為何學數學？

陳鍾誠 於金門大學

賈伯斯的演講

- 賈伯斯 2005 年在史丹佛畢業典禮上的演講
  - http://youtu.be/Ip0hG7FXVgs
- 講稿全文：
  - http://teacher.whsh.tc.edu.tw/lichiou/f2blog/index.php?load=read&id=127
  - The first story is about connecting the dots.
    - If I had never dropped out, I would have never dropped in on this calligraphy class, and personal computers might not have the wonderful typography that they do. Of course it was impossible to connect the dots looking forward when I was in college. But it was very, very clear looking backwards ten years later.
    - Again, you can't connect the dots looking forward; you can only connect them looking backwards. So you have to trust that the dots will somehow connect in your future. You have to trust in something — your gut, destiny, life, karma, whatever. This approach has never let me down, and it has made all the difference in my life
  - My second story is about love and loss.
  - My third story is about death.

數學的領域

- 微積分
- 幾何學
- 代數＋數論
- 數理邏輯
- 機率統計

數學的領域

- 微積分
- 幾何學
- 代數＋數論
- 數理邏輯
- 機率統計

無用之用、乃為大用

老子、道德經

數學應用

- 管理數學
- 工程數學
- …

管理數學

- 定義：
  - 研究如何管理與決策的數學
  - 策略選擇、流程制定、資源分配
- 內容：
  - 線性代數
  - 線性規劃
  - 非線性規劃
  - 最佳化理論
  - 圖形理論

離散數學

- 定義：
  - 非連續數學的統稱
  - 研究如何用電腦計算的數學
  - 資料＋函數＝計算
- 內容
  - Boolean 布林
  - Integer 整數
  - Set 集合
  - Relation 關係
  - Computing 計算

微積分

- 定義：
  - 研究連續函數特性的數學
- 內容
  - 微分、積分、級數、複變函數、微分方程

線性代數

- 定義
  - 研究線性函數特性的數學
- 內容
  - 矩陣、特徵值、對角化

機率統計

- 定義
  - 研究不確定現象的數學
- 內容
  - 隨機變數、機率分布、統計檢定、回歸分析

數學迷思

- 迷思一：數學就是算術？
- 迷思二：在菜市場買菜又用不到開根號，那學開根號的方法要幹麻？
- 迷思三：微積分就是用來算面積與斜率的？
- 迷思四：離散數學就是離離散散的數學？

中國文化 *V.S.* 西洋文化

- 中國文化
  - 重人輕物
    - 仁
  - 重整體
    - 差不多精神
    - 元氣論
- 西洋文化
  - 追根究底
    - Why ？
  - 重分工
    - 精確
    - 原子論

數學是甚麼

- 數學乃是用極精準的方式研究 Why 的學問？

管理數學

- 核心：
  - 如何極精準的描述決策、作業、流程、資源分配等管理活動

離散數學

- 核心
  - 如何極精準的描述機械性計算
  - 包含資料表達、計算推理等等…

數學的力量

- 當你極精準的描述某些問題之後，經常可以進行深入的探索，因而發現一些表面所看不出來的現象，而使學問進一步發展。

數學力量的範例

- 微積分是影像檔壓縮的基礎
- 布林代數是電腦軟硬體的基礎
- 用邏輯可以推論出電腦能力的極限

微積分與影像壓縮
－ *JPEG* 的壓縮原理

微積分是影像檔壓縮的基礎

- 微積分
  - 多項式連續微分
  - 泰勒展開式
  - 三角函數的泰勒展開式
  - 傅利葉級數
  - cosine transform

→ JPEG 檔案

多項式

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k * x^k \quad \text{---} \ (1)$$

多項式連續微分

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = c_1 + c_2*2*x + c_3*3*x^2 + c_4*4*x^3 + \ldots$$

$$f''(x) = \frac{d\,f'(x)}{dx} = c_2*2*1 + c_3*3*2*x + c_4*4*3*x^2 + \ldots$$

$$f'''(x) = \frac{d\,f''(x)}{dx} = c_3*3*2*1 + c_4*4*3*2*x + \ldots$$

...

$$f^k(x) = \frac{d\,f^{k-1}(x)}{dx} = c_k\,k! + c_{k+1}\,(k+1)!\,x + \ldots$$

$$c_k = \frac{f^k(0)}{k!}$$

泰勒展開式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{k}(0)}{k!}x^{k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(0)}{k!}x^{k} \quad \text{---} \ (2)$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \dots + \frac{f^{k}(a)}{k!}x^{k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(a)}{k!}x^{k} \quad \text{---} \ (3)$$

e^{ix} 的泰勒展開式

$$e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \text{---} (4)$$

三角函數的泰勒展開式

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{---} \ (5)$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \text{---} \ (6)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\ \sin(x)$$

$$e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \text{---} \ (4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad \text{---} \ (5)$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \quad \text{---} \ (6)$$

以三角函數逼近

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \text{ --- } (8)$$

$$\cos(nx) + i \sin(nx) = e^{inx}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{inx} \text{ --- } (9)$$

傅利葉級數

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{inx} \quad \text{---} \ (9)$$

傅立葉級數的係數

$$F_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{itx}\, dx \quad \text{---} (10)$$

傅立葉級數的係數 – 離散狀況

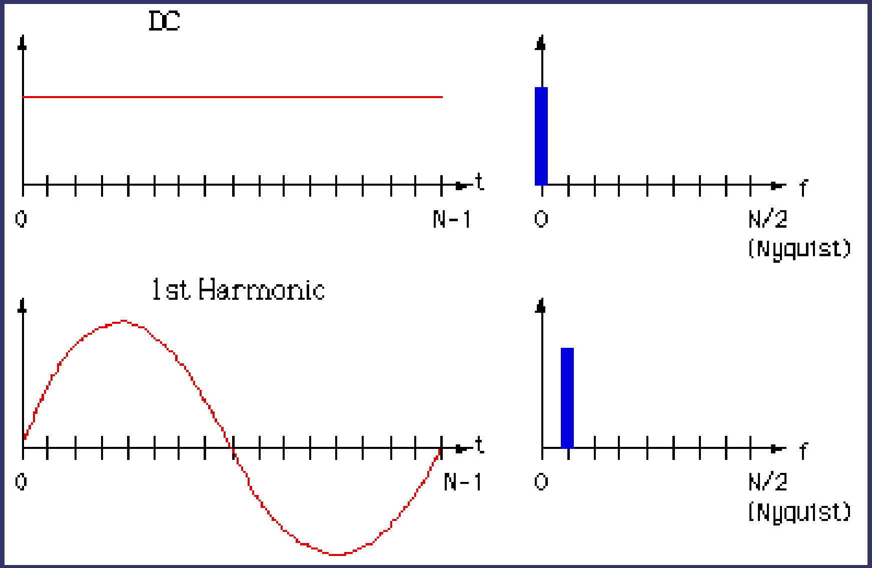
$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-ik\,2\pi\, n/N} \quad \text{-- (11)}$$

Fi 與 ai，bi 間的關係

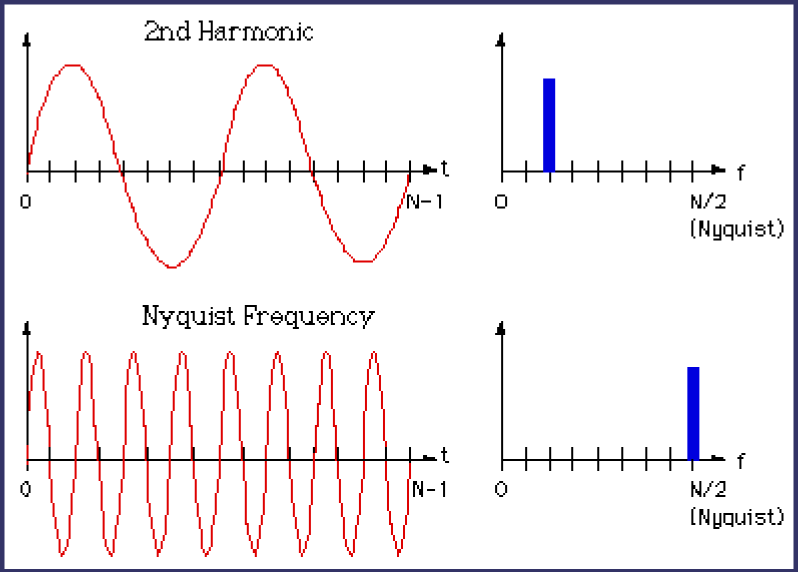
$$F_0 = \frac{1}{2} a_0 \quad F_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

$$a_0 = 2c_0 \quad a_n = F_n + F_{-n} \quad b_n = i(F_n - F_{-n})$$

傅立葉轉換的圖形

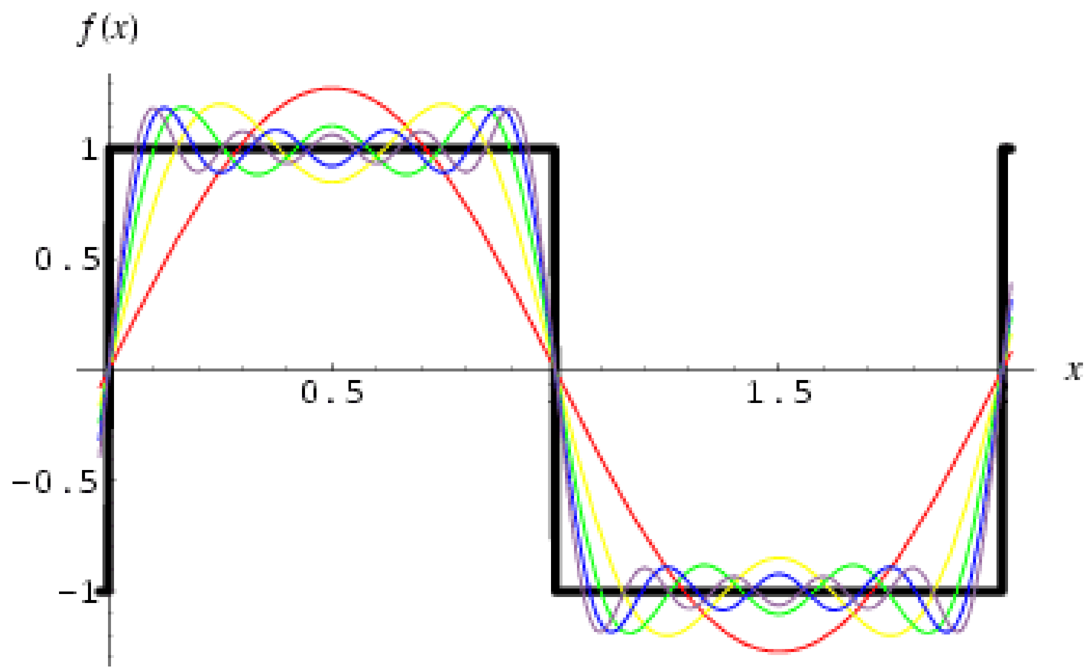


DC
0
N-1
t
0
N/2
(Nyquist)
f
1st Harmonic
0
N-1
t
0
N/2
(Nyquist)
f



2nd Harmonic
0
N-1
t
0
N/2
(Nyquist)
f
Nyquist Frequency
0
N-1
t
0
N/2
(Nyquist)
f

傅立葉逼近法



紅色線代表 c1 sin(1x)

黃色線代表 c1 sin(1x)+c2 sin(2x)

綠色線代表 c1 sin(1x)+c2 sin(2x)+c3 sin(3x)

藍色線代表 c1 sin(1x)+c2 sin(2x)+c3 sin(3x)+c4 sin(4x)

逆向傅立葉轉換

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{i2\pi xt}\, dt \quad \text{--- (12)}$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\, e^{i2\pi k\frac{n}{N}} \quad \text{--- (13)}$$

用邏輯可以推論出電腦能力的極限

- 邏輯悖論
  - 理髮師問題

- 電腦能力的極限
  - 停止問題 (Halting Problem)

邏輯悖論 － 理髮師問題 (1)

- 有一個理髮師，宣稱為所有不自己剪頭髮的人剪髮，但不為自己剪頭髮的人剪髮
- 請問：該理髮師說的有可能是真的嗎？

邏輯悖論 － 理髮師問題 (2)

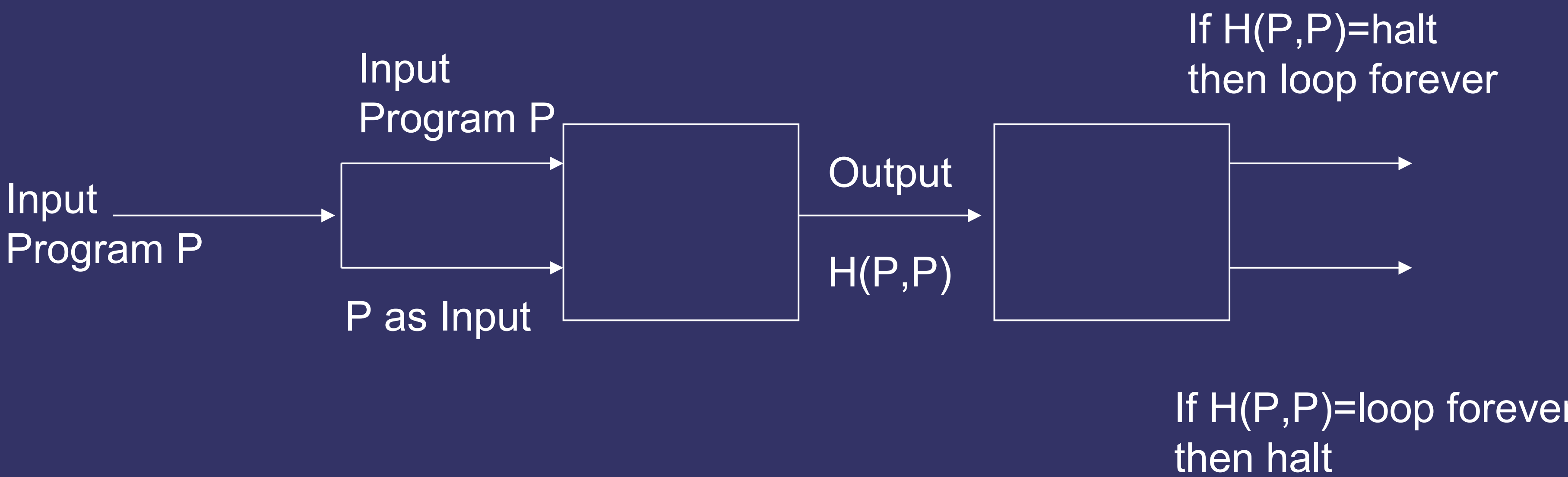
- 若該理髮師為自己剪髮，則該理髮師為一個自己剪髮的人剪髮，因而不符合宣稱的行為
- 若該理髮師不為自己剪髮，則該理髮師漏掉一個人，因而不符合宣稱的『所有』

電腦能力的極限 － 停止問題

- 若將資料 I 輸入到程式 P，則會有兩種可能的情形
  - 在某個時間後停止了
  - 永遠不會停止 （當機了）

- Halting Problem :
  - 我們能否設計一個程式H，判斷 P 在輸入 I 後會不會當機

Halting Problem 圖解



Halting Problem 的數學描述

- H(P,I) ="halt"   if P(I) halt
          ="loop forever" if P(I) loop forever

- 假如 H 存在，則我們可以建立一個程式 K，使得

  K(P) = if H(P,P)="halt" then loop forever
                          else halt

- 如此、請問 H(K,K) 應該是甚麼呢？

Halting Problem 不可解

- If H(K,K)="halt" K(K) loop forever

- If H(K,K)="loop forever"   K(K) halt

- H is not correct anyway.

用 *Java* 說明

```
String K(String P)
{
    if  H(P, P) == "halt"
    {
        while (true)
        {
        }
    }
    else
    {
    }
}
```

If K(K) loop forever
H(K,K) = “halt”

If K(K) halt
H(K,K) ≠ “halt”