N.H.S.A.S.T **2024/2025**
Second year P.C - Analysis 3

SERIE N° 4 : SEQUENCES AND SERIES OF FUNCTIONS

Exercice 1 :

Study the pointwise convergence and uniform convergence of the following sequences of functions :

$f_n : x \longmapsto \ln\left(x + \frac{1}{n}\right), D = \mathbb{R}^+,\qquad f_n : x \longmapsto \frac{\ln(1+nx)}{1+nx}, D = \mathbb{R}^+,\qquad f_n : x \longmapsto \frac{x}{n(1+x^2)}.$

Exercice 2 :
We define on $[0,1]$ the sequence of functions (f_n) by $f_n : x \longmapsto n^2 x^n (1-x^n), n \in \mathbb{N}^*$.
1/ Study the pointwise convergence of (f_n) on $[0,1]$.
2/ Compare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \qquad \text{and} \qquad \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx,$$

What can we conclude ?
3/ Is there a part of $[0,1]$ on which there is uniform convergence ?

Exercice 3 :
1/ Show that the sequence of functions $f_n : x \longmapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$ converges uniformly on $[-1,1]$.
2/ Show that the sequence (f_n') pointwise converges on $[-1,1]$.
3/ The sequence (f_n') does it converge uniformly on $[-1,1]$?

Exercice 4 :
Studying pointwise convergence, uniform convergence and normal convergence of the series of functions $\sum f_n$ on $\mathbb{R}^+$ in each of the following cases :

$$f_n : x \longmapsto \frac{x}{n(1+nx^2)}, \qquad f_n : x \longmapsto \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

Exercice 5 :
Let F the function defined on $]0,\pi[$ by : $F : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, where

$$f_n : x \longmapsto \frac{x \sin nx}{2n^{\frac{3}{2}} + \cos x}.$$

1/ Show that F is well defined and continuous on $]0,\pi[$.
2/ Study its derivability on $]0,\pi[$.

Exercice 6 :
Let the series of functions $\sum f_n$, where

$$f_n : x \longmapsto e^{-nx} \sin 2nx,\ x \in \mathbb{R}^+.$$

1/ Study the pointwise convergence of this series on $\mathbb{R}^+$.
2/ Show that it converges uniformly on $[a,+\infty[$, $a>0$.
3/ Show that it does not converge uniformly on $[0,a]$, $a>0$.

Problème de synthèse : Calcul de la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions de terme général

$$f_n : x \longmapsto \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \le x \le \sqrt{n}, \\ 0 & \text{si} \quad x > \sqrt{n}. \end{cases}$$

1/ *i)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, étudier la fonction f_n.
ii) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f : x \longmapsto e^{-x^2}$.
iii) Soient $a > 0$ et n un entier supérieur à $1 + E(a^2)$. Calculer

$$\sup_{x\in[0,a]} \left(1 - \exp\left(x^2 + n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)\right).$$

iv) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
v) Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que tout entier $n \ge N$ et pour tout $x \ge 0$ on ait $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
2/ On considère la suite de fonctions $F_n : x \longmapsto \int_0^x f_n(t)\, dt$.
i) Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $F : x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.
ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $l_n = F_n(\sqrt{n})$. En considérant le changement de variable $t = \sqrt{n} \sin\theta$, montrer que

$$l_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta.$$

En déduire que

$$l_n = \frac{\sqrt{n}\,(2^n n!)^2}{(2n+1)!},$$

puis, en utilisant la formule de Stirling, que la suite (l_n) converge vers $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
3/ Conclure.