Zadaća 2

3

4) Izračunamo nekoliko početnih vrijednosti:

$f(k,0) = h(k)+0 = c+0$

$f(k,1) = f(0)+1 = h(k)+1 = c+1$

$f(k,2) = f(1)+2 = f(0)+1+2 = h(k)+3 = c+3$

$f(k,3) = f(2)+3 = f(1)+2+3 = f(0)+1+2+3 = h(k)+6 = c+6$

Općenito vrijedi: $f(k,i) = f(k, i-1)+i$

Indukcijom možemo dobiti:

$$f(k,i) = h(k) + \sum_{j=0}^{m} j = h(k) + \frac{m(m+1)}{2}$$

Ako uzmemo $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ imamo:

$f(k,i) = h(k) + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i^2$, za svaki i dobivamo različite vrijednosti

5) Pretpostavimo suprotno: $\exists$ dvije različite vrijednosti a, b td je

$0 \leq a < b < m$

$f(k,a) = f(k,b) \mod m$: $h(k) + \frac{a(a+1)}{2} = h(k) \frac{b(b+1)}{2} \mod m$

$$\frac{a(a+1)}{2} = \frac{b(b+1)}{2} \mod m$$

$$\frac{a(a+1)}{2} - \frac{b(b+1)}{2} = 0 \mod m$$

$$\frac{a^2+a-b^2-b}{2} = 0 \mod m$$

$$\frac{a^2+a+ab-b^2-b+b}{2} = 0 \mod m$$

$$\frac{(a-b)(a+b+1)}{2} = 0 \mod m$$

Prema tome $\exists\, r$ td vrijedi:

$$(a-b)(a+b+1) = 2rm$$, m je potencija broja 2 pa postoji p td je

$m = 2^p$ i imamo:

$$(a-b)(a+b+1) = r \cdot 2^{p+1}$$

- a i b su brojevi, to znači da je jedan od brojeva $(a-b)$ i $(a+b+1)$ paran, a drugi neparan $\Rightarrow$ jedan od njih je djeljiv s 2^{p+1}, a to je $\lightning$ jer $(a-b)$ nije djeljiv s 2^{p+1} jer je $a-b < m < 2^{p+1}$ i $(a+b+1)$ nije djeljiv s 2^{p+1} jer je $a+b+1 \leq (m-1)+(m-2)+1 = 2m-2 < 2^{p+1}$

Dakle, za $0 \leq a < b < m$ vrijedi

$$f(k,a) \neq f(k,b) \Rightarrow$$ algoritam pretraži svaku poziciju u tablici