

# Métamodélisation

Conception globale d'un aéronef

Hanna BEKKARE, Ines BESBES, Sara ROOL

5 ModIA

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Le problème OAD (Overall Aircraft Design) . . . . .	2
1.2	Description des différents cas . . . . .	2
1.3	Les contraintes opérationnelles . . . . .	2
1.4	Les paramètres incertains . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Problème 1: Modélisation de substitution et optimisation</b>	<b>4</b>
2.1	Description du problème . . . . .	4
2.2	Optimisation sans modèle de substitution . . . . .	4
2.3	Optimisation avec le modèle de substitution . . . . .	4
2.3.1	Recherche du meilleur modèle de substitution . . . . .	5
2.3.2	Résultats de l'optimisation . . . . .	5
2.3.3	Évaluation de $x_{surrogate}^*$ sur le modèle initial . . . . .	6
2.4	Analyse des résultats . . . . .	7
2.4.1	Comparaison des résultats numériques . . . . .	7
2.4.2	Configuration des avions . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Problème 2: Modélisation de substitution et quantification de l'incertitude</b>	<b>10</b>
3.1	Description du problème . . . . .	10
3.2	Explication de la méthodologie . . . . .	10
3.3	UC1 - Résultats pour le design optimal trouvé dans le problème 1 ( $x_{surrogate}^*$ ) . . . . .	11
3.3.1	Propagation des incertitudes . . . . .	11
3.3.2	Analyse de sensibilité globale – Indices de Sobol . . . . .	12
3.4	UC2 - Résultats pour le design optimal trouvé dans le problème 1 ( $x_{surrogate}^*$ ) . . . . .	13
3.4.1	Propagation des incertitudes . . . . .	13
3.4.2	Analyse de sensibilité globale – Indices de Sobol . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Problème 3: Modélisation substitutive et optimisation robuste</b>	<b>15</b>
4.1	Description du problème . . . . .	15
4.2	Optimisation sans modèle de substitution . . . . .	15
4.3	Optimisation avec un modèle de substitution . . . . .	16
4.3.1	Recherche du meilleur modèle de substitution . . . . .	16
4.3.2	Résultats de l'optimisation . . . . .	16
4.3.3	Évaluation de $x_{surrogate}^*$ sur le modèle initial . . . . .	17
4.4	Analyse des résultats . . . . .	18
4.4.1	Comparaison des résultats numériques . . . . .	18
4.4.2	Configuration des avions . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Le problème OAD (Overall Aircraft Design)

Le problème de conception vise à minimiser la masse maximale au décollage (MTOM) d'un avion, tout en respectant certaines contraintes. Pour cela, il sera possible d'agir sur quatre paramètres de conception. Ils sont les suivants :

- La poussée statique maximale au niveau de la mer :  $100 \text{ kN} \leq slst \leq 200 \text{ kN}$  (valeur par défaut :  $150 \text{ kN}$ ),
- Le nombre de passagers :  $120 \leq n\_pax \leq 180$  (valeur par défaut :  $150$ ),
- La surface alaire :  $100 \text{ m}^2 \leq area \leq 200 \text{ m}^2$  (valeur par défaut :  $180 \text{ m}^2$ ),
- Le rapport d'aspect de l'aile :  $5 \leq ar \leq 20$  (valeur par défaut :  $9$ ).

De plus, cette conception peut s'effectuer dans un environnement incertain, où les choix technologiques sont modélisés de manière probabiliste. Dans ce contexte, on notera  $f : x, u \mapsto f(x, u)$  les sorties d'intérêt des modèles, où  $x$  représente les paramètres de conception, et  $u$  les paramètres incertains.

On suppose également que l'évaluation de ces modèles est très coûteuse, ce qui nous conduit à vouloir remplacer les modèles par un modèle de substitution (ou "surrogate model") afin de traiter efficacement ce problème.

## 1.2 Description des différents cas

Dans ce projet, on cherche à optimiser les paramètres d'un avion d'environ 150 passagers volant à Mach 0.78, en explorant différentes technologies de moteurs et de carburants. Pour ce faire, on va considérer deux cas d'utilisation UC1 et UC2.

ID	Type de carburant	Type de moteur	Distance (km)
UC1	Kérosène	Turbofan	5500
UC2	Hydrogène	Turbofan	5500

Table 1: Caractéristiques des configurations étudiées

## 1.3 Les contraintes opérationnelles

Les contraintes opérationnelles sont les suivantes :

- Longueur de piste au décollage :  $tofl \leq 1900 \text{ m}$ ,
- Vitesse d'approche :  $vapp \leq 135 \text{ noeuds}(kt)$ ,
- Vitesse verticale :  $vz \geq 300 \text{ pieds/min}$ ,
- Envergure de l'aile :  $span \leq 40 \text{ m}$ ,
- Longueur de l'aile :  $length \leq 45 \text{ m}$ ,
- Marge de carburant :  $fm \geq 0\%$ .

## 1.4 Les paramètres incertains

Certains paramètres sont considérés comme incertains. Ils sont modélisés comme des variables aléatoires définies par des distributions de probabilité:

Variable	Distribution	Type de carburant	Type de moteur
gi	T(0.35, 0.4, 0.405)	Hydrogène liquide	Tous
vi	T(0.755, 0.800, 0.805)	Hydrogène liquide	Tous
aef	T(0.99, 1.00, 1.03)	Tous	Tous
cef	T(0.99, 1.00, 1.03)	Tous	Tous
sef	T(0.99, 1.00, 1.03)	Tous	Tous

Table 2: Distributions des variables incertaines selon le type de carburant et de moteur

avec  $T(minimum, mode, maximum)$  qui représente la distribution triangulaire.

Les paramètres  $aef$ ,  $cef$  et  $sef$  sont liés aux trois principaux domaines techniques intervenant dans la conception d'un avion, à savoir : l'aérodynamique, la propulsion et la structure. Plus leur valeur est faible, meilleure est la performance.

Ces facteurs représentent les incertitudes inhérentes à toute activité créative. Leurs distributions de probabilité ne sont pas symétriques, car il est toujours plus facile d'obtenir un résultat moins performant que prévu plutôt que l'inverse.

## 2 Problème 1: Modélisation de substitution et optimisation

### 2.1 Description du problème

On va créer un modèle de substitution de  $\hat{f} : x \mapsto \hat{f}(x) = f(x, u_{default})$  afin d'approcher l'objectif et les contraintes du problème de conception en fonction des paramètres de conception  $x$ . Ensuite, on va utiliser ce modèle de substitution dans une optimisation, dans le but de minimiser l'objectif tout en respectant les contraintes, en faisant varier les paramètres de conception.

### 2.2 Optimisation sans modèle de substitution

**Note :** Dans le cadre de ce TP, on peut faire une optimisation sur les disciplines de base sans passer par un modèle de substitution dû à un temps de calcul court. Ce n'est généralement pas le cas dans l'industrie. On va donc en profiter pour comparer les résultats entre modèle de base et modèle de substitution.

Pour chaque cas d'utilisation (UC1 et UC2), on va instancier les 12 disciplines même si certains modèles ne font pas sens (par exemple, une batterie pour un avion avec un turbofan), ils resteront invisibles.

Ensuite, on crée un espace de design, avec les quatres paramètres de conception ( $slst, n\_pax, area, ar$ ), et on renseigne les bornes minimales/maximales et la valeur par défaut.

Après, on crée un scenario avec les 12 disciplines et l'espace de design créé précédemment. On ajoute les contraintes précédemment décrites à ce scénario. On fait attention à bien changer les unités pour être en unité du Système International.

On lance alors une optimisation avec 100 itérations et on obtient les résultats suivants:

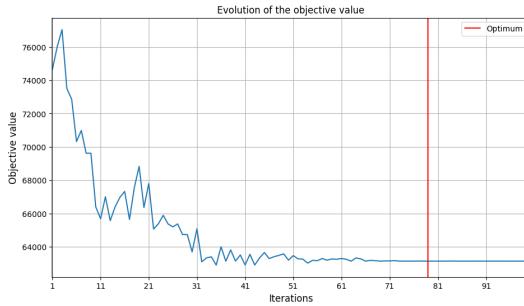


Figure 1: UC1 - Évolution de la valeur de l'objectif  $MTOM$ .

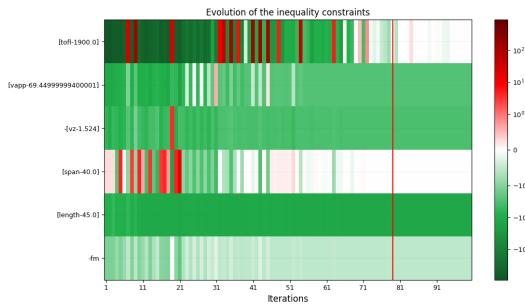


Figure 2: UC1 - Évolution des contraintes d'inégalité.

**Interprétation :** Tout d'abord, on constate, dans la console, que la solution est réalisable. On obtient une valeur de  $MTOM_{min} \approx 63138.09\text{kg}$ . On constate également que l'algorithme converge rapidement au début, avec une forte baisse de la fonction objectif, passant de 76000kg à 64000kg en une trentaine d'itérations. Après, l'optimisation atteint un plateau.

Certaines contraintes, comme  $vapp$  et  $length$ , sont satisfaites très tôt dans le processus. En revanche, d'autres comme  $toffl$  et  $span$  prennent nettement plus de temps à se stabiliser. Cela peut expliquer le ralentissement de la convergence car les contraintes ont du mal à s'équilibrer entre elles.

### 2.3 Optimisation avec le modèle de substitution

Comme dit précédemment, en général, on ne peut pas utiliser le modèle de base directement pour faire une optimisation. On doit alors entraîner un modèle de substitution qui imite le modèle de base et ensuite on fera l'optimisation sur ce modèle de substitution.

Pour ce faire, on réinstancie un espace de design (différent de celui utilisé pour le premier scénario pour éviter des biais). On génère deux ensembles de données en échantillonnant l'objectif et les contraintes ( $mtom$ ,  $tofl$ ,  $vapp$ ,  $vz$ ,  $span$ ,  $length$ ,  $fm$ ) à partir de l'espace de design créé précédemment et des disciplines. Ces ensembles sont générés avec l'algorithme **OT\_OPT\_LHS** pour l'entraînement et avec **OT\_MONTE\_CARLO** pour le test, chacun contient 20 échantillons.

### 2.3.1 Recherche du meilleur modèle de substitution

On entraîne ensuite différents modèles de substitution (avec l'ensemble d'entraînement) et on évalue (avec l'ensemble de test) leurs validités avec l'indicateur  $R^2$ . On obtient les résultats suivants:

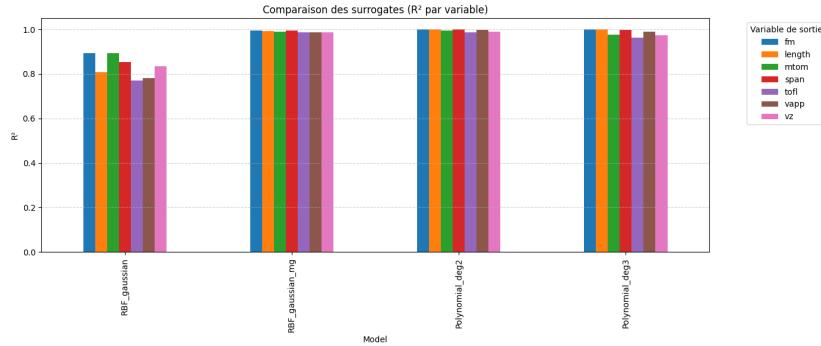


Figure 3: UC1 - Comparaison des modèles de substitution - valeur du  $R^2$  par variable pour l'ensemble de test.

On constate que la régression à base de fonctions radiales (RBF) avec une fonction multiquadratique et la régression polynomiale de degré 2 ont des valeurs de  $R^2$  très proche de 1. Cela signifie donc que le modèle de substitution est bien entraîné. Pour la suite, on prend le modèle de substitution ayant les plus grandes valeurs de  $R^2$ , qui est la régression RBF avec une fonction multiquadratique.

On importe ce modèle de substitution qu'on va optimiser en recréant encore une fois un espace de design et un scénario mais cette fois-ci en utilisant les disciplines du modèle de substitution. On peut utiliser plus d'itérations pour l'optimisation, car ce modèle est moins coûteux.

### 2.3.2 Résultats de l'optimisation

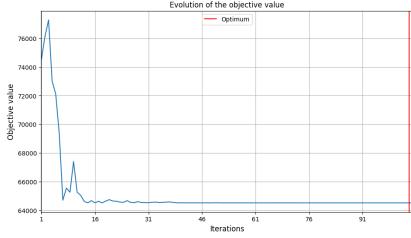


Figure 4: UC1 - Évolution de la valeur de l'objectif  $MTOM$ .

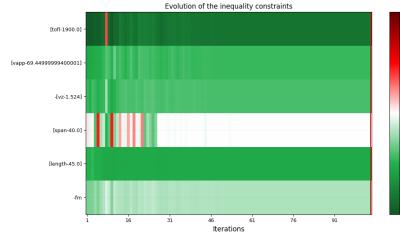


Figure 5: UC1 - Évolution des contraintes d'inégalité.

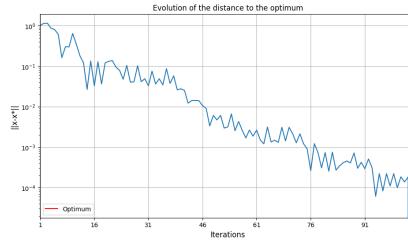


Figure 6: UC1 - Évolution de  $\|x - x^*\|$ .

**Interprétation :** Ici également, on note que la solution est réalisable avec une valeur de  $MTOM = 64518.79\text{kg}$ . De plus, les graphes montrent que l'algorithme converge rapidement au début, avec une forte baisse de la fonction objectif (de 76000kg à 65000kg) et une distance à l'optimum qui diminue de manière régulière (tout en oscillant légèrement). Cependant, après une soixantaine d'itérations, la progression ralentit : la distance oscille et la fonction objectif stagne.

Pour les contraintes, comme précédemment, certaines ( $vapp$  et  $length$ ) sont rapidement satisfaites, mais d'autres ( $tofl$  et  $span$ ) oscillent plus longtemps avant de se stabiliser.

### 2.3.3 Évaluation de $x_{\text{surrogate}}^*$ sur le modèle initial

Certes la solution est réalisable pour le modèle de substitution mais il faut s'assurer qu'elle l'est également pour le modèle de base. Pour cela, on évalue le  $x_{\text{surrogate}}^*$  trouvé sur les disciplines initiales en recréant un espace de design et un scénario.

On trouve que la solution est bien réalisable avec une valeur de  $MTOM = 63502.30\text{kg}$ . Si cela n'avait pas été le cas, il aurait fallu itérer sur le modèle de substitution pour en trouver un autre qui convient.

		MTOM (kg)	
		Disciplines du modèle substitutif	Disciplines du modèle initial
UC1	Multiquadratique	64 518.79	63 502.30
UC2	Gaussienne	65 214.94	67 368.35

Table 3: Tableau comparant la valeur de MTOM selon les disciplines utilisées en  $x_{\text{surrogate}}^*$

Dans le cas UC1, on trouve une meilleure valeur de  $MTOM$  lorsque l'on applique  $x_{\text{surrogate}}^*$  aux disciplines initiales. Ce n'est pas le cas pour UC2. La valeur optimisée trouvée par modèle de substitution est déjà très éloignée du résultat optimal trouvé via l'optimisation sur les disciplines initiales (63323.83 kg). Puis, lorsqu'on applique  $x_{\text{surrogate}}^*$  aux disciplines initiales, on trouve une différence de 2000kg environ. Le modèle de substitution n'est pas très efficace dans ce cas.

## 2.4 Analyse des résultats

### 2.4.1 Comparaison des résultats numériques

Cas d'usage	Optimum	Solution réalisable	MTOM (kg)
UC1	$x_{default}$	non	74652.66
UC1	$x_{base}^*$	oui	63138.09
UC1	$x_{surrogate}^*$	oui	63502.31
UC2	$x_{default}$	non	75773.15
UC2	$x_{base}^*$	oui	63323.83
UC2	$x_{surrogate}^*$	oui	67368.35

Table 4: Résultat de  $MTOM$  pour différent paramètre de conception évalués avec les disciplines initiales.

Cas d'usage	Optimum	slst N	n_pax	area m <sup>2</sup>	ar
UC1	$x_{default}$	150000	150	180	9
UC1	$x_{base}^*$	100000	120	109.20	14.65
UC1	$x_{surrogate}^*$	102553.58	120	113.94	13.76
UC2	$x_{default}$	150000	150	180	9
UC2	$x_{base}^*$	100000	120	111.58	8.89
UC2	$x_{surrogate}^*$	128421.91	128.14	126.51	10.73

Table 5: Tableau des paramètres de conception.

Cas d'usage	Optimum	tofl (m)	vapp (m/s)	vz (m/s)	span (m)	length (m)	fm
UC1	$x_{default}$	1116.74	56.64	7.50	40.25	37	1.21
UC1	$x_{base}^*$	1900	66.53	4.91	40	32	0.53
UC1	$x_{surrogate}^*$	1716.87	64.51	4.94	40	32.73	0.63
UC2	$x_{default}$	1147.56	60.54	7.01	40.25	39.75	0.13
UC2	$x_{base}^*$	1871.95	69.45	1.52	31.49	34.75	0.017
UC2	$x_{surrogate}^*$	1476.85	67.78	6.46	36.85	36.11	0.144

Table 6: Tableau des contraintes opérationnelles obtenues.

**Note :** Les valeurs en rouge sont les contraintes qui ne respectent pas les limites.

Pour UC1, on observe que les paramètres de conception entre  $x_{base}^*$  et  $x_{surrogate}^*$  sont très similaires. Cette proximité se reflète également dans les contraintes obtenues, qui ne présentent pas de différences significatives. Cela suggère que le modèle de substitution est approprié.

Dans le cas de UC2, la masse maximale au décollage ( $MTOM$ ) varie entre les configurations  $x_{base}^*$  et  $x_{surrogate}^*$ , passant de 63323 kg à 67368 kg. Cette variation est due à plusieurs facteurs, dont les écarts dans les paramètres de conception. Par exemple, la surface alaire passe de 111.58 m<sup>2</sup> à 126.51 m<sup>2</sup>, et l'allongement varie de 8.89 m à 10.73 m. Ces différences influencent significativement la masse totale de l'aéronef. De plus, les différences dans les dimensions physiques, telles que l'envergure et la longueur, contribuent également à la variation de la masse. En effet, l'envergure passe de 31.49 m à 36.85 m.

### 2.4.2 Configuration des avions

Comparaison des configurations des avions

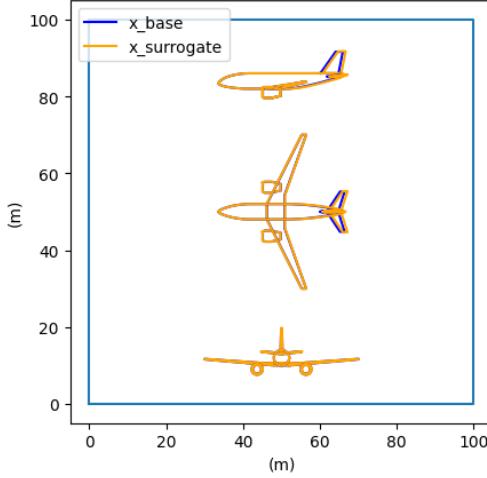


Figure 7: UC1 - Comparaison des configurations pour  $x_{base}^*$  et  $x_{surrogate}^*$

Pour UC1, les configurations de  $x_{base}^*$  et de  $x_{surrogate}^*$  sont très similaires, à quelques différences près. Celles-ci se situent principalement au niveau de la dérive ainsi que des gouvernes de direction et de profondeur. Pourtant, ces seules modifications suffisent à faire varier MTOM de 63138 kg à 63502 kg, soit une augmentation de plus de 400 kg. En comparaison, on observe un écart significatif avec les valeurs de  $x_{default}$ . Cette dernière présente un fuselage plus long, une envergure d'aile plus importante et une capacité d'accueil de passagers plus élevée. Mais, comme on a vu précédemment, cette solution n'est ni réalisable ni optimisée.

Comparaison des configurations des avions

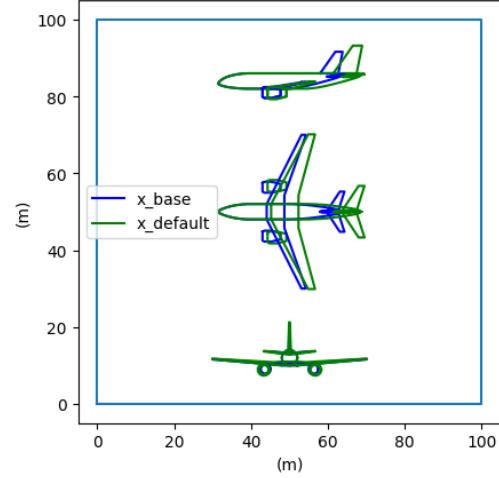


Figure 8: UC1 - Comparaison des configurations pour  $x_{base}^*$  et  $x_{default}$

Comparaison des configurations des avions

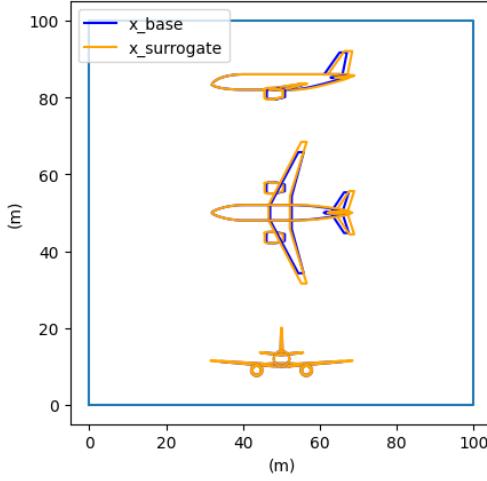


Figure 9: UC2 - Comparaison des configurations pour  $x_{base}^*$  et  $x_{surrogate}^*$

Comparaison des configurations des avions

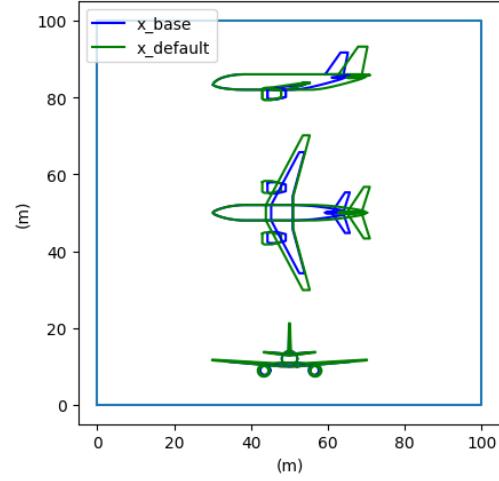


Figure 10: UC2 - Comparaison des configurations pour  $x_{base}^*$  et  $x_{default}$

Pour le cas UC2, les configurations  $x_{default}$ ,  $x_{base}^*$ , et  $x_{surrogate}^*$  présentent des différences notables en termes de dimensions. La configuration  $x_{default}$ , avec une masse de 75773.15 kg, se distingue par sa taille plus imposante, incluant un fuselage plus long et une envergure d'aile plus grande, ce qui la rend non réalisable. En revanche, les configurations  $x_{base}^*$  et  $x_{surrogate}^*$  sont réalisables et optimisées, avec des

masses respectives de 63323.83 kg et 67368.35 kg. Bien que ces deux configurations soient relativement similaires, les ajustements apportés suffisent à engendrer une variation de masse significative (4000 kg). On constate que les différences se trouvent au niveau du tube de l'avion et des ailes. En effet,  $x_{surrogate}^*$  a une envergure plus grande et un fuselage plus long que  $x_{base}^*$ .

### 3 Problème 2: Modélisation de substitution et quantification de l'incertitude

#### 3.1 Description du problème

Dans cette partie, on va créer un modèle de substitution de  $\hat{f} : u \mapsto \hat{f}(x) = f(x_{default}, u)$  pour approximer l'objectif et les contraintes du problème de conception par rapport aux paramètres incertains  $u$ . Ensuite, on utilise ce modèle de substitution dans une étude d'incertitude afin de propager l'incertitude liée aux choix technologiques, quantifier l'incertitude de sortie résultante et l'expliquer à partir des sources d'incertitude.

#### 3.2 Explication de la méthodologie

On commence par instancier les disciplines, puis on modifie les valeurs par défaut des paramètres de conception en y intégrant les paramètres de conceptions obtenus dans le problème 1, à savoir  $x^*$ <sub>surrogate</sub>. Ensuite, on définit un espace incertain conformément à la Table 2.

On génère un échantillon d'entraînement et un échantillon de test à partir des disciplines modifiées et de l'espace incertain, en utilisant respectivement les algorithmes **OT\_OPT\_LHS** et **OT\_MONTE\_CARLO**. Chaque ensemble contient 20 échantillons.

Comme dans le problème 1, on teste différents modèles de substitution. Les résultats obtenus pour le cas UC1 sont les suivants. Le modèle de substitution retenu est une régression polynomiale de degré 2.

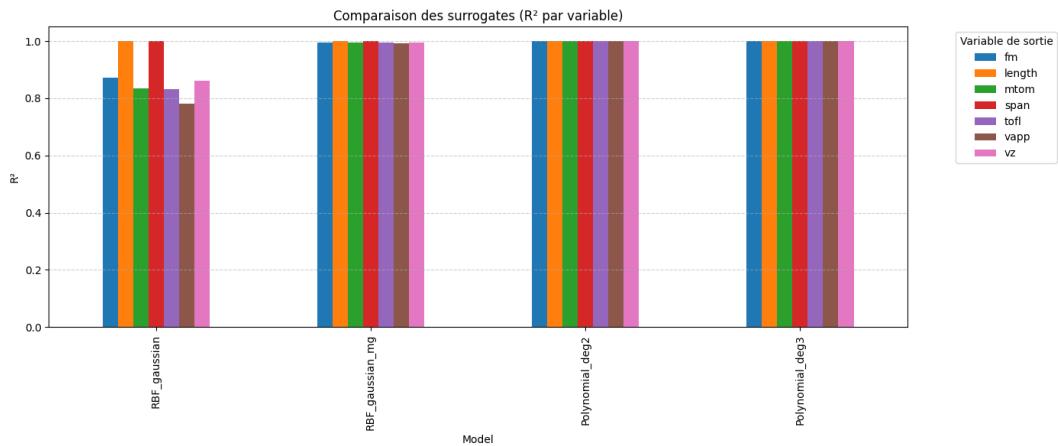


Figure 11: UC1 - Comparaison des modèles de substitution, valeur du  $R^2$  par variable pour l'ensemble de test.

Par la suite, on utilise ce modèle de substitution, ainsi qu'un nouvel espace incertain, pour générer un échantillon de 5000 points pour les variables *mtom*, *tofl*, *vapp*, *vz*, *span*, *length* et *fm* à l'aide de l'algorithme **OT\_MONTE\_CARLO**. Ces échantillons permettent d'observer la propagation des incertitudes. Les résultats correspondants sont détaillés dans les sections suivantes.

Enfin, on réalise une analyse de Sobol en générant un nouvel échantillon de 10 000 points, toujours à l'aide du modèle de substitution et de l'espace incertain.

### 3.3 UC1 - Résultats pour le design optimal trouvé dans le problème 1 ( $x_{surrogate}^*$ )

#### 3.3.1 Propagation des incertitudes

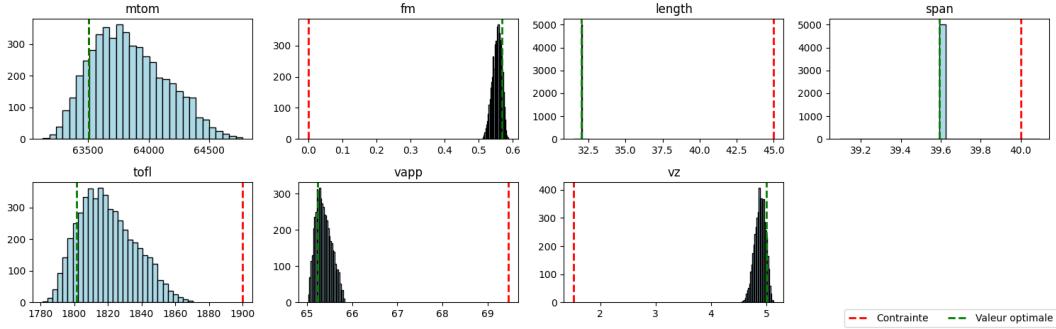


Figure 12: UC1 - Propagation des incertitudes pour  $x_{surrogate}^*$

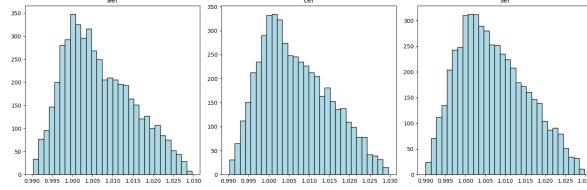


Figure 13: UC1 - Forme des distributions des paramètres incertains

Dans cette partie, on a propagé des incertitudes sur les paramètres d’entrée  $aef$ ,  $cef$  et  $sef$ , en utilisant des distributions triangulaires. Cela permet d’observer les effets de ces variations sur plusieurs variables de sortie. De manière générale, les contraintes sont bien respectées malgré la présence d’incertitudes.

Certaines variables comme  $fm$ ,  $vapp$  et  $vz$  montrent une bonne stabilité. Leur comportement est robuste, avec des distributions relativement étroites. On remarque cependant que leurs histogrammes ne sont pas symétriques ni parfaitement centrés : ils ont une forme triangulaire ou asymétrique, ce qui reflète l’influence des distributions d’entrée. Par exemple,  $vapp$  est plus dense sur les faibles valeurs, tandis que  $vz$  l’est sur les fortes valeurs. Cela montre que les effets des incertitudes ne se propagent pas toujours de manière symétrique, mais restent contenus.

Les variables  $length$  et  $span$ , quant à elles, restent fixes dans tous les cas simulés. Leur valeur ne change pas, ce qui indique qu’elles ne sont pas sensibles aux incertitudes introduites sur les paramètres d’entrée. Elles ne contribuent donc pas à la variabilité du système.

La distribution de la variable  $MTOM$  est un peu décalée vers des valeurs plus faibles que la valeur optimale initiale. Cela signifie que certaines combinaisons des paramètres incertains permettent d’obtenir de meilleurs résultats que la solution déterministe, tout en respectant les contraintes. C’est un effet positif des incertitudes dans ce cas, même si dans la grande majorité la valeur de  $MTOM$  augmente.

La variable  $tofl$  est celle qui se rapproche le plus de la contrainte. Sa distribution est aussi asymétrique, et bien qu’elle reste en dessous de la limite fixée, elle montre une marge de sécurité plus faible que les autres variables.

Enfin, on remarque que les formes des distributions de sortie sont souvent triangulaires. Cela montre que la propagation des incertitudes conserve partiellement leur structure initiale. Les incertitudes en entrée ont donc un impact clair sur la forme des résultats.

### 3.3.2 Analyse de sensibilité globale – Indices de Sobol

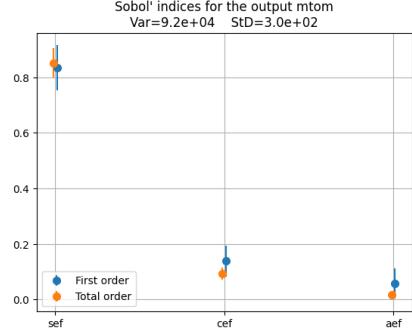


Figure 14: UC1 - Indices de Sobol pour *MTOM*.

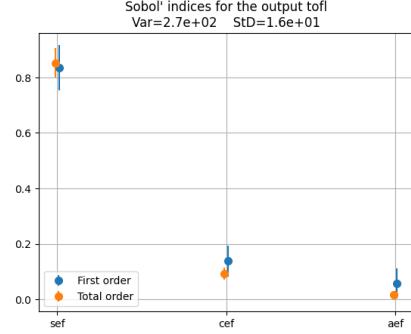


Figure 15: UC1 - Indices de Sobol pour *tofl*.

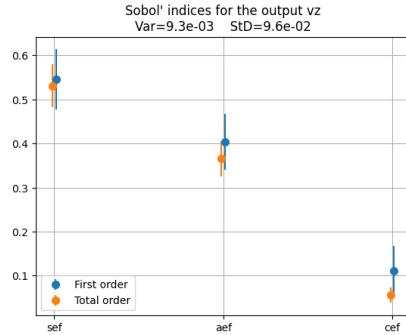


Figure 16: UC1 - Indices de Sobol pour *vz*.

L’analyse des indices de Sobol met en évidence des différences notables dans la sensibilité des sorties du modèle aux variables d’entrée.

Pour les sorties *MTOM* et *tofl*, les profils de sensibilité sont très similaires. Elles sont principalement influencées par la variable *sef*, avec un indice de Sobol de premier ordre d’environ 0.80, ce qui indique que cette variable explique à elle seule environ 80% de la variance de ces deux sorties. Les variables *cef* et *aef* ont une influence beaucoup plus faible. *cef* contribue à hauteur d’environ 0.10, tandis que *aef* a un impact négligeable, voire inexistant.

En revanche, la sortie *vz* présente une distribution de sensibilité plus équilibrée. Elle est influencée de manière significative à la fois par *sef* (0.55) et *aef* (0.40), tandis que *cef* a une influence plus modeste, avec un indice légèrement supérieur à 0.10. Contrairement à *MTOM* et *tofl*, la sortie *vz* est donc sensible à l’ensemble des variables.

Enfin, pour optimiser *MTOM*, il est pertinent de concentrer les efforts sur le contrôle ou la réduction de l’incertitude de *sef*.

### 3.4 UC2 - Résultats pour le design optimal trouvé dans le problème 1 ( $x_{surrogate}^*$ )

Pour UC2, cinq paramètres incertains ont ainsi été introduits pour refléter les incertitudes de conception, et une méthode d'échantillonnage Monte Carlo a été utilisée pour propager ces incertitudes via le modèle de substitution, générant 5000 évaluations.

#### 3.4.1 Propagation des incertitudes

L'analyse de la propagation d'incertitudes permet d'évaluer la robustesse du design optimal vis-à-vis des variations de plusieurs paramètres incertains ( $aef$ ,  $cef$ ,  $sef$ ,  $gi$ ,  $vi$ ). On observe ci-dessous que ces paramètres suivent bien des distributions triangulaires.

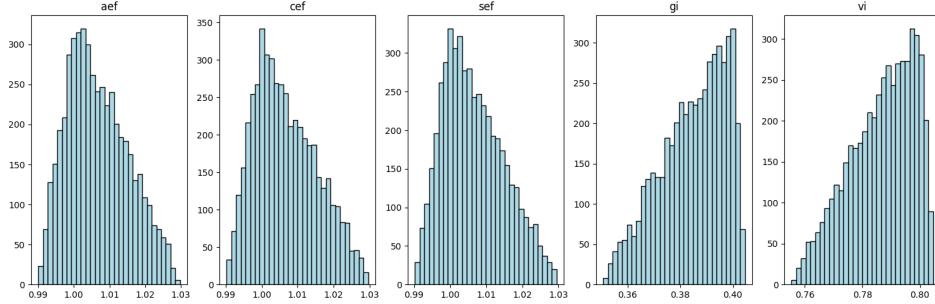


Figure 17: UC2 - Forme des distributions des paramètres incertains

On génère 5000 échantillons à partir de ces distributions triangulaires et on les injecte dans un modèle de substitution. On obtient donc les distributions de probabilité de sept variables de sortie d'intérêt : la masse maximale au décollage ( $mtom$ ), la fraction de masse de carburant ( $fm$ ), la longueur de l'avion ( $length$ ), l'envergure ( $span$ ), la distance de décollage ( $tofl$ ), la vitesse d'approche ( $vapp$ ) et le taux de montée ( $vz$ ).

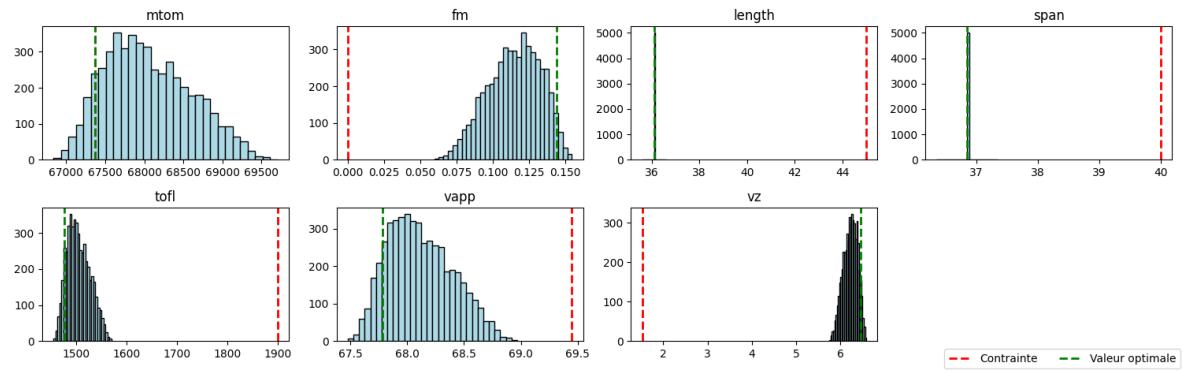


Figure 18: UC2 - Propagation des incertitudes pour  $x_{surrogate}^*$

On observe que la distribution de  $MTOM$  est centrée autour d'une valeur légèrement supérieure à la valeur optimale, avec une dispersion allant de 67000 kg à 69500kg. De plus, les distributions de  $span$  et  $length$  sont concentrées autour d'une seule valeur. Cela signifie que ces deux grandeurs sont très peu sensibles aux variables incertaines choisies. Elles respectent également les contraintes.

D'autre part, on constate que toutes les autres sorties étudiées ( $fm$ ,  $tofl$ ,  $vapp$ ,  $vz$ ) restent contenues dans les bornes autorisées, bien que  $vapp$  se rapproche de sa limite. Les distributions sont resserrées autour de leur valeur optimale respective avec une tendance à se rapprocher de leur contrainte respective. Cela témoigne d'une bonne robustesse du système vis-à-vis de ces critères, et d'un impact modéré des incertitudes sur leur comportement.

Enfin, comme pour UC1, on constate également la propagation d'une forme triangulaire dans les distributions de sorties.

### 3.4.2 Analyse de sensibilité globale – Indices de Sobol

On va à présent mener une analyse de sensibilité globale de type Sobol afin de comprendre l'influence des variables incertaines sur plusieurs sorties d'intérêt du modèle : la masse maximale au décollage (*MTOM*), la finesse maximale (*fm*), la distance de décollage (*tofl*) et la vitesse d'approche (*vapp*). Cinq variables incertaines sont analysées, *gi*, *sef*, *vi*, *aef* et *cef*, chacune correspondant à un choix technologique incertain.

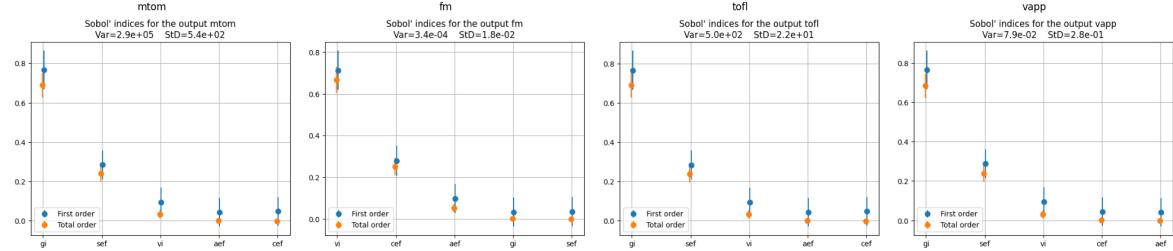


Figure 19: UC2 - Indices de Sobol

Les résultats ci-dessus montrent que la variable *gi* est la plus influente pour la plupart des paramètres étudiés. Pour *MTOM* et *tofl*, *gi* a un indice de Sobol d'ordre 1 supérieur à 0.75, ce qui indique qu'elle explique plus de 75% de la variance de ces sorties. De même pour *vapp*, *gi* reste la variable dominante avec un indice d'ordre 1 d'environ 0.8. Quant à *fm*, elle est principalement influencée par la variable *vi*, avec un indice d'ordre 1 proche de 0.8.

D'autre part, les variables *sef* et *vi* ont un impact moins important mais non négligeable, notamment sur *fm* et *tofl*. En revanche, *aef* et *cef* présentent des effets très faibles. On peut donc les exclure ou les fixer à des valeurs nominales pour simplifier les analyses futures.

Par ailleurs, on observe que les indices totaux de Sobol sont proches des indices d'ordre 1 pour toutes les variables, ce qui suggère donc une faible présence d'interactions entre les variables incertaines.

Ainsi pour limiter la variabilité de *MTOM*, il faudrait limiter la variabilité de *gi* et de *sef*.

## 4 Problème 3: Modélisation substitutive et optimisation robuste

### 4.1 Description du problème

On va créer un modèle de substitution  $\hat{f} : x, u \mapsto \hat{f}(x) = f(x, u)$  pour approximer la fonction objectif et les contraintes du problème de conception, en considérant à la fois les paramètres de conception  $x$  et les paramètres incertains  $u$ . Ensuite, on va utiliser ce modèle de substitution pour déterminer le meilleur concept d'aéronef en prenant en compte l'incertitude des choix technologiques.

### 4.2 Optimisation sans modèle de substitution

Comme pour le Problème 1, on commence par définir un espace de design avec les quatre variables de conception.

Pour prendre en compte les incertitudes, on introduit un espace d'incertitude avec des variables aléatoires pour les facteurs aérodynamiques, de consommation de carburant et structurels, modélisées par des distributions triangulaires conformément à la Table 2.

L'optimisation a été effectuée en utilisant l'algorithme NLOPT\_COBYLA avec un maximum de 100 itérations. Les résultats montrent que la solution optimale trouvée est réalisable et respecte toutes les contraintes imposées. On obtient une valeur de  $MTOM_{min} \approx 63643.88\text{kg}$ .

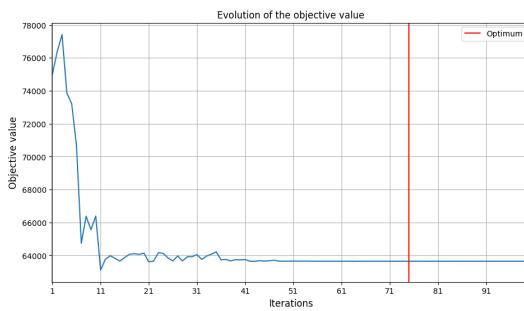


Figure 20: UC1 - Évolution de la valeur de l'objectif (MTOM).

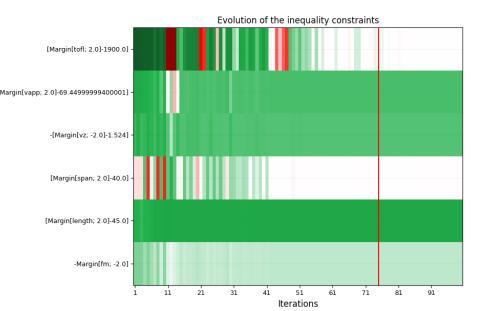


Figure 21: UC1 - Évolution des contraintes d'inégalité.

On observe une forte diminution de la valeur de l'objectif au début, ce qui indique une amélioration rapide de la conception. À partir de la 50ème itération, la valeur de l'objectif se stabilise, suggérant que l'algorithme a convergé vers une solution optimale. La solution optimale est atteinte à la 76ème itération à peu près.

Sur la Figure 20, chaque ligne représente une contrainte différente, et la couleur indique le niveau de satisfaction de la contrainte : vert pour satisfait, rouge pour non satisfait. On peut voir que la plupart des contraintes sont satisfaites à la fin des itérations, ce qui signifie que la solution optimale respecte toutes les contraintes imposées. On constate que deux contraintes ont mis plusieurs itérations à s'équilibrer.

## 4.3 Optimisation avec un modèle de substitution

### 4.3.1 Recherche du meilleur modèle de substitution

Tout d'abord, on commence par évaluer différents modèles de substitutions afin de déterminer le plus approprié pour approximer les fonctions de conception et les contraintes du problème d'optimisation.

On a considéré plusieurs configurations de modèles de substitutions, notamment des modèles à base de fonctions radiales (RBF) et des modèles polynomiaux. Les configurations testées sont les suivantes:

- **RBF\_gaussian** : Modèle à base de fonctions radiales avec une fonction gaussienne.
- **RBF\_gaussian\_mg** : Modèle à base de fonctions radiales avec une fonction multiquadrature.
- **Polynomial\_deg2** : Modèle polynomial de degré 2.
- **Polynomial\_deg3** : Modèle polynomial de degré 3.

Les  $R^2$  de l'évaluation des modèles de substitutions sont les suivants :

Modèle	fm	length	mtom	span	tofl	vapp	vz
RBF_gaussian	0.5798	0.7119	0.7591	0.6268	0.6382	0.6970	0.6565
RBF_gaussian_mg	0.9601	0.9911	0.9778	0.9761	0.9514	0.9752	0.9730
Polynomial_deg2	0.9768	0.9920	0.9323	0.9530	0.9199	0.9347	0.9171
Polynomial_deg3	0.9129	0.9682	0.9037	0.8866	0.8440	0.8374	0.8960

Table 7: UC1 - Valeur des  $R^2$  pour différents modèles substitutifs

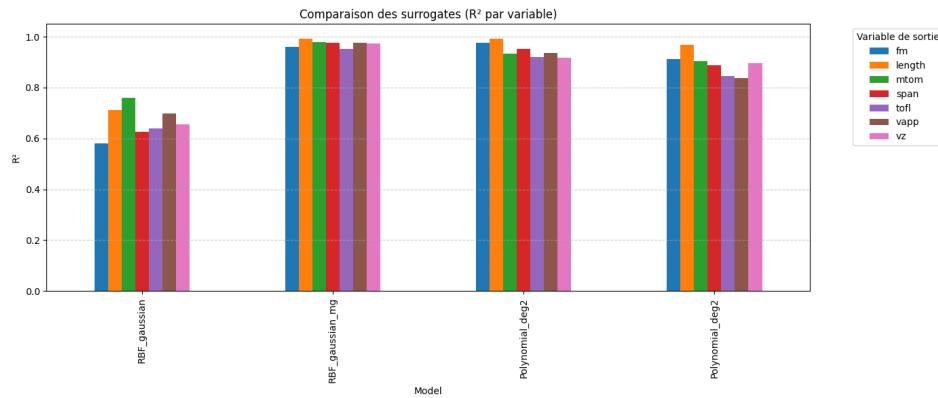


Figure 22: UC1 - Comparaison des surrogates ( $R^2$  par variable)

Les résultats montrent que le modèle **RBF\_gaussian\_mg** obtient des valeurs de  $R^2$  proches de 1 pour toutes les variables, ce qui indique une bonne qualité d'approximation. C'est donc celui que l'on va sélectionner pour notre problème d'optimisation.

### 4.3.2 Résultats de l'optimisation

On effectue une optimisation et on utilise l'algorithme **NLOPT\_COBYLA** avec un maximum de 100 itérations. On obtient que la solution optimale trouvée est réalisable et respecte toutes les contraintes imposées. On constate les résultats suivants:

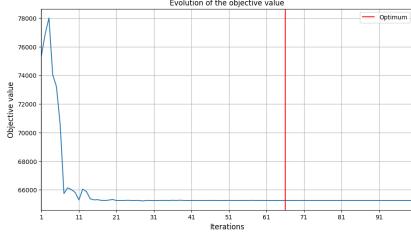


Figure 23: UC1 - Évolution de la valeur de l'objectif *MTOM*.

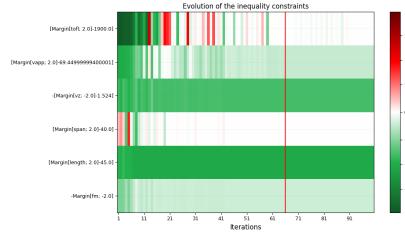


Figure 24: UC1 - Évolution des contraintes d'inégalité.

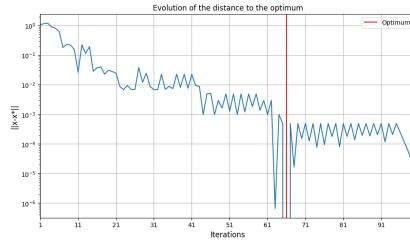


Figure 25: UC1 - Évolution de  $\|x - x^*\|$ .

Les graphiques de l'évolution de la valeur de l'objectif et de la distance à l'optimum montrent une convergence rapide vers une solution optimale. On constate, avec la Figure 24, que l'optimisation a beaucoup oscillé à partir de l'itération 30. Le graphique des contraintes d'inégalité montre que les contraintes sont satisfaites à la fin des itérations, bien que la première contrainte a eu des difficultés à s'équilibrer.

#### 4.3.3 Évaluation de $x_{\text{surrogate}}^*$ sur le modèle initial

Comme pour le Problème 1, on vérifie que la solution obtenue avec le modèle de substitution est également réalisable pour le modèle de base. Pour cela, on évalue le  $x_{\text{surrogate}}^*$  trouvé sur les disciplines initiales en recréant un espace de design, un espace incertain et un scénario.

		MTOM (kg)	
		Disciplines du modèle substitutif	Disciplines du modèle initial
UC1	Multiquadrature	63 643.88	63 913.89
UC2	Multiquadrature	65 357.00	64 514.83

Table 8: Tableau comparant la valeur de MTOM selon les disciplines utilisées en  $x^*$  <sub>surrogate</sub>

On trouve que la solution optimale obtenue à partir du modèle substitutif est également réalisable dans le modèle original. La valeur de la fonction objectif, c'est-à-dire la masse maximale au décollage, est de 63913.89 kg. Cela valide donc l'efficacité du modèle substitutif pour approximer les fonctions de conception et les contraintes du problème d'optimisation.

## 4.4 Analyse des résultats

### 4.4.1 Comparaison des résultats numériques

Les résultats disponibles dans les tableaux montrent que l'approche par modèle de substitution permet d'obtenir des paramètres de conception proches de celles obtenues via le modèle initial, tout en maintenant la réalisabilité des solutions et un bon respect des contraintes.

On constate tout de même que les configurations  $x_{\text{default}}$  ne sont pas réalisables dans les deux cas UC1 et UC2. Cela s'explique principalement par le fait que les paramètres de conception par défaut, bien que raisonnables individuellement, ne sont pas adaptés au contexte technologique imposé. En particulier, la combinaison d'une surface alaire trop importante, d'un nombre de passagers élevé et d'un allongement faible conduit à une masse maximale au décollage excessive et à un non-respect des contraintes.

Dans le cas UC1, la solution  $x_{\text{base}}^*$  présente une  $MTOM$  légèrement inférieure à celle de  $x_{\text{surrogate}}^*$ , avec un écart d'environ 270 kg. Ce faible écart témoigne de la qualité du modèle substitutif RBF multiquadrature utilisé dans ce cas. On note que les deux solutions respectent l'ensemble des contraintes opérationnelles, bien que la marge de carburant ( $\text{fm}$ ) reste modérément basse dans les deux cas (0.27 pour  $x_{\text{base}}^*$  et 0.22 pour  $x_{\text{surrogate}}^*$ ).

Les paramètres de conception sont cohérents entre les deux configurations : la poussée ( $\text{slst}$ ) est plus élevée dans  $x_{\text{surrogate}}^*$  (111346.35N) que dans  $x_{\text{base}}^*$  (100000N), ce qui explique en partie l'augmentation de  $MTOM$ . En revanche, le nombre de passagers est constant (120) et la surface alaire reste comparable. L'allongement ( $\text{ar}$ ) est légèrement plus élevé dans la solution substitutive.

Cas d'usage	Optimum	Solution réalisable	Masse (kg)
UC1	$x_{\text{default}}$	non	75022.57
UC1	$x_{\text{base}}^*$	oui	63643.88
UC1	$x_{\text{surrogate}}^*$	oui	63913.89
UC2	$x_{\text{default}}$	non	76490.28
UC2	$x_{\text{base}}^*$	oui	64275.89
UC2	$x_{\text{surrogate}}^*$	oui	64514.83

Table 9: Résultat de  $MTOM$  pour différents paramètres de conception.

Pour UC2, les résultats sont également satisfaisants. La  $MTOM$  obtenue avec le modèle substitutif est de 64514.83 kg, très proche de celle obtenue avec le modèle initial (64275.89 kg), soit un écart inférieur à 250 kg. Ici aussi, toutes les contraintes sont respectées. On note que la marge de carburant est presque nulle dans  $x_{\text{base}}^*$  (0.0), mais reste légèrement positive dans  $x_{\text{surrogate}}^*$  (0.034), ce qui constitue un gain en robustesse.

Les valeurs de  $\text{tof1}$  sont proches de la limite (1900 m) pour les deux cas (1900.00 et 1883.93 m respectivement), ce qui confirme que cette contrainte est généralement active à l'optimum. La vitesse d'approche  $\text{vapp}$  est également assez haute, mais reste toujours dans la limite imposée.

Cas d'usage	Optimum	$\text{slst } N$	$\text{n\_pax}$	$\text{area } m^2$	$\text{ar}$
UC1	$x_{\text{default}}$	150000	150	180	9
UC1	$x_{\text{base}}^*$	100000	120	113.08	14.15
UC1	$x_{\text{surrogate}}^*$	111346.35	120	105.29	14.94
UC2	$x_{\text{default}}$	150000	150	180	9
UC2	$x_{\text{base}}^*$	101202.59	120	115.78	9.51
UC2	$x_{\text{surrogate}}^*$	100094.74	120	120.07	10.69

Table 10: Tableau des paramètres de conception.

Cas d'usage	Optimum	tof (m)	vapp (m/s)	vz (m/s)	span (m)	length (m)	fm
UC1	$x_{default}$	1522.79	63.24	4.33	40.12	41.00	0.58
UC1	$x_{base}^*$	1900.00	67.69	2.99	40.00	38.5	0.27
UC1	$x_{surrogate}^*$	1875.20	68.98	3.87	39.83	38.50	0.22
UC2	$x_{default}$	1550.46	65.37	3.99	40.12	42.37	0.03
UC2	$x_{base}^*$	1900.00	69.45	1.64	36.59	39.87	0.0
UC2	$x_{surrogate}^*$	1883.93	68.98	1.98	37.91	39.87	0.034

Table 11: Tableau des contraintes opérationnelles.

**Note :** Les valeurs en rouge sont les contraintes qui ne respectent pas les limites.

Globalement, ces résultats confirment que l'optimisation robuste via un modèle substitutif bien entraîné permet de produire des designs performants, tout en maîtrisant l'impact des incertitudes et en respectant l'ensemble des contraintes opérationnelles.

#### 4.4.2 Configuration des avions

Les figures suivantes illustrent visuellement les différences entre les configurations obtenues avec et sans modèle de substitution, ainsi que par rapport à la configuration par défaut.

Pour UC1, la configuration  $x_{surrogate}^*$  se distingue légèrement de  $x_{base}^*$  par une réduction de l'envergure et une modification subtile du plan de l'aile. La longueur du fuselage reste identique. Ces ajustements modestes suffisent néanmoins à entraîner une variation de la *MTOM* d'environ 270 kg. En comparaison, la configuration  $x_{default}$  présente une géométrie beaucoup plus imposante, avec un fuselage plus long, une surface alaire et une envergure augmentées, ce qui se traduit par une *MTOM* nettement plus élevée et une non-réalisabilité.

Comparaison des configurations des avions

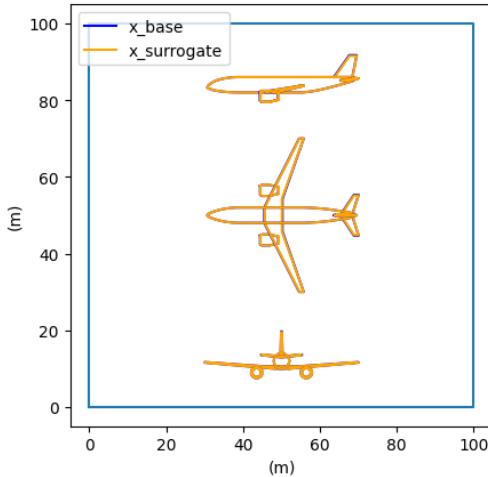


Figure 26: UC1 - Comparaison des configurations pour  $x_{base}^*$  et  $x_{surrogate}^*$

Comparaison des configurations des avions

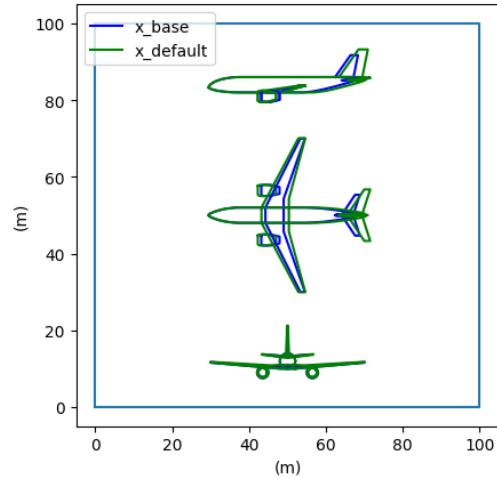


Figure 27: UC1 - Comparaison des configurations pour  $x_{base}^*$  et  $x_{default}$

Dans UC2, les différences entre  $x_{base}^*$  et  $x_{surrogate}^*$  sont très faibles, traduisant une excellente capacité du modèle substitutif à capturer la géométrie optimale. On observe néanmoins une légère augmentation de l'envergure et de la surface alaire dans la configuration substitutive. Le nombre de passagers reste constant et la longueur du fuselage est identique.

La configuration par défaut ( $x_{default}$ ), quant à elle, reste nettement surdimensionnée. Elle présente une *MTOM* supérieure à 76 tonnes, et une marge de carburant quasi nulle (0.03), ce qui rend cette solution non fiable.

Aircraft Configurations Comparison

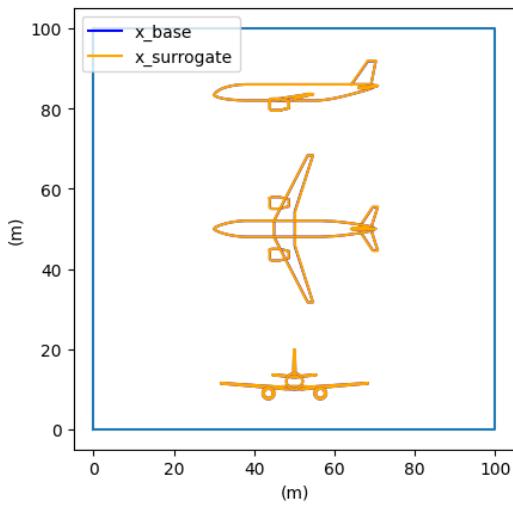


Figure 28: UC2 - Comparaison des configurations pour  $x_{base}^*$  et  $x_{surrogate}^*$

Comparaison des configurations des avions

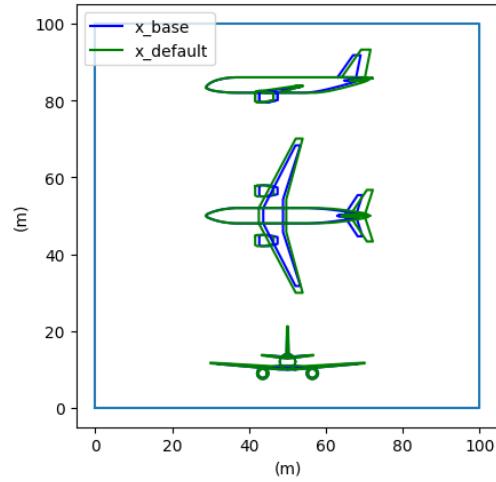


Figure 29: UC2 - Comparaison des configurations pour  $x_{base}^*$  et  $x_{default}$

Ces résultats confirment l'intérêt de l'approche robuste basée sur des modèles de substitution bien calibrés : les géométries obtenues sont proches de l'optimum déterministe, les contraintes sont respectées, et l'impact des incertitudes est mieux maîtrisé qu'avec une approche classique.

L'optimisation dans un cadre incertain (Problème 3) a permis d'obtenir des configurations d'aéronef plus robustes aux variations des paramètres technologiques. Plutôt que de viser une performance optimale dans des conditions idéalisées, le processus d'optimisation intègre explicitement la variabilité des paramètres (par exemple `sef` ou `gi`). Cela conduit à une légère augmentation de la *MTOM* (+200 à +300 kg par rapport aux optimums déterministes), mais garantit le respect des contraintes dans une large plage d'incertitudes. Cette approche est donc essentielle dans une démarche industrielle : elle permet d'assurer la faisabilité opérationnelle de la conception dans le monde réel, au lieu d'un design trop optimiste qui risquerait d'être fragile face aux aléas. Ainsi, le gain en robustesse obtenu grâce au modèle de substitution est un atout clé, sans perte significative de performance.

## 5 Conclusion

Ce projet a permis d'explorer l'utilisation de la modélisation substitutive dans un contexte de conception d'aéronef soumise à des incertitudes. À travers trois problèmes successifs, nous avons mis en œuvre différentes approches permettant de minimiser la masse maximale au décollage (*MTOM*) tout en respectant des contraintes opérationnelles strictes.

Dans un premier temps, le Problème 1 a démontré que l'utilisation d'un modèle de substitution permet d'obtenir des configurations proches de celles issues du modèle de base, avec un gain significatif en temps de calcul. Les modèles RBF avec fonction multiquadratique se sont montrés particulièrement efficaces, avec des coefficients de détermination ( $R^2$ ) très élevés sur l'ensemble des variables de sortie.

Le Problème 2 a ensuite introduit la quantification de l'incertitude liée aux choix technologiques. Grâce à la propagation d'incertitudes et à l'analyse de sensibilité globale via les indices de Sobol, nous avons pu identifier les paramètres les plus influents sur les sorties du modèle. Les résultats ont montré que certaines variables incertaines, comme **sef** ou **gi**, dominent largement la variabilité de la *MTOM* ou de la distance de décollage, tandis que d'autres ont un impact négligeable. Cela permet d'orienter les efforts de réduction d'incertitude de manière ciblée.

Enfin, le Problème 3 a montré l'intérêt de combiner modélisation substitutive et optimisation robuste. Les designs obtenus respectent l'ensemble des contraintes et sont moins sensibles aux fluctuations des paramètres incertains. On observe que les solutions optimales issues du modèle substitutif sont très proches de celles du modèle de base, à la fois en termes de performance (écart de *MTOM* inférieurs à 300 kg) et de configuration géométrique. De plus, la marge de carburant est légèrement améliorée dans certains cas, traduisant un gain de robustesse sans perte de performance.

En conclusion, la méthodologie mise en œuvre s'avère efficace pour la résolution de problèmes industriels complexes. Elle permet non seulement d'optimiser efficacement la conception d'un aéronef, mais aussi de garantir sa viabilité en environnement incertain, tout en réduisant significativement les coûts de simulation.