Chapitre 3 : Variables aléatoires

I. Variable aléatoire

Exemple Introductif : On lance trois fois une pièce de monnaie. L'espace probabilisé est (Ω, β, P). Un événement élémentaire ω est un triplet $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ où chaque ω_i est soit pile soit face. À chaque évènement élémentaire on peut associer un réel x qui est le nombre de « pile » obtenu. Le tableau qui suit nous donne la correspondance.

On a ainsi défini une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ appelée variable aléatoire.

$$X : \quad \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega)$$

ω	$X(\omega) = x$
(F,F,F)	0
(F,F,P)	1
(F,P,F)	1
(F,P,P)	2
(P,F,F)	1
(P ,F,P)	2
(P,P,F)	2
(P,P,P)	3

Définition : Étant donné une variable Ω associé à une expérience aléatoire, on appelle variable aléatoire (v.a.) toute application de Ω dans l'ensemble des réels inclus dans $\mathbb{R}$ qui quantifie l'expérience. L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé ensemble des observations. Dans notre exemple $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.

Remarque : On distingue les v.a. discrètes avec l'ensemble $X(\Omega)$ des observables fini ou infini dénombrable et les v.a. continues, avec l'ensemble des observables $X(\Omega)$ est infini non dénombrable ($\mathbb{R}$ ou intervalle de $\mathbb{R}$).

Rappel : $\mathbb{N}$ est un ensemble infini dénombrable et $\mathbb{R}$ est un ensemble infini non dénombrable.

II. Variable aléatoire discrète

Définition : Une variable aléatoire est discrète si l'ensemble des valeurs prises par X, c'est-à-dire $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

1. Loi de probabilité

Définition : La loi de probabilité associée à chacune des valeurs possibles x_i de la v.a. discrète est la probabilité de l'évènement correspondant, c.-à-d. $p_i = P(X = x_i)$ où on a noté $P(X = x_i) = P(A)$ avec $A = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$.

Exemple introductif : La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Remarque : on a toujours $\sum_i p_i = P(\Omega) = 1$

2. Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition de la v.a. discrète X est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par : $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$

Exemple : Calculer la fonction de réparation $F(X)$ de la v.a. introduite dans le tableau de l'exemple précédent. En déduire la valeur de cette fonction de répartition en 0.5 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3 ; 3.5 ; 4 ; et 5.5. Dessiner cette fonction de répartition.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \le 0, \quad F(x) = P(X < x) = 0$

Si $0 < x \le 1, \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$

Si $1 < x \le 2, \quad F(x) = P(X < x) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4}{8}$

Si $2 < x \le 3, \quad F(x) = P(X < x) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{7}{8}$

Si $x > 3, \quad F(x) = P(X < x) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

Finalement, On a :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{8} & 0 < x \le 1 \\ \frac{4}{8} & 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{8} & 2 < x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

$F(0.5)=P(x<0.5)=P(X=0)=\dfrac{1}{8}$

$F(1)=P(x<1)=P(x=0)=\dfrac{1}{8}$

$F(1.5)=P(x<1.5)=P(x=0)+P(x=1)=\dfrac{4}{8}$

$F(2)=P(x<2)=P(x=0)+P(x=1)=\dfrac{4}{8}$

$F(2.5)=P(x<2.5)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)=\dfrac{7}{8}$

$F(3)=P(X<3)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)=\dfrac{7}{8}$

$F(3.5)=P(x<3.5)=(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)=1$

$F(4)=F(4.5)=F(5)=F(5.5)=F(3.5)$

Propriétés :

1. F est une fonction croissante en escalier
2. F est discontinue mais continue à gauche
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$
4. $F(x_{i+1})-F(x_i)=P(X=x_i)$ si x_{i+1}et x_i sont des points observables.

Exemple : On considère un jeu de bridge. L'expérience consiste à tirer une carte d'un jeu de 32 cartes. Soit X la v.a. qui associe à la carte tirée une valeur numérique suivant la règle du jeu de bridge : 4 pour un as, 3 pour un roi, 2 pour une reine, 1 pour un valet, et 0 pour une carte.

1) Quelle est la nature de la v.a. X
2) Calculer la loi de probabilité de la v.a. X
3) Calculer la fonction de répartition de X

Solution

1) X est une v.a. discrète $\begin{array}{rl} X: & \Omega \to X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}^2 \\ & \omega \mapsto X(\omega)=x \end{array}$

X est une v.a. discrète car $X(\Omega)$ est fini.

2)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	16/32	4/32	4/32	4/32	4/32

3) $\begin{aligned} F: \quad & \mathbb{R} \to [0,1] \\ & x \mapsto F(x) = P(X < x) \end{aligned}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{16}{32} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{20}{32} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{24}{32} & 2 < x \leq 3 \\ \frac{28}{32} & 3 < x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

Exemple On lance un dé parfait autant de fois que nécessaire pour obtenir 1. Soit X la v.a. qui associe à chaque résultat le nombre de lancers nécessaires.

1) Quelle est la nature de la v.a.
2) Calculer la loi de probabilité de X
3) Calculer la fonction de répartition de X et dessiner la

Solution

1) X est une v.a. discrète car l'ensemble des observables est infini dénombrable $\mathbb{N}^*$

2) Soit l'événement A défini comme étant $X = 1$

$P(X = 1) = P(A) = \frac{1}{6}$ et $P(X \neq 1) = P(\overline{A}) = \frac{5}{6}$

$$P(X = 2) = P(\overline{A} \text{et} A) = P(\overline{A})P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(X = 3) = P(\overline{A}, \overline{A}, A) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

$$P(X = 4) = P(\overline{A}, \overline{A}, \overline{A}, A) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$$

3. Paramètres descriptifs d'une distribution discrète

Soit X une v.a. discrète définie sur un espace probablisé (Ω, β, P) dont la loi est définie par $\forall x_i \in X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}, \, p_i = P(X = x_i).$

Définition : Mode : On appelle mode de X ou de la distribution de X, une valeur $x \in X(\Omega)$ pour laquelle $P(X) = x$ présente un maximum.

Exemple : En bridge, le mode est égal à 0.

Définition : Espérance : On appelle espérance de X, et on la note $\mu(x)$ ou μ_x ou $E(X)$, le nombre réel, s'il existe, défini par $\mu(x) = \mu_x = E(X) = \sum_i x_i p_i$.

Exemple : Bridge $\mu(x) = \mu_x = E(X) = \sum_i x_i p_i = 0 \times \frac{16}{32} + 1 \times \frac{4}{32} + 2 \times \frac{4}{32} + 3 \times \frac{4}{32} + 4 \times \frac{4}{32} = 1,25$

Définition : Variance-Écart Type : On appelle variance d'une variable aléatoire ayant une espérance $\mu(x)$ et on note $V(X)$ ou $Var(X)$ ou $\sigma^2(X)$, le nombre réel, s'il existe, défini par $V(X) = \sigma^2(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i$ et l'écart type est donné par $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{\sum_i (x_i - E(X))^2 p_i}$.

Proposition : $\sigma^2(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\sigma^2(X) &= \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2) p_i \\
&= \sum_i x_i^2 p_i - \sum_i 2x_i E(X) p_i + \sum_i E(X)^2 p_i \\
&= \sum_i x_i^2 p_i - 2E(X) \sum_i x_i p_i + E(X)^2 \sum_i p_i \\
&= \sum_i x_i^2 p_i - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2
\end{aligned}$$

Exemple : Bridge

$$\sigma^2(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2 = 0^2 \times \frac{16}{32} + 1^2 \times \frac{4}{32} + 2^2 \times \frac{4}{32} + 3^2 \times \frac{4}{32} + 4^2 \times \frac{4}{32} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{65 - 25}{16} = \frac{35}{16}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{\frac{35}{16}} = 1,479$$

Exercice : Soient a, b deux réels, avec $a \neq 0$ et X une variable aléatoire discrète. Montrer que $E(aX + b) = aE(X) + b$ et que $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Preuve : $E(aX + b) = \sum_i (ax_i + b) p_i = \sum_i ax_i p_i + \sum_i bp_i = a \sum_i x_i p_i + b \sum_i p_i = aE(X) + b$

$$Var(aX+b)=\sum_i (ax_i+b-E(aX+b))^2 p_i=\sum_i (ax_i+b-aE(X)-b)^2 p_i$$
$$=\sum_i a^2(x_i-E(X))^2 p_i = a^2 Var(X)$$

4. Lois discrètes classiques

a) Variable certaine – loi de Dirac

Définition : Soit x_0 un réel donné, considérons une épreuve dont le résultat est nécessairement x_0. On lui associe une variable aléatoire X qui prend la seule valeur x_0, c.à.d. :

$$\begin{cases} P(X=x)=1 & si\ x=x_0 \\ P(X=x)=0 & si\ x\neq x_0 \end{cases}$$

La variable aléatoire est appelée variable aléatoire de Dirac ou variable aléatoire certaine.

Propriétés :

a. Espérance $E(X)=x_0$

b. Variance $V(X)=0$

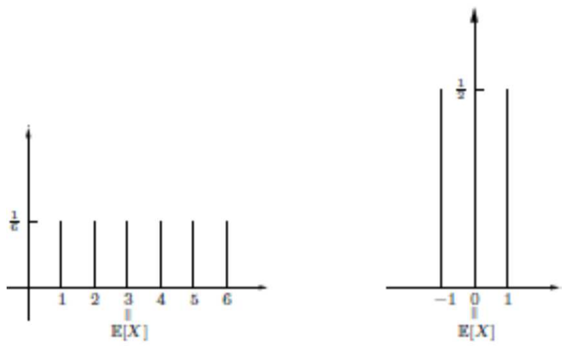
c. Fonction de répartition

$$F:\mathbb{R}\to[0,1]$$
$$x\mapsto P(X<x)$$
$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\leq x_0 \\ 1 & si\ x>x_0 \end{cases}$$

b) Loi uniforme discrète

Définition : Soit une épreuve aléatoire ξ à laquelle est associée une variable aléatoire X dont $X(\Omega)=\{x_1,...,x_n\}$ avec $x_1<...<x_n$. La loi de probabilité de X est dite uniforme si elle est définie par :

$$P(X=x)=\begin{cases} \frac{1}{n} & si\ x\in X(\Omega) \\ 0 & si\ x\notin X(\Omega) \end{cases}$$



A gauche : loi uniforme $\mathcal{U}_{\{1,\ldots,6\}}$. A droite : loi uniforme $\mathcal{U}_{\{-1,+1\}}$.

a. Espérance $E(X)=\sum_i x_i p_i = \frac{1}{n}\sum_i x_i$

b. Variance $Var(X)=\sigma^2(X)=\sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2 = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_i x_i)^2$

c. Fonction de répartition

$$\begin{aligned} F:\mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto P(X<x) \end{aligned}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad si\ x \le x_1 \\ \frac{1}{n} \quad si\ x_1 \le x \le x_2 \\ \frac{2}{n} \quad si\ x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots \\ \frac{k}{n} \quad si\ x_k \le x \le x_{k+1} \\ \vdots \\ \frac{n-1}{n} \quad si\ x_{n-1} \le x \le x_n \\ 1 \quad si\ x > x_n \end{cases}$$

Cas particulier : Si l'ensemble des observations est constitué des n premiers entiers $x_1=1, x_2=2, \ldots, x_n=n$, on a alors $E(X)=\sum_i x_i p_i = \frac{1}{n}\sum_i x_i = \frac{1}{n}\sum_i i = \frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

Et la variance $Var(X)=\sigma^2(X)=\sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2 = \frac{1}{n}\sum_i i^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n-1)(n+1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

c. Loi de Bernoulli

Définition : Soit une expérience aléatoire ξ pouvant entrainer l'abstention d'un événement A ou de son contraire $\overline{A}$. On appelle variable indicatrice de l'événement A une variable aléatoire X qui associe à l'observation de A la valeur 1 et à $\overline{A}$ la valeur 0.

Loi de probabilité

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

$$p = P(A=1) = P(A), \quad 1-p = P(X=0) = P(\overline{A})$$

a. Espérance $E(X) = \sum_i x_i p_i = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

b. Variance $Var(X) = \sigma^2(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2 = 0^2(1-p) + 1^2 p - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$

c. Fonction de répartition

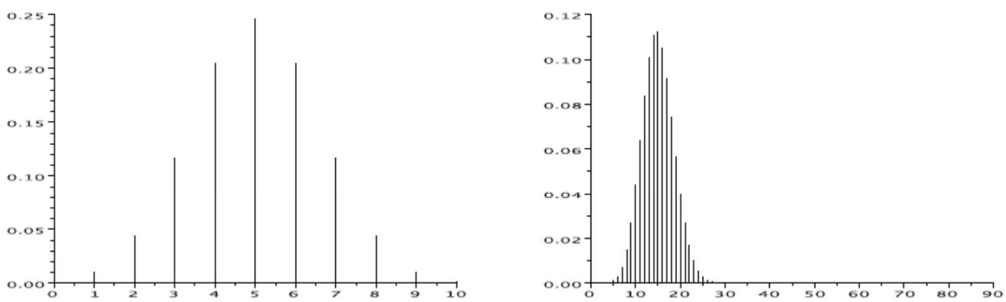
$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto P(X < x)$$
$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq x_0 \\ 1-p & si\ 0 < x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

d. Loi Binomiale

Définition : Soit n épreuves de Bernoulli satisfaisant aux trois conditions suivantes :

1) Chaque épreuve ne peut conduire qu'à deux résultats complémentaires succès ou échec
2) La probabilité de succès est la même dans chaque épreuve
3) Les épreuves sont indépendantes

Considérons une v.a. X donnant le nombre de succès observés sur n épreuves. Cette v.a. suit la loi binomiale de paramètres n et p.



Exemples de lois binomiales. A gauche : $X \sim \mathcal{B}(10, 1/2)$. A droite : $Y \sim \mathcal{B}(90, 1/6)$.

Exemple : On lance une pièce de monnaie n fois. X est le nombre de piles obtenu.

$$\forall i\, 1 \le i \le n, \text{ posons } X_i = \begin{cases} 1 & \text{si au i}^{\text{ème}} \text{ lancer on a pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $P(X_i) = p,\ P(X_i) = 1 - p$ donc $X_i \to B(n)$

On a $X = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$

$X(\Omega) = \{0,1,..,n\}$

La loi de probabilité de X est donnée par :

$\forall k \in \{0,1,2,...,n\},\, p_k = P(X = k) = P(A)$

$A = \bigcup A_i = \{w / X(w) = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)}$

Proposition

$X \to B(n, p)$ Soit X une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On a alors $E(X) = np$ et $Var(X) = np(1-p) = npq$

Preuve $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} =$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-k)} =$$

$$np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{((n-1)-(k-1))}$$

Posons $k' = k - 1$ et $n - 1 = n'$

$$E(X) = np \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!((n-1)-k')!} p^{k'} (1-p)^{(n-1)-k'} = np \sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} p^{k'} (1-p)^{(n-1)-k'} = np$$

car formule de Newton $\sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} p^{k'} (1-p)^{(n-1)-k'} = \sum_{k'=0}^{n'} C_{n'}^{k'} p^{k'} (1-p)^{n'-k'} = (a+b)^{n'}$

avec $a = p$ et $b = 1 - p$

Preuve $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - (np)^2$

$$E(X^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} + k \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$ car $k^2 = k(k-1) + k$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} + E(X)$$ car $k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} = 0$ pour $k = 0$ et $k = 1$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} p^k (1-p)^{n-k} + np = n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{((n-2)-(k-2))!(k-2)!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{((n-2)-(k-2))!(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{((n-2)-k')!k'!} p^{k'} (1-p)^{(n-2)-k'} + np = n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} C_{n-2}^{k'} p^{k'} (1-p)^{(n-2)-k'} + np$$

$$= n(n-1)p^2 (p + (1-p))^{n-2} + np = n(n-1)p^2 + np$$

Finalement $Var(X) = E(X^2) - (np)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$

Exemple : Une enquête faite auprès des ménagères d'une grande région montre que 45% d'entre elles préfèrent faire leurs courses dans les grands magasins. Si l'on choisit au hasard 10 ménagères dans la région, calculer les probabilités que :

a) Exactement 4 préfèrent les grands magasins
b) Moins de 8 préfèrent les grands magasins
c) Au moins 5 préfèrent les grands magasins

Solution : $n = 10, p = 0.45$

Posons pour tout $i, 1 \le i \le 10$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la i}^{\text{ème}}\text{ménagère préfère les grands magasins} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$P(X_i = 1) = 0.45$

Posons X le nombre de ménagères qui préfèrent faire les courses dans les grands magasins.

$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ et $X \sim \mathrm{B}(10, 0.45)$

càd $\forall\ 0 \le k \le 10,\ P(X = k) = C_{10}^{k}(0.45)^k (0.55)^{10-k}$

a) $P(X = 4) = C_{10}^{4}(0.45)^4(0.55)^6 = \frac{10!}{4!6!}(0.45)^4(0.55)^6$
b) $P(X < 8) = P(X \le 7) = 1 - P(X \ge 8) = 1 - (P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10))$
$= 1 - (C_{10}^{8}(0.45)^8(0.55)^2 + C_{10}^{9}(0.45)^9(0.55)^1 + C_{10}^{10}(0.45)^{10}(0.55)^0)$
c) $P(X \ge 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

e. Loi géométrique ou loi du premier succès

Le modèle

Soit une suite d'expérience aléatoire $E_1, E_2, ..., E_n$ obéissant aux conditions du schéma de Bernouilli.

a) Chaque expérience peut entraîner l'observation d'un événement donné E ou bien de son contraire $\overline{E}$.
b) La probabilité de E notée p est la même pour chaque expérience.
c) Le résultat d'une expérience est indépendant des résultats des autres expériences.

On note E_k l'événement « E est observée à la $k^{ième}$ expérience ». Si on considère maintenant la v.a. X qui associe à toute suite de résultats le rang de l'apparition du premier événement E, on dit que X est le temps d'attente du premier E. On a ici : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Loi de X

$\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = P(X = k) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap ... \cap \overline{E_{k-1}} \cap E_k) = P(\overline{E_1}) \cap P(\overline{E_2}) \cap ... \cap P(\overline{E_{k-1}}) \cap P(E_k)$

$= (1-p)^{k-1} p$

Définition

On dit qu'une v.a. X a une valeur dans $\mathbb{N}^*$, suit une loi géométrique de paramètre $p, X \sim G(p)$ si la loi de probabilité est donnée par :

$\forall x \in \mathbb{N}^*, p_k = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ où $0 < p < 1$.

Proposition

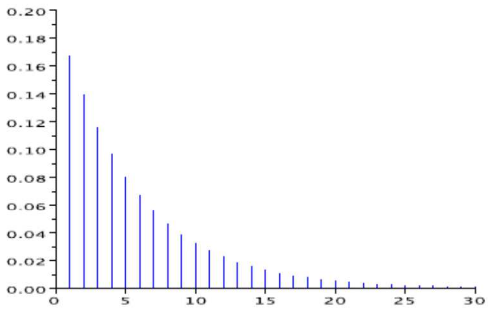
Si $X \sim G(p)$ on a alors $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}$

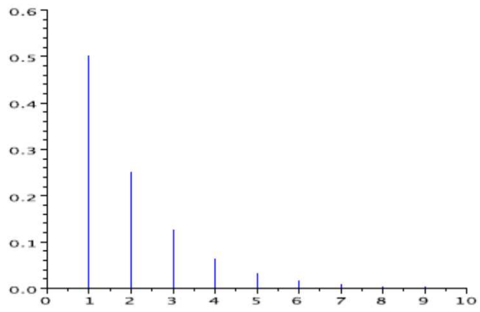
Posons $x = 1-p, E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (x^k)' = (\sum_{k=1}^{+\infty} x^k)' = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{p^2}$

(car $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-x}, |x| < 1$)

Donc finalement on obtient $E(X) = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

Pour prouver $V(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p - (\frac{1}{p})^2$ avec $k^2 = k(k+1) - k$ puis idem avec dérivée seconde. $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$





Exemples de lois géometriques. A gauche : $X \sim \mathcal{G}(1/6)$. A droite : $Y \sim \mathcal{G}(1/2)$.

f. Loi Hypergéométrique

Le modèle

Une urne contient N boules dont N_1 sont rouges et $N_2 = N - N_1$ sont non rouges. On considère l'expérience ξ qui consiste à prélever sans remise un échantillon de n boules de l'urne avec $n \leq \inf(N_1, N_2)$. Si X la v.a. associant à un tel échantillon le nombre de boules rouges qu'il peut contenir, on a :

$$X(\Omega) = \{0,1,\dots,n\} \quad P(X = k) = \frac{C_{N_1}^{k} C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$$

Définition

On dit qu'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $N, n, p = \dfrac{N_1}{N}$ si sa loi de probabilité est donnée par $P(X = k) = \dfrac{C_{N_1}^{k} C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$ où n, k, N_1, N sont des entiers positifs tels que : $0 \leq n \leq N$, $0 \leq k \leq \inf\{n, N\}$ et $0 \leq n - k \leq N - N_1$.

Nous écrivons $X \sim H(N, n, p)$ avec $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Proposition

Soit $X \sim H(N, n, p)$, on a alors $E(X) = np, V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

(La variance de la loi hypergéométrique est égale à celle de la loi binomiale et son espérance est égale à celle de la loi binomiale $np(1-p)$ multipliée par un coefficient d'exhaustivité $\dfrac{N-n}{N-1}$).

g. Loi de poisson

Définition

On dit qu'une v.a. X à valeur dans $\mathbb{N}$ suit une loi de poisson de paramètres $\lambda, \lambda > 0$ sa loi de probabilité est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ on écrit $X \sim P(\lambda)$

Proposition

Soit $X \sim P(\lambda)$ on a alors $E(X) = V(X) = \lambda$

Preuve

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Posons $k' = k-1$ on aura $E(X) = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k'=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda^{k'}}{k'!}$

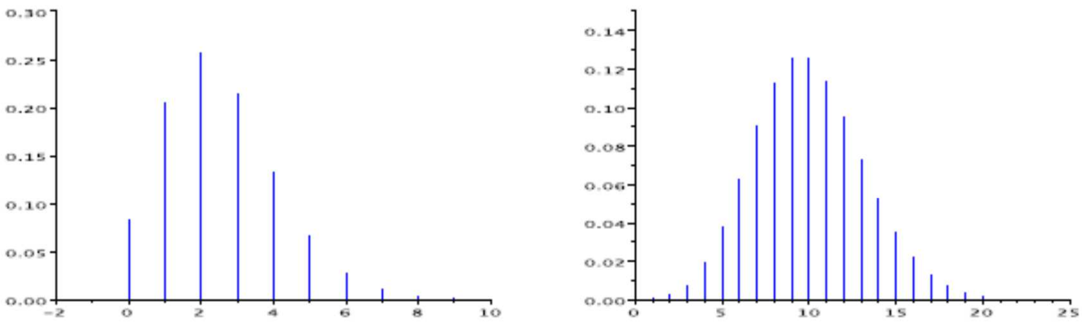
$= \lambda e^{-\lambda}(1 + \dfrac{\lambda^2}{2!} + \dfrac{\lambda^3}{3!} + \ldots + \dfrac{\lambda^n}{n!} + \ldots) = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$ (Développement limité)

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k) - \lambda^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2$$

$k^2 = k(k+1) - k$ donc $V(X) = e^{-\lambda}(\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\dfrac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} k\dfrac{\lambda^k}{k!}) - \lambda^2$ avec $\sum_{k=1}^{+\infty} k\dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{\lambda}$

$$V(X) = e^{-\lambda}(\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{\lambda}) - \lambda^2 = e^{-\lambda}(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \lambda e^{\lambda}) - \lambda^2 = e^{-\lambda}(\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{\lambda}) - \lambda^2$$

$= e^{-\lambda}(\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) - \lambda^2 = \lambda$.

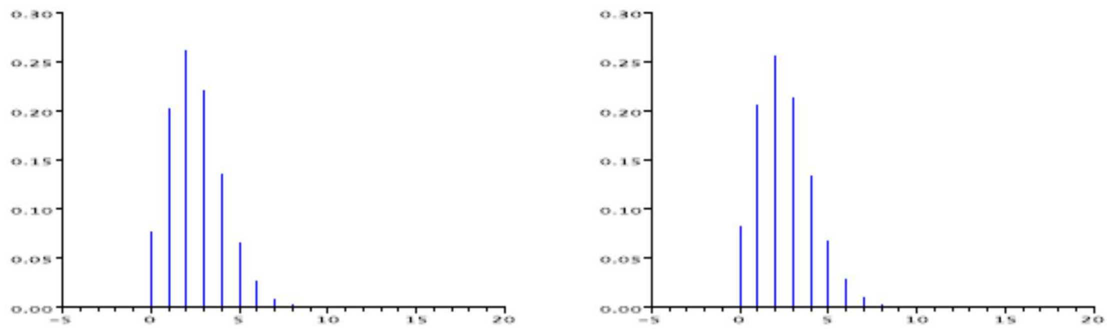


Lois de Poisson $\mathcal{P}(2.5)$ et $\mathcal{P}(10)$.

h. Approximation de la loi binomiale

Règle

Soit $X \sim B(n, p)$ si $n > 30$ et si $np < 5$ alors $B(n, p) \approx P(\lambda)$ avec $\lambda = np$



Loi binomiale $\mathcal{B}(50, 1/20)$ et loi de Poisson $\mathcal{P}(2.5)$.

Applications

Exemple 1 Comparer $B(50, 0.01)$ avec $P(0.5)$ pour k variant de 0 à 5

a) $X \sim B(50, 0.01)$ càd $X(\Omega) = \{0, 1, ..., 50\}, \forall k \in X(\Omega), p_k = P(X = k) = C_{50}^{k}(0.01)^k (0.99)^{50-k}$

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.6050	0.3056	0.0756	0.0122	0.0015	0.0001

b) $X \sim P(0.5) \Leftrightarrow X(\Omega) = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, p_k = P(X = k) = \dfrac{e^{-0.5}(0.5)^k}{k!}$

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.6065	0.3033	0.0758	0.0128	0.0016	0.0002

Justification : On savait déjà que $n > 30$ et $np < 5$ donc on pouvait appliquer la loi de poisson.

Exemple 2 Sachant que la probabilité pour un individu d'avoir une mauvaise réaction à la suite de l'injection d'un sérum est de 0.001, déterminer la probabilité pour que sur 2000 personnes vaccinées, il y en ait au plus trois qui aient une mauvaise réaction.

Solution

On pose X le nombre de personnes vaccinées parmi 2000 et ayant une mauvaise réaction. Loi de X : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., 2000\}$ et $X \sim B(2000, 0.001)$. On cherche à calculer $P(X \leq 3)$.

$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= C_{2000}^{0}(0.001)^0 (0.999)^{2000} + C_{2000}^{1}(0.001)^1 (0.999)^{2000-1} + ...$ trop long

Puisque $n = 2000 > 30$ et $np = 2 < 5$ on peut approximer la loi binomiale en une loi de poisson $B(2000, 0.001) \sim P(2)$ et

$$P(X \le 3) = e^{-2} + e^{-2} \times 2 + e^{-2} \times \frac{2^2}{2!} + e^{-2} \times \frac{2^3}{3!} = e^{-2}(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}) = e^{-2} \times \frac{19}{3} = 0.8571$$

Exemple 3 Un livre de 1000 pages contient 1500 erreurs réparties au hasard. On ouvre le livre à une page quelconque et on désigne par X le nombre d'erreurs rencontré dans cette page.

1) Déterminer la loi de X .
2) Peut-on approximer cette loi ?
3) Calculer $P(X = 0), P(X = 1), P(X > 2), P(X \le 3).$

Solution

1) $X \sim B(1500, 0.001)$
2) $n = 1500 > 30$ et $np = 1.5 < 5$ on peut approximer la loi binomiale en une loi de poisson $B(1500, 0.001) \sim P(1.5)$
3) $P(X = 0) = \frac{e^{-1.5}(1.5)^0}{0!} = e^{-1.5} = 0.2231$ et $P(X = 1) = \frac{e^{-1.5}(1.5)^1}{1!} = 1.5e^{-1.5} = 0.3347$

$$P(X > 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - e^{-1.5} - 1.5e^{-1.5} - \frac{e^{-1.5}(1.5)^2}{2!} = 1 - 0.8088 = 0.1912$$

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = e^{-1.5} + 1.5e^{-1.5} + \frac{e^{-1.5}(1.5)^2}{2!} + \frac{e^{-1.5}(1.5)^3}{3!} = 0.9344$$

5. Variables aléatoires continues

Définition

X est dite v.a. ssi $X(\Omega)$ est infini non dénombrable. La loi de X est caractérisée soit par une fonction continue f appelée densité de probabilité vérifiant les propriétés suivantes :

a) $f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Soit pour une fonction continue F appelée la fonction de répartition donnée par :

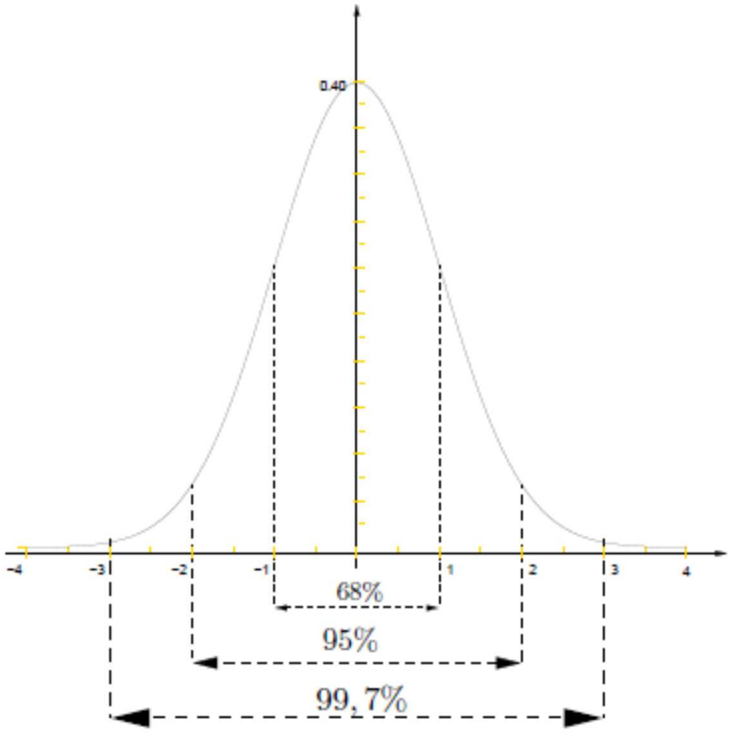
$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto P(X < x) \end{aligned}$$ où $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ et tel que $F'(x) = f(x)$

1. Loi normale

a. Loi normale centrée réduite

Définition

Une v.a. T est dite distribuée selon une loi normale centrée réduite si sa densité de probabilité s'écrit pour $x \leq \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ et on note $X \sim N(0,1)$



Concentration autour de la moyenne d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

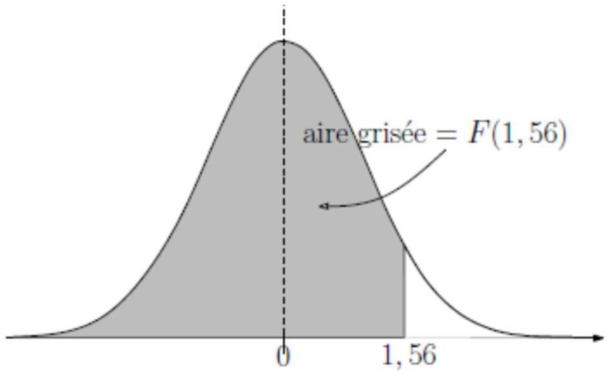
Propriété d'une v.a. continue

Si T est une v.a. continue de densité f, son espérance si elle existe vaut $E(x) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ et sa variance $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - E^2(X)$

Exemple exercice 2 dernière liste TD

b. Lecture d'une table

Si $X \sim N(0,1)$ on peut calculer la probabilité qu'une proportion d'observations soient inférieure à une valeur donnée et ceci en regardant la courbe cloche de la loi normale et en lisant la table de la loi normale.



On distingue 4 cas.

1) On suppose qu'une certaine variable $X \sim N(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 1.56$? On cherche $P(X \leq 1.56) = F(1.56)$.

On cherche 1,56 dans **la table** :

	...	0,06	...
⋮			
1,5	...	0.9406	...
⋮			

Donc $P(X < 1.56) = F(1.56) = 0.9406$. Pour 94.06 % des individus, la variable X est inférieure à 1.56.

N.B : pour une loi continue $P(X \leq a) = P(X < a)$.

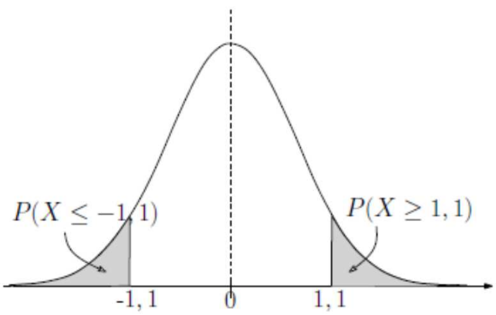
2) On suppose qu'une certaine variable $X \sim N(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \geq 1.49$? On cherche $P(X \geq 1.49)$. On écrit d'abord $P(X \geq 1.49) = 1 - P(X < 1.49)$

On cherche 1,49 dans **la table**.

	...	...	0,09
⋮			
1,4	...	...	0.9319
⋮			

Donc $P(X < 1.49) = F(1.49) = 0.9319$, et $P(X \geq 1.49) = 1 - F(1.49) = 1 - 0.9319 = 0.0681$

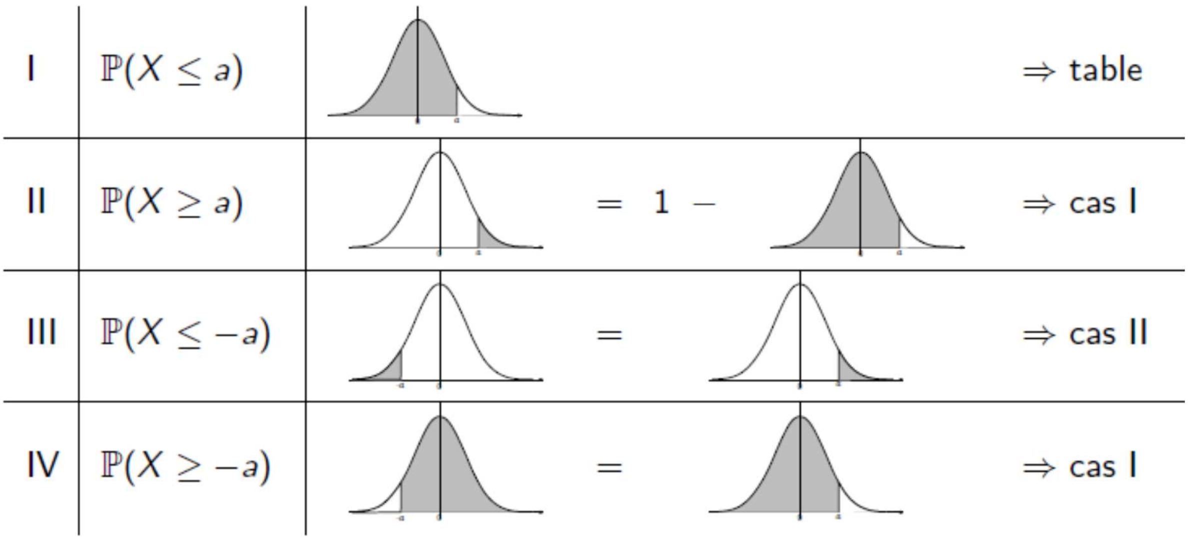
3) On suppose qu'une certaine variable $X \sim N(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq -1.1$? On cherche donc $P(X \leq -1.1) = P(X \geq 1.1) = 1 - P(X < 1.1)$ $= 1 - F(1.1) = 1 - 0.8643$.



4) On suppose qu'une certaine variable $X \sim N(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \geq -1.34$? On cherche donc $P(X \geq -1.34) = P(X \leq 1.34) = F(1.34)$.

Pour résumé :

Pour n'importe quel $a > 0$,



Exemple

a. Calculer $F(U)$ pour $U = 1.5, 1.42, 2.535, -1.5.$.

b. Calculer $P(T > -1.42), P(-1.5 < T < 1.5), P(-1 < T < 0.5)$

Solution

a. $F(1.5) = P(T < 1.5) = 0.9332$

$F(1.42) = P(T < 1.42) = 0.922$

$$F(2.535) = \frac{0.9943 + 0.9945}{2} = 0.9944$$

$F(-1.5) = P(T < -1.5) = P(T > 1.5) = 1 - P(T < 1.5) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

b. $P(T > -1.42) = P(T < 1.42) = F(1.42) = 0.9222$

$P(-1.5 < T < 1.5) = P(T < 1.5) - P(T < -1.5) = F(1.5) - (1 - F(1.5)) = 2F(1.5) - 1 = 2 \times 0.9332 - 1$

$P(-1 < T < 0.5) = P(T < 0.5) - P(T < -1) = F(0.5) - (1 - F(1)) = 0.6915 - 1 + 0.8413$

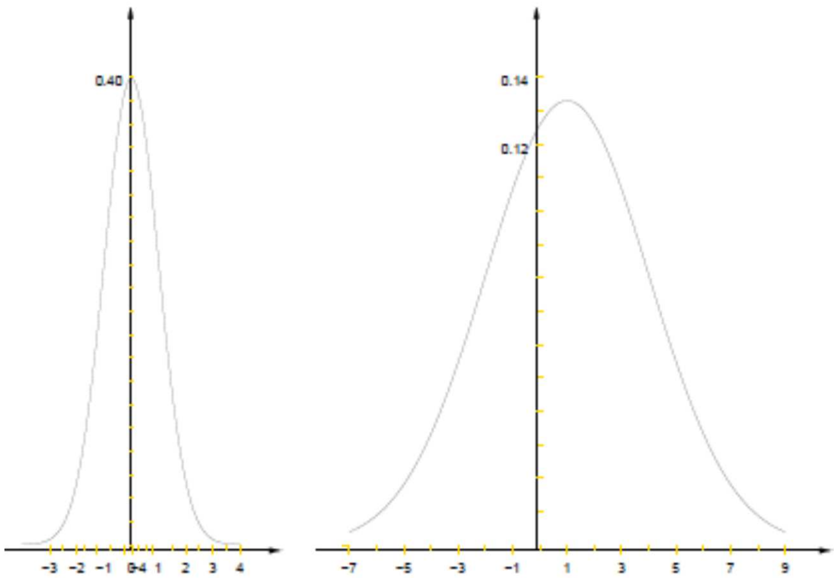
c. Loi normale

Définition

Une v.a. T est dite distribuée selon une loi normale de moyenne m et de variance σ^2 ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$ et on note $X \sim N(m,\sigma)$.

Propriétés

1. Densité de probabilité
2. Espérance $E(X) = m$
3. Variance $V'X) = \sigma^2$
4. Si $X \sim N(m,\sigma)$ on peut montrer que $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$ qui est tabulée.



Densités des lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ (à gauche) et $\mathcal{N}(2,9)$ (à droite).

Applications

Exemple 1 Dans une usine, le salaire moyen est de 5 euros l'heure avec un écart type de 0.5 euros. On suppose que la v.a. représentant le salaire suit une loi normale. Si on choisit au hasard un ouvrier dans cette usine, quelle est la probabilité pour que cet ouvrier :

a) Gagne au moins 5.5 euros l'heure
b) Gagne entre 4.5 euros et 5.5 euros l'heure
c) Gagne moins de 4 euros l'heure

Solution

X est le salaire d'un ouvrier et on a $X \sim N(5, 0.5)$

a) $P(X \geq 5.5) = P(\frac{X-5}{0.5} \geq \frac{5.5-5}{0.5}) = P(T \geq 1) = 1 - P(T < 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8413$

b) $P(4.5 \leq X \leq 5.5) = P(\frac{4.5-5}{0.5} \leq \frac{X-5}{0.5} \leq \frac{5.5-5}{0.5}) = P(-1 \leq T \leq 1) = P(T < 1) - P(T < -1)$

$= P(T < 1) - (1 - P(T < 1)) = 2P(T < 1) - 1 = 2F(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1$

c) $P(X \leq 4) = P(X < 4) = P(\frac{X-5}{0.5} < \frac{4-5}{0.5}) = P(T < -2) = 1 - P(T > -2) = 1 - F(2) = 1 - 0.9772$

Exemple 2 Une confiture peut être qualifiée de « pure sucre » si elle contient entre 420 et 520 g de sucre par kg de confiture. Un fabricant vérifie 200 pots de confiture de 1 kg. Il trouve que le poids moyen de sucre est 465 g avec un écart type de 30 g. Sachant que la qualité de sucre est distribuée selon une loi normale, calculer le pourcentage de la production qui ne doit pas porter la mention « pure sucre » (en considérant l'échantillon comme significatif de la production générale).

Solution

X est le poids du sucre dans un pot $X \sim N(465, 30)$

d. Approximation de la loi normale

Règle 1 Soit $X \sim B(n, p)$ si $n > 50$ et $npq > 10$ alors la loi binomiale peut être approchée par la loi normale $N(np, \sqrt{npq})$

Règle 2 Soit $X \sim B(n, p)$ si $n \geq 30$ et $p < 0.1, npq \leq 10$ alors la loi binomiale peut être approchée par la loi de poisson $P(np)$

e. Approximation de la loi de poisson

Règle Soit $X \sim P(\lambda)$ pour $\lambda \geq 20$ la loi de poisson peut être approchée par la loi normale $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$

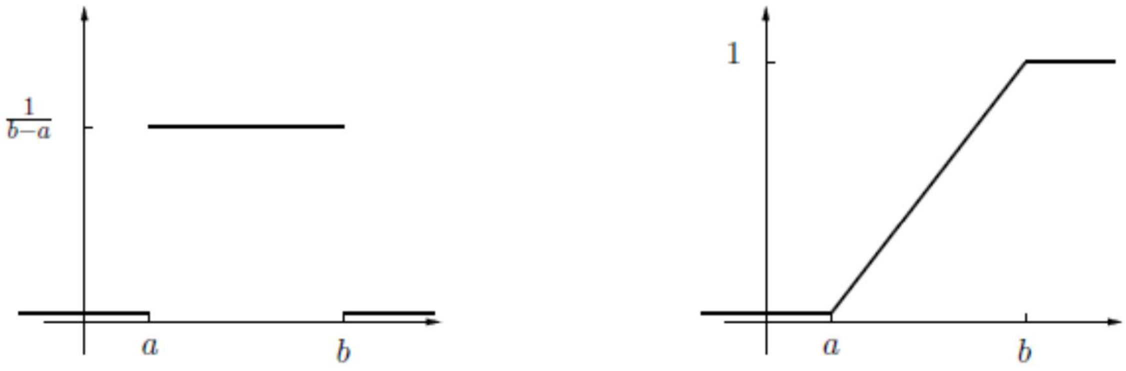
f. Loi uniforme continue

Définition : On appelle loi uniforme sur $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ la loi de probabilité dont la densité f est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$ 1 sur $[a, b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tous réels $[l, m]$ de $[a, b]$ avec $a < l \leq m < b$ on a :

$$P(l \leq x \leq m) = \int_l^m \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a} \right]_l^m = \frac{l-m}{b-a}$$



Densité et fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$.

1. Esperance $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

2. Variance $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

3. Fonction de répartition : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x \ge b \end{cases}$

g. Loi exponentielle ou loi de durée de vie sans vieillissement

Définition : La loi exponentielle est la version en continue de la loi géométrique. De fait, elle intervient souvent dans la modélisation d'attente.

Soit λ un paramètre connu, on dit qu'une v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre λ, notée $X \sim \varepsilon(\lambda)$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

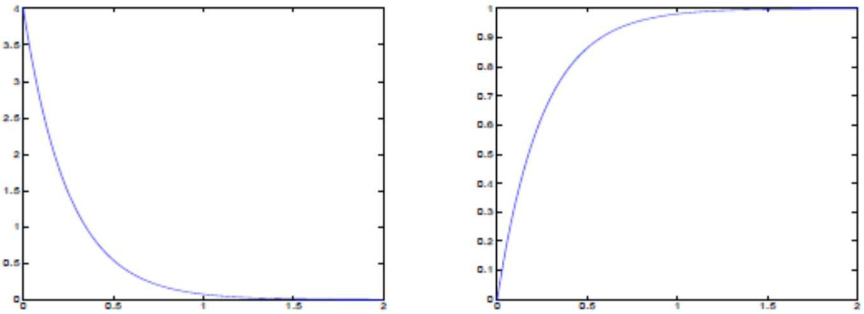
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pour } x \ge 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Espérance $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

2. Variance $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

3. Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } \quad x \ge 0 \end{cases}$$



Densité et fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 4$.