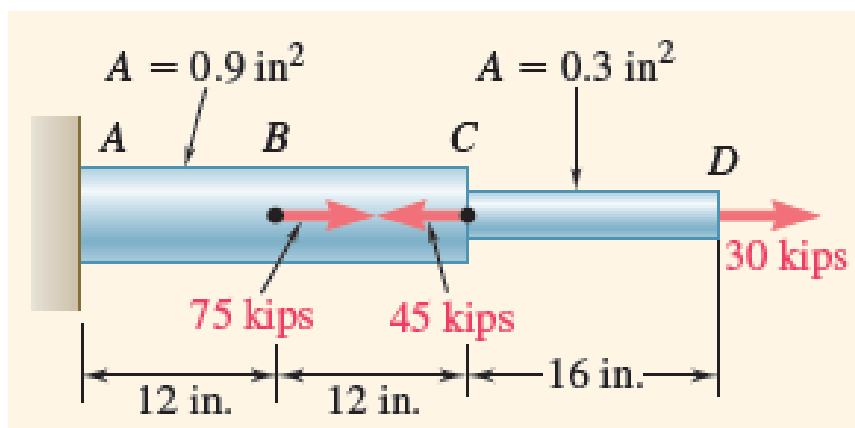




**T.D N° 5 (Internal cohesive forces and moments –  
Method of sections [cuts] – Notion of Stress)**

**Problem 1 :**

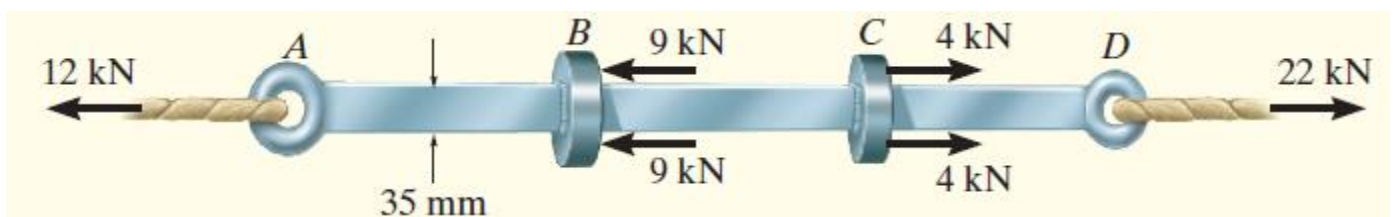
Find the internal forces  $P_1$ ,  $P_2$  and  $P_3$  of the steel rod shown under the given loads. The rod is divided into three component parts.



**Problem 2 :**

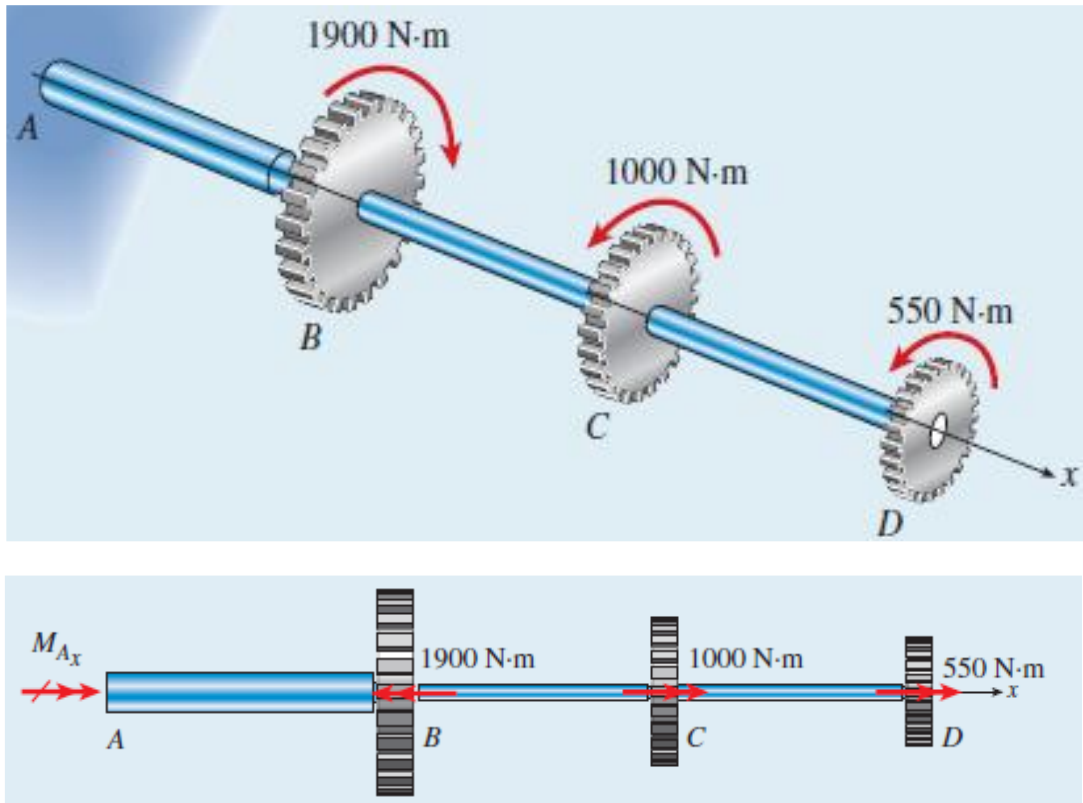
The bar in Figure below has a constant width of 35 mm and a thickness of 10 mm is subjected to the loading shown.

Draw the corresponding diagram of normal force and thus determine the location and the value of the maximum average normal stress in the bar.



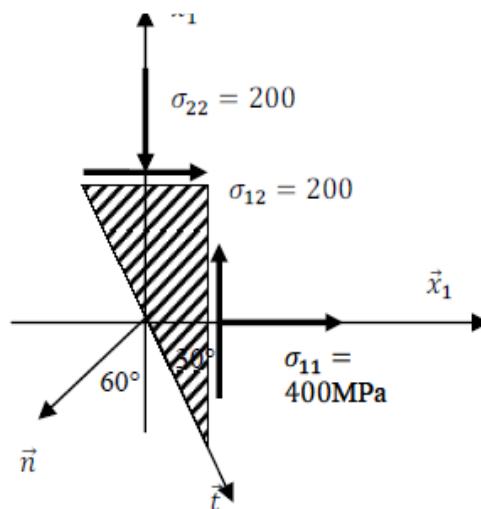
### **Problem 3 :**

A stepped circular shaft is fixed at A and has three gears that transmit the torques shown in Figure. Find the reaction torque at A, then find the internal torsional moments in segments AB, BC, and CD. Use properly drawn free-body diagrams in your solution. (use the static sign convention ; right-hand rule is positive).



### **Problem 4 :**

Using the direct method (Cauchy's relation), determine the normal and shear stresses on the face inclined with  $\theta = 30^\circ$ . Draw these stresses on this face.



## Solution TD 5

Le but de ce TD c'est de se familiariser avec la méthode des coupes (coupures) pour la détermination des forces et moments intérieurs [exo 1 : force normale ; exo 2 : moment de torsion], qui vont donner par la suite les contraintes correspondantes (on a pris les deux cas ; les forces et les moments séparément).

La notion de contrainte est basique en RDM. On utilise la relation de Cauchy qui est une méthode directe pour avoir le vecteur contrainte sur n'importe quelle face de notre élément.

L'autre méthode qui est la transformation des équations, on l'utilisera dans le TD prochain

### Problem 1 :

Dans cet exercice, on apprend la méthode des coupes (ou coupures) largement utilisée en RDM, car elle vous permet de calculer les efforts internes (ou de cohésion).

D'après le schéma, la barre est composée de 03 parties AB, BC et CD (elles peuvent être en diff. Matériaux).

Ces 03 parties sont soumises à des forces extérieures (d'où cet ex, c'est des forces normales [traction et compression]).

En RDM, on veut connaître les forces internes et par conséquent les contraintes (chap 3), ensuite on calcule les déformations par des formules appropriées (chap suivant 4)

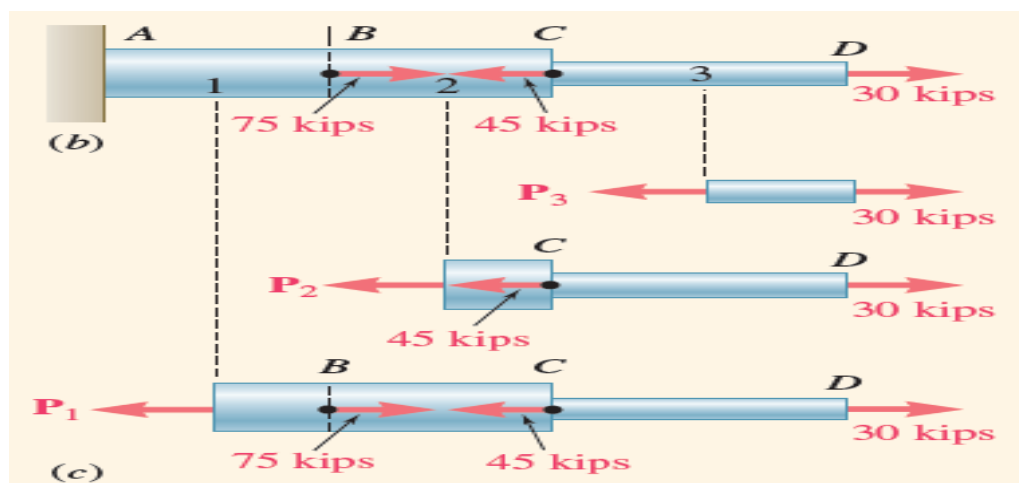
Rem 1 : On utilise des coupures, en général, entre 02 pts d'application des forces et/ou des moments.

Rem 2 : une fois les coupures sont faites, on peut isoler les parties de gauche ou à droite (il faut avoir toutes les forces et les réactions)

\* Ceci dit, on revient à l'exercice 1 :

on réalise les coupes ①, ② et ③, voir les traits en pointillés.

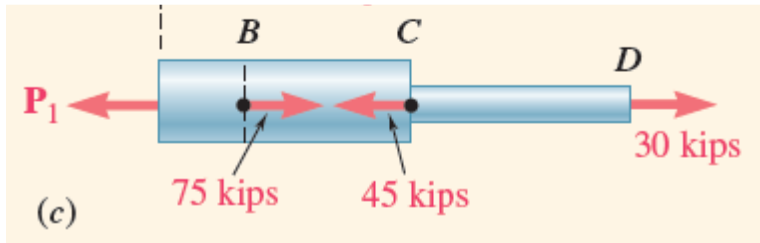
Je prends les coupes une à une séparément et j'applique la loi de la statique sur le fbd de chaque partie pour calculer la force de cohésion de la section de coupe (force normale de notre cas)



1) la coupe ①, celle du dessous en bas : (le sens positif vers la droite)

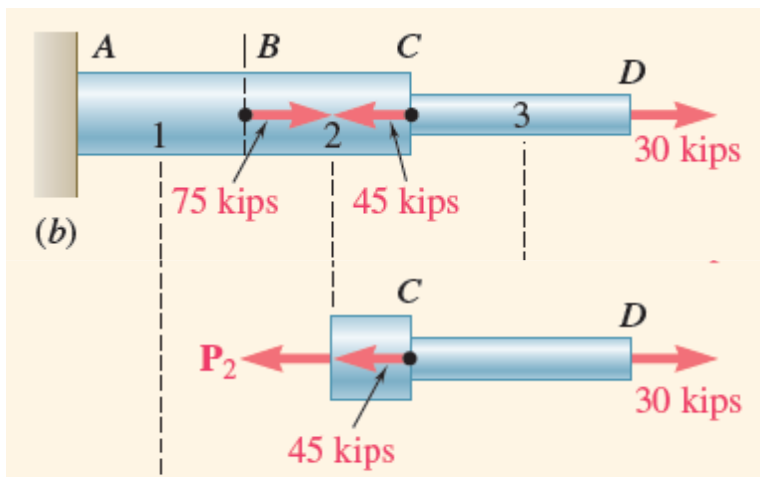
$$\sum F = 0, P_1 + 75 - 45 + 30 = 0 \rightarrow P_1 = -60 \text{ kips.}$$

Par rapport à la section de coupe ①, c'est une traction.



2) la coupe ②, celle du milieu.  $\sum F = 0, P_2 - 45 + 30 = 0 \Rightarrow P_2 = 15 \text{ kips}$

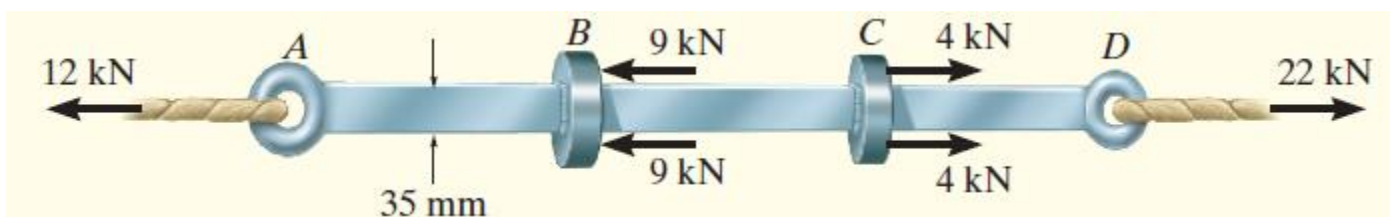
Par rapport à la section de coupe ②, c'est une compression.



3) la coupe ③,  $P_3 + 30 = 0 \rightarrow P_3 = -30 \text{ kips}$

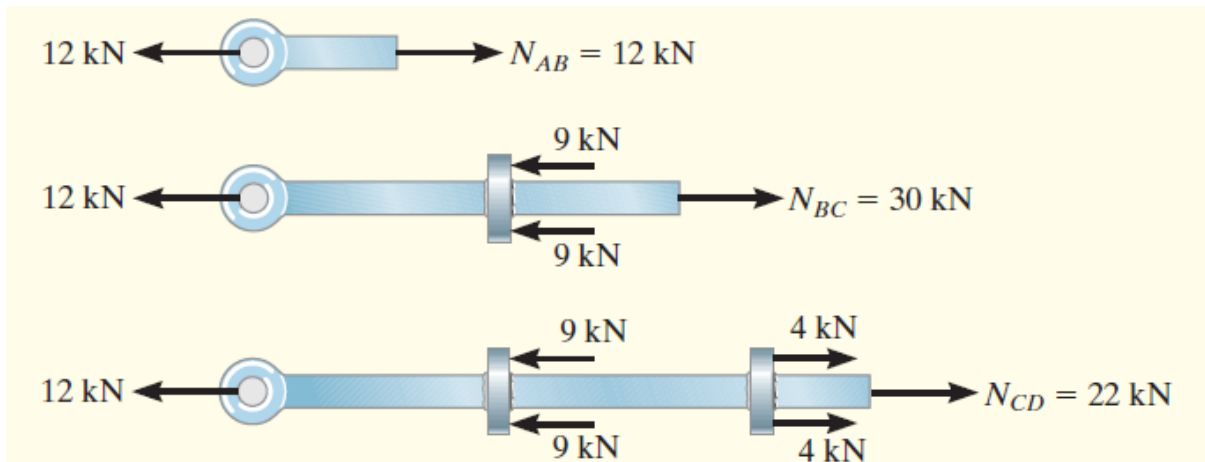
Donc par rapport à la section de coupe ③, c'est une traction.

## Problem 2 :



Rem 1: On utilise des coupures, en général, entre 02 pts d'application des forces et/ou des moments.

La méthode des coupes permet d'avoir :  $N_{AB}$  veut dire la force normale intérieure dans la barre AB



Le diagramme de la force normale :

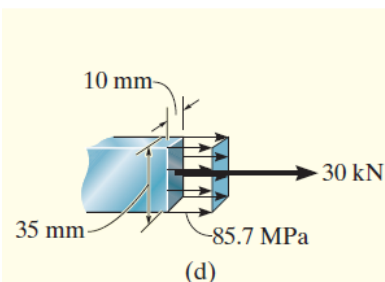
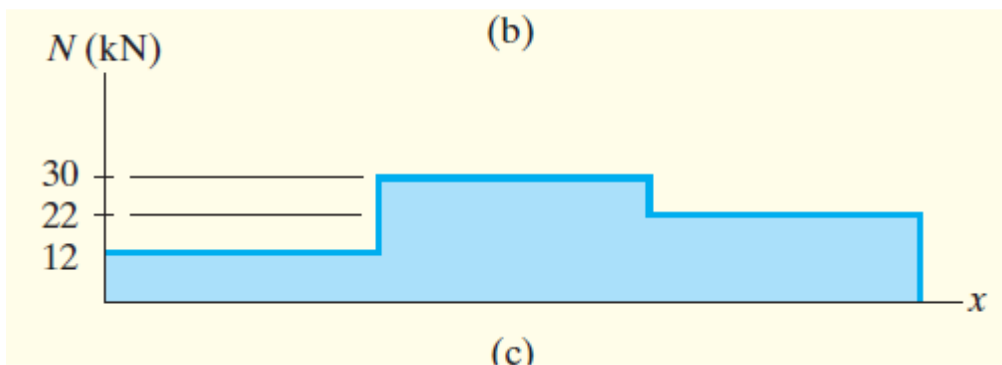


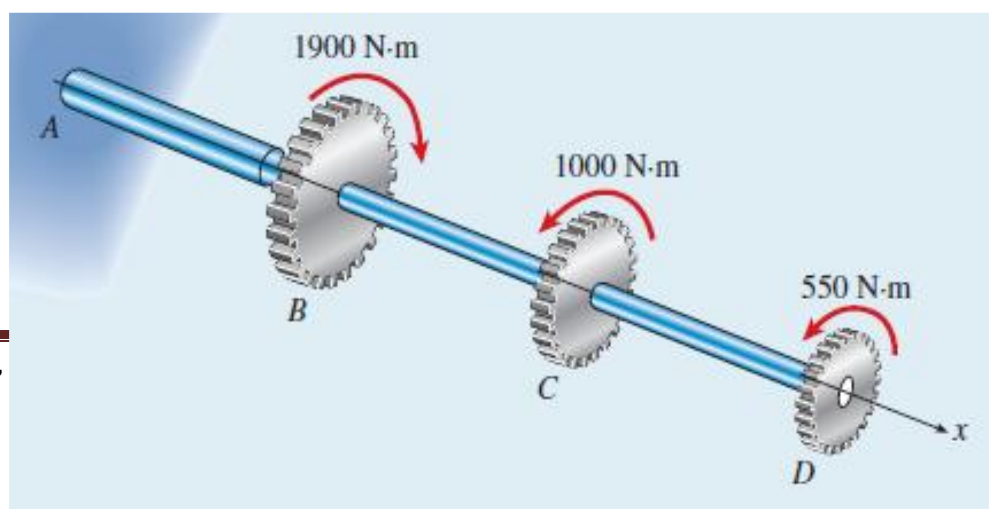
Fig. 1-15c. The largest loading is in region  $BC$ , where  $N_{BC} = 30$  kN. Since the cross-sectional area of the bar is *constant*, the largest average normal stress also occurs within this region of the bar.

**Average Normal Stress.** Applying Eq. 1-6, we have

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{30(10^3) \text{ N}}{(0.035 \text{ m})(0.010 \text{ m})} = 85.7 \text{ MPa}$$

*Ans.*

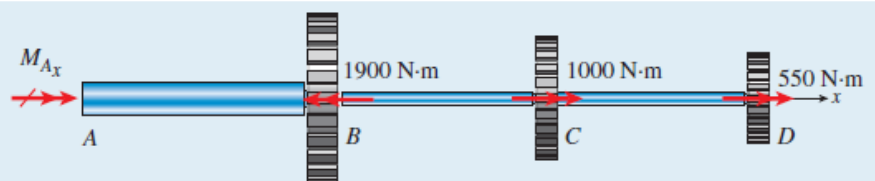
### Problem 3



**(1) Draw the FBD of the overall shaft structure.** The cantilever shaft structure is statically determinate. The solution for the reaction moment at A must begin with a proper drawing of the FBD of the overall structure (Fig. 1-14). The FBD shows all applied and reactive torques.

**Fig. 1-14**

Example 1-3: FBD of overall shaft



- (2) Sum the moments about the  $x$  axis to find the reaction moment  $M_{Ax}$ . This structure is statically determinate because there is one available equation from statics ( $\sum M_x = 0$ ) and one reaction unknown ( $M_{Ax}$ ). A statics sign convention is used (i.e., right-hand rule or CCW is positive).

$$\begin{aligned} M_{Ax} - 1900 \text{ N} \cdot \text{m} + 1000 \text{ N} \cdot \text{m} + 550 \text{ N} \cdot \text{m} &= 0 \\ M_{Ax} &= -(-1900 \text{ N} \cdot \text{m} + 1000 \text{ N} \cdot \text{m} + 550 \text{ N} \cdot \text{m}) \\ &= 350 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

The computed result for  $M_{Ax}$  is positive, so the reaction moment vector is in the positive  $x$  direction as assumed.

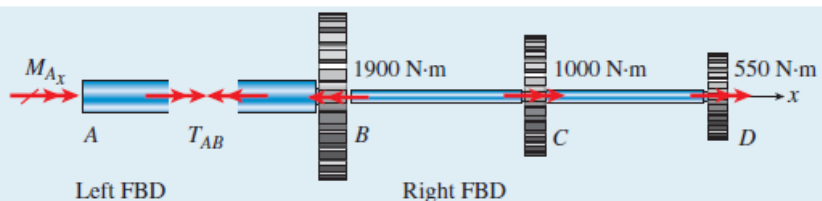
- (3) Find the internal torsional moments in each segment of the shaft. Now that reaction moment  $M_{Ax}$  is known, we can cut a section through the shaft in each segment creating left and right FBDs (Fig. 1-15). Internal torsional moments then may be computed using statics. Either FBD may be used; the computed internal torsional moment will be the same.

Find the internal torque  $T_{AB}$  (Fig. 1-15a).

**Réalisation de la coupe entre A et B :**

**Fig. 1-15a**

Example 1-3: Left and right FBDs of shaft for each segment



On peut isoler le tronçon de gauche :



Left FBD:

$$T_{AB} = -M_{Ax} = -350 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Comme on peut aussi isoler le tronçon de droite :

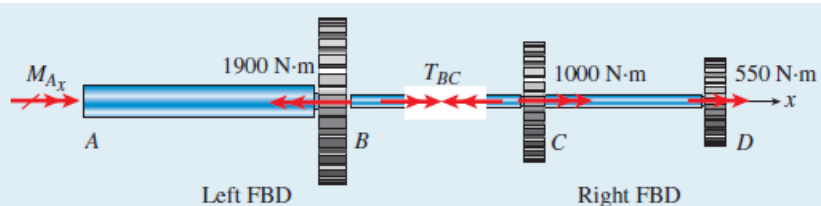
Right FBD:

$$T_{AB} = -1900 \text{ N} \cdot \text{m} + 1000 \text{ N} \cdot \text{m} + 550 \text{ N} \cdot \text{m} = -350 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**Remarque :** il est toujours préférable d'utiliser le tronçon avec le moins de calculs (dans notre cas moins de moments), dans cet exos, le tronçon de gauche présente moins de calculs, surtout qu'on a déjà calculé au préalable le moment d'encastrement. Mais si le moment d'encastrement n'est pas demandé ou fourni, là il faut utiliser le tronçon de droite)

Réalisation de la coupe entre B et C :

Fig. 1-15b



On peut utiliser les deux tronçons

Left FBD:

$$T_{BC} = -M_{Ax} + 1900 \text{ N} \cdot \text{m} = 1550 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Right FBD:

$$T_{BC} = 1000 \text{ N} \cdot \text{m} + 550 \text{ N} \cdot \text{m} = 1550 \text{ N} \cdot \text{m}$$

With the same method, we obtain the internal torque  $T_{CD}$ .

#### Problem 4

**STRATEGIE:** Nous avons un état plan de contraintes donné. Pour calculer les composantes normale et tangentielle sur une facette donnée, on soit calculer d'abord le vecteur contrainte sur cette même facette. La relation qui relie un état de contraintes (matrice ou tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$ ) et le vecteur

contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur toute surface de normale  $\vec{n}$  est la relation de Cauchy, éq 3.9 du cours :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \vec{n}$$

Une fois, nous avons le vecteur de contrainte, nous pouvons facilement calculer ses composantes en effectuant le produit scalaire du même vecteur avec les vecteurs unitaires des directions demandées en utilisant les équations comme suit :

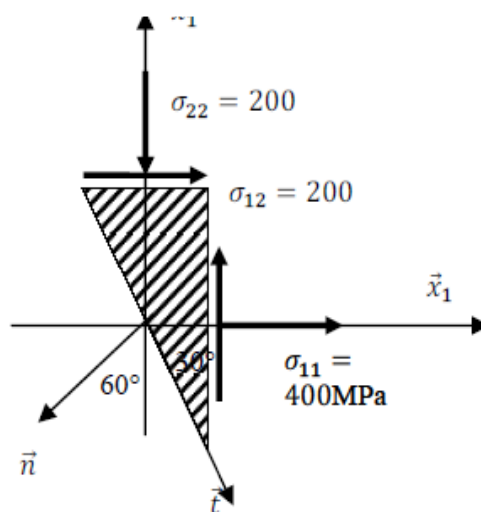
Composante normale :  $\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$  (équation 3.3)

Composante tangentielle :  $\tau = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{t}$  (équation 3.4)

**MODELISATION et ANALYSE:**

**Pour le tenseur des contraintes dans le plan donné.** On a :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +400 & +200 \\ +200 & -200 \end{pmatrix}$$



**Pour le vecteur contrainte sur la facette demandée.** On applique la relation de Cauchy :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \vec{n}$$

Le vecteur unitaire normal de cette facette est :



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 60^\circ \\ -\cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \vec{n} = \begin{pmatrix} +400 & +200 \\ +200 & -200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200\sqrt{3} - 100 \\ -100\sqrt{3} + 100 \end{pmatrix}$$

**Pour les composantes :** On projette :

Sachant que :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin 60^\circ \\ -\cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} +\sin 30^\circ \\ -\cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Composante normale :  $\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} -200\sqrt{3} - 100 \\ -100\sqrt{3} + 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = +423 \text{ MPa} \quad (\text{dans le sens de } \vec{n})$$

Composante tangentielle :  $\tau = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{t}$

$$\tau = \begin{pmatrix} -200\sqrt{3} - 100 \\ -100\sqrt{3} + 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = -159.8 \text{ MPa} \quad (\text{sens opposé à } \vec{t})$$

