

Probabilités II

L1 Compta-Gestion / MIA SHS

Guillaume CONNAN

Université Catholique de l'Ouest – Rezé

7 avril 2019

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

Histoire

Généralités

- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite

Largeur de la cloche

- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

Histoire

Généralités

Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$

Utilisation de la loi normale centrée réduite

Largeur de la cloche

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
- └ Notion de continuité

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

Notion de continuité

Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme

Fonction de répartition

Densité de probabilité

Espérance et variance

Lois normales

Histoire

Généralités

Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$

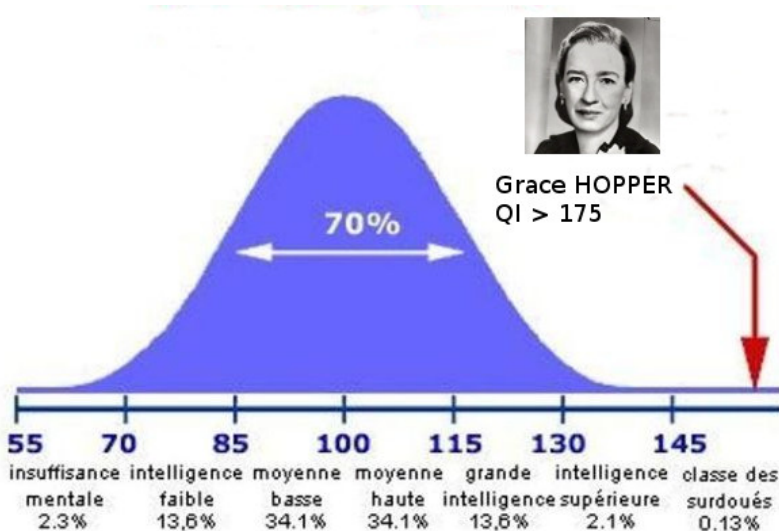
Utilisation de la loi normale centrée réduite

Largeur de la cloche

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
- └ Notion de continuité



- Nous avons étudié pour l'instant uniquement des variables aléatoires pouvant prendre des valeurs isolées, surtout des nombres entiers.

- ▶ Nous avons étudié pour l'instant uniquement des variables aléatoires pouvant prendre des valeurs isolées, surtout des nombres entiers.
- ▶ Cependant, on est souvent amené dans les domaines industriels et économiques à étudier des variables aléatoires pouvant prendre, au moins théoriquement, n'importe quelle valeur dans R ou dans un intervalle de R

► les dimensions d'un objet ;

- ▶ les dimensions d'un objet ;
- ▶ la durée de vie d'un matériel ;

- ▶ les dimensions d'un objet ;
- ▶ la durée de vie d'un matériel ;
- ▶ une distance parcourue ;

- ▶ les dimensions d'un objet ;
- ▶ la durée de vie d'un matériel ;
- ▶ une distance parcourue ;
- ▶ une quantité de matière ou une masse.

- ▶ les dimensions d'un objet ;
- ▶ la durée de vie d'un matériel ;
- ▶ une distance parcourue ;
- ▶ une quantité de matière ou une masse.

- ▶ les dimensions d'un objet ;
- ▶ la durée de vie d'un matériel ;
- ▶ une distance parcourue ;
- ▶ une quantité de matière ou une masse.

Les évènements que l'on étudie sont définis par des inéquations et non des équations.

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
 - └ Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

Notion de continuité

Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme

Fonction de répartition

Densité de probabilité

Espérance et variance

Lois normales

Histoire

Généralités

Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$

Utilisation de la loi normale centrée réduite

Largeur de la cloche

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
 - └ Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme

- Calculons la probabilité qu'un nombre quelconque du segment $[0, 1]$ se trouve dans un certain intervalle $[a, b]$ inclus dans $[0, 1]$;

- ▶ Calculons la probabilité qu'un nombre quelconque du segment $[0, 1]$ se trouve dans un certain intervalle $[a, b]$ inclus dans $[0, 1]$;
- ▶ on peut subdiviser le segment $[0, 1]$ en 100 petits segments de même longueur Δx (1mm par exemple);

- ▶ Calculons la probabilité qu'un nombre quelconque du segment $[0, 1]$ se trouve dans un certain intervalle $[a, b]$ inclus dans $[0, 1]$;
- ▶ on peut subdiviser le segment $[0, 1]$ en 100 petits segments de même longueur Δx (1mm par exemple);
- ▶ La probabilité qu'un nombre se trouve dans l'une des subdivisions vaut donc $1/100$ compte-tenu de l'uniformité de la répartition.

- Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;

- ▶ Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;
- ▶ Notons $P([a, b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a, b]$;

- ▶ Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;
- ▶ Notons $P([a, b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a, b]$;
- ▶ Alors $P([a, b]) = \frac{n_{a,b} \times \Delta x}{100 \times \Delta x}$

- ▶ Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;
- ▶ Notons $P([a, b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a, b]$;
- ▶ Alors $P([a, b]) = \frac{n_{a,b} \times \Delta x}{100 \times \Delta x}$

- ▶ Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;
- ▶ Notons $P([a, b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a, b]$;
- ▶ Alors $P([a, b]) = \frac{n_{a,b} \times \Delta x}{100 \times \Delta x} = \frac{n_{a,b}}{100}$;
- ▶ . On s'aperçoit que $P([a, b])$ est indépendante de l'unité Δx choisie par proportionnalité ;

- ▶ Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions recouvertes par $[a, b]$ et $\lambda([a, b])$ la longueur du segment $[a, b]$;
- ▶ Notons $P([a, b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a, b]$;
- ▶ Alors $P([a, b]) = \frac{n_{a,b} \times \Delta x}{100 \times \Delta x} = \frac{n_{a,b}}{100}$;
- ▶ . On s'aperçoit que $P([a, b])$ est indépendante de l'unité Δx choisie par proportionnalité ;
- ▶ donc

$$P([a, b]) = \frac{\lambda([a, b])}{\lambda([0, 1])}$$

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
 - └ Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme

- ▶ On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;

- ▶ On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;
- ▶ on se rappelle que $\lambda([a, b]) = \int_a^b 1 \, dx$

- ▶ On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;
- ▶ on se rappelle que $\lambda([a, b]) = \int_a^b 1 \, dx$
- ▶ Finalement

$$P([a, b]) = \frac{\int_a^b 1 \, dx}{\int_0^1 1 \, dx}$$

- ▶ On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;
- ▶ on se rappelle que $\lambda([a, b]) = \int_a^b 1 \, dx$
- ▶ Finalement

$$P([a, b]) = \frac{\int_a^b 1 \, dx}{\int_0^1 1 \, dx}$$

- ▶ On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu ;
- ▶ on se rappelle que $\lambda([a, b]) = \int_a^b 1 \, dx$
- ▶ Finalement

$$P([a, b]) = \frac{\int_a^b 1 \, dx}{\int_0^1 1 \, dx} = \frac{b - a}{1 - 0}$$

- ▶ Cette loi de probabilité sur $[0, 1]$, qu'on appellera **loi uniforme** sur $[0, 1]$, est associée à une fonction constante (dans le cas présent la fonction constante est égale à 1) qui caractérise la probabilité ;

- ▶ Cette loi de probabilité sur $[0, 1]$, qu'on appellera **loi uniforme** sur $[0, 1]$, est associée à une fonction constante (dans le cas présent la fonction constante est égale à 1) qui caractérise la probabilité ;
- ▶ on l'appelle la **densité** de P ;

- ▶ Cette loi de probabilité sur $[0, 1]$, qu'on appellera **loi uniforme** sur $[0, 1]$, est associée à une fonction constante (dans le cas présent la fonction constante est égale à 1) qui caractérise la probabilité ;
- ▶ on l'appelle la **densité** de P ;
- ▶ On notera alors

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{\int_a^b 1 \, dx}{\int_0^1 1 \, dx}$$

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
- └ Fonction de répartition

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

Notion de continuité
Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ - Loi uniforme

Fonction de répartition

Densité de probabilité
Espérance et variance

Lois normales

Histoire
Généralités
Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
Utilisation de la loi normale centrée réduite
Largeur de la cloche
Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

- Comme on travaille sur des intervalles, la fonction de répartition de la variable aléatoire étudiée sera alors essentielle. Traditionnellement notée F , elle est justement définie par

$$F(a) = P(X \leq a)$$

pour a dans l'intervalle de définition de X .

Définition (Fonction de répartition)

Soit une loi de probabilité p sur $I = [a, b]$ et de densité f .

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I suivant la loi de probabilité P .

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction F définie sur I par

$$F(x) = P(a \leq X \leq x) = \int_a^x f(t) dt$$

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
- └ Fonction de répartition

Exemple

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
- └ Fonction de répartition

Exemple

► $P(X \leq 0) = F(0);$

Exemple

- ▶ $P(X \leq 0) = F(0);$
- ▶ $P(-5,7 < X \leq 15,9) = F(15,9) - F(-5,7);$

Exemple

- ▶ $P(X \leq 0) = F(0)$;
- ▶ $P(-5, 7 < X \leq 15, 9) = F(15, 9) - F(-5, 7)$;
- ▶ $P(X \geq 20, 54) = 1 - F(20, 54)$.

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
- └ Densité de probabilité

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

Notion de continuité
Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
Fonction de répartition
Densité de probabilité
Espérance et variance

Lois normales

Histoire
Généralités
Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
Utilisation de la loi normale centrée réduite
Largeur de la cloche
Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
- └ Densité de probabilité

Exemple

Exemple

- La fonction de répartition est souvent donnée par une intégrale.

Exemple

- ▶ La fonction de répartition est souvent donnée par une intégrale.
- ▶ Étudions par exemple la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est

$$\begin{cases} \forall x < 0 & F(x) = 0; \\ \forall x \geq 0 & F(x) = \int_0^x 0,002e^{-0,002t} dt. \end{cases}$$

Exemple

- ▶ La fonction de répartition est souvent donnée par une intégrale.
- ▶ Étudions par exemple la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est

$$\begin{cases} \forall x < 0 & F(x) = 0; \\ \forall x \geq 0 & F(x) = \int_0^x 0,002e^{-0,002t} dt. \end{cases}$$

- ▶ La fonction intervenant dans cette intégrale, notée f , est appelée **densité de probabilité** de la variable X .

Exemple

- ▶ La fonction de répartition est souvent donnée par une intégrale.
- ▶ Étudions par exemple la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est

$$\begin{cases} \forall x < 0 & F(x) = 0; \\ \forall x \geq 0 & F(x) = \int_0^x 0,002e^{-0,002t} dt. \end{cases}$$

- ▶ La fonction intervenant dans cette intégrale, notée f , est appelée **densité de probabilité** de la variable X .
- ▶ La fonction de répartition F est en fait une primitive de f .

Théorème

Si a et b sont deux réels de l'ensemble de définition de X , alors

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

- └ Un exemple de variable aléatoire continue
- └ Densité de probabilité

Remarque

Remarque

- ▶ La probabilité de l'univers, c'est à dire de R ou de l'intervalle de R étudié est forcément égale à 1.

Remarque

- ▶ La probabilité de l'univers, c'est à dire de R ou de l'intervalle de R étudié est forcément égale à 1.
- ▶ Ainsi, pour une variable aléatoire définie sur R , sa densité de probabilité doit vérifier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

Remarque

- ▶ La probabilité de l'univers, c'est à dire de R ou de l'intervalle de R étudié est forcément égale à 1.
- ▶ Ainsi, pour une variable aléatoire définie sur R , sa densité de probabilité doit vérifier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

- ▶ On peut vérifier cette propriété en étudiant séparément $\int_0^x f(t)dt$ et $\int_x^0 f(t)dt$ puis leurs limites respectives quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.



- └ Un exemple de variable aléatoire continue
- └ Espérance et variance

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Théorème

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X définie par une densité de probabilité est donnée par la formule

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

- Pour calculer la variance, on utilisera la plupart du temps le théorème de König-Huyghens :

- ▶ Pour calculer la variance, on utilisera la plupart du temps le théorème de König-Huyghens :
- ▶ la variance est égal à l'espérance du carré moins le carré de l'espérance.

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

Histoire

Généralités

Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$

Utilisation de la loi normale centrée réduite

Largeur de la cloche

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

Histoire

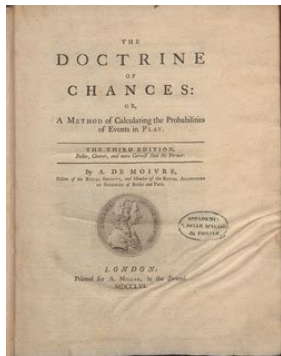
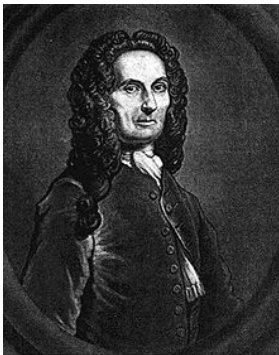
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

► Idée de la « normalité »

- ▶ Idée de la « normalité »
- ▶ beaucoup de données autour de la moyenne

- ▶ Idée de la « normalité »
- ▶ beaucoup de données autour de la moyenne
- ▶ le nombre de données diminue à mesure qu'on s'en éloigne



$$f(x) = ae^{-bx^2}$$



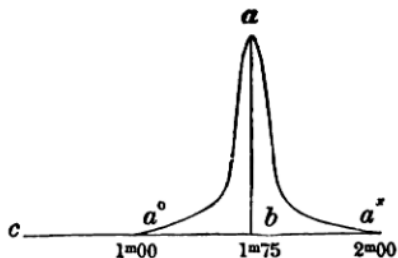
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



260

ANTHROPOMÉTRIE.

En ayant égard au tableau numérique précédent, la courbe qui représente 1000 hommes inscrits est la suivante ; nous nous bornerons à donner la figure des nombres *calculés*, qui se confondrait sensiblement avec celle des nombres *observés*.



Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

- Histoire

Généralités

- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $N(m; \sigma)$ de paramètres m et σ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}.$$

Théorème

On admet que si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $N(m; \sigma)$ alors

$$E(X) = m \text{ et } \sigma(X) = \sigma.$$

Ainsi les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance mathématique et son écart-type.

- └ Lois normales
- └ Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$**
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Définition

La loi normale la plus simple est celle de moyenne $m = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$. On l'appelle **loi normale centrée réduite**. Sa fonction de répartition est souvent noté Π

► Extrait de La Table

t	0,05	0,06	0,07
1,1	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9115	0,9131	0,9147





► Extrait de La Table

t	0,05	0,06	0,07
1,1	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9115	0,9131	0,9147






- Le nombre situé à l'intersection de la colonne 0,06 et de la ligne 1,3 est la valeur de la fonction de répartition de X pour $t = 1,3 + 0,06 = 1,36$. Ainsi

$$\Pi(1,36) = P(X \leq 1,36) = 0,9131.$$






CASIO

►   (STAT)  (DIST)  (NORM)














CASIO

- ▶   (STAT)  (DIST)  (NORM)
- ▶ 














CASIO

- ▶   (STAT)  (DIST)  (NORM)
- ▶ 
- ▶ Valeur inférieure, valeur supérieure, écart-type, moyenne

CASIO

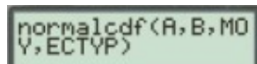
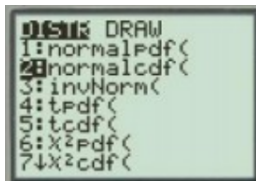
- ▶   (STAT)  (DIST)  (NORM)
- ▶ 
- ▶ Valeur inférieure, valeur supérieure, écart-type, moyenne
- ▶        

CASIO

- ▶   (STAT)  (DIST)  (NORM)
- ▶ 
- ▶ Valeur inférieure, valeur supérieure, écart-type, moyenne
- ▶        
- ▶ 0.9130850381

- └ Lois normales
- └ Loi normale centrée réduite $N(0;1)$

TI



Théorème

Parité de la loi centrée réduite Comme la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite est une fonction paire, on a :

$$\begin{aligned}\Pi(-t) &= P(X < -t) \\ &= P(X > t) \\ &= 1 - P(X < t) \\ &= 1 - \Pi(t).\end{aligned}$$

Théorème

Parité de la loi centrée réduite Comme la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite est une fonction paire, on a :

$$\begin{aligned}\Pi(-t) &= P(X < -t) \\ &= P(X > t) \\ &= 1 - P(X < t) \\ &= 1 - \Pi(t).\end{aligned}$$

Théorème

Parité de la loi centrée réduite Comme la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite est une fonction paire, on a :

$$\begin{aligned}\Pi(-t) &= P(X < -t) \\ &= P(X > t) \\ &= 1 - P(X < t) \\ &= 1 - \Pi(t).\end{aligned}$$

Théorème

On déduit de la proposition précédente que

$$\begin{aligned}P(-t < X < t) &= P(X < t) - P(X < -t) \\ &= \Pi(t) - \Pi(-t) \\ &= \Pi(t) - (1 - \Pi(t)) \\ &= 2\Pi(t) - 1\end{aligned}$$

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite**
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Théorème

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $N(m; \sigma)$ de moyenne m et d'écart-type σ alors la variable aléatoire

$$Y = \frac{X - m}{\sigma}$$

suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

► On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- ▶ On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- ▶ Y suit la loi normale centrée réduite ;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- ▶ On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- ▶ Y suit la loi normale centrée réduite ;
- ▶ L'événement $X < 16$ est alors équivalent à $Y < \frac{16 - 12}{3} = \frac{4}{3}$;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- ▶ On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- ▶ Y suit la loi normale centrée réduite ;
- ▶ L'événement $X < 16$ est alors équivalent à $Y < \frac{16-12}{3} = \frac{4}{3}$;
- ▶ donc $P(X < 16) = P(Y < \frac{4}{3}) = \Phi(\frac{4}{3}) = 0,9082$;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- ▶ On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- ▶ Y suit la loi normale centrée réduite ;
- ▶ L'événement $X < 16$ est alors équivalent à $Y < \frac{16-12}{3} = \frac{4}{3}$;
- ▶ donc $P(X < 16) = P(Y < \frac{4}{3}) = \Phi(\frac{4}{3}) = 0,9082$;
- ▶ L'événement $9 < X < 15$ est alors équivalent à $-1 < Y < 1$;

Exemple

Une variable X suit la loi normale de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculer $P(X < 16)$ et $P(9 < X < 15)$.

- ▶ On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12}{3}$;
- ▶ Y suit la loi normale centrée réduite ;
- ▶ L'événement $X < 16$ est alors équivalent à $Y < \frac{16-12}{3} = \frac{4}{3}$;
- ▶ donc $P(X < 16) = P(Y < \frac{4}{3}) = \Phi(\frac{4}{3}) = 0,9082$;
- ▶ L'événement $9 < X < 15$ est alors équivalent à $-1 < Y < 1$;
- ▶ donc

$$\begin{aligned}
 P(9 < X < 15) &= P(-1 < Y < 1) \\
 &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
 &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \\
 &= 2\Phi(1) - 1 = 0,6826.
 \end{aligned}$$

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite

Largeur de la cloche

- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Théorème

Si X suit la loi normale de paramètres m et σ , alors

Théorème

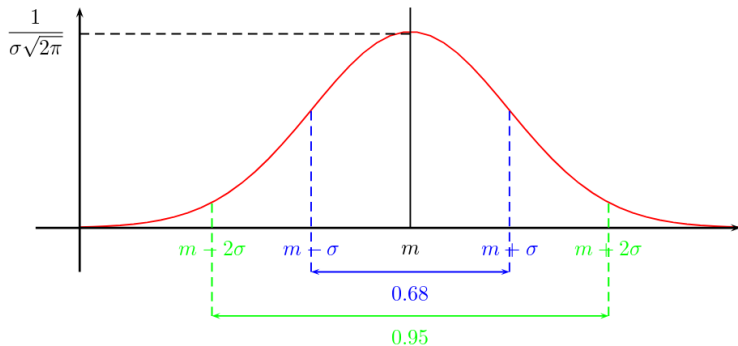
Si X suit la loi normale de paramètres m et σ , alors

► $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \approx 0,68.$

Théorème

Si X suit la loi normale de paramètres m et σ , alors

- ▶ $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \approx 0,68.$
- ▶ $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \approx 0,95.$



- └ Lois normales
- └ Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

- Histoire
- Généralités
- Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$
- Utilisation de la loi normale centrée réduite
- Largeur de la cloche
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Théorème

Si n est « grand » et p est assez éloigné de 0 et 1 alors la loi binomiale $B(n; p)$ peut être approchée par la loi normale $N(m; \sigma)$, où $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$.

Sommaire

Un exemple de variable aléatoire continue

- Notion de continuité
- Modélisation du choix d'un nombre dans $[0, 1]$ – Loi uniforme
- Fonction de répartition
- Densité de probabilité
- Espérance et variance

Lois normales

Histoire

Généralités

Loi normale centrée réduite $N(0; 1)$

Utilisation de la loi normale centrée réduite

Largeur de la cloche

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercices

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π .

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π .

1. $P(X \leq 1,27)$;

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π .

1. $P(X \leq 1,27)$;
2. $P(X \geq 0,84)$;

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π .

1. $P(X \leq 1,27)$;
2. $P(X \geq 0,84)$;
3. $P(X \leq -1,58)$;

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π .

1. $P(X \leq 1,27)$;
2. $P(X \geq 0,84)$;
3. $P(X \leq -1,58)$;
4. $P(0,25 \leq X \leq 1,25)$;

Exemple

Déterminer grâce à la table de la fonction intégrale de la loi centrée réduite les probabilités suivantes. On les exprimera auparavant à l'aide de la fonction Π .

1. $P(X \leq 1,27)$;
2. $P(X \geq 0,84)$;
3. $P(X \leq -1,58)$;
4. $P(0,25 \leq X \leq 1,25)$;
5. $P(-0,93 \leq X \leq 0,93)$.

Exemple

Exprimer $P(t_1 \leq X \leq t_2)$, $P(X \leq -t)$ et $P(-t \leq X \leq t)$ à l'aide de la fonction Π .

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;
2. $P(X \geq 28)$;

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;
2. $P(X \geq 28)$;
3. $P(X \geq 20)$;

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;
2. $P(X \geq 28)$;
3. $P(X \geq 20)$;
4. $P(X \geq 12)$;

Exemple

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(20; 5)$. Calculer, en utilisant la machine ou la table du formulaire :

1. $P(X \leq 28)$;
2. $P(X \geq 28)$;
3. $P(X \geq 20)$;
4. $P(X \geq 12)$;
5. $P(12 \leq X \leq 28)$.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ .

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ .

3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ .

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ .
 - 3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ .
 - 3.2 En utilisant l'approximation, calculer de nouveau la probabilité $P(E)$.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ .
 - 3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ .
 - 3.2 En utilisant l'approximation, calculer de nouveau la probabilité $P(E)$.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ .
 - 3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ .
 - 3.2 En utilisant l'approximation, calculer de nouveau la probabilité $P(E)$.
4. 4.1 Tracer le diagramme en bâtons de la fonction qui à t associe $P(X = t)$ en utilisant une échelle convenable.

Exemple

On jette dix fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre d'apparitions du côté « face » obtenu.

1. Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre d'apparitions du côté FACE est compris entre 3 et 6 inclus ».
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ .
 - 3.1 Déterminer les valeurs appropriées de m et σ .
 - 3.2 En utilisant l'approximation, calculer de nouveau la probabilité $P(E)$.
4.
 - 4.1 Tracer le diagramme en bâtons de la fonction qui à t associe $P(X = t)$ en utilisant une échelle convenable.
 - 4.2 Sur le graphique précédent, représenter la densité de probabilité de la loi normale $N(m; \sigma)$. Que constate-t-on ?