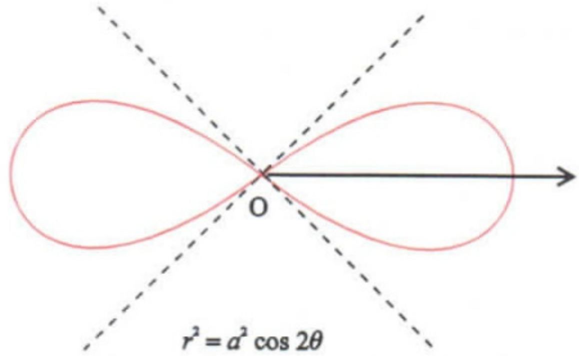
$r = a + b\cos\theta$



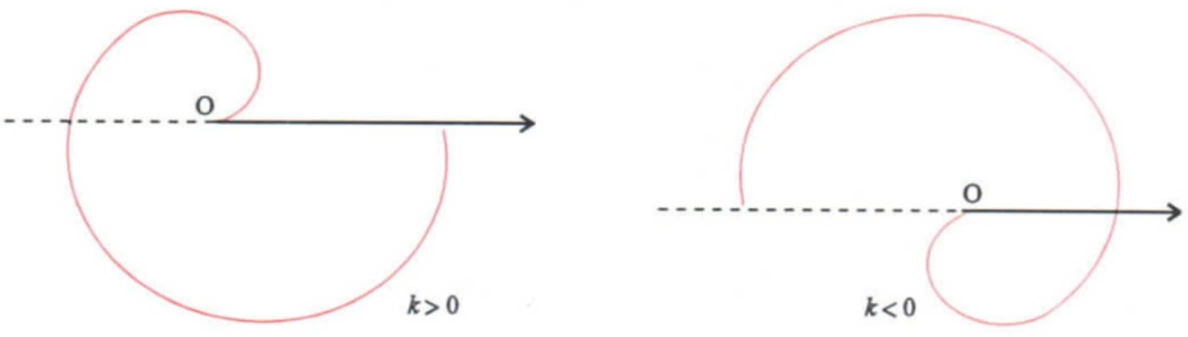
$r = a\cos 2\theta$



$r = a\cos 3\theta$



$r^2 = a^2 \cos 2\theta$



$r = k\theta$

习题 8d

1. 作出下列极坐标方程式的曲线：

(a) $r = 8$　　(b) $\theta = 120°$

(c) $r\sin\theta = 5$　　(d) $r = 2\sin\theta + 3\cos\theta$

(e) $r = 10\sin\theta$　　(f) $r = \dfrac{4}{1+\cos\theta}$

(g) $r = a(1-\cos\theta)$　　(h) $r^2 = a^2\sin 2\theta$

(i) $r = 4 - 2\cos\theta$　　(j) $r = a\cos 3\theta$

总复习题 8

1. (a) 在 $r = \dfrac{3}{\cos\theta}$ 的图形上，求有下列极角的各点的坐标：$\dfrac{\pi}{3}$，$-\dfrac{\pi}{3}$，0，$\dfrac{\pi}{6}$；

(b) 在 $r = \dfrac{1}{\sin\theta}$ 的图形上，求有下列极半径的各点的坐标：1，2，$\sqrt{2}$。

2. 求下列曲线的交点坐标，并画图：

(a) $r = 4\sin\theta$，$r = 2$　　(b) $r = \dfrac{3}{2-\cos\theta}$，$r = 2$

3. 把下列各直角坐标方程化成极坐标方程：

(a) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$　　(b) $x\cos\alpha-y\sin\alpha-p=0$

(c) $x^2=2p\left(y+\dfrac{p}{2}\right)$

4. 把下列极坐标方程化成直角坐标方程：

(a) $r=64\sin^2\theta$　　(b) $r=-4\sin\theta+\cos\theta$

(c) $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

5. 已知一个圆的方程是 $r=5\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta$，求圆心和半径。

6. 证明一曲线的极坐标方程式 $r=\cos 2\theta+\sin\theta$ 关于 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 对称。当 $r=0$ 时，求 θ 在区间 $[0,2\pi]$ 的值。作此曲线的图形。

7. 一曲线的极坐标为 $r^2(1+24\sin^2\theta)=25a^2$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，$a>0$，求其直角坐标方程式，并画出图象。

8. 一曲线的直角坐标方程式为 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(a>0)$。求其极坐标方程，并画出图象。

9 复　数

9.1　数的扩展

数的概念扩展到实数后，对于生产和生活中遇到的大量计算问题，都得到了解决。但是，对于 $x^2=-1$ 这样的方程还是无解，因为没有一个实数的平方等于 -1。

这样，由于解方程的需要，人们又引进一个新数 i，叫做**虚数单位**(imaginary unit)，并规定

(1) 它的平方等于 -1，即　　$i^2=-1$　或　$i=\sqrt{-1}$

(2) 实数与它进行四则运算时，原有的加、乘运算律仍然成立。

如此一来，$x^2=-1$ 的解就可求得如下：

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{-1} \\ &= \pm i \end{aligned}$$

因此，在扩大了的数的范围里，方程式 $x^2=-1$ 有两个根 i 和 $-i$。换言之，-1 有两个平方根 i 和 $-i$。

现在，我们来解下面这个方程，

$$x^2-8x+20=0$$

应用公式，得

$$\begin{aligned} x &= \frac{8\pm\sqrt{8^2-4(1)(20)}}{2} \\ &= 4\pm2\sqrt{-1} \end{aligned}$$

即

$$x=4+2i \quad 或 \quad 4-2i$$

像 $4+2i$，$4-2i$ 这类形如 $a+bi(a, b\in\mathbb{R})$ 的数，人们把它们叫做**复数**(complex number)。

9.2 复数

我们知道，形如 $a+bi$（a，$b\in\mathbb{R}$）的数叫做复数，复数通常用一个字母 z 表示，即 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbb{R}$）。复数的这种形式叫做复数的一般形式，其中 a 叫做复数 $z=a+bi$ 的实部，记作 $\mathrm{Re}(z)$，b 叫做复数 $z=a+bi$ 的虚部，记作 $\mathrm{Im}(z)$。例如，复数 $z=5-6i$ 中，5 为实部，即 $\mathrm{Re}(z)=5$，-6 为虚部，即 $\mathrm{Im}(z)=-6$。

在复数 $a+bi$ 中，当 $b=0$ 时，$z=a$ 就是实数；当 $b\neq 0$ 时，z 叫做**虚数**（imaginary number）；特别地当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，$z=bi$ 叫做**纯虚数**（purely imaginary number）。

例如，$3+4i$，$-\frac{1}{2}-\sqrt{2}i$，$-0.5i$ 都是虚数，它们的实部分别是 3，$-\frac{1}{2}$，0，虚部分别是 4，$-\sqrt{2}$，-0.5，其中 $-0.5i$ 是纯虚数。

全体复数所成的集合称为复数集，记作$\mathbb{C}$。显然，实数集$\mathbb{R}$是复数集$\mathbb{C}$的真子集，即$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$。

例1 实数 m 取什么数值时，复数 $z=m+1+(m-1)i$ 是

(a) 实数　　(b) 虚数　　(c) 纯虚数

解 (a) 当 $m-1=0$，即 $m=1$ 时，复数 z 是实数；

(b) 当 $m-1\neq 0$，即 $m\neq 1$ 时，复数 z 是虚数；

(c) 当 $m+1=0$，且 $m-1\neq 0$，即 $m=-1$ 时，复数 z 是纯虚数。

● 复数的相等

如果两个复数的实部和虚部分别相等，我们就说这两个复数相等。这就是说，如果 a，b，c，$d\in\mathbb{R}$，那么

$$a+bi=c+di \quad\Leftrightarrow\quad a=c,\ b=d$$

例2 若复数 $3a+bi=6-5i$（a，$b\in\mathbb{R}$），求 a，b 的值。

解 $3a=6$

$a=2$

$b=-5$

例3 若 $(3x+2y)+(3x-y)i=13-2i$，求 x，y 的值，其中 x，$y\in\mathbb{R}$。

解 $(3x+2y)+(3x-y)i=13-2i$

$$\therefore \quad \begin{cases} 3x+2y=13 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x-y=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1) − (2)，得 $3y=15$

$y=5$

$x=1$

● 共轭复数

当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，我们说这两个复数互为**共轭复数**(conjugate complex number)。这就是说，$a-bi$ 为 $a+bi$ 的共轭复数；显然，$a+bi$ 也是 $a-bi$ 的共轭复数。复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示，即如果 $z=a+bi$，那么 $\bar{z}=a-bi$。

习题 9a

1. 说明下列数(其中 i 是虚数单位)中，哪些是实数?哪些是虚数?哪些是纯虚数?

   $2+\sqrt{7}$，$0.618i$，$\dfrac{2}{7}$，i，$5i+8$，0，i^2，$3-9\sqrt{2}i$，$i(1-\sqrt{3})$，

   $2-i\sqrt{2}$，$2-i-i^2$，

2. 写出下列复数的实部与虚部：

   (a) $-5+\sqrt{6}i$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $-\sqrt{3}$ (d) i (e) 0

3. 已知复数的实部和虚部，写出这个复数来：

   (a) 实部是 $-\sqrt{2}$，虚部是 1 (b) 实部是 0，虚部是 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   (c) 实部是 3，虚部是 0 (d) 实部是 1，虚部是 −1

4. 已知 $m\in\mathbb{R}$，复数 $z=(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$

   (a) 求 z 为实数时 m 的值 (b) 求 z 为纯虚数时 m 的值

   (c) 求 z 为零时 m 的值

5. 解方程：

   (a) $x^2+5=0$ (b) $4x^2+9=0$

   (c) $x^4-16=0$ (d) $x^4+x^2-20=0$

6. 求适合下列方程的 x 与 y 的值(x, $y\in\mathbb{R}$):

(a) $(3x+2y)+(5x-y)i=17-2i$　　(b) $(x+y-3)+(x-4)i=0$

(c) $(3x-4y)+(4x-3y)i=7i$

7. 写出下列复数的共轭复数:

(a) $4-3i$　　(b) $-5i$　　(c) $-2-6i$

9.3 复数的加减法

设 $z_1=a+bi$,$z_2=c+di$ 是任意两个复数,我们规定复数的加法按以下法则进行:

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

即把复数的实部和实部相加减,虚部和虚部相加减。

显然,两个复数的和或差仍是一个复数。

复数的加法满足交换律、结合律。那对任何 z_1, z_2, $z_3\in\mathbb{C}$,有

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$

例4 计算　$(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$

解　$(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)=(5-2-3)+(-6-1-4)i$

$$=-11i$$

习题 9b

1. 计算:

(a) $(2+4i)+(3-4i)$　　(b) $(-3-4i)+(-2+i)$

(c) $(6-3i)-(3i-2)$　　(d) $5-(3+2i)$

2. 计算:

(a) $(-3-4i)+(2+i)-(1-5i)$　　(b) $(2-i)+4i-(2+3i)$

3. 计算：

(a) $(-\sqrt{2}+\sqrt{3}i)-[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})i]+(-\sqrt{2}i+\sqrt{3})$

(b) $[(a+b)+(a-b)i]-[(a-b)-(a+b)i]$，$a$，$b\in\mathbb{R}$

4. 设 $z=a+bi$，求 $z+\bar{z}$，$z-\bar{z}$ 的值。

5. 已知 z_1，$z_2\in\mathbb{C}$，求证：

(a) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$　　(b) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$

9.4 复数的乘法

● 两个复数相乘

设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 是任意两个复数，我们规定复数的乘法按以下法则进行：

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$$

把 i^2 换成 -1，并把实部与虚部分别合并，得

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，即对任何 z_1，z_2，$z_3\in\mathbb{C}$ 有

$$z_1z_2=z_2z_1$$
$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$$
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$$

例5 计算：(a) $5(3-2i)-4(-2+3i)+i(4-i)$

(b) $(1-2i)(3+4i)$

解 (a) $5(3-2i)-4(-2+3i)+i(4-i)=15-10i+8-12i+4i-i^2$

$=(15+8+1)+(-10-12+4)i$

$=24-18i$

(b) $(1-2i)(3+4i)=3+4i-6i-8i^2$

$=3-2i+8$

$=11-2i$

复数的乘方

复数的乘方也是相同复数的乘积。在计算复数的乘方时，要用到虚数单位 i 的乘方。对于 i 的乘方，我们有

$$i^1=i$$
$$i^2=-1$$
$$i^3=i^2\cdot i=-i$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

一般上，若 $n\in\mathbb{N}$，

$$i^{4n}=(i^4)^n=1^n=1$$
$$i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=i$$
$$i^{4n+2}=i^{4n}\cdot i^2=-1$$
$$i^{4n+3}=i^{4n}\cdot i^3=-i$$

这就是说，如果 $n\in\mathbb{N}$，那么

$$i^{4n}=1$$
$$i^{4n+1}=i$$
$$i^{4n+2}=-1$$
$$i^{4n+3}=-i$$

例6 计算 $i^2\cdot i^4\cdot i^6\cdots\cdots i^{8n}$，$n\in\mathbb{N}$。

解
$$\begin{aligned}i^2\cdot i^4\cdot i^6\cdots\cdots i^{8n}&=i^{2+4+6+\cdots\cdots+8n}\\&=i^{\frac{4n(2+8n)}{2}}\\&=i^{4n(4n+1)}\\&=1\end{aligned}$$

例7 计算 $(1+2i)^4$。

解
$$\begin{aligned}(1+2i)^4&=1+4(2i)+6(2i)^2+4(2i)^3+(2i)^4\\&=1+8i+24i^2+32i^3+16i^4\\&=1+8i-24-32i+16\\&=-7-24i\end{aligned}$$

习题 9c

1. 计算：

(a) $6(2+i)-7(4-2i)$

(b) $4\left(\frac{2}{3}+i\right)+2\left(1-\frac{2}{3}i\right)-6\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)$

2. 计算：

(a) $(-8-7i)(-3i)$

(b) $(4-3i)(-5-4i)$

(c) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$

(d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

3. 计算：

(a) i^{11}

(b) i^{-25}

(c) i^{101}

(d) i^{-31}

4. 计算：

(a) $i(1+i)(2+i)$

(b) $(1-2i)(2+i)(3-4i)$

(c) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$　　（a，b 为正数）

(d) $(a+bi)(a-bi)(-a+bi)(-a-bi)$　　（a，b 为正数）

5. 计算：

(a) $i^{97}+i^{102}+i^{303}-i^{27}$

(b) $(1-i)+(2-i^3)+(3-i^5)+(4-i^7)$

(c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

(d) $(a+bi)^3$

6. 计算：

(a) $(1-i)^4$

(b) $(3+4i)^3+(3-4i)^3$

7. 证明 $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

9.5 复数的除法

复数的除法规定是乘法的逆运算，即把满足

$$(c+di)(x+yi)=a+bi \qquad (c+di\neq 0)$$

的复数 $x+yi$ 叫做复数 $a+bi$ 除以复数 $c+di$ 的商。

由 $\quad (cx-dy)+(dx-cy)i=a+bi$

可得

$$\begin{cases} cx-dy=a \\ dx-cy=b \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} \\ y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{cases}$$

于是有 $\quad (a+bi)\div(c+di)=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

若把 $(a+bi)\div(c+di)$ 写成 $\dfrac{a+bi}{c+di}$ 的形式，再把分子与分母都乘以分母的共轭复数，就能得出上面的结果。

即

$$\begin{aligned}(a+bi)\div(c+di)&=\frac{a+bi}{c+di}\\&=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-(di)^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

也就是说，共轭复数可以用来做复数的除法运算。

例8 计算 $(1+2i)\div(3-4i)$。

解

$$\begin{aligned}(1+2i)\div(3-4i)&=\frac{1+2i}{3-4i}\\&=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}\\&=\frac{-5+10i}{25}\\&=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\end{aligned}$$

习题 9d

1. 计算：

(a) $\frac{2}{1-i}$ (b) $\frac{3+i}{4-3i}$ (c) $\frac{2i}{1-i}$

(d) $\frac{1}{i^3}$ (e) $\frac{1}{\sqrt{2}i}$ (f) $\frac{1}{(9+2i)^2}$

2. 计算：

(a) $\frac{(1-2\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}}-\frac{(2+\mathrm{i})^2}{4-3\mathrm{i}}$ (b) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}{\sqrt{5}-\sqrt{3}i}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}i}$

3. 求实数 x 和 y 的值：

(a) $x+yi=(3+i)(2-3i)$ (b) $\frac{2+5i}{1-i}=x+yi$

(c) $3+4i=(x+yi)(1+i)$ (d) $\frac{x+yi}{2+i}=5-i$

4. 设 z 为复数，解下列方程式：

(a) $2z-1=(4-i)$ (b) $2z+\bar{z}-6i=6-3i$

(c) $(4i)z=2-i$ (d) $2\bar{z}-z=1+3i$

5. 若 $z=4-3i$，求 $z+\frac{1}{z}$（以 $a+ib$ 的形式表示）。

9.6 复数的向量表示

● 复数与直角坐标系

从复数相等的定义，我们知道，任何一个复数 $z=a+bi$，都可以由一个有顺序的实数对(a, b)唯一确定；我们又知道，有顺序的实数对(a, b)与平面直角坐标系中的点是一一对应的。这样，就使我们能借用平面直角坐标系中的点来表示复数 $z=a+bi$。

如图 9-1，点 Z 的横坐标是 a，纵坐标 b，复数 $z=a+bi$ 可用点 $Z(a, b)$来表示。这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做**复平面**(complex plane)，x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴。

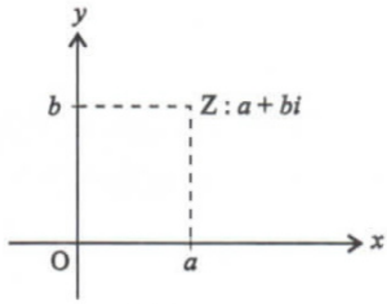


图 9-1

按照这种表示方法，每一个复数，在复平面内都有唯一的一个点和它对应；反过来，复平面内的每一个点也有唯一的复数和它对应。由此可知，复数集 $\mathbb{C}$ 和复平面内所有的点所成的集合之间是一一对应的。

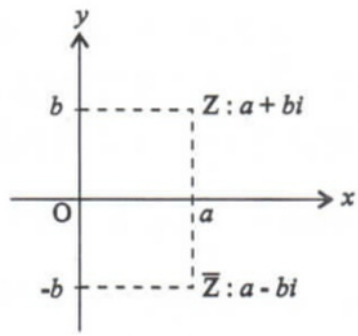


图 9-2

在复平面内，如果点 Z 表示复数 z，点 $\overline{Z}$ 表示复数 $\bar{z}$，那么 Z 和 $\overline{Z}$ 关于实轴(x 轴)对称，如图 9-2 所示。

复数的向量表示

复数 $z=a+bi$ 除了可以用复平面内的点(a, b)表示处，还可以用一个向量来表示。

如图 9-3，设平面内的点 Z 表示复数 $z=a+bi$，连结 OZ，如果我们把有向线段 OZ (从点 O 指向点 Z)看成向量，记作 $\overrightarrow{OZ}$，这样，就把复数同向量联系起来了。显然，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是由点 Z 唯一确定的；反过来，点 Z 也可以由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一确定。因此，复数集 $\mathbb{C}$ 与复平面内所有以原点 O 为起点的向量所组成的集合也是一一对应的(实数 0 与零向量对应)。

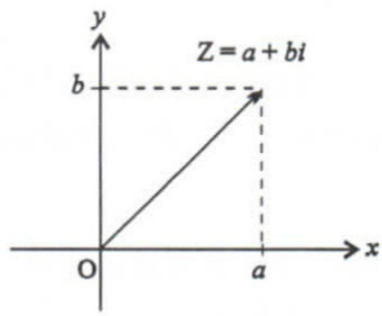


图 9-3

为方便起见，我们常把复数 $z=a+bi$ 说成点 Z 或说成向量 $\overrightarrow{OZ}$，并规定，相等的向量表示同一个复数。

复数的模数与辐角

图 9 – 4 中的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度 r 叫做复数 $z=a+bi$ 的**模**(modulus)，记作 $|z|$ 或 $|a+bi|$。由模数的定义，可知

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

显然 $r\geqslant 0$。

如图 9 – 4，以 x 轴的正半轴为始边，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的线段(起点为 O)为终边的角 θ 叫做复数 $z=a+bi$ 的**辐角**(argument)，其值可由 $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ 求出。不等于零的复数 $z=a+bi$ 的辐角有无数个值，这些值相差 2π 的整数倍。例如，复数 i 的辐角是 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 k 可以取任何整数。

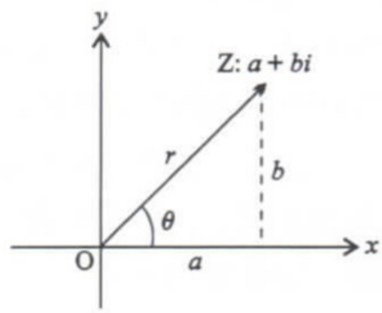


图 9 – 4

适合于 $-\pi\leqslant\theta<\pi$ 的辐角的 θ 值，叫做辐角的主值，通常记作 $\arg z$，即 $-\pi\leqslant\arg z<\pi$。

每一个不等于零的复数有唯一的模数与辐角的主值，并且可由它的模数与辐角的主值唯一确定。因此，两个非零复数相等当且仅当它们的模数与辐角的主值分别相等。

如果 $z=0$，那么与它对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 缩成一个点(零向量)，这样的向量的方向是任意的，所以复数 0 的辐角 θ 是任意的。

例9 求下列复数的模数与辐角的主值：

(a) $z_1=1+i$　　(b) $z_2=-1-i$

(c) $z_3=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$　　(d) $z_4=-1+i\sqrt{3}$

解 (a) 模数 $|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\tan\theta=\frac{1}{1}=1$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ $\arg z_1$ 的主值为 $\dfrac{\pi}{4}$。

(b) 模数 $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$$

由于点$(-1, -1)$落在第 3 象限内，

$\therefore \qquad \theta = -\frac{3}{4}\pi$

即 $\arg z_2$ 的主值为 $-\frac{3}{4}\pi$。

(c) 模数 $|z_4| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

由于点$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$落在第 4 象限内，

即 $\arg z_3$ 的主值为 $-\frac{\pi}{4}$。

(d) 模数 $|z_4| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

由于点$(-1, \sqrt{3})$落在第 2 象限内，

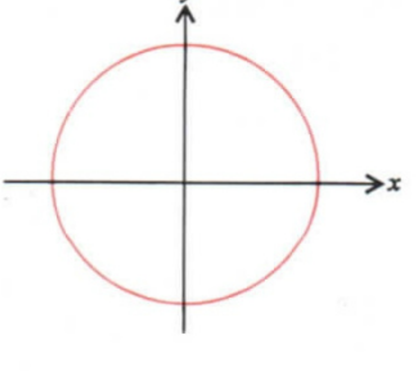
$\therefore \qquad \theta = \frac{2\pi}{3}$

即 $\arg z_4$ 的主值为 $\frac{2\pi}{3}$。

例 10 设复数 z 在复平面上用点 Z 表示。满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

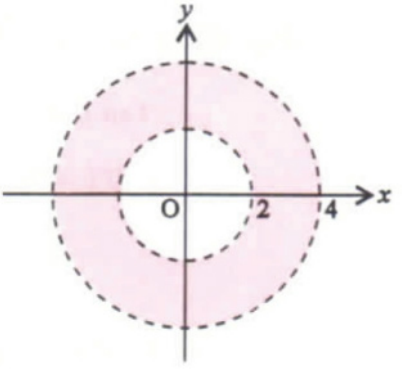
(a) $|z| = 4$ (b) $2 < |z| < 4$

解 (a) 复数 z 的模数等于 4，就是说，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模数(即点 Z 与原点的距离)等于 4，所以满足条件 $|z| = 4$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心，以 4 为半径的圆。



(b) 不等式 $2<|z|<4$ 可化为不等式组

$$\begin{cases}|z| < 4\\ |z| > 2\end{cases}$$



不等式 $|z|<4$ 的解集是圆 $|z|=4$ 内部所有的点组成的集合，

不等式 $|z|>2$ 的解集是圆 $|z|=2$ 外部所有的点组成的集合，

这两个集合的交集，就是上述不等式组的解集，也就是满足条件 $2<|z|<4$ 的点 Z 的集合。容易看出，其图形是以原点 O 为圆心，以 2 及 4 为半径所夹的圆环，但不包括圆环的边界(如右图)。

习题 9e

1. 已知复数 $\sqrt{3}+i$，$-2+4i$，$-2i$，4。
   (a) 在复平面内描出表示这些复数的点；
   (b) 在复平面内画出表示这些复数的向量；
   (c) 求各复数的模数与辐角的主值。
2. 比较复数 $z_1=-5+12i$，$z_2=-6-6\sqrt{3}i$ 的模数的大小。
3. 已知复数 $z=2-3i$ 与复平面内的点 Z 对应，写出：
   (a) 与点 Z 关于实轴对称的点对应的复数；
   (b) 与点 Z 关于虚轴对称的点对应的复数；
   (c) 与点 Z 关于原点对称的点对应的复数。
4. 求证：复平面内分别与复数 $z_1=1+2i$，$z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$，$z_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}i$，$z_4=-2+i$ 对应的四点 z_1，z_2，z_3，z_4 共圆。
5. 如果 $|z|=2+z-4i$，求复数 z。
6. 设 z 为复数，用点 Z 表示，则分别满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？
   (a) $|z|=3$　　(b) $|z|>3$
   (c) $|z|<3$　　(d) $2<|z|\leqslant 5$

9.7 复数的三角函数式

从图 9－5 中可以看出：如果 $z=a+bi(z\neq 0)$，

那么 $\begin{cases} a=r\cos\theta \\ b=r\sin\theta \end{cases}$

$\therefore \quad a+bi=r\cos\theta+r\sin\theta$

因此我们可以说，任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以表示成

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

的形式。$r(\cos\theta+i\sin\theta)$叫做**复数的三角函数式** (trigonometric form of complex number)，而 $a+bi$ 叫做复数的代数式。

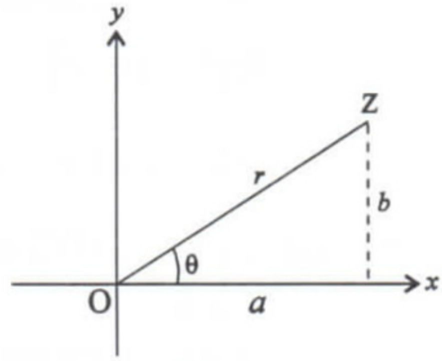


图 9－5

由上面知道，如果 $z=a+bi$，那么

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中 $\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\theta=\dfrac{b}{a} \end{cases}$

这个公式就是复数的代数式 $a+bi$ 与相应的三角函数式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的互化公式。

应注意的是，上面三角函数式中，r 是 z 的模数，是非负实数。式中的余弦与正弦是就同一个辐角 θ 而言的，它们用加号“＋”连结。

例 11 把下列复数表示成三角函数式：

(a) $\sqrt{3}+i$ (b) $1-i$ (c) -1

解 (a) $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ [$(\sqrt{3}，1)$ 在第一象限内]

于是 $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(b) $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}$

$=\sqrt{2}$

$\tan\theta=\frac{-1}{1}$

$=-1$

因为与 $1-i$ 对应的点在第四象限，

所以 $\theta=-\frac{\pi}{4}$

于是 $1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

(c) $r=\sqrt{(-1)^2+0^2}$

$=1$

因为与 -1 对应的点在 x 轴的负半轴上，

所以 $\theta=\pi$

于是 $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

【注】把一个复数表示成三角函数式时，辐角 θ 不一定要取主值。例如，

$\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$、$\sqrt{2}\left[\cos\frac{15\pi}{4}+i\sin\frac{15\pi}{4}\right]$

都是复数 $1-i$ 的三角函数式。

例 12 求复数 $5\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ 的模数与辐角。

解 这里需把 $5\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ 化成复数的三角函数式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的形式，才能直接看出它的辐角是什么。

$\because\ \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}$

$\therefore\ 5\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)=5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$\therefore$ 此复数的模数为 5，辐角为 $-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ $(k\in W)$。

例 13 化 $6(\cos 135° + i\sin 135°)$ 为复数的代数式。

解

$$6(\cos 135° + i\sin 135°) = 6\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$
$$= -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

习题 9f

1. 把下列复数表示成三角函数式，并且画出相应的向量：

   (a) $1+\sqrt{3}i$　　(b) $3-4i$　　(c) $-4+3i$

   (d) $-5-12i$　　(e) -3　　(f) $-i$

2. 把下列复数表示成代数式：

   (a) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

   (b) $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

   (c) $3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

   (d) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right)$　$(k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

3. 下列复数是不是复数的三角函数式？如果不是，把它们表示成三角函数式后，求模数和辐角的主值：

   (a) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$　　(b) $-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

   (c) $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4} + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$　　(d) $\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}$

4. 把下列复数表示成三角函数式$(r>0)$：

   (a) $\cos\theta - i\sin\theta$　　(b) $-r(\cos\theta + i\sin\theta)$

   (c) $r(-\cos\theta + i\sin\theta)$　　(d) $r(\sin\theta + i\cos\theta)$

5. 已知 $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，用复角的三角函数式表示它的共轭复数 $\bar{z}$。

6. 某个复数的模为 2，实部为 $\sqrt{3}$，求这个复数的代数式和三角函数式。

9.8 复数的三角函数式的乘法与除法

如果把复数 z_1，z_2 分别写成三角函数形式：

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

根据复数的乘法法则，

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

即

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

这就是说，两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和。

上面的结论可以推广到几个复数相乘的情况，就是：

$$\begin{aligned} & z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots\cdots \cdot z_n \\ &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \cdot \cdots\cdots \cdot r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) \\ &= r_1 r_2 \cdot \cdots\cdots \cdot r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)] \end{aligned}$$

下面我们来看复数三角函数式的除法。

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 且 $z_2 \neq 0$。

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]}{r_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] \end{aligned}$$

即

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

这就是说，两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差。

例 14 计算 $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$。

解

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
&=\sqrt{6}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]\\
&=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&=\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&=\sqrt{3}+\sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

例 15 代简 $(\cos 4\theta-i\sin 4\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)$。

解 这里的两个因式都不是复数的三角函数式，所以需先把它们化成 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的形式。

$$
\begin{aligned}
&(\cos 4\theta-i\sin 4\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)\\
&=[\cos(-4\theta)+i\sin(-4\theta)][\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]\\
&=\cos(-5\theta)+i\sin(-5\theta)
\end{aligned}
$$

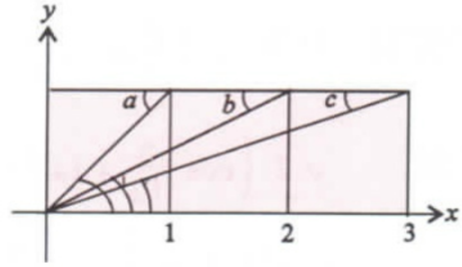
例 16 计算 $4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$。

解

$$
\begin{aligned}
&4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\\
&=\frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]\\
&=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i
\end{aligned}
$$

例 17 如右图，已知平面内并列三个相等的正方形，利用复数证明

$$\angle a+\angle b+\angle c=\frac{\pi}{2}$$



解 建立如图所示的坐标系。由于平行线的内错角相等，故 $\angle a$，$\angle b$，$\angle c$ 分别等于复数 $1+i$，$2+i$，$3+i$ 的辐角的主值。由于复数相乘，积的辐角等于因数的辐角的和，这样 $\angle a+\angle b+\angle c$ 就是积 $(1+i)(2+i)(3+i)$ 的辐角。

而
$$\begin{aligned}(1+i)(2+i)(3+i)&=(1+3i)(3+i)\\&=10i\end{aligned}$$

其辐角的主值是 $\frac{\pi}{2}$，并且 $\angle a$，$\angle b$，$\angle c$ 都是锐角，

所以 $\angle a+\angle b+\angle c=\frac{\pi}{2}$

习题 9g

1．计算：

(a) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(b) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(c) $\sqrt{2}\,(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$

(d) $3\,(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)\cdot 2(\cos 54^\circ+i\sin 54^\circ)\cdot 5\,(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ)$

(e) $\sqrt{10}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2．求证：

(a) $(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)=i$

(b) $(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)=\cos 5\theta-i\sin 5\theta$

3．计算：

(a) $12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div 6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(b) $\sqrt{3}(\cos 150° + i\sin 150°) \div \sqrt{2}(\cos 225° + i\sin 225°)$

(c) $2 \div \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(d) $-5i \div 2(\cos 120° + i\sin 120°)$

4. 化简：

(a) $\dfrac{(\cos 7\theta + i\sin 7\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}{(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)}$

(b) $\dfrac{\cos\phi - i\sin\phi}{\cos\phi + i\sin\phi}$

5. (a) 求证 $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

(b) 写出下列复数 z 的倒数 $\dfrac{1}{z}$ 的模数和辐角：

(i) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ (ii) $z = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$

(iii) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

* 6. 直角三角形 ABC 中，$\angle C = \dfrac{\pi}{2}$，$BC = \dfrac{1}{3}AC$，点 E 在 AC 上，且 EC = 2AE。

利用复数证明 $\angle CBE + \angle CBA = \dfrac{3\pi}{4}$。

9.9 复数的乘方

在复数的乘积中，有

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdot \cdots\cdots \cdot r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$
$$= r_1 r_2 \cdots\cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots\cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots\cdots + \theta_n)]$$

如果

$$r_1 = r_2 = \cdots\cdots = r_n = r,$$
$$\theta_1 = \theta_2 = \cdots\cdots = \theta_n = \theta,$$

就有

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\ (n \in \mathbb{N})$$

这就是说，复数的 n（$n \in \mathbb{N}$）次幂的模等于这个复数的模的 n 次幂，它的辐角等于这个复数的辐角的 n 倍。这个定理叫做**隶美佛定理**(De Moivre's theorem)。

例 18 计算 $(\sqrt{3}-i)^6$

解 因为 $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$，所以

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3}-i)^6 &= \left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^6\\
&= 2^6(\cos 11\pi + i\sin 11\pi)\\
&= 64(\cos\pi + i\sin\pi)\\
&= 64(-1)\\
&= -64
\end{aligned}
$$

【注】进行复数的乘方运算时，把复数的代数式化为三角函数式，再利用隶美佛公式进行计算较为简便。

例 19 $n(n\in\mathbb{N})$是什么值的时候，$(1+\sqrt{3}i)^n$ 是一个实数?

解

$$
\begin{aligned}
(1+\sqrt{3}i)^n &= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^n\\
&= 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

当 $\sin\frac{n\pi}{3}=0$ 时，$(1+\sqrt{3}i)^n$ 是实数。

即 $\frac{n\pi}{3}=k\pi$ $(k\in\mathbb{N})$，$n=3k$ 时，$(1+\sqrt{3}i)^n$ 是实数。

例 20 若 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，证明 $z^2+\frac{1}{z^2}=2\cos 2\theta$。

解

$$
\begin{aligned}
z^2+\frac{1}{z^2} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^2+\frac{1}{(\cos\theta+sin\ \theta)^2}\\
&= \cos 2\theta + i\sin 2\theta + \frac{1}{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}\\
&= \cos 2\theta + i\sin 2\theta + \frac{\cos 2\theta - i\sin 2\theta}{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)}\\
&= 2\cos 2\theta
\end{aligned}
$$

例 21 利用棣美佛定理证明 $\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$。

解 设 $z = \cos\theta + i\sin\theta$,

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^6 &= \cos^6\theta + 6\cos^5\theta\sin\theta + 15\cos^4\theta(i\sin\theta)^2 \\
&\quad + 20\cos^3\theta(i\sin\theta)^3 + 15\cos^2\theta(i\sin\theta)^4 \\
&\quad + 6\cos\theta(i\sin\theta)^5 + (i\sin\theta)^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos 6\theta + i\sin 6\theta &= \cos^6\theta + 6i\cos^5\theta\sin\theta - 15\cos^4\theta\sin^2\theta - 20i\cos^3\theta\sin^3\theta \\
&\quad + 15\cos^2\theta\sin^4\theta + 6i\cos\theta\sin^5\theta - \sin^6\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \cos 6\theta &= \cos^6\theta - 15\cos^4\theta\sin^2\theta + 15\cos^2\theta\sin^4\theta - \sin 6\theta \\
&= \cos^6\theta - 15\cos^4\theta(1-\cos^2\theta) + 15\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)^2 - (1-\cos^2\theta)^3 \\
&= \cos^6\theta - 15\cos^4\theta + 15\cos^6\theta + 15\cos^2\theta - 30\cos^4\theta + 15\cos^6\theta \\
&\quad - 1 + 3\cos^2\theta - 3\cos^4\theta + \cos^6\theta \\
&= 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1
\end{aligned}
$$

习题 9h

1. 用棣美佛定理计算:

(a) $[3(\cos 18° + i\sin 18°)]^5$　　(b) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^8$

(c) $(1-i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7$　　(d) $(-1-i)^6$

(e) $(2-2\sqrt{3}i)^4$　　(f) $(\cos 10° - i\sin 10°)^6$

2. 设 $(\sqrt{3}+i)^{10} = m + (n-2)i$，求实数 m，n。

3. 计算:

(a) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{-1+\sqrt{3}i}$　　(b) $\left(\dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^8$

4. 设 $n \in \mathbb{N}$，对复数 z 定义: $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$，求证

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$

5. 证明 $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$ 当 n 为偶数时为 1，当 n 为奇数时为 -1。

6. 用棣美佛定理证明

(a) $\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$

(b) $4\cos^3\theta = \cos^3\theta + 3\cos\theta$

7. 若 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，证明

(a) $z^3-\dfrac{1}{z^3}=2i\sin 3\theta$

(b) $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=4\cos^2\theta$

(c) $z^2+z+2+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=2(\cos 2\theta+\cos\theta+1)$

8. (a) 以数学归纳法证明 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$，其中 $\theta\in\mathbb{R}$，$n\in\mathbb{N}$。

(b) 计算 $(1+i)^n+(1-i)^n$，其中 $n=20$。

9.10 复数的开方

设 $\rho(\cos\varnothing+i\sin\varnothing)$是复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的 n 次方根($n\in\mathbb{N}$)，那么

$$\begin{aligned} r(\cos\theta+i\sin\theta)&=[\rho(\cos\varnothing+i\sin\varnothing)]^n\\ &=\rho^n(\cos n\varnothing+i\sin n\varnothing)\end{aligned}$$

因为相等的复数，它们的模相等，辐角可以相差 2π 的整数倍，所以

$$\begin{cases}\rho^n=r\\ n\varnothing=2k\pi+\theta\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

由此可知 $$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varnothing=\frac{2k\pi+\theta}{n}$$

因此 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的 n 次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

当 k 取 0，1，……，$n-1$ 各值时，就可以得到上式的 n 个值。由于正、余弦函数的周期都是 2π，当 k 取 n，$n+1$ 以及其他各个整数值时，又重复出现 k 取 0，1，……，$n-1$ 时的结果。所以

复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的n次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$k=1，2，……，n-1。$$

例 22 求复数 $z=-1+i\sqrt{3}$ 的平方根。

解 $z=-1+i\sqrt{3}$

$=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore$ z 的平方根为

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\qquad k=0,\ 1$$

即 $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$$

例 23 求 $1+i$ 的 4 个四次方根。

解 $\because$ $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ $1+i$ 的四次方根为

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{4}\right)\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

即 $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$，$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$

$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$，$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$

● 二项方程式

形如

$$a_n x^n+a_o=0\qquad (a_o,\ a_n\in\mathbb{C}\text{，且 } a_n\neq 0)$$

的方程式叫做**二项方程式**(binomal equation)。任何一个二项方程式都可以化成

$$x^n=b\qquad (b\in\mathbb{C})$$

的形式。因此，都可以通过复数开方来求根。

例 24 在复数集$\mathbb{C}$中解方程 $x^5=32$。

解

$$x^5=32$$
$$=32(\cos 0+i\sin 0)$$
$$\therefore\quad x=\sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5}+i\sin\frac{0+2k\pi}{5}\right)$$
$$=2\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right]\quad(k=0,1,2,3,4)$$

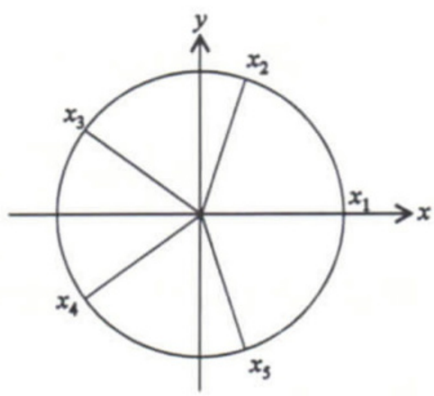
也就是 $x_1=2(\cos 0+i\sin 0)=2$,

$x_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$,

$x_3=2\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$,

$x_4=2\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$,

$x_5=2\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)$。



由右上图可知，这个方程的五个根对应复平面内的五个点，这些点均匀分布在以原点为圆心，以 2 为半径的圆上。

一般地，方程 $x^n=b(b\in\mathbb{C})$的根的几何意义是复平面内的 n 个点，这些点均匀分布在以原点为圆心，以 $\sqrt[n]{|b|}$ 为半径的圆上。

习题 9i

1. 求下列各数的平方根：
   -9, -2.89, -7, $-m^2(m\in\mathbb{R})$
2. 求：
   (a) $1-i$ 的立方根；
   (b) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的平方根；
   (c) -16 的四次方根；
   (d) 8 的六次方根；
   (e) $-i$ 的五次方根。
3. 已知一个复数的五次方根的一个值是 $i-1$，求它的其余四个值。
4. 在复数集$\mathbb{C}$中解下列方程，并在复平面内把方程的根表示出来：
   (a) $x^3-8=0$
   (b) $x^3+1=0$
   (c) $x^4-16=0$
   (d) $x^5+343=0$

5. 在复数集 $\mathbb{C}$ 中解下列方程：

(a) $4x^2+9=0$

(b) $x^3+1=i$

(c) $(x+1)^5=(1+i)^9$

(d) $x^4+3x^2-10=0$

(e) $x^{12}+63x^6-64=0$

1 的立方根

我们来解方程式 $x^3-1=0$

$$\begin{aligned} x^3 &= 1 \\ &= \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi \\ x &= \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} \quad (k=0,\ 1,\ 2) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x = 1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

也就是说，1 的立方根为 1，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，其中两根为虚根。

而 $$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

且 $$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

因此二虚根互为彼此的平方。

所以，

> 1 的立方根可写为 1，ω，ω^2，其中 $\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

因 $$x^3-1=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

故知 ω，ω^2 为方程式 $x^2+x+1=0$ 的二根

$\therefore$ $$\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1$$

又 ω 满足方程式 $x^2+x+1=0$，

$\therefore$ $$\omega^2+\omega+1=0$$

例 25　证明　$(1-\omega+\omega^2)^3-(1+\omega-\omega^2)^3=0$

解　$\because\ 1+\omega+\omega^2=0$

$\therefore\ 1+\omega=-\omega^2$

$1+\omega^2=-\omega$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1-\omega+\omega^2)^3-(1+\omega-\omega^2)^3&=(-2\omega)^3-(-2\omega^2)^3\\&=(-8\omega^3)-(-8\omega^6)\\&=-8+8\\&=0\end{aligned}$$

习题 9j

1. 若 1，ω，ω^2 为 1 的三个立方根，求证下列各式：
   (a) $(1+\omega^2)^7=-\omega$　　(b) $(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)=4$
   (c) $(3+3\omega+2\omega^2)^6=1$
2. 若 1，ω，ω^2 为 1 的三个立方根，求下列各式的值：
   (a) $\dfrac{(1+\omega)^2}{\omega}$　　(b) $(1+2\omega+2\omega^2)(3+2\omega+\omega^2)$
   (c) $\omega^7+\omega^8+\omega^9$

9.11 一元 n 次方程式根的讨论

● 根的性质

如果 $f(x)$是一元 n 次多项式，那么 $f(x)=0$ 叫做一元 n 次方程式。一元 n 次方程式的一般形式是

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

其中 a_0，a_1，…，a_n 都是复数，$a_0\neq0$，n 是自然数。

定理 1（代数基本定理）　一元 n 次方程式在复数集合内至少有一个根。

证明这个定理要用到高等数学知识，因此略去不讲。

定理 2　一元 n 次方程式在复数集合内有且只有 n 个根。

根据定理 1，一元 n 次方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

在复数集合内至少有一个根，设它为 x_1，那么根据多项式的因式定理知，$f(x)$能被 $x-x_1$ 整除，即

$$f(x)=(x-x_1)f_1(x)$$

其中 $f_1(x)$是 x 的 $n-1$ 次多项式。

同理，根据定理 1，方程式 $f_1(x)=0$ 至少有一个根，设它为 x_2，那么有

$$f_1(x)=(x-x_2)f_2(x)$$

其中 $f_2(x)$是 x 的 $n-2$ 次多项式，这时

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)f_2(x)$$

依此类推，可以得到 $\quad f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)f_n(x)$

比较两边的系数，得到 $\quad f_n(x)=a_0$

$\therefore \quad f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

因为 $a_0\neq0$，所以有 $\quad f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=0$

成立，这说明 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 都是 $f(x)=0$ 的根，即方程式(1)有 n 个根。

假设 x_{n+1} 是方程式(1)的一个根，并且不等于 x_1，$x_2\cdots$，x_n 中的任一个数，那么有， $\quad f(x_{n+1})=a_0(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)$

已知 $a_0\neq0$，由假设知 $x_{n+1}-x_1$，$x_{n+1}-x_2$，$\cdots x_{n+1}-x_n$ 都不为零，因此有

$$f(x_{n+1})\neq0$$

这与假设 x_{n+1} 是方程式(1)的根矛盾，从而说明 x_{n+1} 不是方程式(1)的根。也就是说，方程式(1)除了 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 之外再没有其它的根了。

在 $f(x)=0$ 的 n 个根中，其中可能有相同的，如有 k 个根都是 x_1，则称 x_1 是方程式 $f(x)=0$ 的 k 重根，当 $k=1$ 时，则称 x_1 是单根(或 1 重根)。

例 26 已知 $x^5+3x^4+4x^3+4x^2+3x+1=0$ 有三重根 -1，求其余两根。

解 由定理 2 可知，该方程式有 5 个根。设另两个根为 x_1，x_2，则有

$$x^5+3x^4+4x^3+4x^2+3x+1=0$$

$$(x+1)^3(x-x_1)(x-x_2)=0$$

由多项式的综合除法可知

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2+1=0$$

$\therefore \quad x_1=i,\ x_2=-i$

$$x^2=-1$$

即方程式的另两个根是 i 和 $-i$。

$$\begin{array}{l|l}
1+3+4+4+3+1 & -1 \\
-1-2-2-2-1 & \\
\hline
1+2+2+2+1 & -1 \\
-1-1-1-1 & \\
\hline
1+1+1+1 & -1 \\
-1+0-1 & \\
\hline
1+0+1 &
\end{array}$$

下面我们讨论实数系数的 n 次方程式的虚根的情况。

定理 3 如果实数系数方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

有虚根 $a+bi$（其中 a，b 是实数，$b\neq0$），那么它必有另一个虚根 $a-bi$。

例如，$x^2+1=0$ 有两个根 i 和 $-i$，它们是共轭的。

x^3-1 有三个根，一个是实数根 1，另两个是共轭的虚数根 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 和 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

【注】① 定理 3 的证明见附录 I。

② 定理 3 中"实数系数"这个条件是不可少的，否则结论不成立。例如，方程式 $x^3+ix^2-4x-4i=0$ 有三个根 2，-2 和 $-i$，但虚数根只有一个 $-i$，它的共轭虚数 i 不是方程式的根。这是因为方程式不是实数系数的。

③ 如果 $a+bi$ 是方程式(1)的 r 重根，那么 $a-bi$ 也是方程式的 r 重根。

例 27 已知方程式 $f(x)=3x^4-5x^3+3x^2+4x-2=0$ 有一个根是 $1+i$，解这个方程式。

解 由定理 3 可知，$1-i$ 也是这个方程式的根。

由于 $[x-(1+i)][x-(1-i)]=x^2-2x+2$

因此 $f(x)=(x^2-2x+2)q(x)=0$

其中 $q(x)$是二次多项式。

利用多项式的除法，用 x^2-2x+2 除 $f(x)$，得

$$q(x)=3x^2+x-1$$

解一元二次方程式 $3x^2+x-1=0$，得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$$

所以原方程的根是 $1\pm i$，$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$。

根与系数的关系

我们已经学过，一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

的根 x_1，x_2 与系数 a，b，c 之间的关系是

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

现在将这种关系推广到一元 n 次方程式

定理 4(韦达定理)　　如果一元 n 次方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (a\neq 0)$$

在复数集$\mathbb{C}$中的根是 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，那么

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_3}{a_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

证明　$\because$　方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根是 x_1，x_2，$\cdots$，x_n

$\therefore$　由定理 2 可知

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \tag{1}$$

又　$\because$　$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

$$=x^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}+(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}$$
$$-\cdots+(-1)^nx_1x_2\cdots x_n$$

代入(1)，并比较两边对应项的系数，得

$a_1=-a_0(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

$a_2=a_0(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$

$a_3=-a_0(x_1x_2+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a_n=a_0(-1)^nx_1x_2\cdots x_n$

$$\therefore \begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_3}{a_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

例 28 已知实数系数方程式 $2x^3-3x^2+px+q=0$ 的一个根是 $-3-\sqrt{2}i$，试确定这个方程式。

解 设该方程式三个根为 α，$-3-\sqrt{2}i$，$-3+\sqrt{2}i$。于是有

$$\begin{cases} (-3-\sqrt{2}i)+(-3+\sqrt{2}i)+\alpha=-\dfrac{3}{2} \\ (-3-\sqrt{2}i)(-3+\sqrt{2}i)+\alpha(-3-\sqrt{2}i)+\alpha(-3-\sqrt{2}i)=\dfrac{p}{2} \\ (-3-\sqrt{2}i)(-3+\sqrt{2}i)\alpha=-\dfrac{q}{2} \end{cases}$$

解得 $\alpha=\dfrac{9}{2}$，$p=-32$，$q=-99$

所以原方程式为 $2x^3+3x^2-32x-99=0$

例 29 已知 $4x^3-24x^2+23x+18=0$ 的三根成算术级数，试求其根。

解 设三根为 $a-d$，a，$a+d$。

依根与系数的关系得

$$\begin{cases} (a-d)+a+(a+d)=-\left(-\dfrac{24}{4}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (a-d)a+(a-d)(a+d)+a(a+d)=\dfrac{23}{4}\cdots (2) \\ (a-d)a(a+d)=-\dfrac{18}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

由(1)，得 $3a=6$

$a=2$

以 $a=2$ 代入 (2) 得

$$2(2-d)+(2-d)(2+d)+2(2+d)=\frac{23}{4}$$

$$12-d^2=\frac{23}{4}$$

$$d=\pm\frac{5}{2}$$

由于 $a=2$，$d=\pm\frac{5}{2}$ 能满足(3)，

故所求之根为 $-\frac{1}{2}$，2 及 $\frac{9}{2}$。

例 30 已知方程 $x^3+6x^2+3x-2=0$ 的三个根是 α，β，γ，求 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 的值。

解 $\because$ 设 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

根据根与系数的关系，有

$$\alpha+\beta+\gamma=-6$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(-6)^2-2(3)$$

$$=36-6$$

$$=30$$

习题 9k

1. 已知 $1-\sqrt{2}$ 是方程式 $x^4-4x^3+5x^2-2x-2=0$ 的一个根，解这个方程式。
2. 已知 $3i-1$ 是方程 $x^4+x^3+9x^2-8x+10=0$ 的一个根，解这个方程式。
3. 已知方程式 $2x^3+x+m=0$ 有一个根是 i，求 m 并解这个方程式。
4. 已知 2 是方程式 $2x^4-11x^3+18x^2-ax-2a=0$ 的三重根，求 a 的值并求其他的根。
5. 已知方程式 $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$ 的两根分别为 $a+bi$，$a+2bi$ 的形式(a，b 都是实数，$b\neq0$)，解这个方程。
6. 已知方程 $x^3-9\sqrt{2}x^2+46x-30\sqrt{2}=0$ 的三个根成等差数列，解这个方程。
7. 作一个以 2，$\frac{1}{2}$，-1，0 为根的四次方程。
8. 已知方程 $x^4-x^3-56x^2+36x+720=0$ 的两个根的比是 2:3，其余两个根的差是 1，解这个方程。

9. 已知方程 $2x^3-3x-5=0$ 的三个根是 α，β，γ 求下列各式的值：

(a) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　　(b) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(c) $\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\alpha\gamma}+\dfrac{1}{\alpha\beta}$

10. 已知方程 $2x^3-3x^2+x+1=0$ 的三个根是 α，β，γ，求作一个三次方程，使它的根是 $\alpha-3$，$\beta-3$，$\gamma-3$。

总复习题 9

1. 计算：

(a) $(3+2i)-(7-i)$　　(b) $\dfrac{-16+11i}{3+2i}$

(c) $\dfrac{15-5i}{2+i}$　　(d) $\dfrac{10(4+i)}{3-i}$

(e) $\dfrac{-3+29i}{1+2i}$　　(f) $\dfrac{3+i}{4-2i}-\dfrac{7-2i}{1+i}$

2. 求下列各方程中的实数 x，y：

(a) $2x^2-5x+3+(y^2+y-12)i=0$　　(b) $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{5}{1-3i}$

3. 计算：

(a) $[(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i]^3$　　(b) $\dfrac{(1+i)^4}{1+2i}+\dfrac{(1-i)^4}{1-2i}$

4. 已知 $z=z+yi(x,\ y\in\mathbb{R})$ 求下列各式的实部与虚部：

(a) $\dfrac{1}{z}$　　(b) z^3-z

5. 已知 $(x+yi)^3=a+bi$，这里 a，b，x，$y\in\mathbb{R}$，$xy\neq0$，求证

$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4(x^2-y^2)$。

6. 计算：

(a) $i\cdot i^3\cdot i^5\cdots i^{99}$　　(b) $1+i+i^2+\cdots+i^{55}$

(c) $i+2i^2+3i^3+4i^4$

7. 如果 $n\in\mathbb{N}$，求证　$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$

8. 设 θ_1，θ_2，…，θ_7 依次为复数

$z_1=\cos 40°-i\sin 40°$，$z_2=-\cos 40°-i\sin 40°$

$z_3=-\cos 40°+i\sin 40°$，$z_4=\sin 40°+i\cos 40°$

$z_5=-\sin 40°+i\cos 40°$，$z_6=\sin 40°-i\cos 40°$

$z_7=-\sin 40°-i\cos 40°$

的辐角的主值。则 $\theta_1=$ ______，$\theta_2=$ ______，$\theta_3=$ ______，$\theta_4=$ ______，$\theta_5=$ ______，$\theta_6=$ ______，$\theta_7=$ ______。

9. 求证

(a) $(1+i)(1+\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\theta\right)\right]$

(b) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

10. 解下列方程式：

(a) $(x-3)(x-5)+2=0$　　(b) $x^4+25i=0$

(c) $x^3+1=\sqrt{3}i$　　(d) $x^4+6x^2+8=0$

11. 已知复平面内正方形的三个顶点 A，B，C 所对应的复数分别是 $1+2i$，$-2+i$，$-1-2i$，求第四个顶点 D 所对应的复数。

12. 设 $x^3=1$ 的三个解是 1，w，w^2，其中 $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$。求证

(a) $(1+w^2)^4=w$　　(b) $(1+w-w^2)(1+w-w^2)=4$

(c) w^n+w^{2n}，当 n 是 3 的倍数时为 2，当 n 不是 3 的倍数时为 -1。(提示：设 $n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$)

13. 若 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，证明 $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$。

14. 已知 z 是虚数，解方程式

(a) $z+|\bar{z}|=2+i$　　(b) $z^2=\bar{z}$

15. 已知 $-2+4i$ 是方程式 $x^4+8x^3+31x^2+60x-100=0$ 的根，求其它的根。

16. 方程式 $x^4+4x^3-5x^2-8x+6=0$ 有二个根之和是 0，解这个方程式。

17. 已知方程式 $x^4-4x^3-24x^2+56x+52=0$ 的四个根成等差数列，解这个方程式。

18. 已知方程式 $x^3-2x^2+5x-3=0$ 的三根是 α，β，γ，求

(a) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(b) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

附录　定理三的证明

给定实数系方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \quad (a_i\in\mathbb{R})$$

如果它有一个虚根 z_0，则

$$f(z_0)=a_0z_0{}^n+a_1z_0{}^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

而

$$\begin{aligned}\overline{f(z_0)}=0&=\overline{a_0z_0{}^n+a_1z_0{}^{n-1}+\cdots+a_n}\\&=\overline{a_0z_0{}^n}+\overline{a_1z_0{}^{n-1}}+\cdots+\overline{a_n}\\&=\overline{a_0}\,\overline{z_0}{}^n+\overline{a_1}\,\overline{z_0}{}^{n-1}+\cdots+\overline{a_n}\\&=a_0\overline{z_0}{}^n+a_1\overline{z_0}{}^{n-1}+\cdots+a_n\\&=f(\overline{z_0})\end{aligned}$$

即

$$f(\overline{z_0})=0$$

∴　$\overline{z_0}$ 也为 $f(x)$ 的一个根。

名词对照

（注：本名词对照表按华文条目的汉语拼音字母的次序排列）

C

中　文	英　文	巫　文
长轴	major axis	paksi major
参数方程式	parametric equation	persamaan berparameter
参数	parameter	parameter
纯虚数	purely imaginary number	nombor khayalan tulen

D

顶点	vertex	bucu
短轴	minor axis	paksi minor
棣美佛定理	De Moivre's Theorem	Teorem De Moivre

E

二项方程式	binomial equation	persamaan binomial

F

反正弦函数	inverse sine function	songsangan fungsi sinus
反余弦函数	inverse cosine function	songsangan fungsi kosinus
反正切函数	inverse tangent function	songsangan fungsi tangen
反余切函数	inverse cotangent function	songsangan fungsi kotangen
反三角函数	inverse trigonometric function	songsangan fungsi trigonometric
反三角函数方程式	inverse trigonometric equation	songsangan persamaan trigonometric
复数	complex number	nombor kompleks
复平面	complex plane	satah kompleks
辐角	argument	hujah
复数的三角函数式	trigonometric form of complex number	bentuk trigonometric nombor kompleks

G

归纳法	induction	aruhan
共轭复数	conjugate complex number	konjugat nombor kompleks

J

焦点	focus	fokus
渐近线	asymptotes	asimptot
极点	pole	kutub
极轴	polar axis	paksi kutub
极半径	polar radius	jejari kutub
极角	polar angle	sudut kutub
极坐标	polar coordinates	koordinat kutub
极坐标系	polar coordinates system	sistem koordinat kutub
极坐标方程式	polar equation	persamaan kutub

L

罗比达法则	L' Hospital rule	petua L' Hospital
离心率	eccentricity	keeksentrikan

M

模数	modulus	modulus

P

抛物线	parabola	parabola
普通方程式/ 卡氏方程式	Cartesian equation	persamaan Cartesan

S

数学归纳法	mathematical induction	aruhan matematik
双曲线	hyperbola	hiperbola
实轴	real axis	paksi nyata

T

椭圆	ellipse	elips

X

虚轴	imaginary axis	paksi khayalan
虚数单位	imaginary unit	unit khayalan
虚数	imaginary number	nombor khayalan

Y

隐函数	implicit function	fungsi tersirat
移轴	translation of axes	translasi paksi – paksi
圆锥曲线	conic sections	keratan kon
圆	circle	bulatan

Z

转轴	rotation of axes	putaran paksi – paksi
正焦弦/通径	latus rectum	latus rectum
直角双曲线	rectangular hyperbola	hiperbola segiempat tepat
准线	directrix	direktriks

习题答案

第 2 章

习题 2a（P.12）

1. (a) $x=\sin^{-1}\frac{2}{5}$ (b) $x=\sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

   (c) $x=\sin^{-1}0.3147$ (d) $x=\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

2. (a) 无意义 (b) 不成立

3. (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$ (c) $44°6'$ (d) $-19°28'$

4. (a) $\frac{4}{5}$ (b) $-\frac{4}{5}$ (c) 0 (d) $\frac{\pi}{4}$

习题 2b（P.14）

1. (a) $x=\cos^{-1}0.8065$ (b) $x=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)$

2. (a) 无意义 (b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

3. (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $138°36'$ (d) $92°42'$

4. (a) 0.8795 (b) $-\frac{1}{4}$

习题 2c（P.17）

1. (a) $x=\tan^{-1}0.8065$ (b) $x=\tan^{-1}\sqrt{5}$

   (c) $x=\cot^{-1}3$ (d) $x=\cot^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

2. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $-69°36'$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $172°8'$

3. (a) $\sqrt{3}$ (b) 0.4

习题 2d（P.22）

1. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

(e) $\frac{\sqrt{15}}{4}$　(f) $\frac{3}{4}$　(g) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$　(h) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2. (a) $\frac{\pi}{6}$　(b) $-\frac{\pi}{4}$　(c) $\frac{4\pi}{9}$　(d) $-\frac{\pi}{4}$

(e) $\frac{\pi}{4}$　(f) $\frac{4\pi}{7}$　(g) $\frac{\pi}{4}$　(h) $\frac{6\pi}{7}$

3. (a) 0　(b) 1　(c) 5　(d) $\pi-\frac{1}{2}$

4. (a) 0　(b) $-\sqrt{3}$　(c) 0.2588　(d) 1

(e) $\frac{33}{65}$　(f) $\frac{22}{63}$　(g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(h) $\frac{54-25\sqrt{2}}{28}$

5. (a) 59.49°　(b) 88.23°　(c) 108.43°　(d) 233.34°

习题 2e（P.26）

1. (a) $\frac{\pi}{2}$　(b) $\frac{\pi}{2}$

习题 2f（P.29）

1. (a) $x=\sin\sqrt{2}$　(b) 无解

2. (a) $x=\frac{1}{4}\sin\frac{1}{5}$　(b) $x=-\frac{1}{2}$　(c) $x=\pm\tan\frac{1}{2}$

(d) $x=1$　(e) $x=\pm 1$　(f) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. (a) $x=2$　(b) 无解　(c) $x=-\frac{1}{3}$

(d) $x=0$, $x=2$　(e) $x=\frac{3}{4}$　(f) $x=\frac{3}{5}$

习题 2g（P.31）

1. (a) 无解　(b) 无解

2. (a) $x=\cot\frac{\pi}{8}$　(b) $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　(c) $x=2$, $x=3$　(d) $x=0$

(e) $x=13$　(f) $x=\frac{\sqrt{21}}{14}$　(g) $x=\sqrt{3}$　(h) $x=0$

(i) $x=1$　(j) $x=\frac{2}{9}$

总复习题 2（P.32）

1. (a) $-\frac{4}{5}$ (b) $-\sqrt{13}$ (c) $\frac{2\sqrt{30}}{11}$ (d) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

(e) $\frac{12\sqrt{5}}{49}$ (f) $\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$ (g) $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$，$x\in(-1,1)$

(h) $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$，$x\in(-1,1)$

2. (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $-\frac{\pi}{8}$ (c) $\frac{\pi}{10}$ (d) $\pi-\frac{1}{5}$

3. (a) $-\frac{13}{85}$ (b) $\frac{3}{5}$

4. (a) $104.25°$ (b) $-14.25°$ (c) $98.1°$ (d) $28.07°$

6. (a) $x=1$ (b) $x=\frac{1}{2}$ (c) $x=2$ (d) $x=\frac{2}{3}$

第 3 章

习题 3a（P.36）

1. $\frac{2}{y}$
2. $\frac{3x}{y+1}$
3. $-\frac{9x}{4y}$
4. $-\frac{1}{x^2}$或$-\frac{y}{x}$
5. $-\frac{x}{y}$
6. $\frac{1-x-y}{x-y}$
7. $\frac{2x-y^2}{2y(x+1)}$
8. $\frac{y(y-2x)}{x(x-2y)}$
9. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$
10. $-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$
11. $\frac{1}{y^2}$
12. $-\frac{y^2}{x^2}$ 或 $\frac{y(y-2x)}{x(x-2y)}$

习题 3b（P.38）

1. (a) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (c) $\frac{3}{9+x^2}$ (d) $-\frac{12}{16+9x^2}$

2. (a) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$ (b) $\frac{5x^{\frac{3}{2}}}{2(1+x^5)}$

(c) $\frac{3}{x\sqrt{4x^2-9}}$ (d) $\frac{1}{x\sqrt{x-4}}$

3. (a) $\frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$ (b) $\frac{-2}{5-12x+8x^2}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{10-3x-x^2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{8x-13-x^2}}$

4. (a) $\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\dfrac{2\tan^{-1}x}{1+x^2}$ (c) -1 (d) $-\dfrac{2x}{1+x^4}$

5. (a) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\sin^{-1}x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ (b) $2+2x\tan^{-1}x$

(c) $2\sqrt{16-x^2}$ (d) $\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+4}\right)^2$

习题 3c (P.40)

1. e^2 2. $\dfrac{1}{e}$ 3. e 4. e^2 5. e

6. e^2 7. e^{-2} 8. e^{-4} 9. e^{-2} 10. e^2

习题 3d (P.43)

1. (a) $\dfrac{3}{3x+5}$ (b) $\dfrac{1}{x}$ (c) $-\dfrac{1}{x}$

(d) $\dfrac{2(3x-1)}{3x^2-2x-4}$ (e) $\dfrac{2}{1-x^2}$ (f) $\dfrac{-1}{1-2x}-\dfrac{1}{2(x+1)}$

(g) $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ (h) $2\cot x$

2. (a) $\dfrac{1}{x\ln 10}$ (b) $\dfrac{\cot x}{\ln a}$ (c) $\dfrac{6(x+1)}{\ln a\,(2x^2+3x)}$

(d) $\dfrac{-\sin x}{\ln a\,(1+\cos x)}$ (e) $\dfrac{1}{2(1+x)\ln a}$ (f) $\dfrac{2}{x\ln a}$

3. (a) $\dfrac{1}{x\ln x}$ (b) $1+\ln x$ (c) $\dfrac{1}{\ln 3}(\ln x+1)$

5. (d) $\ln^2 x+2\ln x$ (e) $-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$ (f) $\dfrac{-2}{\cos x}$

习题 3e (P.45)

1. (a) $2e^x$ (b) $-e^{-x}$ (c) $3e^{3x}$ (d) $-4e^{-4x}$

(e) $\dfrac{-1}{2\sqrt{e^x}}$ (f) $2(e^{2x}-e^{-2x})$

2. (a) $3^x\ln 3$ (b) $-10^{-x}\ln 10$ (c) $2a^{2x}\ln a$ (d) $a^{\sin x}\cos x\ln a$

(e) $e^{\tan x}\sec^2 x$ (f) $2x\,e^{x^2}$ (g) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ (h) $x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$

3. (a) $(3+x)x^2e^x$ (b) $e^x(\sin x+\cos x)$ (c) $(n-x)x^{n-1}e^{-x}$

(d) $\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ (e) $e^x\left(2\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$ (f) $\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

(g) $e^{-2x}(2\cos 2x-3\sin 2x)$

4. (a) $3x^2+3^x\ln 3$ (b) $(1+\ln 2)2^xe^x$ (c) $a^x(1+x\ln a)$

(d) $\dfrac{1-(1+x)\ln 2}{2^x}$ (e) $\dfrac{2x}{x^2+1}$ (f) $e^x\cdot e^{e^x}$

习题 3f (P.47)

1. (a) $\dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$ (b) $\dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^2)^2}}$

(c) $\dfrac{-x^3+2x^2+1}{x^2\sqrt{(x^2+1)^3}}$ (d) $\dfrac{-2x^2+10x-11}{(x-3)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$

2. (a) $(\ln x+1)x^x$ (b) $x^{e^x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$ (c) $x^{\sin x}\left(\cos x\ \ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

(d) $e^x\left[\ln(\ln x)+\dfrac{1}{x\ln x}\right]$ (e) $\dfrac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$

习题 3g (P.49)

1. (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) 2 (c) -1 (d) $\dfrac{1}{6}$ (e) $\dfrac{1}{4}$ (f) $\dfrac{7}{3}$

2. (a) 0 (b) 0 (c) $\dfrac{1}{3}$ (d) 0 (e) 2 (f) 0

总复习题 3 (P.50)

1. (a) $\dfrac{-2a}{3y^2-3}$ (b) $\dfrac{-b^2x}{a^2y}$

2. (a) $e^x\cos e^x$ (b) $-3\sin 3x\ e^{\cos 3x}$ (c) $\dfrac{8x}{1+16x^4}$

(d) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$ (e) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (f) $ax^{a-1}+a^x\ln a$

(g) $2e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}$ (h) $2a^{2x+1}\ln a$

3. (a) $\dfrac{(2x+1)}{(x^2+x+1)\ln 10}$ (b) $2x\ \tan^2 x$ (c) $\dfrac{a}{x^2+a^2}$

(d) $\dfrac{1+\ln x}{x\ln^2 x}$

4. (a) 2 (b) 0

5. (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{1}{4}$ (d) 1

6. (a) $2x(3x^4-18x^2+23)$

(b) $\frac{(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$

(c) 0 (d) $(\ln x)^x\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]$

(e) $\left(\frac{a}{x}\right)^x\left(\ln\frac{a}{x}-1\right)$ (f) $(\sin 2x)^x[\ln(\sin 2x)+2x\cot 2x]$

(g) $\sec^2 x\ a^{\tan x}\ln a$

7. (a) $\frac{a^2}{b^2}$ (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

9. $\frac{dy}{dx}=e^{2x}(2ax+a+2b)$, $\frac{d^2y}{dx^2}=4e^{2x}(ax+a+b)$, $p=-4$, $q=4$

第4章

习题 4a (P.54)

1. A(-1, -11), B(3, -5), C(-8, 0), D(-4, -13)
2. (-5, 5) 3. (-3, 4) 4. $\alpha=8$, $\beta=16$ 5. $x'^2+y'^2=16$
6. (a) $x'^2+y'^2-49=0$ (b) $8x'^2-9y'^2-49=0$

(c) $x'^2+y'^2-16=0$ (d) $9x'^2+4y'^2-36=0$
7. A(0, -1), B(1, -4), C(4, 0), D(3, -2) 8. (-4, 2)

习题 4b (P.56)

1. $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $C\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. (a) $x'=0$ (b) $x'+y'=0$ (c) $x'^2+y'^2=9$ (d) $x'=\pm\sqrt{2}$
4. $\theta=33.69°$

总复习题 4 (P.57)

1. (a) O′(-3, -3); O′(0, 7)

(b) A(3, 0); B(0, -2); C(2, 1); D(4, -1)
2. A(-4, 1); B(6, 1); C(0, 0); D(4, -2)

3. (a) $y'=2$ (b) $3x'-4y'+3=0$ (c) $x'^2+y'^2=5$ (d) $x'^2=y'$

4. (a) $x'^2+y'^2=25$ (b) $\frac{x'^2}{17}+\frac{2y'^2}{17}=1$ (c) $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$ (d) $x'^2=y'$

5. $\theta=-16.26°$ 6. 旋转角$\theta=\frac{\pi}{6}$，点 M 的新座标$(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$

7. M 点的旧坐标为$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$ 8. $\frac{x'^2}{2}+y'^2=1$

9. $x'^2=-2py'$

习 题(P.60)

1. (a) $y'=\pm\sqrt{6}$ (b) $3x'^2-y'^2=16$

   (c) $\frac{6x'^2}{7}-\frac{4y'^2}{7}=1$ (d) $4x'^2+9y'^2=36$

2. (a) $x''^2-4y''^2=0$ (b) $y'^2-\frac{x'^2}{4}=1$

   (c) $\frac{y''^2}{16}+\frac{x''^2}{4}=1$ (d) $y''^2=4x''$

第 5 章

习题 5a(P.63)

1. 图象呈椭圆，方程式为 $3x^2+3y^2+2xy-8x-4=0$。 2. $x^2-4y+4=0$

3. (a) $x^2+y^2+2xy-2x-6y+3=0$ (b) $x^2+4y^2-4xy-10x+5=0$

   (c) $y^2-4x+4=0$ (d) $63x^2+63y^2-36xy-12y-12x-2=0$

   (e) $16x^2+15y^2+128x-6y+247=0$ (f) $x^2+y^2+4xy+6x+8y-3=0$

   (g) $2x^2-7y^2-12xy+6x+22y+2=0$

习题 5b(P.68)

1. (a) $x^2=12y$ (b) $y^2=-x$ (c) $y^2=\frac{16}{5}x$ (d) $x^2=8y$

   (e) $y^2=\pm 4x$ 或 $x=\pm 4y$

2. (a) 焦点坐标为$\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$，准线方程式为 $x-\frac{5}{8}=0$；

   (b) 焦点坐标为$\left(0, \frac{1}{8}\right)$，准线方程式为 $y+\frac{1}{8}=0$。

3. (a) 顶点坐标为(0, 0)，焦点坐标为$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，对称轴 $y=0$，准线 $x+\frac{3}{2}=0$，通径的长为6；

(b) 顶点坐标为(0, 0)，焦点坐标为$\left(0,\ -\frac{3}{16}\right)$，对称轴 $x=0$，准线 $y-\frac{3}{16}=0$，通径的长为$\frac{3}{4}$；

(c) 顶点坐标为(1, 2)，焦点坐标为(0, 2)，对称轴 $y-2=0$，准线 $x-2=0$，通径的长为 4；

(d) 顶点坐标为(2, 1)，焦点坐标$\left(2,\ \frac{5}{4}\right)$，对称轴 $x-2=0$，准线 $y-\frac{3}{4}=0$，通径的长为 1。

4. $(6,\ \pm 6\sqrt{2})$　　5. $x^2-6x-24y-39=0$　　6. $x^2-4x+8y-28=0$

7. $y^2-12x-6y-3=0$　　8. $y^2-8x-12y+28=0$　　9. $8\sqrt{3}a$

习题 5c (P.76)

1. (a) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$　　(b) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{8}=1$

   (c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 或 $\frac{x^2}{16}+\frac{9y^2}{400}=1$　　(d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 或 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

2. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$　　3. $x^2+y^2+26x+25=0$

4. 与焦点 F′的距离为 $\frac{37}{5}$，与焦点 F 的距离为 $\frac{13}{5}$。

5.

	(a)	(b)	(c)	(d)
中　心	(0, 0)	(0, 0)	(0, 2)	(0, −5)
长轴长 短轴长	$2a=20$ $2b=12$	$2a=10$ $2b=4$	$2a=2\sqrt{2}$ $2b=2$	$2a=6$ $2b=2$
对称轴	$y=0$ $x=0$	$y=0$ $x=0$	$y=2$ $x=0$	$y=-5$ $x=0$
顶　点	(−10, 0), (10, 0) (0, −6), (0, 6)	(0, −5), (0, 5) (−2, 0), (2, 0)	$(-\sqrt{2},\ 2)$, $(\sqrt{2},\ 2)$ (0, 1), (0, 3)	(0, −8), (0, −2) (−1, −5), (−1, −5)
离心率	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{21}}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
焦　点	(−8, 0) (8, 0)	$(0,\ -\sqrt{21})$ $(0,\ \sqrt{21})$	(−1, 2), (1, 2)	$(0,\ -5-2\sqrt{2})$ $(0,\ -5+2\sqrt{2})$
准　线	$x\pm\frac{25}{2}=0$	$y\pm\frac{25\sqrt{21}}{21}=0$	$x\pm 2=0$	$y\pm\frac{9\sqrt{2}}{4}+5=0$

6. $\dfrac{4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2}{73}+\dfrac{(y-5)^2}{16}=1$

7. $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{2}=1$

8. 最大距离为 1.5288×10^8 km，最小距离为 1.4712×10^8 km。

9. (a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 边长等于$\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}$

11. $x^2+y^2=\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$

习题 5d (P.85)

1. (a) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ (b) $\dfrac{y^2}{20}-\dfrac{x^2}{16}=1$

   (c) $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ (d) $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{4}=1$

2. $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$

3. $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

4. (a) $12x+5y=0$ 及 $12x-5y=0$ (b) $3x+4y=0$ 及 $3x-4y=0$

   (c) $2x-3y+1=0$ 及 $2x+3y+7=0$ (d) $2x+y-5=0$ 及 $2x-y-3=0$

5. (a) 中心为$(0, 0)$，$2a=8$，$2b=6$，$e=\dfrac{5}{4}$，焦点为$(-5, 0)$、$(5, 0)$，准线为

   $x\pm\dfrac{16}{5}=0$

   (b) 中心为$(0, 0)$，$2a=8$，$2b=10$，$e=\dfrac{\sqrt{41}}{4}$，焦点为$(0, \sqrt{41})$，$(0, -\sqrt{41})$，准线为

   $y\pm\dfrac{16\sqrt{41}}{41}=0$

   (c) 中心为$(2, -1)$，$2a=2\sqrt{2}$，$2b=2$，$e=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，焦点为$(2+\sqrt{3}, -1)$，

   $(-\sqrt{3}+2, -1)$，准线为 $x+2\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=0$

6. (a) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1$ (b) $\dfrac{(y+4)^2}{32}-\dfrac{x^2}{4}=1$

   (c) $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

7. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{5}=1$

8. $4x^2-y^2-16x+2y+3=0$

9. $\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

习题 5e（P.87）

1. (a) $x^2-y^2=4$ (b) $x^2-y^2+4y-2=0$

2. $x^2-y^2-4x+2y+2=0$ 3. $\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

总复习题 5（P.88）

1. (a) 双曲线，$e=\sqrt{3}$ (b) 抛物线，$e=1$

   (c) 椭圆，$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 直角双曲线，$e=\sqrt{2}$

2. 当 $k>0$ 时是椭圆；$k=0$ 时是抛物线；$k<0$ 时是双曲线。

3. (a) $\frac{(x+2)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{64}=1$ (b) $\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$

   (c) $(x-3)^2=-8(y+1)$

4. 焦点$\left(-2, -\frac{15}{4}\right)$，准线$y+\frac{17}{4}=0$ 6. 水面宽约 4.9m

7. $-2<t<4$，$|AB|=\frac{1}{4}(t+2)(4-t)$

8. $\frac{(m+n)^2x^2}{n^2}+\frac{(m+n)^2y^2}{m^2}=1$，是椭圆。

9. $\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right)$、$\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4}\right)$、$\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right)$、$\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4}\right)$。

10. 交点是$\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{15}\right)$、$\left(\frac{5}{2}, -2\sqrt{15}\right)$

11. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 12. 容积约为 4.71 m^3，装汽油约 3297 kg。

13. (a) C_1 中心在坐标原点，焦点坐标为$(-2\sqrt{10}, 0)$，$(2\sqrt{10}, 0)$

    C_2 中心在(3, 0)，焦点坐标为$(3+4\sqrt{2}, 0)$，$(3-4\sqrt{2}, 0)$

    (b) $x^2+y^2+2x-19=0$ 或 $x^2+y^2-28x+71=0$。

14. 60° 15. $\frac{96}{5}$ 16. $\frac{y^2}{3}-\frac{3x^2}{16}=1$，离心率 $e=\frac{5}{3}$

17. (a) $y_1+y_2=12$ (c) $\left(0, \frac{25}{2}\right)$ 18. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

第 6 章

习题 6a（P.93）

1. (a) 切线方程式为 $x-6y-18=0$，法线方程式为 $6x+y+114=0$
   (b) 切线方程式为 $4x+y+4=0$，法线方程式为 $x-4y+18=0$
   (c) 切线方程式为 $x-y+4=0$，法线方程式为 $x+y-2=0$
   (d) 切线方程式为 $x-9y+20=0$，法线方程式为 $9x+y+16=0$
   (e) 切线方程式为 $5x+9y-16=0$，法线方程式为 $9x-5y-50=0$
   (f) 切线方程式为 $x-y-1=0$，法线方程式为 $x+y-9=0$
   (g) 切线方程式为 $4x+y+16=0$，法线方程式为 $x-4y-30=0$
   (h) 切线方程式为 $x-y-1=0$，法线方程式为 $x+y-3=0$

2. $k=-1$，$(3,1)$　　3. $k=8$　　4. (a) 点 Q 的坐标为 $(9a,-6a)$

5. (a) $3x-y+3=0$，$x+3y+81=0$　　(c) $(-9,-24)$

7. $(at^2, 2at)$　　8. $a=cm$，$m=2$　　9. $(2,1)$

10. $4x+y-\sqrt{5}=0$，$4x+y+\sqrt{5}=0$　　12. $c=\pm\sqrt{37}$

14. $25x+6y-137=0$ 或 $25x-6y+137=0$

15. $(5,3)(-5,-3)$，切线方程式为 $x-y-2=0$，$x-y+2=0$；法线方程式为 $x+y-8=0$，$x+y+8=0$。

16. $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

17. 提示：先求出点 T_1，T_2 的坐标，然后证明 $k_{T_1T_2}=k_{PA}$。

习题 6b（P.95）

1. (a) $3x-y\pm 6=0$　　(b) $2x+y\pm\frac{3}{2}\sqrt{15}=0$　　(c) $9x+12y+20=0$

2. (a) $x-\sqrt{3}y+3=0$　　(b) $4x-2y\pm 1=0$　　(c) $x+4y\pm\sqrt{10}=0$

3. $3x-y+1=0$　　4. $(-5,-2)$，$(5,2)$

5. $(9,-24)$　　提示：与直线 $4x+3y+46=0$ 最近的点即平行于这条直线且与抛物线相切的切线的切点。

6. (a) $|k|>1$ 时相交，$|k|=1$ 时相切，$|k|<1$ 时不相交
   (b) $k>2$ 时相交，$k=2$ 时相切，$0<k<2$ 时不相交
   (c) $|k|<2$ 时相交，$|k|=2$ 时相加，$|k|>2$ 时不相交

7. $4x-3y+4=0$，$4x+3y-4=0$　　8. $x\pm 3y+15=0$

9. (a) $A'\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$、$A\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

(b) 提示：证明 $A'F'//FA$，$A'F//FA$ (c) $\frac{4}{5}$

10. (a) $m=-1$，$c=-2$ (b) $(2, -4)$，$(-4, 2)$ (c) 6

习题 6c（P.100）

1. (a) $x-y-1=0$，$x+y+1=0$ (b) $x-y-1=0$，$x+3y-9=0$

(c) $4x-\sqrt{10}y+2\sqrt{10}=0$，$4x+\sqrt{10}y-2\sqrt{10}=0$

(d) $5x-8y+10=0$，$x-2=0$

2. (a) $(2, 0)$，$\left(-\frac{4}{5}, \frac{14}{5}\right)$ (b) $(4, 4)$，$(1, 2)$

3. $2\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$，$2\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$，$(4, 6\sqrt{3})$，$(4, -6\sqrt{3})$

总复习题 6（P.100）

1. (a) $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ (b) $\frac{27}{2}$

2. (a) $A^2a^2+B^2b^2=C^2$ (b) $A^2a^2-B^2b^2=C^2$ (c) $a=\frac{AC}{B^2}$

3. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

4. (a) $e=\sqrt{\frac{13}{3}}$ (b) $2\sqrt{2}x+3y-6=0$，$3x-2\sqrt{2}y-13\sqrt{2}=0$

5. $x+y\pm5=0$，$x-y\pm5=0$ 6. $(1, 1)$ 7. $(-3, 2)$

8. $\left(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$ $(2, 0)$ 10. $6x+9y+8=0$

11. $4x-y+8\sqrt{2}=0$，$4x-y-8\sqrt{2}=0$ 12. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$

13. $(2, 0)(0, -4)$ 14. $x-y\pm5=0$，$x+y\pm5=0$ 15. $x\pm y=0$

第 7 章

习题 7a（P.106）

1. (a) $x^2+y^2=1$，表示圆 (b) $y^2=4ax$，表示抛物线

(c) $2x-y-7=0$，表示直线 (d) $y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1)$，表示直线

(e) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，表示椭圆　　(f) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，表示双曲线

(g) $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}-1=0$，表示直线

2. (a) $\begin{cases}x=a\tan\theta\\ y=a\cot\theta\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}x=a\sec\theta\\ y=b\tan\theta\end{cases}$　　(c) $\begin{cases}x=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}t^2\\ y=tx\end{cases}$

3. (a) $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=4\sin\theta\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}x=\frac{-8t}{4+t^2}\\ y=tx+4\end{cases}$

4. $y=-3\sin\theta$　　5. $3x-2y+1=0$

习题 7b (P.108)

1. $\left(\frac{t}{2},\ t+1\right)$，$2x-y+1=0$　　2. Q$\left(\frac{t}{2},\ 2t\right)$，$y^2=8x$

3. $\left(\frac{t}{2},\ \frac{18-t^2}{6}\right)$，$2x^2=9-3y$　　4. A$\left(\frac{m-1}{1+m},\ \frac{m^2+1}{1+m}\right)$

5. $y=mx+1-3m$，P$\left(\frac{3m-1}{m},\ 0\right)$，Q$(0,\ 1-3m)$，$x-2xy+3y=0$

6. $yt=x+2t^2$，$x=-y^2+6y-8$

7. (a) $4tx-y=4+4t^2$　　(b) $t=0$ 或 $t=3$　　(c) $5x^2=4y+16$

8. $y=2(t+6)x-t(6+t)$，$y=-12x-8x^2$

习题 7c (P.112)

1. (a) $\frac{2t^2-1}{2t}$　　(b) $\frac{t}{t+1}$　　(c) $-\tan^2 t$　　(d) -2

2. (a) $2x-y+7=0$ (b) $x+9y-6=0$　　(c) $x=0$　　(d) $4x-3y-5=0$

3. $54x-27y-14=0$ 或 $2x-y-10=0$　　4. $t=\frac{1}{4}$ 或 -1，$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{9}{8}\right)$

5. (b) $\left(\frac{5}{2},\ 9\right)$　　(c) $2x+16y-149=0$

习题 7d (P.118)

2. $5y^2=18ax$　　3. $4y^2=4ax-a^2$　　4. $y^2=2ax-8a^2$

5. (a) $2x-(t_1+t_2)y+2at_1t_2=0$　　9. $y=at$

13. (a) $ty=x+at^2$　　16. R$(apq,\ a(p+q))$　　17. $y+tx=at^3+2at$

习题 7e（P.122）

1. $\dfrac{(2x-ae)^2}{a^2}+\dfrac{(2y)^2}{b^2}=1$，中心为 $\left(\dfrac{ae}{2},\ 0\right)$

3. $\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=\dfrac{R}{2}\sin\theta\end{cases}$ 是一个椭圆，长轴的长为 2 R，短轴的长为 R，中心在原点。

5. $\left(\dfrac{a(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}{\sin(\theta_1-\theta_2)},\ \dfrac{-b(\cos\theta_2-\cos\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right)$

10. $x^2+y^2=a^2+b^2$

12. 入射线方程式为 $3\sqrt{21}x\pm10y-12\sqrt{21}=0$

反射线方程式为 $\sqrt{21}x\pm10y+4\sqrt{21}=0$

习题 7f（P.127）

3. $\dfrac{(2x-a)^2}{a^2}-\dfrac{(2y-a)^2}{b^2}=1$，$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$

6. $4xy=c^2$

9. $\left(\dfrac{3t}{2},\ 3\right)$

总复习题 7（P.129）

1. (a) $x^2-2xy+y^2+4x-8y+12=0$ (b) $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$

3. $x-y-2=0$

4. $\begin{cases}x=7782.5\cos\theta\\ y=7721.5\sin\theta\end{cases}$

5. (a) $4t$ (b) $-\sqrt{\dfrac{1+\theta}{1-\theta}}$ (c) $-\tan\theta$ (d) 1

6. PQ 的中点 $\left(\dfrac{3+2t}{2},\ \dfrac{3+t^2}{2}\right)$，$8y=4x^2-12x+21$，在 $t=0$ 的切线没有通过 PQ 中点的轨迹，因此切线与 PQ 中点的轨迹没有交点。

7. $(-2,\ -6)$，$(6,\ 2)$

8. $tx-y-t^2=0$，$tx+y-t=0$，$y=-2x^2+3x-1$

10. $y^2=ax$

11. $y^2=2ax-a^2$

12. $Q\left(\dfrac{a}{p^2},\ -\dfrac{2a}{p}\right)$，$y^2=ax-2a^2$

18. $y=-16x^2$

19. $py=x+ap^2$

20. $x-y-3a=0$；$3x+y-33a=0$，$2x-y-12a=0$

22. $y=\dfrac{-b^2\alpha}{a^2\beta}(x-\alpha)+\beta$

第 8 章

习题 8a（P.134）

1. A$\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right)$，B$\left(4,\ \frac{7\pi}{6}\right)$，C$\left(3,\ \frac{4\pi}{3}\right)$，D$\left(3,\ \frac{5\pi}{3}\right)$，E$(2,\ \pi)$，F$\left(2,\ \frac{3\pi}{2}\right)$
2. (b) 五个点都位于以极点为圆心，3 为半径的圆上；

   (c) 这五个点都位于过极点且与极轴成$\frac{\pi}{6}$角的直线上。
3. A 与 B 关于极轴对称，A 与 C 关于过极点且与极轴垂直的直线对称，A 与 D 关于极点 O 成中心对称。
4. 点 A 与点 B 关于极轴对称；点 A 与点 C 关于过极点且垂直于极轴的直线对称；点 A 与点 D 关于极点对称。

习题 8b（P.136）

1. (a) $\theta = \frac{\pi}{6}$ （r 可取负值）　　2. (a) $r = 3$　　(b) $r = 2a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$
3. (a) 圆　　(b) 直线

习题 8c（P.138）

1. $(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$；$(-1,\ -\sqrt{3})$；$(7,\ 0)$；$(0,\ 5)$；$(-\sqrt{3},\ 1)$
2. $\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right)$；$\left(8,\ \frac{5}{3}\pi\right)$；$(5,\ 126.87°)$；$\left(4,\ \frac{3}{2}\pi\right)$
3. (a) $r\cos\theta = 5$　　(b) $r\sin\theta + 4 = 0$　　(c) $\tan\theta = \frac{2}{5}$　　(d) $r = 5$

   (e) $r^2\sin 2\theta = 2a$　　(f) $r + 2\sin\theta = 0$　　(g) $r^2\cos 2\theta = a^2$
4. (a) $x^2 + y^2 = 49$　　(b) $y = x$　　(c) $x^2 + y^2 - 4x = 0$　　(d) $x^2 - y^2 = 16$

   (e) $x = 5$　　(f) $2x - 5y - 3 = 0$　　(g) $3x^2 - y^2 + 24x + 36 = 0$

   (h) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

总复习题 8（P.138）

1. (a) $\left(6,\ \frac{\pi}{3}\right)$；$\left(6,\ -\frac{\pi}{3}\right)$；$(3,\ 0)$；$\left(2\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6}\right)$

   (b) $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$；$\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$ 和$\left(2,\ \frac{5\pi}{6}\right)$；$\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$ 和$\left(\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\right)$
2. (a) A$\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$；B$\left(2,\ \frac{5\pi}{6}\right)$　　(b) A$\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$；B$\left(2,\ -\frac{\pi}{3}\right)$

3. (a) $r^2=a^2\cos 2\theta$ (b) $r\cos(\theta-\alpha)=p$

(c) $r^2\cos^2\theta-2pr\sin\theta-p^2=0$

4. (a) $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=64y^2$ (b) $x^2+y^2-x+4y=0$

(c) $x+\sqrt{3}y-2=0$

5. 圆心坐标为$\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$，半径 $r=5$

6. $\dfrac{11}{6}\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{\pi}{2}$ 7. $x^2+25y^2=25a^2$ 8. $r^2=a^2\sin 2\theta$

第 9 章

习题 9a（P.146）

1. 实数有$2+\sqrt{7}$，$\dfrac{2}{7}$，0，i^2

虚数有 $0.618i$，i，$5i+8$，$3-9\sqrt{2}i$，$i(1-\sqrt{3})$，$2-i\sqrt{2}$，$2-i-i^2$

纯虚数有 $0.618i$，i，$i(1-\sqrt{3})$

2. (a) $\mathrm{Re}(-5+\sqrt{6}i)=-5$，$\mathrm{Im}(-5+\sqrt{6}i)=\sqrt{6}$

(b) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{Im}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\mathrm{Re}(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}$，$\mathrm{Im}(-\sqrt{3})=0$

(d) $\mathrm{Re}(i)=0$，$\mathrm{Im}(i)=1$

(e) $\mathrm{Re}(0)=0$，$\mathrm{Im}(0)=0$

3. (a) $-\sqrt{2}+i$ (b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ (c) 3 (d) $1-i$

4. (a) $m=6$或-1 (b) $m=4$ (c) $m=-1$

5. (a) $\pm\sqrt{5}i$ (b) $\pm\dfrac{3}{2}i$ (c) ± 2，$\pm 2i$ (d) ± 2，$\pm\sqrt{5}i$

6. (a) $\begin{cases}x=1\\y=7\end{cases}$ (b) $\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}$ (c) $x=4$，$y=3$

7. (a) $4+3i$ (b) $5i$ (c) $-2+6i$

习题 9b（P.147）

1. (a) 5 (b) $-5-3i$ (c) $8-6i$ (d) $2-2i$

2. (a) $-2+2i$ (b) 0 3. (a) $-2\sqrt{2}i$ (b) $2b+2ai$

4. $z+\bar{z}=2a$，$\bar{z}-\bar{z}=2bi$

习题 9c（P.150）

1. (a) $-16+20i$　　(b) $\frac{5}{3}-\frac{11}{6}i$
2. (a) $-21+24i$　　(b) $-32-i$
   (c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$　　(d) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. (a) $-i$　　(b) i　　(c) i　　(d) i
4. (a) $-3+i$　　(b) $-25i$　　(c) $a+b$　　(d) $(a^2+b^2)^2$
5. (a) $i-1$　　(b) 10　　(c) $-i$
   (d) $(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$
6. (a) -4　　(b) -234

习题 9d（P.152）

1. (a) $1+i$　　(b) $\frac{9+13i}{25}$　　(c) $-1+i$　　(d) i
   (e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}i$　　(f) $\frac{77-36i}{7225}$
2. (a) $\frac{7}{25}-\frac{49}{25}i$　　(b) $\frac{1}{2}$
3. (a) $x=9$，$y=-7$　　(b) $x=-\frac{3}{2}$，$y=\frac{7}{2}$
   (c) $x=\frac{7}{2}$，$y=\frac{1}{2}$　　(d) $x=11$，$y=3$
4. (a) $z=\frac{5-i}{2}$　　(b) $z=2+3i$
   (c) $z=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i$　　(d) $z=1-i$
5. $\frac{104}{25}-\frac{72}{25}i$

习题 9e（P.156）

1. (c) $2, \frac{\pi}{6}$；　$2\sqrt{5}$，$116.57°$；　$2, -\frac{\pi}{2}$；　$4, 0$
2. $|z_1|>|z_2|$
3. (a) $2+3i$　　(b) $-2-3i$　　(c) $-2+3i$
5. $z=3+4i$

6. (a) 以原点为圆心，3 为半径的圆；

(b) 以原点为圆心，3 为半径的圆的外部（不包括边界）；

(c) 以原点为圆心，3 为半径的圆的内部（不包括边界）；

(d) 以原点为圆心，以 2 及 5 为半径所夹的圆环，但不包括圆环的内边界。

习题 9f（P.159）

1. (a) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$　(b) $5[\cos(-53.1°)+i\sin(-53.1°)]$

(c) $5[\cos(143.1°)+i\sin(143.1°)]$　(d) $13[\cos(-112.6°)+i\sin(-112.6°)]$

2. (a) $-3+3i$　(b) $4\sqrt{3}-4i$　(c) $-3i$

(d) $k=0$ 时，为 $4\sqrt{2}$　$k=1$ 时，为 $4+4i$　$k=2$ 时，为 $4\sqrt{2}i$

$k=3$ 时，为 $-4+4i$　$k=4$ 时，为 $-4\sqrt{2}$　$k=5$ 时，为 $-4-4i$

3. (a) 不是，$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$　$r=\frac{1}{2}$，$\theta=-\frac{\pi}{4}$

(b) 不是，$\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$　$r=\frac{1}{2}$，$\theta=-\frac{2\pi}{3}$

(c) 不是，$\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$　$r=\frac{1}{2}$，$\theta=-\frac{\pi}{4}$

(d) 是，$r=1$，$\theta=-\frac{3}{5}\pi$

4. (a) $\cos(-\theta)+\sin(-\theta)$　(b) $r[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$

(c) $r[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)]$　(d) $r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$

5. $r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$

6. 代数形式为 $\sqrt{3}+i$ 或 $\sqrt{3}-i$，

三角函数形式为　$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$　或　$2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

习题 9g（P.162）

1. (a) $16\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

(b) $8\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}\right)=4\sqrt{3}+4i$

(c) $\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos 300°+\mathrm{i}\sin 300°)=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4}i$

(d) $30(\cos 180°+\mathrm{i}\sin 180°)=-30$

(e) $2\sqrt{5}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{10}+\sqrt{10}i$

3. (a) $2\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$　　(b) $\frac{\sqrt{6}}{2}[\cos(-75^\circ)+i\sin(-75^\circ)]$

(c) $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$　　(d) $-\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}i$

4. (a) $\cos\theta+i\sin\theta$　　(b) $\cos(-2\varnothing)+i\sin(-2\varnothing)$

5. (b) (i) 模是$\frac{1}{4}$，辐角是$-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ $(k\in z)$

(ii) 模是 1，辐角是$\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in z)$

(iii) 模是 1，辐角是$\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k\in z)$

习题 9h（P.165）

1. (a) $243i$　　(b) 16　　(c) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

(d) $-8i$　　(e) $-128+128\sqrt{3}i$　　(f) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. $m=512$，$n=2-512\sqrt{3}$

3. (a) $8\sqrt{3}+8i$　　(b) $-8+8\sqrt{3}i$　　8. (b) -2^n

习题 9i（P.168）

1. $\pm 3i$，$\pm 1.7i$，$\pm\sqrt{7}i$，$\pm mi$。

2. (a) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$，$6\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$，

$6\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$

(b) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(c) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$，$-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$，$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$，$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

(d) $\sqrt{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$，$-\sqrt{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$，

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$

(e) $\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$，$\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}$，$\cos\frac{11\pi}{10}+i\sin\frac{11\pi}{10}$，$-i$，

$\cos\frac{19\pi}{10}+i\sin\frac{19\pi}{10}$

3. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20}+i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20}+i\sin\frac{9\pi}{20}\right)$

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{20}+i\sin\frac{11\pi}{20}\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{20}+i\sin\frac{13\pi}{20}\right)$

4. (a) 2, $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$

(b) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(c) 2, $2i$, -2, $-2i$

(d) $3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $3\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$, -3

$3\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$, $3\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$

5. (a) $\pm\frac{3}{2}i$

(b) $\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{2}i$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

(c) $x=-1+2^{\frac{9}{10}}\left(\cos\frac{\pi+8k\pi}{20}+i\sin\frac{\pi+8k\pi}{20}\right)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$

(d) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{5}i$

(e) ± 1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\pm\sqrt{3}+i$, $\pm 2i$, $\pm\sqrt{3}-i$

习题 9j（P.170）

2. (a) 1 (b) $-2-w$ (c) 0

习题 9k（P.175）

1. $-1\pm\sqrt{2}$, $1\pm i$
2. $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$, $-1\pm 3i$
3. $m=i$, $x=i$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$
4. $a=4$, $x=-\frac{1}{2}$
5. $1\pm i$, $1\pm 2i$
6. $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$
7. $2x^4-3x^3-3x^2+2x=0$
8. -4, -6, 5, 6
9. (a) $-\frac{3}{5}$ (b) 3 (c) 0
10. $2x^3-15x^2+37x-31=0$

总复习题 9(P.176)

1. (a) $-4+3i$　(b) $-2+5i$　(c) $5-5i$　(d) $11+7i$

(e) $11+7i$　(f) $-2+5i$

2. (a) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = -4 \end{cases}$　$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases}$　$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$　$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$

3. (a) $16+16i$　(b) $-\dfrac{8}{5}$

4. (a) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

(b) $\mathrm{Re}(z^3-z) = x^3-3xy^2-x$, $\mathrm{Im}(z^3-z) = 3x^2y-y^3-y$

6. (a) 1　(b) 0　(c) $2-2i$

8. $\theta_1=-40°$, $\theta_2=-140°$, $\theta_3=140°$, $\theta_4=50°$, $\theta_5=130°$, $\theta_6=-50°$, $\theta_7=-130°$

10. (a) $4\pm i$

(b) $\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$, $\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{7\pi}{8}+i\sin\dfrac{7\pi}{8}\right)$,

$\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{11\pi}{8}+i\sin\dfrac{11\pi}{8}\right)$, $\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{15\pi}{8}+i\sin\dfrac{15\pi}{8}\right)$,

(c) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)$, $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{8\pi}{9}+i\sin\dfrac{8\pi}{9}\right)$,

$\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{14\pi}{9}+i\sin\dfrac{14\pi}{9}\right)$

(d) $x=\pm 2i$, $x=\pm\sqrt{2}\,i$

11. $2-i$

14. (a) $z=\dfrac{3}{4}+i$

(b) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$　$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$　$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{1}{2} \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$　$\begin{cases} x_4 = -\dfrac{1}{2} \\ y_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\therefore$　$z=1$　或　$z=0$　或　$z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

15. -5, 1, $-2-4i$, $-2+4i$

16. $\pm\sqrt{2}$, $-2\pm\sqrt{7}$

17. $1\pm\sqrt{3}$, $1\pm 3\sqrt{3}$

18. (a) -6　(b) -13