Задача 1.

В-1 Найдите $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)$, если $f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$.
Ответ: 28743.
Решение. Так как $f(n)=n^4-(n-1)^4+14$, то

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)=1^4+2^4+\ldots+13^4-(0^4+1^4+\ldots+12^4)+14\cdot 13=13^4+14\cdot 13=28743.$$

В-2 Найдите $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(11)$, если $f(n)=4n^3+6n^2+4n+9$.
Ответ: 20823.

В-3 Найдите $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(12)$, если $f(n)=4n^3-6n^2+4n+7$.
Ответ: 20832.

В-4 Найдите $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(14)$, если $f(n)=4n^3+6n^2+4n+5$.
Ответ: 50680.

В-5 Пусть $f(x)=x^2+10x+20$. Решите уравнение

$$f\Bigg(f\bigg(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\bigg)\Bigg)=0.$$

Ответ: $-5\pm\sqrt[32]{5}$.
Решение. Заметим, что $f(x)=(x+5)^2-5$. Поэтому $f\big(f(x)\big)=(x+5)^4-5$, $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)=(x+5)^8-5$, $\ldots$, $f\Bigg(f\bigg(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\bigg)\Bigg)=(x+5)^{32}-5=0$, откуда $x=-5\pm\sqrt[32]{5}$.

В-6 Пусть $f(x)=x^2+6x+6$. Решите уравнение

$$f\Bigg(f\bigg(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\bigg)\Bigg)=0.$$

Ответ: $-3\pm\sqrt[32]{3}$.

В-7 Пусть $f(x)=x^2+14x+42$. Решите уравнение

$$f\bigg(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\bigg)=0.$$

Ответ: $-7\pm\sqrt[16]{7}$.

В-8 Пусть $f(x)=x^2+18x+72$. Решите уравнение

$$f\bigg(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\bigg)=0.$$

Ответ: $-9\pm\sqrt[16]{9}=-9\pm\sqrt[8]{3}$.

Задача 2.

В-1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+8|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5. \end{cases}$$

Ответ: $x=-3$, $y=-8$.

Решение. Из второго уравнения системы следует, что $x^2+y \geqslant 1$, что вместе с первым уравнением дает $y=-8$, $x=\pm 3$. Учитывая второе уравнение, получаем $x=-3$.

В-2 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y}+|y-5|=2, \\ \sqrt{x^2-y-4}+|x-2|=1. \end{cases}$$

Ответ: $x=3$, $y=5$.

В-3 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+3|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1. \end{cases}$$

Ответ: $x=-2$, $y=-3$.

В-4 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y}+|y-9|=4, \\ \sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2. \end{cases}$$

Ответ: $x=5$, $y=9$.

В-5 Число $x=2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}}+\sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}}.$$

Ответ: 4.

Решение. Отметим, что

$$x=2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-2021}=\frac{2\left(1-2^{-2023}\right)}{1-\frac{1}{2}}=4-\frac{1}{2^{2021}} \in (3,4).$$

Поэтому $\sqrt{2x-4}<2$. Значит,

$$\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}}+\sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}}=\sqrt{\left(\sqrt{2x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2x-4}-2\right)^2}=$$

$$=|\sqrt{2x-4}+2|+|\sqrt{2x-4}-2|=\sqrt{2x-4}+2+2-\sqrt{2x-4}=4,$$

так как $\sqrt{2x-4}-2<0$.

В-6 Число $x = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + \ldots + 2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}}.$$

Ответ: 2.

В-7 Число $x = 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + \ldots + 2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}.$$

Ответ: 4.

В-8 Число $x = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

Ответ: 2.

Задача 3.

В-1 Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = 0$ и $x^2 + cx + a = 1$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни меньше (-1). Найдите наименьшее значение a.

Ответ: 15.

Решение. По теореме Виета произведение корней первого уравнения равно a, произведение корней второго уравнения равно $a - 1$. Ввиду того, что корни целые и меньше -1, их произведение больше 1, поэтому каждое из двух последовательных чисел $a - 1$ и a является произведением двух различных целых чисел, больших 1. Так как первое нечетное число, не являющееся простым или квадратом простого, это 15, то получается $a - 1 = 14, a = 15$. Тогда корни первого уравнения -3 и -5 (при этом $b = 8$), корни второго уравнения -2 и -7 (при этом $c = 9$).

В-2 Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = 0$ и $x^2 + cx + a = -1$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни больше 1. Найдите наименьшее значение a.

Ответ: 14.

В-3 Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = 1$ и $x^2 + cx + a = 0$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни меньше (-1). Найдите наименьшее значение a.

Ответ: 15.

В-4 Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = -1$ и $x^2 + cx + a = 0$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни больше 1. Найдите наименьшее значение a.

Ответ: 14.

В-5 Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 11$, $P(1) = 21$?

Ответ: 315.

Решение. Так как $P(-1) = 11$, то $-1 + A - B + C - D + E = 11$; так как $P(1) = 21$, то $1 + A + B + C + D + E = 21$. Поэтому $A + C + E = 16$, $B + D = 4$. Второе из этих двух уравнений имеет 3 пары решений в натуральных числах, а первое уравнение имеет $C_{15}^2 = \dfrac{15 \cdot 14}{2} = 105$ решений (располагаем в ряд 16 «шариков» и разбиваем их на три группы с помощью двух «перегородок»). Этому соответствуют $3 \cdot 105 = 315$ различных многочленов.

В-6 Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 8$, $P(1) = 22$?

Ответ: 455.

В-7 Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 9$, $P(1) = 21$?

Ответ: 364.

В-8 Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 10$, $P(1) = 22$?

Ответ: 420.

Задача 4.

В-1 Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α по часовой стрелке едет автомобиль A, по трассе β против часовой стрелки едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы α, причём эта прямая касается трассы β. После старта автомобили начинают приближаться к точке касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за один час (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этого часа расстояние между автомобилями будет не меньше диаметра каждой трассы?

Ответ: $\frac{1}{2}$ часа $=30$ минут.

Решение. Пусть радиус кольцевой трассы равен 1. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке старта автомобиля B, осью Ox, проходящей через центр трассы β, и осью Oy, проходящей через центр трассы α. Тогда координаты центров трасс α и β соответственно равны $(0;-\sqrt{3})$ и $(1;0)$. Если t — время движения автомобилей от точки старта (в часах) и $\varphi=2\pi t$, то через t часов после старта автомобили будут иметь координаты: $A(\sin\varphi;-\sqrt{3}+\cos\varphi)$, $B(1-\cos\varphi;-\sin\varphi)$. Тогда

$$AB^2=(\sin\varphi+\cos\varphi-1)^2+(\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{3})^2=4\cos^2\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+4.$$

Требуется найти время, в течение которого

$$AB\geqslant 2\Leftrightarrow AB^2\geqslant 4\Leftrightarrow 2\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\left(2\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\right)\geqslant 0\Leftrightarrow\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0$$

(последняя равносильность следует из того, что второй сомножитель в предпоследнем неравенстве всегда отрицателен). Решения последнего неравенства заполняют половину тригонометрической окружности, поэтому указанное условие будет выполняться половину времени движения автомобилей.

В-2 Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α против часовой стрелки едет автомобиль A, по трассе β по часовой стрелке едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы α, причём эта прямая касается трассы β. После старта автомобили начинают удаляться от точки касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за два часа (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени в течение этих двух часов расстояние между автомобилями будет не больше диаметра каждой трассы?

Ответ: 1 час.

В-3 Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α против часовой стрелки едет автомобиль A, по трассе β по часовой стрелке едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы β, причём эта прямая касается трассы α. После старта автомобили начинают приближаться к точке касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за полчаса (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этого получаса расстояние между автомобилями будет не меньше диаметра каждой трассы?

Ответ: $\frac{1}{4}$ часа $=15$ минут.

В-4 Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α по часовой стрелке едет автомобиль A, по трассе β против часовой стрелки едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы β, причём эта прямая касается трассы α. После старта автомобили начинают удаляться от точки касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за полтора часа (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этих полутора часов расстояние между автомобилями будет не больше диаметра каждой трассы?

Ответ: $\frac{3}{4}$ часа $=45$ минут.

В-5 Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4022 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4022 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 32 минуты. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 55 минут, но чаще, чем каждые 64 минуты. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

Ответ: $\dfrac{2011}{\sin\dfrac{\pi}{1+\sqrt{3}}}$.

В-6 Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4024 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4024 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 34 минуты. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 58 минут, но чаще, чем каждые 68 минут. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

Ответ: $\dfrac{2012}{\sin\dfrac{\pi}{1+\sqrt{3}}}$.

В-7 Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4026 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4026 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 36 минут. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждую 61 минуту, но чаще, чем каждые 72 минуты. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

Ответ: $\dfrac{2013}{\sin\dfrac{\pi}{1+\sqrt{3}}}$.

В-8 Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4028 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4028 м.Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 38 минут. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 64 минуты, но чаще, чем каждые 76 минут. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

Ответ: $\dfrac{2014}{\sin\dfrac{\pi}{1+\sqrt{3}}}$.

(Общий вариант с решением) Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно L м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно L м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые T минут. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые T_1 минут, но чаще, чем каждые $T_2 = 2T$ минут. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

Ответ: $\dfrac{L}{2\sin\dfrac{\pi}{1+\sqrt{3}}}$

Решение. Пусть $q > 1$ — отношение скорости мотоциклиста к скорости велосипедиста. За одну минуту мотоциклист и велосипедист проезжают по дуге с угловой мерой соответственно $2\pi/T$ и $2\pi/qT$. Время между двумя последовательными встречами и двумя последовательными обгонами равно соответственно $\left(\dfrac{1}{T}+\dfrac{1}{qT}\right)^{-1}$ и $\left(\dfrac{1}{T}-\dfrac{1}{qT}\right)^{-1}$ минут. Кратчайшая дуга между точками последовательных встреч имеет угловую меру $\dfrac{2\pi}{q+1}$, а расстояние по прямой между ними равно $L = 2R\sin\dfrac{\pi}{q+1}$, где R — радиус окружности.

За время между двумя последовательными обгонами велосипедист покрывает дугу с угловой мерой $\dfrac{2\pi}{q-1}$. Поэтому, с учетом того, что это значение может быть больше, чем 2π, расстояние по прямой между соответствующими точками равно $L = 2R\left|\sin\dfrac{\pi}{q-1}\right|$. Таким образом, $\sin\dfrac{\pi}{q+1} = \left|\sin\dfrac{\pi}{q-1}\right|$ и хотя бы одно из выражений $\dfrac{1}{q-1}-\dfrac{1}{q+1}$ и $\dfrac{1}{q-1}+\dfrac{1}{q+1}$ должно иметь натуральное значение. Решая уравнения $\dfrac{1}{q-1}-\dfrac{1}{q+1} = n$ и $\dfrac{1}{q-1}+\dfrac{1}{q+1} = n$ с натуральным n и принимая во внимание, что $q > 1$, получим для него два возможных выражения:

$q = \sqrt{1+\dfrac{2}{n}}$ и $q = \dfrac{1}{n}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}$. Первое из них при различных натуральных n принмает значения $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ и меньше, а второе — значения $1+\sqrt{2}$, $0{,}5+\sqrt{1{,}25}$ и меньше. Заметим, что

$$\sqrt{2} < 1{,}5 < 0{,}5+\sqrt{1{,}25} < 1{,}65 < 1{,}73 < \sqrt{3} < 2 < 1+\sqrt{2}.$$

По условию $\dfrac{T_1}{T} < q < 2$, причем отношение $\dfrac{T_1}{T}$ по вариантам приблизительно равно $1{,}72\ldots$, $1{,}71\ldots$, $1{,}69\ldots$, $1{,}68\ldots$.

Отсюда $q = \sqrt{3}$ и $R = \dfrac{L}{2\sin\dfrac{\pi}{1+\sqrt{3}}}$.

Задача 5.

В-1 Из равнобедренного треугольника с углом α при вершине и площадью 1 вырезают максимальный по площади круг, а из него — максимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $60^\circ \leqslant \alpha \leqslant 120^\circ$?

Ответ: $\dfrac{1}{4}$; $7-4\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $\beta = \frac{\alpha}{2}$ и r — радиус окружности. Тогда половины основания исходного и вырезанного треугольников соответственно равны

$$a = \frac{r(1+\sin\beta)}{\cos\beta}, \qquad b = \begin{cases} r\sin 2\beta, & \beta \leqslant 45^\circ, \\ r, & \beta \geqslant 45^\circ, \end{cases}$$

причём функция

$$S(\alpha) = S(2\beta) = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \text{ где } \frac{b}{a} = \begin{cases} 2\sin\beta\cdot(1-\sin\beta), & \beta \leqslant 45^\circ, \\ \dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}, & \beta \geqslant 45^\circ \end{cases},$$

убывает при $\alpha \in [60^\circ; 120^\circ]$. Поэтому

$$S_{max} = S(60^\circ) = \big(2\sin 30^\circ\cdot(1-\sin 30^\circ)\big)^2 = \frac{1}{4}, \qquad S_{min} = S(120^\circ) = \left(\frac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ}\right)^2 = 7-4\sqrt{3}.$$

В-2 Равнобедренный треугольник с углом α при вершине и площадью 1 помещают в минимальный по площади круг, а его — в минимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $60^\circ \leqslant \alpha \leqslant 120^\circ$?

Ответ: $7+4\sqrt{3}$; 4.

В-3 Из равнобедренного треугольника с углом α при основании и площадью 1 вырезают максимальный по площади круг, а из него — максимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $30^\circ \leqslant \alpha \leqslant 60^\circ$?

Ответ: $\dfrac{1}{4}$; $7-4\sqrt{3}$.

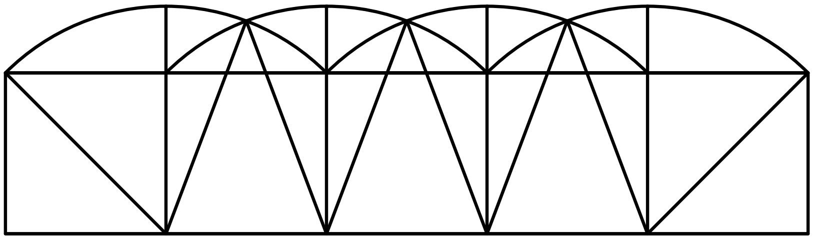
В-4 Равнобедренный треугольник с углом α при основании и площадью 1 помещают в минимальный по площади круг, а его — в минимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $30^\circ \leqslant \alpha \leqslant 60^\circ$?

Ответ: $7+4\sqrt{3}$; 4.

В-5 На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с диагональю длины 1, а прокантовали его 7 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

Ответ: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Если квадрат со стороной a кантуют n раз, то всю испачканную фигуру можно представить в виде объединения следующих пересекающихся только по границам частей (см. рисунок для $n=4$).



- Два равнобедренных прямоугольных треугольника с катетами, равными a.

  Общая площадь равна a^2.

- Два сектора радиуса $a\sqrt{2}$ с углом при вершине, равным 45°.

  Общая площадь равна $2\cdot\pi\cdot 2a^2/8=\pi a^2/2$.

- $(n-1)$ равнобедренный треугольник с основанием a и высотой $\sqrt{2a^2-(a/2)^2}=a\sqrt{7}/2$.

  Общая площадь равна $a^2(n-1)\sqrt{7}/4$.

- $2n-2$ сектора радиуса $a\sqrt{2}$ с углом при вершине, равным $\beta=\arcsin 1/\sqrt{8}$.

  Общая площадь равна $(2n-2)\cdot 2a^2\cdot\beta/2=(2n-2)a^2\beta$.

Таким образом, разность площадей первой и второй фигур равна

$$\left(1+\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{7}}{4}+6\beta\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{6\sqrt{7}}{2\cdot 4}+\frac{12\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

В-6 На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с полупериметром 1, а прокантовали его 13 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

Ответ: $\dfrac{3}{4}+\dfrac{3\pi}{8}$.

В-7 На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с периметром, равным 1, а прокантовали его 49 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

Ответ: $\dfrac{15}{16}+\dfrac{15\pi}{32}$.

В-8 На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат с диагональю длины 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с периметром, равным 1, а прокантовали его 25 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

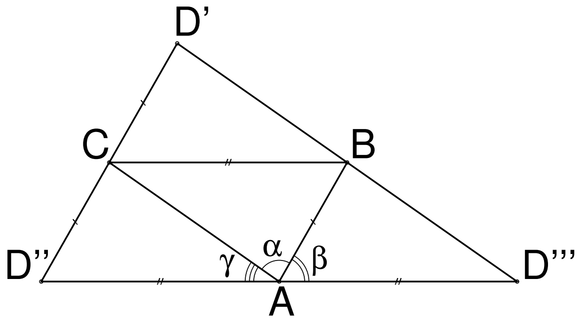
Ответ: $\dfrac{7}{16} + \dfrac{7\pi}{32}$.

Задача 6.

В-1 В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если площадь грани BCD равна s и $AB = CD$, $AD = BC$.

Ответ: $4s$.

Решение. Докажем, что грани пирамиды – равные треугольники. Для этого рассмотрим развёртку $AD'''BD'CD''$ пирамиды $ABCD$, где $AD'' = AD''' = AD$, $BD''' = BD' = BD$, $CD'' = CD' = CD$.



Пусть $\angle BAC = \alpha, \angle BAD''' = \beta, \angle CAD'' = \gamma$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то точки D'', A, D''' лежат на одной прямой. Так как $AD'' = BC$, $AB = D''C$, то $ABCD''$ — параллелограмм и $BC \| AD''$. Аналогично $AD'''BC$ — тоже параллелограмм. Треугольник ACD'' равен треугольнику BCD'. Значит, грани пирамиды — равные треугольники.

В-2 В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если площадь грани ABC равна s и $AB = CD$, $AD = BC$.

Ответ: $4s$.

В-3 В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь грани BCD, если площадь поверхности этой пирамиды равна s и $AB = CD$, $AD = BC$.

Ответ: $\frac{s}{4}$.

В-4 В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь грани ABC, если площадь поверхности этой пирамиды равна s и $AB = CD$, $AD = BC$.

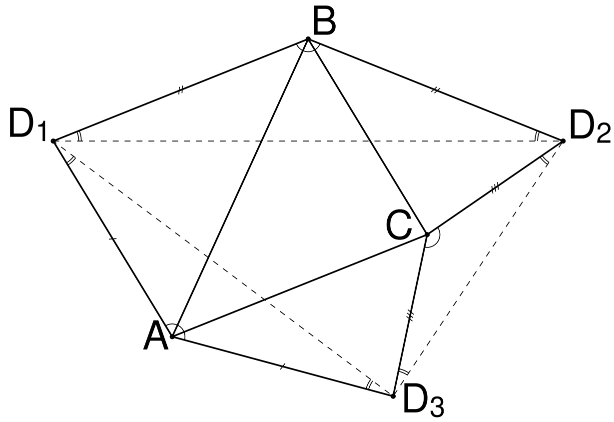
Ответ: $\frac{s}{4}$.

В-5 В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABD и ACD равна s. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

Ответ: $2s$.

Решение. Пусть $\Sigma_A, \Sigma_B, \Sigma_C, \Sigma_D$ — суммы плоских углов при вершинах A, B, C, D соответственно. Тогда $\Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_C + \Sigma_D = 4\pi$ и $\Sigma_A + \Sigma_C = 2\pi$. Если $\Sigma_A \le \Sigma_C$, то $\Sigma_A \le \pi \le \Sigma_C$.

Докажем, что $\Delta ABC = \Delta ABD$ и $\Delta CDA = \Delta CDB$ (из этого будет следовать ответ). Для этого рассмотрим развёртку $AD_1BD_2CD_3$ пирамиды $ABCD$, где $AD_1 = AD_3 = AD$, $BD_1 = BD_2 = BD$, $CD_2 = CD_3 = CD$. Тогда $\Sigma_A = \angle D_1AD_3 = \angle D_1BD_2 = 2\pi - \Sigma_C = \angle D_2CD_3$.



Значит, равнобедренные треугольники ΔD_1AD_3 и ΔD_2CD_3 с равными углами при вершине подобны, из чего следует, что $\angle AD_3D_1 = \angle CD_3D_2$, $\angle AD_3C = \angle D_1D_3D_2$ и $\dfrac{AD_3}{D_3C} = \dfrac{D_1D_3}{D_2D_3}$. Поэтому $\Delta ACD_3 \sim \Delta D_1D_2D_3$, при этом коэффициент подобия равен $\dfrac{AD_3}{D_1D_3} = \dfrac{AC}{D_1D_2}$, но $\dfrac{AD_3}{D_1D_3} = \dfrac{D_1B}{D_1D_2}$ (опять из подобия равнобедренных треугольников ΔAD_1D_3 и ΔBD_1D_2), значит, $AC = D_1B$. Аналогично доказывается, что $BC = AD_1$, откуда $\Delta ABC = \Delta ABD_1 = \Delta ABD$ и, аналогичным образом, $\Delta CDA = \Delta CDB$.

B-6 В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABC и ACD равна s. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

Ответ: $2s$.

B-7 В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы и суммы плоских углов при вершинах C и D одинаковы. Найдите сумму площадей граней ABD и ACD, если площадь поверхности этой пирамиды равна s.

Ответ: $\dfrac{s}{2}$.

B-8 В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы и суммы плоских углов при вершинах C и D одинаковы. Найдите сумму площадей граней ABC и BCD, если площадь поверхности этой пирамиды равна s.

Ответ: $\dfrac{s}{2}$.

Задача 7.

B-1 Докажите, что число $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{3}+m\sqrt{5}+k\sqrt{7}+l\sqrt{3\cdot 5\cdot 7},$$

где n,m,k,l — натуральные числа, и при этом $1-10^{-500}<\sqrt{35}\frac{l}{n}<1$.

Решение. Верно следующее утверждение:

Для любых простых $\pi_1,\pi_2,\pi_3: 2\leqslant\pi_1<\pi_2<\pi_3$ число

$$(\sqrt{\pi_1}+\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_3})^{2i+1}$$

представимо в виде

$$n\sqrt{\pi_1}+m\sqrt{\pi_2}+k\sqrt{\pi_3}+l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3},$$

где n,m,k,l — натуральные числа, и

$$1-4\cdot\frac{Q^{(2i+1)}}{1-Q^{(2i+1)}}<\sqrt{\pi_1\pi_2}\frac{l}{n}<1,$$

$$1<\sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_2}}\frac{k}{m}<1+2\cdot Q^{2i+1},$$

$$1-4\cdot\frac{Q^{(2i+1)}}{1-Q^{(2i+1)}}<\pi_3\frac{k}{m}\frac{l}{n}<1+1+2\cdot Q^{2i+1},$$

где

$$Q=\frac{-\sqrt{\pi_1}+\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_1}+\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_3}}.$$

В наших примерах $Q<\frac{1}{2}$.

Доказательство:

Пусть

$$s=(\sqrt{\pi_1}+\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_3})^{2i+1}=(\sqrt{\pi_1}+\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_3})(\sqrt{\pi_1}+\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_3})\ldots(\sqrt{\pi_1}+\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_3}).$$

Выбирая по одному слагаемому в каждой скобке и перемножая их, получим сумму 3^{2i+1} слагаемых вида

$$s(a,b,c)=(\sqrt{\pi_1})^a(\sqrt{\pi_2})^b(\sqrt{\pi_3})^c,\qquad a+b+c=2i+1,\quad a,b,c\in\mathbb{N}.$$

Если все числа a,b,c нечётные, то $s(a,b,c)=d\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3}$. Если нечётно только a, то $s(a,b,c)=e\sqrt{\pi_1}$, если нечётно только b, то $s(a,b,c)=f\sqrt{\pi_2}$, если нечётно только c, то $s(a,b,c)=g\sqrt{\pi_3}$, а два числа нечётными быть не могут, так так сумма $a+b+c$ нечётна. Значит,

$$s=n\sqrt{\pi_1}+m\sqrt{\pi_2}+k\sqrt{\pi_3}+l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3}.$$

Аналогично показываем, что

$$p=(-\sqrt{\pi_1}+\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_3})^{2i+1}=-n\sqrt{\pi_1}+m\sqrt{\pi_2}+k\sqrt{\pi_3}-l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3},$$

$$q=(\sqrt{\pi_1}-\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_3})^{2i+1}=n\sqrt{\pi_1}-m\sqrt{\pi_2}+k\sqrt{\pi_3}-l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3},$$

$$r=(\sqrt{\pi_1}+\sqrt{\pi_2}-\sqrt{\pi_3})^{2i+1}=n\sqrt{\pi_1}+m\sqrt{\pi_2}-k\sqrt{\pi_3}-l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3}.$$

Из этих равенств получаем

$$\frac{1}{2}(q+r)=n\sqrt{\pi_1}-l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3},$$

$$\frac{1}{2}(s-p) = n\sqrt{\pi_1} + l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3}.$$

Откуда

$$\frac{q+r}{s-p} = \frac{n\sqrt{\pi_1} - l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3}}{n\sqrt{\pi_1} + l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3}} = \frac{1-\sqrt{\pi_2\pi_3}\frac{l}{n}}{1+\sqrt{\pi_2\pi_3}\frac{l}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{\pi_2\pi_3}\frac{l}{n} = \frac{q+r}{s-p}\left(1 + \sqrt{\pi_2\pi_3}\frac{l}{n}\right).$$

Положим

$$x = \sqrt{\pi_2\pi_3}\frac{l}{n},$$

учитывая, что

$$Q = \frac{-\sqrt{\pi_1} + \sqrt{\pi_2} + \sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_1} + \sqrt{\pi_2} + \sqrt{\pi_3}},$$

и

$$\frac{r}{s} < \frac{q}{s} < \frac{p}{s} = Q^{2i+1},$$

получаем

$$\frac{q+r}{s-p} = \frac{n\sqrt{\pi_1} - l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3}}{n\sqrt{\pi_1} + l\sqrt{\pi_1\pi_2\pi_3}} = \frac{1-\sqrt{\pi_2\pi_3}\frac{l}{n}}{1+\sqrt{\pi_2\pi_3}\frac{l}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x = \frac{q+r}{s-p}(1+x) > 0.$$

Значит,

$$0 < 1 - x = \frac{q+r}{s-p}(1+x) < 2\frac{\frac{q}{s}+\frac{r}{s}}{1-\frac{p}{s}} < 4\frac{Q^{2i+1}}{1-Q^{2i+1}},$$

$$1 - 4\frac{Q^{2i+1}}{1-Q^{2i+1}} < x < 1.$$

Точно так же сможем найти

$$y = \sqrt{\frac{\pi_3}{\pi_2}}\frac{k}{m}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}(s+p) = m\sqrt{\pi_2} + k\sqrt{\pi_3},$$

$$\frac{1}{2}(q-r) = -m\sqrt{\pi_2} + k\sqrt{\pi_3}.$$

Значит,

$$0 < \frac{q-r}{s+p} = \frac{-m\sqrt{\pi_2} + k\sqrt{\pi_3}}{m\sqrt{\pi_2} + k\sqrt{\pi_3}} = \frac{y-1}{y+1}.$$

Далее,

$$0 < \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1} = \frac{\frac{q}{s} - \frac{r}{s}}{1+\frac{p}{s}} < \frac{Q^{2i+1}}{1+Q^{2i+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{Q^{2i+1}}{1+Q^{2i+1}} < \frac{2}{y+1} < 1 \Leftrightarrow 1 < y < 1 + 2\cdot Q^{2i+1}.$$

B-2 Докажите, что число $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{3} + m\sqrt{5} + k\sqrt{7} + l\sqrt{3\cdot 5\cdot 7},$$

где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1 < \sqrt{\frac{7}{5}}\frac{k}{m} < 1 + 10^{-500}$.

В-3 Докажите, что число $(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11},$$

где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1-10^{-500}<\sqrt{77}\dfrac{l}{n}<1$.

В-4 Докажите, что число $(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11},$$

где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1<\sqrt{\dfrac{11}{7}}\dfrac{k}{m}<1+10^{-500}$.

В-5 На столе лежат 2021 красных и 2022 зелёных камня. Аня и Петя делают ходы по очереди. Аня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

Ответ: Аня.

Решение. *Условие в общем виде.* На столе лежат a красных и b зелёных камней. Аня и Петя делают ходы по очереди. Аня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

Решение в общем виде.

(1) Если a и b разной чётности, то Аня выигрывает. Её стратегия — вычесть из чётного числа 1 (если чётное число $=0$, то, очевидно, нужно забрать оставшиеся камни) и прийти к ситуации, когда a и b оба нечётные.

(2) Если a и b оба нечётные, то выигрывает Петя, т.к. Аня вынуждена из одного нечётного числа вычесть также нечётное число, и получить чётное, т.е. ситуацию из п. (1), выигрышную для ходящего в следующий ход, т.е. для Пети.

(3) Если a и b оба чётные, то каждый игрок вынужден отнимать чётное число камней, ибо иначе он приходит к ситуации п. (1), выигрышной для ходящего в следующий ход. Поэтому мы можем рассматривать не камни, а пары камней, и решение задачи для $(2a, 2b)$ эквивалентно решению задачи для (a, b).

(4) Применяя (3) несколько раз, получаем, что если числа a и b имеют вид $2^k(2m+1)$ и $2^k(2n+1)$ (не важно в каком порядке), то выигрывает Петя. Действительно, в этом случае решение для пары $\big(2^k(2m+1), 2^k(2n+1)\big)$ равносильно решению задачи для (a_1, b_1), где числа a_1 и b_1 нечётны, т.е. выигрышная для Пети ситуация. Если a и b представляются в виде $2^k(2m+1)$ и $2^l(2n+1)$, где $k\neq l$, то выигрывает Аня, т.к. эта ситуация равносильна ситуации (a_1, b_1), где a_1 и b_1 разной чётности.

В-6 На столе лежат 2022 красных и 2026 зелёных камней. Маша и Вася делают ходы по очереди. Маша ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

Ответ: Вася.

В-7 На столе лежат 2022 красных и 2024 зелёных камня. Таня и Коля делают ходы по очереди. Таня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

Ответ: Таня.

В-8 На столе лежат 2021 красных и 2023 зелёных камня. Катя и Вова делают ходы по очереди. Катя ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

Ответ: Вова.