理论力学

第四讲

陆晓铭

2023-2024-2

lxm@hdu.edu.cn

闵可夫斯基空间 4 矢量介绍

《三个火枪手》， 实际是四个

- 坐标逆变 4 矢量
- 坐标协变 4 矢量
- 固有时
- 4 动量及其不变量

四维坐标（Four-position）

- 定义（逆变）4 矢量

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

- 定义协变 4 矢量

$$x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$$

- 同一个 4 矢量的逆变版本和协变版本的内积（“长度”）:

$$\begin{aligned} x_\mu x^\mu &= (ct, -x, -y, -z) \cdot (ct, x, y, z) \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

- 微分:

$$\mathrm{d}x^\mu = (c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z), \quad \mathrm{d}x_\mu = (c\,\mathrm{d}t, -\mathrm{d}x, -\mathrm{d}y, -\mathrm{d}z)$$

- 事件间隔:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$$

逆变与协变 4 矢量的好处

- 在洛伦兹变换下，4 矢量发生变化，

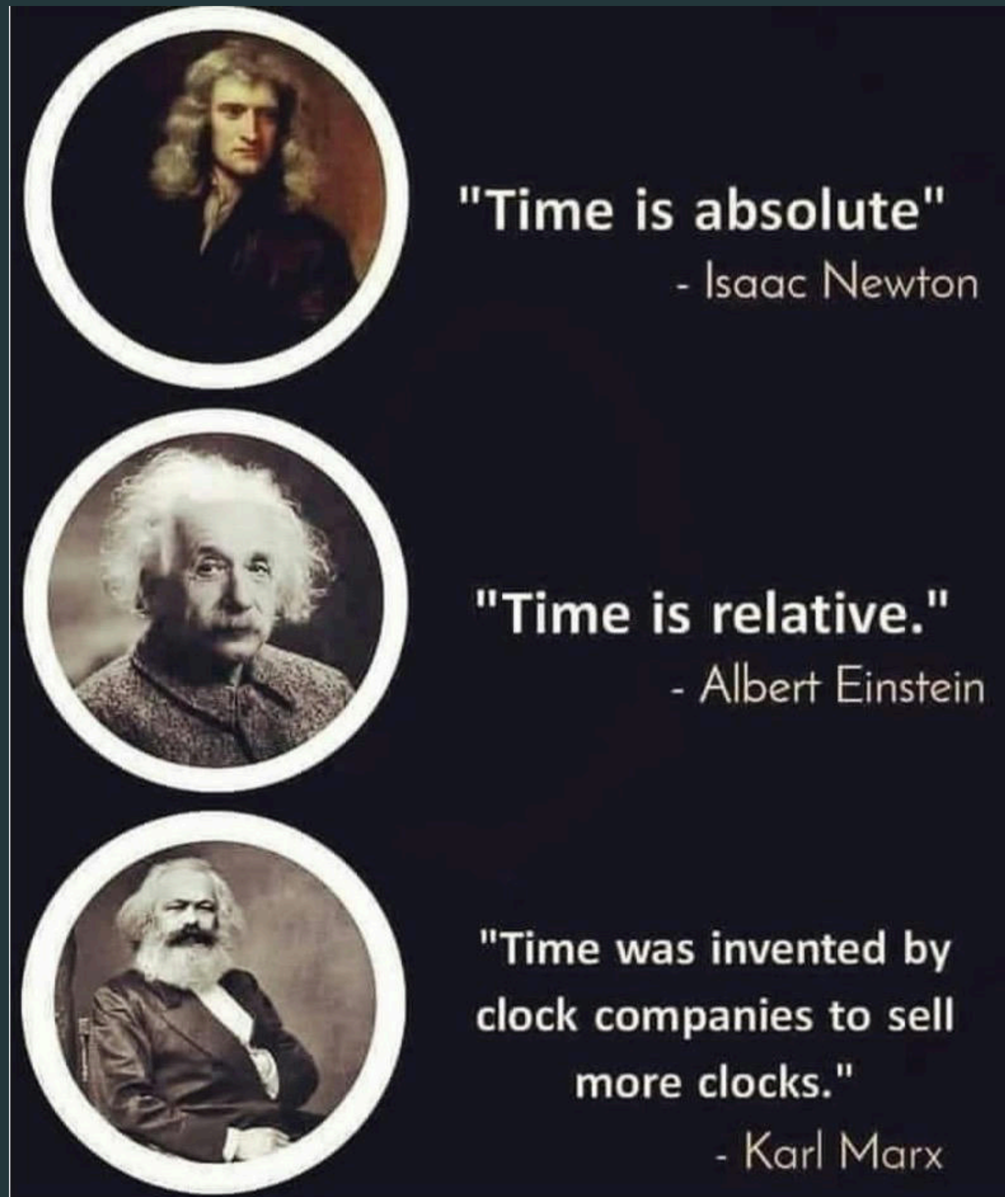
$$\mathrm{d}x^{\mu} \to \mathrm{d}x'^{\mu}, \quad \mathrm{d}x_{\mu} \to \mathrm{d}x'_{\mu}$$

- 众所周知，逆变 4 矢量和协变 4 矢量的内积在洛伦兹变换下不变.

$$\mathrm{d}x_{\mu}\,\mathrm{d}x^{\mu} = \mathrm{d}x'_{\mu}\,\mathrm{d}x'^{\mu} \Leftrightarrow \mathrm{d}s = \mathrm{d}s'$$

- 常规速度定义： $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$，在坐标系变换时分子分母都要变，因此速度的变换关系比较复杂。

思考：如果速度定义式分母上的 “$\mathrm{d}t$” 是洛伦兹不变量，那么速度的变换规律和时空坐标一样，都是洛伦兹变换，容易分析。


"Time is absolute"
- Isaac Newton
"Time is relative."
- Albert Einstein
"Time was invented by clock companies to sell more clocks."
- Karl Marx

四维速度（Four-velocity）

- 线索：我们已经有了一个洛伦兹不变量：$\mathrm{d}s$，长度量纲

固有时/原时 (proper time):

$$\mathrm{d}\tau \equiv \frac{\mathrm{d}s}{c}$$

- $\mathrm{d}\tau$ 是洛伦兹标量 (Lorentz scalar)
- 物理意义：$\mathrm{d}\tau$ 是静止参考系内的时间变化。为什么?

四维速度 (four-velocity):

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = c\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$$

四维动量 (four-momentum)

四维动量 (four-momentum):

$$p^\mu \equiv m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = mc\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$$

$p_\mu p^\mu$ 为洛伦兹不变量:

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = m^2c^2.$$

洛伦兹协变性
(Lorentz covariance)

洛伦兹标量 (Lorentz scalar)

从四维动量中，我们可以体会如何构造洛伦兹不变量的方法。

4-矢量不是一般的四维矢量，而是满足洛伦兹变换关系的矢量。

- 例如: $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}$ 就不是 4-矢量，因为它在坐标变换（惯性参考系变换）下，

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \mapsto \frac{\mathrm{d}x'^\mu}{\mathrm{d}t'}$$ 不是洛伦兹变换。

任何逆变矢量和协变矢量的内积是洛伦兹变换下的不变量——洛伦兹标量.

- 如: $p_\mu p^\mu$ 和 $x_\mu p^\mu$ 都是洛伦兹标量。

更一般的描述：从度规出发

度规不变 ⇒ 坐标变换的形式 ⇒ 具有协变性质的矢量 ⇒ 具有协变性质的的运动方程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \\
&= (c\,\mathrm{d}t, -\mathrm{d}x, -\mathrm{d}y, -\mathrm{d}z)\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \\
&= (c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{g}\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^\mu \underbrace{g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\nu}_{\mathrm{d}x_\mu} \\
&= \mathrm{d}x^\mu \, \mathrm{d}x_\mu
\end{aligned}
$$

度规张量起到了将“协变 4-矢量”变成“逆变 4-矢量”的作用：$\mathrm{d}x_\mu = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\nu$

爱因斯坦能量-动量关系

爱因斯坦能量-动量关系

- 根据四维动量来定义相对论性能量 E 和相对论性动量 $\boldsymbol{p}$

$$p^\mu = (E/c, \boldsymbol{p})$$

- 爱因斯坦能量-动量关系:

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2 \Longleftrightarrow E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4$$

- 在静止参考系中，$\boldsymbol{p} = 0$, 因此有众所周知的质能关系:

$$E = mc^2$$

相对论性动量和传统动量的关系

相对论性动量（四维动量的后三个分量）为相对论性动量:

$$\boldsymbol{p} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau}$$

- 需要知道 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\tau$ (设静止参考系为 $'$ 系) 之间的变换关系

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2 \Longleftrightarrow c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \gamma(v)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \quad \text{with} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

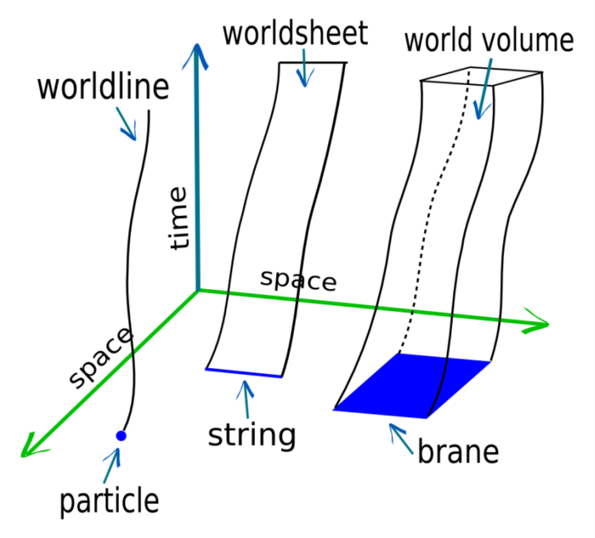
四维动量中的三分量和三维动量之间的关系: $\boxed{\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}}$ 是否合理? 和广义动量的联系?

相对论性自由粒子的
拉格朗日力学

相对论性自由粒子的拉格朗日力学

作用量: 正比于自由粒子的世界线长度

$$S = -mc \int_a^b \mathrm{d}s$$



两种得到运动方程的方法:

- 写出拉格朗日量，套用欧拉-拉格朗日方程
- 直接从最小作用量原理出发，用变分法导出运动方程

方法 1:利用拉格朗日量

$$S = -mc\int_a^b \mathrm{d}s$$

因为 $\int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2} = c\int_a^b \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}\,\mathrm{d}t$ 所以,

拉格朗日量: $L = -mc^2\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}.$

广义动量正好是相对论性动量: $\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \gamma m\boldsymbol{v}.$

欧拉-拉格朗日方程: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0$

相对论性自由粒子的最小作用量原理变分法

- 另一种导出运动方程的方法：直接变分而不套用欧拉-拉格朗日方程。
- 细节：对 $\mathrm{d}s$ 而不是 $\mathrm{d}t$ 做作用量积分

u v

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= -mc\int_a^b \delta\sqrt{g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu} \\
&= -mc\int_a^b \frac{\mathrm{d}x_\mu\,\delta\,\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = -mc\int_a^b \frac{\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}\,\delta x^\mu}{\mathrm{d}s} \\
&= -mc\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\,\delta x^\mu\Big|_a^b + mc\int_a^b \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2}\,\delta x^\mu\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$\int v\,du$

x_μ

自由粒子的运动方程

$$
\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} = 0 \text{ for } \mu = 0, 1, 2, 3
$$

粒子与外场的相互作用

粒子与标量场的相互作用

- 粒子和外场都需要满足洛伦兹协变性
- 场本身动力学的处理涉及到“场论”，因此只考虑相互作用项。
- 洛伦兹标量场：$\Phi(x)$

$$S = -mc \int e^{\Phi} \, \mathrm{d}s$$

- 和自由粒子的情况类似，可以导出拉格朗日量，套用欧拉-拉格朗日方程。
- 或者利用最小作用量原理直接使用变分法导出运动方程。

粒子与 4-矢量场的相互作用

- 为了运动方程具有洛伦兹协变性，需要考虑的是 4-矢量场
- 典型的例子是带电粒子在电磁场中的运动，受洛伦兹力 (高斯单位制)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- 电磁四维势：$A^\mu = (\Phi, \boldsymbol{A})$，$\Phi$ 和 $\boldsymbol{A}$ 都依赖于时空坐标
- 协变版本：$A_\mu = (\Phi, -\boldsymbol{A})$

$$S = -mc\int \mathrm{d}s - \frac{e}{c}\int A_\mu(x)\,\mathrm{d}x^\mu$$

带电粒子与电磁场相互作用的拉格朗日量

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &= -\frac{e}{c}\int A_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \\ &= -\frac{e}{c}\int A_\mu \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{e}{c}\int [c\Phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}]\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$L_{\text{int}} = -e\Phi + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$L_{\text{free}} = -mc^2\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}$$

粒子在电磁场中的广义动量 (正则动量，将会在量子力学中出现)

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \gamma m\boldsymbol{v} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}.$$

带电粒子在电磁场中的运动方程

欧拉-拉格朗日方程: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} + \frac{e}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\nabla}\left(-e\Phi + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right) = -e\boldsymbol{\nabla}\Phi + \frac{e}{c}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

- 需要利用电磁学方程、梯度和旋度的运算。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -e\boldsymbol{\nabla}\Phi + \frac{e}{c}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}\right)$$

$$= e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

最小作用量原理及变分法

$$
\begin{aligned}
\delta S_{\text{int}} &= -\frac{e}{c}\int \delta\left(A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu\right) = -\frac{e}{c}\int \left[\left(\delta A_\mu\right)\mathrm{d}x^\mu + A_\mu\,\delta\left(\mathrm{d}x^\mu\right)\right] \\
&= -\frac{e}{c}\int \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\,\delta x^\nu\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} + \underbrace{A_\mu\frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}s}}_{\text{分部积分去掉边界项}}\right]\mathrm{d}s \\
&= -\frac{e}{c}\int \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\,\delta x^\nu\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}s}\,\delta x^\mu\right]\mathrm{d}s \\
&= -\frac{e}{c}\int \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\delta x^\nu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\,\delta x^\mu\right]\mathrm{d}s \\
&= -\frac{e}{c}\int \underbrace{\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)}_{F_{\mu\nu}}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\,\delta x^\mu\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

带电粒子与电磁场相互作用的拉格朗日量

$$\delta S_{\text{free}} = mc \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} \, \delta x^\mu \, \mathrm{d}s$$

$$\delta S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int F_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} \, \delta x^\mu \, \mathrm{d}s$$

$$\delta S = 0 \Longleftrightarrow mc \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} - \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = 0$$

非相对论极限

非相对论极限

- 低速:

$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2} \ll 1$$

- 自由项:

$$L_{\text{free}} = -mc^2\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2} \approx \underbrace{-mc^2}_{\text{常数项可忽略}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2}_{\text{非相对论性动能项}}$$

重点回顾

根据洛伦兹协变性写出相对论性的作用量后，有两种方法可得到运动方程:

- 写出拉格朗日量，套用欧拉-拉格朗日方程
- 直接应用最小作用量原理，用变分法导出运动方程

第二章作业第 5，6，7 题

（第 5 周交）