المدرسة الوطنية العليا لتكنولوجيا الأنظمة المستقلة

NSAST
NATIONAL SCHOOL OF AUTONOMOUS SYSTEMS TECHNOLOGY

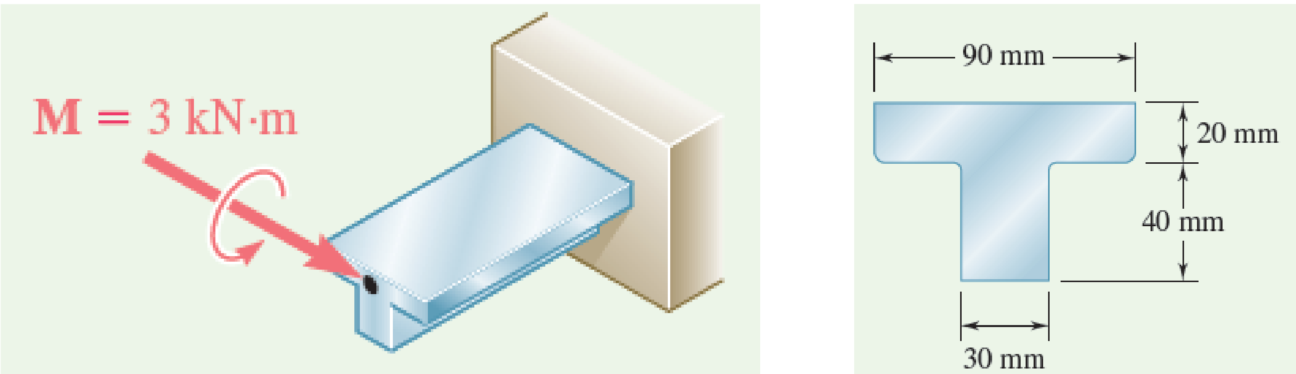
Academic year 2024/2025

2nd Year **Mechanics of Materials (Material Strength)**

T.D N° 8 (Bending) [La Flexion]

Problem 1: (Pure Bending – Flexion pure)

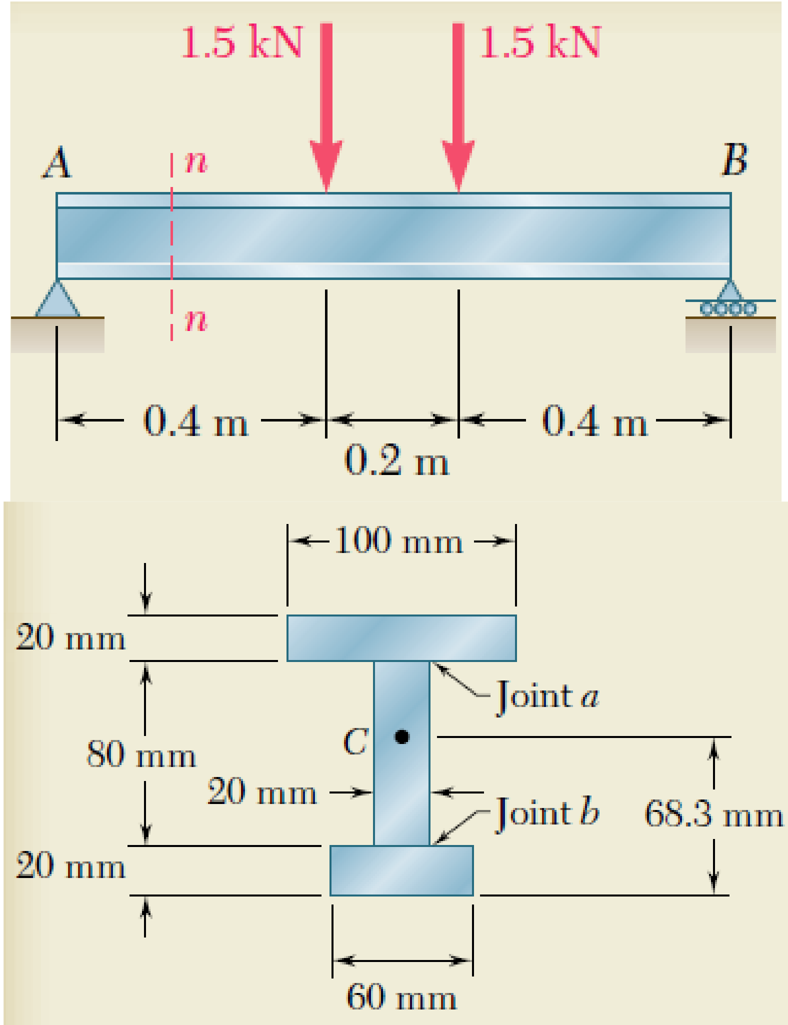
A beam with the cross sectional profile and dimensions shown in the figure is embedded in a machine and is subjected to a torque of 3 kN.m torque. Knowing that the longitudinal modulus of elasticity is E = 165 GPa, determine the maximum tensile and compressive stresses in the beam.



Problem 2: (Nonuniform Bending – Flexion simple)

Beam AB is constructed by gluing three boards at joints a and b. It is subjected in its plane of symmetry to the load given in the figure. Given that the width of each glued joint is 20 mm, determine the shear stress in joint A and joint B at the n-n section of the beam. The location of the C.G of the section is shown in the figure below.

The central moment of inertia of the entire section is $I = 8.63 \times 10^{-6}$ m^4.


1.5 kN
1.5 kN
A
n
B
n
0.4 m
0.2 m
0.4 m
100 mm
20 mm
Joint a
80 mm
C
20 mm
Joint b
68.3 mm
20 mm
60 mm

T.D N° 9 (Shear forces and Bending Moments Diagrams [Diagrammes de l'Effort Tranchant et du moment fléchissant]

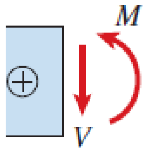
Rappel :

Sign convention for external loads:

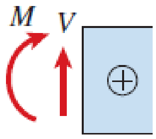
(positive upward force and positive counterclockwise moment)

Sign convention for internal loads:

(to the right of the section; the shear force T is positive downwards, the bending moment positive counterclockwise),

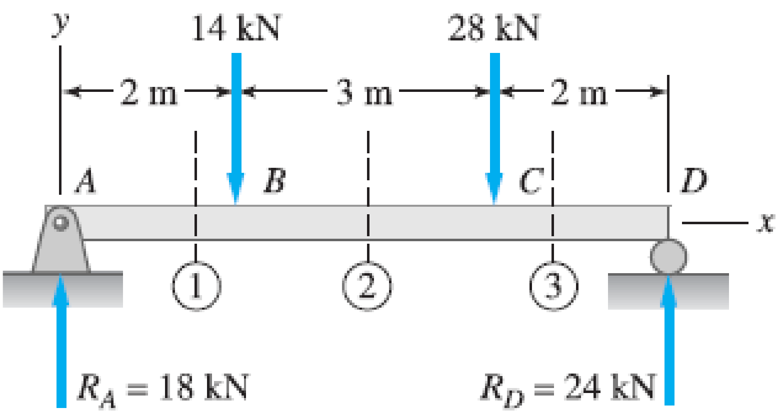


(left of the section; the shear force T is positive upwards, the bending moment positive clockwise).



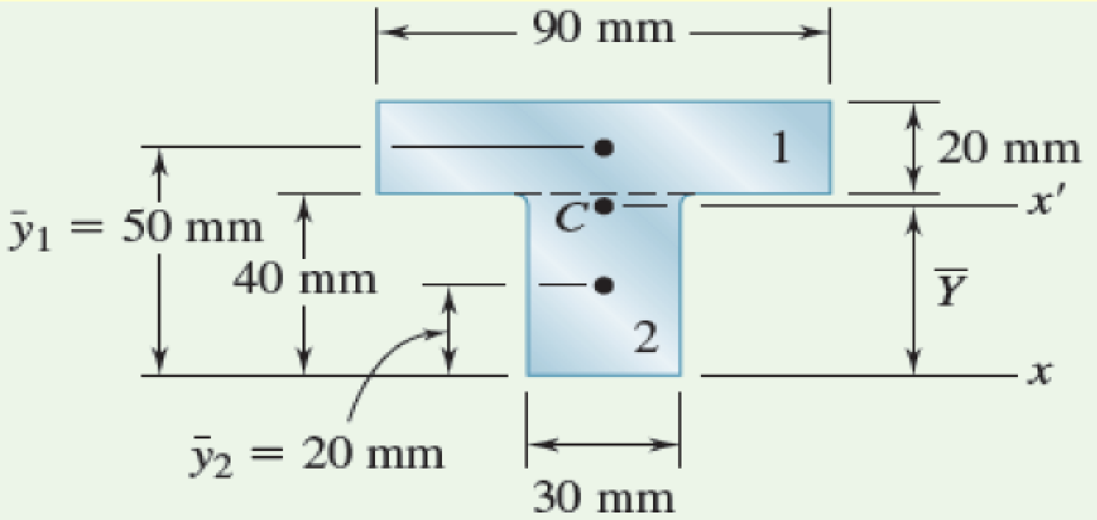
Problem 1 :

Two concentrated loads are applied to a beam. Give expressions for the shear force (T) and the bending moment (M) for each segment of the beam. Draw the T and M diagrams.



Solution Problem 1 :

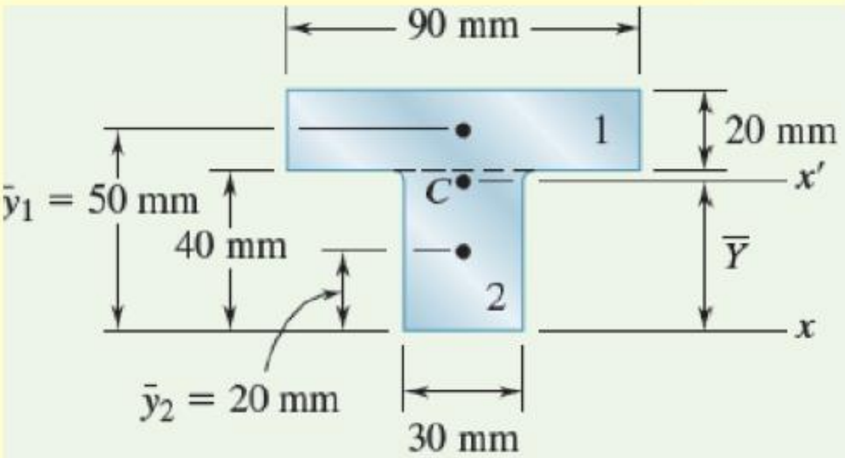
ANALYSE : Pour le C.G. On utilise la méthode de décomposition en divisant la section en T en deux rectangles 1 et 2.



ANALYSE : Pour le C.G. On obtient :

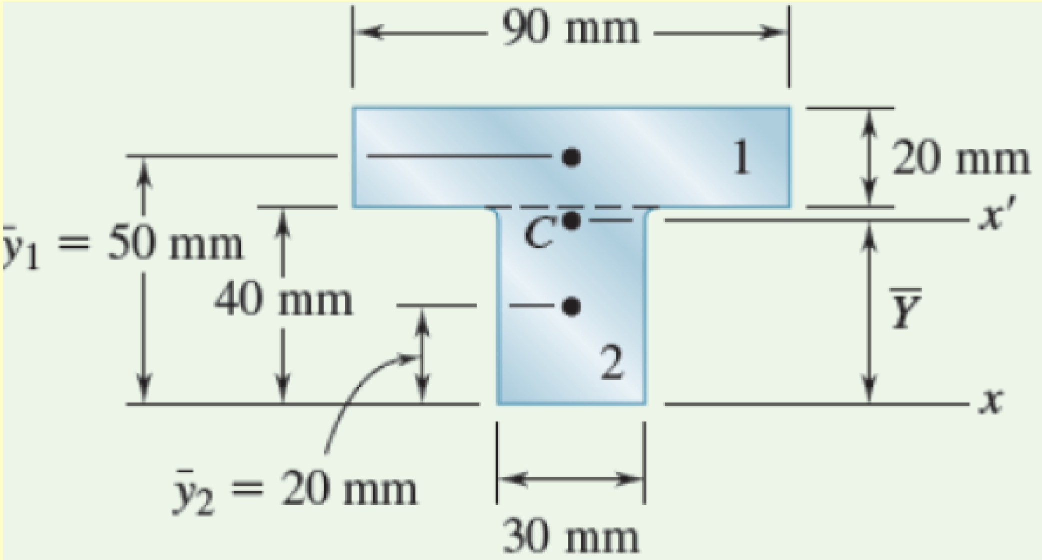
	Area, mm^2	$\bar{y}$, mm	$\bar{y}A$, mm^3
1	$(20)(90) = 1800$	50	90×10^3
2	$(40)(30) = 1200$	20	24×10^3
	$\Sigma A = 3000$		$\Sigma \bar{y}A = 114 \times 10^3$

$$\overline{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A$$
$$\overline{Y}(3000) = 114 \times 10^6$$
$$\overline{Y} = 38 \text{ mm}$$



ANALYSE : Pour le moment d'inertie.

Le calcul de *I* par rapport à l'axe central x' (passant par le C.G de la section complète), nécessite l'utilisation du théorème des axes parallèles (Steiner) pour chaque rectangle.



ANALYSE : Pour le moment d'inertie.

L'addition des moments d'inertie des deux rectangles donne:

$$I_{x'} = \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = \Sigma(\tfrac{1}{12}bh^3 + Ad^2)$$

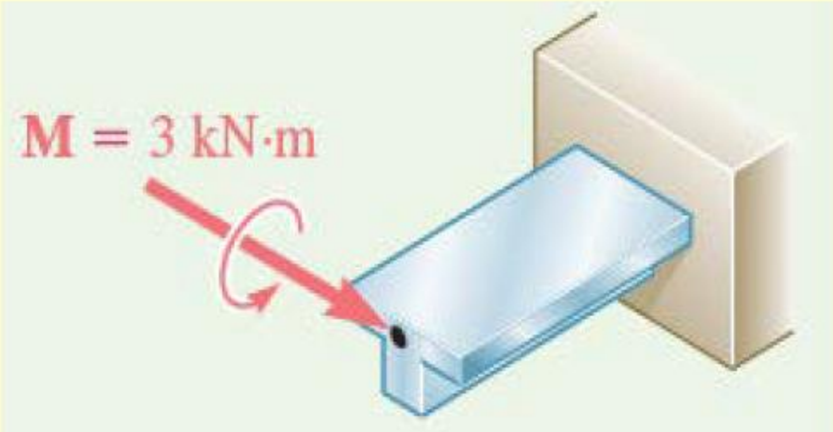
$$= \tfrac{1}{12}(90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \tfrac{1}{12}(30)(40)^3 + (30 \times 40)(18)^2$$

$$= 868 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

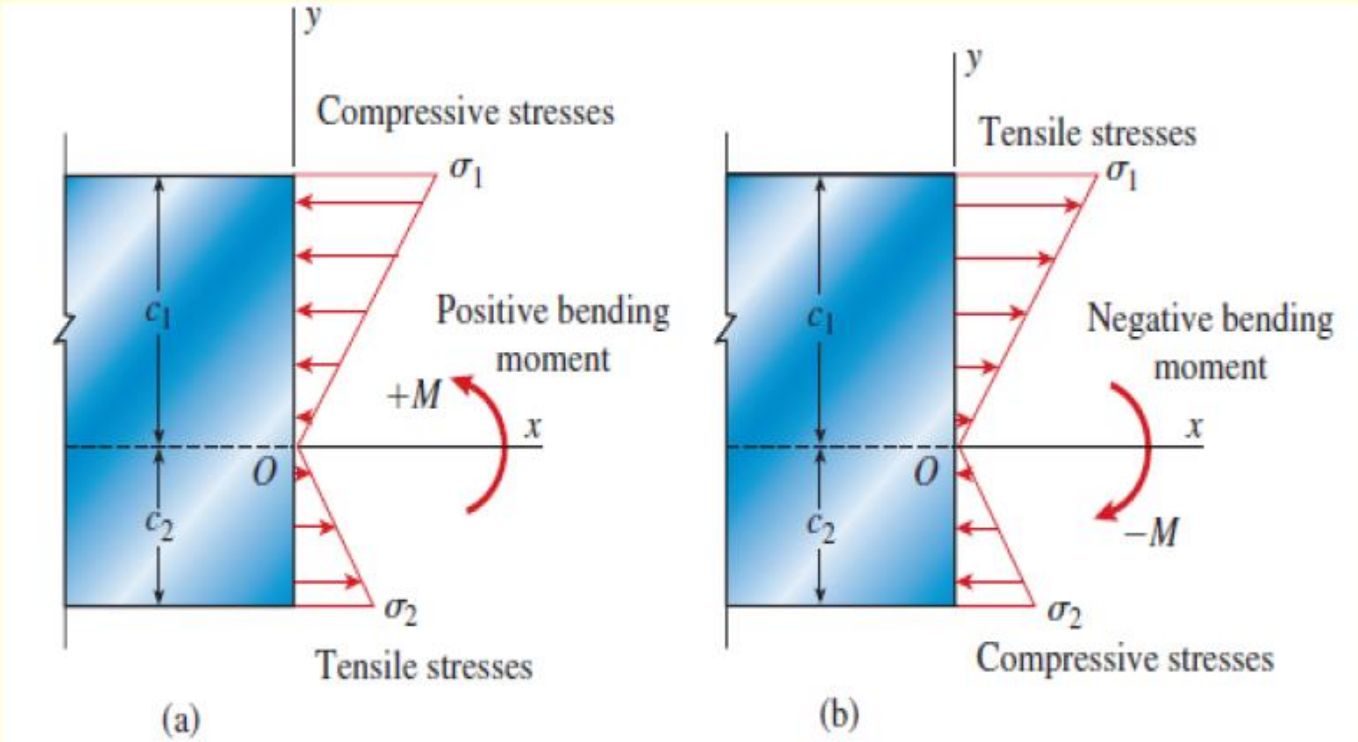
$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

ANALYSE : Contraintes normales maximales

D'après le couple appliqué sur la poutre, la surface supérieure par rapport à l'axe neutre est en traction et la surface inférieure est en compression.

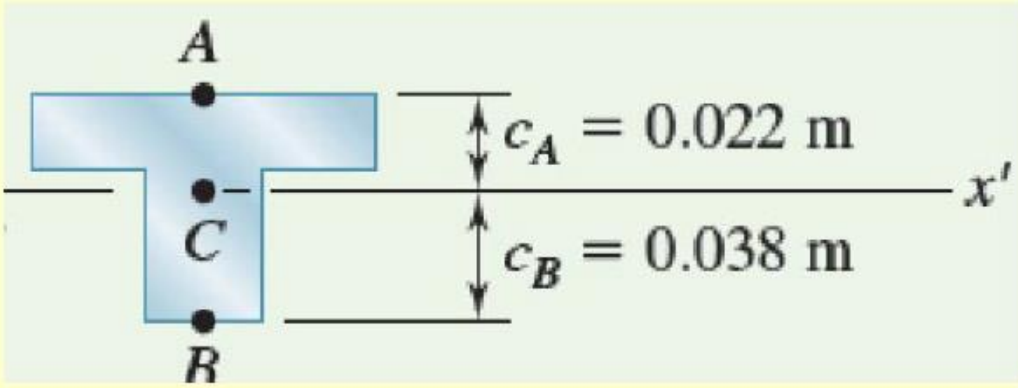


ANALYSE : Contraintes normales maximales



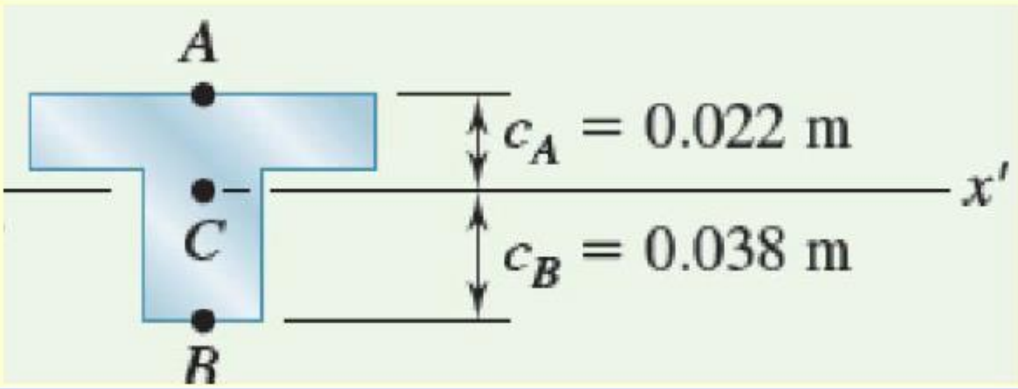
ANALYSE : a) Contrainte de traction maximale

La contrainte de traction maximale correspond à la distance y positive maximale (point A sur la figure avec y_A = 0.022 m).



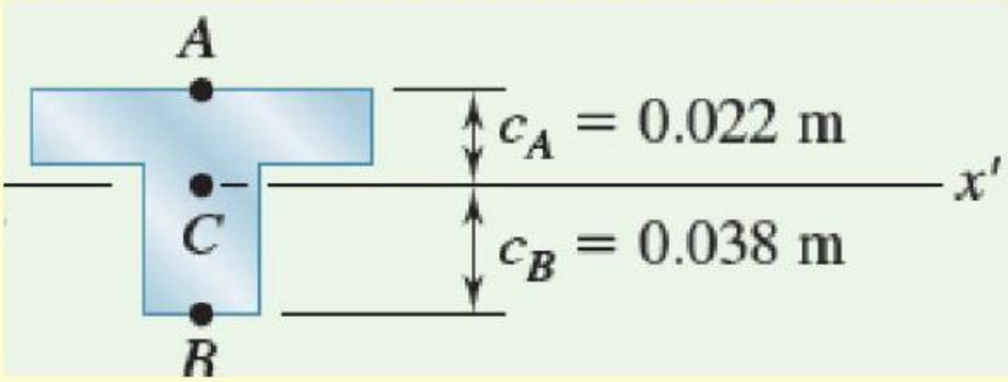
L'application de l'équation de la flexion (avec d'après la convention de signe M = - 3 kN.m), donne :

$$\boldsymbol{\sigma_A} = -\frac{M.y}{I} = -\frac{(-3\ kN.m).(0.022\ m)}{868\ X\ 10^{-9}\ m^4} = \boldsymbol{+76\ MPa}$$



ANALYSE : b) Contrainte de compression maximale

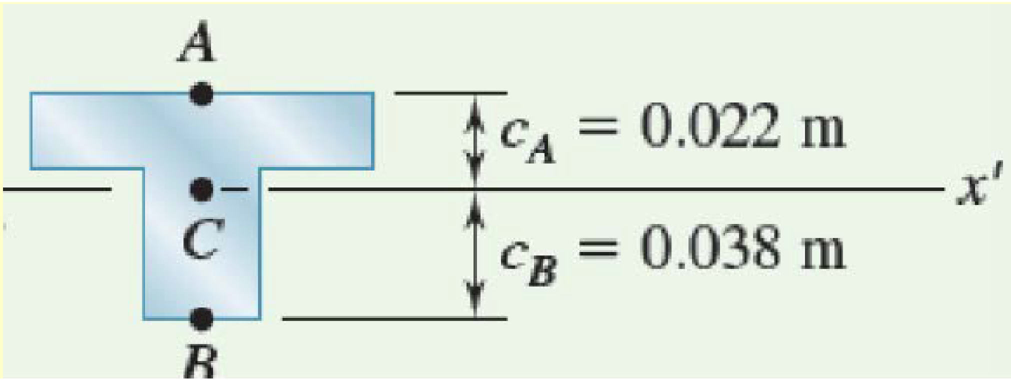
La contrainte de compression maximale correspond à la distance y négative maximale (point B sur la figure avec y_B = - 0.038 m).



ANALYSE : b) Contrainte de compression maximale

L'application de l'équation de la flexion (avec d'après la convention de signe M = - 3 kN.m), donne :

$$\sigma_B = -\frac{M.y}{I} = -\frac{(-3\ kN.m).(-0.038\ m)}{868\ X\ 10^{-9}\ m^4} = \mathbf{-131.3\ MPa}$$



Problem 1 :

STRATEGIE: Nous avons un cas de flexion simple (effort tranchant +moment fléchissant). La contrainte de cisaillement est liée à l'effort tranchant par l'équation de cisaillement [shear formula], C'est l'équation 4.49 du cours :

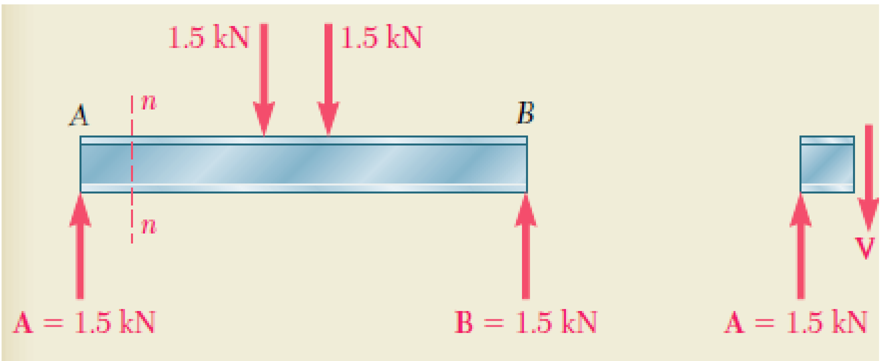
$$\tau_{moy} = \frac{T.Q}{I.b}$$

On nous demande de calculer la contrainte au niveau de la section n-n. on aura besoin de l'effort tranchant dans cette section. L'effort tranchant étant variable le long de la poutre pour plusieurs chargements, on va utiliser la méthode des coupures.

Pour les poutres et avant d'appliquer la méthode des coupes, on doit calculer par la statique toutes les réctions aux appuis.

MODELISATION et ANALYSE:

Pour les réactions : C'est un cas symétrique, on trouve facilement $R_A = R_B = 1.5$ kN.
On réalise une coupe au niveau de la section demandée n-n.



On utilise la loi de la statique :

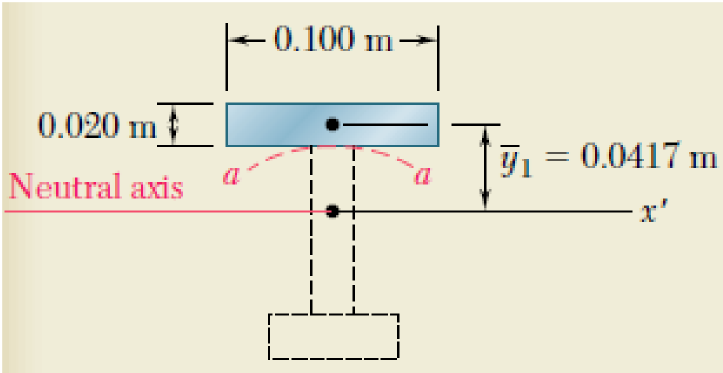
$$\sum \mathbf{F_y = 0} \quad ; \quad \mathbf{R_A - T = +1.5\ kN - T = 0} \quad ; \quad \mathbf{T = +\ 1.5\ kN.m}$$

Contrainte de cisaillement dans le joint a : la contrainte de cisaillement au niveau du joint a-a est donnée par :

$$(\tau_{moy})_{a-a} = \frac{T.Q}{I.b}$$

T est l'effort tranchant calculé par la méthode des coupures. b est la largeur de la poutre au niveau du joint collé, là où on cherche la contrainte de cisaillement et Q est le moment statique de la surface au dessus de la section a-a (en bleu dans la figure ci dessous) :

$$Q = A\bar{y}_1 = [(0.100\ \text{m})(0.020\ \text{m})](0.0417\ \text{m}) = 83.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$



Donc :

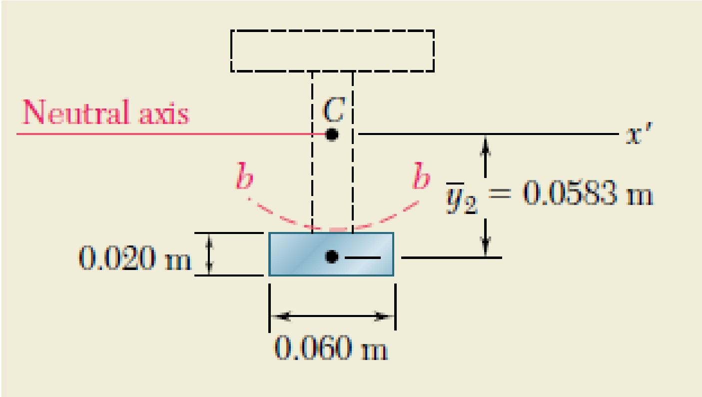
$$(\tau_{moy})_{a-a} = \frac{T.Q}{I.b} = \frac{(1500\ N)(83.4\ X\ 10^{-6}\ m^3)}{(8.63X\ 10^{-6}\ m^4)(0.020\ m)} = \mathbf{725\ kPa}$$

Contrainte de cisaillement dans le joint b-b : la contrainte de cisaillement au niveau du joint b-b est donnée aussi par :

$$(\tau_{moy})_{b-b} = \frac{T.Q}{I.b}$$

Le moment statique Q_1 de la surface juste au dessus du joint b-b peut être calculée avec deux méthodes : la méthode classique ou bien sachant que le moment statique de toute la surface par rapport à l'axe central est nul $Q = Q_1 + Q_2 = 0$, donc il est égal au négatif du moment statique Q_2 de la surface au dessous de la section b-b (ne pas oublier de prendre le y négatif).

$$Q = A\bar{y}_2 = [(0.060\ \text{m})(0.020\ \text{m})](0.0583\ \text{m}) = 70.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$



Donc :

$$(\boldsymbol{\tau_{moy}})_{\boldsymbol{b-b}} = \frac{T.Q}{I.b} = \frac{(1500\ N)(70\ X\ 10^{-6}\ m^3)}{(8.63X\ 10^{-6}\ m^4)(0.020\ m)} = 608\ kPa$$

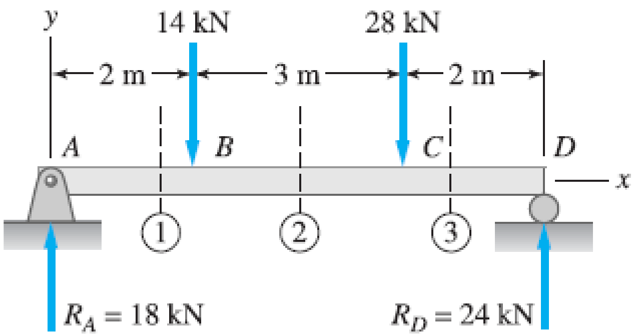
Solution TD 9

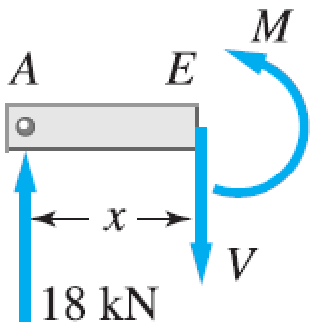
Solution Problem 1 :

STRATEGIE: Les réactions aux appuis étant données, on passe directement à la méthode des coupures pour déterminer les expressions de T et de M au niveau des coupes. Dans cet exemple, nous avons 03 coupes.

MODELISATION et ANALYSE:

Coupe 1 : (0 < x < 2 m)





L'application du principe fondamental de la statique sur le tronçon de gauche donne :

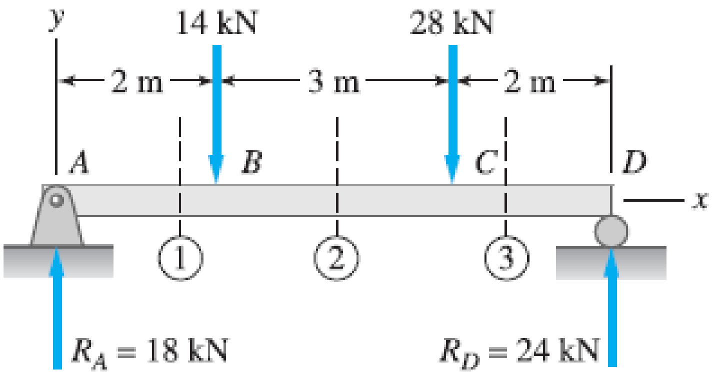
$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 18 - V = 0$$

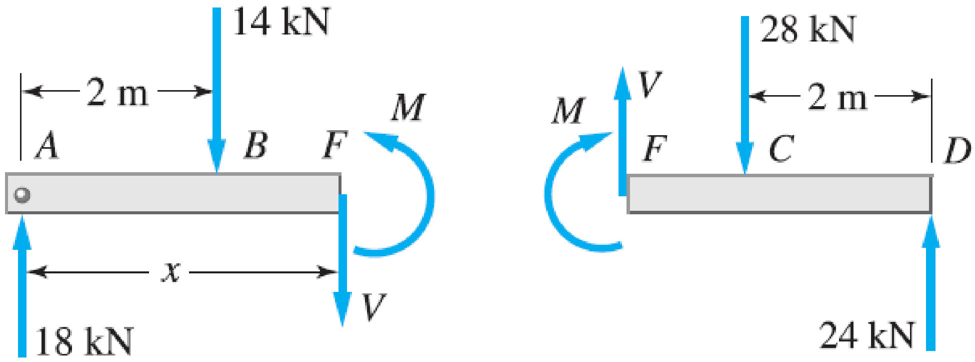
$$V = +18 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_E = 0 \quad +\circlearrowleft \quad -18x + M = 0$$

$$M = +18x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Coupe 2 : (2 m < x < 5 m)





L'application du principe fondamental de la statique sur le tronçon de gauche donne :

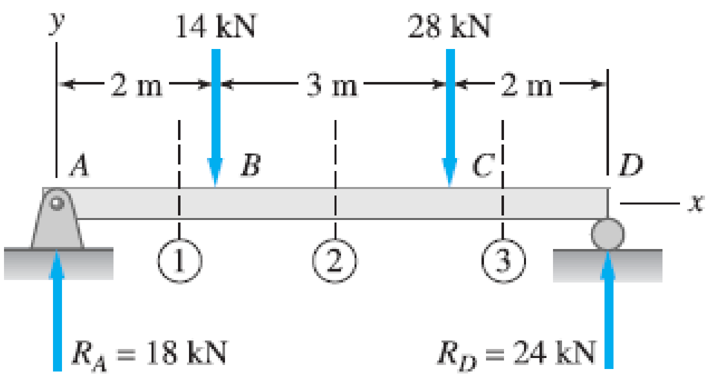
$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 18 - 14 - V = 0$$

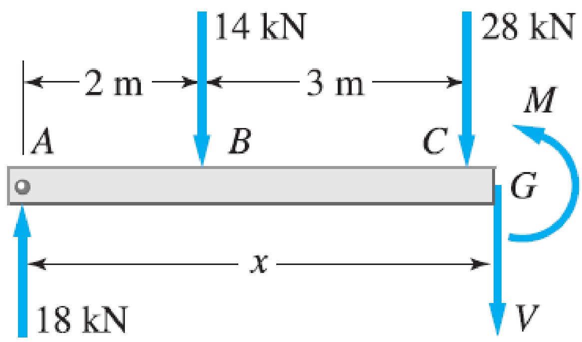
$$V = +18 - 14 = +4 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_F = 0 \quad +\circlearrowleft \quad -18x + 14(x-2) + M = 0$$

$$M = +18x - 14(x-2) = 4x + 28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

<u>Coupe 3 : (5 m < x < 7 m)</u>





L'application du principe fondamental de la statique sur le tronçon de gauche donne :

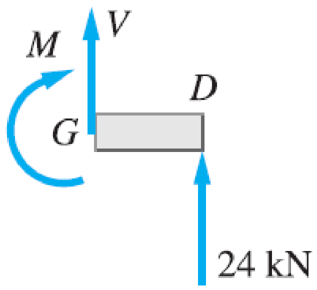
$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 18 - 14 - 28 - V = 0$$

$$V = +18 - 14 - 28 = -24 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_G = 0 \quad +\circlearrowleft \quad -18x + 14(x-2) + 28(x-5) + M = 0$$

$$M = +18x - 14(x-2) - 28(x-5) = -24x + 168 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

On peut trouver le même résultat en appliquant le pfs sur le tronçon de droite tout en respectant la convention de signe.



$$\sum F_y = 0 \; ; \; +R_D + V = 0 \; ; \quad \boldsymbol{V} = - R_D = \boldsymbol{-24\ kN}$$

$$\sum M_G = 0 \; ; \; -M + R_D \,.(L-x) = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{M} = 24\,.(L-x) = 24\,.(7-x)$$
$$= \boldsymbol{168 - 24x}$$

Diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Nous avons les expressions de T [V] et de M, on calcule leurs valeurs aux différents points d'application des charges et des réactions ; c'est-à-dire dans notre cas à x = 0, x = 2 m, x = 5 m et x = 7 m.

$\boldsymbol{M_1 = +18x}$; $\boldsymbol{M_2 = 4x + 28}$; $\boldsymbol{M_3 = 168 - 24x}$

à x = 0 ; $\boldsymbol{M_1 = +18x = 0}$

à x = 2 ; $\boldsymbol{M_1 = +18x = +36}$

à x = 5 ; $\boldsymbol{M_2 = 4x + 28 = +48}$

à x = 7; $M_3 = 168 - 24x = 0$