理论力学

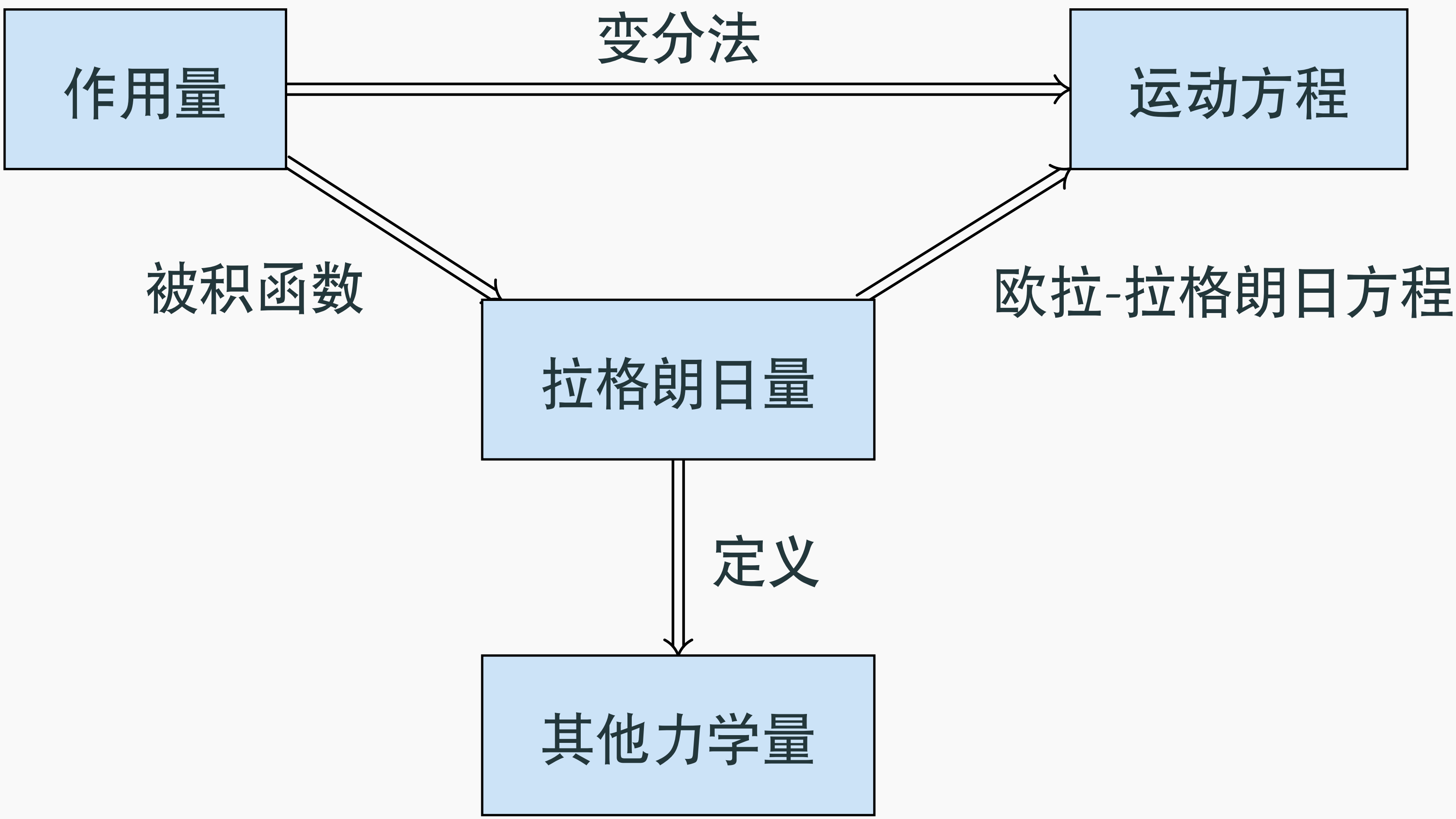
第五讲

陆晓铭

2023-2024-2

lxm@hdu.edu.cn

重点回顾



对称性与守恒律

运动积分

在力学系统运动过程中，描述其状态的 $2s$ 个变量 q_j 和 $\dot{q}_j$ 随时间变化。但是存在关于这些变量的某些函数（例如某些系统的能量和动量），其值在运动过程中保持恒定，且仅由初始条件决定，这样的函数称为运动积分（或运动常数）。

并不是所有的运动积分在力学中有相同的重要性，其中一些运动积分源自时间和空间的均匀性和各向同性这样的基本性质，这种运动积分的恒定不变性才具有深刻的意义。

——朗道、栗弗席兹《力学》

时间平移不变性与能量守恒

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$E \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L, \quad p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

- 拉格朗日量不显含时间 $L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$
- 推导

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t}\dot{q}_j + p_j \frac{\mathrm{d}\dot{q}_j}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = 0$$

- 利用了欧拉–拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

时间平移不变性与能量守恒

在笛卡尔坐标下 E 的具体表达式:

$$L = \frac{m_j \boldsymbol{v_j}^2}{2} - V(\boldsymbol{x})$$

$$\Rightarrow E = \boldsymbol{p}_j \boldsymbol{v}_j - \frac{m_j \boldsymbol{v_j}^2}{2} + V(\boldsymbol{x})$$

$$= \frac{m_j \boldsymbol{v_j}^2}{2} + V(\boldsymbol{x})$$

广义坐标

$$L = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - V(\boldsymbol{q})$$

$$T = \eta(\boldsymbol{q})_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$p_i \dot{q}_i = 2\eta(\boldsymbol{q})_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T$$

$$E = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + V(\boldsymbol{q})$$

质点组能量等于动能加势能.

空间平移不变性与动量守恒

- 在笛卡尔坐标下，整体空间的无限小平移: $\boldsymbol{x}_j \to \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{\varepsilon} \ \forall\ j,\ \ \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_j} \right) = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\boldsymbol{P} \equiv \sum_j \boldsymbol{p}_j, \quad \boldsymbol{p}_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_j}$$

- 利用了笛卡尔坐标下的欧拉–拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_j} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_j}$$

动量守恒与循环坐标的关系

- 在广义坐标下，每单个坐标平移不变则对应着单个广义动量守恒。（循环坐标）

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

- 利用了欧拉–拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

空间转动与角动量守恒

绕通过原点的一个轴转动。引入无穷小转动矢量$\delta\boldsymbol{\varphi}$，其方向为转动轴方向，大小为转过的角度 $\delta\varphi$。

无穷小转动下，位置矢量的变化表达式比较简单。

$$\boldsymbol{x}_j \to \boldsymbol{x}_j + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{x}_j \ \forall\, j$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \boldsymbol{L} \equiv \sum_j \boldsymbol{x}_j \times \boldsymbol{p}_j$$

空间转动与角动量守恒

$$
\begin{aligned}
0 = \delta L &= \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_j} \cdot \delta \boldsymbol{x}_j + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j} \cdot \delta \boldsymbol{v}_j \right] \\
&= \sum_j \left[\dot{\boldsymbol{p}}_j \cdot \left(\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{x}_j \right) + \boldsymbol{p}_j \cdot \left(\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v}_j \right) \right] \\
&= \sum_j \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \left(\boldsymbol{x}_j \times \dot{\boldsymbol{p}}_j + \boldsymbol{v}_j \times \boldsymbol{p}_j \right) \\
&= \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_j \boldsymbol{x}_j \times \boldsymbol{p}_j \right) \\
&= \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

有没有一种统一的方法来处理守恒律?

诺特定理：每个连续对称性都有着相应的守恒定律。

单参数的映射族

$$q_i(t) \to Q_i(s,t) \text{ 要求 } Q_i(0,t) = q_i(t).$$

如果拉格朗日量在该变换下保持不变，则称该变换为拉格朗日量的连续对称性.

- 时间平移：$t \to t + s$
- 空间平移：$\boldsymbol{x}_j \to \boldsymbol{x}_j + s\hat{\boldsymbol{n}}$
- 空间转动：$\boldsymbol{x}_j \to \boldsymbol{x}_j + \delta s\, \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{x}_j$

Noether 定理

参考 David Tong 讲义：https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics.html

- 对 L 做变量替换:

$$q_i(t) \to Q_i(s,t), \quad t \to \tau(s,t),$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial s}$$

- 实际上只用考虑在 $s=0$ 附近的无限小变化即可，“牵一发而动全身”。

$$0 = \left.\frac{\partial L}{\partial s}\right|_{s=0}$$

利用 $Q_i(s=0,t) = q_i$ 和 $\tau(s=0,t) = t$，可得

Noether 定理

$$0 = \left.\frac{\partial L}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial s}}_{\text{广义坐标部分}} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial s}}_{\text{广义速度部分}} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial s}}_{\text{显式时间依赖部分}}\right)\right|_{s=0}$$

$$= \underbrace{\left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial s}\right|_{s=0}}_{A} + \underbrace{\left.\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial s}\right|_{s=0}}_{B}$$

利用欧拉-拉格朗日方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$，可得

$$A = \left.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right|_{s=0}}_{\text{守恒量 1}}\right)$$

Noether 定理

B 和拉格朗日量的显式时间依赖相关。和总能量守恒一样的推导。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_j\dot{q}_j - L) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

显而易见,

$$B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_j\dot{q}_j - L)\frac{\partial \tau}{\partial s}\bigg|_{s=0}$$

对于时间平移变换 $\tau = t + s$.

该变化下的不变性，对应能量 $E \equiv p_j\dot{q}_j - L$ 守恒.

> Yesterday I received from Miss Noether a very interesting paper on invariants. I'm impressed that such things can be understood in such a general way. The old guard at Göttingen should take some lessons from Miss Noether! She seems to know her stuff.
>
> — From Einstein to Hilbert

> 昨天我收到了诺特小姐一篇有关不变量的非常有趣的论文。这种问题原来可以有如此普遍的表述，我觉得非常厉害。哥廷根那些故步自封的人要向诺特小姐学习学习呀！她很在行啊。
>
> — 爱因斯坦给希尔伯特的信

力学相似性：尺度变化

拉格朗日量乘以任何常数不会改变运动方程。在一些情况下，可以利用这一点，无需求解有关运动方程就可以得到有关运动性质的结论。

- 空间和时间做不同的尺度变换:

$$\boldsymbol{x}_i \to \lambda_1 \boldsymbol{x}_i, \quad t \to \lambda_2 t \quad \Rightarrow v_i \to \frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_i \quad \Rightarrow T \to \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 T$$

- 假设势能是坐标的齐次函数，满足

$$U(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \lambda_1 \boldsymbol{x}_2, ..., \lambda_1 \boldsymbol{x}_N) = \lambda_1^k U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N)$$

可以选择λ_2，让动能和势能有同样的标度因子，即:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 = \lambda_1^k \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_1^{1-\frac{k}{2}}.$$

力学相似性：尺度变化

两个相似轨道上的特征时间和特征尺度满足

$$\lambda_2 = \lambda_1^{1-\frac{k}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}$$

著名例子：开普勒第三定律：各个行星绕太阳公转周期的平方及其椭圆轨道的半长轴的立方成正比。

对应 $k = -1$.

位力定理

位力定理（英语：Virial theorem，又称维里定理、均功定理）是力学中描述稳定的多自由度孤立体系的总动能和总势能时间平均之间的数学关系。

如果力学体系在有限空间中运动，势能是坐标的齐次函数，则动能和势能的时间平均值之间存在非常简单的关系。

函数 $f(t)$ 的时间平均：$\overline{f} \equiv \lim_{\{\tau\to\infty\}} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t$

数学工具：如果函数 $f(t)$ 是某个有界函数 $F(t)$ 对时间的全导数，则 $f(t)$ 的时间平均等于零，因为

$$\overline{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\frac{F(\tau)-F(0)}{\tau} = 0.$$

位力定理

$$2T = \sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{x}_i - \sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \boldsymbol{x}_i$$

- 对于经典系统：$L = T - U$ 来说，$\dot{\boldsymbol{p}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}$，于是

$$2T = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{x}_i}_{\text{假设有界}} + \sum_i \boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}$$

$$\Longrightarrow 2\overline{T} = \sum_i \overline{\boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}}$$

- 如果 U 是 $\boldsymbol{x}_i$ 的 k 次齐次函数，则有

$$\boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i} = kU$$

$$2\overline{T} = \sum_i \overline{\boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}} = k\overline{U}.$$

第二章作业第 9，10 题

（下下周交）