Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2020/21 учебного года для 7-8 классов

Задача 1. Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью еще четверть пути и снова снизил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё восьмую часть пути, и т.д. После восьмого понижения скорости он не менял её до конца поездки. Во сколько раз второму автомобилю потребовалось больше времени на преодоление всего пути, чем первому?

Ответ: $\dfrac{5}{3}$.

Решение. Пусть V_1 — скорость первого автомобиля, V_0 — начальная скорость второго, а преодолённое каждым автомобилем расстояние равно S. Тогда $V_0 = 3V_1$. Первый автомобиль затратил на весь путь время $t_1 = \dfrac{S}{V_1}$, а второй — время

$$t_2 = \frac{\frac{S}{2}}{V_0} + \frac{\frac{S}{4}}{\frac{V_0}{2}} + \ldots + \frac{\frac{S}{2^8}}{\frac{V_0}{2^7}} + \frac{\frac{S}{2^8}}{\frac{V_0}{2^8}} = \frac{S}{2V_0} \cdot 8 + \frac{S}{V_0} = \frac{S}{6V_1} \cdot 8 + \frac{S}{3V_1} = \frac{5S}{3V_1},$$

откуда $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{5}{3}$.

Задача 2. Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

Ответ: 81.

Решение. Пусть задуманное число равно $\overline{mn} = 10m + n$. Тогда $4\overline{mn} = \overline{nm}^2$. Значит, $\overline{nm}^2$ делится на 4, а $\overline{nm}$ — на 2, поэтому цифры m чётна (и отлична от нуля). Кроме того, $\overline{mn} = \overline{nm}^2 : 4 = (\overline{nm} : 2)^2$, то есть $\overline{mn}$ — квадрат натурального числа, начинающийся с чётной цифры. Значит, $\overline{mn}$ может равняться 25, 49, 64 или 81. Проверка показывает, что из этих четырёх вариантов условию удовлетворяет только последний.

Задача 3. Назовем составное натуральное число n «интересным», если все его натуральные делители можно выписать в порядке возрастания, и при этом каждый следующий делитель делится на предыдущий. Найти все «интересные» натуральные числа от 20 до 90 (включительно).

Ответ: 25, 27, 32, 49, 64, 81.

Решение. «Интересными» могут быть только числа вида $n = p^k$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, где p — простое число.

Действительно, если рассмотреть число $n = a \cdot p^k$, НОД$(a, p) = 1$, то в ряду делителей $1, p, \ldots, p^k$ делитель a стоять не может. Ситуация $\ldots p^k < a < ap \ldots$ также невозможна, так как p^k не делит a. Значит, для получения ответа нужно выписать все степени простых чисел в диапазоне от 20 до 90.

Задача 4. Решите уравнение:

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 + (x+5)^2 + \ldots + (x+2021)^2 = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x-2020)^2.$$

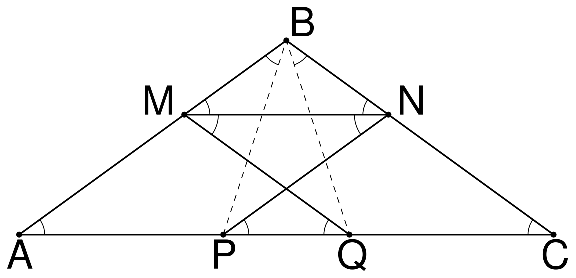
Ответ: $-0{,}5$.

Решение. Левая и правая части уравнения равны соответственно $1011x^2 + 2(1+3+5+\ldots+2021)x + (1^2+3^3+5^2+\ldots+2021^2)$ и $1011x^2 - 2(2+4+6+\ldots+2020)x + 2^2+4^2+6^2+\ldots+2020^2$. Уравнение приводится к виду $2(1+2+3+4+\ldots+2021)x = -1^2+2^2-3^2+4^2+\ldots-2019^2+2020^2-2021^2$, откуда $(1+2021) \cdot 2021x = -\dfrac{3+4039}{2} \cdot 1010 - 2021^2$ и $x = \dfrac{1010-2021}{2022} = -\dfrac{1}{2}$.

Задача 5. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $AM = MN = NC$. На стороне AC выбраны такие точки P и Q, что $MQ \| BC$, $NP \| AB$. Известно, что $PQ = BM$. Найдите угол MQB.

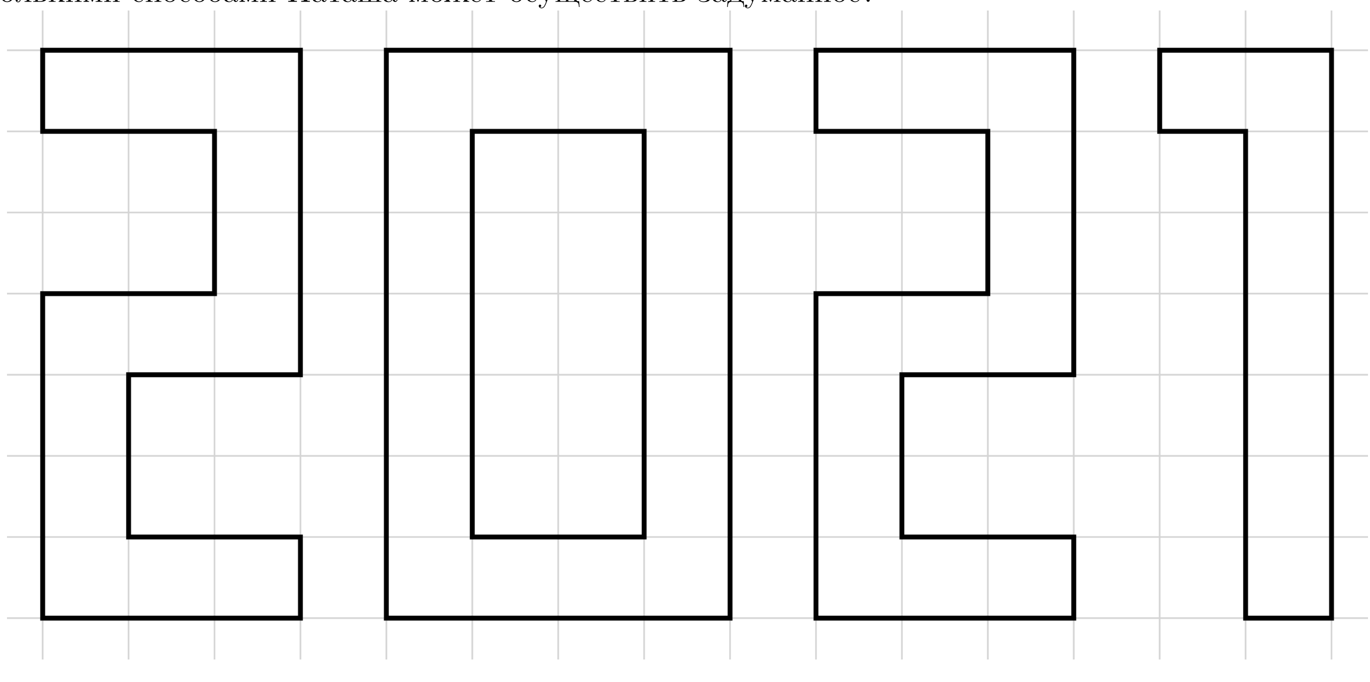
Ответ: $36°$. Ответ также может быть дан в форме $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ и пр.

Решение. Пусть $\angle A = \angle C = \alpha$, тогда по свойству параллельных прямых $\angle NPC = \angle AQM = \alpha$. Нетрудно доказать, что $MN \| AC$ (через подобие треугольников, или через равенство расстояний от точек M, N до прямой AC, или через подсчёт углов), поэтому $\angle BMN = \angle QMN = \angle BNM = \angle MNP = \alpha$ и $AMNP$ — ромб, откуда $AP = AM = MN$. (Семиклассники могут доказать это равенство через равенство $\Delta AMN = \Delta APN$.)



Первый случай. Пусть точка P лежит на отрезке AQ. Тогда, с учётом вышесказанного, $\Delta AMQ = \Delta APB$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle ABP = \angle AQM = \alpha$; аналогично, $\angle QBC = \angle CPN = \alpha$. $\angle BPQ = 2\alpha$ как внешний для ΔAPB, значит, $\angle BPN = 2\alpha - \alpha = \alpha$; аналогично, $\angle MQB = \alpha$. Так как ΔABQ равнобедренный, $\angle ABQ = \angle AQB = 2\alpha$, откуда $\angle PBQ = \alpha$. По теореме о сумме углов треугольника для ΔABC получаем $5\alpha = 180°$, откуда $\angle MQB = \alpha = 36°$.
Второй случай. Пусть точка P лежит на отрезке CQ. Тогда $MN = AP > PQ = BM$. В ΔBMN против большего угла лежит большая сторона, значит, $\angle MBN = 180° - 2\alpha > \angle BNM = \alpha$, откуда $\alpha < 60°$. Но и в ΔAMQ против большего угла лежит большая сторона, а поскольку $AM > AQ = AP - QP = AM - QP$, это означает, что $\angle A = \alpha > \angle AMQ = 180° - 2\alpha$, откуда $\alpha > 60°$. Полученное противоречие показывает, что второй случай невозможен.

Задача 6. Наташа хочет выложить мозаикой число 2021, показанное на рисунке. У неё есть 4 одинаковые плитки размером 1×1 клетку и 24 одинаковые плитки размером 1×2 клетки. Сколькими способами Наташа может осуществить задуманное?



Ответ: 6517.

Решение. Двойка состоит из 13 клеток, ноль — из 18, единица — из 8. Поэтому каждая двойка должна содержать нечётное число плиток 1×1 (одну или три), а ноль и единица — чётное (ноль или две). Значит, в каждой двойке есть хотя бы по одной плитке 1×1, а ещё две такие плитки могут оказаться в составе одной любой цифры.

Если двойка содержит одну плитку 1×1, то её можно располагать только в 7 из клеток двойки, чтобы остальные клетки можно было заполнить плитками 1×2. Если же двойка содержит три плитки 1×1, то плиток 1×2 будет 5. Число способов их уложить равно числу способов переставить буквы в слове АААББББББ (буквы А соответствуют плиткам 1×1, а буквы Б — плиткам 1×2). Это число способов равно $8! : (3! \cdot 5!) = 7 \cdot 8 = 56$.

Если ноль не содержит плиток 1×1, то уложить его 9 плитками 1×2 есть два способа (в зависимости от того, одна или две горизонтальные плитки в верхней горизонтали нуля). Если же ноль содержит две плитки 1×1, то есть 18 способов поставить первую из них, и для каждого из этих способов есть по 9 способов поставить вторую («отступив» чётное число клеток от первой по часовой стрелке); итого $18 \cdot 9 : 2 = 81$ способ (пополам делим, поскольку плитки неразличимы).

Если единица не содержит плиток 1×1, то уложить её 4 плитками 1×2 можно единственным способом. Если же единица содержит две плитки 1×1 и три плитки 1×2, то число способов их уложить равно числу способов переставить буквы в слове ААБББ, которое равно $5! : (2! \cdot 3!) = 10$.

Если три плитки 1×1 в первой двойке и одна — во второй, то есть 56 способов заполнить первую двойку, 7 способов заполнить вторую двойку, два способа заполнить ноль и один способ заполнить единицу. Итого $56 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1 = 784$ способа. Ещё столько же способов, когда одна плитка 1×1 в первой двойке и три — во второй.

Если в двойках по одной плитке 1×1 и ещё две такие плитки в нуле: есть по 7 способов выложить каждую двойку, 81 способ выложить ноль и один способ выложить единицу; итого $7^2 \cdot 81 \cdot 1 = 3969$ способов.

Если в двойках по одной плитке 1×1 и ещё две такие плитки в единице: есть по 7 способов выложить каждую двойку, два способа выложить ноль и 10 способов выложить единицу; итого $7^2 \cdot 2 \cdot 10 = 980$ способов.

Всего получаем $2 \cdot 784 + 3969 + 980 = 6517$ способов выложить мозаику.