ANALYSE COMBINATOIRE

I Ensemble fini – Ensemble dénombrable

1. Ensemble fini

On dit que E est fini s'il est vide ou s'il existe une bijection de [1 ; n] dans E.
On note card E = n. Les éléments de E peuvent être notés e_1, e_2, e_3, ….., e_n. On note
E = { e_1, e_2, e_3, ….., e_n.}.
Si E = ∅ alors Card E = 0.

2. Ensemble dénombrable

On dit que E est dénombrable lorsqu'il existe une bijection de IN dans E. Les éléments de E peuvent être notés : e_1, e_2, e_3, ….., e_n, …..

Exemples
IN est dénombrable
Z* est dénombrable
IR n'est pas dénombrable.

3. Les cardinaux et leurs propriétés.

Propriété :

Soit E un ensemble fini et F un ensemble quelconque.
S'il existe une bijection de E dans F alors F est fini et Card E = Card F.

Propriétés

Soit E un ensemble fini :
- $A \subset E \Rightarrow \text{Card } A \leq \text{Card } E$
- Soit $A \subset E$, $A = E \Leftrightarrow \text{Card } A = \text{Card } E$

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$
- Si A et B sont disjoints alors $\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$
- $\text{Card } (A - B) = \text{Card } A - \text{Card } (A \cap B)$
- $\text{Card } \overline{A} = \text{Card } E - \text{Card } A$

Propriétés

- $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,(A \cap B)$
- Formule du crible ou de Poincaré (généralisation de la propriété précédente)

Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de parties de l'ensemble fini E,

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\,(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right) + \cdots\cdots \\ &+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots\cdots \cap A_{i_k}\right) + \cdots\cdots \\ &+ (-1)^{n+1} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots\cdots \cap A_{i_n}\right)\end{aligned}$$

La formule du crible se démontre par récurrence.

<u>Exercice :</u>

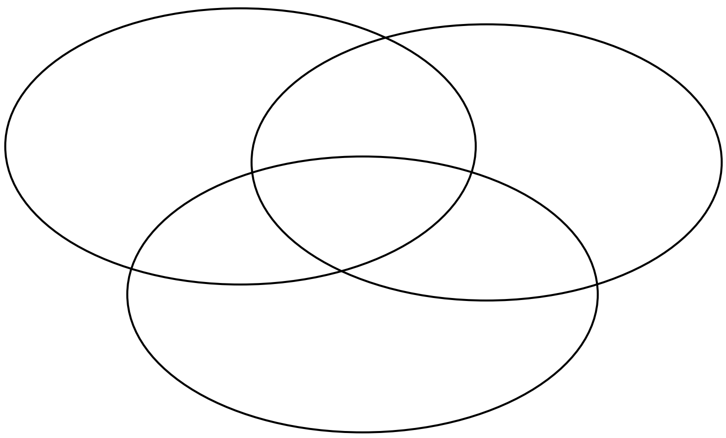
Les données qui suivent sont purement fictives

Une grande école, qui recrute sur concours à l'entrée en 1ère année, recrute également par admission parallèle en 2ème année.

Cette année là, parmi les élèves de 2ème année, 19%avaient une licence de mathématiques, 23%, une licence de sciences économiques, 13%, une licence de droit.10% avaient à la fois une licence de mathématiques et de sciences économiques,5% une licence de sciences économiques et de droit, 2%, une licence de mathématiques et de droit. Enfin aucun n'avait plus de deux licences.

Si vous croisez un élève de 2ème année, quelle est la probabilité que ce soit un élève entré par voie parallèle ?

Diagramme de Venn



Ici on veut calculer p($A \cup B \cup C$)

Exercice 2 : Un jeu de cartes contient 32 cartes. On en prend trois successivement, sans remise.
De combien de façon peut on opérer pour obtenir au moins un cœur.

Soit A l'ensemble des mains de 3 cartes avec au moins un cœur. Il s'agit ici de calculer card(A)
Notons E l'ensemble de toutes les mains de 3 cartes

$$\begin{aligned} Card\,(\bar{A}) &= 24*23*22 \\ &= 12144 \\ Card\,(E) &= 32*31*30 \\ &= 29760 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } card(A) &= card\,(E) - card\,(\bar{A}) \\ &= 17616 \end{aligned}$$

Propriété :

Si $(A_i)_{1\leq i \leq n}$ est une partition de l'ensemble fini E, alors $\text{Card } E = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\left(A_i\right)$

Propriété :

Soient E et F deux ensembles finis. On a $\text{Card}\,(E \times F) = \text{Card}\,(E) \times \text{Card}\,(F)$

<u>Exercice</u>

On note Card E = n et Card F = p, $E \times F = \left\{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\right\}$

Quel est le cardinal de $E \times F$?

Généralisation

Si $(E_i)_{1\leq i \leq n}$ est une famille d'ensembles finis, alors
$\text{Card}\left(E_1 \times E_1 \times \cdots \times E_n\right) = \text{Card}\left(E_1\right) \times \text{Card}\left(E_2\right) \times \cdots \times \text{Card}\left(E_n\right)$

Si E est un ensemble fini alors $\text{Card}\left(E^k\right) = \left(\text{Card } E\right)^k$

II Analyse combinatoire

Soit E un ensemble de cardinal n.

1. <u>Nombre de p-listes d'un ensemble E fini</u>

Définition
Une p_liste d'éléments de E est une suite (x_1, x_2, x_3, ….., x_p) de p éléments de E. (ou encore p-uplet).

<u>Exemple</u>
Soit E = {a, b, c}.
Déterminer toutes les 2_listes de E. Quel est l'ensemble de ces 2_listes ?

Déterminer quelques 4_listes de E. Quel est l'ensemble de ces 4_listes ?
Combien y-en-a-t-il ?

<u>Remarque :</u>
Il y a un ordre de rangement dans les p-listes.

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit p un entier non nul.
Le nombre de p-listes de E est n^p.

Exercice : Cinq étudiants sont à la terrasse d'un café. Chacun a le choix de commander une boisson parmi les suivantes : Jus d'orange, panaché, café, thé, jus de tomate, bière ou eau gazeuse
Combien de possibilités pour le serveur

2. <u>Nombre de p-listes d'éléments distincts deux à deux d'un ensemble fini</u>

<u>Exemple :</u>
Soit E = {a, b, c}
Déterminer toutes les 2_listes d'éléments de E distincts 2 à 2.

Déterminer toutes les 3_listes d'éléments de E distincts 2 à 2.

Définition et propriété

Un arrangement de p éléments d'un ensemble E à n éléments est une p-liste d'éléments distincts de E.
On note A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments.

$$A_n^p = n(n-1)(n-2).....(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

<u>Exemples :</u>
Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former en utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?

Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former en utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 chacun étant utilisé au plus une fois ?

Exercice : un serveur a le choix entre huit boissons pour servir un groupe de 5 jeunes sachant qu'il veut servir une boisson différente à chacun.
Combien y a-t-il de possibilités ?

3. <u>Nombre de permutations d'éléments d'un ensemble fini à n éléments</u>

Définition

Une permutation de n éléments d'un ensemble E à n éléments est un arrangement à n éléments.

Propriété

Il y a A_n^n permutations des n éléments de E.
On note $n! = A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots\cdots \times 3 \times 2 \times 1$

<u>Exemple</u>
E = {a, b, c}.
Déterminer toutes les permutations des 3 éléments de E.

<u>Remarque</u>
Par convention : $0! = 1 = A_0^0$

Exercice : De combien de façon différente peut-on répartir un groupe de 7 personnes

a) Sur une rangée de chaises ? 7 !
b) Autour d'une tables ronde , sachant que 2 positions sont identiques si chaque personne à le même voisins 7 !/6=6 !

Propriété

Le nombre de permutation de n objet dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables …n_r sont semblables et tel que n=n1+n2+….nr est : $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$

<u>Exemple :</u> Au Scrabble Jean Michel a le tirage suivant : E E G R A R P la partie débute, Jean Michel doit commencer, Combien de permutations différentes peut-il faire en utilisant toutes les lettres (les mots ayant un sens ou non)

4. <u>Arrangements avec répétition</u>

Définition

On appelle p-arrangements avec répétition d'un ensemble E ayant n élément une suite ordonnée de p éléments de E, autrement une p-liste.

5. <u>Nombre de combinaisons sans répétition de p éléments d'un ensemble fini à n éléments</u>

Définition

Une combinaison de p éléments d'un ensemble E à n éléments est une partie de E à p éléments ou encore un sous-ensemble de E à p éléments.

<u>Exemple</u>
E = {a, b, c}
Déterminer toutes les combinaisons de 2 éléments de E.

<u>Remarque</u>
Il n'y a pas d'ordre dans une combinaison.

Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$ et $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Par convention $C_n^0 = 1$

<u>Exemple :</u>
Calculer C_{15}^3

Exercices : 1) Dans une école, la délégation d'une promotion de 300 élèves est composée de 4 personnes
Combien y-a-t-il de délégations différentes possibles ?
2) De combien de façon différentes peut-on former un jury de 6 hommes et 6 femmes choisis parmi 11 hommes et 9 femmes ?

Résultats

$A_n^0 =$_______ $C_n^n =$_______ $C_n^1 =$_______

Propriété des nombres C_n^p et A_n^p

Propriété

Pour n et p entiers tels que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriété

Pour n et p entiers tels que $0 \leq p \leq n$, on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$

Preuve

Propriété

Pour n et p entiers tels que $0 \leq p \leq n-1$, on a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (relation de Pascal)

Preuve

Triangle arithmétique de Pascal

Formule du binôme de Newton

1. Formule du binôme

$$a + b = (a+b)^1 = 1 \times a + 1 \times b = C_1^0 a + C_1^1 b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 =$$

Théorème

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots\cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$
$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p} \text{ pour tout réels a et b et pour tout entier } n \geq 1$$

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n \qquad \sum_{p=0}^{n} (-1)^n C_n^p = 0$$

2. Application : Nombre de parties d'un ensemble E à n éléments.

Soit $\mathcal{P}$(E) l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E à n éléments.

Propriété

Si Card E = n alors Card $\mathcal{P}$(E) = 2^n

5. Combinaisons avec répétition

Définition

On appelle combinaison avec répétition de p éléments choisis parmi n, une disposition non ordonnée avec répétition éventuellement de p éléments choisis parmi les n éléments : dans une même combinaison avec répétition, figurent p éléments au total, certains pouvant y figurer plusieurs fois(voir p fois)

Exemple Soit E={a,b,c} déterminer toutes les combinaisons avec répétitions
Même exercice avec E={ a,b,c,d}

Propriété

Le nombre de combinaisons avec répétition de p élément choisis parmi n est :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^{p}$$

Exemple : Combien y-a-t-il de configuration possibles en lançant 2 dés indiscernables :

$K_6^2 = C_7^2$ =21

Combinaisons avec répétition : On tire avec remise et sans tenir compte de l'ordre de tirage des boules.

EXEMPLE. On tire 10 boules dans une urne composée de $n = 4$ boules numérotées de 1 à 4. Comme on tire sans tenir compte de l'ordre de tirage un resultat peut être : On a tiré 2 fois la boule numéro 1, 4 fois la boule numéro 2, 3 fois la boule numéro 3, et 1) fois la boule numéro 4. (On a bien $2 + 4 + 3 + 1 = 10$.) Notons cet issue du tirage par $(2, 4, 3, 1)$.

DÉFINITION 1.24 *Soient $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble à n éléments et $k \geq 1$.*
Une combinaison avec répétition de k éléments de E *est un n-uplet $(k_1, \ldots, k_n)$ d'entiers naturels tel que $k_1 + \cdots + k_n = k$, k_i étant le nombre de fois l'élément e_i est choisi.*

EXEMPLE. (suite) On va coder l'issue $(2, 4, 3, 1)$ du tirage par $+ + | + + + +| + + + |+$. De même si on avait eu comme issue du tirage $(4, 3, 0, 3)$ (4 fois la boule 1, 3 fois la boule 2, e.t.c.) on le coderait par $+ + + + | + + + | \ | + ++$. On se rend vite compte que chaque codage d'un issue est composé de 10 fois le symbole $+$ et 3 fois le symbole $|$ et que chaque permutation de ces 13 symboles correspond a l'issue d'un tirage. Il y a donc

$$\binom{13}{10} = \binom{13}{3}.$$

En général, la combinaison avec répétition $(k_1, \ldots, k_n)$ tel que $k_1 + \cdots + k_n = k$ peut être codé par une suite de k_1 fois le symbole $+$, suivi du symbole $|$, suivi de k_2 fois le symbole $+$, suivi du symbole $|$, ..., suivi de k_n fois le symbole $+$. Donc en tout on a $k + n - 1$ symboles, dont k fois le symbole $+$ et $n - 1$ fois le symbole $|$. Il y a $\binom{n+k-1}{k}$ configurations de ces $k + n - 1$ symboles. Il y a bijection entre l'ensemble de ces configurations et l'ensemble des combinaisons avec répétition, donc

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

PROPOSITION 1.25 *Le nombre de combinaisons avec répétition de k éléments pris parmi n est*

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

EXEMPLE. Il y a $\binom{7}{2} = 21$ configurations possibles en lançant 2 dés indiscernables.

Résumé

EXEMPLE. On choisit avec/sans remise k éléments dans une urne composée de n boules distinctes, numérotées de 1 à n en tenant/ne tenant pas compte de l'ordre de tirage des boules.

	sans remise	avec remise
avec ordre	A_n^k	n^k
sans ordre	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$