理论力学

陆晓铭

2023-2024-2

lxm@hdu.edu.cn

课程考核与成绩评定方法

考核项目	评价环节	关联课程目标	评价依据与方法	占比
平时考核	课程思政实践	（1）	课程思政报告	5%
	平时作业	(2)（3）	以作业完成质量做评价依据	25%
期末考试	闭卷考试	(1) (2)（3）	考试成绩	70%
总评成绩		(1) (2)（3）	总评＝课程思政实践（5%)＋平时作业（25%） ＋期末考试(70%)	100%

教材: 刘川,《理论力学》, 北京大学出版社 参考书:

- 朗道,《力学》, 高等教育出版社
- 王晓光,《理论力学及其专题分析》, 科学出版社

课程概览

请一半同学简单介绍下自己:

请剩下的同学用下面的句式介绍自己:

“我是这个教室里最__________的人”。

极值的视角

- 描述上一般比较简洁
- 关注对象的特殊性

牛顿力学的问题

牛顿力学怎么了?

为什么需要其他形式的力学?

牛顿力学的问题

牛顿力学怎么了?

为什么需要其他形式的力学?

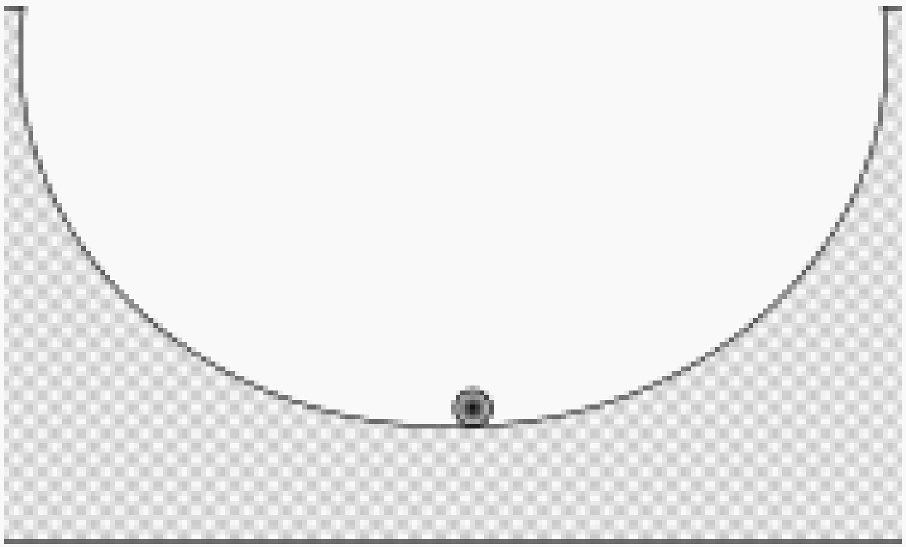
- 历史上为什么需要?
- 现在为什么需要?

类似的思考：计算机，因特网，量子计算机


May The Force
Be With You

牛顿力学的问题

处理约束问题时，牛顿力学有点“钝”！

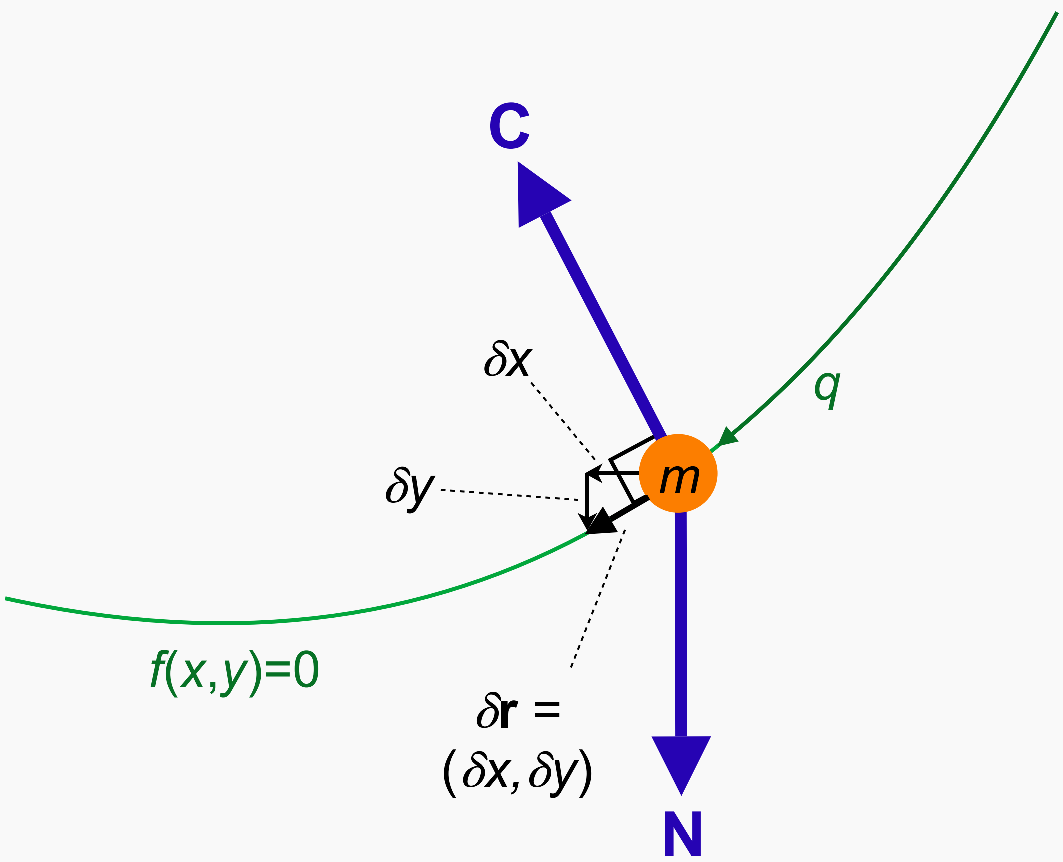


$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

约束： $f(\boldsymbol{x}) = 0$

- 牛顿力学需要指明所有的力，包括约束力。
- 约束力的作用是将位移向量约束在特定条件内
- 约束力本身依赖于位置和主动力

牛顿力学的问题



约束问题

- 为了求解约束问题，历史上发展了一系列利用“变分”的处理方法
- 质点 i 的位移 $\boldsymbol{x}_i$，总的分量数为 $3N$
- 假设存在 k 个完全约束（用等式表示的约束）
- 引入 $3N-k$ 个相互独立的广义坐标 $q_1, ..., q_{3N-k}$
- 位置矢量是广义坐标和时间的函数

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(q_1, ..., q_{3N-k}, t)$$

约束问题—广义坐标

消除位置矢量的冗余度：位置矢量和速度可以用广义坐标和广义速度来表示。

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(q_1, \ldots, q_{3N-k}, t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial t}$$

约束问题-虚位移

符合约束条件的虚位移

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$$

$$\Downarrow$$

$$\delta \boldsymbol{x}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

约束问题—(静力学)虚功原理

考虑一个处于力学平衡，有约束的力学体系

- 消除力的冗余度
- 质点 i 受力 $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{F}_i^c$
- 主动力: $\boldsymbol{F}_i^a$; 约束力 $\boldsymbol{F}_i^c$

$$\boldsymbol{F}_i = 0 \Rightarrow \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = 0$$

$$\Downarrow \quad \textstyle\sum_i \boldsymbol{F}_i^c \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = 0$$

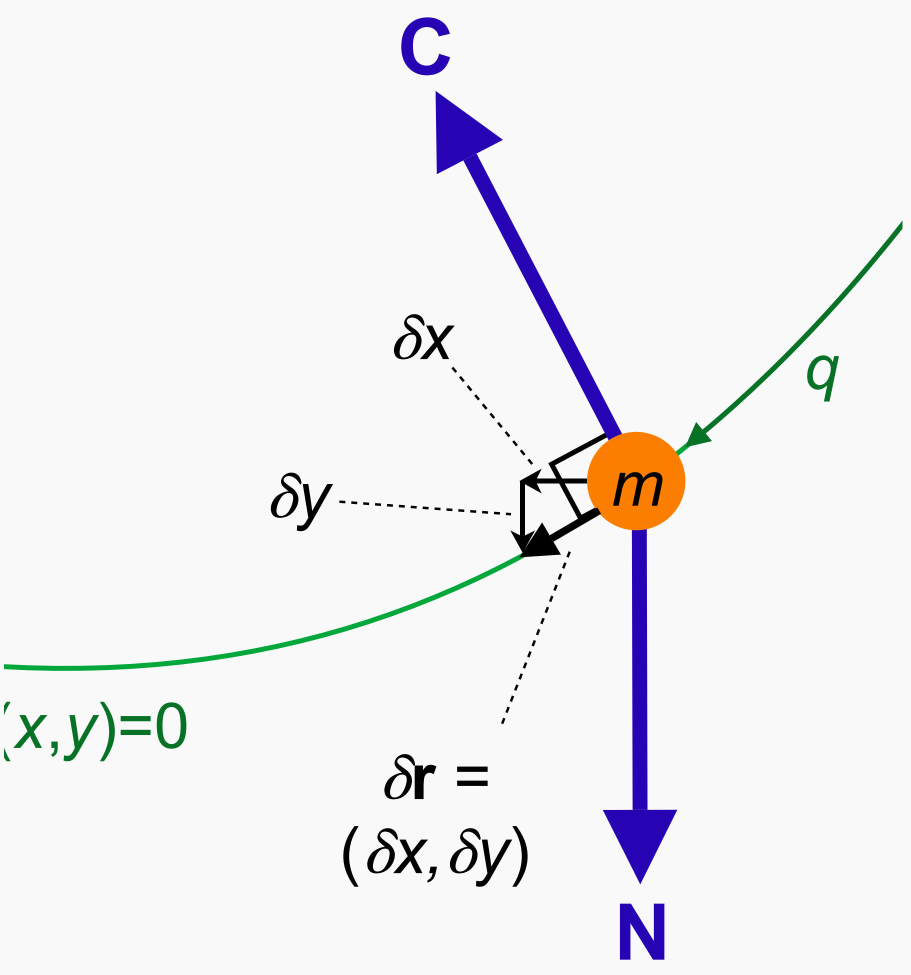
$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^a \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = 0$$

虚功原理:

思考问题：约束条件中的求和符号是否必须?

虚位移的约束

满足约束条件的虚位移，位置向量各分量的虚位移之间是不独立的.



虚功原理

一个物理系统处于静态平衡，当且仅当，所有施加的外力，经过符合约束条件的虚位移，所做的虚功的总和等于零

虚功原理-广义力

虚功可以通过广义坐标及作用其上的广义力来表示

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^a \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_i^a \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_j Q_j \delta q_j = 0$$

- 广义力

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i^a \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j}$$

- 好处: 只用广义坐标和广义力，消除了坐标冗余和约束力.
- 注意: 不同δx_i是不独立的，但广义坐标是独立的。因此有

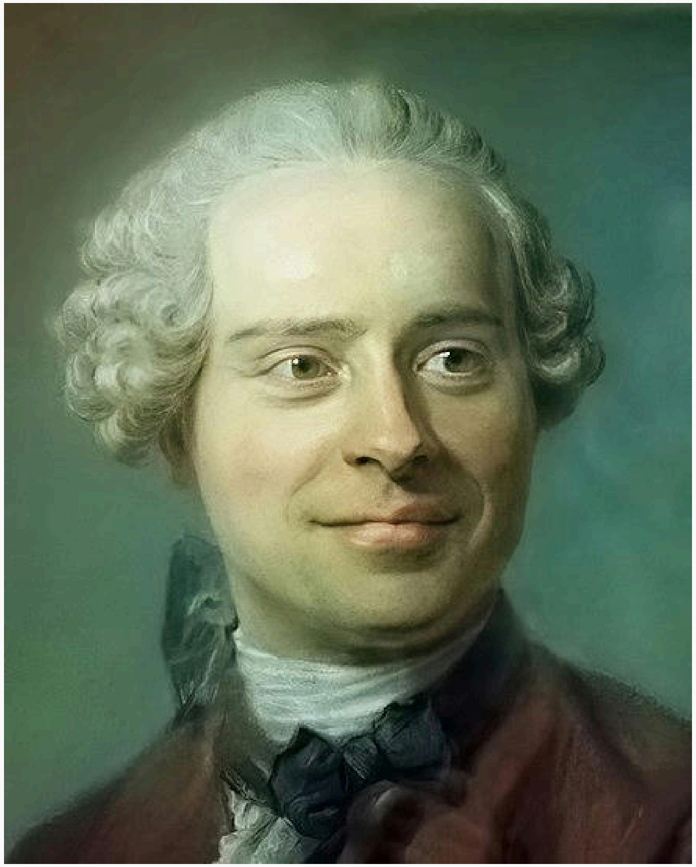
$$Q_j = 0$$

虚功原理-广义力

对比静态平衡的充要条件

原始	虚功定理	广义坐标虚功定理
$\boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{F}_i^c = 0 \ \forall \ i$	$\sum_i \boldsymbol{F}_i^a \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = 0 \ \forall \ i$	$Q_j = 0 \ \forall \ j$

约束问题-达朗贝尔原理



达朗贝尔 (d'Alembert)

- 静态平衡 $\to$ 动态平衡
- 减去惯性力

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i^a - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = 0$$

- 然后再换到广义坐标下

约束问题-达朗贝尔原理

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = \sum_j m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t^2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_j \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

“能量观”：虚功是能量的量纲，将上式和能量联系起来.

- 动能 $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2$.
- 换到广义坐标和广义速度后，$\boldsymbol{v}_i$是可能依赖于广义坐标的，如角度和切向速度
- 将能量看成是广义坐标、广义速度和时间的函数：$T = T(q, \dot{q}, t)$, 多个广义坐标自动扩充

$$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

- 问题：为什么$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\partial}{\partial q_j}$可以交换顺序？（稍后解释）

约束问题-达朗贝尔原理

对于动力学状态而言，q_j 和 $\dot{q}_j$ 都是独立变量。（稍后解释）

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j}.$$

$$m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} = m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

因此

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \delta \boldsymbol{x}_i &= \sum_j \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\
&= \sum_j \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0
\end{aligned}$$

约束问题-达朗贝尔原理

达朗贝尔原理

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i^a - \dot{\boldsymbol{p}}_i\right) \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_j \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right) \delta q_j = 0$$

其中 $Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i^a \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j}$ 为广义力的定义.

假设 $\boldsymbol{F}_i^a = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i}$，$V$ 只依赖于坐标，那么有

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i^a \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\sum_j \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right) \delta q_j = 0 \text{ with } L = T - V$$

$$\sum_j \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \text{ with } L = T - V$$

只用一个 L 函数就能描述系统的动力学。

“大道至简”

第一章作业
（第 3 周交）