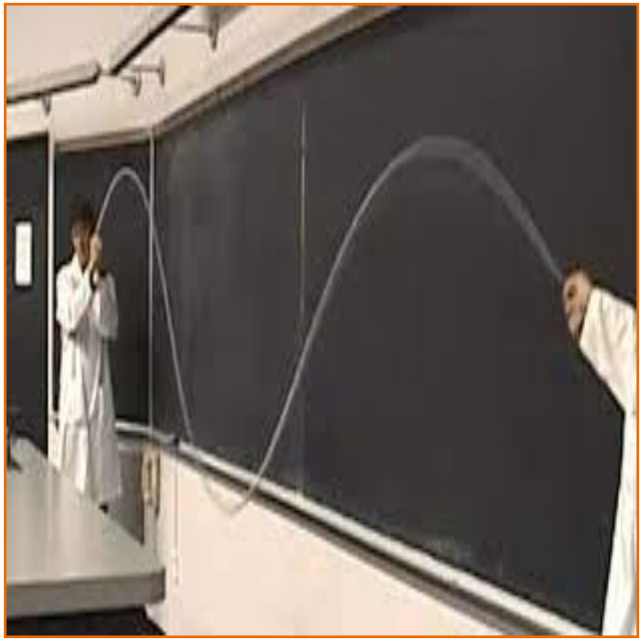
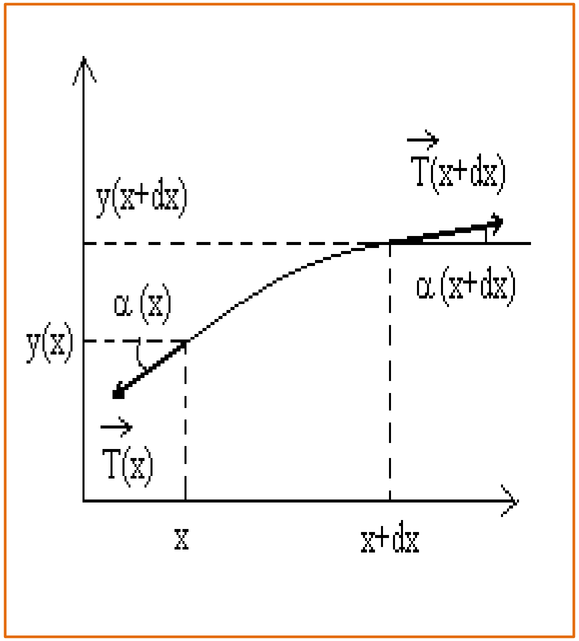
TD physique4

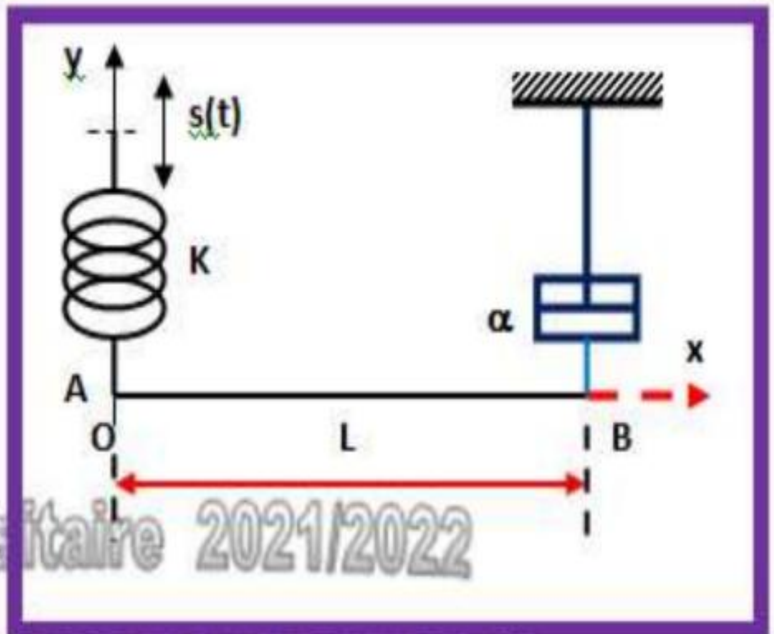




Plan

- *Corrigé de l'exercice 5*
- *Corrigé de l'exercice 7*
- *Questions et réponses*

Exercice 5: Une corde de longueur AB = L = 2 m et de masse m = 80 g est soumise à une tension T. Son extrémité A est reliée à un ressort de constante de raideur K disposé verticalement. L'autre extrémité du ressort est soumise à une déplacement verticale sinusoïdal de pulsation $\omega = 100\pi$ rd/s et d'amplitude $S_0 = 1$ cm ($s(t) = S_0 \exp(j\omega t)$). En x = L, la corde est reliée à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux $\alpha = 0{,}2$ Ns/m (Figure ci-contre).



La tension T de la corde est réglée *de sorte qu'il n'y ait pas de réflexion* au point B. La corde vibre dans le plan vertical suivant un axe Oy . Le déplacement d'un point d'abscisse x de la corde est repéré par sa position y(x,t) .

1) Justifiez sans calcul que le déplacement s'écrit : $y(x,t) = Y_0 \exp[j\omega(t - x/v) + \varphi]$
2) Calculer le coefficient de réflexion en x = L. Déduire les valeurs de la tension T de la corde et de la vitesse de phase V.

3) Donner l'expression du déplacement y(x,t) du point d'abscisse x de la corde. Déduire que les points x = 0 et x = L vibrent en phase.
4) Quelle est la valeur de l'impédance au point A ? Déterminer l'amplitude Y_0 et la phase φ de la vibration du point A. Déduire l'expression du déplacement y(x,t) d'un point d'abscisse x. Dans quel cas la phase est-elle nulle ? Que vaut alors Y_0 ?

Solution de l'exercice 4

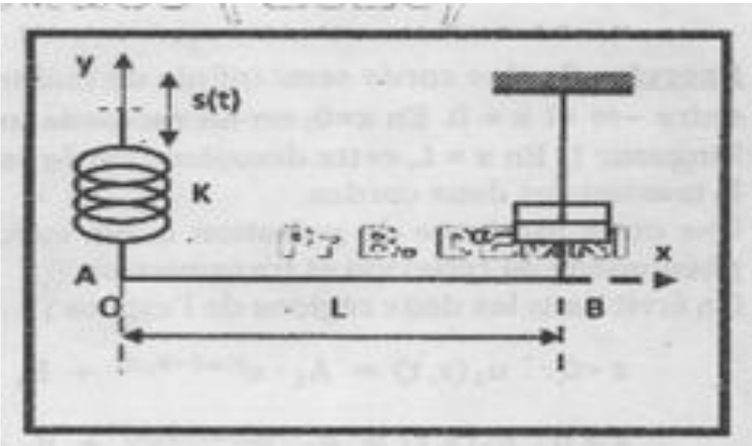
la tension de la corde est telle que la reflexion en B est nulle

$$\overline{y(x,t)} = \overline{y}_i \, e^{j(\omega t - kx)} + 0$$

$$= y_0 \, e^{j\varphi} \cdot e^{j(\omega t - kx)}$$

$$= y_0 \, e^{j\omega(t - \frac{x}{v}) + j\varphi}$$

$$= y_0 \, e^{j[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi]}$$



Solution de l'exercice 4

2)

Coefficient de réflexion en x= L ?

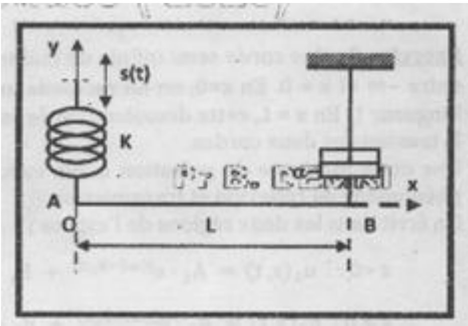
$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = 0 \Rightarrow Z_1 - Z_2 = 0$$

Tension T ?

$$Z_1 = \sqrt{\mu T} = Z_2 = \alpha$$

$$T = \frac{\alpha^2}{\mu} = \frac{\alpha^2}{m} L$$

$$\Rightarrow \boxed{= \frac{(0,2)^2 \cdot 2}{80 \times 10^{-3}} = 1\,N.}$$



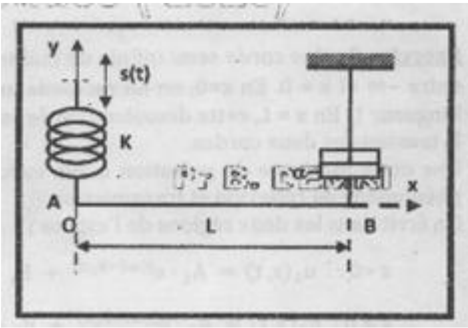
Solution de l'exercice 4

Vitesse V ?

$$V=\sqrt{\frac{T}{\mu}}=\sqrt{\frac{T}{m}L}=\sqrt{\frac{1}{80\times10^{-3}}\times 2}\Rightarrow V=5\,m/s$$

3) Expression de y(x,t) ?

$$y(x,t)=y_0\,e^{j\left[100\pi\left(t-\frac{x}{5}\right)+\phi\right]}$$



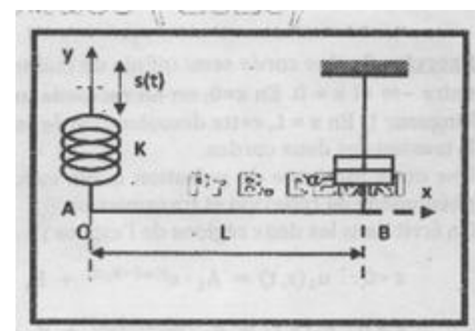
Solution de l'exercice 4

Déphasage entre les ponts en x=0 et x= L ?

$$y(0,t) = y_0\, e^{j(100\pi t + \phi)}$$

$$y(L=2,t) = y_0\, e^{j(100\pi t - 40\pi + \phi)}$$

$$\boxed{\Delta\phi = 40\pi = 20\times(2\pi)}$$



Les points vibrent en phase

Solution de l'exercice 4

4)

Impédance au point A ?

$$Z(A) = Z(x) = Z(B) = \alpha$$

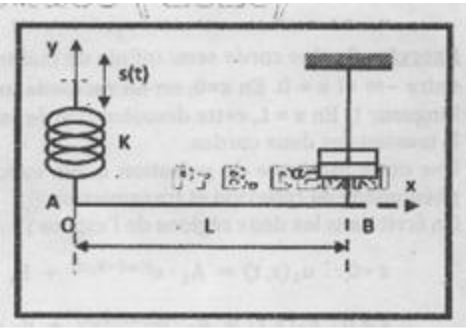
(Pas de reflex ; milieu continu)

Amplitude y_0 ?

PFD $\Rightarrow$ $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = \vec{0}$

$\Downarrow$

$$-k\left[y(0,t) - S(t)\right] + T \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$



Solution de l'exercice 4

$$-k\left[y(0,t)-S(t)\right]+T\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

$$\Downarrow$$

$$+k\left[S(t)-y(0,t)\right]-Z(0)\,\dot{y}(0,t)=0$$

Avec

$$F_{GD}=Z\dot{u}$$
$$F_{DG}=-Z\dot{u}$$

$$k\,S_0\,e^{j\omega t}-k\,y_0\,e^{j(\omega t+\phi)}-\alpha j\omega\,y_0\,e^{j(\omega t+\phi)}=0$$

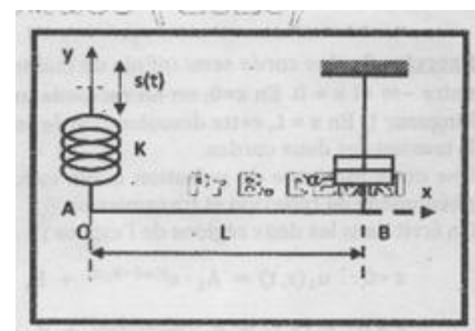
(x=0)

Solution de l'exercice 4

$$k s_0 e^{j\omega t} - k y_0 e^{j(\omega t+\phi)} - \alpha j \omega y_0 e^{j(\omega t+\phi)} = 0.$$

$$k s_0 - k y_0 e^{j\phi} - j \alpha \omega y_0 e^{j\phi} = 0.$$

$$y_0 e^{j\phi} = \frac{k s_0}{k + j\alpha\omega} = \frac{s_0}{1 + j\frac{\alpha\omega}{k}}$$



Solution de l'exercice 4

$$y_0 e^{j\phi} = \frac{k S_0}{k + j\alpha\omega} = \frac{S_0}{1 + j\frac{\alpha\omega}{k}}$$

$$y_0 = \frac{S_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha\omega}{k}\right)^2}}$$

$$\phi = -\operatorname{arctg}\frac{\alpha\omega}{k}$$

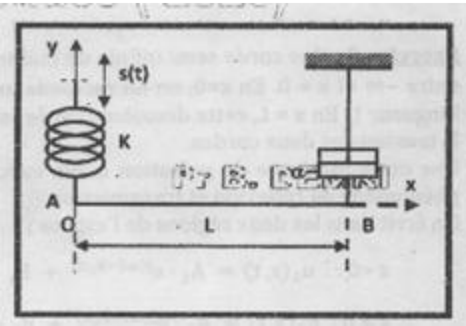
Dans quel cas la phase est nulle ?

$\ast\ \phi = 0$?

La phase est nulle pour

$\alpha = 0$

$k \Rightarrow \infty$

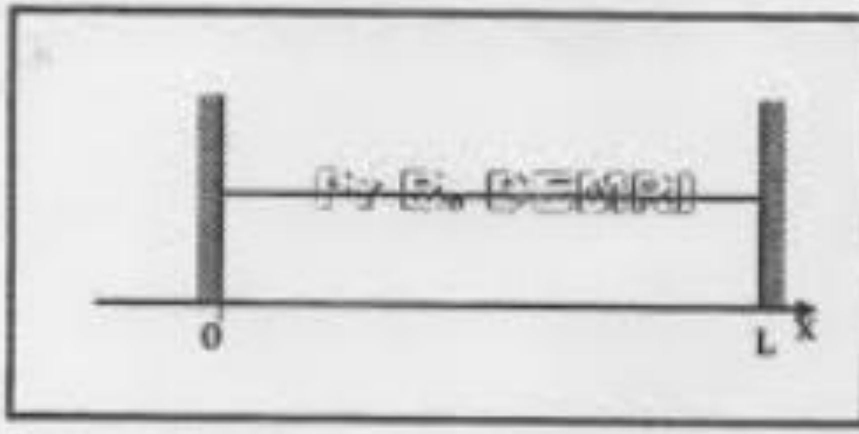


$k \Rightarrow \infty$ (le ressort est une tige (barre)

Plan

- *Corrigé de l'exercice 5*
- *Corrigé de l'exercice 7*
- *Questions et réponses*

Exercice 7: Une corde de longueur *L* et de masse linéique μ est tendue horizontalement avec une tension T entre deux parois rigides.
La tension de la corde est réglée de sorte que la longueur de la corde soit égale à la longueur d'onde ($L = \lambda$). On crée dans la corde une onde sinusoïdale de pulsation ω.



1- Montrer que le déplacement un en un point x de la corde s'écrit :
$$y(x,t) = A\sin(kx)\sin(\omega t)$$
2- Calculer les densités linéiques d'énergie cinétique ε_c, potentielle e_p et leurs valeurs moyennes dans le temps $\langle\varepsilon_c\rangle$ et $\langle\varepsilon_p\rangle$. Déduire la densité d'énergie moyenne dans le temps $\langle\varepsilon\rangle$.

Solution de l'exercice 7

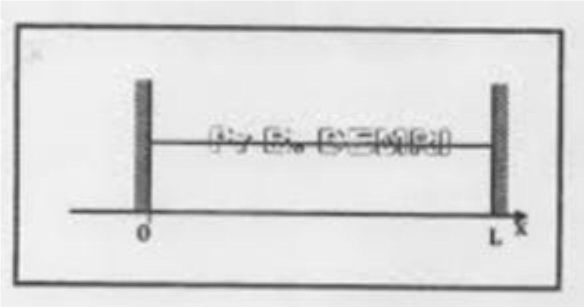
une onde sinusoïdale

T est réglée $\longrightarrow$ $L = \lambda$

1) Montrer que $y(x,t) = A \sin(kx) \sin(\omega t)$

$$\overline{y(x,t)} = \overline{y_i(x,t)} + \overline{y_r(x,t)}$$

$$= \bar{y}_i \, e^{j(\omega t - kx)} + \bar{y}_r \, e^{j(\omega t + kx)} \quad \ldots (I)$$



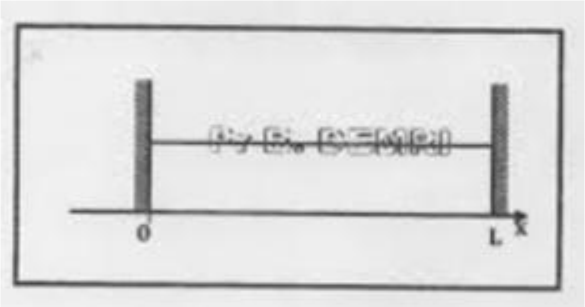
Solution de l'exercice 7

Les conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_i + \bar{y}_r = 0 \Rightarrow \bar{y}_r = -\bar{y}_i \;\cdots\; (1) \\ \bar{y}_i e^{-jkL} + \bar{y}_r e^{jkL} = 0 \;\cdots\; (2) \end{cases}$$

(1) dans (I) $\Rightarrow$

$$\overline{y(x,t)} = \bar{y}_i \left[e^{j(\omega t - kx)} - e^{j(\omega t + kx)} \right]$$

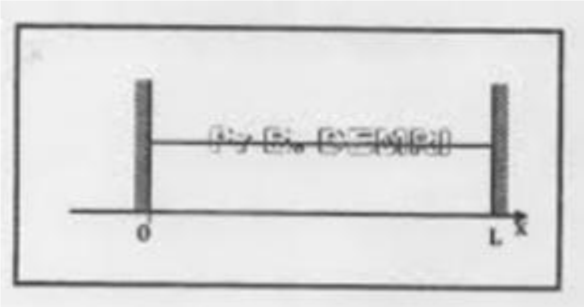


Solution de l'exercice 7

$$= \bar{y}_i \, e^{i\omega t} \left[e^{-ikx} - e^{ikx} \right]$$

$$\boxed{\cos \omega t + j \sin \omega t} \qquad \boxed{-2j \sin kx}$$

$$\boxed{\Rightarrow y(x,t) = 2 y_i \sin(kx) \sin(\omega t)}$$



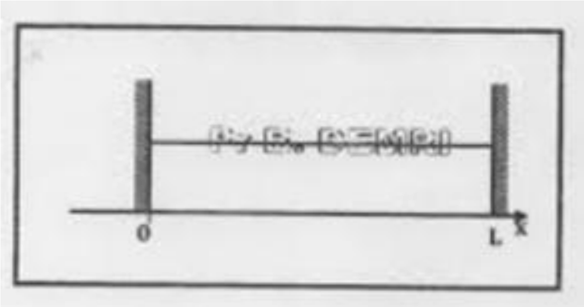
Solution de l'exercice 7

2) $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}_p$?

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2(2y_0)^2\cos^2\omega t\,\sin^2 kx}$$

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{E}_c\,dt$$



$$\boxed{\langle \varepsilon_c \rangle = \mu \omega^2 y_i^2 \sin^2 kx}$$

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2$$

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2} T k^2 (2y_i)^2 \sin^2 \omega t \cos^2 kx$$

$$\langle \varepsilon_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_p \, dt \Rightarrow \boxed{\langle \varepsilon_p \rangle = T k^2 y_i^2 \cos^2 kx}$$

$$\langle \mathcal{E}_p \rangle = T k^2 y_i^2 \cos^2 kx$$

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = T k^2 y_i^2 \sin^2 kx$$

$$\boxed{T k^2 = \mu \omega^2}$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathcal{E}_c \rangle + \langle \mathcal{E}_p \rangle$$

$$= T k^2 y_i^2 (\underbrace{\sin^2 kx + \cos^2 kx}_{1}) \Rightarrow \boxed{\langle \mathcal{E} \rangle = T k^2 y_i^2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\,\mathrm{d}t = 0$$

Merci de votre attention