Cel

Napisz program wyliczający przybliżenie pochodnej ze wzorów:

a)

$$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

b)

$$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Przeanalizuj, jak zachowuje się błąd $|D_h f(x) - f'(x)|$ dla funkcji $f(x) = \sin(x^3)$ oraz punktu x = 0.2 przy zmianie parametru h dla różnych typów zmiennoprzecinkowych (float, double). Wykreśl $|D_h f(x) - f'(x)|$ w funkcji h w skali logarytmicznej.

Poeksperymentuj również używając innych funkcji i punktów.

Analiza błędu

Ze względu na fakt, że liczby z rozwinięciem dziesiętnym w systemie komputerowym są reprezentowane ze skończoną dokładnością, wszelkie obliczenia na nich są obarczone błędem e związanym bezpośrednio z używanym typem danych (double,float). Wzór $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, po uwzględnieniu zaburzeń numerycznych, przyjmie zatem postać:

$D'_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)\cdot(1+e_1) - f(x)\cdot(1+e_2)}{h}$

Przekształcając:

$$D'_h f(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x+h)\cdot e_1 - f(x)\cdot e_2}{h}$$

Rozwińmy $f(x+h)$ w szereg Taylora w pierwszym ułamku, w drugim (zakładając $h \longrightarrow 0$) użyjemy przybliżenia $f(x+h) \approx f(x)$.

$$D'_h f(x) \approx \frac{f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)\cdot h^2 - f(x)}{h} + \frac{f(x)\cdot e_1 - f(x)\cdot e_2}{h}$$

$$\approx f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\cdot h + \frac{f(x)\cdot(e_1 - e_2)}{h}$$

Błąd względny będzie miał zatem postać: $E(h) = |D'_h f(x) - f'(x)|$

$$D'_h f(x) - f'(x) \approx \frac{1}{2}f''(x)\cdot h + \frac{f(x)\cdot(e_1 - e_2)}{h}$$

Zakładając $h > 0$:

$$E(h) \lesssim \frac{1}{2}|f''(x)|\cdot h + \frac{|f(x)|\cdot |e_1| + |e_2|}{h}$$

$e_1 \approx e_2 \approx e$

$$E(h) \lessapprox \frac{1}{2}|f''(x)| \cdot h + \frac{2|f(x)| \cdot e}{h}$$

Aby znaleźć najlepsze h do wykonania tych obliczeń (czyli takie aby błąd był najmniejszy) musimy znaleźć minimum $E(h)$.

$$\frac{1}{2}|f''(x)| \cdot h + \frac{2|f(x)| \cdot e}{h} \equiv 0$$

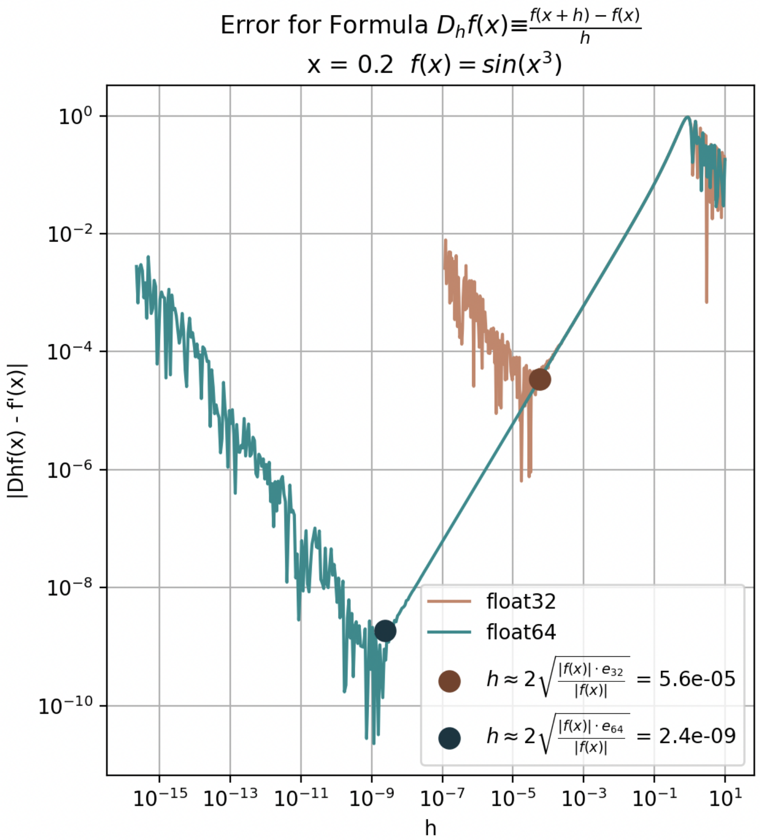
$$\frac{4|f(x)| \cdot e}{|f''(x)|} = h^2$$

$$h \approx 2\sqrt{\frac{|f(x)| \cdot e}{|f''(x)|}}$$

Oczekujemy zatem wyniku obarczonego najmniejszym błędem ok. $2\sqrt{\frac{|f(x)| \cdot e}{|f''(x)|}}$.

Przebieg

W celu sprawdzenia zależności błędu numerycznego od zaburzenia h napisano program `pochodnaA.py`, który pokazał ten związek w skali logarytmicznej.



Jak pokazuje wykres, najkorzystniejsze wyniki otrzymamy dla h rzędu $5.6 \cdot 10^{-5}$ dla typu binary 32 oraz $2.4 \cdot 10^{-9}$ dla typu binary 64.

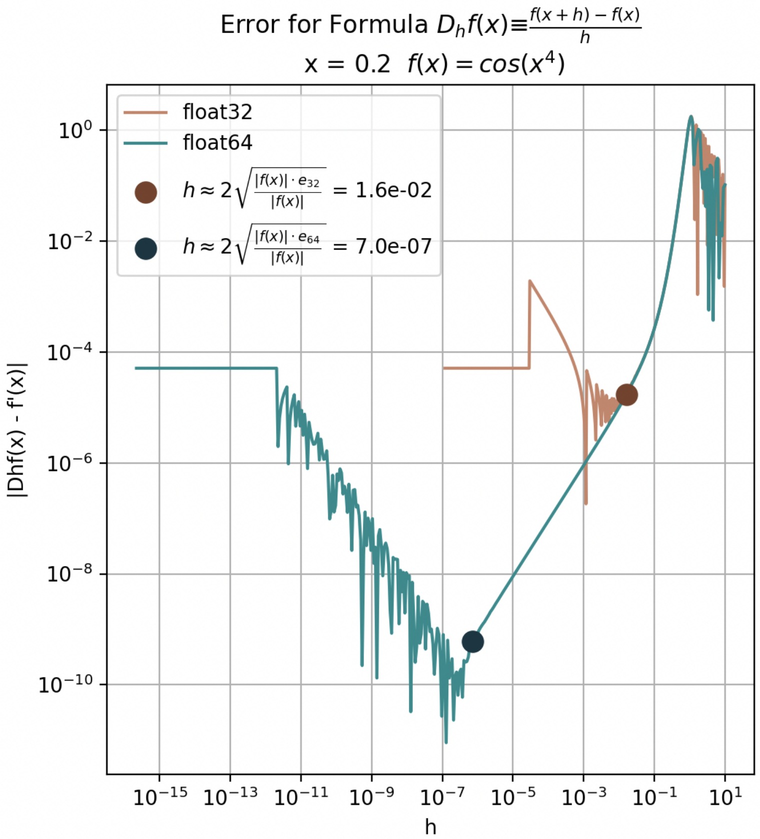
Wykres funkcji ostro rośnie przy coraz większym zwiększaniu lub zmniejszaniu wartości h w stosunku do optymalnej. Dzieje się tak zgodnie ze wzorem:

$$E(h) \lesssim \frac{1}{2}|f''(x)| \cdot h + \frac{2|f(x)| \cdot e}{h}$$

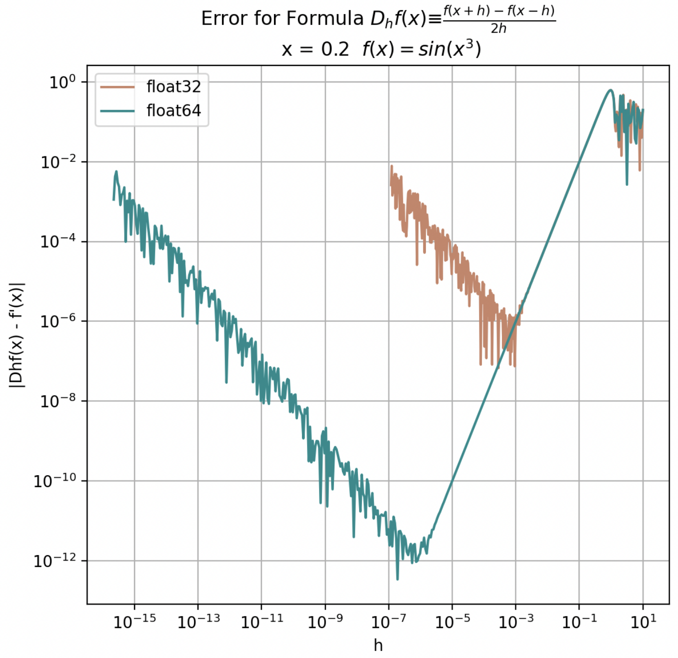
Przy zwiększaniu wartości h na wysokość błędu wpływa czynnim $\frac{1}{2}|f''(x)| \cdot h$ związany z 2 pochodną funkcji używanej do wyliczenia argumentu.

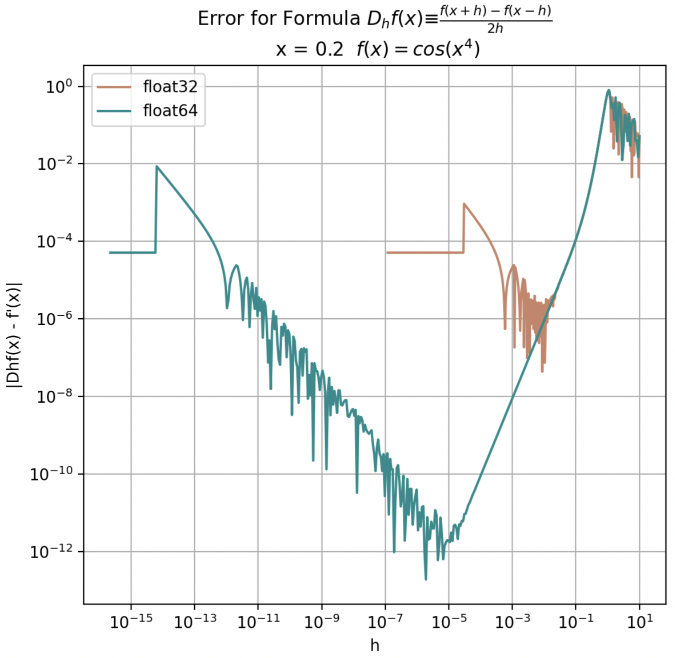
Zmniejszając h, wzrasta watrość $\frac{2|f(x)| \cdot e}{h}$, co przekłada się na wzrost błędu obliczeń.

Zmieniając funkcję na $f(x) = \cos(x^4)$ otrzymamy inne wartości optymalnych h, jednak zasada większego błędu w miarę wzrostu odległości $|h - h_{opt}|$ pozostaje niezmieniona. Dokłady program js dostępny w pliku `pochodnaA_inna_funkcja.py`



Dodatkowo, zmieniając metodę obliczania pochodnej na tę z drugiej formuły w programie `pochodnaB.py`, uzyskano zbliżony kształt wykresu do tego z pierwszej metody. Porównując wykresy dokładniej można zaobserwować wzrost optymalnego h dla typu float64 używając metody B.





Podsumowanie

Analiza błędów numerycznych związanych z obliczaniem pochodnych metodą różnic skończonych wykazała, że optymalne wartości parametru h mają kluczowe znaczenie dla dokładności obliczeń. Wykresy z różnych podejść do obliczeń ukazują, że dla różnych funkcji i typów danych wartość h powinna być starannie dobrana. Zastosowanie drugiej metody różnic centralnych także potwierdza znaczenie tego parametru. Wyniki sugerują, że dobór odpowiedniego h może znacznie poprawić precyzję obliczeń w zadaniach analizy numerycznej.