**Rozwiązywanie równań różnicowych**

(Wg metody ze skyptu dra hab. Kiciaka; na niebiesko przykład – zadanie ze starego kolokwium.)

Mamy dane równanie różnicowe liniowe rzędu n:

(1) $$a_k = c_{n-1}a_{k-1} + c_{n-2}a_{k-2} + \ldots + c_0 a_{k-n} + f(k),$$

gdzie $c_0, \ldots, c_{n-1}$ są stałymi a $f$ to funkcja zależna od $k$. Jeśli $f$ nie jest funkcją zerową, to mówimy, że równanie jest niejednorodne. Rząd równania to liczba wyrazów ciągu, od którego zależy $k$-ty wyraz.

Żeby otrzymać jednoznaczne rozwiązanie, powinniśmy mieć też zadane warunki początkowe: $a_0 = z_0, \ldots, a_{n-1} = z_{n-1}$, gdzie $z_0, \ldots, z_{n-1}$ to pewne stałe.

Rozpatrzmy równanie $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + k$ z warunkami początkowymi $a_0 = 1, a_1 = 1$.

**1. Przechodzimy do równania jednorodnego i rozwiązujemy je.**

Równanie jednorodne odpowiadające (1) otrzymujemy przez wyrzucenie $f(k)$:

(2) $$a_k = c_{n-1}a_{k-1} + c_{n-2}a_{k-2} + \ldots + c_0 a_{k-n},$$

Danemu równaniu odpowiada równanie jednorodne $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}$.

Podstawiając $\lambda^i$ za $a_i$ (gdzie $i$ przebiera wszystkie indeksy w równaniu (2)) i dzieląc przez $\lambda^{k-n}$ otrzymujemy wielomian charakterystyczny równania (2):

(3) $$w(\lambda) = \lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} - c_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - c_0.$$

Mamy $w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

**2. Obliczamy pierwiastki wielomianu charakterystycznego i wypisujemy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (2).**

Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą pierwiastkami $w(\lambda)$, niekoniecznie różnymi.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Rozwiązanie ogólne równania (2) jest sumą składników odpowiadającym pierwiastkom. Jeśli pewne $\lambda_i$ jest pierwiastkiem jednokrotnym, to odpowiadający mu składnik to $d_i\lambda^k$, gdzie $d_i$ jest pewną stałą. Jeśli $\lambda_j$ jest $r$-krotnym piierwiastkiem, czyli np. $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+r-i}$, to mamy jeden składnik odpowiadający pierwiastkom $\lambda_j, \ldots, \lambda_{j+r-1}$, równy $(d_j + d_{j+1}k + d_{j+2}k^2 + \ldots + d_{j+r-1}k^{r-1})\lambda_j^k$, gdzie $d_j, \ldots, d_{j+r-1}$ są stałymi.

Ponieważ $\lambda_1 = 1$ jest dwukrotnym pierwiastkiem, więc rozwiązanie ogólne ma postać

$$(d_1 + d_2 k)\lambda_1^k = d_1 + d_2 k.$$

**3. Szukamy szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego (1).**

Zakładamy, że funkcja $f(k)$ jest postaci $p(k)\mu^k$, gdzie $p(k)$ jest wielomianem stopnia $s$.

$f(k) = k$, więc $p(k) = k$ (czyli $s = 1$) i $\mu = 1$.

Jeśli $\mu$ nie jest równe żadnemu z pierwiastków $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, to istnieje rozwiązanie szczególne (1) postaci $a_k = q(k)\mu^k$, gdzie $q(k) = b_s k^s + \ldots + b_1 k + b_0$ jest wielomianem stopnia $k$.

Jeśli natomiast $\mu$ jest jednym z pierwiastków $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, to istnieje rozwiązanie szczególne (1) postaci $a_k = k^r q(k)\mu^k$, gdzie r to krotność pierwiastka $\mu$, a $q(k) = b_s k^s + \ldots + b_1 k + b_0$ jest wielomianem stopnia $k$.

$\mu = 1 = \lambda_1 = \lambda_2$ (czyli $r = 2$), więc zachodzi drugi przypadek: istnieje rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego postaci

$$a_k = k^2(b_1 k + b_0)\mu^k = b_1 k^3 + b_0 k^2.$$

Teraz trzeba sprawdzić, dla jakich wartości stałych $b_0, \dots, b_s$ dostajemy rozwiązanie (1). W tym celu podstawiamy otrzymaną postać rozwiązania do równania (1) i obliczamy $b_0, \dots, b_k$, np. porównując współczynniki przy potęgach $k$ po obu stronach równania, albo podstawiając małe wartości $k$.

Podstawiamy do równania (1):

$$\begin{aligned}
b_1 k^3 + b_0 k^2 &= 2(b_1(k-1)^3 + b_0(k-1)^2) - (b_1(k-2)^3 + b_0(k-2)^2) + k \\
b_1 k^3 + b_0 k^2 &= b_1 k^3 + b_0 k^2 + (-6b_1 + 1)k + 6b_1 - 2b_0 \\
0 &= (-6b_1 + 1)k + 6b_1 - 2b_0
\end{aligned}$$

Stąd $b_1 = \frac{1}{6}$ i $b_0 = \frac{1}{2}$, czyli mamy szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego postaci

$$a_k = \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{2}.$$

**4. Obliczamy rozwiązanie równania (1) zgodne z warunkami początkowymi.**

Wszystkie rozwiązania równania (1) to sumy rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (2) i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. W takim rozwiązaniu ogólnym nie mamy ustalonych wartości parametrów $d_1, \dots, d_n$ pochodzących z rozwiązania ogólnego równania jednorodnego. Możemy je obliczyć, używając warunków początkowych.

Wszystkie rozwiązania równania (1) to

$$d_1 + d_2 k + \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{2}.$$

Wartości $d_1$ i $d_2$ są wyznaczone przez warunki początkowe:

$$\begin{aligned}
&1 = a_0 = d_1 \\
&1 = a_1 = d_1 + d_2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = d_2 + \frac{5}{3}, \text{ czyli } d_2 = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem równania (1) jest

$$a_k = \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{2} - \frac{2k}{3} + 1 = \frac{1}{6}(k^3 + 3k^2 - 4k + 6)$$