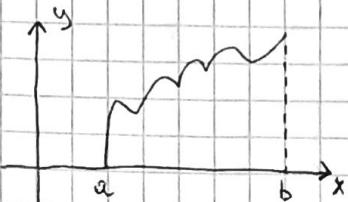


CURVE CARTESIANE (grafici di funzioni in 2 var.)

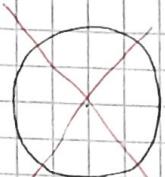


$$t \in [a, b] \rightarrow (t, f(t))$$

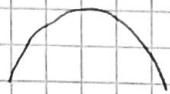
Per vedere come una curva faccio una parametrizzazione.

- I look i supporti nomi grafici di una funzione d'una variabile.

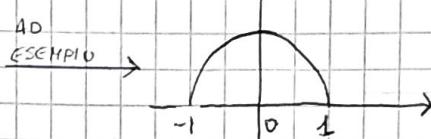
$$t \in [-1, 1] \rightarrow (t, \sqrt{1-t^2})$$



NO



SÌ



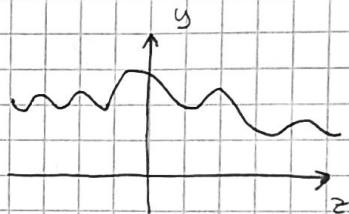
LUNGHEZZA DI UNA CURVA

$$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$$

è un vettore!

- come faccio a definire

$\ell(\alpha) = ?$ L'idea è di mezzettare la curva in segmentini di cui noi calcolare



DEF.

$$\ell(\alpha) = \sup \sum_{t_1, \dots, t_k \in [a, b]} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$$

dove t_1, t_2, \dots, t_k sono le partizioni.

TEO: Sia $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)$) una curva e supponiamo inoltre $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in C^1([a, b])$ allora:

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{\alpha}_1(t))^2 + \dots + (\dot{\alpha}_m(t))^2} dt$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

ESEMPIO 1.

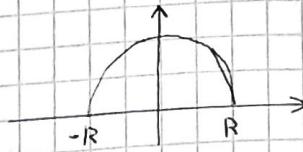
Lunghezza della circonferenza $C((0,0), R)$:

$$t \in [0, 2\pi] \xrightarrow{\alpha} (R \cdot \cos t, R \cdot \sin t)$$

$$\ell(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \cdot \sin^2 t + R^2 \cdot \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi \cdot R$$

ESEMPIO: Lunghezza semi-circonf. (vista come curva cartesiana)

$$[-R, R] \ni t \xrightarrow{\alpha} (t, \sqrt{R^2 - t^2})$$



$$l(\alpha) = \int_{-R}^R \sqrt{1 + \left(\frac{-t}{\sqrt{R^2 - t^2}}\right)^2} dt = \int_{-R}^R \sqrt{1 + \frac{t^2}{R^2 - t^2}} dt =$$

$$= R \cdot \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - t^2}} dt \rightarrow \text{diventa la primitiva 'sull' arcus}$$

DIM.

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\dot{\alpha}_1)^2 + \dots + (\dot{\alpha}_m)^2} dt \quad \text{con } \alpha \text{ di classe } C^1([a, b])$$

$$\text{con } \alpha : [a, b] \longrightarrow (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)) \in \mathbb{R}^m$$

verso soluzioni trovate che

- Ci sono 2 dimostrazioni: \geq DIFFICILE
 \leq FACILE

- Facciamo quella facile.

$$\begin{aligned} \leq & \text{ my } \sum_i \| \alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i) \| \leq \text{ my } \sum_i \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\alpha}(n) dn \right\| \\ & \leq \text{ my } \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\alpha}(n)\| dn \leq \int_a^b \|\dot{\alpha}(n)\| dn \end{aligned}$$

• LUNGHEZZ. DELL' ELICA IN 3D

$$[0, 2\pi] \ni t \xrightarrow{\alpha} (\cos t, \sin t, t)$$

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} dt = 2\pi\sqrt{2}$$

• FORMULA GENERALE per l sulla CURVA CARTESIANA

$$t \ni [a, b] \longrightarrow (t, f(t))$$

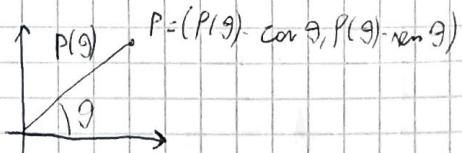


$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \quad \boxed{\text{LUNGHEZZA DI UNA CURVA CARTESIANA}}$$

CURVA IN POLARI

$$[\vartheta_0, \vartheta_1] \ni \vartheta \longrightarrow P(\vartheta) \in [0, +\infty)$$

Come si calcola la curva associata?



$$[\theta_0, \theta_1] \ni \theta \longrightarrow (\rho(\theta) \cdot \cos \theta, \rho(\theta) \cdot \sin \theta)$$

$$l(\alpha) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} d\theta \quad \text{dove} \quad \dot{x}_1 = \dot{\rho} \cdot \cos \theta - \rho \cdot \sin \theta \\ \dot{x}_2 = \dot{\rho} \cdot \sin \theta + \rho \cdot \cos \theta$$

oltre che $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2$

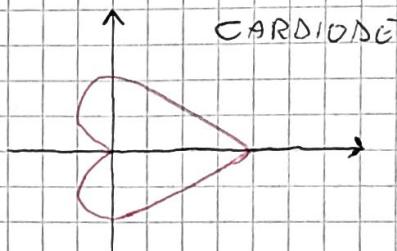
$$l(\alpha) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2} d\theta$$

FORMULA della LUNGHEZZA di una CURVA data in COORDINATE POLARI

ESEMPIO : CARDIOIDE

$$\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(\theta) + (1 + \cos \theta)^2} dt$$



- APPROFONDIMENTO - FUNZIONI DI CLASSE K *

DEF Una funzione definita su un insieme A è chiamata $C^k(A)$ se in A esistono tutte le sue derivate fino al K-esimo ordine (Esempio)

La derivabilità permette di una variabile continua rispetto a tale variabile.

- $C^1(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$ $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow C^1(\mathbb{R}): \text{insieme delle funz. DIFFERENZIABILI sul campo Reale} \\ \rightarrow C^0(\mathbb{R}): \text{insieme delle funzioni continue in} \end{array} \right.$
- Im generalmente vole che:

$$C^k \subset C^{k+1}$$

*NB A deve essere INSIEME APERTO

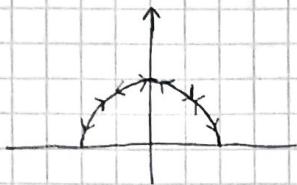
C^∞ è l'insieme delle FUNZIONI LISCE, ovvero i polinomi e le funzioni analitiche

\rightarrow esponenziali, rette, conics, identità, sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$

$\rightarrow |x|$ è di classe $C^0(\mathbb{R})$ ma $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

8/05/17

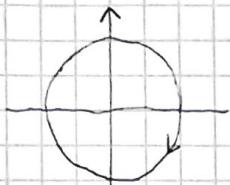
ORIENTAZIONE DI UNA CURVA



$$\gamma: [0, \pi] \ni t \longrightarrow (\cos t, \sin t)$$

$$[-1, 1] \ni x \longrightarrow (x, \sqrt{1-x^2})$$

Per parametrizzarla in senso orario



$$[0, \pi] \ni t \longrightarrow (\cos t, -\sin t)$$

Definiamo una curva γ definita

$$\gamma: [a, b] \ni n \longrightarrow \gamma(n) = \begin{pmatrix} \gamma_1(n) \\ \vdots \\ \gamma_m(n) \end{pmatrix}$$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(n)\| dn = \int_a^b \sqrt{(\dot{\gamma}_1)^2 + \dots + (\dot{\gamma}_m)^2} dn$$

INTEGRALI DI 1° SPECIE LUNGO CURVE

1) Una curva $\gamma: [a, b] \ni n \longrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1(n) \\ \vdots \\ \gamma_m(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

2) $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

Si definisce integrale di 1° specie $\int_{\gamma} f dn$

$$\int_{\gamma} f dn = \int_a^b f(\gamma_1(n), \dots, \gamma_m(n)) \cdot \sqrt{(\dot{\gamma}_1(n))^2 + \dots + (\dot{\gamma}_m(n))^2} dn$$

$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$

ESEMPIO

$\gamma: [0, 2] \ni t \longrightarrow (1+t^2, t^3-1)$ CURVA im \mathbb{R}^2
ha 2 componenti

$$f(x, y) = x^2 + y$$

Come si definisce quindi $\int_{\gamma} (x^2 + y) \, dx$?

$$\int_{\gamma} (x^2 + y) \, dx = \int_0^2 [(1+t^2)^2 + (t^3 - 1)] \cdot \sqrt{t^2 + 3t^4} \, dt$$

x y

Così ha un integrale in 1 variabile.

OSSERVAZIONE

Se sceglio $f(x_1, \dots, x_m) \equiv 1$ (vole 1 a tutti)

ottengo la lunghezza di γ !

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} 1 \cdot dx = \int_{\alpha}^{\beta} 1 \cdot \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + \dots + (\dot{x}_m)^2} \, dt$$

OSSERVAZIONE 2

L'integrale NON DIPENDE dall'ORIENTAZIONE

$\int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_m) \, dx$ NON dipende dall'orientazione di γ .
ma dipende dal verso di percorrenza.

• L'integrale di 1° specie non tiene conto dell'orientazione! •

$$\int_{\gamma} f \cdot dx \quad \int_{\gamma'} f \cdot dx$$

$$\int_{C(0,1)} f \, dx = \int_{(cont., rev.)} f \, dx$$

(cont., rev.)

INTEGRALI DI 1^o SPECIE LUNGO CURVE
DEFINITI IN COORD POLARI

$$[\theta_0, \theta_1] \ni \theta \rightarrow \rho(\theta)$$

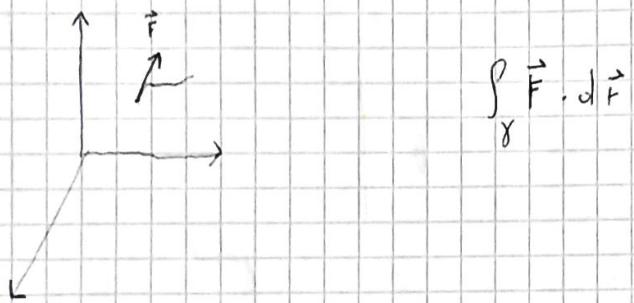
$$[\theta_0, \theta_1] \ni \theta \rightarrow (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$$

Di conseguenza l'integrale mi divenire in
una sola variabile.

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} [f(\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)] \cdot \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2} d\theta$$

INTEGRALI DI 2^o SPECIE LUNGO CURVE

SIGNIFICATO FISICO: Lavoro di una forza.



Def: Doti

1) una curva $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$

2) $\vec{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ vettore mi da $\begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix}$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{F} = \oint_{\gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_m dx_m$$

$$= \int_{\alpha}^b F_1(\gamma_1(s), \dots, \gamma_m(s)) \cdot \dot{\gamma}_1(s) ds + \dots + \int_{\alpha}^b F_m(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}_m(s) ds$$

ESEMPIO:

Sia γ la circonferenza in \mathbb{R}^2 di centro $(0,0)$ e

raggio L (percorso in senso antiorario) e sia

$$\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (-y, x)$$

- Calcolare $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$

$$\gamma : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow (\cos t, \sin t)$$

- quindi: apprendiamo l'integrale

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} -\sin t (-\sin t) dt + \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = [2\pi] \end{aligned}$$

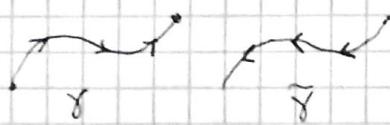
- CAMBIANDO (invertendo) l'ordine di percorrenza vedrai
che stessa volute combiata di segn.

$$\gamma : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow (\cos t, -\sin t)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t (-\sin t) dt + \int_0^{2\pi} \cos t \cdot (-\cos t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = [-2\pi]$$

OSS 1:

Sia γ una curva o sia $\tilde{\gamma}$ la stessa curva
percorso in senso contrario.



$$\oint_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

OSS 2:

$$\int_{\gamma} f \cdot dr = \int_{\tilde{\gamma}} f \cdot dr$$

La lunghezza ovviamente
è sempre lo stesso

ALTR O

MODO

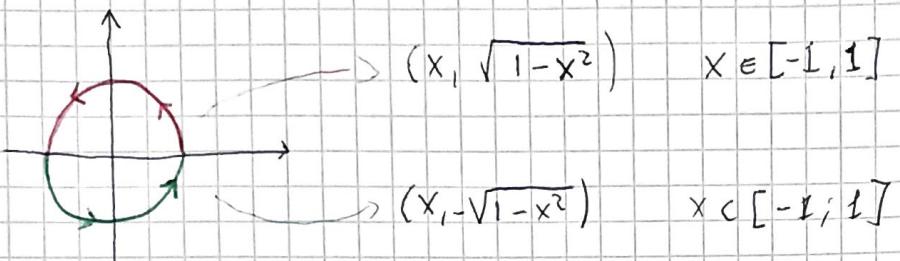
PER

CALCOLARE

\oint del CERCHIO

$\oint_{\gamma} -y dx + x dy$ dove γ è il cerchio $C((0,0), 1)$
Percorso in senso omototico.

- Prima abbiamo parametrizzato con $[0, 2\pi] \rightarrow (x, y)$
- DRA PARAMETRIZZIAMO



$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

TEOREMA DI GAUSS-GREEN

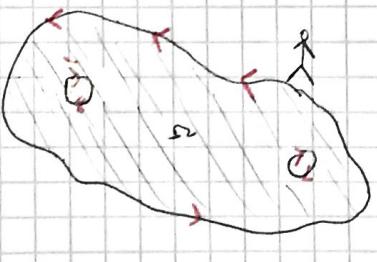
Siamo $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ due funzioni di 2 variabili di classe C^1 :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial\Omega} P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

TEO
GG

Bisogna dire che orientazione di Ω sul bordo di $\partial\Omega$

$\partial\Omega^+$ è l'orientazione per cui percorrendo $\partial\Omega$, la testa velle rimane



E.S.

[1]

Calcolare $\oint_Y F(x,y,z) \cdot d\vec{F}$

$Y: [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow (\cos t, \sin t, t)$ ~ CILINDRICA

Dovrò individuare il campo di integrazione

$$\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned} \oint_Y -y dx + x dy + z dz &= \int_0^{2\pi} -\text{sent}(-\text{sent}) dt + \int_0^{2\pi} \text{cont} \cdot (\text{cont}) dt + \int_0^{2\pi} t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t) + \text{cos}^2(t) dt + \int_0^{2\pi} t dt = \left[t \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi(1+\pi) \end{aligned}$$

P.B.

Se dovrò calcolare l'integrale nel senso inverso è inutile fare un'altra parametrizzazione. METTO UNO - davanti al RISULTATO!

B/05/12

PARAMETRIZZAZIONI EQUIVALENTI

DEF. Siamo $\gamma_1: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\gamma_2: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ due curve associate.

Diciamo che γ_1 e γ_2 sono EQUIVALENTI

Se $\exists \phi: [a,b] \rightarrow [c,d]$, $\phi \in C^1$, $|\phi'| \neq 0$

ϕ bigettiva, T.C. $\gamma_2 \circ \phi = \gamma_1$ come funzione $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$



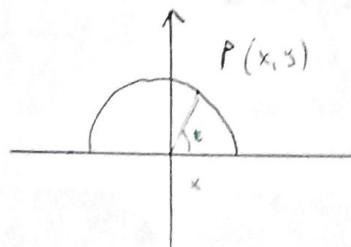
E.S.

$$[-1,1] \ni x \xrightarrow{\gamma_1} (x, \sqrt{1-x^2})$$

$$[0, \pi] \ni t \xrightarrow{\gamma_2} (\text{cont}, \text{sent})$$

$$\rightarrow x = \text{cont}$$

quindi si prende la funzione $\phi: t \rightarrow \text{cont}$
 $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$



TEOREMA

Se $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono curve
e sono EQUIVALENTI, ALLORA:

$$\boxed{l(\gamma_1) = l(\gamma_2)} \quad \text{hanno le stesse lunghezze.}$$

DIMOSTRAZIONE

$\exists \phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ t.c. $\gamma_2 \circ \phi = \gamma_1$ | i supporti devono essere uguali!

• Tesi

$$l(\gamma_1) = \int_a^b \|\dot{\gamma}_1\| dt = l(\gamma_2) = \int_c^d \|\dot{\gamma}_2\| dt$$

• PROCEDIMENTO:

da $\gamma_2 \circ \phi = \gamma_1$, ricaviamo la DERIVATA COMPOSTA

$$(\dot{\gamma}_2 \circ \phi) \cdot \phi' = \dot{\gamma}_1 \rightarrow \|\dot{\gamma}_1\| = \|(\dot{\gamma}_2 \circ \phi)\| \cdot |\phi'|$$

$$\rightarrow \int_a^b \|\dot{\gamma}_1\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}_2 \circ \phi\| \cdot |\phi'| dt \xrightarrow{\phi(s)=t} \int_c^d \|\dot{\gamma}_2\| dt$$

CURVA CHIUSA

DEF: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice CURVA CHIUSA se:

$$\boxed{\gamma(a) = \gamma(b)}$$

ESEMPIO

• Una curva chiusa è:

$$[0, 2\pi] \ni t \rightarrow (\cos t, \sin t) \quad \text{UNA CIRCONFERENZA}$$

• Una curva NON chiusa è:

$$[0, \pi] \ni t \rightarrow (\cos t, \sin t) \quad (\text{SEMI CIRCONFERENZA})$$

$$[0, 2\pi] \ni t \rightarrow (\cos t, \sin t, t) \quad (\text{ELICA})$$

FORMULA di GAUSS-GREEN

[3]

ho un integrale doppio.

INTEGRALE
DOPPIO

$$\iint_{\Omega} F(x,y) \, dx \, dy \quad \text{con } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$



Se mom ricerco - risolvere utilizzando le formule di GAUSS-GREEN

INTEGRALE DI 2°
SPECIE AL V_Ω

$$\oint f(x,y) \, dx + g(x,y) \, dy$$

Per qualche $f = g$ associate

ESEMPIO Si APPLICAZIONE ~

$$\gamma: [\alpha, b] \longrightarrow (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2$$



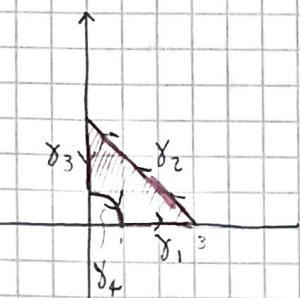
$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \longrightarrow \oint_{\partial \Omega}$$

ESEMPIO

si dà $\Omega = \{(x, y) \mid x+y \leq 3, x^2+y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

calcolare

$$\oint_{\partial\Omega} x^2 dx + y^2 dy$$



Nom
borolo
poss
promettendo
il
com
un
funzione.

Premo
 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

$$\oint_{\partial\Omega} x^2 dx + y^2 dy = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

- $\gamma_1 : [1, 3] \ni t \rightarrow (t, 0)$

$$\int_{\gamma_1} x^2 dx + y^2 dy = \int_1^3 t^2 dt + 0 = \dots$$

- $\tilde{\gamma}_2 : [0, 3] \ni t \rightarrow (t, -t+3)$

$$\int_{\tilde{\gamma}_2} x^2 dx + y^2 dy = \int_0^3 t^2 dt - (3-t)^2 dt = \dots$$

PERCHÉ IN REALTA' LO PERCORSO È CONTRARIO!

- $\tilde{\gamma}_3 : [1, 3] \ni t \rightarrow (0, t)$

$$\int_{\tilde{\gamma}_3} = - \int_{\tilde{\gamma}_3} t^2 dt$$

- $\tilde{\gamma}_4 : [0, \frac{\pi}{2}] \ni t \rightarrow (\cos t, \sin t)$

$$\int_{\tilde{\gamma}_4} = - \int_{\tilde{\gamma}_4} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^2 \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \cos t dt$$

Con GAUSS-GREEN

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} (2y - 2x) dx dy$$

dove $Q = x^2$

$$P = y^2$$

Calcoliamo l'integrale doppio

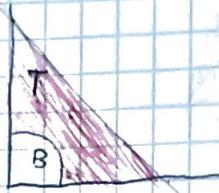
$$2 \iint_R (x-y) dx dy \rightarrow f(x) = \emptyset$$

VEDIAMO PER ESERCIZIO COME CALCOLARE
L'INTEGRALE SU QUELLA REGIONE

$$T = (0,0), (0,3), (3,0)$$

1° STRADA
T-B

$$2 \iint_T (x-y) dx dy - 2 \iint_B (x-y) dx dy$$



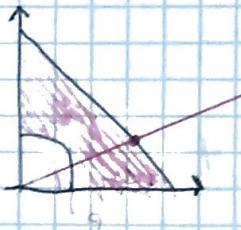
$$\begin{aligned} \rightarrow \iint_B (x-y) dx dy &= \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta) \rho d\vartheta \\ &= \int_0^1 \rho^2 d\rho \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta - \sin \vartheta) d\vartheta \right) = \dots \end{aligned}$$

$$\rightarrow \iint_{T-B} (x-y) dx dy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (x-y) dy = \text{dove } I = \{x \in [0,3], 0 \leq y \leq 3-x\}$$

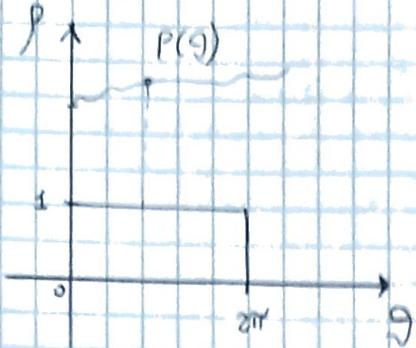
$$= \int_0^3 dx \left[x \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=3-x}$$

$$= \int_0^3 \left[x(3-x) - \frac{(3-x)^2}{2} \right] dx = \dots$$

2° STRADA (coordinate Polari)



Pet n'attivete questo dominio in coordinate polari dobbiamo sfruttare la TRIGONOMETRIA.
So che $\vartheta \in [0, 2\pi]$, ma ρ ?



$$(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



$$\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 3$$



$$\rho = \frac{3}{\cos \theta + \sin \theta}$$

quindi il dominio Ω in polari si viene

$$\Omega \rightarrow A = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 1 \leq \rho \leq \frac{3}{\cos \theta + \sin \theta} \right\}$$

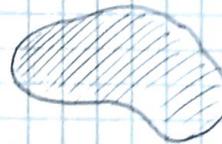
quindi il motivo integrale $\iint_{\Omega} (x-y) dx dy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\frac{3}{\cos \theta + \sin \theta}} (\rho \cos \theta - \rho \sin \theta) \rho d\rho = \dots$$

AREA REGIONE RACCHIUSA DA UNA CURVA CHIUSA

Definiamo curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\iint_{\Omega} 1 dx dy = ?$$



Andiammo a cercare un Ω e un P c.c.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$\begin{array}{ll} 1 \quad Q(x, y) = x & P(x, y) = 0 \\ 2 \quad Q(x, y) = 0 & P(x, y) = -y \\ 3 \quad Q(x, y) = \frac{x}{2} & P(x, y) = -\frac{y}{2} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Tutte mi danno 1} \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \right) \end{array} \right\}$$

Per trovare l'area (Ω) dove Ω è la regione racchiusa da γ

$$\begin{aligned} \text{AREA} & \left\{ \begin{array}{l} \int_{a \gamma}^{b \gamma} x dy \\ \int_{a \gamma}^{b \gamma} -y dx \\ \int_{a \gamma}^{b \gamma} \frac{x}{2} dy - \frac{y}{2} dx \end{array} \right. \end{aligned}$$

Per ottenere rettangoli positivi



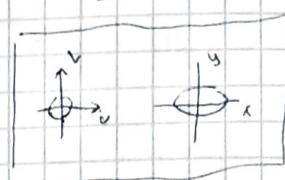
Ammette ne l'orientazione
forse abusiva niente geometrico di
AREE.
ci mettiamo il valore assoluto.

$$\left| \oint_{\Omega} x \, dy \right|$$

ES. 1

Calcolare Area (Ω) dove $\Omega = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

- 1) cambiare di variabili: $\frac{x}{a} = u \quad \frac{y}{b} = v$

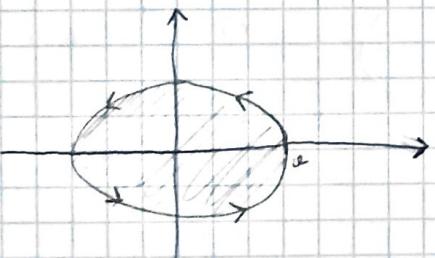


$$J\phi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \det J\phi = ab$$

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \iint_{\{v^2+u^2 \leq 1\}} ab \, du \, dv = \boxed{\pi ab}$$

AREA ELLISSE

- 2) GAUSS - GREEN



$$\text{Area } (\Omega) = \left| \oint_{\gamma} x \, dy \right|$$

$$\gamma: [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow (a \cos t, b \sin t)$$

$$\text{Area } (\Omega) = \left| \oint_{\gamma} x \, dy \right| = \left| \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t \, dt \right| =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \boxed{\pi ab}$$

- 3) Prendere Ω come matrice rimetto all'uno Ψ

$$\Omega = \left\{ (x,y) \mid -a \leq x \leq 0, -\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} \leq y \leq \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} \right\} \quad | \quad \text{Pomyr}$$

$$\text{Area } (\Omega) = \int_{-a}^a dx \int_{\Psi(x)}^{\Psi(a)} dy = 2 \int_{-a}^a dx \cdot (\Psi(x)) = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

$s = \frac{x}{a}$

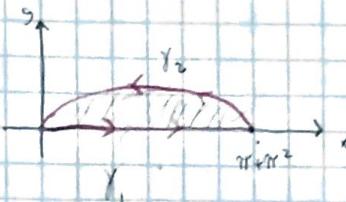
$$= 2ab \int_{-1}^1 (1-s^2)^{1/2} ds = 2ab \int_1^1 \sqrt{1-s^2} ds \quad s = \cos \theta$$

$$= 2ab \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 t} dt = \boxed{\pi ab}$$

15 - MAGGIO

ESEMPIO

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regione racchiusa tra leorse delle x e la curva $\gamma: [0; \pi] \ni t \rightarrow (t+t^2, \sin t)$



L'area di questa regione la possiamo calcolare come $\iint_{\Omega} 1 dx dy$
→ Possiamo pensare come normale all'asse y ...

Perché x è compreso tra 0 e $\pi + \pi^2$, ma non è facile cogliere di quale funzione questa curva è il grafico,
non abbiamo $(t, \sin t)$, dovremo lavorarci un po' più.
È molto più semplice utilizzare g a gettare come
la parametrizzazione del bordo! Allora

$$\text{Area } (\Omega) = \oint_{\partial\Omega} x dy$$

• $\partial\Omega$: bordo di Ω orientato in senso ANTI-ORARIO.

• Come abbiamo visto che possiamo calcolare come: $\underline{x dy, -y dx}$ o $\underline{\frac{\partial y}{\partial x}}$

Scegliamo $x dy$:

$$\bullet \gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \pi + \pi^2]$$

$$\int_{\partial\Omega} x dy = \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy \quad \int_{\gamma_1} = \int_0^{\pi + \pi^2} t \cdot 0 dt = 0$$

$$\bullet \gamma_2(t): t \rightarrow (t + t^2, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\int_{\gamma_2} x dy = - \int_0^\pi (t + t^2) \cdot \cos t dt$$

per $x dy$

Si risolve per parti:
dovrà essere positivo ovviamente.

• I_H

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial \Omega^+} P dx + Q dy$$

GAUSS-GREGORI

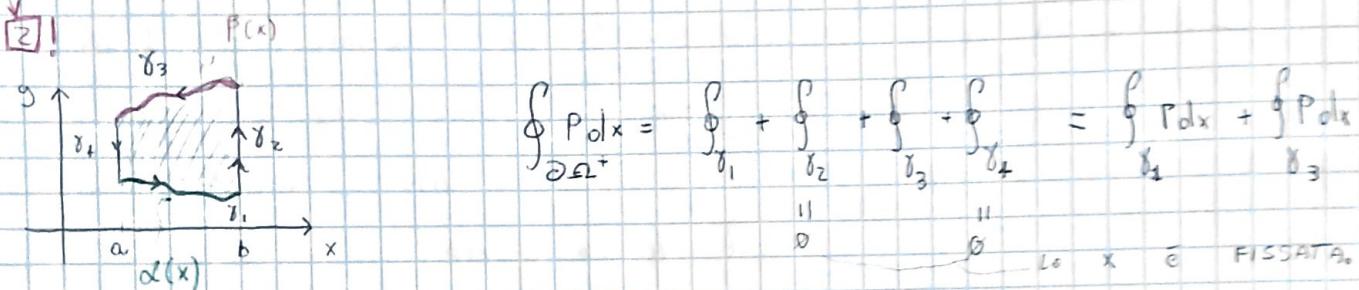
• DIMOSTRAZIONE (CASO SEMPLIFICATO)

Supponiamo Ω rettangolare sia riempito di x che di y

Allora mi basta provare che:

$$① \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial \Omega^+} Q dy \rightarrow \text{SFRUITO } \Omega \text{ NORMALE A } x$$

$$② \quad - \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial \Omega^+} P dx \rightarrow \text{SFRUITO } \Omega \text{ NORMALE A } y$$



$$\int_{\partial \Omega^+} P dx = \int_a^b P(t, \alpha(t)) dt - \int_a^b P(t, \beta(t)) dt$$

• Sono un altro PROCEDIMENTO ARRIVIAMO allo stesso risultato.

$$- \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$\text{PER IL TH. FOND.} = - \int_a^b dx (P(x, \beta(x)) - P(x, \alpha(x)))$$

DEL CALCOLO INTEGRALE

LA DIM. DI ① È lasciata al STUDENTE.

CAMPPI VETTORIALI SU \mathbb{R}^m

DEF

Un compo vettoriale su \mathbb{R}^m è una funz.

CAMPO VETTORIALE

$$\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}$$

funzione di m componenti

\vec{F} → \vec{v} ba come imm.
un vettore

DEF

Una Scalare su \mathbb{R}^m è una funzione

FUNZ.
SCALARE

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$$

FUNZ. SCALARE
 $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

i numeri reali non scalari

ESEMPIO

$(x, y, z) \rightarrow (x^2 \cdot y, \operatorname{sen}(xy), z^2)$ è un compo
vettoriale in \mathbb{R}^3

OSS

Ogni SCALARE (se obbediscono regole) può generare
un compo vettoriale.

$$\psi: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \nabla \psi: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

DEF

Un CAMPO VETTORIALE $(F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m))$ si dice

CONSERVATIVO se $\exists \psi(x_1, \dots, x_m)$ tale che

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = F_1 \quad \dots \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_m} = F_m$$

• Un CAMPO VETTORIALE si dice CONSERVATIVO se è
il GRADIENTE di una funzione SCALARE ($\psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$)

TH.

Se $\vec{F}(F_1, \dots, F_m)$ definita su $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

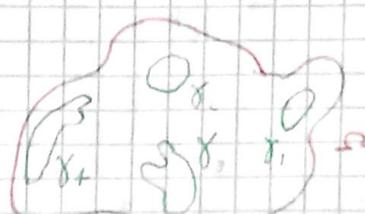
Allora \vec{F} è CONSERVATIVO (ovvero $\vec{F} = \nabla \psi$) Se e solo se



$$\oint_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_m dx_m = 0$$

A γ chiusa

• È IMPOSSIBILE VERIFICARLO, dovrei fare
l'integrale per ogni curva chiusa.
Però mi darà una relazione importante.



DIMOSTRAZIONE

- Cominciate me l dimonstratore che le due implicazioni sono vere. Facciamo solo la \Rightarrow (\Leftarrow è utile)

→ Dim \Rightarrow

• Per ipotesi $F_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \dots, F_m = \frac{\partial \Psi}{\partial x_m}$

• Prendiamo la curva gomma $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(\alpha) = \gamma(b)$

Dovrò dimonstrare che

$$\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_m dx_m = 0$$

$$\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_m dx_m = \int_{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} \cdot dx_m \quad \text{SFRUITO} \quad \text{def di } \Psi \text{ lungo } \gamma$$

$$= \int_{\alpha}^b \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \cdot (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)) \cdot \gamma'_1(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^b \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} \cdot (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)) \gamma'_m(t) dt$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$= \int_{\alpha}^b \frac{d}{dt} (\Psi \circ \gamma(t)) dt = \Psi(\gamma(b)) - \Psi(\gamma(\alpha)) = 0 \quad \text{dato che } \gamma(b) = \gamma(\alpha)$$

• ROTAZIONALE di un CAMPO VETTORIALE in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3

Def Sia $\vec{F} = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Allora si chiama Rotazione di \vec{F} : $\text{Rot } \vec{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ É UNO SCACCIATORE

Def Sia $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vettoriale in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Allora

$$\text{Rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial z}, \frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \quad \text{É UN CAMPO VETTORIALE}$$

• Come mi ricordo questa formula?

$$\det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

(in realtà è una cosa più vera di norma matematicamente) (ma siate a ricordarmi il nome in \mathbb{R}^3)

R²

DEF Un Campo Vettoriale $\vec{F} = (F_1, F_2)$ definito in \mathbb{R}^2 si dice IRROTAZIONALE se $\text{Rot } \vec{F} = \emptyset \iff \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$

R³

DEF Un Campo Vettoriale $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ definito in \mathbb{R}^3 si dice IRROTAZIONALE se $\text{Rot } \vec{F} = (0, 0, 0)$ quindi se

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

[16 MAGGIO 2017]

CAMPPI CONSERVATIVI

$\therefore \vec{F} = (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m))$, \vec{F} conservativo se $\vec{F} = \nabla \psi$, $\psi(x_1, x_m)$

TH Sia $\vec{F} = (F_1, F_2)$ oppure $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ allora se

• \vec{F} è CONSERVATIVO $\implies \vec{F}$ è IRROTAZIONALE (ma non è detto)
↑ facile da verificare
↑ facile da verificare

DIM

DIMENSIONE 2 $\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ F_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{array} \right. \implies \text{Rot}(F_1, F_2) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$

SFRUTTO IL TH. DI SCHWARTZ

DIMENSIONE 3 $\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ F_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ F_3 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{array} \right. \implies \text{Rot}(F_1, F_2, F_3) = \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y}}, \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}}, \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}} \right) = 0$

Se \vec{F} NON è IRROTAZIONALE $\implies \vec{F}$ NON è CONSERVATIVO

ESEMPIO:

$$\cdot \vec{F} = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \quad F_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad F_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

\rightarrow Dato che campo è ben definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

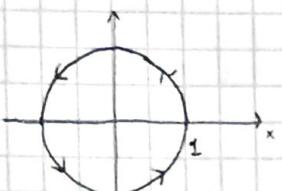
$$\text{Rot}(F_1, F_2) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

La funzione non può essere estesa per continuazione in $(0,0)$ perché non esiste il limite quando $x \rightarrow 0$.

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad \text{IRROTAZIONALE}$$

... Ora devo dimostrare che mom è conservativo ovvero che $\vec{F} \equiv \nabla \Psi \quad \forall \Psi(x,y)$. Mi basta COSTRUIRE

un cammino $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ curva chiusa t.c. $\oint_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy \neq 0$



Sceglierà una CIRCONFERENZA di RAGGIO 1 (non importa l'orientazione, se è $\neq 0$ allora opposta)

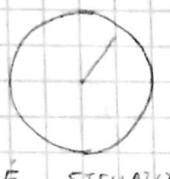
$$\gamma(t) = (\text{cont}, \text{nent})$$

$$\oint_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = \int_0^{2\pi} -\text{nent}(-\text{nent}) dt + \int_0^{2\pi} \text{cont} \text{cont} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\text{nent}^2 t + \text{cont} t \text{cont} t) dt = \int_0^{2\pi} \text{olt} dt = 2\pi \neq 0$$

DEF

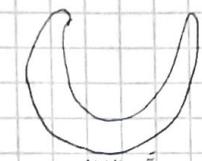
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice STELLATO se: $\forall p \in \Omega$ si ha che $[p, P] \subset \Omega$



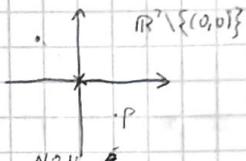
È STELLATO



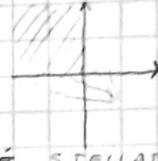
È STELLATO



NON È STELLATO
(MA TOPOLOGICAMENTE È STELLATO)



NON È STELLATO



È STELLATO

TH

$$\begin{cases} \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

STELLATO

oltre

$$\begin{cases} \vec{F} = (F_1, F_2) \\ \vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \end{cases}$$

Se IRROTAZIONALE \Rightarrow CONSERVATIVO

ESEMPIO

$$F_1(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad F_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è irrotazionale ma mom conservativo!

Consideriamo un nuovo Ω , $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$, STELLATO.

Allora posso dire che \vec{F} è conservativo su Ω (per il TH).

ESEMPIO 2

Sia dato $\vec{F} = (xy - \text{nem} z, \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^z}{z}, \frac{e^z}{z^2} - x \cos z)$ dominio $z \neq 0$

dite se il campo \vec{F} è conservativo su $z > 0$

1° PASSO: Verificare se \vec{F} è IRROTAZIONALE

2° PASSO: Se NON è IRROTAZIONALE, NON è conservativo \rightarrow FINE.
Se È IRROTAZIONALE, È CONSERVATIVO perché $\{(x,y,z) \mid z > 0\}$ STELLATO

1) PROCEDIMENTO. Verifico che è IRROTAZ.

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^y}{z^x} - x \cos z \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^y}{z^x} - \frac{e^y}{z} \right) = \frac{e^y}{z} - \frac{e^y}{z^2} = \emptyset \quad \checkmark$$

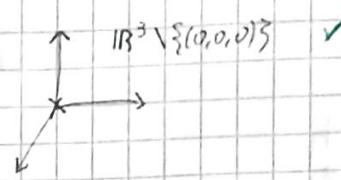
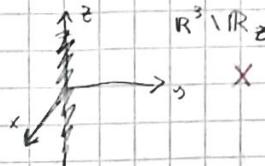
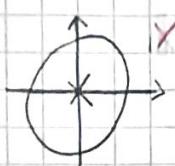
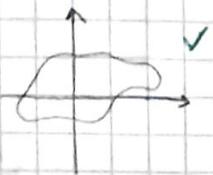
$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial}{\partial z} (x \cdot y - \operatorname{sen} z) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^y}{z^x} - x \cos z \right) = -\cos z + \cos z = \emptyset \quad \checkmark$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^y}{z^x} - \frac{e^y}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (x \cdot y - \operatorname{sen} z) = x - x = \emptyset \quad \checkmark$$

\vec{F} è IRROTAZIONALE $\implies \vec{F}$ CONSERVATIVO in $\{(x, y, z) | z > 0\}$

DEF

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è SEMPLICEMENTE CONNESSO se $\forall \gamma$ curva chiusa in Ω è possibile trovare una DEFORMAZIONE continua delle curve od un punto tenendole in Ω durante la DEFORMAZIONE.



TH

Sia Ω SEMPLICEMENTE CONNESSO, \vec{F} è IRROTAZIONALE $\iff \vec{F}$ è CONSERVATIVO

OSS

Ogni Ω STELLAUTO è SEMPLICEMENTE CONNESSO.

~ ~ ~ DIVERGENZA di UN CAMPO \vec{F} ~ ~ ~

Riconosci:

• φ SCALARE $\longrightarrow \nabla \varphi$

CAMPO VETTORIALE

• $\vec{F} = (F_1, F_2)$ CAMPO VETTORIALE

\longrightarrow Rot \vec{F} SCALARE

• $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ CAMPO VETTORIALE

\longrightarrow Rot \vec{F} CAMPO VETTORIALE TRIDIMENS.



DEF

Dato $\vec{F} = (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m))$ campo vett. m-dimensionale

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_m}$$

DIVERGENZA di un CAMPO VETTORIALE È UNO SCALARE

ESEMPIO

$$\vec{F}(x^2, y^2, z^2), \quad \text{div } \vec{F} = 2x + 2y + 2z$$

OSS $\text{div } \vec{F} = \text{tr}(\mathbf{J} \vec{F})$ la div di \vec{F} è la traccia dello JACOBIANO di \vec{F}

DEF Un campo vettoriale \vec{F} si dice SOLENOIDALE se la sua divergenza fa \emptyset

$\rightarrow \vec{F}$ solenoidale se $\text{div } \vec{F} = \emptyset$

CAMPPI SOLÉNOIDALI im \mathbb{R}^3

h.s. $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ nu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

• DIMOSTRAZIONE Quando esiste $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$ t.c.
 $\text{rot } \vec{G} = \vec{F}$?

• \vec{G} si chiama POTENZIALE VETTORE del campo \vec{F} se
il suo ROTAZIONALE è uguale ad \vec{F} .

IH:

Sia $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ campo vettoriale, ne $\exists \vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$

tale che $\text{rot } \vec{G} = \vec{F}$, allora $\text{div } \vec{F} = 0$, cioè è SINGOLARE
 $\text{rot } \vec{G} = \vec{F} \implies \text{div } \vec{F} = 0$ se Ω è semplicemente
connesso visto \iff

DIM:

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = \text{rot } \vec{G}' = (\partial_y G_3 - \partial_z G_2, \partial_z G_1 - \partial_x G_3, \partial_x G_2 - \partial_y G_1)$$

Devo dimostrare che se è vero, lo $\text{div } \vec{F} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 &= \partial_x(\partial_y G_3 - \partial_z G_2) + \partial_y(\partial_z G_1 - \partial_x G_3) + \partial_z(\partial_x G_2 - \partial_y G_1) \\ &= \cancel{\partial_{xy} G_3 - \partial_{xz} G_2} + \cancel{\partial_{yz} G_1 - \partial_{yx} G_3} + \cancel{\partial_{zx} G_2 - \partial_{zy} G_1} = 0 \end{aligned}$$

OSS:

Nom ha senso forse la divergenza di un
rotazionale im \mathbb{R}^2 . $\text{rot}(F_1, F_2) = \text{rotore}$, div (senza) non ha senso.

IH:

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ SEMPLICEMENTE CONNESSO (ad esempio
se stellato va bene) e ne $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, allora si ha
che:

$$\boxed{\exists \vec{G} = (G_1, G_2, G_3) \text{ t.c. } \text{rot } \vec{G} = \vec{F} \iff \vec{F} \text{ è SOLENOIDALE}} \quad \text{div } \vec{F} = 0$$

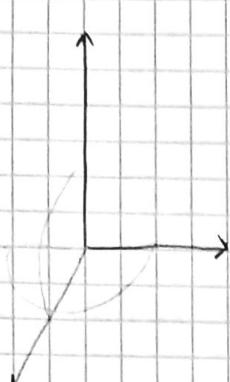
• ESEMPIO:

$$\vec{F} = (x, y, -z) \text{ nu } \mathbb{R}^3$$

• Essemolo \mathbb{R}^3 STELLATO e quindi SEMPLICEMENTE CONNESSO
Allora \vec{F} omogeneo POTENZIALE VETTORE $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$
t.c. $\text{rot } \vec{G} = \vec{F}$

DIMOSTRAZIONE: \mathbb{R}^3 è STELLATO, devo verificare che $\text{div } \vec{F} = 0$

$$\text{div } \vec{F} = 1 + 1 - 2 = 0$$



ESEMPIO SFERA

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

è una superficie! è il bordo
di una sfera di raggio 1.

ESEMPIO CILINDRO

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$



è il bordo
di un tubo
cavosuol insinuato.

SUPERFICIE PARAMETRIZZATA

DEF.

Una superficie parametrizzata è una funzione

$\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \rightarrow (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, con condizioni:

- 1. φ è una funzione iniettiva
- 2. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono di classe C^1
- 3. $J(\varphi)$, Rank $J(\varphi) = 2 \quad \forall (u, v) \in \Omega$

 $J\varphi =$

ESEMPI ESPliciti (PARAMETRIZZAZIONI)

• Portiamo sul cilindro.

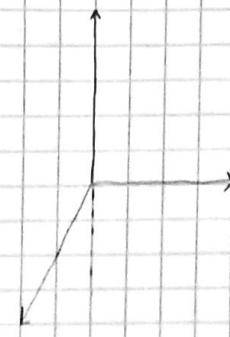
$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. come lo parametrizziamo?

$$\xrightarrow{\quad} (\theta, z) \xrightarrow{\varphi} (\underbrace{\cos \theta, \sin \theta, z}_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3})$$

Dobbiamo verificare le

3 condizioni.

- 1) Deve imporre che il dominio di θ è $[0, 2\pi]$ se non è iniettiva
- 2) deve essere aperto quindi faccio anche impongo un altro costante



3) cond.

$$J\psi = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta & 0 \\ \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{il rk è 2, posso usare Tranquillo.}$$

ESEMPIO: PARAMETRIZZARE DELLA SFERA.

devo trovare $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Possi avere le coordinate sferiche se ho definito un fotometro (r_{fix} Raggio = ℓ)

$$\Psi(\vartheta, \varphi) = (\underbrace{\sin\vartheta \cos\varphi}_{\psi_1}, \underbrace{\sin\vartheta \sin\varphi}_{\psi_2}, \underbrace{\cos\vartheta}_{\psi_3})$$

Imponiamo le condizioni

- $\varphi \in [0, \pi]$ ed siccome deve essere APERTO $\rightarrow \varphi \in (0, \pi)$ (ESCLUSO 2 PUNTI)
- $\vartheta \in [0, 2\pi] \rightarrow (0, 2\pi)$ (ESCLUSO UN ARCO)

Nelle fotometrizzazioni mi serve un arco che congiunge il polo NORD ed il Polo Sud.

Controlliamo ora se il Rango della Jacobiana

$$J\psi = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta \cos\varphi & \cos\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \cos\varphi & \cos\vartheta \sin\varphi \\ 0 & -\sin\vartheta \end{bmatrix}$$

Per verificare che il rk sia 2, devo verificare che almeno uno dei minori sia diverso da 0 (determinante)...

1) $-\sin\vartheta \cdot \cos\varphi$	Abbiamo imposto che
2) $\sin^2\vartheta \sin\varphi$	$\varphi \in (0, \pi)$ e $\vartheta \in (0, 2\pi)$
3) $-\sin^2\vartheta \cos\varphi$	

SUPERFICI CARTESIANE

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, z = f(x, y)\}$$

Le parametrizzazione è GRATIS.

Allora:

- Dico che S è una superficie parametrizzata.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Psi} S \subseteq \mathbb{R}^3$$

dove corrisponde la parametrizzazione più ovvia.

$$\alpha: (\Omega, v) \xrightarrow{\Psi} (u, v, f(u, v))$$

$$1. 2) \quad \text{Se } f \in C^1 \Rightarrow \Psi \in C^1$$

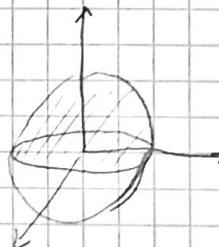
Scriviamo le Jacobiane.

$$J\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sono già ottenute.}$$

ESEMPIO SEMI SFERA

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

Com'è la parametrizzazione con angoli.



perdendo delle parti. (gli insieme devono essere aperti.)

$$\cdot (\vartheta, \phi) \longrightarrow (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2}) \quad \Psi_1$$

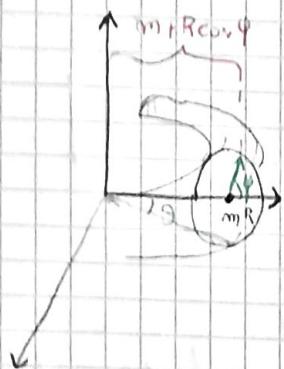
Oppure riconoscere parametrizzarla come grafico di una funz.

$$\cdot (u, v) \xrightarrow{\Psi_2} (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

Così possiamo parametrizzare una semisfera! (indotti: cui si immagine A coppia di (x, y))

PARAMETRIZZAZIONE: BORDO DEL TORO

Dico che è una superficie parametrizzata.



$$(\theta, \varphi) \rightarrow (\text{?}, \text{?}, R \cdot \sin \varphi)$$

$$(\theta, \varphi) \rightarrow ((m+R\cos\varphi)\cos\theta, (m+R\cos\varphi)\sin\theta, R \cdot \sin\varphi)$$

$$(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$$

ESCLUSO 2 CIRCONFERENZE
UNA SUL MINORE DELL'ALTRA
e una sul piatto YZ

Controlliamo il Jacobiano

$$J\psi = \begin{bmatrix} -(m+R\cos\varphi)\sin\theta & -R\sin\varphi\cos\theta \\ (m+R\cos\varphi)\cos\theta & -R\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ 0 & R\cdot\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\det = \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_1 R \underbrace{(m+R\cos\varphi)}_{\neq 0} \neq 0$$

Per $m > R$

AREA

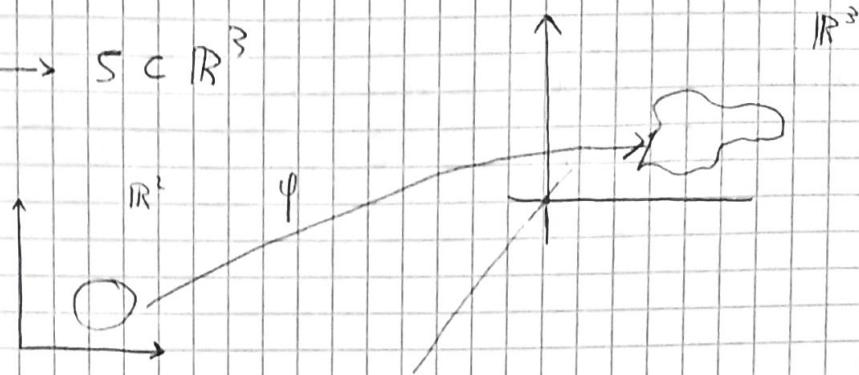
di

UNA

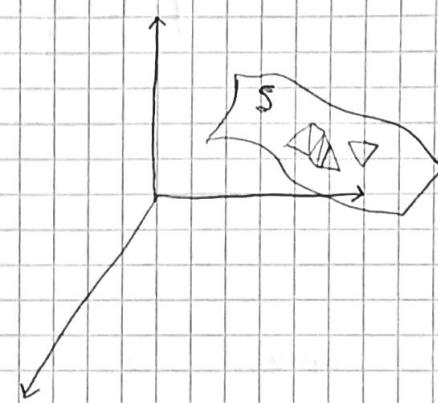
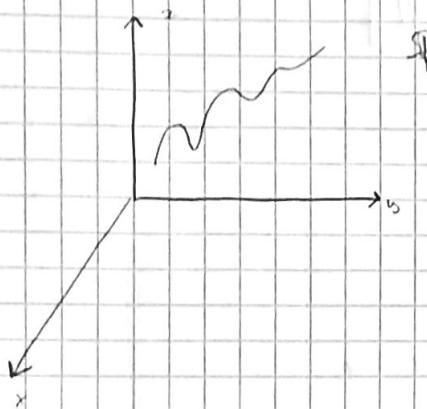
SUPERFICIE

23 MAGGIO 2017

$$\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$



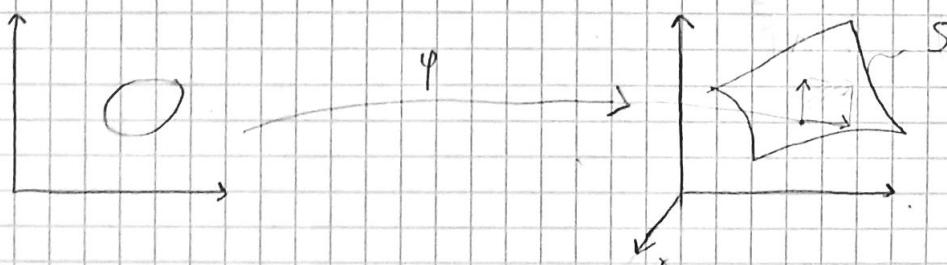
Se φ funziona di over una curva in \mathbb{R}^3



ha una superficie
nella. Per es.
Triangoli sempre
più piccoli.

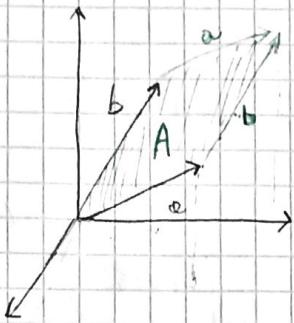
Se definiamo Area (S) = Area (Ω)

- Dobbiamo combiniare procedimenti nell'ottimizzazione Area di S . Perché con questo ha un valore troppo grande.
- Abbiamo di muovere la superficie S in \mathbb{R}^3 e le funzioni $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ di classe C^1



Nom ottimizzar com triangoli ma com
Pezzerini d' Riom Tomente.

DOMANDA di GEOMETRIA
Siamo in \mathbb{R}^3 , $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$



$$\text{AREA}(A) = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$$

• PRODOTTO ESTERNO DI VETTORIALE •

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

vite nob. in \mathbb{R}^3

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{x} a_2 b_3 + \bar{y} a_3 b_1 + \bar{z} a_1 b_2 - \bar{z} (b_1 a_2 - \bar{y} a_1 b_3 - \bar{x} a_2 b_2)$$

ESEMPIO

"NOTAZIONE PRIMA DI SENSO"

Dato il campo vettoriale \vec{F} in \mathbb{R}^3

il suo rotazionale (è un altro CAMPO VETTORIALE)

$$\text{Rot}(\vec{F}) = \nabla \wedge \vec{F}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

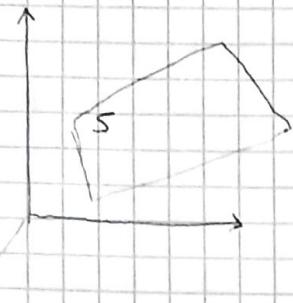
AREA

di

UNA

SUPERFICIE

PARAMETRIZZATA



Ottendiamo con una parametrizzazione

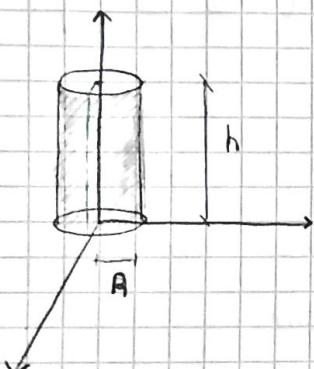
$$\varphi: (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

iniettiva e di classe C^1

DEF

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$$

• AREA di UN CILINDRO $C((0,0), R)$ di altezza h .

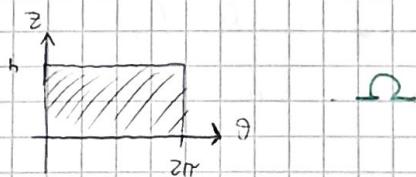


N.B.

NON sono parametrizzate tutte le cilindre.
Perché parametrizzabili ne escludono il segmento che ha area nulla perché ha dimensione 1.

La φ che parametrizza il cilindro è:

$$\varphi: (0, 2\pi) \times (0, h) \ni (g, z) \longrightarrow (R \cos g, R \sin g, z)$$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial g} = \begin{pmatrix} -R \cdot \operatorname{sen} g \\ R \cdot \cos g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -R \cdot \operatorname{sen} g & R \cdot \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (R \cdot \cos g, R \cdot \operatorname{sen} g, 0)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial g} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \det$$

$$\left\| (R \cdot \cos g, R \cdot \operatorname{sen} g, 0) \right\| = \sqrt{R^2 \cdot \cos^2 g + R^2 \cdot \operatorname{sen}^2 g} = R$$

$$A_{\text{tra}}(c) = \iint_{\Omega} R \, d\theta \, dz = R \cdot A_{\text{cir}}(\Omega) = 2\pi R \cdot h$$

SUPERFICIE
LATERALE
DEL
CILINDRO

\rightarrow Ma non le boni! (con la prossima def, saprò che mi basta sommare l'area delle 2 circonferenze)

OSSERVAZIONE:

METODO

ALTERNATIVO

per

calcolare $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$

dati \vec{a}, \vec{b} , esiste un modo alternativo per calcolare $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$?

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ha 3 minori, oltre sono forte
norme del determinante dei minori

FORMULA

ALTERNATIVA

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\det(a_1 b_1)^2 + \det(a_2 b_2)^2 + \det(a_3 b_3)^2}$$

\rightarrow SUPERFICIE

IU

SENSO

GENERALIZZATO

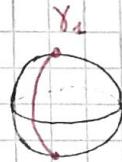
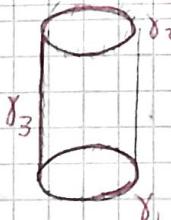
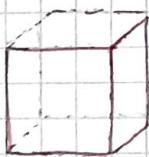
DEF

Si dice che $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie in senso generalizzato se esistono un numero finito di curve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ t.c. $S \setminus \{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_m\}$ è unione di superfici parametrizzate.

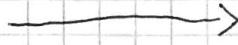
ovvero

Se $\exists \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ curve t.c. $S \setminus \{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_m\}$ DEF

- ultra $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ COMPATTA



- Che significa? Che se ho una superficie qualunque in \mathbb{R}^3 , che posso ottenerne con una parametrizzazione che mi toglie un numero finito di curve, posso definire l'area di S come la somma delle aree S_1, S_2 ecc.



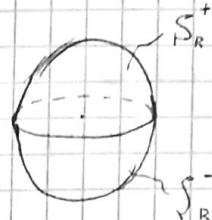
"ED inoltre l'area globale di S generalizzata
è la somma dei piccoli pezzi parametrizzati"

$$\text{Area}(S) = \text{Area}(S_1) + \text{Area}(S_2) + \dots + \text{Area}(S_n)$$

ESEMPIO, CALCOLO AREA SFERA

ovvero della BUCCHIA della SFERA.

$$\text{Area di } S_R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$



• Con coordinate sferiche

$$(0, 2\pi) \times (0, \pi) \ni (\theta, \varphi) \xrightarrow{\Psi} (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$$

①

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \theta \\ R \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ -R \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$$

② con il metodo alternativo (somme dei quadrati dei determinanti)

$$\begin{vmatrix} -R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta & R \cos \varphi \cos \theta \\ R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta & R \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ 0 & -R \cdot \sin \varphi \end{vmatrix}$$

↓

$$\left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{R^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \theta + R^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta + R^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$$= R^2 \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi} = R^2 \cdot \sqrt{\sin^2 \varphi \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

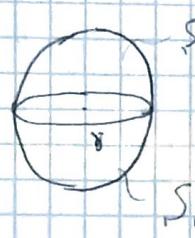
$$= R^2 \cdot \sin \varphi \quad \begin{array}{l} \text{(Perche } \varphi \text{ è compreso tra } 0 \text{ e } \pi, \\ \text{non è mai negativo!} \end{array}$$

③

$$\int_{\Omega} R^2 \cdot \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_{\Omega} \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \quad \text{con } \Omega = \{(\theta, \varphi) \mid \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]\}$$

$$= [\pi R^2] \text{ AREA DELLA SFERA (o della BUCCHIA)}$$

• Ora dividiamo la sfera in 2 pezzi METODO 2



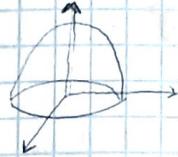
$$\text{Area}(S) = \text{Area}(S_R^+) + \text{Area}(S_R^-)$$

$$S_R \setminus Y = S_R^+ \cup S_R^-$$

S_R^+ è una superficie CARTESIANA.
COME LA CALCOLO?

$$(u, v) \longrightarrow (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$$

$$u \Rightarrow (u, v) \xrightarrow{\phi} (u, v, f(u, v))$$



$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{array} \right| \xrightarrow{\text{allora}} \iint_A \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2} du dv$$

FORMULA GENERALE per SUPERFICI CARTESIANE

$$\text{Area}(S_R^+) = \iint_A \sqrt{1 + \frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2}} du dv$$

$$= \iint_{\{u^2 + v^2 \leq R^2\}} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - u^2 - v^2}}$$

Cominciamo da POLARI

$$\rightarrow \iint_A \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - p^2}} \cdot p \cdot dp \cdot d\theta =$$

$$= 2\pi R \int_0^{R^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 - r}} \cdot \frac{dr}{2}$$

$$= \pi R \int_0^{R^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 - r}} dr = \pi R (-2) \left[\sqrt{R^2 - r} \right]_0^{R^2}$$

$$= -2\pi R (-R) = 2\pi R^2.$$

$$\text{con } A = \{(p, \theta) \mid p \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

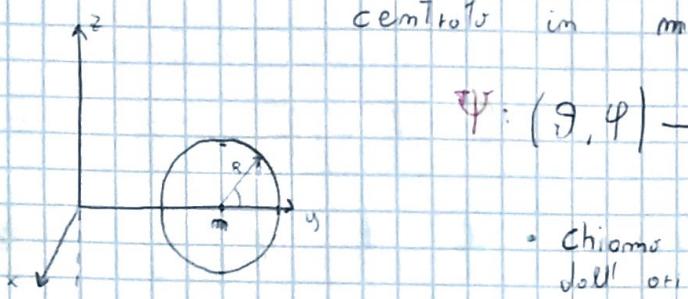
$$\text{Per } 2pd\theta = dr \implies p^2 = r$$

Per simmetria ovvio che stava risultato

$$\text{Per la sfera infatti quindi Area}(S) = 4\pi R^2$$

ESEMPIO, CALCOLO AREA DEL TORO

REC
1.42



$$\Psi: (\theta, \varphi) \longrightarrow (H \cos \theta, H \sin \theta, R \cdot n \cdot \varphi)$$

• Chiamiamo $H = (m + R \cdot \cos \varphi)$ la distanza dall'origine

Il TORO è una SUP. GENERALIZZATA.

$$\oint \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi$$

Facciamo a cose.

2° FORMULA DI GOLDIARD (AREA DELLA SUPERFICIE DI ROTAZIONE)

Sia γ una CURVA CHIUSA in (x, z) e sia S la Superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse z .

$$\text{Area}(S) = 2\pi \cdot X_\gamma \cdot l(\gamma)$$

$$X_\gamma = \frac{\int_{\gamma} x \, dz}{l(\gamma)}$$

BARICENTRO della CURVA

torino del toro

$$\text{Area}(S) = 2\pi \cdot X_\gamma \cdot l(\gamma)$$

$$\int_{\gamma} x \, dz = \int_0^{2\pi} (m + R \cos \theta) \cdot R \cdot d\theta = 2\pi m R$$

$$\text{mentre} \quad l(\gamma) = 2\pi R \quad ; \quad X_\gamma = m$$

$$\text{Area}(S) = 2\pi \cdot m \cdot 2\pi R = \underline{+4\pi^2 m \cdot R}$$

AREA del TORO.

INTEGRALI DI SUPERFICIE

- È l'omologo dell'integrale di 1° specie lungo curve ma stovolte su SUPERFICI.
- Da non confondermi con gli integrali triple (dxdydz) qui si integra su una superficie, non su un Volume.

• Supponiamo $\int_S f(x, y, z) d\sigma$ con (S, φ) $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$
 $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

DEF

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} f(\varphi(u, v)) \| \partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi \| du dv$$

INTEGRALE LUNGO UN PEZZO DI SUP. PAR.

- Se S è una superficie in senso geomet.

$$S \setminus \{\gamma_1 \cup \gamma_2 \dots \cup \gamma_n\} = \bigcup_{i=1}^m S_i$$

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \sum_{i=1}^m \int_{S_i} f(x, y, z) d\sigma$$

è la somma degli integrali della superficie

ESEMPIO

$$\int_S (x^2 + y^2) d\sigma , \quad S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

→ SFERA TRIDIMENSIONALE

1 PROCEDIMENTO (UTILIZZANDO LE COORDINATE SFERICHE)

$$(0, 2\pi) \times (0, \pi) \ni (\theta, \varphi) \xrightarrow{\psi} (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

$$\iint_{(0, 2\pi) \times (0, \pi)} (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) \cdot \sin \varphi \cdot d\theta d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\psi(\theta, \varphi)) \| \partial_\theta \psi \wedge \partial_\varphi \psi \| d\varphi d\theta$$