支持向量机

授课教师：庞善民

助教：张浩、刘卓

2023年4月9日

分别使用三种损失函数

实现佩加索斯（Pegasos）算法

在给定的数据集上进行训练与测试

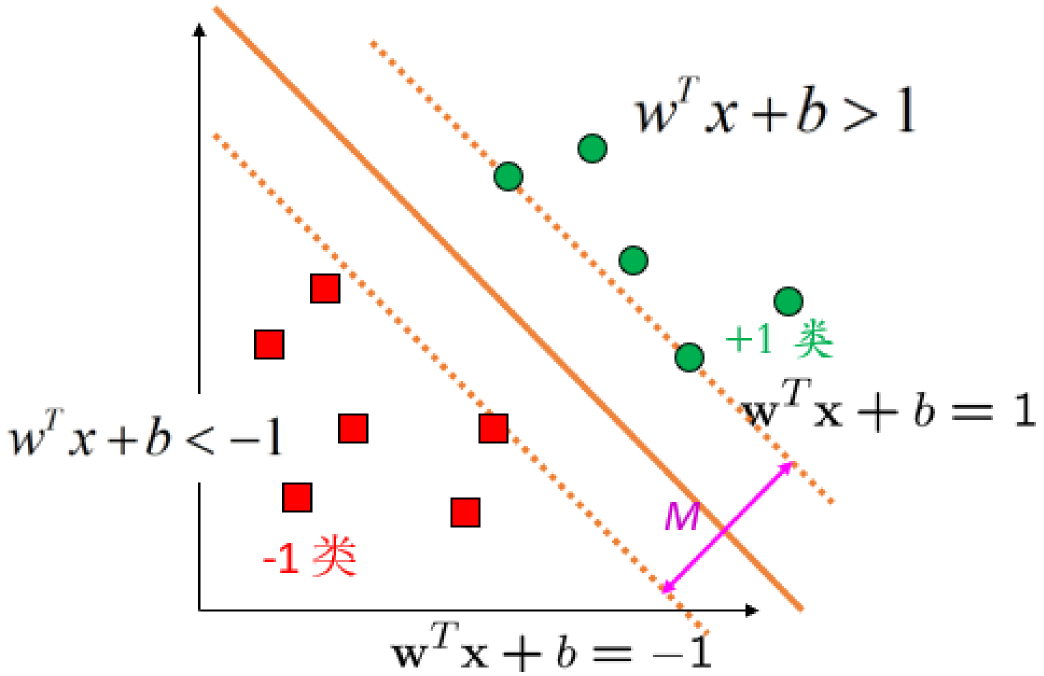
回顾：SVM

支持向量机

Support Vector Machine(SVM)

分类面方程： $w^T x + b = 0$

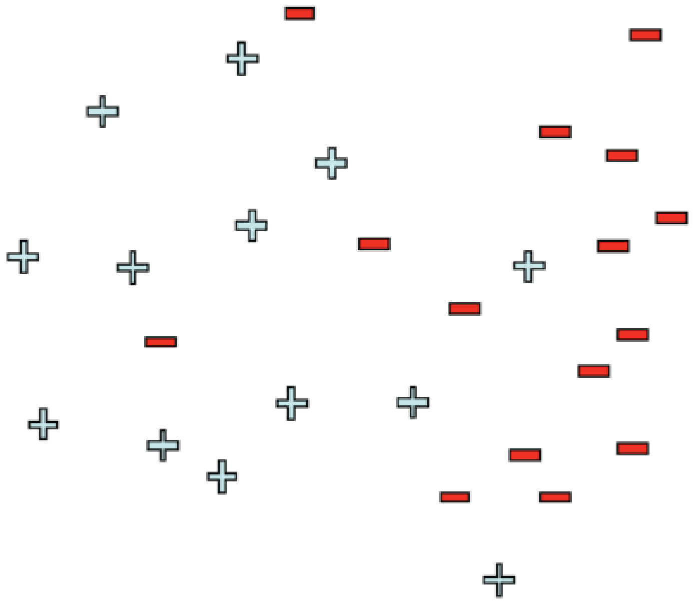
支持面方程： $w^T x + b = \pm 1$



SVM假定存在一个超平面能将不同类的样本完全划分开

但通常情况并非如此：

噪声(noise)、异常值(outlier)



回顾：软SVM

引入软SVM

软SVM建模：惩罚错误分类的数目

$$\min w^T w/2 + C * (\#mistakes)$$

等价于

$$\min \boxed{w^T w/2 + C * \sum_{i=1}^{n} \ell_{0/1}(y_i(w^T x_i + b))}$$

其中，C是正则化常数，$\ell_{0/1}$是“0/1”损失函数：

$$\ell_{0/1}(z) = \begin{cases} 1, & if\ z < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

回顾：替代损失

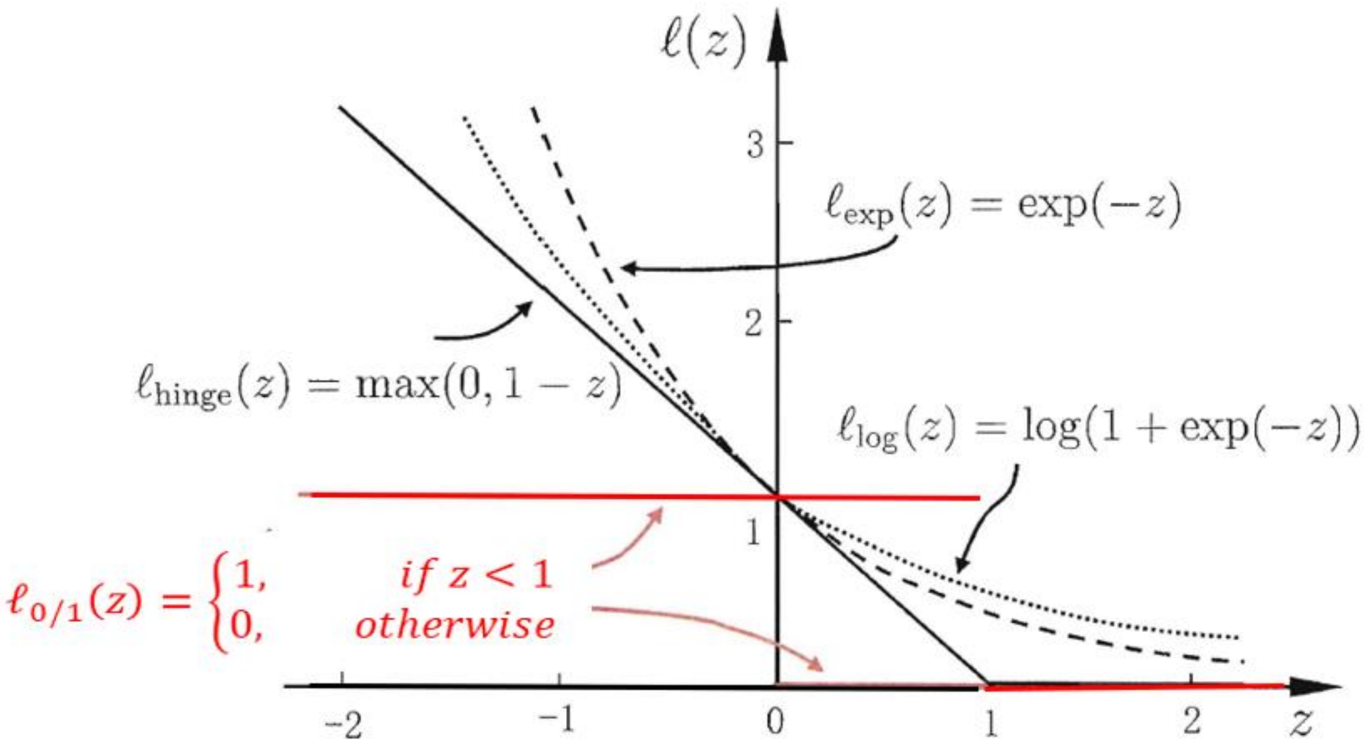
$\ell_{0/1}$ 非凸、非连续，数学性质不好

可使用如下三种替代损失：

hinge 损失: $\ell_{hinge}(z) = \max(0, 1 - z)$;

指数损失(exponential loss): $\ell_{exp}(z) = \exp(-z)$;

对率损失(logistic loss): $\ell_{log}(z) = \log(1 + \exp(-z))$.



回顾：hinge损失

选用hinge损失时，目标函数即：

$$f(w,b)=\frac{w^Tw}{2}+\mathrm{C}\sum_{i=1}^{n}\max(0,1-y_i(w^Tx_i+b))$$

令$C=\frac{1}{n\lambda}(\lambda>0)$，希望目标函数最小，则目标函数等价于：

$$f(w,b)=\underbrace{\frac{\lambda}{2}\|w\|^2}_{\text{正则化项}}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(0,1-y_i(w^Tx_i+b))}_{\text{经验损失}}$$

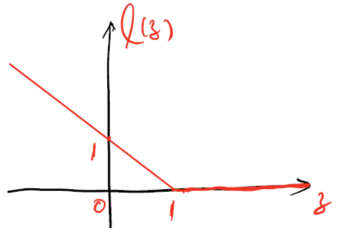
使用（子）梯度下降求解目标函数
随机近似（随机选择一个样本点）

$$f(w,b)=\frac{\lambda}{2}\|w\|^2+\max(0,1-y_i(w^Tx_i+b))$$

回顾：hinge损失

$$f(w,b)=\frac{\lambda}{2}\|w\|^2+\max(0,1-y_i(w^Tx_i+b))$$

$$\frac{d\ell(z)}{dz}=\begin{cases}-1, & z<1\\ 0, & z\geq 1\end{cases}$$



$\ell_{\text{hinge}}(z)=\max(0,1-z)$

若$y_i(w^Tx_i+b)<1$：

$$f(w,b)=\frac{\lambda}{2}\|w\|^2+1-y_i(w^Tx_i+b)$$

$$\nabla f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial w}\\ \frac{\partial f}{\partial b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda w-y_ix_i\\ -y_i\end{bmatrix}$$

若$y_i(w^Tx_i+b)\geq 1$：

$$f(w,b)=\frac{\lambda}{2}\|w\|^2$$

$$\nabla f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial w}\\ \frac{\partial f}{\partial b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda w\\ 0\end{bmatrix}$$

hinge梯度

回顾：指数损失

$$f(w,b)=\frac{\lambda}{2}\|w\|^2+\exp(-y_i(w^Tx_i+b))$$

$$\frac{\partial X^Ta}{\partial X}=\frac{\partial a^TX}{\partial X}=a$$

$$\boxed{\nabla f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial w}\\ \frac{\partial f}{\partial b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda w-y_ix_i\exp(-y_i(w^Tx_i+b))\\ -y_i\exp(-y_i(w^Tx_i+b))\end{bmatrix}}$$

exp梯度

回顾：对率损失

$$f(w,b)=\frac{\lambda}{2}\|w\|^2+\log(1+\exp(-y_i(w^Tx_i+b)))$$

$$\boxed{\nabla f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial w}\\ \frac{\partial f}{\partial b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda w-\frac{y_ix_i\exp(-y_i(w^Tx_i+b))}{1+\exp(-y_i(w^Tx_i+b))}\\ -\frac{y_i\exp(-y_i(w^Tx_i+b))}{1+\exp(-y_i(w^Tx_i+b))}\end{bmatrix}}$$

log梯度

回顾：佩加索斯（Pegasos）算法

佩加索斯（Pegasos）算法（hinge损失）

初始化：$t = 0; w_1, b_1; T$、λ自定义

$C = \frac{1}{n\lambda}$

For $iter = 1, 2, \dots, T$

随机挑选第i个样本进行参数更新

$t \mathrel{+}= 1$；$\eta_t = \frac{1}{\lambda t}$

if $y_i(w^T x_i + b) < 1$

$$\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ b_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_t \\ b_t \end{bmatrix} - \eta_t \begin{bmatrix} \lambda w_t - y_i x_i \\ -y_i \end{bmatrix}$$

else

$$\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ b_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_t \\ b_t \end{bmatrix} - \eta_t \begin{bmatrix} \lambda w_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

hinge梯度

End

算法核心：

下降步长η_t（逐渐减小）

下降方向（子梯度）

用到的库

第三方：numpy（安装略）

import numpy as np

第三方：matplotlib（安装略）

import matplotlib.pyplot as plt

第三方：scipy

安装：

命令行中，输入pip(或conda) install scipy

import scipy.io

实验流程

数据读取

佩加索斯算法

- hinge损失
- 指数损失
- 对率损失

计算准确率
画目标函数曲线

代码

```
def load(path, data_type):
    data = scipy.io.loadmat(path)

    # 原始数据的label是0/1格式,需要转化为课上学的-1/1格式
    # unit8->int 0/1->-1/1
    if data_type == 'train':
        data['y'] = data['y'].astype(np.int) * 2 - 1
    elif data_type == 'test':
        data['ytest'] = data['ytest'].astype(np.int) * 2 - 1

    return data

train = load('./data/spamTrain.mat', 'train')  # 4000条
test = load('./data/spamTest.mat', 'test')  # 1000条

train_x = train['X']  # 4000*1899
train_y = train['y']  # 4000*1

test_x = test['Xtest']  # 1000*1899
test_y = test['ytest']  # 1000*1
```

代码

```
def pegasos(train, test, C, T, loss_type='hinge', func_unit=100):
    train_x = train['X']  # 4000*1899
    train_y = train['y']  # 4000*1
    test_x = test['Xtest']  # 1000*1899
    test_y = test['ytest']  # 1000*1

    # 记录目标函数值,用于画图
    func_list = []

    # 初始化lambda_

    # 高斯初始化权重W和偏置b

    for t in range(1, T + 1):
        if loss_type == 'hinge':

        elif loss_type == 'exp':

        elif loss_type == 'log':
```

代码

```
        # 根据当前W和b,计算训练集样本的目标函数平均值
        if t % func_unit == 0:
            func_now = func(train_x, train_y, W, b, lambda_,
loss_type)
            func_list.append(func_now)
            print('t = {}, func = {:.4f}'.format(t, func_now))

    # 比对test数据上预测与实际的结果,统计预测对的个数,计算准确率acc
    num_correct = 0

    acc = 100 * num_correct / test_x.shape[0]
    print('acc = {:.1f}%'.format(acc))
    print('func_list = {}'.format(func_list))

    return acc, func_list
```

分类面方程

$$w^T x + b = 0$$

代码


```python
if __name__ == '__main__':
    C = 0.001
    T = 10000  # 迭代次数
    func_unit = 500  # 每隔多少次迭代计算一次目标函数

    # loss类型切换
    loss_types = ['hinge', 'exp', 'log']
    loss_type = loss_types[2]

    train = load('./data/spamTrain.mat', 'train')  # 4000条
    test = load('./data/spamTest.mat', 'test')  # 1000条

    acc, func_list = pegasos(train, test, C, T, loss_type, func_unit)

    plot(func_list, func_unit, loss_type, C, T, acc)
```

提示

```
# ||w||
np.linalg.norm(W, ord=2)

# 高斯初始化
W = np.random.randn(num_features, 1)
b = np.random.randn(1)

# 随机整数[0, num_train-1]
np.random.randint(0, num_train)
```

提示

1. 指数操作(尤其是在指数损失中)具有不稳定性，可能会导致梯度过大，为避免这种情况，可以对指数进行判断，如果指数过大，则暂时不用当前样本来训练。

如对指数损失：

如果红框内容<3(或其它值，自行调节)，则使用当前样本更新梯度，否则跳过当前样本，不使用当前样本更新梯度，尝试下一个

$$\nabla f=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial w}\\ \dfrac{\partial f}{\partial b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda w-y_i x_i\exp\left(\boxed{-y_i\left(w^T x_i+b\right)}\right)\\ -y_i\exp\left(-y_i\left(w^T x_i+b\right)\right)\end{bmatrix}$$

但该方法并不能完全消除这种不稳定性，建议多次运行程序，选取其中较好的结果。而在对率损失情况下，虽然也有指数操作，但如果C设置得当，一般不会出现溢出，可不采用上述方法。

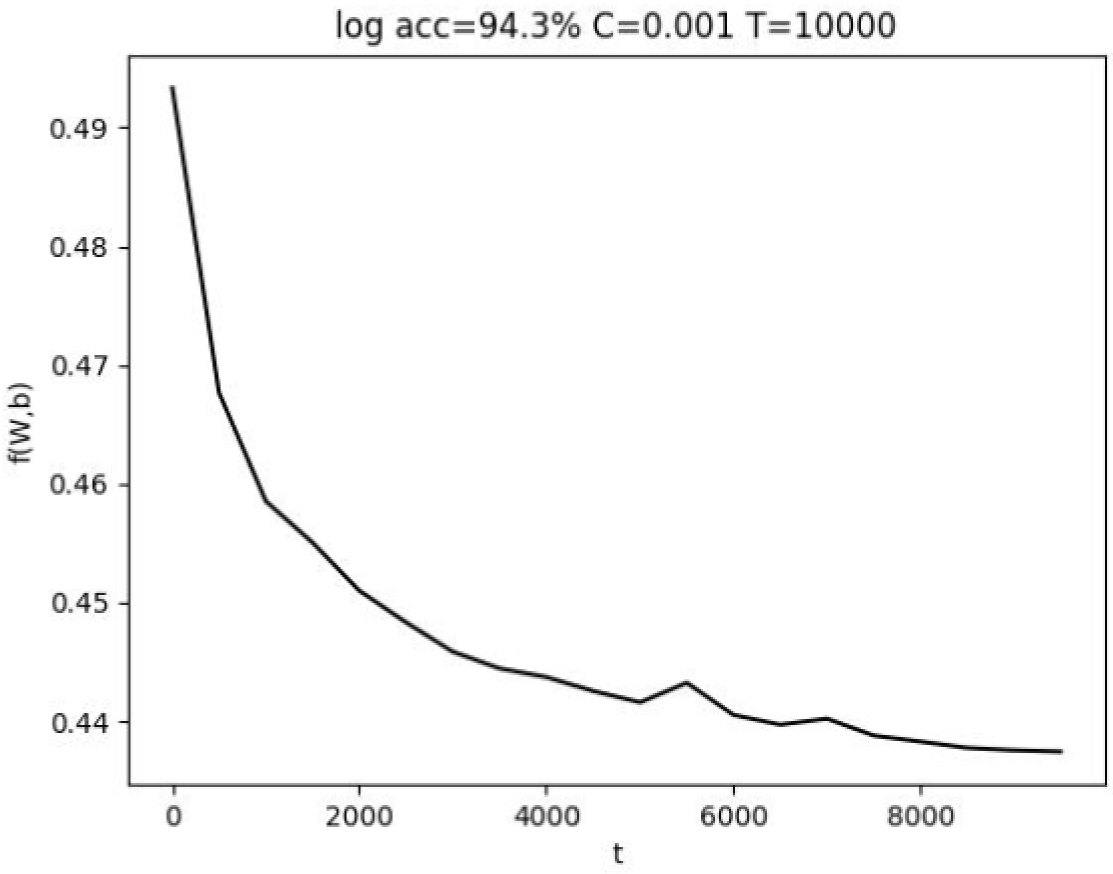
提示

2. 提供的测试集中，正负样本数为308:692，所以如果准确率出现30.8%或69.2%，说明模型将样本全部判定为正/负，相当于训练失败。

运行结果

控制台输出

t = 500, func = 0.4933
t = 1000, func = 0.4677
t = 1500, func = 0.4585
...
t = 8500, func = 0.4383
t = 9000, func = 0.4378
t = 9500, func = 0.4376
t = 10000, func = 0.4375
acc = 94.3%
func_loss = [⋯]



实验要求

1. 代码补充完整，让程序在3种loss下都可以得出准确率90%以上的结果

2. 调整C、T参数，看看不同的C、T会导致什么变化

3. 实验文档内容需要包括：

实验原理

代码及对应简要说明

不同种类loss与C、T下的实验结果(曲线图)

Thank You Q & A

张浩：1050852440@qq.com

刘卓：lzpmbw@163.com