102 學年度上學期　金門大學　資工系二年級　機率統計　期中考（解答）　出題者 ： 陳鍾誠

學號 ：　　　　　　　　　　　姓名 ：　　　　　　　　　　　　　　分數 ：

以下每一類型的題目中，請奇數號同學都是作奇數題，偶數號同學作偶數題，做錯題分數將打五折。

簡答題 (每題 5%, 共 20%)

(1). 請寫出組合數量 C(5, 3) 的算式與數值？

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!2!}$$

(2). 請寫出排列數量 P(7, 3) 的算式與數值？

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C(7,3) = \frac{7!}{4!}$$

(3) 請說明何謂柏努力試驗？為何公式是那樣？

伯努利試驗是一項只有兩種可能結果的隨機試驗，可以用下列機率分布描述：

P[X=1] = p ; P[X=0] = 1-p

換句話說，伯努力試驗是一種 **YES or NO (1 or 0)** 的試驗。舉例而言，像是「丟銅版、生男生女、一地區某天最高溫是否超過 **30** 度、擲骰子是否超過 **2** 點」等等，都可以用伯努力實驗描述。

(4) 請說明何謂二項分布？為何公式是那樣？

如果我們進行 **n** 次的伯努力試驗，每一次的實驗都可以用隨機變數描述， **P(ti=1) = p, P(ti=0)=1-p** ，而且這些試驗 **{t1, t2, ..., tn}** 之間是獨立的，那麼我們就可以用二項分布來描述 **n** 次實驗的可能機率分布。

由於這 **n** 次實驗相互獨立，假如 **(t1 t2 ... tn)** 代表這個實驗的一個可能出像，因此 **P(t1**

請解說下列機率公理或定理的意義(每題 5%,共 20%)

(1) 公理 P(S) = 1

所有樣本都出自樣本空間內，所以樣本空間這個事件的機率為 **1**。

(2) 公理 $P(A) \geq 0$

任何事件的機率都大於或等於零，也就是沒有負的機率。

(3) 公理 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; 當 $A \cap B = \emptyset$ 時。

當兩個集合 **A,B** 沒有交集時，其聯集事件的機率等於兩者相加。

(4) 定理 $P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cap A2)$

假如兩個事件有交集，那麼其聯集的機率是兩者相加後扣掉交集事件的機率。

(5) 條件機率的定義 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

條件機率 **P(B|A)** 是在 **A** 出現的條件下，**B** 出現的機率，因此定義為 **A,B** 同時出現的機率除以 **A** 的機率。

(6) 獨立事件的定義 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

獨立事件代表兩者之間互不影響，也就是 **B** 出現並不會影響 **A** 的機率，所以根據條件機率的定義可寫為 **P(B|A) = P(B)**，也就是 $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$，移項得到 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$，這也是為何獨立事件的機率要這樣定義的原因。

(7) 請問數學中的定義與定理有何不同？

t2 .... tn) = P(t1) P(t2) .... P(tn)。

令 **X** 代表一個可以將 **(t1 t2 ... tn)** 映射到伯努力試驗成功 **(Yes)** 次數的函數，那麼、**n** 次實驗中出現 **k** 次 **1** 的機會，可以用以下算式表示。

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

舉例而言，投擲公正銅板 **5** 次，得到 **3** 次正面的機率為

$P(X=3) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^{5-3}$，其中 **p=0.5**。

(5) 請說明何謂幾何分布？為何公式是那樣？

如果我們連續進行一系列的伯努力試驗，直到成功才停止，那麼我們需要進行多少次實驗呢？

關於這種「直到成功才停止」的問題，可以用幾何分布來描述，以下是幾何分布的定義。

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p$$

舉例而言，假如我們連續投擲公正銅版，直到出現正面才停止，那麼我們需要投擲 **k** 次才會得到第一個正面的機率，就會是

$(1-p)^{k-1} p$ ，其中的 **p=0.5**。

(6) 請說明何謂負二項分布？為何公式是那樣？
如果我們連續進行一系列的伯努力試驗，持續進行試驗直到取得 **r** 次成功為止，那麼其

定義是指某個符號或詞彙的意義規定，例如微積分中微分符號的定義為

$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$，而定理則是用定義與公理這些基礎所推論證明出來的法則。

(8) 請問數學中的公理與定理有何不同？

公理是數學系統的基礎，是直接規定出來的，而定理則是由定義與公理推論證明出來的法則。

機率分布就稱為負二項分布，其公式如下： $$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r$$ 舉例而言，假如我們連續投擲公正銅版，直到出現三次正面才停止，那麼我們需要投擲 **k** 次才會得到第一個正面的機率，就會是 $\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r$ ，其中的 **p=0.5**。 **(7)** 請說明何謂布瓦松分布？並說明該分布用來描述何種情況的機率模型。 布瓦松分布的公式如下所示，其中的 λ 代表每單位區域內會出現的樣本平均數。 $$P(X=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$$ 布瓦松分布是二項分布中，當 $n\to\infty$，且每單位區域的樣本平均數為 λ 的極限情況。 **(8)** 請說明何謂常態分布？並說明該分布用來描述何種情況的機率模型。 常態分布的公式如下，該分布通常用來描述像平均值的分布這種情況。 $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2}$$ 因為根據中央極限定理，獨立的 **k** 次隨機試驗最後都會趨近常態分布。	

學號 ： 姓名 ：

計算題 (每題 5%, 共 30%)

以下為某個包含 X,Y, Z 隨機變數的機率表格，請計算下列問題的解答 (必須有計算過程)。

X	Y	Z	P(X,Y,Z)
0	0	0	0.1
0	0	1	0.1
0	1	0	0.2
0	1	1	0.2
1	0	0	0.05
1	0	1	0.05
1	1	0	0.1
1	1	1	0.2

(1) P(X=0, Y=1) = ?

P(X=0, Y=1) = P(X=0, Y=1, Z=0) + P(X=0, Y=1, Z=1) = 0.2+0.2 = 0.4。

(2) P(X=1, Y=0) = ?

P(X=1, Y=0) = P(X=1, Y=0, Z=0) + P(X=1, Y=0, Z=1) = 0.05 + 0.05 = 0.1

(3) P(X=1 | Y=0) = ?

P(X=1|Y=0) = P(X=1, Y=0)/P(Y=0) = (0.05+0.05)/(0.1+0.1+0.05+0.05) = 0.1/0.3 = 1/3

(4) P(Z=1 | X=0) = ?

P(Z=1|X=0) = P(Z=1, X=0)/P(X=0) = (0.1+0.2)/(0.1+0.1+0.2+0.2) = 0.3/0.6 = 1/2

請驗證以下定理是否成立

(5) $P(X=1|Y=0)=P(Y=0|X=1)\dfrac{P(X=1)}{P(Y=0)}$

P(X=1|Y=0) = 1/3 ；如第 (3) 題
P(Y=0|X=1) = P(Y=0,X=1)/P(X=1) = (0.05+0.05)/(0.05+0.05+0.1+0.2) = 0.1/0.4 = 1/4
P(X=1) = 0.4
P(Y=0) = (0.1+0.1+0.05+0.05) = 0.3

右式=P(Y=0|X=1) * P(X=1)/P(Y=0) = 1/4 *0.4/0.3 = 1/3 = P(X=1|Y=0)=左式 ; 得證。

(6) $P(Z=1|X=1)=P(X=1|Z=1)\dfrac{P(Z=1)}{P(X=1)}$

P(Z=1|X=1) = P(Z=1, X=1)/P(X=1) = (0.05+0.2)/(0.05+0.05+0.1+0.2) = 0.25/0.4 = 5/8
P(X=1|Z=1) = P(X=1, Z=1)/P(Z=1) = (0.05+0.2)/(0.1+0.2+0.05+0.2)=0.25/0.55 = 5/11
P(Z=1) =0.1+0.2+0.05+0.2= 0.55
P(X=1) = 0.05+0.05+0.1+0.2 = 0.4
右式=P(X=1|Z=1)* P(Z=1)/P(X=1) = 5/11*0.55/0.4 =5/11 * 11/8 = 5/8 = P(Z=1|X=1)=左式 ; 得證。

(7) 請寫出期望值 E(X) 的計算過程與結果。

E(X) = 0*P(X=0) + 1*P(X=1) = 1*(0.05+0.05+0.1+0.2) = 0.4

(8) 請寫出期望值 E(Y) 的計算過程與結果。

E(Y) = 0*P(Y=0) + 1*P(Y=1) = 1*(0.2+0.2+0.1+0.2) = 0.7

(9) 請寫出變異數 Var(X) 的計算過程與結果。

	$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E([X - 0.4]^2)$ $= (0 - 0.4)^2 * P(X = 0) + (1 - 0.4)^2 * P(X = 1)$ $= 0.16 * 0.6 + 0.36 * 0.4 = 0.24$ **(10) 請寫出變異數 Var(Y) 的計算過程與結果。** $Var(Y) = E([Y - E(Y)]^2) = E([Y - 0.7]^2)$ $= (0 - 0.7)^2 * P(Y = 0) + (1 - 0.7)^2 * P(Y = 1)$ $= 0.49 * 0.3 + 0.09 * 0.7 = 0.21$ **(11) 請問 P(3X=3) = ?** **P(3X=3) = P(X=1) = (0.05+0.05+0.1+0.2) = 0.4** **(12) 請問 P(3Y=1) = ?** **P(3Y=1) = P(Y=1/3) = 0**

學號 ： 姓名 ：

證明題 (每題 10 %, 共 20%)	請寫出下列 R 軟體的程式或操作的意義，並為每一行程式加上註解 (每題 10%, 共 10%)
(a) 請用上述三個公理與集合論定理證明下列機率定理 (每題 10%) (1) 定理 $P(\emptyset) = 0$ 證明： $P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$; 根據公理 (3) $S = S \cup \emptyset$; 根據集合論 P(S) = 1 ; 根據公理 1 $1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$; 根據集合論與公理 (3) 所以 $P(\emptyset) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$ (2) 定理 P(A')=1-P(A) 其中 A' = S-A 證明： 因為 $A \cup A' = S; A \cap A' = \emptyset$;根據 A'的定義 $P(A' \cup A) = P(A') + P(A)$; 根據公理 3 $P(A') + P(A) = P(A' \cup A) = P(S) = 1$; 根據公理 3 與公理 1 所以 $P(A') = 1 - P(A)$ (b) 請用上述公理與集合論定理證明下列機率定理 (1) 貝式定理 $P(A\|B) = P(B\|A)\frac{P(A)}{P(B)}$ 證明： $P(B\|A)\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\frac{P(A)}{P(B)}$ $= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A\|B)$ (2) 如果 A,B 在給定 C 條件的情況下獨立，則	(1) > x = sample(1:10, 10) # 從 1 到 10 以不放回方式取出 10 個樣本。 > cor(x, x+1) # 計算 x 與 x+1 這兩組資料的相關係數 [1] 1 # 發現結果為 1，為完全正相關 > cor(x, -x) # 計算 x 與 -x 這兩組資料的相關係數 [1] -1 # 發現結果為 -1，為完全負相關 > cor(x, 0.5*x) # 計算 x 與 0.5x 這兩組資料的相關係數 [1] 1 # 發現結果為 1，為完全正相關 > cor(x, 0.5*x+1) # 計算 x 與 0.5x+1 這兩組資料的相關係數 [1] 1 # 發現結果為 1，為完全正相關 > cor(x, -0.5*x+1) # 計算 x 與 -0.5x+1 這兩組資料的相關係數 [1] -1 # 發現結果為 -1，為完全負相關 > y=sample(1:100, 10) # 再從 1:100 以不放回的方式抽取 10 個樣本。 > cor(x,y) # 計算 x 與 y 這兩組資料的相關係數 [1] -0.06586336 # 結果為 -0.06586336，相關度很低 (2) > x=sample(1:6, 10000, T) # x 為隨機從 1:6 抽取 10000 個樣本 (取後放回的方式) > y=sample(1:6, 10000, T)# y 為隨機從 1:6 抽取 10000 個樣本 (取後放回的方式) > z=sample(1:6, 10000, T)# z 為隨機從 1:6 抽取 10000 個樣本 (取後放回的方式) > hist(x, breaks=0.5:7) # 印出 x 的統計長條圖 > hist(y, breaks=0.5:7) # 印出 y 的統計長條圖 > hist(z, breaks=0.5:7) # 印出 z 的統計長條圖 > hist(x+y, breaks=1.5:13) # 印出 x+y 的統計長條圖 > hist(x+y+z, breaks=2.5:19) # 印出 x+y+z 的統計長

$P(A,B\|C) = P(C\|A) * P(C\|B) * \frac{P(A)P(B)}{P(C)^2}$ **證明：** $P(C\|A) * P(C\|B) * \frac{P(A)P(B)}{P(C)^2}$ $= \frac{P(C \cap A)}{P(A)} * \frac{P(C \cap B)}{P(B)} * \frac{P(A)P(B)}{P(C)^2}$ $= \frac{P(C \cap A) * P(C \cap B)}{P(C) * P(C)}$ $= P(C\|A) * P(C\|B)$**; 根據 A,B 在給定 C 的情況下獨立的條件，可得** $= P(A,B\|C)$	**條圖**