UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST
Département Mathématiques-Informatique
Ll :M-MA-MI-ARS-

Faculté des Sciences
ANNÉE 2016 / 2017

PROBABILTÉS continues

Exercice 1

Une entreprise fabrique des supports d'auvent utilisés notamment dans la construction de stades. Ces pièces sont réalisées en béton. Soit la variable aléatoire X qui à chaque production de 50 pièces associe le nombre de supports défectueux qu'elle contient La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler tout tirage de 50 supports a 50 tirages aléatoires et indépendant.

On suppose que la probabilité qu'un support soit défectueux est 0.02

1. Déterminer la loi de probabilité de X

2. Montrer que X peut être approchée par une distribution de Poisson dont on déterminera le paramètre. Donnera 10^{-2} près :

a) $P(X=0)$.

b) $P(X \geq 4)$.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est d'analyser la production d'une entreprise réalisant des résistors pour des fours électriques. Ces résistors sont fabriqués à partir de fil métallique livré en bobine.

Le fil utilisé présente des défauts soit de diamètre soit d'homogénéité qui rendent inutilisable le résister. On considère un très grand nombre de bobines et on constate que sur l'ensemble des résistors produits avec le fil dune bobine, il y a en moyenne 6 résistors défectueux.

On admet que la variable aléatoire Z qui, à tout fabrication utilisant une bobine prélevée au hasard, associe le nombre de résistors défectueux, suit une loi de Poisson de paramètre i.

a) Déterminer la valeur de X .

b) Calculer la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-3} près : de la probabilité P qu'il n'y ait aucun résistor défectueux.

de la probabilité P 3 qu'il n'y ait pas plus de 6 résistors défectueux.

Exercice 3

Dans cet exercice on donnera les valeurs approchées de tous les résultats à 10^{-2} près.

Un distributeur automatique élabore du jus d'orange en mélangeant de l'eau et du concentré d'orange

Le plein de concentré étant réalisé chaque matin, on suppose maintenant que la probabilité qu'un jour pris au hasard la machine soit hors service par manque de concentré est p - 0,05.

Les pannes sont supposées indépendantes les unes des autres.

1°) Montrer que la variable aléatoire Y qui, à toute période de 30 jours associe le nombre de jours où le distributeur est hors service par manque de concentré, suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ?

2) On approche cette loi par une loi de Poisson. Quel est son paramètre ?

Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus deux mises hors service du distributeur, en un mois de 30 jours, par manque de concentré.

Exercice 4
Les premières épreuves d'un ouvrage à imprimer contiennent des fautes d'impression.
Le choix dune page d'un ouvrage est assimilé à un tirage aléatoire non exhaustif.
Un ouvrage ayant été soumis à une première correction, la variable aléatoire X qui, à toute page, associe le nombre de fautes suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,2$.
a) Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement une faute sur une page prise au hasard, puis celle que la page ne comporte aucune erreur, et enfin celle qu'il y ait 3 fautes au plus.
b) Si l'on répète un grand nombre de fois ce travail, quel est le nombre moyen de fautes par pages ?
Exercices 5
Un lycée achète son papier pour photocopieur à une entreprise. On admet que la probabilité qu'une feuille du papier livré, prise au hasard, bloque le photocopieur est $p = 0,001$.
Une documentation de 12 pages est photocopiée en 50 exemplaires.
On appelle K la variable aléatoire qui, à toute série de 600 photocopies, associe le nombre de blocages pendant la reprographie.
On assimilera une série de 600 photocopies à un prélèvement de 600 feuilles de papier au hasard et avec remise.
1°) Quelle est la loi de probabilité suivie par K ?
2°) Calculer la probabilité des événements suivants (on donnera les résultats exacts, puis arrondis au millième) :
a) Au cours de ce travail, le photocopieur ne se bloque jamais.
b) Au cours de ce travail, le photocopieur se bloque exactement trois fois.
3°) On admet que la loi de probabilité suivie par K peut être approchée par une loi de Poisson.
a) Préciser son paramètre.
b) Quelle est la probabilité que le photocopieur se bloque plus de deux fois pendant ce travail ?
Exercice 6
Une usine assure le conditionnement d'un très grand nombre de bouteilles d'un certain type. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard, associe sa contenance exprimée en litres. On admet que lorsque la machine est bien réglée X suit la loi normale de moyenne IL et d'écart type 0,01 L.
a) Quelle est, a 10^{-3} près, la probabilité p_1 qu'une bouteille, prise au hasard, contienne moins de 0,98 L.
b) La capacité maximale d'une bouteille est de 1,025 L ; quelle est, à 10^{-4} près, la probabilité p_2 qu'une bouteille, prise au hasard, contienne plus de 1,025 L ?
Exercice 7
Une entreprise industrielle utilise de grandes quantités d'un certain type de boulons. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre de la tète ou le diamètre du pied d'un boulon est conforme à la norme en vigueur.
Un boulon de ce type est considéré comme conforme pour le diamètre de sa tête si celui-ci est, en millimètres, compris entre 25,30 et 25,70.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque boulon choisi nu hasard dans un lot très important, associe le diamètre de sa tête.
On suppose que D suit la loi normale de moyenne 25,50 et d'écart type 0,10.
Déterminer, a 10^{-2} près, la probabilité qu'un boulon choisi au hasard dans le lot soit conforme pour le diamètre de la tête.

Exercice 8
Une entreprise de travaux publics a un parc total de 150 camions. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque camion choisi au hasard, associe la distance qu'il a parcourue dans une journée. (Les distances sont mesurées en kilomètres).
Une étude statistique a montré que cette variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 14.
Déterminera à 10^{-3} près la probabilité qu'un camion parcoure un jour donné une distance comprise entre 110 et 130 kilomètres.
Exercice 9
Une entreprise de Travaux publics décide de s'équiper de tables de coffrage pour fabriquer elle-même ses bordures On note L la variable aléatoire associant à chaque bordure tirée au hasard de la production sa longueur.
On admet que L, suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ cm et $\sigma = 0,5$ cm.
On prélève une bordure au hasard.
a) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'elle mesure plus de 100.6 cm.
b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que sa longueur soit comprise entre 99,2 cm et 100,8 cm.
Exercice 10
Une machine fabrique en série des pièces métalliques de forme cylindrique. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque pièce tirée au hasard dans la production, associe la mesure en millimètres de son diamètre. A la suite de contrôles statistiques on estime que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu = 16$ et d'écart type $\sigma = 0,14$.
a -Déterminer la probabilité $P(Y < 16,2)$.
b - Déterminer la probabilité $P(Y > 15,7)$.
c - On accepte les pièces dont le diamètre appartient à l'intervalle [15,7 ; 16,2], Quelle est a 10^{-4} près la probabilité qu'une pièce, tirée au hasard dans la production soit acceptée ?
Quel rebut peut-on prévoir sur un lot de 1000 pièces ?
Exercice 11
Une usine produit des billes d'acier en grande quantité.
On note X la variable aléatoire associant à chaque bille, prélevée au hasard, sa masse exprimée en milligrammes. On suppose que-Y suit la loi normale de moyenne $\mu = 64$ et d'écart type $\sigma = 2$.
1°) Une bille est déclarée défectueuse si sa masse est inférieure à 60 mg ou supérieure à 68 mg. Calculer la probabilité qu'une bille choisie au hasard dans la production soit défectueuse.
2°) Déterminer le réel positif r tel que la probabilité qu'une bille ait une masse comprise entre $\mu - r$ et $\mu + r$ soit égale à $0,99$.
Exercice 12
Elude du résultat de la pesée d'un objet de masse m (exprimée en grammes). On admet que la variable aléatoire X qui prend comme valeurs les résultats de la pesée d'un même objet donné suit la loi normale de moyenne $\mu = 72,40$ et d'écart type $\sigma = 0,08$
1) Calculer la probabilité des événements suivants (les résultats seront arrondis au millième le plus proche).
a) $X > 72,45$
b) $X < 72,45$
c) $72,30 < X < 72,50$.
2) Déterminer le réel strictement positif h (arrondi au centième) tel que la probabilité pour que X prenne une valeur dans un intervalle $[\mu - h, \mu + h]$ soit égale à 0,989.

Exercice 13
Une machine produit des pièces cylindriques destinées à faire clés axes de moteurs. On étudie le diamètre, exprimé en millimètres, des pièces issues de cette fabrication.
Toutes les probabilités seront calculées a 10^{-3} près.
On admet que la variable aléatoire X qui, à toute pièce choisie au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre suit la loi normale de moyenne $\mu = 16,5$ et d'écart type $\sigma = 0,1$.
Déterminer la probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle $[16,4;16,6]$
Déterminer le nombre réel positif h, tel que la probabilité que b variable aléatoire X prenne une valeur dans l'intervalle (16,5-h ; 16,5 + h] soit égale à 0,95 .

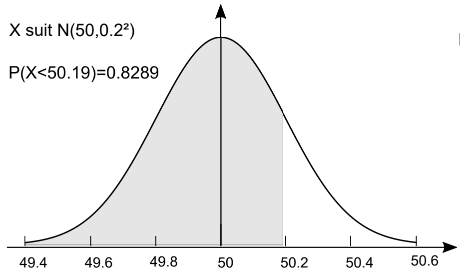
Exercice 14

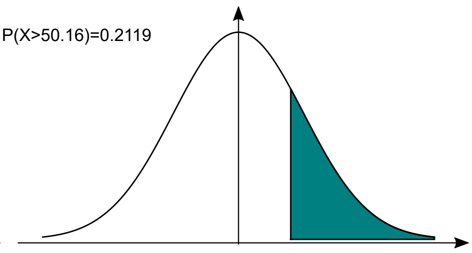
On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute bobine tirée au hasard de la production, associe la longueur du fil de cette bobine.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 0,2$.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) la longueur du fil de la bobine est inférieure à 50,19 m,





b) la longueur du fil de la bobine est supérieure à 50,16 m ;

c) la longueur du fil de la bobine est comprise entre 50,16 m et 50,19 m

d) Déterminer le réel positif a tel que $P(50 - a \leq X \leq 50 + a) = 0,9$.

Réponses Exercice 14

Rappel : si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

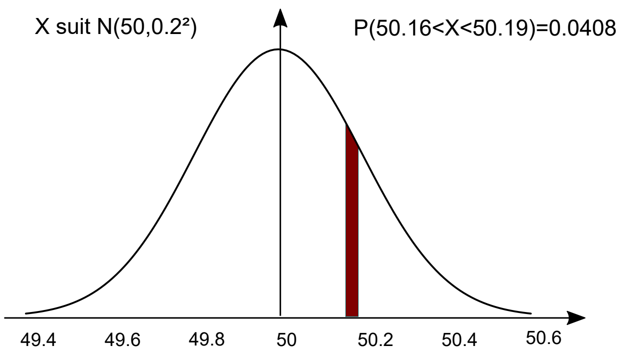
Réponse à a) $P(X < 50.19) = 0.8289$ lecture directe dans la table de la loi Normale centrée réduite avec $z_1 = \dfrac{50.19 - 50}{0.2} = 0.95$.

Réponse à b) $P(X < 50.16) = 0,7881$ lecture directe dans la table de la loi Normale centrée réduite avec $z_2 = \dfrac{50.16 - 50}{0.2} = 0.8$. D'où $P(X > 50.16) = 1 - P(X < 50.16) = 1 - 0,7881 = 0.2119$

Réponse à c) $P(50.16 < X < 50.19) = P(X < 50.19) - P(X < 50.16)$.

D'après **a)** on a $P(X < 50.19) = 0,8289$ et $P(X < 50.16) = 0,7881$

D'où le résultat : $P(50.16 < X < 50.19) = 0,8289 - 0,7881 = 0.0408$



Réponse à d)

Transformons la double inégalités $P(50 - a \leq X \leq 50 + a) = 0,9$ en $P(-a \leq X - 50 \leq +a) = 0,9$ ensuite par $P(-\dfrac{a}{\sigma} \leq \dfrac{X - 50}{\sigma} \leq \dfrac{a}{\sigma}) = 0,9$. 90% ou 0.9 pour une probabilité bilétarale est une valeur connue pour la loi normale centrée réduite :

On a $P(-1.64 < Z < 1.64) = 0.9$ si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Donc comme $Z = \dfrac{X - 50}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\dfrac{a}{\sigma} = 1.64$

On en déduit que $a = 1.64 \times \sigma = 0.328$

Exercice 15
Une usine fabrique en grande quantité des écrous. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écrou pris au hasard dans la production, associe son diamètre intérieur exprimé en millimètres On admet que cette variable aléatoire suit la loi normale de moyenne $\mu = 10$ et d'écart type $\sigma = 0,05$.
1) a) Calculer la probabilité qu'un écrou, pris au hasard dans la production, ait un diamètre inférieur à 9,9mm.
Calculer la probabilité qu'un écrou, pris au hasard dans la production, ait un diamètre supérieur i 10,01 mm. Déterminer le réel positif α tel que $P(10-\alpha \leq X \leq 10+\alpha) = 0,9974$.
2) Un écrou est rejeté par le service "contrôle de qualité" si son diamètre intérieur n'est pas compris entre 9.85 et 10,15 millimètres.
Quelle est la probabilité qu'un écrou soit rejeté.