

高中数学必修 +选修知识点归纳

引言

1. 课程内容：

必修课程由 5 个模块组成：

必修 1：集合、函数概念与基本初等函数（指、对、幂函数）

必修 2：立体几何初步、平面解析几何初步。

必修 3：算法初步、统计、概率。

必修 4：基本初等函数（三角函数）、平面向量、三角恒等变换。

必修 5：解三角形、数列、不等式。

以上是每一个高中学生所必须学习的。

上述内容覆盖了高中阶段传统的数学基础知识和基本技能的主要部分，其中包括集合、函数、数列、不等式、解三角形、立体几何初步、平面解析几何初步等。不同的是在保证打好基础的同时，进一步强调了这些知识的发生、发展过程和实际应用，而不在技巧与难度上做过高的要求。

此外，基础内容还增加了向量、算法、概率、统计等内容。

选修课程有 4 个系列：

系列 1：由 2 个模块组成。

选修 1—1：常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其应用。

选修 1—2：统计案例、推理与证明、数系的扩充与复数、框图

系列 2：由 3 个模块组成。

选修 2—1：常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、空间向量与立体几何。

选修 2—2：导数及其应用，推理与证明、数系的扩充与复数

选修 2—3：计数原理、随机变量及其分布列，统计案例。

系列 3：由 6 个专题组成。

选修 3—1：数学史选讲。

选修 3—2：信息安全与密码。

选修 3—3：球面上的几何。

选修 3—4：对称与群。

选修 3—5：欧拉公式与闭曲面分类。

选修 3—6：三等分角与数域扩充。

系列 4：由 10 个专题组成。

选修 4—1：几何证明选讲。

选修 4—2：矩阵与变换。

选修 4—3：数列与差分。

选修 4—4：坐标系与参数方程。

选修 4—5：不等式选讲。

选修 4—6：初等数论初步。

选修 4—7：优选法与试验设计初步。

选修 4—8：统筹法与图论初步。

选修 4—9：风险与决策。

选修 4—10：开关电路与布尔代数。

2. 重难点及考点：

重点：函数，数列，三角函数，平面向量，圆锥曲线，立体几何，导数

难点：函数、圆锥曲线

高考相关考点：

集合与简易逻辑：集合的概念与运算、简易逻辑、充要条件

函数：映射与函数、函数解析式与定义域、值域与最值、反函数、三大性质、函数图象、指数与指数函数、对数与对数函数、函数的应用

数列：数列的有关概念、等差数列、等比数列、数列求和、数列的应用

三角函数：有关概念、同角关系与诱导公式、和、差、倍、半公式、求值、化简、证明、三角函数的图象与性质、三角函数的应用

平面向量：有关概念与初等运算、坐标运算、数量积及其应用

不等式：概念与性质、均值不等式、不等式的证明、不等式的解法、绝对值不等式、不等式的应用

直线和圆的方程：直线的方程、两直线的位置关系、线性规划、圆、直线与圆的位置关系

圆锥曲线方程：椭圆、双曲线、抛物线、直线与圆锥曲线的位置关系、轨迹问题、圆锥曲线的应用

直线、平面、简单几何体：空间直线、直线与平面、平面与平面、棱柱、棱锥、球、空间向量

排列、组合和概率：排列、组合应用题、二项式定理及其应用

概率与统计：概率、分布列、期望、方差、抽样、正态分布

导数：导数的概念、求导、导数的应用

复数：复数的概念与运算

必修 1 数学知识点

第一章：集合与函数概念

§ 1.1.1、集合

1. 把研究的对象统称为 元素，把一些元素组成的总体叫做 集合。集合三要素：确定性、互异性、无序性。
2. 只要构成两个集合的元素是一样的，就称这两个集合相等。
3. 常见集合：正整数集合： N^* 或 N_+ ，整数集合： Z ，有理数集合： Q ，实数集合： R 。
4. 集合的表示方法：列举法、描述法。

§ 1.1.2、集合间的基本关系

1. 一般地，对于两个集合 A 、 B ，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集。记作 $A \subseteq B$ 。
2. 如果集合 $A \subseteq B$ ，但存在元素 $x \in B$ ，且 $x \notin A$ ，则称集合 A 是集合 B 的真子集。记作： $A \subsetneq B$ 。
3. 把不含任何元素的集合叫做 空集。记作： \emptyset 。并规定：空集合是任何集合的子集。
4. 如果集合 A 中含有 n 个元素，则集合 A 有 2^n 个子集， $2^n - 1$ 个真子集。

§ 1.1.3、集合间的基本运算

1. 一般地，由所有属于集合 A 或集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集。记作： $A \cup B$ 。
2. 一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集。记作： $A \cap B$ 。
3. 全集、补集？ $C_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$

§ 1.2.1、函数的概念

1. 设 A 、 B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f ，使对于集合 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有惟一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就

称 $f : A \rightarrow B$ 为集合 A 到集合 B 的一个函数，记作： $y = f(x), x \in A$ 。

2. 一个函数的构成要素为：定义域、对应关系、值域。如果两个函数的定义域相同，并且对应关系完全一致，则称这两个函数相等。

§ 1.2.2、函数的表示法

1. 函数的三种表示方法：解析法、图象法、列表法。

§ 1.3.1、单调性与最大(小)值

1. 注意函数单调性的证明方法：

(1) 定义法：设 $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ 那么

$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数；

$f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是减函数。

步骤：取值—作差—变形—定号—判断

格式：解：设 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 且 $x_1 < x_2$ ，则：

$$f(x_1) - f(x_2) = \dots$$

(2) 导数法：设函数 $y = f(x)$ 在某个区间内可导，

若 $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 为增函数；

若 $f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 为减函数。

§ 1.3.2、奇偶性

1. 一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有 $f(-x) = f(x)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 为偶函数。偶函数图象关于 y 轴对称。

2. 一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有 $f(-x) = -f(x)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 为奇函数。奇函数图象关于原点对称。

知识链接：函数与导数

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义：

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数是曲线 $y = f(x)$ 在 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率 $f'(x_0)$ ，相应的切线方程是 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ 。

2. 几种常见函数的导数

$$C' = 0 ; \quad (x^n)' = nx^{n-1} ;$$

$$(\sin x)' = \cos x ; \quad (\cos x)' = -\sin x ;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a ; \quad (e^x)' = e^x ;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} ; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

3、导数的运算法则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2) (uv)' = u'v + uv'$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$$

4、复合函数求导法则

复合函数 $y = f(g(x))$ 的导数和函数

$y = f(u)$, $u = g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, 即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

解题步骤: 分层—层层求导—作积还原

5、函数的极值

(1) 极值定义:

极值是在 x_0 附近所有的点, 都有 $f(x) < f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值;

极值是在 x_0 附近所有的点, 都有 $f(x) > f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

(2) 判别方法:

如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$, 右侧 $f'(x) < 0$,

那么 $f(x_0)$ 是极大值;

如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) < 0$, 右侧 $f'(x) > 0$,

那么 $f(x_0)$ 是极小值.

6、求函数的最值

(1) 求 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的极值(极大或者极小值)

(2) 将 $y = f(x)$ 的各极值点与 $f(a), f(b)$ 比较, 其中最大的一个为最大值, 最小的一个为极小值.

注: 极值是在局部对函数值进行比较(局部性质); 最值是在整体区间上对函数值进行比较(整体性质).

第二章: 基本初等函数(一)

§ 2.1.1、指数与指数幂的运算

1、一般地, 如果 $x^n = a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根.

其中 $n > 1, n \in \mathbb{N}_+$

2、当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$;

当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

3、我们规定:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$(a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, m > 1);$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} (n > 0);$$

4、运算性质:

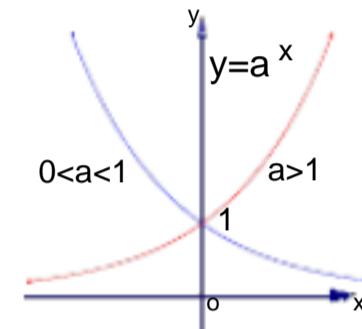
$$a^r a^s = a^{r+s} (a > 0, r, s \in \mathbb{Q});$$

$$(a^r)^s = a^{rs} (a > 0, r, s \in \mathbb{Q});$$

$$(ab)^r = a^r b^r (a > 0, b > 0, r \in \mathbb{Q}).$$

§ 2.1.2、指数函数及其性质

1、记住图象: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)



	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象		
性 质	(1) 定义域: \mathbb{R} (2) 值域: $(0, +\infty)$ (3) 过定点 $(0, 1)$, 即 $x=0$ 时, $y=1$ (4) 在 \mathbb{R} 上是增函数 (5) $x > 0, a^x > 1$; $x < 0, 0 < a^x < 1$	(4) 在 \mathbb{R} 上是减函数 (5) $x > 0, 0 < a^x < 1$; $x < 0, a^x > 1$

2、性质:

§ 2.2.1、对数与对数运算

1、指数与对数互化式: $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$;

2、对数恒等式: $a^{\log_a N} = N$.

3、基本性质: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

4、运算性质: 当 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 时:

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N ;$$

$$\log_a M^n = n \log_a M .$$

5、换底公式： $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

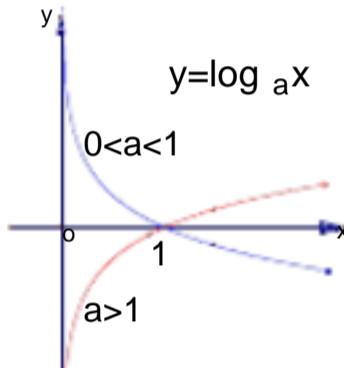
($a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0$).

6、重要公式： $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$

7、倒数关系： $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$)

§ 2.2.2、对数函数及其性质

1、记住图象： $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

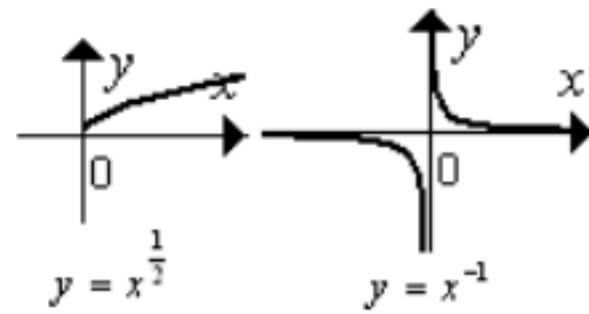
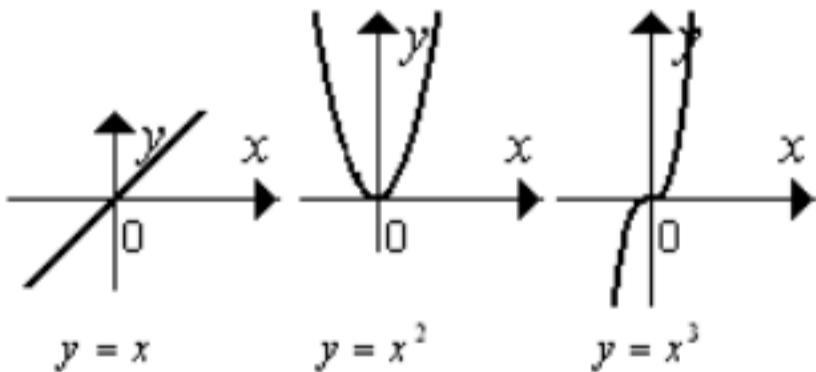


2、性质：

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象		
性质	(1) 定义域： $(0, +\infty)$ (2) 值域： \mathbb{R} (3) 过定点 $(1, 0)$ ，即 $x=1$ 时， $y=0$ (4) 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数 (5) $x > 1, \log_a x > 0$ ； $0 < x < 1, \log_a x < 0$	

§ 2.3、幂函数

1、几种幂函数的图象：



第三章：函数的应用

§ 3.1.1、方程的根与函数的零点

1、方程 $f(x) = 0$ 有实根

\Leftrightarrow 函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴有交点

\Leftrightarrow 函数 $y = f(x)$ 有零点。

2、零点存在性定理：

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么函数

$y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点，即存在 $c \in (a, b)$ ，

使得 $f(c) = 0$ ，这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根。

§ 3.1.2、用二分法求方程的近似解

1、掌握二分法。

§ 3.2.1、几类不同增长的函数模型

§ 3.2.2、函数模型的应用举例

1、解决问题的常规方法：先画散点图，再用适当的函数拟合，最后检验。

必修 2 数学知识点

第一章：空间几何体

1、空间几何体的结构

常见的多面体有：棱柱、棱锥、棱台；常见的旋转体有：圆柱、圆锥、圆台、球。

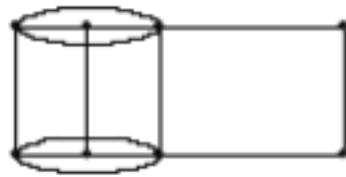
棱柱：有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱。

棱台：用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分，这样的多面体叫做棱台。

2、空间几何体的三视图和直观图

把光由一点向外散射形成的投影叫中心投影，中心投影的投影线交于一点；把在一束平行光线照射下的投影叫平行投影，平行投影的投影线是平行的。

3、空间几何体的表面积与体积



圆柱侧面积： $S_{\text{侧面}} = 2\pi \cdot r \cdot l$



圆锥侧面积： $S_{\text{侧面}} = \pi \cdot r \cdot l$

圆台侧面积： $S_{\text{侧面}} = \pi \cdot r + \pi \cdot R + \pi \cdot (r + R) \cdot l$

体积公式：

$$V_{\text{柱体}} = S \cdot h ; V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3} S \cdot h ;$$

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3} (S_{\text{上}} + \sqrt{S_{\text{上}} \cdot S_{\text{下}}} + S_{\text{下}}) \cdot h$$

球的表面积和体积：

$$S_{\text{球}} = 4\pi R^2 , V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

第二章：点、直线、平面之间的位置关系

- 1、公理 1：如果一条直线上两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内。
- 2、公理 2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。
- 3、公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。
- 4、公理 4：平行于同一条直线的两条直线平行。
- 5、定理：空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补。
- 6、线线位置关系：平行、相交、异面。
- 7、线面位置关系：直线在平面内、直线和平面平行、直线和平面相交。
- 8、面面位置关系：平行、相交。
- 9、线面平行：

判定：平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行（简称线线平行，则线面平行）。

性质：一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行（简称线面平行，则线线平行）。
- 10、面面平行：

判定：一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行（简称线面平行，则面面平行）。

性质：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行（简称面面平行，则线线平行）。

11、线面垂直：

定义：如果一条直线垂直于一个平面内的任意一条直线，那么就说这条直线和这个平面垂直。

判定：一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直（简称线线垂直，则线面垂直）。

性质：垂直于同一个平面的两条直线平行。

12、面面垂直：

定义：两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直。

判定：一个平面经过另一个平面的一条垂线，则这两个平面垂直（简称线面垂直，则面面垂直）。

性质：两个平面互相垂直，则一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面。（简称面面垂直，则线面垂直）。

第三章：直线与方程

1、倾斜角与斜率： $k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2、直线方程：

点斜式： $y - y_0 = k(x - x_0)$

斜截式： $y = kx + b$

两点式： $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

截距式： $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

一般式： $Ax + By + C = 0$

3、对于直线：

$|l_1 : y = k_1 x + b_1, l_2 : y = k_2 x + b_2$ 有：

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases} ;$$

$|l_1$ 和 $|l_2$ 相交 $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$ ；

$$|l_1$$
 和 $|l_2$ 重合 $\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} ;$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

4、对于直线：

$$\begin{aligned} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}$$

有：

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2 = A_2B_1 \\ B_1C_2 \neq B_2C_1 \end{cases};$$

$$l_1 \text{ 和 } l_2 \text{ 相交} \Leftrightarrow A_1B_2 \neq A_2B_1;$$

$$l_1 \text{ 和 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2 = A_2B_1 \\ B_1C_2 = B_2C_1 \end{cases};$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

5、两点间距离公式：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

6、点到直线距离公式：

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

7、两平行线间的距离公式：

$l_1 : Ax + By + C_1 = 0$ 与 $l_2 : Ax + By + C_2 = 0$ 平行，

$$\text{则 } d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

第四章：圆与方程

1、圆的方程：

$$\text{标准方程: } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

其中 圆心为 (a, b) ，半径为 r 。

$$\text{一般方程: } x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$$\text{其中 圆心为 } (-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}), \text{ 半径为 } r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}.$$

2、直线与圆的位置关系

$$\text{直线 } Ax + By + C = 0 \text{ 与圆 } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

的位置关系有三种：

$$d > r \Leftrightarrow \text{相离} \Leftrightarrow \Delta < 0;$$

$$d = r \Leftrightarrow \text{相切} \Leftrightarrow \Delta = 0;$$

$$d < r \Leftrightarrow \text{相交} \Leftrightarrow \Delta > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{弦长公式: } |l| &= 2\sqrt{r^2 - d^2} \\ &= \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2} \end{aligned}$$

$$3、\text{两圆位置关系: } d = |O_1O_2|$$

$$\text{外离: } d > R + r;$$

$$\text{外切: } d = R + r;$$

$$\text{相交: } R - r < d < R + r;$$

$$\text{内切: } d = R - r;$$

$$\text{内含: } d < R - r.$$

3、空间中两点间距离公式：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

必修 3 数学知识点

第一章：算法

1、算法三种语言：

自然语言、流程图、程序语言；

2、流程图中的图框：

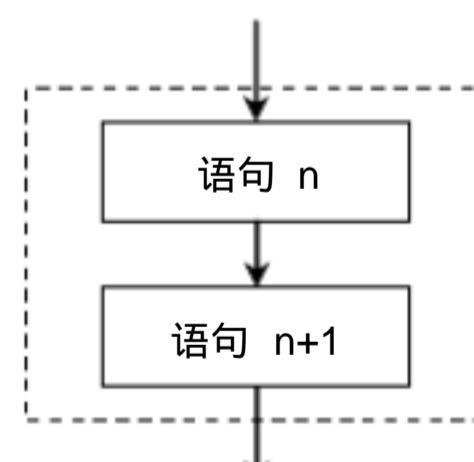
起止框、输入输出框、处理框、判断框、流程线等
规范表示方法；

3、算法的三种基本结构：

顺序结构、条件结构、循环结构

{ 当型循环结构
直到型循环结构 }

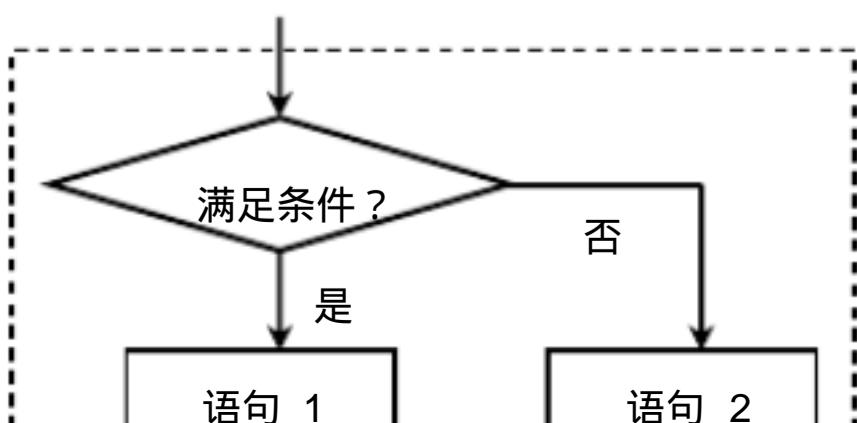
顺序结构示意图：



(图 1)

条件结构示意图：

IF - THEN - ELSE 格式：



输入语句的一般格式：**INPUT “提示内容”；变量**
 输出语句的一般格式：**PRINT “提示内容”；表达式**
 赋值语句的一般格式：**变量 = 表达式**
 (“=”有时也用“”).
 条件语句的一般格式有两种：

IF—THEN—ELSE 语句的一般格式为：

IF 条件 THEN

语句 1

ELSE

语句 2

END IF (图 2)

IF—THEN 语句的一般格式为：

IF 条件 THEN

语句

END IF (图 3)

循环语句的一般格式是两种：

当型循环 (WHILE) 语句的一般格式：

WHILE 条件

循环体

(图 4)

直到型循环 (UNTIL) 语句的一般格式：

DO

循环体

LOOP UNTIL 条件

(图 5)

算法案例：

辗转相除法— 结果是以相除余数为 0 而得到

利用辗转相除法求最大公约数的步骤如下：

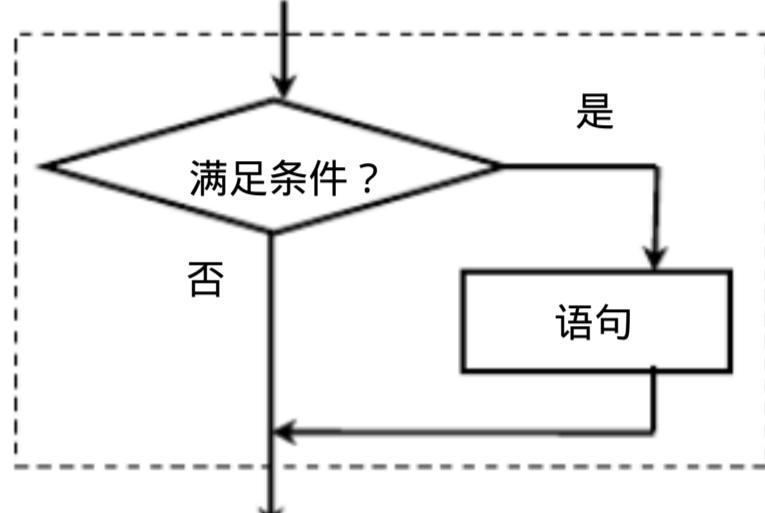
) : 用较大的数 m 除以较小的数 n 得到一个商 S_0 和一个余数 R_0 ;

) : 若 $R_0 = 0$, 则 n 为 m, n 的最大公约数 ; 若 $R_0 \neq 0$, 则用除数 n 除以余数 R_0 得到一个商 S_1 和一个余数 R_1 ;

) : 若 $R_1 = 0$, 则 R_1 为 m, n 的最大公约数 ; 若 $R_1 \neq 0$, 则用除数 R_0 除以余数 R_1 得到一个商 S_2 和一个余数

(图 2)

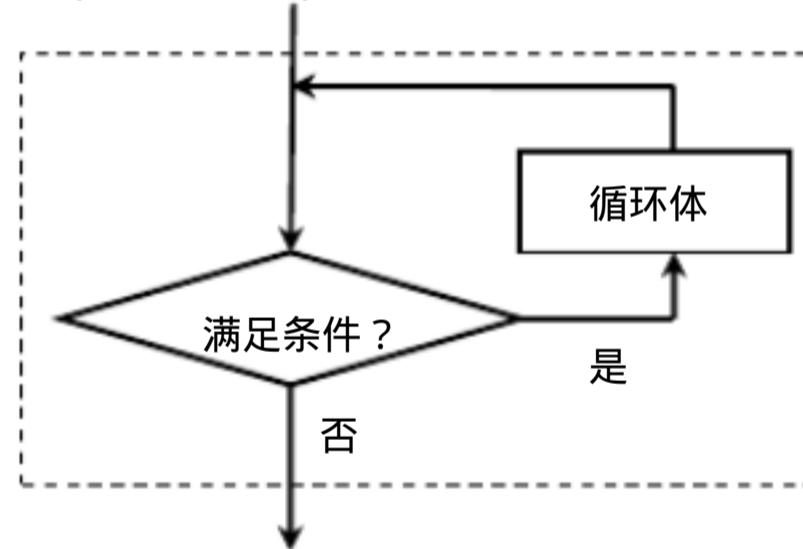
IF - THEN 格式：



(图 3)

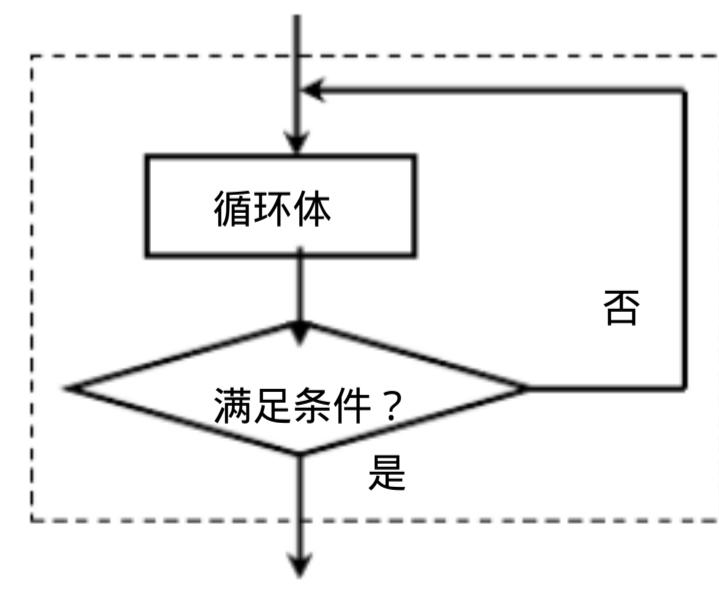
循环结构示意图：

当型 (WHILE 型) 循环结构示意图：



(图 4)

直到型 (UNTIL 型) 循环结构示意图：



(图 5)

4、基本算法语句：

R_2 ;

依次计算直至 $R_n = 0$, 此时所得到的 R_{n-1} 即为所求的最大公约数。

更相减损术— 结果是以减数与差相等而得到

利用更相减损术求最大公约数的步骤如下：

)：任意给出两个正数；判断它们是否都是偶数。若是，用 2 约简；若不是，执行第二步。

)：以较大的数减去较小的数，接着把较小的数与所得的差比较，并以大数减小数。继续这个操作，直到所得的数相等为止，则这个数（等数）就是所求的最大公约数。

进位制

十进制数化为 k 进制数— 除 k 取余法

k 进制数化为十进制数

第二章：统计

1、抽样方法：

简单随机抽样（总体个数较少）

系统抽样（总体个数较多）

分层抽样（总体中差异明显）

注意：在 N 个个体的总体中抽出 n 个个体组成样本，

每个个体被抽到的机会（概率）均为 $\frac{n}{N}$ 。

2、总体分布的估计：

一表二图：

频率分布表——数据详实

频率分布直方图——分布直观

频率分布折线图——便于观察总体分布趋势

注：总体分布的密度曲线与横轴围成的面积为 1。

茎叶图：

茎叶图适用于数据较少的情况，从中便于看出数据的分布，以及中位数、众位数等。

个位数为叶，十位数为茎，右侧数据按照从小到大书写，相同的数据重复写。

3、总体特征数的估计：

平均数： $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ ；

取值为 x_1, x_2, \dots, x_n 的频率分别为 p_1, p_2, \dots, p_n ，则其平均数为 $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ ；

注意：频率分布表计算平均数要取组中值。

方差与标准差：一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n

方差： $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ；

标准差： $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

注：方差与标准差越小，说明样本数据越稳定。

平均数反映数据总体水平；方差与标准差反映数据的稳定水平。

线性回归方程

变量之间的两类关系：函数关系与相关关系；

制作散点图，判断线性相关关系

线性回归方程： $\hat{y} = bx + a$ （最小二乘法）

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x}$$

注意：线性回归直线经过定点 (\bar{x}, \bar{y}) 。

第三章：概率

1、随机事件及其概率：

事件：试验的每一种可能的结果，用大写英文字母表示；

必然事件、不可能事件、随机事件的特点；

随机事件 A 的概率： $P(A) = \frac{m}{n}, 0 \leq P(A) \leq 1$.

2、古典概型：

基本事件：一次试验中可能出现的每一个基本结果；

古典概型的特点：

所有的基本事件只有有限个；

每个基本事件都是等可能发生。

古典概型概率计算公式：一次试验的等可能基本事件共有 n 个，事件 A 包含了其中的 m 个基本事件，则

事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

3、几何概型：

几何概型的特点：

所有的基本事件是无限个；

每个基本事件都是等可能发生。

几何概型概率计算公式： $P(A) = \frac{d \text{ 的测度}}{D \text{ 的测度}}$ ；

其中测度根据题目确定，一般为线段、角度、面积、体积等。

4、互斥事件：

不可能同时发生的两个事件称为互斥事件；

如果事件 A_1, A_2, \dots, A_n 任意两个都是互斥事件，则称事件 A_1, A_2, \dots, A_n 彼此互斥。

如果事件 A, B 互斥，那么事件 $A+B$ 发生的概率，等于事件 A, B 发生的概率的和，

即： $P(A+B) = P(A) + P(B)$

如果事件 A_1, A_2, \dots, A_n 彼此互斥，则有：

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

对立事件：两个互斥事件中必有一个要发生，则称这两个事件为对立事件。

事件 A 的对立事件记作 \bar{A}

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

对立事件一定是互斥事件，互斥事件未必是对立事件。

必修 4 数学知识点

第一章：三角函数

§ 1.1.1、任意角

1、正角、负角、零角、象限角的概念。

2、与角 α 终边相同的角的集合：

$$\{\beta | \beta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

§ 1.1.2、弧度制

1、把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角。

$$2, |\alpha| = \frac{l}{r}.$$

$$3, \text{弧长公式} : l = \frac{n\pi R}{180} = |\alpha|R.$$

$$4, \text{扇形面积公式} : S = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2}|IR|.$$

§ 1.2.1、任意角的三角函数

1、设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点

$$P(x, y), \text{那么} : \sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

2、设点 $A(x, y)$ 为角 α 终边上任意一点，那么：(设

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

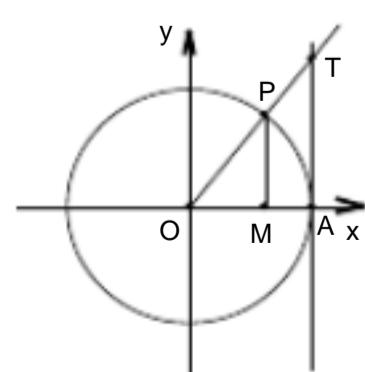
$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}, \cot \alpha = \frac{x}{y}$$

3、 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 在四个象限的符号和三角函数线的画法。

正弦线：MP；

余弦线：OM；

正切线：AT



5、特殊角 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 等的三角函数值。

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

§ 1.2.2、同角三角函数的基本关系式

$$1, \text{平方关系} : \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$2, \text{商数关系} : \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$3, \text{倒数关系} : \tan \alpha \cot \alpha = 1$$

§ 1.3、三角函数的诱导公式

(概括为“奇变偶不变，符号看象限” $k \in \mathbb{Z}$)

1、诱导公式一：

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, \text{(其中: } k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha.$$

2、诱导公式二：

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

3、诱导公式三：

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

4、诱导公式四：

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

5、诱导公式五：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

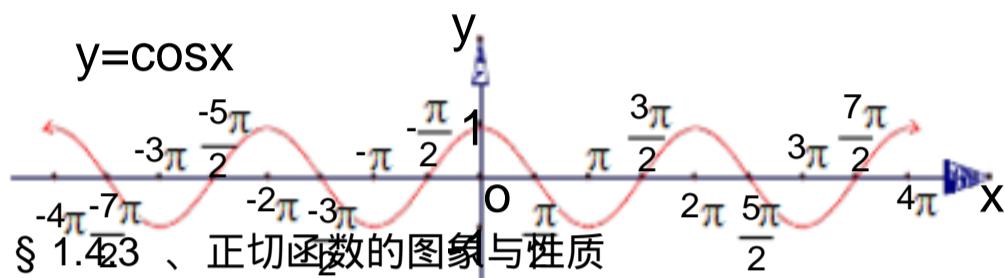
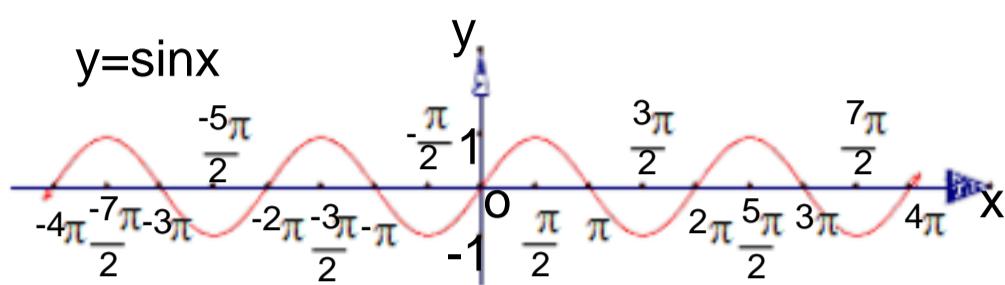
6、诱导公式六：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha.$$

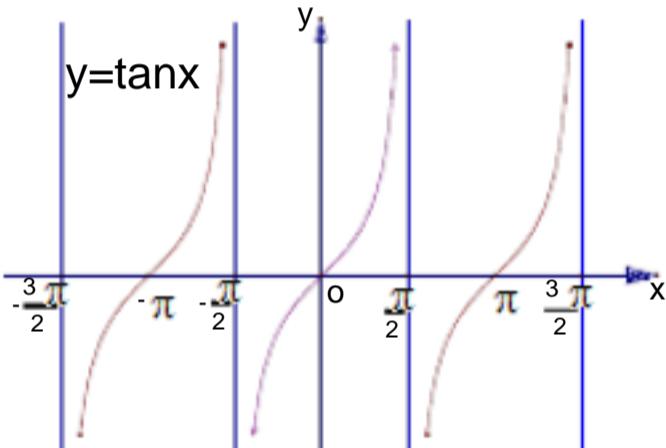
§ 1.4.1 正弦、余弦函数的图象和性质

1、记住正弦、余弦函数图象：



§ 1.4.3 正切函数的图象与性质

1、记住正切函数的图象：



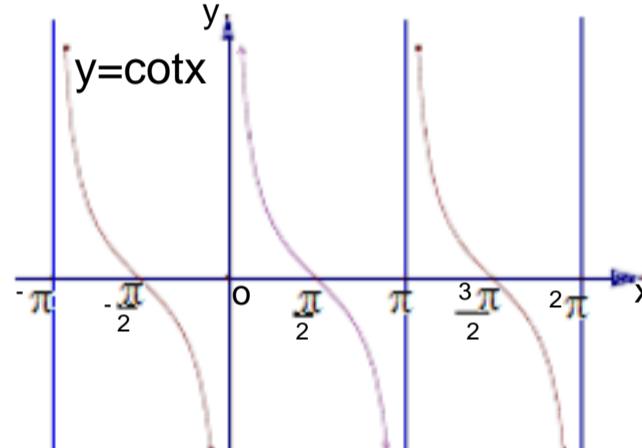
2、能够对照图象讲出正弦、余弦函数的相关性质： 定义域、值域、最大最小值、对称轴、对称中心、奇偶性、单调性、周期性。

3、会用 五点法作图。

$y = \sin x$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上的五个关键点为：

$$(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)$$

2、记住余切函数的图象：



3、能够对照图象讲出正切函数的相关性质： 定义域、值域、对称中心、奇偶性、单调性、周期性。

周期函数定义：对于函数 $f(x)$ ，如果存在一个非零常数 T ，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有 $f(x+T)=f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数，非零常数 T 叫做这个函数的周期。

图表归纳：正弦、余弦、正切函数的图像及其性质

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\{x x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	\mathbb{R}

最值	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 时, $y_{\max} = 1$ $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 时, $y_{\min} = -1$	$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $y_{\max} = 1$ $x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $y_{\min} = -1$	无
周期性	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$	$T = \pi$
奇偶性	奇	偶	奇
单调性 $k \in \mathbb{Z}$	在 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增 在 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递减	在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 上单调递增 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 上单调递减	在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 上单调递增
对称性 $k \in \mathbb{Z}$	对称轴方程: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 对称中心 $(k\pi, 0)$	对称轴方程: $x = k\pi$ 对称中心 $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$	无对称轴 对称中心 $(\frac{k\pi}{2}, 0)$

§ 1.5、函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 的图象

1、对于函数:

$y = A \sin(\omega x + \phi) + B$ ($A > 0, \omega > 0$) 有: 振幅 A , 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 初相 ϕ , 相位 $\omega x + \phi$, 频率 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

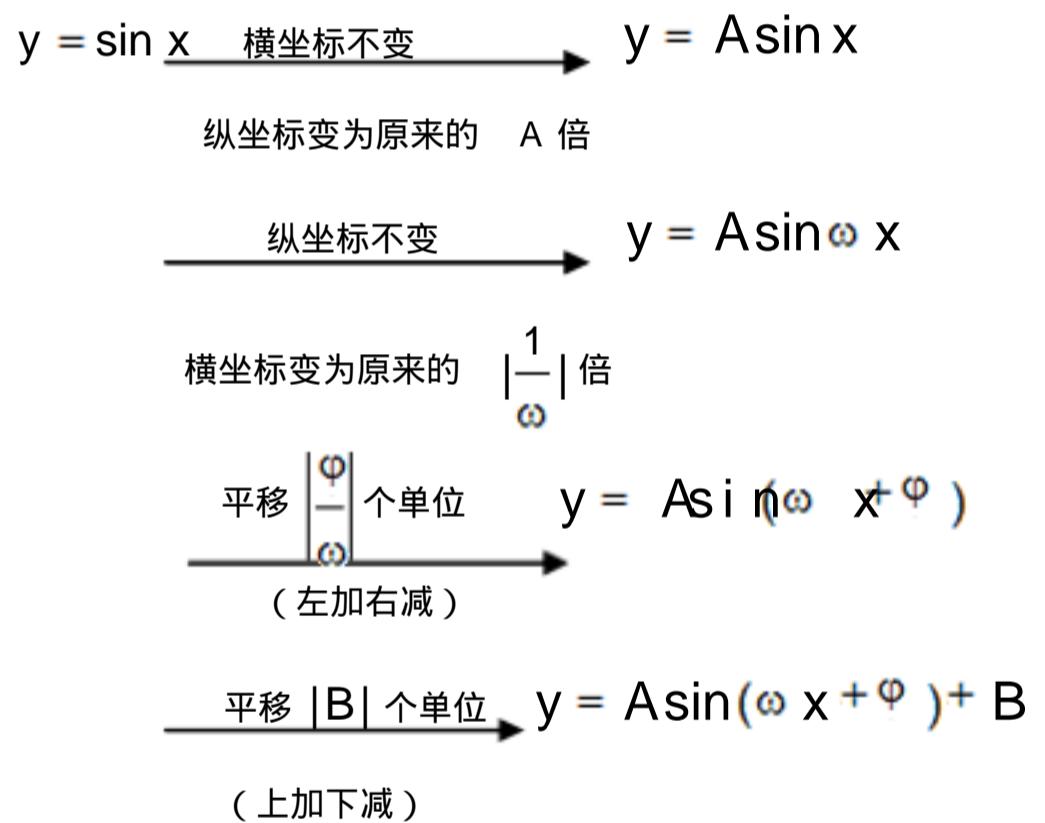
2、能够讲出函数 $y = \sin x$ 的图象与

$y = A \sin(\omega x + \phi) + B$ 的图象之间的平移伸缩变换关系.

先平移后伸缩:

$$\begin{aligned} y = \sin x &\xrightarrow{\text{平移 } |\phi| \text{ 个单位}} y = \sin(x + \phi) \\ &\xrightarrow{\text{(左加右减)}} \\ &\xrightarrow{\text{横坐标不变}} y = A \sin(x + \phi) \\ &\xrightarrow{\text{纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} \\ &\xrightarrow{\text{纵坐标不变}} y = A \sin(\omega x + \phi) \\ &\xrightarrow{\text{横坐标变为原来的 } \frac{1}{|\omega|} \text{ 倍}} \\ &\xrightarrow{\text{平移 } |B| \text{ 个单位}} y = A \sin(\omega x + \phi) + B \\ &\xrightarrow{\text{(上加下减)}} \end{aligned}$$

先伸缩后平移:



3、三角函数的周期, 对称轴和对称中心

函数 $y = \sin(\omega x + \phi)$, $x \in \mathbb{R}$ 及函数 $y = \cos(\omega x + \phi)$,

$x \in \mathbb{R}$ (A, ω, ϕ 为常数, 且 $A \neq 0$) 的周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$; 函数

$y = \tan(\omega x + \phi)$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (A, ω, ϕ 为常数, 且 $A \neq 0$) 的周期 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$.

对于 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 和 $y = A \cos(\omega x + \phi)$ 来说, 对称中心与零点相联系, 对称轴与最值点联系. 求函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 图像的对称轴与对称中心,

只需令 $\omega x + \phi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 与 $\omega x + \phi = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

解出 x 即可. 余弦函数可与正弦函数类比可得.

4、由图像确定三角函数的解析式

利用图像特征： $A = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$, $B = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$.

① 要根据周期来求，② 要用图像的关键点来求 .

§ 1.6、三角函数模型的简单应用

1、要求熟悉课本例题 .

第三章、三角恒等变换

§ 3.1.1、两角差的余弦公式

记住 15° 的三角函数值：

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$

§ 3.1.2、两角和与差的正弦、余弦、正切公式

1、 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

2、 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

3、 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

4、 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

5、 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

6、 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$.

§ 3.1.3、二倍角的正弦、余弦、正切公式

1、 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$,

变形： $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

2、 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

变形如下：

升幂公式：
$$\begin{cases} 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha \\ 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha \end{cases}$$

降幂公式：
$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \end{cases}$$

3、 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.

4、 $\tan \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

§ 3.2、简单的三角恒等变换

1、注意 正切化弦、平方降次.

2、辅助角公式

$$y = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

(其中辅助角 φ 所在象限由点 (a, b) 的象限决定,

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

第二章：平面向量

§ 2.1.1、向量的物理背景与概念

1、了解四种常见向量：力、位移、速度、加速度.

2、既有大小又有方向的量叫做 向量.

§ 2.1.2、向量的几何表示

1、带有方向的线段叫做 有向线段，有向线段包含三个要素：起点、方向、长度 .

2、向量 \overrightarrow{AB} 的大小，也就是向量 \overrightarrow{AB} 的长度（或称

模），记作 $|\overrightarrow{AB}|$ ；长度为零的向量叫做 零向量；长度等于 1 个单位的向量叫做 单位向量.

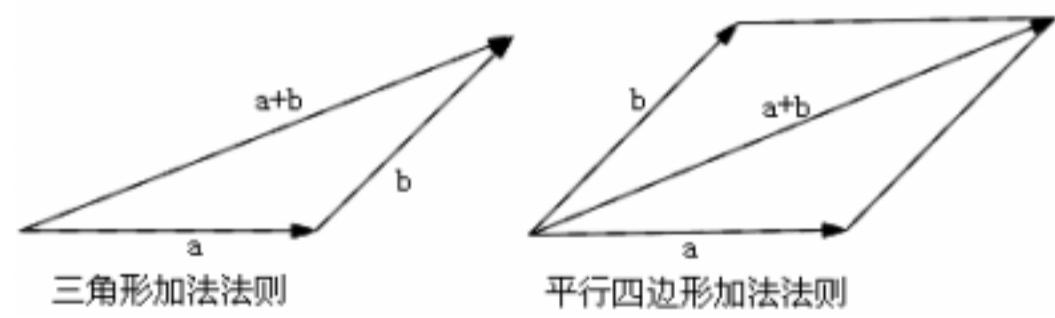
3、方向相同或相反的非零向量叫做 平行向量（或共线向量）. 规定：零向量与任意向量平行 .

§ 2.1.3、相等向量与共线向量

1、长度相等且方向相同的向量叫做 相等向量.

§ 2.2.1、向量加法运算及其几何意义

1、三角形加法法则 和 平行四边形加法法则.

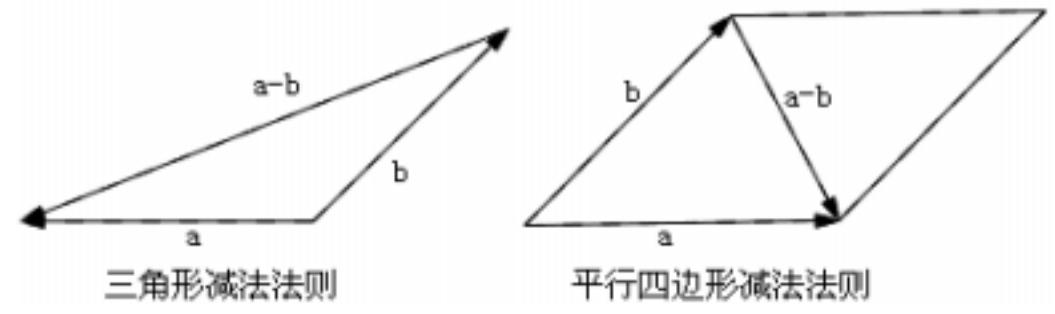


2、 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

§ 2.2.2、向量减法运算及其几何意义

1、与 \vec{a} 长度相等方向相反的向量叫做 \vec{a} 的相反向量.

2、三角形减法法则 和 平行四边形减法法则.



§ 2.2.3、向量数乘运算及其几何意义

1、规定：实数 λ 与向量 \vec{a} 的积是一个向量，这种运

算叫做 向量的数乘。记作： $\lambda\vec{a}$ ，它的长度和方向规定如下：

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|,$$

当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 \vec{a} 的方向相同；当

$\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 \vec{a} 的方向相反。

2、平面向量共线定理：向量 $\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$ 与 \vec{b} 共线，当

且仅当有唯一一个实数 λ ，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

§ 2.3.1、平面向量基本定理

1、平面向量基本定理：如果 \vec{e}_1, \vec{e}_2 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内任一向量 \vec{a} ，有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ，使 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$.

§ 2.3.2、平面向量的正交分解及坐标表示

1、 $\vec{a} = xi + yj = (x, y)$.

§ 2.3.3、平面向量的坐标运算

1、设 $\vec{a} = (x_1, y_1) \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则：

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1),$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1.$$

2、设 $A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)$ ，则：

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

§ 2.3.4、平面向量共线的坐标表示

1、设 $A(x_1, y_1) B(x_2, y_2) C(x_3, y_3)$ ，则

线段 AB 中点坐标为 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$,

ABC 的重心坐标为 $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$.

§ 2.4.1、平面向量数量积的物理背景及其含义

$$1、\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta.$$

$$2、\vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 方向上的投影为: } |\vec{a}| \cos \theta.$$

$$3、\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

$$4、|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

$$5、\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

§ 2.4.2、平面向量数量积的坐标表示、模、夹角

1、设 $\vec{a} = (x_1, y_1) \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

2、设 $A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)$ ，则：

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

3、两向量的夹角公式

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

4、点的平移公式

平移前的点为 $P(x, y)$ （原坐标），平移后的对应点

为 $P'(x', y')$ （新坐标），平移向量为 $\vec{PP'} = (h, k)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k. \end{cases}$$

函数 $y = f(x)$ 的图像按向量 $\vec{a} = (h, k)$ 平移后的

图像的解析式为 $y - k = f(x - h)$.

§ 2.5.1、平面几何中的向量方法

§ 2.5.2、向量在物理中的应用举例

知识链接：空间向量

空间向量的许多知识可由平面向量的知识类比而得。下面对空间向量在立体几何中证明，求值的应用进行总结归纳。

1、直线的方向向量和平面的法向量

. 直线的方向向量：

若 A, B 是直线 $|$ 上的任意两点，则 \overrightarrow{AB} 为直线 $|$ 的一个方向向量；与 \overrightarrow{AB} 平行的任意非零向量也是直线 $|$ 的方向向量。

. 平面的法向量：

若向量 n 所在直线垂直于平面 α ，则称这个向量垂直于平面 α ，记作 $n \perp \alpha$ ，如果 $n \perp \alpha$ ，那么向量 n 叫做平面 α 的法向量。

. 平面的法向量的求法（待定系数法）：

建立适当的坐标系。

设平面 α 的法向量为 $n = (x, y, z)$ 。

求出平面内两个不共线向量的坐标

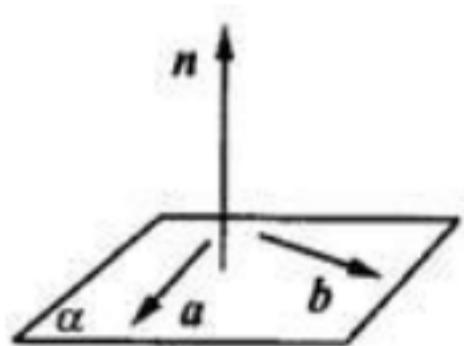
$$a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3).$$

根据法向量定义建立方程组

$$\begin{cases} n \cdot a = 0 \\ n \cdot b = 0 \end{cases}$$

解方程组，取其中一组解，即得平面 α 的法向量。

(如图)



2、用向量方法判定空间中的平行关系

线线平行

设直线 $|_1, |_2$ 的方向向量分别是 a, b ，则要证明 $|_1 \parallel |_2$ ，只需证明 $a \parallel b$ ，即 $a = kb$ ($k \in \mathbb{R}$)。

即：两直线平行或重合 \Leftrightarrow 两直线的方向向量共线。

线面平行

(法一) 设直线 $|$ 的方向向量是 a ，平面 α 的法向量是 u ，则要证明 $| \parallel \alpha$ ，只需证明 $a \perp u$ ，即 $a \cdot u = 0$ 。

即：直线与平面平行 \Leftrightarrow 直线的方向向量与该平面的法向量垂直且直线在平面外

(法二) 要证明一条直线和一个平面平行，也可以在平面内找一个向量与已知直线的方向向量是共线向量即可。

面面平行

若平面 α 的法向量为 u ，平面 β 的法向量为 v ，要证 $\alpha \parallel \beta$ ，只需证 $u \parallel v$ ，即证 $u = \lambda v$ 。

即：两平面平行或重合 \Leftrightarrow 两平面的法向量共线。

3、用向量方法判定空间的垂直关系

线线垂直

设直线 $|_1, |_2$ 的方向向量分别是 a, b ，则要证明 $|_1 \perp |_2$ ，只需证明 $a \perp b$ ，即 $a \cdot b = 0$ 。

即：两直线垂直 \Leftrightarrow 两直线的方向向量垂直。

线面垂直

(法一) 设直线 $|$ 的方向向量是 a ，平面 α 的法向量是 u ，则要证明 $| \perp \alpha$ ，只需证明 $a \parallel u$ ，即 $a = \lambda u$ 。

(法二) 设直线 $|$ 的方向向量是 a ，平面 α 内的两

个相交向量分别为 m, n ，若 $\begin{cases} a \cdot m = 0 \\ a \cdot n = 0 \end{cases}$ ，则 $| \perp \alpha$ 。

即：直线与平面垂直 \Leftrightarrow 直线的方向向量与平面的法向量共线 \Leftrightarrow 直线的方向向量与平面内两条不共线直线的方向向量都垂直。

面面垂直

若平面 α 的法向量为 u ，平面 β 的法向量为 v ，要证 $\alpha \perp \beta$ ，只需证 $u \perp v$ ，即证 $u \cdot v = 0$ 。

即：两平面垂直 \Leftrightarrow 两平面的法向量垂直。

4、利用向量求空间角

求异面直线所成的角

已知 a, b 为两异面直线， A, C 与 B, D 分别是 a, b 上的任意两点， a, b 所成的角为 θ ，

$$\text{则 } \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD}|}$$

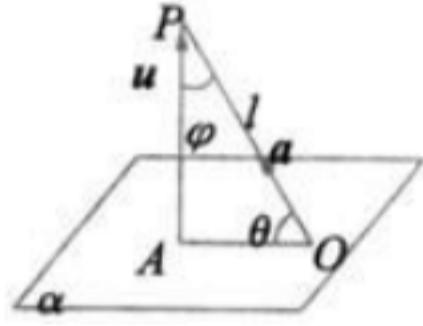
求直线和平面所成的角

定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角叫做这条斜线和这个平面所成的角。

求法：设直线 l 的方向向量为 \vec{a} ，平面 α 的法向量为 \vec{u} ，直线与平面所成的角为 θ ， \vec{a} 与 \vec{u} 的夹角为 φ ，

则 θ 为 φ 的余角或 φ 的补角的余角。即有：

$$\sin\theta = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{u}|}{|\vec{a}| |\vec{u}|}$$

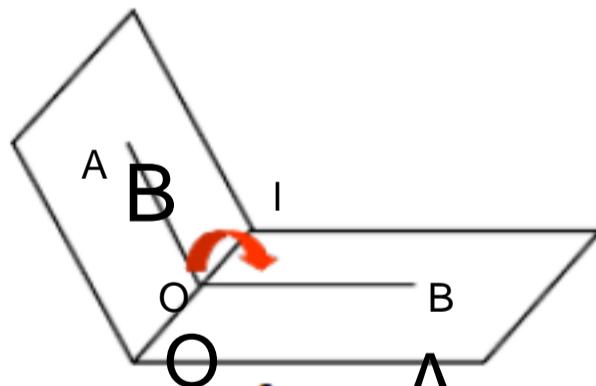


求二面角

定义：平面内的一条直线把平面分为两个部分，其中的每一部分叫做半平面；从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这条直线叫做二面角的棱，每个半平面叫做二面角的面。

二面角的平面角是指在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱上任取一点 O ，分别在两个半平面内作射线 $AO \perp l, BO \perp l$ ，则 $\angle AOB$ 为二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角。

如图：



求法：设二面角 $\alpha - l - \beta$ 的两个半平面的法向量

分别为 \vec{m}, \vec{n} ，再设 \vec{m}, \vec{n} 的夹角为 φ ，二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角为 θ ，则二面角 θ 为 \vec{m}, \vec{n} 的夹角 φ 或其补角 $\pi - \varphi$ 。

根据具体图形确定 θ 是锐角或是钝角：

如果 θ 是锐角，则 $\cos\theta = |\cos\varphi| = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|}$ ，

$$\text{即 } \theta = \arccos \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|};$$

如果 θ 是钝角，则 $\cos\theta = -|\cos\varphi| = -\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|}$ ，

$$\text{即 } \theta = \arccos \left(-\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} \right).$$

5、利用法向量求空间距离

点 Q 到直线 l 距离

若 Q 为直线 l 外的一点， P 在直线 l 上， \vec{a} 为直线 l 的方向向量， $\vec{b} = \vec{PQ}$ ，则点 Q 到直线 l 距离为

$$h = \frac{1}{|\vec{a}|} \sqrt{(|\vec{a}| |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

点 A 到平面 α 的距离

若点 P 为平面 α 外一点，点 M 为平面 α 内任一点，平面 α 的法向量为 \vec{n} ，则 P 到平面 α 的距离就等于

MP 在法向量 \vec{n} 方向上的投影的绝对值。

$$\begin{aligned} \text{即 } d &= |\vec{MP}| \cos(\vec{n}, \vec{MP}) \\ &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{MP}|}{|\vec{n}| |\vec{MP}|} \\ &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{MP}|}{|\vec{n}|} \end{aligned}$$

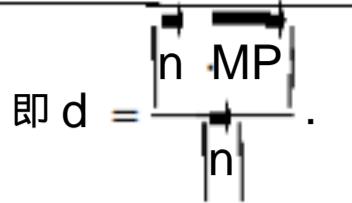
直线 a 与平面 α 之间的距离

当一条直线和一个平面平行时，直线上的各点到平面的距离相等。由此可知，直线到平面的距离可转化为求直线上任一点到平面的距离，即转化为点面距离。

$$\text{即 } d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{MP}|}{|\vec{n}|}$$

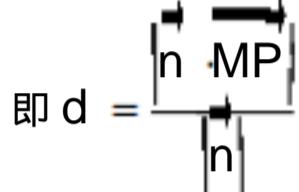
两平行平面 α, β 之间的距离

利用两平行平面间的距离处处相等，可将两平行平面间的距离转化为求点面距离。



异面直线间的距离

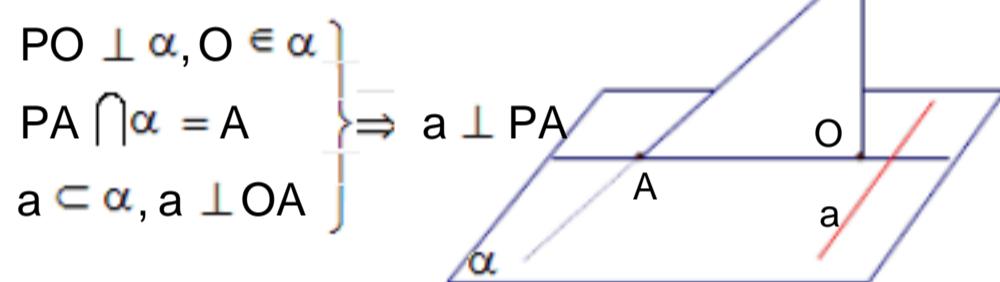
设向量 n 与两异面直线 a, b 都垂直， $M \in a, P \in b$ ，则两异面直线 a, b 间的距离 d 就是 MP 在向量 n 方向上投影的绝对值。



6、三垂线定理及其逆定理

三垂线定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

推理模式：



概括为：垂直于射影就垂直于斜线。

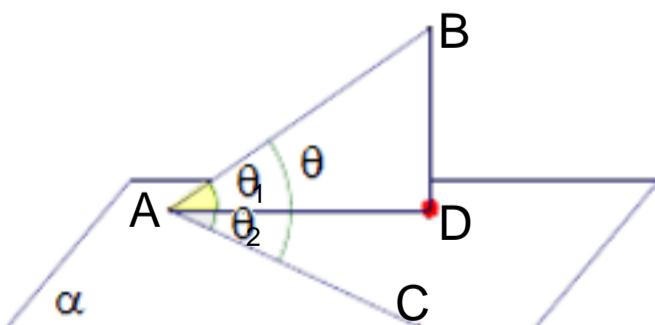
三垂线定理的逆定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直。

推理模式：
 $\left. \begin{array}{l} PO \perp \alpha, O \in \alpha \\ PA \cap \alpha = A \\ a \subset \alpha, a \perp AP \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp AO$

概括为：垂直于斜线就垂直于射影。

7、三余弦定理

设 AC 是平面 α 内的任一条直线， AD 是 α 的一条斜线 AB 在 α 内的射影，且 $BD \perp AD$ ，垂足为 D 。设 AB 与 α (AD) 所成的角为 θ_1 ， AD 与 AC 所成的角为 θ_2 ， AB 与 AC 所成的角为 θ 。则 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2$ 。



8、面积射影定理

已知平面 β 内一个多边形的面积为 $S(S_{原})$ ，它在平面 α 内的射影图形的面积为 $S'(S_{射})$ ，平面 α 与平面 β 所成的二面角的大小为锐二面角 θ ，则

$$\cos \theta = \frac{S'}{S} = \frac{S_{射}}{S_{原}}.$$

9、一个结论

长度为 l 的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为 l_1, l_2, l_3 ，夹角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ，则有 $l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \Leftrightarrow \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3 = 2$ 。

(立体几何中长方体对角线长的公式是其特例)

必修 5 数学知识点

第一章：解三角形

1、正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

(其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径)

$$\Leftrightarrow a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C;$$

$$\Leftrightarrow \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R};$$

$$\Leftrightarrow a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

用途：已知三角形两角和任一边，求其它元素；

已知三角形两边和其中一边的对角，求其它

元素。

2、余弦定理：

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{array} \right.$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

用途：已知三角形两边及其夹角，求其它元素；

已知三角形三边，求其它元素。

做题中两个定理经常结合使用。

3、三角形面积公式：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

4、三角形内角和定理：

在 $\triangle ABC$ 中，有 $A + B + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi - (A + B)$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \Leftrightarrow 2C = 2\pi - 2(A+B).$$

5、一个常用结论：

在 $\triangle ABC$ 中， $a > b \Leftrightarrow \sin A > \sin B \Leftrightarrow A > B$ ；

若 $\sin 2A = \sin 2B$ ，则 $A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$. 特别注意，

在三角函数中， $\sin A > \sin B \Leftrightarrow A > B$ 不成立。

第二章：数列

1、数列中 a_n 与 S_n 之间的关系：

$$a_n = \begin{cases} S_1, & (n=1) \\ S_n - S_{n-1}, & (n \geq 2) \end{cases}$$

注意通项能否合并。

2、等差数列：

定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，即 $a_n - a_{n-1} = d$ ，($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^+$)，

那么这个数列就叫做等差数列。

等差中项：若三数 a 、 A 、 b 成等差数列

$$\Leftrightarrow A = \frac{a+b}{2}$$

通项公式： $a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$

或 $a_n = pn + q$ (p 、 q 是常数) .

前 n 项和公式：

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

常用性质：

若 $m+n=p+q$ ($m, n, p, q \in \mathbb{N}_+$)，则

$$a_m + a_n = a_p + a_q;$$

下标为等差数列的项 $(a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots)$ ，仍组成

等差数列；

数列 $\{a_n + b\}$ (λ, b 为常数) 仍为等差数列；

若 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 是等差数列，则 $\{ka_n\}$ 、 $\{ka_n + pb_n\}$ (k, p 是非零常数)、 $\{a_{p+qn}\}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$)、... 也成等差数列。

单调性： $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则：

) $d > 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 为递增数列；

) $d < 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 为递减数列；

) $d = 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 为常数列；

数列 $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow a_n = pn + q$ (p, q 是常数)

若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，则 $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k} \dots$ 是等差数列。

3、等比数列

定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列。

等比中项：若三数 a 、 G 、 b 成等比数列 $\Rightarrow G^2 = ab$ ，(ab 同号)。反之不一定成立。

通项公式： $a_n = a_1 q^{n-1} = a_m q^{n-m}$

$$\text{前 } n \text{ 项和公式} : S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

常用性质

若 $m+n=p+q$ ($m, n, p, q \in \mathbb{N}_+$)，则

$$a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q;$$

$a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots$ 为等比数列，公比为 q^k (下标成

等差数列，则对应的项成等比数列)

数列 $\{\lambda a_n\}$ (λ 为不等于零的常数) 仍是公比为 q 的

等比数列；正项等比数列 $\{a_n\}$ ；则 $\{\lg a_n\}$ 是公差为

$\lg q$ 的等差数列；

若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $\{ca_n\}$ 、 $\{a_n^2\}$ ， $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ ，

$\{a_n^r\}$ ($r \in \mathbb{Z}$) 是等比数列，公比依次是 $q, q^2, \frac{1}{q}, q^r$.

单调性：

$a_1 > 0, q > 1$ 或 $a_1 < 0, 0 < q < 1 \Rightarrow \{a_n\}$ 为递增数列；

$a_1 > 0, 0 < q < 1$ 或 $a_1 < 0, q > 1 \Rightarrow \{a_n\}$ 为递减数列；

$q = 1 \Rightarrow \{a_n\}$ 为常数列；

$q < 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 为摆动数列；

既是等差数列又是等比数列的数列是常数列。

若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，则 $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k} \dots$ 是等比数列。

4、非等差、等比数列通项公式的求法

类型 观察法：已知数列前若干项，求该数列的通项时，一般对所给的项观察分析，寻找规律，从而根据规律写出此数列的一个通项。

类型 公式法：若已知数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系，求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 可用公式

$$a_n = \begin{cases} S_1, & (n=1) \\ S_n - S_{n-1}, & (n \geq 2) \end{cases}$$

用此公式时要注意结论有两种可能，一种是“一分为二”，即分段式；另一种是“合二为一”，即 a_1 和 a_n 合为一个表达式，（要先分 $n=1$ 和 $n \geq 2$ 两种情况分别进行运算，然后验证能否统一）。

类型 累加法：

形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关

于 n 的函数）可构造：
$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = f(n-1) \\ a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2) \\ \dots \\ a_2 - a_1 = f(1) \end{cases}$$

将上述 $n-1$ 个式子两边分别相加，可得：

$$a_n = f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(2) + f(1) + a_1, (n \geq 2)$$

若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数，累加后可转化为等差数列求和；

若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数，累加后可转化为等比数列求和；

若 $f(n)$ 是关于 n 的二次函数，累加后可分组求和；

若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数，累加后可裂项求和。

类型 累乘法：

形如 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ 型的递推数列（其中 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$ ）

$$\begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1) \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2) \\ \dots \\ \frac{a_2}{a_1} = f(1) \end{cases}$$

将上述 $n-1$ 个式子两边分别相乘，可得：

$$a_n = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdots \cdot f(2) \cdot f(1) \cdot a_1, (n \geq 2)$$

有时若不能直接用，可变形成这种形式，然后用这种方法求解。

类型 构造数列法：

(一) 形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型的递推式：

其通项可通过待定系数法构造等比数列来求。方法有如下两种：

- (1) 若 $p=1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；
(2) 若 $q=0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；
(3) 若 $p \neq 1$ 且 $q \neq 0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为线性递推数列，

其通项可通过待定系数法构造等比数列来求。方法有如下两种：

法一：设 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$ ，展开移项整理得

$a_{n+1} = pa_n + (p-1)\lambda$ ，与题设 $a_{n+1} = pa_n + q$ 比较系数（待定系数法）得

$$\lambda = \frac{q}{p-1}, (p \neq 0) \Rightarrow a_{n+1} + \frac{q}{p-1} = p(a_n + \frac{q}{p-1})$$

$\Rightarrow a_n + \frac{q}{p-1} = p(a_{n-1} + \frac{q}{p-1})$ ，即 $\left\{ a_n + \frac{q}{p-1} \right\}$ 构成

以 $a_1 + \frac{q}{p-1}$ 为首相，以 p 为公比的等比数列。再利用

等比数列的通项公式求出 $\left\{a_n + \frac{q}{p-1}\right\}$ 的通项整理可

得 a_n 。

法二：由 $a_{n+1} = pa_n + q$ 得 $a_n = pa_{n-1} + q (n \geq 2)$ 两式相减并整理得 $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = p$ ，即 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 构成以

$a_2 - a_1$ 为首相，以 p 为公比的等比数列。求出

$\{a_{n+1} - a_n\}$ 的通项再转化为 类型（累加法）便可求出 a_n 。

(二) 形如 $a_{n+1} = pa_n + f(n) (p \neq 1)$ 型的递推式：

当 $f(n)$ 为一次函数类型（即等差数列）时：

法一：设 $a_n + An + B = p [a_{n-1} + A(n-1) + B]$ ，通过待定系数法确定 A, B 的值，转化成以 $a_1 + A + B$ 为首相，以 p 为公比的等比数列 $\{a_n + An + B\}$ ，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n + An + B\}$ 的通项整理可得 a_n 。

法二：当 $f(n)$ 的公差为 d 时，由递推式得：

$a_{n+1} = pa_n + f(n)$ ， $a_n = pa_{n-1} + f(n-1)$ 两式相减得： $a_{n+1} - a_n = p(a_n - a_{n-1}) + d$ ，令 $b_n = a_n + a_n$ 得： $b_n = pb_{n-1} + d$ 转化为 类型（-）求出 b_n ，再用类型（累加法）便可求出 a_n 。

当 $f(n)$ 为指数函数类型（即等比数列）时：

法一：设 $a_n + \lambda f(n) = p [a_{n-1} + \lambda f(n-1)]$ ，通过待定系数法确定 λ 的值，转化成以 $a_1 + \lambda f(1)$ 为首相，

以 p 为公比的等比数列 $\{a_n + \lambda f(n)\}$ ，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n + \lambda f(n)\}$ 的通项整理可得 a_n 。

法二：当 $f(n)$ 的公比为 q 时，由递推式得：

$a_{n+1} = pa_n + f(n) \quad , \quad a_n = pa_{n-1} + f(n-1)$ ，两边同时乘以 q 得 $a_n q = pqa_{n-1} + qf(n-1) \quad , \quad$ 由两式相减得 $a_{n+1} - a_n q = p(a_n - qa_{n-1})$ ，即 $\frac{a_{n+1} - qa_n}{a_n - qa_{n-1}} = p$ ，在转化为 类型（-）便可求出 a_n 。

法三：递推公式为 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ （其中 p, q 均为常数）或 $a_{n+1} = pa_n + rq^n$ （其中 p, q, r 均为常数）时，要先在原递推公式两边同时除以 q^{n+1} ，得：

$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$ ，引入辅助数列 $\{b_n\}$ （其中

$b_n = \frac{a_n}{q^n}$ ），得： $b_{n+1} = \frac{p}{q} b_n + \frac{1}{q}$ 再应用类型（-）的方法解决。

当 $f(n)$ 为任意数列时，可用 通法：

在 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ 两边同时除以 p^{n+1} 可得到

$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{f(n)}{p^{n+1}}$ ，令 $\frac{a_n}{p^n} = b_n$ ，则 $b_{n+1} = b_n + \frac{f(n)}{p^{n+1}}$ ，

在转化为 类型（累加法），求出 b_n 之后得 $a_n = p^n b_n$ 。

类型 对数变换法：

形如 $a_{n+1} = pa^q (p > 0, a_n > 0)$ 型的递推式：

在原递推式 $a_{n+1} = pa^q$ 两边取对数得

$\lg a_{n+1} = q \lg a_n + \lg p$ ，令 $b_n = \lg a_n$ 得：

$b_{n+1} = qb_n + lg p$, 化归为 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型, 求出 b_n

之后得 $a_n = 10^{b_n}$. (注意: 底数不一定要取 10, 可根据题意选择)。

类型 倒数变换法:

形如 $a_{n+1} - a_n = pa_{n+1}a_n$ (p 为常数且 $p \neq 0$) 的递推

式: 两边同除于 $a_{n+1}a_n$, 转化为 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + p$ 形式,

化归为 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型求出 $\frac{1}{a_n}$ 的表达式, 再求 a_n ;

还有形如 $a_{n+1} = \frac{ma_n}{pa_n + q}$ 的递推式, 也可采用取倒数方

法转化成 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{m}{q} \frac{1}{a_n} + \frac{m}{p}$ 形式, 化归为 $a_{n+1} = pa_n + q$

型求出 $\frac{1}{a_n}$ 的表达式, 再求 a_n .

类型 形如 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ 型的递推式:

用待定系数法, 化为特殊数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$ 的形式

求解。方法为: 设 $a_{n+2} - ka_{n+1} = h(a_{n+1} - ka_n)$, 比较

系数得 $h + k = p, -hk = q$, 可解得 h, k , 于是

$\{a_{n+1} - ka_n\}$ 是公比为 h 的等比数列, 这样就化归为

$a_{n+1} = pa_n + q$ 型。

总之, 求数列通项公式可根据数列特点采用以上不同方法求解, 对不能转化为以上方法求解的数列, 可用归纳、猜想、证明方法求出数列通项公式 a_n .

5. 非等差、等比数列前 n 项和公式的求法

错位相减法

若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列,

则数列 $\{a_n b_n\}$ 的求和就要采用此法.

将数列 $\{a_n b_n\}$ 的每一项分别乘以 $\{b_n\}$ 的公比,

然后在错位相减, 进而可得到数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和.

此法是在推导等比数列的前 n 项和公式时所用的方法.

裂项相消法

一般地, 当数列的通项 $a_n = \frac{c}{(an+b_1)(an+b_2)}$

(a, b_1, b_2, c 为常数) 时, 往往可将 a_n 变成两项的差, 采用裂项相消法求和.

可用待定系数法进行裂项:

设 $a_n = \frac{\lambda}{an+b_1} - \frac{\lambda}{an+b_2}$, 通分整理后与原式相

比较, 根据对应项系数相等得 $\lambda = \frac{c}{b_2 - b_1}$, 从而可得

$$\frac{c}{(an+b_1)(an+b_2)} = \frac{c}{(b_2 - b_1)} \left(\frac{1}{an+b_1} - \frac{1}{an+b_2} \right).$$

常见的拆项公式有:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{a-b} (\sqrt{a} - \sqrt{b});$$

$$C_n^{m-1} = C_{n+1}^m - C_n^m;$$

$$n \cdot n! = (n+1)! - n!.$$

分组法求和

有一类数列, 既不是等差数列, 也不是等比数列, 若将这类数列适当拆开, 可分为几个等差、等比或常见的数列, 然后分别求和, 再将其合并即可. 一般分两步: 找通项公式 由通项公式确定如何分组.

倒序相加法

如果一个数列 $\{a_n\}$, 与首末两项等距的两项之和等于首末两项之和, 则可用把正着写与倒着写的两个和式相加, 就得到了一个常数列的和, 这种求和方法称为倒序相加法。特征: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$

记住常见数列的前 n 项和:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2;$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

第三章: 不等式

§ 3.1、不等关系与不等式

1、不等式的基本性质

(对称性) $a > b \Leftrightarrow b > a$

(传递性) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$

(可加性) $a > b \Leftrightarrow a+c > b+c$

(同向可加性) $a > b, c > d \Rightarrow a+c > b+d$

(异向可减性) $a > b, c < d \Rightarrow a-d > b-c$

(可积性) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$

$$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

(同向正数可乘性) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

(异向正数可除性) $a > b > 0, 0 < c < d \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

(平方法则) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ ($n \in \mathbb{N}$, 且 $n > 1$)

(开方法则) $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbb{N}$, 且 $n > 1$)

(倒数法则) $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}; a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

2、几个重要不等式

$a^2+b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbb{R}$), (当且仅当 $a=b$ 时取 " $=$ " 号). 变形公式: $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

(基本不等式) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$), (当且仅当 $a=b$ 时取到等号).

变形公式: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

用基本不等式求最值时 (积定和最小, 和定积最大), 要注意满足三个条件 “一正、二定、三相等” .

(三个正数的算术—几何平均不等式)

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+) \quad (\text{当且仅当 } a=b=c \text{ 时取到等号})$$

$a=b=c$ 时取到等号).

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(当且仅当 $a=b=c$ 时取到等号).

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

(当且仅当 $a=b=c$ 时取到等号).

$$\text{若 } ab > 0, \text{ 则 } \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 \quad (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时取等号})$$

$$\text{若 } ab < 0, \text{ 则 } \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq -2 \quad (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时取等号})$$

$$\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} < 1 < \frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$$

其中 ($a > b > 0, m > 0, n > 0$)

规律: 小于 1 同加则变大, 大于 1 同加则变小.

当 $a > 0$ 时 $|x| > a \Leftrightarrow x^2 > a^2 \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a$;

$$|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a.$$

绝对值三角不等式 $|a|-|b| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$.

3、几个著名不等式

平均不等式: $\frac{2}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

($a, b \in \mathbb{R}^+$), (当且仅当 $a=b$ 时取 " $=$ " 号).

(即调和平均 \leq 几何平均 \leq 算术平均 \leq 平方平均).

变形公式:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

幂平均不等式:

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\dots+a_n)^2.$$

二维形式的三角不等式:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$(x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R})$.

二维形式的柯西不等式：

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). 当且仅当 $ad = bc$ 时，等号成立.

三维形式的柯西不等式：

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

一般形式的柯西不等式：

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

$$\geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

向量形式的柯西不等式：

设 α, β 是两个向量，则 $|\alpha \cdot \beta| \leq |\alpha||\beta|$, 当且仅当

β 是零向量，或存在实数 k ，使 $\alpha = k\beta$ 时，等号成立.

排序不等式（排序原理）：

设 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 为两组实

数. c_1, c_2, \dots, c_n 是 b_1, b_2, \dots, b_n 的任一排列，则

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 \leq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n$$

$$\leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n. (\text{反序和} \leq \text{乱序和} \leq \text{顺序和})$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 时，反序和等于顺序和.

琴生不等式：(特例：凸函数、凹函数)

若定义在某区间上的函数 $f(x)$ ，对于定义域中任

意两点 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \text{ 或 } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

则称 $f(x)$ 为凸（或凹）函数.

4、不等式证明的几种常用方法

常用方法有：比较法（作差，作商法）、综合法、分析法；

其它方法有：换元法、反证法、放缩法、构造法，

函数单调性法，数学归纳法 等.

常见不等式的放缩方法：

舍去或加上一些项，如 $(a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > (a + \frac{1}{2})^2$;

将分子或分母放大（缩小），如

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}, \quad \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)},$$

$$\left(\frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} (k \in \mathbb{N}^*, k > 1) \text{ 等.}$$

5、一元二次不等式的解法

求一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 < 0)

$(a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0)$ 解集的步骤：

一化：化二次项前的系数为正数 .

二判：判断对应方程的根 .

三求：求对应方程的根 .

四画：画出对应函数的图象 .

五解集：根据图象写出不等式的解集 .

规律：当二次项系数为正时， 小于取中间， 大于取两边 .

6、高次不等式的解法：穿根法

分解因式，把根标在数轴上，从右上方依次往下穿

（奇穿偶切），结合原式不等号的方向， 写出不等式的解集 .

7、分式不等式的解法：先 移项通分 标准化，则

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

（“ $<$ 或 \leq ”时同理）

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

规律：把分式不等式等价转化为整式不等式求解 .

8、无理不等式的解法：转化为有理不等式求解

$$\sqrt{f(x)} > a (a > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > a^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < a (a > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < a^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

规律：把无理不等式等价转化为有理不等式，诀窍在于从“小”的一边分析求解。

9、指数不等式的解法：

$$\text{当 } a > 1 \text{ 时, } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

规律：根据指数函数的性质转化。

10、对数不等式的解法

当 $a > 1$ 时,

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

当 $0 < a < 1$ 时,

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

规律：根据对数函数的性质转化。

11、含绝对值不等式的解法：

$$\text{定义法: } |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}.$$

$$\text{平方法: } |f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leq g^2(x).$$

同解变形法，其同解定理有：

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a (a \geq 0);$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ 或 } x \leq -a (a \geq 0);$$

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x) (g(x) \geq 0)$$

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \text{ 或 } f(x) \leq -g(x) (g(x) \geq 0)$$

规律：关键是去掉绝对值的符号。

12、含有两个（或两个以上）绝对值的不等式的解法：

规律：找零点、划区间、分段讨论去绝对值、每段中取交集，最后取各段的并集。

13、含参数的不等式的解法

解形如 $ax^2 + bx + c > 0$ 且含参数的不等式时，要对参数进行分类讨论，分类讨论的标准有：

讨论 a 与 0 的大小；

讨论 Δ 与 0 的大小；

讨论两根的大小。

14、恒成立问题

不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是全体实数（或恒成立）的条件是：

当 $a = 0$ 时 $\Rightarrow b = 0, c > 0;$

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是全体实数（或恒成立）的条件是：

当 $a = 0$ 时 $\Rightarrow b = 0, c < 0;$

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

$$f(x) < a \text{ 恒成立} \Leftrightarrow f(x)_{\max} < a;$$

$$f(x) \leq a \text{ 恒成立} \Leftrightarrow f(x)_{\max} \leq a;$$

$$f(x) > a \text{ 恒成立} \Leftrightarrow f(x)_{\min} > a;$$

$$f(x) \geq a \text{ 恒成立} \Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq a.$$

15、线性规划问题

二元一次不等式所表示的平面区域的判断：

法一：取点定域法：

由于直线 $Ax + By + C = 0$ 的同一侧的所有点的

坐标代入 $Ax + By + C$ 后所得的实数的符号相同。所

以，在实际判断时，往往只需在直线某一侧任取一特

殊点 (x_0, y_0) (如原点) , 由 $Ax_0 + By_0 + C$ 的正负即可判断出 $Ax + By + C > 0$ (或 < 0) 表示直线哪一侧的平面区域 .

即：直线定边界，分清虚实；选点定区域，常选原点 .

法二：根据 $Ax + By + C > 0$ (或 < 0) , 观察 B 的符号与不等式开口的符号 , 若同号 , $Ax + By + C > 0$ (或 < 0) 表示直线上方的区域 ; 若异号 , 则表示直线上方的区域 . 即：同号上方，异号下方 .

二元一次不等式组所表示的平面区域：

不等式组表示的平面区域是各个不等式所表示的平面区域的公共部分 .

利用线性规划求目标函数 $z = Ax + By$ (A, B 为常数) 的最值 :

法一：角点法：

如果目标函数 $z = Ax + By$ (x, y 即为公共区域中点的横坐标和纵坐标) 的最值存在 , 则这些最值都在该公共区域的边界角点处取得 , 将这些角点的坐标代入目标函数 , 得到一组对应 z 值 , 最大的那个数为目标函数 z 的最大值 , 最小的那个数为目标函数 z 的最小值

法二：画——移——定——求：

第一步 , 在平面直角坐标系中画出可行域 ; 第二步 , 作直线 $l_0 : Ax + By = 0$, 平移直线 l_0 (据可行域 , 将直线 l_0 平行移动) 确定最优解 ; 第三步 , 求出最优解 (x, y) ; 第四步 , 将最优解 (x, y) 代入目标函数 $z = Ax + By$ 即可求出最大值或最小值 .

第二步中 最优解的确定方法：

利用 z 的几何意义 : $y = -\frac{A}{B}x + \frac{z}{B}$, $\frac{z}{B}$ 为直线的纵截距 .

若 $B > 0$, 则使目标函数 $z = Ax + By$ 所表示直线的纵截距最大的角点处 , z 取得最大值 , 使直线的纵截距最小的角点处 , z 取得最小值 ;

若 $B < 0$, 则使目标函数 $z = Ax + By$ 所表示直线的纵截距最大的角点处 , z 取得最小值 , 使直线的纵截距最小的角点处 , z 取得最大值 .

常见的目标函数的类型：

“截距”型 : $z = Ax + By$;

“斜率”型 : $z = \frac{y}{x}$ 或 $z = \frac{y-b}{x-a}$;

“距离”型 : $z = x^2 + y^2$ 或 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$z = (x-a)^2 + (y-b)^2$ 或 $z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

在求该“三型”的目标函数的最值时 , 可结合线性规划与代数式的几何意义求解 , 从而使问题简单化 .

选修数学知识点

专题一：常用逻辑用语

1、命题：可以判断真假的语句叫命题；

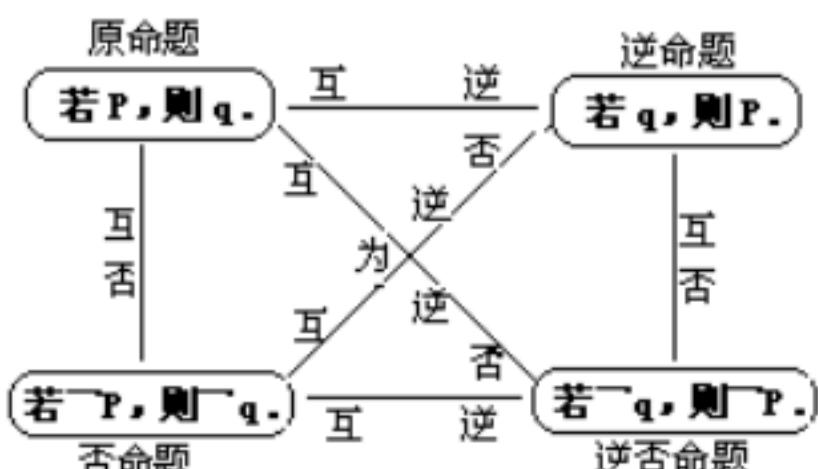
逻辑联结词：“或”“且”“非”这些词就叫做逻辑联结词；

简单命题：不含逻辑联结词的命题；

复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题 .

常用小写的拉丁字母 p, q, r, s, \dots 表示命题 .

2、四种命题及其相互关系



四种命题的真假性之间的关系：

- 、两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；
- 、两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系。

3、充分条件、必要条件与充要条件

、一般地，如果已知 $p \Rightarrow q$ ，那么就说：p是q的充分条件，q是p的必要条件；
若 $p \Leftrightarrow q$ ，则p是q的充分必要条件，简称充要条件。

、充分条件，必要条件与充要条件主要用来区分命题的条件p与结论q之间的关系：

、从逻辑推理关系上看：

若 $p \Rightarrow q$ ，则p是q充分条件，q是p的必要条件；
若 $p \Rightarrow q$ ，但 $q \not\Rightarrow p$ ，则p是q充分而不必要条件；
若 $p \not\Rightarrow q$ ，但 $q \Rightarrow p$ ，则p是q必要而不充分条件；

若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$ ，则p是q的充要条件；

若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$ ，则p是q的既不充分也不必要条件。

、从集合与集合之间的关系上看：

已知 $A = \{x | x \text{ 满足条件 } p\}$, $B = \{x | x \text{ 满足条件 } q\}$ ：

若 $A \subseteq B$ ，则p是q充分条件；

若 $B \subseteq A$ ，则p是q必要条件；

若 $A \subsetneq B$ ，则p是q充分而不必要条件；

若 $B \subsetneq A$ ，则p是q必要而不充分条件；

若 $A = B$ ，则p是q的充要条件；

专题二：圆锥曲线与方程

1. 椭圆

焦点的位置	焦点在x轴上	焦点在y轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
第一定义	到两定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数 $2a$ ，即 $ MF_1 + MF_2 = 2a$ ($2a > F_1F_2 $)	

若 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq A$ ，则p是q的既不充分也不必要条件。

4、复合命题

复合命题有三种形式： p 或 q ($p \vee q$)； p 且 q ($p \wedge q$)；非 p ($\neg p$)。

复合命题的真假判断

“ p 或 q ”形式复合命题的真假判断方法：一真必真；

“ p 且 q ”形式复合命题的真假判断方法：一假必假；

“非 p ”形式复合命题的真假判断方法：真假相对。

5、全称量词与存在量词

全称量词与全称命题

短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“ \forall ”表示。含有全称量词的命题，叫做全称命题。

存在量词与特称命题

短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“ \exists ”表示。含有存在量词的命题，叫做特称命题。

全称命题与特称命题的符号表示及否定

全称命题 $p : \forall x \in M, p(x)$ ，它的否定 $\neg p :$

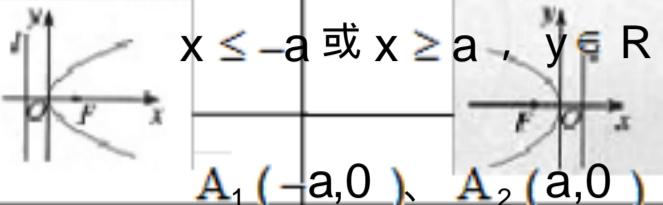
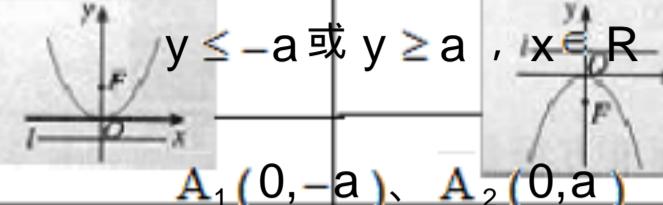
$\exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$. 全称命题的否定是特称命题。

特称命题 $p : \exists x_0 \in M, p(x_0)$ ，它的否定 $\neg p :$

$\forall x \in M, \neg p(x)$. 特称命题的否定是全称命题。

第二定义	与一定点的距离和到一定直线的距离之比为常数 e , 即 $\frac{ MF }{d} = e$ ($0 < e < 1$)	
范围	$-a \leq x \leq a$ 且 $-b \leq y \leq b$	$-b \leq x \leq b$ 且 $-a \leq y \leq a$
顶点	$A_1(-a, 0)$ 、 $A_2(a, 0)$ $B_1(0, -b)$ 、 $B_2(0, b)$	$A_1(0, -a)$ 、 $A_2(0, a)$ $B_1(-b, 0)$ 、 $B_2(b, 0)$
轴长	长轴的长 $= 2a$	短轴的长 $= 2b$
对称性	关于 x 轴、 y 轴对称 , 关于原点中心对称	
焦点	$F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$ 、 $F_2(0, c)$
焦距	$ F_1F_2 = 2c$ ($c^2 = a^2 - b^2$)	
离心率	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ($0 < e < 1$)	
准线方程	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$
焦半径 $M(x_0, y_0)$	左焦半径 : $ MF_1 = a + ex_0$ 右焦半径 : $ MF_2 = a - ex_0$	下焦半径 : $ MF_1 = a + ey_0$ 上焦半径 : $ MF_2 = a - ey_0$
焦点三角形面积	$S_{\triangle MF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$ ($\theta = \angle F_1MF_2$)	
通径	过焦点且垂直于长轴的弦叫通径 : $ HH' = \frac{b^2}{a}$	
(焦点)弦长公式	$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $ AB = \sqrt{1 + k^2} x_1 - x_2 = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - 4x_1 x_2}$	

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)
第一定义	到两定点 F_1 、 F_2 的距离之差的绝对值等于常数 $2a$, 即 $ MF_1 - MF_2 = 2a$ ($0 < 2a < F_1F_2 $)	

第二定义	与一定点的距离和到一定直线的距离之比为常数 e , 即 $\frac{ MF }{d} = e$ ($e > 1$)			
范围		$x \leq -a$ 或 $x \geq a$, $y \in \mathbb{R}$		$y \leq -a$ 或 $y \geq a$, $x \in \mathbb{R}$
顶点	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$		
轴长	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px = 2a$	虚轴的长 $2py/2b$	$x^2 = -2py$
对称性	关于 x 轴、 y 轴对称, 关于原点中心对称			
焦点	$(p > 0)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$	$(p > 0)$, $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$	$(p > 0)$, $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$	$(p > 0)$, $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$
定义	与一定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线 (定点 F 不在定直线 l 上)			
焦距	$ F_1F_2 = 2c$, $0 (c^2 = a^2 + b^2)$			
离心率	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ ($e > 1$)			
准线方程	$x = \pm \frac{a^2}{c}$		$y = \pm \frac{a^2}{c}$	
渐近线方程	$y = \pm \frac{b}{a}x$		$y = \pm \frac{a}{b}x$	
焦半径	M 在右支 $\left\{ \begin{array}{l} \text{左焦: } MF_1 = ex_0 + a \\ \text{右焦: } MF_2 = ex_0 - a \end{array} \right.$ M 在左支 $\left\{ \begin{array}{l} \text{左焦: } MF_1 = -ex_0 - a \\ \text{右焦: } MF_2 = -ex_0 + a \end{array} \right.$		M 在上支 $\left\{ \begin{array}{l} \text{左焦: } MF_1 = ey_0 + a \\ \text{右焦: } MF_2 = ey_0 - a \end{array} \right.$ M 在下支 $\left\{ \begin{array}{l} \text{左焦: } MF_1 = -ey_0 - a \\ \text{右焦: } MF_2 = -ey_0 + a \end{array} \right.$	
焦点三角形面积	$S_{\triangle MF_1F_2} = b^2 \cot \frac{\theta}{2}$ ($\theta = \angle F_1MF_2$)			
通径	过焦点且垂直于长轴的弦叫通径: $ HH' = \frac{b^2}{a}$			

2. 双曲线

3. 抛物线

离心率	$e = 1$			
对称轴	x 轴		y 轴	
范围	$x \geq 0$	$x \leq 0$	$y \geq 0$	$y \leq 0$
焦点	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
焦半径 $M(x_0, y_0)$	$ MF = x_0 + \frac{p}{2}$	$ MF = -x_0 + \frac{p}{2}$	$ MF = y_0 + \frac{p}{2}$	$ MF = -y_0 + \frac{p}{2}$
通径	过抛物线的焦点且垂直于对称轴的弦称为通径： $ HH' = 2p$			
焦点弦长 公式	$ AB = x_1 + x_2 + p$			
参数 p 的几 何意义	参数 p 表示焦点到准线的距离， p 越大，开口越阔			

关于抛物线焦点弦的几个结论：

设 AB 为过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 焦点的弦， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，直线 AB 的倾斜角为 θ ，则

$$x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}, y_1 y_2 = -p^2; \quad |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta};$$

以 AB 为直径的圆与准线相切；

焦点 F 对 A、B 在准线上射影的张角为 $\frac{\pi}{2}$ ；

$$\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{2}{P}.$$

专题三：定积分

1、定积分的概念

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，用分点

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ 将区间

$[a, b]$ 等分成 n 个小区间，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)，作和式

$$L_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(\xi_i), \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时，上}$$

述和式无限接近某个常数，这个常数叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分。记作 $\int_a^b f(x) dx$ ，即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(\xi_i), \text{ 这里， } a \text{ 与 } b \text{ 分别叫}$$

做积分下限与积分上限，区间 $[a, b]$ 叫做积分区间，函

数 $f(x)$ 叫做被积函数， x 叫做积分变量， $f(x)dx$ 叫做被积式。

说明：

(1) 定积分的值是一个常数，可正、可负、可为零；

(2) 用定义求定积分的四个基本步骤：分割；近似代替；求和；取极限。

2、微积分基本定理（牛顿-莱布尼兹公式）

如果 $F'(x) = f(x)$ ，且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

【其中 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的一个原函数，因为 $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ 】

3、常用定积分公式

$$\int 0dx = c \quad (c \text{ 为常数})$$

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c \quad (a \neq 0)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c \quad (a \neq 0)$$

4、定积分的性质

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (k \text{ 为常数}) ;$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx ;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (\text{其中 } a < c < b) ;$$

利用函数的奇偶性求定积分：若 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ ；若 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

5、定积分的几何意义

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示在区间 $[a, b]$ 上的曲线

$y = f(x)$ 与直线 $x = a$ 、 $x = b$ 以及 x 轴所围成的平面图形（曲边梯形）的面积的代数和，即

$\int_a^b f(x)dx = S_{x \text{ 轴上方}} - S_{x \text{ 轴下方}}$ 。（在 x 轴上方的面积取正号，在 x 轴下方的面积取负号）

6、求曲边梯形面积的方法与步骤

画出草图，在直角坐标系中画出曲线或直线的大致图像；

借助图形 确定出被积函数，求出交点坐标，确定积分的上、下限；

写出定积分表达式；

求出曲边梯形的面积和，即各积分的绝对值的和。

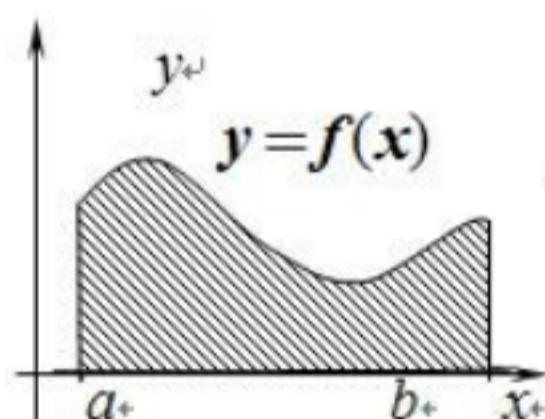
7、定积分的简单应用

定积分在几何中的应用：

几种常见的曲边梯形面积的计算方法：

(1) x 型区域：

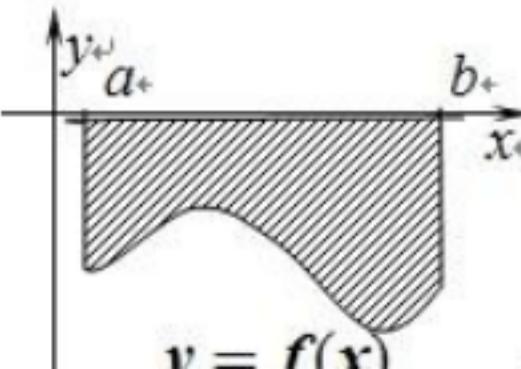
由一条曲线 $y = f(x)$ (其中 $f(x) \geq 0$) 与直线 $x = a$, $x = b$ ($a < b$) 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积： $S = \int_a^b f(x)dx$ (如图(1))；

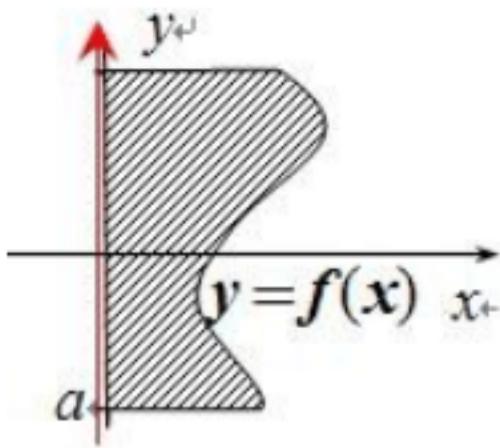


图(1)

由一条曲线 $y = f(x)$ (其中 $f(x) \leq 0$) 与直线 $x = a$, $x = b$ ($a < b$) 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积：

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = - \int_a^b f(x)dx \quad (\text{如图(2)}) ;$$





图(2)

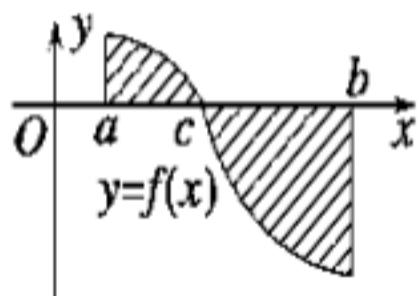
由一条曲线 $y = f(x)$

【当 $a \leq x \leq c$ 时， $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^c f(x) dx \geq 0$ ；

当 $c \leq x \leq b$ 时， $f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_c^b f(x) dx \leq 0$.】

与直线 $x=a, x=b(a < b)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形

$$\text{的面积: } S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right| \\ = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx. \quad (\text{如图(3)})$$



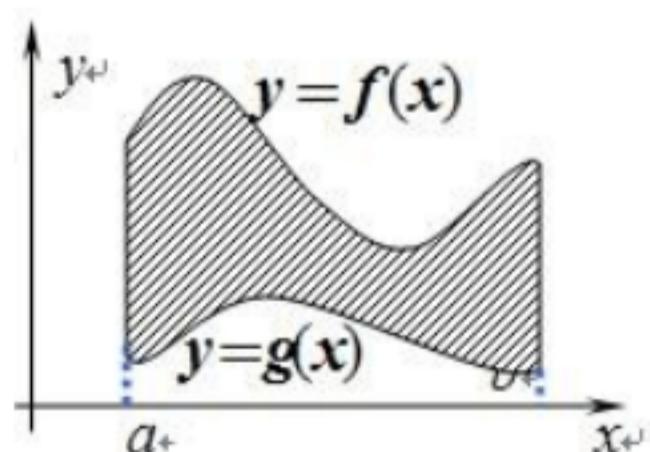
图(3)

由两条曲线 $y = f(x), y = g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$) 与

直线 $x=a, x=b(a < b)$ 所围成的曲边梯形的面积：

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (\text{如图(4)})$$

图(4)



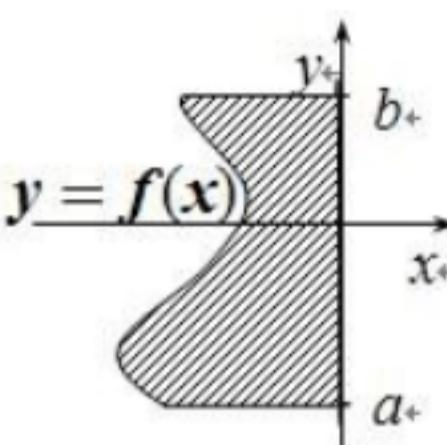
图(4)

(2) y 型区域：

由一条曲线 $y = f(x)$ (其中 $x \geq 0$) 与直线

$y=a, y=b(a < b)$ 以及 y 轴所围成的曲边梯形的面积

，可由 $y = f(x)$ 得 $x = h(y)$ ，然后利用 $S = \int_a^b h(y) dy$ 求出 (如图(5))；

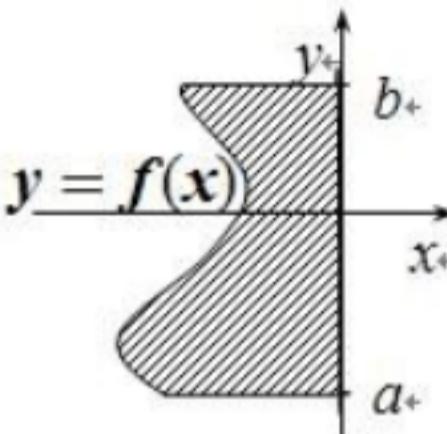


图(5)

由一条曲线 $y = f(x)$ (其中 $x \leq 0$) 与直线

$y=a, y=b(a < b)$ 以及 y 轴所围成的曲边梯形的面积，可由 $y = f(x)$ 先求出 $x = h(y)$ ，然后利用

$$S = \left| \int_a^b h(y) dy \right| = - \int_a^b h(y) dy \quad (\text{如图(6)})$$

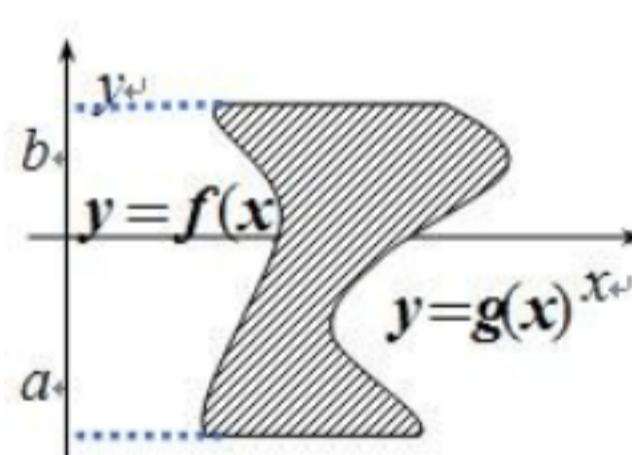


图(6)

由两条曲线 $y = f(x), y = g(x)$ 与直线

$y=a, y=b(a < b)$ 所围成的曲边梯形的面积，可由 $y = f(x), y = g(x)$ 先分别求出 $x = h_1(y)$ ，

$$x = h_2(y)$$
, 然后利用 $S = \int_a^b |h_1(y) - h_2(y)| dy$ 求出 (如图(7))；



图(7)

定积分在物理中的应用：

变速直线运动的路程

作变速直线运动的物体所经过的路程 S ，等于其速

度函数 $v = v(t)$ ($v(t) \geq 0$) 在时间区间 $[a, b]$ 上的定积

$$\text{分，即 } S = \int_a^b v(t) dt.$$

变力作功

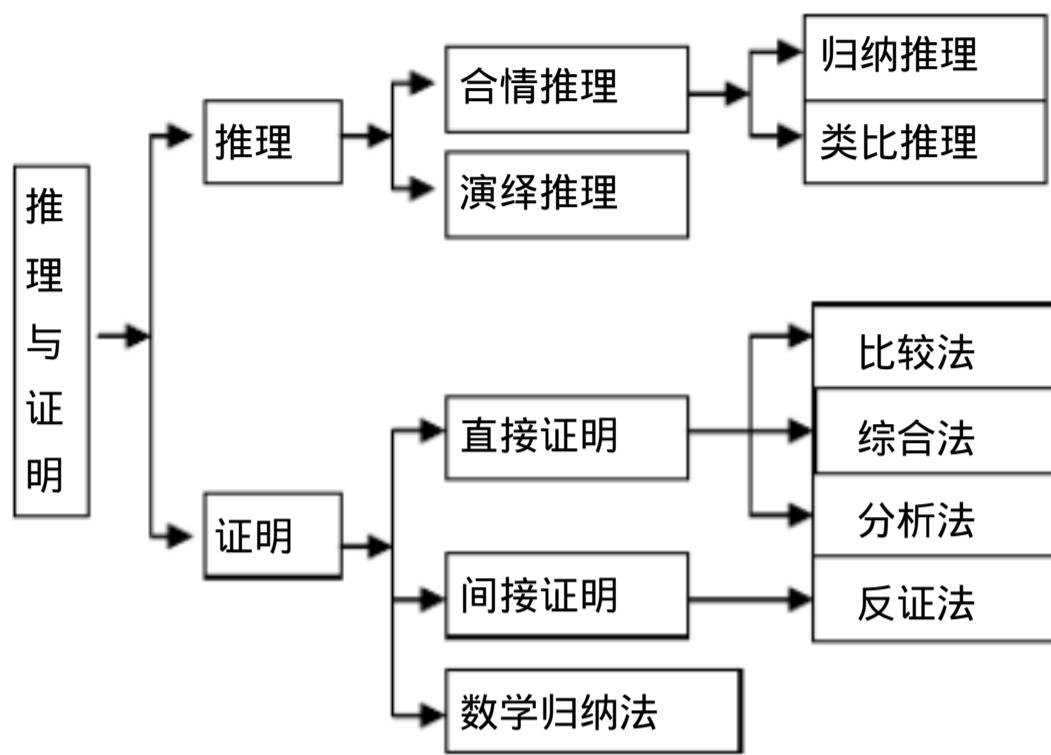
物体在变力 $F(x)$ 的作用下做直线运动，并且物体沿

着与 $F(x)$ 相同的方向从 $x=a$ 移动到 $x=b$ ($a < b$) ,

那么变力 $F(x)$ 所作的功 $W = \int_a^b F(x) dx$.

专题四：推理与证明

知识结构



1、归纳推理

把从个别事实中推演出一般性结论的推理，称为归纳推理（简称归纳）。

简言之，归纳推理是由部分到整体、由特殊到一般的推理。

归纳推理的一般步骤：

- 通过观察个别情况发现某些相同的性质；
- 从已知的相同性质中推出一个明确表述的一般命题（猜想）；
- 证明（视题目要求，可有可无）。

2、类比推理

由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理称为类比推理（简称类比）。

简言之，类比推理是由特殊到特殊的推理。

类比推理的一般步骤：

- 找出两类对象之间可以确切表述的相似特征；
- 用一类对象的已知特征去推测另一类对象的特征，从而得出一个猜想；
- 检验猜想。

3、合情推理

归纳推理和类比推理都是根据已有的事实，经过观察、分析、比较、联想，再进行归纳、类比，然后提出猜想的推理。

归纳推理和类比推理统称为合情推理，通俗地说，合情推理是指“合乎情理”的推理。

4、演绎推理

从一般性的原理出发，推出某个特殊情况下的结

论，这种推理称为演绎推理。

简言之，演绎推理是由一般到特殊的推理。

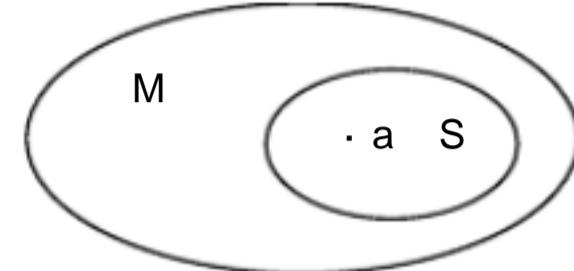
演绎推理的一般模式——“三段论”，包括

大前提——已知的一般原理；

小前提——所研究的特殊情况；

结论——据一般原理，对特殊情况做出的判断。

用集合的观点来理解：若集合 M 中的所有元素都具有性质 P ， S 是 M 的一个子集，那么 S 中所有元素也都具有性质 P 。



从推理所得的结论来看，合情推理的结论不一定正确，有待进一步证明；演绎推理在前提和推理形式都正确的前提下，得到的结论一定正确。

5、直接证明与间接证明

综合法：利用已知条件和某些数学定义、公理、定理等，经过一系列的推理论证，最后推导出所要证明的结论成立。

框图表示：

$$P \Rightarrow Q_1 \rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_2 \rightarrow Q_2 \Rightarrow Q_3 \rightarrow \dots \rightarrow Q_n \Rightarrow Q$$

要点：顺推证法；由因导果。

分析法：从要证明的结论出发，逐步寻找使它成立的充分条件，直至最后，把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件（已知条件、定理、定义、公理等）为止。

框图表示：

$$Q \Leftarrow P_1 \rightarrow P_1 \Leftarrow P_2 \rightarrow P_2 \Leftarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow \text{得到一个明显成立的条件}$$

要点：逆推证法；执果索因。

反证法：一般地，假设原命题不成立，经过正确的推理，最后得出矛盾，因此说明假设错误，从而证明了原命题成立。的证明方法。它是一种间接的证明方法。

反证法证明一个命题的一般步骤：

- (1) (反设) 假设命题的结论不成立；
- (2) (推理) 根据假设进行推理，直到导出矛盾为止；
- (3) (归谬) 断言假设不成立；
- (4) (结论) 肯定原命题的结论成立。

6、数学归纳法

数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题的一种方法。

用数学归纳法证明命题的步骤：

(1)(归纳奠基) 证明当 n 取第一个值 n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}^*$) 时命题成立；

(2)(归纳递推) 假设 $n = k$ ($k \geq n_0$, $k \in \mathbb{N}^*$) 时命题成立，推证当 $n = k + 1$ 时命题也成立。

只要完成了这两个步骤，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立。

用数学归纳法可以证明许多与自然数有关的数学命题，其中包括恒等式、不等式、数列通项公式、几

何中的计算问题等 .

专题五：数系的扩充与复数

1、复数的概念

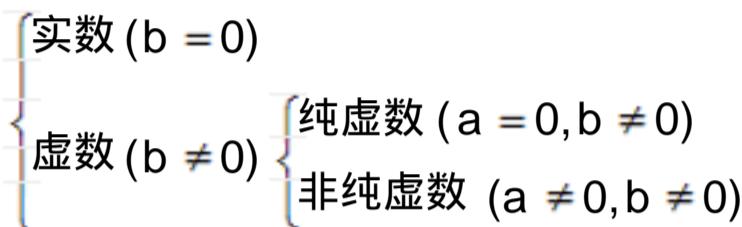
虚数单位 i ;

复数的代数形式 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ;

复数的实部、虚部，虚数与纯虚数 .

2、复数的分类

复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)



3、相关公式

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = b, \text{且 } c = d$$

$$a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\bar{z} = a - bi$$

z, \bar{z} 指两复数实部相同，虚部互为相反数（互为共轭复数）.

4、复数运算

$$\text{复数加减法: } (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i;$$

复数的乘法：

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i;$$

$$\text{复数的除法: } \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

(类似于无理数除法的 分母有理化 \rightarrow 虚数除法的 分母实数化)

5、常见的运算规律

$$(1) |z| = |\bar{z}|; \quad (2) z + \bar{z} = 2a, z - \bar{z} = 2bi;$$

$$(3) z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = a^2 + b^2; (4) \bar{\bar{z}} = z; (5) z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$(6) i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n+4} = 1;$$

$$(7) (1 \pm i)^2 = \pm i; (8) \frac{1+i}{1-i} = i, \frac{1-i}{1+i} = -i, \left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \right)^2 = \pm i$$

$$(9) \text{设 } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 是 } 1 \text{ 的立方虚根，则}$$

$$1 + \omega + \omega^2 = 0, \omega^{3n+1} = \omega, \omega^{3n+2} = \bar{\omega}, \omega^{3n+3} = 1$$

6、复数的几何意义

复平面：用来表示复数的直角坐标系，其中 x 轴叫做复平面的实轴， y 轴叫做复平面的虚轴 .

复数 $z = a + bi$ \longleftrightarrow 复平面内的点 $Z(a, b)$

复数 $z = a + bi$ \longleftrightarrow 平面向量 OZ

专题六：排列组合与二项式定理

1、基本计数原理

分类加法计数原理：（分类相加）

做一件事情，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事情共有 $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种不同的方法 .

分步乘法计数原理：（分步相乘）

做一件事情，完成它需要 n 个步骤，做第一个步骤有 m_1 种不同的方法，做第二个步骤有 m_2 种不同的方法……做第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事情共有 $N = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ 种不同的方法 .

2、排列与组合

排列定义：一般地，从 n 个不同的元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从

n 个不同的元素中任取 m 个元素的一个排列 .

组合定义：一般地，从 n 个不同的元素中任取

m ($m \leq n$) 个元素并成一组，叫做从 n 个不同的元素中任取 m 个元素的一个组合 .

排列数：从 n 个不同的元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同的元素中任取 m 个元素的排列数，记作 A_n^m .

组合数：从 n 个不同的元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素

的所有组合的个数，叫做从 n 个不同的元素中任取 m 个元素的组合数，记作 C_n^m .

排列数公式：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!};$$

$$A_n^n = n! \text{, 规定 } 0! = 1.$$

组合数公式：

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \text{ 或}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

$$C_n^m = C_n^{n-m} \text{, 规定 } C_n^0 = 1.$$

排列与组合的区别： 排列有顺序，组合无顺序 .

排列与组合的联系： $A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$, 即排列就是先

组合再全排列 .

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots2\cdot1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} (m \leq n)$$

排列与组合的两个性质

特殊元素、特殊位置优先法 (元素优先法：先考虑有限制条件的元素的要求，再考虑其他元素；位置优先法：先考虑有限制条件的位置的要求，再考虑其他位置) .

间接法 (对有限制条件的问题，先从总体考虑，再把不符合条件的所有情况去掉) .

相邻问题捆绑法 (把相邻的若干个特殊元素 “捆绑” 为一个大元素，然后再与其余“普通元素”全排列，最后再“松绑”，将特殊元素在这些位置上全排列) .

不相邻 (相间) 问题插空法 (某些元素不能相邻或某些元素要在某特殊位置时可采用插空法，即先安排好没有限制元条件的元素，然后再把有限制条件的元素按要求插入排好的元素之间) .

有序问题组合法 .

选取问题先选后排法 .

至多至少问题间接法 .

相同元素分组可采用隔板法 .

分组问题：要注意区分是平均分组还是非平均分组，平均分成 n 组问题别忘除以 $n!$.

3、二项式定理

二项展开公式：

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n (n \in N_+).$$

二项展开式的通项公式：

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r (0 \leq r \leq n, r \in N, n \in N_+). \text{ 主要用途}$$

是求指定的项 .

项的系数与二项式系数

项的系数与二项式系数是不同的两个概念，但当二项式的两个项的系数都为 1 时，系数就是二项式系数. 如

在 $(ax+b)^n$ 的展开式中，第 $r+1$ 项的二项式系数为 C_n^r ，第 $r+1$ 项的系数为 $C_n^r a^{n-r} b^r$ ；而 $(x+\frac{1}{x})^n$ 的展开式中的系数等于二项式系数；二项式系数一定为正，而项的系数不一定为正 .

$(1+x)^n$ 的展开式：

$$(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^n x^0,$$

若令 $x=1$ ，则有

$$(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$

二项式奇数项系数的和等于二项式偶数项系数

的和. 即 $C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$

二项式系数的性质：

(1) 对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等，即 $C_n^m = C_n^{n-m}$ ；

(2) 增减性与最大值：当 $r \leq \frac{n+1}{2}$ 时，二项式系

数 C_n^r 的值逐渐增大，当 $r \geq \frac{n+1}{2}$ 时， C_n^r 的值逐渐减小，

且在中间取得最大值。当 n 为偶数时，中间一项 (第 $\frac{n}{2}+1$ 项) 的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值。当 n 为奇数时，

中间两项 (第 $\frac{n+1}{2}$ 和 $\frac{n+1}{2}+1$ 项) 的二项式系数

$C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等并同时取最大值 .

系数最大项的求法

设第 r 项的系数 A_r 最大，由不等式组
可确定 r 。
赋值法

若 $(ax+b)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$,

则设 $f(x) = (ax+b)^n$. 有：

$$a_0 = f(0);$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(1);$$

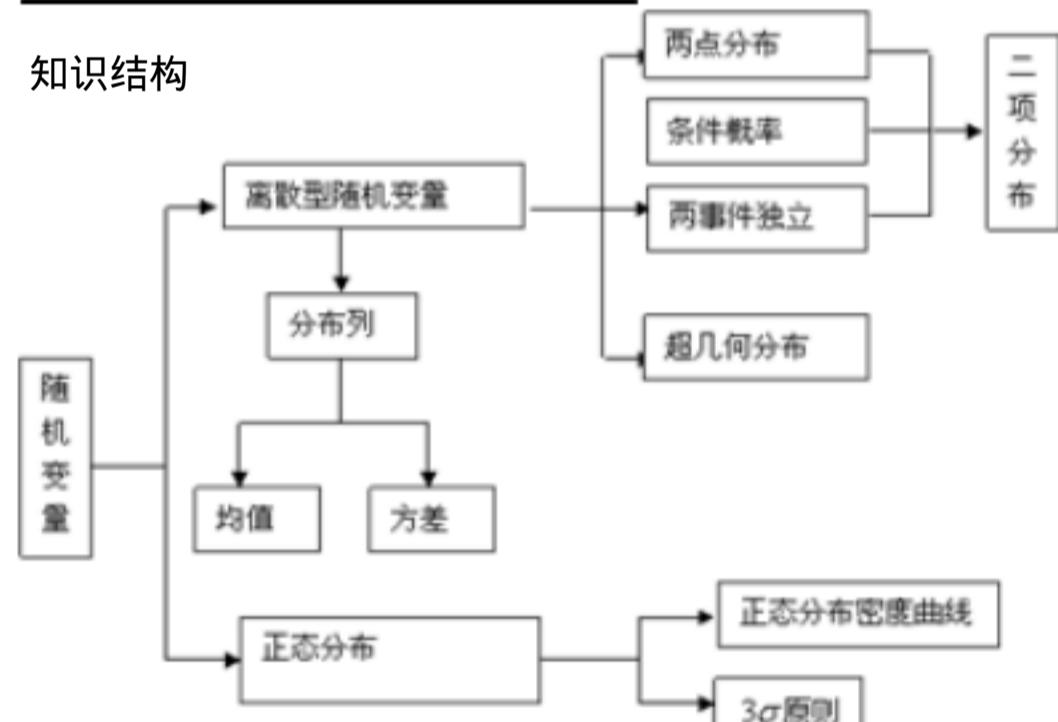
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n = f(-1);$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \dots = \frac{f(1) + f(-1)}{2};$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots = \frac{f(1) - f(-1)}{2}.$$

专题七：随机变量及其分布

知识结构



1. 基本概念

互斥事件：不可能同时发生的两个事件。

如果事件 A, B, C ，其中任何两个都是互斥事件，则说事件 A, B, C 彼此互斥。

当 A, B 是互斥事件时，那么事件 $A+B$ 发生（即 A, B 中有一个发生）的概率，等于事件 A, B 分别发生的概率的和，即

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

对立事件：其中必有一个发生的两个互斥事件。事件

A 的对立事件通常记着 \bar{A} 。

对立事件的概率和等于 1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

特别提醒：“互斥事件”与“对立事件”都是就两个事件而言的，互斥事件是不可能同时发生的两个事件，而对立事件是其中必有一个发生的互斥事件，因此，对立事件必然是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件，也就是说“互斥”是“对立”的必要但不充分的条件。

相互独立事件：事件 A （或 B ）是否发生对事件 B （或 A ）发生的概率没有影响，（即其中一个事件是否发生对另一个事件发生的概率没有影响）。这样的两个事件叫做相互独立事件。

当 A, B 是相互独立事件时，那么事件 $A \cdot B$ 发生（即 A, B 同时发生）的概率，等于事件 A, B 分别发生的概率的积。即

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

若 A, B 两事件相互独立，则 A 与 \bar{B} 、 \bar{A} 与 B 、 \bar{A} 与 \bar{B} 也都是相互独立的。

独立重复试验

一般地，在相同条件下重复做的 n 次试验称为 n 次独立重复试验。

独立重复试验的概率公式

如果在 1 次试验中某事件发生的概率是 p ，那么在 n 次独立重复试验中这个试验恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

条件概率：对任意事件 A 和事件 B ，在已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率，叫做条件概率。记作 $P(B|A)$ ，读作 A 发生的条件下 B 发生的概率。

$$\text{公式: } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) > 0.$$

2. 离散型随机变量

随机变量：如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做随机变量。随机变量常用字母 X, Y, ξ, η 等表示。

离散型随机变量：对于随机变量可能取的值，可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量。

连续型随机变量：对于随机变量可能取的值，可以取某一区间内的一切值，这样的变量就叫做连续型随机变量。

离散型随机变量与连续型随机变量的区别与联系：离散型随机变量与连续型随机变量都是用变量表示随机试验的结果；但是离散型随机变量的结果可以

按一定次序一一列出，而连续性随机变量的结果不可以一一列出。

若 X 是随机变量， $Y = aX + b$ (a, b 是常数) 则 Y

也是随机变量，并且不改变其属性（离散型、连续型）。

3、离散型随机变量的分布列

概率分布（分布列）

设离散型随机变量 X 可能取的不同值为

$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ ，

X 的每一个值 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的概率

$P(X = x_i) = p_i$ ，则称表

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

为随机变量 X 的概率分布，简称 X 的分布列。

性质： $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; \sum_{i=1}^n p_i = 1.$

两点分布

如果随机变量 X 的分布列为

X	0	1
P	$1-p$	p

则称 X 服从两点分布，并称 $p = P(X = 1)$ 为成功概率。

二项分布

如果在一次试验中某事件发生的概率是 p ，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $q = 1 - p$ ，于是得到随机变量 X 的概率分布如下：

X	0	1	\dots	k	\dots	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	\dots	$C_n^k p^k q^{n-k}$	\dots	$C_n^n p^n q^0$

我们称这样的随机变量 X 服从二项分布，记作

$X \sim B(n, p)$ ，并称 p 为成功概率。

判断一个随机变量是否服从二项分布，关键有三点：

对立性：即一次试验中事件发生与否二者必居其一；

重复性：即试验是独立重复地进行了 n 次；

等概率性：在每次试验中事件发生的概率均相等。

注：二项分布的模型是有放回抽样；

二项分布中的参数是 p, k, n 。

超几何分布

一般地，在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中恰有 X 件次品数，则事件 $\{X = k\}$ 发生的

概率为 $P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m$)，于

是得到随机变量 X 的概率分布如下：

X	0	1	\dots	m
P	$\frac{C_M^0 C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	\dots	$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

其中 $m = \min\{M, n\}$, $n \leq N, M \leq N, n, M, N \in \mathbb{N}^*$.

我们称这样的随机变量 X 的分布列为超几何分布列，且称随机变量 X 服从超几何分布。

注：超几何分布的模型是不放回抽样；

超几何分布中的参数是 M, N, n 。其意义分别是

总体中的个体总数、 N 中一类的总数、样本容量。

4、离散型随机变量的均值与方差

离散型随机变量的均值

一般地，若离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

则称

$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_i p_i + \dots + x_n p_n$ 为离散型随机变量 X 的均值或数学期望（简称期望）。它反映了离散型随机变量取值的平均水平。

性质： $E(aX + b) = aE(X) + b$ 。

若 X 服从两点分布，则 $E(X) = p$ 。

若 $X \sim B(n, p)$ ，则 $E(X) = np$ 。

离散型随机变量的方差

一般地，若离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

则称

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i \text{ 为离散型随机变量 } X \text{ 的}$$

方差， 并称其算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差。它反映了离散型随机变量取值的稳定与波动，集中与离散的程度。

$D(X)$ 越小， X 的稳定性越高，波动越小，取值越集中； $D(X)$ 越大， X 的稳定性越差，波动越大，取值越分散。

性质： $D(aX + b) = a^2 D(X).$

若 X 服从两点分布，则 $D(X) = p(1-p)$

若 $X \sim B(n, p)$ ，则 $D(X) = np(1-p)$.

5、正态分布

正态变量概率密度曲线函数表达式：

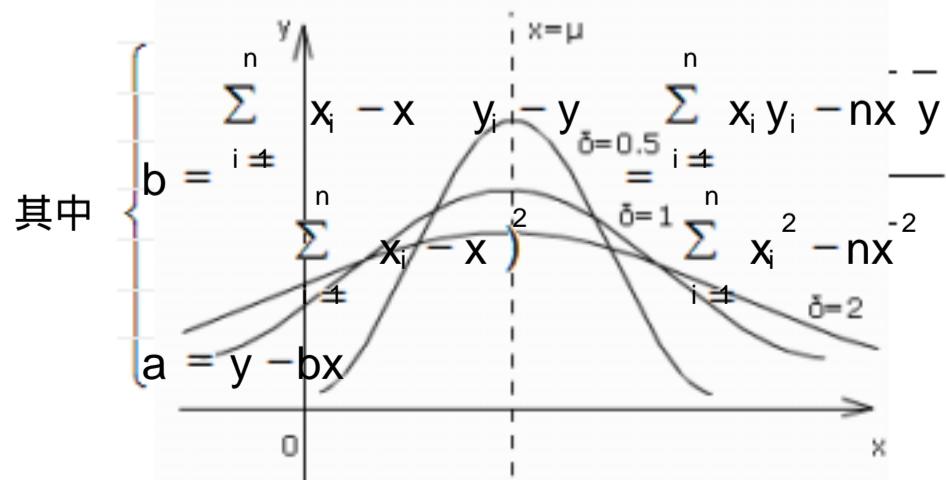
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}, \text{ 其中 } \mu, \sigma \text{ 是参数，}$$

且 $\sigma > 0, -\infty < \mu < +\infty$. 记作 $N(\mu, \sigma^2)$. 如下图：

专题八：统计案例

1、回归分析

回归直线方程 $\hat{y} = a + bx$ ，



$$\text{相关系数 : } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)}}$$

2、独立性检验

假设有两个分类变量 X 和 Y ，它们的值域分另为 $\{x_1, x_2\}$ 和 $\{y_1, y_2\}$ ，其样本频数 2×2 列联表为：

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

若要推断的论述为 H_0 ：“ X 与 Y 有关系”，可以利用独立性检验来考察两个变量是否有关系，并且能较精确地给出这种判断的可靠程度。

具体的做法是，由表中的数据算出随机变量 K^2 的

$$\text{值 } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中}$$

$n = a + b + c + d$ 为样本容量， K^2 的值越大，说明“ X 与 Y 有关系”成立的可能性越大。

随机变量 K^2 越大，说明两个分类变量，关系越强；反之，越弱。

$K^2 \leq 3.841$ 时， X 与 Y 无关； $K^2 > 3.841$ 时， X 与 Y 有 95% 可能性有关； $K^2 \geq 6.635$ 时 X 与 Y 有 99% 可能性有关。

专题九：坐标系与参数方程

1、平面直角坐标系中的伸缩变换

设点 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点，在变换 $\Phi : \begin{cases} x' = \lambda \cdot x, (\lambda > 0), \\ y' = \mu \cdot y, (\mu > 0). \end{cases}$ 的作用下，点 $P(x, y)$ 对应到点 $P'(x', y')$ ，称 Φ 为平面直角坐标系中的 坐标伸缩变换，简称 伸缩变换。

2、极坐标系的概念

在平面内取一个定点 O ，叫做 极点；自极点 O 引

一条射线 Ox 叫做 极轴 ; 再选定一个长度单位、一个角度单位 (通常取弧度) 及其正方向 (通常取逆时针方向), 这样就建立了一个 极坐标系。

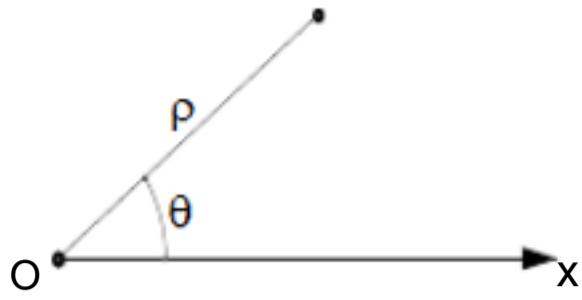


图 1

点 M 的极坐标：设 M 是平面内一点，极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的极径，记为 ρ ；以极轴 Ox 为始边，射线 OM 为终边的 $\angle xOM$ 叫做点 M 的极角，记为 θ 。有序数对 (ρ, θ) 叫做点 M 的极坐标，记为 $M(\rho, \theta)$ 。

注：

极坐标 (ρ, θ) 与 $(\rho, \theta + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) 表示同一个点。极点 O 的坐标为 $(0, \theta)$ ($\theta \in \mathbb{R}$)。

若 $\rho < 0$, 则 $-\rho > 0$, 规定点 $(-\rho, \theta)$ 与点 (ρ, θ) 关于极点对称, 即 $(-\rho, \theta)$ 与 $(\rho, \pi + \theta)$ 表示同一点。

如果规定 $\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$, 那么除极点外, 平面内的点可用唯一的极坐标 (ρ, θ) 表示 (即一一对应的关系); 同时, 极坐标 (ρ, θ) 表示的点也是唯一确定的。

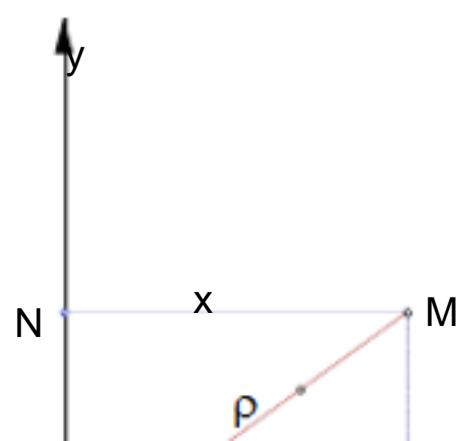
极坐标与直角坐标都是一对有序实数确定平面上一个点, 在极坐标系下, 一对有序实数 ρ, θ 对应惟一点 $P(\rho, \theta)$, 但平面内任一个点 P 的极坐标不惟一。一个点可以有无数个坐标, 这些坐标又有规律可循的, $P(\rho, \theta)$ (极点除外) 的全部坐标为 $(\rho, \theta + 2k\pi)$ 或 $(-\rho, \theta + (2k+1)\pi)$, ($k \in \mathbb{Z}$)。极点的极径为 0, 而极角任意取。若对 ρ, θ 的取值范围加以限制, 则除极点外, 平面上点的极坐标就惟一了, 如限定 $\rho > 0, 0 < \theta < 2\pi$ 或 $\rho < 0, -\pi < \theta < \pi$ 等。

极坐标与直角坐标的不同是, 直角坐标系中, 点与坐标是一一对应的, 而极坐标系中, 点与坐标是一多对应的。即一个点的极坐标是不惟一的。

3、极坐标与直角坐标的互化

设 M 是平面内任意一点, 它的直角坐标是 (x, y) , 极坐标是 (ρ, θ) , 从图中可以得出:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & y &= \rho \sin \theta \\ \rho^2 &= x^2 + y^2, & \tan \theta &= \frac{y}{x} \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$



4、简单曲线的极坐标方程

圆的极坐标方程

以极点为圆心, a 为半径的圆的极坐标方程是

$$\rho = a \quad (\text{如图 1})$$

以 $(a, 0)$ ($a > 0$) 为圆心, a 为半径的圆的极坐标方程是 $\rho = 2a \cos \theta$; (如图 2)

以 $(a, \frac{\pi}{2})$ ($a > 0$) 为圆心, a 为半径的圆的极坐标方程是

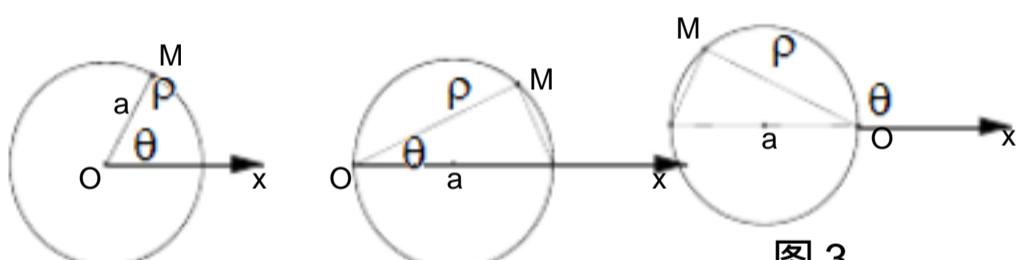


图 1

图 2

图 3

$$\rho = a$$

$$\rho = 2a \cos \theta$$

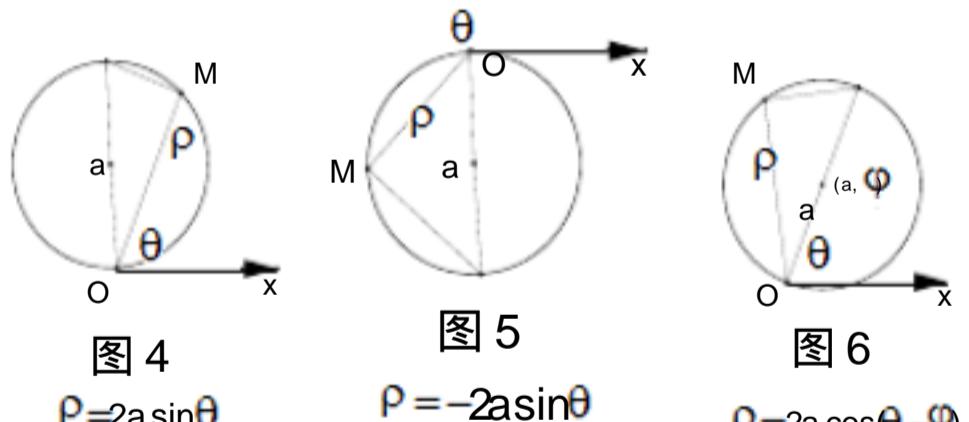


图 4

$$\rho = 2a \sin \theta$$

$$\rho = -2a \sin \theta$$

$$\rho = 2a \cos \theta - a$$

$$\rho = 2a \cos \theta - a$$

程是 $\rho = 2a \sin \theta$; (如图 4)

直线的极坐标方程

过极点的直线的极坐标方程是 $\theta = \alpha$ ($\rho \geq 0$) 和

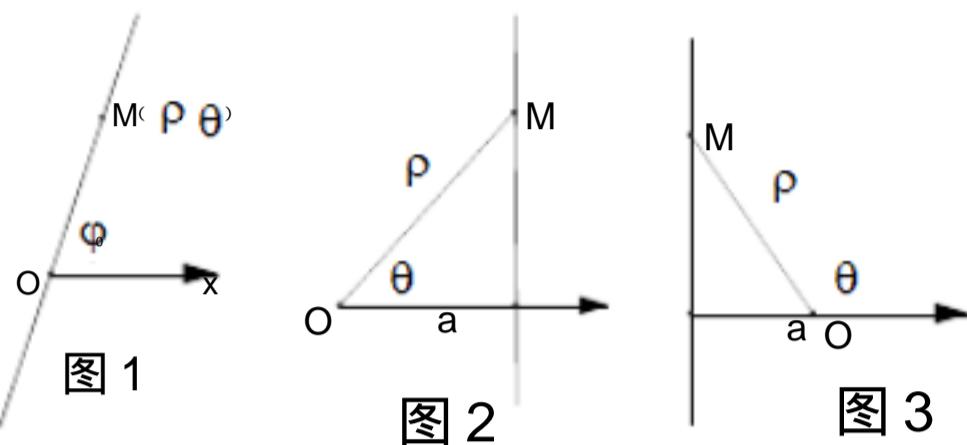
$$\theta = \pi + \alpha \quad (\rho \geq 0). \quad (\text{如图 1})$$

过点 $A(a, 0)$ ($a > 0$), 且垂直于极轴的直线 l 的极坐

标方程是 $\rho \cos \theta = a$ 。化为直角坐标方程为 $x = a$ 。
(如图 2)

过点 $A(a, \frac{\pi}{2})$ 且平行于极轴的直线 l 的极坐标方程

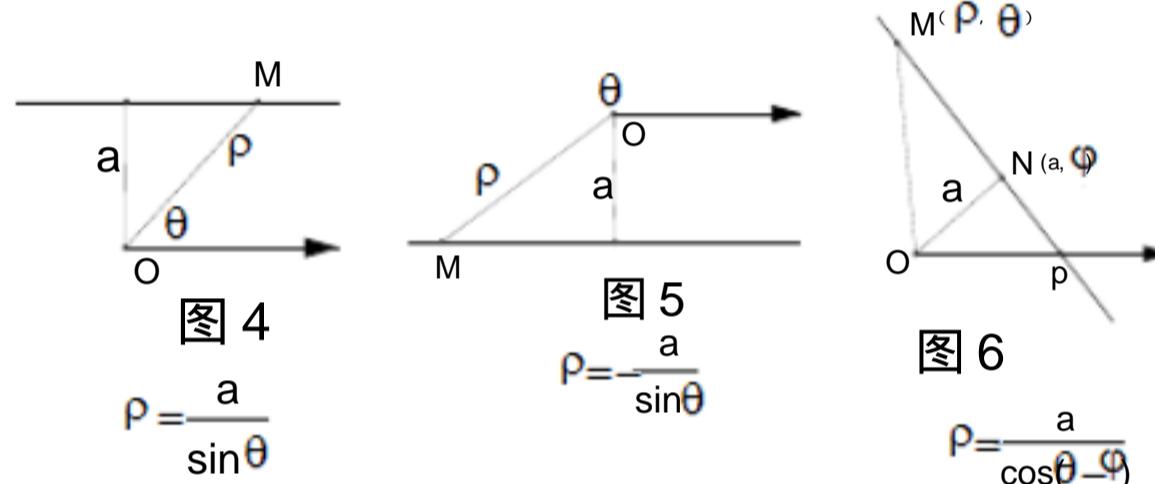
是 $\rho \sin \theta = a$ 。化为直角坐标方程为 $y = a$ 。(如图 4)



$$\theta = \phi_0$$

$$\rho = \frac{a}{\cos \theta}$$

$$\rho = -\frac{a}{\cos \theta}$$



$$\rho = \frac{a}{\sin \theta}$$

$$\rho = -\frac{a}{\sin \theta}$$

$$\rho = \frac{a}{\cos(\theta - \phi)}$$

5、柱坐标系与球坐标系

柱坐标：空间点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标

(ρ, θ, z) 的变换关系为：

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

球坐标系

空间点 P 直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (r, θ, ϕ) 的变

换关系：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

6、参数方程的概念

在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 x, y 都是某个变数 t 的函数 $\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$ 并且对于 t 的每一个允许值，由这个方程所确定的点 $M(x, y)$ 都在这条曲线上，那么这个方程就叫做这条曲线的参数方

程，联系变数 x, y 的变数 t 叫做参变数，简称参数。
相对于参数方程而言，直接给出点的坐标间关系的方程叫做普通方程。

7、常见曲线的参数方程

(1) 圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}) ;$$

(2) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \phi \\ y = b \sin \phi \end{cases} \quad (\phi \text{ 为参数}) ;$$

椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = b \cos \phi \\ y = a \sin \phi \end{cases} \quad (\phi \text{ 为参数}) ;$$

(3) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = a \sec \phi \\ y = b \tan \phi \end{cases} \quad (\phi \text{ 为参数}) ;$$

双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = b \cot \phi \\ y = a \csc \phi \end{cases} \quad (\phi \text{ 为参数}) ;$$

(4) 抛物线 $y^2 = 2px$ 参数方程 $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} \quad (t \text{ 为参}$

数， $t = \frac{1}{\tan \alpha}$)；

参数 t 的几何意义：抛物线上除顶点外的任意一点与原点连线的斜率的倒数。

(6) 过定点 $P(x_0, y_0)$ 、倾斜角为 $\alpha (\alpha \neq \frac{\pi}{2})$ 的直线

的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数) .

8、参数方程与普通方程之间的互化

在建立曲线的参数方程时，要注明参数及参数的取值范围。在参数方程与普通方程的互化中，必须使 x, y 的取值范围保持一致。

参数方程化为普通方程的关键是消参数，并且要保证等价性。若不可避免地破坏了同解变形，则一定要通过 $x = f(t), y = g(t)$ 。根据 t 的取值范围导出 x, y 的取值范围。