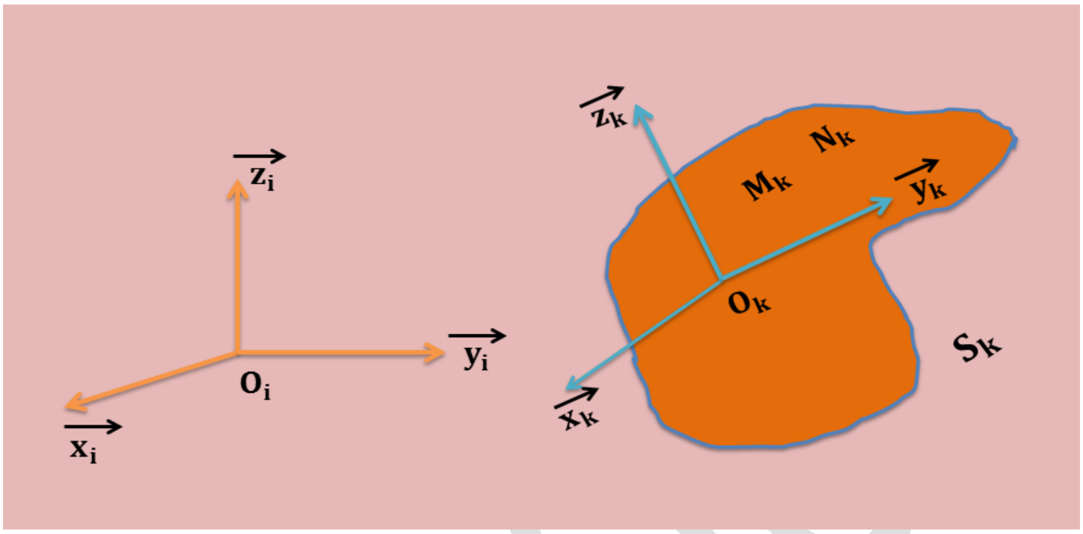
# Cinématique du solide




**($S_k$)** Solide rigide ➞ $\overrightarrow{M_k N_k}$ = cte au cours du temps,

## Cherchons la relation entre $\overrightarrow{V^i(N_k)}$ et $\overrightarrow{V^i(M_k)}$

D' après la dérivation d'un vecteur:

$$\overrightarrow{V^i(M_k)} = \frac{d^i\overrightarrow{O_iM_k}}{dt} = \frac{d^k\overrightarrow{O_iM_k}}{dt} + \overrightarrow{\Omega^1_k} \wedge \overrightarrow{O_IM_K}$$

$$\overrightarrow{V^i(N_k)} = \frac{d^i\overrightarrow{O_iN_k}}{dt} = \frac{d^k\overrightarrow{O_iN_k}}{dt} + \overrightarrow{\Omega^1_k} \wedge \overrightarrow{O_IN_K}$$

$$\overrightarrow{V^i(N_k)} - \overrightarrow{V^i(M_k)} = \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{O_iN_k} - \overrightarrow{O_iM_k}) + \overrightarrow{\Omega^1_k} \wedge (\overrightarrow{O_iN_k} - \overrightarrow{O_iM_k})$$

$$= \frac{d^k\overrightarrow{M_kN_k}}{dt} + \overrightarrow{\Omega^1_k} \wedge \overrightarrow{M_kN_k}$$

E.ZOUAOUI , E-mail adress: e.zouaoui@g.essa-alger.dz

Or $\overrightarrow{M_k N_k} = \text{cte dans } (R_2)$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{d^k \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} = 0$

D'où $\overrightarrow{V^\iota(N_k)} = \overrightarrow{V^\iota(M_k)} + \overrightarrow{\Omega^1_k} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}$

## Champ des accélérations d'un solide

A chaque point d'un solide ($\mathbf{S_k}$), on peut associer son vecteur accélération définie par:

$$\overrightarrow{\gamma^\iota(N_k)} = \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{V^1(N_k)}$$

## Relation entre $\overrightarrow{\gamma^\iota(N_k)}$ et $\overrightarrow{\gamma^\iota(M_k)}$ ?

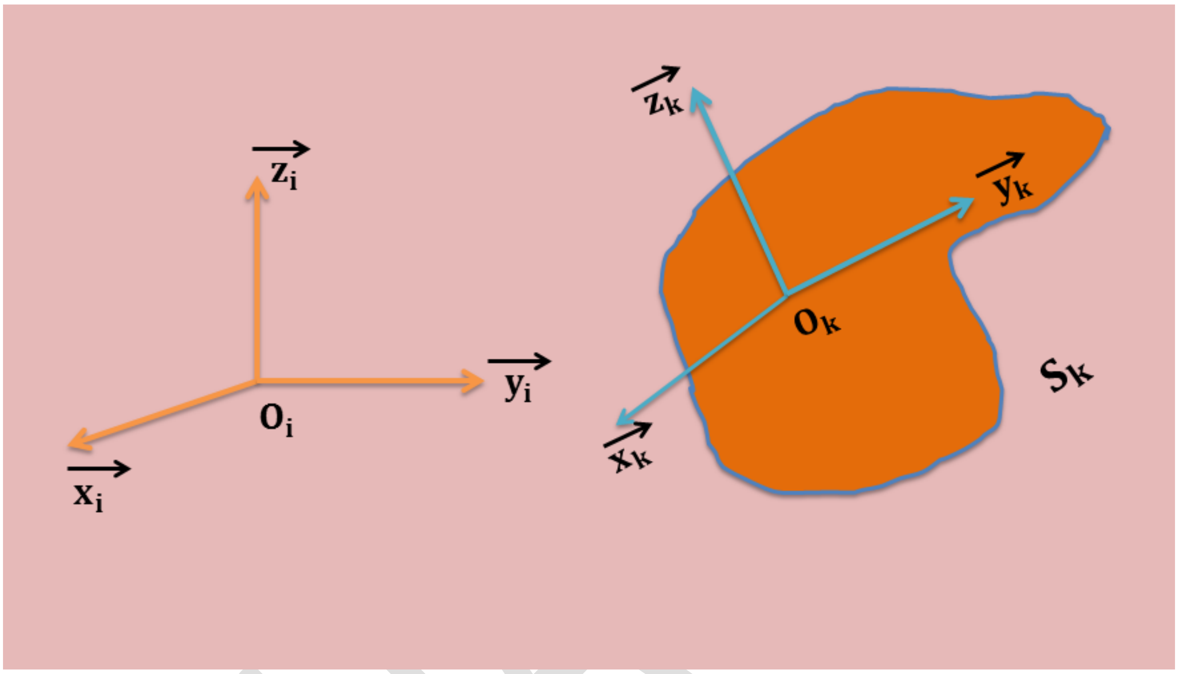
On sait que $\overrightarrow{V^\iota(N_k)} = \overrightarrow{V^\iota(M_k)} + \overrightarrow{\Omega^1_k} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}$

Donc :$\overrightarrow{\gamma^\iota(N_k)} = \dfrac{d^i}{dt}\overrightarrow{V^1(M_k)} + \dfrac{d^I \overrightarrow{\Omega^1_k}}{dt} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} + \overrightarrow{\Omega^1_k} \wedge \dfrac{d^i \overrightarrow{M_k N_k}}{dt}$

Or $\dfrac{d^i \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} = \underbrace{\dfrac{d^k \overrightarrow{M_k N_k}}{dt}}_{0} + \overrightarrow{\Omega^1_k} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}$

D'où

$$\overrightarrow{\gamma^{\iota}(N_k)} = \overrightarrow{\gamma^{\iota}(M_k)} + \frac{d^{i}\overrightarrow{\Omega_k^{\mathrm{i}}}}{dt} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} + \overrightarrow{\Omega_k^{\mathrm{i}}} \wedge (\overrightarrow{\Omega_k^{\mathrm{i}}} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}$$




## Composition des vitesses

Nous supposons connaitre le mouvement d'un solide (S) par rapport a un repère $(\boldsymbol{R}_{\mathrm{J}})$, $\boldsymbol{R}_{\mathrm{J}}$ ayant un mouvement connu par rapport au repère de référence $(\boldsymbol{R}_{\mathrm{i}})$,

Pour calculer $\overrightarrow{\mathrm{V}^{\iota}(M)}$, M ∈ $(S)$, nous utilisons l'expression suivante :

$$\overrightarrow{O_I M} = \overrightarrow{O_I O_J} + \overrightarrow{O_J M}$$

$$\overrightarrow{V^{I}(M)} = \frac{d^{i}\overrightarrow{O_I O_J}}{dt} + \frac{d^{i}\overrightarrow{O_J M}}{dt}$$

E.ZOUAOUI , E-mail adress: e.zouaoui@g.essa-alger.dz

Or

$$\frac{d^i\overrightarrow{O_iO_j}}{dt} = \overrightarrow{V^i(O_j)},$$ et

$$\frac{d^i\overrightarrow{O_jM}}{dt} = \frac{d^j\overrightarrow{O_jM}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{O_jM} = \overrightarrow{V^j(M)} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{O_jM}$$

D'où $$\overrightarrow{V^i(M)} = \overrightarrow{V^j(M)} + (\overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{O_jM} + \overrightarrow{V^i(O_j)})$$

$$\overrightarrow{V^i(M)} = \overrightarrow{V^j(M)} + \overrightarrow{V_j^i(M)}$$

$\overrightarrow{V^i(M)}$**:** vitesse absolue: c'est la vitesse du point M pour un observateur lié a $(\boldsymbol{R_i})$,

$\overrightarrow{V^j(M)}$**:** vitesse relative: c'est la vitesse du point M pour un observateur lié a $(\boldsymbol{R_j})$,

$\overrightarrow{V_j^i(M)}$**:** vitesse d'entrainement du point M

## Propriété du vecteur $\overrightarrow{V_j^i(M)}$

$$\overrightarrow{V_j^i(M)} = -\overrightarrow{V_i^j(M)}$$

$$\overrightarrow{V_j^i(M)} = \overrightarrow{V_j^k(M)} + \overrightarrow{V_k^i(M)}$$

## Composition des accélérations

Pour calculer $\overrightarrow{\gamma^{i}(M)}$, nous utilisons l'expression suivante :

$$\overrightarrow{V^{i}(M)} = \overrightarrow{V^{j}(M)} + (\overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{O_jM} + \overrightarrow{V^{i}(O_j)})$$

$$\overrightarrow{\gamma^{i}(M)} = \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{V^{i}(M)} = \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{V^{j}(M)} + \frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{O_jM}) + \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{V^{i}(O_j)}$$

Or

$$\frac{d^i}{dt}\overrightarrow{V^{j}(M)} = \frac{d^j}{dt}\overrightarrow{V^{j}(M)} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{V^{j}(M)} = \overrightarrow{\gamma^{j}(M)} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{V^{j}(M)}$$

Et $$\frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{O_jM}) = \frac{d^i\overrightarrow{\Omega_j^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_jM} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{O_jM}$$

$$= \frac{d^i\overrightarrow{\Omega_j^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_jM} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \left(\frac{d^j\overrightarrow{O_jM}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{O_jM}\right)$$

$$= \frac{d^i\overrightarrow{\Omega_j^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_jM} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \left(\overrightarrow{V^{j}(M)} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{O_jM}\right)$$

$$\frac{d^i}{dt}\overrightarrow{V^{i}(O_j)} = \overrightarrow{\gamma^{i}(O_j)}$$

$$\overrightarrow{\gamma^{i}(M)} = \overrightarrow{\gamma^{j}(M)} + \left(\overrightarrow{\gamma^{i}(O_j)} + \frac{d^i\overrightarrow{\Omega_j^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_jM} + \overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge (\overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{O_jM}\right) + 2\overrightarrow{\Omega_j^i} \wedge \overrightarrow{V^{j}(M)},$$

$$\overrightarrow{\gamma^{i}(\mathrm{M})} = \overrightarrow{\gamma^{j}(\mathrm{M})} + \overrightarrow{\gamma_j^{i}(M)} + 2\overrightarrow{\Omega_j^{i}} \wedge \overrightarrow{V^{j}(M)}$$

$\overrightarrow{\gamma^{i}(M)}$: Acceleration absolue

$\overrightarrow{\gamma^{i}(M)}$: Acceleration relative

$\overrightarrow{\gamma_j^{i}(M)}$: Acceleration dentrainement

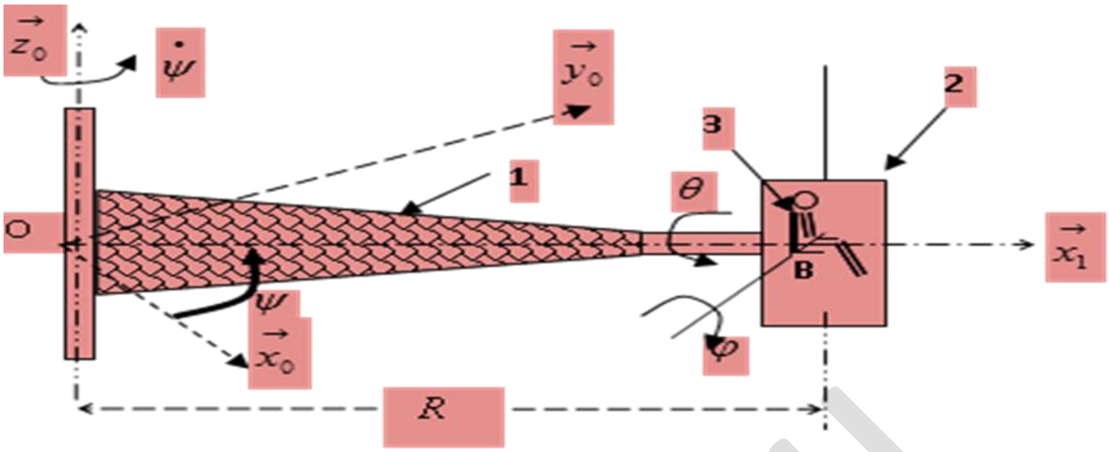
$2\overrightarrow{\Omega_j^{i}} \wedge \overrightarrow{V^{j}(M)}$ : Aceeleration complementaire ou de coriolis

## Simulateur de vol

Pour simuler les conditions de vol des avions, les ingénieurs ont conçu un appareil spécial pour l'entraînement des pilotes qui consiste en **un bras** ***(1)*** en rotation dans le plan horizontal tel que $\mathbf{R_0}(\mathbf{O}, \overrightarrow{\mathbf{X_0}}, \overrightarrow{\mathbf{Y_0}}, \overrightarrow{\mathbf{Z_0}})$ est le repère fixe ; $R_1(O, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$ :repère mobile lié au bras, avec $\overrightarrow{\mathbf{Z_0}}=\overrightarrow{\mathbf{Z_1}}$ **et** $(\overrightarrow{\mathbf{X_0}}, \overrightarrow{\mathbf{X_1}})=(\overrightarrow{\mathbf{Y_0}}, \overrightarrow{\mathbf{Y_1}})=\boldsymbol{\Psi}$,sens positif ;

**Un cockpit (2)** en rotation autour de l'axe $\overrightarrow{\mathbf{X_1}}$ tel que $\overrightarrow{\mathbf{X_1}}=\overrightarrow{\mathbf{X_2}}$ et $(\overrightarrow{\mathbf{Y_1}}, \overrightarrow{\mathbf{Y_2}})=(\overrightarrow{\mathbf{Z_1}}, \overrightarrow{\mathbf{Z_2}})=\boldsymbol{\theta}$ sens positif;$\mathbf{R_2}(\mathbf{B}, \overrightarrow{\mathbf{X_2}}, \overrightarrow{\mathbf{Y_2}}, \overrightarrow{\mathbf{Z_2}})$**:** repère lié au cockpit avec $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{R}$. **Un siège-pilote** ***(3)*** en rotation autour de l'axe $\overrightarrow{\mathbf{Y_2}}$ tel que $\overrightarrow{\mathbf{Y_2}}=\overrightarrow{\mathbf{Y_3}}$: **et** $(\overrightarrow{\mathbf{X_2}}, \overrightarrow{\mathbf{X_3}})=(\overrightarrow{\mathbf{Z_2}}, \overrightarrow{\mathbf{Z_3}})=\boldsymbol{\phi}$ sens positif. $\mathbf{R_3}(\mathbf{B}, \overrightarrow{\mathbf{X_3}}, \overrightarrow{\mathbf{Y_3}}, \overrightarrow{\mathbf{Z_3}})$ repère lié au siège-pilote. Le pilote est lié au siège, sa tête est repérée par le vecteur position.$\overrightarrow{\mathbf{BT}} = \mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{Z_3}}$

<u>**Vous êtes l'ingénieur responsable de ces calculs, il vous est demandé de :**</u>




1) Déterminer le vecteur vitesse absolue du point ***T*** par composition de mouvement et par la cinématique du solide.

2) Déterminer l'accélération absolue du point ***T*** par composition de mouvement.

**On prendra $R_2$ comme repère de projection**

**<u>Solution</u>**

**<u>Vecteur vitesse du point T *Par composition de mouvement*</u>**

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{ent} \qquad \vec{V}^0(T) = \vec{V}^2(T) + \vec{V}_2^0(T)$$

**<u>La vitesse relative est donnée par</u>**

$$\vec{V}^2(T) = \frac{d^2\overrightarrow{BT}}{dt} \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}_{R_2}$$

**La vitesse relative s'écrit :**

$$\vec{V}_2^0(T) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}$$

$$\vec{V}_2^0(T) = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -\dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

En faisant la somme on obtient :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

**Par la cinématique du solide la vitesse s'écrit**

$$\vec{V}^0(T) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT}$$

Nous avons

$$\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} 0 \\ R\dot{\psi}\cos\theta \\ -R\dot{\psi}\sin\theta \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + L\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \end{cases}_{R_2}$$

La somme des deux expressions donne

$$\vec{V}^0(T) = \left\{\begin{array}{c} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{array}\right._{R_2}$$

**<u>Accélération absolue du point *T* par composition de mouvement</u>**

Son expression est donnée par la relation suivante :

$$\vec{\gamma}_{abs}(T) = \vec{\gamma}_{rel}(T) + \vec{\gamma}_{ent}(T) + \vec{\gamma}_{coriolis}(T)$$

$$\vec{\gamma}^0(T) = \vec{\gamma}^2(T) + \vec{\gamma}_2^0(T) + \vec{\gamma}_c(T)$$

Explicitons chacun du terme de cette relation

$$\vec{\gamma}^2(T) == \frac{d^2\vec{V}^2(T)}{dt} \left\{\begin{array}{c} L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ 0 \\ -L\ddot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{array}\right._{R_2}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(T) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}\right)$$

$$\vec{\gamma}^0(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} = \frac{d^2\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} = \left\{\begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right._{R_2} \wedge \left\{\begin{array}{c} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{array}\right._{R_2}$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} = \left\{\begin{array}{c} L\cos\varphi\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ L\ddot{\theta}\cos\varphi + (R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ -(R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{array}\right._{R_2}$$

$$\vec{\gamma}^{0}(T) = \vec{\gamma}^{2}(T) + \vec{\gamma}_{2}^{0}(T) + \vec{\gamma}_{c}(T)$$

Explicitons chacun du terme de cette relation

$$\vec{\gamma}^{2}(T) == \frac{d^2\,\vec{V}^{2}(T)}{dt} \quad R_2\begin{cases} L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ 0 \\ -L\ddot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_{2}^{0}(T) = \vec{\gamma}^{0}(O) + \frac{d^0\,\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}\right)$$

$$\vec{\gamma}^{0}(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^0\,\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} = \frac{d^2\,\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} = \quad R_2\begin{cases} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \wedge \quad R_2\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}$$

$$\frac{d^0\,\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} = \quad R_2\begin{cases} L\cos\varphi\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ L\ddot{\theta}\cos\varphi + (R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ -(R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}\right) = \quad R_2\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \wedge \quad R_2\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \wedge \quad R_2\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OT}\right) = \left\{\begin{array}{l} \dot\theta \\ \dot\psi \sin\theta \\ \dot\psi \cos\theta \end{array}\right._{R_2} \wedge \left\{\begin{array}{l} L\dot\psi \cos\varphi \sin\theta \\ -L\dot\theta \cos\varphi + \dot\psi \cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -\dot\psi \sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{array}\right._{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OT}\right) = \left\{\begin{array}{l} -\dot\psi^2(R + L\sin\varphi) + L\dot\psi\dot\theta \cos\varphi \cos\theta \\ \dot\psi\dot\theta \sin\theta(R + L\sin\varphi) + L\dot\psi^2 \cos\varphi \cos\theta \sin\theta \\ -L\dot\theta^2 \cos\varphi + \dot\psi\dot\theta \cos\theta(R + L\sin\varphi) - L\dot\psi^2 \cos\varphi \sin^2\theta \end{array}\right._{R_2}$$

$$\vec{\gamma}_c(T) = 2\left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(T)\right)$$

$$\vec{\gamma}_c(T) = 2 \left\{\begin{array}{l} \dot\theta \\ \dot\psi \sin\theta \\ \dot\psi \cos\theta \end{array}\right._{R_2} \wedge \left\{\begin{array}{c} L\dot\varphi \cos\varphi \\ 0 \\ -L\dot\varphi \sin\varphi \end{array}\right._{R_2} = \left\{\begin{array}{c} -2L\dot\psi\dot\varphi \sin\theta \sin\varphi \\ 2\dot\varphi\dot\theta \sin\varphi + 2L\dot\psi\dot\varphi \cos\theta \cos\varphi \\ -2L\dot\psi\dot\varphi \sin\theta \cos\varphi \end{array}\right._{R_2}$$

La somme de ces expressions donne l'accélération absolue du point T