Actividad 9: Aproximación al cálculo del periodo del péndulo.

Valenzuela Carrillo María Inés

14 de Abril del 2016

1. Introducción

Una aproximación usualmente se realiza cuando una forma exacta o un valor numérico exacto es desconocido o difícil de obtener. Sin embargo, puede conocerse alguna forma, que sea capaz de representar a la forma real, de manera que no se presenten desviaciones significativas. Las aproximaciones numéricas a veces son efecto del uso de una cantidad pequeña de dígitos significativos. La teoría de la aproximación es una rama de las matemáticas, una parte cuantitativa del análisis funcional.

Para esta actividad se pide realizar una aproximación al calculo del periodo del péndulo por una serie de potencias. En la actividad 1 se vio que la integral para el periodo del péndulo se puede escribir como una integral elíptica de primer tipo, obteniendo la expresión:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) \tag{1}$$

Donde K es la integral elíptica completa de primer tipo definida por

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}du \tag{2}$$

como parte de la actividad se pide demostrar que la integral elíptica puede ser aproximada por una serie de potencias descrita por la expresión:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n} + \cdots\right\}$$

Donde $n!!$ denota doble factorial. Entonces una solución exacta del periodo de un péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cdots\right)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right)^2\cdot\sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right] \tag{3}$$

2. Producto 1

Con la expresión anterior, se pide reproducir la figura 1 que representa los errores relativos. T_0 es la aproximación lineal, T_2 a T_10 representan la inclusion de 2 hasta 10 términos de la serie de potencias.

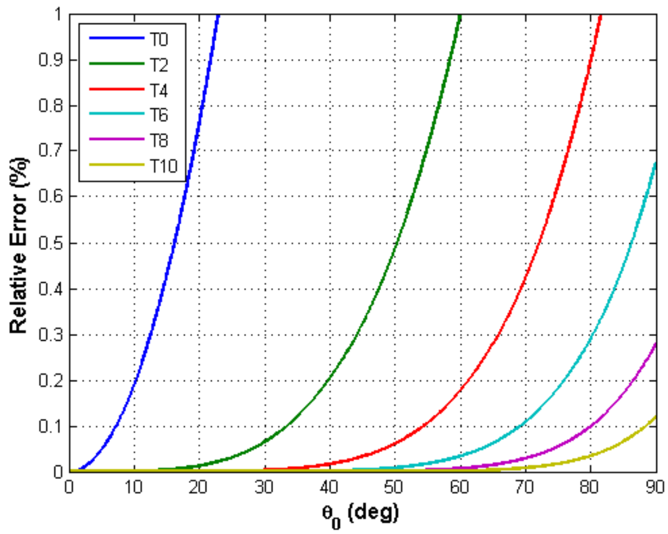


Figura 1: Errores relativos

Código en python

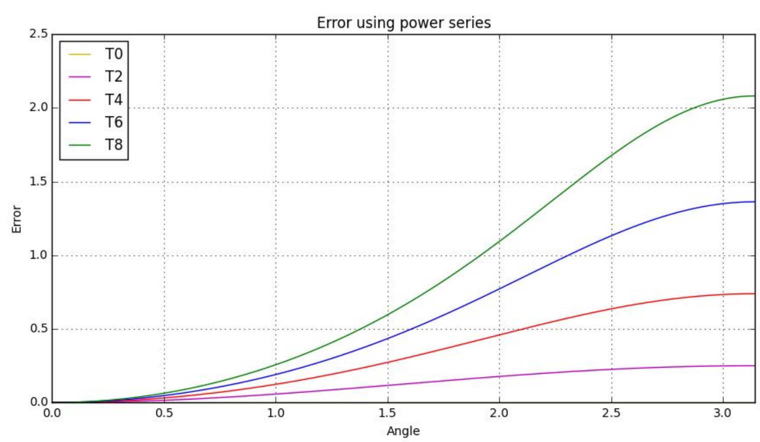
```
#Bibliotecas utilizadas
from scipy.integrate import quad
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Parametros


g=9.8   #Aceleracion gravitacional
l=0.5   #Longitud de la cuerda

#Periodo base
T0=2*np.pi*np.sqrt(l/g)

n=1000
#Error
e=0.0001

```

```
theta0=np.linspace(e,(np.pi)+e,n) #Rango de theta0


#Resultados arrojados
S=[0 for i in range(n)]
TT=[0 for i in range(n)]
R=[0 for i in range(n)]
T=[0 for i in range(n)]
real0=[0 for i in range(n)]
real2=[0 for i in range(n)]
real4=[0 for i in range(n)]
real6=[0 for i in range(n)]
real8=[0 for i in range(n)]


M0=0

for i in range(M0):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real0[j]=(T[j]/T0)
#------------------------------------------
M2=2
for i in range(M2):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real2[j]=(T[j]/T0)-1
#------------------------------------------
```

```
M4=4
for i in range(M4):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real4[j]=(T[j]/T0)-2
#------------------------------------------
M6=6
for i in range(M6):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real6[j]=(T[j]/T0)-3
#------------------------------------------
M8=8
for i in range(M8):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real8[j]=(T[j]/T0)-4


#Para graficar

plt.plot(theta0, real0, 'y', label="T0")
```

```
plt.plot(theta0, real2, 'm', label="T2")
plt.plot(theta0, real4, 'r', label="T4")
plt.plot(theta0, real6, 'b', label="T6")
plt.plot(theta0, real8, 'g', label="T8")
plt.title('Error using power series')
plt.grid()
plt.xlabel('Angle')
plt.xlim(0,np.pi)
plt.ylabel('Error')
plt.legend(loc='best')

fig = matplotlib.pyplot.gcf()
fig.set_size_inches(10.5,5.5)
fig.savefig('error.png',dpi=100)
```

La gráfica resultante es:



3. Producto 2

Se pide aplicar una serie de Maclaurin:

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2}\theta_0 - \frac{1}{48}\theta_0^3 - \frac{1}{3840}\theta_0^5 - \frac{1}{645120}\theta_0^7 \cdots \tag{4}$$

Para demostrar que se puede expresar el periodo T como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\frac{173}{737280}\theta_0^6+\frac{22931}{132120576}\theta_0^8\cdots\right) \qquad (5)$$

A continuación se muestra el código en Máxima

```
(%i2)  integrate(K, u, o, %pi/2);
```

(%o2) $$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin(u)^2}}du$$

```
(%i3)  tK: taylor(K, u, 0, 8);
```

(%o3)/T/ $$1+\frac{k^2\,u^2}{2}+\frac{\left(9\,k^4-4\,k^2\right)\,u^4}{24}+\frac{\left(225\,k^6-180\,k^4+16\,k^2\right)\,u^6}{720}+\ldots$$

```
(%i4)  eK: expand(integrate(tK, u, 0, %pi/2));
```

(%o4) $$\frac{35\,\pi^9\,k^8}{589824}-\frac{5\,\pi^9\,k^6}{73728}+\frac{5\,\pi^7\,k^6}{14336}+\frac{\pi^9\,k^4}{61440}-\frac{\pi^7\,k^4}{3584}+\frac{3\,\pi^5\,k^4}{1280}-\frac{\pi^9\,k^2}{2903040}+\frac{\pi^7\,k^2}{40320}-\frac{\pi^5\,k^2}{960}+\frac{\pi^3\,k^2}{48}+\frac{\pi}{2}$$

```
(%i5)  sK: subst(sin(%theta/2), k, eK);
```

(%o5) $$\frac{35\,\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{589824}-\frac{5\,\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{73728}+\frac{5\,\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{14336}+\frac{\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{61440}-\frac{\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{3584}+\frac{3\,\pi^5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1280}-\frac{\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{2903040}+\frac{\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{40320}-\frac{\pi^5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{960}+\frac{\pi^3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{48}+\frac{\pi}{2}$$

```
(%i7)  ssK: sK*2/%pi;
```

(%o7) $$\frac{2\left(\frac{35\,\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{589824}-\frac{5\,\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{73728}+\frac{5\,\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{14336}+\frac{\pi^9\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{61440}-\frac{\pi^7\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{3584}+\frac{3\,\pi^5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1280}+\cdots+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}$$

```
(%i8)  essK: expand(ssK);
```

(%o8) $$\frac{35\,\pi^8 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{294912}-\frac{5\,\pi^8 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{36864}+\frac{5\,\pi^6 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{7168}+\frac{\pi^8 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{30720}-\frac{\pi^6 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1792}+\frac{3\,\pi^4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{640}-\frac{\pi^8 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{1451520}+\frac{\pi^6 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{20160}-\frac{\pi^4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{480}+\frac{\pi^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{24}+1$$

```
(%i11) T: (2*%pi)*sqrt(l/g);
```

(%o11) $$2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$

```
(%i12) define(T(theta), T*essK);
```

(%o12) $$\mathrm{T}\left(\theta\right):=2\,\pi\,\left(\frac{35\,\pi^8 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{294912}-\frac{5\,\pi^8 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{36864}+\frac{5\,\pi^6 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{7168}+\cdots+\frac{\pi^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{24}+1\right)\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$

```
(%i13) S: sin(%theta/2);
```

(%o13) $$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

```
(%i14) sS: taylor(S, %theta, 0, 8);
```

(%o14) $$\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^3}{48}+\frac{\theta^5}{3840}-\frac{\theta^7}{645120}+...$$

```
(%i20) mlT: subst(sS, S, T(theta));
```

(%o20) $$2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}-\frac{\left(\pi^9-72\,\pi^7+3024\,\pi^5-60480\,\pi^3\right)\,\sqrt{\frac{l}{g}}\,\theta^2}{2903040}+\cdots$$

Referencias

[1] Wikipedia, the free encyclopedia, *Aproximación,https://es.wikipedia.org/wiki/AproximaciónMatem.C3.A1ticas*

[2] Actividad 9 (2016-1), *http://computacional1.pbworks.com/w/page/106821012/Actividad 7 (2016-1).*