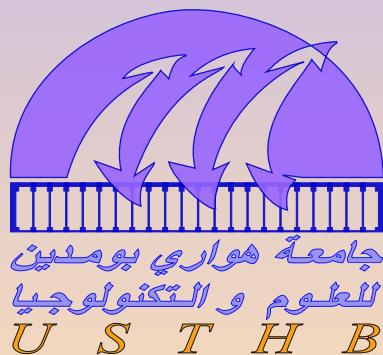


UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE⁽¹⁾
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES
DÉPARTEMENT D'ANALYSE



Notes de Cours du module
Séries (Math 3)

Par

LAADJ Toufik⁽²⁾

Pour

Deuxième année Licence
Domaine : Sciences et Technologies

Septembre 2013

(1) USTHB : Bab Ezzouar Alger, Algérie.

(2) Page Web : <http://perso.usthb.dz/~tlaadj/>

Table des matières

Table des matières	iii
Description du Cours	iv
0 Rappel sur les suites numériques réelles	1
1 Séries numériques	3
1.1 Généralités	4
1.1.1 Convergence	4
1.1.2 Propriétés	5
1.2 Séries à termes positifs	6
1.2.1 Règles de comparaison	7
1.2.2 Séries de Riemann	9
1.2.3 Critère de D'Alembert	10
1.2.4 Critère de Cauchy (ou règle de Cauchy)	11
1.2.5 Critère de Raabe-Duhamel	13
1.2.6 Critère de Gauss	13
1.3 Séries à termes quelconques	14

1.3.1	Critère d'Abel	14
1.3.2	Séries alternées	15
1.4	Séries absolument convergentes	16
1.5	Séries commutativement convergentes	16
2	Suites et séries de fonctions	19
2.1	Suites de fonctions	19
2.1.1	Convergence simple	20
2.1.2	Convergence uniforme	20
2.1.3	Théorèmes de passage à la limite	21
2.2	Séries de fonctions	22
2.2.1	Domaine de convergence	22
2.2.2	Convergence uniforme	23
2.2.3	Convergence normale	24
2.2.4	Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes	24
3	Séries entières	26
3.1	Généralités	27
3.2	Rayon de convergence	28
3.2.1	Existence du rayon de convergence	28
3.2.2	Calcul du rayon de convergence	29
3.3	Propriétés des séries entières	30
3.3.1	Continuité	30
3.3.2	Dérivation	31
3.3.3	Intégration	32
3.3.4	Opérations sur les séries entières	33

3.4 Fonctions développables en série entière	33
3.4.1 Série de Taylor	34
3.5 Séries entières et équations différentielles	37
4 Séries de Fourier	39
4.1 Séries trigonométriques	39
4.1.1 Représentation complexe d'une série trigonométrique	41
4.1.2 Calcul des coefficients de la série trigonométrique	41
4.2 Séries de Fourier	42
4.2.1 Séries de Fourier de fonctions 2π -périodiques	42
4.2.2 Séries de Fourier d'une fonction de période arbitraire	45
4.2.3 Séries de Fourier de fonctions non périodiques	46
4.2.4 Égalité de Parseval	47
Références	49

Description du Cours

Objectif du Cours

L'objectif du module Séries (Math 3) est l'étude des sommes infinies

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Ces notes de cours donnent les principales définitions et les résultats concernant ces sommes infinies (séries), illustrés par des exemples.

Contenu du Cours

- Séries numériques
- Suites et séries de fonctions
- Séries entières
- Séries de Fourier

Résultats d'apprentissage

À la fin du cours, l'étudiant doit avoir une compréhension approfondie de la théorie des séries et devrait être en mesure d'appliquer ces connaissances pour résoudre les exercices dans une variété de contextes. En particulier, l'étudiant doit être capable de :

- Comprendre ce qu'une série est.
- Comprendre la distinction entre une suite, suite des sommes partielles et une série.
- Comprendre la condition nécessaire de convergence.
- Étudier la nature des séries en utilisant les divers critères de convergence.
- Comprendre la convergence absolue et semi convergence.
- Étudier la convergence simple et uniforme des suites et des séries de fonctions.
- Trouver le rayon de convergence et la somme d'une série entière.
- Trouver le développement en séries entières d'une fonction.
- Étudier la convergence d'une série de Fourier.
- Développer une fonction en série de Fourier.
- Trouver la somme des séries numériques en utilisant les séries de Fourier.

C h a p i t r e 0

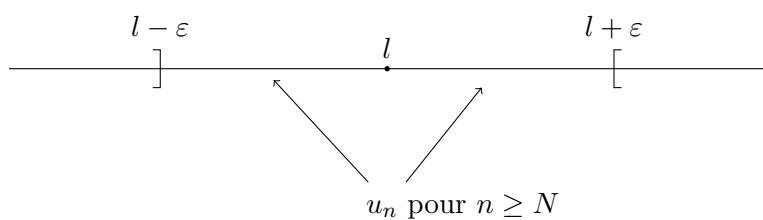
Rappel sur les suites numériques réelles

Une suite numérique réelle est une application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n). \end{aligned}$$

- On note $f(n)$ par $u(n)$ ou u_n .
- u_n est le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou $(u_n)_n$, ou simplement (u_n) .
- La suite (u_n) converge vers une limite l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \text{ implique } |u_n - l| < \varepsilon.$$



On lit "la suite (u_n) tends vers l lorsque n tends vers $+\infty$ " et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ou simplement $u_n \rightarrow l$.

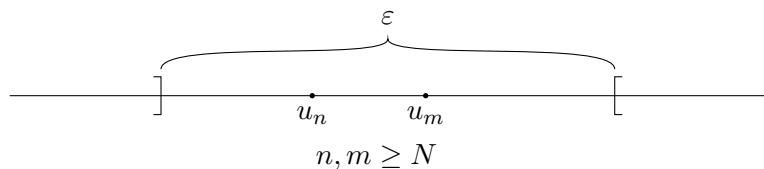
- La suite (u_n) diverge si elle ne converge pas ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$.
- Si la limite d'une suite existe elle est unique.
- Une suite réelle croissante et majorée converge.

- Une suite réelle décroissante et minorée converge.
- Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, si (u_n) croissante, (v_n) décroissante, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Suites de Cauchy

On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \geq N \text{ implique } |u_n - u_m| < \varepsilon.$$



- Une suite (u_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy.
- Si (u_n) n'est pas une suite de Cauchy, elle diverge.

C h a p i t r e 1

Séries numériques

Sommaire

1.1 Généralités	4
1.1.1 Convergence	4
1.1.2 Propriétés	5
1.2 Séries à termes positifs	6
1.2.1 Règles de comparaison	7
1.2.2 Séries de Riemann	9
1.2.3 Critère de D'Alembert	10
1.2.4 Critère de Cauchy (ou règle de Cauchy)	11
1.2.5 Critère de Raabe-Duhamel	13
1.2.6 Critère de Gauss	13
1.3 Séries à termes quelconques	14
1.3.1 Critère d'Abel	14
1.3.2 Séries alternées	15
1.4 Séries absolument convergentes	16
1.5 Séries commutativement convergentes	16

1.1 Généralités

Soit (u_n) une suite de nombres réels, on pose

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0, \\ S_1 &= u_0 + u_1, \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2, \\ &\dots \\ S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k. \end{aligned}$$

Définition 1

- La suite $(S_n)_n$ est appelée **suite des sommes partielles**.
- La limite de (S_n) est appelée **série** de terme général u_n .

Notation. Une série de terme général u_n est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, ou $\sum_{n \geq 0} u_n$, ou simplement $\sum u_n$.

1.1.1 Convergence

Définition 2 (Convergence)

Si $(S_n)_n$ est convergente vers S , la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite **convergente** et

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

est sa somme.

Une série qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Le nombre $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ est appelé le **reste** d'ordre n .

Exemple 1

a) Série géométrique. Le terme général d'une série géométrique est $u_n = ar^n$, $a \neq 0$.

$$\text{La somme partielle } S_n = \begin{cases} a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, & r \neq 1, \\ a(n+1), & r = 1. \end{cases}$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente si $|r| < 1$ et divergente si $|r| \geq 1$.

Dans le cas de convergence $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{a}{1 - r}$.

b) Série harmonique. Le terme général d'une série harmonique est $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est une série divergente. On écrit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Sa somme partielle est

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente et sa somme $S = 1$.

On écrit $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. ■

Condition nécessaire de convergence

Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Remarque 3

- a) La condition $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ n'est suffisante.
- b) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, alors $\sum u_n$ est divergente. ■

Définition 4

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, la série $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente**.

Exemple 2

- a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ mais la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (non grossièrement).
- b) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{\pi}{n}$ est grossièrement divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi}{n} = 1 \neq 0$. ■

1.1.2 Propriétés

Proposition 5

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors les deux séries sont de même nature. En cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.

Corollaire 6

On ne change pas la nature d'une série $\sum u_n$ si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.

Remarque 7

La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. ■

Proposition 8

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = V$ sont convergentes, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha U + \beta V$.

Exemple 3

Considérons la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)} \right)$. Cette série est convergente car les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ convergent. De plus on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)} \right) = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 3 \times 1 + 2 \times 1 = 5. \blacksquare$$

Définition 9 (Critère de Cauchy)

Une série est dite de Cauchy si la suite des sommes partielles est de Cauchy *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N \text{ implique } |S_m - S_n| < \varepsilon,$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N \text{ implique } \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \varepsilon.$$

1.2 Séries à termes positifs

Définition 10

Une série $\sum u_n$ est dite série à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$.

Exemple 4

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-5}{n^2}$ est une série à termes positifs. ■

Proposition 11

Une série à termes positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est majorée.

1.2.1 Règles de comparaison**Théorème 12 (Règle de comparaison)**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors :

- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Exemple 5

Considérons les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

On a $0 \leq \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente. ■

Théorème 13 (Règle de comparaison logarithmique)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes **strictement** positifs. On suppose que $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Exemple 6

Étudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n}$ en utilisant la règle de comparaison logarithmique

avec la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Posons $u_n = \frac{n+2}{3^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+3}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n+2} = \frac{n+3}{3(n+2)} \leq \frac{1}{2} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n}$ est convergente car $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ l'est. ■

Théorème 14 (Critère d'équivalence)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes **strictement** positifs. On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \quad l \neq 0, \quad l \neq +\infty.$$

Alors, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 7

1. Soient les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ telles que $u_n = \log\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ et $v_n = \frac{3}{2^n}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{3}$, et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ l'est aussi.

2. Soient les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ telles que $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la série harmonique qui est divergente, donc il en est de même de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. ■

Théorème 15 (Comparaison avec une intégrale)

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue, décroissante et positive.

On pose $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ existe.}$$

Exemple 8

1. Considérons l'application $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On a $\int_1^t \frac{1}{x} dx = \log t$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = +\infty$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

2. Soit la fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

La fonction f est continue, décroissante et positive.

On a $\int_1^t f(x) dx = \log \frac{t}{t+1} - \log \frac{1}{2}$ et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t f(x) dx = \log 2 < +\infty$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est alors convergente. ■

1.2.2 Séries de Riemann

Définition 16

On appelle série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ toute série dont le terme général est de la forme

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que les séries de Riemann sont des séries à termes positifs et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}.$$

On conclut que si $\alpha \leq 0$, la série de Riemann est divergente puisque le terme général ne tend pas vers 0.

Si $\alpha = 1$, on obtient la série harmonique qui est divergente elle aussi.

Examinons le cas $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

Soit la fonction définie par

$$\begin{aligned} f_\alpha : [1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x^\alpha}. \end{aligned}$$

La fonction f_α est positive, continue et décroissante car la dérivée $f'_\alpha(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$.

On a $\int_1^t f_\alpha(x) dx = \frac{1}{1-\alpha} (t^{-\alpha+1} - 1)$ et donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t f_\alpha(x) dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Alors, la série de Riemann est divergente si $0 < \alpha < 1$ et convergente si $\alpha > 1$.

Proposition 17

La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 9

Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}$ sont des séries de Riemann divergentes. ■

Proposition 18 (Règle de Riemann)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ et $M > 0$ tels que $n^\alpha u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ et $m > 0$ tels que $n^\alpha u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ diverge.

Corollaire 19

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = l$, $l \neq 0$, $l \neq +\infty$. Alors, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 10

Considérons la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{\frac{3}{n^2}} - 1)$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (e^{\frac{3}{n^2}} - 1) = 3$, $\alpha = 2 > 1$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{\frac{3}{n^2}} - 1)$ converge. ■

1.2.3 Critère de D'Alembert**Proposition 20**

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

- S'il existe $M \in \mathbb{R}$, $0 < M < 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Corollaire 21 (Critère de D'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

- $l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge.
- $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.
- $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Exemple 11

1. Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Alors, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ est convergente.

2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e > 1,$$

et par suite la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$ est divergente. ■

1.2.4 Critère de Cauchy (ou règle de Cauchy)

Proposition 22

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- Si existe $M \in \mathbb{R}$, $0 < M < 1$ tel que $\sqrt[n]{u_n} \leq M$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Corollaire 23 (Critère de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

- $l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge.
- $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.
- $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Exemple 12

Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ de terme général $u_n = \left(a + \frac{1}{n^p} \right)^n$, avec $a > 0$ et $p > 0$.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{1}{n^p} \right) = a.$$

Alors, la série est convergente pour $a < 1$ et divergente pour $a > 1$.

Si $a = 1$, on ne peut rien conclure en utilisant le critère de Cauchy.

Mais on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)^{n^p}\right]^{n^{1-p}} = \begin{cases} 1 & \text{si } p > 1 \\ e & \text{si } p = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < p < 1 \end{cases}.$$

Le terme général ne tend pas vers zéro, la série est donc divergente. ■

Une question se pose maintenant, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux critères de d'Alembert et celui de Cauchy?

La réponse est donnée par la proposition suivante.

Proposition 24

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$, alors $l_1 = l_2$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

La réciproque du deuxième résultat est fausse. En effet, il suffit de considérer la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{3} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert ne s'applique pas.

Pourtant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{3} < 1$, donc le critère de Cauchy s'applique et la série converge.

Cet exemple montre que le critère de Cauchy est plus puissant que celui de D'Alembert.

1.2.5 Critère de Raabe-Duhamel

Proposition 25

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l$.

- $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge.
- $l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.
- $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Exemple 13 (Série de Bertrand)

Soit la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La série de Bertrand $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$

- converge si et seulement si ($\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)),
- diverge si et seulement si ($\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$))).

Preuve. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{n^\alpha (\log n)^\beta}{(n+1)^\alpha (\log (n+1))^\beta}\right)$.

Comme $\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \stackrel{\nu(\infty)}{\sim} 1 - \frac{\alpha}{n}$ et $\frac{(\log n)^\beta}{(\log (n+1))^\beta} \stackrel{\nu(\infty)}{\sim} 1 - \frac{\beta}{n \log n}$, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha.$$

Alors, la série est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha < 1$.

Si $\alpha = 1$, on ne peut rien conclure en utilisant le critère de Raabe-Duhamel.

Dans ce cas la démonstration peut être faite à l'aide de règle de comparaison et comparaison avec une intégrale. ■

1.2.6 Critère de Gauss

Proposition 26

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

S'il existe $\alpha > 1$ et $M > 0$ tels que $-M \leq n^\alpha \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n}\right) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple 14

Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ de terme général $u_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2$.

Noter que $n!!$ est appelé double factorielle de n , qu'est définie par

$$n!! = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \dots \times n, & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2 \times 4 \times 6 \dots \times n, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Pour $\alpha = 2$ on a

$$\begin{aligned} n^2 \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n} \right) &= n^2 \left(\frac{\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right)^2}{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2} - 1 + \frac{1}{n} \right) = n^2 \left(\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} - 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{n(5n+4)}{4(n+1)^2} \leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Alors, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est divergente. ■

1.3 Séries à termes quelconques

Définition 27

On appelle série à termes quelconques une série $\sum u_n$ dont les termes peuvent être positifs ou négatifs suivant les valeurs prises par n .

Exemple 15

Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right)$ sont à termes quelconques. ■

1.3.1 Critère d'Abel

Proposition 28 (Critère d'Abel)

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques. On suppose que $u_n = a_n b_n$, avec b_n strictement positif, telles que :

- La suite $(b_n)_n$ est décroissante et tend vers 0. ($b_{n+1} \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$).
- Il existe $M > 0$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$: $p \geq q \Rightarrow |a_q + a_{q+1} + \dots + a_p| \leq M$.

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 16

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est convergente.

Soit $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. ($u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = a_n b_n$). On a

- La suite $(b_n)_n$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$.
- $|a_q + a_{q+1} + \dots + a_p| = |(-1)^q + (-1)^{q+1} + \dots + (-1)^p| = 0$ ou $1 \leq M = 1$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge. ■

1.3.2 Séries alternées

Définition 29

On appelle série alternée $\sum u_n$ toute série vérifiant la relation $u_n u_{n+1} \leq 0$.

Le terme général u_n d'une série alternée s'écrit sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} v_n$, avec $v_n \geq 0$.

Dans le cas général une série alternée sera souvent notée : $\sum (-1)^n |u_n|$.

Critère de Leibniz

Proposition 30 (Critère de Leibniz)

Soit $\sum u_n$ une série alternée. On suppose que la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$.

Alors la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq |u_0| \text{ et } \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|.$$

Exemple 17

Soit série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ harmonique alternée. ($\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$).

Le général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. La suite $(|u_n|)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est donc convergente. De plus

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| \leq |u_0| = 1 \text{ et } \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq |u_{n+1}| = \frac{1}{n+1}. \blacksquare$$

1.4 Séries absolument convergentes

Définition 31

Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Il est clair que toute série à termes positifs convergente est absolument convergente.

Proposition 32

Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.

En d'autres termes : $\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

Exemple 18

1. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ est convergente, car $\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge.
2. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente. ■

Définition 33

Une série $\sum u_n$ est dite **semi-convergente** si elle converge et la série $\sum |u_n|$ est divergente.

Exemple 19

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. ■

1.5 Séries commutativement convergentes

Définition 34

Une série $\sum u_n$ est dite **commutativement convergente** si elle reste convergente par toute permutation de l'ordre de ses termes et sa somme ne change pas.

Proposition 35

Toute série absolument convergente est commutativement convergente.

Les séries semi-convergentes ne sont pas commutativement convergentes.

Exemple 20

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est semi-convergente. (i.e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente).

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots$

Regroupons ses termes de telle sorte que chaque terme positif soit suivi de deux négatifs. Il vient

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+2)}\right) + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n,$$

où

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} = \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{2(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

On a obtenu une autre série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ qu'est convergente et sa somme est

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

En réorganisant autrement les termes de la série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, on a obtenu une série convergente mais pas de même somme. Cela est dû au fait que l'addition d'une infinité de termes n'est pas nécessairement commutative.

En regroupant les termes de cette série d'une autre façon, on peut avoir une série divergente. ■

Exemple 21

Soit la série alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On a la suite $\left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)_n$ décroît vers 0. Ceci assure la convergence de la série donnée.

Cette série n'est pas absolument convergente car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est divergente.

En regroupant les termes de cette série de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} [\log(n+1) - \log n] \\
 &= (\log 2 - \log 1) - (\log 3 - \log 2) + (\log 4 - \log 3) + \dots \\
 &= 2 [\log 2 - \log 3 + \log 4 - \log 5 + \dots] \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log n,
 \end{aligned}$$

on obtient une série grossièrement divergente, puisque le terme général ne tend pas vers 0. ■

C h a p i t r e 2

Suites et séries de fonctions

Sommaire

2.1 Suites de fonctions	19
2.1.1 Convergence simple	20
2.1.2 Convergence uniforme	20
2.1.3 Théorèmes de passage à la limite	21
2.2 Séries de fonctions	22
2.2.1 Domaine de convergence	22
2.2.2 Convergence uniforme	23
2.2.3 Convergence normale	24
2.2.4 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes	24

2.1 Suites de fonctions

Soit (a, b) un intervalle de \mathbb{R} . Soit $F = \mathcal{F}((a, b), \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de (a, b) dans \mathbb{R} .

Définition 36

Une suite de fonctions réelles définie sur (a, b) est une application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow F \\ n &\longmapsto f_n. \end{aligned}$$

f_n est le terme général de la suite $(f_n)_n$.

Exemple 22

L'intervalle $(a, b) = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$. ■

2.1.1 Convergence simple**Définition 37**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles définie sur (a, b) . On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur (a, b) si pour tout $x_0 \in (a, b)$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Exemple 23

La suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$ converge simplement vers la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}. \blacksquare$$

2.1.2 Convergence uniforme**Définition 38**

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur (a, b) si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in (a, b)} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Exemple 24

Soit $(a, b) = [0, +\infty[$ et $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$, $n \in \mathbb{N}$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f définie par $f(x) = x$.

On a

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty[} \left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right| = \sup_{x \in [0, +\infty[} \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$ et donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f définie par $f(x) = x$. ■

Remarque 39

La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque n'est pas vraie. ■

2.1.3 Théorèmes de passage à la limite

Théorème 40 (Continuité)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de (a, b) dans \mathbb{R} qui converge uniformément sur (a, b) vers une fonction f . Alors f est continue sur (a, b) .

La convergence de l'exemple $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$ n'est pas uniforme car la fonction limite n'est pas continue en 0.

Théorème 41 (Intégration)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles continues sur $[a, b]$ et uniformément convergente vers f , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Exemple 25

Soit $(a, b) = [0, 1]$ et $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f définie par $f(x) = e^{-x}$.

On a

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} - e^{-x} \right| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x^2 - xe^x}{n+x} \right| \leq \frac{2}{n}.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$ et donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f définie par $f(x) = e^{-x}$. D'après le théorème précédent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}. ■$$

Théorème 42 (Dérivation)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles de classe \mathcal{C}^1 définie sur $[a, b]$ telle que la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a, b]$ et la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[a, b]$. Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f de classe \mathcal{C}^1 et $f' = g$.

Exemple 26

Soit $(a, b) = [0, 1]$ et $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 , $f'_n(x) = \frac{n^2}{(n+x)^2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x) - 1| \right) = 0$. Par conséquent, la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers la fonction g définie par $g(x) = 1$. On constate que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f définie par $f(x) = x$ vérifiant $f' = g$. ■

2.2 Séries de fonctions

Définition 43

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles définie sur (a, b) .

La série $\sum f_n$ est appelée **série de fonctions** et f_n son **terme général**.

Exemple 27

On prend $(a, b) =]-\infty, +\infty[$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx}$ est une série de fonctions et son terme général $f_n(x) = e^{nx}$. ■

2.2.1 Domaine de convergence

Définition 44

- On dit que $\sum f_n$ converge en x_0 si la série $\sum f_n(x_0)$ converge.
- La série $\sum f_n$ est dite **simplement convergente** sur (a, b) si la série $\sum f_n(x)$ converge en tout x dans (a, b) .
- **Domaine de convergence** de la série $\sum f_n$ est

$$D = \left\{ x \in (a, b) \text{ tel que } \sum f_n(x) \text{ converge} \right\}.$$

Le domaine de convergence est souvent appelé domaine de définition.

Exemple 28

Trouver le domaine de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

On note que $|f_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n} \right| \leq |x|^n$.

Pour $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^n$ converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge aussi.

Pour $x = -1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente.

Pour $x = 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est la série harmonique qu'est divergente.

Pour $|x| \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n} = \infty$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ diverge pour $|x| \geq 1$.

Alors le domaine de convergence $D = [-1, 1[$. ■

2.2.2 Convergence uniforme

Définition 45

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions converge simplement vers S sur (a, b) et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles.

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

La série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur (a, b) si la suite $(S_n)_n$ converge uniformément vers S dans (a, b) .

Exemple 29

Considérons la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Le domaine de convergence de cette série est $D =]-1, 1[$. Montrons qu'elle est uniformément convergente sur tout intervalle $[-r, r]$ avec $r \in]0, 1[$.

On a $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et pour tout $x \in [-r, r]$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^n x^k \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{n+1}}{1-r} = 0$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est uniformément convergente. ■

2.2.3 Convergence normale

Définition 46

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur un intervalle (a, b) .

On dit que la série $\sum f_n$ converge **normalement** sur (a, b) si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente, où $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in (a, b)} |f_n(x)|$.

Prouver la convergence normale de $\sum f_n$ sur (a, b) revient donc à trouver une inégalité

$$|f_n(x)| \leq u_n$$

valable pour tout $x \in (a, b)$, où $(u_n)_n$ est une suite telle que la série $\sum u_n$ converge.

L'intérêt de la notion de convergence normale réside dans l'implication :

convergence normale \Rightarrow convergence uniforme.

Exemple 30

Considérons la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. On a $\left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ est normalement convergente sur \mathbb{R} . ■

2.2.4 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes

Théorème 47 (Continuité)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur (a, b) et soit x_0 dans (a, b) . On suppose que chaque fonction f_n continue en x_0 . Alors la série $\sum f_n$ est continue au point x_0 et vérifiant $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum f_n(x) = \sum \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \sum f_n(x_0)$.

Exemple 31

Considérons la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$, $x \in [0, 1]$.

On a $\left| \frac{x^n}{(2n+1)!} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!}$ sur $[0, 1]$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ converge. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$ converge normalement sur $[0, 1]$ et donc il y a la convergence uniforme.

Comme les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{(2n+1)!}$ sont continues, il vient alors la continuité de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$ sur $[0, 1]$. ■

Théorème 48 (Intégration terme à terme)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur $[a, b]$. On suppose que chaque fonction f_n continue sur $[a, b]$. Alors la série $\sum \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge vers $\int_a^b (\sum f_n(x)) dx$. Autrement dit $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$.

Exemple 32

Considérons la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, $x \in [0, t]$, $0 < t < 1$. Cette série est uniformément convergente sur $[0, t]$ puisque $|(-1)^n x^{2n}| \leq t^{2n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$ converge. Alors on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^t (-1)^n x^{2n} dx \right) = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx$, ce qu'est équivalente à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctg } t. \blacksquare$$

Théorème 49 (Dérivation terme à terme)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a, b]$. Si $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$ et si $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série $\sum f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$ et $(\sum f_n)' = \sum f'_n$.

Exemple 33

Soit $[a, b] = [-t, t]$, $0 < t < 1$.

Considérons la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

À l'aide du critère de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur $[-t, t]$.

La série dérivée $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ converge uniformément car $|(-1)^n x^n| \leq t^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ converge.

Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-t, t[$ et

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Il s'agit de la fonction $x \mapsto \text{Log}(1+x)$. \blacksquare

C h a p i t r e 3

Séries entières

Sommaire

3.1	Généralités	27
3.2	Rayon de convergence	28
3.2.1	Existence du rayon de convergence	28
3.2.2	Calcul du rayon de convergence	29
3.3	Propriétés des séries entières	30
3.3.1	Continuité	30
3.3.2	Dérivation	31
3.3.3	Intégration	32
3.3.4	Opérations sur les séries entières	33
3.4	Fonctions développables en série entière	33
3.4.1	Série de Taylor	34
3.5	Séries entières et équations différentielles	37

3.1 Généralités

Définition 50

On appelle série entière toute série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$, où (a_n) désigne une suite réelle et $x \in \mathbb{R}$.

Une série entière est notée $\sum a_n x^n$.

Comme pour les séries de fonctions, on cherche le **domaine de convergence**

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que la série } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}.$$

Si la série $\sum a_n x^n$ est convergente sur un domaine D , cela permet de définir une fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur D à valeurs dans \mathbb{R} .

Exemple 34

Considérons la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et appliquons le critère de D'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0.$$

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est alors absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $D = \mathbb{R}$. ■

Exemple 35

Soit la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 x \right| = |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Pour le cas où $|x| = 1$, on a $|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ qu'est le terme général d'une série de Riemann convergente. Par suite, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente dans $[-1, 1]$ et alors $D = [-1, 1]$. ■

Exemple 36

Soit la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n$. Cette série ne converge que si $x = 0$ car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |(n+1)x|$$

et cette limite n'existe que si $x = 0$. D'où $D = \{0\}$. ■

Exemple 37

Considérons la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Pour le cas où $x = 1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, c'est la série harmonique qu'est divergente.

Si $x = -1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, c'est la série harmonique alternée qu'est convergente.

D'où $D = [-1, 1[$. ■

Proposition 51 (Lemme d'Abel)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_n$ soit bornée. Alors :

- La série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.
- La série $\sum a_n x^n$ est normalement convergente pour $|x| < r$ avec $0 < r < |x_0|$.

3.2 Rayon de convergence

3.2.1 Existence du rayon de convergence

Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple.

Théorème 52

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière; alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que

- $\sum a_n x^n$ converge absolument dans $] -R, R [$.
- $\sum a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.

Définition 53

Le nombre $R = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \sum |a_n| r^n \text{ converge}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

Remarque 54

Le rayon de convergence d'une série $\sum a_n x^n$ est caractérisé par :

1. $|x| < R \Rightarrow \sum a_n x^n$ est absolument convergente.
2. $|x| > R \Rightarrow \sum a_n x^n$ diverge.
3. $|x| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.
4. $|x| \leq r < R$ pour $r > 0$, la série est normalement convergente. ■

3.2.2 Calcul du rayon de convergence

La proposition suivante permet la détermination pratique du rayon de convergence dans certains cas.

Proposition 55 (Lemme d'Hadamard)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Exemple 38

1. Considérons la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

On a $a_n = \frac{1}{n!}$, utilisons le critère de D'Alembert :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Alors, le rayon de convergence est $R = +\infty$. La série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

On a $a_n = \frac{1}{n^2}$, et donc $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Le rayon de convergence est $R = 1$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$. Pour $|x| = 1$ la série converge.

3. Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

On a $a_n = \frac{1}{2^n}$. Le critère de Cauchy donne : $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$.

Le rayon de convergence est donc $R = 2$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 2$ et divergente si $|x| > 2$. Pour $|x| = 2$ la série diverge. ■

Cas des séries lacunaires

Soit φ une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , la série $\sum a_n x^{\varphi(n)}$ est une série entière. Pour trouver son rayon de convergence, on commence par calculer la limite suivante :

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \lim_{n \rightarrow +\infty} |x|^{\varphi(n+1) - \varphi(n)},$$

puis on cherche le domaine de x où $l < 1$; R est donc le rayon de domaine où notre série converge.

Exemple 39

Trouver le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^{2n+5}$.

Dans notre cas $\varphi(n) = 2n + 5$ et

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{3^{n+1} x^{2(n+1)+5}}{3^n x^{2n+5}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{3^n} \right| \lim_{n \rightarrow +\infty} |x|^{2(n+1)+5-(2n+5)} = 3|x|^2.$$

La série converge si $3|x|^2 < 1$, qu'est équivalente à $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où le rayon de convergence est $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et divergente si $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$. ■

3.3 Propriétés des séries entières

3.3.1 Continuité

Proposition 56

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit f sa somme qu'est définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -R, R [$. La fonction f est alors continue.

Remarque 57

Par la seule connaissance du rayon de convergence, on ne peut rien dire a priori sur la définition et l'éventuelle continuité de f en $\pm R$. ■

Exemple 40

Considérons la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$.

La fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est donc continue sur $]-1, 1[$.

Cas de $x = -1$

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, qu'est divergente. Donc f n'est pas définie en $x = -1$.

Cas de $x = 1$

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, qu'est une série harmonique alternée convergente.

Donc f est définie en $x = 1$. Ainsi, elle est continue en $x = 1$ par la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ sur $[0, 1]$. ■

3.3.2 Dérivation

Définition 58

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

Si cette limite existe on la note $f'(x_0)$.

Définition 59

Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I de \mathbb{R} , si sa dérivée d'ordre n est une fonction continue sur I .

Proposition 60

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R , et soit f la fonction définie sur $]-R, R[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors f est dérivable et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Définition 61

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ est appelée **série entière dérivée** de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Remarque 62

Série entière et série entière dérivée ont le même rayon de convergence. ■

Exemple 41

Considérons à nouveau la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ de rayon de convergence $R = 1$, qu'est définie et continue sur $]-1, 1[$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(-1)^n}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} -(-x)^{n-1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{-1}{1+x}.$$

Donc pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{-1}{1+t} dt = -\text{Log}(1+x)$.

On retient

$$\forall x \in]-1, 1] \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \text{Log}(1+x). \blacksquare$$

3.3.3 Intégration

Définition 63

Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive s'il existe une fonction $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $F' = f$; (D étant le domaine de définition de f).

Proposition 64

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R , et soit f la fonction définie sur $]-R, R[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors pour tout intervalle $[0, x] \subset]-R, R[$, on peut calculer $\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt$ en intégrant terme à terme :

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

La série entière $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est de rayon de convergence R ; qu'est aussi une primitive de f s'annulant en 0.

Exemple 42

Considérons la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ de rayon de convergence $R = 1$.

On a

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

On en déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\operatorname{Log}(1-x). \blacksquare$$

3.3.4 Opérations sur les séries entières

Proposition 65

Soit $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ deux séries entières ayant respectivement R_1 et R_2 pour rayon de convergence.

1. Si $R_1 \neq R_2$, le rayon de convergence R_3 de la série entière $\sum (a_n + b_n) x^n$ est $R_3 = \min \{R_1, R_2\}$.
2. Si $R_1 = R_2$, le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) x^n$ est $R_3 \geq R_1$.

Exemple 43

Soient les deux séries entières $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$. Les deux séries ont pour rayon de convergence $R_1 = R_2 = 1$. Par contre la série somme $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n$, a pour rayon de convergence $R_3 = 2$. ■

3.4 Fonctions développables en série entière

Définition 66

Soit f une fonction réelle à variable réelle x . On dit que f est **développable en série entière** au voisinage de x_0 s'il existe une suite réelle $(a_n)_n$ et $R > 0$ tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[.$$

Proposition 67

Pour qu'une fonction f soit développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il est **nécessaire** qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de x_0 et dans ce cas on a : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Exemple 44

Considérons la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

La fonction f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ car on sait $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. ■

Exercice 1

Donner le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ au voisinage de $x_0 = 1$. ■

Remarque 68

Il existe des fonctions de classe C^∞ qui ne sont pas développables en série entière. ■

Exercice 2

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ mais non développable en série entière au voisinage de 0. ■

3.4.1 Série de Taylor

Définition 69

On appelle série de Taylor d'une fonction $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Proposition 70

Soit $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ dans un voisinage de 0.

On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]-R, R[$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$.

Alors la série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ de f est simplement convergente dans $]-R, R[$ et on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in]-R, R[.$$

Séries de Taylor des fonctions élémentaires

1. La fonction exponentielle : $f(x) = e^x$.

Cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$ et donc $f^{(n)}(0) = 1$.

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = +\infty.$$

2. Les fonctions hyperboliques :

$$\begin{aligned} \text{Ch } x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty. \\ \text{Sh } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty. \end{aligned}$$

3. Les fonctions circulaires :

- **La fonction sinus :** $f(x) = \sin x$.

On a $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ et donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad R = +\infty.$$

- **La fonction cosinus :** $f(x) = \cos x$.

On a $f(x) = \cos x = (\sin x)'$, alors

$$\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad R = +\infty.$$

4. La série du binôme : $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, ...

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ et donc

$f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, ... $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$.

Alors

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad R = 1.$$

En particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$ on a :

- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \dots \times 2n} x^n \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \end{aligned}$$

- $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \dots \times 2n} x^n \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots.\end{aligned}$$

- En remplaçant x par $-x^2$ il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \dots \times 2n} x^{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots.\end{aligned}$$

- Par intégration on obtient

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1} \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots.\end{aligned}$$

5. La fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$. On a pour $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad R = 1.$$

- En remplaçant x par $-x$ on obtient

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad R = 1.$$

- Par intégration il vient

$$\text{Log}(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad R = 1.$$

- En remplaçant x par $-x^2$ dans $\frac{1}{1-x}$ on aura

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad R = 1.$$

- Par intégration on obtient

$$\text{Arctg } x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad R = 1.$$

3.5 Séries entières et équations différentielles

Les séries entières peuvent être utilisées pour résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients non constants développables en séries entières.

Cette méthode est illustrée par les exemples suivants.

Exemple 45

Considérons l'équation différentielle $2x(1+x)y'' + (5x+3)y' + y = 0$.

On cherche une solution de cette équation différentielle qu'est développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$. Posons $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}, \\ xy'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n, \\ xy''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \\ x^2y''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n. \end{aligned}$$

Il vient, en remplaçant dans notre équation différentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [2n(n+1)a_{n+1} + 2n(n-1)a_n + 5na_n + 3(n+1)a_{n+1} + a_n] x^n = 0,$$

qu'est équivalente à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)[(2n+3)a_{n+1} + (2n+1)a_n] x^n = 0,$$

encore équivalent à dire que la suite $(a_n)_n$ est solution de l'équation de récurrence suivante :

$$(2n+3)a_{n+1} + (2n+1)a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par récurrence, on en déduit que

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} a_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{x})^{2n+1} = a_0 \frac{\operatorname{Arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \blacksquare$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = (1+x)^\alpha$ où α est un réel non entier naturel.

- Vérifier que f est une solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- Retrouver le développement en série entière de f ainsi que son rayon de convergence. ■

Solution.

- On a bien $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$(1+x)f'(x) - \alpha f(x) = (1+x)\alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha(1+x)^\alpha = 0.$$

- Supposons que la solution f de cette équation différentielle est développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ x f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n, \end{aligned}$$

et f est solution de cette équation différentielle si, et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} + na_n - \alpha a_n] x^n = 0,$$

encore équivalent à

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec $a_0 = f(0) = 1$, ce qui donne par récurrence

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Par le critère de D'Alembert $R = 1$. ■

C h a p i t r e 4

Séries de Fourier

Sommaire

4.1	Séries trigonométriques	39
4.1.1	Représentation complexe d'une série trigonométrique	41
4.1.2	Calcul des coefficients de la série trigonométrique	41
4.2	Séries de Fourier	42
4.2.1	Séries de Fourier de fonctions 2π -périodiques	42
4.2.2	Séries de Fourier d'une fonction de période arbitraire	45
4.2.3	Séries de Fourier de fonctions non périodiques	46
4.2.4	Égalité de Parseval	47

4.1 Séries trigonométriques

Définition 71

Une fonction f définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ est dite **périodique** de période $T \in \mathbb{R}^*$ (ou **T -périodique**) si pour tout $x \in D$, on a $x + T \in D$ et

$$f(x + T) = f(x).$$

Exemple 46

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin x$ est 2π -périodique car $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. ■

Définition 72

On appelle série **trigonométrique** réelle, toute série de fonctions de la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \quad (1)$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, pour tout n dans \mathbb{N} .

Les nombres a_0, a_n, b_n , $n \in \mathbb{N}^*$ sont appelées **coefficients** de cette série.

Exemple 47

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx)$ est une série trigonométrique avec $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$ et $\omega = 1$. ■

Le problème est de déterminer l'ensemble D tel que la série (1) soit convergente pour tout $x \in D$.

Remarque 73

Supposons que la série (1) converge en x dans D et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)].$$

Alors la série (1) converge en tout point de la forme $x + \frac{2k\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $f(x) = f\left(x + \frac{2k\pi}{\omega}\right)$; et par suite la fonction f est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. ■

Proposition 74

Si les séries numériques $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique (1) est absolument et uniformément convergente sur \mathbb{R} .

Proposition 75

Si les suites numériques $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (1) est convergente pour $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 48

La série $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]$ converge pour tout $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

4.1.1 Représentation complexe d'une série trigonométrique

D'après les relations d'Euler :

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i},$$

et en posant

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{a_0}{2},$$

la série (1) devient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}.$$

Cette dernière expression est appelée **forme complexe** d'une série trigonométrique.

4.1.2 Calcul des coefficients de la série trigonométrique

Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)].$$

Alors

$$f(x) \cos(n\omega x) = \frac{a_0}{2} \cos(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) \cos(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \cos(n\omega x)],$$

$$f(x) \sin(n\omega x) = \frac{a_0}{2} \sin(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) \sin(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \sin(n\omega x)].$$

En intégrant et en utilisant la convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x) \cos(n\omega x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n, \end{cases} \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x) \sin(n\omega x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n, \end{cases} \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x) \sin(n\omega x) dx &= 0, \end{aligned}$$

on déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par un changement de variable, ces coefficients peuvent s'écrire

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $\omega = 1$, cas des fonctions 2π -périodique

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cas complexe

On a $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Les coefficients dans ce cas, sont donnés par la relation :

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4.2 Séries de Fourier

4.2.1 Séries de Fourier de fonctions 2π -périodiques

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$. On suppose que $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)| dt$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 76

On appelle **série de Fourier** associée à f , la série trigonométrique notée σf où

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les coefficients a_n et b_n sont appelés **coefficients de Fourier** de la fonction f .

Si la fonction f n'est pas donnée explicitement sur $[0, 2\pi]$, mais sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, dans ce cas le calcul des coefficients de Fourier de f s'effectue sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 77

- Si la fonction f est paire $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ et $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.
- Si la fonction f est impaire $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$, $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemple 49

Soit f la fonction 2π -périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{si } x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[. \end{cases}$$

La fonction étant paire, ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$b_n = 0, \quad a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}.$$

Par conséquent sa série de Fourier est

$$\sigma f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} \cos(nx) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} (-1)^n \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}. ■$$

Deux questions se posent :

1. La série de Fourier associée à f est-elle convergente?
2. En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?

Théorème 78 (de Dirichlet)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées *conditions de Dirichlet*) :

D1) En tout point x_0 , les limites de f à droite et à gauche de x_0 existent et les discontinuités de f sont en nombre fini dans tout intervalle fini.

D2) f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases} .$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Les notations $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x .

Exemple 50

Soit $f :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = x$.

1. Les discontinuités de f sont les points de la forme $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $f(x_k+0) = -\pi$, $f(x_k-0) = \pi$.
2. f est partout dérivable sauf aux points x_k . En ces points nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi-0)}{x - \pi} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi+0)}{x - \pi} = 1.$$

f vérifie les conditions de Dirichlet, donc sa série de Fourier associée est convergente.

f est impaire donc $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et par suite

$$\sigma f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} . \blacksquare$$

Exemple 51

Soit $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = |x|$.

La fonction f est continue sur \mathbb{R} et partout dérivable sauf aux points $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ où

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^-} \frac{f(x) - f(k\pi - 0)}{x - k\pi} = (-1)^{k+1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow k\pi^+} \frac{f(x) - f(k\pi + 0)}{x - k\pi} = (-1)^k.$$

f satisfait les conditions de Dirichlet, donc sa série de Fourier associée converge. De plus f est paire, ce qui nous donne $b_n = 0$, et

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx \Rightarrow \begin{cases} a_{2n} = 0, \\ a_{2n+1} = \frac{-4}{\pi (2n+1)^2}. \end{cases}$$

La série de Fourier σf converge alors vers f car elle est continue, et on a

$$\sigma f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = f(x).$$

Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ se traduit par $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \blacksquare$$

Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.

4.2.2 Séries de Fourier d'une fonction de période arbitraire

Soit f une fonction périodique de période $T = 2l$. Pour la développer en série de Fourier sur l'intervalle $[-l, l]$ faisons le changement de variable $x = \frac{lt}{\pi}$. La fonction $g(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ sera une fonction 2π -périodique de t , car

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{l(t + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = g(t).$$

Alors, on peut la développer en séries de Fourier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En retournant à la variable x , en posant $t = \frac{\pi x}{l}$, on obtient

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right],$$

avec

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 52

Développer en séries de Fourier la fonction 2-périodique f définie par $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Comme cette fonction est paire, on a $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x dx = 1, \quad a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \Rightarrow \begin{cases} a_{2n} = 0, \\ a_{2n+1} = \frac{-4}{\pi^2 (2n+1)^2}. \end{cases}$$

Alors,

$$\sigma f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2} = f(x). \blacksquare$$

4.2.3 Séries de Fourier de fonctions non périodiques

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non périodique définie sur l'intervalle $[a, b]$, on prolonge f en une fonction g périodique de période $T \geq b - a$ telle que la fonction g satisfait les conditions de Dirichlet.

Exemple 53

Donner une série de Fourier de période 2π qui coïncide sur $]0, \pi[$ avec la fonction $f(x) = e^x$.

a) Choisissons un prolongement pair et posons $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ e^x & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}$.

Dans ce cas les coefficients sont $a_0 = 2 \frac{e^\pi - 1}{\pi}$, $a_n = 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2 + 1}$ et $b_n = 0$.

On a alors :

$$\sigma f_1(x) = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2 + 1} \cos(nx) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ e^x & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

b) Choisissons un prolongement impair et posons $f_2(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ e^x & \text{si } x \in]0, \pi[\end{cases}$.

Dans ce cas les coefficients sont $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = 2n \frac{1 - (-1)^n e^\pi}{\pi (n^2 + 1)}$.

On a alors :

$$\sigma f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \frac{1 - (-1)^n e^\pi}{\pi (n^2 + 1)} \sin(nx) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ e^x & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi \end{cases}.$$

c) Choisissons un prolongement ni pair ni impair et posons $f_3(x) = e^x$ si $x \in]-\pi, \pi[$.

On a le résultat final :

$$\begin{aligned}\sigma f_3(x) &= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} [\cos(nx) - n \sin(nx)] \right) \\ &= \begin{cases} e^x & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\\ \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{\pi} & \text{si } x = \pm\pi \end{cases} .\end{aligned}$$

■

On a obtenu trois séries différentes qui valent exactement e^x sur l'intervalle $]0, \pi[$. On pouvait choisir d'autres prolongements et obtenir d'autres séries.

4.2.4 Égalité de Parseval

Théorème 79 (Égalité de Parseval)

Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, alors on a

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (f(x))^2 dx.$$

Remarque 80

Si f est de période 2π , on a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx. \quad \blacksquare$$

Exemple 54

Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\end{cases}$.
 f étant une fonction impaire donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \Rightarrow \begin{cases} b_{2n} = 0, \\ b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}. \end{cases}$$

La série de Fourier associée est : $\sigma f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases}$.

- Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a $\sigma f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On tire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

- Appliquons l'égalité de Parseval : $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(x))^2 dx = 2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et l'on tire donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

- Posons $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ série convergente d'après le critère de Riemann. En séparant les pairs et les impairs on a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4} S + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow S - \frac{1}{4} S = \frac{\pi^2}{8}.$$

On tire alors

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \blacksquare$$

Références

- [1] **AMROUN N.** Cours de séries numériques. Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès Algérie, 2007.
- [2] **DELAUNAY D.** Cours de Mathématiques MP. Prépas Dupuy de Lôme., Juin 2013.
- [3] **KRASNOV M.L.** et **KISSELEV A.** Mathématiques supérieures, Volume 2, pour ingénieurs et polytechniciens. De Boeck-Wesmael, s.a., Bruxelles, 1993.
- [4] **MAHMOUDI A.** et **KESSI A.** Éléments d'analyse mathématique. Séries et intégrales. Cours et exercices corrigés. Collection les mathématiques à l'université. ISSN 1112-3427, 2001