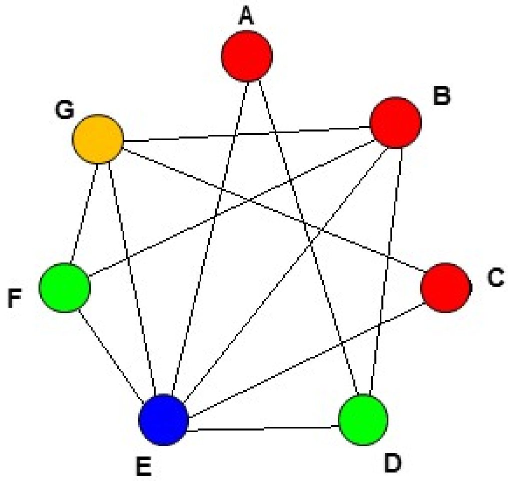
Optimisation Numérique

0 – Introduction du module



Eric Pinson

Institut de Mathématiques Appliquées
Université Catholique de l'Ouest
Angers - France

UCO ANGERS
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

L2 MIASHS

IMA Mathématiques Appliquées

Introduction du Module

Deux parties :

- **Graphes :**
  - Rappels et compléments sur la théorie des graphes
  - Plus courts chemins
  - Ordonnancement central

- **Programmation Mathématique :**
  - Optimisation unidimensionnelle
  - Optimisation multidimensionnelle sans contraintes

18 heures
4h de TP (Solver Excel)
1 mini projet
2 Contrôles Continus

Introduction du Module

Rappels et Compléments sur les graphes

Définition : Adjacence et degré

Deux sommets **x** et **y** sont **adjacents** si il existe l'arête **(x,y)** dans **U**. Les sommets **x** et **y** sont alors dits **voisins.**

Pour un arc u = (x,y) on dit que:

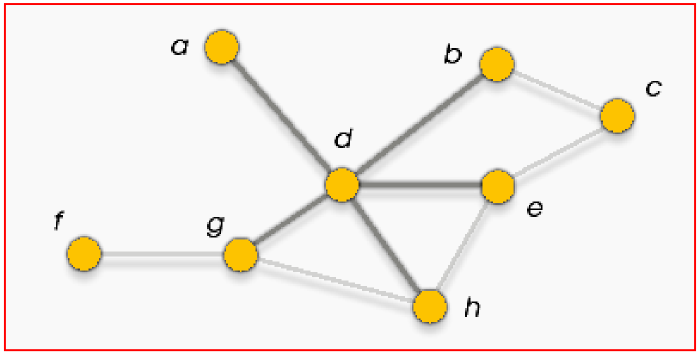
- x est adjacent à y,
- y est adjacent à x,
- x et y sont adjacents à u, u est adjacent à x et y.
- Une arête est **incidente** à un sommet **x** si **x** est l'une de ses extrémités.
- Le **degré** d'un sommet **x** de **G** est le nombre d'arêtes incidentes à **x**. Il est noté **d(x)**. Pour un graphe simple le degré de **x** correspond également au nombre de sommets adjacents à **x**.

Exemple

Dans ce graphe, le sommet d a un degré 5 (d(d) = 5)

Les arêtes incidentes à d sont :

(d,a), (d,b) , (d,e), (d,h) et (d,g)



Introduction du Module

Rappels et Compléments sur les graphes

Séances de TD

Exercices :

3

Théorème (Lemme des poignées de mains)
La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.
Démontrez ce résultat.

4

Au cours d'une soirée, les convives se serrent les mains les uns les autres (jamais plusieurs fois avec la même personne). Chacun se souvient du nombre de mains qu'il a serrées.

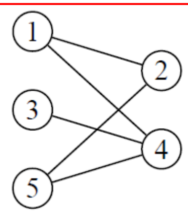
1. Montrer qu'il y a au moins 2 personnes ayant serré le même nombre de mains.
2. Montrer que le nombre total de mains serrées est pair.
3. En déduire que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.
4. En déduire qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Rappels et Compléments sur les graphes

Graphes particuliers

Définition :

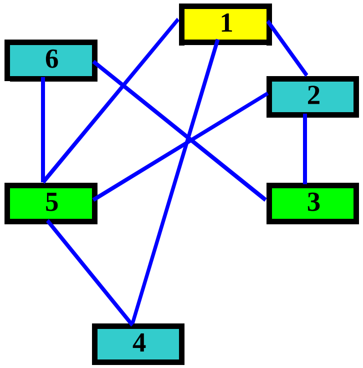
Un graphe est **biparti** si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles *X* et *Y*, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans *X* à un sommet dans *Y* (dans l’exemple ci-dessous, on a *X* = {1,3,5} et *Y* = {2,4}, ou vice versa).



Graphe biparti

$V = \{1,2,3,4,5\}$
$E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{4,5\}\}$

Exemple



Définition :

Soit G = (V,E) un graphe. On appellera coloration d’un graphe G à k couleurs toute application f de V dans {1, ... , k}. On dira qu’une coloration f est propre si deux sommets voisins n’ont pas la même couleur.

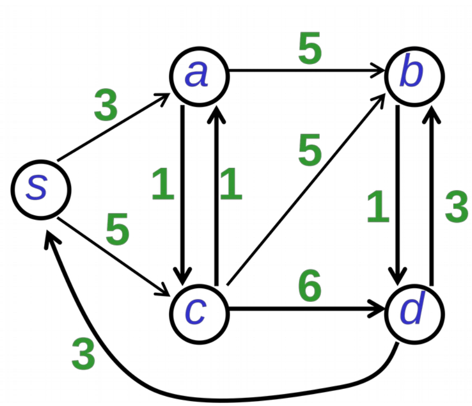
Introduction du Module

Plus Courts Chemins

Algorithme : **Dijkstra**

Exemple

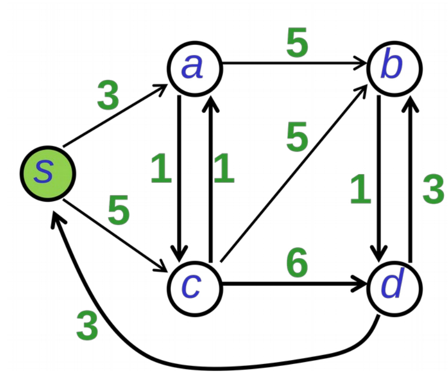
Itération 0



$S = \emptyset$
$\pi(s) = 0$
$\pi(a) = +\infty$
$\pi(b) = +\infty$
$\pi(c) = +\infty$
$\pi(d) = +\infty$

p(a) = *nil*
p(b) = nil
p(c) = *nil*
p(d) = nil

Itération 1



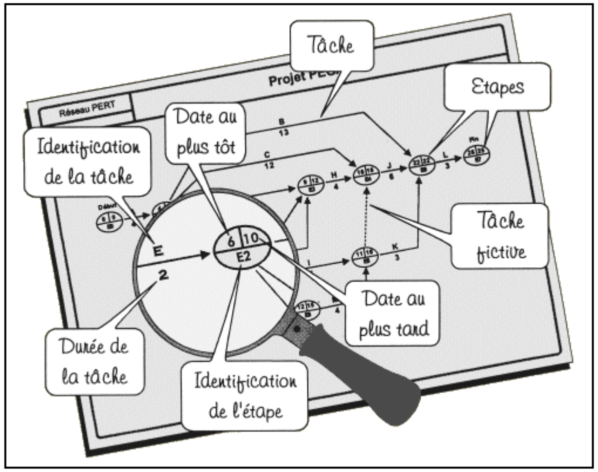
$S = \{s\}$
$\pi(s) = 0$
$\pi(a) = 3$
$\pi(b) = +\infty$
$\pi(c) = 5$
$\pi(d) = +\infty$

p(a) = s
p(b) = nil
p(c) = s
p(d) = nil

Introduction du Module

Ordonnancement

Méthode : **Méthode PERT (Program Evaluation Research Task)**



Consiste à synthétiser sous la forme d'un graphe un ensemble de taches interdépendantes concourant à la réalisation d'un projet. Cet outil a été créé en 1957 pour l'US Navy (développement du programme des fusées Polaris). Cette méthode permet de calculer le meilleur temps de réalisation d'un projet et d'en établir le planning correspondant. La méthode MPM (Méthode Potentiel Métra) a été parallèlement conçue en France dans le contexte de la construction du paquebot France.

Introduction du Module

Programmation Mathématique

$$[P]: \min f(x)$$

$$\text{Sc} \begin{cases} g_i(x) \leq b_i, & i = 1,\ldots,m \\ h_i(x) = k_i, & i = 1,\ldots,l \\ x \in X \end{cases}$$

Objectif :

Trouver x^* tel que $\forall x \in X, f(x) \geq f(x^*)$

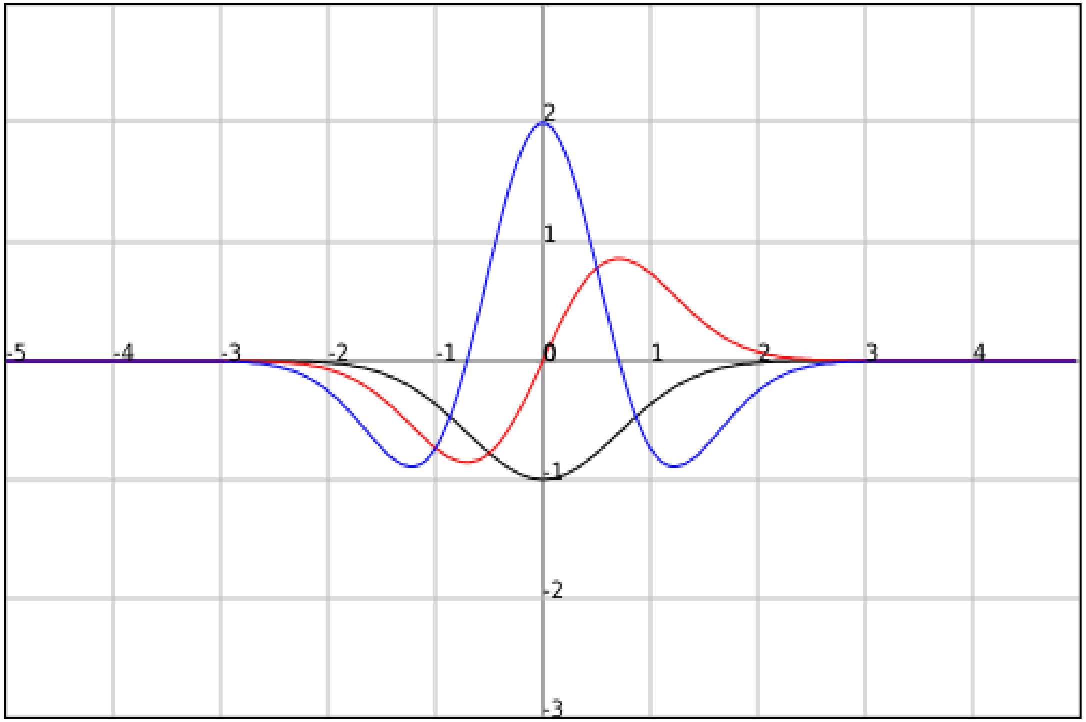
Introduction du Module

Programmation Mathématique

Exemple :

Soit $f(x) = -\exp -x^2$. Appliquer la méthode de Newton-Raphson avec comme point initial :

1. $x_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$;
2. $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $x_0 = 1$.



$f(x) = -e^{-x^2}$

$f'(x) = 2xe^{-x^2}$

$f''(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$

Introduction du Module

Travaux Pratiques : Solver Excel

Max $z = 400x_1 + 300x_2$

Sc $\begin{cases} x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Zone de stockage des variables

Valeur de l'objectif

=SOMEPROD(B4:C4;B5:C5)

Coefficients de la Fonction Objectif

Matrice des Contraintes

	A	B	C	E	G
1					
2	x	x1	x2	z	
4				0	
5	c	400	300	CC	SM
6		1	0	0	60
7	A	0	1	0	40
8		2	3	0	180

Calcul Contraintes

=B4

=C4

=SOMEPROD(B4:C4;B8:C8)

=B4*B8+C4*C8