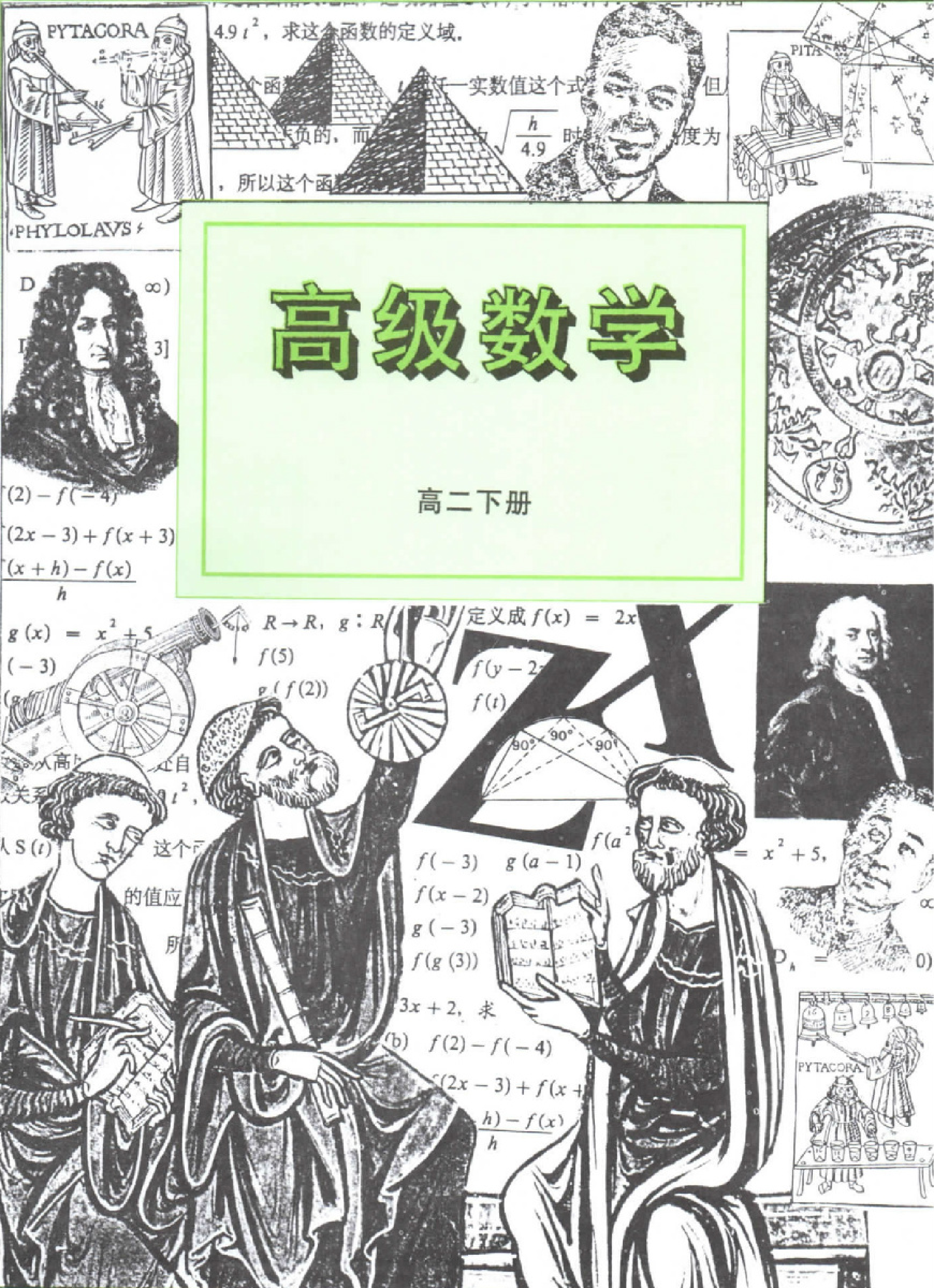


高级数学

高二下册

高中适用

《高级数学》高二下册

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Percetakan Advanco Sdn Bhd.

版次：
1996年6月第1版

印次：
2020年8月第12次印刷

编辑说明

一、这套《高级数学》是根据董教总全国华文独中工委会属下课程局所拟订的课程纲要而编写的。在拟订课程纲要的过程中，主要参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KBSM）及 STPM 的课程范围，此外，也参考了其他一些国家的课程纲要。

二、这套《高级数学》是以综合的方式编写，它将取代旧版的高级中学数学课本——《高中代数》上、下册，《三角学》，《解析几何》及《微积分》。

三、这套《高级数学》是为全国各华文独中的高中理科班学生编写的，全书分六册出版，分三年教完。每周上课 8 节（每节 40 分钟），惟各校可按个别情况处理。

四、本书是高二下册，供高中二年级下半年使用。内容包括：

代　数——平面向量、逻辑推理

微积分——极限、微分法（一）、微分法的应用（一）、不定积分（一）、定积分及其应用（一）

五、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题。习题的答案都附于书后。其中附有“*”号者，是较难的题目，可按学生水准而取舍。

六、本书中某些章内的附录部分，各校可按学生水平与授课时间而自行取舍。

七、配合本书，另编有《高级数学教师手册》高二下册，供教师教学参考之用。

八、书中如有错误、遗漏或欠妥之处，祈望教师及其他读者予以指正。

鸣　谢

本书承蒙国内外学者和数学教师协助编写与审稿，谨此统致谢忱。

董教总全国华文独中工委会课程局　启

1996年6月

目录

13. 微分法（一）

14. 微分法的应用（一）

15. 不定积分（一）

10 平面向量

10.1 向量

向量的概念

现实世界中经常碰到两种量。一种量可以只用数值来表示，例如长度、时间、面积和质量等等，这些量在选定的单位下，都可以用实数来表示。这种只用数值就可以表示的量叫做**纯量**（scalar）。另外一种量，只知道它们的数值大小是不够的；要确切表示它们，必须同时说明它的方向。例如表示位移，就既要确定移动距离，又要说明移动的方向。力、速度也属于这种情况。我们把这种既有大小又有方向的量叫做**向量**（vector）。

我们知道，规定了方向的线段叫做有向线段。向量可以用有向线段来表示。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。用有向线段 AB 表示一个向量时，我们就把这个向量写成 $\overrightarrow{AB}$(图 10－1)。向量也可以用 $\underline{a}$，$\underset{\sim}{a}$，$\vec{a}$ 或 $\boldsymbol{a}$ 表示。

图 10－1

相等向量（equal vector）

我们把大小相等、方向相同的向量定为相等向量。从图形上看，表示相等向量的有向线段长度相同，且彼此平行或共线。反过来，长度相同，彼此平行或共线的有向线段表示相等向量。

例如图 10 – 2 中，ABDE 与 BCDE 都是平行四边形，可知有向线段 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{ED}$ 表示相等向量，可写成

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$$

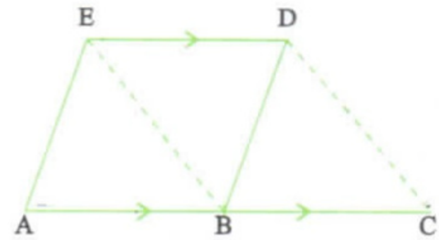
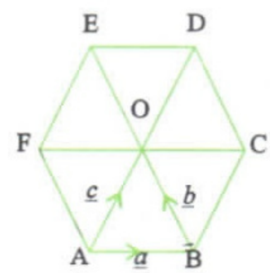


图 10 – 2

有向线段 $\overrightarrow{ED}$ 与 $\overrightarrow{DE}$，虽然长度相同，彼此共线，但方向相反，所以 $\overrightarrow{ED} \neq \overrightarrow{DE}$。因此，书写表示向量的大写字母时，要注意它们的顺序。

例 1 在正六边形 ABCDEF 中，$\overrightarrow{AB} = \underline{a}$，$\overrightarrow{BO} = \underline{b}$，$\overrightarrow{AO} = \underline{c}$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{c}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{FO}$。



解 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{FE} = \underline{c}$

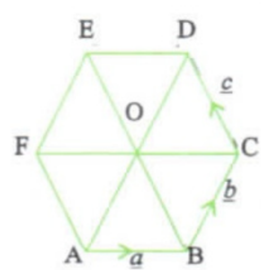
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AF} = \underline{b}$

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{FO} = \underline{a}$

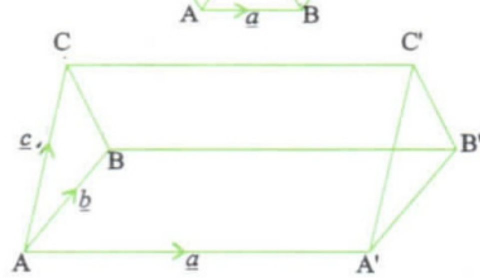
习题 10a

1. 温度有零上温度和零下温度，温度是不是一个向量？为什么？
2. (a) 对于相等的向量，如果表示它们的有向线段具有相同的起点，那么这些有向线段的终点是不是相同？

   (b) 对于不相等的向量，如果表示它们的有向线段具有相同的起点，那么这些有向线段的终点是不是相同？



3. 在正六边形 ABCDEF 中，$\overrightarrow{AB} = \underline{a}$，$\overrightarrow{BC} = \underline{b}$，$\overrightarrow{CD} = \underline{c}$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{c}$ 表示 $\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{FO}$。



4. 已知平行四边形 AA′B′B，BB′C′C，$\overrightarrow{AA'} = \underline{a}$，$\overrightarrow{AB} = \underline{b}$，$\overrightarrow{AC} = \underline{c}$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{c}$ 表示 $\overrightarrow{A'B'}$，A′C′，$\overrightarrow{CC'}$。

10.2 向量的加减法

● 向量的加法

（一）**向量求和三角形法则**（triangle law of vector addition）

如果一个动点由点 A 移到点 B （用 $\overrightarrow{AB}$ 表示），再由点 B 移到点 C （用 $\overrightarrow{BC}$ 表示），那么这个动点由点 A 直接移到点 C （用 $\overrightarrow{AC}$ 表示）与上面两次连续移动的结果相同。这时，我们可以说，动点从 A 到 C 的移动是由这个动点由 A 到 B 再由 B 到 C 两次移动的和（图 10－3）。

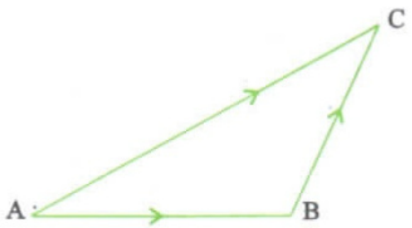


图 10－3

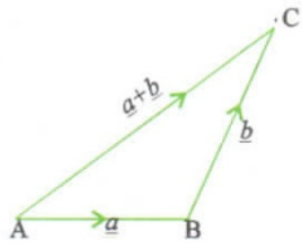


图 10－4

从上述移动的情况，我们可以引出向量加法的三角形法则。

已知向量 $\underline{a}$，$\underline{b}$，如图 10－4，在平面任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{BC}=\underline{b}$，作向量 $\overrightarrow{AC}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做向量 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的和，记作 $\underline{a}+\underline{b}$，即

$$\underline{a}+\underline{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

上述求两个向量和的作图法叫做向量求和三角形法则。也就是说，两个向量求和，先使它们首尾相接（第一个向量的终点作为第二个向量的起点），那么以第一个向量的起点为起点，以第二个向量的终点为终点的向量就是它们的和。

（二）**向量求和平行四边形法则**（parallelogram law of vector addition）

已知向量 $\underline{a}$、$\underline{b}$，如图 10－5，在平面任取一点 A，以 A 为向量 $\underline{a}$、$\underline{b}$ 的起点，再以 $\underline{a}$、$\underline{b}$ 为邻边 AB、AD，作平行四边形 ABCD，那么，对角线 AC 就是向量 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的和。即

$$\begin{aligned}\underline{a}+\underline{b}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

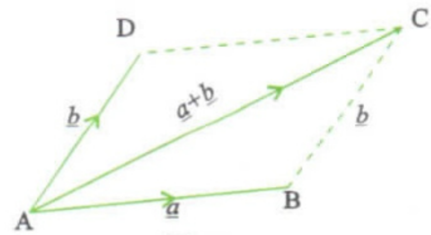


图 10－5

上述两个向量和的作图法叫做向量求和的平行四边形法则。也就是说，两个向量求和，可用三角形法则或平行四边形法则求得。

向量加法有如下性质：

(1) $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ （加法交换律）

(2) $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$（加法结合律）

证 (a) 如图 10-6，作 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{BC}=\underline{b}$，则有

$$\underline{a}+\underline{b}=\overrightarrow{AC}$$

再作 $\overrightarrow{AD}=\underline{b}$，则四边形 ABCD 是平行四边形。

在平行四边形 ABCD 中，

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\underline{a}$$

所以 $\underline{b}+\underline{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

$$=\overrightarrow{AC}$$

所以 $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$

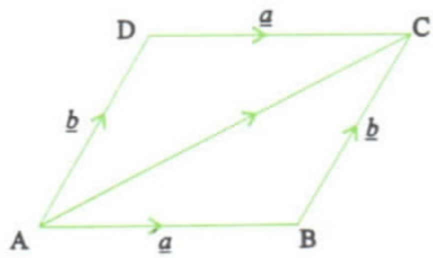


图 10-6

(b) 如图 10-7，作 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{BC}=\underline{b}$，$\overrightarrow{CD}=\underline{c}$。

那么

$$\begin{aligned}(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AD}\\\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})&=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

所以

$$(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$$

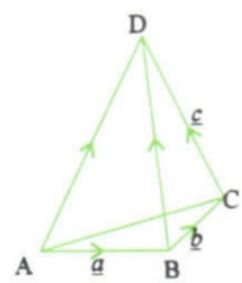


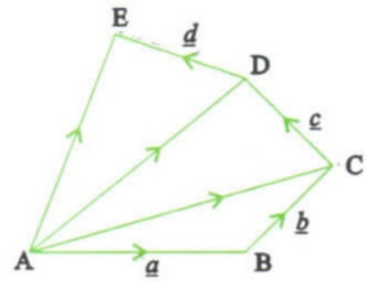
图 10-7

根据向量满足加法交换律与加法结合律可以知道，多个向量相加，可以任意交换向量的位置，也可先把其中的几个向量相加。

例2 如右图 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{BC}=\underline{b}$，$\overrightarrow{CD}=\underline{c}$，$\overrightarrow{DE}=\underline{d}$，求 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$。

解 根据向量加法的三角形法则，得

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$=\underline{a}+\underline{b}$$
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$$
$$=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$$
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$$
$$=(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})+\underline{d}$$
$$=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}$$



从此例可以看出：多个向量相加，也可以先使它们首尾相接（第一个向量的终点作为第二个向量的起点，第二个向量的终点作为第三个向量的起点，依次类推），那么以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点的向量就是它们的和。

例3 如右图正六边形 ABCDEF 中，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AF}=\underline{b}$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{BC}$，并说出此二向量的关系。

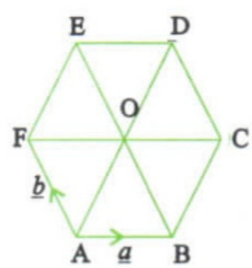
解 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$

$$=\underline{a}+\underline{b}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$$
$$=\underline{b}+\underline{a}$$

由于 $\overrightarrow{BC}=\underline{b}+\underline{a}$

$$=\underline{a}+\underline{b}$$
$$=\overrightarrow{AO}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是相等向量。



● 零向量（zero vector）

在 $\overrightarrow{AB}$ 中，当 B 与 A 重合时，即可考虑为 $\overrightarrow{AA}$，这时它的大小为 0，而方向不明，这类大小为零的向量是一种特殊的向量，叫做零向量。我们把零向量记作$\underline{0}$，也就是 $\overrightarrow{AA}=\underline{0}$。

对于任一向量 $\underline{a}$，都有 $\qquad \underline{a}+\underline{0}=\underline{a}$

这是因为若设 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，则

$$\begin{aligned}\underline{a}+\underline{0}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}\\&=\overrightarrow{AB}\\&=\underline{a}\end{aligned}$$

● 逆向量（inverse vector）

当 A、B 不重合时，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是不同的向量，即 $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{BA}$，且

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\underline{0}$$

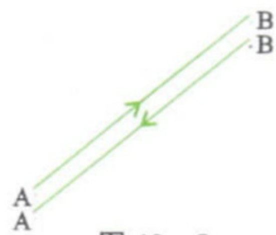


图 10 - 8

我们把和为零向量的向量叫做互为逆向量。由上式可知，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为逆向量，$\overrightarrow{BA}$ 就叫做 $\overrightarrow{BA}$ 的逆向量，$\overrightarrow{BA}$ 可记作 $-\overrightarrow{AB}$。若 $\overrightarrow{AB}$ 记作 $\underline{a}$，则 $\overrightarrow{BA}$ 记作 $-\underline{a}$，由上式得，

$$\underline{a}+(-\underline{a})=\underline{0}$$

可以看出，互为逆向量的两个向量是大小相等，方向相反的两个向量。反过来也对，即大小相等，方向相反的两个向量互为逆向量。

例4 如右图，平行四边形 ABCD 中，AC，BD 相交于 O，$\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$。以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$。

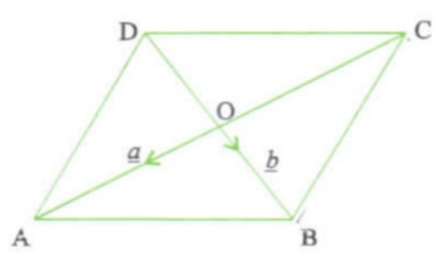
解 由平行四边形对角线互相平分知，

OA = OC，OB = OD

$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ 分别是 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的逆向量，

$\therefore\ \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}=-\underline{a}$

$\quad\ \overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}=-\underline{b}$



● 向量的减法

利用逆向量，可以把向量相减定义为：

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$$

如图 10－9，

$$\begin{aligned}\underline{a} - \underline{b} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB})\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}\\ &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}\\ &= \overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

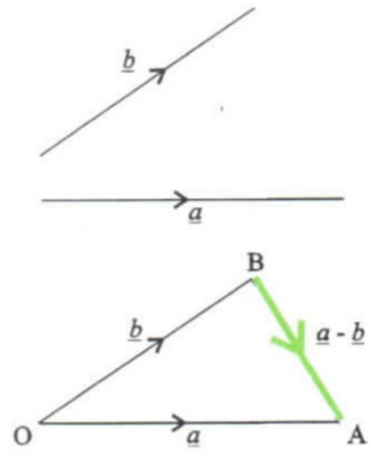
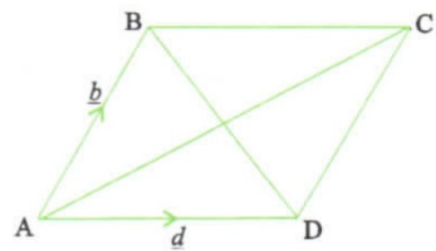


图 10－9

也就是说，向量 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的差 $\underline{a} - \underline{b}$，是将 $\underline{a}$、$\underline{b}$ 平移到同一起点，以 $\underline{b}$ 的终点为起点，以 $\underline{a}$ 的终点为终点的向量（图 10－9）。

例 5 右图中，ABCD 是平行四边形，$\overrightarrow{AB} = \underline{b}$，$\overrightarrow{AD} = \underline{d}$，求 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$(以 $\underline{b}$，$\underline{d}$ 表示)。



解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\\ &= \underline{d} + \underline{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\\ &= -\underline{b} + \underline{d}\\ &= \underline{d} - \underline{b}\end{aligned}$$

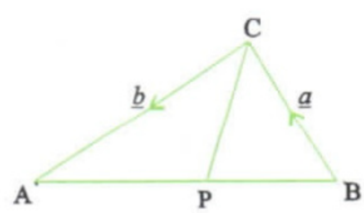
习题 10b

1. 在△ABC 中，$\overrightarrow{BC} = \underline{a}$，$\overrightarrow{CA} = \underline{b}$，P 是AB 上一点，求

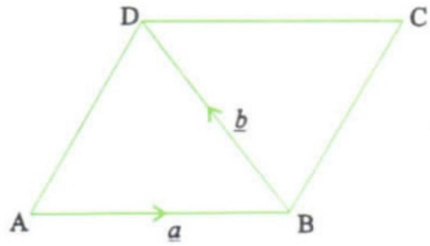
   (a) $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC}$

   (b) $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA}$

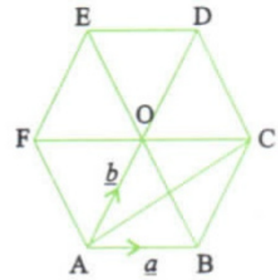
   (c) $\overrightarrow{BA}$



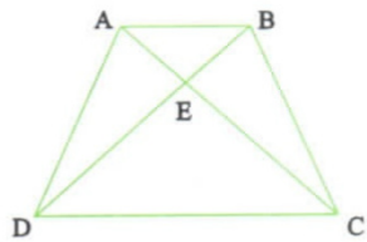
2. 在平行四边形 ABCD 中，$\overrightarrow{AB} = \underline{a}$，$\overrightarrow{BD} = \underline{b}$，求 $\overrightarrow{BC}$。



3. 如右图，正六边形 ABCD 中，$\overrightarrow{AB} = \underline{a}$，$\overrightarrow{AO} = \underline{b}$，求 $\overrightarrow{AC}$。



4. 根据右图，填写下列各题。



(a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} =$ ______

(b) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} =$ ______

(c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} =$ ______

(d) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} =$ ______

(e) $\overrightarrow{AE} +$ ____ $= \overrightarrow{AB}$

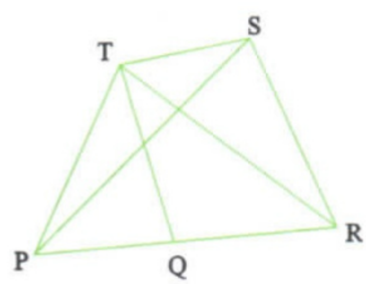
(f) $\overrightarrow{AD} +$ ____ $+ \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$

(g) $\overrightarrow{DE} +$ ____ $= \overrightarrow{DB}$

(h) $\overrightarrow{EB} +$ ____ $= \overrightarrow{ED}$

(i) ____ $+ \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$

5. 根据右图填写：



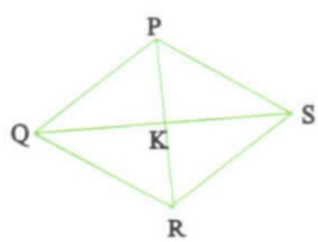
(a) $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PR} +$ ____ $+ \overrightarrow{TS}$

(b) $\overrightarrow{PS} =$ ____ $+ \overrightarrow{QT} + \overrightarrow{TS}$

(c) $\overrightarrow{TR} =$ ____ $+ \overrightarrow{PR}$

(d) $\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{QR} +$ ____ $+ \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PT}$

6. 根据右图，填写下列各题：



(a) $\overrightarrow{QK} +$ ____ $= \underline{0}$

(b) $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS} +$ ____ $= \underline{0}$

(c) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QK} + \overrightarrow{KR} =$ ____

(d) $\overrightarrow{PQ} + (-\overrightarrow{RQ}) =$ ____

(e) $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} + (-\overrightarrow{PR}) =$ ____

7. 求证：在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$。

8. 平行四边形 ABCD 中，AC，BD 相交于 O，求证：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\underline{0}$

9. 计算：

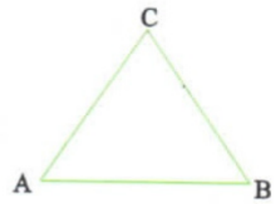
(a) $-\underline{a}+\underline{b}+\underline{a}+(-\underline{b})$　　(b) $-(\underline{b}+\underline{c})+\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$

10. 根据右图，化简：

(a) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$　　(b) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$

(c) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$　　(d) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$

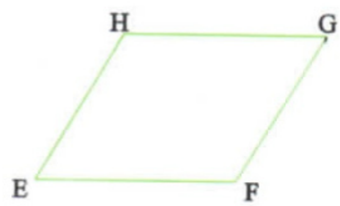
(e) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$



11. 右图中，EFGH 为一平行四边形，化简

(a) $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EH}$　　(b) $\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{EF}$

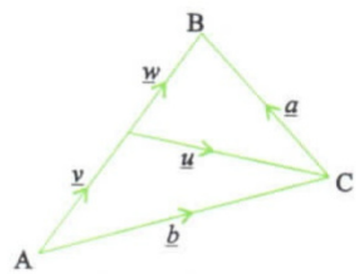
(c) $\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{FE}$　　(d) $\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{GH}$



12. 根据右图，化简

(a) $\underline{b}-\underline{u}$　　(b) $\underline{w}-\underline{a}$

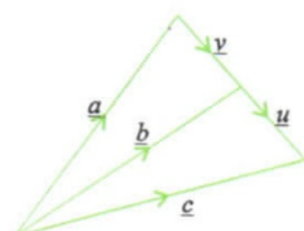
(c) $\underline{v}+\underline{u}-\underline{b}$　　(d) $\underline{b}+\underline{a}-\underline{v}-\underline{w}$



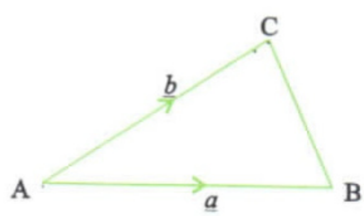
13. 根据右图，求最简向量 $\underline{x}$：

(a) $\underline{x}+\underline{u}=\underline{c}$　　(b) $\underline{x}+\underline{a}=\underline{b}$

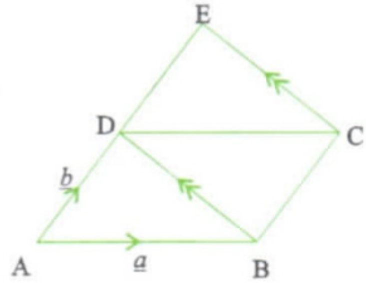
(c) $\underline{x}+\underline{c}=\underline{b}$　　(d) $\underline{x}-\underline{b}=\underline{u}$



14. 在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AC}=\underline{b}$，求 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$。



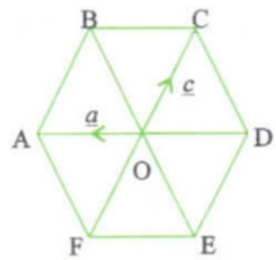
15. 在平行四边形 ABCD 中，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AD}=\underline{b}$，作 CE 平行于 BD 交 AD 延长线于 E，求 $\overrightarrow{CE}$。



16. 右图为一正六边形 ABCDEF，O 为中心点。已知 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OC}=\underline{c}$，以 $\underline{a}$、$\underline{c}$ 表示下列向量：

(a) $\overrightarrow{ED}$　　(b) $\overrightarrow{AC}$　　(c) $\overrightarrow{OE}$

(d) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$



10.3 向量的数乘

我们来计算两个相同的向量 $\underline{a}$ 的和 $\underline{a}+\underline{a}$。

由向量的和的定义可知，$\underline{a}+\underline{a}$ 表示与 $\underline{a}$ 同方向，且大小是 $\underline{a}$ 的二倍的向量（图 10－10），记作 $2\underline{a}$。即

$$\underline{a}+\underline{a}=2\underline{a}$$

图 10－10

又 $(-\underline{a})+(-\underline{a})$ 表示与 $\underline{a}$ 方向相反，且大小为 $\underline{a}$ 的二倍的向量(图 10－11)，根据上面的定义，应为 $2(-\underline{a})$，可记作 $-2\underline{a}$。即

$$(-\underline{a})+(-\underline{a})=-2\underline{a}$$

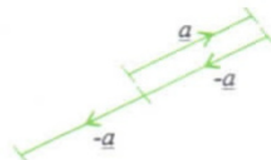


图 10－11

一般地，一个向量 $\underline{a}$ 乘以一个数 k，它们的积 $k\underline{a}$ 是这样一个向量：它的大小是向量 $\underline{a}$ 的大小的 $|k|$ 倍。

如果 k 是一个正数，$k\underline{a}$ 的方向与向量 $\underline{a}$ 相同；

如果 k 是一个负数，$k\underline{a}$ 的方向与向量 $\underline{a}$ 的相反；

如果 k 等于 0，可以规定 $0\underline{a}=0$。

例如，$\frac{1}{2}\underline{a}$ 的大小是 $\underline{a}$ 的大小的一半，方向与 $\underline{a}$ 相同；$-2\underline{a}$ 的大小是 $\underline{a}$ 的 2 倍，方向与 $\underline{a}$ 相反。

这样，无论 k 是正数，负数还是 0，我们都规定了$k\underline{a}$ 的意义。向量与数相乘，可以简单地说成是**向量的数乘**（the scalar multiplication of a vector）。

有了向量的数乘以后，我们就可以把所有与某一个向量 $\underline{a}$ 平行或共线的向量，用简单的形式 $k\underline{a}$ 表示。反过来，一切形如 $k\underline{a}$（$k>0$，$k<0$）的向量，都是与 $\underline{a}$ 平行或共线的向量。

向量的数乘满足分配律，即

$$k(\underline{a}+\underline{b})=k\underline{a}+k\underline{b}$$

证 如图 10－12，作平行四边形 ABCD，使 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AD}=\underline{b}$， 则 $\overrightarrow{AC}=\underline{a}+\underline{b}$。

作 $AB'=k\overrightarrow{AB}=k\underline{a}$，$AD'=k\overrightarrow{AD}=k\underline{b}$，$AC'=k\overrightarrow{AC}=k(\underline{a}+\underline{b})$。

连结 B′，C′，因为

$$\frac{AC'}{AC}=\frac{AB'}{AB}=|k|$$

$\therefore$ $B'C'/\!/BC$。

又因为 $BC/\!/AD$，$\therefore$ $B'C'/\!/AD'$。

同样，连结 C′，D′，可得 $C'D'/\!/AB'$。

因此，四边形 AB′C′D′是平行四边形。

$\therefore$ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}$

即 $k(\underline{a}+\underline{b})=k\underline{a}+k\underline{b}$

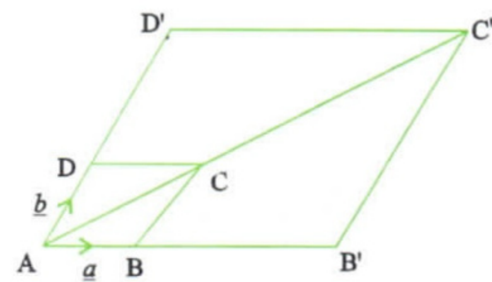


图 10－12

向量的数乘还有其他一些性质：

$$h(k\underline{a})=(hk)\underline{a}$$
$$(h+k)\underline{a}=h\underline{a}+k\underline{a}$$

利用上面的性质可以进行向量的一些运算，如

$2\times(3\underline{a})=(2\times3)\underline{a}=6\underline{a}$

$(4+5)\underline{a}=4\underline{a}+5\underline{a}$

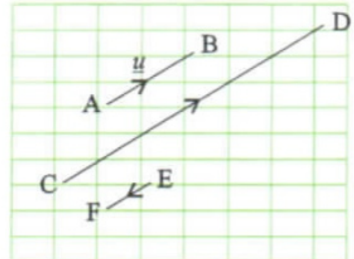
$6(\underline{a}+\underline{b})=6\underline{a}+6\underline{b}$

上面的性质还可以反过来用，如

$7\underline{a}+8\underline{a}=(7+8)\underline{a}=15\underline{a}$

$9\underline{a}+9\underline{b}=9(\underline{a}+\underline{b})$

例6 右图中，$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$，以 $\underline{u}$ 表示向量 $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$。



解 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同，且 CD = 3 AB，

$$\therefore \quad \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB} = 3\underline{u}$$

$\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相反，且 $EF = \frac{1}{2}AB$

$$\therefore \quad \overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\underline{u}$$

例7 判断下列各对向量是否平行：

(a) $\overrightarrow{AB} = 2\underline{u}$，$\overrightarrow{CD} = 8\underline{u}$

(b) $\overrightarrow{PQ} = 3\underline{u}$，$\overrightarrow{RS} = -6\underline{u}$

(c) $\overrightarrow{OF} = 3\underline{v}$，$\overrightarrow{OG} = 3\underline{u}$

(d) $\overrightarrow{GH} = \underline{a} + 3\underline{b}$，$\overrightarrow{KL} = 3\underline{a} + 9\underline{b}$

解 (a) $\overrightarrow{CD} = 8\underline{u} = 4(2\underline{u}) = 4\overrightarrow{AB}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

(b) $\overrightarrow{RS} = -6\underline{u} = -2(3\underline{u}) = -2\overrightarrow{PQ}$

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$

(c) $\overrightarrow{OF} \neq k\overrightarrow{OG}$

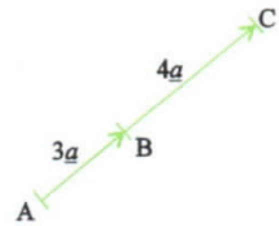
$\therefore$ $\overrightarrow{OF}$ 和 $\overrightarrow{OG}$ 不平行

(d) $\overrightarrow{KL} = 3\underline{a} + 9\underline{b} = 3(\underline{a} + 3\underline{b}) = 3\overrightarrow{GH}$

$\therefore \quad \overrightarrow{KL} \parallel \overrightarrow{GH}$

例8 已知 $\overrightarrow{AB}=3\underline{a}$，$\overrightarrow{BC}=4\underline{a}$， 证明点 A，B，C 三点共线

解
$$\overrightarrow{BC}=4\underline{a}$$
$$\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\underline{a}$$
$$\overrightarrow{AB}=3\underline{a}$$
$$=3\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$



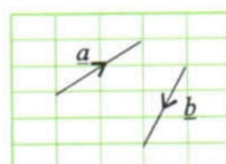
∴ $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$

且 B 为共同点

∴ A，B，C 三点共线

习题 10c

1. 根据所给的向量 $\underline{a}$，$\underline{b}$，作出下列向量：



(a) $\frac{1}{3}\underline{a}$ (b) $-3\underline{a}$

(c) $2\underline{a}+\underline{b}$ (d) $\underline{a}-2\underline{b}$

2. 计算：

(a) $3\times(-4\underline{a})$ (b) $-2\times(-5\underline{b})$ (c) $\underline{a}-6\underline{a}$

(d) $-\frac{1}{2}\underline{b}-\frac{1}{3}\underline{b}$ (e) $2(\underline{a}+\underline{b})+3(\underline{a}-\underline{b})$ (f) $\frac{1}{2}(\underline{u}-\underline{v})+\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v})$

3. 求向量 $\underline{x}$：

(a) $\underline{x}+\underline{a}=\underline{b}-\underline{x}$ (b) $2\underline{x}+\underline{u}=3\underline{v}+4\underline{x}$

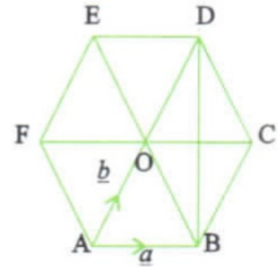
4. (a) 若 $3\underline{u}=2\underline{v}$，$\underline{u}$ 和 $\underline{v}$ 有何关系？

(b) 若 $4\underline{u}=3\underline{u}$，$\underline{u}$ 是什么？

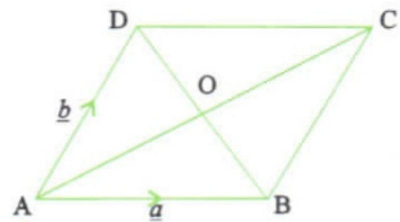
(c) 若 $h\underline{u}=k\underline{v}$，$\underline{u}$ 和 $\underline{v}$ 不平行，那么 h 和 k 有何关系？

5. 已知 $\underline{u}$ 与 $\underline{v}$，如右图所示，若 $(h-3)\underline{u}=(k+2)\underline{v}$，求 h 和 k 的值。

6. 在正六边形 ABCDEF 中，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AO}=\underline{b}$，求 $\overrightarrow{FC}$，$\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{BD}$。



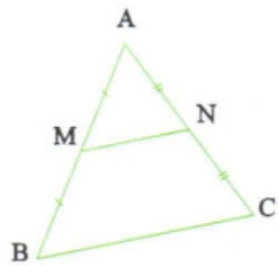
7. 平行四边形 ABCD 中，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AD}=\underline{b}$，AC，BD 相交于 O，求 $\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{DO}$。



8. 右图中，$\overrightarrow{AB}=\underline{u}$，$\overrightarrow{AC}=\underline{v}$，M，N 分别是 AB 与 AC 的中点。

(a) 求 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{MN}$；

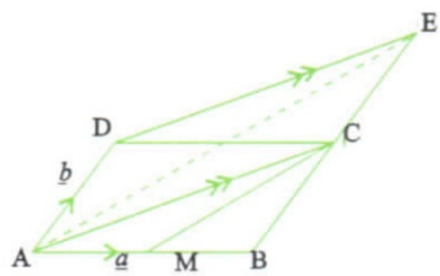
(b) $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 有什么关系？



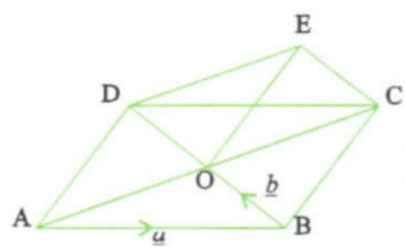
9. 在右图中，ABCD 为一平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AD}=\underline{b}$。

(a) 若 DE∥AC，求 $\overrightarrow{AE}$。

(b) M 为 $\overrightarrow{AB}$ 的中点，求 $\overrightarrow{CM}$，并证明 $\overrightarrow{CM}$∥$\overrightarrow{AE}$。



10. 右图中，ABCD 为一平行四边形，AC，BD 相交于 O，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{BO}=\underline{b}$。若 OCED 也是平行四边形，求 $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{BC}$。



11. 已知 $(3p+4)\underline{a}=(2p-3q)\underline{b}$，若 $\underline{a}$、$\underline{b}$ 为两个不平行的向量，且 $\underline{a}$、$\underline{b}$ 都不是零向量，求 p 与 q 的值。

10.4 位置向量

起点在原点的向量叫做**位置向量**（position vector）。

如图 10－13，向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 的起点都是原点 O，则 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 称为点 A、B、C 的位置向量。

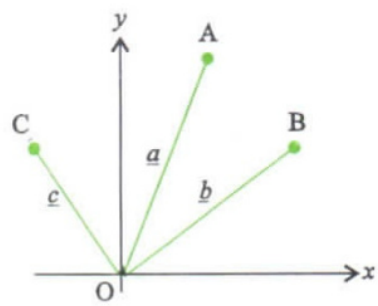


图 10－13

位置向量通常以终点的小写字母作为符号。例如

$$\overrightarrow{OA}=\underline{a}$$

$$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$$

任何向量都可用位置向量来表示。

如图 10－14，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\\&=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\\&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=\underline{b}-\underline{a}\end{aligned}$$

同理，$\overrightarrow{AC}=\underline{c}-\underline{a}$

$\overrightarrow{BC}=\underline{c}-\underline{b}$

等等。

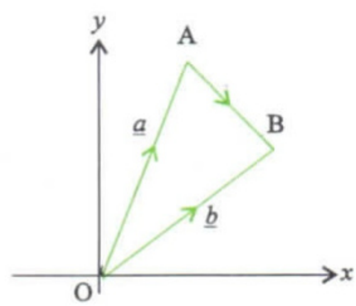


图 10－14

（一）坐标表示法

因为位置向量有相同的起点，所以不同的位置向量，它们的终点不同。反过来，如果两个位置向量的终点不同，那么它们是不同的向量。因此，位置向量与它的终点一一对应，所以终点的坐标可以用来表示位置向量。这种表示方法叫做向量的坐标表示法。

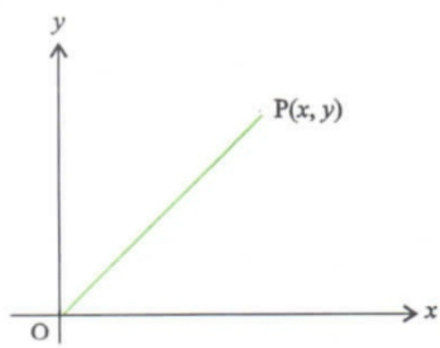


图 10－15

如图 10－15，设 $\overrightarrow{OP}=\underline{p}$，P 的坐标为 $(x,\ y)$，则可用 (x, y) 或 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 表示 $\underline{p}$。

如果向量 $\underline{a}$ 不是位置向量，我们把与它相等的位置向量的坐标表示叫做它的坐标表示。如图 10－16 中，向量 $\underline{a}$ 的坐标表示是 $(m,\ n)$ 或 $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$，写成

$$\underline{a} = (m,\ n) = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

m 是向量 $\underline{a}$ 在 x 轴的分量，n 是向量 $\underline{a}$ 在 y 轴的分量。

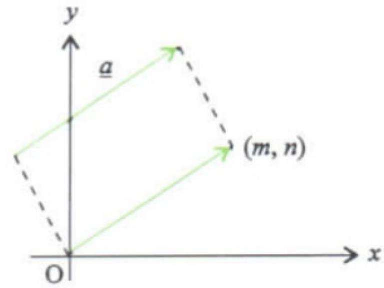


图 10－16

（二）$\underline{i}$，$\underline{j}$ 表示法（单位向量）

如果一个向量的大小为 1，则称这个向量为**单位向量**（unit vector），我们把 x 轴，y 轴上的单位向量分别记作 $\underline{i}$，$\underline{j}$。

即 $\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

在图 10－17 中，作 $PP_1 \perp x$ 轴，

则 $\overrightarrow{OP_1} = x\underline{i}$，$\overrightarrow{P_1P} = y\underline{i}$

$$\overrightarrow{OP} = \underline{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= x\underline{i} + y\underline{j}$$

这种用 $\underline{i}$，$\underline{j}$ 表示位置向量的方法叫做 $\underline{i}$，$\underline{j}$ 表示法。

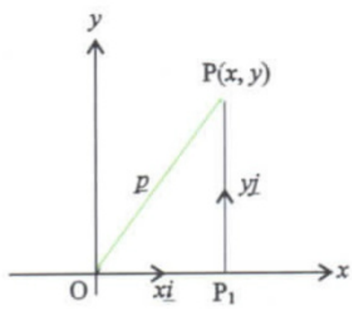


图 10－17

例9 设 $\underline{a}$ 为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\underline{b}$ 为 $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$，求 $\underline{a}+\underline{b}$，$\underline{a}-\underline{b}$，$k\underline{a}$ 的坐标表示。

解 由题设可知 $\underline{a} = x_1\underline{i} + y_1\underline{j}$

$\underline{b} = x_2\underline{i} + y_2\underline{j}$

所以 $\underline{a} + \underline{b} = (x_1\underline{i} + y_1\underline{j}) + (x_2\underline{i} + y_2\underline{j})$

$= (x_1 + x_2)\underline{i} + (y_1 + y_2)\underline{j}$

$\underline{a} - \underline{b} = (x_1\underline{i} + y_1\underline{j}) - (x_2\underline{i} + y_2\underline{j})$

$= x_1\underline{i} + y_1\underline{j} - x_2\underline{i} + y_2\underline{j}$

$= (x_1 - x_2)\underline{i} + (y_1 - y_2)\underline{j}$

$$\begin{aligned} k\underline{a} &= k(x_1\underline{i} + y_1\underline{j}) \\ &= k(x_1\underline{i}) + k(y_1\underline{j}) \\ &= (kx_1)\underline{i} + (ky_1)\underline{j} \end{aligned}$$

因此，$\underline{a}+\underline{b}$，$\underline{a}-\underline{b}$，$k\underline{a}$ 的坐标表示分别是 $\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$。

由例 9，可知下列的计算公式是成立的：

当 $\underline{a}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\underline{b}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 时，

$$\underline{a}+\underline{b}=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{a}-\underline{b}=\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix},$$

$$k\underline{a}=\begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$$

例 10 已知 $\underline{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\underline{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$，且 $k\underline{a}+l\underline{b}=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$，求 k 和 l 的值。

解

$$k\underline{a}+l\underline{b}=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2k-2l \\ 5k+3l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $2k-2l=10$ ……………(1)

$5k+3l=1$ ………………(2)

由(1)，$k-l=5$

$k=5+l$……(3)

(3)代入(2)，得 $5(5+l)+3l=1$

$8l=-24$

$l=-3$

$k=2$

例 11 已知 $\underset{\sim}{a} = m\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{b} = 3\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j}$，若 $\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$ 平行，求 m 的值。

解 $\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$ 平行，则 $\underset{\sim}{a} = k\underset{\sim}{b}$ （k 为任何实数）

即 $$m\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j} = k(3\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j})$$

$$m\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j} = 3k\underset{\sim}{i} - 2k\underset{\sim}{j}$$

分别比较 $\underset{\sim}{i}$ 与 $\underset{\sim}{j}$ 的系数，

得 $$\begin{cases} m = 3k \cdots\cdots\cdots (1) \\ 4 = 2k \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

由(2)， $k = 2$

代入(1)，得 $m = 3(2)$

$= 6$

例 12 已知 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$，点 C 的坐标为(1，4)。求 A 点和 B 点的坐标；然后以 $\underset{\sim}{i}$，$\underset{\sim}{j}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$。

解

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

∴ B 的标为(－1，－1)。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∴ A 的标为(－4,1)。

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

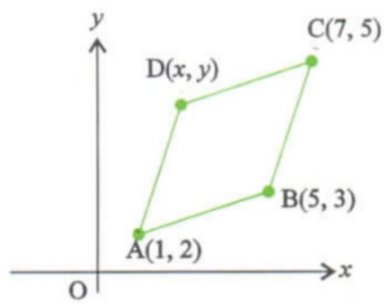
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 5\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$$

例 13 在平行四边形 ABCD 中，A 点的坐标是(1，2)。B 是(5，3)，C 是(7，5)，以向量的方法求 D 点的坐标。

解 ABCD 是平行四边形，



$\therefore$ AB = DC 且 AB∥DC

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore$ $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} - \underline{d}$$

$$\underline{d} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$\therefore$ D 点的坐标为(3,4)。

习题 10d

1. 点 P 是(−4，−5)，点 Q 是(4，5)，求向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标表示。
2. A(3，0)，B(0，5)，C(6，6)，求向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$ 的坐标表示。
3. 点 A 是(1，3)，点 B 是(5，1)，点 C 是(−1，−4)，求 P、Q、R 的座标，若

   (a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$

   (b) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{AC}$

   (c) $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{BC}$
4. 设 P 的坐标为(3,5)，且 $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$，求 Q 的坐标。
5. (a)零向量的坐标表示是什么？

   (b)如果向量 $\underline{a}$ 的坐标表示是(x,y)，那么它的逆向量 $-\underline{a}$ 的坐标表示是什么？
6. 设 A(2，2)，B(−3，0)，C(−4，3)，D(−2，1)为坐标平面上四点，O 为原点。

   (a) 若 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$，求 P 的坐标；

   (b) 若 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$，求 Q 的坐标。

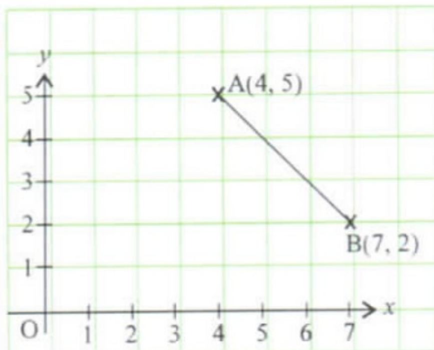
7. 设 A(0, 2), B(−7, 3)和 C(1, 3)为坐标平面上三点，已知 ABCD 为一平行四边形，求 D 的坐标。

8. PQRS 是一个平行四边形，P 是(−1, 4), Q(1, 7), R(x, y), S(−3, 2)，求 x 和 y 之值。

9. 若平面上四点 A、B、C 和 D 的坐标分别为(2, 6), (5, 1), (−2, 3)和(−7, −2)，且 $\underline{a} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BD}$，求 $\frac{1}{3}\underline{a}$ 的坐标表示。

10. A、B、C 三点的坐标为(1, 2), (7, 1)和(3, 0)，若 $\overrightarrow{OC} = h\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$，求 h 和 k 的值。

11. 如右图，点 A 是(4, 5)，点 B 是(7, 2)，$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$，求点 M 的坐标。



12. 已知 $\underline{a} = 2\underline{i} + 5\underline{j}$，$\underline{b} = -3\underline{i} + 2\underline{j}$，

(a) 以 p，q，$\underline{i}$，$\underline{j}$ 表示 $p\underline{a} + q\underline{b}$；

(b)若 $p\underline{a} + q\underline{b} = 12\underline{i} + 11\underline{j}$，求 p 和 q 的值。

13. 若 A，B，C 的位置向量分别为 $-\underline{i} + \underline{j}$，$5\underline{i} + 7\underline{j}$，$4\underline{i} + 4\underline{j}$，证明 AB∥OC。

14. 已知 $\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$，$\overrightarrow{OB} = 4\underline{i} + k\underline{j}$，若 O，A，B 三点共线，求 k 的值。

15. 已知 $\overrightarrow{AB} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$，$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\underline{i} + \underline{j}$，$\overrightarrow{CD} = \frac{4}{3}p\ (2\underline{i} - 3\underline{j})$，

(a)若 ABCD 是一个平行四边形，求 p 的值。

(b)以 $\underline{i}$，$\underline{j}$ 表示 $\overrightarrow{DB}$。

16. 若向量 $\underline{a} = 2\underline{i} + p\underline{j}$ 与 $\underline{b} = (7 + p)\underline{i} + 4\underline{j}$ 平行，求 p 的值。

17. 已知 $\underline{a} = -3\underline{i} + 2\underline{j}$，$\underline{b} = 3\underline{i} + 5\underline{j}$，$\underline{c} = m\underline{a} + (1 - m)\underline{b}$。若 $\underline{c} \parallel \underline{i}$，求 m 的值。

10.5 向量的大小

我们把向量 $\underset{\sim}{a}$ 的大小，即表示向量 $\underset{\sim}{a}$ 的有向线段的长度，记作 $|\underset{\sim}{a}|$。

如果表示向量 $\underset{\sim}{a}$ 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的起点、终点的坐标表示分别是 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，那么由距离公式，得

$$|\underset{\sim}{a}| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

如果向量 $\underset{\sim}{a}$ 是位置向量，终点的坐标是 (x, y)，如图 10－8，

那么 $$|\underset{\sim}{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

我们以 $\hat{\underset{\sim}{a}}$ 表示与向量 $\underset{\sim}{a}$ 具有相同方向的单位向量，即

$$\hat{\underset{\sim}{a}} = \frac{1}{|\underset{\sim}{a}|}\underset{\sim}{a}$$

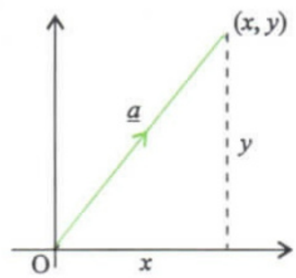


图 10－18

例 14 求下列向量的大小：

(a) $\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$　　(b) $\underset{\sim}{q} = 3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$

解　(a) $|\underset{\sim}{p}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$
$= \sqrt{29}$

(b) $|\underset{\sim}{q}| = |3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}|$
$= \sqrt{3^2 + 4^2}$
$= 5$

例 15 已知 $\underset{\sim}{r} = 9\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j}$，求

(a) 向量 $\underset{\sim}{r}$ 的大小；

(b) 与向量 $\underset{\sim}{r}$ 具有相同方向的单位向量 $\hat{\underset{\sim}{r}}$。

解　(a) $|\underset{\sim}{r}| = |9\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j}|$
$= \sqrt{9^2 + (-12)^2}$
$= 15$

(b) $\hat{\underset{\sim}{r}} = \frac{1}{|\underset{\sim}{r}|}\underset{\sim}{r}$
$= \frac{1}{15}(9\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j})$
$= \frac{3}{5}\underset{\sim}{i} - \frac{4}{5}\underset{\sim}{j}$

例 16 已知 $\underline{a} = 3\underline{i} - \underline{j}$，$\underline{b} = -2\underline{i} + 5\underline{j}$，求与 $2\underline{a} + \underline{b}$ 具有相同方向的单位向量。

解

$$\begin{aligned}2\underline{a} + \underline{b} &= 2(3\underline{i} - \underline{j}) + (-2\underline{i} - 5\underline{j}) \\ &= 6\underline{i} - 2\underline{j} - 2\underline{i} + 5\underline{j} \\ &= 4\underline{i} + 3\underline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|2\underline{a} + \underline{b}| &= |4\underline{i} + 3\underline{j}| \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{单位向量} &= \frac{1}{5}(2\underline{a} + \underline{b}) \\ &= \frac{1}{5}(4\underline{i} + 3\underline{j}) \\ &= \frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{j}\end{aligned}$$

例 17 已知向量 $\underline{a}$ 和向量 $\underline{b}$ 形成 60° 角，且 $|\underline{a}| = 2$，$|\underline{b}| = 1$，求 $|\underline{a} + \underline{b}|$。

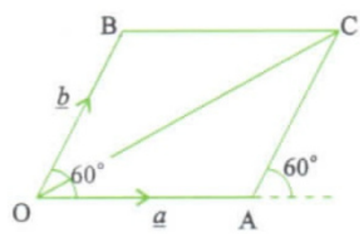
解 由右图，得 $\underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{OC}$，$|\underline{a} + \underline{b}| = OC$

根据余弦定律，

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2 \cdot OA \cdot AC \cos 120^\circ$$

$$\begin{aligned}OC &= \sqrt{|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2|\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos 120^\circ} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2(2)(1)\cos 120^\circ} \\ &= \sqrt{7}\end{aligned}$$

$\therefore\ |\underline{a} + \underline{b}| = \sqrt{7}$



习题 10e

1. 求下列向量的大小：

(a) $\underline{u} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$　　(b) $\underline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\underline{v} = -3\underline{i} + 4\underline{j}$　　(d) $\underline{r} = 7\underline{i} - 5\underline{j}$

2. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点与终点的坐标，求 $|\overrightarrow{AB}|$：

(a) $A(-3,5)$，$B(1,2)$　　(b) $A(4,-6)$，$B(-1,6)$

(c) $A(\frac{1}{2},0)$，$B(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$　　(d) $A(0,0)$，$B(-2,3)$

3. 点 P 与 Q 的坐标分别为 $(2,1)$，$(3,-3)$，

(a) 求 $\overrightarrow{OP}+5\overrightarrow{OQ}$ 的大小。

(b) 若 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OR}$，求 R 的坐标。

4. 已知 $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$，且 B 点为 $(-2,7)$。求

(a) 点 A 及 C 的坐标；

(b) $|\overrightarrow{AC}|$。

5. 点 A 与 B 的位置向量分别为 $\underset{\sim}{a}=-\underset{\sim}{i}+3\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{b}=-2\underset{\sim}{j}$，且 $\overrightarrow{BC}=4\underset{\sim}{i}-3\underset{\sim}{j}$，求

(a) C 的位置向量；

(b) $|\overrightarrow{AC}|$

6. 若 $\underset{\sim}{b}=-\underset{\sim}{i}+3\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{c}=-2\underset{\sim}{j}$，且 $2\underset{\sim}{a}+3\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c}=0$，

(a) 从 $\underset{\sim}{i}$，$\underset{\sim}{j}$ 表示向量 $\underset{\sim}{c}$；

(b) 求 $|\underset{\sim}{c}|$；

(c) 求向量 $\underset{\sim}{c}$ 与 x 轴所成的夹角。

7. 已知向量 $\underset{\sim}{u}=6\underset{\sim}{i}-3\underset{\sim}{j}$，求与 $\underset{\sim}{u}$ 相同方向的单位向量 $\hat{\underset{\sim}{u}}$。

8. 若 $\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{i}+5\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{c}=-\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$，求

(a) $\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c}$；

(b) $|\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c}|$；

(c) 与 $\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c}$ 同方向的单位向量。

9. 若 $\underset{\sim}{a}=3\underset{\sim}{i}-4\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{i}-2\underset{\sim}{j}$，求

(a) 与 $\underset{\sim}{a}$ 同方向的单位量 $\hat{\underset{\sim}{a}}$。

(b) 与 $\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b}$ 同方向的单位向量。

10. 若 $\underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{b}=-3\underset{\sim}{i}+3\underset{\sim}{j}$，$\underset{\sim}{c}=3\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{j}$，求

(a) $3\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b}+2\underset{\sim}{c}$，

(b) $|3\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b}+2\underset{\sim}{c}|$，

(c) 与 $3\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b}+2\underset{\sim}{c}$ 同方向的单位向量。

11. 已知 $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 1$ 且 $\underline{u}$ 与 $\underline{v}$ 的夹角为 60°，求

(a) $|\underline{u} + \underline{v}|$　　　　(b) $|\underline{u} - \underline{v}|$

12. 如果 $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$，$\overrightarrow{BC} = \underline{b}$，$AB \perp BC$，求 $|\underline{a} + \underline{b}|$。

13. 如果向量 $\underline{a}$ 的坐标表示是 (x_1, y_1)，向量 $\underline{b}$ 的坐标表示是 (x_2, y_2)，求 $|\underline{a} + \underline{b}|$，$|\underline{a} - \underline{b}|$，$|k\underline{a}|$。并证明 $|k\underline{a}| = |k|\,|\underline{a}|$。

*14. 求证 $|\underline{a} + \underline{b}|^2 + |\underline{a} - \underline{b}|^2 = 2(|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2)$。　　（注 $|\underline{a}|^2 = |\underline{a}|\,|\underline{a}|$）

10.6 向量几何

● 中点定律

如图 10－19，M 是 AB 的中点，$\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{m}$ 分别是 A，B，M 的位置向量，那么可以用 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\underline{m}$。

已知 $\underline{a}$，$\underline{b}$，求 $\underline{m}$ 有不同的方法。

方法 1：
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$$
$$= \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

即
$$\underline{m} = \underline{b} + \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$

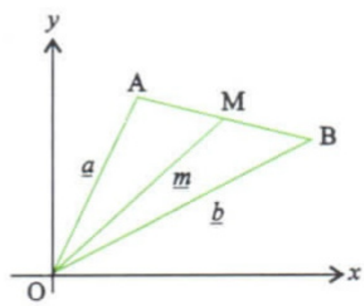


图 10－19

方法 2：由
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$
得
$$\underline{m} - \underline{a} = \underline{b} - \underline{m}$$
$$2\underline{m} = \underline{a} + \underline{b}$$
$$\underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$

也就是说，如果 M 是 AB 的中点，$\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{m}$ 分别是 A，B，M 的位置向量，那么

$$\underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$

我们把上述结果称为中点定律。

比例定律

如图 10－20，P 是直线 AB 上一点，设 $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda$，则可用 $\underset{\sim}{a}$，$\underset{\sim}{b}$，λ 表示 $\underset{\sim}{p}$。

已知 $\underset{\sim}{a}$，$\underset{\sim}{b}$，λ，求 $\underset{\sim}{p}$ 有两种方法。

方法 1：

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$$
$$=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{BA}$$

即

$$\underset{\sim}{p}=\underset{\sim}{b}+\frac{1}{1+\lambda}(\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b})$$
$$=\frac{\underset{\sim}{a}+\lambda\underset{\sim}{b}}{1+\lambda}$$

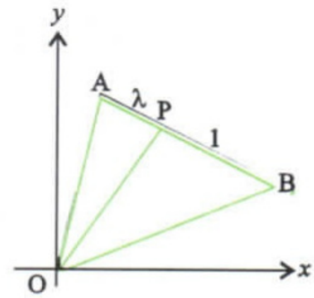


图 10－20

方法 2：由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，

得

$$\underset{\sim}{p}-\underset{\sim}{a}=\lambda(\underset{\sim}{b}-\underset{\sim}{p})$$
$$(1+\lambda)\underset{\sim}{p}=\underset{\sim}{a}+\lambda\underset{\sim}{b}$$
$$\underset{\sim}{p}=\frac{\underset{\sim}{a}+\lambda\underset{\sim}{b}}{1+\lambda}$$

也就是说，如果 P 是 AB 所在直线上一点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}\,(\lambda\neq-1)$，则

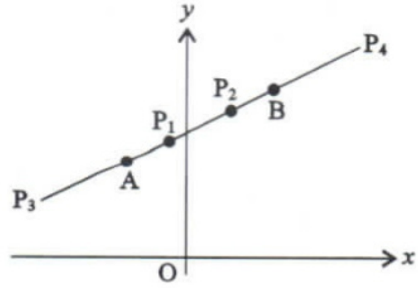
$$\underset{\sim}{p}=\frac{\underset{\sim}{a}+\lambda\underset{\sim}{b}}{1+\lambda}$$

我们把上述结果称为比例定律。

例 18 下图中，

(a) P_1，P_2 是 AB 的两个三等分点，用 $\underset{\sim}{a}$，$\underset{\sim}{b}$ 表示 P_1，P_2；

(b) A，B 是 P_3，P_4 的两个三等分点，用 $\underset{\sim}{a}$，$\underset{\sim}{b}$ 表示 P_3，P_4。



解 (a) 由 $\dfrac{\overrightarrow{AP_1}}{\overrightarrow{P_1B}}=\dfrac{1}{2}$，知 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，

由比例定律，得

$$P_1=\frac{\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\underline{a}+\frac{1}{3}\underline{b}$$

由 $\dfrac{\overrightarrow{AP_2}}{\overrightarrow{P_2B}}=2$，知 $\lambda=2$，

$$P_2=\frac{\underline{a}+2\underline{b}}{1+2}$$

$$=\frac{1}{3}\underline{a}+\frac{2}{3}\underline{b}$$

(b) 由 $\dfrac{\overrightarrow{AP_3}}{\overrightarrow{P_3B}}=-\dfrac{1}{2}$，知 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，

$$P_3=\frac{\underline{a}+(-\frac{1}{2})\underline{b}}{1+(-\frac{1}{2})}$$

$$=2\underline{a}-\underline{b}$$

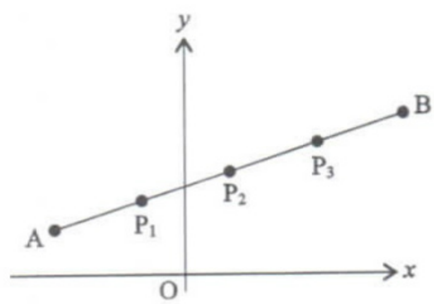
由 $\dfrac{\overrightarrow{AP_4}}{\overrightarrow{P_4B}}=-2$，知 $\lambda=-2$，

$$P_4=\frac{\underline{a}+(-2)\underline{b}}{1+(-2)}$$

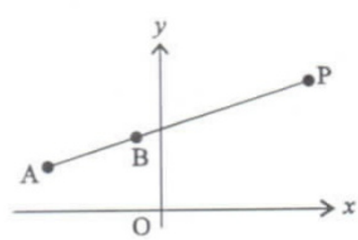
$$=-\underline{a}+2\underline{b}$$

习题 10f

1. M 是 AB 的中点，用 $\underline{a}$，$\underline{m}$ 表示 $\underline{b}$。
2. A，B 的坐标表示分别是 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，求 AB 中点 M 的坐标表示。
3. A，B，C 的坐标表示分别是 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，D，E 分别是 AB，AC 的中点，求 $\overrightarrow{DE}$ 的坐标表示。
4. P_1，P_2，P_3 是 AB 的三个四等分点，用 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{P_1}$，$\overrightarrow{P_2}$，$\overrightarrow{P_3}$。



5. (a) B 是 AP 的中点，用 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\underline{p}$。
   (b) B 是 AP 的三等分点，用 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\underline{p}$。



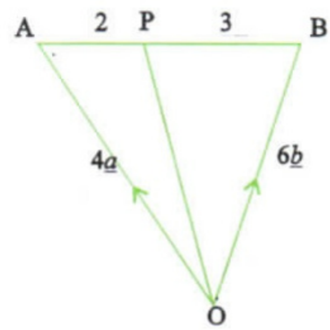
6. 将 BA 延长至 C，使 AC = 3AB，用 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\underline{c}$。

7. P 是 AB 所在直线上一点，$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{n}\overrightarrow{PB}$ ($m \neq -n$)，求证

$$\underline{p} = \frac{1}{m+n}(n\underline{a} + m\underline{b})$$

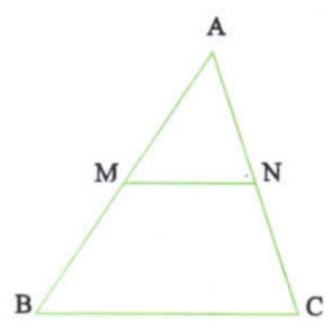
8. A，B 的坐标表示分别是 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，P 是 AB 所在直线上一点，$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$ ($a \neq -1$)，求 $\underline{p}$ 的坐标表示。

9. 右图的三角形 OAB 中、$\overrightarrow{OA} = 4\underline{a}$，$\overrightarrow{OB} = 6\underline{b}$，且 P 点将 AB 分成 2 ∶ 3。以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$。



向量在平面几何的应用

例 19 如右图，M，N 分别是 AB，AC 的中点，求证 $MN = \frac{1}{2}BC$ 且 MN // BC。



证一 由中点定律，得 $\underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$$\underline{n} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$$

而 $\overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$

$$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

∴ $MN = \frac{1}{2}BC$ 且 MN // BC。

证二 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$$

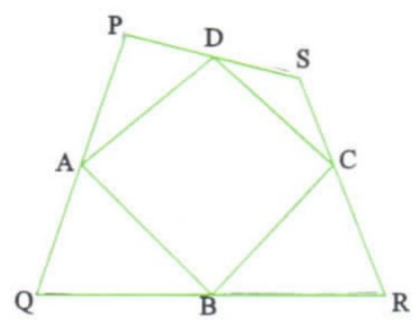
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$\therefore$ $MN = \frac{1}{2}BC$ 且 $MN /\!/ BC$。

例 20 如右图，PQRS 是任意四边形，A、B、C、D 分别是 PQ、QR、RS、SP 的中点，求证 ABCD 是一个平行四边形。



证 $\underset{\sim}{a} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{q})$

$$\underset{\sim}{b} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{r})$$

$$\underset{\sim}{c} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{s})$$

$$\underset{\sim}{d} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{s} + \underset{\sim}{p})$$

$$\overrightarrow{AD} = \underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{a}$$

$$= \frac{1}{2}(\underset{\sim}{s} + \underset{\sim}{p}) - \frac{1}{2}(\underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{q})$$

$$= \frac{1}{2}(\underset{\sim}{s} - \underset{\sim}{q})$$

$$\overrightarrow{BC} = \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{b}$$

$$= \frac{1}{2}(\underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{s}) - \frac{1}{2}(\underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{r})$$

$$= \frac{1}{2}(\underset{\sim}{s} - \underset{\sim}{q})$$

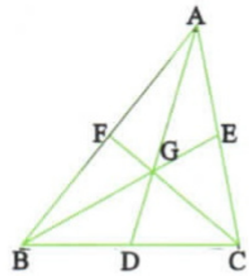
$\therefore$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore$ $AD = BC$ 且 $AD /\!/ BC$

$\therefore$ ABCD 是一个平行四边形

例 21 如右图，D，E，F 分别是 BC，CA，AB 的中点，求证 AD，BE，CF 相交于一点 G，且 $\frac{AG}{GD}=\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=2$。

证 由中点定律，得



$$\underline{d}=\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$$

$$\underline{e}=\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{a})$$

$$\underline{f}=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$$

在 AD 上取一点 G，使 $\frac{AG}{GD}=2$。

由比例定律得

$$\underline{g}=\frac{1}{3}\underline{a}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$$

$$=\frac{1}{3}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$$

同理，在 BE 上取一点 G_1，使 $\frac{BG_1}{G_1E}=2$，则

$$\underline{g_1}=\frac{1}{3}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$$

在 CF 上取一点 G_2，使 $\frac{CG_2}{G_2F}=2$，则

$$\underline{g_2}=\frac{1}{3}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$$

由 $\underline{g}$，$\underline{g_1}$，$\underline{g_2}$ 相同，得 G，G_1，G_2 是同一个点 G。

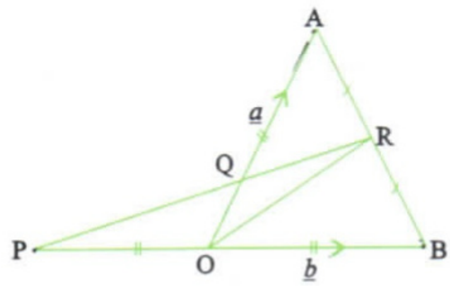
G 在 AD，BE，CF 上，故 AD，BE，CF 相交于 G。

由 G 的作法可知

$$\frac{AG}{GD}=\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=2$$

例 22 如右图，POB 为一直线 Q、R 是 OA、BA 上的点，且 OA = OB = OP，AR = RB，$OQ=\frac{1}{3}OA$。利用位置向量的方法，证明 $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QR}$；据此，证明 P、Q、R 在同一直线上。

解 以 O 为原点，则 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，



R 是 AB 的中点　　（$\because AR=RB$）

$\therefore\quad \overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$

同时，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{3}\underline{a}$

$\therefore\quad 2\overrightarrow{QR}=(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ})$

$=2\left[\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})-\frac{1}{3}\underline{a}\right]$

$=2\left(\frac{1}{6}\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}\right)$

$=\frac{1}{3}\underline{a}+\underline{b}$

$\because$ OB = OP，且 POB 是一条直线。

$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{BO}$

$\therefore\quad =-\underline{b}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$=\frac{1}{3}\underline{a}-(-\underline{b})$

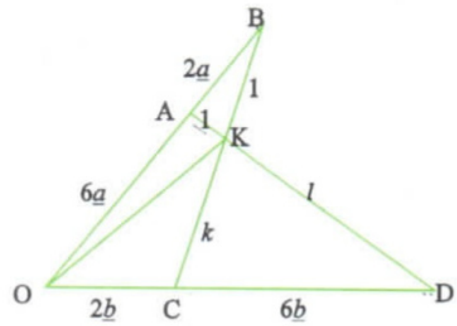
$=\frac{1}{3}\underline{a}+\underline{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QR}$

因此 PQ = 2QR 且　PQ // QR，

$\therefore$　P、Q、R 在同一直线上。

例 23 右图中，A，B，C，D 各点的位置向量分别为 $6\underline{a}$，$8\underline{a}$，$2\underline{b}$ 和 $8\underline{b}$；K 点分线段 AD 成 1∶l，分线段 BC 成 1∶k。以两种式子表示 $\overrightarrow{OK}$，据此求 k 及 l 的值。



解

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}$$
$$=6\underline{a}+\frac{1}{1+l}\overrightarrow{AD}$$
$$=6\underline{a}+\frac{1}{1+l}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$$
$$=6\underline{a}+\frac{1}{1+l}(8\underline{b}-6\underline{a})$$
$$=\frac{6l}{1+l}\underline{a}+\frac{8}{1+l}\underline{b}$$

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CK}$$
$$=\overrightarrow{OC}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{CB}$$
$$=2\underline{b}+\frac{k}{1+k}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$$
$$=2\underline{b}+\frac{k}{1+k}(3\underline{a}-2\underline{b})$$
$$=\frac{8k}{1+k}\underline{a}+\frac{2}{1+k}\underline{b}$$

$$\therefore\quad \frac{6l}{1+l}\underline{a}+\frac{8}{1+l}\underline{b}=\frac{8k}{1+k}\underline{a}+\frac{2}{1+k}\underline{b}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\dfrac{6l}{1+l}=\dfrac{8k}{1+k}\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex]\dfrac{8}{1+l}=\dfrac{2}{1+k}\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

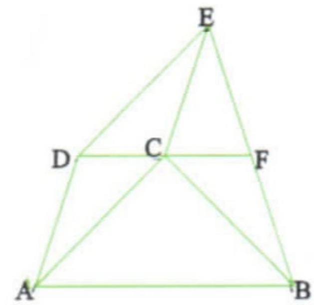
由(2)， $8+8k=2+2l$

$$l=4k+3\cdots\cdots(3)$$

(3)代入(1)，得 $\dfrac{6(k+3)}{1+4k+3}=\dfrac{8k}{1+k}$

$$(12k+9)(1+k)=16k(1+k)$$
$$(1+k)(4k-9)=0$$
$$k\neq-1,\quad k=\frac{9}{4}$$
$$l=12$$

例 24 如右图，四边形 ABCD 是梯形，其中 DC∥AB。以 AC，AD 为邻边作平行四边形 ACED，连结 B、E，DC 延长线与 BE 相交于 F。求证 BF = EF。



证 设 F 是 BE 中点，我们证 D，C，F 三点共线。

由中点定律，得 $\underline{f} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

$$\overrightarrow{CF} = \underline{f} - \underline{c}$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e}) - \underline{c}$$

由四边形 ACED 是平行四边形，得

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$$

即 $\underline{e} - \underline{c} = \underline{d} - \underline{a}$

$$\underline{e} = \underline{c} + \underline{d} - \underline{a}$$

因此 $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c} + \underline{d} - \underline{a}) - \underline{c}$

$$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a} + \underline{d} - \underline{c})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$$

因为 AB∥CD，所以 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(k + 1)\overrightarrow{CD}$$

由此可知，D，C，F 三点共线。

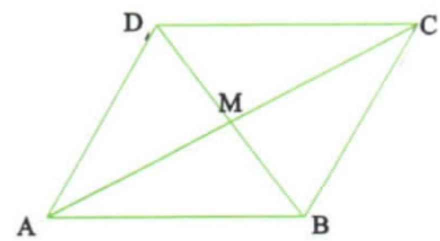
也就是说，延长 DC 与 BE 的交点必是 BE 的中点，

即 BF = EF

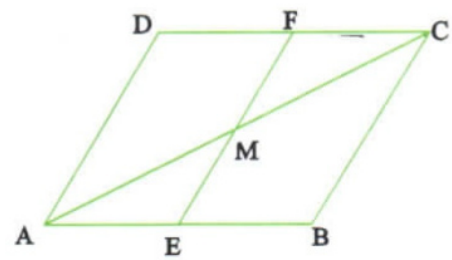
习题 10g

1. 四边形 ABCD 是平行四边形，求证 $\underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{d}$。

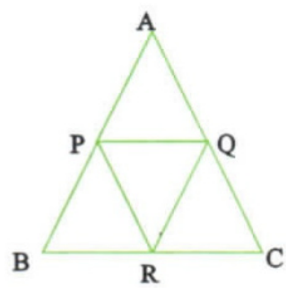
2. 平行四边形 ABCD 中，AC，BD 相交于 M；求证 MA = MC，MB = MD （提示：可证 AC，BD 的中点是同一个点）。



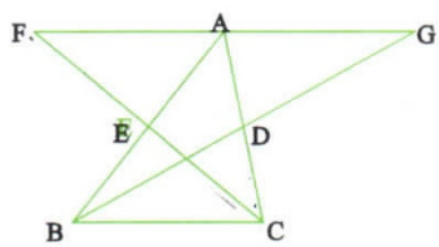
3. 平行四边形 ABCD 中，E，F 分别是 AB，CD 的中点，EF 交 AC 于 M，求证 M 是 AC 的中点（提示：可证 E、F、AC 的中点三点共线）



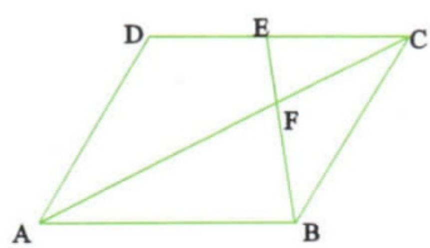
4. 在△ABC 中，P、Q、R 分别是 AB、AC、BC 的中点，证明△ABC ~ △PQR。



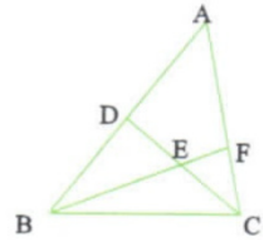
5. 已知 BD，CE 是△ABC 的中线，DG = BD，EF = CE，求证
   (a) AF = AG
   (b) F，A，G 共线
   (c) FG∥BC



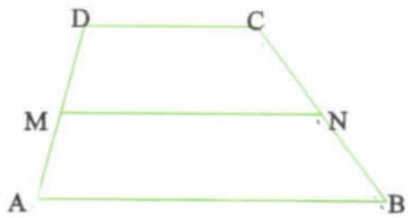
6. 平行四边形 ABCD 中，E 是 CD 中点，BE 交 AC 于 F，求证 AF = 2FC （提示：设 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FC}$，证 B，E，F 三点共线）。



7. CD 是△ABC 的中线，E 是 CD 中点，BE 延长线交 AC 于 F，求证 AF = 2FC。



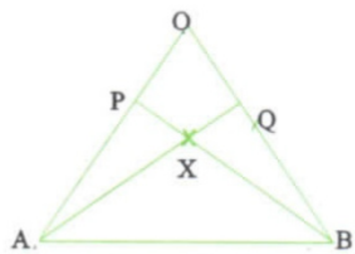
8. 四边形 ABCD 是梯形，M，N 分别是 AD，BC 的中点，求证 $MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$，MN∥AB。



9. 右图中，$\overrightarrow{OA}=15\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=15\underline{b}$，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$。

(a) 以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{AB}$；

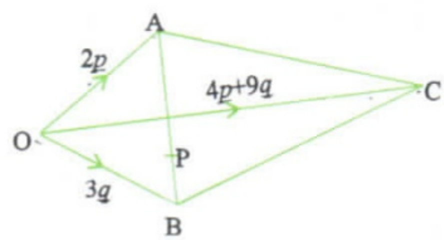
(b) 已知 $\overrightarrow{PX}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$，以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{AX}$，$\overrightarrow{XQ}$，据此，证明 Q、X、A 三点共线。



10. 右图中，$\overrightarrow{OA}=2\underline{p}$，$\overrightarrow{OB}=3\underline{q}$ 及 $\overrightarrow{OC}=4\underline{p}+9\underline{q}$，

(a) 已知 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，求 $\overrightarrow{OP}$；

(b) 已知 $\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OP}$，求 OQ，并证明 Q 在直线 BC 上；写出 $\frac{BQ}{QC}$ 的比。

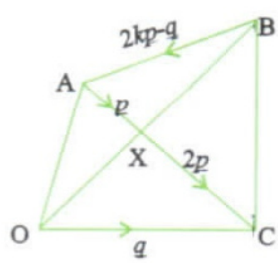


11. 右图中，$\overrightarrow{OC}=\underline{q}$，$\overrightarrow{AX}=\underline{p}$，$\overrightarrow{XC}=2\underline{p}$，$\overrightarrow{BA}=2k\underline{p}-\underline{q}k$ 为常数。

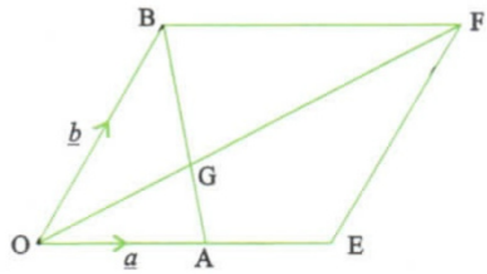
(a) 以 $\underline{p}$，$\underline{q}$ 表示 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OX}$

(b) 以 $\underline{p}$，$\underline{q}$，k 表示 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BX}$

(c) 若 O，X，B 三点共线，求 k 的值及 $\frac{OX}{XB}$ 的比。



12. 右图中，OEFB 为一平行四边形，A 为 OE 的中点，BA 与对角线 OF 相交于 G。若 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，

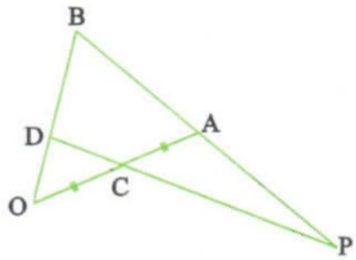


(a) 以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{BA}$ 及 $\overrightarrow{OF}$；

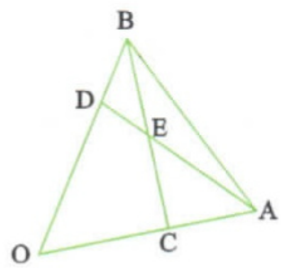
(b) 已知 $\overrightarrow{QG}=p\,\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{BG}=q\overrightarrow{BA}$，$p$，$q$ 为实数，以两个式子表示 $\overrightarrow{OG}$。

(c) 据此，求 p，q 的值及 OG : GF。

13. 右图△OAB 中，C 为 OA 的中点，D 在 $\overrightarrow{OB}$ 上，且 $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$。若 BA 的延长线与 DC 的延长线相交于 P，且 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，证明 $\overrightarrow{OP}=2\underline{a}-\underline{b}$。

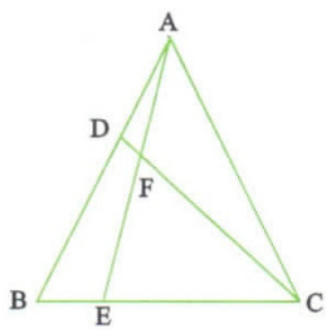


14. 右图中，C 分 OA 成 2 : 1，D 分 OB 成 3 : 1。若 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，求 $\overrightarrow{BE}$ 及 $\overrightarrow{AE}$ （以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示）。



15. 在△ABC 中，D，E 分别在 AB，BC 上，且 $AD=\frac{1}{3}AB$，$BE=\frac{1}{3}BC$。AE，CD 相交于 F，求证 $FD=\frac{1}{7}CD$，$FE=\frac{4}{7}AE$。

（提示：可证分 CD 为 CF′ = 6 F′D 的点 F′是同一个点）

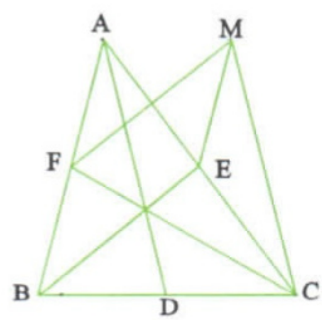


16. AD，BE，CF 是△ABC 的三条中线，四边形 BEMF 是平行四边形，求证

(a) CM // AD

(b) E 是△CFM 的重心

（提示：证 $\underline{e}=\frac{1}{3}(\underline{c}+\underline{f}+\underline{m})$）



10.7 向量的内积

向量内积的定义

如果 $\underset{\sim}{a}$、$\underset{\sim}{b}$ 是两个非零向量，θ 是向量 $\underset{\sim}{a}$、$\underset{\sim}{b}$ 的夹角（图 10－21），我们定义

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}=|\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta$$

如果其中 $\underset{\sim}{a}$ 或 $\underset{\sim}{b}$ 为零向量，我们规定

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}=0$$

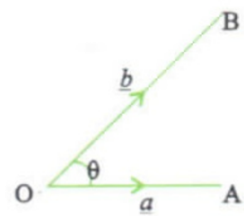


图 10－21

$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}$ 就叫做向量 $\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$ 的**内积**(scalar product)。可以看出，$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}$ 是一个数值。

向量的内积有如下性质。

（1）满足交换律　$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{a}$

证明：
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}&=|\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta\\&=|\underset{\sim}{b}||\underset{\sim}{a}|\cos\theta\\&=\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{a}\end{aligned}$$

（2）满足结合律　$(k\underset{\sim}{a})\cdot\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{a}\cdot(k\underset{\sim}{b})=k(\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b})$

证明：　当 $k>0$ 时，对 $k\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$，$\underset{\sim}{a}$ 与 $k\underset{\sim}{b}$，$\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$ 来说，它们的夹角相同。

$$\begin{aligned}(k\underset{\sim}{a})\cdot\underset{\sim}{b}&=|k\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta\\&=k|\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta\\\underset{\sim}{a}\cdot(k\underset{\sim}{b})&=|\underset{\sim}{a}||k\underset{\sim}{b}|\cos\theta\\&=k|\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta\\k(\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b})&=k|\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta\end{aligned}$$

当 $k<0$ 时，$k\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$，$\underset{\sim}{a}$ 与 $k\underset{\sim}{b}$ 的夹角是 $180°-\theta$。

$$\begin{aligned}(k\underset{\sim}{a})\cdot\underset{\sim}{b}&=|k\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos(180°-\theta)\\&=-|k||\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta\\\underset{\sim}{a}\cdot(k\underset{\sim}{b})&=|\underset{\sim}{a}||k\underset{\sim}{b}|\cos(180°-\theta)\\&=-|k||\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta\\k(\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b})&=-|k||\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta\end{aligned}$$

(3) 满足分配律 $\underline{a}\cdot(\underline{b}+\underline{c})=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}$

证明： 在图 10 – 22 中，设 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，$\overrightarrow{BC}=\underline{c}$，

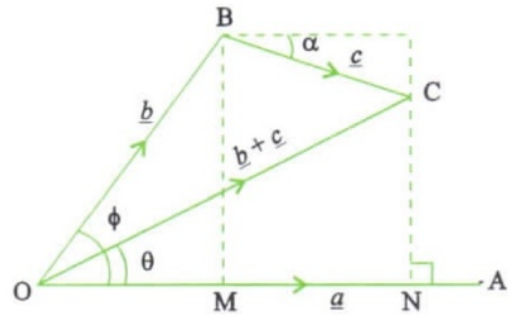


图 10 – 22

则 $\underline{a}\cdot(\underline{b}+\underline{c})$

$$
\begin{aligned}
&=|\underline{a}|\;|\underline{b}+\underline{c}|\cos\theta\\
&=|\overrightarrow{OA}|\;|\overrightarrow{OC}|\cos\theta\\
&=|\overrightarrow{OA}|\;|\overrightarrow{ON}|\\
&=|\overrightarrow{OA}|\;(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN})\\
&=|\overrightarrow{OA}|\;(|\overrightarrow{OB}|\cos\phi+|\overrightarrow{BC}|\cos\alpha)\\
&=|\overrightarrow{OA}|\;|\overrightarrow{OB}|\cos\phi+|\overrightarrow{OA}|\;|\overrightarrow{BC}|\cos\alpha\\
&=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}
\end{aligned}
$$

例 25 求下列二向量的内积：

(a) $|\underline{a}|=6$，$|\underline{b}|=5$，向量间的夹角 $=60°$

(b) $|\underline{u}|=8$，$|\underline{v}|=15$，向量间的夹角 $=135°$

解 (a) $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\;|\underline{b}|\cos\theta$

$$
\begin{aligned}
&=6\times5\times\cos 60°\\
&=15
\end{aligned}
$$

(b) $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\;|\underline{v}|\cos\theta$

$$
\begin{aligned}
&=8\times15\times\cos 135°\\
&=-60\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

● 内积的特例

（一）两个向量互相垂直

如果两个非零向量 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 互相垂直，则 $\theta=90°$，那么

$$
\begin{aligned}
\underline{a}\cdot\underline{b}&=|\underline{a}|\;|\underline{b}|\cos 90°\\
&=0
\end{aligned}
$$

反过来，如果 $\underline{a}\cdot\underline{b}=0$，$|\underline{a}|\neq0$，$|\underline{b}|\neq0$，那么 $\theta=90°$，$\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 互相垂直。即

$$\text{当 } \underline{a}\neq\underline{0},\ \underline{b}\neq\underline{0} \text{ 时，} \underline{a}\perp\underline{b} \iff \underline{a}\cdot\underline{b}=0$$

我们知道，$\underline{i}$，$\underline{j}$ 分别为 x 轴，y 轴上的单位向量，$\underline{i}\perp\underline{j}$，所以

$$\underline{i}\cdot\underline{j}=\underline{j}\cdot\underline{i}=0$$

（二）两个向量互相平行

如果两个非零向量 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 平行且方向相同，则 $\theta=0°$，那么

$$\begin{aligned}\underline{a}\cdot\underline{b}&=|\underline{a}||\underline{b}|\cos 0°\\&=|\underline{a}||\underline{b}|\end{aligned}$$

如果两个非零向量 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 平行且方向相反，则 $\theta=180°$，那么

$$\begin{aligned}\underline{a}\cdot\underline{b}&=|\underline{a}||\underline{b}|\cos 180°\\&=-|\underline{a}||\underline{b}|\end{aligned}$$

即

当 $\underline{a}\neq\underline{0}$，$\underline{b}\neq\underline{0}$ 时，$\underline{a}/\!/\underline{b}\quad\Leftrightarrow\quad\underline{a}\cdot\underline{b}=\pm|\underline{a}||\underline{b}|$

由此可得，

$$\underline{i}\cdot\underline{i}=1=\underline{j}\cdot\underline{j}$$
$$\underline{i}\cdot(-\underline{i})=-1=\underline{j}\cdot(-\underline{j})$$

例 26 求证

(a) $\underline{a}\cdot\underline{a}=|\underline{a}|^2$

(b) $(\underline{a}-\underline{b})\cdot\underline{c}=\underline{a}\cdot\underline{c}-\underline{b}\cdot\underline{c}$

(c) $(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b})=|\underline{a}|^2-|\underline{b}|^2$

证 (a) 因为 $\underline{a}$ 与其本身的夹角为 0°，所以

$$\begin{aligned}\underline{a}\cdot\underline{a}&=|\underline{a}||\underline{a}|\cos\theta\\&=|\underline{a}|^2\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}(\underline{a}-\underline{b})\cdot\underline{c}&=[\underline{a}+(-\underline{b})]\cdot\underline{c}\\&=\underline{a}\cdot\underline{c}+(-\underline{b})\cdot\underline{c}\\&=\underline{a}\cdot\underline{c}-\underline{b}\cdot\underline{c}\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned}(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b})&=\underline{a}\cdot(\underline{a}-\underline{b})+\underline{b}\cdot(\underline{a}-\underline{b})\\&=\underline{a}\cdot\underline{a}-\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}\cdot\underline{a}-\underline{b}\cdot\underline{b}\\&=|\underline{a}|^2-|\underline{b}|^2\end{aligned}$$

例 27 (a) 如果 $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\,|\underline{b}|$，求 θ。

(b) 如果 $|\underline{a}|=1$，$|\underline{b}|=2$，$\underline{a}+k\underline{b}$ 与 $\underline{a}-k\underline{b}$ 互相垂直，求 k。

解 (a) $\cos\theta=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|}$

$=\dfrac{|\underline{a}|\,|\underline{b}|}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|}$ （已知 $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\,|\underline{b}|$）

$=1$

$\therefore\quad \theta=0°$

(b) $\underline{a}+k\underline{b}$ 与 $\underline{a}-k\underline{b}$ 互相垂直，所以

$$(\underline{a}+k\underline{b})\cdot(\underline{a}-k\underline{b})=0$$

$$\underline{a}\cdot\underline{a}+k\underline{b}\cdot\underline{a}-k\underline{a}\,\underline{b}-k^2\underline{b}\cdot\underline{b}=0$$

$$|\underline{a}|^2-k^2|\underline{b}|^2=0$$

$$1-4k^2=0$$

$$k=\pm\frac{1}{2}$$

习题 10h

1. 求 $\underline{a}\cdot\underline{b}$，若

   (a) 已知 $|\underline{a}|=1$，$|\underline{b}|=\sqrt{2}$，$\theta=45°$

   (b) $|\underline{a}|=3$，$|\underline{b}|=4$，$\theta=60°$

   (c) $|\underline{a}|=2$，$|\underline{b}|=5$，$\theta=120°$

   (d) $|\underline{a}|=\sqrt{2}$，$|\underline{b}|=\sqrt{3}$，$\theta=135°$

2. 求证

   (a) $(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}+\underline{b})=|\underline{a}|^2+2\underline{a}\cdot\underline{b}+|\underline{b}|^2$

   (b) $(\underline{a}-\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b})=|\underline{a}|^2-2\underline{a}\cdot\underline{b}+|\underline{b}|^2$

3. 已知 $|\underline{a}|=3$，$|\underline{b}|=8$，$|\underline{a}-\underline{b}|=2\sqrt{14}$，求 $\underline{a}\cdot\underline{b}$。

4. 根据下列条件求 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的夹角 θ:

(a) $|\underline{a}| = |\underline{b}| = 1$, $\underline{a}\cdot\underline{b} = \frac{1}{2}$

(b) $|\underline{a}| = \sqrt{3}$, $|\underline{b}| = 2$, $\underline{a}\cdot\underline{b} = \sqrt{6}$

(c) $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{b}| = 4$, $\underline{a}\cdot\underline{b} = -6$

(d) $|\underline{a}| = 1$, $|\underline{b}| = \sqrt{2}$, $\underline{a}\cdot\underline{b} = -1$

5. 如果 $|\underline{a}| = |\underline{b}|$，求证 $\underline{a}+\underline{b}$ 与 $\underline{a}-\underline{b}$ 互相垂直。

6. 设 $\underline{a}$ 是非零向量，$\underline{b}\neq\underline{c}$，$\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{c}$，求证 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}-\underline{c}$ 垂直。

7. 求证向量 $(\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b}-(\underline{b}\cdot\underline{c})\underline{a}$ 与向量 $\underline{c}$ 垂直。

8. 已知 $\underline{a}$ 垂直于 $\underline{b}$，求证

(a) $|\underline{a}+\underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2+|\underline{b}|^2$ (b) $|\underline{a}+\underline{b}| = |\underline{a}-\underline{b}|$

9. 已知 $\underline{a}\perp\underline{b}$，化简

(a) $(\underline{a}-\underline{b})\cdot\underline{b}$ (b) $(\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{a}$ (c) $(\underline{a}-\underline{b})\cdot(2\underline{a}+\underline{b})$

10. 已知 $|\underline{a}| = 1$, $|\underline{b}| = 1$, 且 $\underline{a}/\!/\underline{b}$，求 $\underline{a}\cdot\underline{b}$，

(a) 若 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 方向相同；

(b) 若 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 方向相反。

11. 如果 $|\underline{a}| = 2$, $|\underline{b}| = 5$, $\underline{a}+k\underline{b}$ 与 $2\underline{a}-k\underline{b}$ 互相垂直，求 k 的值。

● 用分量表示的内积公式

设 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 的坐标表示分别是 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$，我们可用 x_1，y_1，x_2，y_2 表示 $\underline{a}\cdot\underline{b}$。

$$\begin{aligned}\underline{a}\cdot\underline{b} &= (x_1\underline{i}+y_1\underline{j})\cdot(x_2\underline{i}+y_2\underline{j})\\ &= x_1\underline{i}\cdot x_2\underline{i}+x_1\underline{i}\cdot y_2\underline{j}+y_1\underline{j}\cdot x_2\underline{i}+y_1\underline{j}\cdot y_2\underline{j}\\ &= (x_1x_2)(\underline{i}\cdot\underline{i})+(x_1y_2)(\underline{i}\cdot\underline{j})+(y_1x_2)(\underline{j}\cdot\underline{i})+(y_1y_2)(\underline{j}\cdot\underline{j})\\ &= x_1x_2+y_1y_2\end{aligned}$$

即

若 $\underline{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\underline{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

则 $\underline{a}\cdot\underline{b} = x_1x_2+y_1y_2$

例 28 已知 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 的坐标表示分别是 $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$，求

(a) $\underline{a}\cdot\underline{b}$

(b) $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的夹角 θ

解 (a) $\underline{a}\cdot\underline{b}=3\times 7+4\times 1$

$$=25$$

(b) $|\underline{a}| = \sqrt{3^2+4^2}=5$

$$|\underline{b}| = \sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|}$$

$$=\frac{25}{5\times 5\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta=45^\circ$$

例 29 向量 $\underline{a}=p\underline{i}+q\underline{j}$，$\underline{b}=2\underline{i}-\underline{j}$，已知 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 互相垂直且 $|\underline{a}|=2$，求 p 与 q 的值若 $p<0$。

解

$$|\underline{a}|=2$$

即

$$\sqrt{p^2+q^2}=2$$

$$p^2+q^2=4\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$\underline{a}\perp\underline{b}$，$\therefore\ \underline{a}\cdot\underline{b}=0$

$$p(2)+q(-1)=0$$

$$q=2p\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)代入(1)，$p^2+4p^2=4$

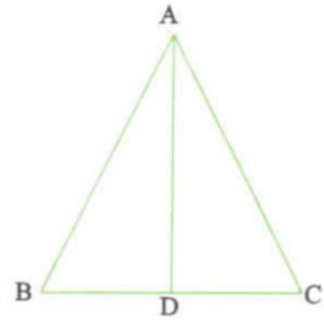
$$p=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$p<0,\ \therefore\ p=-\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$q=-\frac{4}{\sqrt{5}}$$

● 向量内积的应用

例 30 如右图，AB = AC，D 是 BC 的中点，求证 AD⊥ BC。



证 取 A 作原点 O，则由 AB = BC，得 $|\underline{b}| = |\underline{c}|$。

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{d} \cdot (\underline{c} - \underline{b})$$

$$= \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2} \cdot (\underline{c} - \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{b}) \cdot (\underline{c} - \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2}(|\underline{c}|^2 - |\underline{b}|^2)$$

$$= 0$$

所以 AD ⊥ BC。

例 31 四边形 ABCD 的顶点分别为(1，2)，(5，－3)，(4，3)和(2，6)，证明 AC 垂直于 BD。

解 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$$= \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$

$$= \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$$

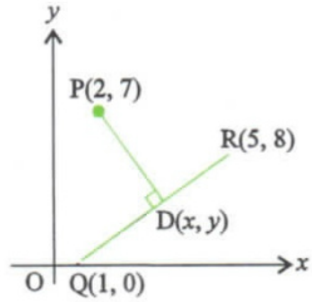
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$$

$$= -9 + 9$$

$$= 0$$

∴ AC 垂直于 BD。

例 32 已知 P，Q，R 三点的坐标分别为(2，7)，(1，0)，(5，8)。以向量求 P 至 QR 的垂足的坐标。



解 设垂足为 D(x，y)，

$$\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PD}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\\y-7\end{pmatrix}$$

由于 PD ⊥ RQ，∴ $RQ\cdot PD=0$

$$4(x-2)+8(y-7)=0$$

$$x+2y=16\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

D 在直线 $\overrightarrow{RQ}$ 上，∴ $\overrightarrow{QD}=k\overrightarrow{QR}$ （k 为实数）

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=k\left[\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4k\\8k\end{pmatrix}$$

得 $$x-1=4k\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$y=8k\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

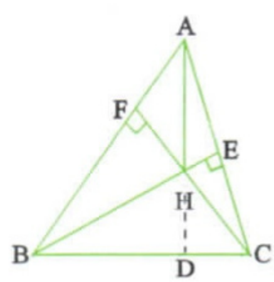
将(2)，(3)代入(1)，$(4k+1)+2(8k)=16$

$$k=\frac{3}{4}$$

∴ $$x=4,\ y=6$$

∴ D 点的坐标为(4，6)。

例 33 如右图，AD，BE，CF 是△ABC 的三条高线，求证 AD，BE，CF 相交于一点。



证 取 A 作原点 O，设两条高 BE，CF 相交于 H，则 BH ⊥ AC，CH ⊥ AB

所以 $$(\underline{h}-\underline{b})\cdot\underline{c}=0$$

$$(\underline{h}-\underline{c})\cdot\underline{b}=0$$

两式相减，得 $$\underline{h}\cdot\underline{c}-\underline{h}\cdot\underline{b}=0$$

$$\underline{h}(\underline{c}-\underline{b})=0$$

这就是说，AH ⊥ BC，因此 AD 经过 H。

所以△ABC 的三条高线 AD，BE，CF 相交于一点。

习题 10i

1. 已知 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的坐标表示，求 $\underline{a}\cdot\underline{b}$ 及 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的夹角：

   (a) $(7, 1)$，$(4, -3)$　　(b) $(-1, 0)$，$(\sqrt{3}, -1)$

   (c) $\underline{a}=4\underline{i}+2\underline{j}$，$\underline{b}=4\underline{i}-8\underline{j}$　　(d) $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$，$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

2. 已知 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 的坐标表示分别是(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，求

   (a) $\underline{a}\cdot\underline{b}$　　(b) $\underline{a}\cdot(\underline{a}+\underline{b})$

   (c) $\underline{a}\cdot(k\underline{b})$　　(d) $(\underline{a}+\underline{b})(\underline{a}-\underline{b})$

3. 若向量 $\underline{a}=\begin{pmatrix}p\\2\end{pmatrix}$，$\underline{b}=\begin{pmatrix}p\\-8\end{pmatrix}$ 互相垂直，求 p 的值。

4. 已知 $\underline{u}=x\underline{i}+3\underline{j}$，$\underline{v}=2\underline{i}-4\underline{j}$，$\underline{w}=-2\underline{i}+\underline{j}$，

   (a) 若 $\underline{u}$ 与 $\underline{v}$ 互相垂直，求 x 的值；

   (b) $\underline{v}$ 与 $\underline{w}$ 间的夹角

5. 已知 A，B，C 的坐标分别为$(4, 4)$，$(5, 6)$，$(-3, 2)$，求$\angle ABC$。

6. 一平行四边形 ABCD 的顶点坐标分别为$(-1, -2)$，(r, s)，$(4, 2)$和$(-3, 2)$，求 r，s 的值，并以向量计算其两个对角线间的锐角。

7. P、Q、R 三点的坐标分别为$(1, 3)$，$(7, -3)$和$(9, 3)$。以向量求 R 至 PQ 的垂足的坐标。

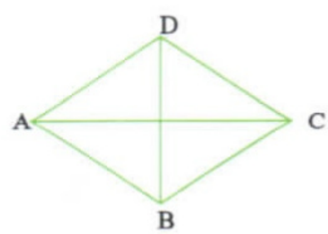
8. 向量 $\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$ 的大小为 4，且垂直于向量 $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，求 h 和 k 的值若 $h>0$。

9. P，Q，R，S 的位置向量分别为 $\underline{p}=3\underline{i}+4\underline{j}$，$\underline{q}=5\underline{i}$，$\underline{r}=\frac{1}{4}(\underline{p}+\underline{q})$。证明

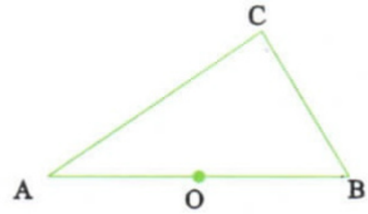
   (a) $|\underline{p}|=|\underline{q}|$　　(b) $|\underline{r}|=|\underline{s}|$

   (c) $\underline{r}$ 垂直于 $\underline{s}$　　(d) $(\underline{r}+\underline{s})$垂直于$(\underline{r}-\underline{s})$

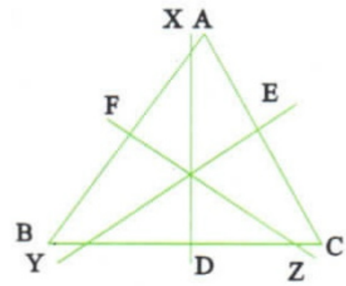
10. 右图中，四边形 ABCD 是菱形，$\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{AD}=\underline{b}$，求证 AC $\perp$ BD。



11. AB 是圆 O 的直径，C 是圆上一点，求证 ∠ACB 是直角（提示：取 O 作原点）。



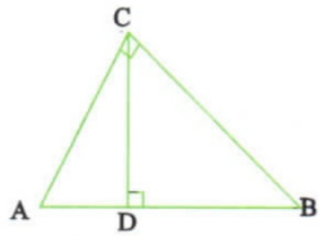
12. 右图△ABC 中，D、E、F 分别是 AB、BC、CA 的中点，过 D、E、F 分别作 AB、BC、CA、的垂线 DX、EY、FZ，求证 DX、EY、FZ 相交于一点。



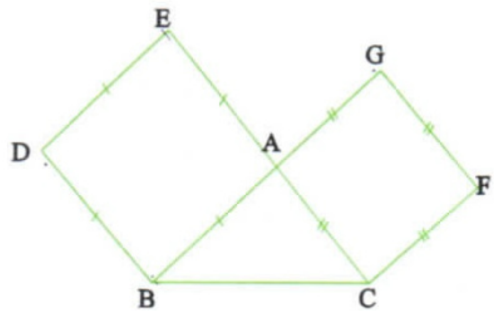
13. 直角三角形 ABC 中，∠C 为直角，CD 为斜边 AB 上的高，求证

(a) $CD^2 = AD \cdot BD$

(b) $AC^2 = AB \cdot AD$

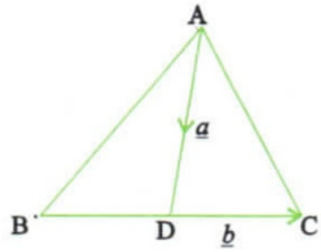


14. △ABC 是锐角三角形，四边形 ABDE，ACFG 是正方形，求证 BG ⊥ CE。（提示：设 A 为原点，∠EAG + ∠BAC = 180°）



总复习题 10

1. 右图 △ ABC 中，AD 是中线，若 $\overrightarrow{AD} = \underline{a}$，$\overrightarrow{DC} = \underline{b}$，求 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$。

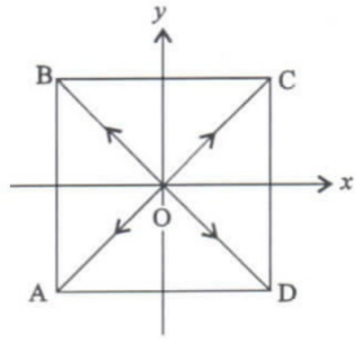


2. 化简：

(a) $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) - \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$

(b) $k(\underline{a} + l\underline{b}) + l(\underline{a} - k\underline{b})$　　（k，l 为实数）

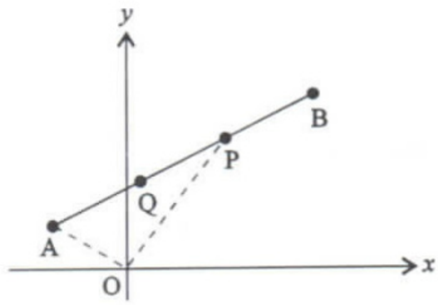
3. 如右图，正方形 ABCD 的边长为 1，中心在原点 O，四个顶点分别在四个象限内，



(a) 求向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ 的坐标表示；

(b) 用 $\underline{i}$，$\underline{j}$ 表示法表示 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$。

4. 已知向量 AB，P、Q 是 AB 的两个三等分点，若 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OP}=\underline{p}$，用 $\underline{a}$，$\underline{p}$ 表示 $\overrightarrow{OQ}$。



5. 已知 $\overrightarrow{QA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，$\overrightarrow{OC}=\underline{c}=\frac{1}{3}\underline{a}+\frac{2}{3}\underline{b}$，若 $m\underline{c}-\underline{a}-2\underline{b}=0$，求 m 的值，并证明 A，B，C 三点共线。

6. P 是(3,4)，R 是(8,2)，O 是原点；若 $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$，求点 T 的坐标。

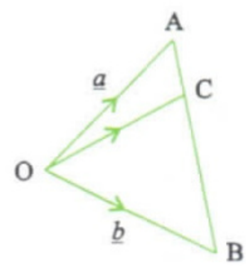
7. A 是(2,1)，B 是(3，−2)，

(a) 若 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，求点 C 的坐标。

(b) 若 D 是(13，−4)，$\overrightarrow{OD}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$，求 p 与 q 的值。

8. 在右图中，$\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{b}$，

$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，求 $\overrightarrow{OC}$。



9. A 是(−2，4)，B(7，10)，求

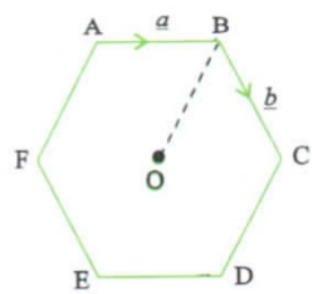
(a) $\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{AB}|$

(b) 若点 P 在 AB 线上，$AP=\frac{1}{3}AB$，求点 P 的坐标。

10. 右图为一正六边形 ABCDEF，O 为中心点。已知 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{BC}=\underline{b}$，

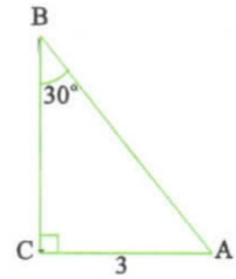
(a) 以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FA}$；

(b) 若 $|\overrightarrow{OA}|=r$，求 $|\overrightarrow{AC}|$（以 r 表示）。



11. 若 $4\underline{a}-5\underline{b}=h\underline{a}+(k-3)\underline{b}$，且 $\underline{a}$ 与 $\underline{b}$ 不平行，求 h 与 k 的值。

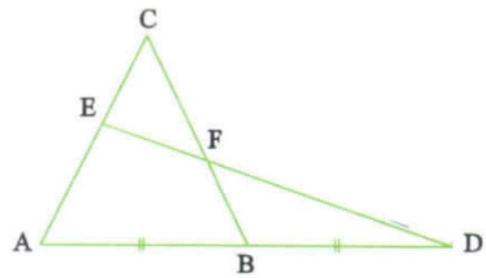
12. 直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$AC=3$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}$。



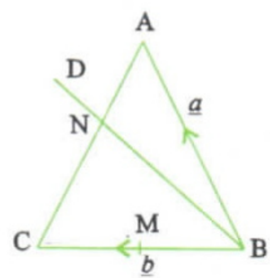
13. 若 $(m\underline{a}+n\underline{b})\cdot(m\underline{a}-n\underline{b})=7$，$(\underline{a}-n\underline{b})=-8$，$\underline{a}$，$\underline{b}$ 是单位向量。求 m，n。

14. 求证：梯形对角线中点连线平行于底而等于两底差的一半。

15. △ABC 是等边三角形，延长 AB 至 D，使 $BD=AB$，E 是 AC 的中点，DE 交 BC 于 F，求证 $BF=\frac{1}{3}BC$。



16. 右图为△ABC，M、N 为 BC、AC 的中点。已知 $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$，$\overrightarrow{BC}=\underline{b}$，且 $BD:BN=4:3$，求证 AM∥DC 且 $AM:DC=3:2$。

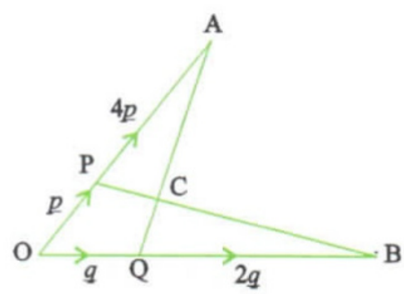


17. 右图中，$\overrightarrow{OP}=\underline{p}$，$\overrightarrow{PA}=4\underline{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\underline{q}$，$\overrightarrow{QB}=2\underline{q}$。

(a) 以 p，q 表示向量 $\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{QA}$。

(b) 已知 $\frac{PC}{PB}=h$，$\frac{QC}{QA}=k$，以两个式子表示向量 $\overrightarrow{OC}$。

(c) 求 $\frac{PC}{BC}$，$\frac{AC}{CQ}$ 的比。



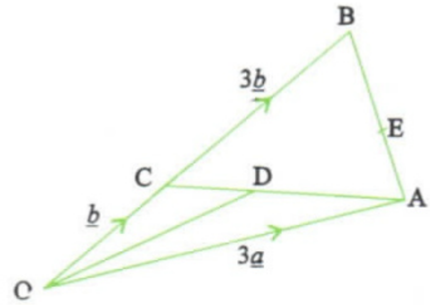
18. 已知 $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}8\\a\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$，$a\neq0$，求 a 的值，若

(a) O，A，B 三点共线，

(b) $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$。

19. 右图中，$\overrightarrow{OA}=3\underline{a}$，$\overrightarrow{OC}=\underline{b}$，$\overrightarrow{CB}=3\underline{b}$，

且 $\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{3}$



(a) 以 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$；

(b) 证明 O，D，E 在同一直线上；

(c) 写出 $\dfrac{OD}{DE}$ 的比。

20. L，M，N 分别为△ABC 的边 BC，CA，AB 的中点，求证 $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$。

21. 已知 $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$，$\overrightarrow{OB}=\underline{a}+2\underline{b}$，$\overrightarrow{OC}=3\underline{a}-3\underline{b}$；D 为 AB 延长线上一点，且 $\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}=n\overrightarrow{OB}$ （m、n 都是常数）。

(a) 将 $\overrightarrow{OD}$ 以 $\underline{a}$，$\underline{b}$，m 表示，

(b) 将 $\overrightarrow{OD}$ 以 $\underline{a}$，$\underline{b}$，n 表示。

据此，求 m，n 的值，并求 D 点的位置向量。

22. 已知向量 $\underline{a}=2\underline{i}+\underline{j}$，$\underline{b}=\underline{i}-2\underline{j}$

(a) 求 (i) $\underline{a}+2\underline{b}$，

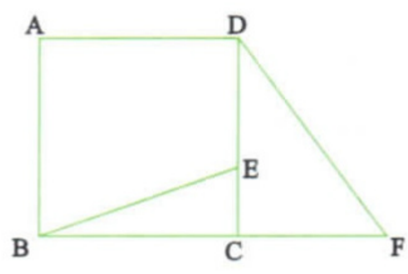
(ii) $|\underline{a}+2\underline{b}|$，

(iii) 与 $\underline{a}+2\underline{b}$ 相同方向的单位向量。

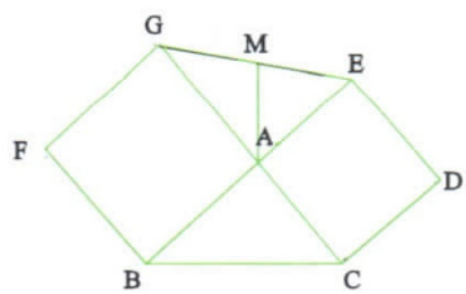
(b) 若 $h\underline{a}=k\underline{b}$，求 h 与 k 的值。

(c) 若 $\underline{c}=10\underline{i}+y\underline{j}$，且 $\underline{c}$ 与 $\underline{a}+2\underline{b}$ 平行，求 y 的值。

23. 在正方形 ABCD 中，E 为 CD 边上一点，延长 BC 至 F，使 CE = CF，求证 BE⊥CF。



24. 以△ABC 的边 AB，AC 为边，向外作正方形 ACDE，ABFG，M 为 EG 中点，求证 MA ⊥ BC。



25. G 是△ABC 的重心，求证 $GA^2+GB^2+GC^2=\dfrac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$。

11 逻辑推理

11.1 逻辑学

逻辑学（logic）是研究思维的形式及其规律的科学。在思维活动中，需要运用概念、作出判断和进行推理。概念、判断和推理是思维的三种形式。它们是相互联系并遵循一定规律的。

逻辑学这门科学产生于两千多年以前。古代学者很早就开始研究思维的形成及其规律。古希腊的亚里士多德最早系统地提出了有关逻辑的理论，成为古典逻辑学的奠基人。十七世纪，德国的莱布尼兹首先提出运用符号的演算来研究逻辑问题的思想，从而导致了数理逻辑这门用数学方法研究思维形式及其规律的科学诞生。十九世纪，英国的布尔建立了一门介于代数和逻辑学之间的边缘科学，叫做**逻辑代数**（也叫做**布尔代数**）。二十世纪以来，数理逻辑又有了更广泛、更深入的发展。它对逻辑作了准确化、数学化的描述和研究；它为数学基础的研究提供了有意义的工具和方法；它对思维的计算化、程序化和机械化的研究，成为了计算机（电脑）诞生的重要理论基础，也给计算机的设计与分析提供了重要的依据。

人类社会正进入信息化的时代。计算机的普及化，促使科学技术日益数学化，人类思维的机械化、计算化程度日益提高。数学这门逻辑严密的基础科学正在日益广泛地发挥重要作用，而作为数学基础之一的逻辑学也就越发被人们所重视。

11.2 命题

表示判断的语句是陈述句。例如,

(a) 三角形的内角和为 180°。

(b) $\sqrt{2}$ 不是有理数。

(c) $(a+b)^2$ 等于 $a^2+2ab+b^2$ (即式子$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$)。

(d) 垂直于同一平面的两条直线互相平行。

(e) 方程 $x^2+4x+5=0$ 有两个实数根。

(f) $\sin^2 x-\cos^2 x=2$。

这些陈述句所表示的判断有的正确,有的不正确。其中的(a)、(b)、(c)、(d)表示正确的判断,而(e)、(f)所表示的判断是错误的。

可以确定其所表示的判断正确或错误的陈述句,叫做**命题**(proposition)。上例中的 6 个陈述句都是命题。

有的陈述句所表示的判断无法确定正确或错误,这种不确定的陈述句不是命题。例如,

(g) △ABC 的两底角相等。

(h) a、b、c 3 个数中 a 最小。

由于△ABC 及 a、b、c 未具体给出,所以不能确定(g)和(h)的对错。

表示正确的判断的命题,叫做真命题;表示错误的判断的命题,叫做假命题。通常我们用小写字母 p、q、r、s、…来表示命题。例如,下面是 4 个分别以 p、q、r、s 表示的命题。

p: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$。

q: $x\in R$ 时,$x^2\geqslant 0$。

r: $3\sin x=4$

s: $\varnothing=\{0\}$。

其中,命题 p 和 q 是真命题;命题 r 和 s 是假命题。一个命题的真或假,叫作它的**真值**(truth value)。我们规定真命题的真值为 1;假命题的真值为 0。例如,上面的命题 p 和 q 为真,记作 $p=1$ 和 $q=1$;r 和 s 为假命题,记作 $r=0$ 和 $s=0$。

例1 指出下列语句中，哪些是命题并说明其真假，哪些不是命题并说明理由。

p：任何实数的平方都不小于 0。

q：抛物线 $y=x^2+1$ 与 x 轴无交点。

r：$x-y=0$。

s：三角形至少有两个内角为锐角。

t：对于所有的实数 x，都有 $2x+1>x$。

解 p 是真命题。实数的平方有非负性。

q 是真命题。抛物线 $y=x^2+1$ 在 x 轴上方，顶点为 $(0,1)$。

r 不是命题。对一般的 x、y，无法确定 $x-y$ 是否为 0。

s 是真命题。三角形内角和为 180°，不可能有两内角为直角或钝角。

t 是假命题。例如，$2(-2)+1<-2$。

例2 写出下列命题的真值：

p：对于实数 x，$x<x+1$。

q：对于实数 a，若 $a^3>0$，则 $a>0$。

r：函数 $y=\sin x$ 的周期是 π。

s：方程 $2\sin x-\cos x=4$ 无解。

t：直线 $3x-4y+1=0$ 过原点。

解 $p=1$ $q=1$ $r=0$ $s=1$ $t=0$

习题 11a

1. 指出下列语句中，哪些是命题，哪些不是命题。

p：方程 $x^2-5x+6=0$ 有两个正实根。

q：$x+5=y-3$。

r：直线 $y=3x+b$ 与直线 $y=3x-b(b\neq 0)$ 平行。

s：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

t：5 是 25 与 30 的最大公约数。

u：必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0。

2. 写出下列命题的真值，并对于其中的假命题举出反例。

p：所有的偶数都不是质数。

q：$x \in \mathbb{R}$时，x^2+x+1总大于0。

r：函数$y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）的极值为$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

s：$\sin x < \sin 2x$这个式子对任意实数x都成立。

t：方程$\sin x=\cos x$的解集为$\left\{x \mid x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$。

u：函数$y=2^x$的值总大于0，其中x是任意实数。

11.3 复合命题

我们先看下列几个命题：

p：4是8的约数。

q：4是12的约数。

r：4不是8的约数。

s：4是8的约数，并且是12的约数。

t：4是8的约数，或者是12的约数。

这些命题中，有的是真命题，有的是假命题。其中命题r、s、t中，分别含有“不是”、“并且”、“或者”这样的词。这些词叫做逻辑联结词，简记为“**非**”(not)、“**且**”(and)、“**或**”(or)。

不含逻辑联结词的陈述句所表达的命题，叫做**简单命题**(simple proposition)。例如，上述命题p和q都是简单命题。

由简单命题经过逻辑联结词联结而成的命题，叫做**复合命题**(compound proposition)。例如，上述命题r、s、t都是复合命题。

● 负命题及其真值表

设p是一个命题，对p加上逻辑联结词“非”，就得到另一个命题，即命题p的负命题，记作$\sim p$，读作“非p”。

负命题$\sim p$的含义为，对原命题p的**否定**(negation)。

例3 写出下列命题的负命题：

p：$2+2=4$。

q：25 是 5 的倍数。

r：函数 $y=3x^3-x$ 是奇函数。

s：15 的平方是 235。

t：$log_a x$ 中的底数 a 可以是负数。

解 $\sim p$：$2+2\neq 4$。

$\sim q$：25 不是 5 的倍数。

$\sim r$：函数 $y=3x^3-x$ 不是奇函数。

$\sim s$：15 的平方不是 235。

$\sim t$：$log_a x$ 中的底数 a 不可以是负数。

显然，若 p 是真命题，则 $\sim p$ 是假命题；若 p 是假命题，则 $\sim p$ 是真命题。p 与 $\sim p$ 的真值相反，其真值表如下所示：

p	$\sim p$
1	0
0	1

这样用以分析一个复合命题的真假的表，称为这个复合命题的**真值表**（truth table）。

例4 写出下列命题的负命题：

s：所有的整数都是正数。

t：4 的平方根一定是 2。

u：所有的等边三角形都是等腰三角形。

v：有的偶数可以被 3 整除。

解 $\sim s$：不是所有的整数都是正数，或有的整数不是正数。

$\sim t$：4 的平方根不一定是 2。

$\sim u$：有的等边三角形不是等腰三角形。

$\sim v$：所有的偶数不可以被 3 整除。

【注】上例中，命题 s 是假命题，若将 $\sim s$ 写成“所有的整数都不是正数”，是错误的。所以需注意，原命题和它的负命题，其中必有一个为真，不能同时为真或同时为假。

习题 11b

1. 写出下列命题的负命题：

   p：三角形两边之和大于第三边。

   q：最小的自然数是 1。

   r：π 属于无理数集。

   s：方程 $x^2+2x+2=0$ 有实数根。

   t：斜率相等的两条直线不一定平行。

   u：所有个位数为 3 的整数都能被 3 所整除。

   v：正多边形的各边相等。

2. 写出第 1 题中各原命题及其负命题的真值。

● 联言命题及其真值表

设 p、q 是两个命题，用逻辑联结词“且”联结 p 和 q，就得到另一命题，即命题 p、q 的联言命题，记作 $p \wedge q$，读作“p 且 q”。在数学上，$p \wedge q$ 也叫做 p、q 的**合取**（conjunction）。

例如，p：今天天气很好。

q：今天很和暖。

$p \wedge q$：今天天气很好且很和暖。

联言命题 $p \wedge q$ 的含义为，当 p、q 都为真命题时，$p \wedge q$ 为真命题。否则，$p \wedge q$ 为假命题。

$p \wedge q$ 的真值表如下所示：

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

例5 写出下列各组命题的联言命题：

(a) p：9是奇数。

q：9是合数。

(b) p：梯形有两条边平行。

q：梯形至少有两个角相等。

(c) p：方程 $x^2-2x+1=0$ 的两根不相等。

q：方程 $x^2-2x+1=0$ 的两根都是负数。

(d) p：必然事件的概率为1。

q：不可能事件的概率为0。

解 (a) $p\wedge q$：9是奇数，且是合数。

(b) $p\wedge q$：梯形有两条边平行，且至少有两个角相等。

(c) $p\wedge q$：方程 $x^2-2x^2+1=0$ 的两根不相等，且两根都是负数。

(d) $p\wedge q$：必然事件的概率为1，且不可能事件的概率为0。

例6 写出例5中各组命题及其联言命题的真值。

解

(a)	$p=1$	$q=1$	$p\wedge q=1$
(b)	$p=1$	$q=0$	$p\wedge q=0$
(c)	$p=0$	$q=0$	$p\wedge q=0$
(d)	$p=0$	$q=0$	$p\wedge q=0$
(e)	$p=1$	$q=1$	$p\wedge q=1$

习题 11c

1. 写出下列各组命题的联言命题。

(a) p：正方形的四条边相等。

q：正方形的四个角相等。

(b) p：自然数集中有最小元素。

q：自然数集中无最大元素。

(c) p：三角形两边之和大于第三边。

q：三角形两边之差小于第三边。

(d) p：方程 $x^2-9=0$ 两根的正负不同。

q：方程 $x^2-9=0$ 两根的绝对值不同。

(e) p：不等式 $x^2-4x+5>0$ 的解集为正实数集。

q：不等式 $x^2-4x+5<0$ 的解集为 $\varnothing$。

2. 写出第 1 题中各组命题的联言命题的真值。
3. 已知 $p=1$，$q=0$，$r=0$，$s=1$，写出 $(\sim p)\wedge(\sim q)$，$(\sim r)\wedge s$，$(\sim q)\wedge(\sim r)$，$(\sim p)\wedge(\sim s)$ 的真值。

选言命题及其真值表

设 p、q 是两个命题，用逻辑联结词"或"联结 p 和 q，就得到另一个命题，即命题 p、q 的选言命题，记作 $p\vee q$，读作"p 或 q"。$p\vee q$ 也叫做 p、q 的**析取**（disjunction）。

选言命题 $p\vee q$ 的含义为，当 p、q 中至少一个真命题时，$p\vee q$ 为真命题。只有当 p、q 都为假命题时，$p\vee q$ 为假命题。

$p\vee q$ 的真值表如下所示：

p	q	$p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

例如，p：我明天去打球。

q：我明天去游泳。

如果我对你说我明天去打球或游泳（即 $p\vee q$），而我的确去打球和游泳，那 $p\vee q$ 当然正确。要是我真的去打球但没有去游泳，你不能说我骗你，$p\vee q$ 仍然是真的。只有我既不去打球，也不去游泳时，才算骗你，这时，$p\vee q$ 才是假的。这跟真值表的规定是完全符合的。

【注】在日常生活中，有时"或"所代表的意思却与真值表不一样。例如餐牌上所用的"或"字，是指只能有其一为真，'咖啡或茶'是说要咖啡就不能要茶，要茶就不能要咖啡。以后在命题中所谈的"或"，都按照真值表所规定的意思。

例7 写出下列各组命题的选言命题。

(a) p：2是自然数。

q：2是偶数。

(b) p：方程 $x^2+4x+3=0$ 有两不等实根。

q：方程 $x^2+4x+3=0$ 有两相等实根。

(c) p：函数 $y=x^2+4x+3$ 有最大值。

q：函数 $y=x^2+4x+3$ 有最小值。

(d) p：四边形的内角和为 180°。

q：四边形的内角和为 540°。

解 (a) $p \vee q$：2是自然数，或是偶数。

(b) $p \vee q$：方程 $x^2+4x+3=0$ 有两不等实根，或有两相等实根。

(c) $p \vee q$：函数 $y=x^2+4x+3$ 有最大值，或有最小值。

(d) $p \vee q$：四边形的内角和为 180°，或为 540°。

例8 写出例 7 中各组命题及其选言命题的真值。

解

(a)	$p=1$	$q=1$	$p \vee q=1$
(b)	$p=1$	$q=0$	$p \vee q=1$
(c)	$p=0$	$q=1$	$p \vee q=1$
(d)	$p=0$	$q=0$	$p \vee q=0$

习题 11d

1. 写出下列各组命题的选言命题。

(a) p：菱形的对角线互相垂直。

q：菱形的对角线互相平分。

(b) p：矩形的对角线相等。

q：矩形的对角线互相垂直。

(c) p：偶数的乘方是奇数。

q：偶数的乘方是偶数。

2. 写出第 1 题中各组命题及其选言命题的真值。

3. 当 $p \vee q=0$ 时，$p \wedge q$ 的真值是几?为什么?

当 $p \wedge q=0$ 时，$p \vee q$ 的真值能确定吗?为什么?

11.4 真值表与逻辑等价

● 真值表

不管一个复合命题如何复杂，其在各种情况下的真值，是可以用真值表来计算的。

例9 求 $\sim(p \wedge \sim q)$ 的真值表。

解

Ⅰ		Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

填表的步骤如下：

（Ⅰ）这里命题 p，q 的真值各有两种取法，所以合在一起考虑时，有 $p=1$，$q=1$；$p=1$，$q=0$；$p=0$，$q=1$；$p=0$，$q=0$；4 种情形。

（Ⅱ）求 $\sim q$ 的真值，它与 q 相反；

（Ⅲ）求 p 与 $\sim q$ 的合取，$p \wedge \sim q$。根据联言命题真值的取法，当 p 与 $\sim q$ 都真时，$p \wedge \sim q$ 为真，其余为假。

（Ⅳ）求 $\sim(p \wedge \sim q)$，它的真值与 $p \vee \sim q$ 相反。

例 10 求 $(p \vee \sim q) \wedge q$ 的真值表。

解

Ⅰ		Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge q$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0

步骤：

（Ⅰ）先写出 p，q 各组合的真值；

（Ⅱ）求 $\sim q$ 的真值；

（Ⅲ）求 $p \vee \sim q$ 的真值。根据选言命题真值的取法，当 p 与 $\sim q$ 都假时，$p \vee \sim q$ 为假，其余为真。

（Ⅳ）求 $(p \vee \sim q) \wedge q$ 的真值。

一个复合命题，若在任何情况下都是真，则这复合命题便称为**重言式**(tautology)。反之，若一命题，无论在任何情况下都是假，则这命题便称为**矛盾式**(contradiction)。例如，

$p \vee \sim p$ 就是一个重言式，可用真值表显示：

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
1	0	1
0	1	1

$p \wedge \sim p$ 就是一个矛盾式，可用真值表显示：

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

习题 11e

1. 求下列各命题的真值表：

(a) $\sim p \wedge q$　　(b) $\sim (p \vee q)$

(c) $\sim (p \vee \sim q)$　　(d) $(\sim p \vee q) \wedge p$

2. 判断下列命题中，何者为重言式，何者为矛盾式。

(a) $p \wedge \sim q$　　(b) $p \vee \sim (p \wedge q)$

(c) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$　　(d) $(p \wedge \sim p) \wedge q$

3. 求下列各命题的真值表：

(a) $p \wedge (q \vee r)$　　(b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(提示：命题 p、q、r 的真值各有 2 种取法，它们组合的情形有 $2^3 = 8$ 种)

逻辑等价（logical equivalence）

设 P、Q 是两个复合命题，如果它们的真值表相同，即当构成它们的简单命题取相同的真值时，它们恒有相同的真值，那么 P、Q 是逻辑等价的，记作 $P \equiv Q$。

例如，命题 $\sim(p \wedge q)$ 和 $\sim p \vee \sim q$ 的真值表如下：

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

相同

由上面的真值表，可以看出在各种情形下，$\sim(p \wedge q)$ 和 $\sim p \vee \sim q$ 的真值都相同。因此，$\sim(p \wedge q)$ 和 $\sim p \vee \sim q$ 是逻辑等价的，即

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

这个公式的含义为，p、q 的联言命题的负命题，等价于 $\sim p$、$\sim q$ 的选言命题。

同样地，我们还可以列出下表：

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

相同

由上面的真值表，可以看出 $\sim(p \vee q)$ 和 $(\sim p) \wedge (\sim q)$ 是逻辑等价的，即

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

这个公式的含义为，p、q 的选言命题的负命题，等价于 $\sim p$、$\sim q$ 的联言命题。

上面两个公式称为**狄摩根律**（De morgan's law）。

例 11 以真值表证明 $\sim(\sim p)\equiv p$。

解

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
1	0	1
0	1	0

相同

由上面的真值表，可知 $\sim(\sim p)\equiv p$。

这就是说，对原命题两次否定后，所得的命题是原命题本身。

$\sim(\sim p)\equiv p$ 叫做**双否定律**（law of double negation）。

例 12 求下列命题的负命题：

(a) 平行四边形对边平行且相等；

(b) 所有的奇数都可以被 3 或 5 整除。

解 (a) p：平行四边形对边平行。

q：平行四边形对边相等。

$p\wedge q$：平行四边形对边平行且相等。

所求负命题为 $\sim(p\wedge q)$

而 $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

$\sim p$：平行四边形对边不平行。

$\sim q$：平行四边形对边不相等。

$\sim p\vee\sim q\equiv\sim(p\wedge q)$：平行四边形对边不平行或不相等。

(b) p：所有的奇数都可以被 3 整除。

q：所有的奇数都可以被 5 整除。

$p\vee q$：所有的奇数都可以被 3 或 5 整除。

而 $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

$\sim p$：不是所有的奇数都可以被 3 整除。

$\sim q$：不是所有的奇数都可以被 5 整除。

$\therefore\ \sim p\wedge\sim q\equiv\sim(p\vee q)$：不是所有的奇数都可以被 3 和 5 整除。

例 13 已知 $p=0$，$q=1$，求 $\sim(p\wedge q)$、$\sim(p\vee q)$的真值。

解一 $\because p=0$，$q=1$

$\therefore p\wedge q=0$，$p\vee q=1$

$\therefore \sim(p\wedge q)=1$，$\sim(p\vee q)=0$

解二 $\because p=0$，$q=1$

$\therefore \sim p=1$，$\sim q=0$

$\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)=1$

$\sim(p\vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)=0$

习题 11f

1. 以真值表证明下列的等价关系：

   (a) $p\vee q\equiv\sim(\sim p\wedge\sim q)$　　(b) $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

   (c) $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$　　(d) $\sim(p\vee\sim q)\equiv\sim p\wedge q$

2. 求下列命题的负命题及其真值：

   (a) 三角形的三条中线交于一点且三条高线也交于一点。

   (b) 偶数 $2n$ 能被 2 或 4 整除。

3. (a) 已知 $p=0$，$q=1$，求 $\sim(p\vee q)$、$\sim(p\wedge q)$的真值。

   (b) 已知 $p=1$，$q=0$，求 $\sim(p\vee q)$、$\sim(p\wedge q)$的真值。

   (c) 已知 $p=1$，$q=1$，求 $\sim(p\vee q)$、$\sim(p\wedge q)$的真值。

4. 根据狄摩根定律及双否定律，化简下列命题：

   (a) $\sim(\sim p\wedge q)$　　(b) $\sim(\sim p\vee\sim q)$　　(c) $\sim(\sim p\vee q)$

11.5 蕴涵

设 p、q 是两个命题，用‘若 p 则 q’的形式可以构成另一命题，即**蕴涵**（implication），记作 $p\rightarrow q$，读作“p 蕴涵 q”。例如

p：$x=3$

q：$x^2=9$

$p\rightarrow q$：若 $x=3$，则 $x^2=9$

蕴涵式 $p \to q$ 中，p 叫做条件，q 叫做结论。$p \to q$ 的真值表如下：

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

在数学中，由 $p=1$，$q=1$，推出 $p \to q=1$，是常见的证明命题为真的形式。

当 $p=1$，$q=0$ 时，$p \to q=0$。这种情形容易理解。

当 $p=0$，$q=1$ 时，$p \to q=1$。这种情形可以理解为：尽管条件 p 不成立，但结论 q 仍成立，于是说 $p \to q$ 成立。看这个例子：若今晚下雨，则我留在家里。当 p 是假而 q 是真时，就是说：今晚没下雨，我仍然留在家里。因我只是说下雨时，我将留在家，不下雨，我留不留在家就没有说明，所以这句话并没有错。因而，p 是假而 q 是真时，$p \to q$ 为真。

当 $p=0$，$q=0$ 时，$p \to q=1$。这种情形可以结合下面的事例来理解。

p：你能跳 100 m。

q：我能跳 200 m。

显然，命题 p、q 都是假命题。但由 p、q 构成的命题却是合乎情理的一句开玩笑的话，即

$p \to q$：若你能跳 100 m 高，则我能跳 200 m 高。

事实上，由于你不可能跳 100 m，所以我就不必去兑现跳 200 m 这件事了。因此，$p \to q=1$。

例 14 根据下列各组 p、q，写出命题 $p \to q$，并判断其真值。

(a) p：$3^2+4^2=5^2$。

q：边长分别为 3、4、5 的三角形是直角三角形。

(b) p：$\frac{1}{3}$ 是无穷小数。

q：$\frac{1}{3}$ 是无理数。

(c) p：$5<3$。

q：$-5<-3$。

(d) p：$\sin^2 x+\cos^2 x=2$。

q：$\operatorname{tg}x \operatorname{ctg}x=2$。

解 (a) $p \to q$：若 $3^2+4^2=5^2$，则边长分别为 3、4、5 的三角形是直角三角形。

$\because p=1,\ q=1$

$\therefore p \to q=1$

(b) $p \to q$：若 $\frac{1}{3}$ 是无穷小数，则 $\frac{1}{3}$ 是无理数。

$\because p=1,\ q=0$

$\therefore p \to q=0$

(c) $p \to q$：若 $5<3$，则 $-5<-3$。

$\because p=0,\ q=1$

$\therefore p \to q=1$

(d) $p \to q$：若 $\sin^2 x+\cos^2 x=2$，则 $\mathrm{tg}x\ \mathrm{ctg}x=2$。

$\because p=0,\ q=0$

$\therefore p \to q=1$

例 15 证明 $p \to q \equiv \sim p \vee q$

解

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

相同

从表中可看出，$p \to q$ 和 $\sim p \vee q$ 的真值表相同，$\therefore p \to q \equiv \sim p \vee q$

● 蕴涵式的 4 种形式

先看一个例子。

设 p：$x=3$。

q：$x^2=9$。

由 p、q 出发可以构成下列 4 种蕴涵式。

$p \to q$：若 $x=3$，则 $x^2=9$。（真）

$q \to p$：若 $x^2=9$，则 $x=3$。（假）

$\sim p \to \sim q$：若 $x \neq 3$，则 $x^2 \neq 9$。（假）

$\sim q \to \sim p$：若 $x^2 \neq 9$，则 $x \neq 3$。（真）

我们把 $q \to p$ 叫做 $p \to q$ 的**逆命题**（converse proposition），$\sim p \to \sim q$ 叫做 $p \to q$ 的**否命题**（inverse proposition）（注意否命题不同于 11.2 中的负命题），$\sim q \to \sim p$ 叫做 $p \to q$ 的**逆否命题**（contrapositive proposition）。

原命题 $p \to q$ 及其逆否命题的真值表如下所示。

p	q	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

由上表可知，$p \to q$ 和 $\sim q \to \sim p$ 取值完全相同，即

$$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$$

这就是说，把一个蕴涵式命题的条件和结论互换，并且同时否定，所得的蕴涵式命题与原命题等价。这也就是“欲证一命题，可证其逆否命题”这种反证法的依据。

例 16 根据下列各组 p、q，写出由 p、q 构成的 4 种蕴涵式，并判断它们的真值。

(a) p：$x = y$。

q：$x^2 = y^2$。

(b) p：△ABC 中，∠B = ∠C。

q：△ABC 中，AB = AC。

解 (a) $p \to q$：若 $x = y$，则 $x^2 = y^2$。

$p \to q = 1$

$q \to p$：若 $x^2 = y^2$，则 $x = y$。

$q \to p = 0$

$\sim p \to \sim q$：若 $x \neq y$，则 $x^2 \neq y^2$。

$\sim p \to \sim q = 0$

$\sim q \to \sim p$：若 $x^2 \neq y^2$，则 $x \neq y$。

$\sim q \to \sim p = 1$

(b) $p \to q$：若△ABC 中，$\angle B=\angle C$，则 $AB=AC$。

$p \to q=1$

$q \to p$：若△ABC 中，$AB=AC$，则 $\angle B=\angle C$。

$q \to p=1$

$\sim p \to \sim q$：若△ABC 中，$\angle B \neq \angle C$，则 $AB \neq AC$。

$\sim p \to \sim q=1$

$\sim q \to \sim p$：若△ABC 中，$AB \neq AC$，则 $\angle B \neq \angle C$。

$\sim q \to \sim p=1$

习题 11g

1. 根据下列各组 p、q，写出命题 $p \to q$，并判断其真值。
   (a) p：三角形的两边之和大于第三边。
   q：三角形的两边之差小于第三边。
   (b) p：$a^2+b^2 \geqslant 2ab$。
   q：$a>0$，$b>0$。
   (c) p：三角形的任一外角都是钝角。
   q：三角形的任一外角等于与其不相邻的两内角之和。
   (d) p：对于实数 x，$|x|<x$ 成立。
   q：对于实数 x，$|x|>0$ 成立。
2. 根据下列各组 p、q，写出命题 p、q 构成的 4 种蕴涵式，并判断它们的真值。
   (a) p：△ABC 的三边都相等。
   q：△ABC 的三个内角都相等。
   (b) p：四边形 ABCD 是正方形。
   q：四边形 ABCD 的四条边相等。
   (c) p：对于实数 a、b、c，有 $ac>bc$。
   q：对于实数 a、b，有 $a>b$。
   (d) p：$\sin\alpha=1$。
   q：$\alpha=\frac{\pi}{2}$。

3. 对于命题“对顶角相等”，可以写成蕴涵式“若两个角是对顶角，则这两个角相等”。参照这种写法，试将下列命题改写成蕴涵式形式：

(a) 三角形内角和为 180°。

(b) 正数的绝对值等于其本身。

(c) 相似多边形的对应角相等。

4. 求下列命题的真值：

(a) $(p\rightarrow q)\rightarrow(p\wedge q)$　　(b) $\sim p\rightarrow(q\rightarrow p)$

5. 证明 $(p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$ 是重言式。

6. 证明 $p\rightarrow(q\wedge r)\equiv(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$。

7. 若 $p\leftrightarrow q\equiv(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$，求 $p\leftrightarrow q$ 的真值表。

11.6 推理

● 推理（argument）

推理是指从一些已有的判断（已经成立的命题）P_1，P_2，…，P_n，推得一个新判断（新命题）Q 的思维过程。这里，已有的判断 P_1，P_2，…，P_n 叫做**前提**（premises），所获得的新判断 Q 叫做**结论**（conclusion），记作 P_1，$P_2\cdots P_n$；$\therefore Q$。

例 17 (a) 若它是平行四边形，则它的对角线互相平分，
矩形是平行四边形，
所以矩形的对角线互相平分。

(b) 星期天去看电影或去公园，
星期天去看电影，
所以，星期天不去公园。

(c) 犯罪是危害社会的行为，
犯罪是触犯刑律的行为，
所以，犯罪是危害社会和触犯刑律的行为。

上述三个例子所表述的内容虽然各个不相同，但他们都是由一组已知的判断（即前提）推出一个新判断（结论），所以，它们都是推理。这些推理都可以用逻辑符号‘p’，‘q’，‘$\wedge$’，‘$\vee$’，‘$\rightarrow$’等来表示。

比如例 17(a)，以 p 表示它是平行四边形，q 表示它的对角线互相平分，那么，

$$\begin{array}{c} p\rightarrow q \\ \underline{p} \\ \hline \therefore q \end{array}$$

这种用逻辑符号表示推理就叫做推理形式。上述推理形式也可写成 $p\rightarrow q$，p；$\therefore q$。

再看例 17(b)，若　p：星期天去看电影，

q：星期天去公园。

那么，它的推理形式为：

$$\begin{array}{c} p\vee q \\ \underline{p} \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$$

记作 $p\vee q$，p；$\therefore \sim q$。

例 17(c)，若　p：犯罪是危害社会的行为，

q：犯罪是触犯列律的行为。

那么，

$$\begin{array}{c} p \\ \underline{q} \\ \hline \therefore p\wedge q \end{array}$$

记作 p，q；$\therefore p\wedge q$。

● 推理的有效性

当一个推理的前题 P_1，$P_2\cdots P_n$ 全部为真，而结论 P 也真，则此推理称为**有效**（valid）推理。

例 18　检验 $p\rightarrow q$，p；$\therefore q$ 的有效性。

解　对前提和结论制作真值表如下：

p	q	$p\rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

其中第一行中，两个前提 p，$p\rightarrow q$ 的真值都为真，此时，结论 q 的真值也真，所以这个推理是有效推理。

例 19 检验 $p \vee q$，p；$\therefore \sim q$ 的有效性。

解

p	q	$p \vee q$	$\sim q$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1

其中第一、二行中，两个前提 $p \vee q$，p 的真值都为真，但第一行中结论 $\sim q$ 的真值为假，所以，此推理是无效的。

考虑到当合取式 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ 为真时，每个合取项 P_1，P_2，$\cdots$，P_n 也必真；所以，推理 P_1，P_2，$\cdots$，P_n；$\therefore Q$ 是有效的，当且仅当在 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ 为真，Q 也真时。换句话说，当$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ 是重言式时，推理 P_1，P_2，$\cdots P_n$；$\therefore Q$ 为有效推理。

例 20 检验 $p \to q$，$q \to r$；$\therefore p \to r$ 的有效性。

解 作$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$的真值表如下：

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

由于$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$是重言式，

$\therefore$ $p \to q$，$q \to r$；$\therefore p \to r$ 是有效推理。

【注】$p \to q$，$q \to r$；$\therefore p \to r$ 叫做**三段论定律**(law of sylogism)。

例 21 检验 $p \to q$，$\sim p$；$\therefore \sim q$ 的有效性。

解 作 $[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$ 的真值表：

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$(p \to q) \wedge \sim p$	$\sim q$	$[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

由于 $[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$ 不是重言式，

$\therefore$ $p \to q$，$\sim p$；$\therefore \sim q$ 是无效推理。

我们看这个例子，

如果地球生翼，那么地球会飞，

地球生翼，

$\therefore$ 地球会飞。

它的推理形式是：$p \to q$，p；$\therefore q$（即例 18）是有效推理，但是它的前提‘地球生翼’和结论‘地球会飞’都是错的。可见，有效推理并不能保证结论真。要保证结论真实的推理，必须具备两个条件：

1. 它是有效推理——即推理的前提和结论间的联系是符合逻辑规则的；
2. 它的前提都是真实的。

考虑到前提的真实需要依靠其它学科解决，因而传统的逻辑和现代的逻辑都把自己限于研究推理的有效性。

例 22 判断下列推理的有效性：

(a) 如果两个角是同位角，那末它们就相等，

这两个角相等，

所以，这两个角是同位角。

(b) 这位同学爱好文娱或爱好体育，

他不爱好文娱，

所以，这位同学爱好体育。

解　(a) 以 p、q 分别表示"两个角是同位角"、"两个角相等"，可得它的推理形式为：

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q} \\ \hline \therefore p \end{array}$$

写出 $[(p\to q)\wedge q]\to p$ 的真值表：

p	q	$p\to q$	$(p\to q)\wedge q$	$[(p\to q)\wedge q]\to p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

由表中，可知 $[(p\to q)\wedge q]\to p$ 不是重言式，所以此推理无效。

(b) 以 p、q 分别表示"这位同学爱好文娱"、"这位同学爱好体育"，可得它的推理形式为：

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ \hline \therefore q \end{array}$$

写出 $[(p\vee q)\wedge \sim p]\to q$ 的真值表：

p	q	$p\vee q$	$\sim p$	$(p\vee q)\wedge \sim p$	$[(p\vee q)\wedge \sim p]\to q$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

由表中，可知 $[(p\vee q)\wedge \sim p]\to q$ 为重言式，所以此推理是有效的。

习题 11h

1. 检验下列推理的有效性：

(a) $p\to q$，$\sim q$；$\therefore \sim p$

(b) $\sim p\to q$，p；$\therefore \sim q$

2. 证明下列推理是有效的：

(a) $p \to \sim q$，$r \to q$，r；$\therefore \sim p$

(b) $\sim p \to \sim q$，q；$\therefore \sim p$

3. 判断下列的推理是否有效：

(a) 若它是正方形，则它的对角线互相垂直，
它是正方形，
所以它的对角线互相垂直。

(b) 若它是正方形，则它的对角线互相垂直，
它的对角线互相垂直，
所以它是正方形。

(c) 若它是正方形，则它的对角线互相垂直，
它不是正方形，
所以它的对角线不互相垂直。

(d) 若它是正方形，则它的对角线互相垂直，
它的对角线不互相垂直，
所以它不是正方形。

4. 判断下列推理的有效性：

(a) 若 6 不是偶数，则 5 不是质数，
6 是偶数，
所以 5 是质数。

(b) 若得了肺炎，则会发烧，
他没有得肺炎，
所以他没有发烧。

(c) 如果一个数能被 6 整除，那么它就能被 2 整除，
一个数能被 6 整除，
所以它能被 2 整除。

(d) 若你是一个好学生，则你不会旷课；
若你是一个好学生，则你不会打架；
你旷课或者打架；
所以你不是一个好学生。

5. 判断下列推理的有效性，并指出有效推理的结论是否正确：

(a) 若 $x = 4$，则 $x^2 = 16$；
$x = 4$，
所以，$x^2 = 16$。

(b) 若 7 小于 4，则 7 不是质数；

7 不小于 4，

所以 7 是质数。

(c) 若 5 是质数，则 5 不能整除 15；

5 能整除 15，

所以 5 不是质数。

总复习题 11

1. 写出下列命题的真值，对于其中的假命题举出反例。

p：三角形两边之和大于第三边。

q：任一数 x 都大于 $-x$。

r：实数 x、y 总满足 $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$。

t：$\sin^2 x + 2\cos^2 x < 3$。

2. 写出使下列语句成为真命题的集合 A。

p：若 $x \in \mathrm{A}$，则 $\log_2 x \geq 1$。

q：若 $x \in \mathrm{A}$，则 $x^2 - 5x + 6 < 0$。

r：若 $x \in \mathrm{A}$，则 $\sin x = \frac{1}{2}$。

t：若 $x \in \mathrm{A}$，则 $\sin x > 1$。

3. 写出下列命题的负命题，并判断这些命题的真假。

p：方程 $x^2 - 5x - 12 = 0$ 有两个不等的实根。

q：$a^{\log_a \mathrm{N}} = \mathrm{N}$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）。

r：若两直线的斜率相乘积为 -1，则这两直线垂直。

s：n 边形的内角和不等于 $(n-2) \cdot 180°$。

4. 写出下列各组命题的联言命题，并判断其真假。

(a) p：$x^2 + y^2 = 0$ 时，$x = y = 0$。

q：$x^2 + y^2 = 1$ 时，$xy \leq \frac{1}{2}$。

(b) p：对于实数 x 总有 $x^2 \geq 0$。

q：对于实数 x 总有 $\sqrt{x^2} = x$。

5. 写出下列各组命题的选言命题，并判断其真假。

(a) p：π 是正数。

q：π 是无理数。

(b) p：方程 $x^2-bx-2b^2=0$（$b\neq 0$，$b\in\mathbb{R}$）有实根。

q：方程 $x^2+bx+2b^2=0$（$b\neq 0$，$b\in\mathbb{R}$）有实根。

(c) p：方程 $x^2+1=x^2+2$ 有实根。

q：方程 $x^2+y^2=-1$ 有实根。

6. 已知 $p=0$，$q=1$，求 $\sim(p\vee q)$、$\sim(p\wedge q)$的真值。

7. 证明当 $\sim(p\wedge q)=0$ 时，p、q 的真值都是 1。

8. 根据下列各组 p、q，判断蕴涵命题 $p\rightarrow q$ 的真假。

(a) p：$a>b$ 且 $b>c$。

q：$a>c$。

(b) p：$|x|=|y|$。

q：$x=y$。

(c) p：直线 a 垂直于平面 α 内的任意直线。

q：直线 a 垂直于平面 α。

9. 已知 $p=1$，$q=0$，求由 p、q 构成的 4 种蕴涵式的真值。

10. 求下列各命题的真值表：

(a) $p\vee\sim q$ (b) $\sim p\wedge\sim q$

(c) $\sim(p\vee q)\rightarrow p$ (d) $\sim(\sim p\vee\sim q)$

11. 证明 (a) $p\vee(p\wedge q)\equiv p$ (b) $\sim(p\rightarrow q)\equiv p\wedge(\sim q)$

12. 判断下列命题为重言式或矛盾式：

(a) $(p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$ (b) $\sim(p\rightarrow q)\wedge(\sim p\wedge q)$

(c) $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$ (d) $[(p\rightarrow q\wedge\sim q)]\rightarrow\sim p$

13. 检验下列推理的有效性：

(a) $\sim p\rightarrow q$，p；$\therefore\sim q$ (b) $p\rightarrow\sim q$，$r\rightarrow p$，q；$\therefore\sim r$

14. 判断下列推理的有效性：

(a) 若一个数是正数，则它大于零，

一个数是正数，

所以，这个数大于零。

(b) 若他是用功的学生，则他考试及格，

若他是戴眼镜的学生，则他是用功的，

所以，若他是戴眼镜的学生，则他不会考试不及格。

(c) 若两个三角形全等，则两个三角形对应角相等，

两个三角形对应角相等，

所以，两个三角形全等。

(d) 若 θ 是第一象限角，则 $\sin\theta > 0$,

θ 不是第一象限角，

所以 $\sin\theta \ngtr 0$。

12 极　限

12.1 极限的概念

极限（limit）是研究变化过程和变化趋势的一个基本概念，极限的理论是微积分学的基础。

为了说明极限的直观意义，我们先来看两个例子。

例1　圆的面积公式的求得。

我们知道，半径为 R 的圆的面积公式是

$$A = \pi R^2$$

现在来看一看，这个公式是怎样得出来的。

假设圆内接正 n 边形长是 a_n，边心距是 r_n（图 12－1），那么正 n 边形的面积为

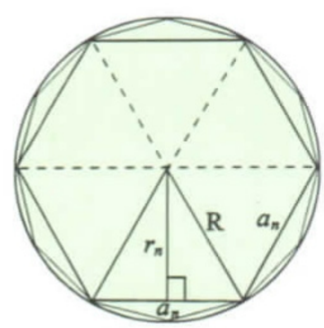


图 12－1

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} a_n \cdot r_n$$

正 n 边形的周长 $P_n = n a_n$

那么　$A_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r_n$

当 n 越来越长时，正 n 边形的面积越来越接近于圆面积。当 n 无限增大时，即当 $n \to \infty$（无穷大，infinity）时，正 n 多边形的面积 A_n 就越来越接近于一个确定的数值 A。这个数值就是相应的圆的面积，即有

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

这里符号“lim”是英文 limit 的缩写，意即极限。当 $n \to \infty$ 时，圆的内接正 n 边形的周长P_n 与边心距 r_n，分别越来越接近于圆的周长 P 和半径 R，

即 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \mathrm{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \mathrm{P}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathrm{A} &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{A}_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\mathrm{P}_n r_n \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{PR}\end{aligned}$$

但 $\mathrm{P} = 2\pi\mathrm{R}$

$\therefore\quad \mathrm{A} = \pi\mathrm{R}^2$

上面，通过把圆面积看作是它的内接正 n 边形当 n 无限增大时的极限，求得了圆的面积，达到了“以直代曲”的目的。这种通过极限运算求圆的面积的方法是早在公元三世纪中国著名数学家刘徽提出来的。

例2 研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 当 x 无限增大时的变化趋势。

为了观察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 x 无限增大时的变化趋势，我们列出下表：

x	1	10	100	1000	10000	…
$f(x)$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	…

上表与图 12－2 表明，当 x 越来越大时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 值越来越接近于 0。这就是说，当 x 无限增大时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限是 0，即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

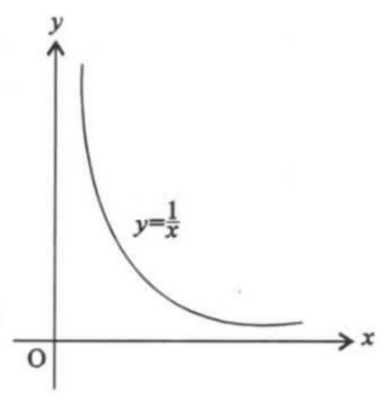


图 12－2

从以上两个例子看到，极限描述了一个数列或一个函数的变化趋势。下面我们分别进一步研究数列的极限和函数的极限。

12.2 数列的极限

数列的极限（limit of a sequence）

上面我们已经知道，如果存在一个常数 A，使得数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋近于无限大时，其 a_n 项趋近于这个常数 A，那么就说数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

$$\text{或}\quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时，} a_n\to A$$

例3 数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ 有没有极限?

解 为了观察这个数列的变化趋势，先列出下表。

项号 n	1	2	3	10	50	100	1000	…	趋近于无穷大
项 a_n	0.5	0.67	0.75	0.91	0.98	0.99	0.999	…	趋近于1

我们看到，当项数越来越大时，$\frac{n}{n+1}$ 无限趋近于 1，$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$。

例4 研究数列 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots\cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots$ 的变化趋势。

解 从图 12－3 及表可看到，数列的各项在 0 附近摆动。这就是说，

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$$

n	1	2	3	4	5	6	7	…	趋近于无限大
a_n	1	－0.5	0.33	－0.25	0.2	－0.17	0.14	…	趋近于0

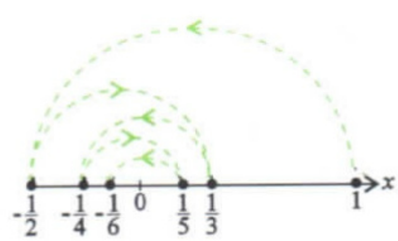


图 12－3

例5 数列 $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$ 有没有极限?

解 这个数列只取两个数值：当项号为奇数时取 -1，当项号为偶数时取 1。这就是说，当项数 n 趋近于无穷大时，数列的值并不趋近于某个固定的常数，因此这个数列没有极限。

例 5 告诉我们，并不是每一个无穷数列都有极限。下面两个数列也都没有极限：

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots;$$

$$\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{2\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}, \cdots, \sin\frac{n\pi}{2}, \cdots$$

习题 12a

1. 已知数列 $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$

   (a) 把这个数列的前 5 项在数轴上表示出来；

   (b) 列表求出它的极限。

2. 已知数列 $4-\frac{1}{10}, 4-\frac{1}{20}, 4-\frac{1}{30}, \cdots 4-\frac{1}{10n}, \cdots$，列表求出此数列的极限。

3. 已知数列 $5+1, 5-\frac{1}{2}, 5+\frac{1}{3}, 5-\frac{1}{4}, \cdots$，列表求出此数列的极限。

4. 一个数列的通项公式是 $a_n=\frac{n+1}{n+2}$,

   (a) 写出这个数列的前 5 项，并观察当项数增大时数列的变化趋势；

   (b) 这个数列是否存在极限?

5. 一个数的通项公式是 $a_n=\frac{n}{2n+1}$,

   (a) 写出这个数列的前 5 项，并观察当项数增大时数列的变化趋势；

   (b) 这个数列是否存在极限?

6. 数列 $3, 3, 3, \cdots, 3, \cdots$ 的极限是什么?

7. 数列 $-2, 0, -2, 0, \cdots, (-1)^n-1, \cdots$ 有极限吗?

数列极限的性质

上面看到，一些简单的数列可以从变化趋势找出它们的极限。例如，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\ \lim_{n\to\infty}C=C\ (C\text{是常数})$$

如果求极限的数列比较复杂，就要分析已知数列是由哪些简单的数列经过怎样的运算结合而成的，这样就能把复杂的数列极限计算转化为简单的数列极限的计算。因此，下面引入数列极限的性质（证明从略）：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，那么

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$，

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$，

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$。

(d) 如果 C是常数，那么

$\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot a_n)=C\lim\limits_{n\to\infty}a_n=CA$

以上公式表明：如果两个数列都有极限，那么，这两个数列的各对应项的和、差、积、商组成的数列的极限，分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商（各项作为除数的数列的极限不能为0）。

例如，数列 $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \cdots,\ \dfrac{n}{n+1},\ \cdots$

与 $3,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ 3,\ \cdots$

的极限分别是 1 与 3，那么根据上面的性质，这两个数列各对应项的和组成的数列

$$3+\frac{1}{2},\ 3+\frac{2}{3},\ 3+\frac{3}{4},\ \cdots,\ 3+\frac{n}{n+1},\ \cdots$$

的极限是 4。

例6 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)$。

解
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)&=\lim_{n\to\infty}3a_n-\lim_{n\to\infty}4b_n\\&=3\lim_{n\to\infty}a_n-4\lim_{n\to\infty}b_n\\&=3\times5-4\times3\\&=3\end{aligned}$$

例7 求 (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(7+\frac{2}{n})$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}$

解 (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(7+\frac{2}{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}7+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}$$

$$=7+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$=7+2\times 0$$

$$=7$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{3n}{n}-\frac{2}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}$$

$$=3-0$$

$$=3$$

例8 求 (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+8}{4-n^2}$

解 (a) 当 n 无限增大时，分式 $\frac{2n+1}{3n+2}$ 中的分子、分母同时无限增大，极限的性质不能直接运用。为此，我们将分式中的分子、分母同时除以 n 后再求它的极限。

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n})}$$

$$=\frac{2+0}{3+0}$$

$$=\frac{2}{3}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+8}{4-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}}{\frac{4}{n^2}-1}$$

$$=\frac{3-0+0}{0-1}$$

$$=-3$$

例9 求 (a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n^2+1}$ (b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3-1}{n^2+n}$

解 (a) $$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

(b) $$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3-1}{n^2+n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{0}$$

我们说 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3-1}{n^2+n}$ 的极限不存在。

例 10 已知等比数列 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，…，$\dfrac{1}{2^n}$，…

(a) 求这个数列前 n 项的和 S_n；

(b) 当 $n \to \infty$ 时，求 S_n 的极限。

解 (a) 这个数列的公比是 $r = \dfrac{1}{4} \div \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

根据等比数列前 n 项和的公式，得到

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

(b) $$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

习题 12b

1. 已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -\frac{1}{3}$，求下列极限：

   (a) $\lim_{n\to\infty} (2a_n + 3b_n)$　　(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{a_n}$

2. 求 (a) $\lim_{n\to\infty} (3 - \frac{1}{n})$　　(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{5 + \frac{3}{n}}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$　　(d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n^2} + \frac{1}{n} + 5\right)$

3. 求下列极限：

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+1}$　　(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{n} + \frac{4n-1}{4n})$　　(d) $\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{2n}{n+2})$

   (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n - 1}{3n^3 - n^2 + 5}$　　(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n + 1}{(n-1)^2}$

   (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 4n^2 + 2}{7n^3 + 5n^2 - 3}$　　(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 1}{3n^2 - 2}$

4. (a) 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$；

   (b) 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$。

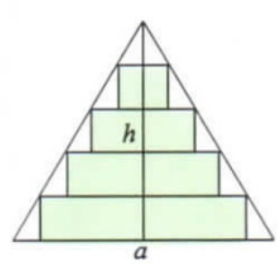
   (提示：$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

5. 三角形的一条底边是 a，这条边上的高是 h。

   (a) 过高的 5 等分点分别作底边的平行线，并作出相应的 4 个矩形，求这些矩形面积的和；

   (b) 把高 n 等分，同样作出 $n-1$ 个矩形，求这些矩形面积的和；

   (c) 求证当 n 无限增大时，这些矩形面积的和的极限等于三角形的面积 $\frac{ah}{2}$。



12.3 函数的极限

上一节我们研究了数列的极限的概念及其性质，现在我们来研究函数的极限及其性质。

● 函数的极限（limit of function）

如果当 x 以任何方式趋近于 x_0（但不等于x_0）时，函数 $f(x)$都趋近于一个固定常数 A，我们就说，当 x 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$的极限是 A，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

例如，我们来研究函数 $f(x) = x^2$ 当 x 无限趋近于 2 时的变化趋势。先列出下表，并作出函数 $f(x) = x^2$ 的图象（图 12－4）。

x	1.5	1.9	1.99	1.999	1.9999	…	趋近于2
y	2.25	3.61	3.96	3.996	3.9996	…	趋近于4

2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001	…	趋近于2
6.25	4.41	4.04	4.004	4.0004	…	趋近于4

我们看到，当自变量 x 从 2 的左侧或右侧越接近 2 时，函数 $f(x) = x^2$ 的值都越接近于 4；当 x 无限趋近于 2 （但不等于 2）时，$f(x)$的值无限趋近于 4。于是我们说，当 x 无限趋近于 2 时，函数 $f(x) = x^2$ 的极限是 4，记作

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

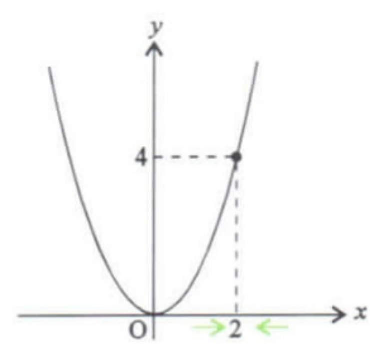


图 12－4

在极限 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ 的定义中，我们实际上是要求当 x 无论从哪一个方向趋近于 x_0时，函数 $f(x)$都趋近于同一常数 A。也就是说，当 x 分别从 x_0 的左侧（$x < x_0$）和右侧（$x > x_0$）趋近于x_0 时，函数 $f(x)$都趋近于同一常数 A。

如果当 x 从左侧（$x<x_0$）趋近于 x_0 时（记作 $x \to x_0^-$），函数 $f(x)$ 趋近于一个固定的常数 A，那么就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 时的**左极限**（left hand limit），记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

如果当 x 从左侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 并不趋近于一个固定的常数 A，那么就说 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限不存在。

例如，从图 12－5 中看到，当 x 从左侧趋近于 0 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 趋向于负无穷大，因此，不可能有常数 A 为其极限，所以我们说函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的左极限不存在。

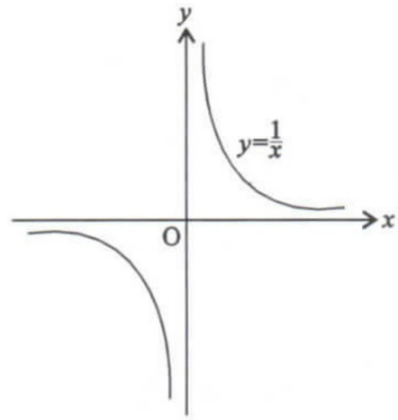


图 12－5

同样，如果当 x 从右侧趋近于 x_0（记作 $x \to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 趋近于一个固定的常数 A，那么就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时的**右极限**（right hand limit），记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

如果当 x 从右侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 并不趋近于一个固定的常数 A，那么就说 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限不存在。

例如，从图 12－5 中可看到，当 x 从右侧趋近于 0 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 趋向于无穷大，并不趋近于一个常数 A，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的右极限也不存在。

根据极限、左极限和右极限的定义可以得到：

> 如果当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在，那么有
>
> $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

我们看到，只有当左、右极限都存在且相等时，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 才存在。否则，如果左、右极限中有一个不存在，或者虽都存在但不相等时，那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 不存在。

例 11 讨论函数 $f(x)=x^2$ 当 $x\to3^-$ 及 $x\to3^+$ 时的变化趋势，并求在 $x=3$ 处函数 f 的左极限、右极限以及极限值。

解 先列出表来观察函数 $f(x)=x^2$ 的变化趋势。

$x \longrightarrow$

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999	2.999999	…	3
$f(x)$	8.41	8.9401	8.994001	8.9994	8.99994	8.999994	…	9

从上表中我们可以看到当 $x\to3^-$ 时，函数 $f(x)=x^2$ 的值趋近于常数 9，即

$$\lim_{x\to3^-}x^2=9$$

$\longleftarrow x$

x	3	…	3.000001	3.00001	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)=x^2$	9	…	9.000006	9.00006	9.0006	9.006	9.06	9.61

同样的当 $x\to3^+$ 时，函数 $f(x)=x^2$ 的值趋近于常数 9，即

$$\lim_{x\to3^+}x^2=9$$

因为函数 $f(x)=x^2$ 当 $x\to3$ 时的左右两极限相等，即

$$\lim_{x\to3^-}x^2=\lim_{x\to3^+}x^2=9$$

所以我们说当 x 趋近于 3 时，函数 $f(x)=x^2$ 的极限是 9，即

$$\lim_{x\to3}x^2=9$$

例 12 研究函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 当 $x\to1^-$ 与 $x\to1^+$ 时的变化趋势，并求其左极限，右极限及极限值。

解 我们知道函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 时没有定义，所以在 x 趋近于 1 的过程中，$x\neq1$。

当 $x\neq1$ 时，可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^2-1}{x-1}\\&=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\\&=x+1\end{aligned}$$

为了观察函数的变化趋势，我们列出下表：

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	…	趋近于1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	…	趋近于2

x	趋近于1	…	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	趋近于2	…	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1

从上表可以看到，当 x 从左侧趋近于 1 时，$f(x)$趋近于 2，即

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

当 x 从右侧趋近于 1 时，$f(x)$趋近于 2，即

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

由于上述左、右极限相等，我们还可得出

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

习题 12c

1. 对于函数 $f(x) = 2x + 1$，填写下表，并作出函数图象。

x	0.5	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
y						

x	1.5	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
y						

说出函数 $f(x)$在 $x = 1$ 处的左极限、右极限和极限。

2. 填写下列各表，并说明当 x 趋近于某指定数值时函数 f 的变化趋势。

(a) 函数 $f(x)=x^2$，当 $x\to5$ 时：

$x \longrightarrow$

x	4.7	4.9	4.99	4.999	4.9999	4.99999	5
$f(x)$							

$\longleftarrow x$

x	5	5.00001	5.0001	5.001	5.01	5.1	5.3
$f(x)=x^2$							

(b) 函数 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & 若\ 0\leqslant x\leqslant1,\\ 5-x, & 若\ 1<x\leqslant2,\end{cases}$ 当 $x\to1$ 时：

$x \longrightarrow$

x	0	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999	…	1
$f(x)$									

$\longleftarrow x$

x	1	…	1.0001	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5	2
$f(x)$									

(c) 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 若\ x>0,\\ \sin x, & 若\ x\leqslant0,\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时：

$x \longrightarrow$

x	−1.5	−1.0	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	−0.00001	0
$f(x)$									

$\longleftarrow x$

x	0	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.5	1	1.5
$f(x)$									

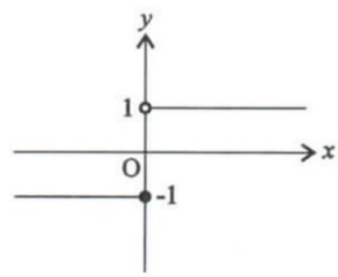
3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$，研究函数当 $x\to4$ 时的变化趋势，是否存在左极限、右极限和极限。

极限不存在的例子

我们已经知道，如果当 x 从左右两边趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的左极限和右极限不相等或者不存在，那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在。下面我们来看一些例子。

例 13 试研究函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0\end{cases}$ 当 x 趋近于 0 时的极限是否存在。

解 先画出函数的图象（如右图）。



当 x 从左侧趋近于 0 时，

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

当 x 从右侧趋近于 0 时，

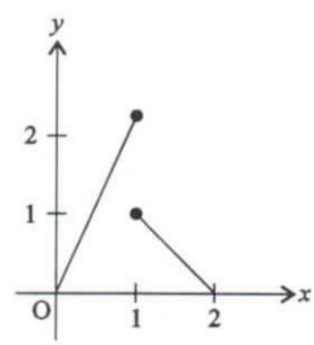
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在。

例 14 试研究函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0 \leqslant x < 1 \\ 2-x, & 1 \leqslant x \leqslant 2\end{cases}$ 当 $x \to 1$ 时的极限是否存在。

解 先画出函数的图象（如右图）。



当 x 从左侧趋近于 1 时，

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

当 x 从右侧趋近于 1 时，

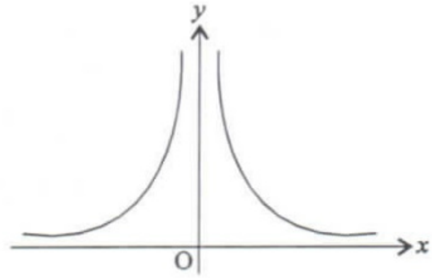
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$

由于函数的左极限与右极限不相等，

可知 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 不存在。

例 15 说明当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ 是否存在。

解 先画出函数的图象。



我们看到，当 x 从左侧或右侧趋近于 0 时，$f(x)$ 的值都无限增大，而并不趋近于一个固定的数值。就是说，函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ 不存在。

习题 12d

1. 试研究函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 当 x 趋近于 0 时的极限是否存在。

2. 试研究函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 x 趋近于 0 时的极限是否存在。

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ 1, & x=0,\\ x, & x>0\end{cases}$ 当 x 趋近于 0 时函数的极限存在吗？为什么？

4. 说明下列函数的极限是否存在。如果存在，求出这个极限。

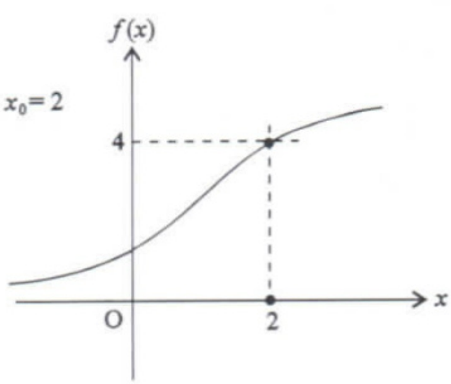
   (a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}3, & x\leqslant 1\\ x^2+1, & x>1\end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$，其中 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

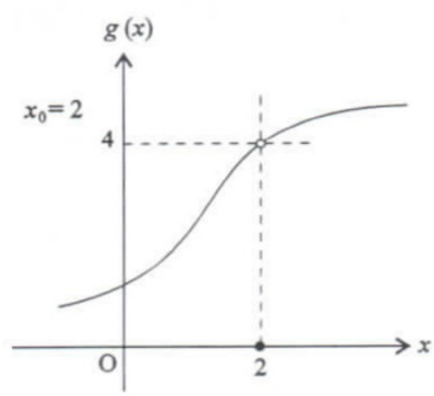
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$

5. 下列函数在点 x_0 处的极限是否存在？若极限存在试求之。

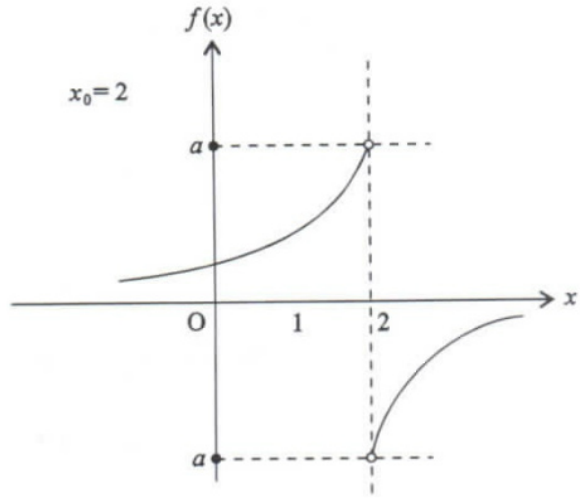
   (a)



   (b)



(c)



● 当 $x\rightarrow\infty$ 时的极限

我们研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 当 x 无限增大时的变化趋势。

从图 12－6 可以看到，当自变量 x 趋向于无穷大时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的值无限趋近于 0，即有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

同样，当 x 趋向于无穷大时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的值也无限趋近于 0，即有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

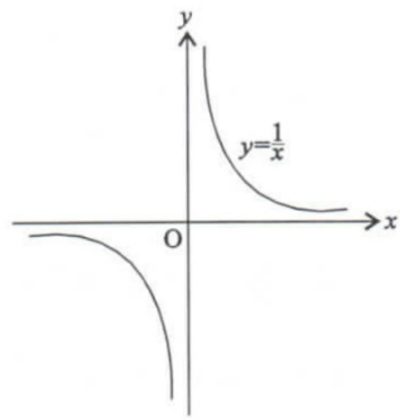


图 12－6

一般地，当自变量 x 趋向于正无穷大时，如果函数 $f(x)$的值无限趋近于一个常数 A，就说当 $x\rightarrow\infty$ 时，函数 $f(x)$的极限是 A。记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\mathrm{A}$$

同理，当 x 趋向于负无穷大时，如果函数 $f(x)$的值无限趋近于一个常数 B，则记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\mathrm{B}$$

例 16 求函数 $y=\dfrac{1}{3^x}$ 在 $x\to\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时的极限。

解 先画出 $y=\dfrac{1}{3^x}$ 的图象如右。从

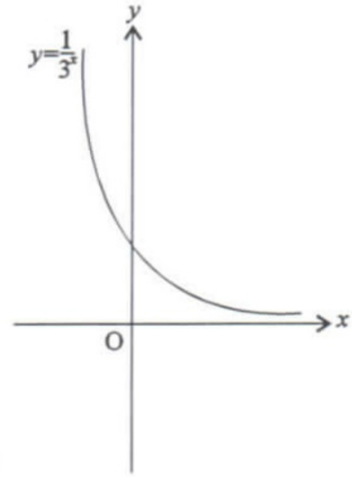
$y=\dfrac{1}{3^x}$ 的图象可以观察出，

当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{3^x}$ 趋向于 0，

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3^x}=0$

当 $x\to-\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{3^x}$ 趋向于正无穷大，

$\therefore$ 当 $x\to-\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{3^x}$ 的极限不存在。



习题 12e

1. 填写下列各表，并说明当 x 趋近于某指定数值时，函数 f 的变化趋势。

(a) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 当 $x\to\pm\infty$ 时：

x	10	100	1000	10 000	100 000	$\cdots$	$+\infty$
$f(x)$							

x	$-\infty$	$\cdots$	$-200\ 000$	$-20\ 000$	-2000	-200	-20
$f(x)$							

(b) 函数 $f(x)=2^x$，当 $x\to\pm\infty$ 时：

x	0	5	15	25	35	45	50	$\cdots$	$+\infty$
$f(x)$									

x	$-\infty$	$\cdots$	-70	-60	-50	-40	-30	-20	-10
$f(x)$									

2. 根据函数极限的定义和函数的图象，说出下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}$　　(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}$

3. 根据函数极限的定义和函数图象，说出下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x}$

12.4 函数极限的性质

函数极限的性质与数列极限的性质类似。

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\mathrm{B}$，那么

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{A}\pm\mathrm{B}$

(b) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$

(c) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$　$(\mathrm{B}\neq 0)$

(d) $\lim\limits_{x\to x_0}[\mathrm{C}f(x)]=\mathrm{C}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$　(C 是常数)

(e) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n$　(n 是常数)

上述性质对于 $x\to\pm\infty$ 时同样成立。

利用函数极限的性质，可以根据已知的较为简单的函数的极限，求出较为复杂的函数的极限。

例 17 求 $\lim\limits_{x\to 3}(3x+2)$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(3x+2)&=\lim_{x\to 3}3x+\lim_{x\to 3}2\\&=3\times 3+2\\&=11\end{aligned}$$

例 18 求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x + 1}$。

解 $$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 - x^2 + 1)}{\lim\limits_{x \to 1} (x + 1)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x \to 1} 2x^3 - \lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1} 1}{\lim\limits_{x \to 1} x + \lim\limits_{x \to 1} 1}$$
$$= \frac{2 \times 1^3 - 1^2 + 1}{1 + 1}$$
$$= 1$$

例 19 求 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$。

解 当 $x \to 4$ 时，分母的极限是 0，所以不能直接运用上面商的极限运算法则。在 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ 里，当 $x \to 4$ 的过程中，$x \neq 4$，即 $x - 4 \neq 0$。因此，可以先将分子与分母约去公因式 $x - 4$ 后再求函数的极限。

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4}$$
$$= \lim_{x \to 4} (x + 4)$$
$$= 8$$

例 20 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3x + 4} - 2}{x}$。

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3x + 4} - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{3x + 4} - 2)(\sqrt{3x + 4} + 2)}{x(\sqrt{3x + 4} + 2)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x + 4 - 4}{x(\sqrt{3x + 4} + 2)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{3}{\sqrt{3x + 4} + 2}$$
$$= \frac{3}{4}$$

例 21 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+2}{x^2+1}$。

解 当 $x\to\infty$ 时，分子、分母的极限都不存在，不能直接运用上面商的极限运算法则。为此，可先将分子、分母同除以 x^2，然后再求极限。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+2}{x^2+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}\\
&= \frac{3-0+0}{1+0}\\
&= 3
\end{aligned}
$$

例 22 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3x^3-x^2+1}$。

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^3-x^2+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{3-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}\\
&= \frac{0+0-0}{3-0+0}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

习题 12f

求下列极限（1 ~ 38）：

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-3)$
2. $\lim\limits_{x\to-3}(x^2-2x+7)$
3. $\lim\limits_{x\to4}x^2(x-3)$
4. $\lim\limits_{x\to1}x(9-2x^2)$
5. $\lim\limits_{x\to2}(x+1)(x-4)$
6. $\lim\limits_{x\to1}(x^3-2x^2+x-1)$
7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-1}{x-4}$
8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

9. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 5x}{x}$

10. $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 + x - 2}$

11. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$

12. $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 + 4x - 1}$

13. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1}$

14. $\lim_{x \to 0} (\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 4} + 1)$

15. $\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$

16. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

17. $\lim_{x \to 1} \frac{2x}{1 + x + x^2}$

18. $\lim_{x \to 1} \frac{4x - 3}{x^2 - 5x + 4}$

19. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

20. $\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + 3x^2}{x^3}$

21. $\lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 2}$

22. $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 + 5}$

23. $\lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$

24. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

25. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 7}$

26. $\lim_{x \to -2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

27. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$

28. $\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + x^2}{x^5 + 3x^4 - 2x^2}$

29. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{7x^2 - 22x + 3}$

30. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

31. $\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{h}$

32. $\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - x^4}{x^3 - x}$

33. $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$

34. $\lim_{x \to 0} \frac{x - x^2 - 6x^3}{2x - 5x^2 - 3x^3}$

35. $\lim_{x \to 0} \sqrt{2x^2 + 1}$

36. $\lim_{x \to 1} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 1}$

37. $\lim_{x \to 7} \frac{x^2 \sqrt{x + 2}}{x^2 + 14}$

38. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 2}}{x - 2}$

求下列极限（39 ~ 46）：

39. $\lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

40. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 1}$

41. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 + 3x^2 + 1}$

42. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 + 1}{3x^3 - 2}\right)$

43. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$

44. $\lim_{x \to \infty} \frac{x + x^2 - 6x^3}{2x - 5x^2 - 3x^3}$

45. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8x^2+4x-1}{x^2-6x+3}$

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+x^2+3}{x^5-x^4+1}$

12.5 连续函数

在实际生活中，事物的变化可以分为两种。一种是连续的变化，如气温的变化、人走路时速度的变化等，都带有逐渐变化的特点；另一种变化是跳跃式的变化，如电话机突然响起来，邮寄信件或包裹，邮费作梯级式增加等。这样，我们有必要研究函数的连续与不连续的问题。

直观上**连续函数**（continuous function）的图象是一条连续不间断的曲线。例如，由函数 $f(x)=x$ 的图象（图12－7），可知 $f(x)=x$ 是连续函数。

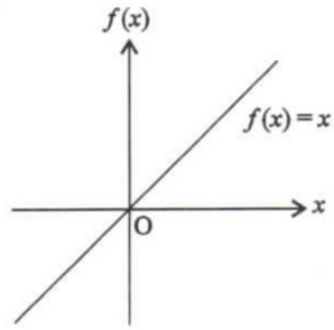


图 12－7

对于连续曲线上的每一点来说，当 $x\to x_0$ 时，都有 $f(x)\to f(x_0)$。于是我们提出下面的定义，

> 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，而且
> $$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$
> 就说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续。

例 23 研究函数 $f(x)=x^2$ 在点 $x=2$ 处的连续性。

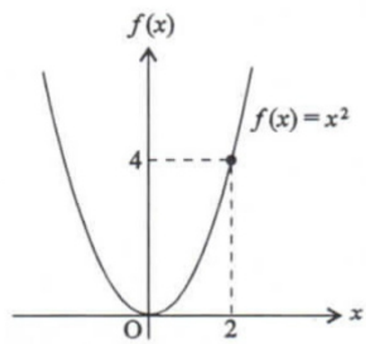
解 函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=2$ 及其附近有定义，而

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$

且 $f(2)=2^2=4$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$

因此，函数 $f(x)=x^2$ 在点 $x=2$ 处连续。



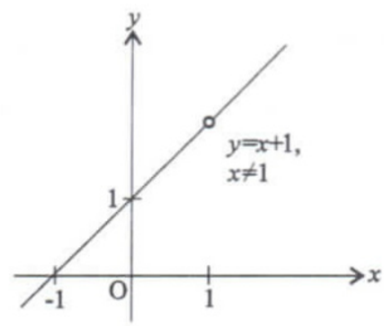
从上面的定义可以看出，函数 $f(x)=x^2$ 在点 $x=x_0$ 处连续必须具备以下三个条件：

1. 函数 $f(x)=x^2$ 在点 x_0 及其附近有定义；
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限等于 $f(x_0)$。

在上述三个条件中，如果有一个条件不具备，函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处就不连续。

例 24 判断函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处是否连续。

解 因为函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处没有定义，所以该函数在点 $x=1$ 处不连续。这个函数的图象如右图所示。



如果函数 $f(x)$ 在一个区间的每一点都连续，就说该函数在该区间是连续的。

例 25 判断函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x \leqslant 1, \\ 2, & x > 1,\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处是否连续。

解 因为 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)=1$，

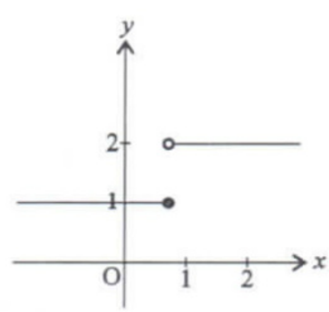
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)=2$，

即左极限与右极限不相等，

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 不存在，

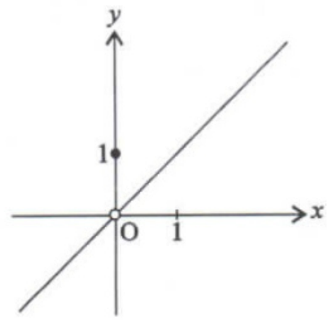
这表明函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续。

其图象如右图所示。



例 26 判断函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否连续。

解 这个函数的图象如右所示。



我们看到 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

但 $f(0)=1$,

即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续。

【注】函数的连续或不连续是针对某一点而言；在某点不连续的函数，在其他点可能是连续的。不过只要函数 f 在一点不连续，则 f 就不是一个连续函数。

习题 12g

判断下列函数在点 $x=x_0$ 处是否连续。

1. $f(x)=2x$，$x_0=0$

2. $f(x)=-\dfrac{2}{3}x+1$，$x_0=1$

3. $f(x)=\dfrac{1}{2x}$，$x_0=2$

4. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$，$x_0=2$

5. $f(x)=1-x^2$，$x_0=3$

6. $f(x)=\begin{cases} 3x, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0, \end{cases}$ $x_0=0$

7. $f(x)=\begin{cases} 1-2x, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $x_0=1$

8. $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{x}$，$x_0=0$

9. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1, \\ 0, & x=1, \end{cases}$ $x_0=1$，$x_0=0$

10. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3, \\ 6, & x=3, \end{cases}$ $x_0=3$，$x_0=5$

11. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ 0, & x>0,\end{cases}$ $x_0=0$，$x_0=-1$，$x_0=2$

12. $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$ $x_0=0$，$x_0=-1$，$x_0=5$

总复习题 12

1. 一个数列的通项公式是 $a_n=\dfrac{n+1}{1-2n}$。

   (a) 写出这个数列的前 5 项，并观察当项数增大时数列的变化趋势。

   (b) 指出这个数列的极限。

2. 求下列数列的极限：

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n^2+2}$　　(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{1-n}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)$　　(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{(n-1)(n-2)}$

3. (a) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$；

   (b) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$。

4. 根据函数极限的定义和函数的图象，说出下列函数的极限：

   (a) $\lim\limits_{x\to2}(x-2)$　　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-2}$　　(c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-2}$

5. 求下列函数的极限：

   (a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$　　(b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2-x^3}{2-x^3}$　　(d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-x}{x^4+x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$　　(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

6. 说明下列函数的极限是否存在。如果存在，求出这个极限。

   (a) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$

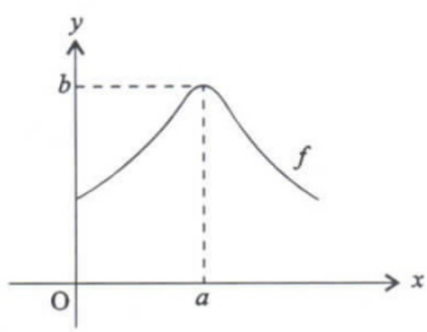
(b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$，其中 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$，$x \neq 1$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$，其中 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

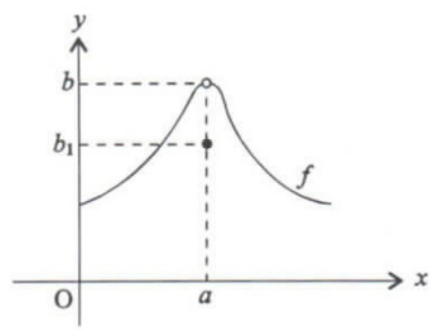
(d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$，其中 $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

7. 求下列各图中之 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$，并说明函数 f 在点 $x = a$ 处是否连续。

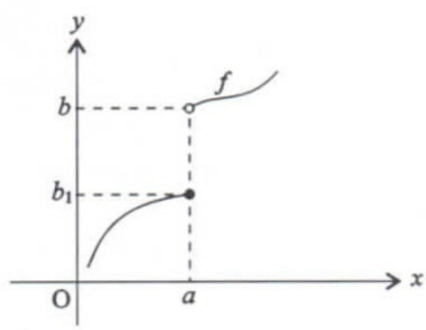
(a)



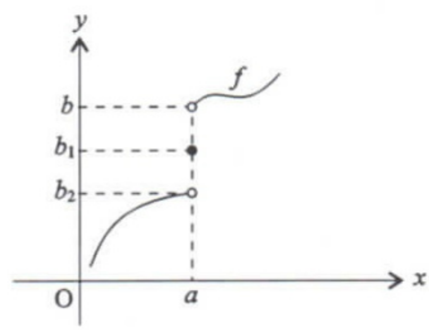
(b)



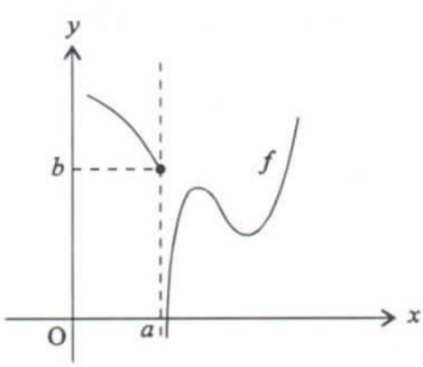
(c)



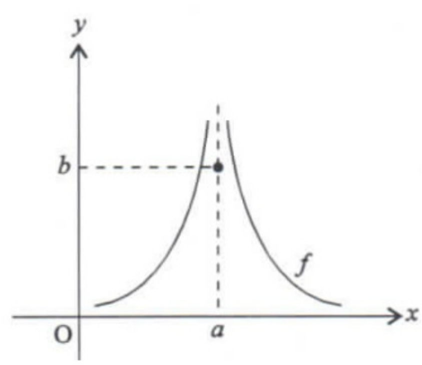
(d)



(e)



(f)



8. 试证明函数 $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ 在点 $x = 0$ 处不连续。

13 微分法(一)

13.1 切线的斜率、瞬时速度

● 切线的斜率

如图 13－1，在曲线 C 上取一点 P 及点 P 邻近的任一点 Q，过点 P、Q 的直线就是曲线 C 的割线 PQ。当点 Q 沿着曲线无限趋近于点 P 时，割线 PQ 绕点 P 转动，而无限地趋近于一个极限位置 PT，直线 PT 就叫做曲线 C 在点 P 处的**切线**（tangent）。

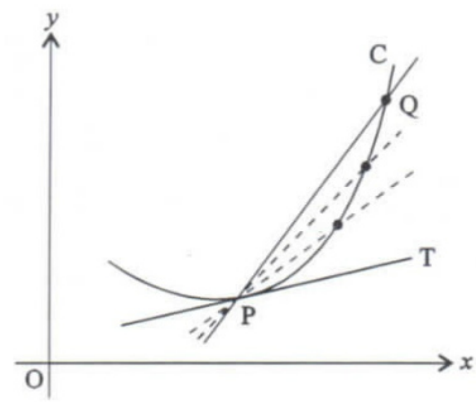


图 13－1

我们知道，已知一条直线上的一点和它的斜率，就可以确定这条直线，因此，要确定曲线 C 在点 P 处的切线，关键就是求出切线的**斜率**（gradient）。

先看一个例子。已知曲线为函数 $y = x^2$ 的图象，求它在点 P(3，9)处的切线的斜率（图 13－2）。

我们先在曲线上取一个邻近 P(3，9)的点 Q(x, y)，可以知道，曲线的割线 PQ 的斜率是

$$m = \frac{y-9}{x-3} = \frac{x^2-9}{x-3} = (x+3)$$

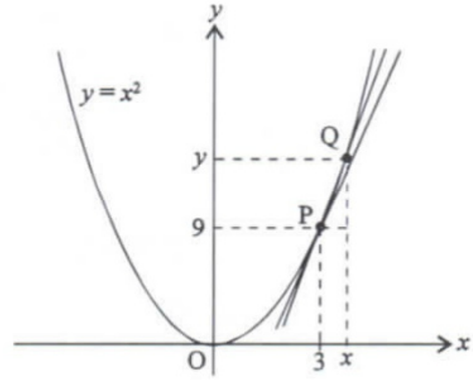


图 13－2

当 x 无限趋近于 3 时，点 Q 沿着曲线

无限地趋近于点 P，割线 PQ 就绕着点 P 无限地趋近于切线的位置，相应的，割线的斜率 m 就无限地趋近于切线的斜率，因此，曲线在点 P(3,9)的切线的斜率是

$$\lim_{x\to 3}\frac{y-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)$$
$$=6$$

一般地，如图 13－3，要求曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率，可以在曲线上取一邻近点 P 的点 $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$，我们把横坐标的增量记作 Δx，相应地，把纵坐标的增量记作 Δy，则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

从而得到割线 PQ 的斜率是

$$\frac{y\text{的增量}}{x\text{的增量}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

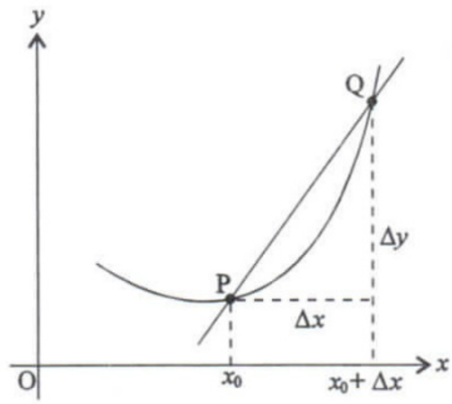


图 13－3

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，上式存在极限，这个极限就是曲线 $y=f(x)$在点 P 处的切线的斜率，用 m 表示斜率，就有

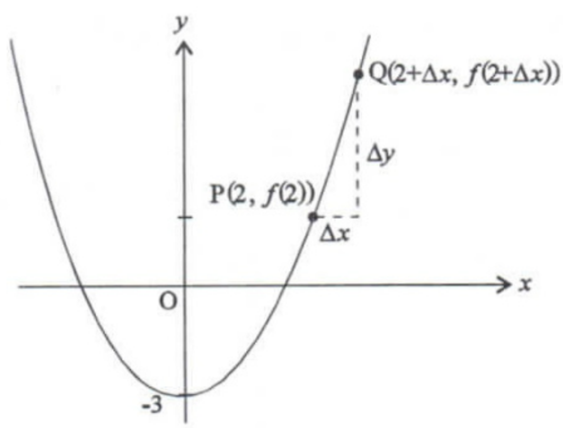
$$m=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

例1 求函数 $f(x)=2x^2-3$ 在 $x_0=2$ 处的切线之斜率。

解 设 P 点为$(2, f(2))$，Q 点为$(2+\Delta x, f(2+\Delta x))$，

PQ 的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{2+\Delta x-2}$$
$$=\frac{[2(2+\Delta x)^2-3]-5}{\Delta x}$$
$$=\frac{8+8\Delta x+2\Delta x^2-3-5}{\Delta x}$$
$$=8+2\Delta x$$



在点 P 的切线的斜率为

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(8+2\Delta x)$$
$$=8$$

瞬时速度

当物体按 $s=s(t)$的规律运动时，从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内，物体的位移 Δs 是

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$$

相应地，在这段时间内物体运动的平均速度 $\bar{v}$ 是

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

怎样确定一个运动物体在某一时刻的速度呢？如果物体进行匀速运动，那么平均速度就是任何时刻的速度。如果物体进行非匀速运动，让我们以自由落体运动为例，讨论一下这个问题。

自由落体运动的方程是

$$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

这里 g 是重力加速度，通常取 $g=9.8$ 米/秒^2。现在求 $t_0=3$ 秒时，物体的运动速度。

不妨先用从 3 秒到（$3+\Delta t$）秒这段时间内物体运动的平均速度去近似地反映物体在 3 秒时的速度，显然，Δt 越小，反映的精确度越高。让我们先计算一下物体从 3 秒分别到 3.1 秒、3.01 秒、3.001 秒、3.0001 秒各段时间内的平均速度，所得结果如下表：

t(秒)	s(米)	Δt(秒)	Δs(米)	$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$(米/秒)
3	44.1			
3.1	47.089	0.1	2.989	29.89
3.01	44.39449	0.01	0.29449	29.449
3.001	44.1294049	0.001	0.294049	29.4049
3.0001	44.10294005	0.0001	0.002940049	29.40049

从上表可以看出，平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 随着 Δt 的变化而变化，Δt 越小，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 就越接近于一个定值，这个定值就是 $\Delta t\to 0$ 时 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限，这个极限就是自由落体在 $t_0=3$ 秒时的瞬时速度，可用 v 表示，

即
$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}g(3+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g(3)^2}{\Delta t} \\ &= \frac{g}{2}\lim_{\Delta t \to 0}(6+\Delta t) \\ &= 3g \\ &= 29.4(\text{米/秒}^2) \end{aligned}$$

一般地，求非匀速运动的物体在某一时刻 t_0 的瞬时速度 v 是

$$v=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

习题 13a

1. 求函数 $f(x)=4x-x^2$ 的图象在点 A(2，4)处的切线的斜率。
2. 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3$ 的图象在点B $(2,\ \frac{8}{3})$ 处的切线的斜率。
3. 求函数 $f(x)=\frac{9}{x}$ 的图象在点 C(3，3)处的切线的斜率。
4. 一球沿一斜面滚下，滚下的垂直距离 h 米与时间 t 秒之间的函数关系为 $h=t^2$。
   (a) 求时间 t 从 5 秒分别到 6 秒、5.1 秒、5.01 秒、5.001 秒、$5+\Delta t$ 秒的增量 Δt，对应的垂直距离增量 Δh，以及这段时间内垂直方向的平均速度 $\frac{\Delta h}{\Delta t}$，并填下表：

t(秒)	h(米)	Δt(秒)	Δh(米)	$\frac{\Delta h}{\Delta t}$ (米/ 秒)
5				
6				
5.1				
5.01				
5.001				
$5+\Delta t$				

   (b) 求在 5 秒时垂直方向的瞬时速度。

5. 动点按 $s=5t^2+10t$ 的规律运动，

(a) 求 $t=4$ 秒时的瞬时速度；

(b) 求 $t=t_0$ 秒时的瞬时速度。

13.2 导数

上节所讨论的斜率、速度，虽然它们的意义不同，但都是求函数对自变量的变化率。求变化率的问题很多，所以有必要撇开它们的具体实际意义，把它们抽象为函数关系进行研究。为此，引进了微积分学中极重要的概念——导数。

● 导数的定义

设函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 及其附近有定义，当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，则函数 y 有相应的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 Δx 的比的极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，我们就说函数 $y=f(x)$在点 x_0 处**可导**或**可微**（differentiable），并把这个极限叫做函数 $y=f(x)$在点x_0 处的**导数**（derivative），记作 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

如果上述极限不存在，我们就说函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不可导或不可微。

有了导数的定义后，变化率都可统称为导数。例如，上节中所讲的函数 $y=x^2$ 的图象在点 $x_0=3$ 处的切线的斜率，就是函数 $y=x^2$ 在点 $x_0=3$ 处的导数；类似地，自由落体在 $t_0=3$ 秒时的瞬时速度，就是函数 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 在点 $t_0=3$ 处的导数。

如果函数 $f(x)$在开区间(a, b)内每一点处都可导，就说 $f(x)$在开区间(a, b)内可导。这时，对于开区间(a, b)内每一个确定的值 x_0，都对应着一个确定的导数值 $f'(x_0)$，这就在开区间(a, b)内，形成一个新的函数，我们把这个新函数叫做 $f(x)$的**导函数**（derived function），记作 $f'(x)$或 y'。根据导数的定义，可以得出

导函数

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$f'(x)$也常记作 $\frac{dy}{dx}$。

【注】① 导函数也简称为导数。今后，如不特别指明求某一点处的导数，求导数就是指求导函数。

② 函数 $y=f(x)$的导函数 $f'(x)$与函数 $y=f(x)$在点 x_0处的导数是有区别的，$f'(x)$是 x 的函数，而 $f'(x_0)$是一个数值；但它们又是有联系的，$f(x)$在点 x_0处的导数 $f'(x_0)$就是导函数 $f'(x)$在点 x_0处的函数值。

③ $\frac{dy}{dx}$是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$的另一种表示，$\frac{dy}{dx}$不是 $dy\div dx$。

由导数的定义可以知道，求函数 $y=f(x)$的导数，可以按以下三个步骤进行，

(1) 求函数的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2) 求函数的增量与自变量的增量的比值，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

(3) 求上面比值的极限，即 $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

以上由导数定义求导数的方法，称为**求导数的第一法则**（differentiation from first principle）。

例2 以导数的第一法则，求函数 $y=x^3-2x+1$ 在点 $x=2$ 处的导数。

解

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+1$$

$$\begin{aligned}\Delta y&=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+1-(x^3-2x+1)\\&=(3x^2-2)\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\end{aligned}$$

而 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2-2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2-2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]\\&=3x^2-2\end{aligned}$$

当 $x=2$，$\frac{dy}{dx}=3\times 2^2-2=10$

例3 求函数 $y=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$的导数。

解 $$y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x+\Delta x}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=-\frac{1}{x^2}$$

例4 求函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数，并求在点 $x=4$ 处的导数。

解 $$y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

当 $x=4$，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{4}}$

$$=\frac{1}{4}$$

习题 13b

试求下列各函数的导函数及其在点 $x_0=2$ 处的导数值（1 ~ 10）：

1. $f(x)=x+1$
2. $f(x)=2x-1$
3. $f(x)=3x+1$
4. $f(x)=x^2+1$
5. $y=x^2-3x$
6. $y=x^2-x-5$
7. $y=2x^2+4$
8. $y=x^3$
9. $y=x^3+2x$
10. $y=\sqrt[3]{x}$

试用导数定义（第一法则），求下列各式的导函数（11 ~ 16）：

11. $y=4x+3$
12. $y=-x-1$
13. $y=x^2-1$
14. $y=x^2+6$
15. $y=\dfrac{1}{x^2}$
16. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f'(x)$，$f'(0)$，$f'(2)$。

13.3 函数的连续性

由导数的意义可以知道，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么，在点 x_0 处

有
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x\right]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\\&=f'(x_0)\cdot 0\\&=0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$$

这就表明，

> 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

但是，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，$f(x)$ 在该点不一定可导。我们看下面的例子。

我们先画出函数 $y=|x|$ 的图象（图 13－4），显然，函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续。那么，函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处可导吗？

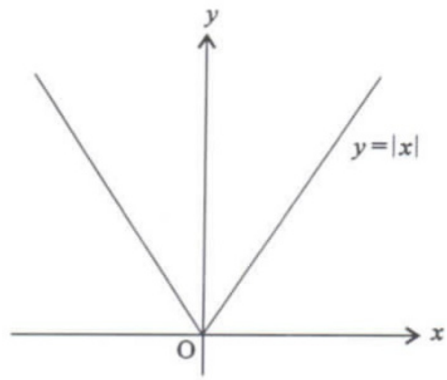


图 13－4

$$\because\quad \Delta y=|0+\Delta x|-|0|$$
$$=|\Delta x|$$
$$=\begin{cases}\Delta x，当\ \Delta x>0\\-\Delta x，当\ \Delta x<0\end{cases}$$

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

上面的计算表明，当 $x\to0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的左、右极限不相等，

也就是说，$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，即函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导。

13.4 微分法则

如果总是根据导数的定义来求导数，就太繁琐了。我们可以应用导数定义推出一些求导数的公式，再利用这些公式去求导数，就方便多了。

● 幂函数的导数

$$\frac{d}{dx}(c)=0\qquad（c为常数）$$

证明：设 $y=f(x)=c$

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)=c$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$
$$=c-c$$
$$=0$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$
$$\therefore\quad \frac{d}{dx}(c)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}0$$
$$=0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1} \qquad (n\text{为实数})$$

证明：（这里只就 n 为正整数的情况加以证明）

设 $\quad y = f(x) = x^n$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n \\ &= [x^n + C_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C_n^n(\Delta x)^n] - x^n \\ &= C_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C_n^n(\Delta x)^n\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + \cdots + C_n^n(\Delta x)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d}{dx}(x^n) &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}[C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + \cdots + C_n^n(\Delta x)^{n-1}] \\ &= n\,x^{n-1}\end{aligned}$$

例5 求函数 $y = x^7$ 的导数。

解 $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^7) \\ &= 7x^6\end{aligned}$$

例6 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的导数。

解 $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} \\ &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

函数的和差的导数

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad (u\text{、}v\text{为可导函数})$$

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

证明：设

$$y = u \pm v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)$$

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(u \pm v) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

这个公式可以推广到任意有限个可导函数（u_1，$u_2 \cdots u_n$），即

$$\frac{d}{dx}(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n) = \frac{du_1}{dx} \pm \frac{du_2}{dx} \pm \cdots \pm \frac{du_n}{dx}$$

例7 求 $y = x^4 - x + 3$ 的导数。

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3)$

$= 4x^3 - 1$

习题 13c

求下列各函数的导数：

1. $y = x^5$
2. $y = x^8$
3. $y = x^{-\frac{1}{7}}$
4. $y = x^{\frac{2}{3}}$
5. $y = x^4 - x^3 + 5$
6. $y = x^3 - x^2 - 6$
7. $y = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
8. $y = x - \frac{1}{x^2}$
9. $y = x^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
10. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
11. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$
12. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x^3}$

函数的积的导数

$$\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\qquad(u,v\text{为可导函数})$$

证明：设 $y=u(x)v(x)$

$$\begin{aligned}y+\Delta y&=(u+\Delta u)(v+\Delta v)\\&=uv+u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v\end{aligned}$$

$$\Delta y=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$$

已知 $\frac{dv}{dx}$ 存在时，v 为连续函数，因此，

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to0}\Delta v&=\lim_{\Delta x\to0}[v(x+\Delta x)-v(x)]\\&=\lim_{\Delta x\to0}v(x+\Delta x)-\lim_{\Delta x\to0}v(x)\\&=v(x)-v(x)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{d}{dx}(uv)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right)\\&=v\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right)\\&=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}+0\\&=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

由上述法则，可以得出

$$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}\qquad(c\text{为常数})$$

例8 求 $y=2x^3-3x^2+5x-4$ 的导数。

解 $y=2x^3-3x^2+5x-4$

$$\frac{dy}{dx}=6x^2-6x+5$$

例9 求 $y=(2x^2+3)(3x-2)$ 的导数。

解 $\frac{dy}{dx}=(3x-2)\frac{d}{dx}(2x^2+3)+(2x^2+3)\frac{d}{dx}(3x-2)$

$=(3x-2)(4x)+(2x^2+3)(3)$

$=18x^2-8x+9$

习题 13d

求下列各函数的导数：

1. $\frac{3}{4}x^4-5x$
2. $3x^{\frac{1}{3}}$
3. $\frac{1}{5}x^{10}-\frac{1}{x}$
4. $2x^2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}$
5. $y=(2x-1)(3x+2)$
6. $y=(x-a)(x-b)$
7. $y=x(x^2-4)$
8. $y=(3x^2+1)(2-x)$
9. $y=(1-2x^3)(x-3x^2)$
10. $y=(2+3x)(1-x+x^2)$
11. $y=(1+nx^m)(1+mx^n)$
12. $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$

函数的商的导数

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}\qquad (v\neq 0，u、v\text{为可导函数})$$

证明：设 $y=\frac{u}{v}$

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}$$

$$=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

当 $\frac{dv}{dx}$ 存在时，v 为连续函数，

因此，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}\right)$$

$$= \frac{v\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v^2 + \lim\limits_{\Delta x \to 0} v\Delta v}$$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

例 10 求 $y = \frac{3x^2}{x+1}$ 的导数。

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2}{x+1}\right) \qquad (u = 3x^2,\ v = x + 1)$$

$$= \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(3x^2) - 3x^2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(6x) - 3x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x(x+2)}{(x+1)^2}$$

例 11 求 $y = \frac{x+3}{x^2+3}$ 的导数。

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+3)\frac{d}{dx}(x+3) - (x+3)\frac{d}{dx}(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{(x^2+3)(1) - (x+3)(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 6x + 3}{(x^2+3)^2}$$

习题 13e

求下列各函数的导数：

1. $y=\dfrac{x-2}{x+2}$

2. $y=\dfrac{3x-5}{7x+2}$

3. $y=\dfrac{x}{x-4}$

4. $y=\dfrac{x^2-3}{x+1}$

5. $y=\dfrac{a-x}{a+x}$

6. $y=\dfrac{1+x}{3-x^2}$

7. $y=\dfrac{x^6-1}{x+1}$

8. $y=\dfrac{3x^2-5x-7}{2x-1}$

9. $y=\dfrac{4-x}{3-2x-3x^2}$

10. $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+6}$

11. $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

12. $y=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$

13.5 链导法——合成函数的微分法

我们先看一个例子。

设 $$y=(3x-2)^2$$
$$=9x^2-12x+4$$

那么 $$\frac{dy}{dx}=18x-12$$

函数 $y=(3x-2)^2$ 可以看成由 $y=u^2$，$u=3x-2$ 复合而成的。

由于 $$\frac{dy}{du}=2u$$
$$\frac{du}{dx}=3$$

因而 $$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2u\,(3)$$
$$=2\,(3x-2)\,(3)$$
$$=18x-12$$

于是，可得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

一般地，如果函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 有导数 $\frac{dy}{du}$ 和 $\frac{du}{dx}$，那么合成函数 $y=f(g(x))$ 也有导数，并且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

这是由于，对于合成函数 $y=f(g(x))$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\end{aligned}$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

上面的结果可以进一步推广。如果 $y=f(u)$，$v=g(x)$，$u=h(x)$，那么

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

上述法则就是**链导法**（Chain rule）。

例 12 求 $y=(2x+1)^5$ 的导数。

解 设 $u=2x+1$，$y=u^5$

由链导法，有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=\frac{d}{du}(u^5)\cdot\frac{d}{dx}(2x+1)\\&=5u^4(2)\\&=5(2x+1)^4(2)\\&=10(2x+1)^4\end{aligned}$$

例 13 求 $y = \dfrac{1}{(1-3x)^4}$ 的导数。

解 设 $y = u^{-4}$，$u = 1 - 3x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= -4u^{-5}(-3) \\ &= 12u^{-5} \\ &= 12(1-3x)^{-5} \\ &= \frac{12}{(1-3x)^5}\end{aligned}$$

熟练以后，可以省略中间过程。比如，例 12 可以写成

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 5(2x+1)^4 \frac{d(2x+1)}{dx} \\ &= 10(2x+1)^4\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 5(2x+1)^4(2) \\ &= 10(2x+1)^4\end{aligned}$$

例 14 求 $y = \sqrt{x^2+2x+3}$ 的导数。

解

$$\begin{aligned}y &= (x^2+2x+3)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+2) \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\end{aligned}$$

例 15 求 $y = [g(x)]^n$ 的导数。

解 设 $u = g(x)$，$y = u^n$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= nu^{n-1}\frac{d}{dx}[g(x)] \\ &= n[g(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}[g(x)]\end{aligned}$$

习题 13f

求下列各函数的导数：

1. $(2x+5)^3$
2. $2(3x-1)^7$
3. $(ax+b)^4$
4. $(x^2+1)^4$
5. $(2x^3-1)^3$
6. $(x^2+3x-1)^2$
7. $(\frac{1}{3}x^3-1)^{-2}$
8. $\sqrt{3x-1}$
9. $\sqrt{3x^2-2x+1}$
10. $\frac{1}{4x-3}$
11. $4(x^3+2x)^{-\frac{1}{4}}$
12. $\frac{1}{(2x^2-x-6)^2}$
13. $\sqrt[3]{2x^3-5}$
14. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-4}}$
15. $\frac{2}{(x^3-6)^2}$

例 16 微分 $y=(3x-1)^3(x^2+5)^2$。

解

$$y=(3x-1)^3(x^2+5)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(x^2+5)^2[3(3x-1)^2(3)]+(3x-1)^3[2(x^2+5)(2x)]\\&=(x^2+5)(3x-1)^2[9(x^2+5)+4x(3x-1)]\\&=(x^2+5)(3x-1)^2(21x^2-4x+45)\end{aligned}$$

例 17 求 $y=(2x^2-3)\sqrt{(1+x^2)}$ 的导数。

解

$$y=(2x^2-3)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(4x)+(2x^2-3)\left[\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right]\\&=4x\sqrt{1+x^2}+\frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{x(4+4x^2+2x^2-3)}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{x(6x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

例 18 求 $y = \frac{(4x-3)^6}{x+2}$ 的导数。

解

$$y = \frac{(4x-3)^6}{x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)[6(4x-3)^5(4)] - (4x-3)^6(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(4x-3)^5[24(x+2)-1]}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(4x-3)^5(24x+47)}{(x+2)^2}$$

例 19 求 $y = \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}$ 的导数。

解

$$y = \frac{x-3}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}(1) - (x-3)\left[\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right]}{x+1}$$

$$= \frac{2(x+1) - x + 3}{2(x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(分子，分母分别乘以 } 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\text{)}$$

$$= \frac{x+5}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

习题 13g

求下列各函数的导数：

1. $(x+1)(x+2)^3$
2. $(1-x^2)(x+2)^3$
3. $(x^2+x)(x-1)^3$
4. $(x-2)\sqrt{1-x^2}$
5. $\sqrt{x}(x-3)^3$
6. $x^2(x-1)(x+2)^2$
7. $\frac{x}{(1+x)^2}$
8. $\frac{(x+1)^2}{x^3}$
9. $\frac{3x-1}{\sqrt{2x+1}}$
10. $\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$

11. $\dfrac{(1+x)^2}{1+\sqrt{x}}$

12. $\dfrac{(2-5x)^2}{x^3-1}$

13. $\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5$

14. $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^3$

15. $(2x-1)^2(2-3x)^3$

16. $\sqrt{a+bx-cx^2}$

17. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

18. $x\sqrt{1+x^2}$

19. $(1+x)\sqrt{2+x^2}\ \sqrt[3]{3+x^3}$

20. $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

13.6 高阶导数

在讨论物体作直线运动的瞬时速度时，我们引进了导数概念，但对许多实际问题，只求一次导数是不够的。例如，在直线运动中，$s=s(t)$表示路程随着时间变化的规律，那么物体的瞬时速度是

$$v=\frac{ds}{dt}\qquad (\text{或 } s'(t))$$

而速度对时间的变化率，即加速度是

$$\begin{aligned} a&=\frac{dv}{dt}\qquad (\text{或 } v'(t))\\ &=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)\\ &=\frac{d^2s}{dt^2}\qquad (\text{或 } s''(t))\end{aligned}$$

即，物体运动的速度 $v(t)$是位移函数 $s(t)$的导数，而物体运动的加速度是位移函数 $s(t)$的导数的导数，这就是本节要学习的高阶导数。

在上式中，$s''(t)$ 或 $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ 是 $s(t)$的导数的导数，叫做 $s(t)$ 的**二阶导数**（second derivative）。

一般地，函数 $y=f(x)$的导函数 f' 的导函数，记作

$$(f')'=f''\qquad \text{或}\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

叫做 f 的二阶导数，而 f' 则叫做**一阶导数**（first derivative）。

类似地，$f(x)$的二阶导数$f''(x)$的导数叫做$f(x)$的三阶导数，…，$f(x)$的$n-1$阶导数$f^{n-1}(x)$的导数叫做$f(x)$的n阶导数，记作$f^{n}(x)$。

例 20 求 $y=ax^2+bx+c$ 的二阶导数。

解
$$\frac{dy}{dx}=2ax+b$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=2a$$

例 21 求 $y=2x^3+x^2+1$ 的各阶导数。

解
$$\frac{dy}{dx}=6x^2-2x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x-2$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=12$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^5y}{dx^5}=\cdots=0$$

习题 13h

求下列各函数的二阶导数（1～10）：

1. $y=4x^6$
2. $y=2x-\frac{x^3}{2}$
3. $y=(1+x^2)^2$
4. $y=x+\frac{1}{x}$
5. $y=x^2-\frac{1}{x^2}$
6. $y=\sqrt{1+x^2}$
7. $y=\sqrt{a^2-x^2}$
8. $y=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$
9. $y=x\sqrt{1+x^2}$
10. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

求下列各函数的一阶、二阶、三阶导数（11～13）：

11. $y=3x^4$
12. $y=\frac{2}{x}$
13. $y=x^3-3x^2+3x$

14. 已知 $y=2x^3-3x^2-6x+10$，求 y'，y''，y'''，在 $x=1$ 处的值。

15. 求 $y=x^n$（n 为正整数）的各阶导数。

13.7 三角函数的微分法

● 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$

在讨论 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ 之前，先观察一下当 x 趋近 0 时函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的值的变化情况，有关数据如下表：

x（弧度）	$\sin x$	$\dfrac{\sin x}{x}$
1.000	0.84147098	0.84147098
0.100	0.099833417	0.99833417
0.010	0.0099998334	0.99998334
0.001	0.00099999984	0.99999984

从上表可以看出，当 x 趋向于 0 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的值趋近于 1，由此可以推测

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

下面我们证明一下这个结论。

如图 13－5，在单位圆中，以 OA 为始边的圆心角 x 是用弧度来度量的，角的终边与圆相交于 P，MP⊥OA，AN 是过 A 点的切线，AN 与 OP 交于 N。从图中可知，

$$MP=\sin x$$

$$\overset{\frown}{PA}=r\theta=x\quad(r=1,\ \theta=x)$$

$$AN=\tan x$$

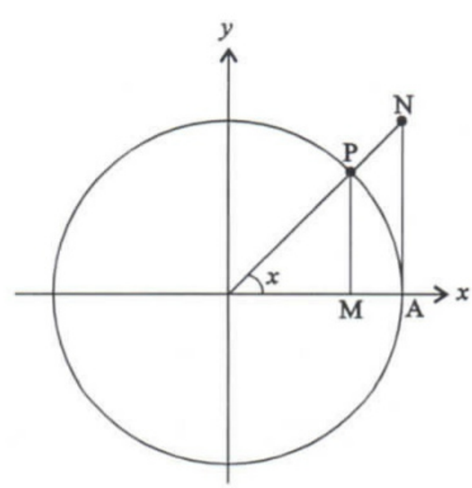


图 13－5

并且，ΔOAP 的面积 $<$ 扇形 OAP 的面积 $<$ ΔOAN 的面积

$\therefore$
$$\frac{1}{2}(1)\sin x < \frac{1}{2}(1)x < \frac{1}{2}\tan x$$

$\therefore$
$$\sin x < x < \tan x$$

当 x 为不大的正角时，$\sin x > 0$，用 $\sin x$ 除上式，

得
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

于是，
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

当 x 改变符号时，上式仍成立。

又
$$\lim_{x \to 0} 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

所以，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 在 1 与 $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$ 之间，即在两个 1 之间，当然只能等于 1（挟挤定理）。

$\therefore$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

由此，也可得
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = 1$$

例 22 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$。

解
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$

例 23 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$。

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)(2x)(3x)}{(\sin 2x)(2x)(3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2}\right]$$
$$=(1)(1)\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

例 24 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\times 1^2$$
$$=\frac{1}{2}$$

习题 13 i

求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 3x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\tan x}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \frac{3x}{2}}{x}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} \cdot \cos x$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} x \cot x$

15. $\lim\limits_{x \to 0} 7x \cos x$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sin 5x}$

三角函数的导数公式

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

证明：设　$y = \sin x$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} \qquad \text{(和差化积公式)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\because \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

证明：因为 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$
$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right](-1)$$
$$= -\sin x$$

【注】以上公式的证明运用了合成函数的微分法。此公式也可用导数的定义（即求导数的第一法则）来证明。

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

证明：因为 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

以上三个公式的证明从略。

例 25 求下列函数的导数：

(a) $y = \sin 3x$　　(b) $y = \cos^4 x$

解　(a) $y = \sin 3x$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos 3x)(3) \quad \text{（链导法）}$$
$$= 3\cos 3x$$

(b) $y = \cos^4 x$

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos^3 x\,(-\sin x)$$
$$= -4\cos^3 x\,\sin x$$

例 26　求 $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ 的导数。

解
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x)(\cos x) - \sin x\,(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{1}{1+\cos x}$$

例 27　求 $y = \tan^2 5x$ 的导数。

解　$y = \tan^2 5x$

$$\frac{dy}{dx} = (2\tan 5x)(\sec^2 5x)(5)$$
$$= 10\tan 5x\,\sec^2 5x$$

例 28　求 $y = x\sec x$ 的导数。

解　$y = x\sec x$

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x)(1) + x\,(\sec x\,\tan x)$$
$$= \sec x\,(1 + x\tan x)$$

例 29　微分 $y = 3\sin(2x-5)$。

解　$y = 3\sin(2x-5)$

$$\frac{dy}{dx} = [3\cos(2x-5)](2)$$
$$= 6\cos(2x-5)$$

习题 13j

求下列各函数的导数（1 ~ 6）：

1. (a) $\sin 2x$ (b) $3\cos 2x$ (c) $\sec 3x$
   (d) $2\cot\frac{1}{3}x$ (e) $\sin\frac{1}{4}x$ (f) $\tan(1+2x)$
   (g) $\cos(4-5x)$ (h) $\frac{3}{2}\sin(3x-2)$ (i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$
2. (a) $\sin^3 x$ (b) $\cos^4 x$ (c) $3\tan^2\frac{1}{6}x$
   (d) $\operatorname{cosec}^2 2x$ (e) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ (f) $2\cot^2(3x+2)$
   (g) $\sqrt{\sin 4x}$ (h) $\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$ (i) $\sqrt[3]{\sec 4x}$
3. (a) $3\sin x^2$ (b) $\cos^3(x^2)$ (c) $\cos\sqrt{x}$
   (d) $\sin(\sin x)$ (e) $\tan\sqrt{x-a}$ (f) $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$
   (g) $\sin^2\sqrt{1+x^2}$
4. (a) $\sin 3x-\cos 3x$ (b) $\tan 2x+\cot 4x$ (c) $\sec x-\operatorname{cosec} 5x$
   (d) $\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}$ (e) $\tan x-x$ (f) $\sin 2x+\cos^2 x$
   (g) $\cos x^2-\sin\sqrt{x}$ (h) $1-4\sin^2 x\cos^2 x$ (i) $4x^2+\sin 4x$
5. (a) $\sin 4x\tan 7x$ (b) $\sin 3x\cos 2x$ (c) $\sin^2 x\sin 8x$
   (d) $(1+\sin x)^3$ (e) $(2-\cos x)^2$ (f) $x^2\cos x$
   (g) $x\sin^2 x$ (h) $2x\cos(1-x)$ (i) $(1+x^2)\tan x$
   (j) $2\sin x\cos x$ (k) $3x\cos x$ (l) $x\tan(2x+1)$
6. (a) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ (b) $\dfrac{1}{1+\cos x}$ (c) $\dfrac{\cos 2x}{1-\cos x}$
   (d) $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ (e) $\dfrac{1}{3\sin^3 2x}$ (f) $\dfrac{x}{\tan x}$
   (g) $\dfrac{\sin^2 x}{2x}$ (h) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ (i) $\dfrac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$
   (j) $\dfrac{\sin 2x}{1+x}$ (k) $\dfrac{\cos x}{2x}$ (l) $\dfrac{x^2}{\sin x}$

7. 已知 $y=\dfrac{x}{2+\cos x}$，求当 $x=0$，$\dfrac{1}{2}\pi$，π 时的导数值。

8. 已知 $y=x\sin x$，试证 $\dfrac{1}{y}\dfrac{d}{dx}-\dfrac{1}{x}=\cot x$。

9. 若 $y=\sin 2x+\cos 2x$，试证 $\dfrac{dy}{dx}+2y=4\cos 2x$。

10. 若 $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。(提示：$\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1$。)

11. 若 $y=\sec x+\tan x$，试证 $\dfrac{dy}{dx}=y\sec x$。

12. 若 $y=\tan x^\circ$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

13. 若 $r=\sin 3t-2\cos t$，求当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时二阶导数 $\dfrac{d^2r}{dt^2}$ 之值。

14. 若 $r=\sin^2\theta$，试证 $\dfrac{dr}{d\theta}=\sin 2\theta$，并求当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时 $\dfrac{d^2r}{d\theta^2}$ 之值。

15. 证明下列公式：

(a) $\dfrac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x$

(b) $\dfrac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$

(c) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x\cot x$

总复习题 13

1. 求下列曲线在指定点处切线的斜率：

(a) $y=2x-x^3$，点 $(-1,-1)$；

(b) $y=\dfrac{1}{4}x^2$，点 $(2,1)$。

2. 一质点作直线运动，在时间 t 秒时，质点的位置是 $S=6t-t^2$(米)。

(a) 求 $t=0$，2，3，6，7 时质点的位置；

(b) 求 $t=0$，2，3，6，7 时质点的瞬时速度。

3. 根据导数的定义，求下列函数在指定点处的导数：

(a) $f(x)=4x^2+3x+1$，点 $x=5$；

(b) $f(x)=\sqrt{6x}+2$，点 $x=1$。

4. 根据导数的定义，求下列函数的导数：

(a) $f(x)=x^3$　　(b) $f(x)=\dfrac{6}{x-2}$

5. 求下列函数的导数：

(a) $y=2x^5-3x^4+7x^2+9$

(b) $y=x^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $y=(x^2-1)(x^2-3)(x^2-5)$

(d) $y=\dfrac{x^2}{(x^2-1)^3}$

(e) $y=(5x+2)^n \quad (n>1)$

(f) $y=\sqrt[n]{3-2x}$

(g) $y=\sqrt{x+2}\,(x^2+7)^{12}$

(h) $y=\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-2ax}}$

(i) $y=\dfrac{x^5}{a+b}-\dfrac{x^2}{a-b}-x$，$a$，$b$ 为常数

(j) $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}$

6. 求下列函数的二阶导数：

(a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$　　(b) $f(x)=\sin ax+\cos bx$

7. 求下列函数的导数：

(a) $y=2\sin 2x-2\cos(x-\pi)$　　(b) $y=5\tan(2x+3)+2\tan\dfrac{\pi}{4}$

(c) $y=\dfrac{2\sin(6x+3)}{\cos(6x+3)}$　　(d) $y=\dfrac{\sin 2x}{1+x}$

(e) $y=\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$　　(f) $y=\sin^4 3x\cos^3 4x$

(g) $y=2\sin x+\cos 3x$　　(h) $y=\tan(ax+b)$

(i) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

8. 求函数 $y=f(x)=x^3$ 在点 $x_1=2$，$x_2=\sqrt{5}$ 的导数。

9. 已知 $x=\cos t-\dfrac{1}{t^2}+\sin\dfrac{\pi}{7}$，求 x'。

10. 已知 $y=x^3\sin x\cos x$，求 y'。

11. 设 $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$，求 f'，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$。

12. 已知 $y=2x^3+3x^2-72x+13$，当 $\dfrac{dy}{dx}=0$ 时，x 为何?

13. 当 x 为何值时，曲线 $y=x^3+6x^2+45x+12$ 的斜率方为 36?

14. 求当函数 $f(x)=x^2+3x+4$ 与 $g(x)=x^3+x^2+78$ 的斜率相等时 x 之值。

15. 求 $\dfrac{d}{dx}(2x+5)^3$，并以 $a_0+a_1x+a_2x^2$ 形式表示之。

16. 设 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 及 $\left(\dfrac{d}{dx}P\right)^2=\dfrac{d}{dx}(P^2)$，试证 $a_1=a_2=a_3=0$。

17. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，已知 $f(0)=5$，$f'(0)=3$，$f'(2)=-7$。试求 a，b 及 c 之值。

18. 已知 $f(u)=2u+3u^2-4$，$u(x)=1-3x$。

(a) 求 $h(x)=f[u(x)]$ 及 $\dfrac{dh}{dx}$。

(b) 用链导法求 $\dfrac{dh}{dx}$。

19. 设 $h(x)=f[u(x)]$，已知 $u(0)=1$，$f'(1)=3$ 及 $h'(0)=4$。求 $u'(0)$。

20. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，求 $f(2)$，$f'(2)$，$f''(2)$。

21. 已知 $x^2+y^2=9$，求 y'，y''，y'''，$y^{(4)}$。答案以 x 和 y 表示之。

22. 求下列各函数的二阶导数：

(a) $f(x+3)=x^3+7x^2+3$

(b) $f(x^2)=1+x^2-3x^6$

14 微分法的应用(一)

14.1 切线与法线

在前一章我们已经知道，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率是

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

设曲线 $y=f(x)$ 的切线与 x 轴正方向的夹角为 a，那么

$$f'(x)=\tan a$$

因此，如果求曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线 PT，只要先求出函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，然后根据直线方程的点斜式，就得到切线 PT 的方程。

经过点 P 并且与切线 PT 垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的**法线**(normal)。我们知道，如果两条直线垂直，那么，它们的斜率的乘积为 -1。已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率是 $f'(x_0)$，那么，当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的法线的斜率是 $-\frac{1}{f'(x_0)}$。

例1 求曲线 $y=x^3$ 在点 P(2, 8) 处的切线方程与法线方程。

解 $y=x^3$

$m=\frac{dy}{dx}=3x^2$

在点(2, 4) 的切线斜率 $m=3(2)^2=12$

$\therefore$ 在点 P(2, 8) 的切线方程是

$$y-8=12(x-2)$$

$$12x-y-16=0$$

在点 P(2，8) 的法线斜率为 $-\frac{1}{12}$，法线方程为：

$$y-8=-\frac{1}{12}(x-2)$$

$$x+12y-98=0$$

例2 求曲线 $y=\sin x$ 在点 $P\left(\frac{\pi}{2}，1\right)$ 处的切线方程与法线方程。

解 $y=\sin x$

$m=\frac{dy}{dx}=\cos x$

在点 $P\left(\frac{\pi}{2}，1\right)$ 的切线斜率　$m=\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\therefore$ 切线方程是　$y-1=0$

在点 P 的法线斜率不存在，即法线与 y 轴平行，

$\therefore$ 方程是 $x=\frac{\pi}{2}$

例 3 求曲线 $y=x^2-4x+3$ 在点 $x=4$ 处的切线方程式。

解 $y=x^2-4x+3$

$m=\frac{dy}{dx}=2x-4$

在点 $x=4$ 的切线斜率为　$m=2(4)-4=4$

当 $x=4$ 时，$y=3$，

$\therefore$ 在点 (4，3) 处的切线方程为：

$$y-3=4(x-4)$$

$$4x-y-13=0$$

习题 14a

1. 求抛物线 $y=x^2+2$ 在点 P(2，6) 处的切线方程与法线方程。
2. 求曲线 $y=\frac{1}{1-x}$ 在点 $x=-1$ 处的切线方程。
3. 求曲线 $y=\sin x$ 在点 $P\left(\frac{\pi}{6}，\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程与法线方程。

4. 求曲线 $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x+1}$ 在 $x=2$ 处的切线方程。

5. 求曲线 $y=(x+1)(x-1)(x-3)$ 经过 x 轴上的点的切线方程式。

6. 已知曲线 $y=ax+bx^2$ 经过 $(1,\ 0)$，且在此点的切线斜率为 $\dfrac{1}{2}$，求 a 与 b 之值。

7. 验证曲线 $y=x^2-3x+1$ 与曲线 $x(y+3)=4$ 在点 $(2,\ -1)$ 处的切线互相垂直。

8. 求曲线 $y=x^3-2x^2$ 在点 $x=0$ 处的法线方程，并求此法线与直线 $y=4$ 的交点。

9. 求曲线 $y=11x-3x^2$ 上与直线 $x+y-2=0$ 平行的切线方程。

10. 曲线 $y=\dfrac{4}{(1-x)^2}$ 在点 P 的斜率为 1，求 P 点的坐标及在 P 点上的切线方程。

11. 求曲线 $x^2+y^2=5$ 及 $y^2=4x$ 之交角(即两曲线在交点处两切线之夹角)。

12. 曲线 $y=2x^2+px+q$ 在点 $(-2,\ 11)$ 的切线与直线 $2y=x+7$ 交成直角，求 p、q 的值。

13. 已知曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 在 $x=0$ 及 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，且曲线过点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，求 a，b，c 之值。

14. 若 $x+y+2=0$ 为曲线 $y=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处的切线方程，求 a 与 b 的值。

14.2 函数的增减性

● 单调函数

观察下列给定区间 D 上的函数 $f(x)$ 的图象，如果对于 D 中任意两个数 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

1. 总有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么，就说 $f(x)$ 在区间 D 上是**增函数**(increasing function)(图 14－1)；

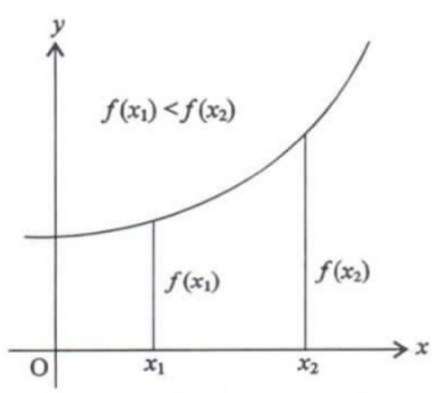


图 14－1

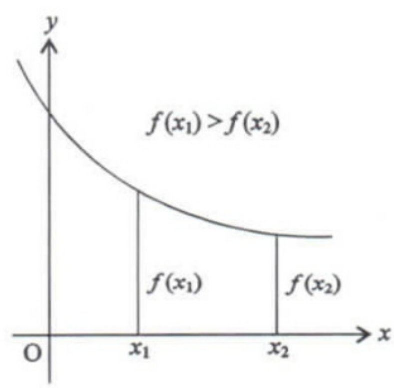


图 14－2

2. 总有 $f(x_1) > f(x_2)$，那么，就说 $f(x)$ 在区间 D 上是**减函数**(decreasing function)(图 14-2)。

如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么，$f(x)$ 就叫做区间 D 上的**单调函数**(monotone function)。

观察图 14-3:

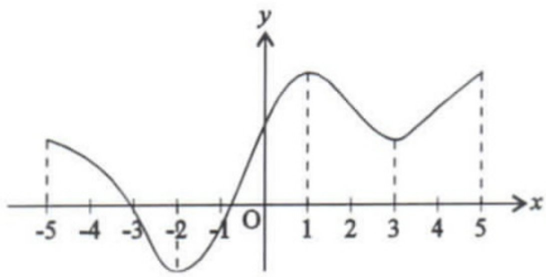


图 14-3

这是定义在区间 $[-5, 5]$ 上的函数 $f(x)$ 的图象，根据这个图象可以知道，函数 $f(x)$ 在区间 $[-5, -2]$，$[1, 3]$ 上是减函数，在区间 $[-2, 1]$，$[3, 5]$ 上是增函数。

例4 证明函数 $f(x) = 3x + 2$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数。

解 设 x_1，x_2 是任意两个实数，且 $x_1 < x_2$，

则 $f(x_1) = 3x_1 + 2$，$f(x_2) = 3x_2 + 2$，

$$f(x_2) - f(x_1) = (3x_2 + 2) - (3x_1 + 2) = 3(x_2 - x_1) > 0$$

即 $f(x_2) > f(x_1)$

所以函数 $f(x) = 3x + 2$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数。

例5 证明函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上是减函数。

解 设 $x_1 > 0$，$x_2 > 0$，且 $x_1 < x_2$，

则 $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$，$f(x_2) = \dfrac{1}{x_2}$，

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} < 0$$

即 $f(x_2) < f(x_1)$

所以函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上是减函数。

函数增减性的判别法

观察图 14－4，可知当函数 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内是增函数时，其在此区间内任一点的切线斜率都是正数，即 $f'(x)$（或 $\frac{dy}{dx}$）>0；当函数 $f(x)$ 在区间 $(b,\ c)$ 内是减函数时，其在此区间内任一点的切线斜率都是负数，即 $f'(x)<0$。

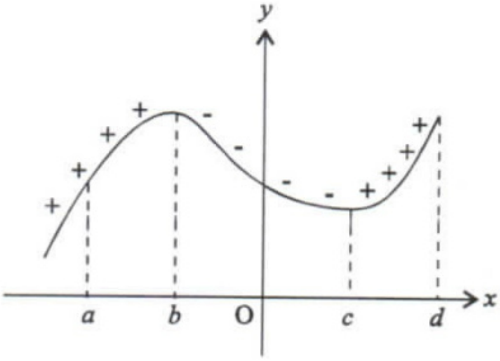


图 14－4

由此，我们可以得到一个用导数的符号来判别函数增减性的方法：

定理 设函数 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内可导，在 $[a,\ b]$ 内连续，

(1) 如果在 $(a,\ b)$ 内，$f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 内是增函数；

(2) 如果在 $(a,\ b)$ 内，$f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 内是减函数。

例6 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 在哪个区间内是增函数，哪个区间内是减函数。

解 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,\ \infty)$；

$f'(x)=6x^2-18x+12$

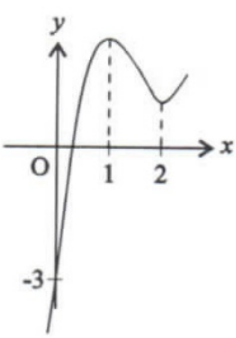
$\quad\ =6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1,\ 2$。

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[-\infty,\ 1]$ 内是增函数；

当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,\ 2]$ 内是减函数；

当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[2,\ \infty]$ 内是增函数。



上述函数的增减性，也可列表表示如下：

区 间	$(-\infty,\ 1)$	$(1,\ 2)$	$(2,\ \infty)$
$f'(x)$ 的符号	+	−	+
$f(x)$ 的增减性	↗	↘	↗

习题 14b

根据函数单调性的定义证明下列各题（第 1 ~ 2 题）：

1. 函数 $f(x)=x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数。

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上是增函数。

确定下列函数在哪个区间内是增函数，哪个区间内是减函数。

3. $f(x)=-4x+2$
4. $f(x)=(x-1)^2$
5. $f(x)=\dfrac{2}{x}$
6. $f(x)=\dfrac{1}{2x^2}$
7. $f(x)=x^2-2x+5$
8. $f(x)=3x-x^3$
9. $f(x)=x^2(x-3)$
10. $f(x)=x^3-x^2-x$

14.3 函数的极大值与极小值

极值与驻点

观察图 14 – 5 的曲线。

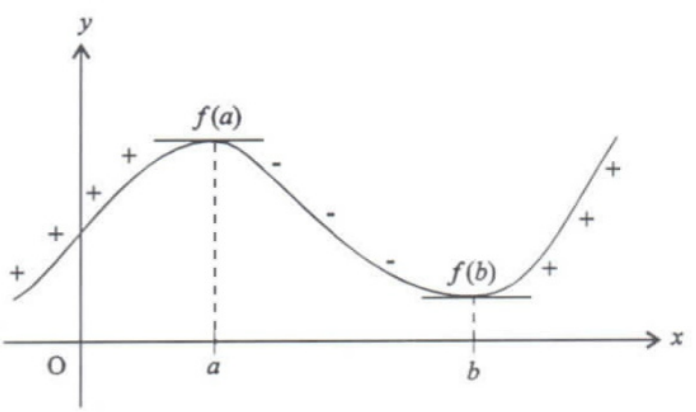


图 14 – 5

由图中可以看出，在 $x=a$ 的函数值 $f(a)$ 比它附近点的函数值要大，是 $x=a$ 点附近的**极大值**（maximum value）；在 $x=b$ 的函数值 $f(b)$ 比它附近点的函数值要小，是 $x=b$ 点附近的**极小值**（minimum value）。

一般地，

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 左和右附近都有定义，

(1) 如果在 $x=a$ 的函数 $f(a)$ 大于它附近各点的函数值，即 $f(a)\geqslant f(x)$，我们就说函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处有极大值 $f(a)$，点 $(a, f(a))$ 叫做**极大值点**(maximum point)；

(2) 如果在 $x=a$ 的函数 $f(a)$ 小于它附近各点的函数值，即 $f(a)\leqslant f(x)$，我们就说函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处有极小值 $f(a)$，点 $(a, f(a))$ 叫做**极小值点**(minimum point)；

极大值与极小值统称**极值**(extreme value)，极大值点与极小值点统称**极值点**(extreme point)。

由图 14－5 还可以看出，曲线在极值点处切线的斜率为 0。一般地，有如下定理。

如果函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，并且在点 $x=a$ 处有极值，那么 $f'(a)=0$。

我们把满足 $f'(x)=0$ 的点，叫做**驻点**(stationary point)。极值点一定是驻点，但驻点不一定是极值点。例如，函数 $f(x)=x^3$ 的导数是 $f'(x)=3x^2$，在 $x=0$ 处有 $f'(0)=0$，即 0 点是驻点，但它不是极值点(图 14－6)。

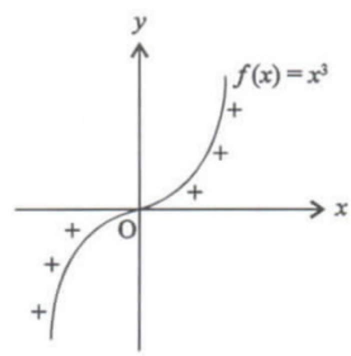


图 14－6

极值的判别法

(一) 第一判别法

进一步观察图 14－5 可以看出，曲线在极大值点左侧切线的斜率为正，右侧为负；曲线在极小值点左侧切线的斜率为负，右侧为正。由此，可得如下定理：

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，

(1) 如果在 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么，$f(a)$ 是极大值；

(2) 如果在 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么，$f(a)$ 是极小值。

上述定理实际是利用导数说明，如果函数在一点左侧单调上升(下降)，而在右侧单调下降(上升)，那么，这点是极大(小)值点。也就是说，极值点是函数增减区间的交界点，所以极值点也叫做**转向点**(turning point)。

【注】函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处不一定可导。如下面两图中，函数在极值点处连续，但不可导，此时，上述定理也成立。

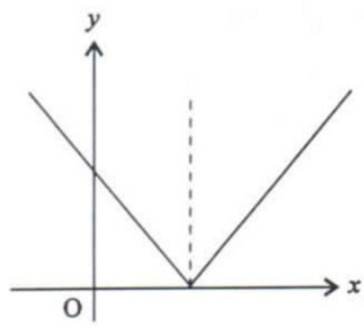


图 14－7

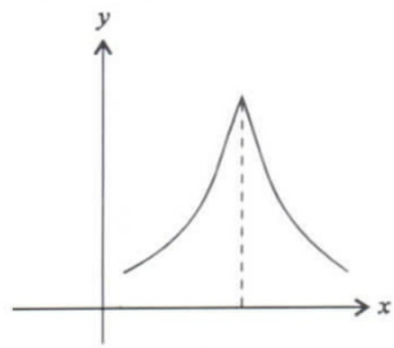


图 14－8

例 7 求 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 的极值。

解 $f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，得驻点是 $x=-2$，$x=2$。

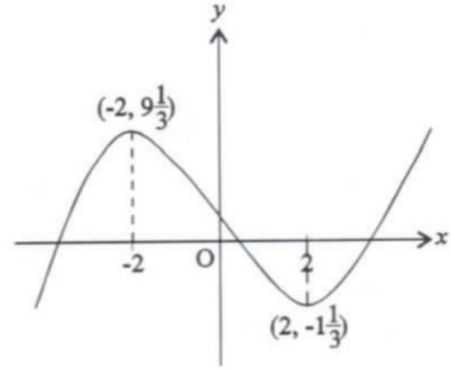
当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $9\frac{1}{3}$	↘	极小值 $-1\frac{1}{3}$	↗

$f(x)$ 的极大值是 $f(-2)=9\frac{1}{3}$

$f(x)$ 的极小值是 $f(2)=-1\frac{1}{3}$

其图象如右图所示。



（一）第二判别法

观察例 7 表中 $f'(x)$ 在 $x=-2$ 点附近的变化情况，把 $f'(x)$ 看作一个新的函数，如果知道 $f''(-2)<0$，这表明 $f'(x)$ 在 $x=-2$ 点附近是减函数，而 $f'(x)$ 在 $x=-2$ 点的值是 0，则 $f'(x)$ 在 $x=-2$ 点附近的符号是左正右负，即可判断 $x=-2$ 点是函数 $f(x)$ 的极大值点。

> 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处满足 $f'(x)=0$，
> (1) 如果 $f''(a)<0$，那么，$f(a)$ 是极大值；
> (2) 如果 $f''(a)>0$，那么，$f(a)$ 是极小值。

让我们用第二判别法解例 7。

又解 $f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=-2$，$x=2$。

$f''(x)=2x$

由 $f''(-2)=-4<0$，知 $f(-2)=9\dfrac{1}{3}$ 是极大值；

由 $f''(2)=4>0$，知 $f(2)=-1\dfrac{1}{3}$ 是极小值。

例 8 求 $f(x)=1-x^4$ 的极值。

解 $f'(x)=-4x^3$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0$

$f''(x)=-12x^2$

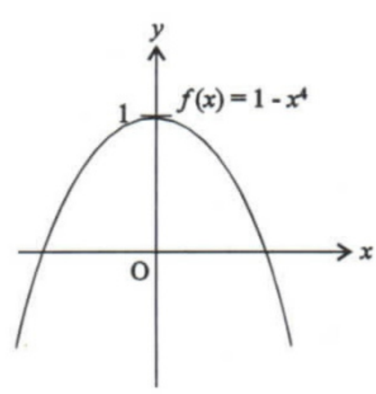
将 $x=0$ 代入 $f''(x)$，得 $f''(0)=0$

（极值的第二判别法在此无效）。

改用第一判别法：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

故知在 $x=0$ 处 f 有极大值，即 $f(0)=1$（见右图）。



例 9 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值。

解 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=-1$，$x=0$，$x=1$。

$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$

将驻点的 x 值分别代入 $f''(x)$，得

$f''(0)=6>0$，函数在 $x=0$ 有极小值 $f(0)=0$

$f''(-1)=0$ 及 $f\ (1)=0$，第二判别法对于驻点 $x=-1$ 及 $x=1$ 无效，改用第一判别法。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	无极值	↘	极小值 0	↗	无极值	↗

故知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极小值 $f(0)=0$

【注】第一判别法适用范围比较大。第二判别法只对驻点，并且，驻点处的 $f''(x)\neq 0$ 才适用。如例 8 只能用第一判别法。如例 9 就不能单用第二判别法，只选用第一判别法比较简便。

习题 14c

求下列函数的极值：

1. $f(x)=2-x-x^2$
2. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$
3. $f(x)=6+12x-x^3$
4. $f(x)=2x^2-x^4$
5. $f(x)=2x^3-9x^2-24x-12$
6. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$
7. $f(x)=15+9x-3x^2-x^3$
8. $f(x)=4x^3-3x^2-6x+2$
9. $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x\ (-2\pi<x<2\pi)$
10. $f(x)=2x-\sin x\ (-2\pi<x<2\pi)$
11. $f(x)=x^5-15x^3+3$
12. $f(x)=(x^2-1)^2-1$
13. $y=x^4-2x^3$
14. $y=x^4+2$

14.4 函数的最大值与最小值

● 函数的最大值与最小值

观察下面一个定义在区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 的图象（图 14－9）。

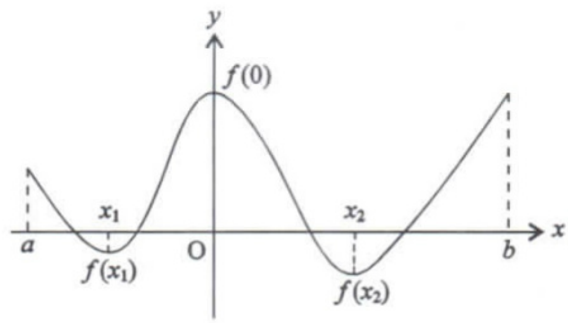


图 14－9

我们知道，图中 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 是极小值。$f(0)$ 是极大值。在解决实际问题时，往往关心的是函数在整个定义区间上，哪个值最大，哪个值最小。从上图可以看出，函数 $f(x)$ 的**最大值**（the greatest value）是 $f(b)$，**最小值**（the smallest value）是 $f(x_2)$。

一般地

> **在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值与最小值。**

在开区间 (a, b) 上连续的函数 $f(x)$ 不一定有最大值与最小值。例如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 连续，但没有最大值与最小值；又如上述的图 14－9，若把定义域改成开区间 (a, b)，则此开区间只有最小值 $f(x_2)$ 而没有最大值。

结合图 14－9 的例子不难看出，只要把连续函数的所有极值与端点的值进行比较，就可以求出函数的最大(小)值了。

例 10 求函数 $f(x)=x^3-3x+3$ 在闭区间 $\left[-3, \dfrac{3}{2}\right]$ 上的最大值和最小值。

解 $f'(x)=3x^2-3$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=-1, 1$。

驻点的函数值 $f(-1)=5$,

$f(1)=1$

端点的函数值：$f(-3)=-15$，

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{8}$$

比较函数 f 的极值及端点的函数，得到函数 f 在闭区间 $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ 的

最大值 $=f(-1)=5$

最小值 $=f(-3)=-15$

例 11 求函数 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在闭区间 $[-2,\ 2]$ 上的最大值和最小值。

解 $f'(x)=4x^3-4x$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=-1,\ 0,\ 1$。

驻点的函数值为 $f(\pm 1)=4$，$f(0)=5$

端点的函数值为 $f(\pm 2)=13$，

比较，得 最大值是 $f(\pm 2)=13$

最小值是 $f(\pm 1)=4$

习题 14d

求下列函数在指定区间上的最大值与最小值。

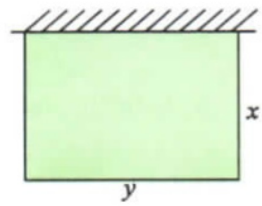
1. $f(x)=3x^3-9x+5$，$[-2,\ 2]$
2. $f(x)=x^4-2x^2+5, [-2,\ 2]$
3. $f(x)=5-36x+3x^2+4x^3$，$[-2,\ 2]$
4. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3, [-2,\ 2]$
5. $f(x)=4x^2(x^2-2)$，$[-2,\ 2]$
6. $f(x)=x+2\sqrt{x}, [0,\ 4]$
7. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，$[-3,\ 0]$
8. $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ $[0,\ 1]$
9. $f(x)=x-\sin 2x$，$[0,\ \pi]$
10. $f(x)=2\tan x-\tan^2 x$，$\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$

最大值与最小值的应用问题

在日常生活、生产和科研中，常常会遇到求什么条件下可以使材料最省，时间最少，效率最高等问题，这往往可以归结为求函数的最大值与最小值。

例 12 要利用铁丝网围一个矩形养鸡场，现在铁丝网长 80cm，只围三边，另一边为一道墙。问长和宽为多少，才能使所围的鸡场面积最大?

解 设所围矩形的宽为 x cm，长为 y cm。



已知 $2x + y = 80$

$$y = 80 - 2x$$

所围面积为 $A = xy$

$$= x(80 - 2x)$$

$$= 80x - 2x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 80 - 4x$$

令 $\frac{dA}{dx} = 0$，得 $x = 20$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -4 < 0$$

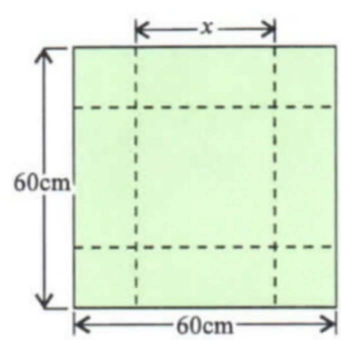
$\therefore$ 当 $x = 20$ 时，面积 A 为最大值。

$\therefore$ 当 $x = 20$，$y = 40$

答：当长为 40cm，宽为 20cm 时，鸡场的面积最大。

例 13 在边长为 60cm 的正方形铁皮的四角切去相等的正方形，再把它的边沿虚线折起(如右图)，作成一个无盖的方底盒子。盒底边长为多少时，盒子容积最大?并求此最大容积的值。

解 设盒底边长为 x cm，



则盒高 $h = \frac{60 - x}{2}$

盒子容积为 $V = x^2 h$

$$= \frac{60x^2 - x^3}{2}$$

$$\frac{dV}{dx} = 60x - \frac{3}{2}x^2$$

令 $\frac{dV}{dx} = 0$，得 $x = 0$，$x = 40$

$x = 0$ 不合题意，所以得驻点 $x = 40$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 60 - 3x$$

当 $x = 40$，$\frac{d^2V}{dx^2} = -60 < 0$

所以，当 $x = 40$(cm)时，盒子容积最大。

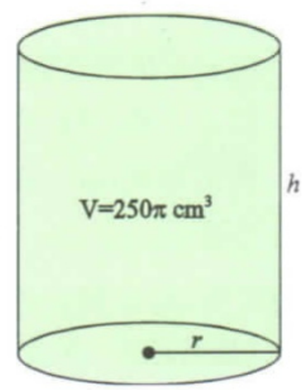
即 $V = \frac{60(40)^2 - (40)^3}{2}$

$= 16000\ (\text{cm}^3)$

【注】在实际问题中，有时会遇到区间内只有一个驻点(或不可导点)的情形，如果函数在这点有极大(小)值，那么不与端点值比较，也可以知道这就是最大(小)值。这里所说的也适用于开区间或无穷区间。

例 14 用铁片制成容积为 $250\pi\ \text{cm}^3$ 的圆柱体饮料罐，问高与底半径为多少时，才能使所用材料最省?

解 设圆柱的高为 h cm，底半径为 r cm



体积 $V = \pi r^2 h$

$h = \frac{V}{\pi r^2}$

$= \frac{250}{r^2}$

表面积 $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\left(\frac{250}{r^2}\right) + 2\pi r^2$

$= \frac{500\pi}{r} + 2\pi r^2$

$\frac{dS}{dr} = -\frac{500\pi}{r^2} + 4\pi r$

令 $\frac{dS}{dr} = 0$，$-\frac{500\pi}{r^2} + 4\pi r = 0$

$r^3 = \frac{500}{4}$

$r = 5$

$\frac{d^2S}{dr^2} = \frac{1000\pi}{r^3} + 4\pi$

当 $r = 5$，$\frac{d^2S}{dr^2} = 12\pi > 0$

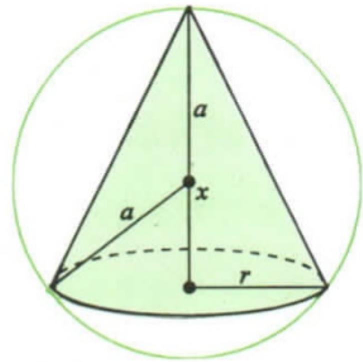
$\therefore$ 当 $r = 5$ 时，表面积 S 为最小值。

当 $r = 5$，$h = 10$

答：当高为 10cm，底半经为 5cm 时，才能使材料最省。

例 15 一直圆锥的高为 $(a+x)$，此圆锥内接于一半径为 a 的球体。证明此圆锥的体积 V 为 $V=\frac{1}{3}\pi(a-x)(a+x)^2$，并求 V 的最大值。

解 设圆锥的底半径为 r，



$$r=\sqrt{a^2-x^2}$$

圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

$$=\frac{1}{3}\pi(a^2-x^2)(a+x)$$

$$=\frac{1}{3}\pi(a-x)(a+x)^2$$

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{3}\pi(a+x)^2(-1)+\frac{1}{3}\pi(a-x)\cdot 2(a+x)$$

$$=\frac{1}{3}\pi(a+x)[-a-x+2a-2x]$$

$$=\frac{1}{3}\pi(a+x)(a-3x)$$

令 $\frac{dV}{dx}=0$，$\frac{1}{3}\pi(a+x)(a-3x)=0$

$x=-a$ （不合题意）

$$x=\frac{a}{3}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{\pi}{3}(a-3x)+\frac{\pi}{3}(a+x)(-3)$$

$$=\frac{\pi}{3}(-2a-6x)$$

$$=-\frac{2}{3}\pi(a+3x)$$

当 $x=\frac{a}{3}$，$\frac{d^2V}{dx^2}=-\frac{4}{3}\pi a<0$

$\therefore$ 当 $x=\frac{a}{3}$ 时，V 有最大值。

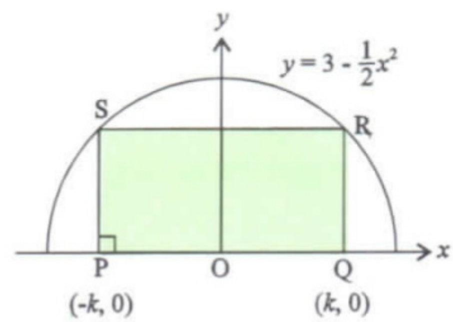
即 $V=\frac{1}{3}\pi\left(a-\frac{a}{3}\right)\left(a+\frac{a}{3}\right)^2$

$$=\frac{32}{81}\pi a^3$$

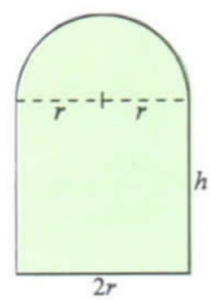
答：此圆锥的最大体积为 $\frac{32}{81}\pi a^3$。

习题 14e

1. 把长 60cm 的铁丝围成矩形，长、宽各为多少时，矩形面积最大？
2. 把长 100cm 的铁丝分为两段，各围成正方形。怎样分法，才能使两个正方形面积之和最小？
3. 在右图中，PQRS 是一长方形，P 和 Q 的坐标分别为 $(-k, 0)$ 及 $(k, 0)$，其中 $k>0$；且 R 与 S 两点在曲线 $y=3-\frac{1}{2}x^2$ 上。若欲此长方形的面积为最大，k 之值 应是多少？

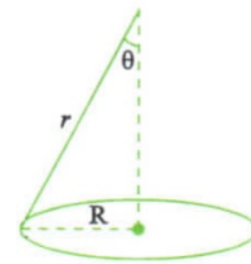


4. 一梯形的三边各为 10cm 长，欲使其面积为最大，问其第四边应多长？
5. 右图所示的窗子其形状是一长方形套上一半圆所构成的，整个窗子的周长为 300cm。若欲此窗子的面积为极大，则其圆半径 r 应是多少？

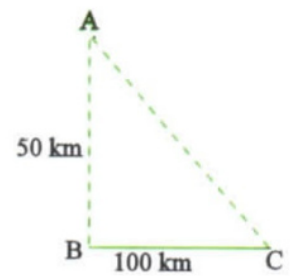


6. 试将 20 分为两部分，使其一部分倒数的 4 倍，与另一部分倒数的 9 倍的和为最小。
7. 试求曲线 $2y=x^2$ 上与点 $(4, 1)$ 最为接近的一点。
8. 证明：同一个圆的内接等腰三角形中，等边三角形面积最大。
9. 把长 8cm，宽 5cm 的矩形铁皮的四角切去相等的正方形，然后折成一个无盖的长方体的盒子。角上切去的正方形边长为多少时，盒子的容积最大？
10. 做一个容积为 256 升(dm^3)的方底无盖水桶，它的高为多少时，最省料？
11. 用圆铁皮剪出一个扇形，制成一个圆锥形容器。扇形的圆心角多大时，容器的容积最大？
12. 把直径为 d 的圆木锯成断面为矩形的梁，设矩形的长为 a，宽为 b，已知梁的强度与 a^2b 成正比，长、宽各为多少时，梁的强度最大？

13. 如图，在半径为 R 的圆桌中央的上方吊一盏灯，已知灯的照度 J 与 $\frac{\cos\theta}{r^2}$ 成正比，当灯于桌面上多高时，桌沿处最亮(即照度最大)？

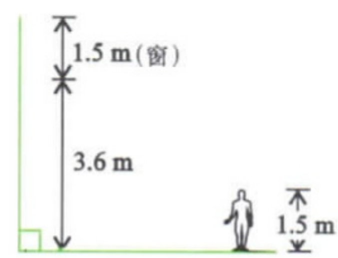


14. 如图，已知海岛 A 到海岸公路 BC 的距离 AB 为 50km，BC 的距离为 100km，从 A 到 C，先乘船，船速为 25 km/h，再乘汽车，车速为 50km/h，登陆点选在何处，所用时间最少？



15. 试将 48 分为两部分，使其一部分之平方与另一部分之立方的和为最小。

16. 某人眼睛离地 1.5m，某窗本身之高度亦为 1.5m。已知窗台高于地面 3.6m(见右图)。问某人须离窗墙多远，其眼与窗上下所对的角度始能最大？(提示：把该人的眼睛视为一点)



17. 某盛果汁之圆柱形锡罐，其容量为固定。若此罐是用最少的材料做成，求其底半径与高之比。

18. 试证明在给定周长的一切矩形中，正方形的面积最大。

19. 某工厂准备建造一个容积为 V 的无盖圆柱形蓄水池，其底面之单位面积的造价是侧面之单位面积造价的 2 倍，问应怎样设计，才能使造价最省？

20. 欲制作一圆锥形之用具。规定其斜边的长度为 l，问其高及底半径应是多少才能使其体积最大？

21. 已知一球之半径为 6cm，试计算内接或外切于此球之下列各立方体之高度：

(a) 具有最大体积之内接直立圆柱；

(b) 具有最大表面积之内接直立圆柱；

(c) 具有最小体积之外切直立圆柱。

22. 甲船停于离岸 3 公里处，乙船停于离岸 9 公里处。已知海岸上边正对着此两船的两点相距 5 公里(假设海岸线为一直线)。今用一小舟由甲船载客上岸后，再往乙船，求其最短路程。

23. 一波长为 λ 的波在深水的速度与 $\sqrt{\dfrac{\lambda}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\lambda}}$ 成正比。当其速度为极小时，λ 与 α 的关系为何?(λ 为常数)

24. 假设电池的电流为 $I=\dfrac{E}{r+R}$，E 为电动势，r 为内电阻，R 为可变外电阻；R 中所耗的功率为 $P=RI^2$，试证当 $R=r$ 时，P 为极大。

14.5 速度与加速度

● 瞬时速度

我们知道，物体作直线运动可以用函数

$$s=s(t)$$

来描述，这个式子叫做物体的运动方程。

如果物体作匀速运动，那么，它的运动速度

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

即物体的运动速度是物体的位移与所经历的时间的比。

如果物体作非匀速运动，就说 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 不是常数，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 只表示物体在时间 t 与 $t+\Delta t$ 之间的平均速度，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

怎样描述物体在某一时刻的速度呢?我们有如下定义。

设物体按 $s=s(t)$ 作直线运动，当 $\Delta t\to 0$ 时，物体在时间 t 与 $t+\Delta t$ 之间的平均速度 $\bar{v}$ 的极限 V，叫做物体在时间 t 的瞬时速度，即

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}$$

【注】这个定义对于匀速运动也适用。

例 16 物体的运动方程是 $s=-t^2+4t+5$（路程单位：m，时间单位：s），

(a) 求物体在时间 t 的瞬时速度；

(b) 求物体在时间 $t=4$ 时的瞬时速度；

解 (a) $v=\dfrac{ds}{dt}=-2t+4$

(b) 当 $t=4s$ 时，$v=-4(m/s)$

【注】v 为正，表示正向运动，v 为负，表示反向运动。

瞬时加速度

在例 16 中，物体的速度 v 也是时间的函数，

$$v=v(t)=-2t+4$$

也就是说，速度是随时间的变化而变化的。怎样描述这种变化呢?

与前面引入速度概念的方法类似，如果物体的速度是随时间均匀变化的(匀变速)，我们把物体速度的改变量 Δv 与所经历的时间 Δt 的比，叫做匀速运动的加速度，记作

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

如果物体速度的变化是不均匀的，则物体在时间 t 与 $t+\Delta t$ 之间的平均加速度是

$$\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

怎样描述物体在某一时刻的加速度呢？我们有如下定义：

设物体按 $s=s(t)$ 作直线运动，当 $\Delta t\to 0$ 时，物体在时间 t 与 $t+\Delta t$ 之间的平均加速度的极限 a，叫做物体在时间 t 的瞬时加速度，即

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

例 17 一物体沿一直线运行，其距离 $s(m)$ 与时间 t(秒)的关系为 $s=3t+t^3$ $(t\geqslant 0)$，试求

(a) 在 2 秒末的加速度；

(b) 当速度为 $51\,ms^{-1}$ 时的时刻；

(c) 第 3 秒内所走的距离。

解　$s = 3t + t^3$

速度 $v = \frac{ds}{dt} = 3 + 3t^2$

加速度 $a = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t$

(a) 当 $t = 2$ 时，其加速度 $a = 6(2)$

$= 12\text{ms}^{-2}$

(b) $v = 3 + 3t^2$

$\therefore \quad 51 = 3 + 3t^2$

$t^2 = 16$

$t = 4$

故知在 4 秒末时其速度为 51ms^{-1}

(c) $s = 3t + t^3$

在 3 秒末时，其距离为 $s(3) = 3 \times 3 + 3^3 = 36\text{m}$

在 2 秒末时，其距离为 $s(2) = 3 \times 2 + 2^3 = 14\text{m}$

故第 3 秒内所走的距离为 $s(3) - s(2) = (36 - 14)\text{ m}$

$= 22\text{m}$

例 18 某质点作直线运动时其位移与时间的关系是 $s = 16t^2 - 64t + 64$。试求当它首次达到静止时之位置与加速度。

解　质点的速率 $= \frac{ds}{dt} = \frac{d(16t^2 - 64t + 64)}{dt} = 32t - 64$

当该质点静止时，$\frac{ds}{dt} = 0$

即　$32t - 64 = 0$

$\therefore \quad t = 2$

当 $t = 2$ 时，$s = 0$，

即该质点处于静止状态的位置是在原点。

又，此时其加速度 $= a = \frac{d^2s}{dt^2} = 32$ 。

这表示该质点在 $t = 2$ 时经过原点，在该处暂时“休息”不动，但正以 32 单位的加速度起动。在物理世界中，这样的例子很多，例如当一抛物体上抛至其顶点时即具有此情况，此时它的速度为零，但加速度为 9.8 m/s^2(向下加速度)。

习题 14f

1. 物体的运动方程是 $s=10t+5t^2$，求物体在 $t=20$ 的速度。
2. 物体的运动方程是 $s=4t+0.3t^2$（s 单位：米），求
   (a) 物体在 $t=2$ 秒时的速度；
   (b) 物体停止运动的时间。
3. 质点的运动方程是 $s=t+\frac{1}{4}t^3$，（s 单位：米），求质点在 $t=3$ 秒时的速度与加速度。
4. 物体的运动方程是 $s=2t^3+t-1$（s 单位：米），求
   (a) 物体在时间 t 的加速度；
   (b) 何时加速度为 $2\ \mathrm{m/s^2}$。
5. 物体的运动方程是 $s=-\frac{1}{6}t^3+3t^2-5$，求
   (a) 物体在什么时间的加速度为 0；
   (b) 这时物体的速度是多少？
6. 物体的运动方程是 $s=\sqrt{t}$，证明物体的加速度与它的速度立方成正比。
7. 质点的运动方程是 $s=5\sin\omega t$，求质点在时间 t 的速度及加速度。
8. 一物体沿一直线运行，其距离 s（公尺）与时间 t（秒）的关系为 $s=2t^2+3t$，试求
   (a) 首 4 秒所运行的距离；
   (b) 在第 5 秒此物体所走的距离；
   (c) 4 秒末的速度；
   (d) 4 秒末的加速度。
9. 一物体沿一直线运行，其距离 s（公尺）与时间 t（秒）的关系为 $s=45t+11t^2-t^3$，试求在第 3 秒末的速度与加速度。并验证在 $t=9$ 秒时，此物体即停止活动。
10. 一物体沿一直线运行，其距离 s（公尺）与时间 t（秒）的关系为 $s=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-6t+5$，
    试求 (a) 在第 $2\frac{1}{2}$ 秒末的速度；
    (b) 当其速度为零时的加速度。
11. 一物体运行的距离 s 与时间 t 的关系为 $s=at^2+2bt+c$，a,b,c 为常数，试验证此物体是以等加速度运行。
12. 一动点 P 从点 A 出发，沿一直线运行，其距离 s（公分）与时间 t（秒）的关系为 $s=t-t^3$。试求 (a) 在第 3 秒末时，P 离 A 的距离；
    (b) 其速度为零的时刻。

    若 v, f 分别表示其速度与加速度，验证 $v=1+\frac{1}{2}ft$ 。

14.6 相关变率

我们知道，如果物体按 $s=s(t)$作直线运动，那么，物体在时间 t 的瞬时速度

$$v=\frac{ds}{dt}$$

叫做路程 s 对时间 t 的变化率。类似地，加速度可以看成速度(作为时间的函数)对时间的**变化率**(rate of change)。

一般地，函数 $y=f(x)$在点x_0的导数叫做函数 f 在点x_0对自变量 x 的变化率。

很多物理量都是借助变化率定义的，例如，角速度是角度(作为时间的函数)对时间的变化率；电流是电量(作为时间的函数)对时间的变化率；比热是热量(作为温度的函数)对温度的变化率；等等。

如果有一个固定的条件联系着几个变量，这些变量都是随着时间而变，那么它们的变化率之间必然也有一定的关系，有这种连带关系的变化率叫做**相关变率**(related rate of change)。比如，y 是 x 的函数，即

$$y=f(x)$$

而 x 依着时间 t 而变(即 x 是时间 t 的函数)，那么由于 y 依着 x 而变，而 x 依着时间 t 而变，所以 y 也依着时间 t 而变，也就是说，y 也是时间 t 的函数。由此，由连锁法可得如下关系：

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

即 y 的变化率与 x 的变化率相关。

例 19 一钢球受热膨胀，它的半径以 0.2 mm/s 的速度匀速扩大，求半径为 50 mm 时，它体积扩大的速度。

解 设钢球的体积为 V mm^3，半径为 r mm，则

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr}=4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

由　$r = 50\text{mm}$，$\dfrac{dr}{dt} = 0.2\text{mm/s}$，得

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi(50)^2(0.2)$$
$$= 2000\pi$$

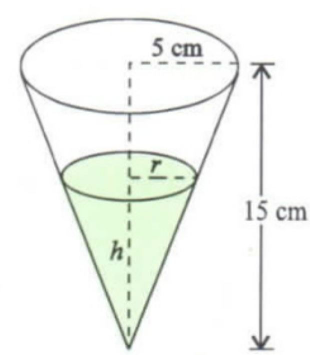
即，半径为 50mm 时，它的体积扩大的速度为 $2000\pi\ \text{mm}^3/\text{s}$。

例 20　一倒立的圆锥形容器的底半径为 5 cm，高 15 cm。若水以 $10\text{cm}^3/\text{s}$ 的流速注入此容器，求当水位为 4 cm 时，

(a) 水的升高率；

(b) 水面面积的变率。

解　(a) 设水位为 h cm，水面半径为 r，如右图。



$$\frac{r}{h} = \frac{5}{15} \quad \text{（相似三角形）}$$
$$r = \frac{h}{3}$$

水的体积为　$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 h$$
$$= \frac{\pi h^3}{27}$$
$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi h^2}{9}$$

水的升高率为　$\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{dh}{dV} \cdot \dfrac{dV}{dt}$

$$= \frac{9}{\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

由　$\dfrac{dV}{dt} = 10\text{cm}^3/\text{s}$ 及 $h = 4\text{cm}$，得

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi(4)^2} \cdot 10$$
$$= \frac{45}{8\pi}\ (\text{cm/s})$$

(b) 水面为一圆形，所以水面面积为

$$A = \pi r^2$$

$$= \frac{\pi h^2}{9} \qquad \left(r = \frac{h}{3}\right)$$

$$\frac{dA}{dh} = \frac{2\pi h}{9}$$

水面面积的变率为 $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$

$$= \frac{2\pi h}{9} \cdot \frac{dh}{dt}$$

由 $h = 4\text{cm}$ 及 $\frac{dh}{dt} = \frac{45}{8\pi}$ (cm/ s)，得

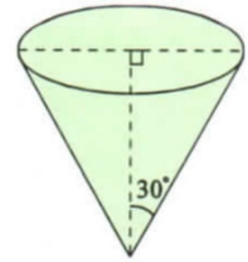
$$\frac{dA}{dt} = \frac{2\pi(4)}{9} \cdot \frac{45}{8\pi}$$

$$= 5\ (\text{cm}^2/\ \text{s})$$

习题 14g

1. 把墨汁泼到一张纸上，开始时，黑点之面积为零，过后黑点逐渐扩散，在时刻 t 时，面积为 $A = 3t^2 + \frac{1}{5}t$。问黑点在 $t = 2$ 时的扩散率是多少？
2. 一物体受冷却后慢慢缩小，其面积与时间的关系是 $A = 3t + t^3$。求物体面积在时刻 $t = 1$ 时的变率。
3. 某一角度与时间的关系是 $\theta = 4t^3 - t^2$。当 $t = 2$ 时，求此角度的变率。
4. 已知作圆周运动质点转过的角度 $\theta = t^3$，求 $t = 1$ 时角度对时间的变化率 ω。
5. 已知电量 $Q = 2t^2 + 3t$，(电量单位：库)，求 $t = 5$ 秒与 $t = 7$ 秒时电量对时间的变化率 I(即电流，单位：安培)。
6. 一正方形的边长每秒钟增加 3cm。当边长为 15cm 时，求其面积的变率。
7. 一正立方体在受热后膨胀，其边的变率是 5mm s^{-1}。当其边是 4m 时，问体积的变率是多少？
8. 一球体的半径每秒增加 1cm。问当半径为 3cm 时，其体积的变率是多少？
9. 一圆的面积每分钟增加 5cm^2，求当其周长为 40cm 时，其半径的变率。

10. 将水倒入一圆锥形的容器(见右图)中，已知水的升高率是每秒 1cm。试求当水深为 2m 时，其体积的变率。

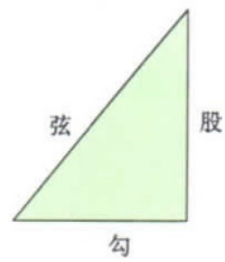


11. 一实心圆柱体的半径 r 每秒钟减少 0.04cm，其高则不变，恒为 5cm。试求当其半径为 2m 时，此圆柱体表面积的变率。

12. 已知函数 $y = x^3 + 10$，当 y 的变率为 x 的变率的 27 倍时，x 的值是多少？

13. 一点在平面上运动，方程是 $y = \dfrac{1}{x^2+4}$。已知其横坐标的变率是 $\dfrac{dx}{dt} = -3$ 单位／秒，当 $x = 2$ 时，求其纵坐标的变率。

14. 一直角三角形(见图)的一边(勾)每分钟减少 1cm，而另一边(股)每分钟增加 2cm。在某一时刻，其勾长 6cm 而股长 8cm，问在 2 分钟后，三角形面积的增率是多少？



15. 一梯长 17m，靠在一垂直墙壁上。已知梯脚是以每秒 3m 的速度离墙滑去，问当梯脚离墙 8m 时，其另一端向下滑的速度是多少？

16. 一球型物体的体积以每分钟 12π cm^3 的速率减少。问当半径为 20cm 时，其半径的变率及表面积的变率各是多少？

17. 一游泳池的长为 40m，宽为 25m，一端深 3m，另一端深 9m。现有一水管以每分钟 10m^3 的水量注入水池内，当水位从最深的一端算起为 4m 时，求水的升高率。

18. 水以每分钟 2m^3 的流速注入一高为 18m，半径为 24m，而顶向下的圆锥型水池，当高度为 6m 时，求水的升高率。

19. 一水管以每分钟 5m^3 的水量注入一高为 10m，半径为 4m，而顶向下的圆锥型水池内，当水位为 5m 时，求水的升高率。

20. 沙自高处自由落下，形成一圆锥体。设沙堆的体积为 V，而 $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$，其中 r 为底半径，h 为高度。当 $r = 10$m 时，沙堆的底半径以每秒 2cm 的速度增大，而其高则以每秒 1cm 的速度增加，求沙堆体积的变率。

21. 细沙以每分钟 3m^3 的流速自一沙塔自由落下，形成一圆锥体的沙堆。若沙堆底半径与高的比是 3 :1，问当高为 2m 时，沙堆增高的速率是多少？

22. 一水管以每分钟 4 m^3 的水量注入一半径为 10 m 的半球型水池内。设 h 为水的深度，r 为水面的半径，V 为池内的水的体积。假如 $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$，当 $h = 5$ m 时，求水的升高率。(提示：圆方程为 $x^2 + y^2 = a^2$)

23. 一光源挂于离地 6 m 的空中。若某人身高 1.5 m，背向光源行走的速率为 1.2 ms^{-1}，求其影子的变率。

24. 一汽车以 50 km/h 的速度沿直线驶出，同时，一气球以 10 km/h 的速度离车直线上升，求 1 小时后，它们彼此分离的速度。

14.7 近似计算

我们知道，函数 $y = f(t)$ 在点 x 处的导数

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

由极限的意义可知，当 Δx 充分小时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

因此，

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x$$

或 $$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$$

即 $$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

上式是一个简单的近似计算公式，可以利用它求函数的近似值。

例 21 一个正方体的边长从 4cm 增加到 4.01 cm，它的体积大约增加多少?

解 设边长为 l，

体积 $V = l^3$

$$\frac{dV}{dl} = 3l^2$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta l} \approx \frac{dV}{dl}$$

$$\therefore \quad \Delta V \approx 3l^2 \Delta l$$

已知 $l = 4$，$\Delta l = 0.01$，

$$\Delta V \approx 3(4)2\ 0.01$$

$$= 0.48 \text{ (cm3)}$$

即，它的体积大约增加 0.48 cm^3。

例 22 求 $\sqrt{17}$ 的近似值。

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

取 $x=16$，$\Delta x=1$

则 $f(16)=4$, $f'(16)==\frac{1}{8}$

由 $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$

得 $f(17)=f(16)+f'(16)\times 1$

即 $\sqrt{17}=4+\frac{1}{8}$

$=4.125$

例 23 已知单摆摆动的周期 T 与其长度 l 的平方根成正比。设受热后单摆增长 1%，问对应的周期增加多少巴仙?

解 因 $\mathrm{T}\propto\sqrt{l}$

$\therefore\ \mathrm{T}=k\sqrt{l}$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dl}=\frac{1}{2}kl^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta\mathrm{T}\approx\frac{d\mathrm{T}}{dl}\cdot\Delta l$$

$$=\frac{1}{2}kl^{-\frac{1}{2}}\Delta l$$

$$\Delta l=l\times\%=\frac{1}{100}l$$

$$\therefore\ \Delta\mathrm{T}=\frac{1}{2}kl^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{100}l$$

$$=\frac{1}{200}kl^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Delta\mathrm{T}}{\mathrm{T}}\times 100\%=\frac{\frac{1}{200}kl^{\frac{1}{2}}}{kl^{\frac{1}{2}}}\times 100\%$$

$$=\frac{1}{2}\%$$

即受热后其周期增加$\frac{1}{2}\%$ 。

习题 14h

1. 一个正方形的边长从 4 cm 增加到 4.001 cm，它的面积大约增加多少？
2. 一个正方体的边长从 1 cm 增加到 1.01 cm，它的体积大约增加多少？
3. 一个半径为 10 cm 的球，如果半径增加 -0.001 cm，它的体积大约增加多少？
4. 一扇形的半径为 100 cm，圆心角为 60°，如果(a)半径增加 1 cm，(b)圆心角减小 0.5°，扇形面积的改变量分别大约是多少？
5. 一质点的运动方程是 $s=4t^2$（路程单位：m，时间单位：s）。时间从 2 秒到 2.001秒，质点的位移大约是多少？
6. 若一圆的半径从 3.00 cm 增至 3.01 cm，试求其面积的近似增量。
7. 若 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，求 Δy 的近似值，其结果以 x 及 Δx 表之。利用上述结果，求 $\dfrac{1}{\sqrt{99.4}}$ 的近似值。
8. 试求 $x^{\frac{1}{4}}$ 的导数，并用它来求 $(16.05)^{\frac{1}{4}}$ 之近似值（答案取至小数点第五位）。
9. 如果一高为 16 cm，半径为 r 的实心圆柱体的表面积为 A，试验证 $\dfrac{dA}{dr}=4\pi(r+8)$，并用此结果计算当圆柱体的半径从 4.00 cm 增至 4.02 cm 时(其高度保持不变)，其表面积的增量。
10. 函数 $y=\tan x$。当 x 从 45° 增至 45°10′ 时，求 y 增量的近似值。
11. 把一块金属铸造成底半径为 5cm，高为 10cm 的圆柱形物体时，因技术问题结果其半径处处比预定的多了 $\dfrac{1}{10}$ cm。问高变成多少？
12. 求下列各式的近似值：

    (a) $\sqrt{9.01}$ (b) $\sqrt{104}$ (c) $\sqrt[3]{66}$

    (d) $(1.002)^5$ (e) $\sin 0.016$ (f) $\tan 0.025$
13. 设 $y=3x^3$，若 x 增加 0.1% 则 y 增加多少巴仙？
14. 当一正立方体的边长增加 1% 时，其体积增加了多少巴仙？
15. 单摆的周期公式是 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，这里 l 是摆长(单位：cm)，g 是重力加速度($\approx 980\,\text{cm s}^{-2}$)。设某钟摆动的周期原本是 1 秒，但在冬季摆长缩短了 0.01 cm，问这钟每天大约快了几秒？

总复习题 14

1. 试求曲线 $y=x^3-3x$ 在点 $x=3$ 处的切线斜率。
2. 试求曲线 $y=x(x^2-3x-4)$ 经过 x 轴上的点的切线斜率。
3. 已知曲线 $y=ax^2+bx-10$ 经过点 $(2, 0)$，且在此点的切线斜率为 3，试求 a 与 b 的值。
4. 试求曲线 $y=x+\dfrac{2}{x}$ 在点 $(2, 3)$ 处的法线方程式。若此法线交 x，y 两轴于 A 与 B 两点，试求 AB 的长度。
5. 求曲线 $y=-x^2+x+2$ 在哪些点的切线
   (a) 与 x 轴平行；
   (b) 与第一象限角的平分线平行?
6. 求曲线 $y=x^2+px+q$ 与 x 轴相切的条件。
7. 确定下列函数在哪个区间内是增函数，哪个区间内是减函数：
   (a) $f(x)=3x^4+2x^3-3x^2-2$　　(b) $f(x)=-x^3-12x^2-48x+5$
   (c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$　　(d) $f(x)=x+\sqrt{x}$
8. 求下列函数的极值并鉴别之：
   (a) $y=8x^3-12x^2+6x+1$　　(b) $y=x^3+3x^2-24x+12$
   (c) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$　　(d) $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$
   (e) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$
9. 求下列函数的最大值与最小值：
   (a) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$　　(b) $f(x)=x\sqrt{1-x}$
10. 求下列函数在指定区间上的最大值与最小值：
    (a) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1,\quad -1\leq x\leq 2$
    (b) $f(x)=\sin 2x-x,\quad -\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$
11. 问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？并求出此极值。
12. 求在曲线 $y=x^3-3x^2+5x+2$ 上斜率为最小的一点的坐标，并求通过此点的切线方程。

13. 设函数 $f(x) = \cos 2x + 2\cos x$。

(a) 求其在区间 $(0, 2\pi)$ 内的驻点；

(b) 作在区间 $(0, 2\pi)$ 内的函数象；

(c) 在图象上标明极大值与极小值。

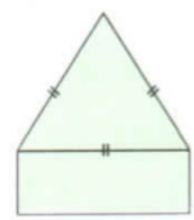
14. 一面靠墙，三面用栏杆，围成一个矩形场地。如果栏杆长 40 m，要使围成的场地面积最大，靠墙的边应该多长？

15. 一隧道断面的上部是半圆，下部是矩形。如果断面面积一定，当圆半径与矩形高的比为何值时，断面周长最小？

16. 一三角形顶点的坐标各为 $(1, 2)$，$(3, 4)$ 和 $(x, 0)$。欲使其边长平方的和为最小，x 应取何值？

17. 一周长为 16 cm 的长方形绕其中一边旋转一周形成一个圆柱体，欲使此圆柱体的体积最大，长方形的边长应是多少？

18. 一周长为 100 cm 的铁线，围成一个如右图所示的图象，其底为一长方形且顶上挂着一等边三角形。欲使其面积最大，问长方形的边长应是多少？



19. 某人拥有私人海滩，欲筑别墅出租，若别墅建得愈多，每间的租金则愈少。设建 x 间时，每间每周可得租金 $\frac{1}{4}\sqrt{243 - 9x}$，$1 \leq x \leq 26$，问此人应建多少间别墅始能每周获得最多租金？

20. 设一质点在 x 轴上移动，其运动方程为 $x = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$。求

(a) 当 $t = 3$ 时的速度，

(b) 当 $t = 4$ 时的加速度，

(c) 速度为零的时刻，

(d) 加速度为零的地点，

(e) 当质点停止活动时的加速度。

21. 从时间 $t = 0$（单位：秒）开始，通过某导体的电量（单位：库仑）可由公式 $Q = 2t^2 + 3t + 1$ 来表示。求第 5 秒末和第 7 秒末的电流强度，并求出当电流强度为 43 安培（即库仑／秒）时的时间。（提示：电流强度就是电量对时间的导数）

22. 已知两曲线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = 1 - x^3$，当 $x = x_0$ 时，这两曲线在这点处的切线互相平行，求 x_0 之值；当 $x = x_1$ 时，这两曲线在这点处的切线互相垂直，求 x_1 之值。

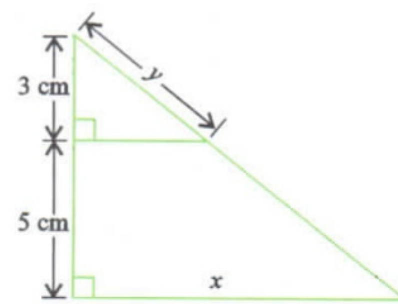
23. 证明双曲线 $xy = a$（a 为不等于零的常数上）任意一条切线和坐标轴所构成的三角形的面积等于 $|2a|$。

24. 在抛物线 $y = x^2 + x - 1$ 上取横坐标为 $x_1 = 1$ 与 $x_2 = 3$ 的两点，过这两点引割线，问在抛物线上哪一点处的切线平行于所引的割线？

25. 将边长为 a 的一块正方形白铁皮在其四角各剪去一小正方形后，可以折成一个无盖的方盒子，如果盒子的容量必须调整至最大，问角上剪去的正方形的边长应是多少？

26. 欲将一圆柱形木材锯成一长方形柱条，问应怎样锯法才能使柱条的体积最大？(提示：设该圆柱的直径为 d)

27. 如右图所示：若 x 以每秒 2cm 的速度增长，求当 $x = 6$ cm 时，y 的变率。



28. 一物体在 x 轴上移动，其运动方程为 $x = 1 - \cos t$，另一物体在 y 轴上移动，其运动方程为 $y = \sin t$，试求两物体的最大距离。

29. 某人在离水面 4.9 m 的高处向水池释放了一粒石头。石头碰到水面所产生的圆形涟漪其半径以每秒 0.1 m 的速率向外扩大。试求

 (a) 当半径为 1 m 时，涟漪面积的变率；

 (b) 当石头离开某人的手 10 秒后，涟漪面积的变率。

30. 若一球体的半径从 4.00 cm 减至 3.95 cm，试求其体积及表面积的减量。(试用增量的近似计算法计算，然后用算术来加以验证。)

31. 一球形容器可容水量 $V = \dfrac{\pi h^2}{3}(15 - h)$，$h$ 为水的深度。假如水的深度从 4.0 cm 增至 4.1 cm，试求水量增加了多少？

32. 碗的形状可用 $V = h^3 + 3h^2 + 11h$ 表达，式中 V 为碗中水的体积 (cm^3)，h(cm) 为其高度。假如当水的高度为 7 cm 时，有 ΔV cm^3 的额外水量被倒入碗中，试验证此时水增高了 $\dfrac{\Delta V}{200}$ cm。

33. 在某个容器中，水的体积 $V(cm^3)$ 与水深 x(cm) 的关系为 $V = 5x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 (cm^3)$。若水以每秒钟 5 cm^3 的速率倒入容器中，试求当 $x = 2$cm 时，水的深度的变率。

34. 若 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，试求 $\dfrac{dy}{dx}$，并据此求出当 x 有着微小变量 Δx 时，y 的相应变化量之表达式。应用此结果求 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{130}}$ 的近似值。

35. 一个竖直靠墙的梯子长 5m，梯子的下端以 2m/s 的速度滑离墙根，求梯子上端在时间 t 下降的速度与加速度。

36. 设 $y=\cos 2\theta$，当 θ 由 $60°$ 变到 $60.5°$ 时，y 的改变量大约是多少？

37. 试求曲线 $y=x^2+4$ 上与直线 $x=2y-2=0$ 最为接近之点的坐标。

15 不定积分(一)

15.1 不定积分——微分的反运算

原函数的定义

在研究物体运动时，我们知道，已知路程函数

$$s = s(t)$$

将它对时间 t 求导数，就得到速度函数 $v(t)$，即

$$s'(t) = v(t)$$

在许多科学技术以及各种实际问题中，也常需要解决相反的问题：已知物体运动的速度函数 $v(t)$，如何求路程函数 $s(t)$。一般上说，就是已知某个函数的导数，如何求这个函数。下面就来研究这类问题。

设函数 $F(x)$及 $f(x)$在区间(a, b)都有定义，如果在此区间上任一点 x，都有

$$F'(x) = f(x)$$

那么 $F(x)$就是 $f(x)$在区间(a, b)上的一个**原函数**（antiderivative）。

根据上述定义，求函数 $f(x)$的一个原函数，就是要求出一个函数 $F(x)$，使它的导数 $F'(x)$等于 $f(x)$。

看下面的例子：因为

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^2 + 1)' = 2x$$

$$(x^2 - 2)' = 2x$$

$$\cdots\cdots$$

$$(x^2 \pm C)' = 2x$$

所以 x^2，$x^2 \pm 1$，$x^2 \pm 2$，$\cdots x^2 \pm C$ 都是 $2x$ 的原函数。

一般上，如果函数 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$的一个原函数。这是因为

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$$

可见 $f(x)$有无究多个原函数。

设 $\Phi(x)$，$F(x)$是 $f(x)$的任何两个原函数，则

$$\Phi'(x)=f(x),\ F'(x)=f(x)$$

$$\therefore\quad (\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)$$

$$=f(x)-f(x)=0$$

我们知道，导数为零的函数必为常数，由此得到

$$\Phi(x)-F(x)=C$$

$$\Phi(x)=F(x)+C$$

这就是说，$f(x)$的任何两个原函数只相差一个常数 C，即如果 $F(x)$为 $f(x)$的一个原函数，那么 $f(x)$的所有原函数可表示为 $F(x)+C$ 的形式（C 是任意常数）。

不定积分的概念

设 $F(x)$是函数 $f(x)$的一个原函数，我们把 $f(x)$的所有原函数 $F(x)+C$（C 为任意常数）叫做函数 $f(x)$的**不定积分**（indefinite integral），记作 $\int f(x)dx$，即

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

其中“$\int$”叫做**积分符号**（integral sign），$f(x)$叫做**被积函数**（integrand），$f(x)dx$ 叫做被积表达式，C 叫做**积分常数**（constant of integration）。

求函数 $f(x)$的不定积分，就是要求出 $f(x)$的所有原函数。从上面所述可知，只要求出函数 $f(x)$的任何一个原函数 $F(x)$，再加上任意常数 C，就得到 $f(x)$的不定积分。

例1 求下列不定积分：

(a) $\int x\,dx$ (b) $\int \cos x\ dx$

解 (a) $\frac{1}{2}x^2$ 是 x 的一个原函数，

$$\therefore \int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$$

(b) $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，

$$\therefore \int \cos x\ dx=\sin x+C$$

15.2 不定积分的运算法则

幂函数及三角函数的积分公式

为了掌握求不定积分的方法和技巧，首先必须记住一些基本积分公式。我们知道，求不定积分是求导数的逆运算，因此，我们可以从导数公式得到相应的不定积分公式。例如，由

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n \quad (n \neq -1)$$

类似地，我们可以得到其他的不定积分公式。下面是幂函数及三角函数的积分公式（表中 C 为任意常数）：

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \qquad \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$$

例2 求

(a) $\int 3x^2 dx$　　(b) $\int x^3 dx$

(c) $\int \frac{1}{x^3} dx$　　(d) $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x}} dx$

解 (a) $\int 3x^2 dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + C$
$= x^3 + C$

(b) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$
$= \frac{x^4}{4} + C$

(c) $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx$
$= \frac{x^{-2}}{-2} + C$
$= -\frac{1}{2x^2} + C$

(d) $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{7}{2}} dx$
$= \frac{x^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}} + C$
$= -\frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} + C$

习题 15a

求下列不定积分：

1. $\int 3x\,dx$

2. $\int 5x^4\,dx$

3. $\int 5\,dx$

4. $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

5. $\int 2x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

6. $\int x^7\,dx$

7. $\int \sqrt{x}\,dx$

8. $\int \frac{1}{x^5}\,dx$

9. $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

10. $\int x^3\sqrt[3]{x^2}\,dx$

11. $\int x^{-9}\,dx$

12. $\int \sin\theta\,d\theta$

13. $\int \sec^2 x\,dx$

14. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

15. $\int \theta^3\,d\theta$

16. $\int t^5\,dt$

运算法则

根据导数的运算法则，可以推出下列两个有关不定积分运算法则。

（一）提出常数法则

被积式的非零常数因子可以提到积分符号前面，即如果 k 为非零常数，那么

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k\neq 0)$$

（二）分项积分法则

两个函数的和(或差)的不定积分，等于这两个函数的不定积分的和(或差)，即

$$\int f(x)\pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

例3 求下列不定积分：

(a) $\int\left(3x^4-2x^2+5x-\frac{1}{4}\right)dx$

(b) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$

(c) $\int\frac{x+\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}dx$

(d) $\int(\cos x-\sin x)dx$

解 (a) 原式 $=3\int x^4dx-2\int x^2dx+5\int xdx-\frac{1}{4}\int dx$

$$=3\cdot\frac{x^5}{5}-2\cdot\frac{x^3}{3}+5\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\cdot x+C$$

$$=\frac{3}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{4}x+C$$

(b) 原式 $=\int(x+x^{-1})^2dx$

$$=\int(x^2+2+x^{-2})\ dx$$

$$=\int x^2dx+2\int dx+\int x^{-2}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$$

(c) 原式 $=\int\frac{x+x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$

$$=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}})dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$$

(d) 原式 $=\int\cos x\ dx-\int\sin x\ dx$

$$=\sin x+\cos x+C$$

例4 求 $\int\tan^2x\ dx$。

解 原式 $=\int(\sec^2x-1)dx$

$$=\int\sec2x\ dx-\int dx$$

$$=\tan x-x+C$$

【注】（一）在分项积分时，每个不定积分的结果都含有一个任意常数，但几个任意常数的和（或差）仍然是一个任意常数，所以上述例子的答案中，只需要写出一个任意常数就可以了。

（二）根据“求不定积分是求导数的逆运算”，只要对求得的不定积分再求导，看其结果是否等于被积函数，就可验证求得的不定积分是否正确。

习题 15b

求下列不定积分（1～20）：

1. $\int (x^3 - 3x + 1)\,dx$

2. $\int (5x^4 + 2\sqrt{x})\,dx$

3. $\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right) dx$

4. $\int (\sin x - \cos x)\,dx$

5. $\int (\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x)\,dx$

6. $\int (x^2 + 2)\sqrt{x}\,dx$

7. $\int (x - 5)^2 dx$

8. $\int \frac{x^4 - 5}{x^2} dx$

9. $\int \frac{x^2 - 9}{x + 3} dx$

10. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

11. $\int \frac{x + 5}{\sqrt{x}} dx$

12. $\int \left(\frac{t - 1}{t^2}\right)^2 dt$

13. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$

14. $\int (x - 1)(x - 2)dx$

15. $\int \frac{x^3 - 27}{x - 3} dx$

16. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$

17. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$

18. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$

19. $\int (2x^2 - 4\cos x)dx$

20. $\int (3\cos x + 4\sec^2 x)dx$

15.3 换元积分法

我们已经懂得利用基本积分公式与两个运算法则来求出一些简单函数的不定积分。但当面对一些比较复杂的不定积分，例如求 $\int 3\sqrt{3x + 1}\,dx$，$\int 2\sin 2x\,dx$ 等

时，上述直接套用基本积分公式与运算法则的方法就不管用了。因此，我们需要进一步学习其他的积分方法，以便解决某些比较复杂的不定积分问题。下面将介绍**换元积分法**（integration by substitution）。

首先，我们来考虑函数 $F(u)$，u 是 x 的函数，即 $u=g(x)$。

那么 $\frac{d}{dx}F(u)=F'(u)\frac{du}{dx}$

$\therefore$ $\int F'(u)\frac{du}{dx}\ dx=F(u)+C$

又 $\int F'(u)\,du=F(u)+C$

$\therefore$ $\int F'(u)\frac{du}{dx}\ dx=\int F'(u)\,du$ （可得 $\frac{du}{dx}dx=du$）

以 $f(u)$代换 $F'(u)$，得$\int f(u)\frac{du}{dx}\ dx=\int f(u)\ du$

即 $$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

也就是说，一些不能用积分基本公式直接求出的不定积分，若它可化成$\int f(g(x))g'(x)\,dx$ 的形式，那么，就可用 $g(x)=u$ 代换，化成$\int f(u)\,du$ 的形式；而$\int f(u)\,du$ 必需是能用基本积分公式求得的。

例5 求 $\int 3\ \sqrt{3x+1}\ dx$。

解 如果令 $u=3x+1$，那么 $\frac{du}{dx}=3$。

由 $\frac{d\gamma}{dx}dx=du$，得 $3dx=du$。

于是 $\int (3\ \sqrt{3x+1}\ dx=\int\ \sqrt{3x+1}\cdot 3dx$

$$=\int u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$$

例6 求 $\int (5-2x)^9 dx$。

解 令 $u=5-2x$，则 $du=-2dx$。于是

$$\begin{aligned}\int (5-2x)^9 dx &= -\frac{1}{2}\int (5-2x)^9(-2)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int u^9\, du \\ &= -\frac{1}{20}u^{10}+C \\ &= -\frac{1}{20}(5-2x)^{10}+C\end{aligned}$$

例7 求 $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2+3x}}dx$。

解 令 $u=2x^2+3x$，则 $du=(4x+3)dx$。于是

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2+3x}}dx &= \int (2x^2+3)^{-\frac{1}{2}}(4x+3)dx \\ &= \int u^{-\frac{1}{2}}du \\ &= 2u^{\frac{1}{2}}+C \\ &= 2\sqrt{2x^2+3x}+C\end{aligned}$$

【注】在运算熟练之后，替换步骤可以省略。

例8 求 $\int (3x+2)^4 dx$。

解 $$\begin{aligned}\int (3x+2)^4 dx &= \int (3x+2)^4\cdot\frac{d(3x+2)}{3} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^5}{5}+C \\ &= \frac{1}{15}(3x+2)^5+C\end{aligned}$$

习题 15c

求下列不定积分（1 ~ 20）：

1. $\int (2x+1)^3 dx$

2. $\int (3x+2)^5 dx$

3. $\int \dfrac{dx}{(2x+5)^8}$

4. $\int 4\sqrt{2x-1}\, dx$

5. $\int \sqrt{1+2x}\, dx$

6. $\int x(x-1)^3 dx$

7. $\int 6(2x+1)^2 dx$

8. $\int 15x^2(x^3-1)^4 dx$

9. $\int 3x^2(x^3+4)^3 dx$

10. $\int (2x-1)^{-3} dx$

11. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

12. $\int (2x+1)(x^2+x+2)^5 dx$

13. $\int (3-2x)^6 dx$

14. $\int \dfrac{2}{(2x+3)^2} dx$

15. $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+1)^4 dx$

16. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

17. $\int (9-x)^{\frac{3}{2}} dx$

18. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}} dx$

19. $\int \dfrac{x+1}{(x^2+2x+5)^3} dx$

20. $\int (2x-1)\sqrt{x+2}\, dx$

三角函数的换元积分法

例9 求 (a) $\int \sin 2x\; dx$ (b) $\int \cos(3x-2)dx$

解 (a) 设 $u=2x$，$du=2dx$，于是

$$\begin{aligned}\int \sin 2x\; dx &= \frac{1}{2}\int \sin 2x \cdot 2dx\\ &= \frac{1}{2}\int \sin u\; du\\ &= \frac{1}{2}(-\cos u)+C\\ &= -\frac{1}{2}\cos 2x + C\end{aligned}$$

(b) 设 $u=3x-2$，$du=3dx$，于是

$$\begin{aligned}\int \cos(3x-2)dx &= \frac{1}{3}\int \cos(3x-2)\cdot 3dx \\ &= \frac{1}{3}\int \cos u\ du \\ &= \frac{1}{3}\sin u + C \\ &= \frac{1}{3}\sin(3x-2) + C\end{aligned}$$

由例 9 可知对于角为 ax 或 $ax+b$ 的三角函数求积分，可直接求得如下：

$$\int \sin ax\ dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\ dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\int \sec^2 ax\ dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 ax\ dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$$

例 10 求下列不定积分：

(a) $\int 2\cos 4x\ dx$　　(b) $\int \sin(x+2)dx$

(c) $\int 3\sin(1-2x)dx$　　(d) $\int \sec^2(1+5x)dx$

解 (a) $$\begin{aligned}\int 2\cos 4x\ dx &= \frac{2\sin 4x}{4} + C \\ &= \frac{\sin 4x}{2} + C\end{aligned}$$

(b) $\int \sin(x+2)dx = \dfrac{-\cos(x+2)}{1} + C$

$= -\cos(x+2) + C$

(c) $\int 3\sin(1-2x)dx = \dfrac{-3\cos(1-2x)}{2} + C$

$= -\dfrac{3}{2}\cos(1-2x) + C$

(d) $\int \sec^2(1+5x)dx = \dfrac{\tan(1+5x)}{5} + C$

习题 15d

求下列不定积分（1~16）：

1. $\int \sin\dfrac{x}{2}\,dx$

2. $\int \cos 3x\ dx$

3. $\int -2\sin x\ dx$

4. $\int -\cos\dfrac{2}{3}x\ dx$

5. $\int \sec^2 5x\ dx$

6. $\int (\cos 8x + \sin 7x)dx$

7. $\int \sin\dfrac{x}{4} - 5\cos 5x + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2})dx$

8. $\int \sin(4x+3)dx$

9. $\int \cos(2x-5)dx$

10. $\int \sec^2(3x+4)dx$

11. $\int (\sin\dfrac{x}{8} - \sec^2 2x)dx$

12. $\int 4\cos(x-1)dx$

13. $\int 3\sin(1-3x)dx$

14. $\int \dfrac{3}{4}\cos(1-4x)dx$

15. $\int -2\sin(1+x)dx$

16. $\int 4\sec^2(2x-4)dx$

总复习题 15

求下列不定积分（1~40）：

1. $\int \left(3x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)dx$

2. $\int \left(\dfrac{1}{x^2} + x^3\right)dx$

3. $\int (3x-4)^5 dx$

4. $\int 2x^{\frac{1}{5}}\,dx$

5. $\int (2x-1)(x+2)dx$

6. $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

7. $\int \sqrt{2+3x}\ dx$

8. $\int \frac{x}{(2x-1)^3} dx$

9. $\int \frac{3x^3-2x^2+x^{-1}}{x^2} dx$

10. $\int \left(\frac{5}{x^2}+2x^{\frac{1}{2}}+3\right) dx$

11. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

12. $\int (x+4)^{100} dx$

13. $\int 2x(x^2-1)^4 dx$

14. $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$

15. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+8)^5} dx$

16. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} dx$

17. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^3}} dx$

18. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^3} dx$

19. $\int 3x^2(x^3+1)^4 dx$

20. $\int 2\sin\frac{x}{2} dx$

21. $\int \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} dx$

22. $\int (\sin x+\cos x)^2 dx$

23. $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x-\cos\frac{x}{7}\right) dx$

24. $\int \sin(3x+1)dx$

25. $\int \cos(2-5x)dx$

26. $\int \sin(5x-6)dx$

27. $\int 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) dx$

28. $\int -3\operatorname{cosec}^2(2-x)dx$

29. $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3} dx$

30. $\int (\cos 6x+\sec^2 4x)dx$

16 定积分及其应用(一)

16.1 定积分的概念

在生产和技术中，许多实际问题，如面积、路程、体积等，最后都归结为求一种和的极限，现在我们以求面积为例，说明解决这类问题的方法，从而引出定积分的概念。

曲边梯形的面积

曲边梯形是指在直角坐标系中，由三条直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 和一条连续曲线 $y=f(x)$ 围成的图形（图 16－1），其中 $f(x)$ 是连续函数（这里假设 $f(x)\geqslant 0$）

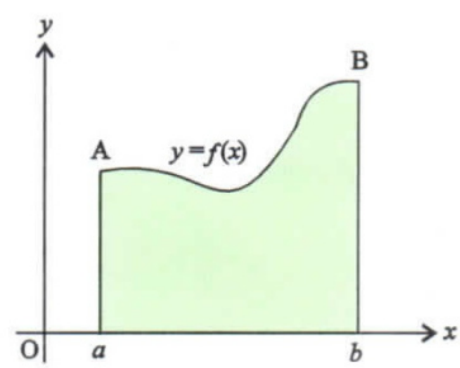


图 16－1

如图 16－2 所示，为了计算曲边梯形的面积，可以将它分割成许多小曲边梯形，每个小曲边梯形用相应的小矩形近似代替，把这些小矩形的面积累加起来，就得到曲边梯形面积的一个近似值，当分割无限变细时，这个近似值就无限趋近于所求的曲边梯形面积。

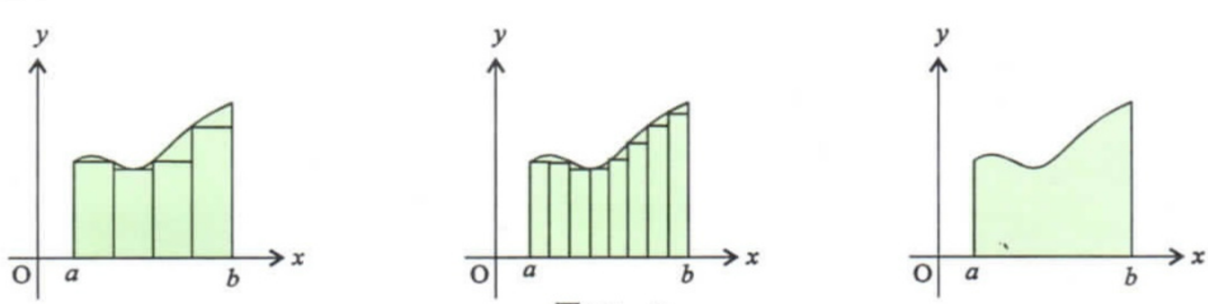


图 16－2

把这种想法具体化，可按以下四个步骤来进行：

（一）分割：

将曲边梯形的底边，即区间 $[a, b]$ 任意分成 n 个小区间 $[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，$\cdots$，$[x_{i-1}, x_i]$，$\cdots$，$[x_{n-1}, x_n]$（$x_0 = a$，$x_n = b$），过各分点 x_1，x_2，$\cdots$，x_i，$\cdots$，x_{n-1} 作 x 轴的垂线，这样就把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，它的面积分别记作

$$\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_i, \cdots, \Delta A_n$$

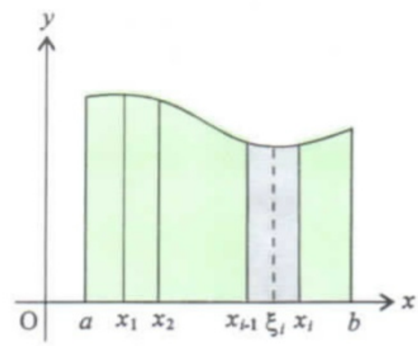


图 16－3

（二）近似代替：

在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意取一点 ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，用点 ξ_i 的纵坐标 $f(\xi_i)$ 为长，以小区间长度 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 为宽的小矩形面积近似代替第 i 个小曲边梯形面积（图 16－3），可以近似地表示为

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

（三）求和：

因为每个小矩形的面积都可以作为相应的小曲边梯形面积的近似值，所以 n 个小矩形面积的和就是曲边梯形面积 A 的近似值，即

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

（四）取极限：

当分点数目愈多，即小区间的长度 Δx 愈小时，近似程度就愈高。因此，为了能求得 A 的值，应该将区间 $[a, b]$ 无限地细分下去，使每个小区间的宽度 Δx_i 都趋近于零。当 $\Delta x_i \to 0$ 时，（即 $n \to \infty$），上述 n 个小矩形面积之和的极限值，就是曲边梯形的面积：

即
$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

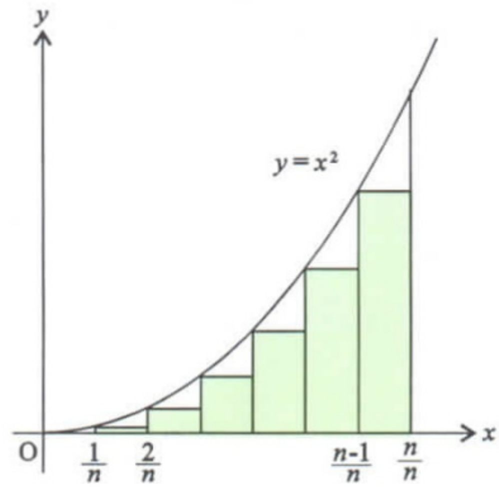
例1 求由抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 以及 x 轴所围成的曲边三角形的面积 A （如右图）。

解 （一）分割：

将区间 [0，1] n 等分，分得 n 个小区间，为$\left[0, \frac{1}{n}\right]$，$\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$，…，$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$，…，$\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$。

每个小区间的宽度都是 $\Delta x=\frac{1}{n}$。

过每个分点（原点除外）作 x 轴的垂线，把原曲边三角形分成 n 个小曲边梯形。



（二）近似代替：

在每个小区间 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ 上，取其左端点为 ξ_i，

即 $\xi_i=\frac{i-1}{n}$ ($i=1, 2, \cdots n$)，则由上图，可知每一小矩形的面积是

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= f(\xi_i)\cdot\Delta x\\ &= \xi_i^2\cdot\Delta x\\ &= \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\ &= \frac{(i-1)^2}{n^3}\end{aligned}$$

（三）求和：

将所有 n 个小矩形的面积加起来，所得面积（上图中阴影部分的总面积）是所求曲边三角形面积 A 的一个近似值。

即 $$\begin{aligned}A \approx \sum_{i=1}^{n}\Delta A_i &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^3}\\ &= \frac{(1-1)^2}{n^3}+\frac{(2-1)^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\\ &= \frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]\\ &= \frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\ &= \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\end{aligned}$$

（四）求极限：

当 $n\to\infty$，则得曲边三角形面积

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A_i \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{6n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，它的速度是不均匀的，也就是说速度 v 随着时间 t 而改变，即 $v=v(t)$。假定 $v(t)$是 t 的连续函数，试求物体在时间间隔 $[a, b]$ 内所走过的路程 s。

我们知道，当物体作匀速直线运动时，路程是 $s=vt$。现在速度不是均匀的，它是随时间改变，因此从整个过程来看，这运动是变速的。但是从短暂的局部过程来看，可以认为在这很短时间里的运动是接近于匀速运动。换句话说，在时间间隔很短的情况下，我们可以把变速运动近似看成为匀速运动，并利用"$s=vt$"求得路程的近似值；然后，将时间间隔无限变小以求此近似值的极限即可求得 s 的值。其具体步骤如下：

（一）分割：

任意分割区间$[a, b]$为 n 个小区间，并设分点顺序为 t_0，t_1，t_2，…，t_n($t_0=a$，$t_n=b$)。每个小区间的宽度为 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1, 2, \cdots n)$。

（二）近似代替：

在时间间隔$[t_{i-1}, t_i]$上任取一个时刻 $\xi_i(t_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant t_i)$，以物体在时刻 ξ_i 的速度 $v(\xi_i)$来近似地代替变化的速度 $v(t)$，得到物体在这段时间里所走过的路程的一个近似值。即

$$\Delta s_i=v(\xi_i)\Delta t_i$$

（三）求和：

把这些近似值加起来，得到总路程 s 的一个近似值，即

$$s\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i=\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$$

（四）取极限：

很明显的，分割越细，s 与 $\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$ 的差距将越小。因此，将区间$[a, b]$无限地细分下去，使每个 $\Delta t_i \to 0$（$n\to\infty$），则和数 $\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$ 的极限就是所求的路程，即

$$s = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

定积分的定义

从以上求曲边梯形面积和变速直线运动的路程这两个实际问题，我们看到，解决这类问题的方法和计算步骤最后都是归结为求一个连续函数（或有有限个间断点的函数）在某个闭这区间上的和式的极限：

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

这类的实际问题很多，最终都要归结为求这种和式的极限。因此，我们抛开这些问题的具体意义，抽象出解决这类问题的一般思想，给出定积分的概念。

设函数 $f(x)$定义在$[a, b]$上，任取分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间$[a, b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1}, x_i]$（$i = 1, 2, \cdots, n$），令小区间宽度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$（$i = 1, 2, \cdots, n$），在每个小区间上任取一点 ξ_i（$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$），作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$。将所有这些乘积累加起来，得到和式

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

这个和式 I_n 为函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上的**黎曼和**（Riemann sum）。

设 λ 为众多小区间 Δx_i 宽度中最大者，如果不论区间$[a, b]$取何种分割方法，也不论 ξ_i 如何取法，只要当 $\lambda\to 0$ 即当 $n\to\infty$ 时，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 趋于极限值 I：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

我们就把这个极限值叫做函数 $f(x)$ 由 a 到 b 的**定积分**（definite integral），记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

式中 $f(x)$ 称为被积函数，$[a, b]$ 称为**积分区间**（interval of integration），a 称为**积分下限**（lower limit of integration），b 称为**积分上限**（upper limit of integration）。

当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分存在时，我们就说 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是**可积的**（integrable）。

确定了定积分的概念后，上述的两个例子便可以用定积分来表示。曲边梯形的面积 A 是函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，即

$$A = \int_a^b f(x)dx \quad (f(x) \geqslant 0)$$

变速直线运动的路程 s，是速度 $v = v(t)$ 在时间区间 $[a, b]$ 上的定积分，即

$$s = \int_a^b v(t)dx$$

16.2 定积分的计算

定积分与不定积分的关系

从上节我们看到，根据定义求定积分，要计算一个和式的极限，这往往是比较困难的。下面我们用求变速直线运动的路程为例子，来研究计算定积分的一般方法。

设物体沿直线运动，速度为 $v(t)$，求从时间 $t = a$ 到 $t = b$ 这段时间所经过的路程 S。

由定积分的定义，物体所经过的路程为 $s = \int_a^b v(t)dx$

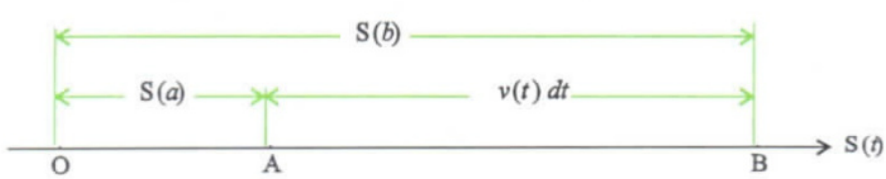


图 16－4

另一方面，如图 16－4，当 $t = a$ 时，路程为 $s(a)$，当 $t = b$ 时，路程为 $s(b)$。由图中可以看出，从时刻 $t = a$ 到 $t = b$ 这段时间物体所经过的路程为

$$s = s(b) - s(a)$$

由此得到 $$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

我们又知道，路程函数 $s(t)$ 与速度函数 $v(t)$ 有下面的关系：

$$s'(t) = v(t)$$

即 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的一个原函数。因此，由上式可知，函数 $v(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，等于它的一个原函数 $s(t)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上的改变量 $s(b) - s(a)$。

一般地，设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，$F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的任一原函数，即 $F'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

这个公式叫做**微积分基本公式**（fundamental theorem of calculus），又叫做牛顿——莱布尼兹公式。它表示定积分与不定积分（或原函数）之间的关系。这样，我们可以借助求原函数来计算定积分，就是说，连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$，等于函数 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上的改变量 $F(b) - F(a)$。

通常地，原函数在区间 $[a, b]$ 的改变量 $F(b) - F(a)$ 简记作 $[F(x)]_b^a$ 或 $F(x)\Big|_a^b$。因此，微积分基本公式可以写成下面的形式

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a)$$

【注】在计算定积分时，只写 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，不需要再加上任意常数 C，这是因为

$$\begin{aligned}[F(x) - C]_b^a &= [F(b) + C] - [F(a) + C] \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

例2 计算定积分 $\int_0^1 x^2\,dx$。

解 $\because$ $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，即 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数，

$\therefore$ 由微积分基本公式，有 $$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times 0^3 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

例3 计算定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$。

解 由微积分基本公式，有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)$$

$$= 1$$

习题 16a

计算定积分：

1. $\int_0^5 x\,dx$
2. $\int_0^1 x^2 dx$
3. $\int_{-1}^2 x^{-2}\,dx$
4. $\int_a^b x^4 dx$
5. $\int_1^2 \frac{1}{x^5} dx$
6. $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx$
7. $\int_1^2 \sqrt{x^5}\,dx$
8. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
9. $\int_{-a}^a x^3 dx$
10. $\int_0^1 dx$
11. $\int_0^\pi \sin x\,dx$
12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$
13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$
14. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^2 x\,dx$
15. $\int_0^{2\pi} \sin\frac{1}{2}t\,dt$
16. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)dx$
17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)dx$
18. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,d\theta$

● 定积分的性质

定积分有以下基本性质：

（一） 被积函数的常数因子可以提到积分号前面，即

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k\text{ 为常数})$$

证明：设 $F'(x)=f(x)$。因为$[k\,F'(x)]'=k\,F'(x)=kf(x)$，所以

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,dx &= [k\,F(x)]_a^b \\ &= k\,F(b)-k\,F(a)] \\ &= k[F(b)-F(a)] \\ &= k[F(x)]_a^b \\ &= \int_a^b kf(x)\,dx\end{aligned}$$

（二）两个函数的和（或差）在 $[a,\ b]$ 上的定积分，等于这两个函数在 $[a,\ b]$ 上的定积分的和（或差），即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

证明：设 $F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$。

因为　$[F(x)\pm G(x)]'=F'(x)\pm G'(x)=f(x)\pm g(x)$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\,dx &= [F(x)\pm G(x)]_a^b \\ &= [F(b)\pm G(b)]-[F(a)\pm G(a)] \\ &= [F(b)-F(a)]\pm[G(b)-G(a)] \\ &= [F(x)]_a^b\pm[G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

（三）如果将区间 $[a,\ b]$ 分成两个区间 $[a,\ c]$ 及 $[c,\ b]$（其中 $a<b<c$），那么

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_c^b f(x)\,dx$$

证明：设 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b)-F(a) \\ &= [F(c)-F(a)]+[F(b)-F(c)] \\ &= [F(x)]_a^c+[F(x)]_c^b \\ &= \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

定积分的性质(3)，可以用图 16－5 直观表示出来。即

面积 AaBb = 面积 AacC + 面积 CcbB

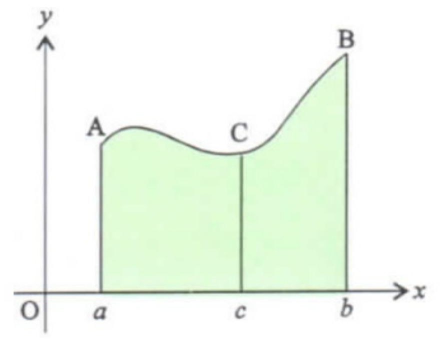


图 16－5

例4 计算定积分：

(a) $\int_0^2 (3x^2 + 4x^3)dx$ (b) $\int_1^2 \frac{2x^3 + 3}{x^2} dx$

解 (a)

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3x^2 + 4x^3)dx &= \int_0^2 3x^2 dx + \int_0^2 4x^3 dx \\ &= 3\int_0^2 x^2 dx + 4\int_0^2 x^3 dx \\ &= [x^3]_0^2 + [x^4]_0^2 \\ &= 8 + 16 \\ &= 24\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{2x^3 + 3}{x^2} dx &= \int_1^2 \left(2x + \frac{3}{x^2}\right) dx \\ &= \int_1^2 2x\,dx + \int_1^2 \frac{3}{x^2} dx \\ &= 2\int_1^2 x\,dx + 3\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 3\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 \\ &= (4 - 1) + \left(-\frac{3}{2} + 3\right) \\ &= 4\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例5 已知 $\int_1^3 f(x)dx = 15$，$\int_0^3 g(x)dx = 4$，求 $\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx - \int_0^3 2g(x)dx$。

解

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx - \int_0^3 2g(x)dx &= \int_2^3 f(x)dx - 2\int_0^3 g(x)dx \\ &= 15 - 2(4) \\ &= 7\end{aligned}$$

例6 计算定积分：

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\frac{x}{2}dx$　　　　(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1)dx$

解 (a)
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\frac{x}{2}dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}dx \\ &= 2\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -4\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) \\ &= -2\sqrt{2} + 4\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= 1 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

● 换元积分法

我们可以利用不定积分的换元法来进行定积分的计算。

例7 计算定积分$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$。

解 设 $1+x^2=t$，那么 $2x\,dx=dt$，
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\cdot 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

在利用不定积分换元法进行定积分计算时，可以不必把所换的变量换回原来函数的变量，而在开始换元时，也将定积分积分上、下限进行变换，再进行定积分计算。

例8 计算定积分 $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx$。

解 设 $x^2-1=t$，那么 $2x\,dx=dt$，

当 $x=1$ 时，$t=0$；当 $x=2$ 时，$t=3$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\cdot 2x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 t^{\frac{1}{2}}dt\\ &= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\right]_0^3\\ &= \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

例9 求定积分 $\int_0^3 \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}dx$。

解 设 $t=\sqrt{x+1}$，则 $x=t^2-1$，$dx=2t\,dt$

当 $x=3$ 时，$t=2$；当 $x=0$ 时，$t=1$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \int_0^3 \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}dx &= \int_1^2 \frac{2(t^2-1)-1}{t}2t\,dt\\ &= \int_1^2 (4t^2-6)dt\\ &= \left[\frac{4}{3}t^3-6t\right]_1^2\\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

习题 16b

求下列各定积分：

1. $\int_0^2 (2+x)dx$

2. $\int_0^1 (2x+x^3)dx$

3. $\int_0^2 (x^2 - 2x)dx$

4. $\int_1^2 (\sqrt{x} - 1)dx$

5. $\int_0^3 (3 - 2x + x^2)dx$

6. $\int_0^2 (2 - x)^2 dx$

7. $\int_0^1 (4 - x)(4 - x^2)dx$

8. $\int_2^3 (x - 2)(x - 3)dx$

9. $\int_{-1}^2 (1 - t^2)t\,dt$

10. $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

11. $\int_1^2 \left(\frac{x^2 + 2x}{x}\right) dx$

12. $\int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2 dx$

13. $\int_1^4 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

14. $\int_1^4 (1 - u)\sqrt{u}\,du$

15. $\int_1^2 \frac{1}{2x^3}\,dx$

16. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x + \frac{1}{2x^2}\right) dx$

17. $\int_1^8 \sqrt{1 + 3x}\,dx$

18. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + x}} dx$

19. $\int_1^2 \frac{x + 1}{x^3} dx$

20. $\int_1^9 \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx$

21. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

22. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{5 - 4x}} dx$

23. $\int_0^1 \frac{x}{(1 + x^2)^3} dx$

24. $\int_0^2 \frac{x}{(4 + x)^3} dx$

16.3 面积计算

在引进定积分概念时，我们已经知道：曲边梯形面积是表示曲边的函数 $y = f(x)$ 在所给区间 $[a, b]$ 上的定积分；变速运动所经过的距离是表示速度的函数 $v = v(t)$ 在所给时间间隔 $[a, b]$ 上的定积分。当然定积分远不只是在这两方面的应用，它是各种科学技术领域中应用极为广泛的一种数学工具。应用定积分解决实际问题的基本思路，就是定义中所提的四个步骤：分割、近似代替、求和、求极限。

以上四个步骤中最关键的是：第一要具备一个可分割的闭区间（即积分上、下限），这一点一般是问题中给定的；第二是要设法求出局部量 ΔI_i 的近似值 $f(\xi_i)_{\Delta x\,i}$ 由此才能得出被积表达式 $f(x)dx$。所以在应用中，在有了积分区间后，如何找出被积表达式是个关键问题。根据上述四个步骤来求被积表达式是比较麻烦的，为了解

解决这个问题，这里提出一个方法，叫做微元法。

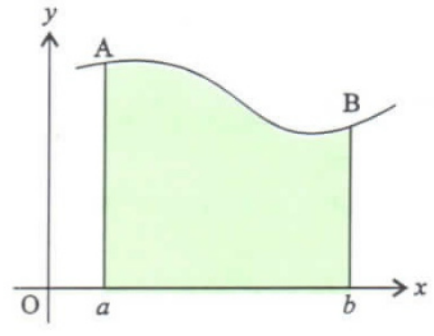


图 16－6

在此，以曲边梯形的面积为例来说明。在讨论定积分的概念时，已知曲边梯形面积的公式为

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

现在以微元法求此面积公式。

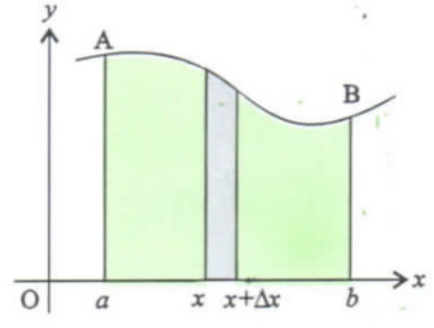


图 16－7

如图 16－7，将曲线 $y=f(x)$所在的区间$[a，b]$中任取一个小区间$[x，x+\Delta x]$，过点 x 与 $x+\Delta x$ 作 x 轴的垂线，得一小曲边梯形，此小曲边梯形可近似地看成是以点 x 处的函数值 $f(x)$为高，Δx 为宽的小矩形，因此得

$$\Delta A\approx f(x)\Delta x$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta x}\approx f(x)\,dx$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)$$

$$\frac{dA}{dx}=f(x)\quad（或\ dA=f(x)\,dx）$$

由此就得到在区间$[a，b]$上的面积 A，

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx$$

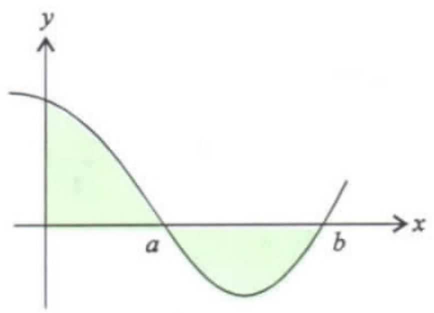


图 16－8

如果 $f(x)<0$ 时，图形在 x 轴的下方（图 16－8）。这时定积分为负值，但面积不会是负数，因此这时面积为

$$A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

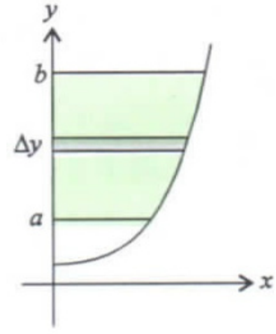


图 16－9

另一方面，如果所求面积 A 是由曲线 $y=f(x)$，y 轴，及二直线 $y=a$，$y=b$ 所围成（图 16－9），则

$$A=\int_a^b x\,dy$$

例10 求由抛物线 $y = 4x - x^2$ 与 x 轴所围成的面积。

解 此抛物线的图象如右图所示。它与 x 轴的交点的条件是：$y = 0$

即 $4x - x^2 = x(4 - x) = 0$,

$\therefore$ $x = 0,\ 4$

可知积分区间为 [0，4]。

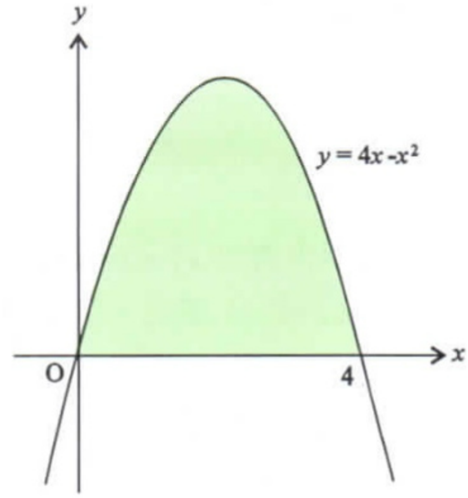
所求之面积

$$A = \int_0^4 y\,dx$$

$$= \int_0^4 (4x - x^2)dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3}$$



例 11 求由抛物线 $x = 8 + 2y - y^2$ 与 $y = -1$，$y = 3$ 及 y 轴所围成的面积。

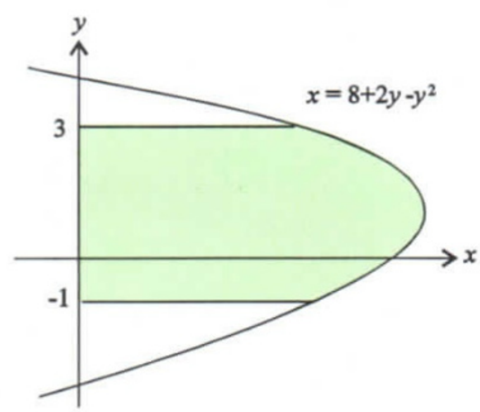
解 如右图，所求图形的面积为

$$A = \int_{-1}^3 x\,dy$$

$$= \int_{-1}^3 (8 + 2y - y^2)dy$$

$$= \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^3$$

$$= \frac{92}{3}$$



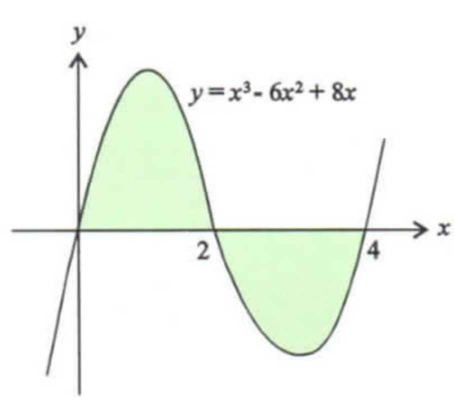
例 12 求由曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ 与 x 轴所围成的面积。

解 此曲线的图象如右图所示。它与 x 轴的交点的条件是：$y = 0$

即 $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

$x(x - 2)(x - 4) = 0$

$\therefore$ $x = 0,\ 2,\ 4$



所求面积为 $A = \int_0^2 y\,dx + \left|\int_2^4 (y)dx\right|$

$$= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right|$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4\right|$$

$$= 4 + 4$$

$$= 8$$

如果图形由曲线 $y_1 = f_1(x)$，$y_2 = f_2(x)$ 及直线 $x = a$，$x = b$ 围成（图 16－10），其面积可求出如下。

区间 $[a,\ b]$ 中任取一个小矩形，其宽为 Δx，高为 $y_1 - y_2$，则此小矩形面积为

$$\Delta A \approx (y_1 - y_2)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(y_1 - y_2)$$

$$\frac{dA}{dx} = y_1 - y_2$$

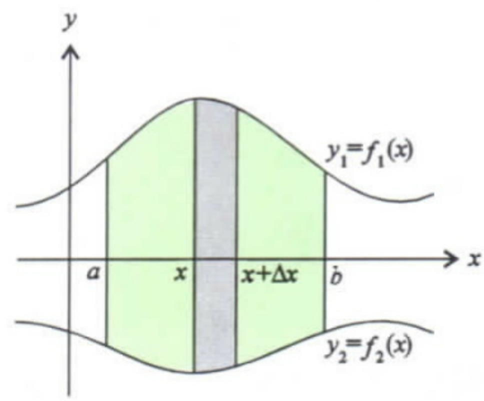


图 16－10

积分区间为$[a,\ b]$

$$\therefore \quad A = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$$

例 13 求由抛物线 $y = 6x - x^2$ 与 $y = x^2 - 2x$ 所围成的面积。

解 解联立方程式 $\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

得 $(x,\ y) = (0,\ 0)$，$(4,\ 8)$。

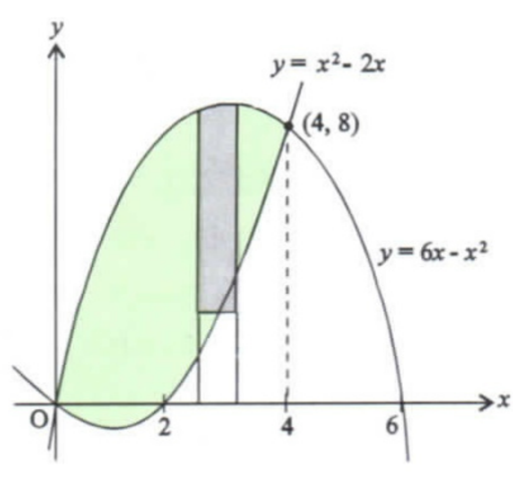
设 $y_1 = 6x - x^2$，$y_2 = x^2 - 2x$

则所求之面积 $A = \int_0^4 (y_1 - y_2)dx$

$$= \int_0^4 (8x - 2x^2)dx$$

$$= \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4$$

$$= 21\frac{1}{3}$$



例 14 求由抛物线 $y^2=4x$ 与直线 $y=2x-4$ 所围成的面积。

解一 联立方程式 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

得交点 $(1,-2)$ 和 $(4,4)$。

如右图，取一小矩形，宽为 Δy，高为 x_2-x_1，则此小矩形的面积为

$$\Delta A \approx (x_2-x_1)\Delta y$$

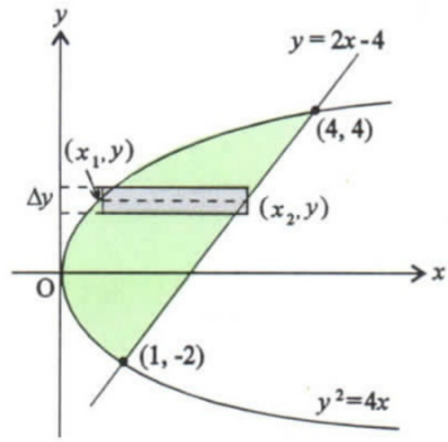
积分区间为 $[4,-2]$，

$$\therefore\quad A = \int_{-2}^{4}(x_2-x_1)dy$$

$$= \int_{-2}^{4}\left(2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}y^2\right)dy$$

$$= \left[2y+\frac{y^2}{4}-\frac{y^3}{12}\right]_{-2}^{4}$$

$$= 9$$



解二 如右下图，直线 $x=1$ 把面积分成两个部份：

(i) 直线 $x=1$ 左边的小矩形，底为 Δx，高为 $4\sqrt{x}$。

$\therefore$ 其典型小矩形面积 $\Delta A_1 = 4\sqrt{x}\,\Delta x$

(ii) 直线 $x=1$ 右边的小矩形，底为 Δx，高为 $y_2-y_1 = 2\sqrt{x}-2x+4$。

$\therefore$ 其典型小矩形面积 $\Delta A_2 = (y_2-y_1)\Delta x$

$$= (2\sqrt{x}-2x+4)\Delta x$$

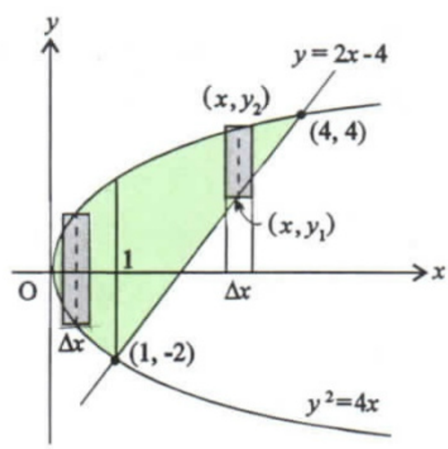
则所欲求之面积为

$$A = \int_{0}^{1}4\sqrt{x}\,dx + \int_{1}^{4}(2\sqrt{x}-2x+4)dx$$

$$= \left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+4x\right]_{1}^{4}$$

$$= \frac{8}{3}+\frac{19}{3}$$

$$= 9$$



习题 16c

试求由下列曲线所围成的图形的面积（1 ~ 7）：

1. $y=2x^2$，$x=0$，$x=3$ 及 x 轴；
2. $y^2=4x$，$y=1$，$y=4$ 及 y 轴；
3. $y=4x^2-2$，$x=1$，$x=4$ 及 x 轴；
4. $y=x^2+3$，$x=-1$，$x=2$ 及 x 轴；
5. $y=x^2+3$，$x=-1$，$x=2$ 及 x 轴；
6. $x=y^2$，$y=3$，及 y 轴；
7. $x-y^2-3=0$，$y=-1$，$y=2$ 及 y 轴；
8. 试求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=x^2-2x$ 所围成图形的面积。
9. 试求由曲线 $y=2x^2+7x+3$ 及 $y=9+4x-x^2$ 所围成图形的面积。
10. 试求由曲线 $y=x^2-6x+2$ 及 $x+y-2=0$ 所围成图形的面积。
11. 试求由曲线 $y=x(2-x)$ 及 $y=\frac{x}{2}$ 所围成图形的面积。
12. 试绘出函数 $f(x)=(1-x)(2+x)$ 的曲线，并求在 x 轴上方部份的面积。

16.4 旋转体的体积

旋转体（solid of revolution）就是一平面图形绕这平面内的一条直线旋转一周而成的几何体。通常我们遇到的圆柱、圆锥、球等几何体都是简单的旋转体。

现在我们来计算它的体积。

设旋转体是由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b\,(a<b)$ 以及 x 轴所围曲边梯形 AabB 绕 x 轴旋转一周而成（图 16 – 11）。

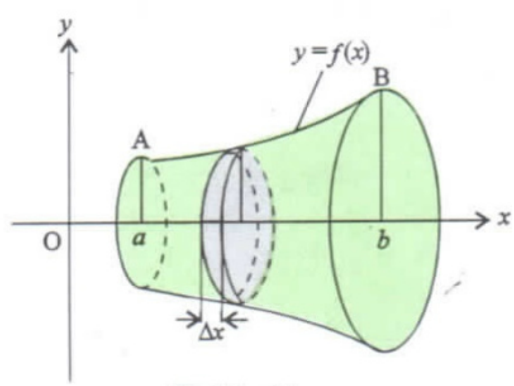


图 16 – 11

在区间 $[a,\ b]$ 中取一小区间 $[x,\ x+\Delta x]$，过点 x 及 $x+\Delta x$ 作垂直于 x 轴的平面，得厚度为 Δx 的小薄片。过点 x 的平面所截的圆的半径为 $f(x)$，面积为 $\pi[f(x)]^2$，这时，小薄片可以近似地看成是底面积为 $\pi[f(x)]^2$，高为 Δx 的小圆柱，因此它的体积为

$$\Delta V\approx\pi[f(x)]^2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\pi[f(x)]^2$$

$$\frac{dV}{dx}=\pi[f(x)]^2$$

$\therefore$
$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx$$

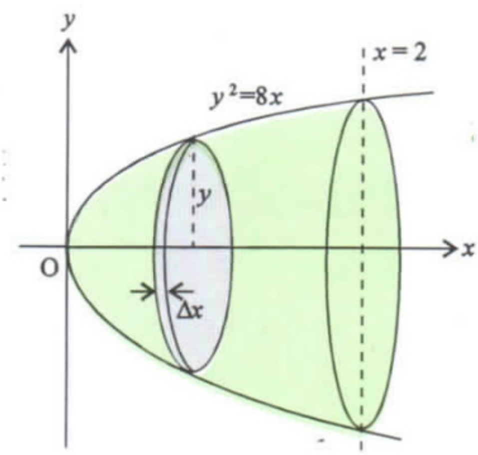
同理，若旋转体是绕 y 轴而成的，其体积为

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy$$

例 15 求抛物线 $y^2 = 8x$ 及 $x = 0$，$x = 2$ 在第一象限所围成的面积绕 x 轴旋转一周而成的体积。

解 利用公式并参照右图得旋转体体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi y^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 8x \ dx \\ &= 4\pi [x^2]_0^2 \\ &= 16\pi \end{aligned}$$



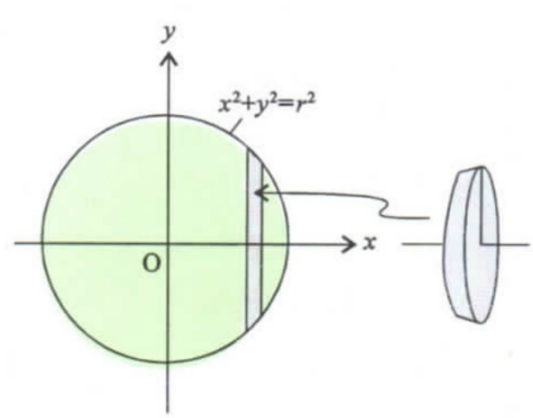
例 16 求半径为 r 之球体的体积。

解 取坐标系如右图所示，所求球体的体积可视为将半圆

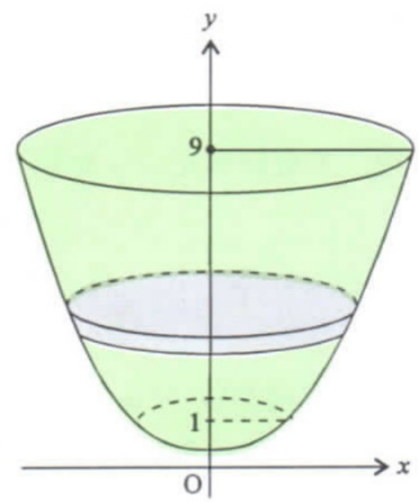
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leqslant x \leqslant r$$

绕 x 轴旋转一周而成。

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} \\ &= \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$



例 17 求由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$，$y=9$ 所围成的面积绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积。



解 所求体积为

$$V=\int_1^9 \pi x^2 dy$$
$$=\pi\int_1^9 y dy$$
$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^9$$
$$=40\pi$$

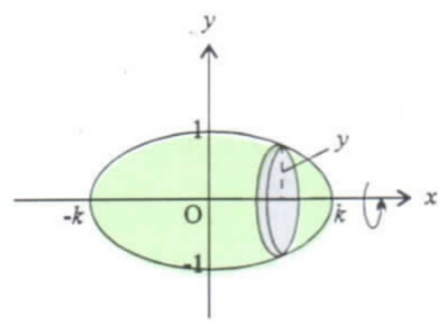
例 18 椭圆 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1\ (k>0)$ 绕 x 轴与 y 轴旋转后所形成的旋转体体积分别为 V_x 与 V_y。

(a) 求 V_x，V_y。

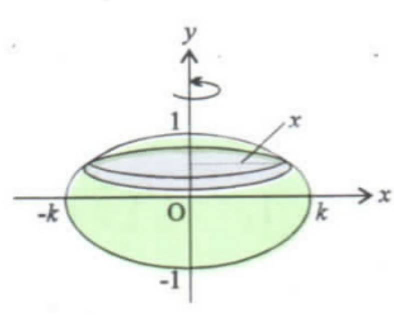
(b) 若 $V_y=3V_x$，试求 k 之值。

解 (a) $V_x=\int_{-k}^{k}\pi y^2\,dx$

$$=\pi\int_{-k}^{k}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{x^3}{3k^2}\right]_{-k}^{k}$$
$$=\frac{4k\pi}{3}$$



$$V_y=\int_{-1}^{1}\pi x^2\,dy$$
$$=\pi\int_{-1}^{1}k^2(1-y^2)dy$$
$$=\pi k^2\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{4k^2\pi}{3}$$

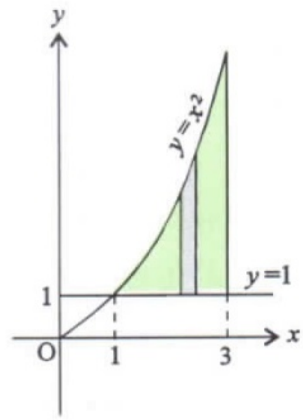


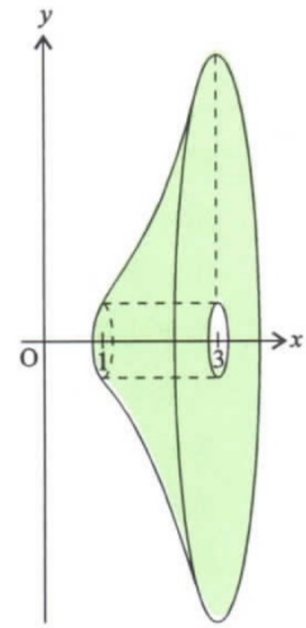
(b) 由题意：$V_y=3V_x$

即 $\frac{4k^2\pi}{3}=3\times\frac{4k\pi}{3}$

$\therefore\ k=3$

例 19 求由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$，$x=3$ 及 $y=1$ 所围成的面积绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。





解 当 $x=1$ 时，$y=1$，

所求体积为 $V=V_1-V_2$

而 $V_1=\int_1^3 \pi y^2 dx$

$V_2=\int_1^3 \pi 1^2 dx$

故 $V=\pi\int_1^3 x^4\,dx-\pi\int_1^3 dx$

$=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^3-\pi[x]_1^3$

$=\pi\left(\frac{243}{5}-\frac{1}{5}\right)-\pi(3-1)$

$=\frac{232}{5}\pi$（立方单位）

例 20 求由抛物线 $y^2=4x$ 与 $x^2=4y$ 围成的图形绕 y 轴旋转所成旋转体的体积。

解 如右图，为了确定旋转体的的范围，应求出这两条曲线交点的横坐标。

解方程组 $\begin{cases} y^2=4x \\ x^2=4y \end{cases}$

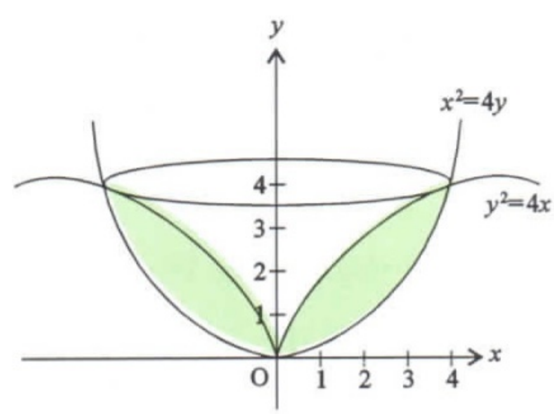
得出交点的纵坐标 $y=0$，$y=4$，

因此，所求旋转体的体积

$V=\pi\int_0^4 4y\ dy-\pi\int_0^4\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy$

$=\pi[2y^2]_0^4-\frac{\pi}{4^2}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^4$

$=\frac{96\pi}{5}$（立方单位）



习题 16d

试求由下列曲线所围成图形面积绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积（1 ~ 6）：

1. $y=\sqrt{x}$，$x=1$，$x=4$，$y=0$
2. $y=2x$，$x=0$，$x=2$，$y=0$
3. $y=x^2+1$，$y=0$，$x=0$，$x=1$
4. $y=x(x-2)$，$y=0$
5. $x^2+y^2=16$，$x=0$，$x=4$
6. $x^2-y^2=16$，$y=0$，$x=8$

试求由下列曲线所围成图形的面积绕 y 轴旋转一周体所成旋转体的体积（7 ~ 10）：

7. $y=2x-4$，$y=2$，$x=0$

8. $x=\sqrt{y-1}$，$x=0$，$y=4$

9. $x-y^2-2=0$，$x=0$，$y=0$，$y=3$

10. $y^2=x+4$，$x=0$

11. 试求由曲线 $y=1-\sqrt{x}$ 与 x 轴及 y 轴所围成的图形面积

 (a) 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积，

 (b) 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。

12. 试求由曲线 $y^2=4x$，$y=x$ 所围成图形面积绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

13. 试求由曲线 $y=4-x^2$ 及直线 $y=1$，$y=0$ 所围成图形面积绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。

14. 试求由曲线 $y=x^2$ 及 $y^2=8x$ 所围成图形面积绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

15. 绘函数 $f(x)=x^2(1-x)$ 的粗略图象。取其在第一象限内与 x 轴之间的部份，使此部份图形绕 x 轴旋转一周，求所得之旋转体体积。

16. 求底面半径为 r，高为 h 的圆锥体的体积。

16.5 直线运动

我们知道，非匀速直线运动的路程函数 $s=s(t)$ 与速度函数 $v=v(t)$ 的关系为 $v(t)=s'(t)$。

由此可知，若物体运动的速度为 V，则在时间 t 内，物体运动的路程为

$$s=\int v\,dt$$

若 $s=s(t)$，那么，在 a 秒后的位移为 $s(a)$，在 b 秒后的位移为 $s(b)$。当物体运动的方向不变时，在 a 秒后物体所经过的路程为 $s(a)-s(0)$，即 $\int_0^a v\,dt$；在时间间隔 $[a,b]$ 内，物体所经过的路程为 $\int_a^b v\,dt$。

同理，若已知加速度 a，物体运动的速度为

$$V=\int a\,dt$$

例 21 物体由静止开始作直线运动，其速度为 $v=4t+1(\mathrm{m/s})$

(a) 求此物体在 5 秒后所经过的路程，

(b) 求此物体在第 5 秒所经过的路程。

解 (a) $v=4t+1$

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^5 v\ dt \\
&= \int_0^5 (4t+1)dt \\
&= [2t^2+t]_0^5 \\
&= 2(5)^2+5 \\
&= 55\ (\mathrm{m})
\end{aligned}
$$

(b) 第五秒所经过的路程为：

$$
\begin{aligned}
\int_4^5 (4t+1)dt &= [2t^2+t]_4^5 \\
&= (50+5)-(32+4) \\
&= 19\ (\mathrm{m})
\end{aligned}
$$

例 22 一质点作直线运动，它经过定点 O 时的速度为 4m/s。其过 O 后经过 t 秒时的加速度为 $a=3-15t^2$，求质点

(a) 在点 O 的加速度，

(b) 在 $t=2$ 的速度，

(c) 在 2 秒后离 O 的距离。

解 (a) 在点 O，$t=0$，$\therefore$ $a=3-15(0)^2$

$$= 3\ (\mathrm{m/s^2})$$

(b) 速度为 $V=\int a\ dt$

$$
\begin{aligned}
&= \int (3-15t^2)dt \\
&= 3t-15t^3+\mathrm{C}
\end{aligned}
$$

在点 0，$v=4\mathrm{m/s}$，$\therefore$ $4=3(0)-5(0)^3+\mathrm{C}$

$$\mathrm{C}=4$$

$\therefore$ $v=3t-5t^3+4$

当 $t=2$，$v=3(2)-5(2)^3+4$

$$= -30\ (\mathrm{m/s})$$

(c) $s=\int v\,dt$

$$=\int(3t-5t^3+4)\,dt$$

$$=\frac{3}{2}t^2-\frac{5t^4}{4}+4t+C$$

当 $t=0$，$s=0$，$\therefore\quad C=0$

$$\therefore\quad s=\frac{3}{2}t^2-\frac{5t^4}{4}+4t$$

当 $t=2$，$s=\frac{3}{2}(2)^2-\frac{5}{4}(2)^4+4(2)$

$$=-6\ (\mathrm{m})$$

例 23 汽车以每小时 32km 的速度行驶，到某处需要减速停车，汽车以等减速 $a=-2\mathrm{m/s^2}$ 刹车，问从开始刹车到停车，汽车走了多少路程？

解 汽车刚开始刹车时，即 $t=0$ 时的速度为

$$V_0=32\ (\mathrm{km/h})=\frac{80}{9}\ (\mathrm{m/s})$$

刹车后，汽车作等减速运动，这时速度为

$$v=V_0+at=\frac{80}{9}-2t$$

从汽车刹车到汽车停车，即 $v=0$ 时，经过的时间 t 为

$$v=\frac{80}{9}-2t=0$$

$$t=\frac{80}{18}$$

$$=\frac{40}{9}(\mathrm{s})$$

于是在 $\left[0,\ \frac{40}{9}\right]$ 这段时间内，由路程公式求得汽车所走过的距离是

$$s=\int_0^{\frac{40}{9}}\left(\frac{80}{9}-2t\right)dt$$

$$=\left[\frac{80}{9}t-t^2\right]_0^{\frac{40}{9}}$$

$$\approx 19.75\ (\mathrm{m})$$

即车刹车以后，汽车需要走过 19.75 m 后才能停车。

例 24 一质点作直线运动，它的速度为 $v=4-t^2$，t(秒)为过一定点 O 后的时间。

(a) 求质点瞬时静止时的加速度与位移，

(b) 当 $t=3$ 时，求质点的位移及在首 3 秒内所经过的总路程。

解 (a) 质点静止时，$v=0$

即 $4-t^2=0$

$t=-2$ （不合题意）

或 $t=2$

加速度 $a=\dfrac{dv}{dt}$

$=-2t$

当 $t=2$，$a=-4(\text{ms}^{-2})$

$$s=\int v\,dt$$

$$=4t-\frac{t^3}{3}+C$$

当 $t=0$，$s=0$，$\therefore C=0$

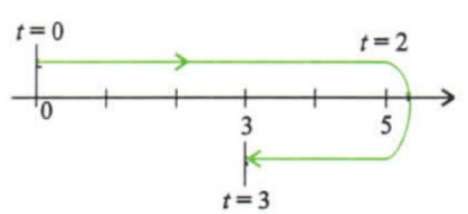
$$\therefore\quad s=4t-\frac{t^3}{3}$$

当 $t=2$，$s=4(2)-\dfrac{2^3}{3}$

$$=5\frac{1}{3}(\text{m})$$

(b) 当 $t=3$，$s=4(3)-\dfrac{3^3}{3}$

$=3\text{m}$



总路程 $=5\dfrac{1}{3}+(5\dfrac{1}{3}-3)$

$=7\dfrac{2}{3}(\text{m})$

习题 16e

1. 设一质点从静止开始运动，且其速度 v(米/秒)和时间 t(秒)之关系为 $v=2t^2+5t$，求 2 秒后质点的位移。
2. 若质点运动之速度和时间成比例，且 $t=2$ 秒时之速度为 3 米/秒，求 $t=10$ 秒时的位移。

3. 一物体由静止开始运动，在 t 秒末，其速度为 $5t^2$ 米/秒；问 3 秒后，它离出发点有多远？它费了多少时间才走了 360 米？

4. 一物体过定点 O 时的速度为 15 m/s，过 O 点后经过时间 t 秒的加速度为 $a=(10-4t)\mathrm{m/s^2}$，求此物体

   (a) 当 $t=3$ 时的速度，

   (b) 在 $t=3$ 时离 O 点的距离。

5. 已知在直线上以初速 30 米/秒开始运动的点 t 秒后的速度 v 米/秒可用 $v=30-2t-4\sqrt{t}$ 表示。试问此点至停止瞬间所走过的距离多大？

6. 设一质点从静止开始运动，且其加速度 a(米/秒^2)和时间 t(秒)满足如下关系：$a=4-6t$，求

   (a) 1 秒后质点之速度，

   (b) 4 秒后质点之位移，

   (c) 求前 4 秒内质点通过之总路程。

7. 一物体作直线运动，其速度为 $v=t(4-t^2)$。求在前 3 秒内此物体所经过的总路程及其平均速率。

8. 一质点作直线运动，其通过 O 点 t 秒后的速度为 $v=3t^2-10t+3(\mathrm{ms^{-1}})$若此质点第一次瞬时静止于 A 点，求

   (a) 质点到达 A 点的时间，

   (b) OA 的距离，

   (c) 当加速度为零时，此质点的速度，

   (d) 此质点于第二次瞬时停止时所走过的总路程。

9. P 为数轴上的一个动点，通过原点 O 以后经过时间 t 时 P 的速度为 $v=3+4t-4t^2$。

   (a) 求在时刻 t 点 P 的位置；

   (b) 求点 P 返回点 O 所需要的时间；

   (c) 求 $0\leqslant t\leqslant 3$ 间，点 P 的运动范围。

10. 点 A 以速度 $v=6t^2-8t+14$ (米/秒) 在一直线上运动。在此直线上有一个位于 A 前方 3 米处的点 B，与 A 同时出发，以速度 $v=3t^2+4t+5$ (米/秒) 沿同一直线而运动。问

    (a) 在 $0\leqslant t\leqslant 4$ 范围内，A 与 B 同时同在线上同一点的情况共有几次？

    (b) 在 $0<t\leqslant 4$ 范围内，当 A 与 B 相距最远时，t 的值为何？

总复习题 16

1. 计算定积分：

(a) $\int_0^a (3x^2 - x + 1)dx$

(b) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$

(c) $\int_2^4 \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^2} dx$

(d) $\int_1^3 y^2 (y - 2)dy$

(e) $\int_{-1}^1 x(x - 3)dx$

(f) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$

(g) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{3 - 2x}\, dx$

(h) $\int_0^2 (4 - 2x)(4 - x^2)dx$

(i) $\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx$

(j) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (2\sin x + \cos x)dx$

2. 求下列各曲线围成的图形的面积：

(a) 曲线 $y = x^3$，$y = x^2$，直线 $x = 1$，$x = 2$;

(b) 曲线 $y = \sin x$，$y = \cos x$，直线 $x = -\frac{\pi}{4}$，$x = \frac{\pi}{4}$;

(c) 曲线 $y = 4 - 3x - x^2$，直线 $2x + y + 2 = 0$;

(d) 曲线 $y = x^2$，直线 $y = x$，$y = 2x$;

(e) 曲线 $y = x^2 - 4x + 5$，直线 $x = 3$，$x = 5$，$y = 0$;

(f) 曲线 $y = 3 - 2x - x^2$，$y = 0$。

3. 求下列曲线所围成图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积：

(a) $y = x^3$，$x = 2$，$y = 0$;

(b) $y = \cos x$，$x = -\frac{\pi}{4}$，$x = \frac{\pi}{4}$，$y = 0$;

(c) $xy = 4$，$x = 1$，$x = 4$，$y = 0$;

(d) $y = 1 + \sqrt{x}$，$y = 3$，$x = 0$。

4. 试求由下列曲线所围成图形面积绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积：

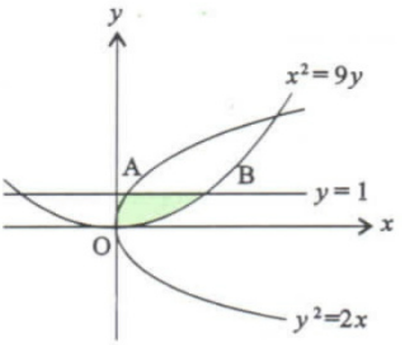
(a) $y^2 = 4x$，$y = 0$，$y = 2$;

(b) $xy = 4$，$y = 1$，$y = 4$。

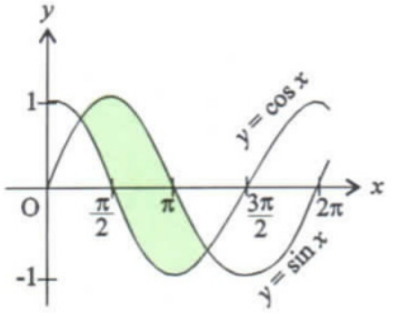
5. 试求由曲线 $y = x^2$ 与 $x = 1$，$x = 3$ 及 x 轴所围成图形面积绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

6. 试求由曲线 $y = x^2$ 与 $y = 8 - x^2$ 所围成图形面积绕(a) x 轴(b) y 轴旋转所得旋转体的体积。

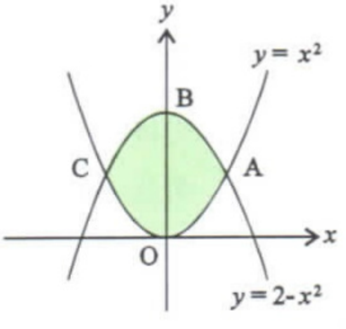
7. 右图所示为直线 $y=1$ 与曲线 $y^2=2x$ 及 $x^2=9y$ 分别相交于点 A 与 B，试求阴影部份 OAB 的面积。



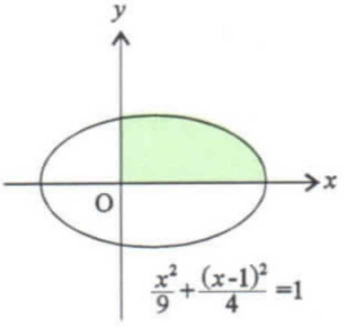
8. 若 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$，试求曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 之间所围成图形的面积（右图阴影部份）。



9. 试求右图中阴影部份的面积。若将此阴影部分绕 y 轴旋转 180°，试求所得旋转体的体积。



10. 试求曲线 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$，$x$ 轴及 y 轴在第一象限内所围成的面积绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。



11. 设抛物线 $y=ax^2-4$ $(a>0)$ 与直线 $y=5$ 所包围部份的面积为 A，将此部份图形绕 y 轴旋转一周所产生的旋转体体积为 V。求 A 及 V 的值。试求出 V 和 A 不含 a 的关系式。

12. 有一花瓶，其侧面是 xy 平面上的曲线 $2x=y^3-3y+3$，$-2 \leqslant y \leqslant 2$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面，其底为平面。求此花瓶的容积。这里不考虑侧面和底面的厚度。

13. 设曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=mx$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体体积为 V_x，绕 y 轴旋转一周所产生的体积为 V_y，当 $V_x=V_y$ 时，求 m 之值。

14. 一质点由静止开始运动，速度为 $V=(17+\frac{1}{8}t^2)\text{ms}^{-1}$，求

(a) $a=2\text{ ms}^{-2}$ 时的速度，

(b) 第 4 秒所经过的路程。

15. 一物体由点 O 开始作直线运动，其速度为 $v=3t-t^2$。求

(a) 物体静止时所经过的路程，

(b) 物体回到点 O 处所需的时间。

16. 一质点作直线运动，其过 O 点时的速度为 12 m/s，过 O 点后经过时间 t 秒的加速度为 $(6t-15)\text{ m/s}^2$。

(a) 求此质点在时间 t 秒的速度，

(b) 求质点瞬时静止时的时间 t_1 及 t_2，

(a) 求在时间 t_1 及 t_2 时，此质点的位移，

(b) 求 0 至 6 秒间此质点所经过的总路程。

名词对照

（注：本名词对照表按华文条目的汉语拼音字母的次序排列）

B

中　文	英　文	巫　文
变化率	rate of change	kadar perubahan
不定积分	indefinite integral	kamiran tak tentu
被积函数	integrand	yang dikamir

C

纯量	scalar	skala
重言式	tautology	tautologi

D

单位向量	unit vector	vektor unit
狄摩根律	De Morgan's law	hukum De Morgan
导数	derivative	terbitan
导函数	derived function	fungsi terbitan
单调函数	monotone function	fungsi berekanada
定积分	definite integral	kamiran tentu

E

二阶导数	second derivative	terbitan kedua

F

非	not	bukan
否定	negation	penafian
否命题	inverse proposition	pernyataan songsang
复合命题	compound proposition	pernyataan majmuk
法线	normal	normal

H

或	or	atau
合取	conjunction	konjungsi
函数的极限	limit of function	had fungsi
换元积分法	integration by substitution	pengamiran dengan menggunakan penggantian

J

且	and	dan
简单命题	simple proposition	pernyataan ringkas
结论	conclusion	kesimpulan
减函数	decreasing function	fungsi menyusut
极限	limit	had
极大值	maximum value	nilai maksimum
极大值点	maximum point	titik maksimum
极小值	minimum value	nilai minimum
极小值点	minimum point	titik minimum
极值	extreme value	nilai ekstrim
极值点	extreme point	titik ekstrim
积分符号	integral sign	tanda kamiran
积分常数	constant of integration	pemalar pengamiran
积分区间	interval of integration	selang pengamiran
积分下限	lower limit of integration	had bawah pengamiran
积分上限	upper limit of integration	had atas pengamiran

K

可导/可微	differentiable	boleh dibeza/terbezakan
可积的	integrable	boleh dikamir/terkamirkan

L

零向量	zero vector/null vector	vector sifar
逻辑学	logic	mantik/logik
逻辑等价	logical equivalence	kesetaraan mantik
连续函数	continuous function	fungsi selanjar
链导法	chain rule	rumus rantai
黎曼和	Riemann sum	hasil tambah Riemann

M

命题	proposition	pernyataan
矛盾式	contradiction	percanggahan

N

内积/点积	scalar product/dot product	hasil darab skalar/ hasil darab bintik
逆向量	inverse vector	vektor songsang
逆命题	converse proposition	pernyataan akas
逆否命题	contrapositive proposition	pernyataan kontra positif

Q

前提	premise	premis
切线	tangent	tangen
求导数的第一法则	differentiation from first principle	pembezaan dengan prinsip pertama

S

双否定律	law of double negation	hukum penafian ganda dua
三段论定律	law of sylogism	hukum silogisma
数列的极限	limit of a sequence	had jujukan

T

推理	argument	hujah

W

位置向量	position vector	vektor kedudukan
微积分基本公式	fundamental theorem of calculus	theorem asasi kalkulus

X

相等向量	equal vector	kesamaan vektor
向量	vector	vektor
向量求和三角形法则	triangle law of vector addition	hukum segitiga bagi penambahan vektor
向量求和平行四边形法则	parallelogram law of vector addition	hukum segiempat selari bagi penambahan vektor
向量的数乘	Scalar multiplication of vector	pendaraban vektor dengan skalar
析取	disjunction	disjungsi
斜率	gradient	kecerunan
相关变率	related rate of change	kadar perubahan terhubung
旋转体	solid of revolution	pepejal perkisaran

Y

有效	valid	sah
蕴函	implication	implikasi
右极限	right hand limit	had kanan
一阶导数	first derivative	terbitan pertama
原函数	anti derivative	anti – terbitan

Z

真值	truth value	nilai kebenaran
真值表	truth table	jadual kebenaran
左极限	left hand limit	had kiri
增函数	increasing function	fungsi menokok
驻点	stationary point	titik pegun
转向点	turning point	titik pusingan
最大值	the greatest value	nilai terbesar
最小值	the smallest value	nilai terkecil

习题答案

第 10 章

习题 10a（P.2）

1. 不是。因为温度只有大小，没有方向。　　2. (a) 相同　(b) 不相同

3. $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{FO}=\underline{a}$，$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}=\underline{b}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}=\underline{c}$

4. $\overrightarrow{A'B'}=\underline{b}$，$A'C'=\underline{c}$，$\overrightarrow{CC'}=\underline{a}$

习题 10b（P.7）

1. (a) $\underline{a}$　(b) $\underline{b}$　(c) $\underline{a}+\underline{b}$　　2. $\underline{a}+\underline{b}$　　3. $\underline{a}+\underline{b}$

4. (a) $\overrightarrow{AC}$　(b) $\overrightarrow{DE}$　(c) $\overrightarrow{AC}$　(d) $\overrightarrow{CD}$　(e) $\overrightarrow{EB}$
   (f) $\overrightarrow{DE}$　(g) $\overrightarrow{EB}$　(h) $\overrightarrow{BD}$　(i) $\overrightarrow{CD}$

5. (a) $\overrightarrow{RT}$　(b) $\overrightarrow{PQ}$　(c) $\overrightarrow{TP}$　(d) $\overrightarrow{RS}$

6. (a) $\overrightarrow{KQ}$　(b) $\overrightarrow{SQ}$　(c) $\overrightarrow{PR}$　(d) $\overrightarrow{PQ}$　(e) $\underline{0}$

9. (a) $\underline{0}$　(b) $\underline{a}$

10. (a) $\overrightarrow{BC}$　(b) $\overrightarrow{CA}$　(c) $\overrightarrow{AC}$　(d) $\overrightarrow{BA}$　(e) $\overrightarrow{AB}$

11. (a) $\overrightarrow{HF}$　(b) $\overrightarrow{FH}$　(c) $\overrightarrow{EG}$　(d) $\overrightarrow{HE}$

12. (a) $\underline{v}$　(b) $\underline{u}$　(c) $\underline{0}$　(d) $\underline{0}$

13. (a) $\underline{b}$　(b) $\underline{v}$　(c) $-\underline{u}$　(d) $\underline{c}$

14. $\underline{b}-\underline{a}$，$\underline{a}-\underline{b}$　　15. $\underline{b}-\underline{a}$

16. (a) $\underline{c}$　(b) $\underline{c}-\underline{a}$　(c) $-\underline{a}-\underline{c}$　(d) $\underline{a}+\underline{c}$

习题 10c（P.13）

2. (a) $-12\underline{a}$　(b) $10\underline{b}$　(c) $-5\underline{a}$
   (d) $-\dfrac{5}{6}\underline{b}$　(e) $5\underline{a}-\underline{b}$　(f) $\dfrac{5}{6}\underline{u}-\dfrac{1}{6}\underline{v}$

3. (a) $\dfrac{1}{2}(\underline{b}-\underline{a})$　(b) $\dfrac{1}{2}(\underline{u}-3\underline{v})$

4. (a) $\underline{u}\,/\!/\,\underline{v}$　(b) $\underline{0}$　(c) $h=0=k$

5. $h=3$，$k=-2$　　6. $2\underline{a}$，$-2\underline{a}$，$2\underline{b}-\underline{a}$

7. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$，$\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}(\underline{b}-\underline{a})$，$\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$，$\overrightarrow{DO}=-\frac{1}{2}(\underline{b}-\underline{a})$

8. (a) $\underline{v}-\underline{u}$，$\frac{1}{2}\underline{u}$，$\frac{1}{2}\underline{v}$，$\frac{1}{2}(\underline{v}-\underline{u})$　　(b) $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{MN}$

9. (a) $\underline{a}+2\underline{b}$　　(b) $-\frac{1}{2}(\underline{a}+2\underline{b})$

10. $\underline{a}+2\underline{b}$，$a+2b$　　11. $p=-\frac{4}{3}$，$q=-\frac{8}{9}$

习题 10d（P.19）

1. $\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}$　　2. $\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

3. (a) $(4,-2)$　　(b) $(-2,-7)$　　(c) $(-5,-2)$

4. $(8,-2)$　　5. (a) $(0,0)$　　(b) $(-x,-y)$

6. (a) $(-3,-4)$　　(b) $(7,0)$　　7. $(8,2)$

8. $x=-1$，$y=5$　　9. $\begin{pmatrix}\frac{20}{3}\\1\end{pmatrix}$　　10. $h=-1$，$k=2$

11. $(6,3)$　　12. (a) $(2p-3q)\underline{i}+(5p+2q)\underline{j}$　　(b) $p=3$，$q=-2$

14. -6　　15. (a) $-\frac{3}{4}$　　(b) $\frac{3}{2}\underline{i}-4\underline{j}$

16. -8 或 1　　17. $\frac{5}{3}$

习题 10e（P.22）

1. (a) 13　　(b) $\sqrt{13}$　　(c) 5　　(d) $\sqrt{74}$

2. (a) 5　　(b) 13　　(c) 1　　(d) $\sqrt{13}$

3. (a) $\sqrt{485}$　　(b) $\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$

4. (a) A(6,13)，C(3,15)　　(b) $\sqrt{85}$

5. (a) $4\underline{i}-5\underline{j}$　　(b) $\sqrt{89}$

6. (a) $-12\underline{i}+5\underline{j}$　　(b) 13　　(c) 22.62°

7. $\frac{2\sqrt{5}}{5}\underline{i}-\frac{\sqrt{5}}{5}\underline{j}$　　8. (a) $7\underline{j}$　　(b) 7　　(c) $\underline{j}$

9. (a) $\frac{3}{5}\underline{i}-\frac{4}{5}\underline{j}$　　(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}$

10. (a) $12\underset{\sim}{i}+5\underset{\sim}{j}$ (b) 13 (c) $\frac{12}{13}\underset{\sim}{i}+\frac{5}{13}\underset{\sim}{j}$

11. (a) $\sqrt{3}$ (b) 1

12. $\sqrt{|a|^2+|b|^2}$

13. $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$, $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, $k\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$

习题 10f（P.26）

1. $\underset{\sim}{b}=2\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{a}$

2. $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

3. $\left(\frac{x_1-x_2}{2},\ \frac{y_1-y_2}{2}\right)$

4. $P_1=\frac{3}{4}\underset{\sim}{a}+\frac{1}{4}\underset{\sim}{b}$，$P_2=\frac{\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}}{2}$，$P_3=\frac{1}{4}\underset{\sim}{a}+\frac{3}{4}\underset{\sim}{b}$

5. (a) $2\underset{\sim}{b}-\underset{\sim}{a}$ (b) $-2\underset{\sim}{a}+3\underset{\sim}{b}$

6. $4\underset{\sim}{a}-3\underset{\sim}{b}$

8. $\left(\frac{x_1+\lambda x_1}{1+\lambda},\ \frac{y_2+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$

9. $\frac{12}{5}(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b})$

习题 10g（P.33）

9. (a) $\overrightarrow{PQ}=5(\underset{\sim}{b}-\underset{\sim}{a})$，$\overrightarrow{AB}=15(\underset{\sim}{b}-\underset{\sim}{a})$

   (b) $\overrightarrow{BP}=5(\underset{\sim}{a}-3\underset{\sim}{b})$，$\overrightarrow{AX}=\frac{15}{4}(\underset{\sim}{b}-3\underset{\sim}{a})$，$\overrightarrow{XQ}=\frac{5}{4}(\underset{\sim}{b}-3\underset{\sim}{a})$

10. (a) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(2\underset{\sim}{p}+6\underset{\sim}{q})$ (b) $\overrightarrow{OQ}=2\underset{\sim}{p}+6\underset{\sim}{q}$，$\frac{BQ}{QC}=1$

11. (a) $\overrightarrow{OA}=\underset{\sim}{q}-3\underset{\sim}{p}$，$\overrightarrow{OX}=\underset{\sim}{q}-2\underset{\sim}{p}$

    (b) $\overrightarrow{BC}=(2k+3)\underset{\sim}{p}-\underset{\sim}{q}$，$\overrightarrow{BX}=(2k+1)\underset{\sim}{p}-\underset{\sim}{q}$

    (c) $k=\frac{1}{2}$，$\frac{OX}{XB}=1$

12. (a) $\overrightarrow{BA}=\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b}$，$\overrightarrow{OF}=2\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}$ (b) $2p\underset{\sim}{a}+p\underset{\sim}{b}$，$q\underset{\sim}{a}+(1-q)\underset{\sim}{b}$

    (c) $p=\frac{1}{3}$，$q=\frac{2}{3}$，1:2

14. $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{6}(2\underset{\sim}{a}-3\underset{\sim}{b})$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{6}(3\underset{\sim}{b}-4\underset{\sim}{a})$

习题 10h（P.39）

1. (a) 1 (b) 6 (c) -5 (d) $-\sqrt{3}$

3. $\frac{17}{2}$

4. (a) 60° (b) 45° (c) 120° (d) 135°

9. (a) $-|\underline{b}|^2$ (b) $|\underline{a}|^2$ (c) $2|\underline{a}|^2-|\underline{b}|^2$

10. (a) 1 (b) -1 11. $\pm\frac{2\sqrt{2}}{5}$

习题 10i (P.44)

1. (a) 25, 45° (b) $-\sqrt{3}$, 150°

   (c) 0, 90° (d) $\frac{1}{2}$, 60°

2. (a) $x_1x_2+y_1y_2$ (b) $x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2)$

   (c) $k\,x_1x_2+k\,y_1y_2$ (d) $x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}$

3. $p=\pm 4$ 4. (a) 6 (b) 143°8′

5. 36°52′ 6. $r=6$, $s=-2$, 62.6°

7. $(5,-1)$ 8. $h=\frac{8}{\sqrt{13}}$, $k=-\frac{12}{\sqrt{13}}$

总复习题 10 (P.45)

1. $\overrightarrow{AC}=\underline{a}+\underline{b}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{a}-\underline{b}$ 2. (a) $\underline{b}$ (b) $(k+l)\underline{a}$

3. (a) $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

   (b) $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\underline{i}-\frac{1}{2}\underline{j}$, $\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}\underline{i}+\frac{1}{2}\underline{j}$, $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\underline{i}+\frac{1}{2}\underline{j}$, $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\underline{i}-\frac{1}{2}\underline{j}$

4. $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{p})$ 5. $m=3$ 6. (7, 5)

7. (a) $(-1,3)$ (b) $p=2$, $q=3$ 8. $\frac{3}{5}\underline{a}+\frac{2}{5}\underline{b}$

9. (a) $\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$, $3\sqrt{13}$ (b) P(1, 6)

10. (a) $\overrightarrow{AD}=2\underline{b}$, $\overrightarrow{CD}=\underline{b}-\underline{a}$, $\overrightarrow{AE}=2\underline{b}-\underline{a}$, $\overrightarrow{FA}=\underline{a}-\underline{b}$ (b) $\sqrt{3}r^2$

11. $h=4$, $k=-2$ 12. 27, -9, 0

13. $\begin{cases}m=4\\n=3\end{cases}$ $\begin{cases}m=4\\n=-3\end{cases}$ $\begin{cases}m=-4\\n=3\end{cases}$ $\begin{cases}m=-4\\n=-3\end{cases}$

17. (a) $\overrightarrow{PB}=3\underline{q}-\underline{p}$, $\overrightarrow{QA}=5\underline{p}-\underline{q}$ (b) $\overrightarrow{OC}=(1-h)\underline{p}+3h\underline{q}=5k\underline{p}+(1-k)\underline{q}$

   (c) $\frac{PC}{BC}=2:5$, $\frac{AC}{CQ}=6:1$

18. (a) $\frac{16}{9}$ (b) $2 \pm 2\sqrt{21}$

19. (a) $\overrightarrow{AB} = 4\underline{b} - 3\underline{a}$，$\overrightarrow{AC} = \underline{b} - 3\underline{a}$，$\overrightarrow{OD} = \underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}$，$\overrightarrow{OE} = 2\underline{a} + \frac{4}{3}\underline{b}$

21. (a) $\overrightarrow{OD} = \underline{a} + 2(m+1)\underline{b}$

(b) $\overrightarrow{OD} = (3+n)\underline{a} + (2n-3)\underline{b}$，$m = -\frac{9}{2}$，$n = -2$，$\overrightarrow{OD} = \underline{a} - 7\underline{b}$

22. (a) (i) $4\underline{i} - 3\underline{j}$ (ii) 5 (iii) $\frac{4}{5}\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j}$

(b) $h = 0$，$k = 0$ (c) $-\frac{15}{2}$

第 11 章

习题 11a (P.51)

1. p、r、t、u 是命题，q、s 不是命题。

2. $p = 0$，2 是质数；$q = 1$； $r = 1$； $s = 0$； $x = \frac{\pi}{2}$； $t = 0$； $x = \frac{5\pi}{4}$； $u = 1$。

习题 11b (P.54)

2. $p = 1$，$\sim p = 0$； $q = 1$，$\sim q = 0$； $r = 1$，$\sim r = 0$；
$s = 0$，$\sim s = 1$； $t = 0$，$\sim t = 1$； $u = 0$，$\sim u = 1$；
$v = 1$，$\sim v = 0$。

习题 11c (P.55)

2. (a) $p \wedge q = 1$ (b) $p \wedge q = 1$ (c) $p \wedge q = 1$ (d) $p \wedge q = 0$
(e) $p \wedge q = 0$

3. $(\sim p) \wedge (\sim q) = 0$， $(\sim r) \wedge S = 1$， $(\sim q) \wedge (\sim r) = 1$， $(\sim p) \wedge (\sim s) = 0$。

习题 11d (P.57)

2. (a) $p = 1$，$q = 1$，$p \vee q = 1$； (b) $p = 1$，$q = 0$，$p \vee q = 1$；
(c) $p = 0$，$q = 1$，$p \vee q = 1$；

3. $p \wedge q = 0$；$p \vee q$ 的真值不能确定。

习题 11e (P.59)

2. (b) 是重言式，(c)、(d) 为矛盾式

习题 11f（P.62）

2. (a) $\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)=0$,　(b) $\sim(p\vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)=0$;
3. (a) $\sim(p\vee q)=0$, $\sim(p\wedge q)=1$,　(b) $\sim(p\vee q)=0$, $\sim(p\wedge q)=1$,
   (c) $\sim(p\vee q)=0$, $\sim(p\wedge q)=0$。
4. (a) $p\vee\sim q$　(b) $p\wedge q$　(c) $p\wedge\sim q$

习题 11g（P.66）

1. (a) $p\rightarrow q=1$;　(b) $p\rightarrow q=0$;　(c) $p\rightarrow q=1$;　(d) $p\rightarrow q=1$。
2. (a) $p\rightarrow q=1$,　$q\rightarrow p=1$,　$(\sim p)\rightarrow(\sim q)=1$,　$(\sim q)\rightarrow(\sim p)=1$;
   (b) $p\rightarrow q=1$,　$q\rightarrow p=0$,　$(\sim p)\rightarrow(\sim q)=0$,　$(\sim q)\rightarrow(\sim p)=1$;
   (c) $p\rightarrow q=0$,　$q\rightarrow p=0$,　$(\sim p)\rightarrow(\sim q)=0$,　$(\sim q)\rightarrow(\sim p)=0$;
   (a) $p\rightarrow q=0$,　$q\rightarrow p=1$,　$(\sim p)\rightarrow(\sim q)=1$,　$(\sim q)\rightarrow(\sim p)=0$。
3. (a) 若一个图形是三角形，则它的内角和为 180°;
   (b) 若一个数是正数，则它的绝对值等于其本身;
   (c) 若两个多边形相似，则它们的对应角相等。

习题 11h（P.71）

1. (a) 有效　(b) 无效
3. (a) 有效　(b) 无效　(c) 无效　(d) 有效
4. (a) 无效　(b) 无效　(c) 有效　(d) 有效
5. (a) 有效，正确　(b) 无效　(c) 有效，不正确

总复习题 11（P.73）

1. $p=1$;　$q=0$;　$x=-1$;　$r=1$;　$t=1$。
2. $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}\text{且 }x\geqslant2\}$;　$A=\{x\mid x\in\mathbb{R}\text{且 }2<x<3\}$;
   $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}\text{且 }x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\text{或 }x=2k\pi+\frac{5\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}\}$;　$A=\varnothing$。
3. $p=1$, $\sim p=0$;　$q=1$, $\sim q=0$;　$r=1$, $\sim r=0$;　$s=0$, $\sim s=1$。
4. (a) $p\wedge q=1$　(b) $p\wedge q=1$　(c) $p\wedge q=0$
5. (a) $p\vee q=1$　(b) $p\vee q=1$　(c) $p\vee q=0$
6. $\sim(p\vee q)=0$, $\sim(p\vee q)=1$
8. (a) $p\rightarrow q=1$　(b) $p\rightarrow q=0$　(c) $p\rightarrow q=1$
9. $p\rightarrow q=0$,　$q\rightarrow p=1$,　$(\sim p)\rightarrow(\sim q)=1$,　$(\sim q)\rightarrow(\sim p)=0$。

12. (a) 重言式 (b) 矛盾式 (c) 矛盾式 (d) 重言式

13. (a) 无效 (b) 有效

14. (a) 有效 (b) 有效 (c) 无效 (d) 无效

第 12 章

习题 12a (P.79)

1. (b) 0 2. 4 3. 5

4. (a) 前 5 项是 $\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{6}{7}$，当项数增大时，各项越来越接近于 1；

   (b) 有极限 1。

5. (a) 前 5 项是 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{11}$，当项数增大时，各项越来越接近于 $\frac{1}{2}$；

   (b) 有极限 $\frac{1}{2}$。

6. 3 7. 无

习题 12b (P.83)

1. (a) 3 (b) $\frac{7}{6}$

2. (a) 3 (b) $\frac{2}{5}$ (c) 1 (d) 5

3. (a) 0 (b) 1 (c) 1 (d) -1

   (e) 0 (f) 1 (g) $\frac{3}{7}$ (h) 极限不存在

4. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

5. (a) $\frac{2}{5}ah$ (b) $\frac{ah}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

习题 12c (P.87)

1. 函数 $f(x)$在 $x=1$ 处的左极限、右极限和极限都是 3。

2. (a) 25 (b) 4 (c) 0

3. 存在左极限、右极限和极限，它们都是 8。

习题 12d（P.90）

1. 不存在　　2. 不存在

3. 存在。因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$

4. (a) 不存在　　(b) 存在极限$\frac{1}{2}$　　(c) 存在极限 1

5. (a) 存在，$\lim\limits_{x\to2}f(x)=4$　　(b) 存在，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=4$　　(c) 不存在

习题 12e（P.92）

1. (a) 0　　(b) $x\to\infty$时，极限不存在，$x\to-\infty$时，极限为 0。

2. (a) 0　　(b) 0　　3. (a) 0　　(b) 3

习题 12f（P.95）

1. -2	2. 22	3. 16	4. 7	5. -6
6. -1	7. $\frac{1}{5}$	8. 2	9. 5	10. $\frac{1}{3}$
11. 9	12. $\frac{1}{2}$	13. 不存在	14. $\frac{3}{4}$	15. 0
16. 不存在	17. $\frac{2}{3}$	18. 不存在	19. 0	20. 不存在
21. 0	22. $\frac{1}{2}$	23. $-\frac{1}{4}$	24. $\frac{1}{6}$	25. $\frac{1}{2}$
26. 不存在	27. 0	28. $-\frac{1}{2}$	29. $\frac{1}{20}$	30. $-\frac{2}{5}$
31. 4	32. $\frac{1}{2}$	33. $\frac{1}{3}$	34. $\frac{1}{2}$	35. 1
36. 0	37. $\frac{7}{3}$	38. $\frac{1}{2}$	39. 2	40. $\frac{1}{2}$
41. 0	42. $\frac{2}{3}$	43. $\frac{3}{2}$	44. 2	45. 不存在
46. 0				

习题 12g（P.99）

1. 在 $x_0=0$ 处连续　　2. 在 $x_0=1$ 处连续　　3. 在 $x_0=2$ 处连续

4. 在 $x_0=2$ 处不连续　　5. 在 $x_0=3$ 处连续　　6. 在 $x_0=0$ 处不连续

7. 在 $x_0=1$ 处连续　　8. 在 $x_0=0$ 处不连续

9. 在 $x_0=1$ 处不连续，在 $x_0=0$ 处连续

10. 在 $x_0=3$ 处连续，在 $x_0=5$ 处连续

11. 在 $x_0=0$ 处不连续，在 $x_0=-1$ 处连续，在 $x_0=2$ 处连续

12. 在 $x_0=0$ 处不连续，在 $x_0=-1$ 处连续，在 $x_0=5$ 处连续

总复习题 12（P.100）

1. (a) 数列的前 5 项是 -2，-1，$-\frac{4}{5}$，$-\frac{5}{7}$，$-\frac{2}{3}$，

   当项数增大时，数列的项趋近于 $-\frac{1}{2}$；

   (b) $-\frac{1}{2}$

2. (a) 0　(b) -1　(c) 0　(d) 1

3. (a) $\frac{1}{2}$　(b) $\frac{4}{3}$

4. (a) 0　(b) 0　(c) 不存在

5. (a) $\frac{3}{2}$　(b) $\frac{3}{2}$　(c) 1　(d) -1

   (e) -1　(f) $\frac{1}{4}$

6. (a) 不存在　(b) 不存在　(c) 存在极限 0　(d) 存在极限 0

7. (a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$，连续（因 $f(a)=b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$）。

   (b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b_1$，不连续（因 $f(a)=b_1\neq\lim\limits_{x\to a} f(x)$）。

   (c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b_1$，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在，不连续。

   (d) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b_2$，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在，不连续。

   (e) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在，不连续。

   (f) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在，不连续。

第 13 章

习题 13a（P.105）

1. 0

2. 4

3. -1

4. (b) 10 米／秒

5. (a) 50 米／秒　(b) $10t_0+10$ 米／秒

习题 13b（P.109）

1. $f'(x)=1$，$f'(2)=1$
2. $f'(x)=2$，$f'(2)=2$
3. $f'(x)=3$，$f'(2)=3$
4. $f'(x)=2x$，$f'(2)=4$
5. $\frac{dy}{dx}=2x-3$，1
6. $\frac{dy}{dx}=2x-1$，3
7. $\frac{dy}{dx}=4x$，8
8. $\frac{dy}{dx}=3x^2$，12
9. $\frac{dy}{dx}=3x^2+2$，14
10. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$\frac{1}{3}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}$
11. $\frac{dy}{dx}=4$
12. $\frac{dy}{dx}=-1$
13. $\frac{dy}{dx}=2x$
14. $\frac{dy}{dx}=2x$
15. $\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{x^3}$
16. $\frac{1}{(1-x)^2}$，1，1

习题 13c（P.112）

1. $5x^4$
2. $8x^7$
3. $-7x^{-8}$
4. $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
5. $4x^3-3x^2$
6. $3x^2-2x$
7. $3x^2-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
8. $1+\frac{2}{x^3}$
9. $2x+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$
10. $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
11. $-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$
12. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}}{2}$

习题 13d（P.114）

1. $3x^3-5$
2. $x^{-\frac{2}{3}}$
3. $2x^9+\frac{1}{x^2}$
4. $4x+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}$
5. $12x+1$
6. $2x-a-b$
7. $3x^2-4$
8. $-9x^2+12x-1$
9. $30x^4-8x^3-6x+1$
10. $9x^2-2x+1$
11. $mn[x^{m-1}+x^{n-1}+(m+n)x^{m+n-1}]$
12. $2x(3x-1)(1-x^2)+3(x^2+1)(1-x^3)-3x^2(x^2+1)(3x-1)$

习题 13e（P.116）

1. $\frac{4}{(x+2)^2}$
2. $\frac{41}{(7x+2)^2}$
3. $\frac{-4}{(x-4)^2}$
4. $\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$
5. $\frac{-2a}{(a+x)^2}$
6. $\frac{x^2+2x+3}{(3-x^2)^2}$

7. $\dfrac{5x^6+6x^5+1}{(x+1)^2}$

8. $\dfrac{6x^2-6x+19}{(2x-1)^2}$

9. $\dfrac{-3x^2+24x+5}{(3-2x-3x^2)^2}$

10. $\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2-3x+6)^2}$

11. $\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$

12. $\dfrac{-1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+x)^2}$

习题 13f（P.119）

1. $6(2x+5)^2$

2. $42(3x-1)^6$

3. $4a(ax+b)^3$

4. $8x(x^2+1)^3$

5. $18x^2(2x^3-1)^2$

6. $2(2x+3)(x^2+3x-1)$

7. $-2x^2(\frac{1}{3}x^3-1)^{-3}$

8. $\dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

9. $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$

10. $\dfrac{-4}{(4x-3)^2}$

11. $-(3x^2+2)(x^3+2x)^{-\frac{5}{4}}$

12. $\dfrac{-2(4x-1)}{(2x^2-x-6)^3}$

13. $\dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-5)^2}}$

14. $\dfrac{-(x+1)}{\sqrt{(x^2+2x-4)^3}}$

15. $\dfrac{-12x^2}{(x^3-6)^3}$

习题 13g（P.120）

1. $(x+2)^2(4x+5)$

2. $(x+2)^2(3-4x-5x^2)$

3. $(x-1)^2(5x^2+2x-1)$

4. $\dfrac{1+2x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\dfrac{(x-3)^2(7x-3)}{2\sqrt{x}}$

6. $x(x+2)(5x^2+2x-4)$

7. $\dfrac{1-x}{(1+x)^3}$

8. $\dfrac{-(x+1)(x+3)}{x^4}$

9. $\dfrac{3x+4}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

10. $\dfrac{3x+4}{2\sqrt{(x+1)^3}}$

11. $\dfrac{(1+x)(4\sqrt{x}+3x-1)}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

12. $\dfrac{(2-5x)(5x^3-6x^2+10)}{(x^3-1)^2}$

13. $\dfrac{5x^4}{(1+x)^6}$

14. $\dfrac{-6(1-x)^2}{(1+x)^4}$

15. $4(2x-1)(2-3x)^3-9(2x-1)^2(2-3x)^2$

16. $\dfrac{-2cx+b}{2\sqrt{(a+bx-cx^2}}$

17. $\dfrac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$

18. $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

19. $\dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$

20. $\dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

习题 13h（P.122）

1. $120x^4$　　2. $3x$　　3. $12x^2+4$

4. $\frac{2}{x^3}$　　5. $2-\frac{6}{x^4}$　　6. $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

7. $\frac{-a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$　　8. $\frac{3}{4(x-1)^2\sqrt{x-1}}$　　9. $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

10. $\frac{3x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$　　11. $12x^3$，$36x^2$，$72x$　　12. $\frac{-2}{x^2}$，$\frac{4}{x^3}$，$\frac{-12}{x^4}$

13. $3x^2-6x+3$，$6x-6$，6　　14. 6，6，12

15. nx^{n-1}，$n(n-1)x^{n-2}$，…，$n!$

习题 13i（P.125）

1. $\frac{4}{3}$　　2. $\frac{1}{3}$　　3. $\frac{3}{5}$　　4. $\frac{a}{b}$　　5. 1　　6. 2　　7. $\frac{2}{5}$

8. $\frac{5}{2}$　　9. 1　　10. $\frac{3}{2}$　　11. a^2　　12. 1　　13. 2　　14. 1

15. 0　　16. $\frac{2}{5}$

习题 13j（P.129）

1. (a) $2\cos 2x$　　(b) $-6\sin 2x$　　(c) $3\sec 3x\tan 3x$　　(d) $-\frac{2}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{3}x$

(e) $\frac{1}{4}\cos\frac{1}{4}x$　　(f) $2\sec^2(1+2x)$　　(g) $5\sin(4-5x)$　　(h) $\frac{9}{2}\cos(3x-2)$

(i) $-\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

2. (a) $3\sin^2 x\cos x$　　(b) $-4\cos^3 x\sin x$

(c) $\tan\frac{1}{6}x\sec^2\frac{1}{6}x$　　(d) $-4\operatorname{cosec}^2 2x\cot 2x$

(e) $\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$　　(f) $-12\cot(3x+2)\operatorname{cosec}^2(3x+2)$

(g) $\frac{2\cos 4x}{\sqrt{\sin 4x}}$　　(h) $\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{4\sqrt{\tan\frac{x}{2}}}$

(i) $\frac{4}{3}\tan 4x\sqrt[3]{\sec 4x}$

3. (a) $6x\cos x^2$ (b) $-6x\cos^2 x^2 \sin x^2$

(c) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$ (d) $\cos x\cos(\sin x)$

(e) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-a}}\sec^2\sqrt{x-a}$ (f) $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$

(g) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin 2\sqrt{1+x^2}$

4. (a) $3\cos 3x + 3\sin 3x$ (b) $2\sec^2 2x - 4\operatorname{cosec}^2 4x$

(c) $\sec x\tan x + 5\operatorname{cosec} 5x\cot 5x$ (d) $\dfrac{1}{2}(\sec^2\dfrac{x}{2} + \operatorname{cosec}^2\dfrac{x}{2})$

(e) $\tan^2 x$ (f) $2\cos 2x - \sin 2x$

(g) $-2x\sin x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$ (h) $-2\sin 4x$

(i) $8x + 4\cos 4x$

5. (a) $7\sin 4x\sec^2 7x + 4\cos 4x\tan 7x$ (b) $3\cos 2x\cos 3x - 2\sin 2x\sin 3x$

(c) $\sin 8x\sin 2x + 8\cos 8x\sin^2 x$ (d) $3\cos x(1+\sin x)^2$

(e) $2\sin x\,(2-\cos x)$ (f) $2x\cos x - x^2\sin x$

(g) $\sin^2 x + x\sin 2x$ (h) $2\cos(1-x) + 2x\sin(1-x)$

(i) $2x\tan x + (1+x^2)\sec^2 x$ (j) $2\cos 2x$

(k) $3\cos x - 3x\sin x$ (l) $\tan(2x+1) + 2x\sec^2(2x+1)$

6. (a) $2\cos x$ (b) $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(c) $\dfrac{-2\sin 2x + 2\cos x\sin 2x - \cos 2x\sin x}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{\sin x\,(2\cos^2 x - 4\cos x + 1)}{(1-\cos x)^2}$

(d) $\dfrac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$ (e) $-\dfrac{2\cos 2x}{\sin^4 2x}$

(f) $\cot x - x\operatorname{cosec}^2 x$ (g) $\dfrac{x\sin 2x - \sin^2 x}{2x^2}$

(h) $2\sec^2 2x$ (i) $2\operatorname{cosec}^2\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(j) $\dfrac{2(1+x)\cos 2x - \sin 2x}{(1+x)^2}$ (k) $\dfrac{-x\sin x + \cos x}{2x^2}$

(l) $\dfrac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}$

7. $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{4+\pi}{8}$, 1 10. $\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}$ 12. $\dfrac{\pi}{180}\sec^2 x^0$

13. $\dfrac{-7\sqrt{2}}{2}$ 14. 1

总复习题 13（P.130）

1. (a) -1 (b) 1

2. (a) 0m，8m，9m，0m，−7m

 (b) 6m/s，2m/s，0m/s，−6m/s，−8m/s

3. (a) 43 (b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

4. (a) $3x^2$ (b) $-\dfrac{6}{(x-2)^2}$

5. (a) $10x^4-12x^3+14x$ (b) $2x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

 (c) $2x(3x^4-18x^2+23)$ (d) $-\dfrac{4x^3+2x}{(x^2-1)^4}$

 (e) $5n(2+5x)^{n-1}$ (f) $-\dfrac{2}{n}(3-2x)^{\frac{1-n}{n}}$

 (g) $(x^2+7)^{11}\left(24x\sqrt{x+2}+\dfrac{x^2+7}{2\sqrt{x+2}}\right)$ (h) $-\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{(x^2-2ax)^3}}$

 (i) $\dfrac{5x^4}{a+b}-\dfrac{2x}{a-b}-1$ (j) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{x^2}$

6. (a) $\dfrac{2x^2-8x+14}{(x+1)^5}$ (b) $-a^2\sin ax-b^2\cos bx$

7. (a) $4\cos 2x-2\sin x$ (b) $\dfrac{10}{\cos^2(2x+3)}$

 (c) $\dfrac{12}{\cos^2(6x+3)}$ (d) $\dfrac{2(1+x)\cos 2x-\sin 2x}{(1+x)^2}$

 (e) $\dfrac{\sec x(\tan x-1)}{(1+\tan x)^2}$ (f) $12\sin^3 3x\cos^2 4x\cos 7x$

 (g) $2\cos x-3\sin x$ (h) $a\sec^2(ax+b)$

 (i) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

8. $f'(2)=12$，$f'(\sqrt{5})=15$

9. $-\sin t+\dfrac{2}{t^3}$

10. $\dfrac{3}{2}x^2\sin 2x+x^3\cos 2x$

11. $\dfrac{\sin x+x}{1+\cos x}$，$1+\dfrac{\pi}{2}$

12. $x=-4$，3

13. $x=-3$，-1

14. $x=-1$，1

15. $24x^2+120x+150$

17. $a=\dfrac{-5}{2}$，$b=3$，$c=5$

18. (a) $27x^2-24x+1$，$54x-24$ (b) $54x-24$

19. $\dfrac{4}{3}$

20. $f(2)=\dfrac{2}{5}$，$f'(2)=\dfrac{-3}{25}$，$f''(2)=\dfrac{4}{125}$

21. $y'=\dfrac{-x}{y}$，$y''=\dfrac{-9}{y^3}$，$y'''=\dfrac{-27x}{y^5}$，$y^{(4)}=-27\left(\dfrac{y^2+5x^2}{y^7}\right)$

22. (a) $6x-4$ (b) $-18x$

第 14 章

习题 14a（P.134）

1. 切线方程为 $y=4x-2$，法线方程为 $x+4y-26=0$。
2. 切线方程为 $x-4y-3=0$。
3. 切线方程为 $6\sqrt{3}x-12y+6-\sqrt{3}\pi=0$，
   法线方程为 $12\sqrt{3}x+18y-9-2\sqrt{3\pi}=0$。
4. $x+9y-14=0$
5. 在 $x=-1$ 处的切线为 $8x-y+8=0$
   在 $x=1$ 处的切线为 $4x+y-4=0$
   在 $x=3$ 处的切线为 $8x-y-24=0$
6. $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$
8. $x=0$，$(0,4)$
9. $8x+16y-147=0$
10. $(-1,1)$，$x-y-2=0$
11. $53.13°$
12. $p=6$，$q=15$
13. $a=2$，$b=-3$，$c=1$
14. $a=2$，$b=-5$

习题 14b（P.138）

3. $f(x)$ 在 IR 内是减函数。
4. $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内是减函数，在 $(1,+\infty)$ 内是增函数。
5. $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 内都是减函数。
6. $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内是增函数，在 $(0,+\infty)$ 内是减函数。
7. $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内是减函数，在 $(1,+\infty)$ 内是增函数。
8. $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$、$(1,+\infty)$ 内是减函数，在 $(-1,1)$ 内是增函数。
9. $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(2,+\infty)$ 内是增函数，在 $(0,2)$ 内是减函数。
10. $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{3})$、$(1,+\infty)$ 内是增函数，在 $(-\frac{1}{3},1)$ 内是减函数。

习题 14c（P.142）

1. 极大值 $2\frac{1}{4}$
2. 极小值 $-4\frac{1}{2}$
3. 极大值 $f(2)=22$，极小值 $f(-2)=-10$
4. 极大值 $f(-1)=1$，极小值 $f(0)=0$，极大值 $f(1)=1$
5. 极大值 $f(-1)=1$，极小值 $f(4)=-124$
6. 极大值 $f(-1)=3\frac{1}{6}$，极小值 $f(2)=-1\frac{1}{3}$

7. 极大值 $f(-3)=-12$，极小值 $f(1)=20$

8. 极大值 $f(-\frac{1}{2})=3\frac{3}{4}$，极小值 $f(1)=-3$

9. 极大值 $f(-\frac{11\pi}{6})=-\frac{11\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，极小值 $f(-\frac{7\pi}{6})=-\frac{7\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

极大值 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，极小值 $f(\frac{5\pi}{6})=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 无极值

11. 极大值 $f(-3)=165$，极小值 $f(3)=-159$

12. 极大值 $f(0)=0$，极小值 $f(-1)=-1$，极小值 $f(1)=-1$

13. 当 $x=\frac{3}{2}$ 有极小值 $-\frac{27}{16}$

14. 当 $x=0$ 有极小值 2

习题 14d（P.144）

1. 最大值 11，最小值 -1

2. 最大值 13，最小值 4

3. 最大值 57，最小值 $-28\frac{3}{4}$

4. 最大值 2，最小值 -10

5. 最大值 32，最小值 -4

6. 最大值 8，最小值 0

7. 最大值 $\frac{1}{2}$，最小值 $-\frac{1}{2}$

8. 最大值 1，最小值 $\frac{3}{5}$

习题 14e（P.148）

1. 各为 15 cm

2. 两段相等

3. $\sqrt{2}$

4. 20 cm

5. 42 cm（或 $\frac{300}{4+\pi}$ cm）

6. 8，12

7. (2，2)

9. 1 cm

10. 40 cm

11. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 弧度

12. 长 $\frac{\sqrt{6}}{3}d$，宽 $\frac{\sqrt{3}}{3}d$

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ R

14. 距 B $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm 处

15. $5\frac{1}{3}$，$42\frac{2}{3}$

16. 2.75 m

17. 1:2

19. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

20. $r=\frac{\sqrt{6}}{3}l$，$h=\frac{\sqrt{3}}{3}l$

21. (a) $4\sqrt{3}$ cm　(b) 6.31 cm　(c) 24 cm

22. 13 公里

23. $\lambda=\alpha$

习题 14f（P.153）

1. 210

2. (a) 2.8 m/s (b) $6\frac{2}{3}$ s

3. 7.75 m/s；4.5 m/s^2

4. (a) $12t$ m/s^2 (b) $\frac{1}{6}$ s

5. (a) 6 s (b) 18 m/s

7. (a) $5\omega\cos\omega t$ (b) $-5\omega^2\sin\omega t$

8. (a) 44 m (b) 21 m (c) 19 m/s^{-1} (d) 4 ms^{-2}

9. 84 ms^{-1}，4 ms^{-2}

10. (a) $-\frac{9}{4}$ ms^{-1} (b) 5 ms − 2

12. (a) 24 cm (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$秒

习题 14g（P.156）

1. $12\frac{1}{5}$
2. 6
3. 44
4. 3
5. 23A，31A
6. 90 cm^2/s
7. 0.24 m^3/s
8. 36π cm^3/s
9. 0.125 cm/min
10. $\frac{\pi}{75}$ m^3/s
11. −0.72 cm^2/s
12. ±3
13. $\frac{3}{16}$单位/秒
14. 4 cm^2/min
15. $-\frac{8}{15}$ m/s
16. (a) $\frac{-3}{400}$ cm/min (b) $\frac{-6\pi}{5}$ cm^2/min
17. 0.015 m/min
18. $\frac{1}{32\pi}$ m/min
19. $\frac{5}{4\pi}$ m/min
20. 100π m^3/s
21. $\frac{1}{12\pi}$ m/min
22. $\frac{4}{75\pi}$ m/min
23. 0.4 m/s
24. $10\sqrt{26}$ km/h

习题 14h（P.160）

1. 0.008 cm^2
2. 0.03 cm^3
3. -0.4π cm^3
4. (a) 104.7 cm^2 (b) −43.6 cm^2
5. 0.016 m
6. 0.06π cm^2
7. $\Delta y = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\Delta x$，0.1003
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$，2.00156
9. $\frac{24}{25}\pi$ cm^2
10. 0.00582
11. 9.6 cm
12. (a) 3.0017 (b) 10.198 (c) 4.0412 (d) 1.01 (e) 0.016 (f) 0.025
13. 0.3%
14. 3%
15. 17.4 秒

总复习题 14(P.161)

1. 24　　2. -4, 5, 20　　3. $a=-1$; $b=7$　　4. $y+2x=7$, $AB=\frac{7\sqrt{5}}{2}$

5. (a) $\left(\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{4}\right)$　　(b) (0, 2)　　6. $p^2-4q=0$

7. (a) $f(x)$在$(-\infty,-1)$、$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$内是减函数，在$(-1,\ 0)$、$\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$内是增函数。

(b) $f(x)$在$(-\infty,\ \infty)$内是减函数。

(c) $f(x)$在$(-\infty,\ 0)$、$(0,\ \infty)$内是减函数。

(d) $f(x)$在$(0,\ \infty)$内是减函数。

8. (a) 无极值

(b) 当$x=2$，有极小值-16，当$x=-4$，有极大值92。

(c) 当$x=-3$，有极大值-2，当$x=3$，有极小值2。

(d) 当$x=4$，有极小值1，当$x=16$，有极大值25。

(e) 当$x=\pm1$，有极小值2。

9. (a) 最大值2，最小值-2　　(b) 最大值$\frac{2\sqrt{3}}{9}$

10. (a) 最大值2，最小值-10　　(b) 最大值$\frac{\pi}{2}$，最小值$-\frac{\pi}{2}$

11. $a=2$，$x=\frac{\pi}{3}$极大值点，极大值$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$。

12. (1, 5)，$y-2x-3=0$

13. (a) $x=\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$　(c) 极小值点$\left(\frac{2\pi}{3},\ -\frac{3}{2}\right)$，$\left(\frac{4\pi}{3},\ -\frac{3}{2}\right)$，极大值点$(\pi,-1)$

14. 10 m　　15. 半径与高相等。　　16. $x=2$

17. $\frac{16}{3}$ cm, $\frac{8}{3}$ cm　　18. $\frac{100}{8-\sqrt{3}}$, $\frac{200-50\sqrt{3}}{8-\sqrt{3}}$　　19. 18间

20. (a) 0　　(b) 12　　(c) $t=1$, 3　　(d) $x=7$　　(e) -6,6

21. 23, 31; $t=10$秒　　22. $x_0=0,-\frac{2}{3}$; $x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$　　24. (2, 5)

25. $\frac{3}{2}$　　26. 正方形，边长$\frac{\sqrt{2}}{2}d$　　27. $\frac{9}{20}$ cm/s　　28. 2

29. (a) $0.2\pi\ m^2/s$　　(b) $0.18\pi\ m^2/s$　　30. (a) $3.2\pi\ cm^3$　　(b) $1.6\pi\ cm^2$

31. $2.4\pi\ cm^3$　　33. $\frac{5}{18}$ cm/s　　34. $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, 0.197

35. $-\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$ m/s; $-\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$ m/s　　36. -0.01511　　37. $\left(\frac{1}{4},\ 4\frac{1}{16}\right)$

第 15 章

习题 15a (P.168)

1. $\frac{3}{2}x^2+C$ 2. x^5+C 3. $5x+C$ 4. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

5. $4\sqrt{x}+C$ 6. $\frac{1}{8}x^8+C$ 7. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$ 8. $-\frac{1}{4x^4}$

9. $-2x^{-\frac{1}{2}}+C$ 10. $\frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}+C$ 11. $-\frac{1}{8}x^{-8}+C$ 12. $-\cos\theta+C$

13. $\tan x+C$ 14. $-\cot x+C$ 15. $\frac{\theta^4}{4}+C$ 16. $\frac{t^6}{6}+C$

习题 15b (P.170)

1. $\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+x+C$ 2. $x^5+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$ 3. $\frac{1}{6}x^3+\frac{2}{x}+C$

4. $-\cos x-\sin x+C$ 5. $\tan x+\cot x+C$ 6. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

7. $\frac{1}{3}x^3-5x^2+25x+C$ 8. $\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{x}+C$ 9. $\frac{1}{2}x^2-3x+C$

10. $x+\cos x+C$ 11. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+10x^{\frac{1}{2}}+C$ 12. $-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3t^2}+C$

13. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$ 14. $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+C$ 15. $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x+C$

16. $\sin x+\cos x+C$ 17. $-\cot x-2x+C$ 18. $-2\cos x+C$

19. $\frac{2}{3}x^3-4\sin x+C$ 20. $3\sin x+4\tan x+C$

习题 15c (P.173)

1. $\frac{1}{8}(2x+1)^4+C$ 2. $\frac{1}{18}(3x+2)^6+C$ 3. $-\frac{1}{14(2x+5)^7}+C$

4. $\frac{4}{3}\sqrt{(2x-1)^3}+C$ 5. $\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$

6. $\frac{(x-1)^5}{5}+\frac{(x-1)^4}{4}+C$ 7. $(2x+1)^3+C$ 8. $(x^3-1)^5+C$

9. $\frac{1}{4}(x^3+4)^4+C$ 10. $-\frac{1}{4}(2x-1)^{-2}+C$ 11. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$

12. $\frac{1}{6}(x^2+x+2)^6+C$ 13. $-\frac{1}{14}(3-2x)^7+C$ 14. $-\frac{1}{2x+3}+C$

15. $\frac{1}{15}(x^3-3x^2+1)^5+C$ 16. $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}+C$

17. $-\frac{2}{5}(9-x)^{\frac{5}{2}}+C$

18. $(x^2-5)^{\frac{1}{2}}+C$

19. $-\frac{1}{4(x^2+2x+5)^2}+C$

20. $\frac{4}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{10}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

习题 15d（P.175）

1. $-2\cos\frac{x}{2}+C$
2. $\frac{1}{3}\sin 3x+C$
3. $2\cos x+C$
4. $-\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}x+C$
5. $\frac{1}{5}\tan 5x+C$
6. $\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{7}\cos 7x+C$
7. $-4\cos\frac{x}{4}-\sin 5x-\cos\frac{x}{2}+C$
8. $-\frac{1}{4}\cos(4x+3)+C$
9. $\frac{1}{2}\sin(x-5)$
10. $\frac{1}{3}\tan(3x+4)+C$
11. $-8\cos\frac{x}{8}-\frac{1}{2}\tan 2x+C$
12. $4\sin(x-1)+C$
13. $\cos(1-3x)+C$
14. $-\frac{3}{16}\sin(1-4x)+C$
15. $2\cos(1+x)+C$
16. $2\tan(2x-4)+C$

总复习题 15(P.175)

1. $x^3-\frac{1}{x}+C$
2. $-\frac{1}{x}+\frac{x^4}{4}+C$
3. $\frac{1}{18}(3x-4)^6+C$
4. $\frac{5}{3}x^{\frac{6}{5}}+C$
5. $\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+C$
6. $\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$
7. $\frac{2}{9}(2+3x)^{\frac{3}{2}}+C$
8. $-\frac{1}{4(2x-1)}-\frac{1}{8(2x-1)^2}+C$
9. $\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{1}{2x^2}+C$
10. $-\frac{5}{x}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+3x+C$
11. $x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$
12. $\frac{(x+4)^{101}}{101}+C$
13. $\frac{1}{5}(x^2-1)^5+C$
14. $-\frac{1}{3(1+x^3)}+C$
15. $-\frac{1}{4(x^2-3x+8)^4}+C$
16. $2\sqrt{x^2-4}+C$
17. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-x^3}+C$
18. $-\frac{1}{4(x^2+2x+5)^2}+C$
19. $\frac{1}{5}(x^3+1)^5+C$
20. $-4\cos\frac{x}{2}+C$
21. $\sin\frac{x}{3}+C$
22. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$
23. $-2\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x-7\sin\frac{x}{7}+C$
24. $-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$
25. $-\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C$
26. $-\frac{1}{5}\cos(5x-6)+C$
27. $4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+C$
28. $3\cot(2-x)+C$
29. $\frac{1}{2(1+\cos x)^2}+C$
30. $\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{4}\tan 4x+C$

第 16 章

习题 16a（P.184）

1. $\frac{25}{2}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $-\frac{1}{2}$ 4. $\frac{(b^5-a^5)}{5}$ 5. $\frac{15}{64}$

6. $\frac{38}{3}$ 7. $\frac{16\sqrt{2}-2}{7}$ 8. 2 9. 0 10. 1

11. 2 12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 13. 1 14. 0 15. 4

16. $-\frac{1}{4}$ 17. 0 18. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

习题 16b（P.188）

1. 6 2. $\frac{5}{4}$ 3. $-\frac{4}{3}$ 4. $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}-5)$ 5. 9

6. $\frac{8}{3}$ 7. $12\frac{11}{12}$ 8. $-\frac{i}{6}$ 9. $-\frac{9}{4}$ 10. $\frac{5}{6}$

11. $\frac{7}{2}$ 12. $\frac{1}{30}$ 13. $9\frac{1}{2}$ 14. $-7\frac{11}{15}$ 15. $\frac{3}{16}$

16. $2\frac{5}{8}$ 17. 26 18. 2 19. $\frac{7}{8}$ 20. $21\frac{1}{3}$

21. $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 22. 1 23. $\frac{3}{16}$ 24. $\frac{1}{72}$

习题 16c（P.194）

1. 18 2. $5\frac{1}{4}$ 3. 78 4. $\frac{1}{3}(5^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}})$ 5. 12 6. 9

7. 12 8. 9 9. $13\frac{1}{2}$ 10. $20\frac{5}{6}$ 11. $\frac{9}{16}$ 12. $4\frac{1}{2}$

习题 16d（P.197）

1. $\frac{15}{2}\pi$ 2. $\frac{32}{3}\pi$ 3. $\frac{18}{15}\pi$ 4. $\frac{16}{15}\pi$ 5. $\frac{128}{3}\pi$

6. $85\frac{1}{3}\pi$ 7. 18π 8. $\frac{9}{2}\pi$ 9. $\frac{483}{5}\pi$ 10. $\frac{512}{15}\pi$

11. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{5}$ 12. $\frac{32}{3}\pi$ 13. $\frac{7}{2}\pi$ 14. $\frac{48}{5}\pi$

15. $\frac{\pi}{105}$ 16. $\frac{\pi r^2 h}{3}$

习题 16e（P.201）

1. $15\frac{1}{3}$ 米　　2. 75m　　3. 45 米，6 秒

4. (a) 27m/s　　(b) 72m　　5. 117 米

6. (a) 1m/s　　(b) −32m　　(c) $34\frac{10}{27}$

7. $10\frac{1}{4}$m，$3\frac{5}{\sqrt{2}}$ ms^{-1}

8. (a) $\frac{1}{3}$ 秒　　(b) $\frac{13}{27}$ m　　(c) $-\frac{16}{3}$ ms^{-1}　　(d) $9\frac{26}{27}$

9. (a) $3t+2t^2-\frac{4t^3}{3}$　　(b) $t=3+\frac{3\sqrt{5}}{4}$　　(c) -9 和 $\frac{9}{2}$ 之间

10. (a) 3 次　　(b) 3 秒

总复习题 16（P.203）

1. (a) $a^3-\frac{a^2}{2}+a$　　(b) $\frac{21}{8}$　　(c) $\frac{5}{4}$　　(d) $\frac{8}{3}$

   (e) $\frac{2}{3}$　　(f) -1　　(g) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$　　(h) $13\frac{1}{3}$

   (i) π　　(j) 2

2. (a) $\frac{17}{12}$　　(b) $\sqrt{2}$　　(c) $20\frac{5}{6}$　　(d) $\frac{7}{6}$

   (e) $\frac{32}{3}$　　(f) $\frac{32}{3}$

3. (a) $\frac{128}{7}\pi$　　(b) $\frac{\pi}{4}(\pi+2)$　　(c) 12π　　(d) $\frac{40}{5}\pi$

4. (a) $\frac{2}{5}\pi$　　(b) 12π　　5. $\frac{242}{5}\pi$

6. (a) $\frac{512}{3}\pi$　　(b) 16π　　7. $1\frac{5}{6}$　　8. $2\sqrt{2}$

9. $2\frac{2}{3}$，π　　10. $\frac{81}{4}\pi$　　11. $A=\frac{36}{\sqrt{a}}$，$V=\frac{81\pi}{2a}$，$V=\frac{\pi}{32}A^2$

12. $\frac{383}{35}\pi$　　13. $m=\frac{4}{5}$　　14. (a) 25m/s　　(b) $18\frac{13}{24}$ m

15. (a) $4\frac{1}{2}$m　　(b) $4\frac{1}{2}$ 秒

16. (a) $2t^2-15t+12$　　(b) $t_1=1$，$t_2=4$　　(c) $5\frac{1}{2}$，-8　　(d) 45 m