


Deduzione Analitica del Segnale Modulato SSB Mediante Trasformata di Hilbert

Claudio Fontana
University of Palermo
Palermo, Italy
claudio.fontana@unipa.it 

Sia $s(t) = S_c k_A m(t) \cos(2\pi f_c t)$ un segnale modulato DSB-SC di frequenza portante f_c con $m(t)$ il segnale modulante passa-basso di banda f_m e sia $h(t)$ la risposta all'impulso di un filtro passa basso ideale di banda f_c e risposta in frequenza $H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$.

Se consideriamo la risposta nell'uscita del filtro, otteniamo:

$$s_{lsb}(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau) h(\tau) d\tau = S_c k_A \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau) \cos[2\pi f_c (t-\tau)] h(\tau) d\tau$$

Sviluppando il coseno secondo le formule di addizione risulta:

$$\begin{aligned} s_{lsb}(t) &= S_c k_A \left\{ \cos(2\pi f_c t) \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau) \cos(2\pi f_c \tau) h(\tau) d\tau + \text{sen}(2\pi f_c t) \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau) \text{sen}(2\pi f_c \tau) h(\tau) d\tau \right\} = \\ &= S_c k_A \left\{ \cos(2\pi f_c t) \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau) h_f(\tau) d\tau + \text{sen}(2\pi f_c t) \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau) h_q(\tau) d\tau \right\} \end{aligned}$$

in cui sono state fatte le posizioni:

$$h_f(t) = \cos(2\pi f_c t) h(t)$$

$$h_q(t) = \text{sen}(2\pi f_c t) h(t)$$

Gli integrali che figurano nell'ultima espressione rappresentano dei prodotti di convoluzione, in particolare:

$$s_{lsb_f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau) h_f(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad s_{lsb_q}(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau) h_q(\tau) d\tau \quad \text{rappresentano rispettivamente le}$$

componenti in fase e quadratura del segnale modulato LSB, quindi:

$$s_{lsb}(t) = S_c k_A \left\{ s_{lsb_f}(t) \cos(2\pi f_c t) - s_{lsb_q}(t) \text{sen}(2\pi f_c t) \right\}.$$

Passando al dominio della frequenza troviamo che:

$$S_{lsb_f}(f) = M(f) H_f(f) \quad \text{e} \quad S_{lsb_q}(f) = -M(f) H_q(f) \quad \text{dove:}$$

$$H_f(f) = \frac{1}{2} [H(f - f_c) + H(f + f_c)] = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{4f_c}\right)$$

$$H_q(f) = \frac{1}{2j} [H(f - f_c) - H(f + f_c)] = \frac{1}{2j} \text{sign}(f) \text{rect}\left(\frac{f}{4f_c}\right)$$

ovvero, poiché $M(f)$ ha banda $f_m < f_c$:

$$S_{lsb_f}(f) = \frac{1}{2} M(f)$$

$$S_{lsb_q}(f) = -\frac{1}{2j} M(f) \text{sign}(f)$$

Se ricordiamo che la trasformata di Hilbert di un segnale $x(t)$ è data da $\hat{x}(t) = x(t) * Pf\left(\frac{1}{\pi t}\right)$ e passiamo

al dominio della frequenza, da cui: $\hat{X}(f) = X(f) \frac{\text{sign}(f)}{j}$, possiamo concludere che:

$$S_{lsb_f}(f) = \frac{1}{2} M(f)$$

$$S_{lsb_q}(f) = -\frac{1}{2} \hat{M}(f)$$

ovvero, tornando nel dominio del tempo:

$$s_{lsb_f}(t) = \frac{1}{2} m(t)$$

$$s_{lsb_q}(t) = -\frac{1}{2} \hat{m}(t)$$

quindi:

$$s_{lsb}(t) = S_c k_A \{m(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)\}.$$

In definitiva, si parte dall'idea di filtrare un segnale modulato DSB-SC con un filtro passa basso ideale per eliminare la banda laterale superiore e si perviene ad un'espressione da cui si evince che il risultato di questo ipotetico filtraggio darebbe luogo alla combinazione di due segnali modulati con portanti in quadratura, anch'essi DSB-SC, in cui il primo ha come modulante il segnale $m(t)$ di origine, il secondo la sua trasformata di Hilbert $\hat{m}(t)$. In pratica quello che si ottiene è un altro modo di realizzare una modulazione LSB ma senza ricorrere al filtraggio.

Con procedimento analogo, considerando un filtro passa alto ideale a frequenza di taglio inferiore f_c :

$H(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$, si ottiene lo schema di modulazione USB in cui si elimina la banda laterale inferiore:

$$s_{usb}(t) = S_c k_A \{m(t) \cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)\}.$$

Nota:

$$rect(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$