

# Réseaux de Petri: Présentation des propriétés

Pascal Racloz, Didier Buchs

Université de Genève

13 octobre 2014



# Les concepts introduits

- Séquences de franchissements
- Monotonie
- Caractère borné
- Activité : vivacité, quasi-vivacité

## **Propriétés relatives à l'état, caractère borné**

Le nombre de jetons circulant dans le réseau  
reste-t-il borné ?

## **Propriétés relatives à l'activité**

Est-ce-qu'une partie ou l'ensemble d'un réseau peut  
toujours évoluer ?

# Propriétés des séquences de franchissement

- Existence d'un marquage permettant le tir d'une séquence
- Monotonie
- Séquence répétitive

## (Cont'd)

- Existence d'un marquage permettant le franchissement de toute séquence.
- Pour toute séquence de transitions  $s$ , il existe un marquage  $M$  tel que cette sequence est franchissable :

$$\forall s \in T^*, \exists M \in \mathbb{N}^m \text{ tel que}$$

$$M \xrightarrow{s}$$

- Monotonie

L'augmentation du nombre de jetons dans les places d'un marquage préserve la possibilité de franchissement d'une séquence de transitions :

Si

$$M1 \xrightarrow{s} M \text{ et } M1 \subseteq M2$$

alors

$$M2 \xrightarrow{s} M + (M2 - M1)$$

(Rq :  $M_a \subseteq M_b$  si et seulement si  $\forall p \in P \ M_a(p) \leq M_b(p)$  )

## (Cont'd)

- Séquence répétitive

Une séquence de transitions est dite *répétitive* si pour tout marquage  $M$  tel que

$$M \xrightarrow{s}$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, M \xrightarrow{s^n}$$



## (Cont'd)

- La notion de séquence répétitive va nous permettre de définir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau marqué ait la possibilité d'être infiniment actif.
- On peut déjà citer le résultat suivant  $\forall M, M' \in \mathbb{N}^m$

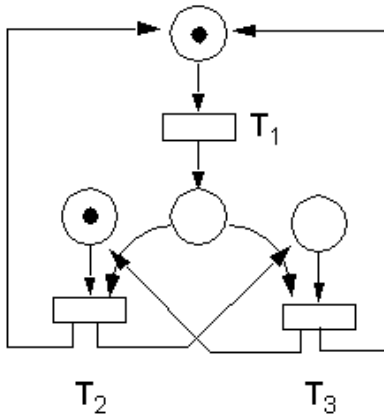
$$M \xrightarrow{s} M' \text{ et } M \subseteq M'$$

$$\Leftrightarrow$$

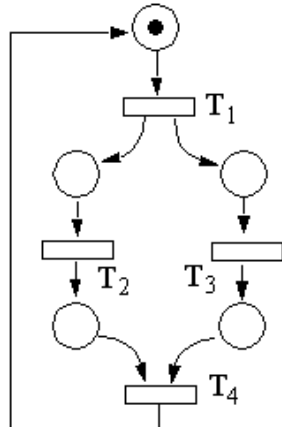
s est répétitive

# Exercice

- Quelles sont les séquences répétitives ?



- a -



- b -

Cette partie définit et caractérise la possibilité pour une place d'accumuler une quantité bornée ou pas de jetons au cours de l'évolution d'un réseau.

- Place k-bornée, non-bornée

Pour un réseau  $R$  et un marquage  $M_0$  une place  $p$  du réseau marqué  $(R, M_0)$  est k-bornée si pour tout marquage  $M$  accessible depuis  $M_0$ ,  $M(p) \leq k$ .

Dans le cas contraire la place  $p$  est dite non-bornée.

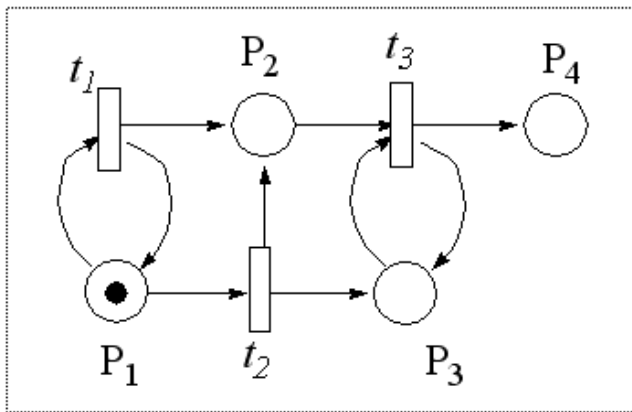
Autrement dit :

$$p \text{ k-bornée} \Leftrightarrow \forall M \in A(R, M_0), M(p) \leq k$$

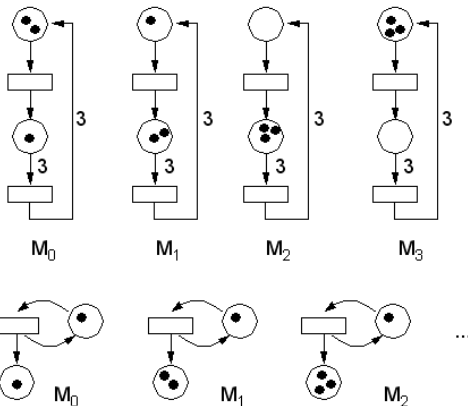
## (Cont'd)

- Un réseau (marqué) est borné si toutes ses places sont bornées
- Les réseaux 1-bornés sont appelés réseaux saufs

Exemple :



# Exemples



- Propriété dépendant du marquage initial
- **Structurellement borné** : rdP borné pour tout marquage initial fini

# Séquence répétitive croissante

- Une séquence répétitive est dite croissante pour une place  $p$  si pour tout couple de marquages  $M, M'$  (i.e.  $M \subseteq M'$ ) tel que

$$M \xrightarrow{s} M'$$

alors

$$M'(p) > M(p)$$

- Résultat :

Un réseau marqué  $(R, M_0)$  est non-borné si et seulement si il existe une séquence répétitive  $s$  croissante pour une place  $p$ , un marquage  $M$  accessible depuis  $M_0$  tels que

$$M \xrightarrow{s}$$

# Activité d'un réseau

La notion d'activité d'un réseau recouvre deux classes de définitions. La première concerne *l'activité individuelle* des transitions, la seconde concerne *l'activité globale* d'un réseau (indépendamment de transitions particulières).

# Quasi-vivacité

- La quasi-vivacité d'une transition signifie que depuis le marquage initial cette transition peut être franchie au moins une fois.

Autrement dit, pour un réseau marqué  $(R, M_0)$

$$t \in T \text{ quasi-vivante} \Leftrightarrow \exists M \in A(R, M_0), M \xrightarrow{t}$$

Une transition qui n'est pas quasi-vivante est inutile !

- Un réseau est *quasi-vivant* si toutes ses transitions le sont.
- La propriété de monotonie implique qu'une transition quasi-vivante pour  $(R, M)$  le reste pour  $(R, M')$  où  $M' \supseteq M$ .

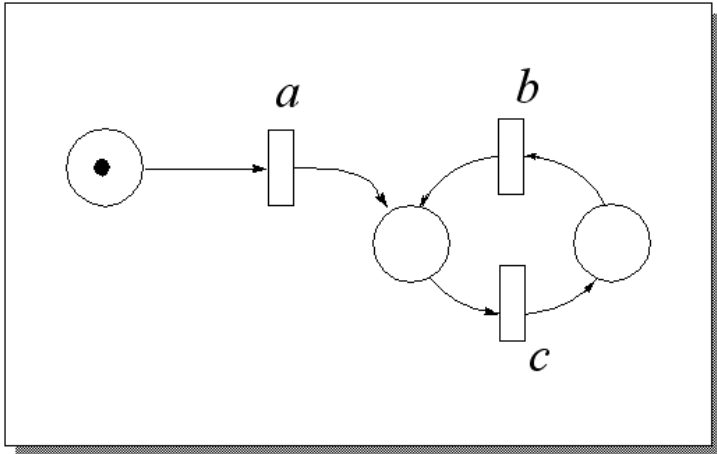


- La vivacité d'une transition exprime le fait que quelque soit l'évolution du réseau à partir du marquage initial, le franchissement à terme de cette transition est toujours possible. Autrement dit, pour un réseau marqué  $(R, M_0)$

$$t \in T \text{ vivante} \Leftrightarrow \forall M \in A(R, M_0), t \text{ est quasi-vivante pour } M$$

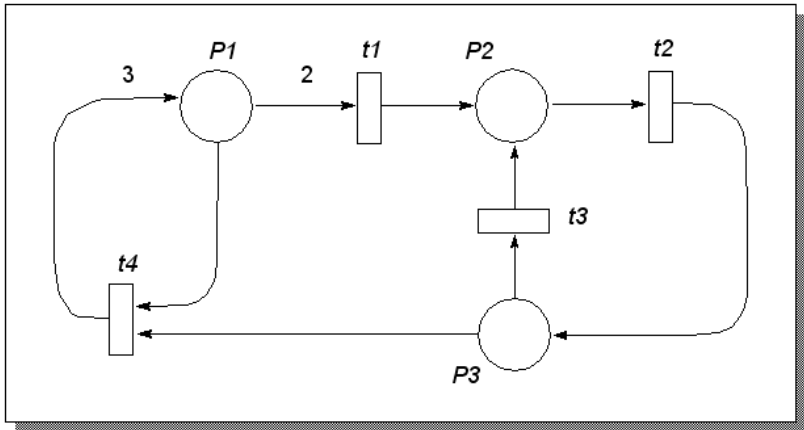
- Un réseau est *vivant* si toutes ses transitions le sont.
- Contrairement à la quasi-vivacité, la vivacité d'une transition n'est pas forcément conservée par une augmentation de jetons dans les places. La vivacité n'est pas monotone.

# Vivacité, quasi-vivacité



Qui est vivant, quasi-vivant ?

# Vivacité et monotonie



Pour quels marquages, respectivement classes de marquages le réseau est vivant et non-vivant ?

# Vivacité et séquence répétitive complète

- Une séquence répétitive est dite complète si elle contient au moins une occurrence de chaque transition.
- Résultat :  
Un réseau marqué  $(R, M_0)$  est vivant si et seulement si pour tout marquage accessible  $M$ ,  $M \in A(R, M_0)$ , il existe un marquage  $M'$  accessible depuis  $M$  et une séquence complète  $s$  tels que

$$M' \xrightarrow{t}$$

i.e.

$$(R, M_0) \text{ est vivant}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall M \in A(R, M_0), \exists M' \in A(R, M) \exists s \in T^* \text{ complète tels que } M' \xrightarrow{s}$$

# Absence de blocage

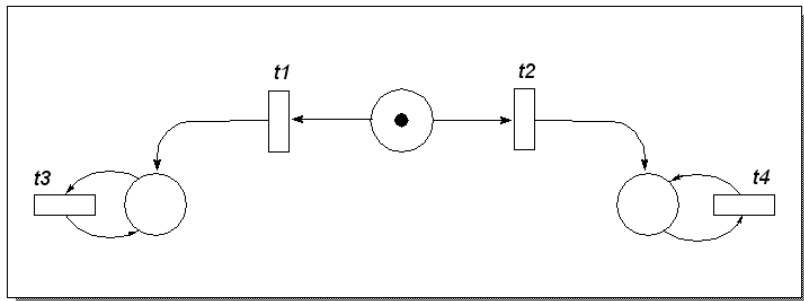
Cette propriété est plus faible que celle de vivacité, elle implique seulement que le réseau a toujours la possibilité d'évoluer.

- Marquage puits

Un marquage puits est un marquage à partir duquel aucune transition n'est tirable.

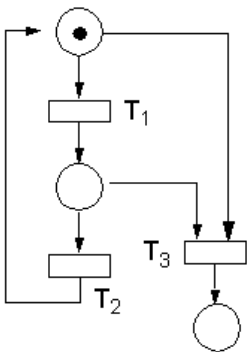
- Un réseau marqué est sans blocage si aucun de ses marquages accessibles n'est un marquage puits.
- Vivacité et sans blocage sont deux notions bien distinctes. Un réseau peut être sans blocage bien qu'aucune de ses transitions soient vivantes.

# Vivacité et marquage puits

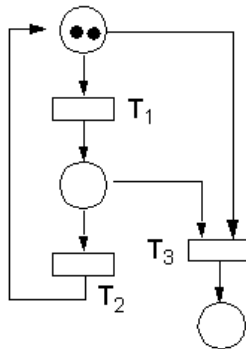


Ce rseau est-il vivant ? a-t-il un marquage puits ?

# Exemples



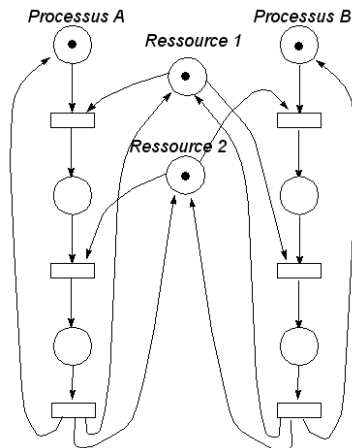
- a -



- b -

- Vivacité, blocage : dépendant du marquage initial
- **Structurellement vivant** : il existe un marquage initial tel que le réseau est vivant

# Exemple d'Interblocage

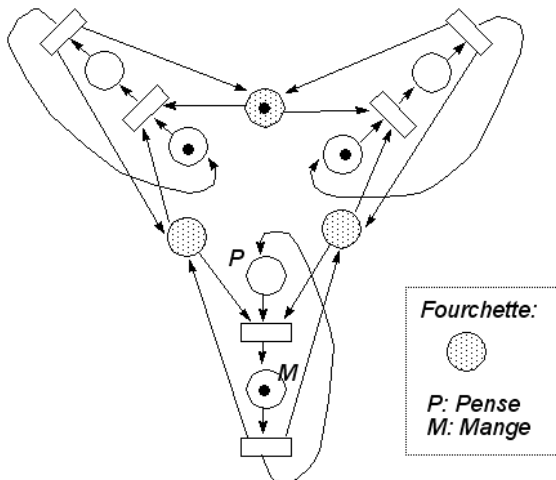


Comment garantir le non-blocage s'il y a plusieurs ressources à acquérir par plusieurs processus ?



# Famine

## Les philosophes (3)



# Définitions connexes

Un rdP a un **état d'accueil**  $M_a$  pour un marquage initial  $M_0$  si pour tout marquage accessible  $M_i$  il existe une séquence  $s$  telle que

$$M_i \xrightarrow{s} M_a$$

Un rdP est **réinitialisable** (ou **réversible**) pour un marquage initial  $M_0$  si  $M_0$  est un état d'accueil.

## Définitions connexes (cont'd)

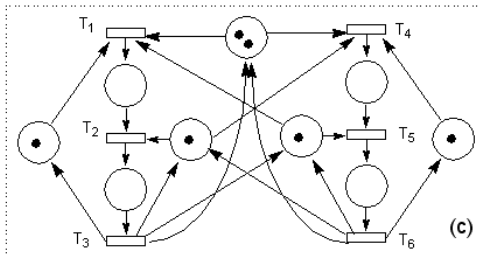
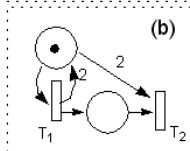
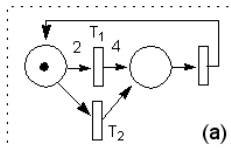
Un rdP est **répétitif** s'il existe un marquage initial  $M_0$  et une séquence  $s$  franchissable telle que chaque transition apparaisse un nombre illimité de fois.

Un rdP est **consistant** s'il existe un marquage initial  $M_0$  et une séquence franchissable  $s$  qui contient au moins une fois chaque transition telle que

$$M_0 \xrightarrow{s} M_0$$

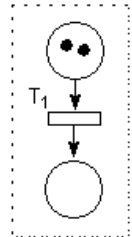
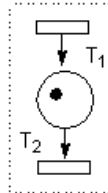
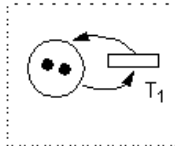
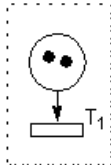
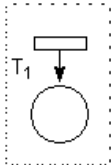
# Exercices : validité des équivalences ?

Structurellement borné	$\Leftrightarrow$	Borné	(a)
? Vivant	$\Leftrightarrow$	Structurellement vivant	
Structurellement vivant	$\Leftrightarrow$	Répétitif	(b)
Vivant et réversible	$\Leftrightarrow$	Consistant	(c)



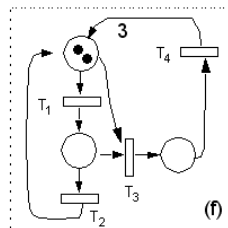
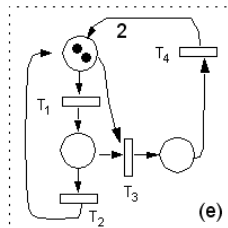
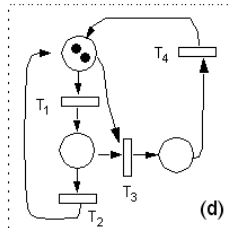
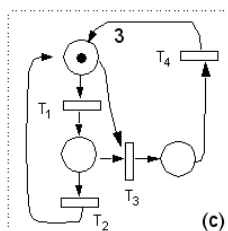
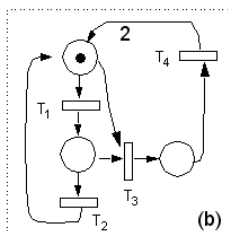
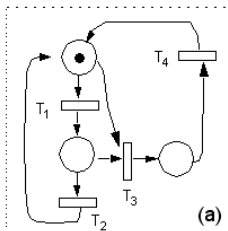
# Exercices : validité des propriétés ?

- Borné ? Vivant ? Sans blocage ?
- Répétitifs ? Répétitifs croissants ?



# (Contd)

- Borné ? Vivant ? Sans blocage ?



# Résumé

- Propriétés étudiées dans un rdP : son caractère borné et son activité
- Séquence de franchissements : répétitive, croissante
- Notions d'activité : quasi-vivacité, vivacité
- Relations entre les propriétés avec la monotonie et les séquences de transitions
- Notions complémentaires : marquage puits, interblocage et famine