理论力学

第二讲

陆晓铭

2023-2024-2

lxm@hdu.edu.cn

基础知识补充

基础知识

位形空间（configuration space）

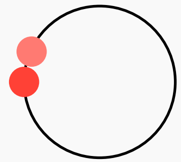
变分（varation）

动力学系统的状态（state）

位形空间

- 质点：在描述其运动时可以忽略大小的物体. 具有质量属性 m_i
- 质点的位置: 由矢量 x_i 描述，其分量可以用笛卡尔坐标 (x, y, z) 表示.
- 质点组：由 N 个质点组成，描述其位置需要 $3N$ 个坐标，称为位形.
- 位形空间: 系统可能的位形所构成的空间.
- 系统的自由度：约束条件会减少系统的自由度。因此位形空间往往是在 $3N$ 欧式空间中的一个低维流形, 其维度等于实际的自由度 s。例子：单摆。
- 可以用 s 个广义坐标来描述位形空间中的“点”，这也包括坐标变换，如球坐标、柱坐标等。

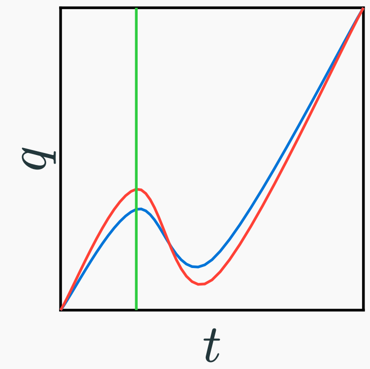
变分介绍



函数： $t \mapsto q(t)$， 从实数到实数的映射.

泛函： $q \mapsto f[g]$， "函数的函数"， 从函数到实数的映射.

- 函数在定点的值： $q \mapsto q(t)$.
- 函数的积分： $q \mapsto \int_{t_1}^{t_2} q(t)\, \mathrm{d}t$.



在分析力学中， 处理如下形式的泛函

$$f(q,t) = f(q(t),t)$$

例如， 位置矢量 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q(t),t)$

- （等时）变分： 在每一个给定时刻， 考虑 $q(t)$的微小变化， $q(t) \mapsto q(t) + \delta q(t)$
- 对应的位置矢量发生的变化为

$$\boldsymbol{x}(t) \mapsto \boldsymbol{x}(t) + \delta \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_j}\, \delta q_j(t)$$

变分介绍

对于 $f(q(t),t)$ 形式函数的几种求导符号:

- $\frac{\partial f}{\partial q}$: 在每个 t 上，将 q 当作普通自变量来求偏导
- $\frac{\partial f}{\partial t}$: 把 q 当作独立于 t 的自变量，对 t 求偏导
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$: 在两个时刻 f 的变化，需要考虑 q 随时间变化

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t} \Leftrightarrow \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$$

- 等时变分:

$$\delta f(q,t) \equiv f(q+\delta q,t) - f(q,t) = \frac{\partial f(q,t)}{\partial q}\delta q$$

例如虚位移: $\delta \boldsymbol{x}_i(q,t) = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

变分介绍

- 全微分，考虑一个函数全部参数的变化（包括时间的变化）
- 重要性质: $\mathrm{d}(\delta f) = \delta(\mathrm{d} f)$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\delta f) &= \frac{\partial\,\delta f}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j + \frac{\partial\,\delta f}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k}\,\delta q_k\,\mathrm{d}q_j + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_k}\,\delta q_k\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right)\delta q_k \\ &= \delta(\mathrm{d} f) \end{aligned}$$

- 例如: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta q_j = \delta \dot{q}_j$. 表明 $\dot{q}(t)$ 的变分依赖于 $q(t)$ 和 $q(t+\mathrm{d}t)$

动力学系统的状态

- 系统的状态随时间变化
- 广义坐标本身还不足以描述系统的“力学状态”
- 广义坐标和广义速度一起可以预测下一时刻系统的广义坐标.
- 力学状态可以由广义坐标和广义速度来描述。
- 动能、动量等力学量的值由力学状态决定，因此是广义坐标和广义速度的函数
- 运动方程需要描述力学状态的时间演化
- 牛顿力学给“力”，和加速度联系，加速度决定下一时刻的速度，速度决定下一时刻的坐标
- 问题：力是否是第一性的?

拉格朗日力学

- 最小作用量原理$\delta S = 0$可以导出运动方程
- 作用量是拉格朗日量的积分
- 运动学方程可以由非常简洁的拉格朗日量导出
- 例如 Maxwell 方程组可以由以下拉格朗日量导出

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

“It is a remarkable (and computationsall very valuable) that this law can be obtained from a *single function*.” — R. Penrose, “The Road to Reality”

拉格朗日力学

- 时间t; 状态变量 $q_i, \dot{q}_i$
- 系统的动力学由拉格朗日量决定，它是广义坐标、广义速度和时间的函数.
- 作用量（action）是拉氏量对时间的定积分

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, \mathrm{d}t\,.$$

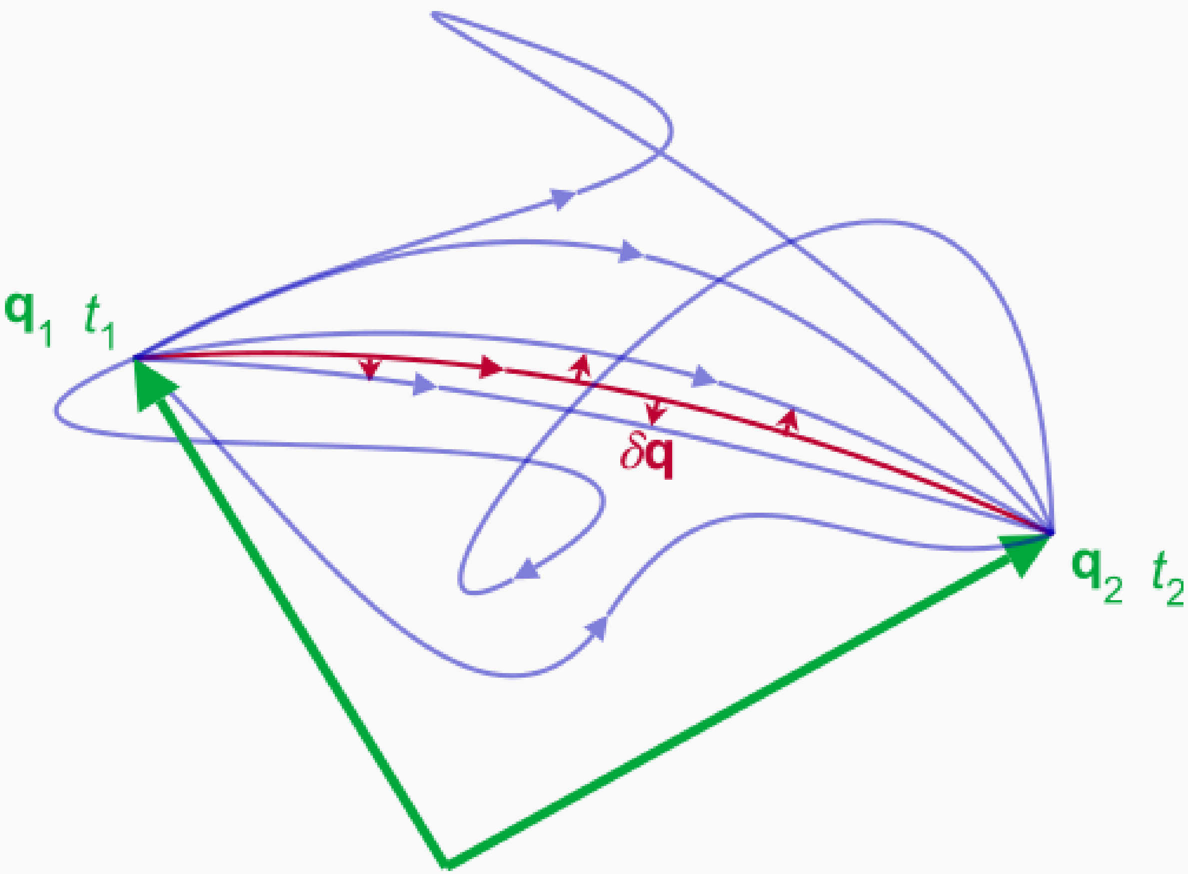
最小作用量原理导出运动方程:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall \quad i.$$

例子：牛顿力学有势能下的粒子：$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$, 可得

$$m\ddot{q} = -\frac{\mathrm{d}V(q)}{\mathrm{d}q} = F$$

拉格朗日力学



欧拉-拉格朗日方程的推导

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\,\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\delta \dot{q}_j \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\,\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta q_j \right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\delta q_j \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

欧拉-拉格朗日方程的推导

$$\delta S[q]=0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=0, \forall j$$

- 定义广义动量和广义力:

$$p_j \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad F_j=\frac{\partial L}{\partial q_j}$$

- 可得"牛顿力学"形式

$$F_j=\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t}$$

- $L=T-V=\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^2-V_i(x)\right)$，那么有$m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i=-\boldsymbol{\nabla}V_i$.

拉格朗日量的不唯一性

- 决定运动方程的是 $\delta S[q]$ 而不是 $S[q]$ 本身
- 因此，$S[q]$ 可以加上任何和 q 无关的项
- 对应地，L 可以加上任何函数的时间导数，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(L+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}L\,\mathrm{d}t+f\big|_{t=t_2}-f\big|_{t=t_1}$$

$$\delta\left(f\big|_{t=t_2}\right)=\delta\left(f\big|_{t=t_2}\right)=0$$

分析力学的好处

- 在经典力学问题中和牛顿力学等价
- 对经典力学问题的处理更加简洁优美
- 更好地联系对称性和守恒律
- 基本原理具有更广泛的适用范围，能应用到经典力学之外的物理领域

拉格朗日力学的程序清单

如何把大象放进冰箱?

拉格朗日力学的程序清单

如何把大象放进冰箱?

1. 打开冰箱大门
2. 把大象放进冰箱

拉格朗日力学的程序清单

如何把大象放进冰箱?

1. 打开冰箱大门
2. 把大象放进冰箱

如何写出系统的运动方程?

拉格朗日力学的程序清单

如何把大象放进冰箱?

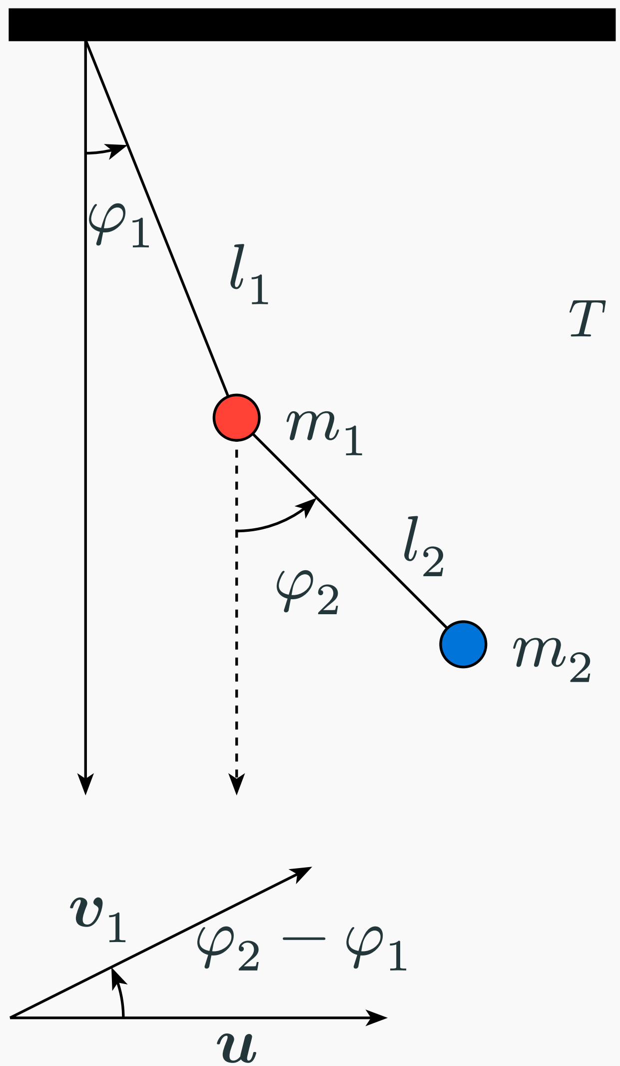
1. 打开冰箱大门
2. 把大象放进冰箱

如何写出系统的运动方程?

分两步

1. 选择好广义坐标，写出拉格朗日量
2. 从拉格朗日量出发得到欧拉-拉格朗日方程

小试身手



$$L\left(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2\right) = T - V$$

$\boldsymbol{u}$ 是 m_2 相对于 m_1 的速度，$|\boldsymbol{u}| = l_2\ |\dot{\varphi}_2|$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_1)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \end{aligned}$$

$$V = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)$$

代入欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

可得运动方程。

拉格朗日量的构造

拉格朗日量的构造

如何从第一性原理来构造拉格朗日量?

从相对性原理和时空对称性，针对一个自由粒子来开始构造。

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$$

- 时空均匀性，L 不依赖于 $\boldsymbol{x}$ 和 t.
- 空间各向同性，L 不依赖于 $\boldsymbol{v}$ 的方向.
- 因此，可写为 $L(\boldsymbol{v}) = \tilde{L}(v^2)$

伽利略相对性原理

- 伽利略相对性原理，在另一个惯性参考系中，$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{V}t$, $t' = t$, 运动方程需要一样
- 根据最小作用量原理，不同惯性参考系下的拉格朗日量只能相差一项时空函数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ 对时间的全导数.
- 为寻线索，不妨设 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\varepsilon}$ 为无穷小量

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{v}'^2 \approx \boldsymbol{v}^2 + 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

可以看出，L 只能正比于 $\boldsymbol{v}^2$, 记 $L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$.

- 对于任意相对速度 $\boldsymbol{V}$进行检查

$$L(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}) = \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}^2 + 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^2\right) = L(\boldsymbol{v}) + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^2 t)}_{f(\boldsymbol{x},t)}.$$

拉格朗日量的可加性

两个独立的子系统:

$$L = L_A + L_B$$

每一个独立部分的运动方程不可能包含另一部分相关的物理量。

每个拉格朗日量乘以常数，不影响运动方程。

对于自由粒子来说，可加性中相对的常数可归因于质量。

坐标系的变换

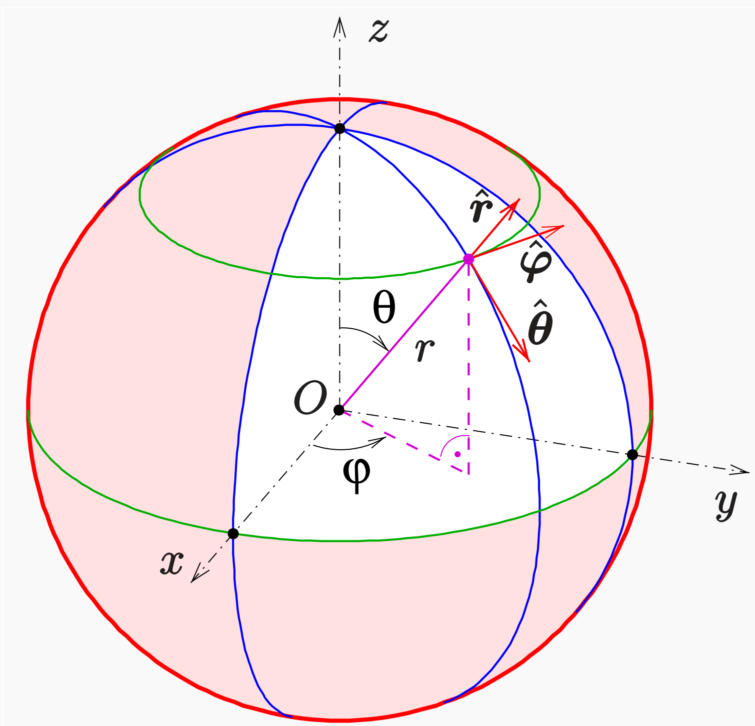
我们往往从欧式空间的拉格朗日量出发，然后将其转用广义坐标和广义速度来描述。以单质点为例。

- 位形可直接替换: $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$
- 速度需推导: $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_j} \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}$
- 动能项只依赖于 $\boldsymbol{v}^2$, 可以等价地考虑 $(\mathrm{d}l)^2 = \boldsymbol{v}^2 (\mathrm{d}t)^2$ 的坐标变换，这是纯几何的问题.

$$(\mathrm{d}l)^2 = \sum_{jk} g_{jk}\, \mathrm{d}q_j\, \mathrm{d}q_k \quad \text{with} \quad g_{jk} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_k}$$

球坐标系

- 例如球坐标 $x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$



局域正交标架，切丛

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}r\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$(\mathrm{d}l)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2.$$

由此可得球坐标表示下质点的动能表达式:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right).$$

第二章作业第 1，2 题

（第 3 周交）