程式人

用十分鐘瞭解

《線性代數、向量微積分》

以及電磁學理論

陳鍾誠

2016 年 1 月 17 日

話說

- 自從小學四年級學會加減乘除之後
- 老師所教的那些數學，就不能拿來用了！

五年級開始

- 教圓形、方形、三角形...

六年級開始

- 進入雞兔同籠問題之後
- 有些人數學就 GG 了

我也是如此

小學時我從來沒搞懂過

- 籠子裡的兔子和雞到底有幾隻

然後上了國中

- 一直到國二，都還不會算二元一次聯立方程式

也搞不懂

- 那些 x, y 到底是甚麼意思！

我的父母親

- 都是修理皮鞋的鞋匠
- 他們沒辦法教我怎麼解 x, y
- 也不知道我們的數學到底學些甚麼？

而我所念的國中

- 黑道很多
- 白道也不少

於是

- 我落入了無間道的地獄

每天上學

- 過天橋的時候
- 都得先偷看一下橋上
- 是否有人收保護費

如果有的話

- 就要考慮繞遠路
- 或者改走下面的馬路

不幸的是

- 天橋上有黑道
- 天橋下有白道

不能走天橋

- 還得觀望一下《管理組長》在不在

否則

- 被那個韓國來的管理組長抓到
- 乾脆還是交保護費算了！

進了學校

- 從早自習開始
- 就得在手上抹綠油精
- 因為這樣打了比較不會痛

因為

- 每堂課都要考試

然後

- 分數太低要被打
- 退步一分要打一下

所以

- 我們不能考太高
  - 否則下次就會退步
- 也不能考太低
  - 否則就會被打很多下

但是

- 要維持每次都夠高而且分數一模一樣
- 這實在是太難了！

更糟的是

- 我到二年級都沒學會聯立方程式的解法
- 但是每次考試都有！

於是

- 我只好每天被打七次
- 然後回家背書、背書、再背書

我在學校是 A 段班

- 每個人都要留下來課後輔導
- 每個月都要繳《課後輔導費》

其實

- 那和天橋上的保護費沒甚麼兩樣
- 天橋的你還能躲，課後輔導費卻躲不掉

除非

- 你調到 B 段班去

在那個學校

- A 段班的體育課和音樂課
  - 都變成了數學課和英文課
- 而 B 段班的數學課和英文課
  - 都變成了體育課和音樂課

這樣

- 課程之間就自動達成了平衡
- 老師教的各類課程總數還是相同的

我們班的導師

- 是教數學的
- 他從一年級教我教到二年級
  我還是學不會聯立方程式

有一天

- 導師請假
- 來了個代課老師

話說、那位代課老師

- 上了一堂數學課之後
- 發現了一件事

那件事就是

- 我們班有一大半同學
- 都不會解聯立方程式

他覺得很不可思議

- 於是接下來的一整天課程他都拿來教聯立方程式

話說那位代課老師

- 甚麼都沒有，除了一件事

那件事就是

- 我就不信教不會你們 …

於是

- 從早上到中午
- 從中午到下午
- 他所有的課都拿來教聯立方程式

我永遠記得

- 一直到下午兩點
- 我都還學不會

然後、很神奇的

- 突然之間，隔壁有位同學會了

  但我還是不會

接下來那位同學開始

- 教我
- 教我
- 教我

我覺得自己好笨

- 就是學不會！

直到下午兩點

- 突然之間
- 我理解了一件事

就是那些 x, y

- 其實代表可以隨意調整的數字
- 也就是他們所稱的變數

然後

- 我再看一次題目
- 再看一次答案

- 終於發現我彷彿理解那個答案了。

於是

- 我學會了聯立方程式

放學之前

- 大部分的同學都學會了

然後、代課老師在下課前

- 問我們一個問題

請問、有沒有同學

- 可以讓我去你們家吃個便飯
- 因為我今天還沒有領薪水

我看著代課老師

- 很想舉手、但是又想到媽媽不知道有沒有煮那麼多飯。

- 然後又想到如果突然帶老師回家吃飯，會不會太奇怪。

所以、我遲疑了

老師看到沒有人舉手

- 只好說
  - 那就下課吧！

於是、我回家了！

吃晚餐的時候

- 我靠訴媽媽，我原本想請代課老師到我們家吃飯的事情！

媽媽說

- 傻孩子，我們家雖然沒什麼錢，但是請老師吃頓便飯是沒問題的，你為甚麼不舉手呢？

吃完晚餐

- 我就忘了這件事！
- 繼續去準備明天的考試

但是

- 此後的三十幾年
- 我經常想起這件事！

因為

- 如果沒有那位代課老師
- 我想、我的生命將會完全不同

我不可能

- 考上成功高中

也很可能

- 不會進入交大
- 不會進入台大研究所
- 不會去讀台大資工博士班

也不會

- 站在講台上
- 教學生《程式和數學》

所以

- 我永遠記得那一天
- 那個代課老師教會我
  - 聯立方程式

抱歉

- 話題扯太遠了
- 好像已經花了五分鐘

那麼

- 就讓我們用剩下的五分鐘
- 學會《線性代數和向量微積分》好了！

線性代數

- 其實就是解《線性方程組》
- 也就是解《聯立方程式》

國中的時候、我們學這個

如要解決以下方程組：

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

過程是：

$$2x + y = 8 \qquad\qquad x + y = 6$$

$$y = 8 - 2x \qquad\qquad 6 - x = y$$

$$\backslash \qquad\qquad /$$

$$8 - 2x = 6 - x$$

$$8 - 6 = 2x - x$$

$$x = 2$$

然後把 x 代入到其中一條方程式裡：

$$\begin{aligned} y &= 6 - x \\ &= 6 - (2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

所以它的解為：

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

或者會想辦法削去其中一個變數

如要以消元法解決以下方程組：

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

把兩個相減：

$$\begin{array}{rr} & 2x + y = 8 \\ + & -x - y = -6 \\ \hline & x = 2 \end{array}$$

然後把 x 代入到其中一條方程式裡：

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ (2) + y &= 6 \\ y &= 6 - 2 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

得出：

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

這種削去變數的方法

- 其實就是後來學的高斯消去法

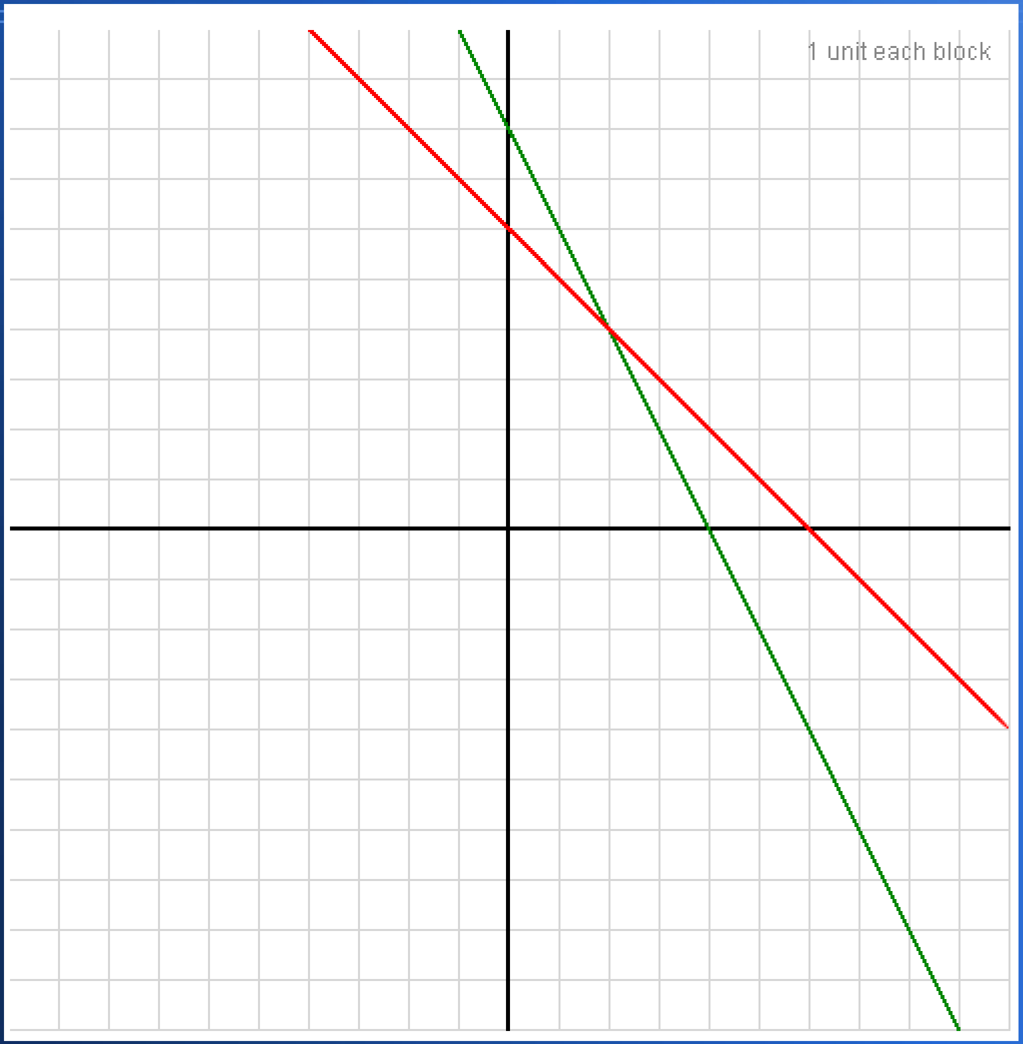
有時候、也會用畫圖的

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

綠色為 $2x + y = 8$，
紅色為 $x + y = 6$。

兩線的交叉點就是它們的解了。

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



然後到了高中、方程式更加抽象化

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

接著寫成矩陣

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

還規定了矩陣的加法、常數乘法

$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})_{i,j} =$
$\mathbf{A}_{i,j} \pm \mathbf{B}_{i,j}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 1+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$(c\mathbf{A})_{i,j} = c \cdot \mathbf{A}_{i,j}$

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

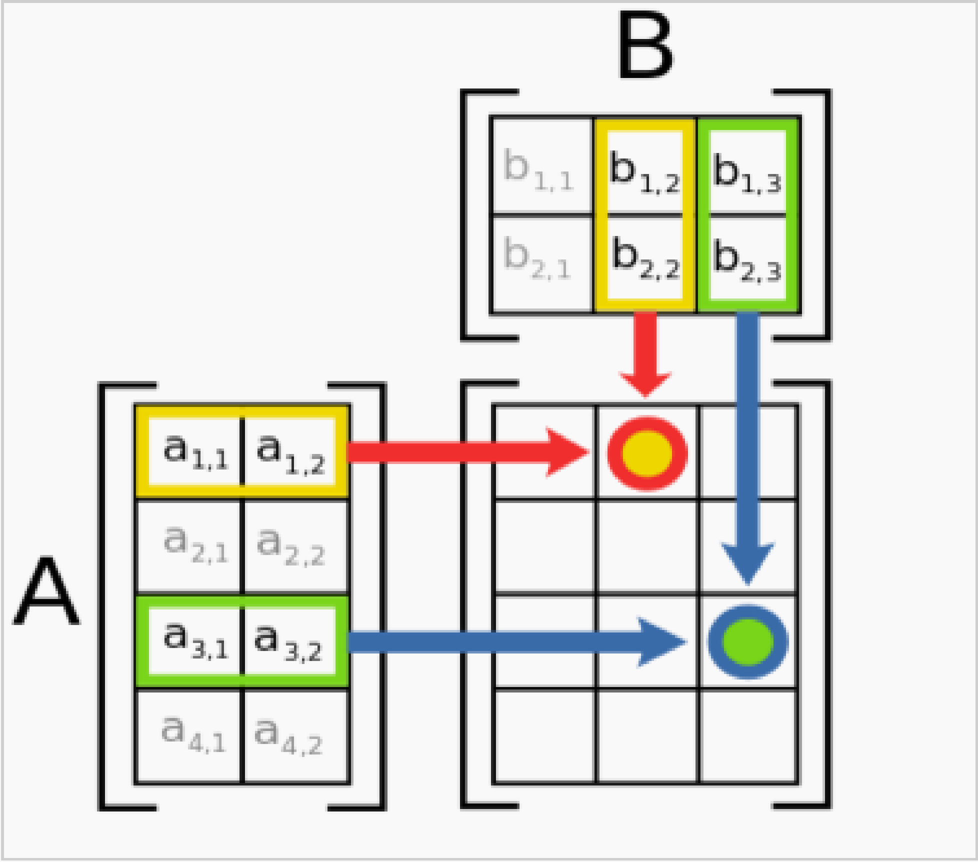
還有轉置

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{i,j} = \mathbf{A}_{j,i}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

還有更複雜的矩陣相乘

$$[\mathbf{AB}]_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \cdots + A_{i,n}B_{n,j} = \sum_{r=1}^{n} A_{i,r}B_{r,j}$$



矩陣**A**和**B**相乘得到**AB**的示意圖

這些

- 很多是為了理解代數結構
- 所做的準備！

但是大部分的時間裡

- 我們都一直算一直算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 3 + 0\times 2 + 2\times 1) & (1\times 1 + 0\times 1 + 2\times 0) \\ (-1\times 3 + 3\times 2 + 1\times 1) & (-1\times 1 + 3\times 1 + 1\times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

矩陣乘法算完算高斯消去法

System of equations	Row operations	Augmented matrix
$\begin{alignedat}{4} 2x &+ y &- z &= 8 \\ -3x &- y &+ 2z &= -11 \\ -2x &+ y &+ 2z &= -3 \end{alignedat}$		$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$
$\begin{alignedat}{4} 2x &+ y &- z &= 8 \\ & \tfrac{1}{2}y &+ \tfrac{1}{2}z &= 1 \\ & 2y &+ z &= 5 \end{alignedat}$	$L_2 + \frac{3}{2}L_1 \to L_2$ $L_3 + L_1 \to L_3$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$
$\begin{alignedat}{4} 2x &+ y &- z &= 8 \\ & \tfrac{1}{2}y &+ \tfrac{1}{2}z &= 1 \\ & &-z &= 1 \end{alignedat}$	$L_3 + -4L_2 \to L_3$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$

然後高斯消完喬丹消

The matrix is now in echelon form (also called triangular form)		
$\begin{alignedat}{2} 2x + y &= 7 \\ \tfrac{1}{2}y &= \tfrac{3}{2} \\ -z &= 1 \end{alignedat}$	$L_2 + \frac{1}{2}L_3 \to L_2$ $L_1 - L_3 \to L_1$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$
$\begin{alignedat}{2} 2x + y &= 7 \\ y &= 3 \\ z &= -1 \end{alignedat}$	$2L_2 \to L_2$ $-L_3 \to L_3$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$
$\begin{alignedat}{2} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= -1 \end{alignedat}$	$L_1 - L_2 \to L_1$ $\frac{1}{2}L_1 \to L_1$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

接著用這種方法算反矩陣

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$[I|B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

但是、對程式人來說

- 與其算到手斷掉
- 還不如寫個程式

像這樣就做完了

```
for k = 1 ... min(m,n):
  Find the k-th pivot:
  i_max  := argmax (i = k ... m, abs(A[i, k]))
  if A[i_max, k] = 0
    error "Matrix is singular!"
  swap rows(k, i_max)
  Do for all rows below pivot:
  for i = k + 1 ... m:
    m := A[i, k] / A[k, k]
    Do for all remaining elements in current row:
    for j = k + 1 ... n:
      A[i, j]  := A[i, j] - A[k, j] * m
    Fill lower triangular matrix with zeros:
    A[i, k]  := 0
```

如果學這些數學

- 可以搭配程式的話
- 那一次還可以學到兩種東西
- 一舉兩得

這樣

- 手就不會斷掉了！

因為線性代數

- 重要的並不是那些計算

而是那些數學概念

舉例而言

- 當初 Google 之所以在搜尋引擎領域異軍突起
- 除了他駕馭幾萬台電腦的超級規模化技術之外
- 還有個重要的技術

那個技術

- 稱為　PageRank
- 是用來衡量網頁重要性的

透過 PageRank

- Google 讓重要的網頁排在前面
- 不重要的排在後面

這個方法

- 說穿了很簡單
- 其實就是《數一數》每一頁被幾個連結連到
- 《被連結數》越多的網頁就越重要

不過

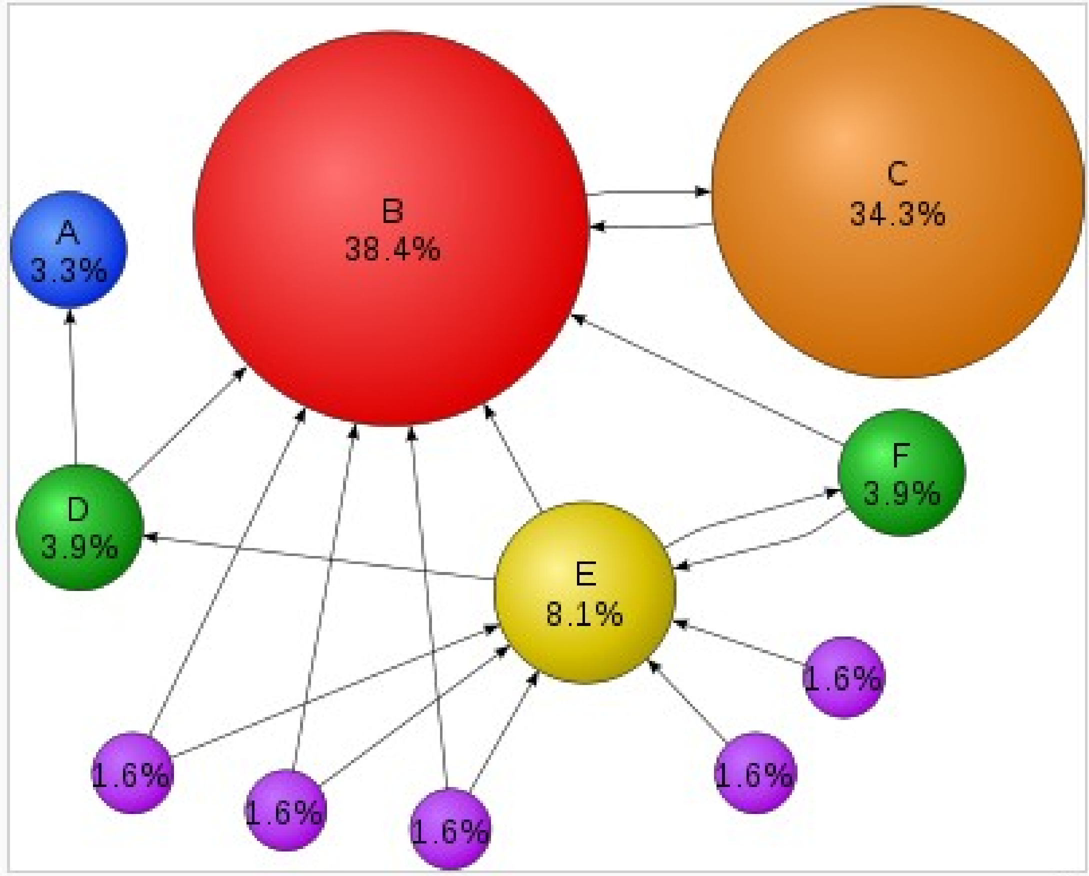
- 單純的計算《被連結數》有個缺點
- 那就是你可以產生數百萬連結連到自己的某個網頁
- 那你的這個網頁就變得超重要

為了避免這種偷吃步

- Google 決定為每個網頁加上重要性
- 像是 Yahoo 的首頁重要性就很高
- 而其他個人網誌的重要性就很低

PageRank 的目標圖示如右

- 其中 B, C 是重要網頁



Mathematical **PageRanks** for a simple network, expressed as percentages. (Google uses a logarithmic scale.) Page C has a higher PageRank than Page E, even though there are fewer links to C; the one link to C comes from an important page and hence is of high value. If web surfers who start on a random page have an 85% likelihood of choosing a random link from the page they are currently visiting, and a 15% likelihood of jumping to a page chosen at random from the entire web, they will reach Page E 8.1% of the time. (The 15% likelihood of jumping to an arbitrary page corresponds to a damping factor of 85%.) Without damping, all web surfers would eventually end up on Pages A, B, or C, and all other pages would have PageRank zero. In the presence of damping, Page A effectively links to all pages in the web, even though it has no outgoing links of its own.

但是網頁有那麼多

- 哪能用手一個一個設呢？
- 所以當然要自動化
- 用程式來算網頁的重要性

假如第 i 個網頁用 Pi 來表示

$$\begin{bmatrix} \ell(p_1,p_1) & \ell(p_1,p_2) & \cdots & \ell(p_1,p_N) \\ \ell(p_2,p_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ell(p_i,p_j) & \\ \ell(p_N,p_1) & \cdots & & \ell(p_N,p_N) \end{bmatrix}$$

網頁 Pi 有連結指向 Pj

而且每一列的總和都為 1

$$\sum_{i=1}^{N} \ell(p_i,p_j) = 1$$

這個矩陣是模仿投票行為的矩陣，每個人所擁有的票數不同，但全部都要投出去。

這樣連續投票很多輪之後

- 每個頁面的權重就會收斂並穩定
- 這種投票行為的迴歸式如下所示

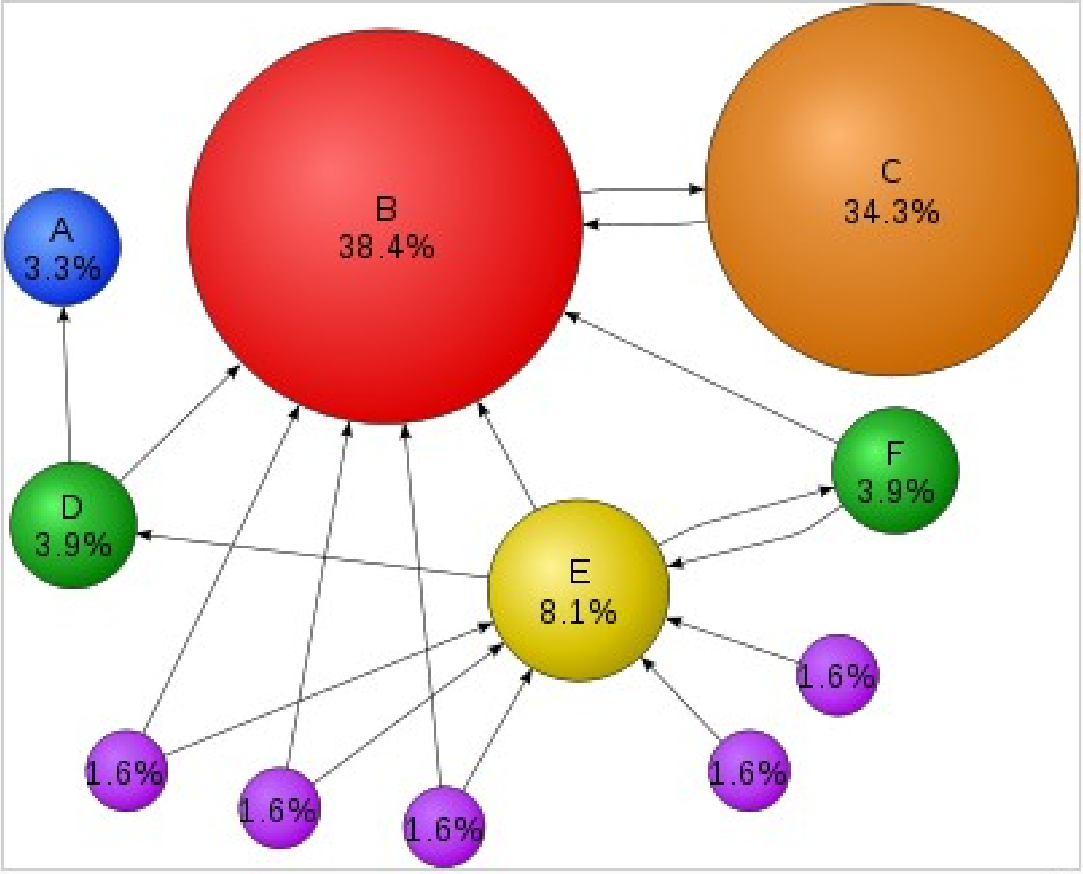
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (1-d)/N \\ (1-d)/N \\ \vdots \\ (1-d)/N \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} \ell(p_1,p_1) & \ell(p_1,p_2) & \cdots & \ell(p_1,p_N) \\ \ell(p_2,p_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ell(p_i,p_j) & \\ \ell(p_N,p_1) & \cdots & & \ell(p_N,p_N) \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

於是你只要寫程式模擬這種過程

- 最後就能算出每個頁面的權重
- 這個權重就是所謂的 PageRank
- PageRank 不容易被自動產生的大量連結所欺騙
- 所以比起單純的計算被連結數好得多
- 而這正是當初 Google 崛起的重要原因之一

PageRank

- 最後可以分配出如右圖的結果了
- 其中 B, C 是重要網頁
- 因為大家都連到 B，然 B 投給 C



Mathematical **PageRanks** for a simple network, expressed as percentages. (Google uses a logarithmic scale.) Page C has a higher PageRank than Page E, even though there are fewer links to C; the one link to C comes from an important page and hence is of high value. If web surfers who start on a random page have an 85% likelihood of choosing a random link from the page they are currently visiting, and a 15% likelihood of jumping to a page chosen at random from the entire web, they will reach Page E 8.1% of the time. (The 15% likelihood of jumping to an arbitrary page corresponds to a damping factor of 85%.) Without damping, all web surfers would eventually end up on Pages A, B, or C, and all other pages would have PageRank zero. In the presence of damping, Page A effectively links to all pages in the web, even though it has no outgoing links of its own.

其實這種迴歸式

- 最後會收斂到
  整個矩陣的《特徵向量》所
  形成的陣列上

也就是下列方程式的解所形成的向量集合

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n1}(\lambda - \lambda_2)^{n2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} = 0.$$

特徵向量可以用來將矩陣對角化

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}$$

然後就可以快速地計算 A^n

$$A^n = \underbrace{(Q\Lambda Q^{-1}) \ldots (Q\Lambda Q^{-1})}_{\text{連乘 } n \text{ 次}} = Q\Lambda^n Q^{-1}$$

對角矩陣， n 次方計算速度超快

而這類的矩陣分解方法

- 在《科學計算》領域有強大的應用
- 只要將這些方法寫成很好的《數值計算》函式庫
- 就能快速解決很多科學上的計算問題

除了上述的特徵分解法之外

- 各位在線性代數裏應該還學過
  - LU 分解： $A = LU$
  - QR 分解： $A = QR$
  - SVD 分解： $A=U\Sigma V^*$

這些分解也都能

- 讓某些計算更為快速
- 於是《科學計算》的速度就可以變得更快。

另外、矩陣的概念

- 是以向量為基礎的
- 向量形成向量空間，可以用來描述真實空間中的力量
- 而這也正是《場》這個概念的由來

如果

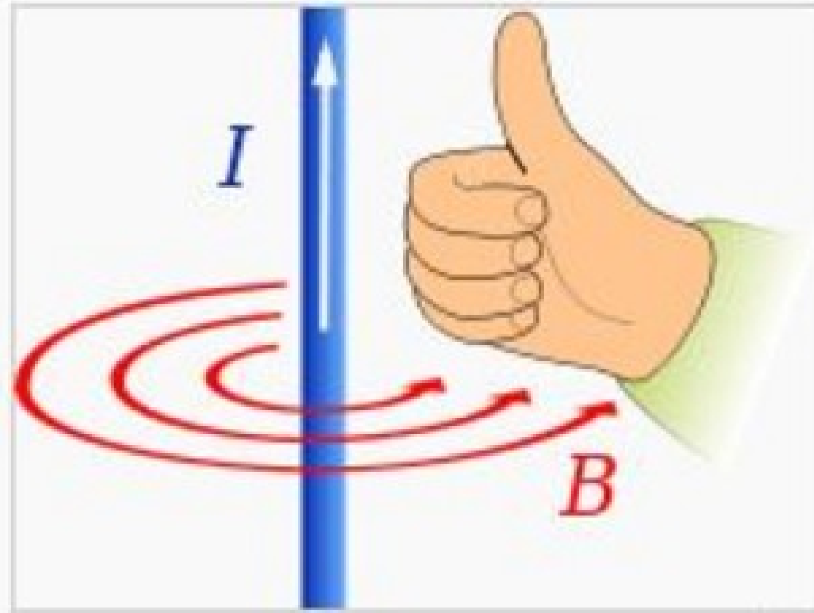
- 我們把《向量》的概念
  - 和微積分結合起來
- 就會形成《向量微積分》這個領域
  - 可以用來描述《向量場》
  - 包含引力場、電場、磁場、電磁波等

向量微積分

- 是用來描述《電磁場》的重要工具
- 而這也是為何《向量微積分》會被放到《工程數學》裏的原因了

不知您是否還記得

- 安培右手定則
- 還有安培定律



安培右手定則：將右手的大拇指指向電流 I 方向，再將其它四根手指握緊電線，則彎曲的方向決定磁場 $\mathbf{B}$ 的方向。

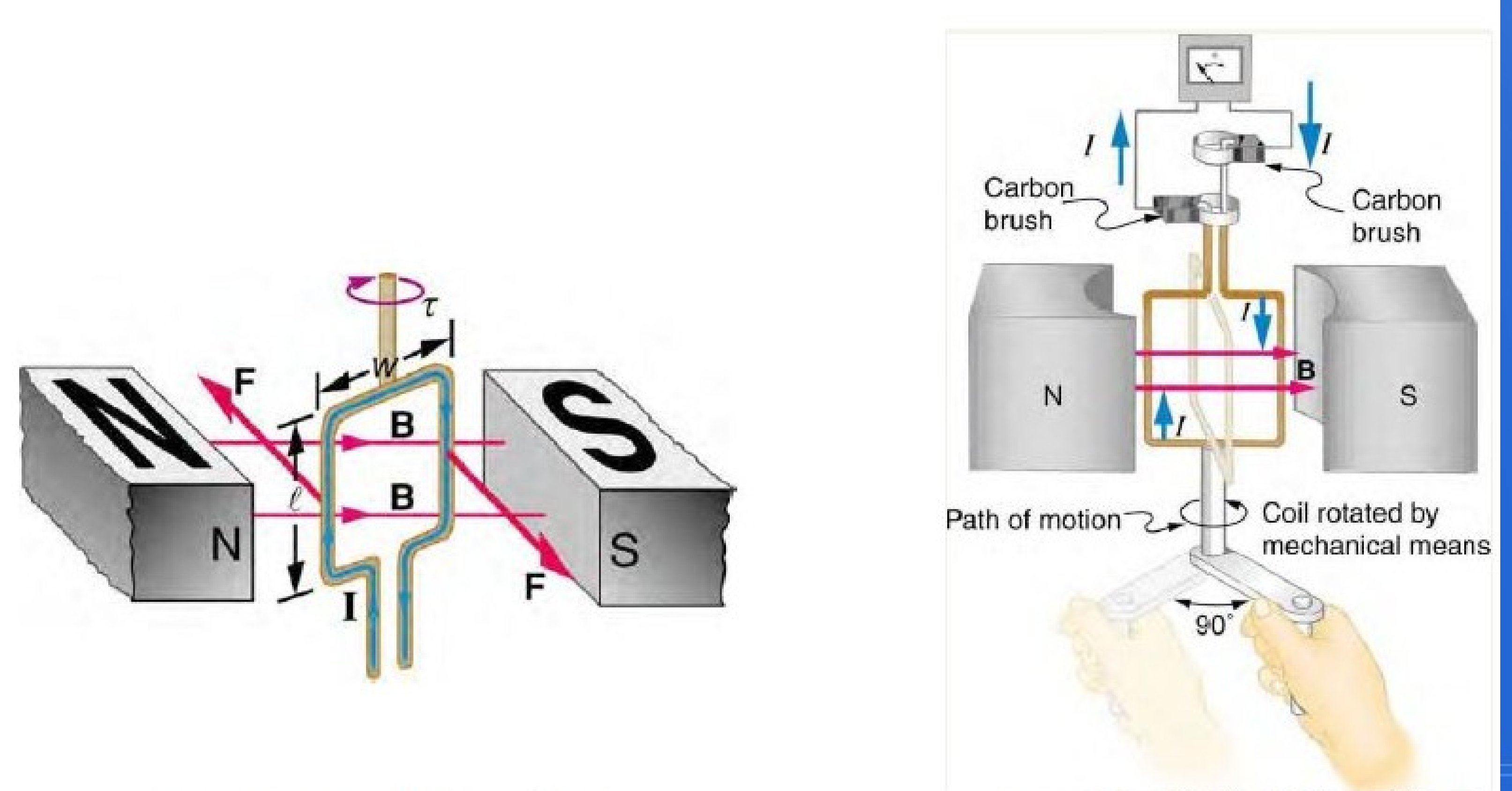
	積分形式	微分形式	「馬克士威-安培方程式」的微分形式
安培定律	$\oint_C B\cdot\vec{dl}=\mu_0 I$	$\nabla\times B=\mu_0 J$	$\nabla\times B=\mu_0 J+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$

法拉第電磁感應定律

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- 任何封閉電路中感應電動勢的大小，等於穿過這一電路磁通量的變化率。

這條定律是可以讓磁生電，是馬達和發電機之所以可以運行的原因。



(a) 馬達的構造示意圖　(b) 發電機的構造示意圖

然後是高斯定律

- 這個高斯就是高斯消去法的那個高斯，那個時代的科學家通常也是數學家。

(3) 高斯定律

$$e = \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}\right).$$

(4) 高斯磁場定律（自然定律）

$$\frac{\partial \mu\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \mu\beta}{\partial y} + \frac{\partial \mu\gamma}{\partial z} = q_m 。$$

最後是集大成的馬克士威

(1) 安培定律

$$\mathfrak{p}_x = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right)、$$
$$\mathfrak{p}_y = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)、$$
$$\mathfrak{p}_z = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)。$$

原安培定律的方程式

$$\mathfrak{p}_x = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{1}{E^2}\frac{\partial Q_x}{\partial t}\right)、$$
$$\mathfrak{p}_y = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{1}{E^2}\frac{\partial Q_y}{\partial t}\right)、$$
$$\mathfrak{p}_z = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{1}{E^2}\frac{\partial Q_z}{\partial t}\right)。$$

修正後的馬克士威 - 安培方程式

(2) 法拉第電磁感應定律

$$\frac{\partial Q_z}{\partial y} - \frac{\partial Q_y}{\partial z} = -\mu\frac{\partial\alpha}{\partial t}、$$
$$-\frac{\partial Q_z}{\partial x} + \frac{\partial Q_x}{\partial z} = -\mu\frac{\partial\beta}{\partial t}、$$
$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} = -\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t}。$$

(3) 高斯定律

$$e = \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}\right).$$

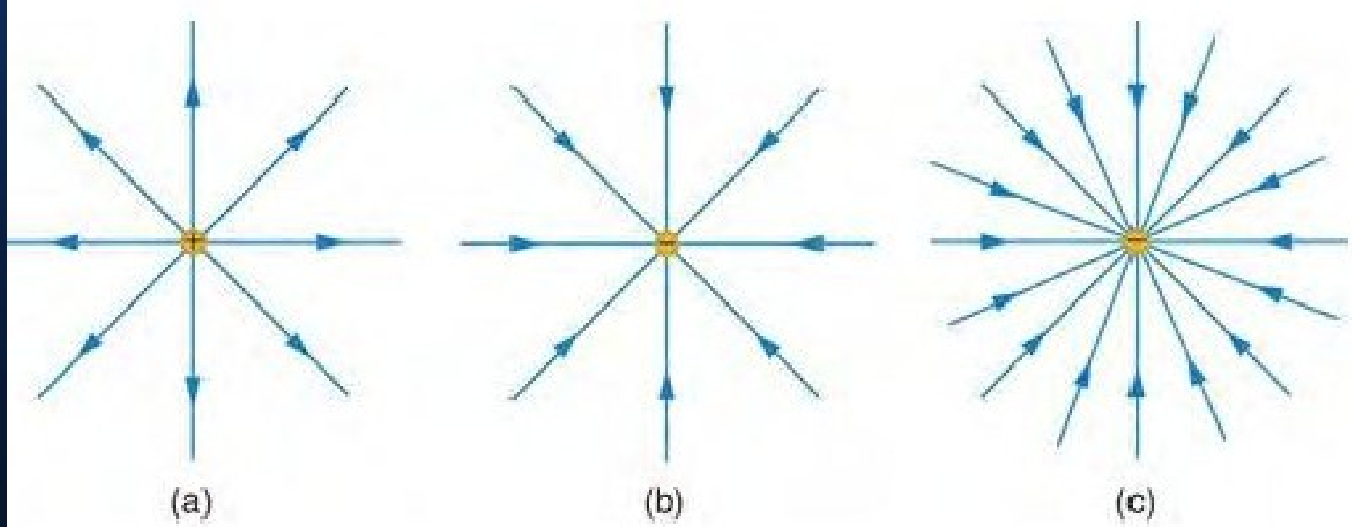
(4) 高斯磁場定律（自然定律）

$$\frac{\partial\mu\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\mu\beta}{\partial y} + \frac{\partial\mu\gamma}{\partial z} = q_m。$$

圖、馬克士威論物理力線中的四大群方程式

這些定律的背後

- 正是向量微積分，所以和矩陣也可以連接起來。
- 或許您還記得，電場與電通量



圖、電場與電通量

這種通量個概念，牽涉到向量的環形積分

定義：通量

$$\Phi_F(S) = \int_S F \cdot \overrightarrow{ds}$$

直覺意義：

1. F 是一個向量場 (例如電場)，S 是一個曲面。
2. $F \cdot \overrightarrow{ds}$ 代表向量場與曲面法向量的內積。
3. 向量場 F 與整個曲面 S 的法向量內積總和，即是通量。
4. 通量大於零 (通量 > 0) 代表有向外發射的傾向。
5. 通量小於零 (通量 < 0) 代表有向內匯集的傾向。

而一個一個非常微小區域的通量密度，就稱為散度

定義：散度

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_S F \cdot \overrightarrow{ds}}{V}$$

直覺意義：

1. F 是一個向量場 (例如電場)，S 是一個封閉曲面，V 是封閉曲面所包圍的體積。
2. $F \cdot \overrightarrow{ds}$ 代表向量場與曲面法向量的內積。
3. $\oint_S F \cdot \overrightarrow{ds}$ 代表封閉曲面 S 的通量。
4. 散度是發散點或內聚點的衡量值。
5. 發散點箭頭向外散射 (散度 > 0)。
6. 內聚點箭頭向內聚射 (散度 < 0)。
7. 散度是單一點的通量密度。

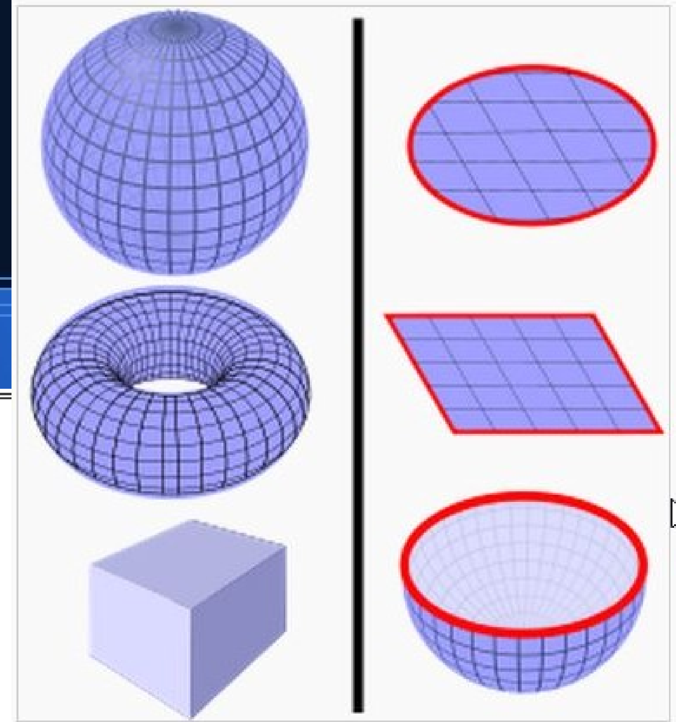
然後那個高斯又出現了

定理：散度定理，又稱「高斯散度定理」。

$$\int_V (\nabla \cdot F) dv = \oint_S F \cdot \overrightarrow{ds}$$

直覺意義：

1. V 是空間中的一個區域，而 S 是 V 的表面。
2. V 區域的散度積分 $\int_V (\nabla \cdot F) dv$ ，等於向量場 F 對 S 的面積分 $\oint_S F \cdot \overrightarrow{ds}$ 。
3. 在電磁學中，這代表我們只要計算通過 S 曲面的向量積分 $\oint_S F \cdot \overrightarrow{ds}$ ，就可以知道 V 區域裏面帶有多少電量。反過來說、只要知道 V 區域帶有多少電量，就知道通過其表面的電力線總共有多少。



散度定理可以用來計算穿過閉曲面的通量，例如，任何左邊的曲面；散度定理不可以用來計算穿過具有邊界的曲面，例如，任何右邊的曲面。在這圖內，曲面以藍色顯示，邊界以紅色顯示。

散度定理

- 正是高斯研究封閉區域向外發射電場之總量的成果

$$\int_V (\nabla\cdot F)dv = \oint_S F\cdot\overrightarrow{ds}$$

- 也是他為何會發現高斯電場定律的原因

(3) 高斯定律

$$e = \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{\partial Q_z}{\partial z}\right)$$

寫成巨型散度運算

(G) 高斯定律

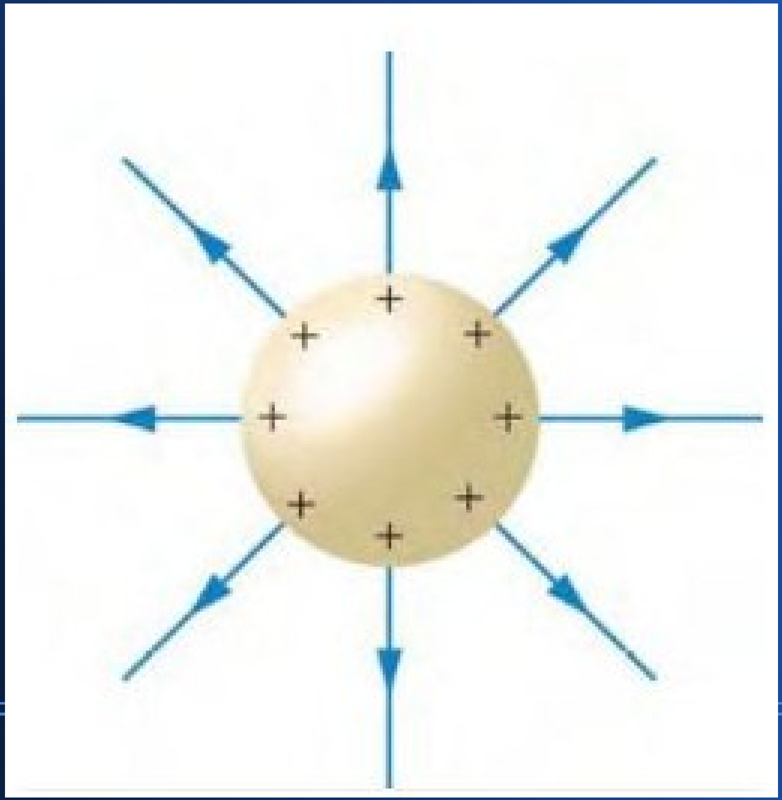
$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho、$$

$\mathbf{D}$ 是電位移，

ρ 是自由電荷密度，

高斯散度定理

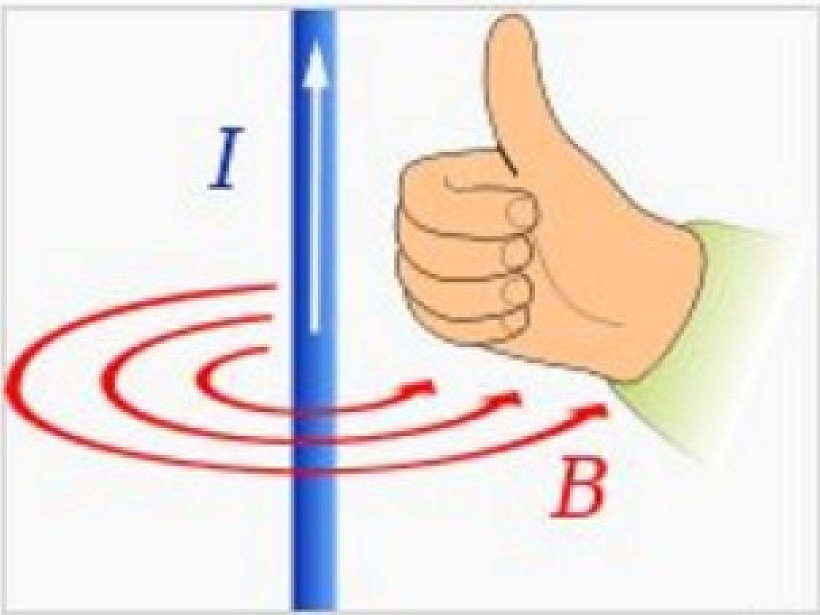
- 其實是說：電場的散度只要算算曲面內的電量就可以算出來了。



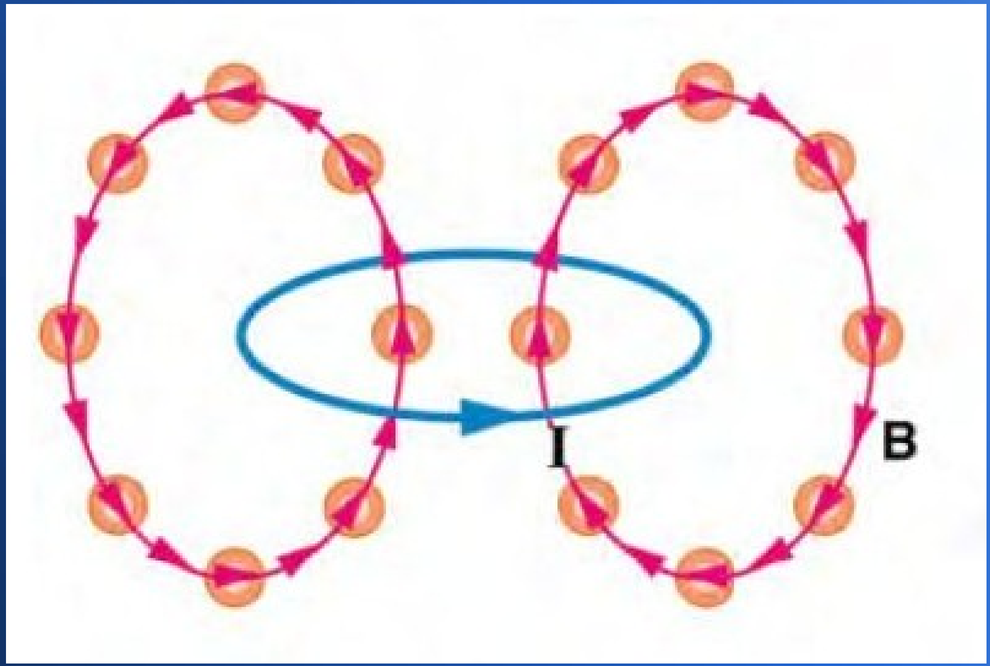
但是這樣還不夠

- 由於電生磁、磁生電的關係
- 要瞭解電磁學還得描述電的流動是如何造成磁場變化？
- 而磁場變化又是如何影響電場的變化的呢？

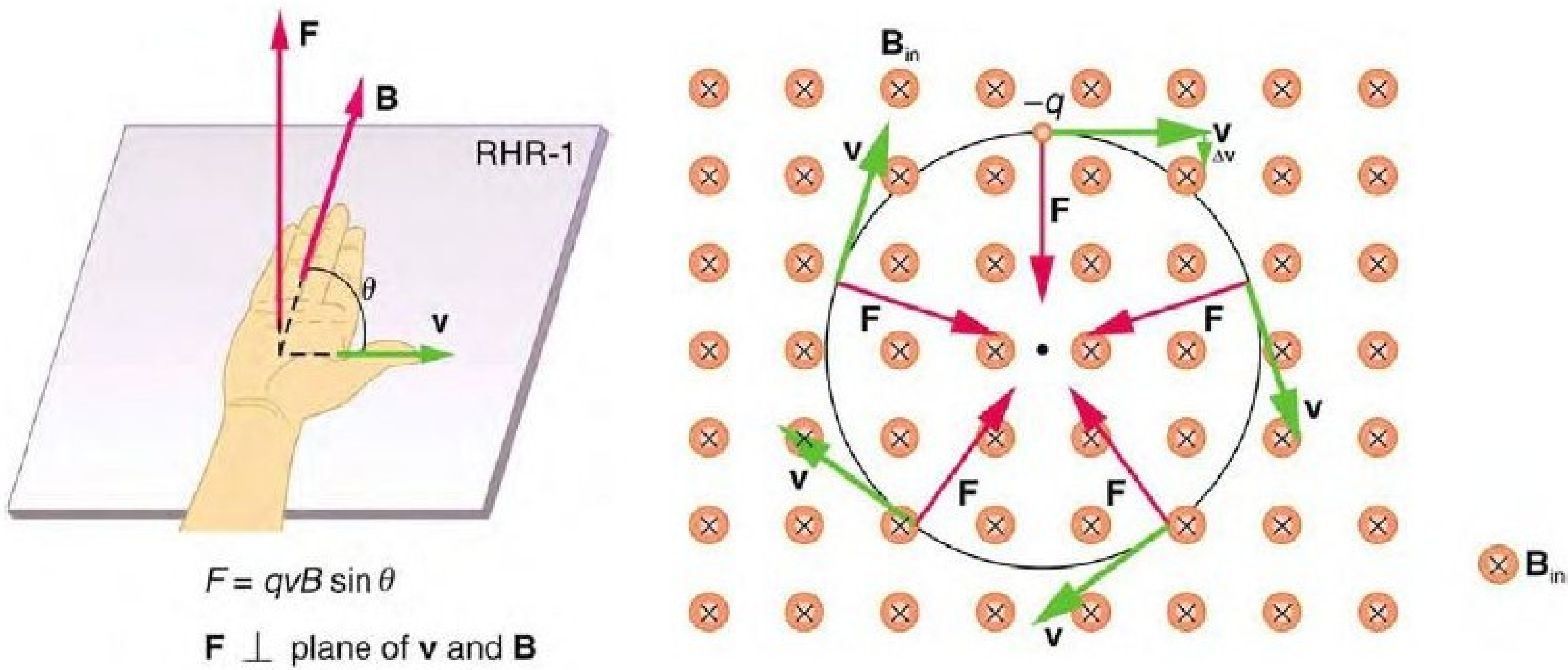
這時候我們必須要描述旋轉的概念



安培右手定則:將右手的大拇指指向電流 I 方向，再將其它四根手指握緊電線，則彎曲的方向決定磁場 B 的方向。

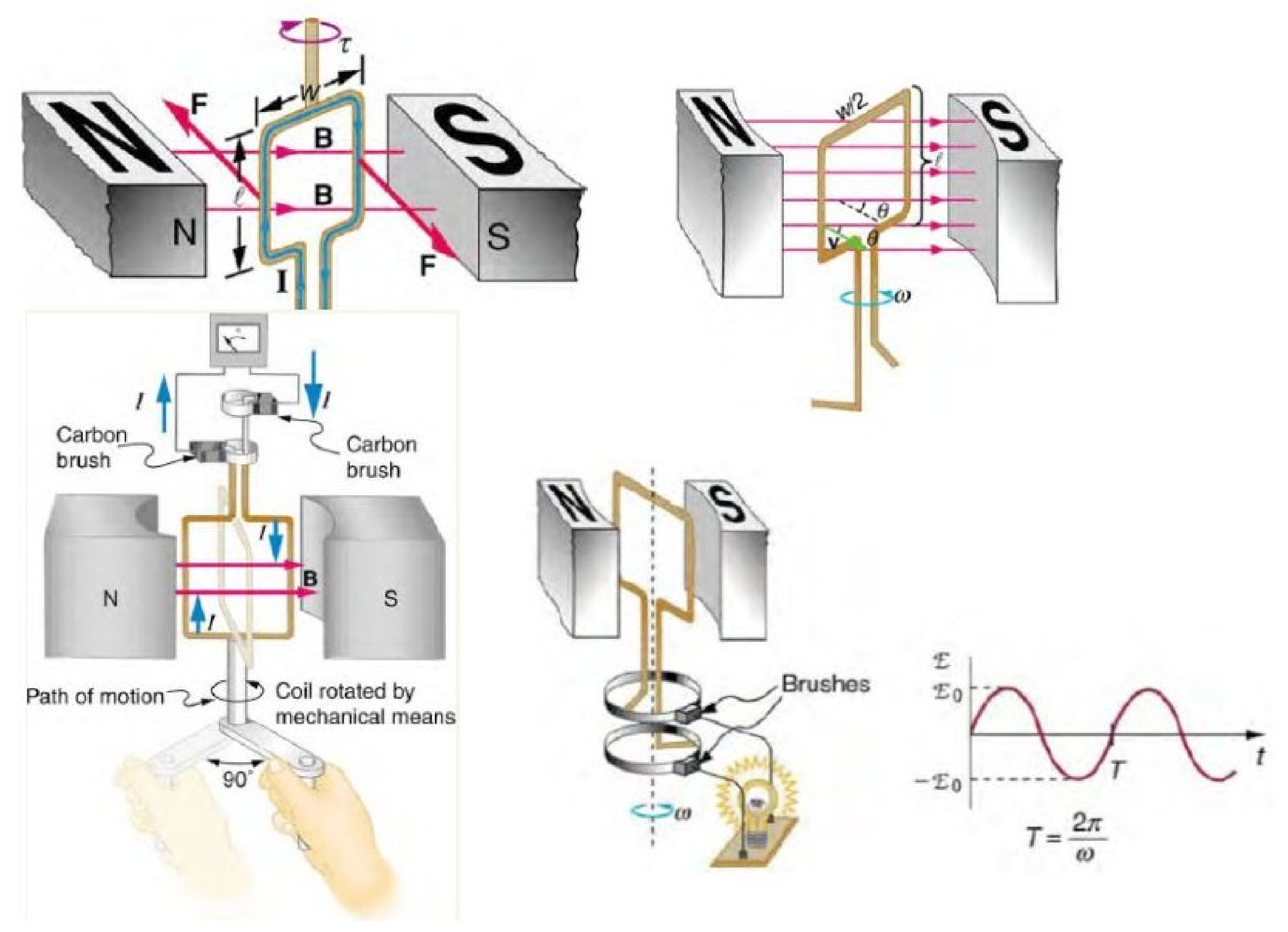


這樣才能描述電和磁之間的互相影響關係



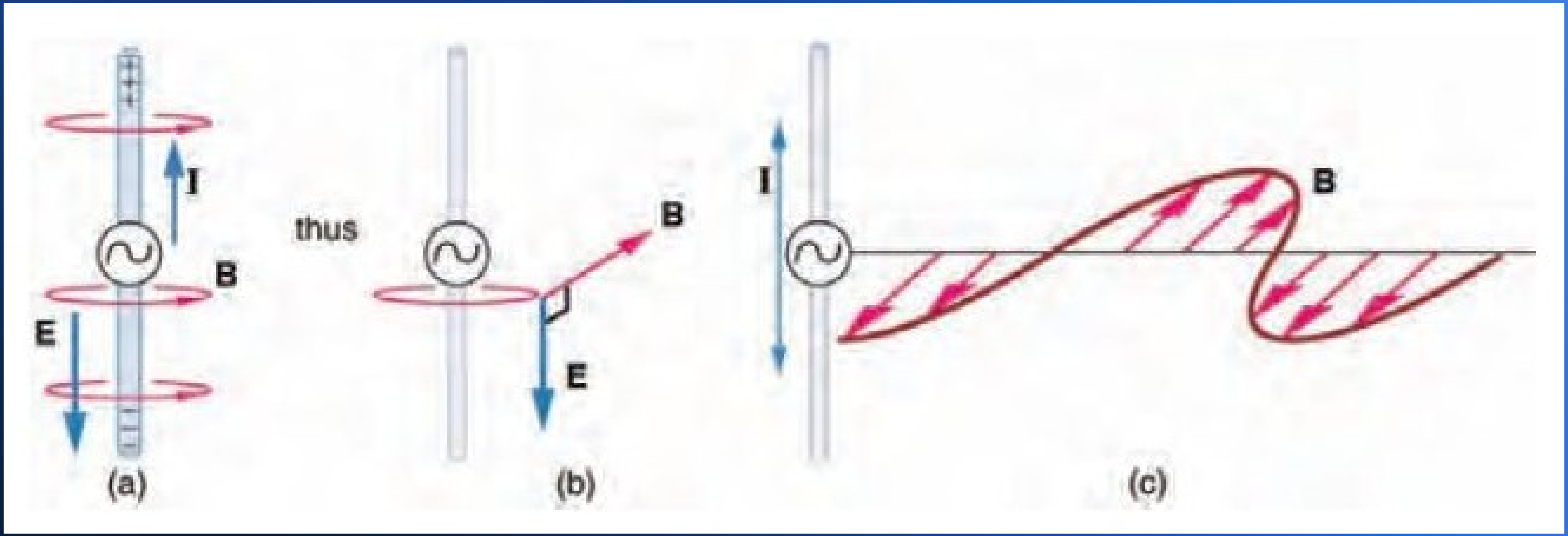
圖、磁場中的電子如何運動？

也才能精確描述電磁效應

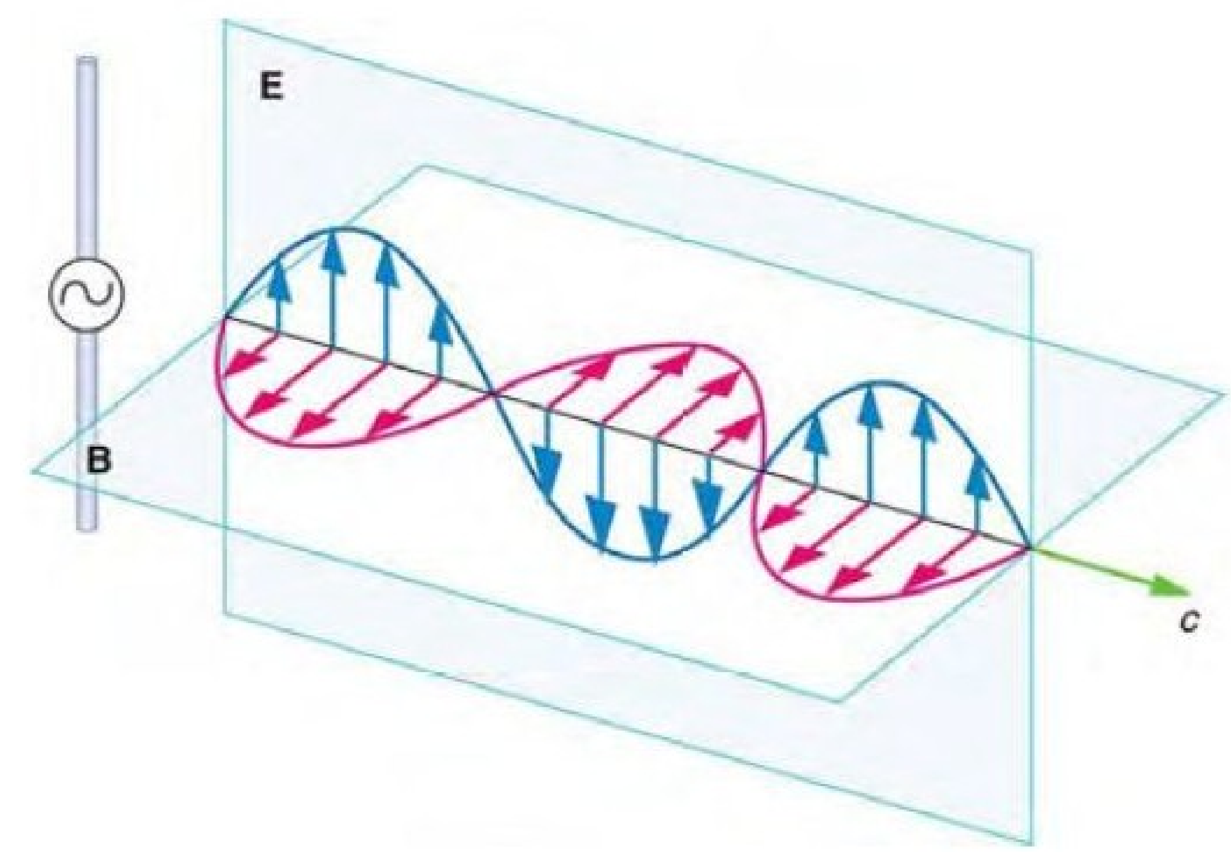


圖、馬達與發電機

特別是描述電磁交互作用所形成的電磁波



想辦法釐清其中的電磁相互影響關係



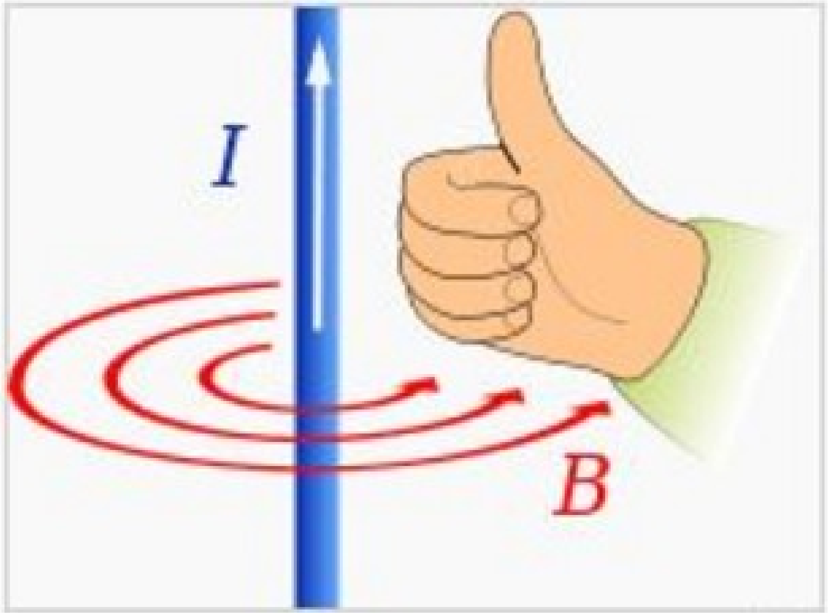
圖、電波與磁波的震盪方向

因此我們必須用數學工具描述

- 磁與電之間的關係

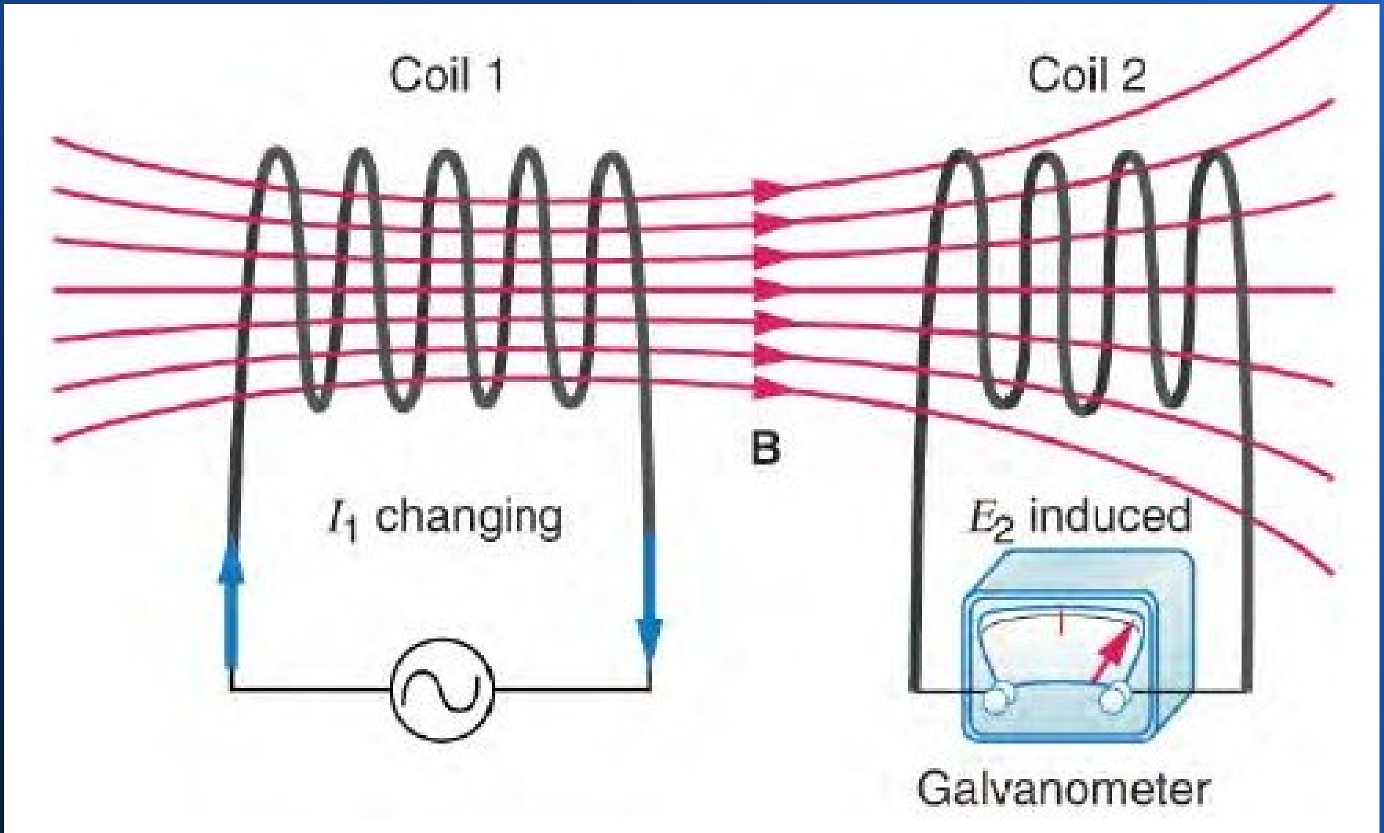
- 這個數學工具就是
  - 向量微積分

像是垂直電流產生環型磁場

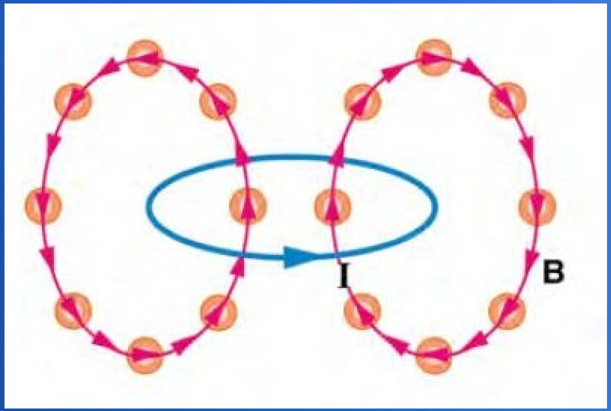


安培右手定則:將右手的大拇指指向電流 I 方向，再將其它四根手指握緊電線，則彎曲的方向決定磁場 B 的方向。

還有環形磁場造成的電流關係



圖、電感的原理



也就是描述

- 《環形力量》與《線性力量》之間的關係

所以數學家們

- 發展出了旋度的概念

旋度的概念

- 其實就是《外積》這個運算的來源

（兩向量的內積代表所夾矩形面積，但外積則是從電磁學裏才能看清楚的）

定義：旋度

$$\nabla \times F = \beta \cdot n = \left(\lim_{C \to 0} \frac{\oint_C F \cdot \vec{dl}}{U}\right) \cdot n$$

直覺意義：

1. F 是一個向量場（例如磁場），C 是一條極小的封閉曲線，U 是 C 所包圍的面積大小。
2. 旋度是環量範圍 C 趨近於零的結果，是某一點的環量除以面積的極限值（環量密度）。
3. 旋度代表被 C 包圍的那一點在方向 n 上的旋轉強度。
4. 旋度與方向 n 有關，在不同的方向旋度也不同。

旋度的概念建築在環量上

- 環量是用來描述環形向量場的一種度量

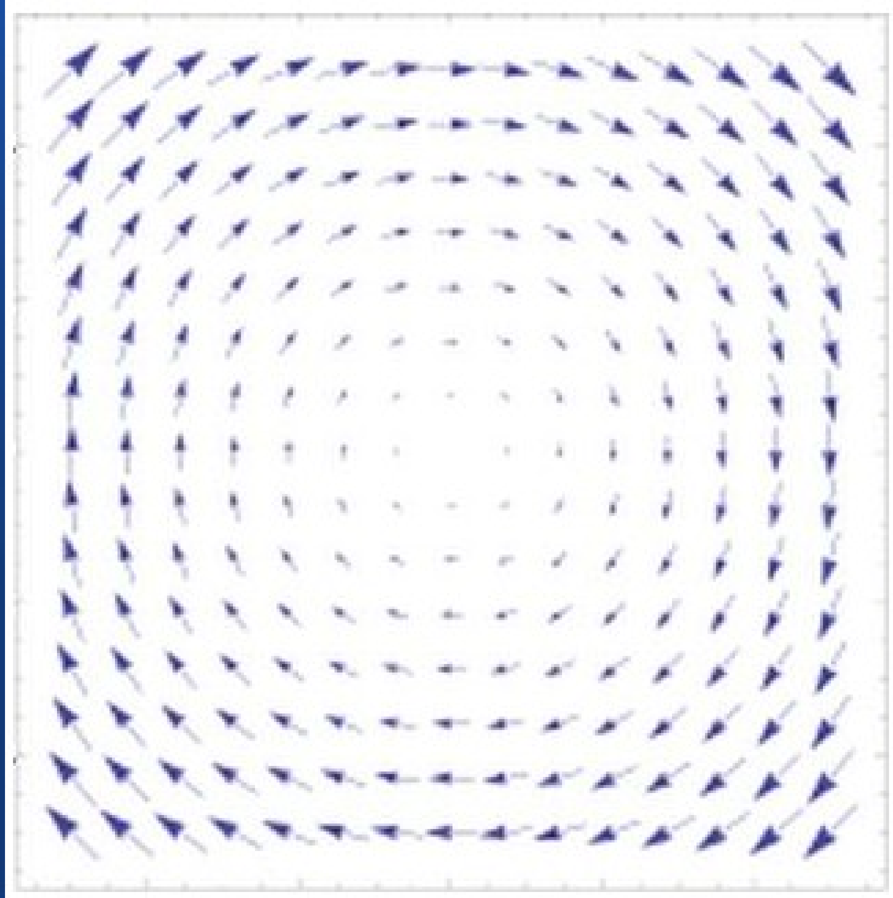
  代表旋轉力量的強度

定義：環量

$$\mathrm{Circ}_{\boldsymbol{F}}(C)=\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\vec{dl}$$

直覺意義：

1. F 是一個向量場 (例如磁場)，C 是一條封閉曲線，$\vec{dl}$ 是曲線邊緣的切線向量。
2. 環量和通量一樣，是描述向量場的重要參數，但環量描述的是旋轉的力量總和，而通量描述的是吸引與排斥的力量總和。
3. 某個區域中的環量不等於零，說明這個區域中的向量場表現出環繞某一點或某一區域旋轉的特性。



圖、環形向量場

斯托克定理是用來計算環量的重要定理

- 也稱為《旋度定理》

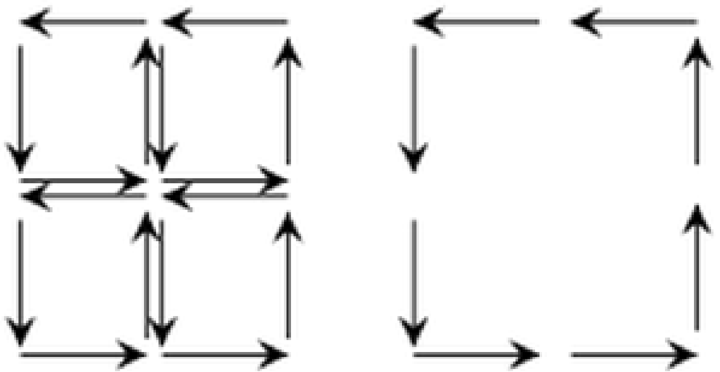
定義：旋度

$$\nabla\times F=\beta\cdot n=(\lim_{C\to 0}\frac{\oint_C F\cdot\vec{dl}}{U})\cdot n$$

直覺意義：

1. F 是一個向量場（例如磁場），C 是一條極小的封閉曲線，U 是 C 所包圍的面積大小。
2. 旋度是環量範圍 C 趨近於零的結果，是某一點的環量除以面積的極限值（環量密度）。
3. 旋度代表被 C 包圍的那一點在方向 n 上的旋轉強度。
4. 旋度與方向 n 有關，在不同的方向旋度也不同。

斯托克定理的證明想法：在下圖中，S 曲面內方格的共用邊向量會互相抵消，於是只要計算延著邊緣環繞線 C 的向量內積總和 $\oint_C F\cdot\vec{dl}$，就可以算出整體的環量 $\int_S(\nabla\times F)\cdot\vec{ds}$。



圖、斯托克定理 (Stokes theorem) 的適用情況

透過散度和旋度的概念

- 馬克士威方程式被黑維賽重新描述如下

定律	微觀公式(使用散度、旋度)	巨觀公式(使用通量、環量)	說明
法拉第定律	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint_{\mathbb{L}}\boldsymbol{E}\cdot\vec{dl}=-\frac{\mathrm{d}\Phi B}{\mathrm{d}t}$	磁通量 B 的變化會產生感應電場 E
安培定律	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint_{\mathbb{L}}\boldsymbol{H}\cdot\vec{dl}=I_f+\frac{\mathrm{d}\Phi D}{\mathrm{d}t}$	電流 J 與電通量變化 $\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ 會產生磁場 H
高斯定律	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$	$\oint_{S}D\cdot\vec{ds}=Q_f$	電荷密度 ρ 決定電通量 D
自然定律	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\oint_{S}B\cdot\vec{ds}=0$	進入任一區域的磁通量一定等於出去的磁通量

而馬克士威所導出的波動方程式

- 也可以重新寫為

$$\nabla^2 E = \mu\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

定律	公式	說明
法拉第定律	$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$	磁場強度 H 的變化會產生感應電場 E
安培定律	$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \epsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$	電流 J 與電場強度 E 的變化 $\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ 會產生磁場 H

推導：波動方程式

根據上述的法拉第定律與安培定律，可推得下列結果

$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla\times(-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}+\epsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})$；

接著假設電流密度為零 $\boldsymbol{J} = 0$ ，於是得到

$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})$；

接著根據迪卡兒座標系統中的 curl of curl 定理 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E}$ ，可得下式

$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\mu\epsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$；

接著假設電荷密度為零 $\rho = 0$ ，那麼根據 $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho = 0$ 可推論 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ ，於是得到：

$\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu\epsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ ；這就是波動方程式了。

根據波動方程式 $\nabla^2 E = \mu\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

- 可導出電磁波的速度公式為 $\sqrt{\mu\epsilon}$

  在真空狀態下的介電率和導磁率分別為

  - 真空介電率 $\varepsilon_0 == 8.854187817 \times 10^{12} F/m$
  - 真空導磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$

- 於是計算出電磁波的速度為

$$\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 8.854187817 \times 10^{12} \times 4\pi \times 10^{-7} = 3 \times 10^8 m$$

以下是光速推論的範例

範例：假設電場 E = P(x,y,z) i + Q(x,y,z) j + R(x,y,z) k ，其中 $P(x,y,z)=A\sin(\omega t-cz)$，而 Q, R 均為 0，那麼那麼請問 c 是多少才會符合波動方程式的解。

解答：

$E=A\sin(\omega t-cz)i+0j+0k$；

$\nabla^2 E=\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}+0+0=-Ac^2\sin(\omega t-cz)$；

$\frac{\partial E}{\partial t}=-A\omega^2\sin(\omega t-cz)$；

接著根據波動方程式 $\nabla^2 E=\mu\epsilon\frac{\partial E}{\partial t}$ ，可以得到下式：

$\nabla^2 E=-Ac^2\sin(\omega t-cz)=\mu\epsilon(-A\omega^2\sin(\omega t-cz))=\mu\epsilon\frac{\partial E}{\partial t}$；

所以可以推論 $c^2=\omega^2\mu\epsilon$.

這也是為何馬克士威推測

- 光是一種電磁波的原因，因為
  - 電磁波的速度 = 光速

您可以看到

- 《方程式求解》導致《矩陣的發明》
- 《矩陣》和《向量》有密不可分的關係，這就是《線性代數》
- 向量和微積分結合，形成了《向量微積分》
- 向量微積分是用來解釋《電磁學》的重要工具
- 於是又進一步發展出了《張量》的概念

從上述的故事中

- 您可以看到數學和物理發展之間的關係
- 而數學和物理，正是西洋科學的兩大支柱

而科學的發展

- 也正是在各個學科和數學的交互作用下，逐漸的強化
- 實現了《理論與實驗》相互促進的正向循環

這種相互促進的正向循環

- 正是西方科學之所以不斷進步的原因

雖然數學是抽象的

- 但是對於我來說
- 太抽象的東西總是難以理解
- 因此我喜歡把數學具象化

這就是為何

- 你會看到這份投影片的原因了！

希望看完之後

- 您對向量、矩陣、線性代數
- 還有電磁學和向量微積分之間
- 會有進一步的認識！

如果是這樣的話

- 那我們的目的就達到了！

當然

- 我們沒有講得很詳細

不過

- 在理解了這些關係之後

或許您會找到一個

有效理解

- 數學和物理學之間關係的出發點！

希望您會喜歡

- 這次的十分鐘系列內容！

再會了！

- 我們下次見！