Cel

Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania macierzowe:

$$A_i y = b$$

dla i = 1, 2. Ponadto, rozwiąż analogiczne równania z zaburzonym wektorem wyrazów wolnych

$$A_i y = b + \Delta b$$

Zaburzenie Δb wygeneruj jako losowy wektor o małej normie euklidesowej (np. $\|\Delta b\|_2 \approx 10^{-6}$). Przeanalizuj jak wyniki dla macierzy A1 i A2 zależą od Δb i zinterpretuj zaobserwowane różnice.

Analiza zadania

Zadane są macierze symetryczne 5x5:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5.8267103432 & 1.0419816676 & 0.4517861296 & -0.2246976350 & 0.7150286064 \\ 1.0419816676 & 5.8150823499 & -0.8642832971 & 0.6610711416 & -0.3874139415 \\ 0.4517861296 & -0.8642832971 & 1.5136472691 & -0.8512078774 & 0.6771688230 \\ -0.2246976350 & 0.6610711416 & -0.8512078774 & 5.3014166511 & 0.5228116055 \\ 0.7150286064 & -0.3874139415 & 0.6771688230 & 0.5228116055 & 3.5431433879 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5.4763986379 & 1.6846933459 & 0.3136661779 & -1.0597154562 & 0.0083249547 \\ 1.6846933459 & 4.6359087874 & -0.6108766748 & 2.1930659258 & 0.9091647433 \\ 0.3136661779 & -0.6108766748 & 1.4591897081 & -1.1804364456 & 0.3985316185 \\ -1.0597154562 & 2.1930659258 & -1.1804364456 & 3.3110327980 & -1.1617171573 \\ 0.0083249547 & 0.9091647433 & 0.3985316185 & -1.1617171573 & 2.1174700695 \end{pmatrix}$$

oraz wektor b:

$$b = \begin{pmatrix} -2.8634904630 & -4.8216733374 & -4.2958468309 & -0.0877703331 & -2.0223464006 \end{pmatrix}^T$$

Do rozwiązania mamy układ równań:

$$Ay = b$$

oraz układ z zaburzonym b:

$$A\tilde{y} = b + \Delta b$$

Do określenia jak bardzo względny błąd wyniku różni się od błędu względnego samej różnicy wartości dokładnej b i jej przybliżenia posłużymy się współczynnikiem uwarunkowania κ.

$$\frac{\|\tilde{y} - y\|}{\|y\|} \leq \kappa \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Ponieważ macierze A_1 i A_2 są symetryczne i rzeczywiste, κ można wyrazić jako:

$$\kappa = \frac{max|\lambda|}{min|\lambda|}$$

gdzie λ oznacza wartości własne macierzy.

Przebieg zadania dla macierz A_1

Obliczeń dokonano z użyciem biblioteki pythonowej numpy, pełny program jest dostępny w pliku `matrix1.py`.

Najpierw obliczono $A_1 y_1 = b$ i otrzymano wynik:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0.02556195 & -1.35714283 & -3.94075752 & -0.48893629 & 0.10097805 \end{pmatrix}^T$$

Następnie wygenerowano Δb:

$$\Delta b = (\ 1.76405235e-06 \quad 4.00157208e-07 \quad 9.78737984e-07 \quad 2.24089320e-06 \quad 1.86755799e-06\ )^T$$

Rozwiązano $A\widetilde{y_1} = b + \Delta b$

$$\widetilde{y_1} = (\ 0.02556215 \quad -1.35714272 \quad -3.94075669 \quad -0.48893577 \quad 0.10097832\ )^T$$

Analiza względnych błędów:

Policzmy różnicę $y_1 - \widetilde{y_1}$:

$$y_1 - \widetilde{y_1} = (\ -2.06549888e-07 \quad -1.12548569e-07 \quad -8.26681920e-07 \quad -5.24278076e-07 \quad -2.62357407e-07\ )^T$$

Różnica ta jest na poziomie około 10^{-7}, co jest zbliżone do wygenerowanego zaburzenia Δb.

Z kolei względne błędy

$$\frac{\|\widetilde{y_1} - y_1\|}{\|y_1\|} \approx 2.48 \cdot 10^{-7}$$

oraz

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \approx 4.86 \cdot 10^{-7}$$

pokazują, że zaburzenie b miało stosunkowo niewielki wpływ na wynik y_1.

Współczynnik uwarunkowania κ wyniósł w przybliżeniu 7.

$$\kappa \approx 7$$

Sugeruje to, że układ równań z tą macierzą jest dobrze uwarunkowany, ponieważ dla małych zaburzeń wektora b wpływ na wynik był zbliżony rzędem do zaburzenia, co widać na przykładzie naszych obliczeń.

Wnioski końcowe

Wartość współczynnika uwarunkowania wskazuje, że układ równań z macierzą A_1 jest stabilny względem niewielkich zaburzeń wektora b. Tym samym, nawet przy zaburzeniu o normie $\approx 10^{-6}$, zmiany w wynikach są bardzo małe, co potwierdza dobrą kondycję numeryczną macierzy.

Przebieg zadania dla macierz A_2

Analogicznie jak dla macierzy A_1, rozwiązano układ $A_2 y_2 = b$ oraz układ z zaburzonym wektorem wyrazów wolnych $b + \Delta b$.

Pełny program dostępny jest w pliku `matrix2.py`.

Po podstawieniu macierzy A_2 i wektora b, rozwiązania dla układu równań bez zaburzenia oraz z zaburzeniem wyniosły:

$$y_2 = (\ -0.40875853 \quad -0.56030152 \quad -4.11200022 \quad -1.52420097 \quad -0.77520125\ )^T$$

$$\widetilde{y_2} = (\ 12266.84133342 \quad -22507.10169032 \quad 4832.58619095 \quad 29239.21279968 \quad 24746.64346932\ )^T$$

Analiza względnych błędów

Obliczona różnica $y_2 - \widetilde{y_2}$ jest następująca:

$$y_2 - \widetilde{y_2} = (\ -12267.25009195 \quad 22506.5413888 \quad -4836.69819118 \quad -29240.73700066 \quad -24747.41867057\ )^T$$

Różnica ta jest znacznie większa niż w przypadku macierzy A_1.

Obliczone względne błędy wyniosły:

$$\frac{\|\widetilde{y_2} - y_2\|}{\|y_2\|} \approx 1 \cdot 10^4$$

oraz

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \approx 4.86 \cdot 10^{-7}$$

Względny błąd wyniku jest bardzo duży, co wskazuje na znaczny wpływ zaburzenia wektora b na rozwiązanie y_2.

Współczynnik uwarunkowania obliczony dla macierzy A_2 wyniósł:

$$\kappa \approx 1.16 \cdot 10^{11}$$

Wnioski końcowe

Jest to bardzo wysoka wartość, wskazująca na to, że macierz A_2 jest źle uwarunkowana. Tak wysoki współczynnik uwarunkowania oznacza, że nawet niewielkie zaburzenie wektora b (na poziomie 10^{-6}) prowadzi do dużych błędów w wyniku.

Podsumowanie

W przeprowadzonych obliczeniach rozwiązano układy równań macierzowych z macierzami symetrycznymi A_1 i A_2 dla danego wektora wyrazów wolnych b oraz dla zaburzonego wektora $b + \Delta b$. Wyniki pokazały, że układ równań z macierzą A_1 jest dobrze uwarunkowany, z kolei układ z macierzą A_2 okazał się być źle uwarunkowany.