Tenseur d'inertie

Définition :

Etant donné un solide (S), un point o appartenant a (S) et un repère orthonormé (O, XYZ), on appelle tenseur d'inertie de (S), en O, relativement au repère considéré et on note $\mathcal{J}_o$, la matrice symétrique :

$$\mathcal{J}_o = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Ou

$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$: Moment d'inertie par rapport à l'axe Ox

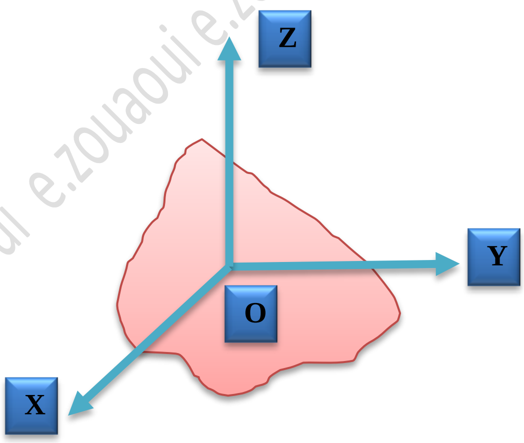
$I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\, dm$: Moment d'inertie par rapport à l'axe Oy

$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$: Moment d'inertie par rapport à l'axe Oz

$I_{xy} = \int xydm$: produit d'inertie par rapport aux axes Ox et Oy

$I_{xz} = \int xzdm$: produit d'inertie par rapport aux axes Ox et Oz

$I_{yz} = \int yzdm$: produit d'inertie par rapport aux axes Oy et Oz



La matrice $\mathcal{J}_o$ est symétrique réelle, diagonalisable.

Il y a toujours trois valeurs propres réelles et trois directions propres réelles et orthogonales.

E.ZOUAOUI , E-mail adress: e.zouaoui@g.essa-alger.dz

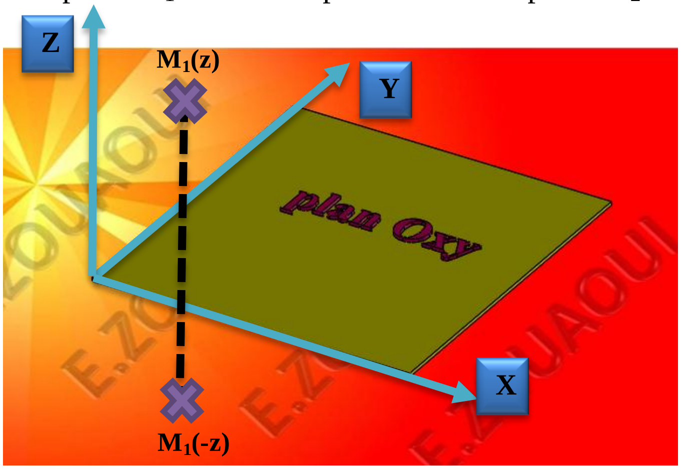
- Les valeurs propres sont appelées moments principaux d'inertie.
- Les directions propres sont appelées axes principaux d'inertie.

b)Cas particuliers

1. le système présente certains plans de symétrie

- Si Oxy est un plan de symétrie :

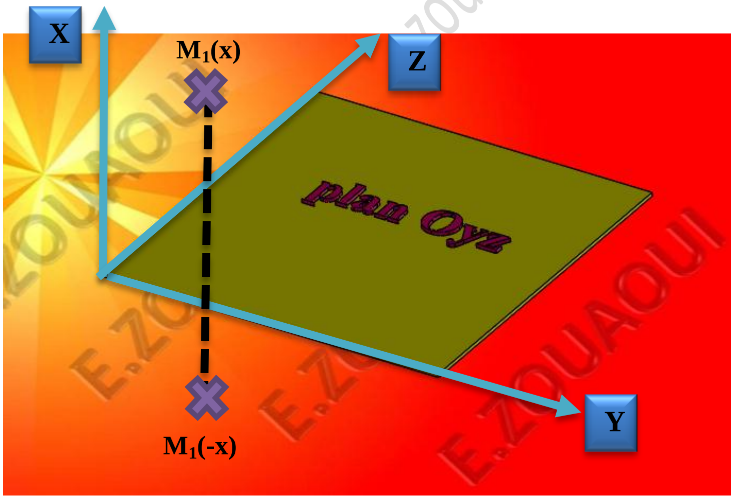
A tout point M_1 de cote on peut associer le point M_2 de cote –z.



$\int xydm = 0 \Longrightarrow I_{xz} = 0$ et $\int yzdm = 0 \Longrightarrow I_{yz} = 0$

- Si Oyz est un plan de symétrie :

A tout point M_1 de cote x,on peut associer le point M_2 de cote –x.



$\int yxdm = 0 \Longrightarrow I_{xy} = 0$ et $\int zxdm = 0 \Longrightarrow I_{xz} = 0$

- De meme ,si oxz est un plan de symétrie :

$\int yxdm = 0 \Longrightarrow I_{xy} = 0$ et $\int zxdm = 0 \Longrightarrow I_{xz} = 0$

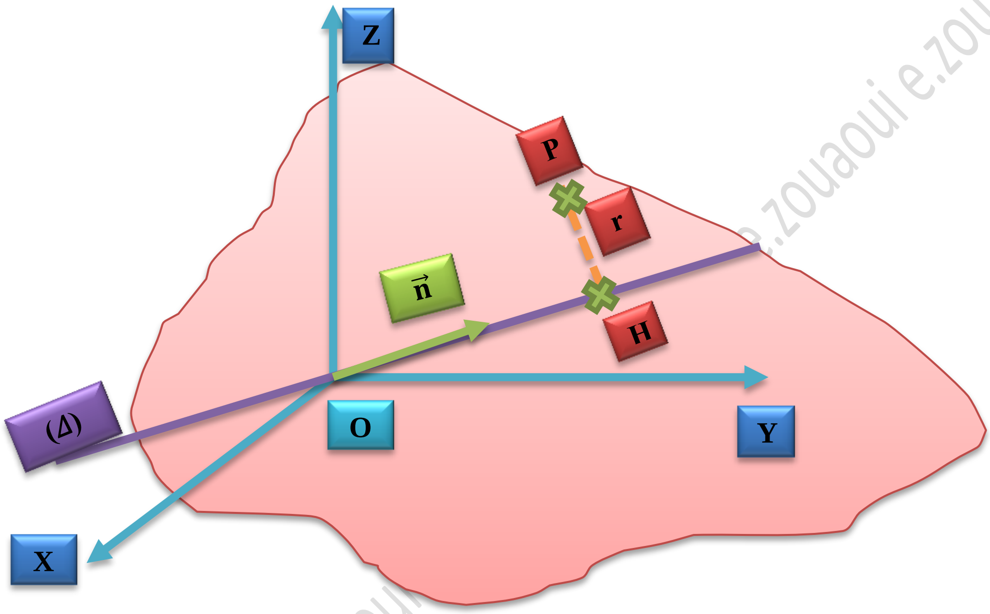
2. Le système est un corps de révolution autour de Oz
   - Tout plan passant par l'axe Oz est un plan de symétrie ;en particulier les plans Oxy et Oyz.

Donc :

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

$I_{xx}=I_{yy}$ (Ox et Oy jouent le même rôle).

C)Moment d'inertie par rapport a une droite



Le moment d'inertie par rapport à une droite est définie par :

$$I_\Delta = \int r^2 dm$$

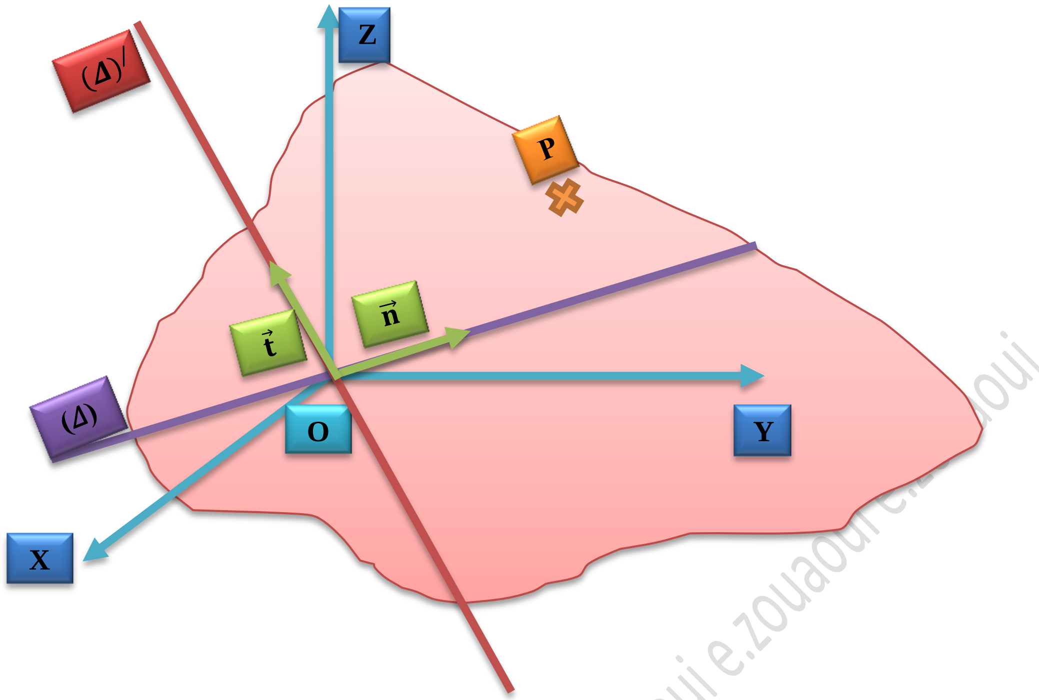
r représente la distance de l'élément matériel P a la droite (*Δ*).

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire.

Si le tenseur d'inertie en O étant connu, le moment d'inertie par rapport à la droite (O, $\vec{n}$),passant par O et de direction $\vec{n}$,est :

$$I_\Delta = \vec{n}.\mathcal{J}_o.\vec{n}$$

d) Produit d'inertie par rapport à 2 droites perpendiculaires



Le produit d'inertie noté π_{nt} est définie par :

$$\pi_{nt} = \int x_n x_t dm$$

x_n et x_t sont les coordonnées de P sur les axes (Δ) et $(\Delta^/)$.

$x_n = \overrightarrow{OP}.\vec{n}$, $x_t = \overrightarrow{OP}.\vec{t}$

Le tenseur d'inertie étant connu en O,le produit d'inertie par rapport aux droites perpendiculaires $\Delta(O,\vec{n})$ et $\Delta^/(O,\vec{t})$,est :

$$\pi_{nt} = -\vec{t}.\mathcal{J}_o.\vec{n}$$

e)Théorème de HUYGHENS

Problème : le problème est de déterminer le tenseur d'inertie au point O dans la base (e) ,si

on le connait au centre d'inertie G, dans la même base :

- Tenseur d'inertie en G, $\mathcal{J}_G^*$ connu ⟶ déterminer $\mathcal{J}_O$ en fonction de $\mathcal{J}_G^*$?

On pose

$$\overrightarrow{OP} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} \qquad \overrightarrow{OG} = \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{cases} \qquad \overrightarrow{GP} = \begin{cases} x_1{}^* \\ x_2{}^* \\ x_3{}^* \end{cases}$$

E.ZOUAOUI , E-mail adress: e.zouaoui@g.essa-alger.dz

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP} \Longrightarrow x_i = a_i + x_i^*$ avec i=1,2,3.

e.1)Exprimons les produits d'inertie π_{ij}

$$\pi_{ij} = \int x_i x_j \, dm = \int (a_i + x_i^*)(a_j + x_j^*) dm$$

$\pi_{ij} = \int x_i^* x_j^* dm + m a_i a_j + a_i \int x_j^* dm + a_j \int x_i^* dm$

D'après la définition du centre d'inertie :

$$\int x_j^* dm = \int \overrightarrow{GP} \, dm = 0$$

Donc $\pi_{ij} = \pi_{ij}{}^* + m a_i a_j$

D'où $I_{xy} = I_{xy}{}^* + m a_1 a_2$

$I_{yz} = I_{yz}{}^* + m a_2 a_3$

$I_{xz} = I_{xz}{}^* + m a_1 a_3$

e.2)Exprimons les moments d'inertie I_{ii}

$$I_{ii} = \int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_i^2) \, dm$$

Puisque $x_i = a_i + x_i^*$

On a donc $x_i^2 = a_i^2 + 2a_i x_i^* + x_i^{*2}$

$I_{ii} = m(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_i^2) + 2a_1 \int x_1^* dm + 2a_2 \int x_2^* \, dm + 2a_3 \int x_3^* \, dm - 2a_i \int x_i^* \, dm + \int (x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} - x_i^{*2}) dm$

Comme précédemment $\int x_i^*$ dm=0 avec i=1,2,3

D'où

$I_{ii} = I_{ii}^* + m \, (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_i^2)$

Donc

$$I_x = I_x^* + m \, (a_2^2 + a_3^2)$$

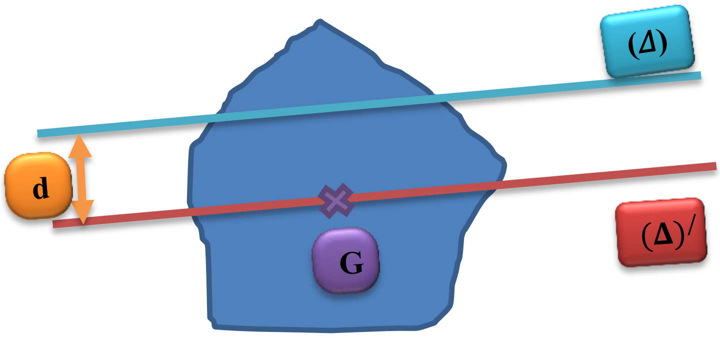
$$I_y = I_y^* + m \, (a_1^2 + a_3^2)$$

$$I_z = I_z^* + m \, (a_1^2 + a_2^2)$$

Théorème de HUYGHENS

E.ZOUAOUI , E-mail adress: e.zouaoui@g.essa-alger.dz

1-le moment d’inertie d’un système par rapport a la droite (O,$\vec{n}$) est égal au moment d’inertie de ce système par rapport a la droite (G, $\vec{n}$) augmente du moment d’inertie de G affecté de la masse par rapport à la droite (O, $\vec{n}$).



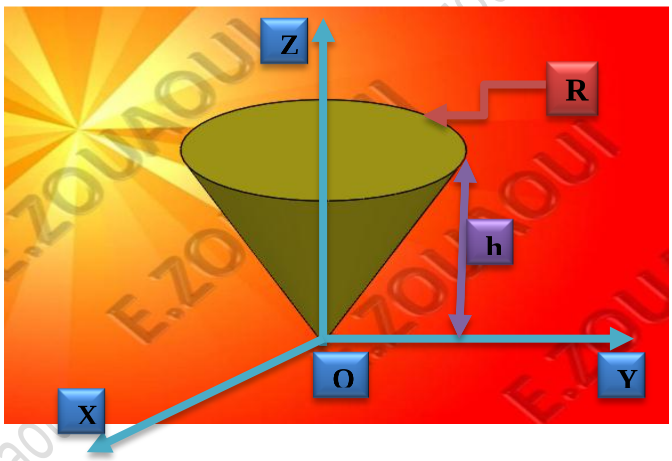
$(\Delta) \,//\, (\Delta^{/})$

$$I_{\Delta} = I_{\Delta^{/}} + Md^2$$

2-le produit d’inertie d’un système par rapport a 2 droites perpendiculaires (O, $\vec{n}$) et (O, $\vec{t}$) est égal au produit d’inertie de ce système par rapport aux droites (G, $\vec{n}$) et (G, $\vec{t}$) augmenté du produit d’inertie de G, affecté de la masse totale ,par rapport aux droites (O, $\vec{n}$) et (O, t).

f) Exemples :

1-Determiner le tenseur d’inertie au point O d’un cône volumique



Le solide étant de révolution autour de z ,le tenseur d’inertie s’écrit :

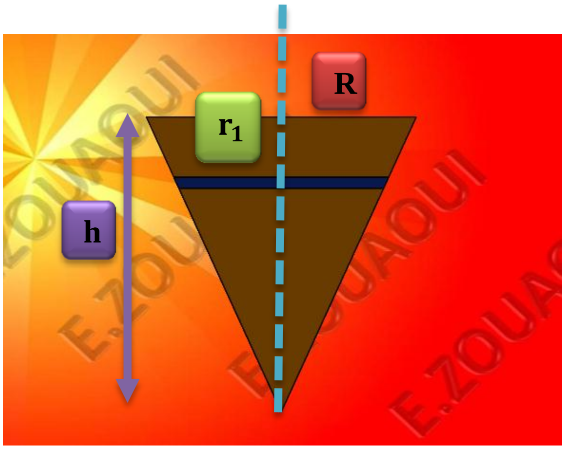
$$\mathcal{J}_O = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

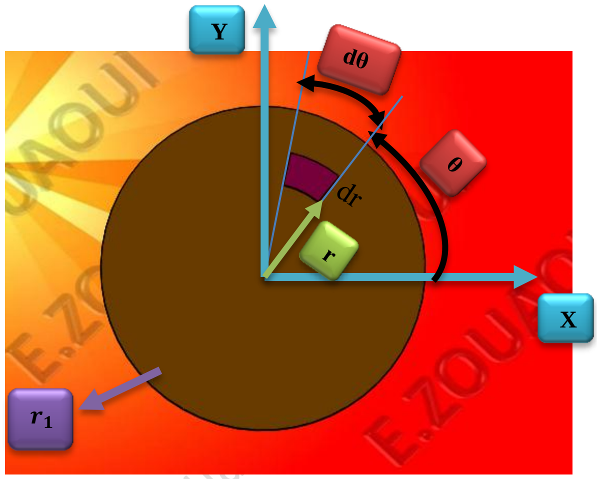
Avec A=$\int(y^2+z^2)dm = \int(x^2+z^2)\,dm$

C=$\int(x^2+y^2)dm$

E.ZOUAOUI , E-mail adress: e.zouaoui@g.essa-alger.dz

Le solide étant un volume, nous choisissons l'élément volumique suivant :(pour le calcul des intégrales).





— $C=\int (x^2+y^2)\, dm$ or $x^2+y^2=r^2$

$dm=\rho dv=\rho r d\theta . dr . dz$

On a aussi $\frac{R}{h}=\frac{r_1}{z} \longrightarrow r_1=\frac{Rz}{h}$

Donc

$$C=\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\left(\int_0^{\frac{Rz}{h}} r^3 dr\right) dz d\theta=\frac{\rho}{10}\pi R^4 h$$

La masse volumique du système est égale a

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\pi R^2\frac{h}{3}}$$

Le volume peut être déterminé par le théorème de GULDIN($2^{\text{ème}}$).

Il vient :$C=\frac{3}{10}MR^2$

— $A=\int (x^2+z^2)dm=\int (y^2+z^2)\, dm$

$2A=\int (x^2+y^2)dm+2\int z^2 dm$

Donc

$$A=\frac{C}{2}+\int z^2 dm$$

Si on prend que le disque élémentaire de rayon r_1 :

$$dm=\rho dv=\rho\pi r_1^2 dz=\rho\pi\frac{R^2}{h^2}z^2 dz$$

E.ZOUAOUI , E-mail adress: e.zouaoui@g.essa-alger.dz

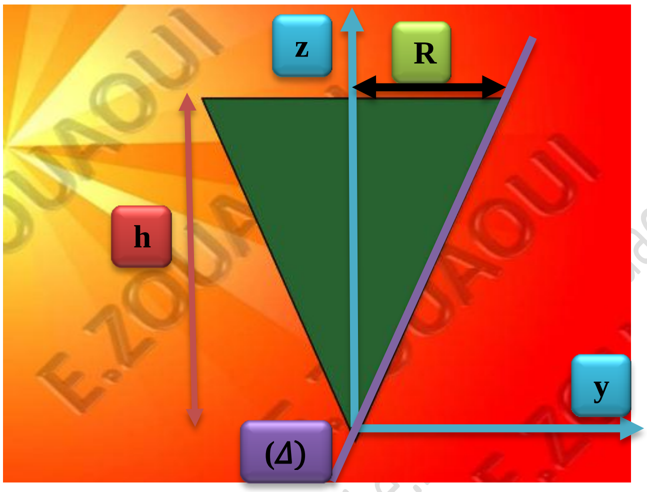
D'où

$$\int z^2\, dm = \rho \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{5}\, Mh^2$$

Il vient : A=$\frac{3}{20}\ M(R^2+4h^2)$

2-Determiner le moment d'inertie par rapport à une génératrice.

Toutes les génératrices du cône jouent le même rôle, on considère celle définie par le vecteur unitaire $\vec{n}$:



$$\vec{n} = \begin{cases} 0 \\ sin\alpha \\ cos\alpha \end{cases}$$

$$I_\Delta = \vec{n}.\mathcal{J}_o.\vec{n}$$

$$I_\Delta = (0, sin\alpha, cos\alpha) \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ sin\alpha \\ cos\alpha \end{Bmatrix}$$

$$I_\Delta = A sin\alpha^2 + C cos\alpha^2$$

Or $\sin\alpha^2 = \frac{R^2}{R^2+h^2}$ $\quad et\ cos\alpha^2 = \frac{h^2}{R^2+h^2}$

D'où

$$I_\Delta = \frac{3}{20} M \frac{R^2}{R^2+h^2} (R^2+6h^2)$$

E.ZOUAOUI , E-mail adress: e.zouaoui@g.essa-alger.dz