Bayesian Hierarchical Modeling

강의 목표

- 계층 모형 소개
- 계층 모형에 대한 베이즈 추론
  - Normal-Normal Model
  - Poisson-Gamma Model

Introduction

- Powerful technique for describing complex models.
- Main idea is to break the model down into smaller easier understood pieces.
- Modeling with multiple levels that estimates the parameters of the posterior distribution.
- e.g., Normal distribution:

$$\pi(\mu, \sigma^2 \mid x) = f(x \mid \mu, \sigma^2)\pi(\mu \mid \sigma^2)\pi(\sigma^2)$$

Remarks

- Actually all of the models we have seen so far have been hierarchical, but most only had **two** levels to the hierarchy.
- e.g., Beta distribution:

$$\pi(p \mid x) = f(x \mid p)\pi(p).$$

- There may be a hierarchical structure with many levels.
- e.g., Beta distribution:

$$\pi(p \mid x) = f(x \mid p) Beta(a, b)\pi(a)\pi(b).$$

Why go hierarchical?

- Non-hierarchical models with few parameters generally don't fit the data well.
- Non-hierarchical models with many parameters then to fit the data well, but have poor predictive ability (overfitting).
- Hierarchical models can often fit data with a small number of parameters but can also do well in prediction.

Hierarchical Model Example

- 다음과 같은 집단으로부터 자료를 수집한다고 하자.
  - 강서구에 사는 주민들
  - 대한민국 고등학교 학생들
- 자료수집 대상을 보면 전체 집단 내에 여러 개의 소집단이 존재한다.
  1. 강서구: 화곡동, 방화동, 목동 등등.
  2. 대한민국 고등학교: 서울소재 일반고, 지방소재 일반고, 특목고 등등.

Hierarchical Model Example

- 전체 집단 내에 K개의 소집단이 존재한다고 하자.
- i번째 소집단에서 n_i개의 관측치 $X_{i1}, \ldots, X_{i,n_i}$가 얻어진다고 하자.
- 관측치 $X_{i1}, \ldots, X_{i,n_i}$가 독립적으로 모수 θ_i를 갖는 분포 $f(x \mid \theta_i)$를 따른다고 가정하자.

$$X_{i1}, \ldots, X_{i,n_i} \mid \theta_i \overset{\text{iid}}{\sim} f(x \mid \theta_i).$$

- $\theta_1, \ldots \theta_K$들이 모수 ξ가 주어졌을 때, 독립적으로 동일한 분포를 따른다고 가정하자.

$$\theta_i \mid \xi \overset{\text{iid}}{\sim} f(\theta \mid \xi).$$

Hierarchical Model Example: Graph

- 정규분포의 경우를 가정하면,

$$X_{i1}, \ldots, X_{i,n_i} \mid \theta_i, \sigma^2 \overset{\text{iid}}{\sim} N(\theta_i, \sigma^2)$$

$$\theta_1, \ldots, \theta_K \mid \mu, \tau^2 \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \tau^2)$$

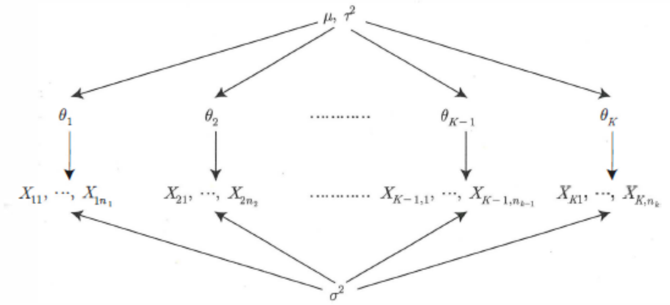


Figure: 계층 모형의 구조

Hierarchical Model Motivation: ANOVA

- 소집단의 평균 $\theta_1, \ldots, \theta_K$의 추정이 목표.
- 여러집단의 평균을 비교하는 방법: 분산분석(ANOVA).
  1) 소집단은 서로 연관성이 없음.

  $$\hat{\theta}_i = \bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j-1}^{n_j} x_{ij}, \;\; i = 1, \ldots, K.$$

  2) 소집단들은 동질적.

  $$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \cdots = \hat{\theta}_K = \bar{x}_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} / \sum_{i=1}^{K} n_i.$$

- 주어진 자료에 대하여 어떤 가정이 더 적절한가에 대한 답을 ANOVA(Analysis of Variance) 분석이 제공.

Hierarchical Model Motivation: ANOVA

- $n_i = n$이라고 하면, 다음과 같은 ANOVA 표가 만들어진다.

요인	SS	MS	E(MS)
Between	$SSB = n\sum_{i=1}^{K}(\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2$	$MSB = SSB/(K-1)$	$\sigma^2 + n\tau^2$
Within	$SSW = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$	$MSW = SSW/K(n-1)$	σ^2

- 만약 각 그룹의 평균 $\bar{x}_{1.}, \ldots, \bar{x}_{K.}$가 서로 많이 다르면,

$$MSB > MSW.$$

- 즉, $\tau^2 > 0$을 의미하고 θ_i들은 서로 다르다고 결론.
- 만약 $\bar{x}_{1.}, \ldots, \bar{x}_{K.}$가 서로 비슷하면

$$MSB \approx MSW$$

- 즉, ,$\tau^2 \approx 0$을 의미하므로 θ_i들이 서로 같다고 결론.

Weakness of ANOVA

- ANOVA 분석법을 보면 두 극단 중 하나를 선택하게 된다.
  1. 소집단을 완전히 분리하여 따로 취급하고 따라서 정보의 공유가 하나도 없음.
  2. 소집단의 존재를 무시하고 전체를 하나의 동질적 (homogeneous) 모집단으로 보고 정보를 공유.
- 실제 상황에서는 이 양 극단의 중간이 존재할 수 있다.
- 완전히 독립적이지도 않고 그러나 완전히 동질적이지도 않은, 소집단 고유의 특성을 지니면서도 전체 집단이 공통으로 갖는 어떤 특성들을 공유.

Why Hierarchical Model

- 소집단들이 특정 성질을 공유 하는 경우 θ_i를 $\bar{x}_{i.}$와$\bar{x}_{..}$의 가중평균으로 구하는 것이 좋음.
- 더 나아가 사전정보에서 θ_i들의 추정치로 μ_0를 얻을 수 있다면 θ_i를 $\bar{x}_{i.}, \bar{x}_{..}, \mu_0$의 가중평균으로 구하면 합리적일 것이다. 즉,

$$\hat{\theta}_i = w_{1i} \times \bar{x}_{i.} + w_{2i} \times \bar{x}_{i.} + w_{3i} \times \mu_0$$

such that $w_{1i} + w_{2i} + w_{3i} = 1$.

- 여기에서 가중치 w_{1i}, w_{2i}, w_{3i}는 그룹 내 분산, 그룹 간 분산, 표본크기, 그리고 사전정보의 정확도에 의존.

Why Hierarchical Model

- 계층 모형에 대한 베이즈 추론은 이와 같은 가중평균을 θ_i의 추정치로 제공한다.
- 소집단의 독립성과 동질성의 정도, 그리고 표본자료 대비 사전정보의 정확도에 따라 융통성 있게 가중치가 조정되면서 합리적인 θ_i의 추정치를 얻을 수 있다.

Model Estimation

- How to estimate θ_i, ω_i?
- There are unknown parameters σ^2, τ^2, μ in the model.
- As conjugate priors, suppose that

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\sim IG(a, b), \\ \tau^2 &\sim IG(c, d), \\ \mu \mid \tau^2 &\sim N(\mu_0, \tau^2/k_0). \end{aligned}$$

Model Estimation

- Then the model is:

$$
\begin{aligned}
&X_{ij} \mid \theta_i, \sigma^2 \sim N(\theta_i, \sigma^2),\\
&\theta_i \mid \mu, \tau^2 \sim N(\mu, \tau^2),\\
&\sigma^2 \sim IG(a, b),\\
&\mu \mid \tau^2 \sim N(\mu_0, \tau^2/k_0),\\
&\tau^2 \sim IG(c, d).
\end{aligned}
$$

Model Estimation

- If $\tau^2 = 0$, $\theta_1 = \cdots = \theta_k = \mu$.
- It means all subgroups are homogeneous.

$$\hat{\theta}_1 = \cdots = \hat{\theta}_k = \bar{x}_{..}$$

- If $\tau^2 = \infty$, θ_i are heterogeneous.

$$\hat{\theta}_i = \bar{x}_{i.} \quad \text{for all } i = 1, 2, ..., K$$

- If $0 < \tau^2 < \infty$, subgroups are partially different, but share commons.

Model Estimation

- Ultimate Goal: Estimate $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_K), \mu, \sigma^2, \tau^2$ given x.
- Find the posterior distribution:

$$
\begin{aligned}
& \pi(\Theta, \mu, \sigma^2, \tau^2 \mid \mathbf{x}) \\
\propto\ & f(\mathbf{x} \mid \Theta, \mu, \sigma^2, \tau^2) f(\Theta \mid \mu, \sigma^2, \tau^2) \pi(\mu, \sigma^2, \tau^2) \\
=\ & f(\mathbf{x} \mid \Theta, \sigma^2) f(\Theta \mid \mu, \tau^2) \pi(\sigma^2) \pi(\tau^2) \\
=\ & \prod_{i=1}^{K} \prod_{j=1}^{n_i} f(x_{ij} \mid \theta_i, \sigma^2) \prod_{i=1}^{K} f(\theta_i \mid \mu, \tau^2) \pi(\mu \mid \tau^2) \pi(\sigma^2) \pi(\tau^2) \\
\propto\ & (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} n_i} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\theta_i)^2} (\tau^2)^{-\frac{K}{2}} e^{-\frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{K}(\theta_i-\mu)^2} \\
& \times (\tau^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k_0}{2\tau^2}(\mu-\mu_0)^2} (\sigma^2)^{-a-1} e^{-b/\sigma^2} (\tau^2)^{-c-1} e^{-d/\tau^2}
\end{aligned}
$$

Model Estimation

- Problem: It is very difficult to sample from the posterior distribution for $\Theta, \mu, \sigma^2, \tau^2$.
- Gibbs sampling:
- Full conditional posterior distributions:

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta_i \mid \mathbf{x}, \mu, \sigma^2, \tau^2) &\propto f(\mathbf{x} \mid \Theta, \sigma^2)\pi(\Theta \mid \mu, \tau^2) \\
&\sim N\left(\frac{\frac{1}{\sigma^2/n_i}\bar{x}_{i\cdot} + \frac{1}{\tau^2}\mu}{\frac{1}{\sigma^2/n_i} + \frac{1}{\tau^2}}, \left(\frac{1}{\sigma^2/n_i} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{-1} \right)
\end{aligned}
$$

Model Estimation

- Full conditional posterior distributions: $\pi(\sigma^2 \mid \mathbf{x}, \Theta, \mu, \tau^2)$

$$
\begin{aligned}
&= \pi(\sigma^2 \mid \mathbf{x}, \Theta) \\
&\propto f(\mathbf{x} \mid \Theta, \sigma^2)\pi(\sigma^2) \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} n_i - a - 1} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\theta_i)^2 + b\right\}} \\
&\sim IG\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} n_i + a, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\theta_i)^2 + b\right)
\end{aligned}
$$

- Full conditional posterior distributions: $\pi(\tau^2 \mid \mathbf{x}, \theta, \mu, \sigma^{\mathbf{2}})$.

$$
\begin{aligned}
&\propto f(\mathbf{x} \mid \mu, \tau^2)\pi(\mu \mid \tau^2)\pi(\tau^2) \\
&\propto (\tau^2)^{-\left(\frac{K}{2}+\frac{1}{2}+c\right)-1} e^{-\frac{1}{\tau^2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(\theta_i-\mu)^2 + \frac{1}{2}k_0(\mu-\mu_0^2)+d\right\}} \\
&\sim IG\left(\frac{K+1}{2} + c, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(\theta_i-\mu)^2 + \frac{k_0}{2}(\mu-\mu_0^2) + d\right)
\end{aligned}
$$

Model Estimation

- $\theta_1, \ldots, \theta_K \mid \mu, \tau^2 \sim N(\mu, \tau^2)$.
- Let $\bar{\theta} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} \theta_i$. Then,

$$\bar{\theta} \mid \mu, \tau^2 \sim N(\mu, \tau^2/K),$$

$$\mu \mid \tau^2 \sim N(\mu_0, \tau^2/k_0)$$

- Therefore,

$$\begin{aligned} \pi(\mu \mid \mathbf{x}, \Theta, \sigma^2, \tau^2) &\propto f(\Theta \mid \mu, \tau^2)\pi(\mu \mid \tau^2) \\ &\sim N\left(\frac{k_0\mu_0 + K\bar{\theta}}{K + k_0}, \frac{\tau^2}{k_0 + K}\right) \end{aligned}$$

Non-Informative Hyper-parameter

- 계층 모형에서 사전분포의 모수인 초모수(hyper-parameter)에 무정보 사전분포를 사용하는 경우가 많다.
- 위 모형에서 초모수인 μ, τ^2에 무정보 사전분포 $\pi(\mu, \tau^2) = \pi(\mu)\pi(\tau^2) = 1/\tau^2$를 사용하는 경우를 살펴보자.

Non-Informative Hyper-parameter

- 위의 깁스 표본기법 절차 중 θ_i와 σ^2의 조건부 사후분포는 변함이 없다.
- τ^2의 조건부 사후분포는 $IG\left(\frac{K}{2}, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(\theta_i - \mu)^2\right)$
- μ의 조건부 사후분포는 $N(\bar{\theta}, \tau^2/K)$
- 분산 σ^2이 알려진 경우 또는 표본크기가 충분히 큰 경우 σ^2을 변수가 아닌 고정된 상수로 놓을 수 있다.
- σ^2이 상수로 주어진 경우에는 위의 깁스 표본기법 절차에서 σ^2 추출 부분을 생략하면 된다.

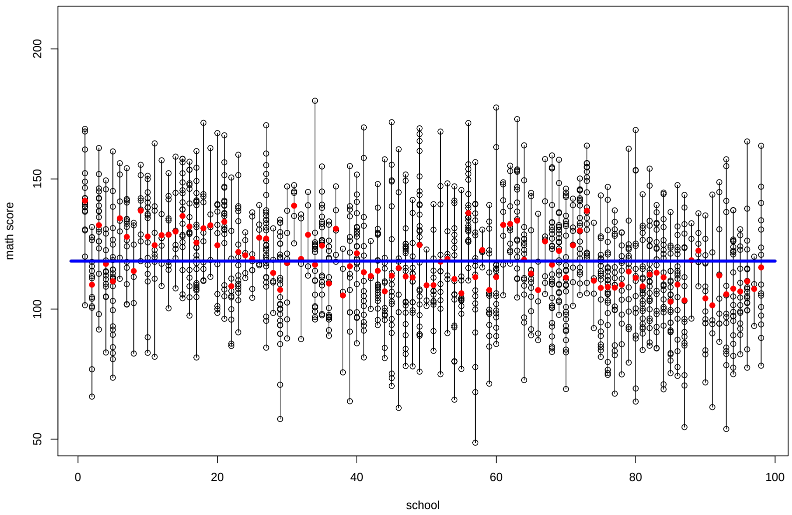
Example

- 2009년도에 실시된 수능시험에서 수리영역 점수에 계층모형을 적용해 보자.
- 인터넷과 신문에 수리영역 평균 상위 100개 학교의 평균과 표준편차가 발표되었는데 이 중 2개 학교를 제외한 98개 학교에서 대략적인 응시자수를 파악할 수 있었다.
- 데이터 x_{ij}는 i번째 학교, j번째 학생의 점수이다.
- 학교마다 조사된 학생 수가 다르므로 표본크기 n_i는 서로 다른 값을 갖는다.

Example

- 이 조사에서 우리가 알고 싶은 것은 같은 학교 내, 그리고 다른 학교 간 수리영역 점수의 차이에 관한 것인데 이를 구체적으로 표현하면 다음과 같다.
  - 학교 내 또는 학교 간 수리영역 점수 차이가 존재하는가?
  - 어떤 학교의 평균이 얼마나 전체 평균보다 높은가?
  - 어떤 학교의 평균이 얼마나 전체 평균보다 낮은가 ?
- 각 관측치를 하얀 점으로 표시하고, 소집단의 평균 $\bar{x}_{i.}$를 빨간 점으로 표시하였다. 중심의 평행선은 전체 평균 $\bar{x}_{..}$를 나타낸다.

Diagnostic Plot



Diagnostic Plot

- $\theta_1, \ldots, \theta_K$에 대한 정규성을 알아보기 위하여 $\bar{x}_{i.}$의 히스토그램을 그려본 결과 정규성 가정이 크게 벗어나지 않음을 알 수 있다.
- X_{ij}에 대한 정규분포에서 동일한 분산을 가정하였는데 이를 검증하기 위하여 표본표준편차 $s_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2/(n_i - 1)}$을 그려본 결과 s_i가 대략 10과 30 사이로 크게 변동이 없으므로 동일 분산 가정이 무리가 없어 보인다.

Diagnostic Plot

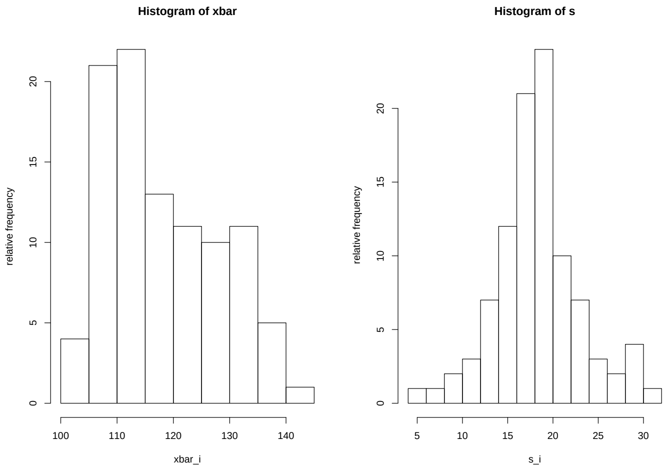


Figure: $\bar{x}_i, s_i$의 분포

Diagnostic Plot: R-code

```
##### Hierarchical Model #########
max.ni=31
data=matrix(scan('http://home.ewha.ac.kr/~msoh/Bayesianbook/mathscore.txt'),
ncol=max.ni+2,byrow=T)
ni=data[,2]; K=length(ni)
X=data[,3:(max.ni+2)]
xbar = rep(0,K) ;s = rep(0,K) ; x.min= rep(0,K) ; x.max = rep(0,K)
for (i in 1:K) x.min[i] = min(X[i,1:ni[i]])
for (i in 1:K) x.max[i] = max(X[i,1:ni[i]])
for (i in 1:K) xbar[i] = mean(X[i,1:ni[i]])
for (i in 1:K) s[i] = sd(X[i,1:ni [i] ])
```

Diagnostic Plot - R-code

```
par(mfrow=c(1,1))
plot(xbar, ylim=c(50,210), type="n", xlab="school" , ylab="math score" )
for(i in 1:K) for(j in 1:ni[i]) points(i,X [i,j] )
for(i in 1:K) lines(c(i,i), c(x.min [i],x.max[i]))
for(i in 1:K) points(i,xbar [i] , pch=19, col=2)
xtotal.mean =mean(xbar)
lines(c(-1:100), rep(xtotal.mean,102), lwd=4, col=4)

par(mfrow=c(1,2))
hist(xbar, xlab="xbar_i", ylab="relative frequency")
hist(s,nclass=10, xlab="s_i", ylab=" relative frequency")
```

Prior Settings: Unit Information Prior

- 계층적 베이즈 분석을 적용하기 위하여 다음과 같은 사전분포의 모수를 선택하자.

$$
\begin{aligned}
a &= 1/2, \\
b &= a \cdot Mean\left\{s_1^2, \ldots, s_K^2\right\}, \\
c &= 1/2, \\
d &= c \cdot Var\left\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_K\right\}, \\
\mu_0 &= Mean\left\{x_1, \ldots, x_K\right\}, \\
k_0 &= 1.
\end{aligned}
$$

Gibbs Sampling

```
### prior ###
a=0.5; sigsq0=mean(s**2); b=a*sigsq0; c=0.5
tausq0=var(xbar); d=c*tausq0; k0=1; mu0=mean(xbar)
########## Start Gibbs Sampling ###############
Nwarm=1000 ; Nsim=5000; THETA=matrix(nrow=Nsim,ncol=K);
MTS=matrix(nrow=Nsim,ncol=3); theta=c(1:K)
# initial values
mu=mu0; tausq=tausq0; sigsq=sigsq0; theta=xbar
for(ns in 1:(Nwarm+Nsim)){              # simulation starts
   #generate theta
   for(i in 1:K){
      mi=(xbar[i]*ni[i]/sigsq + mu/tausq)/(1/tausq+ni[i]/sigsq)
      vari=1/(1/tausq+ni[i]/sigsq)
      theta[i]=rnorm(1,mi,sqrt(vari))
   }
```

Gibbs Sampling

```
#generate sigsq
alpha=0.5*sum(ni)+a; sum=0
for(i in 1:K) for (j in 1: ni[i]){
    sum=sum+(X[i,j] - theta[i])^2
}
beta=b+0.5*sum
sigsq=1/rgamma(1,alpha,beta)
#generate mu
mu=rnorm(1,(K*mean(theta)+k0*mu0)/(K+k0),sqrt(tausq/(K+k0)))
```

Gibbs Sampling

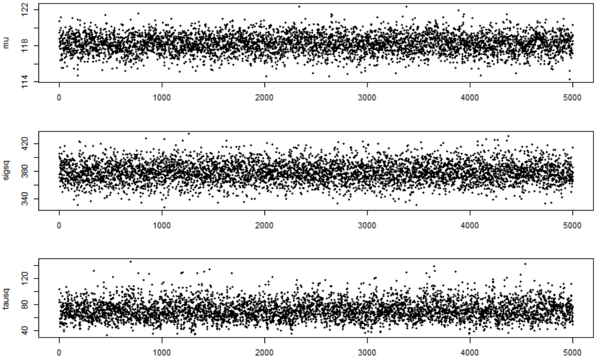
```
#generate tausq
alpha=c +0.5*K +0.5; sum=0
for(i in 1:K)sum=sum+(theta[i] - mu)^2
beta=d + 0.5*(k0*(mu-mu0)^2+sum)
tausq = 1/rgamma(1,alpha,beta)
#store
   if ( ns > Nwarm){
      THETA[ns-Nwarm,] =theta
      MTS[ns-Nwarm,]=c(mu,sigsq,tausq)
   }
} # simulation ends
```

Prior Settings

- 깁스 표본기법에서 생성된 표본을 가지고 사후추론을 할 수 있는데, 우선 깁스 기법으로부터 생성된 표본들의 수렴성과 상호연관성을 보기 위하여 1000번 이후의 표본을 가지고 표본의 경로그림과 자기상관그림을 그려보았다.

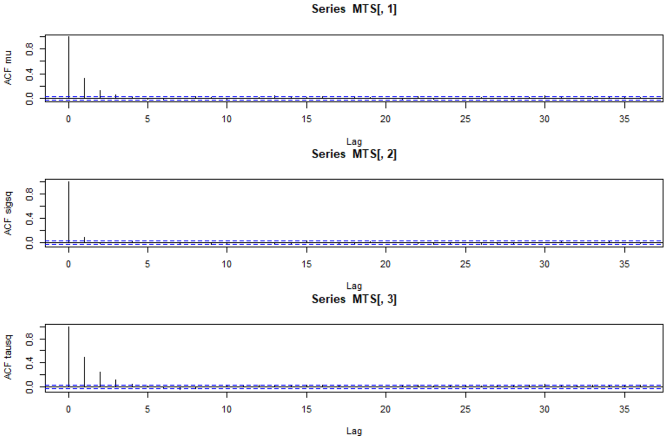
Trace Plot

```
#time sequence plot
par(mfrow=c(3,1), mar = c(3,4,2,2))
plot(MTS[, 1], ylab="mu", pch = 20)
plot((MTS[, 2]), ylab="sigsq", pch = 20)
plot((MTS[,3]), ylab="tausq", pch = 20)
```



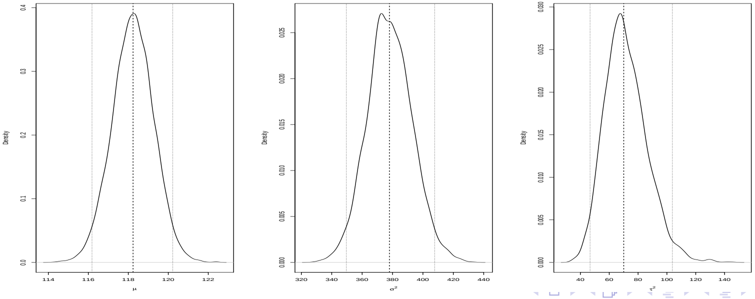
Autocorrelation Plot

```
#Auto correlation graph
par(mfrow=c(3,1), mar = c(4,4,3,3))
acf(MTS [,1], ylab="ACF mu" )
acf(MTS[,2] , ylab="ACF sigsq" )
acf (MTS[, 3] , ylab=" ACF tausq" )
```



Distribution Check

```
#posterior density function of mu, sigma^2, tau^2
par(mfrow=c(1,3))
plot(density(MTS [,1] ),xlab=expression(mu),main="" )
abline(v=quantile(MTS [,1] ,c(0.025,0.5,0.975)), lty=c(3,2,3))
plot(density(MTS[,2]), xlab=expression(sigma^2),main="")
abline(v=quantile(MTS[,2],c(0.025,0.5,0.975)), lty=c(3,2,3))
plot ( density(MTS[,3] ), xlab=expression(tau^2), main="")
abline(v=quantile(MTS[ ,3] , c(0.025, 0.5, 0.975)), lty=c ( 3, 2, 3))
```



Distribution Check

```
#inference
mu.hat=mean(MTS[,1 ])
sigsq.hat=mean(MTS[,2])
tausq.hat=mean(MTS [,3] )
theta.hat=apply(THETA,2,mean)

#plot of theta.hat_i
par(mfrow=c(1,1))
theta.grid=seq(mu.hat-7*sqrt(tausq.hat),mu.hat+7*sqrt(tausq.hat),length=100)
hist(theta.hat,prob=T,main="")
lines(theta.grid,dnorm(theta.grid,mu.hat,sqrt(tausq.hat)))
xtotal.mean=sum( ni *xbar) /sum( ni)
```

Distribution Check

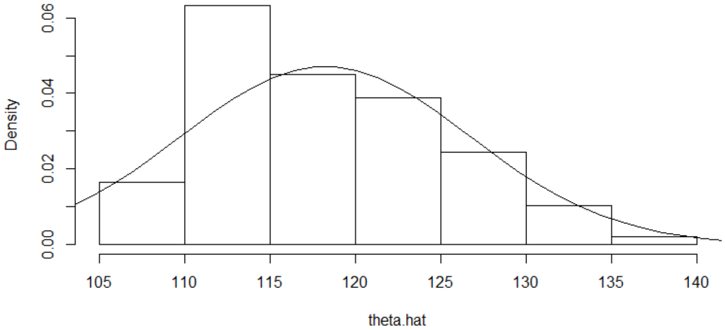


Figure: $\hat{\theta}_i$의 히스토그램과 $N(\hat{\mu}, \hat{\tau^2})$

Hierarchical Poisson Model

- Count data are often modeled using a Poisson model.
- If $y \sim Poisson(\mu)$ then $E(y) = var(y) = \mu$.
- The hierarchical model is then

$$
\begin{aligned}
y_i &\sim Poisson(\mu_i) \\
\mu_i &\sim Gamma(\alpha, \beta).
\end{aligned}
$$

Hierarchical Poisson Model

- Priors for the hyper-parameters are often taken to be Gamma (or exponential):

$$
\begin{aligned}
\alpha &\sim Gamma(a, b), \\
\beta &\sim Gamma(c, d).
\end{aligned}
$$

- The joint posterior distribution is

$$
p(\mu, \alpha, \beta \mid y) \propto \prod_{i=1}^{n} \mu_i^{y_i} \exp\{-\mu_i\} \mu_i^{\alpha-1} \exp\{-\mu_i \beta\}
$$
$$
\alpha^{a-1} \exp\{-\alpha b\} \beta^{c-1} \exp\{-\beta d\}.
$$

Hierarchical Poisson Model

- To carry out Gibbs sampling we need to find the full conditional distributions.
- Conditional for μ_i is

$$p(\mu_i \mid y) \propto \mu_i^{y_i+\alpha-1} \exp\{-\mu_i(\beta+1)\},$$

  which is proportional to a $\text{Gamma}(y_i+\alpha, \beta+1)$.
- The full conditional for α is

$$p(\alpha \mid y) \propto \prod_{i=1}^{n} \mu_i^{\alpha-1} \alpha^{a-1} \exp\{ab\}.$$

- The conditional for α does NOT have a standard form.

Hierarchical Poisson Model

- The full conditional for β is

$$\begin{aligned} p(\beta \mid y) &\propto \prod_{i=1}^{n} \exp\{-\beta\mu_i\}\beta^{c-1}\exp\{-\beta d\} \\ &\propto \beta^{c-1}\exp\left\{-\beta(\sum_i^n \mu_i + d)\right\}. \end{aligned}$$

- which is proportional to a Gamma$(c, \sum_{i=1}^n \mu_i + d)$.

Gibbs Sampling + Metropolis

- Given α, β, draw each μ_i from the corresponding Gamma conditional.
- Draw α using a Metropolis step or rejection sampling or inverse dcf method.
- Draw β from the Gamma conditional.