Probabilités

L1 Compta-Gestion / MIASHS

Guillaume CONNAN

Université Catholique de l'Ouest - Rezé

26 mars 2019

Sommaire

Sommaire

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in T_\Omega$;

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in T_\Omega$;
2. $A \in T_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in T_\Omega$;

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in T_\Omega$;
2. $A \in T_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in T_\Omega$;
3. $\forall I \subseteq N, (A_i)_{i \in I} \in T_\Omega^{|I|} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in T_\Omega$.

Attention !

Une tribu est une partie de $P(\Omega)$: c'est donc un ensemble de sous-ensembles de Ω !

Définition (Espace probabilisable)

Soit T_Ω une tribu définie sur l'univers Ω. On dit que $\left(\Omega, T_\Omega\right)$ est un espace probabilisable (ou espace d'évènements). Les éléments de la tribu sont appelés **évènements**.

Attention !

Pour une certaine expérience aléatoire, il peut y avoir de nombreux espaces probabilisables différents.

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, A, \complement_\Omega A, \Omega_1\})$ avec A associé à « obtenir un 6 »

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, A, \complement_\Omega A, \Omega_1\})$ avec A associé à « obtenir un 6 »
- $(\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1))$

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, A, \complement_\Omega A, \Omega_1\})$ avec A associé à « obtenir un 6 »
- $(\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1))$
- Vérifiez qu'il s'agit bien d'espaces probabilisables !

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A,B) \in T \times T,\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On dit alors que (Ω, T, P) est un **espace probabilisé**.

Exemple

Vérifier que l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de l'application :

$$P : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0, 1] \\ A & \mapsto & \frac{|A|}{6} \end{array}$$

définit un espace probabilisé.

Remarque

Dans le cas où Ω est fini et si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité (on dit qu'il y a **équiprobabilité**), alors :

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_{|\Omega|}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Dans ce cas, P est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Attention !

Toute probabilité n'est pas uniforme...Votre portable sonne : quelle est la probabilité que cela soit Monica B. qui vous fasse une déclaration d'amour ? La tribu contient deux évènements en plus de l'évènement certain et de l'évènement impossible : « c'est Monica » et « ce n'est pas Monica ». Le rapport entre cas favorables et cas possibles est bien $\frac{1}{2}$ et pourtant...

Remarque

Vous noterez enfin que lorsque l'univers est infini dénombrable, il ne peut pas y avoir équiprobabilité : on aurait $\sum_{n\geqslant 0} p = p \sum_{n\geqslant 0} 1 \neq 1$...

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé. La probabilité* P *vérifie :*

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé. La probabilité* P *vérifie :*

1. $P\left(\complement_{\Omega} A\right) = 1 - P(A)$;

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. La probabilité P vérifie :

1. $P\left(\complement_{\Omega} A\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé. La probabilité* P *vérifie :*

1. $P\left(\complement_\Omega A\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$;

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. La probabilité P vérifie :

1. $P\left(\complement_\Omega A\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$;
4. $\forall (A, B) \in T \times T,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *(crible de* Poincaré*).*

Définition (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de T forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

Définition (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de T forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

- $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (évènements incompatibles deux à deux) ;

Définition (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de T forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

- $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$ (évènements incompatibles deux à deux) ;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$

  On dit aussi que la famille (A_i) forme une **partition** de Ω.

Théorème (Théorème des probabilités totales (version 1))

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un système complet d'évènements, alors :*

$$\forall E \in T,\ P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap A_i)$$

Sommaire

Exemple

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

UCO
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$ $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Exemple

Sachant que B est réalisé, i.e. que l'on obtient 3 au premier lancer, quelle est la probabilité que le total fasse 9 ?

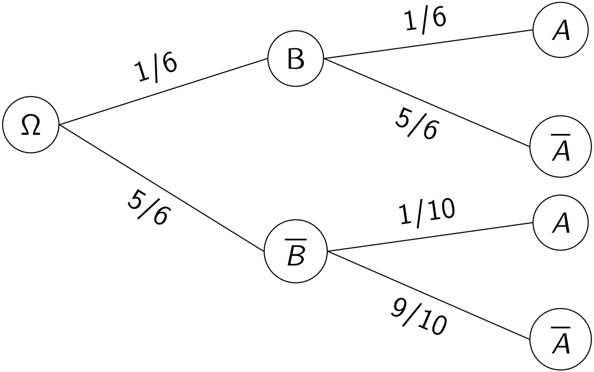
Définition (Probabilité conditionnelle)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé muni d'une probabilité P, avec $P(B) \neq 0$. **La probabilité de A sachant B** est définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Recherche

On parle de **probabilité** conditionnelle. Mais est-ce bien une probabilité ? C'est-à-dire est-ce que (Ω, T, P_B) est un espace probabilisé ?


Ω
1/6
B
5/6
$\overline{B}$
1/6
A
5/6
$\overline{A}$
1/10
A
9/10
$\overline{A}$

Calcul de $P(A)$

B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A) = P(B) \times P_B(A) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{9}$$

Calcul de $P(\overline{A})$

B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

Probabilités conditionnelles

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \qquad P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{9}} = \frac{5}{32}$$

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \qquad P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}} = \frac{27}{32}$$

Sommaire

Théorème (Deuxième formule de Bayes (probabilité des causes))

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé et* $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ *un système complet d'évènements.*

$$\forall B \in T, \quad P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \times P(A_k)}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B) \times P(A_i)}$$

Théorème (Deuxième formule de Bayes (probabilité des causes))

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé et* $(A_i)_{i\in I\subseteq N}$ *un système complet d'évènements.*

$$\forall B \in T, \quad P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \times P(A_k)}{\sum_{i\in I} P_{A_i}(B) \times P(A_i)}$$

Théorème (Deuxième formule de BAYES (probabilité des causes))

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé et* $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ *un système complet d'évènements.*

$$\forall B \in T, \quad P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \times P(A_k)}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B) \times P(A_i)}$$

Preuve ?

Théorème (Première formule de Bayes)

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

Théorème (Première formule de Bayes)

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

Théorème (Première formule de Bayes)

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

$$P_{\text{effet}}(\text{cause}) = \frac{P_{\text{cause}}(\text{effet}) \times P(\text{cause})}{P(\text{effet})}$$

Les médecins « disposent » d'un échantillon de femmes enceintes ou non (et donc de $P(E)$ et $P(\overline{E})$) et d'un test de grossesse. Ils font subir le test à tout l'échantillon et disposent donc de statistiques sur $P_E(T)$, $P_{\overline{E}}(\overline{T})$, $P_{\overline{E}}(T)$ et $P_E(\overline{T})$ mais ce qui intéresse le médecin et surtout la femme qui utilise le test c'est $P_T(E)$ et $P_{\overline{T}}(\overline{E})$...

Sommaire

Définition (Évènements indépendants)

Les évènements A et B sont dits **indépendants** si
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Théorème (Indépendance et probabilités conditionnelles)

Soient A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$

À retenir

Si A et B sont indépendants, **avoir observé la réalisation de A ne modifie pas la probabilité d'une éventuelle réalisation de B.**

Théorème (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ *une suite d'événements de* T.

Théorème (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ *une suite d'événements de* T.

1. *On dit que ces événements sont* ***indépendants deux à deux*** *si, et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

Théorème (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ *une suite d'événements de* T.

1. *On dit que ces événements sont* ***indépendants deux à deux*** *si, et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

2. *On dit que ces événements sont* ***mutuellement indépendants*** *si, et seulement si, pour toute partie* J *de* I *on a :*

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Sommaire

On travaillera *en général* dans l'espace probabilisé (Ω, T, P) avec $\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\right\}$ un univers fini de cardinal n.

Sommaire

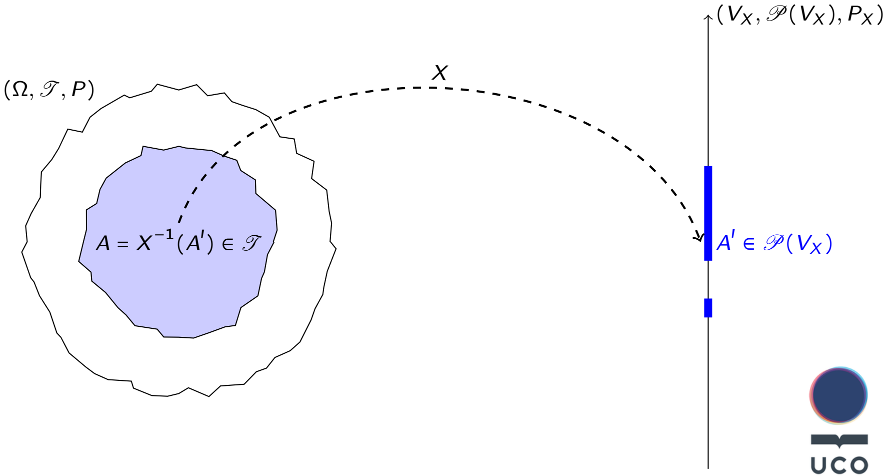
Définition (Tribu borélienne)

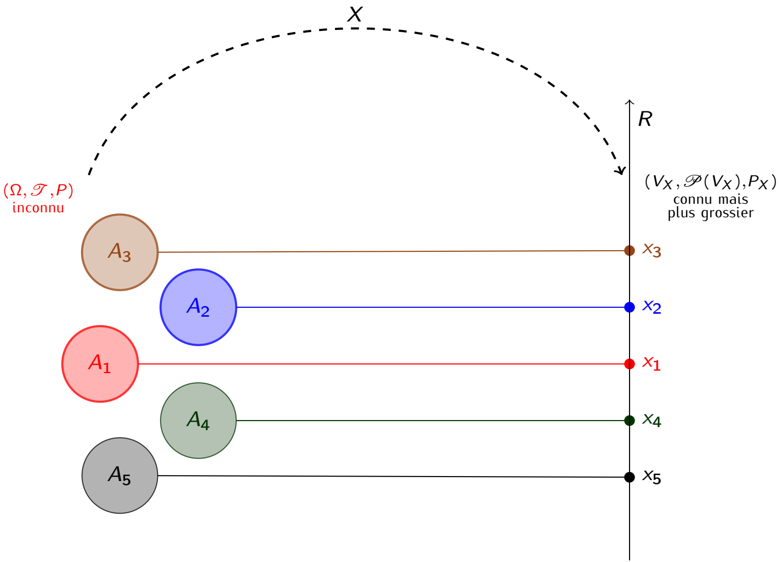
On note $\boldsymbol{B}(R)$ l'ensemble des parties *engendrées* (par intersections et réunions dénombrables) par les intervalles de R.

Définition (Variable aléatoire réelle)

On appelle variable aléatoire réelle finie toute application de Ω dans R vérifiant :

$$\forall I \subseteq R,\ X^{-1}(I) \in T$$


$(V_X, \mathscr{P}(V_X), P_X)$
X
$(\Omega, \mathscr{T}, P)$
$A = X^{-1}(A') \in \mathscr{T}$
$A' \in \mathscr{P}(V_X)$


X
R
$(\Omega, \mathscr{T}, P)$
inconnu
$(V_X, \mathscr{P}(V_X), P_X)$
connu mais
plus grossier
A_3
A_2
A_1
A_4
A_5
x_3
x_2
x_1
x_4
x_5

Sommaire

Définition (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction P_X de $\boldsymbol{B}(R)$ dans $[0,1]$ définie par

$$P_X : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{B}(R) & \rightarrow & [0,1] \\ B & \mapsto & P(\{X^{-1}(B)\}) \\ & & = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ & & = P(X \in B) \\ & & = P_X(B) \end{array}$$

Définition (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction P_X de $\boldsymbol{B}(R)$ dans $[0,1]$ définie par

$$P_X : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{B}(R) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P(\{X^{-1}(B)\}) \\ & & = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ & & = P(X \in B) \\ & & = P_X(B) \end{array}$$

Définition (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction P_X de $\boldsymbol{B}(R)$ dans $[0,1]$ définie par

$$P_X : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{B}(R) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P(\{X^{-1}(B)\}) \\ & & = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ & & = P(X \in B) \\ & & = P_X(B) \end{array}$$

Vérifiez que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ vérifie les axiomes de Kolmogorov donc que P_X est bien une mesure de probabilité sur $(R, \boldsymbol{B}(R))$.

Définition (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction P_X de $\boldsymbol{B}(R)$ dans $[0,1]$ définie par

$$P_X : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{B}(R) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P(\{X^{-1}(B)\}) \\ & & = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ & & = P(X \in B) \\ & & = P_X(B) \end{array}$$

Vérifiez que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ vérifie les axiomes de Kolmogorov donc que P_X est bien une mesure de probabilité sur $(R, \boldsymbol{B}(R))$.
Dans la plupart des cas, on étudiera $P(X = x)$, c'est-à-dire $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$.

Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

- déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;

Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

- déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;
- calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements correspondants ;

Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

- déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;
- calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements correspondants ;
- regrouper les résultats dans un tableau du type :

Valeurs prises par X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilité correspondante $P(\{X = x_i\})$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- Dans la vraie vie, on connaît les valeurs prises par la v.a.r. mais on ne connaît pas bien Ω, voire pas du tout. On réfléchit donc sur les lois et non pas sur des ensembles comme au lycée.

- Dans la vraie vie, on connaît les valeurs prises par la v.a.r. mais on ne connaît pas bien Ω, voire pas du tout. On réfléchit donc sur les lois et non pas sur des ensembles comme au lycée.
- Par exemple, on peut vouloir réfléchir au nombre de plantages d'un réseau. On estime statistiquement les probabilités de tomber 0, 1, 2, etc. fois en panne dans une journée. On ne sait pas trop ce qu'est Ω mais on peut parler de la loi de X.

- Dans la vraie vie, on connaît les valeurs prises par la v.a.r. mais on ne connaît pas bien Ω, voire pas du tout. On réfléchit donc sur les lois et non pas sur des ensembles comme au lycée.
- Par exemple, on peut vouloir réfléchir au nombre de plantages d'un réseau. On estime statistiquement les probabilités de tomber 0, 1, 2, etc. fois en panne dans une journée. On ne sait pas trop ce qu'est Ω mais on peut parler de la loi de X.
- En fait, une variable aléatoire « transporte » les calculs de probabilités d'un univers inconnu vers des valeurs réelles connues.

On retiendra donc que le « praticien » travaille la plupart du temps avec des lois de probabilités et non pas des ensembles : cela simplifie son travail car il peut travailler sur des espaces complexes (l'univers de départ est souvent trop complexe voire inconnu) sans les connaître.

X

P inconnue

Ω

P_X connue

R

DANGER

Deux v.a.r. peuvent avoir la même loi sans être égales ! On lance n fois une pièce non truquée. Considérez X le nombre de pile tombés et $n - X$ le nombre de face. Ces deux v.a.r. suivent la même loi et pourtant elles ne sont pas égales.

Exemple

On lance un dé honnête. On définit la variable aléatoire X qui prend la valeur 2 si le numéro du dé est un multiple de 3 et 1 sinon.

Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

i	1	2	3	4	5	6
$P(\omega_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$X(\omega_i)$	1	1	2	1	1	2

Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

i	1	2	3	4	5	6
$P(\omega_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$X(\omega_i)$	1	1	2	1	1	2

Valeurs x_i prises par X	1	2
$P(\{X = x_i\})$	2/3	1/3

Sommaire

Définition (Espérance mathématique)

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire discrète X le nombre noté $E(X)$ défini par

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \cdot P(\{X = x_1\}) + x_2 \cdot P(\{X = x_2\}) + \cdots + x_n \cdot P(\{X = x_n\}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\{X = x_i\}) \end{aligned}$$

Valeurs x_i prises par X	1	2
$P(\{X = x_i\})$	2/3	1/3

Valeurs x_i prises par X	1	2
$P(\{X = x_i\})$	2/3	1/3

Alors, d'après la définition, $E(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

UCO
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

Remarque

L'espérance est la moyenne des valeurs prises par la v.a.r. pondérée par leurs probabilités respectives ce qui est assez logique

Sommaire

- La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérées par la probabilité correspondante, ce qui donne :

- La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérées par la probabilité correspondante, ce qui donne :

- La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérées par la probabilité correspondante, ce qui donne :

- **Définition (Variance)**

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot P(\{X = x_i\})$$

Définition (Écart-type)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Sommaire

- À partir de variables aléatoires existantes, on peut en créer de nouvelles.

- À partir de variables aléatoires existantes, on peut en créer de nouvelles.
- Avec des notations usuelles on obtient :
  $aX + b : \omega_i \mapsto aX(\omega_i) + b$ avec a et b des réels.

Théorème (Linéarité de l'espérance)

$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\cdot P(\{X=x_i\})=aE(X)+b$$

Exercice

Théorème de König-Huygens
Johann König *(1712-1757) fut un mathématicien allemand, élève de Jean* Bernoulli *et Christian* Huygens *(1629-1695) était lui néerlandais.*

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

À démontrer...

Sommaire

Définition (Fonction de répartition)

Soit X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de X la fonction F de R dans R définie par :

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X(]-\infty, x])$$

Définition (Fonction de répartition)

Soit X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de X la fonction F de R dans R définie par :

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X(]-\infty, x])$$

Définition (Fonction de répartition)

Soit X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de X la fonction F de R dans R définie par :

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X(]-\infty, x])$$

On note souvent cette fonction F_X.

Théorème (Propriétés de F_X)

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0, 1]$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0, 1]$
2. *F_X est croissante (sens large).*

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0, 1]$
2. *F_X est croissante (sens large).*
3. *F_X est continue à droite en tout point.*

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0,1]$
2. *F_X est croissante (sens large).*
3. *F_X est continue à droite en tout point.*
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $P(a < X \leq b) = P_X(]a,b])F_X(b) - F_X(a)$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $P(a < X \leq b) = P_X(]a,b])F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = P(X \leq a) = P_X(]-\infty, a]) = 1 - P(X > a)$

Théorème (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in R, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $P(a < X \leq b) = P_X(]a,b])F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = P(X \leq a) = P_X(]-\infty, a]) = 1 - P(X > a)$
8. $P(X = a) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point a où* F_X *est continue on a* $P(X = a) = 0$.

Sommaire

Sommaire

Définition (Loi uniforme)

On dit que $X : \Omega \longrightarrow [\![1\,,\,n]\!]$ suit une **loi uniforme** sur $[\![1\,,\,n]\!]$ et on note $X \rightsquigarrow U([\![1\,,\,n]\!])$ si :

$$X(\Omega) = [\![1\,,\,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Définition (Loi uniforme)

On dit que $X : \Omega \longrightarrow [\![1\,,\,n]\!]$ suit une **loi uniforme** sur $[\![1\,,\,n]\!]$ et on note $X \rightsquigarrow U([\![1\,,\,n]\!])$ si :

$$X(\Omega) = [\![1\,,\,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$

Définition (Loi uniforme)

On dit que $X : \Omega \longrightarrow [\![1\,,\,n]\!]$ suit une **loi uniforme** sur $[\![1\,,\,n]\!]$ et on note $X \rightsquigarrow U\left([\![1\,,\,n]\!]\right)$ si :

$$X(\Omega) = [\![1\,,\,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Exercice

Démontrez les résultats sur l'espérance et la variance de la loi uniforme

Sommaire

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre *p*** si :

On note alors $X \rightsquigarrow B(1, p)$

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** $\boldsymbol{p}$ si :

- $p \in]0\,;\,1[$, $X(\Omega) = \{0\,,\,1\}$;

On note alors $X \rightsquigarrow B(1, p)$

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre *p*** si :

- $p \in]0\,;\,1[$, $X(\Omega) = \{0\,,\,1\}$;
- $P(X = 1) = p$.

On note alors $X \rightsquigarrow B(1, p)$

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre *p*** si :

- $p \in]0\,;\,1[$, $X(\Omega) = \{0\,,\,1\}$;
- $P(X = 1) = p$.

On note alors $X \rightsquigarrow B(1, p)$

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre *p*** si :

- $p \in]0\,;1[$, $X(\Omega) = \{0\,,\,1\}$;
- $P(X = 1) = p$.

On note alors $X \rightsquigarrow B(1, p)$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	1-p	p

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre *p*** si :

- $p \in]0\,;\,1[$, $X(\Omega) = \{0\,,\,1\}$;
- $P(X = 1) = p$.

On note alors $X \rightsquigarrow B(1, p)$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	1-p	p

- $E(X) =?$

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** si :

- $p \in]0\,;\,1[$, $X(\Omega) = \{0\,,\,1\}$;
- $P(X = 1) = p$.

On note alors $X \rightsquigarrow B(1, p)$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	1-p	p

- $E(X) =?$
- $V(X) =?$.

Sommaire

Dans les mêmes conditions que précédemment, on effectue ***n* tirages** d'un jeton avec remise. À chaque tirage on associe une v.a.r. **indépendante** des autres qui suit la **loi de Bernoulli de paramètre *p***. Les issues élémentaires ω de ces n tirages sont des « mots » de n lettres, chaque lettre étant un B (pour blanc) ou un $\overline{B}$. On définit alors la variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2, ..., n\}$, donnant le nombre de jetons blancs de ces issues élémentaires, c'est à dire que X est la somme des v.a.r. finies élémentaires suivant la loi de Bernoulli de manière indépendante.

Définition (Loi binomiale)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** si $n \in N \setminus \{0\}$, $p \in]0\,;1[$, $X(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!]$ et si l'expérience est une suite de n expériences de Bernoulli de paramètre p menées indépendamment. On note alors $X \rightsquigarrow B(n,p)$

- On s'intéresse maintenant à l'événement $(X = k)$

- On s'intéresse maintenant à l'événement $(X = k)$
- Pensez anagramme

- On s'intéresse maintenant à l'événement $(X = k)$
- Pensez anagramme

- On s'intéresse maintenant à l'événement $(X = k)$
- Pensez anagramme

Théorème (Loi binomiale)

Pour toute v.a.r. finie $X \rightsquigarrow B(n, p)$, on a, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- On s'intéresse maintenant à l'événement $(X = k)$
- Pensez anagramme

Théorème (Loi binomiale)

Pour toute v.a.r. finie $X \rightsquigarrow B(n, p)$, on a, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- On s'intéresse maintenant à l'événement $(X = k)$
- Pensez anagramme

Théorème (Loi binomiale)

Pour toute v.a.r. finie $X \rightsquigarrow B(n, p)$, on a, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- $E(X) =?$

- On s'intéresse maintenant à l'événement $(X = k)$
- Pensez anagramme

Théorème (Loi binomiale)

Pour toute v.a.r. finie $X \rightsquigarrow B(n, p)$, on a, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- $E(X) =?$
- $V(X) =?.$

Sommaire

Modèle : on considére une urne contenant N boules ($N \in N^{\star}$), la proportion de boules blanches dans l'urne étant p. On tire simultanément n boules (les boules sont choisies au hasard) et X est la v.a. qui indique le nombre de boules blanches tirées. On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p notée $H(N, n, p)$.

Théorème (Loi hypergéométrique)

Théorème (Loi hypergéométrique)

- *X peut prendre toute valeur entière de l'intervalle* $\{max\{0, n - N(1-p)\}, min\{n, Np\}\}$

Théorème (Loi hypergéométrique)

- *X peut prendre toute valeur entière de l'intervalle* $\{max\{0, n - N(1-p)\}, min\{n, Np\}\}$
- $k \in V_X$, $P(\{X = k\}) = \dfrac{C_{Np}^{k} C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$

Théorème (Loi hypergéométrique)

- *X peut prendre toute valeur entière de l'intervalle* $\{max\{0, n - N(1-p)\}, min\{n, Np\}\}$
- $k \in V_X,\ P(\{X = k\}) = \dfrac{C_{Np}^{k} C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$
- $E(X) = np,\ V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

Théorème (Loi hypergéométrique)

- *X peut prendre toute valeur entière de l'intervalle* $\{max\{0, n - N(1-p)\}, min\{n, Np\}\}$
- $k \in V_X$, $P(\{X = k\}) = \dfrac{C_{Np}^{k} C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$
- $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

Théorème (Loi hypergéométrique)

- *X peut prendre toute valeur entière de l'intervalle* $\{max\{0, n - N(1-p)\}, min\{n, Np\}\}$
- $k \in V_X$, $P(\{X = k\}) = \dfrac{C_{Np}^{k} C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$
- $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

Justifiez la loi proposée

Sommaire

- C'est la loi du **premier succès**

- C'est la loi du **premier succès**
- Modèle : on répète indéfiniment une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.

- C'est la loi du **premier succès**
- Modèle : on répète indéfiniment une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.
- Les répétitions étant mutuellement indépendantes, X désigne le rang de l'essai donnant pour la première fois un succès. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p et on écrit $X \leadsto G(p)$.

Théorème (Loi géométrique)

Théorème (Loi géométrique)

- $V_X = N^\star$

Théorème (Loi géométrique)

- $V_X = N^\star$
- $k \in N^\star, P\left(\{X = k\}\right) = p(1-p)^{k-1}$

Théorème (Loi géométrique)

- $V_X = N^\star$
- $k \in N^\star, P\left(\{X = k\}\right) = p(1-p)^{k-1}$
- $E(X) = \frac{1}{p}, V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Exemple

En Syldavie,le petit Ivan collectionne les images du chocolat Wonka. Il y a n images différentes. Lorsqu'il aura obtenu les n images, il aura droit de visiter les usines Wonka. À chaque fois qu'il achète une tablette, la probabilité d'obtenir une image quelconque est $1/n$. Soit T_n le temps d'attente (en nombre de tablettes achetées) pour obtenir les n images. Calculez $E(T_n)$.

- X_i la variable aléatoire correspondant au temps d'attente pour passer de $i-1$ images différentes à i images différentes.

- X_i la variable aléatoire correspondant au temps d'attente pour passer de $i-1$ images différentes à i images différentes.
- $X_i \rightsquigarrow G(p_i)$ avec $p_i = ?$

- X_i la variable aléatoire correspondant au temps d'attente pour passer de $i-1$ images différentes à i images différentes.
- $X_i \rightsquigarrow G(p_i)$ avec $p_i =?$
- $E(X_i) =?$

- X_i la variable aléatoire correspondant au temps d'attente pour passer de $i-1$ images différentes à i images différentes.
- $X_i \rightsquigarrow G(p_i)$ avec $p_i =?$
- $E(X_i) =?$
- $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

- X_i la variable aléatoire correspondant au temps d'attente pour passer de $i-1$ images différentes à i images différentes.
- $X_i \rightsquigarrow G(p_i)$ avec $p_i =?$
- $E(X_i) =?$
- $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
- $E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1-i} = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)$

Avec 10 images différentes il faudra acheter en moyenne...

```
>>> 10 * sum(1/k for k in range(1,11))
29.289682539682538
```

...30 tablettes.

Sommaire

Exemple

Considérons une probabilité définie par :

$$p_j(\pi_n, n) = \begin{cases} C_n^j(\pi_n)^j(1-\pi_n)^{n-j} & \text{si } j \leqslant n \\ 0 \quad \text{si } j > n \end{cases}$$

Exemple

Considérons une probabilité définie par :

$$p_j(\pi_n, n) = \begin{cases} C_n^j(\pi_n)^j(1-\pi_n)^{n-j} & \text{si } j \leqslant n \\ 0 \quad \text{si } j > n \end{cases}$$

Exemple

Considérons une probabilité définie par :

$$p_j(\pi_n, n) = \begin{cases} C_n^j(\pi_n)^j(1-\pi_n)^{n-j} & \text{si } j \leqslant n \\ 0 \quad \text{si } j > n \end{cases}$$

À quoi vous fait-elle penser ?

- Ainsi, cette suite de probabilités est une extension sur N tout entier de la loi binomiale $B(n, \pi_n)$.

- Ainsi, cette suite de probabilités est une extension sur N tout entier de la loi binomiale $B(n, \pi_n)$.
- *Supposons* que la suite (π_n) tende vers 0 quand n tend vers l'infini de telle sorte que

$$\lim_{n \to +\infty} n\pi_n = \lambda \in R_+^\star$$

- Ainsi, cette suite de probabilités est une extension sur N tout entier de la loi binomiale $B(n, \pi_n)$.
- *Supposons* que la suite (π_n) tende vers 0 quand n tend vers l'infini de telle sorte que

$$\lim_{n \to +\infty} n\pi_n = \lambda \in R_+^\star$$

- Il faut également se souvenir que :

$$\forall t \in R, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t$$

- Ainsi, cette suite de probabilités est une extension sur N tout entier de la loi binomiale $B(n, \pi_n)$.
- *Supposons* que la suite (π_n) tende vers 0 quand n tend vers l'infini de telle sorte que
$$\lim_{n \to +\infty} n\pi_n = \lambda \in R_+^\star$$
- Il faut également se souvenir que :
$$\forall t \in R, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t$$
- Alors on montre (au tableau pendant l'amphi...) que :
$$\lim_{n \to +\infty} p_j(n, \pi_n) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}$$

Théorème (Loi de Poisson)

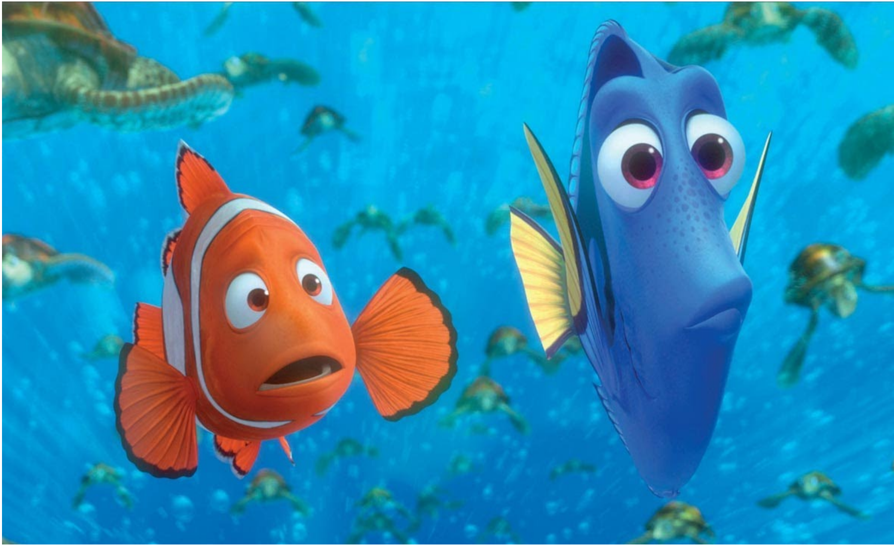
La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si X peut prendre toute valeur entière k avec la probabilité $P(\{X = k\}) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

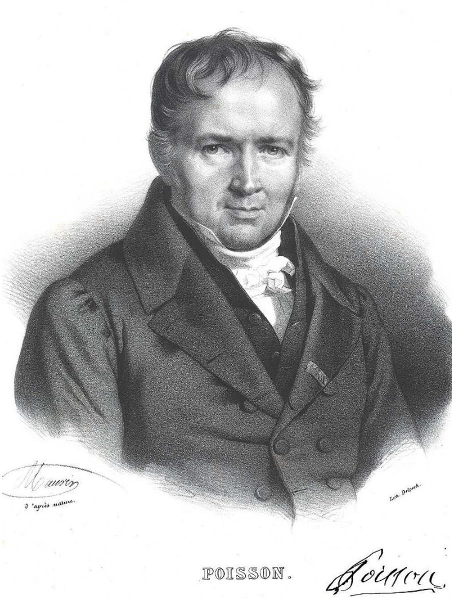
Théorème (Loi de Poisson)

La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si X peut prendre toute valeur entière k avec la probabilité $P\left(\{X = k\}\right) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

Théorème (Loi de Poisson)

La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si X peut prendre toute valeur entière k avec la probabilité $P(\{X = k\}) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.
On retiendra aussi : $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.




d'après nature.
Lith. Delpech.
POISSON.

À retenir

Ainsi, la loi de Poisson modélise bien le nombre d'apparitions de phénomènes rares (le nombre de journées sans panne à l'UCO, le nombre d'étudiants de L1 travaillant leur cours, etc.) dans une suite infinie d'évènements ($\pi_n \sim \frac{\lambda}{n}$ est « petit » et n est « grand »).

Sommaire

Exercice

Dites si les variables aléatoires X définies ci-dessous suivent une loi binomiale ? Donnez quand c'est possible $X(\Omega)$, les paramètres de la loi ainsi que l'espérance.

Exercice

Dites si les variables aléatoires X définies ci-dessous suivent une loi binomiale ? Donnez quand c'est possible $X(\Omega)$, les paramètres de la loi ainsi que l'espérance.

1. *Dans une classe on tire au sort et sans remise 5 élèves. X est le nombre d'élèves travaillant pour les services secrets bordures dans le lot tiré au sort.*

Exercice

Dites si les variables aléatoires X définies ci-dessous suivent une loi binomiale ? Donnez quand c'est possible $X(\Omega)$, les paramètres de la loi ainsi que l'espérance.

1. *Dans une classe on tire au sort et sans remise 5 élèves. X est le nombre d'élèves travaillant pour les services secrets bordures dans le lot tiré au sort.*
2. *Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.*

Exercice

Dites si les variables aléatoires X définies ci-dessous suivent une loi binomiale ? Donnez quand c'est possible $X(\Omega)$, les paramètres de la loi ainsi que l'espérance.

1. *Dans une classe on tire au sort et sans remise 5 élèves. X est le nombre d'élèves travaillant pour les services secrets bordures dans le lot tiré au sort.*
2. *Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.*
3. *On lance 10 dés, X est le nombre de « 5 » obtenus.*

Exercice

Dites si les variables aléatoires X définies ci-dessous suivent une loi binomiale ? Donnez quand c'est possible $X(\Omega)$, les paramètres de la loi ainsi que l'espérance.

1. *Dans une classe on tire au sort et sans remise 5 élèves. X est le nombre d'élèves travaillant pour les services secrets bordures dans le lot tiré au sort.*
2. *Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.*
3. *On lance 10 dés, X est le nombre de « 5 » obtenus.*
4. *Un circuit comprend 32 lampes en série. Pour chacune d'elle, la probabilité qu'elle fonctionne est de 3/100. X est le nombre de lampes qui s'allument lorsqu'on appuie sur l'interrupteur.*

Exercice

Dites si les variables aléatoires X définies ci-dessous suivent une loi binomiale ? Donnez quand c'est possible $X(\Omega)$, les paramètres de la loi ainsi que l'espérance.

1. *Dans une classe on tire au sort et sans remise 5 élèves. X est le nombre d'élèves travaillant pour les services secrets bordures dans le lot tiré au sort.*
2. *Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.*
3. *On lance 10 dés, X est le nombre de « 5 » obtenus.*
4. *Un circuit comprend 32 lampes en série. Pour chacune d'elle, la probabilité qu'elle fonctionne est de 3/100. X est le nombre de lampes qui s'allument lorsqu'on appuie sur l'interrupteur.*
5. *Même question avec cette fois des lampes en parallèle.*

1. Le tirage est sans remise donc le paramètre des expériences de Bernoulli change : X ne suit pas une loi binomiale.

1. Le tirage est sans remise donc le paramètre des expériences de Bernoulli change : X ne suit pas une loi binomiale.
2. Cette fois $X \rightsquigarrow B(3, 7/20)$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

1. Le tirage est sans remise donc le paramètre des expériences de Bernoulli change : X ne suit pas une loi binomiale.
2. Cette fois $X \rightsquigarrow B(3, 7/20)$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
3. Lancer 10 dés revient à lancer 10 fois le même dé (enfin, pas tout à fait mais bon...). $X \rightsquigarrow B(10, 1/6)$ et $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$.

1. Le tirage est sans remise donc le paramètre des expériences de Bernoulli change : X ne suit pas une loi binomiale.
2. Cette fois $X \rightsquigarrow B(3, 7/20)$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
3. Lancer 10 dés revient à lancer 10 fois le même dé (enfin, pas tout à fait mais bon...). $X \rightsquigarrow B(10, 1/6)$ et $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$.
4. Le montage est en série : si une lampe ne fonctionne pas, les suivantes ne fonctionneront pas non plus. Les expériences ne sont donc pas indépendantes.

1. Le tirage est sans remise donc le paramètre des expériences de Bernoulli change : X ne suit pas une loi binomiale.
2. Cette fois $X \rightsquigarrow B(3, 7/20)$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
3. Lancer 10 dés revient à lancer 10 fois le même dé (enfin, pas tout à fait mais bon...). $X \rightsquigarrow B(10, 1/6)$ et $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$.
4. Le montage est en série : si une lampe ne fonctionne pas, les suivantes ne fonctionneront pas non plus. Les expériences ne sont donc pas indépendantes.
5. Cette fois $X \rightsquigarrow B(32, 3/100)$ et $X(\Omega) = [\![0, 32]\!]$.

Exercice

Dans chacune des expériences aléatoires ci-dessous, reconnaître une loi usuelle pour la variable aléatoire X. Donner alors son espérance.

Exercice

Dans chacune des expériences aléatoires ci-dessous, reconnaître une loi usuelle pour la variable aléatoire X. Donner alors son espérance.

1. *On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes numérotées.* $X =$ *« hauteur de la carte choisie »*

Exercice

Dans chacune des expériences aléatoires ci-dessous, reconnaître une loi usuelle pour la variable aléatoire X. Donner alors son espérance.

1. *On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes numérotées. $X =$ « hauteur de la carte choisie »*
2. *Un dieu de l'Olympe tue chaque jour un Achéen (avec probabilité 2/3) ou un Troyen (avec probabilité 1/3). On suppose que le choix la victime est indépendant de celle des autres. $X =$ « nombre de Troyens tués sur 10 jours consécutifs ».*

Exercice

Dans chacune des expériences aléatoires ci-dessous, reconnaître une loi usuelle pour la variable aléatoire X. Donner alors son espérance.

1. *On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes numérotées.* $X =$ *« hauteur de la carte choisie »*
2. *Un dieu de l'Olympe tue chaque jour un Achéen (avec probabilité 2/3) ou un Troyen (avec probabilité 1/3). On suppose que le choix la victime est indépendant de celle des autres.* $X =$ *« nombre de Troyens tués sur* 10 *jours consécutifs ».*
3. *Sur la plaine d'Ilium se trouvent* 15 *Achéens et* 30 *Troyens. Un dieu de l'Olympe foudroie chaque matin un Achéen ou un Troyen, pris parmi les soldats de la plaine.* $X =$ *« nombre de Troyens tués sur* 10 *jours consécutifs ».*

Exercice

Dans chacune des expériences aléatoires ci-dessous, reconnaître une loi usuelle pour la variable aléatoire X. Donner alors son espérance.

1. *On choisit une carte au hasard dans un jeu de* 32 *cartes numérotées.* $X =$ *« hauteur de la carte choisie »*
2. *Un dieu de l'Olympe tue chaque jour un Achéen (avec probabilité 2/3) ou un Troyen (avec probabilité 1/3). On suppose que le choix la victime est indépendant de celle des autres.* $X =$ *« nombre de Troyens tués sur* 10 *jours consécutifs ».*
3. *Sur la plaine d'Ilium se trouvent* 15 *Achéens et* 30 *Troyens. Un dieu de l'Olympe foudroie chaque matin un Achéen ou un Troyen, pris parmi les soldats de la plaine.* $X =$ *« nombre de Troyens tués sur* 10 *jours consécutifs ».*
4. *On tire une à une les cartes d'un jeu de* 32 *cartes, jusqu'à obtenir le valet de pique.* $X =$ *« nombre de tirage effectuées ».*

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.
2. On répète dix fois dans les mêmes conditions la même expérience qui n'a que deux issues contraires, et ceci demanière indépendante. On en déduit que :

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.
2. On répète dix fois dans les mêmes conditions la même expérience qui n'a que deux issues contraires, et ceci demanière indépendante. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(10, \frac{1}{3}\right)$;

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.
2. On répète dix fois dans les mêmes conditions la même expérience qui n'a que deux issues contraires, et ceci demanière indépendante. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(10, \frac{1}{3}\right)$;
   - $E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.
2. On répète dix fois dans les mêmes conditions la même expérience qui n'a que deux issues contraires, et ceci demanière indépendante. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(10, \frac{1}{3}\right)$;
   - $E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.
3. On effectue 10 tirages successfis sans remise parmi 45 soldats. La proportion de Troyens est $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. On en déduit que :

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.
2. On répète dix fois dans les mêmes conditions la même expérience qui n'a que deux issues contraires, et ceci demanière indépendante. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(10, \frac{1}{3}\right)$;
   - $E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.
3. On effectue 10 tirages successfis sans remise parmi 45 soldats. La proportion de Troyens est $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(45, 10, \frac{2}{3}\right)$;

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
    - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
    - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.
2. On répète dix fois dans les mêmes conditions la même expérience qui n'a que deux issues contraires, et ceci demanière indépendante. On en déduit que :
    - $X \rightsquigarrow B\left(10, \frac{1}{3}\right)$;
    - $E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.
3. On effectue 10 tirages successfis sans remise parmi 45 soldats. La proportion de Troyens est $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. On en déduit que :
    - $X \rightsquigarrow H\left(45, 10, \frac{2}{3}\right)$;
    - $E(X) = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.
2. On répète dix fois dans les mêmes conditions la même expérience qui n'a que deux issues contraires, et ceci demanière indépendante. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(10, \frac{1}{3}\right)$;
   - $E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.
3. On effectue 10 tirages successfis sans remise parmi 45 soldats. La proportion de Troyens est $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(45, 10, \frac{2}{3}\right)$;
   - $E(X) = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.
4. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable.

UCO
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.
2. On répète dix fois dans les mêmes conditions la même expérience qui n'a que deux issues contraires, et ceci demanière indépendante. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(10, \frac{1}{3}\right)$;
   - $E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.
3. On effectue 10 tirages successfis sans remise parmi 45 soldats. La proportion de Troyens est $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(45, 10, \frac{2}{3}\right)$;
   - $E(X) = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.
4. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable.
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 32 \rrbracket)$;

1. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable, donc chacune des huit hauteurs également. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 8 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.
2. On répète dix fois dans les mêmes conditions la même expérience qui n'a que deux issues contraires, et ceci demanière indépendante. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(10, \frac{1}{3}\right)$;
   - $E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.
3. On effectue 10 tirages successfis sans remise parmi 45 soldats. La proportion de Troyens est $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(45, 10, \frac{2}{3}\right)$;
   - $E(X) = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.
4. Toutes les cartes peuvent être choisies de manière équiprobable.
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 32 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{32+1}{2} = \frac{33}{2}$.

Exercice

Exercice

1. *On lance un dé à* 6 *faces.* $X =$ *« chiffre obtenu ».*

Exercice

1. *On lance un dé à* 6 *faces.* $X =$ « *chiffre obtenu* ».
2. *Monica a dans sa poche* 7 *allumettes et* 12 *pièces de monnaie. Elle met la main dans sa poche et en sort* 5 *objets.* $X =$ « *nombre de pièces obtenues* ».

Exercice

1. *On lance un dé à* 6 *faces.* $X =$ « *chiffre obtenu* ».
2. *Monica a dans sa poche* 7 *allumettes et* 12 *pièces de monnaie. Elle met la main dans sa poche et en sort* 5 *objets.* $X =$ « *nombre de pièces obtenues* ».
3. *Monica fait passer une audition pour trouver des partenanires pour son prochain film.* 3000 *candidats passent l'audition. Chaque candidat réussit son entretien avec probabilité* $2/3$. $X =$ « *nombre de candidats sélectionnés par Monica* ».

Exercice

1. *On lance un dé à* 6 *faces.* $X =$ *« chiffre obtenu ».*
2. *Monica a dans sa poche* 7 *allumettes et* 12 *pièces de monnaie. Elle met la main dans sa poche et en sort* 5 *objets.* $X =$ *« nombre de pièces obtenues ».*
3. *Monica fait passer une audition pour trouver des partenanires pour son prochain film.* 3000 *candidats passent l'audition. Chaque candidat réussit son entretien avec probabilité* $2/3$. $X =$ *« nombre de candidats sélectionnés par Monica ».*
4. *James dort chez son amie Monica qui lui a prêté son appartement. Il dispose d'un trousseau de* 7 *clés, et ne sait pas laquelle ouvre la porte de l'appartement. Il les essaye une par une, en mettant de côté chaque clé essayée.* $X =$ *« nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé ».*

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
    - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
    - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
    - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
    - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. On effectue 5 tirages successifs sans remise parmi 19 objets. La proportion de pièces est $\frac{12}{19}$. On en déduit que :

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. On effectue 5 tirages successifs sans remise parmi 19 objets. La proportion de pièces est $\frac{12}{19}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(19, 5, \frac{12}{19}\right)$;

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. On effectue 5 tirages successifs sans remise parmi 19 objets. La proportion de pièces est $\frac{12}{19}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(19, 5, \frac{12}{19}\right)$;
   - $E(X) = 5 \times \frac{12}{19} = \frac{60}{19}$.

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. On effectue 5 tirages successifs sans remise parmi 19 objets. La proportion de pièces est $\frac{12}{19}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(19, 5, \frac{12}{19}\right)$;
   - $E(X) = 5 \times \frac{12}{19} = \frac{60}{19}$.
3. On répète 3000 fois dans les mêmes conditions et de manière indépendante la même expérience qui n'a que deux issues contraires. On en déduit que :

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. On effectue 5 tirages successifs sans remise parmi 19 objets. La proportion de pièces est $\frac{12}{19}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(19, 5, \frac{12}{19}\right)$;
   - $E(X) = 5 \times \frac{12}{19} = \frac{60}{19}$.
3. On répète 3000 fois dans les mêmes conditions et de manière indépendante la même expérience qui n'a que deux issues contraires. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(3000, \frac{2}{3}\right)$;

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. On effectue 5 tirages successifs sans remise parmi 19 objets. La proportion de pièces est $\frac{12}{19}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(19, 5, \frac{12}{19}\right)$;
   - $E(X) = 5 \times \frac{12}{19} = \frac{60}{19}$.
3. On répète 3000 fois dans les mêmes conditions et de manière indépendante la même expérience qui n'a que deux issues contraires. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(3000, \frac{2}{3}\right)$;
   - $E(X) = 3000 \times \frac{2}{3} = 2000$.

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. On effectue 5 tirages successifs sans remise parmi 19 objets. La proportion de pièces est $\frac{12}{19}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(19, 5, \frac{12}{19}\right)$;
   - $E(X) = 5 \times \frac{12}{19} = \frac{60}{19}$.
3. On répète 3000 fois dans les mêmes conditions et de manière indépendante la même expérience qui n'a que deux issues contraires. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(3000, \frac{2}{3}\right)$;
   - $E(X) = 3000 \times \frac{2}{3} = 2000$.
4. On effectue 7 tirages successifs sans remise d'une clé parmi. Il n'y a qu'une clé sur les 7 qui ouvre la porte. On en déduit que :

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. On effectue 5 tirages successifs sans remise parmi 19 objets. La proportion de pièces est $\frac{12}{19}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(19, 5, \frac{12}{19}\right)$;
   - $E(X) = 5 \times \frac{12}{19} = \frac{60}{19}$.
3. On répète 3000 fois dans les mêmes conditions et de manière indépendante la même expérience qui n'a que deux issues contraires. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(3000, \frac{2}{3}\right)$;
   - $E(X) = 3000 \times \frac{2}{3} = 2000$.
4. On effectue 7 tirages successifs sans remise d'une clé parmi. Il n'y a qu'une clé sur les 7 qui ouvre la porte. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 7 \rrbracket)$;

UCO
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

1. Les 6 sorties possibles sont équiprobables. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. On effectue 5 tirages successifs sans remise parmi 19 objets. La proportion de pièces est $\frac{12}{19}$. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow H\left(19, 5, \frac{12}{19}\right)$;
   - $E(X) = 5 \times \frac{12}{19} = \frac{60}{19}$.
3. On répète 3000 fois dans les mêmes conditions et de manière indépendante la même expérience qui n'a que deux issues contraires. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow B\left(3000, \frac{2}{3}\right)$;
   - $E(X) = 3000 \times \frac{2}{3} = 2000$.
4. On effectue 7 tirages successifs sans remise d'une clé parmi. Il n'y a qu'une clé sur les 7 qui ouvre la porte. On en déduit que :
   - $X \rightsquigarrow U(\llbracket 1, 7 \rrbracket)$;
   - $E(X) = \frac{7+1}{2} = 4$.