Actividad 5: Movimiento armónico simple: Péndulo

Valenzuela Carrillo María Inés

21 de Febrero del 2016

1. Introducción

El objetivo de esta actividad es la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, como ejemplo se tomaran las ecuaciones de movimiento del péndulo.

Un péndulo es una masa suspendida de un pivote que puede oscilar libremente. Cuando un péndulo se mueve de su posición de equilibrio actúa sobre el una fuerza restauradora debida a la gravedad en dirección de su posición de equilibrio. Lo anterior combinado con la masa del péndulo hace que este oscile alrededor de la posición de equilibrio. Al tiempo que le toma al péndulo regresar a la posición inicial se le llama periodo.

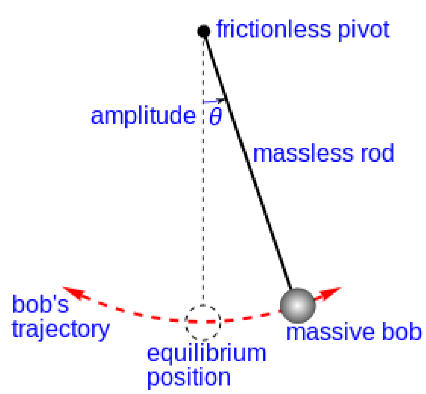


Figura 1: Péndulo

Las matemáticas del péndulo son en general complicadas. Se puede simplificar haciendo suposiciones, como en el caso del péndulo simple que se puede resolver analíticamente para ángulos pequeños.

El péndulo simple es una idealización de un péndulo real en un sistema aislado, usando las siguientes suposiciones:

- La cuerda que sostiene a la masa no se estira, no tiene masa y permanece tensa.
- La masa es puntual.
- El movimiento de la oscilación se da en dos dimensiones.
- No hay fricción ni resistencia del aire.
- El Campo gravitacional es uniforme.
- El soporte no se mueve.

La ecuación diferencial para representar el movimiento de un péndulo simple es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

Donde g es la aceleración gravitacional, l la longitud del péndulo y θ es el desplazamiento angular.

2. Solución numérica para el péndulo simple

Para realizar la actividad se utilizara la función scipy.integrate.odeint de Python para resolver las ecuaciones de movimiento del péndulo numéricamente.

En este caso se utilizara la ecuación (1) pero agregándole un termino para la fricción, por lo tanto la ecuación se expresa como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{2}$$

Para trabajar con la ecuación (2) es necesario separarla en un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \tag{3}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -b\omega(t) - \frac{g}{l}\sin\theta \tag{4}$$

Donde ω es la velocidad angular.

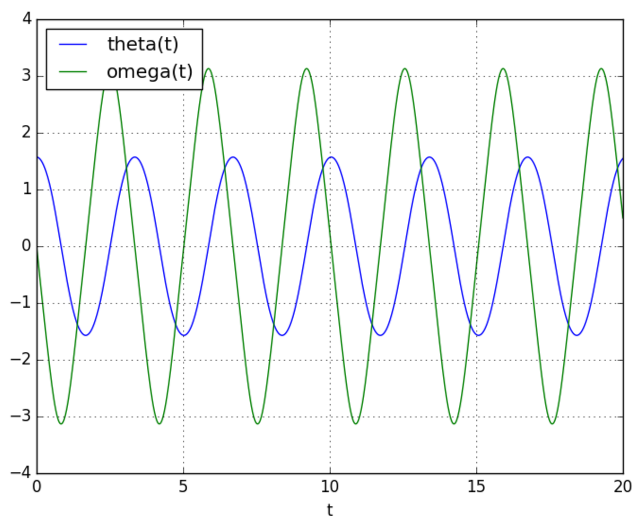
El código para la solución es:

```
#Soluución péndulo simple
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

#Para definir las ecuaciones
def pend(y, t, b, c):
        theta, omega = y
        dydt = (omega, -b*omega - c*np.sin(theta))
        return dydt

#Parametros
b = 0.0
g= 9.8
l=2
c=g/l

#Condiciones iniciales
y0 = [np.pi-0.1 , 0.0 ]

#Intervalo de tiempo
t = np.linspace(0, 20, 100)

#Para generar la solución
sol = odeint(pend, y0, t, args=(b,c))

#Para graficar
plt.plot(t, sol[:, 0], 'b', label='theta(t)')
```

```
plt.plot(t, sol[:, 1], 'g', label='omega(t)')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.grid()
plt.show()
```

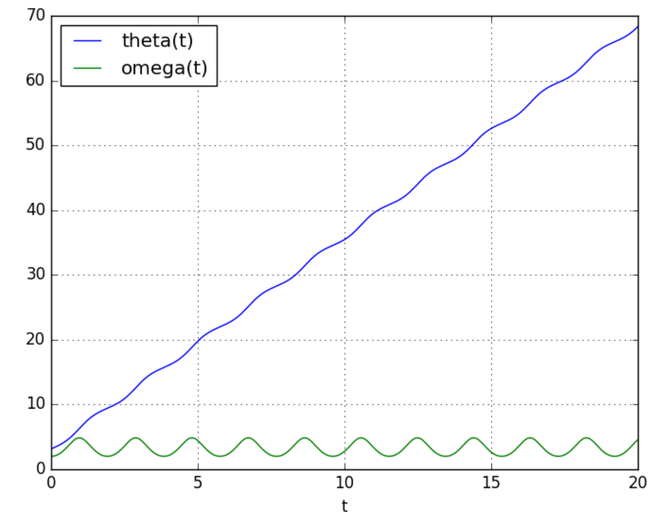
Enseguida se muestran las gráficas resultantes para diversas condiciones iniciales y parámetros.

Gráfica para $\theta = 90$ grados y $\omega = 0$.



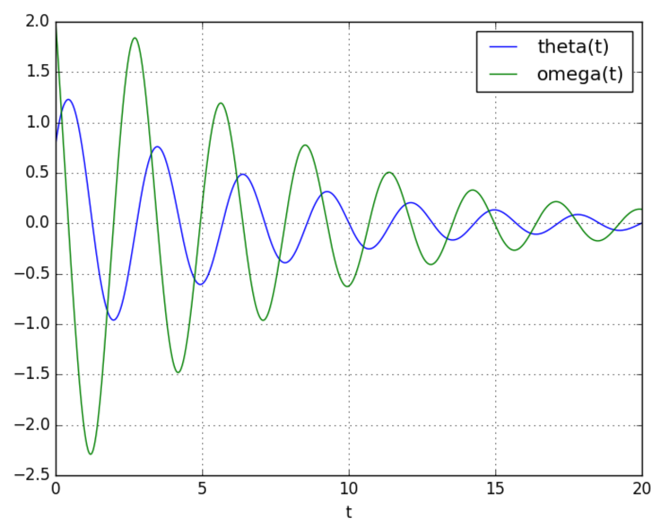
El ángulo y la velocidad se mueven de manera periodica ya que no hay fricción. Mantiene la amplitud inicial ya que la velocidad inicial fue 0.

Gráfica para $\theta = 180$ grados y $\omega = 2$ rad.



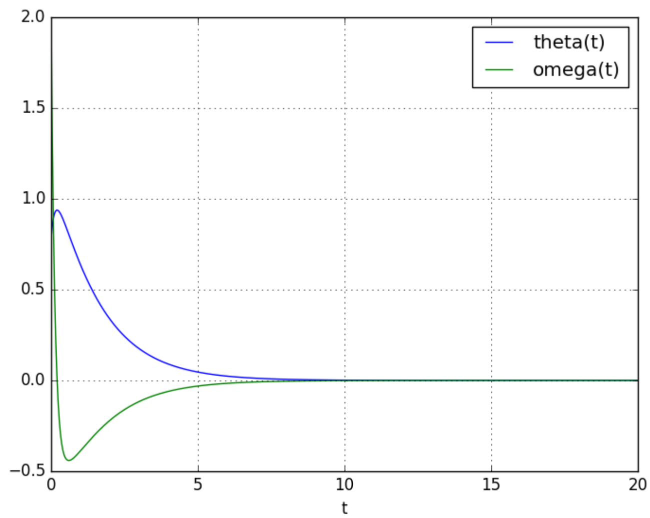
Para este caso el ángulo θ siempre va aumentando por que se mantiene en un movimiento circular, esto se debe a que comenzo en la parte superior y con una velocidad inicial.

Gráfica para $\theta = 45$ grados, $\omega = 2$ rad y $b = 0.3$.



En la gráfica se muestra un movimiento subamortiguado causado por una b menor que ω.

Gráfica para $\theta = 45$ grados y $\omega = 2$ rad y $b = 8$.



En la gráfica se muestra un movimiento sobreamortiguado causado por una b mayor que ω.

Referencias

[1] WIKIPEDIA, THE FREE ENCYCLOPEDIA, *Pendulum (mathematics).*

[2] Actividad 5 (2016-1), *http://computacional1.pbworks.com/w/page/105233358/Actividad 5 (2016-1).*

[3] SCIPY, scipy.integrate.odeint, *http://scipy.github.io/devdocs/generated /scipy.integrate.odeint.html.*