

Chapter 9: Prior Distribution

강의 목표

- ▶ 사전 분포의 이해
- ▶ 사전 분포 선택 방법
- ▶ 대표적인 사전 분포의 예
 - ▶ 무정보 사전분포 (Non-Informative)
 - ▶ 부적합 사전분포 (Non-Proper)
 - ▶ 제프리 사전분포
 - ▶ 공액 사전분포

Introduction

- ▶ 정확한 베이지안 추론을 위해서는 정확한 우도함수 (Likelihood)와 사전분포(Prior)가 필요하다.

Introduction

- ▶ 정확한 베이지안 추론을 위해서는 정확한 우도함수 (Likelihood)와 사전분포(Prior)가 필요하다.
- ▶ Likelihood: 데이터의 유형에 따라 선택.

Introduction

- ▶ 정확한 베이지안 추론을 위해서는 정확한 우도함수 (Likelihood)와 사전분포(Prior)가 필요하다.
- ▶ Likelihood: 데이터의 유형에 따라 선택.
- ▶ Prior: 사전 정보에 따라 선택.

Introduction

- ▶ 정확한 베이지안 추론을 위해서는 정확한 우도함수 (Likelihood)와 사전분포(Prior)가 필요하다.
- ▶ Likelihood: 데이터의 유형에 따라 선택.
- ▶ Prior: 사전 정보에 따라 선택.
- ▶ 우도함수 (Likelihood)와 사전분포(Prior) 모두 베이지안 추론에 큰 영향.

Introduction

- ▶ 일반적으로 사용 가능한 사전분포가 여러 개 존재:
 1. $p(\theta) \propto 1$

Introduction

▶ 일반적으로 사용 가능한 사전분포가 여러 개 존재:

1. $p(\theta) \propto 1$

2. $p(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$

Introduction

▶ 일반적으로 사용 가능한 사전분포가 여러 개 존재:

1. $p(\theta) \propto 1$

2. $p(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$

3. $p(\theta) \sim \text{Gamma}(a, b)$

Introduction

- ▶ 일반적으로 사용 가능한 사전분포가 여러 개 존재:

1. $p(\theta) \propto 1$

2. $p(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$

3. $p(\theta) \sim \text{Gamma}(a, b)$

- ▶ 그러므로 **적합한** 사전분포를 찾는 방법을 알아야 한다. .

Type of Priors

- ▶ 정보 사전분포(informative prior):
 - ▶ 사전 정보
 - ▶ 이론적 지식

Type of Priors

- ▶ 정보 사전분포(informative prior):
 - ▶ 사전 정보
 - ▶ 이론적 지식
- ▶ 무정보 사전분포(non-informative prior):
 - ▶ 사전정보 없음.
 - ▶ 사용하기에 유의하지 못하거나 부적절한 정보.

Non-informative Prior

- ▶ 무정보 사전분포는 사전정보가 거의 없거나 사용하지 않는 경우.

Non-informative Prior

- ▶ 무정보 사전분포는 사전정보가 거의 없거나 사용하지 않는 경우.
- ▶ 사후분포에 대한 사전분포의 영향을 최소화. (e.g., $p(\theta) \propto 1$)

Non-informative Prior

- ▶ 무정보 사전분포는 사전정보가 거의 없거나 사용하지 않는 경우.
- ▶ 사후분포에 대한 사전분포의 영향을 최소화. (e.g., $p(\theta) \propto 1$)
- ▶ 사전정보를 사용하지 않은 베이지안 분석결과와 고전적 분석결과가 반드시 일치하는 것은 아님.

Example for Non-informative Prior

- ▶ X_1, X_2, \dots, X_n 이 $\text{Bin}(N, \theta)$ 를 따르는 경우를 보자.

Example for Non-informative Prior

- ▶ X_1, X_2, \dots, X_n 이 $\text{Bin}(N, \theta)$ 를 따르는 경우를 보자.
- ▶ 사전 정보가 없다면,

Example for Non-informative Prior

- ▶ X_1, X_2, \dots, X_n 이 $\text{Bin}(N, \theta)$ 를 따르는 경우를 보자.
- ▶ 사전 정보가 없다면, $U(0, 1)$ 분포가 θ 의 무정보 사전분포 (non-informative prior)로 적절.

Another Example for Non-informative Prior

- ▶ X_1, X_2, \dots, X_n 이 $N(\theta, \sigma^2)$ 를 따르고 σ^2 은 알려진 상수라고 하자.

Another Example for Non-informative Prior

- ▶ X_1, X_2, \dots, X_n 이 $N(\theta, \sigma^2)$ 를 따르고 σ^2 은 알려진 상수라고 하자.
- ▶ 사전 정보가 없다면, θ 에 대한 무정보 사전분포로 균일분포를 고려할 수 있다.

Another Example for Non-informative Prior

- ▶ X_1, X_2, \dots, X_n 이 $N(\theta, \sigma^2)$ 를 따르고 σ^2 은 알려진 상수라고 하자.
- ▶ 사전 정보가 없다면, θ 에 대한 무정보 사전분포로 균일분포를 고려할 수 있다.
- ▶ 모든 θ 값에 동일한 밀도함수값을 가지려면 어떤 상수 $c > 0$ 에 대해서

$$\pi(\theta) = c, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Another Example for Non-informative Prior

- ▶ 사전밀도함수에서 비례상수는 사후밀도함수 유도에 영향을 미치지 않으므로 편의상 $\pi(\theta) = 1, -\infty < \theta < \infty$, 을 θ 에 대한 무정보 사전분포(non-informative prior)로 사용할 수 있다.

Another Example for Non-informative Prior

- ▶ 사전밀도함수에서 비례상수는 사후밀도함수 유도에 영향을 미치지 않으므로 편의상 $\pi(\theta) = 1, -\infty < \theta < \infty$, 을 θ 에 대한 무정보 사전분포(non-informative prior)로 사용할 수 있다.
- ▶ 이때 $\int \pi(\theta)d\theta = \infty$ 이므로 부적절 사전분포 (improper prior)이다.

Another Example for Non-informative Prior

- ▶ 사전밀도함수에서 비례상수는 사후밀도함수 유도에 영향을 미치지 않으므로 편의상 $\pi(\theta) = 1, -\infty < \theta < \infty$, 을 θ 에 대한 무정보 사전분포(non-informative prior)로 사용할 수 있다.
- ▶ 이때 $\int \pi(\theta)d\theta = \infty$ 이므로 부적절 사전분포 (improper prior)이다.
- ▶ $\pi(\theta) = 1$ 사전분포를 사용하면 θ 의 사후분포가 $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$.

Third Example for Non-informative Prior

- ▶ X_1, \dots, X_n 이 $N(\theta, \sigma^2)$ 를 따르고 σ^2 은 알려진 상수이다.

Third Example for Non-informative Prior

- ▶ X_1, \dots, X_n 이 $N(\theta, \sigma^2)$ 를 따르고 σ^2 은 알려진 상수이다.
- ▶ 모수 θ 에 대한 사전정보로 $\theta > 0$ 을 만족해야 한다고 하자.

Third Example for Non-informative Prior

- ▶ X_1, \dots, X_n 이 $N(\theta, \sigma^2)$ 를 따르고 σ^2 은 알려진 상수이다.
- ▶ 모수 θ 에 대한 사전정보로 $\theta > 0$ 을 만족해야 한다고 하자.
- ▶ 그렇다면 $\theta > 0$ 인 구간에서 균일분포인 $\pi(\theta) = I(\theta > 0)$ 을 사전분포로 가정할 수 있다.

Third Example

- ▶ 사후분포를 유도하면 ϕ 와 Φ 를 각각 표준정규분포의 확률밀도함수와 누적분포함수라고 할 때,

$$\pi(\theta \mid \bar{x})$$

Third Example

- ▶ 사후분포를 유도하면 ϕ 와 Φ 를 각각 표준정규분포의 확률밀도함수와 누적분포함수라고 할 때,

$$\pi(\theta \mid \bar{x}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x})^2} I(\theta > 0)}{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x})^2} d\theta}$$

Third Example

- ▶ 사후분포를 유도하면 ϕ 와 Φ 를 각각 표준정규분포의 확률밀도함수와 누적분포함수라고 할 때,

$$\begin{aligned}\pi(\theta \mid \bar{x}) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x})^2} I(\theta > 0)}{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x})^2} d\theta} \\ &= \phi\left(\frac{\theta - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) I(\theta > 0) / \left(1 - \Phi\left(-\frac{\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\sim N(\bar{x}, \sigma^2/n) I(\theta > 0).\end{aligned}$$

Third Example

- ▶ 사후분포를 유도하면 ϕ 와 Φ 를 각각 표준정규분포의 확률밀도함수와 누적분포함수라고 할 때,

$$\begin{aligned}\pi(\theta \mid \bar{x}) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x})^2} I(\theta > 0)}{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x})^2} d\theta} \\ &= \phi\left(\frac{\theta - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) I(\theta > 0) / \left(1 - \Phi\left(-\frac{\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\sim N(\bar{x}, \sigma^2/n) I(\theta > 0).\end{aligned}$$

- ▶ θ 의 사후분포는 절단된 정규분포이다. 사전분포의 영향으로 사후분포는 $\theta > 0$ 인 구간에서만 정의되며 따라서 평균 \bar{x} 가 어떤 값을 갖든지 θ 의 사후 평균은 항상 0보다 클 것이다.

Third Example

- ▶ θ 의 사후구간 (posterior HPD interval)도 0보다 큰 구간만 포함할 것이다.

Third Example

- ▶ θ 의 사후구간 (posterior HPD interval)도 0보다 큰 구간만 포함할 것이다.
- ▶ 예를 들어 $\sigma^2 = 1, n = 5, \bar{x} = -0.1$ 로 주어진 경우를 생각해 보자. 이 때 95% HPD 구간은 $(0, c)$ 이며 c 는 다음을 만족하는 상수이다.

Third Example

- ▶ θ 의 사후구간 (posterior HPD interval)도 0보다 큰 구간만 포함할 것이다.
- ▶ 예를 들어 $\sigma^2 = 1$, $n = 5$, $\bar{x} = -0.1$ 로 주어진 경우를 생각해 보자. 이 때 95% HPD 구간은 $(0, c)$ 이며 c 는 다음을 만족하는 상수이다.

$$P(0 < \theta < c \mid \bar{x}) = \frac{\Phi\left(\frac{c - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}{\Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)} = 0.95.$$

Example III

상수 c 를 찾기 위해서 다음 R코드가 필요하다.

```
sig=1; n=5; xbar=-0.1
se=sig/sqrt(n)
theta=seq(0, 1.5, length=100)
post= dnorm( theta, xbar, se)/pnorm( xbar/se)
theta.neg=seq(-2,0, length=100)
post.neg= dnorm( theta.neg, xbar,se)/pnorm( xbar/se)
theta.all=c(theta.neg,theta)
post.all=c(post.neg,post)
plot(theta.all, post.all,type="n",xlab="theta",
ylab="posterior")
lines(theta,post,lty=1)
lines(theta.neg,post.neg,lty=2)
##### 95% HPD #####
c= qnorm( pnorm(xbar/se)*0.95 + pnorm(-xbar/se) ) *se + xbar
abline( v=c(0,c), lty=3)
text(0.4, 0.25, "95% HPD")
```

Example III

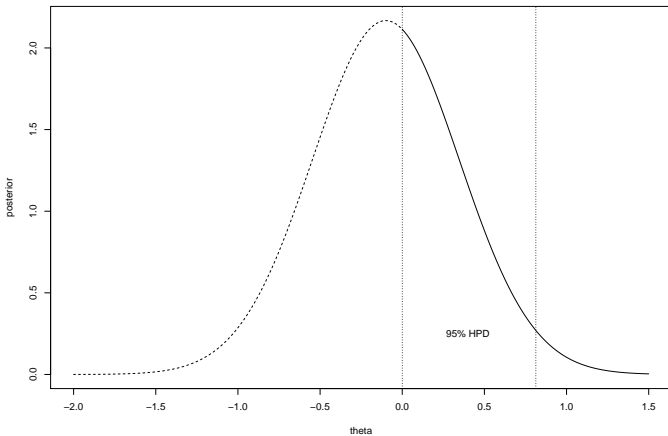


Figure: $\theta > 0$ 의 제한조건이 있는 경우 θ 의 사후분포

Improper Prior

- ▶ 모수 공간에서의 적분값이 무한인 사전 밀도 함수:

$$\int \pi(\theta) d\theta = \infty.$$

Improper Prior

- ▶ 모수 공간에서의 적분값이 무한인 사전 밀도 함수:

$$\int \pi(\theta) d\theta = \infty.$$

- ▶ e.g.,: $X \sim N(\theta, 1)$ and $\pi(\theta) = 1$ on $(-\infty, \infty)$.

Improper Prior

- ▶ 모수 공간에서의 적분값이 무한인 사전 밀도 함수:

$$\int \pi(\theta) d\theta = \infty.$$

- ▶ e.g.,: $X \sim N(\theta, 1)$ and $\pi(\theta) = 1$ on $(-\infty, \infty)$.
- ▶ $\pi(\theta) = 1$ 사전분포를 사용하면 θ 의 사후분포가 $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ 이므로 사후분포는 적합함(proper).

Jeffrey's Prior Motivation

- ▶ 무정보 사전밀도 함수가 모수에 따라 바뀔 수 있다.

Jeffrey's Prior Motivation

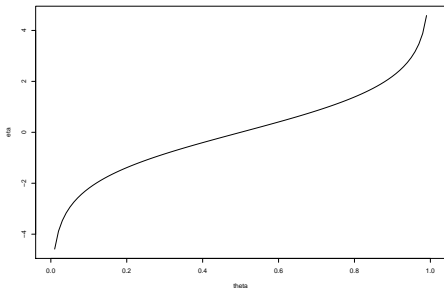
- ▶ 무정보 사전밀도 함수가 모수에 따라 바뀔 수 있다.
- ▶ $\theta \in (0, 1)$ 에서 non-informative prior $= \pi(\theta) \sim U(0, 1)$.

Jeffrey's Prior Motivation

- ▶ 무정보 사전밀도 함수가 모수에 따라 바뀔 수 있다.
- ▶ $\theta \in (0, 1)$ 에서 non-informative prior $= \pi(\theta) \sim U(0, 1)$.
- ▶ 만약 관심 모수가 odds ratio ($\eta = \log \frac{\theta}{1-\theta}$)라면,
odds ratio 에 대한 무정보 사전밀도 함수는 $\pi(\eta) = 1$ on $(-\infty, \infty)$.

Jeffrey's Prior Motivation

- ▶ 무정보 사전밀도 함수가 모수에 따라 바뀔 수 있다.
- ▶ $\theta \in (0, 1)$ 에서 non-informative prior $= \pi(\theta) \sim U(0, 1)$.
- ▶ 만약 관심 모수가 odds ratio ($\eta = \log \frac{\theta}{1-\theta}$)라면,
odds ratio 에 대한 무정보 사전밀도 함수는 $\pi(\eta) = 1$ on $(-\infty, \infty)$.



Jeffrey's Prior Motivation

- ▶ Consider the following hypothesis test:

$$H_0 : \theta \leq \frac{1}{2} \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta > \frac{1}{2}.$$

Jeffrey's Prior Motivation

- ▶ Consider the following hypothesis test:

$$H_0 : \theta \leq \frac{1}{2} \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta > \frac{1}{2}.$$

- ▶ Equivalently,

$$H_0 : \eta \leq 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \eta > 0.$$

Jeffrey's Prior Motivation

- ▶ Consider the following hypothesis test:

$$H_0 : \theta \leq \frac{1}{2} \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta > \frac{1}{2}.$$

- ▶ Equivalently,

$$H_0 : \eta \leq 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \eta > 0.$$

- ▶ It is natural to expect that

$$P(H_0 | x) = P\left(\theta \leq \frac{1}{2} | x\right) = P(\eta \leq 0 | x).$$

- ▶ It is called an **invariance property**.

Jeffrey's Prior Motivation

- ▶ 사전분포 (prior distribution)가 모수 (parameter)의 변환 (transformation)에 불변성 확보.
- ▶ 이를 위해 non-informative prior에 피셔의 정보 상수 (Fisher's information)를 이용.

$$I_1(\theta) := \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \log f(X | \theta)}{\partial \theta^2} \right].$$

- ▶ 만약 자료변수 X_1, X_2, \dots, X_n 이 서로 독립이고 같은 확률밀도함수 $f(X | \theta)$ 를 가지면 정보상수는 $I_n(\theta) = n \times I_1(\theta)$ 이다.

Jeffrey's Prior: Fisher's Information

- ▶ Let $h(\theta) = \eta$ for some differentiable $h(\cdot)$. Then,

$$\left(\frac{\partial \log f(X | \eta)}{\partial \eta} \right) = \left(\frac{\partial \log f(X | \theta)}{\partial \theta} \right) \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right).$$

- ▶ Therefore, $J(\eta) = I(\theta) \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)^2$.

- ▶ Let the prior $\pi_1(\theta) = \sqrt{I(\theta)}$. Then the prior $\pi_2(\eta)$ is:

$$\pi_2(\eta) = \pi_1(h^{-1}(\eta)) \left| \frac{d\theta}{d\eta} \right| = \sqrt{I(h^{-1}(\eta))} \left| \frac{d\theta}{d\eta} \right| = \sqrt{J(\eta)}.$$

- ▶ 모수와 관계 없이 불변성을 가진다.

Summary for Jeffrey's Prior

- ▶ Jeffrey's Prior: $\pi(\theta) = \sqrt{I(\theta)}$.

Summary for Jeffrey's Prior

- ▶ Jeffrey's Prior: $\pi(\theta) = \sqrt{I(\theta)}$.
- ▶ It is popular for a non-informative prior due to the invariance of parameters.

Summary for Jeffrey's Prior

- ▶ Jeffrey's Prior: $\pi(\theta) = \sqrt{I(\theta)}$.
- ▶ It is popular for a non-informative prior due to the invariance of parameters.
- ▶ It might be improper prior.

Example I

- ▶ Suppose that $X \sim B(n, \theta)$. Then,

Example I

- ▶ Suppose that $X \sim B(n, \theta)$. Then,

$$\log f(x | \theta) = \log \binom{n}{x} + x \log(\theta) + (n - x) \log(1 - \theta)$$

Example I

- Suppose that $X \sim B(n, \theta)$. Then,

$$\log f(x | \theta) = \log \binom{n}{x} + x \log(\theta) + (n - x) \log(1 - \theta)$$

$$\frac{d \log f(x | \theta)}{d\theta} \propto \frac{x}{\theta} - \frac{n - x}{1 - \theta}, \quad \frac{d^2 \log f(x | \theta)}{d\theta^2} = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{n - x}{(1 - \theta)^2}.$$

Example I

- Suppose that $X \sim B(n, \theta)$. Then,

$$\log f(x | \theta) = \log \binom{n}{x} + x \log(\theta) + (n - x) \log(1 - \theta)$$

$$\frac{d \log f(x | \theta)}{d\theta} \propto \frac{x}{\theta} - \frac{n - x}{1 - \theta}, \quad \frac{d^2 \log f(x | \theta)}{d\theta^2} = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{n - x}{(1 - \theta)^2}.$$

- Fisher's Information:

$$I(\theta) = \frac{n}{\theta} + \frac{n}{(1 - \theta)} = \frac{n}{\theta(1 - \theta)}.$$

Example I

- ▶ θ 에 대한 제프리 사전밀도함수는

$$\pi_1(\theta) = \sqrt{\frac{n}{\theta(1-\theta)}}.$$

- ▶ 사전밀도함수에서 비례상수는 무시해도 좋으므로

Example I

- ▶ θ 에 대한 제프리 사전밀도함수는

$$\pi_1(\theta) = \sqrt{\frac{n}{\theta(1-\theta)}}.$$

- ▶ 사전밀도함수에서 비례상수는 무시해도 좋으므로

$$\pi_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

Example I

- ▶ θ 에 대한 제프리 사전밀도함수는

$$\pi_1(\theta) = \sqrt{\frac{n}{\theta(1-\theta)}}.$$

- ▶ 사전밀도함수에서 비례상수는 무시해도 좋으므로

$$\pi_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

- ▶ 성공확률 θ 가 아닌 로그 오즈 $\eta = \log(\frac{\theta}{1-\theta})$ 가 관심의 대상이라고 하자.

Example I

- ▶ θ 에 대한 제프리 사전밀도함수는

$$\pi_1(\theta) = \sqrt{\frac{n}{\theta(1-\theta)}}.$$

- ▶ 사전밀도함수에서 비례상수는 무시해도 좋으므로

$$\pi_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

- ▶ 성공확률 θ 가 아닌 로그 오즈 $\eta = \log(\frac{\theta}{1-\theta})$ 가 관심의 대상이라고 하자.
- ▶ 그렇다면

$$\theta = \frac{e^\eta}{1 + e^\eta}.$$

Example I

- ▶ η 에 대한 정보상수 $J(\eta)$ 로부터 제프리 사전밀도함수를 구하면

Example I

- ▶ η 에 대한 정보상수 $J(\eta)$ 로부터 제프리 사전밀도함수를 구하면

$$\pi_2(\eta) = \frac{e^{\eta/2}}{1 + e^{\eta}}.$$

Example I

- ▶ η 에 대한 정보상수 $J(\eta)$ 로부터 제프리 사전밀도함수를 구하면

$$\pi_2(\eta) = \frac{e^{\eta/2}}{1 + e^{\eta}}.$$

- ▶ 그런데 제프리 사전밀도함수는 변환에 대하여 불변이므로 η 에 대한 정보상수를 구하지 않고,

Example I

- ▶ η 에 대한 정보상수 $J(\eta)$ 로부터 제프리 사전밀도함수를 구하면

$$\pi_2(\eta) = \frac{e^{\eta/2}}{1 + e^{\eta}}.$$

- ▶ 그런데 제프리 사전밀도함수는 변환에 대하여 불변이므로 η 에 대한 정보상수를 구하지 않고, θ 와 η 의 관계식으로부터

Example I

- ▶ η 에 대한 정보상수 $J(\eta)$ 로부터 제프리 사전밀도함수를 구하면

$$\pi_2(\eta) = \frac{e^{\eta/2}}{1 + e^{\eta}}.$$

- ▶ 그런데 제프리 사전밀도함수는 변환에 대하여 불변이므로 η 에 대한 정보상수를 구하지 않고, θ 와 η 의 관계식으로부터

$$\pi_2(\eta) = \pi_1(h^{-1}(\eta)) \left| \frac{d\theta}{d\eta} \right|$$

Example I

- ▶ η 에 대한 정보상수 $J(\eta)$ 로부터 제프리 사전밀도함수를 구하면

$$\pi_2(\eta) = \frac{e^{\eta/2}}{1 + e^{\eta}}.$$

- ▶ 그런데 제프리 사전밀도함수는 변환에 대하여 불변이므로 η 에 대한 정보상수를 구하지 않고, θ 와 η 의 관계식으로부터

$$\pi_2(\eta) = \pi_1(h^{-1}(\eta)) \left| \frac{d\theta}{d\eta} \right| = \pi_1(e^{\eta}/(1 + e^{\eta})) e^{\eta}/(1 + e^{\eta})^2$$

Example I

- ▶ η 에 대한 정보상수 $J(\eta)$ 로부터 제프리 사전밀도함수를 구하면

$$\pi_2(\eta) = \frac{e^{\eta/2}}{1 + e^{\eta}}.$$

- ▶ 그런데 제프리 사전밀도함수는 변환에 대하여 불변이므로 η 에 대한 정보상수를 구하지 않고, θ 와 η 의 관계식으로부터

$$\pi_2(\eta) = \pi_1(h^{-1}(\eta)) \left| \frac{d\theta}{d\eta} \right| = \pi_1(e^{\eta}/(1 + e^{\eta})) e^{\eta}/(1 + e^{\eta})^2 = \frac{e^{\eta/2}}{1 + e^{\eta}}$$

Example I

- ▶ Posterior distribution for θ :

Example I

- Posterior distribution for θ :

$$P(\theta \mid x) \propto \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

Example I

- Posterior distribution for θ :

$$\begin{aligned}P(\theta | x) &\propto \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\&= \theta^{-1/2+x} (1-\theta)^{-1/2+n-x}.\end{aligned}$$

- Posterior distribution for η :

$$P(\eta | x) \propto \frac{e^{\eta/2}}{1+e^{\eta}} \left(\frac{e^{\eta}}{1+e^{\eta}} \right)^x \left(\frac{1}{1+e^{\eta}} \right)^{n-x} \left| \frac{d\eta}{d\theta} \right|$$

Example I

- Posterior distribution for θ :

$$\begin{aligned}P(\theta \mid x) &\propto \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\&= \theta^{-1/2+x} (1-\theta)^{-1/2+n-x}.\end{aligned}$$

- Posterior distribution for η :

$$\begin{aligned}P(\eta \mid x) &\propto \frac{e^{\eta/2}}{1+e^{\eta}} \left(\frac{e^{\eta}}{1+e^{\eta}} \right)^x \left(\frac{1}{1+e^{\eta}} \right)^{n-x} \left| \frac{d\eta}{d\theta} \right| \\&= \left(\frac{e^{\eta}}{1+e^{\eta}} \right)^{1/2+x} \left(\frac{1}{1+e^{\eta}} \right)^{1/2+n-x} \left| \frac{d\eta}{d\theta} \right|.\end{aligned}$$

Example I

▶ 따라서,

$$\begin{aligned}P(\theta < 1/2 \mid x) &= \int_{\theta < 1/2} \theta^{-1/2+x} (1-\theta)^{-1/2+n-x} d\theta \\&= \int_{\eta < 0} \left(\frac{e^\eta}{1+e^\eta} \right)^{1/2+x} \left(\frac{1}{1+e^\eta} \right)^{1/2+n-x} \left| \frac{d\eta}{d\theta} \right| d\eta \\&= P(\eta < 0 \mid x).\end{aligned}$$

Jeffrey's Prior: Multi-parameters

- ▶ $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ 일 경우 벡터 θ 에 대해서도 제프리 사전분포는 적용 가능하다.

Jeffrey's Prior: Multi-parameters

- ▶ $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ 일 경우 벡터 θ 에 대해서도 제프리 사전분포는 적용 가능하다.
- ▶ $(i, j)^{th}$ entry of Fisher's information:

Jeffrey's Prior: Multi-parameters

- ▶ $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ 일 경우 벡터 θ 에 대해서도 제프리 사전분포는 적용 가능하다.
- ▶ $(i, j)^{th}$ entry of Fisher's information:

$$I_{ij}(\theta) = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \log f(X | \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right].$$

Jeffrey's Prior: Multi-parameters

- ▶ $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ 일 경우 벡터 θ 에 대해서도 제프리 사전분포는 적용 가능하다.
- ▶ $(i, j)^{th}$ entry of Fisher's information:

$$I_{ij}(\theta) = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \log f(X | \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right].$$

- ▶ Jeffrey's Prior: $\pi(\theta) = \sqrt{\det(I(\theta))}$.

Another Example

- ▶ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 이 $N(\mu, \sigma^2)$ 을 따른다.
- ▶ $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 의 제프리 사전밀도함수를 구해보자.
- ▶ Log-likelihood:

Another Example

- ▶ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 이 $N(\mu, \sigma^2)$ 을 따른다.
- ▶ $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 의 제프리 사전밀도함수를 구해보자.
- ▶ Log-likelihood:

$$\log f(\mathbf{x} \mid \theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{2\sigma^2}$$

Another Example

- ▶ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 이 $N(\mu, \sigma^2)$ 을 따른다.
- ▶ $\Theta = (\mu, \sigma^2)$ 의 제프리 사전밀도함수를 구해보자.
- ▶ Log-likelihood:

$$\log f(\mathbf{x} \mid \Theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{2\sigma^2}$$

- ▶ For μ ,

Another Example

- ▶ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 이 $N(\mu, \sigma^2)$ 을 따른다.
- ▶ $\Theta = (\mu, \sigma^2)$ 의 제프리 사전밀도함수를 구해보자.
- ▶ Log-likelihood:

$$\log f(\mathbf{x} \mid \Theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{2\sigma^2}$$

- ▶ For μ ,

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{x} \mid \Theta)}{\partial \mu} = -\frac{\sum (\mu - x_i)}{\sigma^2}$$

Another Example

- ▶ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 이 $N(\mu, \sigma^2)$ 을 따른다.
- ▶ $\Theta = (\mu, \sigma^2)$ 의 제프리 사전밀도함수를 구해보자.
- ▶ Log-likelihood:

$$\log f(\mathbf{x} \mid \Theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{2\sigma^2}$$

- ▶ For μ ,

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{x} \mid \Theta)}{\partial \mu} = -\frac{\sum (\mu - x_i)}{\sigma^2}$$
$$\frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x} \mid \Theta)}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2}$$

Another Example

- ▶ For σ^2 ,

Another Example

► For σ^2 ,

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{x} \mid \Theta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{\sigma^4}$$

Another Example

► For σ^2 ,

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{x} \mid \theta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{\sigma^4}$$
$$\frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x} \mid \theta)}{\partial \sigma^4} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{\sigma^6}$$

Another Example

- For σ^2 ,

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{x} \mid \Theta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{\sigma^4}$$
$$\frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x} \mid \Theta)}{\partial \sigma^4} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{\sigma^6}$$

- For μ and σ^2 ,

Another Example

- For σ^2 ,

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{x} \mid \Theta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{\sigma^4}$$
$$\frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x} \mid \Theta)}{\partial \sigma^4} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum (\mu - x_i)^2}{\sigma^6}$$

- For μ and σ^2 ,

$$\frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x} \mid \Theta)}{\partial \mu \partial \sigma^2} = \frac{\sum (\mu - x_i)}{\sigma^4}$$

Another Example

- ▶ Fisher's Information:

Another Example

- ▶ Fisher's Information:

$$I(\theta) =$$

Another Example

- Fisher's Information:

$$I(\theta) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log f}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \log f}{\partial \sigma^2 \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \log f}{\partial \mu \partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \log f}{\partial \sigma^4} \end{bmatrix}$$

Another Example

- Fisher's Information:

$$I(\theta) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log f}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \log f}{\partial \sigma^2 \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \log f}{\partial \mu \partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \log f}{\partial \sigma^4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

Another Example

- Fisher's Information:

$$I(\theta) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log f}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \log f}{\partial \sigma^2 \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \log f}{\partial \mu \partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \log f}{\partial \sigma^4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

- Therefore,

$$\det(I(\theta)) = \frac{n^2}{2\sigma^6}$$

Another Example

- ▶ Fisher's Information:

$$I(\theta) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log f}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \log f}{\partial \sigma^2 \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \log f}{\partial \mu \partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \log f}{\partial \sigma^4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

- ▶ Therefore,

$$\det(I(\theta)) = \frac{n^2}{2\sigma^6}$$

- ▶ 그러므로 $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 에 대한 제프리 사전밀도함수는 $\pi(\mu, \sigma^2) = n/\sqrt{2}\sigma^{-3}$ 이고 비례상수를 무시하면

$$\pi(\mu, \sigma^2) = \sigma^{-3}.$$

Another Example

- ▶ 모수를 (μ, σ^2) 대신 (μ, σ) 를 고려하자 .

Another Example

- ▶ 모수를 (μ, σ^2) 대신 (μ, σ) 를 고려하자 .
- ▶ (μ, σ^2) 에서 (μ, σ) 으로의 변환에 대한 Jacobian이 2σ 이므로 (μ, σ) 에 대한 제프리 사전밀도함수는

$$\pi(\mu, \sigma) = \pi(\mu, \sigma^2)2\sigma = \sigma^{-3}2\sigma = 2\sigma^{-2}$$

Another Example

- ▶ 모수를 (μ, σ^2) 대신 (μ, σ) 를 고려하자 .
- ▶ (μ, σ^2) 에서 (μ, σ) 으로의 변환에 대한 Jacobian이 2σ 이므로 (μ, σ) 에 대한 제프리 사전밀도함수는

$$\pi(\mu, \sigma) = \pi(\mu, \sigma^2)2\sigma = \sigma^{-3}2\sigma = 2\sigma^{-2}$$

- ▶ Therefore,

$$\pi(\mu, \sigma) = \sigma^{-2}.$$

Conjugate Prior

모수 θ 에 대한 우도함수를 $f(x | \theta)$ 라고 할 때 어떤 사전분포의 집합 Π 가 임의의 밀도함수 $\pi(\theta) \in \Pi$ 와 임의의 x 에 대하여 $\pi(\theta | x) \in \Pi$ 를 만족시키면 Π 는 우도함수 $f(x | \theta)$ 에 대한 **공액 사전분포집합**이라고 정의한다.

Conjugate Prior

$$\text{Prior} \times \text{Likelihood} = \text{Posterior}$$

Conjugate Prior

$$\text{Prior} \times \text{Likelihood} = \text{Posterior}$$

- ▶ Beta + Binomial \implies Beta.

Conjugate Prior

$$\text{Prior} \times \text{Likelihood} = \text{Posterior}$$

- ▶ Beta + Binomial \implies Beta.
- ▶ Gamma + Poisson \implies Gamma.

Conjugate Prior

$$\text{Prior} \times \text{Likelihood} = \text{Posterior}$$

- ▶ Beta + Binomial \implies Beta.
- ▶ Gamma + Poisson \implies Gamma.
- ▶ Normal + Normal \implies Normal.

Example I

► Likelihood:

$$X_1, \dots, X_n \mid \sigma^2 \sim N(0, \sigma^2).$$

Example I

- ▶ Likelihood:

$$X_1, \dots, X_n \mid \sigma^2 \sim N(0, \sigma^2).$$

- ▶ Prior for σ^2 : $IG(\alpha, \beta)$.

Example I

- ▶ Likelihood:

$$X_1, \dots, X_n \mid \sigma^2 \sim N(0, \sigma^2).$$

- ▶ Prior for σ^2 : $IG(\alpha, \beta)$.
- ▶ Posterior for σ^2 :

Example I

- Likelihood:

$$X_1, \dots, X_n \mid \sigma^2 \sim N(0, \sigma^2).$$

- Prior for σ^2 : $IG(\alpha, \beta)$.

- Posterior for σ^2 :

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2} (\sigma^2)^{-\alpha-1} e^{-\beta/\sigma^2} \\ &= (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-\alpha-1} e^{-\frac{1}{\sigma^2} [\sum x_i^2/2 + \beta]}\end{aligned}$$

Example I

- Likelihood:

$$X_1, \dots, X_n \mid \sigma^2 \sim N(0, \sigma^2).$$

- Prior for σ^2 : $IG(\alpha, \beta)$.

- Posterior for σ^2 :

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2} (\sigma^2)^{-\alpha-1} e^{-\beta/\sigma^2} \\ &= (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-\alpha-1} e^{-\frac{1}{\sigma^2} [\sum x_i^2/2 + \beta]}\end{aligned}$$

$$\pi(\sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) \sim IG\left(\frac{n}{2} + \alpha, \frac{1}{2} \sum x_i^2 + \beta\right)$$

Example I

- ▶ Likelihood:

$$X_1, \dots, X_n \mid \sigma^2 \sim N(0, \sigma^2).$$

- ▶ Prior for σ^2 : $IG(\alpha, \beta)$.

- ▶ Posterior for σ^2 :

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2} (\sigma^2)^{-\alpha-1} e^{-\beta/\sigma^2} \\ &= (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-\alpha-1} e^{-\frac{1}{\sigma^2} [\sum x_i^2/2 + \beta]}\end{aligned}$$

$$\pi(\sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) \sim IG\left(\frac{n}{2} + \alpha, \frac{1}{2} \sum x_i^2 + \beta\right)$$

- ▶ 모수값만 다를 뿐 사전과 사후분포가 모두 역감마 분포이므로, 역감마 분포는 σ^2 에 대한 공액(Conjugate) 사전분포이다.

Example II

- ▶ Likelihood:

$$X \mid \theta \sim \text{Poi}(\theta)$$

Example II

- ▶ Likelihood:

$$X \mid \theta \sim \text{Poi}(\theta)$$

- ▶ Prior for θ :

$$\text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

Example II

- ▶ Likelihood:

$$X \mid \theta \sim \text{Poi}(\theta)$$

- ▶ Prior for θ :

$$\text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

- ▶ Posterior for θ :

$$\text{Gamma}(x + \alpha, \beta + 1)$$

Example II

- ▶ Likelihood:

$$X \mid \theta \sim \text{Poi}(\theta)$$

- ▶ Prior for θ :

$$\text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

- ▶ Posterior for θ :

$$\text{Gamma}(x + \alpha, \beta + 1)$$

- ▶ 따라서 포아송 평균에 대한 공액(Conjugate) 사전분포는 감마분포이다.

Example III

- ▶ Likelihood: $X_1, \dots, X_n \mid \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$

Example III

- ▶ Likelihood: $X_1, \dots, X_n \mid \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$
- ▶ Suppose that σ^2 is known.

Example III

- ▶ Likelihood: $X_1, \dots, X_n \mid \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$
- ▶ Suppose that σ^2 is known.
- ▶ Prior for θ :

$$N(\mu_0, \sigma_0^2)$$

Example III

- ▶ Likelihood: $X_1, \dots, X_n \mid \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$
- ▶ Suppose that σ^2 is known.
- ▶ Prior for θ :

$$N(\mu_0, \sigma_0^2)$$

- ▶ Posterior for θ :

$$N\left(\frac{n\bar{x}/\sigma^2 + \mu_0/\sigma_0^2}{n/\sigma^2 + 1/\sigma_0^2}, \frac{1}{n/\sigma^2 + 1/\sigma_0^2}\right)$$

Example III

- ▶ Likelihood: $X_1, \dots, X_n \mid \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$
- ▶ Suppose that σ^2 is known.
- ▶ Prior for θ :

$$N(\mu_0, \sigma_0^2)$$

- ▶ Posterior for θ :

$$N\left(\frac{n\bar{x}/\sigma^2 + \mu_0/\sigma_0^2}{n/\sigma^2 + 1/\sigma_0^2}, \frac{1}{n/\sigma^2 + 1/\sigma_0^2}\right)$$

- ▶ 따라서 정규평균에 대한 공액(Conjugate) 사전분포는 정규분포이다.