DT

类型含义	类型记号	命题含义	命题记号
单位类型	$\top$	恒真命题	$\top$
空类型	$\bot$	恒假命题	$\bot$
和类型	$A + B$	析取, 逻辑或	$A \vee B$
积类型	$A \times B$	合取, 逻辑与	$A \wedge B$
函数类型	$A \to B$	蕴含	$A \Rightarrow B$
	$A \to \bot$	否定, 逻辑非	$\neg A$

元

$\equiv$

$\downarrow$

判断 el

Judgemental

目标

$=_A$

$\downarrow$

类型, 命题

Proposition

Typer Former

$A+B$

$\bigcirc + \bigcirc$

A, B

Dedep Type

词项

$a : A$

~~Form~~

$P(a) : \mathcal{U}$

词项 类型 宇宙

$\underbrace{a : A : \mathcal{U}}$

$$\frac{A \text{ type} \quad B \text{ type}}{A+B \text{ type}}$$

$$\frac{A : \mathcal{U} \quad B : \mathcal{U}}{A+B : \mathcal{U}}$$

DT

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash P(x): \mathcal{U}}{\quad}$$

1.1

C-H 同构

命题

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

f $[a,b]$ 连续

$$\forall x \in [a,b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in [a,b] \; |y-x| < \delta \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon : \mathcal{U}$$

term

一致连续

$$\frac{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \quad , \forall y \in}{\quad}$$

$$\frac{\Gamma, x: \; , \varepsilon, \delta, y:[a,b] \vdash \boxed{\quad} : \mathcal{U}}{\Gamma, \varepsilon, \delta, x, y, \vdash \boxed{\quad} : \mathcal{U}}$$

DT 1.2

printf("%d, %g", ~~3, 1.21~~);

tem

$\text{printf} : \text{cstr\_t} \to \text{int} \to \text{double} \to 2$

$\Gamma, (\text{fmt\_str} : \text{cstr\_t}) \vdash \text{prf\_t} : \mathcal{U}$

DT

证明

$x : A \vdash P(x) : \mathcal{U}$

$$\frac{\quad}{p : P(x)}$$

$\text{rbt} : \text{rbt\_t} \vdash \text{bal} : \mathcal{U}$

DT 2

依赖 dependent function type $(x:A) \to B(x)$ 左

~~依对 pair —— $(x:A)\times B(x)$~~

$A \to B \quad \sim \quad (x:A) \to B(x)$

$$\frac{\Gamma,\ x:A \vdash B(x) : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash \boxed{(x:A)\to B(x)} : \mathcal{U}} \to \text{形成}$$

$$\frac{\Gamma,\ x:A \vdash b : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda(x:A).\, b : \boxed{}} \to \text{引入}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f:(x:A)\to B \qquad \Gamma \vdash a:A}{\Gamma \vdash \underline{f\ a} : B[x\mapsto a]} \to \text{消去}$$

$$\frac{\Gamma\ x:A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash a:A}{\Gamma \vdash \boxed{(\lambda(x:A).\,b)\ a} \equiv b[x\mapsto a] : B[x\mapsto a]}\ \text{计算}$$

Judg eq

$(x:A) \to B(x) \qquad \forall x,\ B(x)$

DT 依值对

$$(x:A)\times B(x) \xleftrightarrow{CH} \exists x,\ B(x)$$

(a,b) $\qquad$ (a,b)

§2.2

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash B(x) : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash (x:A)\times B(x) : \mathcal{U}} \quad \times\text{形成}$$

$$\frac{\Gamma, a:A \vdash b:B}{\Gamma \vdash (a,b) : (x:A)\times B(x)} \quad \text{构造}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : (x:A)\times B(x)}{\Gamma \vdash p.1 : A} \quad \text{消去1} \qquad \frac{\quad}{\Gamma \vdash p.2 : B[x \mapsto p.1]} \quad \text{消 2}$$

fst p

$(p.1, p.2)$

DT §2.3

$(x:A) \to B(x)$

依赖 $\to$ ~~依赖~~ $\prod_{(x:A)} B(x)$ | $\prod_{(i:I)} X(i)$

依对 $\to$ $\sum_{(x:A)} B(x)$ | $\sum_{(i:I)} X(i)$

$(x:A) \times B(x)$

Sigma

index

2.3

集组 $t : \prod_{(i:I)} X(i) \equiv (i:I) \to X(i)$

$t\ i : X(i)$ $t\ i$ t_i

$t : (i:I) \to X(i)$

$(X_i)_{i \in I} \leftrightarrow (i:I) \to X_i$

I

$(\_, \_, \_, \_, \_, \_)$

C++ oper[]

DT §2.3

2.3

$(x:A) \to B(x)$

依赖

依赖对

$(x:A) \times B(x)$

$\prod_{(x:A)} B(x)$ | $\prod_{(i:I)} X(i)$

$\sum_{(x:A)} B(x)$ | $\sum_{(i:I)} X(i)$

Sigma

index

$\sum_{(i:I)} X(i) \longleftrightarrow (i:I) \times X(i) \quad : \mathcal{U}$

$(0, a_0) \quad a_0 \in A_0$

$(1, a_1) \quad a_1 \in A_1$

(i, x_i)

tag $\quad x_i : X(i)$

tag union $\quad$ C

{ tag : enum { $i_1, i_2, \ldots$ }

~~body~~ / u

}

DT §2.3 2.3

$(x:A) \to B(x)$

依赖 $\to$ ~~依赖~~ $\prod_{(x:A)} B(x)$ | $\boxed{\prod_{(i:I)} X(i)}$

依赖 对 $\to$ $\sum_{(x:A)} B(x)$ | $\sum_{(i:I)} X(i)$

$(x:A) \times B(x)$

Sigma

index

$\sum_{(i:I)} X(i) \longleftrightarrow (i:I) \times X(i) \quad : \mathcal{U}$

$(0, a_0) \quad a_0 \in A_0$

$(1, a_1) \quad a_1 \in A_1$

(i, x_i)

tag $\quad x_i : X(i)$

tag union $\quad$ C

{ tag : enum { $i_1, i_2, \ldots$ }

~~body/u~~ }

DT 2.4

依值类型

依值函数类型

依值对子类型

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash B(x) : \mathcal{U}}{\begin{array}{c}(x:A) \to B(x) \\ (x:A) \times B(x)\end{array}}$$

$\underline{B(x)}$ $\quad B : (x:A) \to \mathcal{U}$

Bx

B

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash B(x) : \mathcal{U}}{}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B : \cancel{A \to \mathcal{U}}}{}$$

返回类型的函数

Girard paradox

$\boxed{A \to \mathcal{U}} : \mathcal{U}$

$\boxed{A \to \mathcal{U} : \mathcal{U}}$

$\underline{\mathcal{U} : \mathcal{U}}$

非直谓的

impredicative

$A : \mathcal{U}_0 \;|\; \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 \;|\; \mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_2 \;|\; \mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_3$

hierarchy

$A : \mathcal{U}_0 \quad \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 \quad A \to \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1$

$\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 \quad \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_2, \quad \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_i$ —

层叠 cumulative

直谓的

predicative

$\underline{\forall x : A}, P(x)$ $\quad \underline{\forall P}, \forall x$

$P : \boxed{A \to \mathcal{U}_0} : \mathcal{U}_1$

$\mathcal{U}_0$

DT

15:00继续

array <T, n: int>

DT §3.1 $=_A$

同一类型 相等关 ~~路径~~

identity equality ~~path~~

$\equiv$ 三元 | $=_A$ 判断

internalize 内化

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash a' : A}{\Gamma \vdash \boxed{a =_A a'} : \mathcal{U}}$$

$=_A$ 形成

$\boxed{a =_A a'} : \mathcal{U}$

$1_\circ$

$\boxed{1 : (a : A) \to a =_A a}$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash 1_a : \boxed{a =_A a}}$$

$=_A$ 引入

自反性 refl$_a$

$a = a'$

See

$a = a'$

$\forall x \in a, \ x \in a'$

$\forall x \in a', \ x \in a$

$\in$

$a : a$ $\quad p : a = b$

$\cancel{2} + 3 = 4, \quad \cancel{2} + 3 = 4$

$a \equiv b$

$c : 1_z : z = z$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash \boxed{C(x, y, p) : \mathcal{U}} \quad \boxed{\Gamma \vdash c : (z : A) \to C[x \mapsto z, y \mapsto z, p \mapsto 1_z]}}{\Gamma \vdash \mathrm{ind}_=(x, y, p, c) : C(x, y, p)}$$

归纳

$=_A$ 消去

$c : (z : A) \to$

$C(x \mapsto z, y \mapsto z, p \mapsto 1_z)$

DT 3.1

$$\frac{\Gamma, x:A, y:A, p: x =_A y \vdash C(x,y,p) : \mathcal{U} \qquad \Gamma \vdash c : (z:A) \to C(z,z,1_z)}{\Gamma, x:A, y:A, p: x=_A y \vdash \mathrm{ind}_=(x,y,p,c) : C(x,y,p)}$$

3.1.1 引理 ap

$$\frac{p : a =_A a' \qquad f : A \to B,}{fa =_B fa'}$$

记 $C(a,a',p) \equiv \boxed{fa =_B fa'} : \mathcal{U}$

$c : (z:A) \to C(z,z,1_z)$

$$\frac{c : (z:A) \to \boxed{fz} =_B \boxed{fz}}{\vdash \mathrm{ind}_=(a,a',p,\lambda z.1_{fz}) : fa =_B fa'}$$

$\lambda z.\ 1_{fz}$

~~$\lambda a a'. p\ f$~~

induction 归纳法 一般 当 $z=z$ 1_z $C(z,z,1_z)$

$a = a' \to a' = a$

DT $\Gamma, n:\mathbb{N} \vdash P(n) : \mathcal{U}$

1. $P_0 : P(0)$ $\quad \Gamma, n:\mathbb{N} \vdash P(n) : \mathcal{U}$

① $\Gamma \vdash P_0 : P(0)$ $\quad$ ② $\Gamma \vdash P_S : (n:\mathbb{N}) \to P(n) \to P(S(n))$

2. $\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\frac{}{\Gamma, m:\mathbb{N} \vdash ind_{\mathbb{N}}(m, P_0, P_S) : P(m)}$$

$\forall n,\ P(n)$

$\Gamma \vdash c : (m:\mathbb{N}) \to P(m)$ 证明

$\mathbb{N} : \mathcal{U}$ 类型

$0 : \mathbb{N}$ 构造0

$$\frac{\Gamma \vdash n:\mathbb{N}}{\Gamma \vdash S(n):\mathbb{N}}$$ 构造S

~~Suc(n)~~

Sn

归纳法

归纳定义 $\quad add : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad P_S \equiv \lambda n.\ S(n)$

② 定义

$\cancel{P(n)} \equiv \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma, n:\mathbb{N} \vdash \cancel{P(n)} : \mathcal{U} \quad ①\ \Gamma, n:\mathbb{N} \vdash n:\mathbb{N} \quad ②\ \Gamma \vdash P_S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}}{\Gamma, m:\mathbb{N}, n:\mathbb{N} \vdash ind_{\mathbb{N}}(m, n, P_S) : \mathbb{N}}$$

$$add \equiv \lambda m\, n.\ ind_{\mathbb{N}}(m, n, P_S)$$

DT 形成 构造 消去 计算 $\mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(m, p_0, p_s) : P(m)$

$P(n) : \mathcal{U}$ $\quad p_0 \quad p_s$

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(0, p_0, p_s) \equiv p_0 : P(0)$$

计算

$$p_s : (n : \mathbb{N}) \to P(n) \to P(S(n))$$

计算S

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(S(n), p_0, p_s) \equiv p_s\ n\ \underline{\mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(n, p_0, p_s)} : P(S(n))$$

$$\mathrm{rec}\ f(m) = \text{match } m$$
$$m = 0 \Rightarrow p_0$$
$$m = S(n) \Rightarrow p_s\ f(n)$$
$$p_s \equiv \lambda\, n.\, S(n) \qquad p_0 = n$$

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(0, p_0, p_s) \equiv p_0$$

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(S(n), p_0, p_s) \equiv p_s\ n\ \mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(n, p_0, p_s)$$

$m \equiv 0 \qquad m+n \equiv n \qquad 3 \equiv SSS0 + 1$

$m \equiv S(m') \qquad S(m')+n \equiv S(m'+n) \qquad SSS(\cancel{0+1}) \equiv SSSS0 = 4$

DT

$0 : \mathbb{N} \Longrightarrow P_0$

$S(n) : \mathbb{N} \Longrightarrow P_S\ n\ \ \mathrm{ind}_\mathbb{N}(n, \text{——})$

归纳 $\mathbb{N}$

W类型

add 4

$4 \quad S \xrightarrow{AST} \quad \lambda\_m.\,S(m) \quad \mathbb{N}$

S

S

S

0

解释.

DT ~~3.1v2~~ 3.2.1 $\forall n.$ $\boxed{n+0 =_{\mathbb{N}} n} \equiv P(n)$

$\Gamma, n:\mathbb{N} \vdash P(n) : \mathcal{U}$ $\Gamma \vdash 1_0 : 0+0 =_{\mathbb{N}} 0 \equiv 0 =_{\mathbb{N}} 0$ $\Gamma \vdash P_s : (n:\mathbb{N}) \to P(n) \to P(S(n))$

$\mathrm{ind}_{\mathbb{N}}$

$P_s : (n:\mathbb{N}) \to n+0 =_{\mathbb{N}} n \to S(n)+0 =_{\mathbb{N}} S(n)$

$\equiv S(n+0) =_{\mathbb{N}} S(n)$

$f \equiv \lambda x. S(x)$

3.1v2 3.2.2 ap $a =_A a' \xrightarrow{f}$ $\to f(n+0) =_{\mathbb{N}} f(n)$

ap $fa =_B fa'$ Ceq

induction on n

① $P_0 : P(0)$

② $P_s :$

3.2.2

$m+n =_{\mathbb{N}} n+m$

DT §3.3 归纳 — 消去规则

归纳子 递归子 消去子

$\mathbb{N}$ $ind_{\mathbb{N}}$ $rec_{\mathbb{N}}$ $elim_{\mathbb{N}}$

$$ind_{\cancel{\mathbb{N}}} : \frac{\Gamma, \cancel{x, y : A}, p \vdash C(x, y, p) : \mathcal{U}}{}$$

DT

DT

$$ind_{\mathbb{N}} \quad \frac{\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n) : \mathcal{U}}{}$$

add $P \equiv \mathbb{N}$

non DT

$$rec_{\mathbb{N}} \quad \frac{\Gamma \vdash P : \mathcal{U}}{}$$

recursion

不依赖于 n

DT §3.1 × 消去 $\mathrm{ind}_{(x:A)\times B(x)}$ 依' 对' p.1 p.2

$$\frac{\Gamma, z:(x:A)\times B \vdash C(z) : \mathcal{U} \qquad \Gamma \vdash c : (a:A)\to(b:B)\to C(z\mapsto(a,b)) \qquad \Gamma \vdash p : (x:A)\times B}{\Gamma \vdash \mathrm{ind}_{\times}(c,p) : C(z\mapsto p)}$$

消去规则

$$\frac{\Gamma \vdash a:A \qquad \Gamma, a:A \vdash b:B}{\Gamma \vdash \mathrm{ind}_{\times}(c,(a,b)) \equiv c\ a\ b : C(z\mapsto(a,b))}$$

计算

$c_1 = \lambda a.b.\ a$ $\mathrm{ind}_{\times}(c,p) \equiv p.1$

$c_2 = \lambda a\ b.\ b$ $\mathrm{ind}_{\times}(c,p) \equiv p.2$

定义 C $\mathrm{ind}_{\times}(c,\ )$ 退化 ind_{+}

ind_{+}

§2.3 $\mathbb{B}$

$\mathrm{ind}_{\mathbb{B}}$

DT §4 → HoTT

MLTT.

谢々

DT

$$\frac{(x:A) \vdash \underline{\underline{P(x)}} : \mathcal{U}}{\mathrm{ind}}$$

终极 elim $\begin{cases} \text{rec} \\ \text{ind} \end{cases}$

rec $\cancel{D}$T

$\mathrm{ind}_{\mathbb{N}}$ (0)

$S(n)$ ⤳

induction

归纳 类型

W 类型

1型

ind