# FORMULA DI TAYLOR in PIÙ VARIABILI

Sia $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $\cdot\ \nabla f = f_{x_1} + \dots f_{x_n}$

$\cdot\ \nabla f' = f_{x_1 x_2} \dots f_{x_n x_n}$

## NOTAZIONE

Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

- Si dice MULTINDICE $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ con $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_m!$

- Si indica con $D^\alpha f(x_0) = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}$

ESEMPIO

- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$D^{(2,1)} f(x_0) = f_{xxy}(x_0)$

- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$D^{(2,2,0)} f(x_0) = f_{xxyy}(x_0)$ ; $D^{(0,0,1)} f(x_0) = f_z(x_0)$

Infine si indica il modulo:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ (ORDINE delle DERIVATA)

- **TEOREMA** (taylor in più variabili)

caso di 2 variabili:

$$f(x_0 + h_1, y_0 + k_1) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, K + \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \\ |\alpha| = 2}} \frac{D^\alpha f(x_0, y_0)}{\alpha!} h^{\alpha_1} k^{\alpha_2}$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \\ |\alpha| = 3}} \frac{D^\alpha f(x, y)}{\alpha!} h^{\alpha_1} \cdot k^{\alpha_2} + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}^{\,3}\right)$$

· DIMOSTRAZIONE

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ e $H_f(x_0, y_0)$ è def POSITIVO

$\rightsquigarrow (x_0, y_0)$ é di min. locale ?

Usiamo TAYLOR in 2 VARIABILI

$$\rightarrow f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{D^{(2,0)} f(x_0,y_0)}{2!\,0!} \cdot h^2 + \frac{D^{(0,2)} f(x_0,y_0)}{0!\,2!} \cdot k^2$$

$$+ \frac{D^{(1,1)} f(x_0,h_0)}{1!\,1!} h \cdot k$$

$$\Rightarrow f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{2} \cdot h^2 + \frac{f_{yy}(x_0,y_0)}{2} \cdot k^2 + f_{xy}(x_0,y_0) h \cdot k$$

$$+ o(h^2+k^2)$$

· Vediamo che Relazione c'é con l'Hessiano

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Ed $\left\langle H_f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle$ Trovo che

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2} \overset{\lambda_0(h^2+k^2)}{\overset{\shortparallel}{\underbrace{H_f(x_0,y_0)}_{\text{def POSITIVO}}}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2+k^2)$$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \geq \lambda_0 (h^2+k^2) + o(h^2+k^2)$$

RIPASSO di ALGEBRA

A def POSITIVA $A \in S_{ym}(m \times m)$, SIMMETRICA.

$$Ax \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \cdot x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot x_1^2 + \lambda_2 \cdot x_2^2 + \dots \lambda_m x_m^2 \geq \lambda_1 (x_1^2 + \dots + x_m^2)$$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_m \end{pmatrix}$

ESEMPIO CALCOLO TAYLOR.

Calcolare il POL di TAYLOR in $(0,0)$ al 2° ordine di $f(x,y) = \sin(x+y)$

1 PASSO) $f(x,y) = 1x + 1y + \dots$

Ricordando che $f_x = \cos(x+y)$ ; $f_y = \cos(x+y)$

$f_{xx} = -\operatorname{sen}(x+y)$ ; $f_{yy} = -\operatorname{sen}(x+y)$ ; $f_{xy} = -\operatorname{sen}(x+y)$

$$f(x,y) = 1 \cdot x + 1 \cdot y + \frac{\emptyset}{2!} \cdot x^2 + \frac{\emptyset}{2} y^2 + \frac{\emptyset}{1} x \cdot y + o(x^2 + y^2)$$

$f(x,y) = x + y + o(x^2 + y^2)$, questo vale fino al 2° ordine

- Al 3° ordine diventa più complicato:

$(\alpha_1, \alpha_2) \longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 3$ allora avremo

$(3,0)$ $(0,3)$ $(2,1)$ $(1,2)$ TUTTI i MULTINDICI.

E lo sarà ancora più complicato al 5° o 6° ordine!

Ma per sen xy c'è un metodo più ASTUTO! Rifaccio il calcolo del Pol al 3° ordine senza fare le derivate terze.

$$\operatorname{sen}(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

- Al posto di $t$ ci metto $x+y$.

$$\operatorname{sen}(x+y) = x+y - \frac{(x+y)^3}{6} + o\left((x+y)^3\right).$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = x+y - \frac{x^3}{6} - \frac{y^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 \cdot y - \frac{1}{2}x \cdot y^2 + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\right)$$

$$\frac{g(x,y)}{|x+y|^3} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 \implies \frac{g(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} \longrightarrow 0$$

$$\frac{g(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = \frac{g(x,y)\cdot|x+y|^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 \cdot |x+y|^3} \longrightarrow \text{perché } \frac{|x+y|^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} < C \quad C = 8$$

- DOMANDA (TIPICA DA PRE-TEST)

Data $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$, quanto vale $\dfrac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y}$ ?

Equivale a chiedere $\dfrac{D^{(2,1)} f(0,0)}{2!\,1!} = -\frac{1}{2}$

ESERCIZIO

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{e^{x^2+y^2} - \cos(xy)}{x^2+y^2}\right]$$

Procedo con

$$e^t = 1 + t + o(t) \implies e^{x+y} = 1 + x^2 + y^2 + o(x^2+y^2)$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \implies \cos(x\cdot y) = 1 - \frac{x^2\cdot y^2}{2} + o(x^2+y^2)$$

Ora non mi resta che fare la differenza tra le 2 funzioni trovate con taylor

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+o(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \longrightarrow \underline{1}$$

7 APRILE

ESEMPI di TAYLOR in 2 VAR

ES. 1

1. $f(x,y) = (\operatorname{sen} x)\cdot e^{x^2y}\cdot \cos y$

$\cdot\ f_{xxxyy}(0,0) = ?$ $\boxed{\text{É il coefficiente di uno sviluppo di TAYLOR.}}$

→ Ricorro TAYLOR in $(0,0)$ fino all'ordine $\underline{4}$ perché mi sto chiedendo le derivate quarte

→ Il METODO dei multiindici qui non va bene, dovrei trovare gli $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ tal che $|\alpha| \leq 4$. TROPPO LUNGO, non va bene.

SVILUPPI di TAYLOR - MC. LAURIN

- $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$
- $\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$
- $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

ho $e^t$ che è una composizione.

$t = x^2\cdot y$ $\quad t^2 = x^4\cdot y^2$ e vado al grado 6.

$$e^{x^2 \cdot y} = 1 + x^2 \cdot y + \frac{x^4 y^2}{2} + o(x^4 y^2)$$

- IN GENERALE

$$\boxed{o(x^h \cdot y^k) \longrightarrow o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,(h+k)}\right)}$$

POSSO FARE QUESTA SOSTITUZIONE

$$f(x,y) = \overbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,5}\right)\right)}^{1} \cdot \overbrace{\left(1 + x^2 \cdot y + \frac{x^4 \cdot y^2}{2} + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,6}\right)\right)}^{2}$$

$$\cdot \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + o\sqrt{x^2+y^2}^{\,4}\right)$$

dove

$$1 \longrightarrow \left(x + x^3 \cdot y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,4}\right) - \frac{x^3}{3!}\right)$$

$$2 \longrightarrow \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,4}\right)\right)$$

$$\cancel{x - \frac{xy^2}{2} + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,4}\right)}$$

$$x - \frac{xy^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + x^3 \cdot y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,4}\right) \Longrightarrow$$ POLINOMIO di TAYLOR

- Domanda: $(0,0)$ è un punto critico per $f$?

$$f_x(0,0) = 1 \quad ; \quad f_y(0,0) = 0$$

L'Hessiana è 0 e Tappeto $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial^3 x \partial y}(0,0) = \frac{D^{(3,1)} f(0,0)}{3! \cdot 1!} = \text{è il coeffic. di } x^3 y = 1$$

quindi $D^{(3,1)} f(0,0) = 3! \cdot 1! = 6$

# MATRICE JACOBIANA

**PREMESSA**

Funzioni vettoriali quando il dominio è $\mathbb{R}^k$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — ROBA DI ANALISI 1
- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — Funzione SCALARE
- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — Funzione vettoriale

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$(x_1 \dots x_n) \longrightarrow (f_1(x_1, x_2, \dots x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots x_n))$$

**ESEMPIO**

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longrightarrow (\underbrace{\sin(x \cdot y \cdot z)}_{f_1(x,y,z)}, \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{f_2(x,y,z)})$$

- Un oggetto importante per questo tipo di funzioni è la matrice **JACOBIANA**

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
$$(f_1(x_1 \dots x_n), f_k(x_1 \dots x_n))$$

- $\text{JACOB} f = Jf$ = Una matrice che ha $k$ RIGHE ed $n$ COLONNE

ovvero $Jf \in \text{Mat}(k \times n)$;

$$\boxed{Jf_{k \times n} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_k \end{bmatrix}}$$

- **ESEMPIO**: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$f(x,y,z) = (\underbrace{x\,y}_{f_1}, \underbrace{y\,z}_{f_2}, \underbrace{\sin(x\,y\,z)}_{f_3}, \underbrace{1}_{f_4})$$

$$Jf = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ yz\cos(xyz) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

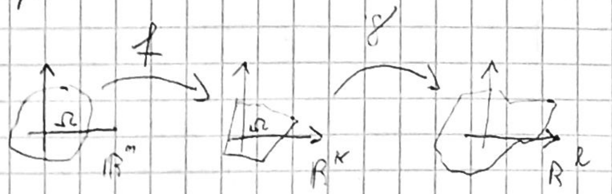
REGOLA della derivata della funz. composta.

# JACOBIANO della funzione composta

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$g : \Omega' \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$

$g \circ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$




## TEOREMA

Lo Jacobiano di $g \circ f$ è il prodotto delle matrici

$$J_g \cdot J_f$$

$$\boxed{\underbrace{J(g \circ f)}_{Mat_{(l \times n)}}(\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^n}) \longrightarrow \underbrace{J_g[f(x)]}_{Mat_{(l \times k)}} \cdot \underbrace{J f(x)}_{Mat_{(k \times n)}}}$$

ESEMPIO 1

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$g(u,v) \longrightarrow (u, v, u^2 + v^2)$

$f \circ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , $J(f \circ g)(u,v) = ?$

$$J f = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \end{bmatrix} \qquad J_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{bmatrix}$$

$$J f(u,v) = \left( v(u^2+v^2),\ u(u^2+v^2),\ u \cdot v \right)$$

- $J(f \circ g)(u,v) = \left( v(u^2+v^2) + 2u^2 v,\ u(u^2+v^2) + 2uv^2 \right)$

~~ESEMPIO 2~~

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2 \dots x_n), \qquad \alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad t \longrightarrow (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

Che composizione ha senso fare?

- $f \circ \alpha$, diventa una funz di 1 variabile.
- $\alpha \circ f$, funz da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$, la JACOBIANA ricava una $Mat_{n \times n}$

Per $f \circ \alpha$ devo ottenere una $Mat_{1 \times 1}$, perché ho solo una derivata!

$$J\alpha(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1'(t) \\ \vdots \\ \alpha_n'(t) \end{bmatrix} \qquad Jf(x) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

$$J(f \circ \alpha(t)) = Jf[\alpha(t)] \cdot J\alpha(t) =$$

$$= \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1'(t) \\ \vdots \\ \alpha_n'(t) \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha(t)) \cdot \alpha_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha(t)) \alpha_n'(t)$$

Che si può scrivere in maniera compatta come.

$$\nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = J(f \circ \alpha(t))$$

ESEMPIO

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad (x, y, z) \longrightarrow sen(xy) \cdot e^z$$

Calcolare $\frac{d}{dt}(f \circ g(t))$

Usando la formula:

$$\nabla f(g(t)) \circ g'(t)$$

$$g'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x,y,z) = \left( y\cos(xy)\cdot e^z ,\ x\cos(xy)\cdot e^z,\ \mathrm{sen}(xy)\cdot e^z \right)$$

Non mi va bene, faccio l'op. di composizione

$\underline{x \to t}$ , $\underline{y \to t^2}$ , $\underline{z \to t^3}$

$$\left( t^2 \cos(t^3)\cdot e^{t^3},\ t\cdot\cos(t^3)\cdot e^{t^3},\ \mathrm{sen}(t^3)\cdot e^{t^3} \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(f\circ g(t)\right) = t^2(\cos t^3)\cdot e^{t^3} + 2t^2\cdot\cos(t^3)\cdot e^{t^3} + 3t^2\cdot \mathrm{sen}(t^3)e^{t^3}$$

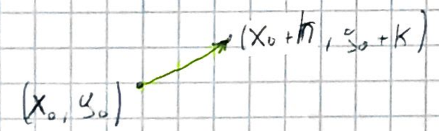
DIMOSTRIAMO TAYLOR in 2 VARIABILI al 2° ORDINE

RICORDIAMO CHE

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot h^2\cdot\frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2 + \frac{1}{1!}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot h\cdot k + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

- PERCHE VALE QUESTA SCRITTURA?




- Mi faccio la funz. lungo il segmento.

$$t \longrightarrow f(x_0+t\cdot h,\ y_0+t\cdot k) = g(t)$$

TAYLOR IN 1 VARIABILE PER $g(t)$

$$g(t) = \underbrace{g(0)}_{f(x_0,y_0)} + g'(0)\cdot t + \frac{1}{2}\cdot g''(0)\, t^2 + o(t^2)$$

- $g'(0) = ?$ So che $g'(t) = (h,k)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0+tk), \frac{\partial f}{\partial y}(\ldots)\right)$

$g'(t) = h\cdot f_x(x_0+t\cdot h, y_0+t\cdot k) + k\cdot f_y(x_0+t\cdot h, y_0+t\cdot k)$

$$g'(0) = h \cdot f_x \cdot (x_0, y_0) + K \cdot f_y (x_0, y_0)$$

- ORA CALCOLO $g''(0)$, quindi $g''(t)$:

$$g''(t) = h\,(h, K) \cdot \big(f_{xx}(x_0 + t h, y_0 + t \cdot K), f_{xy}(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k)\big)$$

$$+ K\,(h, K) \cdot \big(f_{xy}(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k), f_{yy}(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k)\big)$$

$$g''(0) = h(h,k) \cdot \big(f_{xx}(x_0 + y_0), f_{xy}(x_0 + y_0)\big) + K(h,k) \cdot \big(f_{xy}(x_0, y_0), f_{yy}(x_0, y_0)\big)$$

$$= h\big(h \cdot f_{xx}(x_0, y_0) + k\, f_{xy}(x_0, y_0)\big) + K\big(h\, f_{xy}(x_0, y_0) + K\, f_{yy}(x_0, y_0)\big)$$

SOSTITUISCO nella FORMULA DI TAYLOR

$$g(t) = f(x_0, y_0) + \big(h \cdot f_x(x_0, y_0) + K\, f_y(x_0, y_0)\big)\, t$$

$$+ \frac{1}{2}\big(h^2 \cdot f_{xx}(x_0, y_0) + 2h \cdot K\, f_{xy}(x_0, y_0) + K^2 \cdot f_{yy}(x_0, y_0)\big)\, t^2$$

Se scelgo $t = 1$,

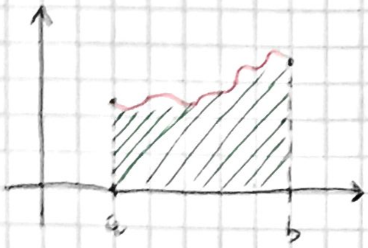
$g(1) = f(x_0 + h, y_0 + K)$ ho dim. la form. di TAYLOR

wow.

# INTEGRALI DOPPI

AM 1

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

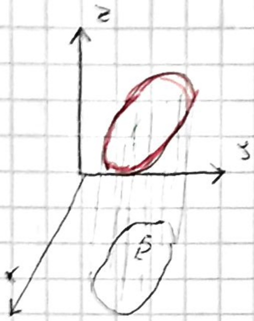


Il significato geometrico è quello di AREA.

- INTEGRALE DOPPIO

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

$\Omega$ è la regione



Il significato geometrico è quello di VOLUME

## ESEMPIO 1

$$\iint_R \lambda\,dx\,dy \qquad \text{con} \quad R = [a,b] \times [c,d]$$

l'altezza è $\lambda$!
quindi

$$\iint_R \lambda\,dx\,dy = \lambda(b-a)(d-c)$$

## ESEMPIO 2

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{R_i=1}^{m} \lambda_i$$

CASO NON BANALI

come procedo per definire

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$ in generale ?

1) Passo 1

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} 0 & se\ (x,y) \in \Omega \\ f(x,y) & se\ (x,y) \in \Omega \end{cases}$$

2) Passo 2

$$m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi R_i \quad t.c. \ \sum \lambda_i \chi R_i \leq \hat{f}(x,y) \right\}$$

M

3) Passo 3

$$I^+(f) = \inf_{M} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot Area(R_i)$$

$$I^-(f) = \sup_{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot Area(R_i)$$

4) Passo 4

Se $I^+(f) = I^-(f)$ allora $\iint_{\Omega} f = I^+(f) = I^-(f)$

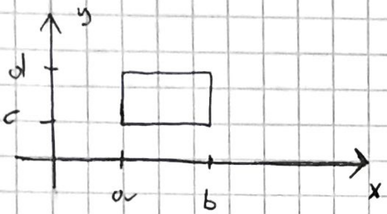
L'obbiettivo del calcolo integrale è ricondursi a integrali in una variabile.

## TEOREMA DI FUBINI

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ ed $f(x,y)$ continua

ALLORA

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)$$




oppure

$$= \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)$$

considero y come una costante.

Il risultato deve essere un numero, non una funzione!

## ESEMPI 1

Calcolare $\iint_\Omega (x + x^2 y)\,dx\,dy$ con $\Omega = [0,1] \times [2,4]$ (INT x, INT y)

Integrale, calcoliamo prima in dy e poi in dx

$$\int_0^1 dx \left(\int_2^4 (x + x^2 y)\,dy\right) = \int_0^1 dx \left(\left[x \cdot y + \frac{x^2 \cdot y^2}{2}\right]_{y=2}^{y=4}\right)$$

$$= \int_0^1 dx\,[4x + 8x^2 - 2x - 2x^2] = \int_0^1 (6x^2 + 4x)\,dx = \left[2x^3 + x^2\right]_{0=x}^{x=1}$$

$$= \boxed{3}$$

## ESEMPIO 2

calcolare:

$$\iint_\Omega x^2 \cdot \operatorname{sen} y\,dx\,dy \qquad \Omega = [0,3] \times [0,\pi]$$

È POSITIVA SUL DOMINIO DI INTEGRAZIONE, L'INTEGR. DEVE ESSERE POSITIVO.

$$\iint_\Omega x^2 \cdot \operatorname{sen} y \, dx\, dy = \int_0^\pi dy \left( \int_0^3 x^2 \cdot \operatorname{sen} y \, dx \right) = \int_0^\pi dy \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=3} = \int_0^\pi dy \, (9 \operatorname{sen} y)_0^\pi$$

$$= \int_0^\pi dy \, 9 \operatorname{sen} y = \left[ -9 \cos y \right]_0^\pi = \boxed{18}$$

## DOMINIO NORMALE RISPETTO AD UNA VARIABILE (RETTANGOLOIDI)

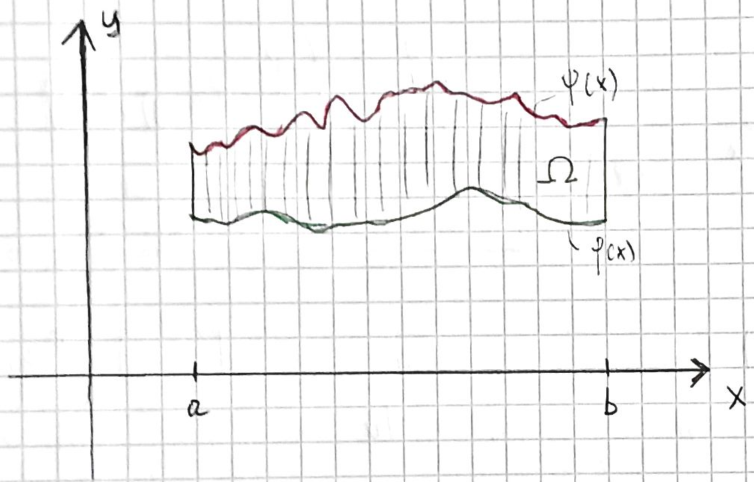
$\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy$

$\Omega$ rettangoloidi (o domini normali rispetto all' asse $y$)

**Def** $\Omega$ normale rispetto a $y$

Se $\Omega = \{ (x,y) \mid x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$

$\varphi$ e $\psi$ funz in una variabile




## TEOREMA PER DOMINI NORMALI RISPETTO A y

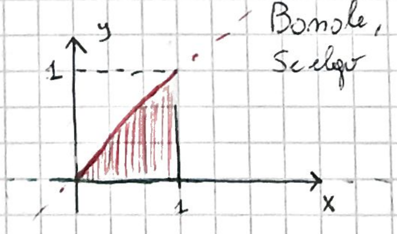
$$\boxed{\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right)}$$

### ESEMPIO

$\iint_T (x + x^2 y)\, dx\, dy$

$T$ = Triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (1,1)$

(è un rettangoloide)




Banale, Scelgo $\psi(x) = x$

$\varphi(x) = 0$

$T = \{ (x,y) \mid x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq \psi(x) \}$

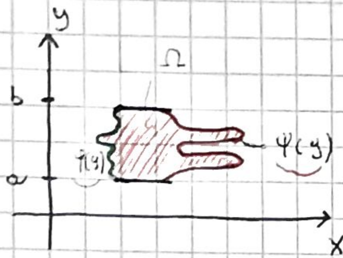
$$\iint_T (x+x^2 \cdot y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx\left(\int_0^x (x+x^2\cdot y)\,dy\right)$$

$$= \int_0^1 dx\left[x\cdot y + x^2\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 dx\left(x^2+\frac{x^4}{2}\right) = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \boxed{\frac{13}{30}}$$

## TEOREMA PER DOMINI NORMALI RISPETTO A X

**Def** $\Omega$ è normale rispetto a $X$ se

$$\Omega = \{x, y\} \quad a \le y \le b, \quad \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$$



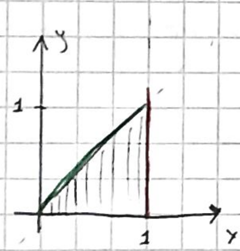

$$\boxed{\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dy \cdot \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right)}$$

IL RISULTATO DEVE SEMPRE ESSERE UN NUMERO.

### • ESEMPIO •

$$\iint_T (x+x^2 y)\,dx\,dy$$

$T = (0,0), (1,0), (1,0)$ vertici




$$T = \{\underbrace{0}_{a} \le y \le \underbrace{1}_{b}, \ \underbrace{y}_{\varphi(x)} \le x \le \underbrace{1}_{\psi(x)}\}$$

$$\boxed{\frac{13}{30}}$$

$$\iint_T (x+x^2\cdot y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy\left(\int_y^1 (x+x^2\cdot y)\,dx\right) = \int_0^1 dy\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdot y\right]_{x=y}^{x=1} = \left[\frac{y}{2}+\frac{y^2}{6}-\frac{y^3}{6}-\frac{y^5}{15}\right]_0^1$$

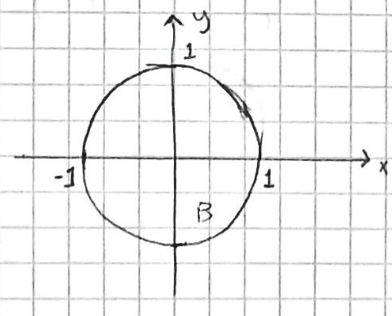
## ESEMPI DOMINI NORMALI

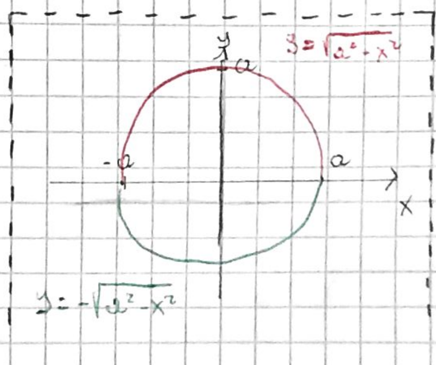
**BALL**

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

$B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\} \xrightarrow{\text{RISOLVO PER } y} y^2 \le 1 - x^2$

$$\{-1 \le x \le 1, \ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$




$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dx\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)$$

# Area di $\Omega$ in $\mathbb{R}^2$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , l'area di $\Omega$ é

$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ con $f(x,y) = 1$ , ovvero

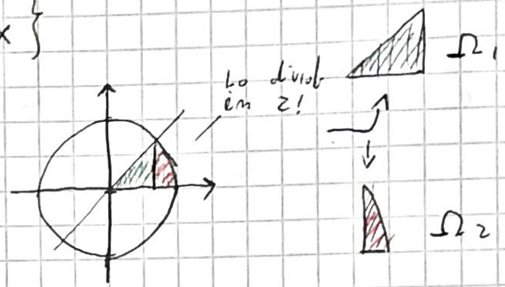
$$\boxed{A_\Omega = \iint_\Omega 1 \, dx\,dy}$$

ESEMPIO 2

Calcolare $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ · METODO 1

$\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1 , \ y \ge 0 , \ y \le x\}$

Devo capire se il grafico è normale o no




Allora posso dire

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e ( $\Omega_1$ e $\Omega_2$ si intersecano solo lungo i bordi. )

$\begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = 1-x^2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Omega_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} , \ 0 \le y \le x\}$

$\Omega_2 = \{(x,y) \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1 , \ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

METODO 2

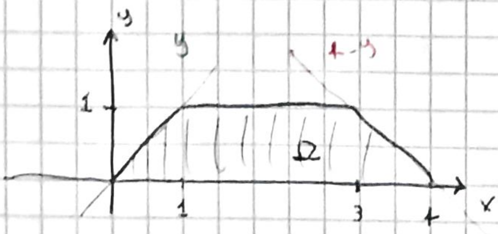
$\Omega$ é NORMALE RISPETTO A X !

$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{2}} , \ y \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \left( \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right)$$

PIÚ VELOCE
MENO CALCOLI

## ESEMPIO




$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

① Posso spezzarlo in 3 pezzi

② Oppure in modo più semplice, lo considero normale rispetto a x!

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1 \ , \ y \le x \le 4-y$$

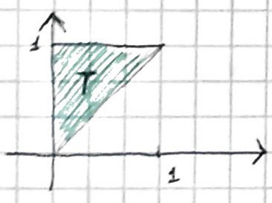
$$\hookrightarrow \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \left( \int_y^{4-y} f(x,y)\,dx \right)$$

## ESEMPIO IMPORTANTE

A volte l'integrale mi esce solo se integro prima in $dx$ ($dy$) invece che $dy$ ($dx$) (o viceversa)

$$\iint_T x \cdot e^{y^2}\,dx\,dy \qquad T = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \ , \ x \le y \le 1\}$$

T NORMALE rispetto a y




$$\int_0^1 dx \left( \int_x^1 (x \cdot e^{y^2})\,dy \right) = \ ?$$

$\boxed{\text{NON LO SO CALCOLARE}} \rightarrow$

$\rightarrow$ Provo con T normale rispetto a x!

$$\rightarrow \ \Omega = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1 \ , \ 0 \le x \le y\}$$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \left( \int_0^y x \cdot e^{y^2}\,dx \right) = \int_0^1 dy \left[ \frac{x^2}{2} \cdot e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=y}$$

$$= \int_0^1 dy \cdot \left[ \frac{y^2}{2} \cdot e^{y^2} \right] = \left[ \frac{1}{6} \cdot e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}(e-1)$$

11/04/2017

# INTEGRALI TRIPLI

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

METODOLOGIE

- RIDUZIONE A $\int$ o $\iint$
- SIGNIFICATO FISICO?

Per scoprire il BARICENTRO o la massa di un oggetto trid. devo fare un integrale triplo.

## 1. CASO | PARALLELEPIPEDO

$$\Omega = [a,b]\times[c,d]\times[\alpha,\beta]$$

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx\left[\int_c^d dy\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dz\right)\right]}$$

$(x,y,z)$ $(x,y,z)$

ESEMPIO

$$\iiint_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz \qquad \Omega = [0,1]\times[0,2]\times[0,3]$$

DECIDIAMO L'ORDINE DI INTEGRAZIONE

$dz \to dx \to dy$

$$\iiint_{\Omega} xyz\; f(x,y) = \int_0^2 dy\left[\int_0^1 dx\left(\int_0^3 (xyz)\,dz\right)\right] = \int_0^2 dy\left[\int_0^1 dx\left|xy\frac{z^2}{2}\right|_0^3\right]$$

$$= \int_0^2 dy\left(\int_0^1 \frac{9}{2}xy\,dx\right) = \int_0^2 dy\,\frac{9}{4}y = \frac{9}{2}$$

**NB**

È POSSIBILE SCAMBIARE ORDINE DI INTEGRAZIONE

Ma potrebbero presentarsi casi in cui in un ordine gli integrali sono risolvibili mentre in un altro no.

## Area di una SFERA in $\mathbb{R}^3$

$$B_R = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2 \}$$

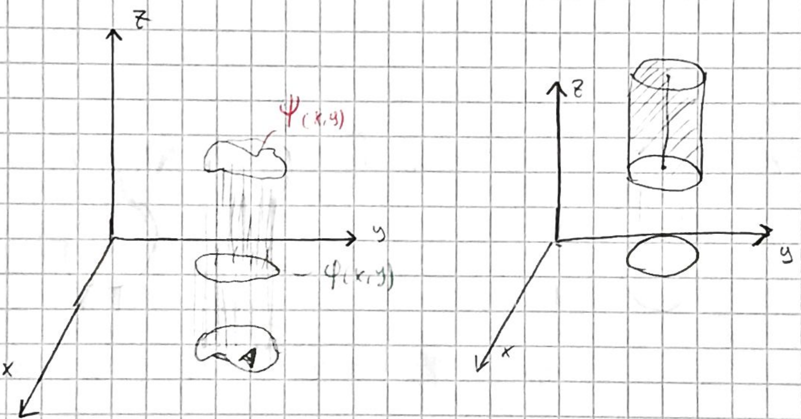
$$\boxed{A_{B_R} = \iiint_{B_R} 1 \, dx, dy, dz}$$

## INTEGRAZIONE PER FILI SU DOMINI NORMALE RISPETTO AD UNA VARIABILE

**Def** $\Omega$ NORMALE RISPETTO ALL'ASSE $z$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\Omega = \{ (x,y,z) \mid (x,y) \in A \subset \mathbb{R}^2 , \ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \}$$



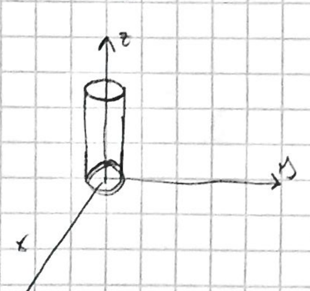

$$B^3_R = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \le R^2 , \ -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y) \, dx\,dy\,dz = \iint_A dx\,dy \left( \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz \right)}$$

$(x,y,z)$

### ESEMPIO

$$\iiint_C z \, dx\,dy\,dz \qquad \text{con } C = \{ (x,y,z) \mid \underbrace{x^2+y^2 \le 1}_{A_{xy}} , \ \underset{\varphi(x,y)}{0} \le z \le \underset{\psi(x,y)}{2} \}$$

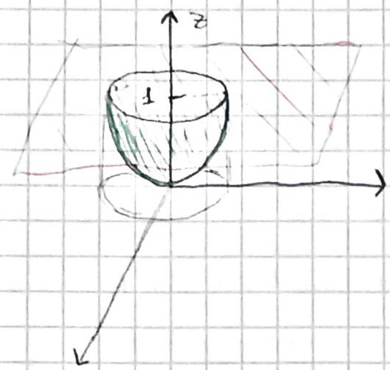



$$= \iint_{A_{xy}} dx\,dy \left( \int_0^2 z \, dz \right) = \iint_{A_{xy}} dx\,dy \, (2) =$$ TIRO FUORI IL 2!

$$= 2 \iint_{A_{xy}} dx\,dy = 2\pi$$

## ESEMPIO 2

$$\iiint_\Omega x^2 z^2 \, dx\,dy\,dz \qquad \Omega = \{(x,y,z) \mid z \le \overset{\psi(x,y)}{1} \;,\; \overset{\varphi(x,y)}{x^2+y^2} \le z\}$$




Allora Posso riscrivere $\Omega$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid \underbrace{x^2+y^2 \le 1}_{A} \;,\; \underbrace{x^2+y^2}_{\varphi} \le z \le \underbrace{1}_{\psi}\}$$

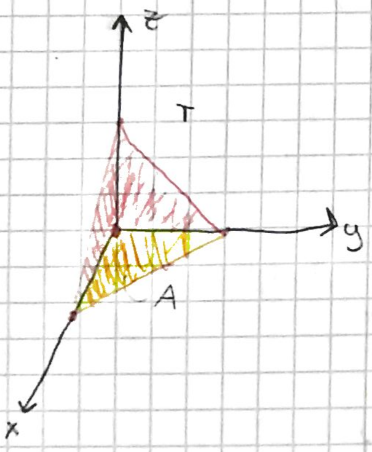
In pratica z è compreso tra un piano (SUPERIORE) e una semi-sfera (inferiore)

$$\iiint_\Omega x^2 z^2 \, dx\,dy\,dz = \iint_A dx\,dy \left( \left[ x^2 \cdot \frac{z^3}{3} \right]_{x^2+y^2}^{1} \right) = \iint_A \left[ \frac{x^2}{3} - \frac{x^2(x^2+y^2)^3}{3} \right] dx\,dy$$

$= \,?$ FARE A CASA

## ESEMPIO 3

$$\iiint_T z \, dx\,dy\,dz \qquad \text{con } T = (0,0,0),\ (0,1,0)\ (0,0,1)\ (1,0,0)$$




Come definire A?

$$A = \{(x,y) \mid x \ge 0 \;,\; y \ge 0 \;,\; y \le -x+1\}$$

$$0 \le z \le 1-x-y$$

$$\iint_A dx\,dy \int_0^{1-x-y} z \, dz = \iint_A dx\,dy \left[ \frac{(1-x-y)^2}{2} \right]$$

## ESEMPIO 4

La z è limitata superiormente da un piano di eq z 1-x-y e da un piano inferiore

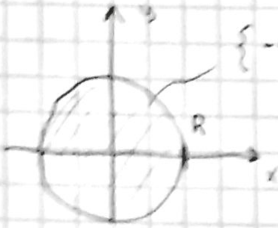
ESEMPIO 4

$Vol(B^3_R)$

$$\iiint 1 \, dx\,dy\,dz \qquad B^3_R = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le R^2, \; -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le R^2} dx\,dy \left(2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right) = 2\iint_{x^2+y^2\le R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Risolvo l'integrale doppio

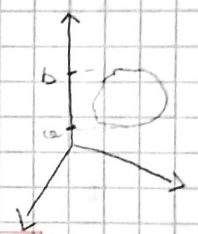



$$\left\{-R\le x\le R, \; -\sqrt{R^2-x^2}\le x\le\sqrt{R^2-x^2}\right\}$$

$$\iint = 2\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right) dy$$

## INTEGRALI TRIPLI PER SEZIONE

$$\iiint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy\,dz$$




con $\Omega = \{(x,y,z) \mid a<z<b\}$, $A_z = \{(x,y) : \in \Omega\}$

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)}$$

ESEMPIO DIMOSTRAZIONE AREA SFERA

$Vol(B^3_R) = ?$

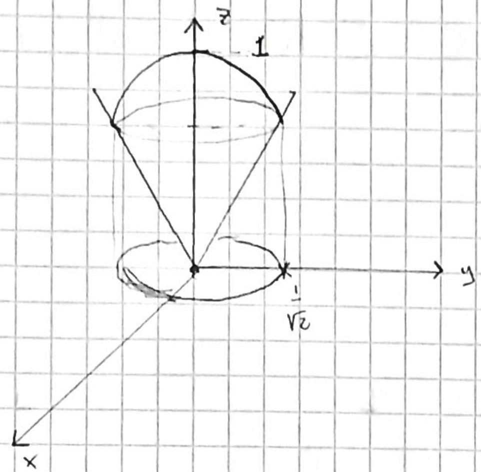
$$B^3_R = \left\{(x,y,z) \mid -R\le z\le R, \; A_z = \{(x,y) \mid x^2+y^2\le R^2-z^2\}\right\}$$

$$Vol(B^3_R) = \int_{-R}^{R} dz \left(\iint_{A_z} 1\,dx\,dy\right) = \int_{-R}^{R} \left[\pi(R^2-z^2)\right] dz = 2\pi R^3 - \pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$= 2\pi R^3 - \pi\frac{2}{3}R^3 = \pi R^3\left(2-\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

## ESEMPIO

$$\iiint_\Omega z \, dx\,dy\,dz \qquad \Omega = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1 \,,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2} \right\}$$




$\boxed{1}$ INT. per FILI $(x,y) \in A$

$$\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\varphi(x,y)} \le z \le \underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\psi(x,y)}$$

Faccio il sistema:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

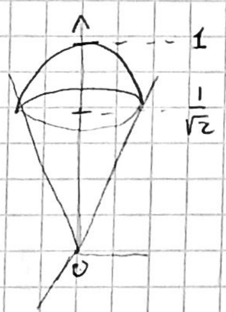
$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$x^2+y^2 = 1-(x^2+y^2) \longrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}} dx\,dy \left[ \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} z \, dx \right] \ldots$$

$\boxed{2}$ INTEGRO PER SEZIONI

$0 < z < 1$

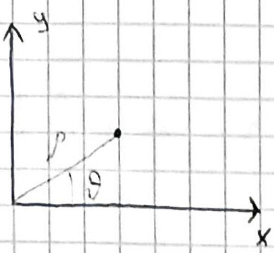



$$A_z = \begin{cases} \longrightarrow z \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \longrightarrow A_{z_1} = \{x^2+y^2 \le z^2\} \\ \longrightarrow z \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \longrightarrow A_{z_2} = \{x^2+y^2 \le 1-z^2\} \end{cases}$$

$$\int_0^1 dz \left( \iint_{A_z} z \, dx\,dy \right) = \int_0^1 z \cdot \text{Area}(A_z) = \int_0^{1/\sqrt{2}} z \cdot \underbrace{\pi z^2}_{A_{z_1}} dz + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 z \cdot \underbrace{\pi(1-z^2)}_{A_{z_2}} dz =$$

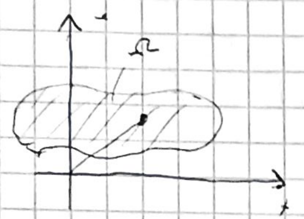
# COORDINATE POLARI
## PER RISOLVERE INTEGRALI DOPPI

**Def** Dato un punto nel piano x, y




$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\vartheta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$

Se ho un piano OMEGA $\Omega$, e devo calcolare l'integrale su $\Omega$ con coord. POLARI




$$\boxed{\iint_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{A} f(\rho\cos\vartheta, \rho\cdot\operatorname{sen}\vartheta)\cdot\rho\, d\rho\, d\vartheta}$$

dove A è $\Omega$ riletto in POLARI

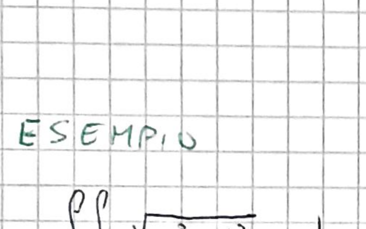
ESEMPIO

$$\iint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = ? \qquad \text{con } \Omega = \{x^2+y^2 \leq R^2\}$$

Tramite coord polari

$$= \iint_{A} \left(\sqrt{\rho^2\cdot\cos^2\vartheta + \rho^2\cdot\operatorname{sen}^2\vartheta}\right)\rho\cdot d\rho\cdot d\vartheta = \iint_{A} \rho\, d\rho\, d\vartheta$$

con $A = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq R \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases}$ è un rettangolo! Posso calcolarlo velocemente



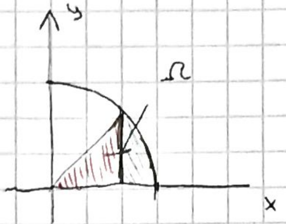

$$= \int_0^R d\rho \left(\int_0^{2\pi} \rho^2\, d\vartheta\right) = 2\pi \int_0^R \rho^2\, d\rho = \boxed{2\pi\,\frac{R^3}{3}}$$

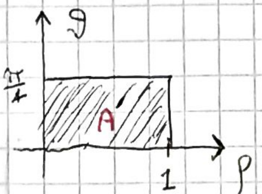
oppure

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \left(\int_0^R \rho^2\, d\rho\right) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R = \boxed{2\pi\,\frac{R^3}{3}}$$

## ESEMPIO 2 (già visto prima)

$$\iint_\Omega xy \, dx\, dy$$



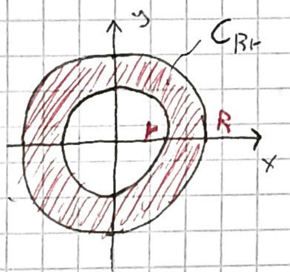

$$\iint_\Omega xy\,dx\,dy = \iint_A \rho^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \cdot \rho \, d\rho\, d\vartheta$$

$$A = \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$$

$$= \int_0^1 d\rho \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3 \operatorname{sen}\vartheta \cdot \cos\vartheta \, d\vartheta \right) = \int_0^1 d\rho \; \rho^3 \cdot \left[ -\frac{1}{4} \cdot \cos(2\vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\vartheta) = -\frac{1}{4}\cos(2\vartheta)$$

## ESEMPIO 3 (CORONA CIRCOLARE)




$$\iint_{C_{Rr}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(\rho\cos\vartheta, \rho \operatorname{sen}\vartheta) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta$$

con $A = \begin{cases} \rho \in [r, R] \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

## ESEMPIO 4 (VOLUME PALLA $Vol(B_R^3)$) (già integrale per f.l.)

$Vol(B_R^3)$ : ora integriamo con le coord polari

$$2\iint_{x^2+y^2 \le R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = 2\iint_{\substack{\rho\in[0,R]\\ \vartheta\in[0,2\pi]}} \sqrt{R^2-\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta$$

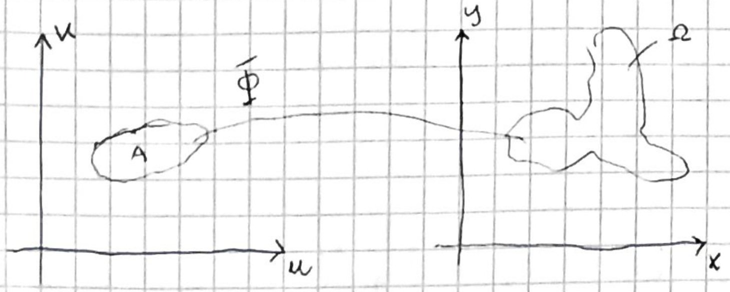
$$= 2\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{R^2-\rho^2} \cdot \rho\right) \cdot d\vartheta = 4\pi \left( \int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2} \cdot \rho \, d\rho \right)$$

$$\underset{2\rho\, d\rho = dt}{\overset{\rho^2 = t}{=}} 4\pi \int_0^{R^2} \sqrt{R^2 - t}\; \frac{dt}{2} = -2\pi \left[ \frac{2}{3}(R^2-t)^{\frac{3}{2}} \right]^{R^2} = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

24/04/2017

## CAMBIO DI VARIABILI PER INTEGRALI DOPPI

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$




$$= \iint_{A} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\det J\Phi\right| du\,dv$$

$= \iint_A \Phi(x(u,v); y(u,v))$

con $\Phi(u,v) = \left(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)\right) = (x(u,v), y(u,v))$

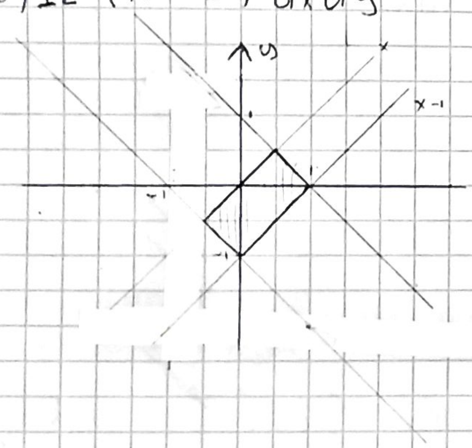
Nel caso di cambiamento in polari si ha che $\left|\det J\Phi\right| = \rho$

DEVO TROVARMI u e v in funzione di x, y!

**ESEMPIO**

Sono utili anche nel calcolo

$$\iint_{\Omega} (x^2 - y^2)\,dx\,dy \qquad \Omega = \{(x,y) \mid -1 < x+y < 1,\ 0 < x-y < 1\}$$




Normalmente le posso risolvere con domini normali.

Ma se cambio le variabili mi trovo un rettangolo ed lo risolvo tutto velocemente

chiamo $x+y$ $u$
$x-y$ $v$

$$\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{array} \longrightarrow \Phi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

E ora mi tocca fare il Jacobiano.

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ e il det è $-\frac{1}{2}$

N B
In molti casi non esce un numero preciso ma una funzione.

Applico le formule:

$$\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (u,v)\left(+\frac{1}{2}\right) du\,dv$$

## DIMOSTRAZIONE FORMULA CAMBIO IN POLARI

In questo caso la $\Phi$ sarà

$$\Phi(\rho,\theta) = (\underbrace{\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)}, \underbrace{\rho \operatorname{sen}\theta}_{y(\rho,\theta)})$$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(\rho\cdot\cos\theta, \rho\cdot\operatorname{sen}\theta)\,|\det J\Phi|\,d\rho\,d\theta$$

dobbiamo dimostrare che $|\det J\Phi| = \rho$

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\cdot\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cdot\cos\theta \end{pmatrix} = \rho\cdot\cos^2 + \rho\cdot\operatorname{sen}^2 = \rho$$

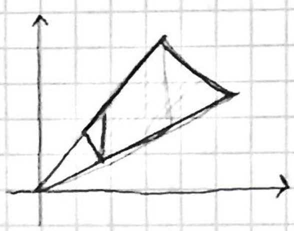
non bisogna mettere neanche il valore assoluto, $\rho$ per il significato geometrico è sempre positivo.

- ALTRO ESEMPIO CAMBIO DI VARIABILI

Calcolare l'area di $\Omega$

$$\Omega = \{(x,y) \mid x \le y \le 2x,\ 3 \le xy \le 4\}$$

quindi $\iint_\Omega dx\,dy$



Posso spezzarlo in 3 parti oppure fare un cambio di variabili. (pongo $v = x\cdot y$)

Allora chiamo $1 \le u \le 2$ $\quad 3 \le v = x\cdot y \le 4$

$A = \{(u,v) \mid 1 \le u \le 2 \quad 3 \le v \le 4\}$ è un rettangolo

L'integrale diventa $\iint_A 1\,|\det J\Phi(u,v)|\,du\,dv$

$$\begin{cases} x\cdot y = v \\ \frac{y}{x} = u \end{cases} \to \begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt{v\cdot u} \end{cases} \to \Phi(u,v) = \left(\sqrt{\tfrac{v}{u}}, \sqrt{v u}\right)$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{v}}{u} & \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{pmatrix} \to |\det J\phi| = \frac{1}{2u}$$ (funzione che varia rispetto a $u$)

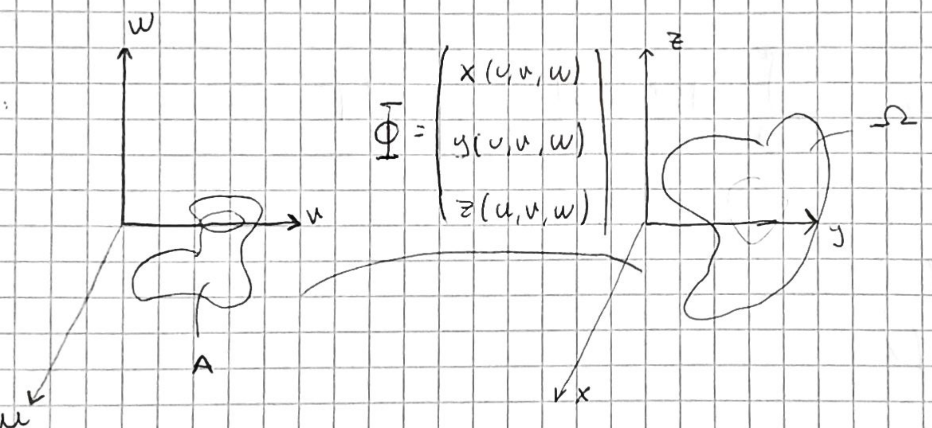
Perchè $u$ è sempre positivo in $A$.

L'area della regione $\Omega$ è diventata

$$\iint_A \frac{1}{2u}\, du\, dv \qquad \text{con } A = \{(u,v) \mid 1 \le u \le 2,\ 3 \le v \le 4\}$$

$$= \int_3^4 dv \left(\int_1^2 \frac{1}{2u}\, du\right) = \int_3^4 dv \left(\frac{1}{2}\ln(2)\right) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

## FORMULA GENERALE PER CAMBIO DI VARIABILI PER INTEGRALI TRIPLI




CAMBIO DI VARIABILI PER INTEG. TRIPLI

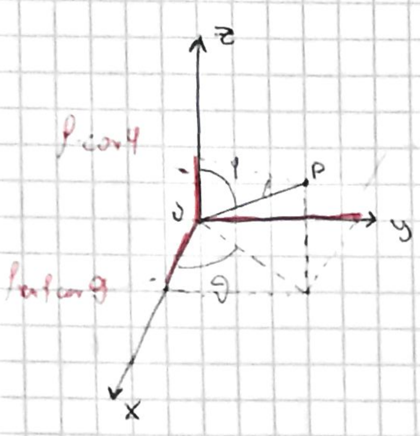
$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A f\big(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)\big)\,|\det J\phi|\,du\,dv\,dw}$$

## CAMBIO DI CORDINATE SFERICHE IN $\mathbb{R}^3$

$$\Phi(u,v,w) \to \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$

Per le coord. sferiche avrò 3 cord.

$(\rho, \vartheta, \varphi)$




$\varphi$ è l'angolo formato con l'asse z.

$\rho \in [0, +\infty)$ dist. da O

$\vartheta \in [0, \pi]$ Angolo formato con x

$\varphi \in [0, \pi]$ Angolo formato con z

quindi

$$(\underbrace{\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \cdot \cos\vartheta}_{x}, \underbrace{\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta}_{y}, \underbrace{\rho\cos\varphi}_{z})$$

Se voglio trovarmi la dim della palla $B_R^3$

$$\iiint_{B^3} 1 \, dx, dy, dz = \iiint_A |\det J\Phi| \, d\vartheta \, d\rho \, d\varphi$$

$$A = \begin{Bmatrix} \rho \in [0, R] \\ \varphi \in [0, \pi] \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \end{Bmatrix}$$

Dobbiamo trovare solo il Jacobiano, da.

$$J\phi = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,\varphi \cdot \cos\vartheta & -\rho \cdot \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \rho\cos\varphi\,\cos\vartheta \\ \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \rho \cdot \mathrm{sen}\,\varphi \cdot \cos\vartheta & \rho\cos\varphi \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\,J\phi = -\rho^2\mathrm{sen}^3\varphi\cos^2\vartheta - \rho^2\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}^2\vartheta\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^2\vartheta$$
$$-\rho^2\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\vartheta$$
$$= -\rho^2\mathrm{sen}^3\varphi - \rho^2 \cdot \mathrm{sen}^2\varphi\cos\varphi = \underline{-\rho^2 \cdot \mathrm{sen}\,\varphi}$$

quindi $\quad |\det J\Phi| = \rho^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi$

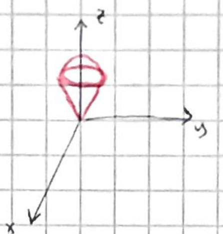
$$Vol(B_R^3) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \left( \int_0^R d\rho \left( \int_0^{\pi} \rho^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \right)\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R 2\rho^2 \, d\rho \right) d\vartheta = \int_0^{\pi} \left[ \frac{2}{3}\rho^3 \right]_0^R d\vartheta = \int \frac{2}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ESEMPIO (GIA VISTO PRIMA)

$Vol(\Omega)$ con $\Omega = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1 \, , \, z \ge \sqrt{x^2+y^2} \}$

$$\iiint_\Omega 1 \, dx\,dy\,dz$$




CONO GELATO

In coordinate sferiche?

$A = \{ \rho \in [0, 1] \, , \, \vartheta \in [0, 2\pi] \, , \, \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \}$

$$= \iiint_A (\rho^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi) \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi$$

FORMULA PER CALCOLO DI INTEGRAL. TRIPLI tramite coord sferiche

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \iiint_A f(\rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\vartheta, \rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\vartheta, \rho\cos\varphi) \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, dx\,dy\,dz}$$

2/05/2017

## COORDINATE CILINDRICHE

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

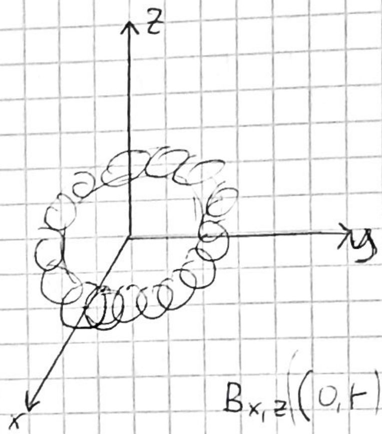
Sappiamo che $\Omega_z = \{(x,y) \mid (x,y,z) \in \Gamma\}$. Se $\Omega_z$ si descrive in coord. POLARI

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{A_z} f(\rho\cdot\cos\vartheta, \rho\cdot\operatorname{sen}\vartheta)\cdot\rho\cdot d\rho\, d\vartheta}$$

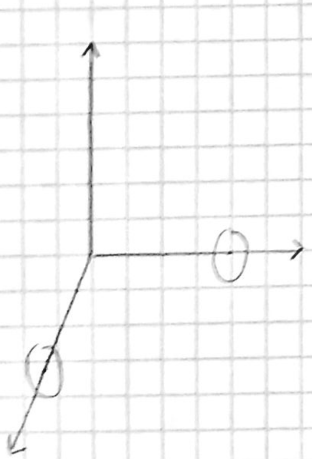
ESEMPIO

$$\iiint_S x^2\,dx\,dy\,dz \qquad S \subseteq \mathbb{R}^3$$

$S = \{$ L'insieme di tutte le BALL con distanza $r = 2$ dall'origine che ruotano e formano una ciambella $\}$




$B_{x,z}((0,r),1)$



$z \in [-1,1]$

$$\Omega_z = B^2\left((0,0), 2+\sqrt{1-z^2}\right) \setminus B^2\left((0,0), 2-\sqrt{1-z^2}\right)$$

in polari

$$A_z = \left\{(\rho,\vartheta) \mid 2-\sqrt{1-z^2} < \rho < 2+\sqrt{1+z^2},\ \vartheta \in [0,2\pi]\right\}$$

Passando alle COORD CILINDRICHE

$$\iiint_S x^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dz \cdot \iint_{\Omega_z} \rho^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \rho\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \left( \int_{2-\sqrt{1-z^2}}^{2+\sqrt{1-z^2}} \rho^3 \cdot \cos^2\theta\, d\rho \right)$$

$$= \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \cos^2\theta \tfrac{1}{4} \left[\rho^4\right]_{2-\sqrt{1-z^2}}^{2+\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \cos^2\theta \left[ (2+\sqrt{1-z^2})^4 - (2-\sqrt{1-z^2})^4 \right]$$

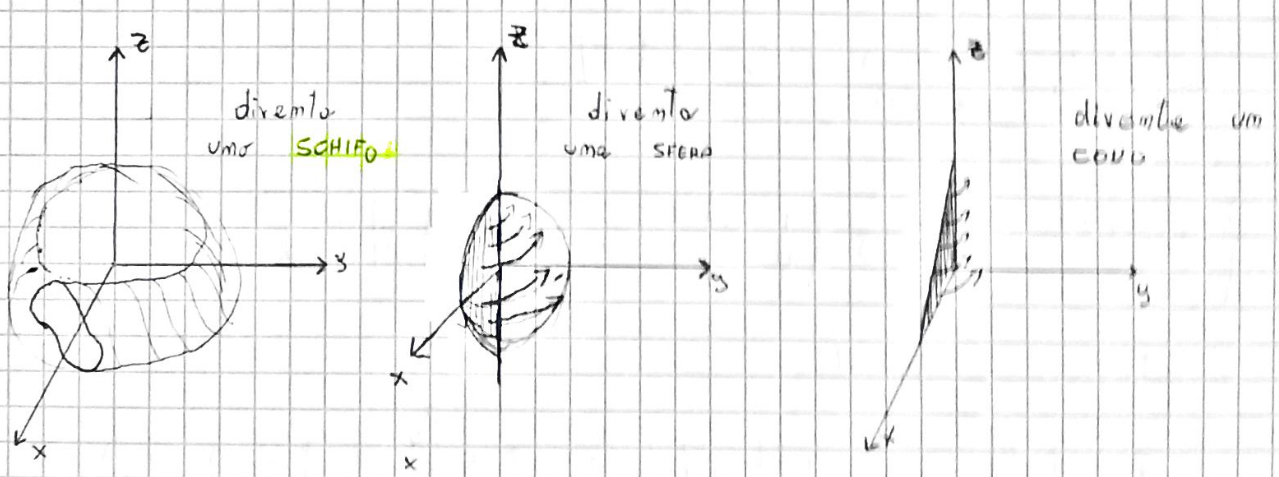
$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (2+\sqrt{1-z^2})^4 - (2-\sqrt{1-z^2})^4\, dz \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta$$

## FORMULA DI GULDINO

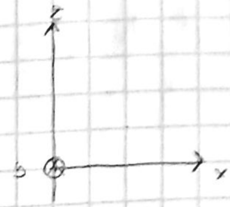
Serve a calcolare i volumi dei SOLIDI di ROTAZIONE

$\Omega \subset \mathbb{R}^2_{x,z}$ $\qquad S = \{$ Solido ottenuto ruotando $\Omega$ attorno a $z \}$

↳ ROBA CHE FA ANCHE SCHIFO



**DEF** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si chiama **BARICENTRO** $\Omega$ il vettore di $\mathbb{R}^2$ $(X_G, Z_G)$



$$\boxed{(X_G, Z_G) = \left( \frac{\iint_\Omega x \, dx \, dz}{Area(\Omega)} , \frac{\iint_\Omega z \, dx \, dz}{Area(\Omega)} \right)}$$

Mentre la **FORMULA DI GULDINO**

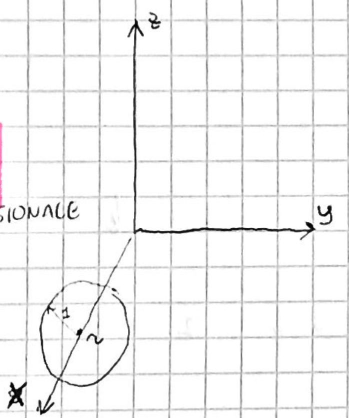
$$\boxed{Vol(S) = 2\pi \cdot X_G \cdot Area(\Omega)}$$

La $Z_G$ NON CI SERVE NELLA FORMULA DI GULDINO

~ ESEMPIO ~

Adesso applichiamo GUALDINO calcolando il volume di S che non è altro che la CIAMBELLA OTTENUTA ruotando $B^2((2,0),1)$ intorno all' asse z

PALLA BIDIMENSIONALE



- $Area(\Omega) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1)^2 = \underline{\pi}$
- Si vede subito che $X_G = 2$, ammo calcoliamo $\frac{\iint_\Omega x \, dx \, dy}{Area(\Omega)}$

HO GIÀ FINITO, PERÒ FACCIO TUTTO PER ESSERE SCRUPOLOSO

Calcoliamo l'integrale doppio

Pongo $x - 2 = u$ e $z = v$

È difficile passare direttamente in POLARI (il centro non è nell' origine!) quindi cambio prima le variabili traslando e poi passo alle polari.

$$\iint_\Omega x \, dx \, dy = \iint_{B((0,0),1)} (2+u) \, du \, dv \, |\det J|$$

$$\begin{cases} x = u + 2 \\ z = v \end{cases} \longrightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |\det J| = 1$$

L' integrale diventa

$$\iint_{B((0,0),1)} u + 2 \, du \, dv = 2\pi + \iint_B u \, du \, dv = 2\pi + \int_0^{\pi} d\vartheta \int \rho^2 \cos\vartheta \, d\rho \, d\vartheta$$
$$\hphantom{\iint_{B((0,0),1)} u + 2 \, du \, dv = 2\pi + \iint_B u \, du \, dv = 2\pi + } = 0$$

$$= 2\pi \longrightarrow \text{quindi } X_G = \frac{2\pi}{Area} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

CVD

APPLICO GUALDINO $\underline{Vol(S) = 2\pi \cdot 2\pi = 4\pi^2}$

## VOLUME DELLA PALLA 3D

$$B^3 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$$


$$\text{Area}(\Omega) = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

- Per trovare $X_G$ adesso devo farlo per forza l'integrale doppio

$$\rightarrow \iint_\Omega x \, dx\, dz = \underbrace{\iint_A \rho \cdot \cos\vartheta \cdot \rho \, d\rho \, d\vartheta}_{\text{COORD. POLARI}}$$

con $A = \{(\rho,\vartheta) \mid \rho \in [0,R],\ \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$

A = Ω in POLARI

$$= \int_0^R d\rho \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cdot \cos\vartheta \, d\vartheta \right) = 2\int_0^R \rho^2 \, d\rho = \frac{2}{3}R^3$$

APPLICO GULDINO

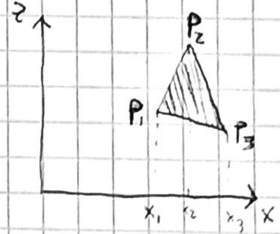
$$\text{Vol}(B^3) = 2\pi \cdot X_G \cdot \text{Area}(\Omega) = 2\pi \cdot \frac{2}{3}\frac{R^3}{\text{Area}(\Omega)} \cdot \text{Area}\ \Omega = \boxed{\frac{4}{3}\pi \cdot R}$$

## FORMULA del G solo per TRIANGOLI

[REC. 1.21]

- Dati 3 vertici

$P_1 = (x_1, z_1)$ $\quad P_2 = (x_2, z_2)$ $\quad P_3 = (x_3, z_3)$ :




$$\boxed{X_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}} \qquad \boxed{Z_G = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}}$$

— ATTENZIONE! —

~ Ma in generale non è vero che dati 4 (ad esempio) punti $X_G = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$. La formula MIRACOLOSA è valida per

- TRIANGOLI
- QUADRATI
- RETTANGOLI

✓ SI

- QUADRILATERI
- PARALLELOGRAMMI
- ALTRE FIG. STRANE!

✗ NO! → Si fa l'INTEGRALE AHIME...

REC 1.23

# CURVE

Vogliamo definire le curve nel PIANO/SPAZIO.

• ESEMPIO: In quanti modi possiamo descrivere un cerchio?

$C((0,0),1) \to \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ → FORMA IMPLICITA

Posso definirlo in 2 modi

$[0,2\pi] \ni t \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t)$ → FORMA PARAMETRICA

• D'ora in poi interpretiamo le curve come parametr.

**DEF**

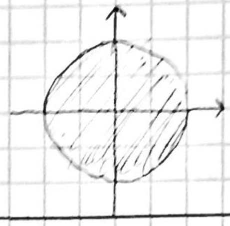
Una curva (parametrizzata come sempre) è una funz. definita

$$\boxed{\alpha : [a,b] \ni t \longrightarrow (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \in \mathbb{R}^n}$$

DEFINIZIONE CURVA PARAMETRIZZATA

ESEMPIO $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\alpha : [0,2\pi] \ni t \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t)$



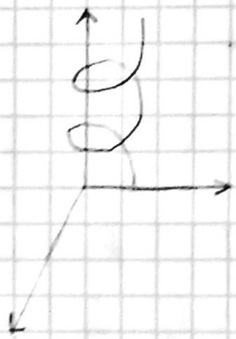
**DEF.**

Si chiama SUPPORTO della curva $\alpha$

$$\boxed{\operatorname{Imm} \alpha = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [a,b]\}}$$

SUPPORTO DI UNA CURVA | $\operatorname{Imm} \alpha \subseteq \mathbb{R}^n$

## ELICA in 3D



$\alpha : t \in [0,2\pi] \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$

altro es. $\alpha : t \in [3,5] \longrightarrow (\ln t, e^{t^2} \operatorname{sen} t, \sqrt{7-t})$

Abbiamo definito le curve per poter calcolare le lunghezze..