

Feuille de Travaux dirigés N°1 - Dénombrements

Exercice 1

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ $A = \{e_1, e_3, e_5\}$ $B = \{e_1, e_2\}$ Vérifier que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Exercice 2

$A = \{\text{l'ensemble roi}\}$

$B = \{\text{l'ensemble des trèfles}\}$

Déterminer les ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $A - B$; $\overline{A} - \overline{B}$, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Exercice 3

$A = [0; 1]$, $B = [\frac{1}{2}; 3]$, $C =]-1; \frac{2}{3}[$ Quels sont les ensembles $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cap C$; $A \cup B$; $B \cup C$?

Exercice 4

Dans une classe, tous les élèves apprennent au moins une des langues vivantes suivantes : allemand, anglais ou espagnol.

Deux apprennent l'allemand, l'anglais et l'espagnol.

Quinze apprennent au moins l'anglais et l'allemand.

Sept apprennent au moins l'allemand et l'espagnol.

Dix apprennent au moins l'anglais et l'espagnol.

Vingt-deux apprennent au moins l'allemand.

Vingt-six apprennent au moins l'anglais. Seize apprennent au moins l'espagnol.

1. Combien y-a-t-il d'élèves dans la classe ?

2. Combien y-a-t-il d'élèves n'apprenant qu'une seule langue ?

3. Combien y-a-t-il d'élèves apprenant deux langues exactement ?

Il est demandé de justifier les réponses accompagnées d'une représentation graphique des ensembles considérés.

Exercice 5

Parmi les 25 conseillers municipaux d'une petite ville sont élus un maire, un premier adjoint, un deuxième adjoint et un troisième adjoint. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?

Exercice 6

Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec un alphabet de 26 lettres :

a. en admettant une répétition des lettres ?

b. Sans lettre double ?

Exercice 7

Combien existe-t-il de nombres entiers de quatre chiffres écrits avec

- a. Au moins un chiffre pair ?
- b. Au moins un chiffre impair ?

Exercice 8

De combien de façon peut-on répartir un groupe de 7 personnes :

1. Sur une rangée de chaise ?
2. Autour d'une table ?

Exercice 9

Quatre étudiants sont à la terrasse d'un café. Chacun a le choix de commander une boisson parmi les suivantes : jus d'orange, panaché, bière, Perrier, jus de tomate, Orangina. Combien y a-t-il de possibilités de commandes pour le serveur ?

Exercice 10

Un serveur a le choix entre 8 boissons pour servir un groupe de 5 jeunes sachant qu'il veut servir une boisson différente à chacun.

Combien y a-t-il de possibilités pour le serveur ?

Exercice 11

Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur (cœur, pique, carreau, trèfle).

Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées

1. Quel est le nombre de mains différentes ?
2. Combien de mains contiennent au moins un as ?
3. Combien de mains contiennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

Exercice 12

Dix livres deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Quel est le nombre de dispositions qui placent côte à côte trois livres fixés de la collection ?

Exercice 13

Une urne contient 5 boules blanches indiscernables et 8 boules noires indiscernables. On tire successivement avec remise 6 boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de résultats possibles
2. Combien de ces résultats amènent :
 - a. 5 boules noires et une boule blanche dans cet ordre ?
 - b. 1 boule noire au plus
 - c. 3 boules blanches et 3 boules noires ?
 - d. 1 boule blanche au moins ?

Supposons maintenant que les boules blanches sont maintenant numérotées de 1 à 5 et les boules noires de 1 à 8

Reprendre les questions précédentes.

Exercice 14

Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges .

On choisit au hasard les yeux bandés 2 chaussures de ce tiroir.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles
2. Combien amènent deux chaussures de même couleur ?
3. Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

Exercice 15

On peint en rouge un cube de 5cm d'arête, puis on le débite en petits cubes de 1 cm d'arête. (Les plans de coupes sont parallèles aux faces). On dispose les petits cubes ainsi obtenus dans une urne opaque.

On tire alors simultanément 4 cubes de cette urne.

1. Combien de ces cubes ont :
 - a. 3 faces colorées
 - b. 2 faces colorées
 - c. 1 face colorée
 - d. 0 face colorée.
2. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
3. Combien de ces tirages amènent :
 - a. 2 cubes exactement avec 3 faces colorées ?
 - b. Des cubes ayant au plus une face colorée ?
 - c. 4 cubes ayant, à eux tous, 6 faces colorées ?

Exercice 16

On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires (a et b étant des entiers naturels). On suppose les boules indiscernables entre elles. On tire alors les boules successivement, sans remise, jusqu'à vider l'urne.

- a. De combien de façon peut-on opérer ?
- b. Combien de séries de tirages amènent la dernière boule blanche en $k^{ième}$ position ?
- c. Déterminer la somme des résultats trouvés en b. lorsque k varie de a à a+b.

Exercice 17

On dispose de n boules. On veut former k groupes contenant respectivement r_1, r_2, \dots, r_k boules en utilisant toutes les boules.

$$\sum_{i=1}^{i=k} r_i = n$$

De combien de façon peut-on les réaliser ?

Exercice 18

1. Soit $E = \{1, 2, \dots, n\}$ un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de parties de E ?

2. Combien de permutations différentes peut-on former avec les lettres des mots :

a. Leur **b**) Avatars **c**. Sociologique

3. On considère les entiers de quatre chiffres écrits dans le système décimal, soit \overline{abcd} , a ne pouvant être égal à 0. On dit qu'un entier a ses chiffres strictement croissants si la condition suivante est satisfaite : $a < b < c < d$.

a. Combien d'entiers de 4 chiffres ont leurs chiffres croissants ?

b. Parmi eux, combien sont divisibles par 5 ?

c. Et par deux ?

4. Une entreprise publie une annonce portant sur 4 emplois. 9 personnes se présentent. Combien de choix s'offrent au responsable du recrutement dans les hypothèses suivantes :

a. Les 4 emplois sont identiques

b. ... mais l'entreprise souhaite recruter 2 femmes et 2 hommes sachant que les 9 candidats 3 sont des femmes.

c. L'emploi n° 1 a un profil particulier. 4 candidats seulement répondent au profil de cet emploi alors que tous peuvent convenir au 3 autres emplois.

Exercice 19

1. Démontrer que

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-3}{p-1} + \dots + \binom{p-1}{p-1} = \binom{n}{p}$$

2. Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \binom{n}{k+2} \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2$$

Exercice 20

1) Démontrer que :

$$\binom{n}{p} - \binom{n}{p-1} \binom{n}{1} + \binom{n}{p-2} \binom{n+1}{2} - \binom{n}{p-3} \binom{n+2}{3} + \dots + (-1)^p \binom{n+p-1}{p} = 0$$

2) Calculer les sommes suivantes :

$$S = \binom{n}{0} \binom{n}{2} + \binom{n}{1} \binom{n}{3} + \binom{n}{2} \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-2} \binom{n}{n}$$

$$T = \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

$$U = \binom{2n}{1} - 3 \binom{2n}{3} + 3^2 \binom{2n}{5} + \dots + (-1)^{n-1} (3)^{n-1} \binom{2n}{2n-1}$$