Probabilités

L1 Compta-Gestion / MIASHS

Guillaume CONNAN

Université Catholique de l'Ouest - Rezé

12 mars 2019

Sommaire

Sommaire

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in T_\Omega$;

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in T_\Omega$;
2. $A \in T_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in T_\Omega$;

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in T_\Omega$;
2. $A \in T_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in T_\Omega$;
3. $\forall I \subseteq N, (A_i)_{i\in I} \in T_\Omega^{|I|} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in T_\Omega$.

Attention !

Une tribu est une partie de $P(\Omega)$: c'est donc un ensemble de sous-ensembles de Ω !

Définition (Espace probabilisable)

Soit T_Ω une tribu définie sur l'univers Ω. On dit que (Ω, T_Ω) est un espace probabilisable (ou espace d'évènements). Les éléments de la tribu sont appelés **évènements**.

Attention !

Pour une certaine expérience aléatoire, il peut y avoir de nombreux espaces probabilisables différents.

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, A, \complement_\Omega A, \Omega_1\})$ avec A associé à « obtenir un 6 »

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, A, \complement_\Omega A, \Omega_1\})$ avec A associé à « obtenir un 6 »
- $(\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1))$

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, A, \complement_\Omega A, \Omega_1\})$ avec A associé à « obtenir un 6 »
- $(\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1))$
- Vérifiez qu'il s'agit bien d'espaces probabilisables !

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

Définition (Axiomes de KOLMOGOROV)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0, 1]$;

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0, 1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0, 1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A,B) \in T \times T,\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On dit alors que (Ω, T, P) est un **espace probabilisé**.

Exemple

Vérifier que l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de l'application :

$$P\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \frac{|A|}{6} \end{array}$$

définit un espace probabilisé.

Remarque

Dans le cas où Ω est fini et si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité (on dit qu'il y a **équiprobabilité**), alors :

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_{|\Omega|}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Dans ce cas, P est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Attention !

Toute probabilité n'est pas uniforme...Votre portable sonne : quelle est la probabilité que cela soit Monica B. qui vous fasse une déclaration d'amour ? La tribu contient deux évènements en plus de l'évènement certain et de l'évènement impossible : « c'est Monica » et « ce n'est pas Monica ». Le rapport entre cas favorables et cas possibles est bien $\frac{1}{2}$ et pourtant...

Remarque

Vous noterez enfin que lorsque l'univers est infini dénombrable, il ne peut pas y avoir équiprobabilité : on aurait $\sum_{n \geqslant 0} p = p \sum_{n \geqslant 0} 1 \neq 1 \ldots$

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. La probabilité P vérifie :

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé. La probabilité* P *vérifie :*

1. $P\left(\complement_{\Omega} A\right) = 1 - P(A)$;

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé. La probabilité* P *vérifie :*

1. $P\left(\complement_\Omega A\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé. La probabilité* P *vérifie :*

1. $P\left(\complement_\Omega A\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$;

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. La probabilité P vérifie :

1. $P\left(\complement_\Omega A\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$;
4. $\forall (A, B) \in T \times T,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *(crible de* Poincaré*).*

Définition (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de T forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

Définition (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de T forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

- $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (évènements incompatibles deux à deux) ;

Définition (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de T forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

- $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (évènements incompatibles deux à deux) ;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

  On dit aussi que la famille (A_i) forme une **partition** de Ω.

Théorème (Théorème des probabilités totales (version 1))

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'évènements, alors :

$$\forall E \in T,\ P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap A_i)$$

Sommaire

Exemple

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$ $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Exemple

Sachant que B est réalisé, i.e. que l'on obtient 3 au premier lancer, quelle est la probabilité que le total fasse 9 ?

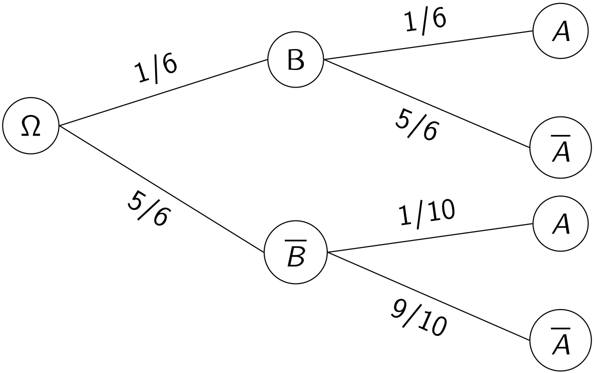
Définition (Probabilité conditionnelle)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé muni d'une probabilité P, avec $P(B) \neq 0$. **La probabilité de A sachant B** est définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Recherche

On parle de **probabilité** conditionnelle. Mais est-ce bien une probabilité ? C'est-à-dire est-ce que (Ω, T, P_B) est un espace probabilisé ?


Ω
1/6
5/6
B
$\overline{B}$
1/6
5/6
1/10
9/10
A
$\overline{A}$
A
$\overline{A}$

Calcul de $P(A)$

B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A) = P(B) \times P_B(A) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{9}$$

Calcul de $P(\overline{A})$

B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

Probabilités conditionnelles

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \qquad P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{9}} = \frac{5}{32}$$

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \qquad P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}} = \frac{27}{32}$$

Sommaire

[Deuxième formule de BAYES (probabilité des causes)] Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ un système complet d'évènements.

$$\forall B \in T, \quad P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \times P(A_k)}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B) \times P(A_i)}$$

[Deuxième formule de BAYES (probabilité des causes)] Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ un système complet d'évènements.

$$\forall B \in T, \quad P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \times P(A_k)}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B) \times P(A_i)}$$

Preuve ?

[Première formule de BAYES]

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

[Première formule de Bayes]

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

$$P_{\text{effet}}(\text{cause}) = \frac{P_{\text{cause}}(\text{effet}) \times P(\text{cause})}{P(\text{effet})}$$

Les médecins « disposent » d'un échantillon de femmes enceintes ou non (et donc de $P(E)$ et $P(\overline{E})$) et d'un test de grossesse. Ils font subir le test à tout l'échantillon et disposent donc de statistiques sur $P_E(T)$, $P_{\overline{E}}(\overline{T})$, $P_{\overline{E}}(T)$ et $P_E(\overline{T})$ mais ce qui intéresse le médecin et surtout la femme qui utilise le test c'est $P_T(E)$ et $P_{\overline{T}}(\overline{E})$...

Sommaire

Définition (Évènements indépendants)

Les évènements A et B sont dits **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Théorème (Indépendance et probabilités conditionnelles)

Soient A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$

À retenir

Si A et B sont indépendants, **avoir observé la réalisation de A ne modifie pas la probabilité d'une éventuelle réalisation de B.**

Théorème (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ *une suite d'événements de* T.

Théorème (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ *une suite d'événements de* T.

1. *On dit que ces événements sont* ***indépendants deux à deux*** *si, et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

Théorème (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i\in I\subseteq N}$ *une suite d'événements de* T.

1. *On dit que ces événements sont* ***indépendants deux à deux*** *si, et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

2. *On dit que ces événements sont* ***mutuellement indépendants*** *si, et seulement si, pour toute partie* J *de* I *on a :*

$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

Sommaire

On travaillera *en général* dans l'espace probabilisé (Ω, T, P) avec $\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\right\}$ un univers fini de cardinal n.

Sommaire

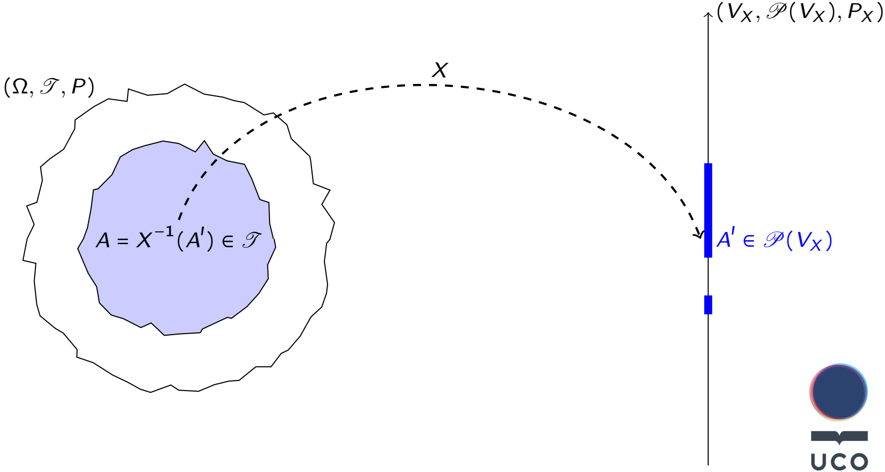
Définition (Tribu borélienne)

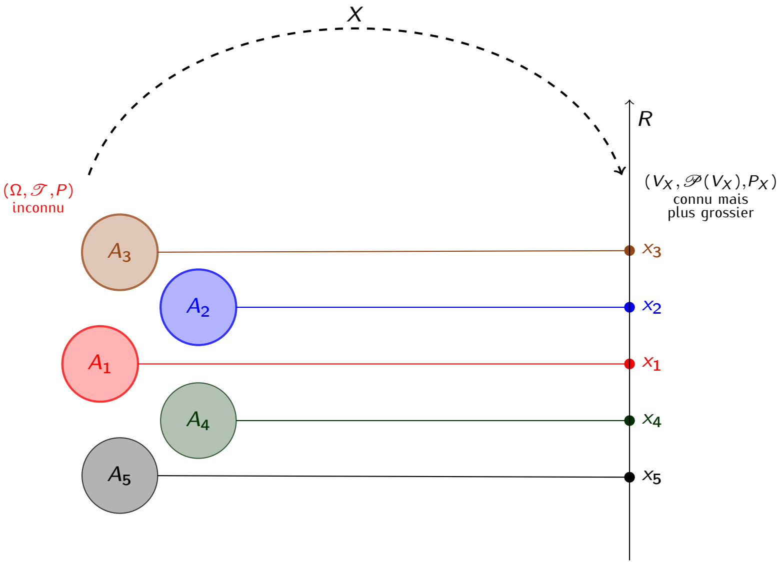
On note $\boldsymbol{B}(R)$ l'ensemble des parties *engendrées* (par intersections et réunions dénombrables) par les intervalles de R.

Définition (Variable aléatoire réelle)

On appelle variable aléatoire réelle finie toute application de Ω dans R vérifiant :

$$\forall I \subseteq R,\ X^{-1}(I) \in T$$


$(\Omega, \mathscr{T}, P)$
$A = X^{-1}(A') \in \mathscr{T}$
X
$(V_X, \mathscr{P}(V_X), P_X)$
$A' \in \mathscr{P}(V_X)$


X
R
$(\Omega, \mathscr{T}, P)$
inconnu
$(V_X, \mathscr{P}(V_X), P_X)$
connu mais
plus grossier
A_3
A_2
A_1
A_4
A_5
x_3
x_2
x_1
x_4
x_5

Sommaire

Définition (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction P_X de $\boldsymbol{B}(R)$ dans $[0,1]$ définie par

$$P_X : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{B}(R) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P(\{X^{-1}(B)\}) \\ & & = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ & & = P(X \in B) \\ & & = P_X(B) \end{array}$$

Définition (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction P_X de $\boldsymbol{B}(R)$ dans $[0,1]$ définie par

$$P_X : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{B}(R) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P(\{X^{-1}(B)\}) \\ & & = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ & & = P(X \in B) \\ & & = P_X(B) \end{array}$$

Définition (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction P_X de $\boldsymbol{B}(R)$ dans $[0,1]$ définie par

$$P_X : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{B}(R) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P(\{X^{-1}(B)\}) \\ & & = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ & & = P(X \in B) \\ & & = P_X(B) \end{array}$$

Vérifiez que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ vérifie les axiomes de Kolmogorov donc que P_X est bien une mesure de probabilité sur $(R, \boldsymbol{B}(R))$.

Définition (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction P_X de $\boldsymbol{B}(R)$ dans $[0,1]$ définie par

$$P_X : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{B}(R) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P(\{X^{-1}(B)\}) \\ & & = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ & & = P(X \in B) \\ & & = P_X(B) \end{array}$$

Vérifiez que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ vérifie les axiomes de Kolmogorov donc que P_X est bien une mesure de probabilité sur $(R, \boldsymbol{B}(R))$.
Dans la plupart des cas, on étudiera $P(X = x)$, c'est-à-dire $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$.

Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

- déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;

Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

- déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;
- calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements correspondants ;

Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

- déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;
- calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements correspondants ;
- regrouper les résultats dans un tableau du type :

Valeurs prises par X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilité correspondante $P(\{X = x_i\})$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- Dans la vraie vie, on connaît les valeurs prises par la v.a.r. mais on ne connaît pas bien Ω, voire pas du tout. On réfléchit donc sur les lois et non pas sur des ensembles comme au lycée.

- Dans la vraie vie, on connaît les valeurs prises par la v.a.r. mais on ne connaît pas bien Ω, voire pas du tout. On réfléchit donc sur les lois et non pas sur des ensembles comme au lycée.
- Par exemple, on peut vouloir réfléchir au nombre de plantages d'un réseau. On estime statistiquement les probabilités de tomber 0, 1, 2, etc. fois en panne dans une journée. On ne sait pas trop ce qu'est Ω mais on peut parler de la loi de X.

- Dans la vraie vie, on connaît les valeurs prises par la v.a.r. mais on ne connaît pas bien Ω, voire pas du tout. On réfléchit donc sur les lois et non pas sur des ensembles comme au lycée.
- Par exemple, on peut vouloir réfléchir au nombre de plantages d'un réseau. On estime statistiquement les probabilités de tomber 0, 1, 2, etc. fois en panne dans une journée. On ne sait pas trop ce qu'est Ω mais on peut parler de la loi de X.
- En fait, une variable aléatoire « transporte » les calculs de probabilités d'un univers inconnu vers des valeurs réelles connues.

On retiendra donc que le « praticien » travaille la plupart du temps avec des lois de probabilités et non pas des ensembles : cela simplifie son travail car il peut travailler sur des espaces complexes (l'univers de départ est souvent trop complexe voire inconnu) sans les connaître.

X

P inconnue

Ω

P_X connue

R

DANGER

Deux v.a.r. peuvent avoir la même loi sans être égales ! On lance n fois une pièce non truquée. Considérez X le nombre de pile tombés et $n - X$ le nombre de face. Ces deux v.a.r. suivent la même loi et pourtant elles ne sont pas égales.

Exemple

On lance un dé honnête. On définit la variable aléatoire X qui prend la valeur 2 si le numéro du dé est un multiple de 3 et 1 sinon.

Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

i	1	2	3	4	5	6
$P(\omega_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$X(\omega_i)$	1	1	2	1	1	2

Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

i	1	2	3	4	5	6
$P(\omega_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$X(\omega_i)$	1	1	2	1	1	2

Valeurs x_i prises par X	1	2
$P(\{X = x_i\})$	2/3	1/3

Sommaire

Définition (Espérance mathématique)

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire discrète X le nombre noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = x_1 \cdot P(\{X = x_1\}) + x_2 \cdot P(\{X = x_2\}) + \cdots + x_n \cdot P(\{X = x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\{X =$$

Valeurs x_i prises par X	1	2
$P(\{X = x_i\})$	2/3	1/3

Valeurs x_i prises par X	1	2
$P(\{X = x_i\})$	2/3	1/3

Alors, d'après la définition, $E(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Remarque

L'espérance est la moyenne des valeurs prises par la v.a.r. pondérée par leurs probabilités respectives ce qui est assez logique

Sommaire

- La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérées par la probabilité correspondante, ce qui donne :

- La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérées par la probabilité correspondante, ce qui donne :

- La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérées par la probabilité correspondante, ce qui donne :

- **Définition (Variance)**

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^2 \cdot P(\{X = x_i\})$$

Définition (Écart-type)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Sommaire

- À partir de variables aléatoires existantes, on peut en créer de nouvelles.

- À partir de variables aléatoires existantes, on peut en créer de nouvelles.
- Avec des notations usuelles on obtient :
  $aX + b : \omega_i \mapsto aX(\omega_i) + b$ avec a et b des réels.

Théorème (Linéarité de l'espérance)

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) \cdot P(\{X = x_i\}) = aE(X) + b$$

Exercice

Théorème de König-Huygens
Johann König *(1712-1757) fut un mathématicien allemand, élève de Jean* Bernoulli *et Christian* Huygens *(1629-1695) était lui néerlandais.*

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$$

À démontrer...

Sommaire

Définition (Fonction de répartition)

Soit X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de X la fonction F de R dans R définie par :

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X(]-\infty, x])$$

Définition (Fonction de répartition)

Soit X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de X la fonction F de R dans R définie par :

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X(]-\infty, x])$$

Définition (Fonction de répartition)

Soit X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de X la fonction F de R dans R définie par :

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X(]-\infty, x])$$

On note souvent cette fonction F_X.

Théorème (Propriétés de F_X)

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0, 1]$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0,1]$
2. *F_X est croissante (sens large).*

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0, 1]$
2. *F_X est croissante (sens large).*
3. *F_X est continue à droite en tout point.*

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0, 1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0, 1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $P\left(a < X \leq b\right) = P_X(]a,b])F_X(b) - F_X(a)$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
6. $P(a < X \leq b) = P_X(]a,b])F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = P(X \leq a) = P_X(]-\infty, a]) = 1 - P(X > a)$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0, 1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $P(a < X \leq b) = P_X(]a, b])F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = P(X \leq a) = P_X(] - \infty, a]) = 1 - P(X > a)$
8. $P(X = a) = \lim_{x \to a^+} F_X(x) - \lim_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point* a *où* F_X *est continue on a* $P(X = a) = 0$.

Sommaire

UCO
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

Sommaire

Définition (Loi uniforme)

On dit que $X :\ \Omega \longrightarrow [\![1\,,\,n]\!]$ suit une **loi uniforme** sur $[\![1\,,\,n]\!]$ et on note $X \rightsquigarrow U\left([\![1\,,\,n]\!]\right)$ si :

$$X(\Omega) = [\![1\,,\,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Définition (Loi uniforme)

On dit que $X : \Omega \longrightarrow [\![1\,,\,n]\!]$ suit une **loi uniforme** sur $[\![1\,,\,n]\!]$ et on note $X \rightsquigarrow U([\![1\,,\,n]\!])$ si :

$$X(\Omega) = [\![1\,,\,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$

Définition (Loi uniforme)

On dit que $X : \Omega \longrightarrow [\![1\,,\,n]\!]$ suit une **loi uniforme** sur $[\![1\,,\,n]\!]$ et on note $X \rightsquigarrow U([\![1\,,\,n]\!])$ si :

$$X(\Omega) = [\![1\,,\,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Exercice

Démontrez les résultats sur l'espérance et la variance de la loi uniforme