

## SISTEMI MECCANICI DISCRETI NON VINCOLATI

Lo **spazio** e' Euclideo Tridimensionale  $E^3$ , uno spazio affine reale in cui e' definito un

- **Prodotto Scalare**  $\cdot : V^3 \times V^3 \rightarrow \mathfrak{N}$
- **Prodotto Vettoriale** scelto in modo da avere una terna **levogira**  $X_{1,2} : V^3 \times V^3 \rightarrow V^3$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \times \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

Si definisce uno **spazio tempo di Galileo**  $G = E^3 \times R$ , un fibrato banale che ha per retta il tempo e associa ad ogni tempo un vettore.

Si definisce un **sistema di riferimento**  $O_{xyz}$  una mappa differenziabile in  $E^3$  con versori ortogonali. Anche il moto e' una mappa differenziabile (ovvero velocita' e accelerazioni sono sempre definite lungo la traiettoria). L'ortogonalita' e' rappresentata da:

$$\hat{\varepsilon}_i \cdot \hat{\varepsilon}_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j \quad \forall t$$

Definire i sistemi di riferimento e' importante per riuscire a studiare il moto in un sistema di riferimento **equivalente**, dato che le forze possono dipendere dal sistema di riferimento scelto (dipendendo da posizione, velocita' e tempo).

### Sistemi di riferimento inerziali

#### Dimostrazione della loro esistenza

Si prenda in un sistema di riferimento  $O_{xyz}$ , chiamato  $\Sigma$ , tale che le forze dipendano da posizione velocita' e tempo, dove valga il **principio di sovrapposizione**, il **determinismo di LaPlace** e la **seconda equazione della dinamica**:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(x_1 \dots x_N, \dot{x}_1 \dots \dot{x}_N, t) \\ m_i \ddot{x}_i|_{\Sigma} = \mathbf{F}_i \end{cases}$$

In tale sistema e' definibile un gruppo di trasformazioni, *in cui sono contenute tutte le trasformazioni della meccanica classica ma non quella relativistica*, detto **Gruppo di trasformazioni Galileo**,  $G$  tale che

- Conservi gli **intervalli di tempo**
- Conservi l'**orientazione del tempo**
- Conservi la **distanza spaziale** fra eventi simultanei

Date tali trasformazioni, si definiscono **sistemi di riferimento inerziali** quelli per cui le equazioni  $m_i \ddot{x}_i|_{\Sigma} = \mathbf{F}_i$  sono invarianti. Cioe', se  $x(t)$  e' una soluzione in un sistema di riferimento inerziale, lo e' anche in un altro. Per trovare tali sistemi all'interno del gruppo di trasformazioni le forze devono soddisfare certi requisiti. In  $G$ , ogni trasformazione dei sistemi di riferimento e' combinazione di:

- **Moto con velocita'  $u$**   
 $g_1(x, t) = (x + tu, t)$
- **Traslazione dell'origine** in spazio e tempo  
 $g_2(x, t) = (x + y, t + s)$
- **Rotazione** con una matrice  $G$   
 $g_3(x, t) = (Gx, t)$

Definita un applicazione lineare  $\psi$  una generica trasformazione e' data da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{pmatrix} G_{11}G_{12}G_{13}u_1 \\ G_{21}G_{22}G_{23}u_2 \\ G_{31}G_{32}G_{33}u_3 \\ v_1 v_2 v_3 a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} \text{ cioè } \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{vmatrix} G & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & a \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix}$$

Affinche essa faccia parte del gruppo  $G$  si dovrà imporre, per due eventi simultanei  $(\begin{smallmatrix} x_1 \\ t \end{smallmatrix})$  e  $(\begin{smallmatrix} x_2 \\ t \end{smallmatrix})$  pedici indicano ora dei vettori

- **Invarianza degli intervalli di tempo**

$$|\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + a(t_1 - t_2)| = |t_1 - t_2|$$

Da cui segue  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $a = \pm 1 = 1$

- **Invarianza della distanza fra eventi simultanei** (con rotazione)

$$|G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

Da cui segue che  $G \in O(3)$  e per noi  $G \in SO(3)$  (**gruppo ortogonale speciale**)

Basta imporre questa perche' già  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  e  $a = 1$

Per dimostrare l'esistenza di **riferimenti inerziali** ora va applicata la trasformazione  $\psi$  alle soluzioni che devono essere invarianti, dunque:

- **Invarianza della soluzione per traslazioni di tempo**  $g_1$

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t+s) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$$

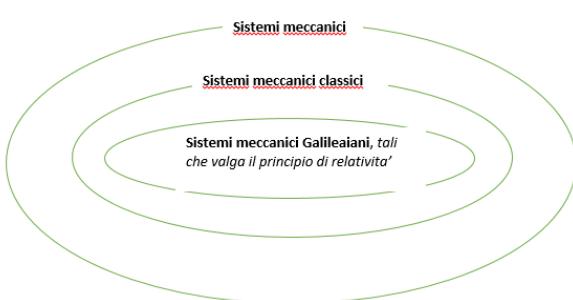
Affinche sia in generale vera si deve avere che la forza non dipende dal tempo.

- **Invarianza per traslazioni uniformi**  $g_2$

Se  $\mathbf{x}(t)$  e' soluzione anche  $\mathbf{x}(t) + t\mathbf{u} + \mathbf{y}$ , dunque la forza, potendo dipendere da velocita'e spazio, deve essere costante (nel tempo, perche' non ne dipende, e nello spazio)

- **Invarianza per rotazioni**  $g_3$

La forza deve essere nulla



**Principio di relatività Galileano** : esistono sistemi di riferimento inerziali, se la velocità relativa dei sri è costante. Ciò prova il **primo principio della dinamica**, ovvero il **principio di inerzia**:

Se su di un corpo non agiscono forze, il suo moto è rettilineo uniforme.

Spazio e sistemi di riferimento generici  $\rightarrow$  Gruppo di Trasformazioni di Galileo,  $g_1, g_2, g_3$

$\rightarrow$  Scrittura applicazione lineare  $\psi$  e sua appartenenza a  $G \rightarrow$  def. SRI

$\rightarrow$  invarianza delle soluzioni, data  $\psi$ , per le  $g_1, g_2, g_3$

## Sistemi di riferimento in moto relativo

### Sistemi di riferimento in rotazione: formule di Poisson

**nota** ognuno dei termini di un'equazione, ammesso che non sia coinvolta la matrice R di cambiamento di base, è espresso nella stessa base degli altri.

Si prendano due sistemi di riferimento  $\Sigma = O_{xyz}$  con versori  $\widehat{e_h}$  e  $\Sigma'$  in rotazione con versori  $\widehat{e'_h}$

L'esistenza di una mappa differenziabile di posizione implica l'esistenza di un vettore  $u$  che sia univoco nella sua rappresentazione in  $\Sigma$  con base  $\widehat{e_h}$  e in  $\Sigma'$  con base  $\widehat{e'_h}$ .

Cio' non implica pero' che la derivata di  $u$  sia indipendente dal sistema di riferimento in cui viene valutata, ammesso che la matrice di cambiamento di base  $R_{\Sigma' \Sigma} = R$  non sia costante nel tempo.

E' utile quindi definire un operatore di derivazione in un sistema di riferimento, che ha senso di esistere solo quando si parla di derivate di vettori, e si indica con  $|_{\Sigma}$ .

Si definiscono le derivate di un vettore nei due sistemi di riferimento

$$\begin{aligned}\dot{u}_{|\Sigma} &= \sum \dot{u}_h \widehat{e_h} \\ \dot{u}_{|\Sigma'} &= \sum \dot{u}'_h \widehat{e'_h}\end{aligned}$$

Segue che bisogna quindi calcolare la derivata dei versori, per poter unire le due espressioni di  $\dot{u}_{|\Sigma}$  e  $\dot{u}_{|\Sigma'}$ , che devono sicuramente esser legate fra di loro per l'esistenza della mappa posizione

**Metodo 1** Notare che le derivate dei versori devono giacere su un piano perpendicolare al versore, e trovare coefficienti risolvendo il sistema di perpendicolarità dei versori. Si trova il sistema lineare:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix}$$

Il vettore  $w$  risulta essere nucleo dell'applicazione lineare e  $\lambda_{2,3} = \pm iw$ . Posta R la soluzione e

$$\begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad \text{si ha } \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

**Metodo 2** usare una matrice R di cambiamento di base e derivare la sua espressione

$$\begin{aligned}e_h' &= Re_h & e_h &= R^{-1}e_h' \\ \dot{e_h}'|_{\Sigma} &= \dot{R}e_h = \dot{R}R^TRe_h = \dot{R}R^Te_h' & \dot{e_h}|_{\Sigma'} &= -\dot{R}R^{-1}R^{-1}e_h' = R^{-1}\dot{R}e_h = -\dot{R}R^Te_h\end{aligned}$$

La matrice  $\dot{R}R^T$  risulta essere antisimmetrica (dato che  $R \in SO(3)$  per derivazione di  $RR^T = I$  e tale che

$$\dot{R}R^T = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta quindi, con entrambi i metodi  $\dot{e_h}'|_{\Sigma} = w \times e_h'$ ,  $\dot{e_h}|_{\Sigma'} = w^* \times e_h$

dove  $w$  indica la rotazione dei versori  $e_h'$  rispetto agli  $e_h$ , mentre  $w^*$  il contrario. Si nota che  $w^* = -w$ . Tutte le formule riportate di seguito sono coerenti con  $w^* = -w$  se si cambia "punto di vista", ma si è soliti usare soltanto  $w$ . La formula per la derivazione di un vettore risulta quindi essere:

$$\dot{u}_{|\Sigma} = w \times u + \dot{u}_{|\Sigma'}$$

Applicando la formula al vettore  $w$  si trova che  $\dot{w}_{|\Sigma} = \dot{w}_{|\Sigma'}$  unico vettore che non risente del sistema di riferimento in cui è stato derivato, ovvero cambia allo stesso modo in entrambi i sistemi.

Cioè è conseguenza del fatto che  $w$  è nucleo della matrice  $\dot{R}R^T$ . Da ciò si deduce che se un punto è in movimento sull'asse istantaneo di rotazione ( $w$ ) la sua velocità è la stessa in entrambi i sistemi.

Dunque si puo calcolare le velocita' e accelerazioni di un punto materiale nei due sistemi di riferimento

$$x = x_0 + Rx'$$

$$\dot{x}_{|\Sigma} = \dot{x}_0_{|\Sigma} + R\dot{x}'_{|\Sigma}, + w \times (Rx')$$

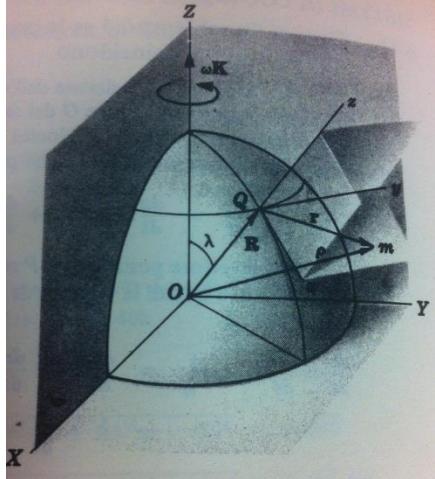
$$\ddot{x}_{|\Sigma} = \ddot{x}_0_{|\Sigma} + R\ddot{x}'_{|\Sigma}, + 2w \times (R\dot{x}'_{|\Sigma}) + w \times (w \times (Rx')) + \dot{w} \times Rx'$$

Dove  $x'$  indica il vettore  $(P - P_0)$  nella base  $\Sigma'$  solidale al corpo in rotazione, quindi  $Rx' = (P - P_0)$

L'espressione esplicita' di  $w$  e' calcolabile dalla relazione: (dimostrabile col prodotto triplo)

$$w = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \mathbf{e}'_h \times \dot{\mathbf{e}'_h}_{|\Sigma}$$

### Sistema non inerziale terrestre



$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM\rho}{\rho^3} - \mathbf{w}(\mathbf{w} \times \mathbf{R}) - 2(\mathbf{w} \times \dot{\mathbf{r}}) - \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$$

Considerati trascurabili i termini con  $w^2$

dato  $g = \frac{GM\rho}{\rho^3} - w(w \times R)$ , scegliendo le coordinate come in

figura, si giunge al sistema dinamico lineare non omogeneo:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2w\cos(\lambda) & 0 \\ -2w\cos(\lambda) & 0 & -2w\sin(\lambda) \\ 0 & 2w\sin(\lambda) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Come prima approssimazione della soluzione in  $y$  si trova

$$y \cong \frac{wg\sin(\lambda)t^3}{3}$$

Dalla quota z all'arrivo a terra. I corpi vengono cioe'

deviati a est in entrambi gli emisferi, com'e' logico, dato che partono da un altezza in cui la loro velocita' (nel sist. Riferimento inerziale) e' maggiore, e mantengono la stessa.

### Dinamica del punto materiale

$$\mathbf{M}_Q = (x_P - x_Q) \times m(v_P)$$

$$\mathbf{N}_Q = (x_P - x_Q) \times \mathbf{F}$$

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_P$$

$$\dot{T} = \Pi = -\nabla V(x_P) \cdot \mathbf{v}_P = -\dot{V}$$

Segue che  $\dot{T} + \dot{V} = 0$

Come si nota, sia il momento angolare che il momento della forza F dipendono sia dal sistema di riferimento, per la presenza di  $\mathbf{v}_P$  e  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_p$ , che dal polo, per la presenza del termine  $(P - Q)$ .

### Dinamica dei sistemi di N punti materiali

$$\mathbf{M}_Q = \sum_{j=1}^N (x_j - x_Q) \times m_j(v_j) \quad \mathbf{N}_Q = \sum_{j=1}^N (x_j - x_Q) \times \mathbf{F}_j \quad \Pi = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \times \mathbf{v}_j \quad \delta L = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{x}_j$$

Scomposizione ( qui l'operatore  $|\Sigma$ \_indica la scrittura nella base di  $\Sigma$ )

$$\mathbf{x}_B = \frac{\sum m_j x_j}{\sum m_j} \rightarrow \sum_{j=1}^N m_j (x_j - x_B) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_{B|\Sigma} = \sum_{j=1}^N (x_j - x_B) \times m_j(v_j) \quad \mathbf{M}_{Q|\Sigma} = \mathbf{M}_{B|\Sigma} + (x_B - x_Q) \times m(v_B)$$

*Dimostrazione tramite*  $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{Q|\Sigma} &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j(\mathbf{v}_j) + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m_j(\mathbf{v}_j) \\ \mathbf{M}_{Q|\Sigma} &= \mathbf{M}_{B|\Sigma} + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \sum_{j=1}^N m_j \left( \mathbf{v}_B + (\mathbf{v}_j)|_{\Sigma^B} \right)\end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_{B|\Sigma} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j(\mathbf{a}_j) \quad \mathbf{N}_{Q|\Sigma} = \mathbf{N}_{B|\Sigma} + m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times (\mathbf{a}_B)$$

Il momento della forza peso, o in generale di una qualsiasi forza di immersione gravitazionale (costante nello spazio) e' nullo se si sceglie il baricentro come polo.

Si definisce **sistema baricentrale**  $\Sigma^B$  un sistema di riferimento con gli assi orientati come il sistema  $\Sigma$ , ma nel quale il baricentro abbia velocita' ed accelerazioni nulla. Il sistema **baricentrale** non e' quindi in rotazione rispetto ad  $\Sigma$ . In un riferimento baricentrale, la quantita' di moto delle particelle e' nulla.

$$\sum_{j=1}^N m_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B)|_{\Sigma} = \sum_{j=1}^N m_j(\mathbf{x}_j)|_{\Sigma^B} = \sum_{j=1}^N m_j(\mathbf{v}_j)|_{\Sigma^B} = \mathbf{0} \quad \text{con } (\mathbf{v}_j)|_{\Sigma^B} = (\mathbf{v}_j)|_{\Sigma} - (\mathbf{v}_B)|_{\Sigma}$$

In  $\Sigma^B$  il momento angolare e il momento delle forze esterne sono indipendenti dal polo scelto e dal suo moto, per le proprietà massiche del baricentro. Infatti

$\mathbf{M}_{Q|\Sigma^B} = \mathbf{M}_{B|\Sigma^B}$  e  $\mathbf{N}_{Q|\Sigma^B} = \mathbf{N}_{B|\Sigma^B}$  dato che  $\mathbf{v}_B, \mathbf{R} = m\mathbf{a}_B$  sono nulli in  $\Sigma^B$

Teorema del König

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_B^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B)^2$$

Ruolo delle forze interne 
$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0 \\ \mathbf{F}_{ij} \times \mathbf{r}_{ij} = 0 \\ \mathbf{F}_{ij} = \alpha \widehat{\mathbf{r}_{ij}} \end{cases}$$

Se le forze interne sono di tipo classico, cioè tali da essere parallele alla congiungente e uguali e opposte, il loro momento angolare complessivo e il loro momento risultante e' nullo rispetto a qualsiasi polo in qualsiasi sistema di riferimento

$$\mathbf{R}^I = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0 \quad \mathbf{N}_Q^I = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}_{ij} = \dots = 0$$

Equazioni cardinali

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^E \\ \dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \end{cases} \quad \dot{\mathbf{M}}_{Q|\Sigma^B} = \mathbf{N}_{Q|\Sigma^B}$$

! Il momento angolare e' una grandezza poco intuitiva in alcuni casi, bisogna sempre usare la sua definizione base per capirne il cambiamento. Essa dipende fondamentalmente dalla distanza del punto  $\mathbf{P}_j - \mathbf{Q}$  sulla perpendicolare di  $\mathbf{v}_j$ .

!! Nel caso si utilizzi un sistema di riferimento  $\Sigma'$  in rotazione rispetto ad  $\Sigma$ , per calcolare  $\dot{\mathbf{M}}_{Q|\Sigma'}$ , bisogna utilizzare l'operatore derivazione di Poisson (da cui seguono formule di Eulero per i corpi rigidi).

### Sistemi di forze equivalenti

Un sistema di forze applicate  $F_i$  in certi punti  $P_i$  si indica con la scrittura:

$$\mathbf{f} = \{(F_i, P_i)\}$$

Comparando nelle equazioni cardinali sono la risultare  $\mathbf{R}^E$  delle forze, e' possibile creare un sistema di forze equivalenti

$$\mathbf{g} = \{(R, Q), (F, Q_1), (-F, Q_2)\}$$

Scelto in modo che la coppia  $(Q_1 - Q_2) \times F = N_Q$

Interessante notare che se il sistema  $\mathbf{g}$  e' equivalente a  $\mathbf{f}$  per un polo lo e' in automatico anche per un altro .*Dimostrazione:*

$$N_o^f = N_o^g \text{ e } \mathbf{R}^f = \mathbf{R}^g \text{ implica } N_{o'}^f = N_{o'}^g, \text{ infatti } N_{o'}^f = N_o^f + (\mathbf{o} - \mathbf{o}') \times \mathbf{R}^f = N_o^g + (\mathbf{o} - \mathbf{o}') \times \mathbf{R}^g = N_{o'}^g,$$

### Sistemi conservativi

Per una particella puntiforme, dalla  $\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{R}^E = \mathbf{0}$  moltiplicando per  $v$  e integrando nel tempo, si trova  $\frac{1}{2}mv^2 + \int -\mathbf{R}^E \cdot d\mathbf{x} = vdt$ . Qualdo il sistema e' conservativo ci si riesce a sganciare da  $d\mathbf{x}$  e l'integrale di linea  $\int -\mathbf{R}^E \cdot d\mathbf{x} = V(x)$ . In tal modo, risulta  $\Pi = -\dot{V}, \dot{T} = \Pi$

Per un sistema di particelle, non si puo usare la prima cardinale in forma baricentrale, ma:

$$m_j \ddot{v}_j - F_j = 0 \quad \forall j$$

Sommando le equazioni ed integrando, si riesce comunque a trovare una costante del moto, ma si stanno prendendo in considerazione anche la forze interne (che non prendono parte solo nella forma baricentrale della prima cardinale) e dunque avranno una loro energia potenziale.

$$V_{TOT}^I = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N - \int \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{p}_j = \sum_{1 < i, j \leq N} - \int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{p}_j = \sum_{1 < i, j \leq N} V_{ij}$$

In questo caso, il fatto che  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  non provoca l'annullamento della sommatoria. Anche in questo caso,  $\Pi^I = -\dot{V}^I$ . Allo stesso modo si puo definire una  $V_{TOT}^E$ , e una  $V = V_{TOT}^E + V_{TOT}^I$ , risulta dunque l'integrale primo

$$E = T + V \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} E = \Pi - \Pi^I - \Pi^E = 0$$

Anche la funzione  $E' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_B^2 + V_{TOT}^E$  risulta essere un integrale primo

### Riscalamento di tempo, massa e spazio

Puo esser utile analizzare uno riscalamento di queste variabili (ovvero osservare i cambiamenti delle orbite soluzione con eventuali dilatazioni di tali variabili) per trovare i legami fra periodi, distanze e masse. Per trovare le relazioni che intercorrono fra i riscalamenti, si dovrà imporre che una soluzione rimanga tale anche dopo il riscalamento, ovvero che

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}(t) = -\nabla V(\mathbf{x}(t)) \text{ implichi } m_1 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \mathbf{x}_2(t_1) = -\nabla V(\mathbf{x}_2(t_1))$$

Cioe' e' adatto a descrivere le relazioni di trasformazione nel gruppo Galileo della meccanica classica di sistemi non discreti, in quanto si presuppone che le orbite non siano influenzate dalla velocita'del tempo

### Tempo (e massa)

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}(t) = -\nabla V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}\left(\frac{t_1}{\tau}\right) = -\nabla V\left(\mathbf{x}\left(\frac{t_1}{\tau}\right)\right) \rightarrow m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}_1(t_1) = -\nabla V(\mathbf{x}_1(t_1))$$

posto  $t_1 = \tau t$ ,  $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}\left(\frac{t_1}{\tau}\right)$  e notando che  $\frac{\partial}{\partial t_1} \mathbf{x}_1(t_1) = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_1(t_1)$  per i differenziali

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}_1(t_1) = \tau^2 m \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \mathbf{x}_1(t_1)$$

e dunque uno riscalamento di tempo (periodo) provoca uno riscalamento di massa se si vuole che l'orbita si mantenga tale

$$m_1 = \mu m \quad \text{con} \quad \frac{\tau^2}{\mu} = 1$$

### Spazio

Posto  $x_2(t) = \lambda x(t)$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}(t) &= -\nabla V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow m \frac{\partial^2}{\lambda \partial t^2} \mathbf{x}_2(t) = -\nabla V\left(\frac{\mathbf{x}_2(t)}{\lambda}\right) \rightarrow m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}_2(t) = -\frac{\nabla V(\mathbf{x}_2(t))}{\lambda^{a-2}} \\ &= -\lambda^{2-a} \nabla V(\mathbf{x}_2(t)) \end{aligned}$$

Si nota quindi che uno riscalamento di spazio, se il grado del potenziale è  $a = 2$ , non provoca un cambiamento dell'orbita. La combinazione di riscalamenti porta alla relazione

$$\frac{\lambda^{2-a}}{\mu} = \tau^2$$

Tali risultati permettono di descrivere i periodi, in quanto  $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{T_1}{T_2}$ .

Si nota che i periodi sono sempre influenzati dalla radice della massa.

Per ad esempio l'oscillatore armonico,  $a = 2$ , e i periodi non vengono influenzati dalla distanza spaziale dal punto di equilibrio.

Nel caso problema di Keplero senza riscalamento di massa,  $a = -1$  e si ha la terza Legge di Keplero.

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{3/2} \quad \text{implica} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2}$$

### Risultati sul momento di Inerzia nel problema degli N corpi

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = -\nabla_{x_j} V(x_1 \dots x_N)$$

In tale scrittura, risulta che il momento di inerzia rispetto al baricentro si può scrivere come funzione solo delle mutue distanze dei corpi, mediante le loro masse ridotte.

$$I = \sum_{j=1}^N m_j |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B|^2 = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2$$

Derivando due volte la scrittura, in un sistema baricentrale, si ottiene

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j$$

Che nel caso di forze interne di tipo classico che ammettano potenziale  $V_{TOT}^I = V$  omogeneo diventa:

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_{j=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_j} \cdot \dot{\mathbf{x}}_j = 4T - 2aV = 4E - 2(a+2)V$$

Il fatto che  $\ddot{I}$  sia esprimibile tramite energie del sistema, e dipenda solo dalle mutue distanze, è utile per un calcolo numerico della distanze fra i corpi del sistema.

## CORPO RIGIDO

Il **vincolo** di corpo rigido risulta essere un vincolo olonomo, infatti lo Jacobiano ha rango costante. Per la determinazione della sua configurazione sono necessarie quindi sei informazioni. Solitamente si decide di considerare le tre coordinate del baricentro e gli angoli di Eulero, che verranno definiti in seguito. E quindi necessario scegliere un sistema di riferimento comodo, quello solidale al corpo, cioè tale che tutti i punti del corpo abbiano **accelerazione** e **velocità** nulle in tale sistema. Esso possederà quindi generalmente dei versori con una derivata non nulla, cioè sarà un sistema  $\Sigma'$  con una  $w$ . In tal senso, l'  $w$  è caratteristica del corpo rigido, ed è la derivata dell'angolo che i versori solidali perpendicolari all'asse istantaneo di rotazione formano con un riferimento fisso. La determinazione dell'angolo del quale  $w$  è la derivata non è sempre facile né utile.

### Caso di tre punti non allineati

Nel caso di tre punti non allineati la  $w$  di un qualsiasi sistema di riferimento solidale  $\Sigma', \Sigma''$  è la stessa.  
*dimostrazione*

Si prendano due sistemi solidali  $\Sigma', \Sigma''$ , con velocità angolare  $w, w + w'$ . Dall'operatore di derivazione, con  $r_i$  = differenza fra due punti

$$\begin{aligned}\dot{r}_{i|\Sigma} &= \dot{r}_{i|\Sigma'} + w \times r_i && \forall i \\ \dot{r}_{i|\Sigma} &= \dot{r}_{i|\Sigma''} + (w + w') \times r_i && \forall i\end{aligned}$$

Ma  $\dot{r}_{i|\Sigma}, \dot{r}_{i|\Sigma''}$  sono univocamente nulli per la definizione di sistema solidale. Segue che

$$w \times r_i = (w + w') \times r_i \quad \forall i$$

Ovvero  $w' = 0$

### Caso di punti allineati

Nel caso di punti allineati, solo il versore passante per i punti è univocamente definito, ma gli altri potrebbero anche ruotare intorno ad esso per come è stato definito un sistema solidale. In tal modo:

$$w \times r_i = (w + w') \times r_i \quad \forall i$$

ma tutti gli  $r_i$  risultano essere dipendenti fra di loro, e non si può concludere  $w' = 0$ , in quanto si potrebbe avere un componente  $w'$  parallela a  $r_i$ . Ma si definisce comunque  $w$  di  $\Sigma'$  come il minor  $w$  di tutti quelli dei sistemi di riferimento solidali  $\Sigma''$ .

Cioè permette di dire che l'  $w$  di  $\Sigma'$  è anche quello del corpo rigido.

### Formula fondamentale della cinematica del corpo rigido

Dal operatore di derivazione, per un corpo rigido e un sistema solidale tale che  $v_{K|\Sigma'} = 0$  (velocità relativa nulla). Risulta

$$v_P - v_K = w \times (P - K)$$

! La relazione è banale se si prende un  $v_K$  = Centro istantaneo di Rotazione, ma è valida per qualsiasi punto anche che "non faccia perno sull'asse istantaneo di rotazione".

Teorema di Eulero la rotazione di un corpo rigido attorno ad un punto fisso del corpo è a simmetria cilindrica, intorno ad un asse passante per il punto.

### Asse istantaneo di rotazione

Si definisce asse istantaneo di rotazione il luogo dei punti con velocità  $v_{i|\Sigma} // w$ .

Dai risultati precedenti risulta che l'asse istantaneo combacia il  $w$  (traslato opportunamente in un punto definito **centro istantaneo di rotazione** nelle rotazioni piane dei corpi rigidi con punti allineati).

### *dimostrazione unicità asse istantaneo*

Dalla formula fondamentale, per dimostrare l'unicità basta trovare un **centro istantaneo di rotazione**, ovvero un unico punto in un piano perpendicolare ad  $w$  tale che la sua velocità soddisfi  $v_{C|\Sigma} // w$

Moltiplicando la relazione fondamentale per  $w$ ,

$$\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_P = -\frac{\mathbf{v}_P \times \mathbf{w}}{w^2} \quad \forall \mathbf{x}_P \in \text{Corpo}$$

### Teorema di Chasles

Esso e' dunque l'intersezione alle perpendicolari delle velocita' (**moti piani**)

La velocita' del centro istantaneo risulta dunque essere, dal triplo prodotto scomposto:

$$v_c = \frac{(\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}}{w^2}$$

E dunque la velocita' di un qualsiasi punto del corpo e' scomponibile in una componente  $v_{P//}$  e  $v_{P\perp}$

$$\mathbf{v}_{P//} = \mathbf{v}_c = \frac{(\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}}{w^2}$$

$$\mathbf{v}_{P\perp} = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{P//}$$

Il moto risulta elicoidale con  $v_{P//}$  velocita' sull'asse,  $v_{P\perp}$  velocita' di rotazione.

### **Operatore di Inerzia**

$$I_h = \sum_{j=1}^N m_j (d_{min})^2$$

Dall'espressione  $I_h$  del momento di inerzia rispetto all'asse  $h$ , dove  $d_{min}$  e' la distanza minore fra ogni punto e l'asse  $h$ , si nota che puo esser utile esprimere un operatore, da applicare a versori, che renda il momento di inerzia per un qualsiasi asse (successivamente si trovera' che in alcuni casi esso puo anche esprimere il momento angolare).

### Operatore di inerzia rispetto al polo Q appartenente all'asse del vettore $\mathbf{u}$

$$J_Q \mathbf{u} = \sum_{h=1}^N m_h (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_Q) \times (\mathbf{u} \times (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_Q))$$

$$J_Q \mathbf{u} = J_Q (-\mathbf{u})$$

Ovvero risulta essere un operatore simmetrico. Risulta anche che, per un altro punto  $Q'$  sullo stesso asse

$$J_Q \mathbf{u} = J_{Q'} \mathbf{u}$$

Cioe' e' chiaro se si ricorda l'espressione della distanza di un punto  $P_h$  da una retta. Dunque si trascurera' il polo  $Q$  da ora in poi, pur tenendo presente che esso non e' trascurabile se si scieglie un punto  $Q'$  su un altro asse rispetto a  $Q$ . In tal modo, il momento di inerzia rispetto ad un asse risulterà essere uno **scalare**, forma bilineare, tale che

$$I_u = \hat{\mathbf{u}} \cdot J \hat{\mathbf{u}}$$

### Teorema di Huygens-Steiner o degli assi paralleli

Il momento di inerzia rispetto al baricentro e' il minore di tutti quelli che stessi assi paralleli avrebbero su punti diversi del corpo rigido, ovvero tutti gli assi passanti per il **baricentro** hanno momento di inerzia minimo rispetto ai loro paralleli.

$$I_{B\hat{\mathbf{e}}} = \min(I_{Q\hat{\mathbf{e}}}) \quad \forall Q \in E^3$$

*dimostrazione*

$$J_Q \hat{\mathbf{u}} = J_B \hat{\mathbf{u}} + m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times (\hat{\mathbf{u}} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q)) - < \text{Vettore}$$

$$I_Q \hat{\mathbf{u}} = I_B \hat{\mathbf{u}} + m(\hat{\mathbf{u}} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q))^2 \quad I_Q = I_B + md^2 - < \text{Scalare}$$

## Matrice di Inerzia

Dato l'operatore di inerzia e' possibile descrivere una matrice che lo rappresenti, † tale che

$$\mathbf{I}_Q = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{yy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{ij} = \varepsilon_i \cdot J_Q \varepsilon_j = \mathbf{I}_{ji}$$

In tale scrittura, gli elementi sulla diagonale rappresentano i momenti di inerzia sugli assi canonici

$$\begin{cases} \mathbf{I}_{xx} = \sum_v m_v (y_v^2 + z_v^2) & \mathbf{I}_{xy} = - \sum_v m_v x_v y_v \\ \mathbf{I}_{yy} = \sum_v m_v (x_v^2 + z_v^2) & \mathbf{I}_{xz} = - \sum_v m_v x_v z_v \\ \mathbf{I}_{zz} = \sum_v m_v (y_v^2 + x_v^2) & \mathbf{I}_{yz} = - \sum_v m_v z_v y_v \end{cases}$$

con  $P_v - Q = x_v \hat{\mathbf{e}}_1 + y_v \hat{\mathbf{e}}_2 + z_v \hat{\mathbf{e}}_3$

Gli autovalori e autovettori (ortogonali per il teorema spettrale) di tale matrice si chiamano rispettivamente **momenti principali di inerzia** e **direzioni principali di inerzia**. Essi, sono tali da seguire, quando possibile, eventuali regole di simmetria:

- Rispetto ad un piano: Se tutte le masse e distanze sono simmetriche rispetto ad un piano, la direzione perpendicolare al piano e' **direzione principale**.
- Retta di simmetria: Se tutte le masse sono periodicamente simmetriche (a variazioni di angolo fissate) l'una con l'altra ad un retta, tale retta e' **direzione principale**.

Casi particolari:

- Nei poliedri platonici, tutte le direzioni passanti per il baricentro sono principali
- Se si trasla il polo, generalmente, le direzioni principali di inerzia cambiano (se si e' traslato anche l'asse). Dalla formula del prodotto triplo risulta infatti che si dovrebbe avere, nella base principale, affinche la direzioni si mantengano

$$[(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \cdot \mathbf{u}] (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Ovvero le direzioni principali di inerzia si mantengono tutte se la traslazione avviene parallelamente ad una delle stesse, oppure si mantiene quella sulla quale la traslazione non ha componente, oppure non se ne mantiene nessuna se la traslazione ha componenti in tutte e tre le direzioni principali.

- Nel caso di masse concentrate su una linea, l'operatore di inerzia e' degenere. Nel caso di masse concentrate su un piano, l'inerzia sulla retta perpendicolare al piano (principale) e' la somma di quella sugli altri due assi del piano che sono autovettori.

## **Proprieta' dinamiche del Corpo Rigido**

### Momento angolare e momento delle forze

$$M_Q = \sum_{h=1}^N m_h (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_Q) \times (\mathbf{v}_{0|s} + w \times (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_O))$$

In questa scrittura si sta trattando il punto O nella scrittura della relazione fondamentale come solidale al corpo rigido.  $\mathbf{v}_{0|s}$  indica questo.

$$\sum_{h=1}^N m_h(x_h - x_Q) \times (v_{0|s} + w \times (x_Q - x_0)) + \dot{t}_Q w \rightarrow \sum_{h=1}^N m_h(x_B - x_Q) \times (v_{0|s} + w \times (x_Q - x_0)) + \dot{t}_Q w$$

Si puo ora, senza perdita' di generalita', considerare il polo Q=0

$$M_Q = m(x_B - x_Q) \times v_{Q|s} + \dot{t}_Q w \quad (1)$$

Dall'espressione risulta che  $\mathbf{M}_B = \dot{t}_B \mathbf{w}$

Si confronti l'espressione con  $M_{Q|\Sigma} = M_{B|\Sigma} + (x_B - x_Q) \times m\mathbf{v}_B$

Notando che  $\dot{t}_Q w = \dot{t}_B w + m(x_B - x_Q) \times (w \times (x_B - x_Q))$ , sostituendo, si dimostra l'uguaglianza delle due espressoni. A complicare ulteriormente la questione, c'e' il fatto che  $v_{Q|s}$  non e' sempre la velocita' effettiva  $v_Q$ , ma la velocita' di Q come punto solidale al corpo rigido in rotazione, sempre rispetto al sistema inerziale. Questo perche' si e' esplicitamente utilizzato nella (1) l'ipotesi che Q fosse solidale.

Qualora Q non fosse solidale al corpo, dunque, per applicare la (1) bisogna calcolare  $v_{Q|s}$  con la relazione fondamentale della cinematica per il corpo rigido, oppure, in alternativa, utilizzare:

$$\mathbf{M}_Q = \dot{t}_B \mathbf{w} + (x_B - x_Q) \times m\mathbf{v}_B$$

Che e' valida indipendentemente dalle ipotesi fatte su Q in quanto non se ne son fatte per la sua ricavazione. Dalla seconda cardinale, risulta:

$$\mathbf{N}_Q^E = \dot{\mathbf{M}}_Q + \mathbf{v}_Q \times m\mathbf{v}_B = \dot{t}_B \dot{\mathbf{w}} + (x_B - x_Q) \times m\mathbf{a}_B = \dot{t}_B \dot{\mathbf{w}} + (x_B - x_Q) \times \mathbf{R}^E$$

Anche in questo caso,  $\mathbf{N}_B^E = \dot{t}_B \dot{\mathbf{w}}$

! Se si usa il centro istantaneo di rotazione nella (1) come polo,  $v_{C|s} = 0$  anche se  $v_C \neq 0$

e la formula si semplifica in  $M_C = \dot{t}_C w$  come avviene col baricentro ,ma  $\dot{t}_C \neq 0$  generalmente.

### Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + m \mathbf{w} \cdot (x_B - x_0) \times v_0 + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \dot{t}_B \mathbf{w}$$

Anche in questo caso, senza si puo scegliere  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$  trovando il Teorema del König per corpi rigidi

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_B^2 + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \dot{t}_B \mathbf{w} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_B^2 + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{M}_B$$

! Il prodotto scalare  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{M}_B$  non sara' mai zero ammeno che  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  oppure per opportune direzioni di  $\mathbf{w}$  con una matrice degenere (asta) in quanto la bilineare  $\dot{t}_B$  essendo positiva non ammette spazi isotropi.

!! La quantita'  $\mathbf{w} \cdot \dot{t}_B \mathbf{w}$  puo esser anche interpreta come il momento di inerzia nella direzione  $\hat{\mathbf{w}}$  moltiplicato per  $w^2$ . In tal modo, T risulta crescere quando  $\mathbf{w}$  sta su assicon inerzia maggiore

!!! Nel caso in cui  $\mathbf{w}$  sia l'autovettore della matrice  $\dot{t}_B$ , ovvero sia diretto come una delle direzioni principali di inerzia,  $\frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \dot{t}_B \mathbf{w} = \frac{1}{2} w_i^2 I_i$

Esempi di momenti di inerzia comuni (sv=sfera vuota, sp=sfera piena)

$$I_B^{sv} = \frac{2mR^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_B^{disco} = \frac{mR^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_B^{sp} = \frac{2mR^2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_B^{asta} = \frac{m\ell^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_B^{anello} = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Raggio giratore:  $R^* = \sqrt{I/M}$

### Potenza

$$\Pi = \mathbf{R}^E \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_0^E \cdot \mathbf{w}$$

### Equazioni di Eulero per i corpi rigidi

Si prende in considerazione un polo Q che sia il baricentro o fisso, e un sistema di riferimento  $\Sigma'$  solidale al corpo rigido. Allora

$$M_{Q|\Sigma} = \mathbf{\dot{t}}_Q|_{\Sigma} \mathbf{w}, \quad \dot{M}_{Q|\Sigma'} = \mathbf{w} \times \mathbf{\dot{t}}_{Q|\Sigma'} \mathbf{w} + \dot{M}_{Q|\Sigma}$$

Si puo ora notare che  $\dot{M}_{Q|\Sigma} = \mathbf{N}_Q$  mentre  $\dot{M}_{Q|\Sigma'} = \mathbf{\dot{t}}_{Q|\Sigma'} \mathbf{w}|_{\Sigma'} = \mathbf{\dot{t}}_{Q|\Sigma} \mathbf{w}$

e dunque si trova l'**equazione di Eulero per corpi rigidi**:

$$\mathbf{\dot{t}}_Q \mathbf{w} + (\mathbf{\dot{t}}_Q \mathbf{w}) \times \mathbf{w} = \mathbf{N}_Q$$

che nella base  $\Sigma'$  principale si scrive in componenti

$$\begin{cases} I_1 \dot{\mathbf{w}}_1 + (I_3 - I_2) \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3 = N_{1Q} \\ I_2 \dot{\mathbf{w}}_2 + (I_1 - I_3) \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3 = N_{2Q} \\ I_3 \dot{\mathbf{w}}_3 + (I_2 - I_1) \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_1 = N_{3Q} \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema dinamico, risolve  $\mathbf{w}(t)$ , ma analiticamente e' molto complessa in quanto vanno utilizzati gli integrali delle funzioni ellittiche di Jacobi.

### Moti per inerzia

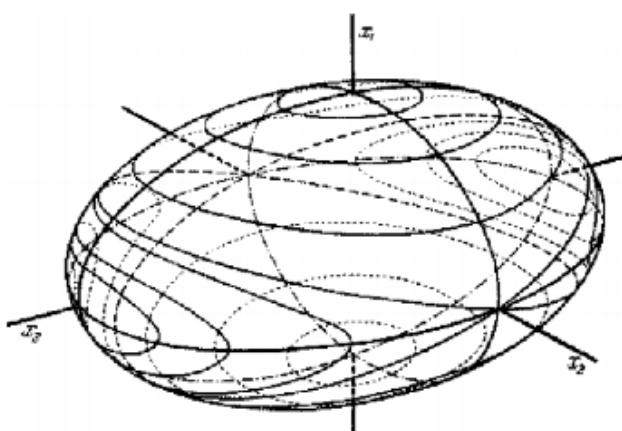
*Il fatto che  $\mathbf{w}(t)$  sia non costante anche nel riferimento stazionario sembra essere una contraddizione con la singolarita' dell'applicazione lineare  $M_{Q|\Sigma} = \mathbf{\dot{t}}_Q|_{\Sigma} \mathbf{w}$ , ma non lo e', perche' la matrice di  $\mathbf{\dot{t}}_Q|_{\Sigma}$  nel riferimento inerziale sta cambiando con la rotazione del corpo e dunque una costanza di  $M_{Q|\Sigma}$  non implica una costanza di  $\mathbf{w}$ , pur avendo pero che istante per istante, essendo  $\mathbf{w}$  nucleo dalla matrice di cambiamento di base che porta  $\mathbf{\dot{t}}_Q|_{\Sigma}$ , in  $\mathbf{\dot{t}}_Q|_{\Sigma}$  esso ha velocita' nulla (puro rotolamento)*

Si considerino ora le **soluzioni dei moti per inerzia**, ovvero si ponga  $\mathbf{N}_Q = \mathbf{0}$ . Si hanno degli equilibri se la velocita' angolare e' diretta come una delle direzioni principali di inerzia. Altrimenti, l' $\mathbf{w}$  compie delle orbite (solitamente intorno a questi assi). Il fatto che  $\mathbf{w}$  non sia stazionario e' conseguenza del fatto che, se non si fa ruotare il corpo rigido su una della direzioni principali di inerzia, lui tende a "squilibrarsi" ovvero a modificare il suo vettore velocita' angolare. Analizzando gli equilibri con gli esponenti di Lyapunov e la matrice linearizzata si giunge alla conclusione che gli assi con momenti di inerzia estremi sono stabili, quello con momento intermedio e' instabile. Per disegnare qualitativamente le orbite si nota che, non agendo forze esterne con momento netto (se c'e' la gravita' la discussione e' comunque

valida con una trasformazione baricentrale) l'energia cinetica (di rotazione) e il momento angolare si conservano, e dunque il vettore  $\mathbf{w}$  si muove sull'intersezione di due ellisoidi,  $\mathbf{M}$  su quella di una sfera e di un ellissoide.  $\mathbf{M}$  e' in movimento solo nel sistema non inerziale, e comunque non cambia di modulo.

$$\begin{cases} 2T = I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2 \\ M_Q^2|_{\Sigma'} = I_1^2 w_1^2 + I_2^2 w_2^2 + I_3^2 w_3^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2T = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} \\ M_Q^2|_{\Sigma'} = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \end{cases}$$



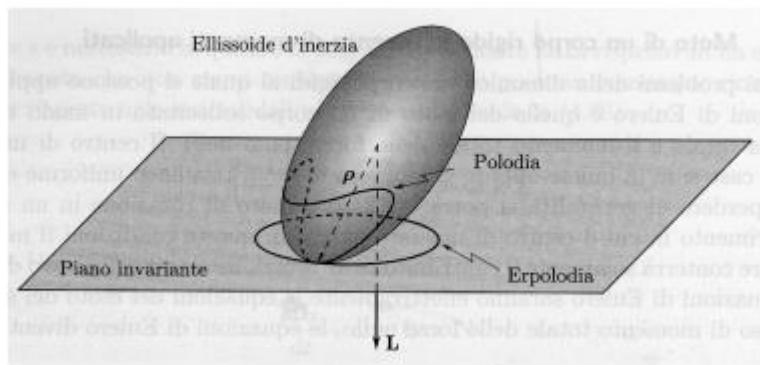
### Descrizione alla Poinsot o Costruzione di Poinsot

Poinsot propose una descrizione più geometrica di questo moto. Facendo il gradiente dell'energia cinetica, si trova che esso è parallelo al momento angolare, che quindi è perpendicolare al piano tangente all'ellissoide. Un altro modo per dimostrarlo è notare che il prodotto scalare  $\mathbf{w}(t) \cdot M_{Q|\Sigma}$  è costante e derivarlo. Il punto di contatto del piano con l'ellissoide è uguale al punto di contatto del piano con la soluzione  $\mathbf{w}(t)$  e dato che  $\mathbf{w}(t)$  è anche asse istantaneo di rotazione, la sua velocità è nulla. Quindi il vettore  $\mathbf{w}(t)$  "rotola senza strisciare" sul piano. Essendo a lui solidale il corpo rigido istante per istante (si è qui fatto un abuso della parola 'solidale'), esso anche rotola senza strisciare sul piano perpendicolare al momento angolare. Tale piano è fermo nel sistema di riferimento inerziale

(essendo fermo il vettore  $M_{Q|\Sigma}$ ), in quanto, la distanza da un punto di origine è:

$$d \propto \frac{\mathbf{w} \cdot M_{Q|\Sigma}}{|M_{Q|\Sigma}|} \propto \frac{T}{|M_{Q|\Sigma}|}$$

Il vettore  $\mathbf{w}$ , che si muove sull'ellissoide e sul piano invariante, descrive quindi delle curve, chiamate rispettivamente **polodia** ed **erpolodia**.

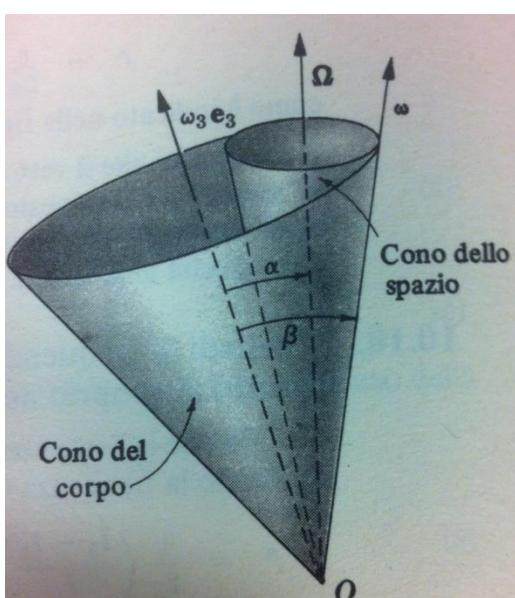


### **Caso di moto per inerzia a simmetria giroscopica**

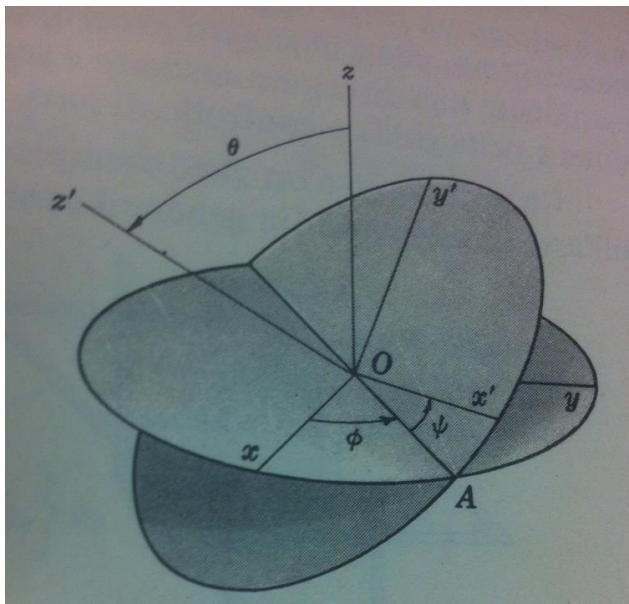
Per simmetria giroscopica si intende un caso in cui due dei tre momenti di inerzia sono uguali. Dalle equazioni di Eulero segue che il modulo di  $\mathbf{w}$  è costante in tal caso. Derivando il prodotto scalare esplicitato con l'angolo, si trova:

$\dot{\beta} = \cot(\beta) \frac{\dot{\omega}}{\omega} = 0$  dunque l'**erpolodia** è una circonferenza, e il vettore  $\mathbf{w}$  si muove su un cono rispetto a  $M_{Q|\Sigma}$ . Risolvendo inoltre il sistema dinamico per le due componenti non costanti di  $\mathbf{w}$  si trova che descrivono una circonferenza attorno all'asse con momento di inerzia diverso. E dunque anche

**polodia** è una circonferenza. Da proprietà matriciali risulta quindi che essendo gli autovettori uguali  $M_{Q|\Sigma}$ ,  $\mathbf{w}$ , e asse con momento di inerzia diverso dagli altri sono tre vettori complanari, e tali da muoversi su dei coni come in figura, che rotolano senza strisciare l'uno sull'altro. Il cono che viene descritto nel sistema di riferimento inerziale prende il nome di **cono dello spazio** quello descritto nel sistema in rotazione solidale **cono del corpo**. Non è in figura riportare il cono che descrive il momento angolare con l'asse principale  $e_3$ . Nel caso il momento di inerzia diverso sia maggiore dei due uguali, il cono dello spazio si troverà all'interno del cono del corpo (l'autovettore maggiore lo piega maggiormente verso di lui). Nel caso opposto è il viceversa. Se i momenti sono tutti e tre uguali i coni degenerano in rette,  $\mathbf{w}$  in  $M_{Q|\Sigma}$  e le derivate dei vettori sono nulli in entrambi i sistemi.



Moti non per inerzia da approfondire, inserire esempio trottola.



### ANGOLI DI EULERO

Con tre rotazioni combinate, si portano gli assi dal sistema di riferimento inerziale a quello principale solidale al corpo rigido.

$$O_{xyz}|\dot{\theta} \rightarrow O_{XYZ}|\theta \rightarrow O_{XY'Z'}|\psi \rightarrow O_{x'y'z'}$$

In tal modo, sussistono queste relazioni:

$$\begin{cases} w_{x'} = w_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ w_{y'} = w_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ w_{z'} = w_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

Gli angoli di eulero sono utili come coordinate lagrangiane per la descrizione del moto del corpo rigido, assieme alle coordinate spaziale del baricentro.

La retta OA si chiama **linea dei nodi**

Indicati con  $i, j, k$  i versori  $O_{xyz}$  e con  $i', j', k'$  quelli di  $O_{x'y'z'}$  si scrive la matrice di cambiamento di base:

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \dot{\theta} \cos \psi & -\cos \dot{\theta} \sin \psi & \sin \dot{\theta} \sin \psi \\ \sin \dot{\theta} \cos \psi & -\sin \dot{\theta} \sin \psi & \cos \dot{\theta} \sin \psi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{bmatrix}$$

Come si nota, essa dipende da angoli con derivata non nulla. Dunque la matrice  $\frac{d}{dt}Q|_{\Sigma}$  cambia nel tempo.

Si prenda il caso di una trottola in rotazione con  $w_z = \text{cost.}$  e anche attorno al proprio asse con velocità angolare  $s$  (**spin**). In tal caso,  $\dot{\theta}$  e' la **velocita' angolare di precedzione**,  $\dot{\phi}$  e' quella di **nutazione**

Fase geometrica del corpo rigido Formula di Montgomery

Si vuole sapere di quanto e' ruotato il corpo dopo aver effettuato un'orbita periodica intorno ad uno degli assi principali di inerzia. Risulta

$$\Delta\varphi = \frac{2ET}{|M|} - \Omega$$

Dove  $\Omega$  indica l'angolo solido formato dal vettore momento angolare con la sua sfera (quindi costante nel moto asimmetrico). T e' il periodo dell'orbita nel sistema di riferimento non inerziale solidale.

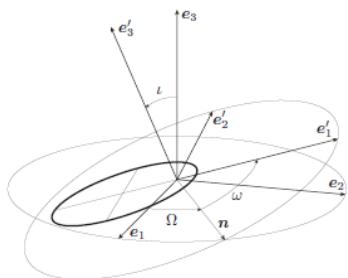
## MOTI CENTRALI

$$\mathbf{f}(\rho) = f(\rho)\hat{p} \quad \mathbf{f}(R\rho) = R\mathbf{f}(\rho)$$

I moti centrali cosi' definiti risultano essere invariante rispetto alla trasformazione  $g_3$  del gruppo galileiano (rotazione) ma non a  $g_1, g_2$  generalmente. Quindi non vale il principio di relativita'.

Si puo definire il potenziale della forza  $\mathbf{f}(\rho)$ , quando conservativa, come  $V(\rho) = - \int \mathbf{f}(\rho) \cdot d\rho$

### Riduzione del numero di gradi di liberta'



L'invarianza rispetto ad una trasformazione ha degli effetti sulle costanti del moto nei moti centrali.

Non avendo la forza nessun momento netto rispetto all'origine, il momento angolare rispetto a questo polo si conserva, assieme all'energia. Essendo esso perpendicolare al vettore velocita', cioe'dimostra che il moto avviene su un piano e dunque si possono scegliere due coordinate locali in luogo di tre, conviene cilindriche. La scelta dei versori risulta essere tale che:

$$\begin{aligned}\widehat{e_\rho} &= \cos\vartheta \widehat{e_1} + \sin\vartheta \widehat{e_2} \\ \widehat{e_\vartheta} &= -\sin\vartheta \widehat{e_1} + \cos\vartheta \widehat{e_2}\end{aligned}$$

Derivando si ottiene

$$\begin{aligned}\widehat{\dot{e}_\rho} &= \dot{\vartheta} \widehat{e_\vartheta} \\ \widehat{\dot{e}_\vartheta} &= -\dot{\vartheta} \widehat{e_\rho}\end{aligned}$$

Derivando la prima cardinale, tenendo presente che la quantita di moto  $p = m(\dot{\rho}\widehat{e_\rho} + \rho\dot{\vartheta}\widehat{e_\vartheta})$ , si trova

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2 = \frac{f(\rho)}{m} \\ \rho\ddot{\vartheta} + 2\dot{\rho}\dot{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

Calcolando il momento angolare e ponendolo uguale a zero, esso risulta:

$$M_0 = mp^2\dot{\vartheta} = c$$

Si nota dunque che la variabile  $\vartheta$  e'monotona nel moto, ovvero il segno di  $\dot{\vartheta}$  non cambia mai.

Dunque e'possibile utilizzarla come variabile per effettuare le derivazioni nel tempo.

Dalla conservazione del momento angolare si puo dedurre anche la legge delle aree, infatti:

$$A = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho d\rho d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \rho^2(\vartheta) d\vartheta$$

La cui derivata nel tempo,

$$\dot{A} = \dot{\vartheta} \bar{A} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\vartheta} = \frac{c}{2m} = a$$

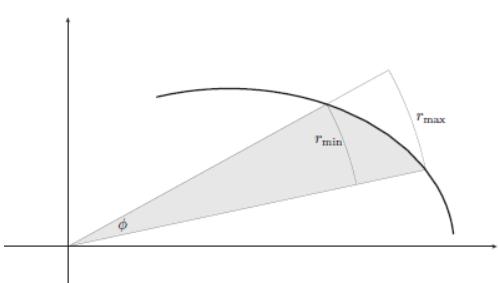
Ovvero l'area spazzata per unita'di tempo dall'orbita e'costante.

Trovate queste costanti del moto, si riformula ora la prima cardinale in funzione di queste

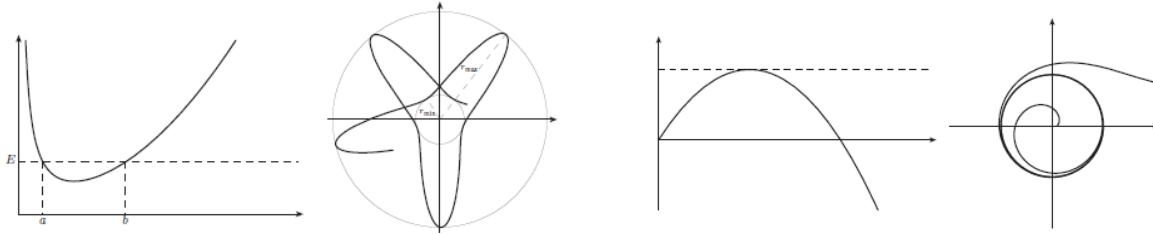
$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( - \int \mathbf{f}(\rho) \cdot d\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial \rho} (V_{eff})$$

Dove si e'introdotto la variabile  $V_{eff} = V_\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2}$  composizione del potenziale della forza e quello centrifugo. Tale espressione possiede l'integrale primo :

$$E_{eff} = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + V_{eff}$$



Da esso è dunque possibile valutare qualitativamente il comportamento delle orbite con i metodi esposti nei prossimi capitoli, con  $\rho$  sulle ascisse e  $V_{eff}$  e l'energia sulle ordinate.



### *Classico moto elastico con lunghezza di riposo*

### *Moto asintotico all'equilibrio $\rho = \rho_c$*

Si riesce così a descrivere un moto bidimensionale, come unidimensionale, tenendo presente la relazione  $m\rho^2\dot{\vartheta} = c$  che lega ogni raggio di tali configurazioni con la derivata  $\dot{\vartheta}$ .

Si pone ora il problema di calcolare esplicitamente le orbite, e i periodi di tali moti in modo analitico  
Teorema di Binet

$$\ddot{\rho} = \bar{\rho}\dot{\vartheta} = \frac{2a}{\rho^2}\bar{p} = -2a\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -2a\bar{u}$$

Dalla scelta fatta di  $\vartheta$  come variabile di derivazione, segue naturale esprimere le equazioni differenziali in funzione della variabile  $u = \rho^{-1}$ . Risulta quindi  $\frac{\partial\ddot{\rho}}{\partial\vartheta} = -2a\bar{u}$  e dunque

$$\ddot{\rho} = -4a^2u^2\bar{u}$$

Che è l'accelerazione 'vista nel sistema non inerziale'. Nel sistema inerziale risulta anche il contributo dell'accelerazione centripeta, dunque:

$$\ddot{\rho}_t = \ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2 = -4a^2u^2(\bar{u} + u)$$

Cio che si trova è dunque l'equazione differenziabile, non lineare di secondo ordine omogenea,

$$(\bar{u} + u) = -\frac{f(u^{-1})}{4ma^2u^2}$$

Risolve questa ODE non è semplice, tuttavia si nota che la si può integrare moltiplicandola per  $u$  e ricordando che  $f(u^{-1}) = \frac{\partial}{\partial\rho}(E_{eff} - V_{eff})$

$$\bar{u}^2 + u^2 = -\frac{(E_{eff} - V_{eff})}{2ma^2} = \frac{(V_{(\rho)} - E_{eff})}{2ma^2} + u^2$$

### Equazioni differenziali per l'orbita

Si sarebbe anche potuto esprimere l'equazione differenziale nella variabile  $\rho$  anziché in  $u$ .

Quello che si ottiene risulta essere:

$$\ddot{\rho} - \frac{2}{\rho}\bar{p}^2 - \rho = \frac{\rho^4f(\rho)}{4ma^2}$$

Ricapitolando, si può scegliere di risolvere una di queste equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \frac{2a^2}{\rho^3} = \frac{f(\rho)}{m} & (1) \\ \ddot{\rho} - \frac{2}{\rho}\bar{p}^2 - \rho = \frac{\rho^4f(\rho)}{4ma^2} & (2) \\ (\bar{u} + u) = -\frac{f(u^{-1})}{4ma^2u^2} & (3) \\ \bar{u}^2 = \frac{(V_{(\rho)} - E_{eff})}{2ma^2} & (4) \end{cases}$$

### Problema di Keplero

La terza di queste equazioni differenziali diventa facilmente risolvibile nel caso di una forza

$$f(u^{-1}) = -ku^2 \quad \text{con } k = G\mu = G \frac{m_1 m_2}{m} \quad \text{con } m = m_1 + m_2$$

In tal modo, la (3) diventa

$$\bar{u} + u = \frac{k}{4ma^2} = \frac{1}{h}$$

che ha soluzione

$$u(\vartheta) = A \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{1}{h}$$

Posta ora  $\varepsilon = Ah$ , nella variabile  $\rho$  risulta:

$$\rho = \frac{h}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_0)}$$

Ricordando che  $\dot{p}$  deve annullarsi dove  $E_{eff} - V_{eff}$  si annulla, risulta

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ec^2}{mk^2}$$

Dunque in definitiva la distanza  $\rho$  fra i due corpi risulta essere:

$$\rho = \frac{\frac{G\mu}{4ma^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E_{eff}c^2}{m(G\mu)^2} \cos(\vartheta - \vartheta_0)}}$$

Le traiettorie risultano essere delle ellissi se l'eccentricità è compresa fra 0 ed 1, delle parabole (rette) se l'eccentricità è uno, delle iperboli se maggiore.

Nel caso l'orbita sia allittica, dalla proprietà della funzione ellittica risulta che:

$$d_{asse maggiore} = \frac{h}{(1 - \varepsilon^2)}$$

Grafico del potenziale in funzione del raggio  $\rho$ .

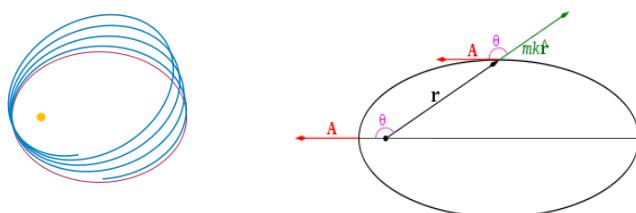
Nel minimo ci sono orbite circolari.

$$\rho_{min} = \frac{mk}{c^2}$$

### Vettore di Laplace – Lenz

$$L = p \times M_0 - mk\hat{p} \quad |L| = mke \quad p = \text{quantità di moto}$$

Il vettore di Laplace-Lenz, di utilizzo per moti con forze kepleriane, è una costante del moto solo in tali moti. *Dimostrazione:* si scriva  $p = \frac{\partial(\rho\hat{p})}{\partial t} = \dot{p}\hat{p} + \rho\dot{\hat{p}}$ . Da esso si può intuire la forma dell'orbita, in quanto l'angolo che esso forma con il versore  $\hat{p}$  indica proprio l'avanzamento di  $\hat{p}$



$$\cos\beta = \hat{L} \cdot \hat{p} = \cos(\vartheta - \vartheta_0)$$

Una lieve precessione dell'orbita, dovuta a perturbazioni, può quindi essere analizzata come una modifica dell'orientazione del vettore di Lenz (in figura indicato con A)

### Teorema di Hamilton: metodo alternativo per la determinazione delle orbite nel problema di Keplero

Data l' equazione differenziale (3), ricordando il teorema di Binet, si ha

$$\frac{\ddot{\rho}_l}{\dot{\vartheta}} = \frac{\dot{\nu}_l}{\dot{\vartheta}} = \frac{f(\rho)\rho^2}{c}$$

Si trova che non sono i vettori posizione a muoversi su una circonferenza, ma i vettori velocita' inerziale.

$\nu_i = \frac{k}{c} \hat{\vartheta}$  da tale equazioni, ricordando l'espressione del momento angolare, si puo ricavare l'orbita.

Determinazione orbita forza elastica : Si integra la (4) trovando  $u = \sqrt{C_1 + C_2 \vartheta^2}$  con  $C_1 > 0, C_2 < 0$

### Determinazione del periodo delle orbite

Si puo' isolare il termine  $\partial\rho$  da  $E_{eff}$  :

$$d\vartheta = c \sqrt{\frac{2}{m p^2} \frac{1}{\sqrt{E_{eff} - V_{eff}}}} d\rho$$

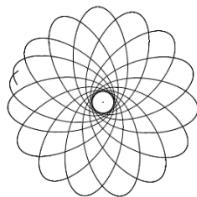
Il periodo, in caso di orbite limitate ma non chiuse, e' definito nel piano delle fasi  $\dot{\vartheta}$  e  $\rho$  dove l'orbita e' effettivamente chiusa. Integrando, si trova **l'angolo di avanzamento dell'apocentro**

$$\Delta\vartheta = c \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{p^2 \sqrt{E_{eff} - V_{eff}}} d\rho$$

verrano in seguito trattati metodi numerici per risolvere questa integrazione, il periodo risulterà essere due volte il tempo necessario per spazio un angolo  $\Delta\vartheta$ . Essendo  $\dot{\vartheta} = \frac{c}{m\rho^2}$

$$T = \sqrt{2m} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\sqrt{E_{eff} - V_{eff}}} d\rho$$

Per avere un orbita anche nel piano del moto e non solo nel piano delle fasi, si deve avere  $\Delta\vartheta$  divisibile per  $q\pi$  per un qualche  $q$  razionale, altrimenti lo spazio fra  $\rho_{min}$  e  $\rho_{max}$  viene riempito in modo uniformemente denso al passare del tempo. -< nell'immagine si ha un tipico moto a rosetta.



### Teorema di Bertrand dimostrazione nell appendice.

Le uniche forze per cui esistono orbite limitate chiuse sono quella elastica e quella kepleriana attrattive.

#### Analisi del potenziale

Si analizzi il potenziale efficace con una generica forza al variare dei parametri  $k, n$ :

$$f(\rho) = k\rho^n$$

#### k positivo

La funzione  $V_{eff}$  e' sempre decrescente, indipendentemente da  $n$

Nessuna orbita collassa sul centro (come naturale dato che entrambe le forze sono dirette all'esterno) e tutte le orbite tendono a  $\rho \rightarrow \infty$

#### k negativo (attrazione)

Se  $n < -3$  le orbite troppo vicine al centro vi collassano ed esistono orbite spiraliformi asintotiche all'equilibrio., se  $-3 < n < -1$  vi sono orbite limitate solo inferiormente (cioe' che riescono a sfuggire alla attrazione del centro) se  $n \geq -1$  sono presenti orbite limitate sia inferiormente che superiormente non chiuse in tutto lo spazio. Il fatto che le orbite con  $n > -3$  non collassino mai e' dovuto al fatto che, nell'avvicinamento, prende il sopravvento la forza centrifuga che, e' prima o poi maggiore di quella che puo esercitare il centro attrattivo. Questo comportamento e' dovuto al fatto che la forza centrifuga, a momento angolare fissato, e' proporzionale a  $\rho^{-3}$ .

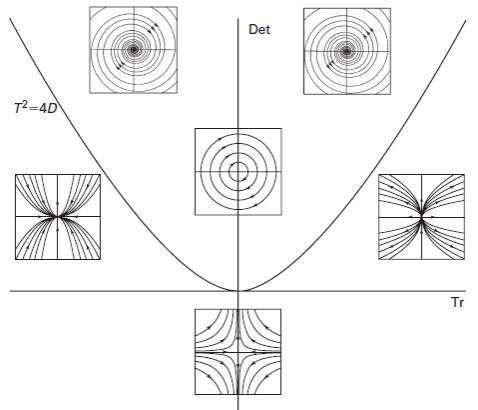
Apocentro: segmento di massima distanza dell'orbita

Pericentro: segmento di minima distanza dell'orbita.

## SISTEMI DINAMICI LINEARI in n dimensioni (REALI, NILPOTENTI, COMPLESSI)

Per trovare la legge orario ci si affida agli esponenziali di matrici canonizzate, che sono della forma: esponenziale, trigonometrica con eventuali polinomi.

Il cambiamento di base che rende la matrice M in forma canonica e' dato dagli autovettori reali, quando esistenti, e da eventuali basi di piani invarianti (che nel caso complesso sono dati da autovettori complessi, nel caso nilpotente dal nucleo<sup>k</sup> della corrispondente matrice nilpotente associata ad M). Nel caso non esistano autovettori reali, tale matrice A di camb. base non e' univoca. Nel caso di piano invariante complesso, i due autovettori complessi devono essere scelti a coppie utilizzando l' applicazione lineare complessa limitata al piano invariante associata all'applicazione M.



### AUTOVETTORI REALI:

$$X(t) = Ae^{Dt}A^{-1}X_0 = ae^{\gamma_1 t} \langle v_{\gamma_1} \rangle + be^{\gamma_2 t} \langle v_{\gamma_2} \rangle$$

### AUTOVETTORI COMPLESSI: autovalore $a + bi$

$$M(v_{re} + iv_{im}) = (a \pm bi)(v_{re} + iv_{im}) \rightarrow \begin{cases} Mv_{re} = av_{re} \mp bv_{im} \\ Mv_{im} = av_{im} \pm bv_{re} \end{cases} \rightarrow \text{Impongo complanarita'}$$

Le equazioni del sistema sono linearmente dipendenti (si trova  $v_{re}$  e  $v_{im}$  inversi) nel piano invariante.

$v_{im/re} = \frac{(M-aI)}{\pm b} v_{re/im} = \delta v_{re} \rightarrow$  Applicazione lineare, da limitare al piano invariante, che da'  $v_{re}$  e  $v_{im}$

L' applicazione lineare  $\delta$  non puo ammettere autovalori reali (essendo che, per similitudine  $Q - aI$  non ne ha), quindi  $v_{re}$  e  $v_{im}$  son sempre diversi. La similitudine e' utilizzabile perche'  $aI$  non cambia nei cambiamenti di base ma rimane diagonale (essendo la diagonale formata da elementi uguali, per simmetria). Il piano invariante complesso si trova come combinazione lineare di due autovalori complesso scelti casualmente.

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i\sin(\beta t) \quad X(t) = Ae^{Qt}A^{-1}X_0$$

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad e^{Qt} = \begin{bmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ -e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{bmatrix} \quad e^{Qt}X_0 = x_0 e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) \\ -\sin(bt) \end{pmatrix} + y_0 e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) \\ \sin(bt) \end{pmatrix}$$

### MATRICI NILPOTENTI $N_\gamma = M - \gamma I$ D = parte diagonale + complessa della canonica.

$N_\gamma$  e' tale che il suo nucleo sia l'autovettore  $v_\gamma$ , e quello di  $(N_\gamma)^2$  sia il piano invariante per M pensa a caso R<sup>2</sup> nucleo di  $(N_\gamma)^3$  in dimensioni  $n \geq 4$  darebbe l'iperpiano invariante per M.

Per scrivere la matrice A si parte quindi dal nucleo di  $(N_\gamma)^k$  con il maggiore k che non annulla la matrice e si procede secondo la formula.

$$\ker((N_\gamma)^{k-1}) = N_\gamma \ker((N_\gamma)^k) \text{ fino a } k=2 \text{ utile per trovare coeff. moltiplicativi}$$

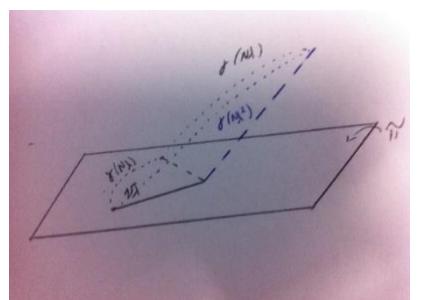
L'equazione dell'autovettore e' data da  $v_\gamma = (N_\gamma)^{k-1} \ker((N_\gamma)^k)$

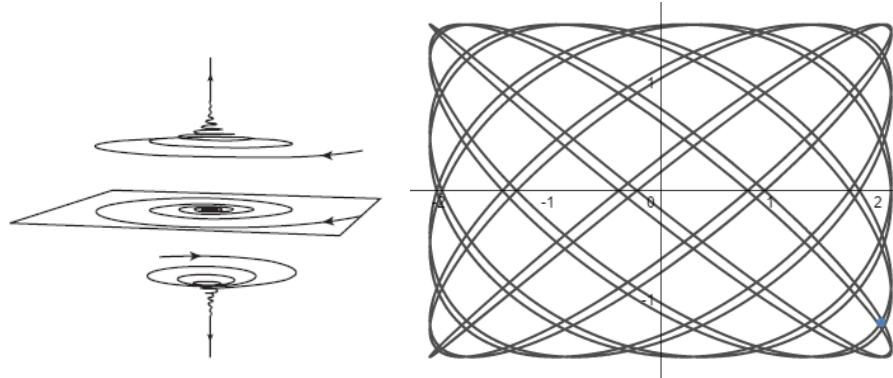
$$\begin{cases} Mv_\gamma = \gamma v_\gamma \\ Mv_2 = av_\gamma + bv_2 \quad \text{con } v_i = \ker((N_\gamma)^i) \\ Mv_3 = cv_\gamma + dv_2 + ev_3 \\ \dots \end{cases} \rightarrow \text{Invarianza sottospazi}$$

$M = D' + N' = ADA^{-1} + N'$  tali che  $D'N' = N'D'$  allora

$$x(t) = Ae^{Dt}A^{-1} \left( I + \sum_{j=1}^s \frac{(N't)^j}{j!} \right) (X_0)$$

$N' = ANA^{-1}$  ma e' piu comodo  $e^{N't}$  che  $Ae^{N't}A^{-1} = \left( I + \sum_{j=1}^s \frac{(N't)^j}{j!} \right)$ . Porre poi  $D'N' = N'D'$  e come porre  $DN=ND$ , proprieta.





Sx: esempio di sistema dinamico lineare in 3 dimensioni

Dx: moto armonico combinato (ad esempio con 3 molle). Figura di Lissajou.

La frequenza oscilla fra le due frequenze proprie.

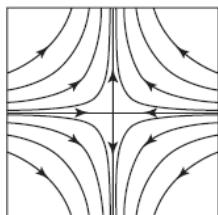
### Sistemi dinamici lineari non omogenei

$$\dot{X} = AX + G(t) \rightarrow X(t) = e^{At} \left( X_0 + \int_0^t e^{-As} G(s) ds \right)$$

#### Definizioni

**Pozzo:** equilibrio con esponenti di Lyapunov negativi (le orbite ci entrano)

**Sorgente:** equilibrio instabile, con esponenti tutti positivi (le orbite scappano)



-< es di separatrici, gli assi sono autovettori, x stabile, y instabile.

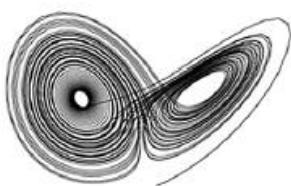
**Teorema del pozzo sorgente non lineare:** anche nel caso di un sistema dinamico non lineare, la definizione di pozzo e sorgente sono quelle date.

Punto asintoticamente stabile: Pozzo

Punto stabile: Fuoco (con parte reale di autovalori nulla).

### Sistemi dinamici non lineari omogenei

Nel caso di sistemi non lineari non e' sempre possibile trovare soluzione analitica, oppure ci sono soluzioni che "esplodono" oppure non tutte sono definite e non sempre vale il teorema di unicita' se ci sono problemi di derivabilita'. Alcune volte e' possibile trovare delle superfici "linearizzanti", ovvero delle superfici sulle quali un cambiamento di base porta alla linearizzazione della matrice. Una di esse e quindi anche stabile.



-< es dell'attrattore di Lorenz, che descrive moto dei fluidi semplici. Però si possono analizzare gli equilibri con una matrice linearizzata intorno al punto di equilibrio.

La parte complessa degli autovalori e' legata, se esistono orbite stabili, alla loro frequenza.

### Determinazione della stabilita' di un punto di equilibrio

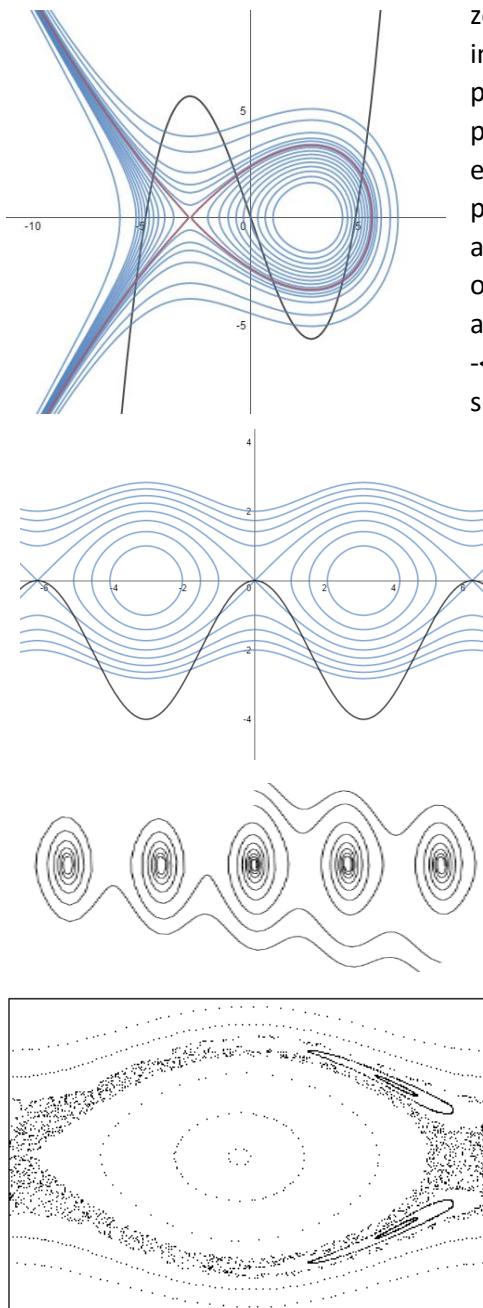
Se esistono, si analizzano gli esponenti di Lyapunov. Se essi hanno parte reale nulla, si deve cercare una funzione la cui derivata (espressa tramite la matrice) sia nulla o negativa, tale che sia definita con un minimo nel punto di equilibrio. Cioe' equivale a immaginare tante orbite che partono da questa superficie (che puo essere una circonferenza) e farle tendere al punto di equilibrio. L'integrale di Jacobi e' una tipologia di funzione di Lyapunov per dimostrare la stabilita'. L'hamiltoniana e' un esempio di funzione di Lyapunov stretta.

## ANALISI DEL POTENZIALE PER LA DETERMINAZIONE DELLE ORBITE

La dimostrazione di come mai un minimo stretto di  $V''$  anche degenere porti a stabilità viene riportata in appendice.

### Casi unidimensionali

Se il potenziale dipende da una sola variabile, si può piazzare in un piano cartesiano la variabile sull'ascissa e il potenziale sull'ordinata. L'espressione dell'energia totale, integrale primo in sistemi senza dissipazione, è per forze conservative del tipo:  $E = \frac{1}{2}q \cdot Aq + V(q)$ . L'insieme delle configurazioni ammissibili per ogni dato iniziale è quello con le energie cinetiche nulle o positive, che corrisponde alla



zona sopra il grafico di  $V(q)$ . Le zone sul grafico sono punti di inversione, in quanto l'energia cinetica si annulla in tali punti. Si può dimostrare che l'accelerazione che il corpo sente è proporzionale all'opposto della derivata di  $V$ . E dunque, punti di equilibri saranno quelli con accelerazione e velocità nulla, ovvero punti stazionari di  $V(q)$ . L'orbita si muove su rette parallele all'asse  $x$ , essendo  $E$  fissata. Se  $V(q)$  è crescente nella zona delle ordinate dove l'orbita si trova, allora la particelle risente di un accelerazione negativa, altrimenti viceversa.

-<In nero il potenziale, in blu le orbite, in rosso le due orbite speciali che sono separatrici. L'orbita speciale che ha energia fissata uguale al massimo relativo del potenziale, è tale che non si inverte mai, ed è asintoticamente stabile all'equilibrio instabile. Ovvero, per un tempo infinito, tende a quel punto di equilibrio, ma è l'unica ad avere questo comportamento. Generalmente, per trovare le curve di livello, basta analizzare la funzione. I grafici delle orbite sono piazzati nel piano delle fasi  $(q, \dot{q})$

$$y \propto \sqrt{E - V}$$
 al variare del parametro  $E$ .

### Pendolo non lineare

$$E = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{g}{l} \sin\vartheta$$

### Pendolo non lineare con smorzamento

Essendoci dissipazione, tutte le curve si chiudono sul punto di equilibrio stabile. La funzione  $E = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{g}{l} \sin\vartheta$  risulta essere funzione di Lyapunov, con derivata negativa.

### Pendolo non lineare con perturbazioni

Una perturbazione nell'intorno dei punti di equilibrio instabile può modificare completamente il futuro dell'orbita e dar vista ad un **caos** dovuto all'indeterminazione di condizioni sufficiente precise iniziali. Una piccola variazione delle posizioni iniziali può provocare la completa indeterminazione dell'orbita, che si allontana esponenzialmente in funzione del tempo considerando anche un errore minimo. Questo avviene anche col pendolo doppio (anche ideale).

### Stima del periodo di un orbita in un campo potenziale

Dall'espressione dell'energia totale, integrando per variabili separate, si ricava:

$$T = \sqrt{2m} \int_{q_-}^{q_+} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}$$

Tale espressione però non è quasi mai integrabile analiticamente in modo semplice

- Utilizzo degli autovalori complessi

Le orbite stabili presentano sempre degli autovalori complessi. Le frequenze di tali autovalori, in orbite vicine sono simili a quelle del sistema linearizzato, e dunque

$$q(t) = q_0 + \sum_{h=0}^N c_h \cos(\sqrt{\lambda_h} t + \varphi) \hat{u}_h$$

Dove  $q_0$  = punto di equilibrio,  $c_h$  = modi normali di oscillazioni intorno a  $q_0$

$\lambda_h$  = frequenze proprie di oscillazione,  $\hat{u}_h$  = autovettore

- Stima con approssimazioni per funzioni analitiche

Si può approssimare la funzione  $E - V$  intorno ai suoi zeri, con una funzione:

$$\phi = \phi_{(q)}(q - q_-)(q_+ - q)$$

Per utilizzare un valore verosimile di  $\phi_{(q)}$  si possono prendere le derivate seconde di  $V$  nei punti  $q_-$  e  $q_+$ , oppure si può analizzare  $\frac{E-V}{(q-q_-)(q_+-q)}$ , e valutare i suoi massimi e minimi. In questo modo, si è certi che il periodo è compreso fra un massimo ed un minimo, dati da:

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{2m}{C_2}} \quad T_2 = \pi \sqrt{\frac{2m}{C_1}}$$

## VINCOLI

**Insieme/spazio delle fasi:** Composizione di posizioni e velocita'

**Insieme/spazio delle configurazioni:** Composizione di sole posizioni possibili

**Vincolo:** Un sistema di  $N$  punti e' vincolato se l'insieme delle fasi ammissibili al tempo  $t$  e' ristretto ad un sottoinsieme di  $R^{3N} \times R^{3N}$ . Un vincolo puo quindi essere una restrizione sulle posizioni o sulle velocita'.

**Equazione di un vincolo:** Un vincolo, nella sua forma piu generale, ha la forma:

$$\phi(t) + B(x, t)\nu = 0$$

Con  $\phi(t)$  un vettore che compare solo se il vincolo dipende dal tempo,  $B(x, t)$  una matrice ( $k, 3N$ )

dove  $k$ =numero di vincoli,  $N$ = numero di punti materiali

Senza vincoli, il sistema avrebbe  $3N$  gradi di liberta, dunque  $k \leq 3N$

Nella presenza di vincoli che non dipendono dal tempo, al relazione  $B(x, t)\nu = 0$  sta ad indicare che il

vettore velocita'  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$  debba esser nucleo della matrice  $B(x, t)$  (perpendicolare al gradiente).

La relazione generale puo derivare da una relazione piu speciale, caso in cui il vincolo si dice **integrabile**

$$\psi(x, t) = 0$$

In tal caso, si ha

$$\phi(t) = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad B(x, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La matrice  $B(x, t)$  ha per righe i gradienti di ognuno dei vincoli  $\psi_i$  con  $i < k$  (numero di righe e vincoli).

*esempio*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + t^2 = 1 \\ x - z^3 + 2t = -1 \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} \quad B(x, t) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & -3z^2 \end{pmatrix}$$

*L'equazione del vincolo e' della forma:*

$$\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & -3z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = 0$$

*e risulta essere un sistema dinamica non lineare non omogeneo, la cui soluzione e' proprio  $\psi(x, t)$*

**Sottovarieta di  $R^m$ :** una mappa  $\psi(x, t)$  si definisce sottovarieta' se il rango di  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  non cambia mai per i vettori che soddisfano  $\psi(x, t) = 0$ . Cio' equivale a dire che, almeno localmente, i gradienti non siano mai dipendenti fra di loro, ovvero che le  $\psi_i$  siano tutte diverse. Cio' e' importante per definire i gradi di liberta del punto materiale, in quanto se  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$  si ritrova in uno di questi punti 'anomali', ha un grande di

libertà in piu, dovendo soddisfare un equazione  $\psi_i$  in meno.

$$\text{rank } \frac{\partial \psi}{\partial x} = k$$

Come naturale da tali considerazioni, un vincolo formato solo da una  $\psi_i$  e' sempre una sottovarieta'.

Se  $\psi(x, t)$  soddisfa tali condizioni, si possono scegliere delle coordinate locali  $q$  che descrivano lo spazio delimitato da  $\psi(x, t)$  con una mappa  $\varphi(q)$ . Tale mappa e' chiaramente complementare a  $\psi(x, t)$  e forma un'altra varieta', che chiameremo  $C$ , se  $\psi(x, t)$  e' una varieta', di dimensione

$$\text{rank} \frac{\partial \varphi(q)}{\partial q} = m - k = n$$

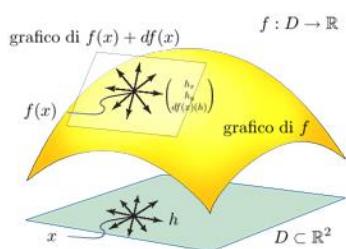
Si e' così riusciti a ridurre i gradi di libertà da  $m$  ad  $n$  per ognuno dei punti.

**Spazio tangente  $T_x C$**  Lo spazio tangente e' un'altra varietà, cui basi sono  $\frac{\partial \varphi(q)}{\partial q}$ . Essendo  $C$  una varietà, sono sempre linearmente indipendenti, e tali che anche la dimensione di  $T_x C$  sia  $n$ .

**Fibrato tangente  $TC$**  E' somma di  $C$  e spazio tangente  $T_x C$ . Ha dimensione  $2n$ , infatti, definito con  $\Omega$  l'insieme complementare a  $TC$ , ovvero formato da  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \psi}{\partial v}$  si nota che il rango di  $\Omega$  e':

$$\text{rank} \frac{\partial \Omega(x, v)}{\partial x, v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} v \right) & \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix} = 2k$$

In quanto si e' posto che le  $\psi_i$  non dipendano da  $v$  (vincolo integrabile) e dunque il complementare  $TC$  ha dimensione  $2m - 2k = 2n$ . Essendo



Una generica velocità in coordinate  $q$  si scrive nella forma,

$$v_j = \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial \varphi(q)}{\partial q_h}$$

Dunque, si e' riuscito a creare un fibrato tangente (uno spazio delle fasi) dove sono contenute informazioni su coordinate e velocità, tale che:

$$TC = \{(x, v) \in R^m \times R^m : x \in C, v \in T_x C\}$$

E' importante ricordare che in tale trattazione si sta considerando anche  $\dot{q}_h$  come coordinata. Il fatto che essa sia derivata della  $q_h$  e' poi dovuto alle basi scelte per la sua descrizione, ma in tal senso una funzione dipendente solo da  $q_h$  ha  $\frac{\partial f(q_h)}{\partial \dot{q}_h} = 0$  ovvero nello spazio delle configurazioni per una generica posizione tutte le velocità sono ammissibili, questo perché non si e' fatta nessuna considerazione temporale per la determinazione dei ranghi. E' un discorso da approfondire.

### Suddivisione per dipendenza dal tempo

- Vincoli Reonomi: Dipendono dal tempo. La dipendenza non modifica comunque le ipotesi fatte in quanto si può immaginare di prendere una "istantanea" ed analizzare i vettori del fibrato tangente in quello spazio, per poi riportarli nel veritiero.
- Vincoli Scleronomi: Non dipendono dal tempo  $\phi(t) = 0$

### Suvvisione per equazione del vincolo

- Vincoli Otonomi: sono integrabili, cioè esiste una funzione  $\psi(x, t) = 0$  funzione delle sole posizioni che, derivata, diventa  $\dot{\psi}(t) + B(x, t)v = 0$ . I vincoli otonomi sono solitamente vincoli sulle posizioni, ma la forma dell'equazione non esclude che ci siano anche vincoli sulle velocità (che devono però soddisfare certe condizioni) e che essi siano otonomi. Ricordiamo che un vincolo è sulle velocità quando non è esprimibile come vincolo sulle posizioni. Solo in vincoli otonomi valgono le considerazioni sui ranghi e sull'indipendenza delle basi  $\frac{\partial \varphi(q)}{\partial q_h}$  con le quali si scrivono le velocità nel nuovo sistema di riferimento. Infatti, si è esplicitamente fatto uso dell'ipotesi che  $\psi(x, t)$  sia indipendente dalle

velocita' per la determinazione del rango di TC. In un vincolo olonomo, ogni  $\psi_i$  toglie un grado di liberta. Se il vincolo e' sulle posizioni, condizione necessarie e sufficiente affinche il vincolo sia olonomo e' che si riesca a trovare una varietà, ovvero che i gradienti delle  $\psi_i$  non siano mai dipendenti. In caso contrario, si dovranno utilizzare le equazioni di Lagrange con i moltiplicatori di Lagrange. In descrizione piu' formale, un vincolo e' olonomo se:

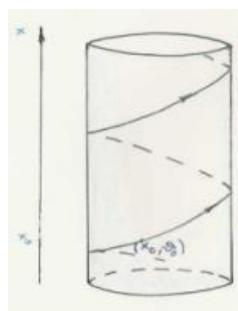
*Per ogni valore di t, l'insieme delle configurazioni  $C_t \in \mathfrak{R}$  sono tutte diffeomorfe tra loro, quindi hanno tutte stessa dimensione n. Ogni  $C_t$  ammette una mappa  $q \rightarrow \chi(q, t)$  di classe  $C^2$*

Se per alcuni punti il rank  $\frac{\partial \varphi(q)}{\partial q}$  fosse maggiore, la varietà non sarebbe diffeomorfa perche' non invertibile in quell'intorno.

- **Vincoli anolonomi:** ogni vincolo non olonomo, e' anolonomo. In tali vincoli le condizioni sono tali da non togliere sempre un grado di liberta', ma limitare comunque, nello spazio delle fasi, i vettori velocita' accessibili dello spazio  $T_x C$ . Ovvero si riesce a scrivere il vincolo solo in forma di differenziali, ma non si riesce a trovare un integrazione.

*Esempio: disco che rotola su una guida orizzontale* . Servono due coordinate lagrangiana, sempre indipendenti fra di loro,  $s$  e  $\vartheta$ . Per descrivere il moto. Il vincolo e' olonomo. Lo spazio delle configurazioni C e' un cilindro di raggio R del disco.

*Esempio: disco che rotola senza scricciare su una guida orizzontale* rettilinea, unidimensionale

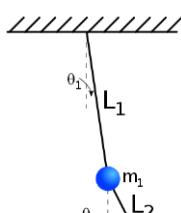


E' un vincolo di tipo olonomo, pur essendo un vincolo sulle velocita'. Infatti, la condizione di puro rotolamento unidimensionale e' integrabile,  $s + R\vartheta = s_0 + R\vartheta_0$  e toglie un grado di liberta' restringendo così la dimensione TC. Tutti i vettori velocita' risultano accessibili all'elica facente parte del cilindro. L'elica e' il nuovo spazio delle configurazioni, e si usa una sola coordinata lagrangiana, o  $s$  o  $\vartheta$ .

*Esempio: disco che rotola senza strisciare su un piano orizzontale*

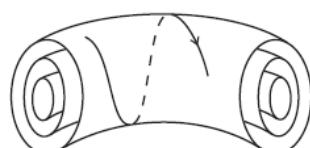
Il vincolo e' anolonomo. Infatti, si e' posto un vincolo sulle velocita' ma tale vincolo non e' integrabile, perche' non toglie gradi di liberta': Scelto un punto di arrivo del disco, la sua configurazione dipende dalla lunghezza della curva percorsa, che puo essere qualsiasi. Dunque sono sempre necessarie quattro coordinate per descriverne il moto, come avverrebbe per il caso senza rotolamento: due coordinate spaziale, due angoli.

*Esempio: pendolo doppio*



Il vincolo risulta olonomo, in quanto e' un vincolo sulle coordinate. Si possono scegliere due angoli come coordinate lagrangiane. Lo spazio delle configurazioni e' un toro quadrimensionale (dato che su di esso si possono descrivere due angoli).

Il problema di tale vincolo e' che e' un esempio di moto caotico, perche' lievi differenze sulle condizioni iniziali risultano nella completa indeterminazione del moto.



Spesso gli spazi di configurazioni sono visualizzabili come dei tori, quando son presenti due angoli come coordinate. Spesso le orbite sono di tipo caotico, ovvero non periodico (l'intersezione temporale dei tori negli stessi piani dell'orbita e' sempre in punti diversi...che seguono delle leggi...)

### Vincolo ad una curva

Scelta  $s$  = parametrizzazione intrinseca della curva come coordinate  $q$ , si possono scrivere le equazioni:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_{t(s,\dot{s},t)} + \phi_t \\ m\dot{s}^2 \kappa_{(s)} = F_{n(s,\dot{s},t)} + \phi_n \\ F_{n(s,\dot{s},t)} = -\phi_b \end{cases}$$

### Vincoli puri

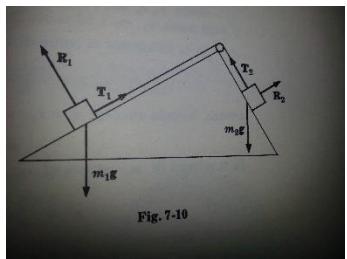
Un vincolo e' definito puro se  $\phi \cdot v = 0$ , ovvero la reazione e' liscia, non compie lavoro

Se non si fa questa ipotesi, ci sono troppe incognite nel sistema per poterlo risolvere senza ulteriori informazioni. Si dovrebbe schematizzare il moto come il limite di tanti moti infinitesimi conservativi...

### Principio dei lavori virtuali

Si definisce **spostamento virtuale** uno spostamento da dare alla particella per toglierla dall'equilibrio, si indica con  $\delta r$  ed e'  $\neq dr$ . Non prende in considerazione le reazioni vincolari, il quanto il loro lavoro virtuale, se sono vincoli puri, e' nullo. Gli spostamenti in coordinate lagrangiana  $\delta q$  sono sempre virtuali. Per trovare l'equilibrio di una configurazione, si dovrebbe porre:  $F \cdot dr = 0$ , e considerare quindi anche le forze vincolari. Con l'utilizzo degli spostamenti virtuali si puo scrivere invece  $F^v \cdot \delta r = 0$  e l'incognita vincolare sparisce se il vincolo e' di tipo puro.

*es. Determinare la stabilita' del sistema*



### Principio di D'Alembert

Generalizzando il principio dei lavori virtuali, vedendo la derivata della quantita' di moto come una "forza" che provoca instabilita', si riesce ad unire la dinamica con la statica:

$$\sum_{j=1}^N (F_j^v - p_j) \cdot \delta r_j = 0$$

*es. nel problema precedente,*

$$\delta r_1 + \delta r_2 = 0 \rightarrow \ddot{r}_1 = -\ddot{r}_2 \quad \ddot{r}_1 = \frac{m_1 g \sin \alpha_1 - m_2 g \sin \alpha_2}{m_1 + m_2}$$

## EQUAZIONI DI LAGRANGE

### Matrice massica

Si definisca una matrice diagonale  $M$  con sulla diagonale, ripetuta tre volte, la massa di ogni corpo del sistema  $M = \text{diag}\{m_1, m_1, m_1, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N\}$ .

### Energia cinetica

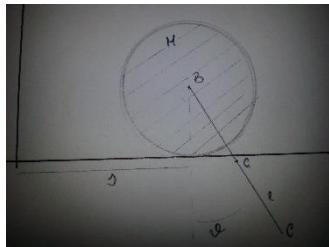
$$\begin{aligned} T_{(q,\dot{q},t)} &= T_{2(q,\dot{q},t)} + T_{1(q,\dot{q},t)} + T_{0(q,t)} \\ T_{2(q,\dot{q},t)} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A_{(q,t)} \dot{\mathbf{q}} \\ T_{1(q,\dot{q},t)} &= b_{(q,t)} \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

$A_{(q,t)}$  = Matrice cinetica, e' definita positiva, in quanto la matrice massica lo e' ed i versori della mappa se il vincolo e' olonomo sono sempre linearmente indipendenti. Nel caso in cui il vincolo siano scleronomi, i termini  $T_{1(q,\dot{q},t)}$  e  $T_{0(q,t)}$  non sono presenti.

*dimostrazione*

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\chi}{dt} = \dot{x} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^N q_j \frac{\partial \chi}{\partial q_j} \right) = \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \frac{\partial \chi}{\partial q_j} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ T &= \frac{1}{2} v \cdot M v = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \frac{\partial \chi}{\partial q_j} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \cdot M \left( \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \chi}{\partial q_i} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\ A_{(q,t)} &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial \chi}{\partial q_j} \cdot M \sum_{i=1}^N \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \quad a_{ij} = \frac{\partial \chi}{\partial q_j} \cdot M \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \\ b_{i(q,t)} &= \frac{\partial \chi}{\partial t} \cdot M \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \\ T_{0(q,t)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \cdot M \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned}$$

*esempio di matrice cinetica*



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{3}{2}M + m \right) \dot{s}^2 + 2l \cos \vartheta \dot{s} \dot{\vartheta} + \frac{4}{3} l^2 \dot{\vartheta}^2 \right) = \frac{1}{2} (\dot{s}) \cdot A_{(q,t)} (\dot{s}) \\ A_{(q,t)} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M + m & l \cos \vartheta \\ l \cos \vartheta & \frac{4}{3} l^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Forze generalizzata

Nelle componenti  $q_j$  una forza, che puo dipendere dal tempo, si scrivera':

$$Q_h = \sum_{j=1}^N F_j \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h}$$

Ricordiamo che  $\frac{\partial \chi}{\partial q_h}$  risulta essere un versore legato alla coordinate  $q_h$

## Equazioni di Lagrange di prima specie

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \quad \text{Sistemi olonomi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h + \lambda_1 A_a + \dots \quad \text{Sistemi anolonomi}$$

Le equazioni di Lagrange permettono di ricavare l'equazione di moto senza prendere in considerazione le reazioni vincolari (nel caso dei sistemi olonomi). Scelte delle coordinate lagrangiane comode ed indipendenti fra di loro.

### *Dimostrazione*

Si definisca la velocità reale come:

$$v = \frac{d\chi}{dt} = \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \frac{\partial \chi}{\partial q_j} + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Derivando l'espressione dell'energia cinetica scritta prima rispetto a  $\partial \dot{q}_j$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_h} \cdot Mv = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot Mv$$

Il passaggio  $\frac{\partial v}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \chi}{\partial q_h}$  è giustificato dal fatto che  $\chi$  non ha dipendenze da  $\dot{q}_h$  ma solo da  $q_h$ .

Se si provasse ad applicare generalmente si sbaglierebbe, ad esempio

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_h} \neq \frac{\partial T}{\partial q_h}$$

In quanto  $T = T_{(q, \dot{q}, t)}$

derivando nel tempo si giunge a:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot Mv + \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \frac{\partial \chi}{\partial q_j} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot Mv + \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \left( \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \frac{\partial v}{\partial q_j} + \ddot{q}_h \frac{\partial \chi}{\partial q_j} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$\frac{dv}{dt} \neq \frac{\partial v}{\partial t}$  in quanto per  $\partial$  si intende il differenziale virtuale (come in un altro sistema di riferimento)

Per calcolare le derivate  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h}$  e  $\frac{\partial v}{\partial q_j}$  si usa ora la derivazione composta e notando che  $\chi$  dev'essere continua e derivabile vale la regola della derivate miste

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial q_h} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Ora si calcoli  $\frac{\partial T}{\partial q_h}$

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial v}{\partial q_h} \cdot Mv$$

che e' uguale al primo termine di  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$ , dunque:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} &= \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{dv}{dt} = M \ddot{x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} &= Q_h \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza e' stata possibile dato che Dato che  $Q_h = M \ddot{x}$

Questo ultimo punto e' piu delicato nel caso di vincoli anolonomi, in quanto, in tal caso,

$$\sum_{j=1}^N (Q_h - M \ddot{x}) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h} = 0$$

non implica  $F = M \ddot{x}$  dato che le  $\frac{\partial \chi}{\partial q_h}$  non sono linearmente dipendenti. Per vincoli anolonomi, dunque,

vale l'equazione con moltiplicatori di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h + \lambda_1 A_a + \dots$$

dove  $\lambda_1 A_a$  danno informazioni sulle reazioni.

Come si nota, nel caso olonomico, le reazioni, pur esistendo, non giocano nessun ruolo per la determinazione dell'equazione di moto.

Per dare ora un' interpretazione all'equazione, si definisca la quantita' di moto generalizzata:

$$p_h = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot Mv$$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$  risulta cosi' essere la derivata della quantita' di moto generalizzata ,  $p_h$ .

$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot Mv$  risulta essere invece dipendente dalla derivata del versore  $\frac{\partial \chi}{\partial q_h}$ , essa e' come il prezzo che si 'paga' per essersi posti nelle coordinate lagrangiane. In tale interpretazione le equazioni di Lagrange risultano essere la prima cardinale in forma un po piu complessa ma comoda.

Le equazione di Lagrange sono cosi' equivalenti al Principio di D'Alembert (dimostrazione dell'appendice).

### Influenze sulla Lagrangiana

Dalle dimostrazioni precedenti, risulta che per una funzione che dipenda solo dalla posizione, e che sia inserita nella Lagrangiana facendone prima la derivata,

$$F(q, t) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

Se si hanno funzioni che dipendono invece sia da posizione che velocita', non e' detto che non influenzino l'uguaglianza della lagrangiana.

### Potenziale generalizzato di tipo $V_0$

Sia un potenziale della forza generalizzata  $Q_h$  una  $V$  per cui vale  $\frac{-\partial V_{(q,t)}}{\partial q_h} = Q_h$

Si puo dimostrare tramite i gradienti che  $V_{(q,t)} = v_{(\chi(q),t)}$  ovvero che il potenziale generalizzato (tale che dipende solo da  $q$ ) e' uguale a quello che si avrebbe senza vincolo.  $V_{(q,t)} = V_0$

Dunque anche con le Lagrangiana si possono utilizzare i sistemi di forze equivalenti.

### Lagrangiana e Equazioni di Lagrange di seconda Specie

Se le forze generalizzate ammettono un potenziale generalizzato, si puo scrivere:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$$

Dove  $L_{(q,\dot{q},t)} = T - V_0$

### Potenziale generalizzato di tipo V<sub>1</sub>

Qualore siano presenti delle forze dipendenti anche dalle velocita', il potenziale  $v_{(\chi(q,\dot{q}),t)}$  potrebbe dipendere anche dalle velocita'. In tal caso si deve cercare un potenziale generalizzato, diverso da  $v_{(\chi(q,\dot{q}),t)}$ , tale che soddisfi tale relazione in modo da non modificare la Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V_{(q,\dot{q},t)}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_{(q,\dot{q},t)}}{\partial q_h} = Q_h$$

Se esiste un potenziale di questo tipo per la forza  $Q_h$ , risulta necessario che esso sia composto da due termini

$$V_{(q,\dot{q},t)} = V_{0(q,t)} + V_{1(q,\dot{q},t)}$$

*dimostrazione*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h$$

Dovendo pero' avere che le forze dipendono solo da posizione e velocita',  $\frac{\partial^2 V}{\partial q_k^2} = 0$  e integrando si trova il risultato voluto.

*lemma: un potenziale non lineare in  $\dot{q}_k$  modifichera' sempre la Lagrangiana*

Le forze apparenti di un sistema rotante  $\Sigma'$  ammettono energia potenziale totale:

$$V' = ma_{O'} \cdot (Rq) - \frac{1}{2} m |w \times (Rq)|^2 + mRq \cdot w \times R\dot{q} = T' - T$$

Generalmente non si riescono ad isolare le energia potenziale per ogni termine di trascinamento, ammeno che  $w$  non sia costante. In tal caso esse sono uguali ai singoli addendi:

$$V'_{tr} = ma_{O'} \cdot (Rq) \quad V'_{cent} = -\frac{1}{2} m |w \times (Rq)|^2 \quad V_{cor} = mRq \cdot w \times R\dot{q}$$

Sempre se  $\dot{w} = 0$ , con opportune scelte del sistema di riferimento, in modo che  $Rw = w$  si puo scrivere

$$V'_{tr} = ma_{O'} \cdot (q) \quad V'_{cent} = -\frac{1}{2} m |w \times q|^2 \quad V_{cor} = mq \cdot w \times \dot{q}$$

Nel caso di un vincolo unidimensionale, la forza di coriolis, essendo perpendicolare allo spostamento in ogni istante, non compie lavoro virtuale e dunque il suo potenziale non va' considerato.

### Forze dissipative di Rayleigh

In caso di forze dissipative

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = D_h$$

## DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI BERTRAND

- Analisi della stabilita' per orbite sicuramente chiuse (orbite circolari)
- Condizione di chiusura dell'orbita per orbite vicino a quelle circolari stabili
- Generalizzazione delle condizioni trovate per tutte le orbite possibili

Posta una funzione  $\varphi(u) = \frac{-f(u^{-1})}{u^2}$  l'equazione differenziale (4) diventa:

$$\bar{u}^2 + u^2 - \frac{w}{k^2} - h = 0 \quad \text{con } w = 2 \int \varphi du = -2V(u^{-1}), \quad h = \frac{2E_{eff}}{k^2}$$

L'ipotesi di una forza attrattiva, implica  $\varphi > 0$  quindi una qualche orbita circolare per il sistema newtoniano. L'orbita risulta essere stabile se in un intorno di essa anche le altre orbite hanno andamento simile, dalla similitudine con il potenziale, si definisce  $\frac{w}{k^2} - h = \emptyset$ . Tale potenziale ha un minimo  $\bar{\emptyset} < 0$  dove le orbite circolari sono stabili. Il caso con  $\bar{\emptyset} = 0$  non crea un continuo (impossibile) e per  $\bar{\emptyset} > 0$  le orbite circolari non sono stabili (cambiamento per  $n < -3$ ). Quindi esiste un intervallo aperto non vuoto di  $u$  tale che per certe forze ci siano orbite limitate.

Data l'espressione dell'angolo di avanzamento del pericentro,

$$\Delta\vartheta = I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{\sqrt{h + \frac{w}{k^2} - u^2}}$$

Il fatto che si definisca l'angolo di avanzamento del pericentro, pone che  $u = \beta, \alpha$  siano punti di inversione. Si ricava che quindi son legati a  $w$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{w(\beta) - w(\alpha)} \quad h = \frac{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha)}{w(\beta) - w(\alpha)}$$

Ora si analizzano le orbite vicine a quelle circolari stabili per capire come dev'esser fatta  $w(u)$ .

Si pone quindi  $s = \beta - \alpha$  e si fa tendere  $s \rightarrow 0$ , si ricava che

$$\lim_{s \rightarrow 0} I(\alpha, +s) = \pi \sqrt{\frac{\bar{w}}{\bar{w} - a\bar{w}}}$$

e dunque la divisibilita' per  $\pi$  anche nelle orbite stabili dipende ad  $\bar{w}$ , che deve soddisfare un equazione differenziale perche  $I(\alpha, +s)$  risulti divisibile.

$$q^2 \alpha \bar{w}(a) + (1 - q^2) \bar{w}(a) = 0 \quad w(z) = \frac{2A}{2 - \sigma} z^{2-\sigma} + B \quad \text{con } \sigma = 1/q^2$$

Se tale relazione e' soddisfata da  $w(z)$  sicuramente l'orbita e' stabile e' divisibile per  $\pi$ , ma nulla si puo dire senza rivalutare l'espressione nell'integrale. Tutte le orbite divisibili, anche quelle non circolari, dovranno pero soddisfare quella equazione di  $w(z)$ .

Risostituendo, si trovano cosi i due valori di  $q$ , che portano a determinare  $w(z)$  e quindi le forze per cui le orbite sono chiuse.

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^2} \quad \text{con } q = 1, \quad f(\rho) = -A\rho \quad \text{con } q = 1/2$$

## DIMOSTRAZIONE DELLA STABILITÀ' PER MINIMI DEL POTENZIALE

Dall' equazione di Lagrange di prima specie si dimostra che essa e' equivalente al principio di D'Alembert

$$A_{(q,t)}\ddot{q}_h = Q_{(q,\dot{q},t)} + \frac{\partial T}{\partial q_h} - \frac{dA_{(q,t)}}{dt}\dot{q}_h - \frac{db_{(q,t)}}{dt}$$

$$A_{(q,t)}\ddot{q}_h = F_{(q,\dot{q},t)} \quad \begin{cases} v = \dot{q} \\ \dot{v} = A^{-1}F \end{cases}$$

Nel caso in cui  $T = T_2$  e le forze non dipendano dal tempo, si ha che nei punti di equilibrio,

$$F_{(q_0,0)} = Q_{(q_0,0)} = 0$$

Nel caso in cui esistano potenziali di tipo  $V_0 + V_1$ , porre  $Q_{(q_0,0)} = 0$  e' come porre

$$\frac{\partial V_0}{\partial q} = 0, \text{ ovvero } V_1 \text{ non cambia gli equilibri del sistema, dato che } \dot{q} = 0$$

Nei punti vicino all'equilibrio, si puo linearizzare

$$Q_{(q,\dot{q},t)} = \frac{\partial Q_{(q_0,0)}}{\partial q}(q - q_0) + \frac{\partial Q_{(q_0,0)}}{\partial \dot{q}}\dot{q} = -V_0''(q - q_0) - B_{(q_0)}\dot{q} \quad \text{con } V_0'' = \frac{\partial^2 V_0}{\partial q^2}$$

e posta la sostituzione  $\zeta = q - q_0$ ,  $\eta = \dot{q}$  per formalismo, si ottiene il sistema dinamico:

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}V_0'' & -B_{(q_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}V_0'' & -B_{(q_0)} \end{pmatrix}$$

Si vuole ora analizzare la stabilita' di questo sistema dinamico.

### Caso in cui $V=V_0$

In tal caso la matrice  $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}V_0'' & 0 \end{pmatrix}$ . I suoi autovalori  $\lambda$  sono legati agli autovalori  $\lambda_h$  di  $A^{-1}V_0''$

dalla relazione  $\lambda = \pm\sqrt{-\lambda_h}$ . Essendo la matrice  $A^{-1}$  positiva, gli autovalori  $\lambda_h$  seguono il segno di  $V_0''$ .

Non c'e' inoltre necessariamente bisogno di calcolarli esplicitamente, ma sono determinabili mediante l'equazione secolare :  $\det(V_0'' - \lambda_h A) = 0$

*dimostrazione per il teorema spettrale generalizzato, dalla forma di  $\mathcal{M}$ , si sa che gli autovettori della matrice devono essere ortogonali fra di loro secondo il prodotto scalare definito da  $A$ . Si puo effettuare una **diagonalizzazione simultanea di forme quadratiche** su ellisoidi definiti su insiemi compatti di  $A$ . Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si trova l'equazione secolare.*

Se  $\lambda_h$  risultano negativi, il sistema risulta essere instabile in quanto un  $\lambda$  e' positivo e si hanno delle separatrici. Se i  $\lambda_h$  sono positivi o nulli nulla si puo dire con questo metodo.

*Integrale di Jacobi e Teorema di Lagrange-Dirichlet*

Se la Lagrangiana non dipende dal tempo, ovvero la forza e' il vincolo non ne dipendono, esiste una funzione di Lyapunov per il caso in cui i  $\lambda_h$  sono positivi, che dimostra la stabilita' del sistema dinamico

$$J = T_2 + V_0$$

Porre i  $\lambda_h$  nulli o positivi equivale a dire che  $V_0''$  debba avere un minimo stretto (anche degenere).

### Caso in cui $V=V_0 + V_1$

La matrice ha questa volta uno spettro diverso, ma nel caso degli autovalori  $\lambda_h$  positivi continua a valere l'integrale di Jacobi e il Teorema di Lagrange-Dirichlet. La presenza di eventuali termini *girostatici* dipendenti da  $\dot{q}$  puo' pero rendere il sistema stabile anche quando i  $\lambda_h$  sono negativi, in opportuni casi, per un fenomeno chiamato **stabilizzazione con termini girostatici**. L'ipotesi sul minimo stretto di  $V_0''$  e' quindi sufficiente ma non necessaria per la stabilita'.

**DINAMICA:** Si occupa dello studio delle cause che provocano il moto, ovvero dei moti che possono avvenire sperimentalmente

1. Principio di Inerzia
2. Legge di Newton  $F = \dot{Q}$
3. Principio di azione reazione

**CINEMATICA:** Si occupa dello studio di tutti i possibili moti di sistemi di riferimento, indipendentemente dalle cause

### CAMBIAMENTO DI BASE

se D=diagonale  $M = ADA^{-1}$  con A matrice autovettori

$$D = A^{-1}MA$$

### PRODOTTI VETTORE

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

$$GP = OP - OG \quad OG + GP = OP$$

Un **diffeomorfismo** è una funzione tra due varietà differenziabili con la proprietà di essere differenziabile, invertibile e di avere l'inversa differenziabile

### FUNZIONI OMOGENEE

$$\begin{cases} f(\lambda x) = \lambda^a f(x) \\ \nabla f(\lambda x) = \lambda^{a-1} f(x) \\ x \cdot \nabla f(x) = af(x) \end{cases}$$

### TERMINI

Spazio euclideo tridimensionale, mappa differenziabile, spazio tempo galileo, fibrato banale, gruppo di trasformazioni Galileo, principio di relatività, gruppo ortogonale.

Spazio delle fasi, spazio delle configurazioni, varietà, sottovarietà, spazio tangente, fibrato tangente.

Vincoli reonomi, scleronomi, olonomi, anolonomi.

### FORMULE FONDAMENTALI

$$\dot{u}_{|\Sigma} = w \times u + \dot{u}_{|\Sigma'}$$

$$x = x_0 + Rx'$$

$$\dot{x}_{|\Sigma} = \dot{x}_0_{|\Sigma} + R\dot{x}'_{|\Sigma'} + w \times (Rx')$$

$$\ddot{x}_{|\Sigma} = \ddot{x}_0_{|\Sigma} + R\ddot{x}'_{|\Sigma'} + 2w \times (R\dot{x}'_{|\Sigma'}) + w \times (w \times (Rx')) + \dot{w} \times Rx'$$

$$M_Q = \sum_{j=1}^N (x_j - x_Q) \times m_j(v_j) \quad M_Q_{|\Sigma} = M_B_{|\Sigma} + (x_B - x_Q) \times m(v_B)$$

$$\begin{cases} \dot{p} = R^E \\ \dot{M}_Q = N_Q - v_Q \times p \end{cases} \quad v_P - v_K = w \times (P - K)$$

$$N_Q^E = \dot{\mathbb{t}}_B \dot{w} + (x_B - x_Q) \times R^E \quad M_Q = \dot{\mathbb{t}}_B w + (x_B - x_Q) \times mv_B$$

$$\dot{\mathbb{t}}_Q \dot{w} + (\dot{\mathbb{t}}_Q w) \times w = N_Q$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$$