SERIE N° 3 : NUMERICAL SERIES

Exercice 1 :

1/ Using the definition, study the nature and calculate the possible sum of the series $\sum u_n$ in each of the following cases :

$$u_n = \frac{\cos \alpha n}{2^n}, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad u_n = \frac{n+1}{3^n}, \qquad u_n = \frac{n-(-1)^n}{3^n},$$
$$u_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}, \qquad u_n = \frac{1+2+...+n}{1^3+2^3+...+n^3}, \qquad u_n = \ln\left(1-n^{-2}\right).$$

2/ Let $a, b \in \mathbb{R}$ and for any $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln n + a \ln(n+2) + b \ln(n+3)$. Find the values of a and b for which the serie $\sum u_n$ converges and, in this case, calculate its sum.

Exercice 2 :

1/ Indicate the nature of the series in each of the following cases :

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - n, \qquad u_n = \frac{\ln n}{n^2}, \qquad u_n = \frac{1+\ln n}{\sqrt{n}},$$
$$u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}, \qquad u_n = \left(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}\right)^{-n^2}, \qquad u_n = \frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n},$$

2/ Study the nature of the following series :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{C_{2n}^n}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1-\frac{n}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right), \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sqrt[3]{n^3+\alpha n} - \sqrt{n^2+3}\right), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 :

Study the nature of the following series :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos n}{n^2}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos n}{n}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos^2 n}{n},$$

Exercice 4 :

Let $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function, decreasing and which verifies $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$.

1/ Study, using the Leibniz criterion, the nature of the series from the general term

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) \sin x dx.$$

2/ Deduce the nature of the series from the general term

$$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin\left(x^2\right) dx.$$

Supplément 1 : **Le problème de Bâle**
Le but de cet exercice est de calculer $\varsigma(2) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
1/ On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} X^{n-k}.$$

i) En utilisant la formule de "de Moivre", montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$ on a

$$\sin((2n+1)\theta) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} \sin^{2k+1}\theta \cos^{2(n-k)}\theta.$$

En déduire que $\sin((2n+1)\theta) = \sin^{2n+1}\theta P(\cot^2\theta)$.
ii) Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on note $\theta_k = k\pi/2n+1$. Montrer que le réel $x_k = \cot^2(\theta_k)$ est une racine de P, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.
iii) Montrer que le polynôme P amet n racines réelles simples. En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2/ *i)* Montre que

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2(\theta_k) = \frac{n(2n-1)}{3} \qquad \text{et que} \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin^{-2}(\theta_k) = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

ii) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, on a

$$\frac{1}{\cot^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

iii) En déduire que :

$$\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{2\pi^2 n(n+1)}{3(2n+1)^2}.$$

3/ Conclure.

Supplément 2 : **Formule de Stirling**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et $a_n = \ln \alpha_n$.
1/ Étudier la nature de la série de terme général $u_1 = a_1$ et pour $n \geq 2$: $u_n = a_n - a_{n-1}$, montrer qu'il exite $U \in \mathbb{R}$ tel que $\lim a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = U$.
2/ Déduire un équivalent de $n!$ en fonction de U.
3/ *i)* En écrivant les relations de récurrence vérfiées par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx,$$

montrer que la suite $(J_n := (n+1) I_{n+1} I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante dont en calculera le premier terme J_0.
ii) Montrer que : $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 0$.
iii) Établir l'identité$n(I_n)^2 = J_0 . \frac{I_n}{I_{n-1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la **formule de Wallis** :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}.$$

4/ Déduire la somme U et la formule de Stirling :

$$n! \cong \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}.$$