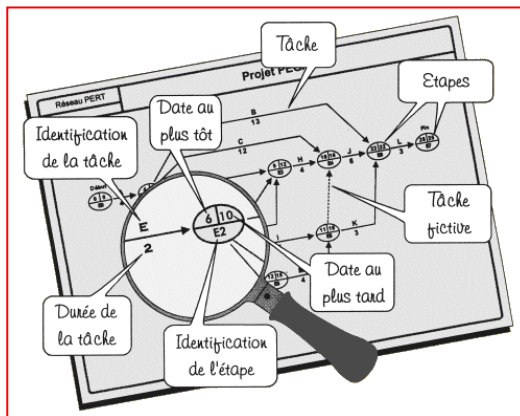


Optimisation Numérique

III - Ordonnancement

Eric Pinson

Institut de Mathématiques Appliquées
Université Catholique de l'Ouest
Angers - France



Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

*Le problème du **plus long chemin** dans les graphes sans circuit trouve une application dans l'ordonnancement et la planification des tâches composant un projet complexe, par exemple la construction d'une maison.*

Définition :

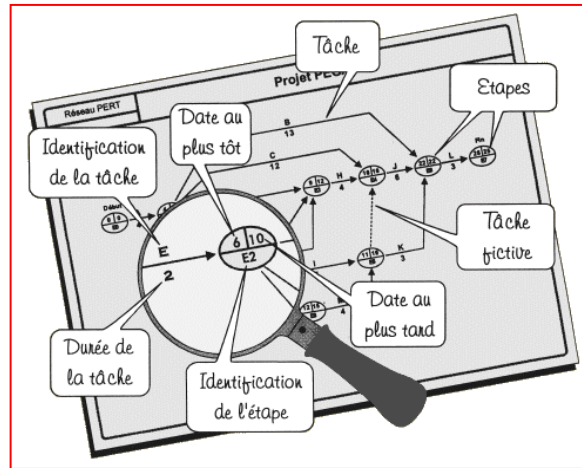
Un problème d'ordonnancement consiste à organiser dans le temps la réalisation d'un ensemble de tâches (ou opérations), compte tenu de contraintes temporelles (délais, contraintes d'enchaînements,...) et de contraintes portant sur l'utilisation et la disponibilité des ressources requises.

- Un ensemble de **tâches**
- Un environnement de **ressources** pour effectuer les tâches
- Des **contraintes** sur les tâches et les ressources
- Un **critère d'optimisation**
 - ➔ Déterminer les dates d'exécution des tâches

Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : **Méthode PERT (Program Evaluation Research Task)**



Consiste à synthétiser sous la forme d'un graphe un ensemble de tâches interdépendantes concourant à la réalisation d'un projet. Cet outil a été créé en 1957 pour l'US Navy (développement du programme des fusées Polaris). Cette méthode permet de calculer le meilleur temps de réalisation d'un projet et d'en établir le planning correspondant. La méthode MPM (Méthode Potentiel Métra) a été parallèlement conçue en France dans le contexte de la construction du paquebot France.

Ordonnancement

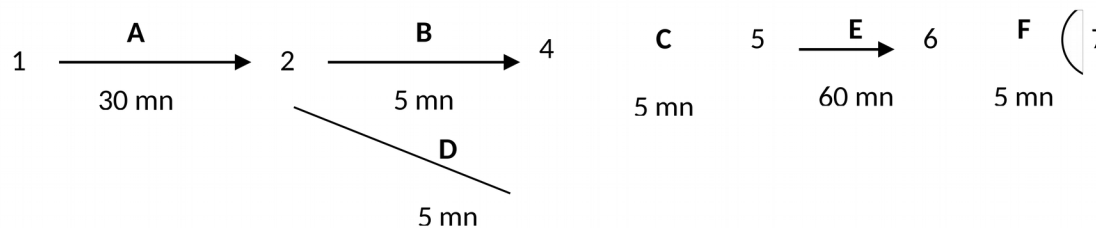
PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Exemple introductif :

Pour préparer une soupe de légumes, il faut :

- Acheter les légumes (tâche A, durée : 30 minutes)
- Laver et éplucher les légumes (tâche B, durée : 5 minutes)
- Les émincer (tâche C, durée : 5 minutes)
- Faire bouillir de l'eau salée (tâche D, durée : 5 minutes)
- Faire cuire les légumes (tâche E, durée : 1 heure soit 60 minutes)
- Mixer les légumes (tâche F, durée : 5 minutes)

Traduit en réseau PERT, nous obtenons la séquence suivante :



Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : Les étapes de la méthode PERT

Etape 1 : Etablir la liste des tâches

Cette étape consiste à :

- Donner la liste exhaustive des tâches à exécuter.
- Evaluer la durée des tâches et déterminer les ressources nécessaires pour les accomplir.
- Codifier les tâches pour faciliter la construction du réseau (A, B, C, D,...)

Etape 2 : Déterminer les conditions d'antériorité

En répondant aux questions suivantes :

- Quelle(s) tâche(s) doit être terminée immédiatement avant qu'une autre ne commence ?
- Quelle tâche doit suivre une tâche déterminée ?

Tâches	Précédences	Durée (jours)
A	–	3
B	–	9
C	–	5
D	A	8
E	B	4
F	B	7
G	B	20
H	C, F	6
I	D, E	5

Ordonnancement

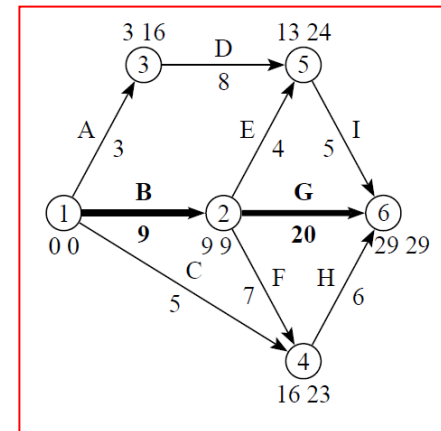
PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : Les étapes de la méthode PERT

Etape 3 : Construction du réseau événements

- On fait correspondre à chaque tâche un arc d'un graphe, sa durée d'exécution étant égale au poids de cet arc.
- Le graphe reflète les précédences requises dans l'exécution du projet.
- Ainsi, la tâche correspondant à l'arc (i,j) ne peut commencer que si toutes les tâches correspondant à des arcs (k,i) sont achevées. Le graphe peut contenir des tâches fictives de durée nulle afin de forcer certaines précédences.
- Les sommets du graphe représentent des événements, début (fin) des activités correspondant aux arcs dont ils sont l'extrémité initiale (finale).
- Le fait que le graphe soit sans circuit est garant de la faisabilité du projet. En effet, l'existence d'un circuit impliquerait une contradiction dans les précédences, une tâche devant en même temps précéder et succéder une autre.

Tâches	Précédences	Durée (jours)
A	–	3
B	–	9
C	–	5
D	A	8
E	B	4
F	B	7
G	B	20
H	C, F	6
I	D, E	5



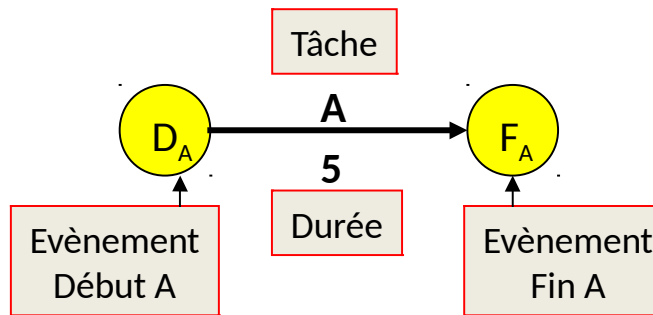
Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : Les étapes de la méthode PERT

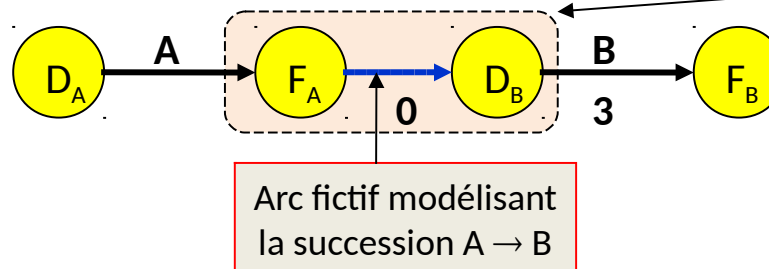
Etape 3 : Construction du réseau potentiels-tâches

Modélisation d'une tâche :



Modélisation d'une précedence :

A précède B



Dans certains cas, il est possible de fusionner les évènements

Ordonnancement

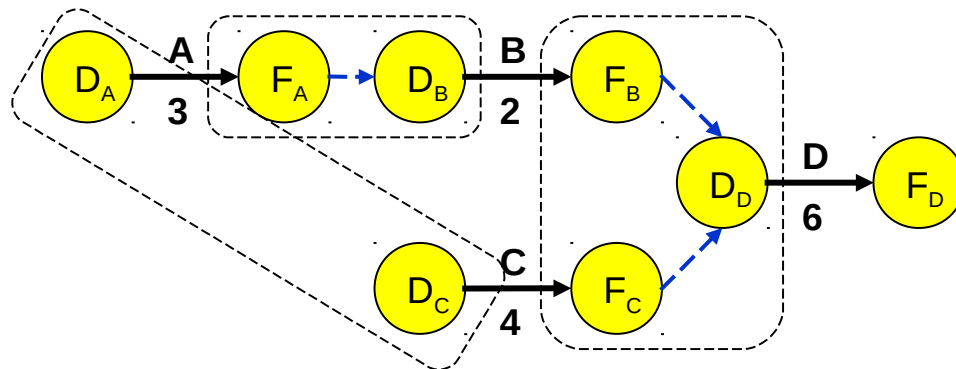
PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : Les étapes de la méthode PERT

Etape 3 : Construction du réseau potentiels-tâches

Précédences :

- A avant B
- B,C avant D



Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : Les étapes de la méthode PERT

Etape 4 : Calculer les dates des tâches et déterminer le chemin critique

Algorithme du chemin critique

▪ **Données :** graphe $G = (V, E)$, sans circuit, des activités avec leur durée d_{ij} .

▪ **Notations :**

• $P(i) = \{k \in V \mid (k, i) \in E\}$: ensemble des sommets prédécesseurs de i .

• $S(i) = \{k \in V \mid (i, k) \in E\}$: ensemble des sommets successeurs de i .

▪ **Résultat :**

• δ_i : début au plus tôt des activités correspondant aux arcs (i, k) partant de i ,

• ϕ_i : fin au plus tard des activités correspondant aux arcs (k, i) arrivant à i ,

– Calcul des dates de début au plus tôt (récurrence en avançant dans le projet)

$$\delta_1 := 0$$

Pour $k := 2$ à n faire $\delta_k := \max\{\delta_j + d_{jk} \mid j \in P(k)\}$

– Calcul des dates de fin au plus tard (récurrence en reculant dans le projet)

$$\phi_n := \delta_n$$

Pour $k := n - 1$ à 1 faire $\phi_k := \min\{\phi_j - d_{kj} \mid j \in S(k)\}$

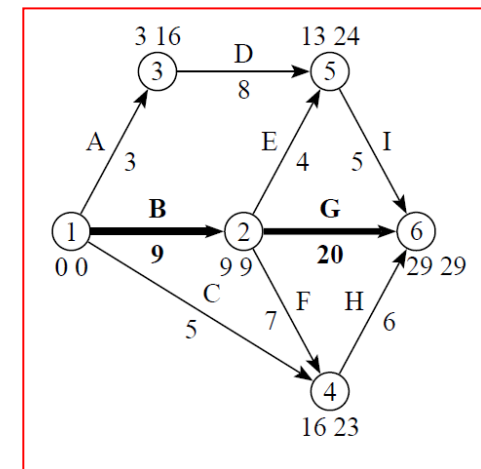
Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

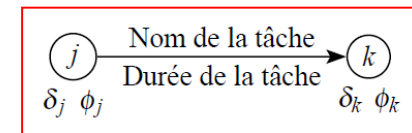
Méthode : Les étapes de la méthode PERT

Etape 4 : Calculer les dates des tâches et déterminer le chemin critique

- Un **sommet** i est **critique** si $\delta_i = \phi_i$.
- Un **arc** (i,j) est **critique** si ses extrémités sont des sommets critiques et $d_{ij} = \delta_j - \delta_i$.
- Un **chemin critique** est un chemin de 1 à n n'utilisant que des arcs critiques, c'est-à-dire des activités telles que tout retard dans leur exécution provoquerait un retard de la fin du projet.
- La **durée du chemin critique** est donnée par δ_n (ou par ϕ_n , les deux valeurs étant toujours égales). Elle correspond à la durée minimale du projet étant données les durées des tâches le composant et les précédences respectives.



Conventions de représentation



Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Exercice :

La construction d'un entrepôt est divisée en dix tâches dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous. Trouvez le chemin critique.

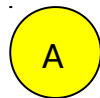
Tâches	Nature	Précédences	Durée (jours)
A	Acceptation des plans par le propriétaire	–	4
B	Préparation du terrain	–	2
C	Commande des matériaux	A	1
D	Creusage des fondations	A, B	1
E	Commande des portes et fenêtres	A	2
F	Livraison des matériaux	C	2
G	Coulage des fondations	D, F	2
H	Livraison des portes et fenêtres	E	10
I	Pose des murs, de la charpente et du toit	G	4
J	Mise en place des portes et fenêtres	H, I	1

Ordonnancement

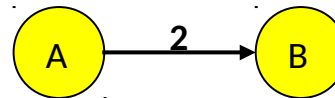
PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : Méthode Potentiels Métra (ou Potentiel-Tâche)

- A chaque tâche i on associe un sommet du graphe
- Si la tâche i doit précéder la tâche j alors on définit un arc (i,j) de longueur $d(i)$ (durée de i)
- On ajoute deux sommets fictifs
 - α qui correspond à une tâche fictive de début des travaux (durée 0)
 - α est antérieure à toutes les autres tâches
 - ω qui correspond une tâche fictive de fin des travaux (durée 0)
 - ω est postérieure à toutes les autres tâches



Tâche A



Précedence A (durée 2) avant B

- Pas de circuit dans le graphe : sinon problème i doit suivre j , k doit suivre i et j doit suivre k :
 - blocage

Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

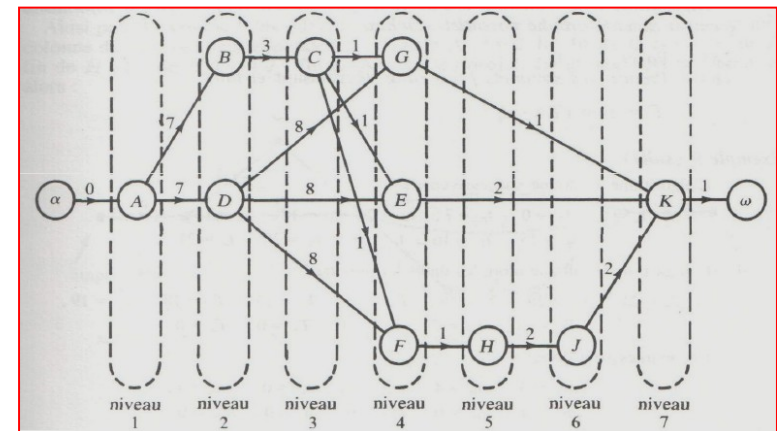
Méthode : Méthode Potentiels Métra (ou Potentiel-Tâche)

Code Tâche	Libellé	Durée	Précédences
A	Maçonnerie	7	-
B	Charpente	3	A
C	Toiture	1	B
D	Plomberie-Electricité	8	A
E	Façades	2	C,D
F	Fenêtres	1	C,D
G	Jardin	1	C,D
H	Plafonnage	3	F
J	Peinture	2	H
K	Emménagement	1	E,G,J

Données

Exemple

Graphe Potentiel-Tâches



Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : **Méthode Potentiels Métra (ou Potentiel-Tâche)**

Ordonnancement le graphe potentiel $G=(X,U,d)$

- **Date de début au plus tôt $t(i)$ de la tâche i :**
$$t(i) = \max_{(k,i) \in U} [t(k) + d(k)]$$

→ Plus long chemin de α à i
- **Durée minimale du projet ($t(\omega)$) = plus long chemin de α à ω**
→ On fixe à $t(\omega)$ la durée du projet
- **Date de début au plus tard $T(i)$ de la tâche i :**
$$T(i) = \min_{(i,k) \in U} [T(k) - d(i)]$$

→ $T(i) = t(\omega) - \text{plus long chemin de } i \text{ à } \omega$
- **Marge $M(i)$ de la tâche i : $M(i)=T(i)-t(i)$**
- **Tâche critique : tâche dont la marge est nulle**
→ tâche sur le plus long chemin de α à ω

Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : **Méthode Potentiels Métra (ou Potentiel-Tâche)**

Fonction rang d'un graphe sans circuit $G=(X,U)$, racine 1 :

- Ordre topologique
 - un sommet est toujours visité avant ses successeurs
- Associe à chaque nœud i un nombre positif $rg(i)$ tel que
 - $rg(1)=0$
 - $rg(i)$ = nombre d'arcs dans un chemin de cardinalité maximum entre 1 et i

```
Pour tout  $i \in X$  faire
|  $s(i) = d^-(i)$ 
FinPour
Q.Vider()
Q.Enfiler(1)
Tant que  $\neg Q.Vide()$  faire
| Q.défiler( $s$ )
| Pour tout  $j \in \Gamma^+(s)$  faire
| |  $d^-(j) = d^-(j) - 1$ 
| | Si  $d^-(j) = 0$  alors
| | | Q.Enfiler( $j$ )
| | FinSi
| FinPour
Si
Finttq
```

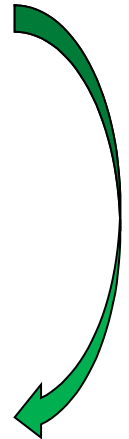
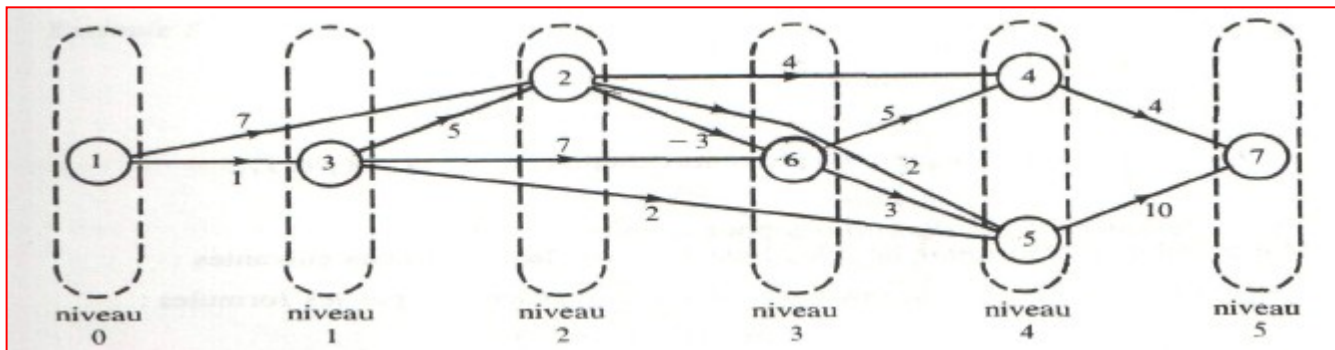
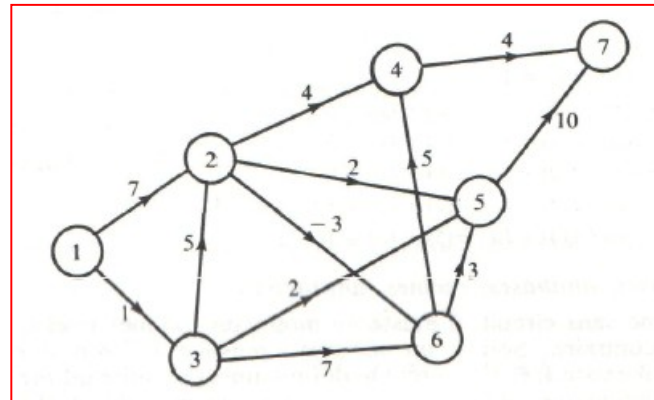
Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : **Méthode Potentiels Métra (ou Potentiel-Tâche)**

Fonction rang d'un graphe

Exemple



Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : **Méthode Potentiels Métra (ou Potentiel-Tâche)**

Recherche des dates au plus tôt

- $t(\alpha)=0$
- Prendre les sommets i par rang croissant et faire

$$t(i) = \max_{(k,i) \in A} [t(k) + d(k)]$$

Recherche des dates au plus tard

- $T(\omega)=t(\omega)$
- Prendre les sommets i par rang décroissant et faire

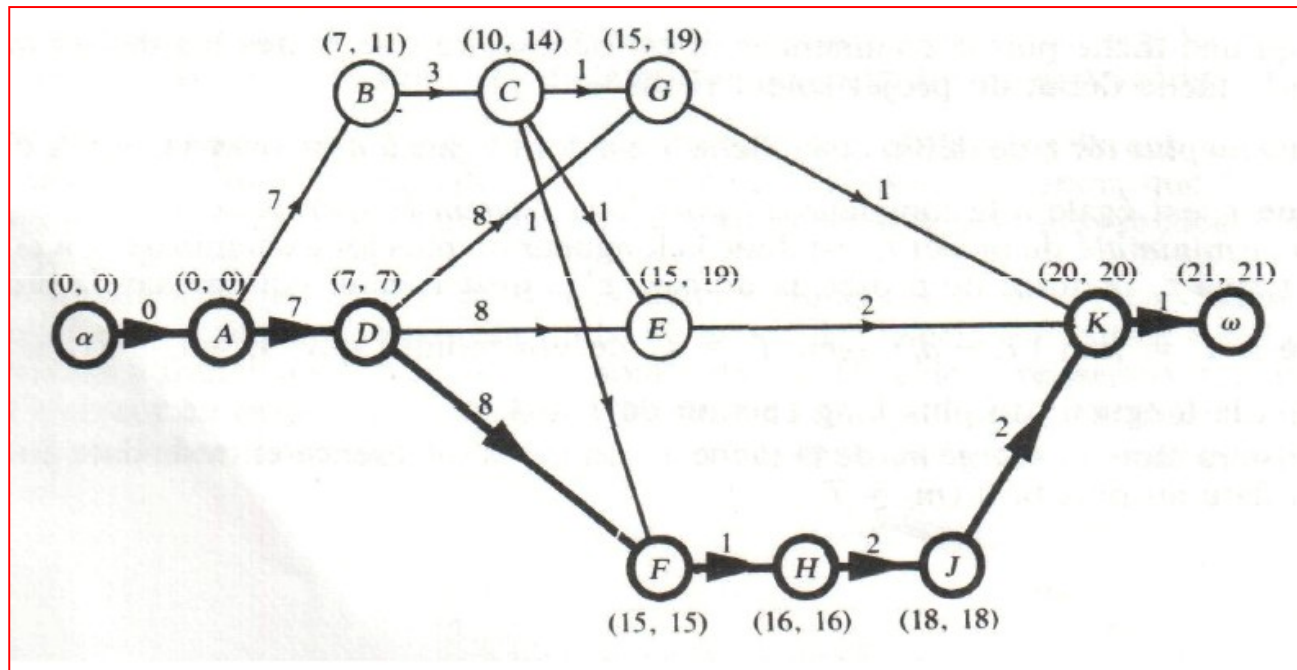
$$T(i) = \min_{(i,k) \in A} [T(k) - d(i)]$$

Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Méthode : Méthode Potentiels Métra (ou Potentiel-Tâche)

Résolution de l'exemple



Ordonnancement

PCC : Application - Ordonnancement de Projet

Sources :

- Christine Solnon, « Théorie des graphes et optimisation dans les graphes »
- Didier Müller, « Introduction à la théorie des graphes », Cahiers du CRM
- J.P. Sédago, « Théorie des graphes et RO », ECE
- M. Gondran, M. Minoux, « Graphes et algorithmes », Eyrolles