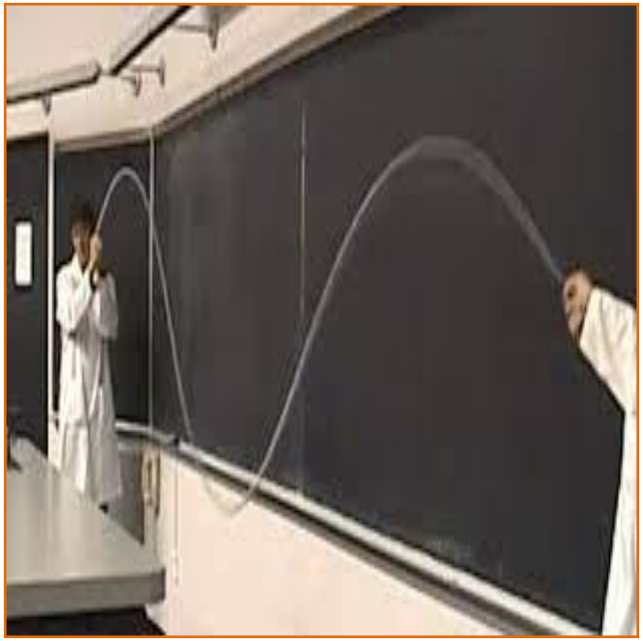
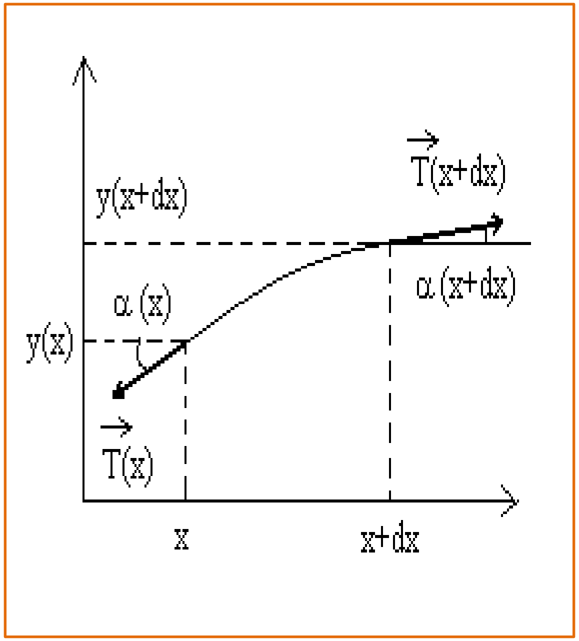
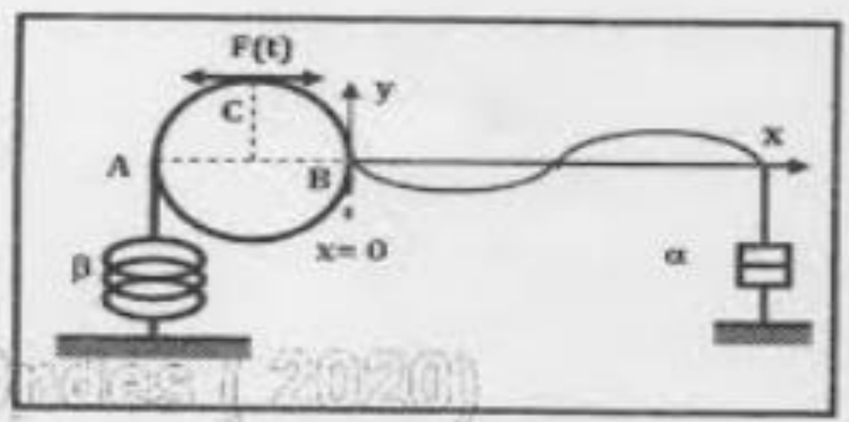
# *TD physique4*






**Exercice 6*:** Le système de la figure ci après est constitué d'une poulie cylindrique de masse M et de rayon R. Sur deux points A et B diamétralement opposés, situés dans un plan horizontal à l'équilibre, sont fixés un ressort de constante de raideur $\beta$ et une corde de masse linéique $\mu$ tendue avec une tension T. Au point C de la surface de la poulie situé sur la perpendiculaire à AB, on applique une force tangentielle de faible amplitude $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.
A l'autre extrémité de la corde est fixé un amortisseur dont la valeur du coefficient de frottement visqueux $\alpha$ est choisie de sorte que la corde est le siège *d'une onde progressive sinusoïdale progressive*.

1) Calculer l'impédance Z(x) en un point x de la corde;
2) Quelle est l'impédance d'entrée de la corde en x = 0 ;
3) Calculer la puissance moyenne <P> fournie par le système mécanique à la corde;
4) Sachant que pour une fréquence d'oscillations de de 10 Hz, <P> a une valeur maximum $<P>_{max}$ calculer :
   a- la constante de raideur $\beta$ ;
   b- la masse par unité de longueur $\mu$.




On donne M = 0.5 kg et T = 10 N.

## *Solution de l'exercice 6*

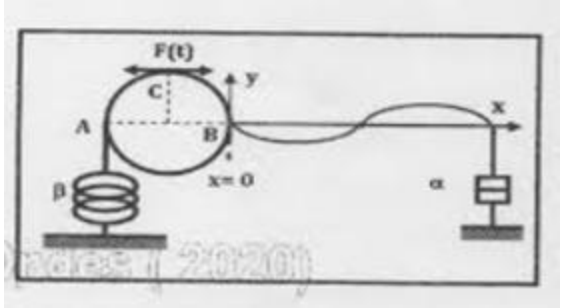
1) L'impédance $Z(x)$ en un point de la corde :

La corde est le siège d'une onde progressive sinusoïdale ⇒ une seule onde ⇒ $r = 0$

$$\boxed{y(x,t) = y_0\, e^{j(\omega t - kx)}}$$

⇒ $Z(x)$ est la même dans tous les points de la corde

$$Z(x) = Z(0) = Z_c = Z(L) = \alpha$$

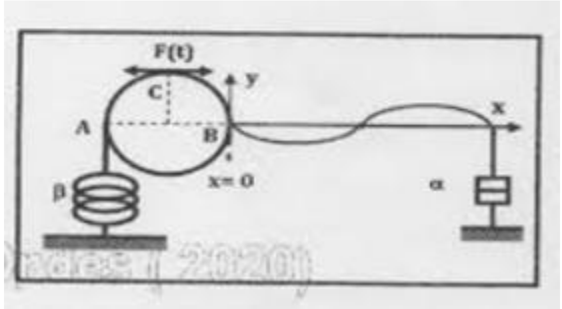


## *Solution de l'exercice 6*

$$r = \frac{Z_c - \alpha}{Z_c + \alpha} = 0 \Rightarrow Z_c = \alpha$$

$$Z(x) = \frac{F_{o \to o}}{\dot{y}(x,t)} = \frac{-T\,\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\dot{y}(x,t)}$$

$$Z(x) = \frac{-T(-j k y_0\, e^{j(\omega t - kx)})}{y_0\, j\omega\, e^{j(\omega t - kx)}}$$

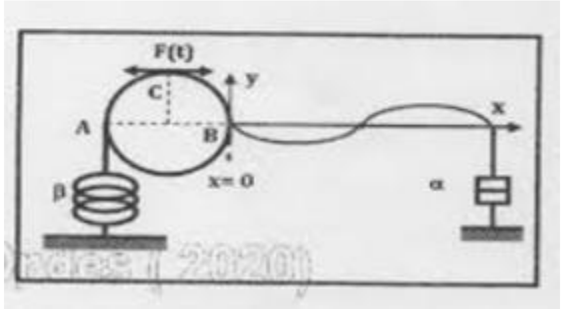


## *Solution de l'exercice 6*

$$Z(x) = \frac{-T\left(-j k y_0 e^{j(\omega t - kx)}\right)}{y_0 j \omega e^{j(\omega t - kx)}}$$

$$= T\frac{k}{\omega} = \frac{T}{V}$$

$$Z(x) = \sqrt{\mu T} = Z_c$$



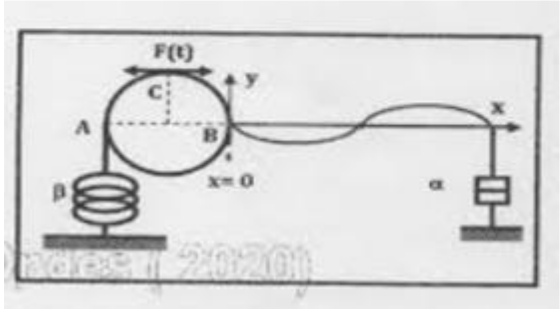
## *Solution de l'exercice 6*

3) La puissance moyenne fournie par le système mécanique à la corde :

$$P = \vec{F}(B) \cdot \vec{V}(B) = F(0) \cdot \dot{y}(0,t)$$

$$= Z(0)\, \dot{y}(0,t) \cdot \dot{y}(0,t)$$

$$\boxed{P = Z(0)\, \dot{y}^2(0,t)}$$



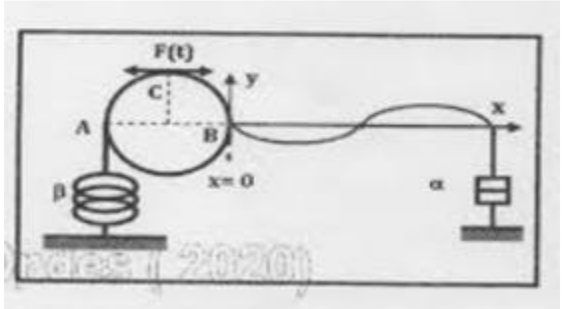
## *Solution de l'exercice 6*

autre méthode

$$P = -T \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} \cdot \dot{y}(0,t)$$

$$= -T \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} \dot{y}(0,t) \times \frac{\dot{y}(0,t)}{\dot{y}(0,t)} = \frac{-T \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}}{\dot{y}(0,t)} \cdot \dot{y}^2(0,t)$$

$$\boxed{P = Z(0)\, \dot{y}^2(0,t)}$$



## *Solution de l'exercice 6*

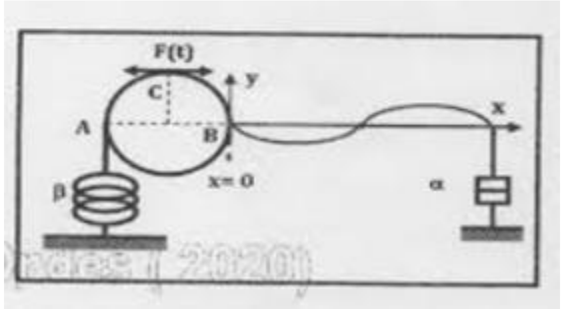
Attention : utiliser la notation réelle.

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$y(0,t) = y_0 \cos(\omega t)$$

$$\langle P \rangle = \langle Z(0)\, \dot{y}^2(0,t) \rangle$$

$$= \alpha\, y_0^2\, \omega^2 \langle \sin^2 \omega t \rangle$$

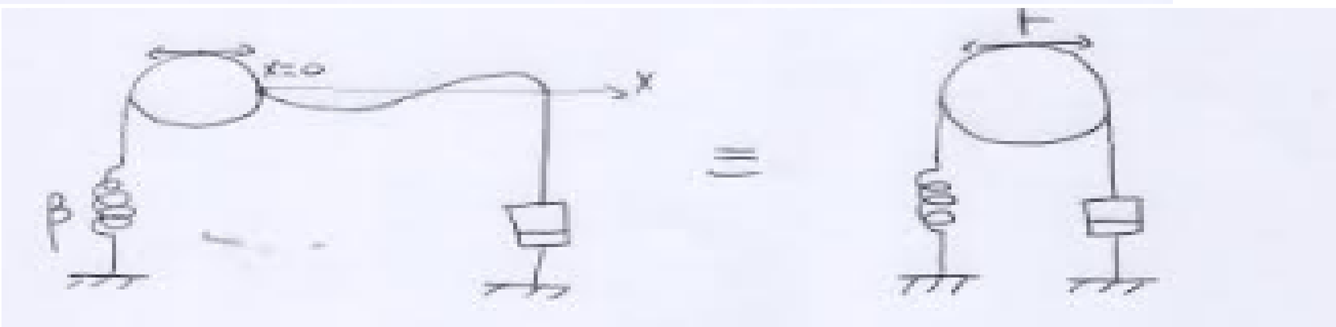



$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} \alpha\, y_0^2\, \omega^2}$$

## *Solution de l'exercice 6*

4) $\langle P \rangle_{max}$ pour $f = 10\,Hz$

a) Déja constante de raideur $\beta$ ?

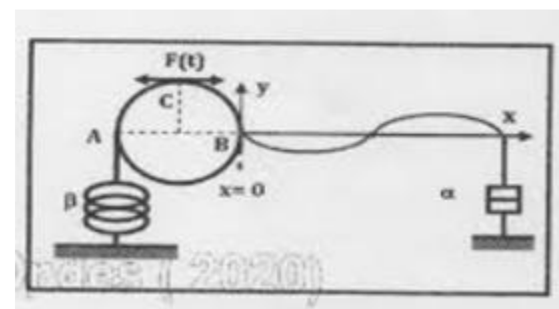



$$T = \frac{1}{2}(I_m)\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$$U = U_\beta = \frac{1}{2}\beta(R^2\theta^2)$$

$$y = R\theta$$



## *Solution de l'exercice 6*

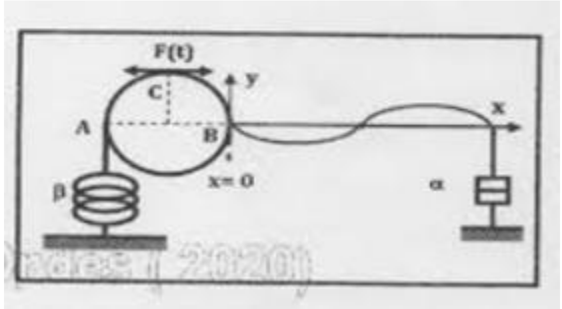
$$D = \frac{1}{2} \alpha R^2 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = F_\theta$$

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta} + \beta R^2 \theta = R F_0 \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{2F_0}{MR} \cos \Omega t$$

$$\text{avec} \begin{cases} 2\delta = \dfrac{2\alpha}{M} \\ \omega_0^2 = \dfrac{2\beta}{M} \end{cases}$$



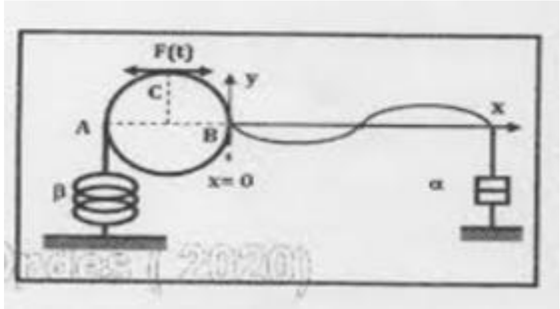
## *Solution de l'exercice 6*

Par représentation complexe :

$$\theta_0 = \frac{2F_0/MR}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\delta^2\omega^2}}$$

On a : $\langle P \rangle = \dfrac{\alpha y_0^2 \omega^2}{2} = \dfrac{1}{2}\alpha \omega^2 R^2 \theta_0^2$

$$= \frac{2\alpha F_0^2 \omega^2}{M^2\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\delta^2\omega^2}}$$



## *Solution de l'exercice 6*

$<P>_{max}$ pour $\omega = \omega_0$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\beta}{M}}$$

$$\beta = \frac{\omega_0^2 M}{2}$$

$$\beta = \frac{(2\pi f)^2 M}{2} = \frac{(2\pi \cdot 10)^2 \times 0{,}5}{2}$$

$$\boxed{\beta = 1000 \text{ N/m}}$$

$$\boxed{Z_c = \sqrt{\mu T} = \alpha \Rightarrow \mu = \frac{\alpha^2}{T} = \frac{\alpha^2}{10}}$$