Feuille d'exercices n°3
Calcul sous-différentiel

Exercice 1 – Sous-différentiel de la norme

(a) Justifier que $\|\cdot\|_2$ est une fonction convexe.

(b) Montrer que $\|\cdot\|_2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, de gradient

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \nabla \|\cdot\|_2(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

En déduire que $$\forall\, x \neq 0, \qquad \partial \|\cdot\|_2(x) = \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

(c) Montrer que tout $p \in \mathbb{R}^n$ de norme inférieure ou égale à 1 est sous-gradient de $\|\cdot\|$ en 0.

(d) Montrer que, si $p \in \partial\|\cdot\|(0)$, alors $$\|p\|_2 \geq \|p\|_2^2$$

(e) En déduire que le sous-différentiel de la norme $\|\cdot\|_2$ est la boule unité fermée pour la même norme.

(f) Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Déterminer le sous-différentiel de la fonction $x \mapsto \|2\,x - b\|_2$.

Exercice 2 – Sous-différentiel d'une fonction réelle

Avoir avoir justifié que les fonctions suivantes sont convexes, déterminer leur sous-différentiel en tout point de $\mathbb{R}$:

(a) $f = |\cdot|$

(b) $g = \chi_{[-1,1]}$

(c) $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |t| + (t-2)^2/2 \end{array} \right.$

Exercice 3 – Règles de calcul sous-différentiel

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes. Exprimer le sous-différentiel des fonctions suivantes en fonction des sous-différentiels de f et g.

(a) $F = \alpha\, f + \beta$ avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$

(b) $G : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x) + g(y) \end{array} \right.$

Exercice 4 – Fermeture du sous-différentiel

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe continue sur son domaine. Son domaine $\operatorname{dom} f$ est supposé fermé. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\operatorname{dom} f$, de limite notée x^*, telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \partial f(x_k) \neq \emptyset$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k \in \partial f(x_k)$ un sous-gradient de f en x_k.

(a) On suppose que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que $0 \in \partial f(x^*)$.

(b) Comment se traduit ce résultat dans le cas où f est différentiable ? Commenter.

Exercice 5 – Algorithme du point proximal

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. On suppose que f est minorée, que son domaine est fermé et que f est continue sur son domaine. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\tau > 0$. On considère la suite définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = x_k - \tau\, p_{k+1} \quad \text{avec} \quad p_{k+1} \in \partial f(x_{k+1})$$

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que x_{k+1} est bien défini. Montrer que

$$0 \in \partial g_k(x_{k+1}) \quad \text{avec} \quad g_k : x \mapsto f(x) + \frac{1}{2\,\tau}\,\|x - x_k\|_2^2$$

En déduire que $$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) + \frac{1}{2\,\tau}\,\|x - x_k\|_2^2 \geq f(x_{k+1}) + \frac{1}{2\,\tau}\,\|x_{k+1} - x_k\|_2^2$$

(b) On suppose à partir de cette question que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Montrer que la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Montrer que la série de terme général $\|x_{k+1} - x_k\|_2^2$ est absolument convergente. En déduire que la limite de la suite $(x_{k+1} - x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(d) Justifier que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que sa limite est un point critique de f.

Exercice 6 – Sous-différentiels partiels On considère la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |x+y| + 2\,|x-y| \end{array} \right.$$

(a) Montrer que la fonction f est convexe.

(b) Pour tout $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}$, calculer les sous-différentiels des fonctions partielles convexes

$$x \mapsto f(x, y^0) \qquad \text{et} \qquad y \mapsto f(x^0, y)$$

en $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, que l'on notera respectivement $\partial_x f(x, y^0)$ et $\partial_y f(x^0, y)$.

(c) Soit $a \neq 0$. Vérifier que $0 \in \partial_x f(a,a)$ et $0 \in \partial_y f(a,a)$.

(d) Montrer que $(0,0) \notin \partial J(a,a)$ si $a \neq 0$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 7 – Contre-exemple On considère la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sqrt{x} \end{array} \right.$$

(a) Montrer que la fonction f est convexe.

(b) Pour tout $x > 0$, déterminer le sous-différentiel $\partial f(x)$.

(c) Montrer que $$\forall\, p \in \mathbb{R}, \exists\, y \geq 0, \qquad -\sqrt{y} < p\, y$$

(d) En déduire que $\partial f(0) = \emptyset$.

⋆ Exercice 8 – Règle de bascule Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}^n$. On définit la *conjuguée convexe* de f comme étant la fonction définie pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ par

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big\{ \langle x, y\rangle - f(x) \Big\}$$

(a) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f^*(y) = \langle x, y\rangle - f(x)$$

Montrer que $y \in \partial f(x)$.

(b) On suppose réciproquement que $y \in \partial f(x)$. Montrer que

$$f(x) + f^*(y) = \langle y, x\rangle$$

(c) Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \partial f(x)$. Montrer que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big\{ \langle y, x\rangle - f(x) \Big\} \geq \langle y, x\rangle - \langle p, x\rangle + f^*(p)$$

(d) En déduire que $x \in \partial f^*(p)$.