马来西亚华文独中教科书

高级数学

高一
下册

董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

马来西亚华文独中教科书

高级数学

高一
下册

董總
DONG ZONG

董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

《高级数学》高一下册

行政编辑：黄宝玉
美术编辑：曹薇华
排　　版：梁翠芳

© 郑重声明，此书版权归出版单位所有，未经允许，书上所有内容不得通过任何形式进行复制、转发、储存于检索系统，或翻译成其它语言的活动。

© Dong Zong
Hak cipta terpelihara. Mana-mana bahan atau bahagian dalam buku ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, atau ditukar kepada apa-apa bentuk atau apa-apa cara, baik dengan elektronik, mekanikal, fotokopi, rakaman, pengalihan bahasa dan sebagainya tanpa mendapat kebenaran secara menulis daripada pihak penerbit terlebih dahulu.

© Dong Zong
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, translated in any other languages, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School（MICSS）Working Committee

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Vinlin Press Sdn. Bhd.

版次：
2023 年 11 月第 1 版

印次：
2023 年 11 月第 1 次印刷

编审团队

学科顾问 ：刘建华　郑章华

编审委员 ：纪露结　陈玉丽　陈美溢　陈盈颖　苏民胜　李鸿聪
张锦发　林艾嘉　林汶良　姚和兴　萧子良　黄书丰

编写人员 ：纪露结　陈美溢　陈盈颖　苏民胜　张锦发　萧子良

责任编辑 ：林方馨

（按姓氏笔画排列）

董總
DONGZONG

鸣谢

本书承蒙国内学者、独中数学科教师等提供建设性意见，并协助编写及审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

2023 年 9 月

编辑说明

1. 这套《高级数学》是根据董教总全国华文独中工委会统一课程委员会所拟定的“高级数学课程标准”编写而成。在拟定课程标准的过程中，除采用部分旧版《高级数学》的课程内容，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要 (KSSM)、SPM、STPM 及各国的课程标准和教材。

2. 这套《高级数学》是为全国华文独中的高中理科班学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。高一及高二的每册内容依据每周7节、每节 40 分钟的教学时间编写；而高三每册则依据每周 5 节、每节 40 分钟编写。各校可按个别情况安排授课时数。

3. 这套教材共有35章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学与微积分等等。

4. 本书是高一下册，供高中一年级下半年使用。

5. 本书设有“温故知新”、“学习目标”、“想一想”、“数学橱窗”、“补充资料”、“注意”及“探索活动”栏目。设置以上栏目，是为了方便学生掌握学习重点、启发学生思考，并增进学习效果。

6. 本书每节都设有习题及随堂练习，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。

7. 本书附有中英名词对照，供学习参考，习题的答案也都附在书末。

8. 本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会
《高级数学》编审小组
2023 年 9 月

董總 DONG ZONG

目录

08 角度与弧度

8.1 任意角的概念与度量 4

8.2 弧长与扇形面积 9

09 任意角的三角函数

9.1 任意角的三角函数 24

9.2 三角函数的诱导公式 35

9.3 三角函数的图像 41

9.4 反三角函数 53

10 三角学的应用

10.1 正弦定律 66

10.2 余弦定律 73

10.3 三角形的面积 79

10.4 测量问题 85

董總 DONG ZONG

11 三角恒等式与三角方程式

11.1 同角三角函数的基本关系式 100
11.2 两角之和与差的三角函数 107
11.3 倍角的三角函数 119
11.4 三角方程式 124

12 指数与对数

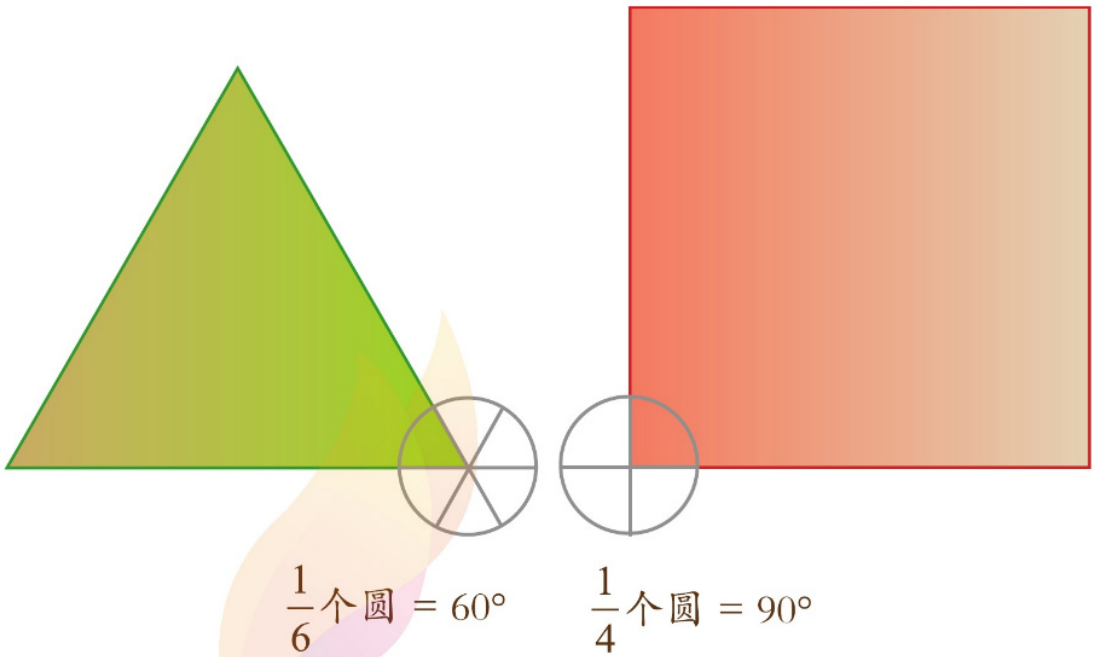
12.1 指数函数 144
12.2 对数函数 151
12.3 指数方程式与对数方程式 165

13 数列与级数

13.1 数列与级数 180
13.2 等差数列与等差级数 186
13.3 等比数列与等比级数 197
13.4 复利与年金 210
13.5 特殊级数的和 216

中英名词对照 228
答案 230
图片出处 247

董總 DONG ZONG



董總
DONG ZONG

在古巴比伦以及古希腊时期，数学家在研究天文学问题时，普遍习惯使用 60 进制。为了进位制的统一，也用 60 进制对角进行度量，因此定义了一周角等于 360°，进而发现了等边三角形的内角是$\frac{1}{6}$个圆，即 60°、正方形的内角是$\frac{1}{4}$个圆，即 90°。除了这种定义的角度外，有没有其他测量角度的方法呢？

8

角度与弧度

学习目标

- 认识任意角
- 理解弧度的意义
- 能进行角度与弧度之间的换算
- 会运用弧长公式及扇形面积公式解决问题

董總 DONG ZONG

8.1 任意角的概念与度量

任意角

在初中，我们有学过角是由同一端点的射线所形成的几何对象。如图 8–1 所示，不管是从射线 OA 至射线 OB，或是射线 OB 至射线 OA，皆可以量出 30°。

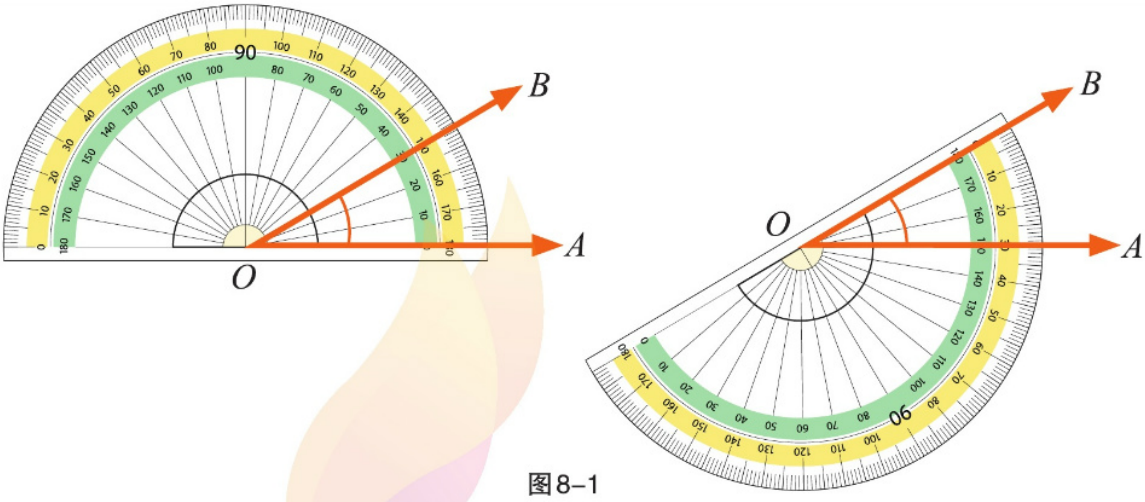


图 8–1

其实角也可看作是一条射线绕其端点在平面上旋转形成的。如图8–2所示射线的端点 O 叫做角的顶点 (vertex)，旋转的初始位置 OA 称为角的始边 (initial side)，终止位置 OB 称为角的终边 (terminal side)，旋转量为 $\angle AOB$。旋转的时候，可分为顺时针旋转和逆时针旋转，如图 8–2 所示，逆时针旋转的角定为正角，而顺时针旋转时定为负角，图 8–2 中 $\theta > 0°$。

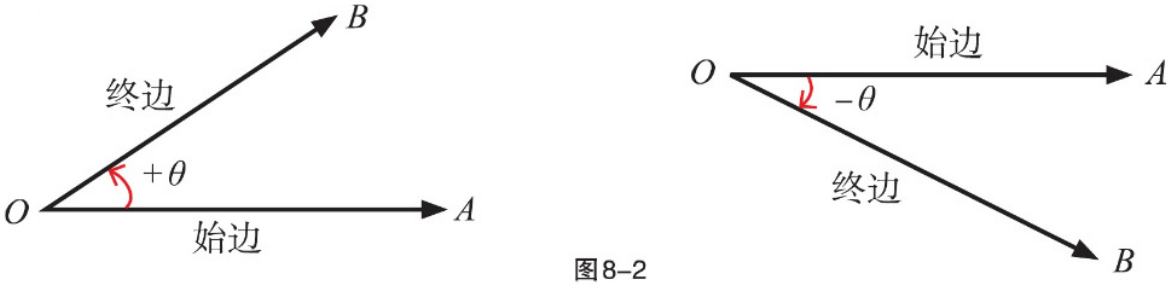


图 8–2

探索活动 1

目的：了解任意角的定义。

准备材料：白纸、量角器、尺

步骤：

1. 请在白纸上分别画出三条水平射线 OA（如下图所示），并以射线 OA 为始边，用量角器画出

   (a) 160° 的终边 OB　　(b) −45° 的终边 OC　　(c) 450° 的终边 OD

2. 在以上三个图内明确标出角的旋转方向和旋转量的大小。

工具：https://www.geogebra.org/m/u7a3zxfd

从探索活动 1，这种不局限于 0°~360° 的有向旋转量，称为任意角。其中当始边没有作任何旋转时，所形成的角称为零角。

董總 DONG ZONG

角度与弧度

在初中，我们所学的角的单位是由一个圆平分成 360 个等份，每一等份所对的圆心角叫做 1 度，记作1°。将一度的角所对的弧分成 60 等份，每一等份所对的圆心角为 1 分 (minute)，记作 1′。将一分的角所对的弧分成 60 等份，每一等份所对的圆心角为 1 秒 (second)，记作 1″。

$$\therefore\ 1\text{ 周角} = 360^\circ$$
$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60''$$

这种六十进位制的度量角的制度称为角度制 (degree measure)。

探索活动 2

目的：观察弧长和半径的关系，认识弧度制的定义。

准备材料：圆规、量角器、一条长约 10 cm 的线，
一张草稿纸。

步骤：

1. 以 2~4 人一组，每人用圆规画一个不同半径的圆。（可任意选择半径 2 cm, 3 cm, 4 cm，…）
2. 每人在自己的圆弧上用线量出与半径相同长度的弧 AB，并在线上做记号，如图 8–3 所示。
3. 用量角器测量出弧 AB 所对的圆心角 。

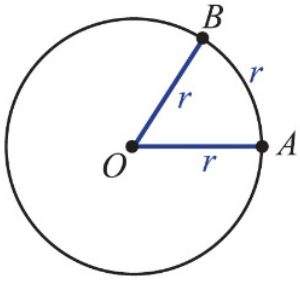


图 8–3

讨论与发现：1. 比较各组员所画的图，所测量出的圆心角是否一样？
2. 用线量一量，一个圆周可以截出多少段与 AB 一样长的弧？
3. 是否能用圆周长公式推算出上题准确的答案？

从上述活动，我们引出另一种较常在高等数学和其它科学研究里用到的另一种量角的制度——弧度制 (radian measure)。我们把与半径等长的圆弧所对的圆心角（即图 8–3 中的 $\angle AOB$）叫做 1 弧度 (radian)，也可记作 1 rad。从讨论 1 中可以看出，不管是多大的圆，1 弧度约为 57.3°，从讨论 2 和讨论 3 中，可以得知，圆周长和半径的比为 2π。即一周角 = 360° = 2π 弧度，从而我们可以得出以下角度与弧度的换算公式：

$$\pi \text{ 弧度} = 180^\circ$$

$$1 \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度}$$

数学橱窗 1

弧度制的发展

https://bit.ly/3OwNWWY

例题 1

将下列各角度化成弧度：

(a) 218.84°　　(b) 48° 36′

解 (a) $218.84° = 218.84 \times \frac{\pi}{180}$

$= 3.8195$ 弧度

(b) $48°\ 36' = \left(48 + \frac{36}{60}\right)°$

$= 48.6 \times \frac{\pi}{180}$

$= 0.8482$ 弧度

例题 2

将 1.5 弧度化成角度（答案准确至分）。

解 1.5 弧度 $= 1.5 \times \frac{180°}{\pi}$

$= 85°\ 57'$

董總 DONG ZONG

例题 3

将 $\frac{\pi}{45}$ 弧度化成角度。

解 $\frac{\pi}{45}$ 弧度 $= \frac{180°}{45}$

$= 4°$

要注意的是，当我们用弧度表示角时，单位“弧度”通常省略不写。例如，我们通常写 $90° = \frac{\pi}{2}$，但如果用角度制表示角时，其单位不能省略。

随堂练习 8.1

1. 完成下表，答案以 π 表示：

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°
弧度										

2. 将下列各弧度转换成角度（若答案不是整数，则将答案准确至 0.01°）。

(a) 0.5 弧度　　(b) $\frac{7\pi}{6}$ 弧度

习题 8.1

1. 以下图的水平射线 OA 为始边，描绘出下列各角的终边 OB 的位置。

(a) $\frac{5\pi}{4}$　　(b) $-\frac{6\pi}{7}$　　(c) $\frac{5\pi}{2}$

2. 将下列各角度化成弧度（答案准确至 4 位小数）。

(a) 68.93°　　(b) 139° 12′　　(c) −502° 46′

3. 将下列各弧度转换成角度（若答案不是整数，则将答案准确至分）。

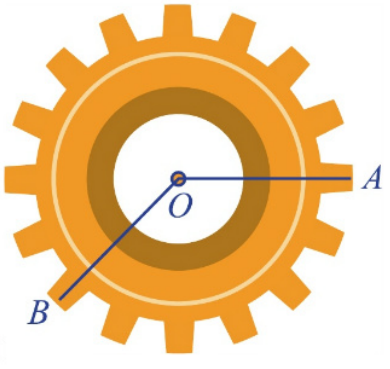
(a) 0.89 弧度　　(b) $-\frac{17\pi}{6}$ 弧度　　(c) 3 弧度

4. 若一弧长与其半径的长度比是 4 : 3，此圆弧所对的圆心角是多少弧度？

5. 若右图的齿轮以 O 为定点逆时针旋转，那么需要旋转多少弧度后，

(a) 线段 OB 会第一次到达图中 OA 的位置？

(b) 线段 OA 会第二次到达图中 OB 的位置？



第 5 题用图

8.2 弧长与扇形面积

弧长公式

在初中，我们学过在半径为 r，圆心角为 θ 的圆中，

(i) 如果 θ 是以角度表示，则圆心角 θ 所对的弧长 l 的计算公式为

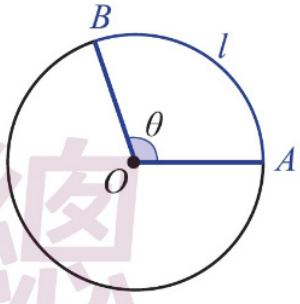
$$l=\frac{\theta}{360^{o}}\times 2\pi r \qquad (\theta\text{ 为角度})。$$

(ii) 如果 θ 是以弧度表示，又 $360°=2\pi$，则圆心角 θ 所对的弧长 l 的计算公式为

$$\begin{aligned} l&=\frac{\theta}{2\pi}\times 2\pi r \\ &=\theta r \qquad (\theta\text{ 为弧度})。\end{aligned}$$

从弧度的定义也可得知，若弧 AB 所对的圆心角为 θ 弧度，则弧 AB 的长度将会有 θ 个半径的长度，即

$$\theta=\frac{l}{r}$$
$$l=\theta r$$



董總
DONG ZONG

例题 4

在一半径为 5 cm 的圆，求

(a) 圆心角 1.5 弧度所对的弧长；

(b) 长 17 cm 的弧所对的圆心角。

解 (a) 所对的圆弧弧长 $=1.5\times 5$

$=7.5$ cm

(b) 设所求的圆心角为 θ，

$$5\theta=17$$
$$\theta=3.4$$

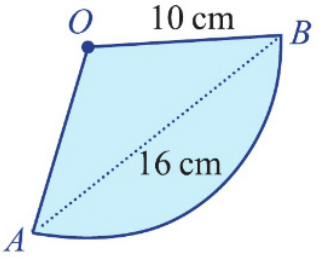
弧长 17 cm 所对的圆心角为 3.4 弧度。

例题 5

右图表示一个以点 O 为圆心，半径为 10 cm 的扇形。若弦 AB 的长度为 16 cm，求

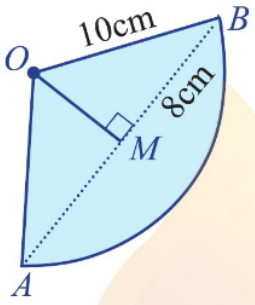
(a) $\angle AOB$（答案以弧度表示）；

(b) 弧 AB 的长度。



解 (a) 设点 M 为弦 AB 的中点，

$\therefore OM \perp AB$ 且 $\angle MOB = \angle MOA$



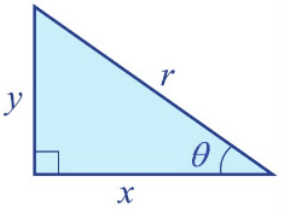
温故知新：

初中学过的三角函数有

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



适当地加入辅助线，形成直角三角形，则可借用三角函数找到边角关系。

在 ΔOMB，
$$\sin\angle BOM = \frac{MB}{OB} = \frac{8}{10}$$

$$\angle BOM = 0.9273$$

因此，
$$\angle AOB = 2\times 0.9273 = 1.8546 \text{ 弧度}$$

数学橱窗 2

如何按计算机从三角函数值求得对应的角？

计算机备注

https://bit.ly/3OwNWWY

(b) 弧长 $AB = 10\times 1.8546$
$= 18.546$ cm

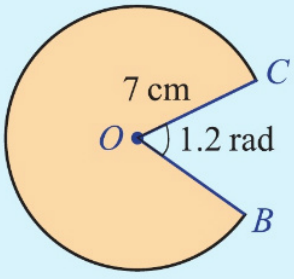
想一想 1 是否可用角度来求弧长 AB？

董總 DONG ZONG

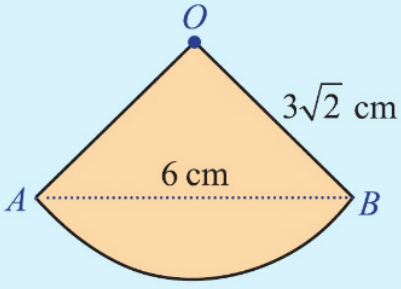
随堂练习 8.2a

求下列各扇形的周长：

(a)



(b)



扇形面积公式

探索活动 3

目的：加强了解弧度与弧长比和面积比的关系。

工具：https://www.geogebra.org/m/a4brp8yg

步骤：1. 固定点 B，移动滑杆L改变圆的半径，从着色部分的扇形观察以下三个比值的变化：

(i) $\angle AOB$ 和 2π rad（即 360°）

(ii) 弧长 AB 和圆周长

(iii) 扇形 AOB 面积和圆面积

2. 固定半径长度，移动点 B 位置改变圆心角，从着色部分的扇形观察上题相同的三个比值的变化。

经过以上的观察，有发现到什么值是一样的吗？

董總 DONG ZONG

初中我们学过扇形面积与圆心角的大小成正比，并推导出

$$扇形面积公式=\frac{\theta}{360^{\circ}}\times\pi r^2\ （\theta 为角度）$$

因 $360^{\circ}=2\pi$ 弧度

$$\therefore 扇形面积公式\ S=\frac{\theta}{2\pi}\times\pi r^2\ （\theta 为弧度）$$

即 $$S=\frac{1}{2}\theta r^2$$

因弧长 $l=\theta r$，

$\therefore$ 扇形面积公式也可写成

$$S=\frac{1}{2}\times\theta r\times r$$

$$S=\frac{1}{2}lr$$

例题 6

有一半径为 3 cm，面积为 15 cm² 的扇形，求这个扇形的的圆心角及周长。

解 $S=\frac{1}{2}\theta r^2$

$15=\frac{1}{2}\theta(3)^2$

$\theta=\frac{10}{3}$

$S=\frac{1}{2}lr$

$15=\frac{1}{2}l\times 3$

$l=10$

$\therefore$ 圆心角$=\frac{10}{3}$ 弧度，

周长 $=l+2r$

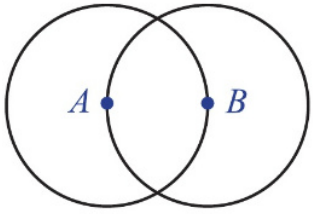
$=10+2\times 3$

$=16$ cm

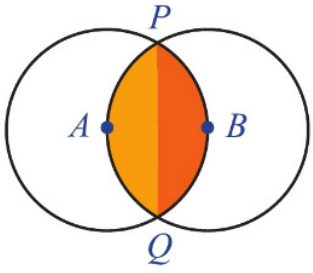
董總 DONG ZONG

例题 7

右图所示是两个分别以 A 与 B 为圆心，半径为 r 的圆，证明两圆重叠部分的面积为 $\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$。



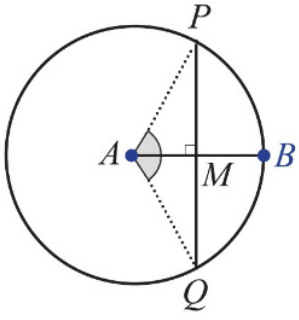
解 设两圆相交于点 P 和点 Q，
因这两圆同样大小，所以重叠部分由两个一样大小的弓形所组成。



$\because \Delta ABP$ 和 ΔABQ 都是等边三角形

$\therefore \angle PAB=\angle BAQ=\frac{\pi}{3}$

设 PQ 与 AB 相交于点 M，M 恰好也是线段 PQ 与线段 AB 的中点



$\therefore AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}r$

在 ΔAMP，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{MP}{AP}$

$MP=\frac{\sqrt{3}}{2}r$

扇形 APQ 面积

$\frac{1}{2}r^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\frac{\pi r^2}{3}$

ΔAPQ 面积

$=2\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

因此，两圆重叠部分面积 $=2\times$（扇形 APQ 面积 $-\Delta APQ$ 面积）

$$=2\times\left[\frac{1}{3}\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right]$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$

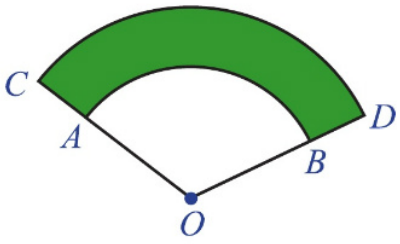
董總 DONG ZONG

例题 8

如右图所示，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 所对的圆心皆为 O，已知 $AC = d$，$\overset{\frown}{AB} = l'$，$\overset{\frown}{CD} = l$，求证：

(a) $\angle AOB = \dfrac{l - l'}{d}$ 弧度；

(b) 着色部分面积 $= \dfrac{1}{2}(l + l')d$。



解 (a) 设 $\angle AOB = \theta$，

$$l' = (OA)\theta$$
$$l = (OC)\theta$$
$$l - l' = (OC - OA)\theta$$
$$= d\theta$$
$$\theta = \frac{l - l'}{d}$$

(b) 着色部分面积 = 扇形 OCD 面积 − 扇形 OAB 面积

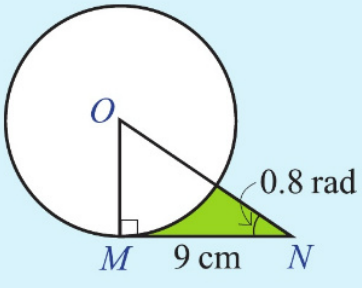
$$= \frac{1}{2}(OC)^2\theta - \frac{1}{2}(OA)^2\theta$$
$$= \frac{1}{2}\theta\left[(OC)^2 - (OA)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}[OC - OA][OC + OA]\theta \qquad \because l + l' = (OC + OA)\theta$$
$$= \frac{1}{2}d(l + l')$$

董總 DONG ZONG

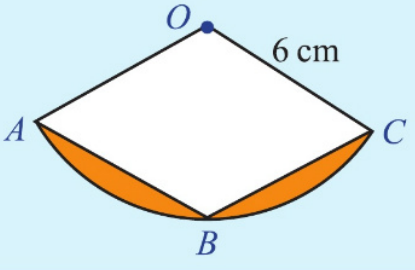
随堂练习 8.2b

求下列各图形着色部分面积：

(a)

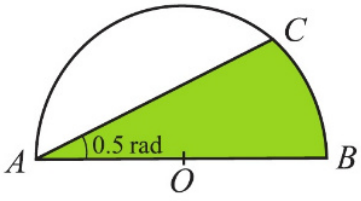


(b) OAC是一个扇形，$OABC$是一个菱形



习题 8.2a

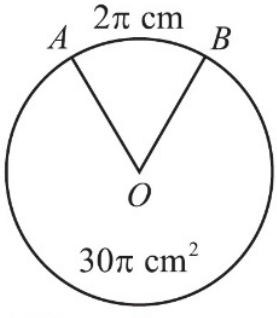
1. 右图是一个以 O 为圆心，直径为 8 cm 的半圆。C 是弧 AB 上的一点，已知 $\angle CAB = 0.5$ 弧度，求弧 BC 的长度以及着色部分的面积。



第1题用图

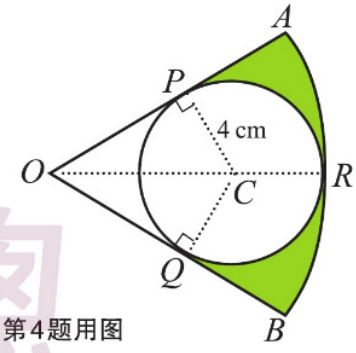
2. 已知一扇形的弧长为 8π cm，面积为 48π cm^2，求此扇形的半径和圆心角。

3. 右图的圆是由一个优扇形 $OACB$ 及一个劣扇形 OAB 所组成。若优扇形 $OACB$ 的面积是 30π cm^2，劣弧 AB 长 2π cm，求圆的半径及两个扇形的圆心角。



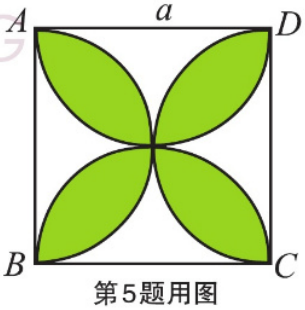
第3题用图

4. 如右图所示，以 C 为圆心的圆与扇形 OAB 相切于 P、Q 及 R 三点。已知 $CP = 4$ cm，$\angle AOB = 60°$。不使用计算机，求
   (a) OA 的长；
   (b) 优扇形 $CPRQ$ 的面积；
   (c) 着色部分的面积。



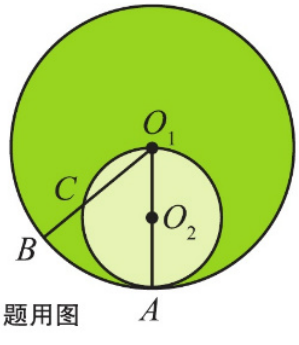
第4题用图

5. 右图中，$ABCD$ 是边长为 a 的正方形。以四个边为直径作四个半圆。这些半圆围成图中的着色部分。求着色部分的面积。



第5题用图

6. 右图中，O_1 及 O_2 分别为大圆与小圆的圆心，两圆相切于点 A，直线 O_1CB 分别交大圆与小圆于点 B 及点 C。证明 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$。



第6题用图

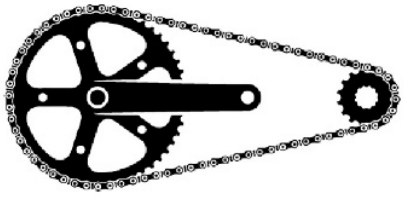
董總 DONG ZONG

与弧长、扇形相关的问题

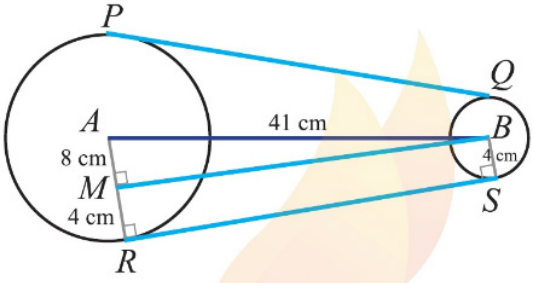
例题 9

右图所示是一个脚踏车的两个齿轮。

已知大齿轮的半径是 12 cm，小齿轮的半径是 4 cm。若两个齿轮的圆心相距 41 cm，问此脚踏车的链条有多长？



解



设两个齿轮的圆心分别为点 A 和点 B，则 $AB = 41$ cm。

设链条与两个齿轮的切点分别为 P、Q、R、S，从点 B 画一垂线到 AR，设其垂足为点 M。

$\therefore MBSR$ 是一个长方形，则

$BS = MR = 4$ cm，$AM = 8$ cm

在 ΔABM，$MB^2 = 41^2 - 8^2$

$$MB = \sqrt{1617}\text{ cm} = RS = PQ$$

$$\sin\angle ABM = \frac{8}{41}$$

$$\angle ABM = 0.1964$$

$$\angle MAB = \frac{\pi}{2} - 0.1964 = 1.3744$$

优角 $PAR = 2\pi - 2\times\angle MAB = 3.5344$

优弧 PR 的长 $= 12\times 3.5344 = 42.4128$ cm

$$\angle QBS = 2\pi - 2\times\left(\frac{\pi}{2} + 0.1964\right) = 2.7488$$

弧长 $QS = 4\times 2.7488 = 10.9952$ cm

$\therefore$ 链条长度 $= PQ + \overset{\frown}{QS} + RS +$ 优 $\overset{\frown}{PR}$

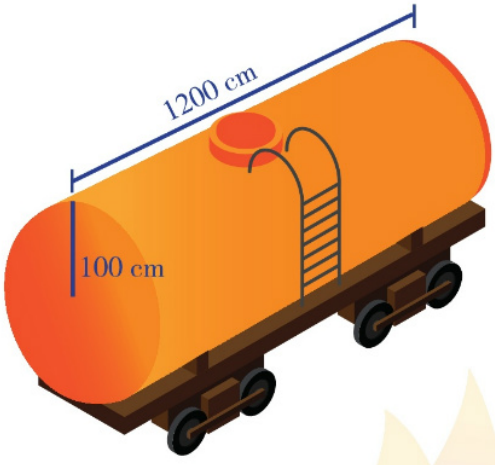
$$= \sqrt{1617} + 10.9952 + \sqrt{1617} + 42.4128$$

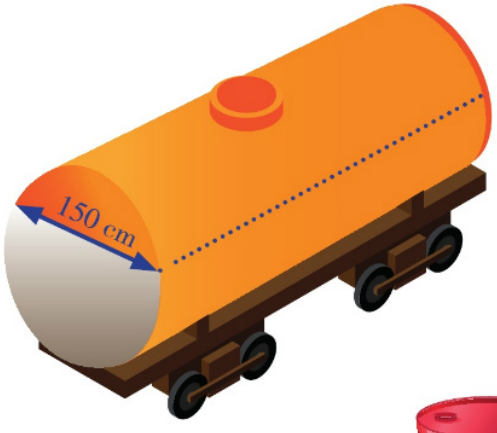
$$= 133.83\text{ cm}$$

董總 DONG ZONG

例题 10

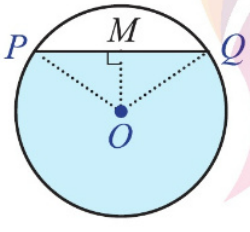
下图显示一油罐车，其形状可视为一个半径为 100 cm，长 1200 cm 的圆柱体。里面装着的汽油表面有 150 cm 宽。





右图显示的是一直径为 58 cm、高为 89 cm 的标准油桶，油罐车里的汽油量相当于多少个标准的油桶的油量？

解 设油槽车的纵截面圆心为 O，汽油表面两端为 P 和 Q。M 为 PQ 的中点。



$PO = QO = 100$ cm

$PM = MQ = 75$ cm

在 ΔPMO，

$$\sin\angle POM = \frac{75}{100}$$

$$\angle POM = 0.8481$$

$$\angle POQ = 1.6961$$

$$MO = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{100^2 - 75^2} = \sqrt{4375}\text{ cm}$$

汽油的纵截面面积 = 圆面积 −（扇形 POQ 面积 − ΔPOQ 面积）

$$= \pi(100)^2 - \frac{1}{2}(100)^2(1.6961) + \frac{1}{2}(150)\left(\sqrt{4375}\right)$$

$$= 27896.21\text{ cm}^2$$

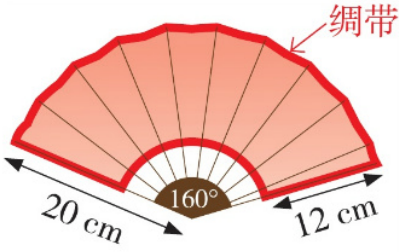
油桶数量 = 汽油总体积 ÷ 油桶体积

$$= \frac{27896.71 \times 1200}{\pi \times 29^2 \times 89} \approx 142.36\text{ 个}$$

董總 DONG ZONG

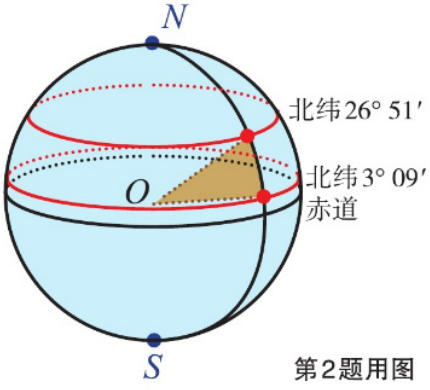
习题 8.2b

1. 学校的舞蹈团买了 15 把半径长 20 cm 的扇子，每把扇子打开后最大可以开到 160°。如右图所示，若团长想在 12 cm 宽的前后扇面周围分别加上红色绸带，请问他必需要准备多长的绸带才能把所有的扇子完成加工？



第 1 题用图

2. 马来西亚的吉隆坡市和中国云南的丽江市坐落在同一条经线上，它们的纬度分别是北纬 3° 09′ 以及北纬 26° 51′。若把地球看成是一个半径为 6371 km 的球体，估计吉隆坡市和丽江市的距离。

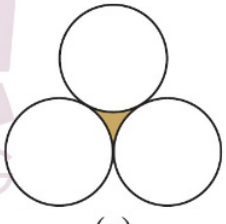


第 2 题用图

3. 右图是一学生用三个半径为 29.6 mm、高为 19 mm 的瓶盖相互粘在一起而成的一个壁报装饰品。

(a) 若他想用粘土将三个瓶盖之间的缝隙（图中棕色部分）填满，那他需要多少 mm^3 的粘土？

(b) 据此，若他想在壁报的四个角落，分别放一组由7个瓶盖所组成的花型（如右图所示），瓶盖之间的缝隙皆填满粘土，那他总共需要多少 mm^3 的粘土？


(a)

第 3 题用图

(b)

董總 DONG ZONG

总复习题 8

1. 将下列各角度化为弧度（答案以 π 表示）：

(a) 75°　　(b) −22.5°　　(c) 540°

2. 将下列各角度化为弧度：

(a) 17° 50′　　(b) 322° 5′　　(c) π°

3. 将下列各弧度化为角度：

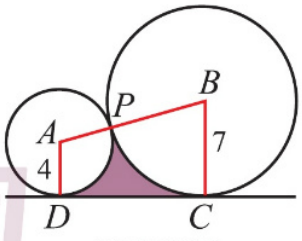
(a) $\frac{7\pi}{4}$　　(b) −2.5　　(c) $\frac{5\pi}{9}$

4. 已知扇形的半径为 5 cm，弧长为 12 cm，用弧度表示此扇形的圆心角，并求出它的面积。

5. 如右图所示，小圆的圆心是 A，半径是 4；大圆的圆心是 B，半径是 7。两圆相切于点 P，且与直线 CD 分别相切于点 D 与点 C，求

(a) $\angle ABC$ 及 $\angle BAD$，答案以弧度表示；

(b) 着色部分的面积。

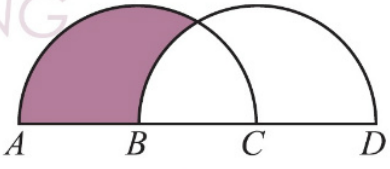


第 5 题用图

6. 右图所示为两个半圆，圆心分别为点 B 及点 C。若 $AB = a$，

(a) 求着色部分的周长；

(b) 证明着色部分的面积为 $\frac{a^2}{12}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$。

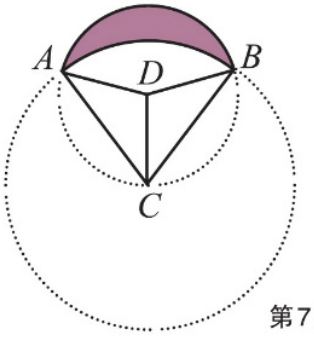


第 6 题用图

7. 右图中，两个半径分别为 8 cm 及 5 cm 的圆相交于 A、B 两点。C、D 分别为两圆的圆心。

(a) 求 $\angle ACB$ 及 $\angle ADB$，答案以弧度表示；

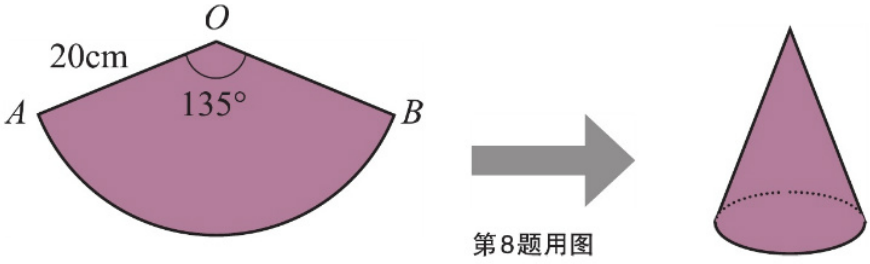
(b) 求着色部分的周长。



第 7 题用图

董總 DONG ZONG

8. 如下图所示，一个半径为 20 cm，圆心角是 135° 的扇形围成一个空心的直圆锥。



第8题用图

(a) 求这直圆锥的底圆半径及体积。

(b) 若扇形的半径相同但圆心角不同，此扇形围成圆锥体的体积会是一样的吗？

9. 小强买了一块蛋糕，尺寸如下图所示。若此蛋糕是由一高 12 cm 圆柱状的蛋糕切出，其中 O 为蛋糕横截面的圆心。若店员把一粒蛋糕切成 n 份同样大小的出售，则

(a) n 的值可能是多少？

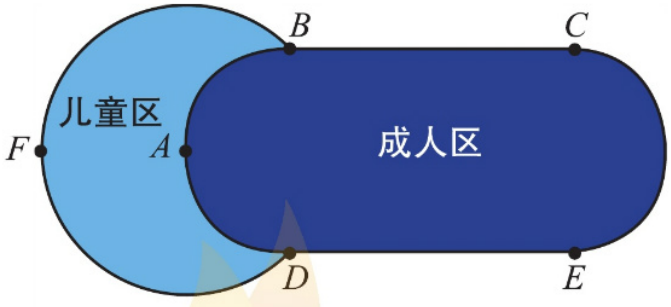
(b) 最后会剩下不足一块的蛋糕的体积是多少？

(c) 据 (a) 小题中的 n 值，若要把整粒蛋糕完整切出 n 等份，则每块蛋糕的圆心角应该要改成多少弧度？

第9题用图

重總
CHONG ZONG

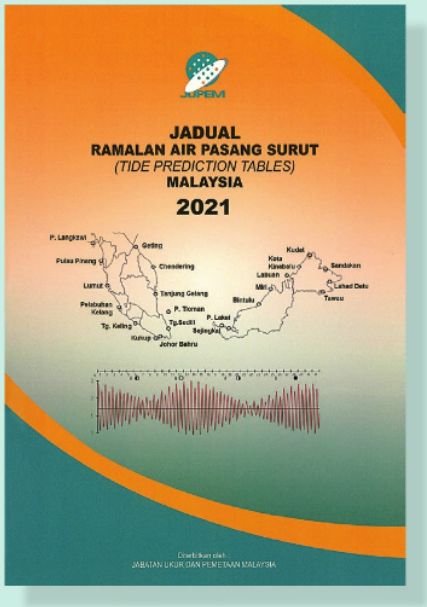
10. 如下图所示，某公寓的泳池设计分为成人区与儿童区。成人区是由一个长方形 $BCED$ 以及两个半圆形成，其中 BC=40 公尺，CE=20 公尺，水深为 1.3 公尺。儿童区则由以 A 为圆心的优弧 BFD 以及半圆 BAD 的圆弧围成，其水深为 0.6 公尺。若要对泳池进行例常消毒，需加入泳池专用的消毒片。已知每立方公尺的水需加入 20 克的消毒片，问这个成人区泳池和儿童区泳池各需放入多少克的消毒片？



第10题用图

董總
DONG ZONG

右图为大马土地测量与图测局(JUPEM)所出版的2021年国家潮汐预测表。潮汐影响海洋和港湾口积水深度，也带来潮汐流，因此沿海地区的潮汐预测对工程、渔钓、航海等都很重要。潮起潮落，时间与水深所成的函数关系具有“周期性”，而三角函数除了被用来研究三角形与圆等几何图形的性质，它也是研究周期现象的基础数学。



日常生活中也有不少现象具有重复出现的特性，例如：月亮形状的变化、单摆摆动的高度、弹簧简谐振动中伸长量的变化、摩天轮转动时车厢的高度等。那么，我们可如何利用三角函数来研究这些周期性运动与变化呢？

董總
DONG ZONG

数学橱窗 ①

三角学的历史与发展

https://nrich.maths.org/6843

9

任意角的三角函数

学习目标

- 理解任意角的三角函数的定义
- 能判断三角函数值的正负性及求出任意角的三角函数值
- 能运用特别角的三角函数值来解决问题
- 掌握三角函数的诱导公式
- 理解三角函数的图像及其变化
- 理解反三角函数的定义及其图像

董總 DONG ZONG

9.1 任意角的三角函数

在第 8 章，我们用了射线旋转的方式定义角，扩大了角的概念。在考虑了旋转方向与旋转量后，我们有了任意大小的正角、负角以及零角（0°），统称为任意角。下面我们将在直角坐标系内讨论角。

角与象限

平面内任意一个角都可以通过移动，使角的顶点与直角坐标系的原点重合，角的始边在正 x 轴上。那么，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角（或说这个角属于第几象限）。若角的终边落在坐标轴上，则这个角不属于任何象限。例如：

(1) 如图 9–1(a)，30° 与 390° 都是第一象限的角；

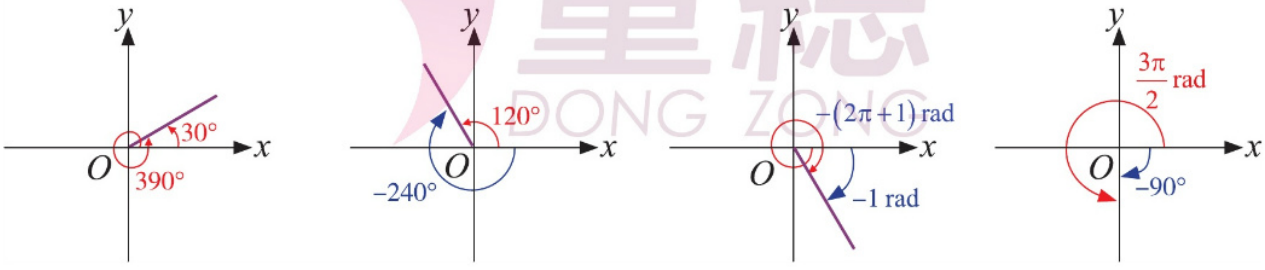
(2) 如图 9–1(b)，120° 与 – 240° 都是第二象限的角；

(3) 如图 9–1(c)，– 1 弧度与 $-(2\pi+1)$ 弧度都是第四象限的角；

(4) 如图 9–1(d)，$\frac{3\pi}{2}$ 弧度与 – 90° 不属于任何象限。

想一想 1

“锐角”、“第一象限角”与“小于90°的角”所表示的角是否相同？



(a) (b) (c) (d)

图9–1

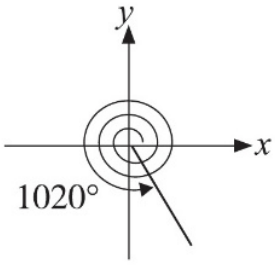
在本章中，若无特别说明，我们所讨论的角的顶点在坐标原点，且其始边在正 x 轴上。

图 9–1 中的四组角，它们的始边与终边都相同。事实上，任何一个角 θ 的终边按逆时针或顺时针旋转一周之后，必然与原来的终边重合，即 $\theta+360°$ 或 $\theta+(-360°)$ 与 θ 必是终边相同。同理可得：角 $k\cdot360°+\theta$ 与 θ 的终边必相同，其中 $k\in\boldsymbol{Z}$。

例题 1

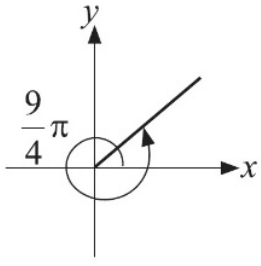
判别下列各角所属的象限：(a) $1020°$　　(b) $\frac{9}{4}\pi$

解 (a) $1020° = 2(360°) + 300°$



$\therefore$ $1020°$ 属于第四象限。

(b) $\frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$



$\therefore$ $\frac{9}{4}\pi$ 属于第一象限。

随堂练习 9.1a

1. 判定下列各角是第几象限的角：

   (a) $\frac{2\pi}{3}$　　(b) $740°50'$　　(c) $-\frac{4\pi}{9}$　　(d) $-135°$

2. 若 $360° < \theta < 450°$，则 θ 属于第几象限？

3. 在 $0° < \theta < 360°$（即 $0 < \theta < 2\pi$），找出与下列各角终边相同的角 θ：

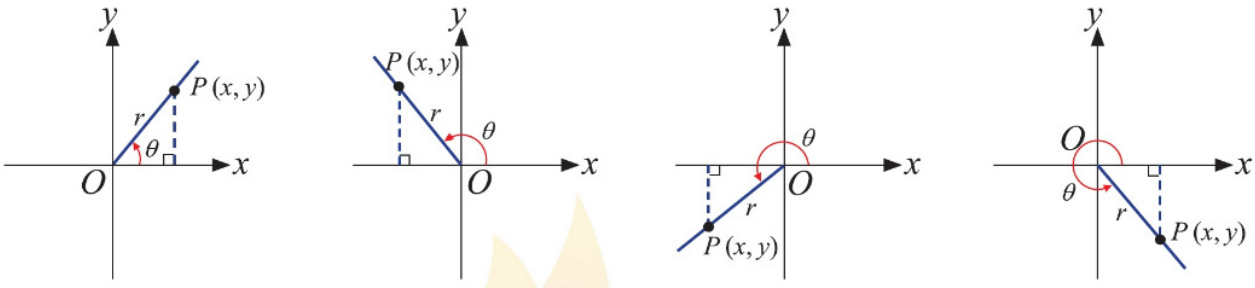
   (a) $560°24'$　　(b) $-15°$　　(c) $-1000°$　　(d) $\frac{12}{5}\pi$

董總 DONG ZONG

任意角的三角函数的定义

我们学过锐角的三角函数 (trigonometric function)：直角三角形中，锐角为自变量，边的比值为函数值。

如今，我们在直角坐标系讨论角，其实我们也可用坐标形式表示上述的锐角三角函数。这种定义还能推广到任意角的情形。



(a) 第一象限角　(b) 第二象限角　(c) 第三象限角　(d) 第四象限角

图9–2

数学橱窗 2

各三角函数名称的由来

https://www.youtube.com/watch?v=hHUoe3QaEPc

如图 9–2 所示，将一个任意角 θ 放在坐标平面上，使角的顶点为原点，始边与正 x 轴重合，并在角 θ 的终边上任取（异于原点的）一点 $P(x, y)$，令 $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$，则 θ 的三角函数定义为

正弦 sine	$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$	余弦 cosine	$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$
正切 tangent	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}, x \neq 0$	余切 cotangent	$\cot\theta = \dfrac{x}{y}, y \neq 0$
正割 secant	$\sec\theta = \dfrac{r}{x}, x \neq 0$	余割 cosecant	$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{r}{y}, y \neq 0$（亦可记 $\csc\theta$）

董總 DONG ZONG

例题 2

已知角 θ 的终边经过点 $P(2,-3)$，求 θ 的六个三角函数值。

解 $\because x=2,\ y=-3$

$\therefore\ r=\sqrt{2^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{13}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-3}{\sqrt{13}}=-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

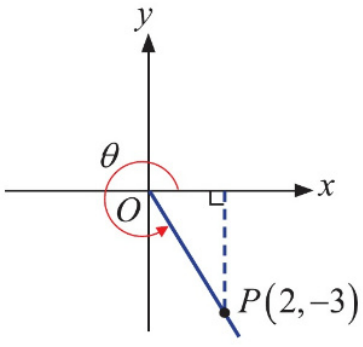
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$\cot\theta=\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{-3}=-\dfrac{2}{3}$

$\sec\theta=\dfrac{r}{x}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{r}{y}=-\dfrac{\sqrt{13}}{3}$



想一想 2 这六个三角函数之间有怎样的关系?

董總 DONG ZONG

随堂练习 9.1b

已知 $P(-\sqrt{3},-1)$ 是角 α 的终边上的一点，求 α 的六个三角函数值。

探索活动 1

三角函数在单位圆 (unit circle) 中的定义

给定以原点 O 为圆心，半径为 1 的单位圆，在角 θ 的终边上取其与单位圆的交点 $P(x,y)$。由于 $r=OP=1$，我们可得 $\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$，即点 P 的纵坐标是角 θ 的正弦值，而横坐标是角 θ 的余弦值。

现在，打开这些 GeoGebra Applet，以动态的方式观察如何用 θ 终边上的点的坐标定义正弦函数、余弦函数及正切函数。列出你所观察到的规律。

工具：

正弦函数与单位圆
https://www.geogebra.org/m/xxjshdwq

余弦函数与单位圆
https://www.geogebra.org/m/aajvmasj

正切函数与单位圆
https://www.geogebra.org/m/u6qg8x4z

任意角的三角函数值

在定义任意角的三角函数时，角 θ 的始边是固定在 x 轴的正半轴上，而它的终边，根据 θ 的大小及旋转方向，可以落在任何一个象限或坐标轴上。由定义可知，一个角的三角函数值只与该角的终边所在的位置有关，因此 θ 与 $\theta\pm k\cdot 360°, k\in \boldsymbol{Z}$ 的各三角函数值分别相同。

不论 θ 属于什么象限，r 值恒为正 $(r>0)$，而 x 与 y 的值则有正、负之分，如图 9–3 所示。因此，三角函数值依 θ 所属象限的不同，而有正负之分，如下表所示：

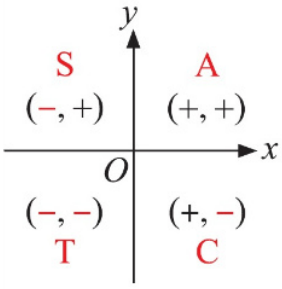


图 9–3

θ 终边所在象限 / 三角函数	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\theta$	+	+	–	–
$\cos\theta$	+	–	–	+
$\tan\theta$	+	–	+	–

【注】A：所有的 (All) 三角函数值都是正值

S：$\sin\theta$ 是正值　　T：$\tan\theta$ 是正值　　C：$\cos\theta$ 是正值

$\operatorname{cosec}\theta$，$\sec\theta$，$\cot\theta$ 的值的正负号，依次与 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 相同。

随堂练习 9.1C

1. 不使用计算机，判断角 θ 属于哪一个象限，并标明 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 的正负号：

	θ	象限	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
例	330°	四	–	+	–
(a)	–160°				
(b)	210°				
(c)	1068°				
(d)	$\frac{3\pi}{4}$				
(e)	–5				

2. 根据下列条件，判别 θ 是第几象限的角：

(a) $\cot\theta<0$　　(b) $\sin\theta>0$ 且 $\cos\theta<0$

(c) $\sec\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$　　(d) $\sin\theta\cdot\cot\theta>0$

董總 DONG ZONG

例题 3

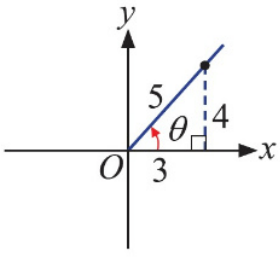
已知 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，不求出角 θ，求 $\tan\theta$ 及 $\sec\theta$ 的值。

解 已知 $\sin\theta>0$，所以 θ 是第一或第二象限角。

取 $r=5$，$y=4$

(i) 若 θ 是第一象限角，则 $x=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

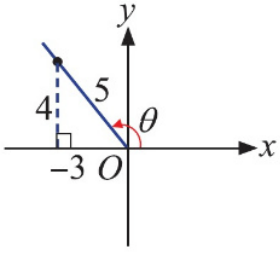
$\therefore \tan\theta=\dfrac{4}{3}$，$\sec\theta=\dfrac{5}{3}$



(i)

(ii) 若 θ 是第二象限角，则 $x=-\sqrt{5^2-4^2}=-3$，

$\therefore \tan\theta=-\dfrac{4}{3}$，$\sec\theta=-\dfrac{5}{3}$



(ii)

在例题 3，我们可观察到 θ 的终边与 x 轴之间夹着锐角。

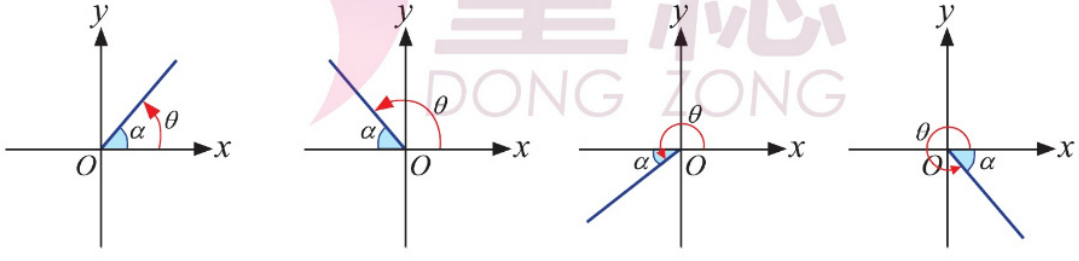


图 9–4

如图 9–4 所示，无论 θ 属于哪个象限，它的终边与 x 轴之间所夹的锐角 α 叫做相伴锐角 (associated acute angle 或 reference angle)。由于锐角 α 是第一象限角，它的三角函数值都是正值，我们可发现 θ 的三角函数值的绝对值与 α 的三角函数值相等。因此，利用三角函数的正负符号和相伴锐角的三角函数值，我们可以把求任意角的三角函数值的问题，转化为锐角的三角函数值的问题。

例题 4

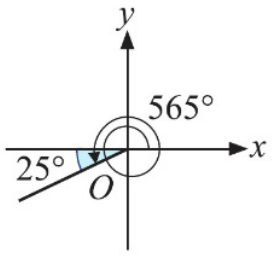
将下列各式化为锐角三角函数：

(a) $\sin 565°$　　(b) $\operatorname{cosec}(-285°)$　　(c) $\cos\frac{9\pi}{10}$

解 (a) $565°$ 为第三象限角，$\sin 565° < 0$，

相伴锐角为 $25°$，

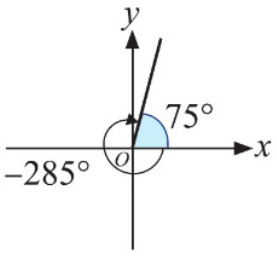
$\therefore \sin 565° = -\sin 25°$



(b) $-285°$ 为第一象限角，$\operatorname{cosec}(-285°) > 0$，

相伴锐角为 $75°$，

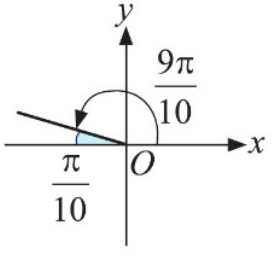
$\therefore \operatorname{cosec}(-285°) = \operatorname{cosec} 75°$



(c) $\frac{9\pi}{10}$ 为第二象限角，$\cos\frac{9\pi}{10} < 0$，

相伴锐角为 $\frac{\pi}{10}$，

$\therefore \cos\frac{9\pi}{10} = -\cos\frac{\pi}{10}$



董總 DONG ZONG

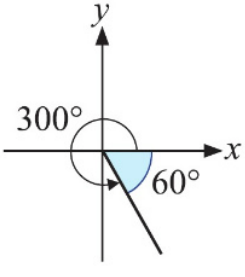
例题 5

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\sin 300°$　　(b) $\tan(-150°)$　　(c) $\cot\left(\frac{17\pi}{4}\right)$　　(d) $\cos^2 210°$

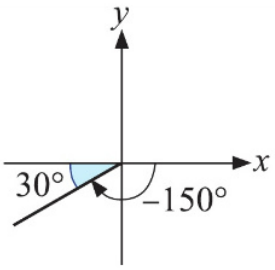
解 (a) $\sin 300° = -\sin 60°$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$



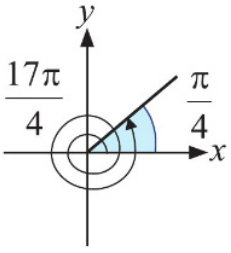
(b) $\tan(-150°) = \tan 30°$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



(c) $\cot\dfrac{17\pi}{4} = \cot\dfrac{\pi}{4}$

$= 1$

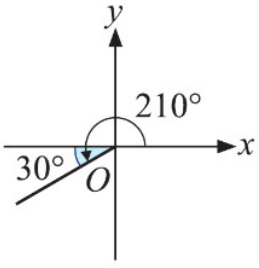


(d) $\cos^2 210° = (\cos 210°)^2$

$= (-\cos 30°)^2$

$= \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{3}{4}$



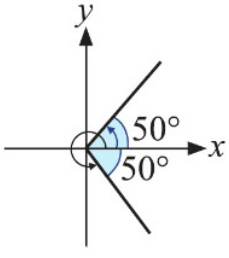
例題 6

已知 $\cos\theta = \cos 50°$，且 $0 \le \theta \le 360°$，求 θ 的值。

解 $\because \cos 50° > 0$，$\therefore \theta$ 是第一或第四象限的角。

$\because$ 相伴锐角为 $50°$，

$\therefore \theta = 50°$ 或 $\theta = 360° - 50° = 310°$



董總 DONG ZONG

随堂练习 9.1d

1. 设 $180° < A < 270°$ 且 $\cot A = \frac{24}{7}$，不求出角 A，求 $\cos A$ 及 $\operatorname{cosec} A$ 的值。

2. 不使用计算机，求下列各三角函数值：

   (a) $\cos 150°$　　(b) $\sec(-330°)$　　(c) $\sin 690°$　　(d) $\cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

3. 已知 $\sin\alpha = -\sin\frac{\pi}{8}$，且 $0 \le \alpha \le 2\pi$，求 α 的值。

4. (a) 已知 $\sin 16° \approx 0.2756$，求 $\sin 164°$。

   (b) 已知 $\cos 696° \approx 0.9135$，求 $\cos 24°$。

我们在前面讨论了三角函数在不同象限中的正负值。下面，我们讨论当角 θ 的终边落在坐标轴上时的情况。回顾探索活动 1，我们可观察到（如图 9–5）：

(i) 当 θ 的终边落在 x 轴上时，交点 P 的 y 坐标是 0，因此 $\cot\theta$ 和 $\operatorname{cosec}\theta$ 没有定义。

(ii) 当 θ 的终边 y 落在轴上时，交点 P 的 x 坐标是 0，因此 $\tan\theta$ 和 $\sec\theta$ 没有定义。

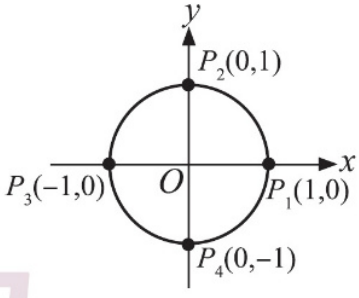


图 9–5

下表列出 0°，90°，180° 及 270° 的正弦、余弦及正切值：

θ	0°	90°	180°	270°
$\sin\theta$	0	1	0	−1
$\cos\theta$	1	0	−1	0
$\tan\theta$	0	没有定义	0	没有定义

董總 DONG ZONG

随堂练习 9.1e

完成下表：

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cot\theta$				
$\sec\theta$				
$\operatorname{cosec}\theta$				

习题 9.1

1. 判断下列各角的终边落在第几象限：

(a) $840°$　　(b) $-190°$　　(c) $\frac{7\pi}{4}$　　(d) -2

2. 已知角 α 的终边分别经过下列各点，求 α 的六个三角函数值：

(a) $(-8,-6)$　　(b) $(-2,1)$

3. 不使用计算机，判别下列各三角函数值是正值，还是负值：

(a) $\cos 250°$　　(b) $\operatorname{cosec}(-1300°)$　　(c) $\tan 4$　　(d) $\sin\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$

4. 根据下列条件，判别角 θ 所属的象限：

(a) $\cos\theta=\frac{1}{3}$　　(b) $\cos\theta$ 与 $\operatorname{cosec}\theta$ 同号

(c) $\frac{\sin\theta}{\cot\theta}<0$　　(d) $\tan^2\theta=3$

5. 若 $\sec\alpha=-\frac{17}{15}$，在不求出角 α 的条件下，求 $\sin\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 的值。

6. 若 $\sin\theta=k$，$k<0$ 且 $\cos\theta>0$，以 k 表示 $\tan\theta$ 的值。

董總 DONG ZONG

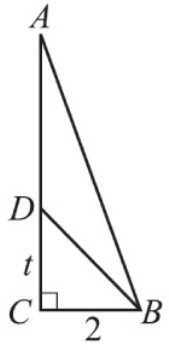
7. 化下列各三角函数为锐角三角函数：

(a) $\operatorname{cosec}186°$　(b) $\cot(-505°)$　(c) $\sin 7.6\pi$　(d) $\cos\left(-\frac{59}{17}\pi\right)$

8. 已知 $0 \le \theta \le 360°$，不使用计算机，求下列各式中 θ 的值。

(a) $\sin\theta = \sin 68°$　(b) $\sec\theta = -\sec 34°$

9. 如右图，在直角 ΔABC 中，$BC = 2$，$DC = t$，求 $\sin\angle BDA$ 及 $\cot\angle BDA$ 的值。



第9题用图

10. 不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\sin 135° + \cos 225° + \sec 180° + \operatorname{cosec} 90°$

(b) $\sin 120° + \cos^2 420° + \tan 225° - \operatorname{cosec}^2 240°$

(c) $\sin\frac{25\pi}{6} + \cos\frac{25\pi}{6} + \tan\left(-\frac{25}{4}\pi\right) - \cos 2\pi$

9.2 三角函数的诱导公式

在上一小节，我们察觉到任意角的三角函数具有周期性，且终边相同的角的各三角函数值分别相等，这可用以下公式表示，其中 θ 为任意角，$k \in \boldsymbol{Z}$，并假定公式中的角的三角函数值存在：

董總 DONG ZONG

$\theta + k \cdot 360°$ 与 θ 的三角函数值

$$\sin(\theta + k \cdot 360°) = \sin\theta$$
$$\cos(\theta + k \cdot 360°) = \cos\theta$$
$$\tan(\theta + k \cdot 360°) = \tan\theta$$

当 $k = 1$ 时，则有

$$\sin(360° + \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(360° + \theta) = \cos\theta$$
$$\tan(360° + \theta) = \tan\theta$$

有了上述关系，我们可以将各三角函数化成 0° 到 360°（或是 0 到 2π）角的三角函数，再利用相伴锐角转化成锐角的三角函数来计算。

不过，除了相伴锐角，我们是否还有其它方式把任意角的三角函数化成锐角的三角函数做计算呢？其实，我们可将终边落在坐标轴上的角写成 $k\cdot 90°$ 的形式，因此任意角必可以写成 $k\cdot 90°\pm\theta$ 的形式，其中 $k\in\boldsymbol{Z}$。若能找到任意角 θ 的三角函数值与 $k\cdot 90°\pm\theta$ 的三角函数值之间的关系，我们就可以进行相关转化了。下面，我们将探讨 $-\theta$，$90°\pm\theta$，$180°\pm\theta$，$270°\pm\theta$ 的三角函数值与 θ 的三角函数值之间的关系。

探索活动 2

目的：探索诱导公式。

(a) $-\theta$ 与 θ 的三角函数关系

角 θ 与 $-\theta$ 是旋转量一样，但旋转方向相反的两个角，因此它们的终边是关于 x 轴对称的。根据任意角的三角函数定义或其它方法，找出 $-\theta$ 与 θ 的三角函数关系。

(b) $90°+\theta$ 与 θ 的三角函数关系

角 $90°+\theta$ 与角 θ 相差90°。根据三角函数的定义或其它方法，找出 $90°+\theta$ 与 θ 的三角函数关系。

(c) $90°-\theta$，$180°\pm\theta$，$270°\pm\theta$ 与 θ 的三角函数关系

由于 $90°-\theta=90°+(-\theta)$，利用 (a) 与 (b) 所得到的公式，求 $90°-\theta$ 与 θ 的三角函数关系。

类似地，把 $180°\pm\theta$ 看作 $90°+(90°\pm\theta)$，$270°\pm\theta$ 看作 $90°+(180°\pm\theta)$，我们可分别得到 $180°\pm\theta$，$270°\pm\theta$ 与 θ 三角函数关系。

工具：https://www.geogebra.org/m/w7gx3umv

从探索活动 2，我们可以推导出以下公式。这些公式对于使函数有意义的任意角 θ 都能成立。

$-\theta$ 与 θ 的三角函数值

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

$90°+\theta$ 与 θ 的三角函数值

$$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$$

$90°-\theta$ 与 θ 的三角函数值

$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$$

$180°+\theta$ 与 θ 的三角函数值

$$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°+\theta)=\tan\theta$$

$180°-\theta$ 与 θ 的三角函数值

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$$

$270°+\theta$ 与 θ 的三角函数值

$$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(270°+\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(270°+\theta)=-\cot\theta$$

$270°-\theta$ 与 θ 的三角函数值

$$\sin(270°-\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan(270°-\theta)=\cot\theta$$

董總 DONG ZONG

本节中的这些公式统称为诱导公式。这些诱导公式可以概括成：

对于 $k\cdot 90°\pm\theta$（$k\in\boldsymbol{Z}$）的三角函数值，

(i) 当 k 是偶数时，其值等于 θ 的同名函数值，前面加上一个把 θ 看成锐角时原函数值的符号。

(ii) 当 k 是奇数时，其值等于 θ 的余函数值，前面加上一个把 θ 看成锐角时原函数值的符号。（$\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 与 $\cot\alpha$，$\sec\alpha$ 与 $\operatorname{cosec}\alpha$ 分别互为余函数）

在以上的公式中，把正弦函数换成余割函数，同时把余弦函数换成正割函数，公式仍然成立。

例题 7

化简下列各三角函数为 θ 的三角函数：

(a) $\sec\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)$　　(b) $\tan\left(-\theta-180°\right)$

解 (a) $\sec\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)=\sec\left[2\pi+\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right]$

$$=\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=-\operatorname{cosec}\theta$$

(b) $\tan\left(-\theta-180°\right)=\tan\left[-\left(\theta+180°\right)\right]$

$$=-\tan\left(180°+\theta\right)$$

$$=-\tan\theta$$

随堂练习 9.2a

把下列各三角函数化为 α 的三角函数：

(a) $\sin\left(720°-\alpha\right)$　　(b) $\cos\left(630°+\alpha\right)$

(c) $\tan\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$　　(d) $\sec\left(-540°+\alpha\right)$

(e) $\operatorname{cosec}\left(\alpha-7\pi\right)$　　(f) $\cot\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

董總 DONG ZONG

例题 8

设 A、B、C 是一个三角形的内角，求证 $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$。

证 $\because A+B+C=180^\circ$

$$\therefore \frac{A+B}{2}=\frac{180^\circ-C}{2}$$

$$=90^\circ-\frac{C}{2}$$

$$\therefore \sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{C}{2}$$

例题 9

不使用计算机，计算 $\sin 68^\circ\sin 22^\circ+\cos 112^\circ\sin 428^\circ$。

解 $\sin 68^\circ\sin 22^\circ+\cos 112^\circ\sin 428^\circ=\sin 68^\circ\sin 22^\circ+\cos(90^\circ+22^\circ)\sin(360^\circ+68^\circ)$

$$=\sin 68^\circ\sin 22^\circ+(-\sin 22^\circ)(\sin 68^\circ)$$

$$=0$$

董總 DONG ZONG

随堂练习 9.2b

1. 设 A、B、C 是一个三角形的三个内角，求证

   (a) $\cos(B+C)=-\cos A$　　(b) $\cot\frac{B+C}{2}=\tan\frac{A}{2}$

2. 不使用计算机，求下列各式的值：

   (a) $\sin 23^\circ-\cos 67^\circ$　　(b) $\tan 75^\circ\tan 15^\circ$

习题 9.2

1. 化简下列各式：

(a) $\sin(\alpha-180°)+\tan(\alpha-180°)-\cos(90°+\alpha)$

(b) $\cos(-\alpha)\sec(270°-\alpha)+\dfrac{\sin(90°-\alpha)}{\sin(180°-\alpha)}$

(c) $\dfrac{\cot\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)+\tan(3\pi+\theta)}{\sin(2\pi+\theta)\operatorname{cosec}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}$

(d) $\sin^2(45°+\alpha)-\cos^2(45°-\alpha)$

2. 若 $\sin 10°=k$，以 k 表示下列各式：

(a) $\cos 260°$　(b) $\sin 280°$　(c) $\tan(-10°)$　(d) $\sec 80°$

3. 已知 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，且 θ 为第四象限角。不求出角 θ，求 $\tan(180°-\theta)+\cos(90°-\theta)$ 的值。

4. 已知 $\cot\theta=a$，且 $\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，以 a 表示下列各式：

(a) $\sin(5\pi+\theta)$　(b) $\operatorname{cosec}\left(-\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)$

5. 已知 $\dfrac{\sec(\pi-\theta)}{3\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$。不求出角 θ，求 $\cos\theta$ 的值。

董總 DONG ZONG

9.3 三角函数的图像

在探索活动 1，我们可观察到：当角 θ 变化时，它的正弦函数值、余弦函数值以及正切函数值皆对应变化。

正弦函数 $y=\sin x$ 的图像

在区间 $[0,2\pi]$ 任取一个角 x，我们都可以找出其对应的正弦函数值 y。下表列出一些特别角的正弦函数值：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0

以每一组对应值作为点的坐标，在坐标平面上描出这些点，再用平滑的曲线将它们连接起来，就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 的图像。（见图 9–6）

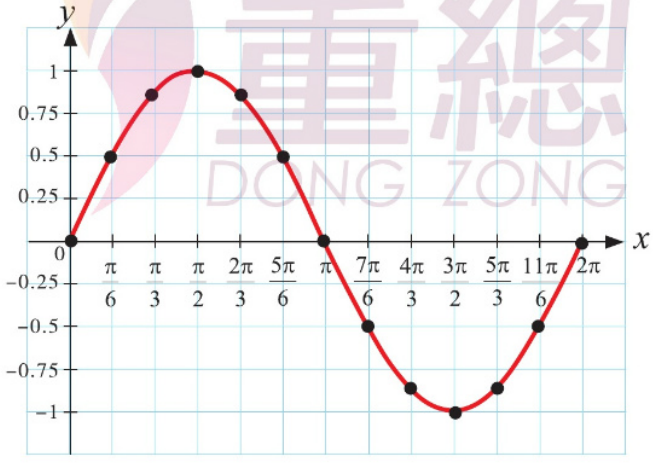


图 9–6

从 $\sin(2\pi+x)=\sin x$ 得知，正弦函数 $y=\sin x$ 的图像每隔 2π 就重复出现。这样，我们就可以得到如图 9–7 所示的正弦函数曲线 (sine curve)。若一个函数的值在固定的间隔内重复出现，这个函数就称为周期函数 (periodic function)，而这些

重复的间隔就称为周期 (period)。正弦函数就是一个周期函数，其最小的正周期是 2π。今后谈到函数的周期时，一般指的是函数的最小正周期。

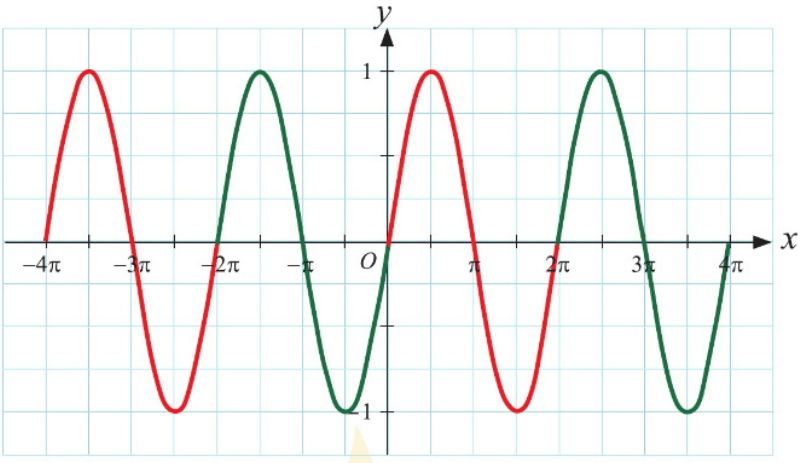


图 9–7

余弦函数 $y=\cos x$ 的图像

从 $\cos(2\pi+x)=\cos x$ 得知，$y=\cos x$ 也是一个以 2π 为周期的函数。根据周期性与列表描点的方法，我们可得到余弦函数曲线 (cosine curve)。（见图 9–8）

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0	0.5	−0.87	1

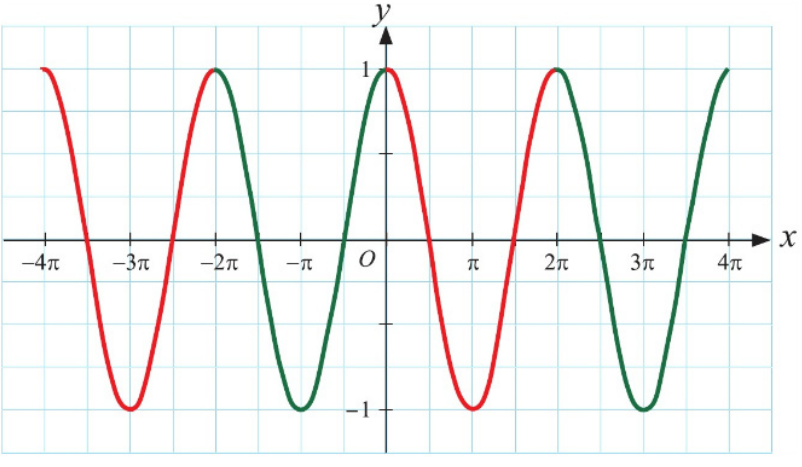


图 9–8

比较图 9–7 与 9–8，余弦函数与正弦函数的曲线有许多共同的性质。我们只要将正弦函数曲线向左平移$\frac{\pi}{2}$的距离就得到余弦函数曲线。

正切函数 $y=\tan x$ 的图像

从 $\tan(\pi+x)=\tan x$ 得知，$y=\tan x$ 是一个以π为周期的函数。图 9–9 所示为正切函数曲线 (tangent curve)。图中的虚线是渐近线 (asymptote)。由于$-\frac{3\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$及$\frac{3\pi}{2}$的正切函数都没有定义，正切函数曲线在这些角出现不连续的现象。而当x的值趋近于这些角时，$y=\tan x$ 的图像两端将无限延伸。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	没有定义	−1.73	−1	−0.58	0	0.58	1	1.73	没有定义

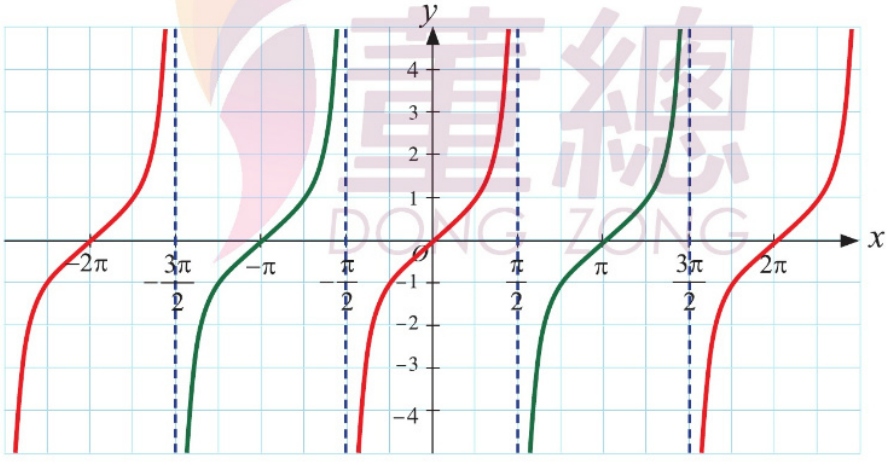


图 9–9

随堂练习 9.3a

作下列三角函数的简图：

(a) $y=\cos x\left(-\pi\le x\le\pi\right)$　　(b) $y=\tan x\left(-\pi\le x\le\pi\right)$

三角函数图像的性质

从三角函数的定义与图像，可以看出正弦函数、余弦函数及正切函数的一些性质，列表如下：

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
定义域	$\boldsymbol{R}$		$\left\{x \mid x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$
值域	$[-1,1]$		$\boldsymbol{R}$
最小正周期	2π		π

对于任何实数 x，$-1 \leq \sin x \leq 1$，所以 $\sin x$ 的最大值是1，最小值是 -1。从正弦函数的图像可看到，在 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k \in \boldsymbol{Z}$ 时，$\sin x$ 有最大值 1；在 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k \in \boldsymbol{Z}$ 时，$\sin x$ 有最小值 -1。类似地，$\cos x$ 在 $x=2k\pi$，$k \in \boldsymbol{Z}$ 时有最大值 1；在 $x=(2k+1)\pi$，$k \in \boldsymbol{Z}$ 时有最小值-1。

正弦函数与余弦函数的图像是波形曲线。我们可以看出 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 波形曲线的波幅 (amplitude) 为 1，也就是曲线至平衡位置（x 轴）的最大距离为 1。

与正弦函数及余弦函数不同，$\tan x$ 可以取任何实数值，所以正切函数没有最大或最小值。

董總 DONG ZONG

随堂练习 9.3b

下列各式能不能成立？为什么？

(a) $\cos^2 x=1.5$　　(b) $3\sin x=5$

(c) $\sin x-\cos x=2$　　(d) $\tan x+\cot x=2$

三角函数图像的变化

不少周期性现象往往都会用到正弦函数曲线、余弦函数曲线来表示，例如：随时间 t 按正弦规律变化的交流电，其电流强度 I 可用 $I = I_m \sin \omega t$ 表示，其中 I_m 是最大电流强度，ω 是发电机内线圈转动的角速度。现在我们将用第 5 章所学过的函数图像变换进一步研究较为复杂的三角函数的图像。

下面我们以正弦函数曲线加以说明如何由 $y = \sin x$ 的图像画出(i) $y = a \sin x$，(ii) $y = \sin bx (b > 0)$，(iii) $y = \sin(x + c)$ 以及 (iv) $y = \sin x + d$ 的图像。

(i) $y = a \sin x$ 的图像

我们先来研究 $y = 3 \sin x$ 的图像。

如下表所示，对于任何 x 值，$3 \sin x$ 的值是 $\sin x$ 值的 3 倍。函数 $y = 3 \sin x$ 是另一条波形曲线，其波幅为 3，最小正周期为 2π。系数 3 只不过是使正弦曲线的高度增加到 3 倍，而不影响它的周期。（见图 9–10）

x	…	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	…
$\sin x$	…	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	–0.5	–0.87	–1	–0.87	–0.5	0	…
$3 \sin x$	…	0	1.5	2.6	3	2.6	1.5	0	–1.5	–2.6	–3	–2.6	–1.5	0	…

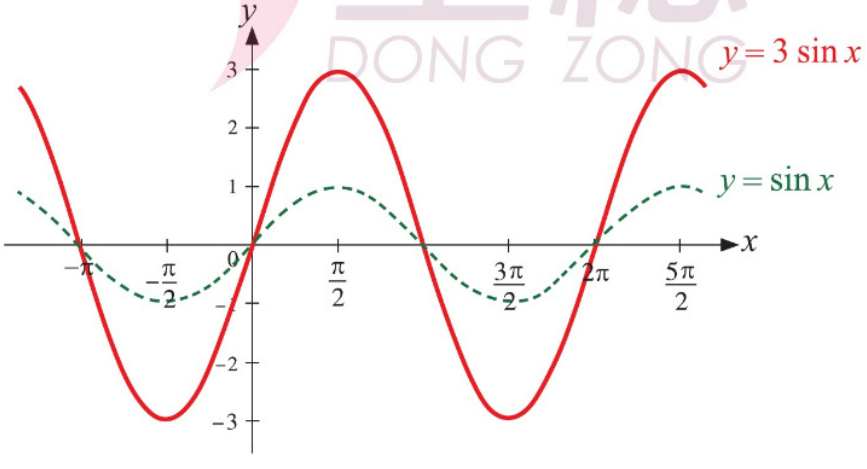


图 9–10

(ii) $y=\sin bx$ ($b>0$)的图像

接着，我们来研究 $y=\sin 2x$ 的图像。

如下表，对于任何 x 值，$\sin 2x$ 的值是$\sin x$ 在 x 的 2 倍时的值。

x	…	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	…
$\sin x$	…	0	$\sin\frac{\pi}{16}$	$\sin\frac{\pi}{8}$	$\sin\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{2}$	$\sin\pi$	$\sin 2\pi$	…
$\sin 2x$	…	0	$\sin\frac{\pi}{8}$	$\sin\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{2}$	$\sin\pi$	$\sin 2\pi$	$\sin 4\pi$	…

这说明：$y=\sin 2x$ 比 $y=\sin x$ 在短一倍的间隔就能取得同样的值（变化快一半）。函数 $y=\sin 2x$ 是另一条正弦波形曲线，其波幅为 1，但最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$。x 的系数 2 使曲线沿水平方向（x 轴）在原点的两旁分别向原点压缩到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，函数 $\sin 2x$ 的周期为 $\sin x$ 的周期的一半。（见图 9–11）

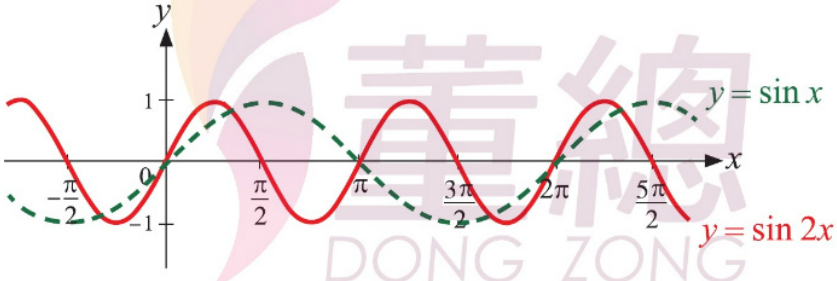


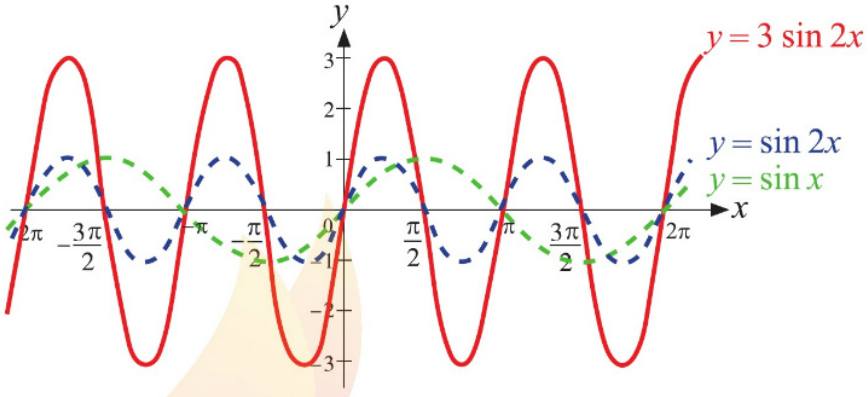
图 9–11

一般地，因为 $\sin b\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)=\sin bx$，所以 $\sin bx$ 的周期是 $\frac{2\pi}{b}$。当 $b>1$ 时，它的图像是把 $y=\sin x$ 的图像沿 x 轴向原点压缩而成，它的周期为原来的 $\frac{1}{b}$，b 越大，周期越小。

例题 10

作 $y=3\sin 2x$ 的图像。

解 $y=3\sin 2x$ 的图像就是我们前面研究过的 $y=3\sin x$ 、$y=\sin 2x$ 的图像的综合。可以看出，这是一条正弦波形曲线，其波幅为3，周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，如下图。



(iii) $y=\sin(x+c)$ 的图像

现在，我们来研究 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像。

我们给定一些 x 值，把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $y=\sin x$ 进行比较如下：

x	…	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	…
$\sin x$	…	0	0.26	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.97	1	0.97	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	…
$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$	…	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.97	1	0.97	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0.26	0	…

董總 DONG ZONG

可以看出：$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 中 y 取得的值相同，但起始点不同，都在 $y=\sin x$ 取得对应的值之前 $\frac{\pi}{6}$。因此，要得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像，只要将 $y=\sin x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$。（见图 9–12）

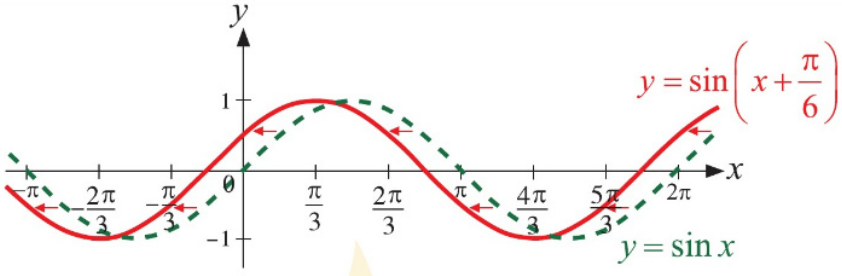


图 9–12

一般地，要得到 $y=\sin(x+c)$ 的图像， 可将 $y=\sin x$ 的图像平移一段距离 $|c|$。如果 c 是正值，将图像向左移；如果 c 是负值，则向右移。

例题 11

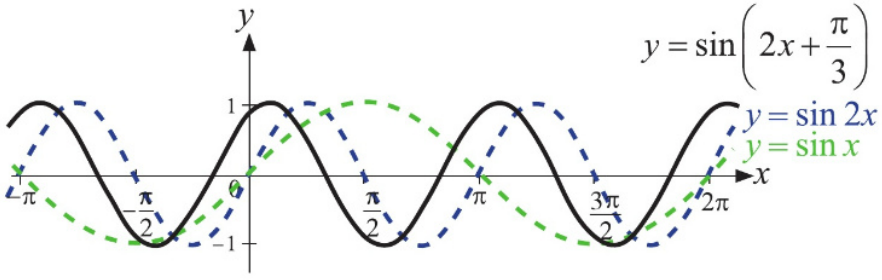
作 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像。

解 由于 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

(1) 把 $y=\sin x$ 的图像沿 x 轴向原点压缩，使周期为原来的 $\frac{1}{2}$，得 $y=\sin 2x$ 的图像。

董總 DONG ZONG

(2) 把 $y=\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$，得 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像，即 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像。



想一想 3 如何由 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 画出 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$？

(iv) $y=\sin x+d$ 的图像

我们来研究 $y=\sin x+2$ 的图像。

如下表所示，对于任何 x 值，$\sin x+2$ 的值等于 $\sin x$ 的值加上 2。我们把 $y=\sin x$ 的图像向上平移 2 个单位就可得到 $y=\sin x+2$ 的图像。（见图 9–13）

x	…	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	…
$\sin x$	…	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0	…
$\sin x+2$	…	2	2.5	2.87	3	2.87	2.5	2	1.5	1.13	1	1.13	1.5	2	…

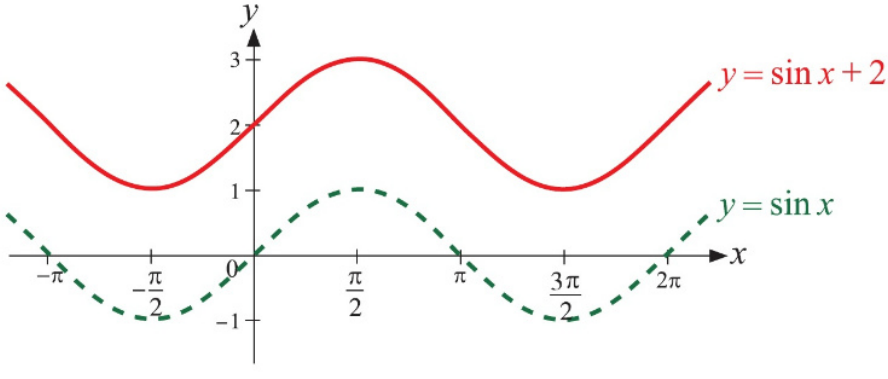


图 9–13

经过上述 4 种变换，我们可从函数 $y=\sin x$ 作出 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的图像，其中 a，c，d 是实数，b 是正实数。应用这些变换，我们还可画出余弦型函数、正切型函数等其它较复杂的三角函数图像。下表总结了参数a，b，c 及 d 对三角函数 $y=f(x)$ 图像变化的影响：

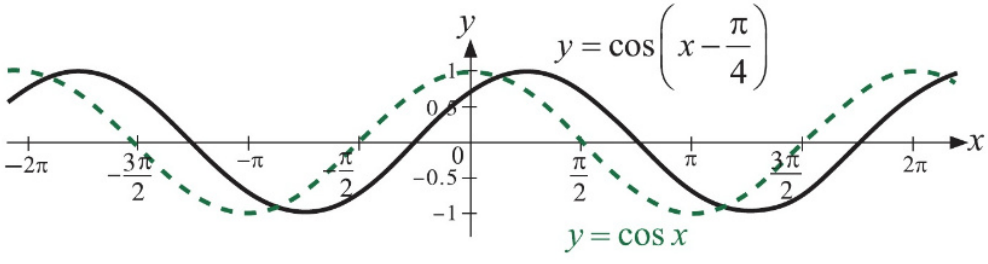
函数	参数	图像变化	变换
$y=af(x)$	$0<a<1$	$y=f(x)$ 图像上各点的纵坐标缩短到原来的 a 倍	上下伸缩
	$a>1$	$y=f(x)$ 图像上各点的纵坐标伸长到原来的 a 倍	
$y=f(bx)$，$b>0$	$0<b<1$	$y=f(x)$ 图像上各点的横坐标伸长到原来的 $\frac{1}{b}$ 倍	左右伸缩
	$b>1$	$y=f(x)$ 图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{b}$ 倍	
$y=f(x+c)$	$c<0$	$y=f(x)$ 图像上各点向右平移 $\lvert c\rvert$ 个单位长度	左右平移
	$c>0$	$y=f(x)$ 图像上各点向左平移 $\lvert c\rvert$ 个单位长度	
$y=f(x)+d$	$d<0$	$y=f(x)$ 图像上各点向下平移 $\lvert d\rvert$ 个单位长度	上下平移
	$d>0$	$y=f(x)$ 图像上各点向上平移 $\lvert d\rvert$ 个单位长度	

董總 DONG ZONG

例题 12

作 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像，并说明其与 $y=\cos x$ 的图像的关系。

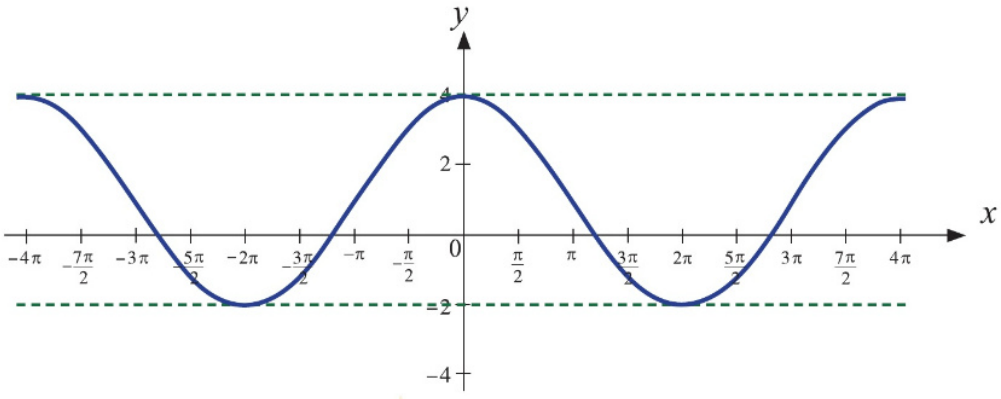
解



$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像是将 $y=\cos x$ 的图像沿着 x 轴方向向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 单位的长度所得。

例题 13

下图为 $y=a\cos(bx+c)+d$ 的图像的一段。求此函数。



解 波幅 $=\dfrac{4-(-2)}{2}=3$。因此，$a=3$。

图像的最小正周期是 4π。由 $\dfrac{2\pi}{b}=4\pi$，得 $b=\dfrac{1}{2}$。

与 $y=3\cos\dfrac{x}{2}$ 比较，并没有向左或向右平移，因此 $c=0$。

由点 $(0,4)$，令 $4=3\cos 0+d$，得 $d=1$。

因此，图像的函数是 $y=3\cos\dfrac{x}{2}+1$。

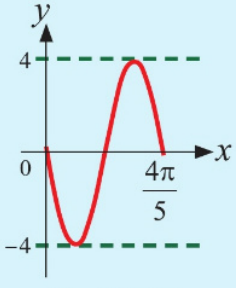
董總 DONG ZONG

随堂练习 9.3c

1. 求下列函数的波幅与周期，说明怎样变换 $y=\sin x$ 的图像以得下列各函数的图像，并作下列各函数的简图。

   (a) $y=6\sin x$　　(b) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

2. 右图所示是函数 $y=a\sin bx$，$b>0$ 的图像。求 a 与 b 的值。



第2题用图

习题 9.3

1. 作下列三角函数的简图：

(a) $y=|\sin x|\quad(-\pi\le x\le\pi)$　　(b) $y=-\tan x\quad(0\le x\le 2\pi)$

2. 求下列函数的最大值与最小值：

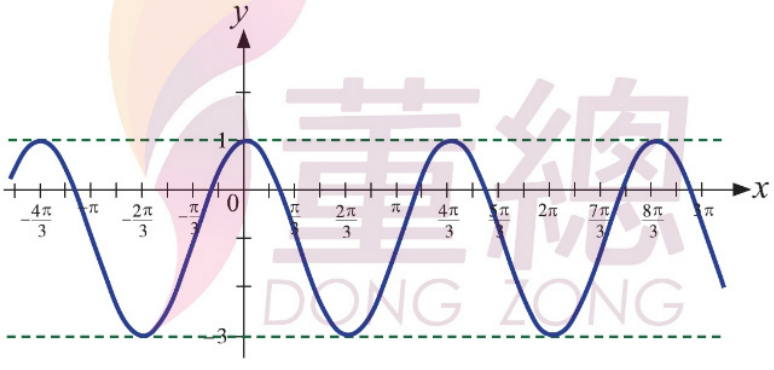
(a) $f(x)=2\cos x-3$　　(b) $f(x)=\dfrac{6}{3-\sin x}$

3. 在同一直角坐标系中依序作出下列各函数在区间 $-2\pi\le x\le 2\pi$ 的图像，并求其值域：

(a) $y=\sin 3x$　　(b) $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $y=4\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(d) $y=3+4\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

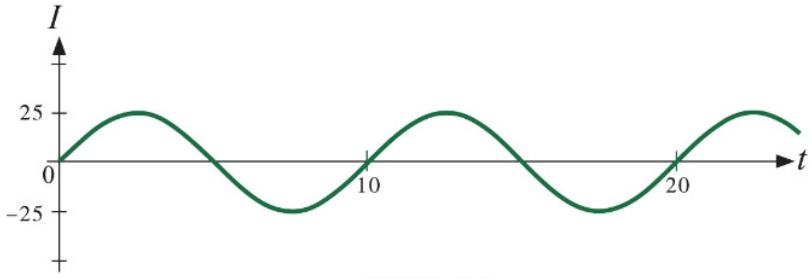
4. 下图所示是函数 $y=a\cos bx+c$，$b>0$ 的图像。求此函数。



第4题用图

5. 已知函数 $y=a\sin bx+c$，$a>0$，$b>0$ 的最大值是 4，最小值是 -2，且最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$，求 a，b，c 的值。

6. 下图是 $I=I_m \sin \omega t$ 的图像，显示正弦交流电电流强度，I（安培）随着时间，t（毫秒）的变化，其中 I_m 是最大电流强度，ω 是发电机内线圈转动的角速度。求 I_m 与 ω。



第6题用图

7. 利用电脑软件，在同一直角坐标系中依序作出下列各函数的图像。判断下列函数的周期，并说明怎样变换 $y=\tan x$ 的图像可得下列各函数的图像。

(a) $y=\tan\dfrac{x}{3}$

(b) $y=\tan\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(c) $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)$

(d) $y=\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)$

9.4 反三角函数

前面我们已经学过任意角的三角函数的定义与性质，知道三角函数有周期性，不是一对一函数。要如何在已知三角函数值下求得确定的角，我们需要引入反三角函数 (inverse trigonometric function) 的概念。

董總 DONG ZONG

反正弦函数

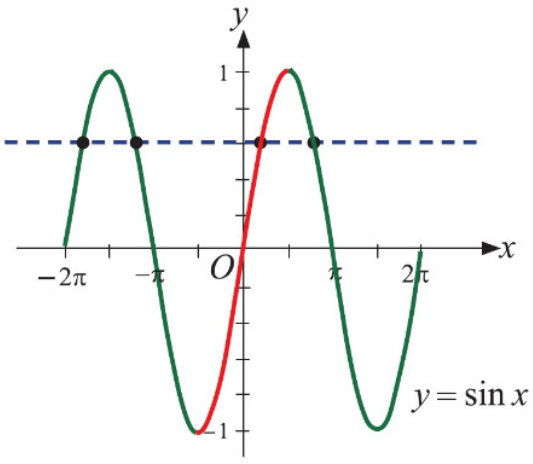


图 9–14

正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上并不是一对一函数。但是，我们可以观察到 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 是一一映成函数，因此它有反函数。（见图 9–14）

函数 $y=\sin x$， $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数叫做反正弦函数 (inverse sine function)。反正弦函数一般写成

$$y=\arcsin x \text{ 或 } y=\sin^{-1}x$$

定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

董總
DONG ZONG

注意

$\sin^{-1}x$ 不表示 $\frac{1}{\sin x}$。

从图 9–15 看到， $y=\sin x$， $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 与 $y=\sin^{-1}x$ 这两个函数的图像是关于直线 $y=x$ 对称的。同时，也可看到反正弦函数的图像是关于原点对称，即有 $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$， $x\in[-1,1]$。

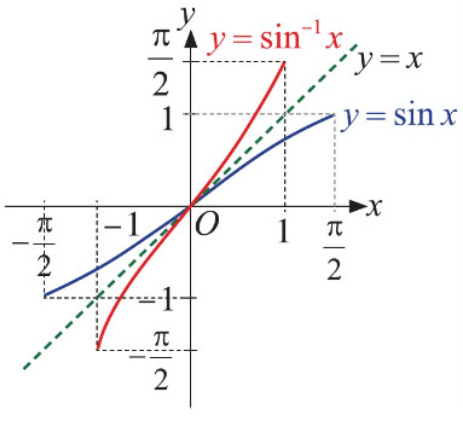


图9–15

例题 14

求下列反正弦函数值：

(a) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(b) $\sin^{-1}(-0.1)$

解 (a) $\because$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

(b) $\sin^{-1}(-0.1)=-5°44'$

随堂练习 9.4a

不使用计算机，完成下表：

x	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin^{-1}x$									

董總 DONG ZONG

反余弦函数

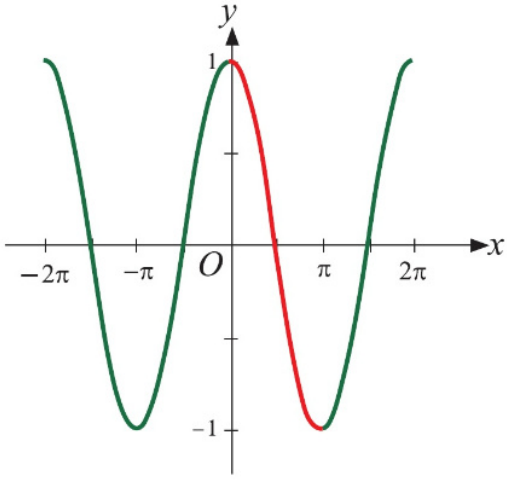


图 9–16

我们用同样的方法来研究反余弦函数 (inverse cosine function)。

如图 9–16 所示，函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 是一一映成函数，因此它有反函数。反余弦函数记作

$y=\arccos x$ 或 $y=\cos^{-1}x$

定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$。

反余弦函数 $y=\cos^{-1}x$ 的图像如图 9–17 所示。它与余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图像关于直线 $y=x$ 对称。

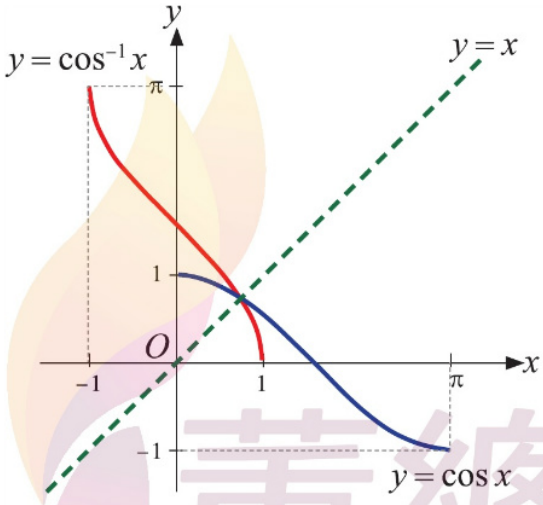


图 9–17

董總 DONG ZONG

例题 15

求下列反余弦函数值：

(a) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

解 (a) $\because$ 在 $[0,\pi]$ 上，$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\ \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$。

(b) $\because$ 在 $[0,\pi]$ 上，$\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\ \cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$。

随堂练习 9.4b

不使用计算机，完成下表：

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos^{-1}x$									

反正切函数

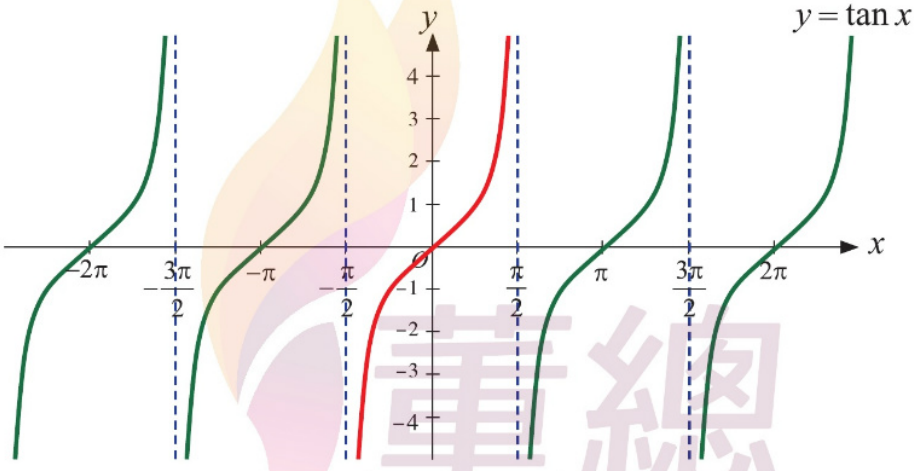


图 9–18

董總 DONG ZONG

正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是一一映成函数，它的反函数叫做反正切函数 (inverse tangent function)，记作

$y=\arctan x$ 或 $y=\tan^{-1}x$

定义域是 $(-\infty,\infty)$，值域是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。

如图 9–19 所示，反正切函数 $y=\tan^{-1}x$ 与正切函数 $y=\tan^{-1}x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。同时，反正切函数的图像是关于原点对称，即有 $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$，$x\in\boldsymbol{R}$。

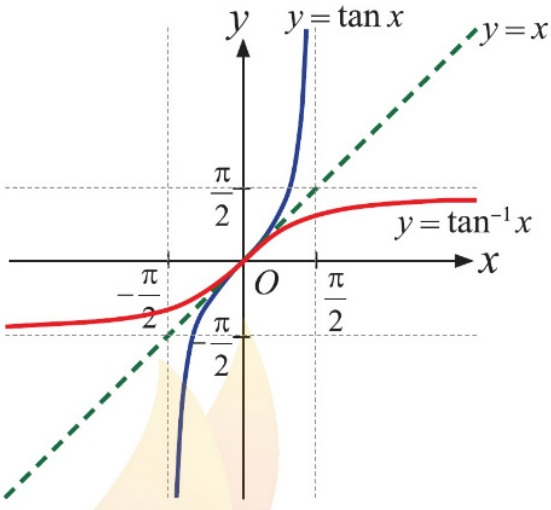


图 9–19

例题 16

求下列反正切函数值：

(a) $\tan^{-1}0$　　(b) $\tan^{-1}(-2)$

解 (a) $\tan^{-1}0=0$　　(b) $\tan^{-1}(-2)=-1.107$

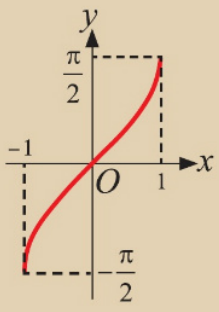
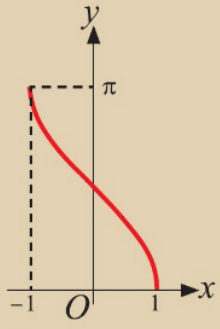
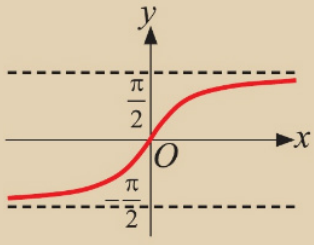
董總
DONG ZONG

随堂练习 9.4c

不使用计算机，完成下表：

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\tan^{-1}x$							

这三个反三角函数的性质可以整理如下：

函数	$y=\sin^{-1}x$	$y=\cos^{-1}x$	$y=\tan^{-1}x$
图像			
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\boldsymbol{R}$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

董總 DONG ZONG

例題 17

用反三角函数的形式表示 $\cos x=-\frac{4}{5}$，$\pi<x<2\pi$ 中的角 x。

解 $\because \cos\left(\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}$ 且 $\cos^{-1}\frac{4}{5}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore x=\pi+\cos^{-1}\frac{4}{5}$

习题 9.4

1. 已知一直角三角形 ABC 的角 A 的邻边 AB 为 5，斜边 AC 为 7，用反三角函数表示角 A。

2. 判断下列式子是否有意义？

(a) $\sin^{-1}\frac{\pi}{3}$　　(b) $\cos^{-1}\sqrt{2}$　　(c) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

3. 用反三角函数的形式表示下列各式中的角：

(a) $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(b) $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(c) $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 求下列各式的值：

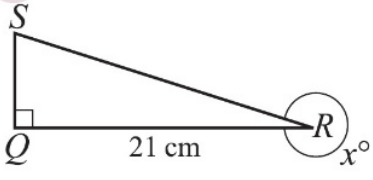
(a) $\sin^{-1}0.6959$　　(b) $\cos^{-1}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$　　(c) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

总复习题 9

1. 已知角 θ 的终边与单位圆的交点为 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，求角 θ 的正弦、余弦和正切的值。

2. 已知 $(-6,y)$ 是角 θ 的终边上一点，且 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，求 y 及 $\tan\theta$ 之值。

3. 如右图，已知 $\tan x^\circ=-\frac{2}{3}$，$QR=21\text{cm}$，求 SQ。



第3题用图

4. 若 $\cos\theta=\frac{1}{4}$，在不求出角 θ 的条件下，求 $\sin\theta$ 及 $\tan\theta$ 的值。

5. 已知 $4\tan\theta=-3$，$\cos\theta$ 为负值，在不求出角 θ 的条件下，求 $\frac{5\sin\theta+4\sec\theta}{3\cot\theta+10\cos\theta}$ 的值。

6. 已知 $\frac{13\cos x+1}{2-4\cos x}=3$，且 $\tan x<0$，在不求出角 x 的条件下，求 $\sin x$ 的值。

7. 设 $\cos 140^\circ=k$，以 k 表示 $\tan 40^\circ$ 及 $\sin 50^\circ$ 的值。

董總 DONG ZONG

8. 不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\sin 420^\circ \cos 750^\circ + \sin(-330^\circ)\cos(-660^\circ)$

(b) $5\sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ - 3\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ$

(c) $\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{3} - \cos\dfrac{4\pi}{3} - \tan\dfrac{5\pi}{3}}{\cos\dfrac{5\pi}{6} + \tan\dfrac{5\pi}{3} + \sin\dfrac{7\pi}{6}}$

(d) $\tan(23^\circ + \theta)\tan(67^\circ - \theta)$

(e) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\pi)\cos(\pi+\alpha)\cot(\alpha-2\pi)}{\tan(\pi+\alpha)\cos^3(-\alpha-\pi)}$

9. 已知 $f(\theta) = \dfrac{2\sin^3\theta + \cos^2\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2\sin(-\theta-\pi)}{2 + 2\sin^2\theta - \sin(-\theta)}$。不使用计算机，求 $f\left(\dfrac{2030\pi}{3}\right)$ 的值。

10. 已知A、B、C是一个三角形的三个内角，求证 $\tan\dfrac{A+C}{4} = -\tan\dfrac{3\pi+B}{4}$。

11. 若 $\dfrac{\operatorname{cosec}^2(2\pi-\theta)}{\sec^2(\pi+\theta)} = 3$，且 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$，不求出角 θ，求 $\sin\theta$ 的值。

12. 已知 $\dfrac{\pi}{10} < \theta < \dfrac{3\pi}{5}$ 且 $\cos\left(\theta + \dfrac{2\pi}{5}\right) = p$，以 p 表示 $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5} - \theta\right)$。

13. 在同一直角坐标系中依序作出下列各函数在区间 $0 \le x \le 4\pi$ 的图像，并求其值域：

(a) $y = \cos 2x$

(b) $y = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(c) $y = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(d) $y = \left|2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)\right|$

14. 作函数 $y = \cos^{-1}x - \dfrac{\pi}{2}$ 的图像，并求其定义域与值域。

15. 已知等腰三角形的底边等于高的 $\dfrac{9}{5}$，用反三角函数表示这个三角形的底角。

董總 DONG ZONG

16. 弹簧挂着的小球作上下振动，它在 t 秒内离开平衡位置的距离，s cm，是以 $s=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ 定义。

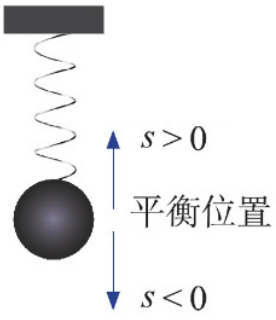
(a) 作出这函数在时间 $0\le t\le 4\pi$ 的简图。

(b) 求

(i) 小球的初始位置；

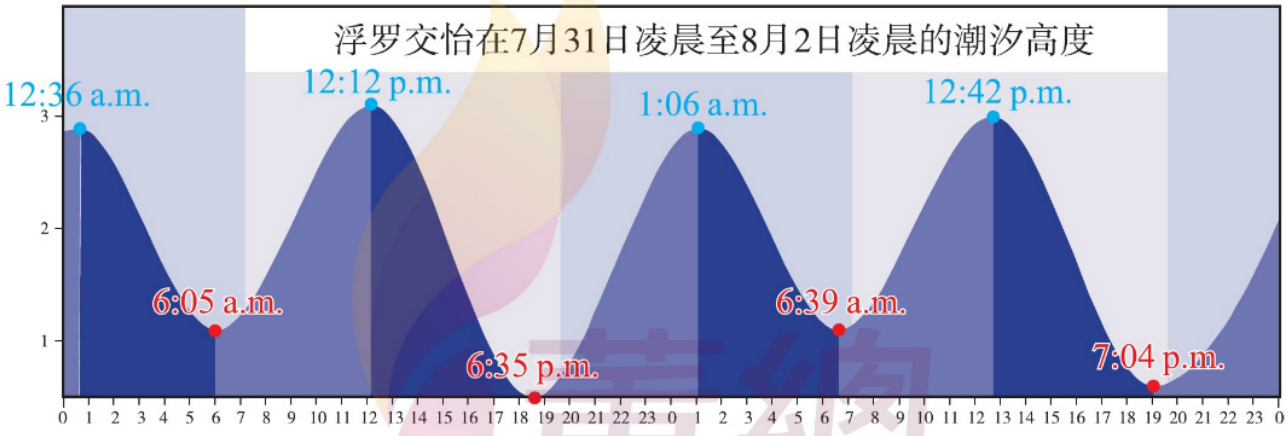
(ii) 小球的最高位置和最低位置；

(iii) 小球重复振动一次所需的时间。



第16题用图

17. 下图所示是浮罗交怡于某年 7 月 31 凌晨至 8 月 2 日 凌晨所测量到的潮汐高度 (y m)。



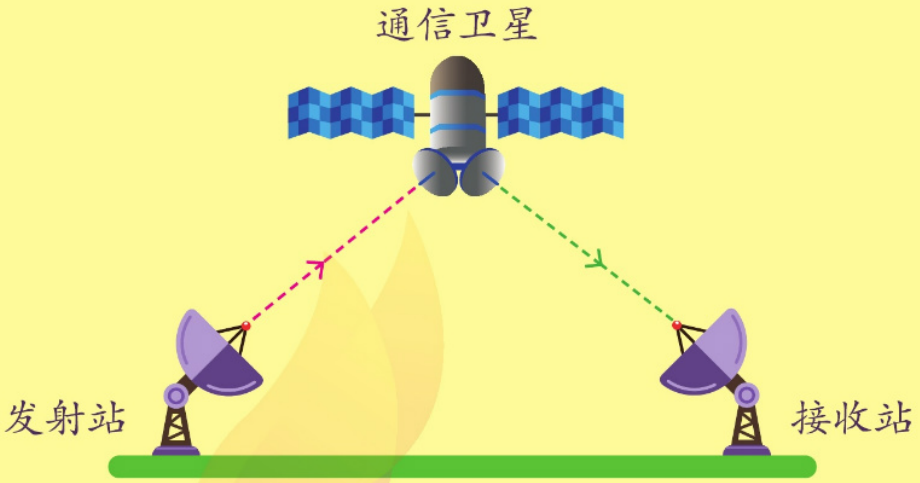
第17题用图

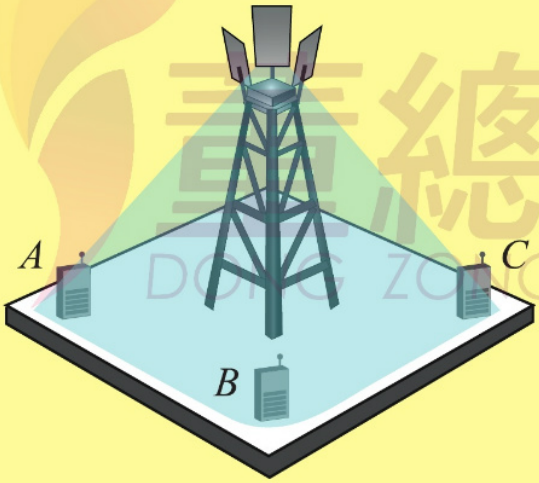
上述曲线可近似地看成余弦函数 $y=a\sin(bx+c)+d$，$a>0$，$b>0$ 的图像。

(a) 根据上图，求出 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的表达式。

(b) 若某校学生欲在 8 月 4 日退潮的时候到海滩进行学习活动，哪段时间最适合？写出你的原因。

中世纪时，阿拉伯世界的国王和统治者常雇用占星家根据星象为重大的政治决策占卜。统治者对占星术投入大量资金，间接促进了天文学的研究。而天文学的兴起也带动了三角学的发展，本章中的正弦定律便产自此时期。





如今地球轨道上散布的通信卫星建立了地面上发射站与接收站之间的信息通道。通信卫星可用于电视、电话、网络和军事领域。以上图为例，一无线网路基地台与 A、B、C 三个接收站等距，且 $AB=700$ m，$AC=800$ m，$BC=900$ m，你能算出基地台与接收站的距离吗？

10

三角学的应用

学习目标

- 掌握正弦定律与余弦定律
- 掌握三角形的面积公式
- 掌握三角形外接圆半径的求法
- 应用正弦定律与余弦定律解决生活中的测量问题

董總 DONG ZONG

10.1 正弦定律

根据已知的边与角，求出未知的边与角，称作解三角形。对于任意三角形（锐角、直角或钝角三角形）的解法，则可使用正弦定律或余弦定律，这两个定律阐述的是各边与各角之间的关系。

在 ΔABC 中，我们将三个内角 A 、B 、C 的对边的长分别以 a 、b 、c 表示。

首先我们考虑如图 10–1 中的锐角 ΔABC 。作垂线 CD 使 ΔABC 分成两个直角三角形：ΔACD 及 ΔBCD 。

在 ΔACD 中，$\sin A = \dfrac{CD}{b}$

$\therefore CD = b\sin A$ -----(1)

在 ΔBCD 中，$\sin B = \dfrac{CD}{a}$

$\therefore CD = a\sin B$ -----(2)

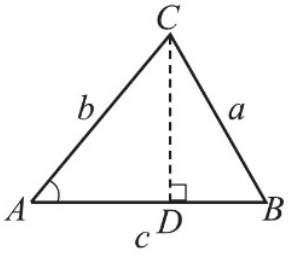


图 10–1

比较 (1) 及 (2) 可得 $b\sin A = a\sin B$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

同理可证得：$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$。

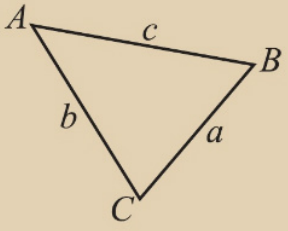
这些关系对于直角三角形及钝角三角形均成立。

董總
DONG ZONG

正弦定律 (sine rule)

在任意三角形中，各边与其对角的正弦值的比相等，即：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



利用正弦定律及三角形内角和定理，可以解以下两类任意三角形的问题：

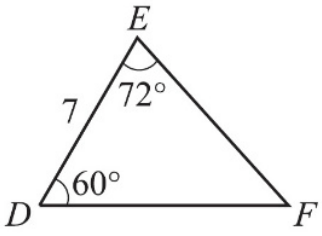
- 已知两角及任一边，求其它两边及一角；
- 已知两边及其中一边的对角，求另一边的对角，从而求出其它的边与角。

已知两角及任一边

一般地，已知两角及任一边解三角形，可以先用三角形内角和定理求出第三个角，再用正弦定律求出其余两边。

例题 1

在 ΔDEF 中，$D = 60°$，$E = 72°$，$DE = 7$ cm。求 DF、EF 的长。



解 $F = 180° - 60° - 72° = 48°$

由正弦定律，得 $\dfrac{DF}{\sin 72°} = \dfrac{7}{\sin 48°}$

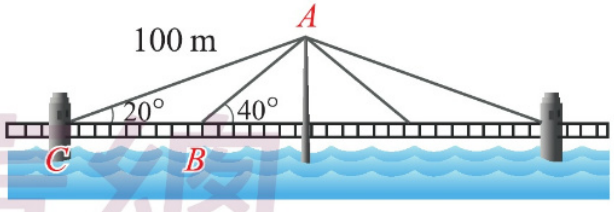
$$DF = \frac{7}{\sin 48°} \times \sin 72° = 8.96 \text{ cm}$$

由正弦定律，得 $\dfrac{EF}{\sin 60°} = \dfrac{7}{\sin 48°}$

$$EF = \frac{7}{\sin 48°} \times \sin 60° = 8.16 \text{ cm}$$

例题 2

如图，若有一桥的钢索 AC 长 100 m 且与桥面呈 20°，另一钢索 AB 与桥面呈 40°。求 AB 的长度。



解 在 ΔABC 中，$\angle CBA = 180° - 40° = 140°$

由正弦定律，得 $\dfrac{AB}{\sin 20°} = \dfrac{100}{\sin 140°}$

$$\therefore AB = \frac{100}{\sin 140°} \times \sin 20° = 53.21 \text{ m}$$

已知两边及其中一边的对角

一般地，已知两边及其中一边的对角解三角形，可以先用正弦定律求出一角，然后再分别用三角形内角和定理及正弦定律求出第三角及第三边。

董總 DONG ZONG

例题 3

在 ΔABC 中，$A = 30°$，$BC = 1\text{ cm}$，$AC = \sqrt{3}\text{ cm}$。求角 B 及 AB 的长。

解 由正弦定律，得 $\dfrac{1}{\sin 30°} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$

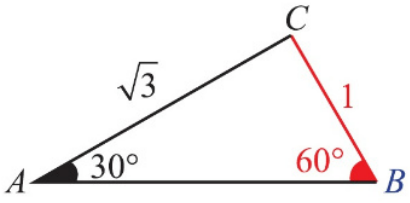
$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore B = 60° \text{或} 120°$$

当 $B = 60°$，$C = 180° - 30° - 60° = 90°$

$$\frac{1}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin 90°}$$

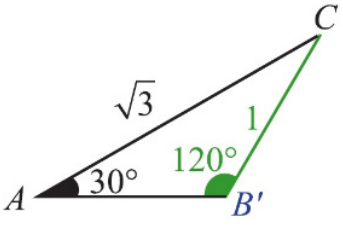
$$AB = 2\text{ cm}$$



当 $B = 120°$，$C = 180° - 30° - 120° = 30°$

$$\frac{1}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin 30°}$$

$$AB = 1\text{ cm}$$



从上述例题可知，若已知条件为三角形中的两边及其中一边的对角，使用正弦定律求角，会产生锐角与钝角两种可能，因此无法唯一确定三角形的形状。

如图 10–2，在直线 AP 上画定 $A = 30°$ 及 $AC = \sqrt{3}$ 后，我们以 C 为圆心，画半径为 1 的弧，此弧交直线 AP 于 B、B'。由此可看出 ΔABC 及 $\Delta AB'C$ 均为满足例题 3 的条件的三角形。

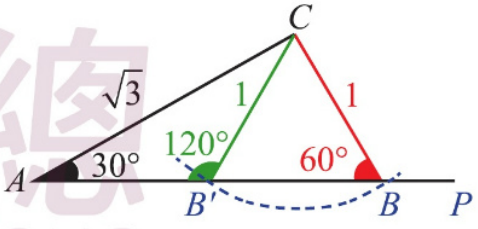


图 10–2

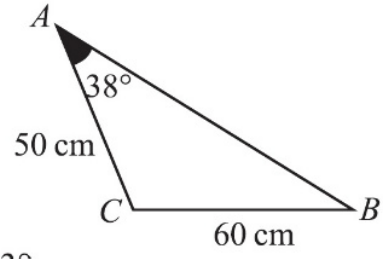
探索活动 1

正弦定律

https://www.geogebra.org/m/xb7wd8a7

例题 4

在 ΔABC 中，$a = 60\text{ cm}$，$b = 50\text{ cm}$，$A = 38°$。解 ΔABC。



解 由正弦定律，得 $\dfrac{60}{\sin 38°} = \dfrac{50}{\sin B}$

$$\sin B = \frac{50}{60}\sin 38°$$

$$\therefore B = 30.87° \text{ 或 } 149.13°$$

当 $B = 30.87°$，$C = 180° - 38° - 30.87° = 111.13°$

由正弦定律，得 $\dfrac{60}{\sin 38°} = \dfrac{c}{\sin 111.13°}$

$$c = \frac{60}{\sin 38°} \times \sin 111.13°$$

$$= 90.90\text{ cm}$$

当 $B = 149.13°$，$A + B = 38° + 149.13° = 187.13° > 180°$（不合）

所以，$B = 30.87°$，$C = 111.13°$，$c = 90.90\text{ cm}$。

例题 5

在 ΔABC 中，$a = 10\text{ cm}$，$b = 12\text{ cm}$，$A = 100°$。解 ΔABC。

解 我们可用“大边对大角”的关系推得：

$$\because b > a，\therefore B > A = 100°$$

因此，可产生矛盾：$A + B > 200°$。

由此可知满足题目条件的三角形不存在。

随堂练习 10.1a

根据下列条件解三角形 ABC：

1. $BC = 8\text{ cm}$，$A = 60°$，$AC = 6\text{ cm}$
2. $AB = 6\text{ km}$，$C = 50°$，$BC = 8\text{ km}$
3. $BC = 5\text{ m}$，$B = 100°$，$AC = 8\text{ m}$

三角形的外接圆半径

给定任一 ΔABC，取其外接圆 (circumscribed circle / circumcircle)，其中圆心为 O，则有以下三种情况：圆心 O 在 ΔABC 边上、圆心 O 在 ΔABC 之中、圆心 O 在 ΔABC 之外。我们可藉由三角形外接圆半径来推导正弦定律。

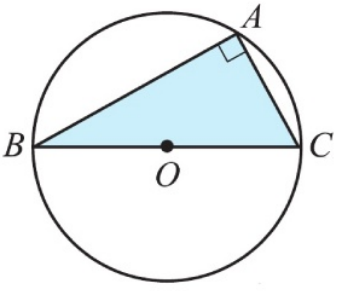
一、在图 10–3(a) 中，ΔABC 是一个直角三角形。

设外接圆的半径为 R，则有：

$$BC = 2R = a$$

$$\sin A = \sin 90° = 1$$

因此 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$。



(a) $A = 90°$

二、图 10–3(b) 中的 ΔABC 是锐角三角形。

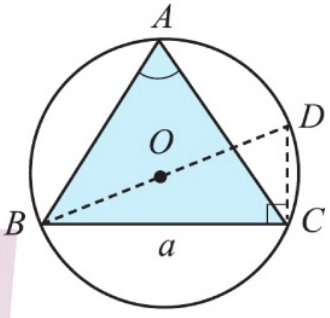
由点 B 作直径 BD，连接 CD，

则 ΔBCD 是一个直角三角形。

由 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角可得 $A = D$。

因此 $\sin D = \dfrac{a}{2R} = \sin A$

所以 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$。



(b) $A < 90°$

三、图 10–3(c) 中的 ΔABC 是钝角三角形。

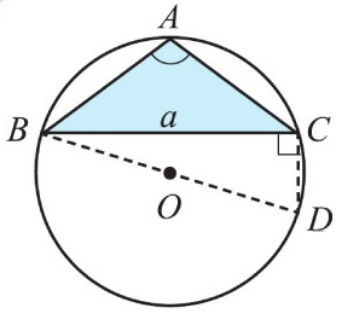
由点 B 作直径 BD，连接 CD，

则 ΔBCD 是一个直角三角形。

由圆内接四边形对角互补可得 $A + D = 180°$

因此 $\sin A = \sin(180° - D) = \sin D = \dfrac{a}{2R}$

所以 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$。



(c) $A > 90°$

图 10–3

董總 DONG ZONG

由以上三种情形得知 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ 都成立。因为 A 为 ΔABC 的任意角，所以对 B 、C 也有：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

根据比例的基本性质，上述式子也可写成

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

即三角形的三边长之比等于其对角的正弦值之比。

例题 6

在 ΔABC 中，$A:B:C=5:7:3$，且 ΔABC 的周长是 100 cm，求 ΔABC 的最长边的边长及其外接圆半径 R。

解 $A=\dfrac{5}{3+5+7}\times 180^\circ=60^\circ$

$B=\dfrac{7}{3+5+7}\times 180^\circ=84^\circ$

$C=\dfrac{3}{3+5+7}\times 180^\circ=36^\circ$

因为最大的角是 B，所以最长的边为其对边 b。根据比例的性质：

$\because a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$$\frac{b}{a+b+c}=\frac{\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

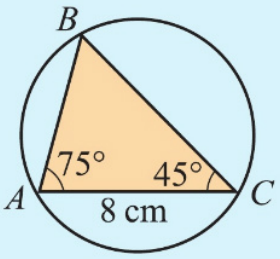
$$\therefore b=\frac{\sin 84^\circ}{\sin 60^\circ+\sin 84^\circ+\sin 36^\circ}\times 100=40.62\text{ cm}$$

由正弦定律，得 $2R=\dfrac{40.62}{\sin 84^\circ}=40.84$，所以 ΔABC 的外接圆半径 $R=20.42$ cm。

董總 DONG ZONG

随堂练习 10.1b

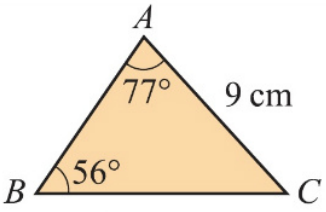
1. 在 ΔABC 中，$A:B:C=2:3:5$，且 ΔABC 的周长是 80 cm，求最短边的边长。
2. 求右图所示的圆的半径以及 AB、BC 的长度。



第2题用图

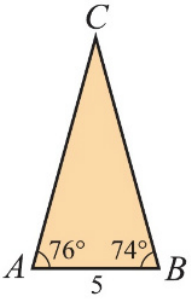
习题 10.1

1. 右图中，$\angle A=77°$，$\angle B=56°$，$AC=9\text{ cm}$。
   (a) 求 BC 及 AB 的长。
   (b) 求 ΔABC 的外接圆半径。



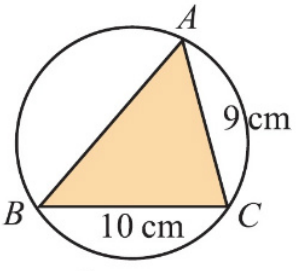
第1题用图

2. 如右图所示，地面上 A、B 两个观测站同时发现空中的飞机 C。在 A、B 分别测得 $\angle BAC=76°$，$\angle ABC=74°$。已知 A、B 相距 5 km，求点 B 与飞机的距离。



第2题用图

3. 右图中，ΔABC 的外接圆半径为 6 cm，$AC=9\text{ cm}$，$BC=10\text{ cm}$。求 AB 的长。



第3题用图

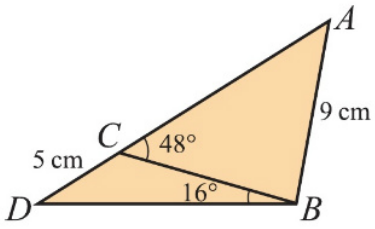
4. 根据下列条件描绘 ΔABC（若有），并解 ΔABC。
   (a) $AB=6\text{ m}$，$C=40°$，$BC=10\text{ m}$
   (b) $BC=9\text{ cm}$，$B=60°$，$AC=8\text{ cm}$
   (c) $BC=10\text{ km}$，$A=40°$，$AC=7\text{ km}$

5. 若 ΔPQR 的周长是 100 cm，$\angle P:\angle Q:\angle R=1:2:6$，求 PR 的长。

6. 在 ΔABC 中，$\angle A:\angle C=3:2$，$\angle B:\angle C=2:3$，最短边的长为 5 cm，求 ΔABC 的周长。

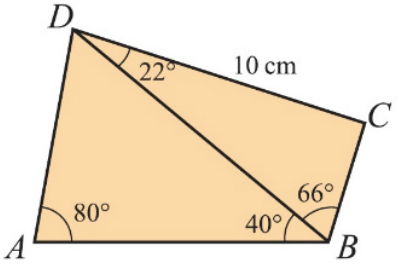
董總 DONG ZONG

7. 右图中，A 是锐角，ACD 是直线，$AB = 9$ cm，$CD = 5$ cm，$\angle ACB = 48°$，$\angle CBD = 16°$。求：
   (a) BC 的长。
   (b) A。
   (c) AD 的长。
   (d) 据上述条件，已知 A' 为直线 AC 上的一点，且 $A'B = AB$，绘出 $\Delta A'BC$。



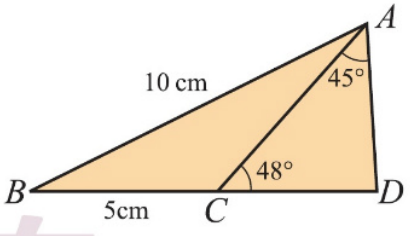
第7题用图

8. 右图中，求 BD 及 AB 的长。



第8题用图

9. 右图中，求 CD 的长。



第9题用图

10.2 余弦定律

如图 10–4，ΔABC 是锐角三角形，作垂线使 $CD \perp AB$。设 $CD = h$，$AD = x$。因此，$DB = c - x$。

在 ΔACD 中，$h^2 = b^2 - x^2$ ----- (1)

在 ΔBCD 中，$h^2 = a^2 - (c - x)^2$ ----- (2)

比较 (1) 及 (2)，得

$$a^2 - (c - x)^2 = b^2 - x^2$$
$$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

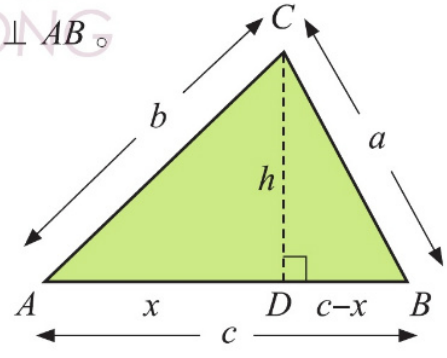


图10–4

在 ΔACD 中，$\cos A = \dfrac{x}{b}$，因此 $x = b\cos A$，代入上式，得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos A$$

同理可证得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ 及 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$。

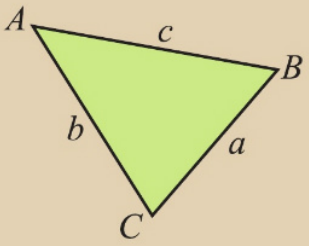
这些关系对于任意三角形均成立。

董總 DONG ZONG

余弦定律 (cosine rule)

已知一个三角形的任何两边与它们的夹角，即可求出第三边。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



另外，余弦定律的式子可写成下列形式：

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

由此可知，已知三角形的三边，可通过余弦定律求得三角形的各内角。

想一想 1

当 $\angle A = 90°$，余弦定律会是哪一个定理？

利用余弦定律可以解以下两类任意三角形的问题：

- 已知三边，求三个角；
- 已知两边及它们的夹角，求第三边及其它两个角。

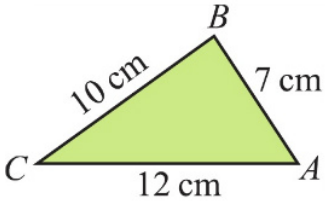
已知三边

一般地，已知三边解三角形，可以用余弦定律求出各角。

董總 DONG ZONG

例题 7

已知在 ΔABC 中，$AB = 7$ cm，$BC = 10$ cm，$AC = 12$ cm，求此三角形的三个内角。



解 由余弦定律，得 $\cos A = \dfrac{12^2 + 7^2 - 10^2}{2 \times 12 \times 7} = \dfrac{31}{56}$

$\therefore A = 56.39°$

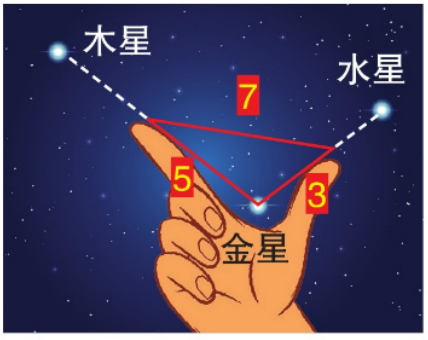
由余弦定律，得 $\cos B = \dfrac{10^2 + 7^2 - 12^2}{2 \times 10 \times 7} = \dfrac{1}{28}$

$\therefore B = 87.95°$

$\therefore$ 在 ΔABC 中，$C = 180° - 56.39° - 87.95° = 35.66°$

例题 8

小玲发现天空中的木星、金星、水星与右手比出的“V”刚好重叠。已知小玲的大拇指长约 3 cm，食指长约 5 cm，两指指尖相距约 7 cm，则当下木星、金星、水星所夹的角度约为几度？



解 设小玲的拇指与食指夹角为 θ。

由余弦定律，得 $\cos\theta = \dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5} = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta = 120°$

因为小玲右手比出的“V”与木星、金星、水星重叠，所以可得当下木星、金星、水星所夹的角度约为120°。

已知两边及其夹角

一般地，已知两边及它们的夹角解三角形，可以先用余弦定律求出第三边，然后再求出其它两个角。

董總 DONG ZONG

例题 9

已知 ΔABC 中，$AB = 7$ cm，$BC = 5$ cm，$\angle B = 75°$，解 ΔABC。

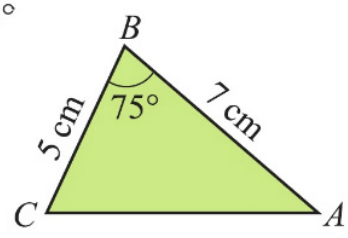
解 由余弦定律，得 $AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2\times5\times7\times\cos75°$

$\therefore AC = 7.48$ cm

由余弦定律，得 $\cos C = \dfrac{5^2 + AC^2 - 7^2}{2\times5\times AC} = 0.4265$

$\therefore C = 64.75°$

$\therefore$ 在 ΔABC 中，$A = 180° - 64.75° - 75° = 40.25°$

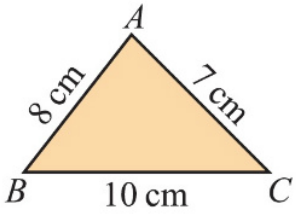


随堂练习 10.2

1. ΔABC 中，若 $AC = 4$ cm，$BC = 2\sqrt{7}$ cm，$A = 60°$，求 AB 的长度。
2. ΔDEF 中，若 $DE : EF : FD = 6 : 8 : 5$，求 ΔDEF 最大的内角。
3. ΔABC 中，若 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$，求 C。

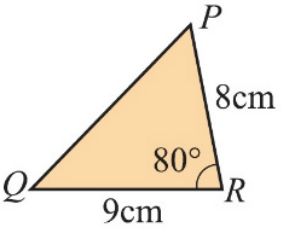
习题 10.2

1. 右图中，ΔABC 三边的长度分别为 7 cm，8 cm 及 10 cm，求 $\angle ACB$。



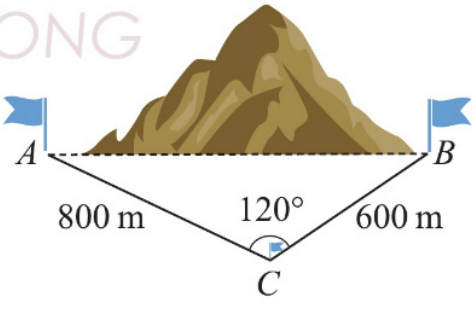
第1题用图

2. ΔPQR 中，$PR = 8$ cm，$QR = 9$ cm，$R = 80°$，求
   (a) PQ 的长度；
   (b) $\angle QPR$。



第2题用图

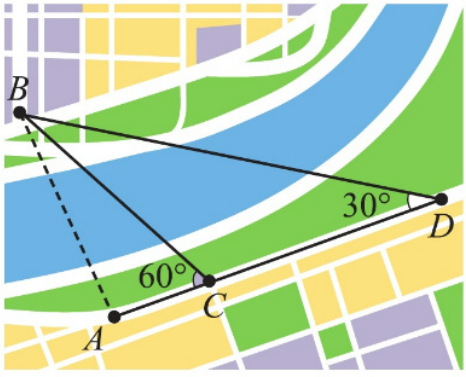
3. 如右图所示，一山丘位于 A、B 两点连线上，从山丘外的点 C，测量得知 $AC = 800$ m，$BC = 600$ m，$\angle ACB = 120°$。求 AB 的距离。



第3题用图

董總 DONG ZONG

4. 如右图所示，A、B 分别位于河的两岸，而 A、C、D 则为一笔直公路上的三点。点 A 与点 C 的距离为 50 公尺，点 A 与点 D 的距离为 200 公尺。小明在点 C 测得 $\angle ACB = 60°$ 及点 D 测得 $\angle ADB = 30°$。求 A、B 的直线距离。



第4题用图

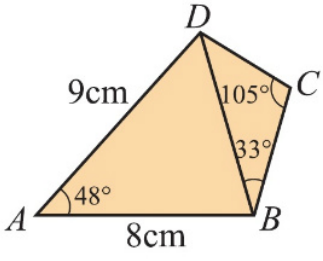
5. 已知一无线网路基地台与 A、B、C 三个接收站等距，且 $AB = 700$ m，$AC = 800$ m，$BC = 900$ m，求基地台与接收站的距离。

6. 若一个三角形三边的长分别为 m，n 及 $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$，求其最大的内角。

7. 已知 ΔABC 为钝角三角形，且三边长度为 6，8，x，求 x 的取值范围。

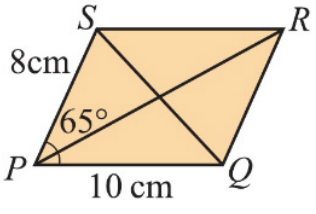
8. ΔABC 中，若 $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$。求 $\cos A : \cos B : \cos C$。

9. 四边形 $ABCD$ 中，$\angle DCB = 105°$，$\angle DAB = 48°$，且 $AB = 8$ cm，$AB = 8$ cm。已知 BD 为对角线，$\angle CBD = 33°$。求 CD 的长度。



第9题用图

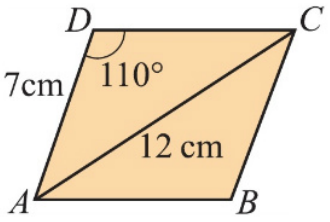
10. 右图中，$PQRS$ 是平行四边形。
若 $PQ = 10$ cm，$PS = 8$ cm，$\angle SPQ = 65°$，求
(a) 两条对角线的长；
(b) 两条对角线所夹的锐角。



第10题用图

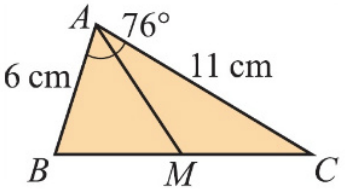
董總 DONG ZONG

11. 右图中的 $ABCD$ 是平行四边形，求 AB 及另一条对角线 BD 的长。



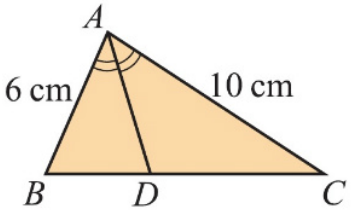
第11题用图

12. 右图中，AM 是 BC 边上的中线。
若 $AB = 6$ cm， $AC = 11$ cm， $\angle BAC = 76°$，求
(a) BC 的长度；　　(b) $\angle B$；
(c) AM 的长度；　　(d) $\angle BAM$。



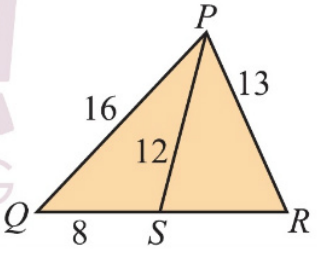
第12题用图

13. 右图中，$\angle BAC = 80°$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线。
若 $AB = 6$ cm， $AC = 10$ cm，求 AD 及 BD 的长。



第13题用图

14. ΔPQR 中， $PQ = 16$， $PR = 13$， $QS = 8$。
若 S 为线段 QR 上一点且 $PS = 12$，求 $\angle PRS$。



第14题用图

董總 DONG ZONG

10.3 三角形的面积

本节我们将推导两个三角形面积的公式。

已知三角形的两边及其夹角，求面积。

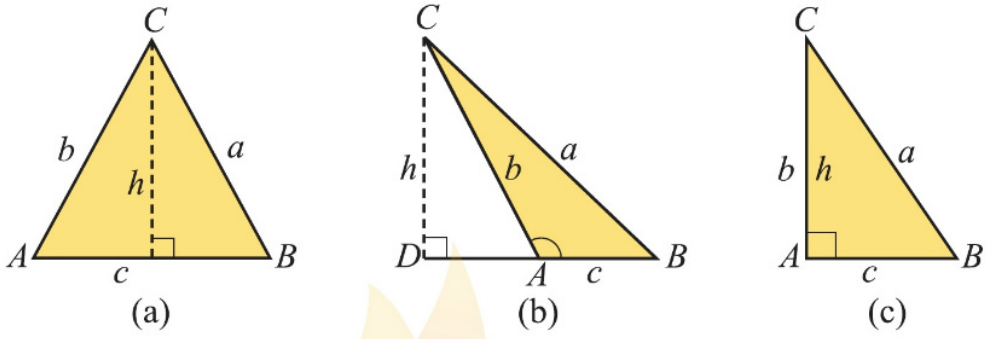


图 10–5

如图10–5所示，考虑锐角、钝角及直角三角形。在ΔABC中作AB边上的高 h。

若 $\angle A$ 是锐角，则有 $h = b\sin A$。

若 $\angle A$ 是钝角，则有 $h = b\sin(180° - A) = b\sin A$。

若$\angle A$是直角，因为 $\sin A = \sin 90° = 1$，则有 $h = b = b\sin A$。

这表示无论 ΔABC 为何种三角形，我们都有关系式 $h = b\sin A$，所以

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积 } \Delta = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc\sin A$$

同理可证，

$$\Delta = \frac{1}{2}ca\sin B\text{，}\quad \Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$$

本章中，三角形面积将以Δ表示。

由此可知：已知三角形的两边及其夹角，ΔABC 的面积的公式为

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$

我们可根据三角形面积公式得到正弦定律的另一证明方式。

由三角形面积公式：

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

董總 DONG ZONG

将上式同除以$\frac{1}{2}abc$，得

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

此即为正弦定律。

例题 10

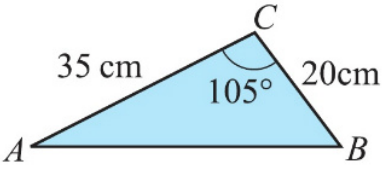
求下列ΔABC的面积：

(a) $a = 20$ cm，$b = 35$ cm，$C = 105°$

(b) $A = 36°$，$c = 20$ cm，$C = 85°$

解 (a) 应用公式$\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$，得

$$\Delta=\frac{1}{2}\times 20\times 35\times\sin 105°=338.07\text{ cm}^2$$



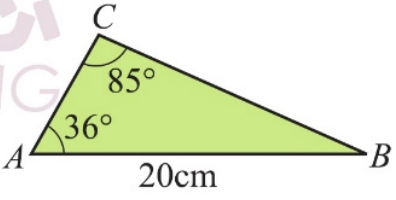
(b) $B = 180° - 36° - 85° = 59°$

由正弦定律，得$\frac{a}{\sin 36°}=\frac{20}{\sin 85°}$

$$\therefore a=\frac{20}{\sin 85°}\times\sin 36°=11.80$$

应用公式$\Delta=\frac{1}{2}ac\sin B$，得

$$\Delta=\frac{1}{2}\times 20\times 11.80\times\sin 59°=101.15\text{ cm}^2$$



董總 DONG ZONG

例题 11

在 ΔABC 中，已知 $AB = 3\,\text{cm}$， $AC = 6\,\text{cm}$，求 ΔABC 面积的最大值。

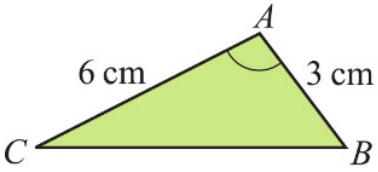
解 应用公式 $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$，得

$$\Delta = \frac{1}{2}\times 6\times 3\times \sin A = 9\sin A$$

$$\because -1 \le \sin A \le 1$$

$$\therefore \Delta = 9\sin A \le 9$$

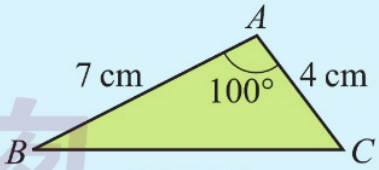
因此，ΔABC 面积的最大值为 $9\,\text{cm}^2$。



想一想 2 由例题 11，当 ΔABC 面积最大时，ΔABC 为哪一类三角形？

随堂练习 10.3a

1. 求右图中 ΔABC 的面积。
2. 已知在 ΔPQR 中，$QR = 10\text{ cm}$，$\angle Q = 60°$，若 ΔPQR 的面积为 $10\sqrt{3}\text{ cm}^2$，求
   (a) PR 的长；　　(b) $\angle P$。



第1题用图

董總 DONG ZONG

已知三角形的三边，求面积

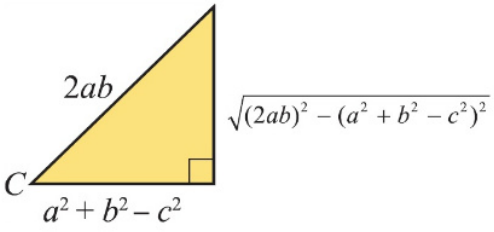
考虑任意 ΔABC，由余弦定律可得 $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$，所以

$$\sin C = \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}}{2ab}$$

令 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，上述式子可表示成：

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



我们可将 $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$ 改写成：

$$\Delta=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

由此可知：已知三角形的三边，其面积的公式为

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{，其中 }s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

上述公式称作海龙公式 (Heron's formula)。

例题 12

已知 ΔABC 的三边分别为 41 cm、425 cm、416 cm，求此三角形面积。

解 由 $s=\frac{1}{2}(41+416+425)=441$，

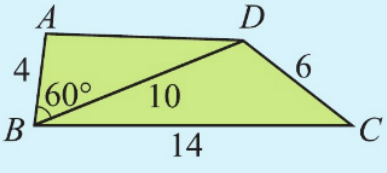
代入海龙公式 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，得

$$\Delta=\sqrt{441(441-41)(441-416)(441-425)}$$

$$=8400\text{ cm}^2$$

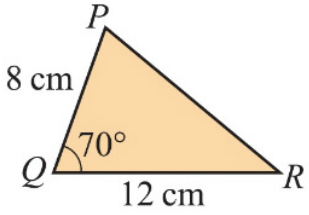
随堂练习 10.3b

如右图所示，四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=14$，$CD=6$，$BD=10$，$\angle ABD=60°$，求 $ABCD$ 的面积。



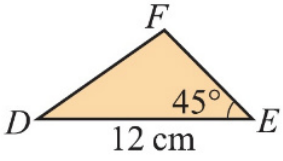
习题 10.3

1. 求右图中 ΔPQR 的面积。



第1题用图

2. 若右图中三角形的面积为 $21\sqrt{2}\ \text{cm}^2$，
且 $DE = 12\ \text{cm}$，$\angle FED = 45°$。求 EF 的长度。



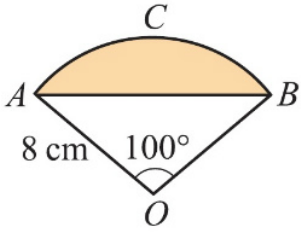
第2题用图

3. 如右图所示，一雨伞的伞面由十块等腰三角形的防水布缝制而成，其中三角形的边长为 50 cm、50 cm、20 cm。求制作一把雨伞所需的防水布面积。

第3题用图

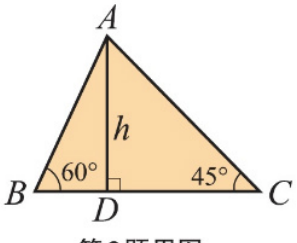
4. ΔABC 中，$A = 45°$，$AB = 3\ \text{cm}$，$BC = \sqrt{6}\ \text{cm}$，求 ΔABC 的面积。

5. 右图中，$OACB$ 是扇形。求着色部分的面积。



第5题用图

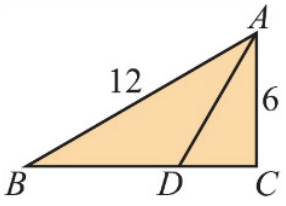
6. 右图中，AD 是 BC 边上的高，$AD = h$。
以 h 表示 AB、CA、BC 及 ΔABC 的面积。
据此，证明 $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$。



第6题用图

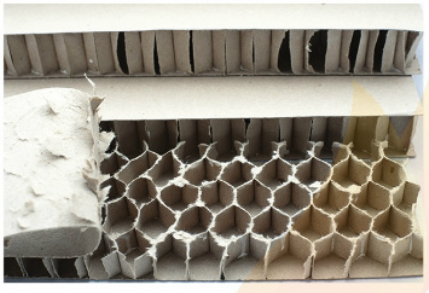
董總 DONG ZONG

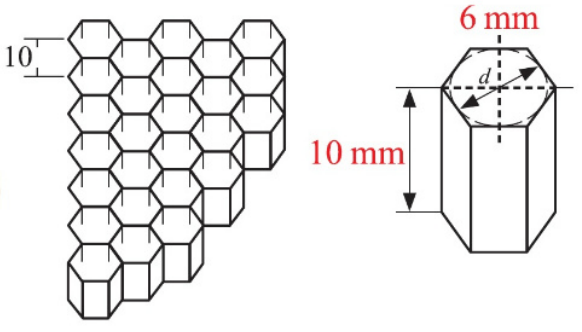
7. ΔABC 中，已知 $AB=12$，$AC=6$，$\angle BAC=60°$。
若 $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于点 D，求 AD 的长度。



第7题用图

8. 蜂窝纸板是根据自然界蜂巢结构制作而得。蜂窝纸板中的纸芯由瓦楞纸形成，此空心柱体的底面为正六边形，这结构使纸板具有优良的缓冲性能。已知一纸芯的底面边长为 6 mm，高度为 10 mm，求此柱体体积。





第8题用图

9. 右图所示为居銮中华中学的操场及宿舍，已知区域 $ABCD$ 为一梯形，其中 $BC /\!/ AD$，四边长度分别为 207 m，158 m，162 m，165 m，求 $ABCD$ 的面积。

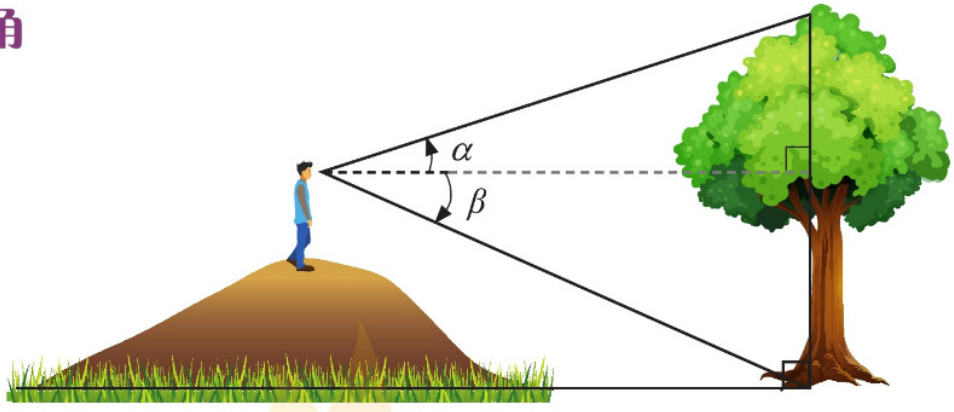
第9题用图

10. 在 ΔABC 中，若 $a:b:c=4\sqrt{2}:5:7$，外接圆半径为 $10\sqrt{2}$ cm，求 ΔABC 的面积。

10.4 测量问题

在这一节，我们应用正弦定律及余弦定律来解一些较为复杂的应用问题。

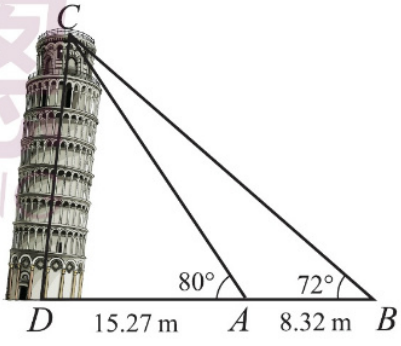
仰角、俯角



在实际的测量问题中，我们经常可看到仰角、俯角这些名词。例如从小丘上望向一棵大树，望向树顶及树底的视线与水平线都成一个角。我们称 α 为仰角 (angle of elevation)，β 为俯角 (angle of depression)。

例题 13

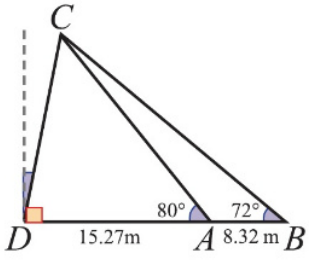
如右图所示，从平地上两点 A 及 B 测得意大利比萨斜塔塔顶 C 的仰角分别是 80° 及 72°。已知点 A 与塔底中心点 D 相距 15.27 m，AB 相距 8.32 m。求斜塔高度 CD 及倾斜度。



解 在 ΔABC 中，$\angle ACB = 80° - 72° = 8°$

由正弦定律，得 $\dfrac{AC}{\sin 72°} = \dfrac{8.32}{\sin 8°}$

$\therefore AC = \dfrac{8.32 \sin 72°}{\sin 8°} = 56.8557$



在 ΔACD 中，由余弦定律，得

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \times AD \times AC \times \cos 80°$$
$$= 15.27^2 + 56.8557^2 - 2 \times 15.27 \times 56.8557 \times \cos 80°$$

$\therefore CD = 56.2514$ m

由正弦定律，得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin 80^\circ}$

$$\sin\angle ADC=\frac{AC\sin 80^\circ}{CD}$$

$$=\frac{56.8557\sin 80^\circ}{56.2514}$$

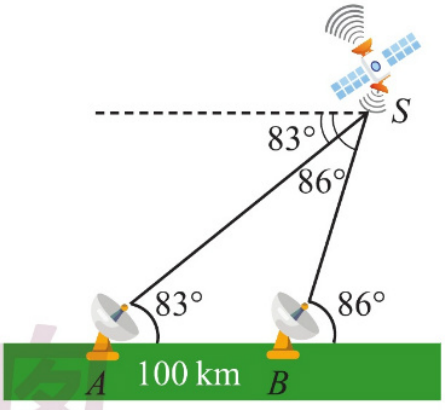
$\because \angle ADC$ 为锐角，$\therefore \angle ADC=84.49^\circ$

因此，比萨斜塔的倾斜度 $=90^\circ-84.49^\circ=5.51^\circ$

$\therefore$ 比萨斜塔的高度 CD 为 56.25 m，倾斜度为 5.51°。

例题 14

某通讯卫星 S 在绕地球旋转的轨道上会经过两个地平面上的接收站 A、B。若此二地面接收站相距 100 km 且同一时刻从卫星 S 测得 A、B 的俯角分别为 83° 与 86°。若电磁波速率为 3×10^8 m/s，自卫星 S 发射电磁波讯号至接收站 B 需多少毫秒？

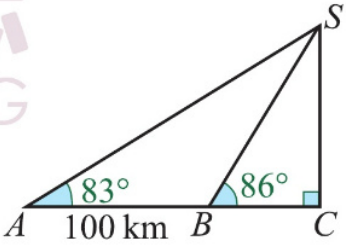


解 设卫星 S 至地表的垂足为 C。

ΔABS 中，$\angle ASB=86^\circ-83^\circ=3^\circ$

由正弦定律，得 $\dfrac{BS}{\sin 83^\circ}=\dfrac{100}{\sin 3^\circ}$

$$BS=\frac{100}{\sin 3^\circ}\times\sin 83^\circ=1896.49$$



$\because$ 地面通讯站 B 与卫星 S 的距离为 1896.49 km。

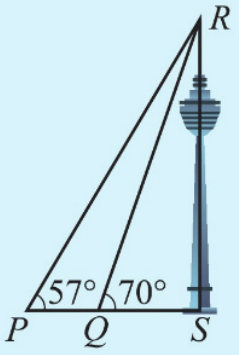
$\therefore$ 自卫星 S 发射电磁波讯号至接收站 B 需时

$$\frac{1896.49\times1000\text{ m}}{3\times10^8\text{ m/s}}=6.32\times10^{-3}\text{s}=6.32\text{ 毫秒。}$$

董總 DONG ZONG

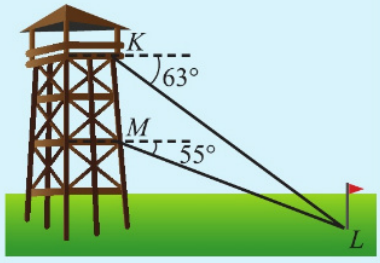
随堂练习 10.4a

1. 如右图所示，从平地上两点 P 及 Q 测得吉隆坡塔塔顶 R 的仰角分别为 57° 及 70°。已知 P 、Q 的距离为 120 m，求吉隆坡塔的高度。



第 1 题用图

2. 如右图所示，从一观景塔的顶层 K 测得地面上一点 L 的俯角是 63° 。若从 K 往下 25 m 到 M 处，则测得 L 的俯角为 55° 。求观景塔与点 L 的距离。



第 2 题用图

探索活动 2

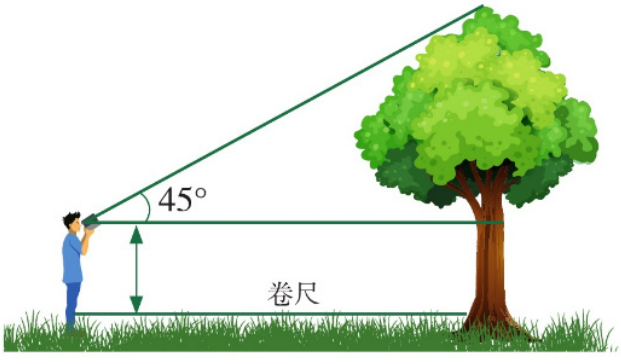
目的：实际测算电灯柱的高度，了解三角学在生活中的应用。

工具：扫描二维码观看影片，学习制作与操作测斜仪。
https://youtu.be/FVqNEBWH4B0

控制变量：电灯柱的高度 H、测量者身高 h。

操作变量：测量者与电灯柱的水平距离 x、测量者观测电灯柱顶部的仰角 θ。

操作说明：绘简图并列出计算电灯柱高度 H 的过程。



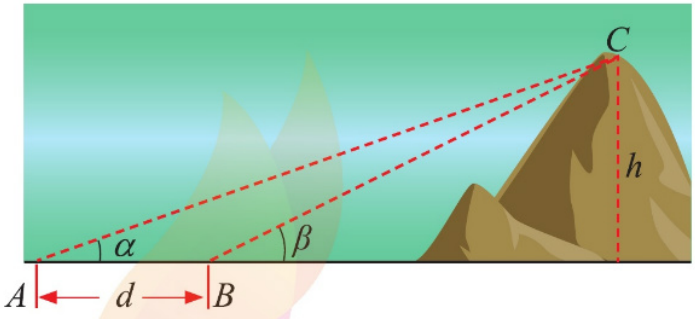
董總 DONG ZONG

讨论结果：

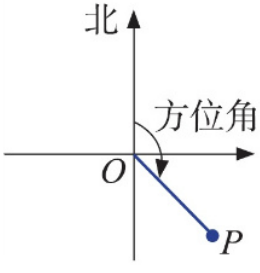
1. 在观测时发生了哪些困难？如何解决？有哪些无法解决的部分？
2. 计算过程是否基于特定假设？若有，试注明。
3. 是否存在影响计算结果的因素？

延伸讨论：

假设所观测物体为一座山，若要求得山的高度，实际中往往难以测量山顶至地面的垂直距离。根据下图，你是否可以利用两次测量山顶所得的仰角 α 、β 与两个观测点之间的距离 d，表示出山的高度 h？



方位角



在测量工作中，方位角常用来度量目标相对于测量点的方向。采用方位角时，所有方向都是从正北方向依顺时针方向旋转至目标 P，称作 P 对 O 的方位角 (bearing)。方位角度数须写成三位数形式，取值范围介于 000° 至 360° 之间。

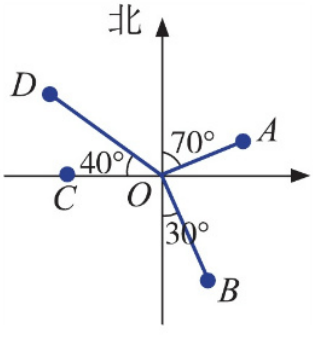
例如，在右图中，

由 O 测得 A 的方位角是 070°，

由 O 测得 B 的方位角是 150°，

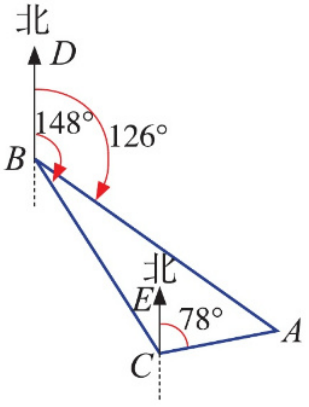
由 O 测得 C 的方位角是 270°，

由 O 测得 D 的方位角是 310°。



例题 15

一艘货轮在海上以每小时 35 海里的速度沿着方位角为 148° 的方向航行。此货轮在点 B 观测灯塔 A 的方位角是 126°。航行半小时后到达点 C 再观测灯塔 A，测得方位角 078°。求货轮到达点 C 时与灯塔 A 的距离。



解 ΔABC 中，$BC = \frac{1}{2} \times 35 = 17.5$

$\angle ABC = 148° - 126° = 22°$

$\because DB // EC$，由同旁内角互补，得 $\angle ECB + 148° = 180°$

$\therefore \angle ECB = 32°$

因此，$\angle ACB = 32° + 78° = 110°$

$\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB = 180° - 22° - 110° = 48°$

由正弦定律，得 $\frac{AC}{\sin 22°} = \frac{17.5}{\sin 48°}$

$AC = 17.5 \times \frac{\sin 22°}{\sin 48°} = 8.82$ 海里

货轮到达点 C 时与灯塔 A 的距离为 8.82 海里。

补充资料

海里是用于航海或航空的长度单位。

1 海里≈1.852公里

董總 DONG ZONG

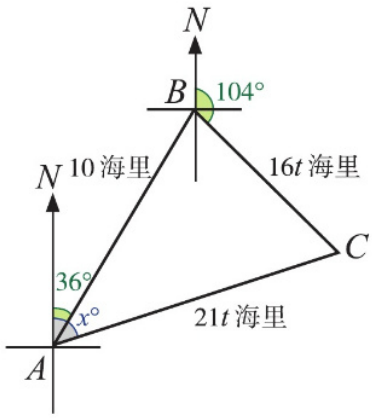
例题 16

一驱逐舰接获情报，得知在 036° 的方向上距离 10 海里处有一敌方船只。敌方船只以每小时 16 海里的速度沿着方位角为 104° 的方向航行。已知驱逐舰的速度为每小时 21 海里，若驱逐舰沿着方位角 $x°$ 的方向航行 t 小时才能拦截敌方船只，求 x 与 t 的值。

解 设驱逐舰的初始位置在点 A，敌方船只的初始位置在点 B，二者在点 C 相遇。

其中 $AB = 10$ 海里，$BC = 16t$ 海里，$AC = 21t$ 海里。

可绘关系图如右。



ΔABC 中，$\angle ABC = 36° + (180° - 104°) = 112°$

由余弦定律，得

$$\cos 112° = \frac{10^2 + (16t)^2 - (21t)^2}{2 \times 10 \times 16t}$$

$$\cos 112° = \frac{100 - 185t^2}{320t}$$

整理得，

$$185t^2 + (320\cos 112°)t - 100 = 0$$

$$t = \frac{-320\cos 112° \pm \sqrt{(320\cos 112°)^2 - 4 \times 185 \times (-100)}}{2 \times 185}$$

$t = 1.13$ 或 $t = -0.48$（不合）

另由余弦定律，得

$$\cos \angle BAC = \frac{10^2 + (21t)^2 - (16t)^2}{2 \times 10 \times 21t} = \frac{100 + 185t^2}{420t}$$

代入上述 t 值，可求得 $\angle BAC = 44.9°$

$x° = 036° + 044.9° = 080.9°$

所以，x 的值为 080.9，t 的值为 1.13。

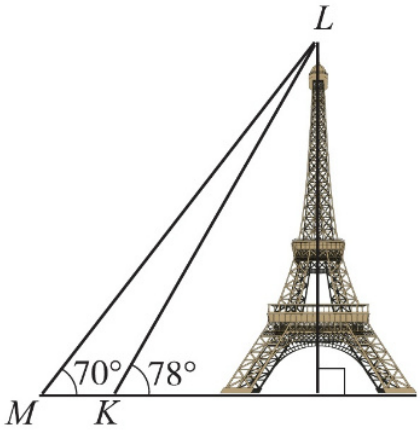
董總
DONG ZONG

随堂练习 10.4b

有两座码头 A 及 B。甲船由码头 A 以每小时 40 海里的速度往方位角为 070° 的方向航行。乙船以每小时 50 海里的速度由码头 B 往方位角为 220° 的方向航行。若两船在 45 分钟后同时到达 C 处，求两座码头的距离。

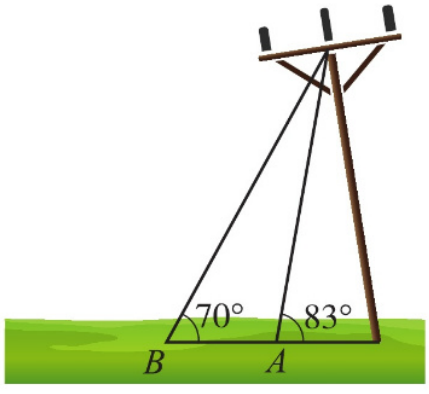
习题 10.4

1. 小花在地面点 M 处观测巴黎铁塔塔顶 L 的仰角为 70°。她向前走了 48.5 m 到达点 K 再观测塔顶，测得仰角是 78°。求巴黎铁塔的高度。



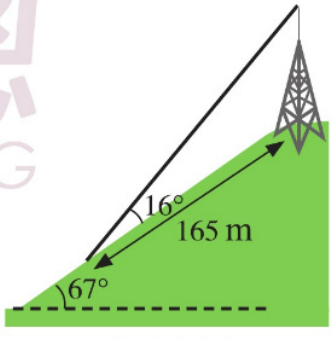
第1题用图

2. 右图所示是一根倾斜的电线杆。小明站在距离电线杆 2 m 的点 A 处测得杆顶的仰角是83°。他后退 3 m 到点 B 处，再测得杆顶的仰角是70°。求电线杆的长度及倾斜度。



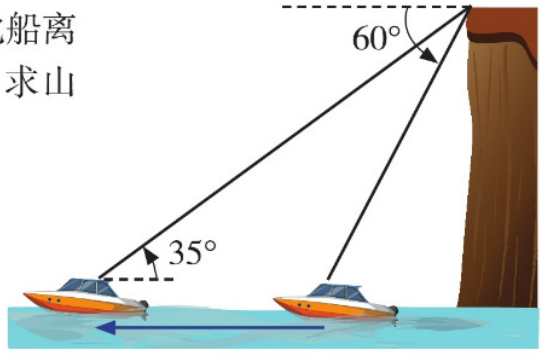
第2题用图

3. 如右图所示，一通讯塔矗立在坡度为 67° 的斜坡顶部。若要从通讯塔上方拉一条缆绳至通讯塔前方 165 m 处，且缆绳与斜坡的夹角为16°，求此缆绳的长度。



第3题用图

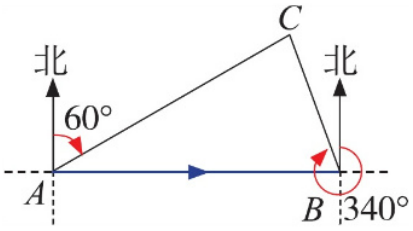
4. 从崖边观测海面上一艘船的俯角是 60°。此船离崖航行 45 m 后，测得崖边的仰角是 35°。求山崖离海平面的高度。



第4题用图

董總 DONG ZONG

5. 一船在码头 A 观测灯塔 C 的方位角是 060°。该船以每小时 40 海里的速度从码头 A 出发，往正东方向航行 2 小时后，抵达码头 B，此时测得灯塔 C 的方位角是 340°。求码头 B 与灯塔 C 的距离。

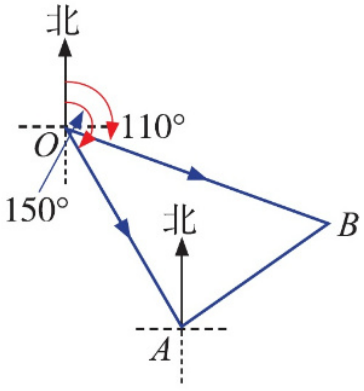


第5题用图

6. 两艘船 A、B 同时从码头 O 出发。船 A 以每小时 45 海里的速度沿方位角为 150° 的方向航行，船 B 以每小时 54 海里的速度沿方位角为 110° 的方向航行。三小时后，求：

(a) 船 A 与船 B 的距离；

(b) 由船 A 测得船 B 的方位角。（准确至 1°）

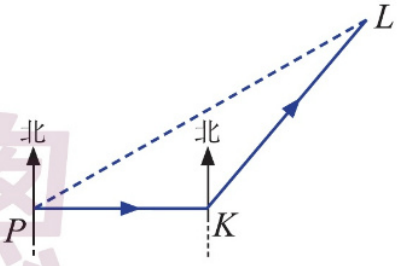


第6题用图

7. 一艘船以每小时 50 海里的速度从码头 P 往正东的岛屿 K 航行。45 分钟后抵达岛屿 K，再以同样的速度往东北的岛屿 L 航行。一小时后抵达岛屿 L。求：

(a) 码头 P 与岛屿 L 的距离；

(b) 从码头P测得岛屿L的方位角。（准确至1°）



第7题用图

董總
DONG ZONG

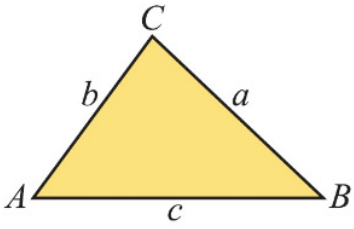
总复习题 10

1. 已知 ΔPQR 三边的比是 $PQ : QR : PR = 9 : 5 : 7$，求其最小内角。

2. 若 ΔPQR 三个内角的比是 $\angle P : \angle Q : \angle R = 7 : 3 : 8$，$PQ = 24$ cm，求最短边的长度。

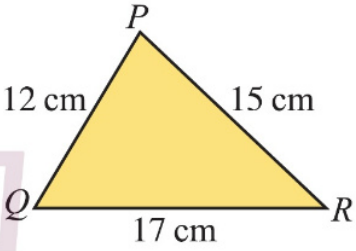
3. 已知 ΔABC 中，$AB = 6$ cm，$BC = 8$ cm，ΔABC 的面积为 $20\ \text{cm}^2$，求 $\angle B$。

4. 右图中，若三角形的三边满足关系式：
$(a + b) : (b + c) : (a + c) = 5 : 6 : 7$。求 $\angle A$。



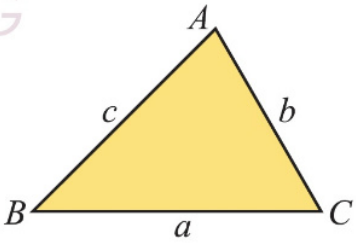
第4题用图

5. 右图中，求
(a) ΔPQR 的面积；
(b) $\sin P$；
(c) ΔPQR 外接圆的半径。



第5题用图

6. 右图 ΔABC 中，$\dfrac{b}{a+c} + \dfrac{a}{b+c} = 1$。求 $\angle C$。



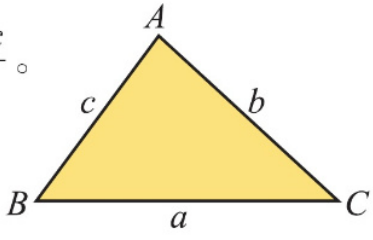
第6题用图

7. 如右图所示，证明

$$\sin A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}，其中 s = \frac{a+b+c}{2}。$$

据此，证明 ΔABC 的外接圆半径为

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}。$$

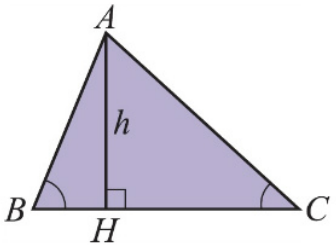


第7题用图

董總 DONG ZONG

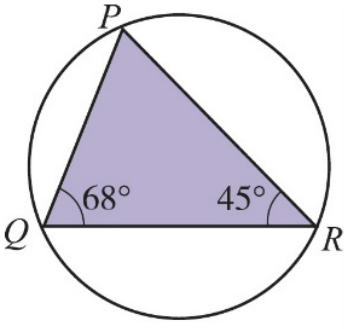
8. 如右图所示，AH 是 BC 边上的高。

证明 ΔABC 外接圆的半径 $R = \dfrac{h}{2\sin B \sin C}$。



第8题用图

9. 右图中，ΔPQR 的外接圆的半径是 6 cm，求 ΔPQR 的面积。



第9题用图

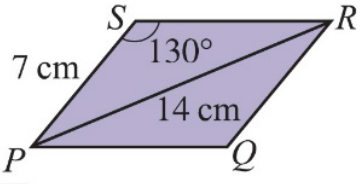
10. 右图中，$PQRS$ 是平行四边形。求

(a) PQ 的长；

(b) 对角线 QS 的长；

(c) 平行四边形的面积；

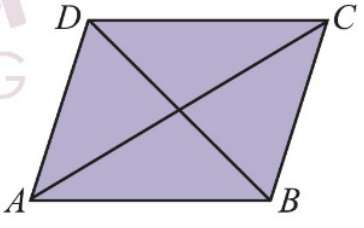
(d) 直线 PQ 与直线 RS 的距离。



第10题用图

11. 右图中，$ABCD$ 是平行四边形。

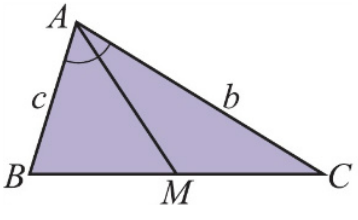
证明 $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$。



第11题用图

12. 右图中，AM 是 BC 边上的中线。

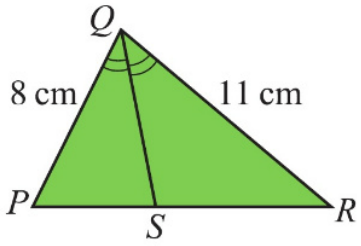
证明 $4AM^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle BAC$。



第12题用图

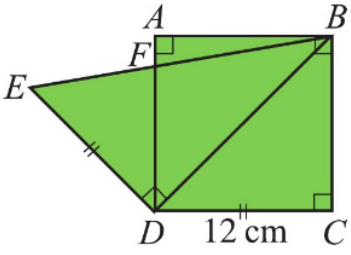
董總
DONG ZONG

13. 右图中 $PR = 12$ cm，QS 是 $\angle PQR$ 的平分线。求 PS 及 QS 的长。



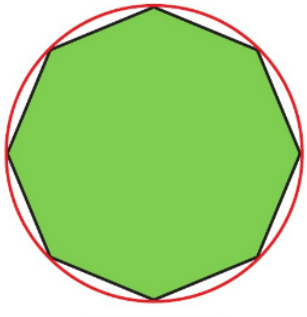
第13题用图

14. 右图中，$ABCD$ 是一边长为 12 cm 的正方形，$DE \perp BD$ 且 $DE = DC$。求
(a) DF 及 EF 的长；
(b) 着色部分的面积。

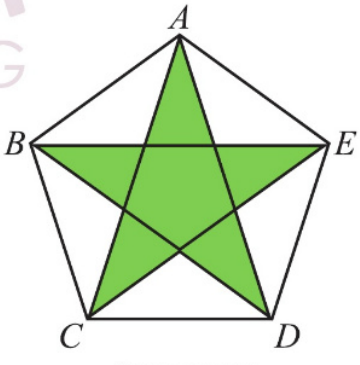


第14题用图

15. 右图为边长 10 cm 的正八边形及其外接圆。求
(a) 外接圆的半径；
(b) 八边形的面积。


第15题用图

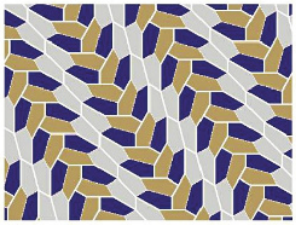
16. 右图中，$ABCDE$ 是正五边形，着色部分是星形。已知正五边形的边长是12 cm，求
(a) $\angle CAD$；
(b) AC 的长；
(c) 正五边形的面积；
(d) 星形的面积。



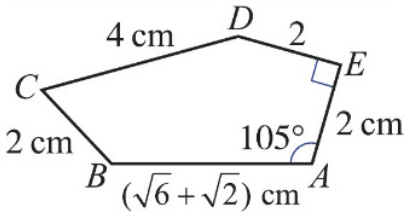
第16题用图

董總 DONG ZONG

17. 2015 年美国华盛顿大学的数学家 Casey Mann 等人发现全球第 15 种可无缝密铺平面的五边形。无缝密铺即是将无数个同一种多边形相互组合，不重叠地铺满平面且不允许空隙。下面左图中，黄蓝橙五边形皆为此次发现的五边形。



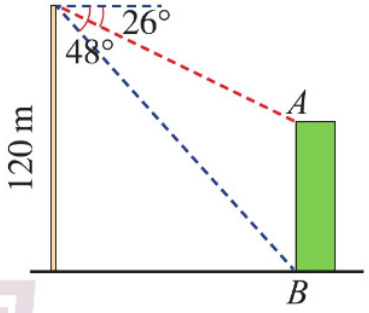
第17题用图(1)



第 17 题用图(2)

如上面右图，五边形 $ABCDE$ 中，$(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ cm，$BC=2$ cm，$CD=4$ cm，$CD=EA=2$ cm，$\angle DEA=90°$，$\angle EAB=105°$，求 $ABCDE$ 的面积。

18. 从 120 m 的高塔顶端测得一座建筑物的顶部 A 及底部 B 的俯角分别为 26°、48°。求此建筑物的高。

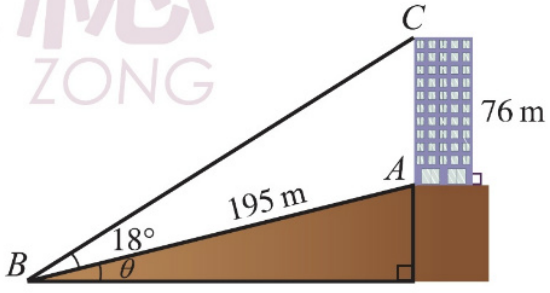


第 18 题用图

19. 一斜坡顶部有一座高 76 m 大厦 AC。沿着斜坡测量，小花所站的位置离大厦 195 m，她望向大厦顶部的视线与斜坡之间成 18° 角。若小明站在大厦的顶部，求

(a) 小明望向小花的俯角；

(b) 斜坡的坡度 θ。



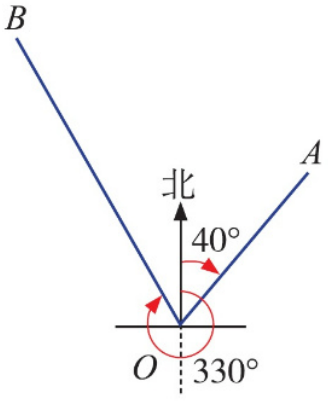
第 19 題用图

董總
DONG ZONG

20. 从灯塔 O 观测海上一艘船 A 的方位角是 040°，观测海上另一艘船 B 的方位角是 330°。若船 A 、B 分别距离灯塔 1.8 海里与 3 海里，求

(a) 船 A 与船 B 的距离；

(b) 由船 B 观测船 A 的方位角。（准确至 1°）



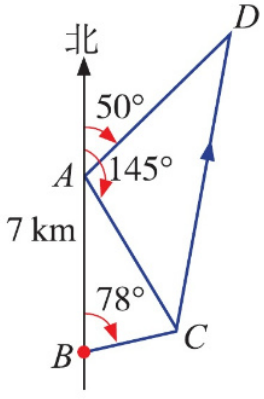
第20题用图

21. 由北到南的海岸线上有 A 、B 两点，$AB = 7$ km。一艘船在海上的点 C，由 A 及 B 测得此船的方位角分别为 145°、078°。若此船以每小时 16 公里的速度航行，在 45 分钟后到达点 D，此时从点 A 测得其方位角是 050°。求

(a) A 与 C 的距离；

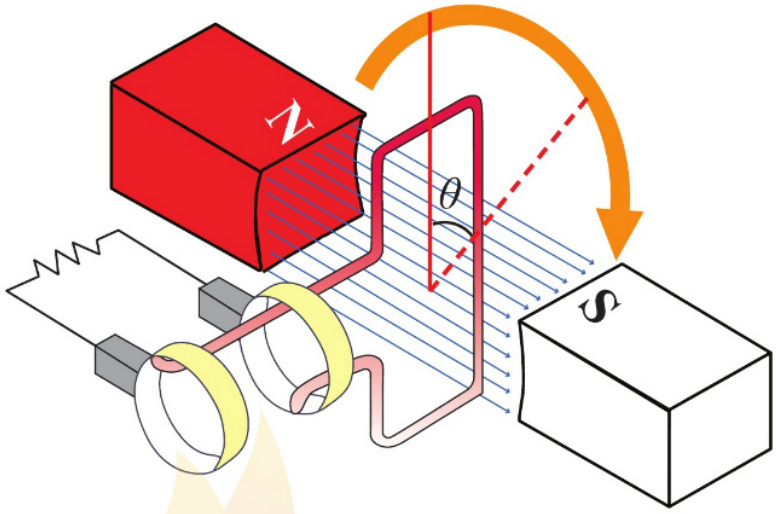
(b) 船的航行方向；（准确至 1°）

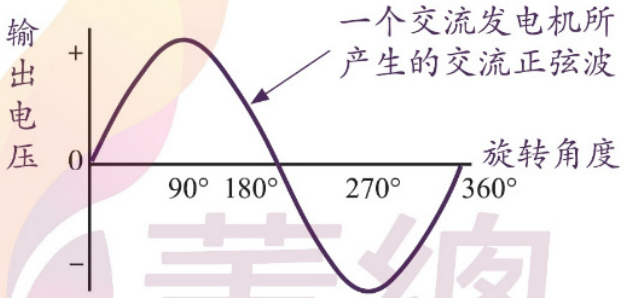
(c) 船到达点 D 时与岸边点 B 的距离。



第21题用图

董總
DONG ZONG





三角恒等式不仅能用以简化复杂的三角函数表达式，还能用以证明三角恒等式和解决三角方程式。通过引入换元法，我们可以将无法直接解决的代数问题转化为可处理的三角问题。另外，通过建立参数方程，我们还可以将解析几何中的曲线问题转化为三角问题来处理。

举例来说，若我们可以将函数 $f(x)=3\sin x+4\cos x$ 化简成正弦函数或余弦函数，我们就更容易看到函数 $f(x)=3\sin x+4\cos x$ 的性质。因此，三角恒等式在数学中有广泛的应用。此外，在运动学、电学等物理领域，我们也会遇到三角恒等式的应用。

11

三角恒等式与三角方程式

学习目标

- 掌握同角三角函数的基本关系式及恒等式
- 能够运用三角恒等式，进行三角函数式的化简及证明其他三角恒等式
- 掌握三角方程式有条件的解、一般解及图解的求法

董總 DONG ZONG

11.1 同角三角函数的基本关系式

根据第 9 章的任意角的三角函数的定义，可得以下三角函数的基本关系：

倒数关系

$$\sin\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1$$

$$\cos\theta\cdot\sec\theta=\frac{x}{r}\cdot\frac{r}{x}=1$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=1$$

即

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

董總
DONG ZONG

商的关系

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

即

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

平方关系

因为 $$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2$$
$$=\frac{x^2+y^2}{r^2}$$

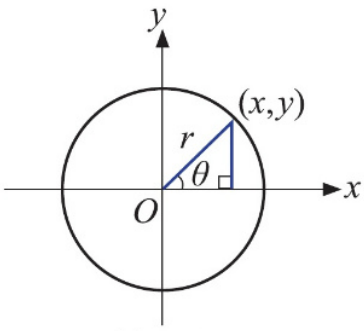


图11–1

在直角坐标系上，如图 11–1，
$$x^2+y^2=r^2$$

所以 $$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{r^2}{r^2}$$
$$=1$$

将 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 两边同除以 $\cos^2\theta$，得
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$$

将 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 两边同除以 $\sin^2\theta$，得
$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$$

即
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$
$$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$$

对于等式两边的函数在有意义的条件下都成立的等式称为恒等式，而含有三角函数的恒等式称为三角恒等式 (trigonometric identity)。利用这些恒等式，可以化简三角函数式或证明其它三角恒等式。

想一想 1 下列等式在什么情况下不成立？

1. $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
2. $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
3. $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
4. $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

董總 DONG ZONG

例題 1

化简下列各式：

(a) $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$

(b) $\operatorname{cosec}\theta\cdot\tan\theta\cdot\sec\theta\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$

解 (a) $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$

$$=\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A+\cos^2 A$$

$$=2\left(\sin^2 A+\cos^2 A\right)$$

$$=2$$

(b) $\operatorname{cosec}\theta\cdot\tan\theta\cdot\sec\theta\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$

$$=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\tan\theta$$

随堂练习 11.1a

化简下列各式：

1. $\left(1+\tan^2\theta\right)\cos^2\theta$
2. $\sec^2 A-\tan^2 A-\sin^2 A$
3. $\dfrac{2\cos^2\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$
4. $\operatorname{cosec}^2\alpha-\tan\alpha\cot\alpha$

董總 DONG ZONG

例题 2

证明 $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta}=1$。

证 $$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin^2\theta}+\frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta}&=\frac{1}{1+\sin^2\theta}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2\theta}}\\&=\frac{1}{1+\sin^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+1}\\&=\frac{1+\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}\\&=1\end{aligned}$$

例题 3

证明 $\sin^4 A+\sin^2 A\cos^2 A+\cos^2 A=1$。

证 $$\begin{aligned}\sin^4 A+\sin^2 A\cos^2 A+\cos^2 A&=\sin^2 A\left(\sin^2 A+\cos^2 A\right)+\cos^2 A\\&=\sin^2 A+\cos^2 A\\&=1\end{aligned}$$

例题 4

证明 $\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}=\sec\theta+\tan\theta$。

证 $$\begin{aligned}\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}&=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}\\&=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\\&=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}\\&=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}\\&=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}\\&=\sec\theta+\tan\theta\end{aligned}$$

董總 DONG ZONG

例题 5

证明 $\dfrac{\cos^2\theta+\tan^2\theta-1}{\sin^2\theta}=\tan^2\theta$。

证 $\dfrac{\cos^2\theta+\tan^2\theta-1}{\sin^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta+\tan^2\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}-1$$

$$=\sec^2\theta-1$$

$$=\tan^2\theta$$

例题 6

证明 $\dfrac{1-2\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\tan A-\cot A$。

证法一 $\dfrac{1-2\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\dfrac{1-\cos^2 A-\cos^2 A}{\sin A\cos A}$

$$=\frac{\sin^2 A-\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\sin A\cos A}-\frac{\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\tan A-\cot A$$

证法二 $\tan A-\cot A=\dfrac{\sin A}{\cos A}-\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$=\frac{\sin^2 A-\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1-\cos^2 A-\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1-2\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

董總 DONG ZONG

例题 7

证明 $\cot^2\theta+\cot^4\theta=\operatorname{cosec}^4\theta-\operatorname{cosec}^2\theta$。

证 左式 $\cot^2\theta+\cot^4\theta=\cot^2\theta\left(1+\cot^2\theta\right)$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}$$

右式 $\operatorname{cosec}^4\theta-\operatorname{cosec}^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta\left(\operatorname{cosec}^2\theta-1\right)$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}$$

$\therefore \cot^2\theta+\cot^4\theta=\operatorname{cosec}^4\theta-\operatorname{cosec}^2\theta$

证明三角恒等式可以按照由繁到简的原则，从左右两式的任何一边开始，证得它等于另一边（如例题6），也可以证明左右两式都等于同一个式子（如例题7），从而证明三角恒等式。

随堂练习 11.1b

证明下列恒等式：

1. $\sec x-\cos x=\sin x\tan x$
2. $\left(1-\sin^2\theta\right)\left(1+\tan^2\theta\right)=1$
3. $\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{1}{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}$

董總 DONG ZONG

习题 11.1

化简下列各式（1~4）：

1. $\dfrac{\tan\theta+\cot\theta}{\sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta}$

2. $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\cos\alpha\sec\alpha$

3. $\dfrac{\sin A+\cos A}{\sec A+\mathrm{cosec}\,A}$

4. $\cos^2\alpha\,\mathrm{cosec}^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

证明下列恒等式（5~15）：

5. $(1+\tan A)^2+(1-\tan A)^2=2\sec^2 A$

6. $\sec^2\theta+\mathrm{cosec}^2\theta=\sec^2\theta\,\mathrm{cosec}^2\theta$

7. $\sin A\cos A=\dfrac{1}{\tan A+\cot A}$

8. $\sec^4\theta-\sec^2\theta=\tan^4\theta+\tan^2\theta$

9. $(1-\sin^2\theta)(\sec^2\theta-1)=\sin^2\theta$

10. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\mathrm{cosec}\,A$

11. $(\tan\theta+\cot\theta)^2=\sec^2\theta+\mathrm{cosec}^2\theta$

12. $\dfrac{\tan A+\cot B}{\cot A+\tan B}=\dfrac{\tan A}{\tan B}$

13. $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$

14. $\dfrac{\tan A\sin A}{\tan A-\sin A}=\dfrac{\tan A+\sin A}{\tan A\sin A}$

15. $\dfrac{2\sin A\cos A-\cos A}{1-\sin A+\sin^2 A-\cos^2 A}=\cot A$

董總 DONG ZONG

11.2 两角之和与差的三角函数

现在，我们来了解两个角的和与差的三角函数值与两角各别的三角函数值之间的关系。

两角和与差的余弦

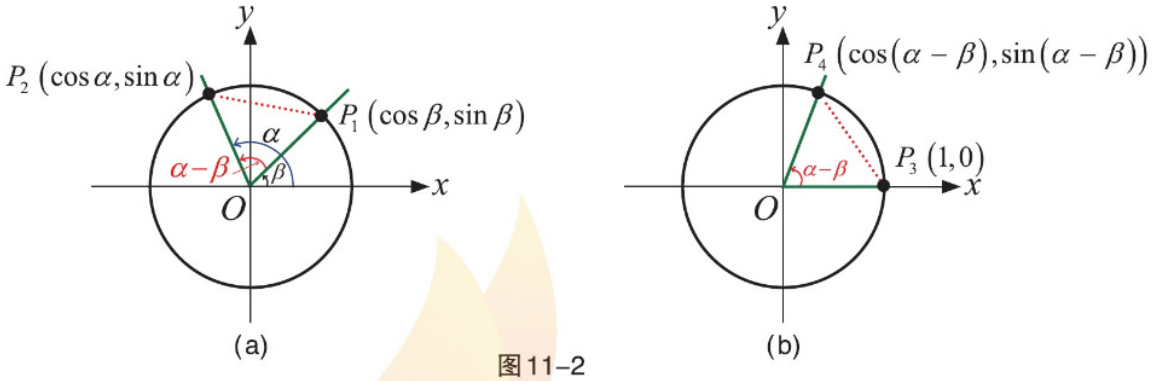


图 11–2

如图 11–2(a)，以原点 O 为圆心的单位圆，作 β 角的终边交圆于点 P_1，作 α 角的终边交圆于点 P_2。这时点 P_1 和点 P_2 的坐标分别是 $P_1(\cos\beta,\sin\beta)$ 和 $P_2(\cos\alpha,\sin\alpha)$。

从图 11–2 (a)，
$$\begin{aligned}|P_1P_2| &= \sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}\\ &= \sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}\\ &= \sqrt{2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta}\end{aligned}$$

将 ΔOP_1P_2 顺时旋转使得 OP_1 在正 x 轴上，得 ΔOP_3P_4，如图11–2(b) 所示。这时点 P_3 和点 P_4 的坐标分别是 $P_3(1,0)$ 和 $P_4(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$。

从图11–2 (b)，
$$\begin{aligned}|P_3P_4| &= \sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta)-0)^2}\\ &= \sqrt{\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)}\\ &= \sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}\end{aligned}$$

董總 DONG ZONG

应用 $\Delta OP_1P_2 \cong \Delta OP_3P_4$ 的性质，即 $|P_1P_2| = |P_3P_4|$ 可推导出两角和与差的余弦公式。

$$\sqrt{2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta}=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}$$
$$2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=2-2\cos(\alpha-\beta)$$
$$2\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

得 $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

将公式中的角 β 以 $-\beta$ 代替，

$$\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

得 $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

两角和与差的正弦

从三角函数的余角关系可推导出两角和与差的正弦公式。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]\\&=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\end{aligned}$$

得 $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

将公式中的角 β 以 $-\beta$ 代替，

$$\sin(\alpha-(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)$$

得 $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

董總 DONG ZONG

例题 8

不使用计算机，求下列各三角函数值：

(a) $\cos 15°$　　(b) $\sin \frac{7\pi}{12}$

解 (a)
$$\begin{aligned}\cos 15° &= \cos(45° - 30°)\\ &= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

董總 DONG ZONG

例题 9

不使用计算机，求 $\cos 70° \cos 20° - \sin 70° \sin 20°$ 的值。

想一想 2　$\cos(45° - 30°)$ 与 $\cos 45° - \cos 30°$ 相等吗？

解
$$\begin{aligned}\cos 70° \cos 20° - \sin 70° \sin 20° &= \cos(70° + 20°)\\ &= \cos 90°\\ &= 0\end{aligned}$$

例题 10

证明 $\cos 4A\cos A+\sin 4A\sin A=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A$。

证 $\cos 4A\cos A+\sin 4A\sin A$

$=\cos(4A-A)$

$=\cos 3A$

$=\cos(2A+A)$

$=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A$

例题 11

证明 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$。

证 $2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta\right)$

$=2\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$

$=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

董總 DONG ZONG

随堂练习 11.2a

1. 不使用计算机，求下列各三角函数值：

(a) $\cos 75°$　　(b) $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

(c) $\cos 80°\cos 20°+\sin 80°\sin 20°$　　(d) $\sin 13°\cos 17°+\cos 13°\sin 17°$

2. 证明 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos(45°+\theta)$。

3. 证明 $\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$。

4. 证明 $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$。

两角和与差的正切

应用正切为正弦与余弦的商的关系，可求得两角和与差的正切公式。

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\end{aligned}$$

得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

将上述公式中的角 β 以 $-\beta$ 代替，

$$\tan[\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

得

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

想一想 3 在什么情况下，两角和与差的正切公式不成立？

重總 BONG ZONG

例题 12

不使用计算机，求 $\tan 105°$ 的值。

解 $\tan 105° = \tan(60°+45°)$

$$\begin{aligned}&=\frac{\tan 60°+\tan 45°}{1-\tan 60°\tan 45°}\\&=\frac{\sqrt{3}+1}{1-(\sqrt{3})(1)}\\&=\frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}\\&=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}\\&=-2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

例题 13

不使用计算机，求 $\dfrac{\tan 68^\circ - \tan 23^\circ}{1 + \tan 68^\circ \tan 23^\circ}$ 的值。

解 $\dfrac{\tan 68^\circ - \tan 23^\circ}{1 + \tan 68^\circ \tan 23^\circ} = \tan(68^\circ - 23^\circ)$

$= \tan 45^\circ$

$= 1$

例题 14

若 $1 - \tan 2\theta \tan\theta \neq 0$，证明 $\tan 3\theta - \tan 2\theta - \tan\theta = \tan 3\theta \tan 2\theta \tan\theta$。

证 $\tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta)$

$\tan 3\theta = \dfrac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta}$

$\because 1 - \tan 2\theta \tan\theta \neq 0$

$\therefore \tan 3\theta(1 - \tan 2\theta \tan\theta) = \tan 2\theta + \tan\theta$

$\tan 3\theta - \tan 3\theta \tan 2\theta \tan\theta = \tan 2\theta + \tan\theta$

$\tan 3\theta - \tan 2\theta - \tan\theta = \tan 3\theta \tan 2\theta \tan\theta$

董總 DONG ZONG

随堂练习 11.2b

1. 不使用计算机，求下列各三角函数值：

(a) $\tan 75^\circ$

(b) $\cot\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

(c) $\dfrac{\tan 12^\circ + \tan 33^\circ}{1 - \tan 12^\circ \tan 33^\circ}$

(d) $\dfrac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ}$

2. 已知 $\tan\alpha = 2$，求 $\tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值。

例题 15

已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，且 $90°<\alpha<180°$，$270°<\beta<360°$，求下列各三角函数的值：

(a) $\sin(\alpha+\beta)$　　(b) $\sec(\alpha-\beta)$

解 因 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且 $90°<\alpha<180°$，

由图 11–3(a) 得 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

因 $\cos\beta=\frac{5}{13}$，且 $270°<\beta<360°$，

由图 11–3(b) 得 $\sin\beta=-\frac{12}{13}$

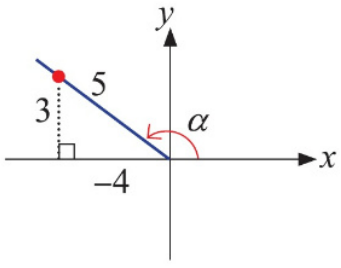


图 11–3(a)

(a) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$=\frac{15}{65}+\frac{48}{65}$$

$$=\frac{63}{65}$$

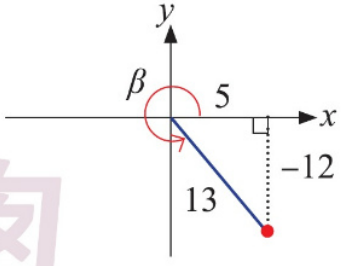


图 11–3(b)

(b) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$=-\frac{20}{65}-\frac{36}{65}$$

$$=-\frac{56}{65}$$

$$\sec(\alpha-\beta)=\frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{1}{-\frac{56}{65}}$$

$$=-\frac{65}{56}$$

董總 DONG ZONG

例题 16

已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，且 $0°<\alpha<90°$，$90°<\beta<180°$，求 $\alpha+\beta$ 的值。

解 由 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，得

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{\frac{1}{3}+(-2)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)(-2)}\\&=-1\end{aligned}$$

又因 $0°<\alpha<90°$，$90°<\beta<180°$，所以 $90°<\alpha+\beta<270°$。
在 $90°$ 和 $270°$ 之间，只有 $135°$ 的正切值为 -1，
$\therefore \alpha+\beta=135°$

随堂练习 11.2C

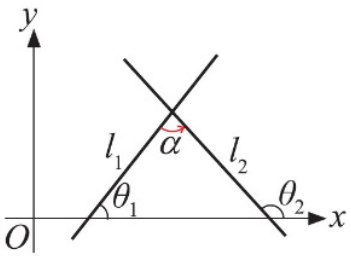
1. 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan\beta=\frac{12}{5}$，α 是第一象限角，β 是第三象限角。求下列各三角函数值：
   (a) $\cos(\alpha-\beta)$　　(b) $\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)$
2. 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\cos\beta=-\frac{4}{5}$，且 α 与 β 是同一象限的角。求下列各三角函数的值：
   (a) $\sin(\alpha-\beta)$　　(b) $\tan(\alpha+\beta)$
3. 已知 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$，且 α 和 β 都是锐角，证明 $\alpha+\beta=135°$。

董總 DONG ZONG

例题 17

设直线 l 从 x 轴依逆时针方向旋转 θ，则 θ 称为直线 l 的倾斜角。根据定义，直线的倾斜角 θ 与其斜率 m 的关系为 $m=\tan\theta$。现有两条直线 l_1 及直线 l_2 的斜率分别是 m_1 及 m_2，若直线 l_1 到直线 l_2 的夹角为 α，证明 $\tan\alpha=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$。

证 设直线 l_1 和直线 l_2 的倾斜角分别是 θ_1 和 θ_2（如图），则直线 l_1 的斜率 $m_1=\tan\theta_1$ 及直线 l_2 的斜率 $m_2=\tan\theta_2$。



$\because \alpha=\theta_2-\theta_1$

$$\begin{aligned}\therefore \tan\alpha&=\tan(\theta_2-\theta_1)\\&=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}\\&=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}\end{aligned}$$

想一想 4 在什么情况下 $\tan\theta=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$ 不成立？

董總 DONG ZONG

随堂练习 11.2d

已知 ΔABC 的顶点坐标分别是 $A(1,5)$，$B(6,1)$ 及 $C(-2,-1)$。求此三角形的内角。

我们可以利用两角和与差的正弦或余弦公式，将形如 $a\sin\theta+b\cos\theta$ 的三角函数式转换成 $R\sin(\theta\pm\alpha)$ 或 $R\cos(\theta\pm\alpha)$ 的形式，其中 $R>0$ 且 α 是锐角。

例题 18

将 $\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 表示成 $R\sin(x+\alpha)$ 的形式，其中 $R>0$ 且 α 是锐角。

解 令 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=R\sin(x+\alpha)$

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=R\sin x\cos\alpha+R\cos x\sin\alpha$$
$$=R\cos\alpha\sin x+R\sin\alpha\cos x$$

比较等号两边 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的系数，得

$$R\cos\alpha=1 \qquad \text{-----(1)}$$
$$R\sin\alpha=\sqrt{3} \qquad \text{-----(2)}$$

$(1)^2+(2)^2$ 得 $\quad R^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$

$$R=\sqrt{1+3}=2 \quad (R>0)$$

$\dfrac{(2)}{(1)}$ 得 $\quad \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$

$$\tan\alpha=\sqrt{3}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3}\ (\alpha\text{ 是锐角})$$

$$\therefore \sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

想一想 5

$\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 是否可以表示成 $R\sin(x-\alpha)$ 的形式？

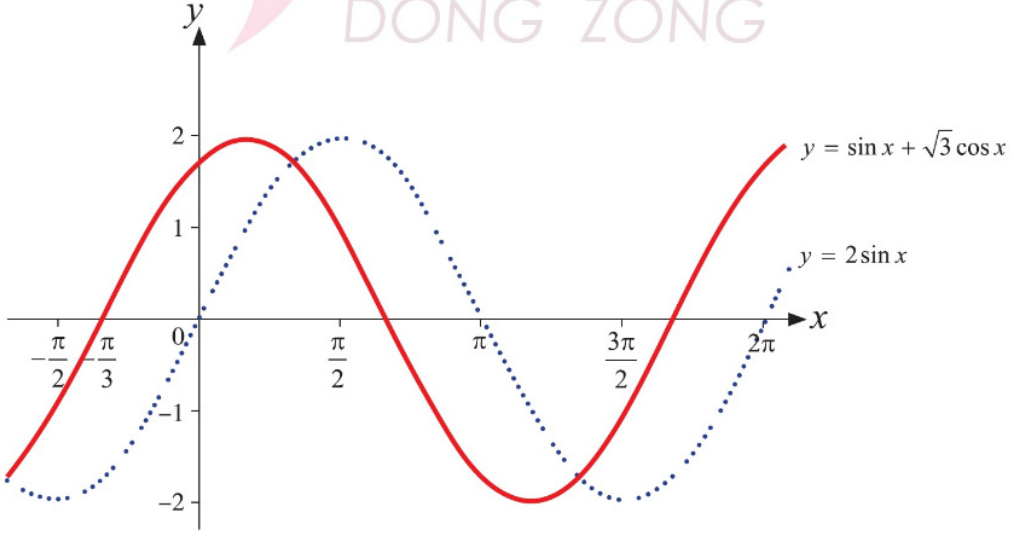


图 11–4

董總 DONG ZONG

从图 11–4，我们也可观察到 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图像是 $y=2\sin x$ 的曲线沿着 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 的图像，即 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像。

我们可以应用这种转换方式，求得 $\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的取值范围。

$$\because\ -1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$$

$$-2\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2$$

$$\therefore -2\le\sin x+\sqrt{3}\cos x\le 2$$

随堂练习 11.2e

1. 以 $R\cos(x-\alpha)$ 表示 $f(x)=3\cos x+\sqrt{3}\sin x$，其中 $R>0$ 及 α 为锐角。据此，求 $f(x)$ 的值域。
2. 以 $R\cos(\theta+\alpha)$ 表示 $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$。据此，求 $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$ 的最大值和最小值。

董總 DONG ZONG

习题 11.2

1. 不使用计算机，求 $\tan 32°\tan 13°+\tan 32°+\tan 13°$ 的值。
2. 已知 $\sin\theta=\frac{15}{17}$ 且 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，不使用计算机，求 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$ 的值。
3. 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，且 α 与 β 是同一象限角，不使用计算机，求下列各三角函数值：

   (a) $\sin(\alpha-\beta)$　　(b) $\cos(\alpha-\beta)$

   (c) $\tan(\alpha+\beta)$　　(d) $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)$

4. 已知 $\sec A=\dfrac{17}{8}$，$\cot B=-\dfrac{3}{4}$，A 是第一象限角，B 是第二象限角。不使用计算机，求 $\sec(A+B)$ 及 $\tan(A-B)$ 的值。

5. 已知一三角形的三边方程式分别是 $4x-3y+9=0$，$12x-5y+15=0$ 及 $2x-y+1=0$。求此三角形的内角。

证明下列各恒等式（6 至 16）：

6. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-A\right)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+A\right)=\cos A$

7. $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

8. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

9. $\sin(A+B)\cos(A-B)=\sin A\cos A+\sin B\cos B$

10. $\cos(A-B)-\sin(A+B)=(\cos A-\sin A)(\cos B-\sin B)$

11. $\dfrac{\cos 2A}{\sec A}-\dfrac{\sin 2A}{\operatorname{cosec} A}=\cos 3A$

12. $\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{\tan^2 A-\tan^2 B}{1-\tan^2 A\tan^2 B}$

13. $\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A-\tan B}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$

14. $\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\tan A+\tan B$

15. $\dfrac{\tan(A-B)+\tan B}{1-\tan(A-B)\tan B}=\tan A$

16. $1+\tan 2A\tan A=\sec 2A$

17. 求以下三角函数的值域：

(a) $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

(b) $f(x)=3\sin x-4\cos x$

董總 DONG ZONG

11.3 倍角的三角函数

从两角之和的三角函数公式，当 $\beta=\alpha$ 时，就可以得出相应的二倍角的三角函数公式。

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha)\\ &= \sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\\ &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha-1\\ &= 1-2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\alpha+\alpha)\\ &= \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}\\ &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

想一想 6 是否有其他方法推导出两倍角的正切公式？

以下为二倍角的正弦、余弦及正切公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha-1\\ &= 1-2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

董總 DONG ZONG

例题 19

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $2\cos^2 15° - 1$

(b) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

(c) $1 - 2\sin^2 75°$

(d) $\frac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$

解 (a)
$$\begin{aligned} 2\cos^2 15° - 1 &= \cos 2(15°) \\ &= \cos 30° \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} &= \sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 1 - 2\sin^2 75° &= \cos 2(75°) \\ &= \cos 150° \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \frac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°} &= \tan 2(22.5°) \\ &= \tan 45° \\ &= 1 \end{aligned}$$

董總 DONG ZONG

例题 20

不使用计算机，求 $\sin 22.5°$。

解 $\cos(2\times 22.5°)=1-2\sin^2 22.5°$

$$\cos 45°=1-2\sin^2 22.5°$$

$$\sin^2 22.5°=\frac{1-\cos 45°}{2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 22.5°=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$\because \sin 22.5°>0$，$\therefore \sin 22.5°=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

随堂练习 11.3a

1. 不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $2\sin^2 15°-1$

(b) $2\sin\dfrac{3\pi}{8}\cos\dfrac{3\pi}{8}$

(c) $\dfrac{2\tan 165°}{1-\tan^2 165°}$

(d) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$

2. 不使用计算机，求 $\tan 22.5°$。

3. 已知 $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ 且 $180°<\theta<270°$，求 $\tan\dfrac{\theta}{2}$。

董總 DONG ZONG

例题 21

证明 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\cot\alpha$。

证 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\left(1-2\sin^2\alpha\right)}$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\cot\alpha$$

随堂练习 11.3b

证明以下三角恒等式：

1. $\sin 2x-2\sin x+\cos x-1=(\cos x-1)(2\sin x+1)$
2. $\cot 2x+\operatorname{cosec} 2x=\cot x$
3. $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$

董總 DONG ZONG

习题 11.3

1. 已知 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，且 $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi$，不使用计算机，求 $\sin 2A$，$\cos 2A$ 及 $\tan 2A$。
2. 已知 $\cos A=\dfrac{8}{17}$，且 $270°<A<360°$，不使用计算机，求 $\sin\dfrac{A}{2}$，$\cos\dfrac{A}{2}$。
3. 已知 $\cos\theta=\dfrac{24}{25}$，且 $270°<\theta<360°$，不使用计算机，求 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的值。
4. 不使用计算机，证明

   (a) $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$　　(b) $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
5. 以 $\sin x$ 表示 $\sin 3x$。

6. 以 $\tan x$ 表示 $\tan 3x$。

证明下列各恒等式（7 至 17）：

7. $\cot\theta - \cot 2\theta = \operatorname{cosec} 2\theta$

8. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \tan\dfrac{\theta}{2}$

9. $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \sec 2\theta$

10. $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right)$

11. $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

12. $1 - \sin A = \left(\sin\dfrac{A}{2} - \cos\dfrac{A}{2}\right)^2$

13. $\tan A - \cot A = -2\cot 2A$

14. $\dfrac{\sin 3A}{\sin A} - \dfrac{\cos 3A}{\cos A} = 2$

15. $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \sec 2A - \tan 2A$

16. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \cdot \dfrac{\cos A}{1+\cos A} = \tan\dfrac{A}{2}$

17. $1 + \sin A = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{A}{2}\right)$

董總 DONG ZONG

11.4 三角方程式

一个含有未知数的三角函数的方程式叫做三角方程式 (trigonometric equation)，例如：$2\sin x-1=0$，$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，$\sin x-\cos x=1$ 等。

满足三角方程式的未知数的所有值叫做三角方程式的解。如果未知数的任何值都不适合于求解的三角方程式时，就说这个方程式无解。

三角方程式有很多种形式，这些方程式往往可以化成一个或几个形如 $\sin x=a$，$\cos x=a$，$\tan x=a$ 的基本三角方程式。对于此类方程式，我们只需先求出它的一个周期的区间上的解，就可以找出三角方程式的所有解。

三角方程式有条件的解

在解三角方程式的过程中，往往会规定未知数的取值区间，因此，所求出的解是三角方程式有条件的解。

例题 22

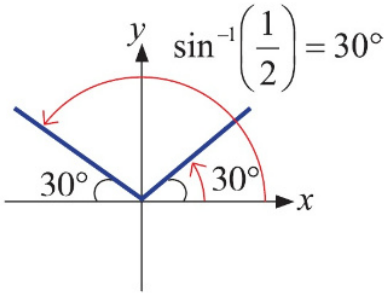
解方程式 $2\sin x=1$，$0°\le x\le 360°$。

解 $2\sin x=1$

$\sin x=\frac{1}{2}$

因为 $\sin x=\frac{1}{2}$ 是正值，所以 x 是第一象限的角或第二象限的角，如图所示，

$\therefore x=30°，150°$

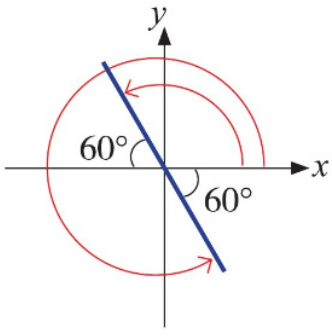


董總 DONG ZONG

例题 23

解方程式 $\tan 2x = -\sqrt{3}$，$0° \le x \le 360°$。

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60°$



解 已知 $0° \le x \le 360°$，

则 $0° \le 2x \le 720°$。

因为 $\tan 2x = -\sqrt{3}$ 是负值，所以 $2x$ 是第二象限的角或第四象限的角，如图所示，

得 $2x = 120°$，$300°$，$120° + 360°$，$300° + 360°$

$x = 60°$，$150°$，$240°$，$330°$

例题 24

解方程式 $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-180° \le x \le 180°$。

解 已知 $-180° \le x \le 180°$，

则 $-90° \le \frac{x}{2} \le 90°$，

所以 $\cos\frac{x}{2} \ge 0$，因此，此方程式无解。

董總 DONG ZONG

随堂练习 11.4a

解下列方程式：

1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$0° \le x \le 180°$。
2. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$-180° \le x \le 180°$。
3. $\cot 3x = \sqrt{3}$，$0° \le x \le 360°$。
4. $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 0$，$0° \le x \le 360°$。

例题 25

解方程式 $4\sin^2 x = 3\sin x$， $0° \le x \le 180°$。

解

$$4\sin^2 x = 3\sin x$$
$$4\sin^2 x - 3\sin x = 0$$
$$\sin x(4\sin x - 3) = 0$$

$\sin x = 0$ 或 $4\sin x - 3 = 0$

$x = 0°,\ 180°$ $\qquad$ $\sin x = \dfrac{3}{4}$

$x = 48.59°,\ 131.41°$

$\therefore x = 0°,\ 48.59°,\ 131.41°,\ 180°$

例题 26

解方程式 $2\sin^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 0$， $0° \le \theta \le 360°$。

解 因为 $\cos\theta \ne 0$，所以把方程式的两边同时除以 $\cos^2\theta$，得

$$2\tan^2\theta + 3\tan\theta + 1 = 0$$
$$(2\tan\theta + 1)(\tan\theta + 1) = 0$$

$2\tan\theta + 1 = 0$ 或 $\tan\theta + 1 = 0$

$\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\tan\theta = -1$

$\theta = 153.43°,\ 333.43°$ $\qquad$ $\theta = 135°,\ 315°$

$\therefore \theta = 135°,\ 153.43°,\ 315°,\ 333.43°$

想一想 7 为什么 $\cos\theta \ne 0$？

例题 27

解方程式 $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$， $0 \le x \le 2\pi$。

解

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0$$
$$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$
$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$
$$(2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$$

董總 DONG ZONG

$2\cos x+1=0$ 或 $\cos x-2=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ $\cos x=2>1$

$x=\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ $\therefore$ 无解。

$\therefore x=\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

在解三角方程式的过程中，如果没有特别要求，一般上角度准确至 0.01°，弧度准确至 0.0001。

随堂练习 11.4b

解下列方程式：

1. $3\cos^2 x-5\cos x+2=0$，$0°\le x\le 360°$。
2. $6\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta=0$，$-180°\le\theta\le 180°$。
3. $3\sec^2\theta+4\tan\theta=\tan\theta+3$，$0\le\theta\le 2\pi$。

董總 DONG ZONG

例题 28

解方程式 $\cos 2x+3\cos x+2=0$，$0\le x\le 2\pi$。

解

$\cos 2x+3\cos x+2=0$

$2\cos^2 x-1+3\cos x+2=0$

$2\cos^2 x+3\cos x+1=0$

$2\cos x+1=0$ 或 $\cos x+1=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ $\cos x=-1$

$x=\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ $x=\pi$

$\therefore x=\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$

例题 29

解方程式 $\sin 2x-2\sin x+\cos x-1=0$，$-180°\le x\le 180°$。

解

$$\sin 2x-2\sin x+\cos x-1=0$$
$$2\sin x\cos x-2\sin x+\cos x-1=0$$
$$2\sin x(\cos x-1)+\cos x-1=0$$
$$(\cos x-1)(2\sin x+1)=0$$

$\cos x-1=0$ 或 $2\sin x+1=0$

$\cos x=1$ $\qquad$ $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$x=0°$ $\qquad$ $x=-150°$，$-30°$

$\therefore x=-150°$，$-30°$，$0°$

随堂练习 11.4c

解下列方程式：

1. $\sin x\sin 2x=\cos x$，$0°\le x\le 360°$。
2. $\cos 2\theta+\sin\theta-1=0$，$0\le\theta\le 2\pi$。

董總 DONG ZONG

例题 30

解方程式 $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$，$0\le x\le 2\pi$。

解 令 $\sqrt{3}\cos x-\sin x=R\cos(x+\alpha)$，$R>0$，$x$ 为锐角。

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=R\cos x\cos\alpha-R\sin x\sin\alpha$$

比较两边的系数，得 $R\cos\alpha=\sqrt{3}$ $\qquad$ -----(1)

$R\sin\alpha=1$ $\qquad$ -----(2)

$(1)^2+(2)^2$ 得 $R^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=(\sqrt{3})^2+1^2$

$$R=\sqrt{3+1}=2$$

$\frac{(2)}{(1)}$ 得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha=\frac{\pi}{6}$

$\therefore 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

由条件 $0\le x\le 2\pi$，

得 $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{13\pi}{6}$

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$， $2\pi-\frac{\pi}{3}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$， $\frac{3\pi}{2}$

随堂练习 11.4d

解下列方程式：

1. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$， $0\le x\le 2\pi$。

2. $5\sin x-12\cos x=13$， $0^\circ\le x\le 360^\circ$。

习题 11.4a

1. 解下列三角方程式，式中 $0^\circ\le x\le 360^\circ$：

(a) $4\tan x+3\sec x=0$

(b) $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$

(c) $6\sec^2 x-\tan x=7$

(d) $\cos(x-30^\circ)=3\sin(x-60^\circ)$

(e) $3\cos 2x+4\cos x+3=0$

(f) $2\sin 3x+3\cos 3x=\sqrt{13}$

(g) $3\cos x+4\sin x=5$

2. 解下列三角方程式，式中 $-180° \le \theta \le 180°$：

(a) $\cot\theta - 2\cos\theta = 0$

(b) $7\sin\theta + 3\cos\theta = 0$

(c) $7\operatorname{cosec}^2\theta - 13\cot\theta = 9$

(d) $2\cos\theta\cot\theta = 3$

(e) $3\cos 2\theta + 8\sin\theta + 5 = 0$

(f) $2\sin 2\theta = 3\cos\theta$

(g) $5\sin\theta + 12\cos\theta = 7$

3. 解下列三角方程式，式中 $0 \le x \le 2\pi$：

(a) $2\tan x\cos x + 1 = 0$

(b) $4\cos^2 x + 4\sin x = 1$

(c) $4\sin 2x = 3\operatorname{cosec} 2x$

(d) $\tan x\tan 2x = 1$

(e) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

(f) $\sqrt{3}\sin 2x = 1 + \cos 2x$

三角方程式的一般解

由于三角函数具有周期性，因此，一个三角方程式一般上有无穷多个解，我们可以用一般解 (general solution) 的方式来表示方程式的解。

（一）$\sin x = a$ 的一般解

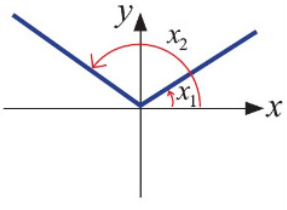
例题 31

求方程式 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 的一般解。

解 先求出 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 的一个周期的区间上的解，如图所示，

得 $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$，$x_2 = \pi - \dfrac{\pi}{6}$

$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$



由于正弦函数的周期为 2π，因此，对 x_1 和 x_2 各加上 $2k\pi$（k 是整数），就得到方程式的一般解，

$$\therefore x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \qquad \text{-----(1)}$$

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$= (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \qquad \text{-----(2)}$$

以上式子中 $2k$ 是偶数，$2k+1$ 是奇数，设 n 为整数，在 n 为偶数时，$(-1)^n=+1$，在 n 为奇数时，$(-1)^n=-1$，所以(1)、(2)两个式子可以合并成 $x=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$，$n\in\boldsymbol{Z}$。

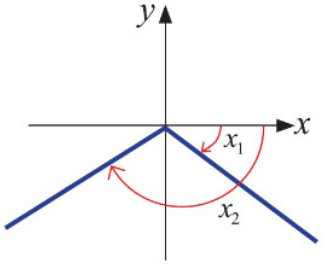
例题 32

求方程式 $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的一般解。

解 先求出 $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的一个周期的区间上的解，如图所示，

得 $x_1=-\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=-\pi-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$



由于正弦函数的周期为 2π，因此，对 x_1 和 x_2 各加上 $2k\pi$（k 是整数），就得到方程式的一般解，

$\therefore x=2k\pi+\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ----- (1)

$x=2k\pi-\pi-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=(2k-1)\pi-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ----- (2)

(1)、(2) 两个式子可以合并成 $x=n\pi+(-1)^n\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$n\in\boldsymbol{Z}$。

董總 DONG ZONG

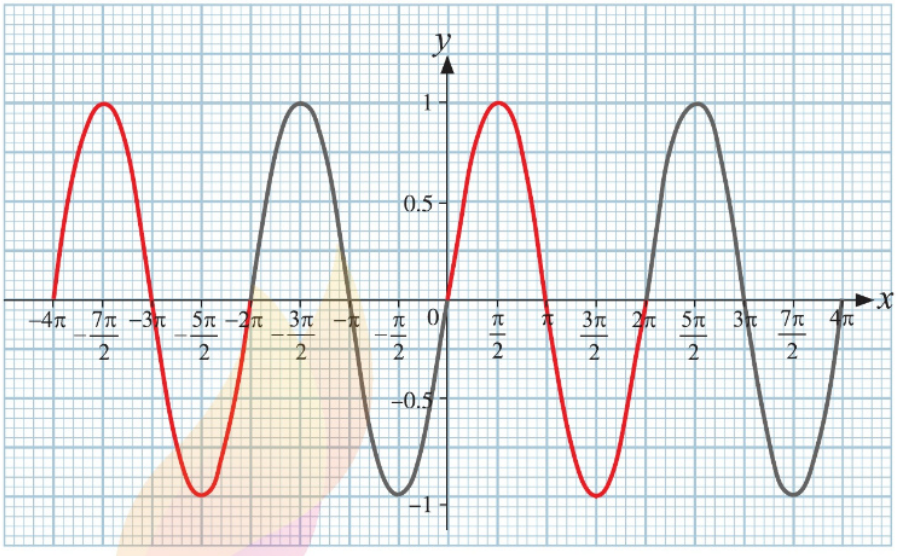
例题 33

求方程式 $\sin^3 x - \sin x = 0$ 的一般解。

解

$$\sin^3 x - \sin x = 0$$

$$\sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$



从正弦函数的图像，

得 $\sin x = 0$ 的一般解是 $x = n\pi$

$\sin x = 1$ 的一般解是 $x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$\sin x = -1$ 的一般解是 $x = 2n\pi - \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore x = \dfrac{n\pi}{2}$， $n \in \boldsymbol{Z}$。

董總 DONG ZONG

随堂练习 11.4e

求方程式 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ 的一般解。

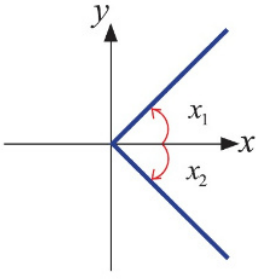
（二） $\cos x = a$ 的一般解

例题 34

求方程式 $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的一般解。

解 先求出 $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的一个周期的区间上的解，如图所示，

$\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$



得 $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$，$x_2 = -\dfrac{\pi}{4}$

由于正弦函数的周期为 2π，因此，对 x_1 和 x_2 各加上 $2k\pi$（k 是整数），就得到方程式的一般解，

$$\therefore x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \qquad \text{-----} (1)$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \qquad \text{-----} (2)$$

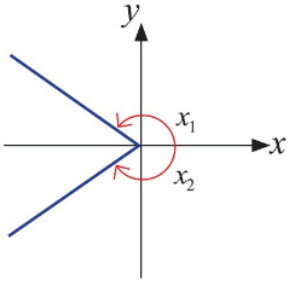
(1)、(2) 两个式子可以合并成 $x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$，$n \in \boldsymbol{Z}$。

例题 35

求方程式 $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的一般解。

解 先求出 $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的一个周期的区间上的解，如图所示，

$\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$



得 $x_1 = \dfrac{5\pi}{6}$，$x_2 = -\dfrac{5\pi}{6}$

由于余弦函数的周期为 2π，因此，对 x_1 和 x_2 各加上 $2k\pi$（k 是整数），就得到方程式的一般解，

$$\therefore x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \qquad \text{-----} (1)$$

$$x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \qquad \text{-----} (2)$$

(1)、(2) 两个式子可以合并成 $x = 2n\pi \pm \dfrac{5\pi}{6}$，$n \in \boldsymbol{Z}$。

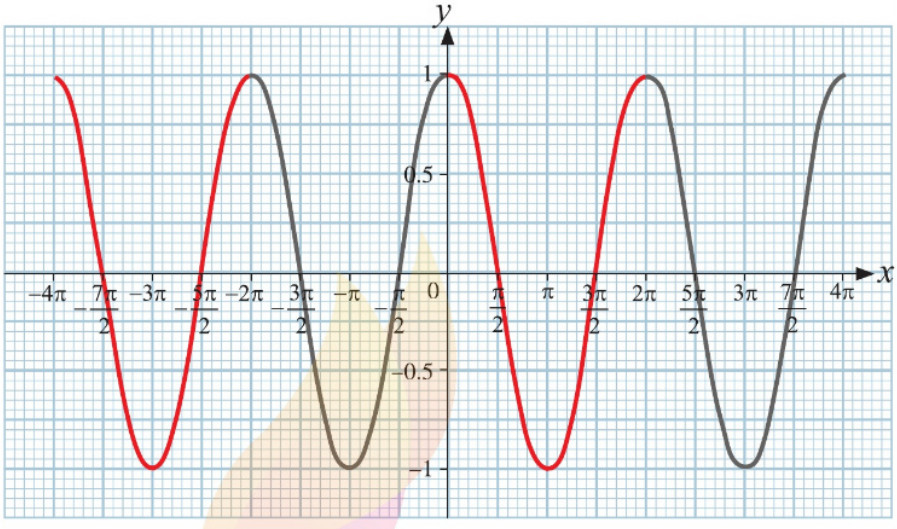
董總 DONG ZONG

例题 36

求方程式 $\cos^3 x - \cos x = 0$ 的一般解。

解 $\cos^3 x - \cos x = 0$

$\cos x(\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$



从余弦函数的图像，

得 $\cos x = 0$ 的一般解是 $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\cos x = 1$ 的一般解是 $x = 2n\pi$

$\cos x = -1$ 的一般解是 $x = (2n+1)\pi$

$\therefore x = \dfrac{n\pi}{2}$，$n \in \boldsymbol{Z}$。

董總 DONG ZONG

随堂练习 11.4f

求方程式 $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ 的一般解。

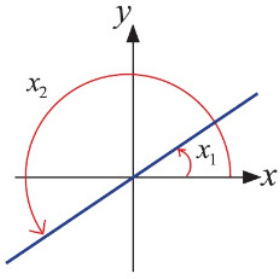
（三）$\tan x = a$ 的一般解

例题 37

求方程式 $\tan x = \sqrt{3}$ 的一般解。

解 先求出 $\tan x = \sqrt{3}$ 的一个周期的区间上的解，如图所示，

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$



得 $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$，$x_2 = \pi + \dfrac{\pi}{3}$

由于正切函数的周期为 π，因此，对 x_1 和 x_2 各加上 $k\pi$（k 是整数），就得到方程式的一般解，

$$\therefore x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{-----} (1)$$

$$x = k\pi + \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$= (k+1)\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{-----} (2)$$

(1)、(2) 两个式子可以合并成 $x = n\pi + \dfrac{\pi}{3}$，$n \in \boldsymbol{Z}$。

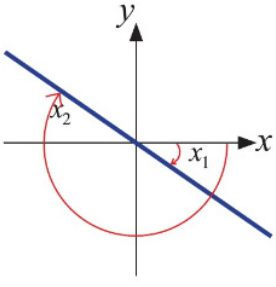
董總 DONG ZONG

例题 38

求方程式 $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的一般解。

解 先求出 $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的一个周期的区间上的解，如图所示，

$\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$



得 $x_1 = -\dfrac{\pi}{6}$，$x_2 = -\pi - \dfrac{\pi}{6}$

由于正切函数的周期为 π，因此，对 x_1 和 x_2 各加上 $k\pi$（k 是整数），就得到方程式的一般解，

$$\therefore x = k\pi - \frac{\pi}{6} \qquad \text{-----}(1)$$

$$x = k\pi - \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$= (k-1)\pi - \frac{\pi}{6} \qquad \text{-----}(2)$$

(1)、(2) 两个式子可以合并成 $x = n\pi - \frac{\pi}{6}$， $n \in \boldsymbol{Z}$ 。

随堂练习 11.4g

求方程式 $3\sec^2\theta + 4\tan\theta = 2$ 的一般解。

习题 11.4b

求下列方程式的一般解：

1. $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

2. $\tan x = 3\cos x \operatorname{cosec} x$

3. $\dfrac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = 2$

4. $\cos 2\theta - \cos\theta = 0$

5. $3\sin\theta + \cos 2\theta = 2$

6. $\sin x \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

7. $2\sin^2 x + 7\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$

8. $\sin 2x = \cos 2x - \cos^2 x + 1$

9. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{3}$

10. $2\cos 2x - 2\sin 2x = \sqrt{6}$

董總 DONG ZONG

三角方程式的图解法

将方程式 $f(x)=0$ 改写成两个函数 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$，使得 $f(x)=g(x)-h(x)=0$，则 $f(x)=0$ 的解，就是函数 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 的值相同时，自变量 x 的值。由此可知，函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在直角坐标系中图像的交点的 x 坐标就是原方程式 $f(x)=0$ 的解。

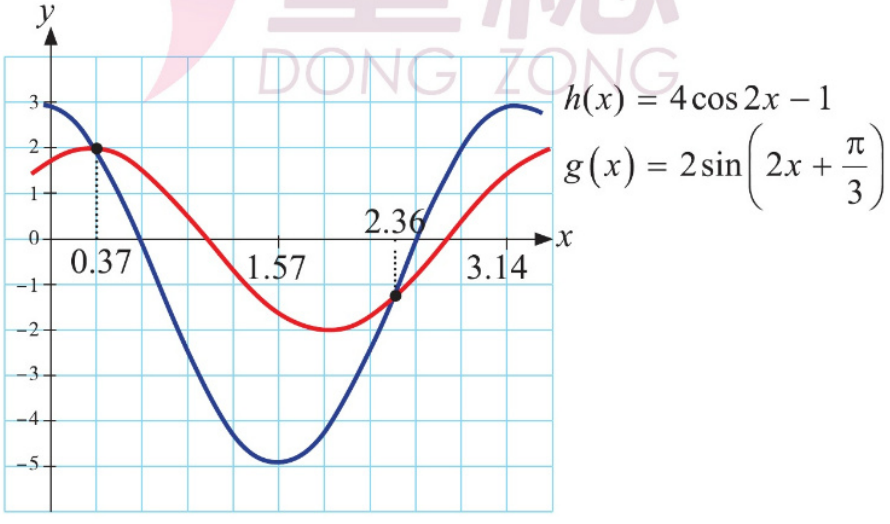
例题 39

用图解法解方程式 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-4\cos 2x+1=0$，$0\le x\le\pi$。

解 将方程式化成 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\cos 2x-1$

令 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$h(x)=4\cos 2x-1$

我们可以作 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的图像后，再用变化波幅、压缩、平移等方法作出 $g(x)$ 及 $h(x)$ 的图像，方程式的解为在规定的区间内，$g(x)$ 及 $h(x)$ 的图像的交点的 x 坐标。

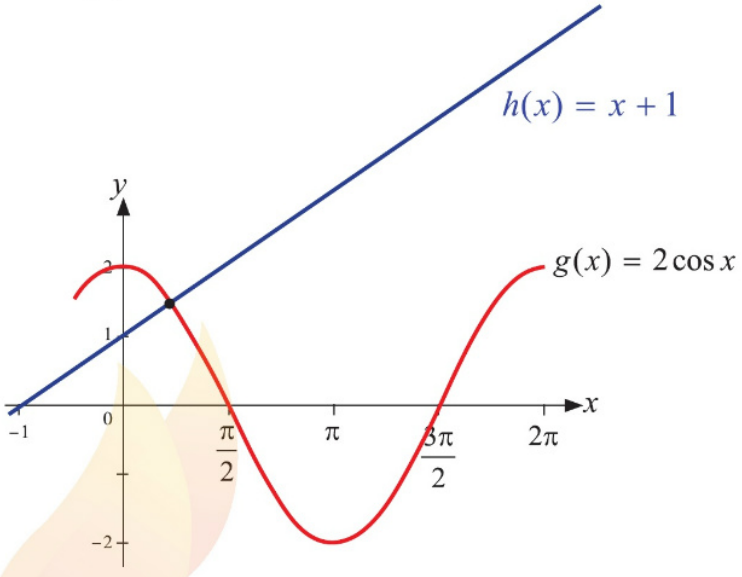


由上图中得知 x 的近似值为 0.37 或 2.36。

例题 40

用图解法，求方程式 $2\cos x = x + 1$ 在 $0 \le x \le 2\pi$ 范围内的解的个数。

解 令 $g(x) = 2\cos x$， $h(x) = x + 1$



如图，因为在 $0 \le x \le 2\pi$ 范围内， $g(x) = 2\cos x$ 和 $h(x) = x + 1$ 的图像只有一个交点，所以方程式 $2\cos x = x + 1$ 在 $0 \le x \le 2\pi$ 范围内只有一个解。

董總 DONG ZONG

习题 11.4c

1. 用图解法，求方程式 $\sin x - \sin\dfrac{x}{2} = 0$ 在区间 $0 \le x \le 2\pi$ 的解。

2. 在所提供的区间，用图解法，求下列方程式的解的个数：
   (a) $\sin x + 2\cos x = 1.5$， $0 \le x \le \pi$
   (b) $2\cos x + \dfrac{x}{2} - 1 = 0$， $0 \le x \le 2\pi$
   (c) $\sin x - x + 1 = 0$， $0 \le x \le 2\pi$
   (d) $3\sin x - \dfrac{x}{\pi} - 1 = 0$， $0 \le x \le \pi$

总复习题 11

1. 已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ 及 $\cos\beta=-\frac{5}{13}$，且 α 与 β 是同一象限角。求 $\sin(\alpha+\beta)$ 及 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值。

2. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，且 α，β 都是锐角。证明 $\alpha+\beta=45°$。

3. 已知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，且 α 为第四象限的角，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$。

4. 证明下列恒等式：
   (a) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$
   (b) $\dfrac{\sin^2 x}{\sec^2 x-1}+\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x-1}=1$
   (c) $\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$
   (d) $\dfrac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{1+\cos 2(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$
   (e) $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha$
   (f) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha$

5. 化简 $(\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A)$。若 $\sec A-\tan A=3$，求 $\sec A+\tan A$ 的值。

6. 若 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$，证明 $\sqrt{\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}}=-\tan A$。据此，不使用计算机，求 $\tan\frac{7\pi}{12}$。

7. 不使用计算机，证明 $\tan 15°+\cot 15°=4$。

8. 解下列三角方程式，式中 $0\le x\le 2\pi$。
   (a) $2\sin^4 x-2\cos^4 x=1$
   (b) $2\sin 3x\tan 2x-\tan 2x-2\sin 3x+1=0$
   (c) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$

董總 DONG ZONG

9. 解下列三角方程式，式中 $-180° < x < 180°$

(a) $4\cos x - 3\sec x + 1 = 0$

(b) $2\sin 2x + \sin x = 0$

(c) $3\cos 2x + \sin x = 1$

(d) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

10. 求下列三角方程式的一般解：

(a) $\cos 2x = \cos x - \sin x$

(b) $\cos 2x + \sin x = 0$

(c) $2\operatorname{cosec} x - \sqrt{3}\cot x = 1$

11. 证明 $\left(1-\cos^2\theta\right)\sec^2\theta = \tan^2\theta$。

据此，解方程式 $\left(1-\cos^2\theta\right)\sec^2\theta = 3$， $0° \le \theta \le 360°$。

12. 证明 $(\sec\theta + \tan\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$。

据此，解方程式 $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$， $0° \le \theta \le 360°$。

13. 证明 $\sec\theta - \tan\theta\sin\theta = \cos\theta$。

据此，求方程式 $2\sec\theta - 2\tan\theta\sin\theta = 1$ 的一般解，答案以弧度表示。

14. 已知 $f(\theta) = 8\sin\theta - 15\cos\theta$。

(a) 以 $R\sin(\theta-\alpha)$ 的形式表示 $f(\theta)$，其中 $R>0$ 且 α 是锐角。

(b) 据 (a) 求 $f(\theta)$ 的值域。

(c) 解方程式 $f(x) = -9$， $0° \le x \le 360°$。

15. 求 θ 的值使得 $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$ 为最大。

16. 将 $5\cos\theta + 12\sin\theta$ 写成 $R\cos(\theta-\alpha)$ 的形式，其中 $R>0$ 且 α 是锐角。

(a) 求 $\dfrac{14}{5\cos\theta + 12\sin\theta - 15}$ 的最大值与最小值。

(b) 求 $\dfrac{198}{(5\cos\theta + 12\sin\theta)^2 + 11}$ 的最大值与最小值。

(c) 解方程式 $5\cos\theta + 12\sin\theta + 10 = 0$， $0° \le \theta \le 360°$。

董總 DONG ZONG

17. 已知 A 、B 、C 是一个三角形的三个内角。证明
$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$ 。

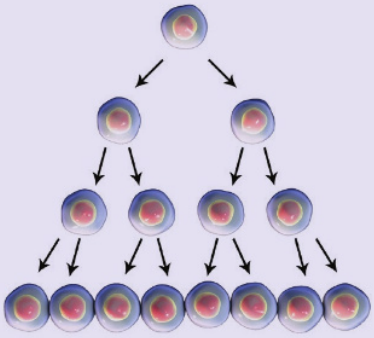
18. 用图解法，求下列方程式在范围内的解的个数：
(a) $\sin x+\cos x=1$ ， $0\le x\le 2\pi$
(b) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin x+\cos x=0$ ， $0\le x\le 2\pi$

19. 一物体做抛射体运动，其抛射角为 θ ，初速度为 v_0 。取抛物点为原点，水平方向为 x 轴，竖直方向为 y 轴，建立直角坐标系。在 t 秒后，抛射体水平位置为 $x=(v_0\cos\theta)t$ ，而竖直位置为 $y=(v_0\sin\theta)t-\dfrac{1}{2}gt^2$ 。
(a) 证明 $y=x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2{v_0}^2}(1+\tan^2\theta)$ 。
(b) 抛射的射程是物体的抛射点与落地点的距离。证明射程 $R=\dfrac{{v_0}^2\sin 2\theta}{g}$ 。
据此，在初速度大小相同的情况下，推论当抛射角 $0°<\theta<45°$ ，$45°<\theta<90°$ 和 $\theta=45°$ 时，对射程所带来的变化。

20. 已知在正弦交流电中，电容器电压比电流落后 $\dfrac{\pi}{2}$ 的相位。假设电容器的正弦交流电的电压为 $V=V_m\sin\omega t$ ，其中 V_m 是电压的峰值， t 是时间及 ω 是一常数。因此，电容器的交流电为 $I=I_m\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ ，其中 I_m 是电流的峰值。证明电容器的电功率， $P=VI$ 的周期为其电压的周期一半。

董總 DONG ZONG

指数与对数是研究自然现象及社会问题重要的工具。例如：



要研究某种细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，再由 2 个分裂成 4 个，依此类推，像这样的细胞分裂 x 次后，得到的细胞个数会有几个呢？

假设我国在某一年的国民生产总值是 a 亿令吉，若每年都比上一年增长 5%，那么要经过多少年才能使得国民生产总值是原来的 4 倍？

地震时，我们常说的里氏地震级数又是怎样的计算方式？

以上种种都牵涉到本章所讨论的指数与对数的问题。

12

指数与对数

学习目标

- 掌握指数函数与对数函数的性质及运算法则
- 理解对数函数的定义
- 认识指数函数与对数函数的图像并掌握其性质
- 掌握对数的换底公式
- 能解指数及对数方程式

12.1 指数函数

指数的定义及运算法则

在初中，我们学过了以下有理数的指数幂的定义：

正整数指数 $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ 项}}$ （n 是正整数）

零指数 $a^0=1$ （$a\neq 0$）

负整数指数 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ （$a\neq 0$，n 是正整数）

分数指数 $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ （$a>0$， $n>1$ 且 m，n 是正整数）

此外，有理数的指数幂还有以下的运算法则：

$$a^x\times a^y=a^{x+y}$$
$$a^x\div a^y=a^{x-y}\quad(a\neq 0)$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy}$$
$$(ab)^x=a^xb^x$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}\quad(b\neq 0)$$

董總 DONG ZONG

例题 1

计算 $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+(-\pi)^0-\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.125^{-\frac{1}{3}}$。

解 $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+(-\pi)^0-\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.125^{-\frac{1}{3}}$

$$= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 1 - \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{\left(0.5^3\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3} + 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2$$

$$= 3\frac{5}{48}$$

例题 2

化简: (a) $\dfrac{\left(a^{-2}b^{-3}\right)\left(-4a^{-1}b\right)}{12a^{-4}b^{-2}c}$ (b) $\dfrac{2\cdot 3^{2x+3}+3^{2x}}{9^x}$

解 (a) $\dfrac{\left(a^{-2}b^{-3}\right)\left(-4a^{-1}b\right)}{12a^{-4}b^{-2}c} = -\dfrac{1}{3}a^{-2+(-1)-(-4)}b^{-3+1-(-2)}c^{-1}$

$$= -\frac{1}{3}a^1b^0c^{-1}$$

$$= -\frac{a}{3c}$$

(b) $\dfrac{2\cdot 3^{2x+3}+3^{2x}}{9^x} = \dfrac{2\cdot 3^3\cdot 3^{2x}+3^{2x}}{3^{2x}}$

$$= \frac{3^{2x}(2\times 27+1)}{3^{2x}}$$

$$= 54+1$$

$$= 55$$

随堂练习 12.1a

1. 计算 $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{-0.25}\times\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2.5}$。

2. 化简：(a) $5a^{-2}b^{-3}\div 5^{-1}a^2b^{-3}\times 5^{-2}ab^4c$ (b) $\dfrac{25^{x+2}-5^{2x}}{4\cdot 5^{2x-1}}$

指数函数的图像及其性质

在现实生活中，我们遇到很多应用到指数的例子。例如：某种细胞由一个分裂成两个，两个再分裂成四个，依此类推，则经过 x 次分裂后，细胞的总数为 $f(x)=2^x$ 个。

已知 $a>0$，$a\neq 1$，我们称 $f(x)=a^x$，$x\in \boldsymbol{R}$ 为指数函数 (exponential function)。

1 为什么指数函数的底数 a 不能等于 1 且不能小于 0？

为了研究指数函数的图像与性质，我们作 $y=2^x$，$y=10^x$ 及 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像。

先作表如下：

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
2^x	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

x	...	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	...
10^x	...	0.1	0.32	0.56	1	1.78	3.16	10	...

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...

董總 DONG ZONG

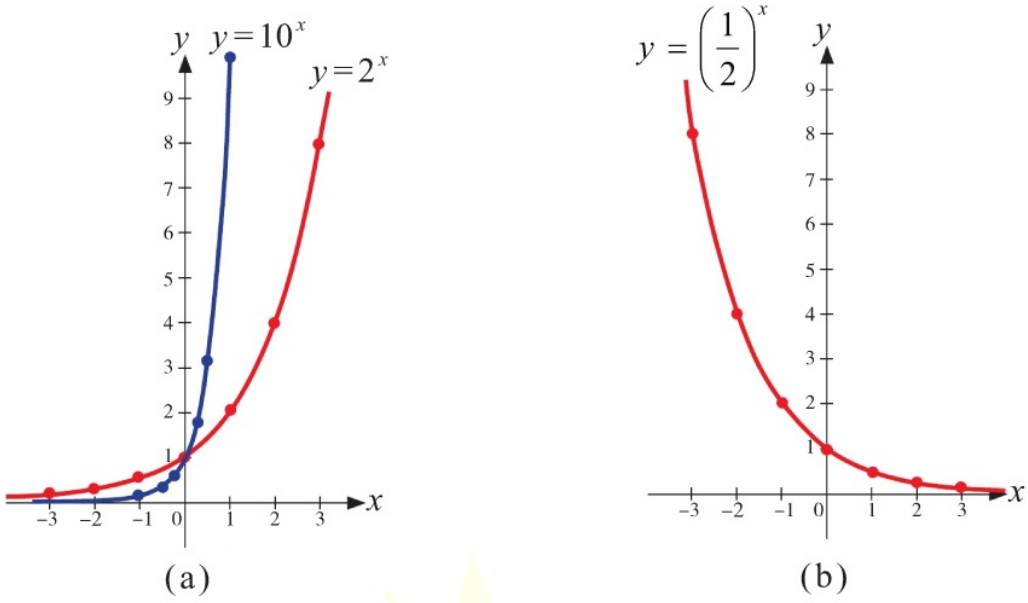
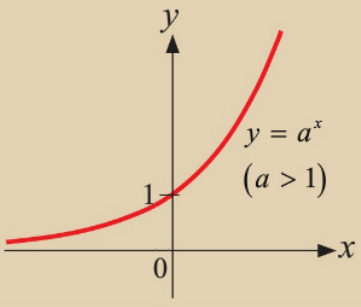
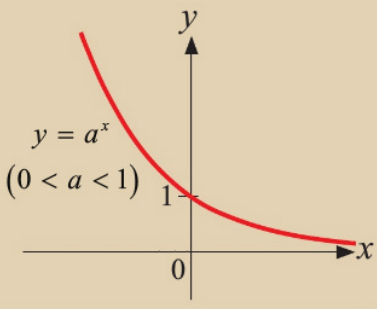


图12–1

由图12–1，我们可以观察到：

- 函数 $y=2^x$， $y=10^x$ 及 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像都只位于 x 轴的上方。事实上，由于 $a>0$，所以 $a^x>0$。因此指数函数 $y=a^x$ 的值恒大于0。
- x 轴是指数函数 $y=a^x$ 的渐近线。
- 当 $x=0$ 时， $y=a^0=1$。因此指数函数 $y=a^x$ 的图像都通过点 $(0,1)$。
- 对于函数 $y=2^x$ 及 $y=10^x$，当 $x>0$ 时， $y>1$；当 $x<0$ 时， $0<y<1$。当 x 的值增大时， y 的值也随着增大，即函数在区间 $(-\infty,\infty)$ 上是增函数。
- 对于函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，当 $x>0$ 时， $0<y<1$；当 $x<0$ 时， $y>1$。当 x 的值增大时， y 的值减小，即函数在区间 $(-\infty,\infty)$ 上是减函数。

因此，在讨论函数 $y=a^x$ 的图像及性质时，我们需分开讨论 $a>1$ 及 $0<a<1$ 的情况，如下表所示:

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	$y>0$，即值域 $=(0,\infty)$	
	当 $x=0$ 时，$y=1$	
	当 $x>0$ 时，$y>1$ 当 $x<0$ 时，$0<y<1$	当 $x>0$ 时，$0<y<1$ 当 $x<0$ 时，$y>1$
	在区间 $(-\infty,\infty)$ 上是增函数	在区间 $(-\infty,\infty)$ 上是减函数

探索活动 1

目的：探索指数函数的图像

工具：https://www.geogebra.org/m/rweqzcrt

董總 DONG ZONG

例题 3

不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $1.5^{3.1}$ 与 $1.5^{3.5}$　　(b) $0.7^{2.3}$ 与 $0.7^{3.2}$

(c) $0.2^{-5.1}$ 与 $0.2^{-4.1}$

解 (a) 由于底数 $1.5>1$，指数函数 $y=1.5^x$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上是增函数，

指数 $3.1<3.5$

$\therefore 1.5^{3.1}<1.5^{3.5}$

(b) 由于底数 $0<0.7<1$，指数函数 $y=0.7^x$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上是减函数，

指数 $2.3<3.2$

$\therefore 0.7^{2.3}>0.7^{3.2}$

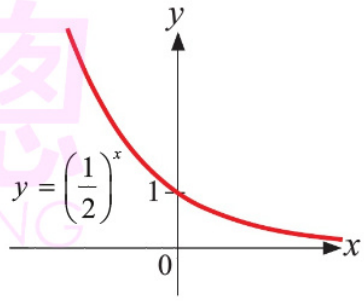
(c) 由于底数 $0<0.2<1$，指数函数 $y=0.2^x$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上是减函数，

指数 $-5.1<-4.1$

$\therefore 0.2^{-5.1}>0.2^{-4.1}$

例题 4

解不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$。



解 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$

$\because y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数，

$x \ge x^2$

$x(x-1)\le 0$

$\therefore 0\le x\le 1$

随堂练习 12.1b

1. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

   (a) $\pi^{2.1}$ 与 $\pi^{3.5}$　　(b) $0.15^{-2.3}$ 与 $0.15^{-3.8}$

2. 解不等式 $3^{x^2-3x+5} \ge 3^{x+10}$。

习题 12.1

计算：（1 至 4）

1. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}+\left(1\frac{11}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(2\frac{2}{3}\right)^{0}$

2. $12^{\frac{1}{3}}\times 6^{\frac{1}{3}}\div 27^{\frac{1}{6}}\div 3^{\frac{1}{6}}$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+125^{\frac{2}{3}}+343^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

4. $\dfrac{\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}\right)^{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$

化简下列各式（5 至 8）：

5. $\left(\frac{b}{2a^{2}}\right)^{3}\div\left(\frac{2b^{2}}{3a}\right)^{0}\times\left(-\frac{b}{a}\right)^{-3}$

6. $\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{-\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}}\right)$

7. $\dfrac{3\cdot 2^{n}-4\cdot 2^{n-2}}{2^{n}-2^{n-1}}$

8. $\dfrac{3^{n+6}-6\cdot 3^{n+1}}{7\cdot 3^{n+2}}$

9. 已知 $a^{2x}=\sqrt{2}+1$，求 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$ 的值。

10. 在同一直角坐标系中，作 $y=3^{x}$ 及 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 的图像。

11. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $2.5^{7.1}$ 与 $2.5^{8.5}$

(b) $0.35^{6.5}$ 与 $0.35^{5.6}$

(c) $1.03^{-2.1}$ 与 $1.03^{-3.2}$

(d) $\left(\sqrt{2}\right)^{\pi}$ 与 $\left(\sqrt{2}\right)^{3.5}$

(e) $0.01^{-\frac{1}{3}}$ 与 $0.01^{-\frac{1}{2}}$

(f) $2.7^{\sqrt{20}}$ 与 $2.7^{\sqrt[3]{35}}$

12. 解不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^{2}}<1$。

重綜 DONG ZONG

12.2 对数函数

对数的定义及性质

设 a 是不等于 1 的正数，若 $a^n = x$，我们定义 $\log_a x = n$，读作“以 a 为底，x 的对数为 n”。在 $\log_a x$ 中，a 为底数，x 为真数。

反之，若 $\log_a x = n$，则 $a^n = x$，即

$$a^n = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x = n$$

其中 $a > 0$，$a \neq 1$，$x > 0$

由此可得：

$$\log_a a^n = n$$

当 $n = 1$ 及 $n = 0$ 时，我们有以下两个特殊的情况：

$$\log_a a = 1$$
$$\log_a 1 = 0$$

以 10 为底的对数，叫做常用对数，记作 $\log_{10} x$，$\lg x$ 或 $\log x$。

对数中还有一个特别的底数 e，它是一个无理数，约等于 2.71828。以 e 为底的对数，称为自然对数 (natural logarithm)，记作 $\log_e x$ 或 $\ln x$，它在自然科学中的应用很广。

例题 5

若 $\log_3 x = 5$，求 x 的值。

解 $\log_3 x = 5$

$$x = 3^5$$
$$= 243$$

例题 6

求下列各式的值：

(a) $\log_5 5$　　(b) $\lg 1$

(c) $\log_7 343$　　(d) $\ln \frac{1}{e^2}$

解 (a) $\log_5 5 = 1$　　(b) $\lg 1 = 0$

(c) $\log_7 343 = \log_7 7^3 = 3$　　(d) $\ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$

随堂练习 12.2a

1. 若 $\log_4 x = -2$，求 x 的值。
2. 求下列各式的值：

(a) $\log_2 \frac{1}{2}$　　(b) $\lg 10$

(c) $\log_{\frac{1}{3}} 27$　　(d) $\log_4 \frac{1}{128}$

董總 DONG ZONG

对数的运算法则

若 a，x 与 y 是正数，且 $x = a^p$，$y = a^q$，则 $\log_a x = p$，$\log_a y = q$。

- $$xy = a^p \times a^q = a^{p+q}$$
  $$\therefore \log_a (xy) = p + q$$
  $$= \log_a x + \log_a y$$

- $$\frac{x}{y} = a^p \div a^q = a^{p-q}$$
  $$\therefore \log_a \frac{x}{y} = p - q$$
  $$= \log_a x - \log_a y$$

- $x^m = \left(a^p\right)^m = a^{mp}$

  $\log_a x^m = mp$

  $\therefore \log_a x^m = m\log_a x$

- $x = a^p$ -----(1)，则 $\log_a x = p$ -----(2)

将(2)代入(1)，得 $x = a^{\log_a x}$。

总结如下：

若 $x > 0$，$y > 0$，

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^m = m\log_a x$

$a^{\log_a x} = x$

例题 7

设 $a = \log 2$，以 a 表示下列各式：

(a) $\log 8^2$

(b) $(\log 8)^2$

解 (a) $\log 8^2 = \log 2^6$

$= 6\log 2$

$= 6a$

(b) $(\log 8)^2 = \left(\log 2^3\right)^2$

$= (3\log 2)^2$

$= (3a)^2$

$= 9a^2$

董總 DONG ZONG

例题 8

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $100^{\log 3}$　　(b) $2\log_3 15 - \log_3 50 + \log_3 6$

解 (a)
$$\begin{aligned} 100^{\log 3} &= 10^{2\log 3} \\ &= 10^{\log 3^2} \\ &= 9 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2\log_3 15 - \log_3 50 + \log_3 6 &= \log_3 (15)^2 - \log_3 50 + \log_3 6 \\ &= \log_3 \frac{225 \times 6}{50} \\ &= \log_3 3^3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

例题 9

已知 $\log_2 3 = a$，$\log_2 5 = b$。以 a 及 b 表示下列各式：

(a) $\log_2 30$　　(b) $\log_2 \sqrt{1.25}$

解 (a)
$$\begin{aligned} \log_2 30 &= \log_2 (2 \times 3 \times 5) \\ &= \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5 \\ &= 1 + a + b \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{1.25} &= \log_2 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\log_2 5 - \log_2 2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(b-2) \end{aligned}$$

随堂练习 12.2b

1. 计算下列各式：

   (a) $2^{\log_2 7}$　　(b) $\log\frac{1}{35} + \log 70 - \log\frac{1}{2} + 2\log 5$

2. 已知 $\log_3 2 = a$，$\log_3 5 = b$，以 a 及 b 表示 $\log_3 3.75$。

对数的换底公式

一些常用的计算机以底数 10 或 e 的对数做运算，换底公式能将任意底的对数转换为以 10 或 e 为底的对数，就很容易求出任意不等于 1 的正数为底的对数。

换底公式也能在化简的运算中，将不同底数的对数换成相同底数的对数。

若 $\log_a b = n$，则

$$\begin{aligned} a^n &= b \\ \log_c a^n &= \log_c b \\ n\log_c a &= \log_c b \\ n &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{aligned}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

这就是对数的换底公式。

利用换底公式，我们可以将任何对数表示成以特定的数为底数的对数。在换底公式中，令 $c = b$ 可得：

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

董總 DONG ZONG

例题 10

求 $\log_3 5$ 的值。

解 $\log_3 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}$

$= 1.4650$

例题 11

不使用计算机，求下列各式的值：

(a) $\log_8 32$　　(b) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{81}$

解 (a) $\log_8 32 = \dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3}$

$= \dfrac{5}{3}$

(b) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{81} = \dfrac{\log_3 3^{-4}}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{-4}{\frac{1}{2}}$

$= -8$

想一想 2　在例题11中，是否可以换成其他的底数？

例题 12

已知 $\log_2 3 = x$，$\log_3 5 = y$。以 x 及 y 表示 $\log_9 2.5$。

解 $\log_9 2.5 = \dfrac{\log_3 \frac{5}{2}}{\log_3 3^2}$

$= \dfrac{\log_3 5 - \log_3 2}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{1}{\log_2 3}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{1}{x}\right)$

$= \dfrac{xy - 1}{2x}$

董總 DONG ZONG

随堂练习 12.2c

1. 不使用计算机，求 $\dfrac{\log_4 27}{\log_2 3}$ 的值。
2. 若 $\log_2 3 = a$，$\log_5 3 = b$，以 a 及 b 表示 $\log 5$。

例题 13

已知 $3\log_7\left(xy^2\right)+\log_7 x=4+2\log_7 y$，以 x 表示 y。

解

$$\begin{aligned}3\log_7\left(xy^2\right)+\log_7 x&=4+2\log_7 y\\3\left(\log_7 x+\log_7 y^2\right)+\log_7 x-2\log_7 y&=4\\4\log_7 x+4\log_7 y&=4\\\log_7 x+\log_7 y&=1\\\log_7\left(xy\right)&=1\\xy&=7\\y&=\frac{7}{x}\end{aligned}$$

习题 12.2a

求下列各式中 x 的值（1 至 2）：

1. $\log_{125} x=\frac{1}{3}$

2. $\log_x 81=-4$

化简下列各式（3 至 8）：

3. $\log_2 4^x$

4. $\log_2 a^{\log_a 2}$

5. $3^{\log_3 x-\log_3 y}$

6. $\log_3\left(9^x\times 27^y\right)$

7. $2^{-\log_8 x}$

8. $3\log_4 2^x$

不使用计算机，求下列各式的值（9 至 18）：

9. $\log_7\sqrt[3]{49}$

10. $49^{\log_7 3}$

11. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 7}$

12. $\dfrac{\log\sqrt{3}}{\log\frac{1}{9}}$

13. $\log(0.1)^4-\log\sqrt[3]{0.001}$

14. $\dfrac{\log 4+\log 3}{1+\log 0.4+\frac{1}{2}\log 9}$

董總 DONG ZONG

15. $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{8} \cdot \log_5 \frac{1}{9}$

16. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

17. $\left(\log_2 3 + \log_2 \sqrt{3}\right) \log_{\sqrt{3}} 2$

18. $\frac{1}{2}\log\frac{81}{17} + 2\log\frac{5}{3} - \log\frac{17}{4} + \frac{3}{2}\log 17$

19. 已知 $\log_2 3 = a$， $\log_2 5 = b$。以 a 及 b 表示 $\log_4 15$。

20. 已知 $\log_3 5 = m$ 及 $\log_5 6 = n$。以 m 及 n 表示 $\log_{25} 54$。

21. 已知 $2^a = 3$， $3^b = 7$。以 a 及 b 表示 $\log_{42} 14$。

22. 已知 $\log_3 6 = x$，以 x 表示 $\log_9 12$。

23. 若 $\log 24 = a$， $\log 18 = b$，以 a 及 b 表示 $\log 1.35$。

24. 已知 $\log_{25}(2x-1) = \log_5(x-3) + \log_{25} 5$，证明 $5x^2 - 32x + 46 = 0$。

25. 若 a， b， x 是正数，且 a、b 不等于 1，证明 $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{\log_{ab} x}$。

董總
DONG ZONG

对数函数的图像及其性质

由对数的定义可知，若 $y = 2^x$，则 $x = \log_2 y$。因为 $y = 2^x$ 是由实数集合映至正实数集合的一一映成函数，所以有反函数。根据反函数的概念， $y = \log_2 x$ 就是 $y = 2^x$ 的反函数。函数 $y = \log_a x$ 叫做对数函数 (logarithmic function)，其中 $a > 0$，且 $a \neq 1$。由于指数函数 $y = a^x$ 的定义域是实数集合，值域是正实数集合，所以对数函数 $y = \log_a x$ 的定义域是正实数集合，值域是实数集合。

由于对数函数 $y = \log_a x$ 是指数函数 $y = a^x$ 的反函数，所以 $y = \log_a x$ 的图像与 $y = a^x$ 的图像对称于直线 $y = x$。我们只需画出与 $y = a^x$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称的曲线，就能得到 $y = \log_a x$ 的图像。例如：在图 12–2(a) 及 (b) 中，函数

$y=2^x$， $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称的曲线，分别是$y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像。

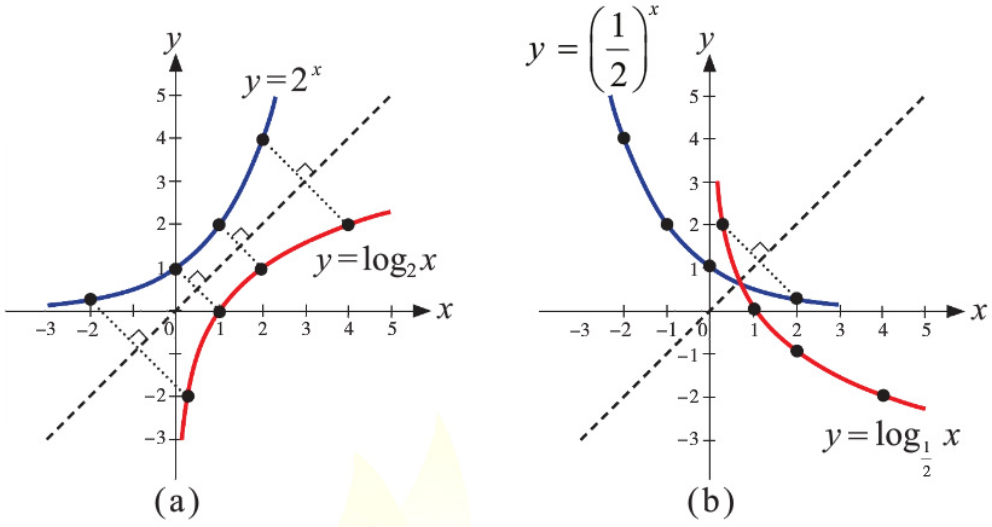
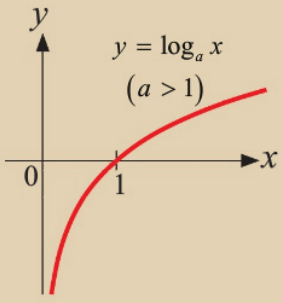
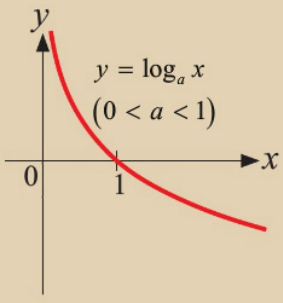


图12–2

由图 12–2，我们可以观察到：

- 函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像只位于 y 轴的右方，因为它们的定义域是 $(0,\infty)$。
- y 轴是对数函数 $y=\log_a x$ 的渐近线。
- 当 $x=1$ 时， $y=\log_a 1=0$，因此对数函数 $y=\log_a x$ 的图像都通过点 $(1,0)$。
- 对于函数 $y=\log_2 x$，当 $x>1$ 时， $y>0$；当 $0<x<1$ 时， $y<0$。当 x 的值增大时， y 的值也随着增大，即函数在区间 $(0,\infty)$ 上是增函数。
- 对于函数$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，当 $x>1$ 时， $y<0$；当 $0<x<1$ 时， $y>0$。当 x 的值增大时， y 的值减小，即函数在区间 $(0,\infty)$ 上是减函数。

由此可见，在讨论函数 $y=\log_a x$ 的图像及性质时，我们需分开讨论 $a>1$ 及 $0<a<1$ 的情况，如下表所示：

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	$x>0$，即定义域 $=(0,\infty)$	
	当 $x=1$ 时，$y=0$	
	当 $x>1$ 时，$y>0$ 当 $0<x<1$ 时，$y<0$	当 $x>1$ 时，$y<0$ 当 $0<x<1$ 时，$y>0$
	在区间 $(0,\infty)$ 上是增函数	在区间 $(0,\infty)$ 上是减函数

董總 DONG ZONG

探索活动 2

目的：探索对数函数的图像

工具：https://www.geogebra.org/m/ks3qqrua

例题 14

不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $\log_3 5$ 与 $\log_3 7$　　(b) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ 与 $\log_{\frac{1}{2}} 9$

解 (a) 由于底数 $3>1$，对数函数 $y=\log_3 x$ 在区间 $(0,\infty)$ 上是增函数，

真数 $5<7$

$\therefore \log_3 5<\log_3 7$

(b) 由于底数 $0<\frac{1}{2}<1$，对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 在区间 $(0,\infty)$ 上是减函数，

真数 $5<9$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 5>\log_{\frac{1}{2}} 9$

例题 15

求下列各函数的定义域：

(a) $f(x)=\log_a(x-4)$　　(b) $y=\log_2(x^2+5)$

(c) $y=\log_3\frac{x+3}{2-x}$　　(d) $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3-x)}$

解 (a) 由 $x-4>0$，得 $x>4$。

$\therefore$ 函数 $f(x)=\log_a(x-4)$ 的定义域是 $\{x\mid x\in \boldsymbol{R}$，且 $x>4\}$。

(b) 对于所有 $x\in \boldsymbol{R}$，$x^2+5>0$。

$\therefore$ 函数 $y=\log_2(x^2+5)$ 的定义域是 $\boldsymbol{R}$。

(c) 由 $2-x\neq 0$ 且 $\frac{x+3}{2-x}>0$，即 $\frac{x+3}{x-2}<0$，得 $-3<x<2$。

$\therefore$ 函数 $y=\log_3\frac{x+3}{2-x}$ 的定义域是 $\{x\mid x\in \boldsymbol{R}$，且 $-3<x<2\}$。

(d) x 须同时满足 $3-x>0$ 且 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geq 0$，

即 $\begin{cases} x<3 \\ 3-x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 2\leq x<3$。

$\therefore$ 函数 $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$ 的定义域是 $[2,3)$。

例題 16

解不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)+2>0$。

解

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)+2>0$$

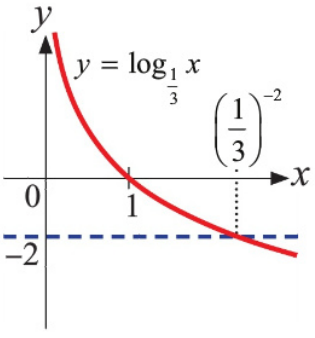
$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)>-2$$

由 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 的图像可得：

$$0<2x-1<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$0<2x-1<9$$

$$\therefore \frac{1}{2}<x<5$$



例題 17

解不等式 $\log_3(x^2-2x)<1$。

解 $\log_3(x^2-2x)<1$

由 $y=\log_3 x$ 的图像可知 $0<x^2-2x<3^1$

因此可得不等式组：

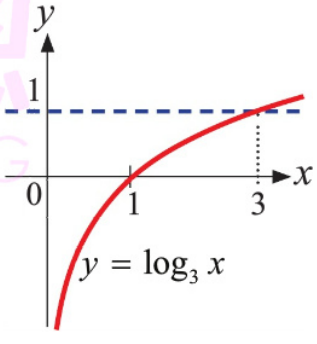
$$\begin{cases} x^2-2x>0 \text{ -----(1)} \\ x^2-2x<3 \text{ -----(2)} \end{cases}$$

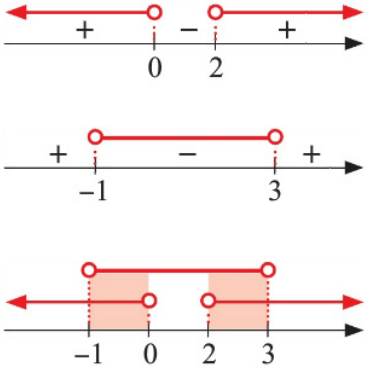
由 (1) 得：$x(x-2)>0$

$x<0$ 或 $x>2$

由 (2) 得：$(x+1)(x-3)<0$

$-1<x<3$





$\therefore$ 不等式 $\log_3(x^2-2x)<1$ 的解为

$-1<x<0$ 或 $2<x<3$

董總 DONG ZONG

随堂练习 12.2d

1. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $\log_{0.3}5$ 与 $\log_{0.3}7$　　(b) $\log_{\frac{1}{2}}0.4$ 与 $\log_2 0.7$

2. 求下列各函数的定义域：

(a) $f(x)=\log_2(x^2+8)$　　(b) $f(x)=\log_3\dfrac{1-2x}{x+2}$

3. 解不等式 $\log_3(x^2-2x)\geq 1$。

对数函数的应用

例题 18

在 1935 年，美国的里克特 (C. F. Richter) 提出了测量地震震级的标度，这就是常说的里氏震级 M，其计算公式为 $M=\lg A-\lg A_0$。其中 A 是地震的最大振幅，A_0 是“标准地震”的振幅。

(a) 设在一次地震中，一个距离震中 100 km 的测震仪记录到地震最大振幅为 30 mm，此时标准地震的振幅是 0.001 mm，计算这次地震的震级（准确至 0.1）；

(b) 问 7.2 级地震的最大振幅是 5 级地震的最大振幅的多少倍?

解 (a) 震级 $M=\lg 30-\lg 0.001$

$$=\lg\frac{30}{0.001}$$

$$=\lg 30000$$

$$=4.5$$

因此，这是大约为 4.5 级的地震。

(b) 由 $M=\lg A-\lg A_0$，可得 $M=\lg\dfrac{A}{A_0}$，

$$\frac{A}{A_0}=10^M$$

$$A=A_0\times 10^M$$

当 $M = 7.2$ 时，$A_1 = A_0 \times 10^{7.2}$，

当 $M = 5$ 时，$A_2 = A_0 \times 10^{5}$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 \times 10^{7.2}}{A_0 \times 10^{5}}$$
$$= 10^{2.2}$$
$$= 158$$

∴ 7.2 级地震的最大振幅是 5 级地震的最大振幅的 158 倍。很明显地，虽然地震震级仅相差 2.2 级，但振幅却是 158 倍，因此 7 级地震的破坏性远大于 5 级地震。

例题 19

溶液中的酸碱度是通过 pH 值来衡量，pH 的计算公式是 $\text{pH} = -\lg\left[\text{H}^+\right]$，其中 $\left[\text{H}^+\right]$ 是溶液中氢离子的浓度（单位是摩尔/公升）。

(a) 根据 pH 的计算公式，说明酸碱度与氢离子的浓度之间的变化关系；

(b) 若某酸溶液的氢离子的浓度是 2.5×10^{-5} 摩尔/公升，计算此溶液的 pH 值。

解 (a) 由公式 $\text{pH} = -\lg\left[\text{H}^+\right]$

可知 pH 的值会随着 $\left[\text{H}^+\right]$ 的增加而减小；因此，溶液中的氢离子的浓度越大，pH 值就越小，即溶液的酸性越强。

(b) 当 $\left[\text{H}^+\right] = 2.5 \times 10^{-5}$ 时，$\text{pH} = -\lg\left(2.5 \times 10^{-5}\right)$

$$= 4.602$$

习题 12.2b

1. 在同一直角坐标系上，作 $y=\log_3 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图像。

2. 不使用计算机，比较下列各题中两个值的大小：

(a) $\log_{1.5}1.4$ 与 $\log_{1.5}1.6$

(b) $\log_{0.4}\sqrt{2}$ 与 $\log_{0.4}\sqrt{3}$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}3$ 与 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$

(d) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ 与 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$

3. 求下列各函数的定义域：

(a) $f(x)=\log_3\left(9-16x^2\right)$

(b) $f(x)=\log_9\frac{1}{x-2}$

(c) $f(x)=\frac{1}{\log_3(7x-5)}$

(d) $f(x)=\sqrt{\lg(2x-1)}$

4. 解下列各不等式：

(a) $\log_5(2x-3)\le 2$

(b) $\log_{\frac{1}{6}}(3x-4)+1<0$

(c) $\log_2 x\ge\log_2(2x-1)$

(d) $2\log_{\frac{1}{4}}\left(3x^2-x\right)+1\ge 0$

董總 DONG ZONG

12.3 指数方程式与对数方程式

指数方程式

未知数在指数的位置上的方程式，叫做指数方程式 (exponential equation)。例如：

- $2^x=4^{x+1}$
- $3^x+3^{-x}=8$ 都是指数方程式。

例题 20

解方程式 $4^x = 3$。(答案准确至小数四位)

解法一

$$\begin{aligned} 4^x &= 3 \\ x &= \log_4 3 \\ &= \frac{\lg 3}{\lg 4} \\ &= 0.7925 \end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned} 4^x &= 3 \\ \lg 4^x &= \lg 3 \\ x \lg 4 &= \lg 3 \\ x &= \frac{\lg 3}{\lg 4} \\ &= 0.7925 \end{aligned}$$

由例题 20 可知，若 a 及 b 是正数，方程式 $a^x = b$ 的解为 $x = \dfrac{\log b}{\log a}$。

例题 21

解方程式 $3 \cdot 5^{x+1} = 2^{2x-1}$。（答案准确至小数两位）

解

$$3 \cdot 5^{x+1} = 2^{2x-1}$$

两边取对数 $\lg 3 + (x+1)\lg 5 = (2x-1)\lg 2$

$$\begin{aligned} x(\lg 5 - 2\lg 2) &= -\lg 2 - \lg 3 - \lg 5 \\ x &= -\frac{\lg 2 + \lg 3 + \lg 5}{\lg 5 - 2\lg 2} \\ &= -15.24 \end{aligned}$$

随堂练习 12.3a

解方程式：（答案准确至小数四位）

1. $2 \cdot 5^{x+1} = 9$
2. $7^{x+3} = 5^{3x+1}$

例题 22

解方程式 $5^{x+1}-3\cdot 5^{x-1}=20$。（答案准确至小数四位）

解

$$5^{x+1}-3\cdot 5^{x-1}=20$$
$$5\cdot 5^{x}-\frac{3}{5}\cdot 5^{x}=20$$
$$5^{x}\left(5-\frac{3}{5}\right)=20$$
$$5^{x}=\frac{50}{11}$$
$$x=\frac{\lg\frac{50}{11}}{\lg 5}$$
$$=0.9408$$

例题 23

解方程式 $2^{x+1}-3\cdot 2^{-x}+5=0$。

解

$$2^{x+1}-3\cdot 2^{-x}+5=0$$
$$2(2^{x})-3\left(\frac{1}{2^{x}}\right)+5=0$$

设 $y=2^{x}$，则原方程式化为

$$2y-\frac{3}{y}+5=0$$
$$2y^{2}+5y-3=0$$
$$(2y-1)(y+3)=0$$
$$y=\frac{1}{2}\text{ 或 }y=-3$$

当 $y=\frac{1}{2}$，$2^{x}=\frac{1}{2}=2^{-1}$ 时，得 $x=-1$；

当 $y=-3$，$2^{x}=-3$ 时，由于 2^{x} 必须大于 0，所以无解。

$\therefore$ 原方程式的解是 $x=-1$。

董總 DONG ZONG

随堂练习 12.3b

解方程式：

1. $3^{x+1}+9^{x}-18=0$
2. $2^{x+2}+3\left(2^{1-x}\right)-14=0$

指数函数的应用

例题 24

已知 n 年后的本利和的公式是 $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$，其中 p 是本金，r 是年利率。若陈先生将 RM 100,000 存进银行，年利率是 3.5%。问至少经过多少年后，其本利和才会多过本金的两倍?

解

$$p\left(1+\frac{3.5}{100}\right)^{n}>2p$$

$$1.035^{n}>2$$

$$\log 1.035^{n}>\log 2$$

$$n\log 1.035>\log 2$$

$$n>\frac{\log 2}{\log 1.035}=20.15$$

$\therefore$ 至少要 21 年，本利和才会多过本金的两倍。

例题 25

一些化学元素会自然地衰变，每经过一段时间 T 后，它的量只剩下原先的一半，T 称为此元素的半衰期。若此元素在时间 $t=0$ 时的量是 N_0，则经过时间 T 后，它的量为 $\frac{1}{2}N_0$，所以经过时间 $2T$ 后，它的量为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}N_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}N_0$，依此类推。因此经过时间 t 后，它的量为 $N=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}N_0$。已知碳 -14 的半衰期是 5730 年，一定量的碳 -14 至少需要经过多少年，才会剩下少于原先的 90%?

解 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} N_0 < \frac{90}{100} N_0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} < 0.9$$

$$\frac{t}{5730} > \log_{\frac{1}{2}} 0.9$$

$$t > 5730 \times \frac{\log 0.9}{\log 0.5}$$

$$t > 870.98$$

$\therefore$ 至少需经过 870.98 年。

想一想 3 从第二步到第三步，为什么要改变不等号的方向？

习题 12.3a

解下列各方程式（1 至 15）：

1. $8^{x-3} = \frac{1}{256}$
2. $3^{2^x+1} = 243$
3. $10^{x^2-4} = 1$
4. $3^{x^2+3} = 27^{x+7}$
5. $4^{x^2} = 2^{5x+7}$
6. $\left(\frac{9}{16}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{x-6}$
7. $3^{x+1} = 4^{x-1}$
8. $7^{5-3x} = 2\left(5^{x+2}\right)$
9. $2^{x^2-1} = 3^{x+1}$
10. $\left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \frac{80}{9}$
11. $25^x - 23 \cdot 5^x - 50 = 0$
12. $3^{x-1} + 3^{3-x} - 10 = 0$
13. $3^x - 5^{x+2} = 3^{x+1} - 5^{x+3}$
14. $4^x + 2^{1-x} = 3$
15. $25\left(4^x\right) + 46\left(10^x\right) = 8\left(25^x\right)$

董總 DONG ZONG

16. 已知 t 年后的本利和的公式是 $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$，其中 p 是本金，r 是年利率。陈老板在年初存 RM 150,000 进银行，年利率是 3.2%，问至少经过几年后，他在银行的存款会超过 RM 200,000？

17. 已知镭 -226 的半衰期是 1600 年，一定量的镭 -226 至少需要经过多少年，才会剩下少于原先的 10%？

对数方程式

对数的底数或真数含有未知数的方程式，称为对数方程式 (logarithmic equation)。例如：

- $\lg(x-1)=3$
- $\log_x 2=4$ 都是对数方程式。

解对数方程式时，必须对所得的根进行检验。

董總 DONG ZONG

例题 26

解方程式 $2\log_5 x=1$。

解 $2\log_5 x=1$

$\log_5 x=\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{5}$

$\therefore$ $x=\sqrt{5}$ 是原方程式的解。

想一想 4

比较例题26，若解方程式 $\log_5 x^2=1$，是否会得到相同的答案？

例题 27

解方程式 $\log_{0.1}(6x^2-5x-3)=0$。

解 $\log_{0.1}(6x^2-5x-3)=0$

$$6x^2-5x-3=1$$
$$6x^2-5x-4=0$$
$$(2x+1)(3x-4)=0$$
$$x=-\frac{1}{2} \text{ 或 } x=\frac{4}{3}$$

经检验，$x=-\frac{1}{2}$ 及 $x=\frac{4}{3}$ 都是原方程式的解。

例题 28

解方程式 $\lg(5-x)=2\lg(x+1)$。

解

$$\lg(5-x)=2\lg(x+1)$$
$$\lg(5-x)=\lg(x+1)^2$$
$$5-x=x^2+2x+1$$
$$x^2+3x-4=0$$
$$(x+4)(x-1)=0$$
$$x=-4 \text{ 或 } x=1$$

经检验，$x=-4$ 是增根，原方程式的解为 $x=1$。

随堂练习 12.3c

解方程式：

1. $\log_2(x^2-2x)=3$。
2. $\log_2 x+\log_2(3-x)=1$。

董總 DONG ZONG

例题 29

解方程式 $\log_3{}^2 x - \log_3 x^3 = 0$。

解

$$\log_3{}^2 x - \log_3 x^3 = 0$$
$$(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x = 0$$
$$(\log_3 x)(\log_3 x - 3) = 0$$
$$\log_3 x = 0 \text{ 或 } \log_3 x = 3$$
$$x = 1 \qquad x = 27$$

经检验，$x = 1$ 及 $x=27$ 都是原方程式的解。

注意

- $(\log_3 x)^2$ 可以写成 $\log_3{}^2 x$。
- $\log_3 x^2$ 表示 $\log_3(x^2)$，它不等于 $(\log_3 x)^2$。

例题 30

解方程式 $\log_5 x - 6\log_x 5 = 1$。

解

$$\log_5 x - 6\log_x 5 = 1$$
$$\log_5 x - \frac{6}{\log_5 x} = 1$$

设 $y = \log_5 x$，则

$$y - \frac{6}{y} = 1$$
$$y^2 - y - 6 = 0$$
$$(y+2)(y-3) = 0$$
$$y = -2 \quad \text{或} \quad y = 3$$
$$\log_5 x = -2 \qquad \log_5 x = 3$$
$$x = \frac{1}{25} \qquad x = 125$$

经检验，$x = \frac{1}{25}$ 及 $x = 125$ 都是原方程式的解。

董總 DONG ZONG

例题 31

解方程式 $x^{1+\lg x}=100$。

解

$$x^{1+\lg x}=100$$

$$\lg x^{1+\lg x}=\lg 100$$

$$(1+\lg x)(\lg x)=2$$

设 $y=\lg x$，则

$$y+y^2=2$$

$$y^2+y-2=0$$

$$(y+2)(y-1)=0$$

$y=-2$ 或 $y=1$

$\lg x=-2$ $\quad$ $\lg x=1$

$x=\dfrac{1}{100}$ $\quad$ $x=10$

经检验，$x=\dfrac{1}{100}$ 及 $x=10$ 都是原方程式的解。

随堂练习 12.3d

解方程式：

1. $\log_2 x-\log_x 8=2$
2. $x^{\lg x}=100x$

董總 DONG ZONG

例题 32

解方程式 $2\ln x = \ln(x-2)+3$。（答案准确至小数二位）

解

$$
\begin{aligned}
2\ln x &= \ln(x-2)+3 \\
\ln x^2 &= \ln(x-2)+\ln e^3 \\
\ln x^2 &= \ln\left[e^3(x-2)\right] \\
x^2 &= e^3x-2e^3 \\
x^2-e^3x+2e^3 &= 0 \\
x &= \frac{e^3 \pm \sqrt{e^6-4(2e^3)}}{2} \\
x &= 17.83 \text{ 或 } x = 2.25
\end{aligned}
$$

经检验，$x = 17.83$ 及 $x = 2.25$ 都是原方程式的解。

随堂练习 12.3e

解方程式 $\ln(x+1)-\ln(x-1)=1$。

董總 DONG ZONG

习题 12.3b

解下列各方程式：

1. $\log_{\sqrt{3}} x = -2$
2. $\log_4(3-x) = -\frac{1}{2}$
3. $\log_2 x^4 = 8$
4. $\log_8(x^2-3x-2) = \frac{1}{3}$
5. $\log x + \log(x-3) = 1$
6. $\log_6 x + \log_6(x^2-7) = 1$
7. $2\log_3^2 x + \log_3 x - 1 = 0$
8. $2\log_{25} x - 3\log_x 25 = 1$
9. $2\log_x 4 + 2\log_4 x = 5$
10. $x^{2\ln x} = ex$
11. $\log_3 \log_2 \log_x 25 = 0$
12. $\log_2 x + \log_8 x = 2\log_2 x \log_8 x$

13. $\ln\left(x^2-x-2\right)-\ln\left(x+1\right)=0$

14. $\log\left(x+6\right)-\frac{1}{2}\log\left(2x-3\right)=2-\log 25$

总复习题 12

不使用计算机，化简下列各式（1 至 4）：

1. $\dfrac{3^{n+2}-2\cdot 3^n}{5\cdot 3^{n+1}+4\cdot 3^{n-1}}$

2. $\log_4\cos\frac{\pi}{4}+\log_4\sin\frac{\pi}{6}$

3. $\left(\log_2 3+\log_4 9\right)\left(\log_3 4+\log_9 2\right)$

4. $\log_8\left(\log_2\sqrt{8+4\sqrt{3}}+\log_2\sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)$

5. 已知 $3^{\log x}=2^{\log 3}$，不使用计算机，求 x 的值。

6. 若 a 及 x 是正数，且 $a\neq 1$，证明 $\log_{a^n}x=\frac{1}{n}\log_a x$。

7. 已知 $\log_2 3=m$，$\log_5 2=n$，以 m 及 n 表示 $\log_6 10$。

8. 已知 $f\left(x\right)=4-\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$g\left(x\right)=\sqrt{4-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$。

   (a) 作 $f\left(x\right)$ 的图像，并求其定义域；

   (b) 求 $g\left(x\right)$ 的定义域。

9. 求函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\log_3\left(2-x\right)}{\log_3\left(2+x\right)}$ 的定义域。

10. 求函数 $f\left(x\right)=\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2-x\right)}$ 的定义域。

11. 求函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\log x}}$ 的定义域。

董總 DONG ZONG

12. 已知 a，x，y 是正数且 $x \neq 1$，$x+y \neq 1$。若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，证明 $\frac{1}{\log_{x+y} a}=\frac{1}{\log_x a}+\frac{1}{\log_y a}$。

13. 若 a，b，c，x 是正数，且 a，b，c 不等于 1，证明 $\log_a x \log_b x+\log_b x \log_c x+\log_c x \log_a x=\frac{\log_a x \log_b x \log_c x}{\log_{abc} x}$。

解下列各方程式（14 至 23）：

14. $7^x-7^{x-1}=6$

15. $3^{2x+1}=10\left(3^x\right)-3$

16. $2^{x+3}=2^{-x}-7$

17. $4\left(9^x\right)-9\left(4^x\right)=5\left(6^x\right)$

18. $\log x+\log(x+3)=\log(x+8)$

19. $\log_2{}^2 x=\log_2 x+6$

20. $4^{\log x}=2^{3\log x+2}$

21. $3\log_8 x+2=2\log_2 x$

22. $\log_3 x+6\log_x 3=5$

23. $\log_4(x+4)+1=\log_2(x+1)$

解下列各不等式（24 至 27）：

24. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^2}<1$

25. $3^{x+2}>5\left(2^{2x-1}\right)$

26. $\log_2\left(5x-x^2\right)<2$

27. $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-4x\right)+1 \geq 0$

28. 在人工智慧的应用中，有一种常用的函数叫做逻辑函数 (logistic function) $f(x)=\frac{A}{1+e^{-k(x-a)}}$，其中 a，k 及 A 为常数。求 $f^{-1}(x)$ 的表达式。

29. 有一台机器的价格是 RM 500,000，若该机器逐年价值下降，使得每年贬值 4%，已知在 n 年后的价值是 $A(1-r\%)^n$，其中 A 是原价，r 是贬值的百分率。问至少需经过多少年，其价格会降至少过 RM 300,000?

30. 已知在不考虑空气阻力的情况下，火箭的最大速度 $(v \text{ km/s})$、燃料的质量 $(M \text{ kg})$ 与火箭除燃料外的质量 $(m \text{ kg})$ 的函数关系是 $\frac{1}{2}v=\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$，问当燃料质量是火箭质量的多少倍时，火箭的最大速度可达到 10 km/s？

董總 DONG ZONG

数学源于生活，应用于生活。

在生活上，我们发现很多有趣且有规律的数字，如奥运举办的年份（1896，1900，1904，1908，1912，…）、硬碟的容量（16GB，32GB，64GB，128GB，256GB，…）、光圈的排列（1，1.4，2，2.8，4，5.6，8，11，16，22，32）等。在数学上，亦有许多有趣的一些排列有规律的数字，如偶数（0，2，4，6，8，10，…）、完全平方数（1，4，9，16，25，…）、三角形数（1，3，6，10，…）及著名的斐波那契数列（1，1，2，3，5，8，13，…）等。

我们也常见一些有规律的数字应用在生活上或各领域中，如：

1. 推算如果2008是第29届，则2032年是第几届奥运？
2. 在细胞分裂的过程中，一个细胞将一分为二，求经过8次细胞分裂后的细胞总数。
3. 若将RM 20,000存进银行，以复利率5%，计算10年后的本利和。

数学橱窗 1

斐波那契数列

http://bit.ly/43krV1y

在这章我们将探讨一些常见的数列及掌握其应用，藉此培养同学们发现规律的能力。

董總 DONG ZONG

13

数列与级数

学习目标

- 理解数列与级数的意义
- 掌握等差数列的通项公式与等差级数的求和公式及其应用
- 掌握等比数列的通项公式与等比级数的求和公式及其应用
- 理解复利与年金的意义及掌握其应用
- 能求特殊级数的和

董總 DONG ZONG

13.1 数列与级数

按照某种规则排列的一列数叫做数列 (sequence)，例如

(a) 2，4，6，8，10，…

(b) $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{6}{7}$

数列中的每一个数叫做数列的项 (term)。

- 在 (a) 中，数列的首项 (first term) 是 2，第二项是 4，第三项是 6，…，此数列有无穷多项，是一个无穷数列 (infinite sequence)。
- 在 (b) 中，数列的首项是 $\frac{1}{2}$，第二项是 $\frac{2}{3}$，…。其项数是 6，它是一个有限数列 (finite sequence)，最后一项是 $\frac{6}{7}$，称为数列的末项 (last term)。

一般上，数列的各项可以表示成 a_1，a_2，…，a_n，…，简记为 $\{a_n\}$，其中 a_n 是第 n 项。我们称 a_n 为数列的通项 (general term)，a_n 与项数 n 之间的关系式称为数列的通项公式。

例题 1

写出从 1 到 8 各整数的 10 倍加 1 的数列，并求此数列的首项、末项及通项公式。

解 所求的数列为：11，21，31，41，51，61，71，81。

数列的首项是 11，末项是 81，通项公式为 $a_n = 10n + 1$。

董總 DONG ZONG

例题 2

已知一数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n(n+1)$，写出此数列的首 5 项。

解 $a_1 = 1(1+1) = 2$

$a_2 = 2(2+1) = 6$

$a_3 = 3(3+1) = 12$

$a_4 = 4(4+1) = 20$

$a_5 = 5(5+1) = 30$

$\therefore$ 数列的首 5 项为 2，6，12，20，30。

例题 3

已知一数列 $\{a_n\}$ 的定义为 $a_1 = 3$，且当 $n \geq 2$，$a_n = a_{n-1} + 2n$。写出此数列的首 5 项。

解 $a_2 = a_1 + 2(2) = 1 + 4 = 5$

$a_3 = a_2 + 2(3) = 5 + 6 = 11$

$a_4 = a_3 + 2(4) = 11 + 8 = 19$

$a_5 = a_4 + 2(5) = 19 + 10 = 29$

$\therefore$ 此数列的首 5 项为 3，5，11，19，29。

注意

a_{n-1} 为 a_n 的前一项。

董總 DONG ZONG

例题 4

写出数列 3，7，11，15，… 的通项公式。

解 $a_1 = 3$

$a_2 = 3 + 4(2-1)$

$a_3 = 3 + 4(3-1)$

$a_4 = 3 + 4(4-1)$

$\vdots$

$a_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$

$\therefore$ 通项公式 $a_n = 4n - 1$。

例题 5

写出数列 1，0，1，0，⋯ 的通项公式。

解 此题中，$a_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$，$a_n=\sin^2\dfrac{n\pi}{2}$ 或 $a_n=\dfrac{1-\cos n\pi}{2}$ 都可以作为数列 1，0，1，0，⋯ 的通项公式。

从例题5可知，数列的通项公式不是唯一的。

随堂练习 13.1a

1. 写出从 1 到 10 各整数的倒数的数列，并求此数列的首项、末项及通项公式。
2. 已知一数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\dfrac{2^n}{n+1}$，写出此数列的首 5 项。
3. 写出下列数列的一个通项公式：
   (a) 1，−1，1，−1，1，−1，⋯
   (b) 1，8，27，64，⋯

若 $\{a_n\}$ 是一个数列，将数列中各项相加所得的式子

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

就叫做级数 (series)。

我们用 $\sum_{k=i}^{n}a_k$ 来表示数列 $\{a_n\}$ 中第 i 项至第 n 项的和：

$\sum_{k=i}^{n}a_k=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{n-1}+a_n$。符号“$\Sigma$”是希腊字母，读作 sigma。

例如：$\sum_{n=4}^{10}n^2=4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$

董總 DONG ZONG

例题 6

写出下列各级数：

(a) $\sum_{n=1}^{6} n(n-1)$　　(b) $\sum_{n=2}^{5} (-1)^n (2n+1)$

解 (a) $\sum_{n=1}^{6} n(n-1) = 1(1-1)+2(2-1)+3(3-1)+4(4-1)+5(5-1)+6(6-1)$

$= 0+2+6+12+20+30$

(b) $\sum_{n=2}^{5} (-1)^n (2n+1) = (-1)^2[2(2)+1]+(-1)^3[2(3)+1]+(-1)^4[2(4)+1]$

$+(-1)^5[2(5)+1]$

$= 5-7+9-11$

例题 7

求级数 $\sum_{n=3}^{7} (2n+3)$ 的首项、末项及项数。

解 首项 $= 2(3)+3 = 9$

末项 $= 2(7)+3 = 17$

项数 $= (7-3)+1 = 5$

董總 DONG ZONG

若一个数列 $\{a_k\}$ 有 n 项，对应的级数可写成 $\sum_{k=1}^{n} a_k$，它是一个有限级数 (finite series)。若一个数列 $\{a_k\}$ 有无穷多项，则对应的级数可写成 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$，它是一个无穷级数 (infinite series)。

例题 8

以 Σ 符号表示下列级数：

(a) $2+2+2+2+2+2$

(b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$

(c) $3\times5+4\times7+5\times9+6\times11$

(d) $3^2+2\times3^3+3\times3^4+4\times3^5+5\times3^6+6\times3^7$

解 (a) $2+2+2+2+2+2=\sum_{n=1}^{6}2$

(b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

(c) $3\times5+4\times7+5\times9+6\times11=\sum_{n=3}^{6}n(2n-1)$

(d) $3^2+2\times3^3+3\times3^4+4\times3^5+5\times3^6+6\times3^7=\sum_{n=1}^{6}n\times3^{n+1}$

注意

例题8(c)的级数也可写成 $\sum_{n=1}^{4}(n+2)(2n+3)$

随堂练习 13.1b

1. 写出下列各级数：

(a) $\sum_{n=2}^{7}\frac{n}{n+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{5}(-1)^n(2n-1)$

2. 用 Σ 符号表示下列各级数：

(a) $3+3+3+3+3+3+3+3+3$

(b) $6+12+20+\cdots+(n+1)(n+2)+\cdots+10100$

(c) $3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\cdots$

董總 DONG ZONG

习题 13.1

1. 下列各题中，已知数列的通项公式，写出它的首5项：

(a) $a_n = 2n - 1$　　(b) $a_n = (-3)^n$

(c) $a_n = n(n+3)$　　(d) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$

2. 写出下列数列的一个通项公式：

(a) 4，7，10，13，16，…　　(b) 5，−11，17，−23，29，…

(c) $\dfrac{3}{7}$，$\dfrac{5}{10}$，$\dfrac{7}{13}$，$\dfrac{9}{16}$，$\dfrac{11}{19}$，…　　(d) $-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{9}$，$-\dfrac{4}{27}$，$\dfrac{5}{81}$，$-\dfrac{6}{243}$，…

(e) 3，6，11，18，27，…　　(f) 3，6，12，24，48，…

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的定义为 $a_1 = -5$，且当 $n \geq 2$，$a_n = a_{n-1} + 3$。

(a) 写出数列的首 6 项。

(b) 写出数列的通项公式，并求数列的第 99 项。

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的定义为 $a_1 = 2$，且当 $n \geq 2$，$a_n = 3a_{n-1}$。

(a) 写出数列的首 4 项。

(b) 写出数列的通项公式，并求数列的第 8 项。

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的定义为 $a_1 = 2$，$a_2 = 5$，且当 $n \geq 3$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，写出数列的第 10 项。

6. 写出下列各级数：

(a) $\sum_{n=2}^{7} n(n+3)$　　(b) $\sum_{n=4}^{9} \dfrac{(-1)^n}{n^2+3}$

7. 用 Σ 符号表示下列各级数：

(a) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{31}$　　(b) $4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 27^3$

(c) $2\times4 + 4\times7 + 6\times10 + 8\times13 + \cdots + 50\times76$

(d) $1 - \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{7} - \dfrac{4}{10} + \cdots + \dfrac{19}{55}$

董總 DONG ZONG

13.2 等差数列与等差级数

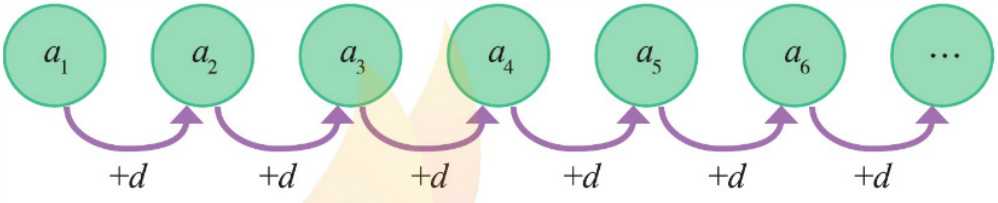
当一个数列 $\{a_n\}$ 的每一项减去它的前一项所得的差都相等时，这个数列就称为等差数列或算术数列 (arithmetic sequence)，而这个相等的差叫做公差 (common difference)，一般以 d 表示。

按照定义，

$$a_n - a_{n-1} = d$$

因此，

$$a_n = a_{n-1} + d$$



设 $a_1 = a$，

a_1	a
a_2	$a_1 + d = a + d$
a_3	$a_2 + d = a + 2d$
a_4	$a_3 + d = a + 3d$
a_5	$a_4 + d = a + 4d$
…	…

由上表可得，若一等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a，公差是 d，则它的通项公式为

$$a_n = a + (n-1)d$$

董總 DONG ZONG

例题 9

求等差数列 1，5，9，⋯ 的第 8 项。

解 首项 $a=1$，公差 $d=5-1=4$

$\therefore$ 第 8 项 $a_8=a+7d$

$=1+7\times4$

$=29$

例题 10

已知一等差数列的第 3 项是 -1，第 7 项是 -17。求此数列的首项、公差及第 9 项。

解 $a_3=a+2d=-1$ -----(1)

$a_7=a+6d=-17$ -----(2)

由 (1) 及 (2)，得 $d=-4$，$a=7$

$a_9=a+8d=7+8(-4)=-25$

$\therefore$ 此数列的首项是 7，公差是 -4 及第 9 项是 -25。

董總 DONG ZONG

例题 11

等差数列 -4，$-\frac{11}{4}$，$-\frac{3}{2}$，⋯ 的第几项是 16?

解 $a=-4$

$d=a_2-a=-\frac{11}{4}-(-4)=\frac{5}{4}$

设此等差数列的第 n 项为16，则

$$a_n = a + (n-1)d = -4 + \frac{5}{4}(n-1) = 16$$

$$\frac{5}{4}(n-1) = 20$$

$$n - 1 = 16$$

$$n = 17$$

∴ 此等差数列的第 17 项是 16。

例题 12

从 100 到 300 一共有几个 6 的倍数?

解 从 100 到 300 的 6 的倍数为 102，108，114，…，300。

它们形成一个等差数列，$a = 102$，$d = 6$，

设此数列有 n 项，则

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$300 = 102 + 6(n-1)$$

$$\therefore\ n = 34$$

∴ 从 100 到 300一共有 34 个 6 的倍数。

注意

例题12中，6的倍数的个数等于

(末项 − 首项) ÷ 6 + 1。

两个数 x 与 y 的等差中项 A 是使得 x，A，y 成等差数列的数。因此，

$$A - x = y - A$$

$$\therefore\ A = \frac{x+y}{2}$$

换言之，两个数的等差中项是它们的算术平均数。

例题 13

求 3 与 15 的等差中项。

解 所求的等差中项 $= \dfrac{3+15}{2} = 9$

例题 14

求 18 与 33 之间的四个数，使得这六个数成等差数列。

解 所求的等差数列中，$a = 18$

$$a_6 = a + 5d = 33$$
$$5d = 33 - 18$$
$$d = 3$$

$\therefore$ 所求的四个数为 21，24，27，30。

例题 15

若一个直角三角形三边的长成等差数列，证明它们的比是 3 : 4 : 5。

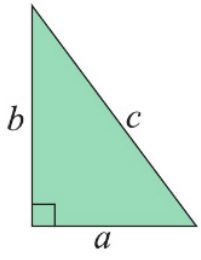
证法一

设 $a < b < c$，则 c 是斜边。由毕氏定理，

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{-----(1)}$$

由于 a，b，c 成等差数列，

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{-----(2)}$$



将 (2) 代入 (1) 得：

$$a^2 + \frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} = c^2$$
$$5a^2 + 2ac - 3c^2 = 0$$
$$(5a - 3c)(a + c) = 0$$
$$\because a + c \neq 0$$
$$\therefore 5a - 3c = 0$$
$$a = \frac{3}{5}c$$

将 $a = \frac{3}{5}c$ 代入 (2) 得：$b = \frac{4}{5}c$

$\therefore$ 三边的长的比为 3 : 4 : 5。

董總 DONG ZONG

证法二

设三边的长为 a，$a+d$ 及 $a+2d$，其中 $d>0$，则 $a+2d$ 为斜边的长。由毕氏定理，

$$a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2$$
$$a^2-2ad-3d^2=0$$
$$(a-3d)(a+d)=0$$
$$\because\ a+d\neq 0$$
$$\therefore\ a-3d=0$$
$$a=3d$$

$\therefore$ 三边的长为 $3d$，$4d$ 及 $5d$

$\therefore$ 三边的长的比为 $3:4:5$。

随堂练习 13.2a

1. 已知一等差数列的第 4 项及第 9 项分别是 -2 及 28，求此数列的首项、公差及第 12 项。
2. 求 -9 与 21 的等差中项。
3. 求 -40 与 56 之间的五个数，使得这七个数成等差数列。
4. 从 100 到 1000 有几个 7 的倍数？

董總 DONG ZONG

首 n 项的和

若 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n 是一个等差数列，将数列中的各项相加所得的式子 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 就叫做等差级数或算术级数 (arithmetic series)。我们通常以 S_n 来表示一个数列 $\{a_n\}$ 及其相对应的级数 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 的首 n 项的和，即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

伟大的数学家高斯在 8 岁时已经懂得用快速的方法求得等差数列 1，2，3，…，100 的和。他的想法如下：

$$1+2+3+\cdots+\cdots+98+99+100$$

101

101

101

将 1，2，3，…，100 首尾配对，可分成 50 对，每对的和都是 101，因此，

$$1+2+3+\cdots+98+99+100=50\times101=5050$$

推广这个想法，我们可以推导出等差数列的求和公式。设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 首 n 项的和，

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S_n & = & a & + & a+d & + & \cdots & + & a+(n-2)d & + & a+(n-1)d \\
S_n & = & a+(n-1)d & + & a+(n-2)d & + & \cdots & + & a+d & + & a \\
\hline
2S_n & = & \underbrace{2a+(n-1)d \quad + \quad 2a+(n-1)d \quad + \quad \cdots \quad + \quad 2a+(n-1)d \quad + \quad 2a+(n-1)d}_{n\text{ 项}}
\end{array}$$

因此，

$$2S_n=n[2a+(n-1)d]$$

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

由于 $2a+(n-1)d$ 是头尾两项的和，因此这个求和公式也可以写成

$$S_n=\frac{n}{2}(a+a_n)$$

数学橱窗 ②

等差级数的小故事

http://bit.ly/44XUMKc

董總 DONG ZONG

例题 16

求从 50 到 500 所有 4 的倍数的和。

解 从 50 到 500 所有 4 的倍数为 52，56，…，500。它们形成一等差数列，

$a = 52$，$d = 4$，

共有 $n = \dfrac{500 - 52}{4} + 1 = 113$ 项

$\therefore$ 从 50 到 500 所有 4 的倍数的和 $S_{113} = \dfrac{113}{2}(52 + 500) = 31188$。

例题 17

若一等差数列的首项是 13，第 3 项是 29，首 n 项的和为 910，求 n。

解

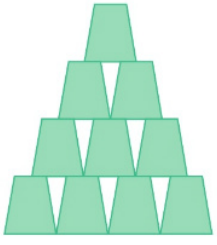
$$a = 13$$
$$a_3 = a + 2d = 29$$
$$2d = 29 - 13$$
$$d = 8$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left[2 \times 13 + 8(n-1)\right] = 910$$
$$n(4n + 9) = 910$$
$$4n^2 + 9n - 910 = 0$$
$$(n - 14)(4n + 65) = 0$$

$\because n > 0$

$\therefore n = 14$

想一想 1

有100个杯子，要将它们叠成金字塔状，由下往上逐层减一个杯子。问是否会恰巧堆完所有杯子？



董總 DONG ZONG

例题 18

等差级数 $-56-50-44-\cdots$ 从第 1 项加到第几项，其和才开始是正的?

解 $a=-56$，$d=-50-(-56)=6$

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2(-56)+6(n-1)\right]>0$$

$$n(3n-59)>0$$

$$\because\ n>0,\ \therefore\ 3n-59>0$$

$$n>19\frac{2}{3}$$

$\therefore$ 必须从第 1 项加到第 20 项，其和才开始是正的。

例题 19

已知一数列 $\{a_n\}$ 的首 n 项的和是 $S_n=2n^2+3n$，

(a) 求数列的首项 a_1。

(b) 求数列的通项公式 a_n。

(c) 证明 $\{a_n\}$ 是等差数列。

(d) 求数列从第 5 项加到第 12 项的和。

解 (a) $a_1=S_1=2(1)^2+3(1)=5$

(b) $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$

$$\therefore\ a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=2n^2+3n-\left[2(n-1)^2+3(n-1)\right]$$

$$=4n+1$$

(c) $a_{n-1}=4(n-1)+1=4n-3$

$\therefore\ a_n-a_{n-1}=4$ 是一常数

$\therefore\ \{a_n\}$ 是等差数列

董總 DONG ZONG

(d) 数列从第 5 项加到第 12 项的和

$$
\begin{aligned}
&= a_5 + a_6 + \cdots + a_{12} \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{12}) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\
&= S_{12} - S_4 \\
&= 2(12)^2 + 3(12) - \left[2(4)^2 + 3(4)\right] \\
&= 280
\end{aligned}
$$

补充资料

由例题19的解法可以看出，若一数列 $\{a_n\}$ 的首n项的和为S_n，则

- 第n项为$a_n = S_n - S_{n-1}$
- 从第k项加到第l项的和为$S_l - S_{k-l}$。

例题 20

已知一等差数列的首项是 13，其首 4 项的和与首 10 项的和相等，当其首 n 项的和达到最大时，求 n 的值。

解

$$
\begin{aligned}
a &= 13 \\
S_4 &= S_{10} \\
\frac{4}{2}(2 \times 13 + 3d) &= \frac{10}{2}(2 \times 13 + 9d) \\
52 + 6d &= 130 + 45d \\
39d &= -78 \\
d &= -2 \\
S_n &= \frac{n}{2}\left[2 \times 13 - 2(n-1)\right] \\
&= n(14 - n) \\
&= -(n^2 - 14n + 49) + 49 \\
&= 49 - (n-7)^2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 当 $n = 7$ 时，首 n 项的和达到最大。

想一想 2

例题20中，在还没有计算之前，你是否想得到答案是7？
为什么会有这样的想法？

董總 DONG ZONG

随堂练习 13.2b

1. 已知“365 存钱法”是在第一天存 RM 0.10，第二天存 RM 0.20，第三天存 RM 0.30，每一天比前一天多存 RM 0.10，总共要存 365 天。365 天后，共存了多少钱？

2. 已知一等差数列的第 3 项是 24，第 15 项是 –12，首 n 项之和为 30，求 n。

3. 已知一数列 $\{a_n\}$ 的首 n 项的和是 $S_n = \dfrac{4n-3n^2}{2}$。

(a) 求它的第 n 项 a_n。

(b) 求数列的第 8 项加到第 15 项的和。

习题 13.2

1. 求等差数列 5，13，21，… 的第 10 项及第 n 项。

2. 已知一等差数列的首项是 $\dfrac{13}{3}$，第 3 项是 3，最后一项是 $-\dfrac{31}{3}$，求其项数。

3. 已知一等差数列的第 7 项是 –10，第 12 项是 –25，求此数列的第 17 项。

4. 已知一等差数列的第 6 项是 43，第 10 项是 75，则它的第几项是 155?

5. 求 18 与 30 之间的五个数，使得这七个数成等差数列，并求这 7 个数的和。

6. 已知一等差数列的首项是 12，第 2 项是 15，求其首 20 项的和。

7. 已知一等差数列的首项是 20，第三项是 $\dfrac{92}{5}$。它的第几项是第一个负数项?

8. 已知三个数成等差数列，它们的和是 30，平方和是 318，求这三个数。

9. 求等差级数 $18+10+2-6-\cdots$ 的首 12 项的和。

10. 一个等差数列的第 4 项是 9，第 8 项是 –7，求它的前 10 项的和。

11. 求 200 与 800 之间能被 11 整除的所有整数的和。

12. 已知一等差数列的首三项是 x，$3x-4$，$2x+7$。

(a) 求 x 的值。

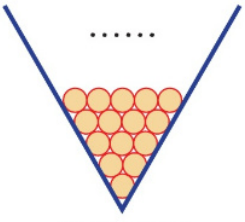
(b) 求此数列首 10 项的和。

董總 DONG ZONG

13. 已知一等差数列的首项是 12，公差是 -3，各项的和是 21，求它的项数。

14. 已知一等差数列的第 3 项是 8，第 6 项是 4。这数列由第一项起，需加到第几项，其和才开始是负的?

15. 已知一数列的首 n 项的和为 $S_n=\dfrac{n(n+3)}{4}$。
(a) 求数列的首项 a_1。
(b) 求数列的通项公式 a_n。
(c) 证明 $\{a_n\}$ 是等差数列。
(d) 求数列从第 8 项加到第 22 项的和。



第16题用图

16. 如右图所示，在一个 V 形架中堆放铅笔，最下一层放一支，每往上一层都比下一层多一支。
(a) 若最上一层有 50 支铅笔，则一共有几支铅笔?
(b) 若有 990 支铅笔，需要排几层?

17. 已知一等差数列的首项是正数，第 20 项是 0。若这数列的首 n 项的和是 0，求 n 的值。

18. 已知一等差数列的第 5 项是 3，首 10 项的和是 $26\dfrac{1}{4}$，问第几项是 0？

19. 设 S_n 是一等差数列 $\{a_n\}$ 首 n 项的和。若 $S_{10}=465$，$9S_3=4S_6$，求 a_5 及 S_5。

20. 求 $38^2-37^2+36^2-35^2+\cdots+2^2-1^2$。

21. 已知一等差数列的首项是 45，公差是 -6，当 n 为何值时，首 n 项的和 S_n 有最大值?

22. 已知一凸多边形各内角的度数成一等差数列，公差是 6，最大的内角是 135°。问这个多边形有几条边?

23. 已知一等差数列的首 6 项的和是 96，首 10 项的和是首 20 项的和的三分之一，求此数列的首项及第 10 项。

董總
DONG ZONG

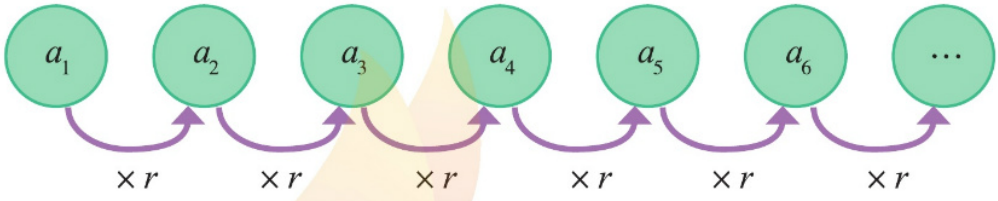
13.3 等比数列与等比级数

当一个数列 $\{a_n\}$ 的每一项与它的前一项的比都相等时，这个数列就称为等比数列或几何数列 (geometric sequence)，而这个相等的比叫做公比 (common ratio)，一般以 r 表示。按照定义，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

因此，

$$a_n = a_{n-1} \times r$$



设 $a_1 = a$，

a_1	a
a_2	$a_1 \times r = ar$
a_3	$a_2 \times r = ar^2$
a_4	$a_3 \times r = ar^3$
a_5	$a_4 \times r = ar^4$
……	…

由上表可得，若一等比数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a，公比是 r，则它的通项公式为

$$a_n = ar^{n-1}$$

董總 DONG ZONG

例題 21

已知一等比数列的第 2 项及第 5 项分别为 6 及 $\frac{3}{4}$，求它的首项及第 10 项。

解 $a_2 = ar = 6$ -----(1)

$a_5 = ar^4 = \frac{3}{4}$ -----(2)

$\frac{(2)}{(1)}$ 得： $r^3 = \frac{1}{8}$

$r = \frac{1}{2}$

将 $r = \frac{1}{2}$ 代入 (1) 得：首项 $a = 12$

第 10 项 $a_{10} = ar^9$

$= 12\left(\frac{1}{2}\right)^9$

$= \frac{3}{128}$

例題 22

已知一等比数列的第 2 项是 −8，第 3 项是 4，则第几项是 $\frac{1}{1024}$？

解 $a_2 = ar = -8$ -----(1)

$a_3 = ar^2 = 4$ -----(2)

$\frac{(2)}{(1)}$ 得： $r = -\frac{1}{2}$

$a = 16$

董總 DONG ZONG

设第 n 项是 $\frac{1}{1024}$

$$a_n = ar^{n-1} = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{1024} = \frac{16}{(-2)^{n-1}}$$

$$(-2)^{n-1} = (-2)^{14}$$

$$n = 15$$

$\therefore$ 第15项是 $\frac{1}{1024}$。

两个数 x 与 y 的等比中项 G 是使得 x，G，y 成等比数列的数。因此，

$$\frac{G}{x} = \frac{y}{G}$$

$$G^2 = xy$$

$$\therefore G = \pm\sqrt{xy}$$

若 x 与 y 都是正数，则 $\sqrt{xy}$ 是它们的几何平均数。

想一想 3 两个数 x 与 y 必须同号才有等比中项，为什么？

例题 23

求 $\frac{1}{6}$ 与 216 之间的三个数，使得这五个数成等比数列。

解 在所求的数列中，$a = \frac{1}{6}$，

$$a_5 = ar^4 = 216$$

$$r^4 = 216 \times 6 = 6^4$$

$$r = \pm 6$$

$\therefore$ 所求的三个数为 1，6，36 或 -1，6，-36。

重總 DONG ZONG

例题 24

已知在 2010 年，马来西亚的人口是 2833 万人，在 2013 年是 2972 万人。假设马来西亚人口从 2010 年到 2020 年每年的增长率保持不变，

(a) 求这段期间马来西亚人口的年增长率。

(b) 估计在 2020 年，马来西亚的人口有多少人？

解 (a) 设 a_1 为 2010 年的人口（以万人为单位），a_2 为 2011 年的人口，依此类推。

$$a_1 = a = 2833$$

$$a_4 = ar^3 = 2972$$

$$r^3 = \frac{2972}{2833}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2972}{2833}}$$

$$= 1.0161$$

∴ 马来西亚人口的年增长率为

$$(1.0161 - 1) \times 100\% = 1.61\%。$$

(b) 在 2020 年，马来西亚的人口将有

$$a_{11} = ar^{10} = 2833 \times 1.0161^{10} = 3324 \text{ 万}$$

补充资料 马来西亚的人口数据资料。

https://data.worldbank.org/indicator/SP.POP.TOTL?locations=MY

重總 DONG ZONG

随堂练习 13.3a

1. 一等比数列的首项是 18，第 2 项是 12，求其第 6 项。
2. 一等比数列的第 1 项是 8，第 4 项是 −27，则它的第几项是 $-\frac{2187}{16}$？
3. 求 $\frac{27}{8}$ 与 $\frac{2}{3}$ 的等比中项。

习题 13.3a

1. 已知一等比数列的第 1 项是 8，第 2 项是 4，末项是 $\frac{1}{128}$，求其项数。

2. 已知一等比数列的第 2 项是 12，第 4 项是 108，求它的第 7 项。

3. 在 14 与 224 之间加入三个数，使这五个数成等比数列。

4. 已知一等比数列的第 7 项是 18，公比是 $-\frac{3}{2}$，求其第4项。

5. 若 $x+12$，$x+4$ 及 $x-2$ 成一等比数列，求 x 的值及数列的公比。

6. 已知一等差数列的第 2，第 6 及第 8 项成等比数列，求此等比数列的公比。

7. 三个不同的数 2，x，y 成等比数列。若此三数是一等差数列的第 1，第 2 及第 12 项，求 x 及 y 的值。

首 n 项的和

若 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n 是一个等比数列，将数列中的各项相加所得的式子 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 就叫做等比级数或几何级数 (geometric series)。设 S_n 表示一个等比数列 $\{a_n\}$ 的首 n 项的和。

S_n	=	a	+	ar	+	ar^2	+	$\cdots$	+	ar^{n-2}	+	ar^{n-1}		
$-)\ rS_n$	=			ar	+	ar^2	+	$\cdots$	+	ar^{n-2}	+	ar^{n-1}	+	ar^n
$(1-r)S_n$	=	a	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	−	ar^n

$\therefore\ (1-r)S_n = a(1-r^n)$

由此可得，当 $r \neq 1$ 时，等比级数的求和公式为

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

当 $r=1$ 时，所得的等比数列是一常数数列 a，a，a，$\cdots$。显然的，此数列首 n 项的和 $S_n=na$。

数学橱窗 3

等比级数的小故事

http://bit.ly/3sic3iT

例题 25

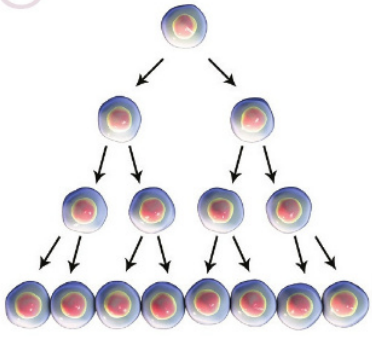
求等比级数 $2-3+\frac{9}{2}-\cdots$ 首 7 项的和。

解 $a=2$，$r=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$

$$\therefore \text{首 7 项的和 } S_7=\frac{2\left[1-\left(-\frac{3}{2}\right)^7\right]}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{463}{32}。$$

例题 26

若在细胞分裂的过程中，一个细胞将一分为二，求在经过了 8 次细胞分裂后的细胞总数。



解 $a=1$，$r=2$，$n=8$

经过了 8 次细胞分裂后的细胞总数为

$$S_9=\frac{1\times\left(1-2^8\right)}{1-2}$$
$$=255$$

董總 DONG ZONG

例题 27

已知一等比数列的各项都是正数，第 2 项是 72，第 4 项是 32。求 n 的值使其首 n 项的和为 $281\frac{1}{3}$。

解 $a_2 = ar = 72$ -----(1)

$a_4 = ar^3 = 32$ -----(2)

$\frac{(2)}{(1)}$ 得： $r^2 = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$

由于此数列的各项都是正的，公比 $r > 0$，

$$\therefore\ r = \frac{2}{3},\quad a = \frac{72}{\frac{2}{3}} = 108$$

$$S_n = \frac{108\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{844}{3}$$

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{211}{243}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$\therefore\ n = 5$$

董總 DONG ZONG

例题 28

已知一等差数列的首项是 –3，它的第 4，第 6 及第 10 项分别是一等比数列的第 2，第 3 及第 4 项。若该等差数列不是一常数数列，

(a) 求等差数列的公差。

(b) 求等比数列首 10 项的和。

解 (a) 等差数列的第 4，第 6 及第 10 项分别为 $-3+3d$，$-3+5d$ 及 $-3+9d$

$\because$ 它们是等比数列的连续三项

$$\therefore (-3+3d)(-3+9d)=(-3+5d)^2$$
$$2d^2-6d=0$$
$$2d(d-3)=0$$

$\because$ 等差数列不是常数数列，$d\neq 0$

$\therefore d=3$

(b) 等比数列的第 2，第 3 及第 4 项分别为 6，12 及 24

公比 $r=\dfrac{12}{6}=2$

首项 $a=\dfrac{6}{2}=3$

$\therefore$ 首 10 项的和 $S_{10}=\dfrac{3(1-2^{10})}{1-2}=3069$。

随堂练习 13.3b

1. 求级数 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ 的和。
2. 已知一等比级数的首项是 2，第 4 项是 -128，末项是 8192，求此级数的和。
3. 有一球自 18 m的高度落下，每次落地后反弹的高度为原高度的 $\dfrac{2}{3}$，求此球自开始落下至第 4 次着地所经过的总路程。
4. 中国明代数学名著《算法统宗》中有以下问题：
   远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？
   意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，求塔顶层灯的数目。你能求出来吗？

董總 DONG ZONG

无穷等比级数的和

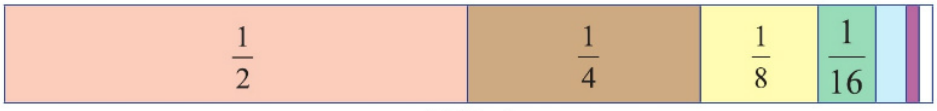


图 13–1

我们将图 13–1 看成是一段长度为 1 的丝带，先剪下 $\frac{1}{2}$ 段，再剪下所剩下的 $\frac{1}{2}$ 段中的 $\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{4}$ 段，剩下 $\frac{1}{4}$ 段，…，每次剪下的丝带长度为所剩下的 $\frac{1}{2}$，则第 n 次剪下的丝带长度为 $\frac{1}{2^n}$，剩下 $\frac{1}{2^n}$。因此，剪了 n 次后，所减去的丝带一共长 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$。

若我们想像此丝带可以被无限的剪下去，则所剪去的丝带总长度为无穷级数 (infinite series) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 的和。显然的，这和等于 1，即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

在数学上，我们说这无穷级数首 n 项的和是 $1-\frac{1}{2^n}$。当 n 越来越大时，由于 $\frac{1}{2^n}$ 无限趋近于 0，因此首 n 项的和无限趋近于 1，我们就说 1 是无穷级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 的和。

对于等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$，

- 当 $r\neq 1$ 时，它的首 n 项的和是 $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$。
- 当 $r=1$ 时，$S_n=na$。

若 $a\neq 0$，

- 当 $r=-1$ 时，$S_n=\begin{cases}a, & 若\ n\ 是奇数\\ 0, & 若\ n\ 是偶数\end{cases}$。

想一想 4 等差级数加到无穷项有意义吗？

董總 DONG ZONG

对于无穷等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots$ 的情况，当 $|r|\geq 1$ 时，将无穷等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots$ 中的项越加越多时，所得的和并不趋近于任何常数，因此我们说无穷等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots$ 的和是没有意义的。

若 $|r|<1$，当 n 越来越大时，$|r^n|$ 无限趋近于 0，无穷等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots$ 首 n 项的和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 无限趋近于 $\dfrac{a}{1-r}$。因此，无穷等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots$ 的和为

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}\quad,\quad -1<r<1$$

神奈资料

《庄子》中有一句话："一尺之捶，日取其半，万世不竭"。意思是：一尺长的木棍，每天截去一半，永远也截不完。

例题 29

已知一无穷等比级数的第 3 项及第 6 项分别为 21 及 $-\dfrac{56}{9}$，求此级数的和。

解 $a_3=ar^2=21$ -----(1)

$a_6=ar^5=-\dfrac{56}{9}$ -----(2)

$\dfrac{(2)}{(1)}$ 得：$r^3=-\dfrac{8}{27}=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$

$r=-\dfrac{2}{3}$

$a=\dfrac{21}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{189}{4}$

$\therefore$ 此级数的和 $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{\dfrac{189}{4}}{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)}=\dfrac{567}{20}$。

董總 DONG ZONG

在初中，我们学过，任何一个分数都可以表示成一个有限小数或循环小数，例如：

$$\frac{15}{8}=1.875$$

$$\frac{1}{6}=0.1666\cdots=0.1\dot{6}$$

显然的，任何一个有限小数都可以化成分数。至于循环小数，我们可以利用无穷等比级数求和公式将它化成分数，如以下的例子所示。

例题 30

将循环小数 $0.2\dot{1}\dot{3}$ 化成分数。

解 $0.2\dot{1}\dot{3}=0.2+(0.013+0.00013+0.0000013+\cdots)$

$0.013+0.00013+0.0000013+\cdots$ 是首项为 0.013，公比为 0.01 的无穷等比级数

$$\begin{aligned}\therefore\ 0.2\dot{1}\dot{3}&=0.2+\frac{0.013}{1-0.01}\\&=0.2+\frac{0.013}{0.99}\\&=\frac{2}{10}+\frac{13}{990}\\&=\frac{211}{990}\end{aligned}$$

董總 DONG ZONG

随堂练习 13.3c

1. 求无穷等比级数 $48-36+27-\cdots$ 的和。
2. 将循环小数 $0.2\dot{3}$ 化成分数。

习题 13.3b

1. 已知一等比数列的第3项及第8项分别是$\frac{4}{3}$及$-\frac{81}{8}$。
   (a) 求它的第 6 项。
   (b) 求首 6 项的和。

2. 已知一无穷等比级数的第 2 项是 –16，第 5 项是 2，
   (a) 求它的首 10 项的和。
   (b) 求此无穷级数的和。

3. 已知一等比级数的首项是 7，公比是 3，级数的和是 847，求此级数的项数及末项。

4. 若一无穷等比级数的和是$\frac{25}{3}$，第 2 项是 –2，求它的首项及公比。

5. 将下列各循环小数化为分数：
   (a) $0.\dot{4}\dot{5}$　　(b) $2.1\dot{3}1\dot{4}$

6. 已知三个数成等比数列，它们的和是 42，积是 512，求这三个数。

7. 已知一等比级数的首项是 16，末项是$\frac{1}{2}$，和是$\frac{63}{2}$，求它的公比及项数。

8. 已知一等比数列的首 6 项的和是它首 3 项的和的 9 倍，求它的公比。

9. 已知一等比级数的首项是$\frac{81}{8}$，第 7 项是$\frac{8}{9}$。求此级数加到无穷项的和。

10. 已知一等比级数的第 2 项比第 1 项少 9，第 3 项比第 2 项少 6。
    (a) 求第 4 项。
    (b) 求首 6 项的和。
    (c) 求此级数加到无穷项的和。

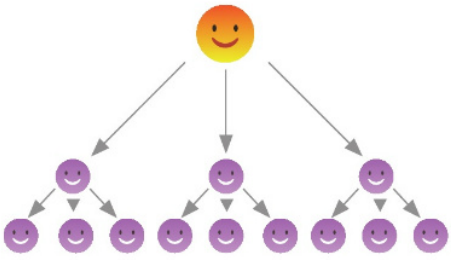
11. 已知一无穷等比级数的公比是负数，其和是 81，首两项的和是 45，求第 4项。

12. 若 $x+1$，$x-2$，$\frac{1}{2}x$ 是一无穷等比级数的首 3 项，求此级数的和。

董總 DONG ZONG

13. 已知三个正数成等差数列，其和为 36，它们分别加上 1，4 及 43 后成等比数列，求这三数。

14. 假设某人得到某个信息后，就将这个信息传给 3 个不同的好友（称为第 1 轮传播）；每个好友收到信息后，又都传给了 3 个不同的好友（称为第 2 轮传播），… 依此类推，假设信息在传播的过程中都是传给不同的人，如果信息按照上述方式共传播了 12 轮，那么知晓这个信息的人数共有多少？



15. 甜心制糖厂今年（第一年）制糖 5 万公吨，如果每一年的产量比上一年增加 10%，求第 5 年的产量及这 5 年的总产量。

16. 在初中一时，妈妈每月给小华RM 200 的零用钱。妈妈让小华考虑以下两种方案：
第一种方案：在往后的每一年，每月的零用钱比前一年的多 RM 20。
第二种方案：在往后的每一年，每月的零用钱比前一年的多 8.8%。
(a) 在每一种方案下，小华在高三时每月所得到的零用钱。何者比较多？
(b) 在每一种方案下，小华中学六年所得到的零用钱总数。何者比较多？

17. 一粒球由 2 m 的高度垂直落到地上，碰到地面后，它垂直往上反弹，达到原来高度的 80%，又往下落，如此周而复始的下落与上升，每次上升只能达到之前一次高度的 80%。问这粒球一共运动了多少距离？

13.4 复利与年金

复利

在初中，我们学过单利的计算，但是在现实生活中，利息都是以复利 (compound interest) 计算的。假设你现在开一个银行户口，将 RM p 存入银行，然后不去提取。银行的年利率 (annual interest rate) 是 $r\%$，以复利计算，每年计息一次。一年后，你得到的利息是 RM $p\times\frac{r}{100}$，加上本金 (principal) RM p，你在银行的存款 (本利和) 就有

$$\text{RM } p\times\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

两年后结算利息时，是以一年前的存款 RM $p\times\left(1+\frac{r}{100}\right)$ 作为本金计算，因此两年后的存款有

$$\text{RM } p\times\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

同理，三年后的存款有

$$\text{RM } p\times\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

依此类推，n 年后的存款有

$$\text{RM } p\times\underbrace{\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{r}{100}\right)}_{n\text{ 项}}=\text{RM } p\times\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

若 RM a_n 为 n 年后的存款，则可以看出 $\{a_n\}$ 是一个以 $\left(1+\frac{r}{100}\right)$ 为公比的等比数列。

假设本利和为 A，年利率是 $r\%$，则本利和 $A=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ 或 $p(1+r\%)^n$，其中 p 也叫做 A 的现值或现价 (present value)。

董總 DONG ZONG

有些存款的利息计算方式不是每年结算一次，而是每半年，每三个月，每个月或每天计算利息一次，这分别对应于每年结算 2 次，4 次，12 次或 365 次。若本金是 RM p，年利率是 $r\%$，利息是每年结算 m 次，则每次是以利率 $\frac{r}{m}\%$ 计算，n 年后共结算 nm 次。因此 n 年后的本利和(accumulated value)是

$$\text{RM } p \times \left(1+\frac{\frac{r}{m}}{100}\right)^{nm}$$

例题 31

小华把 RM 50,000 存进银行，年利率是 4%，以复利计算，每年计息。如果他没有提取本金或利息，求 15 年后的本利和。

解 已知 $p=50,000$，$r=4$，$n=15$

$$\text{本利和} = 50000\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^{15}$$

$$= \text{RM } 90,047.18$$

董總 DONG ZONG

例题 32

已知本金是 RM 100,000，年利率是 5%，每半年计息一次，以复利计算。求 5 年后的利息。

解 5 年后的利息 = 本利和 − 本金

$$= 100000\times\left(1+\frac{2.5}{100}\right)^{10} - 100000$$

$$= 128008.45 - 100000$$

$$= \text{RM } 28,008.45$$

例题 33

小芳每年存款 RM 5,000。若年利率是 3.5%，每年计息一次，以复利计算。求 20 年后的本利和。

解 20 年后的本利和

$$=5000\left(1+\frac{3.5}{100}\right)^{20}+5000\left(1+\frac{3.5}{100}\right)^{19}+5000\left(1+\frac{3.5}{100}\right)^{18}+\cdots+5000\left(1+\frac{3.5}{100}\right)$$

$$=5000\left(1.035+1.035^2+1.035^3+\cdots+1.035^{20}\right)$$

$$=5000\times\frac{1.035\left(1-1.035^{20}\right)}{1-1.035}$$

$$=\text{RM } 146,347.35$$

例题 34

已知本金是 RM 100,000，年利率是 5.5%，每年结算一次，以复利计算。问至少需要多少年后，本利和才会超过 RM 150,000？

解 设至少需要 n 年，本利和才会超过 RM 150,000。

$$100000\left(1+\frac{5.5}{100}\right)^{n}>150000$$

$$1.055^{n}>1.5$$

$$\lg(1.055)^{n}>\lg 1.5$$

$$n>\frac{\lg 1.5}{\lg 1.055}$$

$$n>7.573$$

$\therefore$ 至少需要 8 年，本利和才会超过 RM 150,000。

董總 DONG ZONG

例题 35

已知年利率是 6%，每年结算一次。以复利计算，3 年后的利息是 RM 15,281.28，求本金。

解 设本金为 RM p。

$$p\left(1+\frac{6}{100}\right)^3-p=15281.28$$

$$1.191016p-p=15281.28$$

$$p=80000$$

∴ 本金是 RM 80,000。

年金与现值

年金 (annuity) 是指根据某种合约，在定期内每期等额收付的金额。例如，各类分期付款、租金、保险费、分期偿还贷款等，都属于年金。年金的现值就是在考虑了年利率及期数后，各收付金额的现值总和。

若年利率是 $r\%$，年金是 RM A，每年支付一次，由公式 $A=p(1+r\%)^n$，可得第 n 年现值是 $A(1+r\%)^{-n}$，其中 n 为期数。因此，第一年支付的现值是 $\frac{A}{1+r\%}$，第二年支付的现值是 $\frac{A}{(1+r\%)^2}$，…，依此类推。

由本年起支付 n 年的年金的现值 $=\frac{A}{1+r\%}+\frac{A}{(1+r\%)^2}+\cdots+\frac{A}{(1+r\%)^n}$

董總 DONG ZONG

$$= A\left[\frac{1}{1+r\%}+\frac{1}{(1+r\%)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r\%)^n}\right]$$

$$= A\left[\frac{1}{1+r\%}\times\frac{1-\frac{1}{(1+r\%)^n}}{1-\frac{1}{1+r\%}}\right]$$

$$= \frac{A}{r\%}\left[1-\frac{1}{(1+r\%)^n}\right]$$

补充资料

当 n 趋近无限大时，无限期连续支付的年金叫做永续年金(perpetuity)。

此时 $\frac{1}{(1+r\%)^n}$ 趋近于 0，可得永续年金的现值公式是 $\frac{A}{r\%}$。

年金并非局限于每年只支付一次。

例题 36

已知年金是 RM 1,500，年利率是 5%，每年支付一次，连续支付 20 年，求现值。

解 已知 $n=20$， $A=\text{RM}1,500$， $r=5$。

$$\text{现值} = \frac{1500}{5\%}\left(1-\frac{1}{(1+5\%)^{20}}\right)$$

$$= \frac{1500}{0.05}(0.62311)$$

$$= \text{RM}18,693.32$$

例题 37

已知年金是 RM 2,000，年利率是 6%，每年支付一次。问至少需支付多少年，现值才会超过 RM 20,000？

解 设至少需支付 n 年。

董總 DONG ZONG

$$\frac{2000}{6\%}\left[1-\frac{1}{(1+6\%)^n}\right]>20000$$

$$\left(1-\frac{1}{1.06^n}\right)>0.6$$

$$\frac{1}{1.06^n}<0.4$$

$$1.06^n>2.5$$

$$n\lg 1.06>\lg 2.5$$

$$n>\frac{\lg 2.5}{\lg 1.06}$$

$$n>15.73$$

∴ 至少需支付 16 年，现值才会超过 RM 20,000。

随堂练习 13.4

1. 小芳在银行存入 RM 2,000，年利率 4%，以复利计算，每年计息一次，十年后她才去取出所有存款。问她将可以取出多少钱?
2. 小宇在银行存入 RM 1,000，银行的年利率是 3.6%。在下列各情况下，计算小宇一年后的存款总额：
   (a) 每年结算一次利息；
   (b) 每半年结算一次利息；
   (c) 每三个月结算一次利息。

董總 DONG ZONG

习题 13.4

1. 已知本金是 RM 80,000，年利率是 5%，以每年一期的复利计算，求 10 年后的本利和。

2. 某人存入一笔款项，复利率是 6%，以每年一期计算，3 年后所得利息是 RM 955.08，求该笔款项的数额。

3. 将 RM 80,000存入金融公司，年利率是 5.5%，每三个月结算一次。求 5 年后的本利和。

4. 证明复利率为 5%，每年计息一次，本利和在 15 年后会超过本金的两倍。

5. 已知本金是 RM 20,000，年利率是 6%，每年计息一次。问至少需多少年，本利和才会超过 RM 200,000?

6. 已知本金是 RM 120,000，每年一期 4.5% 的复利率。问至少需多少年，才可得到 RM 50,652.07 的利息?

7. 某人每年存款 RM 2,500。若年利率是 4%，每年计息一次，以复利计算，求 15 年后的本利和。

8. 若现值是 RM 15,443.46，年利率是 5%，求连续支付 10 年的年金。

9. 已知年金是 RM 5,000，年利率是 5%，每年支付一次，连续支付 25 年，求年金的现值及永续年金的现值。

10. 已知年金是 RM 2,500，年利率是 4.5%，每年支付一次。问至少需支付多少年，其现值才会超过 RM 30,000?

董總 DONG ZONG

13.5 特殊级数的和

利用等差级数的求和公式，我们可得

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

对于任意的正整数 n，级数 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的和又是什么呢？先来看看 $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 。

首先，我们注意到

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

由此可得：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
3 & \times & 1^2 & + & 3 & \times & 1 & + & 1 & = & 2^3 & - & 1^3 \\
3 & \times & 2^2 & + & 3 & \times & 2 & + & 1 & = & 3^3 & - & 2^3 \\
3 & \times & 3^2 & + & 3 & \times & 3 & + & 1 & = & 4^3 & - & 3^3 \\
 & & \cdots & & & & \cdots & & \cdots & & & & \\
3 & \times & n^2 & + & 3 & \times & n & + & 1 & = & (n+1)^3 & - & n^3
\end{array}
$$

将这 n 个式子加起来可得：

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=(n+1)^3-1$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n=n^3+3n^2+3n$$

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{n}k^2&=n^3+3n^2+2n-\frac{3n(n+1)}{2}\\
&=n(n+1)(n+2)-\frac{3n(n+1)}{2}\\
&=\frac{n(n+1)(2n+4-3)}{2}\\
\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k^2&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

自然数平方求和公式 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

再来看看 $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$。由

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$

$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$$

董總 DONG ZONG

可得：

4	×	1^3	+	6	×	1^2	+	4	×	1	+	1	=	2^4	−	1^4
4	×	2^3	+	6	×	2^2	+	4	×	2	+	1	=	3^4	−	2^4
4	×	3^3	+	6	×	3^2	+	4	×	3	+	1	=	4^4	−	3^4
		…				…				…		…				
4	×	n^3	+	6	×	n^2	+	4	×	n	+	1	=	$(n+1)^4$	−	n^4

将这 n 个式子加起来可得：

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=(n+1)^4-1$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n=n^4+4n^3+6n^2+4n$$

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3&=n^4+4n^3+6n^2+4n-(2n^3+3n^2+n)-(2n^2+2n)-n\\&=n^4+2n^3+n^2\\&=n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k^3&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\&=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\end{aligned}$$

自然数立方的求和公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

董總 DONG ZONG

例题 38

求 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$。

解 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

例题 39

求级数 $1^3+3^3+5^3+\cdots$ 的首 n 项之和。

解 级数 $1^3+3^3+5^3+\cdots$ 的第 n 项为 $a_n=(2n-1)^3$。

解法一

$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(8k^3-12k^2+6k-1)$$

$$=8\sum_{k=1}^{n}k^3-12\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=8\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-12\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\times\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=n(2n^3+4n^2+2n-4n^2-6n-2+3n+3-1)$$

$$=n(2n^3-n)$$

$$=n^2(2n^2-1)$$

董總 DONG ZONG

解法二

$$2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3=2^3\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)$$
$$=8\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$=2n^2(n+1)^2$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$$
$$=\left[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(2n-1)^3+(2n)^3\right]-\left[2^3+4^3+\cdots+(2n)^3\right]$$
$$=\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4}-2n^2(n+1)^2$$
$$=n^2\left(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2\right)$$
$$=n^2\left(2n^2-1\right)$$

例題 40

已知 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$。求 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$。

解 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{n}{n+1}$$

補充資料

例題40中所使用的方法叫做裂項相消法。

董總 DONGZONG

例题 41

求级数 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ 的和。

解 此级数是由等差数列 1，3，5，7，… 与等比数列 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，… 的对应项乘积构成。像这样的级数通常可以用以下方法求和。

设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ ----- (1)

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{7}{2^5}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$ ----- (2)

(1) − (2) 得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots+\frac{2}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$S_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$$

董總 DONG ZONG

随堂练习 13.5

1. 求 $10^2+11^2+12^2+\cdots+50^2$。
2. 求 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)$。
3. 求级数 $1+3+5+7+\cdots$ 首 n 项的和。
4. 求级数 $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots$ 首 n 项的和。

习题 13.5

1. 求级数 $2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+\cdots$ 首 20 项的和。

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项为 $a_n=2n-1+\left(\frac{2}{3}\right)^n$，求此数列首 n 项的和。

3. 求级数 $1\frac{1}{3}+4\frac{1}{9}+7\frac{1}{27}+\cdots$ 首 n 项的和。

4. 求无穷级数 $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{7}{27}+\frac{10}{81}+\cdots$ 的和。

5. 求级数 $x+5x^2+9x^3+13x^4+\cdots$ 首 n 项的和。
据此，若 $|x|<1$，求此级数加到无穷项的和。

6. 求级数 $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots$ 首 n 项的和。

7. 已知 $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}=\frac{1}{18(3n-2)}-\frac{1}{9(3n+1)}+\frac{1}{18(3n+4)}$。求级数 $\frac{1}{1\times4\times7}+\frac{1}{4\times7\times10}+\frac{1}{7\times10\times13}+\cdots$ 首 n 项的和，并求此级数加至无穷项的和。

8. 不使用计算机，求 $1-2\times3+3\times3^2-4\times3^3+5\times3^4-\cdots+11\times3^{10}$。

9. 求级数 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}$ 的和。

10. 求下列各式的值：
(a) $\sum_{k=1}^{8}(2k-1)^2$　　(b) $\sum_{k=6}^{12}k(k+2)$
(c) $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^3$　　(d) $\sum_{k=3}^{10}k(k^2-k+1)$

11. 已知一数列的第 n 项是 $a_n=3n^2+n$，求此数列的首 n 项的和。

12. 求级数 $1\times3+2\times7+3\times11+4\times15+\cdots$ 的首 n 项的和。

13. 求级数 $1\times4\times7+2\times5\times8+3\times6\times9+\cdots$ 的首 n 项的和。

14. 已知一数列 $\{a_n\}$ 的定义为 $a_1=3$，且当 $n\geq2$，$a_n=a_{n-1}+2n$。
(a) 求此数列的通项公式。
(b) 求此数列首 n 项的和。

董總 DONG ZONG

总复习题 13

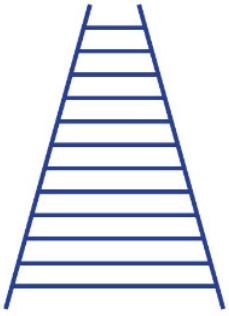
1. 已知一等差级数首 4 项的和为 28，首 8 项的和为 48，求首 12 项的和。

2. 求由 1 到 1000，所有不能被 7 整除的整数的和。

3. 求由 150 到 300，能同时被 3 及 5 整除的所有整数的和。

4. 求小于 300 的自然数中，能被 6 整除，但不能被 8 整除的所有自然数的和。

5. 一梯子共有 12 级，最高一级宽 33 cm，最低一级宽 110 cm，各级的宽度成等差数列。
   (a) 求由下往上数，第 8 级的宽度。
   (b) 若制造这些梯子横梁的材料每公尺需 RM 2，问制造梯子所有 12 级横梁的材料共需多少钱？


第5题用图

6. 等差级数 $10+9\frac{1}{5}+8\frac{2}{5}+\cdots$ 的第一个负数项是第几项？从第一项加到第几项，其和才开始是负的？并求此和。

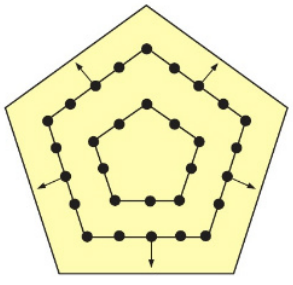
7. 已知一等差级数的第 10 项是 –23，第 25 项是 22。
   (a) 从第几项开始是正的？
   (b) 从第一项加到第几项，其和才开始是正的？

董總 DONG ZONG

8. 某地的稻米产量在 2015 年为 100,000 公斤，往后每一年比上一年增产 10%。问到哪一年产量累计可以达到 771,561 公斤？

9. 已知一凸多边形的各内角度数成等差数列，公差是 5，最小的角是120° 。求此多边形的边数。

10. 如右图所示，有若干位学生由内而外排出正五边形的啦啦队的队形，且已知最内圈每边为 3 人，往外每圈每边增加 2 人（即由内向外算起第 2 圈每边 5 人，第 3 圈每边 7 人，…）。问站在此队形最外圈（第 10 圈）的学生共有多少人？参与啦啦队表演的学生共有几人？

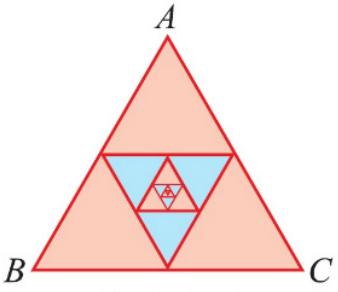

第10题用图

11. 已知一等差数列的第 2 项是 10，首 3 项的和与首 10 项的和相等。问这数列由第几项开始是负的?

12. 已知 w，x，y，z 四数成等比数列，$w+z=9$，$x+y=6$，求此数列的公比。

13. 已知 a，b，c 都是正数。4，a，b，c，64 这五个数中，4，a，b 成等比数列，b，c，64 成等比数列，但 a，b，c 成等差数列。求 a，b，c。

14. 右图中，ΔABC 是面积为 S 的等边三角形。取各边的中点连起来，又得一三角形。这样无限的继续下去，求所有三角形的面积的和。



第 14 题用图

15. 若 a，b，c 是正数且 $\lg a$，$\lg b$，$\lg c$ 成等差数列，证明 a，b，c 成等比数列。

16. 已知 x，y，z 三数成等差数列，x，y，$z+8$ 三数成等比数列且 $x+y+z=18$。求 x，y，z。

17. 已知 a，b，c 三数成等比数列，$a+1$，$b+5$，$c+25$ 三数也成等比数列，求 $a:b:c$。

18. 已知 $x-3$，$x+1$，$4x-2$ 三数成等比数列。若公比是 r，三数的和是 S，求 $r+S$。

19. 已知一等比级数首 n 项的和是 5，首 $2n$ 项的和为 650，求首 $3n$ 项的和。

20. 从 2005 年开始，小天每年年初存 RM 6,000 进银行，年利率是 3%，以复利计算，每半年计息一次。若小天没有提取本金或利息，他在 2020 年初存款后，在银行的总存款额是多少?

21. 已知本金是 RM 75,000，年利率是 4.5%，每三个月结算一次。以复利计算，求 10 年后的本利和。

22. 小晴存入一笔款项，年利率是 5.5%，以每年一期的复利计算，5 年后的存款增加了 RM 2455.68。求该笔款项的数额。

董總 DONG ZONG

23. 已知本金是 RM 120,000，年利率是 5%，每年结算一次。以复利计算，问至少需要多少年，本利和才会超过 RM 250,000?

24. 若现值是 RM 22,939.84，年利率是 6%，求连续支付 20 年的年金。

25. 已知年金是 RM 8,000，年利率是 4.5%，每年支付一次，连续支付 15 年。求现值及永续年金的现值。

26. 已知年金是 RM 4,500，年利率是 4%，每年支付一次，问至少需支付多少年，其现值才会超过 RM 50,000?

27. 刚考入大学的小明准备用贷款方式购买价值 RM 3,000 的电脑，然后再通过打工赚钱来分期还款。若小明每个月还一次款，分 12 次还清所有的欠款，且每个月还款的数额都相等，贷款的月利率为 0.5%，以复利计算，求小明每个月所要还款的数额（准确至整数）。

28. 某品牌价值 RM 2,500的手提电脑可选择两种分期付款的方式购买：
第一种：分 3 次付款，每 4 个月付款一次
第二种：分 6 次付款，每 2 个月付款一次
若月利率是 0.6%，每月利息按复利计算，且每次所付款额都相同，问哪一种付款方式较为划算?

29. 求级数 $2\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+11\frac{1}{16}+\cdots$ 首 n 项的和。

30. 已知 $S_n=[n(n+1)]^2$ 是数列 $\{a_n\}$ 首 n 项的和，求
(a) a_n　　(b) $\sum_{n=5}^{10} a_n$

31. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2(n+1)$，求 a_n 及 a_{200}。

32. 已知一数列的第 n 项为 $a_n=n(n+1)(n+3)$，求此数列的首 n 项的和。

33. 求级数 $2\times5+5\times8+8\times11+11\times17+\cdots$ 的首 n 项的和。

董總 DONG ZONG

34. 证明$\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\dfrac{1}{5(5n-4)}-\dfrac{1}{5(5n+1)}$。

据此，求级数$\dfrac{1}{1\times 6}+\dfrac{1}{6\times 11}+\dfrac{1}{11\times 16}+\cdots$的首$n$项的和。

35. 已知$\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)(5n+6)}=\dfrac{1}{50(5n-4)}-\dfrac{1}{25(5n+1)}+\dfrac{1}{50(5n+6)}$。

求无穷级数$\dfrac{1}{1\times 6\times 11}+\dfrac{1}{6\times 11\times 16}+\dfrac{1}{11\times 16\times 21}+\cdots$的和。

36. 求级数$2-\dfrac{5}{4}+\dfrac{8}{4^2}-\dfrac{11}{4^3}+\dfrac{14}{4^4}-\cdots$的和。

37. 已知一数列$\{a_n\}$的定义为$a_1=1$，且当$n\geq 2$，$a_n=2a_{n-1}+3$。

(a) 求此数列的通项公式。

(b) 求此数列首 n 项的和。

董總
DONG ZONG

中英名词对照 Glossary

本名词对照表按华文条目的汉语拼音字母的次序排列

https://bit.ly/43XpHoW

B

本金 principal 210
本利和 accumulated value 211
波幅 amplitude 44

D

单位圆 unit circle 28
等差级数 arithmetic series 190
等差数列 arithmetic sequence 186
等比级数 geometric series 201
等比数列 geometric sequence 197
对数方程式 logarithmic equation 170
对数函数 logarithmic function 158
顶点 vertex 4

F

反三角函数 inverse trigonometric function 53
反余弦函数 inverse cosine function 56
反正切函数 inverse tangent function 57
反正弦函数 inverse sine function 54
方位角 bearing 88
分 minute 5
复利 compound interest 210
俯角 angle of depression 85

G

公比 common ratio 197
公差 common difference 186

H

海龙公式 Heron's formula 82
弧度 radian 6
弧度制 radian measure 6

J

级数 series / progression 182
角度制 degree measure 5
渐近线 asymptote 43

M

秒 second 5
末项 last term 180

N

年金 annuity 213
年利率 annual interest rate 210

S

三角方程式 trigonometric equation 124
三角函数 trigonometric function 26
三角恒等式 trigonometric identity 101

董總 DONG ZONG

数列 sequence 180
始边 initial side 4
首项 first term 180

T

通项 general term 180

W

外接圆 circumscribed circle/ circumcircle 70
无穷级数 infinite series 183, 205
无穷数列 infinite sequence 180

X

现值 / 现价 present value 210
项 term 180
相伴锐角 associated acute angle / reference angle 30

Y

仰角 angle of elevation 85
一般解 general solution 130
永续年金 perpetuity 214
有限级数 finite series 183
有限数列 finite sequence 180
余弦定律 cosine rule 74
余弦函数曲线 cosine curve 42

Z

正切函数曲线 tangent curve 43
正弦定律 sine rule 66
正弦函数曲线 sine curve 41
指数方程式 exponential equation 165
指数函数 exponential function 146
终边 terminal side 4
周期 period 42
周期函数 periodic function 41
自然对数 natural logarithm 151

董總 DONG ZONG

答案

第8章 角度与弧度

随堂练习 8.1 P.8

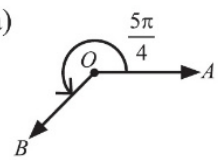
1.

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

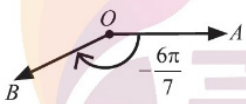
2. (a) 28.65° (b) 210°

习题 8.1 P.8

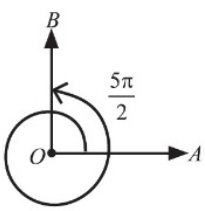
1. (a)



(b)



(c)



2. (a) 1.2031 (b) 2.4295 (c) −8.7749

3. (a) 51° (b) −510° (c) 171°53′

4. $\frac{4}{3}$

5. (a) 2.3562或 $\frac{3\pi}{4}$ (b) 10.2102或 $\frac{13\pi}{4}$

随堂练习 8.2a P.11

(a) 49.58cm (b) $\left(6+\frac{3\pi}{2}\right)\sqrt{2}$ cm

随堂练习 8.2b P.14

(a) 8.6051 cm^2 (b) $\left(12\pi-18\sqrt{3}\right)cm^2$

习题 8.2a P.15

1. $\overset{\frown}{BC}$ = 4cm；着色面积 = 14.73cm^2

2. 半径 = 12cm， 圆心角 = $\frac{2\pi}{3}$

3. 半径 = 6cm，

劣扇形圆心角 = $\frac{\pi}{3}$；优扇形圆心角 = $\frac{5\pi}{3}$

4. (a) 12cm (b) $\frac{32}{3}\pi$ cm^2

(c) $\left(\frac{40}{3}\pi-16\sqrt{3}\right)cm^2$

5. $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$

习题 8.2b P.18

1. 3065.72cm

2. 2635.32km

3. (a) 2684.4 mm^3 (b) 64425.6 mm^3

总复习题 8 P.19

1. (a) $\frac{5\pi}{12}$ (b) $-\frac{\pi}{8}$ (c) 3π

2. (a) 0.3113 (b) 5.6214 (c) 0.0548

3. (a) 315° (b) −143°14′ (c) 100°

4. 2.4 弧度； 面积 = 30cm^2

5. (a) $\angle ABC = 1.2946$； $\angle BAD = 1.847$

(b) 11.7128cm^2

董總 DONG ZONG

6. (a) $(\pi+1)a$

7. (a) 1.287； 2.574　　(b) 23.166 cm

8. (a) 底圆半径=7.5cm；体积=1092.13cm^3

(b) 不一样

9. (a) 12　　(b) 51.14cm^3　　(c) $\frac{\pi}{6}$

10. 成人区需28968.14g，儿童区需4969.92g。

第9章 任意角的三角函数

随堂练习 9.1a　P.25

1. (a) 第二象限角　　(b) 第一象限角

(c) 第四象限角　　(d) 第三象限角

2. 第一象限角

3. (a) 200°24′　　(b) 345°

(c) 80°　　(d) $\frac{2\pi}{5}$

随堂练习 9.1b　P.27

$\sin\alpha=-\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot\alpha=\sqrt{3}$,

$\sec\alpha=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{cosec}\alpha=-2$

随堂练习 9.1c　P.29

1.

	θ	象限	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
(a)	−160°	三	−	−	+
(b)	210°	三	−	−	+
(c)	1068°	四	−	+	−
(d)	$\frac{3\pi}{4}$	二	+	−	−
(e)	−5	一	+	+	+

2. (a) 第二或第四象限

(b) 第二象限

(c) 第三象限

(d) 第一或第四象限

随堂练习 9.1d　P.33

1. $\cos A=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{cosec}A=-\frac{25}{7}$

2. (a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(c) $-\frac{1}{2}$　　(d) −1

3. $\frac{9\pi}{8}$ 或 $\frac{15\pi}{8}$

4. (a) 0.2756　　(b) 0.9135

随堂练习 9.1e　P.34

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cot\theta$	没有定义	0	没有定义	0
$\sec\theta$	1	没有定义	−1	没有定义
$\operatorname{cosec}\theta$	没有定义	1	没有定义	−1

习题 9.1　P.34

1. (a) 第二象限　　(b) 第二象限

(c) 第四象限　　(d) 第三象限

董總 DONG ZONG

2.

	(a)	(b)
$\sin\alpha$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$
$\cos\alpha$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$\tan\alpha$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\frac{5}{3}$	$\sqrt{5}$
$\sec\alpha$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$
$\cot\alpha$	$\frac{4}{3}$	-2

3. (a) 负值　(b) 正值
   (c) 正值　(d) 负值
4. (a) 第一或第四象限
   (b) 第一或第三象限
   (c) 第二或第三象限
   (d) $\tan\theta > 0$：第一或第三象限
   $\tan\theta < 0$：第二或第四象限
5. $\sin\alpha = \frac{8}{17}, \tan\alpha = -\frac{8}{15}$ 或
   $\sin\alpha = -\frac{8}{17}, \tan\alpha = \frac{8}{15}$
6. $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$
7. (a) $-\operatorname{cosec}6°$　(b) $\cot 35°$
   (c) $-\sin 0.4\pi$　(d) $-\cos\frac{8\pi}{17}$
8. (a) 68° 或 112°　(b) 146° 或 214°
9. $\sin\angle BDA = \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}, \cot\angle BDA = -\frac{t}{2}$
10. (a) 0　(b) $\frac{6\sqrt{3}-1}{12}$　(c) $\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$

随堂练习 9.2a　P.38

1. (a) $-\sin\alpha$　(b) $\sin\alpha$
   (c) $-\cot\alpha$　(d) $-\sec\alpha$
   (e) $-\operatorname{cosec}\alpha$　(f) $\tan\alpha$

随堂练习 9.2b　P.39

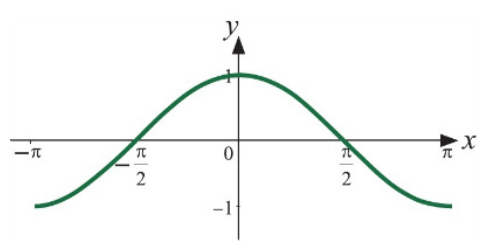
2. (a) 0　(b) 1

习题 9.2　P.40

1. (a) $\tan\alpha$　(b) 0
   (c) 2　(d) 0
2. (a) $-k$　(b) $-\sqrt{1-k^2}$
   (c) $-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　(d) $\frac{1}{k}$
3. $\frac{\sqrt{5}}{6}$
4. (a) $-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$　(b) $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$
5. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

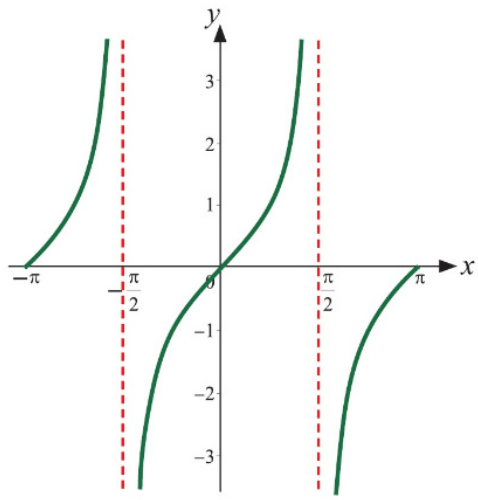
随堂练习 9.3a　P.43

(a)



董總 DONG ZONG

(b)



随堂练习 9.3b P.44

(a) 不能，$\cos x$ 的绝对值不能大于 1

(b) 不能，$\sin x$ 的最大值是 1

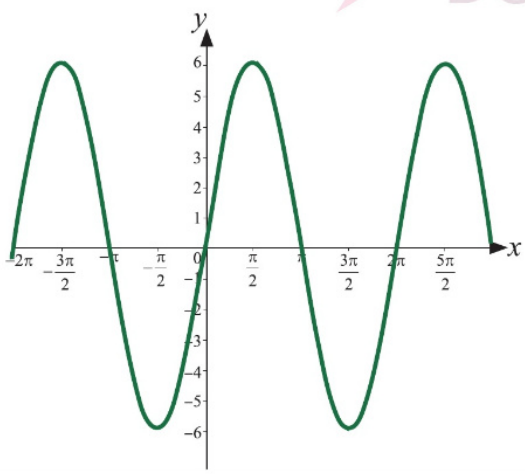
(c) 不能，没有任何实数 x 能同时使得 $\sin x = 1$ 且 $\cos x = 1$

(d) 能，当 $\tan x$ 与 $\cot x$ 都等于 1

随堂练习 9.3c P.51

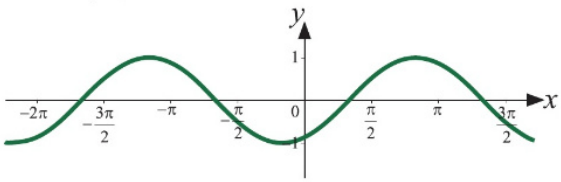
1. (a) 波幅 $= 6$，周期 $= 2\pi$；

将 -2π 的图像上下伸长到原来的 6 倍。



(b) 波幅 $= 1$，周期 $= 2\pi$

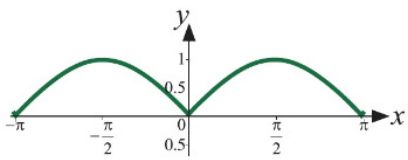
将 $y = \sin x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位。



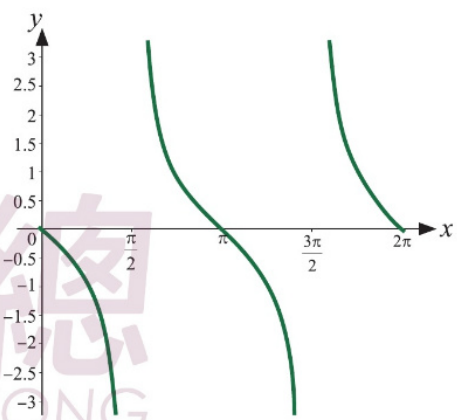
2. $a = -4, b = \frac{5}{2}$

习题 9.3 P.52

1. (a)



(b)



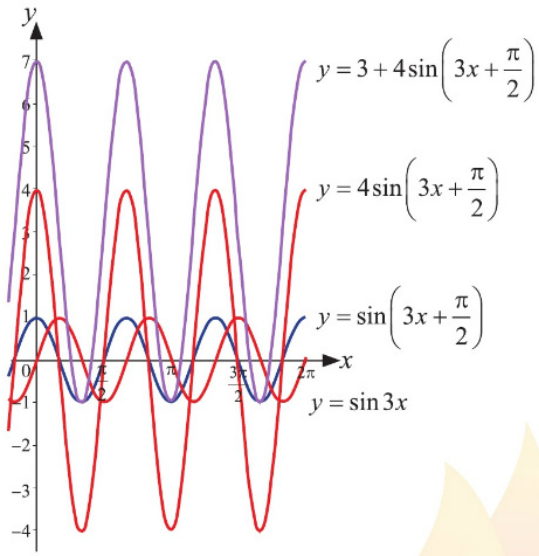
2. (a) 最大值 $= -1$，最小值 $= -5$

(b) 最大值 $= 3$，最小值 $= \frac{3}{2}$

董總 DONG ZONG

3. (a) $[-1,1]$ (b) $[-1,1]$

(c) $[-4,4]$ (d) $[-1,7]$

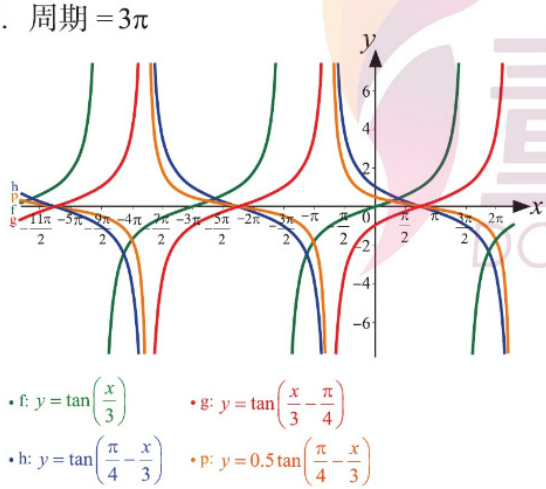


4. $y=2\cos\frac{3}{2}x-1$

5. $a=3, b=4, c=1$

6. $I_m=25A, \omega=\frac{\pi}{5}\text{rad/ms}$

7. 周期 $=3\pi$



(a) 将 $y=\tan x$ 的图像由原点向旁边伸长到原来的 3 倍。

(b) 将 $y=\tan x$ 的图像由原点向旁边伸长到原来的 3 倍，然后向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位。

(c) 将 $y=\tan x$ 的图像由原点向旁边伸长到原来的 3 倍，然后向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位。最后将图像关于 x 轴反射。

(d) 将 $y=\tan x$ 的图像由原点向旁边伸长到原来的 3 倍，然后向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位。接着将图像关于 x 轴反射。最后将图像上下缩短到原来的 $\frac{1}{2}$。

随堂练习 9.4a P.55

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

随堂练习9.4b P.57

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos^{-1}x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

随堂练习 9.4c P.58

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\tan^{-1}x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

习题 9.4 P.60

1. $A=\cos^{-1}\frac{5}{7}$（或其它合理的答案）

2. (a)无意义 (b) 无意义 (c) 有意义

3. (a) $\frac{\pi}{3}=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\frac{2\pi}{3}=\pi-\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{3\pi}{4}=\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. (a) 0.7697rad（或 44°6′）

(b) 1.9744 rad（或 113°7′）

(c) $-\frac{\pi}{4}$（或 $-45°$）

总复习题 9 P.60

1. $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\theta=-2$

2. $y=\frac{9}{2},\tan\theta=-\frac{3}{4}$ 或 $y=-\frac{9}{2},\tan\theta=\frac{3}{4}$

3. 14 cm

4. $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{15}}{4},\tan\theta=\pm\sqrt{15}$

5. $\frac{1}{6}$　　6. $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

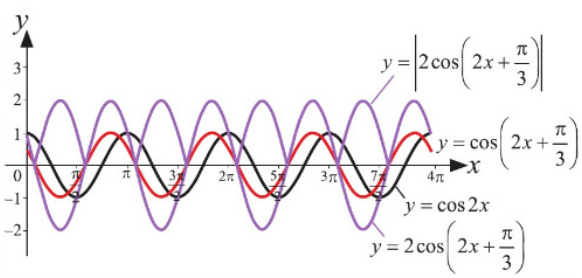
7. $\tan 40°=-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$; $\sin 50°=-k$

8. (a) 1　(b) 0　(c) −1　(d) 1　(e) 1

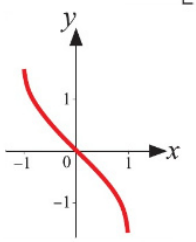
9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　11. $-\frac{1}{2}$　　12. $-p$

13. (a) [−1,1]　(b) [−1,1]

(c) [−2,2]　(d) [0, 2]

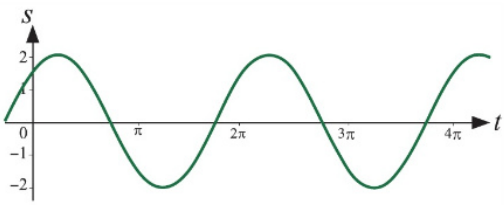


14. 定义域 $=[-1,1]$，值域 $=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



15. $\tan^{-1}\frac{10}{9}$（或其他合理答案）

16. (a)



(b) (i) $\sqrt{2}$ cm

(ii) 最高位置 = +2 cm

最低位置 = −2 cm

(iii) 2π s

第10章 三角学的应用

随堂练习 10.1a P.69

1. $B=40.51°$，$C=79.49°$，$AB=9.08$ cm

2. 不存在满足条件的三角形

3. $A=37.99°$，$C=42.01°$，$AB=5.44$ m

随堂练习 10.1b P.72

1. 19.62 cm

2. $R=4.62$ cm，$AB=6.53$ cm，

$BC=8.92$ cm

董總 DONG ZONG

习题 10.1 P.72

1. (a) $BC = 10.58$ cm，$AB = 7.94$ cm

   (b) 5.43 cm

2. 9.70 km

3. $AB = 11.59$ cm 或 $AB = 1.64$ cm

4. (a) 不存在满足条件的三角形

   (b) 有两个不同的三角形满足条件：

   i. $A = 76.98°$，$C = 43.02°$，$AB = 6.30$ cm

   ii. $A = 103.02°$，$C = 16.98°$，$AB = 2.70$ cm

   (c) $B = 26.74°$，$C = 113.26°$，$AB = 14.29$ km

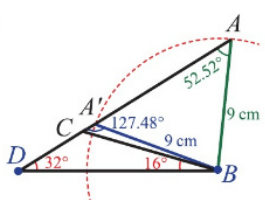
5. 34.73 cm

6. 19.93 cm

7. (a) 9.61 cm (b) 52.52°

   (c) 16.91 cm

   (d)



8. $BD = 10.94$ cm，$AB = 9.62$ cm

9. $CD = 4.20$ cm

随堂练习 10.2 P.76

1. 6 cm 2. 92.87° 3. 45°

习题 10.2 P.76

1. 52.62°

2. (a) 10.95 cm (b) 54.01°

3. 1216.55 m

4. $50\sqrt{7} \approx 132.29$ 公尺

5. 469.57 m 6. 120°

7. $2 < x < 2\sqrt{7}$ 或 $10 < x < 14$

8. 2 : 9 : 12 9. 3.93 cm

10. (a) 9.82 cm，15.22 cm

    (b) 76.06°

11. $AB = 7.64$ cm，$BD = 8.41$ cm

12. (a) 11.18 cm (b) 72.68°

    (c) 6.88 cm (d) 50.88°

13. $AD = 5.74$ cm，$BD = 4.02$ cm

14. 63.35°

随堂练习 10.3a P.81

1. 13.79 cm^2

2. (a) $2\sqrt{19} \approx 8.72$cm

   (b) 96.59°

随堂练习 10.3b P.82

$25\sqrt{3} \approx 43.30$

习题 10.3 P.83

1. 45.11 cm^2

2. 7 cm

3. $2000\sqrt{6} \approx 4898.98\ cm^2$

4. $\frac{3}{4}(3+\sqrt{3}) \approx 3.55\ cm^2$ 或

   $\frac{3}{4}(3-\sqrt{3}) \approx 0.95\ cm^2$

5. 24.34 cm^2

董總 DONG ZONG

6. $AB = \frac{2}{3}\sqrt{3}h$，$CA = \sqrt{2}h$，

$BC = \frac{\sqrt{3}+3}{3}h$，

ΔABC 面积 $= \frac{\sqrt{3}+3}{6}h^2$

7. $4\sqrt{3} \approx 6.93$

8. $540\sqrt{3} \approx 935.31\,\text{mm}^3$

9. 29146.99 m^2

10. 224 cm^2

随堂练习 10.4a P.87

1. 420.41 m　　2. 46.78 m

随堂练习 10.4b P.90

65.23 海里

习题 10.4 P.91

1. 320.31 m

2. 12.45 m，倾斜角 2.45°

3. 529.01 m　　4. 52.89 m

5. 40.62 海里

6. (a) 104.70 海里　　(b) 054°

7. (a) 80.98 海里　　(b) 064°

总复习题 10 P.93

1. 33.56°　　2. 12.19 cm

3. 56.44° 或 123.56°　　4. 46.57°

5. (a) $10\sqrt{77} \approx 87.75\,\text{cm}^2$

(b) $\frac{\sqrt{77}}{9} \approx 0.97$

(c) $\frac{153}{154}\sqrt{77} \approx 8.72\,\text{cm}$

6. 60°

9. 43.45 cm^2

10. (a) 8.43 cm　　(b) 6.65 cm

(c) 45.22 cm^2　　(d) 5.36 cm

13. $PS = 5.05$ cm，$QS = 7.27$ cm

14. (a) $DF = 9.94$ cm，$EF = 8.61$ cm

(b) 186.18 cm^2

15. (a) 13.07 cm　　(b) 482.84 cm^2

16. (a) 36°　　(b) 19.42 cm

(c) 247.75 cm^2　　(d) 116.97 cm^2

17. $5 + 3\sqrt{3} \approx 10.20\,\text{cm}^2$

18. 67.30 m

19. (a) 37.55°　　(b) 19.55°

20. (a) 2.92 海里　　(b) 115°

21. (a) 7.44 km　　(b) 012°

(c) 14.33 km

第11章 三角恒等式与三角方程式

随堂练习 11.1a P.102

1. 1　　2. $\cos^2 A$

3. 1　　4. $\cot^2\alpha$

习题 11.1 P.106

1. 1　　2. $\sec^2\alpha$

3. $\sin A\cos A$　　4. $\text{cosec}^2\alpha$

董總 DONG ZONG

随堂练习 11.2a P.110

1. (a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (b) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

   (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

随堂练习 11.2b P.112

1. (a) $2+\sqrt{3}$ (b) $-2+\sqrt{3}$

   (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\frac{1}{3}$

随堂练习 11.2c P.114

1. (a) $-\frac{63}{65}$ (b) $\frac{65}{16}$

2. (a) $\frac{16}{65}$ (b) $-\frac{56}{33}$

随堂练习 11.2d P.115

1. 77.90°，52.70°，49.40°

随堂练习 11.2e P.117

1. $f(x)=2\sqrt{3}\cos(x-30°)$；
   $-2\sqrt{3}\le 3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\le 2\sqrt{3}$

2. $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\cos(\theta+60°)$；
   最大值=2，最小值= −2

习题 11.2 P.117

1. 1 2. $\frac{15-8\sqrt{3}}{34}$

3. (a) $\frac{-6+\sqrt{35}}{12}$ (b) $\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$

   (c) $\frac{6+\sqrt{35}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{5}}$ (d) $\frac{-12}{6+\sqrt{35}}$

4. $-\frac{85}{84}$，$\frac{-77}{36}$

5. 3.95°，10.30°，165.75°

17. (a) $-2\le\sin x-\sqrt{3}\cos x\le 2$

    (b) $-5\le 3\sin x-4\cos x\le 5$

随堂练习 11.3a P.121

1. (a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

   (c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $-1+\sqrt{2}$ 3. −3

习题 11.3 P.122

1. $-\frac{24}{25}$，$\frac{7}{25}$，$-\frac{24}{7}$

2. $\frac{3\sqrt{34}}{34}$，$-\frac{5\sqrt{34}}{34}$

3. $-\frac{1}{7}$

5. $3\sin x-4\sin^3 x$

6. $\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

随堂练习 11.4a P.125

1. 45°，135° 2. −30°，30°

3. 10°，70°，130°，190°，250°，310°

4. 75°，165°，255°，345°

随堂练习 11.4b P.127

1. 0°，48.19°，311.81°，360°

董總 DONG ZONG

2. $-108.43°$，$-63.43°$，$71.57°$，$116.57°$

3. 0，$\frac{3\pi}{4}$，π，$\frac{7\pi}{4}$，2π

随堂练习 11.4c P.128

1. $45°$，$90°$，$135°$，$225°$，$270°$，$315°$

2. 0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，π，2π

随堂练习 11.4d P.129

1. 0，$\frac{2\pi}{3}$，2π　　2. $157.38°$

习题 11.4a P.129

1. (a) $228.59°$，$311.41°$

   (b) $116.57°$，$153.44°$，$296.57°$，$333.44°$

   (c) $26.57°$，$161.57°$，$206.57°$，$341.57°$

   (d) $73.90°$，$253.90°$

   (e) $90°$，$131.81°$，$228.19°$，$270°$

   (f) $11.23°$，$131.23°$，$251.23°$

   (g) $53.13°$

2. (a) $-90°$，$30°$，$90°$，$150°$

   (b) $-23.20°$，$156.80°$

   (c) $-153.43°$，$-81.87°$，$26.57°$，$98.13°$

   (d) $30°$，$150°$

   (e) $-138.18°$，$-41.81°$

   (f) $-90°$，$48.59°$，$90°$，$131.41°$

   (g) $-34.80°$，$80.04°$

3. (a) $\frac{7\pi}{6}$，$\frac{11\pi}{6}$

   (b) $\frac{7\pi}{6}$，$\frac{11\pi}{6}$

   (c) $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{7\pi}{6}$，$\frac{4\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$，$\frac{11\pi}{6}$

   (d) $\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{7\pi}{6}$，$\frac{11\pi}{6}$

   (e) $\frac{7\pi}{4}$

   (f) $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{7\pi}{6}$，$\frac{3\pi}{2}$

随堂练习 11.4e P.132

$n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}$，$(2n-1)\frac{\pi}{2}$；$n\in\boldsymbol{Z}$

随堂练习 11.4f P.134

$2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$(2n+1)\pi$；$n\in\boldsymbol{Z}$

随堂练习 11.4g P.136

$n(180°)-18.4°$，$n(180°)+45°$；$n\in\boldsymbol{Z}$

习题 11.4b P.136

1. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$(2n+1)\pi$，$n\in\boldsymbol{Z}$

2. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

3. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

4. $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$，$2n\pi$，$n\in\boldsymbol{Z}$

5. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$，$2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

6. $\frac{n}{2}\pi+(-1)^n\frac{\pi}{8}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

7. $n(180°)-56.31°$，$n(180°)-63.43°$，$n\in\boldsymbol{Z}$

8. $180°n+26.57°$，$(2n+1)90°$，$n\in\boldsymbol{Z}$

9. $\frac{\pi}{3}-n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{3}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

10. $\frac{\pi}{8}-\frac{n\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{6}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

董總 DONG ZONG

习题 11.4c P.138

1. 0，$\frac{2\pi}{3}$，2π

2. (a) 1个解

   (b) 2个解

   (c) 1个解

   (d) 2个解

总复习题 11 P.139

1. $\frac{63}{65}$，$-\frac{33}{56}$

3. $\frac{\sqrt{5}}{5}$，$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$-\frac{1}{2}$

5. 1，$\frac{1}{3}$

6. $-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

8. (a) $\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$

   (b) $\frac{\pi}{18}$，$\frac{\pi}{8}$，$\frac{5\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{8}$，$\frac{13\pi}{18}$，$\frac{17\pi}{18}$，$\frac{9\pi}{8}$，$\frac{25\pi}{18}$，$\frac{13\pi}{8}$，$\frac{29\pi}{18}$

   (c) $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$

9. (a) $-41.41°$，$41.41°$

   (b) $-104.48°$，$0°$，$104.48°$

   (c) $-150°$，$-30°$，$41.81°$，$138.19°$

   (d) $-108.43°$，$-45°$，$71.57°$，$135°$

10. (a) $n\pi+\frac{\pi}{4}$，$2n\pi$，$2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

    (b) $n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}$，$2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

    (c) $2n\pi+\frac{\pi}{6}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

11. $60°$，$120°$，$240°$，$300°$

12. $30°$，$150°$

13. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

14. (a) $17\sin(\theta-61.93°)$

    (b) $R_f=\{y\mid -17\le y\le 17\}$

    (c) $29.96°$，$273.90°$

15. $2n\pi-\frac{\pi}{6}$，$n\in\boldsymbol{Z}$

16. $13\cos(\theta-67.38°)$

    (a) 最大值 $=-\frac{1}{2}$，最小值 $=-7$

    (b) 最大值 $=18$，最小值 $=\frac{11}{10}$

    (c) $207.66°$，$287.10°$

18. (a) 1个解

    (b) 2个解

19. (b) 当 $0°<\theta<45°$ 时，抛射角越大，射程越大；

    当 $45°<\theta<90°$ 时，抛射角越大，射程越小；

    当 $\theta=45°$ 时，射程最大。

第12章 指数与对数

随堂练习 12.1a P.145

1. 48

2. (a) $\frac{b^4c}{a^3}$　　(b) 780

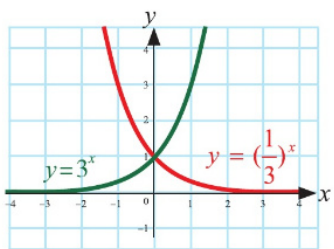
随堂练习 12.1b P.149

1. (a) $\pi^{2.1}<\pi^{3.5}$　　(b) $0.15^{-2.3}<0.15^{-3.8}$

2. $x\le -1$ 或 $x\ge 5$

习题 12.1 P.150

1. $\frac{7}{54}$
2. 2
3. 33
4. 4
5. $-\frac{1}{8a^3}$
6. $x-y^{-1}$
7. 4
8. $\frac{79}{7}$
9. $2\sqrt{2}-1$
10.



11. (a) $2.5^{7.1}<2.5^{8.5}$

    (b) $0.35^{6.5}<0.35^{5.6}$

    (c) $1.03^{-2.1}>1.03^{-3.2}$

    (d) $\left(\sqrt{2}\right)^{\pi}<\left(\sqrt{2}\right)^{3.5}$

    (e) $0.01^{-\frac{1}{3}}<0.01^{-\frac{1}{2}}$

    (f) $2.7^{\sqrt{20}}>2.7^{\sqrt[3]{35}}$
12. $0<x<3$

随堂练习 12.2a P.152

1. $\frac{1}{16}$
2. (a) -1 (b) 1

   (c) -3 (d) $-\frac{7}{2}$

随堂练习 12.2b P.154

1. (a) 7 (b) 2
2. $1+b-2a$

随堂练习 12.2c P.156

1. $\frac{3}{2}$
2. $\frac{a}{a+b}$

习题 12.2a P.157

1. 5
2. $\frac{1}{3}$
3. $2x$
4. 1
5. $\frac{x}{y}$
6. $2x+3y$
7. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
8. $\frac{3x}{2}$
9. $\frac{2}{3}$
10. 9
11. $\frac{1}{7}$
12. $-\frac{1}{4}$
13. -3
14. 1
15. -12
16. $\frac{3}{2}$
17. 3
18. 2
19. $\frac{b+a}{2}$
20. $\frac{2+mn}{2m}$
21. $\frac{ab+1}{ab+a+1}$
22. $\frac{2x-1}{2}$
23. $2b-a-1$

随堂练习 12.2d P.163

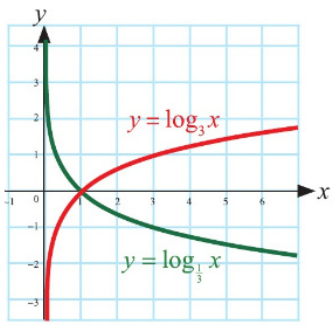
1. (a) $\log_{0.3}5>\log_{0.3}7$

   (b) $\log_{\frac{1}{2}}0.4>\log_2 0.7$
2. (a) $\boldsymbol{R}$ (b) $-2<x<\frac{1}{2}$
3. $x\le -1$ 或 $x\ge 3$

董總 DONG ZONG

习题 12.2b P.165

1.



2. (a) $\log_{1.5} 1.4 < \log_{1.5} 1.6$

   (b) $\log_{0.4} \sqrt{2} > \log_{0.4} \sqrt{3}$

   (c) $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$

   (d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

3. (a) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ (b) $(2, \infty)$

   (c) $\left(\frac{5}{7}, \infty\right) \setminus \frac{6}{7}$ (d) $[1, \infty)$

4. (a) $\frac{3}{2} < x \le 14$ (b) $x > \frac{10}{3}$

   (c) $\frac{1}{2} < x \le 1$

   (d) $-\frac{2}{3} \le x < 0$ 或 $\frac{1}{3} < x \le 1$

随堂练习 12.3a P.166

1. -0.0655 2. 1.4669

随堂练习 12.3b P.168

1. 1 2. -1 或 $\log_2 3$

习题 12.3a P.169

1. $\frac{1}{3}$ 2. 2

3. ± 2 4. 6，-3

5. $\frac{7}{2}$，-1 6. 2

7. 8.6377 8. 0.7812

9. -1 或 $(1 + \log_2 3)$ 10. -2

11. 2 12. 1，3

13. -7.6582 14. 0

15. 2 16. 10 年

17. 5316 年

随堂练习 12.3c P.171

1. 4，-2 2. 1，2

随堂练习 12.3d P.173

1. 8，$\frac{1}{2}$ 2. 100，$\frac{1}{10}$

随堂练习 12.3e P.174

$\frac{e+1}{e-1}$

习题 12.3b P.174

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{5}{2}$

3. 4，-4 4. 4，-1

5. 5 6. 3

7. $\sqrt{3}$，$\frac{1}{3}$ 8. 125，$\frac{1}{25}$

9. 2，16 10. e，$\frac{1}{\sqrt{e}}$

11. 5 12. 1，4

13. 3 14. 6，14

总复习题 12 P.175

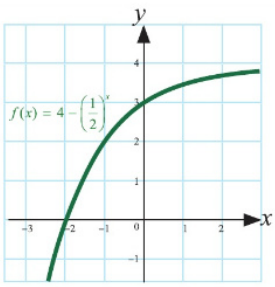
1. $\frac{3}{7}$ 2. $-\frac{3}{4}$

董總 DONG ZONG

3. 5　　4. $\frac{1}{3}$

5. 2　　7. $\frac{n+1}{mn+n}$

8. (a)



(b) 定义域为$\boldsymbol{R}$

$[-2, \infty)$

9. $(-2,-1)\cup(-1,2)$

10. $\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$

11. (0, 10)　　14. 1

15. −1, 1　　16. −3

17. 2　　18. −4, 2

19. 8, $\frac{1}{4}$　　20. $\frac{1}{100}$

21. 4　　22. 9, 27

23. 5　　24. $0<x<3$

25. $x<\log_{0.75}\frac{5}{18}$（或 4.4526）

26. $0<x<1$ 或 $4<x<5$

27. $-1\le x<0$ 或 $4<x\le 5$

28. $f^{-1}(x)=a-\frac{1}{k}\ln\frac{A-x}{x}$

29. 13 年　　30. e^5-1

第13章 数列与级数

随堂练习 13.1a　P.182

1. 首项 = 1，末项 = $\frac{1}{10}$，通项公式 = $\frac{1}{n}$

2. 1, $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{16}{5}$, $\frac{16}{3}$

3. (a) $a_n=(-1)^{n-1}$　　(b) $a_n=n^3$

随堂练习 13.1b　P.184

1. (a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}$

(b) $-1+3-5+7-9$

2. (a) $\sum_{n=1}^{9}3$　　(b) $\sum_{n=1}^{99}(n+1)(n+2)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}3^{2-n}$

习题 13.1　P.185

1. (a) 1, 3, 5, 7, 9

(b) −3, 9, −27, 81, −243

(c) 4, 10, 18, 28, 40

(d) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$

2. (a) $a_n=3n+1$

(b) $a_n=(-1)^{n-1}(6n-1)$

(c) $a_n=\frac{2n+1}{3n+4}$

(d) $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{3^n}$

(e) $a_n=n^2+2$

(f) $a_n=3(2^{n-1})$

3. (a) −5, −2, 1, 4, 7, 10

(b) $a_n=3n-8$, $a_{99}=289$

4. (a) 2, 6, 18, 54

(b) $a_n=2(3^{n-1})$, $a_8=4374$

5. $a_{10}=212$

6. (a) 10+18+28+40+54+70

董總 DONG ZONG

(b) $\frac{1}{19}-\frac{1}{28}+\frac{1}{39}-\frac{1}{52}+\frac{1}{67}-\frac{1}{84}$

7. (a) $\sum_{n=1}^{16}\frac{1}{2n-1}$ (b) $\sum_{n=1}^{24}(n+3)^3$

(c) $\sum_{n=1}^{25}2n(3n+1)$ (d) $\sum_{n=1}^{19}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-2}$

随堂练习 13.2a P.190

1. $a=-20$，$d=6$，$a_{12}=46$
2. 6
3. -24，-8，8，24，40
4. 128 个

随堂练习 13.2b P.194

1. RM 6679.50
2. $n=20$ 或 $n=1$
3. (a) $a_n=\frac{7-6n}{2}$

   (b) -248

习题 13.2 P.195

1. $a_{10}=77$，$a_n=8n-3$
2. 23　3. -40　4. 第 20 项
5. 20，22，24，26，28；168
6. 810　7. 第 27 项
8. 7，10，13 或 13，10，7
9. -312　10. 30　11. 27027
12. (a) $x=5$　(b) 320
13. 2 或 7　14. 第 18 项
15. (a) 1　(b) $a_n=\frac{n+1}{2}$　(d) 120
16. (a) 1275 支　(b) 44 层
17. 39　18. 第 9 项
19. $a_5=45$，$S_5=195$
20. 741　21. $n=8$　22. 6
23. $a=11$，$a_{10}=29$

随堂练习 13.3a P.200

1. $\frac{64}{27}$　2. 第 8 项　3. $\pm\frac{3}{2}$

习题 13.3a P.201

1. 11　2. ±2916
3. 28，56，112 或 -28，56，-112
4. $-5\frac{1}{3}$　5. $x=20$；$r=\frac{3}{4}$
6. $\frac{1}{2}$ 或 1　7. $x=20$，$y=200$

随堂练习 13.3b P.204

1. $1-\frac{1}{2^n}$　2. 6554
3. $68\frac{2}{3}$ m　4. 3 盏

随堂练习 13.3c P.207

1. $27\frac{3}{7}$　2. $\frac{23}{99}$

习题 13.3b P.208

1. (a) $-\frac{9}{2}$　(b) $-\frac{133}{54}$
2. (a) $\frac{341}{16}$　(b) $\frac{64}{3}$
3. 项数 = 5，末项 = 567
4. $a=10$，$r=-\frac{1}{5}$

董總 DONG ZONG

5. (a) $\frac{45}{99}$ (b) $2\frac{1313}{9990}$

6. 2，8，32 或 32，8，2

7. $r=\frac{1}{2}$，$n=6$

8. 2 9. $\frac{243}{8}$

10. (a) 8 (b) $\frac{665}{9}$ (c) 81

11. -40 12. 27 或 $\frac{4}{3}$

13. 3，12，21 14. 797161 人

15. 7.3205 万公吨；30.5255 万公吨

16. (a) RM 300；RM 304.90。方案二较多。
(b) RM 18,000；RM 17,965.10。方案一较多。

17. 18 m

随堂练习 13.4 P.215

1. RM 2,960.49

2. (a) RM 1,036
(b) RM 1,036.32
(c) RM 1,036.49

习题 13.4 P.215

1. RM 130,311.57 2. RM 5,000

3. RM 105,125.32 5. 40 年

6. 8 年 7. RM 52061.33

8. RM 2,000

9. RM 70469.72，RM 100,000

10. 18 年

随堂练习 13.5 P.221

1. 42640 2. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

3. n^2 4. $\frac{n(4n^2-1)}{3}$

习题 13.5 P.221

1. $2^{21}-1-\frac{1}{2^{20}}$ 2. $n^2-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+2$

3. $\frac{3n^2-n+1-\frac{1}{3^n}}{2}$ 4. $\frac{5}{4}$

5. $\frac{x^{n+2}(3-4n)+x^{n+1}(1+4n)-3x^2-x}{-(x-1)^2}$，
$\frac{x+3x^2}{(1-x)^2}$

6. $\frac{n}{3n+1}$

7. $\frac{1}{24}-\frac{1}{6(3n+1)(3n+4)}$，$\frac{1}{24}$

8. 498226 9. 5

10. (a) 680 (b) 721
(c) 19900 (d) 2688

11. $n(n+1)^2$ 12. $\frac{n(n+1)(8n+1)}{6}$

13. $\frac{n(n+1)(n+6)(n+7)}{4}$

14. (a) $a_n=n^2+n+1$ (b) $\frac{n(n^2+3n+5)}{3}$

总复习题 13 P.223

1. 60 2. 429429

3. 2475 4. 5478

5. (a) 61 cm (b) RM 1716

6. $n=14$，$n=27$，和 $=-\frac{54}{5}$

7. (a) 第 18 项 (b) 第 35 项

董總 DONG ZONG

8. 2037 年　　9. 9，16

10. 100人；550 人　　11. 第 14 项

12. 2 或 $\frac{1}{2}$

13. $a=10$， $b=25$， $c=40$

14. $\frac{4}{3}$

16. $x=2$， $y=6$， $z=10$ 或

$x=18$， $y=6$， $z=-6$

17. $1:5:25$　　18. $-\frac{5}{2}$ 或 29

19. 83855　　20. RM 121,156.19

21. RM 117,328.26　　22. RM 8,000

23. 16 年　　24. RM 2,000

25. RM 85,916.37；RM 177,777.78

26. 15 年　　27. RM 258

28. 第一种付款方式较为划算

29. $\frac{n(3n+1)}{2}-\frac{1}{2^n}+1$

30. (a) $4n^3$　　(b) 11700

31. $a_n=3n-1$， $a_{200}=599$

32. $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+13)}{12}$

33. $n(3n^2+6n+1)$　　34. $\frac{n}{5n+1}$

35. $\frac{1}{60}$　　36. $1\frac{3}{25}$

37. (a) $a_n=2^{n+1}-3$　　(b) $2^{n+1}-3n-4$

董總 DONG ZONG

图片出处

本教材使用了网站或作者注明可免费使用的图片与照片，谨致谢意。

页码／图次	出处
22	Department of Survey and Mapping Malaysia，《2021年国家潮汐预测表》封面，2/6/2023, https://www.jupem.gov.my/page/tidal-data
84	sciencestockphotos.com，蜂窝纸板，17/5/2023，https://www.sciencestockphotos.com/free/engineering/slides/honeycombe.html
84	Google Earth，居銮中华中学校园的卫星图像，7/4/2023，https://earth.google.com/web/search/Chong+Hwa+High+School+Kluang,+Jalan+Sekolah,+Kampung+Masjid+Lama,+Kluang,+Johor/@2.02639995,103.32587218,47.66056067a,482.34336494d,35y,0h,0t,0r/data=CigiJgokCTFKCYtliDRAETFKCYtliDTAGfXWvPbKWUJAIRNr7_ngX1DA
96	Mann, C., McLoud-Mann, J., & Von Derau, D. (2018). Convex pentagons that admit i-block transitive tilings. *Geometriae Dedicata, 194*(1), 141-167.

本会已尽力追溯图片来源，但仍有部分图片未能查明出处，如有侵犯版权，谨此致歉，并欢迎告知。

董總
DONG ZONG