理论力学

第三讲

陆晓铭

2023-2024-2

lxm@hdu.edu.cn

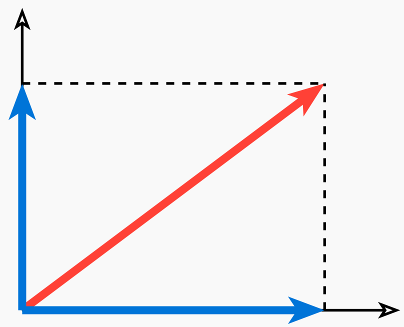
狭义相对性原理

- 从伽利略相对性原理到狭义相对性原理
- 相对论 = 狭义相对性原理 + 光速不变原理
- 惯性参考系之间的坐标变换必须是 Lorentz 变换
- 运动方程在 Lorentz 变换下需要保持不变
- 寻找在经典力学范围外，如何写出作用量的线索

时空观

力学和时空观密切联系：运动规律是在时空背景上加以描述的。

坐标：向量在基矢上的分解系数。$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{3} x^j \boldsymbol{e}_j$

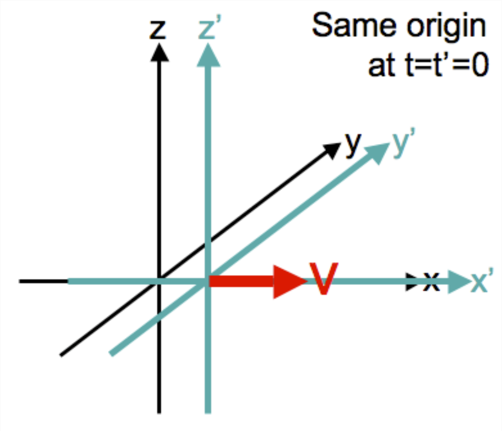


坐标变换:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{3} x^j \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{3} x'^j \boldsymbol{e}'_j$$

时空观

众所周知，伽利略坐标变换下，不同参照系下光速不可能不变。



伽利略坐标变换:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \boxed{t' = t}\,.$$

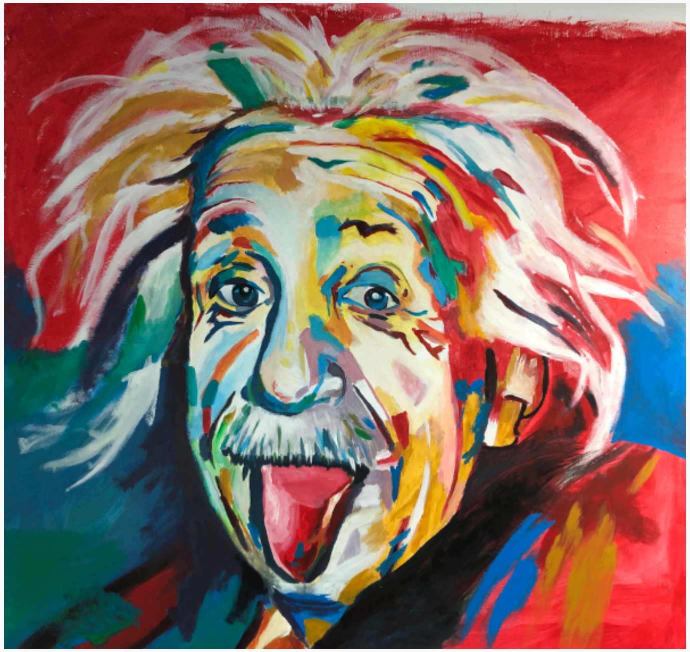
速度变换公式:

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$$

- 同时性：统一计时，空间各点的时间流逝 $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$ 皆一样。
- 不同惯性参考系，同一时刻各方向线元长度也不变:

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z\,.$$

光速不变



伊尔夏提墙绘

为了让光速不变原理和相对性原理相容，爱因斯坦认为惯性参考系之间的时空坐标变换不是伽利略变换，而应该是洛伦兹变换。

狭义相对论的提出背景...

变换中的不变量

变换中的不变量:

- 转动、平移、镜像等操作下的线元长度
- 不可伸缩的绳子在不同形状下的长度
- 拓扑不变量

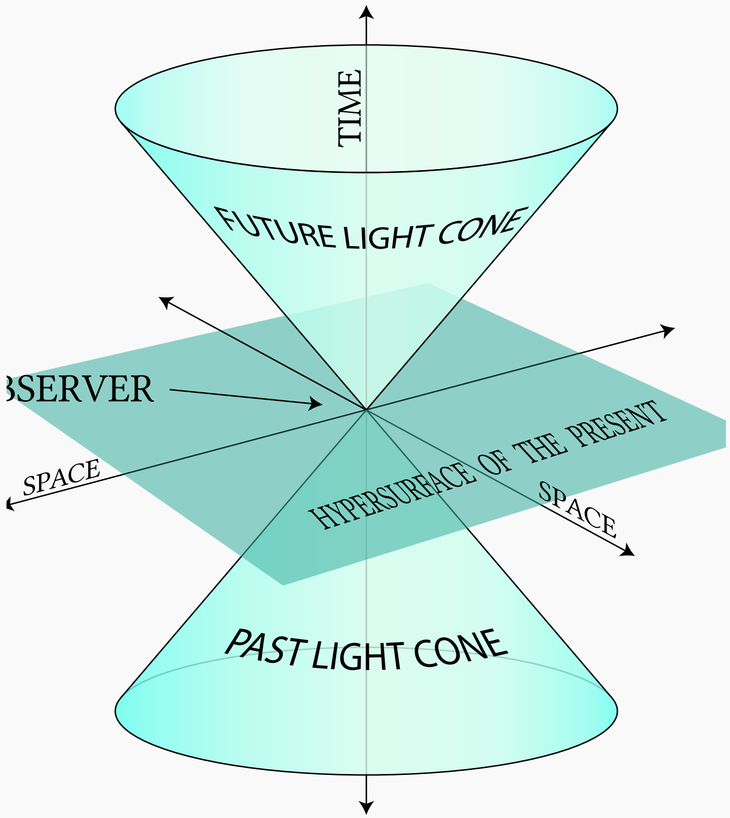
光速如何成为坐标变换中的不变量?

- 在 Δt 时间间隔中走过 $\Delta \ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = c\Delta t$.
- 在另一个参考系中，光速不变要求 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = c\Delta t'$
- 因此，以下是不变量，被称为时空间隔

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

变换中的不变量

- 对于光的轨迹 $x(t)$ 上的两点:
  $(\Delta s)^2 = 0$
- $(\Delta s)^2 > 0$: 类时（timelike）间隔
- $(\Delta s)^2 < 0$: 类空（spacelike）间隔

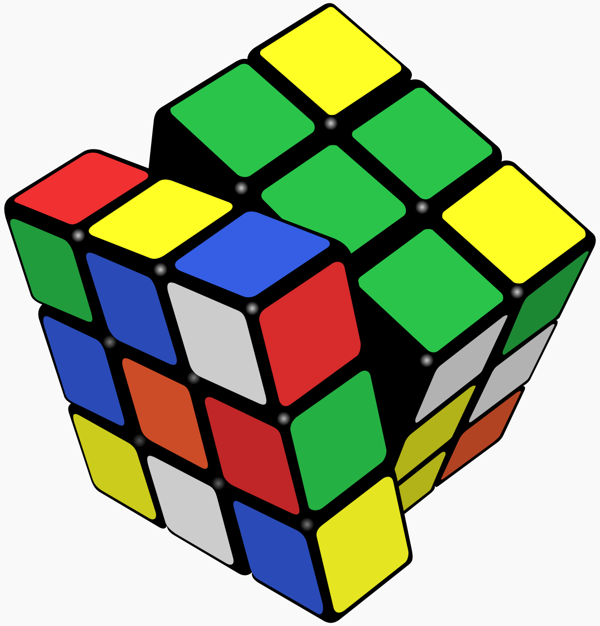


变换中的不变量

以变换中的不变量来分类“变换”（或者说“操作”）

群的概念：满足以下条件的操作的集合

- 有一个恒等操作
- 操作的复合仍在该集合中
- 每一个操作都存在逆操作



连续变换群可以通过微操作来理解。

线元长度和度规

- 逆变 4 矢量: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ 是时空坐标
- 小线元: $\mathrm{d}x^\mu = (\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3) = (c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$
- 无限小距离的普遍定义:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$$

- 时空间隔对应的度规被称为闵可夫斯基度规

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

闵可夫斯基

- 因为时空间隔可以为负，因此度规还有一种取法为 $-g_{\mu\nu}$
- 度规张量正比于单位矩阵的情况，对应欧式几何；其他为非欧几何

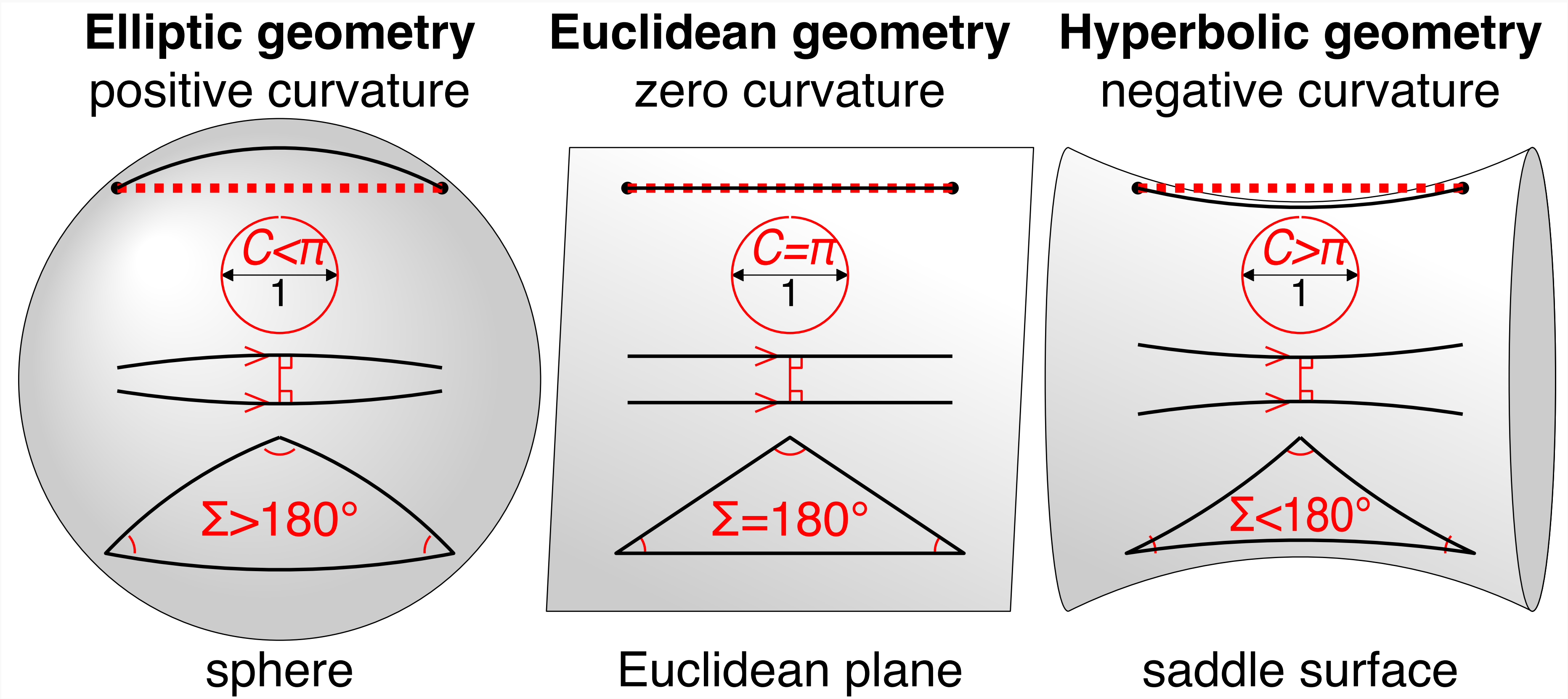
非欧几何简介

Nikolai Lobachevsky

Carl Friedrich Gauss

- 欧几里得几何学第五公理：给定一条直线，通过此直线外的任何一点，有且只有一条直线与之平行。
- 罗巴切夫斯基（Lobachevskij），几何学的哥白尼。改变第五公理，仍能得到自洽的几何学（双曲几何）。非欧几何
- 高斯：未发表

非欧几何简介



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comparison_of_geometries.svg#/media/File:Comparison_of_geometries.svg

Lorentz 变换

坐标变换关系 $x \to x'$ 诱导的线元之间的变换关系必是线性的

$$\mathrm{d}x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\mathrm{d}x^{\nu}$$

时空间隔的变化

$$\mathrm{d}s'^{2} = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x'^{\mu}\,\mathrm{d}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\big(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\big)\big(\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\,\mathrm{d}x^{\beta}\big) = \big(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\big)\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta}$$

将上式与 $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta}$ 对比并利用 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$，可得

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$$

矩阵乘法形式

$$\mathrm{d}s'^{2} = \mathrm{d}x^{\mathsf{T}}\,\Lambda^{\mathsf{T}}g\Lambda\,\mathrm{d}x \Rightarrow \Lambda^{\mathsf{T}}g\Lambda = g$$

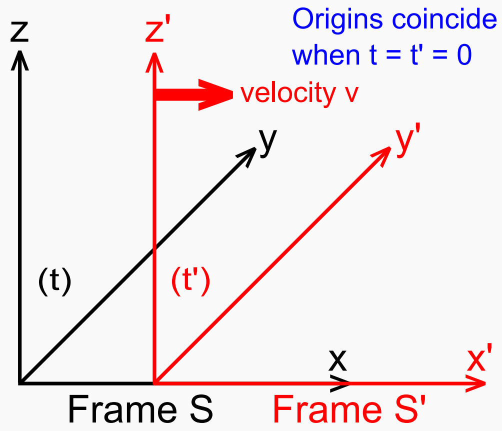
Lorentz 变换群

满足以下条件的变换 Λ 构成一个群（Lorentz 群），能保证任意两个事件（时空点）的间隔不变:

$$\Lambda^\top g \Lambda = g$$

- 群的生成元: 微操作（无限小变化）的分解
- 考虑变换: 从静止参考系到相对 x 方向匀速 V 的惯性参考系，质点坐标的变化

Lorentz 变换



- 转动群可以分解成三个方向转动轴来分析
- 线性变换:

$$\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

$$c^2t^2 - x^2 = (ct, x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

双曲函数

Lorentz 变换

$$\cosh\varphi = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})/2, \quad \sinh\varphi = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})/2.$$

Lorentz 变换

SO(1,1) 群和 SO(2)群的对比

- 不变量: $c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2$
- 参数化表示

$$\Lambda(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

- 不变量: $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$
- 参数化表示

$$O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- 如何确定 φ 与参考系相对速度 V 之间的关系?
- 考虑特殊情况，′ 参考系为静止参考系，因此空间坐标没有变化.

$$\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}\tau \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \Lambda(-\varphi)\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}\tau \\ 0 \end{pmatrix} = c\,\mathrm{d}\tau\begin{pmatrix} \cosh\varphi \\ \sinh\varphi \end{pmatrix}$$

Lorentz 变换

两个参考系时空间隔的不变关系。静止参考系时间变化为 $\mathrm{d}\tau$，坐标没有变化

$$
\begin{aligned}
c^2\,\mathrm{d}\tau^2 &= c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 \\
\Rightarrow c\,\mathrm{d}\tau &= \sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2} = c\,\mathrm{d}t\,\sqrt{1 - V^2/c^2} \\
\Rightarrow \mathrm{d}t &= \gamma\,\mathrm{d}\tau \text{ with } \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.
\end{aligned}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
\cosh\varphi &= \gamma \\
\sinh\varphi &= \cosh^2\varphi - 1 = \gamma^2 - 1 = \beta\gamma
\end{aligned}
$$

Lorentz 变换

其中 $\beta \equiv \frac{v}{c}$

相对论性自由粒子的拉格朗日力学

- 作用量: 正比于自由粒子的世界线长度

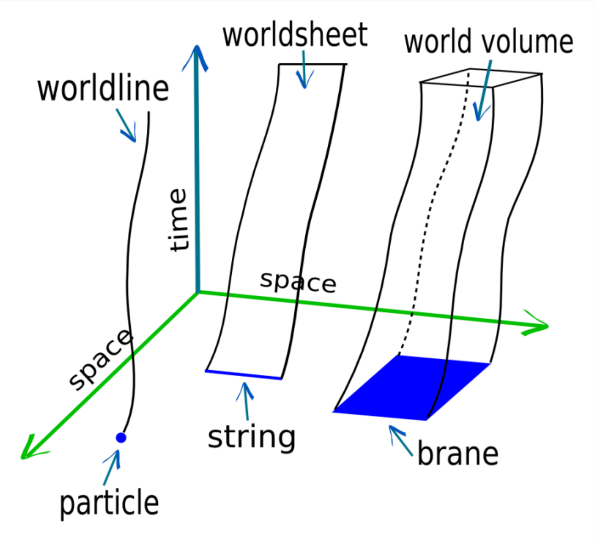
$$S = -mc\int_a^b \mathrm{d}s$$

- 拉格朗日量:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}.$$

来自于

$$\int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2} = \int_a^b \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}\,c\,\mathrm{d}t$$



- 广义动量

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \gamma m\boldsymbol{v}.$$

相对论性自由粒子的最小作用量变分

另一种导出运动方程的方法，对 $\mathrm{d}s$ 而不是 $\mathrm{d}t$ 做作用量积分

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= -mc \int_a^b \delta \sqrt{\mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x^\mu} \\
&= -mc \int_a^b \frac{\mathrm{d}x_\mu \, \delta \, \mathrm{d}x^\mu}{\sqrt{\mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x^\mu}} = -mc \int_a^b \frac{\mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d} \, \delta x^\mu}{\mathrm{d}s} \\
&= -mc \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s} \, \delta x^\mu \bigg|_a^b + mc \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} \, \delta x^\mu \, \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

自由粒子的欧拉-拉格朗日方程

$$
\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} = 0 \text{ for } \mu = 0, 1, 2, 3
$$

第二章作业第 3，4 题

（第 5 周交）