

**PROBABILITÉS discrètes**  
**(Variables aléatoires discrètes)**

**Exercice 1**

Un sac contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

On tire les boules les unes après les autres, sans remise, jusqu'à vider le sac.

On désigne par  $X$ , la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.

**Exercice 2**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire est donnée par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ \frac{4}{5} & \text{si } 2 < t \leq 3 \\ 1 & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

Déterminer la loi de probabilité de cette variable, son mode, son espérance, son écart type.

**Exercice 3**

On tire consécutivement et sans remise deux jetons d'une urne contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10 et on note  $X$ , la v.a.r égale à la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

Déterminer la loi de  $X$  et calculer  $V(X)$  et  $\sigma(x)$ .

**Exercice 4**

Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36, dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0, verte.

Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire, gagne deux fois sa mise si la couleur mise sort. Si ce joueur mise sur un numéro de 1 à 36 qui sort, il gagne 36 fois sa mise. Toute mise sur le numéro 0 est interdite.

a) Le joueur mise au hasard aF sur une couleur. Soit  $X_1$ , son gain. Trouver la loi de  $X_1$ , puis calculer  $E(X_1)$  et  $V(X_1)$ .

b) Le joueur mise maintenant au hasard aF sur l'un des numéros de 1 à 36.

Déterminer la loi de la v.a.r  $X_2$  égale au gain du joueur.

Calculer  $E(X_2)$  et  $V(X_2)$

c) Si vous aviez aF à miser, miseriez-vous sur un numéro de 1 à 36 ou sur une couleur (rouge ou noir) ?

**Exercice 5**

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues.

a) On tire 4 boules successivement, sans remise. On désigne par  $X$  la v.a.r. égale au nombre de boules rouges obtenues.

Déterminer la loi de  $X$ , puis calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

b) On tire maintenant 4 boules successivement avec remise. Reprendre les questions précédentes avec la v.a.r  $Y$  égale au nombre de boules rouges obtenues.

c) Comparer  $E(X)$  et  $E(Y)$ , Commenter ce résultat Comparer  $\sigma(X)$  et  $\sigma(Y)$ , commenter le résultat obtenu.

**Exercice 6**

Un sac contient 10 jetons dont 4 rouges et 6 blancs. On extrait les jetons un à un sans remise. Soit  $X$ , la v.a.r. égale au rang du 1er jeton rouge tiré.

a) Trouver la loi de  $X$ , puis calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$  et  $\sigma(X)$  (les jetons rouges sont indiscernables entre eux ainsi que les jetons blancs).

b) Reprendre les questions précédentes en supposant que les tirages ont lieu avec remise.

**Exercice 7**

On lance un dé non truqué, et on note  $X$  la v.a.r égale au double du numéro de la face apparue moins 6.

1) Déterminer la loi de  $X$ , et calculer  $E(X)$  et  $V(X)$

2) Déterminer la loi de la v.a.x  $Y$  définie par  $Y = X^{|X|}$ .

**Exercice 8**

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée et on considère la variable aléatoire  $X$  représentant le nombre de faces obtenues.

1) Donner l'ensemble des observables de cette expérience aléatoire.

2) Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

3) Déterminer la fonction de répartition et en donner la représentation graphique.

**Exercice 9**

Une urne contient 10 boules numérotées : 3 numéros 1, 2 numéros 2 et 5 numéros 3.

On tire deux boules et on considère la variable aléatoire représentant le total des nombres marqués sur les deux boules.

a) Déterminer sa loi de probabilité

b) Déterminer sa fonction de répartition

c) Calculer son espérance et sa variance

d) Quelles est la probabilité pour que ce total prenne une valeur au moins égale à 6 ? strictement compris entre 2 et 6 ?

**Exercice 10**

Paul a dans sa poche deux boîtes d'allumettes indiscernable ; l'une contient 5 allumettes, l'autre 2. Il choisit au hasard une des boîtes, allume sa cigarette avec une seule allumette, puis remet la boîte dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide.

Soit  $X$  la v.a.r. représentant le nombre de cigarette allumées avant de jeter une des boîtes.

Déterminer la loi de  $X$ .

Calculer son espérance et sa variance.

**Exercice 11**

Un gardien de nuit a 10 clés, dont une seule marche, pour ouvrir une porte. Il emploie deux méthodes : A : méthode rationnelle ; à jeun, il retire les clés déjà essayées B : ivre, chaque clé peut être essayée plusieurs fois.

Soit  $X_A$  le nombre de clés essayées avant d'ouvrir, y compris la bonne, dans le cas A,  $X_B$  dans le cas B.

a) Déterminer la loi de probabilité et la fonction de répartition de  $X_A$  et  $X_B$

b) Calculer les espérances de  $X_A$  et de  $X_B$

c) On sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clés, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre.