

Otoczka wypukła dla zbioru punktów w przestrzeni dwuwymiarowej

Algorytmy Geometryczne

Remigiusz Babiarz · Jakub Własiewicz

Plan prezentacji

1. Otoczka wypukła	4	2.6 Dziel i rządź	18	3.4 Complex Animation ..	27
1.1 Definicja	5	2.7 Chana	20	3.5 Callback Style Animation ..	28
1.2 Poprawność .	6	3. Zbiory testowe .	22	3.6 Math Equation Animation ..	29
2. Algorytmy	7	3.1 Wybrane zbiory testowe	23	3.7 CeTZ Animation ..	30
2.1 Przyrostowy .	8	3.2 Wyniki testów wydajności i poprawności	25	3.8 Fletcher Animation ..	31
2.2 Grahama . .	10	3.3 Simple Animation ..	26	4. Theorems	32
2.3 Jarvisa	12				
2.4 Górska i dolna otoczka	14				
2.5 Quickhull ...	16				

Plan prezentacji

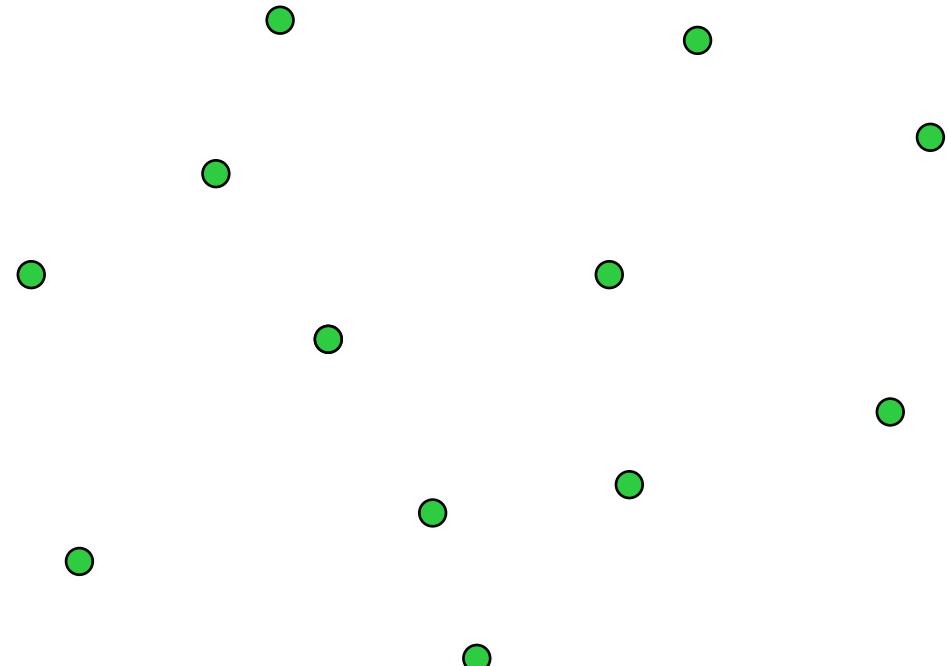
4.1 Prime numbers	33
5. Others	36
5.1 Side-by-side .	37
5.2 Multiple Pages	38
6. Appendix	40
6.1 Appendix ...	41

1. Otoczka wypukła

1.1 Definicja

1. Otoczka wypukła

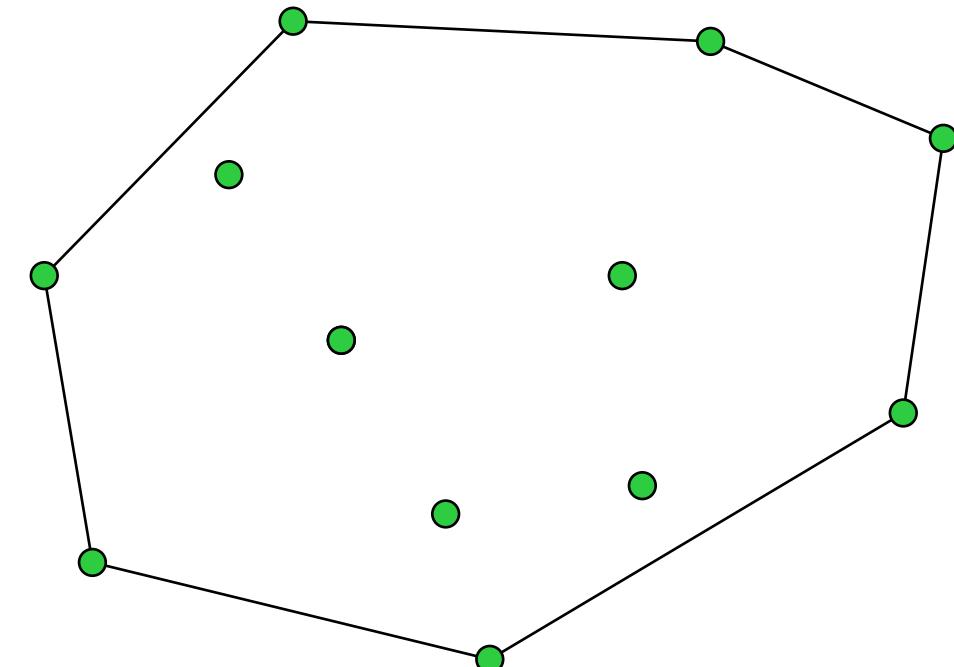
Otoczką wypukłą zbioru punktów nazywamy najmniejszy wielokąt wypukły zawierający ten zbiór. Będziemy oznaczać liczbę punktów zbioru wejściowego jako n , a liczbę punktów otoczki jako h .



1.1 Definicja

1. Otoczka wypukła

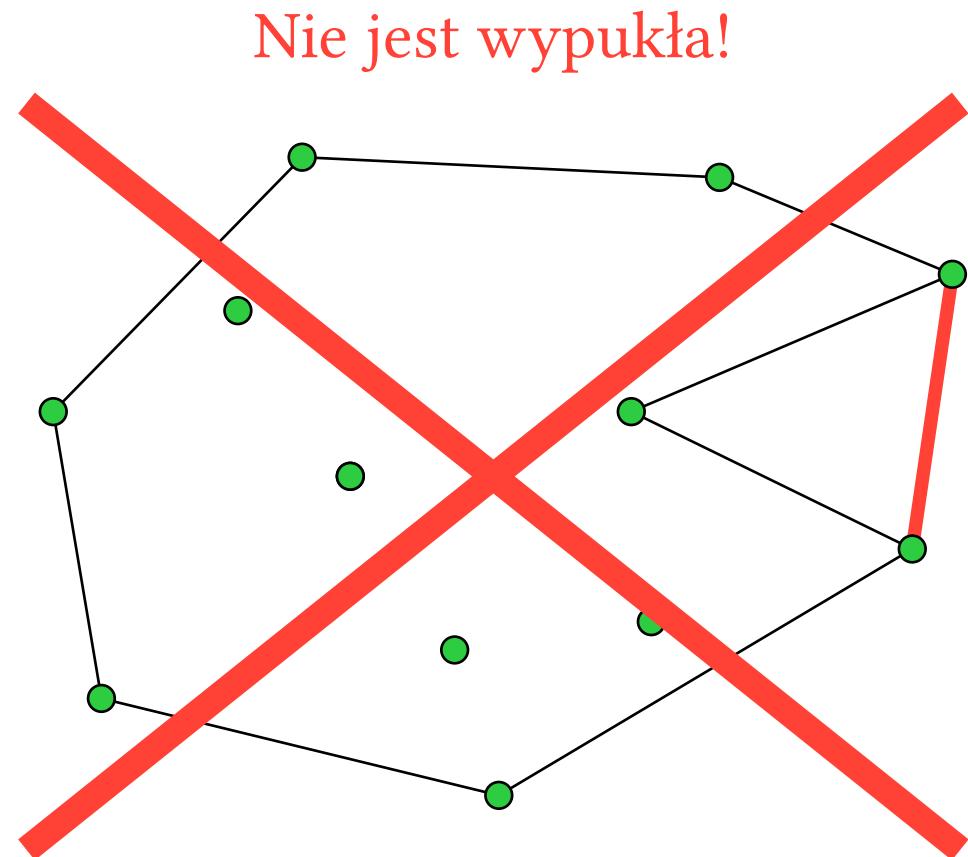
Otoczką wypukłą zbioru punktów nazywamy najmniejszy wielokąt wypukły zawierający ten zbiór. Będziemy oznaczać liczbę punktów zbioru wejściowego jako n , a liczbę punktów otoczki jako h .



1.1 Definicja

1. Otoczka wypukła

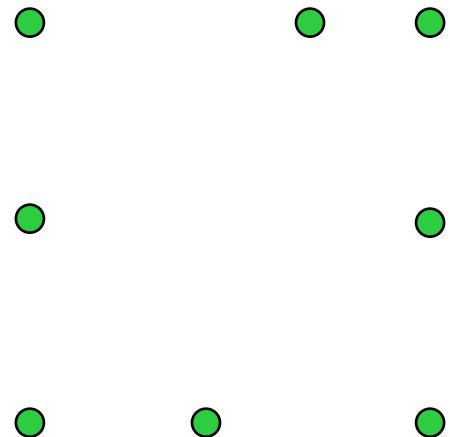
Otoczką wypukłą zbioru punktów nazywamy najmniejszy wielokąt wypukły zawierający ten zbiór. Będziemy oznaczać liczbę punktów zbioru wejściowego jako n , a liczbę punktów otoczki jako h .



1.2 Poprawność

1. Otoczka wypukła

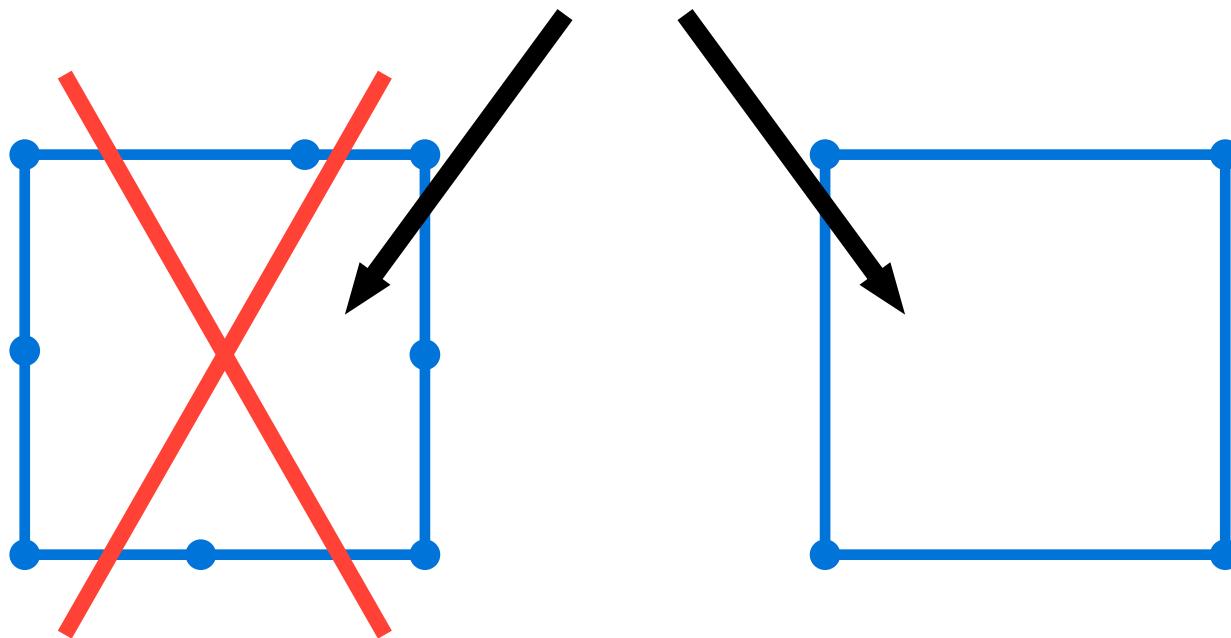
Otoczkę uznajemy za poprawną jeżeli jej wierzchołki są zadane w kierunku przeciwnym lub zgodnym do ruchu wskazówek zegara. W dodatku, do otoczki **nie zaliczamy wewnętrznych punktów wspólniowych**.



1.2 Poprawność

1. Otoczka wypukła

Otoczkę uznajemy za poprawną jeżeli jej wierzchołki są zadane w kierunku przeciwnym lub zgodnym do ruchu wskazówek zegara. W dodatku, do otoczki **nie zaliczamy wewnętrznych punktów wspólniowych**.



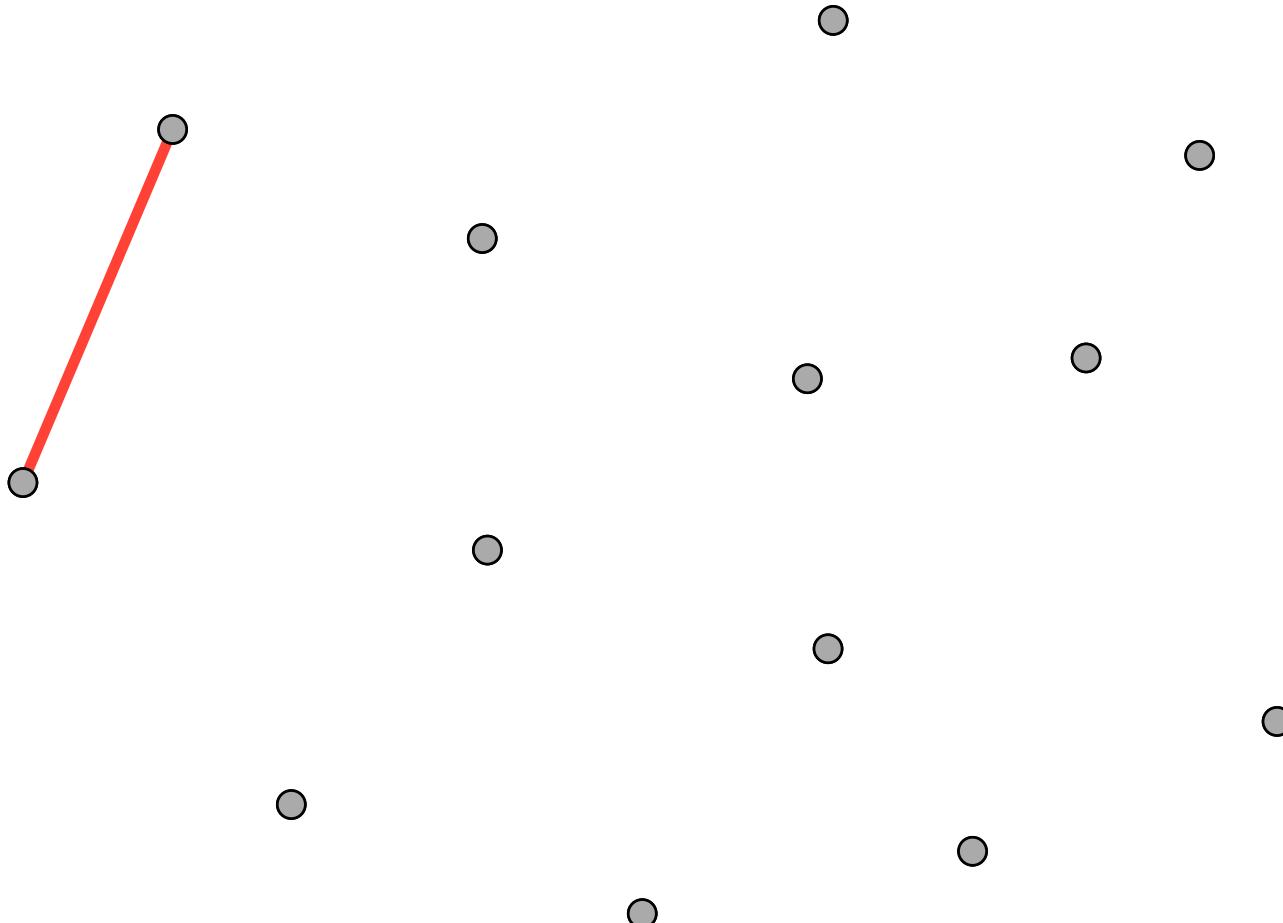
2. Algorytmy

2.1.1 Działanie algorytmu

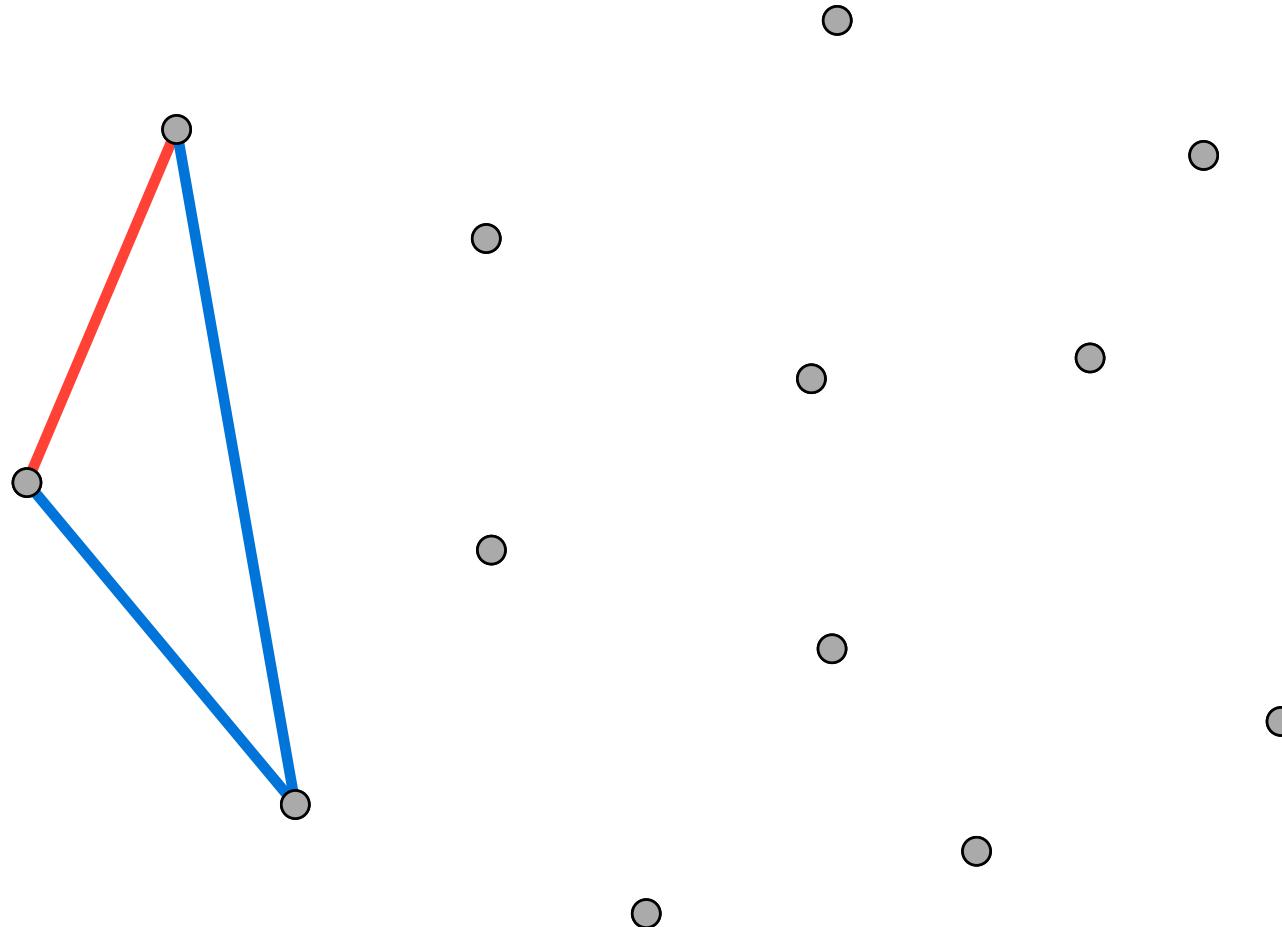
Algorytm najpierw sortuje punkty względem współrzędnej x , a następnie wybiera dwa pierwsze punkty, będące początkową otoczką. Następnie iteracyjnie dodaje kolejne punkty do otoczki, dokonane jest to poprzez znalezienie **stycznych do otoczki przechodzących przez kolejne punkty** i odpowiednie usuwanie punktów wewnątrz niej.

Złożoność czasowa algorytmu to $O(n \log n)$

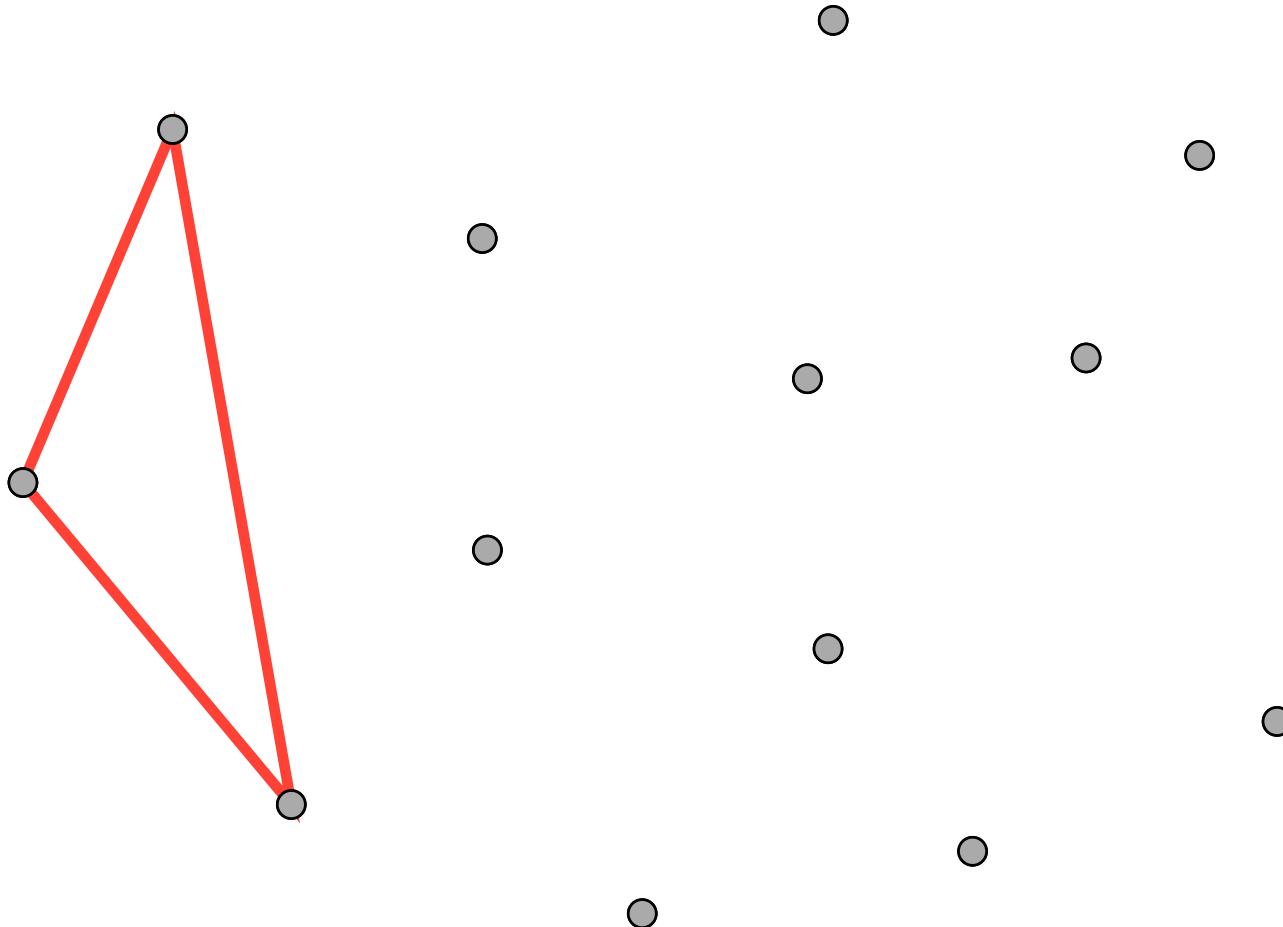
2.1.2 Przykład



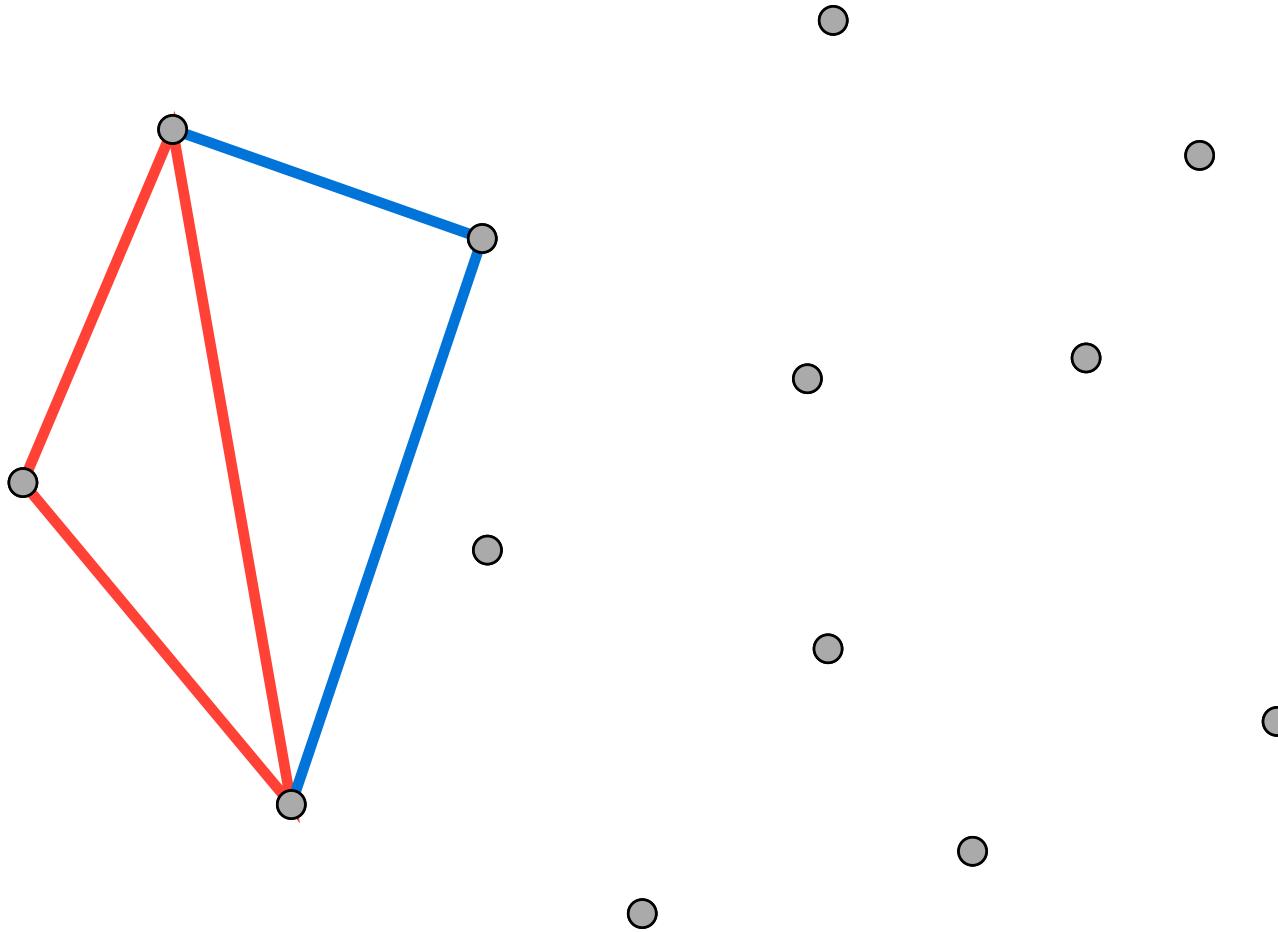
2.1.2 Przykład



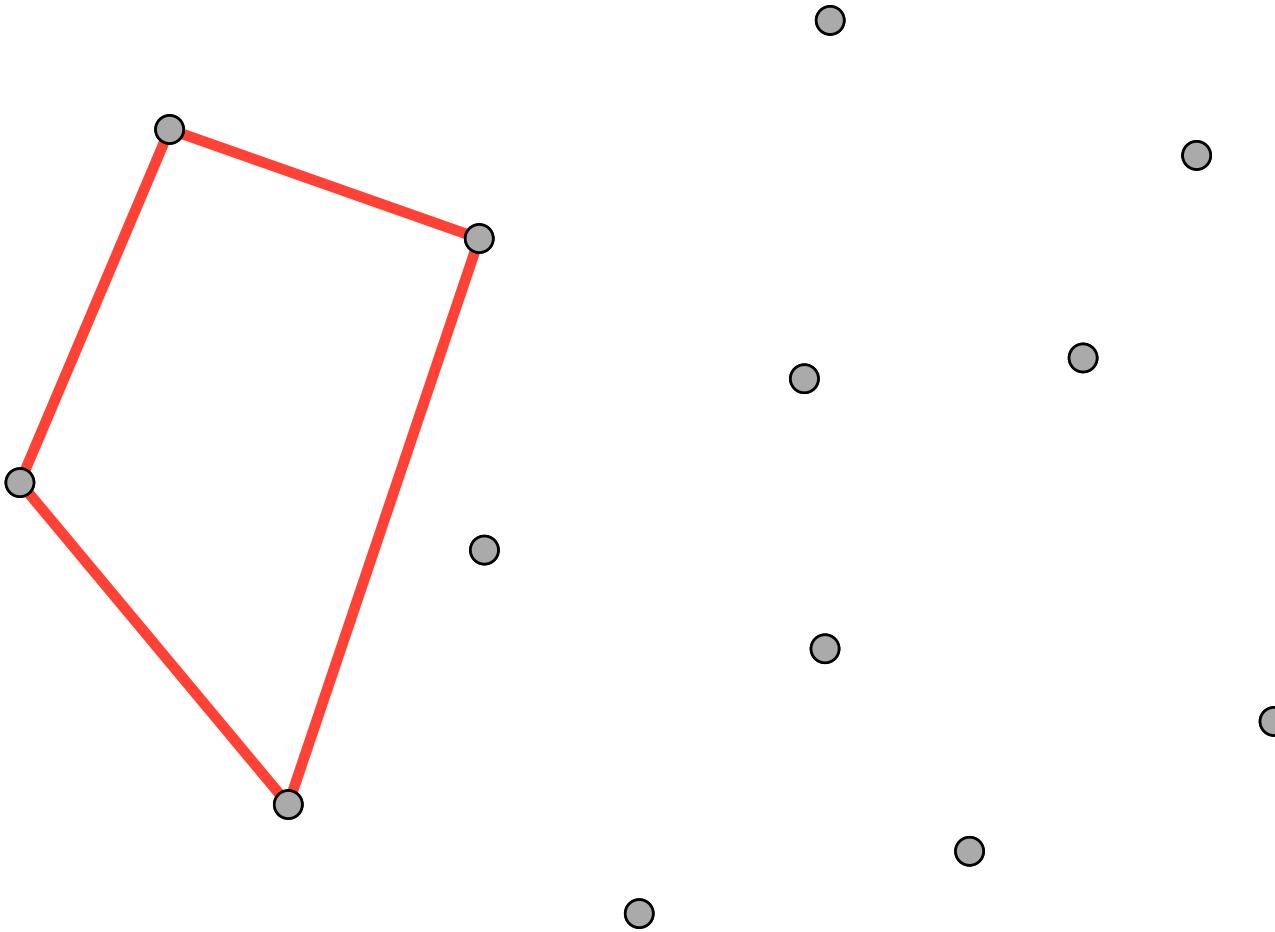
2.1.2 Przykład



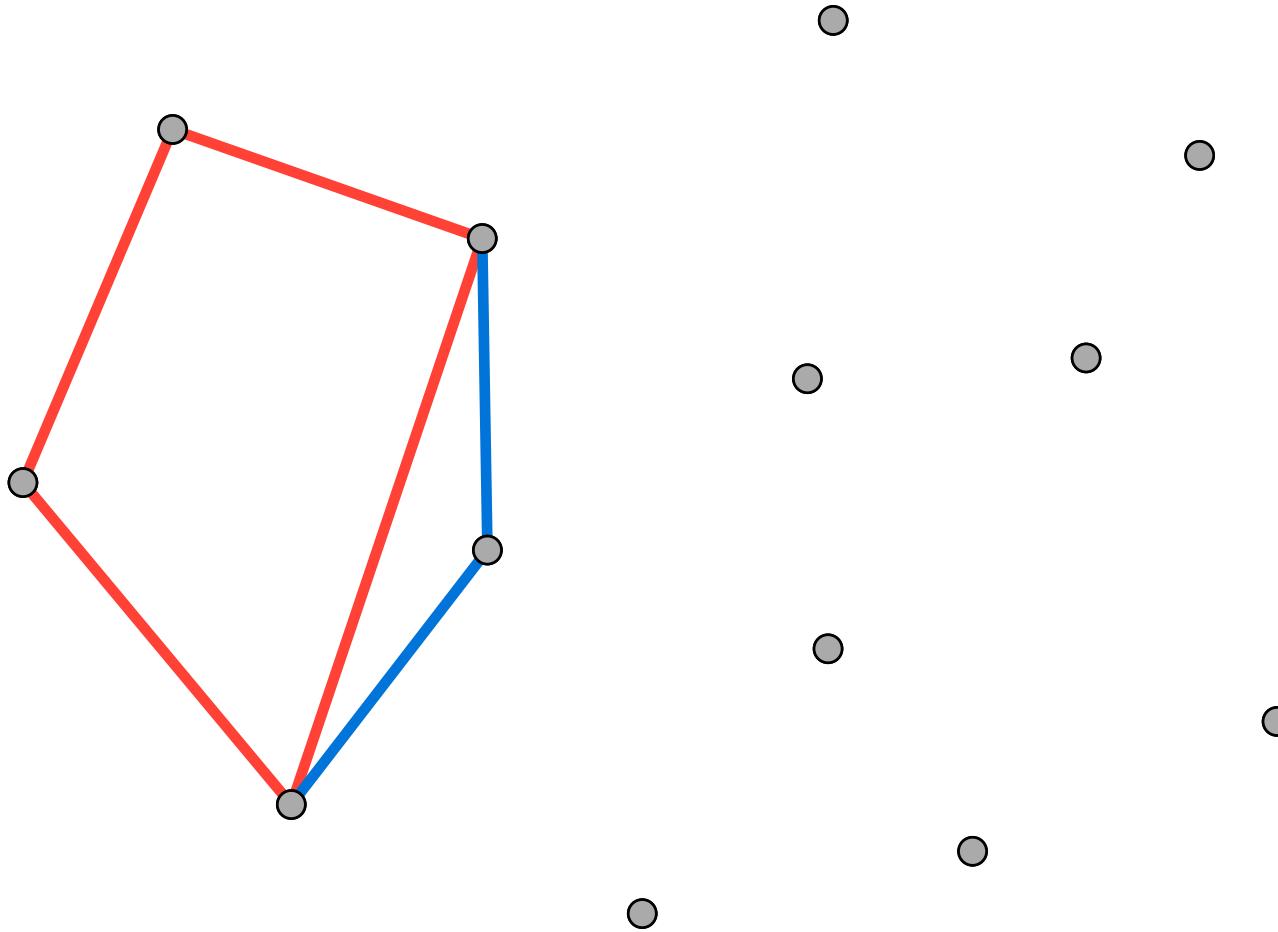
2.1.2 Przykład



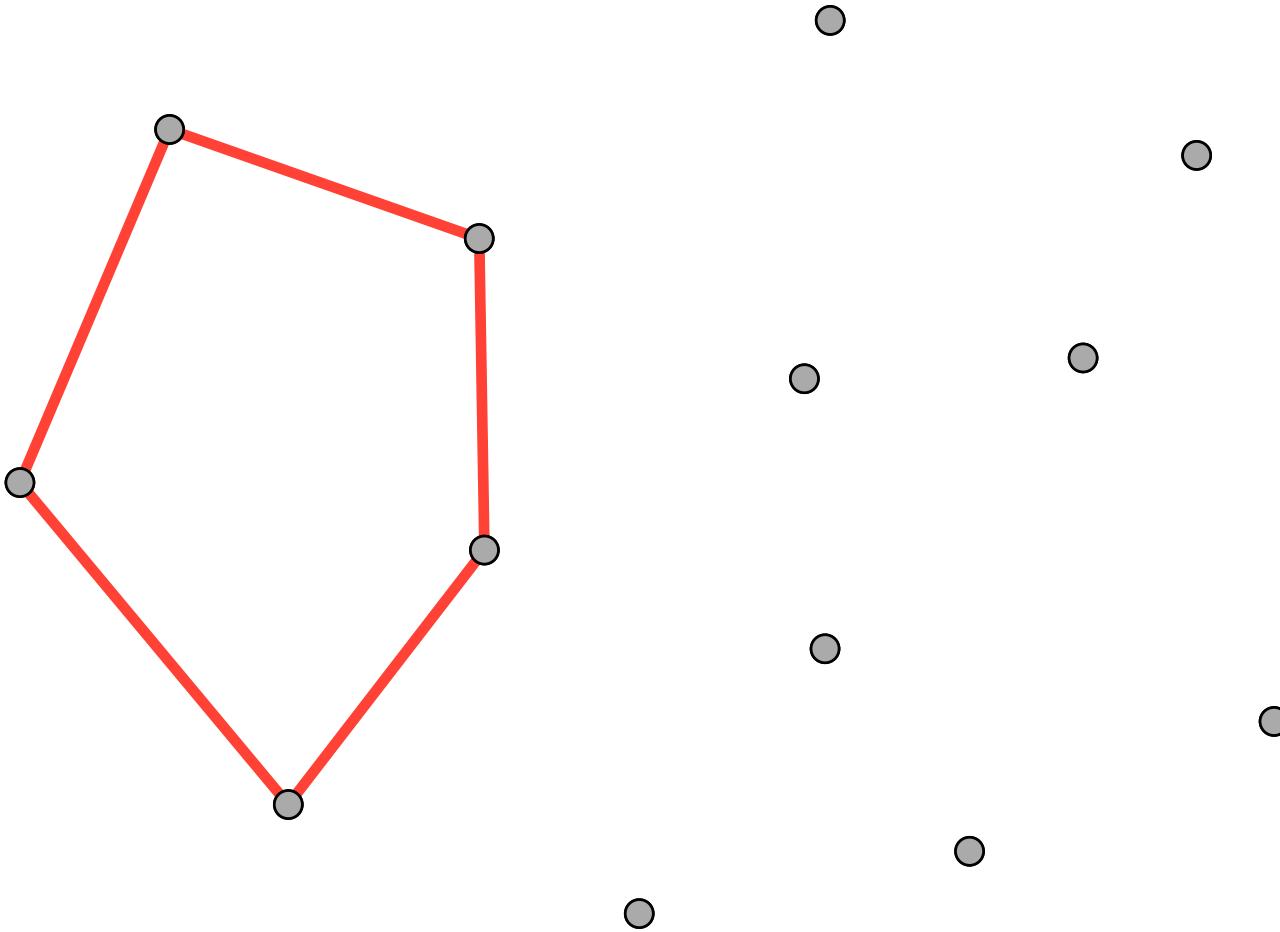
2.1.2 Przykład



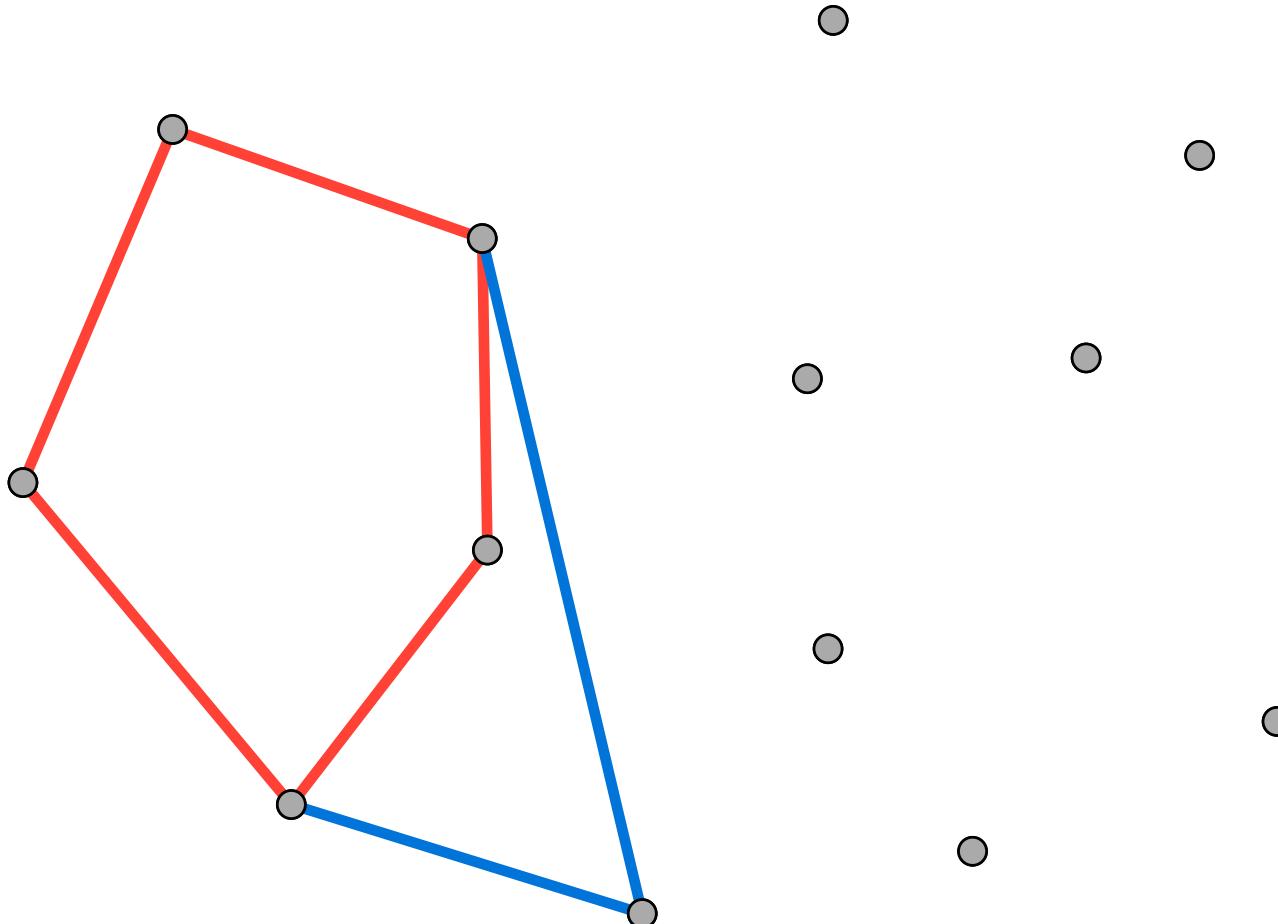
2.1.2 Przykład



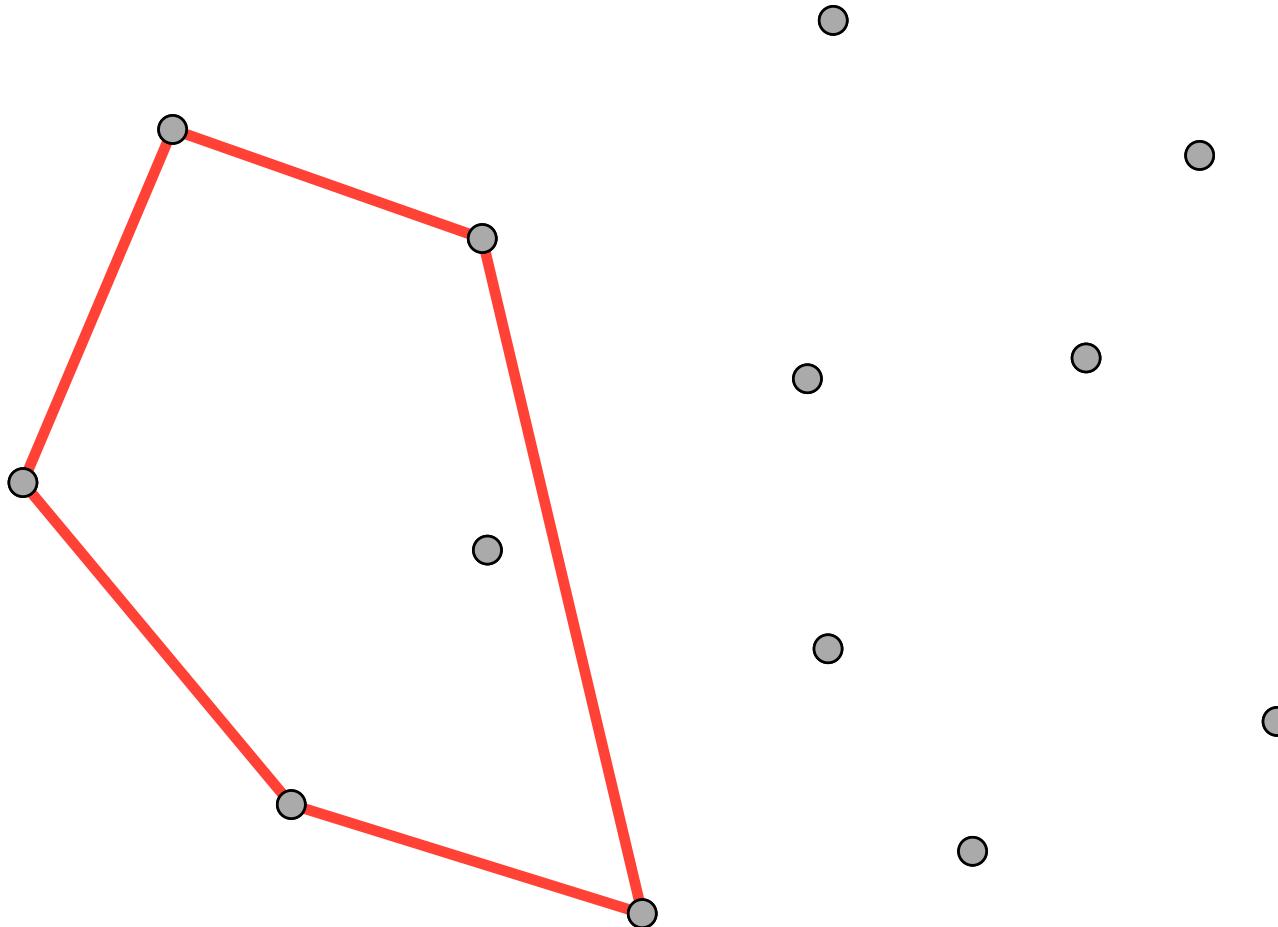
2.1.2 Przykład



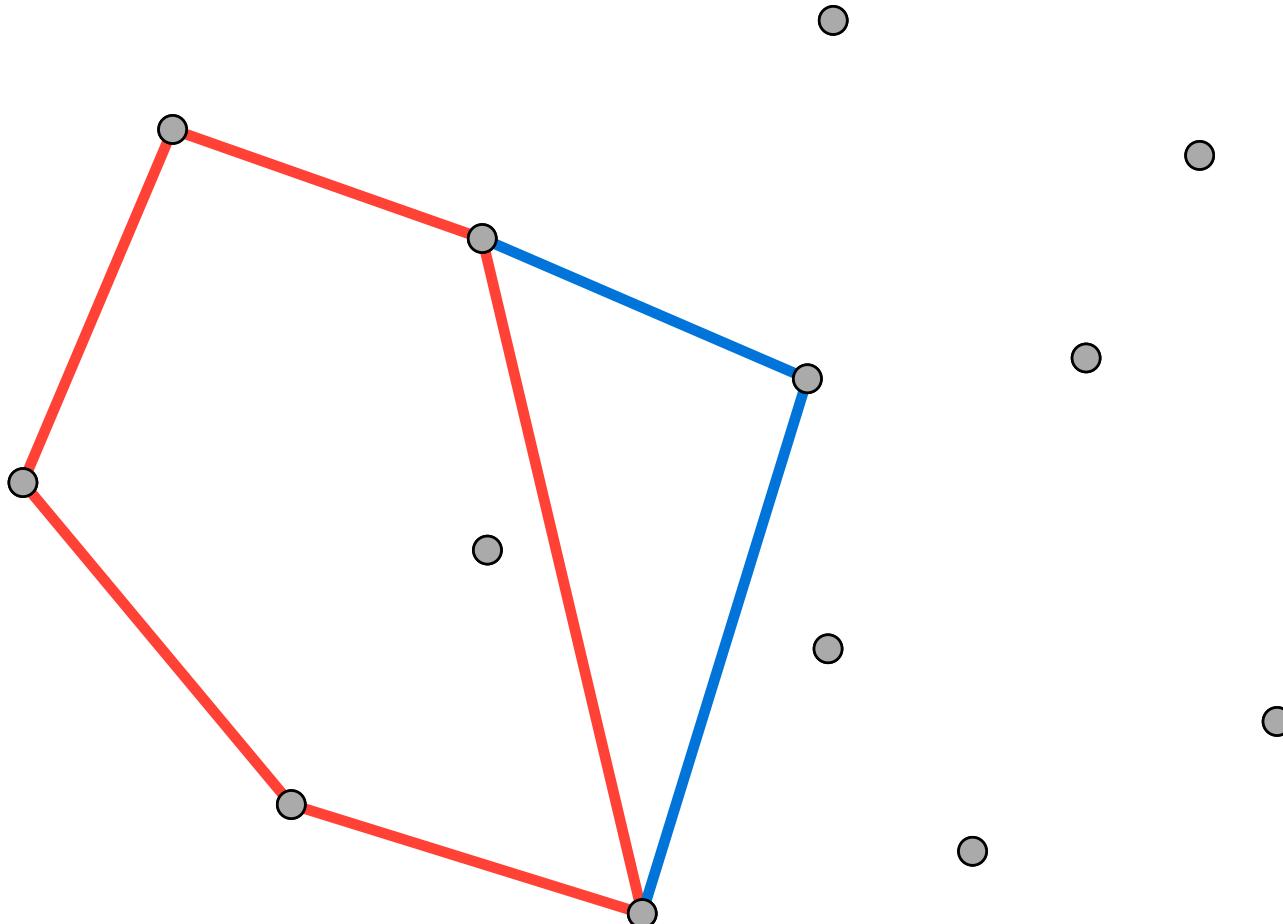
2.1.2 Przykład



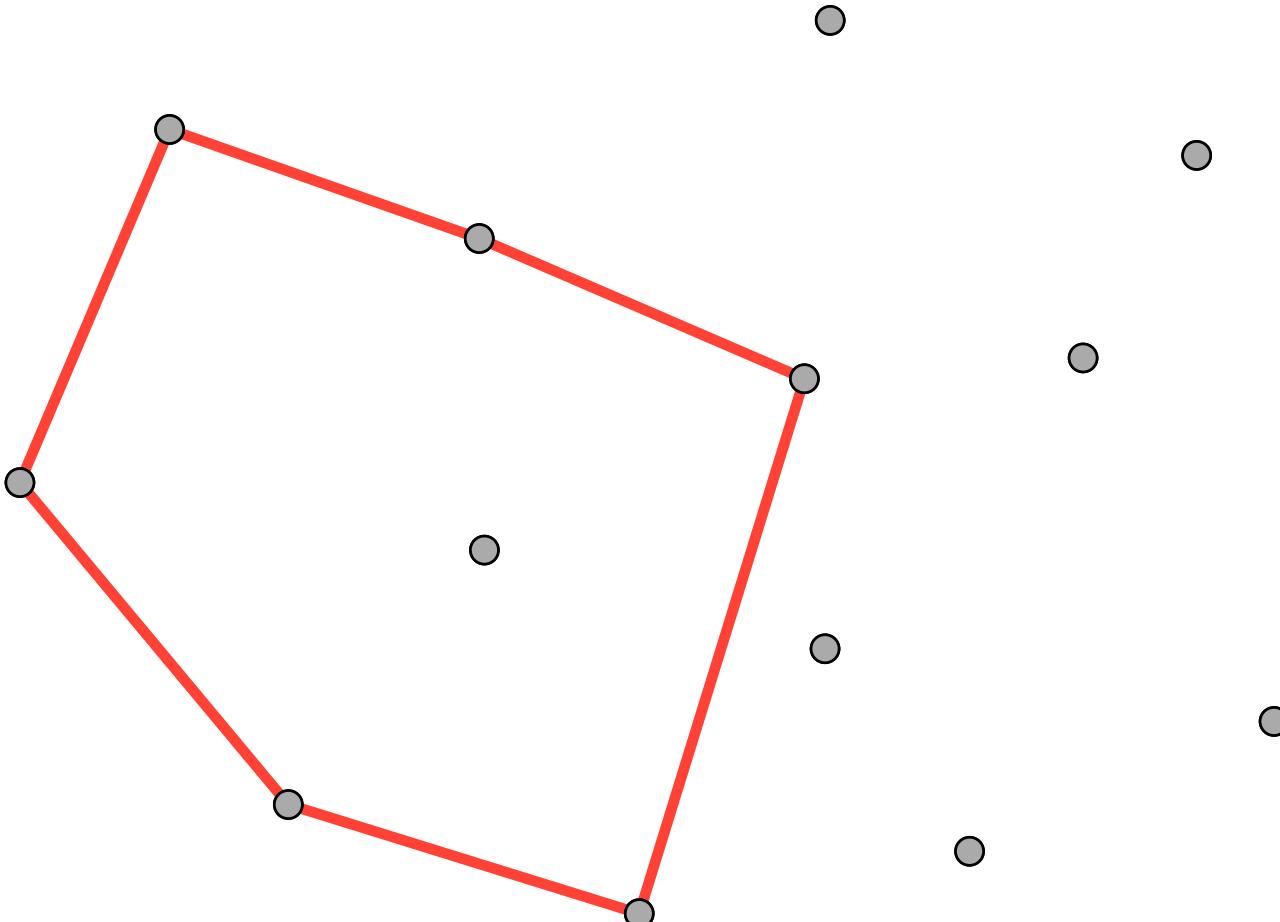
2.1.2 Przykład



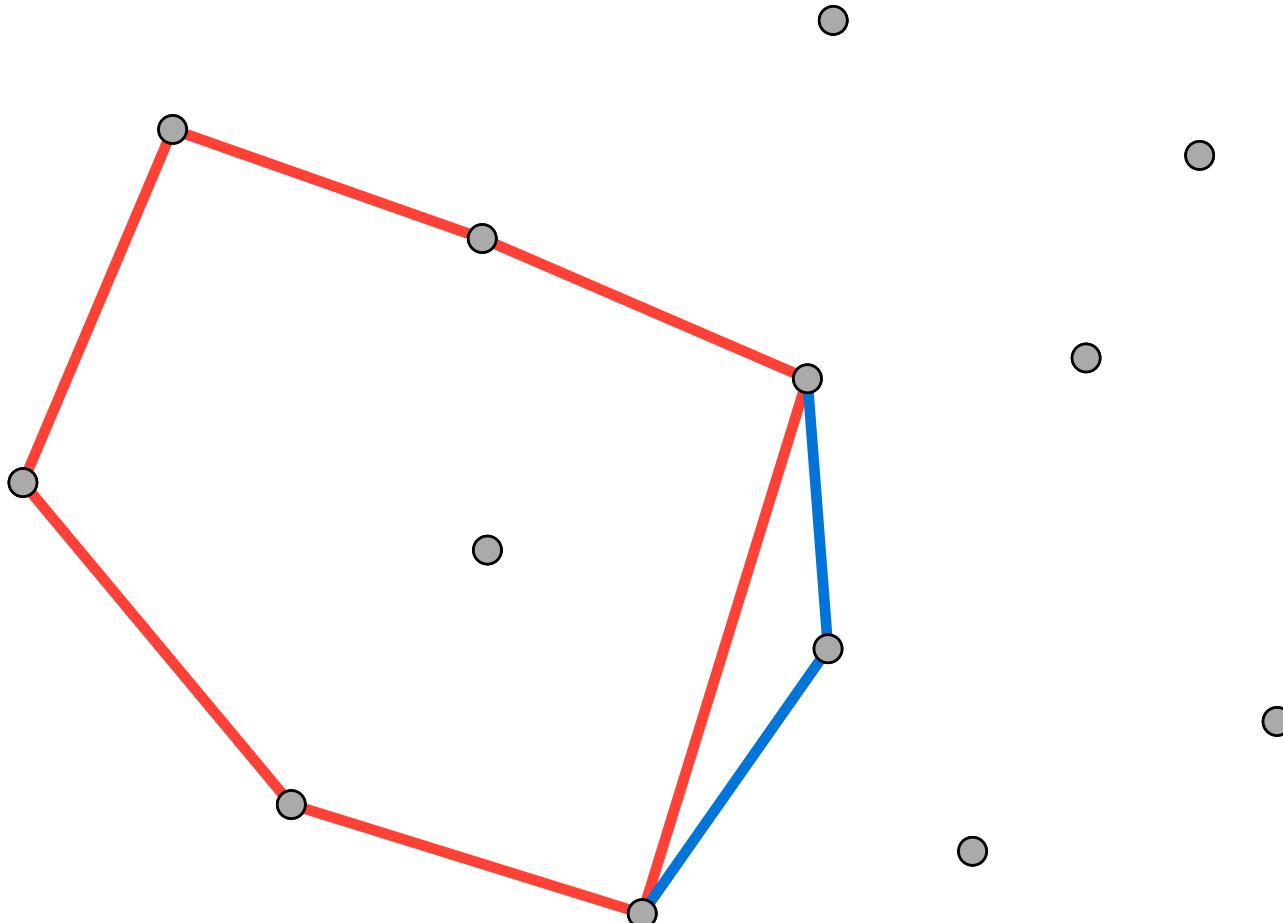
2.1.2 Przykład



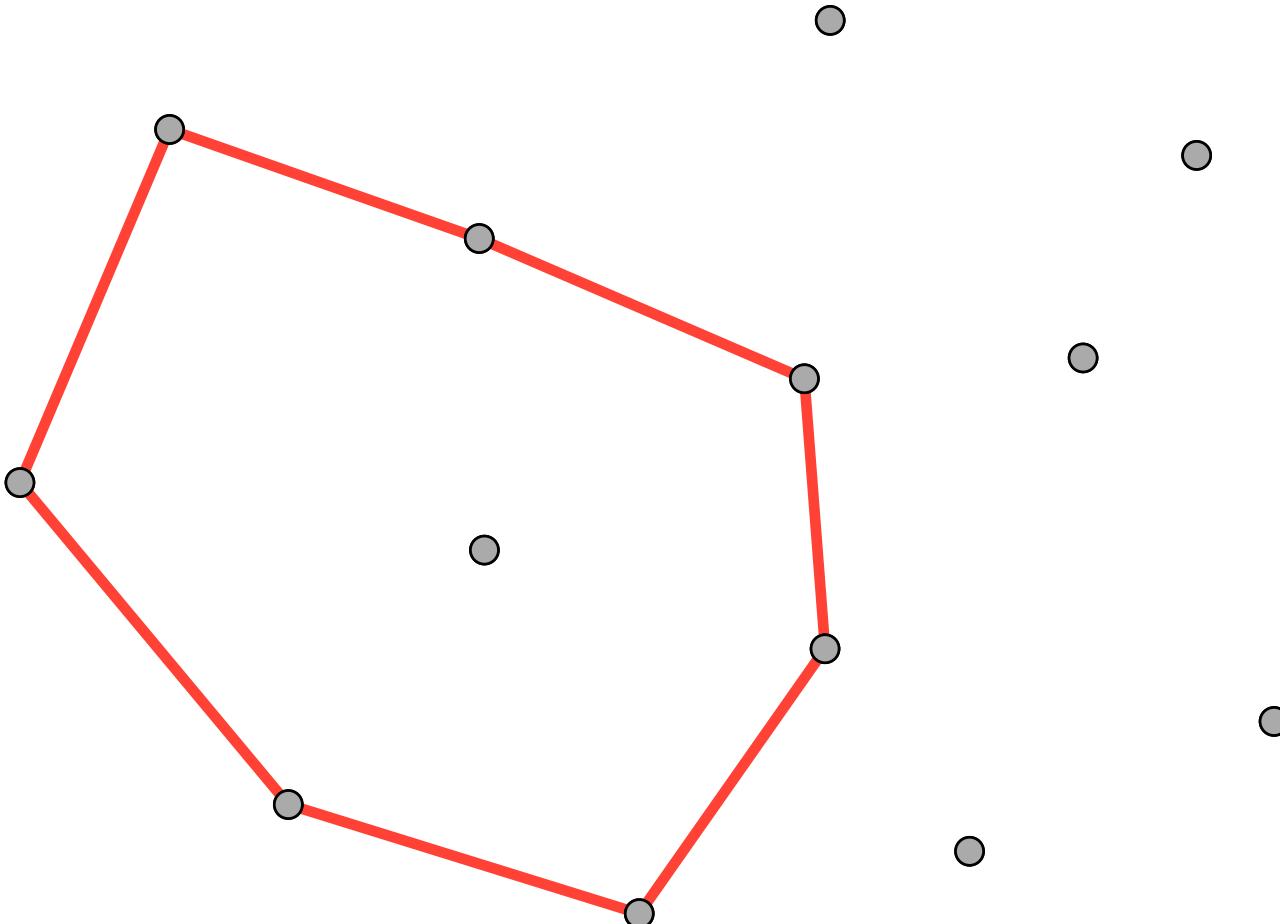
2.1.2 Przykład



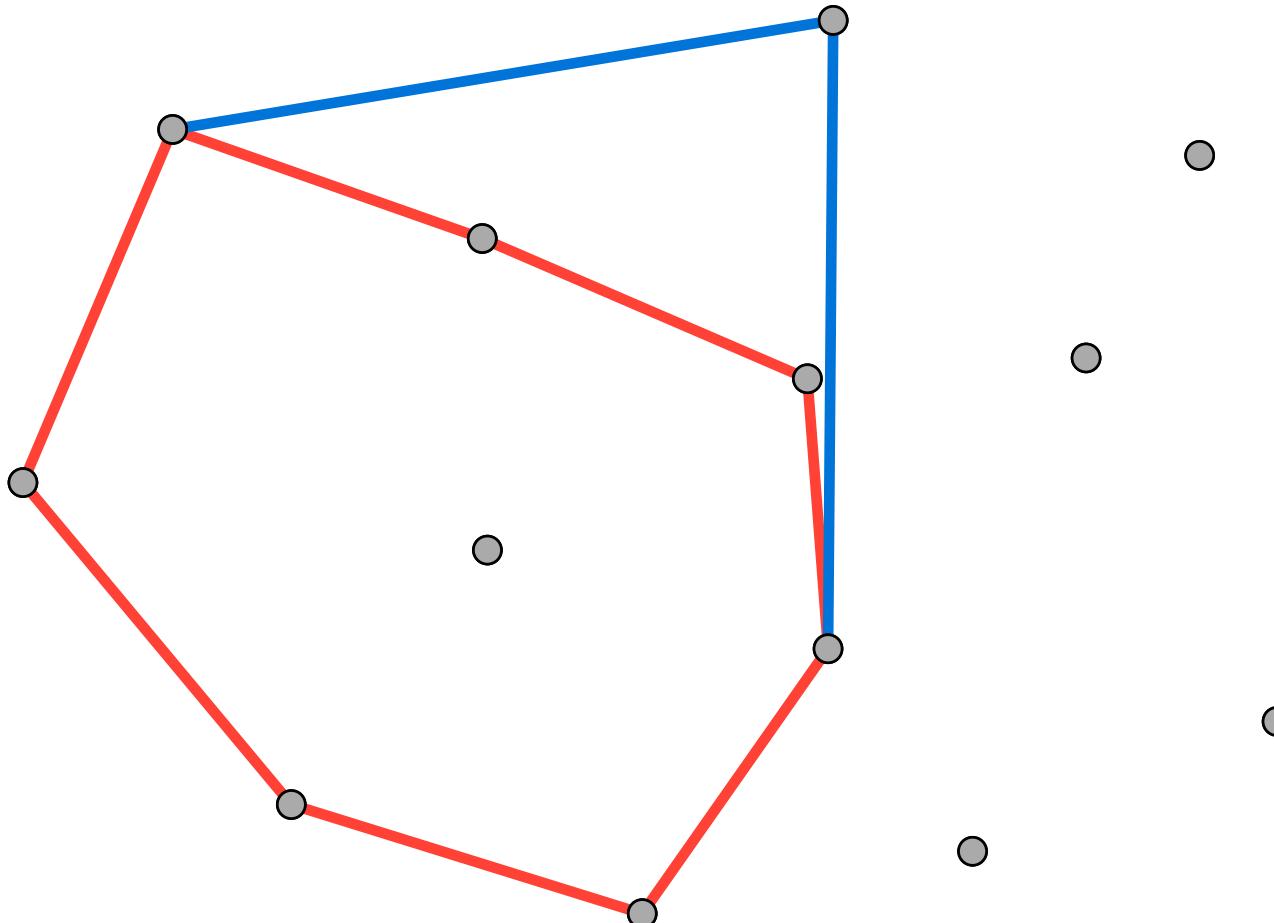
2.1.2 Przykład



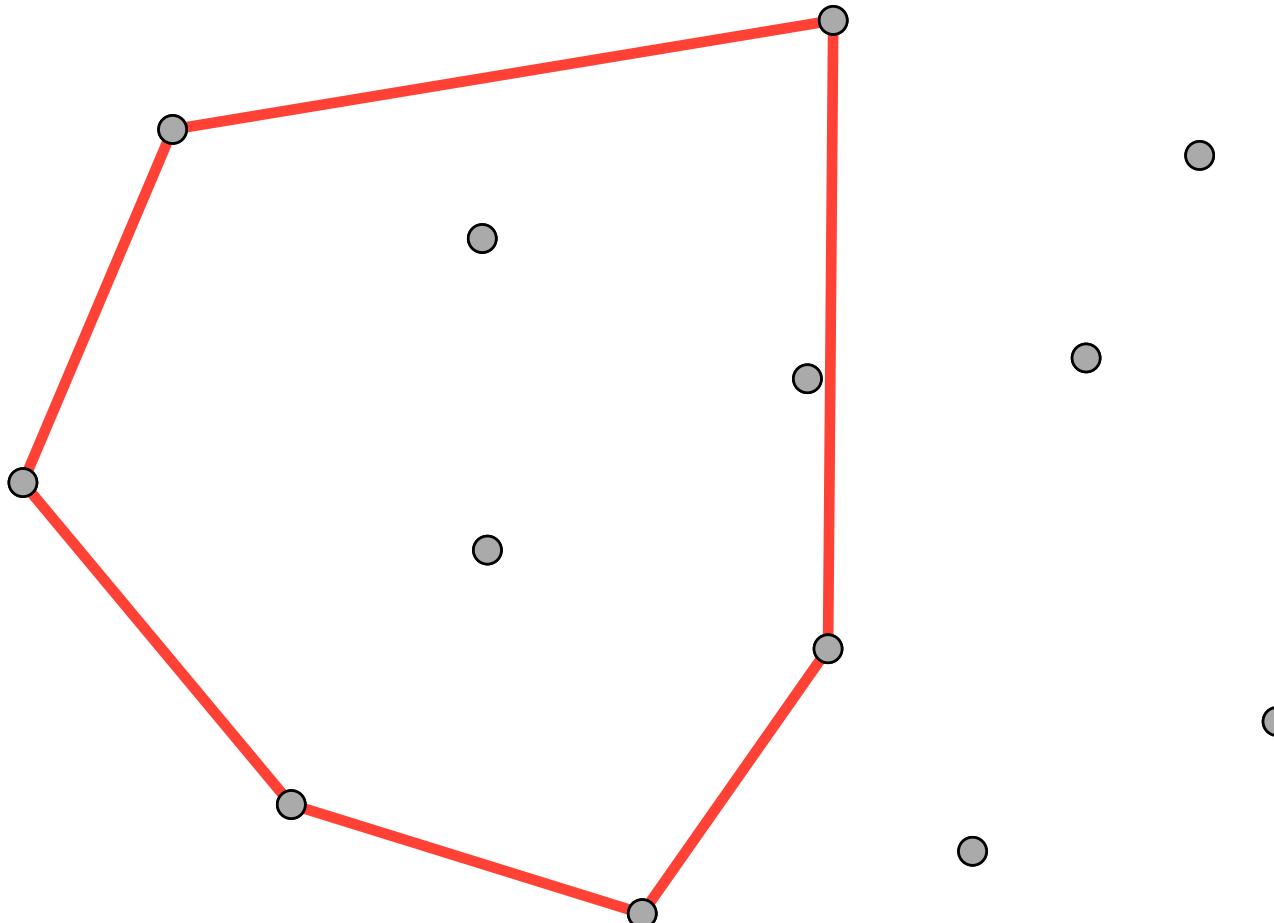
2.1.2 Przykład



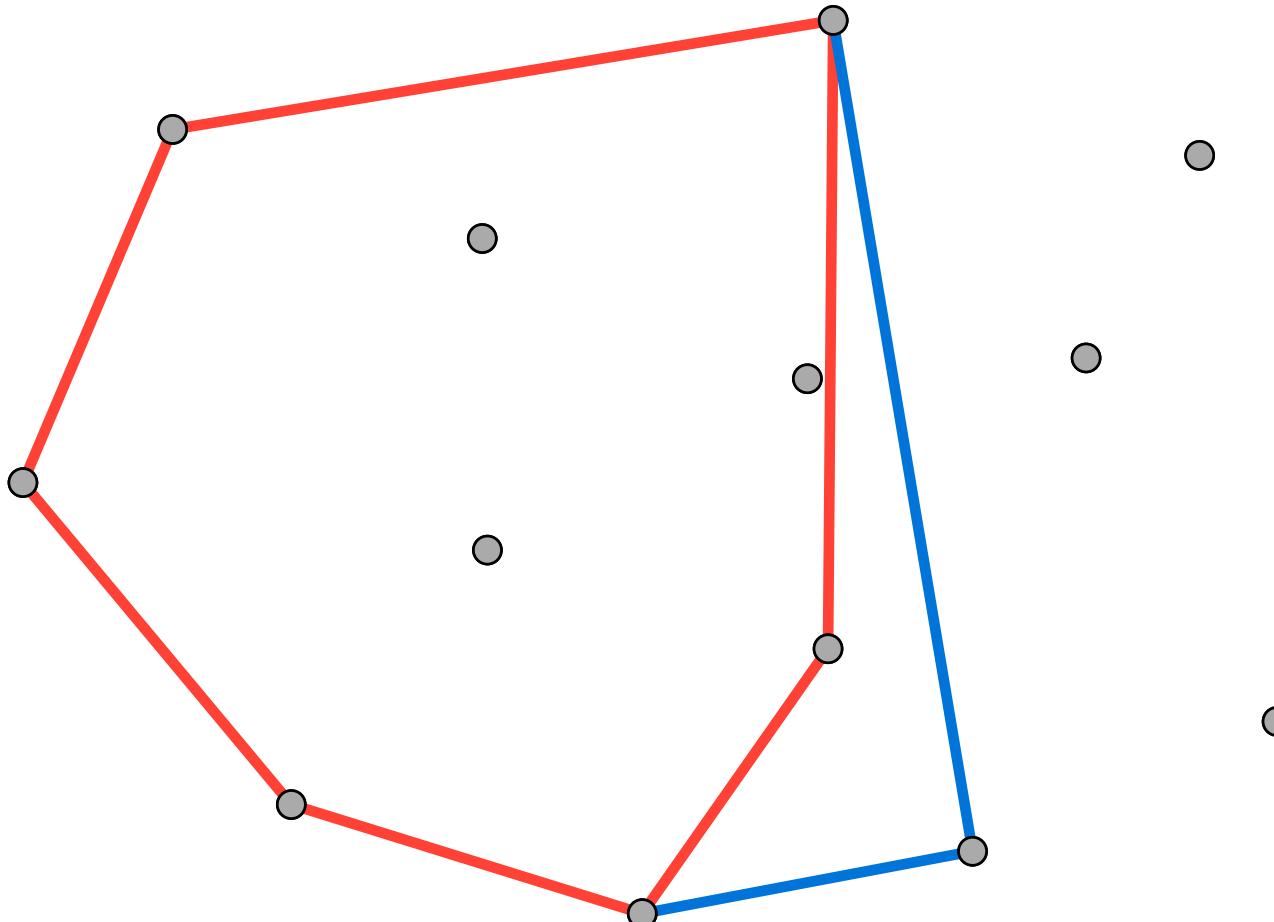
2.1.2 Przykład



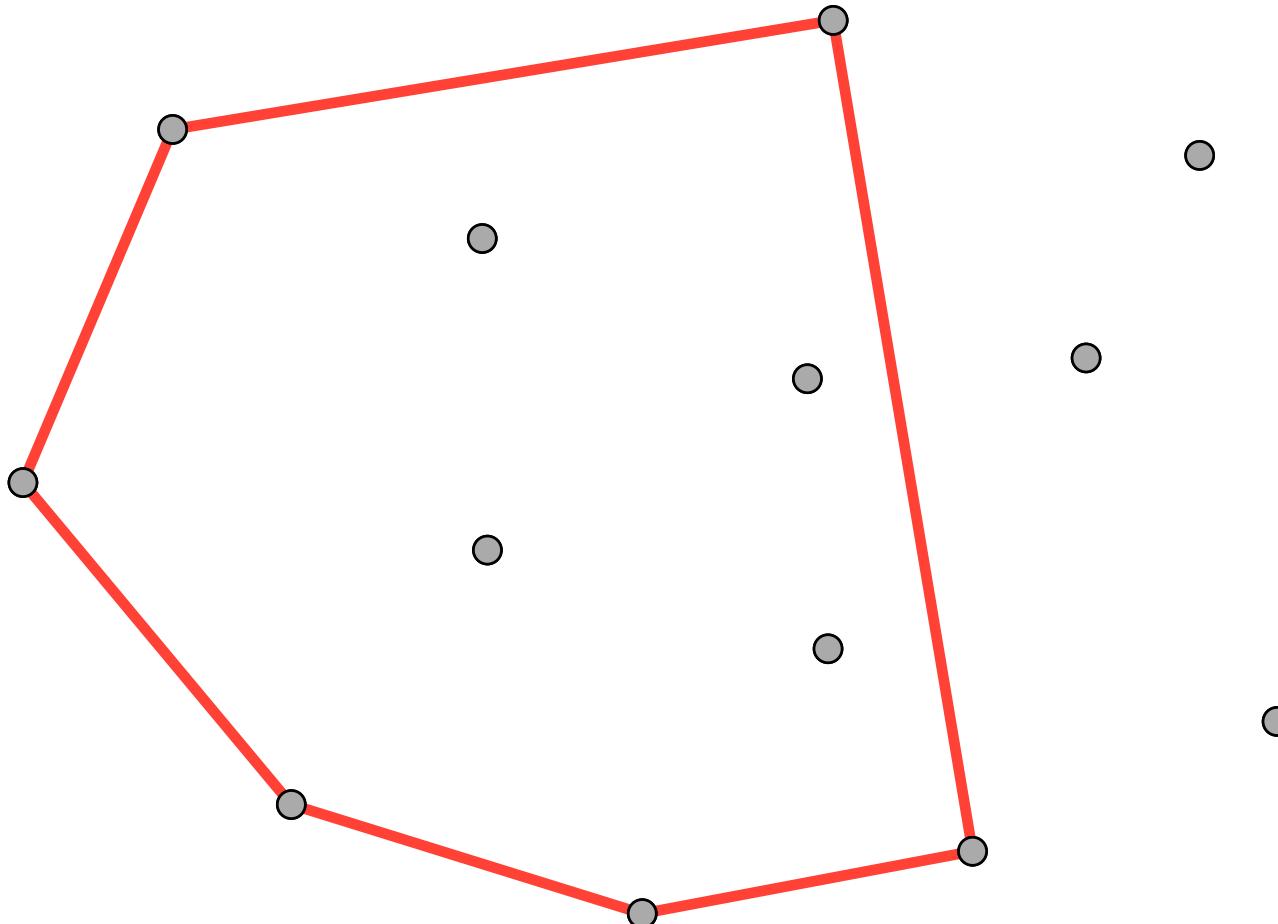
2.1.2 Przykład



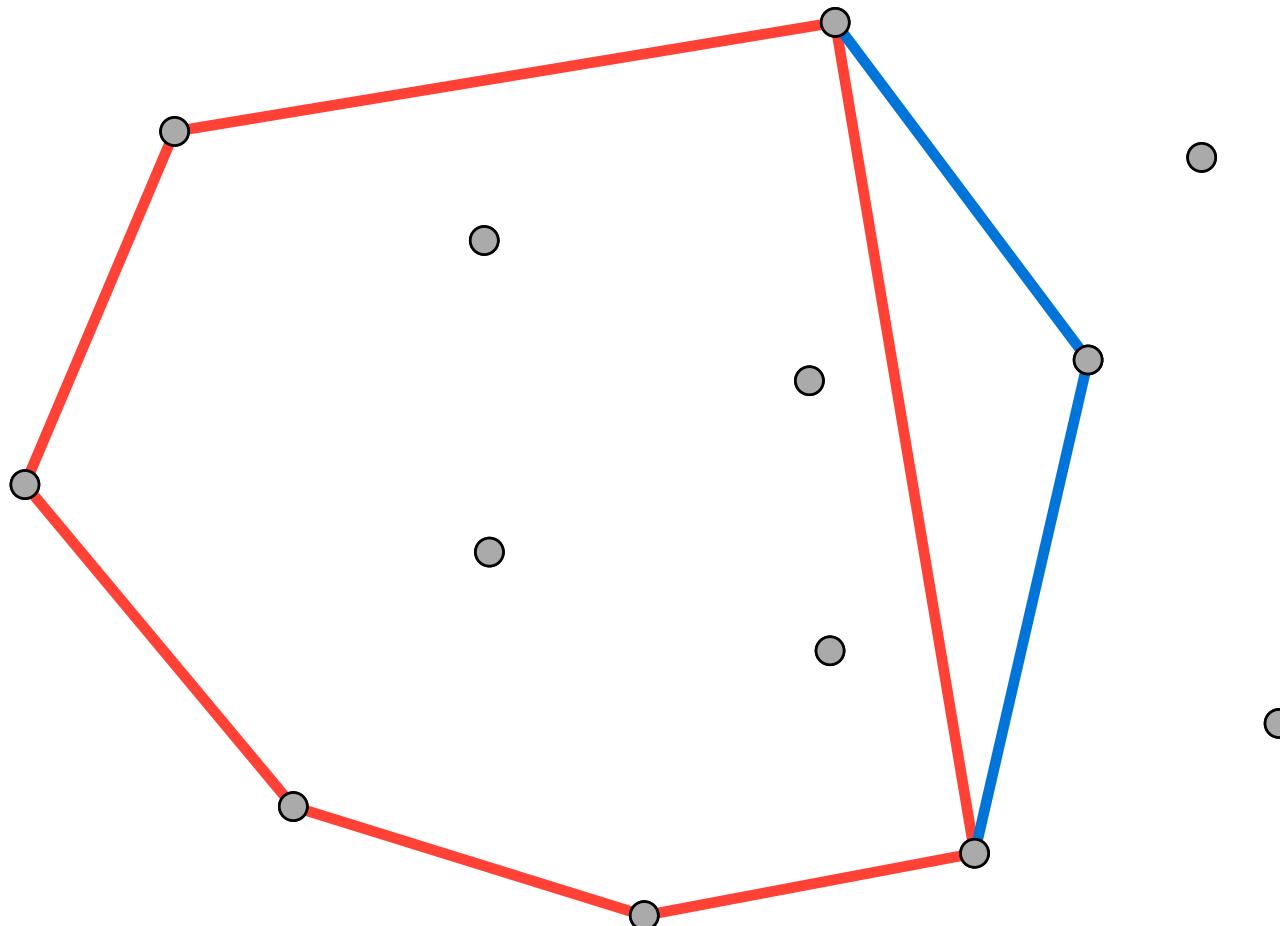
2.1.2 Przykład



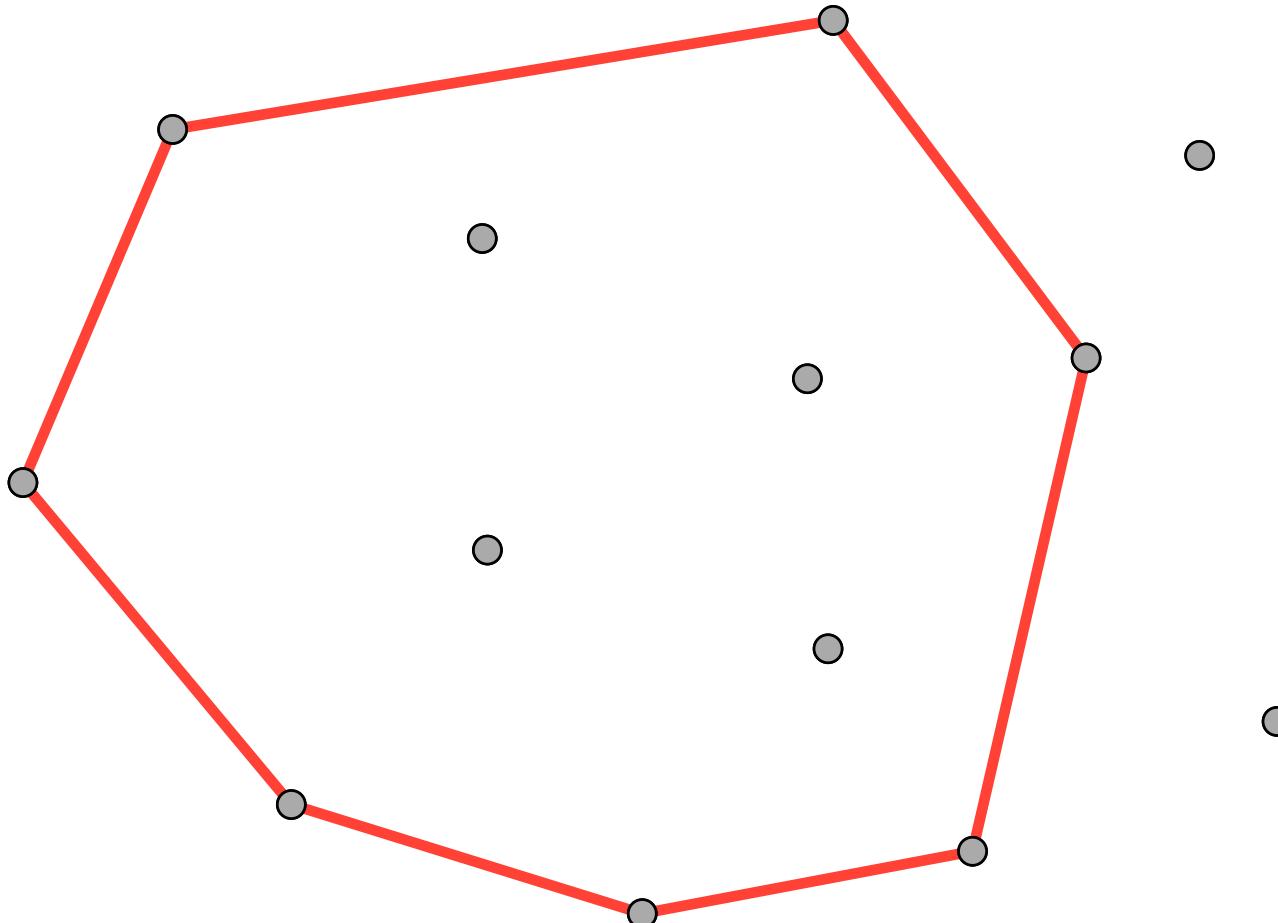
2.1.2 Przykład



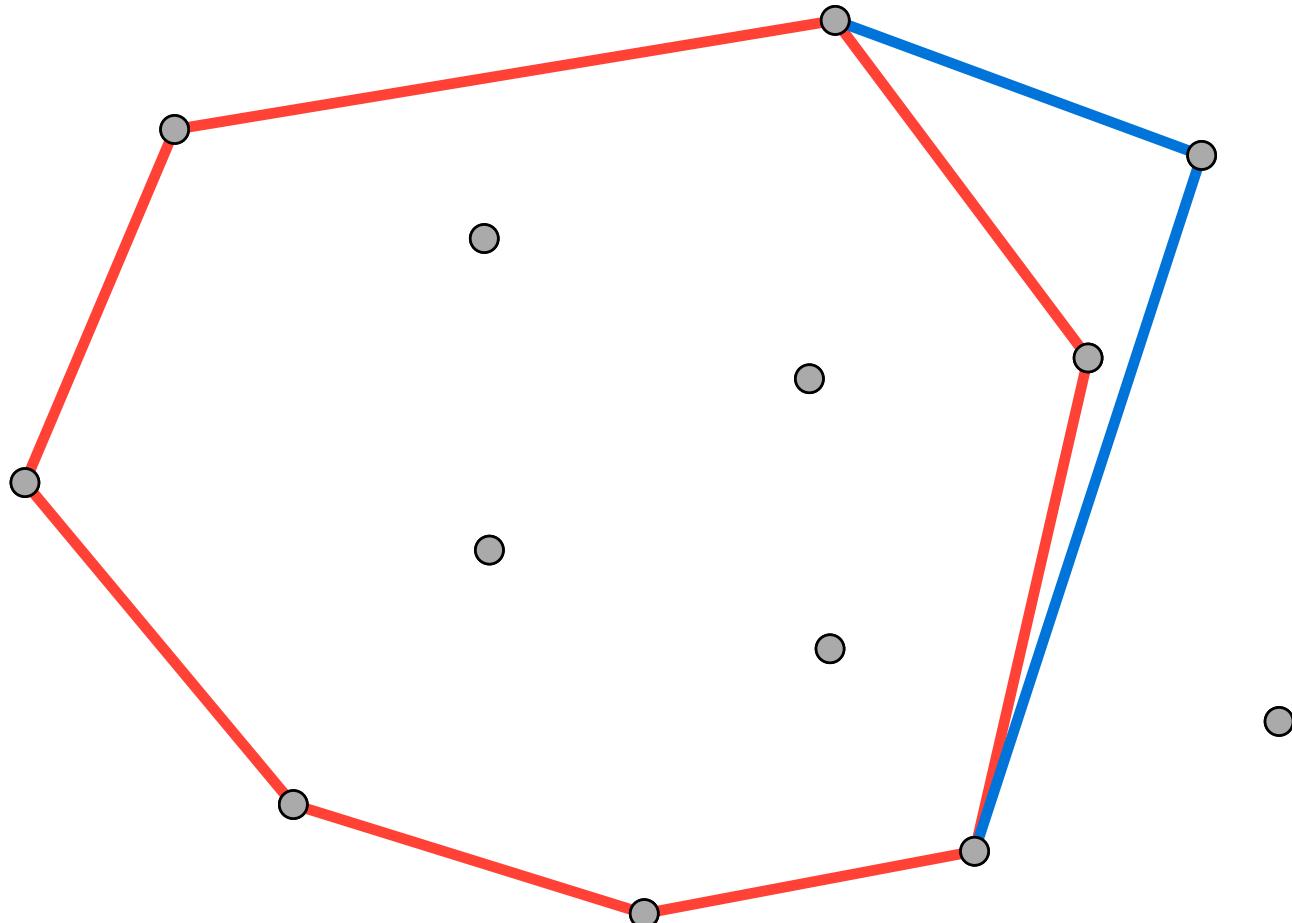
2.1.2 Przykład



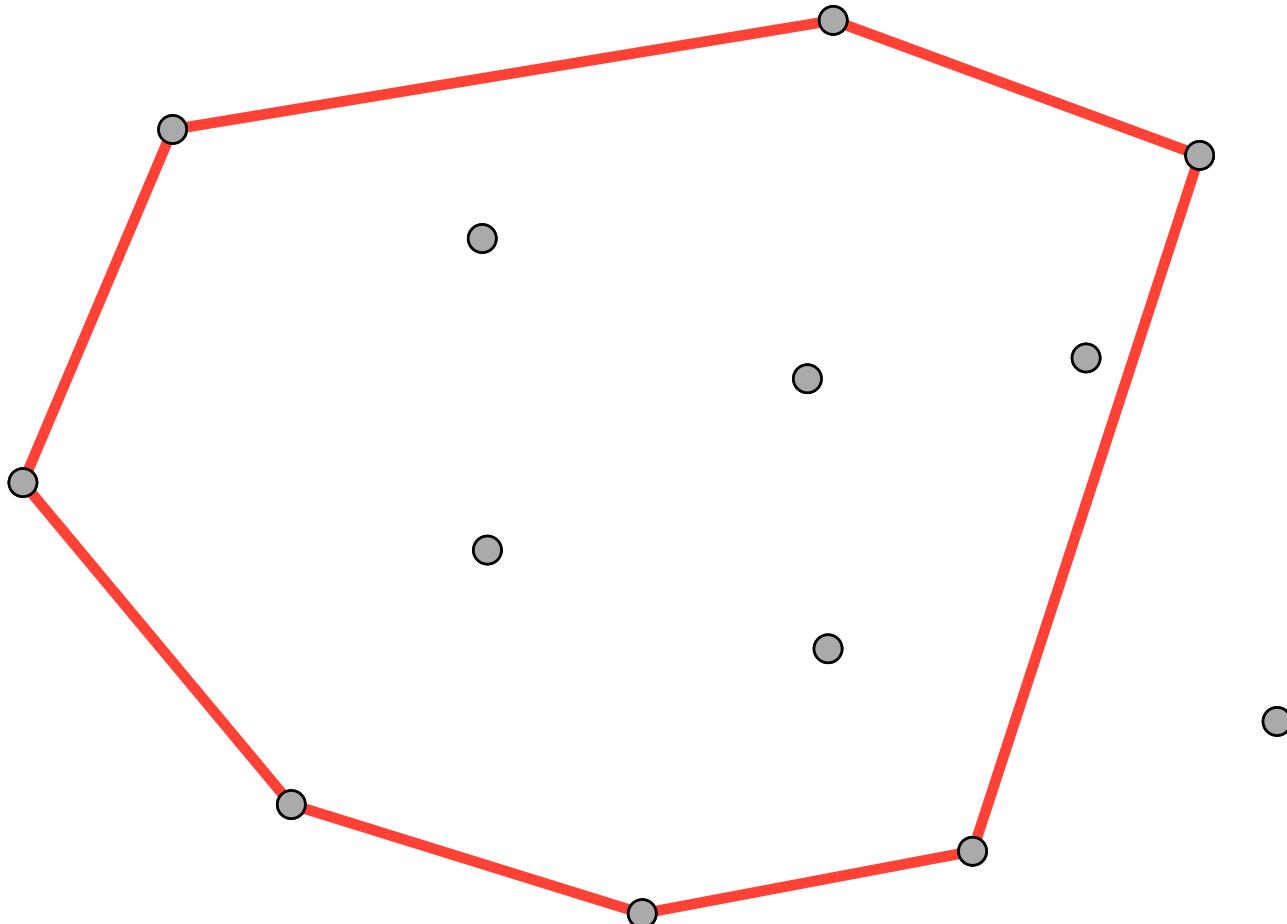
2.1.2 Przykład



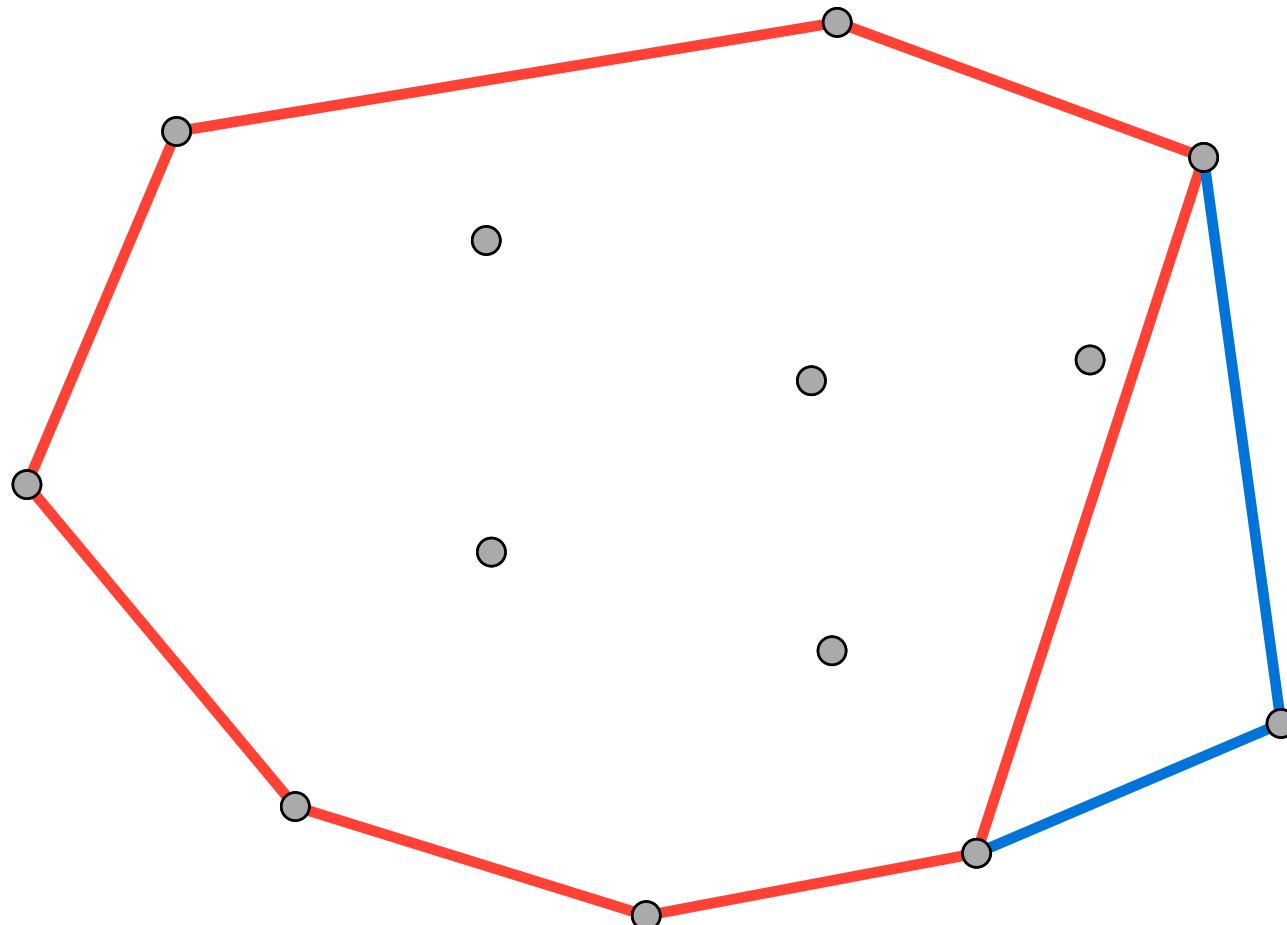
2.1.2 Przykład



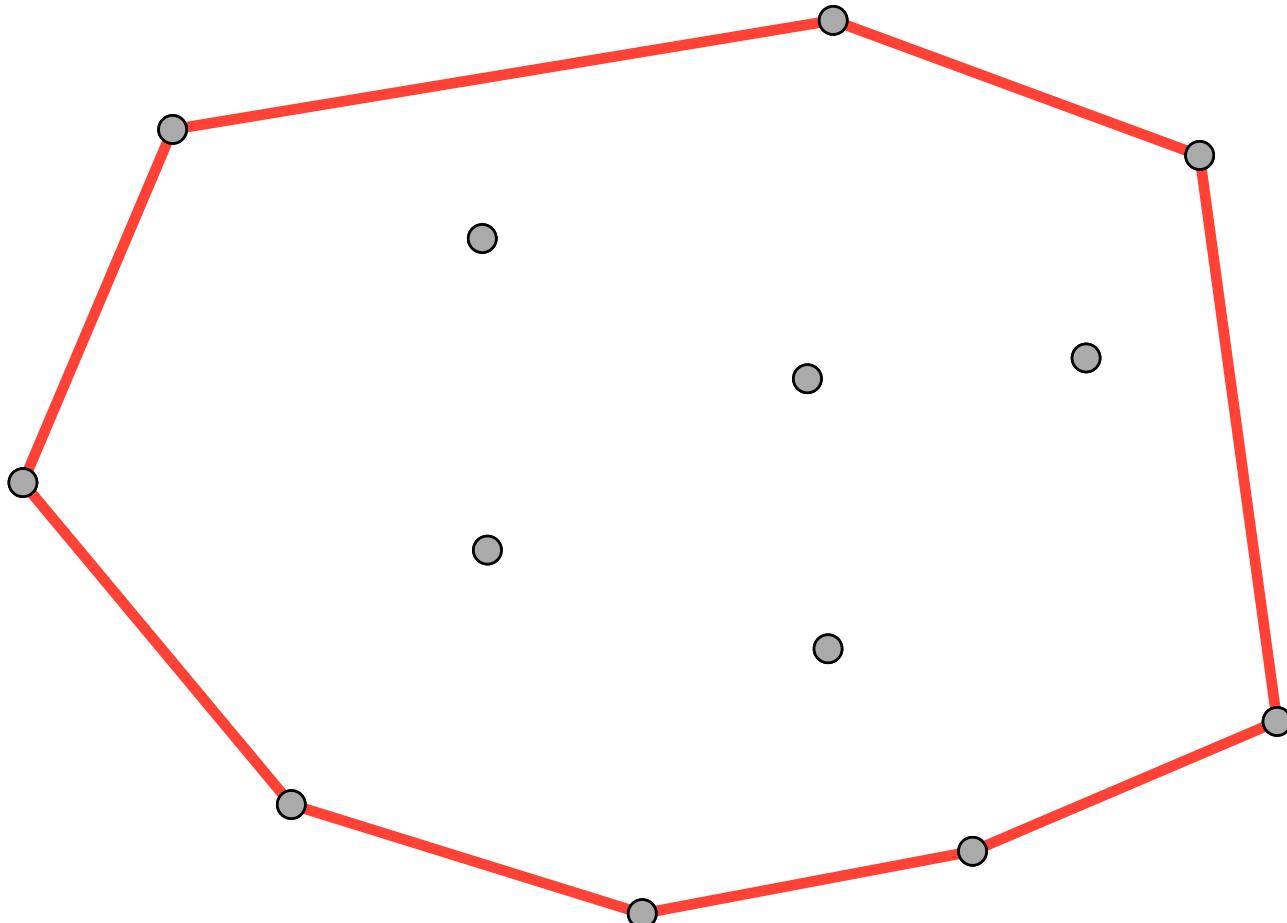
2.1.2 Przykład



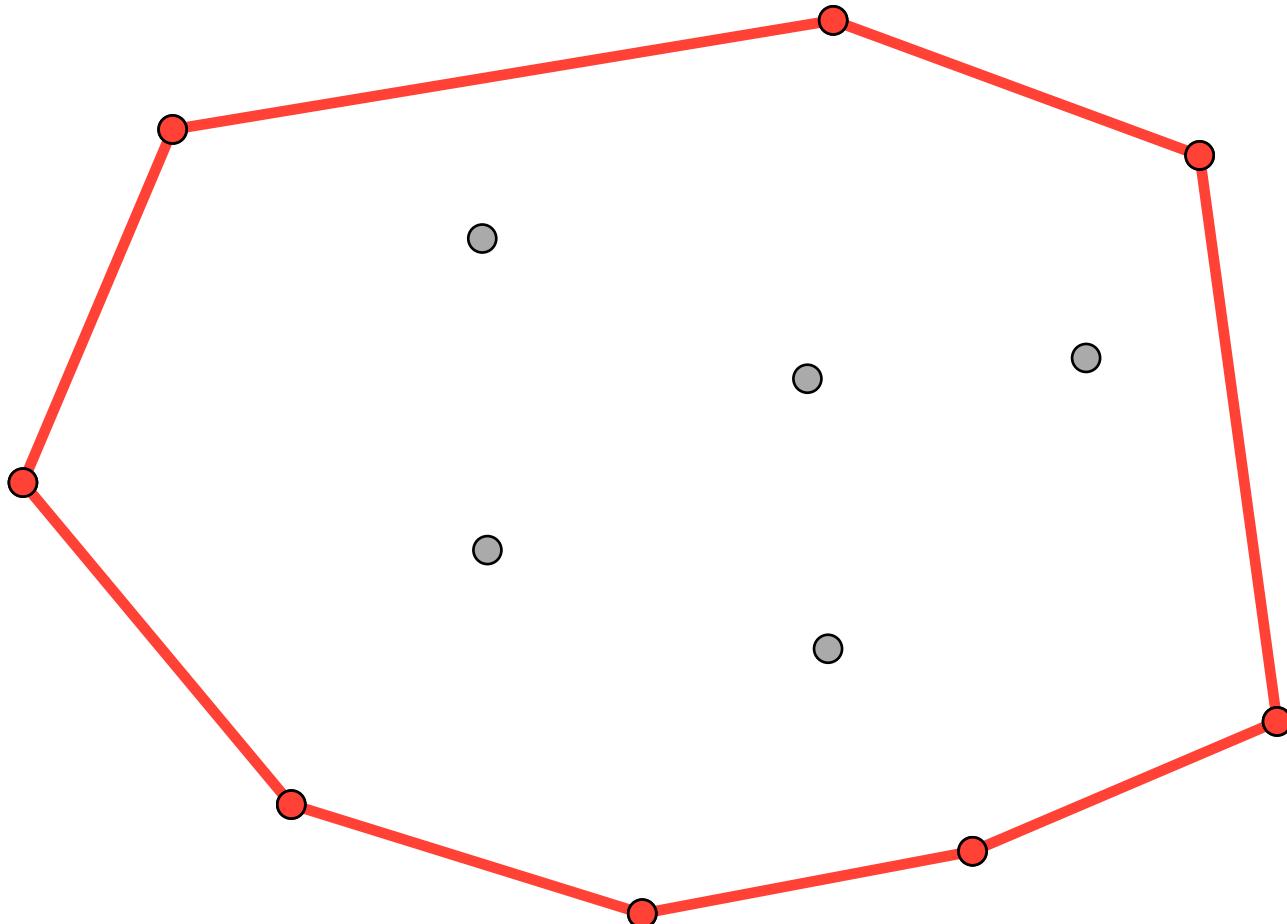
2.1.2 Przykład



2.1.2 Przykład



2.1.2 Przykład

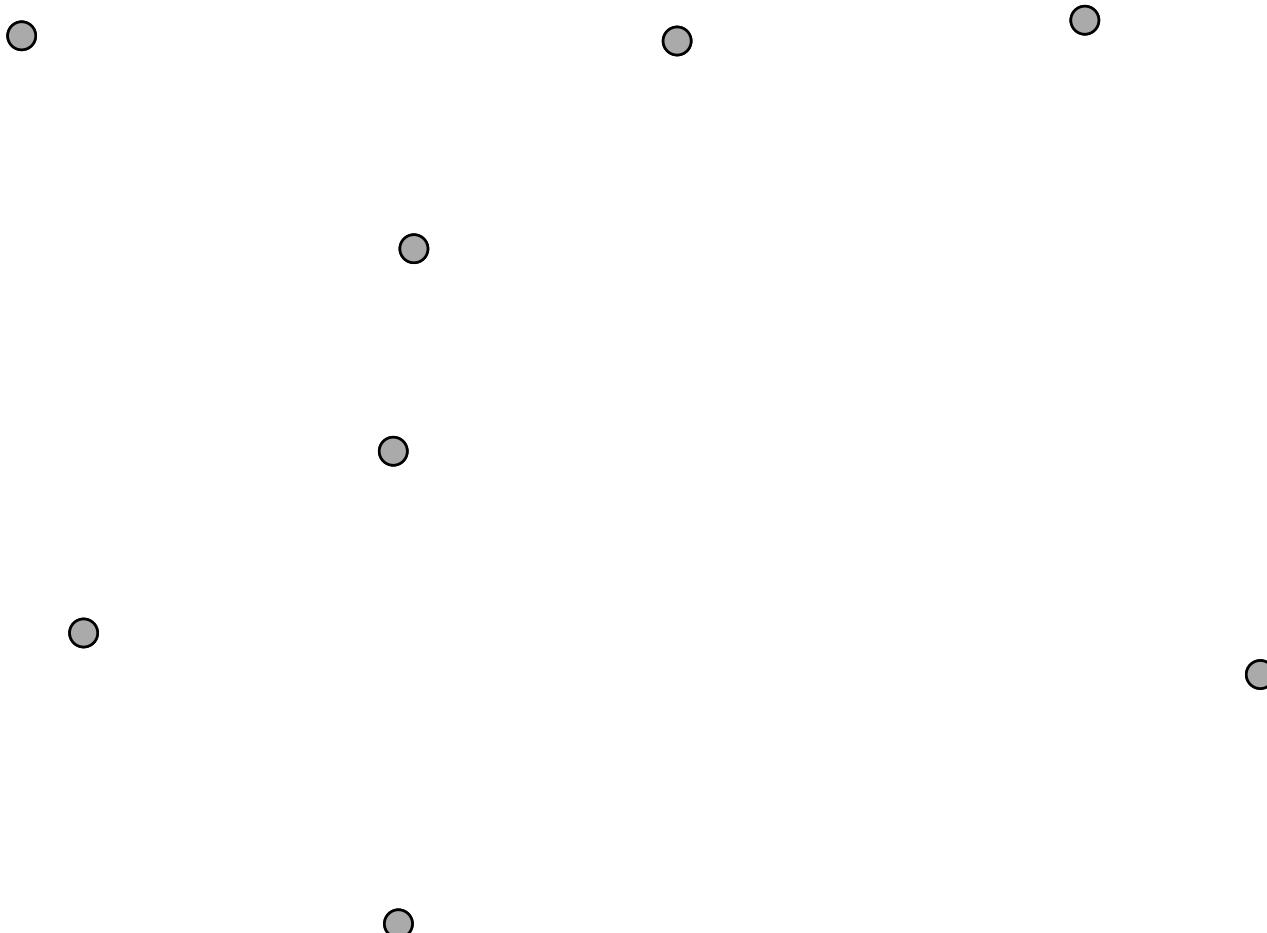


2.2.1 Działanie algorytmu

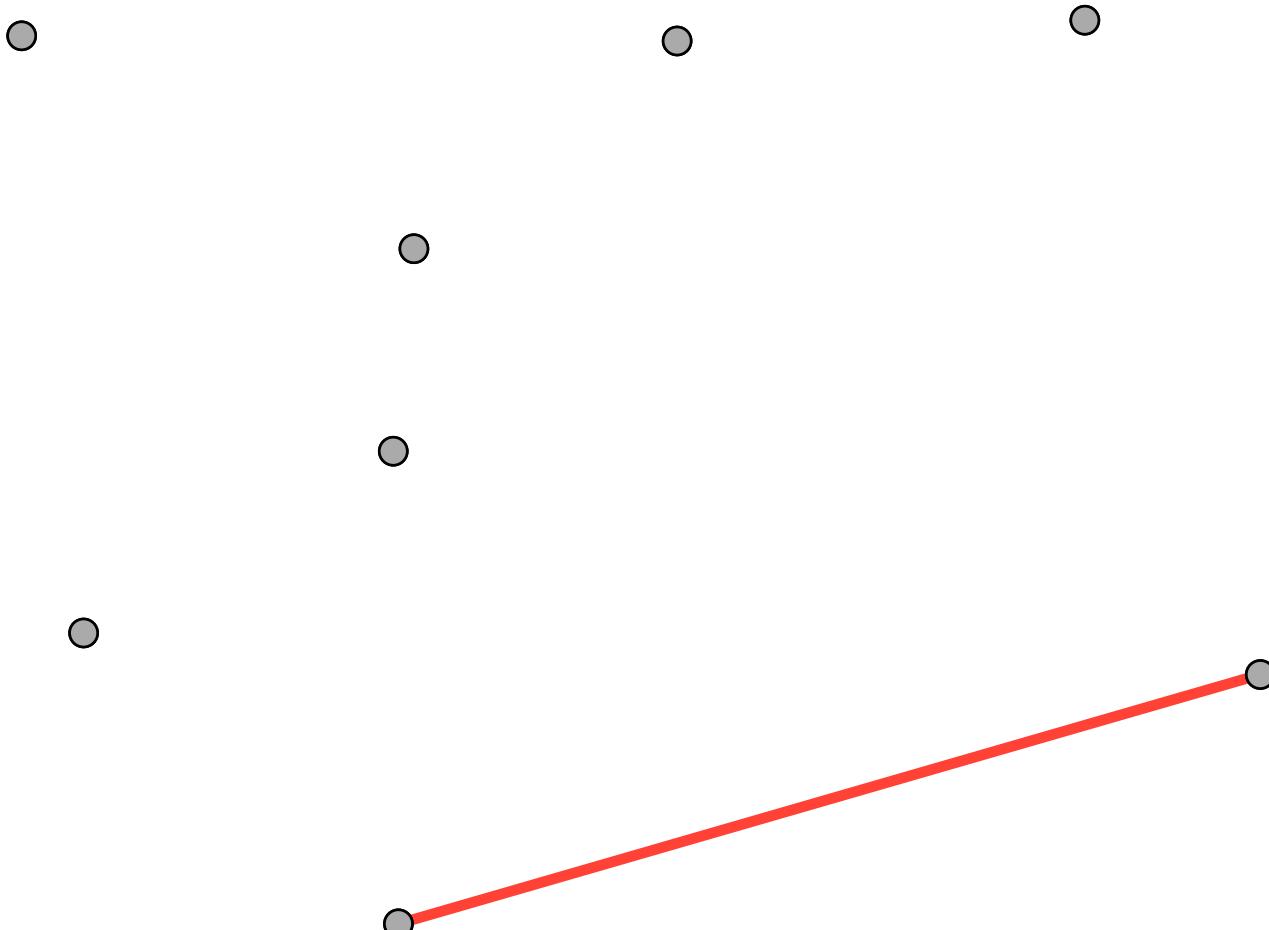
Algorytm wyszukuje najniższy punkt względem y , sortuje punkty na podstawie kąta jaki tworzy odcinek przez najniższy punkt oraz kolejny punkt z osią OX . Usunięte są również punkty współliniowe. Tworzy stos, dla każdego punktu usuwa punkty ze stosu aż dwa ostatnie z wybranym punktem przestaną tworzyć skręt w prawo i dodaje ten punkt na stos.

Złożoność czasowa algorytmu to $O(n \log n)$

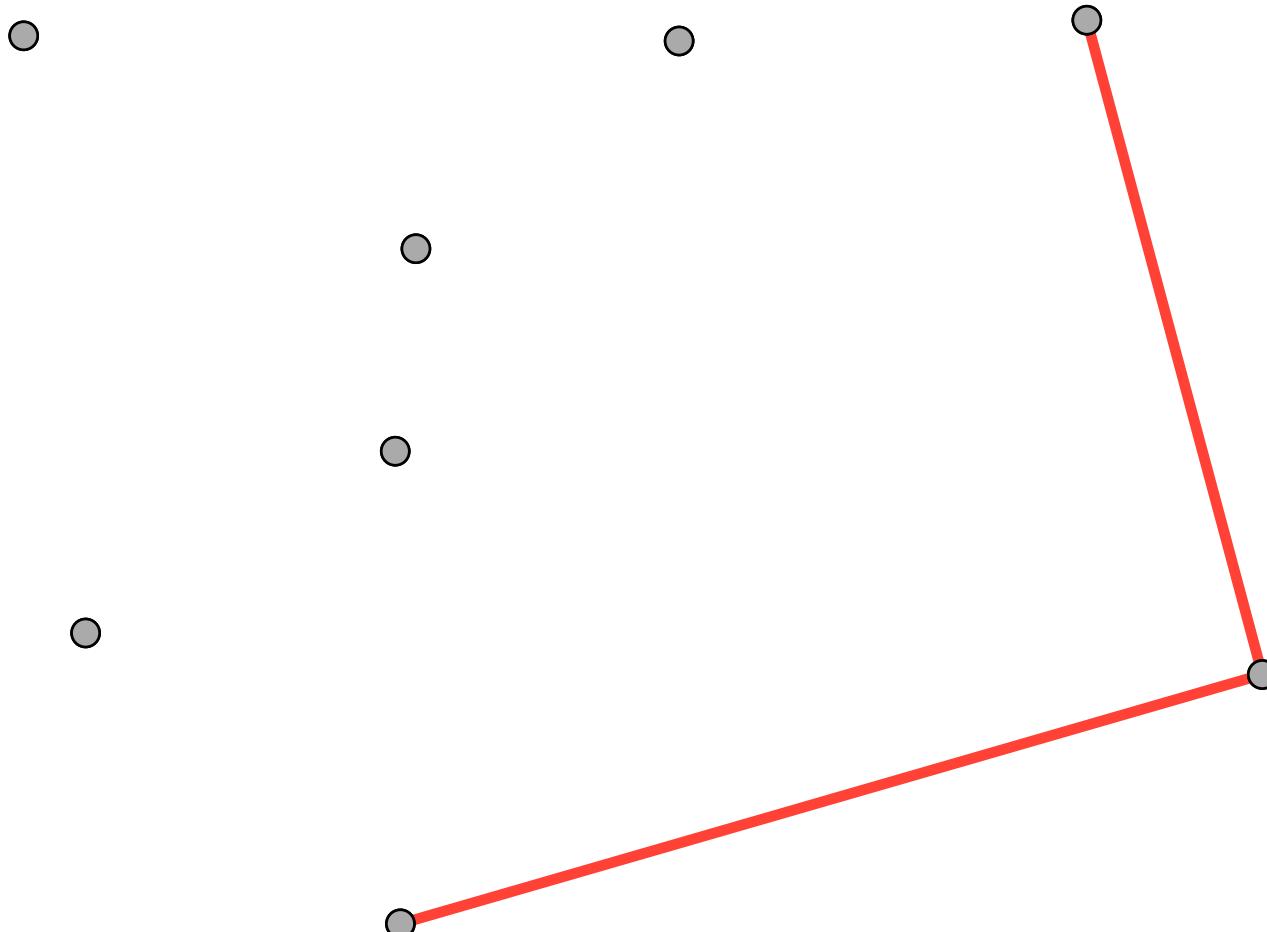
2.2.2 Przykład



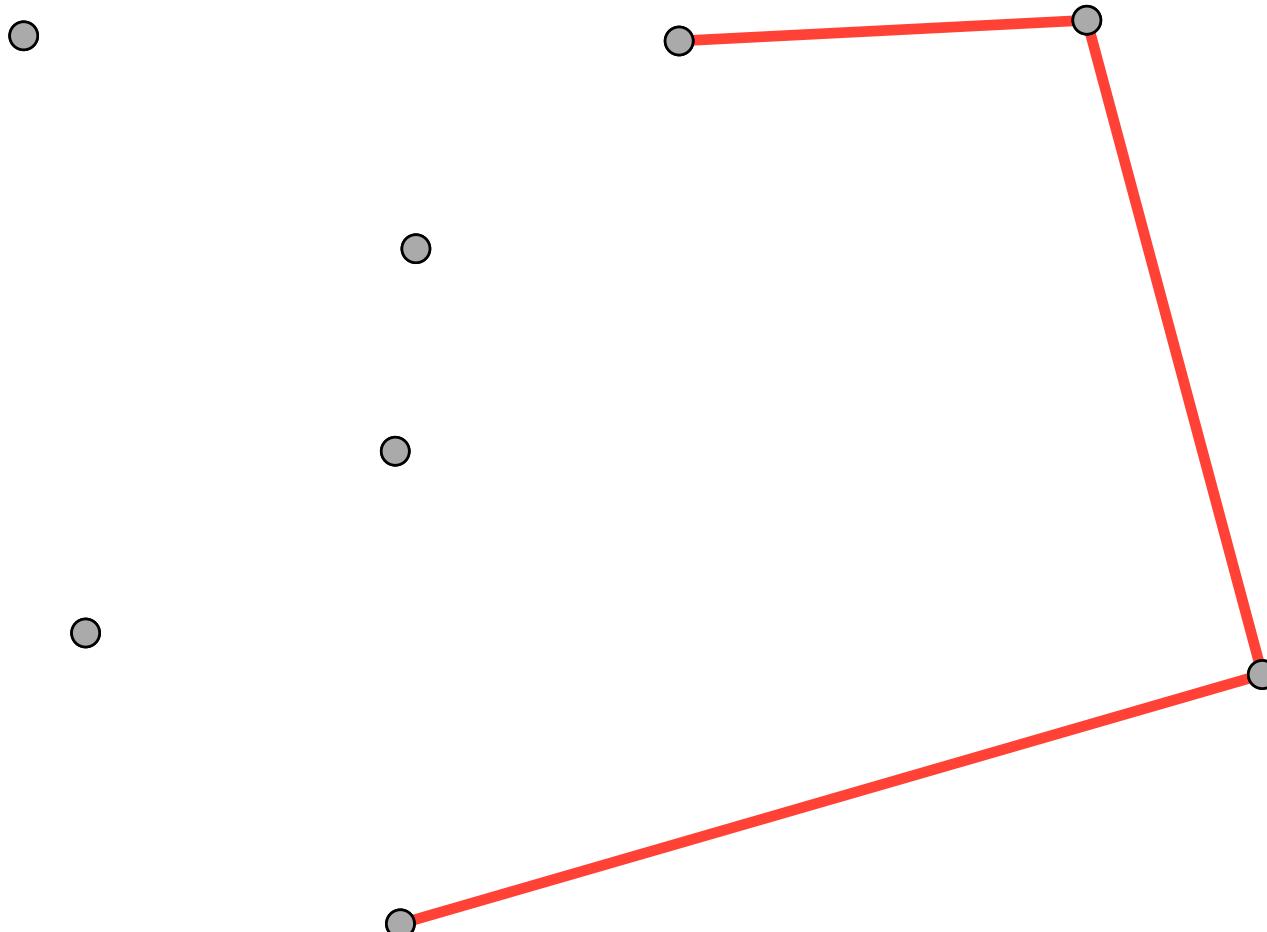
2.2.2 Przykład



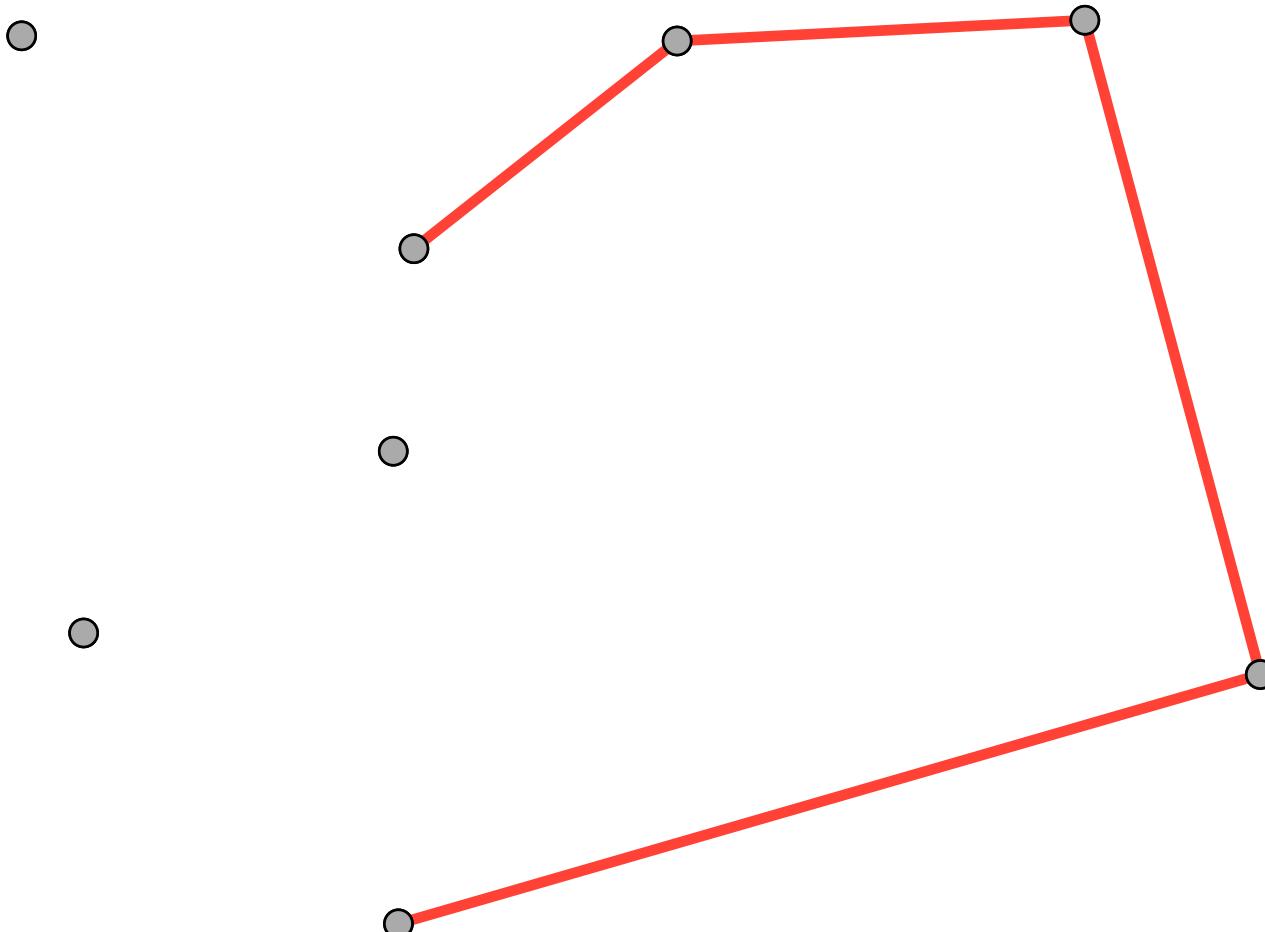
2.2.2 Przykład



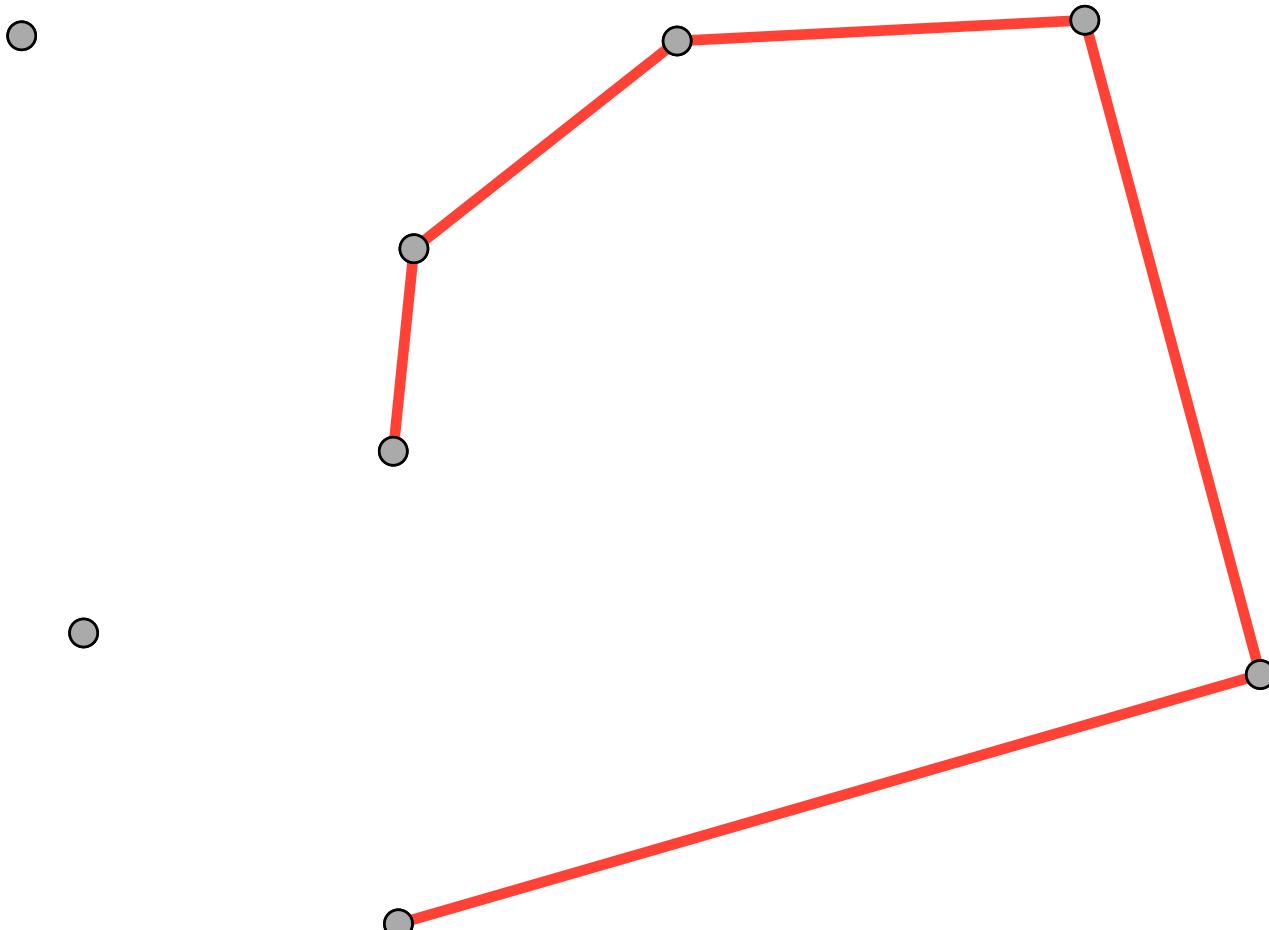
2.2.2 Przykład



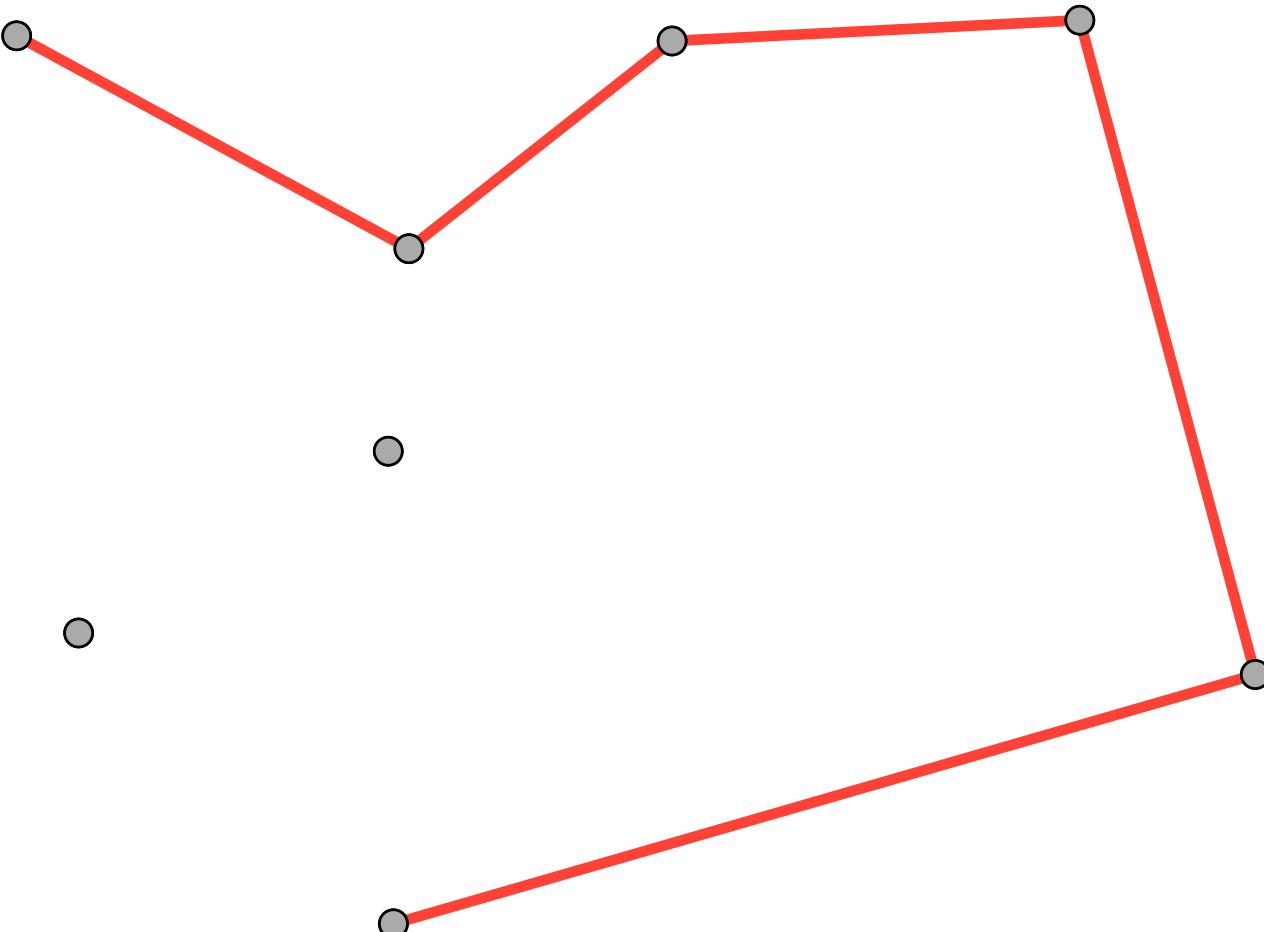
2.2.2 Przykład



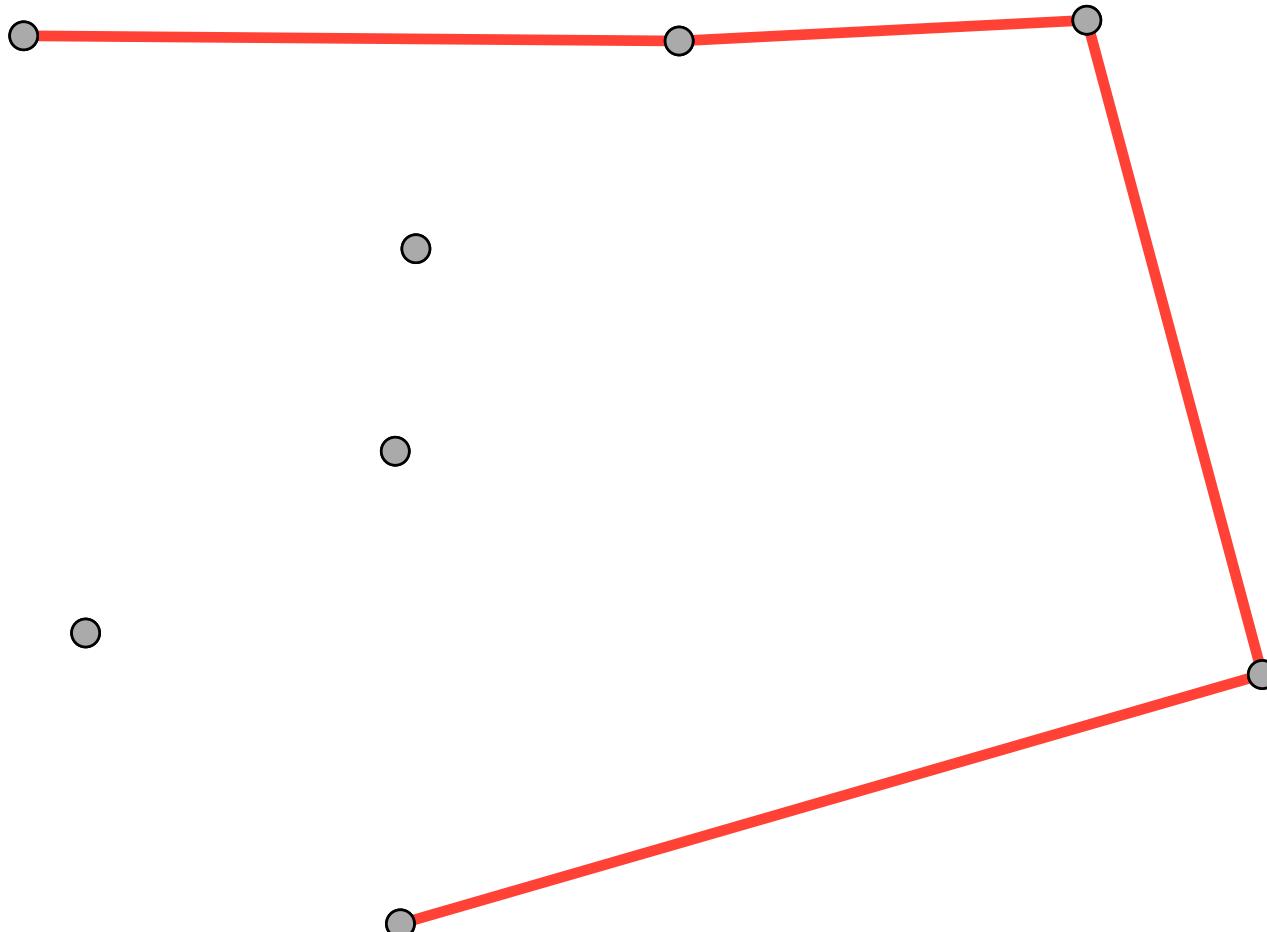
2.2.2 Przykład



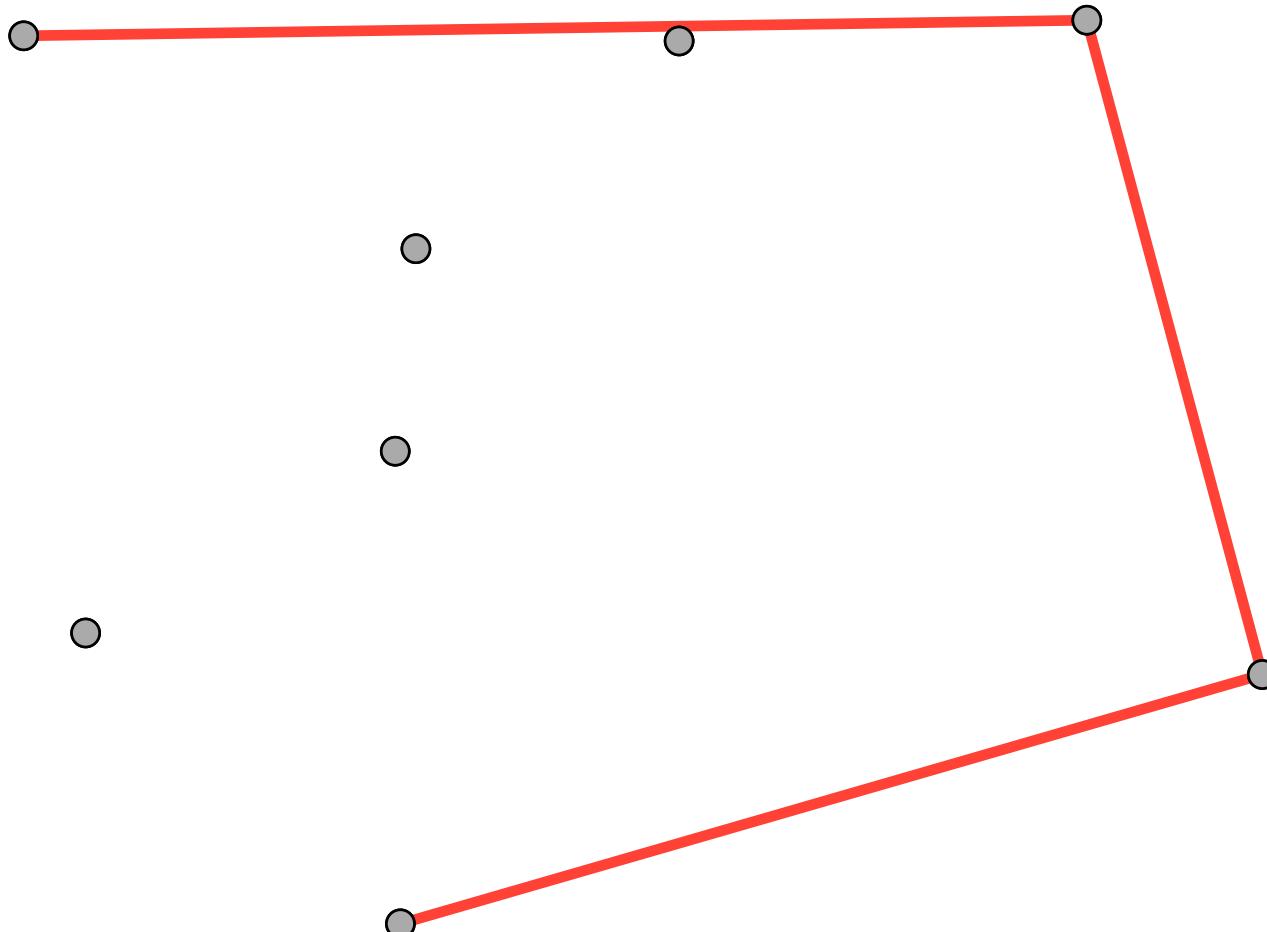
2.2.2 Przykład



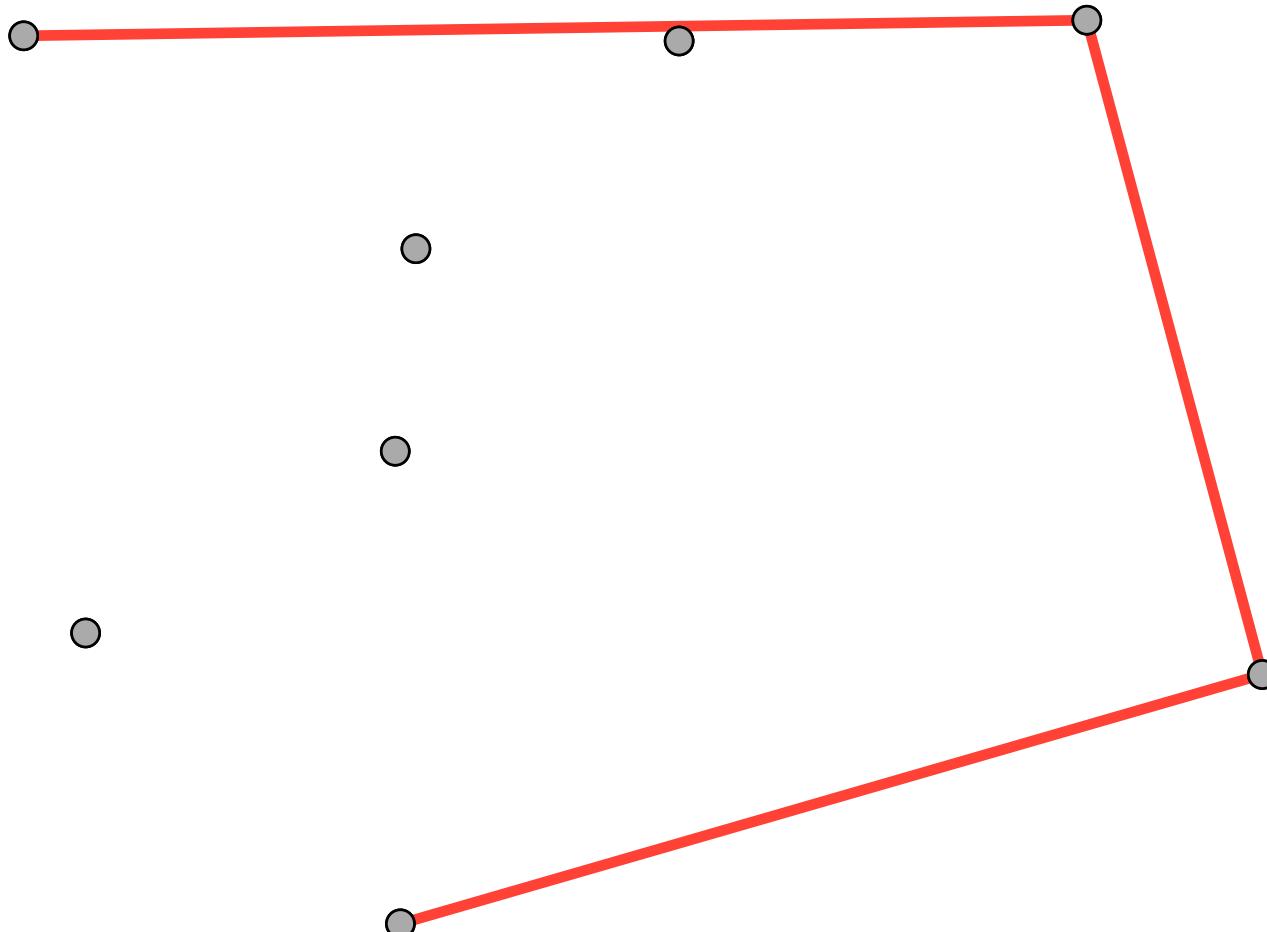
2.2.2 Przykład



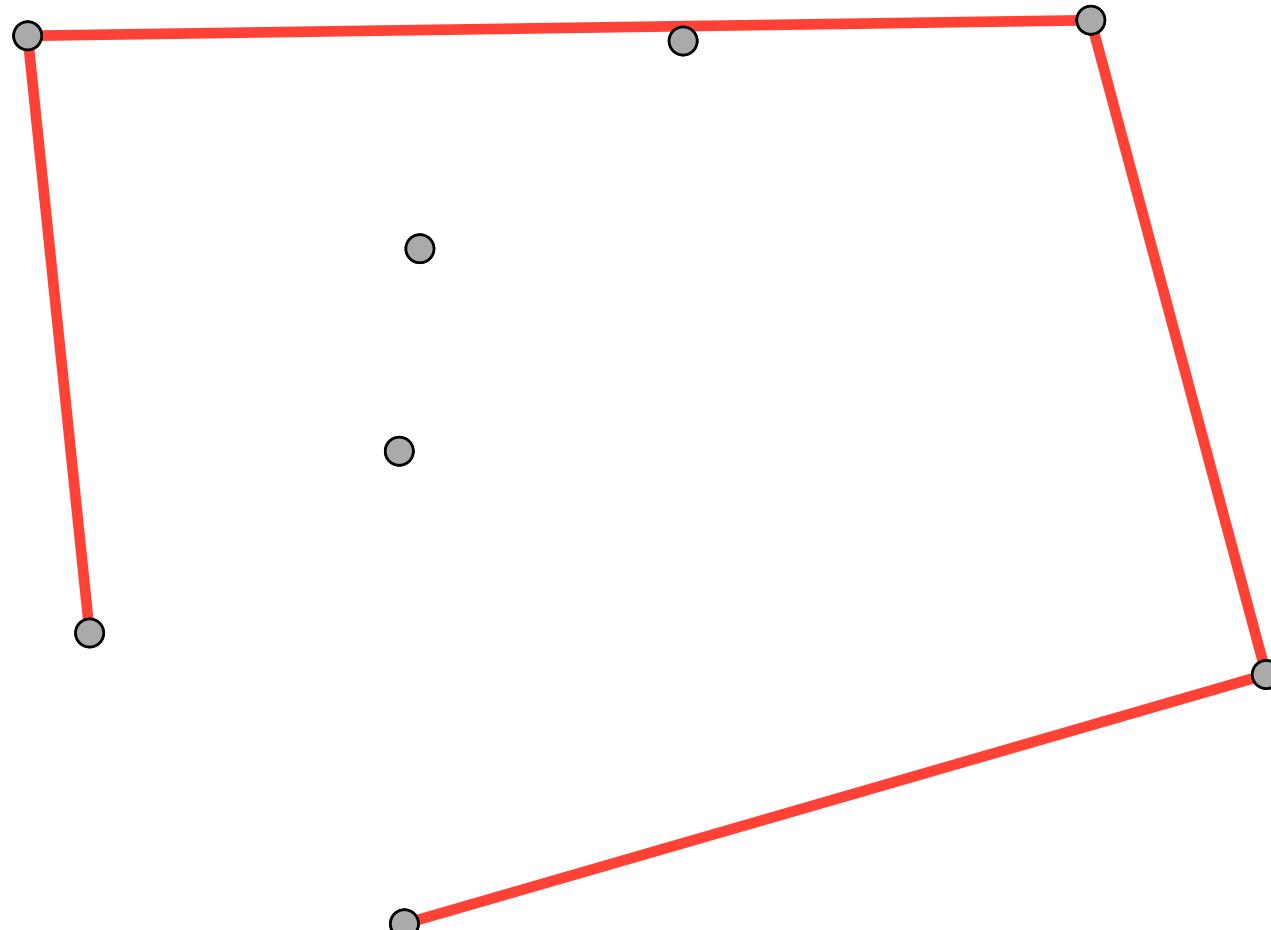
2.2.2 Przykład



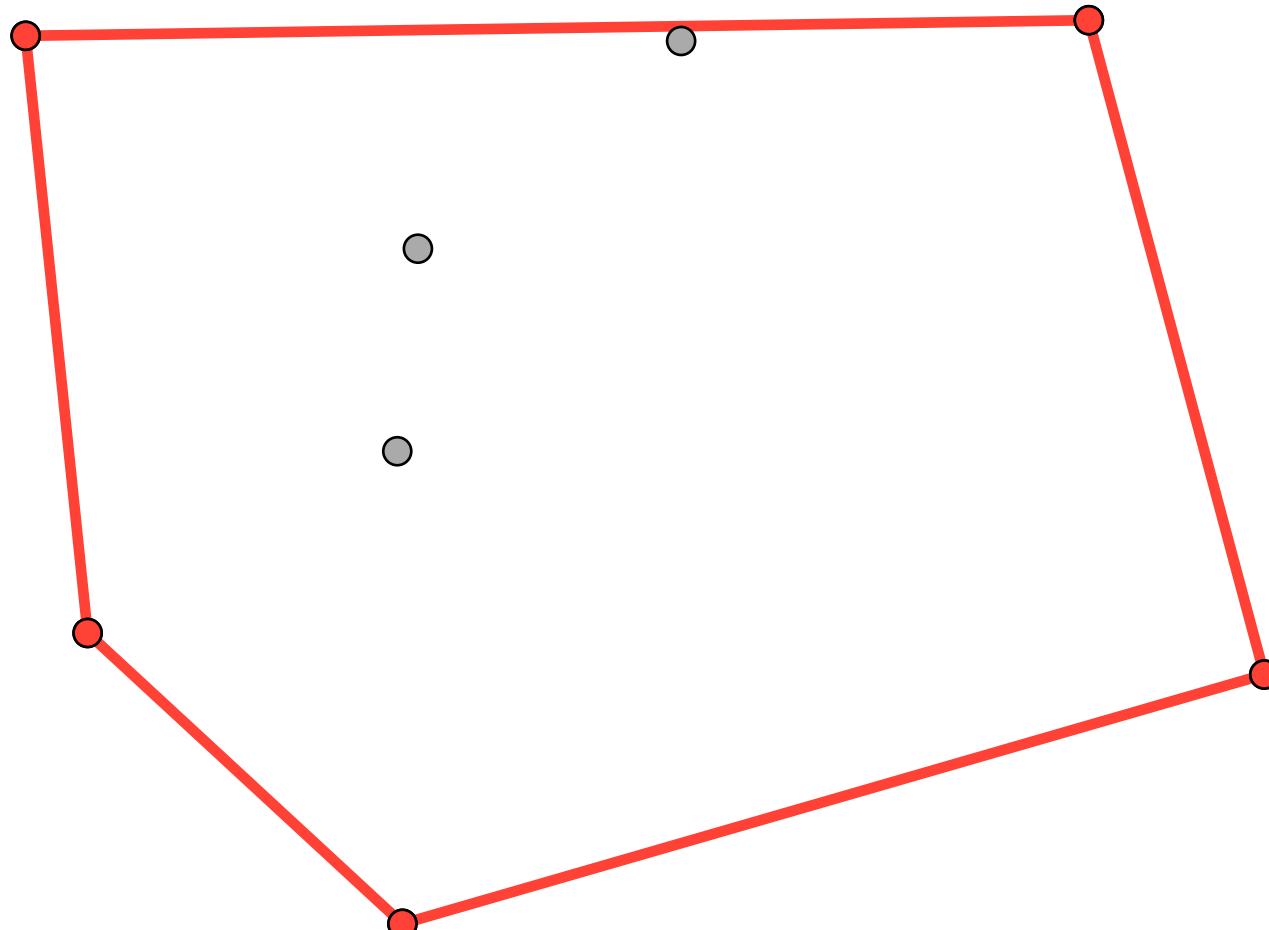
2.2.2 Przykład



2.2.2 Przykład



2.2.2 Przykład

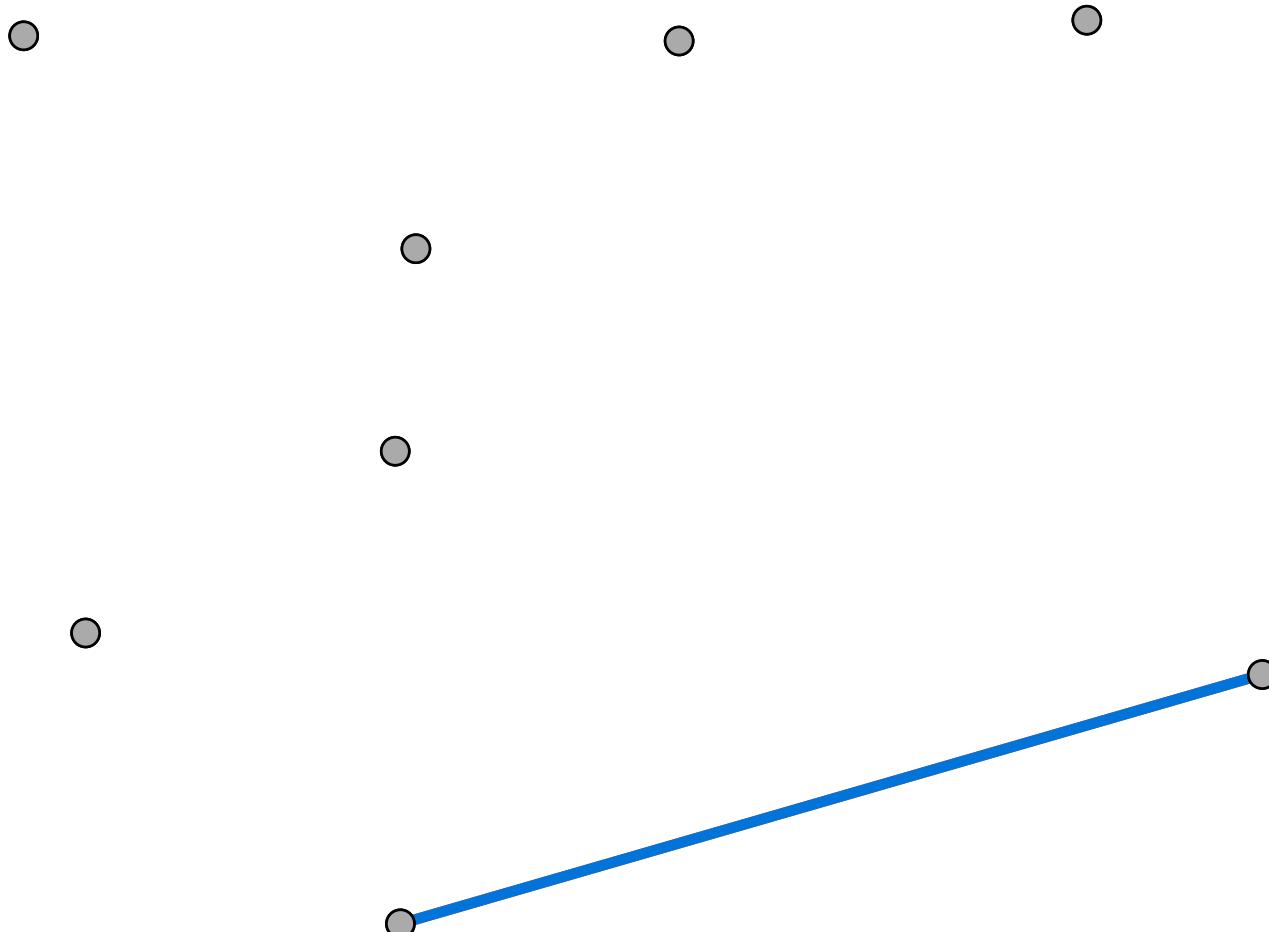


2.3.1 Działanie algorytmu

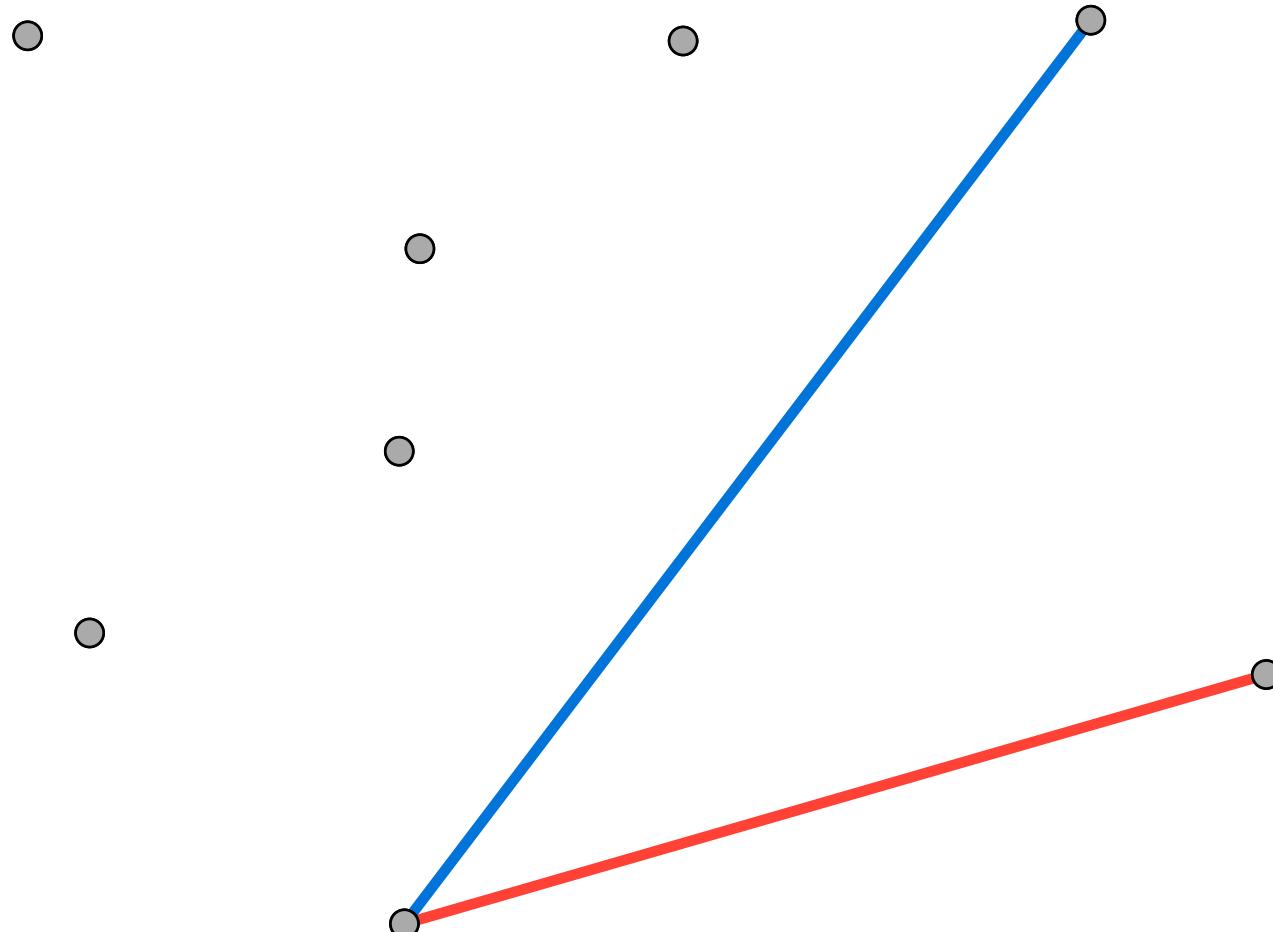
Algorytm rozpoczyna od znalezienia najniższego punktu, następnie iterując po wszystkich punktach, znajduje taki którego odcinek tworzony z ostatnim punktem otoczki spełnia warunek, że wszystkie punkty znajdują się po jego lewej stronie i dodaje go do otoczki. Algorytm kontynuuje do momentu spotkania początkowego punktu.

Złożoność czasowa algorytmu to $O(nh)$

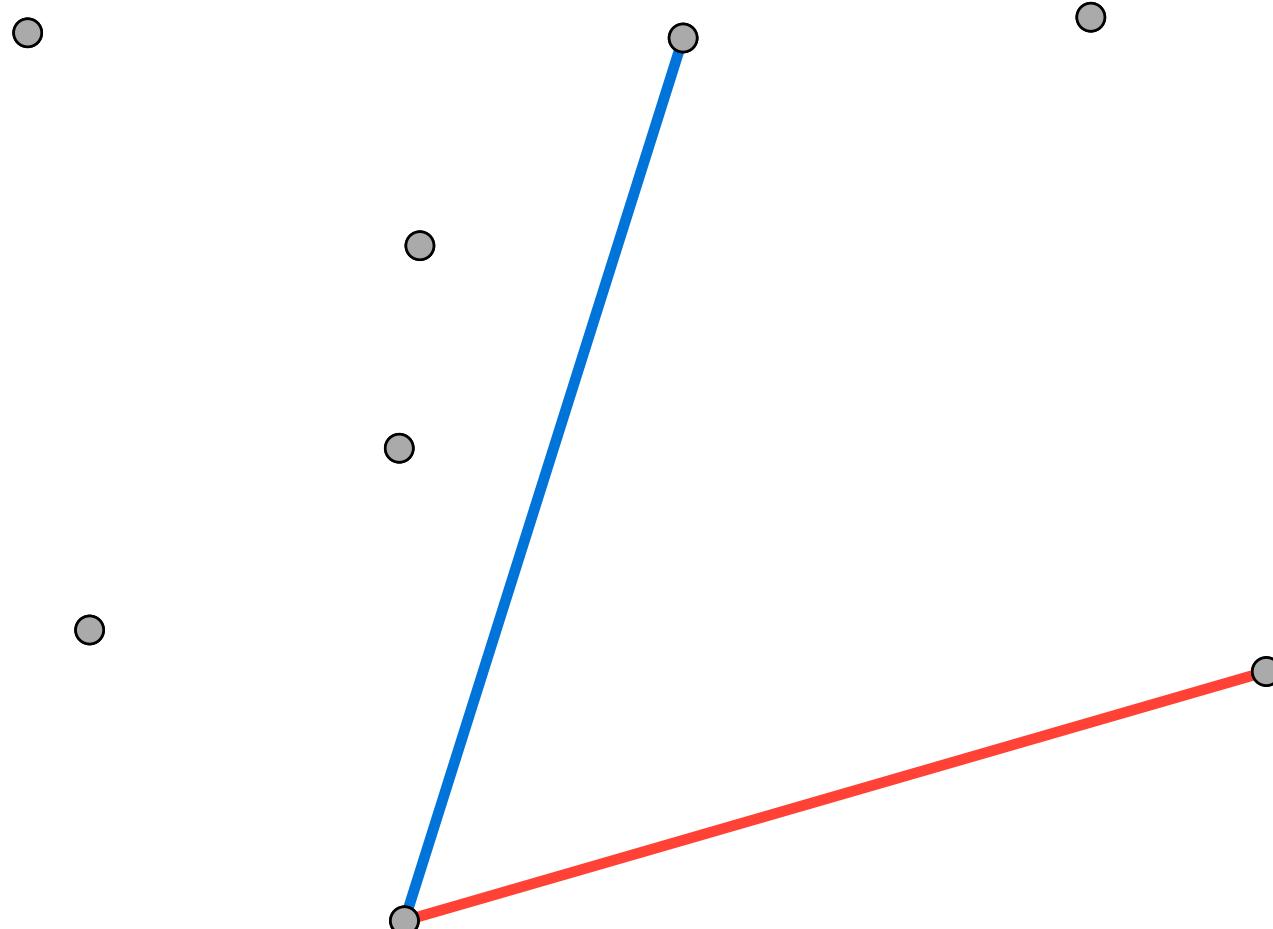
2.3.2 Przykład



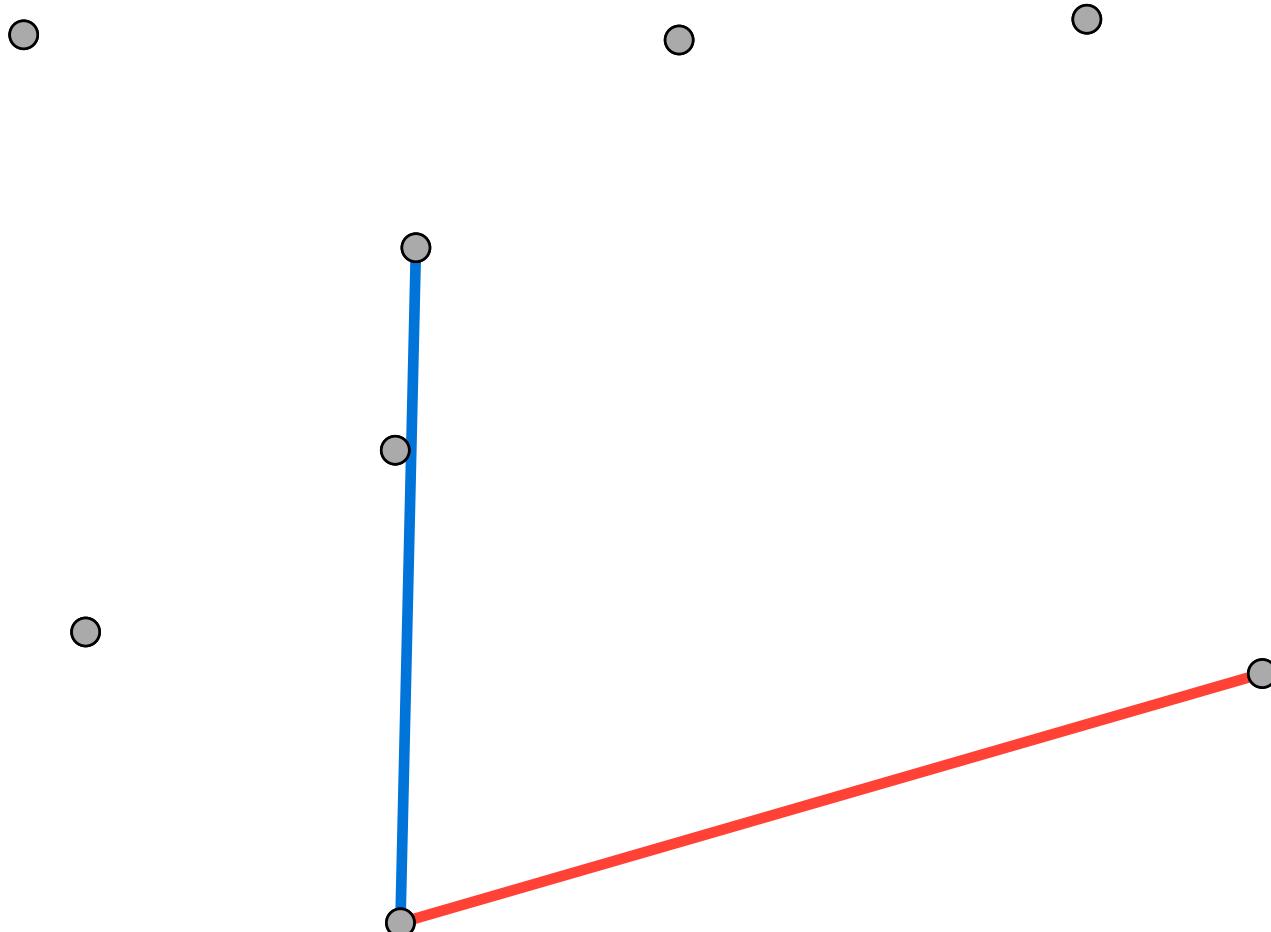
2.3.2 Przykład



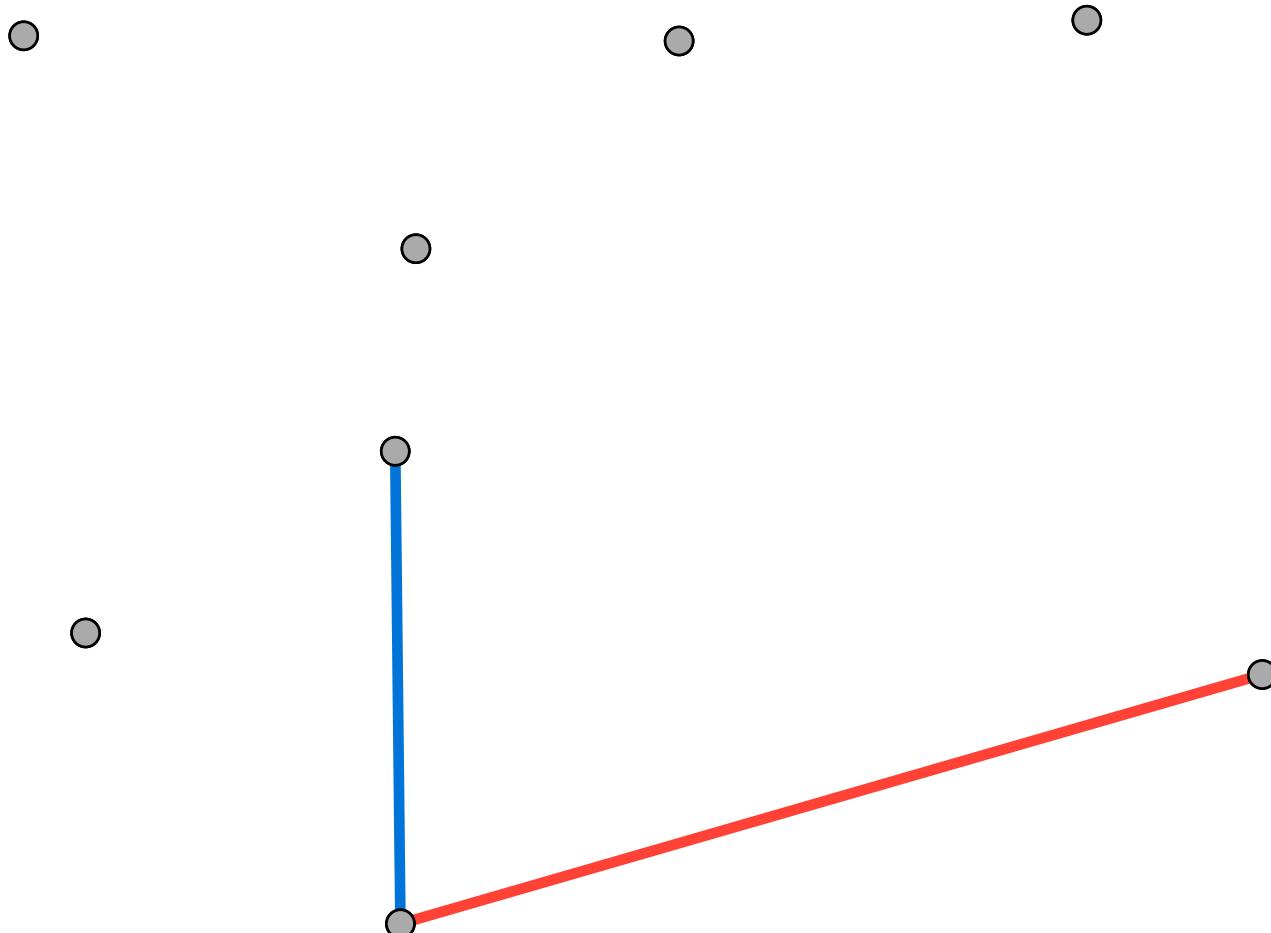
2.3.2 Przykład



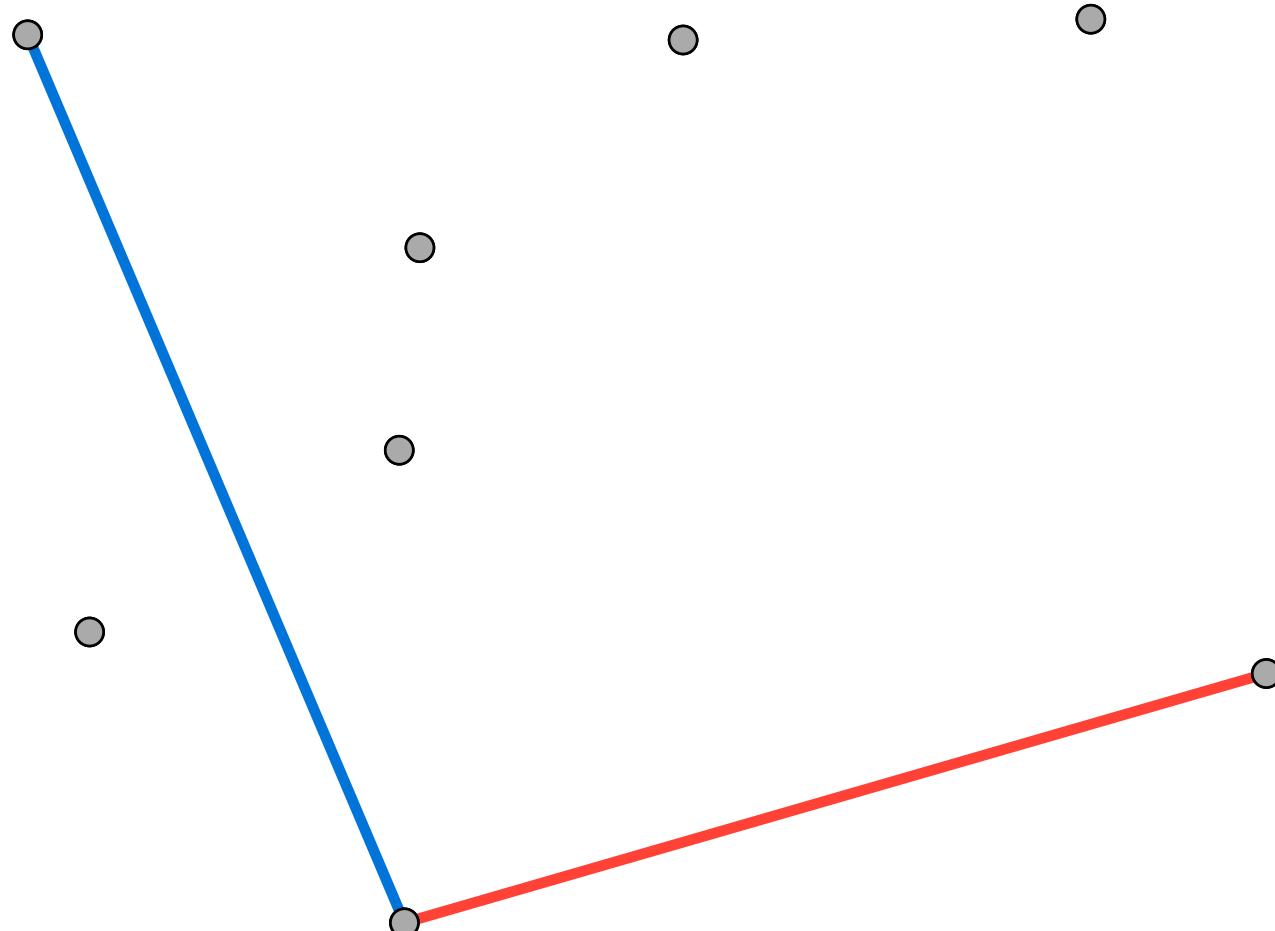
2.3.2 Przykład



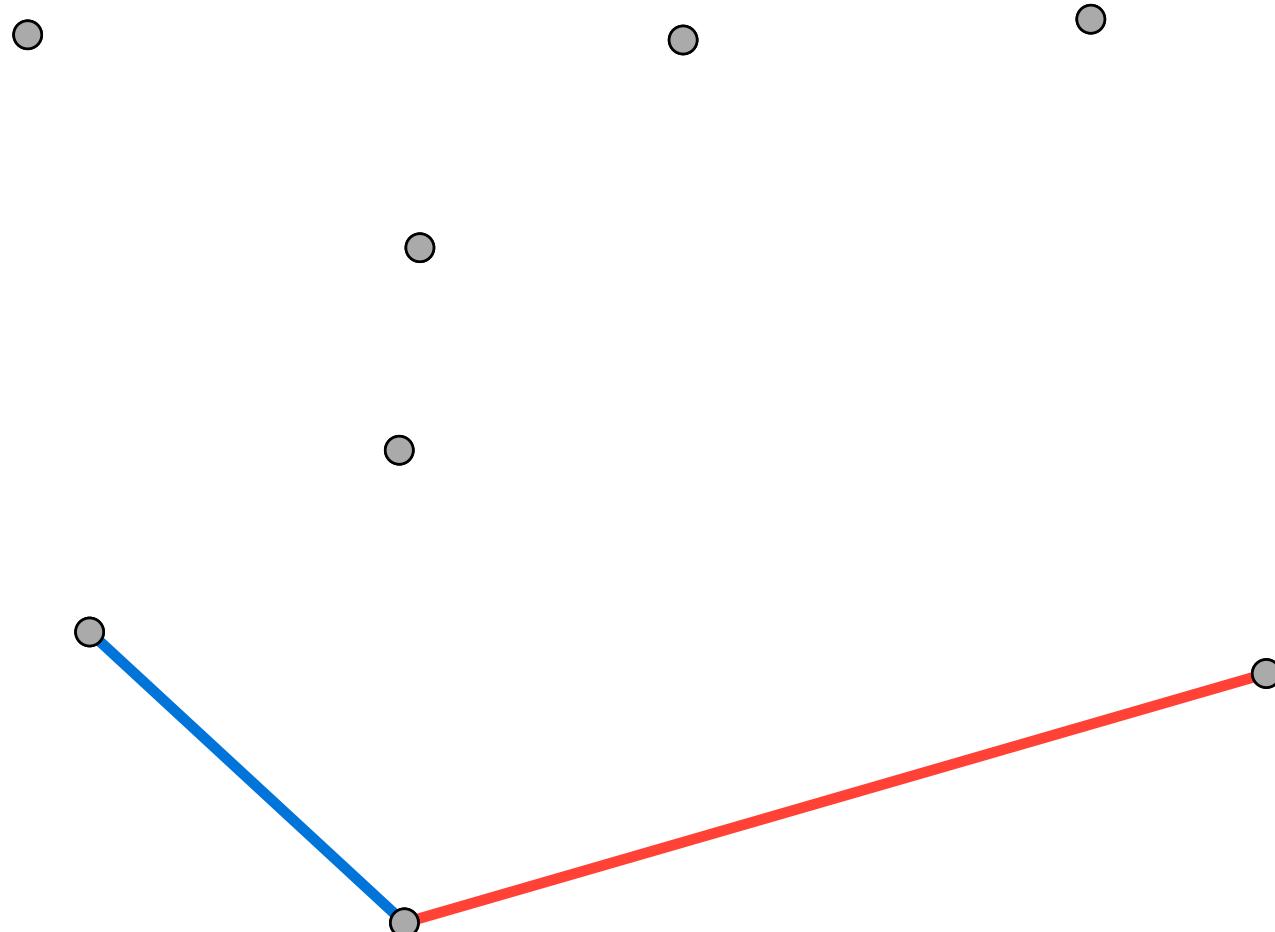
2.3.2 Przykład



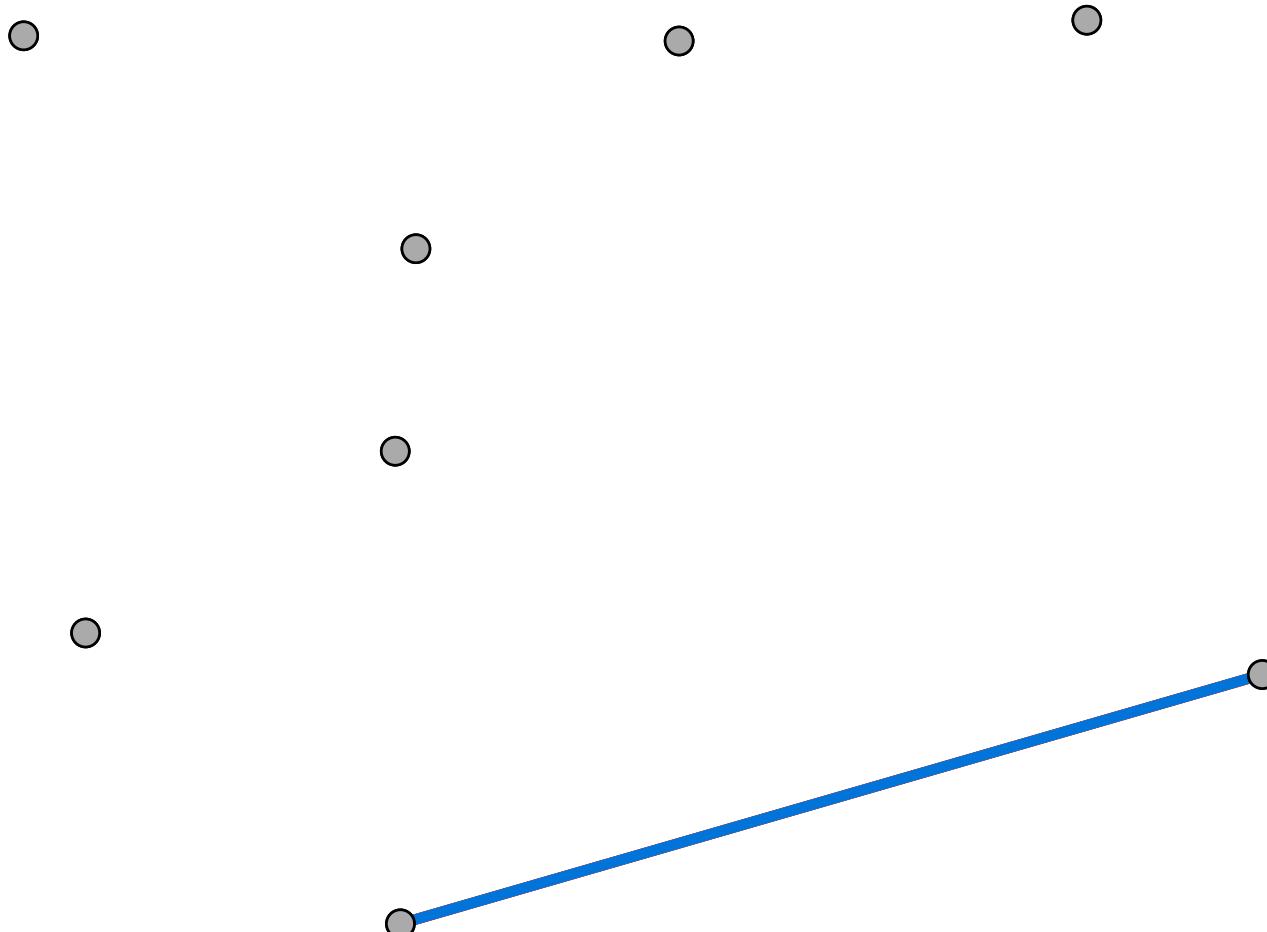
2.3.2 Przykład



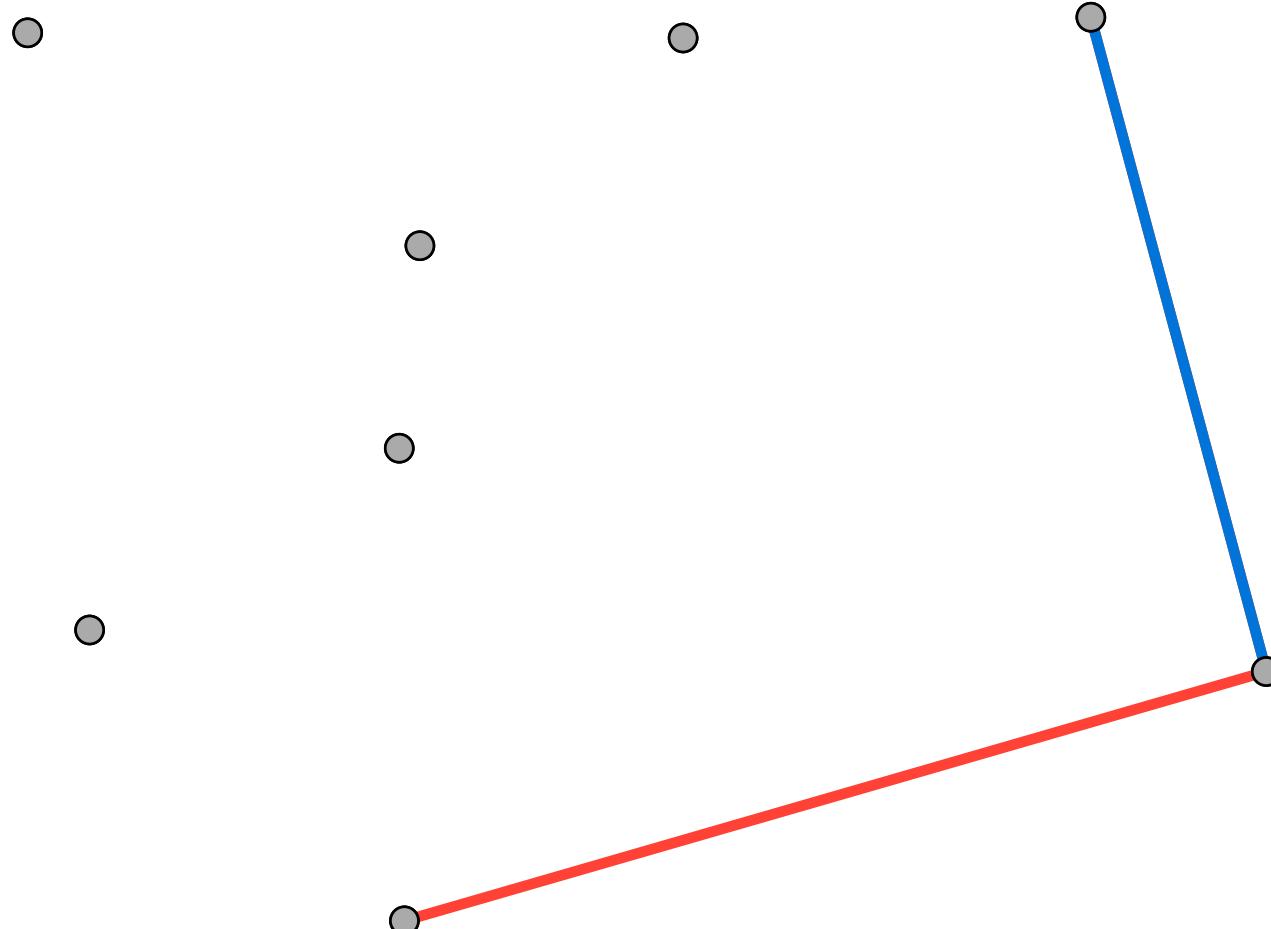
2.3.2 Przykład



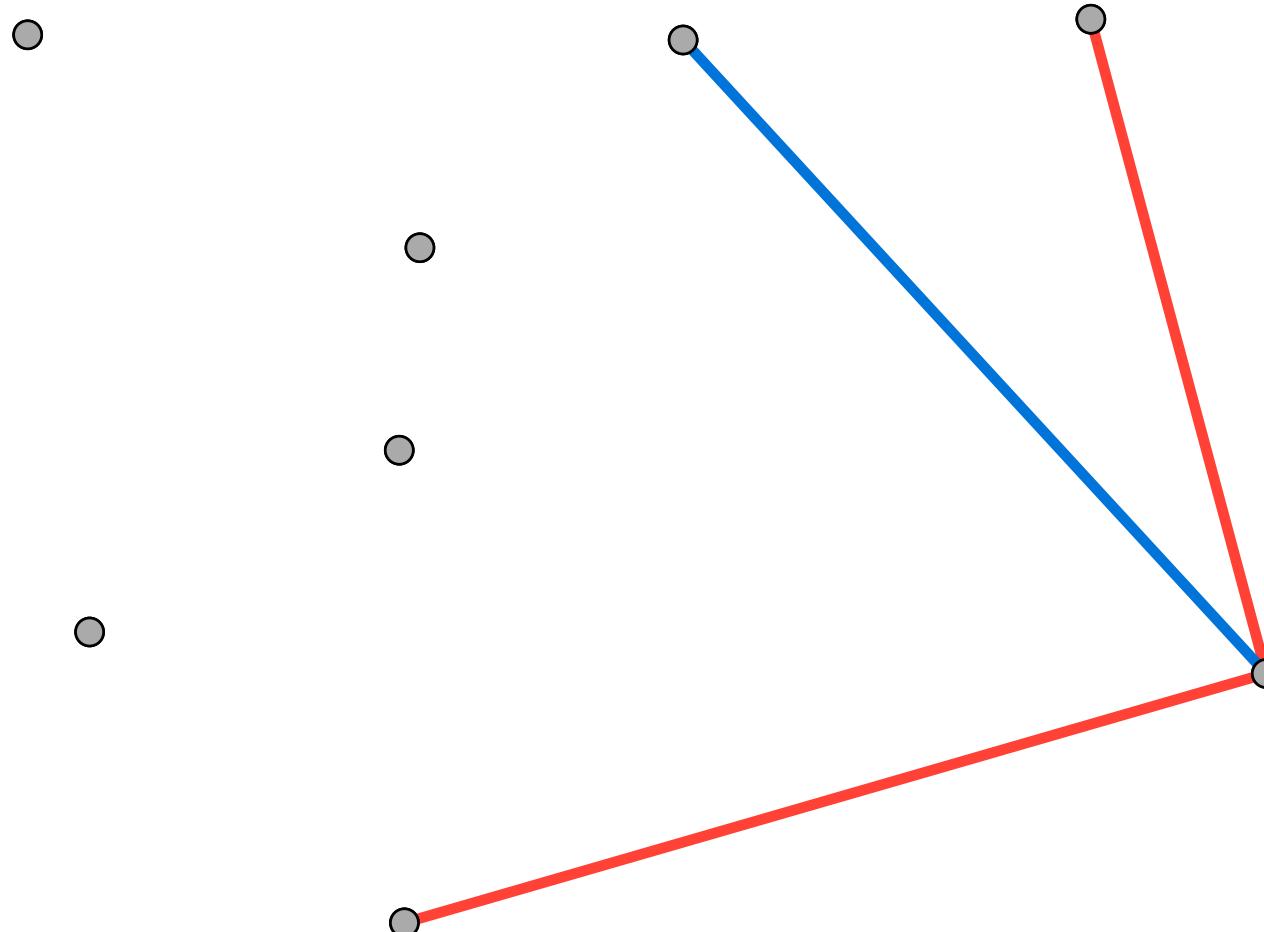
2.3.2 Przykład



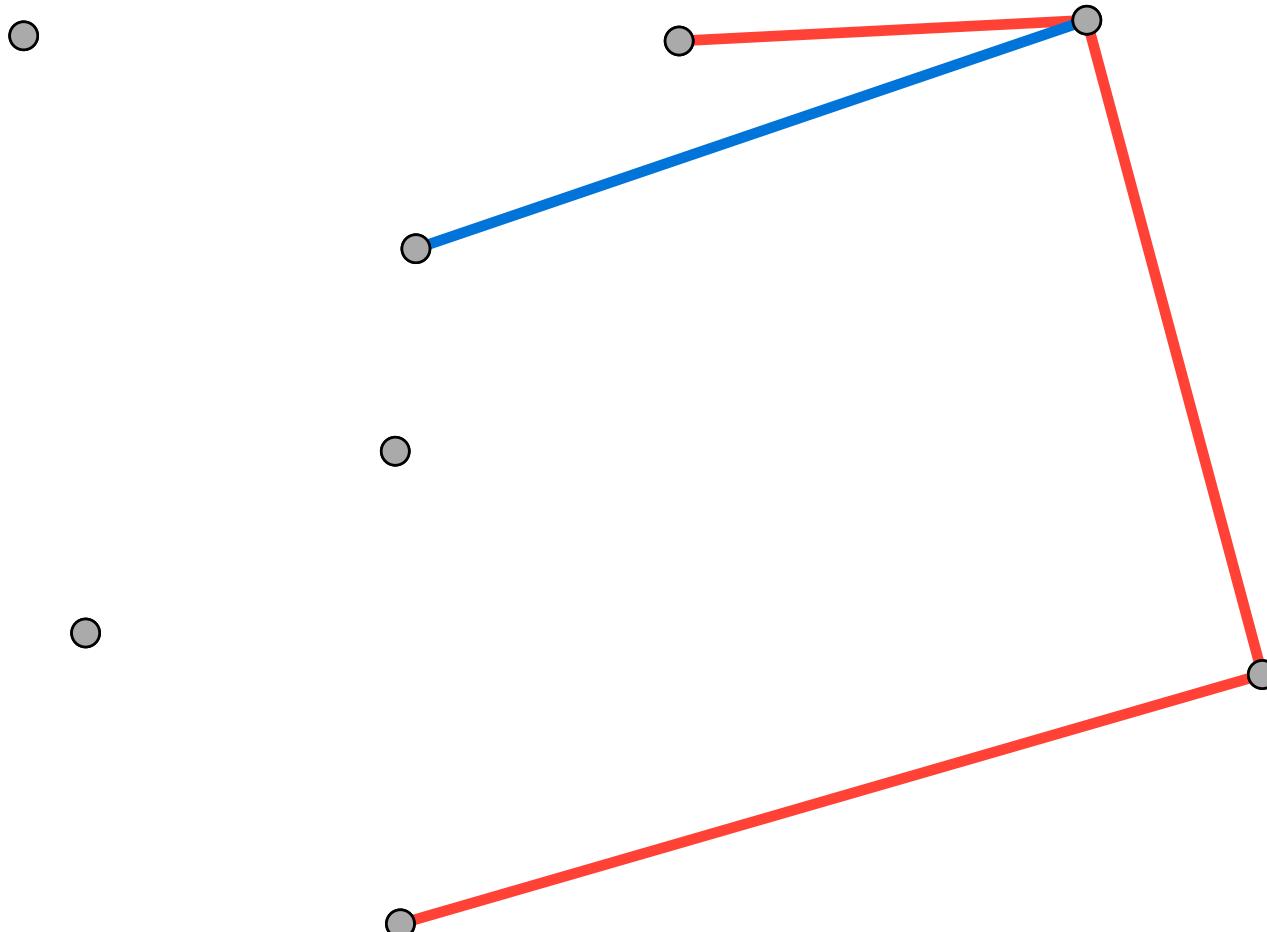
2.3.2 Przykład



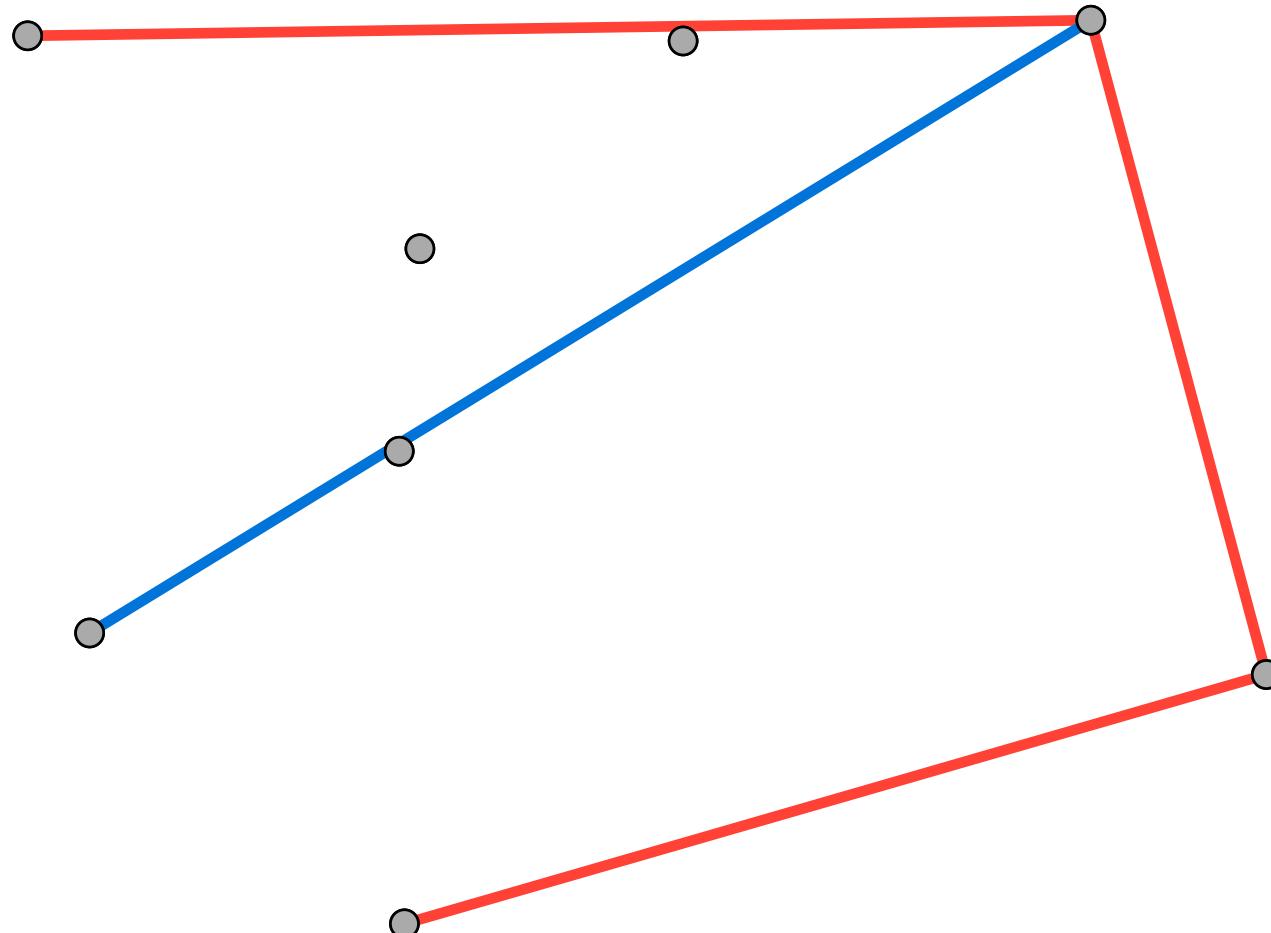
2.3.2 Przykład



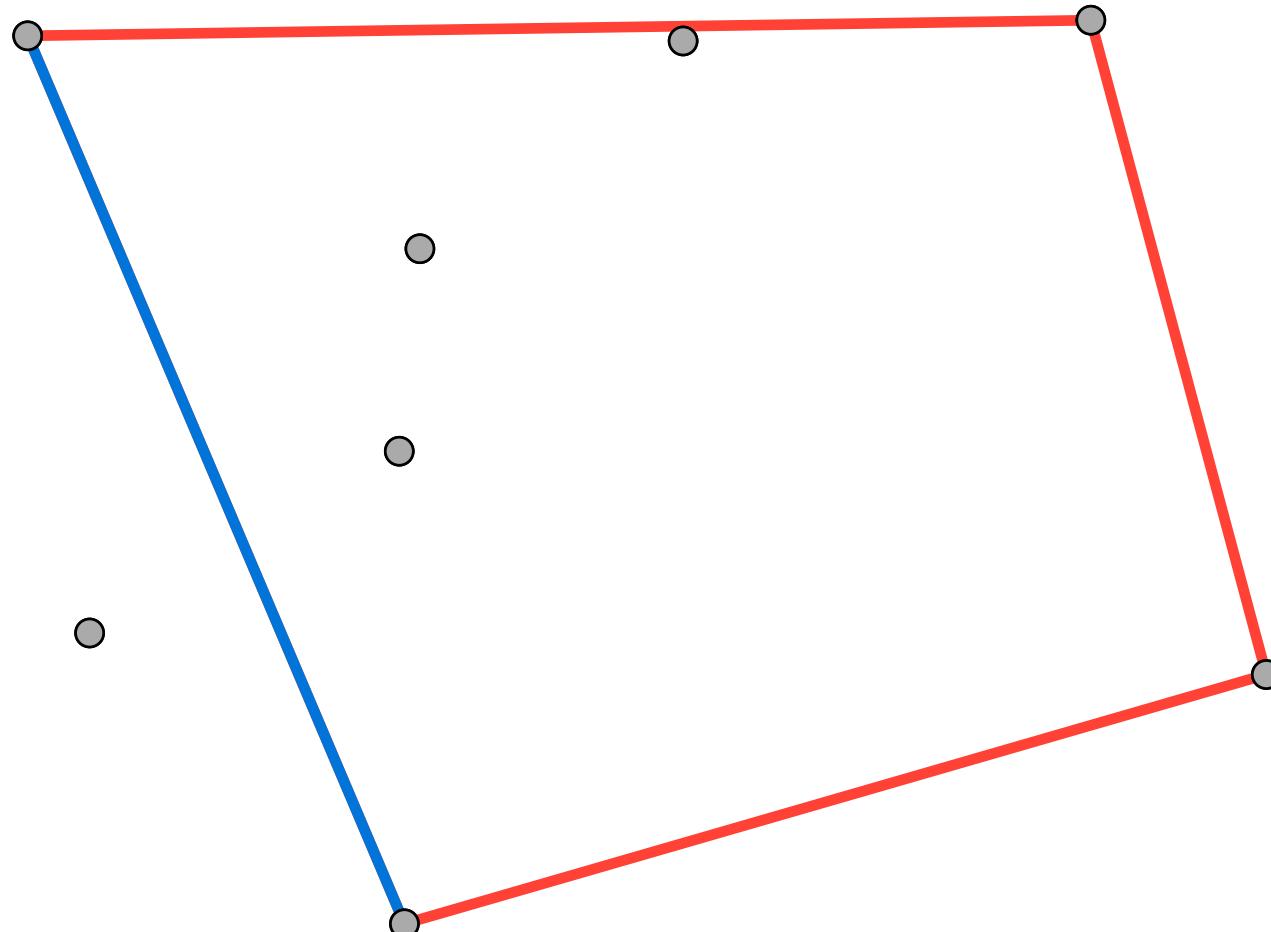
2.3.2 Przykład



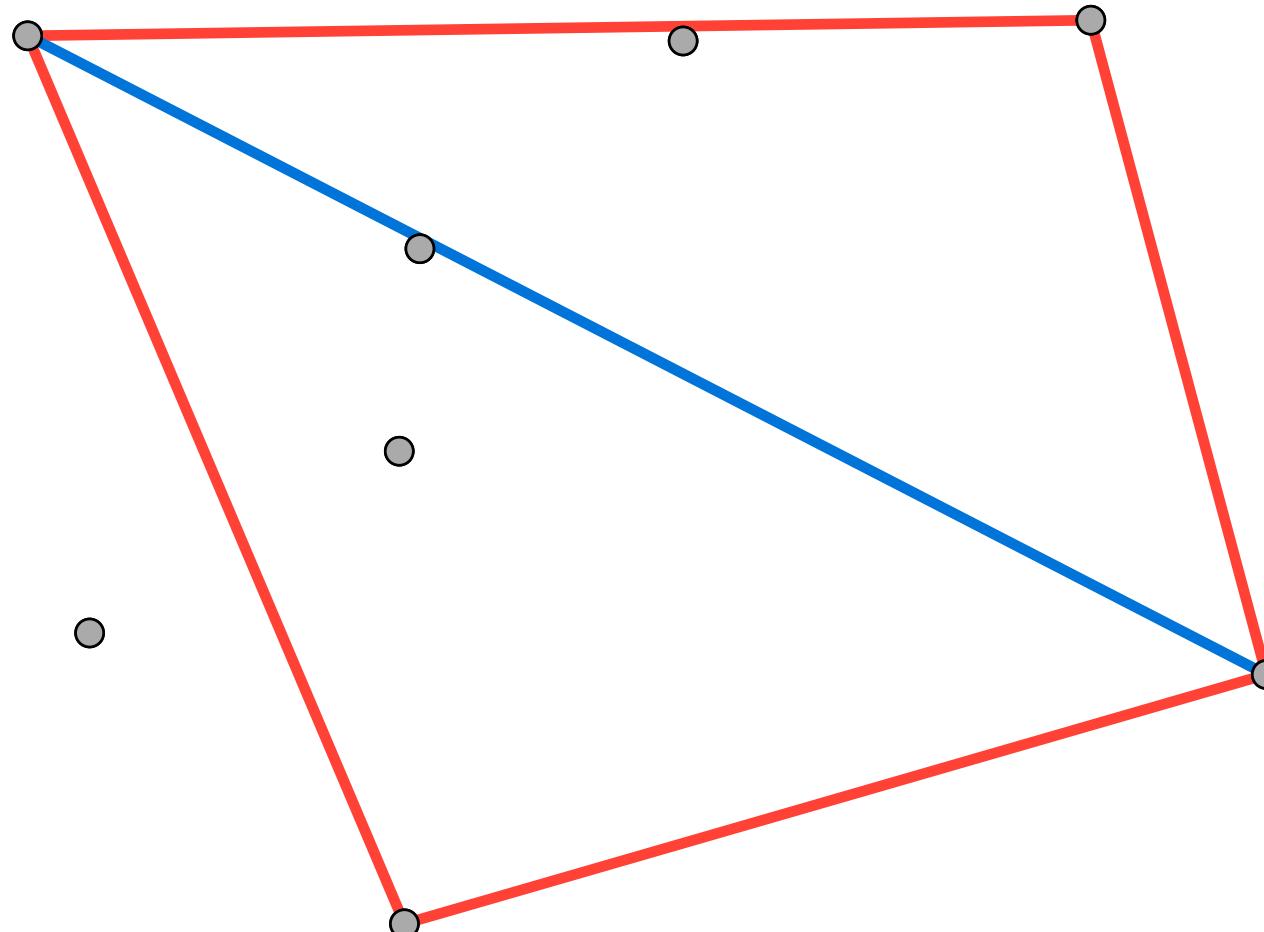
2.3.2 Przykład



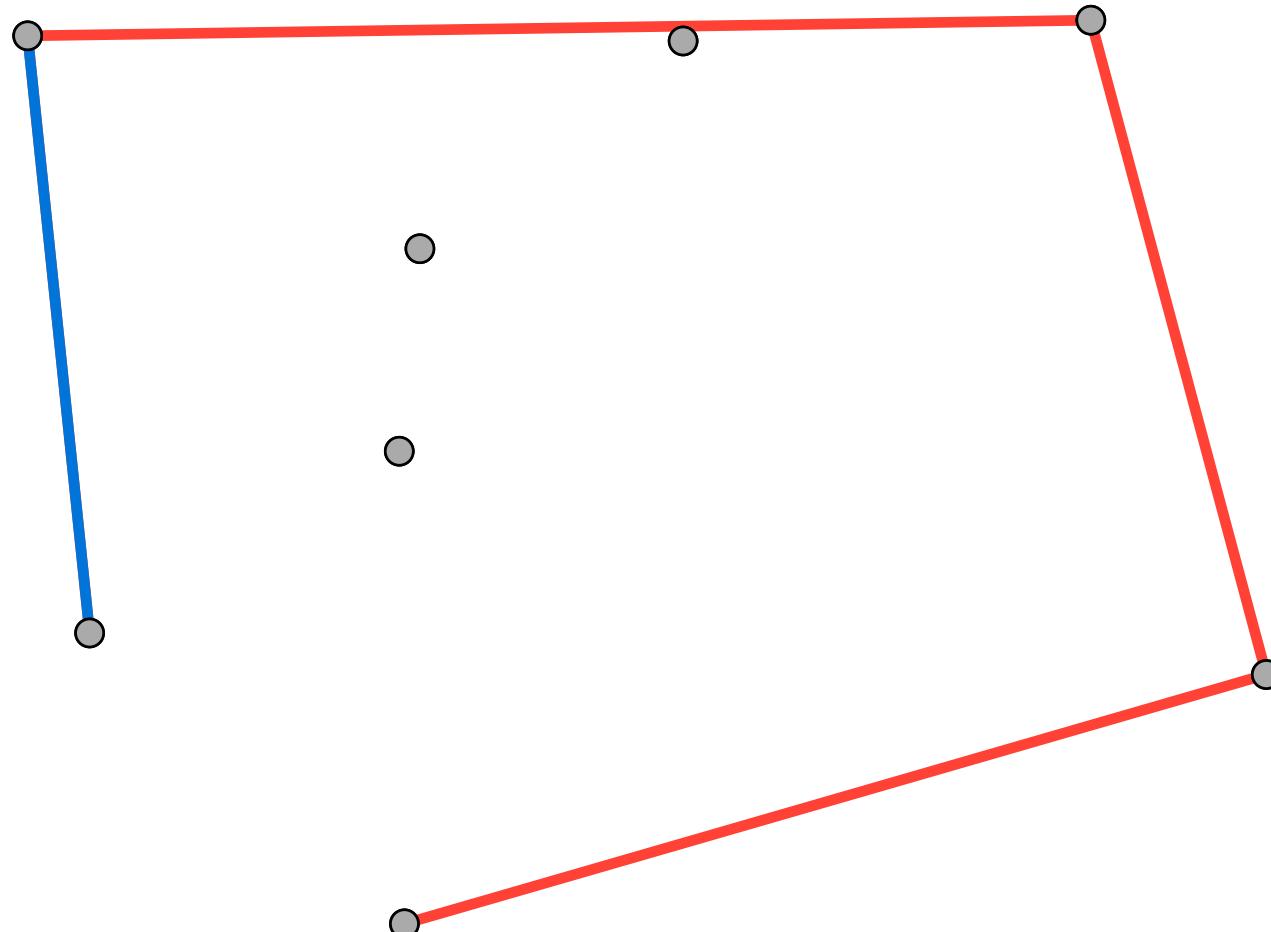
2.3.2 Przykład



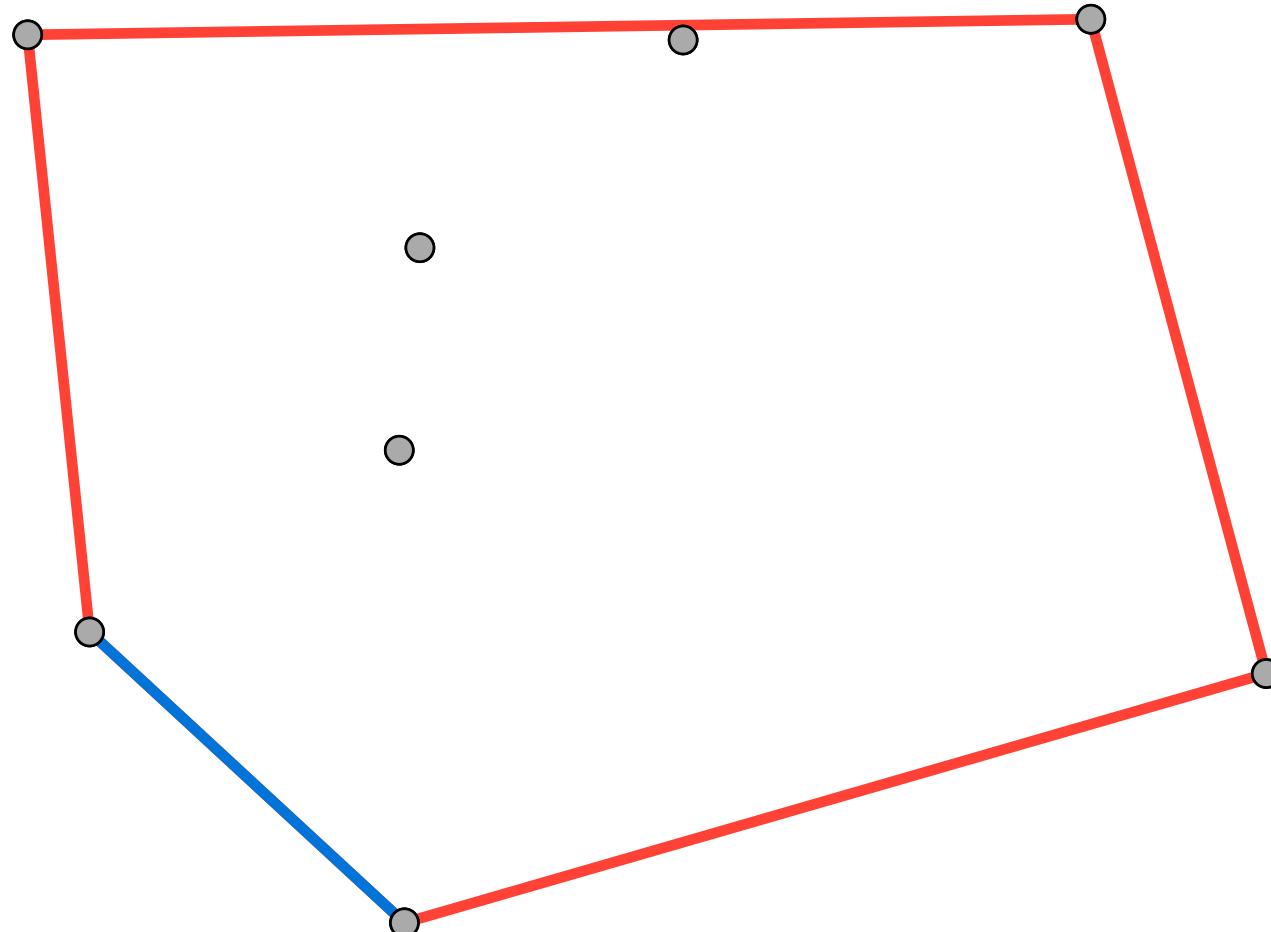
2.3.2 Przykład



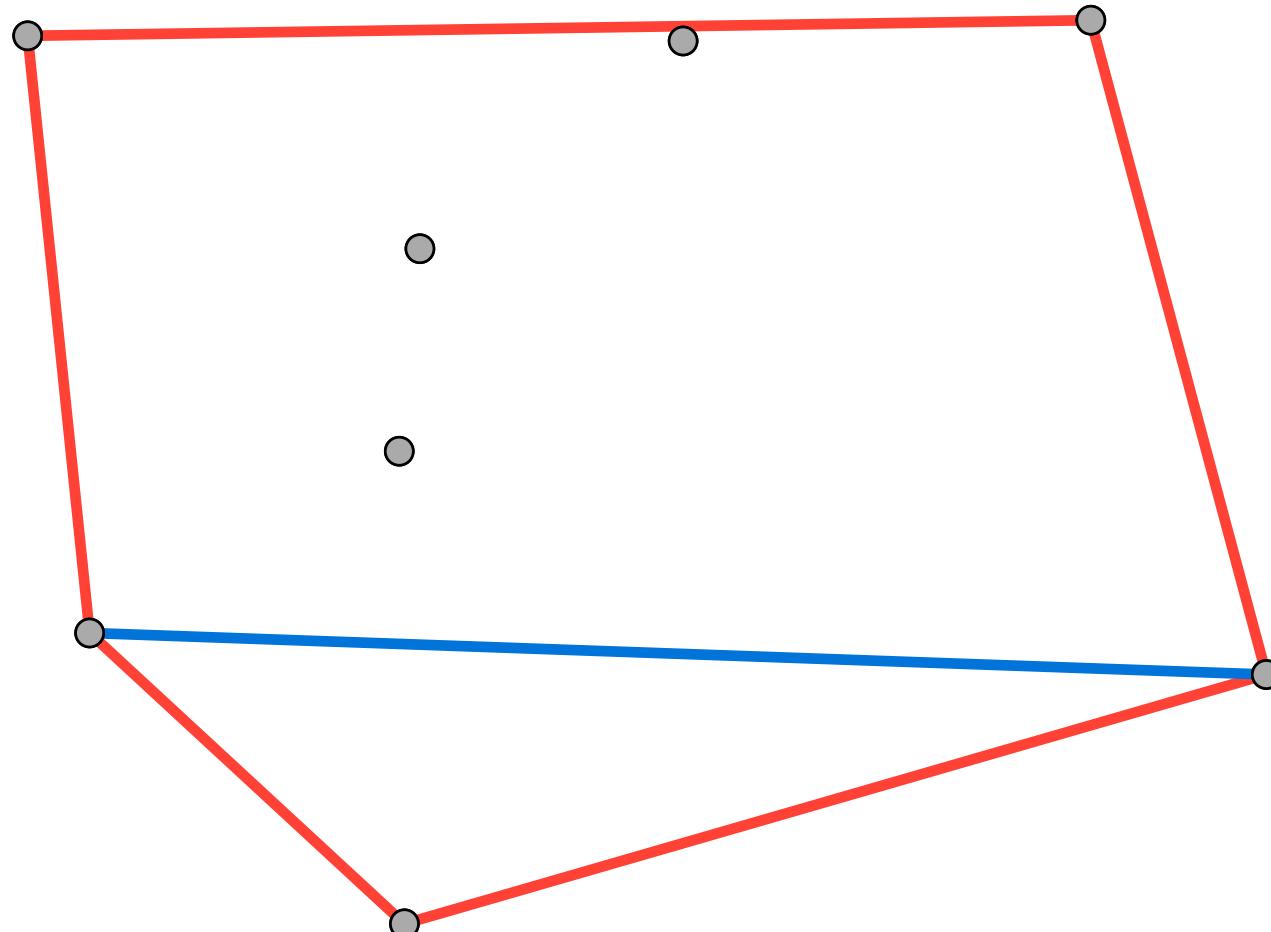
2.3.2 Przykład



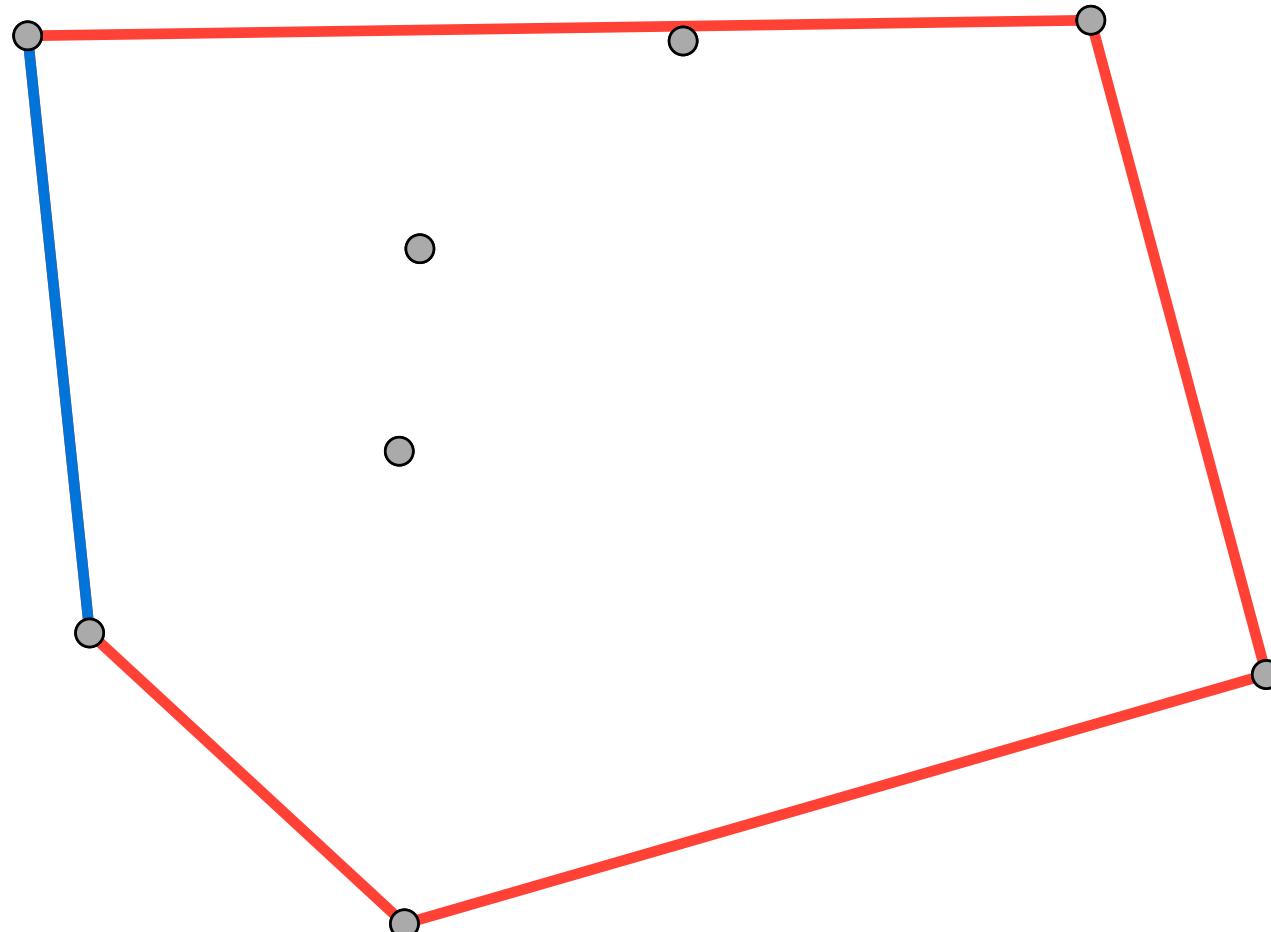
2.3.2 Przykład



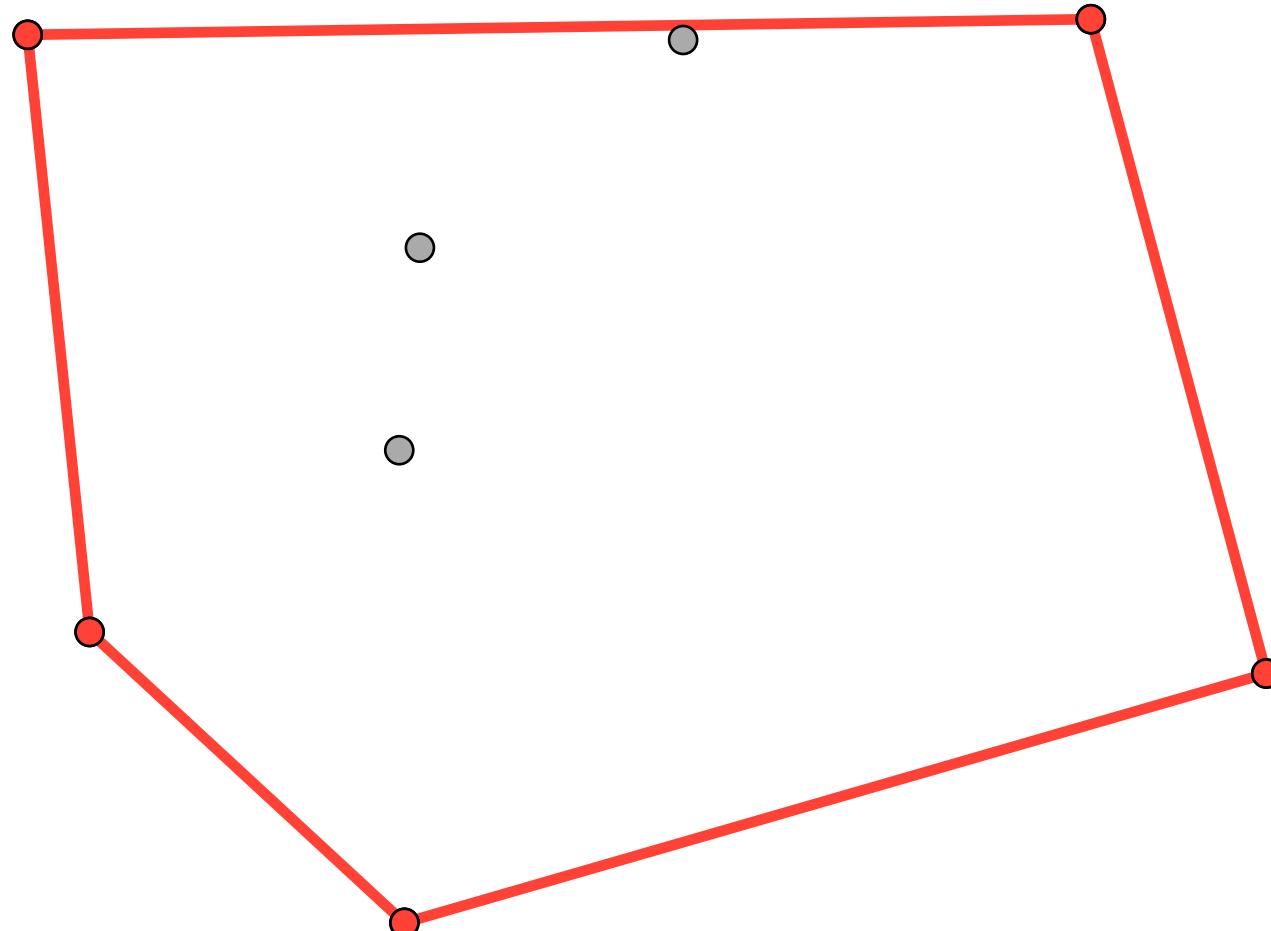
2.3.2 Przykład



2.3.2 Przykład



2.3.2 Przykład

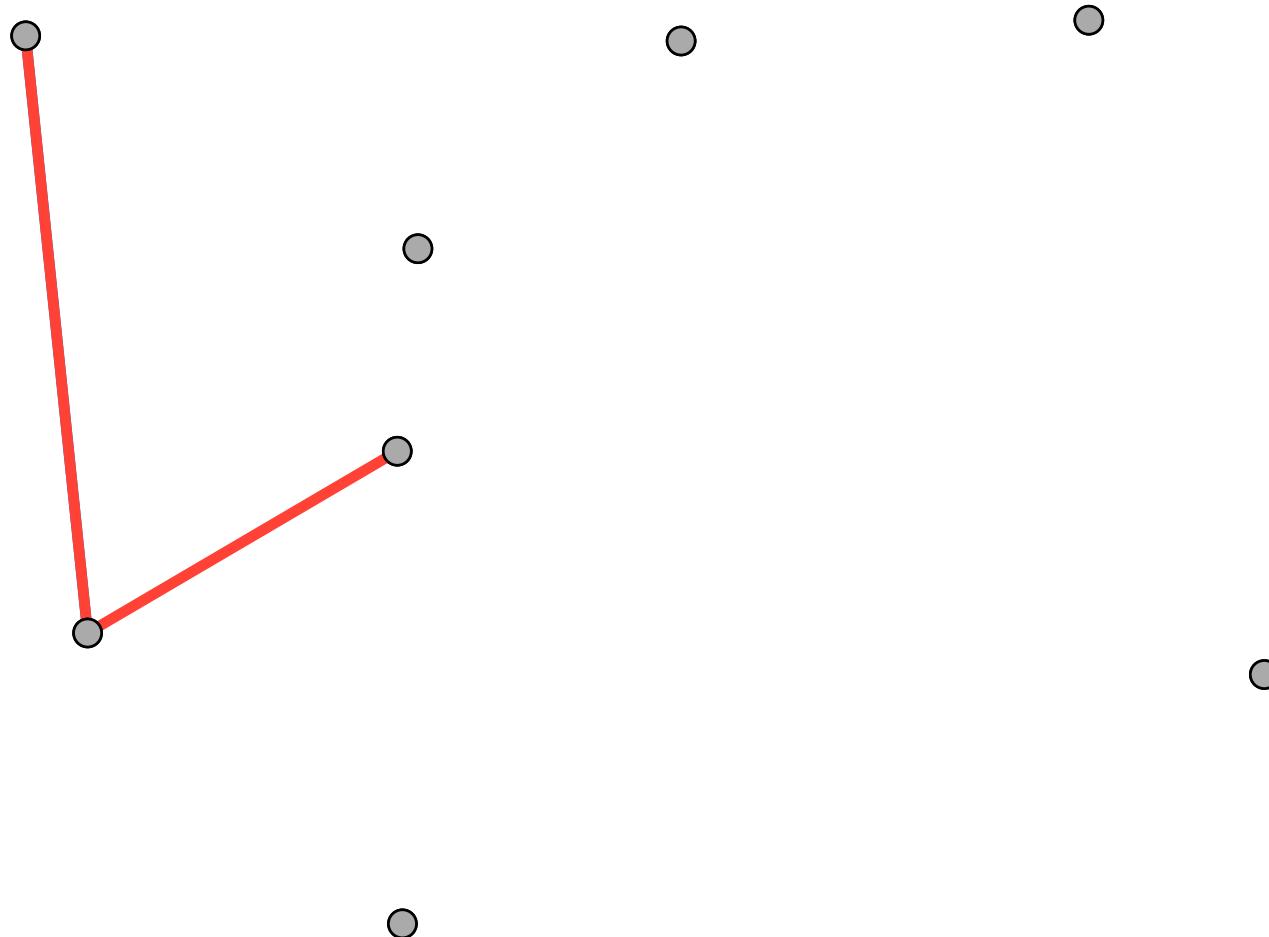


2.4.1 Działanie algorytmu

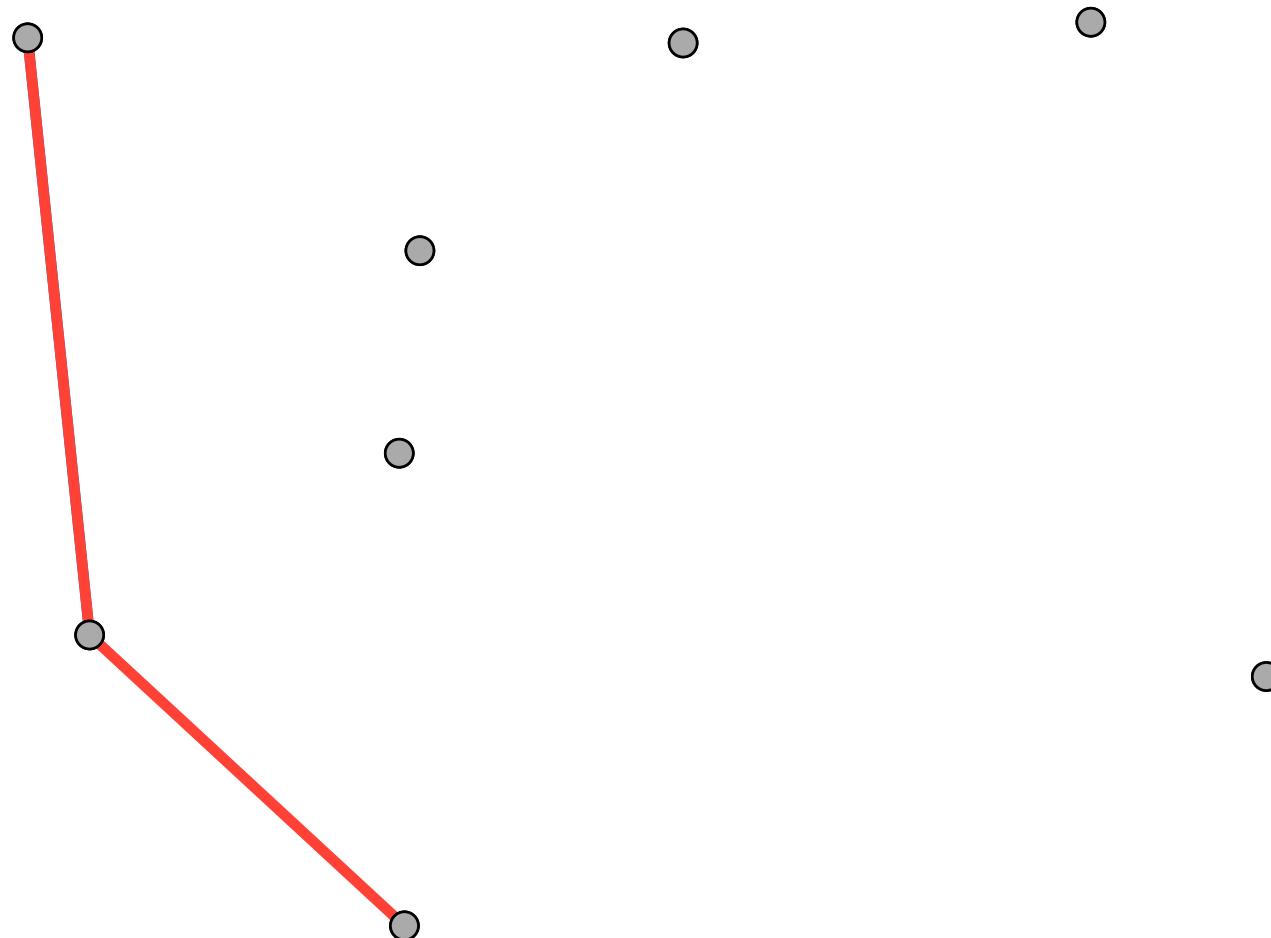
Algorytm sortuje punkty względem współrzędnej x . Pierwsze dwa punkty są początkiem górnej otoczki, iteracyjnie dodajemy kolejne punkty do niej, zachowując warunek wypukłości, podobnie jak w algorytmie Graham'a. Analogicznie tworzymy dolną otoczkę, ostatecznie łącząc je w jedną, wynikową otoczkę.

Złożoność czasowa algorytmu to $O(n \log n)$

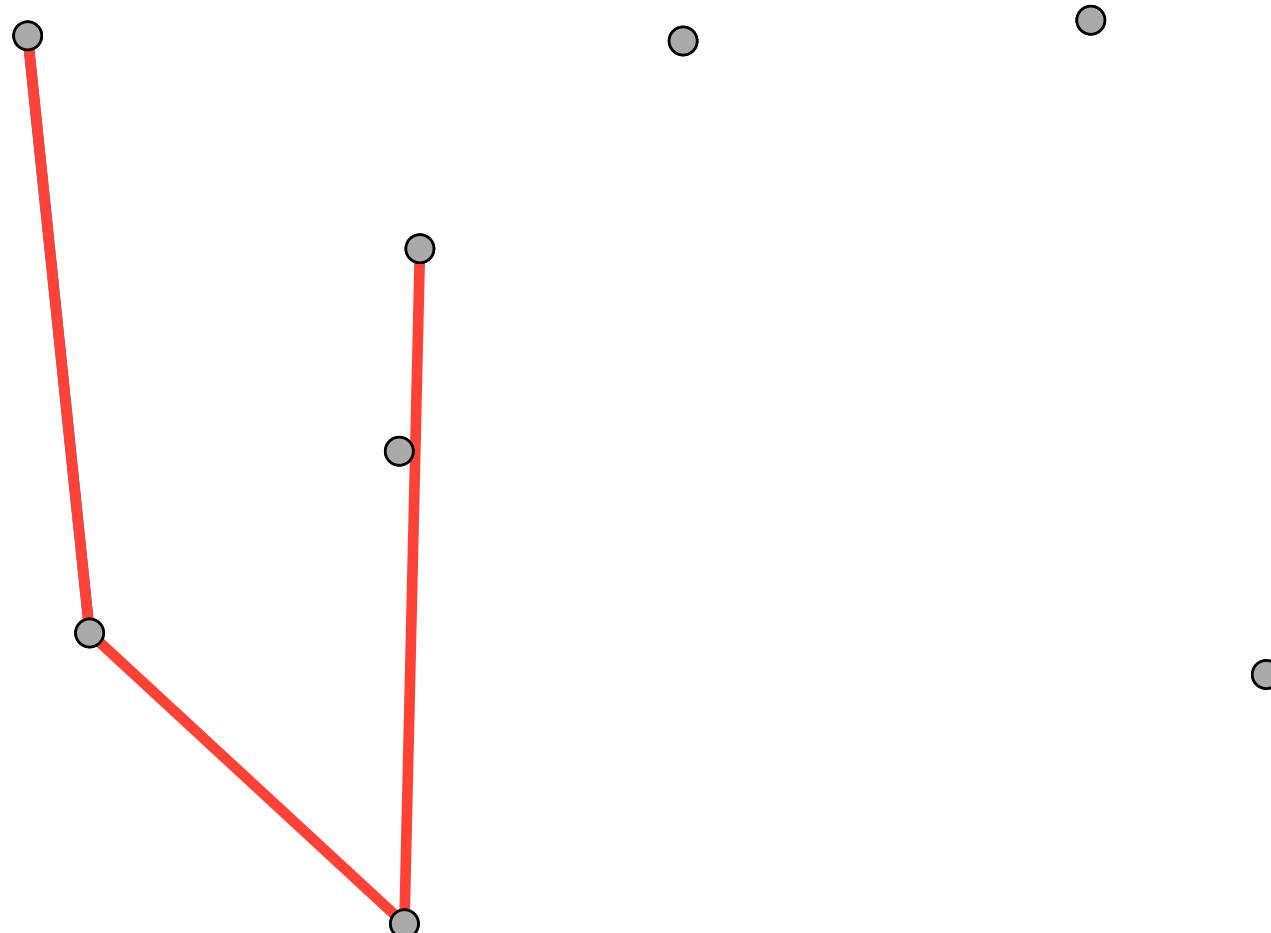
2.4.2 Przykład



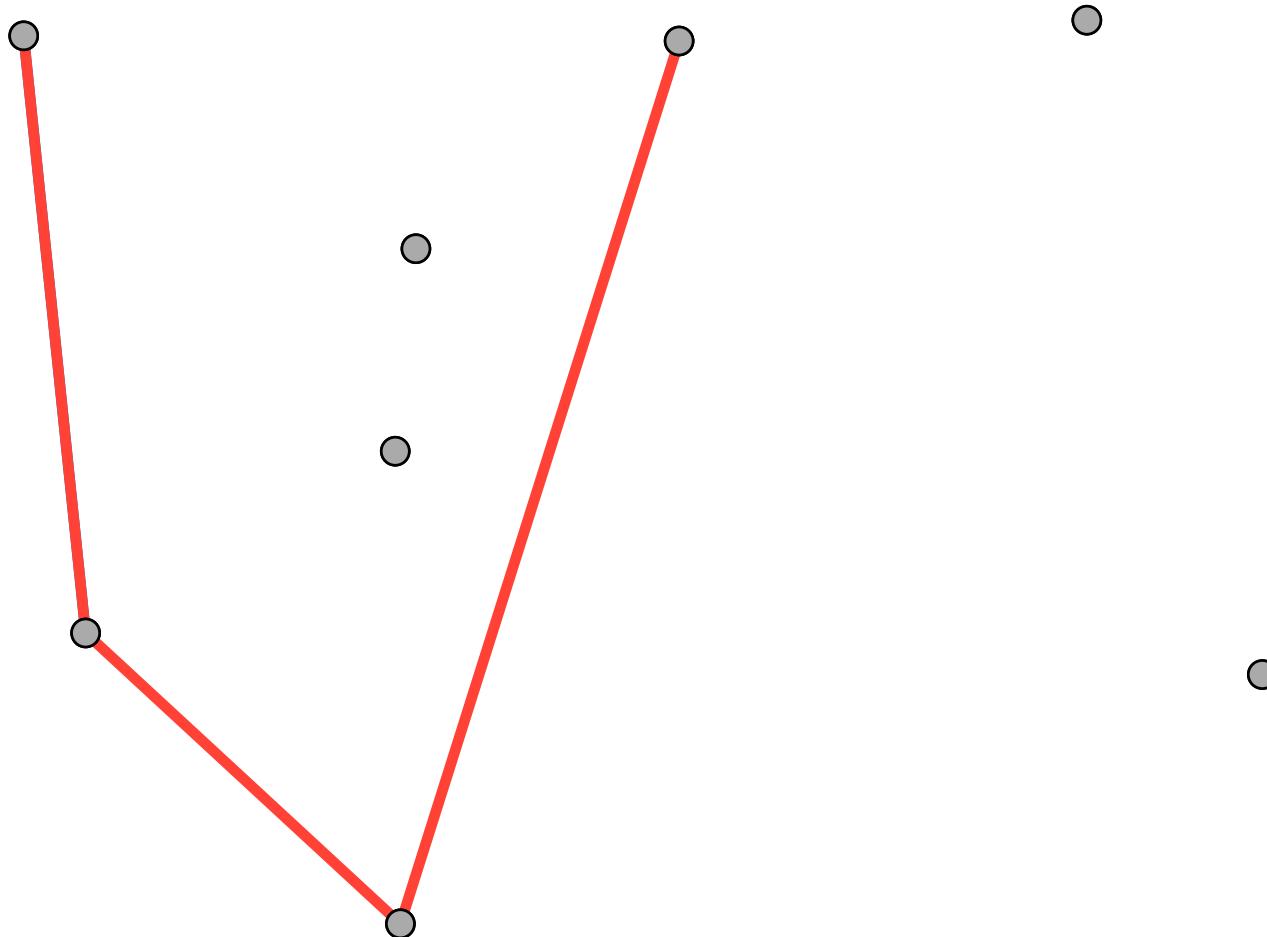
2.4.2 Przykład



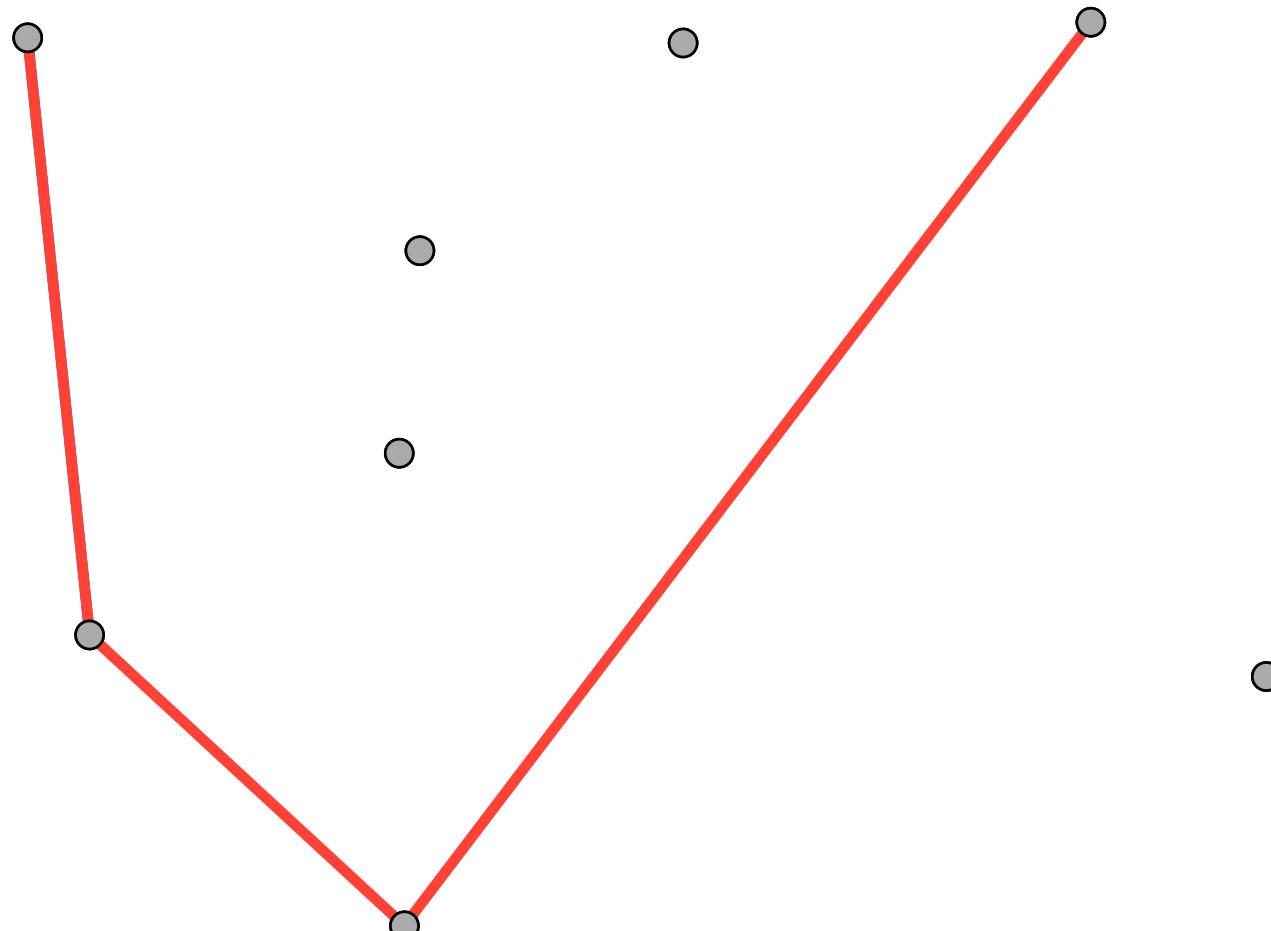
2.4.2 Przykład



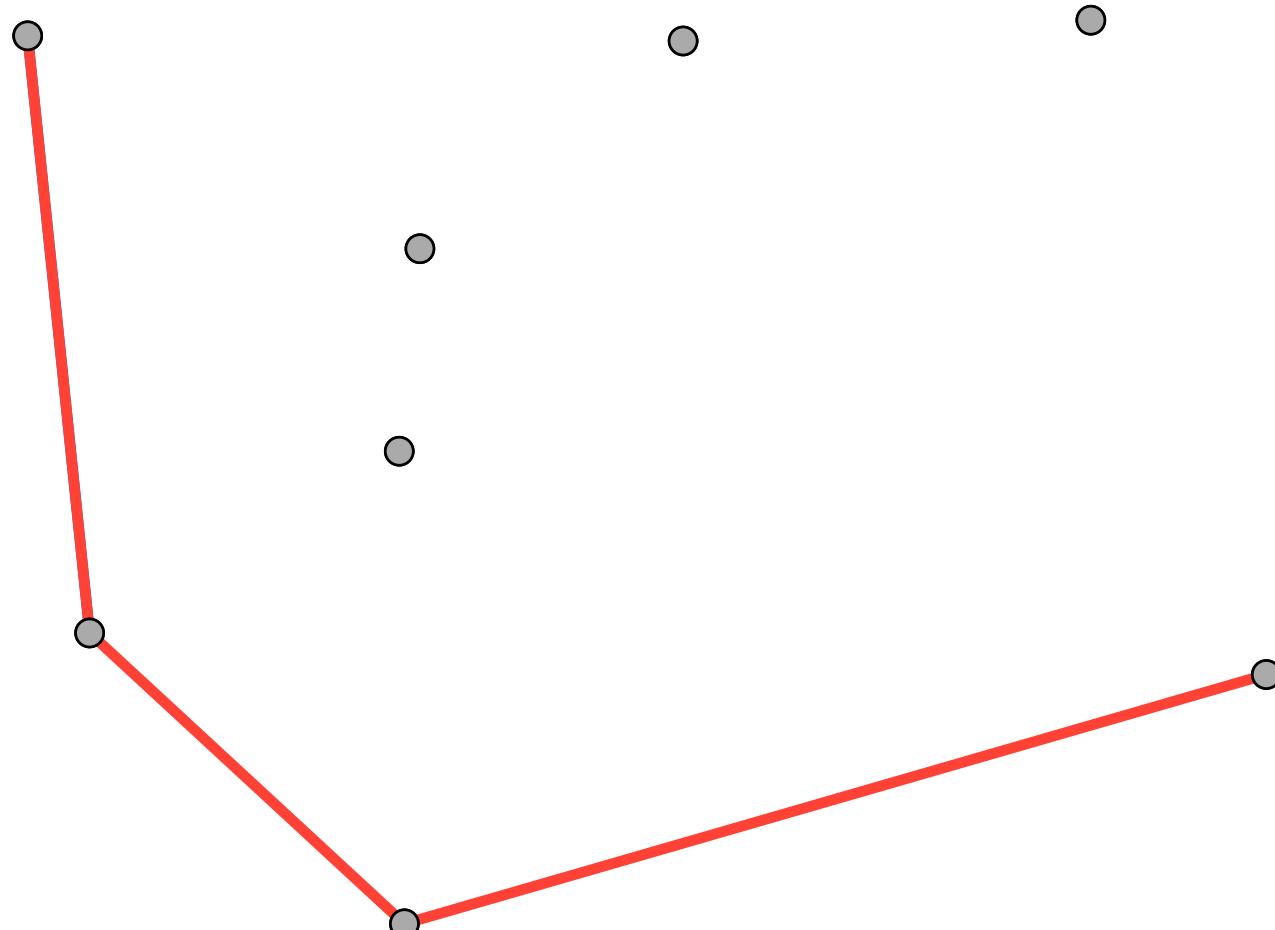
2.4.2 Przykład



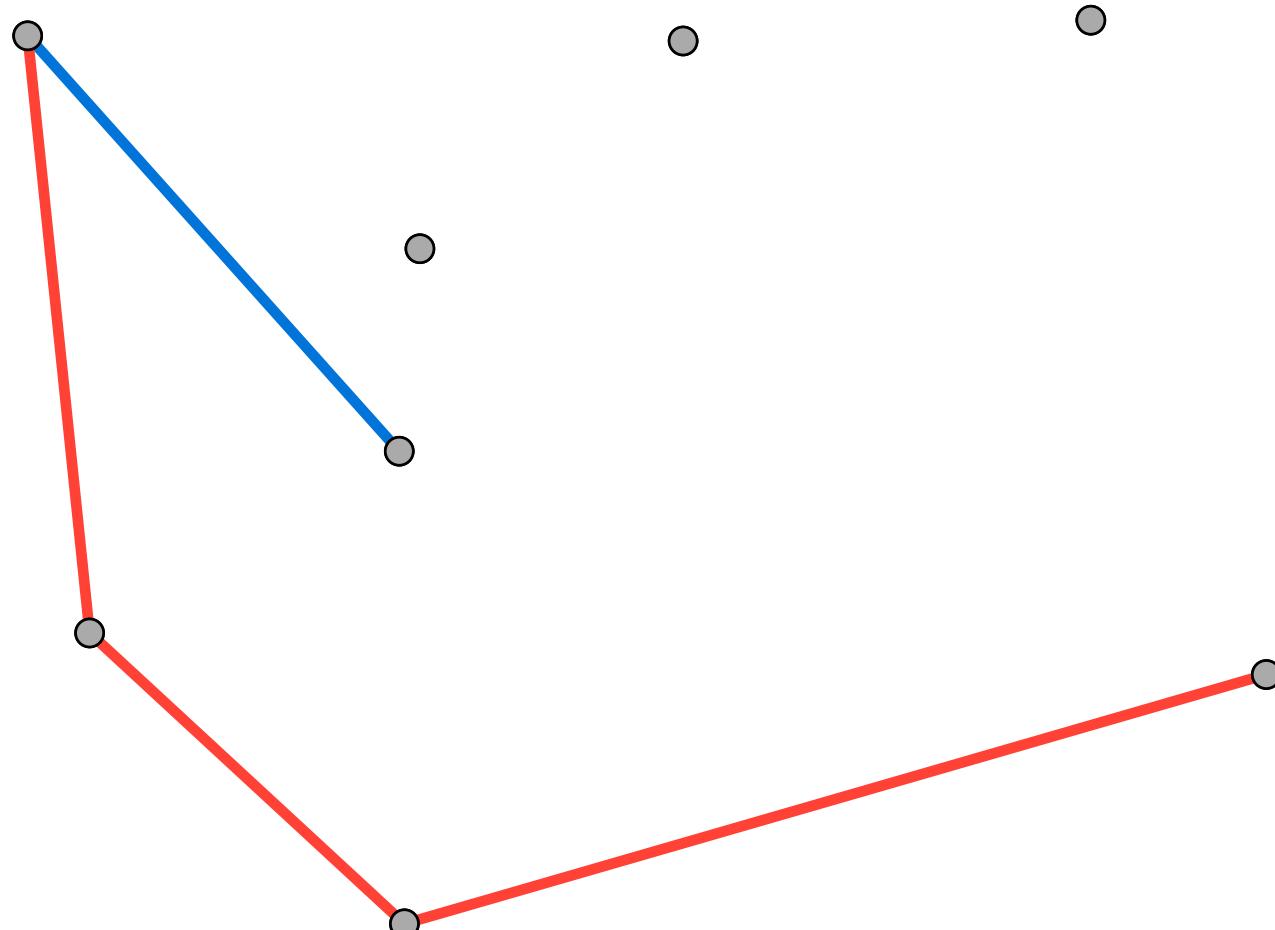
2.4.2 Przykład



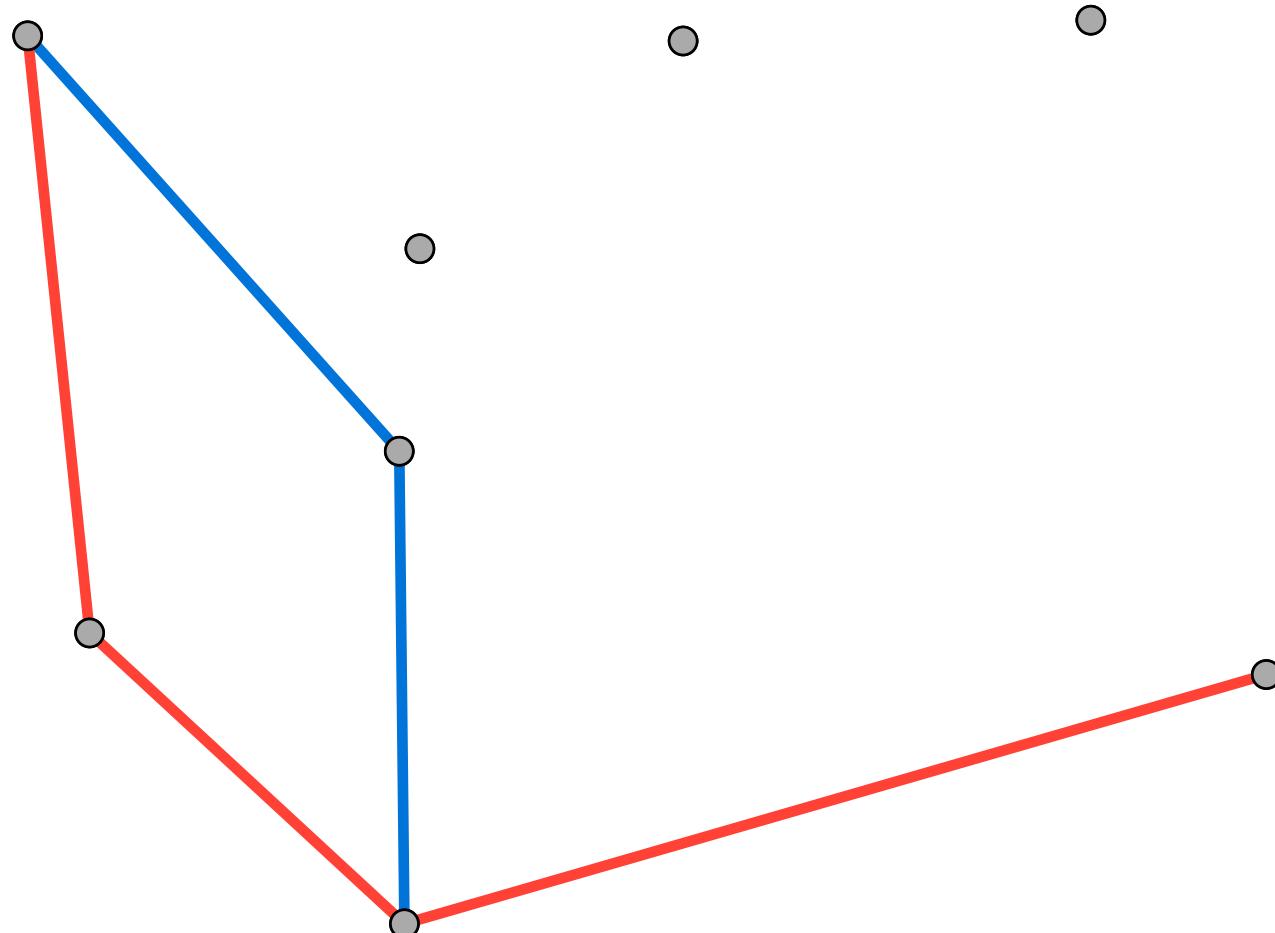
2.4.2 Przykład



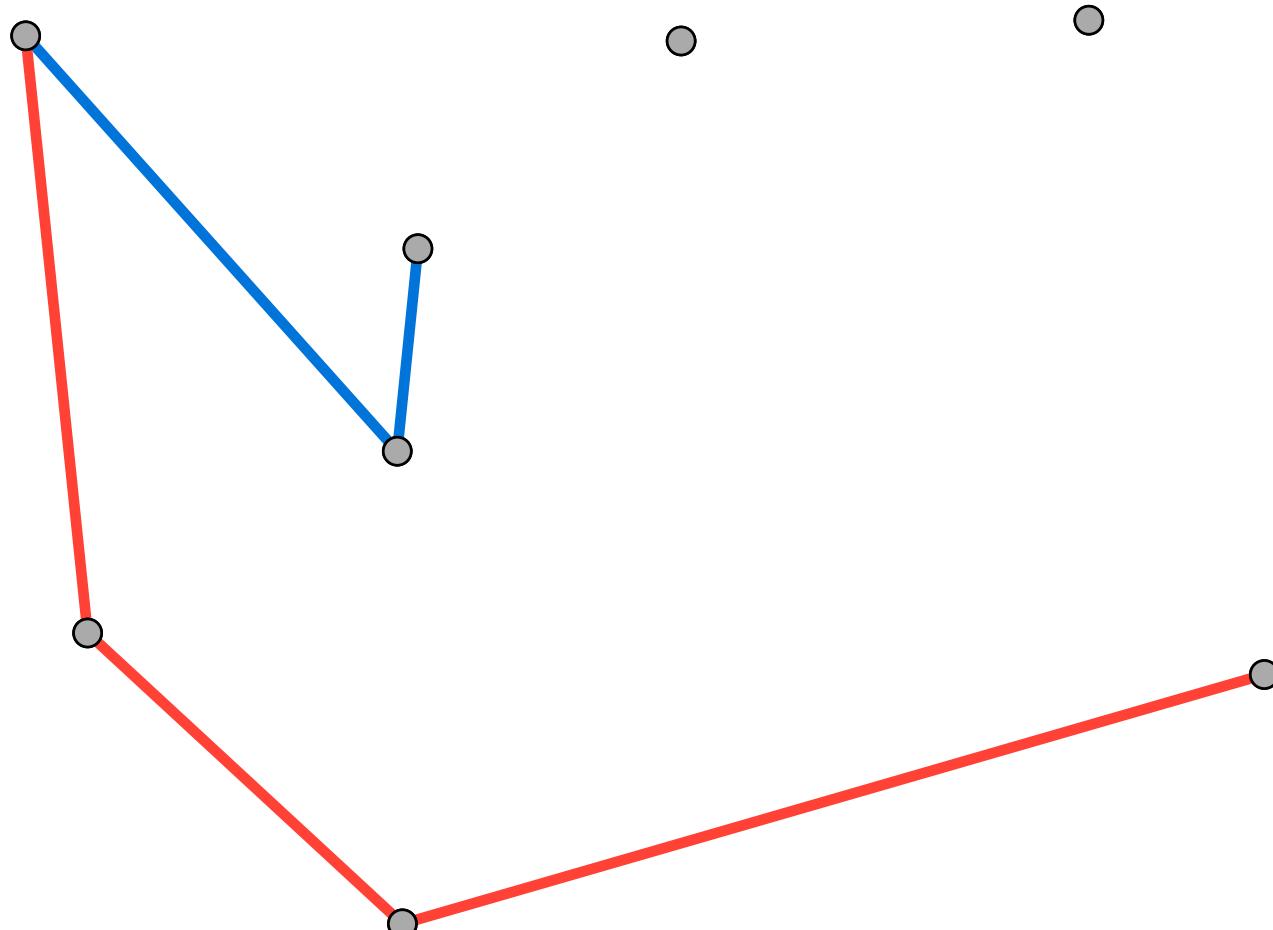
2.4.2 Przykład



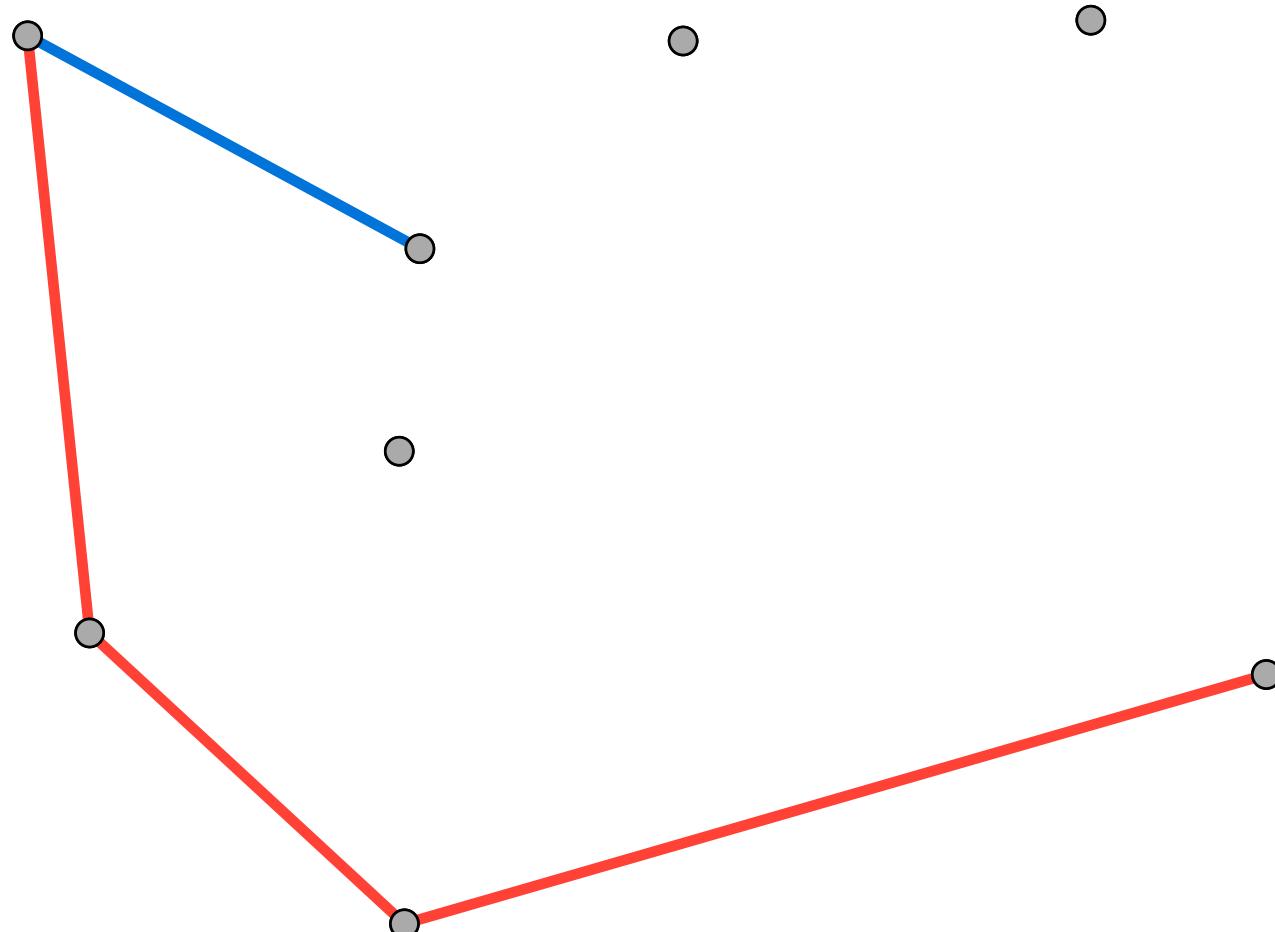
2.4.2 Przykład



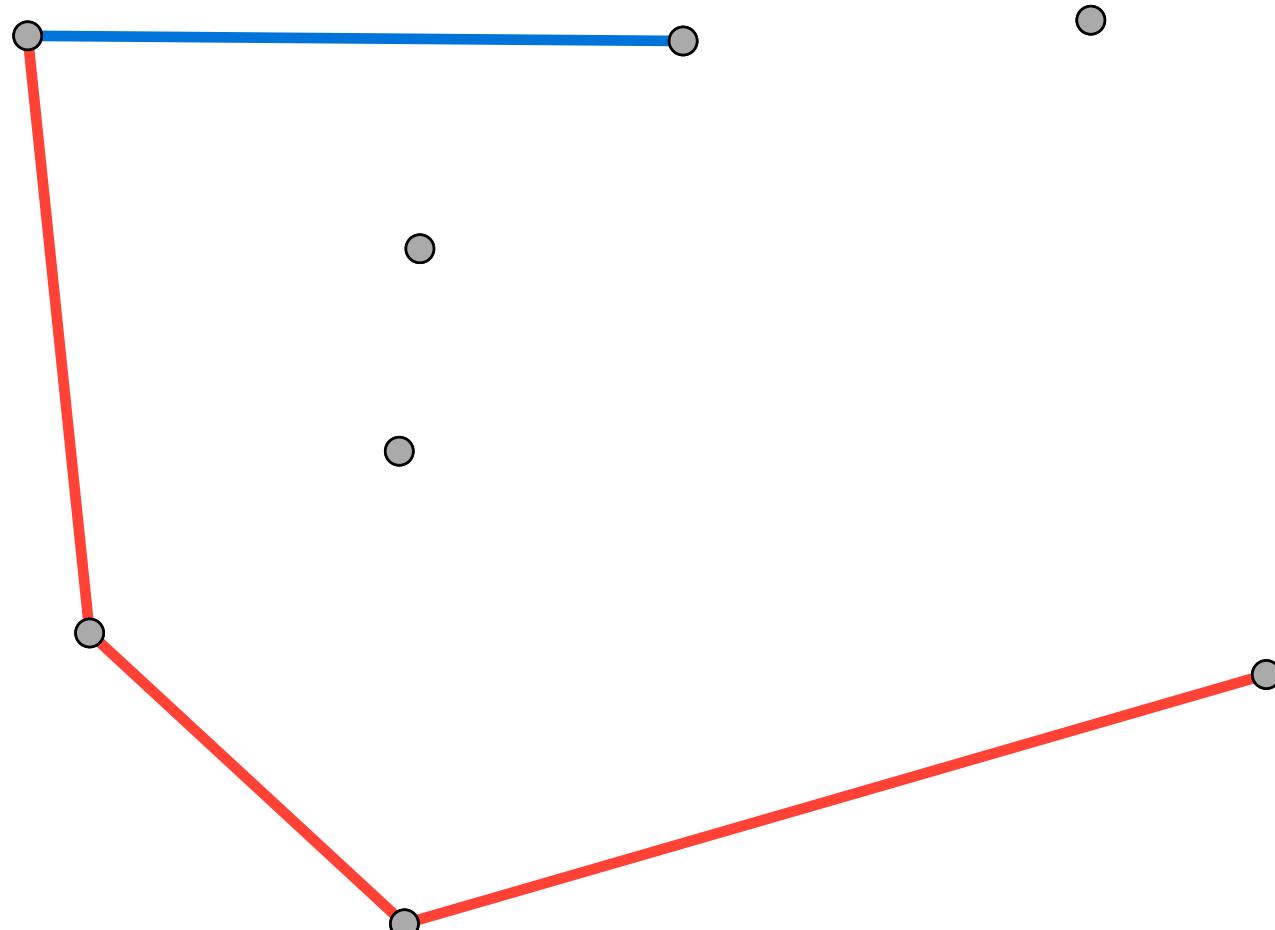
2.4.2 Przykład



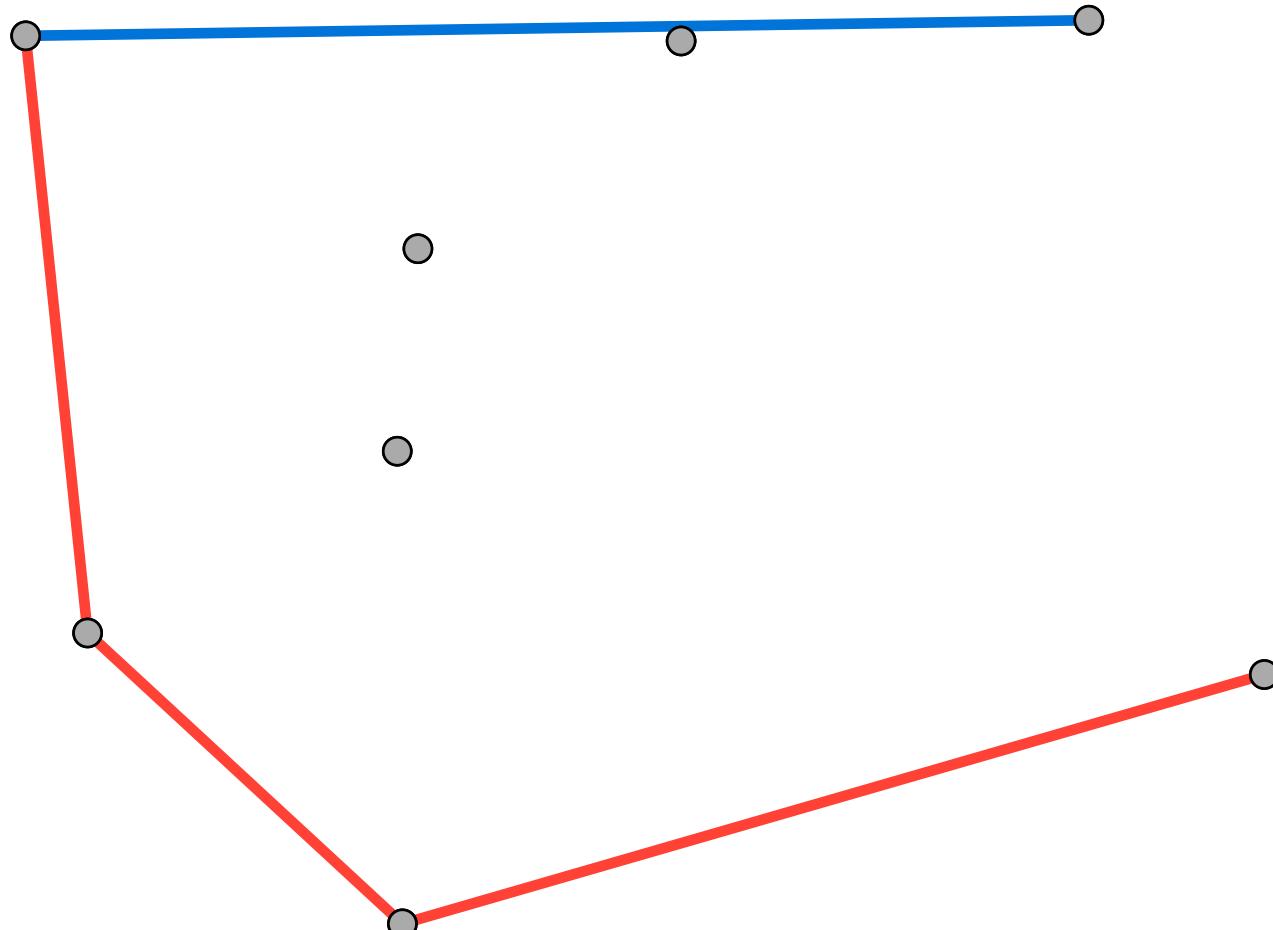
2.4.2 Przykład



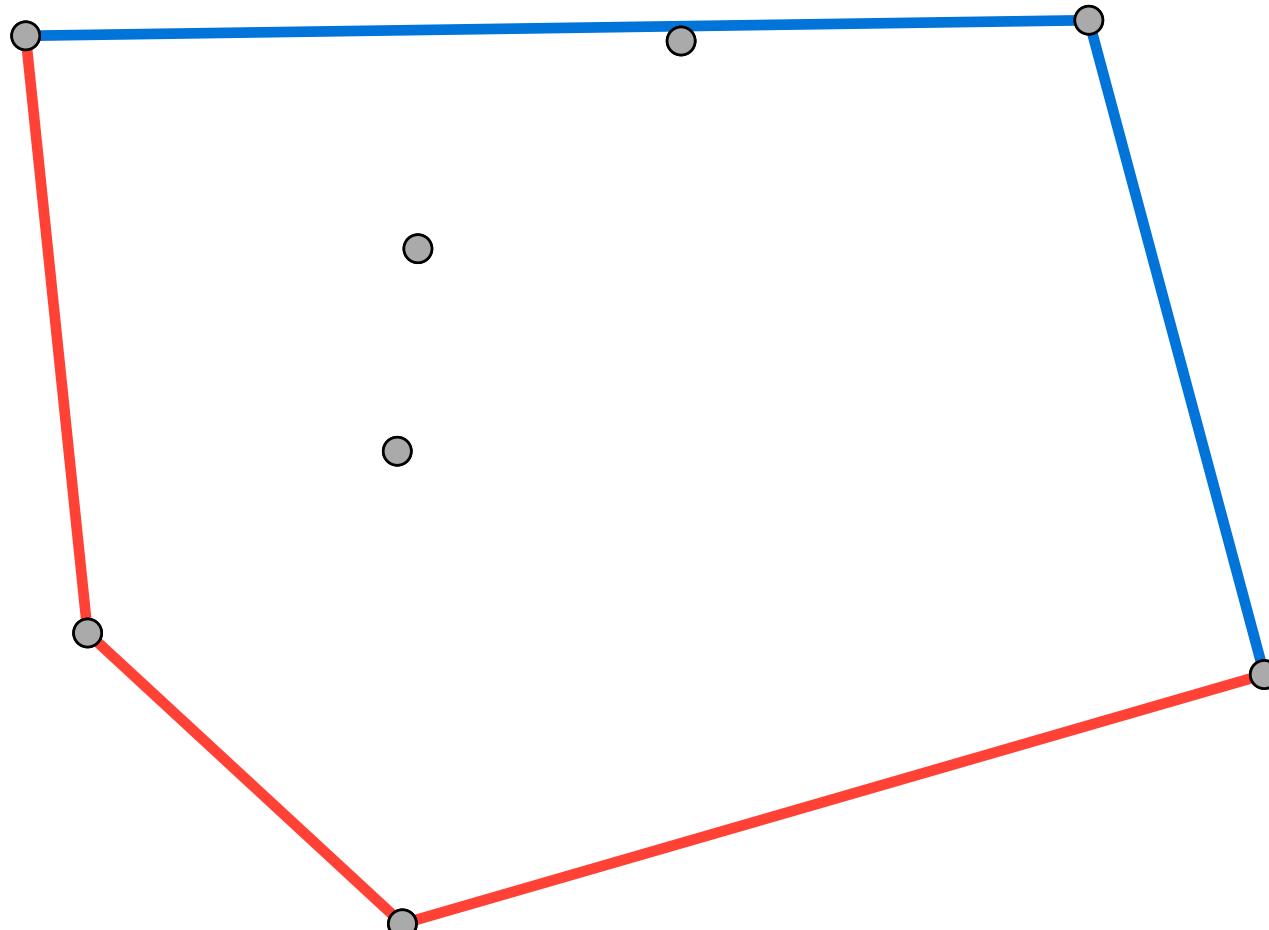
2.4.2 Przykład



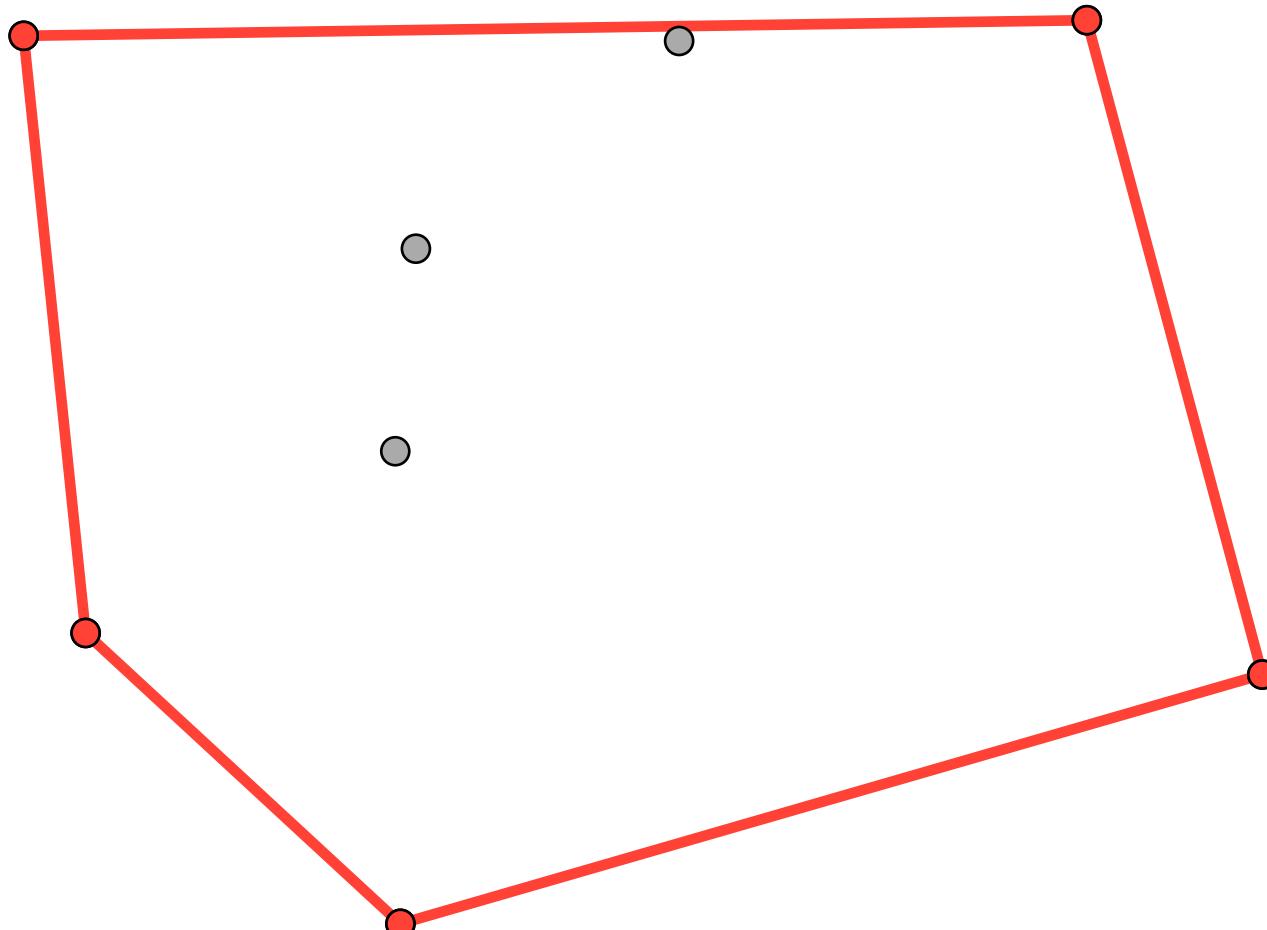
2.4.2 Przykład



2.4.2 Przykład



2.4.2 Przykład

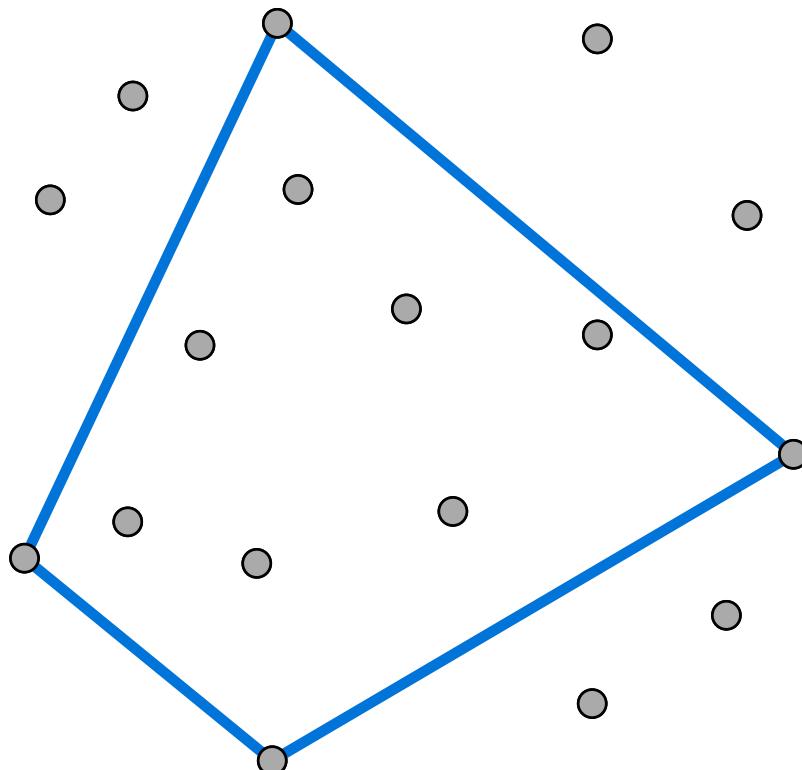


2.5.1 Działanie algorytmu

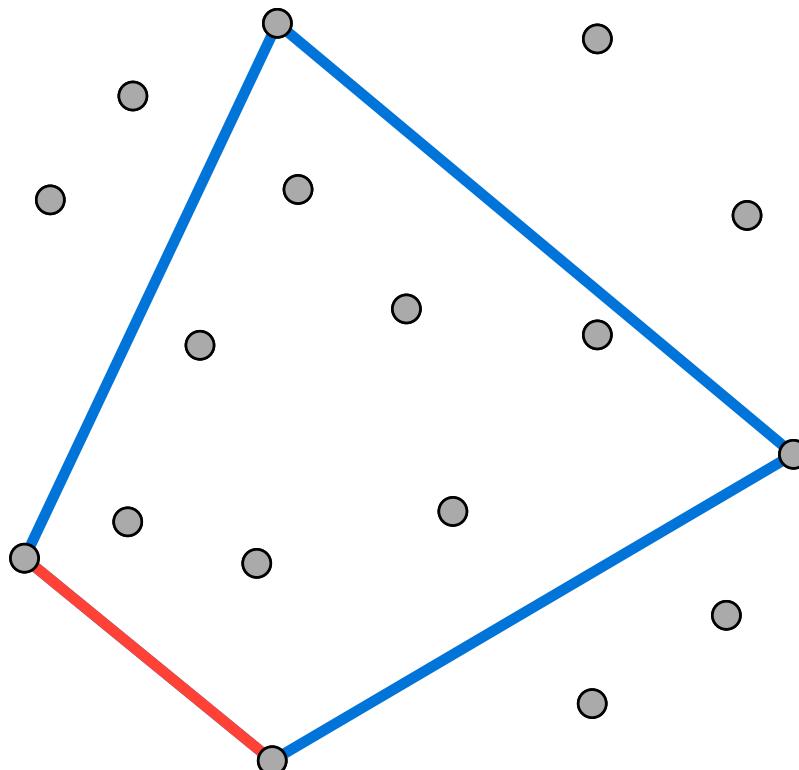
Algorytm wyznacza 4 skrajne punkty zbioru, tworząc wielokąt. Usuwane są wszystkie punkty wewnętrz tego wielokąta, a następnie na każdym z boków wywoływana jest rekurencyjna funkcja, która tworzy trójkąt tworzony przez dany bok jako podstawę oraz najbardziej oddalony od niej punkt znajdujący się po konkretnej stronie. Zwracamy ten najdalszy punkt oraz najdalsze punkty zwrócone poprzez rekurencyjne wywołanie na dwóch pozostałych bokach trójkąta.

Złożoność czasowa algorytmu to $O(n \log n)$

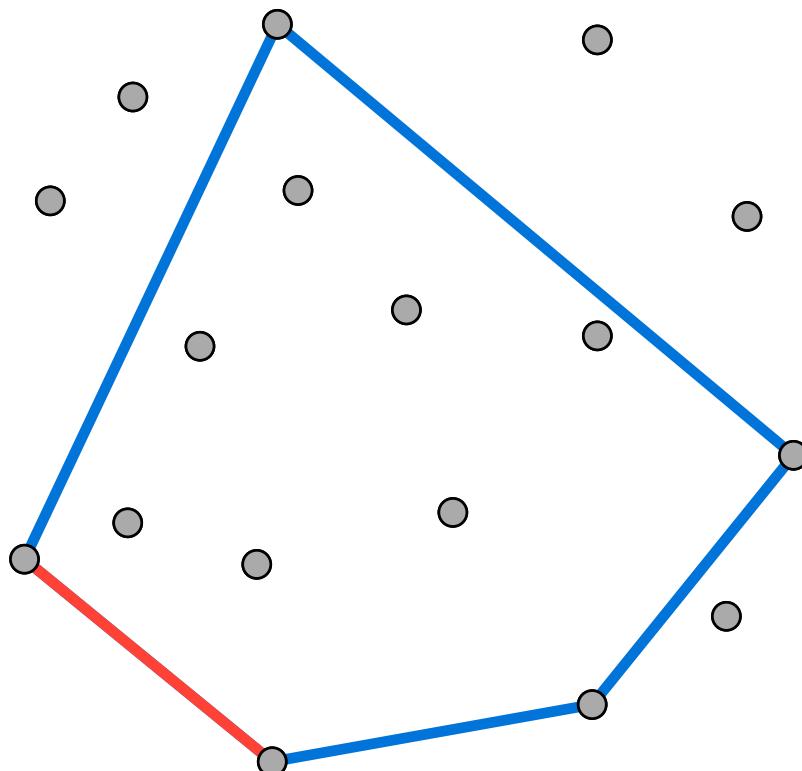
2.5.2 Przykład



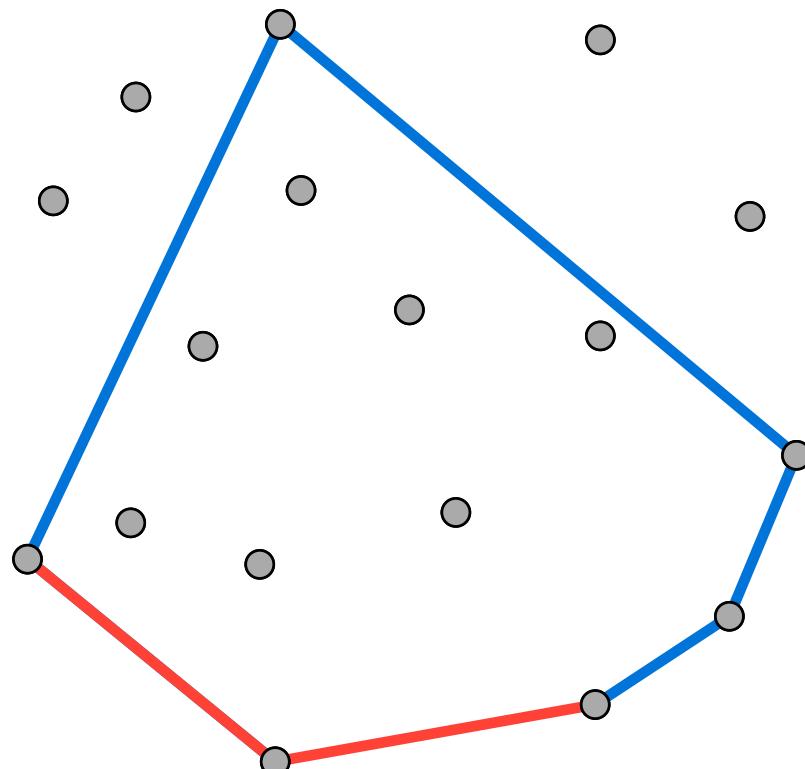
2.5.2 Przykład



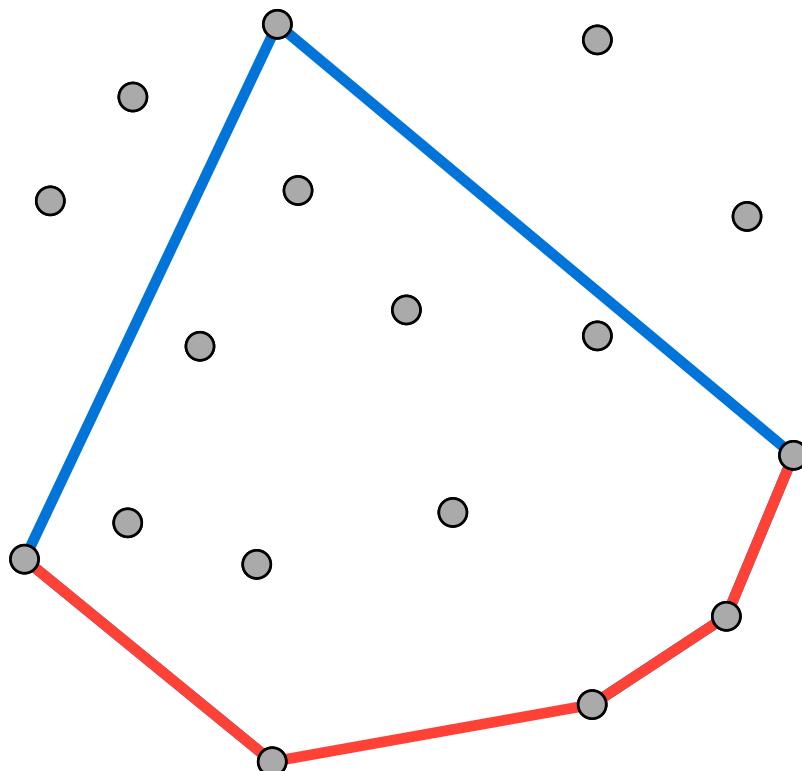
2.5.2 Przykład



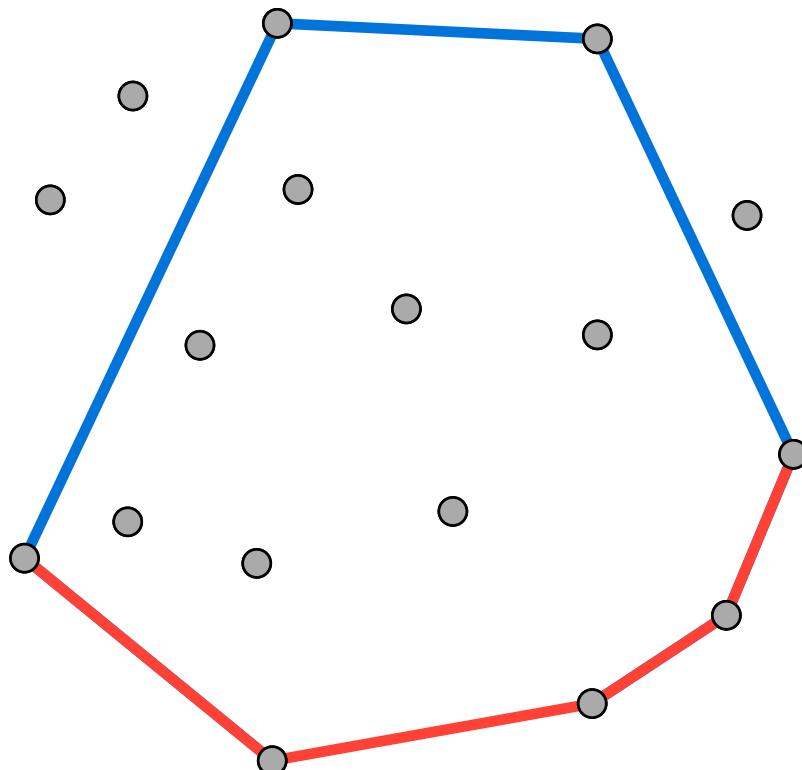
2.5.2 Przykład



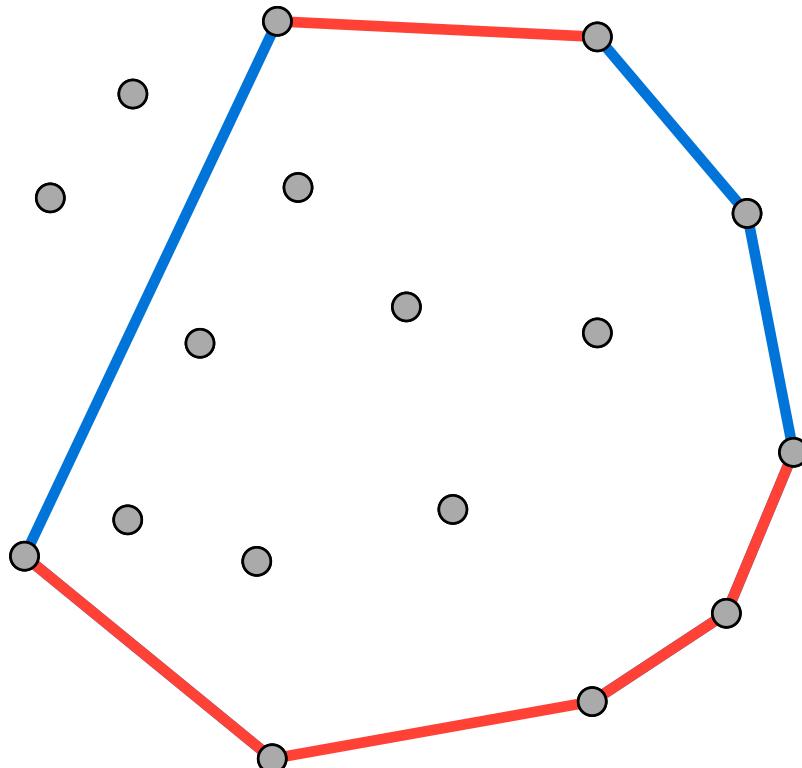
2.5.2 Przykład



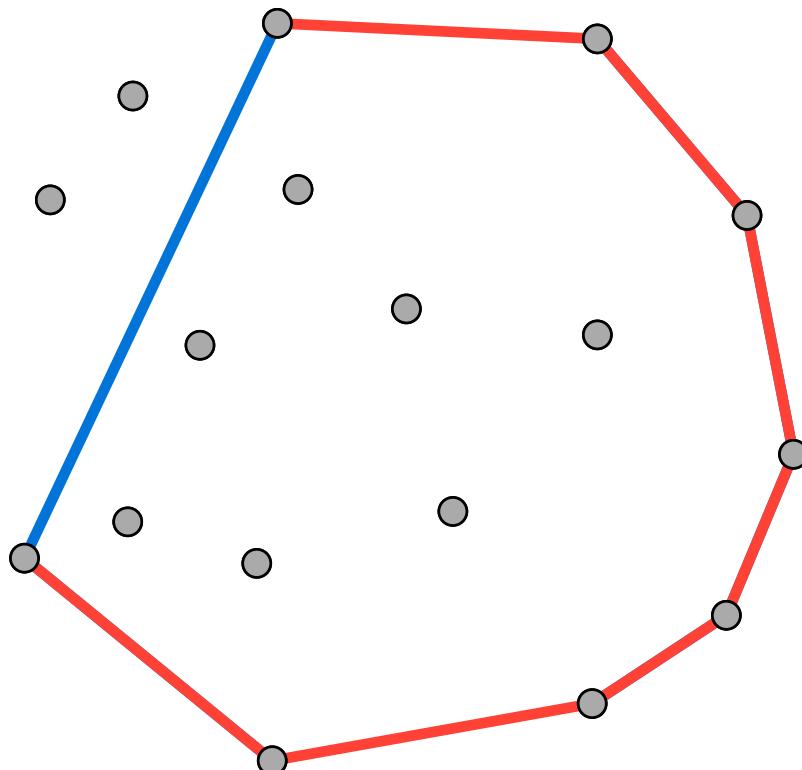
2.5.2 Przykład



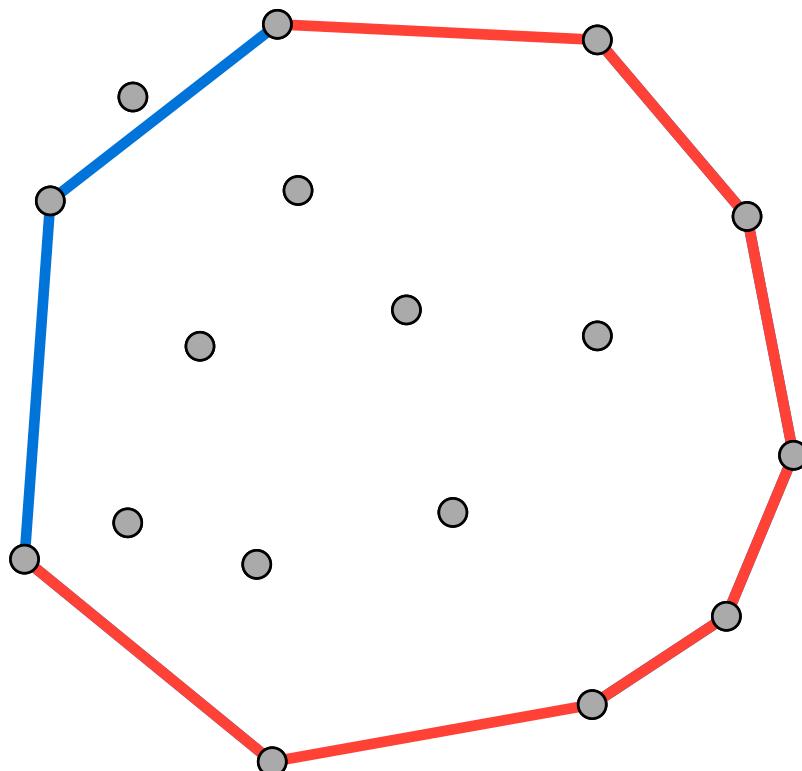
2.5.2 Przykład



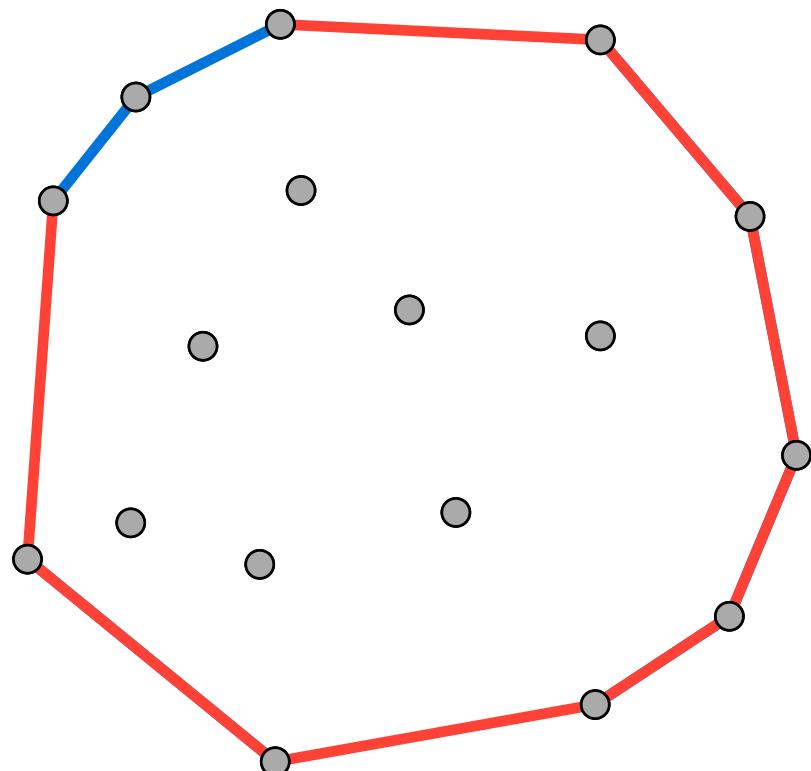
2.5.2 Przykład



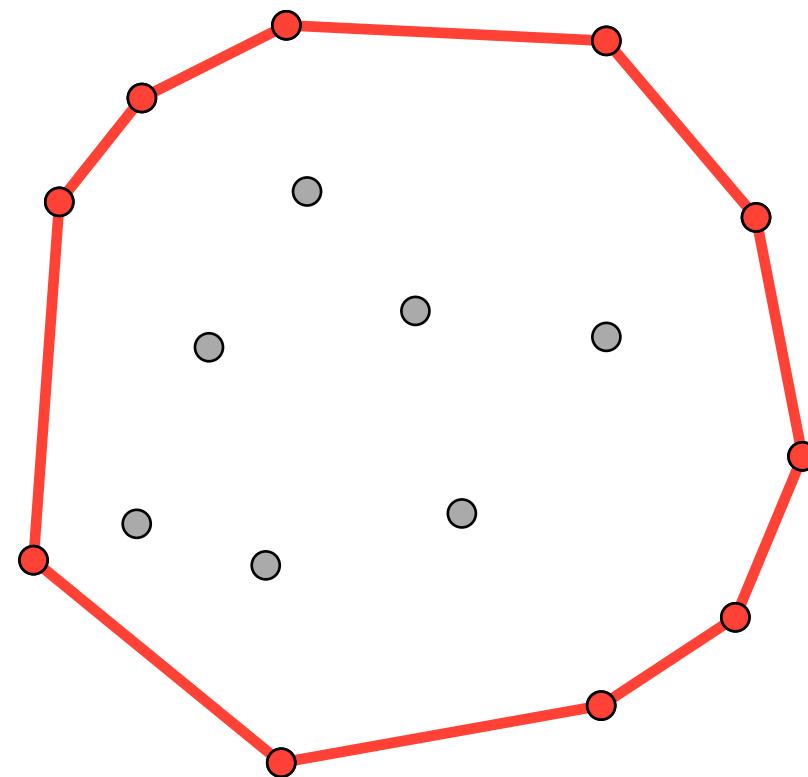
2.5.2 Przykład



2.5.2 Przykład



2.5.2 Przykład

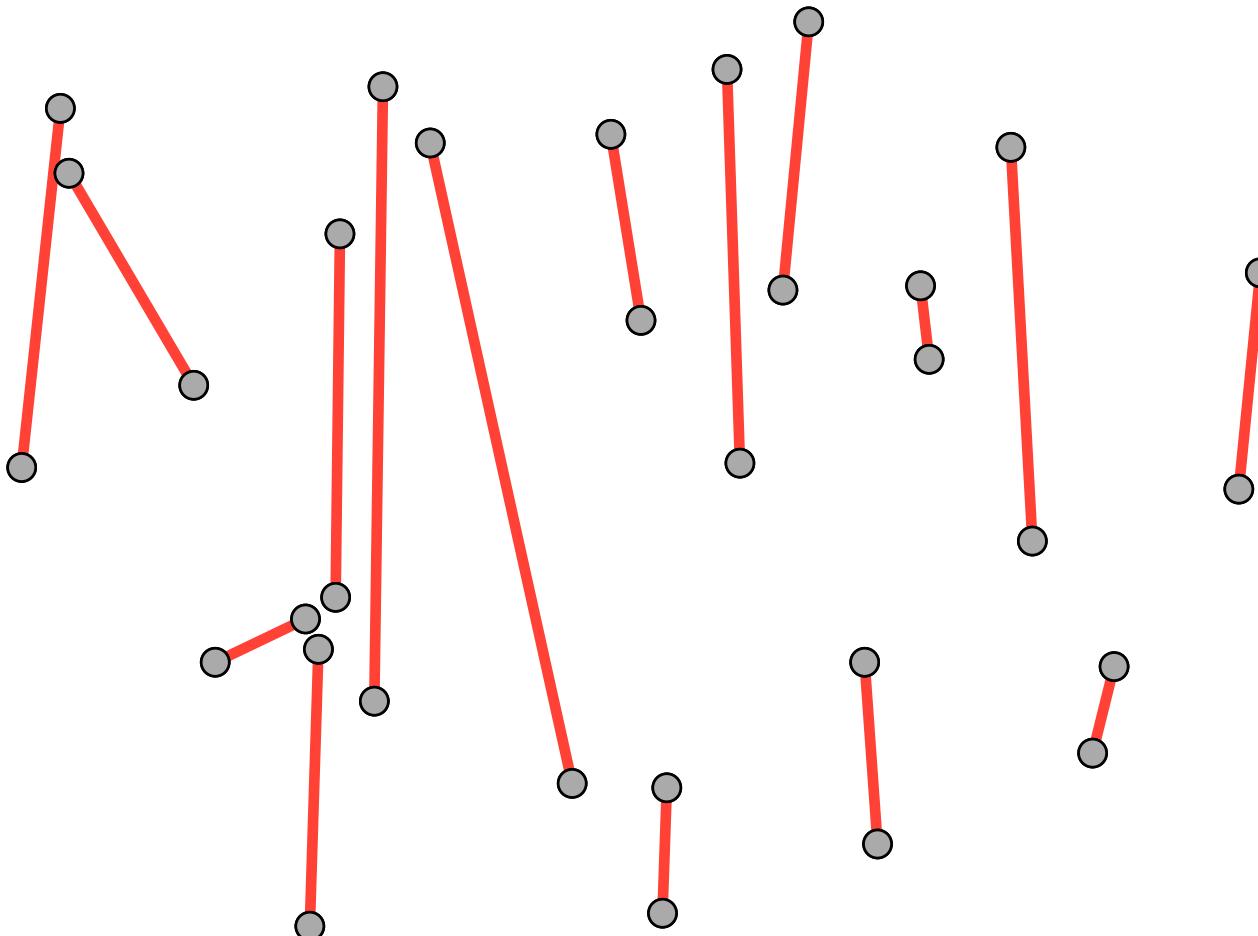


2.6.1 Działanie algorytmu

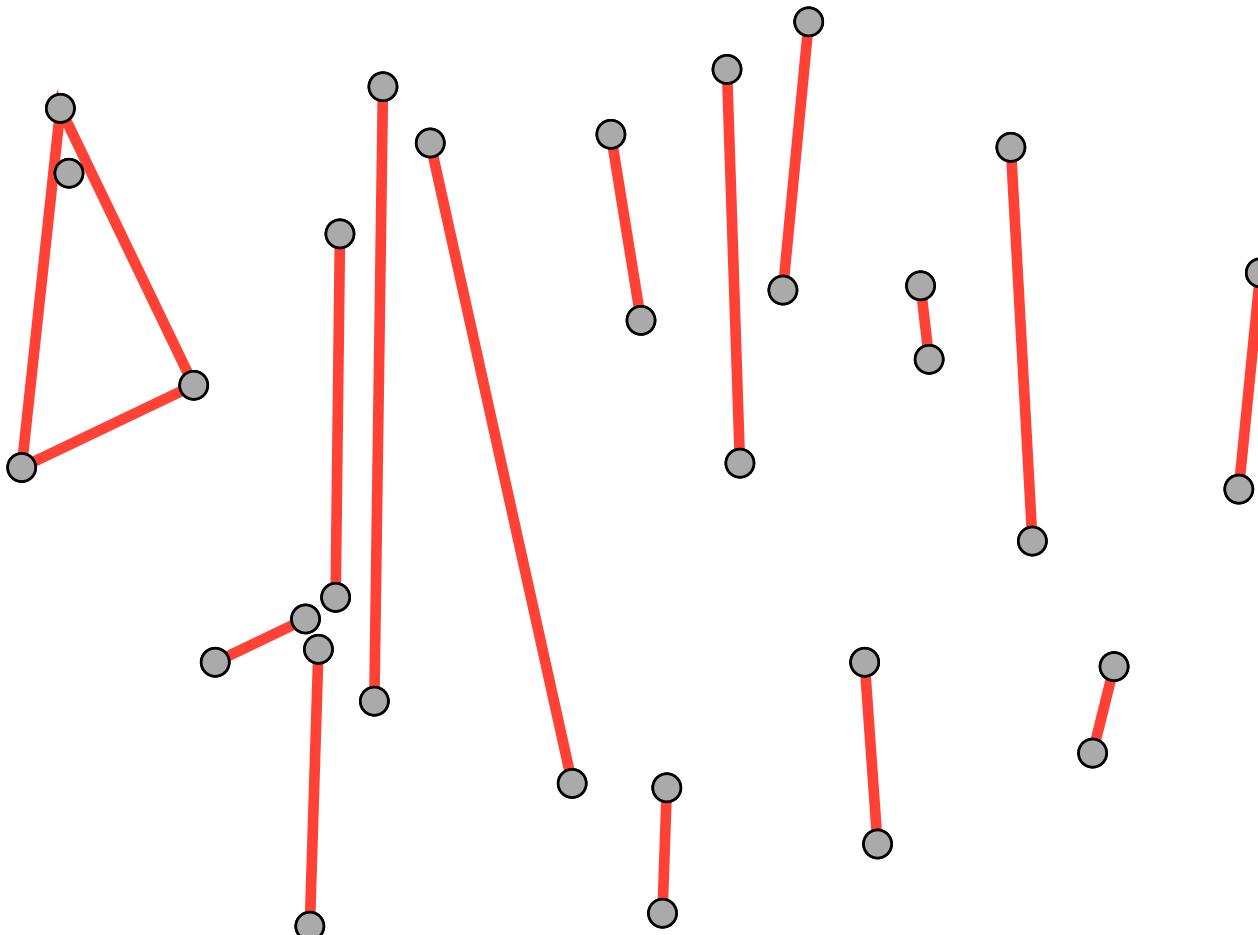
Algorytm sortuje punkty względem współrzędnej x , następnie dzieli zbiór na grupy względem mediany, aż do momentu gdy liczebność każdej z nich będzie mniejsza lub równa parametrowi algorytmu k . Algorytm Grahama wyznacza otoczkę dla każdej z grup, dzięki czemu możemy połączyć wszystkie mniejsze otoczki w jedną, wynikową. Łączenie sąsiednich otoczek polega na znajdowaniu stycznych.

Złożoność czasowa algorytmu to $O(n \log n)$

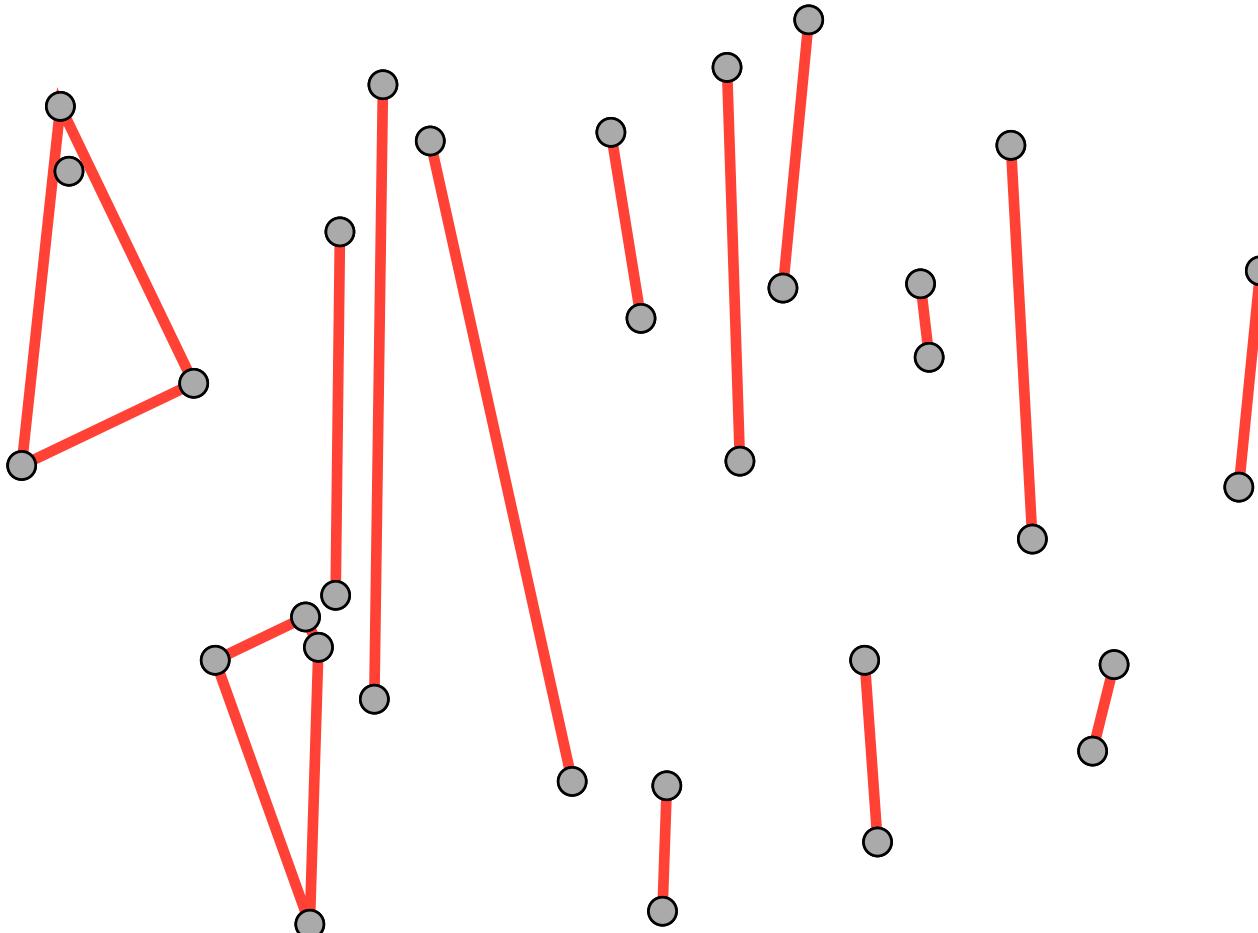
2.6.2 Przykład



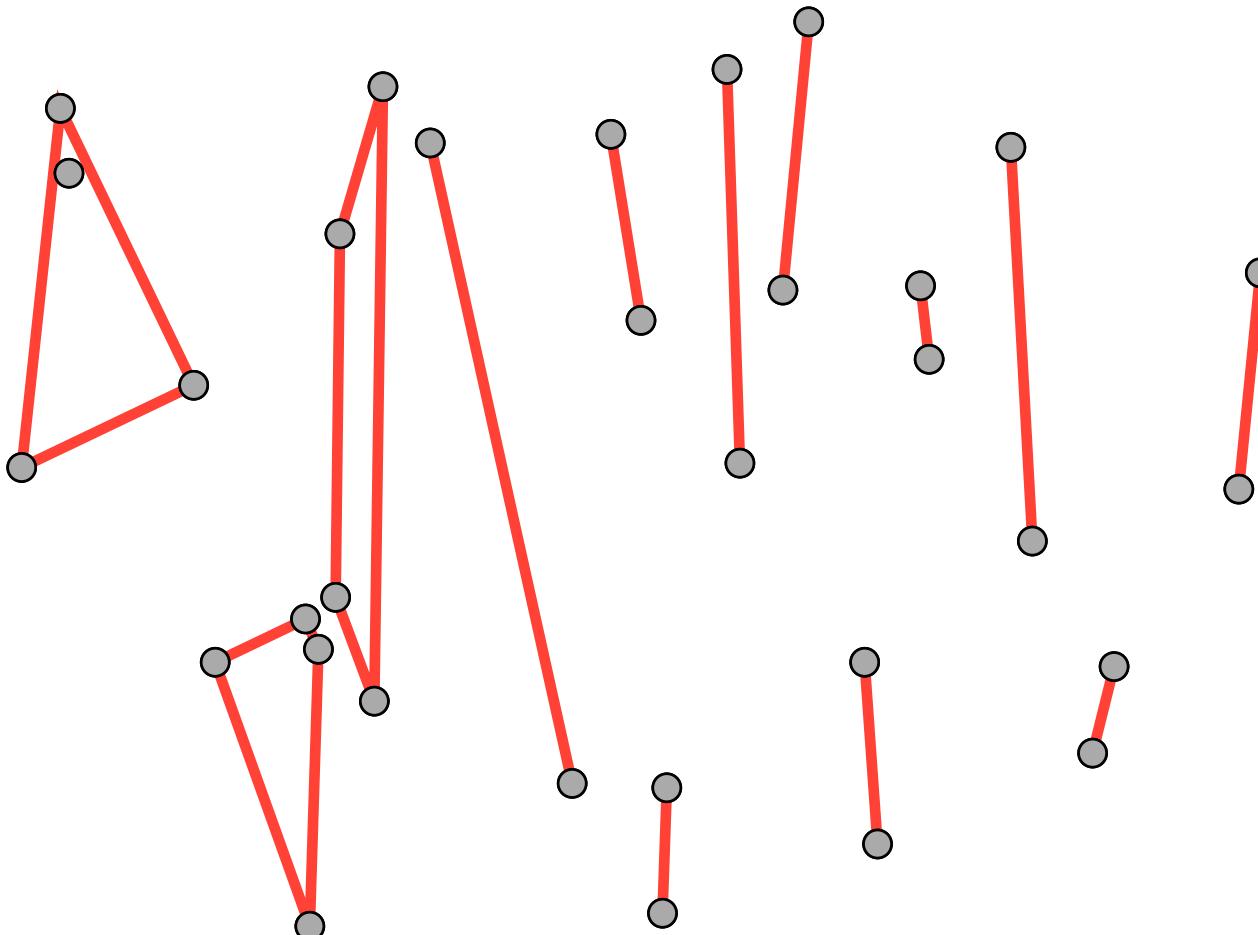
2.6.2 Przykład



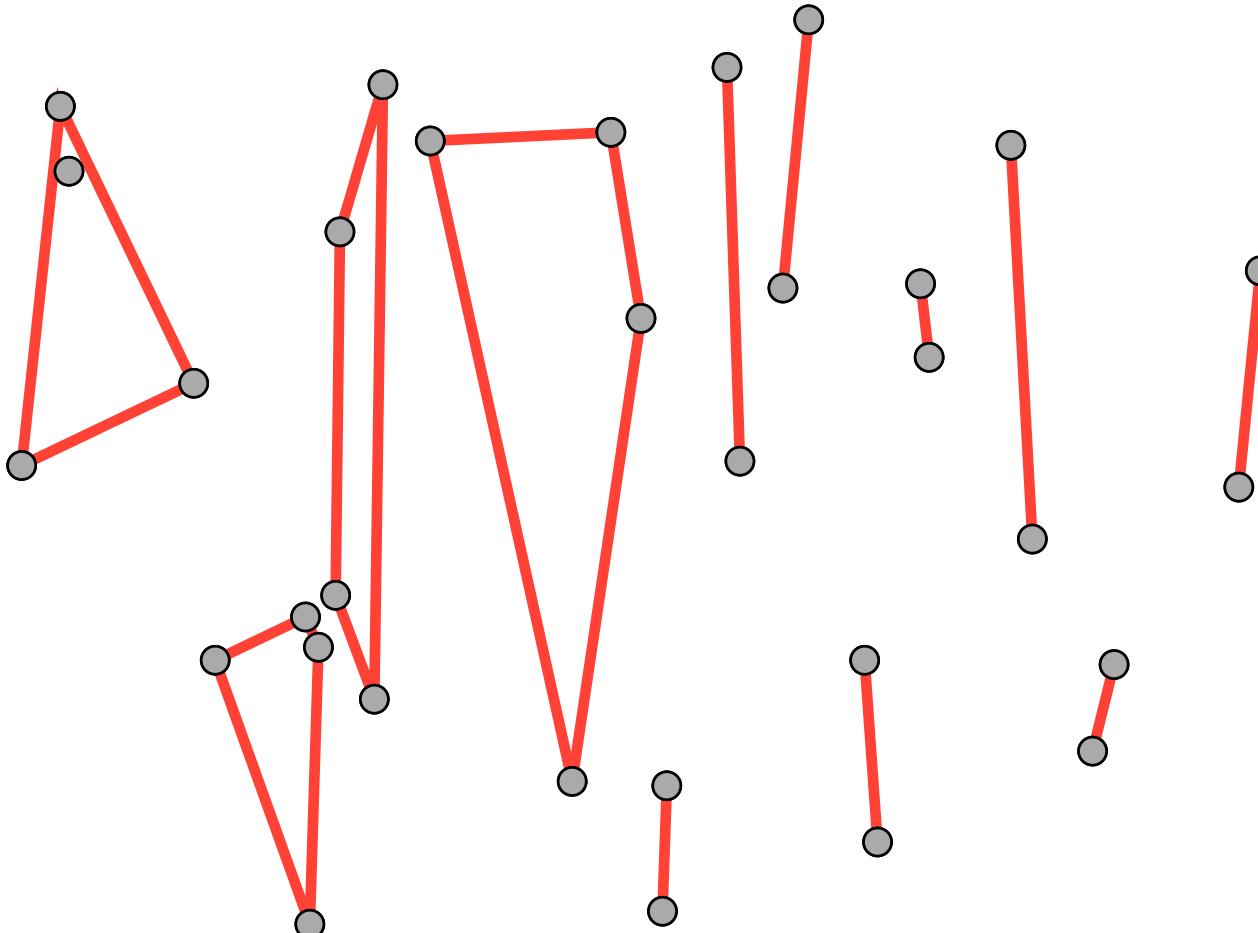
2.6.2 Przykład



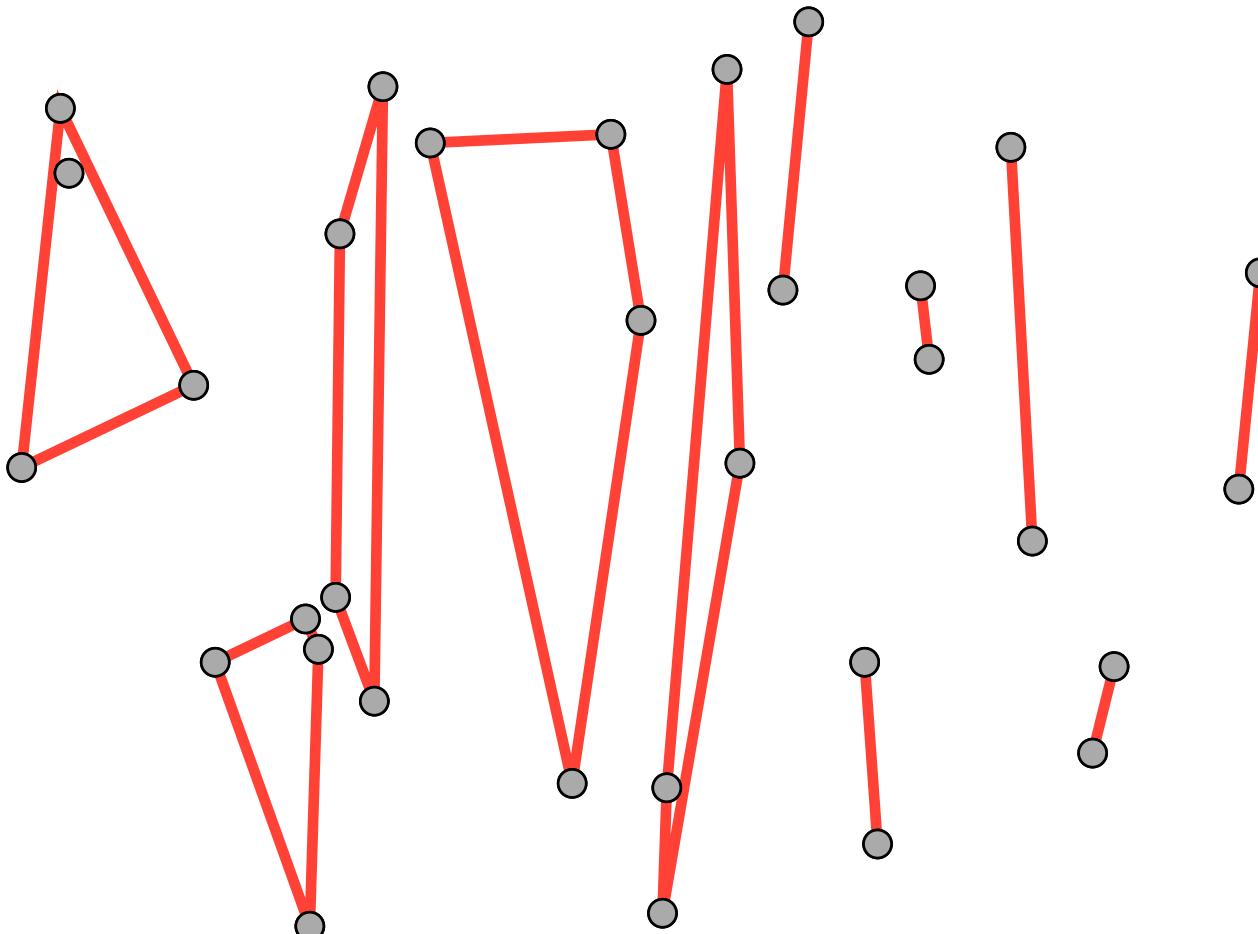
2.6.2 Przykład



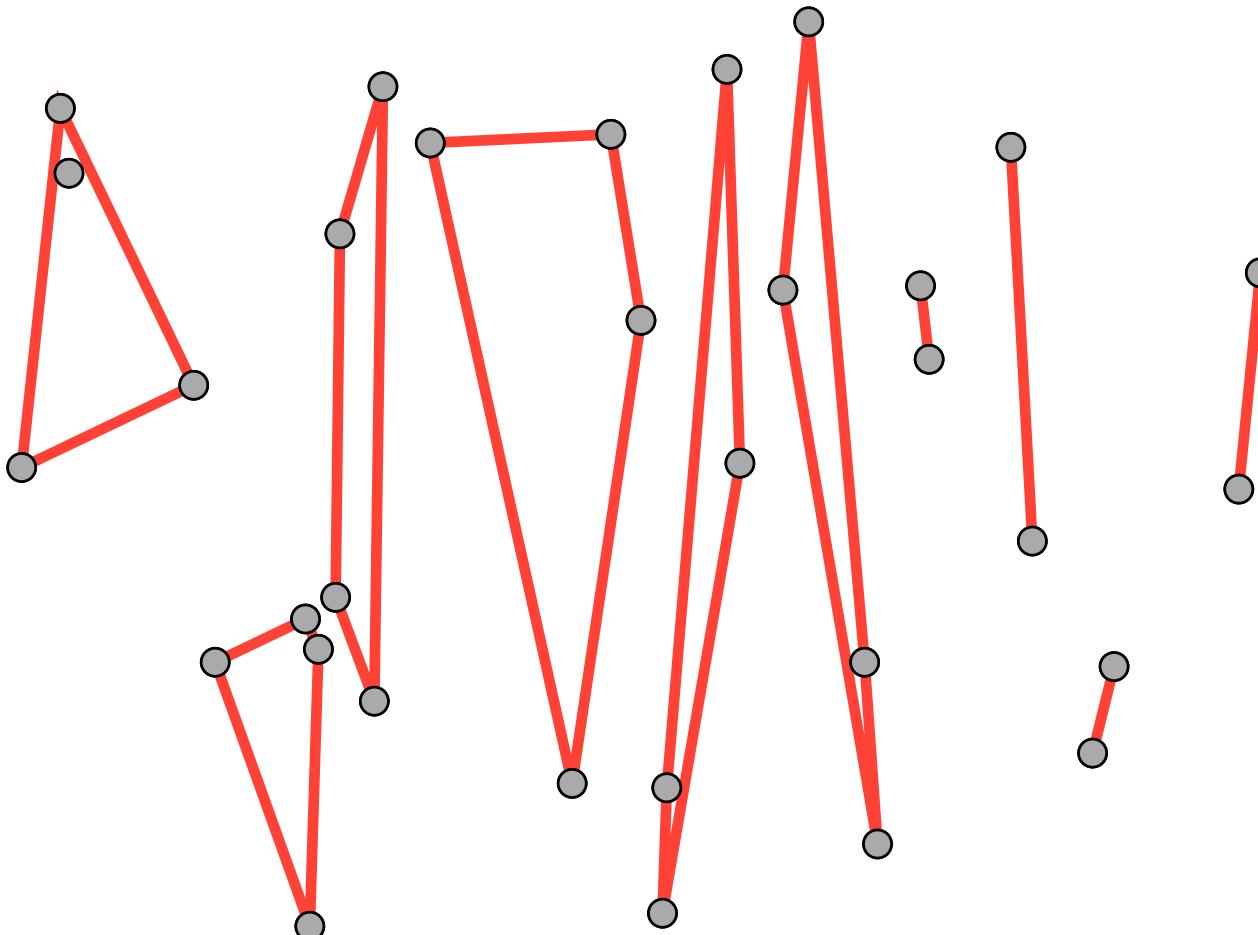
2.6.2 Przykład



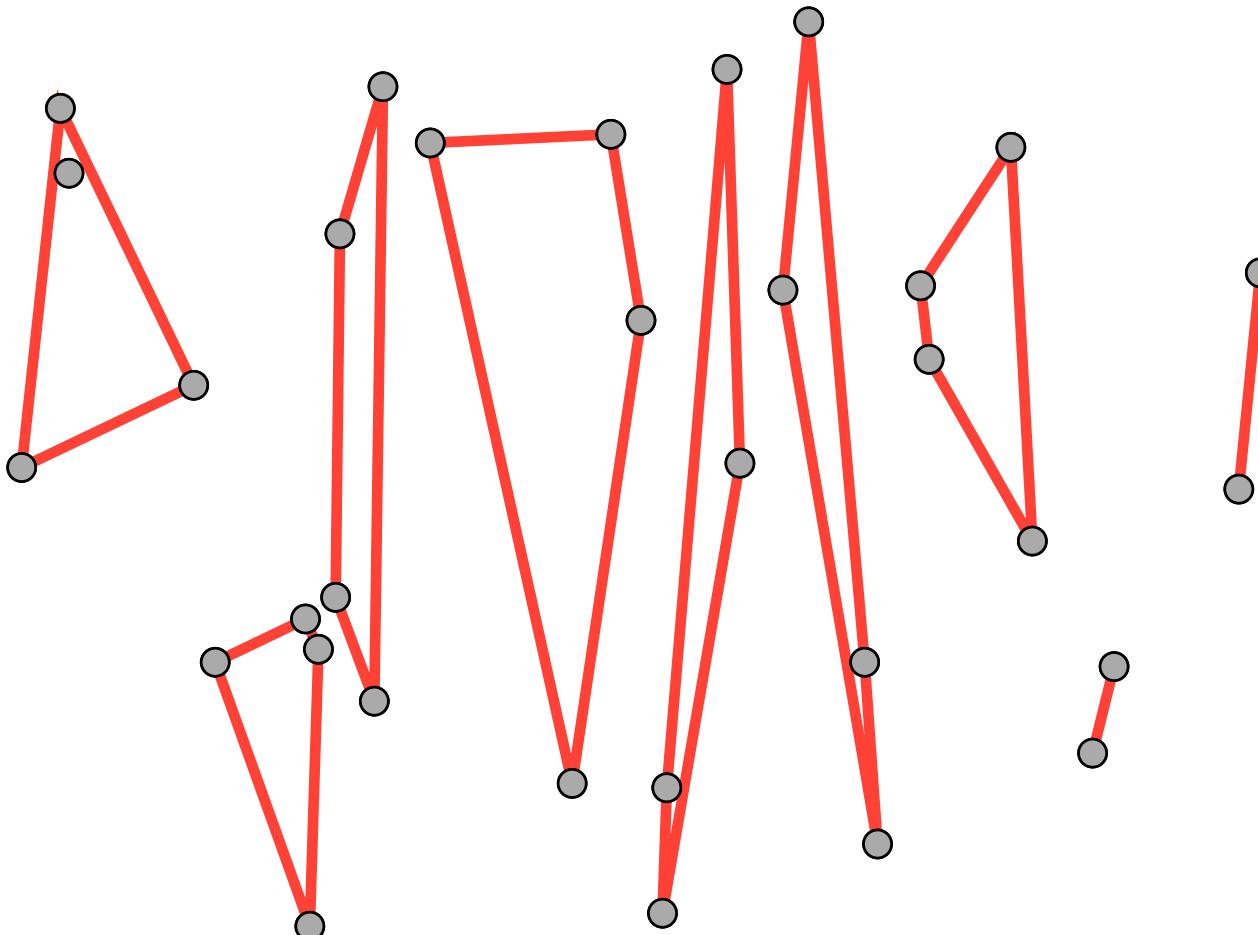
2.6.2 Przykład



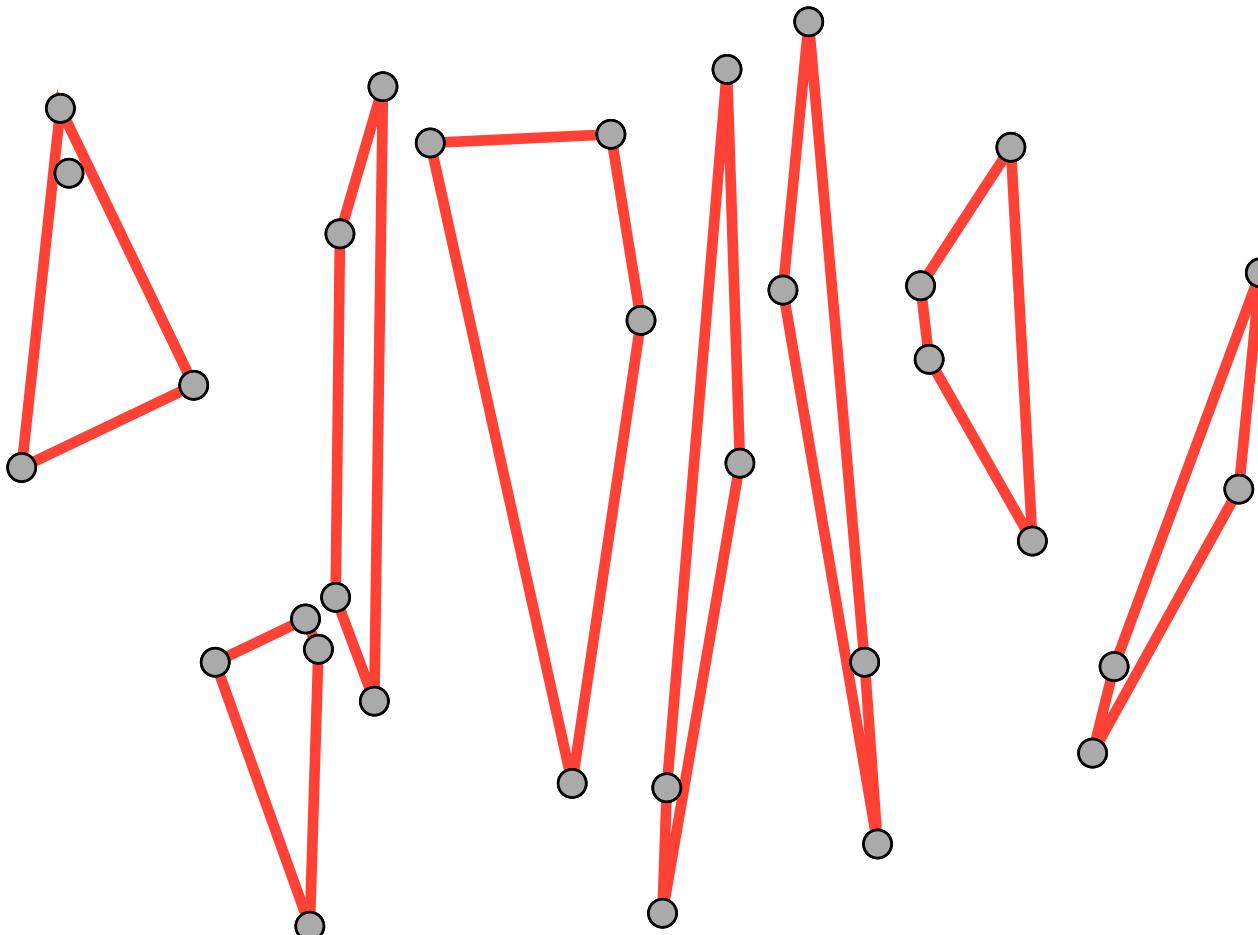
2.6.2 Przykład



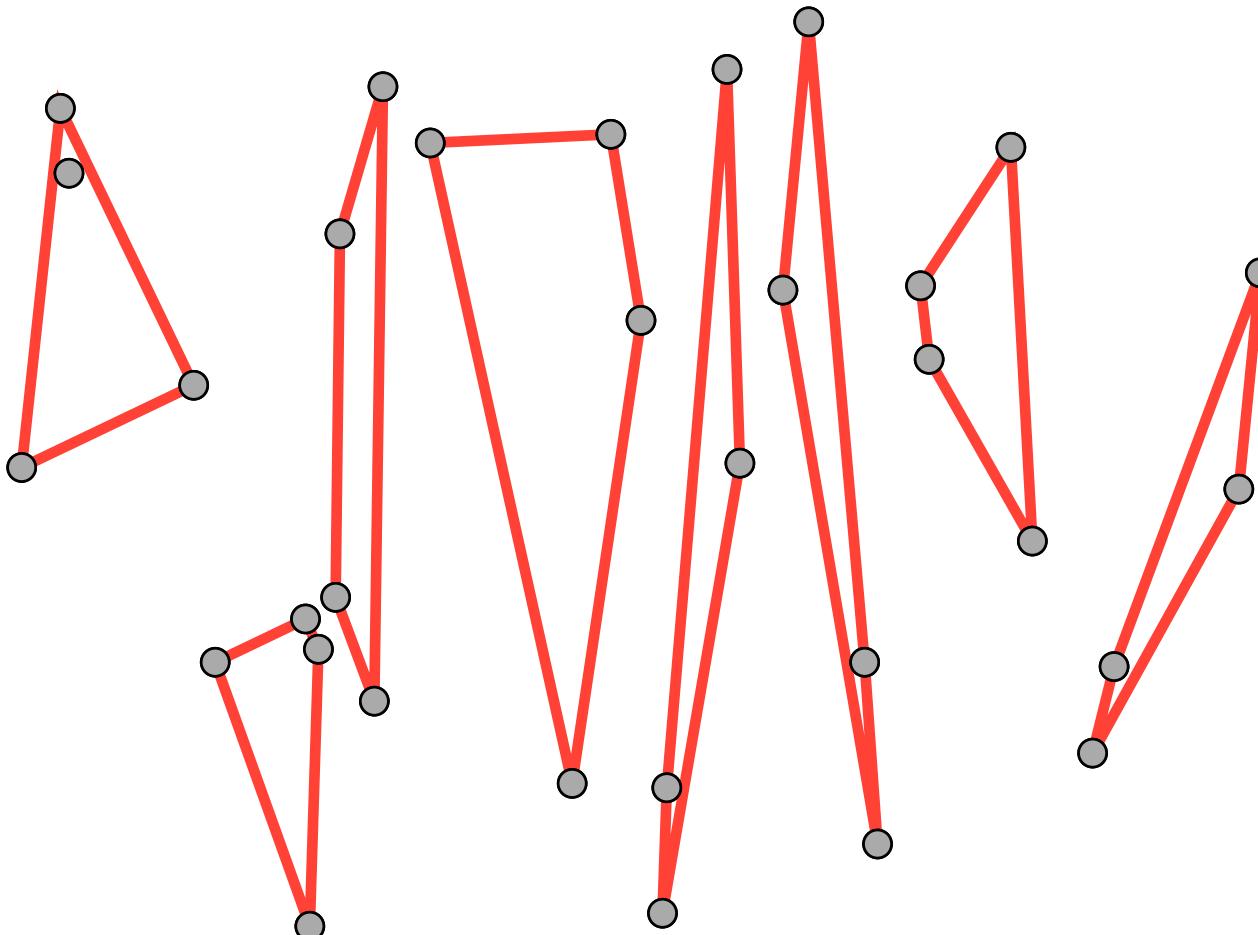
2.6.2 Przykład



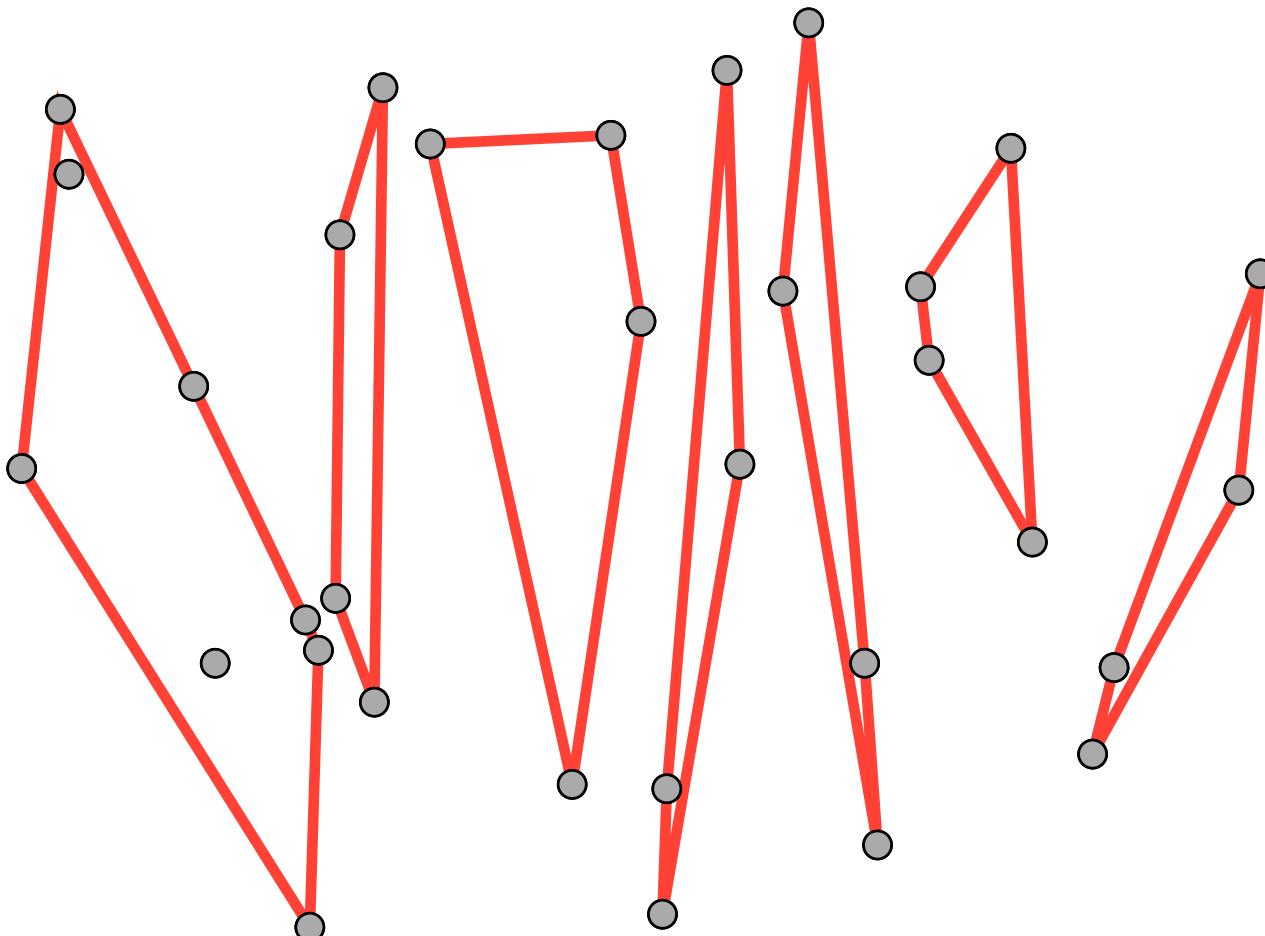
2.6.2 Przykład



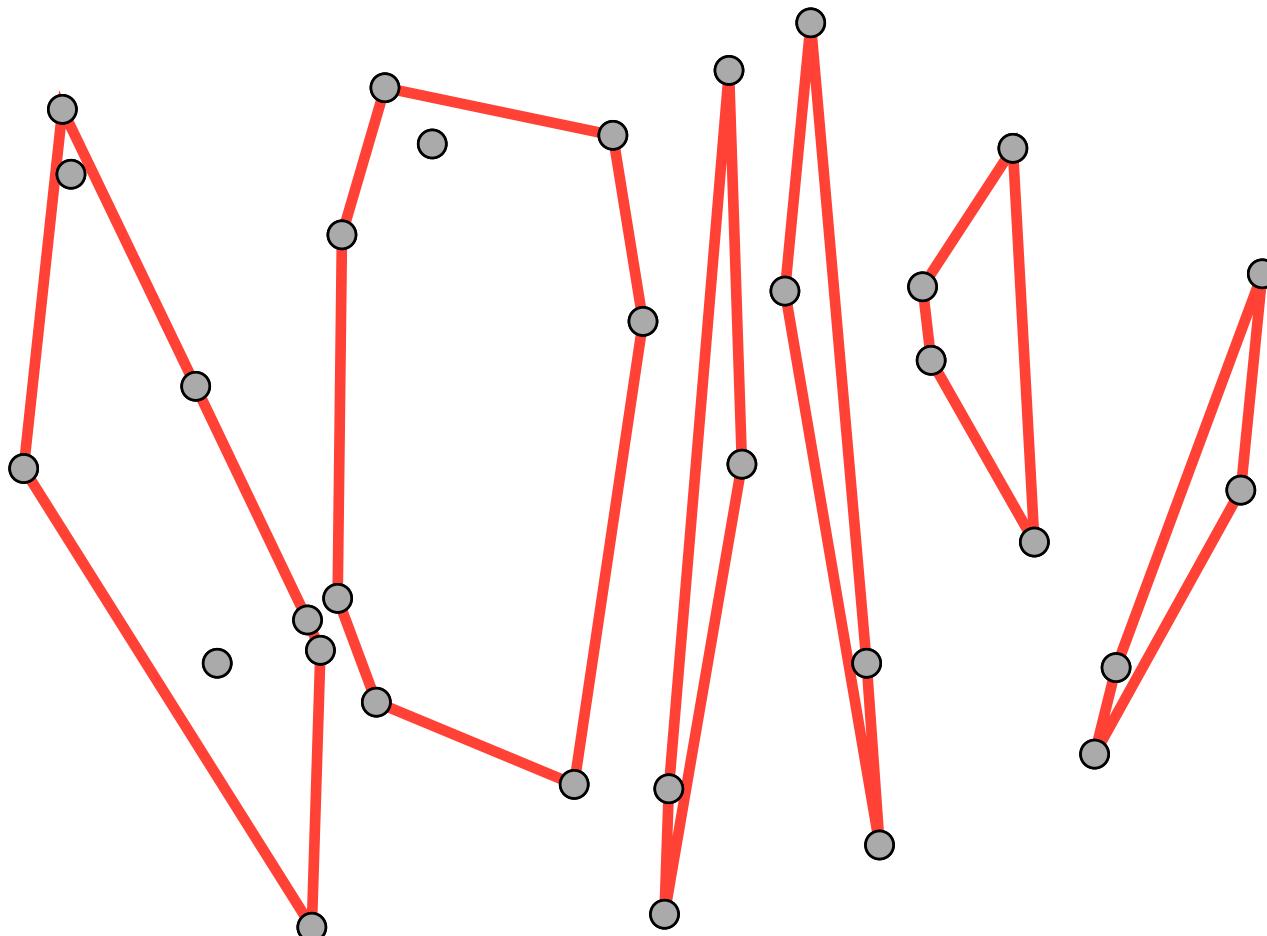
2.6.2 Przykład



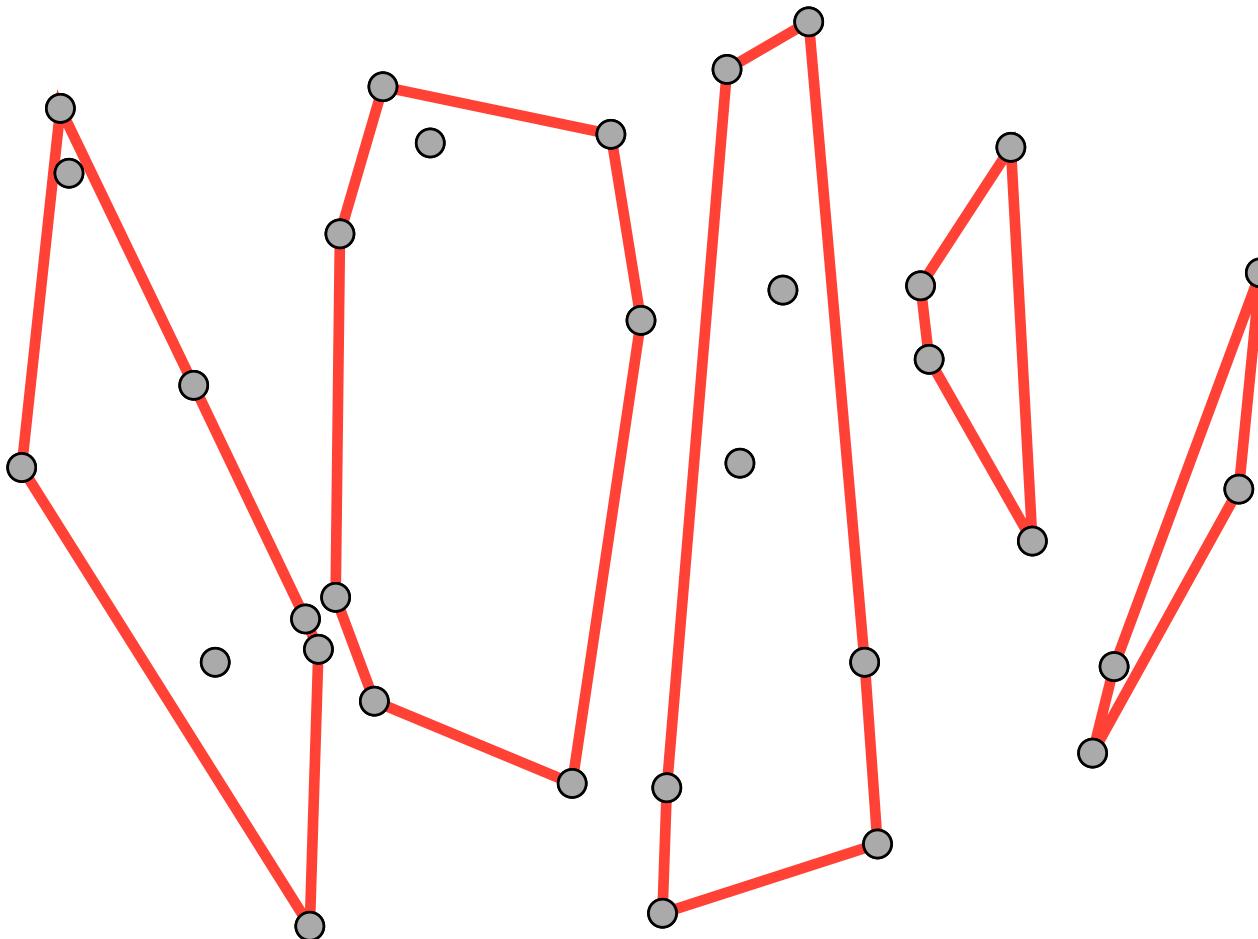
2.6.2 Przykład



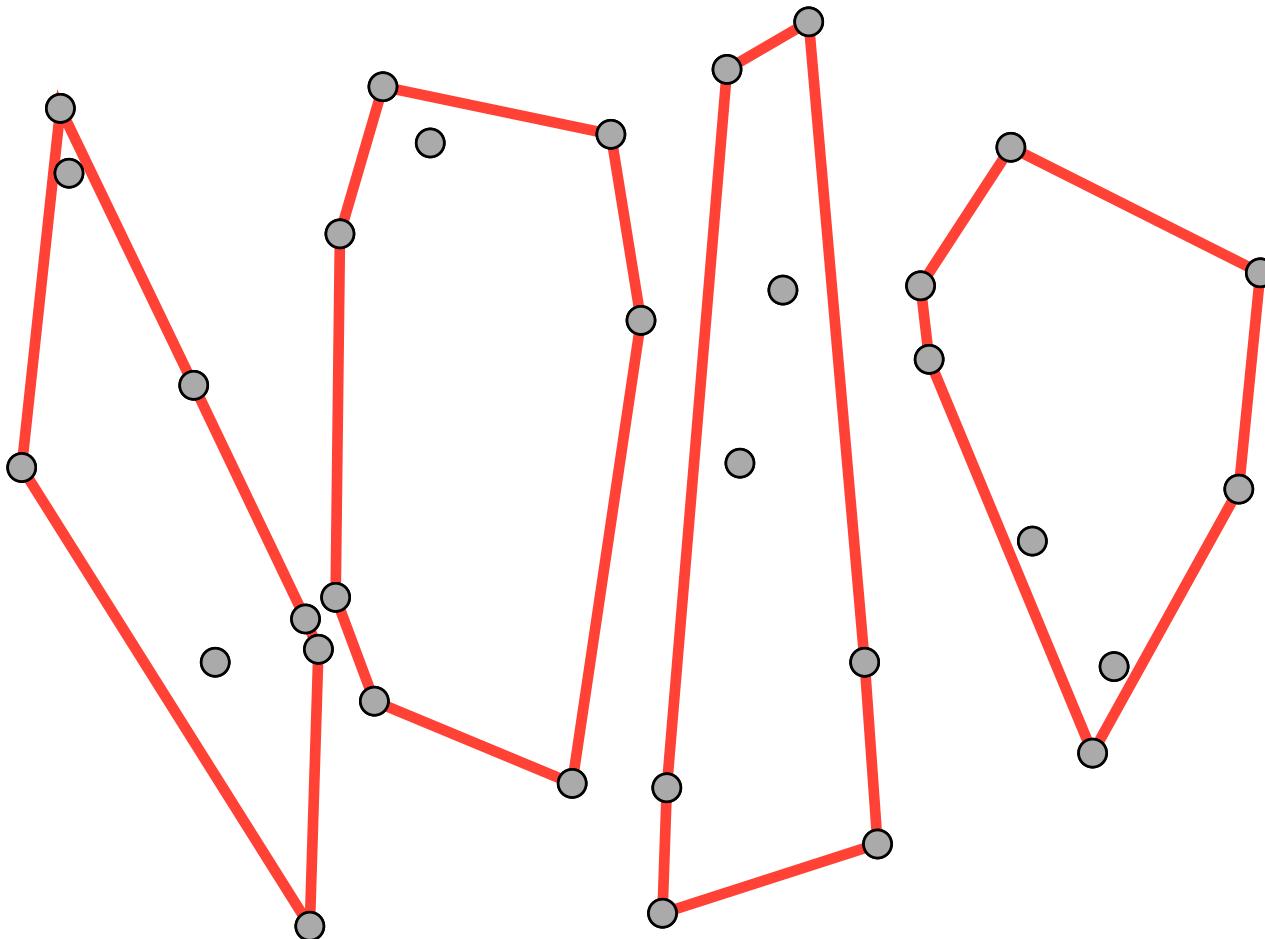
2.6.2 Przykład



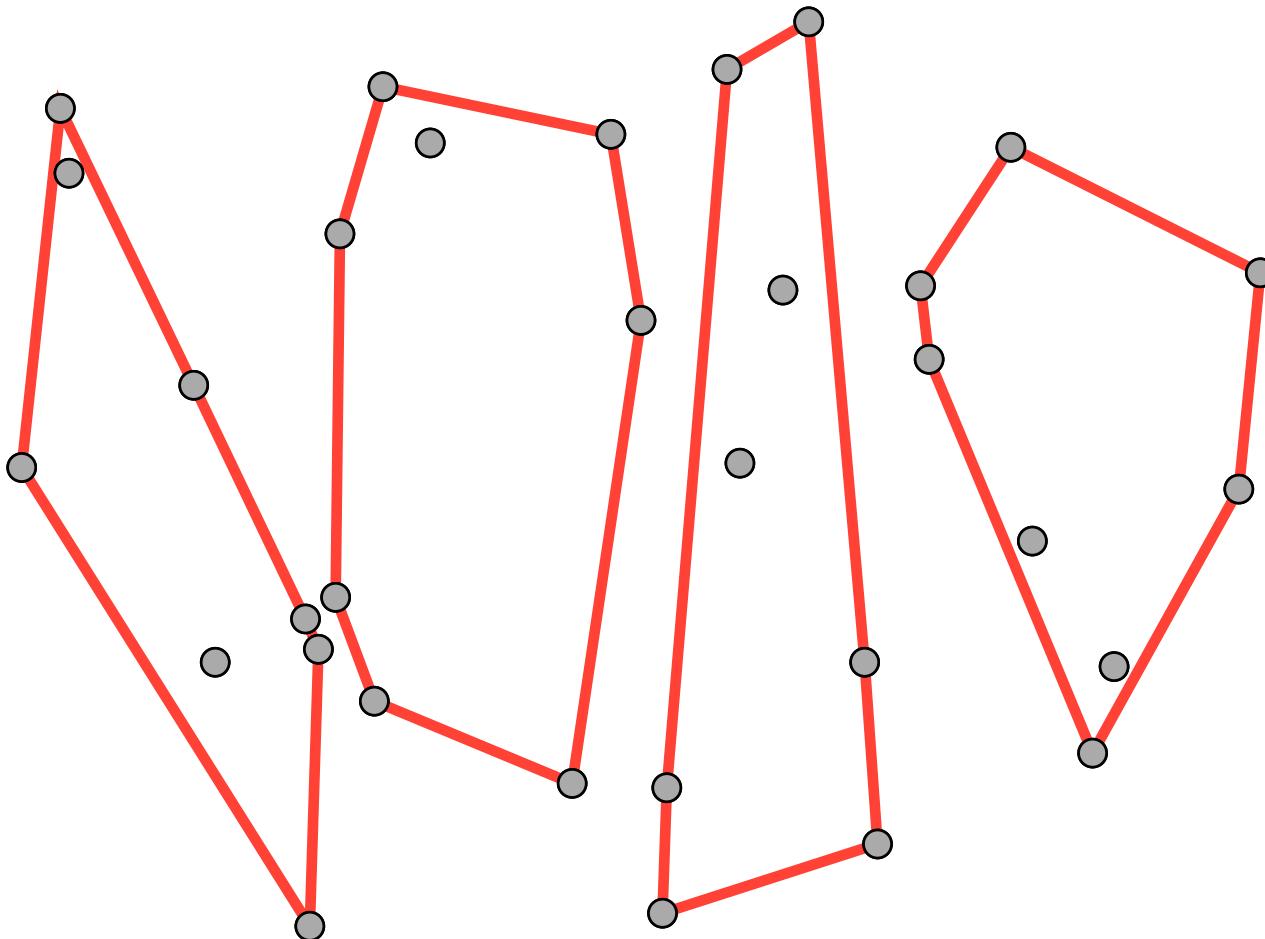
2.6.2 Przykład



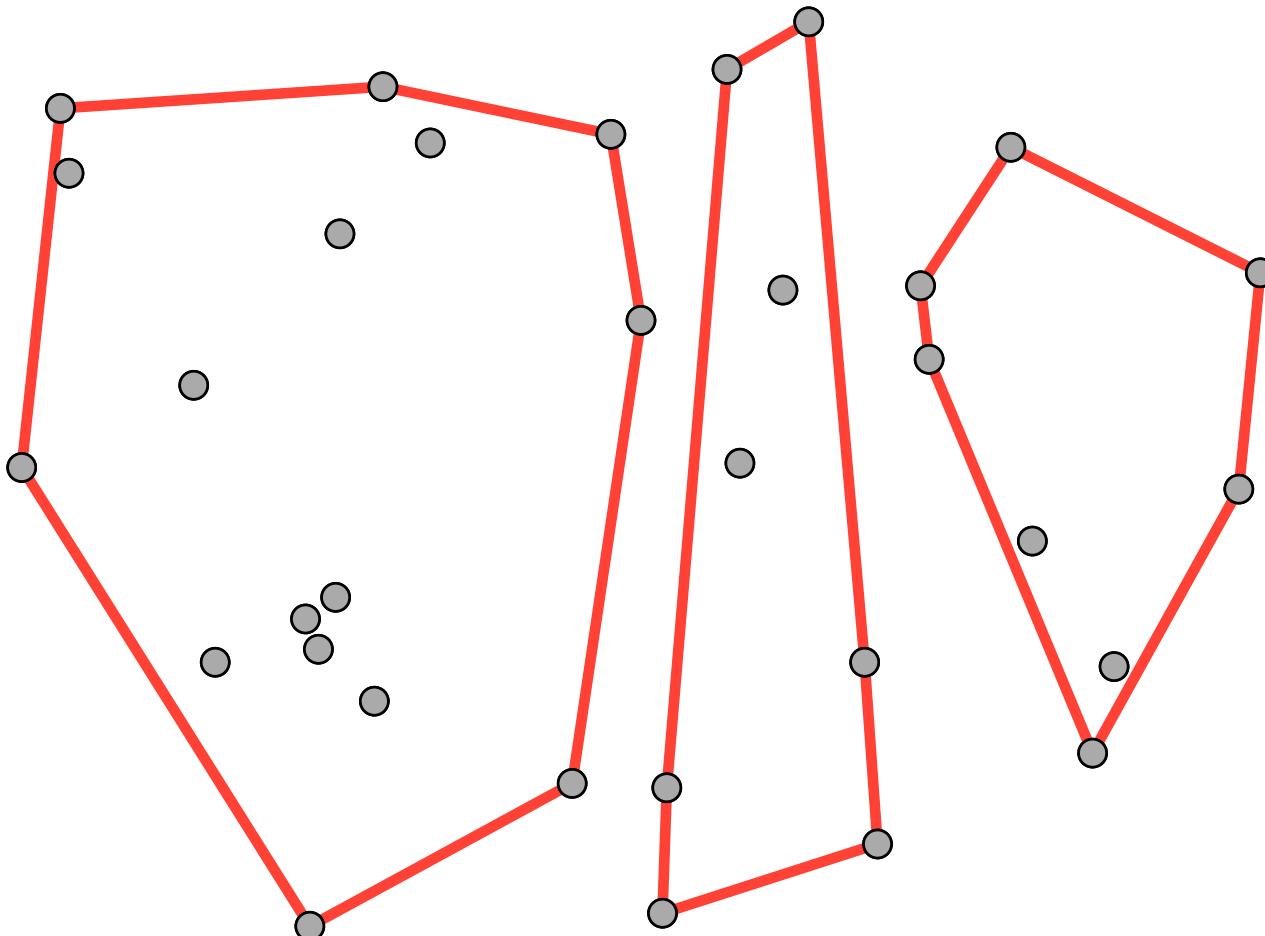
2.6.2 Przykład



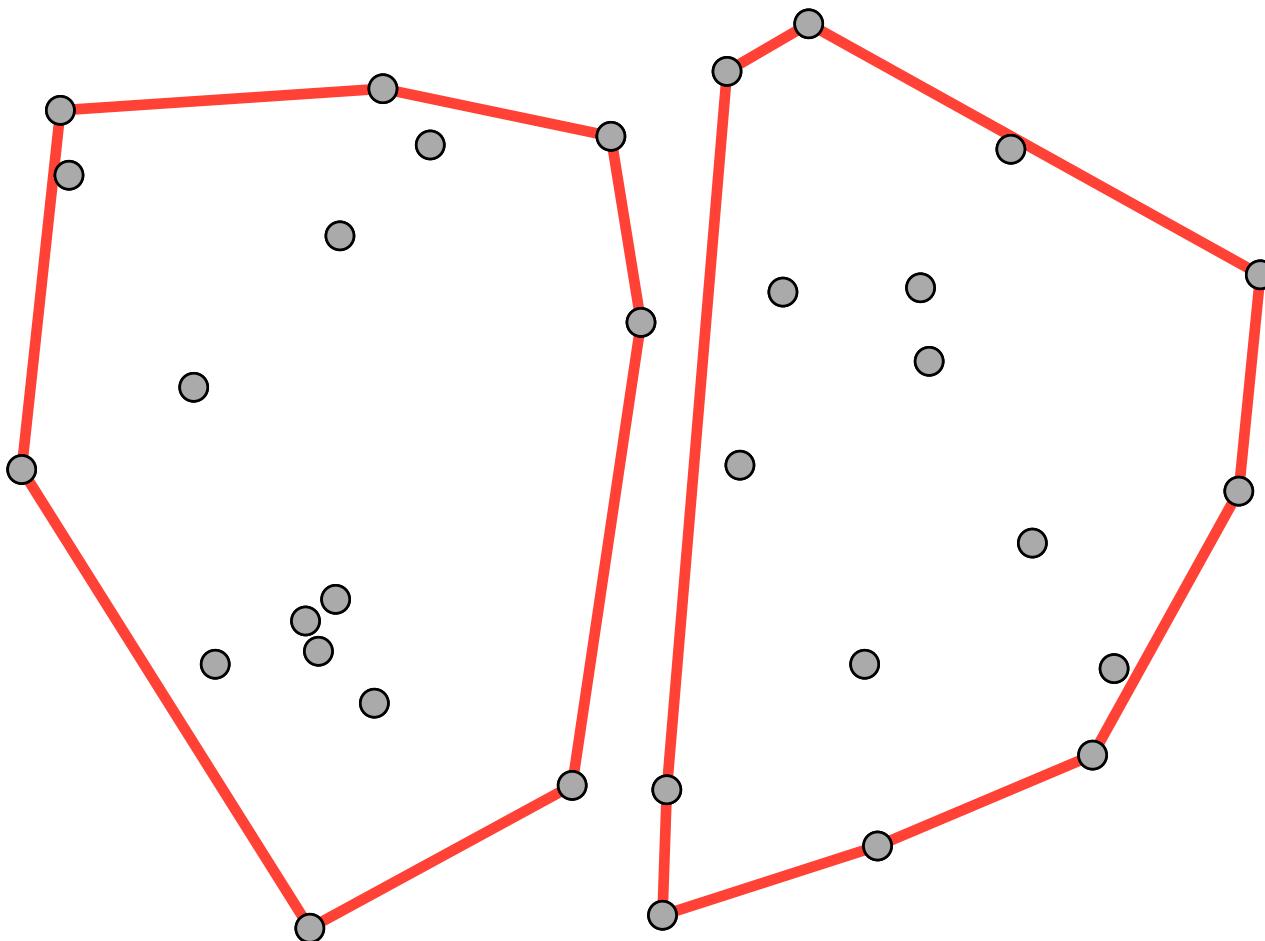
2.6.2 Przykład



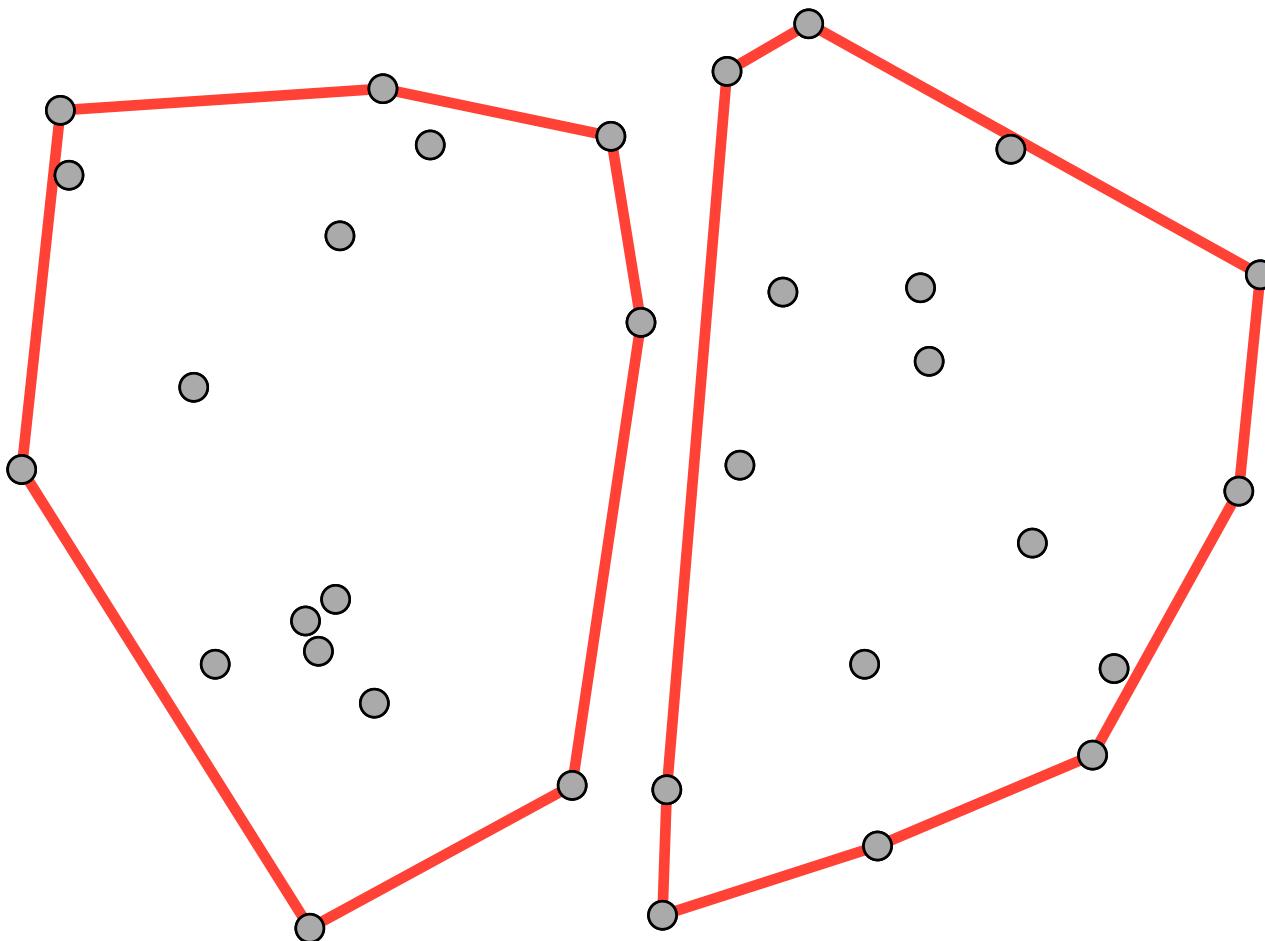
2.6.2 Przykład



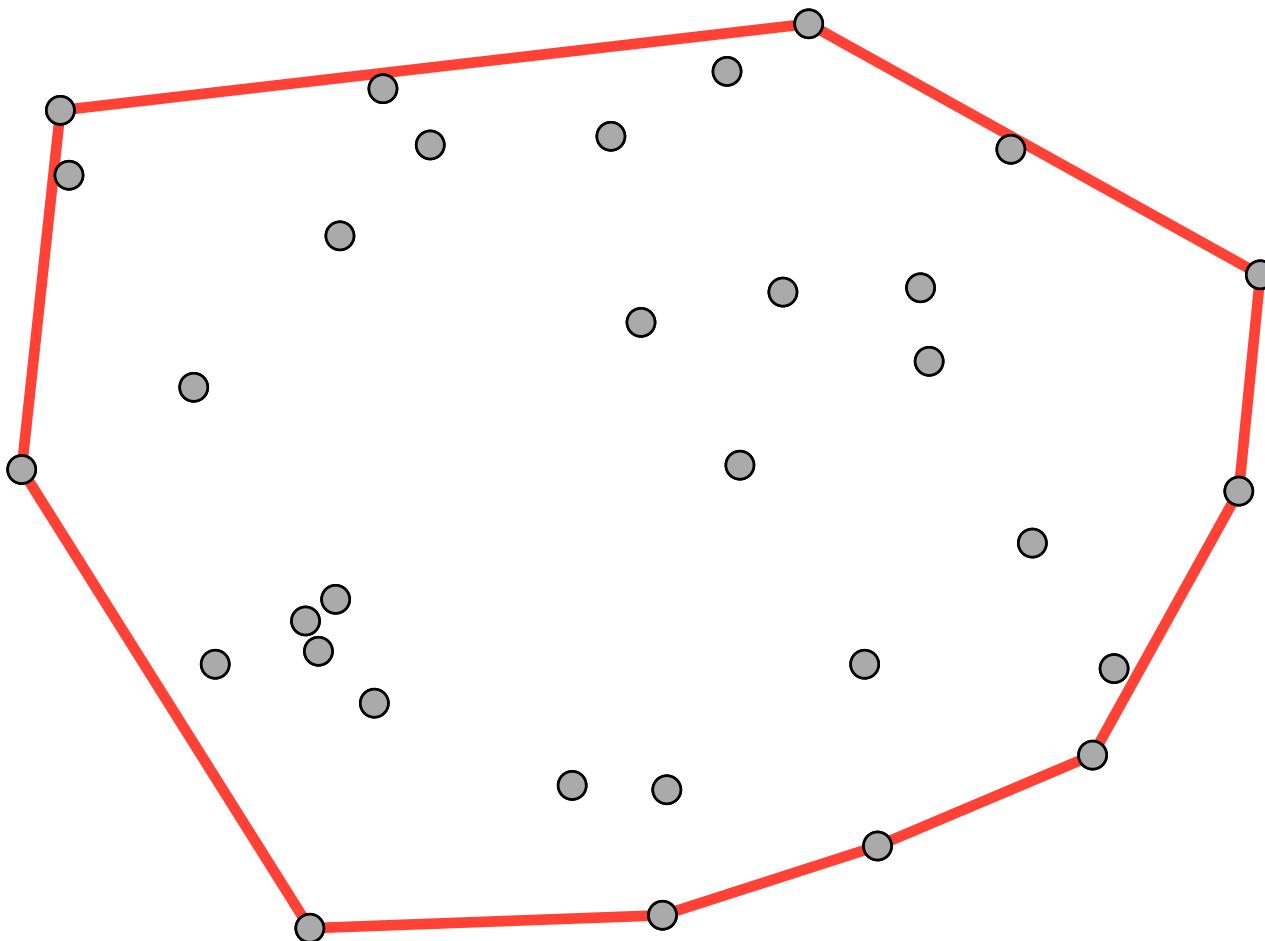
2.6.2 Przykład



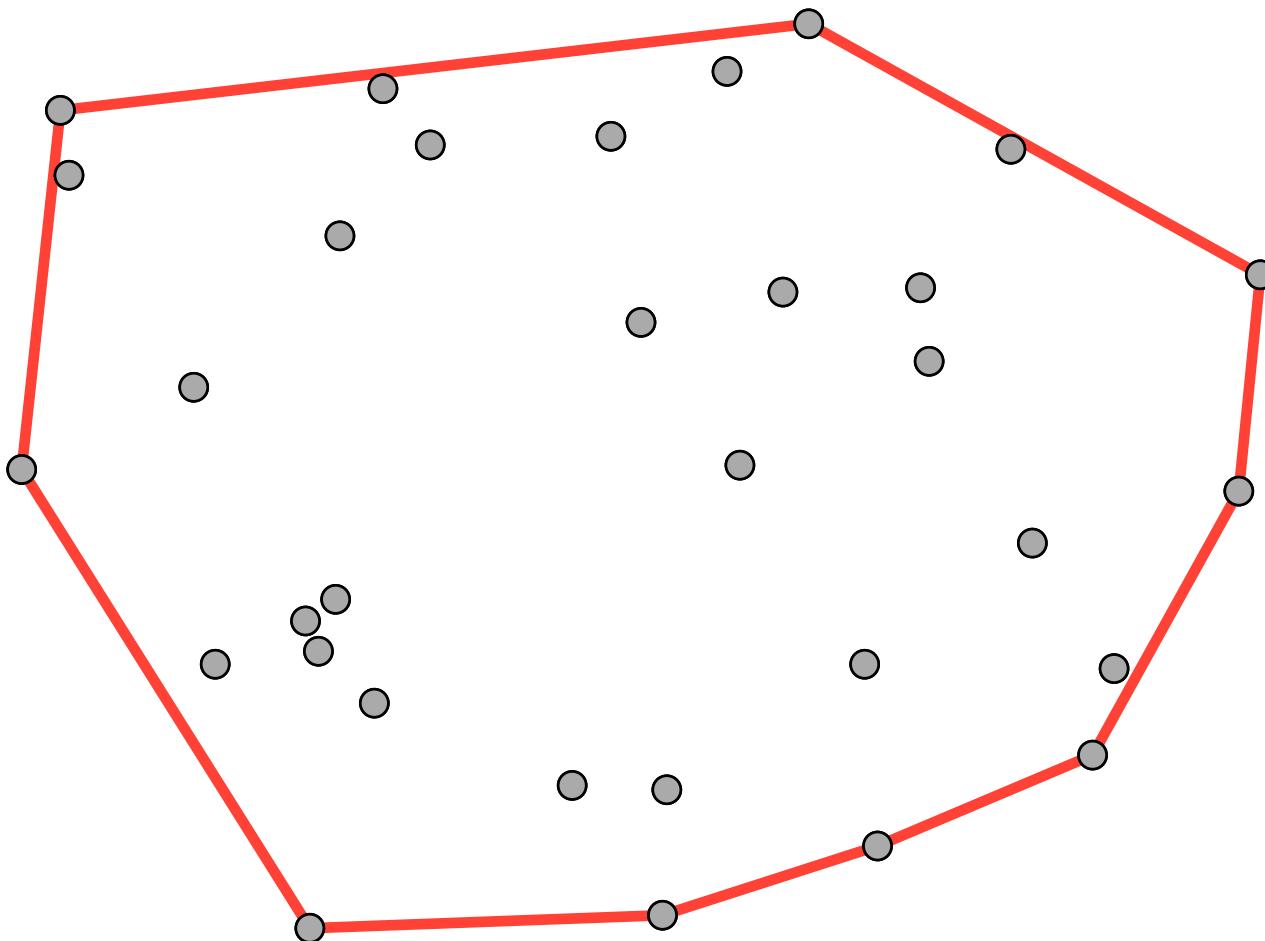
2.6.2 Przykład



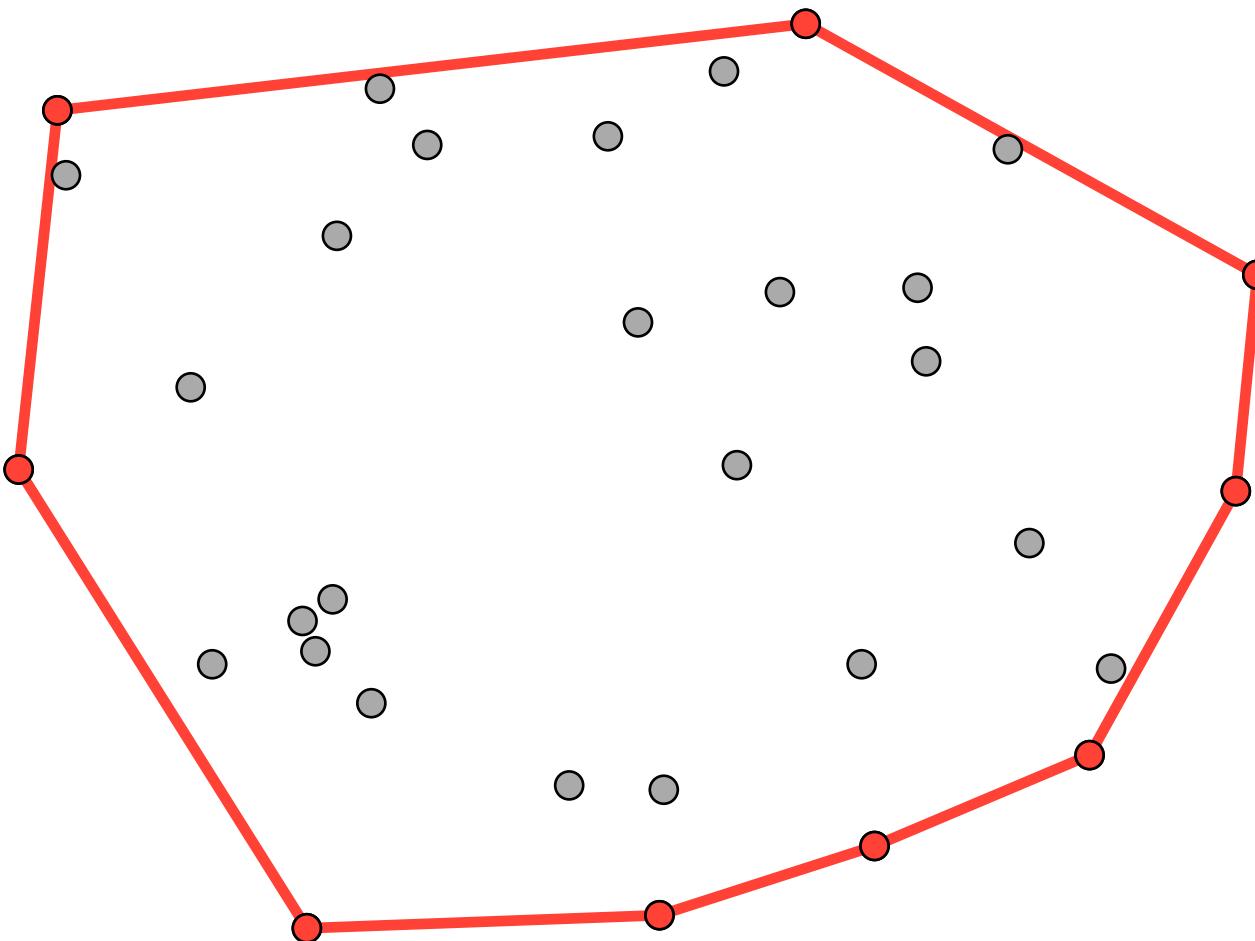
2.6.2 Przykład



2.6.2 Przykład



2.6.2 Przykład

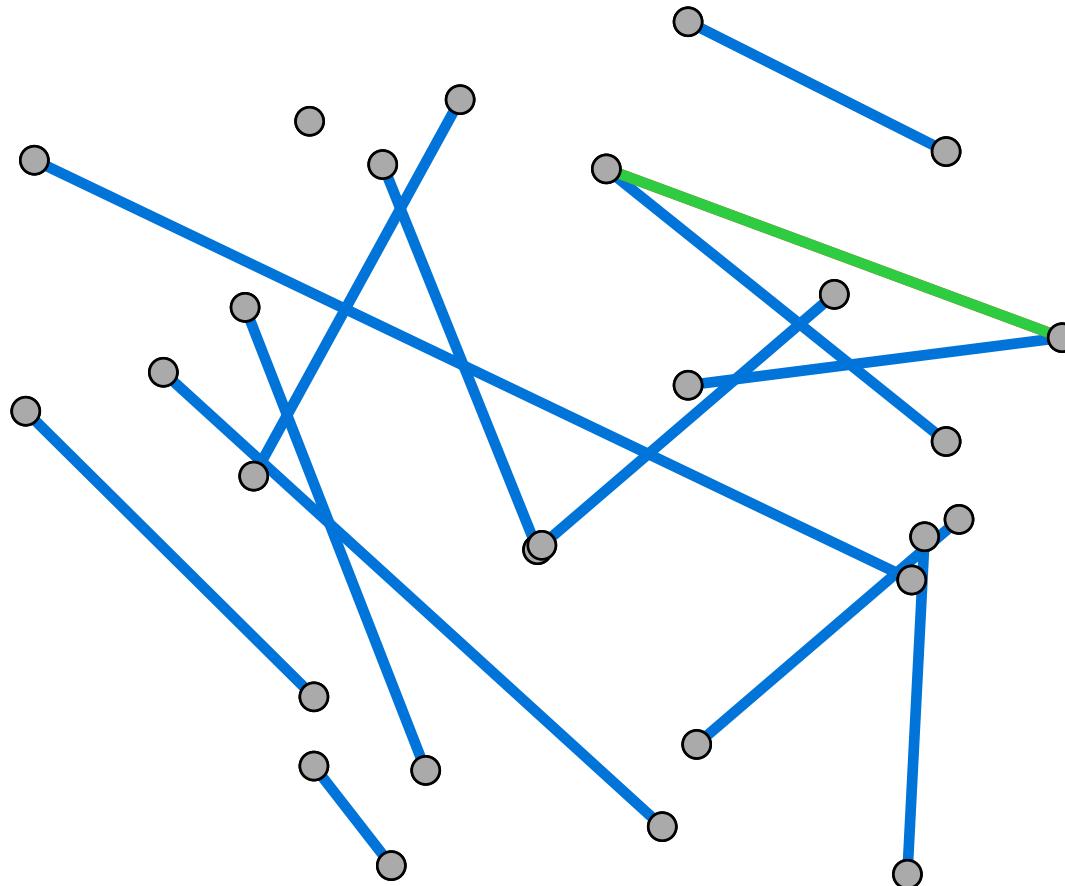


2.7.1 Działanie algorytmu

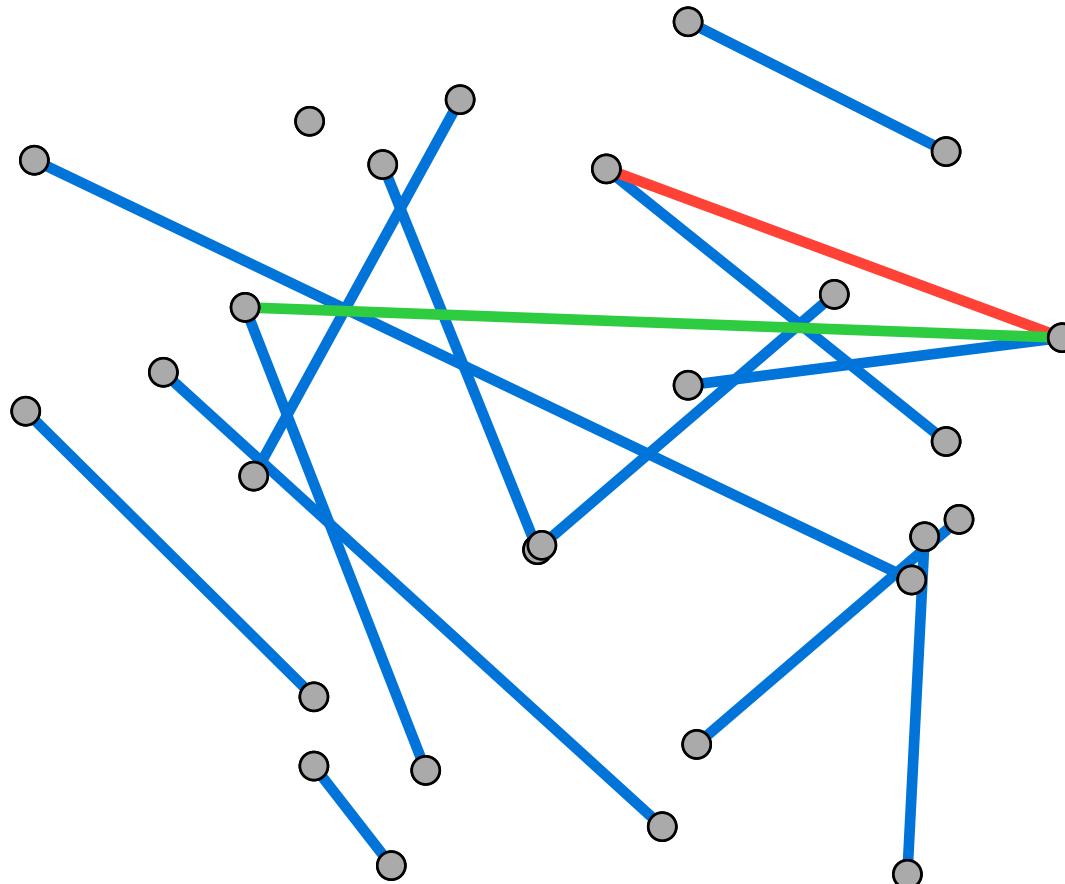
Algorytm łączy algorytmy Grahama i Jarvisa, zakładamy, że rozmiar otoczki będzie równy m , dzielimy zbiór na grupy o rozmiarze m i wyznaczamy ich otoczki algorytmem Grahama. Następnie znajdujemy skrajny punkt będący początkiem otoczki i szukamy wśród tych otoczek taki punkt, który maksymalizuje kąt. Robimy tak maksymalnie m razy. Ponieważ próba może się nie powieść, wywołujemy algorytm ustalając $m := \min(2^{2^t}, n)$, gdzie początkowo $t = 0$, do otrzymania prawidłowej otoczki.

Złożoność czasowa algorytmu to $O(n \log h)$

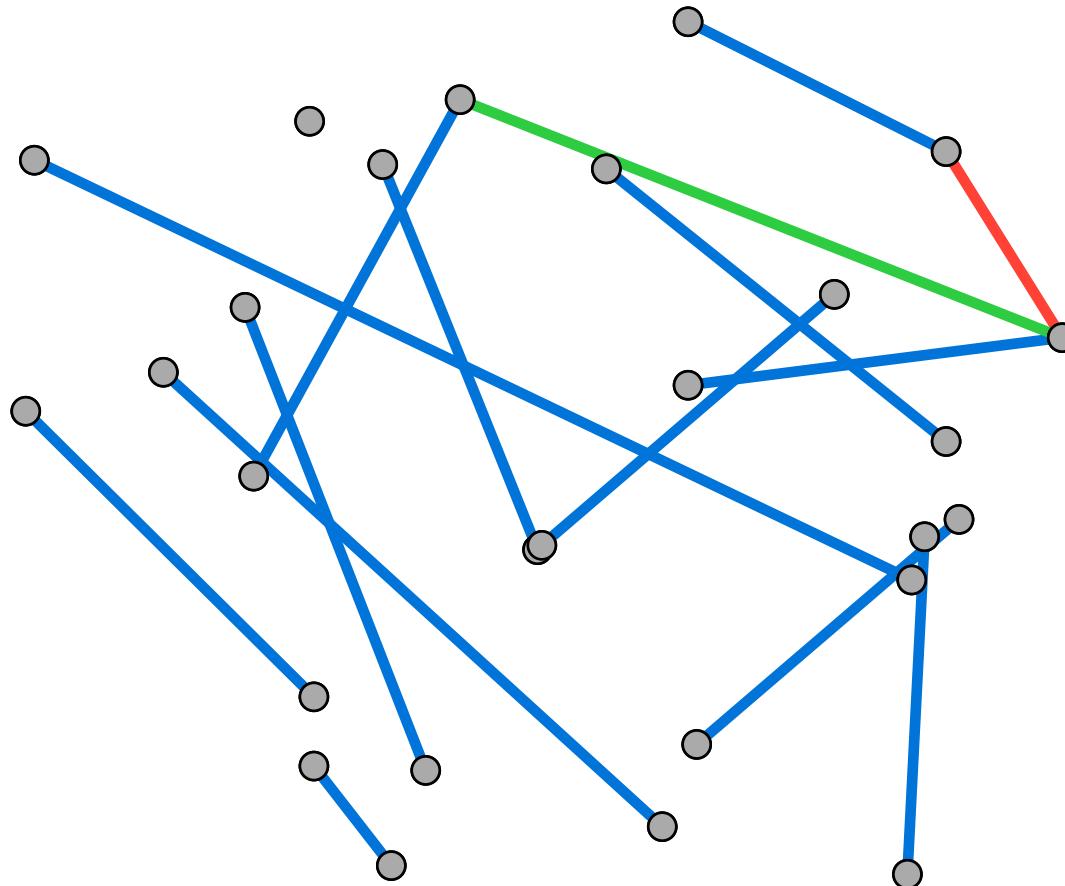
2.7.2 Przykład



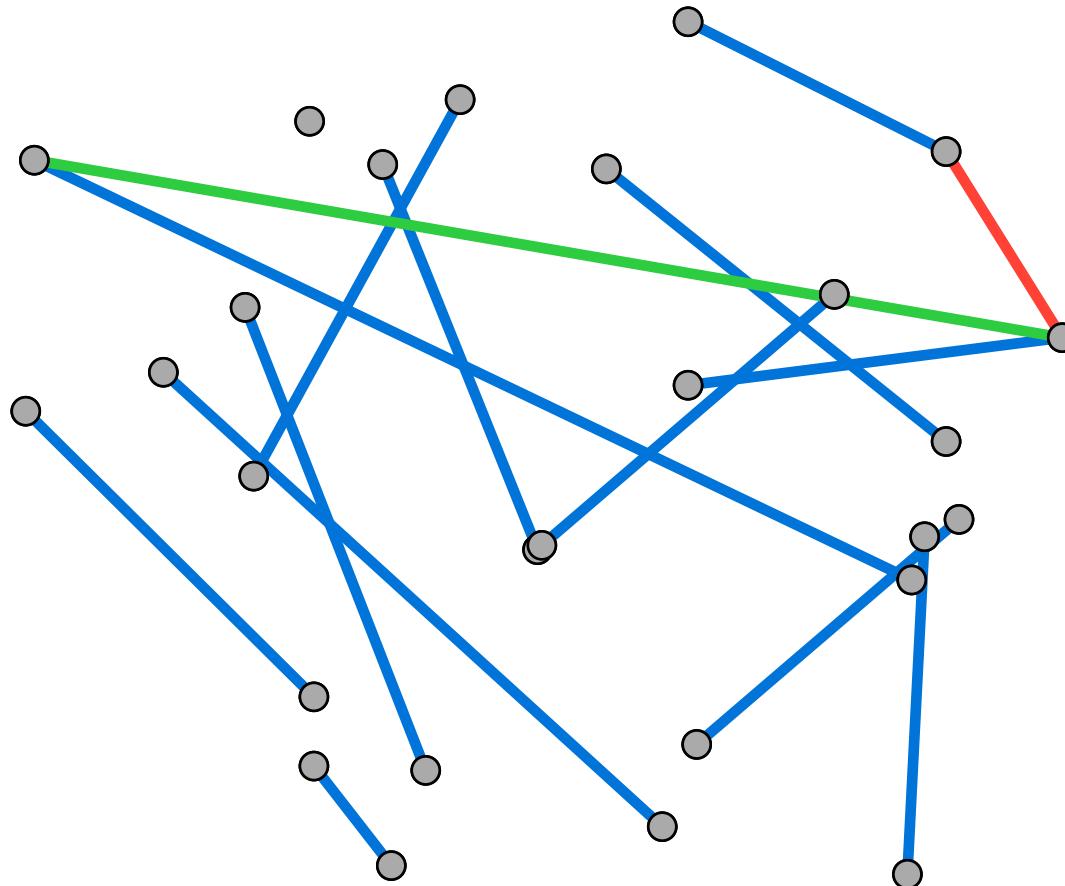
2.7.2 Przykład



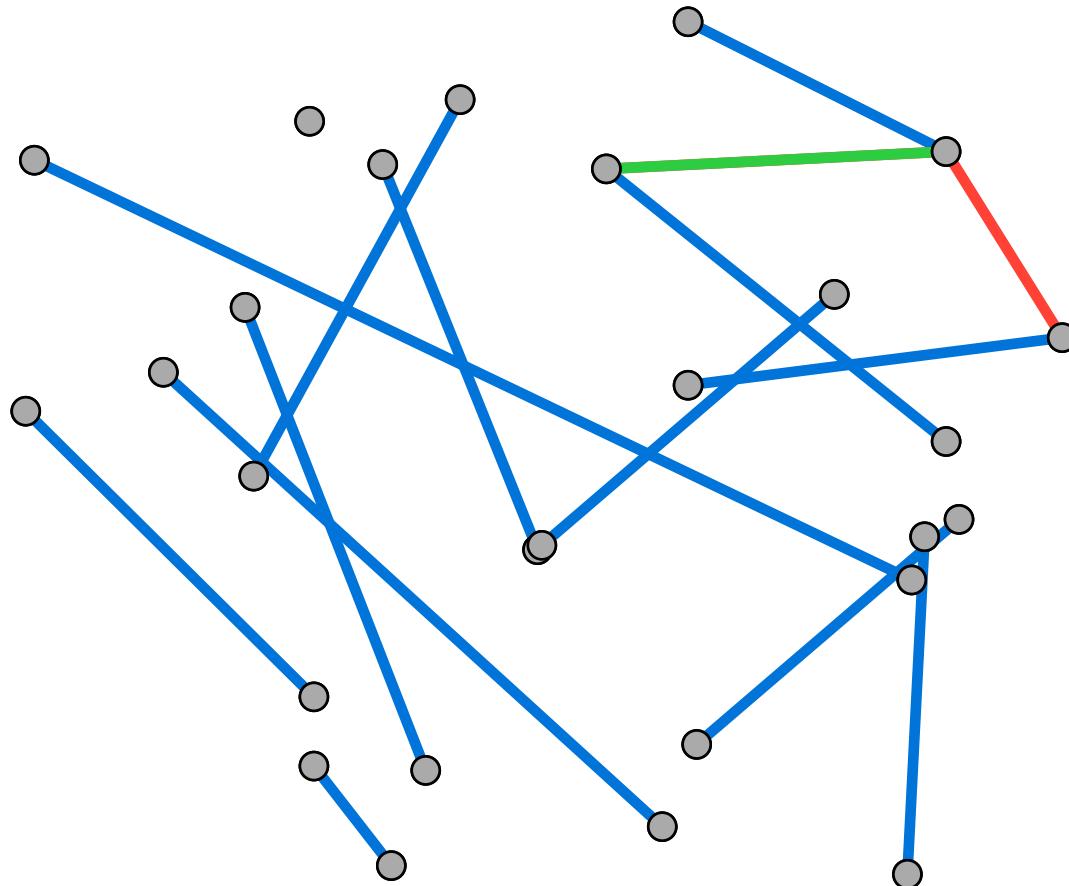
2.7.2 Przykład



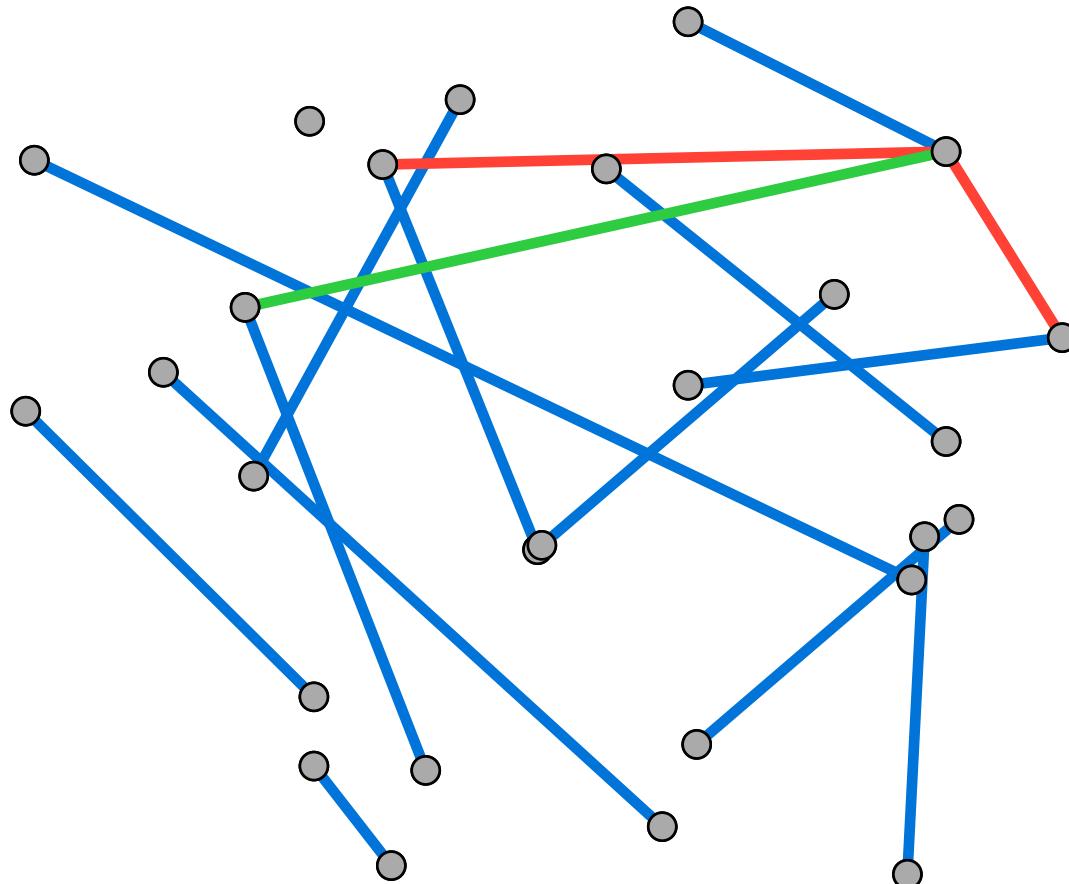
2.7.2 Przykład



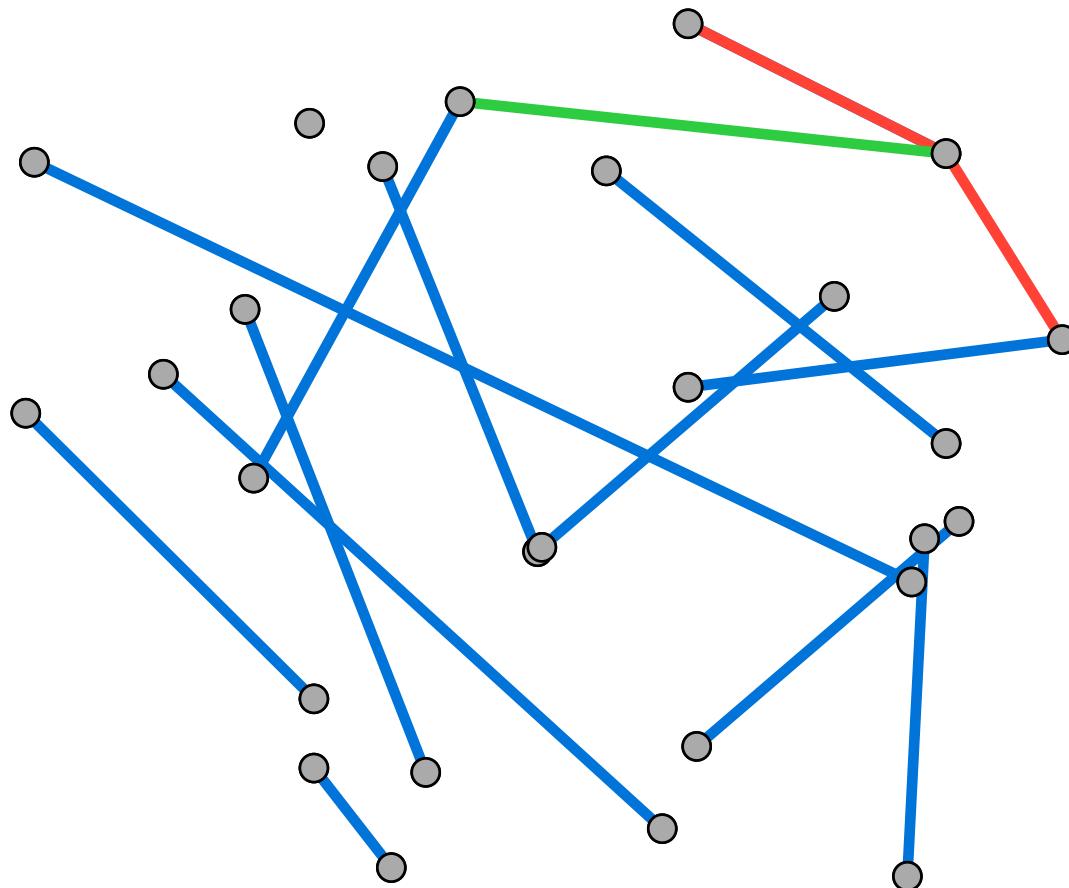
2.7.2 Przykład



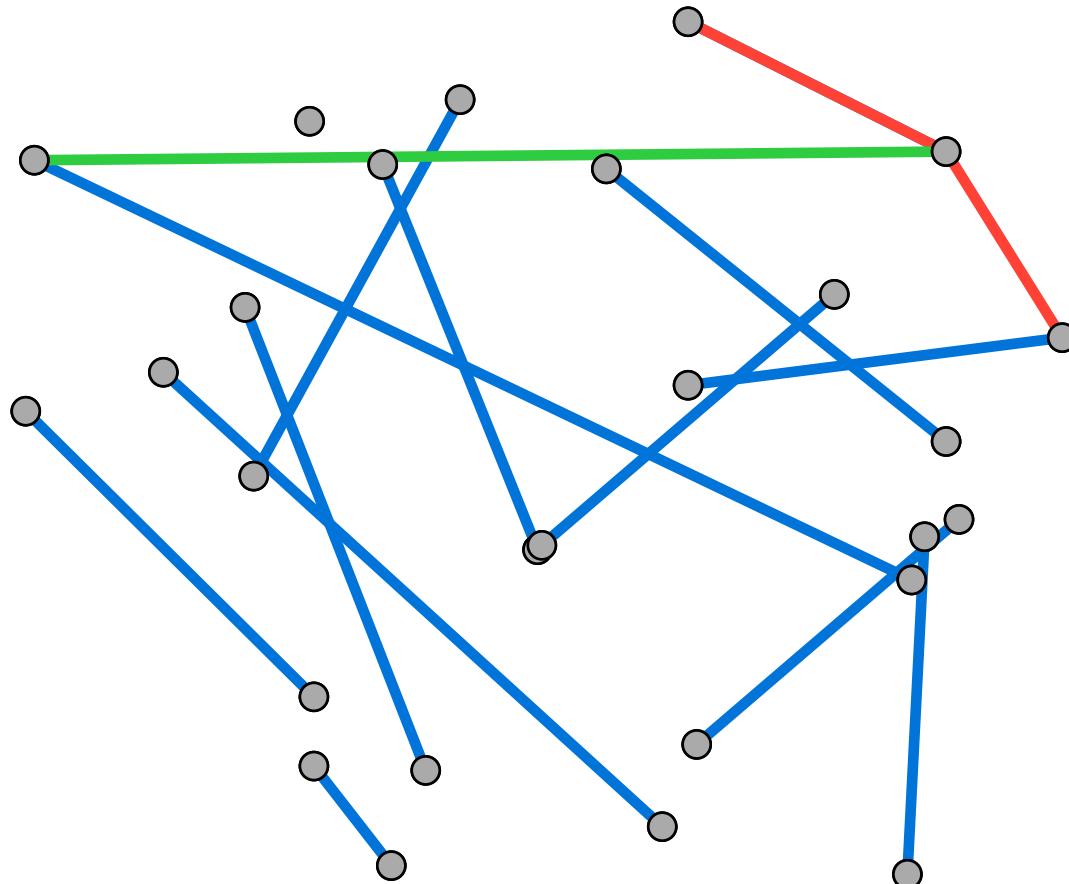
2.7.2 Przykład



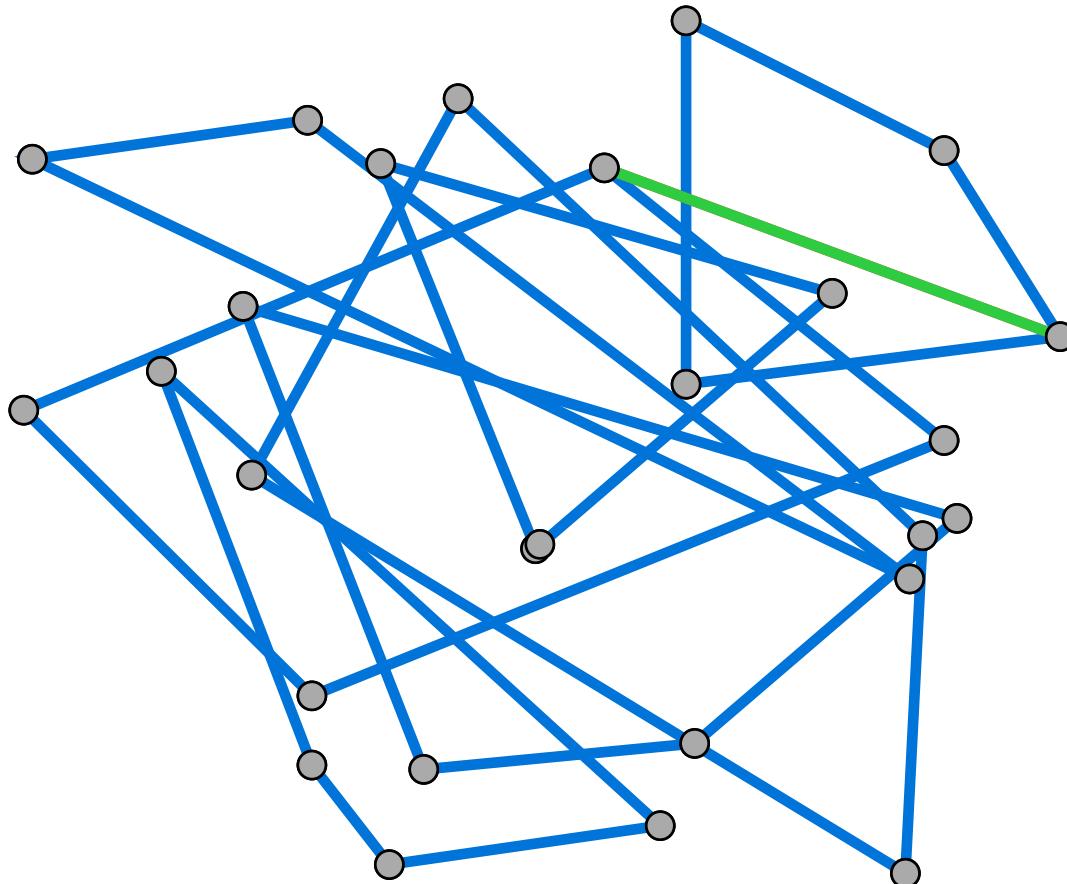
2.7.2 Przykład



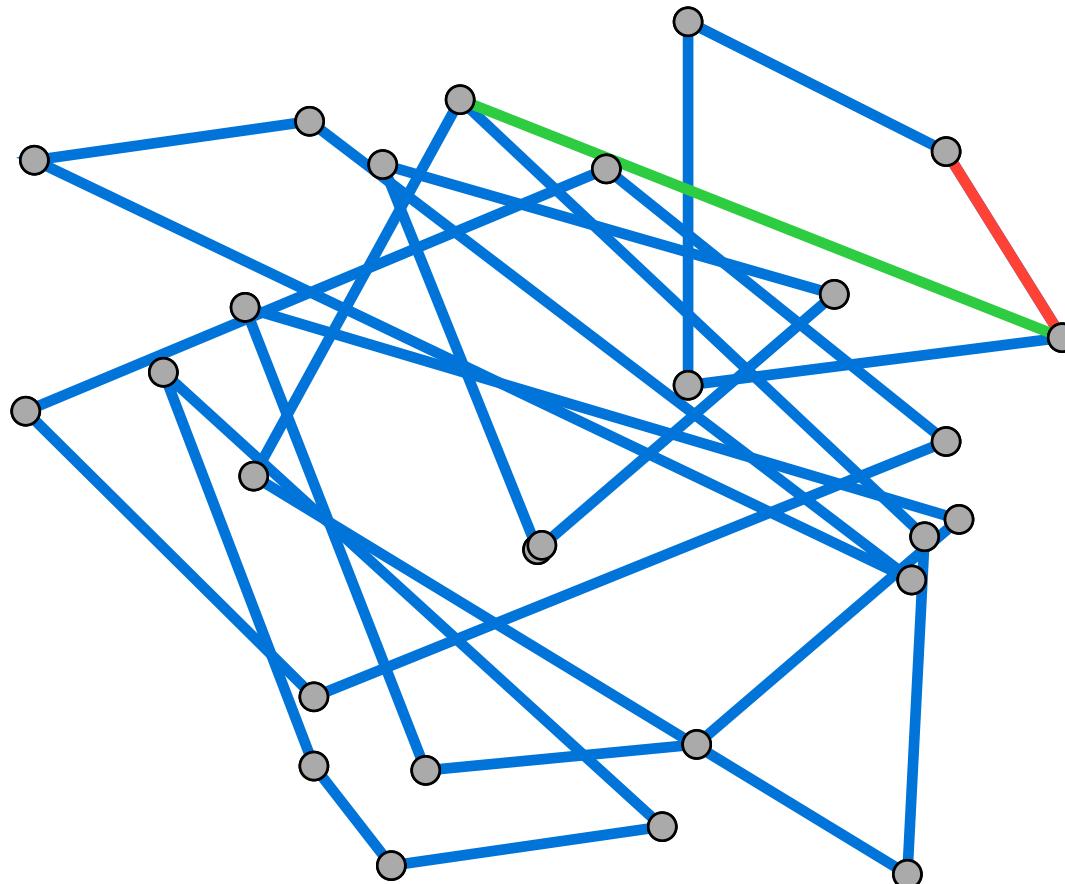
2.7.2 Przykład



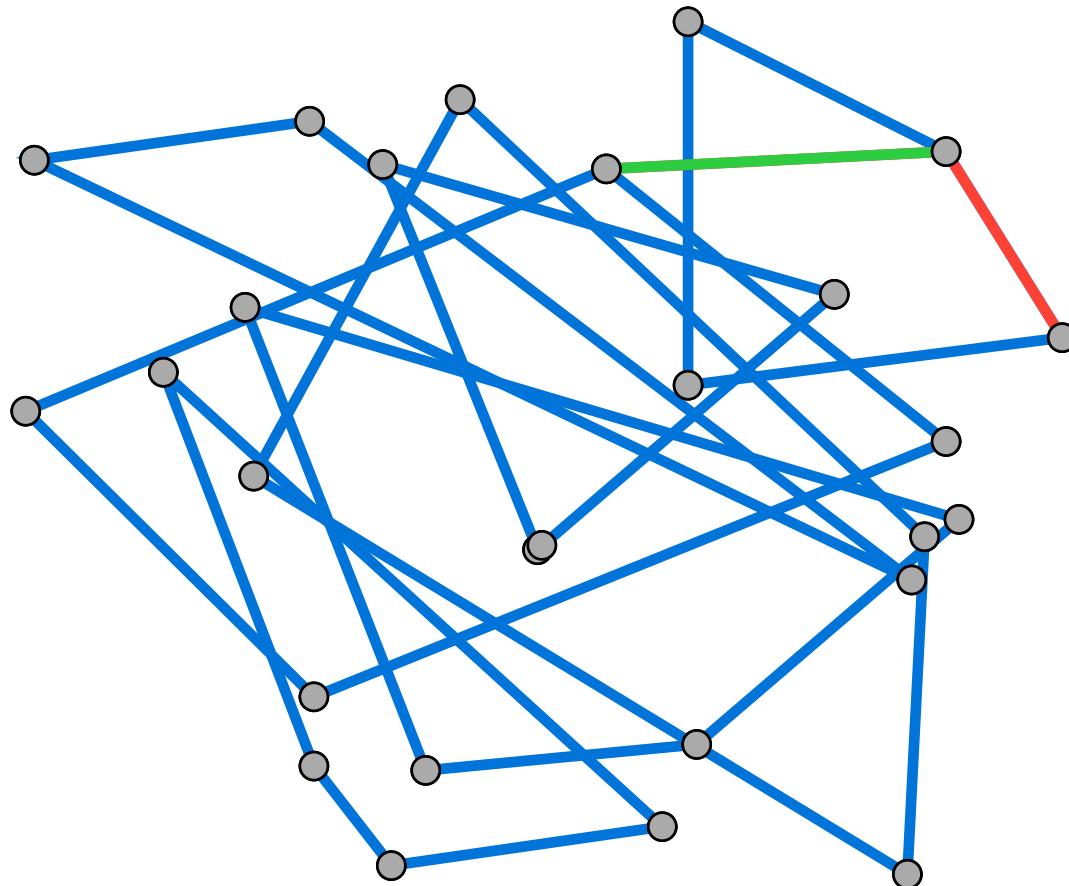
2.7.2 Przykład



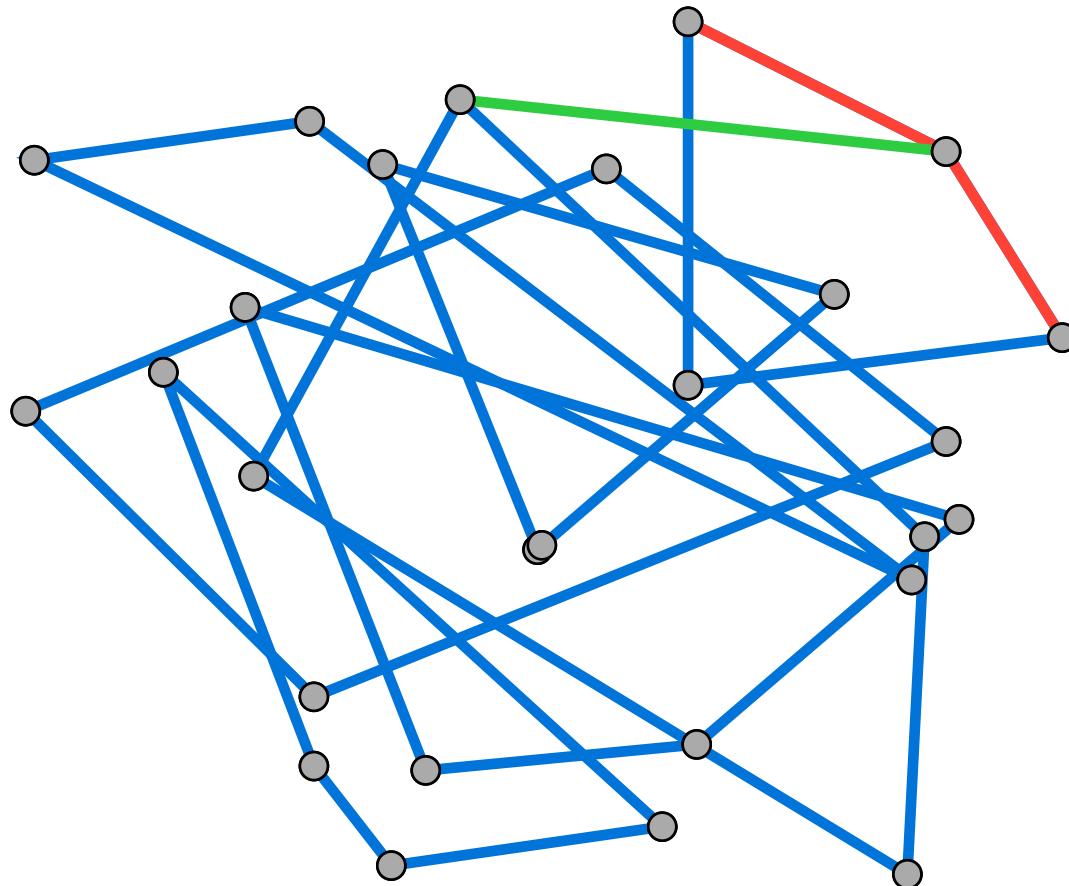
2.7.2 Przykład



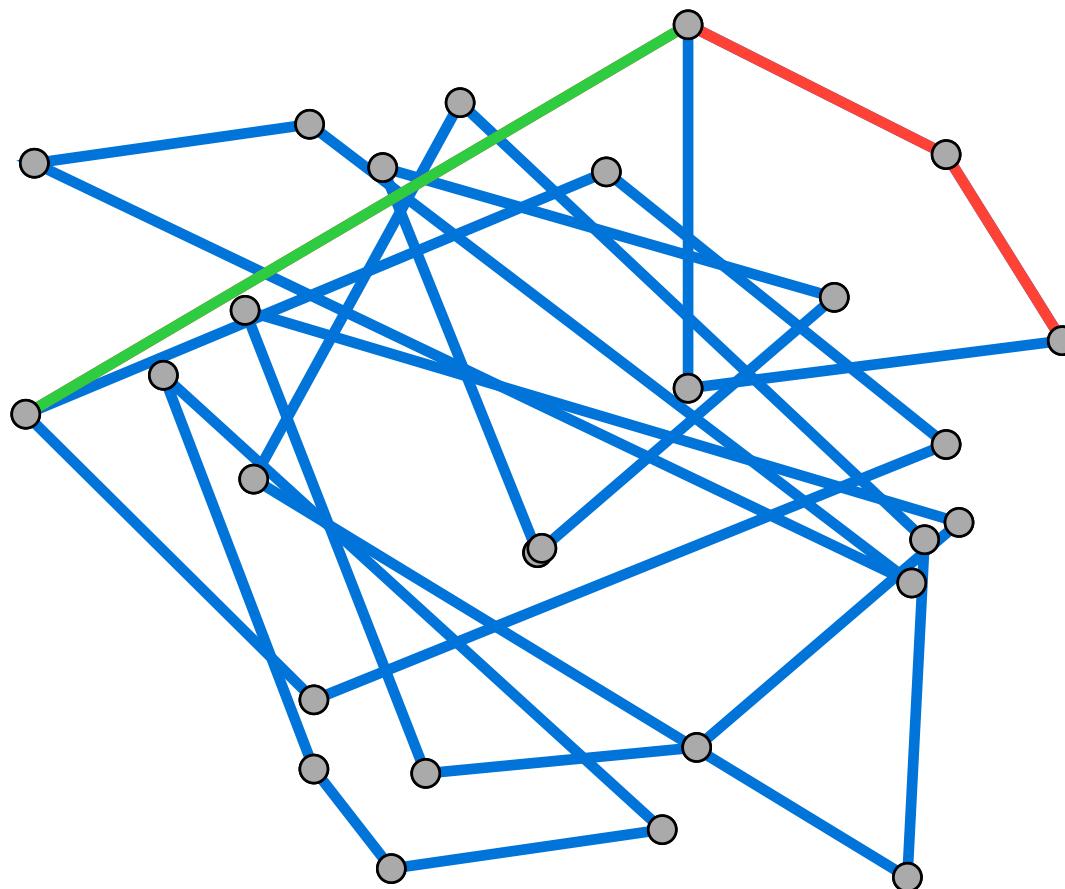
2.7.2 Przykład



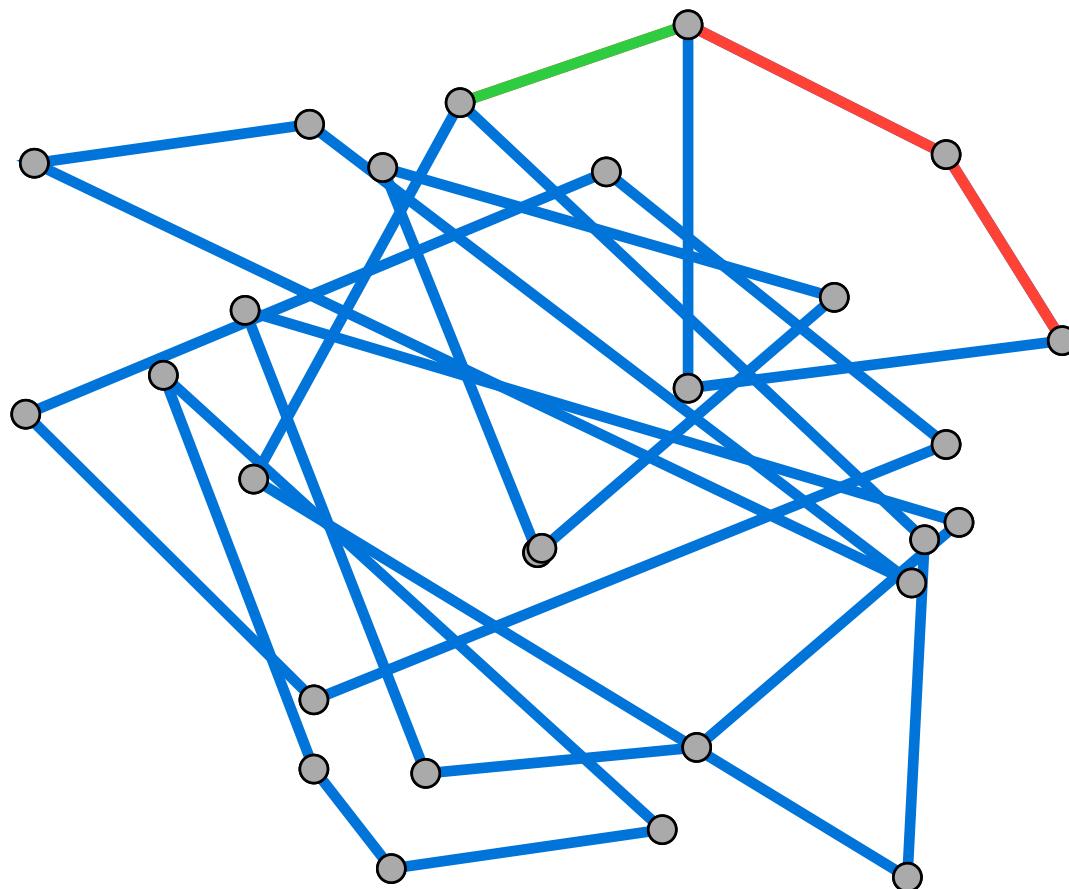
2.7.2 Przykład



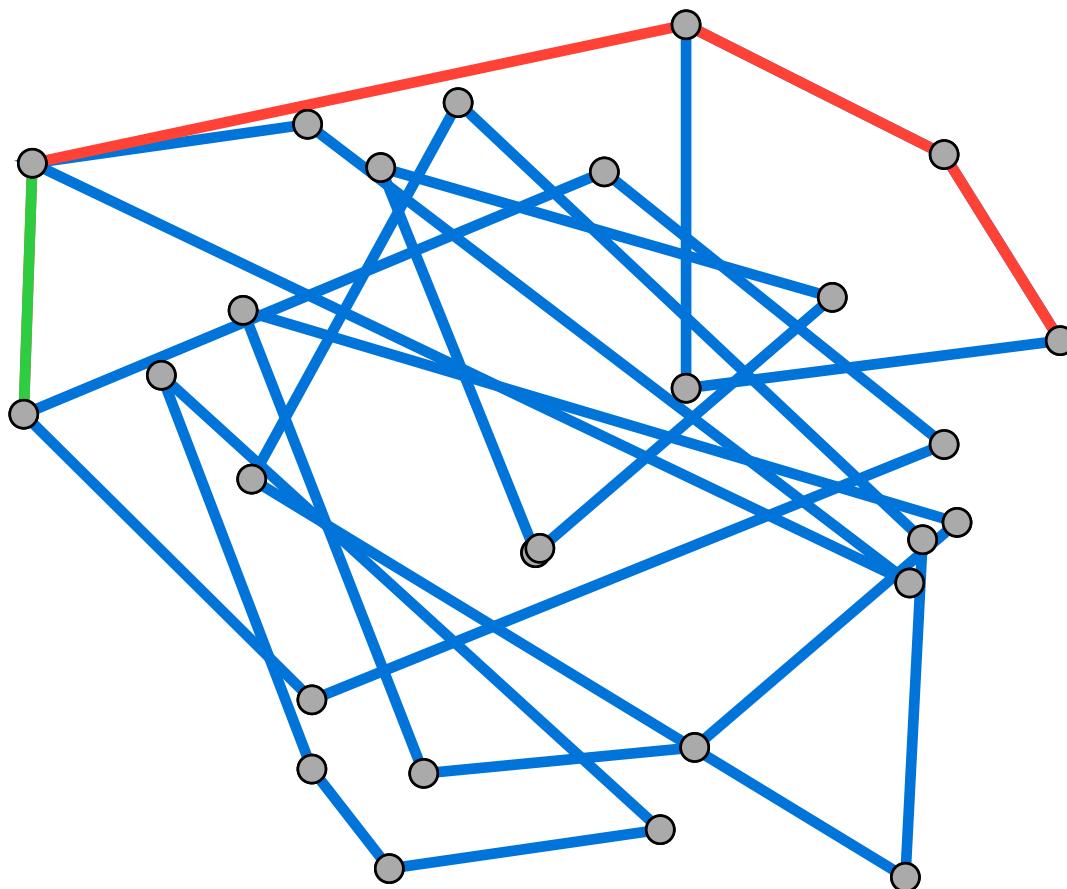
2.7.2 Przykład



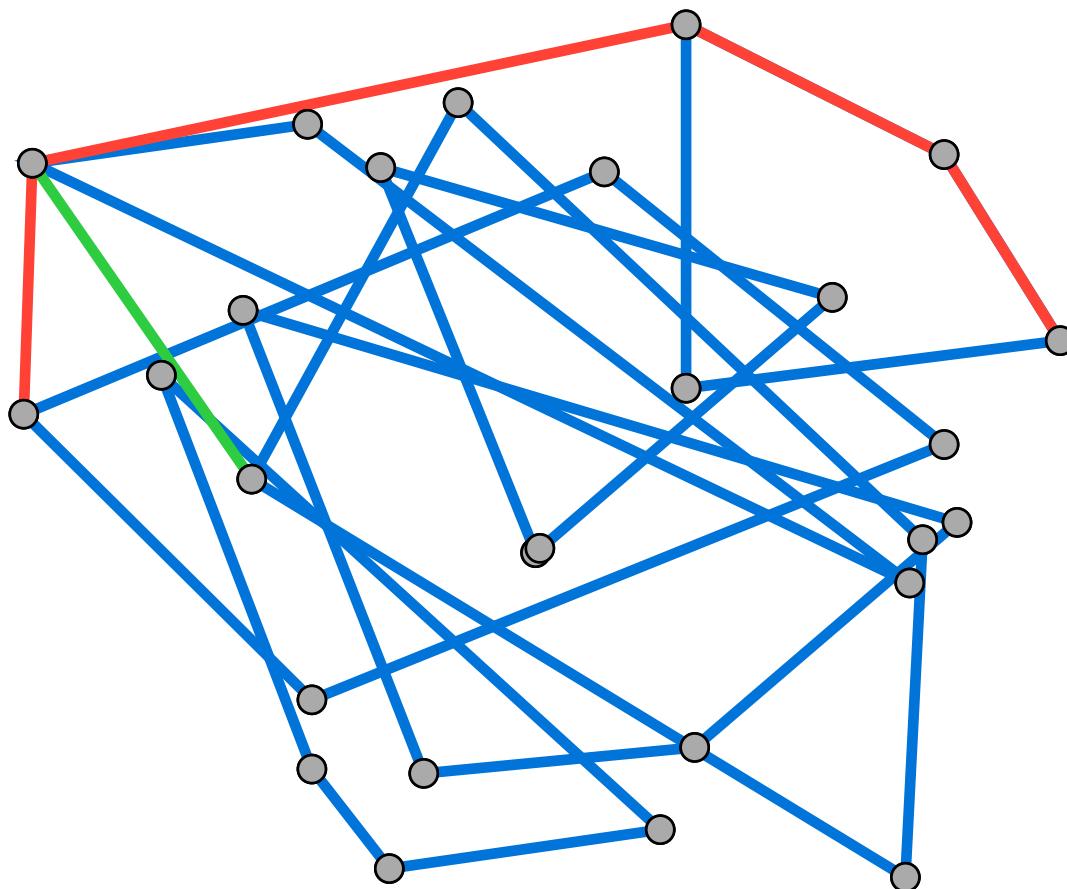
2.7.2 Przykład



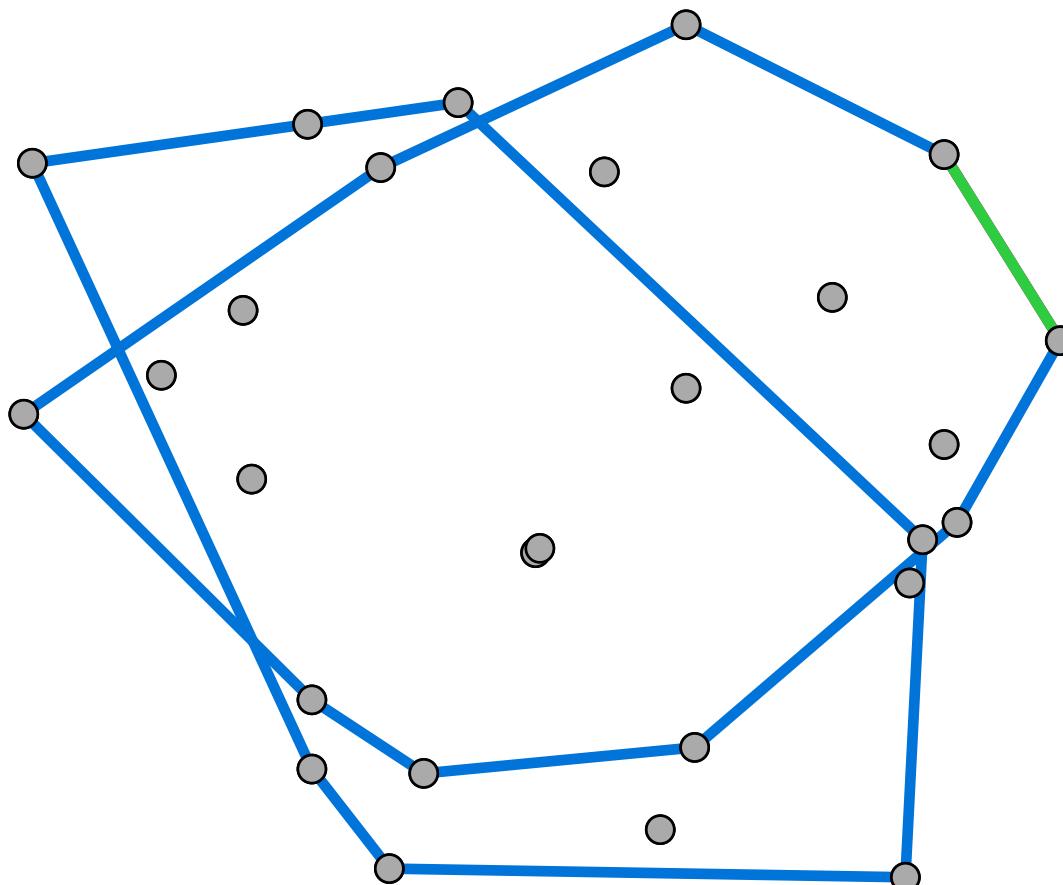
2.7.2 Przykład



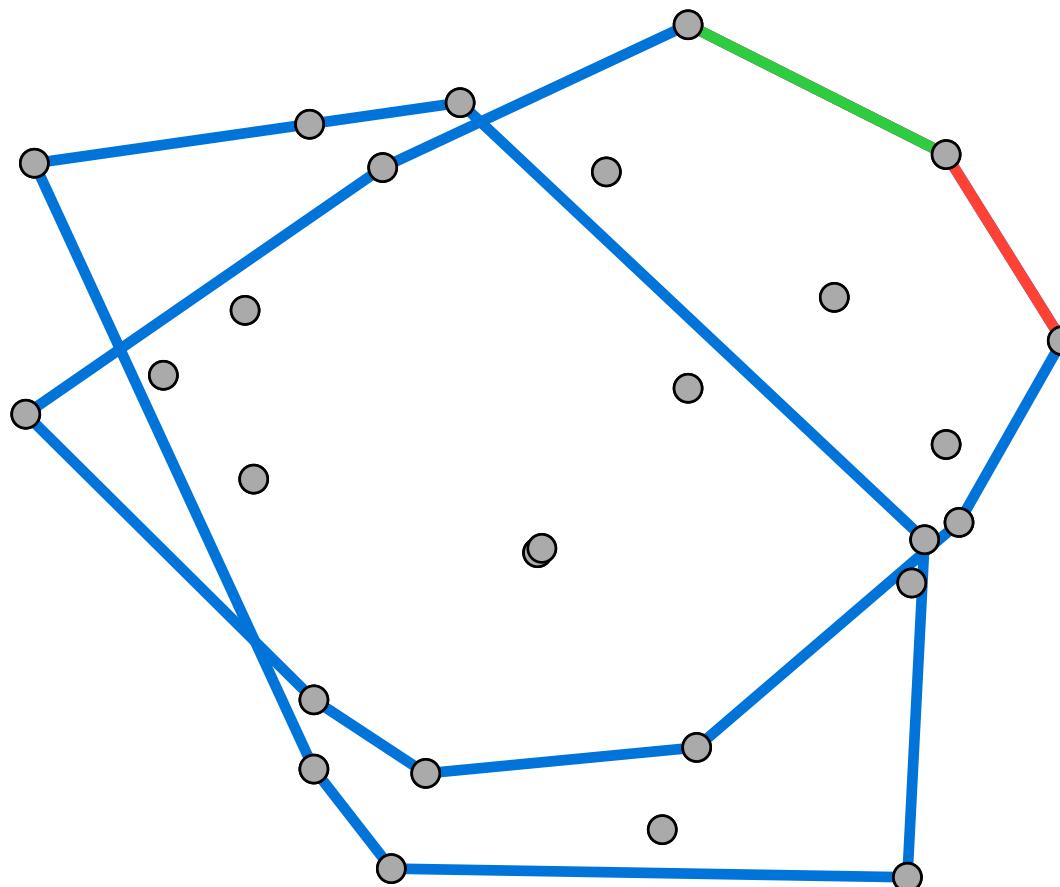
2.7.2 Przykład



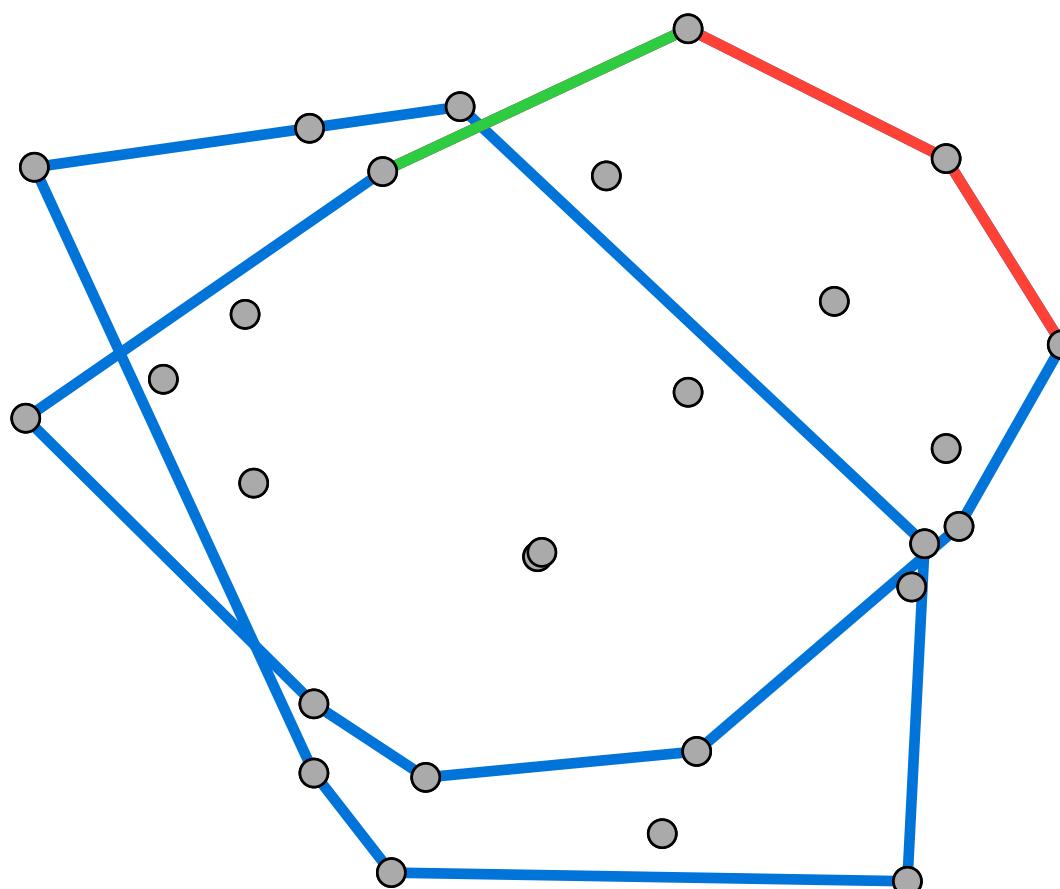
2.7.2 Przykład



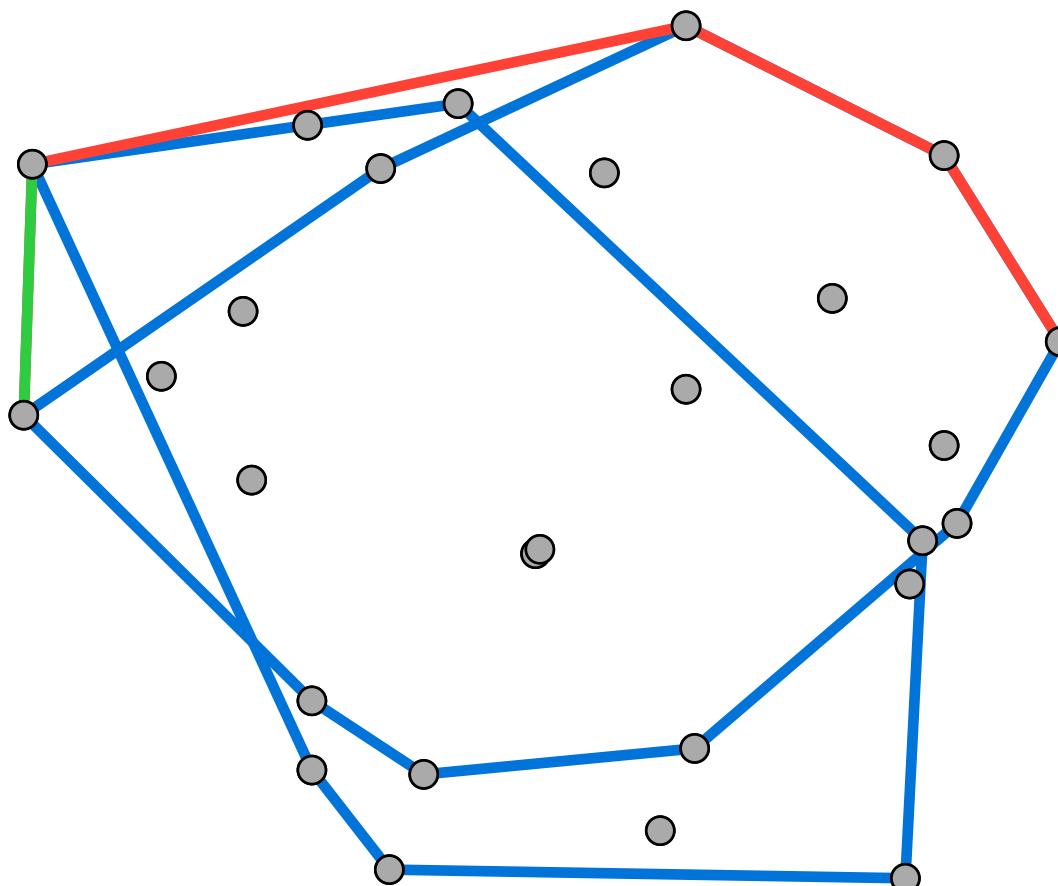
2.7.2 Przykład



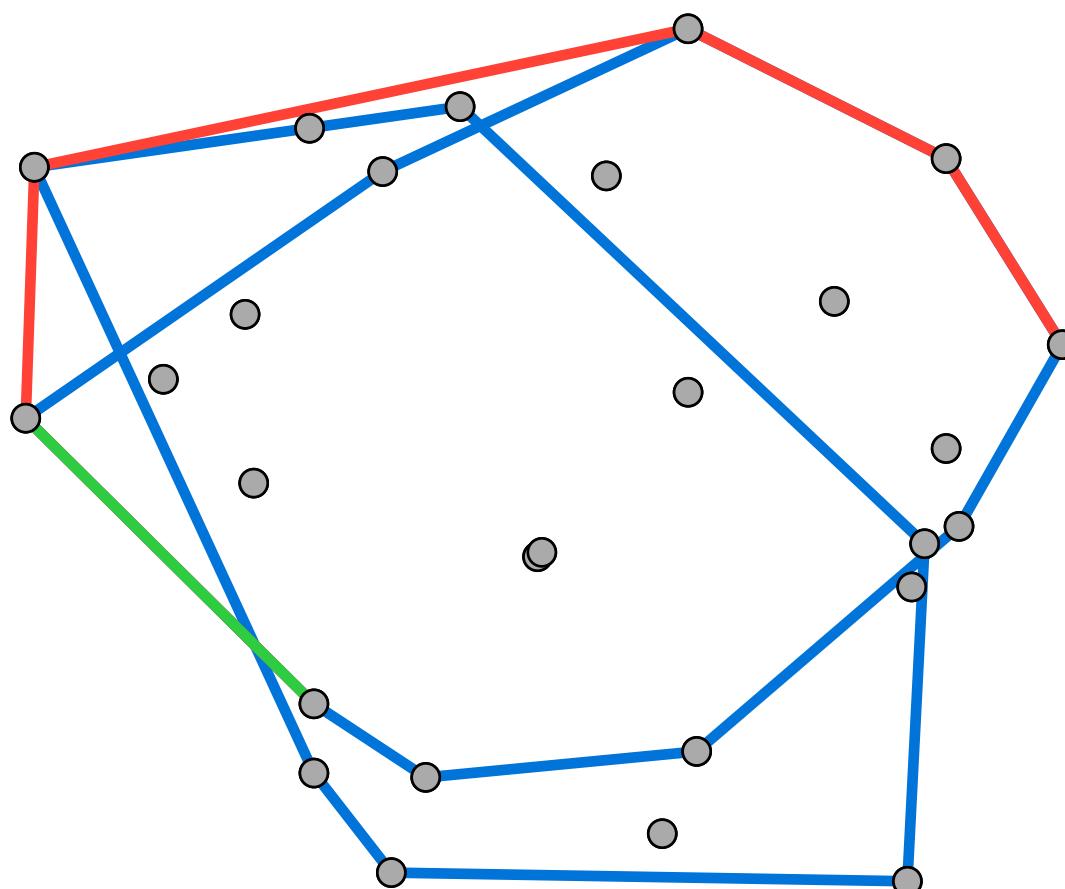
2.7.2 Przykład



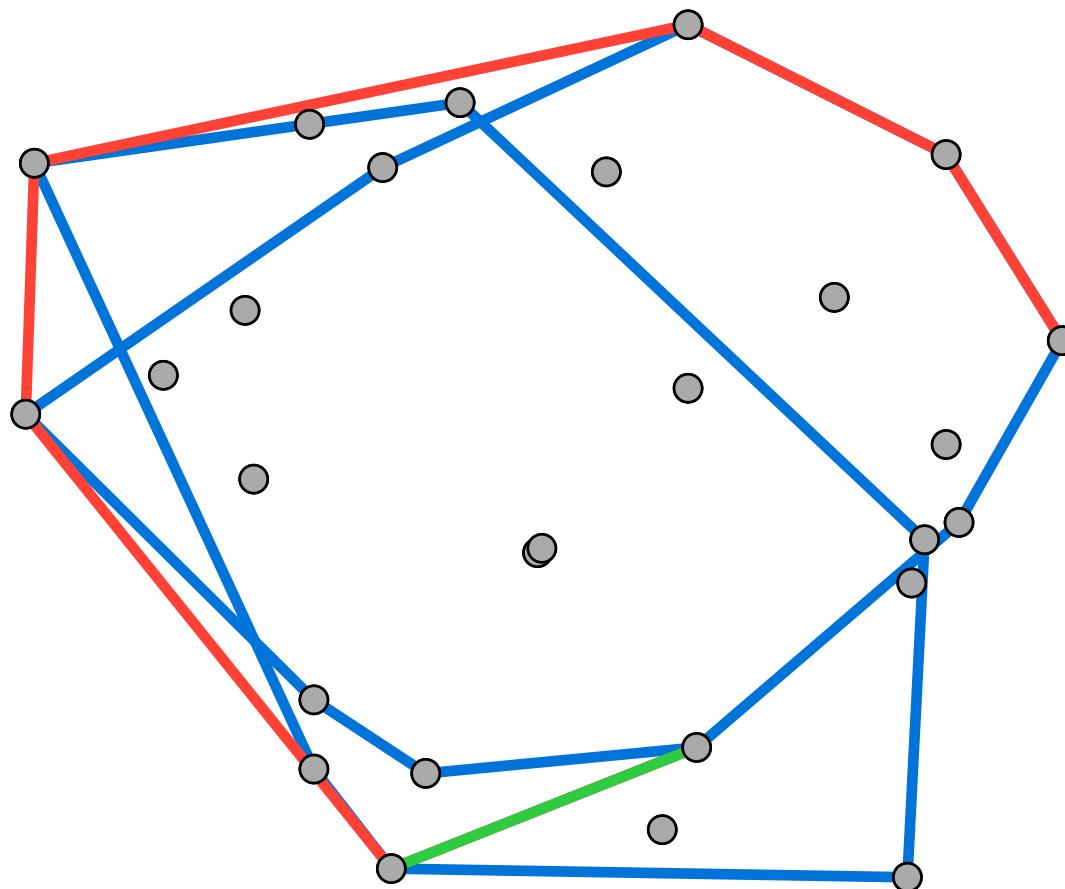
2.7.2 Przykład



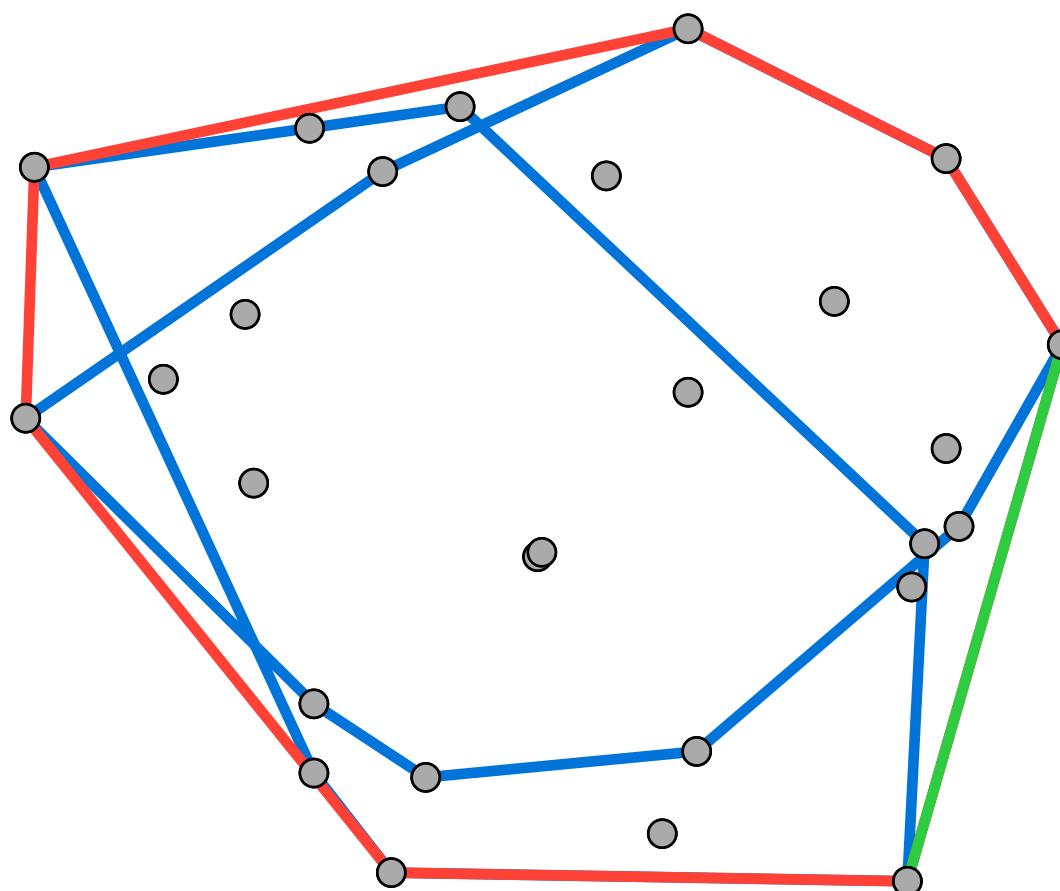
2.7.2 Przykład



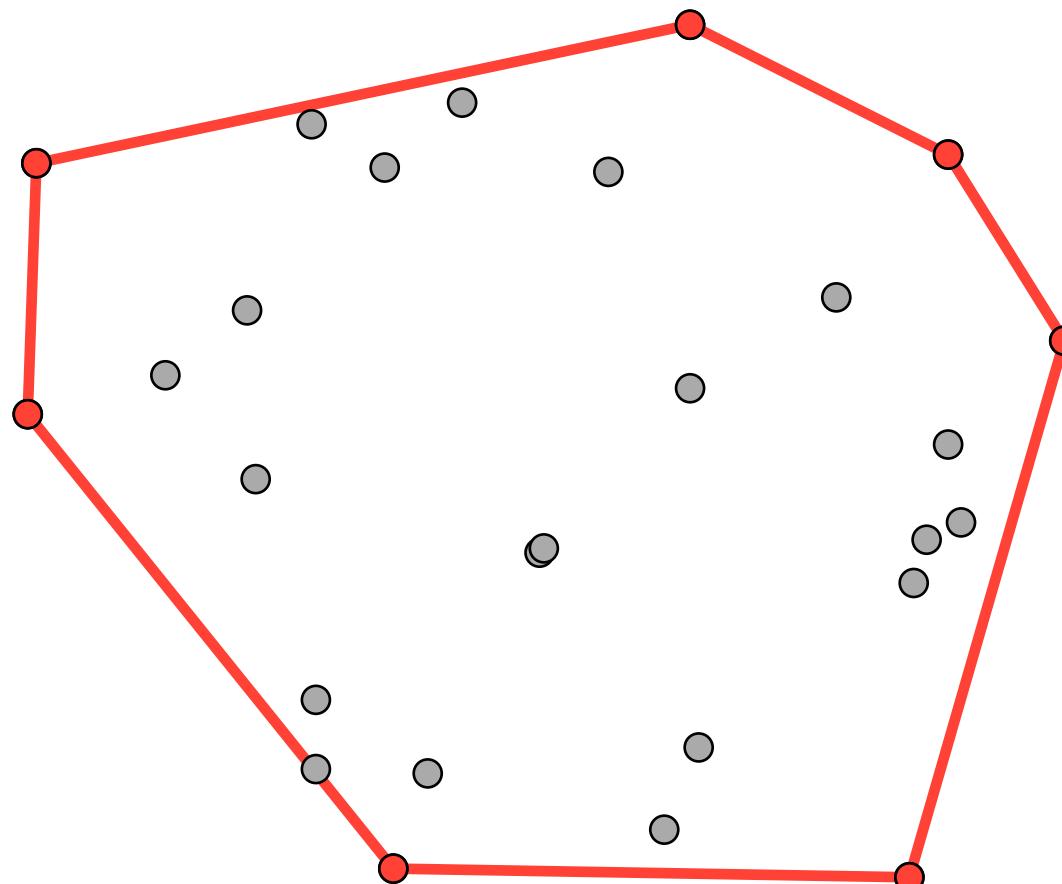
2.7.2 Przykład



2.7.2 Przykład



2.7.2 Przykład



3. Zbiory testowe

3.1 Wybrane zbiory testowe

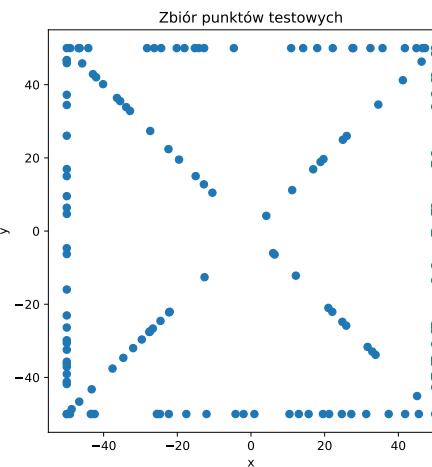
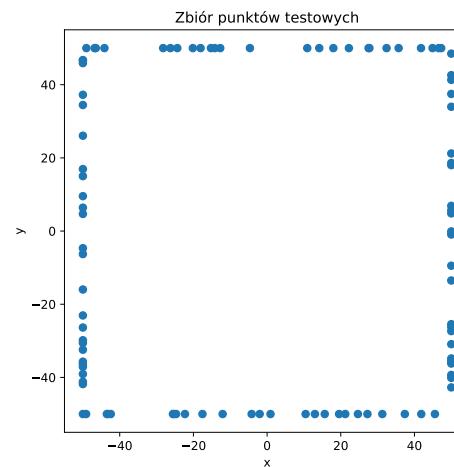
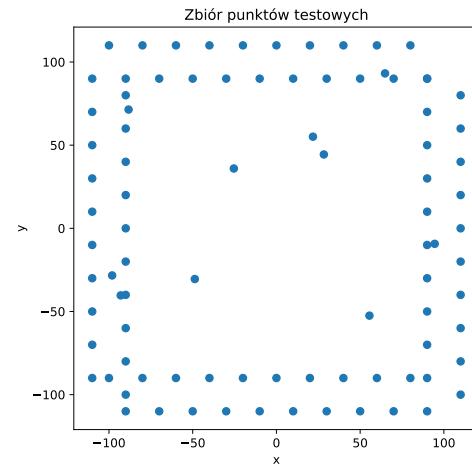
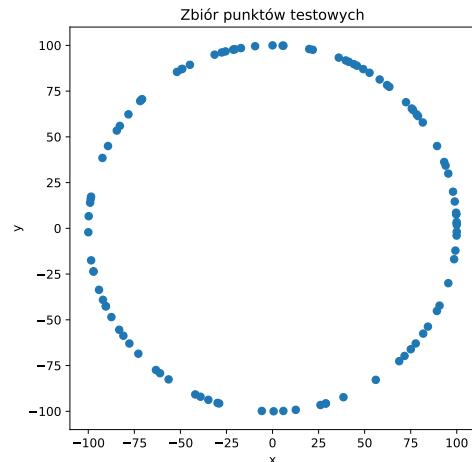
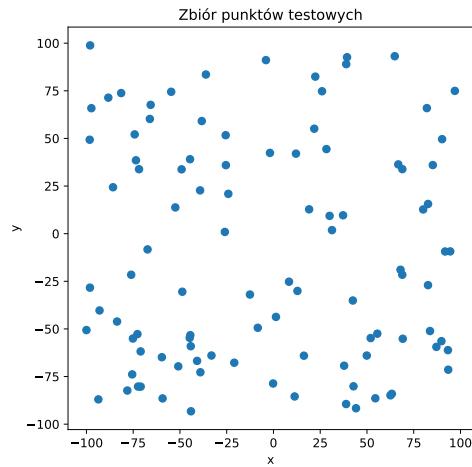
3. Zbiory testowe

Aby sprawdzić poprawność oraz wydajność zaimplementowanych algorytmów, użyliśmy następujących zbiorów testowych:

- **Zbiór 1** - punkty losowe z zakresu $[-100, 100]$,
- **Zbiór 2** - punkty na okręgu o promieniu 100,
- **Zbiór 3** - punkty wewnątrz kwadratu otoczonego obramówką kształtu zygzaka
- **Zbiór 4** - punkty na obramówce kwadratu
- **Zbiór 5** - punkty na obramówce kwadratu oraz jego przekątnych

3.1 Wybrane zbiory testowe

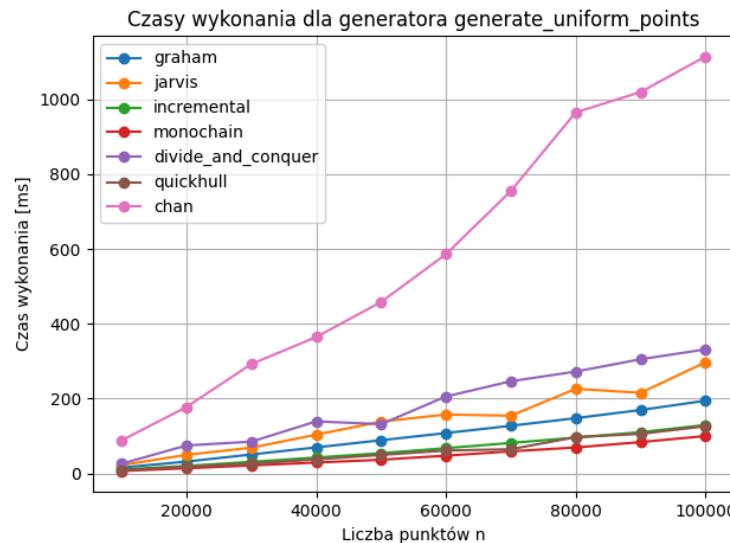
3. Zbiory testowe



3.2 Wyniki testów wydajności i poprawności

3. Zbiory testowe

3.2.1 Zbiór 1



Liczba punktów	Graham [ms]	Jarvis [ms]	Przyrostowy [ms]	Monochain [ms]	Dziel i rzadz [ms]	Quickhull [ms]	Chan [ms]
20000	33.34	53.28	22.6	15.65	74.28	18.53	176.74
40000	67.39	95.16	44.4	29.1	113.4	35.45	379.74
60000	106.15	160.03	71.36	46.06	205.38	58.97	548.89
80000	146.23	231.49	105.18	70.33	269.23	86.72	811.12
100000	193.13	266.97	136.79	94.12	331.78	121.46	1045.29

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit.

3.3 Simple Animation

3. Zbiory testowe

We can use #pause to

Meanwhile,

3.3 Simple Animation

3. Zbiory testowe

We can use `#pause` to display something later.

Meanwhile, we can also use `#meanwhile` to

3.3 Simple Animation

3. Zbiory testowe

We can use `#pause` to display something later.

Just like this.

Meanwhile, we can also use `#meanwhile` to display other content synchronously.

3.4 Complex Animation

3. Zbiory testowe

At subslide 1, we can

use `use` for reserving space,

use `for` not reserving space,

call `#only` multiple times `x` for choosing one of the alternatives.

3.4 Complex Animation

3. Zbiory testowe

At subslide 2, we can

use `#uncover` function for reserving space,

use `#only` function for not reserving space,

use `#alternatives` function ✓ for choosing one of the alternatives.

3.5 Callback Style Animation

3. Zbiory testowe

At subslide 1, we can

use **for reserving space,**

use for not reserving space,

call `#only` multiple times `x` for choosing one of the alternatives.

3.5 Callback Style Animation

3. Zbiory testowe

At subslide 2, we can

use `#uncover` function for reserving space,

use `#only` function for not reserving space,

use `#alternatives` function ✓ for choosing one of the alternatives.

3.5 Callback Style Animation

3. Zbiory testowe

At subslide 3, we can

use `#uncover` function for reserving space,

use `#only` function for not reserving space,

use `#alternatives` function ✓ for choosing one of the alternatives.

3.6 Math Equation Animation

3. Zbiory testowe

Equation with pause:

$$f(x) =$$

Here,

3.6 Math Equation Animation

3. Zbiory testowe

Equation with pause:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

=

Here, we have the expression of $f(x)$.

3.6 Math Equation Animation

3. Zbiory testowe

Equation with pause:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + 2x + 1 \\&= (x + 1)^2\end{aligned}$$

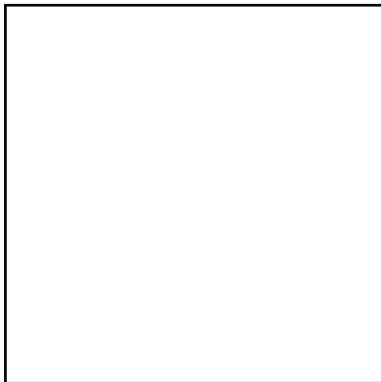
Here, we have the expression of $f(x)$.

By factorizing, we can obtain this result.

3.7 CeTZ Animation

3. Zbiory testowe

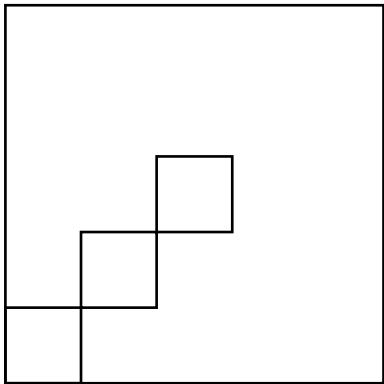
CeTZ Animation in Touying:



3.7 CeTZ Animation

3. Zbiory testowe

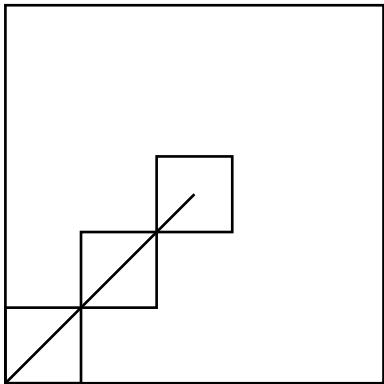
CeTZ Animation in Touying:



3.7 CeTZ Animation

3. Zbiory testowe

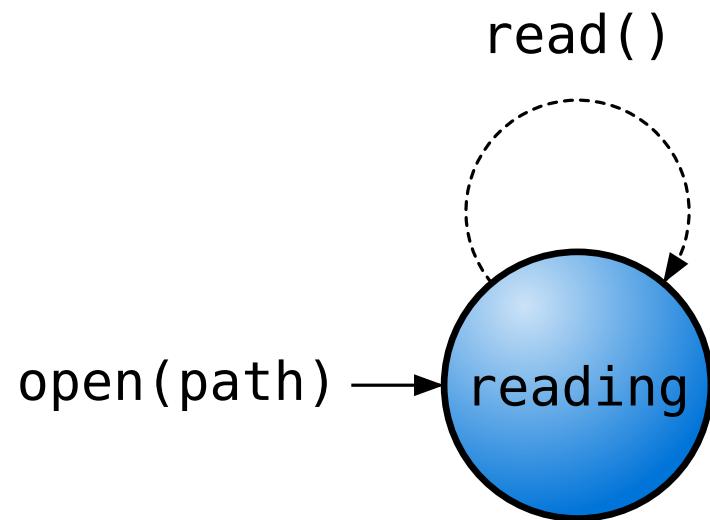
CeTZ Animation in Touying:



3.8 Fletcher Animation

3. Zbiory testowe

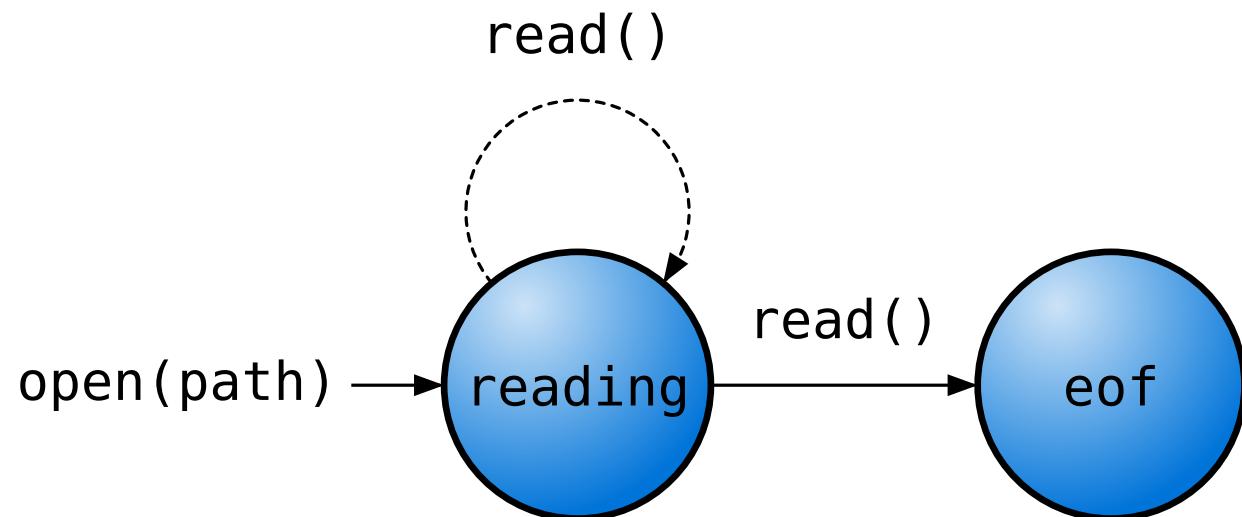
Fletcher Animation in Touying:



3.8 Fletcher Animation

3. Zbiory testowe

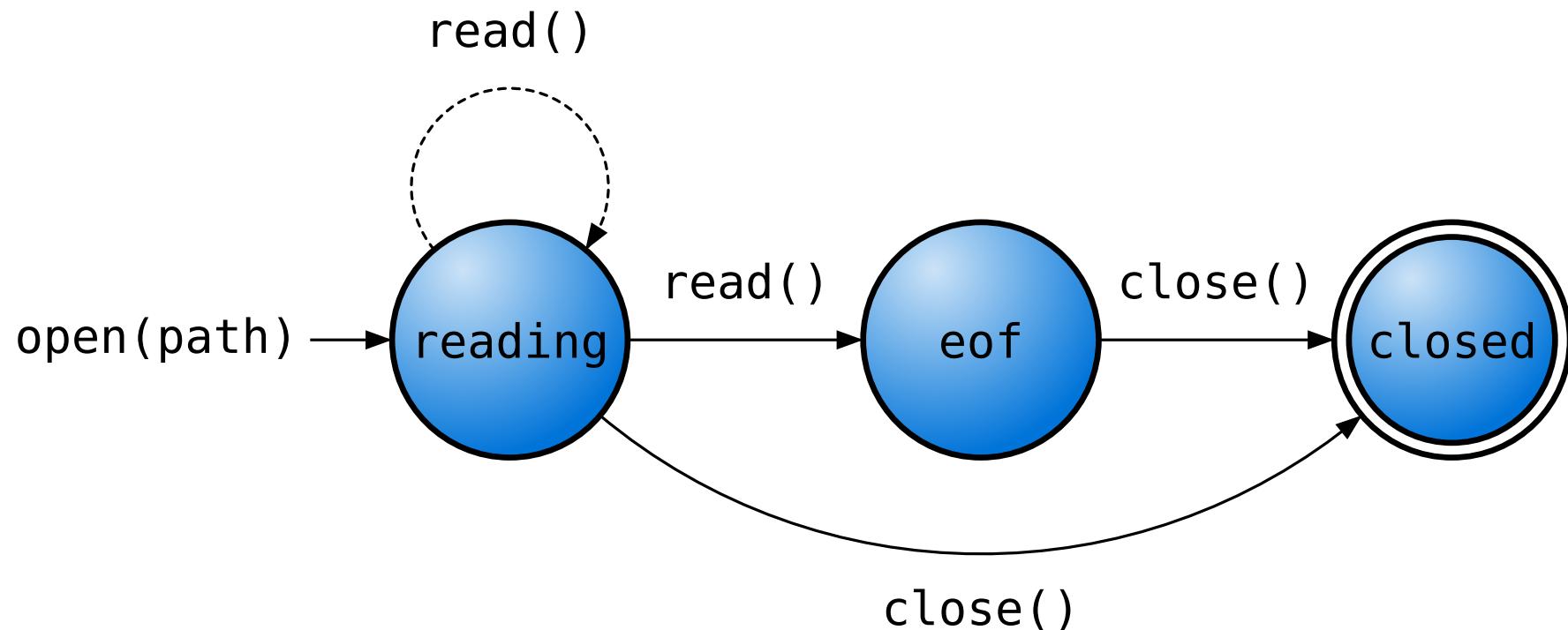
Fletcher Animation in Touying:



3.8 Fletcher Animation

3. Zbiory testowe

Fletcher Animation in Touying:



4. Theorems

Definition 4.1.1 A natural number is called a *prime number* if it is greater than 1 and cannot be written as the product of two smaller natural numbers.

Example. The numbers 2, 3, and 17 are prime. Corollary 4.1.2.1 shows that this list is not exhaustive!

Theorem 4.1.2 (Euclid) There are infinitely many primes.

4.1 Prime numbers

Proof. Suppose to the contrary that p_1, p_2, \dots, p_n is a finite enumeration of all primes. Set $P = p_1 p_2 \dots p_n$. Since $P + 1$ is not in our list, it cannot be prime. Thus, some prime factor p_j divides $P + 1$. Since p_j also divides P , it must divide the difference $(P + 1) - P = 1$, a contradiction. \square

Corollary 4.1.2.1 There is no largest prime number.

Corollary 4.1.2.2 There are infinitely many composite numbers.

Theorem 4.1.3 There are arbitrarily long stretches of composite numbers.

Proof. For any $n > 2$, consider

$$n! + 2, \quad n! + 3, \quad \dots, \quad n! + n$$



5. Others

5.1 Side-by-side

First column.

Second column.

5.2 Multiple Pages

5. Others

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequa doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum defuturum,

5.2 Multiple Pages

5. Others

quas natura non depravata desiderat. Et quem ad me accedis, saluto: 'chaere,' inquam, 'Tite!' lictores, turma omnis chorusque: 'chaere, Tite!' hinc hostis mi Albucius, hinc inimicus. Sed iure Mucius. Ego autem mirari satis non queo unde hoc sit tam insolens domesticarum rerum fastidium. Non est omnino hic docendi locus; sed ita prorsus existimo, neque eum Torquatum, qui hoc primus cognomen invenerit, aut torquem illum hosti detraxisse, ut aliquam ex eo est consecutus? – Laudem et caritatem, quae sunt vitae.

6. Appendix

6.1 Appendix

6. Appendix

Please pay attention to the current slide number.