理论力学

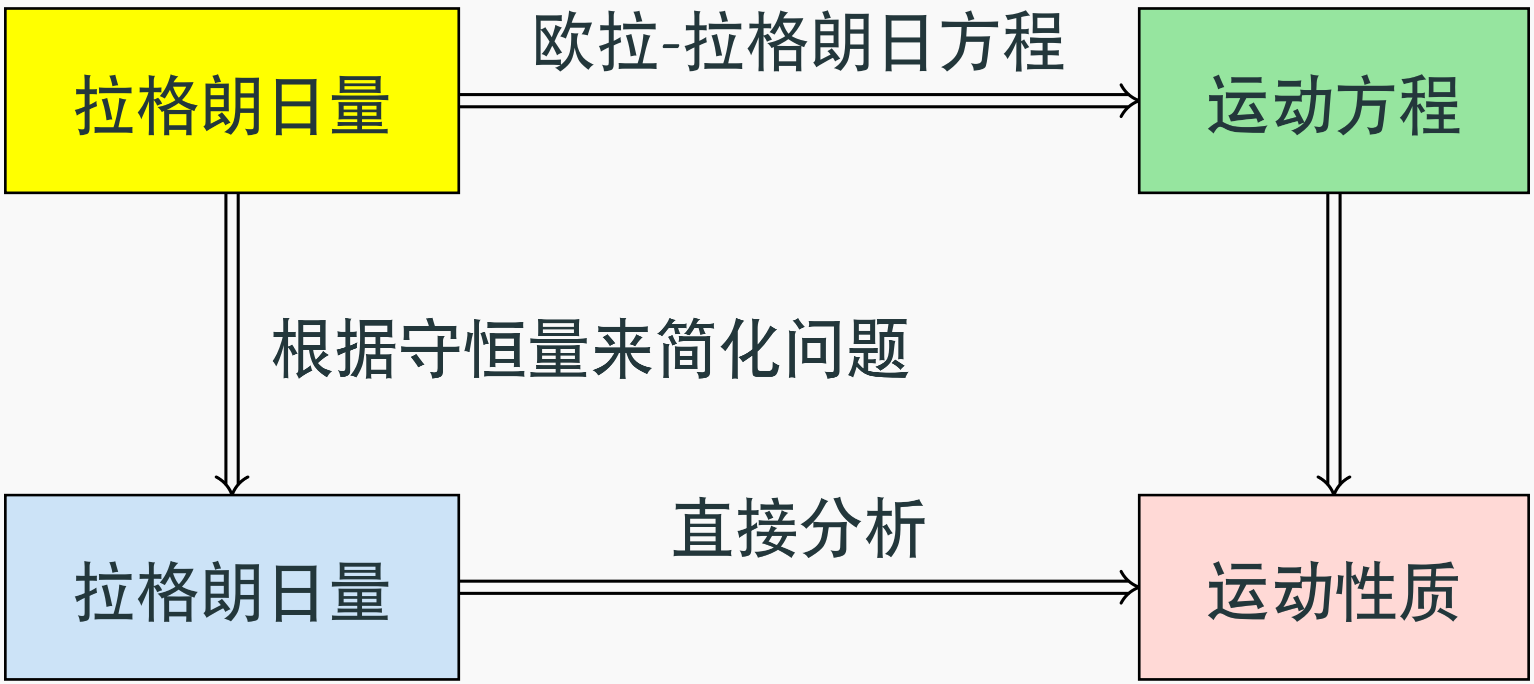
第 6 讲

陆晓铭

2023-2024-2

lxm@hdu.edu.cn

分析力学主要思路



有心力场

两体问题

两体问题典型：行星运动。

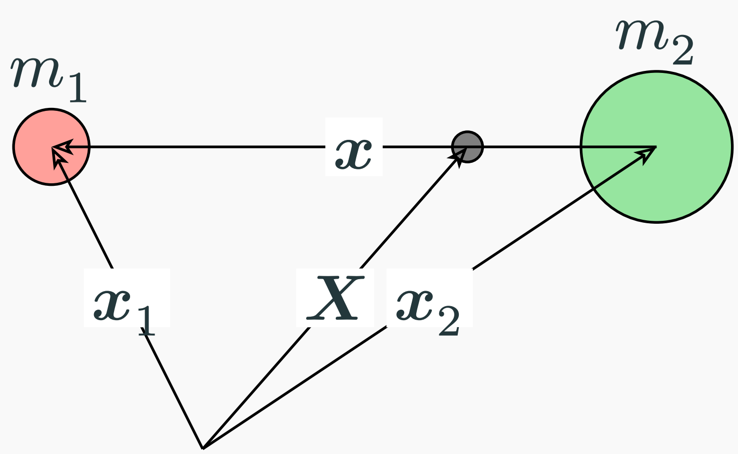
在笛卡尔坐标下拉格朗日量为

$$L = \underbrace{\frac{m_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\boldsymbol{x}}_2^2}{2}}_{T} - V(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|)$$

- 明确思路
  - 观测势能项，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ 应该作为一个广义坐标。
  - 另一个广义坐标 $\boldsymbol{X}$ 如何选择?
  - 不想让 T 依赖广义坐标，所以线性变换
  - 不想出现不同广义速度的交叉项，确定线性变换的系数

两体问题

- 重新选择广义坐标，引入相对位矢和质心位矢



$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{X} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1 + m_2}.$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{X} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{X} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{x}.$$

$$T = \frac{(m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{X}}^2}{2} + \frac{m\dot{\boldsymbol{x}}^2}{2}, \quad \text{约化质量 } m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

两体问题

$$L = \underbrace{\frac{(m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{X}}^2}{2}} + \underbrace{\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - V(r)} \quad \text{其中 } r = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$$

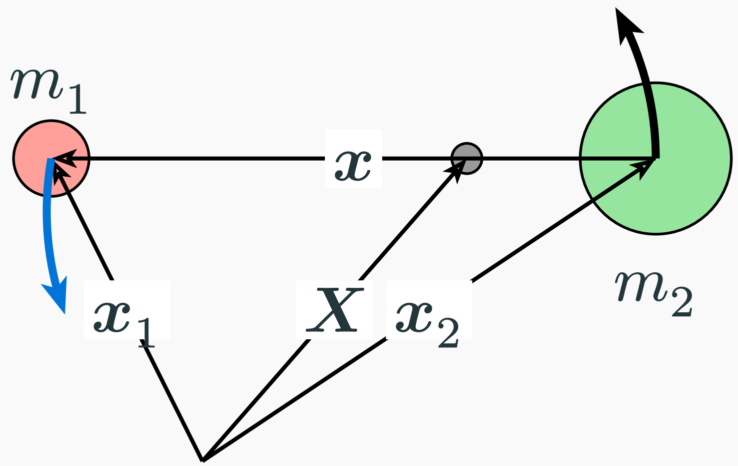
- $\boldsymbol{R}$ 是循环坐标，回忆一下什么是循环坐标。
- $\boldsymbol{R}$ 对应的广义动量为笛卡尔坐标下系统的总动量

$$\boldsymbol{P} = (m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{X}} = m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2$$

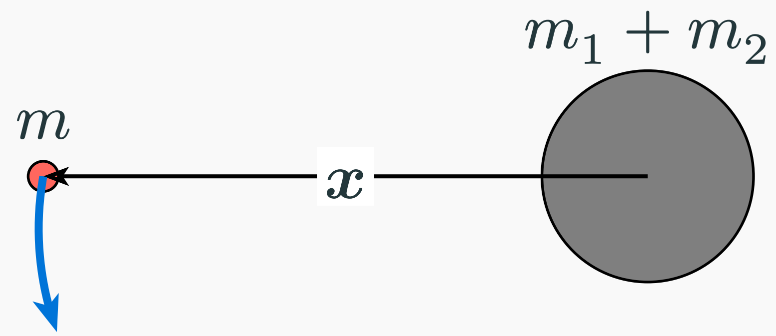
- 这类两体运动可以分解为质心的匀速直线运动和一个约化质量的等效质点在中心势下相对质心的运动
- 相对质心静止的惯性参考系中，本质上变为中心势下的一体问题:

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{x}}^2}{2} - V(r)$$

两体问题变一体问题



$$L = \frac{m_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\boldsymbol{x}}_2^2}{2} - V(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|)$$



$$L = \frac{m \dot{\boldsymbol{x}}^2}{2} - V(r)$$

中心力场

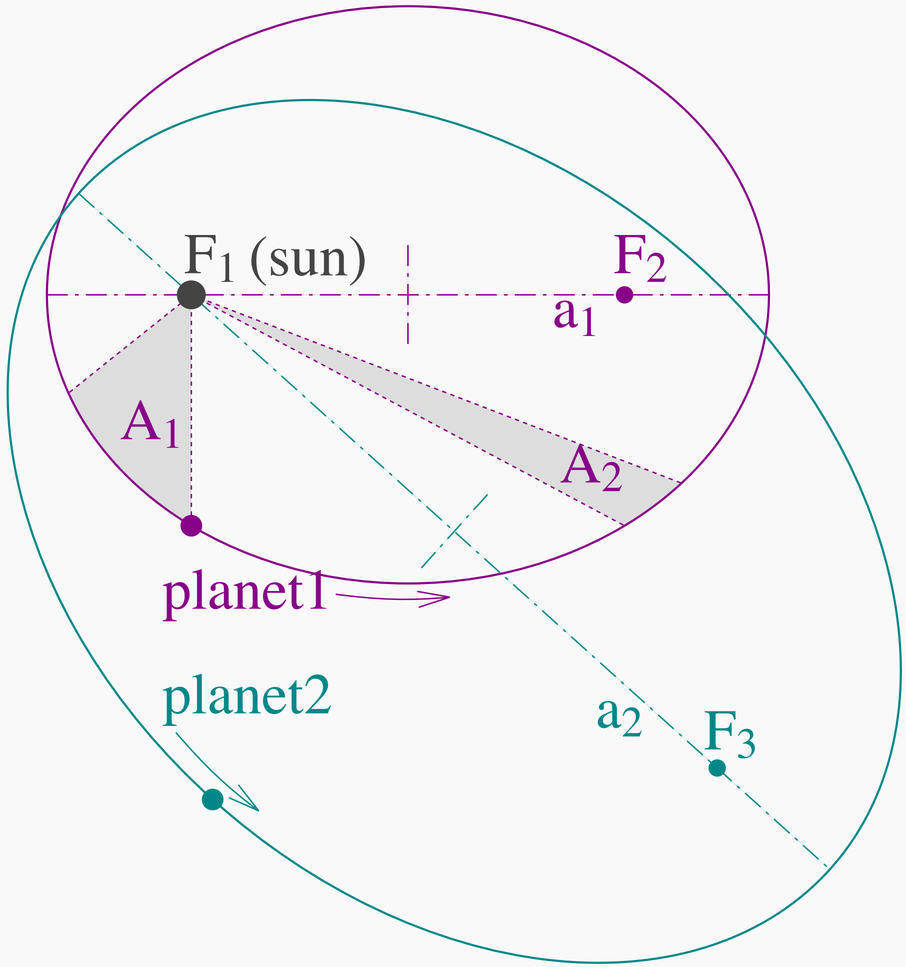
- 角动量 J 守恒，可以将角动量方向选为 z 方向，质点的运动轨迹处在 x-y 平面。
- 方便使用柱坐标。

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi})=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-V(r)$$

- φ 是循环坐标，因此

$$J\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}=\text{常数}$$

- 这就是开普勒第二定律，和有心力场 $V(r)$ 的具体形式无关。



$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\varphi$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{J}{2m}$$

中心力场

- 系统的总能量 E 和角动量 J 守恒，可以利用它们来描述质点的运动轨道。

$$
\begin{aligned}
& E=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+V(r), \quad J=mr^2\dot{\varphi} \\
\Longrightarrow & E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{J^2}{2mr^2}+V(r) \\
\Longrightarrow & \dot{r}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(r)]-\frac{J^2}{m^2r^2}}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V_{\text{eff}}(r)]}
\end{aligned}
$$

其中 $V_{\text{eff}}(r)=V(r)+\frac{J^2}{2mr^2}$ 的第二项是“离心势能”。

利用守恒量后，广义坐标的微分方程组为

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{mr^2},$$

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{\text{eff}}(r)]},$$

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{J^2}{2mr^2}.$$

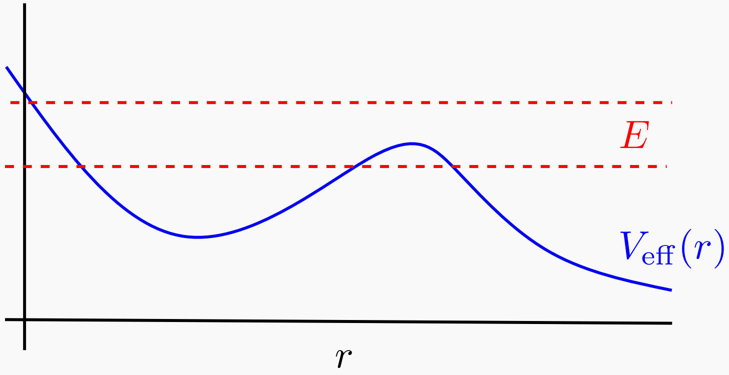
两式相除消掉时间，可得决定运动轨道的几何方程:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \pm\frac{J/r^2}{\sqrt{2m[E - V_{\text{eff}}(r)]}}.$$

一维运动

中心力场中质点的径向运动是一维运动问题，其运动方程为

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{\text{eff}}(r)]}.$$

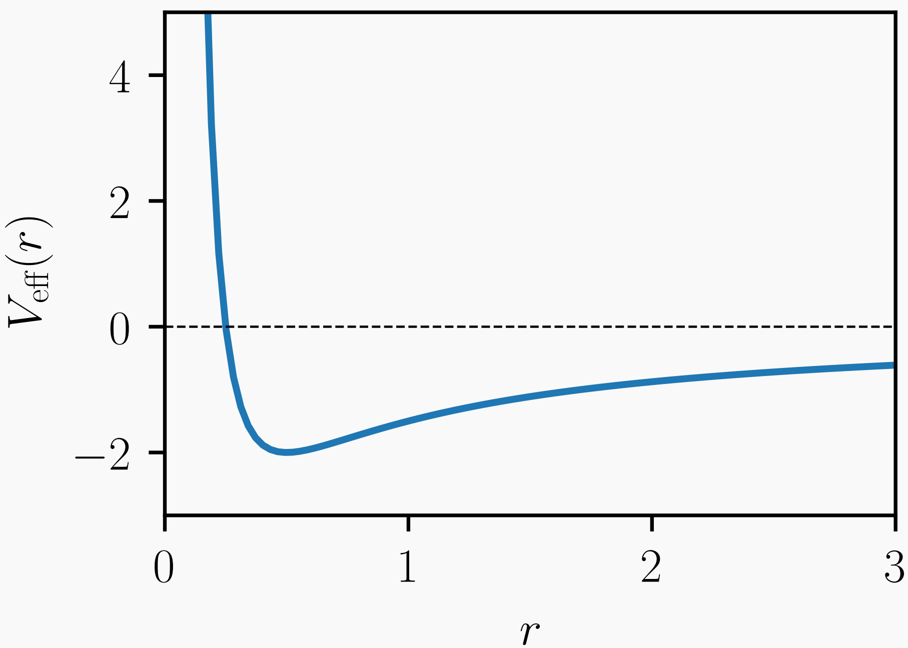


定性分析:

- 如果 $E \geq \max_r V_{\text{eff}}(r)$，那么对于所有 r 都有 $\dot{r} \geq 0$，因此运动是无界的，不会回头（$\dot{r} < 0$）

开普勒问题

开普勒问题



如果有心力场的势能 $V(r)$ 反比于距离，即 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$，此时的力学问题称为开普勒问题。

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{J^2}{2mr^2}$$

特征:

- $V_{\text{eff}}(0) = \infty$，$V_{\text{eff}}(\infty) = 0$
- $V_{\text{eff}}(r)$ 的极值点 $V'_{\text{eff}}(r) = 0$ 处
- 当 $E < 0$ 时，质点的径向运动是有界的
- 当 $E \geq 0$ 时，质点的运动可以逃逸到无穷

开普勒问题的轨道形状

利用守恒的能量和动量消去 $\mathrm{d}t$, 轨道有由以下方程决定:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \pm\frac{J/r^2}{\sqrt{2m[E - V_{\text{eff}}(r)]}} \leftarrow V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{J^2}{2mr^2}$$

- 注意: $\pm$ 表示朝哪一个方向转，选正号即可。初始的 φ 也可以选择。

$$\varphi = \int \frac{J/r^2}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{J^2}{2mr^2}\right)}}\mathrm{d}r + \text{常数}$$

- 如何积分? 经过肉眼观察，…… 根号里面做配方，然后变量替换

数学积分

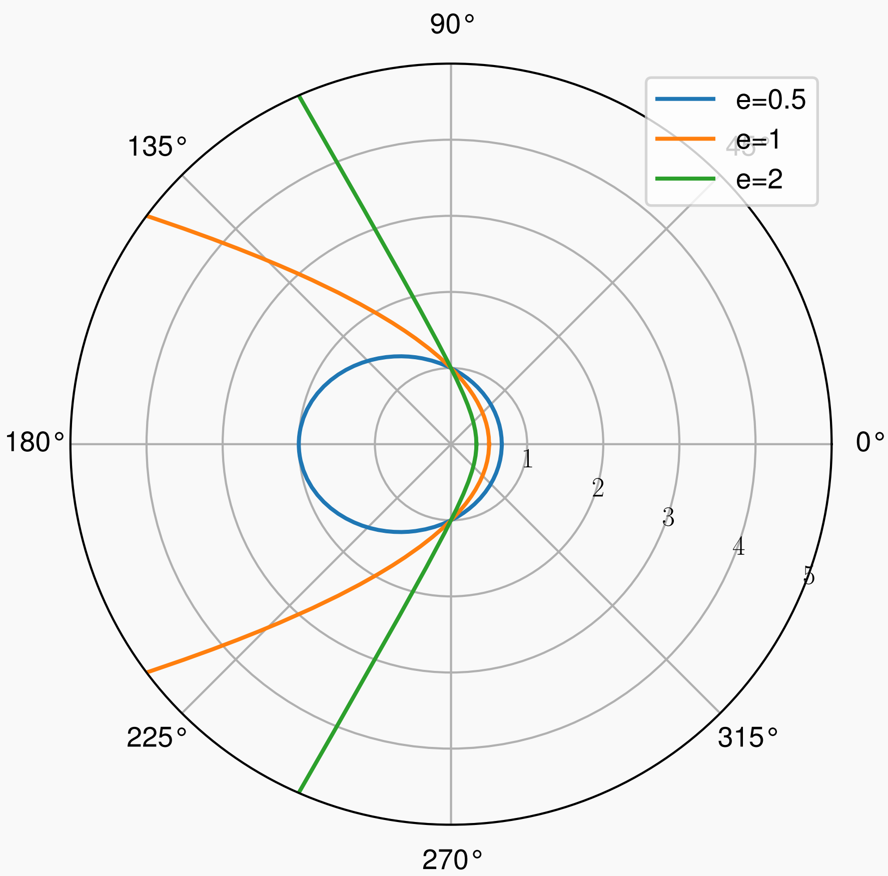
$$l_0 = \frac{J^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2}}, \quad u = 1 - \frac{l_0}{r}.$$

$$\varphi = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{e^2 - u^2}} + \varphi_0 = \arcsin\left(\frac{u}{e}\right) + \varphi_0$$

- 取 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$，可得 $u = -e\cos\varphi$，于是

$$r(\varphi) = \frac{l_0}{1 + e\cos(\varphi)}$$

1. $(V_{\text{eff}})_{\text{min}} \le E < 0$ 时，$e < 1$，椭圆轨道。
2. $E = 0$ 时，$e = 1$，抛物线轨道。
3. $E > 0$ 时，$e > 1$，双曲轨道。



1. $(V_{\text{eff}})_{\min} \leq E < 0$ 时，$e < 1$，椭圆轨道。
2. $E = 0$ 时，$e = 1$，抛物线轨道。
3. $E > 0$ 时，$e > 1$，双曲轨道。

开普勒问题中轨道的闭合性

一般有心力场中的质心运动轨道是不闭合的。开普勒问题（$1/r$ 势）中的轨道闭合性具有特殊性，意味着更高的对称性。这可以通过拉普拉斯-龙格-楞次（LRL）矢量来描述。

Hermann-Bernoulli-Laplace-Hamilton-Runge-Lenz vector

LRL 矢量

LRL 矢量的定义为

$$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J} - m\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial V(r)}{\partial \boldsymbol{x}} = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{x}} = -\frac{\alpha \boldsymbol{x}}{r^3}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J}) &= \dot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{J} = -\frac{m\alpha}{r^3}(\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{x}})) \\
&= -\frac{m\alpha}{r^3}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}) - \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}))] \\
&= m\alpha\dot{\boldsymbol{x}}/r
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = 0$$

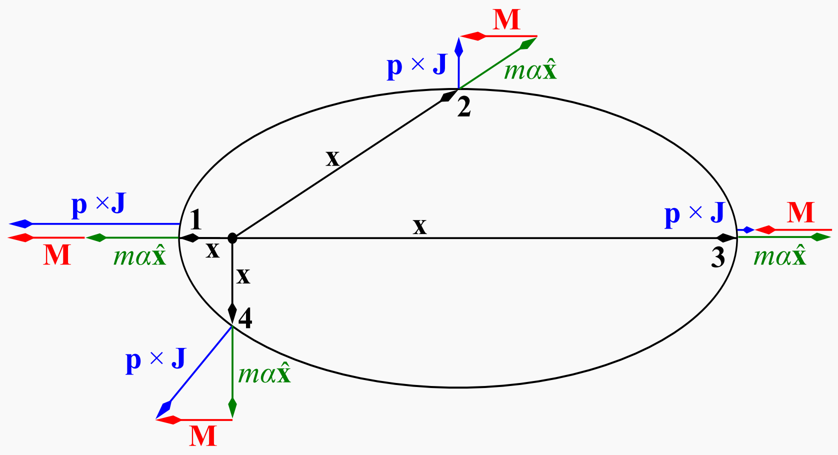
利用了 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ 和 $\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = 0$

LRL 矢量

$$\boxed{\boldsymbol{M} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J} - m\alpha\hat{\boldsymbol{x}}}$$

如何求得 LRL 矢量的大小和方向？

利用 LRL 矢量守恒的特点



- 有心立场问题中的状态自由度为 6
- 运动状态的解消去时间后，最多 5 个独立的运动常数
- 能量（标量）、角动量（矢量），LRL 矢量加起来有 7 个运动常数
- 因此，LRL 矢量并不完全独立，最多只能提供 1 个独立运动常数

- 约束 1：必在运动平面

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

- 约束 2：长度由能量和角动量完全决定

$$M^2 = m^2\alpha^2 + 2mEJ^2$$

LRL 矢量两个约束条件的推导

$$\boxed{\boldsymbol{M} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J} - m\alpha\hat{\boldsymbol{x}}}$$

约束 1:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{J} &= (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J}) \cdot \boldsymbol{J} - m\alpha\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{J} \\ &= -m\alpha\hat{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}) \\ &= 0\end{aligned}$$

约束 2:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^2 &= m^2\alpha^2 + (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J})^2 - \frac{2m\alpha}{r}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J}) \cdot \boldsymbol{x} \\ &= m^2\alpha^2 + p^2 J^2 - \frac{2m\alpha J^2}{r} \\ &= m^2\alpha^2 + 2mEJ^2.\end{aligned}$$

利用 LRL 矢量来描述轨道

$$\boxed{\boldsymbol{M} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J} - m\alpha\hat{\boldsymbol{x}}}$$

取 LRL 矢量的方向为 x 轴方向，令位矢和 LRL 矢量之间的夹角为 φ.

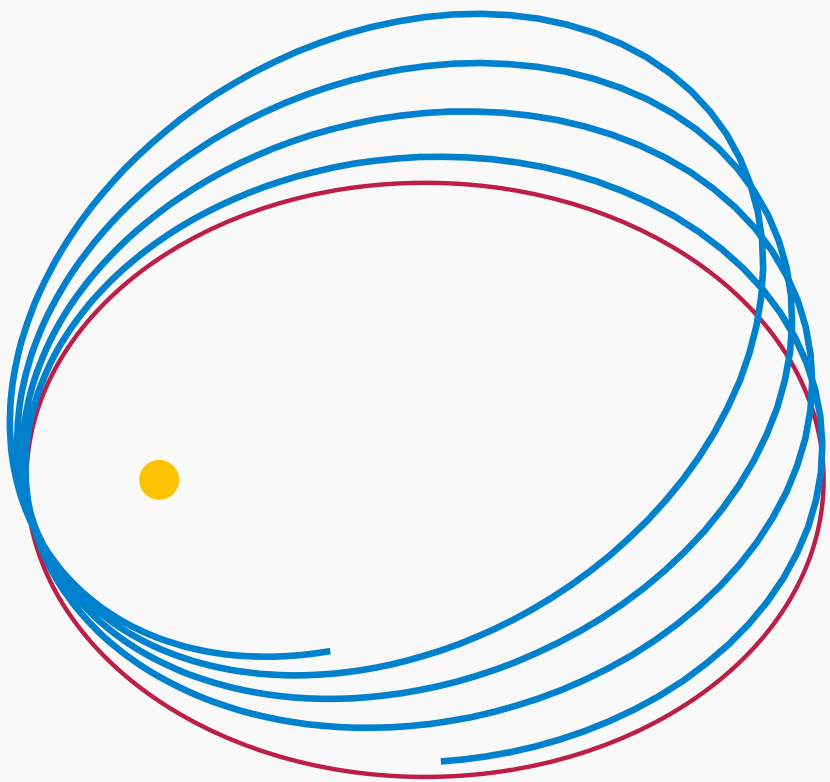
$$Mr\cos\varphi = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})\cdot\boldsymbol{x} - m\alpha r = J^2 - m\alpha r$$

$$\Longrightarrow r = \frac{J^2}{m\alpha + M\cos\varphi} = \frac{J^2/m\alpha}{1 + \frac{M}{m\alpha}\cos\varphi}$$

偏心率和 LRL 矢量的关系: $\boxed{e = \frac{M}{m\alpha}}$

竟然没做任何积分而得到了轨道方程！这就是代数解法。

进动



图来自 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Relativistic_precession.svg

当 LRL 矢量不是守恒量时，质点运动的轨道不再闭合。

贝特朗定理（Bertrand's theorem）：只有 $V \propto -\frac{1}{r}$ 或者 $V \propto r^2$ 两种形式的有心力场，有界运动的轨道才是闭合的。

- 前者对应开普勒问题，后者对应简谐振子问题。

从尺度变化来理解 LRL 矢量

- 回忆尺度变化的知识：动能项和势能项要有相同的缩放因子。

$$t \to \lambda^3 t, \quad \boldsymbol{x} \to \lambda^2 \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{p} \to \lambda^{-1} \boldsymbol{p}$$
$$\implies \boldsymbol{J} \to \lambda \boldsymbol{J}, \quad E \to \lambda^{-2} E$$

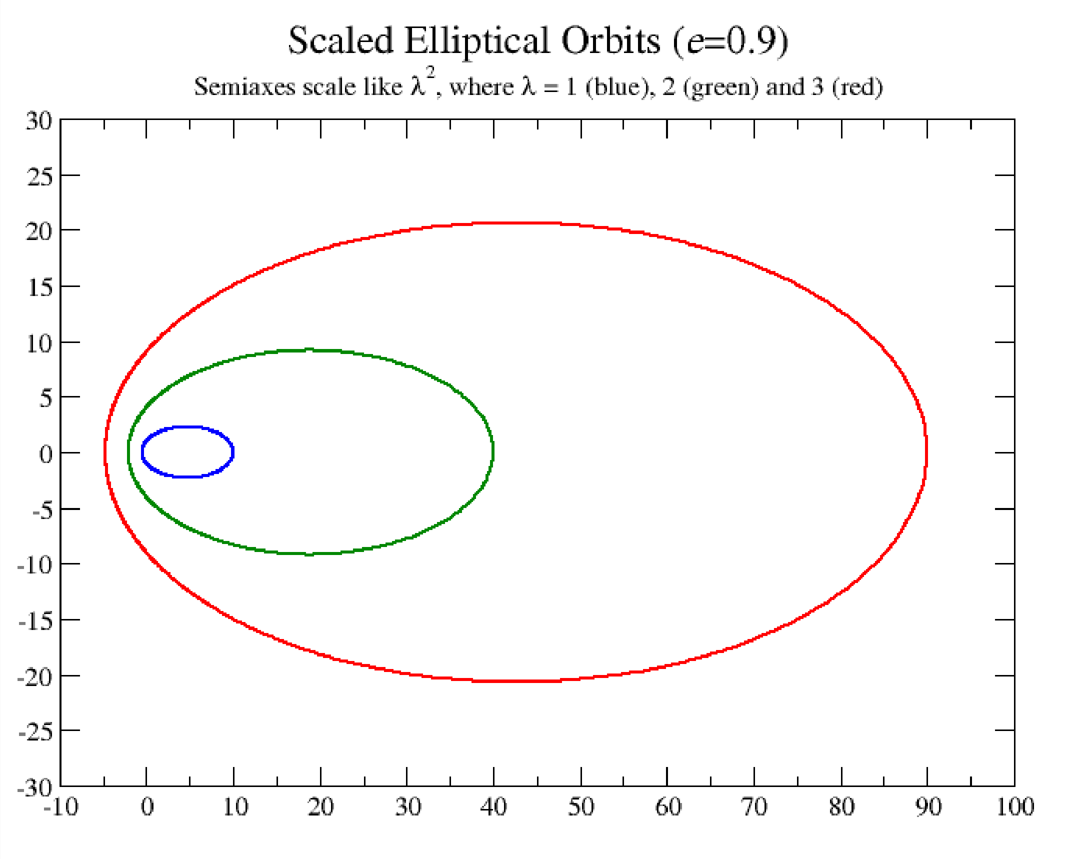
- 因此，$J^2 E$ 在尺度变换下不变。
- 偏心率也保持不变

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2}} = \frac{M}{m\alpha}$$

- LRL 矢量的长度也保持不变

$$\boldsymbol{M}^2 = \left(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J} - m\alpha \frac{\boldsymbol{x}}{r} \right)^2$$

尺度变换



图来自 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Scaled_ellipses.png#/media/File:Scaled_ellipses.png

微观世界电子的运动

守恒量的使用，不仅可以描述轨道，而且可以为理解微观世界提供工具。

- 原子的行星模型。
- 海森堡的哲学观，微观世界电子的运动轨道不再重要，提出利用能量等可观测量来构造新理论。
- 泡利用 LRL 矢量对氢原子的能级进行了代数法求解（不用求解微分方程）。

第三章作业第 1 题

（下下周交）