§3.2 常用函数与求和

§3.2.1 常用函数和记号

1. Floor and Ceiling —— 下取整和上取整

$\lfloor x \rfloor$：$\le x$ 的最大整数

$\lceil x \rceil$：$\ge x$ 的最小整数

·性质：

① 对 ∀ 实数 x，$x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$

② 对 ∀ 整数 n，$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$

2. Modular arithmetic —— 模运算

$a \bmod n = a - \lfloor a/n \rfloor n$ //取余数

$a \equiv b \pmod n$ 表示 $(a \bmod n) = (b \bmod n)$ //同余

3. Exponentials —— 指数

$e = 2.71828\cdots$，$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

·性质：

① 对 ∀ 实数 x，$e^x \ge 1+x$；② 对实数 $|x| \le 1$，$1+x \le e^x \le 1+x+x^2$
$= 1+x+\Theta(x^2)$

③ 对 ∀ 实数 $|x| \le 1$，$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x$

4. Logrithms —— 对数

$\log n = \log_2 n$，$\lg n = \log_{10} n$，$\ln n = \log_e n$，

$\log^k n = (\log n)^k$，$\log\log n = \log(\log n)$

·性质

① 对 $|x| < 1$，$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

② 对 $x > -1$，$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$

③ 对常数 $a>0$ 和 b，$\log^b n = o(n^a)$ //小o

5. Factorials —— 阶乘

$$n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ n\cdot(n-1) & n>0 \end{cases}$$

· 性质：$n! < n^n$

6. Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

· 由 stirling 公式可以证明：

$n! = o(n^n)$ // $\neq 0$，$n! = \omega(2^n)$

$\log(n!) = \Theta(n\log n)$

7. Functional iteration —— 函数迭代

Def. $$f^{(i)}(n) = \begin{cases} n & \text{if } i=0 \\ f(f^{(i-1)}(n)) & \text{if } i>0 \end{cases}$$ // i 为 f 的重数

如 $f(n) = 2n \Rightarrow f^{(1)}(n) = 2n$，$f^{(2)}(n) = f(f^{(1)}(n)) = f(2n) = 2^2 n$，

$\cdots$，$f^{(i)}(n) = 2^i n$

8. Iterated logarithm function —— 对数迭代

$$\log^* n = \min_i \{i \geq 0 \mid \log^{(i)} n \leq 1\}$$

如：$\log^* 2 = 1$，$\log^* 4 = 2$，$\log^* 16 = 3$

$\log^* 65536 = 4$，$\log^* 2^{65536} = 5$，$\cdots$

这是一个增长得很慢的函数。

9. Fibonacci Numbers —— Fib 数

· Def. $$F_i = \begin{cases} 0 & i=0 \\ 1 & i=1 \\ F_{i-1}+F_{i-2} & i\geq 2 \end{cases}$$

· F_i的通项公式

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

这里 $\phi^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\cdots$，$\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803\cdots$

10. 标准增长函数及其大小关系

(1) 多项式时间阶的大小关系

$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n\log n) < O(n^2) < O(n^3)$

(2) 指数时间阶的大小关系

$O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$

§3.2.2 求和

1. 求和公式及性质

· 有限和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$　　// Σ符号：1820年 Jorseph Fourier引入

· 无限和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ：含义 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$

(1) 线性性质

① $\sum_{k=1}^{n} (c a_k + d b_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k + d \sum_{k=1}^{n} b_k$ ，$c, d \in R$

② $\sum_{k=1}^{s} \Theta(f_k(n)) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{s} f_k(n)\right)$

(2) 算术级数

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1) = \Theta(n^2)$$

(3) 几何级数

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$ ，当 $|x|<1$ 时，$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

(4) 调和级数

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$$

(5) 积分和微分级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$　这里 $|x|<1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$　// 上式两边求导，乘 x

(6) 叠缩级数

· 对 $a_0, a_1, \cdots, a_n$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n$$

如：$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = a_0 - a_n$

(3) 积 $\prod_{k=1}^{n} a_k$ ：$\lg(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \sum_{k=1}^{n} \lg a_k$

2. 和式的界

(1) 数学归纳法：先猜，后证明

例1. ~~求~~ $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ 的上界是

解：猜测为 $O(3^n)$，这里 $f(n) = \sum_{k=0}^{n} 3^k$，$g(n) = 3^n$

① 归纳基础：$n=1$

$$f(1) = \sum_{k=0}^{1} 3^k = 4 \le c\,g(1)，只要 c=2$$

② 归纳假设：对n成立

③ 归纳步骤：下证n+1成立

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \le c\cdot 3^n + 3^{n+1} = (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{c})\,c\cdot 3^{n+1} \le c\cdot 3^{n+1}$$

只要 $\frac{1}{3} + \frac{1}{c} \le 1$，即 $c \ge \frac{3}{2}$

∴ 取 $c=2$ 即可　　∴ $\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$

注：证明过程中，使用渐近记号要小心！

如，证 $\sum_{k=1}^{n} k = O(n)$.

假设对 $n>1$ 成立，对n+1有

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = O(n) + (n+1) = O(n)$$

提前使用待证明的结论

(2) 对项限界

① 最大/最小项限界

如，$\sum_{k=1}^{n} k \le \sum_{k=1}^{n} n = n^2 = O(n^2)$

一般地，$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\cdot a_{max}$，$a_{max} = \max_{1\le k\le n} a_k$

② 用几何级数限界

假定对所有 $k \geq 0$ 有 $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r$，$r$为常数且 $0<r<1$

则 $a_k \leq a_0 \cdot r^k$ // ∵ $a_k \leq a_{k-1} \cdot r \leq a_{k-2} \cdot r^2 \leq \cdots \leq a_0 r^k$

$\therefore \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = \frac{a_0}{1-r}$

例2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$

$\because \frac{(k+1)/3^{k+1}}{k/3^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{k+1}{k} \leq \frac{2}{3}$ for all $k \geq 1$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$

注：这里r应是常数。若不是常数，会产生不正确的结果。

(3) 和式分解

① 简单的一分为二

例3. 求 $\sum_{k=1}^{n} k$ 的下界

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n/2} k + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} k \geq \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 0 + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{n}{2} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \Omega(n^2)$$

② 忽略和式初始几项

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k \quad k_0\text{为常数}$$

$$= \Theta(1) + \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$

例4 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

$$\frac{(k+1)^2/2^{k+1}}{k^2/2^k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \leq \frac{8}{9} \quad \text{for all } k \geq 3$$

③ 更复杂的划分

例5　每项分组数: 1　2　4　8　$\le 2^{\lfloor \log n \rfloor}$

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\lfloor \log n\rfloor}}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

2组　$i=0$　$i=1$　$i=2$　$i=3$　$i=\lfloor \log n \rfloor$

$$\le \sum_{i=0}^{\lfloor \log n \rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i+j}$$

$$\le \sum_{i=0}^{\lfloor \log n \rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \log n \rfloor}1 \le \log n+1=O(\log n)$$

④ 积分近似

1° 若 $f(k)\nearrow$, 则 $\int_{m-1}^{n}f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n}f(k) \le \int_{m}^{n+1}f(x)dx$

2° 若 $f(k)\searrow$, 则 $\int_{m}^{n+1}f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n}f(k) \le \int_{m-1}^{n}f(x)dx$

例6: 求 H_n 的紧致界

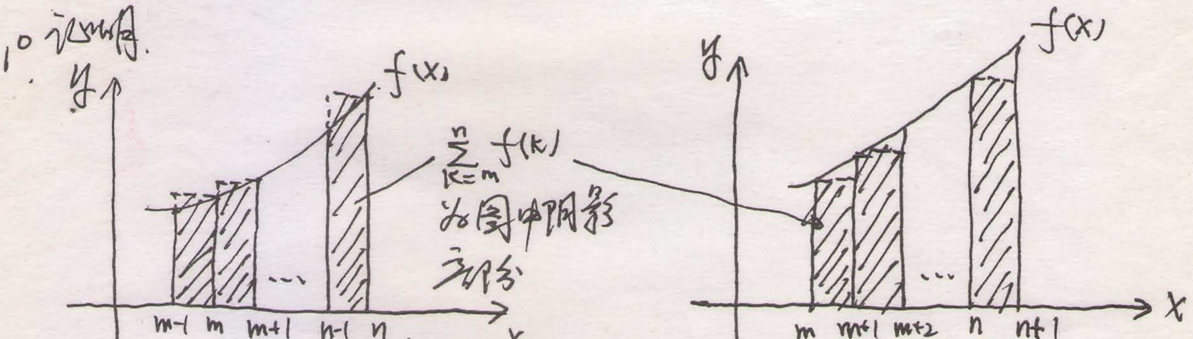
$\because f(k)=\frac{1}{k}\searrow$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \ge \int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_{1}^{n+1}=\ln(n+1)$

又 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le 1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx=1+\ln n$　//直接应用2°式的右边不等式,行不通

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\Theta(\ln n)$

1° 证明.



→ 证明了1°式的右不等式

(4) Knuth的求和方法

以 $\square_n=\sum_{0\le k\le n}k^2$　$n\ge 0$ 为例