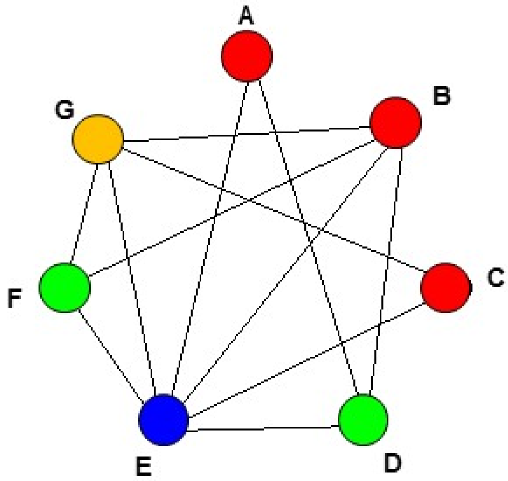
Optimisation Numérique

I – Rappels et compléments sur les graphes



Eric Pinson

Institut de Mathématiques Appliquées
Université Catholique de l'Ouest
Angers - France

UCO ANGERS
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

L2 MIASHS

IMA Mathématiques Appliquées

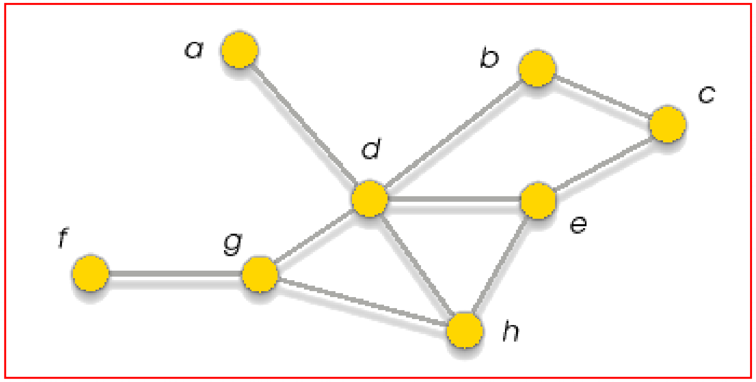
Rappels et compléments sur les graphes

Graphe

Un graphe est un ensemble de nœuds (ou sommets) qui sont reliés entre eux par des a
Mathématiquement, un graphe est représenté par un couple de deux ensembles G = (X,U) où X
l'ensemble des nœuds (ou sommets) et U l'ensemble des arêtes (graphe non orienté) ou arcs (orienté

Le nombre de sommets, $n = |X|$, présents dans un graphe est l'ordre du graphe.

Exemple Un exemple de graphe à 8 sommets, nommés *a* à *h*, comportant 10 arêtes.



G=(X,U)
X={ a, b, c, d, e, f, g, h }
U={ (a,d), (b,c), (b,d), (d,e), (e,c), (e,h), (h,d), (f,g), (d,g), (g,h) }

Notre définition d'un graphe correspond au cas des graphes *simples*, pour lesquels il existe au plus une arête liant deux sommets. Dans le cas contraire le graphe est dit multiple. Nous ne nous intéresserons ici qu'au cas des graphes simples sans **boucle.**

Rappels et compléments sur les graphes

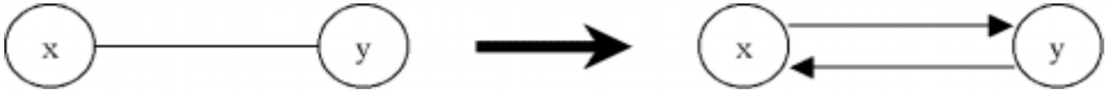
Arc

Un arc relie deux sommets entre eux, il sera donc représenté par un couple (x,y) où x et y sont des sommets. Un arc peut être orienté, c'est-à-dire que l'ordre de x et de y est important dans le couple (x,y). Un arc peut ne pas être orienté et dans ce cas, l'ordre de x et de y dans le couple (x,y) n'a aucune importante, donc (x,y) = (y,x). Les arcs sont représentés de la manière suivante.

- Arc orienté:  y est un successeur de x, et x un prédécesseur de y
- Arc non orienté (arête) : 

Remarque

Un arc non orienté peut toujours être transformé en une situation où l'on n'a que des arcs orientés.



C'est pourquoi, dans la suite du cours, on utilisera le plus souvent des graphes orientés, c'est-à-dire des graphes dont les arcs sont tous orientés.

Les objets représentés par les sommets sont sans importance pour la manipulation du graphe. Nous dirons simplement qu'un graphe est d'*ordre* ***n*** si il comporte ***n*** sommets.

Boucle

On appelle boucle un arc dont l'extrémité initiale est égale à son extrémité finale. Par exemple, (x;x) est une boucle.

Rappels et compléments sur les graphes

Adjacence et degré

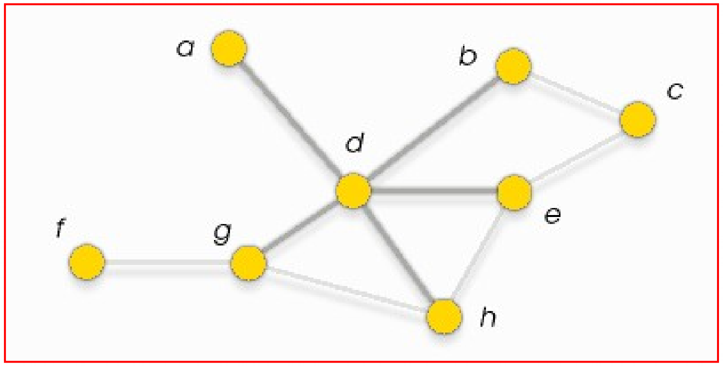
Deux sommets ***x*** et ***y*** sont **adjacents** si il existe l'arête ***(x,y)*** dans ***U***. Les sommets ***x*** et ***y*** sont alors dits **voisins**

Pour un arc u = (x,y) on dit que:

- x est adjacent à y,
- y est adjacent à x,
- x et y sont adjacents à u, u est adjacent à x et y.
- Une arête est **incidente** à un sommet ***x*** si ***x*** est l'une de ses extrémités.
- Le **degré** d'un sommet ***x*** de ***G*** est le nombre d'arêtes incidentes à ***x***. Il est noté **d*(x)***. Pour un graphe simple le degré de ***x*** correspond également au nombre de sommets adjacents à ***x***.

Exemple

Dans le graphe le sommet ***d*** a un degré ***5***



d*(d)* = *5*

*Les arêtes incidentes à **d** sont :*

(d,a), (d,b) , (d,e), (d,h) *et* ***(d,g)***

Rappels et compléments sur les graphes

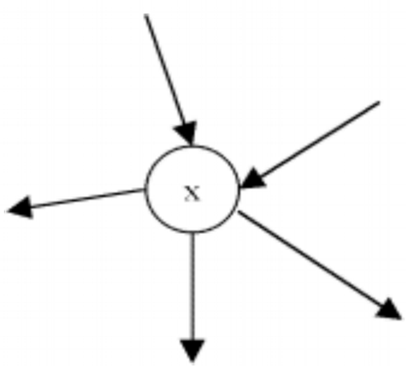
Propriété

Lemme des poignées de mains : $m = |U| = \sum_{x \in X} d(x)$

*La somme des degrés des sommets d'un graphe est égal à 2 fois son nombre d'arêtes. Une arête **e=(x,y)** du graphe est comptée exactement 2 fois dans la somme des degrés : une fois dans **d(x)** et une fois dans **d(y)***

Le demi-degré extérieur d'un sommet est le nombre d'arcs adjacents qui en partent.
On le note $d^+(x)$ et $d^+(x) = |\{u \in U \mid u = (x,y) \text{ où } y \in X\}|$: y est un **successeur** de x
Le demi-degré intérieur d'un sommet est le nombre d'arcs adjacents qui y arrivent.
On le note $d^-(x)$ et $d^-(x) = |\{u \in U \mid u = (y,x) \text{ où } y \in X\}|$: y est un **prédécesseur** de x
Le degré d'un sommet est le nombre d'arcs qui lui sont adjacents. On le note $d(x)$ et $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$.

Exemple
Dans le graphe suivant, $d^+(x) = 3$ (successeurs), $d^-(x) = 2$ (prédécesseurs), $d(x) = 5$.



Pour un graphe simple d'ordre ***n***, le degré d'un sommet est un entier compris entre ***0*** et ***n-1***. Un sommet de degré ***0*** est dit *isolé* : il n'est relié à aucun autre sommet.

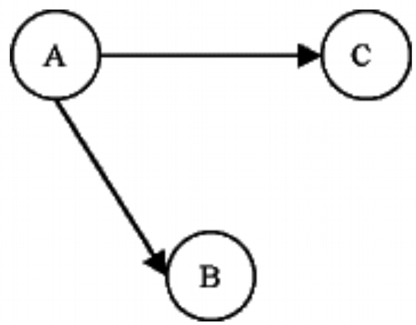
Rappels et compléments sur les graphes

Graphe complet

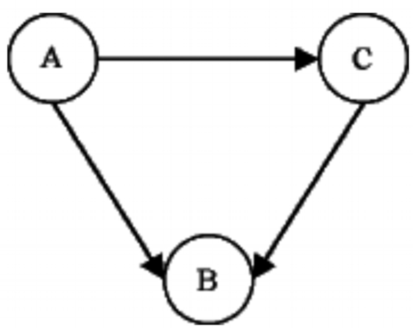
Un graphe est dit complet si tous les sommets sont adjacents deux à deux.
Autrement dit, $(x;y) \notin U \Rightarrow (y;x) \in U$.

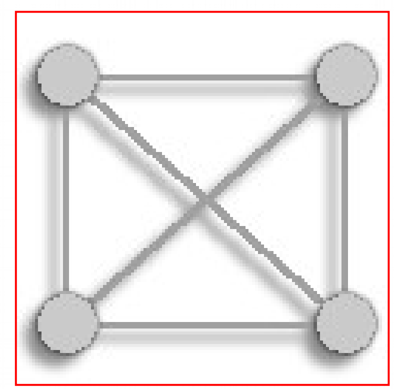
Exemple

Graphe non complet:



Graphe complet:





Rappels et compléments sur les graphes

Sous-graphe, graphe partiel, sous-graphe partiel

Pour caractériser de manière moins locale la structure d'un graphe, il est possible de rechercher des parties remarquables du graphe, en restreignant soit l'ensemble des sommets (sous-graphe), soit l'ensemble des arêtes (graphe partiel).

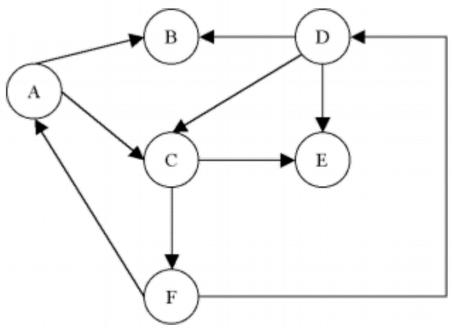
Un **sous-graphe** de ***G*** consiste à considérer seulement une partie des sommets de ***X*** et les liens induits par ***U***. Par exemple si ***G*** représente les liaisons aériennes journalières entre les principales villes du monde, un sous-graphe possible est de se restreindre aux liaisons journalières entre les principales villes européennes.

Un **graphe partiel** de ***G*** consiste à ne considérer qu'une partie des arêtes de ***U***. En reprenant le même exemple, un graphe partiel possible est de ne considérer que les liaisons journalières de moins de 3 heures entre les principales villes du monde. Un sous-graphe partiel de ***G***, c'est un graphe partiel d'un sous-graphe de ***G***.

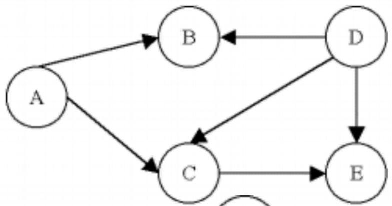
Rappels et compléments sur les graphes

Exemple

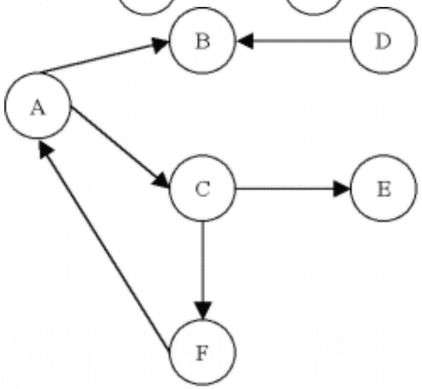
Un **graphe** G:



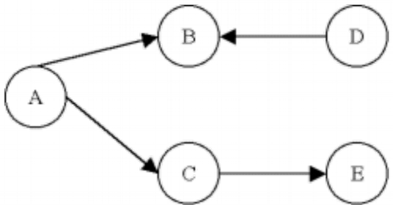
Un **sous-graphe** de G:



Un **graphe partiel** de G:



Un **sous-graphe partiel** de G:

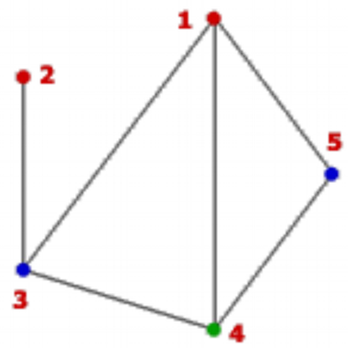


Rappels et compléments sur les graphes

Coloration des sommets et nombre chromatique

La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.
Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k sous-graphes sans arêtes nommés **stables**. Le **nombre chromatique** du graphe G, noté g(G), est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de X sommets en k sous-ensembles stables.

Sur le graphe ci-contre, on a eu besoin de trois couleurs pour colorer les sommets de sorte que deux sommets adjacents ont des couleurs différentes. On a donc trois stables: {1, 2}, {3, 5} et {4}. On ne peut pas utiliser moins de couleurs, à cause des sous-graphes complets nommés **cliques** 1-4-5 et 1-3-4.



Remarquons enfin que le sommet 2 aurait pu aussi être vert. La coloration minimale n'est donc pas forcément unique.

Rappels et compléments sur les graphes

Algorithme de coloration de Welsh et Powell

Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

Étape 1
Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.

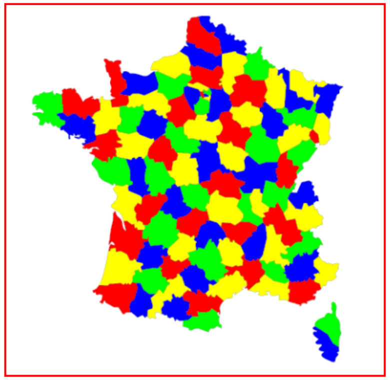
Étape 2
En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.

Étape 3
S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, la coloration est terminée.

Propriété

Théorème des quatre couleurs

On peut colorer les sommets d'un graphe planaire (sans boucles) en utilisant au plus quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.



Source : Math93

Rappels et compléments sur les graphes

Chemin, chaîne et longueur

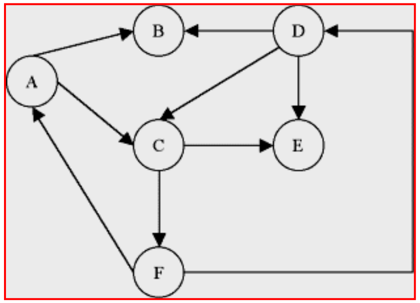
Dans un graphe il est naturel de vouloir se déplacer de sommet en sommet en suivant les arêtes. Une telle marche est appelée une **chaîne** (graphe non orienté) ou un **chemin** (orienté). Un certain nombre de questions peuvent alors se poser : pour 2 sommets du graphe, existe-t-il un chemin pour aller de l'un à l'autre? Quel est l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre depuis un sommet donné? Comment trouver le plus court chemin pour aller d'un sommet à un autre?

Un chemin de x à y est une chaîne dans laquelle les arcs sont orientés et tels que:

- x est l'extrémité initiale du premier arc,
- y est l'extrémité terminale du dernier arc,
- tous les voisins suivants d'un sommet dans un chemin (orienté) sont ses descendants
- tous les voisins précédents d'un sommet dans un chemin (orienté) sont ses ancêtres
- l'extrémité terminale d'un arc est l'extrémité initiale de l'arc qui le suit dans la séquence.

La **longueur** du chemin ou chaîne correspond au nombre d'arcs ou d'arêtes parcourues

Exemple



- ch1 = ((A;C),(C;E)) est un chemin de A à E de longueur 2
- ch2 = ((A;C),(C;F),(F;A),(A;C),(C;E)) est un chemin de A à E de longueur 5.
- ch3 = ((A;C),(C;F),(F;D),(D;C),(C;E)) est un chemin de A à E de longueur 5.
- ch4 = ((A;B),(B;D),(D;E)) est une chaîne de A à E de longueur 2.
- ch5 = ((A;B),(B;D),(D;C),(C;A),(A;B),(B;D),(D;E)) est une chaîne de A à E de longueur 7.
- ch6 = ((A;B),(B;D),(D;C),(C;F),(F;D),(D;E)) est une chaîne de A à E de longueur 6.

Rappels et compléments sur les graphes

Chemin, chaîne et longueur

Un **chemin simple** est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois le même arc.
Une chaîne simple est une chaîne qui ne contient pas plusieurs fois la même arête.

Un **chemin élémentaire** est un chemin qui ne passe pas plus d'une fois par un sommet.
Une chaîne élémentaire est une chaîne qui ne passe pas plus d'une fois par un sommet.

Circuit, cycle

Un circuit contenant un sommet x est un chemin de x à x. Un circuit est une séquence circulaire d'arcs et donc, contrairement au chemin, un circuit n'a ni début, ni fin.
De même, un cycle contenant un sommet x est une chaîne de x à x. Un cycle est également une séquence circulaire d'arêtes.
Un circuit (ou un cycle) est élémentaire si le chemin (ou la chaîne) associé(e) est élémentaire.
Les termes de **chemin** et de **circuit** s'emploient en propre pour les graphes orientés. Pour les graphes non orientés que nous manipulons ici, on parle de **chaîne** et de **cycle**. Cependant la définition formelle est exactement la même dans les 2 cas, seule change la structure (graphe orienté ou non) sur laquelle ils sont définis.

Rappels et compléments sur les graphes

Graphe acyclique

Propriété

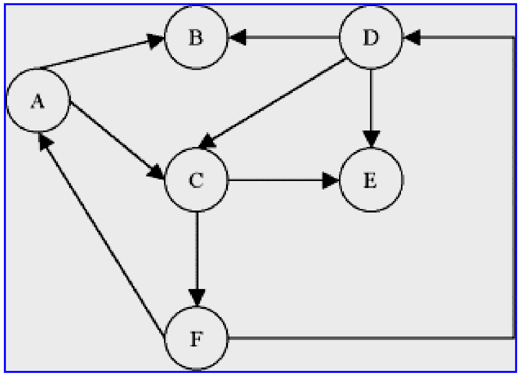
Existence d'un cycle

*Si dans un graphe **G** tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors **G** possède au moins un cycle.*

Propriété

Graphe acyclique

Un graphe acyclique ***G*** à ***n*** sommets possède au plus ***n*-1** arêtes.



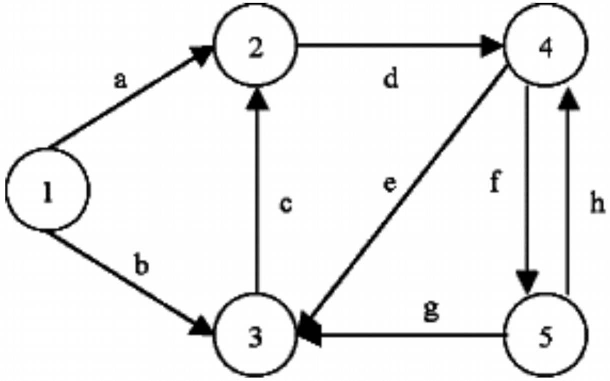
Rappels et compléments sur les graphes

Matrice d'incidence sommet-arc (ou sommet-arête)

Un graphe peut être représenté par une matrice $n \times m$ ($n = |X|$ et $m = |U|$), dite d'incidence, pouvant contenir uniquement les valeurs 0, 1, -1. Chaque ligne de la matrice est associée à un noeud et chaque colonne à un arc. Ainsi, une case indique la relation qu'il existe entre un noeud et un arc.

- 0 signifie que le noeud et l'arc ne sont pas adjacents,
- 1 signifie que le noeud est l'extrémité initiale de l'arc,
- -1 signifie que le noeud est l'extrémité terminale de l'arc.

Exemple



	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	-1	1	0	0	0	0
3	0	-1	1	0	-1	0	-1	0
4	0	0	0	-1	1	1	0	-1
5	0	0	0	0	0	-1	1	1

Remarques

- Seulement $2m$ cases de la matrice sont non nulles sur mn cases.
- Cette représentation occupe beaucoup de place en mémoire.
- Son utilisation apporte rarement de bons résultats au niveau des algorithmes.
- Par contre, pour quelques problèmes de graphes, cette matrice a une signification directe importante.

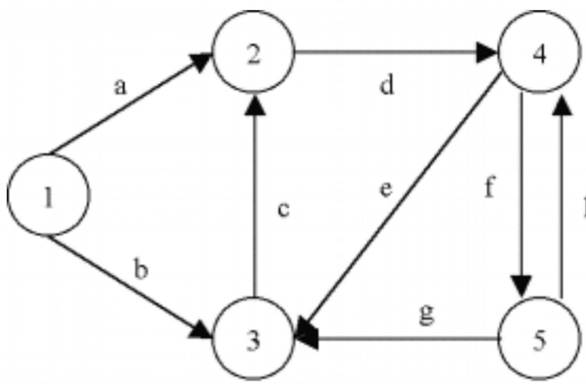
Rappels et compléments sur les graphes

Matrice d'adjacence sommet-sommet

Un graphe peut être représenté par une matrice n x n (n = |X|), dite d'adjacence, pouvant contenir uniquement les valeurs 0, 1. Chaque ligne et chaque colonne de la matrice représente un sommet. Ainsi, une case indique la relation qu'il existe entre deux sommets.

- 0 signifie que les deux sommets ne sont pas reliés par un arc,
- 1 signifie que les deux sommets sont reliés par un arc orienté.

Exemple



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Remarques

- Seulement m cases de la matrice sont non nulles sur n^2 cases.
- Cette représentation est efficace au niveau de l'espace mémoire utilisé lorsque le graphe est suffisamment dense (i.e. lorsqu'il y a suffisamment d'arcs).
- Elle permet d'implémenter assez facilement les algorithmes.
- Deux arcs ayant les mêmes extrémités ne peuvent pas être représentés avec cette matrice.

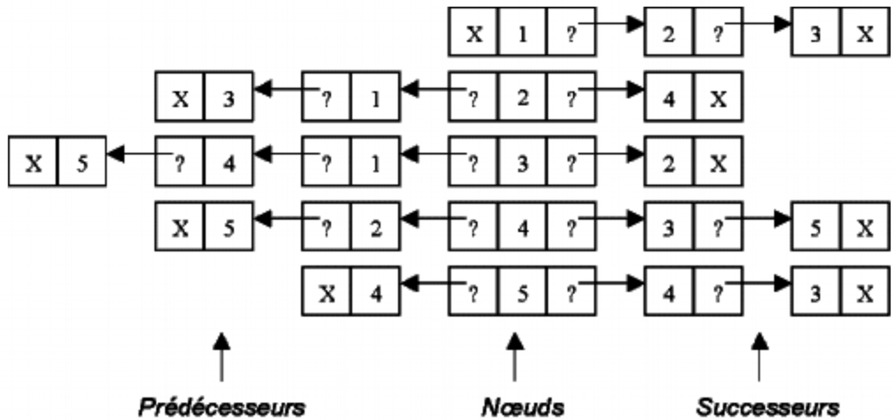
Rappels et compléments sur les graphes

Listes chaînées

Un graphe peut être représenté par des listes. Nous proposons ici une possibilité mais de nombreuses autres peuvent convenir. On définit tout d'abord une liste des sommets et à chaque sommet, on associe une liste de sommets successeurs et une liste de sommets prédécesseurs.

Exemple

Le graphe précédent sera représenté de la manière suivante.



Remarques

- Cette représentation est nettement plus efficace au niveau de la mémoire occupée que les deux représentations précédentes.
- Elle est très bien adaptée au parcours du graphe, aussi bien en sens direct qu'en sens indirect.

Cette structure est souple. L'ajout et la suppression d'arcs ou de noeuds sont plus aisés qu'avec les représentations matricielles.

Rappels et compléments sur les graphes

Connexité, forte connexité

La notion de connexité est liée à l'existence de chemins dans un graphe : depuis un sommet, existe-t-il un chemin pour atteindre tout autre sommet? Les graphes connexes correspondent à la représentation naturelle que l'on se fait d'un graphe. Les graphes non connexes apparaissent comme la juxtaposition d'un ensemble de graphes : ses composantes connexes.

On définit la connexité par une relation entre deux noeuds de la manière suivante.

x et y ont une relation de connexité ⇔ il existe une chaîne entre x et y ou bien x = y (sommet isolé).

On définit la forte connexité par une relation entre deux noeuds de la manière suivante.

x et y ont une relation de forte connexité ⇔ (il existe un chemin de x à y et un chemin de y à x (circuit)
ou bien x = y (sommet isolé)..

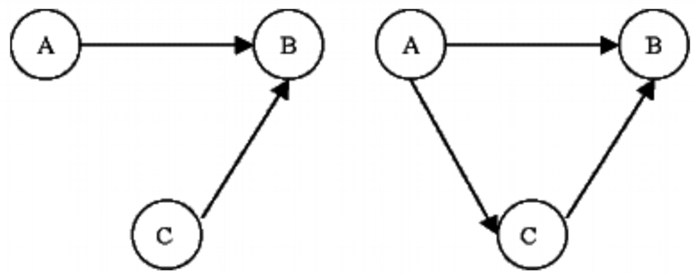
Graphe connexe, fortement connexe

Un graphe est dit connexe si tous ses noeuds ont deux à deux la relation de connexité.
Un graphe est dit fortement connexe si tous ses noeuds ont deux à deux la relation de forte connexité.

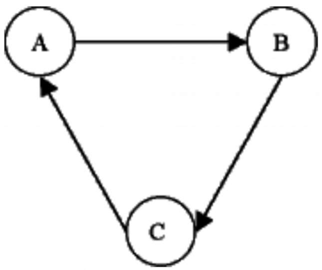
Rappels et compléments sur les graphes

Exemple

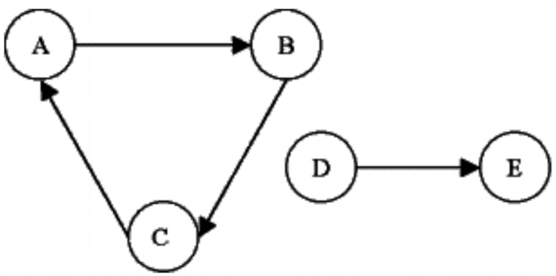
Graphes connexes mais non fortement connexes:



Graphe fortement connexe:



Graphe non connexe:



Rappels et compléments sur les graphes

Composante connexe, fortement connexe

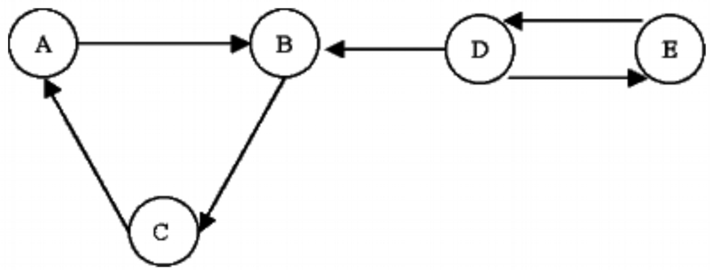
On appelle composante connexe un ensemble de sommets qui ont deux à deux la relation de connexité. De plus, tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de connexité avec aucun des éléments de la composante.
De même, on appelle composante fortement connexe un ensemble de sommets qui ont deux à deux la relation de forte connexité. De plus, tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de forte connexité avec aucun des éléments de la composante.

Graphe réduit

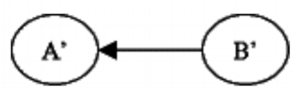
On appelle graphe réduit du graphe G le graphe G' pour lequel chaque sommet est associé à une composante fortement connexe de G. De plus, un arc relie un sommet x' à un sommet y' dans le graphe G' s'il existe un arc qui relie x à y dans G où x appartient à la composante fortement connexe de G associée à x' et où y appartient à la composante fortement connexe de G associée à y'.

Rappels et compléments sur les graphes

Exemple



Ce graphe G n'est pas fortement connexe, car on ne peut pas trouver de chemin de A à D par exemple. Par contre, on identifie deux composantes fortement connexes A' = {A,B,C} et B' = {D,E}. Le graphe réduit du graphe G' est:



Rappels et compléments sur les graphes

Méthode : **Exploration d'un graphe**

Problèmes fondamentaux récurrents :

- Deux sommets s et t sont-ils reliés par un chemin ?
- Quels sont les sommets qu'on peut atteindre à partir de s (fermeture transitive) ?

Principe des procédures de marquage :

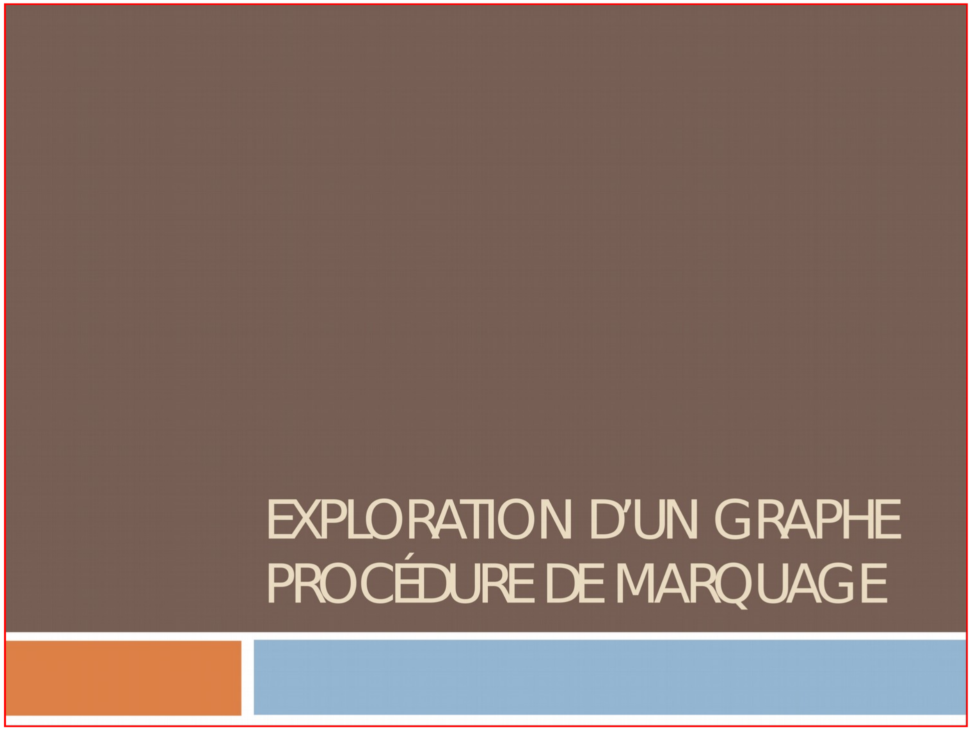
- On marque un sommet;
- On propage la marque aux successeurs du sommet;
- On recommence pour tout sommet marqué;
- On arrête quand on ne peut plus marquer de sommet.

Rappels et compléments sur les graphes

Méthode : **Exploration d'un graphe**

Exploration en Largeur :

Q.vider()
Q.enfiler(s)
Marqué ← Vecteur **Faux**
Marqué[s] ← **Vrai**
Répéter
  Q.défiler(x)
  Pour tout successeur y de x
    Si Marqué[y]=**Faux** alors
      Marqué[y] ← **Vrai**
      Q.enfiler(y)
    Fin Si
  Fin Pour
Jusqu'à Q.vide()



Rappels et compléments sur les graphes

Méthode : **Exploration d'un graphe**

Exploration en Largeur :

Q.vider()
Q.enfiler(s)
Marqué ← Vecteur **Faux**
Marqué[s] ← **Vrai**
Répéter
  Q.défiler(x)
  Pour tout successeur y de x
    Si Marqué[y]=**Faux** alors
      Marqué[y] ← **Vrai**
      Q.enfiler(y)
    Fin Si
  Fin Pour
Jusqu'à Q.vide()

$O(\Gamma^+(x))$

$O(\sum_{x \in X} \Gamma^+(x))$

Complexité

O(M)

Rappels et compléments sur les graphes

Méthode : **Exploration d'un graphe**

Exploration en Profondeur :

```
P.vider()
P.empiler(s)
Marqué ← Vecteur Faux
Marqué[s] ← Vrai
Répéter
  P.dépiler(x)
  Pour tout successeur y de x
     Si Marqué[y]=Faux alors
        Marqué[y] ← Vrai
        P.empiler(y)
     Fin Si
  Fin Pour
Jusqu'à P.vide()
```