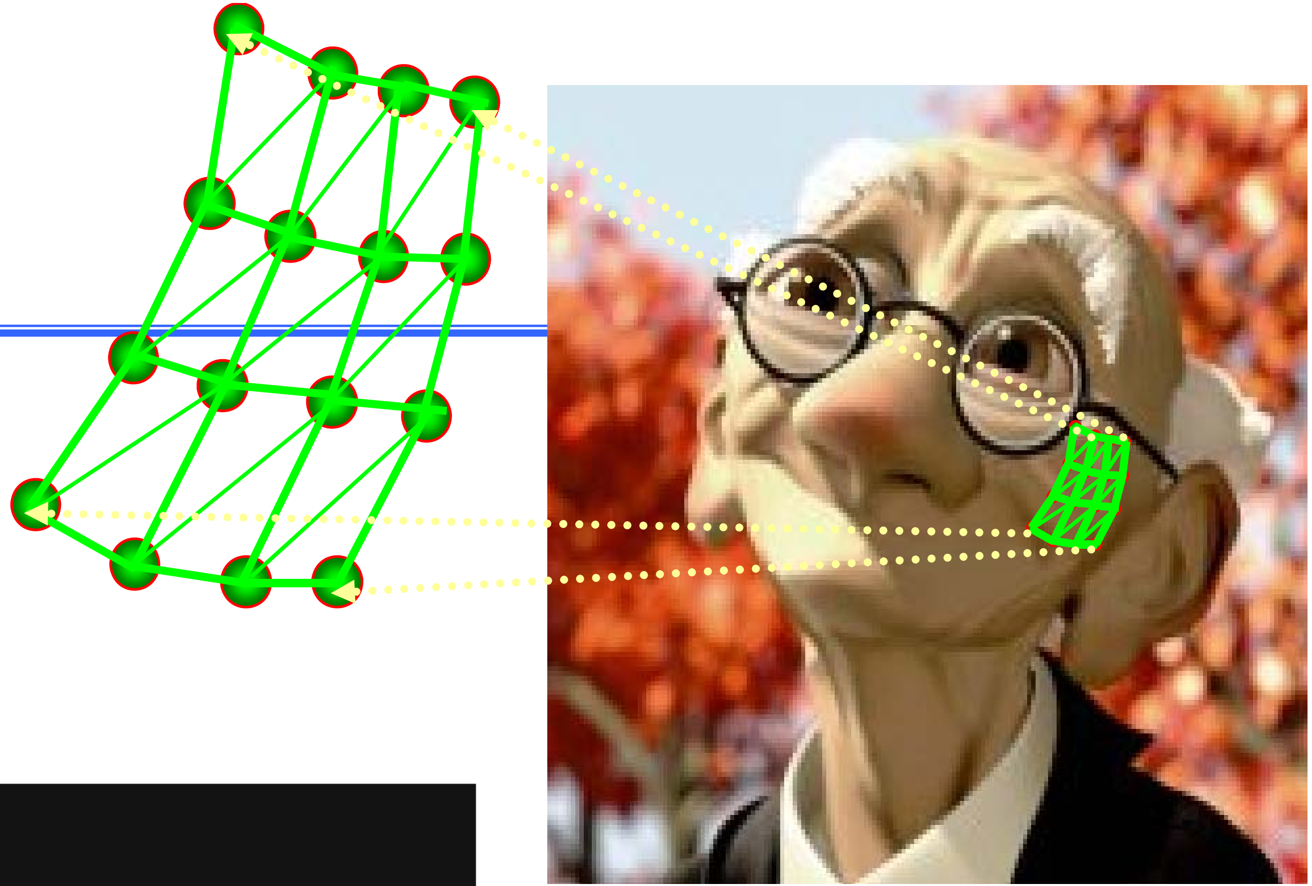
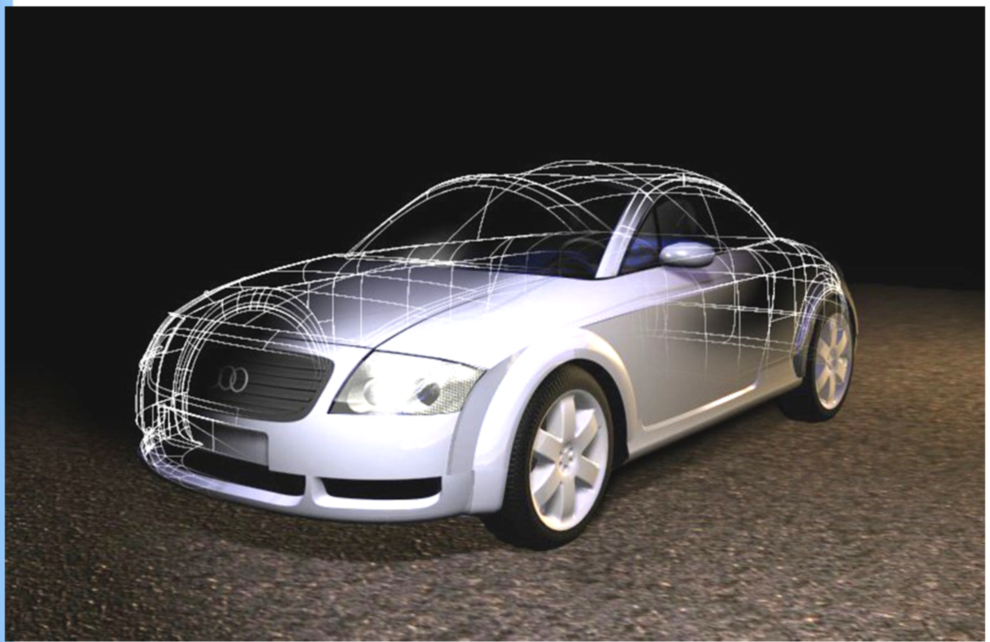





BOEING

第三章 几何造型技术

- 几何造型技术
  - 研究在计算机中，如何表达物体模型形状的技术；
  - 70年代，已有不少实用化系统；
  - 已应用于航空航天、汽车、机械、造船、建筑和电子等领域。
- 描述物体的三维模型：
  - 线框模型；
  - 曲面模型；
  - 实体模型。

第三章 几何造型技术

- 几何造型的历史
  - **曲面造型**：60年代，法国雷诺汽车公司、Pierre Bézier、汽车外形设计的UNISURF系统；
  - **实体造型**：1973英国剑桥大学CAD小组的Build系统、美国罗彻斯特大学的PADL-1系统等；
  - 独立发展起来，又合二为一；
  - **主流**：基于线框、曲面、实体、特征统一表示的造型设计系统。

第三章 几何造型技术

- **线框模型**:利用形体的顶点和棱边来表示物体。
  - 方法及模型比较简单，便于处理，具有图形显示快、易修改的优点；
  - 没有面的信息，不能表示表面含有曲面的物体，不能明确地定义给定点与物体之间的关系，不能处理许多**重要问题**；
  - 用于二维绘图或其它方法的辅助工具。

第三章 几何造型技术

- **曲面模型**：通过有向棱边构成形体的表面，用面的几何表达相应的形体。
  - 能够表达复杂的雕刻曲面，在几何造型中具有重要的地位，对于支持曲面的三维实体模型，是基础；
  - 广泛应用：交通工具和模具等复杂曲面的设计；
  - 仍然不能完整全面的表达物体形状，所产生的形体描述难以直接用于**物性**计算，难以保证物体描述的一致性和有效性；
  - 无法考察物体间的相互关联的性质。

第三章 几何造型技术

- **实体模型：**定义一些基本体素，并通过集合运算将它们组合成复杂的几何形体。
  - 能完整表示物体的所有形状信息，可以无歧义地确定一个点是在物体外部、内部或表面上；
  - 可实现计算物性、有限元分析、消除隐藏面和剖切形体，能够进一步满足CAD/CAM等应用的要求。

第三章 几何造型技术

- 参数曲线和曲面
- 贝塞尔曲线与曲面
- B样条曲线与曲面
- 非均匀有理B样条方法(NURBS方法)
- Coons曲面
- 形体在计算机内的表示
- 求交分类
- 实体造型系统简介
- 三角网格

第三章 几何造型技术

- 自由曲线和曲面发展过程：
  - 自由曲线曲面的最早是出现在工作车间；
  - 1963年，美国波音弗格森提出使用参数三次方程来构造曲面；
  - 1964-1967年，美国MIT孔斯用封闭曲线的四条边界来定义曲面；
  - 1971年，雷诺汽车Bezier提出用控制多边形来定义曲线和曲面；
  - 1974年，美国通用汽车，戈登和里森菲尔德，B样条理论用于形状描述；
  - 1975年，美国锡拉丘兹（雪城）大学，佛斯普里尔提出有理B样条；
  - 80年代，皮格尔和蒂勒，将有理B样条发展成非均匀有理B样条。

3.1 参数曲线和曲面

- **曲线曲面参数表示**
  - 非参数表示
    - **显式表示**:y=f(x)，无法表示封闭或多值曲线，如圆。
    - **隐式表示**:f(x, y)=0，易于判断函数值与零的关系，确定点与曲线的关系。
  - 存在下述问题：
    - 与坐标轴相关；
    - 会出现斜率为无穷大的情形(如垂线)。

3.1 参数曲线和曲面

- **参数表示**:曲线上任一点的坐标均表示成给定参数的函数。假定用t表示参数
  - 平面曲线上任一点P: $P(t)=[x(t),y(t)]$
  - 空间曲线上任一三维点P: $P(t)=[x(t),y(t),z(t)]$
  - 参数表示例子:
    - 直线: $P(t)=P_1+(P_2-P_1)t,\quad t\in[0,1]$
    - 圆: $P(t)=\left[\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right]\qquad t\in[0,1]$

3.1 参数曲线和曲面

- 参数表示的**优点**：
  - 满足几何不变性的要求；
  - 有更大的自由度来控制曲线、曲面的形状；
  - 对参数方程进行几何变换即实现对曲线(面)的变换；
  - 便于处理斜率为无穷大的情形；
  - 参数方程中，代数、几何相关和无关的变量是完全分离的，且对变量个数不限，便于用户把低维空间中曲线、曲面扩展到高维空间去；
  - 规格化的参数变量$t\in[0, 1]$，使其相应的几何分量是有界的，不必用另外的参数去定义边界；
  - 易于用矢量和矩阵表示几何分量，简化了计算。

3.1.2 曲线的基本概念

- 三维曲线
  - 用参数表示的三维曲线是一个有界的点集，可以表示成一个带参数的、连续的和单值的数学函数：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad 0 \le t \le 1 \\ z = z(t) \end{cases}$$

- 位置矢量
  - 曲线上任一点的位置矢量可表示为：$P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$
  - 如存在k阶导数矢量，则： $P^k(t) = \dfrac{d^k P}{dt^k}$

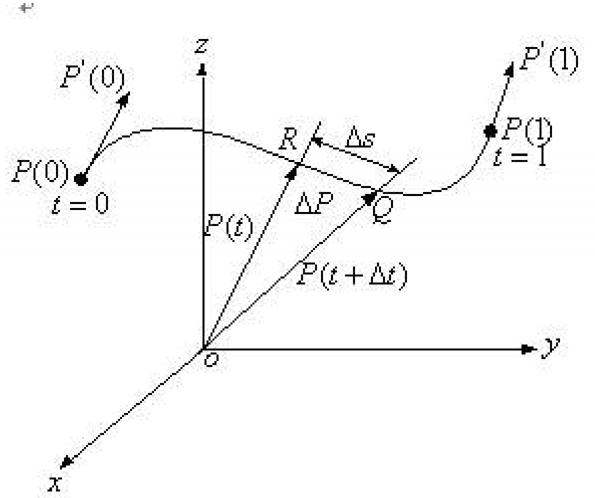
3.1.2 曲线的基本概念

- 切矢量
  - 选择弧长s作为参数，则 $T=\frac{dP}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta s}$ 是单位切矢量
  - 根据弧长微分公式有：

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

$$(ds/dt)^2=(dx/dt)^2+(dy/dt)^2+(dz/dt)^2=\left|P'(t)\right|^2$$

$$\frac{ds}{dt}=\left|P'(t)\right|\geq 0$$



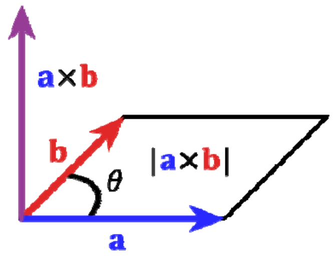
  - 于是有 $\frac{dP}{ds}=\frac{dP}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{P'(t)}{\left|P'(t)\right|}$

    即 T 为单位矢量

3.1.2 曲线的基本概念

– 法矢量

- 所有垂直于切矢量T 的矢量有一束，且位于法平面上；
- $\frac{dT}{ds}$ 是与T垂直的矢量；与 $\frac{dT}{ds}$ 平行的法矢称为曲线在该点的**主法矢**(N)；
- 矢量积$B=T\times N$ 是第三个**单位矢量**，它垂直于T和N。把平行于矢量B的法矢称为曲线的**副法矢量**；
- 可以推导出：



$$B=\frac{P'(t)\times P''(t)}{\left|P'(t)\times P''(t)\right|}$$

$$N=B\times T=\frac{(P'(t)\times P''(t))\times P'(t)}{\left|P'(t)\times P''(t)\right|\cdot\left|P'(t)\right|}$$

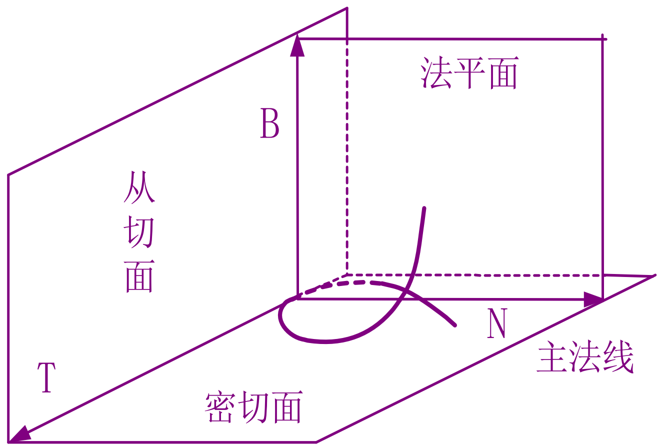


图3.1.2 曲线的法矢

3.1.2 曲线的基本概念

- T(切矢)、N(主法矢)和B(副法矢)构成了曲线上的活动坐标架；
- N、B构成的平面称为**法平面**，N、T构成的平面称为**密切平面**，B、T构成的平面称为**从切平面**。

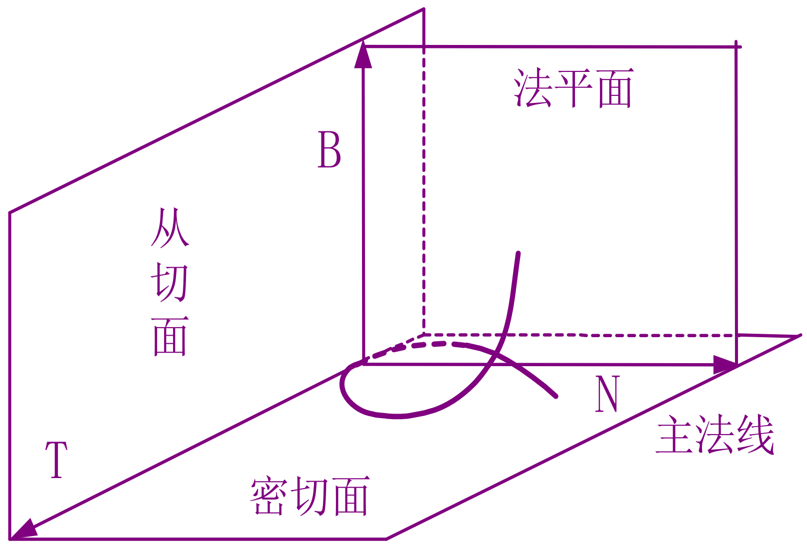


图3.1.2 曲线的法矢

3.1.2 曲线的基本概念

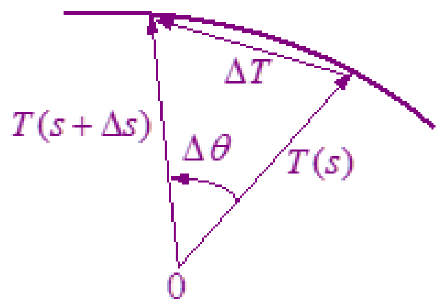
– 曲率和挠率

- **曲率**：由于 $\frac{dT}{ds}$ 与 N 平行，若令 $T^{'}=\kappa N$

$$\kappa=\left|T^{'}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta T}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta T}{\Delta\theta}\right|\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| \quad \text{即} \quad \kappa=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

其几何意义是曲线的单位切矢对弧长的转动率。

曲率k的倒数 $\rho=\frac{1}{\kappa}$ 称为**曲率半径**。



3)曲率和挠率的一般参数表示式

给出 C^3 类的曲线（C）：

$$\vec{r}=\vec{r}(t)\ ,\ \dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\vec{r}'\frac{ds}{dt}\Rightarrow\frac{ds}{dt}=\left\|\dot{\vec{r}}\right\|$$

$$\ddot{\vec{r}}=\dot{(\vec{r}')}\frac{ds}{dt}+\vec{r}'\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d\vec{r}'}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\vec{r}'\frac{d^2s}{dt^2}=\vec{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\vec{r}'\frac{d^2s}{dt^2},$$

所以 $\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=\vec{r}'\frac{ds}{dt}\times\left[\vec{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\vec{r}'\frac{d^2s}{dt^2}\right]=\vec{r}'\times\vec{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$,

因此 $\left\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right\|=\left\|\vec{r}'\right\|\left\|\vec{r}''\right\|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\sin\theta=k\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^3\ \ (\left\|\vec{r}'\right\|=1,\vec{r}'\perp\vec{r}'')$

由此得到曲率的一般参数的表示式 $k=\dfrac{\left\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right\|}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^3}$

3.1.2 曲线的基本概念

- **挠率**

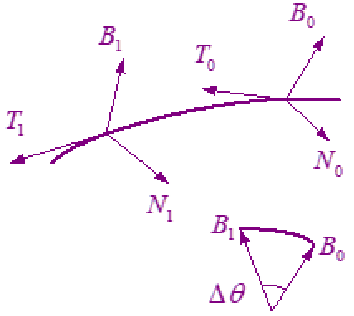
$B^{'}(s)$即垂直于$B(s)$又垂直于$T(s)$。故$B^{'}(s)$平行于$N(s)$

令 $B^{'}(s)=-\tau N(s)$ 。

$$|\tau|=\left|\frac{dB}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta B}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta B}{\Delta \phi}\right|\left|\frac{\Delta \phi}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta \phi}{\Delta s}\right|$$

1）绝对值等于单位副法矢对于弧长的转动率；

2）扰率大于0, 等于0和小于0分别表示曲线为右旋转空间，平面曲线和左旋转空间曲线。



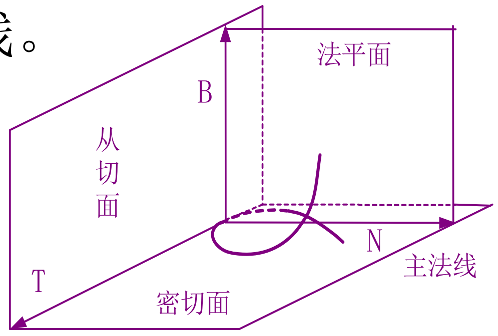


图3.1.2 曲线的法矢

3.1.2 曲线的基本概念

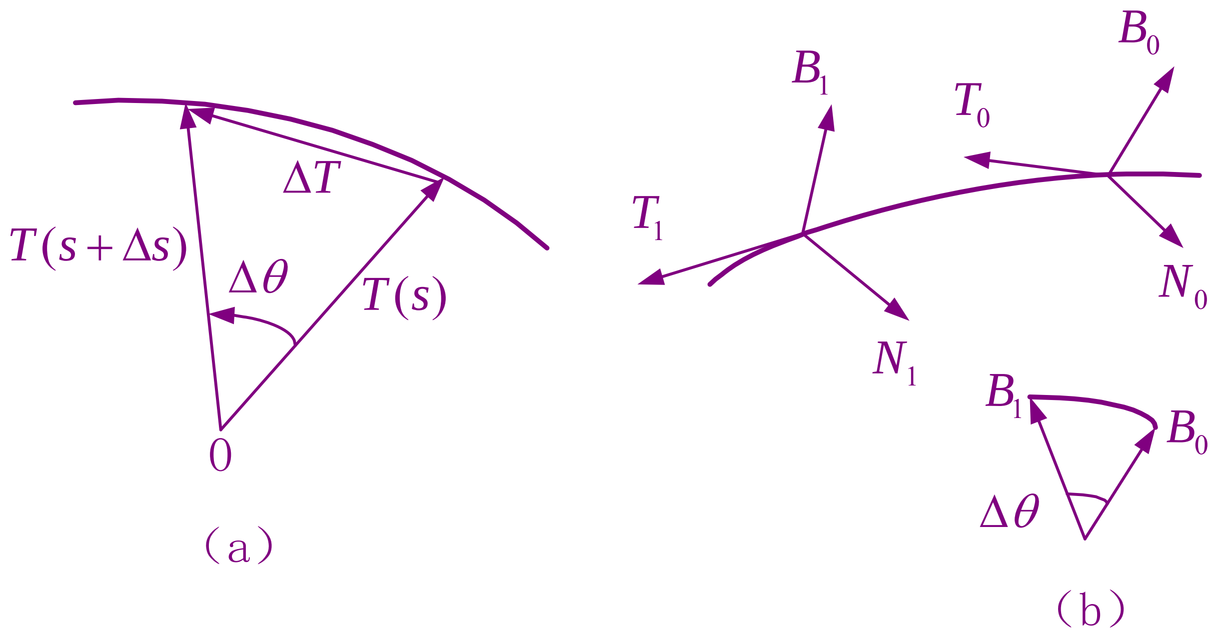


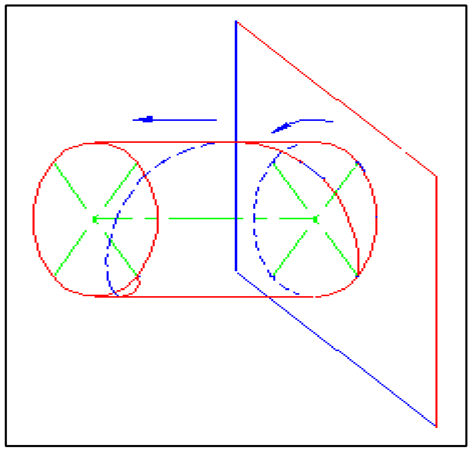
图3.1.3 曲率和挠率

$$\kappa = \frac{|P'(t) \times P''(t)|}{|P'(t)|^3} \qquad \tau = \frac{(P'(t) \times P''(t)) \cdot P'''(t)}{(P'(t) \times P''(t))^2}$$

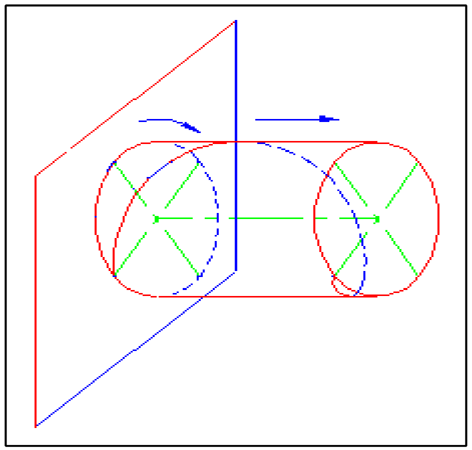
3.1.2 曲线的基本概念

- 示例：左旋右旋螺旋线

当圆柱轴线平放时，用手握住圆柱并伸直拇指，拇指代表动点移动的方向，其余四个手指代表动点的转动方向，符合右手为右旋螺旋线，如图 (a)所示；符合左手为左旋螺旋线，如图 (b)所示。



(a)右旋螺旋线



(b)左旋螺旋线

3.1.2 曲线的基本概念

- T、N和B及其导数之间的关系：

$$B' = -\tau N \qquad T' = \kappa N \qquad N = B \times T$$

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

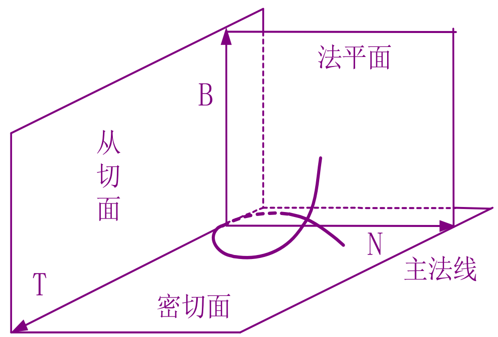


图3.1.2 曲线的法矢

3.1.3 插值、拟合和光顺

- **插值：**给定一组有序的数据点P_i构造一条曲线顺序通过这些数据点，所构造的曲线称为插值曲线。
  - **线性插值：**假设给定函数f(x)在两个不同点x1和x2的值，用一个线形函数：y=ax+b，近似代替，称为的线性插值函数。
  - **抛物线插值**：已知在三个互异点 x_1, x_2, x_3 的函数值为y_1, y_2, y_3，要求构造一个函数

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c$$

使抛物线$\varphi(x)$在结点 $x_i (i = 1,2,3)$ 处与 $f(x)$ 在 x_i 处的值相等

3.1.3 插值、拟合和光顺

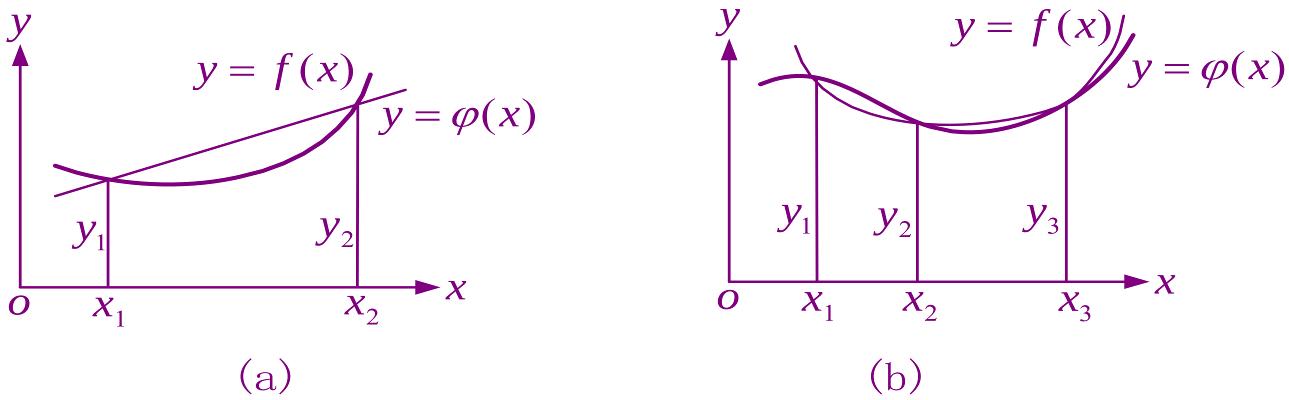
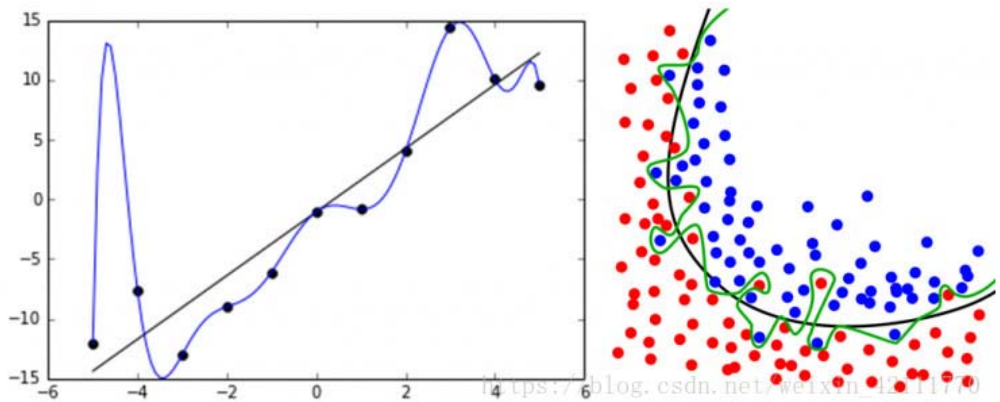


图3.1.4 线性插值和抛物插值

- **拟合**：构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点，所构造的曲线为**拟合**曲线。
- **逼近**:在计算数学中，逼近通常指用一些性质较好的函数近似表示一些性质不好的函数。在计算机图形学中，逼近继承了这方面的含义。

3.1.3 插值、拟合和光顺

- **过拟合：** 模型在训练集上效果很好，在测试集上效果差



- **光顺(Fairing)：** 指曲线的拐点不能太多。对平面曲线而言，相对光顺的条件是：
  - a. 具有二阶几何连续性(G^2)；
  - b. 不存在多余拐点和奇异点；
  - c. 曲率变化较小。

3.1.4 参数化

- 过三点P_0、P_1和P_2构造参数表示的插值多项式可以有无数条：
  - 对应地参数t，在[0, 1]区间中有无数种取法；
  - 参数值称为节点(knot)。
- 对于一条插值曲线，型值点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 与其参数域 $t \in [t_0, t_n]$内的节点之间有一种对应关系：
  - 对于一组有序的型值点，所确定一种参数分割，称之为这组型值点的参数化。

3.1.4 参数化

- 参数化常用方法有：
  - 均匀参数化（等距参数化）；
    - 节点在参数轴上呈等距分布，$t_{i+1} = t_i$ +正常数。
  - 累加弦长参数化；

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_i = t_{i-1} + \left|\Delta P_{i-1}\right|, i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \qquad \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

    - 反映型值点按弦长的分布情况；
    - 能克服均匀参数化所出现的问题。

3.1.4 参数化

- 参数化常用方法：
  - 向心参数化法；
  - 修正弦长参数化法。

- 参数区间的规格化

我们通常将参数区间 $[t_{0,}t_n]$ 规格化为[0, 1]，$[t_{0,}t_n]\neq[0,1]$，只需对参数化区间作如下处理：

$$t_0=0,t_i=\frac{t_i}{t_n},i=0,1,\cdots,n$$

3.1.5 参数曲线的代数和几何形式

以三次参数曲线为例，讨论参数曲线的代数和几何形式。

- 代数形式

$$\begin{cases} x(t) = a_{3x}t^3 + a_{2x}t^2 + a_{1x}t + a_{0x} \\ y(t) = a_{3y}t^3 + a_{2y}t^2 + a_{1y}t + a_{0y} \\ z(t) = a_{3z}t^3 + a_{2z}t^2 + a_{1z}t + a_{0z} \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

  - 上述代数式写成矢量式是

$$P(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \qquad t \in [0,1]$$

3.1.5 参数曲线的代数和几何形式

- 几何形式
  - 对三次参数曲线，可用其端点位矢P(0)、P(1)和切矢P′(0)、P′(1)描述。
  - 将P(0)、P(1)、P′(0)和P′(1)简记为P_0、P_1、P'_0和P'_1，代入 $P(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0 \qquad t\in[0,1]$

$$
\text{得：}\begin{cases}
a_0 = P_0 \\
a_1 = P_0' \\
a_2 = -3P_0 + 3P_1 - 2P'_0 - P_1' \\
a_3 = 2P_0 - 2P_1 + P_0' + P_1'
\end{cases}
$$

$$
P(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_0 + (-2t^3 + 3t^2)P_1 + (t^3 - 2t^2 + t)P_0' + (t^3 - t^2)P_1' \qquad t\in[0,1]
$$

3.1.5 参数曲线的代数和几何形式

$$P(t)=(2t^3-3t^2+1)P_0+(-2t^3+3t^2)P_1+(t^3-2t^2+t)P_0'+(t^3-t^2)P_1' \qquad t\in[0,1]$$

- 令：

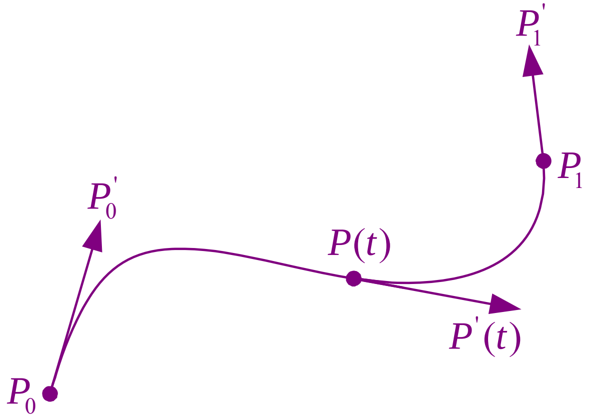
$$F_0(t)=2t^3-3t^2+1$$
$$G_0(t)=t^3-2t^2+t$$
$$F_1(t)=-2t^3+3t^2$$
$$G_1(t)=t^3-t^2$$

可将其简化为：$P(t)=F_0P_0+F_1P_1+G_0P_0'+G_1P_1' \quad t\in[0,1]$

上式是三次Hermite(Ferguson)曲线的**几何形式**

- **几何系数**：P_0、P_1、P'_0和P'_1
- **调和系数**：F_0,F_1,G_0,G_1

3.1.5 参数曲线的代数和几何形式



3.1.5 Ferguson曲线端点位矢和切矢

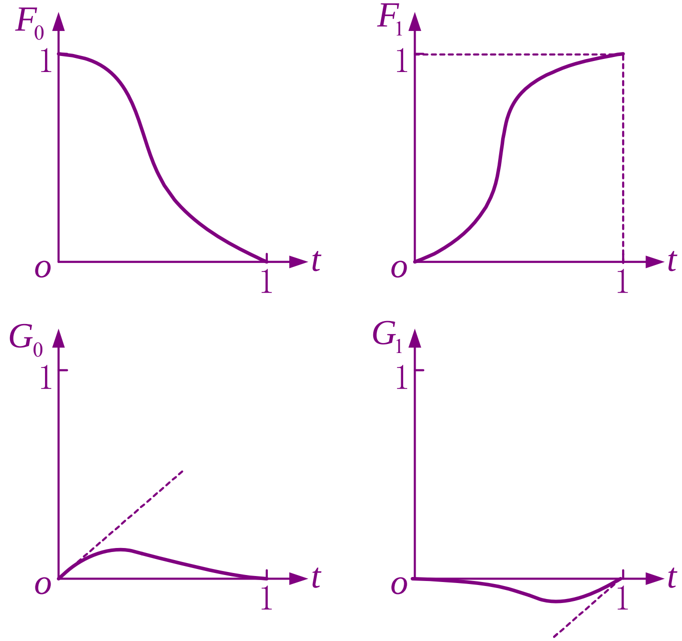


图3.1.6 三次调和函数

$$\begin{bmatrix} F_i(j) & F_i'(j) \\ G_i(j) & G_i'(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{bmatrix}, i, j = 0,1$$

$$P(t) = F_0 P_0 + F_1 P_1 + G_0 P_0' + G_1 P_1' \quad t \in [0,1]$$

- 参数 F_0, F_1 专门控制端点的函数值对曲线的影响；
- 参数 G_0, G_1 专门控制端点的一阶导数值对曲线的影响。

3.1.6 连续性

- 设计制造时，组合多段曲线，因此需要解决曲线段之间的光滑连接问题。
- 曲线间连接的光滑度的度量：
  - **参数连续性**：组合参数曲线在连接处具有直到*n*阶连续导矢，即*n*阶连续可微，称为*n*阶参数连续性C^n
  - **几何连续性**：组合曲线在连接处满足不同于C^n的某一组约束条件，称为具有*n*阶几何连续性G^n。

3.1.6 连续性

- 引进几何连续的重要性：

$$\Phi(t)=\begin{cases} V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}t, & 0\le t\le 1\\ V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}+(t-1)\dfrac{2(V_1-V_0)}{3}, & 1\le t\le 2\end{cases}$$

  – 第 $\Phi(t)$在[0,2]上表示一条连接V_0,V_1的直线段；
  – 左右导数不等；$\Phi'(1^-)=\dfrac{1}{3}(V_1-V_0)$ $\quad\Phi'(1^+)=\dfrac{2}{3}(V_1-V_0)$
  – 参数连续描述光滑性不恰当。

- 对于参数$t\in[0,1]$ 的两条曲线$P(t)$和$Q(t)$
  - 若要求在结合处达到C^0 连续或G^0 连续，即两曲线在结合处位置连续：$P(1)=Q(0)$

3.1.6 连续性

- 对于参数 $t \in [0,1]$ 的两条曲线 $P(t)$ 和 $Q(t)$
  - 若要求在结合处达到 G^1 连续，就是说两条曲线在结合处在满足 G^0 连续的条件下，并有公共的切矢

$$Q'(0) = \alpha P'(1) \qquad (\alpha > 0)$$

当a＝1时，G^1连续就成为 C^1 连续

  - 若 P 和 Q 在连接处已有 C^0C^1 连续性且曲率的大小和方向均相等，即 $P''(1) = Q''(0)$ 则 P 和 Q 在连接处具有 C^2 连续
  - 若 P 和 Q 在连接处已有 C^0C^1 连续性且曲率的大小不相等但方向相等，则 P 和 Q 在连接处具有 G^2 连续。

3.1.6 连续性

- 若要求在结合处达到G^2连续，就是说两条曲线在结合处在满足G^1连续的条件下，并有公共的曲率矢：

$$\frac{P'(1)\times P''(1)}{\left|P'(1)\right|^3}=\frac{Q'(0)\times Q''(0)}{\left|Q'(0)\right|^3} \qquad (Q'(0)=\alpha P'(1))$$

这个关系可写为：$Q''(0)=\alpha^2 P''(1)+\beta P'(1)$

β为任意常数。当$\alpha=1$, $\beta=0$时，G^2连续就成为C^2连续。

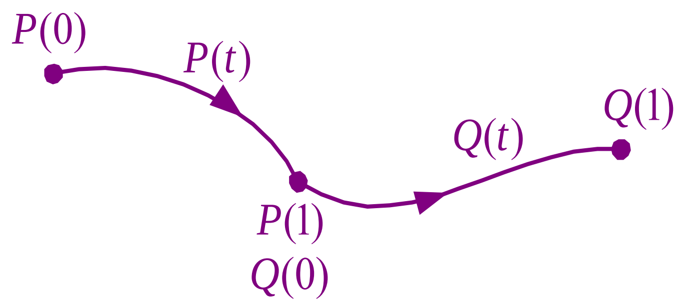


图3.1.7 两条曲线的连续性

3.1.7 参数曲面基本概念

- 一张定义在矩形域上的参数曲面可以表示为

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u.v), \quad (u,v) \in [0,1]\times[0,1] \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

可记为 $P(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$

- 曲面上的点：将给定的参数值 u_0, v_0 代入参数方程，可得曲面上的点 $P(u_0, v_0)$
- 曲面上一点的切向量(切矢)：

$$\left.\frac{\partial P(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} \qquad \left.\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$$

3.1.7 参数曲面基本概念

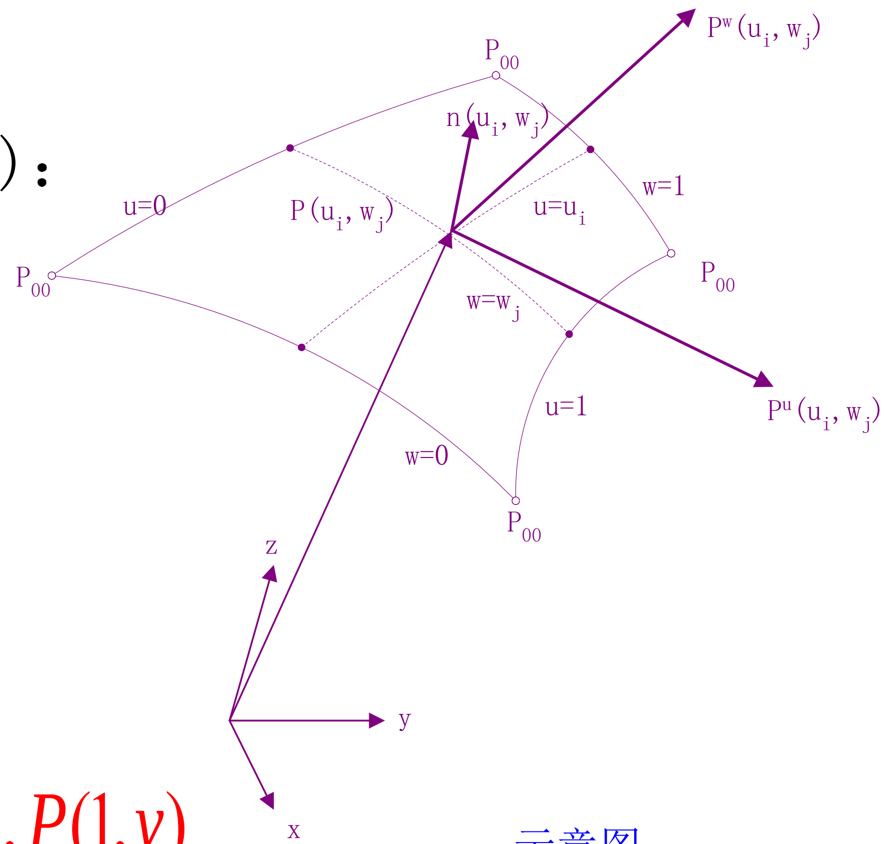
- 参数曲面
  - 曲面上一点的法向(法矢)：

$$\frac{\partial P(u,v)}{\partial u}\bigg|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} \times \frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\bigg|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$$

  - 角点：$P(0,0)$ $P(0,1)$

    $P(1,0)$ $P(1,1)$
  - 边界线：

$$P(u,0), P(u,1), P(0,v), P(1,v)$$



示意图