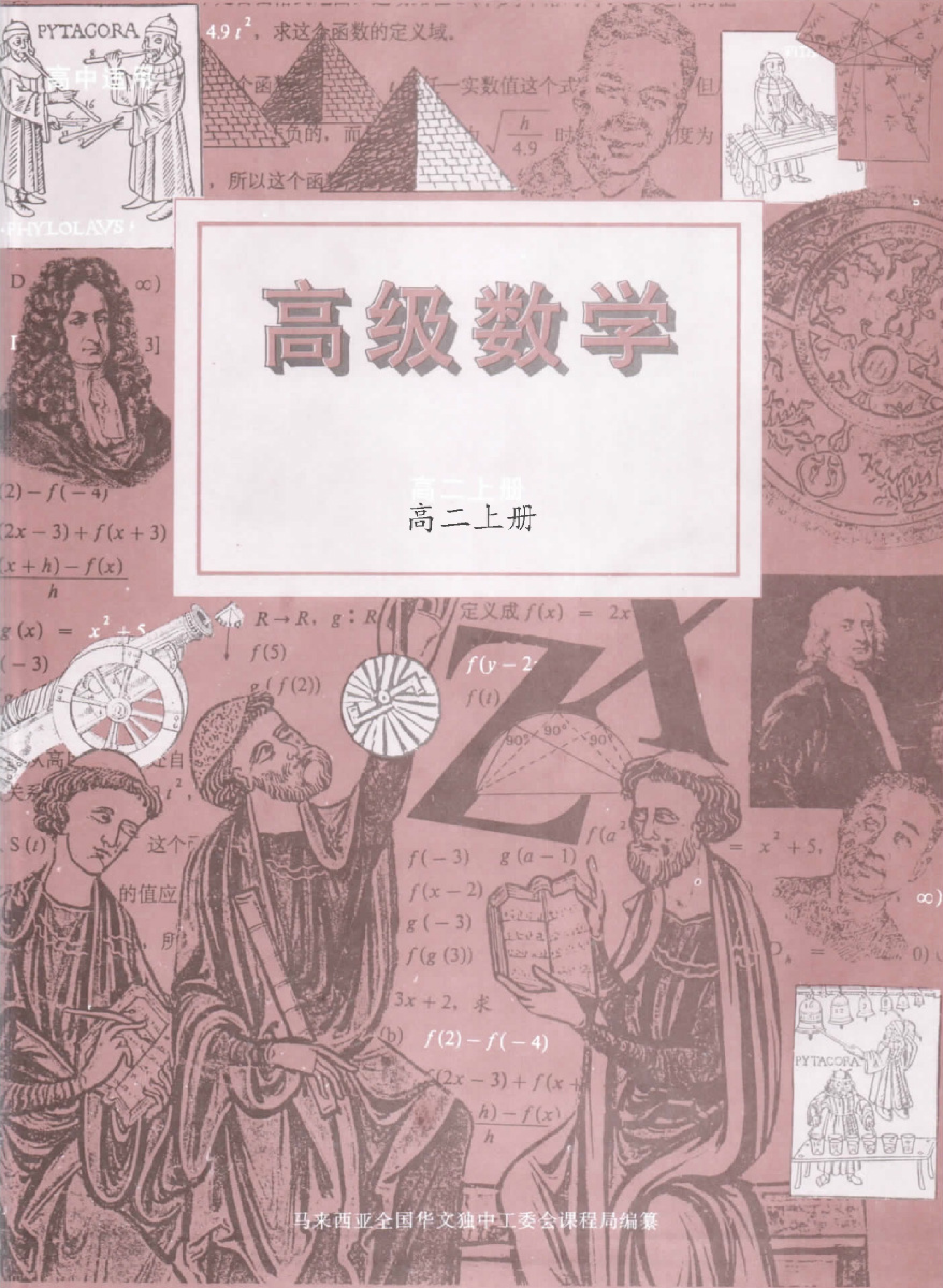


高中适用

高级数学

高二上册

高二上册

马来西亚全国华文独中工委会课程局编纂

高中适用
《高级数学》高二上册

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Len & Hup Printing（M）Sdn. Bhd.

版次：
1995年10月第1版

印次：
2020年9月第11次印刷

编辑说明

一、这套《高级数学》是根据董教总全国华文独中工委会属下课程局所拟订的课程纲要而编写的。在拟订课程纲要的过程中，主要参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KBSM）及STPM的课程范围，此外，也参考了其他一些国家的课程纲要。

二、这套《高级数学》是以综合的方式编写，它将取代旧版的高级中学数学课本——《高中代数》上、下册，《三角学》，《解析几何》及《微积分》。

三、这套《高级数学》是为全国各华文独中的高中理科班学生编写的，全书分六册出版，分三年教完。每周上课8节（每节40分钟），惟各校可按个别情况处理。

四、本书是高二上册，供高中二年级上半年使用。内容包括：

代　　数——行列式、矩阵、排列与组合、二项式定理、概率

立体几何——简易立体几何、经度与纬度

解析几何——圆

统　　计——统计学

五、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题。习题的答案都附于书后。其中附有“*”号者，是较难的题目，可按学生水准而取舍。

六、本书中某些章内的附录部分，各校可按学生水平与授课时间而自行取舍。

七、配合本书，另编有《高级数学教师手册》高二上册，供教师教学参考之用。

八、书中如有错误、遗漏或欠妥之处，祈望教师及其他读者予以指正。

鸣 谢

本书承蒙国内外学者和数学教师协助编写与审稿，谨此统致谢忱。

董教总全国华文独中工委会课程局 启

1995 年 10 月

目录

1 行列式

1.1 行列式

二阶行列式

把四个数 a_1，a_2，b_1，b_2 排成两行两列，并在两旁各加上一条竖线如下：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

用它来表示 $a_1b_2-a_2b_1$，符号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 就叫做**行列式**（determinant），记作 det A 或 $|A|$。展开式 $a_1b_2-b_1a_2$ 的值就是这个行列式的值。

行列式的每一横行的数叫做**行**（row），行序从左到右；每一纵列的数叫做**列**（column），列序从上至下。在一个行列式中，行数一定等于列数，这个数也叫此行列式的**阶**（order）。所以上面的行列式是二阶行列式。

我们可以利用对角线法则来展开二阶行列式，即将主对角线（实线）上两数的积，减去副对角线（虚线）上两数的积，如下

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$$

例 1 展开下面的二阶行列式，并求出其值：

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

解 (a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1)-5(0)$

$= -3$

(b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(1)-(-4)(3)$

$\quad = 10$

习题 1a

展开下面的二阶行列式，并求出其值（1～3）：

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$

展开下面的二阶行列式，并化简（4～5）：

4. $\begin{vmatrix} 6a-b & 2b \\ 3a & b \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} \log_a x & \log_a x \\ m & n \end{vmatrix}$

● 三阶行列式

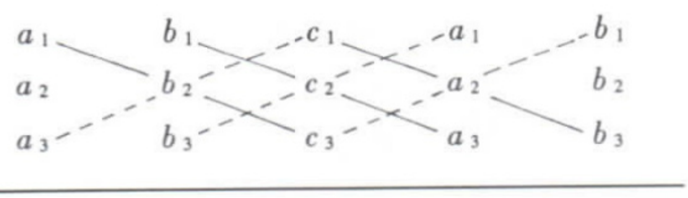
仿照二阶行列式的写法，把九个数排成三行三列，并在它们的两边各画一条竖线，如下

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

用它来表示 $a_1b_2c_3+b_1c_1a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1$，

这样的符号就是一个三阶行列式，其展开式的值就是三阶行列式的值。

三阶行列式也可按照**萨拉斯法**（Sarrus method）展开：将此行列式的两条竖线去掉，依序将第一列与第二列重抄成第四列与第五列，然后将此 15 个数中位于斜线上的每 3 个数相乘。各实线上 3 个数之积相加后，逐一减去各虚线上 3 个数之积，即为此行列式的值，图示如下：



$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3$$
$$-a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

例 2 求三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值：

解 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$= 15 + 24 - 12 - 27 - 8 + 20$

$= 12$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 3 & -2 \\ \hline & & 15 & 24 & -12 \\ -27 & -8 & -(-20) & & \end{array}$$

【注】 萨拉斯法只适用于展开三阶行列式。

习题 1b

展开下面的三阶行列式，并求出其值（1～7）：

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 7 & 13 & 5 \\ 9 & 23 & 6 \end{vmatrix}$

8. 计算下列行列式，并求出它们之间的关系式。

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

9. 计算下面的两个行列式，并比较计算结果，得出这两个行列式之间的系式：

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & 11 \end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ k & k & 2k \\ 5 & -7 & 11 \end{vmatrix}$

1.2 行列式的性质

我们以三阶行列式为例，学习行列式的一些性质，以此来简化它的计算。

性质 1 将行列式的行与列依次互调，其值不变。

即
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

证 将这两个行列式展开，可知它们是相等的。

性质 2 将行列式的任意两行（或列）互调，其值变号。

例如，将第二、三行互调后，其值变号，即
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

证 将这两个行列式展开，可知它们的值互为相反数。其他两行（或列）互调后其值变号可类似证明。

性质 3 如果行列式中有两行（或列）完全相同，那么其值为零。

证 设行列式$|A|$中有两行（或列）完全相同，将这两行（或列）互调，得到的仍是原式$|A|$。但根据性质 2，互调后的行列式应为$-|A|$。

所以有 $|A| = -|A|$

于是 $|A| = 0$

性质 4 将行列式乘以一常数 k，即等于用 k 乘原行列式的任意一行（或列）。

例如，
$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证 展开以上三式，可知它们是相等的。

由性质 4，可得以下两个推论：

推论 1 行列式的某一行（或列）有公因数时，可以把公因数提到行列式外面。

推论 2 如果行列式某一行（或列）的数都是零，那么其值为零。

例 3 利用行列式的性质计算 $\begin{vmatrix} -7 & 14 & 7 \\ 2 & -8 & 6 \\ 9 & -3 & 12 \end{vmatrix}$。

解
$$\begin{vmatrix} -7 & 14 & 7 \\ 2 & -8 & 6 \\ 9 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 7\times 2\times 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 42\,(16+18-1+12-3-8)$$
$$= 1428$$

性质 5 如果行列式的某两行（或列）的数成比例，那么其值为零。

例如，设第一、二列的数成比例，则行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

证 根据性质 4 的推论 1 和性质 3，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

性质 6 如果行列式的某一行（或列）的数都是两部分之和，那么此行列式等于将这些数各取一部分作成相应的行（或列），而其余行（或列）不变的两个行列式之和。

例如，$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证　展开左式，再用分配律去掉括号，然后将不含 d 的六项与含 d 的六项分别结合在一起，就可以看出它们分别等于右式中的两个行列式。其他情况可类似证明。

例 4　求证 $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & a^2+x^2 \\ 1 & y^2 & a^2+y^2 \\ 1 & z^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix} = 0$

证

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & a^2+x^2 \\ 1 & y^2 & a^2+y^2 \\ 1 & z^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & a^2 \\ 1 & y^2 & a^2 \\ 1 & z^2 & a^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^2 \\ 1 & y^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & z^2 \end{vmatrix} \quad \text{（性质 6）}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} 1 & x^2 & 1 \\ 1 & y^2 & 1 \\ 1 & z^2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \quad \text{（性质 5 和性质 3）}$$

$$= 0$$

性质 7　将行列式的某一行（或列）的数都乘以一常数，加到另一行（或列）对应的数上，行列式的值不变。

例如，将第二行的数都乘以 k，加到第一行对应的数上，行列式的值不变，

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证　根据性质 6 和性质 5，可以推出

$$\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 5 利用行列式的性质计算：

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ -15 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

解 (a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix} = 3\times 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}$　　(性质 4 推论 1)

$= 6\begin{vmatrix} 3 & 1+2 & 2 \\ 8 & 5+3 & 3 \\ 6 & -1+7 & 7 \end{vmatrix}$　　(性质 7)

$= 6\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}$　　(性质 3)

$= 0$

(b) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ -15 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$　　(性质 4 推论 1)

$= 5(54-84+4+21-16-54)$

$= -375$

例 6 利用行列式的性质证明：

(a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$

证 (a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$　　(性质 1)

$= -\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$　　(性质 4 推论 1)

$\therefore$ 原式 $=0$

(b) $\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & -a \\ a & b & -c \\ c & a & -b \end{vmatrix}$ （性质 7）

$= -\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}$ （性质 4 推论 1）

$= \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$ （性质 2）

例 7 解方程式 $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-2 \\ x-3 & x-6 & x \\ x-3 & x-1 & x-5 \end{vmatrix} = 0$

解 $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-2 \\ x-3 & x-6 & x \\ x-3 & x-1 & x-5 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ x-3 & x-1 & x-5 \end{vmatrix} = 0$ （第一行减去第二行，第二行减去第三行）

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ x-3 & 2x-6 & x-5 \end{vmatrix} = 0$ （第二列加上第三列）

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ x-3 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = 0$ （第二列减去第一列的 2 倍）

$5(x-3) = 0$

$\therefore \quad x = 3$

习题 1c

利用行列式的性质计算（1～6）：

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ 7 & 5 & 14 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} -ab & bd & bf \\ ac & -cd & cf \\ ae & de & -ef \end{vmatrix}$

用行列式的性质证明（7～8）：

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & p+q \\ q & p & 0 \end{vmatrix} = 0$ 8. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

9. $\begin{vmatrix} -a+b+c & a & -b \\ a-b+c & b & -c \\ a+b-c & c & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

解下列方程式（11～14）：

11. $\begin{vmatrix} 2x-7 & 6 & 9 \\ 3x-5 & 5 & 4 \\ x-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 12. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & x-3 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 2 & x-2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

13. $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$ 14. $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & 2-x & 1 \\ x & 0 & 3-x \end{vmatrix} = 0$

1.3 按行（或列）展开行列式

三阶行列式的展开

在三阶行列式的展开式中，把含有 a_1，a_2，a_3 的项分别结合起来，并提出公因数，可得

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2\\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)\\
&= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

在上面的三阶行列式中，把 a_1 所在的行与列划去后，剩下的数按原来的顺序排成一个二阶行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，这个行列式就是 a_1 的**余子式**（minor）。同理，$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 是 b_1 的余子式，$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ 是 c_1 的余子式，等等。三阶行列式的九个数都有其余子式。

设行列式中某一数位于第 i 行第 j 列，把这个数的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 后所得到的式子叫做原行列式中这个数的**代数余子式**（cofactor）。例如，在上面的三阶行列式中，a_2 位于第二行第一列，所以 a_2 的代数余子式是 $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，即 $-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$。

三阶行列式中各个数的余子式所需乘以的符号 $(-1)^{i+j}$ 可利用下图帮助记忆：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 中某个数的代数余子式常用这个数的大写字母并附相同的下标来表示。例如，a_1，b_1，c_1 的代数余子式分别记作 A_1，B_1，C_1，

其中

$$A_1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$B_1=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$C_1=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

于是 $|A|=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1$

此式把一个三阶行列式表示成这个行列式第一行的数与其代数余子式的乘积之和。

一般上，有如下定理：

定理 1 行列式的值等于其任一行（或列）的数与它们的代数余子式的乘积之和。

也就是说，我们可以按任一行（或列）展开三阶行列式。即

$$\begin{aligned}|A| &= a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1\\ &= a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2\\ &= a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3\\ &= a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3\\ &= b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3\\ &= c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3\end{aligned}$$

定理 2 行列式某一行（或列）的数与另一行（或列）对应的数的代数余子式的乘积之和为零。

例如，我们可证第二行的数与第一行对应的数的代数余子式的乘积之和为零，即

$$a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0$$

而这只要从下式就可以看出：

$$a_2\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=0$$

例 8 利用代数余子式，计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 的值。

解一 按第一行展开，得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-32) - (-11) - 2(26) \\ &= -137\end{aligned}$$

解二 第一行有一个 1，我们利用行列式的性质把其余两个变为 0，于是

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & -2 & 3 \\ -9 & 4 & 10 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -9 & 10 \end{vmatrix} \\ &= -137\end{aligned}$$

例 9 求证行列式 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & bc & c^2 \\ c^2 & ca & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$。

证

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & bc & c^2 \\ c^2 & ca & a^2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ca^2 & abc & b^2c \\ ab^2 & abc & c^2a \\ bc^2 & abc & a^2b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ca^2 & 1 & b^2c \\ ab^2 & 1 & c^2a \\ bc^2 & 1 & a^2b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ca^2 & 1 & b^2c \\ ab^2-ca^2 & 0 & c^2a-b^2c \\ bc^2-ca^2 & 0 & a^2b-b^2c \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{第一行}\times(-1)\text{加入第二行} \\ \text{第一行}\times(-1)\text{加入第三行}\end{array}\right) \\ &= -\begin{vmatrix} a(b^2-ca) & -c(b^2-ca) \\ -c(a^2-bc) & b(a^2-bc) \end{vmatrix} \quad (\text{按第二列展开}) \\ &= -(a^2-bc)(b^2-ca)\begin{vmatrix} a & -c \\ -c & b \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$= -(a^2-bc)(b^2-ca)(ab-c^2)$$
$$= (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$$

习题 1d

1. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 8 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}$。

   (a) 求行列式中 -5 的余子式与代数余子式；

   (b) 按第三列展开这一行列式；

   (c) 验证第一行的数分别乘以第三行对应的数的代数余子式的乘积之和为零。

利用代数余子式计算 (2～6)：

2. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \\ -4 & 3 & 9 \end{vmatrix}$　　3. $\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$　　4. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -3 & 8 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix}$　　6. $\begin{vmatrix} 8 & -6 & 9 \\ 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

证明下列各式 (7～9)：

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

8. $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2$

9. $\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix} = (p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r)$

10. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

四阶行列式

由 16 个数组成的四阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

这里式子右边的四个三阶行列式，是由左边的原行列式中分别划去 a_1, b_1, c_1, d_1 所在的行和列而得到的余子式，原行列式中各个数的余子式所需乘以的符号 $(-1)^{i+j}$ 可用下图帮助记忆：

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

四阶行列式，同样具有三阶行列式的性质。

例 10 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的值。

解 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ （第四列加上第一列，第一列减去第二列的 2 倍）

$= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -5 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ （按第二行展开）

$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 16$$

习题 1e

1. 计算下列行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$　　(d) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

2. 证明：

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & a_3 \\ -1 & x & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & x & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

1.4 克兰姆法则

在这一节里，我们介绍**克兰姆法则**（Cramer's Rule）解线性方程组的方法。在使用这一法则时，我们只讨论线性方程组的系数行列式不等于零的情况。

当 $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$时，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ 的解为 } \begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \\ y = \dfrac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \end{cases}$$

此方程组的解可以写成

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \text{ 其中} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

若 $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\triangle_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\triangle_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，

则 $x = \dfrac{\triangle_x}{\triangle}$，$y = \dfrac{\triangle_y}{\triangle}$

例 11 用克兰姆法则解二元一次方程组 $\begin{cases} 2x + 5y - 22 = 0 \\ 3x - 7y - 4 = 0 \end{cases}$。

解

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -29$$

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} 22 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -174, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} 2 & 22 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -58$$

$$\therefore x = \frac{\triangle_x}{\triangle} = \frac{-174}{-29}, \quad y = \frac{\triangle_y}{\triangle} = \frac{-58}{-29}$$

即 $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$

下面再来看三元一次方程组

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

设 $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$，并用常数 d_1，d_2，d_3 顺次代替△中未知数 x，y，z 的系数所得的三个行列式，分别记作$\triangle_x$，$\triangle_y$，$\triangle_z$，即

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \triangle_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \triangle_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

现在我们将三元一次方程组中的未知数 y，z 消去。为此用与 a_1，a_2，a_3 对应的代数余子式 A_1，A_2，A_3 分别乘以三个方程的两边，得

$$a_1A_1x + b_1A_1y + c_1A_1z = d_1A_1$$
$$a_2A_2x + b_2A_2y + c_2A_2z = d_2A_2$$
$$a_3A_3x + b_3A_3y + c_3A_3z = d_3A_3$$

将这三式的等号两边分别相加，得

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)y+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z$$
$$=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3$$

根据上一节的两个定理，上式中 x 的系数是△，而 y，z 的系数都是零，等式右边则是$\triangle_x$，所以上式可以写成

$$\triangle\cdot x=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3=\triangle_x$$

类似地，从三元一次方程式组中消去 x，z 或者 x，y，分别可以得到

$$\triangle\cdot y=d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3=\triangle_y$$
$$\triangle\cdot z=d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3=\triangle_z$$

这就是说，三元一次方程组的解可以写成

$$x=\frac{\triangle_x}{\triangle},\ y=\frac{\triangle_y}{\triangle},\ z=\frac{\triangle_z}{\triangle}$$

所以克兰姆法则同样适用于解三元线性方程组。

例 12 用克兰姆法则解三元一次方程组 $\begin{cases}x-2y+3z=6\\2x+3y-4z=20\\3x-2y-5x=6\end{cases}$。

解 $\triangle=\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&3&-4\\3&-2&-5\end{vmatrix}$ $\qquad$ $\triangle_x=\begin{vmatrix}6&-2&3\\20&3&-4\\6&-2&-5\end{vmatrix}$

$=-58,$ $\qquad$ $=-464$

$\triangle_y=\begin{vmatrix}1&6&3\\2&20&-4\\3&6&-5\end{vmatrix}$ $\qquad$ $\triangle_z=\begin{vmatrix}1&-2&6\\2&3&20\\3&-2&6\end{vmatrix}$

$=-232,$ $\qquad$ $=-116$

$\therefore\quad x=\frac{-464}{-58},\ y=\frac{-232}{-58},\ z=\frac{-116}{-58}$

即 $\quad x=8,\ y=4,\ z=2$

习题 1f

用克兰姆法则解下列线性方程组：

1. $\begin{cases}2x+3y=5\\4x=5y+21\end{cases}$

2. $\begin{cases}4x+7y=5\\2x-5y=-6\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{7x}{6}+\dfrac{5y}{3}=34\\\dfrac{7x}{8}+\dfrac{y}{8}=12\end{cases}$

4. $\begin{cases}x+y+z=6\\x+2y+3z=10\\2x+3y-4z=8\end{cases}$

5. $\begin{cases}3x-y=14\\2y+z=5\\5z-x=10\end{cases}$

总复习题 1

求下面各行列式的值（1～11）：

1. $\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & -5\end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix}1 & 2\\-5 & 6\end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}11 & -2\\3 & 7\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\3 & -2 & 5\\-1 & 1 & 3\end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix}2 & 6 & 4\\1 & 3 & 1\\-2 & -6 & 5\end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix}10 & 8 & -2\\15 & 12 & -3\\25 & 32 & 7\end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\12 & 24 & 36\\-5 & -4 & -3\end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix}554 & 427 & 327\\586 & 443 & 343\\711 & 504 & 404\end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & 6\\0 & 1 & -6 & 5\\4 & 0 & 3 & 1\\2 & 0 & 1 & 5\end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 6 & 10\\1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 1\\3 & 4 & 1 & 2\\4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$

解下面关于 x 的方程式（12～13）：

12. $\begin{vmatrix}x^2 & x & 1\\a^2 & a & 1\\b^2 & b & 1\end{vmatrix}=0\ (a\neq b)$

13. $\begin{vmatrix} x & a & b+c \\ x & a+b & c \\ a+b & b-c & a+c \end{vmatrix} = 0\ (b(a+b) \neq 0)$

求证下面各等式成立（14～19）：

14. $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

15. $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

16. $\begin{vmatrix} bc & 1 & bc(b+c) \\ ca & 1 & ca(c+a) \\ ab & 1 & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$　　17. $\begin{vmatrix} a & 1 & a^2(b+c) \\ b & 1 & b^2(c+a) \\ c & 1 & c^2(a+b) \end{vmatrix} = 0$

18. $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(y-z)(z-x)$

19. $\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 3\theta & \cos 3\theta \\ \cos\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \sin\theta \sin 4\theta$

用克兰姆法则解下列各方程组（20～24）：

20. $\begin{cases} 2x - 7y - 8 = 0 \\ 4y - 9x - 19 = 0 \end{cases}$　　21. $\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x - 3y + 2 = 0 \\ 2y + 5z - 19 = 0 \\ 5x - 7z + 16 = 0 \end{cases}$　　23. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y-2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y+1}{z+3} = 4 \\ \dfrac{z+4}{x-1} = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \\ \dfrac{8}{x} - \dfrac{5}{y} - \dfrac{6}{z} = 1 \\ \dfrac{13}{x} - \dfrac{9}{y} = 22 \end{cases}$

2 矩 阵

2.1 矩阵

● 矩阵的定义

我们把由 $m \times n$ 个数排成 m 行 n 列的矩形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做一个**矩阵**（matrix），简记作 A。

在一个矩阵中，横排的数叫做**行**（row），竖排的数叫做**列**（column），矩阵中的每一个数都叫做此矩阵的**元素**（element）。当我们用 a_{ij} 表示矩阵的元素时，其中的 i，j 表示此元素位于矩阵的第 i 行第 j 列。例如，a_{32} 表示矩阵第三行第二列的元素。所以一个矩阵也可以用（a_{ij})）来表示。有时还用 $(a_{ij})_{mn}$ 表明矩阵有 m 行 n 列，这时，我们称它为 $m \times n$ 矩阵，$m \times n$ 叫做矩阵的**阶**（order）。例如，

$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ 是一个 2×3 矩阵。

当 $m = n$ 时，矩阵叫做 ***n* 阶方阵**（square matrix of order n）。例如，

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ 是一个三阶方阵。

$m = 1$ 时出现的 $1 \times n$ 矩阵（$a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}$）叫做**行矩阵**（row matrix），

$n=1$ 时出现的 $m\times1$ 矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ 叫做**列矩阵**（column matrix）。例如，

$(-1 \quad 0 \quad 3 \quad -4)$ 是行矩阵，$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是列矩阵。

● 相等矩阵

如果两个矩阵 A 与 B 都是 $m\times n$ 矩阵，且其对应元素分别相等，那 A 与 B 叫做**相等矩阵**（equal matrices），记作 $A=B$。

例 1 已知 $\begin{pmatrix} a & a+b \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+b & c \\ a+c & -1 \end{pmatrix}$，求 a，b，c，d 之值。

解 根据相等矩阵的定义，这两个 2 阶方阵的对应元素分别相等，所以

$$\begin{cases} a=5+b \\ a+b=c \\ d=a+c \\ c=-1 \end{cases}$$

解这个方程组，得 $a=2$，$b=-3$，$c=-1$，$d=1$

● 零矩阵

元素都是零的矩阵叫做**零矩阵**（zero matrix），记作 $\mathbf{O}$。零矩阵可以是任意阶，也就是说，它不是唯一的。例如，

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 3×2 零矩阵，

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 2×2 零矩阵（二阶零方阵）。

2.2 矩阵的加减法

设矩阵 $A=(a_{ij})_{mn}$，$B=(b_{ij})_{mn}$，那么 $(a_{ij}+b_{ij})_{mn}$ 叫做矩阵 A 与 B 的和，记作 A + B，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

【注】 矩阵的加法只能在具有相同行数与相同列数的矩阵之间进行。

不难验证矩阵加法满足：

(1) 交换律　　$A+B = B+A$

(2) 结合律　　$(A+B)+C = A+(B+C)$

例 2 计算 A + B：

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = (1\quad 4\quad 5\quad 7)$，$B = (2\quad 1\quad 3\quad -2)$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

解　(a) $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3+1 & 1+0 & 5+(-2) \\ 2+(-1) & 0+3 & -4+(-1) \\ 1+2 & 3+4 & 7+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) $A+B=(1\ \ 4\ \ 5\ \ 7)+(2\ \ 1\ \ 3\ \ -2)$
$=(3\ \ 5\ \ 8\ \ 5)$

(c) $A+B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 0\\ 3 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 0\\ -3 & -7\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

显然，对于任何矩阵 A，有

$$A+O=O+A=A$$

已知矩阵 $A=(a_{ij})$，我们把矩阵 $(-a_{ij})$ 记作 $-A$，易知 $A+(-A)=O$。在例 2(c)中，若记 $A=(a_{ij})$，那么 $B=(-a_{ij})=-A$。

由此我们可以定义矩阵的减法。

即
$$A-B=A+(-B)$$

例 3 已知 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -6 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$，求 A－B。

解 $A-B=\begin{pmatrix}3-1 & 1-(-6) & 2-3\\ 0-2 & -2-1 & 5-(-2)\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}2 & 7 & -1\\ -2 & -3 & 7\end{pmatrix}$

习题 2a

1. 下列矩阵各为何阶？

(a) $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 30\\ 4 & 2 & 15\end{pmatrix}$　　(c) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2. 若 $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 5 & -2 & -4\\ 2 & -4 & 3 & -1\\ 0 & 6 & 4 & 7\end{pmatrix}$，则元素 $a_{23}=$ ________；

元素 $a_{34}=$ ________。

3. 求 x，y 的值：

(a) $\begin{pmatrix} 2+x \\ 3-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 3+x \\ 4-y & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

计算（4～6）：

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　5. $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 20 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

7. 若 $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 X。

2.3 矩阵的纯量积

设 $\mathrm{A} = (a_{ij})$，k 为任一常数，我们定义

$$k\mathrm{A} = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

$k\mathrm{A}$ 就称为矩阵 A 与纯量 k 的**纯量积**（scalar product）。

如果 A，B 都是 $m \times n$ 矩阵，k，l 为任意常数，根据矩阵的加法及纯量积的定义，不难验证：

$$k(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = k\mathrm{A} + k\mathrm{B}$$
$$(k+l)\mathrm{A} = kA + l\mathrm{A}$$
$$k(l\mathrm{A}) = (kl)\mathrm{A}$$

例 4　已知矩阵

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

求矩阵 $2(\mathrm{A}+\mathrm{B}-2\mathrm{C}) - 3(2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}) + 4\mathrm{C}$。

解 $2(A+B-2C)-3(2A-B+C)+4C$

$$= 2A+2B-4C-6A+3B-3C+4C$$

$$= -4A+5B-3C$$

$$= -4\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -8 & 0 & -28 \\ 4 & 12 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 9 & 0 & 12 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & -13 & -2 \\ 1 & 0 & -11 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

习题 2b

1. 若 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 $4A$。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 24 & 20 \end{pmatrix}$，试以 A 表示 B。

3. 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。求

   (a) $A+B$　　(b) $2A-B$

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & \cos^2\alpha \end{pmatrix}$ 求

   (a) $A+B$　　(b) $3(A+B)$

5. 求 w，x，y，z 的值：

   (a) $6\begin{pmatrix} 3 & -w \\ x & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} y & 2 \\ 3 & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 4 & w \\ 1 & 3 \\ z & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

2.4 矩阵相乘

矩阵相乘

设 A 为一个 $1\times p$ 阶行矩阵 $(a_{11}\quad a_{12}\quad \cdots\quad a_{1p})$，B 为一个 $p\times 1$ 阶列矩阵 $\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \cdots\\ b_{p1}\end{pmatrix}$，我们定义行矩阵 A 与列矩阵 B 的积 AB 为

$$\begin{aligned}AB &= (a_{11}\quad a_{12}\quad \cdots\quad a_{1p})\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \cdots\\ b_{p1}\end{pmatrix}\\ &= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1p}b_{p1})\end{aligned}$$

所得乘积为一个 1×1 阶矩阵。

例 5 计算：

(a) $(3\quad -2)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$　　(b) $(3\quad -4\quad 1)\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$

解 (a) $(3\quad -2)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = (3\times 1+(-2)\times 4)$

$$= (-5)$$

(b) $(3\quad -4\quad 1)\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} = (3\times 2+(-4)(-3)+1\times 4)$

$$= (22)$$

设 A 为一个 $m\times p$ 矩阵，B 为一个 $p\times 1$ 列矩阵，那么 A 与 B 的乘积

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \cdots\\ b_{p1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots a_{1p}\ b_{p1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots a_{2p}\ b_{p1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots a_{mp}\ b_{p1} \end{pmatrix}$$

所得乘积为 $m \times 1$ 矩阵。

例 6 计算：

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

解　(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3+(-1)\times(-5)+0\times9 \\ 1\times3+3\times(-5)+4\times9 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ 24 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$

设 A 是 $m \times p$ 矩阵，B 为 $p \times n$ 矩阵，那末 A 与 B 的乘积 AB = C 为 $m \times n$ 矩阵，它的元素 c_{ij} 为矩阵 A 第 i 行各元素与矩阵 B 的第 j 列对应元素的乘积之和，

即 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{3j} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$

【注】两个矩阵相乘，第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数，否则就不能相乘。

$A_{m\times p}$ 与 $B_{p\times n}$ 可以相乘，因为 A 有 p 列而 B 有 p 行，其乘积 C 是一个 $m\times n$ 阶的矩阵。即

$$A_{m\times p}\times B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

例 7 计算 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 1+0\times(-2) & 2\times 4+0\times 0 & 2\times 3+0\times 1 \\ 4\times 1+1\times(-2) & 4\times 4+1\times 0 & 4\times 3+1\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & 16 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 8 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，AB 与 BA 是否有意义？如果有，求出它们的积。

解 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 是 2×3 矩阵，矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 3×1 矩阵，A 的列数等于 B 的行数，所以 AB 有意义。

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\times 1+2\times 0+3\times(-1) \\ 0\times 1+1\times 0+1\times(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B 的列数不等于 A 的行数，所以 BA 没有意义。

例 8 告诉我们 AB 有意义时，BA 不一定有意义。如果 BA 也有意义，AB 与 BA 是否一定相等呢？

例 9 已知下列矩阵 A，B，求 AB 与 BA：

(a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

(b) $A=(1\ \ 1\ \ 0)$，$B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$

解 (a) $AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

(b) $AB=(1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}=(-1)$

$$BA=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}(1\ \ 1\ \ 0)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

由上面的例子可以看出： $AB \neq BA$

例 10 已知 $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$

求 (AB)C 与 A(BC)。两者是否相等？

解 $(AB)C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-6 & 19\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-84 & 32\\ -29 & 9\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\2&-4\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&1\\-6&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-13&5\\14&-6\\-16&4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-84&32\\-29&9\end{pmatrix}$$

可以看出 $(AB)C=A(BC)$。

一般上,

(1) 矩阵乘法满足结合律,即 $(AB)C = A(BC)$

(2) 矩阵乘法满足乘法对加法的分配律,即

$$A(B+C) = AB+AC$$
$$(B+C)A = BA+CA$$

(3) 设 k 为常数,则 $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

习题 2c

计算 (1～10):

1. $(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)$

3. $\begin{pmatrix}2&-3\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}-6&-4&2\\7&8&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\3&1\\4&2\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\\-2&0\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}6&4&2\\5&-2&0\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} p & t \\ u & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ q \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 4 & p \\ r & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ n & t \end{pmatrix}$

11. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，AB 与 BA 是否有意义？若有意义，计算之。

12. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$，验证：

(a) $(AB)C = A(BC)$　　(b) $A(B + C) = AB + AC$

13. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，验证：

(a) $(A + B)C = AC + BC$　　(b) $C(A + B) = CA + CB$

14. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，计算：

(a) AB　　(b) BA

15. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，计算：

(a) AB　　(b) BA

16. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，计算：

(a) $A(B + C)$　　(b) $B(2A + 3C)$

17. 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

18. 设 $A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$，计算：

(a) AB　　(b) BA

● 单位矩阵

一般上，由左上角到右下角所画的对角线上的元素都是 1，其余元素都是零的任意阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

都叫做**单位矩阵**（identity matrix），记作 I。它有以下性质：

$$\mathrm{I}A = A$$
$$A\mathrm{I} = A$$

例 11 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，计算：

(a) A^2　　　　(b) A^3

解 (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$= 7\mathrm{I}$

(b) $A^3 = A^2A$

$= 7\mathrm{I}A$

$= 7A$

$= \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & -7 \end{pmatrix}$

【注】 $A^2 = A \cdot A$，$A^3 = A \cdot A \cdot A$

习题 2d

计算：

1. (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2$　　(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^4$

2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$　　(b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4$　　(d) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

3. (a) $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$　　(b) $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $A^3 - A^2 + 3A - 4I$。

5. 设 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，验证 $AB = I$。

6. 若 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，证明

(a) $A^2 = 5A - 6I$　　(b) $A^3 = 5A^2 - 6A$

据此，试以 A 表示 A^4。

7. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$，$a$，$b \in \mathbb{R}$。求 a 与 b 之值使到

(a) $A^2 = 0$　　(b) $A^2 = I$　　(c) $A^2 = A$

2.5 转置矩阵

将矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 的行列依次互调，

所得的矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

叫做 A 的**转置矩阵**（transpose matrix），记作 A'或 A^T。例如：

如果 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$，那么 $A' = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

如果 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$，那么 $B' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

很明显，如果 A 是 $m \times n$ 矩阵，那么 A'是 $n \times m$ 矩阵。

例 12 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$，求：

(a) $(A+B)'$ (b) $(A-B)'$

解 (a) $A+B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ (b) $A-B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -3 & 5\end{pmatrix}$

$\therefore\ (A+B)'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ $\therefore\ (A-B)'=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

2.6 逆矩阵

● 二阶方阵的逆矩阵

已知 A 为一个二阶方阵。如果存在一个二阶方阵 B，使得 AB，BA 都等于 I，那么这个 B 是唯一的，我们就把 B 就叫做 A 的**逆矩阵**（inverse matrix），记作 A^{-1}，即 $AA^{-1}=I=A^{-1}A$。

由以上定义，设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}u & v\\ x & y\end{pmatrix}$，

则 $$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u & v\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}au+bx & av+by\\ cu+dx & cv+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

得 $$\begin{cases}au+bx=1\\ cu+dx=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}av+by=1\\ cv+dy=0\end{cases}$$

解此二方程组，当且仅当 $|A|=ad-bc\neq 0$ 时，可得

$$u=\frac{d}{|A|},\ x=-\frac{c}{|A|},\ v=-\frac{b}{|A|},\ y=\frac{a}{|A|}$$

所以由矩阵的纯量积的定义，可得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{d}{|A|} & -\dfrac{b}{|A|}\\ -\dfrac{c}{|A|} & \dfrac{a}{|A|}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

所以二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 有逆矩阵的充要条件是 $|A| \neq 0$，其逆矩阵公式是

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (|A| \neq 0)$$

例 13 下列二阶方阵有没有逆矩阵？如果有，写出它的逆矩阵。

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$

解 (a) $|A| = 2\times(-7)-(-3)\times 8$

$= 10 \neq 0$

$\therefore$ 原方阵有逆矩阵。

逆矩阵为 $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$。

(b) $|B| = 0$

$\therefore$ 原方阵没有逆矩阵。

例 14 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使到 $XA = I$。

解

$$XA = I$$

$$XAA^{-1} = IA^{-1}$$

$$\therefore \quad X = A^{-1}$$

$$= \frac{1}{10-3}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

习题 2e

1. 设 $A=\begin{pmatrix}5&3&2\\-1&0&4\\3&7&-5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0&3\\-1&2&1\\0&-4&5\end{pmatrix}$, 求 A', B'。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-3\\1&0\end{pmatrix}$，求：

   (a) $3A'$　　(b) $(3A)'$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}$，求：

   (a) $(A+B)'$　　(b) $A'+B'$　　(c) $(A-B)'$　　(d) $A'-B'$

4. 下列二阶方阵有没有逆矩阵？如果有，写出它的逆矩阵。

   (a) $\begin{pmatrix}-2&-1\\6&3\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}\sin\alpha&-\cos\alpha\\\cos\alpha&\sin\alpha\end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix}-1&-4\\-2&-3\end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-4&3\\2&-2\end{pmatrix}$，求：

   (a) A^{-1}　　(b) B^{-1}　　(c) $A^{-1}B^{-1}$　　(d) $(AB)^{-1}$

6. 已知矩阵 $\begin{pmatrix}-2&5\\1&x\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}x&y\\-1&-2\end{pmatrix}$，求 x，y 之值。

7. 若 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3\\4&-2\end{pmatrix}$，求矩阵 X，使到

   (a) $AX=B$　　(b) $BX=A$

   (c) $A^{-1}X=B$　　(d) $AXA^{-1}=B$

8. 若 $A=\begin{pmatrix}3&x\\-2&4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵不存在，求 x 的值。

9. 若 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 的逆矩阵不存在，求证 $A^2=(a+d)A$。

● 三阶方阵的逆矩阵

与二阶方阵的逆矩阵类似，已知 A 为一个三阶方阵，那么我们将能使

$$AB = BA = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

成立的三阶方阵 B 叫做 A 的逆矩阵，记作 A^{-1}。

(一) 以代数余子式求逆矩阵

设
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

把 $|A|$ 中的九个代数余子式，即 A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 按对应位置列成一个矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

再写出此矩阵的转置矩阵，并记作 adj A：

$$\text{adj}\,A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

adj A 称为矩阵 A 的**伴随矩阵** (adjoint matrix of A)。那么，由行列式的定理，可得

$$\begin{aligned} A \cdot \text{adj}\,A &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A|I \\ &= \text{adj}\,A \cdot A \end{aligned}$$

上式可化成

$$A\left(\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A\right)=\left(\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A\right)A=I$$

∴ $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}\,A \qquad (|A|\neq 0)$$

所以三阶方阵的逆矩阵存在的充要条件是 $|A|\neq 0$。

例 15 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&3\\3&4&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}。

解 $$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&3\\3&4&2\end{vmatrix}=-10$$

将 $|A|$ 中各数的代数余子式依序列成矩阵，得

$$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&3\\4&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1&1\\4&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-1\\3&4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1&1\\1&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&5&5\\6&-1&-7\\-4&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}\,A=\begin{pmatrix}-10&6&-4\\5&-1&-1\\5&-7&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-10&6&-4\\5&-1&-1\\5&-7&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\\-\frac{1}{2}&\frac{7}{10}&-\frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

（二）以高斯消元法求逆矩阵

对一个矩阵的行实施下列变换：

(1) 对调任意两行；

(2) 将某一非零常数乘某一行；

(3) 将某一常数乘某一行后加到另一行的对应元素上去。

这三种变换叫做矩阵的行的初等变换。

下面我们将采用一些新的符号，例如：

(a) 用 $R_2 \leftrightarrow R_3$ 表示将矩阵的第二、三行对调；

(b) 用 $\frac{1}{2}R_2$ 表示以 $\frac{1}{2}$ 乘第二行的所有元素；

(c) 用 $(-2)R_1+R_3$ 表示将 -2 乘第一行后加到第三行的对应元素上。

以**高斯消元法**（Gauss elimination method）求逆矩阵的基本法则是：在通过矩阵的行的初等变换把具有逆矩阵的矩阵 A 化为单位矩阵 I 时，对 I 施行同样的初等变换，就得到 A^{-1}。

下面仍取例 12 的矩阵，来说明如何运用这一法则。

已知矩阵 A 为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$，我们构造一个新的矩阵，并记作 $A \,\vdots\, I$，

$$A \,\vdots\, I = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

也就是把 A 扩大，将三阶单位方阵写在 A 的元素的右边，中间用虚线分开。这样的矩阵叫做**增广矩阵**（augmented matrix）。上述求逆矩阵法则的步聚如下：

(a) 写出增广矩阵 $A \,\vdots\, I$；

(b) 用行的初等变换将 $A \,\vdots\, I$ 变换成 $I \,\vdots\, B$；

(c) 取 $A^{-1}=B$。

根据上述步聚，对于 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$，我们有：

$$A \,\vdots\, I = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3+R_2]{-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 7 & -1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2+R_1]{-7R_2+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 20 & -10 & 14 & -6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{20}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{10}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3R_3+R_2]{2R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{10}\end{array}\right)$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

习题 2f

以代数余子式求下列矩阵的逆矩阵（1－3）：

1. $\begin{pmatrix}14 & -1 & 0\\ 5 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix}3 & 14 & 0\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$

以高斯消元法求下列矩阵的逆矩阵（4－6）：

4. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$　5. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$　6. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$

2.7 用矩阵解线性方程组

本节将讨论以逆矩阵或高斯消元法解二元、三元线性方程组，为此设方程组的系数行列式 $|A| \neq 0$。

例 16 解二元线性方程组 $\begin{cases}3x-4y=6\\5x+2y=-3\end{cases}$

解一 以逆矩阵来解。方程组可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}3 & -4\\5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{-1}\begin{pmatrix}3 & -4\\5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$$

即 $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$$

由于 $$A^{-1}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}2 & 4\\-5 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}2 & 4\\-5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}0\\-39\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x=0,\quad y=-\frac{3}{2}$$

解二 以高斯消元法来解。把未知数的系数与常数项按对应位置写成增广矩阵，然后对它实施初等变换。

$$\left(\begin{array}{cc:c}3 & -4 & 6\\5 & 2 & -3\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{13}(2R_2+R_1)}\left(\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\\5 & 2 & -3\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}(-5R_1+R_2)}\left(\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\therefore\quad x=0,\quad y=-\frac{3}{2}$$

例 17 解三元线性方程组 $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 4x - 4y + z = 7 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

解一 以逆矩阵来解。方程组可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

计算得
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

即
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad x = 2, \ y = 1, \ z = 3$

解二 以高斯消元法来解。把未知数的系数与常数项按对应位置写成增广矩阵，然后对它实施初等变换。

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_1+R_3]{-4R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}R_3]{\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_1]{\frac{2}{3}R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\therefore \quad x=2,\ y=1,\ z=3$

习题 2g

解下列线形方程组：

1. $\begin{cases} 7x-2y=29 \\ 7x+y=38 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 10x-3y=26 \\ 8x+3y=18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x-6y=16 \\ 7x+6y=44 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+6y=-5 \\ x-9y=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-3y+z=0 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-y-z=-4 \\ 3x+4y=-6 \\ x+3y+3z=4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y+z=9 \\ 3x+y-2z=1 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x+y-3z=8 \\ x+4y-z=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=4 \\ 2x_1-2x_2+x_3=4 \\ x_1-2x_2+3x_3=3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=0 \\ 3x_1+2x_2=13 \\ x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

总复习题 2

1. 已知 $X+\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，求X。

2. 已知 $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，求 x，y。

3. 已知 $2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40 \\ 32 \end{pmatrix}$，求 x，y。

计算（4－8）：

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. 已知 $A=\begin{pmatrix} a & 3a \\ 2b & b \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，且 $AB=\begin{pmatrix} 44 \\ 42 \end{pmatrix}$，求 a，b。

10. 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$，且 $A+B=AB$，求 a，b，c。

11. 已知 $3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求A，B。

12. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求：

    (a) $(A+B)'$　　(b) $A'+B'$

13. 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，求

    (a) A^{-1}　　(b) B^{-1}　　(c) $A^{-1}B^{-1}$　　(d) $(AB)^{-1}$

求下列矩阵的逆矩阵（14－15）：

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

16. 求矩阵X，若

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

解下列线性方程组（7－20）：

17. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 6y + 5z = 22 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x - y - 14 = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \\ x - 5z + 10 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + z = 1 \\ x + \frac{5}{2}y + 3z = 3 \\ 2x + \frac{4}{3}y + 5z = 2 \end{cases}$

3 简易立体几何

3.1 直线和平面所成的角

在初中，我们已学过了：不在一直线上的三点确定一个**平面** (plane)。在几何中，平面是无限延展的，通常以平行四边形来表示（图 3－1）。

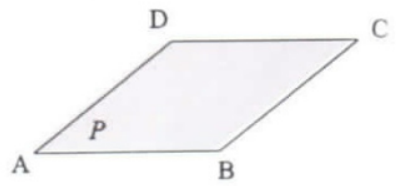


图 3－1

自一点向平面引垂线，垂足叫做这点在这个平面上的射影。这个点与垂足间的线段叫做这点到这个平面的垂线段。

一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线，斜线和平面的交点叫做斜足。斜线上一点与斜足间的线段叫做这点到这个平面的斜线段。

过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面上的**射影** (projection)，如图 3－2。

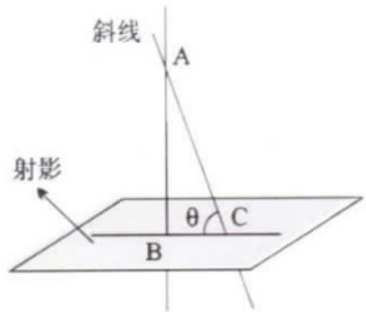


图 3－2

平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角（图 3－2），此角也叫做斜线对平面的**倾斜角** (angle of inclination)。

一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线和平面平行，或在平面内，我们说它们所成的角是 0° 的角。

可以证明，斜线和平面所成的角，是这条斜线和平面经过斜足的直线所成的一切角中最小的角。

如图 3－3，l 是平面 α 的斜线，A 是 l 上任意一点，AB 是平面 α 的垂线，B 是垂足，所以直线 OB 是斜线 l 的射影，θ 是斜线 l 与平面 α 所成的角。设 OD 是平面 α 内与 OB 不同的任意一条直线，AC 垂直于 OD，垂足为 C。在直角△OAB 与△OAC 中，

$$OA = OA$$

$$AB < AC$$

$$\therefore \quad \sin\theta < \sin\angle AOC$$

$$\therefore \quad \theta < \angle AOC$$

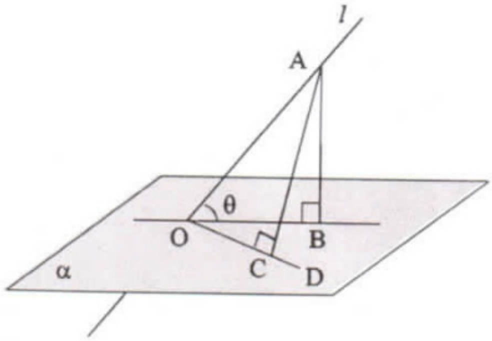


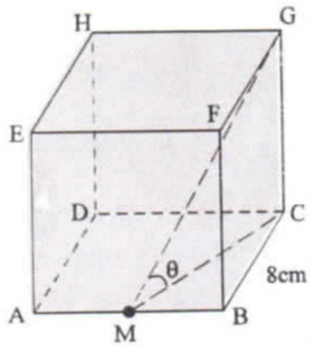
图 3－3

例 1 右图是一个边长 8cm 的正方体，M 是 AB 的中点，求

(a) MC 的长度，

(b) MG 的长度，

(c) MG 与平面 ABCD 之间的角。



解 (a)
$$MC^2 = MB^2 + BC^2 = 4^2 + 8^2 = 80$$

$$MC = 4\sqrt{5}\ (cm)$$

(b)
$$MG^2 = MC^2 + CG^2 = 80 + 64 = 144$$

$$MG = 12\ (cm)$$

(c) 设 MG 与平面 ABCD 之间的角为 θ，

在△MCG 中，$\sin\theta = \dfrac{CG}{MG} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

$$\theta = 41.81°$$

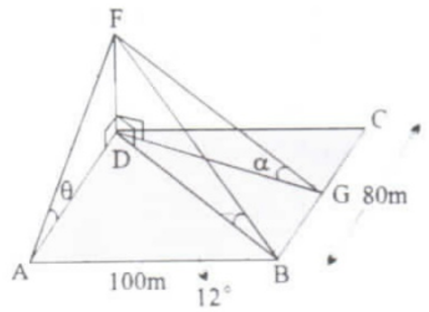
例 2 矩形草地 ABCD 的一角 D 处竖有一旗杆 FD。已知 AB = 100m，BC = 80m，G 为 BC 的中点。若从点 B 测得旗杆顶端 F 的仰角为 12°，试求

(a) 旗杆 FD 的长；

(b) 从点 A 测得旗杆顶端 F 的仰角；

(c) FG 与草地所在平面 ABCD 所成的角。

解 如右图，AD 是 AF 的射影，BD 是 BF 的射影，GD 是 GF 的射影；∠FAD、∠FBD、∠FGD 分别是 FA、FB、FG 和平面 ABCD 所成的角。



(a) 在直角△BAD 中，

$$\therefore \quad BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$$

$$= \sqrt{100^2 + 80^2}$$

$$= 128.06\ (m)$$

在直角△FDB 中，

$$FD = DB \tan 12^\circ$$

$$= 128.06 \tan 12^\circ$$

$$= 27.22\ (m)$$

(b) 从点 A 测得旗杆顶端 F 的仰角正是 AF 和平面 AC 所成的角。

设 $\theta = \angle FAD$，

在直角△FDA 中，$\tan\theta = \dfrac{FD}{AD}$

$$= \frac{27.22}{80}$$

$$= 0.3403$$

$$\therefore \quad \theta = 18^\circ 48'$$

(c) 设 $\alpha = \angle FGD$，

在直角△DCG 中，$DG = \sqrt{DC^2 + CG^2}$

$$= \sqrt{100^2 + 40^2}$$

$$= 107.7\ (m)$$

在直角△FDG 中，$\tan\alpha = \frac{FD}{DG}$

$$= \frac{27,22}{107.7}$$

$$= 0.2527$$

$\therefore \qquad \theta = 14°11'$

答：(a) 旗杆 FD 的长是 27.22 m；

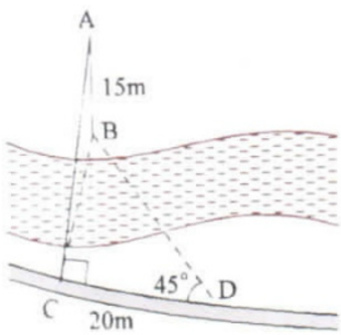
(b) 从点 A 测得旗杆顶端 F 的仰角是 18° 48′；

(c) FG 与草地所在平面 AC 所成的角是 14° 11′。

例 3 如右图，道旁有一条河，彼岸有一高 15 m 的电塔 AB。在道边取一点 C，使 BC 与道边所成的水平角等于 90°。再在道边取一点 D，使水平角 CDB 等于 45°。测得 C、D 的距离 = 20 m。求

(a) 电塔底与道路的距离；

(b) 电塔顶与道路的距离。



解 (a) $CD = 20\text{m}$

那么，$BC = 20\text{m}$

(b) $AC = \sqrt{15^2 + 20^2}$

$$= 25\ (\text{m})$$

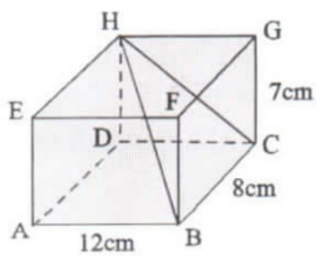
答：(a) 电塔底与道路的距离是 20 m；

(b) 电塔顶与道路的距离是 25 cm。

例 4 右图为一个长方体，AB = 12 cm，BC = 8 cm，CG = 7 cm。求

(a) CH 与平面 ABCD 所成的角；

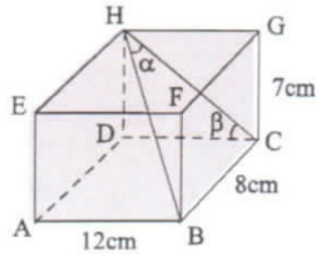
(b) BH 与平面 CDHG 所成的角。



解 (a) 设 HC 与平面 ABCD 所成的角为 θ，

$$\tan\theta = \frac{7}{12}$$

$$\theta = 30.26°$$



(b) 设 BH 与平面 CDHG 所成的角为 α，

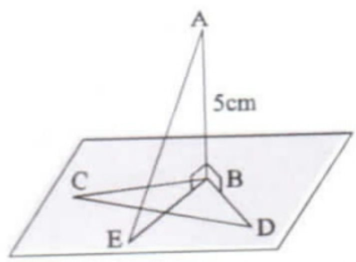
$$\begin{aligned} HC &= \sqrt{12^2+7^2} \\ &= \sqrt{193} \\ DB &= \sqrt{AD^2+AB^2} \\ &= \sqrt{8^2+12^2} \\ &= \sqrt{208} \\ HB &= \sqrt{DB^2+HD^2} \\ &= \sqrt{208+49} \\ &= \sqrt{257} \end{aligned}$$

在△BCH 中，

$$\begin{aligned} BC^2 &= HB^2+HC^2-2HB\cdot HC\cdot\cos\alpha \\ 64 &= 257+193-2\sqrt{257}\sqrt{193}\cos\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{386}{2\sqrt{257\times193}} \\ \cos\alpha &= 0.8666 \\ \alpha &= 29.94° \end{aligned}$$

习题 3a

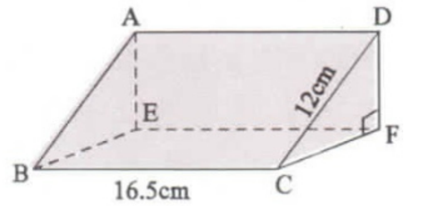
1. 已知斜线的长是它在平面 α 上射影的 2 倍，求斜线和平面 α 所成的角。
2. 两条直线和一个平面所成的角相等，它们平行吗？
3. 如右图，AB = 5 cm，BC ⊥ AB，BD ⊥ AB，在 BC，BD 所在的平面 α 内有一点 E，BE = 7 cm。



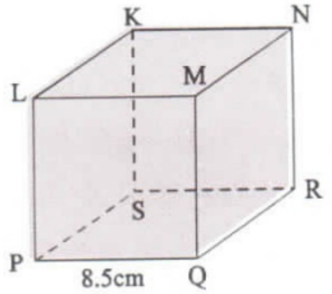
   (a) EB 和 AB、CD 和 AB 各成多少度角？

   (b) AE 的长是多少？

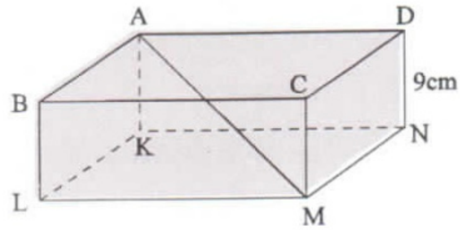
4. 右图表示一个长 16.5 cm 的直角三角棱柱。若 CF = 2DF 及 DC = 12 cm，试求
   (a) AB 与底 BCFE 所成的角；
   (b) AC 与底 BCFE 所成的角。



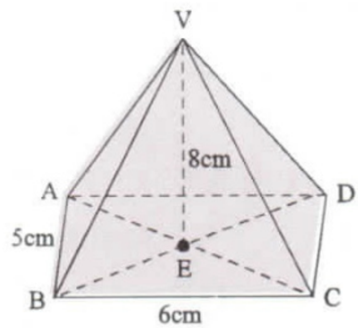
5. 右图为每边长 8.5 cm 的立方体，试求
   (a) QS 与平面 MNRQ 所成的角；
   (b) KQ 与平面 PQML 所成的角。



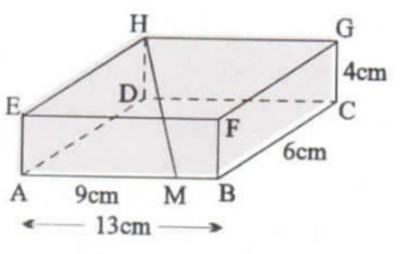
6. 右图为一个长方体，其体积为 300 cc.，AD = 2 DC 及 DN = 9 cm。试求 AM 与平面 KLMN 所成的角。



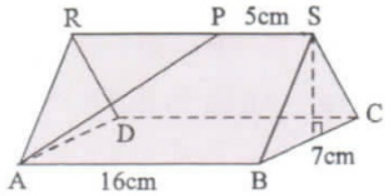
7. 右图表示一个高 8 cm 的正角锥，其底是矩形，其中 AB = 5 cm，AD = 6 cm，试求
   (a) VA 与 VE 所成的角；
   (b) VC 与平面 ABCD 所成的角。



8. 右图表示一长方形盒子 ABCDEFGH。若 AB = 13 cm，BC = 6 cm，CG = 4 cm，M 为 AB 上的一点且 AM = 9 cm，试求
   (a) HM 与底面 ABCD 所成的角；
   (b) HM 与平面 HDAE 所成的角；
   (c) AG 与平面 CDHG 所成的角。



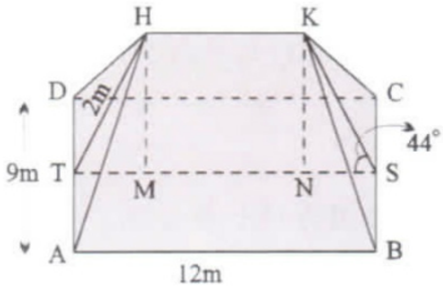
9. 右图表示一正三棱柱体。它的一个侧面ABCD位于水平桌面上而它的两端BCS与ADR为二直立的等边三角形。若AB = 16 cm，BC = 7 cm，SP = 5 cm，试求



(a) AP的长；

(b) AP与平面ABCD的夹角。

10. 右图表示一屋顶，HK为屋脊。它的四条棱HA、HD、KB与KC等长。平面HAD，KBC各与水平平面ABCD成44°角。若S、T分别为BC与AD的中点，且AB = 12 m，AD = 9 m，HT = 2 m，求

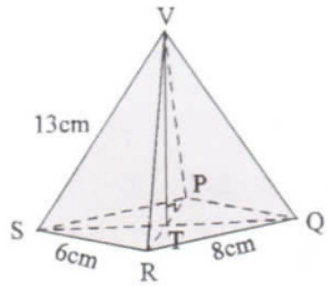


(a) HK在平面ABCD上的高度；

(b) HK的长；

(c) HA与平面ABCD的夹角。

11. 右图表示一正棱锥。若SR = 6 cm，QR = 8 cm，VS = 13 cm，试求



(a) PR之长；

(b) 顶点V与底面PQRS的距离；

(c) VP与底面PQRS所成的夹角。

12. 从平面外一点D向平面引垂线段DA及斜线段DB、DC。已知：DA = a，$\angle BDA = \angle CDA = 60°$，$\angle BDC = 90°$，求BC的长。

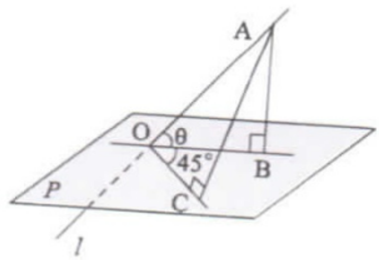
13. 平面P内有一个正六边形，它的中心是O，边长是2 cm。若OH ⊥ P，OH = 4 cm，求点H到这个正六边形顶点和边的距离。

14. 一礼堂长20 m，宽15 m，高4 m，试求

(a) 连接礼堂的地板的一个角落与天花板的对角落的对角线的长；

(b) 此对角线与地板所成的角。

15. 在右图中，如果OA与平面P所成的$\angle\theta = 45°$，$\angle BOC = 45°$，求$\angle AOC$。



3.2 两个平面所成的角

二不平行平面必相交于一直线（公共棱）。从棱上任何一点，在两个平面上各引出一条与棱垂直的直线，则此二条垂直直线所夹的角叫做**二平面的夹角**（angle between two planes），见图 3–4。

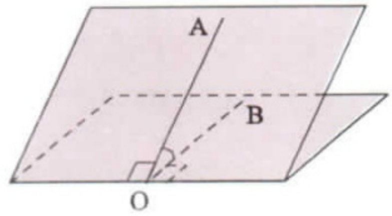


图 3–4

例 5 一间教室的地板为一个长 12m、宽 10m 的长方形 ABCD，其高为 6m。EFGH 为教室的天花板。

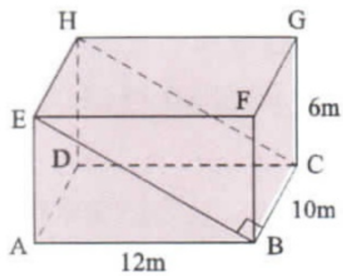
(a) 试求平面 EBCH 与平面 ABCD 所成的角；

(b) 如果 M 为 HG 上一点，求平面 MAB 与地板 ABCD 所成的角。

解 (a) 平面 EBCH 与平面 ABCD 相交于公共棱 BC，而且 $AB \perp BC$，$EB \perp BC$，

$\therefore \angle ABE$ 是平面 EBCH 与平面 ABCD 所成的角（如右图）。

在直角△EAB 中，



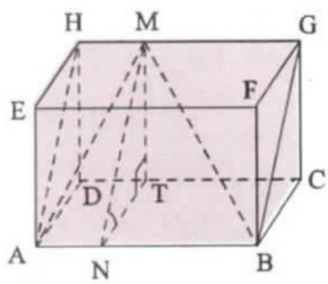
$$\tan\angle EBA = \frac{EA}{AB} = \frac{6}{12} = 0.5$$

$\therefore \angle EBA = 26°34'$

(b) 如右图，作 $MN \perp AB$ 交于点 N，并作垂线 MT，于是 $TN \perp AB$。

$\therefore \angle MNT$ 为平面 MAB 与地板 ABCD 所成的角。

在直角△MTN 中，



$$\tan\angle MNT = \frac{MT}{NT} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$\therefore \angle MNT = 30°58'$

（这个问题还可以这样考虑：点 M 在直线 HG 上，且 $HG /\!/ AB$，所以，平面 MAB 实际上就是平面 GHAB，因此所求角其实就是 $\angle GBC$。）

答：(a) 平面 EBCH 与平面 ABCD 所成的角是 $26°34'$；

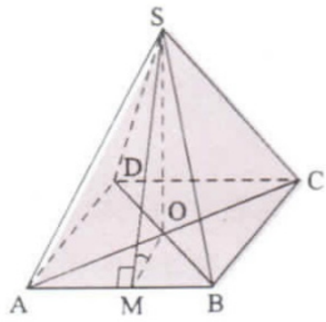
(b) 平面 MAB 与平面 ABCD 所成的角是 $30°58'$。

例 6 一正四棱锥 SABCD 的顶点为 S，底面是一边长为 10 cm 的正方形 ABCD。若 SM⊥AB，垂足为 M，且 SM = 7.5 cm，试求

(a) △SAB 所在平面与底面 ABCD 所成的角；

(b) 平面 SAD 与平面 SBC 所成的角。

解 (a) 如右图，平面 SAB 与平面 ABCD 相交于公共棱 AB，由于 SM⊥AB，OM⊥AB，因此∠SMO 是平面 SAB 与平面 ABCD 所成的角。



在直角△SOM 中，

$$\cos\angle SMO = \frac{OM}{SM} = \frac{5}{7.5} = 0.6667$$

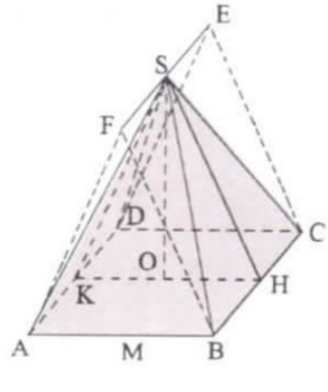
$$\therefore \angle SMO = 48°11'$$

(b) 过 S 作一直线 EF，使得 EF∥AD∥BC，平面 SAD 与 SBC 实际上就是平面 EFAD 和 EFBC，如右图。

过 S 作 SK⊥AD，SH⊥BC，可以知道 SK⊥EF，SH⊥EF。因此，∠KSH 为所要求的角。

在等腰三角形 SKH 中，作 SO⊥KH，可得∠KSO = ∠HSO。

在直角△HOS 中，



$$\sin\angle OSH = \frac{OH}{SH} = \frac{5}{7.5} = 0.6667$$

$$\therefore \angle OSH = 41°49'$$

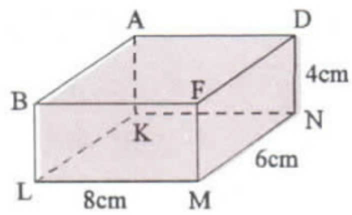
$$\angle HSK = 2\times 41°49' = 83°38'$$

答：(a) △SAB 所在平面与平面ABCD 所成的角是48°11′；

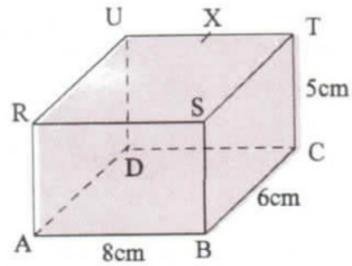
(b) 平面 SAD 与平面 SBC 所成的角是 83°38′。

习题 3b

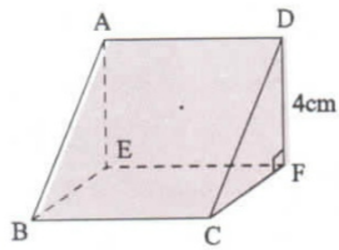
1. 右图所示为一长方体 ABCDKLMN，其长为 8 cm，宽 6 cm，高 4 cm。试求平面 ABMN 与平面 KLMN 所成的角。



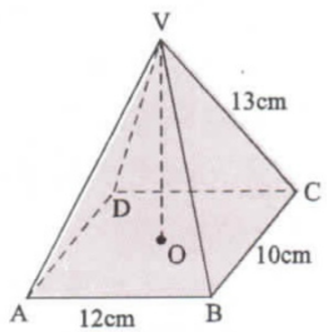
2. 如右图所示，ABCDRSTU 为一长方体；已知 AB = 8 cm，BC = 6 cm，CT = 5 cm，且 X 是棱 TU 的中点，试求
   (a) 平面 XAB 与底面 ABCD 的夹角；
   (b) 平面 BCUR 与平面 ADUR 所成的角；
   (c) 平面 ABTU 与底面 ABCD 所成的角。



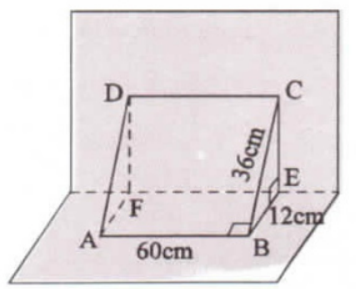
3. 直角三棱柱体（如右图）的高是 4 cm，且 $BE = \frac{2}{3}EF$，EF = 4DF。求平面 ABCD 与底面 BCFE 所成的角。



4. 正四棱锥 VABCD 的底是长方形 ABCD，且 AB = 12 cm，BC = 10 cm，其斜棱的长为 13 cm。求
   (a) 平面 VBC 与底面 ABCD 所成的角；
   (b) 平面 VCD 与底面 ABCD 所成的角。



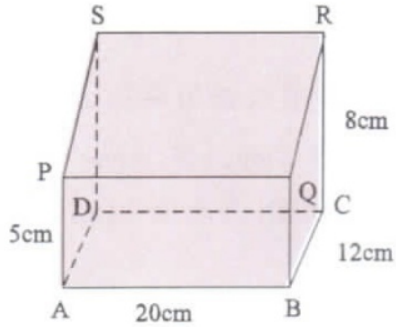
5. 右图表示一长方形木板 ABCD，AB = 60 cm，BC = 36 cm，AB 位于水平位置上，CD 靠着墙壁。若 AB 距离墙角 12cm，试求
   (a) 木板与地面的夹角；
   (b) 木板的对角线 BD 与地面的夹角。



6. 右图表示一金属盒子，其正面高 5 cm，背面高 8 cm，其底为一长 20cm，宽 12 cm 的长方形 ABCD。盒子的盖 PQRS 为一倾斜面。试求

(a) 盒盖 PQRS 与水平面的夹角；

(b) SQ 与平面的夹角。

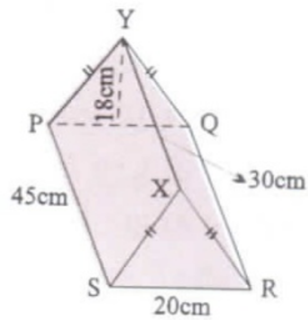


7. 如右图，底面为一长方形 PQRS，三角形 PQY 为一垂直面。若 PS = 45 cm，SR = 20 cm，XY = 30 cm，PY = YQ，SX = XR，且 Y 至 PQ 的高为 18 cm，试求

(a) 平面 PSXY 与平面 QRXY 之夹角；

(b) 平面 SXR 与平面 PQRS 之夹角；

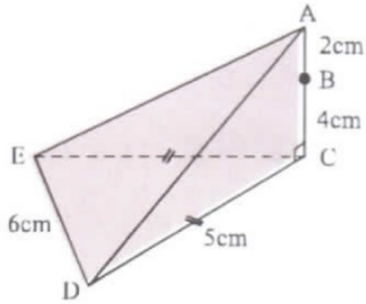
(c) SX 与平面 PQRS 之夹角。



8. 如右图，CDE 为一位于水平面的等腰 △ ABC 垂直于水平面。若 CD = CE = 5 cm，ED = 6 cm，AB = 2 cm，BC = 4 cm，试求

(a) 平面 BDE 与底面 CDE 的夹角；

(b) 平面 ADE 与平面 CDE 的夹角。

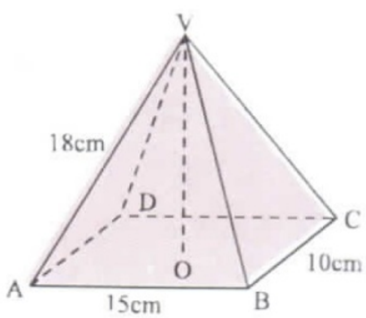


9. 右图表示一正棱锥，其底为一长方形 ABCD。若 AB = 15 cm，BC = 10 cm，VA = 18 cm，试求

(a) 正棱锥的高 VO；

(b) △VAB 与平面 ABCD 的夹角；

(c) △VBC 与△VAD 的夹角。

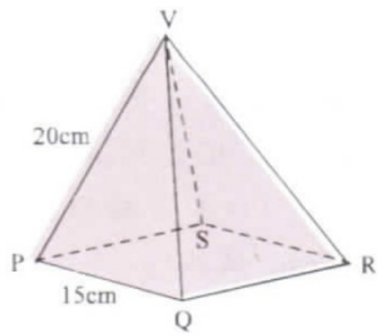


10. 右图表示一正棱锥 VPQRS，其底面为一正方形 PQRS，顶点为 V。若 PQ = 15 cm，VP = 20 cm，试求

(a) VP 与底面 PQRS 的夹角；

(b) 一个侧面与底面 PQRS 的夹角；

(c) 相邻二侧面的夹角。

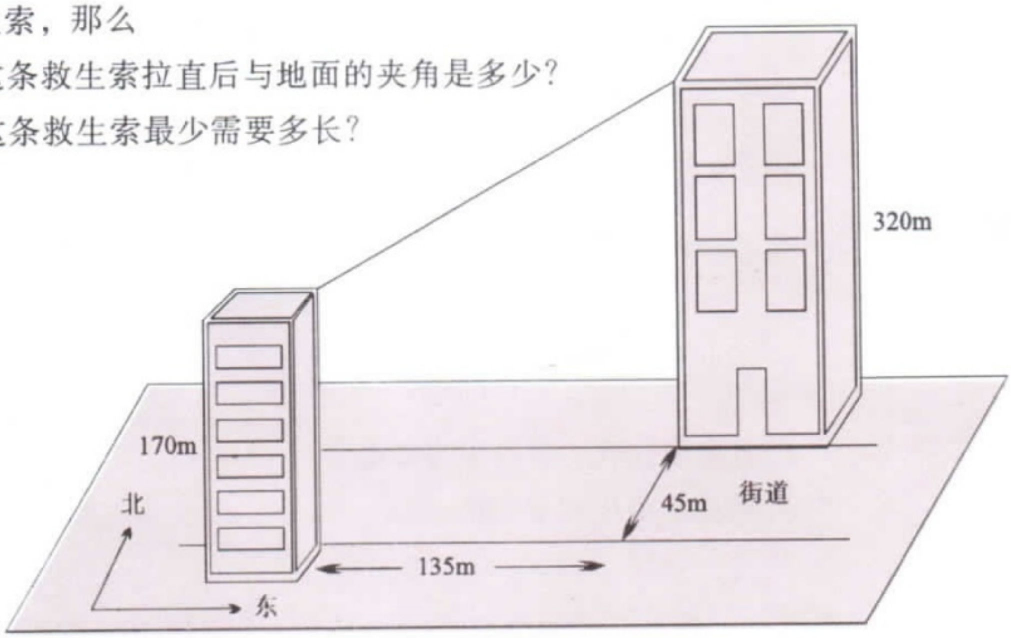


3.3 简易立体应用题

例 7 一座 320 m 高的摩天大楼附近有一座 170 m 高的大厦，大厦与摩天大楼之间相隔一条 45 m 宽东西走向的街道，大厦在大楼西侧，两座建筑物之间的垂直距离是 135 m（如下图）。如果要从摩天大楼的顶层往大厦的顶层拉一条紧急救生索，那么

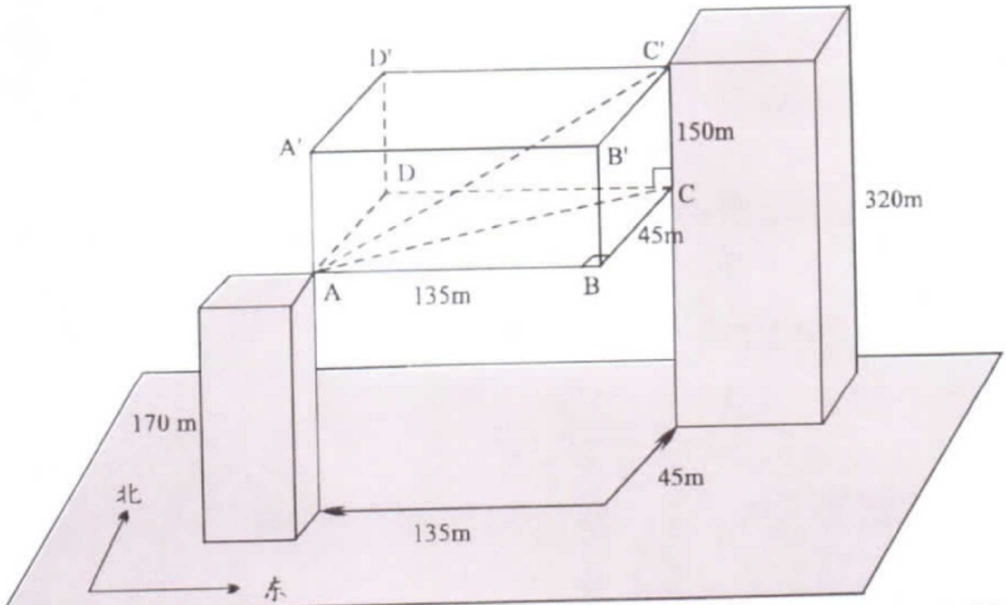
(a) 这条救生索拉直后与地面的夹角是多少？

(b) 这条救生索最少需要多长？



解 以街道的宽、两座建筑物东西方向的垂直距离及其高差为三条边作长体 ABCD－A′B′C′D′，其中 AB＝135 m，BC＝45 m，C′C＝320－170＝150 m。

(a) 平面 ABCD 与地平面平行，因此直线 AC′与平面 ABCD 所成的角就是救生索拉直后与地面的夹角，AC 就是 AC′在平面 ABCD 上的射影。



在直角△ABC 中，$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$$= \sqrt{135^2 + 45^2}$$

$$= 45\sqrt{10}\ (\mathrm{m})$$

在直角△ACC′中，$\tan\angle C'AC = \dfrac{CC'}{AC}$

$$= \frac{150}{45\sqrt{10}}$$

$$= 1.054$$

$$\therefore \angle C'AC = 46°30'$$

(b) 在直角△ACC′中，$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2}$

$$= \sqrt{(45\sqrt{10})^2 + 150^2}$$

$$= 207\ (\mathrm{m})$$

答：(a) 救生索拉直后与地面的夹角是 46°30′；

(b) 救生索最少需要 207 m 长。

例 8 一个正三棱锥形的建筑物 OABC 的底面为一个边长 10 m 的等边三角形 ABC，其侧棱 OA、OB、OC 各等于 12 m，且其高 OG 垂直于底面，试求

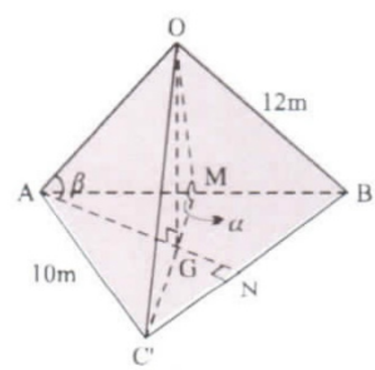
(a) 高 OG；

(b) OA 的仰角；

(c) 侧面 OAB 的坡度（坡面与水平面所成夹角的度数）。

解 (a) 由于 OABC 是一个正三棱锥，因此 △OAB ≌ △OBC ≌ △OCA 且 OA = OB = OC

设 M、N 分别是 AB、BC 的中点，则 CM⊥AB，AN⊥BC，其交点 G 即为顶点 O 的射影。



在直角△ANC 中，

$$AN = \sqrt{AC^2 - CN^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - 5^2}$$

$$= \sqrt{75}$$

$$= 8.66\ (\mathrm{m})$$

且，G 为△ABC 的重心，$AG = \frac{2}{3}AN$

$$= \frac{2}{3} \times 8.66$$

$$= 5.773\ (\mathrm{m})$$

在直角△OGA 中，$OG = \sqrt{OA^2 - AG^2}$

$$= \sqrt{12^2 - 5.773^2}$$

$$= 10.52\ (\mathrm{m})$$

(b) ∠OAG 为 OA 与底面 ABC 所成的角，即 OA 的仰角。

设 $\angle OAG = \beta$，

在直角△OGA 中，∵ $\tan\beta = \frac{OG}{AG}$

$$= \frac{10.52}{5.773}$$

∴ $\beta = 61°15'$

(c) 由于侧面 OAB 与底面 ABC 相交于 AB，CM⊥AB；OM⊥AB，故∠OMC 为侧面 OAB 与水平面 ABC 所成的角。

在△ABC 中，$GM = \frac{1}{3}CM$

$$= \frac{1}{3}AN$$

$$= \frac{1}{3} \times 8.66$$

$$= 2.886\ (\mathrm{m})$$

在直角△OGM 中，设$\angle OMG = \alpha$，

$$\tan\alpha = \frac{OG}{GM}$$

$$= \frac{10.52}{2.886}$$

∴ $\alpha = 74°39'$

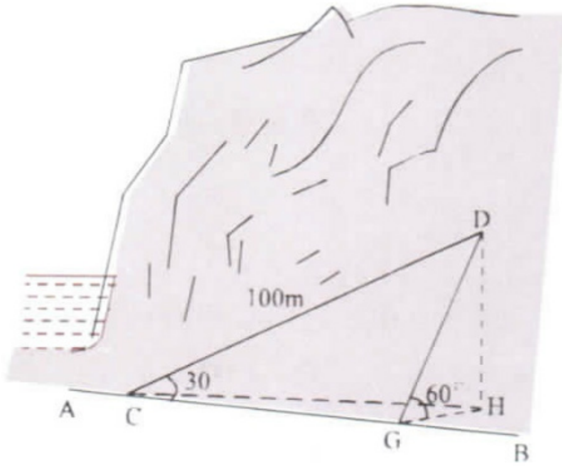
答：(a) 高 OG 是 10.52 m；

(b) OA 的仰角 β 是 $61°15'$；

(c) 侧面 OAB 的坡度 α 是 $74°39'$。

例 9 如右图，山坡的坡度是 60°，山坡上有一条直道 CD，它和坡脚的水平线 AB 的夹角是 30°，沿这条路上山，行走 100 m 后升高多少米？

解 已知 CD = 100 m，设 DH 垂直于过 BC 的水平平面，垂足为 H，线段 DH 的长度就是所求的高度。在平面 DBC 内，过点 D 作 $DG \perp BC$，垂足是 G，连结 GH。



$\because$ $DH \perp$ 平面 BCH，$DG \perp BC$

$\therefore$ $GH \perp BC$

因此，$\angle DGH$ 就是坡面 DGC 和水平平面 BCH 所成的夹角，$\angle DGH = 60°$。由此得

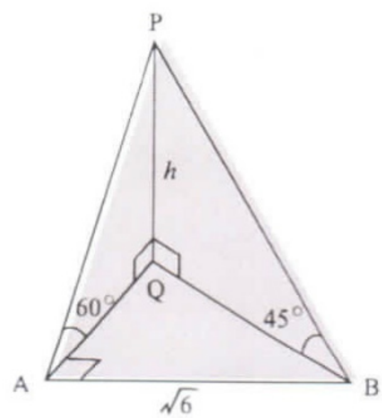
$$
\begin{aligned}
DH &= DG \sin 60° \\
&= CD \sin 30° \sin 60° \\
&= 100 \sin 30° \sin 60° \\
&= 43.3\ (\mathrm{m})
\end{aligned}
$$

答：沿直道前进 100 m，升高约 43.3 m。

例 10 在飞机的正南一点 A 测得飞机的仰角为 60°，同时在 A 之正东一点 B 测得飞机的仰角是 45°，若 A、B 的距离是 $\sqrt{6}$ 公里，求飞机的高度。

解 设飞机的高度为 h 公里。

在直角△APQ 中，$AQ = h \tan 30° = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$



在直角△PBQ 中，$BQ = PQ = h$

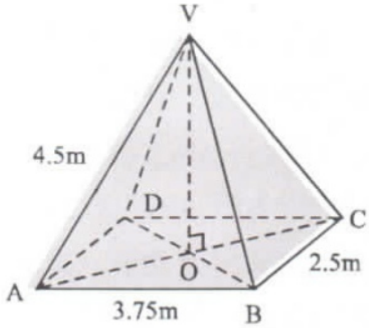
在直角△ABQ 中，$AQ^2 + AB^2 = QB^2$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \frac{h^2}{3} + 6 &= h^2 \\
2h^2 &= 18 \\
h &= 3
\end{aligned}
$$

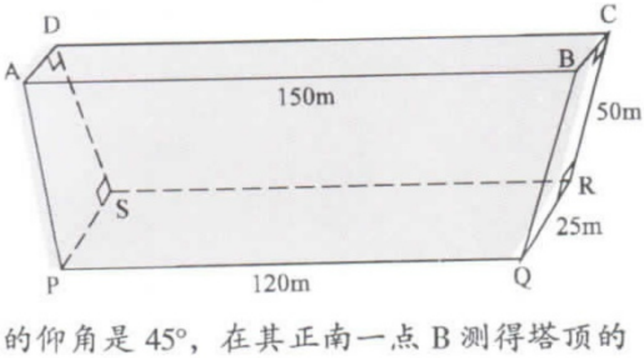
答：飞机的高度是 3 公里。

习题 3c

1. 一个长、宽、高分别是 30cm、20cm、15cm 的木盒中，如果要放一把短剑，问短剑最长可以是多长？这把短剑应如何摆放在盒中？
2. 一座建筑物的两面墙 P、Q 相交于直线 AB，如果测得 P 内一点 C 到直线 AB 的距离等于点 C 到另一面墙 Q 的距离，求 P 与 Q 所成的角。
3. 在一个斜坡上，沿着与坡脚的水平线成 45° 角的直道上坡。如果行走 40m 后升高了 $10\sqrt{2}$ m，求坡面的坡度。
4. 埃及有许多金字塔。如果金字塔的四个边墙是等边三角形，底面是正方形，试求
   (a) 侧棱与底面的夹角；
   (b) 边墙与底面的夹角；
   (c) 相邻两边墙的夹角。
5. 埃及有一座金字塔的四个边墙是等腰三角形，底面是正方形，塔底的周长是 1034m，并且塔底周长与塔高之比恰为圆周与半径之比 (2π)。试求
   (a) 塔高；
   (b) 边墙与底面的夹角。
6. 右图表示一顶帐篷。帐篷底面 ABCD 是长方形。如果 AB = 3.75m，BC = 2.5m，VA = 4.5m，VA = VB = VC = VD，求
   (a) 帐篷的高 VO；
   (b) △VAB 与底面的夹角；
   (c) △VBC 与△VAD 的夹角。



7. 右图是山谷间的一座水坝。水坝的水平面 ABCD、PQRS 是两个长方形，临水面 CDSR 与水平面垂直，两面山坡的坡度相同（APSD、BQRC 分别沿山坡的坡面修筑）。如果 AB = 150m，PQ = 120m，CR = 50m，BC = 8m，QR = 25m，求
   (a) 山坡的坡度；
   (b) 大坝背水面 APQB 的坡度；
   (c) AP 与水平面的夹角。



8. 有一塔，在其正东一点 A 测得塔顶的仰角是 45°，在其正南一点 B 测得塔顶的仰角为 30°。已知 A、B 两点的距离为 100 公尺，求灯塔之高。

9. ABCD 为一长方形广场，AB = 80 公尺，BC = 60 公尺，在 A 处竖立一旗杆 AP，自 B 处测得 P 的仰角的正切是 $\frac{5}{8}$；求在 C 与 D 处所测得 P 的仰角。

10. ABC 为一平面上之三角形，AB = 30 公尺，BC = 40 公尺，CA = 50 公尺，在 B 点有根垂直的旗杆，从 A 点测得杆顶的仰角是 36°30′。试求旗杆的高及 AC 之中点所测得杆顶的仰角。

11. 地面上有三点 A，B，C。A 在塔 CD 之正西，B 在塔之西南。在 A 及 B 测得塔顶 D 的仰角都是 32°，若塔高 250 公尺，求 A、B 之距离及 B 在 A 所测的方向。

12. 一塔 PQ 高 35 公尺，在塔顶 P 观察塔底平面上的两点 A 和 B，A 位于塔之正南而 B 位塔之西南。若 A 和 B 之俯角分别为 35°及 42°，求 A、B 之距离。

3.4 平面图、正面图、侧面图

● 正投影法

在工程技术中，人们常常遇到各种图样，如机械制造工业中常用的装配图和零件图。在建筑工程中，除了画出各种平面的图外，为了研究建筑物的外形，常需画出直观性和立体感很强的透视图。另外，还有用来表示地形的标高图等等。这些图样都是按着不同的投影射影方法绘制出来的。

投影法可分为中心投影法和平行投影法两种，把所有的投影线均视为互相平行的绘图方法就是平行投影法。平行投影法又分为斜投影法和正投影法两种，投影线与投影面垂直的绘图方法是**正投影法**（orthogonal projection），如图 3 – 5。采用正投影法绘制的投影图能正确地表达物体表面的真实形状和大小，作图比较方便，因此这种投影图被广泛应用于工程技术中。这是我们主要要学习和运用的一种投影方法。

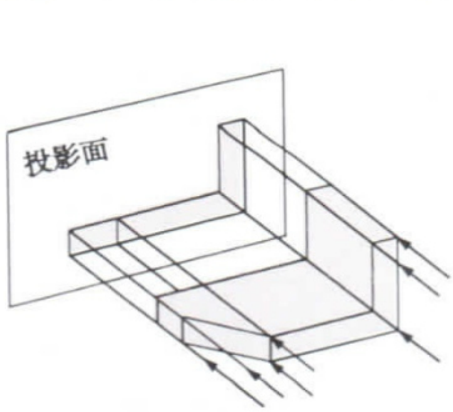


图 3 – 5

正投影法有以下一些基本性质：

(1) 直线的投影一般仍为直线。

(2) 点在直线上，则该点的投影一定在直线的投影上，而且该点分割线段之比等于其投影之比。

(3) 空间互相平行的两直线，其投影也互相平行。

(4) 当线段或平面图形与投影面平行时，则其投影与原图形全等（图 3-6）。

(5) 当直线或平面与投影面垂直时，则直线的投影是一个点，平面的投影是一条直线（图 3-7）。

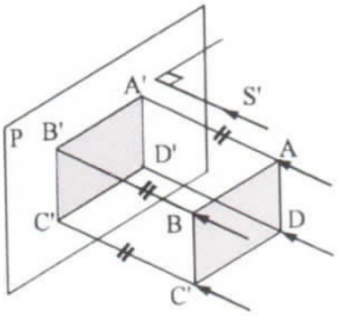


图 3-6

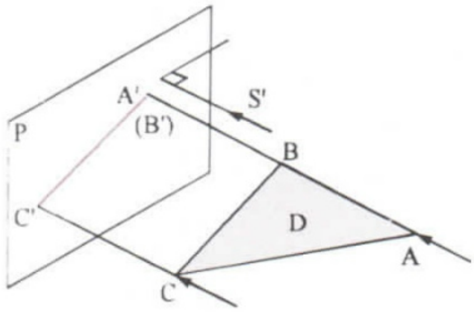


图 3-7

(6) 当线段或平面图形与投影面倾斜时，则其投影小于原图形（图 3-8）。

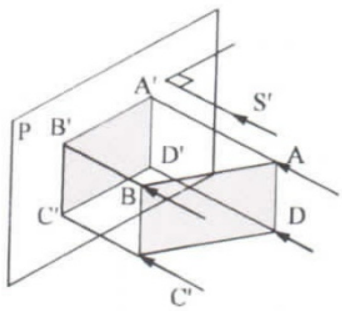


图 3-8

平面图、正面图、侧面图

如图 3-9 所示，我们取三个互相垂直的平面做为投影面，即：正立投影面（简称正面）*V*、水平投影面（简称水平面）*H*、侧立投影面（简称侧面）*W*。从物体的前方向后观察（沿箭号 F 所指方向），在正面上 *V* 所得到的视图，称为**正面图**（front elevation）。从物体的上方向下观察（沿箭号 P 所指方向），在水平面 *H* 上所得

到的视图，称为**平面图**（plan）。再从物体的左方向右观察（沿箭号 S 所指方向），在侧面 *W* 上得到的视图，称为**侧面图**（side elevation）。

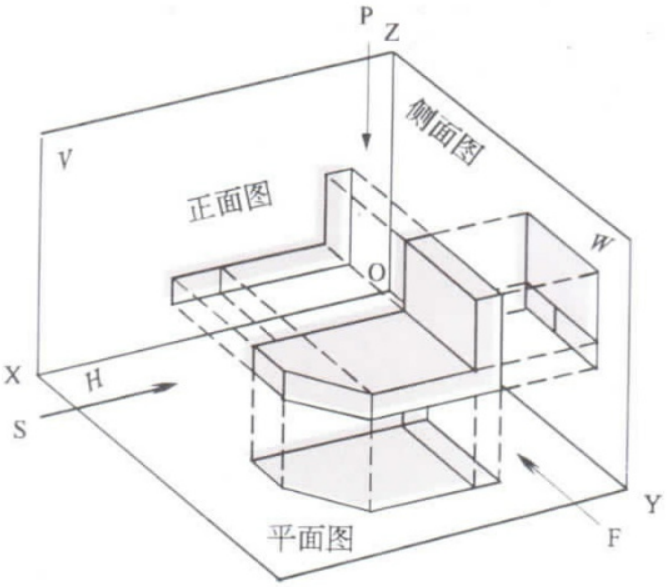


图 3－9

将此三个互相垂直的平面 ***V***、***H***、***W*** 展开，可得下列的平面图，正面图及侧面图（图 3－10）。

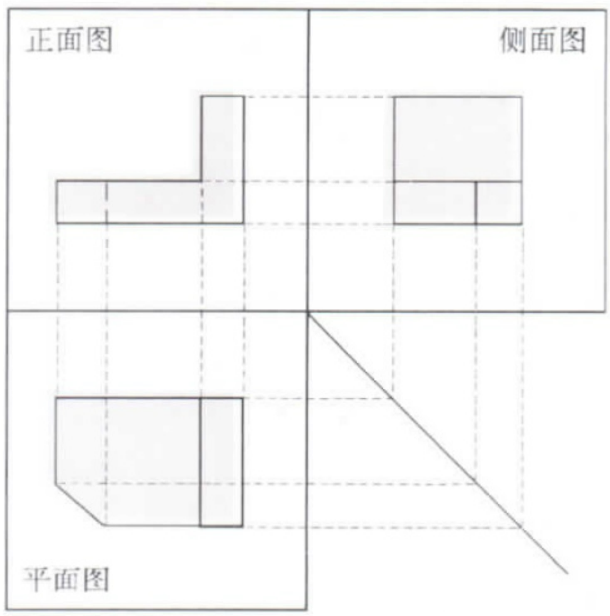
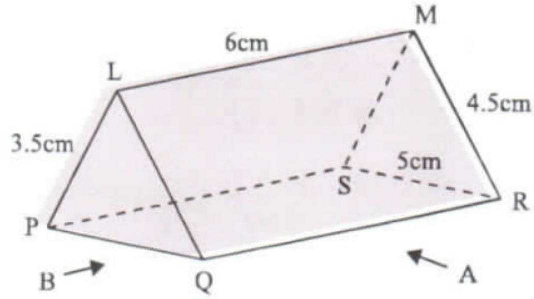


图 3－10

例 11 右图是一个直三棱柱体 PQRSLM，试绘其平面图，正面图（沿箭号 A 的方向视之）及侧面图（沿箭号 B 的方向视之）。

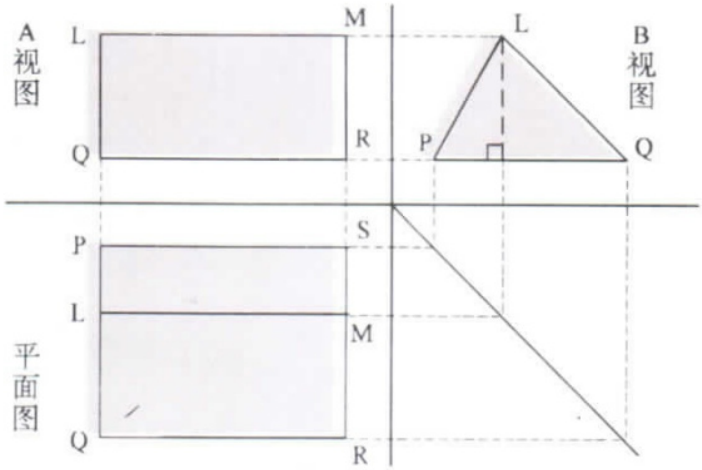


解 在此例中，可先作出 B 视图（侧面图）

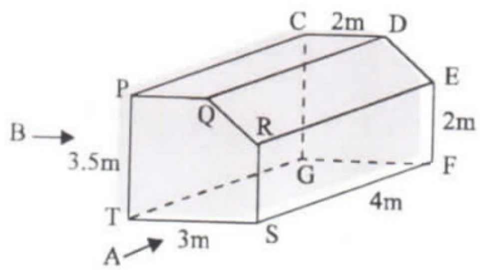
B 视图：此视图为 PQL。

A 视图：此视图为一长方形，其长为 QR = 6 cm，宽为由 L 至 PQ 的高。

平面图：当从上空向下正视此立体时，它的平面图是一个与 PQRS 相等的长方形，同时也看到棱 LM 在其中，为一条直线。



例 12 依右边的立体图形，绘出其平面图，正面图（箭号 A 的方向）及侧面图（箭号 B 的方向）。

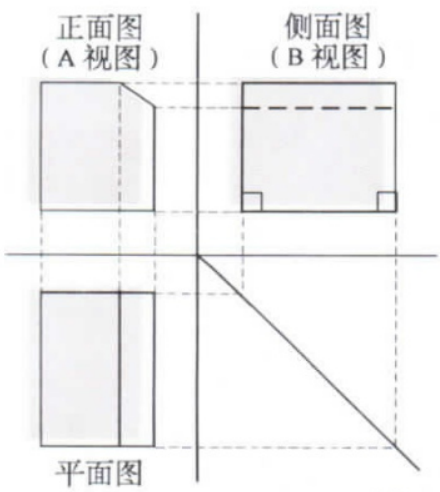


解 在此例中，可先作出平面图或 A 视图。

A 视图：这个立视图是一个多边形 PQRST 。

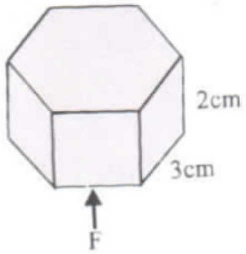
平面图：此视图是一个长方形 TGFS，同时我们也可看到棱 QD 在其中，为一直线。

B 视图：此立视图是一个长方形 PTGC，一些点如 Q，D，E，F，S，R 被立体的面 PTGC 所遮住，因此棱 RE 以一条虚线表示之。

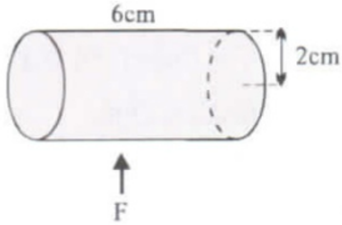


例 13 试绘下列多面体的正面图、平面图和侧面图（图中箭头 F 的方向为正面图的观察方向）。

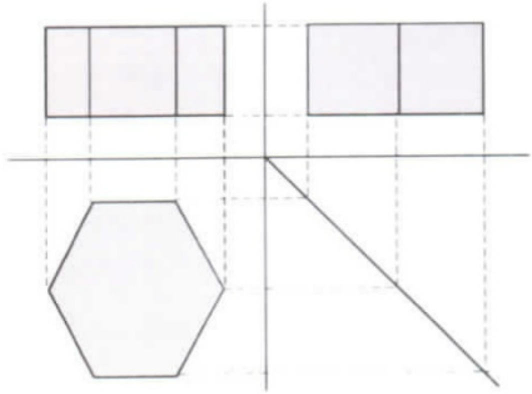
(a) 正六棱柱



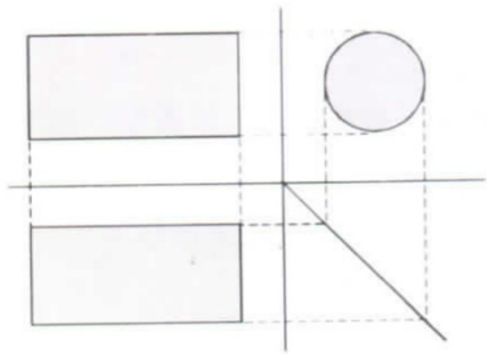
(b) 圆柱体



解 (a) 先作平面图。平面图是边长为 3 cm 的正六边形。

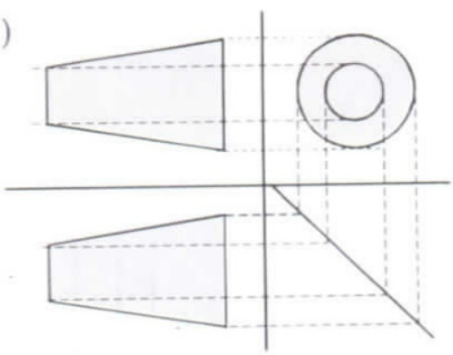


(b) 先作正面图或侧百图或平面图。正面图是长为 6 cm、宽为 4 cm 的长方形。

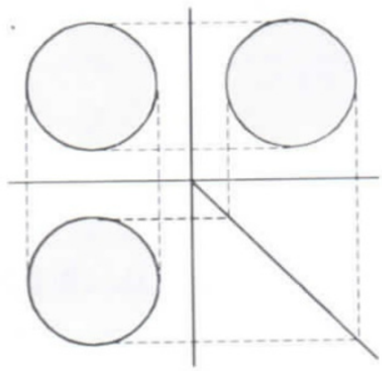


例 14 下列三组视图分别表示什么样的立体图形？

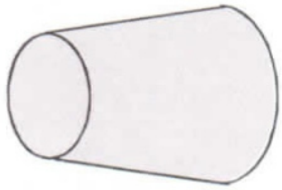
(a)

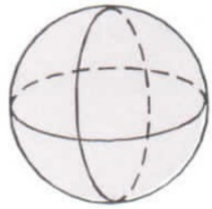


(b)



解　(a) 圆台　　(b) 球

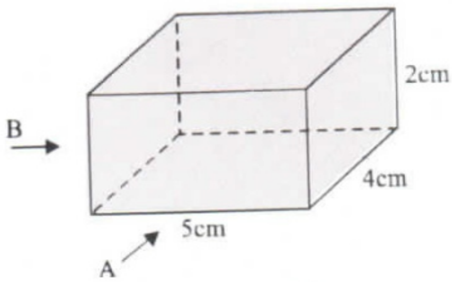




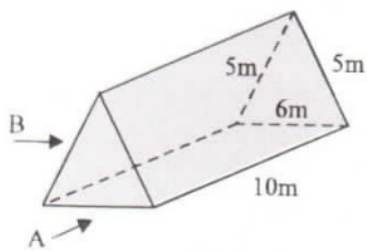
习题 3d

试绘下列各立体的平面图，正面图（A 视图）及侧面图（B 视图）。
（若有需要，可选取适当的比例作图）。

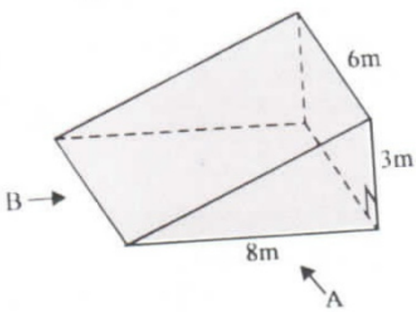
1.



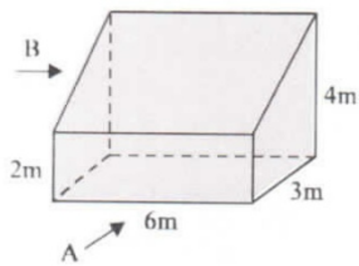
2.



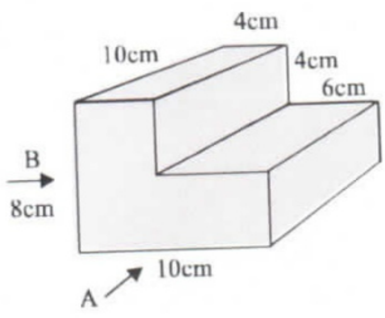
3.



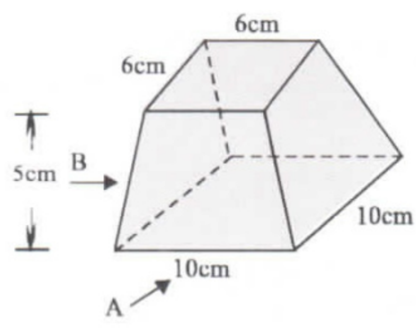
4.



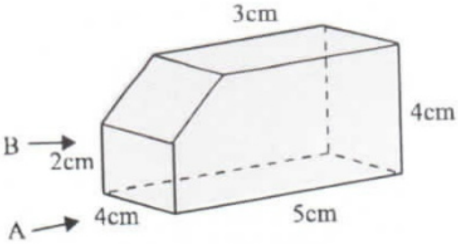
5.



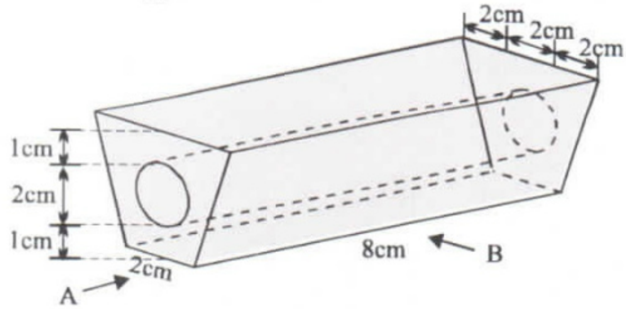
6.



7.



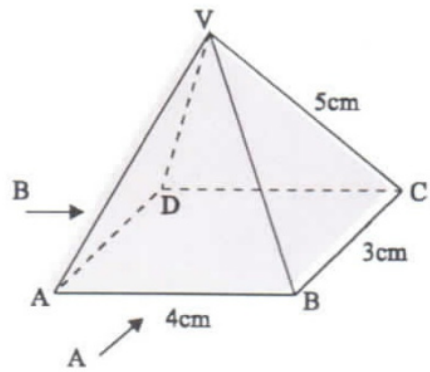
8.



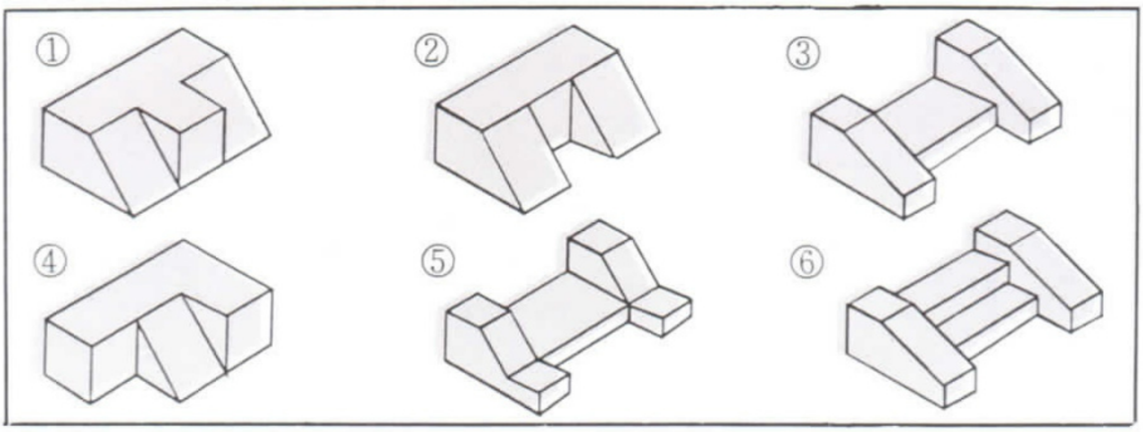
9. 右图所示为一正棱锥体 VABCD，其底 ABCD 是一个长方形。

(a) 试绘此锥体的平面图，A 视图及 B 视图。

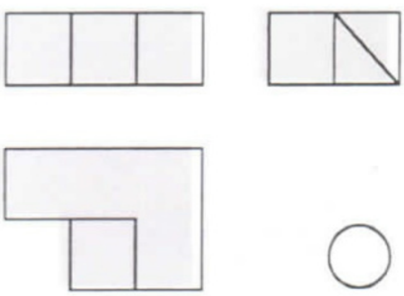
(b) 从 A 及 B 的视图中，量斜面 VBC 与底 ABCD 所成的角及斜棱 VA 与底 ABCD 所成的角。



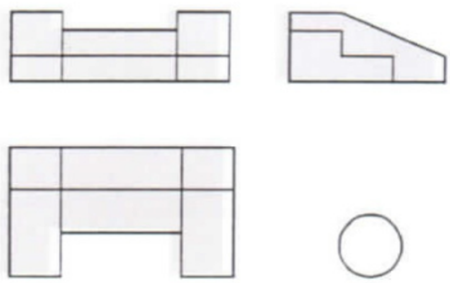
10. 把相应的立体图的号码写在投影图旁的圆圈内。



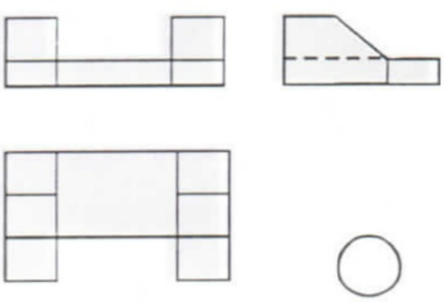
(a)



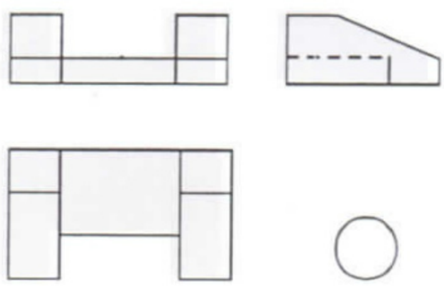
(b)



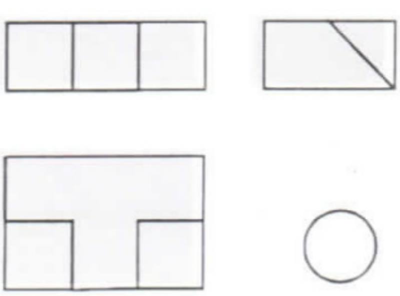
(c)



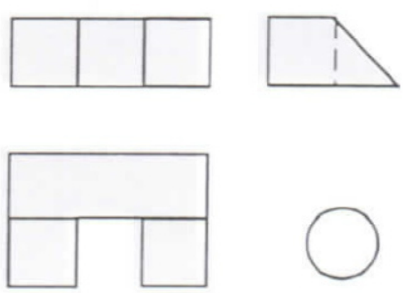
(d)



(e)

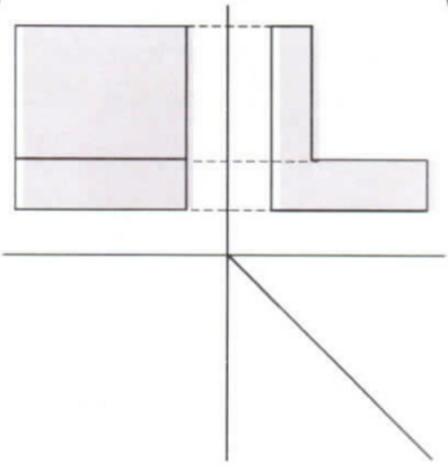


(f)

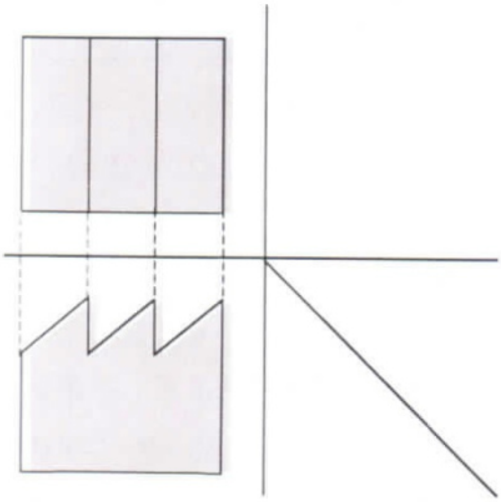


11. 补绘第三个投影图。

(a)

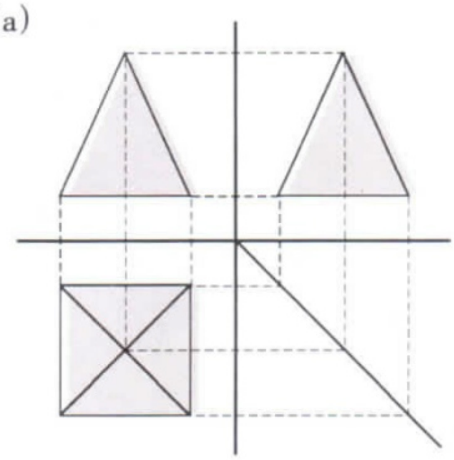


(b)

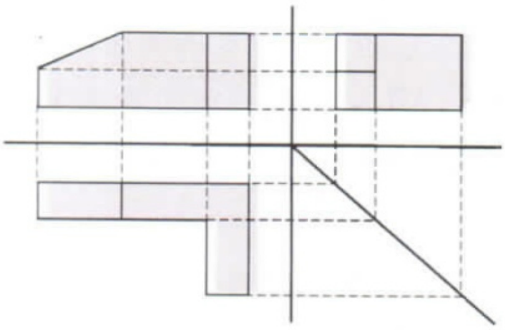


12. 根据下列所给的平面图，正面图及侧面图，试画出立体的略图：

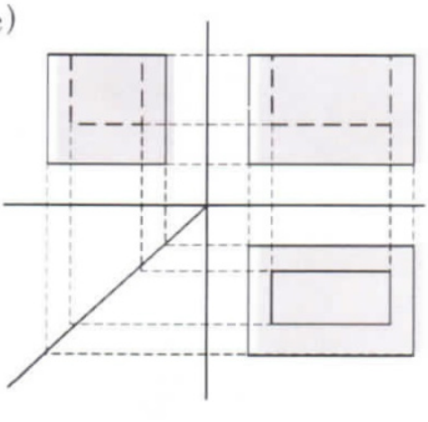
(a)



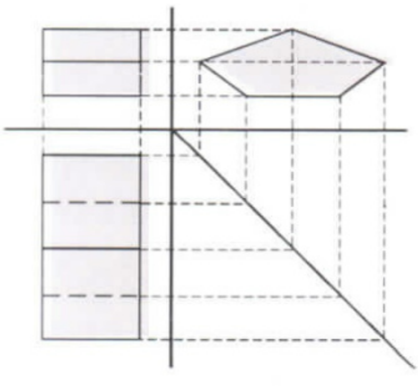
(b)



(c)

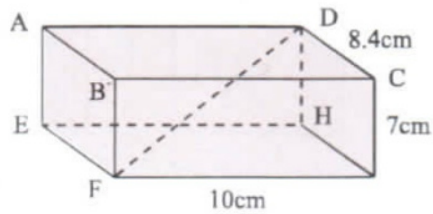


(d)

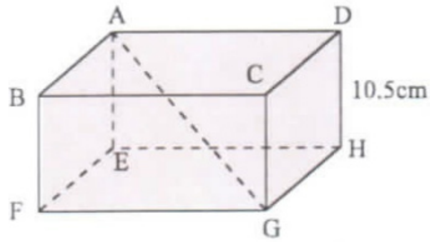


总复习题 3

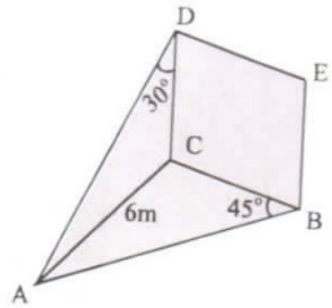
1. 右图是一个长方体，若 FG = 10 cm，CG = 7 cm，CD = 8.4 cm，试求
   (a) 平行平面 ABFE 与 DHGC 之间的距离；
   (b) FD 与平面 EFGH 所成的角；
   (c) 直线 AC 与平面 BFGC 所成的角。



2. 若一个长方体（见右图）的体积是 $400 cm^3$，其高为 10.5 cm 且 AD = 2 DC，试求 AG 与平面 ADHE 所成的角。

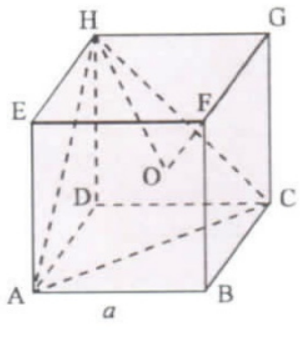


3. 如果从教室朝阳一面的墙角下点 A 处测得直线 AB 与教室前面的墙 BCDE 成 45° 角，AD 与教室前面的墙 BCDE 成 30° 角，又测得点 A 与 BCDE 相距 6 m，试求 D 到 B 的距离。

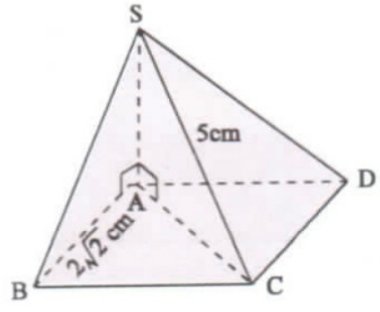


4. 一个正角锥 VABCD 的顶点为 V，底为每边长 8 cm 的正方形 ABCD。其斜棱的长为 12 cm。求
   (a) 斜棱与底所成的角；
   (b) 联 V 到 BC 的中点的直线与底所成的角。

5. ABCD – EFGH 是一个正方体，其中棱长 AB = a。试求
   (a) 平面 ACH 与平面 ABCD 的夹角；
   (b) 平面 ACH 与平面 BCGF 的夹角；
   (c) 点 F 到面 ACH 的距离 FO。



6. 在棱锥 SABCD 中，ABCD 是正方形，SA ⊥ AB，SA ⊥ AC，AB = $2\sqrt{2}$ cm，SC = 5 cm。试求
   (a) 直线 SB 与平面 ABCD 所成的角的度数；
   (b) 平面 SAB 与平面 SAC 所成夹角的度数。



7. 一塔高 200 公尺，在塔东之一点 A 及塔南之一点 B，测得塔顶之仰角分别为 $53°8'$ 及 $45°$，求 A、B 之距离。

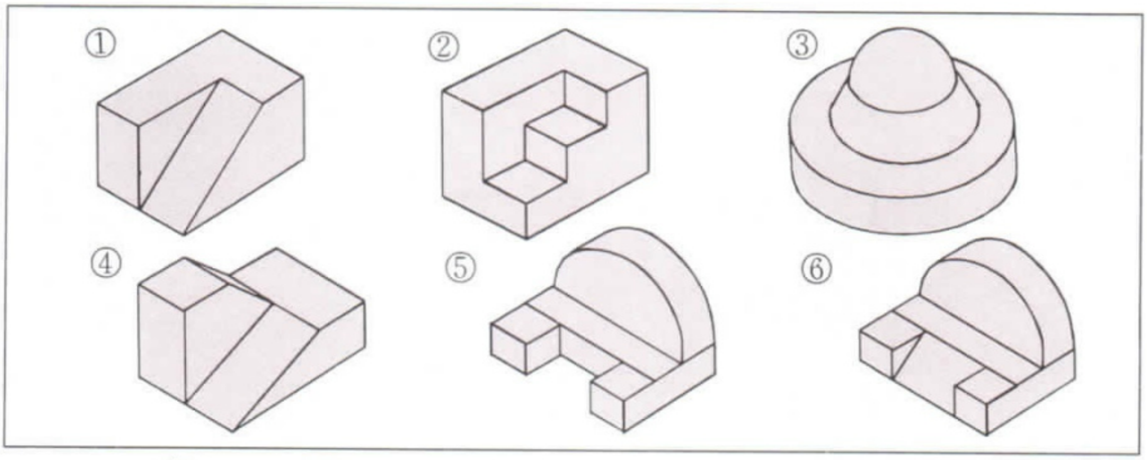
8. ABC 为一平面上之三角形，CD 是一 10 公尺长的木棍，垂直竖立于 C 点，若 $\angle DAC = 30°$，$\angle DBC = 60°$，$\angle ACB = 125°$，求 $\triangle ABC$ 的面积及 AB 的长度。

9. 一等边三角形 ABC 位于水平面上，D 在 AB 线上而 $AD = kAB$。在 A 及 D 二点测得位于 C 之铅垂杆顶之仰角分别为 α 及 β，试证明

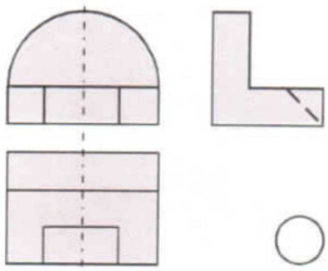
$$\cot^2\beta = (1-k+k^2)\cot^2\alpha$$

10. B，C 两点与山底在同一平面上，B 在山之北而 C 在山之西北，在 B，C 两点测得山顶的仰角分别为 14° 及 12°，试求 B 对 C 之方位。

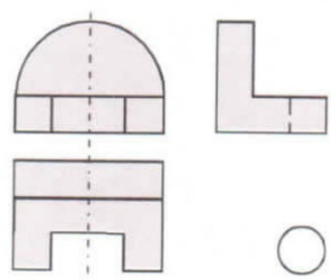
11. 根据立体图找投影图：



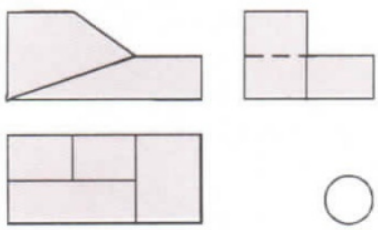
(a)



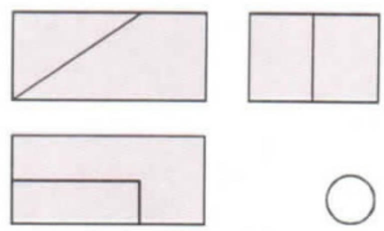
(b)



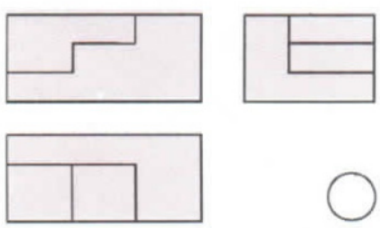
(c)



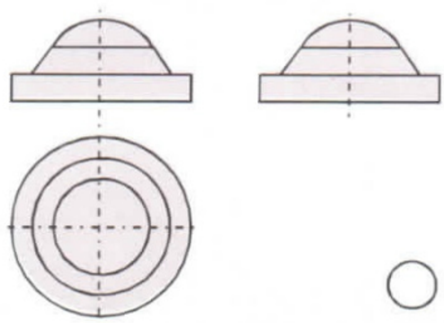
(d)



(e)

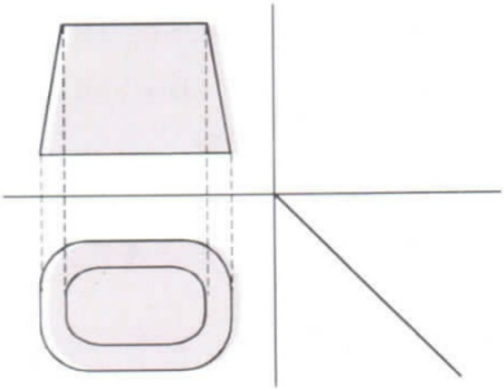


(f)

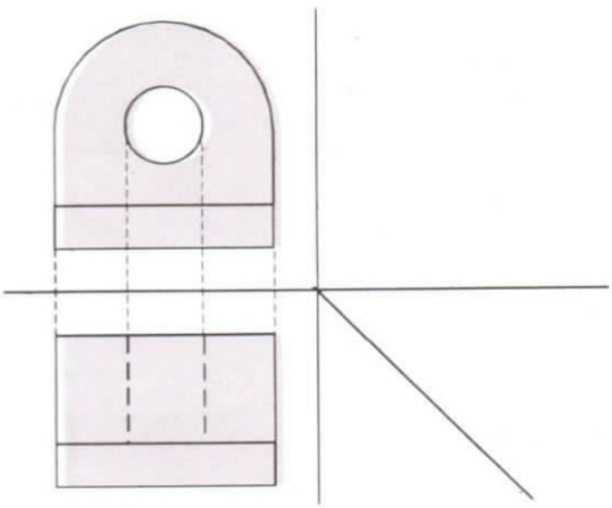


12. 补绘第三投影

(a)

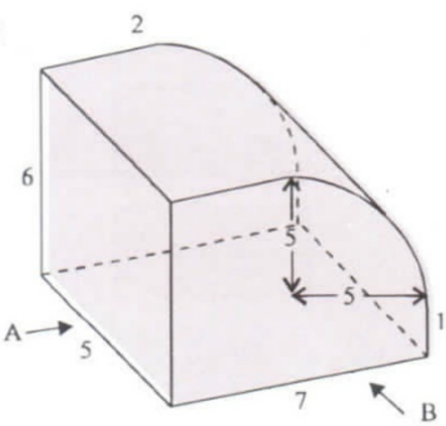


(b)

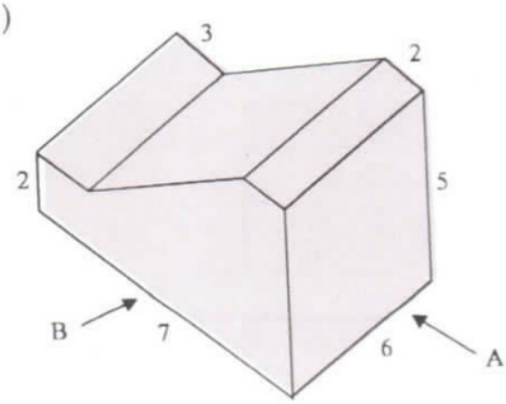


13. 绘出下列各立体的平面图，正面图（A 视图）及侧面图（B 视图）：

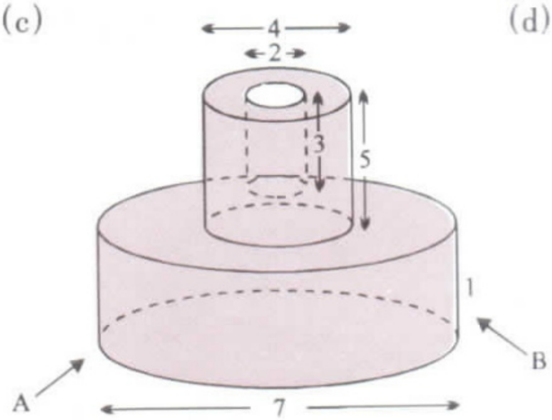
(a)



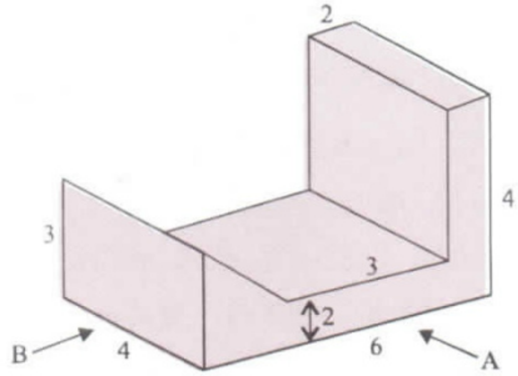
(b)



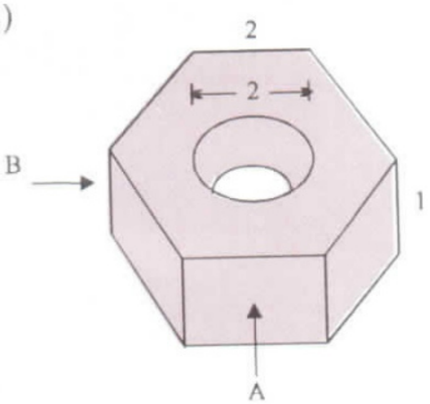
(c)



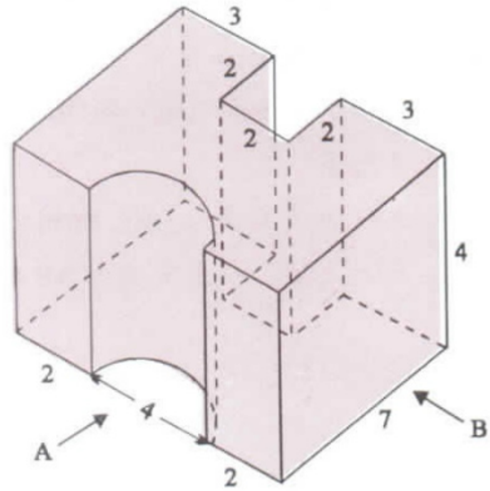
(d)



(e)



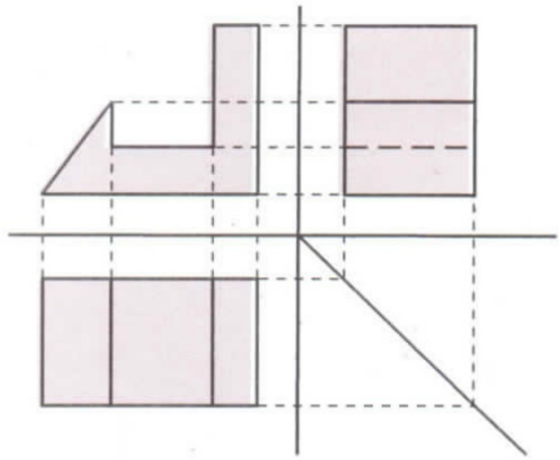
(f)



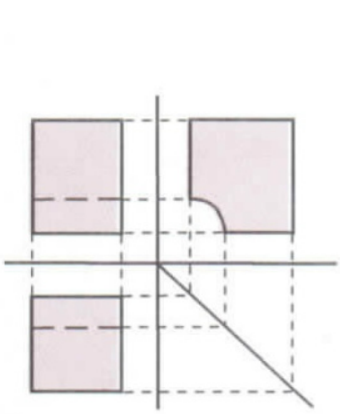
14. 根据下列所绘的平面图，正面图及侧面图，画出立体的略图：

(a)

(b)



(c)

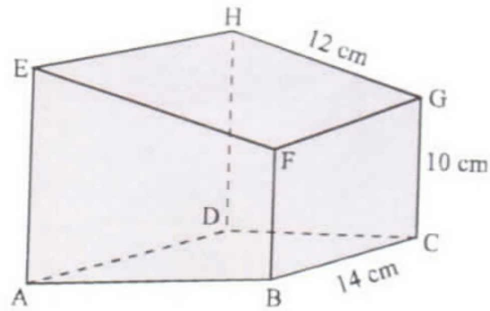


15. 一个底为正方形 ABCD 的角锥 VABCD，其顶点为 V。若底的对角线相于 E 点，且 $VE = 2\frac{1}{2}AD$，求

(a) VA 与底所成的角；

(b) △VAB 与底所成的角。

16. 右图表示一个固体 ABCDEFGH，其底 ABCD 是一长方形，倾斜面 EFGH 与水平面成 30°的角。其他的平面是直垂面；BC = 14 cm，CG = 10 cm 及 HG = 12 cm。试用 1 cm 代表 2 cm 绘



(a) 平行于直垂面 ABFE 的侧面图；

(b) 平面图；

(c) 平行于直垂面 ADHE 的侧面图。由所作之图，试求底面上 AB 之长。

4 经度与纬度

4.1 平面与球的截面

常见的排球、足球及滚珠等物体，都呈球形。

以半圆的直径为旋转轴，旋转所成的曲面叫做**球面**（spherical surface）。球面所围成的几何体叫做球体，简称**球**（sphere）。半圆的圆心叫做**球心**（centre of the sphere）。连结球心和球面上任意一点的线段叫做球的**半径**（radius）。连结球面上两点并且经过球心的线段叫做球的**直径**（diameter）。如图 4－1 的球中，点 O 是球心，线段 OC 是球的一条半径，线段 AB 是球的一条直径。

球面也可以看作与定点（球心）的距离等于定长（半径）的所有点的集合（轨迹）。

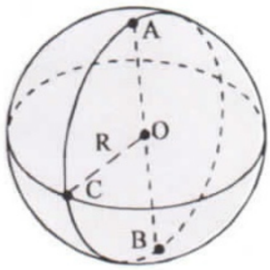


图 4－1

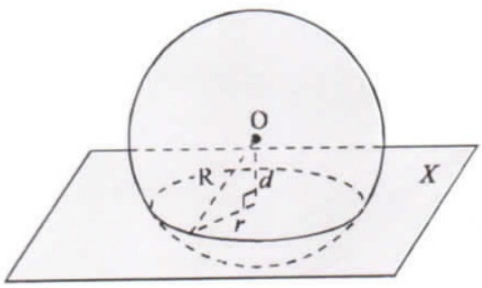


图 4－2

一个球用表示它的球心的字母来表示，例如球 O。

用一个平面去截一个球，**截面**（cross section）是圆面。球的截面有下面的性质：

(1) 球心和截面圆心的连线垂直于截面（图 4－2）；

(2) 球心到截面的距离 d 与球的半径 R 及截面的半径 r，有下面的关系：

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

球面被经过球心的平面截得的圆叫做**大圆**（great circle），被不经过球心的平面截得的圆叫做**小圆**（small circle）。

4.2 经纬线与经纬度

地球可近似地当作一个球，其半径的近似值为 6370 km，其**极轴**（polar axis）为过北极（N）与南极（S）的直线。

● 经纬与经度

在地球表面上从北极至南极的半个大圆叫做**经线**，或叫做**子午线**（meridians of longitude），见图 4－3。国际上规定，通过英国格林威治天文台的那条经线为零度经线，叫做**格林威治子午线**（Greenwich meridian），又叫**本初子午线**（prime meridian）。

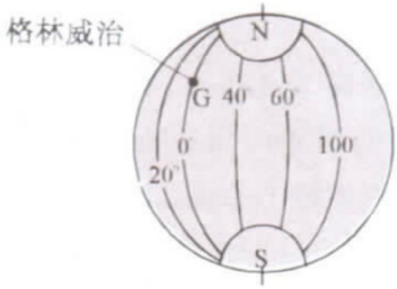


图 4－3

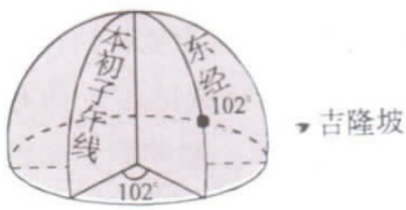


图 4－4

经线以经度来度量。**经度**（longitude）是指任何经线所在平面与本初子午线所在平面的夹角，如图 4－4。本初子午线以东的经线叫做东经，以 E 表示，例如通过吉隆坡的经线是 102° E；本初子午线以西的经线叫做西经，用 W 表示。

● 纬线与纬度

垂直于极轴的平面截地球表面所得到的圆称为**纬线**（parallels of latitude）。一切纬线所在平面都互相平行。纬线不同于经线，它是一个圆且有大小之别。纬线中唯一的大圆叫做**赤道**（equator），赤道把地球分为南北两个半球（图 4－5）。

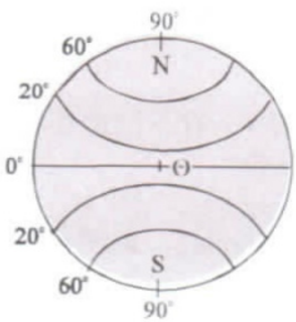


图 4－5

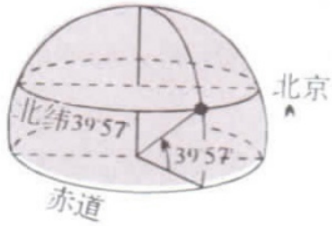


图 4－6

纬线以纬度来度量。**纬度**（latitude）是指过任何纬线上一点至地心的直线与赤道平面所成的夹角，如图 4-6。赤道的纬度为零度，赤道以北的纬线叫做北纬，用 N 表示，例如通过北京的纬线是 39° 57′N；赤道以南的纬线叫做南纬，用 S 表示；北极为北纬 90°（或 90° N），南极为南纬 90°（或 90° S）。

有了纬度和经度，就可以在地面上确定任意点的位置了。

● 纬线圈的半径

如图 4-7 所示，北纬 θ 的纬线圈的半径 r 可从直角△OCD 中求得。在直角△OCD 中（见图 4-8），

$$CD = OD\cos\theta$$

即 $$r = R\cos\theta$$

其中 R 为地球半径。

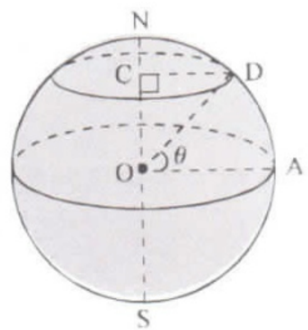


图 4-7

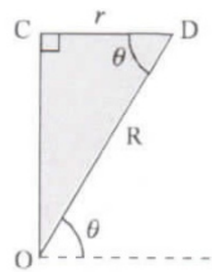


图 4-8

● 海里的定义

地球的大圆上 $1'\left(\frac{1}{60}^{\circ}\right)$ 的圆心角所对的弧长为 1 **海里**（nautical mile）。

即
$$1\text{海里} = \frac{1}{60\times360}\times2\pi\times6370\text{公里}$$
$$= 1.853\text{公里}$$

4.3 时间与经度

时间的测量是根据地球绕极轴旋转一周所需时间为一天来计算的。地球自西向东自转，故东部时间必较西部时间早。地球自转一周所需时间为 24 小时，因此，每小时旋转 15°经度，所以每隔 15°时间相差 1 小时。

（一）地方时（local time）

地方时是以当地当天太阳升得最高的时刻定为正午 12 点，并以此为标准来划分的时刻。凡处于同一经线上的各地点，其地方时相同。

（二）标准时（standard time）

1884 年在美国华盛顿举行的国际经度会议上规定，将地球表面按经线等分为 24 区，称为**时区**（time zone）。以本初子午线为基准，东西经度各 $7.5°$ 的范围作为零时区，然后每隔 $15°$ 为一时区，以东（西）经度 $7.5° - 22.5°$ 的范围为东（西）一时区，东（西）经度 $22.5° - 37.5°$ 的范围为东（西）二时区，依次类推。在每一区内一律使用它的中央子午线上的时间作为标准，称为该区的**标准时**。每一时区的标准时又叫做“区时”。每越过一区的界限，时间便差 1 小时。

（三）时间的计算法

根据子午线来计算各地的时间，一般采取以下步骤：

(i) 求出两地的经差；

(ii) 由经差求出两地的时差；

(iii) 由“东地的时间 - 西地的时间 = 两地时差”求出某地的时间。

例 1 设新加坡（104° E）为下午 3 点正（15 时 0 分）时，求伦敦的**世界标准时**（Greenwich mean time，简称 G.M.T.）。

解 两地经差 $= 104° - 0° = 104°$

两地时差 $= \dfrac{104}{15} =$ 6 时 56 分

新加坡是在伦敦的东方，因此

（新加坡的时间）-（伦敦的时间） = 两地时差

故 伦敦时间 = 15 时 0 分 - 6 时 56 分

= 8 时 4 分

即 伦敦的世界标准时为上午 8 时 4 分。

例 2 设伦敦的标准时为上午 9 时，求东京（104° E）的地方时。

解 两地经差 $= 104° - 0° = 104°$

两地时差 $= \dfrac{104}{15} =$ 9 时 20 分

东京是在伦敦的东方，因此

（东京的时间）–（伦敦的时间） = 两地时差

故　　东京时间 = 9 时 20 分 + 9 时 0 分

= 18 时 20 分

即　　东京的时间为下午 6 时 20 分。

例 3　设纽约（74° W）为上午 1 时，求悉尼（151° E）的地方时。

解　两地经差 = 74° + 151° = 225°

两地时差 = $\frac{225}{15}$ = 15 时 0 分

悉尼是在纽约的东方（从经度角度来看），因此

（悉尼的时间）–（纽约的时间） = 两地时差

故　　悉尼时间 = 15 时 0 分 + 1 时 0 分

= 16 时 0 分

即　　悉尼时间 为下午 4 时正。

【注】 以上是理论上的计算，由于时区的划分以及其他人为的因素，各地的“理论”时刻与其实际的时刻有时有些出入。

习题 4a

1. 当伦敦是正午时，试求
   (a) 吉隆坡（102° E）的地方时；
   (b) 纽约（74° W）的地方时。
2. 格林威治的时间是下午 6 时 20 分，试求在西经 80° 的城市的地方时。
3. 当里斯本（9° W）的地方时是晚上 8 时正，试求新加坡（104° 36′ E）的地方时。
4. 两地同在赤道上且相距 1500 海里，试求该两地的时差。
5. 当 P 城的地方时是中午 12 时 25 分，在西经 125° 的 Q 城之地方时是凌晨 3 时 45 分，试求 P 城的经度。
6. P 在西经 70°，而 Q 在 P 之正东。若两地的时差是 9 小时，试求 Q 地的经度。
7. A、B、C 三地同在赤道上，A 在西经 80°，B 在格林威治子午线上且 C 在 B 的东面相距 2000 海里。若 A 的地方时是早上 8 时正，求 B 与 C 的地方时。

8. A地是新加坡（104° 30′ E）西面的一个市镇，两地的时差是三个小时。试求A的经度。

9. 当东京（140° E）的地方时是早晨7时正，试求吉隆坡（102° E）的地方时。

4.4 同一经线上两地的距离

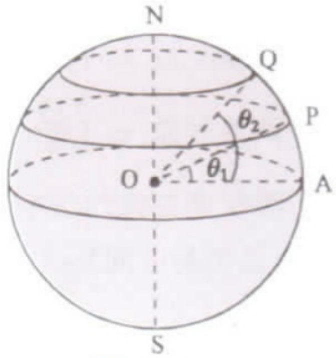


图 4 - 9

若一艘船沿着某一条子午线航行，由P地（北纬 θ_1）向北航行至Q地（北纬 θ_2），则所航行的距离可根据弧PQ的长来求出。在图 4 - 9 中，

$\angle POQ = \theta_2 - \theta_1 = \alpha$

根据海里的定义，知1海里等于地球的大圆上1分圆心角所对的弧长，（把 $\angle\alpha$ 的单位换算成"分"以后）得

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{PQ} &= \alpha \text{ 海里} \\ &= 1.853 \text{ 公里}\end{aligned}$$

例 4 两个城市A与B位于同一子午线上，它们的纬度分别为北纬45°与北纬30°，问

(a) A与B沿着子午线的距离为多少海里？

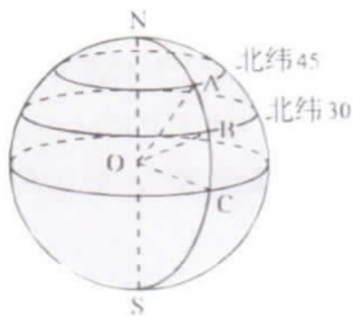
(b) A与B沿着子午线的距离为多少公里？

解 (a) 在右图中，A与B两地的纬度差为

$$\begin{aligned}45° - 30° &= 15° \\ &= 900'\end{aligned}$$

根据海里的定义，可知

A、B两地距离为900海里。



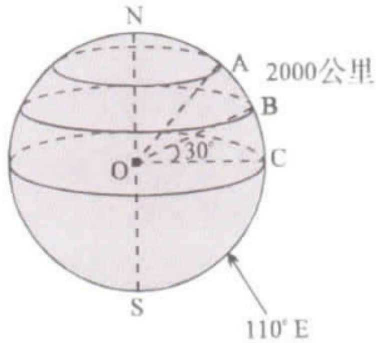
(b) $\because$ 1海里 = 1.853公里

$\because$ 900海里 = 900 × 1.853公里

= 1668公里

例 5 市镇 A 在市镇 B（$30°$ N，$110°$ E）北面 2000 公里，试求市镇 A 的经纬度。

解 如右图，由于市镇 A 在市镇 B 北面，因此两市镇在同一子午线上，所以市镇 A 的经度为 $110°$ E。



又，由于 A、B 两市镇相距 2000 公里，即 A、B 两市镇相距 $\frac{2000}{1.853}$ 海里，所以，根据海里的定义

$$\overset{\frown}{AB} \text{ 所对的圆心角 } = \frac{2000}{1.853} \times 1'$$

$$= 17°\ 59'$$

可知市镇 A 的纬度为 $(30° + 17°\ 59')\text{N} = 47°\ 59'\ \text{N}$

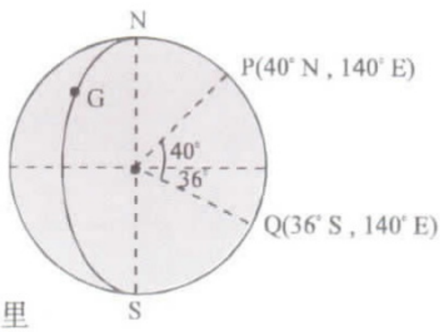
故市镇 A 的位置为（$47°\ 59'$ N，$110°$ E）。

例 6 一架飞机从一机场 P（$40°$ N，$140°$ E）向南飞行到另一机场 Q（$36°$ S，$140°$ E）。

(a) 求此飞机的飞行距离；

(b) 若其飞行速度为每小时 1200 公里，问共飞行了多少时间？

解 (a) 如右图，NGS 为格林威治子午线。两机场是在同一经度 $140°$ E 上，且 P 在北纬 $40°$，Q 在南纬 $36°$。



则两地的纬度差为 $40° + 36° = 76°$

$$\therefore \text{ P、Q 两地的距离 } = \frac{76}{360} \times 2\pi \times 6370 \text{ 公里}$$

$$= 8450 \text{ 公里}$$

(b) 飞机的速度 = 1200 公里 / 小时

$$\text{所需时间 } = \frac{8450}{1200} \text{ 小时}$$

$$\approx 7 \text{ 小时}$$

习题 4b

1. 两地 P 与 Q 位于同一条子午线上，它们沿着子午线的距离为 600 公里，试求它们的纬度之差。
2. 一飞机由某机场 A（15° N，115° 10′ E）起飞，向正北飞行 1000 海里至另一机场 B，试求 B 的经度与纬度。
3. 一飞机由某机场 P（北纬 5°，东经 100°）起飞，向正南飞行 1500 公里至另一机场 Q，试求 Q 的经度与纬度。
4. 两地 X 与 Y 同在一条子午线上，且相距 400 海里，试求 X 与 Y 纬度之差。
5. 两地 C 与 D 相距 700 海里，而且 C 地恰在 D 地的正南方。若 C 地的纬度为北纬 35° 30′，试求 D 地的纬度。
6. 甲城和乙城在同一条子午线上，甲城的纬度为北纬 2° 12′，乙城的纬度为北纬 6° 4′。问这两个城市相距多少公里？
7. 沿子午线从地 A（18° 30′ S）至北极，距离是多少海里？
8. 一架飞机沿赤道飞行 2000 海里，问经度改度变了多少？
9. 一飞机沿赤道从 A 地（130° E）飞到 B 地（120° 30′ E），然后再向北飞行到 C 地（20° 50′ N）。若此飞机之速度为每小时 300 海里，试求其飞行时间。
10. 一船离一港口 P(50° S，160° E）向北开航，行至另一港口 Q（30° N，160° E）。若此船共花了 6 个小时完成此行程，试求其平均速度（以海里／时表示速度单位）。

4.5 同一纬线上两地的距离

若两地在同一纬线上，即指此两地的纬度相同而经度相异。若此两地分别为 P 与 Q，欲求其同一纬线上的距离，即指小圆之弧 PQ 的长度 $\overparen{PQ}$。

设 P 与 Q 为同一纬线上的两个地方，其纬度为北纬 α，且它们的经度分别为东经 θ_1、东经 θ_2。

在图 4－10 中，

$\angle PKX = \theta_1$，$\angle QKX = \theta_2$，

$\therefore \quad \angle PKQ = \theta_2 - \theta_1$

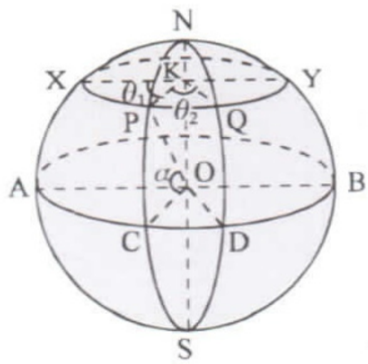


图 4－10

因纬线圈的半径 $r = R\cos\alpha$（其中 R 为地球的半径），且

$\overset{\frown}{PQ}$ = P 与 Q 两地的距离

$$\therefore\ \text{P 与 Q 两地的距离} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{360} \times 2\pi r$$

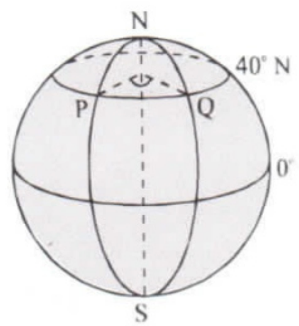
$$= \frac{\theta_2 - \theta_1}{360} \times 2\pi R\cos\alpha$$

例 7 若 P 与 Q 同在北纬 40°，它们的经度分别为东经 50°、东经 120°。试求两地沿着纬线的距离：

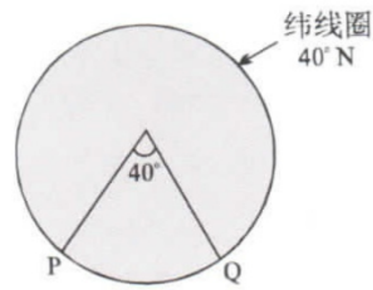
(a) 以公里表示；

(b) 以海里表示。

解



(a)



(b)

(a) 如上图 (a) 及 (b) 所示，

P 与 Q 两地的经度差为 $120° - 50° = 70°$

北纬 40° 的纬圈半径 $r = R\cos 40°$

$$= 6370\cos 40°$$

$$\therefore\ \text{P 与 Q 两地的距离} = \frac{70}{360} \times 2\pi \times 6370\cos 40°$$

$$= 5962\ \text{公里}$$

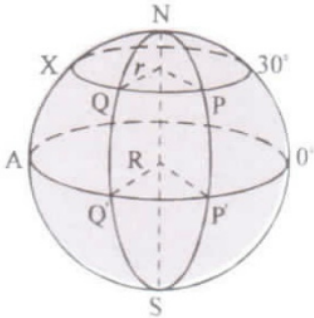
(b) 已知 1 海里 = 1.853 公里

$$\therefore\ \text{P 与 Q 两地的距离} = \frac{5962}{1.853}\ \text{海里}$$

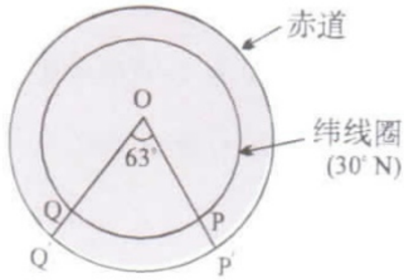
$$= 3217\ \text{海里}$$

例 8 一船自港口 P (30° N，20° W) 向西航到另一港口 Q (30° N，83° W)。问这船航行了多少海里？

解



(a)



(b)

P 与 Q 两地的经度差 = $83° - 20° = 3780'$

根据海里的定义，在赤道上（见上图 b），

$$\widehat{P'Q'} = 3780 \text{ 海里}$$

又 $\dfrac{PQ}{P'Q'} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{R\cos 30°}{R}$

$\therefore \quad PQ = P'Q' \cos 30°$

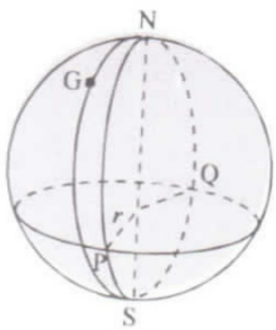
$= 3780 \cos 30°$

$= 3274$（海里）

例 9 一船自港口 P（45° S，50° E）向东行驶到另一港口 Q（45° S，170° W）。试求船航行的距离：

(a) 以公里表示；　　(b) 以海里表示。

解



(a)

(b)

(a) 如上图 (a) 及 (b) 所示，

P 与 Q 两地的经度差 = $360° - (50° + 170°) = 140°$

南纬 45° 的纬圈半径 $r = R\cos 45°$

$\therefore$ P 与 Q 两地的距离 $= \dfrac{140}{360} \times 2\pi \times 6370 \cos 45°$ 公里

$= 11006$ 公里

(b) $\because$ 1海里 = 1.853公里

$\therefore$ P与Q两地的距离 $= \dfrac{11006}{1.853}$ 海里

= 5940海里

习题 4c

1. 一船自港口P (48° N, 12° W) 启航，向西航行1000公里到另一港口Q，求Q的经度与纬度。
2. 甲城与乙城在同一条纬线 (5° 23′ N) 上，它们的经度分别为东经100° 15′和东经103° 8′，试求它们沿纬圈的距离 (以公里表示)。
3. 试求南纬35° 30′的纬圈的周长。
4. 一地A在巴黎 (48° 52′ N, 2° 18′ E) 东面2200公里。求A地的经纬度。
5. 试求纬圈 (60° N) 的半径 (以公里表示)。
6. 一船从一港口P (20° E) 沿着北纬42°的纬圈航行了600海里，试求其目的地的经纬度。
7. 地球自转一周的时间是24小时。若依地球自转，试求吉隆坡 (3° 10′ N, 101° 40′E) 的转速 (以每小时公里表示)。
8. 一架飞机从一地X (40° N, 75° W) 起飞，若它向东行9265公里后抵达Y地，试求Y地的经纬度。
9. 两地在同一纬圈 (60° S) 上，且它们的经度相差160，问该两地相距多少海里?
10. 一架飞机从柏林 (52° 30′ N, 13° 20′ E) 向西飞行1853公里至某地P。求P地的经纬度。

4.6 同纬度上两地间的最短航线

若两地P、Q在同一纬线上，我们可以知道，P、Q在同一纬线上的距离由于是小圆之弧PQ的长度，因此它不是地球表面上最短的距离。最短的距离是过P、Q两点的大圆之弧PQ的长度。

设P与Q是同一纬线上的两个地方，它们的经度差是 α，它们所在纬度为 β (图4-11)。

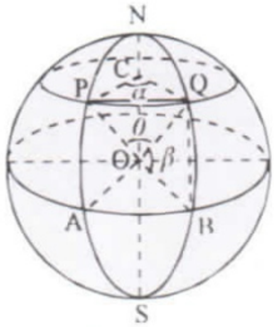


图 4 – 11

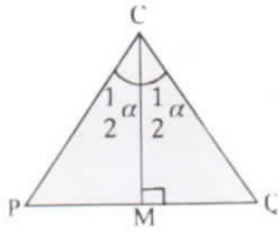


图 4 – 12

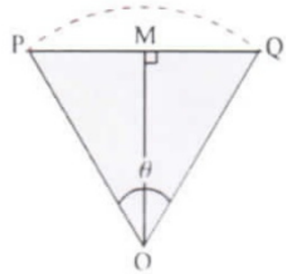


图 4 – 13

设 M 为弦 PQ 的中点（图 4 – 12），因△CPQ 为等腰三角形，所以 CM 平分∠PCQ 与底 PQ。

在直角△CMQ 中
$$QM = CQ\sin\frac{1}{2}\alpha$$
$$= R\cos\beta\sin\frac{1}{2}\alpha$$

因△OPQ 也是一等腰三角形，故 OM 平分∠POQ 且与 PQ 垂直（图 4 – 13）。设 ∠POQ = θ，

在△OMQ 中，$\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{QM}{R}$
$$= \frac{R\cos\beta\sin\frac{1}{2}\alpha}{R}$$
$$= \cos\beta\sin\frac{1}{2}\alpha$$

则　P 与 Q 间的最短距离 $= \frac{\theta}{360}\times 2\pi R$

其中，$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta \qquad (0 < \frac{\theta}{2} \leqslant \frac{\pi}{2})$。

例 10　一艘考察船从 A（60° S，0° E）欲到 B（60° S，120° E），求：

（a）A 与 B 沿着纬线的距离（以 km 表示）。

（b）A 与 B 的最短航线。

解　（a）两地的经度差 α = 120°

$$\therefore \text{ A 与 B 沿纬线的距离} = \frac{120}{360}\times 2\pi R\cos 60^\circ$$
$$= 6670.65 \text{ km}$$

(b) 两地的经度差 $\alpha = 120°$

两地所在的纬度 $\beta = 60°$

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta$$
$$= \sin 60° \cos 60°$$
$$= 0.8660 \times 0.5$$
$$= 0.4330$$
$$\therefore \quad \theta = 51.32°$$

$\therefore$ A 与 P 的最短航线 $= \dfrac{51.32°}{360°} \times 2\pi R$ $\qquad (R = 6370)$

$= 5705.63\,\text{km}$

习题 4d

1. 甲城与乙城在同一纬线（5° 23′ N）上，它们的经度分别为东经 100° 15′和东经 103° 8′，求甲乙两间最短航线的距离。
2. 两地同一纬圈（60° S）上，且它们的经度差 160°，问该两地间的最短航线有多少公里？多少海里？
3. 一船自港口 P（48° N，12° W）启航，欲去西面 1000 公里处的另一港口 Q，问两港口间最短航线的距离是多少公里？
4. 一架飞机从一地 X（40° N，75° W）起飞，飞往 X 正东 9265 公里处的 Y 地，试求两地间最短航线的距离。
5. 一架飞机从柏林（52° 30′ N，13° 20′ E）起飞，飞往柏林西面 1853 公里的某地 P，求最短航线的距离。

总复习题 4

1. 在北纬 60° 的纬圈上的两地相距 1000 公里，试求它们的时差。
2. P 与 Q 同在北纬 60°，且相距 500 海里。P 的地方时是下午一时正，若 Q 在 P 的正西，试求 Q 的地方时。
3. 东京与阿得雷德（Adelaide）约在同一经线上，即东经 139°；东京的纬度为北纬 35° 40′，而阿得雷德的纬度为南纬 34° 55′，试求这两个城市沿着经度子午线的距离：(a) 以公里为单位；(b) 以海里为单位。

4. 从巴拿马 (9° N, 79° 20′ W) 至多伦多 (43° 40 N′, 79° 20′ W) 的距离有多少海里?

5. 一飞机自其基地 P (15° N, 30° E) 向南飞行了 2000 海里而达到 B 地，求 B 的经纬度。另一飞机飞离同一基地 P，向东飞行了 3000 海里而到达 C 地，求 C 的经纬度。

6. 一地 A 在赤道北面 1000 海里，且在格林威治子午线东面 600 海里，试求 A 的经纬度。

7. 一飞机沿赤道从 A (42° E) 飞行到 B (20° E) 然后再向北飞至 C (30° N)。试求此飞机的飞行距离。

8. X 与 Y 两地在北纬 20° 的纬圈上，它们的经度分别为东经 45°与东经 80°。试求 X、Y 两地沿着纬线的距离 (以公里表示)。

9. 两市镇之位置为 A (20° N, 5° E) 与 B (20° N, 45° E)。试求 A、B 沿着纬圈的距离 (以公里表示)。

10. 若一地 A 依地球自转的速度恰为槟城 (5° 23′ N) 依地球自转的速度之半。试求 A 地的纬度。

11. 两地 X、Y 是在北纬 45° 的纬圈上，且它们之经度相差 20°。试求 X、Y 两地沿纬圈的距离。

12. 一架飞机离 A 城 (50° N, 10° E) 向东飞行到另一城市 B (45° E)。
    (a) 求该飞机航程 (以公里表示);
    (b) 若该飞机的飞行速度为每小时 500 公里，求它飞行所需的时间;
    (c) 若该飞机沿最短航线飞行，求其航程 (以公里表示)。

13. P 与 Q 为地球表面上的两个地方，已知 P 与 Q 同在北纬 4° 55′的纬圈上，P 的经度为东经 100° 42′而 Q 的经度为东经 114° 58′。试求
    (a) P 与 Q 沿着纬圈的距离 (以 km 表示);
    (b) P 与 Q 的直线距离 (以 km 表示);
    (c) P 与 Q 沿着大圆的距离 (以 km 表示)。

14. 两艘船 A 与 B，同在南纬 33° 55′的纬圈上，已知船 A 的经度为东经 151° 10′，而船 B 的经度为东经 170°，试求
    (a) A 与 B 沿着纬圈的距离 (以 km 表示),
    (b) A 与 B 沿着大圆的距离 (以 km 表示)。

5 圆

5.1 轨迹方程式

我们知道：适合于某种条件的点的集合叫做适合于这种条件的**点的轨迹**（locus of point）。

在坐标平面内，由于一个点可以用它的坐标（x，y）表示，因此，点所适合的条件，可以用含 x，y 的一个方程式来表示。例如，直线都可以看作适合于某种条件的点的轨迹，在高一第 13 章里我们学过，在坐标平面内，它们都可以用含 x、y 的一个一次方程式（直线方程式）来表示。

如果根据曲线上的点所要适合的条件，列出点的坐标 x 和 y 之间的一个方程式，并且这个方程式与曲线之间有下面的关系：

(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程式的解；

(2) 以这个方程式的解为坐标的点都在这条曲线上，

那么，这个方程式就叫做这条**曲线的方程式**（equation of a curve），这条曲线叫做这个方程式的曲线。

例 1 下列各点是不是在方程式 $2x^2-3y^2=5$ 的曲线上：

(a) $P(2, 1)$　　(b) $Q(-3, 0)$

解 (a) $\because$ $2(2)^2-3(1)^2=5$

$\therefore$ P 点在方程式 $2x^2-3y^2=5$ 的曲线上。

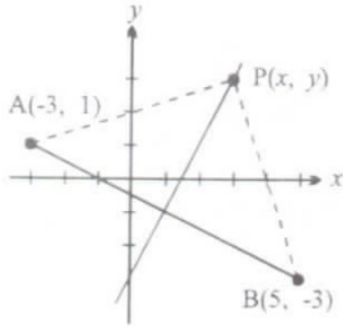
(b) $\because$ $2(-3)^2-3(0)^2=18 \neq 5$

$\therefore$ Q 点不在方程式 $2x^2-3y^2=5$ 的曲线上。

例 2 平面上有两点 A$(-3, 1)$，B$(5, -3)$。求与 A，B 两点等距离的点的轨迹的方程式。

解 设 $P(x, y)$ 为轨迹上的任意一点，则

$$PA = PB$$



根据两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y+3)^2}$$

两边平方，得

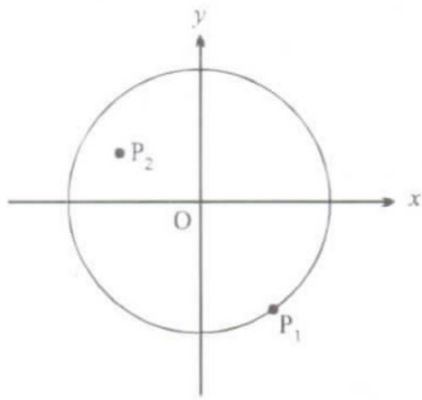
$$(x+3)^2+(y-1)^2 = (x-5)^2+(y+3)^2$$

化简后，得

$$2x-y-3=0$$

例 3 证明以坐标原点为圆心，半径等于 5 的圆的方程式是 $x^2+y^2=25$，并判断 $P_1(3, -4)$，$P_2(-2\sqrt{5}, 2)$ 是否在这个圆上。

证 设 $P(x, y)$ 是圆上任意一点。



因为点 P 到坐标原点的距离等于 5，

$$\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2} = 5$$

$$x^2+y^2 = 25$$

把 $P_1(3, -4)$ 的坐标代入方程式

$x^2+y^2=25$，

得 $3^2+(-4)^2=25$

$\therefore$ 点 P_1 在这个圆上。

把点 $P_2(-2\sqrt{5}, 2)$ 的坐标代入方程式 $x^2+y^2=25$，

得 $(-2\sqrt{5})^2+2^2=24$

$$\neq 25$$

$\therefore$ 点 P_2 不在这个圆上。

例 4 已知点 $O(0, 0)$ 和 $A(2, 1)$，若 $OP^2-AP^2=1$，求点 P 的轨迹方程式。

解 设点 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点。点 P 所要适合的条件为

$$OP^2-AP^2 = 1$$

即 $$x^2+y^2-(x-2)^2-(y-1)^2 = 1$$

化简得 $$2x+y-3 = 0$$

习题 5a

1. 点 A(1, -2), B(2, -3), C(3, 10) 是否在方程式 $x^2-xy+2y+1=0$ 的曲线上？

2. (a) 在什么情况下，方程式 $y=ax^2+bx+c$ 的曲线经过原点？

   (b) 在什么情况下，方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的曲线经过原点？

3. 已知方程式 $3x+4y-10+\lambda(4x-6y+7)=0$ 的曲线经过点 (4, -7)，求 λ 的值。

4. 在方程式 $y=6x^2$ 的曲线上，横坐标是 2 的点，它的纵坐标是多少？纵坐标是 $\frac{3}{2}$ 的点，它的横坐标是多少？

5. 已知点 P 到 x 轴的距离等于它与点 F(0, 4) 的距离，求点 P 的轨迹方程式。

6. 已知点 P 与点 A(4, 0) 和点 B(-4, 0) 的距离的平方和为 42，求点 P 的轨迹方程式。

7. 已知点 O(0, 0) 和 A(c, 0)，且 $OP^2-AP^2=c^2$，求点 P 的轨迹方程式。

8. 求到定点 O 的距离等于 2 的点的轨迹程式。

9. 一动点到点 (3, 2) 的距离等于到点 (1, 3) 的距离的两倍，求这动点的轨迹方程式。

10. 一动点 P 与两定点 A(1, 0) 和 B(7, 8) 所成的夹角 $\angle APB$ 恒为直角，求 P 点的轨迹方程式。

5.2 圆的标准方程式

在平面内与一定点等距离的点的轨迹叫做圆 (circle)；此一定点叫做**圆心** (centre of a circle)，此等距离叫做圆的**半径** (radius)。

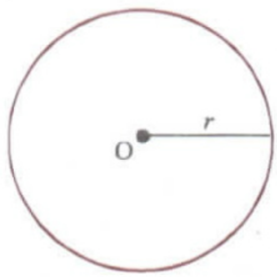


图 5－1

根据圆的定义，我们可以求出圆心是 $C(h,k)$，半径是 r 的圆的方程式（图 5－2）。

设点 $P(x,y)$ 是圆上任意一点，由圆的定义，有

$$PC = r$$

即 $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$

两边平方，得

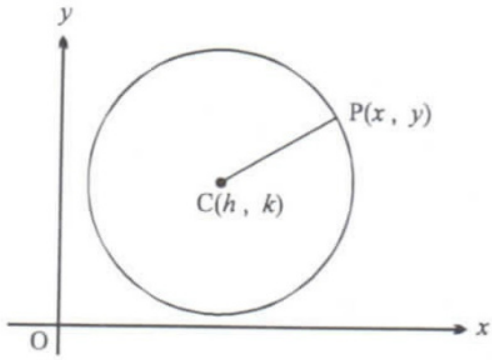


图 5－2

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2 \qquad (r>0)$$

从方程式的推导过程中可知，上述方程式就是圆心是 $C(h,k)$，半径是 r 的圆的方程式。我们把它叫做**圆的标准方程式**（standard equation of a circle）。

如果圆心在坐标原点，这时 $h=0$，$k=0$，那么圆的方程式就是

$$x^2+y^2 = r^2 \quad (r>0)$$

例 5 求圆心为（－1，2），半径为 4 的圆的方程式。

解 所求的圆的方程式为 $(x+1)^2+(y-2)^2 = 4^2$

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4 = 16$$

即 $$x^2+y^2+2x-4y-11 = 0$$

例 6 化 $x^2+y^2-4x+8y=29$ 为圆的标准式，并求其圆心及半径。

解

$$x^2+y^2-4x+8y = 29$$

$$x^2-4x+2^2+y^2+8y+4^2 = 29+2^2+4^2$$

$$(x-2)^2+(y+4)^2 = 7^2$$

这就是该圆的标准方程式，其圆心为（2，－4），半径为 7。

例 7 已知两点 $A(4,9)$ 和 $B(6,3)$，

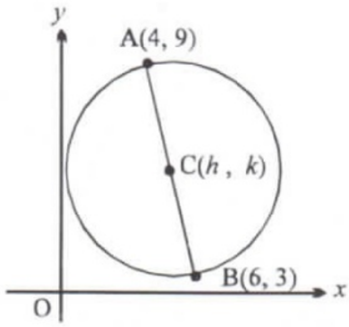
(a) 求以线段 AB 为直径的圆的方程式，

(b) 判断点 $M(6,9)$、$N(3,3)$、$P(5,3)$ 是在圆上，在圆内，还是在圆外。

解 (a) 解法一：

根据已知条件，圆心 $C(h, k)$ 是 AB 的中点，它的坐标为

$$h=\frac{4+6}{2}=5, \quad k=\frac{9+3}{2}=6$$



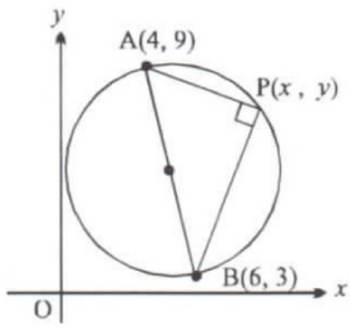
再由两点距离公式，得圆的半径为

$$\begin{aligned} r &= AC \\ &= \sqrt{(4-5)^2+(9-6)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

所求圆的方程式是 $(x-5)^2+(y-6)^2=10$

即 $x^2+y^2-10x-12y+51=0$

解法二：



设 $P(x, y)$ 为圆上的一点，

则 $\angle APB=90°$，

$$\therefore \quad m_{AP}\times m_{BP}=-1$$

$$\frac{y-9}{x-4}\times\frac{y-3}{x-6}=-1$$

$$y^2-12y+27=-x^2+10x-24$$

即所求圆的方程式为

$$x^2+y^2-10x-12y+51=0$$

(b) 分别计算点 $M(6, 9)$、$N(3, 3)$、$P(5, 3)$ 与圆心 $C(5, 6)$ 的距离，得

$$CM=\sqrt{(6-5)^2+(9-6)^2}=\sqrt{10}$$

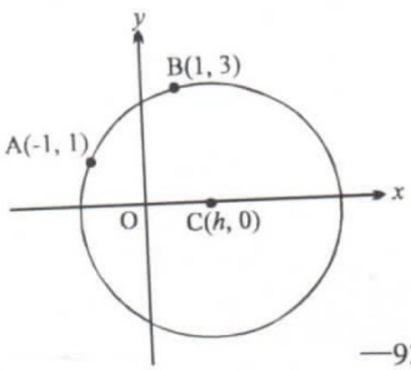
$$CN=\sqrt{(3-5)^2+(3-6)^2}=\sqrt{13}>\sqrt{10}$$

$$CR=\sqrt{(5-5)^2+(3-6)^2}=3<\sqrt{10}$$

因此，点 M 在圆上，点 N 在圆外，点 Q 在圆内。

例 8 求经过 $A(-1, 1)$、$B(1, 3)$ 两点，圆心在 x 轴上的圆的方程式。

解 设圆心 C 的坐标为 $(h, 0)$，



则 $AC=BC$

即 $(h+1)^2+1^2=(h-1)^2+3^2$

解这个方程式，得

$$h=2$$

半径 $r = AC$

$$= \sqrt{(2+1)^2+1}$$

$$= \sqrt{10}$$

所求圆的圆心的坐标为 (2, 0)，半径为 $\sqrt{10}$，它的方程式是

$$(x-2)^2+y^2 = 10$$

即 $x^2+y^2-4x-6 = 0$

例 9 求与圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 同心，并且与直线 $6x+8y-15=0$ 相切的圆的方程式。

解 因为所求圆与已知圆同心，所以它的圆心坐标是 (3, 4)；

又因为它与直线 $6x+8y-15=0$ 相切，所以它的半径 r 等于圆心 (3, 4) 到直线 $6x+8y-15=0$ 的距离，

即
$$r = \frac{|3\times 6+4\times 8-15|}{\sqrt{6^2+8^2}}$$

$$= \frac{7}{2}$$

所求圆的方程式为 $(x-3)^2+(y-4)^2 = \frac{49}{4}$

即 $4x^2+4y^2-24x-32y+51 = 0$

习题 5b

1. 写出下列各圆的方程式：

   (a) 圆心是原点，半径是 $\frac{5}{3}$；

   (b) 圆心是 (3, −2)，半径是 6；

   (c) 经过点 P(5, 1)，圆心是 (8, −3)；

   (d) 圆心是 $(a, -b)$，半径是 $a+b$ 。

2. 一个圆经过点 P(12, 0)，且与 y 轴相切于原点。求这个圆的方程式，并判断点 A(6, −6)、B(5, −5)、C(2.5, 5) 是在圆内，圆外，还是在圆上。

3. 求以 (−3, 4) 和 (−9, 2) 为直径两个端点的圆的方程式。

4. 求以 P(2, −5) 和 Q(8, −1) 为直径两个端点的圆的方程式。如果 PR 是该圆的弦，且其斜率是 1，求 PR 的长。

5. 求经过 A(5, 2)、B(−3, 0) 两点，圆心在 y 轴上的圆的方程式。
6. 求经过点 C(1, 4)、D(0, −3) 两点，圆心在直线 $x-2y=4$ 的圆方程式。
7. 求以 A(−5, 4) 为圆心，且与 x 轴相切的圆的方程式。
8. 求经过点 (3, 0)，且与直线 $2x-3y-24=0$ 相切的于点 (3, −6) 的圆的方程式。
9. 一圆的半径是 10，它与直线 $4x+3y-70=0$ 相切于点 (10, 10)，求这个圆的方程式。
10. 等腰三角形的顶点 A 的坐标是 (4, 2)，底边的一个端点 B 的坐标是 (3, 5)，求另一个端点 C 的轨迹方程式，并说明点 C 的轨迹是什么。

5.3 圆的一般方程式

把圆的标准方程式 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 展开，

得 $$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

令 $-2h=2g$，$-2k=2f$，$h^2+k^2-r^2=c$

得 $$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

可见任何一个圆的方程式都可以写成一个形如方程式 (1) 的二元二次方程式。

反过来，将方程式 (1) 左边配方，得

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

当 $g^2+f^2-c>0$ 时，比较方程式 (2) 和圆的标准方程式，可以看出，方程式 (1) 表示圆心坐标为 $(-g, -f)$，半径为 $\sqrt{g^2+f^2-c}$ 的圆；

当 $g^2+f^2-c=0$ 时，方程式 (2) 只有一组实数解，$x=-g$，$y=-f$，所以方程式 (1) 表示一个点 $(-g, -f)$；

当 $g^2+f^2-c<0$ 时，方程式 (2) 没有实数解，它的图形不存在。

从上面的讨论可知，

> 当 $g^2+f^2-c>0$ 时，方程式
> $$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$
> 是一圆，其圆心坐标为 $(-g, -f)$，半径为 $\sqrt{g^2+f^2-c}$。

我们把这个方程式叫做**圆的一般方程式** (general equation of a circle)。

圆的一般方程式具有下列的特点：

(1) 它是一个二元二次方程式；

(2) x^2 和 y^2 项的系数相同，且不等于零·

(3) 没有 xy 项。

例 10 求圆 $2x^2+2y^2+3x-4y=0$ 的圆心与半径。

解 $2x^2+2y^2+3x-4y = 0$

$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-2y = 0$

$\therefore\quad 2g=\frac{3}{2}，2f=-2，c=0$

即 $g=\frac{3}{4}，f=-1，c=0$

$\therefore$ 此圆的圆心是 $\left(-\frac{3}{4}，1\right)$

又，半径 $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$=\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+1^2-0}$

$=\frac{5}{4}$

例 11 求经过 A(6, 0)，B(2, 6)，C(-2, -2) 三点的圆的方程式。

解 设所求的圆的方程式为 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

因为点 A，B，C 都在该圆上，所以它的坐标都满足这个方程式，于是有

$$\begin{cases}12g+c=-36\\4g+12f+c=-40\\4g+4f-c=8\end{cases}$$

解这个联立方程组，得

$$f=-\frac{9}{7}，g=-\frac{10}{7}，c=-\frac{132}{7}$$

所以所求圆的方程式为

$$x^2+y^2-\frac{20}{7}x-\frac{18}{7}y-\frac{132}{7} = 0$$

即
$$7x^2+7y^2-20x-18y-132 = 0$$

例 12 已知圆的方程式为 $x^2+y^2-4ax-2ay-3a^2=0$，点 C 为圆心，圆与 y 轴的两个交点为 A、B。

求证：$AC \perp BC$。

证一 令方程式 $x^2+y^2-4ax-2ay-3a^2=0$ 中的 $x=0$，

得 $y^2-2ay-3a^2=0$

解这个方程式，得

$y=3a$，$y=-a$

即点 A、B 的坐标分别为 $(0,\ 3a)$，$(0,\ -a)$。

由已知圆的一般方程式可知，圆心 C 的坐标为 $(2a,\ a)$，

$$\therefore\quad m_{AC}=\frac{3a-a}{0-2a}=-1$$

$$m_{BC}=\frac{a+a}{2a-0}=1$$

$$\because\quad m_{BC}\cdot m_{AC}=-1$$

$$\therefore\quad AC\perp BC$$

证二 同证一求得 A、B 的坐标后，计算 AB 的值，得

$$AB=|3a-(-a)|$$

$$=4a$$

$$AB^2=16a^2$$

由圆的方程式可知圆的半径为 $\sqrt{4a^2+a^2+3a^2}=2\sqrt{2}\,a$，即

$$CA=CB=2\sqrt{2}\,a$$

$$CA^2+CB^2=16a^2$$

$$=AB^2$$

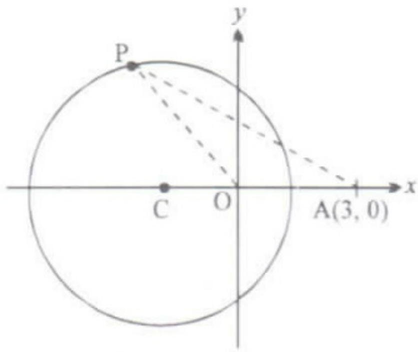
$$\therefore\quad \angle ACB=90^\circ$$

即 $AC\perp BC$

例 13 已知一曲线是与两个定点 O(0, 0)，A(3, 0) 距离的比为 $\frac{1}{2}$ 的点的轨迹，求这条曲线的方程式，并画出图形。

解　设曲线上任意一点 P 的坐标为 (x, y)。

点 P 所适合的条件为 $\dfrac{PO}{PA} = \dfrac{1}{2}$



即
$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{x^2+y^2}{(x-3)^2+y^2} = \frac{1}{4}$$

化简得
$$x^2+y^2+2x-3 = 0$$

此方程式表示的曲线是圆，由方程式可求出圆心的坐标为 $(-1, 0)$，半径 $r = \sqrt{1^2+3} = 2$，它的图形如上图所示。

习题 5c

1. 求下列各圆的圆心和半径：
   (a) $x^2+y^2=32$
   (b) $x^2+y^2-6x=0$
   (c) $9x^2+9y^2+2x-6y-6=0$
   (d) $x^2+y^2+6x-8y+21=0$
   (e) $x^2+y^2+2by=0$
2. 求通过下列各组三点的圆的方程式：
   (a) $(0, 0)$，$(8, -6)$，$(-8, 0)$
   (b) $(0, 0)$，$(0, a)$，$(b, 0)$
   (c) $(-1, 3)$，$(2, -4)$，$(6, -5)$
   (d) $(2, 2)$，$(3, -1)$，$(5, 3)$
3. 一圆经过点 A$(2, 2)$，B$(5, 3)$，并且经过直线 $x+y=4$ 与 y 轴的交点，求这个圆的方程式。
4. 一个圆通过坐标原点，并且在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a、b，求这个圆的方程式。
5. 求圆心在直线 $x-2y=4$ 上并过点 $(1, 4)$ 和 $(0, -3)$ 的圆的方程式。
6. 一圆通过点 $(1, 1)$ 和 $(1, -1)$，并且与直线 $x-2=0$ 相切，求此圆的方程式。
7. 设三角形三边的方程式分别是 $x-6=0$，$x+2y=0$ 和 $x-2y-8=0$，求这个三角形外接圆的方程式。

8. 试证下列各轨迹为圆，并求各圆的圆心及半径：

(a) 一动点到定点 (0, 3) 和 (0, −3) 的距离的平方和等于 68；

(b) 一动点到定点 (5, 4) 和 (−2, 1) 的距离的平方比为 2∶3。

9. 一条线段 $|AB| = 2a$，它的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，求 AB 中点 P 的轨迹。

5.4 圆的切线

直线与圆有且只有一个公共点时，叫做直线与圆相切，这条直线叫做**圆的切线** (tangent)，这个公共点叫做**切点** (point of contact)。也可以这么说，当且仅当一圆的圆心至直线的距离等于圆的半径时，此圆与直线相切。

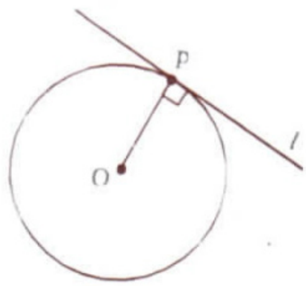


图 5－3

例 14 证明直线 $3x + 4y + 16 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$ 相切。

解一 圆 $x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$ 的圆心为 (0, 1)

半径为 $\sqrt{0^2 + 1^2 - (-15)} = 4$

$$\text{圆心至直线的距离} = \left|\frac{3(0) + 4(1) + 16}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right|$$

$$= 4$$

$$= \text{半径}$$

∴ 直线 $3x + 4y + 16 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$ 相切。

解二

$$x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3x + 4y + 16 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)，
$$x = \frac{-4y - 16}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)代入(1)，得 $\left(\frac{-4y - 16}{3}\right)^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$

解得 $y = -\frac{11}{5}$

$$x = \frac{36}{15}$$

直线与圆只有一个交点，所以直线与圆相切。

● 过圆上一点的圆的切线

我们可以求得过圆 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程式。

由圆的方程式可知，圆心 C 的坐标为 $(-g, -f)$，于是

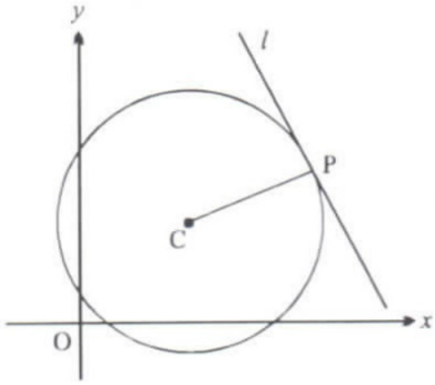


图 5－4

$$m_{CP}=\frac{y_1+f}{x_1+g}\quad(x_1\neq -g)$$

$\because$ $CP\perp l$

$\therefore$ 切线 l 的斜率 $m=-\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$ $(y_1\neq -f)$

$\therefore$ 切线的方程式为

$$y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$$

化简方程式，得

$$y_1y-y_1^2+fy-fy_1+x_1x+gx-x_1^2-gx_1=0$$

$$x_1x+y_1y+gx-gx_1+fy-fy_1-(x_1^2+y_1^2)=0$$

$\because$ (x_1, y_1) 是圆 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上的点

$\therefore$ $x_1^2+y_1^2=-2gx_1-2fy_1-c$

代入上述切线方程式，得

$$x_1x+y_1y+gx-gx_1+fy-fy_1+2gx_1+2fy_1+c=0$$

即 $$x_1x+y_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

$\therefore$ 过点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程式可写成

$$x_1x+y_1y+2g\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+2f\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+c=0$$

【注】当 $x_1=-g$ 时，切线方程为 $y=y_1$；

当 $y_1=-f$ 时，切线方程式为 $x=x_1$。

例 15 求与圆 $x^2+y^2=13$ 切于点 $P(-3, 2)$ 的切线方程式。

解 $x_1=-3$，$y_1=2$，代入公式，

得切线方程式为 $-3x+2y=13$

即 $3x-2y+13=0$

例 16 已知直线 l 与圆 $x^2+y^2-2x-2y-3=0$ 相切于 y 轴上的一点，求直线 l 的方程式。

解 因为直线与圆相切于 y 轴上一点，所以可设切点的坐标为 $(0, y_1)$。

将 $(0, y_1)$ 代入圆的方程式，得

$$y_1^2-2y_1-3=0$$

解这个方程式，得

$$y_1=3,\ y_1=-1$$

所以直线与圆相切的切点坐标为 $(0, 3)$、$(0, -1)$，

经过这两点的切线方程式分别为

$$0(x)+3(y)-2\left(\frac{x+0}{2}\right)-2\left(\frac{y+3}{2}\right)-3=0$$

及 $$0(x)-1(y)-2\left(\frac{x+0}{2}\right)-2\left(\frac{y-1}{2}\right)-3=0$$

化简整理得 $x-2y+6=0$

及 $x+2y+2=0$

例 17 已知直线 l 与一圆 $x^2+y^2+2y-12=0$ 相切于点 $(-2, 2)$。试证此直线 l 与另一圆 $x^2+y^2-10x+4y-23=0$ 相切。

证 将 $(-2, 2)$ 代入求切线方程式的公式，得

$$-2x+2y+2\left(\frac{y+2}{2}\right)-12=0$$

化简得 $2x-3y+10=0$

圆 $x^2+y^2-10x+4y-23=0$ 的圆心坐标为 $(5, -2)$，

半径 $r=\sqrt{(-5)^2+2^2+23}$

$=\sqrt{52}$

设圆心 $(5, -2)$ 到直线 $2x-3y+10=0$ 的距离为 d，

则 $d=\dfrac{|10+6+10|}{\sqrt{2^2+3^2}}$

$=2\sqrt{13}$

$=\sqrt{52}=$ 半径

所以直线 $2x-3y+10=0$ 与圆 $x^2+y^2-10x+4y-23=0$ 相切。

习题 5d

1. 试证下列直线与圆相切：

   (a) $3x-y-5=0$，$x^2+y^2-16x+2y+25=0$

   (b) $2x-y-1=0$，$x^2+y^2+2x-4y=0$

   (c) $6x+5y-31=0$，$x^2+y^2+4x-5y-5=0$

   (d) $3x+1=0$，$9x^2+9y^2+3x+6y+1=0$

2. 已知切点坐标和圆的方程式，求切线的方程式：

   (a) $(3,\ -4)$，$x^2+y^2=25$

   (b) $(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$，$9x^2+9y^2=5$

   (c) $(-3,\ 5)$，$(x+2)^2+(y-3)^2=5$

   (d) $(0,\ 0)$，$x^2+y^2+2x-3y=0$

   (e) $(-1,\ 1)$，$x^2+y^2-3x+10y-15=0$

   (f) $(1,\ \frac{1}{3})$，$3x^2+3y^2-6x+8y=0$

3. 已知圆的方程式和切点坐标，求切线的斜率：

   (a) $x^2+y^2=p$，$(-2,\ \sqrt{5})$

   (b) $x^2+y^2-6x+2y=0$，$(2,\ 2)$

4. 已知直线 l 与圆 $x^2+y^2=5$ 相切于点 $(1,\ 2)$，求直线 l 与坐标轴围成的三角形的面积。

5. 已知直线 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相切于 x 轴上一点，并与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 相交于点 P，求点 P 的坐标。

6. 已知圆的方程式为 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$，过点 $(4,\ 2)$ 和点$(\frac{4}{5},\ \frac{18}{5})$ 的两条切线相交于点 P，求点 P 的坐标。

7. 试证：

   (a) 点 A$(-2,\ 3)$、B$(-3,\ 0)$ 都是 $x^2+y^2+8x-4y+15=0$ 上的点；

   (b) 过点 A、B 的两条切线相交于点 C$(-1,\ 1)$；

   (c) $\angle$ACB 为直角。

8. 直线 l 与圆 $x^2+y^2+6x+12y+40=0$ 相切于点 $(-5,\ -5)$，交圆 $x^2+y^2=10$ 于点 P、Q。试证过 P、Q 与圆 $x^2+y^2=10$ 相切的两条直线互相垂直。

9. 如果圆 $x^2+y^2-6x-4y+k=0$ 与 x 轴相切，求 k 的值及切点的坐标。

● 过圆外一点的圆的切线

从圆外一点，可以作圆的两条切线（图 5－5）。

求过圆外一点的圆的切线方程式可以有多种解法，请看下面的例子。

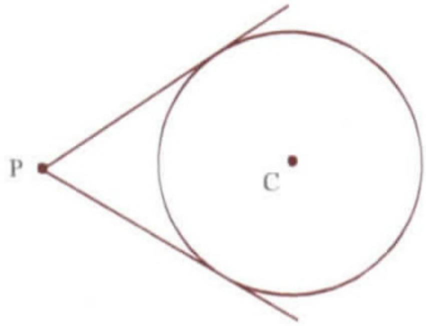


图 5－5

例 18 从圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 外一点 (2，3) 向圆引切线，求切线的方程式。

解一 设切点的坐标为 (x_1, y_1)，则切线方程式为

$$x_1x+y_1y-2\left(\frac{x+x_1}{2}\right)-2\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+1=0$$

整理得 $(x-1)x_1+(y-1)y_1-x-y+1=0$

因为 (2，3) 在切线上，代入上式，得

$$x_1+2y_1-4=0$$

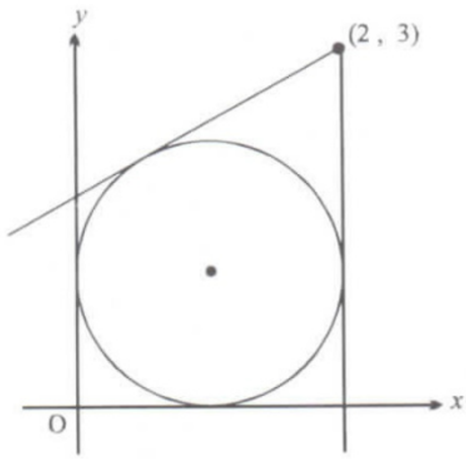
又因为点 (x_1, y_1) 在圆上，所以

$$x_1^2+y_1^2-2x_1-2y_1+1=0$$

解联立方程组

$$\begin{cases} x_1+2y_1-4=0 \\ x_1^2+y_1^2-2x_1-2y_1+1=0 \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{5} \\ y_1=\dfrac{9}{5} \end{cases}$



即过点 (2，3) 的两条切线的切点分别为 (2，1) 和 $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$，

于是两条切线的方程式分别为

$$2x+y-2\left(\frac{x+2}{2}\right)-2\left(\frac{y+1}{2}\right)+1=0$$

及 $$\frac{2}{5}x+\frac{9}{5}y-2\left(\frac{x+\frac{2}{5}}{2}\right)-2\left(\frac{y+\frac{9}{5}}{2}\right)+1=0$$

化简得 $x=2$

及 $3x-4y+6=0$

解二　设切线的斜率为 m，则切线的方程式为

$$y-3=m(x-2)$$

即　$y=m(x-2)+3$

将上式代入圆的方程式，得

$$x^2+[m(x-2)+3]^2-2x-2[m(x-2)+3]+1=0$$

化简得

$$(1+m^2)x^2-(4m^2-4m+2)x+4m^2-8m+4=0$$

因为切线与圆有且只有一个公共点，所以上述方程式有两个相等的实数解，

即　$\Delta=(4m^2-4m+2)^2-4(1+m^2)(4m^2-8m+4)=0$

化简得　$16m-12=0$

解得　$m=\dfrac{3}{4}$

所求切线方程式为　$y-3=\dfrac{3}{4}(x-2)$

即　$3x-4y+6=0$

比较两种解法可以发现，第二种解法丢掉了一个解，即 $x=2$。这是因为用第二种方法求切线方程式时，首先设切线的斜率为 m，然后根据切线的定义确定 m 的值。实际上，切线的斜率有时是不存在的（它与 y 轴平行），因此用这种方法求切线方程式时，一定要注意检查是否丢掉了切线斜率不存在的情况，如果丢掉了，要根据已知点的坐标补上。

在解法二中，经过点（2，3）垂直于 x 轴的直线方程式为 $x=2$，所以在求出圆的一条切线 $3x-4y+6=0$ 后，要再补充 $x=2$ 这一条切线方程式。

解三　圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的圆心为（1，1），

半径 $=\sqrt{1^2+1^2-1}=1$

设所求切线为　$y-3=m(x-2)$

即　$mx-y-2m+3=0$

$\because$　圆心到切线的距离等于圆的半径，

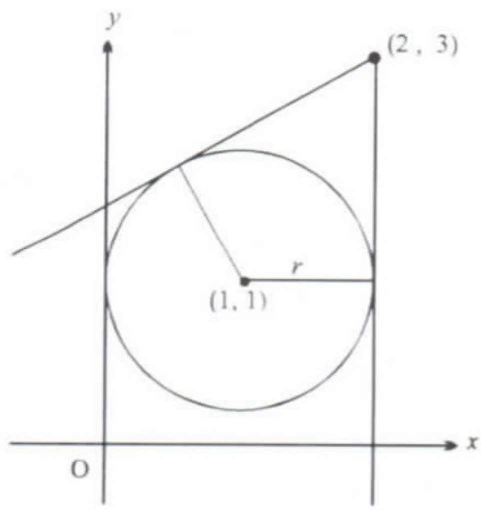
$$\therefore\quad\left|\frac{m(1)-1-2m+3}{\sqrt{m^2+1^2}}\right|=1$$

$$(-m+2)^2=m^2+1$$

$$m^2-4m+4=m^2+1$$

$$-4m=-3$$

$$m=\frac{3}{4}$$



所求切线方程式为

$$\frac{3}{4}x - y - 2(\frac{3}{4}) + 3 = 0$$

$$3x - 4y + 6 = 0$$

另一切线的斜率不存在，因此它与 y 轴平行，由于它经过点（2，3），所以其方程式为 $x = 2$。

例 19 求圆 $x^2 + y^2 = 25$ 外一点（7，1）向圆引两条切线的方程式，并求这两条切线的夹角。

解 圆 $x^2 + y^2 = 25$ 的圆心为（0，0），半径 = 5。

设所求过点（7，1）的切线为 $(y - 1) = m(x - 7)$

即 $mx - y - 7m + 1 = 0$

它至圆心（0，0）的距离等于圆的半径，

$$\therefore \quad \left| \frac{m(0) - (0) - 7m + 1}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \right| = 5$$

$$(-7m + 1)^2 = 25(m^2 + 1)$$

整理得 $$12m^2 - 7m - 12 = 0$$

$$(4m + 3)(3m - 4) = 0$$

$$m = -\frac{3}{4}, \quad m = \frac{4}{3}$$

$\therefore$ 所求切线方程式为 $(-\frac{3}{4})x - y - 7(-\frac{3}{4}) + 1 = 0$

和 $$(\frac{3}{4})x - y - 7(\frac{4}{3}) + 1 = 0$$

即 $$3x + 4y - 25 = 0$$

和 $$4x - 3y - 25 = 0$$

由于两条切线斜率的积为 $-\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = -1$

$\therefore$ 夹角为 90°

● 切距

由初中学过的切线长定理可知，从圆外一点到两切点的距离相等。圆外一点到切点的距离叫做**切距**或**切线长**（length of a tangent）。

如图 5－6，点 P 为圆 C 外一点，PA，PB 切圆 C 于点 A、B，PA、PB 就是从点 P 到圆 C 的切距，PA＝PB。

根据圆的方程式和切点的坐标，可以求出切距。

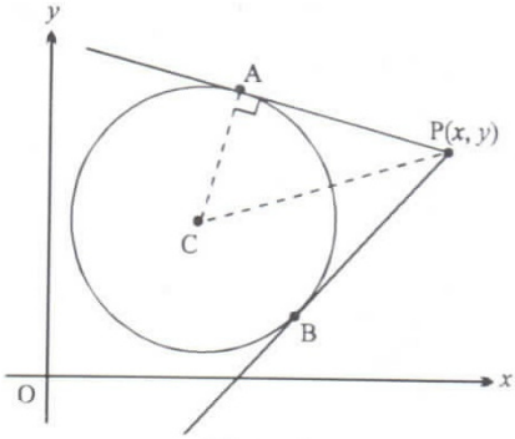


图 5－6

设已知圆的方程式为 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$，圆外一点 P 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$。

连结 PC、CA，$\angle CAD=90°$

圆心 C 的坐标为 $(-g,\ -f)$

$\therefore\ CA=\sqrt{g^2+f^2-c}$，$PC=\sqrt{(x_1+g)^2+(y_1+f)^2}$

由毕氏定理，有

$$\begin{aligned}PA^2&=PC^2-CA^2\\&=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2-g^2-f^2+c\\&=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad PA=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$$

例 20 求从圆 $2x^2+2y^2-10x-11y+52=0$ 外一点 P(3，2) 到该圆的切距。

解 $2x^2+2y^2-10x-11y+52=0$

即 $x^2+y^2-5x-\frac{11}{2}y+26=0$

$$切距=\sqrt{3^2+2^2-5\times3-\frac{11}{2}\times2+26}$$

$$=\sqrt{13}$$

习题 5e

1. 已知圆的方程式和圆外一点的坐标，求切线方程式：

   (a) $x^2+y^2=16$，(3，4)

   (b) $x^2+y^2=5$，$(0,\ \sqrt{10})$

   (c) $x^2+y^2=25$，(-5，-10)

   (d) $x^2+y^2+2x-19=0$，(1，6)

   (e) $x^2+y^2-2x+6y+9=0$，(2，4)

   (f) $x^2+y^2-2ax+4ay+4a^2=0$，(0，0)

2. 已知圆的方程式为 $x^2+y^2=1$，它的切线在 y 轴上的截距为 2，求切线的方程式。

3. 求经过直线 l_1：$3x-y+1=0$ 和 l_2：$x+3y-1=0$ 的交点，且与圆 $x^2+y^2=\dfrac{4}{25}$ 相切的直线方程式。

4. 由坐标原点作圆 $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ 的两条切线，设它们的夹角为 θ，求 $\tan\theta$ 的值。

5. 已知点的坐标和圆的方程式，求从点到圆的切距：

   (a) (8，3)，$x^2+y^2-8=0$

   (b) (-2，3)，$x^2+y^2-6x-2y=0$

   (c) (2，2)，$2x^2+2y^2+2x+4y-3=0$

   (d) (-6，0)，$x^2+y^2-6x+2y+8=0$

6. 从直线 $x+y=1$ 上一点 P 作圆 $x^2+y^2+10x+4y-2=0$ 的切线，其切距为 3，求点 P 的坐标。

7. 从点 $P(x,\ y)$ 到圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 的切距为 $2\sqrt{5}$，求点 P 的轨迹方程式。

8. 动点 P 到圆 $x^2+y^2=25$ 及圆 $x^2+y^2-24x+14y+168=0$ 的切距相等，求点 P 的轨迹方程式，并证明点 P 的轨迹是连结两圆圆心线段的垂直平分线。

9. 下列直线与圆相切，求 k 的值：

   (a) $x+3y+k=0$，$2x^2+2y^2+12y+13=0$；

   (b) $4x+3y-k=0$，$x^2+y^2-6x+4y-12=0$。

10. 由圆 $x^2+y^2=25$ 外一点 P(-5，-10)，向圆引两条切线，切点分别为 A、B。求直线 AB 的方程式，及弦 AB 的长。

● 已知斜率的圆的切线

前面学过经过已知圆上或圆外一点的切线方程式。已知一个圆的方程式和它的切线的斜率，也可以求得切线的方程式。

例 21 已知圆 $x^2+y^2-6x+10y+29=0$ 的切线的斜率为 -2，求切线的方程式。

解一 设切线方程式在 y 轴上的截距为 c，则切线方程式为

$$y = -2x+c$$

将切线方程式代入圆方程式，得

$$x^2+(-2x+c)^2-6x+10(-2x+c)+29 = 0$$

化简整理，得 $5x^2-(4c+26)x+c^2+10c+29 = 0$

$\because$ 直线与圆相切

$\therefore$ $\Delta = (4c+26)^2-20(c^2+10c+29) = 0$

化简得 $c^2-2c-24 = 0$

解得 $c=6$，$c=-4$

所求切线的方程式为 $y=-2x+6$，$y=-2x-4$

即 $2x+y-6 = 0$，$2x+y+4 = 0$

解二 圆 $x^2+y^2-6x+10y+29=0$ 的圆心为 $(3,\ -5)$，

$$\text{半径} = \sqrt{9+25-29} = \sqrt{5}$$

设所求切线方程式为 $y = -2x+c$

即 $2x+y-c = 0$

它与圆心 $(3,\ -5)$ 的距离 = 圆的半径

$$\therefore \left|\frac{2(3)+(-5)-c}{\sqrt{2^2+1^2}}\right| = \sqrt{5}$$

$$\left|\frac{1-c}{\sqrt{5}}\right| = \sqrt{5}$$

$$|1-c| = 5$$

$$1-c = \pm 5$$

$$c = -4 \text{ 或 } 6$$

$\therefore$ 所求切线方程式为

$$2x+y+4 = 0,\ 2x+y-6 = 0$$

习题 5f

1. 已知圆的方程式和切线的斜率，求切线的方程式：

   (a) $x^2+y^2=2$，$m=2$

   (b) $x^2+y^2=25$，$m=-\dfrac{4}{3}$

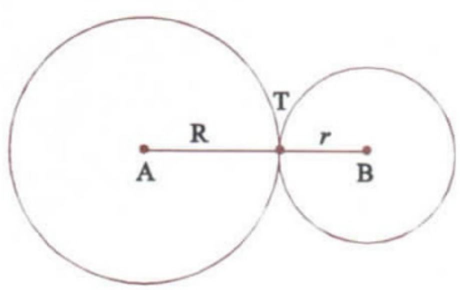
   (c) $x^2+y^2=10$，$m=\sqrt{3}$

2. 已知直线 $y=x+b$ 和圆 $x^2+y^2=4$。问：当 b 为何值时，直线与圆相切？
3. 求与直线 $4x+3y+9=0$ 垂直，且与 $x^2+y^2=16$ 相切的直线的方程式。
4. 求平行于 $2x-y+2=0$，且与圆 $x^2+y^2+6x-2y-6=0$ 相切的直线的方程式。
5. 已知 P(6, 9) 是圆 $x^2+y^2-2y-24=0$ 外一点，连结圆心与点 P 的线段交圆于点 Q。求过点 Q 的切线方程式。
6. 已知圆 $x^2+y^2-2x-4y+a=0$ 和直线 $2x+y-1=0$，问：当 a 为何值时，直线与圆相交、相切？
7. 已知圆 $x^2+y^2=9$ 的切线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，求切点的坐标。

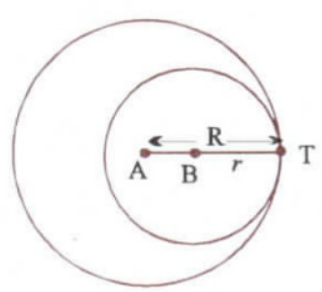
5.5 两圆相切、正交

● 两圆相切的两种情况

两个圆有且只有一个公共点叫做两圆相切，这个公共点叫做切点，如图 5-7，圆 A 与圆 B 相切，切点为 T。



(a)



(b)

图 5-7

两圆相切时，除切点外，一圆上的每个点都在另一个圆的外部（图 5－7a），叫**做两圆外切**；除切点外，一圆上的每个点都在另一个圆的内部（图 5－7b），叫做**两圆内切**。

连结两圆圆心的线段的长叫做两圆的**圆心距**。观察图 5－7 可以发现，两圆外切时，圆心距等于两圆半径之和；两圆内切时，圆心距等于两圆半径之差；反之也成立。即

设圆 A 和圆 B 的半径分别为 R 和 r（$R > r$），

则　　两圆外切 $\Leftrightarrow |AB| = R + r$，

　　　两圆内切 $\Leftrightarrow |AB| = R - r$。

例 22　试证圆 $x^2 + y^2 - x - 6y + 9 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 12x + 6y - 19 = 0$ 相外切。

解　由两圆的方程式可知，两圆圆心坐标分别为 $(2,\ 3)$，$(-6,\ -3)$。

设两圆的半径分别为 R、r，圆心距为 d，则

$$R = \sqrt{4 + 9 - 9} = 2$$

$$r = \sqrt{36 + 9 + 19} = 8$$

$$d = \sqrt{(2 + 6)^2 + (3 + 3)^2} = 10$$

$\because\ d = R + r$

$\therefore$ 两圆外切

例 23　当 a 为何值时，圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + a = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 4 = 0$ 内切，并求出切点的坐标。

解　由圆的方程式可知，两圆圆心的坐标分别为 $(-1,\ 2)$，$(2,\ 6)$，

两圆的半径　$r_1 = \sqrt{1 + 4 - a} = \sqrt{5 - a}$

$r_2 = \sqrt{4 + 36 - 4} = 6$

两圆的圆心距为 $\sqrt{(2 + 1)^2 + (6 - 2)^2} = 5$

若两圆内切，则有 $\left|\sqrt{5 - a} - 6\right| = 5$

即　$\sqrt{5 - a} - 6 = 5$ 或 $\sqrt{5 - a} - 6 = -5$

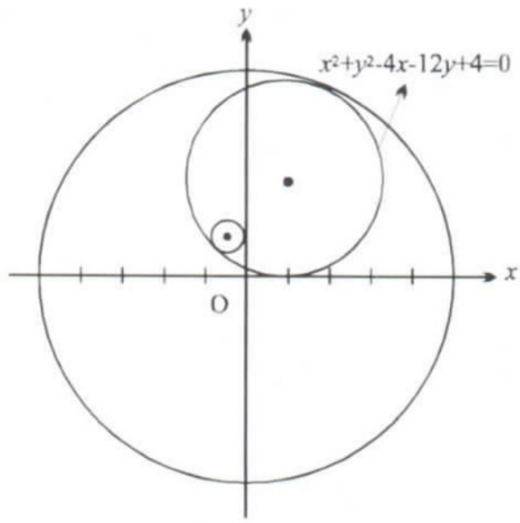
分别解这两个方程式，得

$a = 4$ 或 $a = -116$

将 $a=4$ 和 $a=-116$ 分别代入圆的方程式 $x^2+y^2+2x-4y+a=0$ 中，得

$$x^2+y^2+2x-4y+4=0$$

和 $x^2+y^2+2x-4y-116=0$



解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y+4=0\\x^2+y^2-4x-12y+4=0\end{cases}$$

得 $\begin{cases}x=-\dfrac{8}{5}\\y=\dfrac{6}{5}\end{cases}$

解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y-116=0\\x^2+y^2-4x-12y+4=0\end{cases}$$

得 $\begin{cases}x=\dfrac{28}{5}\\y=\dfrac{54}{5}\end{cases}$

切点的坐标为 $(-\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ 或 $(\frac{28}{5},\frac{54}{5})$。

● 两圆正交

两个圆有两个公共点叫做**两圆相交**。不重合的两圆公共点最多有两个（如图 5－8），这两个公共点叫做**两圆的交点**。

在两圆的交点处，分别作两圆的切线，这两条切线的交角叫做**两圆的交角**（如图 5－8）。

若两圆的交角为直角，则称这**两圆正交**（orthogonal）。

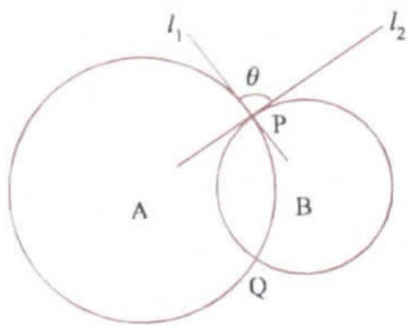


图 5－8

如图 5-9，当两圆 A、B 正交时，在点 P 的两条切线 l_1、l_2 互相垂直。而由于圆 A 在点 P 的切线 l_1 垂直 AP，同样的，圆 B 在点 P 的切线 l_2 垂直于 BP，

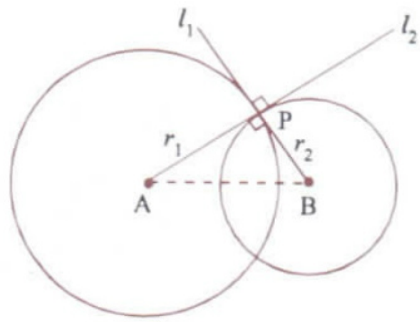


图 5-9

$\therefore$ l_1，l_2 分别通过圆心 B 和 A

$\therefore$ $AP^2+BP^2 = AB^2$

即 $r_1^2+r_2^2 = AB^2$

设圆 A，圆 B 的方程式分别为

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0$$

$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$$

可知圆 A、圆 B 的圆心坐标分别为 $(-g_1, -f_1)$ 和 $(-g_2, -f_2)$，

半径 $r_1=\sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}$，$r_2=\sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}$

$\therefore$ $g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2 = (g_2-g_1)^2+(f_2-f_1)^2$

$g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2 = g_2^2-2g_1g_2+g_1^2+f_2^2-2f_2f_1+f_1^2$

即 $2(g_1g_2+f_1f_2) = c_1+c_2$

所以两圆正交的条件是

$$2(g_1g_2+f_1f_2) = c_1+c_2$$

例 24 求经过原点，并且与圆 $x^2+y^2-8x+2y+6=0$ 和 $x^2+y^2-x+4y-3=0$ 正交的圆的方程式。

解 设所求的方程式为 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$\because$ 圆经过点 (0，0)

$\therefore$ $c=0$

又因为它与两已知圆分别正交，所以

$$\begin{cases} 2[(-4)g+f]=6+0 \\ 2\left[\left(-\frac{1}{2}\right)g+2f\right]=-3+0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} -8g+2f=6 \\ -g+4f=-3 \end{cases}$$

解这个方程组，得 $g=-1$，$f=-1$

所求圆的方程式为 $x^2+y^2-2x-2y=0$

例 25 一圆与两已知圆 $x^2+y^2+6x+10y+12=0$、$x^2+y^2+4x+2y-2=0$ 正交，求此圆圆心的轨迹方程式。

解 设与二已知圆都正交的圆的方程式为 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$，
则它的圆心坐标为 $(-g,\ -f)$
由于此圆与两已知圆正交，所以

$$6g+10f = 12+c$$
$$4g+2f = -2+c$$

两式相减，得 $2g+8f = 14$

即 $g+4f-7 = 0$

用 x 代 $-g$，y 代 $-f$，得所求圆心的轨迹方程式为

$$x+4y-7 = 0$$

习题 5g

1. 判定下列各组的两个圆，哪一组是内切，哪一组是外切？哪一组不相切？
   (a) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$，$x^2+y^2+8x-28y+112=0$
   (b) $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，$x^2+y^2-1=0$
   (c) $x^2+y^2+2x-4y-27=0$，$x^2+y^2-2x-7=0$
2. 已知两圆的圆心坐标分别为 (1, 2)，(6, 14)，它们相外切，求两圆的半径的和。
3. 已知两圆的方程式为 $x^2+y^2=4$ 和 $x^2+y^2-2ax+6y+a^2=0$。问，当 a 为何值时两圆外切？a 为何值时两圆内切？
4. 求经过两圆 $x^2+y^2-1=0$ 和 $x^2+y^2+2x=0$ 的交点，并且经过点 (3, 2) 的圆的方程式。
5. 试证下列各组中两圆正交：
   (a) $x^2+y^2+x-3=0$，$x^2+y^2-4y+3=0$
   (b) $x^2+y^2-2x-2y=0$，$x^2+y^2-8x+2y+6=0$
   (c) $x^2+y^2-x+4y-3=0$，$x^2+y^2-2x-2y=0$
   (d) $x^2+y^2+x+24y+26=0$，$x^2+y^2-4x-2y-52=0$
6. 已知两圆分别为 $x^2+y^2-x+y-2=0$ 与 $4x^2+4y^2+16x-36y+77=0$，求与这两个圆正交，且圆心在直线 $4x+3y+6=0$ 上的圆的方程式。

7. 已知两圆的方程式为 $x^2+y^2-4x-2y-7=0$，$x^2+y^2-2x-2y-3=0$，求与这两圆正交，并且经过点 (1，3) 的圆的方程式。

8. 已知三个圆的方程式分别为

$$x^2+y^2+4x-2y=0,$$
$$x^2+y^2+4x+4y=0,$$
$$x^2+y^2-6y+8=0,$$

求与这三个圆都正交的圆的方程式。

总复习题 5

1. 一动点 P 与定点 (-2，3) 的距离等於 4，求 P 点的轨迹方程式。
2. 一动点与两已知点 (-3，1) 和 (7，5) 的距离相等，求这动点的轨迹方程式。
3. 一动点 P 与两定点 (2，3) 和 (2，-3) 距离的和恒为 8，求 P 点的轨迹方程式。
4. 长为 12 单位的线段其两端常在两轴上移动，求它的中点的轨迹方程式。
5. 过点 A(4，0) 的直线与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于点 B、C，求弦 BC 中点 M 的轨迹方程。
6. 判定下列各点在圆 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 的内部，外部，还是在圆上：

   (a) O(0，0)　　(b) P(1，2)　　(c) Q(1，-2)

7. 直线 $x=2$ 被圆 $(x-a)^2+y^2=4$ 所截得的弦长等于 $2\sqrt{3}$，求 a 的值。
8. 已知圆的方程式为 $x^2+y^2+10x+21=0$，求与圆心的距离等于 1 的弦长。
9. 求与两坐标轴都相切，并且与直线 $3x+4y-4=0$ 相切的圆的方程式。
10. 求以两圆 $x^2+y^2+2x-6y+9=0$ 和 $2x^2+2y^2+3x+y-9=0$ 的圆心为直径端点的圆的方程式。
11. 设三角形的三边所在直线的方程式为 $x-4y=6$，$2x-y+2=0$，$3x+2y-18=0$，求其外接圆的方程式。
12. 设三角形的三边所在直线的方程式为 $3x-4y+16=0$，$4x+3y+8=0$，$x+8=0$，求其内切圆的方程式。
13. 圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点有几个？
14. 求经过圆 $x^2+y^2-2x=0$ 与直线 $x+2y=3$ 的交点，并且圆心在 y 轴上的圆的方程式。
15. 一个圆经过点 (2，1) 及两圆 $x^2+y^2=2x$、$x^2+y^2-6y=0$ 的交点，求这个圆的方程。

16. 已知圆经过点（6，-3）和（8，-3），并且与直线 $2x+y=4$ 相切，求这个圆的方程式。

17. 过点（2，4）向圆 $x^2+y^2-2x+6y+9=0$ 作切线，求切线的方程式。

18. 直线 $y=k(x-3)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，求 k 的值。

19. 从点 A$(-3, 3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射，其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求直线 l 的方程式。

20. 试证过两圆 $x^2+y^2+2x-15=0$，$x^2+y^2-6x+6y+20=0$ 圆心的直线与圆 $x^2+y^2+8x-2y+16=0$ 相切。

21. 一动点 P 到圆 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$ 的切距与该圆的半径相等，求点 P 的轨迹方程式。

22. 试证：从点（3，-4）到圆 $x^2+y^2-10x-7y+13=0$ 的切距等于它到圆 $2x^2+2y^2-3x-12y-17=0$ 的切距。

23. 求平行于直线 $2x+y=3$，且与圆 $x^2+y^2-4x+6y-7=0$ 相切的直线方程式。

24. m 为何值时，两圆 $x^2+y^2-2mx+4y+(m^2-5)=0$ 和 $x^2+y^2+2x-2my+(m^2-3)=0$ 外切、相交、内切。

25. 求与圆 $x^2+y^2-6x+8=0$ 外切，且与 y 轴相切的动圆圆心的轨迹方程式。

26. 试证与圆 $x^2+y^2+8x+4y+2=0$，$x^2+y^2+12x-y=0$，$x^2+y^2+10x+1=0$ 正交的圆，与圆 $x^2+y^2-2x+14y+7=0$ 正交。

6 排列与组合

6.1 乘法原理

我们先看下面的问题：

假如从 A 镇到 C 镇，必须经过 B 镇，而从 A 镇到 B 镇的路有 3 条，从 B 镇到 C 镇的路有 4 条，问从 A 镇到 C 镇，共有多少种不同的走法？

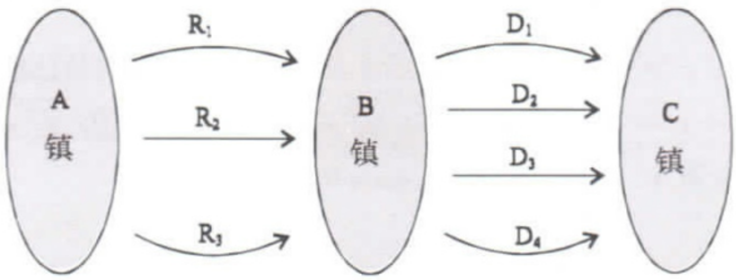


图 6—1

我们不妨把从 A 镇到 B 镇的 3 条路用 R_1、R_2、R_3 来表示，从 B 镇到 C 镇的 4 条路用 D_1、D_2、D_3 、D_4 来表示，如图 6—1 所示，则从 A 镇到 C 镇共有下列 12 种不同的走法：

R_1D_1，R_1D_2，R_1D_3，R_1D_4，

R_2D_1，R_2D_2，R_2D_3，R_2D_4，

R_3D_1，R_2D_2，R_3D_3，R_3D_4。

即每选定一种从 A 镇到 B 镇的走法后，再由 B 镇到 C 镇又都有 4 种不同走法，因此，从 A 镇到 C 镇的走法一共有 $3\times4=12$ 种。

一般地，有如下的乘法原理：

如果完成一件事需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法。

例 1 书架的上层放有 6 本不同的数学书，下层放有 5 本不同的语文书。从中任取数学书与语文书各一本，有多少种不同的取法？

解 从书架上取数学书与语文书各一本，可分成两个步骤：第一步取一本数学书，有 6 种方法，第二步取一本语文书，有 5 种方法。根据乘法原理，得到不同的取法种数是

$$\begin{aligned} N &= m_1 \times m_2 \\ &= 6 \times 5 \\ &= 30 \end{aligned}$$

例 2 假设有五种不同颜色的上衣与四种不同颜色的裙子配搭，问总共有多少种不同的配搭？又，如果有三种不同款式的鞋子配搭上述的衣裙，问一共可配出多少种不同的花样？

解 要使衣裙配搭，可分两个步骤完成：第一步取上衣有 5 种方法，第二步取裙子有 4 种方法 。根据乘法原理，共可配搭出

$$\begin{aligned} N &= m_1 \times m_2 \\ &= 5 \times 4 \\ &= 20\text{种} \end{aligned}$$

要使衣裙鞋配成花样，可分三个步骤完成：第一步取上衣有 5 种方法，第二步取裙子有 4 种方法，第三步取鞋子有 3 种方法。根据乘法原理，共可配出的花样是

$$\begin{aligned} N &= m_1 \times m_2 \times m_3 \\ &= 5 \times 4 \times 3 \\ &= 60\text{种} \end{aligned}$$

例 3 用数字 1，2，3，4，5，6，7，8，9 可组成多少个没有重复数字的三位数？

解 组成没有重复数字的三位数，可分三个步骤完成：第一步，取九个数字中任一数作为千位数，则数字占千位的方法有 9 种；第二步，千位数决定后，剩下八个数字，则数字占百位的方法有 8 种；第三步，剩下的数字只有七个，则数字占个位的方法有 7 种。上述安排可用下列三个连续的方格来表示：

9	8	7

∴ 共可组成没有重复数字的三位数 $9 \times 8 \times 7 = 504$ 个。

例 4 有 5 张椅子排成一行分配给 2 个男孩坐，问有多少种不同的坐法？

解 椅子的坐法可分成两个步骤完成：第一步，第一个男孩可选 5 张椅子中的任一张来坐，所以有 5 种坐法；第二步，第二个男孩剩下 4 张椅子选择，所以有 4 种坐法。

∴ 坐法共有 $5 \times 4 = 20$ 种。

习题 6a

1. 假设从甲市到乙市的巴士路线有 4 条，从乙市到丙市的巴士路线有 5 条，问某人搭巴士从甲市经乙市到丙市共有多少种不同的路线？
2. 如果有不同的书籍七册，甲乙两人各借一册，问有多少种不同的借法？
3. 一名儿童做减法游戏。在一个红口袋中装着 20 张分别标有数 1、2、…、19、20 的红卡片，从中任抽一张，把上面的数作为被减数；在另一个黄口袋中装着 10 张分别标有数 1、2、…、9、10 的黄卡片，从中任抽一张，把上面的数作为减数。这名儿童一共可以列出多少个减法式子？
4. 有六张已编号的椅子分配给四人坐，问一共有多少种不同的配合法？
5. 从数字 2、3、5、7、8、9 中任取 3 个不重复的数字组成三位数，问共有多少个？
6. 在图书馆，一个学生要从 2 本数学参考书，3 本小说，3 本成语故事中各选一本。问共有多少种不同的选法？
7. 一间教室有四个门，甲，乙二人可从任何一个门进入教室，问他们进入教室的方法共有多少种？
8. 某君有 13 件衬衫与 6 件长裤；问他可配出多少种不同的穿法？

6.2 排列及排列数公式

● 排列的概念

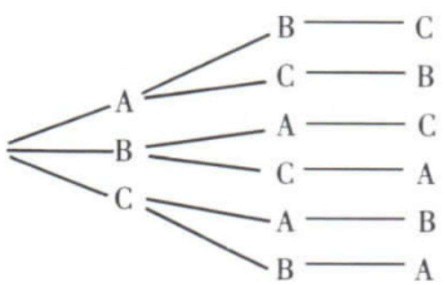
我们看下面的例子。

例 5 A，B，C 三人排成一行，问有多少种不同的排法？

解 完成排列的方法有三个步骤：第一步，取三人中的一个排在第一位，有 3 种方法；第二步，从剩下的两个人中任选一个排在第二位．有 2 种方法；第三步，剩下 1 人排在第三位，有 1 种方法。

$\therefore$ A，B，C 三人排成一行的排法有 $3\times2\times1=6$ 种

也就是说，可以排成如下 6 种方法：



排列
ABC
ACB
BAC
BCA
CAB
CBA

上面的排法叫做“树图”(tree diagram)，其排法是由左到右，每一支脉代表一种排法。

例 6 由数字 1，2，3，4 可以组成多少个没有重复数字的二位数？

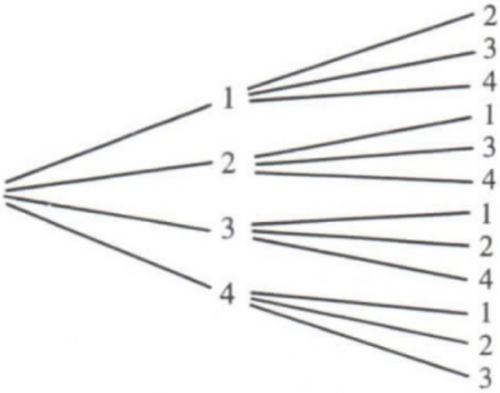
解 组成没有重复数字的二位数，可分两个步骤完成：

第一步，先确定十位上的数字，在 1，2，3，4 四个数字中任取一个，有 4 种方法；第二步，确定个位上的数字，个位上的数字只能从余下的三个数字中任取一个，有 3 种方法。上述安排可用下列二个连续的方格来表示：

4	3

$\therefore$ 可组成的二位数有 $4\times3=12$ 个。

也就是说，可以排成 12 个不同的二位数如下：



排列	
1	2
1	3
1	4
2	1
2	3
2	4
3	1
3	2
3	4
4	1
4	2
4	3

我们把被取的对象（如上面问题中的人、数字）叫做**元素**。

一般地，从 n 个不同元素中，任取 r（$r \leqslant n$）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 r 个元素的一个**排列**（permutation）。当 $r < n$ 时，叫做选排列，当 $r = n$ 时，叫做全排列。

由排列的定义可知，两个排列相同，不仅指它们的元素完全相同，而且指它们的元素的排列顺序也完全相同。

● 排列数公式

从上节例 6 的排法知道：4 个不同元素取出 2 个元素的所有排列的个数是 12，我们把个数 12 叫做从 4 个不同元素中取出 2 个元素的排列数。

从 n 个不同元素中取出 r（$r \leqslant n$）个元素的所有排列的个数，叫做**排列数**（number of permutations），用符号 ${}_nP_r$ 表示。例如，

从 8 个不同元素中取出 5 个元素的排列数表示为 ${}_8P_5$，

从 7 个不同元素中取出 6 个元素的排列数表示为 ${}_7P_6$。

现在我们研究计算排列数的公式。

求排列数 ${}_nP_r$ 可以这样考虑：假定有排好顺序的 r 个空位（图 6—2），从 n 个不同元素 a_1，a_2，…，a_n 中任意取 r 个去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列，所有不同填法的个数就是排列数 ${}_nP_r$。

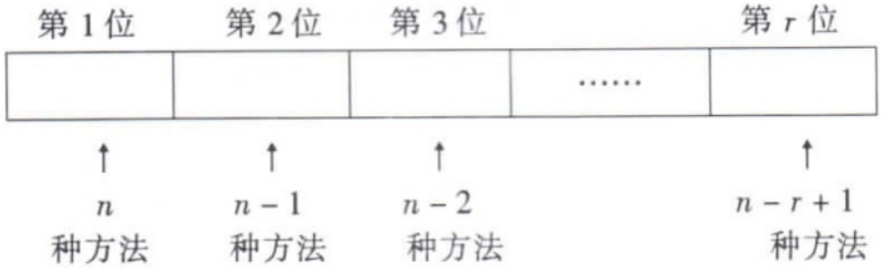


图 6－2

现在我们计算有多少种不同的填法。完成这件事可分为 r 个步聚：

第一步，第 1 个位置可以从 n 个元素中，任选一个填上，共有 n 种填法；

第二步，第 2 个位置只能从余下的 $n-1$ 个元素中，任选一个填上，共有 $n-1$ 种填法；

第三步，第 3 个位置只能从余下的 $n-2$ 个元素中，任选一个填上，共有 $n-2$ 种填法；

依次类推，当前面的 $r-1$ 个空位都填上后，第 r 位只能从余下的 $n-(r-1)$ 个元素中，任选一个填上，共有 $n-r+1$ 种填法。

根据乘法原理，全部填满 r 个空位共有

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

种填法。

所以得到公式

$$_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

这里 n，$r\in\mathbb{N}$，并且 $r\leqslant n$。这个公式叫做**排列数公式**。

例 7 计算：$_{4}\mathrm{P}_{2}$，$_{7}\mathrm{P}_{3}$，$_{12}\mathrm{P}_{4}$。

解 $_{4}\mathrm{P}_{2}=4\times3=12$

$_{7}\mathrm{P}_{3}=7\times6\times5=210$

$_{12}\mathrm{P}_{4}=12\times11\times10\times9=11880$

排列数公式中，当 $n = r$ 时，即排列为全排列时，有

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$$

该公式表明，从 n 个不同元素中全部取出的排列数，等于自然数 1 到 n 的连乘积，该乘积叫做 n 的**阶乘**（factorial），用 $n!$ 表示。

$$\begin{aligned}\therefore\quad {}_nP_n &= n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1\\ &= n!\end{aligned}$$

应用阶乘，排列数公式 $_nP_r$ 可作如下变形：

$$\begin{aligned}{}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}{(n-r)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}\\ &= \frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

因此，排列数公式还可写成

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

【注】为了使这个公式在 $n = r$ 时也能成立，我们规定

$$0! = 1$$

例 8 计算：

(a) $4!$　　(b) $6!$　　(c) $\frac{5!}{3!}$

解 (a) $4! = 4\times3\times2\times1$

$= 24$

(b) $6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1$

$= 720$

(c) $\frac{5!}{3!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}$

$= 5\times4$

$= 20$

例 9 从英文字“*volume*”中任取三个字母排成一列，问共有多少种不同的排法？

解 此问题为从六个不同的元素中，任取三个的排列，故排列数是

$$\begin{aligned} {}_6P_3 &= 6\times 5\times 4 \\ &= 120 \end{aligned}$$

例 10 若将不同的四个母音和四个子音共八个字母排成一列，问两端为母音的排法有多少种？

解 母音排两端的方法有 ${}_4P_2$ 种，而中间六个的排法有 ${}_6P_6$ 种，

所以两端为母音的排法有 ${}_4P_2\times{}_6P_6 = 12\times 720$

$= 8640$ 种

例 11 有七个数字 1，2，3，4，5，6，7。若每一个数字只能用一次，问总共

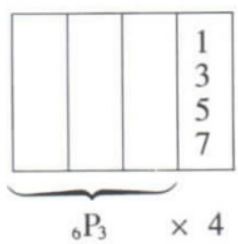
(a) 能组成多少个四位数？

(b) 能组成多少个四位奇数？

解 (a) 从 1，2，3，4，5，6，7 这七个数字中任取四个来排成的四位数共有

$$\begin{aligned} {}_7P_4 &= 7\times 6\times 5\times 4 \\ &= 840 \text{ 个} \end{aligned}$$

(b) 因为给定的奇数有 1，3，5，7 四个，所以末位为奇数的排法有 4 种，又因为其余三个空格用任何一个数字排列均可，所以有 ${}_6P_3$ 种。



因此，根据乘法原则，所得排列数为 $4\times{}_6P_3 = 4\times(6\times 5\times 4)$

$= 480$

例 12 求证 ${}_{n}P_{r}+r({}_{n}P_{r-1})={}_{n+1}P_{r}$。

证
$$\begin{aligned}{}_{n}P_{r}+r({}_{n}P_{n-r}) &= \frac{n!}{(n-r)!}+r\cdot\frac{n!}{[n-(r-1)]!}\\ &= \frac{n!\ (n-r+1)}{(n-r+1)!}+\frac{r\cdot n!}{(n-r+1)!}\\ &= \frac{n!\ (n-r+1+r)}{(n-r+1)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{[(n+1)-r]!}={}_{n+1}P_{r}\end{aligned}$$

例 13 如果 ${}_{2n+1}P_{4}=132\cdot{}_{n}P_{3}$，求 n 的值。

解
$$\begin{aligned}{}_{2n+1}P_{4} &= 132\cdot{}_{n}P_{3}\\ (2n+1)2n(2n-1)(2n-2) &= 132n(n-1)(n-2)\\ 4n(n-1)(2n+1)(2n-1)-132n(n-1)(n-2) &= 0\\ 4n(n-1)(4n^{2}-1-33n+66) &= 0\\ 4n(n-1)(n-5)(4n-13) &= 0\end{aligned}$$

$\therefore$ $n=0$ 或 1 或 5 或 $3\frac{1}{4}$

$\because$ $n\in\mathrm{N}$ 且 $n\geqslant 3$

$\therefore$ n 只能取 5

习题 6b

1. 写出：

   (a) 从 3 个元素 a、b、c 中任取 2 个元素的所有排列；

   (b) 从 4 个元素 a、b、c、d 中任取 3 个元素的所有排列。

2. 计算：

   (a) ${}_{15}P_{4}$ (b) ${}_{100}P_{3}$ (c) ${}_{8}P_{4}-2\,{}_{8}P_{2}$

   (d) $7!$ (e) $\frac{8!}{5!}$ (f) $\frac{7!}{5!\ 2!}$

3. 化简：

   (a) $\frac{(n+6)!}{(n+4)!}$ (b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ (c) $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$

4. 求证：

(a) ${}_{n}P_{r} = n({}_{n-1}P_{r-1})$　　(b) $n! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$

(c) ${}_{n+1}P_{n+1} - {}_{n}P_{n} = n^{2}({}_{n-1}P_{n-1})$　　(d) ${}_{n+1}P_{r} - {}_{n}P_{r} = r({}_{n}P_{r-1})$

5. 求 n 的值：

(a) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 42$　　(b) $\dfrac{(n+6)!}{(n+4)!} = 18(n+1)$

(c) $140\ {}_{n}P_{3} = {}_{2n+1}P_{4}$　　(d) $100\ {}_{n}P_{2} = {}_{2n}P_{3}$

6. 6名同学排成一排照相，有多少种排法?

7. 由 1，3，5，7，9 五个数字，能形成多少个没有重复数字的

(a) 三位数；　　(b) 五位数?

8. 从 4 种蔬菜品种中选出 3 种，分别种植在不同土质的 3 块土地上进行试验，有多少种种植方法?

9. 一个火车站有 8 股岔道，停放 4 列不同的火车，有多少种不同的停放方法（假定每股岔道只能停放一列火车）?

10. (a) 从多少个不同的元素中取出 2 个元素的排列数是 56 ?

(b) 已知从 n 个不同的元素中出 2 个元素的排列数等于从 $n-4$ 个不同的元素中取出 2 个元素的排列数的 7 倍，求 n。

11. 用 1，2，3，4，5 五个数字，可排出多少个数字不重复的五位偶数?

12. 从 2，3，5，7，8，9 中任取 3 个不重复的数字组成大过 500 的数，问共有多少个?

13. 用四个子音 b，c，d，f 和三个母音 a，e，i 全取而排列之，问可拼成多少个不同的字? 又若子音不能相邻时，可拼成多少个不同的字?

14. 8人排队，问

(a) 排成一排，有多少种不同排法?

(b) 排成前后两排，每排 4 人，有多少种不同的排法?

6.3 加法原理

我们看下面的问题：

从 A 地到 B 地，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘轮船。一天中，火车有 4 班，汽车有 2 班，轮船有 3 班，那么一天中乘坐这些交通工具从 A 地到 B 地共有多少种不同的走法?

因为一天中乘火车有 4 种走法，乘汽车有 2 种走法，乘轮船有 3 种走法，每一种走法都可从 A 地到 B 地。因此，一天中乘坐这些交通工具从 A 地到 B 地共有

$$4+2+3 = 9$$

种不同的走法。

一般地，有如下的加法原理：

如果完成一件事有 n 类办法，第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有

$$N = m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法。

例 14 从数字 1，2，3 中，共可组成多少个数字不重复的自然数？

解 组成的自然数里包括一位数、二位数或三位数三类。

由 1，2，3 三个数字中，可组成的一位数有 ${}_3P_1=3$ 个

可组成的二位数有 ${}_3P_2=6$ 个

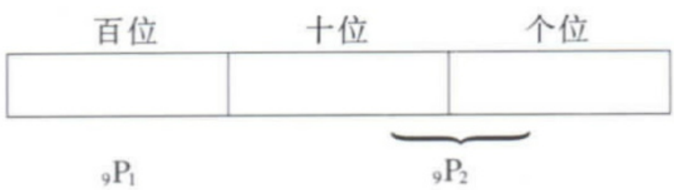
可组成的三位数有 ${}_3P_3=6$ 个

∴ 所组成的自然数共有

$${}_3P_1+{}_3P_2+{}_3P_3 = 3+6+6 = 15 \text{ 个}$$

例 15 用 0 到 9 这 10 个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解一 百位上的数字不能是 0，所以只能从 1 到 9 这 9 个数字中任选一个，其方法有 ${}_9P_1$ 种；十位和个位上的数字，可以从余下的 9 个数字中任选 2 个，有 ${}_9P_2$ 种方法。



根据乘法原理，可组成的三位数共有

$${}_9P_1 \cdot {}_9P_2 = 9\times9\times8 = 648 \text{（个）}$$

解二 从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字的排列数为 ${}_{10}P_3$，其中百位数字是 0 的排列数为 ${}_{9}P_2$，但百位数为 0 的数不能看成是三位数，因此所求的三位数的个数是

$${}_{10}P_3 - {}_{9}P_2 = 10\times9\times8-9\times8 = 648$$

例 16 在 4000 和 9000 之间，共有多少个没有重复数字的奇数？

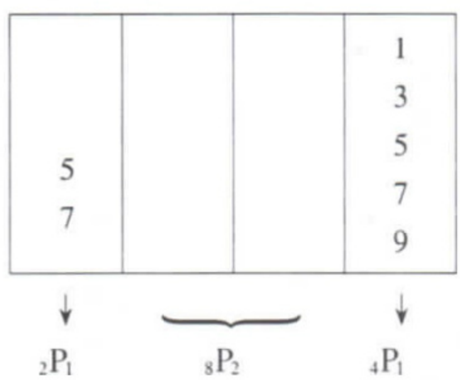
解 个位数字应取 1，3，5，7，9 中的一个；

千位数字应取 5，6，7，8，中的一个；

其余两个数位可取除去已排了的 2 个数字以外的 8 个数字中的任意两个。

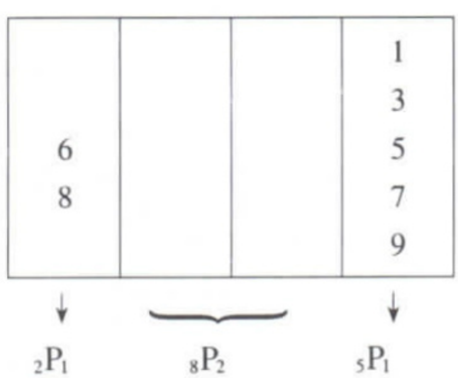
但在千位数字与个位数字中，5，7，是重复数字；为了避免重复现象，可将所求奇数分成两类：

第一类：千位数字是 5，7 者，得



根据乘法原则得 ${}_{2}P_1\times{}_{4}P_1\times{}_{8}P_2=448$ 个。

第二类：千位数字是 6，8 者，得



根据乘法原则得 ${}_{2}P_1\times{}_{5}P_1\times{}_{8}P_2=560$ 个

故一共有 448 + 560 = 1008 个奇数，其数字不重复且值在 4000 和 9000 之间。

例 17 步操训练时，某一排有队员 8 人，如果指定某人不能站在第一个位，也不能站在最后一个位，问该排队员共有多少种不同的排法？

解一 由于所指定的某人只可以排在除去首、尾两个置以外的任何 6 个位置上，所以其排法有 ${}_6P_1$ 种。

其余 7 人可任意排列在剩下的 7 个位置上，其排法有 7! 种。

故根据乘法原则，得出排列数为

$${}_6P_1 \times 7! = 30240$$

解二 8 人的全排列数为 8! 。所指定的某人如果站在第一个位或站在最后一个位，则排列数为 ${}_2P_1 \times {}_7P_7$

所以，令某人不站在第一个位或最后一个位的排列数为

$$8! - 2!(7!) = 30240$$

例 18 5 男和 5 女排成一列，问

(a) 特定的两女相邻的排法有多少？

(b) 特定的两女不相邻的排法有多少种？

解 (a) 特定两女相邻时，将此二女当一人看待，所以 9 人的排法有 9! 种，对其各自情况调换两女位置的排法有 2! 种。

根据乘法原则，特定两女相邻的排法有 $9! \times 2! = 725760$ 种。

(b) 10 人的全排列法有 10! 种。

因此，特定两女不相邻的排法有 $10! - 9! \times 2! = 2903040$ 种。

习题 6c

1. 在一次文艺晚会上，预计将演出 9 个节目。如果规定其中某一个节目不能安排在第一项演出，也不能安排在最后一项演出，问演出的节目共有多少种安排法？
2. 7 件不同的商品陈列在柜台内，将它们排成一列。
   (a) 如果某一精致商品必须放在中间，有多少种排法？
   (b) 如果某一商品不能放在中间，有多少种排法？
   (c) 如果某一商品只能放在两端，有多少种排法？
   (d) 如果某一商品不能放在中间，也不能放在两端，有多少种排法？

3. 7人并排站成一排：

(a) 如果甲、乙两人必须站在两端，有多少种排法？

(b) 如果甲、乙两人必须相邻，有多少种排法？

(c) 如果甲、乙两人必须相邻，且甲必须站在乙的右边，有多少种排法？

4. 8件不同的商品陈列在柜台内，将它们排成一列。

(a) 如果某两件商品不能放在相邻的位置，有多少种排法？

(b) 如果某两件商品不能放在两端，有少种排法？

5. 设有男生6人，女生3人排成一列，问女生3人必需相邻的排法有多少种？

6. 由0，2，3，4，6，8，9可以组成多少个没有重复数字的四位数？又可组成多少个大于50000的没有重复数字的数？

7. 由2，3，4，5，6，7可以组成多少个没有重复数字的五位偶数？

8. 由0，1，2，3，4，5，6，7可以组成多少个没有重复数字且能被5整除的三位数？

9. 由1，2，3，4，5，6可以成组多少个没有重复数字的偶数？

10. 由0，1，2，3，4，5可以组成多少个没有重复数字的数？

11. 由1，2，3，4，5，6，7，8可以组成多少个没有重复数字且第二位、第四位都是偶数的五位数？

12. 从 numerical 一字的字母中，每次取出六个进行排列，如果奇位数限用母音，有多少种排法？

13. 将 triangle 一字的字母全排列，如果两端都没有 t 或 e 两个字母，有多少种排法？

14. 将 fancies 一字的字母全排列，

(a) 如果字首字尾都用母音，有多少种排法？

(b) 如果偶位置均是母音，有多少种排法？

(c) 字母 f 不在中间的排法有多少种？

15. 从0，1，2，3，4，5六个数字中每次取不同的数字能组成多少个：

(a) 三位数；

(b) 四位偶数；

(c) 能被5整除的三位数。

6.4 循环排列

从 n 个相异元素中，每次全部取出并沿着一圆周进行排列，那么这排列就叫做**循环排列**（circular permutation）。

循环排列只考虑元素间的相关位置，而不计较元素所在的实际位置；也就是说，如果将所排成的某一个循环排列任意转动，所得的结果仍视为同一循环排列。例如，将一环形上的 4 个元素 A、B、C、D 及直线排列上的元素 A、B、C、D（图 6-3a）都以同样的方法移动，即 A→B，B→C，C→D，D→A；得到图 6-3b。续继按上述方法移动，可得图 6-3c，图 6-3d。

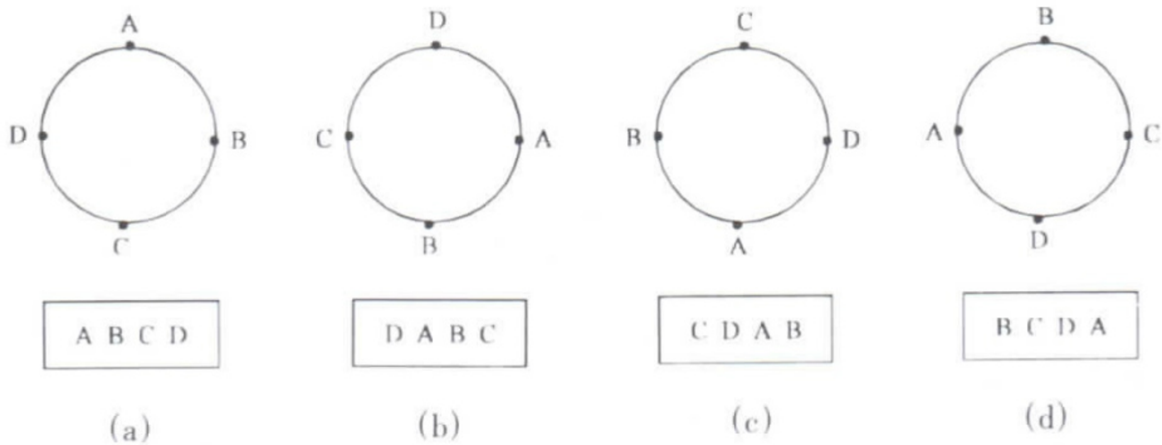


图 6 - 3

上述 4 个循环排列视为同 1 种排列，但在直线排列则变为 4 种不同的排列；也就是每一个循环排列对应着四个直线排列。因为 4 个元素全取的直线排列数为 ${}_4P_4 = 4!$ 种，而每 4 种直线排列变为一种循环排列，

$\therefore$ 4 个元素全取的循环排列数为 $\dfrac{4!}{4} = 3!$

一般地，n 个相异元素每次全取的循环排列数为

$$\frac{{}_nP_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

若每次取 r 个，且不许重复，则其循环排列数为 $\dfrac{{}_nP_r}{r}$。

例 19 五人围圆桌而坐，问有多少种互不相同的坐法？

解 若五人沿一直线排列，则其排法共有 5! 种。因为其中每 5 个全排列对应一个循环排列，所以互不相同的坐法共有

$$\frac{5!}{5} = 4! = 24\text{（种）}$$

例 20 六男六女围圆桌而坐，如果同性不准相邻，问有多少种坐法？

解 先让六女入座，其排列数为$(6-1)!=5!$。坐定后，再使六男介入两女之间就坐，六男坐法共有 $6!$ 种。故六男六女的坐法为

$$5!\times 6!=86400\ (\text{种})$$

例 21 某家有爷爷、奶奶、爸爸、妈妈、孙女 5 口人，齐围圆桌而坐，

(a) 如果限定爷爷、奶奶并肩而坐，有多少种坐法？

(b) 如果限定孙女坐在爸爸、妈妈当中，有多少种坐法？

解 (a) 如果限定爷爷、奶奶并肩而坐，可把他们视为一体，由循环排列公式知坐法为

$$(4-1)!=3!\ (\text{种})$$

而爷爷、奶奶可交换位置，故总坐法为

$${}_2P_2\cdot 3!=12\ (\text{种})$$

(b) 如果限定孙女坐在爸爸、妈妈当中，可把他们三位看成一个元素，由循环排列公式知坐法有

$$(3-1)!=2!\ (\text{种})$$

而爸爸、妈妈可交换位置，排列数为 ${}_2P_2$。故总坐法为

$${}_2P_2\cdot 2!=4\ (\text{种})$$

例 22 有 5 颗色不同的珠子，

(a) 把这 5 颗珠子放在桌面上围成一圈，有多少种围法？

(b) 用线把它们串成珠圈，有多少种串法？

解 (a) 由循环排列公式知，围法共有

$$(5-1)!=4!=24\ (\text{种})$$

(b) 把一个串好的珠圈放在桌面上，如图 6—4 中的 (a) 图，以 A 为首的顺时针循环排列为 ABECD。把它翻过来后即变成了图 6—4 中的 (b) 图，此时以 A 为首的顺时钟循环排列为 ADCEB，显然这是两个不同的循环排列。而此两种不同的循环排列实为同一种串法，所以用线串好的珠圈有

$$\frac{(5-1)!}{2}=12\ (\text{种})$$

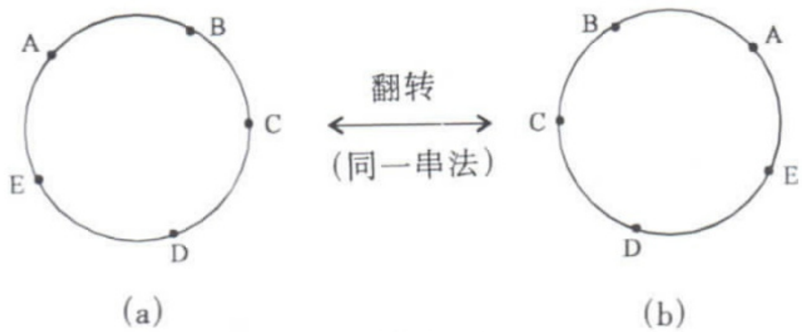


图 6-4

一般地，n 粒相异珠子串成珠圈，共有 $\frac{(n-1)!}{2}$ 种串法；从 n 粒相异珠子中选取 r 粒（$r \leqslant n$），串成珠圈，共有 $\frac{{}_nP_r}{2r}$ 种串法。

习题 6d

1. 设有 6 人举行圆桌会议，求其坐法的排列数。
2. 四男四女围坐一张圆桌，求其坐法的排列数。
3. 五个大人与五个小孩围坐一张圆桌，如果小孩不得相邻而坐，求其坐法的排列数。
4. 8 人围一圆桌开会，其中正、副组长各 1 人，记录员 1 人。
   (a) 如果正、副组长相邻而坐，共有多少种坐法？
   (b) 如果记录员坐于正、副组长之间，共有多少种坐法？
5. 设有 40 颗不同的珠子，全部用来串成珠圈，共有多少种不同的串法？如果从中选取 20 粒，串成珠圈，共有多少种不同的串法？
6. 用线将 8 颗不同珠子串成环状，如果指定三颗必须相邻，问有多少种串法？
7. 9 个人中有 4 对夫妇，同围坐于一圆桌，如果夫妇必须相邻，共有多少种坐法？

6.5 不尽相异的 n 个元素的全排列

前面所讨论的排列问题，给定的元素都是相异的。如果给定的元素有一些是相同的，那么就属于不尽相异元素的排列问题了。

例 23 把 x，x，x，y 四个元素全取出来作排列，共有多少种排列方法？

解 先把三个相同的元素 x 看成三个不同的 x_1、x_2、x_3，那么四个不同元素 x_1、x_2、x_3、y 的全排列有 ${}_4P_4=4!$，即 24 个。列出如下：

$x_1x_2x_3y$	$x_1x_2yx_3$	$x_1yx_2x_3$	$yx_1x_2x_3$
$x_1x_3x_2y$	$x_1x_3yx_2$	$x_1yx_3x_2$	$yx_1x_3x_2$
$x_2x_1x_3y$	$x_2x_1yx_3$	$x_2yx_1x_3$	$yx_2x_1x_3$
$x_2x_3x_1y$	$x_2x_3yx_1$	$x_2yx_3x_1$	$yx_2x_3x_1$
$x_3x_1x_2y$	$x_3x_1yx_2$	$x_3yx_1x_2$	$yx_3x_1x_2$
$x_3x_2x_1y$	$x_3x_2yx_1$	$x_3yx_2x_1$	$yx_3x_2x_1$

观察上述 4 列，每一列中，y 的位置都是固定的，x_1、x_2、x_3 各有 $3!=6$ 个不同的排列。

$$\therefore\quad 4\times3! = 4! = 24$$

现把上表中的 x_1、x_2、x_3 都换成 x，则同一列的 6 个不同的排列，就变成同一个排列，这样上表内的四列，就变成 4 个不同的排列，即 $xxxy$，$xxyx$，$xyxx$，$yxxx$。故四个元素 x、x、x、y 的全排列有 4 种。

即 $4\times3! = 4!$

$$4=\frac{4!}{3!}$$

也就是说 4 个元素中有三元素相同的全排列数 $=\dfrac{4!}{3!}$。

一般地，设有 n 个元素：

$$\underbrace{a_1,\ a_1,\ \cdots,\ a_1}_{n_1\text{个}},\ \underbrace{a_2,\ a_2,\ \cdots,\ a_2}_{n_2\text{个}},\ \cdots,\ \underbrace{a_r,\ a_r,\ \cdots,\ a_r}_{n_r\text{个}}$$

这里 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则这 n 个元素的全排列数为：

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_r!}$$

例 24 求 A，B，B，B，C，C，C，C 八个字母全取的排列数。

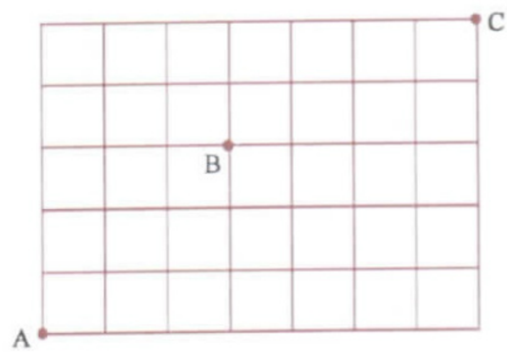
解 这八个字母全取的排列数为：

$$\frac{8!}{3!\ 4!} = 280\text{（种）}$$

例 25 右图所示为棋盘形的街道，有 8 条直街，6 条横街。

(a) 有一人由角落 A 走到对角 C，要取径最短，问有几种走法？

(b) 另一人由角落 C，经 B 处而到对角 A，也要取径最短，问有几种走法？



(a) 8 条直街被分为 $(6-1)=5$ 段，用 a、a、a、a、a 表示，6 条横街被分为 $(8-1)=7$ 段，用 b、b、b、b、b、b、b 表示。而由角落 A 到角落 C，若取径最短，都必须经过 5 段直街，7 段横街。求由 A 到 C 的最短走法，就是求 12 个元素 a、a、a、a、a、b、b、b、b、b、b、b 全取的排列数。

因此共有 $\frac{12!}{5!\ 7!}=792$ 种走法。

(b) 由 C 到 B 的走法共有 $\frac{6!}{4!\ 2!}=15$ 种，

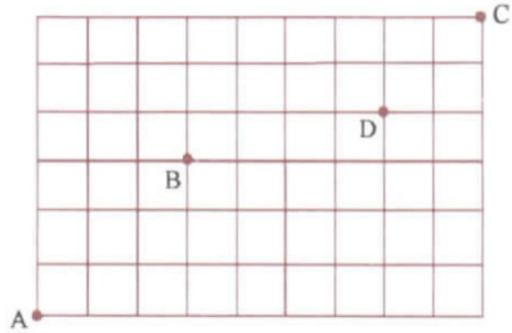
由 B 到 A 的走法有 $\frac{6!}{3!\ 3!}=20$ 种，

故由 C 经 B 到 A 的走法共有 $15\times 20=300$ 种。

习题 6e

1. 求 mississippi 一字中的字母全取的排列数。
2. 某人有五角硬币 4 枚，二角硬币 5 枚，一角硬币 1 枚，分给 10 位儿童，每人得 1枚，问有多少种分法？
3. 用 0，1，1，3，3，3，4 诸数字组成的七位数共有多少个？
4. expression 一字的字母全取而排列，如果两个 s 字母必须分开不能相邻，问共有多少种排法？

5. 棋盘形的街道如图所示，有 10 条直街，7 条横街。

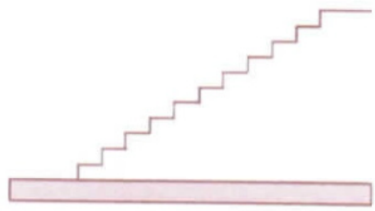


(a) 有一人由角落 A 走到对角 C，若要取径最短，问有多少种走法？

(b) 另一人由角落 C，经 D 及 B 处，打算走到对角 A，假若要取径最短，问有多少种走法？

6. 将 2 个梨，3 个桃，4 个苹果分给九个儿童，问每个儿童得一水果的分配法有多少种？

*7. 如图为 11 个梯级的楼梯。某人上楼时，有时一步跨一个梯级，有时一步跨两个梯级。问此人共有多少种上楼方法？



6.6 相异元素可以重复的排列

从 n 个不同元素中，如果每个元素可以重复选取，那么取出 r 个元素，按一定顺序排好，叫做从 n 个不同元素中取 r 个元素的可重复排列。

例 26 由数字 1，2 可以组成 (a) 多少个二位数？

(b) 多少个三位数？

解 (a) 组成二位数可分为两个步骤：

第一步，十位的数字可以从 1，2 中任取一个，有 2 种方法；

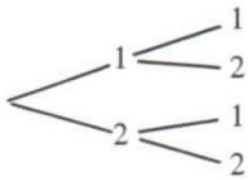
第二步，因为数字可以重复使用，所以个位的数字仍可从 1，2 中任取一个，也有 2 种方法。

2	2

$\therefore$ 组成数字可以重复的二位数共有 $2 \times 2 = 2^2$

$= 4$ 个

其树图如下：



排列法	
1	1
1	2
2	1
2	2

(b) 同 (a)，要组成三位数，因为数字可以重复使用，所以个位，十位与百位的数字都可以从 1，2 中任选一个，即都有 2 种方法。

2	2	2

∴ 组成数字可以重复的三位数共有

$$
\begin{aligned}
2\times2\times2 &= 2^3 \\
&= 8\ (\text{个})
\end{aligned}
$$

一般地，n 个相异元素里，如果每个元素都可以重复选取，那么取 r 个元素的所有排列数是

$$n^r\text{，其中 } n\text{，}r\in\mathbb{N}$$

【注】 这个公式没有 $r\leqslant n$ 的限制。如例 27 的 (a) 中，$r=n=2$，而 (b) 中 $r=3$，$n=2$。

例 27 用 1，2，5，6，8 这五个数字组成四位数，共有多少种方法？

解

5	5	5	5

由于排入个位，十位，百位，千位上的数字的方法都各有 5 种，因此四位数的种数为 $5^4=625$

例 28 三种奖品颁发给 6 个学生，每个学生都有资格获奖，问颁奖的方法共有几种？

解

6	6	6

由于三种奖品都可颁给 6 个学生中的任何一个，因此颁奖方法共有

$6^3 = 216$ 种

例 29 要把 4 个零件分配到 5 架车床上进行加工，问共有多少种分配方法？

解

5	5	5	5

由于每一个零件可以分配给 5 架车床中的任何一架来加工，因此分配法共有 $5^4 = 625$ 种

例 30 用 2、3、4、5、9 五个数字，可以排出多少个大于 5000 且可重复的四位数？

解

3	5	5	5

大于 5000 的四位数，其千位仅有 5、8、9 三个数字可排入，而百位、十位、个位上都有 5 个数字可排入，因此大于 5000 的四位数总数共有

$3 \times 5^3 = 375$ 个

例 31 用 0、1、2、…、9 组成四个数字的编码。

(a) 问共有多少种？

(b) 如果四个数字均相同的编码除外，共有多少种？

解 (a)

10	10	10	10

由于每个位置上的填法都有 10 种，因此编码总数为 $10^4 = 10000$ 种。

(b) 由于四个数字均相同的编码共有 10 个，因此除此之外的编码数共有 $10000 - 10 = 9990$（个）

习题 6f

1. 有 3 封信投入 6 个信箱，共有多少种投法？
2. 有 6 封信投入 3 个信箱，共有多少种投法？

3. 用 0、1、2、4、5 组成三位数。

(a) 如果三位数中的数字不能重复，问共有多少种？

(b) 如果三位数中的数字可重复，问共有多少种？

4. 在某项比赛中，设有一、二、三奖，假如每位参加者都可以有机会赢取全部奖品。问参加比赛的 20 人当中获奖的方法有几种？

5. 有 8 名运动员同时参加 4 项比赛，问各项冠军的获奖者有几种可能？

6. 某城市的电话号码由 6 位升为 7 位，问改变后可以增加多少用户（电话号规定第一个数字不能是 0 和 1）？

7. 6 名运动员参加 3 项比赛，且每项比赛只派 1 名运动员参加。

(a) 如果每位运动员只准参加一个项目，问有多少种分配方法？

(b) 如果每位运动员可参加多个项目或 1 项都不参加，问有多少种分配方法？

8. 有 6 本不同的书分赠给 3 人。

(a) 如果每人只能得 1 本，问有几种分赠法？

(b) 如果这 6 本书全都赠完，但不限定每人都要得到，问有几种分赠法？

9. 某校有数学、天文、诗歌三个课外小组，8 个同学准备报名参加，如果每个人限报一个小组。试问：一共可有多少种报名方案？

6.7 组合与组合数公式

● 组合的概念

从 n 个不同元素中，任取 $r(r \leqslant n)$ 个元素，不考虑顺序，并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 r 个元素的一个**组合**（combination）。所有组合的个数叫做从 n 个不同元素中取出 r 个元素的组合数，用符号 ${}_nC_r$ 或 $\binom{n}{r}$ 来表示。

根据排列与组合的定义可知，它们的区别就在于取出的元素是否与顺序有关。如果与顺序有关，就是排列问题；如果与顺序无关，就是组合问题。组合只是选取的结果，而排列则是选取后再加以排列的结果，因此排列本身已包含有组合的步骤。两个排列相同，不仅指它们的元素相同，而且它们的元素的排列顺序也相同；两个组合相同，仅指它们的元素相同。

● 组合数公式

怎样计算从 n 个不同元素中取出 r 个元素的组合数呢？

下面我们从组合数 ${}_nC_r$ 与排列数 ${}_nP_r$ 的关系入手，找出组合数 ${}_nC_r$ 的计算公式。

例如，从 4 个不同元素 a、b、c、d 中取出 3 个元素的排列与组合的关系如下表所示：

组　合		排　　列
$a\ b\ c$	→	abc　bac　cab　acb　bca　cba
$a\ b\ d$	→	abd　bad　dab　adb　bda　dba
$a\ c\ d$	→	acd　cad　dac　adc　cda　dca
$b\ c\ d$	→	bcd　cbd　dbc　bdc　cdb　dcb

由表中可以看出，对于每一个组合都有 6 个不同的排列，因此，求从 4 个不同元素中取 3 个元素的排列数 ${}_4P_3$，可以按以下两步来考虑：

第一步，从 4 个不同元素中取出 3 个元素作组合，共有 ${}_4C_3$（$=4$）个；

第二步，对每一个组合中的 3 个不同元素作全排列，各有 ${}_3P_3$（$=6$）个。

根据乘法原理，得

$$ {}_4P_3 = {}_4C_3 \cdot {}_3P_3 $$

因此，

$$ {}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{{}_3P_3} $$

一般地，求从 n 个不同元素中取出 r 个元素的排列数 ${}_nP_r$，可按以下两步来考虑：

第一步，先求出从这 n 个不同元素中取出 r 个元素组合数 ${}_nC_r$；

第二步，求每一个组合中 r 个元素的全排列数 ${}_rP_r$。

根据乘法原理，得到

$$ {}_nP_r = {}_nC_r \cdot {}_rP_r $$

因此

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{{}_rP_r} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}
\end{aligned}
$$

其中 n，$r\in\mathbb{N}$，并且 $r\leqslant n$。

这就是组合数公式。因为

$$
{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}
$$

所以，上面的组合数公式还可以写成

$$
{}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}
$$

这也是求组合数的一个常用公式。

另外，我们规定 $\quad {}_nC_0 = 1$

例 32 计算 ${}_{10}C_4$ 及 ${}_7C_3$

解

$$
\begin{aligned}
{}_{10}C_4 &= \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} \\
&= 210 \\
{}_7C_3 &= \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \\
&= 35
\end{aligned}
$$

例 33 从 50 人中选取 8 人组成一个委员会，问有多少种不同的选法？

解 从 50 人当中选取 8 人组成委员会，没有次序之分，所以是组合问题，其组合数为

$$
\begin{aligned}
{}_{50}C_8 &= \frac{50\times49\times48\times47\times46\times45\times44\times43}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} \\
&= 536878650
\end{aligned}
$$

例 34 一超级市场欲雇请 6 个女售货员及 4 个男助理，问在 9 个女应征者及 6 个男应征者中选取的方法有多少种？

解 在 9 个女应征者中选 6 个，其选取的方法有 ${}_9C_6$ 种；在 6 个男应征者中选 4 个，其选取的方法有 ${}_6C_4$ 种。应用乘法原理知共有选取方法为

$$
\begin{aligned}
{}_9C_6 \cdot {}_6C_4 &= \frac{9!}{6!\ 3!} \cdot \frac{6!}{4!\ 2!} \\
&= 1260\ (\text{种})
\end{aligned}
$$

例 35 求证 ${}_nC_r = \dfrac{r+1}{n-r} \cdot {}_nC_{r+1}$

证 $\because\ {}_nC_r = \dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$

$$
\begin{aligned}
\frac{r+1}{n-r} \cdot {}_nC_{r+1} &= \frac{r+1}{n-r} \cdot \frac{n!}{(r+1)!\ (n-r-1)!} \\
&= \frac{r+1}{(r+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-r)(n-r-1)!} \\
&= \frac{n!}{r!\ (n-r)!},
\end{aligned}
$$

$\therefore\ {}_nC_r = \dfrac{r+1}{n-r} \cdot {}_nC_{r+1}$

例 36 平面上有 15 个点，其中没有任何 3 点是共线的，问

(a) 这些点可以确定多少条不同的直线？

(b) 从任意 3 点作为三角形的顶点，可作出多少个不同的三角形？

解 (a) 因为两点确定一条直线，所以所求之直线条数为

$$
\begin{aligned}
{}_{15}C_2 &= \frac{15 \times 14}{1 \times 2} \\
&= 105
\end{aligned}
$$

(b) 因为不在同一直线的三点确定一个三角形，所以所求的三角形有

$$
\begin{aligned}
{}_{15}C_3 &= \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} \\
&= 455\ (\text{种})
\end{aligned}
$$

习题 6g

1. 计算：

(a) ${}_6C_2$　　(b) ${}_8C_3$

(c) ${}_7C_3-{}_6C_2$　　(d) $3\,{}_8C_3-2\,{}_5C_2$

(e) ${}_6C_3\div{}_8C_4$　　(f) ${}_2C_0\times{}_4C_2\times{}_6C_4$

(g) $\dfrac{{}_9C_2+{}_9C_3}{{}_{10}C_4}$　　(h) ${}_{n+1}C_n\cdot{}_nC_{n-2}$

2. 在某次数学测验中，学生可从 10 个考题里任选 7 题作答，问考生共有多少种不同的选法？

3. 设有 8 本不同的书，如果甲、乙两人各借一册，问有多少种借法？如果每人可借两册，又有多少种借法？

4. 某次会议共 20 人参加，如果每两个人握手一次，问共握多少次？

5. 圆上有 10 个点：

(a) 过每 2 点可画一条弦，一共可画多少条弦？

(b) 过每 3 点可画一个圆内接三角形，一共可画多少个圆内接三角形？

6. 从 9 个不相同的质数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9 中任取 4 个相乘，可以得到多少个不同的积？

7. 一组平行线共 9 条，与另一组平行线共 10 条相交，共能组成多少个平行四边形？

8. (a) 空间有 8 个点，其中没有 4 个点在同一平面内，过每 3 个点作一个平面，一共可以作多少个平面？

(b) 空间有 10 个点，其中任何 4 点不共面，以每 4 个点为顶点作一个四面体，一共可作多少个四面体？

9. 选拔委员会必须在 12 名男生，8 名女生中选出 5 名男生及 3 名女生作为学校代表参加本州的田径赛，问有多少种不同的选法？

10. 某学会有普通会员 45 名，名誉会员 5 名。如按照下列条件选出 5 人组成常务委员会，问有多少种选法？

(a) 委员中不含名誉会员；

(b) 委员中 1 人为名誉会员；

(c) 委员中最少有 1 人为名誉会员。

11. 某校一年级有 6 个班，二年级有 8 个班，三年级有 4 个班。各年级分别举行班与班的排球单循环赛，一共需要比赛多少场？

6.8 组合数的性质

(一) 性质 1

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

证 $\because \quad {}_nC_r = \dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\ [n-(n-r)]!}$$

$$= \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

$\therefore \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

例 37 计算 ${}_{200}C_{198}$。

解

$$\begin{aligned} {}_{200}C_{198} &= {}_{200}C_{200-198} \\ &= {}_{200}C_2 \\ &= \frac{200 \times 199}{2!} \\ &= 19900 \end{aligned}$$

例 38 解方程式 ${}_{26}C_x = {}_{26}C_{x-8}$。

解 显然 $x \neq x-8$。因此有

$$\begin{aligned} {}_{26}C_x &= {}_{26}C_{x-8} \\ {}_{26}C_{26-x} &= {}_{26}C_{x-8} \end{aligned}$$

$\therefore \quad 26-x = x-8$

得 $\quad x = 17$

(二) 性质 2

$${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$$

证 $${}_nC_{r-1}+{}_nC_r=\frac{n!}{(r-1)!\ [n-(r-1)]!}+\frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$
$$=\frac{rn!\ +(n-r+1)n!}{r!\ (n-r+1)!}$$
$$=\frac{(r+n-r+1)n!}{r!\ (n-r+1)!}$$
$$=\frac{(n+1)!}{r!\ [(n+1)-r]!}$$
$$={}_{n+1}C_r$$

例 39 计算

(a) $\frac{{}_{20}C_4+{}_{20}C_5}{{}_{21}C_5}$ (b) $\frac{({}_{100}C_{78}-{}_{99}C_{78}){}_{100}C_{98}}{{}_{99}C_{77}}$

解 (a) $\frac{{}_{20}C_4+{}_{20}C_5}{{}_{21}C_5}=\frac{{}_{21}C_5}{{}_{21}C_5}=1$

(b) $$\frac{({}_{100}C_{78}-{}_{99}C_{78}){}_{100}C_{98}}{{}_{99}C_{77}}=\frac{{}_{99}C_{77}\times{}_{100}C_{98}}{{}_{99}C_{77}}$$
$$={}_{100}C_{98}$$
$$={}_{100}C_2$$
$$=\frac{100\times 98}{2!}$$
$$=4900$$

例 40 求证 ${}_nC_{r-1}+2\,{}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{n+2}C_{n+1}$。

证 $${}_nC_{r-1}+2\,{}_nC_r+{}_nC_{r+1}=({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)+({}_nC_r+{}_nC_{r+1})$$
$$={}_{n+1}C_r+{}_{n+1}C_{r+1}$$
$$={}_{n+2}C_{r+1}$$

(三) 性质 3

$${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

证　上述式子的左边表示：由 n 个相异元素中，每次不取，取 1 个，取 2 个，取 3 个，……取 n 个的组合总数。

对于任何一个元素，都有取与不取两种处理方法，

故对于 n 个相异元素，共有 $(1+1)(1+1)\cdots(1+1)=2^n$ 种选取法。

故每次不取，取 1 个，取 2 个，取 3 个，……取 n 个的组合总数为 2^n。

【注】　此性质可用二项式定理证明。

例 41　某人邀请他的 6 位朋友中的 1 人，2 人，…或全部共进午餐，问共有多少种邀请法？

解一　邀请法共有 ${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=6+15+20+15+6+1$

$=63$（种）

解二　邀请法共有 $2^6-1=63$（种）

例 42　已知 ${}_rC_{r-1}={}_{n+1}C_{n-1}$，试证 $r=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$。

证　$\because\ {}_rC_{r-1}={}_rC_1,\ {}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_2$

$\therefore$ 原等式变为 ${}_rC_1={}_{n+1}C_2$

$\therefore\ r=\dfrac{(n+1)n}{2}$

例 43　求证 ${}_nC_n+{}_{n+1}C_n+{}_{n+2}C_n+\cdots+{}_{n+r-1}C_n={}_{n+r}C_{n+1}$

证

$$
\begin{aligned}
{}_nC_n &= {}_{n+1}C_{n+1}\\
{}_{n+1}C_{n+1}+{}_{n+1}C_n &= {}_{n+2}C_{n+1}\\
{}_{n+2}C_{n+1}+{}_{n+2}C_n &= {}_{n+3}C_{n+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
{}_{n+r-1}C_{n+1}+{}_{n+r-1}C_n &= {}_{n+r}C_{n+1}
\end{aligned}
$$

上述各式相加得

${}_nC_n+{}_{n+1}C_{n+1}+{}_{n+1}C_n+{}_{n+2}C_{n+1}+{}_{n+2}C_n+\cdots+{}_{n+r-1}C_{n+1}+{}_{n+r-1}C_n$

$={}_{n+1}C_{n+1}+{}_{n+2}C_{n+1}+\cdots+{}_{n+r}C_{n+1}$

$\therefore\ {}_nC_n+{}_{n+1}C_n+{}_{n+2}C_n+\cdots+{}_{n+r-1}C_n={}_{n+r}C_{n+1}$

习题 6h

1. 计算：

   (a) ${}_{100}C_{97}$

   (b) ${}_{99}C_{96}+{}_{99}C_{95}$

   (c) ${}_{1000}C_{998}-{}_{999}C_{997}$

   (d) ${}_{5}C_{1}+{}_{5}C_{2}+{}_{5}C_{3}+{}_{5}C_{4}+{}_{5}C_{5}$

2. 已知 ${}_{n}C_{2}=153$，求 n。
3. 已知 ${}_{n}C_{4}={}_{n}P_{3}$，求 n。
4. 已知 ${}_{28}C_{2r-4}={}_{28}C_{2r}$ ，求 r。
5. 已知 ${}_{x}C_{3}+{}_{x}C_{2}=15(x^{2}-1)$，求 x。
6. 已知 ${}_{n}C_{4}={}_{n}C_{6}$，求 ${}_{11}C_{n}$ 的值。
7. 已知 ${}_{20}C_{r}={}_{20}C_{r+2}$，求 ${}_{r}C_{4}$ 的值。
8. 求证 ${}_{n}C_{r}+2{}_{n}C_{r-1}+{}_{n}C_{r-2}={}_{n+2}C_{r}$
9. 求证 ${}_{n-1}C_{r}+{}_{n-2}C_{r}+{}_{n-3}C_{r}+\cdots+{}_{r+1}C_{r}+{}_{r}C_{r}={}_{n}C_{r+1}$
10. 求证：${}_{n}C_{r}\cdot{}_{n-r}C_{k-r}={}_{n}C_{k}\cdot{}_{k}C_{r}$
11. 求证：${}_{m}C_{0}+{}_{m+1}C_{1}+{}_{m+2}C_{2}+{}_{m+3}C_{3}+\cdots+{}_{m+r-1}C_{r-1}={}_{m+r}C_{r-1}$
12. 在 12 本不同的书籍里，任取任何数量的组合，问组合的总数是多少？
13. 在四位朋友中，你可以邀请至少一位陪同你观赏电影，问其组合数是多少？
14. 一袋装有 5 粒红球，7 粒白球，问每次选出 5 粒球而其中至少有 2 粒是红球的组合数是多少？
15. 一袋子装有 12 粒球，问每次选出 1 粒、2 粒、3 粒、……、12 粒的总组合数是多少？
16. 从数学系 9 人、教育系 4 人中，选出 6 人组成数学教育考察团，若团中：

    (a) 教育系 2 人；

    (b) 教育系至少有 2 人；

    问各有多少种组团方式？

6.9 杂例

例 44 在产品检验时，常从产品中抽出一部分进行检查，现从 100 件产品中任意抽出 3 件：

(a) 一共有多少种不同的抽法？

(b) 如果 100 件产品中有 2 件次品，抽出的 3 件中恰好有 1 件是次品的抽法有多少种？

(c) 如果 100 件产品中有 2 件次品，抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法有多少种？

解 (a) 所求的不同抽法的种数，就是从 100 件产品中取出 3 件的组合数：

$$_{100}C_3 = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} = 161700$$

(b) 从 2 件次品中抽出 1 件次品的抽法有 $_2C_1$ 种，从 98 件合格品中抽出 2 件合格品的抽法有 $_{98}C_2$ 种，因此抽出的 3 件中恰好有 1 件是次品的抽法的种数是

$$_2C_1 \cdot {}_{98}C_2 = 2 \times 4753 = 9506$$

(c) 从 100 件产品中抽出 3 件，一共有 $_{100}C_3$ 种抽法，在这些抽法里，除掉抽出的 3 件都是合格品的抽法 $_{98}C_3$ 种，便得抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法的种数，即

$$_{100}C_3 - {}_{98}C_3 = 161700 - 152096 = 9604$$

(想一想：(c) 题还有别的解法吗？)

例 45 从 25 个男生中选取 3 人，10 个女生中选取 2 人组成委员会，分别担任正班长、副班长、学习委员、文体委员、生活委员等职务，问有多少种选法？

解 第一步先选出 5 名委员。

从 25 个男生中选取 3 人的方法有 $_{25}C_3$ 种，从 10 个女生中选取 2 人的方法共有 $_{10}C_2$，因此选取 5 个委员的方法共有 $_{25}C_3 \cdot {}_{10}C_2$ 种。

第二步安排选出的 5 个委员的职务，

给选出的 5 个委员，安排五种不同的职务，显然是排列问题，因此共有 $_5P_5$ 种方法。

$\therefore$ 选法总数为 $_{25}C_3 \cdot {}_{10}C_2 \cdot {}_5P_5 = 12420000$ (种)

例 46 从 1、3、5、7、9 中取出 3 个数字，又从 2、4、6、8 中取出 2 个数字，组成没有重复数字的五位数，一共可以组成多少个？

解 从 1、3、5、7、9 中每次取出 3 个数字的方法有 ${}_5C_3$ 种，从 2、4、6、8 中每次取出 2 个数字的方法有 ${}_4C_2$ 种，由乘法原理知共有 ${}_5C_3 \cdot {}_4C_2$ 种；将选出的 5 个数字加以排列，共有 ${}_5P_5$ 种方法。

由乘法原理知符合条件的五位数共有

$${}_5C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_5P_5 = 7200 \text{ 个}$$

例 47 有 6 本不同的书，

(a) 平均分给甲，乙，丙三人（即每人 2 本），有几种分法？

(b) 平均分成三堆，有几种分法？

解 (a) 先让甲从 6 本书中任意选取 2 本，有 ${}_6C_2$ 种方法；再让乙从剩下的 4 本书中选取 2 本，有 ${}_4C_2$ 种方法；最后剩下 2 本给丙，有 ${}_2C_2$ 种方法。

∴ 共有分法 ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 90$ 种

(b) 将问题 (a) 的分书方法分成下列两个步骤来考虑：

第一步，先把 6 本书分成三堆，每堆 2 本，设有 N 种方法；

第二步，把这三堆书分给甲、乙、丙三人，分法有 3! 种，

可知把 6 本不同的书分给甲、乙、丙三人的分法共有 $N \times 3!$ 种。

由 (a) 结果可知 $N \times 3! = {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$

因而把 6 本不同的书分成三堆的方法有

$$N = \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!}$$

$$= \frac{90}{6}$$

$$= 15 \text{ 种}$$

【注】 平均分组而不必考虑组的排列时，可以先假定按照组的顺序来分，然后再除组数的全排列。

例 48 将 10 名学生分成两组，每组人数相等，有多少种分法？

解 此问题就是将 10 人平均分组，次序不论的组合问题，其分法共有

$$\frac{{}_{10}C_5}{2!} = 126 \text{ 种}$$

例 49 有不同的书 6 本，分给甲、乙、丙三个人，问在下列情形下各有多少种不同的方法？

(a) 甲得 3 本，乙得 2 本，丙得 1 本；

(b) 一人得 3 本，一人得 2 本，一人得 1 本。

解 (a) 整个分书给甲、乙、丙的过程可以分成三个步骤来考虑：

第一步，先从 6 本书中选出 3 本给甲，有 ${}_6C_3$ 种方法；

第二步，再从剩下的 3 本中选出 2 本给乙，有 ${}_3C_2$ 种方法；

第三步，最后剩下 1 本给丙，有 ${}_1C_1$ 种方法。

根据乘法原则，不同的分法共有 ${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=60$ 种。

(b) 这个问题与 (a) 的最大区别在于甲、乙、丙三人中，任何一人都可以分得 3 本，2 本或 1 本，而问题 (a) 中，只能是甲得 3 本，乙得 2 本，丙得 1 本。

因此，在问题 (a) 的每一种分法中，让甲、乙、丙三人取书后再相互调换，有 3! 种方法。

根据乘法原则，不同的分法共有 ${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times 3!=360$ 种。

***例 50** 于 2，1，3，1，4，8，3，5，4，2，4，7，6，7，9，2 诸数字中，每次任取四个组成四位数，问可得多少个不同的数？

解 诸数字中三个相同的有 2，4，二个相同的 1，3，7，其余四个(5，6，8，9)彼此相异。其可能组成的不同的四位数有下列四种情形：

数字有三个相同一个不同的四位数，共 $({}_2C_1)({}_8C_1)\left(\frac{4!}{3!}\right)=64$ 个；

数字有两对相同的四位数，共 $({}_5C_2)\left(\frac{4!}{2!\ 2!}\right)=60$ 个；

数字有二个相同二个不同的四位数，共 $({}_5C_1)({}_8C_2)\left(\frac{4!}{2!}\right)=1680$ 个；

四个数字完全不同的四位数，共 $({}_9C_4)(4!)=3024$ 个。

根据加法原则，可组成 $64+60+1680+3024=4828$ 个四位数。

习题 6i

1. 从 6 男 4 女中选取 4 人组成一个代表团，问其中至少有一男的选法有多少种？
2. 从某班 40 人当中，选出正班长、副班长、学习委员、生活委员各 1 人，共有多少种选法？
3. 8 人 A、B、C、D、E、F、G、H 平均分坐前后两排，但 A、D 只能坐在前排，F 只能坐在后排，问共有多少种不同的坐法？
4. 某班有 52 名学生，其中正副班长各 1 名，现选派 5 名学生参加某种课外活动：
   (a) 如果班长和副班长必须在内，有多少种选排法？
   (b) 如果班长和副班长必须有一人而且只有一人在内，有多少种选派法？
   (c) 如果班长和副班长都不在内，有多少种选派法？
   (d) 如果班长和副班长至少有一人在内，有多少种选派法？
5. 生产某种产品 200 件，某中有 2 件是次品，现在抽取 5 件进行检查：
   (a) “其中恰有两件次品”的抽法有多少种？
   (b) “其中恰有 1 件次品”的抽法有多少种？
   (c) “其中没有次品”的抽法有多少种？
   (d) “其中至少有 1 件次品”的抽法有多少种？
6. 男女两个乒乓球队，各有队员 5 人和 4 人，进行双打练习。
   (a) 男女各在一边的打法有多少种？
   (b) 男女混合的打法有多少种？
7. 某车间有 5 名工程师和 4 名技术员，拟从中抽出 4 人组成技术革新小组，要求其中至少有 2 名工程师和 1 名技术员，共有多少种抽法？
8. 有 9 名工人，其中 4 名是钳工，3 名是车工，另外 2 人既是钳工又是车工，拟从这 9 个人当中选派 2 名钳工和 2 名车工去完成某项任务，问有多少种选派方法？
9. 将 4 本不同的书，分给甲、乙二人。
   (a) 每人各得 2 本，有多少种分法？
   (b) 甲得 1 本，乙得 3 本，有多少种分法？
   (c) 一人得 1 本，另一人得 3 本，有多少种分法？
10. 将 14 名学生平均分为两组，有多少种分法？若将此 14 名学生平均分配在两间课室，问其分配法又有多少种？
11. 12 件东西平均分给 4 人有多少种分法？

*12. 由 mathematical 一字的字母中，每次选取四个，共有多少种不同的选取法？又有多少种不同的排列法？

*13. 用 2，3，3，3，4，4，4，5，5，6，7，8 诸数字，可以组成多少个四位数？

总复习题 6

1. (a) 已知 $\dfrac{1}{{}_5C_r} - \dfrac{1}{{}_6C_r} = \dfrac{7}{10 \cdot {}_7C_r}$，求 ${}_8C_r$。

   (b) 已知 $\dfrac{{}_nC_{r-1}}{2} = \dfrac{{}_nC_r}{3} = \dfrac{{}_nC_{r+1}}{4}$，求 n、r。

2. 6名同学站成一排，其中某一名不站在排头，也不站在排尾，共有多少种站法？
3. 由数字1、2、3、4、5、6可以组成多少个没有重复数字的自然数？
4. 用数字0、1、2、3、4、5组成没有重复数字的数：

   (a) 能够组成多少个六位数？

   (b) 能够组成多少个六位奇数？

5. 把8个不同的元素排成一行。

   (a) 某中某两个元素要排在一起，有多少种排法？

   (b) 其中某两个元素不排在一起，有多少种排法？

   (c) 其中某4个元素要排在一起，另外4个元素也要排在一起，有多少种排 法？

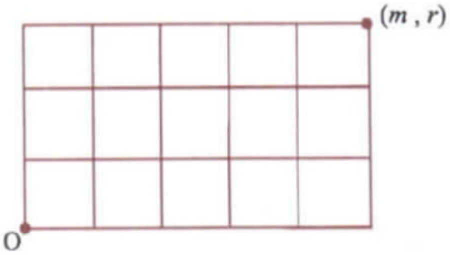
6. 一个集合由8个不同的元素组成，这个集合中含3个元素的子集有几个？
7. 一个集合由5个不同的元素组成，其中含1个、2个、3个、4个元素的子集共有几个？
8. 平面内有10条直线，其中没有两条互相平行，也没有三条相交于一点，一共有多少个交点？
9. 100件产品中有97件合格品，3件次品，从中任意抽取5件进行检查。

   (a) 抽出的5件都是合格品的抽法有多少种？

   (b) 抽出的5件恰好有2件是次品的抽法有多少种？

   (c) 抽出的5件至少有2件是次品的抽法有多少种？

10. 书架上有4本不同的数学书，5本不同的物理书，3本不同的化学书，全部竖起排成一排，如果不使同类的书分开，一共有多少种排法？
11. 4男4女围成一圈，男女相间排列，问有多少种坐法？
12. 有小麦、大麦品种各一个，在5块不同土质的试验田里引种试验，要求小麦品种有3块试验田，大麦品种有2块试验田，问有多少种不同的试验方法？
13. 一只小虫沿着方格纸（如右图）上的横线与竖线前进，从坐标原点到点 (m, r)。如果小虫走的是最短的路线，它有多少种不同的走法？



14. 某种电报号码是用 4 个数字（从 0 到 9）代表一个汉字的，问一共可以表示多少个不同的汉字?

15. 求证 ${}_{n}P_{r}={}_{n-1}P_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}\cdot{}_{r}P_{r}$ $(r\leqslant n-1)$。

16. 求证 $\frac{1}{r}\,{}_{n}C_{r-1}=\frac{1}{n+1}\,{}_{n+1}C_{r}$。

17. 从男同学 6 人和女同学 4 人中选出若干名排成一排:

(a) 其中选出男同学 4 人，女同学 2 人，有多少种排法?

(b) 其中选出男同学 6 人，女同学 2 人，且女同学必须挨着排，有多少种排法? 如果 2 名女同学必须挨着排在 6 名男同学正中间，有多少种排法?

(c) 10 名同学排成一排，且 4 名女同学必须相邻，有多少种排法? 如果 4 名女学互不相邻，有多少种排法?

18. 有 9 本不同的书分给甲、乙、丙 3 名同学:

(a) 每人各得 3 本，有多少种分法?

(b) 甲得 2 本，乙得 3 本，丙得 4 本，有多少种分法?

(c) 一个人得 2 本，一个人得 3 本，一个人得 4 本，有多少种分法?

(d) 分成三堆，每堆 3 本，有多少种分法

7 二项式定理

7.1 指数为自然数的二项式定理

我们已经知道

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

不难计算：

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

对于上面的**展开式**（expansion），我们发现，其系数具有一定的规律性，下面以 $(a+b)^5$ 的展开式加以说明：

$(a+b)^5$ 的积的展开式的每一项，是从

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

中每个括号里任取一个字母的乘积，因而积的各项都是 5 次式，即展开式应有下面形式的各项：

$$a^5,\ a^4b,\ a^3b^2,\ a^2b^3,\ ab^4,\ b^5。$$

运用组合的知识，就可以得出展开式各项的系数规律：

在上面 5 个括号中，都不取 b，共有 1 种，即 ${}_5C_0$ 种，所以 a^5 的系数是 ${}_5C_0$；

在 5 个括号中，恰有 1 个取 b，共有 ${}_5C_1$ 种，所以 a^4b 的系数是 ${}_5C_1$；

在 5 个括号中，恰有 2 个取 b，共有 ${}_5C_2$ 种，所以 a^3b^2 的系数是 ${}_5C_2$；

在 5 个括号中，恰有 3 个取 b，共有 ${}_5C_3$ 种，所以 a^2b^3 的系数是 ${}_5C_3$；

在 5 个括号中，恰有 4 个取 b，共有 ${}_5C_4$ 种，所以 ab^4 的系数是 ${}_5C_4$；

在 5 个括号中，5 个都有 b，共有 ${}_5C_5$ 种，所以 b^5 的系数是 ${}_5C_5$。

因此，$(a+b)^5$ 的展开式也可以写成：

$$(a+b)^5 = {}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5$$

一般地，有以下公式：

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n \quad (n \in \mathrm{N})$$

这个公式表示的定理叫做**二项式定理**（binomial theorem）。在公式的右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，其中的系数 ${}_nC_r$（$r=0, 1, 2, \cdots, n$）叫做**二项式系数**（binomial coefficient）。

观察上述公式可知，

(1) 每一项里 a 和 b 的指数的和，都等于二项式的幂指数。a 的指数从 n 依次递减 1 直到 0 为止，而 b 的指数则从 0 依次递增 1 直到 n 为止。由此可见，展开式是关于字母 a，b 的 n 次完全齐次式。

(2) 二项展开式共有 $(n+1)$ 项。因此，二项展开式的项数比二项式的幂指数多 1。

(3) 在二项展开式中，与首末两端等距离的两项的二项式系数相等。

各项的二项式系数如下：

首项是 ${}_nC_0$，第二项是 ${}_nC_1$，第三项是 ${}_nC_2$，……，第 $r+1$ 项是 ${}_nC_r$，末项是 ${}_nC_n$。

由于 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

$\therefore$ ${}_nC_0 = {}_nC_n$，${}_nC_1 = {}_nC_{n-1}$，${}_nC_2 = {}_nC_{n-2}$ ……。

在二项式定理中，如果设 $a=1$，$b=x$，则得到公式

$$(1+x)^n = 1 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_rx^r + \cdots + x^n$$

在遇到 n 是较小的正整数时，二项式系数也可直接用下表计算：

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1

表中的两端都是 1，而且除 1 以外的每一个数都等于它肩上两个数的和，即第 n 行除 1 以外的任一个数均满足等式

$$ {}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r} + {}_{n-1}C_{r-1} $$

对于上表，早在 1261 年中国宋朝数学家杨辉著《详解九章算术》一书中就用过。杨辉在注释中还提到，贾宪也用过上述办法。因此，中国称上述系数表为**杨辉三角**或**贾宪三角**。欧洲人认为是法国数学家**巴斯加**（Blaise Pascal，1623 – 1662）于 1653 年发现的，一些国家的数学书中称它为 Pascal′s Triangle。

例 1 展开 $(1+x)^5$。

解

$$\begin{aligned}(1+x)^5 &= 1+{}_5C_1x+{}_5C_2x^2+{}_5C_3x^3+{}_5C_4x^4+x^5\\ &= 1+5x+\frac{5\times4}{2\times1}x^2+\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}x^3+\frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}x^4+x^5\\ &= 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5\end{aligned}$$

例 2 展开 $(1-\frac{1}{x})^4$。

解

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{x})^4 &= 1+4(-\frac{1}{x})+6(-\frac{1}{x})^2+4(-\frac{1}{x})^3+(-\frac{1}{x})^4\\ &= 1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}\end{aligned}$$

例 3 写出 $(2x+3y)^4$ 的展开式。

解

$$\begin{aligned}(2x+3y)^4 &= (2x)^4+{}_4C_1(2x)^3(3y)+{}_4C_2(2x)^2(3y)^2+{}_4C_3(2x)(3y)^3+{}_4C_4(3y)^4\\ &= 16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4\end{aligned}$$

例 4 写出 $(3x-\frac{1}{3}y)^5$ 的展开式。

解

$$\begin{aligned}(3x-\frac{1}{3}y)^5 &= (3x)^5+5(3x)^4(-\frac{1}{3}y)+10(3x)^3(-\frac{1}{3}y)^2+10(3x)^2(-\frac{1}{3}y)^3\\ &\quad +5(3x)(-\frac{1}{3}y)4+(-\frac{1}{3}y)^5\\ &= 243x^5-135x^4y+30x^3y^2-\frac{10}{3}x^2y^3+\frac{5}{27}xy^4-\frac{1}{243}y^5\end{aligned}$$

习题 7a

展开下列各式：

1. $(1+2x)^4$　　2. $(x-3)^5$　　3. $(2+3x)^8$

4. $(3a+2b)^3$　　5. $(m+n)^7$　　6. $(2a-b)^6$

7. $(\frac{a^2}{3}+\frac{2}{a})^4$　　8. $(x-\frac{1}{x})^5$　　9. $(1+\sqrt{2})^5$

10. $(\sqrt{2}-1)^7$　　11. $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$

12. 计算 $(1+\sqrt{x})^5+(1-\sqrt{x})^5$。

13. 计算 $(1+x)^5-(1-x)^5$。

14. 计算 $(3x-1)^4+(3x+1)^4$。

我们已经知道

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n + {}_nC_1\, a^{n-1}b + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n b^n$$

引进下列符号

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

则二项式定理可简写为

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r}b^r$$

当 $a=1$，$b=x$ 时，

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, x^r$$

例 5 展开 $\left(3\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^4$。

解
$$\begin{aligned}\left(3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4 &= \left[3\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{3x}\right)\right]^4\\ &= (3\sqrt{x})^4\left(1+\frac{2}{3x}\right)^4\\ &= 81x^2\left[1+4\left(\frac{2}{3x}\right)+6\left(\frac{2}{3x}\right)^2+4\left(\frac{2}{3x}\right)^3+\left(\frac{2}{3x}\right)^4\right]\\ &= 81x^2+216x+216+\frac{96}{x}+\frac{16}{x^2}\end{aligned}$$

例 6 展开 $(1-x+x^2)^3$。

解 应用二项式定理，得
$$\begin{aligned}(1-x+x^2)^3 &= [(1-x)+x^2]^3\\ &= (1-x)^3+3(1-x)^2(x^2)+3(1-x)(x^2)^2+(x^2)^3\\ &= 1-3x+3x^2-x^3+3x^2-6x^3+3x^4+3x^4-3x^5+x^6\\ &= 1-3x+6x^2-7x^3+6x^4-3x^5+x^6\end{aligned}$$

习题 7b

应用二项式定理，写出下列各式的展开式 (1 – 4)：

1. $(x+\sqrt[3]{a})^3$
2. $(x-\sqrt[3]{a})^3$
3. $(2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^6$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^7$
5. 计算：$(x^2+x-1)^5$。
6. 计算：$(1-2x+x^2)^4$。
7. 计算：$(x+2x^2+x^3)^5$。
8. 按 x 的升幂排列，展开下列函数至 x^2 项：
   (a) $(1+x)(1-x)^9$　　(b) $(1+x)^2(1-5x)^{14}$
9. 若 $(1+px)^n = 1+12x+64x^2+\cdots$，求 n 及 p 的值。
10. 若 $(1+ax)^n = 1+20x+45a^2x^2+kx^3+\cdots$，求 n，a 及 k 的值 $(n>0)$。

7.2 二项展开式的通项公式

我们已经知道，

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$$

上式中的 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ 叫做二项展开式的通项公式。应当注意，这里的通项不是指展开式中的第 r 项，而是第 $r+1$ 项。用 T_{r+1} 表示二项展开式中第 $r+1$ 项，就有

$$T_{r+1} = {}_nC_r a^{n-r} b^r$$

例 7 试求 $(3x+2y)^8$ 展开式中的第 5 项。

解 $\because\ r+1=5$，$\therefore\ r=4$

$$\begin{aligned} T_5 &= {}_8C_4(3x)^{8-4}(2y)^4 \\ &= 70 \cdot 3^4x^4 \cdot 2^4y^4 \\ &= 90720x^4y^4 \end{aligned}$$

例 8 试求 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数。

解 展开式的通项是

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= {}_9C_r x^{9-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r \\ &= (-1)^r\, {}_9C_r x^{9-2r} \end{aligned}$$

x^3 的幂指数为 3，

$$\begin{aligned} \therefore\quad 9-2r &= 3 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

因此，x^3 的系数是

$$(-1)^3\, {}_9C_3 = -84$$

例 9 试求 $(x^3+2x)^6$ 展开式中中间项的系数。

解 此二项展开式里有 $6+1=7$ 项，$\therefore$ 中间项为第 4 项。

$$\therefore \quad T_4 = {}_6C_3(x^3)^{6-3}(2x)^3$$
$$= 160x^{12}$$

$\therefore$ 中间项的系数是 160

例 10 试求 $\left(x^2-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式中的常数项。

解 由通项公式得

$$T_{r+1} = {}_{10}C_r(x^2)^{10-r}\left(-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^r$$
$$= {}_{10}C_r\left(-\frac{1}{3}\right)^r x^{20-\frac{5}{2}r}$$

对常数项来说，x 的幂指数为 0，

$$\therefore \quad 20-\frac{5}{2}r = 0$$

得 $\quad r = 8$

$\therefore$ 展开式的第 9 项为常数项，其值是

$${}_{10}C_8\left(-\frac{1}{3}\right)^8 = {}_{10}C_2\left(\frac{1}{3^8}\right)$$
$$= \frac{45}{6561}$$

例 11 证明 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_k+\cdots+{}_nC_n=2^n$。

证 运用 $(1+x)^n$ 的展开式

$$(1+x)^n = {}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_kx^k+\cdots+{}_nC_n$$

设 $x=1$，则

$$2^n = {}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_k+\cdots+{}_nC_n$$

习题 7c

试求下列各题的通项（1 – 4）：

1. $(2+x)^{10}$

2. $(3-x)^6$

3. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^8$

4. $\left(2x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)^5$

试求下列各题的展开式中的第 6 项（5 – 6）：

5. $(3x-2y)^{10}$

6. $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^8$

7. 试求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ 展开式中 x^4 的系数。

8. 试求 $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^9$ 展开式中 $\dfrac{1}{x}$ 的系数。

9. 试求 $(2x+3y)^6$ 展开式中 x^2y^4 的系数。

10. 求 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{3}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ 的展开式中间的一项。

11. 求 $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^{15}$ 的展开式的中间二项。

12. 求 $\left(2x^3-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{10}$ 的常数项。

13. 求 $(1-x)(1+2x)^6$ 的展开式中含 x^3 的项。

14. 若二项式 $(1+ax)^5$ 的展开式中 x^4 的系数是 80，求 a 的值。

15. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式里第四项的系数与第十三项的系数相等，求展开式里不含 x 的项。

16. 证明 ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$（$n$ 是偶数）。

17. 若 $(3+2x)^6$ 的展开式中 x^4 的系数等于 $(k+3x)^6$ 的展开式中 x^4 的系数，求 k。

18. 用二项式定理证明 $(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除。

19. 证明 $(1+x)^{2n}$ 的展开式的中间一项是
$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{n!}(2x)^n。$$

20. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中的第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，求这两项的二项式系数。

7.3 指数为有理数的二项式定理

前面我们研究二项式定理时，限制指数 n 只是自然数。下面我们来研究当指数为有理数时，二项式定理是否适用。

我们知道，当 n 是自然数时，

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots+x^n\\ &= 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-}{3!}\cdots\\ &\quad+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots+x^n\end{aligned}$$

事实上，当$|x|<1$，n 为有理数时，上式也是成立的。即

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots$$

当且仅当$|x|<1$，n 为任意有理数。

如果 $|x|\geqslant 1$ 时，当 n 为有理数时，上式的右边无限延续，对于 x 的某一个值，它的值一般为无穷大或不定。但是，当 $|x|<1$ 时，无论 n 为任一有理数，这个无限延续的右边的值总是有限的定值。由于它的证明方法很繁杂，所以在此略而不证。

【注】 当 n 不是正整数时，

(1) $(1+x)^n$ 的展开式是无限延续的。

(2) 要展开 $(a+x)^n$，需把它写成 $a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ 的形式，且 $\left|\frac{x}{a}\right|<1$。

(3) 二项式系数不可写成 ${}_nC_1$，${}_nC_2$，…的形式，而需写成$\frac{n}{1!}$，$\frac{n(n-1)}{2!}$的形式。

例 12 试展开 $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 至第 4 项，并说出 x 的限制范围。

解 $$\begin{aligned}(1-x)^{\frac{3}{2}} &= 1-\frac{3}{2}x+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2!}x^2-\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{3!}x^3+\cdots\cdots\\ &= 1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots\cdots\end{aligned}$$

其中$|x|<1$。

例 13 试求出 $\left(\frac{1}{2}+x\right)^{-3}$ 的展开式的第 6 项，通项及 x^6 的系数，并指出 x 的限制范围。

解
$$\left(\frac{1}{2}+x\right)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}(1+2x)^{-3}$$
$$=8(1+2x)^{-3}$$
$$T_6=8\cdot\frac{(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)}{5!}(2x)^5$$
$$=-5376x^5$$

通项为 $8\cdot\frac{(-3)(-4)\cdots\cdots(-3-r+1)}{r!}(2x)^r$

$$=(-1)^r 2^{r+2}(r+1)(r+2)x^r$$

x^6 的系数为 $(-1)^6 2^8(6+1)(6+2)=14336$

x 的限制范围为 $|2x|<1$，即 $|x|<\frac{1}{2}$。

例 14 求 $\frac{1-x^2}{\sqrt{1+x}}$ 展开式的前 4 项。

解
$$\frac{1-x^2}{\sqrt{1+x}}=(1-x^2)(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=(1-x^2)\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)x+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{2!}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot-\frac{5}{2}}{3!}x^3\cdots\cdots\right]$$
$$=(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3\cdots\cdots\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3-x^2+\frac{1}{2}x^3\cdots\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+\frac{3}{16}x^3\cdots\cdots$$

例 15 按 x 的升幂排列，展开 $\frac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)}$ 至 x^3 项，并求 x 的限制范围。

解一
$$\frac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)}$$
$$=5(1-x)(1-3x)^{-1}(1+2x)^{-1}$$

$$= 5(1-x)\left[1+(-1)(-3x)+\frac{(-1)(-2)}{2!}(-3x)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-3x)^3\cdots\right]\left[1+(-1)(2x)+\frac{(-1)(-2)}{2!}(2x)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(2x)^3\cdots\right]$$

$$= 5(1-x)(1+3x+9x^2+27x^3+\cdots)(1-2x+4x^2-8x^3\cdots)$$

$$= 5(1-x)(1-2x+4x^2-8x^3+3x-6x^2+12x^3+9x^2-18x^3+27x^3\cdots)$$

$$= 5(1-x)(1+x+7x^2+13x^3\cdots)$$

$$= 5(1+x+7x^2+13x^3-x-x^2-7x^3\cdots)$$

$$= 5+30x^2+30x^3\cdots$$

x 的取值范围为 $\begin{cases}|3x|<1\\|2x|<1\end{cases}$，即 $|x|<\frac{1}{3}$

解二 $\frac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x}+\frac{B}{1+2x}$

$\therefore \quad 5-5x = A(1+2x)+B(1-3x)$

设 $x=\frac{1}{3}$，则 $\frac{10}{3}=\frac{5}{3}A$

$$A=2$$

设 $x=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{15}{2}=\frac{5}{2}B$

$$B=3$$

$\therefore \quad \frac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)}$

$$= \frac{2}{1-3x}+\frac{3}{1+2x}$$

$$= 2(1-3x)^{-1}+3(1+2x)^{-1}$$

$$= 2\left[1+(-1)(-3x)+\frac{(-1)(-2)}{2!}(-3x)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-3x)^3+\cdots\right]+3\left[1+(-1)(2x) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(2x)^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(2x)^3+\cdots\right]$$

$$= 2(1+3x+9x^2+27x^3+\cdots)+3(1-2x+4x^2-8x^3\cdots)$$

$$= 5+30x^2+30x^3+\cdots$$

x 的取值范围为 $\begin{cases}|3x|<1\\|2x|<1\end{cases}$，即 $|x|<\frac{1}{3}$

习题 7d

试展开下列各题至第 4 项，并写出 x 的限制范围（1～8）：

1. $(1+2x)^{-2}$
2. $(1-x^2)^{-2}$
3. $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$
4. $(3+x)^{-1}$
5. $(5-2x)^{\frac{5}{3}}$
6. $\sqrt[3]{1+x}$
7. $\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$
8. $(x^2-x)^{-6}$
9. $\dfrac{x+2}{x-1}$
10. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
11. 试计算 $(1-2x)^{-3}$ 的展开式中 x^{10} 的系数。
12. 试求 $(a^2-4x^2)^{-\frac{5}{2}}$ 的展开式中的第 $(r+1)$ 项。
13. 以部分分式展开 $\dfrac{3}{(1-2x)(2-x)}$ 至第 3 项。
14. 按 x 的升幂排列，展开 $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ 至 x^2 项。
15. 按 x 的升幂排列，展开 $\dfrac{1}{(1-ax)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ 得第一项为 $-3x^2$，

    (a) 求 a 的值；

    (b) 求此展开式的第二项。

7.4 二项式定理在近似计算中的应用

应用二项式定理，可以比较简捷地计算某些数的乘幂的近似值，使它达到一定的精确度。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^n\\
&= a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \qquad \left(\left|\frac{b}{a}\right|<1\right)\\
&= a^n\left[1+n\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}\left(\frac{b}{a}\right)^3+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

二项展开式的各项依 $\dfrac{b}{a}$ 的升幂而逐项变小，如果 $\dfrac{b}{a}$ 非常小时，根据题中的精确要求，从某项起以后的各项都可以删去。

例 16 计算 $(1.02)^7$ 的近似值（准确至 0.01）。

解

$$\begin{aligned}(1.02)^7 &= (1+0.02)^7\\ &= 1+7\,(0.02)+\frac{7\times 6}{1\times 2}\,(0.02)^2+\frac{7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3}\,(0.02)^3+\cdots\\ &= 1+0.14+0.0084+0.00028+\cdots\\ &\approx 1.15\end{aligned}$$

例 17 计算 $(5.04)^6$ 的近似值（准确至 0.01）。

解

$$\begin{aligned}&(5.04)^6\\ &= (5+0.04)^6\\ &= 5^6\,(1+0.008)^6\\ &= 5^6\left[1+6\,(0.008)+\frac{6\times 5}{1\times 2}\,(0.008)^2+\frac{6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3}\,(0.008)^3+\cdots\right]\\ &= 5^6\,(1+0.048+0.00096+0.00001024+\cdots)\\ &\approx 16390.16\end{aligned}$$

例 18 求 $\sqrt{10}$ 的近似值。

解

$$\begin{aligned}&\sqrt{10}\\ &= 10^{\frac{1}{2}}\\ &= (1+9)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left[9\left(1+\frac{1}{9}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 3\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\times 2}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\times 2\times 3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\right]\\ &= 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{216}+\frac{1}{3888}+\cdots\\ &\approx 3.1623\end{aligned}$$

例 19 当 $|x|$ 很小时，试写出$(1+x)^{-\frac{1}{2}}$展开式的前四项，据此求$\sqrt{\frac{5}{6}}$精确到小数第 3 位的值。

解

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\times 2}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\times 2\times 3}x^3+\cdots$$

$$\approx 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{5}{6}} &= \left(\frac{6}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= (1+0.2)^{-\frac{1}{2}}\\ &= 1-\frac{1}{2}\times 0.2+\frac{3}{8}\times 0.04-\frac{5}{16}\times 0.008\\ &= 0.9125\\ &\simeq 0.913\end{aligned}$$

习题 7e

1. 应用二项式定理计算下列各题，准确至小数 3 位：

   (a) $(0.9995)^5$　　(b) $(2.0002)^{12}$

2. 计算 1000 的五次方根，精确小数第 3 位。
3. 展开$(1+3x)^{\frac{1}{3}}$至首四项，据此，求 $\sqrt[3]{1.03}$的值准确至小数四位。
4. 按 x 的升幂展开 $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 至 x^2 项，据此，求 $\sqrt{0.995}$ 的值准确至小数三位。
5. 展开 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$的首四项。若 $x=0.08$，证明 $(1.08)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}\sqrt{3}$。据此，

   求 $\sqrt{3}$ 的近似值。

总复习题 7

1. 计算下各题 (1 ~ 4)：

   (a) $(x+a_1)(x+a_2)$　　(b) $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)$

   (c) $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)$　　(d) $(x-1)(x+3)(x-5)(x+7)$

2. 在乘积$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$中，试求$x^3$的系数。

3. 展开下列各式

(a) $(1-2x)^5$　　　　(b) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^4$

4. 展开下列各式的首4项，并写出x的取值范围：

(a) $\sqrt{1+2x}$　　　　(b) $\frac{1+x}{1-2x}$　　　　(c) $(1+x)^{-1}+(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$

5. 展开 $(2+x)^5-(2-x)^5$，并化简。

6. 按x的升幂展开 $(1+x+x^2)^6$ 的首三项。

7. 试求 $(x-\frac{8}{x^2})^8$ 展开式中 $\frac{1}{x^4}$ 的系数。

8. 试求 $(2x^3-\frac{1}{3x})^8$ 展开式中不含x的项。

9. 试求 $(3x^2-\frac{5}{x})^9$ 展开式中x^6的系数。

10. 试求展开 $(1-\frac{1}{2x})^{10}$ 时的中间项。

11. 试求展开 $(1+\frac{x^2}{2})^{15}$ 时的中间的两项。

12. 求 $(1-3x)^5(1+2x)^6$ 的展开式中x^2的系数。

13. 若 $\left(x+\frac{a}{y}\right)^n=x^6-\frac{3x^5}{y}+\frac{15x^4}{4y^2}-\cdots$，求$a$及$n$的值。

14. 设 $(a+b)^n$ 的展开式中第3，4，5项分别为168，-70，$\frac{35}{2}$，试求a，b，n的值。

15. 已知 $(1+x)^n$ 展开式的第二项、第三项、第四项系数成等差数列，求指数n。

16. 已知 $\log 2=0.3010$，计算 $(1+\log 0.5)^5$ 展开式中第三项的值。

17. 写出 $(\mathrm{p}x+\frac{q}{x})^n$ 展开式中的第四项，

(a) 若此项为不含x的项，求n的值。

(b) 若第四项等于160，p及q为正数且$p-q=1$，从 (a) 中n的值，求p及q的值。

18. 将$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1-2x)}$化为部分分式。据之，展开$f(x)$至$x^2$的项。

19. 若 $(x+ky)^5$ 的展开式中，x^3的系数为$250y^2$，求k的值。据之，求 $(1.05)^5$ 的值准确至小数四位。

20. (a) 证明 $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=1+x+\dfrac{x^{2}}{2}$，若 x 值非常小，以至更高的 x 的幂可以被删除。

(b) 据此，以 $x=\dfrac{1}{9}$，证明 $\sqrt{5}\simeq\dfrac{181}{81}$。

*21. 用二项式定理求 89^{10} 除以 88 的余数。

*22. 用二项式定理证明 $55^{55}+9$ 能被 8 整除。

8 统计学

8.1 资料的整理

统计学（statistics）的任务是研究如何收集、整理和分析**数据**（data），并依此作出相应的结论。本节是复习初中学过的整理数据的方法。

● 频数分配（frequency distribution）

为了研究某种零件的质量（克）分布情况，我们任意取了 100 个零件，它们的质量分别为

1.36	1.49	1.43	1.41	1.37	1.40	1.32	1.42	1.47	1.39
1.41	1.36	1.40	1.34	1.42	1.42	1.45	1.35	1.42	1.39
1.44	1.42	1.39	1.42	1.42	1.30	1.34	1.42	1.37	1.36
1.37	1.34	1.37	1.37	1.44	1.45	1.32	1.48	1.40	1.45
1.39	1.46	1.39	1.53	1.36	1.48	1.40	1.39	1.38	1.40
1.36	1.45	1.50	1.43	1.38	1.43	1.41	1.48	1.39	1.45
1.37	1.37	1.39	1.45	1.31	1.41	1.44	1.44	1.42	1.47
1.35	1.36	1.39	1.40	1.38	1.35	1.38	1.43	1.42	1.42
1.42	1.40	1.41	1.37	1.46	1.36	1.37	1.27	1.37	1.38
1.42	1.34	1.43	1.42	1.41	1.41	1.44	1.48	1.55	1.39

上面这 100 个数据有点杂乱，它们的最小值为 1.27，最大值为 1.55，

$$\text{全距} = \text{最大值} - \text{最小值} = 1.55 - 1.27 = 0.28$$

将这批数据分成 10 组，组距 0.03，取起点为 1.27，得出各组：1.27 – 1.29，1.30 – 1.32，1.33 – 1.35，1.36 – 1.38 ……。1.27 – 1.29 表示 $1.265 \leqslant x < 1.295$，1.30 – 1.32 表示 $1.295 \leqslant x < 1.325$，以此类推。这样就可以列成频数分配表

(表 8－1) 了。

频数分配表是将数据适当分组，并顺着其大小，列出各组数据出现次数（称为频数）的统计表。

质　量(克)	组　界	画　　记	频　数
1.27 － 1.29	1.265 － 1.295	|	1
1.30 － 1.32	1.295 － 1.325	| | | |	4
1.33 － 1.35	1.325 － 1.355	卌 ||	7
1.36 － 1.38	1.344 － 1.385	卌卌卌卌 ||	22
1.39 － 1.41	1.385 － 1.415	卌卌卌卌 | | | |	24
1.42 － 1.44	1.415 － 1.445	卌卌卌卌 | | | |	24
1.45 － 1.47	1.445 － 1.475	卌卌	10
1.48 － 1.50	1.475 － 1.505	卌 |	6
1.51 － 1.53	1.505 － 1.535	|	1
1.54 － 1.56	1.535 － 1.565	|	1
总　　和			100

表 8－1　100 个零件的质量大小

直方图 (histogram) 是用一排连续的长方形来表示频数分配的图形。各长方形是以各组组距的大小为底，以其面积代表各组的频数。制作直方图，是以各组的组界来定标位的。由表 8－1，可以画出 100 个零件的质量分布情况的直方图，如图 8－1 所示。

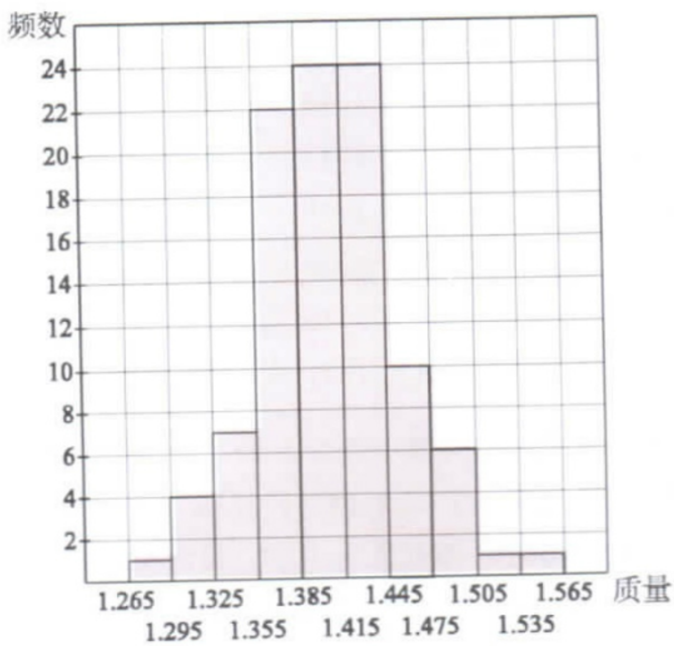


图 8－1 100 个零件质量的直方图

频数多边形（frequency polygon）是表示频数分配的线形图，其作法是：以各组的组中点为横坐标，频数为纵坐标，标出各点，然后顺序用折线把各点连接起来。图 8－2 是 100 个零件质量大小的频数多边形。

质　量(克)	组中点	频　数
1.27 － 1.29	1.28	1
1.30 － 1.32	1.31	4
1.33 － 1.35	1.34	7
1.36 － 1.38	1.37	22
1.39 － 1.41	1.40	24
1.42 － 1.44	1.43	24
1.45 － 1.47	1.46	10
1.48 － 1.50	1.49	6
1.51 － 1.53	1.52	1
1.54 － 1.56	1.55	1
总　　和		100

表 8－2　100 个零件质量大小的分配表

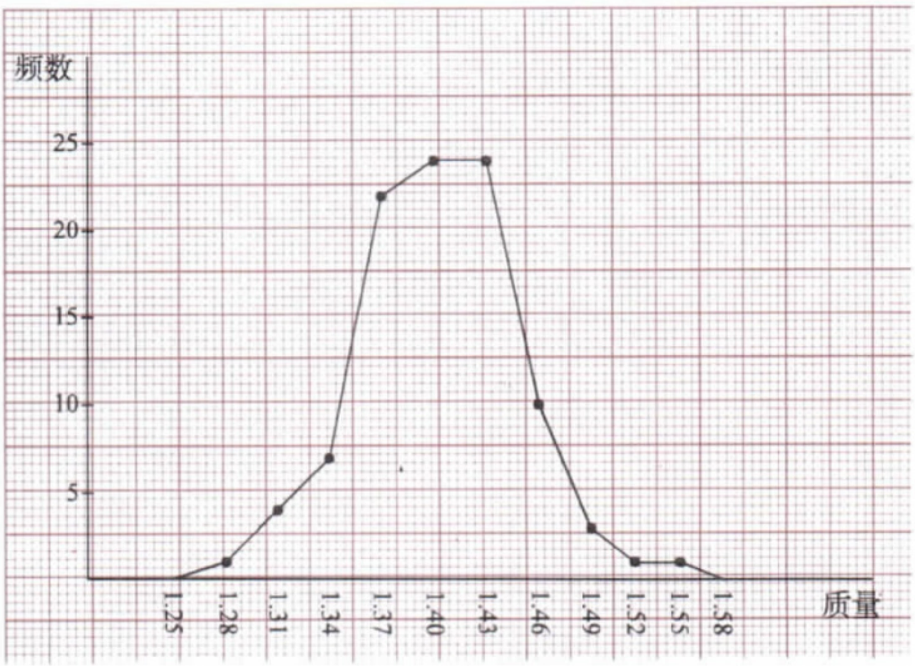


图 8－2　100 个零件质量的频数多边形

例 1 为了研究某一年龄儿童的身高分布，收集了 100 个儿童的身高数据，其频数分配表为

身高（cm）	频数
76 - 78	1
78 - 80	2
80 - 82	5
82 - 84	15
84 - 86	35
86 - 88	28
88 - 90	12
90 - 92	2
总和	100

试据此画出直方图与频数多边形。

解 画出直方图后，将各长方形上底的中点连接起来，就是频数多边形。

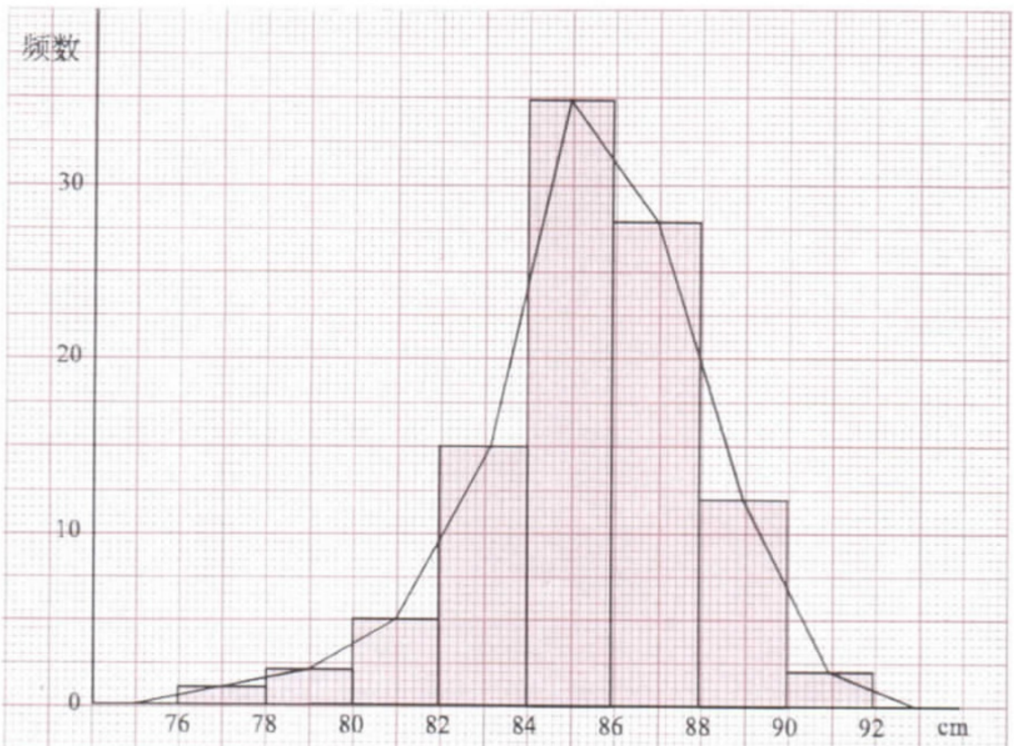


图 8-3 儿童身高的直方图和频数多边形

【注】第一组 76 - 78 表示 $76 \leqslant x < 78$，第二组 78 - 80 表示 $78 \leqslant x < 80$，以此类推。

例 2 对 14 到 15 岁男女学生的学习水平进行调查，能反映他们学习水平的主要是各科学习的综合成绩，调查得到的数据记录如下：

50 名男生各科的综合成绩

79	82	71	70	83	65	70	75	81	89
85	90	80	74	72	85	82	91	82	84
65	75	71	55	70	79	92	55	56	60
92	84	77	88	80	67	79	70	58	62
62	54	90	82	81	98	68	98	82	80

50 名女生各科的综合成绩

80	84	72	71	85	62	73	78	80	90
92	83	81	78	74	70	91	95	86	87
68	89	67	60	75	93	59	63	63	62
94	96	81	89	82	65	77	79	68	60
58	86	87	74	92	94	79	97	88	57

试列出频数分配表，并画出直方图和频数多边形。

解 由于男女学生各科的综合成绩都在 51 分和 100 分之间，可把两批数据各分成 5 组，组距为 10（分），列出频数分配表，然后根据频数分配表画出直方图和频数多边形（图 8－4，图 8－5）。

分　数	男生频数	女生频数
51 － 60	6	5
61 － 70	10	8
71 － 80	13	14
81 － 90	16	14
91 － 100	5	9
总　和	50	50

表 8－3　男生和女生综合成绩的频数分配表

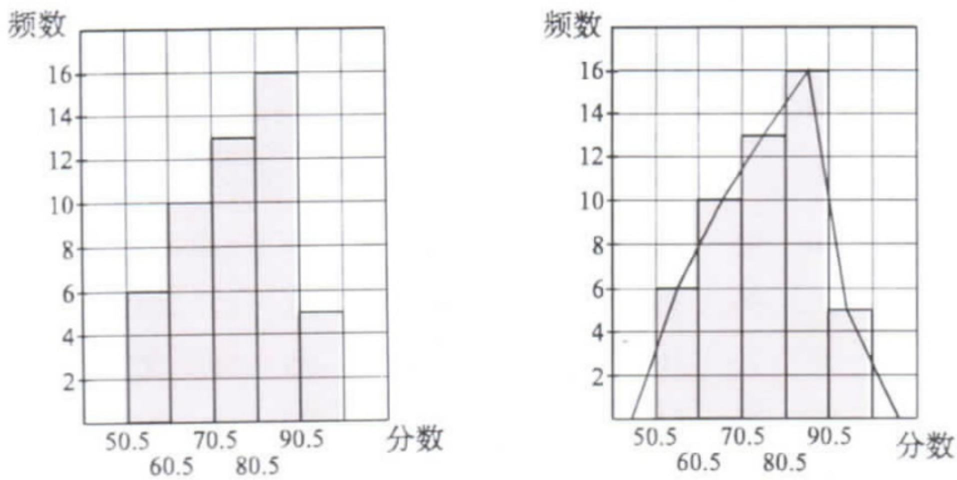


图 8－4　50名男生综合成绩的直方图和频数多边形

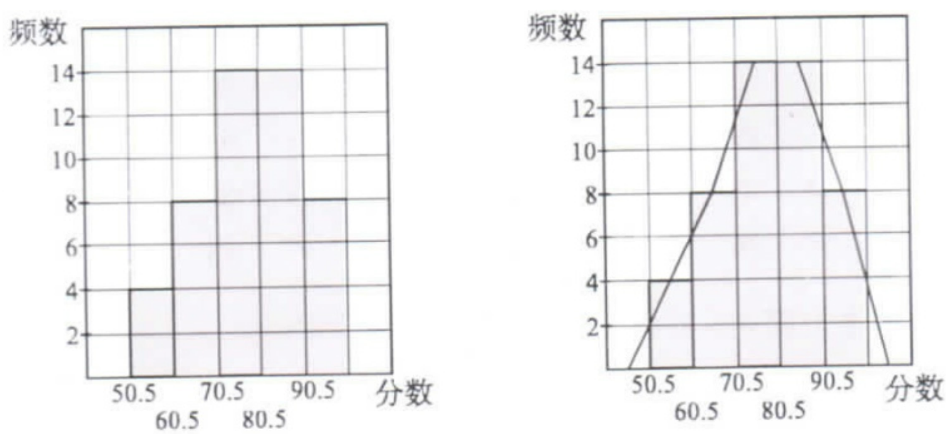


图 8－5　50名女生综合成绩的直方图和频数多边形

对比图 8－4 与图 8－5，可以认为女生的学习水平要比男生高些。

习题 8a

1. 为了考察某种大麦穗长的分布情况，在一块麦地里抽取了 100 个穗，量得长度如下（单位：cm）：

6.5	6.4	6.7	5.8	5.9	5.9	5.2	4.0	5.4	4.6
5.8	5.5	6.0	6.5	5.1	6.5	5.3	5.9	5.5	5.8
6.2	5.4	5.0	5.0	6.8	6.0	5.0	5.7	6.0	5.5
6.8	6.0	6.3	5.5	5.0	6.3	5.2	6.0	7.0	6.4
6.4	5.8	5.9	5.7	6.8	6.6	6.0	6.4	5.7	7.4
6.0	5.4	6.5	6.0	6.8	5.8	6.3	6.0	6.3	5.6
5.3	6.4	5.7	6.7	6.2	5.6	6.0	6.7	6.7	6.0

5.5	6.2	6.1	5.3	6.2	6.8	6.6	4.7	5.7	5.7
5.8	5.3	7.0	6.0	6.0	5.9	5.4	6.0	5.2	6.0
6.3	5.7	6.8	6.1	4.5	5.6	6.3	6.0	5.8	6.3

把这批数据分成12组，组距为0.3cm，列出频数分配表，并画出直方图和频数多边形。

2. 某公司对前来求职的90人进行了能力测试，结果如下：

得分	8	7	6	5	4	3
人数	5	10	23	30	16	6

根据上表画出直方图和频数多边形。

3. 某高中文商班有学生45人，在某一次的测验中，所考获的数学科成绩如下：

34	60	53	15	70	80	63	66	85
25	51	54	78	51	72	58	63	48
47	73	42	41	58	54	34	50	68
63	56	53	57	65	20	52	64	79
67	47	60	42	63	35	46	58	69

(a) 全距为何?

(b) 试将以上成绩分成10组，并作一个频数分配表。

(c) 作一直方图及频数多边形图。

4. 有100个汽车轮胎其寿命的频数分配如下表所示，试画出其直方图及频数多边形。

轮胎寿命（万公里）	频数
0.10 – 0.29	3
0.30 – 0.49	13
0.50 – 0.69	17
0.70 – 0.89	32
0.90 – 1.09	23
1.10 – 1.29	7
1.30 – 1.49	5
	100

5. 某商科班毕业生的工作起始月薪之频数分配如下表所示：

起始月薪（零吉）	毕业生人数
401 - 450	4
451 - 500	3
501 - 550	7
551 - 600	5
601 - 650	4
651 - 700	3
701 - 750	2
751 - 800	3
801 - 850	1
851 - 900	3
	35

试根据上表 (a) 作一直方图；(b) 作一频数多边形图。

● 累积频数分配（cumulative frequency distribution）

在例 1 的 100 个儿童身高数据频数分配表的基础上，可以列出累积频数分配表（表 8 – 4）。

身高区间(cm)	频数	身高低于(cm)	累积频数
76 - 78	1	78	1
78 - 80	2	80	3
80 - 82	5	82	8
82 - 84	15	84	23
84 - 86	35	86	58
86 - 88	28	88	86
88 - 90	12	90	98
90 - 92	2	92	100

表 8 – 4

以数据分组的各组上组界为横坐标，对应的累积频数为纵坐标，标出各点，后顺序用直线连接各点，所得到的线形图称为**累积频数多边形**（cumulative frequency polygon）。

将累积频数多边形上最高点到横轴的垂线分成 100 等份，就可得到累积频数百分率。

由表 8－4 画出的累积频数多边形是图 8－6。

从图 8－6 上容易看出：大约有 40%的儿童身高在 85cm 以下，大约有 29%的儿童身高 87cm 以上，……

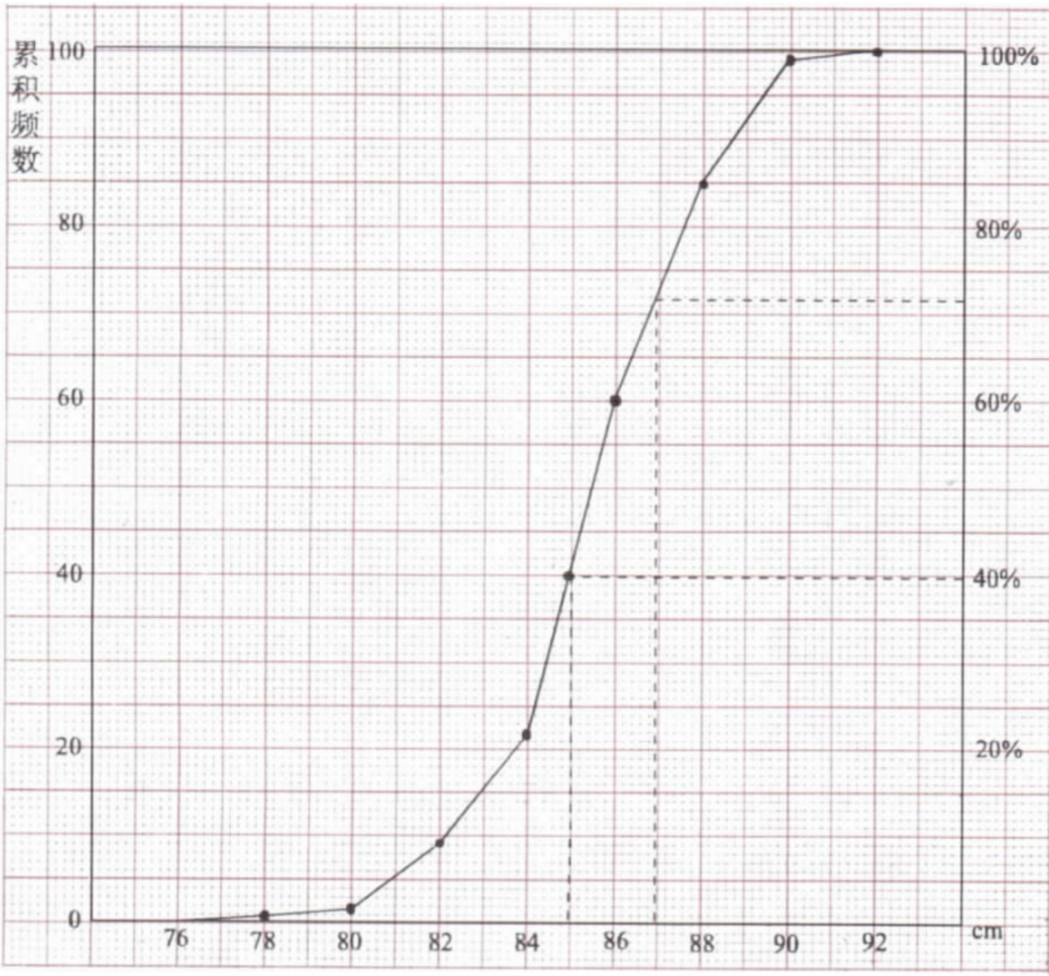


图 8－6　100 个儿童身高的累积频数多边形

例 3　对例 2 中 50 名男生各科的综合成绩，

(a) 作累积频数分配表并画累积频数多边形；

(b) 一男生得 64 分，问他大约排在第几名？

(c) 大约一半的男生得分超过多少分？

解　(a)

分　数	男生频数	分数低于	累积频数
51 - 60	6	60.5	6
61 - 70	10	70.5	16
71 - 80	13	80.5	29
81 - 90	16	90.5	45
91 - 100	5	100.5	50

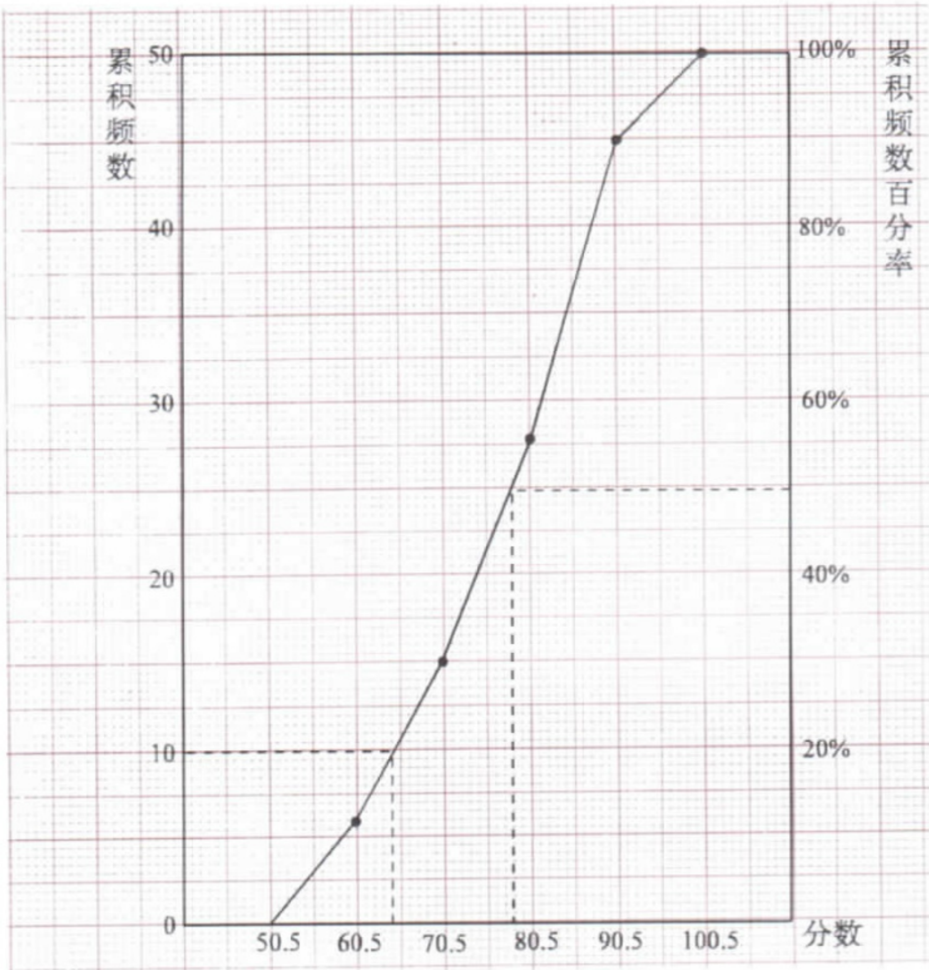


图 8－7　50 名男生综合成绩的累积频数多边形

(b) 从图 8－7 可见，64 分对应的累积频数是 10，由于得分排名次通常从高分往低分排，所以他大约排在第 40 名左右。

(c) 从图 8－7 可见，大约 50%的男生得分会超过 78 分。

习题 8b

1. 下表是 90 个婴儿的体重（千克）分布，试列出累积频数分配表并画出累积频数多边形。

体重	1.5 – 2.0	2.0 – 2.5	2.5 – 3.0	3.0 – 3.5	3.5 – 4.0	4.0 – 4.5	4.5 – 5.0
频数	2	4	13	32	28	10	1

2. 根据下列 50 名女生各科综合成绩的频数分配表，

分 数	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
频 数	5	8	14	14	9

(a) 列出累积频数分配表，画出累积频数多边形；

(b) 一女生的各科综合成绩为 68 分，问她大约能排在多少名次上？

(c) 得分超过 86 分的女生大约占百分之几？

3. 测得 40 头奶牛的牛奶中脂肪含量（%）为

3.45	3.56	3.68	3.66	3.70	3.76	3.75	3.93
3.78	3.80	3.94	3.88	3.86	3.88	3.94	4.14
3.93	3.90	3.96	4.03	4.03	3.98	4.00	3.88
4.08	4.10	4.01	3.60	3.91	3.94	4.01	3.69
3.72	3.75	3.83	4.12	3.99	3.70	3.61	3.87

选择组距为 0.1%，建立累积频数分配表并画累积频数多边形。

4. 某校准备录取 40 名新生，应试者 100 人，考生成绩分布如下：

组 限	10 | 19	20 | 29	30 | 39	40 | 49	50 | 59	60 | 69	70 | 79	80 | 89
人 数	5	12	14	21	18	16	8	6

(a) 作累积频数表；

(b) 作累积频数多边形；

(c) 求最低取录分数；

(d) 分数超过 75 分的谓之高分，求获取高分的人数。

8.2 集中趋势

集中趋势（central tendency）是指我们所考虑的全部数据的分布中心。最常见的量度集中趋势的值有**平均数**（mean）、**中位数**（mediam）和**众数**（mode）这三种。

● 平均数

（一）平均数

平均数也称**算术平均数**（arithmetic mean），对于 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，其平均数

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\\ &= \frac{1}{n}\sum x\end{aligned}$$

若所给的数据 x_1，x_2，…，x_n 各项对应的频数为 f_1，f_2，…，f_n，则其平均数为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}\\ &= \frac{\sum fx}{\sum f}\end{aligned}$$

（二）加权平均数

衡量各数值彼此之间轻重关系的量称为**权数**（weight）。**加权平均数**（weighted mean）是将各数值乘以其对应的权数，然后把各项乘积的总和除以总权数所得的商。即

$$\begin{aligned}\text{加权平均数} &= \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\\ &= \frac{\sum wx}{\sum w}\end{aligned}$$

其中 x 为数值，w 为 x 的权数。

例 4 某班的 10 位同学在一次数学测验中的成绩为

86　91　100　72　93　89　90　85　75　95

他们的平均成绩是多少？

解 $\bar{x} = \dfrac{86+91+100+\cdots+95}{10} = 87.6$

例 5 某工人在 30 天中加工一种零件的日产量，有 2 天是 11 件，3 天是 12 件，6 天是 13 件，8 天是 14 件，7 天是 15 件，3 天是 16 件，1 天是 17 件。计算他 30 天中的平均日产量。

解 如记零件的日产量为 x，对应的天数为 f，我们有

x	11	12	13	14	15	16	17
f	2	3	6	8	7	3	1

该工人的平均日产量(件)是

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum fx}{\sum f} \\ &= \frac{2\times 11+3\times 12+\cdots+1\times 17}{2+3+\cdots+1} \\ &= 13.93\end{aligned}$$

例 6 对于例 1 中 100 个儿童身高数据的频数分配表，计算他们的平均身高。

解 取各组的组中值作为 x，相应的频数为 f。

身高（cm）	组中值 x	频数(权数) f	xf
76 – 78	77	1	77
78 – 80	79	2	158
80 – 82	81	5	405
82 – 84	83	15	1245
84 – 86	85	35	2975
86 – 88	87	28	2436
88 – 90	89	12	1068
90 – 92	91	2	182
总　和		100	8546

这 100 个儿童的平均身高（cm）是

$$\begin{aligned}\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} &= \frac{8546}{100} \\ &= 85.46\end{aligned}$$

例 7 某学生各科的分数及各科的上课节数如下：

科目	华文	英文	数学	物理	化学
分数	86	80	90	75	72
节数	6	7	9	8	8

以节数为权数，求该生成绩的加权平均数。

解 该生成绩的加权平均数为

$$\frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{6\times 86+7\times 80+9\times 90+8\times 75+8\times 72}{6+7+9+8+8}$$

$$= 80.58$$

习题 8c

1. 从一批机器零件中取出 20 件，称得它们的质量如下（单位：千克）：

   210 208 200 205 202 218 206 214 215 207

   195 207 218 192 202 216 185 227 187 215

   计算它们的平均质量。

2. 把 6 枚均匀硬币一起任意掷 100 次，得到“正面向上”枚数及相应的频数如下：

   正面向上枚数：0 1 2 3 4 5 6

   频　　　　数：2 10 24 35 22 6 1

   计算每次得到“正面向上”的平均枚数。

3. 一个班级 66 名学生的一次考试成绩的频数分配表为

分组（单位：分）	频　数
30 - 39	6
40 - 49	12
50 - 59	15
60 - 69	15
70 - 79	8
80 - 89	6
90 - 99	4
总　和	66

计算他们的平均成绩。

4. 栽种 62 棵幼树，10 年后测得树高 (cm) 如下：

树高：	100 – 120	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200	200 – 220
棵数：	6	10	22	15	8	1

计算这些树的平均高度。

5. 某生学年成绩如下：

科目	华文	英文	数学	物理	化学	生物
节数	6	6	8	5	5	5
分数	75	65	82	66	73	87

(a) 求算术平均数；

(b) 求加权平均数。

中位数

将一组数据按从大到小或从小到大的顺序排列，排在正中的那个数或排在正中两个数的平均数称为这组数据的中位数。

由于在获取数据时，可能受偶然因素干扰而得到个别偏大或偏小的数据，用中位数描述一组数据的集中趋势，可以消除这种“异常值”的影响。

如果是由分组资料求中位数，应先利用累积频数找到中位数所在的那组数据（中位数组），然后假定中位数组中各数据是均匀分布在全组中，根据中位数在中位数组中的排列序号进而算出它来。更具体地说，设

N 表示全部数据的个数 ($\sum f$)，

L 表示中位数组的下组界，

C 表示中位数组的组距，

f_m 表示中位数组的频数，

F 表示中位数组前的累积频数。

那么全部数据的中位数 $$M = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - F}{f_m}\right) C$$

例 8 10名工人某天生产同一零件，生产的件数是

15　17　14　10　15　19　17　16　14　12

求这一天 10 名工人生产的零件的中位数。

解 将 10 个数据按从小到大的顺序排列，得到

10　12　14　14　15　15　16　17　17　19

排在正中的两个数都是 15，它们的平均数是 15，所以这组数据的中位数 = 15。

例 9 某班 49 名学生右眼视力的检查结果为

视力：	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5
人数：	2	3	4	3	4	9	9	10	5

求他们右眼视力的中位数。

解 上面右眼视力实际上有 49 个数据，显然可看成是按从小到大的顺序排列的，其中第 25 个数据处于正中，就是这组数据的中位数。所以

$$M = 0.8$$

例 10 栽种 62 棵幼树，10 年后测得树高（cm）如下：

树高（cm）	100 – 120	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200	200 – 220
频　数	6	10	22	15	8	1

计算这 62 棵树高的中位数。

解 先作累积频数分配表如下

树高分组（cm）	频　数	累积频数
100 – 120	6	6
120 – 140	10	16
140 – 160	22	38
160 – 180	15	53
180 – 200	8	61
200 – 220	1	62

由累积频数易见，中位数组是 140 – 160，因为

$N = 62$， $C = 20$（组距），$L = 140$，$f_m = 22$，$F = 16$

$$\therefore \quad M = 140 + \frac{\frac{62}{2} - 16}{22} \times 20 \approx 153.64\ (\text{cm})$$

【注】 如画出累积频数多边形（图 8 – 8），可从图上查出中位数为 154（cm）。

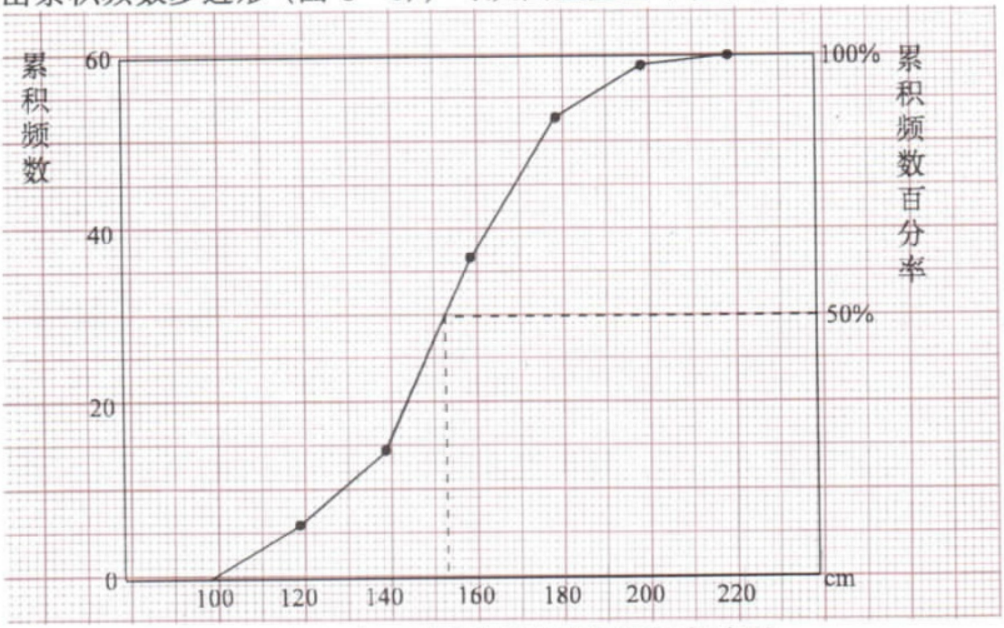


图 8 – 8　例 10 中 62 棵树高的累积频数多边形

习题 8d

1. 在一次体操比赛中，由 4 名裁判员同时给运动员完成的动作打分，并规定将 4 个分数的中位数作为运动员的得分。已知 4 名裁判员给某运动员的打分为 9.5 9.4，9.8，9.4；求该运动员的得分。
2. 同龄 15 个男孩的体重（千克）如下：

   36　35　33　37　36　35　42　40　38　38　39　40　41　38　37

   (a) 直接求上述 15 个数据的中位数；

   (b) 把上面的数据按 33 – 35，35 – 37，……，41 – 43 分组后求中位数。
3. 下表是一公司成员收入情况（单位：RM）：

收入(RM)	1000 – 2000	2000 – 3000	3000 – 4000	4000 – 5000	5000 – 6000
人　数	11	17	20	10	2

   (a) 求收入的中位数；

   (b) 画出累积频数多边形，从图上查出中位数与 (a) 的结果作比较。

● 众数

在一组数据中，出现次数最多的数据（可能不止一个）称为这组数据的众数。

分组资料的众数，可由直方图求得。其方法如下：

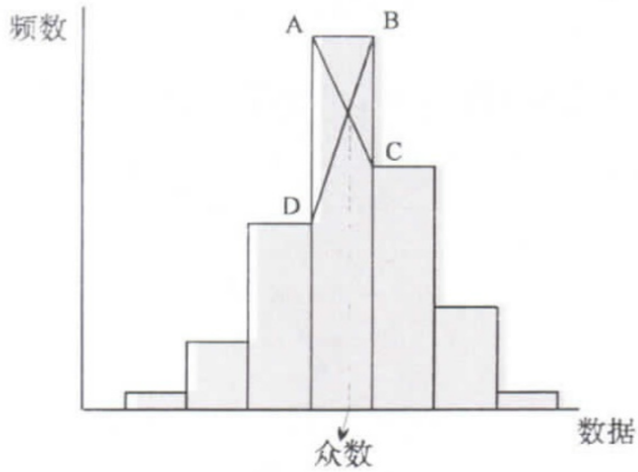


图 8－9

设有一直方图如图 8－9，最高的长方形为**众数组**（modal class），而众数则为 AC 与 BD 的交点。

例 11 在一次英语口试中，20 名学生的得分如下：

70	80	100	60	80	70	90	50	80	70
80	70	90	80	90	80	70	90	60	80

求学生得分的众数。

解 在 20 个数据中，80 出现了 7 次，是出现次数最多的，所以这组数据的众数为 80。

例 12 求下列数据的众数：

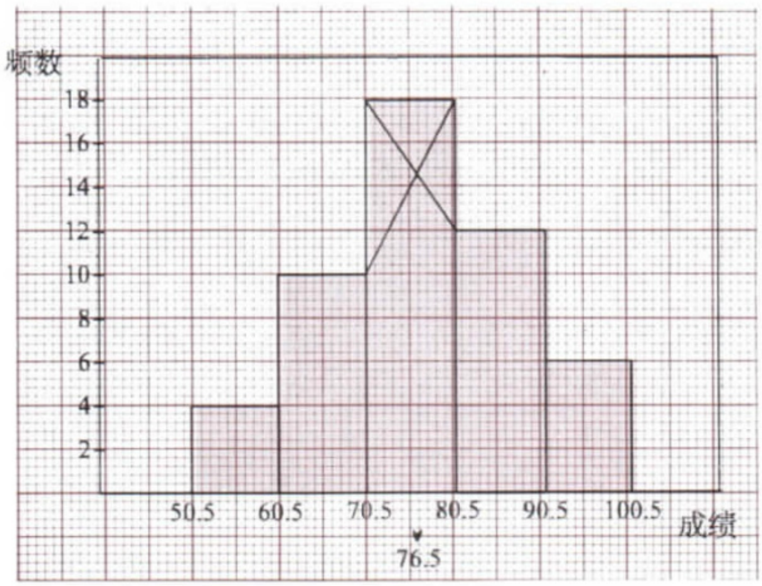
3	6	5	15	5	8	7	8	1	6
5	3	9	14	5	3	5	8	2	2
2	8	1	8	7	2	10	10	6	1

解 众数是 5 与 8。

例 13 下面是高中某班在一次数学测验中成绩的频数分配表，求学生成绩的众数。

成　绩	频　数
51 - 60	4
61 - 70	10
71 - 80	18
81 - 90	12
91 - 100	6
总　和	50

解　　频数最大的是 18，众数组是 71 - 80，画出其直方图如下：



由图中，得众数为 76.5。

习题 8e

1. 求下面各组数据的众数：
   (a) 3　4　3　2　4　5　5　5　4　4
   (b) 7　6　8　8　5　6　6　9　8　5
   (c) 1.0　1.1　1.0　0.9　0.8　1.2　1.0　0.9　1.1　1.0

2. 在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的 17 名运动员的成绩如下表所示：

成　绩 (单位：米)	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
人　数	2	3	2	3	4	1	1	1

分别求这些运动员成绩的平均数、中位数和众数。

3. 在某数学竞赛中，参赛者所获取分数与得分人数的分组资料如下：

分数	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59
人数	20	60	80	40	10

求其众数。

4. 参加一次考试的 54 名考生中，有 15 名来自城市，39 名来自农村，考试成绩的频数分配表为

考分分组	城市考生频数	农村考生频数
12 – 23	0	1
23 – 34	0	0
34 – 45	0	5
45 – 56	1	6
56 – 67	3	5
67 – 78	4	13
78 – 89	6	4
89 – 100	1	5
总　和	15	39

(a) 求城市考生及农村考生成绩的中位数；

(b) 各别画出城市考生及农村考生的直方图，据此，求它们各别的众数。

8.3 离中趋势

离中趋势 (measures of dispersion) 是指所考虑的数据在中心点周围的离散程度，量度离中趋势的值有**全距** (range)、**四分位差** (quartile deviation)、**平均差** (mean deviation)、**标准差**(standard deviation) 和**方差** (variance) 等。

● 全距

所考虑的数据中最大值与最小值的差称为全距。

当给出的是数据频数分配表时，最后一组（最高组）的上限与第一组（最低组）的下限之差就作为全距。

例 14 下面是某中学同年龄的 20 名女学生的身高（cm）：

167	154	159	166	169	159	156	166	162	158
158	160	165	158	163	153	157	161	154	165

试求这些数据的全距。

解 全距 $= 169 - 153 = 16$

例 15 经抽样调查，得到成年人每星期看电视时间（h）的频数分配表如下：

时　间（h）	人　数
0 － 5	18
5 － 10	15
10 － 15	20
15 － 20	14
20 － 25	15
25 － 30	10
30 － 35	8
总　和	100

试求成人每星期看电视时数的全距。

解 全距 $= 35 - 0 = 35$

从以上两例可以看出，求全距是很容易的。但须注意，当数据中存在个别偏大或偏小的“异常值”时，全距就会偏大，而失去反映离中趋势的意义。例如，假定在例 14 的被调查者中有一个“电视迷”，一星期要看 60 小时电视，于是 $R = 60$ 就很难反映这 100 个成人看电视所花时间的离散情况。

● 四分位差

在初中，我们已学过了**四分位数**（quartile）。即**下四分位数**（lower quartile）Q_1，中位数 Q_2 及**上四分位数**（upper quartile）Q_3。

上四分位数 Q_3 减去下四分位数 Q_1 所得的值的 一半称为四分位差，即

$$\text{四分位差} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

由于四分位差不受数据中“异常值”的影响，用它来刻画离中趋势比全距合理。

例 16 求一组数据：

2　6　6　4　10　3　8　8　7　4　10　9　15

的四分位差。

解　将这组数据按从小到大的顺序重新排列。

2　3　4　4　6　6　7　8　8　9　10　10　15

然后先求中位数 Q_2，它把这组数据分成两部分，再分别求前后两部分的中位数，就是 Q_1 与 Q_3。

$$\therefore \quad Q_2 = 7,\ Q_1 = \frac{4+4}{2} = 4,\ Q_3 = \frac{9+10}{2} = 9.5$$

$$\text{四分位差} = \frac{9.5-4}{2} = 2.75$$

如所给的是数据的频数分配，则可画出累积频数多边形，利用累积频数百分率得到四分位数。更具体地说，累积频数百分率中的

25%对应的数值是 Q_1，

50%对应的数值是 Q_2（中位数）.

75%对应的数值是 Q_3。

例 17 某工厂 60 名职工的月薪分布如下：

薪金(元)	120-160	160-200	200-240	240-280	280-320
人　数	17	20	15	6	2

试求四分位数和四分位差。

解 先做累积频数分配表如下：

薪金(元)	频　数	累积频数
120 – 160	17	17
160 – 200	20	37
200 – 240	15	52
240 – 280	6	58
280 – 320	2	60

然后画出累积频数多边形（图 8 – 10）。

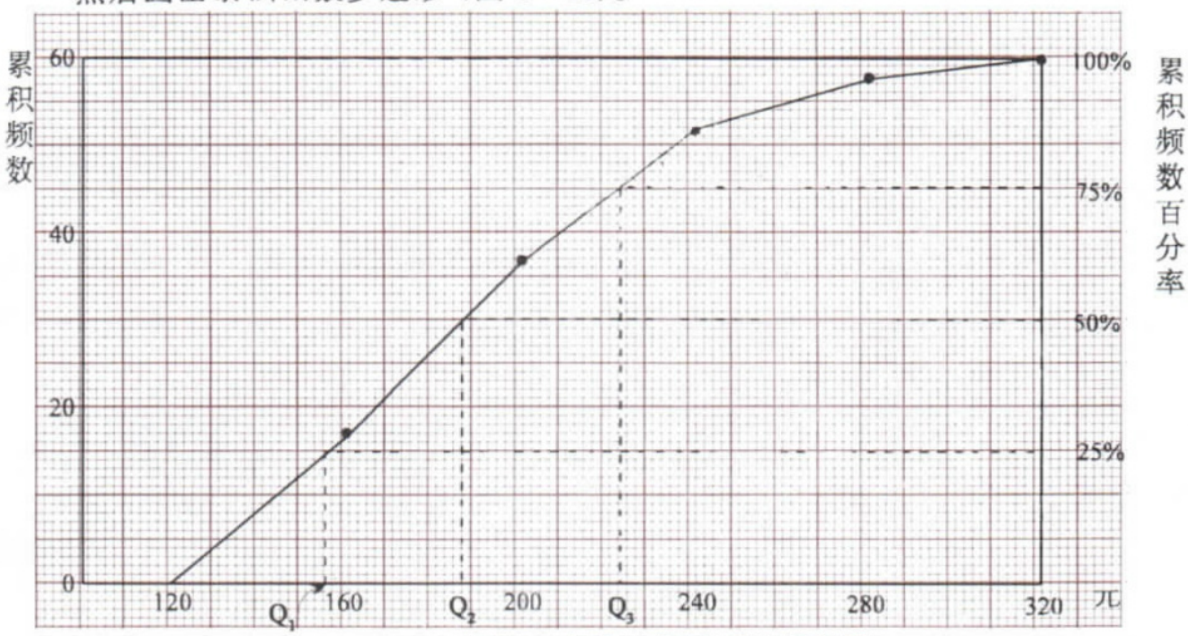


图 8 – 10　60 名职工月薪的累积频数多边形

从图 8 – 10 中得知：$Q_1 = 155$，$Q_2 = 186$，$Q_3 = 232$

$$\therefore \quad 四分位差 = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{232 - 155}{2} = 38.5$$

习题 8f

1. 某商店在 11 天内卖出的电视机数量如下：

   4　9　0　1　3　4　2　5　7　2　3

   (a) 求其全距；

   (b) 求其四分位数和四分位差。

2. 已知一组数据：1.2　1.0　1.1　1.3　1.5　1.7　1.2　1.0

(a) 求其全距；

(b) 求其四分位数和四分位差。

3. 某校高一年级 100 个学生的数学成绩分布如下：

分数	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
人数	3	4	13	22	30	23	5

(a) 求全距；

(b) 画累积频数多边形；

(c) 求四分位差。

平均差

对于 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，设它们的平均数是 $\overline{x}$，$|x_i - \overline{x}|$ 是第 i 个数据与平均数的距离，这 n 个距离的平均数可以用来度量 x_1，x_2，…，x_n 的离中趋势，所以引进平均差的概念。

一组数据 x_1，x_2，…，x_n 中各数据与 $\overline{x}$ 之差的绝对值的平均数称为平均差，用数学式子来表示，就是

$$平均差 = \frac{1}{n}\sum|x_i - \overline{x}|$$

如果所给的是分组资料，就用各分组的组中值作为 x_i，相应的频数作为 $|x_i - \overline{x}|$ 的权数，通过计算 $|x_i - \overline{x}|$ 的加权平均数来计算平均差。即

$$平均差 = \frac{\sum|x_i - \overline{x}|f_i}{\sum f_i}$$

例 18 求数据 400，420，460，480，440 的平均差。

解 设这 5 个数据为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5。

$$\overline{x} = \frac{400 + 420 + 460 + 480 + 440}{5} = 440$$

$$\begin{aligned}平均差 &= \frac{1}{5}\sum|x_i - \overline{x}| \\ &= \frac{1}{5}(|-40| + |-20| + |20| + |40| + 0) \\ &= 24\end{aligned}$$

例 19 向 20 名家庭主妇询问其每周用于做家务的时间（小时），得到下面的频数分配表：

每周做家务时间（小时）	人数
10 – 20	3
20 – 30	8
30 – 40	7
40 – 50	2

试问她们每周做家务时间的平均差是多少？

解 把各时间段的人数作为权数，用列表格的方法算出平均差。

时间段（小时）	频数 f_i	组中值 x_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
10 – 20	3	15	45	14	42
20 – 30	8	25	200	4	32
30 – 40	7	35	245	6	42
40 – 50	2	45	90	16	32
总和	20		580		148
$\bar{x} = \frac{580}{20} = 29$					

$$\begin{aligned}\text{平均差} &= \frac{\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{\sum f_i} \\ &= \frac{148}{20} \\ &= 7.4\end{aligned}$$

习题 8g

1. 求下列各组数据的平均差：

   (a) 8　10　9　12　4　8　2

   (b) 45.0　46.5　47.0　48.0　48.4　48.8　49.2　50.4

   (c) 58　65　38　76　43

2. 求下列 26 人得分的平均差：

   得分：1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

   人数：0　1　1　1　6　8　6　1　1　1

3. 一班 36 名学生的测验成绩如下：

77	60	52	73	60	50	70	60	50
68	59	50	68	59	48	66	58	46
60	48	34	61	55	40	62	55	42
63	55	43	65	56	45	65	57	46

(a) 以 4 为组距分组：[34, 38), [38, 42), [42, 46), …列出这 36 个数据的频数分配表；

(b) 由频数分配表求平均数；

(c) 由频数分配表求平均差。

● 标准差及方差

对于 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，它们的平均数是 $\overline{x}$，记

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

S 称为这组数据的标准差，而

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

称为这组数据的方差。观察 S^2 的表达式，不难发现，它是所有 $(x_i-\overline{x})^2$（x_i 与 $\overline{x}$ 的差距平方）的平均数。因此，当给出的是分组资料时，就把各分组的组中值作为 x_i，相应的频数作为 $(x_i-\overline{x})^2$ 的权数，通过计算 $(x_i-\overline{x})^2$ 的加权平均数算出 S^2，S 就是 S^2 的算术平方根。即

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2f_i}{\sum f_i}$$

得标准差

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2f_i}{\sum f_i}}$$

与平均差相比，标准差和方差的表达式中不含绝对值符号，数学上处理起来比较方便。此外，标准差和方差又考虑到每个数据与平均数的差异，用它们来度量离中趋势显得很合理，所以在日常工作和生活中，标准差和方差使用得最多。

例 20 试求数据 3，8，7，6，10，2 的标准差和方差。

解 如设它们为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，于是

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \times (3+8+7+6+10+2) = 6$$

$$S^2 = \frac{1}{6} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{6} [(3-6)^2 + (8-6)^2 + (7-6)^2 + (6-6)^2 + (10-6)^2 + (2-6)^2]$$

$$= 7.67$$

$$S = \sqrt{7.67} = 2.77$$

例 21 两台机床同时生产直径是 40mm 的零件。为了检验产品质量，从产品中各抽出 10 件进行测量，结果如下（单位：mm）：

机床A	40	39.8	40.1	40.2	39.9	40	40.2	39.8	40.2	39.8
机床B	40	40	39.9	40	39.9	40.2	40	40.1	40	39.9

试问在使零件的直径符合规定方面，哪台机床较好？

解 先分别计算两组数据的平均数，

$$\bar{x}_A = \frac{1}{10} (40 + 39.8 + 40.1 + \cdots + 39.8) = 40$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{10} (40 + 40 + 39.9 + \cdots + 39.9) = 40$$

两组零件直径的平均数没有差别。再分别计算方差，

$$S^2 = \frac{1}{10} [(40-40)^2 + (39.8-40)^2 + \cdots + (39.8-40)^2]$$

$$= 0.026$$

$$S^2 = \frac{1}{10} [(40-40)2 + (40-40)2 + \cdots + (39.9-40)^2]$$

$$= 0.008$$

$S^2_A > S^2_B$，表明对于平均数而言，机床 A 生产的零件直径的波动较大、机床 B 生产的零件直径的波动较小，机床 B 比机床 A 好。

例 22 从高中某班 50 名学生默写英语课文的练习中统计默写错误的字数，得到下面的频数分配表：

默错字数	人　　数
0 - 2	15
3 - 5	12
6 - 8	10
9 - 11	9
12 - 14	4

求全班学生默写错字的平均数和标准差。

解　上表给出的是按默错字数分组的数据资料，可把各分组的组中值作为 x_i，相应的人 数作为权数，列表格计算 $\overline{x}$ 和 S。

默错字数	频数f_i	组中值x_i	$f_i x_i$	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$	$f_i(x_i-\overline{x})^2$
0 - 2	15	1	15	-4.5	20.25	303.75
3 - 5	12	4	48	-1.5	2.25	27
6 - 8	10	7	70	1.5	2.25	22.5
9 - 11	9	10	90	4.5	20.25	182.25
12 - 14	4	13	52	7.5	56.25	225
	50					760.5

$$\overline{x}=\frac{275}{50}=5.5$$

$$S^2=\frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum f_i}=\frac{760.5}{50}=15.21$$

$$S=\sqrt{15.21}=3.9$$

习题 8h

1. 已知两组数据：

A	9.9	10.3	9.8	10.1	10.4	10	9.8	9.7
B	10.2	10	9.5	10.3	10.5	9.6	9.8	10.1

分别计算两组数据的方差，哪组数据的离中趋势大？

甲班	76	90	84	86	81	87	86	82	85	83
乙班	82	84	85	89	79	80	91	89	79	74

分别计算标准差，哪班的 10 名学生成绩比较平均？

3. 测量某地的青年身高，得到如下分布：

身高（cm）	145	150	155	160	165	170	175
人　　数	10	36	193	285	190	63	13

(a) 计算平均身高；

(b) 计算标准差。

4. 100 个学生的体重分布如下（单位：公斤）：

体重	45 – 47	48 – 50	51 – 53	54 – 56	57 – 59	60 – 62	63 – 65
人数	3	16	20	32	15	10	4

计算标准差和方差。

8.4 指数

在很多商业和经济问题中，需要把统计资料化成可以比较的相对数，为此引入**指数**（index number）的概念。

● 指数

对于我们所考察的对象，指数是用来度量其不同时期差别情况的百分数。指数的应用很广泛，例如，表示物价变动的称为物价指数，表示工业生产产量变化的称为生产指数，表示工作报酬变更的称为工资指数，还有生活指数、外汇指数、人口指数、股价指数等等。

计算指数所选择的作为比较标准的时期，称为**基期**（base period）。基期可以是一年，也可以是一月……视实际情况而定。与基期相比较的时期称为计算期，我们通常选择离计算期不太长的时期作为基期，否则现实意义不大。对于基期，指数定为 100。

价比 (price relative) 是某一商品在不同时期的价格的比较，是一种简单指数。如果设该商品基期的价格是 P_0 ，计算期的价格是 P_1 ，那么它的

$$价比 = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

如果要计算其他简单指数，只要把所考察对象在计算期的值除以在基期的值，再乘以 100 即可 (参看例 24)。

例 23 某种商品在 1990 年的价格为 35.50 元，在 1994 年的价格为 40.25 元，现以 1990 年为基期，1994 年为计算期，则这种商品的

$$价比 = \frac{P_1}{P_0} \times 100 = 113.38$$

表示它的售价 4 年上涨了 13.38%。

例 24 下表列出了某公司从 1985 年到 1990 年的每年净收入 (百万元)，以 1985 年作为基期，对每年净收入计算指数。

年　份	净收入(百万)	指　数
1985	703.0	100.0
1986	621.0	88.3
1987	84.1	12.0
1988	626.6	89.1
1989	546.5	77.7
1990	515.7	73.3

其中，1986 年净收入的

$$指数 = \frac{621.0}{703.0} \times 100 = 88.3$$

其他年份净收入指数可类似地计算。从上表可见，相对 1985 年而言，以后 5 年净收入都是下降的，尤以 1987 年下降得最厉害，下降了 88%。

习题 8i

1. 白砂糖在 1960 年的售价是每公斤 45 仙，在 1970 年每公斤 80 仙而在 1990 年每公斤售价为 RM1.20。分别以 1960，1970 年为基期，试求 1990 年的白砂糖的价比。

2. 在 1975 年每粒 A 等级的鸡蛋之售价为 8 仙而在 1990 年同等级的鸡蛋之售价则为每粒 20 仙。以 1975 年为基期，试求 1990 年鸡蛋的价比。

3. 某种食品在 1992 年的价格是 RM3.40，在 1993 年的价格为 RM3.75，在 1994 年的价格为 RM3.80，试以 1992 年为基期，1993 年、1994 年为计算期，分别求出价比。

4. 某小城自 1985 年至 1989 年每年入学的儿童数如下：

年份：	1985	1986	1987	1988	1989
人数：	915	755	601	521	471

取第 1 年为基期，计算各年的指数。

5. 某石油公司石油产品销售量（每日千桶）记录如下：

年份：	1965	1966	1967	1968	1969	1970
销售量：	457	517	566	585	596	616

用 1965 年作基期，用指数表示这些销售数字。

● 综合指数

对于我们所考察的 n 个对象，它们的重要性可能不相同，这可以用不同的权数来表示。把每个对象的权数都要考虑进去的指数称为**综合指数**（composite index number）。如果把第 i 个对象的简单指数记作 x_i，其权数记作 w_i（$i=1, 2, \cdots, n$），那么综合指数就是 x_i 的加权平均数，即

$$\text{综合指数} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

注意，以上各 x_i 都是对同一基期和同一计算期而言的。

如果考虑的是某一大类商品，x_i 是其中第 i 种商品的价比（$i=1, 2, \cdots, n$），那么上面的加权平均数也称为**物价指数**（price index）。

如果考虑的是涉及人们生活的各项开支费用，那么计算出来的加权平均数也称为**生活消费指数**（cost of living index）。

例 25 下表是甲、乙、丙、丁四种商品 1980 年及 1990 年的单价（单位：RM）：

单价(RM) 商品 / 年份	甲	乙	丙	丁
1980	1	2	8	5
1990	4	6	32	10

设它们的权数分别为 16，5，6，13。试以 1980 年为基期，1990 年为计算期，计算综合指数（物价指数）。

解 甲的价比为 $\frac{4}{1}\times 100 = 400$，乙的价比为 $\frac{6}{2}\times 100 = 300$

丙的价比为 $\frac{32}{8}\times 100 = 400$，丁的价比为 $\frac{10}{5}\times 100 = 200$

其物价指数是：

$$\frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{16\times 400 + 5\times 300 + 6\times 400 + 13\times 200}{16+5+6+13}$$

$$= \frac{12900}{40}$$

$$= 322.5$$

例 26 下表列出了 1991 年度 5 种食品的价比（以 1990 年为基期），权数是根据销售额推算出来的，试求其物价指数。

食　品	价比 x	权数 w
肉类	108	13
鱼类	121	12
蔬菜	120	13
饮料	110	7
水果	105	8

解 物价指数 $= \frac{\sum wx}{\sum w}$

$$= \frac{13\times 108 + 12\times 121 + 13\times 120 + 7\times 110 + 8\times 105}{13+12+13+7+8}$$

$$= 113.7$$

例 27 城市居民的生活费用可以分成以下八大类：食品、房屋、衣着、交通、书报杂志、医疗、服务项目（指饭店、旅馆、修理行业等）、其他。根据有关的价格、销售额或营业额算出它们各自的价比和权数如下表所示：

生活费用	价　比	权数（相对消费量）
食品	120	25
房屋	112	20
衣着	110	12
交通	105	15
书报杂志	107	5
医疗	119	8
服务项目	120	10
其他	103	5

试计算生活消费指数。

解　可列表格帮助计算：

生活费用	价比 x	权数 w	wx
食品	120	25	3000
房屋	112	20	2240
衣着	110	12	1320
交通	105	15	1575
书报杂志	107	5	535
医疗	119	8	952
服务项目	120	10	1200
其他	103	5	515
总和		100	11337

$$\text{生活指数} = \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{11337}{100} = 113.37$$

计算结果表明生活费用上涨了 13.37%。

习题 8j

1. 某地以 1988 年为基期，1990 年的食品、汽油及布料的价比为 111，105，106，试分别以权数 5，1，2。计算 1990 年的综合指数。

2. 以 1980 年为基期，下表所列为 1991 年度各主要食物的物价资料。试求其物价综合指数。

食物	价比	权数
肉类	130	15
鱼类	150	14
蔬菜	200	10
米	110	20
食油	120	8
饮料	150	7
水果	160	6

3. 下表列出了某地区居民各项生活费用对上一年的价比，权数是根据消费量推算的。计算该地区居民的生活消费指数。

生活费用	价　比	权　数
食品	107	30
房屋	100	21
衣着	102	16
交通	100	6
书报杂志	105	4
医疗	99	2
服务项目	110	8
其他	102	13

4. 一工厂购买三种原料的数量与单位价格如下表所示：

原　料	重量(千克)	单位价格（RM）	
		1984	1986
甲	20000	0.62	0.71
乙	50000	2.05	2.09
丙	60000	0.80	0.85

把 1984 年作为基期，1986 年作为计算期，

(a) 不加权（权数为 1），求单位价格综合指数；

(b) 以购买数量为权数，求单位价格综合指数。

5. 居民生活指数包括消费品物价指数和服务项目价格指数两大类。已知某城市零售价格上涨了10%，服务项目价格上涨了20%。计算期的实际零售额为66000万元，服务项目总营业额为2400万元，试以它们为权数，计算生活消费指数。

8.5 移动平均数

社会经济现象的发展变化往往受到多种因素的影响，为了分析其发展变化的长期趋势，消除局部或短期的变动影响，需要对按一定时间间隔得到的统计数据（时间数列）重新加工处理，**移动平均**（moving average）法就是修匀时间数列，分析长期趋势的一种常用的、较简单的数学方法。

例如，某商店电冰箱的销售量受到季节变化的影响，会呈现出不规则的变动，一般地说，天热销售量大，而天冷则销售量小。如何从多年纪录下来的销售数字中，排除季节的影响，测定并分析长期趋势，就可以采用移动平均法。

设 x_1，x_2，…，x_n 是一按一定时间间隔得到的时间数列，k（$< n$）个时期为移动周期，则其移动平均数为：

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$$

$$y_2 = \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1}}{k}$$

$$y_3 = \frac{x_3 + x_4 + \cdots + x_{k+2}}{k}$$

……

y_1，y_2，y_3，称为 k 期的移动平均数列。

例 28 设一时间数列为8，6，1，5，3，7，11。求 k 为3的移动平均数列。

解 $y_1 = \frac{8+6+1}{3} = 5$，$y_2 = \frac{6+1+5}{3} = 4$，$y_3 = \frac{1+5+3}{3} = 3$，

$y_4 = \frac{5+3+7}{3}$，$y_5 = \frac{3+7+11}{3}$

k 为3的移动平均数数列是5，4，3，5，7。

例 29 某地区自 1993 年 7 月至 1994 年 6 月每月的出口总值（单位：百万元）如下表所示：

年	1993						1994					
月	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
出口总值	10.2	11.7	1.8	8.4	3.3	0.9	5.7	3.3	14.1	6.0	13.5	7.8

求 k 为 5 的移动平均数列并用线形图表示出口总值和移动平均数这两个数列。

解 我们用表格来帮助计算，算出的移动平均数应与相关的 5 个月份的中间那个月份对齐，表示用移动平均数来代替该月份原来的出口总值。

年、月份	出口总值	移动总数	移动平均数
1993 – 07	10.2		
1993 – 08	11.7		
1993 – 09	1.8	35.4	7.1
1993 – 10	8.4	26.1	5.2
1993 – 11	3.3	20.1	4.0
1993 – 12	0.9	21.6	4.3
1994 – 01	5.7	27.3	5.5
1994 – 02	3.3	30.0	6.0
1994 – 03	14.1	42.6	8.5
1994 – 04	6.0	44.7	8.9
1994 – 05	13.5		
1994 – 06	7.8		

由上表出口总值、移动平均数两栏数据，画线形图如图 8－11。

在图 8－11 中，实线是原始资料，虚线是移动平均数资料。从图中可见，原始数据逐月变化的波动较大，但移动平均数数列的走势是开始下降，以后总的来说是逐步上升的，它较好地反映了该地区出口总值发展的长期趋势。

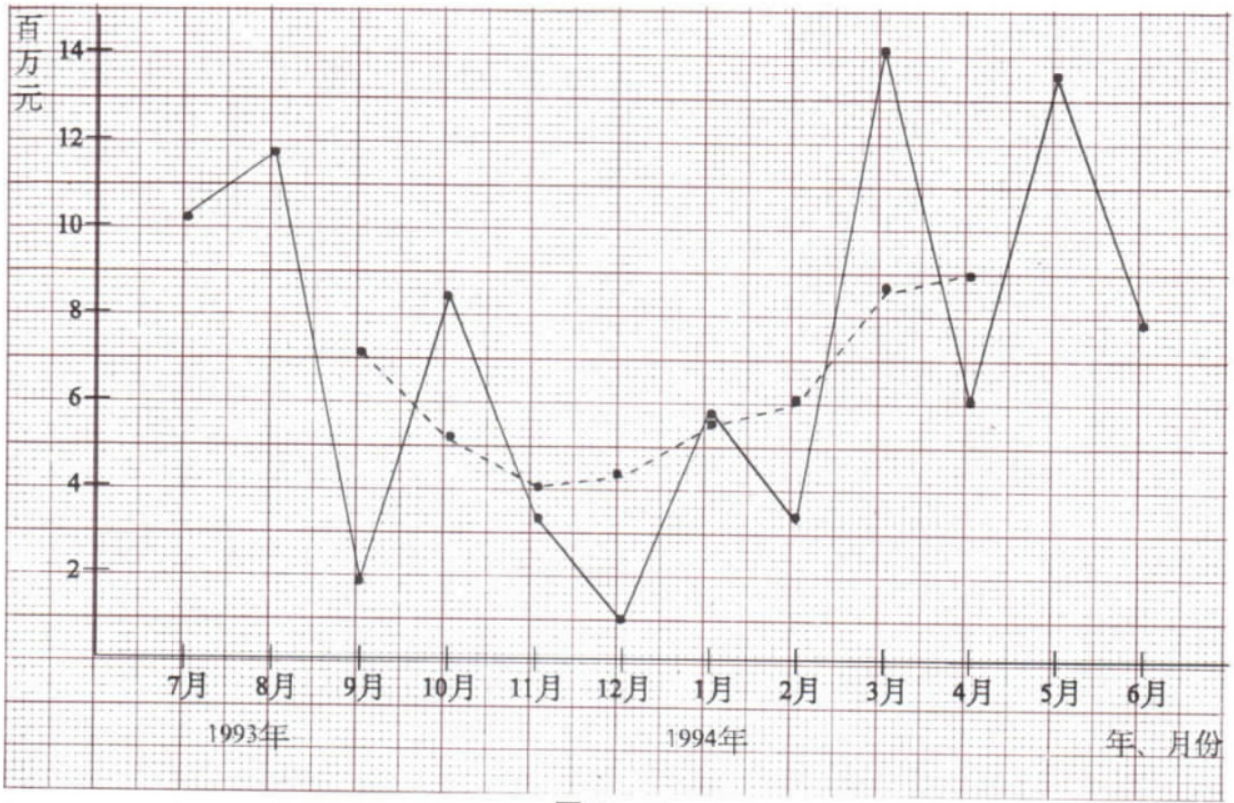


图 8-11

例 30 一商场 14 个季度的销售利润（万元）时间数列如下表所示：

年	1季度	2季度	3季度	4季度
1991	8	7	10	13
1992	12	10	14	16
1993	14	15	16	18
1994	16	20		

求 k 为 4 的移动平均数列，并加以分析、画线形图。

解　列表计算移动平均数

年、季	季的序号	销售利润（万元）	长度为4的移动平均数	2项平均
1991.1	1	8		
2	2	7	9.5	
3	3	10	10.5	10
4	4	13	11.25	10.875
1992.1	5	12	12.25	11.75
2	6	10	13	12.625
3	7	14	13.5	13.25
4	8	16	14.75	14.125
1993.1	9	14	15.25	15
2	10	15	15.75	15.5
3	11	16	16.25	16
4	12	18	17.5	16.875
1994.1	13	16		
2	14	20		

本例给出的时间数列是季度资料，通常总将一年四季看作一个周期，故用 k 为 4 的移动平均数。但由于 4 是偶数，算得的移动平均数无法与原来各季度的销售利润对齐，讨论问题不方便。这时需要再作一次 2 项平均（即再作一次 k 为 2 的移动平均数列），得到的 2 次移动平均数就能对准各季度的位置了。

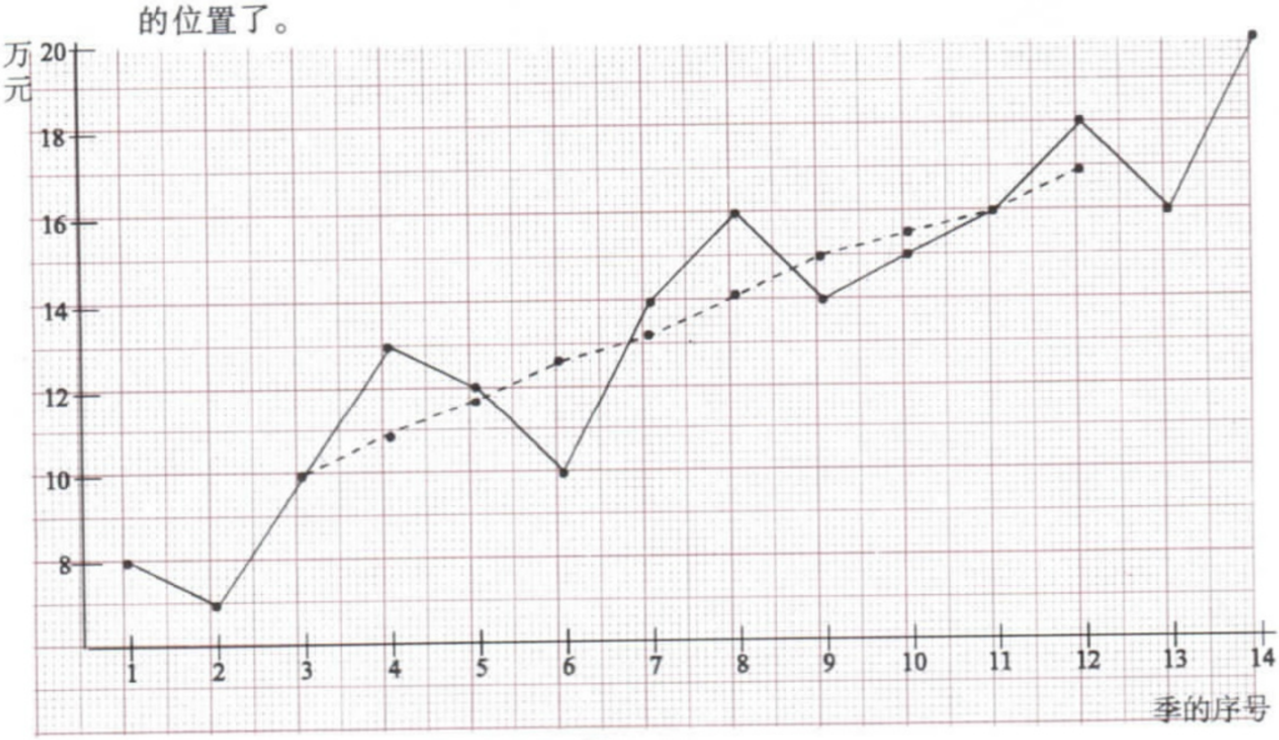


图 8－12

图 8－12 的实线表示题意所给的销售利润时间数列。虚线表示的是 2 次移动平均数列，它是一条比较平滑的折线，明显地反映出该商场销售利润稳步上升的长期趋势。

【注】 如对时间数列作 k 为偶数的移动平均时，由于得到的移动平均数对准着原时间数列相邻两项的中间，通常需要再作一次 2 项平均，使得最后得到的平均数移正到与原时间数列的各项位置对准。

习题 8k

1. 设一时间数列为 1，3，2，1，6，5，1，0，2，4。
   (a) 试求 k 为 3 的移动平均数数列；
   (b) 试求 k 为 5 的移动平均数数列。
2. 某煤矿 1984 年至 1994 年各年的月平均产煤量（单位：百万吨）如下：

年　　份：	1984	1985	1986	1987	1988	
月平均产量：	50.0	36.5	43.0	44.5	38.9	
年　　份：	1989	1990	1991	1992	1993	1994
月平均产量：	38.1	32.6	38.7	41.7	41.1	33.8

   (a) 求出 k 为 4 的移动平均数数列后再作一次 2 项平均；
   (b) 将原始资料和 (a) 中结果画出线形图进行比较。
3. 求下列指数的 k 为 3 的移动平均数数列并画线形图进行比较：

月份：	1	2	3	4	5	6
指数：	100	108	104	112	114	116
月份：	7	8	9	10	11	12
指数：	109	114	110	124	117	122

总复习题 8

1. 在一批棉花中抽测了 60 根棉花的纤维长度，结果如下（单位：毫米）：

82	202	352	321	25	293	293	86	28	206
323	355	357	33	325	113	233	294	50	296
115	236	357	326	52	301	140	328	238	358
58	255	143	360	340	302	370	343	260	303
59	146	60	263	170	305	380	346	61	305
175	348	264	383	62	306	195	350	265	385

(a) 列出频数分配表，画出直方图和频数多边形；

(b) 列出累积频数分配表，画出累积频数多边形。

2. 16 名幼儿的体重（kg）如下：

8	9	10	9	8	7	9	10
9	8	8	9	10	9	8	7

求他们体重的平均数、中位数和众数。

3. 40 名学生的考试成绩如下：

分数	46 – 54	54 – 62	62 – 70	70 – 78	78 – 86	86 – 94
人数	4	9	10	8	6	3

求 (a) 平均数，(b) 中位数，(c) 众数。

4. 求数据 8，10，9，12，4，4，2 的全距、四分位差和平均差。

5. 下表是 500 个灯泡使用寿命（小时）的记录：

使用寿命（小时）	个　数
800 – 850	35
850 – 900	127
900 – 950	185
950 – 1000	103
1000 – 1050	42
1050 – 1100	8

(a) 求全距；

(b) 求平均数和标准差；

(c) 求平均差；

(d) 画出累积频数多边形，从图上读出四分位数；

(e) 求四分位差。

(f) 以公式计算中位数。

6. 从一批火箭推力装置中，任意取出 10 个进行试验，它们的燃烧时间（单位：s）记录如下：

50.7	54.9	54.3	44.8	42.2
69.0	55.4	66.1	48.1	34.5

根据上面的数据计算方差和标准差。

7. 甲、乙两个女声小合唱队各由 5 名队员组成，她们的身高为（单位：cm）：

甲队：160 162 159 160 159

乙队：180 160 150 150 160

(a) 求方差和标准差。

(b) 从身高来看，哪队比较整齐，为什么？

8. 某城市主要食物以 1993 年为基期，1994 年为计算期的物价资料如下：

食物	价比	权数
肉类	105	8
鱼类	111	7
蔬菜	98	5
米面	103	10
食油	100	3
饮料	107	2
水果	99	2

试求其物价指数（综合指数）。

9. 某地居民的衣食住行的价比（以上一年为基期）和相对消费量如下表所示：

消费项目	价　比	相对消费量
衣着	120	23
食物	117	40
房租	132	19
交通	130	18

以相对消费量作为权数，求衣食住行的综合指数。

10. 1993年1月到12月每月进口总值（单位：百万元）统计如下：

1993年 ：	1月	2月	3月	4月	5月	6月
进口总值：	12.4	12.9	9.6	11.8	10.1	9.3
1993年 ：	7月	8月	9月	10月	11月	12月
进口总值：	10.9	10.1	13.7	11.0	13.5	11.6

(a) 求 k 为3的移动平均数列；

(b) 求出 k 为4的移动平均数列后再求一次二项平均；

(c) 将原始资料和 (b) 的结果画线形图进行比较。

11. 一产品在某国1980年至1994年的逐年销售件数（单位：千件）如下：

458	672	611	266	207	410
720	650	329	365	574	754
601	365	308			

(a) 求 k 为5的移动平均数列；

(b) 有无必要作2次移动平均数列，为什么？

(c) 将题给的时间数列与 (a) 的移动平均数数列画出线形图进行比较，你能得出什么结论？

9 概率

9.1 概率

● 随机现象

在自然界和人类社会里，经常会遇到两类不同的现象：必然现象和随机现象。

我们知道，把一石块抛向空中，它会落到地面上来；我们生活的地球，每天都在绕太阳转动；一个人随着岁月的消逝，一定会衰老、死亡……；这类现象称为必然现象。必然现象是在一定条件下必然发生某种结果的现象。

另一类现象称为随机现象，它们具有这样的特点：当在相同条件下多次观察同一现象，每次所得结果不一定相同，事先无法预料怎样的结果会出现。

例 1 我们通常把硬币上刻有币值的一面叫做正面 。现在任意掷一枚均匀的硬币，那么可能出现“正面朝上”，也可能出现“反面朝上”，究竟得到哪一个结果，不可能事先确定，这是一种随机现象。

例 2 一中学生在篮球场的罚球线练习投篮，显然他可能投进球，也可能投不进球。即使他篮球技术很好，我们最多只能说，他投进球的可能性很大，而不能保证每投必进，所以这也是一种随机现象。

例 3 在 10 个同类产品中，有 8 个正品、2 个次品。从中任意抽取 3 个检验，那么“抽到全是正品”，“抽到 1 个次品”，“抽到 2 个次品”三种结果都有可能出现，抽取前无法预料，当然这是一种随机现象。

为了探索随机现象的规律性，需要对随机现象进行观察。我们把观察随机现象或为了某种目的而进行的实验统称为**试验**（trial），把观察结果或实验结果称为试验的**结果**（outcomes）。“试验”这一词在本章中具有较广泛的含义；例 1 的掷硬币，例 2 的学生投篮，例 3 的产品抽样检验都是试验。此外，士兵打靶，跳高运动员试跳，……也都可以看作试验。

总之，试验应具有下面的三个特点：

(1) 试验可以重复进行；

(2) 试验有多个可能的结果；

(3) 试验前不能肯定哪一个结果会出现。

● 样本空间与事件

一个试验的所有可能结果的集合就称为这试验的**样本空间**（sample space），用 S 表示。样本空间 S 的元素，即该试验的每一个可能的结果，称为样本空间 S 的**样本点**（sample point）。

例 4 在例 1 的掷硬币试验中，如果用字母 H 表示“正面朝上”，用字母 T 表示“反面朝上”，那么试验的样本空间

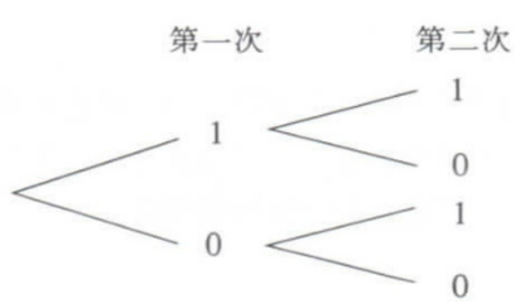
$$S = \{H, T\}$$

S 由 2 个样本点 H 和 T 组成。

例 5 在例 2 的中学生投篮试验中，假定他投篮二次，写出该试验的样本空间。

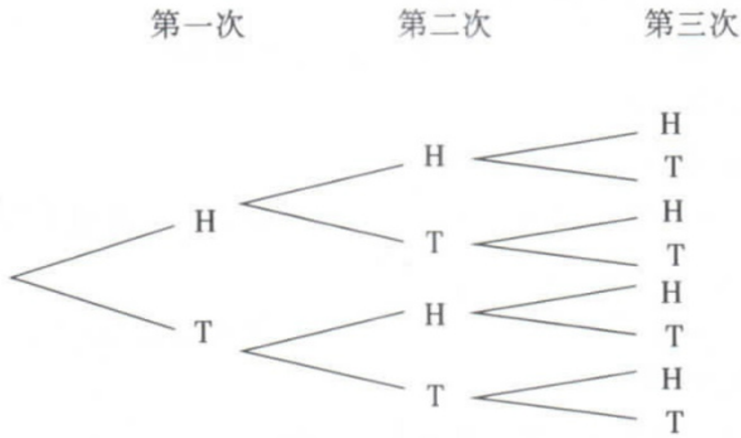
解 用数字 1 表示他投进球，数字 0 表示他未投进球。例如 (1, 0) 表示第一次投进球，第二次未投进球。

其样本空间 $S = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$，本例的树图如下：



例 6 把一枚均匀硬币连掷 3 次，写出样本空间。

解 若“得到 3 次正面”可以记为 HHH，“第 1 次得到正面，第 2、3 次得到反面”可以记为 HTT……于是，样本空间



S = {HHH，HHT，HTH，HTT，THH，THT，TTH，TTT}

样本空间的任何一个子集称为**事件**（event），用大写字母 A，B，C，D ……来表示。当我们在同样的条件下重复进行试验时，有的情况始终不会发生，它称为不可能事件，记作 ∅；而有的情况在每次试验中一定会发生，它称为必然事件，记作 S。实际上 ∅ 不包含任何样本点，S 包含了所有的样本点。

例 7 一只盒子中放了 10 个完全相同的小球，球上分别标有号码 1，2，…，10，从中任取一个球出来，观察其号码。

(a) 写出试验的样本空间；

(b) 用集合表示事件 A =“球的号码是奇数”

B =“球的号码 $\geqslant$ 8”

C =“球的号码是 6”

(c) 写出试验的一个必然事件和一个不可能事件。

解 (a) S = {1，2，3，4，5，6，7，8，9，10}

(b) A = {1，3，5，7，9}

B = {8，9，10}

C = {6}

(c) “球的号码小于 12”是必然事件，“球的号码是 15”是不可能事件。

习题 9a

1. 写出下列试验的样本空间：
   (a) 掷 2 粒骰子；
   (b) 同时掷 3 粒骰子，记录掷出的点数之和；
   (c) 在 A，B，C，D，E 这 5 个字母中任取 2 个字母排成一行。
2. 把下列事件用集合表示出来：
   (a) 掷一颗骰子，事件 A = “掷出 3 点或 5 点”；
   (b) 从 0，1，2，…，9 这 10 个数字中任取一个数字，事件 A = “得到偶数”；
   (c) 把 2 枚相同的硬币掷一次，事件 A = “恰好掷出 1 枚正面”，
   B = “至少掷出 1 枚正面”；
3. 把一枚均匀的硬币连掷 3 次。用样本点表示事件
   A = “恰好掷出 1 次正面”
   B = “至少掷出 2 次正面”
   C = “掷出正面的次数比反面的次数少”
4. 从甲、乙、丙、丁四个人中任意抽出 3 人站成一排。
   (a) 写出试验的样本空间；
   (b) 用样本点表示事件
   A = “甲正好站在中间”
   B = “乙与丙站在两边”
5. 从四个字母 K、O、T、A 中任取两个：试求
   (a) 其样本空间 S；
   (b) 包括一个母音和一个子音的事件 A；
   (c) 两个都是母音的事件 B；
   (d) 至少一个母音的事件 C。
6. 试求投掷两粒骰子的随机试验中
   (a) 两粒骰子的点数相同的事件 A；
   (b) 一粒骰子的点数是另一粒骰子的点数的 2 倍之事件 B；
   (c) 点数之和是 6 的事件 C。

概率的定义

本章介绍**概率**（probability）的两种定义方式，即概率的统计定义与概率的古典定义。

（一）概率的统计定义

在一次试验中，某事件A可能发生，也可能不发生，这事先是不能确定的。为了探讨事件A发生的可能性大小，我们可在同样的条件下做大量的重复试验，记录A发生的频数，把它和试验的次数作比较，看会不会呈现一定的统计规律。

例 8 对生产的一批羽毛球进行抽查，结果如下表所示：

抽取球数n	50	100	200	500	1000	2000
优等品数m	45	92	194	470	954	1902
优等品频率$\frac{m}{n}$	0.9	0.92	0.97	0.94	0.954	0.951

我们发现，当抽查的羽毛球数很多时，抽到优等品的频率$\frac{m}{n}$（优等品的个数m与抽取的球数n的比）接近．于常数0.95，在它附近摆动。

例 9 为了寻找掷均匀硬币时出现正面的规律，历史上有些人做过成千上万次抛掷硬币的试验，结果如下表所示：

试验者	抛掷次数n	出现“正面朝上”的次数m	频率$\frac{m}{n}$
德摩根（Do Morgan）	2048	1061	0.518
蒲　丰（Buffon）	4048	2048	0.5069
费　勒（Feller）	10000	4979	0.4979
皮尔逊（Pearson）	12000	6019	0.5016
皮尔逊（Pearson）	24000	12012	0.5006

由表中的数字容易看出，抛掷次数越多，出现“正面朝上”的频率越接近0.5。

在大量重复进行同一试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总是接近于某个常数，在附近摆动，并且一般说来，摆动的幅度随着试验次数的增多而越变越小，这时就把此常数称为事件 A 的概率，记作 P(A)。这个定义通常叫做概率统计定义。根据它来求一个事件的概率，需要做大量的重复试验，用这事件发生的频率近似地作为其概率。

上述两个例子表明，抽查羽毛球得到优等品的概率是 0.95，就是说，从一批羽毛球中抽取一个，取到优等品的可能性是 95%；掷硬币时出现正面朝上的概率是 0.5，就是说，把一枚硬币任意地抛掷一次，得到"正面朝上"的可能性是 50%。概率从数量上反映了一个事件发生的可能性的大小。如果把例 8 和例 9 中讨论的两个事件作比较，我们可以断言，前者出现的机会比后者大得多。

由于事件 A 出现的次数大于或等于 0，并且不会超过试验次数，所以频率一定处于 0 与 1 之间，即

$$0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$$

于是由概率的统计定义，对任何事件 A 都有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

必然事件 S 在每次试验中都发生，就是说 S 的发生次数等于试验次数，所以 $P(S)=1$。对于不可能事件 $\varnothing$，不管做多少次试验，它的发生次数总是 0，所以 $P(\varnothing)=0$。

（二）概率的古典定义

对于某些事件，可以不需进行大量的重复试验，只要根据所讨论事件的特点，就能直接计算其概率。但应用这个方法时，要求随机试验满足下列两个条件：

(1) 在一次试验中，一切可能发生的结果只有有限个；

(2) 每一个结果发生的可能性是均等的。

满足以上两个条件的随机试验模型叫做古典概率型。由此，可定义一事件发生的概率如下：

如果试验的样本空间 S 中共含有 n 个均等可能的结果，$A \subset S$ 为一事件，含有 m 个结果，那么事件 A 的概率 P(A)是 $\frac{m}{n}$，

即

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{m}{n}$$

这一定义称为概率的古典定义。

例 10 掷一粒匀称的骰子，问出现 3 点的概率是多少？出现奇数点的概率又是多少？

解 骰子有 6 个面，6 个面上分别标有 1 至 6 点。由于骰子是匀称的，每掷一次，出现 1 点、或 2 点、或 3 点、或 4 点、或 5 点、或 6 点的机会是均等的。

样本空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

设事件A ＝“出现 3 点” $= \{3\}$

事件 A 只含 1 个样本点，由概率的古典定义得 $P(A) = \frac{1}{6}$

设事件 B ＝“出现奇数点” $= \{1, 3, 5\}$

事件 B 含有 3 个样本点，所以 $P(B) = \frac{3}{6}$

$$= \frac{1}{2}$$

例 11 掷三枚银角，求

(a) 只有一枚银角是正面的概率；

(b) 至少一枚银角是正面。

解 样本空间 $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$n(S) = 8$

(a) 只有一枚银角是正面的事件 $A = \{HTT, THT, TTH\}$

$n(A) = 3$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{3}{8}$$

(b) 至少一枚银角是正面的事件

$B = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$

$n(B) = 7$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{7}{8}$$

例 12 4名女同学和3名男同学决定用抽签方法分配4张电影票，问分到电影票的是2名女同学和2名男同学的概率是多少？

解 这问题可以理解成7名同学中任意选出4名合成一组（这组有电影票），所有不同的组合就是所有等可能的样本点，它们的个数

$n(S) = {}_7C_4 = 35$

从4名女同学中任选2名有 ${}_4C_2$ 种方法，从3名男同学中任选2名有 ${}_3C_2$ 种方法，所以"选中2名女同学和2名男同学"应有 ${}_4C_2 \times {}_3C_2$ 个组合，

即 $n(A) = {}_4C_2 \times {}_3C_2$

$= 18$

他们分到电影票的概率是 $\dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{18}{35}$

例 13 在5张卡片上分别写了数字1，2，3，4，5，把它们搅和后，再任意放成一行，问得到偶数的概率是多少？

解 可以把1，2，3，4，5的任意排列看作等可能的样本点，得

$n(S) = {}_5P_5$

设事件 A ="得到偶数"，

我们只能从2，4中取一个数作为A的个位上的数，再把余下的4个数任意排列，作为A的十位、百位、千位、万位上的数。这样，A包含的样本点个数为 $n(A) = 2 \times {}_4P_4$

$$P(A) = \frac{2 \times {}_4P_4}{{}_5P_5} = \frac{2}{5}$$

习题 9b

1. 在相同的条件下对某种油菜籽进行发芽试验，结果如下表所示：

每批试验粒数 n	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽的粒数 m	9	60	110	282	639	1339	1806	2715
发芽的频率 $\frac{m}{n}$								

(a) 计算表中油菜籽发芽的各个频率；

(b) 任取一粒油菜籽，它发芽的概率是多少？

2. 掷出一只骰子，出现大于4点的概率是多少？
3. 从一副扑克牌（52张）中任意取出一张牌，求这张牌为“A”的概率。
4. 由班上20名学生中随意选出2名代表，某学生被选中的概率是多少？
5. 盒中有5个球，其中3个是白球，2个是黑球。
   (a) 从中任取1个球，求取到白球的概率；
   (b) 从中任取2个球，求取到的全是白球的概率。
6. 从一副扑克的52张牌中，任意抽出2张。问都是黑桃的概率有多大？
7. 在100件产品中，有95件合格品，5件次品。从中任取2件，计算：
   (a) 2件都是合格品的概率；
   (b) 2件都是次品的概率；
   (c) 1件是合格品、1件是次品的概率。
8. 一把号码锁有6个拨盘，每个拨盘上有从0到9共十个数字，只有一个六位数字的号码能开锁。如果不知道开锁号码，试开一次就打开锁的概率是多少？
9. 分别写着十个号码：1，2，…，10的十张卡片装在一只盒子里，从中任抽3张，问一张为5，其余两张中一张小于5，一张大于5的概率是多少？
10. 将数2233344455的各个数字任意排列一次，问两个2恰巧排在一起的概率是多少？
11. 把15个新学生平均分配到3个班，假设15个新学生中有3个数学特优生。
    (a) 每个班分配到1个数学特优生的概率是多少？
    (b) 全部数学特优生分配在一个班的概率是多少？

9.2 互斥事件与加法定理

● 互斥与不互斥事件

先介绍两个以后常用的事件运算符号。

某次试验中事件A，B至少有一个发生，就叫做事件“A或B”，即$A \cup B$。

某次试验中事件A，B同时发生，就叫做事件“A且B”，即$A \cap B$。

例 14 抛掷 2 枚匀称的硬币，事件 A 表示“正好一个正面朝上”，B 表示“正好两个正面朝上”，C 表示“至少一个正面朝上”。于是有

$$A \cup B = C, \qquad A \cap C = A$$

$$B \cap C = B, \qquad A \cap B = \varnothing$$

对于事件 A 与事件 B，如果 A 与 B 不可能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，那么称 A 与 B **互斥** (mutually exclusive)。一般地，如果事件 A_1，A_2，…，A_n 中任何两个都互斥，那么称事件 A_1，A_2，…，A_n 互斥。

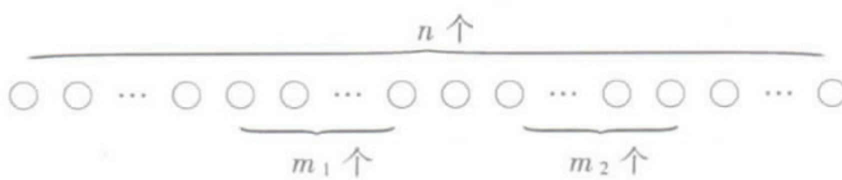
例 14 中的事件 A 与 B 就是互斥事件。又如一袋内含有红、白两种球，现由袋内任意取出一球，则不是白球就是红球，二者不可能同时出现，这也是互斥事件。

如果事件 A 与 B 互斥，那么 $A \cup B$ 发生的概率等于事件 A，B 分别发生的概率的和，即

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

这就是概率的加法定理。

证 设某试验的样本空间 S 包含 n 个均等可能的样本点，事件 A 由其中的 m_1 个样本点组成，事件 B 由其中的 m_2 个样本点组成。由于 A 与 B 互斥，所以这两部分样本点不相重，事件 $A \cup B$ 包含 $m_1 + m_2$ 个样本点。



按照概率的古典定义，

$$P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

一般地，如果事件 A_1，A_2，…，A_n 互斥，那么事件 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 发生（即 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生）的概率等于这 n 个事件分别发生的概率的和，即

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

例 15 在 20 件产品中有 15 件一级品，5 件二级品。从中任取 3 件，其中至少有 1 件为二级品的概率是多少?

解 $n(S) = {}_{20}C_3$

取的 1 件二级品的事件 A_1 的概率为 $P(A_1) = \dfrac{{}_5C_1 \times {}_{15}C_2}{{}_{20}C_3} = \dfrac{105}{228}$

取的 2 件二级品的事件 A_2 的概率为 $P(A_2) = \dfrac{{}_5C_2 \times {}_{15}C_1}{{}_{20}C_3} = \dfrac{30}{228}$

取的 3 件都是二级品的事件 A_3 的概率为 $P(A_3) = \dfrac{{}_5C_3}{{}_{20}C_3} = \dfrac{2}{228}$

根据题意，事件 A_1，A_2，A_3 互斥。“3 件产品中至少有 1 件为二级品”即事件 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$，

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= \frac{105}{228} + \frac{30}{228} + \frac{2}{228} \\ &= \frac{137}{228} \end{aligned}$$

例 16 某地区的年降水量，在 100 ~ 150 毫米范围内的概率是 0.12，在 150 ~ 200 毫米范围内的概率是 0.25，在 200 ~ 250 毫米范围内的概率是 0.16，在 250 ~ 300 毫米范围内的概率是 0.14。计算年降水量在 100 ~ 200 毫米范围内的概率与在 150 ~ 300 毫米范围内的概率。

解 在本章内，$a \sim b$ 表示大于等于 a 而小于 b 的一个实数范围。设这地区的年降水量（毫米）在 100 ~ 150，150 ~ 200，200 ~ 250，250 ~ 300 范围内分别为事件 A，B，C，D。它们是互斥的，所以年降水量在 100 ~ 200 范围内的概率可由加法定理计算：

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= 0.12 + 0.25 \\ &= 0.37 \end{aligned}$$

年降水量在 150 ~ 300 范围内的概率

$$\begin{aligned} P(B \cup C \cup D) &= P(B) + P(C) + P(D) \\ &= 0.25 + 0.16 + 0.14 \\ &= 0.55 \end{aligned}$$

例 17 掷一粒匀称的骰子一次，观察掷出的点数，试验的样本空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。求点数为偶数或 3 的倍数的概率。

解 设事件 A =“掷出偶数” = {2，4，6}，其概率 $P(A) = \frac{3}{6}$

设事件 B =“掷出 3 的倍数” = { 3，6}，其概率 $P(B) = \frac{2}{6}$

$A \cup B$ = {偶数或 3 的倍数} = {2，3，4，6}，其概率 $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$

$A \cap B$ = {偶数且 3 的倍数} = {6}，其概率 $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

在本题中，由于 $A \cap B \neq \varnothing$，所以 A，B 为不互斥事件，因而 $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$。观察上述四个事件的概率，可发现到

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

这一结论可以推广到一般的事件上去。

对于任意两事件 A，B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

当 A，B 互斥时，$A \cap B = \varnothing$，$P(A \cap B) = 0$，上式即加法定理。所以不论 A，B 是否互斥，此公式总是成立的。

例 18 从一副扑克牌中任意抽出一张，求它是黑桃或皇后 (Q) 的概率。

解 设事件 A ＝“抽到黑桃”，$P(A)=\frac{13}{52}$

B ＝“抽到皇后”，$P(B)=\frac{4}{52}$

事件 $A\cap B$ 表示抽到黑桃皇后，$P(A\cap B)=\frac{1}{52}$

事件 $A\cup B$ 表示抽到黑桃或皇后，

$$\begin{aligned}P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\ &= \frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}\\ &= \frac{4}{13}\end{aligned}$$

例 19 第一个射手中靶的概率是 0.8，第二个射手中靶的概率是 0.6，他们同时中靶的概率是 0.48，问至少一个射中靶的概率是多少？

解 设事件 A ＝“第一个射手中靶”，

B ＝“第二个射手中靶”。

于是 $A\cap B$ 表示他们同时中靶，A，B 不互斥。

至少一个射手中靶的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\ &= 0.8+0.6-0.48\\ &= 0.92\end{aligned}$$

习题 9c

1. 掷三个硬币，求有一个或三个正面朝上的概率。
2. 同时掷两颗骰子，问最少得到 9 点的概率是多少？
3. 在教室里开会的人共有 50 名，其中学生 35 名，学生家长 12 名，老师 3 名，从开会的人中任选 1 名发言人，试用加法定理计算：
   (a) 发言人是老师或学生的概率；
   (b) 发言人是老师或学生家长的概率；
   (c) 发言人是学生或学生家长的概率。

4. 在某一时期内，一条河流某处的年最高水位在各个范围内的概率如下：

年最高水位	低于10米	10 ~ 12米	12 ~ 14米	14 ~ 16米	不低于16米
概率	0.1	0.28	0.38	0.16	0.08

计算在同一时期内，河流这一处的年最高水位在下列范围内的概率：

(a) 10 ~ 16 米；　(b) 低于 12 米；　(c) 不低于 14 米。

5. 一盒子中有 3 粒红球，5 粒白球和 6 粒黄球。从盒中任意取出一球，求此球为红球或白球的概率。
6. 从一副扑克牌中任意抽出一张，求它是红桃或“人头”(K，Q，J) 的概率。
7. 投篮时甲投进球的概率是 p，乙投进球的概率是 0.7，他们同时投进球的概率是 $0.7p$，至少一人投进球的概率是 0.85。试求出 p。
8. 一个电路上装有甲、乙两根保险丝，当电流强度超过一定数值时，甲烧断的概率为 0.85，乙烧断的概率为 0.74，两根保险丝同时烧断的概率为 0.63，问至少有一根保险丝烧断的概率是多少？
9. 某公司购进一批电视机，经开箱检验，外观有缺陷的占 2%，显像管有缺陷的占 1%，至少有一种缺陷的占 2.8%，问外观和显像管都有缺陷的占多少？
10. 若 $A = \{x \mid 1 < x < 100,\ x \in \mathbb{N}\}$，从 A 中任取一数，其为 4 或 5 的倍数的概率是多少？

● 对立事件的概率

如果在试验时，两个互斥事件中必有一个发生，那么就称这两个事件为**对立事件** (complementary events)。一个事件 A 的对立事件记作 A′。

由对立事件的定义，

$$A \cap A' = \varnothing, \qquad A \cup A' = S$$

应用互斥事件概率的加法定理，

$$\begin{aligned} P(A) + P(A') &= P(A \cup A') \\ &= P(S) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad P(A') = 1 - P(A)$$

上式可用来计算对立事件的概率。

例 20 把一颗匀称的骰子掷一次，那么事件“掷出偶数点”和“掷出奇数点”不会同时发生，它们是互斥的。此外，要么“掷出偶数点”，要么“掷出奇数点”，它们中有一个事件必定发生，所以“掷出偶数点”和“掷出奇数点”是对立事件。

如果　　　A ＝“掷出偶数点”，$P(A)=\frac{3}{6}$

其对立事件 A′＝“掷出奇数点”，$P(A')=\frac{3}{6}$

$$\begin{aligned} P(A\cup A') &= P(A)+P(A') \\ &= \frac{3}{6}+\frac{3}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

A′ 实际上是表示 A 不发生。

例 21 应用计算对立事件的概率的公式，也可以解例 15。从 20 件产品中任取 3 件，设事件 A＝“3 件全是一级品”，于是其对立事件 A′＝“至少有 1 件为二级品”。

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{{}_{15}C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{91}{228} \\ P(A') &= 1-P(A) \\ &= 1-\frac{91}{228} \\ &= \frac{137}{228} \end{aligned}$$

例 22 盒中装了 30 个形状完全相同的小球，其中红球 n 个，绿球 7 个，蓝球 12 个，其余为黑球。从中任意取出 3 个球，它们为“1 红球、1 绿球、1 蓝球”的概率是 $\frac{42}{1015}$。问

(a) 盒中有多少个红球？

(b) 取出 3 球中至少有 1 个红球的概率是多少？

解 (a) 取出 3 球为“1 红球、1 绿球、1 蓝球”的概率是

$$\frac{{}_{n}C_{1}\times{}_{7}C_{1}\times{}_{12}C_{1}}{{}_{30}C_{3}}=\frac{3n}{145}$$

即 $$\frac{3n}{145}=\frac{42}{1015}$$

$\therefore$ $n=2$

(b) 设事件 A =“取出 3 球中没有红球”，

那么 A′ =“取出 3 球中至少有 1 个红球”。

$$P(A)=\frac{{}_{28}C_{3}}{{}_{30}C_{3}}=\frac{117}{145}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(A')&=1-P(A)\\&=1-\frac{117}{145}\\&=\frac{28}{145}\end{aligned}$$

习题 9d

1. 判别下列每对事件是不是互斥事件，如果是，再判别它们是不是对立事件。从一堆产品（其中正品与次品都超过 2 个）中任取 2 个，其中
   (a) 恰有 1 件次品和全是次品；
   (b) 至少有 1 件次品和全是次品；
   (c) 至少有 1 件正品和至少有 1 件次品；
   (d) 至少有 1 件次品和全是正品。
2. 把 3 粒匀称的骰子一起掷一次，求它们的点数之和至少为 4 的概率。
3. 一袋内有 9 粒球，其中 2 粒是白球，3 粒是红球另 4 球是黄球。若从中任意取出一球，试求下列各事件的概率：
   (a) 取出红球； (b) 取出之球不是红球；
   (c) 取出黄球； (d) 取出红球或白球。
4. 一副 52 张的扑克牌中，共有 12 张是有“人头”的。现在从中任意抽取两张，问
   (a) 两张都是“人头”的概率是多少？
   (b) 两张都不是“人头”的概率是多少？
   (c) 其中一张是有“人头”而另一张没有“人头”的概率是多少？

5. 盒中有红、黄、白色球各一个，有放回地取 3 次，每次任取一个球，求“取到的 3 个球中颜色不全相同”的概率。
6. 把一枚均匀硬币抛掷 5 次，求正面朝上至少出现 1 次的概率。
7. 打桥牌时把一副扑克牌分发给 4 人，问指定某人没有同时得到黑桃 A 与黑桃 K 的概率是多少？

9.3 独立事件与乘法定理

● 独立事件

对于事件 A 与 B，如果事件 A 是否发生对事件 B 发生的概率没有影响，那么它们称为**独立事件**（independent events）。

例如，掷一枚骰子两次，第一次出现的结果并不会影响到第二次出现的结果，这样前后两次的事件是独立事件。又如由袋中取球，取出后放回袋中，则第一次取球与第二次取球无关，是为独立事件。

两个相互独立事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率之积：

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

这就是独立事件概率的乘法定理。

例 23 甲盒子里有 6 个白球、4 个黑球，乙盒子里有 3 个白球、5 个黑球，从这两只盒子里分别任意摸出一个球，它们都是白球的概率是多少？

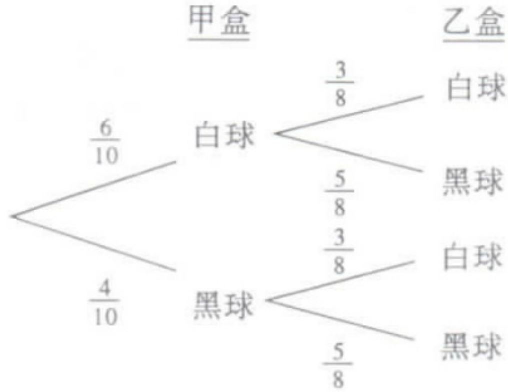
解 设事件 A =“从甲盒子里摸出一个白球”，

B =“从乙盒子里摸出一个白球”。

很明显，从一只盒子里摸出的是白球还是黑球，对从另一只盒子里摸出白球的概率没有影响，所以 A 与 B 是独立事件；题意所求的概率是指求 $P(A \cap B)$，应用独立事件概率的乘法定理，

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{9}{40} \end{aligned}$$

我们可以利用树图帮助求解，其方法如下：



它们都是白球的概率为 $\frac{6}{10}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{40}$

例 24 甲、乙两人各自进行一次射击，如果两人击中目标的概率都是 0.6，计算

(a) 两人都击中目标的概率；

(b) 其中恰有一人击中目标的概率；

(c) 至少有一人击中目标的概率。

解 (a) 设事件 A ＝“甲射击一次，击中目标”，

B ＝“乙射击一次，击中目标”。

$\therefore$ “两人都击中目标” $= A\cap B$

由题意知事件 A 与 B 独立，于是

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A)\times P(B) \\ &= 0.6\times 0.6 \\ &= 0.36 \end{aligned}$$

(b) “两人中恰有一人击中目标”

＝“甲击中，乙未击中” $\cup$ “甲未击中，乙击中”

$= (A\cap B')\cup(A'\cap B)$

并且 $A\cap B'$，$A'\cap B$ 互斥。

$$\begin{aligned} \therefore\ P\{(A\cap B')\cup(A'\cap B)\} &= P(A\cap B')+P(A'\cap B) \\ &= P(A)\times P(B')+P(A')\times P(B) \\ &= 0.6\times(1-0.6)+(1-0.6)\times 0.6 \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

(c) 方法一“至少有一人击中目标”的概率等于“两人都击中目标”的概率加上“恰有一人击中目标”的概率，即

$0.36+0.48=0.84$

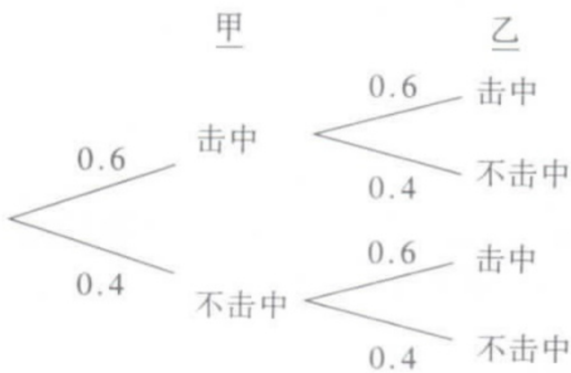
方法二“两人都未击中目标”的概率

$$\begin{aligned} P(A'\cap B') &= P(A')\times P(B') \\ &= (1-0.6)\times(1-0.6) \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

因此，应用计算对立事件概率的公式，“至少有一人击中目标”的概率为

$$\begin{aligned} 1-P(A'\cap B') &= 1-0.16 \\ &= 0.84 \end{aligned}$$

利用树图解本题，方法如下：



(a) 两人都击中目标的概率为 $0.6\times0.6=0.36$

(b) 其中恰有一人击中目标的概率为 $0.6\times0.4+0.4\times0.6=0.48$

(c) 至少有一人击中目标的概率为

$0.6\times0.6+0.6\times0.4+0.4\times0.6=0.84$

独立事件概率的乘法定理可以推广到多于 2 个的事件。如果事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，那么这 n 个事件同时发生($A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$)的概率，等于每个事件发生的概率的积，即

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2)\times\cdots\times P(A_n)$$

例 25 把一枚均匀硬币连掷 5 次，求掷出 5 个正面朝上的概率。

解 设事件 A_1 = “第 1 次掷出正面朝上”，$P(A_1)=\frac{1}{2}$

A_2 = “第 2 次掷出正面朝上”，$P(A_2)=\frac{1}{2}$

A_3 = “第 3 次掷出正面朝上”，$P(A_3)=\frac{1}{2}$

A_4 = “第 4 次掷出正面朝上”，$P(A_4)=\frac{1}{2}$

A_5 = “第 5 次掷出正面朝上”，$P(A_5)=\frac{1}{2}$

显然，A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 相互独立，所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5) &= P(A_1)\times P(A_2)\times P(A_3)\times P(A_4)\times P(A_5)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^5\\ &= \frac{1}{32}\end{aligned}$$

例 26 甲、乙同时向一敌机发射地空导弹。已知甲击中敌机的概率为 0.6，乙击中敌机的概率为 0.5，求敌机被击中的概率。

解 设事件 A = “甲击中”，B = “乙击中”。

“敌机被击中”的概率为

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

由题意可知事件 A 与 B 独立，所以

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= P(A)\times P(B)\\ &= 0.6\times 0.5\\ &= 0.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(A\cup B) &= 0.6+0.5-0.3\\ &= 0.8\end{aligned}$$

习题 9e

1. 掷一骰子三次，求第一次及第二次出现 2 点，第三次出现奇数点的概率。
2. 一袋中有 5 个白球，3 个黑球。每次抽球一个，抽出后再放回袋中。现先后抽球两次，求
   (a) 两球都是黑球的概率；
   (b) 第一次为黑球，第二次为白球的概率；
   (c) 至少有一次出现黑球的概率。
3. 把一粒匀称的骰子任意地连掷两次，计算“第一次掷出点数不超过 3，第二次掷出点数不超过 5”的概率。
4. 某中学推荐甲、乙、丙三名初三年级的学生参加一次考试，他们通过考试的概率分别是 $\frac{4}{7}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$。
   试求：
   (a) 三名学生都通过考试的概率；
   (b) 恰有两名学生通过考试的概率；
   (c) “几名学生通过考试”发生的可能性最大？
5. 三人竞射，A 五发三中，B 三发二中，C 二发一中。今三人各向靶射一次，求
   (a) A，B，C 三人都中靶的概率；
   (b) 三人都没有中靶的概率；
   (c) 只有一人中靶的概率；
   (d) 至少一人中靶的概率。
6. 某种零件的加工由两道工序组成，第一道工序的废品率为 0.015，第二道工序的废品率为 0.02。假定两道工序出废品是彼此无关的，求产品的合格率。
7. 4 粒骰子掷一次至少得一个 6 点与 2 粒骰子掷 24 次至少得一次双 6 点，问这两个事件哪个的概率较大？
8. 3 人独立地去破译一份密码，他们各自能译出密码的概率分别是 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，问这份密码被破译的概率是多少？

● 从属事件与条件概率

对于事件 A 与 B，如果事件 A 是否发生会影响到事件 B，那么称事件 B 是 A 的**从属事件**（dependent events）。在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率称为**条件概率**（conditional probability），记作 $P(B \mid A)$。

例 27 100 台电视机中有 3 台次品，其余是正品，无放回地依次取出 2 台。求

(a) 在第一次取出正品的情况下，第二次取出正品的概率；

(b) 取出的 2 台都是正品的概率。

解 (a) 设事件 A ＝“第一次取得正品”，其概率为 $P(A)=\frac{97}{100}$；

事件 B ＝“第二次取得正品”，在事件 A 已经发生的条件下，100 台电视机只剩下 99 台，其中正品剩下 96 台，

$$\therefore\ P(B \mid A)=\frac{96}{99}$$

(b) 取出的 2 台都是正品的概率即事件 A 和 B 同时发生的概率；

$$\begin{aligned}\therefore\ P(A\cap B)&=P(A)\cdot P(B \mid A)\\&=\frac{97}{100}\times\frac{96}{99}\\&=\frac{776}{825}\end{aligned}$$

一般而言，如果事件 B 是事件 A 的从属事件，那么事件 A、B 同时发生的概率为

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B \mid A)$$

它称为从属事件概率的乘法定理。

显然，条件概率为

$$P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ 且\ P(A)\neq 0$$

例 28 某种商标的灯泡用 5000 小时未坏的概率为$\frac{3}{4}$，用 10000 小时未坏的概率为$\frac{1}{2}$，现在有一只灯泡用了 5000 小时未坏，问它能用到 10000 小时的概率是多少？

解 设事件 A ＝“灯泡用到 5000 小时”，

B ＝“灯泡用到 10000 小时”。

由题意 $P(A)=\frac{3}{4}$，$P(B)=\frac{1}{2}$。由于用到 10000 小时的灯泡一定用了 5000 小时，

$\therefore \quad A\cap B = B$

$P(A\cap B) = P(B)$

题意求在“灯泡用到 5000 小时”的条件下“用到 10000 小时”的概率，即求 $P(B \mid A)$，

$$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

例 29 盒中有 5 只乒乓球，其中 3 只新的，2 只旧的。每次任意取出 1 只，无放回地取两次。试求

(a) 两次都取到新球的概率；

(b) 第一次取到旧球，第二次取到新球的概率；

(c) 第二次取到新球的概率。

解 (a) 设事件 A ＝“第一次取到新球”，

B ＝“第二次取到新球”，

于是“两次都取到新球”＝ $A\cap B$。

显然，“第一次取到新球”与否会影响“第二次取到新球”的概率，即 B 是 A 的从属事件。所以“两次都取到新球”的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= P(A)\times P(B\mid A)\\ &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

(b) “第一次取到旧球” $= A'$，$P(A') = \dfrac{2}{5}$

“第二次取到新球” $= B$ 的概率 $P(B\mid A') = \dfrac{3}{4}$

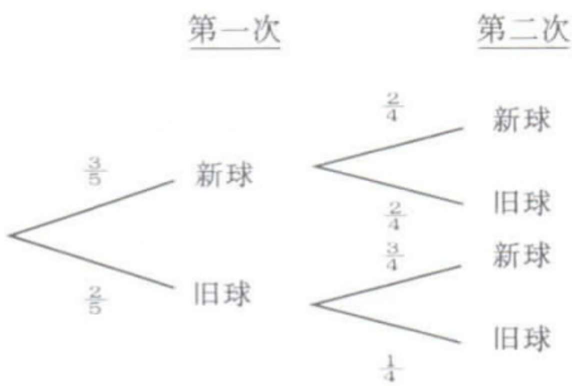
“第一次取到旧球，第二次取到新球”的概率为

$$\begin{aligned}P(A'\cap B) &= P(A')\times P(B\mid A')\\ &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

(c) 由于 B 发生只能伴随着 A 发生及 A 不发生两种情况，而 (a) 的事件 $A\cap B$ 与 (b) 的事件 $A'\cap B$ 互斥，

$\therefore\ P(B) = \dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{5}$

树图可以帮助我们理解本题的解法，下图画出了与试验有关的树图。



【注】 如果事件 B 是事件 A 的从属事件，那么

$$P(B) = P(A)\times P(B\mid A)+P(A')\times P(B\mid A')$$

上式体现了条件概率在计算从属事件 B 的概率时所起的重要作用。

例 30 有一张电影票，7 个人抽签决定谁得到它，问第 2 个人抽到票的概率是多少？

解 设事件 A ＝“第 1 个人抽到票”，

B ＝“第 2 个人抽到票”。

B 是 A 的从属事件。

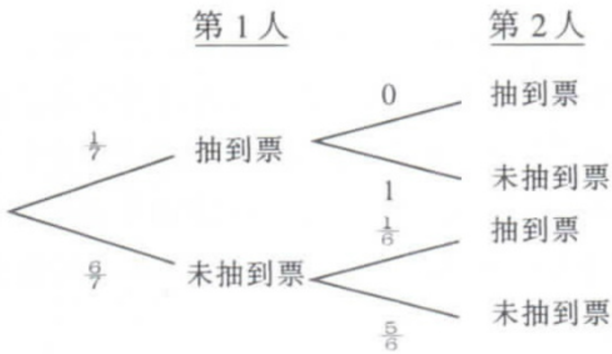
$$P(A) = \frac{1}{7}, \qquad P(A') = \frac{6}{7}$$

假如 A 发生，第 2 个人必抽不到票，$P(B \mid A) = 0$

假如 A′发生，第 2 个人可望在剩下的 6 个签中抽到票，$P(B \mid A') = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(B) &= P(A) \times P(B \mid A) + P(A') \times P(B \mid A) \\ &= \frac{1}{7} \times 0 + \frac{6}{7} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

下图是与本例有关的树图。



【注】 由于 $P(A) = \frac{1}{7} = P(B)$，表明第 1 个人与第 2 个人抽到电影票的可能性相同，抽签的办法对先抽者和后抽者是公平的。

例 31 两台机床加工同样的零件，第一台的废品率是 0.03，第二台的废品率是 0.02。加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍，求任意取出的一个零件是合格品的概率。

解 设事件 A ＝“这零件是第一台机床加工的”，于是

A′＝“这零件是第二台机床加工的”，

B ＝“这零件是合格品”。

由于两台机床的废品率不同，所以 B 是 A 的从属事件。“第一台加工的零件比第二台多一倍”的意思是指

$$P(A) = \frac{2}{3}, \qquad P(A') = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(B) &= P(A) \times P(B \mid A) + P(A')\,P(B \mid A') \\ &= \frac{2}{3} \times (1 - 0.03) + \frac{1}{3} \times (1 - 0.02) \\ &= 0.973\end{aligned}$$

习题 9f

1. 有零件 100 个，其中 92 个直径合格，95 个光洁度合格，两个指标都合格的有 90 个，从 100 个零件中任抽一个，结果它的光洁度合格，求此零件的直径也合格的概率？
2. 掷 2 粒匀称的骰子，其中一红一蓝。如果已知蓝骰子掷出的点数能被 3 除尽，问此种情况下 2 粒骰子的点数之和大于 8 的概率是多少？
3. 盒子装有 16 个球，其中 6 个是玻璃球，10 个是木质球。玻璃球中有 2 个是红色的，4 个是蓝色的；木质球中有 3 个是红色的，7 个是蓝色的。从盒中任意摸出 1 球，如已知摸出的是蓝色球，问它是玻璃球的概率是多少？
4. 第一只盒子中有 2 个白球和 6 个黑球，第二只盒子中有 4 个白球和 2 个黑球。从第一只盒子中任意把 1 个球移到第二只盒子中，再从第二只盒子中任意取出 1 球，求这球是白球的概率。
5. 第一只盒子中放了 3 个红球、1 个白球，第二只盒子中放了 1 个红球、3 个白球。掷一粒匀称的骰子，如掷出 1 点就从第一只盒子中任意摸出一球；如掷出其它点就从第二只盒子中任意摸出一球，求摸到红球的概率。
6. 设有 10 张债券，其中 3 张是有奖的，甲先买 1 张，乙然后买 1 张，求：
   (a) 甲、乙都买到有奖债券的概率；
   (b) 甲未买到而乙买到有奖债券的概率；
   (c) 乙买到有奖债券的概率。
7. 5 名中学生在罚球线投篮的命中率，有 2 人为 0.6，有 3 人为 0.4。现在从中任选一名中学生投篮一次，问他“投中”与“未投中”哪个概率较大？
8. 在某一工厂生产的产品中，由于有缺陷Ⅰ而成为废品的占 5%，而在有缺陷Ⅰ的产品中又有 6% 有缺陷Ⅱ，在没有缺陷Ⅰ的产品中有缺陷Ⅱ的占 2%，求产品有缺陷Ⅱ的概率。

9.4 数学期望值

如果一个人获得 s 元的概率为 p，那么 s 与 p 的乘积 sp 称为该人的**数学期望值**（mathematical expectation），简称期望值。

例如，某人得到 12 元奖金的概率为 $\frac{1}{6}$，那么他的奖金期望值为

$$12\times\frac{1}{6} = 2\text{（元）}$$

推广之，如果变量 x 可能取 n 个不同的值 x_1，x_2，…，x_n，而各变量出现的概率为 p_1，p_2，…，p_n，且 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，那么变量 x 的期望值（通常以 E 表示）为

$$\mathrm{E} = x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n = \sum xp$$

例 32 在一项商业活动中，某人获利 300 元的概率为 0.6，亏损 100 元的概率为 0.4，求他的期望值。

解 由于 $0.6+0.4=1$，表明他在这项商业活动中不会有其他可能，他获利的期望值

$$\begin{aligned}\mathrm{E} &= 300\times0.6+(-100)\times0.4\\ &= 140\text{（元）}\end{aligned}$$

表明有希望获利 140 元。

【注】 对一次这样的商业活动，此人不是赚 300 元，就是亏 100 元。但假定他很多次从事这类商业活动，那么从平均意义上说，每次可望获利 140 元。

例 33 两台生产同一零件的自动车床，一天生产中次品数的概率分配如下表所示：

次品数	0	1	2	3
甲车床的 p	0.4	0.3	0.2	0.1
乙车床的 p	0.3	0.5	0.2	0

如果两台车床的产量相同，问哪台车床的质量较好？

解　因为产量相同，可考虑各台车床的次品数。设甲、乙车床生产的次品数分别为 x，y。

x 的数学期望值

$$E_1 = 0\times0.4+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.1 = 1$$

y 的数学期望值

$$E_2 = 0\times0.3+1\times0.5+2\times0.2+3\times0 = 0.9$$

次品数越小越好，由于 $E_2 < E_1$，所以乙车床的质量比甲车床好。

例 34　甲、乙两小孩玩掷骰子的游戏，游戏的规则是：甲先给乙 3 元，然后将一粒匀称的骰子掷一次，掷出几点乙就给甲几元钱。问游戏对谁有利？

解　设甲通过掷骰子获得的钱数（元）为 x，由于骰子是匀称的，所以 x 为 1，2，3，4，5，6 的概率都是 $\frac{1}{6}$，x 的期望金额

$$E = 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+5\ \times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\times(1+2+3+4+5+6)$$

$$= 3.5\text{（元）}$$

上式意味着，如果他们玩很多次这种游戏，那么，甲平均每次可获得 3.5 元。因为甲先付给乙 3 元，所以甲最终每次游戏可望 0.5 元，游戏规则对甲有利。

【注】　如果甲掷骰子前先付给乙 3.5 元，那么这游戏对甲、乙就公平了。

例 35　某保险公司销售一年期的人寿保险给 20 岁的年轻人，保险额为 10000 元，保险费为 12 元。依过去资料显示 20 岁的年轻人活到 21 的概率为 $\frac{999}{1000}$，问该保险公司的期望利润为多少？

解 假如该年轻人活到 21 岁，则保险公司赚 12 元，否则亏 9988 元，故所求的期望利润为

$$\begin{aligned} E &= 12\text{元} \times \frac{999}{1000} + (-9988)\text{元} \times \frac{1}{1000} \\ &= \frac{1}{1000} \times (11988 - 9988)\text{元} \\ &= 2\text{元} \end{aligned}$$

在例 35 中，期望值为 2 元，并不是说将保险卖给一个人，就可获利 2 元，其实对这人而言，保险公司不是赚 12 元，就是亏 9988 元。期望值为 2 元的意思是说，该公司将此人寿保险卖给相当多的人，其平均利润则为每人 2 元。

习题 9g

1. 一种体育彩票每张售价 2 元，其奖金分配如下：获 5000 元的概率是 $\frac{1}{10000}$，获 500 元的概率是 $\frac{1}{1000}$，某人买了一张彩票，问他是否划算？
2. 某人在一项投机生意中，可获利 10000 元的概率是 $\frac{3}{5}$，亏损 6000 元的概率是 $\frac{2}{5}$，试求他的期望值；并问他应以最多多少钱来投资这门生意才划算？
3. 一台仪器中有 3 个元件，各元件发生故障是相互独立的，其概率分别为 0.2，0.3，0.4。求发生故障的元件数的数学期望值。
4. 某公司生产灯泡，每个正品灯泡获利 2 分，而每个次品灯泡亏损 10 分。如果灯泡中有 1% 是次品，试问每只灯泡可望获利多少？
5. 一家保险公司卖给你一张保险费为 8 元的 1000 元的保险单。如果你下一年去世，这公司给你的继承者 1000 元，否则它分文不给。如果你下一年去世的概率是 0.005，那么保险公司对一张保险单获利的期望金额是多少？
6. 某商店从外地购进一批西瓜，预计若天晴则西瓜畅销，可获利 1000 元；若天阴则销路一般，可获利 500 元；若天下雨则西瓜滞销，将亏损 500 元。据天气预报，未来数日天晴、天阴、天下雨的可能性分别是 0.4，0.2，0.4，问这批西瓜可望获利多少？

7. 某独中举行游艺会，共发了每张 1 元的彩票 8000 张，其中有 5 张奖金 500 元，有 7 张奖金 300 元，有 10 张奖金 100 元，有 50 张奖金 10 元，问购此种彩票是否有利？

8. 一盒中有 10 粒螺丝，其中 3 粒是有缺陷的。现从盒中任意取出 3 个，求取得有缺陷螺丝的期望值。

9.5 二项分配（独立重复试验）

在生产实践和日常生活中，我们经常会遇到只有两个结果的随机现象。例如，掷一枚硬币，不是“正面朝上”就是“反面朝上”；足球运动员射门时，不是“射进球”就是“射不进球”。

有些随机现象的结果不止两个，例如，掷一骰子，可能的结果有 1 点，2 点…6 点。但若只考虑得到 6 点，那末可以把得到 6 点看作发生事件 A，把 1 点，2 点…5 点看作发生事件 A′，那末，这一随机现象也只有两个结果了。

我们把只有两种结果的试验称为**贝努利试验**（Bernouli trial）。若进行 n 次独立的贝努利试验，在每次试验中，事件 A 出现的概率和事件 A′出现的概率都保持不变，即

$$P(A) = p,$$
$$P(A') = 1-p = q$$

我们称这种试验为 n 重贝努利试验或独立重复试验。

在独立重复试验中，我们所关心的是在 n 次试验中，事件 A 恰好出现 r 次的概率。

例如，某射击运动员射击四次，每次击中目标的概率是 $p=0.9$，则击不中目标的概率是 $q=0.1$。

在四次射击中，第一次击中目标，其余三次不中的概率为

$$(0.9)(0.1)^3$$

另一方面，击中目标 1 次可以发生在第一次、第二次、第三次或第四次射击，即有 ${}_4C_1$ 种方法，所以“击中 1 次，不中 3 次”的概率为

$$P(\text{击中 1 次}) = {}_4C_1(0.9)(0.1)^3$$

同理，“击中 2 次，不中 2 次”的概率为

$$P(\text{击中 2 次}) = {}_4C_2(0.9)^2(0.1)^2$$

在四次射击中，0次、1次、2次、3次或4次击中目标的概率如下表：

击中次数	0	1	2	3	4
概　　率	$(0.1)^4$	${}_4C_1(0.9)(0.1)^3$	${}_4C_2(0.9)^2(0.1)^2$	${}_4C_3(0.9)^3(0.1)$	$(0.9)^4$

由此，可发现到上表中的概率实为 $(q+p)^4$ 的展开式中的各项，其中 $p=0.9$，$q=0.1$。即

$$(q+p)^n = q^4 + {}_4C_1pq^3 + {}_4C_2p^2q^2 + {}_4C_3p^3q + p^4$$

$$1 = P(\text{击中 0 次}) + P(\text{击中 1 次}) + P(\text{击中 2 次}) + P(\text{击中 3 次}) + P(\text{击中 4 次})$$

因此，在 n 次独立重复试验中，设 X 为事件 A 发生的次数，那么 A 恰好发生 r 次（即 $X=r$）的概率是

$$P(X=r) = {}_nC_rp^rq^{n-r},\qquad \text{式中 } q = 1-p$$

这种概率的分布状态称为**二项分配**（binomial distribution）。

例 36 一次数学测验中有 6 个判断题，要求学生对每一题做出判断，正确者画"√"，错误者画"×"。如果一学生答题时不能辨别正误而随意地画√或×，试求：

(a) 6题全答对的概率；

(b) 6题中至少答错1题的概率；

(c) 6题中有3题答对的概率。

解 设 X 为答对的题数。显然，学生随意地画√或×的意思是指

$$p = q = \frac{1}{2}$$

(a) $P(X=6) = {}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{6-6}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= \frac{1}{32}$

(b) $\because\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=6) = 1$

$\therefore\ P(\text{至少答错 1 题}) = 1-P(X=6)$

$= 1-\frac{1}{32}$

$= \frac{31}{32}$

(c) $P(X=3) = {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3}$

$= \frac{6\times5\times4}{3\times2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= \frac{5}{16}$

例 37 设一中学生在篮球场罚球线投篮的命中率是 0.2，问他独立投篮 25 次，正好投中 10 球的概率是多少？

解 问题可看成是 25 次独立重复试验，于是 $p=0.2$，$q=0.8$。

设 X 为投中的球数，

$P(X=10) = {}_{25}C_{10}\times0.2^{10}(1-0.2)^{25-10}$

≈ 0.0118

该事件发生的可能性比百分之一略大些。

例 38 下述赌博游戏在狂欢节和一些俱乐部里很流行：赌徒把赌注压在 1 至 6 的某一数上，然后掷 3 粒匀称的骰子，规定若赌徒所压的数在骰子上出现 i 次，$i=1, 2, 3$，则赌徒赢 i 元；另一方面，如果赌徒所压的数没有出现，则他输 1 元。问规则对赌徒是否公平？

解 由于骰子是匀称的，一粒骰子掷出每种点数的概率是 $\frac{1}{6}$。此外，掷 3 粒骰子可以认为是 3 次独立重复试验。

若以 X 表示赌徒所压的数出现的次数，那么

$P(X=1) = {}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}$

$= \frac{75}{216}$

$P(X=2) = {}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{3-2}$

$= \frac{15}{216}$

$P(X=3) = {}_3C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{3-3}$

$= \frac{1}{216}$

$$P(X=0) = {}_3C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{3-0}$$

$$= \frac{125}{216}$$

赌徒的期望金额

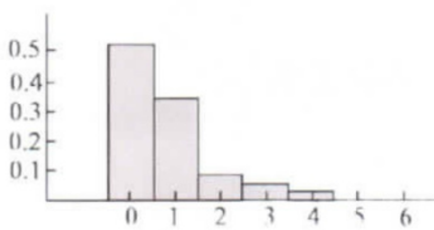
$$E = 1\times\frac{75}{216}+2\times\frac{15}{216}+3\times\frac{1}{216}+(-1)\times\frac{125}{216}$$

$$= -\frac{17}{216}$$

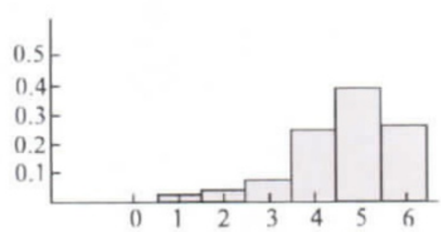
意味着从平均意义上说，他每赌一次输 $\frac{17}{216}$ 元。

或者说，他每赌 216 次，可望输 17 元。所以赌博规则对赌徒是不利的。

如果我们把横坐标取作二项分配中某事件 A 发生的次数，纵坐标取作相应的概率，那么对于不同的 n 和 p，可以画出二项分配的直方图，图 9－1 和图 9－2 就是一些二项分配的直方图。从图 9－1 和图 9－2 可见，对于 $p=0.5$（如掷一枚均匀硬币，观察正面朝上情况），二项分配是对称的；当 $p\neq0.5$ 时二项分配不对称，我们称之为斜的二项分配。

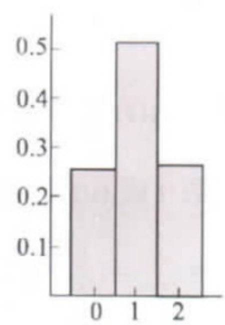


$n=6, p=0.10$

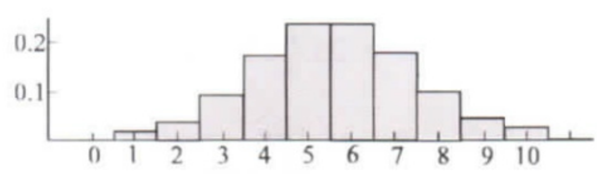


$n=6, p=0.80$

图 9－1



$n=2, p=0.5$



$n=11, p=0.5$

图 9－2

由于直方图中各长方形的底边长度为 1，纵坐标是相应的概率，那么当计算事件 A 发生某些次数的概率值时，只需把对应的长方形相加即可。

例 39 掷一枚均匀硬币两次，从二项分配直方图上算出正面朝上至多发生一次的概率。

解 从图 9－2 的第一个直方图上（对应 $n=2$，$p=0.5$）可见，正面朝上至多发生一次的概率即横坐标从 -0.5 到 1.5 这两个长方形的面积之和，其中第一个长方形的面积对应于正面朝上 0 次的概率，第二个长方形的面积对应于正面朝上 1 次的概率。

$\therefore$ P（正面朝上至多一次）$= 0.25\times 1+0.5\times 1 = 0.75$

由二项分配直方图，我们可以求得平均数 μ 和标准差 σ。二项分配的平均数 μ 和标准差 σ 也可由公式

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

算出(公式的证明从略)。

例 40 掷一骰子 100 次，求得到点数 1 或 6 的平均数和标准差。

解 得到点数 1 或 6 的概率

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ q = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mu &= np\\ &= 100\times\frac{1}{3}\\ &= 33\frac{1}{3}\\ \sigma &= \sqrt{npq}\\ &= \sqrt{100\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}\\ &= 4.71\end{aligned}$$

习题 9h

1. 某气象台天气预报的准确率为 80%，计算：

   (a) 5 次预报中恰有 4 次准确的概率；

   (b) 5 次预报中至少有 4 次准确的概率。

2. 把一枚匀称的硬币连掷 5 次，试计算：

   (a) “正面朝上”出现 3 次的概率；

   (b) “正面朝上”至少出现 3 次的概率；

   (c) “正面朝上”出现奇数次的概率。

3. 平均有 1% 的人是左撇子，试问在 100 名中学生中发现：

   (a) 正好 4 名左撇子的概率是多少？

   (b) 不少于 4 名左撇子的概率是多少？

4. 生产一种零件，出现次品的概率是 0.04。生产这种零件 20 件，计算：

   (a) 恰有 1 件次品的概率；

   (b) 恰有 2 件次品的概率；

   (c) 至多有 1 件次品的概率。

5. 设一人能由 28 岁活到 60 岁的概率是 $\frac{2}{3}$，今有 10 个 28 岁的人，问恰好有 6 人能活到 60 岁的概率是多少？

6. 某药品治愈牲口的疗效为 0.96，求 10 头牲口服药后，至少有 8 头牲口被治愈的概率。

7. 甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6，0.7。现每人独立地投 3 次，求：

   (a) 两人投中次数相等的概率；

   (b) 甲比乙投中次数多的概率。

8. 把一粒匀称的骰子任意掷 5 次，问：

   (a) 6 点第一次出现在第四次投掷时的概率是多少？

   (b) 6 点第三次出现在第五次投掷时的概率是多少？

   (c) (a) 中的事件与 (b) 中的事件是否互斥？

9. 掷一匀称的银币 100 次，求得到正面朝上的平均数和标准差。

10. 二骰同掷，出现的点数和至少 10 点为成功，求掷 60 次的成功次数平均数和标准差。

9.6 常态分配

对于 n 较大，$p=0.5$ 的二项分配直方图，如果用一条平滑的曲线把每个长方形上底的中点连接起来，就能得到一条钟形曲线，称为**常态曲线**（normal curve），如图 9－3 所示。其函数表达式是

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中 $\mu = np$，$\sigma = \sqrt{npq}$，$e \simeq 2.71828$

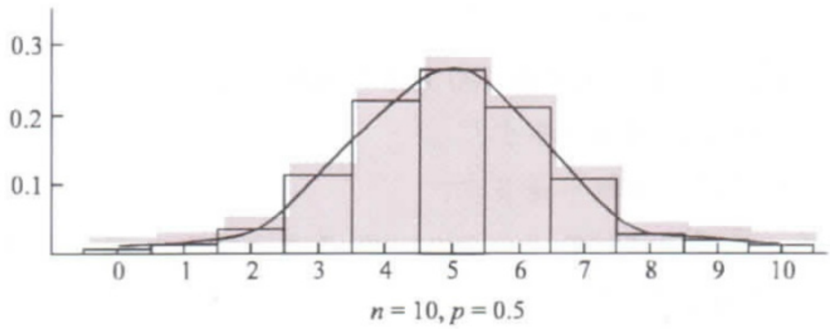


图 9－3

回顾二项分配的直方图及例 39，直方图中各长方形面积可以表示有关的概率值。对于常态曲线，如果规定，试验的观测值 X 落在区间（a，b）上的概率 $P(a<X<b)$ 就是由这条曲线，x 轴，直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的面积(图 9－4)，那么称这种概率的分配状态为**常态分配**（normal distribution）。

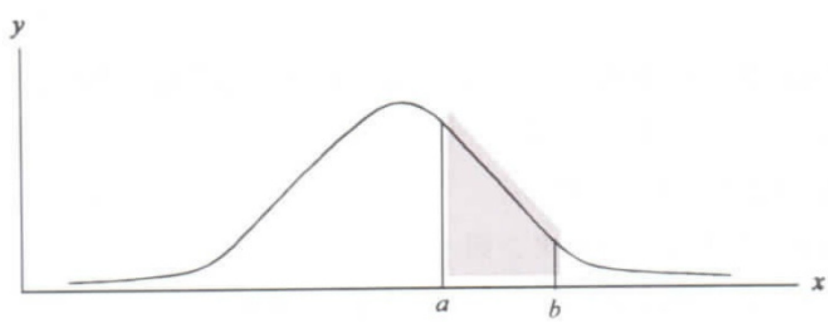


图 9－4

一个平均数为 μ，标准差为 σ 的常态分配可以用公式 $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ 将它变换成平均数为 0，标准差为 1 的常态分配。平均数为 0，标准差为 1 的常态分配称为**标准常态分配**（standard normal distribution），如图 9－5 所示。其公式为

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}，其中\ z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

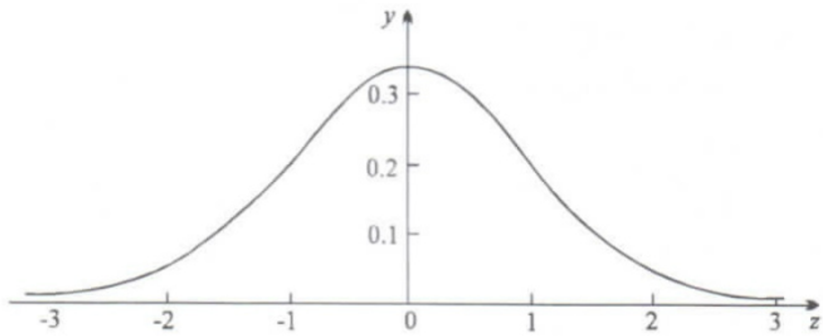


图 9－5

一般的常态分配问题，能转化成标准常态分配问题来处理。即将常态分配中观察值 X 的概率 $P(a<X<b)$ 表示成标准常态分配中的 $P(z_1 \leqslant Z \leqslant z_2)$，其中 $z_1=\frac{a-\mu}{\sigma}$，$z_2=\frac{b-\mu}{\sigma}$。

由于必然事件的概率是 1，所以在标准常态曲线下方、在 x 轴上方的总面积等于 1。为了计算与标准常态分配有关的事件的概率，我们列出了图 9－6 中阴影部分面积的表（见 255 页），以备查用。

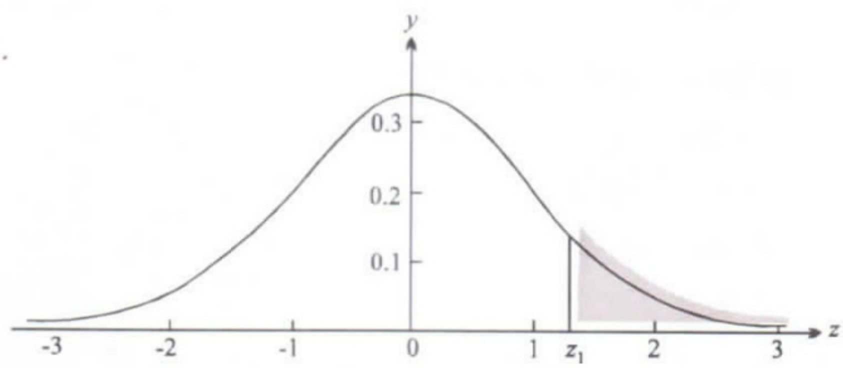


图 9－6

用常态曲线去近似二项分布的直方图，当 n 比较大，p 等于或接近于 0.5 时，效果比较好（参看图 9－3）。一般地说，n 越大，p 越接近 0.5，近似程度越高；反之，n 很小，p 接近 0 或 1，则近似得不好，图 9－5 中的前 2 个直方图用钟形曲线去逼近显然是不合适的。我们一般要求 $np \geqslant 5$ 及 $nq \geqslant 5$，否则的话，计算概率的误差太大。

例 40 对于标准常态分配，设 Z 是试验的观测值，求下列事件的概率：

(a) “$0.02 \leqslant Z \leqslant 0.08$”；

(b) “$-0.5 < Z < -0.4$”；

(c) “$Z < -0.3$”；

(d) “$Z < 0.2$”；

(e) “$Z > -0.1$”；

(f) “$-1.24 \leqslant Z < 1.25$”。

解 (a) 由于我们用面积度量概率，所以 Z 落在区间 (z_1, z_2)，或 $[z_1, z_2)$，或 $[z_1, z_2]$，或 $(z_1, z_2]$ 上的概率是一样的。

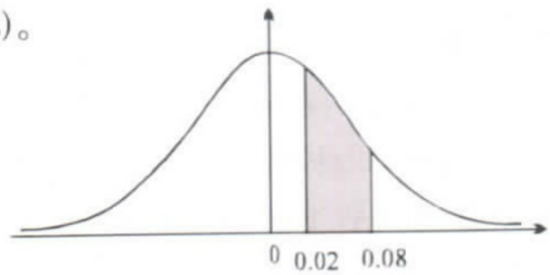
求 $P(0.02 \leqslant Z \leqslant 0.08)$，可在表上查出对应 $Z=0.02$ 的面积 $Q(0.02)$，减去对应 $Z=0.08$ 的面积 $Q(0.08)$。

$\therefore$ $P(0.02 \leqslant Z \leqslant 0.08)$

$= Q(0.02) - Q(0.08)$

$= 0.4920 - 0.4681$

$= 0.0239$



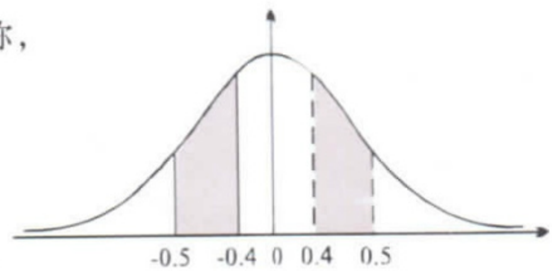
(b) 因为标准常态曲线关于 y 轴对称，

$\therefore$ $P(-0.5 < Z < -0.4)$

$= Q(0.4) - Q(0.5)$

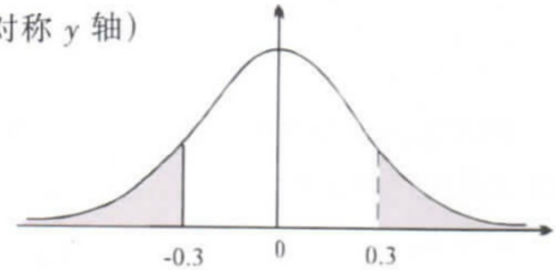
$= 0.3446 - 0.3085$

$= 0.0361$



(c) $P(Z < -0.3) = Q(0.3)$ （对称 y 轴）

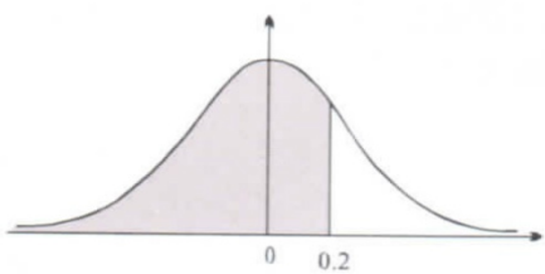
$= 0.3821$



(d) $P(Z < 0.2) = 1 - Q(0.2)$

$= 1 - 0.4207$

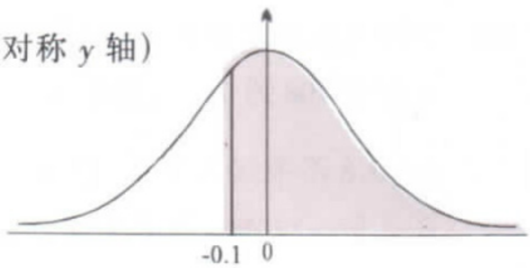
$= 0.5793$



(e) $P(Z > -0.1) = 1 - Q(0.1)$ （对称 y 轴）

$= 1 - 0.4602$

$= 0.5398$

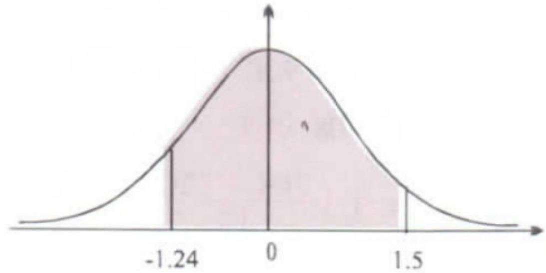


(f) $P(-1.24 \leqslant Z < 1.5)$

$= 1 - Q(1.24) - Q(1.5)$

$= 1 - 0.1075 - 0.0668$

$= 0.8257$



例 41 把一枚均匀硬币任意抛掷 10 次，试用常态分配近似计算抛掷出正面朝上 6 次或 7 次的概率。

解 本例可看成是 10 次独立重复试验，$n = 10$，$p = 0.5$。参看图 9-3，如设抛掷出的正面朝上次数为 x，即求二项分配的直方图上 $x = 5.5$ 到 $x = 7.5$ 这两个长方形面积之和。题意要求的是相应常态曲线下 $x = 5.5$ 到 $x = 7.5$ 的面积。对此常态曲线，

$$\mu = np = 10 \times 0.5 = 5$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = 1.581$$

转化成标准常态分配，作变换

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 5}{1.581}$$

$\therefore \quad P(5.5 < X < 7.5)$

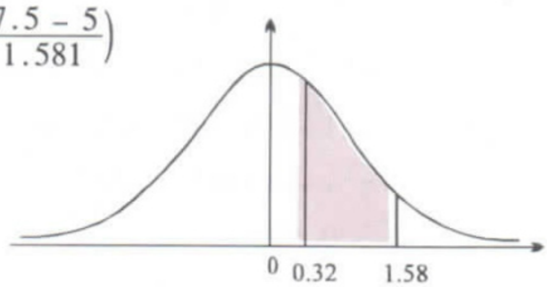
$= P\left(\frac{5.5 - 5}{1.581} < \frac{X - 5}{1.581} < \frac{7.5 - 5}{1.581}\right)$

$= P(0.32 < Z < 1.58)$

$= Q(0.32) - Q(1.58)$

$= 0.3745 - 0.0571$

$= 0.3174$



【注】 如直接从二项分配求解，所求概率等于

$${}_{10}C_6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{330}{1024} = 0.3223$$

考虑到 $n = 10$ 不太大，近似值 0.3174 和准确值 0.3223 的差别不足为奇。

例 42 事件 A 在每次试验中发生的概率 $p=0.8$，现作了 900 次独立重复试验，求 A 发生 708 到 744 次的概率。

解 $p=0.8$ 不很接近 0.5，但 $n=900$ 很大，np 及 nq 远大于 5，可以用常态分配近似。设 A 发生的次数为 X，求 P（708 < X < 744）。

$$\mu = 900\times0.8 = 720$$

$$\sigma = \sqrt{900\times0.8\times(1-0.8)} = 12$$

$\therefore$ $P(708 < X < 744)$

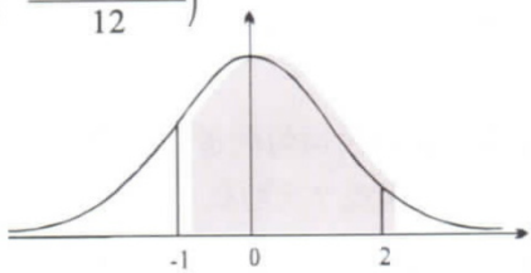
$$= P\left(\frac{708-720}{12} < \frac{X-720}{12} < \frac{744-720}{12}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 2)$$

$$= 1-Q(1)-Q(2)$$

$$= 1-0.1587-0.0228$$

$$= 0.8185$$



例 43 某独中全体学生的高度分布为一常态分配，其平均数为 135.6 cm，标准差为 5.8 cm。

(a) 任取一学生，求其高度介于 130 cm 至 140 cm 之间的概率；

(b) 求 h 的值，若 85%的学生高于 h cm；

(c) 若此独中共有学生 1200 名，求高度底于 135 cm 的学生人数；

(d) 若任取 4 名学生，求其中 2 名的高度底于 135 cm 的概率。

解 (a) $P(130 < X < 140)$

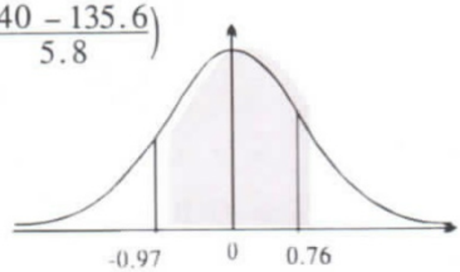
$$= P\left(\frac{130-135.6}{5.8} < \frac{X-135.6}{5.8} < \frac{140-135.6}{5.8}\right)$$

$$= P(-0.97 < Z < 0.76)$$

$$= 1-Q(0.97)-Q(0.76)$$

$$= 1-0.1660-0.2236$$

$$= 0.6104$$

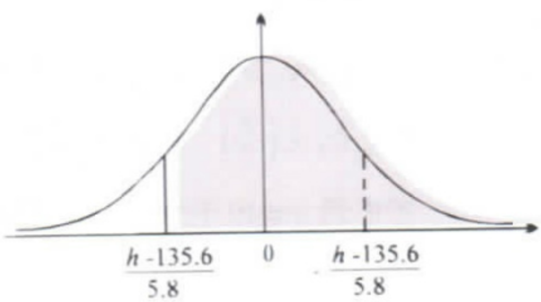


(b) $P(X > h) = 0.85$

$$P\left(Z > \frac{h-135.6}{5.8}\right) = 0.85$$

$$1-Q\left(-\frac{h-135.6}{5.8}\right) = 0.85$$

$$Q\left(-\frac{h-135.6}{5.8}\right) = 0.15$$



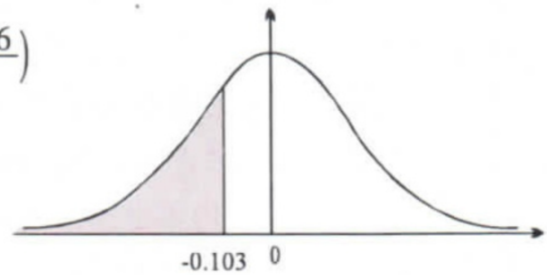
$$Q(1.04) = 0.15$$

$$\therefore \quad -\frac{h - 135.6}{5.8} = 1.04$$

$$h - 135.6 = -6.032$$

$$h = 129.57$$

(c) $P(X < 135) = P\left(Z < \frac{135 - 135.6}{5.8}\right)$



$= P(Z < -0.103)$

$= Q(0.103)$

$= 0.4602$

高度底于 135 cm 的学生人数 $= 1200 \times 0.4602$

$= 552.24$

$\simeq 552$ 名

(d) 4 名学生中 2 名高度低于 135 cm 的概率为 $P = {}_4C_2\, p^2 q^2$

高度低于 135 cm 的概率 $p = 0.4602$，$\therefore q = 0.5398$

$\therefore \quad P = {}_4C_2(0.4602)^2(0.5398)^2$

$= 0.3703$

习题 9i

1. 设 Z 是标准常态分配的观测值，求下列各概率：

(a) $P(1.5 < Z < 2.5)$ (b) $P(Z \leqslant 1.96)$

(c) $P(-1 < Z < 1)$ (d) $P(Z \geqslant 3)$

(e) $P(-3.4 < Z < -1.7)$ (f) $P(Z \leqslant -1.65)$

(g) $P(-0.42 < Z < 1.42)$ (h) $P(Z > -0.74)$

2. 对于常态分配 $y = \frac{1}{0.3 \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2 \times 0.09}}$

试求下列各概率：

(a) $P(X > 2.4)$ (b) $P(1.4 < X < 1.7)$

3. 已知大豆遭虫食的概率为 0.1，试用常态分配近似计算 1000 粒大豆中虫食豆在 100 至 110 粒之间的概率。

4. 以 X 表示把一枚均匀硬币掷 40 次时出现“正面朝上”的次数，试用常态分配近似计算事件“X = 20”的概率。

提示：考虑 $P(X = 20) = P(19.5 < X < 20.5)$。

5. A 牌洗衣机的寿命为一平均数为 3.49 年，标准差 1 年的常态分配，若其保证期间为一年，试问退货的比例为多少？
6. 某公司每日收到的信件数近於常态分配，已知每日平均为 80 封，且超过 120 封的机率为 0.1，试问平均差异（标准差 σ）为若干？
7. 某校举行入学试，1600 人投考，录取 900 人，考试的总分为 400 分，参加考试的考生平均分是 165 分，标准差 12 分，考生成绩可视为正态分布。
   (a) 多少考生的得分少过 150 分？
   (b) 能被录取的考生，最低分数应大约是几分？
   (c) 任意抽出 10 名考生，求其中 4 名能被录取的概率。
8. 800 件产品中平均有 4% 不合规格，求
   (a) 有 25 件至 35 件不合规格的机率。
   (b) 至多有 20 件不合规格的机率。
   (c) 至少有 34 件不合规格的机率。
   (d) 恰有 32 件不合规格的机率。

总复习题 9

1. 试验是先掷一粒均匀的骰子，然后掷一枚均匀的硬币，试写出其样本空间。
2. 在第 1 题中，写出事件“得到偶数点和反面朝上”和事件“得到反面朝上”，并分别写出它们的概率。
3. 把一个表面涂着红色的立方体等分成 1000 个小立方体，从这些小立方体中任意取出一个，分别求出它有
   (a) 0 面　(b) 1 面　(c) 2 面　(d) 3 面
   涂着红色的概率。
4. 用火车运载两种商品，一种商品有 s 件，另一种商品有 t 件。现在有消息证实，路途中有 2 件商品损坏，求损坏的是不同商品的概率。
5. 随机点落在区间 $[a, b]$ 上这一事件记作 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$。设
   $S=\{x \mid -\infty < x < \infty\}$，$A=\{x \mid 0 \leqslant x < 2\}$，$B=\{x \mid 1 \leqslant x < 3\}$。问：
   (a) $A \cup B$ 表示什么事件？
   (b) $A \cap B$ 表示什么事件？
   (c) A' 表示什么事件？
   (d) $A \cap B'$ 表示什么事件？

6. 设电话号码由 0，1，2，…，9 共十个数字中任意 7 个数字组成，某人只记得同事家电话号码的前 3 个数字是 401，而把后 4 个数字忘记了，问他拨号一次正好拨对该电话号码的概率是多少?
7. 已知 10 件同类产品中有 7 件正品、3 件次品，每次任意抽取 1 件进行测试，测试后不再放回去，求下列事件的概率：
   (a) A =“第 3 件是正品”；
   (b) B =“直到测试到第 7 件才把 3 件次品都找到”。
8. 考虑有两个子女的家庭，假定生男孩与生女孩是等可能的。某人任意选择一家，发现这家有一男孩，试问这家还有一男孩的概率是多少?
9. 从一副扑克牌 (52 张) 中接连无放回地抽出 2 张，求第二张才抽出黑桃的概率。
10. 一猎人对着跑远的动物射击 3 次，他首次射击的命中率为 0.8，每次射击后命中率要减少 0.1，求下列事件的概率：
    (a) 3 次都未击中；
    (b) 至少击中 1 次；
    (c) 正好击中 2 次。
11. 某保险公司认为，人可以分为两类，第一类是容易出事故的，另一类则比较谨慎。保险公司的统计数字表明，一个容易出事故的人在一年内出一次事故的概率为 0.04，而对于比较谨慎的人这个概率为 0.02。如果假定第一类人占人口的 30%。那么一客户在购买保险单后一年内将出一次事故的概率是多少?
12. 一小孩有 6 个小圈，他朝地上的木桩套小圈，直至首次套中或用光 6 个小圈为止。设小孩每次套中的概率为 0.1，求至少留一个小圈没使用的概率。
13. 盒中装了白球 2 个，黑球 3 个，A，B，C，D 四个人依次从盒无放回地取出一球，先取得白球为胜，可获得 10 元。求各人的期望金额。
14. 当掷一粒均匀骰子时，规定，如以 x 表示掷出偶数点的点数，y 表示掷出奇数点的点数，则掷出 x 时需付出 $3x$ 元，而掷出 y 时可获得 y^2 元，求某人玩这游戏一次的期望金额。
15. 已知某工厂生产的螺丝的次品率是 0.01，并设各个螺丝是否次品彼此无关。工厂将每 10 个螺丝包成一包出售，并保证若发现某包内多于 1 个次品即可退款。问被售出的各包螺丝中，将被退回公司的占多大比例?
16. 一起投掷两枚均匀硬币，反复投掷 1200 次，设两枚硬币同时正面朝上的次数为 X，试求下列概率：
    (a) $P(300 < X < 321)$；
    (b) $P(279 < X < 321)$；
    (c) $P(X < 279)$。

17. 一饮水贩卖机出售之饮料平均每杯为 210ml，标准差为 15ml，若各杯容量分配为常态分配，求饮品

(a) 容量超过 234ml 的巴仙率；

(b) 容量在 201ml 至 219ml 的概率；

(c) 在以后的 1,000 杯，改用容量 240ml 的杯子出售，问可能溢出者有多少杯？

18. 一机器的平均寿命为 10.72 年，标准差为 3 年，如在保证时间内故障，制造者愿免费换新。假定机器之寿命为常态分配，且制造者只希望换 0.5%，问保证期应为多长？

名词对照

（注：本名词对照表按华文条目的汉语拼音字母的次序排列）

B

中　文	英　文	巫　文
伴随矩阵	adjoint matrix	matriks dampingan
半径	radius	jejari
本初子午线	prime meridian	meridian permulaan
标准时	standard time	waktu piawai
标准差	standard deviation	sisihan piawai
贝努利试验	Bernoulli trial	cubaan Bernoulli
标准常态分配	standard normal distribution	taburan normal piawai

C

纯量积	scalar product	hasil darab skalar
侧面图	side elevation	dongakan sisi
赤道	equator	khatulistiwa
从属事件	dependent events	peristiwa bersandar
常态分配	normal distribution	taburan normal
常态曲线	normal curve	lengkung normal

D

代数余子式	cofactor	cofaktor
单位矩阵	identity matrix	matriks identiti
大圆	great circle	bulatan agung
地方时	local time	waktu tempatan
点的轨迹	locus of point	lokus bagi titik
对立事件	complementary events	peristiwa pelengkap
独立事件	independent events	peristiwa tak bersandar

E

二平面的夹角	angle between two plane	sudut antara dua satah
二项式定理	binomial theorem	teorem binomial
二项式系数	binomial coefficient	pekali binomial
二项分配	binomial distribution	taburan binomial

F

方差	variance	varians

G

高斯消元法	Gauss elimination method	kaedah penghapusan Gauss
格林威治子午线	Greenwich Meridian	Meridian Greenwich
概率	probability	kebarangkalian

H

行列式	determinant	penentu
行	row	baris
行矩阵	row matrix	matriks baris
海里	nautical mile	batu nautikal
互斥	mutually exclusive	saling eksklusif

J

阶	order	peringkat
矩阵	matrix	matriks
截面	cross section	keratan rentas
极轴	polar axis	paksi kutub
经度	longitude	longitud
阶乘	factorial	faktorial
集中趋势	central tendency	kecenderungan memusat
加权平均数	weighted mean	min berpemberat
基期	base period	kala asas
价比	price relative	harga relatif
结果	outcomes	kesudahan

K

克兰姆法则	Cramer's rule	petua Cramer

L

列	column	lajur
列矩阵	column matrix	matriks lajur
零矩阵	zero matrix	matriks sifar

L

累积频数分配	cumulative frequency distribution	taburan kekerapan longgokan
累积频数多边形	cumulative frequency polygon/ogive	poligon kekerapan longgokan/ogif
离中趋势	measures of dispersion	sukutan serakan

N

n 阶方阵	square matrix of order n	matriks segiempat sama peringkat n
逆矩阵	inverse matrix	matriks songsang

P

平面	plane	satah
平面图	plan	pelan
排列	permutation	pilihatur
排列数	number of permutations	bilangan pilihatur
频数分配	frequency distribution	taburan kekerapan
频数多边形	frequency polygon	poligon kekerapan
平均数	mean	min
平均差	mean deviation	min sisihan

Q

倾斜角	angle of inclination	sudut condong
球面	spherical surface	permukaan sfera
球	sphere	sfera
球心	centre of the sphere	pusat sfera
曲线的方程式	equation of a curve	persamaan lengkung
切线	tangent	tangen
切点	point of contact	titik sentuh
切距/切线长	length of a tangent	panjang tangen
权数	weight	pemberat
全距	range	julat

S

萨拉斯法	Sarrus method	kaedah Sarrus
射影	projection	unjuran
时区	time zone	zon waktu
世界标准时	Greenwich mean time	waktu purata Greenwich
树图	tree diagram	gambarajah pokok
数据	data	data
算术平均数	arithmetic mean	min arithmetik
四分位差	quartile deviation	sisihan kuartil
四分位数	quartile	kuartil
上四分位数	upper quartile	kuartile atas
生活消费指数	cost of living index	indeks belanja hidup
试验	trial	percubaan
事件	event	peristiwa
数学期望值	mathematical expectation	jangkaan matematik

T

条件概率	conditional probability	kebarangkalian bersyarat

W

纬线	parallels of latitude	selarian latitud
纬度	latitude	latitud
物价指数	price index	indeks harga

X

相等矩阵	equal matrices	matriks sama
小圆	small circle	bulatan kecil
循环排列	circular permutation	pilihatur sebulatan
下四分位数	lower quartile	kuartil bawah

Y

余子式	minor	minor
元素	element	unsur
圆	circle	bulatan
圆心	centre of a circle	pusat bulatan

Y

圆的标准方程式	standard equation of a circle	persamaan piawai bulatan
圆的一般方程式	general equation of a circle	persamaan am bulatan
移动平均	moving average	purata bergerak
样本空间	sample space	ruang sampel
样本点	sample point	titik sampel

Z

转置矩阵	transpose matrix	matriks transposisi
增广矩阵	augmented matrix	matriks imbuhan
正投影法	orthogonal projection	unjuran ortogon
正面图	front elevation	dongakan depan
子午线	meridian	meridian
直径	diameter	garis pusat/diameter
正交	orthogonal	ortogon
组合	combination	gabungan
展开式	expansion	kembangan
直方图	histogram	histogram
中位数	median	median
众数	mode	mod
指数	index number	nombor indeks
综合指数	composite index number	nombor indeks Gubahan

习题答案

第 1 章

习题 1a（P.2）

1. 14　　2. 16　　3. 1　　4. $-b^2$　　5. $(n-m)\log_a x$

习题 1b（P.3）

1. 5　　2. 6　　3. 25　　4. 1　　5. 42

6. 0　　7. 30　　8. (a) 0 (b) 0，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

9. 27，$27k$，$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ k & k & 2k \\ 5 & -7 & 11 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & 11 \end{vmatrix}$

习题 1c（P.9）

1. 0　　2. $\dfrac{4}{45}$　　3. xy　　4. $(a-b)(b-c)(c-a)$

5. $4abc$　　6. $4abcdef$　　11. 2　　12. 2

13. 4　　14. 0，1，2

习题 1d（P.13）

1. (a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$　　(b) $7\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$

2. -100　　3. -82　　4. 68　　5. 90　　6. 193

习题 1e（P.15）

1. (a) 44　　(b) 44　　(c) -64　　(d) $(a+3)(a-1)^3$

习题 1f（P.18）

1. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$　　3. $\begin{cases} x = 12 \\ y = 12 \end{cases}$　　4. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$　　5. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

总复习题 1（P.18）

1. -22　　2. 16　　3. 83　　4. -12　　5. 0　　6. 0

7. 6　　8. 4800　　9. 60　　10. 1　　11. 160

12. $x=a$，$x=b$　　13. $x=a+b+c$

20. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$　　21. $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$　　22. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

23. $\therefore \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases}$　　24. $\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

第 2 章

习题 2a（P.23）

1. (a) 3×1 阶　(b) 2×3 阶　(c) 3×3 阶　　2. 3，7

3. (a) $x=-1$，$y=3$　(b) $x=-2$，$y=7$　　4. $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$　　6. $\begin{pmatrix} 17 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$　　7. $\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

习题 2b（P.25）

1. $\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$　　2. $B=4A$

3. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 9 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

4. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. (a) $w=-1$
$x=4$
$y=2$
$z=6$

(b) $w=0$
$x=8$
$y=5$
$z=-7$

习题 2c（P.30）

1. (14)　2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$　4. $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 29 & 11 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$　6. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 9 & 10 & 11 \\ -2 & -4 & -6 \\ 11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$　7. $\begin{pmatrix} 44 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix}$　8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} pz+tq \\ uz+mq \end{pmatrix}$　10. $\begin{pmatrix} 4+pn & 4m+pt \\ r+2n & rm+2t \end{pmatrix}$

11. AB 有意义，它等于 $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 8 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$；BA 没有意义。

14. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　15. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 17 \\ 2 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 13 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}$

16. (a) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -38 & 14 \\ -57 & -3 \end{pmatrix}$　17. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 9 & 3 & -24 \\ 6 & 0 & -23 \end{pmatrix}$

18. (a) $\begin{pmatrix} \sin 2\alpha & 1 \\ \cos 2\alpha & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

习题 2d（P.32）

1. (a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$

2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) **0**　4. $\begin{pmatrix} -12 & -42 \\ 14 & 2 \end{pmatrix}$　6. 65A − 114 I

7. (a) $a=\pm 1$，$b=\mp 1$　(b) $a=\pm\sqrt{2}$，$b=\mp\sqrt{2}$

   (c) $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$b=\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}$

习题 2e（P.36）

1. (a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

2. (a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$

3. (a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$　(c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

4. (a) 没有逆矩阵　(b) 有逆矩阵 $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$

(c) 有逆矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$　(d) 有逆矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

5. (a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$　(c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} & \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

6. $x=-3$，$y=-5$

7. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　(c) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 13 & -3 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

8. $x=-6$

习题 2f（P.40）

1. $\begin{pmatrix} \frac{2}{31} & \frac{1}{31} & -\frac{1}{31} \\ -\frac{3}{31} & \frac{14}{31} & -\frac{14}{31} \\ -\frac{4}{31} & -\frac{2}{31} & \frac{33}{31} \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{14}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} \frac{17}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{13}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$　5. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$　6. $\begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$

习题 2g (P.43)

1. $\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=\dfrac{22}{9}\\y=-\dfrac{14}{27}\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=5\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x=-3\\y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 5. $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$

6. $\begin{cases}x=-2\\y=0\\z=2\end{cases}$ 7. $\begin{cases}x=2\\y=3\\z=4\end{cases}$ 8. $\begin{cases}x=3\\y=-1\\z=-1\end{cases}$ 9. $\begin{cases}x_1=2\\x_2=\dfrac{1}{4}\\x_3=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 10. $\begin{cases}x_1=3\\x_2=2\\x_3=1\end{cases}$

总复习题 2 (P.44)

1. $\begin{pmatrix}-1&1&3\\-1&-1&3\\2&-3&-5\end{pmatrix}$ 2. $x=17$, $y=\dfrac{3}{2}$ 3. $x=8$, $y=4$

4. $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix}39&26\\14&9\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}1&5&7\\4&10&17\\10&20&37\end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix}4&3\\8&6\end{pmatrix}$

9. $a=4$, $b=6$ 10. $a=\dfrac{3}{2}$, $b=0$, $c=\dfrac{4}{3}$ 11. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-1\\-\dfrac{3}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$

12. (a) $\begin{pmatrix}5&-1\\2&-1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}5&-1\\2&-1\end{pmatrix}$

13. (a) $\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&-3\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}-7&5\\-18&13\end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix}-11&3&\\-3&1&0\\4&-1&\end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix}\dfrac{19}{7}&-\dfrac{17}{7}&-\dfrac{11}{7}\\\dfrac{6}{7}&-\dfrac{5}{7}&-\dfrac{2}{7}\\\dfrac{8}{7}&-\dfrac{9}{7}&-\dfrac{5}{7}\end{pmatrix}$

16. (a) $\begin{pmatrix}11&16\\7&10\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}-2&-4\\4&8\end{pmatrix}$ 17. $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

18. $\begin{cases}x=-1\\y=9\\z=-6\end{cases}$ 19. $\begin{cases}x=5\\y=1\\z=3\end{cases}$ 20. $\begin{cases}x=4\\y=3\\z=-2\end{cases}$

第 3 章

习题 3a（P.50）

1. 60°
2. 不一定
3. (a) 90°，90° (b) $\sqrt{74}$cm
4. (a) 26.6° (b) 17.8°
5. (a) 45° (b) 35.3°
6. 44°35′
7. (a) 26° (b) 64°
8. (a) 20.3° (b) 51.3° (c) 24.1°
9. (a) $\sqrt{170}$ (b) 27.7°
10. (a) 1.389 (b) 9.123 (c) 16.4°
11. (a) 10 (b) 12 (c) 67.4°
12. $2\sqrt{2}a$
13. $2\sqrt{5}$ cm，$\sqrt{19}$cm
14. (a) $\sqrt{641}$m (b) 9.1°
15. 60°

习题 3b（P.55）

1. 26.6°
2. (a) 39.8° (b) 58° (c) 39.8°
3. 20.5°
4. (a) 60° (b) 64.3°
5. (a) 70.5° (b) 29°
6. (a) 14° (b) 7.3°
7. (a) 58.1° (b) 50.2° (c) 44.96°
8. (a) 45° (b) 56.3°
9. (a) 15.6° (b) 72.2° (c) 51.4°
10. (a) 58° (b) 66.1° (c) 99.4°

习题 3c（P.61）

1. 39cm
2. 90°
3. 30°
4. (a) 45° (b) 54.7° (c) 109.5°
5. (a) 164.57 米 (b) 51.8°
6. (a) 3.9m (b) 72.2° (c) 51.4°
7. (a) 72.5° (b) 70.4° (c) 64.6°
8. 50 公尺
9. 26.6°，39.8°
10. 22.2 公尺，41.6°
11. 306.15 公尺，157.5°的方向
12. 35.53 公尺

总复习题 3（P.70）

1. (a) 10cm (b) 28.2° (c) 40°
2. 17.7°
3. 12m
4. (a) 61.9° (b) 69.3°
5. (a) 54.7° (b) 54.7° (c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$
6. (a) 46.7° (b) 45°
7. 250 公尺
8. 40.94 平方公尺，21.16 公尺
10. B 在 C 的 078.35°的方位
15. (a) 74.2° (b) 78.7°

第 4 章

习题 4a（P.79）

1. (a) 下午 6 时 48 分 (b) 早晨 7 时 4 分　2. 13 时 0 分　3. 下午 3 时 34 分
4. 1 小时 40 分　5. P 在东经 5°　6. 东经 65°
7. B 的地方时：13 时 20 分；C 的地方时：15 时 33 分
8. 东经 59° 30′　9. 4 时 28 分

习题 4b（P.82）

1. 5° 24′　2. (31° 40′ N，115° 10′ E)　3. (8° 30′ S，100° E)
4. 6° 40′　5. 47° 10′ N　6. 430 公里
7. 6510 海里　8. 33° 20′　9. 6 小时 4 分钟
10. 800 海里／时

习题 4c（P.85）

1. Q(48° N，25° 27′ W)　2. 319.2 公里
3. 32584 公里　4. A(48° 52′ N，32° 23′ E)
5. 3185 公里　6. (42° N，33° 27′ E)或(42° N，6° 33′ W)
7. 每小时 1665.12 公里　8. (40° N，33° 47′ E)
9. 4800 海里　10. (52° 30′ N，14° 03′ W)

习题 4d（P.87）

1. 319.14 公里　2. 6559 公里，3539 海里　3. 998.7 公里
4. 8565 公里　5. 1841 公里

总复习题 4（P.87）

1. 1 小时 12分　2. 11 时 53 分　3. (a) 7847 公里 (b) 4235 海里
4. 2080 海里　5. B(18° 20′ S，30° E)；C(15° N，81° 46′ E)。
6. A(16° 40′ N，10° 26′ E)　7. 3120 海里或 5781 公里　8. 3656.5 公里
9. 4179 公里　10. 60° 9′ N 或 60° 9′ S　11. 1572.3 公里
12. (a) 2501.2 公里　(b) 5 小时　(c) 2478.1 公里。
13. (a) 1580.66 km　(b) 1576.58 km　(c) 1586.19 km
14. (a) 1737.61 km　(b) 1685.45 km

第 5 章

习题 5a（P.91）

1. 点 A、C 在曲线上，点 B 不在曲线上。

2. (a) $c=0$ (b) $a^2+b^2=r^2$

3. $\lambda=\frac{2}{5}$

4. 横坐标为 2 的点，纵坐标是 24；纵坐标是 $\frac{3}{2}$ 的点，它的横坐标是 $\pm\frac{1}{2}$。

5. $x^2-8y+16=0$

6. $x^2+y^2=5$

7. $x=c$

8. $x^2+y^2=4$

9. $3x^2+3y^2-2x-20y+27=0$

10. $x^2+y^2-8x-8y+7=0$

习题 5b（P.94）

1. (a) $x^2+y^2=\frac{25}{9}$ (b) $(x-3)^2+(y+2)^2=36$

   (c) $(x-8)^2+(y+3)^2=25$ (d) $(x-a)^2+(y+b)^2=(a+b)^2$

2. 圆的方程式为 $(x-6)^2+y^2=36$

   点 A 在圆上，点 B 在圆内，点 C 在圆外.

3. $(x+6)^2+(y-3)^2=10$

4. $(x-5)^2+(y+3)^2=13$，$|PR|=5\sqrt{2}$

5. $x^2+(y-5)^2=34$

6. $(x-4)^2+y^2=25$

7. $(x+5)^2+(y-4)^2=16$

8. $(x-1)^2+(y+3)^2=13$

9. $(x-18)^2+(y-16)^2=100$，$(x-2)^2+(y-4)^2=100$

10. $(x-4)^2+(y-2)^2=10$ [除去点 (3，5)，(5，-1)]

    它的轨迹是圆心为 (4，2)，半径为 $\sqrt{10}$ 的圆，其中过点 B 的直径的端点除外。

习题 5c（P.98）

1. (a) 圆心 (0，0)，半径 $4\sqrt{2}$ (b) 圆心 (3，0)，半径 3

   (c) 圆心 $(-\frac{1}{9},\frac{1}{3})$，半径 $\frac{8}{9}$ (d) 圆心 (-3，4)，半径 2

   (e) 圆心 (0，-b)，半径 $|b|$

2. (a) $3x^2+3y^2+24x+82y=0$ (b) $x^2+y^2-bx-ay=0$

   (c) $25x^2+25y^2-277x-83y-278=0$ (d) $x^2+y^2-8x-2y+12=0$

3. $2x^2+2y^2-11x-19y+44=0$

4. $x^2+y^2-ax-by=0$

5. $x^2+y^2-8x-9=0$

6. $x^2+y^2-2x=0$

7. $2x^2+2y^2-21x+8y+60=0$

8. (a) 求得轨迹方程为 $x^2+y^2=25$，它的圆心为 (0, 0)，半径为 5；

(b) 求得轨迹方程为 $x^2+y^2-38x-20y+113=0$，它的圆心为 (19, 10)，半径为 $2\sqrt{87}$。

9. $x^2+y^2=a^2$

习题 5d (P.102)

2. (a) $3x-4y=25$　(b) $6x-3y+5=0$　(c) $x-2y+13=0$

(d) $2x=3y$　(e) $5x-12y+17=0$　(f) $y=\frac{1}{3}$

3. (a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　(b) $\frac{1}{3}$

4. $\frac{25}{4}$　5. (2, 1), (−2, −1)

6. (4, 6)　9. $k=9$，切点 (3, 0)

习题 5e (P.107)

1. (a) $24x+7y-100=0$, $y=4$　(b) $x-y+\sqrt{10}=0$, $x+y-\sqrt{10}=0$

(c) $x=-5$, $3x-4y-25=0$　(d) $2x+y-8=0$, $x-2y+11=0$

(e) $24x-7y-20=0$, $x=2$　(f) $3x+4y=0$, $x=0$

2. $\sqrt{3}x-y+2=0$,　$\sqrt{3}x+y-2=0$　3. $4x-3y+2=0$, $y=\frac{2}{5}$

4. $\tan\theta=\frac{12}{5}$　5. (a) $\sqrt{65}$　(b) $\sqrt{19}$　(c) 5　(d) $4\sqrt{5}$

6. (1, 0), (−3, 4)　7. $x^2+y^2+2x-4y-20=0$

8. 点 P 的轨迹方程式是 $24x-14y-193=0$

9. (a) $k=14$, $k=4$　(b) $k=31$, $k=-19$

10. $x+2y+5=0$，弦长等于 $4\sqrt{5}$

习题 5f (P.109)

1. (a) $2x-y+\sqrt{10}=0$, $2x-y-\sqrt{10}=0$　(b) $4x+3y+25=0$, $4x+3y-25=0$

(c) $\sqrt{3}x-y+2\sqrt{10}=0$, $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{10}=0$

2. $b=\pm2\sqrt{2}$　3. $3x-4y+20=0$, $3x-4y-20=0$

4. $2x-y+7+4\sqrt{5}=0$, $2x-y+7-4\sqrt{5}=0$

5. $3x+4y-29=0$

6. 当 $a<3.2$ 时，直线与圆相交；当 $a=3.2$ 时，直线与圆相切。

7. $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$，$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$

习题 5g（P.113）

1. (a) 外切 (b) 相交 (c) 内切
2. 13
3. 当 $|a|=4$ 时，两圆外切；a 为任何值两圆都不可能内切。
4. $7x^2+7y^2-24x-19=0$
6. $4x^2+4y^2+18x-8y-5=0$
7. $2x^2+2y^2+8x-13y+11=0$
8. $x^2+y^2-4x-8=0$

总复习题 5（P.114）

1. $x^2+y^2+4x-6y-3=0$
2. $5x+2y-16=0$
3. $16x^2+7y^2-64x-48=0$
4. $x^2+y^2=36$
5. $x^2+y^2-4x=0\ (0\leqslant x<1)$
6. (a) 在圆上 (b) 在圆外 (c) 在圆内
7. $a=3$ 或 $a=1$
8. $2\sqrt{3}$
9. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$，$(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$，$(x+\frac{2}{3})^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$，$(x-1)^2+(y+1)^2=1$。
10. $4x^2+4y^2+7x-11y=0$
11. $7x^2+7y^2-20x-18y-132=0$
12. $x^2+y^2+12x-4y+36=0$
13. 3 个
14. $x^2+(y+2)^2=10$，即 $x^2+y^2+4x-6=0$
15. $x^2+y^2-x-3y=0$
16. 圆的方程式 $x^2+y^2-14x-5y+24=0$，$x^2+y^2-14x+10y+49=0$。
17. $24x-7y-20=0$，$x=2$
18. $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$
19. $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$
21. $x^2+y^2-4x-6y+11=0$
23. $2x+y-11=0$，
    $2x+y+9=0$
24. $m=2$ 或 $m=-5$ 时，两圆外切；$-5<m<-2$ 或 $-1<m<2$ 时，相交；$m=-1$ 或 $m=-2$ 时，两圆内切。
25. $y^2-8x+8=0$

第 6 章

习题 6a（P.118）

1. 20　2. 42　3. 200　4. 360　5. 120　6. 18　7. 16　8. 78

习题 6b（P.124）

1. (a) *ab*，*ac*，*ba*，*bc*，*ca*，*cb*

   (b) *abc*，*abd*，*acd*，*acb*，*adb*，*adc*，*bac*，*bad*，*bcd*，*bca*，*bda*，*bdc*，*cab*，*cad*，*cbd*，*cba*，*cda*，*cdb*，*dab*，*dac*，*dbc*，*dba*，*dca*，*dcb*。

2. (a) 32760 (b) 970,200 (c) 1568 (d) 5040 (e) 336 (f) 21

3. (a) $n^2+11n+30$ (b) n^2+n (c) $n^2+(1-2r)n+r(r-1)$

5. (a) $n=5$ (b) $n=3$，$n=4$ (c) $n=3$ (d) $n=13$

6. 720 种　7. (a) 60 个 (b) 120个　8. 24 种

9. 1680种　10. (a) $n=8$ (b) $n=7$　11. 48

12. 80　13. 5040，144　14. 40320，40320

习题 6c（P.128）

1. 282240　2. (a) 720 (b) 4320 (c) 1440 (d) 2880

3. (a) 240 (b) 1440 (c) 720　4. (a) 30240 (b) 21600

5. 30240　6. 720，1080　7. 360　8. 78　9. 978

10. 1631　11. 1440　12. 2880　13. 21600

14. (a) 720 (b) 144 (c) 4320　15. (a) 100 (b) 156 (c) 36

习题 6d（P.132）

1. 120　2. 5040　3. 2880　4. (a) 1440 (b) 240

5. $\frac{1}{2}\times 39!$；${}_{39}P_{19}$　6. 360　7. 384

习题 6e（P.134）

1. 34650　2. 1260　3. 360　4. 725760

5. (a) 5005 (b) 600　6. 1260　7. 144

习题 6f（P.137）

1. 216　2. 729　3. (a) 48 (b) 100　4. 8000　5. 4096

6. 7200000　7. (a) 120 (b) 216　8. (a) 120 (b) 729

9. 6561

习题 6g（P.142）

1. (a) 15 (b) 56 (c) 20 (d) 148 (e) $\frac{2}{7}$ (f) 90 (g) $\frac{4}{7}$ (h) $\frac{n(n^2-1)}{2}$

2. 120　3. 56; 420　4. 190　5. (a) 45 (b) 120

6. 126　7. 1620　8. (a) 56 (b) 120

9. 44352　10. (a) 1221759 (b) 744975 (c) 897001　11. 49

习题 6h（P.146）

1. (a) 161700 (b) 3921225 (c) 999 (d) 31

2. $n=18$　3. $n=27$　4. $r=8$　5. $x=90$　6. 11

7. 126　12. 4095　13. 15　14. 596　15. 4095

16. (a) 756 (b) 1128

习题 6i（P.150）

1. 209　2. 2193360　3. 5760

4. (a) 19600 (b) 460600 (c) 2118760 (d) 480200

5. (a) 1274196 (b) 124234110 (c) 2410141734 (d) 125508306

6. (a) 60 (b) 120　7. 100　8. 111　9. (a) 6 (b) 4 (c) 8

10. 1716, 3432　11. 15400　12. 143, 2482　13. 1446

总复习题 6（P.151）

1. (a) 28 (b) $n=34$, $r=14$　2. 480　3. 1956

4. (a) 600 (b) 288　5. (a) 10080 (b) 30240 (c) 1152

6. 56　7. 30　8. 45　9. (a) 64446024 (b) 442320 (c) 446976

10. 103680　11. 144　12. 10　13. C　14. 10000

17. (a) 64800 (b) 60480; 8640 (c) 120960; 604800

18. (a) 1680 (b) 1260 (c) 7560 (d) 280

第 7 章

习题 7a（P.156）

1. $1+8x+24x^2+32x^3+16x^4$　2. $x^5-15x^4+90x^3-270x^2+405x-243$

3. $256+3072x+16128x^2+48384x^3+90720x^4+90720x^4+108864x^5+81648x^6$
$+34992x^7+6561x^8$

4. $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$

5. $m^7+7m^6n+21m^5n^2+35m^4n^3+35m^3n^4+21m^2n^5+7mn^6+n^7$

6. $64a^6-192a^5b+240a^4b^2-160a^3b^3+60a^2b^4-12ab^5+b^6$

7. $\frac{a^8}{81}+\frac{8a^5}{27}+\frac{8a^2}{3}+\frac{32}{3a}+\frac{16}{a^4}$

8. $x^5-5x^3+10x-\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^5}$

9. $41+29\sqrt{2}$

10. $169\sqrt{2}-239$

11. $-18\sqrt{3}$

12. $2+20x+10x^2$

13. $2x^5+20x^3+10x$

14. $162x^4+108x^2+2$

习题 7b（P.157）

1. $x^3+3x^2a^{\frac{1}{3}}+3xa+a$

2. $x^3-3x^2a^{\frac{1}{3}}+3xa-a$

3. $64x^3+192x^2+240x+160+\frac{60}{x}+\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

4. $\sqrt{x}\left(\frac{x^3}{2^7}-\frac{7x^2}{2^5}+\frac{21x}{2^3}-\frac{35}{2}+\frac{70}{x}-\frac{168}{x^2}+\frac{224}{x^3}-\frac{128}{x^4}\right)$

5. $x^{10}+5x^9+5x^8-10x^7-15x^6+11x^5+15x^4-10x^3-5x^2+5x-1$

6. $1-8x+28x^2-56x^3+70x^4-56x^5+28x^6-8x^7+x^8$

7. $x^5+10x^6+45x^7+120x^8+210x^9+252x^{10}+210x^{11}+120x^{12}+45x^{13}+10x^{14}+x^{15}$

8. (a) $1-8x+27x^2$ (b) $1-68x+2136x^2$

9. 9，$\frac{4}{3}$

10. $n=10$，$a=2$，$k=960$

习题 7c（P.160）

1. $T_{r+1}={}_{10}C_r2^{10-r}x^r$

2. $T_{r+1}=(-1)^r{}_6C_r3^{6-r}x^r$

3. $T_{r+1}={}_8C_r(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$

4. $T_{r+1}=(-1)^r{}_5C_r(2x^3)^{n-r}\left(\frac{3}{x^2}\right)^r$

5. $T_6=-1959552x^5y^5$

6. $T_6=\frac{-224}{x^2}$

7. 28

8. -252

9. 4860

10. $T_7=924$

11. 中间两项分别为 $T_8=-6435x^{11}y^{11}\sqrt{x}$，$T_9=6435x^{11}y^{11}\sqrt{y}$

12. 常数项是第 7 项，$T_7=\frac{105}{2}$

13. $100x^3$

14. $a=\pm 2$

15. 3003

17. $\pm\frac{4}{3}$

20. $\because$ ${}_nC_3 = {}_nC_7$，由 ${}_nC_7 = {}_nC_{n-7}$ 得 $3 = n - 7$，得 $n = 10$

$\therefore$ 这两项的二项式系数是 ${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = 120$

习题 7d（P.164）

1. $1 - 4x + 12x^2 - 32x^3$，其中 $|x| < \frac{1}{2}$
2. $1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6$，其中 $|x| < 1$
3. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6$，其中 $|x| < 1$
4. $\frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} - \frac{x^3}{81}$，其中 $|x| < 3$
5. $5\sqrt[3]{25}\left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{45}x^2 + \frac{8}{2025}x^3\right)$，其中 $|x| < \frac{5}{2}$
6. $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3$，其中 $|x| < 1$
7. $1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$，其中 $|x| < 1$
8. $\frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4} + \frac{21}{x^5} + \frac{56}{x^6}$，其中 $|x| > 1$
9. $-2 - 3x - 3x^2 - 3x^3$，其中 $|x| < 1$
10. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$，其中 $|x| < 1$
11. x^{10} 的系数是 $2^9 \times 11 \times 12$。
12. $T_{r+1} = (a^2)^{-\frac{5}{2}}\left[\dfrac{-\frac{5}{2}\left(-\frac{5}{2}-1\right)\left(-\frac{5}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{5}{2}-r+1\right)}{r!}\right]\left(-\dfrac{4x^2}{a^2}\right)^r$
13. $\frac{3}{2} + \frac{15}{4}x + \frac{63}{8}x^2$
14. $1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2$
15. (a) 1　(b) $-16x^3$

习题 7e（P.166）

1. (a) 0.998　(b) 4100.918
2. 3.981
3. 1.0099
4. 0.9975
5. 1.73205

总复习题 7（P.166）

1. (a) $x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2$

   (b) $x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x + a_1a_2a_3$

   (c) $x^4 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)x^3 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)x^2 + (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4)x + a_1a_2a_3a_4$。

(d) $x^4+4x^3-34x^2-76x+105$。

2. -51

3. (a) $1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5$ (b) $x^8-4x^5+6x^2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^4}$

4. (a) $1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$ (b) $1+3x+6x^2+12x^3$ (c) $2-2x+\frac{5}{2}x^2-\frac{7}{2}x^3$

5. $160x+80x^3+2x^5$

6. $1+6x+21x^2$

7. $\frac{1}{x^4}$ 的系数是 286720。

8. 不含 x 的项是 $\frac{112}{729}$。

9. x^6 的系数是 19136250。

10. 该式展开共有 11 项。所以中间项是第 6 项：${}_{10}C_5\left(-\frac{1}{2x}\right)^5=-\frac{63}{8x^5}$

11. 该式展开共有 16 项。所以，中间的两项是第 8 项及第 9 项：

$${}_{15}C_7\left(\frac{x^2}{2}\right)^7=\frac{6435}{128}x^{14},$$

$${}_{15}C_8\left(\frac{x^2}{2}\right)^8=\frac{6435}{256}x^{16}$$

12. -30

13. $a=-\frac{1}{2}$，$n=6$

14. $a=2$，$b=-\frac{1}{2}$，$n=7$

15. $n=7$

16. 0.90601

17. (a) $n=6$ (b) $p=2$，$q=1$

18. $\frac{1}{3(1+x)}+\frac{2}{3(1-2x)}$，$1+x+3x^2$

19. $k=\pm5$，1.2763

21. $89^{10}=(88+1)^{10}$

$=88^{10}+{}_{10}C_1\cdot88^9+\cdots+{}_{10}C_9\cdot88+1$

$=88\cdot(88^9+{}_{10}C_1 88^8+\cdots+{}_{10}C_9)+1$，

$\therefore$ 89^{10} 除以 88 的余数是 1。

22. $\because$ $55^{55}+9=(56-1)^{55}+9$

$=56^{55}-{}_{55}C_1 56^{54}+\cdots{}_{55}C_{54}\cdot56-1+9$

$=56^{55}-{}_{55}C_1 56^{54}+\cdots+{}_{55}C_{54}\cdot56+8$

…

$\therefore$ $55^{55}+9$ 能被 8 整除。

第 8 章

习题 8a（P.174）

3. (a) 70

习题 8b（P.179）

2.（b）大约排在第 38 名　（c）30%　　4.（c）53.9 分　（d）10 人

习题 8c（P.182）

1. 206.45　2. 2.87　3. 60.7（分）　4. 153.87

5.（a）74.67（b）75.03

习题 8d（P.185）

1. 9.45（分）　2.（a）38（千克）（b）38（千克）　3.（a）3100（元）

习题 8e（P.187）

1.（a）4（b）6，8（c）1.0　2. 平均数 = 1.69 中位数 = 1.70 众数 = 1.75

3. 33　4.（a）76.6（城市）；69.1（农村）（b）81（城市）；72.5（农村）

习题 8f（P.191）

1.（a）$R=9$　（b）$Q_1=2$，$Q_2=3$，$Q_3=5$，四分位差 = 1.5

2.（a）$R=0.7$　（b）$Q_1=1.05$，$Q_2=1.2$，$Q_3=1.4$，四分位差 = 0.175

3.（a）$R=70$　（c）9.5

习题 8g（P.193）

1.（a）3（b）1.31（c）12.4　2. 1.15　3.（b）57（c）7.44

习题 8h（P.196）

1. $S^2_{甲}=0.055$，$S^2_{乙}=0.105$，乙组的离中趋势大。

2. $S_{甲}=3.63$，$S_{乙}=5.13$，甲班的成绩较整齐。

3.（a）160（cm）（b）10（cm）　4. $S=4.243$，$S^2=18.0036$

习题 8i（P.198）

1.（a）267，150　2. 250　3. 110.3，111.8

4. 100，82.5，65.7，56.9，51.5　5. 100，113.1，123.9，128.0，130.4，134.8

习题 8j（P.201）

1. 109.9　　2. 140.25　　3. 103.66　　4. (a) 107.6 (b) 105.9

5. 110.35

习题 8k（P.207）

1. (a) 2, 2, 3, 4, 4, 2, 1, 2　　(b) 2.6, 3.4, 3, 2.6, 2.8, 2.4

2. (a) 42.1, 40.9, 39.8, 37.8, 37.4, 38.2, 38.7

3. 104, 108, 110, 114, 113, 113, 111, 116, 117, 121

总复习题 8（P.208）

2. 平均数 = 8.625，中位数 = 9，众数 = 9

3. 平均数 = 68.4，中位数 = 67.6，众数 = 66

4. R = 10，四分位差 = 3，平均差 = 3.14

5. (a) R = 300 (b) 926.4, 55.2 (c) 41.3 (d) 885.4, 923.8, 963.6 (e) 39.1
   (f) 923.8

6. $S^2 = 98.41$，$S = 9.92$

7. (a) $S_{甲} = 2.45$，$S_{乙} = 24.5$，(b) 甲队身高较整齐。　　8. 104　　9. 122.9

10. (a) 11.6, 11.4, 10.5, 10.4, 10.1, 10.1, 11.6, 11.6, 12.7, 12.0
    (b) 11.4, 10.7, 10.4, 10.3, 10.6, 11.2, 11.8, 12.3

11. (a) 443, 433, 443, 451, 463, 495, 528, 534, 525, 532, 520

第 9 章

习题 9a（P.214）

1. (a) S = {(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1),
   (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2),
   (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3),
   (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4),
   (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5),
   (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)}
   (b) S = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18}
   (c) S = {AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, BA, CA, DA, EA, CB, DB, EB, DC, EC, ED}

2. (a) A = {3, 5}　　(b) A = {2, 4, 6, 8}　　(c) A = {HT, TH}, B = {HT, TH, HH}

3. A = {TTH, THT, HTT}　　B = {HHH, THH, HTH, HHT}

C = {TTT, HTT, TTH, THT}

4. (a) S = {甲乙丙，甲乙丁，甲丙丁，甲丙乙，甲丁乙，甲丁丙，乙甲丙，乙甲丁，乙丙丁，乙丙甲，乙丁甲，乙丁丙，丙甲乙，丙甲丁，丙乙丁，丙乙甲，丙丁甲，丙丁乙，丁甲乙，丁甲丙，丁乙丙，丁乙甲，丁丙甲，丁丙乙}

(b) A = {乙甲丙，乙甲丁，丙甲丁，丙甲乙，丁甲乙，丁甲丙}

B = {乙甲丙，丙甲乙，乙丁丙，丙丁乙}

5. (a) {KO, KT, KA, OT, OA, TA}　　(b) A = {KO, KA, OT, TA}

(c) B = {OA}　　(d) C = {KO, KA, OT, OA, TA}

6. (a) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

(b) {(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3)}

(c) {(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)}

习题 9b (P.218)

1. (a)

每批试验粒数 n	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽的粒数 m	9	60	110	282	639	1339	1806	2715
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	0.9	0.857	0.846	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

(b) 0.9

2. $\frac{1}{3}$　　3. $\frac{1}{13}$　　4. $\frac{1}{10}$　　5. (a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{10}$

6. $\frac{1}{17}$　　7. (a) $\frac{893}{990}$ (b) $\frac{1}{495}$ (c) $\frac{19}{198}$　　8. $\frac{1}{10^6}$

9. $\frac{1}{6}$　　10. $\frac{1}{5}$　　11. (a) $\frac{25}{91}$ (b) $\frac{2}{91}$

习题 9c (P.223)

1. $\frac{1}{2}$　　2. $\frac{5}{18}$　　3. (a) $\frac{19}{25}$ (b) $\frac{3}{10}$ (c) $\frac{47}{50}$

4. (a) 0.82 (b) 0.38 (c) 0.24　　5. $\frac{4}{7}$　　6. $\frac{11}{26}$

7. 0.5　　8. 0.96　　9. 0.2%　　10. $\frac{1}{49}$

习题 9d（P.226）

1. (a) 是互斥事件，(d) 是对立事件。　　2. $\frac{215}{216}$

3. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{5}{9}$　　4. (a) $\frac{11}{221}$ (b) $\frac{10}{17}$ (c) $\frac{80}{221}$

5. $\frac{8}{9}$　　6. $\frac{31}{32}$　　7. $\frac{16}{17}$

习题 9e（P.231）

1. $\frac{1}{72}$　　2. (a) $\frac{9}{64}$ (b) $\frac{15}{64}$ (c) $\frac{39}{64}$

3. $\frac{5}{12}$　　4. (a) $\frac{8}{35}$ (b) $\frac{46}{105}$ (c) 2

5. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{15}$ (c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{14}{15}$　　6. 96.53%

7. $0.5177 > 0.4914$，前一事件的概率较大。　　8. $\frac{3}{5}$

习题 9f（P.236）

1. $\frac{18}{19}$　　2. $\frac{5}{12}$　　3. $\frac{4}{11}$　　4. $\frac{17}{28}$　　5. $\frac{1}{3}$

6. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{7}{30}$ (c) $\frac{3}{10}$　　7. $\frac{12}{25} < \frac{13}{25}$，未投中的概率较大。

8. 0.022

习题 9g（P.239）

1. 不划算，可望损失 1 元。　　2. 3600 元，少于 3600 元。　　3. 0.9

4. 1.88 分　　5. 2.96 元　　6. 300元　　7. 不利，损失 0.2375 元　　8. 0.9

习题 9h（P.245）

1. (a) 0.41 (b) 0.74　　2. (a) $\frac{5}{16}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$

3. (a) 0.015 (b) 0.018　　4. (a) 0.3683 (b) 0.1458 (c) 0.8103

5. 0.2276　　6. 0.9938　　7. (a) 0.32 (b) 0.243

8. (a) $\frac{125}{1296}$ (b) $\frac{25}{1296}$ (c) 互斥　　9. 50，5　　10. 10，2.89

习题 9i（P.251）

1. (a) 0.0606 (b) 0.9750 (c) 0.6826 (d) 0.0014 (e) 0.0443 (f) 0.0495
   (g) 0.584 (h) 0.7704

2. (a) 0.0918 (b) 0.1359　　3. 0.3531　　4. 0.1272

5. 0.00062　　6. 31.2　　7. (a) 169 人 (b) 163 分 (c) 0.1474

8. (a) 0.6016 (b) 0.0154 (c) 0.3594 (d) 0.0718

总复习题 9（P.252）

1. S = {(1, H), (2, H), (3, H), (4, H), (5, H), (6, H),
   (1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T)}

2. “得到偶数点和反面朝上” = {(2, T), (4, T), (6, T)}，概率是 $\frac{1}{4}$；

   “得到反面朝上” = {(1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T)}，概率是 $\frac{1}{2}$。

3. 0.512, 0.384, 0.096, 0.008　　4. $\frac{st}{{}_{s+t}C_2}$

5. (a) $\{x \mid 0 \leqslant x < 3\}$　　(b) $\{x \mid 1 \leqslant x < 2\}$
   (c) $\{x \mid -\infty \leqslant x < 0$ 或 $2 \leqslant x < \infty\}$　　(d) $\{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$

6. 0.0001　　7. (a) $\frac{7}{10}$ (b) 0.125　　8. $\frac{1}{3}$　　9. 0.19

10. (a) 0.024 (b) 0.976 (c) 0.452　　11. 0.026　　12. 0.41

13. 4 元，3 元，2 元，1 元。　　14. $-\frac{1}{6}$ 元　　15. 0.004

16. (a) 0.4192 (b) 0.8384 (c) 0.0808

17. (a) 5.5% (b) 0.4514 (c) 23 杯

18. 3 年