Chapitre 2 : Premiers éléments de la théorie de probabilité

I. Notation d'expérience aléatoire

Définition : On appelle expérience aléatoire toute expérience ξ pour laquelle :

- La liste des résultats possibles est connue à l'avance
- Toute réalisation de l'épreuve se traduit par un résultat (inscrit dans la liste) que l'on ne connait pas à l'avance (résultat aléatoire)
- L'expérience peut être reproduite dans des conditions identiques mais le résultat varie et semble dépendre du hasard.

II. L'ensemble fondamental Ω

Définition : On appelle ensemble fondamental (ou univers) associé à ξ, tout élément Ω dont les éléments représentent toutes les issues possibles de ξ.

III. Les évènements

Définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire ξ, on dit qu'un évènement est lié à ξ si pour tout résultat $\omega \in \Omega$ on sait décider si cet événement a eu lieu ou non.

Exemple : On jette deux dés de couleurs différentes, le résultat de l'expérience ξ est exprimé par la donnée des nombres affichés par chacun des dés.

L'univers $\Omega = \{(a,b) / 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6\}$ avec card(Ω)=36.

Soit l'événement A « Les deux dés affichent des nombres pairs » , on aura : $A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

Définitions :

a) Événement élémentaire

Ce sont les parties de Ω réduit à un point $\{\omega\}$

b) Événement certain

C'est l'événement lié à une propriété toujours réalisée lorsqu'on effectue ξ, cet événement est Ω

c) Événement impossible

C'est l'événement lié à une propriété qui n'est jamais réalisée, c'est l'ensemble $\varnothing$

d) Événement complémentaire

Si A est un événement, on dit que $\overline{A}$ est le complémentaire de A ($A^c = \overline{A} = C_{\Omega}^{A}$)

e) Événements incompatibles

On dit que les évènements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent être réalisés simultanément, càd si $A \cap B = \emptyset$

f) Implication

On dit que les évènements A entraîne ou implique l'évènement B si la réalisation de A implique celle de B qu'on écrit $A \subset B$.

g) Système complet

On appelle système complet d'évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ toute suite d'évènement deux à deux incompatibles et tel que : $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

On dit aussi que les évènements $A_i, 1 \leq i \leq n$ forment une partition de Ω .

IV. La probabilité

Définition

Soit Ω un univers, on appelle tribu ou bien σ-algèbre sur Ω toute famille β de parties de Ω vérifiant :

a) $\Omega \subset \beta$

b) $A \in \beta \Rightarrow \overline{A} \in \beta$

c) Si $A_i, 1 \leq i \leq n$ est une suite d'éléments de β alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \beta$

Propriétés

Soit β une tribu sur Ω

i) $\emptyset \in \beta$

ii) Si $A_i, 1 \leq i \leq n$ est une suite d'éléments de β alors $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \beta$

iii) Soient $A, B \in \beta$ vérifiant $A \subset B$ alors $B - A \subset \beta$

iv) Soient $A, B \in \beta$ vérifiant $A \subset B$ alors $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \in \beta$

Définition

Soit (Ω, β) un espace probabilisable, on appelle probabilité sur cet espace toute application $\begin{array}{l} P : \beta \to [0,1] \\ \quad A \mapsto P(A) \end{array}$ vérifiant :

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Pour toute suite d'évènements deux à deux incompatibles $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, le triplet (Ω, β, P) s'appelle alors espace probabilisé.

Si $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Propriétés

Soit (Ω, β, P) espace probabilisé, on a les propriétés suivantes :

i) $P(\varnothing) = 0$

ii) Si A, B sont deux évènements quelconques, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

iii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

iv) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

V. Calcul de probabilité

Si toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables, et si Ω est fini de cardinal n, on a alors $P(\{w\}) = \frac{1}{n}$ et si $A \subset \Omega, P(A) = \frac{card(A)}{n}$.

Exemple : On tire au hasard et sans remise trois boules dans une urne contenant dix boules différentes dont cinq sont rouges, trois noires et deux blanches. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge, une boule noire et une boule blanche, événement noté RNB ?

$card(\Omega) = 10 \times 9 \times 8 = A_{10}^{3} = 720$ et $card(\text{RNB}) = 5 \times 3 \times 2$ donc $P(\text{RNB}) = \frac{card(\text{RNB})}{card(\Omega)} = \frac{1}{24}$

Exemple : Dans un jeu de Bridge, quelle est la probabilité d'obtenir quatre as dans une main de treize cartes ? (On utilise un jeu de cinquante-deux cartes)

a) On suppose qu'il n'y a pas d'ordre : Prenons l'observation des treize cartes d'un joueur donné, et l'ensemble des treize combinaisons prises parmi les cinquante-deux card(Ω)=C_{52}^{13}.

$$P("4As") = \frac{C_4^4 C_{48}^9}{C_{52}^{13}} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{52 \times 51 \times 50 \times 49}$$

b) Avec ordre : Prenons maintenant pour ξ l'observation des cartes d'un joueur donné dans l'ordre où elles ont été distribuées card(Ω)= A_{52}^{13}.

$$P("4As") = \frac{A_4^4 A_{48}^9}{A_{52}^{13}} = \frac{48! \times 4!}{52!}$$

VI. Probabilité conditionnelle-Indépendance

Exemple Introductif

On jette deux dés parfaits et soit B l'événement «la somme des points obtenus est au moins égale à 10 ». En l'absence de toute information, $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

a) Supposons que le premier dé amène 3 (événement A). L'expérimentateur, face à telle information, sait que l'événement B est devenu impossible, irréalisable (A et B sont incompatibles). Nous dirons que la probabilité de B, sachant que A est réalisé, est nulle et nous écrivons $P_A(B)=P(B/A)=0$.
b) Supposons maintenant que le premier dé amène un 6 (événements C). L'expérimentateur sait alors pour que B se réalise, il faut que le deuxième dé amène 4 ou 5 ou 6. on aura donc $P_C(B)=P(B/C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Définition Soit (Ω,β,P) un espace de probabilité et B un événement de probabilité non nulle et soit A un événement quelconque. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé, le nombre noté $P_B(A)=P(A/B)$ est défini par : $P_B(A)=P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Exemple : On jette un dé parfait. Si on sait que le nombre obtenu est pair (événement A), et en l'absence de toute information, la probabilité d'obtenir 2 (événement B) est intuitivement égale à $\frac{1}{3}$, celle d'obtenir 1 est évidemment égale à 0. Ceci est en accord avec la définition : $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

$P(A\cap B)=P(B)$ car $B\subset A$ donc $P(B)=\frac{1}{6}$ et $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$$P(B/A)=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3}$$

Proposition

a) L'application définie par $A\to P_B(A)=P(A/B)$ (où B est un événement de probabilité non nulle) est une probabilité sur (Ω,β,P).

b) $\forall A\in\beta,\forall B\in\beta$ tels que $P(A)P(B)\neq 0$, on a alors
$P(A\cap B)=P(B)P(A/B)=P(A)P(B/A)$

$A\cap B\subset B$:

iii) $0\leq P_B(A)\leq 1$
iv) $P_B(\Omega)=1\,(A=\Omega)$

c) Soient $A_1, A_2, ..., A_n, n$ événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \neq 0$. On a alors :

$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)P(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$ (Formule de probabilités composées).

d) Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle, on a alors :
$\forall B \in \beta, P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i)P(B / A_i)$ (Formule de probabilité totale).

Exemples

1. Considérons deux urnes U_1, U_2 contenant chacune deux boules noires et trois boules blanches. On tire une boule de U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_2. On tire après une boule de U_2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois une boule noire ?

Solution : Notons N_1 l'événement « la boule tirée de U_1 est noire » et N_2 l'événement « la boule tirée de U_2 est noire ». On cherche à calculer $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2 / N_1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{5}$

2. Soit une urne contenant dix boules dont 5 rouges, 3 noires et 2 blanches. L'expérience consiste à tirer 3 boules une à une et sans remise. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge, la seconde noire, et la troisième blanche ?

Solution : Notons A_1 l'événement « la première boule tirée est rouge », A_2 l'événement « la deuxième boule tirée est noire » et A_3 l'événement « la troisième boule tirée est blanche ». Nous cherchons à calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. D'après la formule des probabilités composées, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{24}$.

3. Un individu est choisi au hasard dans une population possédant la proportion p (avec $0 < p < 1$ de tricheurs. On fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes à un individu et on admet que si cet individu est un tricheur, il est sûr de retourner un as. Quelle est la probabilité que cet individu retourne un as ?

Solution :

Notons T l'événement « L'individu est un tricheur » et $\overline{T}$ son complémentaire. Soit B l'événement « l'individu retourne un as ». D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(T)P(B / T) + P(\overline{T})P(B / \overline{T}) = p \times 1 + (1-p) \times \frac{4}{52} = \frac{1+12p}{13}.$$

VII. Formule de Bayes

Exemple introductif

On a mis un test permettant de dépister une maladie. On souhaite connaitre la probabilité d'être atteint par la maladie pour un individu présentant un test positif. On suppose connues :

i) La proportion de la population atteinte

ii) La proportion pour un sujet malade de présenter un test positif

iii) La proportion pour un sujet sain de fournir un test positif

Notons T, M, S les événements « le test est positif », « l'individu est malade », « l'individu est sain ». On connait alors $P(M), P(T/M), P(T/S)$. On cherche à calculer $P(M/T)$. On a :

$$P(M/T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M)P(T/M)}{P(T)}$$

Or $P(T) = P(M)P(T/M) + P(S)P(T/S)$ on aura :

$$P(M/T) = \frac{P(M)P(T/M)}{P(M)P(T/M) + P(S)P(T/S)}.$$

Formule de Bayes

Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un système complet d'événement tous de probabilités non nulles, on a alors pour tout événement B : $P(A_i / B) = \dfrac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{k\in I} P(A_k).P(B/A_k)}$.

Exemple : On prend un dé au hasard parmi un pot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$. On lance le dé choisi et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Solution : Notons T l'événement « le dé est pipé » et S l'événement « on obtient 6 au premier lancé ». $\{T, \overline{T}\}$ forme un système complet d'événements et on cherche à calculer $P(T/S)$. D'après la formule de Bayes on a :

$$P(T/S) = \frac{P(T)P(S/T)}{P(T)P(S/T) + P(\overline{T})P(S/\overline{T})} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{6}}.$$

Indépendance

Définition Deux événements A et B sont dits indépendants ssi : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque vient du fait que $P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$.

Propriété Si deux événements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Définition Soient $A_1, A_2, ..., A_n, n$ événements :

a) On dit que ces événements sont 2 à 2 indépendants ssi $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.
b) On dit que ces événements sont mutuellement indépendants si pour toute partie de I de $\{1, 2, ..., n\}$ on a : $P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$.