Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2020/21 учебного года для 9 классов

Задача 1. Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью еще четверть пути и снова снизил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё восьмую часть пути, и т.д. После восьмого понижения скорости он не менял её до конца поездки. Во сколько раз второму автомобилю потребовалось больше времени на преодоление всего пути, чем первому?

Ответ: $\dfrac{5}{3}$.

Решение. Пусть V_1 — скорость первого автомобиля, V_0 — начальная скорость второго, а преодолённое каждым автомобилем расстояние равно S. Тогда $V_0 = 3V_1$. Первый автомобиль затратил на весь путь время $t_1 = \frac{S}{V_1}$, а второй — время

$$t_2 = \frac{\frac{S}{2}}{V_0} + \frac{\frac{S}{4}}{\frac{V_0}{2}} + ... + \frac{\frac{S}{2^8}}{\frac{V_0}{2^7}} + \frac{\frac{S}{2^8}}{\frac{V_0}{2^8}} = \frac{S}{2V_0} \cdot 8 + \frac{S}{V_0} = \frac{S}{6V_1} \cdot 8 + \frac{S}{3V_1} = \frac{5S}{3V_1},$$

откуда $\frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{3}$.

Задача 2. Сколько существует делителей числа 2021^{2021}, кубический корень из которых является натуральным числом?

Ответ: 454276.

Решение. Так как $2021 = 43 \cdot 47$, все делители числа 2021^{2021} имеют вид $43^{\alpha} \cdot 47^{\beta}$, где $\alpha, \beta \in [0; 2021]$. При этом точными кубами являются числа вида $43^{3n} \cdot 47^{3k}$, где $3n, 3k \in [0; 2021]$, то есть $n, k \in [0; 673]$. Таких чисел $674^2 = 454276$.

Задача 3. Решите систему

$$\begin{cases} |x^4 - 625x^2| \neq x^4 - 625x^2, \\ |6x^2 - 257x + 251| + 6x^2 - 257x + 251 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $[1; 25)$.

Решение. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x^4 - 625x^2 < 0, \\ 6x^2 - 257x + 251 \leqslant 0, \end{cases}$$

которая имеет решение: $[1; 25)$.

Задача 4. Сколько существует троек чисел a, b, c, каждое из которых служит корнем соответствующего уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?

Ответ: 5.

Решение. Если $a = 0$ или $a = b = c$, то $a = b = c = 0$. В противном случае: если $a = b \neq c$, то либо $a = b = -1,\ \ c = 0$, либо $a = b = 1,\ \ c = -2$; если $a \neq b = c$, то либо $a = 1,\ \ b = c = -0,5$; если же $a = c \neq b$, то $a = c = c_0,\ b = 1/c_0$, где число $c_0 < 0$ — единственный корень уравнения $c^3 + c = -1$.

Задача 5. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1}$ при $x > 0$.

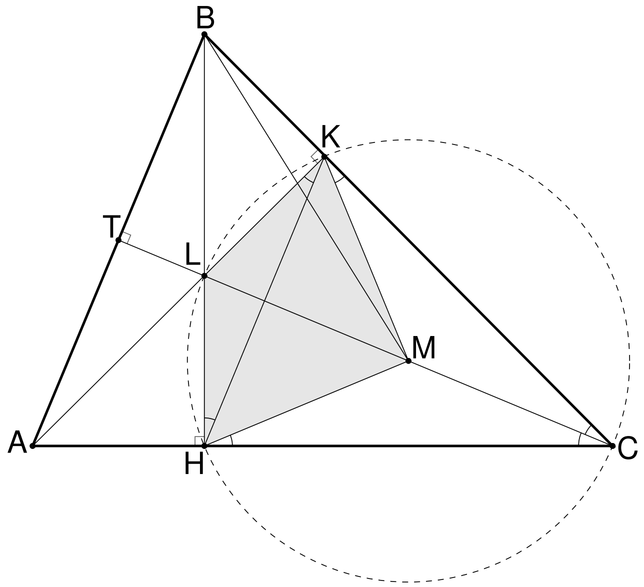
Ответ: $\frac{5}{2}$.

Решение. Функция $g(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает при $x \geqslant 1$, что можно доказать по определению, поэтому $g(x) \geqslant g(1) = 2$ при $x \geqslant 1$. Следовательно, $f(x) = g(g(x)) \geqslant g(2) = f(1) = \frac{5}{2}$.

Задача 6. В остроугольном треугольнике ABC со стороной $AC = 1$ провели высоту BH, в треугольнике BHC — биссектрису CL, в треугольнике BLC — медиану BM. Прямая AL пересекает сторону BC в точке K, причём $\angle BHK = \angle MHC = 15°$. Найдите площадь четырёхугольника $KLHM$.

Ответ: $\frac{3(2-\sqrt{3})}{8}$.

Решение. Треугольник CHL — прямоугольный, поэтому его вершины лежат на окружности с центром в середине гипотенузы — точке M. Тогда $MH = MC$ и $\angle LHK = \angle MHC = \angle MCH = \angle MCK = 15°$. Значит, и точка K лежит на той же окружности. Тогда $\angle LKC = 90°$ как опирающийся на диаметр вписанный угол, и AK — также высота треугольника ABC. Поэтому L — точка пересечения высот треугольника ABC, а значит, луч CL содержит высоту и биссектрису этого треугольника, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC = 1$). Отсюда, в частности, следует, что $CK = CH$ и $\Delta KLC = \Delta HLC$.



Так как медиана делит площадь треугольника пополам,

$$S(KLHM) = S(KLM) + S(HLM) = \frac{1}{2}S(KLC) + \frac{1}{2}S(HLC) = S(KLC) = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot LC \cdot \sin 15° =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot KC \cdot \frac{KC}{\cos 15°} \cdot \sin 15° = \frac{1}{2} \cdot (AC\cos 30°)^2 \cdot \operatorname{tg} 15° = \frac{3(2-\sqrt{3})}{8}.$$

Задача 7. На числовой прямой отмечены 200 точек, имеющие координаты $1, 2, \ldots, 200$. Двое игроков по очереди ставят в любую из еще незанятых точек число «0» или число «1». Когда все возможные ходы сделаны, рассматриваются 199 отрезков $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $\ldots$, $[199;200]$ и подсчитываются баллы за каждый отрезок: если концы отрезка содержат одинаковые числа, то 1 балл получает первый игрок, если разные — то второй.

а) Кто из игроков может обеспечить себе бо́льшую сумму баллов независимо от ходов соперника?

б) С каким максимальным преимуществом одного из игроков может закончиться эта игра (при условии, что каждый игрок играет наилучшим для себя образом)?

Ответ: а) Второй игрок; **б)** 1 балл.

Решение. Заметим, что первый игрок после своего первого хода баллов не получает, тогда как второй игрок за каждый ход может гарантированно получить 1 балл. Действительно, ему достаточно выбрать уже занятую числом точку, у которой есть незанятая соседняя точка и поставить туда другое число. Таким образом, меньше чем 100 баллов второй игрок при правильной игре не получает. Отрезков всего 199, поэтому при правильной игре второй всегда выигрывает. Начиная со второго своего хода первый игрок также может гарантированно получать по 1 баллу за ход (ставя в соседнюю к уже занятой точке такое же число). Таким образом, при правильной игре первый игрок гарантированно получает 99 баллов.