8

Calcul intégral

8.1 Changement de variable

8.1.1 Formule

Soient $f \in \mathcal{I}([a,b],\mathbb{R})$ et ϕ une fonction dérivable sur $[\alpha,\beta]$ telle que $\phi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$.

On a la formule de changement de variable

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt \tag{C.V}$$

La transformation $x = \phi(t)$ est appelée un changement de variable.

Exemple 8.1.1 *1) On prend $\phi = \ln$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$, $\alpha = e$ et $\beta = e^2$.*

On trouve

$$\int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln t} = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

2) Si $\phi : t \longmapsto a + t(b-a)$ et $[\alpha,\beta] = [0,1]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = (b-a)\,.\int_0^1 f(a+t(b-a))\,dt,$$

voilà pourquoi certaines propriétés concernant les intégrales sont souvent établies sur $[0,1]$, avant d'être généralisées à des intégrales sur $[a,b]$.

Remarque 8.1.1 *1) On utilise la formule $(C.V)$ de* ***la droite vers la gauche*** *quand on reconnait sous une intégrale une forme $(f\circ\phi)\,\phi'$, ce qui rend le calcul assez naturel.*

2) On utilise la formule $(C.V)$ de ***la gauche vers la droite*** *quand on cherche à rendre une intégrale plus sympathique.*

3) Il ne faut pas oublier les changements des bornes de l'intégrale définie.

8.1.2 Application aux primitives

Définition 8.1.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
Si f admet une primitive F sur I, alors la formule

$$\int_I f(x)\,dx = F(x) + C^{te} \qquad (**)$$

désigne l'ensemble de toutes les primitives de f sur I.
Cette formule est appelée l'intégrale indéfinie de f sur I.

Remarque 8.1.2 *1) On omit parfois de préciser I dans cette formule si il y a pas de confusion.*
2) Le choix de la primitive F est arbitraire et on peut remplacer x par n'importe quel lettre de l'alphabet.

Proposition 8.1.1 *Si F est une primitive de f sur I, alors la fonction $F \circ \phi$ est une primitive de la fonction $(f \circ \phi)\,\phi'$ sur I.*

Preuve. Soit $c \in I$, on a

$$\begin{aligned}(F \circ \phi)(x) &= F(\phi(c)) + \int_{\phi(c)}^{\phi(x)} f(t)\,dt = F(\phi(c)) + \int_c^x f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt \\ &= F(\phi(c)) + \int_c^x [(f \circ \phi)\,\phi'](t)\,dt,\end{aligned}$$

par conséquent, $(F \circ \phi)' = (f \circ \phi)\,\phi'$. ■

Exemple 8.1.2 *On a*

i) $\int \phi'(x)\,e^{\phi(x)}dx = e^{\phi(x)} + C^{te}$, *ii)* $\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx = \ln|\phi(x)| + C^{te}$,
iii) $\int \phi'(x)\cos\phi(x)\,dx = \sin\phi(x) + C^{te}$, *iv)* $\int \phi'(x)\,\phi^{\alpha}(x)\,dx = \frac{1}{1+\alpha}\phi^{\alpha+1}(x) + C^{te},\ \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

8.2 Intégration par parties

8.2.1 Formule

Proposition 8.2.1 *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On a*

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b v'(x)\,u(x)\,dx. \qquad (\mathrm{P}_1)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) &= \int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b [u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x)]\,dx \\ &= \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx + \int_a^b v'(x)\,u(x)\,dx, \end{aligned}$$

d'où la formule de l'intégration par parties. ■

Remarque 8.2.1 *Dans un calcul de primitive, la formule de l'intégration par parties s'écrit :*

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v'(x)\,u(x)\,dx. \tag{P$_2$}$$

En fait, cette formule n'est rien d'autre qu'une lecture à l'envers de la formule de dérivation d'un produit.

Exemple 8.2.1 *1) Les primitives de* ln.
On a

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \left(\frac{1}{x}.x\right) dx = x \ln x - x + C^{te}.$$

Ici on a pris $u' = 1$ et $v = \ln$.
2) On montre par récurrence que

$$\int_0^1 ke^{-kx} P(kx)\,dx = Q(0) - e^{-k} Q(k)\,,$$

avec $Q = P + P' + P'' + ... + P^{(n)}$, n est le degré de P.

8.2.2 Reste le Lagrange pour la formule de Taylor

Proposition 8.2.2 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{T.R.I}$$

pour tout segment $[a,b] \subset I$.

Preuve. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{R}_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, $\mathcal{R}_0 = \int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$. Si la formule est vraie pour n, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n &= \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \mathcal{R}_{n+1}, \end{aligned}$$

d'où la formule de Taylor avec reste intégrale. ■

8.3 Primitives des fonctions rationnelles

Soient P et Q deux polynômes vérifiant :

1) Les deux polynômes n'ont aucun diviseur commun.

2) Le coefficient du terme du plus haut degré de Q vaut 1.

Soient a_1, a_2,...,a_n les n-racines réelles distinctes de Q et $(x^2+2b_1x+c_1)$, $(x^2+2b_2x+c_2)$, ...,$(x^2+2b_mx+c_m)$ l'ensemble de ses diviseurs irréductibles $(b_j^2-c_j<0)$ du second degré tous distincts, alors

$$Q(x)=(x-a_1)^{p_1}\dots(x-a_n)^{p_n}\left(x^2+2b_1x+c_1\right)^{q_1}\dots\left(x^2+2b_mx+c_m\right)^{q_m},$$

cette décomposition en éléments simples de Q est unique.

Si f est le quotient de P sur Q, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\sum_{k=0}^{p_1}\frac{\alpha_{1k}}{(x-a_1)^k}+\dots+\sum_{k=0}^{p_n}\frac{\alpha_{nk}}{(x-a_n)^k} \\ &\quad +\sum_{k=0}^{q_1}\frac{\beta_{1k}x+\gamma_{1k}}{(x^2+2b_1x+c_1)^k}+\dots+\sum_{k=0}^{q_m}\frac{\beta_{mk}x+\gamma_{mk}}{(x^2+2b_mx+c_m)^k}, \end{aligned}$$

où $R(x)$ est le quotient dans la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ selon les puissances décroissantes de x.

<u>Intégration des éléments simples :</u>

1)

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\begin{cases}\ln|x-a|+C^{te} & \text{si} \quad k=1,\\ \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C^{te} & \text{si} \quad k\geq 2.\end{cases}$$

2) a) Pour $b^2-c<0$ et $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, on a

$$\int\frac{\beta x+\gamma}{x^2+2bx+c}dx=\frac{\beta}{2}\ln\left(x^2+2bx+c\right)+\frac{\gamma-b\beta}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right)+C^{te}.$$

b) On pose $t=\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}$, on a pour $k\geq 2$,

$$\int\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+2bx+c)^k}dx=\frac{\beta}{2(1-k)(x^2+2bx+c)^{k-1}}+\frac{\gamma-b\beta}{\left(\sqrt{c-b^2}\right)^{2k-1}}\int\frac{dt}{(t^2+1)^k}.$$

c) Si on pose $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}$, on a la formule de récurrence :

$$2nI_{n+1}=\frac{x}{(x^2+1)^n}+(2n-1)I_n,\qquad\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

8.4 Primitives des composées de fonctions trigonométriques

1) $\int \sin^n x dx$ et $\int \cos^n x dx$:
i) Si $n = 2p+1$ alors $\cos^n x = \cos x.\left(1-\sin^2 x\right)^p$ (resp. $\sin^n x = \sin x.\left(1-\cos^2 x\right)^p$), dans ce cas on effectue le changement de variable $t = \sin x$ (resp. $t = \cos x$).
ii) Sinon, on linéarise $\sin^n x$ et $\cos^n x$ avec les formules

$$\cos x = \tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

2) Fonctions rationnelles en sinus et cosinus :
i) Si $f(x) = R(\cos x, \sin x)$, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$. On rappelle que

$$\cos x = \tfrac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \tfrac{2\tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}.$$

Ainsi, on se ramène à une fonction rationnelle.
ii) Si $f(x) = R\left(\cos^2 x, \sin^2 x\right)$, on pose $t = \tan x$. On rappelle que

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 x = \tfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.$$

8.5 Primitives des composées de fonctions hyperboliques

Si $f(x) = R(e^x, \cosh x, \sinh x)$, on pose $t = e^x$.
Par exemple : $f(x) = \tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{t^2-1}{t\left(t^2+1\right)}dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2+1}\right)dt = \ln\left(t^2+1\right) - \ln|t| + C^{te} \\ &= \ln\left(1+e^{2x}\right) - x + C^{te}.\end{aligned}$$

8.6 Primitives des fonctions irrationnelles

1) Si $f(x) = R\left(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, ..., x^{\frac{1}{k_n}}\right)$, on pose $x = t^k$, où $k = ppcm\,(k_1, k_2, ..., k_n)$.
Par exemple : $f(x) = \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. On pose $x = t^6$, on obtient

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{t}{t^3+t^2}\left(6t^5 dt\right) = 6\int \frac{t^4}{1+t}dt = 6\int \left(t^3 - t^2 + t - 1\right)dt - 6\int \frac{dt}{1+t} \\ &= 9\sqrt[3]{x^2} - 12\sqrt{x} + 18\sqrt[3]{x} - 36\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C^{te}.\end{aligned}$$

2) Si $f(x) = R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
On pose $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ ce qui donne $x = \frac{-\delta t^m+\beta}{\gamma t^m-\alpha}$.

3) Si $f(x) = R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a trois cas de figure :

i) Si $\Delta < 0$ et $a > 0$, on pose $\beta = \sqrt{a}$ et $\alpha = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}$ ainsi :

$$ax^2 + bx + c = \beta^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \alpha^2,$$

dans ce cas, on pose $x = \frac{\alpha}{\beta} \sinh t - \frac{b}{2a}$.

ii) Si $\Delta > 0$ et $a > 0$, on pose $\beta = \sqrt{a}$ et $\alpha = \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}$, ainsi :

$$ax^2 + bx + c = \beta^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \alpha^2,$$

on pose $x = \frac{\alpha}{\beta} \cosh t - \frac{b}{2a}$, si $x + \frac{b}{2a} \geq \frac{\alpha}{\beta}$ ou $x = -\frac{\alpha}{\beta} \cosh t - \frac{b}{2a}$ si $x + \frac{b}{2a} \leq -\frac{\alpha}{\beta}$.

iii) Si $\Delta > 0$ et $a < 0$, on pose $\beta = \sqrt{-a}$ et $\alpha = \sqrt{\frac{\Delta}{-4a}}$, ainsi :

$$ax^2 + bx + c = \alpha^2 - \beta^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

dans ce cas, on pose $x = \frac{\alpha}{\beta} \sin t - \frac{b}{2a}$ ou $x = \frac{\alpha}{\beta} \cos t - \frac{b}{2a}$.

Par exemple, on veut calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x - x^2}}.$$

Comme $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$, alors on a $\alpha = \beta = 1$ et $\frac{b}{2a} = -1$, par conséquent :
On pose $x = 1 + \sin t$, ainsi : si $x = 0$ alors $t = -\frac{\pi}{2}$ et si $x = 1$ alors $t = 0$; ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x - x^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{1 + |\cos t|} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt.$$

Comme il s'agit d'une intégrale de fonction rationnelle en cosinus, on pose $y = \tan \frac{t}{2}$.
Si $t = -\frac{\pi}{2}$ alors $y = -1$ et si $t = 0$ alors $y = 0$, de même que $\cos t = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ et $dt = \frac{2dy}{1+y^2}$, par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x - x^2}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left(1 - y^2\right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

8.7 Exercices

Exercice 1 :

À l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les primitives et intégrales suivantes :

$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\qquad b)\ \int \frac{dx}{a^2+x^2},\qquad c)\ \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx,$

$d)\ \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx,\qquad e)\ \int xe^{x^2}dx,\qquad f)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^4}dx,$

$g)\ \int \cos^{2p+1} x dx,\qquad h)\ \int \tanh x dx,\qquad i)\ \int \frac{\sin 2x}{2+\sin x}dx.$

Exercice 2 :

Calculer, par parties, les primitives et intégrales suivantes :

$a)\ \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx,\qquad b)\ \int x \arctan x dx,\qquad c)\ \int \frac{x}{\cos^2 x}dx,\qquad d)\ \int e^{ax}\sin(bx)dx,$

$e)\ \int \arctan x dx,\qquad f)\ \int \arcsin^2 x dx,\qquad g)\ \int x^2 \ln^2 x dx,\qquad h)\ \int_1^e \ln^3 x dx,$

$i)\ \int \sin 2x \ln(\tan x)\, dx,\qquad j)\ \int \sin(\ln x)dx.$

Exercice 3 :

Calculer les primitives et intégrales suivantes :

$a)\ \int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx,\qquad b)\ \int \frac{x^8}{1+x^2}dx,\qquad c)\ \int_0^2 \frac{x^4}{1+x^3}dx,\qquad d)\ \int \frac{x^5+x^3+1}{1+x^4}dx,$

$e)\ \int \frac{1}{x+x^4}dx,\qquad f)\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^3},\qquad g)\ \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)^2},\qquad h)\ \int_0^1 \frac{x^5dx}{(1+x)(1+x^3)},$

$i)\ \int \frac{x^6dx}{(1+x^2)^3},\qquad j)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}dx\qquad k)\ \int \frac{1}{(x^3-1)^2}dx,\qquad l)\ \int_2^3 \frac{x^3+2x^2+3x-1}{(x-1)^2}dx.$

Exercice 4 :

Calculer les primitives et intégrales suivantes :

$a)\ \int \frac{e^x dx}{\cosh x},\qquad b)\ \int_0^1 \frac{\sinh x}{1+e^x}dx,\qquad c)\ \int \frac{dx}{1+e^x},$

$d)\ \int_0^1 \sqrt{e^{2x}\cosh^2 x-1}dx,\qquad e)\ \int \frac{dx}{\cosh x},\qquad f)\ \int \frac{e^x dx}{\tanh x}.$

Exercice 5 :

Calculer les primitives et intégrales suivantes :

$a)\ \int \tan^2 x dx,\quad b)\ \int \tan^4 x dx,\quad c)\ \int \cos^2 x \sin^3 x dx,\quad d)\ \int \sin^2 x \cos^4 x dx,$

$e)\ \int \cos^4 x dx,\quad f)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x dx}{1+\cos x},\quad g)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x dx}{\sin x + \cos x},\quad h)\ \int \dfrac{2-\sin^2 x}{\cos^4 x} dx,$

$i)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx,\quad j)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^3 x dx}{1+\cos x} dx\quad k)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx,\quad l)\ \int \dfrac{dx}{\cos x}.$

Exercice 6 :

Calculer les primitives et intégrales suivantes :

$a)\ \int e^{\sqrt{x+1}} dx,\quad b)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)},\quad c)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(2+3.\ \sqrt[3]{x}\right)},\quad d)\ \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} dx,$

$e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}},\quad f)\ \int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+x+1}} dx,\quad g)\ \int x^5 \sqrt{1-x^3} dx,\quad h)\ \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx,$

$i)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}},\quad j)\ \int_0^1 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} dx,\quad k)\ \int_0^2 \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} dx,\quad l)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx.$

Exercice 7 :

Calculer les primitives et intégrales suivantes :

$a)\ \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx,\quad b)\ \int \frac{x^8}{1+x^2} dx,\quad c)\ \int_0^2 \frac{x^4}{1+x^3} dx,\quad d)\ \int \frac{x^5+x^3+1}{1+x^4} dx,$

$e)\ \int \frac{1}{x+x^4} dx,\quad f)\ \int \dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)^3},\quad g)\ \int \dfrac{\left(1-x^2\right) dx}{\left(1+x^2\right)^2},\quad h)\ \int_0^1 \dfrac{x^5 dx}{(1+x)\left(1+x^3\right)},$

$i)\ \int \dfrac{x^6 dx}{\left(1+x^2\right)^3},\quad j)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2+x+1}{\left(x^2-1\right)^2} dx,\quad k)\ \int \frac{1}{\left(x^3-1\right)^2} dx,\quad l)\ \int_2^3 \frac{x^3+2x^2+3x-1}{(x-1)^2} dx.$

Exercice 8 :

1) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\cos^5 x+\sin^5 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x+\sin^5 x} dx.$

2) En déduire la valeur de cette intégrale.

Exercice 9 :

Soient $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

1) Montrer que $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx.$

2) En déduire les valeurs des deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\, dx.$$