Cel

Wyznacz $y = A^{-1}x$ dla

$$A = \begin{pmatrix} 1.01 & \frac{0.2}{1} & \frac{0.15}{1^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{2} & \frac{0.15}{2^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{3} & \frac{0.15}{3^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-2} & \frac{0.15}{(N-2)^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 1.01 \end{pmatrix}$$

oraz

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & N \end{pmatrix}^T$$

Ustalamy N = 300. Oblicz również wyznacznik macierzy A. Zadanie rozwiąż właściwą metodą (uzasadnij wybór) i wykorzystaj strukturę macierzy. Ponadto, potraktuj N jako zmienną i zmierz czas działania swojego programu w funkcji N. Wynik przedstaw na wykresie. Jakiej zależności się spodziewamy?

Analiza układu

W celu rozwiązania równania $y = A^{-1}x$, rozwiążemy równanie $Ay = x$.

Ponieważ A jest macierzą pasmową, posłużymy się algorytmem Thomasa w celu znalezienia faktoryzacji LU macierzy A.

$$A = LU$$

gdzie U jest macierzą trójkątną górną, a L macierzą trójkątną dolną, której elementy diagonalne są równe 1.

Dlaczego algorytm Thomasa?

Algorytm faktoryzacji LU macierzy trójdiagonalnej, wraz z forward substitution i backsubstitution, nosi nazwę algorytmu Thomasa.

Macierz A nie jest co prawda trójdiagonalna, ponieważ ma o jedno pasmo ponad diagonalą za dużo, ale jej struktura jest na tyle zbliżona do macierzy trójdiagonalnej, że możemy zastosować algorytm Thomasa w delikatnie zmodyfikowanej formie. Ze względu na konieczność zachowania kształtu macierzy, niemożliwy jest przy tym wybór elementu podstawowego.

Faktoryzacji LU macierzy trójdiagonalnej można dokonać w czasie liniowym. Istotnie, gdy obliczamy elementy $l_{ij}, i > j$, widzimy, że dla takiej macierzy tylko $l_{n,n+1} = 0$. Pozostałych elementów nie trzeba więc obliczać, skoro z góry wiadomo, że znikają. Czynnik L jest dwudiagonalny, podobnie czynnik U zachowa strukturę macierzy A ponad diagonalą, a zatem także forward substitution i backsubstitution można wykonać w czasie liniowym.

Złożoność obliczeniowa rozwiązywania układu równań z tą macierzą wynosi O(N),zatem jest to jeden z najszybszych algorytmów dla tego rodzaju macierzy.

Przebieg zadania

Ponieważ A jest macierzą pasmową, możemy ją charakteryzować przez ilość pasków ($n = 1$) pod diagonalą i ($m = 2$) nad diagonalą. Rozkład LU zachowuje strukturę macierzy, więc macierze L,U będą miały postacie:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{N-2,N-3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{N-1,N-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{N,N-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{3,3} & u_{3,4} & u_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{N-2,N-2} & u_{N-2,N-1} & u_{N-2,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{N-1,N-1} & u_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{N,N} \end{pmatrix}$$

Niezerowe elementy macierzy L i U to: $u_{i,i}, u_{i,i+1}, u_{i,i+2}, l_{i+1,i}$ oraz $l_{i,i} = 1$.

Zgodnie ze wzorami wynikającymi z mnożenia macierzy, niezerowe elementy $u_{i,j}$ i $l_{i,j}$ są dane wzorami:

$$u_{1,j} = a_{1,j}$$

dla i>1:

$$u_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-1} \cdot u_{i-1,i}$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1} - l_{i,i-1} \cdot u_{i-1,i+1}$$

$$u_{i,i+2} = a_{i,i+2}$$

$$l_{i+1,i} = \frac{a_{i+1,i}}{u_{i,i}}$$

Znając rozkład LU macierzy A, możemy policzyć wyznacznik tej macierzy.

$$det(A) = det(LU) = det(L) \cdot det(U)$$

Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów diagonalnych tej macierzy.

$$det(A) = 1 \cdot \prod_{i=1}^{N=300} U_{i,i}$$

Następnie rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} Uy &= z \\ Lz &= x \end{cases}$$

Najpierw rozwiążemy równanie $Lz = x$ metodą forward substitution. (i>1)

$$\begin{cases} z_1 &= x_1 \\ z_i &= x_i - l_{i,i-1} \cdot z_{i-1} \end{cases}$$

Natomiast równanie $Uy = z$ rozwiążemy metodą backsubstitution: (i>1)

$$\begin{cases} y_N &= \frac{z_N}{u_{N,N}} \\ y_{N-1} &= \frac{z_{N-1} - u_{N-1,N} \cdot y_N}{u_{N,N}} \\ y_{N-i} &= \frac{z_{N-i} - u_{N-i,N-i+2} \cdot y_{N-i+2} - u_{N-i,N-i+1} \cdot y_{N-i+1}}{u_{N-i,N-i}} \end{cases}$$

Dzięki czemu uzyskamy wektor y będący rozwiązaniem.

Faktoryzacja LU i rozwiązanie równania z użyciem programu

Macierz A zostanie przechowana w strukturze $H_{4,N}$ w sposób następujący:

$$H = \begin{pmatrix} a_{1,3} & a_{2,4} & a_{3,5} & \dots & a_{N-2,N} & 0 & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,3} & a_{3,4} & \dots & a_{N-2,N-1} & a_{N-1,N} & 0 \\ a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} & \dots & a_{N-2,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N,N} \\ 0 & a_{2,1} & a_{3,2} & \dots & a_{N-2,N-3} & a_{N-1,N-2} & a_{N,N-1} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{0.15}{1^3} & \frac{0.15}{2^3} & \frac{0.15}{3^3} & \dots & \frac{0.15}{(N-2)^3} & 0 & 0 \\ \frac{0.2}{1} & \frac{0.2}{2} & \frac{0.2}{3} & \dots & \frac{0.2}{N-2} & \frac{0.2}{N-1} & 0 \\ 1.01 & 1.01 & 1.01 & \dots & 1.01 & 1.01 & 1.01 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & \dots & 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Obliczeń dokonano z użyciem biblioteki pythonowej numpy, pełny program jest dostępny w pliku `program.py`.

Wyniki

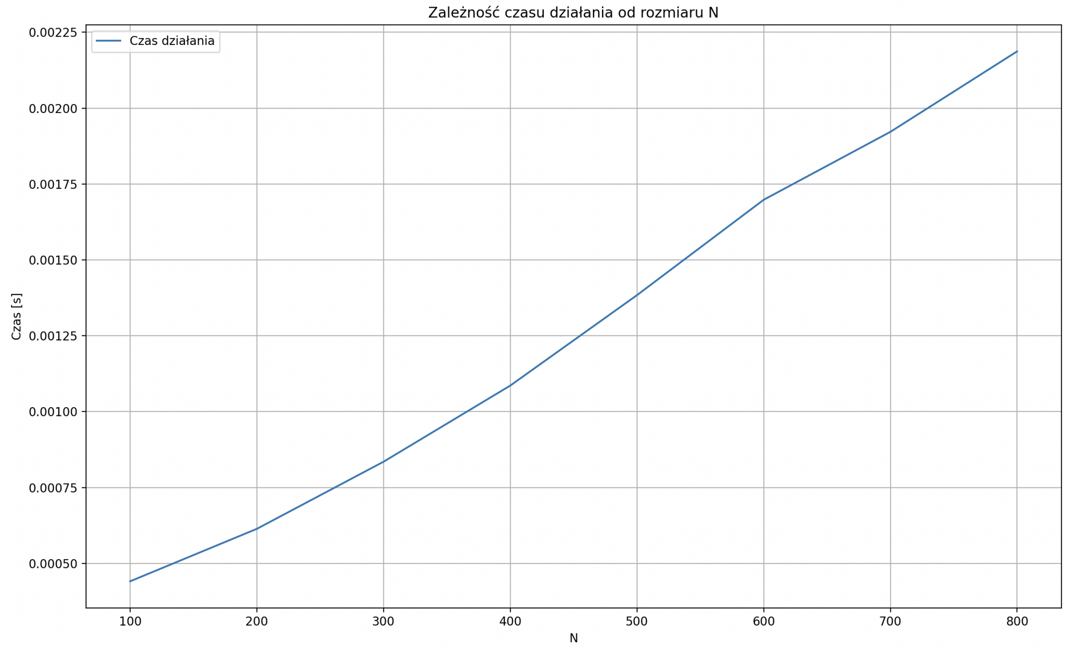
Policzony wyznacznik macierzy A dla $N = 300$:

$$det(A) = 9.778753063504471$$

Wyznaczony wektor y dla $N = 300$ (zaokrąglony do 2 miejsc po przecinku):

$$y = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 1.82 \\ 2.23 \\ 3.15 \\ 3.87 \\ 4.66 \\ 5.42 \\ 6.19 \\ 6.96 \\ 7.72 \\ 8.49 \\ 9.25 \\ 10.02 \\ 10.79 \\ 11.55 \\ \vdots \\ 225.78 \\ 226.55 \\ 227.31 \\ 228.08 \\ 228.84 \\ 229.76 \end{bmatrix}$$

Wyznaczona zależność czasu działania programu od rozmiaru N jest liniowa, zgodnie z oczekiwaną.



Podsumowanie

W zadaniu należało obliczyć wektor $y = A^{-1}x$ dla macierzy pasmowej A oraz wektora x o ustalonym rozmiarze $N = 300$.

Macierz A ma strukturę zbliżoną do macierzy trójdiagonalnej, co umożliwiło wykorzystanie algorytmu Thomasa (modyfikacji dla macierzy pasmowych) do przeprowadzenia rozkładu LU.

Algorytm ten charakteryzuje się liniową złożonością obliczeniową $O(N)$, co zapewnia szybkie rozwiązanie układu równań dla dużych wartości N.

Wynikiem obliczeń był konkretny wektor y oraz wyznacznik macierzy A (około 9.78 dla $N = 300$). Analiza czasu potwierdziła liniową złożoność algorytmu, co jest zgodne z oczekiwaniami dla algorytmów opartych na rozkładzie LU dla macierzy pasmowych.