

Agda佐恩引理

HoTT + AC \rightarrow Zorn

oCaU 2023.07.15

目录

- 为什么？
- 前置知识
 - AC → LEM → PropResizing
 - 序理论概念：偏序，无界，最大元...
- AC → Zorn
- 链集的链
- 归纳构造“塔”

为什么？

动机

- 因为没有被以下形式化
 - HoTT / UF
 - Cubical
- 学习HoTT内经典数学概念的正确表述
- 学习如何在 Cubical Agda 中处理 set level 的概念和推理

AC → LEM

Diaconescu 定理

任意集合间的满射都**存在右逆**

```
SurjectionHasRightInverse : ( $\ell \ \ell' : \text{Level}$ )  $\rightarrow \text{Type}_-$ 
SurjectionHasRightInverse  $\ell \ \ell'$  = {A : Type  $\ell$ } {B : Type  $\ell'$ } {f : A  $\rightarrow$  B}  $\rightarrow$  isSet A  $\rightarrow$  isSet B  $\rightarrow$ 
  ··· isSurjection f  $\rightarrow$   $\exists [g \in (B \rightarrow A)]$  section f g
```



任意命题可判定

```
LEM : ( $\ell : \text{Level}$ )  $\rightarrow \text{Type}_{(\ell\text{-suc } \ell)}$ 
LEM  $\ell$  = {P : Type  $\ell$ } (Pprop : isProp P)  $\rightarrow$  Dec P
```

AC → LEM

Diaconescu 定理

商掉布尔类型上的等价关系 \sim

布尔类型到该商集有满射

于是存在右逆 g

判定 $g[\text{true}]$ 是否等于 $g[\text{false}]$

```
_~_ : Rel Bool Bool ℓ
true ~~ true = Unit*
false ~ false = Unit*
_ ··· ··· ~ _ ··· ··· = P
```

```
isEquivRel~ : isEquivRel _~_
isEquivRel~ = equivRel isRefl~ isSym~ isTrans~
```

```
RightInverse : Type ℓ
RightInverse = Σ[ g ∈ (Bool / _~_ → Bool) ] section [-] g
false ]
RightInverse→DecP : RightInverse → Dec P
RightInverse→DecP (g , sec) with g [ true ] ≡ g [ false ]
... | yes p = yes $ effective isPropValued~ isEquivRel~ _ _ $
... sym (sec [ true ]) • cong [-] p • sec [ false ]
... | no np = no $ np • cong g • eq/ _ _
```

LEM → PR

排中律蕴含命题宇宙调整

- 任何宇宙的命题都可判定
- 那么都可根据判定出来的真值映射到布尔值
- 该映射是同构

```
hPropIsoBool : ∀ ℓ → Iso (hProp ℓ) Bool
hPropIsoBool ℓ = iso to from to▫from from▫to where
  ·· to : (hProp ℓ) → Bool
  ·· to P with em {P .snd _ _} 
    ··· | yes _ = true
    ··· | no _ = false

  ·· from : Bool → (hProp ℓ)
  ·· from true = ⊤
  ·· from false = ⊥

  ·· to▫from : (b : Bool) → to (from b) ≡ b
  ·· to▫from true ·· with em {ℓ} {⊤ .snd _ _}
    ··· | yes _ = refl
    ··· | no _ = ⊥.rec $ _ tt*
  ·· to▫from false with em {ℓ} {⊥ .snd _ _}
    ··· | no _ = refl

  ·· from▫to : (P : hProp ℓ) → from (to P) ≡ P
  ·· from▫to P with em {P .snd _ _}
    ··· | yes p = hPropExt $ →: (λ _ → p) ←: (λ _ → tt*)
    ··· | no _ = hPropExt $ →: (λ () ) ←: (λ p → lift $ _ p p)
```

序理论概念

偏序

偏序

如果 R 取值到命题, 并且满足自反, 反对称和传递性, 则称 R 是偏序 (partial order).

```
isPo : Type _  
isPo = isPropValued R ∧ isRefl R ∧ isAntisym R ∧ isTrans R
```

如果 R 是偏序且 U 是集合, 则称 U 为偏序集.

```
isPoset : Type _  
isPoset = isSet U ∧ isPo
```

序理论概念

无界

无界

我们又用中缀符号 \leq 表示 R 关系.

```
private _≤_ = R
```

我们说 U 在 R 关系下是无界的, 当且仅当从任意 $x : U$ 都能得到一个 $y : U$ 严格大于 x .

```
unbound : Type _  
unbound = ∀ x → ∑[ y ∈ U ] x ≤ y ∧ ¬ x ≡ y
```

我们说 U 在 R 关系下是后继的, 当且仅当它是无界的, 且见证无界的那个 y 刚好比 x 大, 也就是说它们之间没有其他元素.

```
successive : Type _  
successive = ∀ x → ∑[ y ∈ U ] x ≤ y ∧ (¬ x ≡ y) ∧ ∀ z → x ≤ z → z ≤ y → z ≡ x ∨ z ≡ y
```

序理论概念

最大元

最大元

对任意大于等于 m 的元素, 如果它其实都等于 m , 那么称 m 是 U 的最大元.

```
maximum : U → Type _
```

```
maximum m = ∀ x → m ≤ x → m ≡ x
```

注意无界与存在最大元是不相容的.

幂集

到hProp的函数

```
 $\mathcal{P} : \text{Type } \ell \rightarrow (\ell' : \text{Level}) \rightarrow \text{Type } (\ell\text{-max } \ell \text{ } (\ell\text{-suc } \ell'))$ 
 $\mathcal{P} X \ell' = X \rightarrow \text{hProp } \ell'$ 
```

```
 $\text{isSet}\mathcal{P} : \text{isSet } (\mathcal{P} X \ell)$ 
 $\text{isSet}\mathcal{P} = \text{isSet}\Pi \lambda x \rightarrow \text{isSetHProp}$ 
```

-- Special sets

-- Empty set

$\emptyset : \mathcal{P} X \ell\text{-zero}$

$\emptyset = \lambda _ \rightarrow \perp$

$\emptyset^* : \mathcal{P} X \ell$

$\emptyset^* = \lambda _ \rightarrow \top^* , \text{isProp}\top^*$

-- Universal set

$\mathbb{U} : \mathcal{P} X \ell\text{-zero}$

$\mathbb{U} = \lambda _ \rightarrow \top$

$\mathbb{U}^* : \mathcal{P} X \ell$

$\mathbb{U}^* = \lambda _ \rightarrow \text{Unit}^* , \text{isPropUnit}^*$

-- Membership

infix 5 $_ \in _ \notin _ \subseteq _$

$_ \in _ : X \rightarrow \mathcal{P} X \ell \rightarrow \text{Type } _$
 $x \in A = \langle A x \rangle$

$_ \notin _ : X \rightarrow \mathcal{P} X \ell \rightarrow \text{Type } _$
 $x \notin A = \neg \langle A x \rangle$

序理论概念 链

链

现在, 考虑 \mathbb{U} 的子集 A , 如果其中的任意两个元素都可以比较大小, 我们就说 A 是链, 也叫 \mathbb{U} 的全序子集.

```
isChain : ℙ U ℓ → Type _  
isChain A = ∀ x y → x ∈ A → y ∈ A → x ≤ y ∨ y ≤ x
```

注意 \vee 是和类型 \mathbb{U} 的命题截断, 从而保证了"某某是链"是一个命题. 后面要用到这一性质.

```
isPropIsChain : isProp (isChain A)  
isPropIsChain = isPropΠ2 λ _ _ → isPropΠ2 λ _ _ → squash₁
```

序理论概念

上界

上界

给定 A 和 $ub : U$, 如果 ub 比 A 的任意元素都要大, 则称 ub 是 A 的上界. 注意上界不一定在 A 中.

```
upperBound :  $\mathcal{P} \cup \ell \rightarrow U \rightarrow \text{Type}_\perp$ 
```

```
upperBound A ub =  $\forall x \rightarrow x \in A \rightarrow x \leq ub$ 
```

由以上定义, “所有链都可以找到上界”表述如下.

```
allChainHasUb =  $\forall \{\ell\} (A : \mathcal{P} \cup \ell) \rightarrow \text{isChain } A \rightarrow \sum [ub \in U] \text{ upperBound } A ub$ 
```

序理论概念

上确界

上确界

给定 A 和 $\text{sup} : U$, 如果 sup 是 A 的最小上界, 则称 sup 是 A 的上确界. 注意上确界也不一定在 A 中.

```
supremum : ℙ U ℓ → U → Type _
```

```
supremum A sup = upperBound A sup ∧ ∀ ub → upperBound A ub → sup ≤ ub
```

由以上定义, “所有链都可以找到上确界”表述如下.

```
allChainHasSup = ∀ {ℓ} (A : ℙ U ℓ) → isChain A → Σ[ sup ∈ U ] supremum A sup
```

Σ 与 \exists 的区别

Σ Sigma类型 找到， 取到， 得到

\exists Σ 的命题截断 存在

“存在”不一定能“取到”，但能“取到”则一定“存在”.

佐恩引理的表述

Zorn

对任意偏序集 U , 如果 U 中所有的链都能找到上界, 那么 U 中存在一个最大元.

```
Zorn = isPoset → allChainHasUb → ∃[ m ∈ U ] maximum m
```



对任意偏序集 U , 如果 U 中所有的链都存在上界, 那么 U 中存在一个最大元

链集的链

并非直接考虑链本身, 而是考虑由所有链构成的集合在包含关系下构成的链.

现在, 假设排中律, 并给定偏序 \leq .

```
module Chain { em : ∀ {ℓ} → EM ℓ } {U : Type u} (_≤_ : Rel U U r) where
  open import CubicalExt.Logic.Classical
  open module ≤ = Order _≤_
```

我们把 U 的子集 A 配备上链条件所得到的类型 Chain 叫做链集.

```
Chain : Type _
Chain = Σ[ A ∈ ℙ U ℓ-zero ] ≤.isChain A
```

可以证明 Chain 是集合.

```
_ : isSet Chain
_ = isSetΣ (isSetΠ λ _ → isSetHProp) λ _ → isProp→isSet isPropIsChain
```

链集的链(Chain)上的偏序

偏序

定义链集上的二元关系 \leq 为链之间的包含关系.

```
_≤_ : Rel Chain Chain u  
a ≤ b = a .fst ⊑ b .fst
```

由于集合的包含关系是偏序, 所以 \leq 也是偏序.

```
≤-po : ≤.isPo  
≤-po = ≤-prop , ≤-refl , ≤-antisym , ≤-trans
```

现在我们有了两个偏序, 一个是 U 上的 \leq , 一个是链集上的 \leq . 为避免混淆, 接下来我们会对相关概念加上 \leq 或 \leq 前缀, 来指明该概念所涉及的偏序.

链集的链(Chain)的上确界

```
sup : (A : ⌈ Chain ℓ) → ⪯.isChain A → Chain
sup A isChainA = Resize ∘ (λ x → (exists[ a@(a₁ , _ ) ∈ Chain ] x ∈ a₁ ∧ a ∈ A) , squash₁)
```

Chain 的定义仅接受 \mathbb{U} 的位于最低宇宙的子集, 为了使我们这里定义的并确实具有 Chain 类型, 需要将上述”并”调整 (Resize) 到最低宇宙

```
suphood : (A : ⌈ Chain ℓ) (isChainA : ⪯.isChain A) → ⪯.supremum A (sup A isChainA)
```

至此, 我们证明了链集中的任意链都能找到上确界.

```
≤-allChainHasSup : ⪯.allChainHasSup
≤-allChainHasSup A isChainA = sup A isChainA , suphood A isChainA
```

链集的链 (Chain) 上的偏序 \leq 的后继性

关键的引理

前两个前提与佐恩引理相同

第三个前提则是对佐恩引理结论的否定，将使用选择公理证明

最后将采用反证法来证明佐恩引理

```
 $\leq\text{-successvie} : \leq.\text{isPoset} \rightarrow \leq.\text{allChainHasUb} \rightarrow \leq.\text{unbound} \rightarrow \leq.\text{successive}$ 
 $\leq\text{-successvie } (\text{Uset } , \leq\text{-po}) \text{ hasUb unbnd } a@(\text{A } , \text{ isChainA}) = a' , \text{ resize } \circ \text{inl } , a \neq a' ,$ 
```

构造矛盾

假设排中律, 给定偏序 \leq , 假设其任意链都能取上确界, 且任意元素都取后继.

```
module Contra { em : ∀ {ℓ} → EM ℓ } {U : Type u} {_≤_ : Rel U U r}
  (≤-po : Order.isPo _≤_) (hasSup : Order.allChainHasSup _≤_) (hasSuc : Order.successive
  open import CubicalExt.Logic.Classical
  open Order _≤_
```

归纳构造”塔“

```
data Tower : U → Type (ℓ-max (ℓ-suc ℓ-zero) (ℓ-max u r))  
TowerSetℓ : ℙ U _  
TowerSetℓ x = // Tower x //p  
TowerSet : ℙ U ℓ-zero  
TowerSet = Resize ∘ TowerSetℓ
```

归纳构造”塔“

现在归纳定义谓词 Tower:

- 对任意 x 满足 Tower, x 的后继也满足 Tower.
- 对任意 U 的子集 A , 如果它包含于 TowerSet ℓ , 且是链, 那么它的上确界也满足 Tower.

```
data Tower where
  includeSuc : (x : U) → Tower x → Tower (hasSuc x .fst)
  includeSup : (A : ℙ U ℓ-zero) → (A ⊆ TowerSetℓ) → (isChainA : isChain A) →
    Tower (hasSup A isChainA .fst)
```

注意 TowerSet ℓ 在 Tower 定义完成之前就被使用了. Agda 允许这种写法, 只要满足一定条件, 这里不展开.

塔也是链

```
isChainTower : ∀ x y → Tower x → Tower y → x ≤ y ∨ y ≤ x
isChainTowerSetℓ : isChain TowerSetℓ
isChainTowerSetℓ x y = rec2 squash1 (isChainTower x y)
isChainTowerSet : isChain TowerSet
isChainTowerSet x y x∈ y∈ = isChainTowerSetℓ x y (unresize x∈) (unresize y∈)
```

```
isChainTower' : ∀ x y → Tower x → y ∈ TowerSetℓ → x ≤ y ∨ y ≤ x
isChainTower' x y x∈ | y∈ |1 = isChainTower x y x∈ y∈
isChainTower' x y x∈ (squash1 y∈1 y∈2 i) = squash1 (isChainTower' x y x∈ y∈1) (isChainTower' x y x∈ y∈2 i)
```

构造矛盾

证明了 TowerSet 是链之后，构造矛盾就非常简单了

由前提，TowerSet 可以取到上确界 sup，且 sup 可以取到后继 suc

按 Tower 的定义，sup 在它里面。这里命题宇宙调整 (propositional resizing) 起了关键作用。

```
sup ∈ Tower : Tower sup
```

```
sup ∈ Tower = includeSup TowerSet unresize isChainTowerSet
```

构造矛盾

这样，按 TowerSet 的定义，suc 也在 TowerSet 里

```
suc∈TowerSet : suc ∈ TowerSet  
suc∈TowerSet = resize $ map (includeSuc sup) | sup∈Tower |1
```

但是 suc 是 sup 的后继，与 sup 是 TowerSet 的上确界矛盾

```
false : ⊥  
false = sup≠suc $ ≤-antisym _ _ sup≤suc suc≤sup where  
suc≤sup : suc ≤ sup  
suc≤sup = ubhood suc suc∈TowerSet
```

佐恩引理的证明

非空集合的笛卡尔积非空

$$(\forall x \rightarrow \|Bx\|_1) \rightarrow \|\forall x \rightarrow Bx\|_1$$

其中 x 具有类型 A , 而 A 和每个 Bx 都是集合

假设选择公理, 给定 \mathbb{U} 上的二元关系 \leq .

```
module _ (ac : ∀ {ℓ ℓ'} → AC ℓ ℓ') {U : Type u} {_≤_ : Rel U U r} where
  open import CubicalExt.Logic.ClassicalChoice ac
  open Order _≤_
```

$$(\forall x \rightarrow \| B x \|_1) \rightarrow \| \forall x \rightarrow B x \|_1$$

unbound : Type _

unbound = $\forall x \rightarrow \sum [y \in U] x \leq y \wedge \neg x \equiv y$

目标具有适用于选择公理的形式

选择公理要求 U 是集合, 且 U 配备上无界条件也是集合, 这些都成立

noMaximum→unbound : isPoset $\rightarrow \neg (\exists [m \in U] \text{ maximum } m) \rightarrow // \text{ unbound } //_1$

noMaximum→unbound $\leq\text{-poset}$ noMax = ac Uset Σset H where

Uset = $\leq\text{-poset}.\text{fst}$

$\leq\text{-prop} = \leq\text{-poset}.\text{snd}.\text{fst}$

Σset : $\forall x \rightarrow \text{isSet} (\sum [x' \in U] (x \leq x' \wedge \neg x \equiv x'))$

Σset = $\lambda _ \rightarrow \text{isSet} \Sigma \text{ Uset } \lambda _ \rightarrow \text{isProp} \rightarrow \text{isSet} \$ \text{ isProp} \Sigma (\leq\text{-prop} _ _) \lambda _ \rightarrow \text{isProp} \Pi \lambda .$

$H_0 : \forall x \rightarrow \exists [x' \in U] \neg (x \leq x' \rightarrow x \equiv x')$

$H_0 x = \neg \forall \rightarrow \exists \neg \lambda H \rightarrow \text{noMax} | x , H |_1$

$H : \forall x \rightarrow \exists [x' \in U] (x \leq x' \wedge \neg x \equiv x')$

$H x = \text{rec squash}_1 (\lambda \{ (x' , H) \rightarrow | x' , \neg \rightarrow \wedge (x \leq x') (x \equiv x') H |_1 \}) (H_0 x)$

佐恩引理的证明

$$(\forall x \rightarrow \| Bx \|_1) \rightarrow \| \forall x \rightarrow Bx \|_1$$

unbound : Type _

unbound = $\forall x \rightarrow \sum [y \in U] x \leq y \wedge \neg x \equiv y$

noMaximum→unbound : isPoset $\rightarrow \neg (\exists [m \in U] \text{maximum } m) \rightarrow // \text{unbound} //_1$
noMaximum→unbound $\leq\text{-poset}$ noMax = ac Uset Σset H where

H₀ : $\forall x \rightarrow \exists [x' \in U] \neg (x \leq x' \rightarrow x \equiv x')$

H₀ x = $\neg\forall\neg\exists\neg\lambda H \rightarrow \text{noMax} | x, H |_1$

H : $\forall x \rightarrow \exists [x' \in U] (x \leq x' \wedge \neg x \equiv x')$

H x = rec squash₁ ($\lambda \{ (x', H) \rightarrow | x', \neg\rightarrow\wedge (x \leq x') (x \equiv x') H |_1 \}$) (H₀ x)

佐恩引理的证明

最后佐恩引理的证明就非常简单了. 用反证法, 假设 \mathbb{U} 没有最大元, 由上一条引理有 // unbound //₁. 这时只需 rec 到 \perp , 所以可以去掉截断, 拿到完整的 unbound. 这正好是 $\leq\text{-successvie}$ 的前提, 于是我们可以证明链集的任意链都能取上界且链集是后继的. 由"塔"的构造我们知道这是矛盾的.

```
zorn : Zorn
zorn ≤-poset hasUb = byContra λ noMax → rec isProp⊥
  (Contra.false ≤-po ≤-allChainHasSup ∘ ≤-successvie ≤-poset hasUb)
  (noMaximum→unbound ≤-poset noMax)
where open Chain _≤_
```