МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА

Факультет информатики и систем управления
Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа №3
по курсу «Численные методы»

«Методы численного интегрирования»

Выполнил:
Студент группы ИУ9-62
Ситников К.А.

Проверила:
Домрачева А. Б.

Москва 2017

Постановка задачи

Дана функция одного действительного аргумента $f(x)$ и действительные числа a, b. Необходимо вычислить значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ тремя методами численного интегрирования: методом прямоугольников, методом трапеций, методом Симпсона. Для каждого метода определить число разбиений при заданной погрешности с использованием уточнения по Ричардсону и без него.

Теоретические сведения

1.Метод прямоугольников. Методы численного интегрирования основаны на приближенном вычислении площади под графиком функции. Пусть $f(x)$ - действительная функция одного аргумента, a, b - действительные числа. Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ методом прямоугольников необходимо разделить отрезок интегрирования $[a; b]$ на n равных частей.

Данную равномерную сетку можно описать следующим набором уравнений:

$$x_i = a + ih \tag{1}$$

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{2}$$

Для каждой пары x_i, x_{i-1} находим площадь прямоугольника со сторонами h и $f(\frac{x_i - x_{i-1}}{2})$, т.е. значение функции в точке между x_i, x_{i-1}. Получается n прямоугольников и приближенно вычисленная площадь вычисляется по следующей формуле:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_i - x_{i-1}}{2})(h) \tag{3}$$

2.Метод трапеций. Метод трапеций основан на том же подходе, что и в методе прямоугольников, но площадь под графиком функции приближается площадями трапеций. Отрезок интегрирования $[a; b]$ аналогично делится на n частей и равномерная сетка описывается уравнениями (1) и (2). Для каждой пары x_i, x_{i-1} находим площадь трапеции с основаниями $f(x_i), f(x_{i-1})$ и высотой $x_1 - x_{i-1}$. Площадь одного сегмента равна:

$$S = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})$$

Приближенно вычисленная площадь под графиком функции равна сумме площадей n трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(h) = (\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2})(h) \tag{4}$$

3.Метод Симпсона. Метод Симпсона основан на том же подходе что и в предудыщих методах, Отрезок интегрирования $[a;b]$ аналогично делится на n частей и равномерная сетка описывается уравнениями (1) и (2). Для каждой пары x_i, x_{i-1} находится площадь под графиком интерполяционного многочлена второй степени $p_2(x)$ для функции $f(x)$ на отрезке $[x_i; x_{i-1}]$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_2(x)dx =$$
$$(\frac{x_i - x_{i_1}}{6})(f(x_i) + 4f(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}) + f(x_{i-1})) \tag{5}$$

Тогда приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ вычисляется в виде суммы интегралов вида (5):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_2(x)dx =$$
$$\frac{h}{6}(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) \tag{6}$$

4.Уточнение по Ричардсону. Пусть h - шаг метода, c - константа, $k = 2$ для методов прямоугольников и трапеций, $k = 4$ для метода Симпсона, I - истинное значение интеграла, I_h^* - значение интеграла посчитанное одним из методов при шаге h, тогда:

$$I = I^* + O(h^k), I = I^* + ch^k$$

$$I = I_{h/2}^* + c(\frac{h}{2})^k$$

Оценка погрешности находится из следующих соображений:

$$(\frac{h}{2})^k(2^k - 1) = I_h^* - I_{h/2}^*$$
$$c(\frac{h}{2})^k = \frac{I_h^* - I_{h/2}^*}{2^k - 1} \tag{7}$$

Уточнение по Ричардсону и есть значение этой оценки, для более точного вычисления интеграла нужно прибавить это значение к значению интеграла вычисленного одним из вышеперечисленных методов.

Реализация

Для выполнения поставленной задачи были разработаны функции для каждого метода и программа тестирования на языке Python 3.

Функция тестирования принимает в качестве аргумента метод интегрирования, границы интегрирования, интегрируемую функцию, истинное значение интеграла, значение ошибки, булевское значение, показывающее, нужно ли использовать уточнение по Ричардсону или нет.

Функция тестирования считает интеграл заданным методом начиная с количества разбиений $n = 2$, далее на каждой итерации количество разбиений увеличивается в 2 раза. Счет останавливается согласно правилу Рунге: остановить счет, когда $|R| = I - I^* < \varepsilon$, где R - оценка погрешности метода, а ε - заданное значение погрешности.

Ниже приведен код реализации методов прямоугольников, трапеций, Симпсона на языке Python 3.6

```
# numerical_integration.py
# describes:
# 1) middle rectangle method
# 2) trapezium method
# 3) simpson method


def mid_rectangle_method(a, b, f, n):
    step = (b - a) / n
    s = 0
    for i in range(0, n):
        s += step * f(a + (i + 0.5) * step)
    return s


def trapezium_method(a, b, f, n):
    step = (b - a) / n
    s = 0
    for i in range(0, n):
        s += step * (f(a + i * step) + f(a + (i + 1) * step)) / 2
    return s


def simpson_method(a, b, f, n):
    step = (b - a) / n
    s = f(a) + f(b)
    for i in range(0, n):
        s += 4 * f(a + (i + 0.5) * step)
    for i in range(1, n):
        s += 2 * f(a + i * step)
    return (step / 6) * s
```

Следующий листинг - код программы тестирования трех методов с использованием уточнения по Ричардсону и без такового

```
def test_numerical_integration(method, a, b, f, expected_value, e, k=2,
          richardson_extrapolation=False):
    n = 2
    iter_error = abs(method(a, b, f, n) - expected_value)
```

```
print(iter_error, 2)
last_iter_value = 0
while iter_error > e:
    n *= 2
    value = method(a, b, f, n)
    if richardson_extrapolation:
        iter_error = abs(value + (value - last_iter_value) /
        (math.pow(2, k)) - expected_value)
    else:
        iter_error = abs(value - expected_value)

    last_iter_value = value
    print(iter_error, n)
```

Результаты тестирования

Тестирование проводилось для методов: прямоугольников, трапеций, Симпсона с уточнением и без такового, для погрешностей $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$. В качестве функции для тестирования была использована $ln(x)$ с границами интегрирования $[1; 15]$. Ниже приведена таблица, в которой представлены результаты тестирования

Метод интегрирования	Прямоугольников		Трапеций		Симпсона	
Уточнение по Ричардсону	без УЧ	с УЧ	без УЧ	с УЧ	без УЧ	с УЧ
Погрешность 10^{-1}, итерации	16	8	16	8	4	8
Погрешность 10^{-2}, итерации	32	16	64	32	8	8
Погрешность 10^{-3}, итерации	128	64	128	64	16	16

Вывод

В результате данной лабораторной работы были изучены три метода численного интегрирования (прямоугольников, трапеций, Симпсона), способ увчеличения точности вычислений (уточнение по Ричардсону). Было выяснено, что наименее точным является метод трапеций, далее метод прямоугольников, и самым точным является метод Симпсона (нужно меньшее количество разбиений для вычисления интеграла с заданной погрешностью). Также было выяснено, что уточнение по Ричардсону уменьшает количество разбиений или увеличивает точность вычислений для методов численного интегрирования.