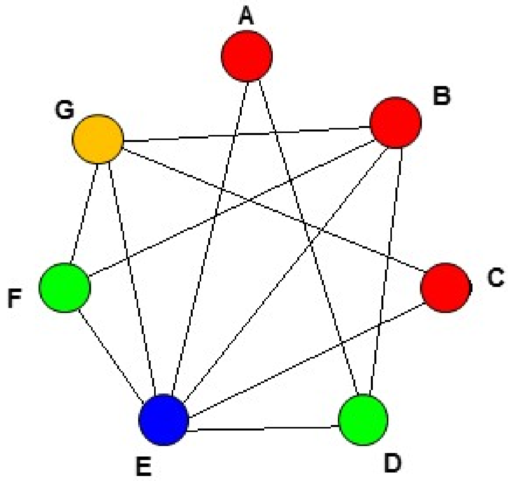
Optimisation Numérique

Graphes : Travaux Dirigés



Eric Pinson

Institut de Mathématiques Appliquées
Université Catholique de l'Ouest
Angers - France

UCO ANGERS UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

L2 MIASHS

IMA Mathématiques Appliquées

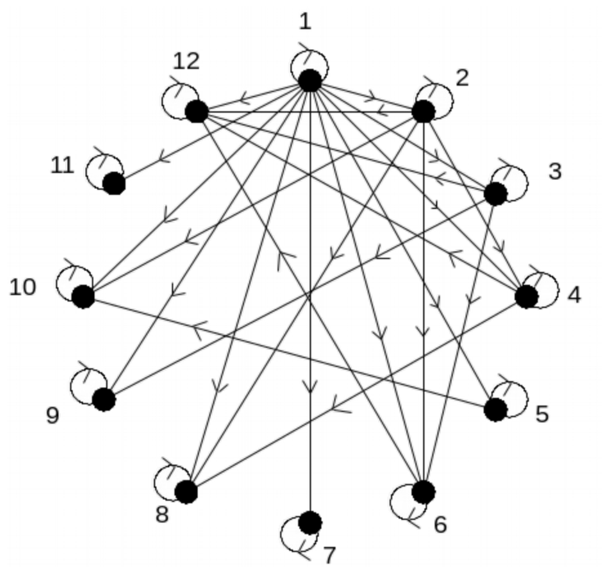
Graphes : Travaux dirigés

Graphes : un outil de modélisation

Exercice :

Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».

Corrigé :



Graphes : Travaux dirigés

Graphes : un outil de modélisation

Exercice :

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

Corrigé :

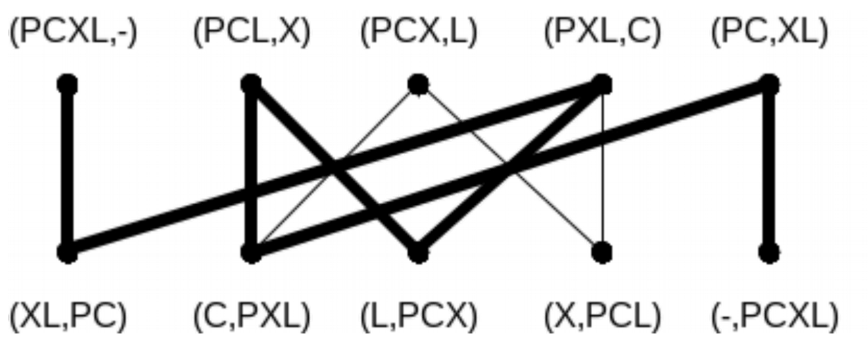
- Notations : P = passeur, C = chèvre, X = chou , L = loup.
- Sommets = couples précisant qui est sur la rive initiale, qui est sur l'autre rive
  Ex : (PCX,L) signifie que le passeur est sur la rive initiale avec la chèvre et le chou (qui sont donc sous surveillance), alors que le loup est sur l'autre rive
- Une arête relie deux sommets lorsque le passeur peut passer d'une situation à l'autre. *En transportant la chèvre, le passeur passe par exemple du sommet (PCX,L) au sommet (X,PCL)*
- Le graphe ainsi obtenu est biparti : les sommets pour lesquels le passeur est sur la rive initiale ne sont reliés qu'aux sommets pour lesquels le passeur est sur l'autre rive…
- les sommets dont l'une des composantes est CX ou LC sont occultés.

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : un outil de modélisation

Corrigé :

Objectif : trouver un chemin (le plus court par exemple) entre la situation initiale (PCXL,-) et la situation finale souhaitée (-,PCXL).



Graphes : Travaux dirigés

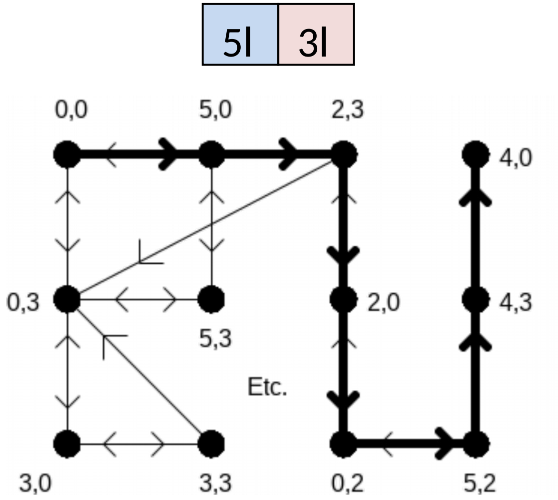
Graphes : un outil de modélisation

Exercice :

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres… Comment doit-on procéder ?

Corrigé :

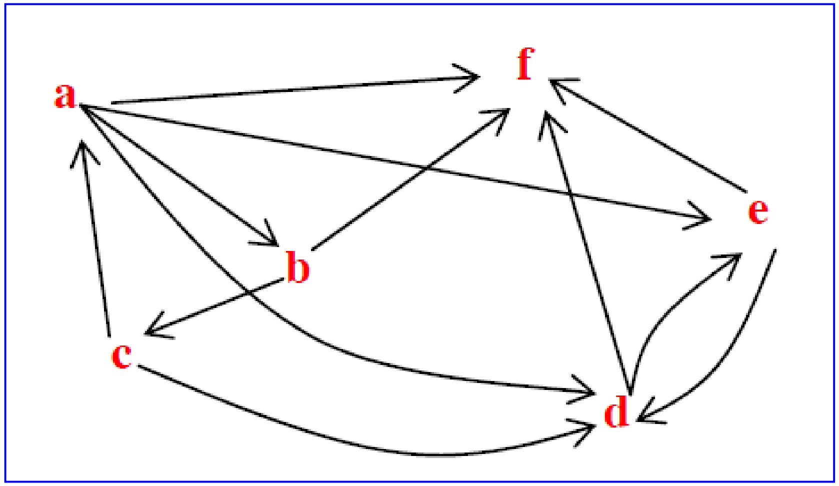
- sommets = couples donnant le contenu du récipient de 5l et celui du récipient de 3l
- arc entre deux sommets lorsqu'on peut passer d'une configuration à l'autre
- Objectif : déterminer un chemin du sommet 0,0 au sommet 4,0…



Graphes : Exploration

Exercice :

On considère le graphe :



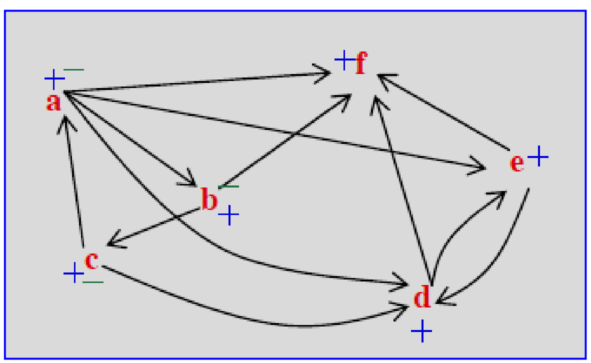
1. Ce graphe est-il connexe ?
2. Comment utiliser les procédures d'exploration de graphes pour déterminer les composantes fortement de ce graphe ?

Graphes : Travaux dirigés

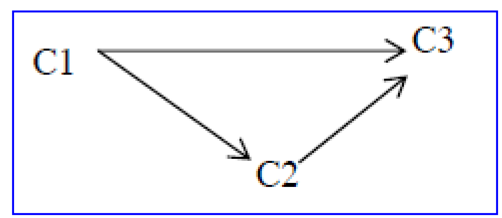
Graphes : Exploration

Corrigé :

Composante fortement connexe contenant le sommet a:
- marquer par + et - le sommet a
- marquer par + chaque successeur non marqué + d'un sommet marqué +
- marquer par - chaque prédécesseur non marqué - d'un sommet marqué –
- quand on ne peut plus marquer, les sommets marqués + et – constituent la composante fortement connexe contenant a



C1 = {a, b, c}
C2 = {d, e}
C3 = {f}



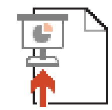
Graphe réduit

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Exploration

Corrigé :

Alternative :



CFC

Recherche des CFC :

Principe :

- Considérons un sommet quelconque s de G
- Recherchons D_s et A_s définis par :

  D_s = ensemble des descendants de s dans G, i.e. ensemble des sommets i de G pour lesquels il existe un chemin dans G joignant s à i

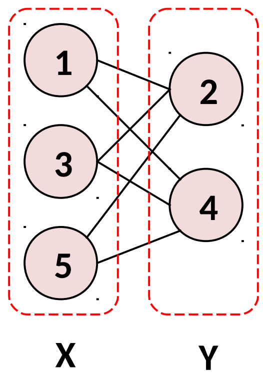
  A_s = ensemble des ancêtres de s dans G, i.e. ensemble des sommets pour lesquels il existe un chemin dans G joignant i à s
- La CFC associée au sommet s est alors le sous-ensemble $C_s = \{s\} \cup (D_s \cap A_s)$

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Définition :

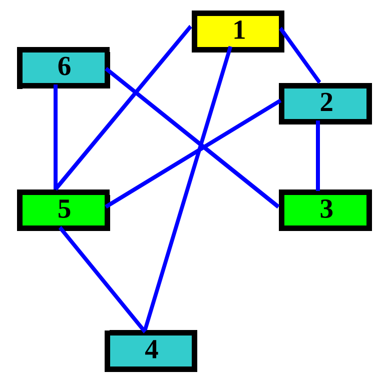
Un graphe est **biparti** si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles *X* et *Y*, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans *X* à un sommet dans *Y* (dans l'exemple ci-dessous, on a *X* = {1,3,5} et *Y* = {2,4}, ou vice versa).



Définition :

Soit G = (V,E) un graphe. On appellera coloration d'un graphe G à k couleurs toute application f de V dans {1, … , k}. On dira qu'une coloration f est propre si deux sommets voisins n'ont pas la même couleur.

Exemple



Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Exercice :

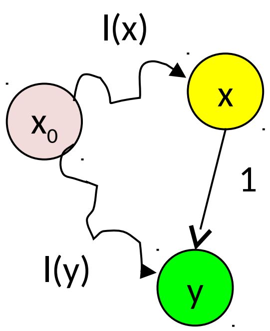
Théorème
Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

1. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il admet une 2-coloration.
2. En déduire la CN du théorème précédent

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Corrigé :



Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appellera coloriage d'un graphe G à k couleurs toute application ϕ de V dans $\{1, \ldots, k\}$. On dira qu'un coloriage ϕ est propre si deux sommets voisins n'ont pas la même couleur.

Soit G un graphe biparti et ϕ un coloriage à 2 couleurs de G. Si $(x_0, \ldots, x_n)$ est une chaîne, on a pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\phi(x_i) \neq \phi(x_{i+1})$, d'où $\phi(x_{2k}) = \phi(x_0)$ et $\phi(x_{2k+1}) = \phi(x_1)$. Maintenant, si cette chaîne est un cycle, on a $x_0 = x_n$, d'où $\phi(x_0) = \phi(x_n)$, ce qui implique que n est pair. G ne possède donc pas de cycle de longueur impaire.

Soit maintenant $G = (V, E)$ un graphe ne possédant pas de cycle de longueur impaire. On doit construire un coloriage propre de G. Comme les composantes connexes ne communiquent pas entre elles, on peut se ramener au cas où G est connexe : il suffira ensuite de recoller les applications.
Soit x_0 un sommet quelconque de V. Pour $x \in V$, on note $l(x)$ la longueur minimale d'un chemin reliant x_0 à x. On pose alors $\phi(x) = 1$ si $l(x)$ est pair, $\phi(x) = 2$ sinon. Soit $\{x, y\} \in E$: il est facile de voir que $|l(x) - l(y)| \leq 1$. Si on avait $l(x) = l(y)$, on pourrait construire un cycle de longueur $2l(x) + 1$ contenant le point x_0 et l'arête $\{x, y\}$. Ceci est contraire à l'hypothèse selon laquelle le graphe ne contient pas de cycle de longueur impaire. On a donc $|l(x) - l(y)| = 1$, donc $l(x)$ et $l(y)$ ne sont pas de même parité, ce qui implique $\phi(x) \neq \phi(y)$. Le coloriage est donc bien propre.

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Exercice :

On considère un graphe simple G=(X,E)

1. Montrer qu'il y a au moins 2 sommets ayant le même degré
2. Montrer que la somme de tous les degrés est paire
3. Montrer que le nombre de sommets de degré impair est pair

Corrigé :

1. Soit n l'ordre de G. Supposons que tous les sommets de X aient des degrés distincts. Alors, on aura un sommet de degré 0, un sommet de degré 1,..., et un sommet de degré n-1. Or s'il existe un sommet de degré n-1 (il est connecté à tous les autres sommets de X) alors il ne peut exister de sommet de degré 0. D'où contradiction, et la propriété est vérifiée.
2. Chaque arête ajoute 1 au degré de deux sommets. En conséquence, la somme des degrés est égale à 2m où m est le nombre d'arêtes de E.
3. Facile

$$\sum_{i\in X} d_i = 2m = \sum_{i\in I} d_i + \underbrace{\sum_{i\in P} d_i}_{\text{pair}} \Rightarrow \sum_{i\in I} d_i \text{ pair} \Rightarrow |I| \text{ pair}$$

Graphes : Travaux dirigés

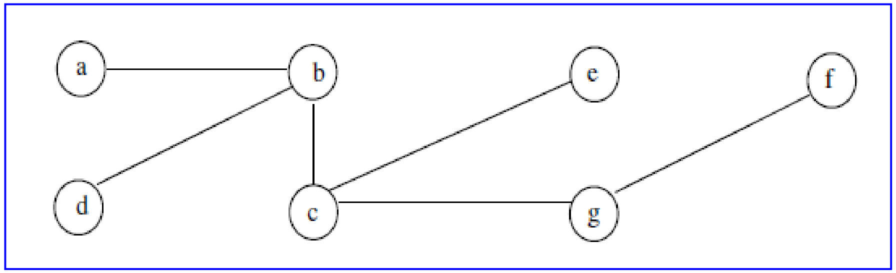
Graphes : Graphes particuliers

Définition :

Les arbres et les arborescences sont des graphes particuliers très souvent utilisés en informatique pour représenter des données. Etant donné un graphe non orienté comportant n sommets, les propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre :

1. G est connexe et sans cycle,
2. G est sans cycle et possède n -1 arêtes,
3. G est connexe et admet n -1 arêtes,
4. G est sans cycle, et en ajoutant une arête, on crée un et un seul cycle élémentaire,
5. G est connexe, et en supprimant une arête quelconque, il n'est plus connexe,
6. Il existe une chaine et une seule entre 2 sommets quelconques de G.

Par exemple, le graphe suivant est un arbre :



Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Exercice :

Théorème

Tout arbre fini avec au moins deux sommets comporte au moins deux sommets pendants.

Corrigé :

Le théorème est vrai pour $n = 2$ sommets, car les deux sommets sont des feuilles.
Supposons qu'il soit vrai pour $n-1$ sommets $(n > 2)$. Si on veut ajouter un sommet, on peut le relier à l'arbre existant avec une arête (sinon on forme un cycle) soit à une feuille, soit à un sommet qui n'est pas une feuille. Dans le premier cas, le nombre de feuilles reste le même (une disparaît et une apparaît) ; dans le second cas, le nombre de feuilles augmente de 1.
Le théorème est donc vrai pour n sommets, puisque l'on ne peut pas faire diminuer le nombre de feuilles par l'ajout d'un sommet.

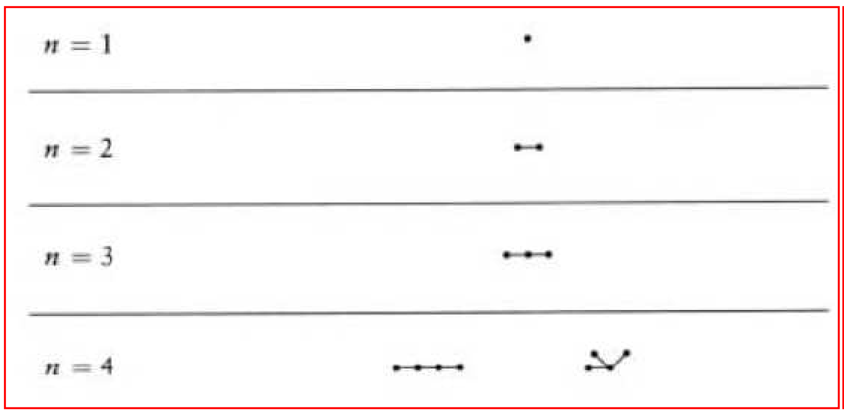
Graphes : Travaux dirigés

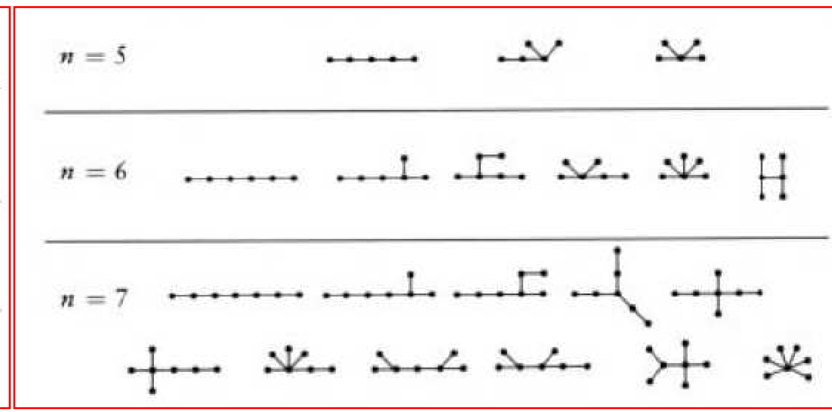
Graphes : Graphes particuliers

Exercice :

Combien d’arbres différents existe-t-il avec 5 sommets? avec 6 sommets ? avec 7 sommets?

Corrigé :





Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Exercice :

Montrer le résultat suivant :

Théorème

Pour un graphe *G ayant m arêtes, n sommets et p composantes connexes, on définit :*

$$\nu(G) = m - n + p$$

$\nu(G)$ *est appelé le nombre* ***cyclomatique.***

- On a $\nu(G) \geq 0$ *pour tout graphe G.*
- De plus, $\nu(G) = 0$ *et G connexe si et seulement si G est sans cycle.*

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Corrigé :

Soit $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ et $E=\{e_1,\dots,e_m\}$. Construisons la suite de graphes $G_i=(V,E_i)$ avec $E_0:=\varnothing$ et $E_i:=E_{i-1}\cup\{e_i\}$ pour $i=1,\dots,m$.
Le théorème est vrai pour G_0 car $m=0$, $p=n$ et $\nu(G_0)=0-n+n=0$.
Supposons le théorème vrai pour G_i et étudions G_{i+1}. Deux cas peuvent se présenter :
a. L'arête $e_{i+1}=\{a,b\}$ a ses extrémités dans deux composantes connexes distinctes de G_i, alors G_{i+1} aura $m_{i+1}=m_i+1$ arêtes, n sommets et $p_{i+1}=p_i-1$ composantes connexes donc : $\nu(G_{i+1})=m_{i+1}-n+p_{i+1}=(m_i+1)-n+(p_i-1)=m_i-n+p_i=\nu(G_i)\geq 0$
b. L'arête $e_{i+1}=\{a,b\}$ a ses extrémités dans la même composante connexe de G_i, alors G_{i+1} aura $m_{i+1}=m_i+1$ arêtes, n sommets et $p_{i+1}=p_i$ composantes connexes donc : $\nu(G_{i+1})=m_{i+1}-n+p_{i+1}=(m_i+1)-n+p_i=m_i-n+p_i+1\geq\nu(G_i)\geq 0$
Ainsi, dans les deux cas, on a $\nu(G_{i+1})\geq\nu(G_i)$.
On constate dans cette construction, que dès que $\nu(G_i)$ devient plus grand que 0, on a un cycle dans G.

G connexe $\Rightarrow$ p=1 $\Rightarrow$ ν(G)=m-n+1=0 $\Rightarrow$ m=n-1 $\Rightarrow$ G arbre (connexe minimal) donc sans cycle

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Définition :

Soit un graphe G = (X,E). Un parcours eulérien emprunte une fois et une seule chaque arête de E (il peut passer plusieurs fois par un même sommet). Un graphe admettant un parcours eulérien est lui même dit eulérien.

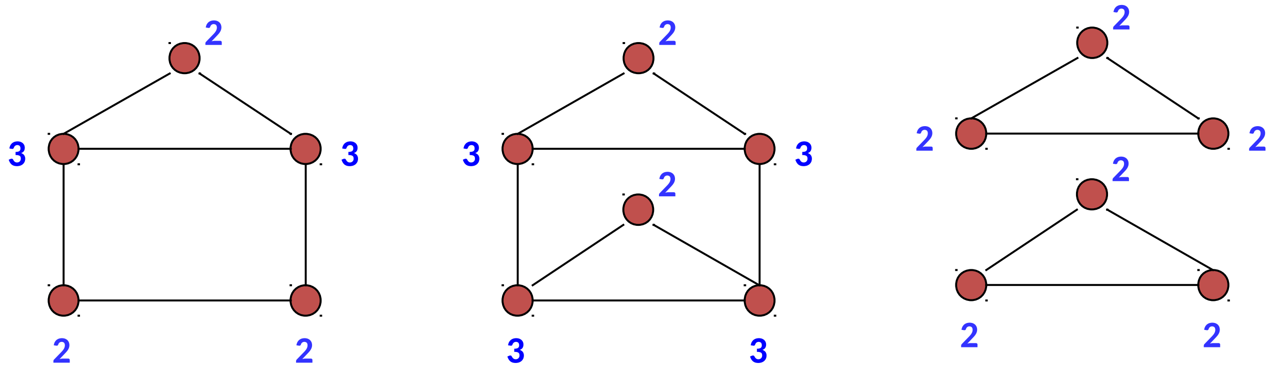
Théorème d'Euler :

Soit un multigraphe ([1]) G = (X,E). Il admet un parcours eulérien ssi il est connexe ([2]) et a 0 ou 2 sommets de degré impair. S'il y a 0 sommet impair, G admet un cycle eulérien et on peut partir d'un sommet quelconque et y revenir. S'il y a 2 sommets impairs u et v, G admet une chaîne eulérienne joignant u et v.

([1]) **Multigraphe** : graphe pouvant posséder plusieurs arêtes entre certaines paire de sommets
([2]) **Connexe** : il existe une chaîne joignant toute paire de sommets

Graphes : Graphes particuliers

Exemple



Graphe Eulérien

Graphe non Eulérien

Graphe non Eulérien
(car non connexe)

Graphes : Graphes particuliers

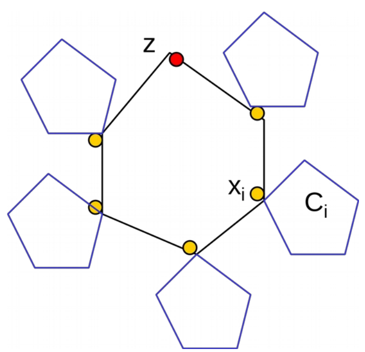
Démonstration :

On dira qu'un parcours µ traverse un sommet x si en le suivant on emprunte 2 arêtes consécutives d'extrémité x → diminution de 2 du degré de x dans le graphe partiel H des arêtes restant à visiter.

A ⇒ B. S'il existe un parcours eulérien µ, G est forcément connexe. Si µ est un cycle, il traverse au moins une fois chaque sommet, et tous les sommets sont pairs. Si µ est une chaîne ouverte, elle ne peut joindre que 2 sommets impairs, car les sommets intermédiaires sont pairs.

B ⇒ A. Hypothèse : G connexe et a 0 ou 2 sommets impairs u et v. On ramène ce 2ème cas au 1er en ajoutant un sommet z de degré 2 relié à u et v.
Procédé constructif : on construit à partir de z un parcours µ ne repassant jamais par une arête déjà visitée. Comme G est connexe, les sommets tous pairs, et qu'il reste une arête incidente à z à visiter, µ finit en z.

Si µ emprunte toutes les arêtes, on a un cycle eulérien. Sinon, le graphe partiel H des arêtes non visitées a tous ses sommets pairs. Il n'est pas forcément connexe, mais comme G est connexe, chaque composante connexe C_i de H a au moins un sommet x_i sur µ. Pour toute C_i, on applique le même procédé au départ de x_i et on greffe le cycle μ_i obtenu sur µ. En répétant le procédé tant qu'il reste des arêtes à visiter, on finit par rendre µ eulérien.



Graphes : Travaux dirigés

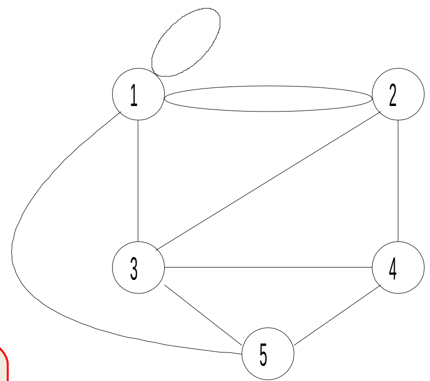
Graphes : Graphes particuliers

Graphe non orienté G = (X,E) vérifiant le théorème d'existence

S'il y a 2 sommets impairs u et v, les relier à un nouveau sommet z
μ := liste vide de sommets {Parcours eulérien en construction}
k := 0 {Nombre d'arêtes visitées}
s := 1; {Sommet de départ}

<u>Répéter</u>
  Chercher un cycle μ' partant du sommet s
  et ne repassant pas par une arête déjà visitée
  Greffer μ' sur μ, au sommet s
  k := k + nombre d'arêtes de μ'
  <u>Si</u> k < M <u>alors</u>
    s := 1er sommet le long de μ, ayant des arêtes non visitées
  <u>FinSi</u>
<u>Jusqu'à</u> k = M.

attention aux répétitions possibles de sommets

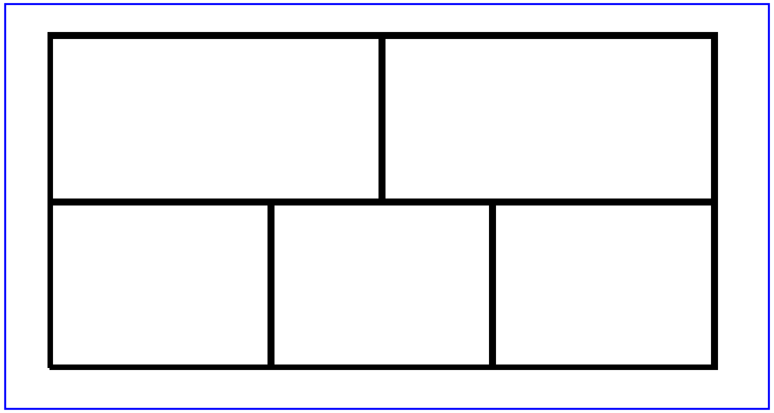


A vous de jouer...

Graphes : Graphes particuliers

Exercice :

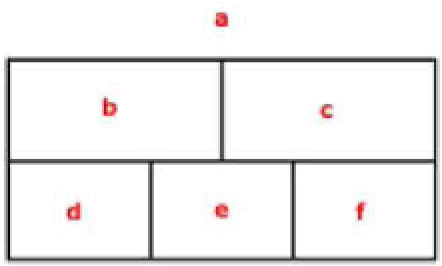
Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?

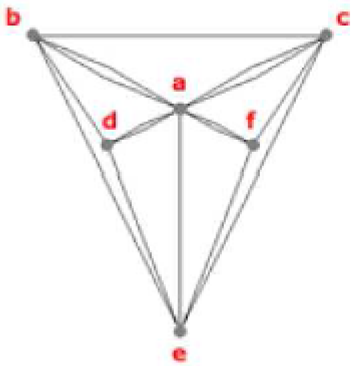


Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Corrigé :





Non, car le graphe associé n'est pas eulérien.

Graphes : Graphes particuliers

Exercice :

Soit G un graphe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

Corrigé :

Pour qu'un graphe soit eulérien, il faut et suffit que le nombre de ses sommets de degré impair soit 0 ou 2. Si un graphe contient $k > 2$ sommets impairs, il est possible de rajouter un nouveau sommet x, relié à ces k sommets. Dans le graphe obtenu, les k sommets considérés sont devenus pairs… Cependant, le degré de x étant k, le graphe n'est toujours pas eulérien si k était impair…
Remarquons qu'il est possible de rajouter des arêtes entre les sommets de degré impair dans le graphe d'origine… Mais l'ajout d'une telle arête, entre deux sommets impairs a et b par exemple, fait que le nombre de sommets impairs devient $k-2$, qui a la même parité que k…
La réponse est donc : ce n'est possible que si le nombre de sommets impairs est pair…

Graphes : Graphes particuliers

Définition :

Graphes hamiltoniens

On appelle **cycle hamiltonien** d'un graphe G *un cycle passant une et une seule fois par* chacun des sommets de G. *Un graphe est dit **hamiltonien** s'il possède un cycle **hamiltonien.***

On appelle **chaîne hamiltonienne** d'un graphe G *une chaîne passant une et une seule fois* par chacun des sommets de G.

Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes hamiltoniens.

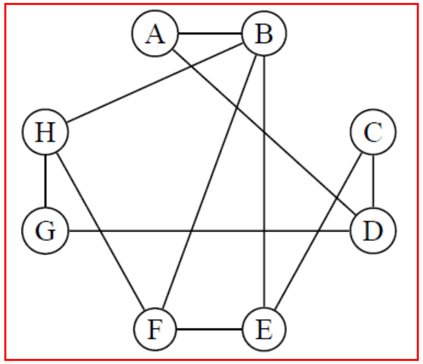
Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Exercice :

Huit personnes se retrouvent pour un repas de mariage. Le graphe ci-dessous précise les incompatibilités d'humeur entre ces personnes (une arête reliant deux personnes indique qu'elles ne se supportent pas).

Proposez un plan de table



Corrigé :

Il s'agit de trouver des cycles hamiltoniens dans le **complémentaire** *du graphe*, *c'est-à-dire* dans le graphe précisant les compatibiltés entre les personnes.
En voici un : B, C, H, A, F, G, E, D.

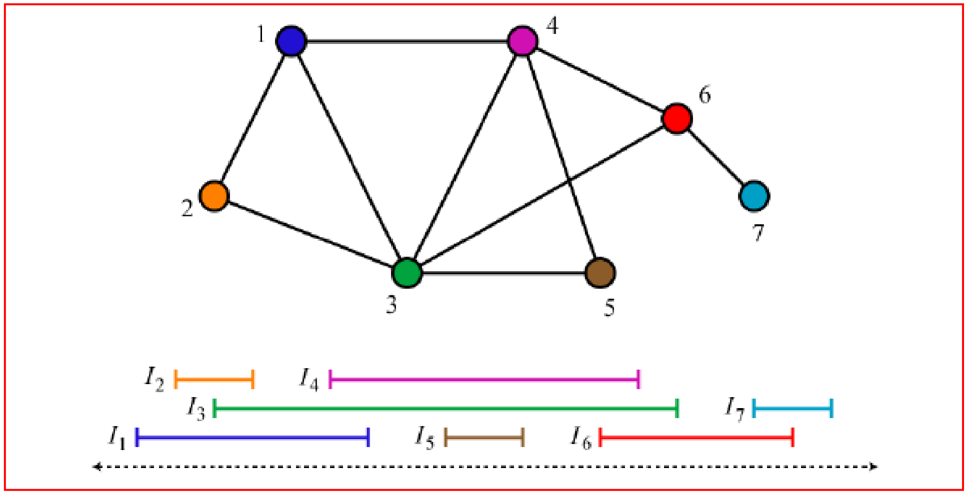
Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Définition : **Graphe d'intervalles :**

On construit un graphe *G* à partir des intervalles de la droite réelle $I_1, \ldots, I_n$, où les sommets de *G* sont numérotés de 1 à n. Dans un **graphe d'intervalles**, il existe une arête entre les sommets i et j , $i \neq j$, si et seulement si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

Exemple



Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Exercice :

Sept élèves, désignés par A,B,C,D,E,F et G se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui à rencontré qui » (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement...).
Quel est l'ordre d'arrivée des élèves à la bibliothèque ? Leur ordre de départ ?

Elève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

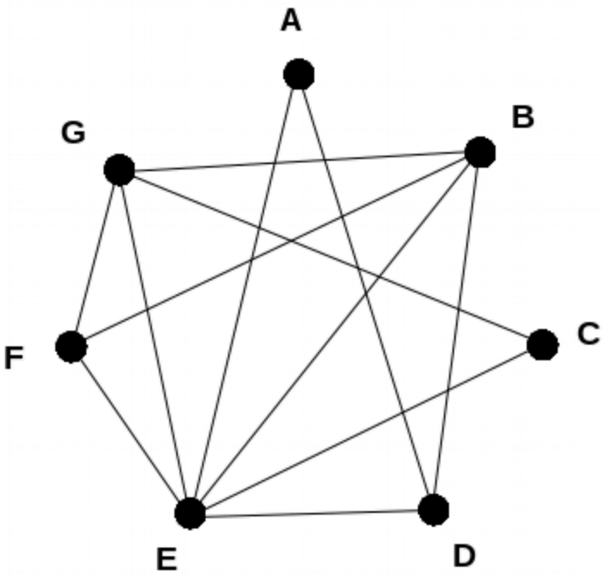
Corrigé :

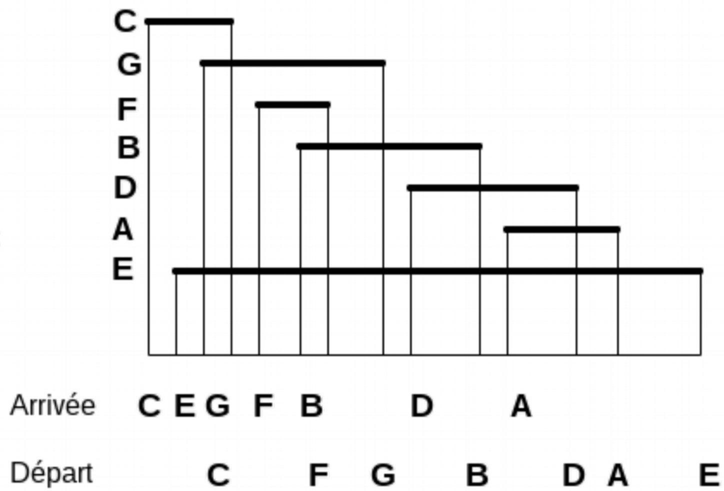
Graphe des rencontres : *graphe d'intervalles*
Sommet → intervalle de temps de présence de l'élève dans la bibliothèque
Arête : 2 sommets sont reliés lorsque les intervalles s'intersectent (les élèves se sont croisés).

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

Corrigé : Suite





Elève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

Graphes : Graphes particuliers

Corrigé : **Suite**

Définitions :

Un sommet est « simplicial » si ses voisins (c'est-à-dire les sommets auxquels il est relié par une arête) sont tous reliés entre eux par une arête.

Un « schéma d'élimination parfait » dans un graphe à n sommets est un ordre $v_1,\ldots,v_n$ des sommets tel que v_i est simplicial dans le graphe qui ne contient que les sommets $v_i,\ldots,v_n$.

En d'autres termes, si $v_1,\ldots,v_n$ est un schéma d'élimination parfait, alors tous les voisins de v_1 sont reliés entre eux. Aussi, si on supprime le sommet v_1 du graphe, alors tous les voisins de v_2 sont reliés entre eux. Et ainsi de suite, c'est-à-dire que si on supprime les sommets $v_1,\ldots,v_{i-1}$ du graphe, alors tous les voisins de v_i sont reliés entre eux.

Graphes : Graphes particuliers

Corrigé : **Suite**

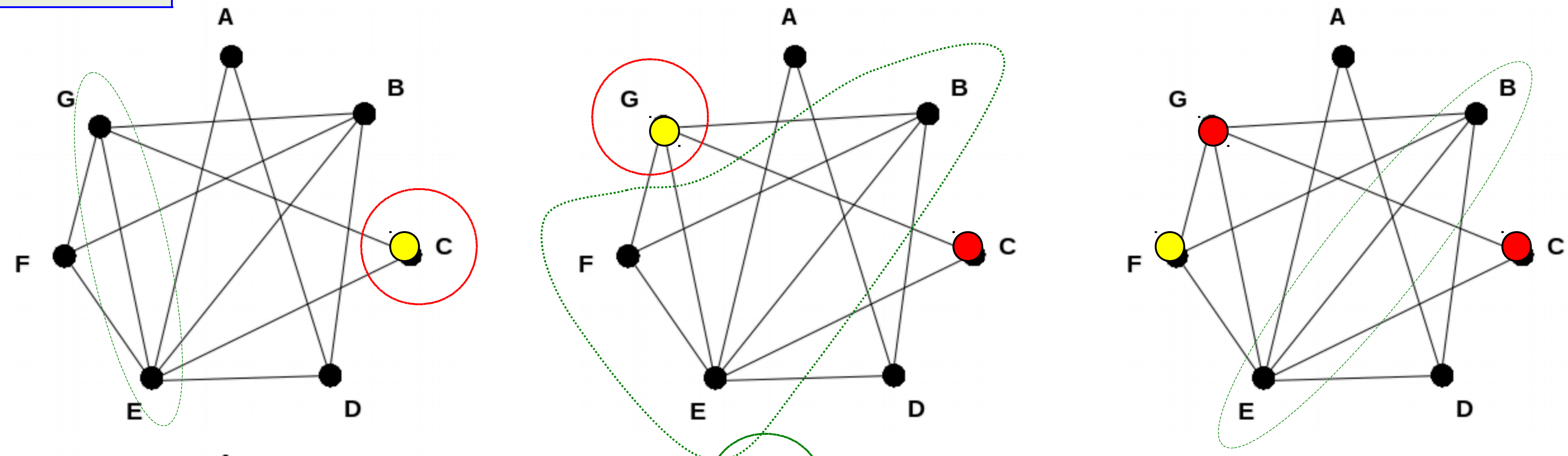
Propriété :

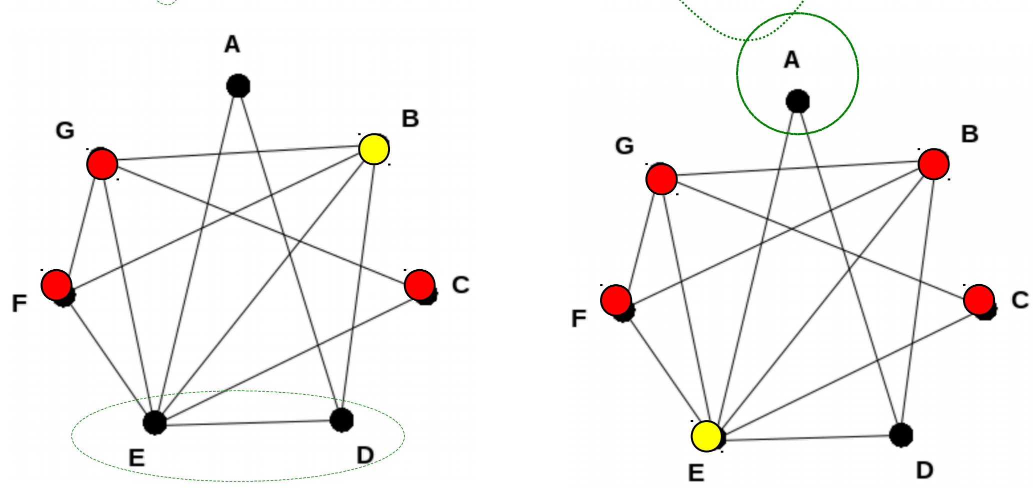
Un graphe est d'intervalles si, et seulement si, il possède un schéma d'élimination parfait.

Il est très facile de déterminer un schéma d'élimination parfait dans un graphe d'intervalles. Il suffit de choisir un sommet simplicial (c'est-à-dire dont tous les voisins sont reliés entre eux) et de le nommer v_1. On supprime alors ce sommet du graphe et on recherche un sommet simplicial dans le graphe résiduel qu'on nomme v_2. On poursuit ainsi jusqu'à ce que le graphe résiduel soit vide.

Graphes : Graphes particuliers

Corrigé : Suite





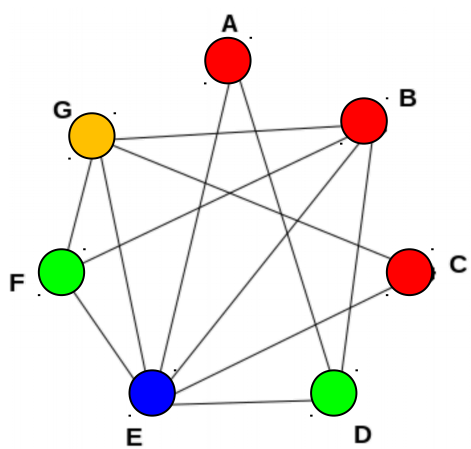
C-G-F-B-E-D-A

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Graphes particuliers

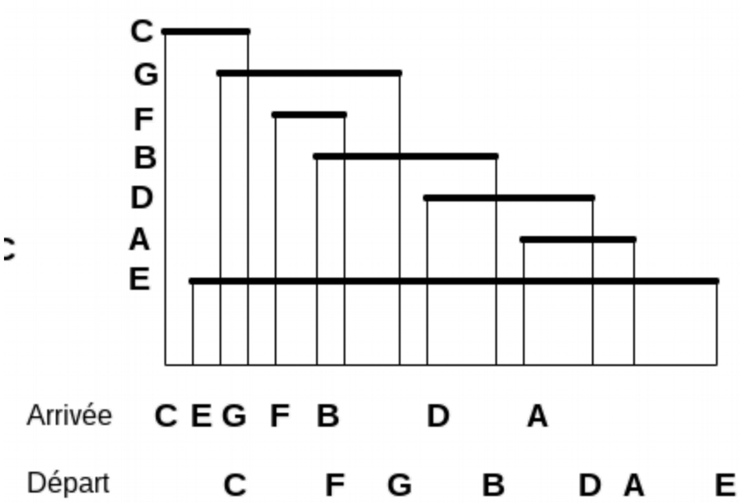
Coloration des sommets d'un graphe d'intervalles avec un nombre minimum de couleurs

1. Déterminer un schéma d'élimination parfait $v_1,\ldots,v_n$
2. Colorer les sommets les uns après les autres, selon l'ordre inverse $v_n,\ldots,v_1$ en choisissant toujours la première couleur disponible.



C-G-F-B-E-D-A

A					x	x
B			x	x		
C	x					
D				x	x	
E	x	x	x	x	x	x
F		x				
G	x	x	x			



Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Plus Courts Chemins

Graphe G=X,U,c) à valuations positives : $\forall (i,j) \in U,\ c_{ij} \geq 0$

Algorithme de Dijsktra

d(s) =0, pred(s)=s
$S=\emptyset$, $\bar{S}=X$
Pour tout $x \in X-\{s\}$
  d(x) =+∞
FinPour
Tant que $S \neq X$ faire
  Sélectionner un sommet i de S tel que : $d(i) = \min_{j \in \bar{S}} d(j)$
  $S=S \cup \{i\}$, $\bar{S}=\bar{S}-\{i\}$
  Pour tout $j \in \Gamma^{+}(i) \cap \bar{S}$
    Si $d(j) > d(i) + c_{ij}$ alors
      $d(j) = d(i) + c_{ij}$, pred(j)=i
    FinSi
  FinPour
Finttq

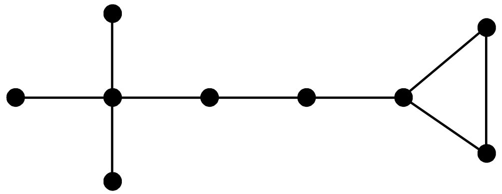
- G=(X,U) : graphe valué : longueur de l'arc (i,j) : $c_{ij} \geq 0$
- s : sommet de départ
- d(x) : longueur du plus court chemin de s au sommet x
- pred(x) : prédécesseur de x dans le Plus Court Chemin associé
- S : sommets déjà traités

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Plus Courts Chemins

Exercice :

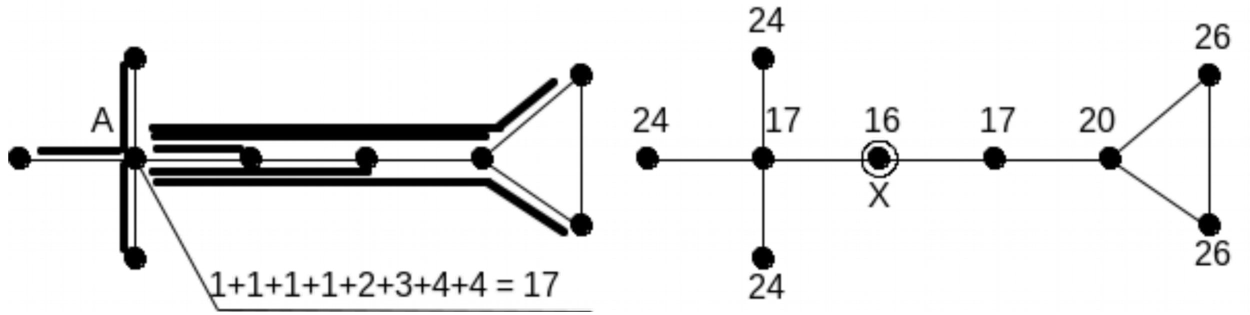
Un robot se promène sur le graphe ci-dessous. Partant d'un sommet quelconque *s*, appelé *sommet de stockage*, il doit déposer un cube sur chacun des autres sommets. Il possède suffisamment de cubes sur le sommet de stockage, mais ne peut transporter qu'un cube à la fois (il doit donc repasser par le sommet de stockage avant de livrer un autre cube). Calculer, pour chacun des sommets du graphe, le trajet minimum que doit parcourir le robot si ce sommet est sommet de stockage.
Quel est le « meilleur » sommet de stockage ?



Graphes : Plus Courts Chemins

Corrigé :

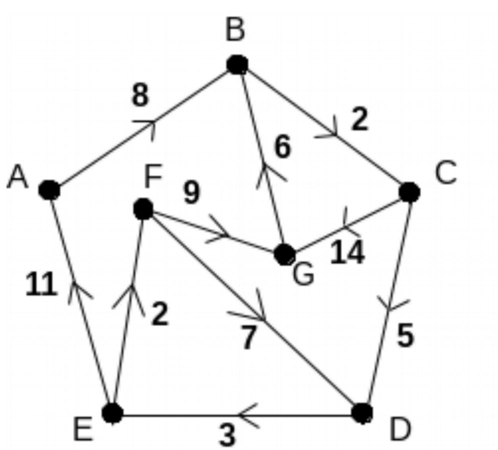
Pour un sommet donné, il est nécessaire de calculer la somme des longueurs des plus courts chemins de ce sommet aux autres sommets. La figure suivante donne cette valeur pour le sommet A, puis pour tous les sommets du graphe. Le meilleur sommet de stockage est donc le sommet X…



Graphes : Plus Courts Chemins

Exercice :

Exécutez l'algorithme de Dijkstra sur le graphe précédent, à partir du sommet C, puis à partir du sommet F.



$d(s) = 0$, $pred(s) = s$
$S = \varnothing$, $\bar{S} = X$
Pour tout $x \in X - \{s\}$
  $d(x) = +\infty$
FinPour
Tant que $S \neq X$ faire
  Sélectionner un sommet i de S tel que : $d(i) = \min_{j \in \bar{S}} d(j)$
  $S = S \cup \{i\}$, $\bar{S} = \bar{S} - \{i\}$
  Pour tout $j \in \Gamma^{+}(i) \cap \bar{S}$
    Si $d(j) > d(i) + c_{ij}$ alors
      $d(j) = d(i) + c_{ij}$, $pred(j) = i$
    FinSi
  FinPour
Finttq

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Plus Courts Chemins

Corrigé :

À partir du sommet C, nous obtenons :

Initial :	*poids = ∞, ∞, 0, ∞, ∞, ∞, ∞*	*venant de : -, -, C, -, -, -, -*	$\Pi = \emptyset$
choix de C :	*poids = ∞, ∞, 0, 5, ∞, ∞, 14*	*venant de : -, -, C, C, -, -, C*	$\Pi = \{C\}$
choix de D :	*poids = ∞, ∞, 0, 5, 8, ∞, 14*	*venant de : -, -, C, C, D, -, C*	$\Pi = \{C,D\}$
choix de E :	*poids = 19, ∞, 0, 5, 8, 10, 14*	*venant de : E, -, C, C, D, E, C*	$\Pi = \{C,D,E\}$
choix de F :	*poids = 19, ∞, 0, 5, 8, 10, 14*	*venant de : E, -, C, C, D, E, C*	$\Pi = \{C,D,E,F\}$
choix de G :	*poids = 19, 20, 0, 5, 8, 10, 14*	*venant de : E, G, C, C, D, E, C*	$\Pi = \{C,D,E,F,G\}$
choix de A :	*poids = 19, 20, 0, 5, 8, 10, 14*	*venant de : E, G, C, C, D, E, C*	$\Pi = \{A,C,D,E,F,G\}$
choix de B :	*poids = 19, 20, 0, 5, 8, 10, 14*	*venant de : E, G, C, C, D, E, C*	$\Pi = \{A,B,C,D,E,F,G\}$

fin de l'algorithme….

À partir du sommet F, nous obtenons :

Initial :	*poids = ∞, ∞, ∞, ∞, ∞, 0, ∞*	*venant de : -, -, -, -, -, F, -*	$\Pi = \emptyset$
choix de F :	*poids = ∞, ∞, ∞, 7, ∞, 0, 9*	*venant de : -, -, -, F, -, F, F*	$\Pi = \{F\}$
choix de D :	*poids = ∞, ∞, ∞, 7, 10, 0, 9*	*venant de : -, -, -, F, D, F, F*	$\Pi = \{D,F\}$
choix de G :	*poids = ∞, 15, ∞, 7, 10, 0, 9*	*venant de : -, G, -, F, D, F, F*	$\Pi = \{D,F,G\}$
choix de E :	*poids = 21, 15, ∞, 7, 10, 0, 9*	*venant de : E, G, -, F, D, F, F*	$\Pi = \{D,E,F,G\}$
choix de B :	*poids = 21, 15, 17, 7, 10, 0, 9*	*venant de : E, G, B, F, D, F, F*	$\Pi = \{B,D,E,F,G\}$
choix de C :	*poids = 21, 15, 17, 7, 10, 0, 9*	*venant de : E, G, B, F, D, F, F*	$\Pi = \{B,C,D,E,F,G\}$
choix de A :	*poids = 21, 15, 17, 7, 10, 0, 9*	*venant de : E, G, B, F, D, F, F*	$\Pi = \{A,B,C,D,E,F,G\}$

fin de l'algorithme….

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Plus Courts Chemins

Graphes à valuations quelconques

Algorithme de Bellman

```
Pour tout x∈X faire
  d(x) = +∞, e(x)=0
FinPour
d(s)=0, pred(s)=s
Tant que ¬Q.Vide() faire
  Q.défiler(i), e(i)=e(i)+1
  Pour (i,j)∈U faire
    Si d(j) > d(i) + c_ij alors
      d(j) = d(i) + c_ij
      Si e(j) ≥ n alors
        Circuit Négatif : Stop
      FinSi
      pred(j) = i
      Si j∉Q alors
        Q.enfiler(j)
    FinSi
  FinPour
Fin ttq
```

Q : File = Liste FIFO

- G=(X,U) : graphe valué : longueur de l'arc (i,j) : c_{ij} quelconque
- s : sommet de départ
- d(x) : longueur du plus court chemin de s au sommet x
- pred(x) : prédécesseur de x dans le Plus Court Chemin associé
- e(x) : nombre d’évaluations du sommet x
- S : sommets déjà traités

Graphes : Travaux dirigés

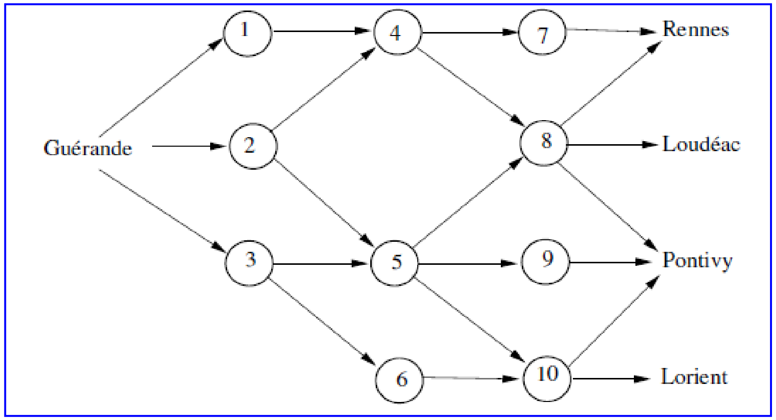
Graphes : Plus Courts Chemins

Exercice :

En l'an de grâce 1479, le sire Gwendal, paludier à Guérande, désire aller vendre sa récolte de sel à l'une des grandes foires du Duché. Il connaît les gains qu'il pourra réaliser dans chacune des foires, mais ceux-ci seront diminués des octrois qu'il devra acquitter le long du chemin emprunté pour s'y rendre. A quelle foire, et par quel chemin le paludier doit-il se rendre de façon à réaliser le plus grand bénéfice possible ?

Foires	Rennes	Loudéac	Pontivy	Lorient
Gains	550	580	590	600

Gains en écus dans les différentes foires :



chemins possibles de Guérande aux différentes foires

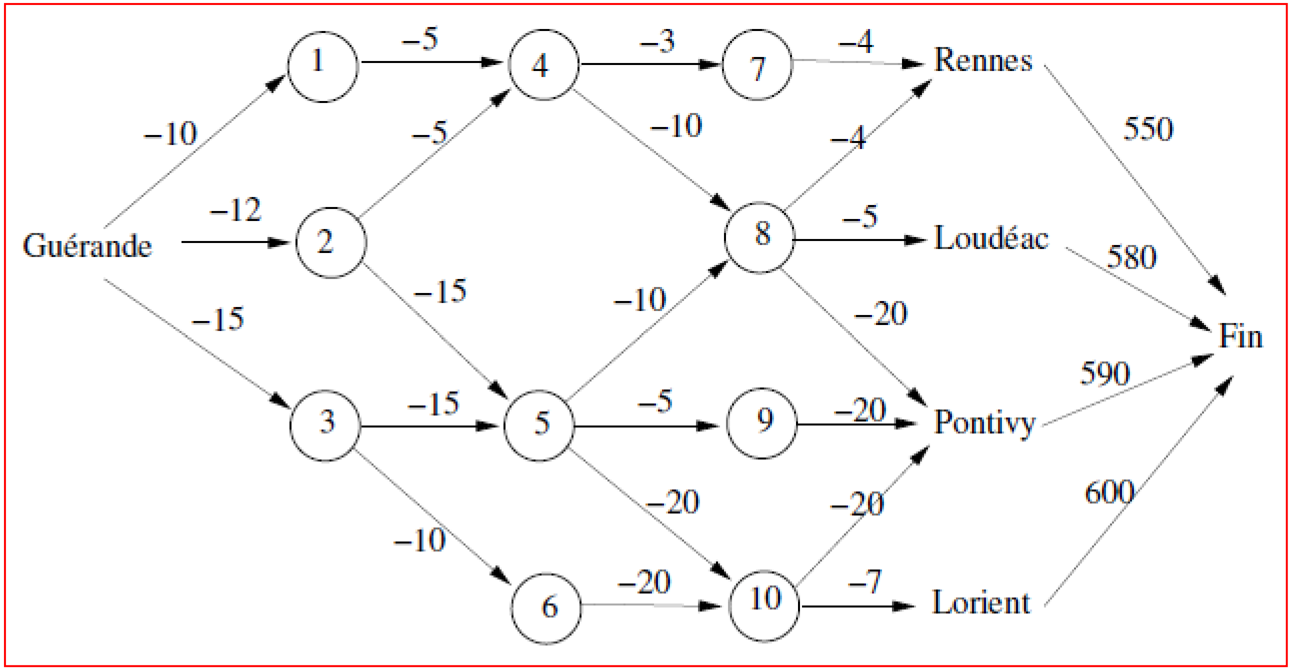
Villes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Rennes	Loudéac	Pontivy	Lorient
Octrois	10	12	15	5	15	10	3	10	5	20	4	5	20	7

Octrois en écus dans les différentes villes

Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Plus Courts Chemins

Corrigé :



Graphes : Travaux dirigés

Graphes : Sources documentaires

Sources :

- Christine Solnon, « Théorie des graphes et optimisation dans les graphes »
- Didier Müller, « Introduction à la théorie des graphes », Cahiers du CRM
- J.P. Sédago, Théorie des graphes et RO », ECE
- Éric Sopéna, “Eléments de héorie des graphes », LABRI, 2002