Semester Awal 2024/2025

Sistem Persamaan Linear (SPL)

(Week 2)

Aljabar Linear

Bentuk umum SPL

- Linear: pangkat tertinggi di dalam variabelnya sama dengan 1
- Sebuah SPL dengan *m* buah persamaan dan *n* variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ berbentuk:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

atau dalam bentuk A**x** = **b**

- SPL dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk perkalian matriks:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Matriks *Augmented*

- SPL dapat dinyatakan secara ringkas dalam bentuk matriks *augmented*:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

- Contoh:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer (OBE)

- Tiga operasi baris elementer terhadap matriks *augmented*:
  1. Kalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol.
  2. Pertukarkan dua buah baris.
  3. Tambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya.

Operasi Baris Elementer (OBE)

- Solusi sebuah SPL diperoleh dengan menerapkan OBE pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris (REF) atau matriks eselon baris tereduksi (RREF).

- Jika berakhir pada matriks eselon baris (REF) → metode eliminasi Gauss

  Jika berakhir pada matriks eselon baris tereduksi (RREF) → metode eliminasi Gauss-Jordan

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Wilhelm Jordan (1842–1899)

Historical Note Although versions of Gaussian elimination were known much earlier, the power of the method was not recognized until the great German mathematician Carl Friedrich Gauss used it to compute the orbit of the asteroid Ceres from limited data. What happened was this: On January 1, 1801 the Sicilian astronomer Giuseppe Piazzi (1746–1826) noticed a dim celestial object that he believed might be a "missing planet." He named the object Ceres and made a limited number of positional observations but then lost the object as it neared the Sun. Gauss undertook the problem of computing the orbit from the limited data using least squares and the procedure that we now call Gaussian elimination. The work of Gauss caused a sensation when Ceres reappeared a year later in the constellation Virgo at almost the precise position that Gauss predicted! The method was further popularized by the German engineer Wilhelm Jordan in his handbook on geodesy (the science of measuring Earth shapes) entitled *Handbuch der Vermessungskunde* and published in 1888.
[*Images: Granger Collection (Gauss); wikipedia (Jordan)*]

Metode Eliminasi Gauss

1. Nyatakan SPL dalam bentuk matriks *augmented*
2. Terapkan OBE pada matriks *augmented* sampai terbentuk matriks eselon baris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim \mathrm{OBE} \sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

3. Pecahkan persamaan yang berkoresponden pada matriks eselon baris dengan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*)

Contoh 1: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\
4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\
-2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\overset{R1/2}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\underset{R3+2R1}{\overset{R2-4R1}{\sim}}
\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}
$$

$$
\overset{R2/(-2)}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}
\overset{R3-6R2}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix}
\overset{R3/(-5)}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
$$

Keterangan: R1 = baris ke-1, Rn = baris ke-n

Matriks eselon baris

Dari matriks *augmented* terakhir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

diperoleh persamaan-persamaan linear sbb:

$x_1 + 3/2x_2 – 1/2x_3 = 5/2$ (i)

$x_2 + 1/2x_3 = 7/2$ (ii)

$x_3 = 3$ (iii)

Selesaikan dengan teknik penyulihan mundur sbb:

(iii) $x_3 = 3$

(ii) $x_2 + 1/2x_3 = 7/2 \rightarrow x_2 = 7/2 – 1/2(3) = 2$

(i) $x_1 + 3/2x_2 – 1/2x_3 = 5/2 \rightarrow x_1 = 5/2 – 3/2 (2) – 1/2 (3) = 1$

Solusi: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

Contoh 2: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10$$
$$3x_1 - x_2 + 6x_3 = 15$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 10 \\ 3 & -1 & 6 & 15 \end{bmatrix} \underset{R3-3R1}{\overset{R2-2R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; R3/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *augmented* yang terakhir diperoleh persamaan sbb:

$$x_2 \qquad = 0$$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$ → $x_1 = 5 + x_2 - 2x_3 = 5 + 0 - 2x_3 = 5 - 2x_3$ → banyak nilai x_3 yang memenuhi

Misalkan $x_3 = r$ maka $x_1 = 5 - 2r$, $r \in R$

Solusi: $x_1 = 5 - 2r$, $x_2 = 0$, $x_3 = r$; $r \in R$ → solusi dalam bentuk parametrik

Contoh 3: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad + 2x_5 \quad\quad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \quad\quad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \quad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim} \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh tiga persamaan sbb:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1 \qquad \text{(ii)}$$

$$x_6 = 1/3 \qquad \text{(iii)}$$

Selesaikan dengan teknik penyulihan mundur sbb:

(iii) $x_6 = 1/3$

(ii) $x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1 \rightarrow x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6$

$= 1 - 2x_4 - 3(1/3)$

$= 1 - 2x_4 - 1$

$= -2x_4$

(i) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \rightarrow x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$

$= -3x_2 + 2(-2x_4) - 2x_5$

$= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$

Misalkan $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, dengan $r, s, t \in R$, maka solusi SPL adalah:

$x_1 = -3r - 4s - 2t$; $x_2 = r$; $x_3 = -2s$; $x_4 = s$; $x_5 = t$; $x_6 = 1/3$

dengan $r, s, t \in R$

Contoh 4: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\
2x_1 + 2x_2 \quad &= 2 \\
3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\underset{R3 - 3R1}{\overset{R2 - 2R1}{\sim}}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R2/(-2)}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R3 + 2R2}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh persamaan-persamaan linear sbb:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \quad &\text{(i)} \\
x_2 + x_3 &= 0 \quad &\text{(ii)} \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= -1 \quad &\text{(iii)}
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (iii), tidak ada x_1, x_2, dan x_3 yang memenuhi $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$.
Dengan kata lain, SPL tersebut tidak memiliki solusi!

Contoh 5: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss

$$-2b + 3c = 1$$
$$3a + 6b - 3c = -2$$
$$6a + 6b + 3c = 5$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{R1/(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{R3 - 6R1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \overset{R2/(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \overset{R3 + 6R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *augmented* yang terakhir, persamaan pada baris ketiga adalah:

$$0a + 0b + 0c = 6$$

Tidak ada a, b, dan c yang memenuhi $0a + 0b + 0c = 6$. Dengan kata lain, SPL tersebut tidak memiliki solusi!

Tiga Kemungkinan Solusi SPL

Kemungkinan Solusi SPL

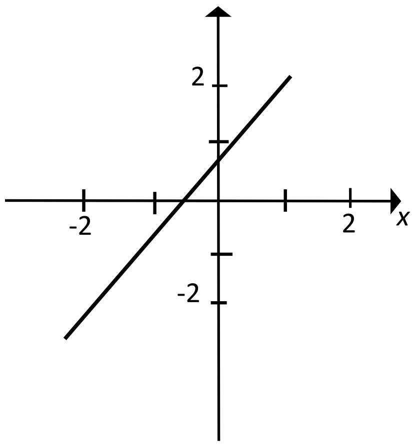
- Ada tiga kemungkinan solusi yang dapat terjadi pada SPL:

  a. mempunyai solusi yang unik (tunggal),

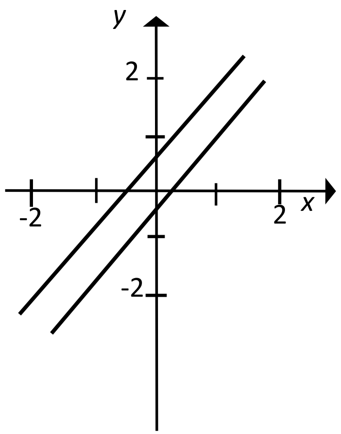
  b. mempunyai banyak solusi (tidak berhingga), atau

  c. tidak ada solusi sama sekali.

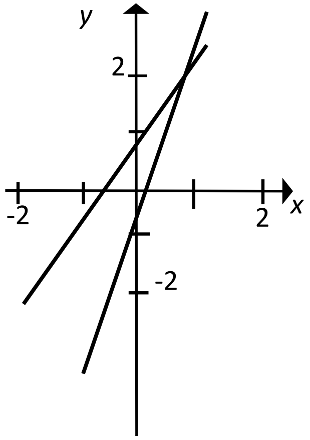
- Untuk SPL dengan dua persamaan linear:



(a) Solusi banyak
$-x + \quad y = 1$
$-2x + 2y = 2$

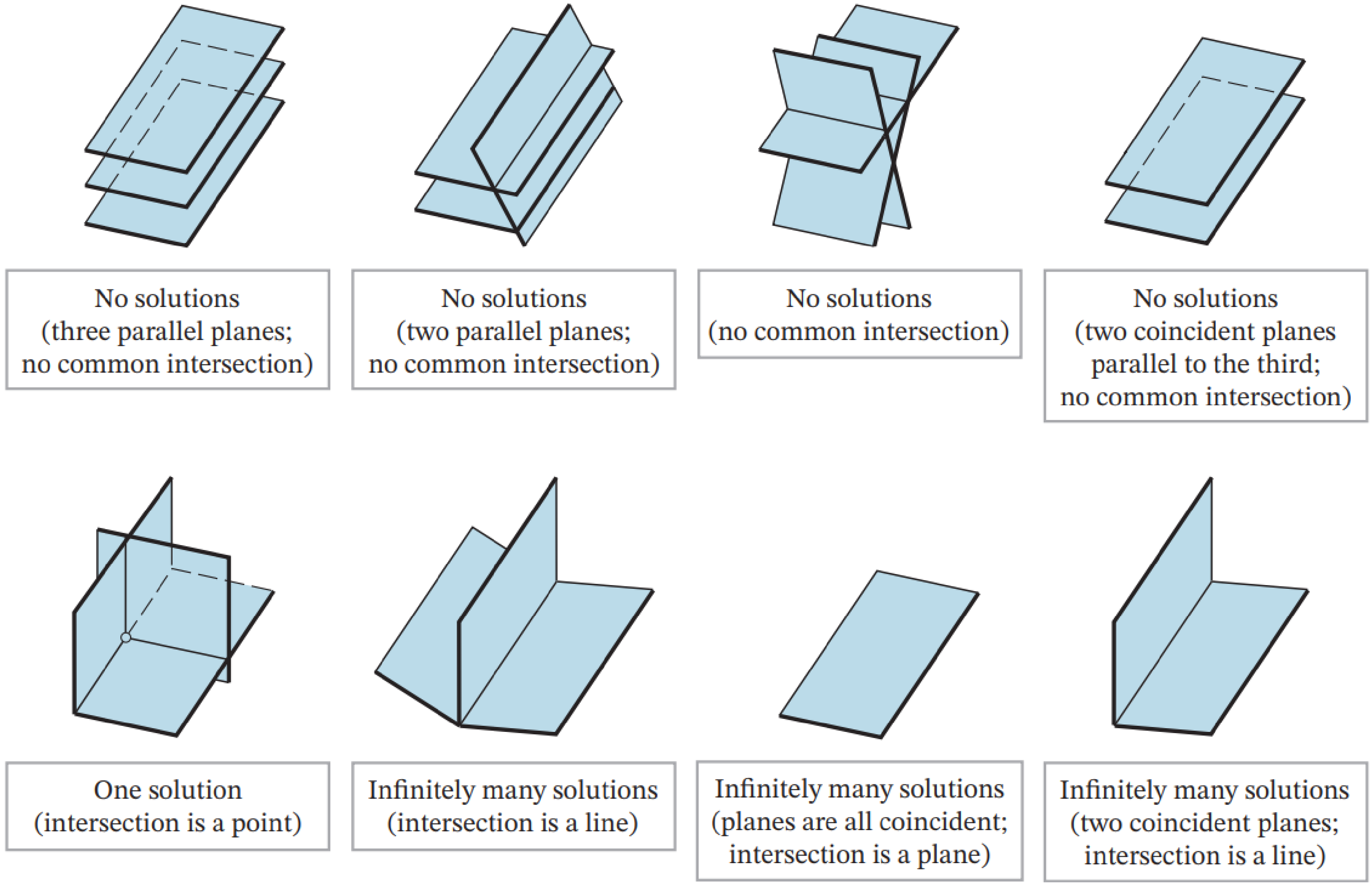


(b) Solusi tidak ada
$-x + y = 1$
$-x + y = 0$



(c) Solusi unik
$-x + y = 1$
$2x - y = 0$

• Untuk SPL dengan tiga persamaan dan tiga peubah (variable):



1. **Solusi unik/tunggal**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$

2. Solusi banyak/tidak terhingga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

yang dipenuhi oleh banyak nilai x. Solusinya diberikan dalam bentuk parameter:

Misalkan $x_3 = k$,
maka $x_2 = 2 - k$ dan $x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 = 4 - (2 - k) - 2k = 2 - k$,
dengan $k \in R$. Terdapat tidak berhingga nilai k.

3. Tidak ada solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

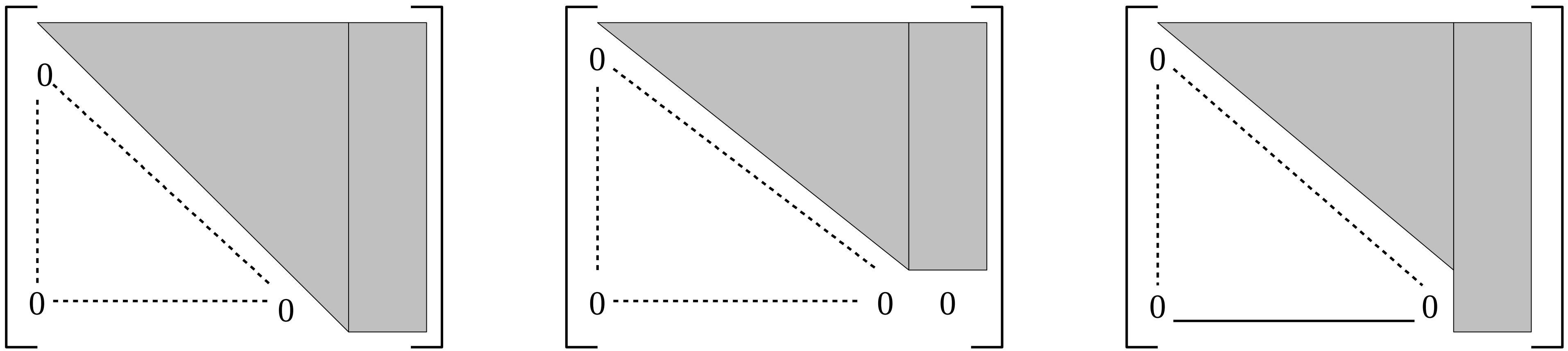
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

yang dalam hal ini, tidak nilai x_i yang memenuhi, $i = 1, 2, 3$

- Untuk SPL dengan lebih dari tiga persamaan linear, tidak terdapat tafsiran geometrinya seperti pada SPL dengan dua atau tiga buah persamaan.

- Namun, kita masih dapat memeriksa masing-masing kemungkinan solusi itu berdasarkan pada bentuk matriks akhirnya.

- Bentuk akhir matriks setelah eliminasi Gauss untuk ketiga kemungkinan solusi di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Solusi unik | Solusi banyak | Tidak ada solusi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Latihan 1

Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi Gauss

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

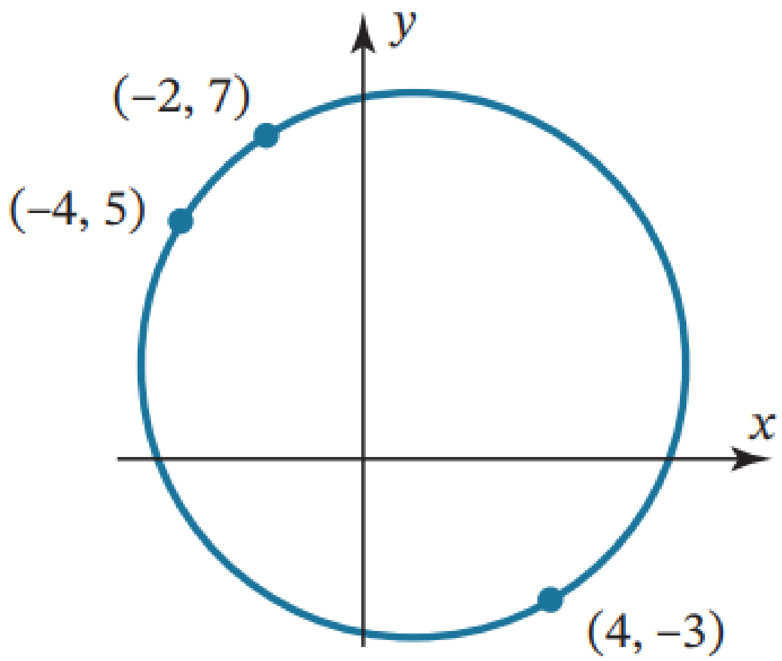
Latihan 2

Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi Gauss

i. SPL dalam bentuk matriks augmented

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ii. Carilah koefisien $a, b, c,$ dan d yang memenuhi persamaan lingkaran $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$



Referensi

- Anton, H., & Rorres, C. (2019). Elementary Linear Algebra: Applications Version. John Wiley & Sons.
- https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/