ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ
ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ

Α.Μ: *201100079*	Επώνυμο: *Κορομηλάς*	Όνομα: *Χρήστος*
Ημ/νία(Ημέρα,Ώρα) εκτέλεσης της άσκησης: *04/05/2022 (Τετάρτη, 15:30-18:00)*		
Ημ/νία παράδοσης της άσκησης: *04/05/2022*		

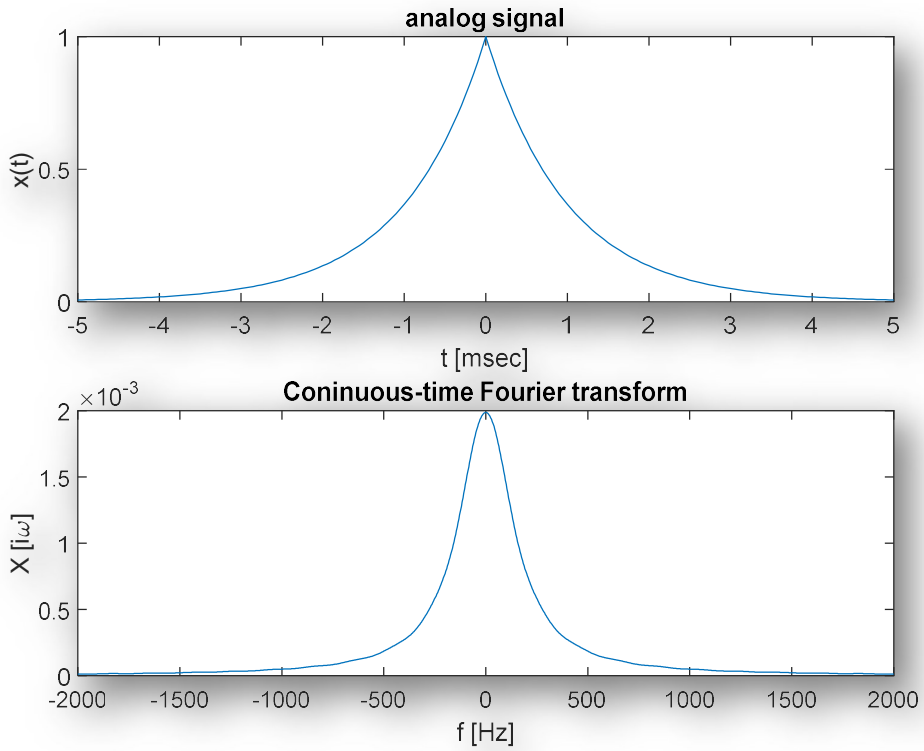
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ ΚΑΙ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Μια εργασία η οποία αποσκοπεί στο να μας εξοικειώσει στην υλοποίηση προγραμμάτων στη MATLAB, και πιο συγκεκριμένα στο μετασχηματισμό $\boldsymbol{Fourier}$ *Συνεχούς χρόνου και στη Δειγματοληψία.*

➢ ***Άσκηση 1η :***

Ακολουθεί το πρόγραμμα $\boldsymbol{deigma1.m}$ στη λειτουργική του μορφή και το αποτέλεσμα εκτέλεσης:

```
%% deigma1
close all;
clear all;
clc;

Dt = 5e-5;
t = -5e-3:Dt:5e-3;
x = exp(-1000*abs(t));

W_max = 2*pi*2000;
iter_max = 500;
iter = 0:1:iter_max;
W = (iter/iter_max)*W_max;

X = x*exp(-1i*t'*W)*Dt;
X = real(X);

W = [-fliplr(W), W(2:501)];
X = [fliplr(X), X(2:501)];

figure(1);

subplot(2,1,1);
plot(1000*t,x);
xlabel('t [msec]');
ylabel('x(t)');
title('analog signal');

subplot(2,1,2);
plot(W/(2*pi),X);
xlabel('f [Hz]');
ylabel('X [i\omega]');
title('Coninuous-time Fourier transform');

print -depsc progr10;
```

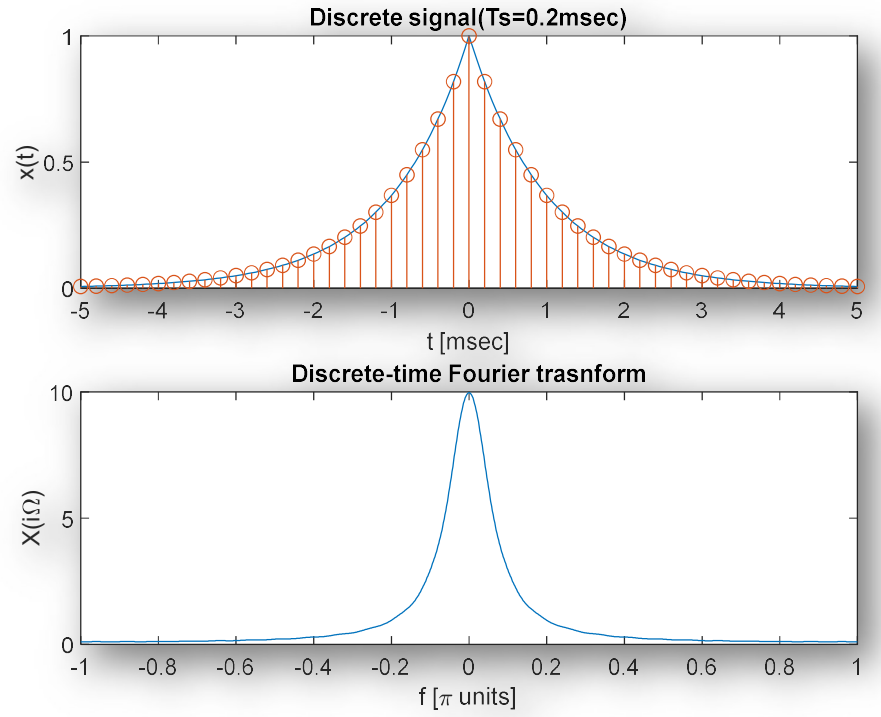

analog signal
x(t)
t [msec]
Coninuous-time Fourier transform
×10^-3
X [iω]
f [Hz]

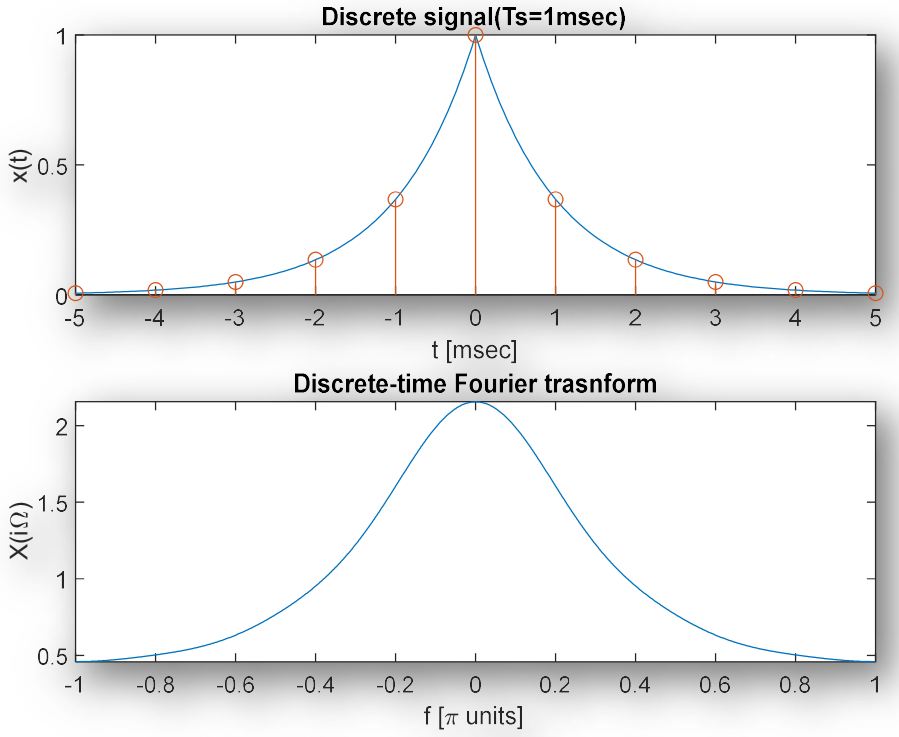
➢ ***Άσκηση 2η :***

Ακολουθούν τα προγράμματα $\boldsymbol{deigma2a.m}$ και $\boldsymbol{deigma2b.m}$ στην λειτουργική τους μορφή και τα αποτελέσματα εκτέλεσης αντίστοιχα:

```
%%deigma2a

close all;
clc;
clear all;

Dt = 5e-5;
t = -5e-3:Dt:5e-3;
x = exp(-1000*abs(t));

Ts = 2e-4;
n = -25:1:25;
x_d = exp(-1000*abs(n*Ts));

iter_max = 500;
iter = 0:1:iter_max;
w = (iter/iter_max)*pi;
X_d = x_d*exp(-i*n'*w);
X_d = real(X_d);

w = [-fliplr(w), w(2:iter_max+1)];
X_d = [fliplr(X_d),X_d(2:iter_max+1)];

figure(1);

subplot(2,1,1);
plot(1000*t,x);
xlabel('t [msec]');
ylabel('x(t)');
title('Discrete signal(Ts=0.2msec)');
hold on ;
stem(n*Ts*1000 ,x_d);
hold off ;

subplot(2,1,2);
plot(w/pi,X_d);
xlabel('f [\pi units]');
ylabel('X(i\Omega)');
title('Discrete-time Fourier trasnform');

print -depsc progr22;
```

```
%%deigma2b

close all;
clc;
clear all;

Dt = 5e-5;
t = -5e-3:Dt:5e-3;
x = exp(-1000*abs(t));

Ts = 1e-3;
n = -5:1:5;
x_d = exp(-1000*abs(n*Ts));

iter_max = 500;
iter = 0:1:iter_max;
w = (iter/iter_max)*pi;
X_d = x_d*exp(-i*n'*w);
X_d = real(X_d);
w = [-fliplr(w),w(2:iter_max+1)];
X_d = [fliplr(X_d),X_d(2:iter_max+1)];

figure(1);

subplot(2,1,1);
plot(1000*t,x);
xlabel('t [msec]');
ylabel('x(t)');
title('Discrete signal(Ts=1msec)');
hold on ;
stem(n*Ts*1000 ,x_d);
hold off ;

subplot(2,1,2);
plot(w/pi,X_d);
xlabel('f [\pi units]');
ylabel('X(i\Omega)');
title('Discrete-time Fourier trasnform');

print -depsc progr23;
```


Discrete signal(Ts=0.2msec)
x(t)
t [msec]
Discrete-time Fourier trasnform
X(iΩ)
f [π units]


Discrete signal(Ts=1msec)
x(t)
t [msec]
Discrete-time Fourier trasnform
X(iΩ)
f [π units]

Απάντηση ερωτήσεων:

Ερώτημα 1:

Στο πρώτο πρόγραμμα, κατά την εκκίνηση του αρχικοποιούνται τα $\boldsymbol{t}$ *και* $\boldsymbol{Dt}$ *ακριβώς όπως και στο* $\boldsymbol{deigma1.m}$*. Έπειτα, υπολογίζονται τιμές του* $\boldsymbol{x}$ *για κάθε* $\boldsymbol{t}$ *και αρχικοποείται η μεταβλητή* $\boldsymbol{Ts = 2e - 4}$*. Ο πίνακας* $\boldsymbol{n}$ *παίρνει τιμές από το* $\boldsymbol{-25}$ *έως το* $\boldsymbol{+25}$ *με βήμα* $\boldsymbol{1}$ *και για κάθε τιμή του* $\boldsymbol{t}$ *υπολογίζεται το* $\boldsymbol{x}$ *, ενώ για κάθε τιμή του* $\boldsymbol{n}$ *υπολογίζεται το* $\boldsymbol{x\_d}$*. Ακολουθεί η διαδικασία με το* $\boldsymbol{iter}$ *και* $\boldsymbol{iter\_max}$ *που είδαμε και στο προηγούμενο κώδικα, μόνο που τώρα οι τιμές του* $\boldsymbol{iter}$ *κυμαίνονται μεταξύ του* $\boldsymbol{0}$ *και του* $\boldsymbol{500}$ *με βήμα* $\boldsymbol{1}$*. Υπολογίζεται ο μετασχηματισμός* $\boldsymbol{Fourier}$ *,* $\boldsymbol{X\_d = x\_d * exp(-i * n' * w)}$*. Η εντολή* $\boldsymbol{X\_d = real(X\_d)}$ *καλεί η συνάρτηση* $\boldsymbol{real}$ *με παράμετρο το* $\boldsymbol{x\_d}$ *και επιστρέφει το πραγματικό μέρος του* $\boldsymbol{X\_d}$*. Λαμβάνονται υπόψιν και οι αρνητικές τιμές του* $\boldsymbol{w}$ *, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές που παίρνει το* $\boldsymbol{x\_d}$ *σε αυτές, επομένως αφού οτο πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού* $\boldsymbol{Fourier}$ *είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα* $\boldsymbol{y}$ *ισχύει ότι* $\boldsymbol{X\_d(-iw) = X\_d(iw)}$*. Πριν συμβεί ο τερματισμός του προγράμματος, τυπώνονται γραφικά οι ποσότητες* $\boldsymbol{x(t)}$ *και* $\boldsymbol{X(i\Omega)}$ *και αποθηκεύονται τα δεδομένα του προγράμματος, όπως ακριβώς είδαμε και στις προηγούμενες εργασίες.*

Στο δεύτερο πρόγραμμα, η εκκίνηση είναι αντίστοιχη των προηγούμενων προγραμμάτων. Ορίζεται η μεταβλητή $\boldsymbol{Ts = 1e - 3}$ *και ο πίνακας n κυμαίνεται από το* $\boldsymbol{-5}$ *έως το* $\boldsymbol{+5}$ *με βήμα* $\boldsymbol{1}$*. Υπολογίζεται το δειγματοληπτόμενο* $\boldsymbol{x\_d = exp(-1000 * abs(n * Ts))}$ *για κάθε τιμή του* $\boldsymbol{n}$ *και ακολουθείται η διαδικασία με το* $\boldsymbol{iter}$ *και* $\boldsymbol{iter\_max}$ *όπως ακριβώς την είδαμε και στο προηγούμενο κώδικα. Αποθηκεύονται οι τιμές του* $\boldsymbol{w}$ *με τη γραμμή* $\boldsymbol{w = (iter/iter\_max) * pi}$ *για κάθε τιμή του* $\boldsymbol{iter}$ *και, στη συνέχεια πραγματοποιείται ο μετασχηματισμός* $\boldsymbol{Fourier}$ *και οι εντολές που περιγράφονται στα παρακάτω ερωτήματα. Πριν συμβεί ο τερματισμός του προγράμματος, τυπώνονται γραφικά οι ποσότητες* $\boldsymbol{x(t)}$*και* $\boldsymbol{X(i\Omega)}$ *και αποθηκεύονται τα δεδομένα του προγράμματος όπως ακριβώς είδαμε και στις προηγούμενες εργασίες.*

Ακόμη σημειώνεται πως, η εντολή $\boldsymbol{hold\ on}$ *που χρησιμοποιείται κατά την τύπωση των αποτελεσμάτων σταματάει το πρόγραμμα πριν γίνει η γραφική απεικόνιση του μετασχηματισμού* $\boldsymbol{Fourier}$*, ενώ η εντολή* $\boldsymbol{hold\ off}$ *επιτρέπει στο πρόγραμμα να συνεχίσει τον υπολογισμό της επόμενης γραφικής παράστασης αφού έχει πραγματοποιηθεί η γραφική διακριτού σήματος.*

Ερώτημα 2:

Στη γραμμή $\boldsymbol{17}$ *του προγράμματος* $\boldsymbol{deigma2b.m}$ *υπολογίζεται ο μετασχηματισμός* $\boldsymbol{Fourier}$ *από το δειγματοληπτούμενο σήμα* $\boldsymbol{x\_d}$ *ο οποίος είναι ίσος με* $\boldsymbol{x\_d * exp(-i * n' * w)}$*, όπου* $\boldsymbol{n}$ *πίνακας γραμμής και επιλέγεται ο πίνακας στήλης* $\boldsymbol{n'}$ *για να μπορέσει να πραγματοποιηθεί ο πολλαπλασιασμός* $\boldsymbol{n' * w}$*. Στη γραμμή* $\boldsymbol{18}$ *καλείται η συνάρτηση real με παράμετρο* $\boldsymbol{x\_d}$ *και επιστρέφεται το πραγματικό μέρος του* $\boldsymbol{x\_d}$ *στο πίνακα* $\boldsymbol{X\_d}$*.*

***Ερώτημα 3-4**:*

Στις γραμμές $\mathbf{19-20}$ *του προγράμματος* $\boldsymbol{deigma2b.m}$*, παίρνουμε και τις αρνητικές τιμές του w και τις αντίστοιχες τιμές που παίρνει το* $\boldsymbol{X\_d}$ *σε αυτές. Γιατί εφόσον το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού* $\boldsymbol{Fourier}$ *είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα* $\boldsymbol{y}$*, ισχύει ότι* $\boldsymbol{X\_d}(-\boldsymbol{iW}) = \boldsymbol{X\_d}(+\boldsymbol{iW})$.

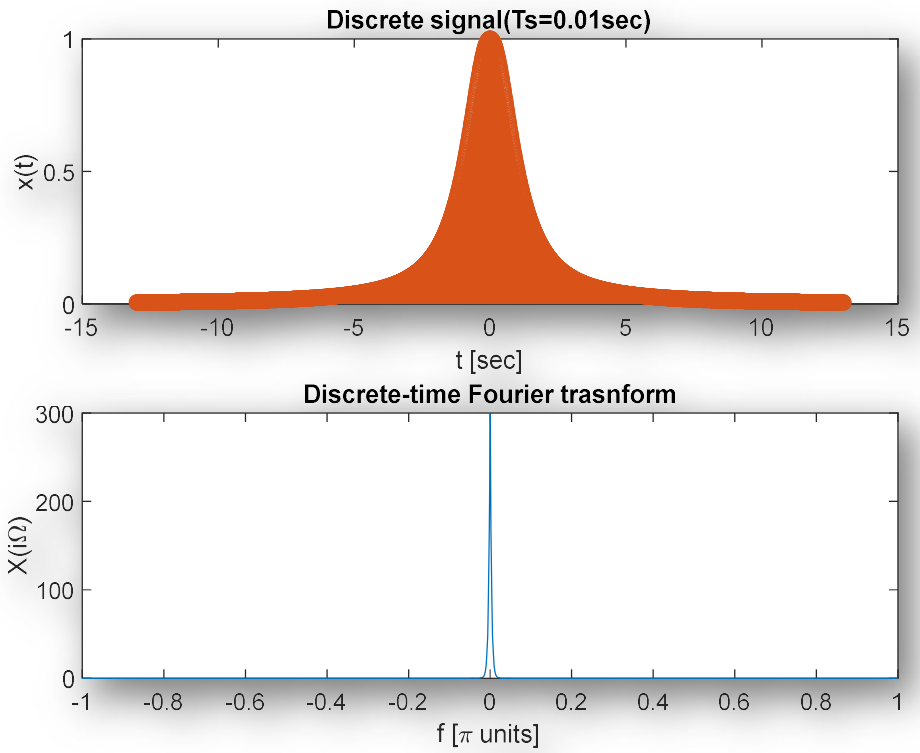
➢ ***Άσκηση 3η :***

Ερώτημα α:

Αναζητούμε αρχικά το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, δηλαδή αναζητούμε $\boldsymbol{t}$:
να ισχύει $\boldsymbol{x(t)} -> \boldsymbol{0}$. Έτσι αναζητώντας το: $\boldsymbol{1/(1+t^2)} \rightarrow \boldsymbol{e^{-5}} => \boldsymbol{t} \approx \pm\boldsymbol{13}$
Εάν επιλέξουμε $\boldsymbol{\Delta t} = \boldsymbol{5} * \boldsymbol{10^{-5}}$ τότε ισχύει πως $\boldsymbol{\Delta t} << \boldsymbol{t}$. Ακόμη ισχύει $\boldsymbol{F_s} = \boldsymbol{100}\ \boldsymbol{δείγματα/sec}$ συνεπώς $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{10^{-2}}\ \boldsymbol{sec/δείγμα}$. Άρα, σε χρόνο $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{13s}$ υπάρχουν $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{13/10^{-2}}$ δείγματα και έτσι έχουμε $\boldsymbol{1300}$ δείγματα με το $\boldsymbol{n}$ να κυμαίνεται από τη τιμή $\boldsymbol{-1300}$ μέχρι τη τιμή $\boldsymbol{1300}$ με βήμα 1.

Ακολουθεί το πρόγραμμα: $\boldsymbol{deigma3a.m}$ στην λειτουργική του μορφή και το αποτέλεσμα εκτέλεσης:

```
%%deigma3a
clear all;
close all;
clc;

Dt = 5e-5;
t = -13:Dt:13;
x = 1./(t.^2+1);

Ts = 0.01;
n = -1300:1:1300;
x_d = 1./((n.*Ts).^2.+1);

iter_max = 500;
iter = 0:1:iter_max;
w = (iter/iter_max)*pi;
X_d = x_d*exp(-1i*n'*w);
X_d = real(X_d);
w = [-fliplr(w),w(2:iter_max+1)];
X_d = [fliplr(X_d),X_d(2:iter_max+1)];

figure(1);

subplot(2,1,1);
plot(t,x);
xlabel('t [sec]');
ylabel('x(t)');
title('Discrete signal(Ts=0.01sec)');
hold on ;
stem(n*Ts,x_d);
hold off ;

subplot(2,1,2);
plot(w/pi,X_d);
xlabel('f [\pi units]');
ylabel('X(i\Omega)');
title('Discrete-time Fourier trasnform');

print -depsc progr31;
```


Discrete signal(Ts=0.01sec)
x(t)
1
0.5
0
-15
-10
-5
0
5
10
15
t [sec]
Discrete-time Fourier trasnform
X(iΩ)
300
200
100
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
f [π units]

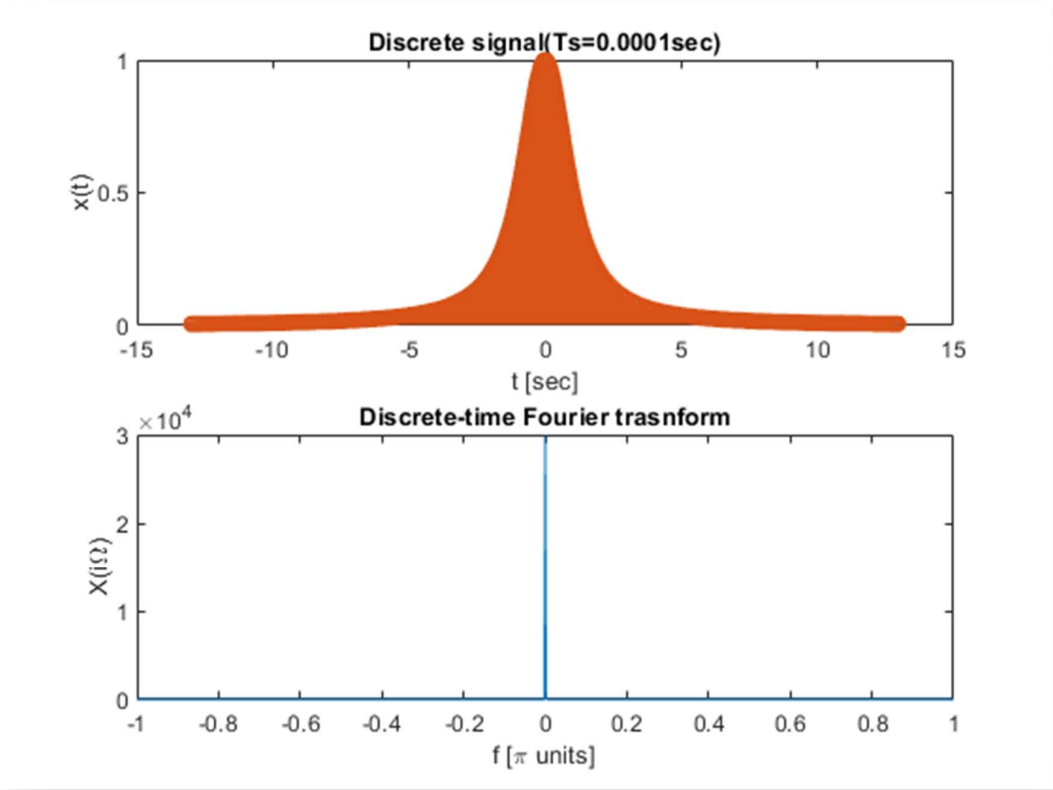
***Ερώτημα β**:*

Γνωρίζουμε ότι για να ισχύει $\boldsymbol{x(t)->0}$, $\boldsymbol{t \approx \pm 13}$

Εάν επιλέξουμε $\boldsymbol{\Delta t = 5 * 10^{-5}}$ τότε ισχύει πως $\boldsymbol{\Delta t << t}$. Ακόμη ισχύει $\boldsymbol{F_s = 10000\ δείγματα/sec}$ συνεπώς $\boldsymbol{T_s = 10^{-4}\ sec/δείγμα}$. Άρα, σε χρόνο $\boldsymbol{t = 13s}$ υπάρχουν $\boldsymbol{n = 13/10^{-4}}$ δείγματα και έτσι έχουμε $\boldsymbol{130000}$ δείγματα με το $\boldsymbol{n}$ να κυμαίνεται από τη τιμή $\boldsymbol{-130000}$ μέχρι τη τιμή $\boldsymbol{130000}$ με βήμα 1.

Ακολουθεί το πρόγραμμα: $\boldsymbol{deigma3b.m}$ στην λειτουργική του μορφή και το αποτέλεσμα εκτέλεσης:

```
%%deigma3b
clear all;
close all;
clc;

Dt = 5e-5;
t = -13:Dt:13;
x = 1./(t.^2+1);

Ts = 0.0001;
n = -130000:1:130000;
x_d = 1./((n.*Ts).^2.+1);

iter_max = 500;
iter = 0:1:iter_max;
w = (iter/iter_max)*pi;
X_d = x_d*exp(-1i*n'*w);
X_d = real(X_d);

w = [-fliplr(w),w(2:iter_max+1)];
X_d = [fliplr(X_d),X_d(2:iter_max+1)];

figure(1);

subplot(2,1,1);
plot(t,x);
xlabel('t [sec]');
ylabel('x(t)');
title('Discrete signal(Ts=0.0001sec)');
hold on;
stem(n*Ts,x_d);
hold off;

subplot(2,1,2);
plot(w/pi,X_d);
xlabel('f [\pi units]');
ylabel('X(i\Omega)');
title('Discrete-time Fourier trasnform');

print -depsc progr32;
```


Discrete signal(Ts=0.0001sec)
x(t)
t [sec]
Discrete-time Fourier trasnform
×10^4
X(jΩ)
f [π units]