ATTENZIONE

Questo file PDF può contenere imprecisazioni, imprecazioni, bestemmie ed errori di vario genere.

Sono scan degli appunti presi a lezione(2016-2017) del corso di Analisi 2(Corso di ingegneria biomedica, Pisa)

Potete consultare, modificare, stampare, distribuire il file. Potete basarvi su quello che c'è scritto per modificare i vostri appunti, ecc.

Questo file NON PUO' essere usato per scopi commerciali.

Gli appunti contengono commenti personali e **possono contenere delle inesattezze**, non ho avuto tempo di controllare tutto. Inoltre alcune pagine possono risultare leggermente sfocate.

ANALISI II

MARCO SCOCCOLA

- PROF: NICOLA VISCIGLIA
- E-MAIL: VISCIGLI@DM.UNIPI.IT   L'EMAIL DEVE AVERE "ANALISI II" COME SUBJECT
- www.dm.unipi.it/mvincigli

RICEVIMENTO:

MARTEDÌ 9:30 IN AULA
SOLO SU RICHIESTA

MODALITÀ D'ESAME

- FASE 1: PRE-TEST

  10 domande a risposta multipla
  7 domande suffic.
  30 minuti a disposizione.

- FASE 2: ESAME SCRITTO

- FASE 3: ORALE OBBLIGATORIO PORCODD

  Nell' appello.

ARGOMENTI TRATTATI

- Studio di funzioni in 2+ variabili in $\mathbb{R}^n$

$$f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ES.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow \operatorname{sen}(x, y)$$

TESTI DI RIFERIMENTO

Qualsiasi libro va bene

In particolare BRAMANTI, SALSA - TEORIA

CAMPANATO ESERCIZIARIO ANALISI II

- DOMINIO IN 2 VARIABILI

1 VARIABILE

$x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$

Il suo dominio sarà

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0\} \Rightarrow D(f) = [-1; 1]$

$x \longrightarrow \sqrt{x^2-1}$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-1 \geq 0\} \Rightarrow D(f) = (-\infty; -1] \cup [1, +\infty)$

2+ VARIABILI

CASO BANALE: DOMINIO TUTTO $\mathbb{R}^2$

CASI COMPLICATI:

ES:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\ln(x+y)}$$

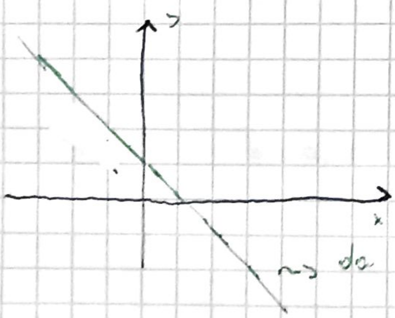
abbiamo come "INPUT" un vettore di $\mathbb{R}^2$ e in OUTPUT uno scalare

Il dominio è

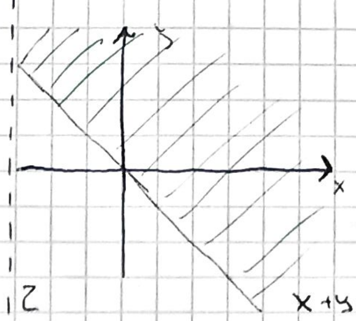
$$Df = \left\{(x, y) \subseteq \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - y \geq 0,\ x+y > 0,\ x+y \neq 1\right\}$$

Cerchiamo come rappresentare graficamente questo sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

1) $x + y \neq +1$



2) $x + y > 0$



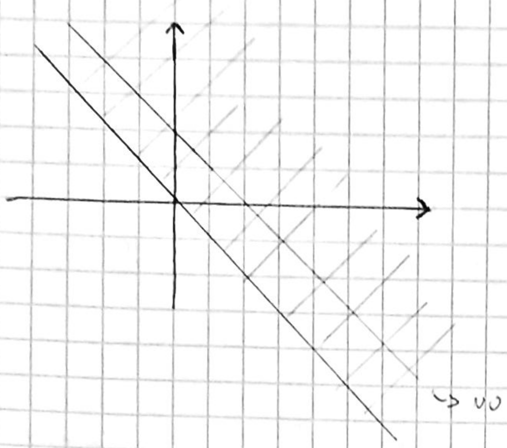
Mi basta trovare un solo punto!

Mi basta fare la prova.

ES $x=1$ $y=0$

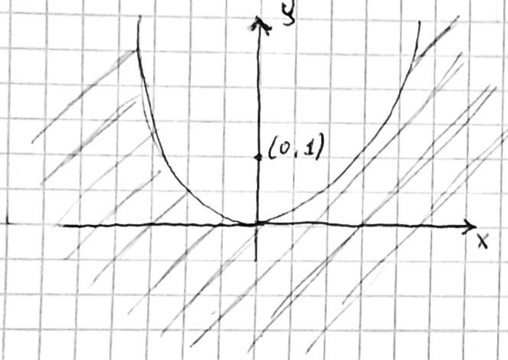
$1 > 0$ ✓

$\{x+y>0 \quad , \quad x+y\neq -1\}$



$\{(x,y) \mid x^2-y\geq 0\}$ $\quad x^2\geq y$

è una parabola devo capire se la regione è quella della parabola esterna o quella interna.



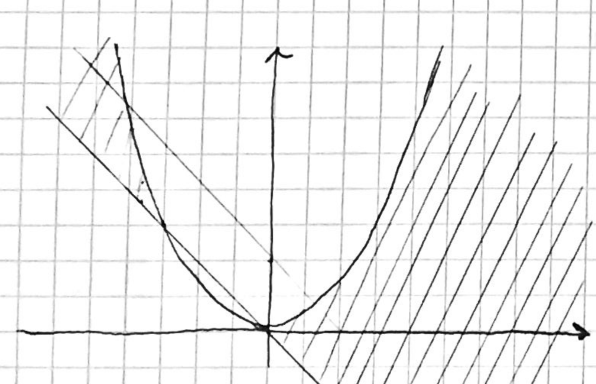
Se prendo $x=0$ e $y=1$ trovo

$-1\geq 0$ e non va, quindi

considero solo la regione esterna

Ora posso disegnare il grafico del dominio.

$D(f)=\{(x,y) \mid x^2-y\geq 0 \ , \ x+y>0, \ x+y\neq 1\}$

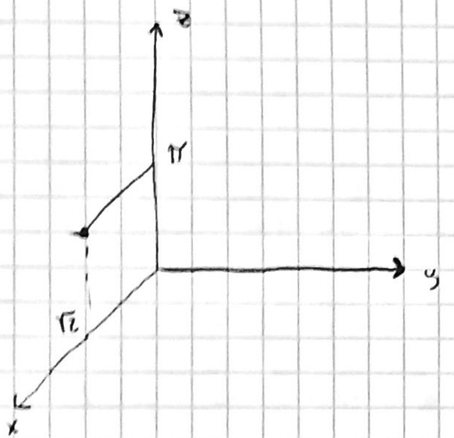


STUDIO in $\mathbb{R}^n$

- Prendo ad esempio $\mathbb{R}^2 = \{x, y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n\}}$$

Se prendo ad esempio il vettore $(\sqrt{2}, 0, \pi)$ questo appartiene ad $\mathbb{R}^3$



Fino ad $\mathbb{R}^3$ è semplice disegnare il grafico.
In $\mathbb{R}^4$ è più complicato.

NOT. USATA

$\mathbb{R}^2$ (x, y)
$\mathbb{R}^3$ (x, y, z)
$\mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2 \dots x_n)$

SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}^N$

- DEF. SOMMA

$\vec{x} = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad \bar{y} = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$

- $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n)$

ES
$(1, 1, 1) + (\sqrt{2}, 0, \pi) = (1+\sqrt{2}, 1, 1+\pi)$

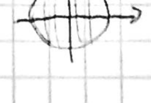
- DEF. MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad \lambda$ SCALARE

- $\lambda \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

OSS.
In generale data f e dominio $D(f) \in \mathbb{R}^n$
NON è vero che $\bar{x} \in D(f)$ e $\bar{y} \in D(f) \Longrightarrow \bar{x} + \bar{y} \in D(f)$
Può anche non appartenere.

Es. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\quad D(f) = \{(x, y) \mid 1 - x^2 - y^2\}$



DEF. PRODOTTO SCALARE TRA VETTORE $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e SCALARE $\lambda \in \mathbb{R}$

▷ DEF. PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^n$

$\bar{x} = (x_1, \dots x_n)$ $\quad \bar{y} = (y_1, \dots y_n)$

Si definisce pr $\bar{x} \cdot \bar{y} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n y_n) \in \mathbb{R}$

DEF. NORMA DI UN VETTORE

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$

$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$

interpretazione geometrica: La NORMA è la distanza del punto del vettore dall'ORIGINE.

- DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ

Presi 2 vettori $\bar{x}$ e $\bar{y}$

$$\boxed{|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$$

oppure con altra notazione

$$\boxed{|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$$

In altri termini, senza usare spazi vettoriali e prodotti scalari

$$\boxed{\left| \sum_i^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

- PICCOLA OSSERVAZIONE

OSS. dati $a, b \in \mathbb{R}$

PICCOLA OSSERVAZIONE PRE-DIMOSTRAZIONE

- $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \quad \forall a, b$

DIM. Se prendo $a - b$ ho un numero reale e lo elevo al quadrato (sarà sicuro ≥ 0). Sviluppo il quadrato.

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \iff \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \geq ab$ ■

COROLLARIO

$$\left|\frac{x \cdot y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$ grazie all' oss. precedente

DIM. COUCHY - SCHWARTZ

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda > \emptyset$

$$ab \leq \frac{1}{2}\lambda a^2 + \frac{1}{2\lambda} \cdot b^2$$ DAL COROLLARIO PRECEDENTE

Parto dall' espressione $a b$ e moltiplico per $\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$

$$a \, b = a\sqrt{\lambda} \cdot \frac{b}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{2} a^2 \cdot \lambda + \frac{1}{2\lambda} b^2$$

Allora ho che: $x_i \cdot y_i$, in base alla disuguaglianza

$$x_i \cdot y_i \leq \frac{1}{2}\lambda \cdot x_i^2 + \frac{1}{2\lambda} \cdot y_i^2$$

$$\rightarrow \left|\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i \cdot y_i|$$

allora scelgo coppie di numeri con il valore assoluto

$a = |x_i| \quad b = |y_i|$

disuguaglianza del valore assoluto.

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} |x_i \cdot y_i| \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\lambda x_i^2 + \frac{1}{2\lambda} y_i^2\right)$$

SONO SICURAMENTE POSITIVI SOMME DI QUADRATI, e λ è $> \emptyset$

$$\Longrightarrow \boxed{|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \frac{\lambda}{2}\|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|\vec{y}\|^2} \quad \boxed{\forall \lambda > 0}$$

Che appunto vale $\forall \lambda$.

INOLTRE

$$\boxed{\sum_{i}^{m} x_i^2 = \|\bar{x}\|^2}$$

infatti:

$$\sum_{i}^{m} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 \dots + x_m^2$$

$$\|\bar{x}\|^2 = \left(\sqrt{x_1^2 \dots x_m^2}\right)^2$$

allora scegliamo λ in modo opportuno

$\lambda = \frac{\|\bar{y}\|}{\|\bar{x}\|}$, ottengo che

$$\Longrightarrow |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \frac{1}{2} \cdot \|\bar{x}\|^2 \cdot \frac{\|\bar{y}\|}{\|\bar{x}\|} + \frac{1}{2} \frac{\|\bar{x}\|}{\|\bar{y}\|} \cdot \|\bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

$$\Longrightarrow |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \quad ■$$

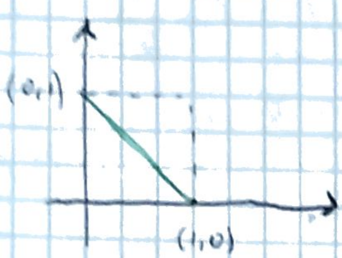
DISTANZA TRA VETTORI in $\mathbb{R}^m$

è la NORMA della differenza di vettori dati $\bar{x}$ e $\bar{y}$ in $\mathbb{R}^m$ (ovvero la loro distanza)

$$\boxed{d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_m-y_m)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2}}$$

- esempio

Presi 2 vettori in $\mathbb{R}^2$, $d((1,0),(0,1)) = ?$



In pratica devo trovare la lunghezza del SEGMENTO tra i 2 punti

$$\|(1,0)-(0,1)\| = \sqrt{2}$$

DEF LIMITE in 1 VARIABILE

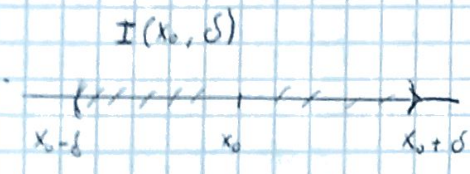
limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{I(\ell, \varepsilon)}$ se $\underbrace{|x - x_0| < \delta}_{I(x_0, \delta)}$

con $x \neq x_0$

NB: $\{|x - x_0| \leq \delta\} = I(x_0, \delta) = \{-\delta < x - x_0 < \delta\}$

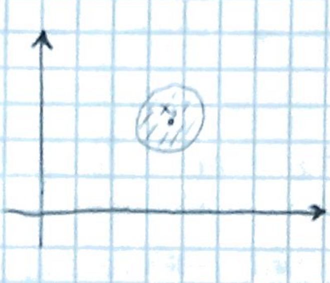


DEF LIMITE in $\mathbb{R}^m$

BALL

$B(x_0, \delta) \qquad x_0 \in \mathbb{R}^m \quad , \quad \delta$ raggio

~~Quindi~~



dove B è BALL di centro x_0 e raggio δ

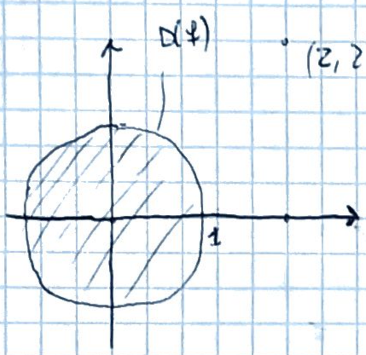
- LIMITI IN PIÙ VARIABILI

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{dove } \Omega = D(f)$$

DOMANDA

Per quali $X_0 \in \mathbb{R}^n$ ha senso chiedersi $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x})$?

Supponiamo che $D(f)$ sia la palla chiusa



ha senso chiedersi il limite per $(2,2)$? $\boxed{\text{NO}}$

Supponiamo lo stesso dominio, esclusa l'origine

ha senso chiedersi $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = ?$ $\boxed{\text{SI}}$

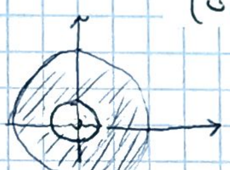
Il limite posso farli sui punti di **ADERENZA**, oltre che ai bordi del dominio

DEF. PUNTO DI ADERENZA

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}^m$ (non dentro con Ω, ovvero è un punto qualsiasi)

è aderente al Ω se:

$$\boxed{\forall \delta > 0 \quad B(x_0, \delta) \cap \Omega \neq \emptyset}$$



(0,0) è un punto di aderenza ma non di accumulazione

... allora modifico e scrivo

$$\Rightarrow \boxed{\forall \delta > 0 \quad \left(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}\right) \cap \Omega \neq \emptyset} \rightarrow \text{PUNTO DI ACCUMULAZIONE}$$

TUTTI I PUNTI DI Ω DI ACCUMULAZIONE SONO ANCHE ADERENTI MA NON È VALIDO IL VICEVERSA.
SE SONO ADERENTI MA NON DI ACCUMULAZIONE SI DICONO PUNTI ISOLATI

DEF. LIMITE in più variabili

i) $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $D(f) \subseteq \mathbb{R}^m$

ii) $X_0 \in \mathbb{R}$ sia aderente a $D(f)$

allora ha senso chiedersi se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ l \in \mathbb{R} \\ \nexists \text{, ovvero nessuno dei 3 casi precedenti.} \end{cases}$$

allora

CASO $+\infty$) $\forall M$ (anche enorme) $M \neq +\infty$

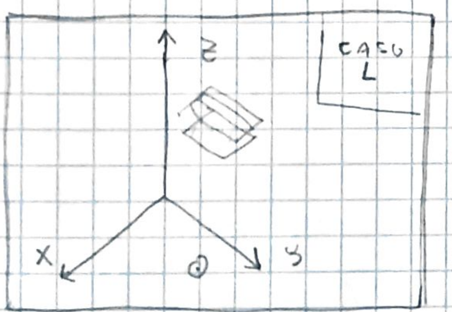
$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > M$ $\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

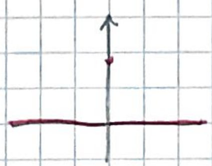
CASO $-\infty$) $\forall M$ (anche molto NEGATIVI) $M \neq -\infty$

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) < M$ $\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

CASO l) $l \in \mathbb{R}$, il limite vale l se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$





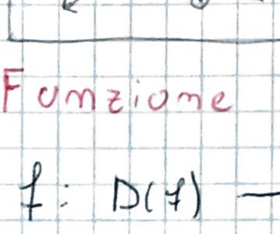
NB. questa funzione in 0 ha limite!

- Funzione Continua in più variabili

$f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $D(f) \subseteq \mathbb{R}^m$

i) $\overline{X}_0$ è un punto del dominio $D(f)$

ii) $\overline{X}_0$ è aderente al dominio $D(f)$



ha senso chiedersi la continuità per (0,0), ma non per (2,2), ad esempio.

allora f è continua in $\overline{X}_0$ se

$$\boxed{\lim_{x \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = l \in \mathbb{R}} \quad \text{ed} \quad \boxed{l = f(\vec{x}_0)}$$

NB Per la funzione $\frac{\sin(x)}{x}$, non ha senso chiedersi se è continua in 0, ma ha senso chiedersi il limite! ∎ in 0 non è definita

- META-TEOREMA di Visciglia

> Ogni funzione ottenuta tramite operazioni ALGEBRICHE e/o COMPOSIZIONE di funzioni ELEMENTARI (seni, coseni, logaritmi, esponenziali, polinomi), è <u>CONTINUA</u> nel suo DOMINIO.

• ESEMPIO.

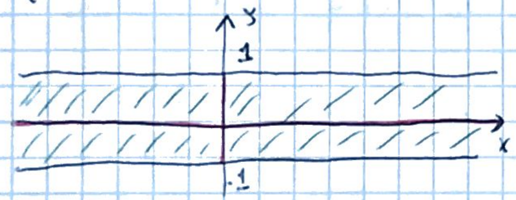
$$f(x,y) = \frac{\log(2+x^2)\cdot\sqrt{1-y^2}\cdot\sin(x^2+y^2)}{x\cdot y}$$

- $\log(2+x^2)$ è composizione di polinomio e log VALE SEMPRE
- $\sin(x^2+y^2)$ composizione di polinomio e seno.
- $\sqrt{1-y^2}$ attento numeri negativi
- $x\cdot y$ è prodotto di monomi

Il dominio di f sarà dato da

$$D(f) = \{(x,y) \mid x\cdot y \neq 0,\ 1-y^2 \geq 0\}$$

($2+x^2$ è sempre >0, sono tranquillo)



$$\lim_{(x,y)\to(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} f(x,y) = f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$$

Questo perché è continua nel dominio. il limite è la valutazione nel punto.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) \quad \boxed{!}$$

ha senso chiedersi del limite. Ma bisogna chiedersi se è un punto di aderenza. MA NON È nel dominio.

Calcolo il limite del RAPPORTO $f(x,y) = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} \neq \frac{0}{0}$ e non punto a capo.

Quindi ci conviene calcolare il limite dei punti di aderenza che non rientra nel dominio, che so già calcolare! ∎

– ESEMPI di LIMITI

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y^{42}}{x^2+y^2}$$ é una forma indeterminata.

Possiamo usare il TH. del CONFRONTO (CARABINIERI)

$$0 \le \frac{x^2 \cdot y^{42}}{x^2+y^2} \le \frac{x^2 \cdot y^{42}}{x^2}$$

perché $x^2+y^2 \ge x^2$; $\frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{x^2}$

$$0 \le \frac{x^2 \cdot y^{42}}{x^2+y^2} \le y^{42} \to$$ il limite fa $\emptyset$

quindi il limite fa $\emptyset$.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \cdot y^{42}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x) \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y^{42}}{x^2+y^2} = 0 \cdot 0 = 0$$

ho sfruttato l'inf dell'esercizio precedente.

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot y^{42}}{x^2+y^2}$$

Se dimostro che il valore assoluto tende a 0 allora anche la funzione tende a 0

$$\boxed{\lim_{(x)\to 0} f(x)=0 \iff \lim_{x\to 0} |f(x)|=0}$$

PROVA A DIMOSTRARE!

allora sarà vero che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x \cdot y^{42}|}{x^2+y^2} = 0 \quad \boxed{?}$$

-> So che:

$$0 \le \frac{|x \cdot y^{42}|}{x^2+y^2} \to 0 \le \frac{|x| \cdot y^{42}}{x^2+y^2}$$

Ma qui posso usare CAUCHY – SCHWARTZ!!

$$\frac{|x| \cdot |y|^{42}}{x^2+y^2} = \frac{|x| \cdot |y|}{x^2+y^2} \cdot |y|^{41}$$

con $$\frac{|x||y|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}|y|^{41} \to 0$$

13 MARZO 2017

CALCOLO CONCRETO DEI LIMITI

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} \longrightarrow D(f)=\{(x,y) \mid xy = 0\}$$

Mi ricorda molto il limite notevole:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$ che so fare $\boxed{1}$

allora pongo $x\cdot y = t$: $x=0,\ y=0 \to t=0$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1}$$

É un falso limite in 2 variabili, infatti per sostituzione, lo risolvo come limite in una VARIABILE!

- **FATTO GENERALE** TRAMITE COMPOSIZIONE

Sia $f: D(f) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ [$\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ nell'es prec]

$g: D(f) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ [$x\cdot y$ nell' ES. PREC]

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\circ g)(x,y)$$

- **SE** $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L \in \mathbb{R}$

allora vale $\Longrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\circ g)(x,y) = \lim_{t\to L} f(t)$$

- ESEMPI DI LIMITI VERI e FINTI in 2 variabili

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$$

Questo invece é un vero LIMITE in 2 VARIABILI

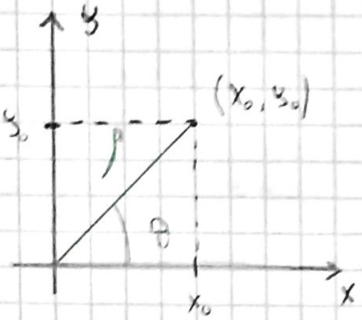
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

Questo é un FINTO LIMITE in 2 variabile, lo risolvo con il fatto generale, e vale 1

Passiamo al VERO LIMITE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x,y)}{x^2+y}$$, lo lasciamo per la fine. Ora introduciamo un altro strumento.

~ COORDINATE POLARI



- il punto lo posso rappresentare come coord. cartesiane (x_0, y_0)
- Ma anche come COORD POLARI (ρ, θ) dove $\rho \Rightarrow [0, +\infty]$, $\theta \Rightarrow [0, 2\pi]$

- la relazione tra le due è che

$\boxed{x_0 = \rho \cdot \cos\theta}$, $\boxed{y_0 = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta}$

PROP: Per calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ posso calcolare la funzione $f(\rho\cdot\cos\theta, \rho\cdot\operatorname{sen}\theta)$. SE provo che $|f(\rho\cdot\cos\theta, \rho\cdot\operatorname{sen}\theta) - L| \le g(\rho)$* con $\lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$

allora $\Longrightarrow$ $$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L}$$

$* \ -g(\rho) \le |f(\rho\cos \dots) - L| \le g(\rho)$

ESEMPIO

Rivediamo un vecchio limite e lo risolviamo con la tecnica delle coord. polari.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y^{42}}{x^2+y^2}$$ con $f(\rho\cos\theta, \rho\cdot\operatorname{sen}\theta)$

$$\to f(\rho\cdot\cos\theta, \rho\cdot\cos\theta) = \frac{\rho^2\cdot\cos^2\theta \cdot \rho^{42}\cdot\operatorname{sen}^{42}\theta}{\rho^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{=1}} = \rho^{42}\cdot(\cos^2\theta)(\operatorname{sen}^{42}\theta)$$

$$\Rightarrow |f(\rho\cdot\cos\theta, \rho\cdot\operatorname{sen}\theta) - 0| = \rho^{42}\cdot\cos^2\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta \le \rho^{42}$$

Se scegliamo $g(\rho) = \rho^{42}$ allora $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$

• ALTRO ESEMPIO DI LIMITE •

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$$

In più variabili i limiti di rapporti di POLINOMI possono riservare SORPRESE

Proviamo con le CORD. POLARI

$$f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\text{sen}\,\vartheta) = \frac{\rho^2\cdot\text{sen}\,\vartheta\cdot\cos\vartheta}{\rho^2} = \text{sen}\,\vartheta\cdot\cos\vartheta$$

Non dipende da ρ, non va bene.

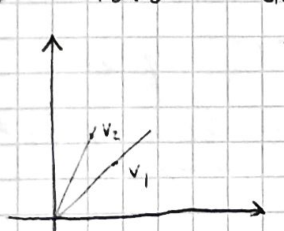
Questa cosa ci suggerisce che:

- Se prendo $\vartheta=0$ → se il limite esiste vale 0
- Se prendo $\vartheta=\frac{\pi}{4}$ → se il limite esiste vale $\frac{1}{2}$

allora questo LIMITE NON ESISTE. $(0\neq\frac{1}{2})$

• COME PROVO CHE UN LIMITE NON ESISTE?

Se trovo due direzioni $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_2$



t.c. $f(t\cdot\bar{V}_1)$ ed $f(t\cdot\bar{V}_2)$,

allora se $\lim_{t\to0} f(t\cdot\bar{V}_1) \neq \lim_{t\to0} f(t\cdot\bar{V}_2)$

allora il LIMITE NON ESISTE ■

ULTERIORE LIMITE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}$$

Proviamo con le POLARI

$$f(\rho\cdot\cos\vartheta, \rho\cdot\text{sen}\,\vartheta) = \frac{\rho^3\cdot\cos^2\vartheta\cdot\text{sen}\,\vartheta}{\rho^4\cos^4\vartheta+\rho^2\,\text{sen}^2\,\vartheta} = \frac{\rho\cdot\cos^2\vartheta\cdot\text{sen}\,\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta+\text{sen}^2\,\vartheta}$$

Dobbiamo trovare un L t.c.

$$\left|\frac{\rho\cos^2\vartheta\cdot\text{sen}\,\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta+\text{sen}^2\vartheta}-L\right|\leq\rho$$

→ Proviamo con $L=0$, se ho risolto ho finito

(METODO BRUTALE)

L=0
NOMINATORE ho che

$$|\rho \cdot \cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}\theta| \leq \rho$$

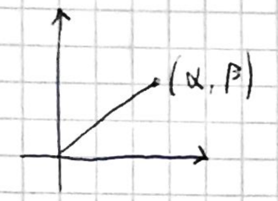
la funz. completa per L=0

$$|f(\rho\cdot\cos\theta, \rho\cdot\operatorname{sen}\theta)| \leq \frac{\rho}{\rho\cdot\cos^2\theta+\rho\cdot\operatorname{sen}\theta}$$

quando ho seni o coseni al denominatore diventa più COMPLICATO.

- DOMANDA: IL limite NON ESISTE ? ~

Proviamo.



$\forall$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cdot\alpha, t\cdot\beta) \to 0$ se $(\alpha,\beta)=(1,0)$; $\to 0$ Se $(\alpha,\beta)=(0,1)$

devo trovare due coppie diverse dagli ASSI COORDINATI.

Allora scriviamo la funzione per una GENERICA COPPIA α, β.

$$f(t\cdot\alpha, t\cdot\beta) = \frac{t^2\cdot\alpha^2\cdot t\beta}{t^4\cdot\alpha^4+t^2\cdot\beta^2} = \frac{t^2\cdot\alpha^2\beta}{t^2\alpha^4+\beta^4}$$

Provo con il limite.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t\cdot\alpha^2\cdot\beta}{t^2\cdot\alpha^4+\beta^2} = \emptyset$$

Vale 0 per tutte le direzioni, allora posso dire che il limite vale 0 ? NO

Vado avanti.

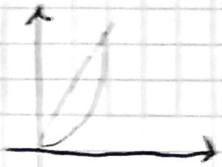
Faccio la restrizione lungo un oggetto.

IN SINTESI

- Se $\exists(\alpha_1,\beta_1)$ e (α_2,β_2) t.c. $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t\cdot\alpha_1, t\cdot\beta_1) \neq \lim\limits_{t\to 0^+} f(t\cdot\alpha_2, t\cdot\beta_2)$
  → IL LIMITE NON ESISTE
- Se $\forall(\alpha_1,\beta_1)$ trovo che $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t\cdot\alpha_1, t\cdot\beta_1) = l$ (CHE NON DIPENDE DA α_1 e β_1)
  → NON POSSO DIRE NULLA! (MA VALE l SE ESISTE)

Adesso ho ancora $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2} = ?$

Provo lungo una parabola.



$$\lim_{t\to 0^+} f(t,t^2) = \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4+t^4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

IL LIMITE NON ESISTE!

Ma perché lungo una PARABOLA ?

Perché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}$ equivale a $\lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X \cdot Y}{X^2+Y^2}$

con $X = x^2$, $Y = y$ ☒

Per concludere torniamo al limite di inizio LEZIONE.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x \cdot y)}{x^2+y^2} \quad \text{Equivale a} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x\cdot y)}{x\, y} \cdot \frac{x \cdot y}{(x^2+y^2)}$$

$\downarrow$ 1 $\qquad$ $\downarrow$ N.E

Allora ESISTE o NON ESISTE ?

Se $l \neq 0$.

- $1 \cdot$ N.E $\to$ NE
- $l \neq 0 \cdot$ N.E. $\to$ N.E
- $\emptyset \cdot$ N.E. $\to \emptyset$

[TT 2017]

Es. x CASA

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x\cdot y) - x\cdot y}{x^2+y^2}$$

non esiste, infatti → per $f(t\alpha, t\beta)$ $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t^2\alpha\cdot\beta)}{t^2\cdot(\alpha^2+\beta)^2} - \underbrace{\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha^2+\beta}}$

dipende da α e da β allora NON ESISTE

LIMITI ~ TRASLAZIONE

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x+x_0, y+y_0)}$$

Posso traslare il valore a cui tende il limite, traslando $f(x,y)$.

ESEMPIO

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\operatorname{sen}[(x-1)\cdot y]}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x\cdot y)}{x^2+y^2}$$

CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

ANALISI I:

Data $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ definisco $f'(x_0)$ con $x_0 \in (a,b)$

1° DEF) Come il limite del RAPPORTO INCREMENTALE → $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

2° DEF) $\exists\, f'(x_0) = \alpha$ se $f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha\cdot h + o(h)$

DERIVATE PARZIALI

Prendiamo $f: D(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ed un punto (x_0, y_0)

- La funzione é DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO ALLA VARIABILE x nel punto (x_0,y_0) se esiste finito il limite:
(N.B in 1 VARIABILE)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0)$$

E chiamerò il limite come: DERIVATA PARZIALE PRIMA RISPETTO ALLA VARIABILE x in (x_0,y_0)

$$\partial_x f(x_0,y_0) = \frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

Considero la y costante!!

Definisco omologamente anche nella variabile y

$$\partial_y f(x_0,y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}.$$

ORA POSSO DEFINIRE IN GENERALE LA DERIVATA PARZIALE COME

$$\partial_{x_i} f(x_0) = \frac{d}{dx_i} f(x_0)\Big|$$

GRADIENTE (VETTORE)

Data $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \nabla$ = nabla

$$\nabla f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots, \partial_{x_m} f)$$

Il GRADIENTE è un vettore le cui componenti sono tutte le derivate parziali della funzione.

"GEOMETRICAMENTE IL GRADIENTE CI FORNISCE LA DIREZ. PER SALIRE DI QUOTA SEGUENDO IL MINOR TRAGITTO."

CALCOLO CONCRETO DEL GRADIENTE, ESEMPIO

Abbiamo $f(x,y,z) = e^{x \cdot y} \cdot z^2$

- $\partial_x f = z^2 \cdot y \cdot e^{xy}$ $\longrightarrow$ DERIVATA PARZ RISPETTO A x
- $\partial_y f = z^2 \cdot x \cdot e^{xy}$ $\longrightarrow$ DERIVATA PARZ RISPETTO A y
- $\partial_z f = 2z \cdot e^{x \cdot y}$ $\longrightarrow$ DERIVATA PARZ RISPETTO A z

In PRATICA derivo rispetto ad una variabile considerando le altre come costanti.

ESEMPIO

$$f(x,y,z) = \sin(x^2+z^2)\ \ln(y^2+z^2)$$

- $\partial_x f = \ln(y^2+z^2) \cdot 2x \cdot \cos(x^2+z^2)$
- $\partial_y f = \sin(x^2+z^2) \cdot \frac{2y}{(y^2+z^2)}$
- $\partial_z f = 2z \cdot \cos(x^2+z^2) + 2z \frac{1}{(y^2+z^2)} = 2z\left[\cos(x^2+z^2) + \frac{1}{(y^2+z^2)}\right]$
- Il gradiente di f in $(0,1,0)$ vale

$\nabla f(0,1,0) = (0,0,0)$

ESEMPI DI TRABOCCHETTI

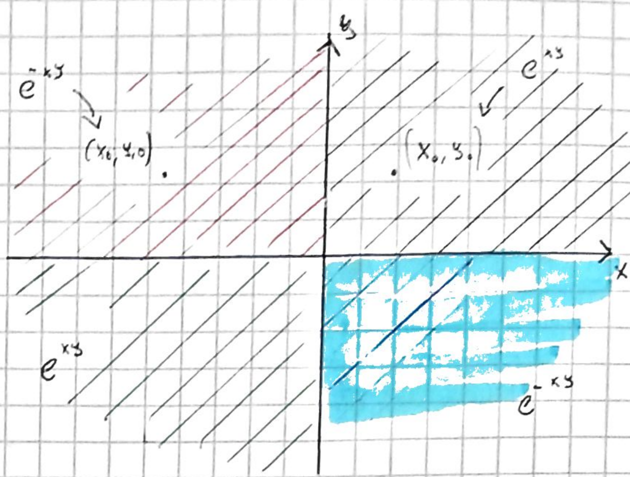
Calcolare dove esiste $\nabla f(x,y)$ di $f(x,y) = e^{|x||y|}$

$\nabla f(x,y) = (y \cdot e^{xy}, x \cdot e^{xy})$

$\nabla f(x,y) = (-y \cdot e^{-xy}, -x \cdot e^{-xy})$

$\nabla f(x,y) = (y \cdot e^{xy}, x \cdot e^{xy})$

$\nabla f(x,y) = (-y \cdot e^{-xy}, -x \cdot e^{-xy})$

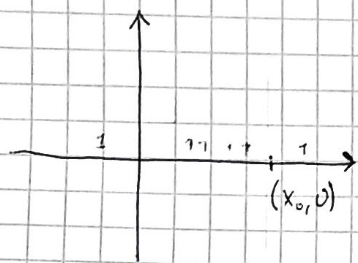


Sugli ASSI non posso dire nulla a priori, punti delicati.

- ESISTE IL $\nabla f(0,0)$? (ORIGINE)

$\partial_x(0,0) = 0 \quad ; \quad \partial_y(0,0) = 0$

- Vediamo i punti sugli assi tranne $(0,0)$



- $\partial_x f(x_0, 0)$ con $x \neq 0$
- $f(x,0) \Rightarrow 1$
- allora $\partial_x f(x_0, 0) = 0$

Calcoliamo $\partial_y f(x_0, y)$ con $x_0 \neq 0$

$f(x_0, y) = e^{|x_0||y|}$, non essendo derivabile in $y \longrightarrow \partial_y f(x_0, y)$ N.E.

Il gradiente esiste ovunque tranne che nell'origine.

ALTRO ESEMPIO

$f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ dove esiste il ∇f?

$$\partial_x f = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+y^4}} \qquad \partial_y f = \frac{4y^3}{2\sqrt{x^4+y^4}}$$

Posso dire con sicurezza che il gradiente esiste in tutto $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$

Come faccio in $(0,0)$??? (SOSTITUIRE NON HA SENSO)

Allora applico le restrizioni e guardo cosa succede.

$\nabla f(0,0)$

$$\partial_x f(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} \cdot x^2 \Big|_{x_0=0} = 2x\Big|_{x_0=0} = 0$$

$$\partial_y f(0,0) = \frac{d}{dy} f(0,y)\Big|_{y=0} = \frac{d}{dy} y^2 \Big|_{y=0} = 2y\Big|_{y=0} = 0$$

- In ANALEASY I, in una variabile

Se $\exists\ f'(x_0) \Longrightarrow f$ è continua in x_0

- Vale anche in 2 variabili? esiste un teorema?

Potremmo dire f è continua in (x_0, y_0) se esiste il $\nabla f(x_0, y_0)$? **NO**

~CONTRO ESEMPIO~

dobbiamo trovare una funzione t.c. $f(x,y)$ è discontinua in $(0,0)$, ma che ammette gradiente.

cioè $\nabla f(0,0) \rightarrow$ ESISTE

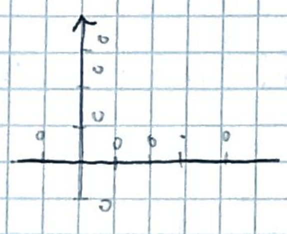
Prendo la funzione

- $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{Se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{Se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Non è continua perché non esiste Il limite di $\frac{xy}{x^2+y^2}$ in 0. (VISTO NELLE LEZ. PREC)
- Il ∇ lo ottengo con le restrizioni su gli assi, che vale $(0,0)$ e tappeto, quindi il

$\nabla f(0,0) =$

Infatti:



$$\partial_x f(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0}$$ Viene 0 e tappeto su tutto l'asse x.

$$\partial_y f(0,0) = \frac{d}{dy} f(0,y)\Big|_{y=0}$$ Viene $\emptyset$ e tappeto su tutto l'asse y.

Cerchiamo allora la NOZIONE che ci GARANTISCE la continuità.

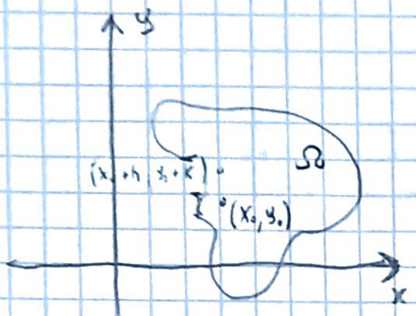
DIFFERENZIABILITÀ in PIÙ VARIABILI

Ovvero esiste un Piano Tangente al punto DIFFERENZIABILE

• 2 VARIABILI

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \subset \Omega$

$h = x - x_0$ $\quad$ $k = y - y_0$



Diciamo che f è DIFFERENZIABILE in (x_0, y_0) se esiste una coppia $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}$ tale che se faccio

$$\boxed{f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \alpha_1 \cdot h + \alpha_2 \cdot k} \quad \mathrm{E1}$$

se e solo se

$$\Longleftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \alpha_1 h - \alpha_2 \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \emptyset$$

$\to$ è la distanza dello spostamento

TEOREMA [DIFFERENZIABILITÀ INDICA CONTINUITÀ!]

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ allora f differenziabile in $(x_0, y_0) \xRightarrow{\text{IMPLICA CHE}} f$ continua in (x_0, y_0)

OSS

La DIFFERENZIABILITÀ è più promettente dell'esistenza del gradiente!

DIMOSTRAZIONE [DIFFERENZIABILITÀ implica la CONTINUITÀ]

devo dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

che equivale a dire che $\Longleftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)$

VEDI TECNICA TRASLAZIONE LIMITE

e facendo il il limite della E_1 al Secondo membro mi trovo che questo vale $f(x_0, y_0)$ quindi ho dimostrato il TEOREMA.

INFATTI

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0, y_0) + \alpha_1 \cdot h + \alpha_2 \cdot k = f(x_0, y_0)}$$

$\blacksquare$

FINE, CONTINUITÀ!

· **TEOREMA** [TR] DIFFERENZIABILITÀ IMPLICA ESISTENZA DEL GRADIENTE

DIM. nella pagina successiva

· Se $f(x,y)$ è differenziabile in (x_0,y_0) allora questo IMPLICA che

$$\Longrightarrow \boxed{\exists\ \nabla f(x_0,y_0) \text{, ovvero } \exists\ \partial_x f(x_0,y_0) \text{ e } \exists\ \partial_y f(x_0,y_0)}$$

· INOLTRE si ha che:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\partial_x f(x_0,y_0)}_{\alpha_1 \text{ DERIVATA RISP. a } x \text{ in } (x_0,y_0)} \cdot h + \underbrace{\partial_y f(x_0,y_0)}_{\alpha_2 \text{ DERIVATA RISP. a } y \text{ in } (x_0,y_0)} \cdot k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

· ESEMPIO

· $\boxed{e^{|x|\cdot|y|}}$ è DIFF in $(0,0)$?

$\exists\ \nabla f(0,0)$? SI vale $\partial_x f(x_0,y_0) = \emptyset$, $\partial_y f(x_0,y_0) = \emptyset$

Verifichiamo che $f(h,k) - f(0,0) - 0\cdot h - 0\cdot k = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$

Lo verifico facendo il limite. (quando c'è un o piccolo devo calcolarmi il limite)

$$\frac{e^{|h|\cdot|k|} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} 0$$

→ SI: è differenziabile.
→ NO: Non è differenziabile.

- Calcolo il LIMITE

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{e^{|h|\cdot|k|}-1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[\underbrace{\left(\frac{|h|\cdot|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}_{\text{LO FACCIO CON COORD POLARI}} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{|h|\cdot|k|}-1}{|h|\cdot|k|}\right)}_{\text{TENDE a } 1}\right]$$

$$\frac{\rho^{\cancel{2}}\cdot|\cos\vartheta|\cdot|\sin\vartheta|}{\cancel{\rho}} \leq \rho \longrightarrow \text{Tende a } 0$$

quindi $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{e^{|h|\cdot|k|}-1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \emptyset$

- **DIMOSTRAZIONE** [T 2]

Devo dim. che se f è diff in $(x_0, y_0) \Rightarrow \exists \nabla f(x_0, y_0)$

$$\left[f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \alpha_1 \cdot h + \alpha_2 \cdot k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \right]$$

Devo fare le derivate PARZIALI con il limite, inizio con la derivata parziale in x

- $\partial_x f(x_0, y_0)$ ovvero $\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} =$

$$\boxed{= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}} \quad L_1$$

Per HP di differenziabilità ho:

$$f(x_0+h, y_0) = f(x_0,y_0) + \alpha_1 \cdot h + o\left(\sqrt{h^2}\right)$$

faccio il limite

$$\Rightarrow f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) = \alpha_1 \cdot h + o(|h|)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \alpha_1 + \frac{o(|h|)}{h} \to \emptyset$$

ho dimostrato che L_1 è uguale a α_1 (ovvero la f_x in x_0, y_0)

$\square$

PICCOLA SINTESI

- Se $f(x,y)$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$
  1. $f(x,y)$ è continua in (x_0, y_0)
  2. $f(x,y)$ ammette derivate direzionali in (x_0, y_0) lungo ogni dir $\bar{v} \in \mathbb{R}$
  3. $\alpha = f_x(x_0, y_0)$ $\beta = f_y(x_0, y_0)$ [ovvero $\exists \nabla f(x_0, y_0)$]

- $f(x,y)$ **NON È** differenziabile in (x_0, y_0) SE:
  1. $f(x,y)$ non è continua in (x_0, y_0)
  2. $\exists$ una direzione, data dal vettore $\bar{v}$, t.c. non esiste la derivata direzionale in (x_0, y_0).

- $$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \alpha_1 \cdot h + \beta \cdot k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

  equivale alla FORMA OPERATIVA

  $$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot h + f_y(x_0,y_0) \cdot k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

  con $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$

Abbiamo visto che le DIFFERENZIABILITÁ in 2 variabili. Oggi le vediamo in n variabili.

DIFFERENZIABILITÁ IN N VARIABILI

RICORDANDO CHE: $\exists \nabla f(x_0) \not\Rightarrow f$ continua in x_0, ma lo é se f é differenziabile in x_0.

DEF.

Data una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f si dice differenziabile in x_0 se esiste un piano Tangente al grafico, ovvero

$$\boxed{\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \quad t.c. \quad f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \alpha_1 \cdot h_1 + \dots + \alpha_n \cdot h_n + o\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}}$$

$\exists$ DERIVATE PARZIALI

oppure in forma compatta

$$f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \bar{\alpha} \cdot \bar{h} + o\|\bar{h}\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) - \bar{\alpha}\cdot\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = 0}$$

Inoltre se f é differenziabile in x_0

$\to f$ é continua in x_0

$\to \exists \nabla f(x_0) \longrightarrow \nabla f(x_0) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

- Per vedere se la f é diff in x_0 bisogna:

1. FARE IL GRADIENTE
2. SOSTITUIRE LA N-UPLA DI NUMERI
3. CALCOLARE IL LIMITE

Basta dimostrare che non esiste una sola derivata parziale per dire che f non é differenziabile.

ESEMPIO (GIÁ VISTO)

$e^{|x||y|}$, abbiamo verificato che é DIFF. in $(0,0)$

é diff in $(x_0, 0)$ con $x \neq 0$? trovo che

$f_x(x_0, 0) = 0$

$f_y(x_0, 0) = \nexists \to \nexists \nabla f(x_0, 0) \Rightarrow$ Non é diff.

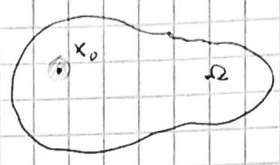
IMPORTANTISSIMO

TEOREMA DELLA DIFFERENZIABILITÀ TOTALE

"In alcune situazioni la differenziabilità è GARANTITA dalle derivate parziali sotto opportune ipotesi"

· ENUNCIATO

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$



i) $\exists\, r > 0$ (anche piccolo) t.c. $\exists \nabla f(x), \forall x \in B(x_0, r)$

ii) f_{x_i} sono continue in X_0 (LE DERIVATE SONO CONTINUE)

$\rightarrow$ Allora f è differenziabile in X_0

ESEMPIO

Con questo teorema possiamo verificare che

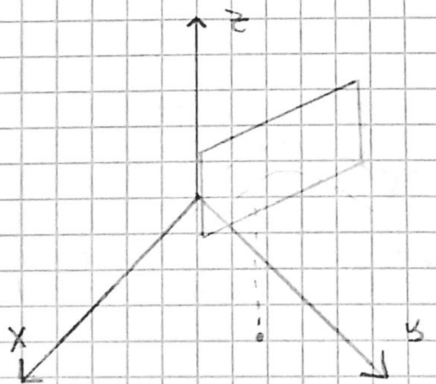
- $e^{|x|+|y|}$ è differenziabile in tutti i punti esclusi gli assi
- Prendiamo (X_0, Y_0) con X_0 e $Y_0 > \emptyset$, è diff in quel punto?

$e^{|x|+|y|}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \partial_x f(e^{xy}) = y e^{xy} \\ \cdot\ \partial_y f(e^{xy}) = x \cdot e^{xy} \end{array}\right]$ Sono continue, $\rightarrow f$ diff in (X_0, Y_0).

PIANO TANGENTE

Come scrivo l'eq del piano tangente al grafico in $((x_0, y_0), f(x_0, y_0))$ sapendo che è differenziabile in (x_0, y_0)



$$Z = f(X_0, Y_0) + \partial_x f(X_0, Y_0)(X - X_0) + \partial_y f(X_0, Y_0)(Y - Y_0)$$

In modo compatto, in $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{X_{N+1} = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0)} \quad ; \quad \mathbb{R}^n \quad , \quad X_0 = (X_0^1, \dots X_0^n)$$

ESEMPIO

$\sin(x^2+y^2)$

Esiste piano tangente al grafico nel punto $(1,1)$? Se sì scrivere l'eq.

$$\begin{cases} \partial_x f = 2x \cdot \cos(x^2+y^2) \\ \partial_y f = 2y \cdot \cos(x^2+y^2) \end{cases}$$

Sono funz. continue quindi differenziale.

L'equazione del piano tang. in $(1,1)$:

$$z = \sin(2) + 2\cdot\cos(2)(x-1) + 2\cos(2)(y-1)$$
$$= 2\cos(2)\cdot x + 2\cos(2)\cdot y + \sin(2) - 2\cos(2) - 2\cos(2)$$

$\boxed{\checkmark}$

DERIVATA DIREZIONALE

DEF. Si definisce derivata direzionale nel punto X_0 nella direzione $\vec{v}$, con $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(X_0 + h\cdot\vec{v}) - f(X_0)}{h} = \partial_{\vec{v}} f(X_0)$$

ovvero consideriamo una direzione diversa dagli assi.
Questa è la der. calcolata lungo $\vec{v}$ $(D_{\vec{v}} f(x))$

TEOREMA

Se $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diff in $X_0 \in \Omega$ allora

$$\boxed{\partial_{\vec{v}} f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \vec{v}}$$

PRODOTTO SCALARE

FORMULA PER CALCOLARE la derivata direzionale dalle derivate parziale. (oppure ti fai il limite)

ESEMPIO

e^{x+y+z} : $\partial(1,1,0) \cdot f(0,0,0) = \nabla f(0,0,0) \cdot (1,1,0) = (1,1,1)\cdot(1,1,0) = 2$

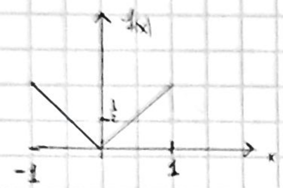
MAX e MIN ASSOLUTO in PIÙ VARIABILI

ANALISI I:

- Data $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$, $X_0\in[a,b]$ è punto di massimo assoluto se $f(x)\leq f(x_0)$ $\forall x\in[a,b]$
- Data $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$, $X_0\in[a,b]$ è punto di minimo assoluto se $f(x)>f(x_0)$ $\forall x\in[a,b]$

IN GENERALE NON ESISTONO MAX e MIN.

ES.



$$f(x)\begin{cases}\frac{1}{2} & x=1,\ x=-1,\ x=0\\ |x| & \text{resto}\end{cases}$$

($\emptyset$ non è MINIMO!)

Il MAX non esiste, Ma neanche il MIN!

Lo dimostro calcolando sup e inf e vedendo se quei punti vengono raggiunti.

- TH WEIERSTRASS (ANALISI 1)

Per $-\infty<a<b<+\infty$, $f\,[a,b]$ chiuso e limitato

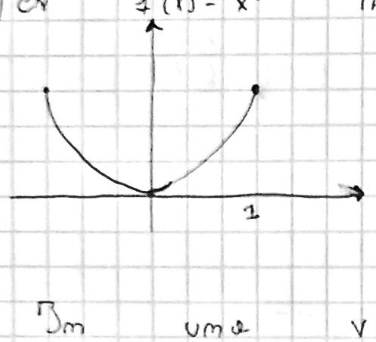
Se $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, f è continua allora $\exists$ MAX $\max f[a,b]$ sia $\min[a,b]$

Ma se volessi sapere quanto valgono massimo e minimo, nelle ipotesi di WEIERSTRASS?

- $f'(x)=0$ mi esclude gli estremi dell'intervallo

1) es $\to$ $f(x)=x$ tra $[0,1]$, $f'(x)=1$ non si annulla mai

2) es $f(x)=x^2$ Tra $[-1,1]$



Il MAX è negli estremi

In una variabile devo tener conto della derivata prima e degli estremi, COME PROCEDO?

i) $f'(x)=0$ e troviamo i punti $\{X_1, X_2, \dots X_m\}$

ii) $f(a), f(b)$

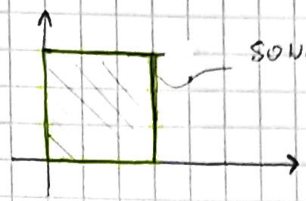
iii) $\max f = \max\{f(a), f(b), x_1, x_2, \dots X_m\}$

In 2 VARIABILI

$f: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

① $\nabla f(x) = 0$ sistema con 2 eq in 2 incognite

② La FRONTIERA? con il ∇ trovo tutti i punti interni, ma quelli nel bordo?

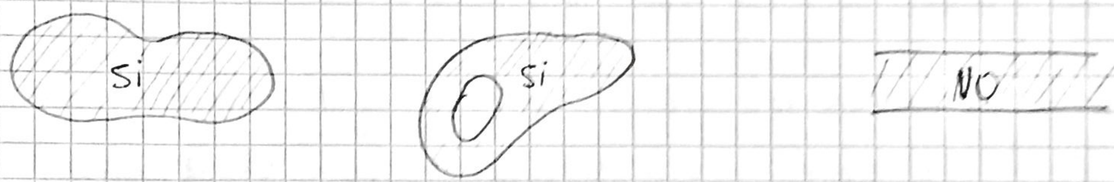


21/03/2017

- RIEPILOGO ANALISI 1

f continua su $[a, b]$, chiuso (estremi inclusi) e limitato ($a \neq \mp\infty$, $b \neq \pm\infty$)

- Ed in $\mathbb{R}^n$? cosa vuol dire limitato?



$\boxed{\mathbb{R}^n}$

DEF

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ diciamo che è limitato se

$\exists\ R > 0$ t.c. $\Omega \subset B(0, R)$

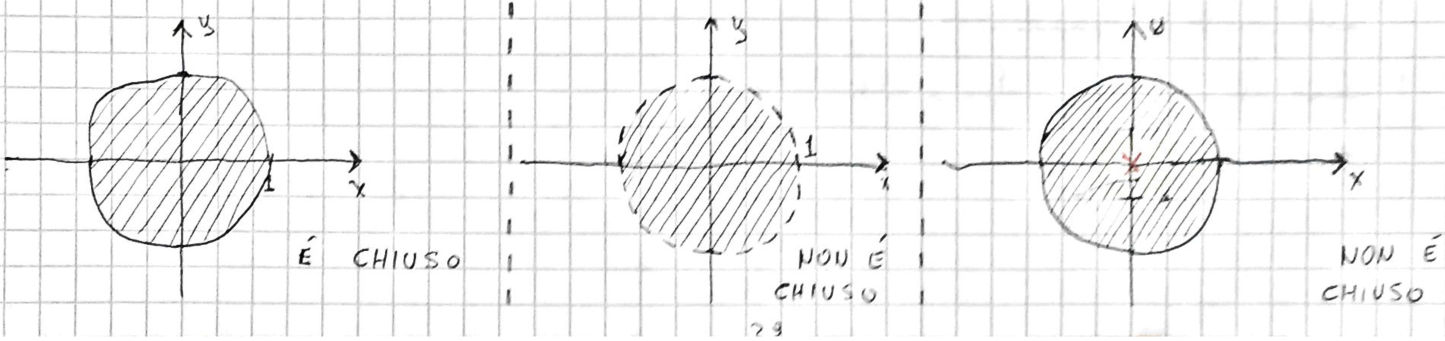
DEF

$K \subset \mathbb{R}^n$ diciamo che è CHIUSO se:

$\forall x \notin K \implies \exists\ r > 0$ t.c. $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$

ESEMPI

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$; $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0,0)\}$



TEOREMA DI WEIERSTRASS in $\mathbb{R}^n$

Ho $f: K \to \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}^n$, K sia **COMPATTO** (chiuso e limitato) ed f continua, allora ammette massimo e minimo.

NB: SUP e INF esistono sempre.

$\to$ $\exists$ $\min f$ e $\max f$

Come si calcolano? Dobbiamo introdurre un nuovo termine.

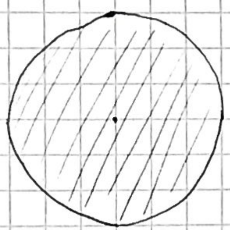
DEF

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ allora x si dice INTERNO a K se:

$\exists\, r > 0$ t.c. $B(x, r) \subset K$

E con $\mathring{K}$ si indica l'insieme $\{x \in K \mid x \text{ è interno a } K\}$

ESEMPIO



$x^2 + y^2 \leq 1$

$\mathring{K} = \{x^2 + y^2 < 1\}$, cioè non considero il bordo!

PROCEDIMENTO PER CALCOLARE i $\max_K f$ e $\min_K f$

1. Mi calcolo i punti interni a K con $\nabla f = 0$, ovvero $\{x \in \mathring{K} \mid \nabla f(x) = 0\}$ e mi trovo $\rightsquigarrow \{x_1, \dots x_k\}$
2. CALCOLO $\max_{K \setminus \mathring{K}} f$ e $\min_{K \setminus \mathring{K}} f$. $\left(\max_{K \setminus \mathring{K}} f = \alpha \quad \min_{K \setminus \mathring{K}} f = \beta \right)$
3. Massimo e minimo della funzione mi sono dati da

$\max f = \max \{f(x_1), \dots, f(x_k), \alpha\}$

$\min f = \min \{f(x_1), \dots, f(x_k), \beta\}$ ☑

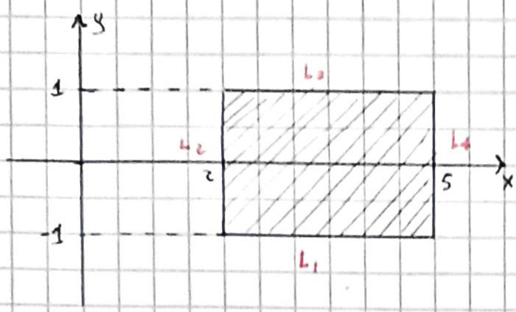
Ma come calcolo α e β?

- PARAMETRIZZAZIONE
- MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

ESEMPIO - ESERCIZIO

Calcolare Max e Min della funzione $f(x^2+y^2)$ sull'insieme $[2,5] \times [-1,1]$ (è un rettangolo)

- Posso applicare WEIERSTRASS? Sì! f è continua su COMPATTO



$K = [2,5] \times [-1,1]$

$\mathring{K} = K \setminus \{L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4\}$

1. Calcolo il gradiente e pongo che sia uguale a $\emptyset$

$\nabla f(x^2+y^2) = (2x, 2y)$, faccio il sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$ ho una soluzione, il punto $(x,y) = (0,0)$

Ma $(0,0)$ non appartiene a K! Vado avanti.
(non ho MAX e MIN in K)

2. Come faccio a calcolare $\underset{K \setminus \mathring{K}}{\mathrm{Max}} f(x^2+y^2)$ e $\underset{K \setminus \mathring{K}}{\mathrm{Min}} f(x^2+y^2)$

Semplice, sfrutto le mie conoscenze del calcolo dei MAX e Min in una variabile, perché il bordo è fatto di SEGMENTI! Allora la tecnica è quella di PARAMETRIZZARE il BORDO in una sola variabile.

$\mathrm{MAX}\, f = \mathrm{Max}\{\underset{L_1}{\mathrm{MAX}} f, \underset{L_2}{\mathrm{MAX}} f, \underset{L_3}{\mathrm{MAX}} f, \underset{L_4}{\mathrm{MAX}} f\}$ [Il massimo sull'insieme unione lo faccio calcolando il massimo su ogni regione]

- Massimo nel LATO 1, parametrizzo
L_1

$\varphi_1 : t \in [2,5] \longrightarrow (t, -1)$

Faccio la funzione f composta φ_1! $(f \circ \varphi_1)$

$f \circ \varphi_1 : t^2 + 1$

quindi

$$\boxed{\underset{L_1}{\mathrm{Max}}\, f(x,y) = \underset{t \in [2,5]}{\mathrm{Max}} (1+t^2)}$$

$\max_{t \in [2,5]} (1+t^2) = ?$ SI UTILIZZANO ADESSO TECNICHE DI ANALISI 1 ESSENDO MONOTONA CRESCENTE, SO CHE IL MINIMO CE L'HO NELL ESTREMO INFERIORE e il MAX SULL ESTREMO SUPERIORE.

quindi

$\max_{t \in [2,5]} (1+t^2) = \boxed{26}$ → 26 è il Massimo su L_1 Ma non ho mica finito!

- Calcolo il Max su L_1

$\varphi_2 : [-1;1] \longrightarrow (5,t)$

$f \circ \varphi_2 = 25 + t^2 \quad , \quad t \in [-1,1]$

$\max_{L_2} f(x,y) = \boxed{26}$

- Calcolo il Max su L_3

$\varphi_3 : [2,5] \longrightarrow (t,1)$

$f \circ \varphi_3 = t^2 + 1 \quad , t \in [2,5]$

$\max_{L_3} f(x,y) = \boxed{26}$

- Calcolo il Max su L_2

$\varphi_4 : [-1;1] \longrightarrow (2,t)$

$f \circ \varphi_4 = t^2 + 2$

$\max_{L_4} f(x,y) = \boxed{5}$

Il Massimo è $\boxed{26}$

ESERCIZIO 2

$\max_K f$ e $\min_K f$ di $f(x,y) = 2x^3 + 3y^2$

con $K \{ (x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1 \}$,

1. $\mathring{K} = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 < 1 \}$

$\nabla f = (0,0) \iff \begin{cases} 4x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \implies (x,y) = (0,0)$

ME LO DEVO RICORDARE, PERCHÉ (0,0) È UN PUNTO INTERNO.

② - Trovo un modo furbo per parametrizzare

$\boxed{\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)}$ con $t \in [0; 2\pi]$

$f \circ \varphi(t) = 2\cos^2(t) + 3\operatorname{sen}^2(t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Quindi dobbiamo calcolare $\underset{[0,2\pi]}{\operatorname{Max}}\ 2\cos^2 t, 3\operatorname{sen}^2 t$ e $\underset{[0,2\pi]}{\operatorname{Min}}\ 2\cos^2 t, 3\operatorname{sen}^2 t$

Uso la TRIGONOMETRIA.

$2\cos^2 t + 3\operatorname{sen}^2 t = \cancel{2}3 - \cos^2 t + 3(1 - \cos^2 t) = 3 - \cos^2 t$ → MAX $= 3$ $\cos t = 0$; → MIN $= 2$ $\cos t = \pm 1$

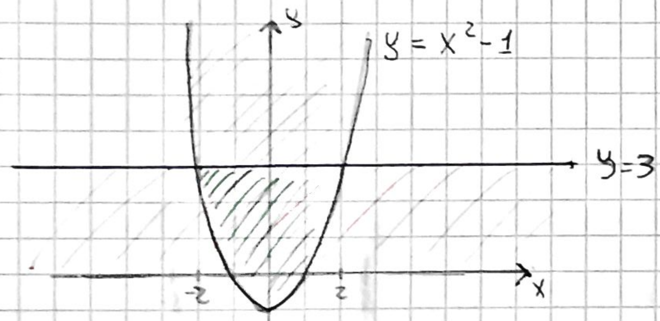
CONCLUDIAMO

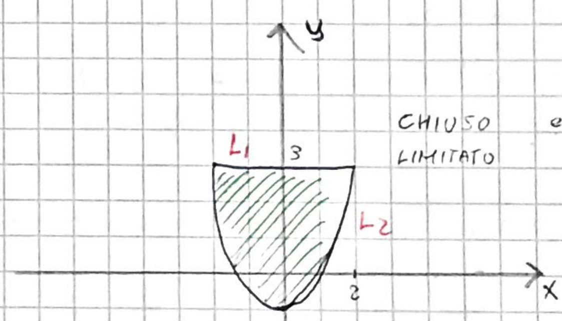
$\underset{K}{\operatorname{Max}} f = \operatorname{Max}\{3, 0\} = 3$ $\underset{K}{\operatorname{Min}} f = \operatorname{Min}\{2, 0\} = 0$

ESERCIZIO 3

Calcolare $\underset{K}{\operatorname{Max}} f$ e $\underset{K}{\operatorname{Min}} f$ dove $f(x,y) = 3x^2 - y + 3$

con $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 3\}$ | Il grafico devo disegnarlo per capire se è COMPATTO!





Prendo $(0,0)$ $-1 < 0$ allora la regione interna della PARABOLA

①

$\nabla f = (0,0) \longrightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ -1 = 0 \quad \text{IMP} \end{cases} \longrightarrow$ Non ci sono punti interni.

② Devo Parametrizzare L_1 e L_2

Calcolo $\underset{L_1}{\operatorname{Max}} f$ e $\underset{L_1}{\operatorname{Min}} f$; $\varphi_1 : [2, -2] \longrightarrow (t, 3)$

$\rightarrow f \circ \varphi_1 = 3t^2 - 3 + 3 = 3t^2$ → 12 MAX ; → 0 MIN

Calcolo $\max_{L_2} f$ e $\min_{L_2} f$

$\varphi_2 : [-2, 2] \longrightarrow (t, t^2-1) \longrightarrow f \circ \varphi_2 = 3t^2 - t^2 + 1 + 3 = 4 + 2t^2$

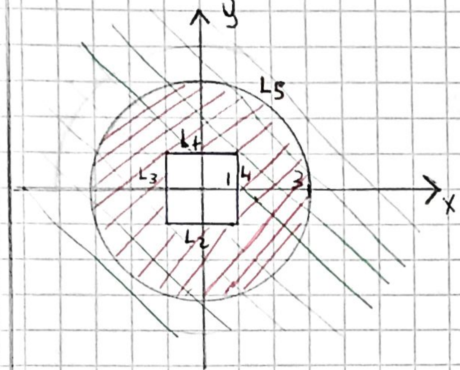
$\longrightarrow$ 4 MIN, 12 MAX

In conclusione

$\max_K f = 12$, $\max_K f = 0$, Perché la parte interna non mi aiuta.

ESEMPIO PARAM 1

$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ $\qquad K = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 9, \underbrace{\max\{|x|,|y|\} \geq 1}_{\text{É IL COMPLEMENTARE DI UN QUADRATO}}\}$



La circonferenza ha raggio 3!

Il Bordo è $(3\cos t, 3\operatorname{sen} t)$

ESEMPIO PARAM 2

$ax^2 + by^2 = 1$ con $a, b > 0$

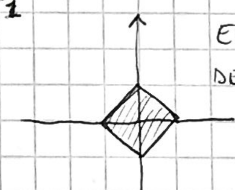
$[0, 2\pi] \ni t \longrightarrow \left(\frac{\cos t}{\sqrt{a}}, \frac{\sin t}{\sqrt{b}} \right)$

ESEMPIO PARAM 3

Segmento passante per $\underset{P_0}{(x_0, y_0)}$ e $\underset{P_1}{(x_1, y_1)}$

$t \longrightarrow P_0 + t(P_0 - P_1)$, $t \in [0,1]$

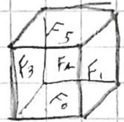
$$= \begin{pmatrix} x_1 + t(x_0 - x_1) \\ y_1 + t(y_0 - y_1) \end{pmatrix}$$



ESEMPIO SEG. DEL BORDO DI UN ROMBO!

PROBLEMI IN 3 DIMENSIONI

$f(x,y,z)$ con $K = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$



Parametrizzare una faccia in $\mathbb{R}^3$ non è veloce

K è un quadrato. Le facce sono i BORDI

$\mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ TROPPI Passaggi