

TD 1 : Différences Finies

*UF « Modélisation et calcul scientifique »
Formation ModIA « Modélisation et Intelligence Artificielle »*

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

Exercice 1 : Etude du schéma « Leapfrog » pour l'équation d'advection

Equation d'advection discrétisée à l'aide du schéma Leapfrog :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- 1 Quels sont les ordres en espace et en temps de ce schéma ?
- 2 Étudiez la stabilité de ce schéma.
- 3 Quels sont les avantages et inconvénients de ce schéma ?

Analyse de stabilité

Ecriture explicite de u_i^{n+1} en fonction des autres états :

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \mathcal{C} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

Analyse de Von Neumann pour l'étude de stabilité :

- domaine périodique ;
- décomposition de la solution discrète en série de Fourier finie, chaque terme étant de la forme $A^n e^{j\varphi}$.

En réinjectant ce mode dans le schéma discret en espace et en temps on obtient successivement :

$$A^{n+1} e^{j\varphi} = A^{n-1} e^{j\varphi} - \mathcal{C} (A^n e^{j(i+1)\varphi} - A^n e^{j(i-1)\varphi})$$

$$A^{n+1} = A^{n-1} - \mathcal{C} (A^n e^{j\varphi} - A^n e^{-j\varphi})$$

$$A^{n+1} = A^{n-1} - \mathcal{C} A^n (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$$

Equation du facteur d'amplification

Par définition, on a :

$$\mathcal{G} = \frac{A^{n+1}}{A^n}$$

Or, le facteur d'amplification ne dépendant pas de n , on a également :

$$\mathcal{G} = \frac{A^n}{A^{n-1}} = \frac{A^{n+1}}{A^n}$$

En divisant l'expression précédente par A^n on obtient successivement :

$$\begin{aligned}\frac{A^{n+1}}{A^n} &= \frac{A^{n-1}}{A^n} - \mathcal{C} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{\mathcal{G}} - \mathcal{C} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})\end{aligned}$$

En multipliant cette équation par \mathcal{G} , on obtient l'équation du second degré :

$$\mathcal{G}^2 + \mathcal{G} \underbrace{\mathcal{C} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})}_{B} - 1 = 0$$

Résolution de l'équation du facteur d'amplification

Soit l'équation du second degré pour \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}^2 + B\mathcal{G} - 1 = 0$$

avec :

$$B = \mathcal{C} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) = 2j\mathcal{C} \sin \varphi$$

Le discriminant Δ de l'équation s'écrit :

$$\Delta = B^2 + 4 = -4\mathcal{C}^2 \sin^2 \varphi + 4 = 4(1 - \mathcal{C}^2 \sin^2 \varphi)$$

Les racines de l'équation sont alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= -j\mathcal{C} \sin \varphi + \sqrt{(1 - \mathcal{C}^2 \sin^2 \varphi)} \\ \mathcal{G}_2 &= -j\mathcal{C} \sin \varphi - \sqrt{(1 - \mathcal{C}^2 \sin^2 \varphi)}\end{aligned}$$

Stabilité du schéma selon \mathcal{C}

On observe que ce schéma est **conditionnellement stable** :

- Si $\mathcal{C} > 1$ alors les solutions sont **purement imaginaires** (le discriminant est négatif) et de module supérieur à l'unité. Le schéma est donc **instable** sous cette condition.
- Si $\mathcal{C} \leq 1$, le discriminant est positif et les solutions comportent alors une partie imaginaire et une partie réelle. Le carré du module du facteur d'amplification s'écrit alors (qu'il s'agisse de \mathcal{G}_1 ou \mathcal{G}_2) :

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}|^2 &= (1 - \mathcal{C}^2 \sin^2 \varphi) + \mathcal{C}^2 \sin^2 \varphi = 1 \\ |\mathcal{G}| &= 1 \end{aligned}$$

Le module du facteur d'amplification est donc toujours égal à l'unité, quel que soit $\mathcal{C} \leq 1$. On parle alors dans ce cas de **stabilité neutre**.

Exercice 2 : Etude d'une équation de diffusion discrète

Soit l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- 1 Proposez un schéma DF centré pour la dérivée seconde en espace de u .
- 2 Utilisez le schéma d'intégration temporelle d'Euler explicite afin d'écrire un schéma discret (en espace et en temps)
- 3 Quelles sont les conditions de stabilité de ce schéma ?
- 4 Mettez en perspective les résultats obtenus par rapport à ce qui a été étudié en cours sur l'équation d'advection.

Rappel de trigonométrie

Rappel des formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire après quelques transformations :

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$$

Correction exercice 2 / question 1

Question 1

Proposez un schéma DF pour la dérivée seconde en espace de u .

Principe de résolution

- De la même manière que l'on a exprimé les dérivées premières de u par des différences entre des valeurs de u en différents points de discrétisation, on va maintenant **exprimer la dérivée seconde comme une différence de dérivées premières**.
- On choisit ici de prendre un décentrement dans le sens de l'écoulement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \right]$$

Correction exercice 2 / question 1

Développement de Taylor à l'ordre trois de u_{i-1} au point i

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \Big|_i + \mathcal{O}(\Delta x)^4$$

Développement de Taylor à l'ordre trois de u_i au point $i+1$

$$u_i = u_{i+1} - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{i+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{i+1} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \Big|_{i+1} + \mathcal{O}(\Delta x)^4$$

Correction exercice 2 / question 1

Expression des dérivées premières aux points i et $i + 1$:

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right|_i + \mathcal{O}(\Delta x)^3$$

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right|_{i+1} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right|_{i+1} + \mathcal{O}(\Delta x)^3$$

Correction exercice 2 / question 1

On peut alors écrire la différence entre les expressions discrètes de ces dérivées :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^3$$

Soit

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \right] = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

On notera bien que ce schéma DF pour la dérivée seconde est **d'ordre deux** :

$$\left. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right|_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

Correction exercice 2 / question 2

Question 2

Utilisez le schéma d'intégration temporelle d'Euler explicite afin d'écrire un schéma discret (en espace et en temps)

Utiliser le schéma d'intégration d'Euler explicite implique :

- De discréteriser la dérivée partielle par rapport au temps comme :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

- D'évaluer les états du second membre de l'équation à l'instant n .

En utilisant la discrétisation centrée de la dérivée seconde établie précédemment et l'intégration Euler explicite, on obtient le schéma discret en espace et en temps suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \kappa \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right)$$

Correction exercice 2 / question 3

Question 3

Quelles sont les conditions de stabilité de ce schéma ?

Écriture explicite de u_i^{n+1} en fonction des autres états :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

On note un nouveau groupement combinant les pas d'espace et de temps, que l'on note \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2}$$

Soit :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mathcal{D} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Correction exercice 2 / question 3

Afin d'étudier la stabilité de ce schéma, on va mettre en oeuvre l'analyse de Von Neumann, qui nécessite :

- de se placer sur un domaine périodique ;
 - de décomposer la solution discrète en série de Fourier finie.
-
- On rappelle que chaque terme de la série de Fourier est de la forme $A^n e^{j\varphi}$.
 - En réinjectant ce mode dans le schéma discret en espace et en temps on obtient successivement :

$$\begin{aligned} A^{n+1} e^{j\varphi} &= A^n e^{j\varphi} + \mathcal{D} \left(A^n e^{j(i+1)\varphi} - 2A^n e^{j\varphi} + A^n e^{j(i-1)\varphi} \right) \\ A^{n+1} &= A^n + \mathcal{D} \left(A^n e^{j\varphi} - 2A^n + A^n e^{-j\varphi} \right) \end{aligned}$$

Correction exercice 2 / question 3

On rappelle que le facteur d'amplification \mathcal{G} peut s'écrire :

$$\mathcal{G} = \frac{A^{n+1}}{A^n}$$

Soit successivement :

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= 1 + \mathcal{D} (e^{j\varphi} - 2 + e^{-j\varphi}) \\ &= 1 + \mathcal{D} (\cos \varphi + j \sin \varphi + \cos \varphi - j \sin \varphi - 2) \\ &= 1 + 2\mathcal{D} (\cos \varphi - 1)\end{aligned}$$

Or, on rappelle la formule de trigonométrie (directement issue de la formule d'Euler) :

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$$

Soit enfin :

$$\mathcal{G} = 1 - 2\mathcal{D} \left(2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = 1 - 4\mathcal{D} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

Correction exercice 2 / question 3

On rappelle que le schéma numérique est stable ssi :

$$\|\mathcal{G}\| \leq 1$$

Soit :

$$\left| 1 - 4\mathcal{D} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right| \leq 1$$

Ce qui se traduit par la double inégalité :

$$-1 \leq 1 - 4\mathcal{D} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq 4\mathcal{D} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 0$$

$$2 \geq 4\mathcal{D} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \geq 0$$

Correction exercice 2 / question 3

Le schéma est donc **conditionnellement stable**

- $\kappa > 0$: le coefficient de diffusion doit être **positif** \Rightarrow condition sur la **nature du phénomène physique** étudié (pas une condition numérique)
- $\mathcal{D} \leq \frac{1}{2}$: condition liée à la discrétisation du problème, qui est l'équivalent pour une équation de diffusion de la condition sur C pour une équation de convection.

Quelques remarques supplémentaires :

- On note que, contrairement au schéma centré pour la dérivée spatiale dans l'équation de convection, la discrétisation centrée de la dérivée seconde de l'équation est **stable**.
- Cela est lié à la manière dont l'information se propage avec les deux types d'équations physiques.