

第6章 环与域

计算证明

1. (10分)证明高斯整数环 $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}, i = \sqrt{-1}\}$ 关于复数的加法和乘法运算构成环.
2. 对 $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$:
 - (1) (10分)证明其关于数的加法和乘法运算构成交换整环.
 - (2) (5分)求其分式域.
3. (5分)若环 R 的非零元素 e 满足 $e^2 = e$, 则称 e 为幂等元. 证明若无零因子环 R 有幂等元 e , 则 R 为整环且么元为 e .
4. (10分)证明交换环 R 中任意一族理想的交是 R 的理想.
5. 对高斯整环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:
 - (1) (5分)证明不是唯一析因环.
 - (2) (10分)证明 $\sqrt{-5}$ 是其素元素.
6. (10分)设 R 为Euclid环且 $\delta(ab) = \delta(a)\delta(b)$, 证明: $a \in U$ 当且仅当 $\delta(a) = 1$.
7. (10分)分别在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_5$ 中对多项式: $x^2 + 1$ 和 $x^2 + x + 1$ 进行因式分解.
8. (5分)求奇素数 p 满足在 $\mathbb{Z}_p[x]$ 上有 $x + 2 | x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$.
9. (10分)构造由8个元素构成的域 (以加法群表和乘法群表的形式给出).
10. (10分)求 $\mathbb{Z}_2[x]$ 中次数不超过5的所有不可约多项式.