Probabilités

L1 Compta-Gestion / MIASHS

Guillaume CONNAN

Université Catholique de l'Ouest - Rezé

11 février 2019

Sommaire

Sommaire

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in T_\Omega$;

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in T_\Omega$;
2. $A \in T_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in T_\Omega$;

Définition (Tribu)

Une tribu T_Ω définie sur un univers Ω est une partie de $P(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in T_\Omega$;
2. $A \in T_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in T_\Omega$;
3. $\forall I \subseteq N, (A_i)_{i \in I} \in T_\Omega^{|I|} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in T_\Omega$.

Attention !

Une tribu est une partie de $P(\Omega)$: c'est donc un ensemble de sous-ensembles de Ω !

Définition (Espace probabilisable)

Soit T_Ω une tribu définie sur l'univers Ω. On dit que $\left(\Omega, T_\Omega\right)$ est un espace probabilisable (ou espace d'évènements). Les éléments de la tribu sont appelés **évènements**.

Attention !

Pour une certaine expérience aléatoire, il peut y avoir de nombreux espaces probabilisables différents.

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, A, \complement_\Omega A, \Omega_1\})$ avec A associé à « obtenir un 6 »

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, A, \complement_\Omega A, \Omega_1\})$ avec A associé à « obtenir un 6 »
- $(\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1))$

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, \Omega_1\})$
- $(\Omega_1, \{\varnothing, A, \complement_\Omega A, \Omega_1\})$ avec A associé à « obtenir un 6 »
- $(\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1))$
- Vérifiez qu'il s'agit bien d'espaces probabilisables !

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0, 1]$;

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0, 1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A,B) \in T \times T,\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition (Axiomes de Kolmogorov)

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur T vérifiant :

1. $\forall A \in T,\ P(A) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A,B) \in T \times T,\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On dit alors que (Ω, T, P) est un **espace probabilisé**.

Exemple

Vérifier que l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de l'application :

$$P\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \frac{|A|}{6} \end{array}$$

définit un espace probabilisé.

Remarque

Dans le cas où Ω est fini et si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité (on dit qu'il y a **équiprobabilité**), alors :

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_{|\Omega|}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Dans ce cas, P est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Attention !

Toute probabilité n'est pas uniforme...Votre portable sonne : quelle est la probabilité que cela soit Monica B. qui vous fasse une déclaration d'amour ? La tribu contient deux évènements en plus de l'évènement certain et de l'évènement impossible : « c'est Monica » et « ce n'est pas Monica ». Le rapport entre cas favorables et cas possibles est bien $\frac{1}{2}$ et pourtant...

Remarque

Vous noterez enfin que lorsque l'univers est infini dénombrable, il ne peut pas y avoir équiprobabilité : on aurait $\sum_{n \geqslant 0} p = p \sum_{n \geqslant 0} 1 \neq 1 \ldots$

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. La probabilité P vérifie :

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé. La probabilité* P *vérifie :*

1. $P\left(\complement_{\Omega} A\right) = 1 - P(A)$;

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé. La probabilité* P *vérifie :*

1. $P\left(\complement_{\Omega} A\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) *un espace probabilisé. La probabilité* P *vérifie :*

1. $P\left(\complement_{\Omega} A\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$;

Théorème (Principales propriétés)

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. La probabilité P vérifie :

1. $P\left(\complement_{\Omega} A\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in T \times T,\ A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$;
4. $\forall (A, B) \in T \times T,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *(crible de* Poincaré*).*

Définition (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de T forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

Définition (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de T forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

- $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (évènements incompatibles deux à deux) ;

Définition (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de T forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

- $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$ (évènements incompatibles deux à deux) ;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

  On dit aussi que la famille (A_i) forme une **partition** de Ω.

Théorème (Théorème des probabilités totales (version 1))

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un système complet d'évènements, alors :*

$$\forall E \in T, \; P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap A_i)$$

Sommaire

Exemple

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

Exemple

- On lance deux fois un dé à six faces.
- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$
- $T = \mathscr{P}(\Omega)$.
- soit A l'événement « le total fait neuf ».
- Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer »

- $A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$ $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Exemple

Sachant que B est réalisé, i.e. que l'on obtient 3 au premier lancer, quelle est la probabilité que le total fasse 9 ?

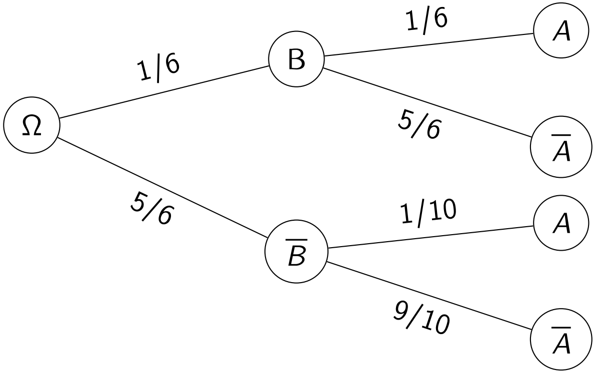
Définition (Probabilité conditionnelle)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé muni d'une probabilité P, avec $P(B) \neq 0$. **La probabilité de A sachant B** est définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Recherche

On parle de **probabilité** conditionnelle. Mais est-ce bien une probabilité ? C'est-à-dire est-ce que (Ω, T, P_B) est un espace probabilisé ?


Ω
1/6
5/6
B
$\overline{B}$
1/6
5/6
1/10
9/10
A
$\overline{A}$
A
$\overline{A}$

Calcul de $P(A)$

B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A) = P(B) \times P_B(A) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{9}$$

Calcul de $P(\overline{A})$

B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(\overline{A}) = P(B \cap \overline{A}) + P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(B) \times P_B(\overline{A}) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(\overline{A})$$

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{9}{10} = \frac{8}{9}$$

Probabilités conditionnelles

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \qquad P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{9}} = \frac{5}{32}$$

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \qquad P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}} = \frac{27}{32}$$

Sommaire

[Deuxième formule de BAYES (probabilité des causes)] Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ un système complet d'évènements.

$$\forall B \in T, \quad P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \times P(A_k)}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B) \times P(A_i)}$$

[Deuxième formule de BAYES (probabilité des causes)] Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ un système complet d'évènements.

$$\forall B \in T, \quad P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \times P(A_k)}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B) \times P(A_i)}$$

Preuve ?

[Première formule de Bayes]

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

[Première formule de Bayes]

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

$$P_{\text{effet}}(\text{cause}) = \frac{P_{\text{cause}}(\text{effet}) \times P(\text{cause})}{P(\text{effet})}$$

Les médecins « disposent » d'un échantillon de femmes enceintes ou non (et donc de $P(E)$ et $P(\overline{E})$) et d'un test de grossesse. Ils font subir le test à tout l'échantillon et disposent donc de statistiques sur $P_E(T)$, $P_{\overline{E}}(\overline{T})$, $P_{\overline{E}}(T)$ et $P_E(\overline{T})$ mais ce qui intéresse le médecin et surtout la femme qui utilise le test c'est $P_T(E)$ et $P_{\overline{T}}(\overline{E})$...

Sommaire

Définition (Évènements indépendants)

Les évènements A et B sont dits **indépendants** si
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Théorème (Indépendance et probabilités conditionnelles)

Soient A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$

À retenir

Si A et B sont indépendants, **avoir observé la réalisation de A ne modifie pas la probabilité d'une éventuelle réalisation de B.**

Théorème (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ *une suite d'événements de* T.

Théorème (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ une suite d'événements de T.

1. *On dit que ces événements sont **indépendants deux à deux** si, et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

Théorème (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq N}$ *une suite d'événements de* T.

1. *On dit que ces événements sont* ***indépendants deux à deux*** *si, et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

2. *On dit que ces événements sont* ***mutuellement indépendants*** *si, et seulement si, pour toute partie* J *de* I *on a :*

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$