Deduzione Analitica del Segnale Modulato SSB Mediante Trasformata di Hilbert

Claudio Fontana,
University of Palermo
Palermo, Italy
claudio.fontana@unipa.it

Sia $s(t) = S_c k_A m(t)\cos(2\pi f_c t)$ un segnale modulato DSB-SC di frequenza portante f_c con $m(t)$ il segnale modulante passa-basso di banda f_m e sia $h(t)$ la risposta all'impulso di un filtro passa basso ideale di banda f_c e risposta in frequenza $H(f) = rect\left(\frac{f}{2f_c}\right)$.

Se consideriamo la risposta nell'uscita del filtro, otteniamo:

$$s_{lsb}(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau = S_c k_A \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau)\cos\left[2\pi f_c(t-\tau)\right]h(\tau)d\tau$$

Sviluppando il coseno secondo le formule di addizione risulta:

$$s_{lsb}(t) = S_c k_A \left\{\cos(2\pi f_c t)\int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau)\cos(2\pi f_c \tau)h(\tau)d\tau + sen(2\pi f_c t)\int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau)sen(2\pi f_c \tau)h(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= S_c k_A \left\{\cos(2\pi f_c t)\int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau)h_f(\tau)d\tau + sen(2\pi f_c t)\int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau)h_q(\tau)d\tau\right\}$$

in cui sono state fatte le posizioni:

$$h_f(t) = \cos(2\pi f_c t)h(t)$$
$$h_q(t) = sen(2\pi f_c t)h(t)$$

Gli integrali che figurano nell'ultima espressione rappresentano dei prodotti di convoluzione, in particolare:

$s_{lsb_f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau)h_f(\tau)d\tau$ e $s_{lsb_q}(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau)h_q(\tau)d\tau$ rappresentano rispettivamente le componenti in fase e quadratura del segnale modulato LSB, quindi:

$$s_{lsb}(t) = S_c k_A \left\{s_{lsb_f}(t)\cos(2\pi f_c t) - s_{lsb_q}(t)sen(2\pi f_c t)\right\}.$$

Passando al dominio della frequenza troviamo che:

$S_{lsb_f}(f) = M(f)H_f(f)$ e $S_{lsb_q}(f) = -M(f)H_q(f)$ dove:

$$H_f(f)=\frac{1}{2}\left[H(f-f_c)+H(f+f_c)\right]=\frac{1}{2}rect\left(\frac{f}{4f_c}\right)$$

$$H_q(f)=\frac{1}{2j}\left[H(f-f_c)-H(f+f_c)\right]=\frac{1}{2j}sign(f)rect\left(\frac{f}{4f_c}\right)$$

ovvero, poiché $M(f)$ ha banda $f_m < f_c$:

$$S_{lsb_f}(f)=\frac{1}{2}M(f)$$

$$S_{lsb_q}(f)=-\frac{1}{2j}M(f)sign(f)$$

Se ricordiamo che la trasformata di Hilbert di un segnale $x(t)$ è data da $\hat{x}(t)=x(t)*Pf\left(\frac{1}{\pi t}\right)$ e passiamo al dominio della frequenza, da cui: $\hat{X}(f)=X(f)\frac{sign(f)}{j}$, possiamo concludere che:

$$S_{lsb_f}(f)=\frac{1}{2}M(f)$$

$$S_{lsb_q}(f)=-\frac{1}{2}\hat{M}(f)$$

ovvero, tornando nel dominio del tempo:

$$s_{lsb_f}(t)=\frac{1}{2}m(t)$$

$$s_{lsb_q}(t)=-\frac{1}{2}\hat{m}(t)$$

quindi:

$$s_{lsb}(t)=S_c k_A\left\{m(t)\cos(2\pi f_c t)+\hat{m}(t)sen(2\pi f_c t)\right\}.$$

In definitiva, si parte dall'idea di filtrare un segnale modulato DSB-SC con un filtro passa basso ideale per eliminare la banda laterale superiore e si perviene ad un'espressione da cui si evince che il risultato di questo ipotetico filtraggio darebbe luogo alla combinazione di due segnali modulati con portanti in quadratura, anch'essi DSB-SC, in cui il primo ha come modulante il segnale $m(t)$ di origine, il secondo la sua trasformata di Hilbert $\hat{m}(t)$. In pratica quello che si ottiene è un altro modo di realizzare una modulazione LSB ma senza ricorrere al filtraggio.

Con procedimento analogo, considerando un filtro passa alto ideale a frequenza di taglio inferiore f_c: $H(f)=1-rect\left(\frac{f}{2f_c}\right)$, si ottiene lo schema di modulazione USB in cui si elimina la banda laterale inferiore:

$$s_{usb}(t) = S_c k_A \left\{ m(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)\, sen(2\pi f_c t) \right\}.$$

<u>Nota</u>:

$$rect(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$