Programmation linéaire en pratique

L2 MIASHS

Guillaume CONNAN

Université Catholique de l'Ouest - Rezé

2019

Sommaire

Sommaire

$$
\begin{aligned}
\text{max} : \ & x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{tel que} : \ & x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\
& 5x_3 - x_2 \leqslant 8 \\
& x, y, z \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

```
sage: p = MixedIntegerLinearProgram()
sage: x = p.new_variable(real=True, nonnegative=True)
sage: p.set_objective(x[1] + x[2] + 3*x[3])
sage: p.add_constraint(x[1] + 2*x[2] <= 4)
sage: p.add_constraint(5*x[3] - x[2] <= 8)
```

```
sage: p = MixedIntegerLinearProgram()
sage: x = p.new_variable(real=True, nonnegative=True)
sage: p.set_objective(x[1] + x[2] + 3*x[3])
sage: p.add_constraint(x[1] + 2*x[2] <= 4)
sage: p.add_constraint(5*x[3] - x[2] <= 8)
```

```
sage: p.solve()
8.8
sage: p.get_values(x)
{1: 4.0, 2: 0.0, 3: 1.6}
```

Sommaire

Sommaire

Exemple 1

Une société de jouets produit des trains, des camions et des voitures, en utilisant 3 machines. Les disponibilités quotidiennes des 3 machines sont 430, 460 et 420 minutes, et les profits par train, camion et voiture sont respectivement 3€, 2€ et 5€. Les temps nécessaires sur chaque machine sont :

Temps Machines	Train	Camion	Voiture
M_1	1	2	1
M_2	3	0	2
M_3	1	4	0

L'objectif est de déterminer le plan de production réalisant un profit total maximal.

```
sage: p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=True)
sage: x = p.new_variable(nonnegative=True)
sage: p.set_objective(3*x[1] + 2*x[2] + 5*x[3])
sage: p.add_constraint(x[1] + 2*x[2] + x[3] <= 430)
sage: p.add_constraint(3*x[1] + 0*x[2] + 2*x[3] <= 460)
sage: p.add_constraint(1*x[1] + 4*x[2] + 0*x[3] <= 420)
```

```
sage: p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=True)
sage: x = p.new_variable(nonnegative=True)
sage: p.set_objective(3*x[1] + 2*x[2] + 5*x[3])
sage: p.add_constraint(x[1] + 2*x[2] + x[3] <= 430)
sage: p.add_constraint(3*x[1] + 0*x[2] + 2*x[3] <= 460)
sage: p.add_constraint(1*x[1] + 4*x[2] + 0*x[3] <= 420)
```

```
sage: p.solve()
1350.0
sage: p.get_values(x)
{1: 0.0, 2: 100.0, 3: 230.0}
```

```
sage: p.add_constraint(x[1]>=10)
sage: p.solve()
1310.0
sage: p.get_values(x)
{1: 10.0, 2: 102.5, 3: 215.0}
```

```
sage: x = p.new_variable(nonnegative=True, integer=True)

...

sage: p.solve()
1309.0
sage: p.get_values(x)
{1: 10.0, 2: 102.0, 3: 215.0}
```

Sommaire

Exemple 2

Trois machines M_1, M_2, et M_3 peuvent produire chacune deux types de pièces P_1 et P_2. Le temps de fabrication d'une pièce P_i sur la machine M_j est donné dans le tableau suivant (en heures) :

	M_1	M_2	M_3
P_1	3	4	4
P_2	4	6	5

Exemple 2

Trois machines M_1, M_2, et M_3 peuvent produire chacune deux types de pièces P_1 et P_2. Le temps de fabrication d'une pièce P_i sur la machine M_j est donné dans le tableau suivant (en heures) :

	M_1	M_2	M_3
P_1	3	4	4
P_2	4	6	5

On veut fabriquer au moindre coût 6 pièces de type P_1 et 8 pièces de type P_2. La machine M_1 est disponible 14 heures les machines M_2 et M_3 sont disponibles chacune 24 heures. Le coût horaire de M_1 (respectivement M_2 et M_3) vaut 7€ (respectivement 5€ et 6€).

	M_1	M_2	M_3
P_1	3	4	4
P_2	4	6	5

- On note x_{ij} le nombre d'unités de P_i fabriqués par la machine M_j

	M_1	M_2	M_3
P_1	3	4	4
P_2	4	6	5

- On note x_{ij} le nombre d'unités de P_i fabriqués par la machine M_j
- Le temps de fabrication sur M_1 est donc $3x_{11} + 4x_{21}$

	M_1	M_2	M_3
P_1	3	4	4
P_2	4	6	5

- On note x_{ij} le nombre d'unités de P_i fabriqués par la machine M_j
- Le temps de fabrication sur M_1 est donc $3x_{11} + 4x_{21}$
- Le coût correspondant est donc $7(3x_{11} + 4x_{21})$

	M_1	M_2	M_3
P_1	3	4	4
P_2	4	6	5

- On note x_{ij} le nombre d'unités de P_i fabriqués par la machine M_j
- Le temps de fabrication sur M_1 est donc $3x_{11} + 4x_{21}$
- Le coût correspondant est donc $7(3x_{11} + 4x_{21})$
- La machine M_1 doit travailler au maximum 14h : $3x_{11} + 4x_{21} \leqslant 14$

	M_1	M_2	M_3
P_1	3	4	4
P_2	4	6	5

- On note x_{ij} le nombre d'unités de P_i fabriqués par la machine M_j
- Le temps de fabrication sur M_1 est donc $3x_{11} + 4x_{21}$
- Le coût correspondant est donc $7(3x_{11} + 4x_{21})$
- La machine M_1 doit travailler au maximum 14h : $3x_{11} + 4x_{21} \leqslant 14$
- Il faut au moins 6 pièces P_1 : $x_{11} + x_{12} + x_{13} \geqslant 6$

```
sage: p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=False)
sage: x = p.new_variable(nonnegative=True, integer=True)
sage: p.set_objective(7*(3*x[1,1] + 4*x[2,1]) + 5*(4*x[1,2] + 6*x[2,2]) + 6*(4*x[1,3] +
        ↪    5*x[2,3]))
sage: p.add_constraint(3*x[1,1] + 4*x[2,1] <= 14)
sage: p.add_constraint(4*x[1,2] + 6*x[2,2] <= 24)
sage: p.add_constraint(4*x[1,3] + 5*x[2,3] <= 24)
sage: p.add_constraint(p.sum(x[1,j] for j in range(1,4)) >= 6)
sage: p.add_constraint(p.sum(x[2,j] for j in range(1,4)) >= 8)
```

```
sage: p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=False)
sage: x = p.new_variable(nonnegative=True, integer=True)
sage: p.set_objective(7*(3*x[1,1] + 4*x[2,1]) + 5*(4*x[1,2] + 6*x[2,2]) + 6*(4*x[1,3] +
          ↪    5*x[2,3]))
sage: p.add_constraint(3*x[1,1] + 4*x[2,1] <= 14)
sage: p.add_constraint(4*x[1,2] + 6*x[2,2] <= 24)
sage: p.add_constraint(4*x[1,3] + 5*x[2,3] <= 24)
sage: p.add_constraint(p.sum(x[1,j] for j in range(1,4)) >= 6)
sage: p.add_constraint(p.sum(x[2,j] for j in range(1,4)) >= 8)
```

```
sage: p.solve()
362.0
sage: p.get_values(x)
{(1, 1): 2.0, (1, 2): 3.0, (1, 3): 1.0, (2, 1): 2.0, (2, 2): 2.0, (2, 3): 4.0}
```

```
sage: ?p.sum
Docstring:
   Efficiently computes the sum of a sequence of "LinearFunction"
   elements

   Note: The use of the regular "sum" function is not recommended as
     it is much less efficient than this one

   EXAMPLES:

      sage: p = MixedIntegerLinearProgram()
      sage: v = p.new_variable(nonnegative=True)

   The following command:

      sage: s = p.sum(v[i] for i in range(90))

   is much more efficient than:

      sage: s = sum(v[i] for i in range(90))
```

Sommaire

- Le problème dit du « sac à dos » est le suivant. Nous avons en face de nous une série d'objets ayant tous un poids propre, ainsi qu'une « utilité » mesurée par un réel. Nous souhaitons maintenant choisir certains de ces objets en nous assurant que la charge totale ne dépasse pas une constante C, la meilleure façon de le faire étant pour nous d'optimiser la somme des utilités des objets contenus dans le sac.

- Le problème dit du « sac à dos » est le suivant. Nous avons en face de nous une série d'objets ayant tous un poids propre, ainsi qu'une « utilité » mesurée par un réel. Nous souhaitons maintenant choisir certains de ces objets en nous assurant que la charge totale ne dépasse pas une constante C, la meilleure façon de le faire étant pour nous d'optimiser la somme des utilités des objets contenus dans le sac.
- Pour cela, nous associerons à chaque objet o d'une liste L une variable binaire `prendre[o]`, valant 1 si l'objet doit être mis dans le sac, et 0 sinon. Nous cherchons donc à résoudre le MILP suivant :

- Le problème dit du « sac à dos » est le suivant. Nous avons en face de nous une série d'objets ayant tous un poids propre, ainsi qu'une « utilité » mesurée par un réel. Nous souhaitons maintenant choisir certains de ces objets en nous assurant que la charge totale ne dépasse pas une constante C, la meilleure façon de le faire étant pour nous d'optimiser la somme des utilités des objets contenus dans le sac.
- Pour cela, nous associerons à chaque objet o d'une liste L une variable binaire `prendre[o]`, valant 1 si l'objet doit être mis dans le sac, et 0 sinon. Nous cherchons donc à résoudre le MILP suivant :
  - max : $\sum_{o \in L} \text{utilité}_o \times \text{prendre}_o$

- Le problème dit du « sac à dos » est le suivant. Nous avons en face de nous une série d'objets ayant tous un poids propre, ainsi qu'une « utilité » mesurée par un réel. Nous souhaitons maintenant choisir certains de ces objets en nous assurant que la charge totale ne dépasse pas une constante C, la meilleure façon de le faire étant pour nous d'optimiser la somme des utilités des objets contenus dans le sac.
- Pour cela, nous associerons à chaque objet o d'une liste L une variable binaire `prendre[o]`, valant 1 si l'objet doit être mis dans le sac, et 0 sinon. Nous cherchons donc à résoudre le MILP suivant :
  - max : $\sum_{o \in L} \text{utilité}_o \times \text{prendre}_o$
  - tel que : $\sum_{o \in L} \text{poids}_o \times \text{prendre}_o \leqslant C$

```
sage: C = 1
sage: L = ["Casserole", "Livre", "Couteau", "Gourde", "Lampe de poche"]
sage: p = [0.57,0.35,0.98,0.39,0.08]; u = [0.57,0.26,0.29,0.85,0.23]
sage: poids = {}; utilite = {}
sage: for o in L:
....:     poids[o] = p[L.index(o)]; utilite[o] = u[L.index(o)]
```

```
sage: C = 1
sage: L = ["Casserole", "Livre", "Couteau", "Gourde", "Lampe de poche"]
sage: p = [0.57,0.35,0.98,0.39,0.08]; u = [0.57,0.26,0.29,0.85,0.23]
sage: poids = {}; utilite = {}
sage: for o in L:
....:    poids[o] = p[L.index(o)]; utilite[o] = u[L.index(o)]
```

```
sage: p = MixedIntegerLinearProgram()
sage: prendre = p.new_variable( binary = True )
sage: p.add_constraint(
....:   p.sum( poids[o] * prendre[o] for o in L ) <= C )
sage: p.set_objective(
....:   p.sum( utilite[o] * prendre[o] for o in L ) )
sage: p.solve()
1.42
sage: prendre = p.get_values(prendre)
```

UCO
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

La solution trouvée vérifie bien la contrainte de poids :

```
sage: sum( poids[o] * prendre[o] for o in L )
0.960000000000000
```

La solution trouvée vérifie bien la contrainte de poids :

```
sage: sum( poids[o] * prendre[o] for o in L )
0.960000000000000
```

Faut-il prendre une gourde ?

```
sage: prendre["Gourde"]
1.0
```

La solution trouvée vérifie bien la contrainte de poids :

```
sage: sum( poids[o] * prendre[o] for o in L )
0.960000000000000
```

Faut-il prendre une gourde ?

```
sage: prendre["Gourde"]
1.0
```

Quels objets prendre ?

```
sage: {o for o in L if prendre[o]}
{'Casserole', 'Gourde'}
```

Sommaire

Exercice

Une entreprise dispose de deux usines de fabrications U_1 *et* U_2 *et de trois dépôts* D_1, D_2 *et* D_3. *Les usines, qui ont des disponibilités limitées, doivent fournir au dépôt les quantités demandées. L'acheminement des marchandises a un coût (frais de transport, de carburant, taxes, etc) et ce coût varie suivant les destinations.*

Le problème qui se pose est celui de l'acheminement au moindre coût.

Les disponibilités de l'usine U_1 *sont de 18 jours et celles de* U_2 *sont de 32 jours.*

Les demandes des dépôts D_1, D_2 *et* D_3 *sont respectivement de 9, 21 et 20 quantités.*

Les coûts de transports de l'usine U_1 *vers chacun des dépôts* D_1, D_2 *et* D_3 *sont respectivement de 13, 9, 15, et ceux de l'usine* U_2 *sont respectivement de 11, 10, et 18 par quantité transportée.*

Exercice

Une compagnie souhaite minimiser le coût de transport permettant d'approvisionner un produit unique sur 5 dépôts de distribution (clients) à partir de 2 usines de production. Chaque usine a une capacité de production limitée, et chaque client exprime une certaine demande en produit. Les données relatives à cette problématique sont résumées dans le tableau suivant :

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4	Client 5	Capacité
Usine 1	1,75€	2,25€	1,50€	2,00€	1,50€	60000
Usine 2	2,00€	2,50€	2,50€	1,50€	1,00€	60000
Demande	30000	20000	15000	32000	16000	

Exercice

La problématique est identique au cas précédent, mais considère un réseau logistique faisant intervenir 2 niveaux :

Exercice

La problématique est identique au cas précédent, mais considère un réseau logistique faisant intervenir 2 niveaux :

- *Niveau 1 : Usines – Entrepôts*

Exercice

La problématique est identique au cas précédent, mais considère un réseau logistique faisant intervenir 2 niveaux :

- *Niveau 1 : Usines – Entrepôts*
- *Niveau 2 : Entrepôts – Clients*

Exercice

La problématique est identique au cas précédent, mais considère un réseau logistique faisant intervenir 2 niveaux :

- *Niveau 1 : Usines – Entrepôts*
- *Niveau 2 : Entrepôts – Clients*

Exercice

La problématique est identique au cas précédent, mais considère un réseau logistique faisant intervenir 2 niveaux :

- *Niveau 1 : Usines – Entrepôts*
- *Niveau 2 : Entrepôts – Clients*

Les entrepôts intervenant dans cette organisation logistique ont une capacité limitée. Ils ont un rôle de massification des flux. A noter que l'on s'autorise éventuellement un approvisionnement direct d'un client à partir d'une usine, sans transiter par un entrepôt.

Exercice

*Le problème calculatoire dénommé **Subset Sum** consiste à trouver, dans un ensemble d'entiers relatifs, un sous-ensemble non vide d'éléments dont la somme est nulle. Résoudre ce problème avec un programme linéaire en nombres entiers sur l'ensemble* $\{28, 10, -89, 69, 42, -37, 76, 78, -40, 92, -93, 45\}$.

Exercice

Vous devez assurer le fonctionnement d'un service hospitalier le week-end. Vos contraintes sont :

Exercice

Vous devez assurer le fonctionnement d'un service hospitalier le week-end. Vos contraintes sont :

1. *il vous faut au moins 30 infirmières le vendredi, 20 le samedi et 12 le dimanche.*

Exercice

Vous devez assurer le fonctionnement d'un service hospitalier le week-end. Vos contraintes sont :

1. *il vous faut au moins 30 infirmières le vendredi, 20 le samedi et 12 le dimanche.*
2. *Une personne travaille ou non, mais pas à temps partiel.*

Exercice

Vous devez assurer le fonctionnement d'un service hospitalier le week-end. Vos contraintes sont :

1. *il vous faut au moins 30 infirmières le vendredi, 20 le samedi et 12 le dimanche.*
2. *Une personne travaille ou non, mais pas à temps partiel.*
3. *les infirmières peuvent travailler 1 ou 2 jours d'affilé mais pas les trois jours.*

Exercice

Vous devez assurer le fonctionnement d'un service hospitalier le week-end. Vos contraintes sont :

1. *il vous faut au moins 30 infirmières le vendredi, 20 le samedi et 12 le dimanche.*
2. *Une personne travaille ou non, mais pas à temps partiel.*
3. *les infirmières peuvent travailler 1 ou 2 jours d'affilé mais pas les trois jours.*
4. *Il n'y a pas de prise de service le dimanche.*

Exercice

Vous devez assurer le fonctionnement d'un service hospitalier le week-end. Vos contraintes sont :

1. *il vous faut au moins 30 infirmières le vendredi, 20 le samedi et 12 le dimanche.*
2. *Une personne travaille ou non, mais pas à temps partiel.*
3. *les infirmières peuvent travailler 1 ou 2 jours d'affilé mais pas les trois jours.*
4. *Il n'y a pas de prise de service le dimanche.*

Exercice

Vous devez assurer le fonctionnement d'un service hospitalier le week-end. Vos contraintes sont :

1. *il vous faut au moins 30 infirmières le vendredi, 20 le samedi et 12 le dimanche.*
2. *Une personne travaille ou non, mais pas à temps partiel.*
3. *les infirmières peuvent travailler 1 ou 2 jours d'affilé mais pas les trois jours.*
4. *Il n'y a pas de prise de service le dimanche.*

L'objectif est de ne monopoliser que le nombre minimal d'infirmières sur le week-end.

Exercice

Une compagnie pétrolière utilise des véhicules compartimentés pour la distribution de carburants sur les stations service de son réseau. On considère ici le cas où 3 types de carburants doivent être approvisionnés au moyen d'un camion citerne comportant 4 compartiments. Chaque client (station service) exprime son besoin en volume (hl) par type de carburant.
Contractuellement, si une demande n'est pas satisfaite par le pétrolier, une pénalité financière de 0,25€ est appliquée par hectolitre non livré, générant ainsi une perte financière pour la compagnie pétrolière.
Le problème est de déterminer le chargement optimal du véhicule permettant de minimiser cette perte financière.

Exercice

Un groupe informatique important possédant 4 agences réparties sur le territoire français doit assurer l'approvisionnement de ses services en clés USB.

Les besoins prévisionnels mensuels par agence sont connus. 3 fournisseurs potentiels sont susceptibles de décrocher tout ou partie du contrat.

Chacun de ces fournisseurs a fait une offre relative à la fourniture de chacune des agences (Coût = Coût produit + Transport pour un lot de 1000 clés USB).

Le problème du responsable Achat est de déterminer avec quel(s) fournisseur(s) il doit contracter, et les flux fournisseurs-agences associés de manière à minimiser le coût total d'approvisionnement des agences.

Exercice

La problématique est similaire à la précédente. Néanmoins, le Fournisseur 1 n'est intéressé par le marché que pour un volume minimal de 15000 clés USB par mois. Quelle est la nouvelle politique d'achat optimale ?

Exercice

Une compagnie américaine désire minimiser le coût d'acheminement de ses productions de ses usines vers ses centres de distribution situés à San Francisco, Denver, Chicago, Dallas, et New York.
Chaque usine a une capacité de production limitée, et chaque centre de distribution exprime une certaine demande en produits en regard de ses prévisions de ventes. Cette compagnie exploite des usines en Caroline du Sud, dans le Tennessee, et en Arizona.
Elle envisage la possibilité d'implanter une nouvelle unité de production en Arkansas d'une capacité de 300, cette décision induisant un coût fixe additionnel au coût de transport de 100k$.
Quelle décision doit-elle prendre ?

Exercice

Une Groupe industriel exploite à l'heure actuelle un réseau logistique de 5 usines permettant l'approvisionnement de 4 entrepôts.
Cette société souhaite réviser le dimensionnement de cette organisation, et envisage la fermeture éventuelle d'une ou de plusieurs usines.
L'effet direct risque d'être une augmentation du coût de distribution qui pourrait néanmoins être contrebalancé par une diminution globale du coût d'exploitation du réseau.
Quelle décision doit-elle prendre.

Exercice

Déterminer comment investir un excès de trésorerie de 400,000€ dans des placements à maturités 1,3 et 6 mois de manière à maximiser le montant des intérêts acquis en respect d'un volant de trésorerie utilisée mensuellement et une marge de sécurité mensuelle de 100,000€.
Les caractéristiques des placements sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Intérêt	Terme	Prix	Mois d'acquisition
1 mois	1%	1	2000€	1, 2, 3, 4, 5 et 6
3 mois	4%	3	3000€	1 et 4
6 mois	9%	6	5000€	1

Exercice

Un loueur de voitures possède un parc de 94 véhicules répartis sur 10 agences.
Chaque agence possède un effectif idéal permettant de répondre au mieux aux demandes du marché.
Cependant, la réalité est toute autre et chaque agence possède soit un déficit, soit un excédent de voitures. Il faut donc rétablir l'équilibre dans chaque agence.
Ayant le distancier donnant le kilométrage séparant chaque paire d'agences, et connaissant le coût moyen au km de déplacement d'une voiture (1,3€), il s'agit de minimiser le prix de revient de ce rééquilibrage.

Agence	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif idéal	10	6	8	11	9	7	15	7	9	12
Effectif réel	8	13	4	8	12	2	14	11	15	7
Excès ou déficit	-2	7	-4	-3	3	-5	-1	4	6	-5

Distancier

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
162	139	111	38	482	40	497	72	327	32	**1**
249	376	402	11	55	358	495	33	247	380	**2**
53	191	326	478	203	131	391	455	491	477	**3**
205	477	13	358	188	42	280	17	295	245	**4**
242	426	113	308	385	286	228	322	137	408	**5**
310	219	77	348	157	78	362	137	132	383	**6**
277	134	267	116	235	210	92	156	346	441	**7**
96	36	192	489	300	311	275	127	142	394	**8**
233	428	434	194	439	50	375	421	21	380	**9**
197	463	31	204	187	319	364	450	225	285	**10**

Exercice

Un industriel chimique doit transporter 180 tonnes de produits chimiques stockés dans 4 entrepôts vers trois centres de retraitement. Les moyens d'accès aux centres sont la route et le rail, les tarifs sont les suivants (les premiers chiffres concerne le transport sur route, les deuxièmes concernent le transport par rail. Le sigle x indique que le transport est impossible) :

	CT_1		CT_2		CT_3	
	Route	Rail	Route	Rail	Route	Rail
E_1 (50t)	12	x	11	x	x	x
E_2 (40t)	14	12	x	x	x	x
E_3 (35t)	x	x	9	x	5	4
E_4 (65t)	x	x	14	11	14	10

Par ailleurs, une contrainte est spécifiée au niveau du transport par rail : en effet, la quantité transportée doit être comprise entre 10 et 50 tonnes.
Il n'y a pas de réglementations pour le transport par route.
Comment acheminer 180 tonnes de produits chimiques au moindre coût ?

Exercice

Une cargaison de 20 tonnes doit être transportée sur un trajet de cinq villes, avec sur chaque tronçon la possibilité d'utiliser soit la route, soit le train, soit l'avion. On peut changer de mode de transport à chacune des villes traversées, mais le changement de mode a un coût.
Le but est bien sûr de minimiser le coût de transport global.

Coût de transport	Villes 1-2	Villes 2-3	Villes 3-4	Villes 4-5
Rail	30	40	30	60
Route	20	40	50	50
Air	40	10	60	40

de \ vers	Rail	Route	Air
Rail	0	2	1
Route	2	0	1
Air	2	1	0

Exercice

Très souvent, les problèmes rencontrés dans la pratique professionnelle et en particulier la logistique sont assimilables à des casse-têtes plus ou moins élaborés. En voici un...

Partant d'une grille carrée de taille 4×4 recouverte par seize jetons, comment enlever six jetons en laissant un nombre pair de jetons dans chaque ligne et chaque colonne de cette grille ?