TD2

Exercice 1

1) $h(x) = \lambda \|x\|_1$ avec $\lambda > 0$

on pose $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$v \mapsto \|u\|_1 + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|_2^2$

$$u^* = \text{prox}\,h(x) \Leftrightarrow u^* \underset{v \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \left(h(u) + \frac{1}{2}\|u - x\|_2^2\right)$$

De plus $\partial \|\ \|_1(u) = \text{sign}(u)$
avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $[\text{sign}(u)]_i \in \begin{cases} \{1\} \text{ si } u_i > 0 \\ [-1;1] \text{ si } u_i = 0 \\ \{-1\} \text{ si } u_i < 0 \end{cases}$

$$u^* = \text{prox}\,h(x) \Leftrightarrow u^* = \underset{u \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}}\, \varphi(u)$$

$$\Leftrightarrow 0 \in \partial\varphi(u^*) \quad \text{avec } \partial\varphi(u) = \partial\|\ \|_1(u) + \left\{\frac{v - x}{\lambda}\right\} = \text{sign}(u) + \left\{\frac{u-x}{\lambda}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - u^*}{\lambda} \in \text{sign}(u^*) = \partial\|\ \|_1(u)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \begin{cases} \frac{x_i - u_i^*}{\lambda} = -1 & \text{si } u_i^* < 0 \\ \frac{x_i - u_i^*}{\lambda} \in [-1,1] & \text{si } u_i^* = 0 \\ \frac{x_i - u_i^*}{\lambda} = 1 & \text{si } u_i^* > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_i^* = x_i + \lambda & \text{si } x_i^* < 0 \\ u_i^* = 0 & \text{si } |x_i| \leq \lambda \\ u_i^* = x_i - \lambda & \text{si } x_i > \lambda \end{cases}$$

"seuillage doux"

2) $h(x) = \lambda \|x\|_2$

$$\partial\|\ \|_2(x) = \begin{cases} Bf(0,1) \text{ si } x = 0 \\ \left\{\frac{x}{\|x\|_2}\right\} \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\operatorname{prox} h(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\lambda}{\|x\|_2}\right) x & \text{si } \|x\|_2 > \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) $h(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$ avec $A \in S_n(\mathbb{R})$ définie positive
$b \in \mathbb{R}^n$ $c \in \mathbb{R}$

On pose $\varphi(u) = \frac{1}{2} u^T A u + b^T u + c + \frac{1}{2}\|u - x\|_2^2$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ φ quadratique strictement convexe

$$u = \operatorname{prox} h(x) \Leftrightarrow \nabla\varphi(u) = 0$$
$$\Leftrightarrow Au + b + u - x = 0$$
$$\Leftrightarrow u = (A + I_n)^{-1}(x - b)$$

$$\operatorname{prox} h(x) = (A + I_n)^{-1}(x - b)$$

4) $h(x) = g(ax + b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ $b \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(u) = g(au + b) + \frac{1}{2}\|u - x\|_2^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

On pose $v = au + b \Leftrightarrow u = \dfrac{v - b}{a}$

On minimise $\tilde{\varphi}(v) = g(v) + \frac{1}{2}\left\|\frac{v - b}{a} - x\right\|_2^2$

$$\tilde{\varphi}(v) = g(v) + \frac{1}{2a^2}\|v - (ax + b)\|_2^2$$

$$v^* = \underset{v \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\ \tilde{\varphi}(\mathbb{R}) = \underset{v \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\left[a^2 g(v) + \frac{1}{2}\|v - (ax + b)\|_2^2\right]$$

$$= \operatorname{prox} a^2 g\,(ax + b)$$

d'où $\operatorname{prox} h(x) = \dfrac{1}{a}\left[\operatorname{prox} a^2 g\,(ax + b) - b\right]$

5) $h(x) = g(x) + a^T x$

On pose $\varphi(u) = g(u) + a^T u + \frac{1}{2} \|u - x\|_2^2$

$$u = \text{prox}\, h(u) \iff 0 \in \partial g(u) + \{a + u - x\}$$
$$\iff 0 \in \partial g(u) + \{u - (x - a)\}$$
$$\iff u = \text{prox}\, g(x - a)$$

6) $h(x) = g(Ax + b)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $A^T A = I_n$

$\forall u \quad \varphi(u) = g(Au + b) + \frac{1}{2} \|u - x\|_2^2$

On pose $v = Au + b \iff u = A^T(v - b)$ car $A \perp$

$$\tilde{\varphi}(v) = g(v) + \frac{1}{2} \underbrace{\|A^T(v - b) - x\|_2^2}_{\underbrace{\|A^T(v - b - Ax)\|_2^2}_{= \|v - (Ax + b)\|_2^2}}$$

$\|A^T(v-b-Ax)\|_2^2$ car $A^T A = I_n$

$= \|v - (Ax + b)\|_2^2$ car $\|Vx\|_2 = \|x\|_2$

$\forall V \in O_n(\mathbb{R}) = \{V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $V^T V = V V^T = I_n\}$

$\Rightarrow v^* = \text{prox}\, g(Ax + b)$ est minimum de $\tilde{\varphi}$

$\Rightarrow \text{prox}\, h(x) = A^T[\text{prox}\, g(Ax + b) - b]$

Exercice 2

$f(x) = g(x) + h(x)$

$$\begin{cases} g \text{ convexe dérivable à gradient lipshitzien} \\ h \text{ convexe admettant un prox} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p = \text{prox}_{t_p h}(y_{p-1} - t_p \nabla g(y_{p-1})) \\ y_p = x_p + \frac{p-1}{p+2}(x_p - x_{p-1}) \end{cases}$$

1) Mtq $y_p = (1 - \theta_{p+1}) x_p + \theta_{p+1} v_p$ avec $\theta_p = \frac{2}{p+1}$

y_p se trouve sur le segment $[x_p, v_p]$

$$v_p = v_{p-1} - \frac{t_p}{\theta_p} G_{t_p}(y_{p-1})$$