

$$= \iint_{(\phi, 2\pi) \times (0, \pi)} r \sin^3 \psi \, d\theta d\psi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi r \sin^3 \psi \, d\psi \right) d\theta = \dots$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

• [2] PROCEDIMENTO (divide la sfera in 2 parti)

$$\{(x, y, z) \in S | x > 0\}$$

$$\int_S (x^2 + y^2) \, dS = \int_{S_+} (x^2 + y^2) \, dS + \int_{S_-} (x^2 + y^2) \, dS$$



$$\int_{S_+} (x^2 + y^2) \, dS \quad \psi \\ (u, v) \xrightarrow{\psi} (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}) \\ \text{com } \Omega = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 < 1\}$$

$$= \iint_{\Omega} f(\psi(u, v)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2} \, du \, dv = \\ \underbrace{\int_{\Omega} f(\psi(u, v)) \, du \, dv}_{\text{para a regra de Fubini}}$$

para la regla de Fubini  
conociendo que la forma

$$= \iint_{\Omega} (u^2 + v^2) \sqrt{1 + \frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2}} \, du \, dv$$

$$= \iint_{\Omega} (u^2 + v^2) \sqrt{\frac{1}{1-u^2-v^2}} \, du \, dv$$

• Posso olhar como é o plôti:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} SP[0, 1] \\ \theta(0, 2\pi) \end{array} \right\}$$

$$\iint_A p^2 \sqrt{\frac{1}{1-p^2}} \, p \, dp \, d\theta$$

$$= \iint_A \frac{p^3}{1-p^2} \, dp \, d\theta$$

- Poi calcolare l'integrale su  $S$ -

$$\int_{S_-} (x^2 + y^2) d\sigma$$

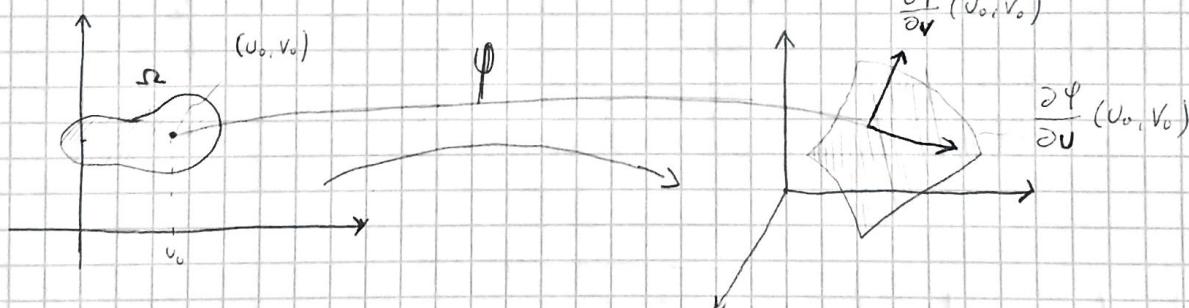
$$(u, v) \xrightarrow{\psi} (v, v_1, -\sqrt{1+u^2+v^2})$$

$$\text{con } \sigma = u^2 + v^2 < 1$$

$$\int_S (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma} (u^2 + v^2) \cdot \sqrt{\frac{1}{1+u^2+v^2}} du dv$$

In pratica gli integrali per  $S_-$  e  $S_+$  sono gli stessi... Ma in generale NON è vero! Qui non calcoliamo l'integrale di superficie di una funzione, ma l'area della superficie (oppure l'integrale delle funz. omogenee).

### — SPAZIO TANGENTE e DIREZIONE NORMALE A $(S, \varphi)$ —



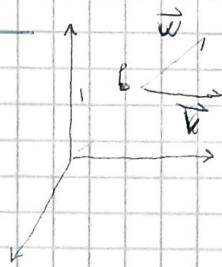
#### DEF

Lo SPAZIO TANGENTE a  $(S, \varphi)$  in

$\varphi(u_0, v_0)$  è l'unico piano passante per  $\varphi(u_0, v_0)$  e contenente le direzioni  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$  (che non sono necessariamente perpendicolari fra loro)

$$\varphi: (u, v) \mapsto \vec{P}_0 + t \cdot \vec{V} + s \cdot \vec{W}$$

Parametrizzazione dello spazio tangente.



## ES. PARAMETRIZZAZIONE DEL PIANO TANGENTE

$$(u, v) \xrightarrow{\psi} (\text{num } u, \text{ den } v, u^2 + v^2)$$

Calcolare in forma parametrica il piano tangente

ad  $(S, \psi)$  nel punto  $(0, 1, 0) \rightarrow \psi(0, 0)$

$$\cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} = (\cos u, 0, 2u) \quad \text{per } (0, 0) \rightarrow (1, 0, 0)$$

$$\cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} = (0, -\sin v, 2v) \quad \text{per } (0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$$

$\rightarrow$  HO RANGO 1  $\rightarrow$

$\rightarrow$  Non esiste piano tangente perché  $\psi$  non è una superficie, perché il Jacobiano non ha rango

2. Per  $(\text{num } u, \cos v, u+v)$ , invece:

$$\cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} = (\cos u, 0, 1) \xrightarrow[\text{PER } (0, 0)]{} (1, 0, 1) = V$$

$$\cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} = (0, -\sin v, 1) \xrightarrow[\text{PER } (0, 0)]{} (0, 0, 1) = W$$

$$(t, s) \xrightarrow[\substack{\text{P}_0 \\ \text{V} \\ \text{W}}]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t+s \end{pmatrix}$$

1° COMPONENTE  
 2° COMPONENTE = COST  
 3° COMPONENTE

RAPPRESENTAZIONE  
PARAMETRICA DEL PIANO  
TANGENTE

Prima manovra una superficie (ovvero rango 2) osta con questa manovra superficie non risolta e calcolarmi il piano tangente.

NORMALE AD UNA SUPERFICIE

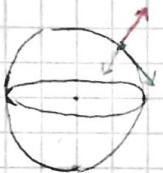
- $\exists$  un piano  $\mathbb{R}^3$  ente un'unica direzione perpendicolare a tutti i punti del piano, quindi:

**DEF:** Si chiama direzione Normale alla

Superficie  $S$  del punto  $\varphi(u_0, v_0)$

la direzione perpendicolare al piano tangente

Anumer che  $S$  no parametrizzata da  $\varphi$ .



$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sim \text{la direzione perpendicolare = normale è data da}$$

**DIREZIONE NORMALE**

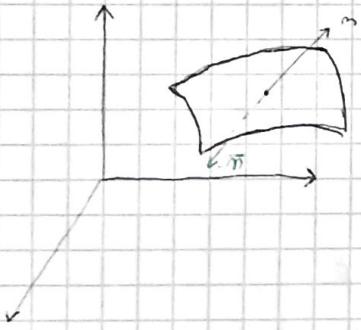
Imolice la RETTA su cui giace il vertice Normale.

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \uparrow \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{array} \right]$$

VERSORO NORMALE

$$\bar{m}_z = -\bar{m}_x$$

è un vettore di lunghezza unitaria, in una direzione me ha che eguali con regno diversi, ovvero con vetro opposto. (uno punto do uno posto e uno dall'alto.)



METODO ANALITICO

ESEMPIO

Calcoliamo i versori normali alla sfera  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  nel punto  $(0, 1, 0)$

$$\Leftrightarrow S$$

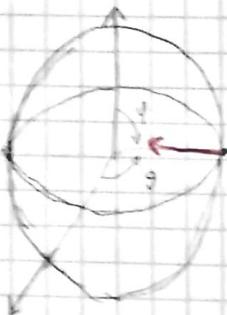
$$\frac{\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi}{\|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi\|}$$

VECTORE  
NORMA

Arrò 2 versori!

Per questo ci metto un  $\pm$  davanti, il segno lo sceglio in base a come voglio io!

- Utilizziamo la parametrizzazione sferica con le coordinate sferiche.



$$\Psi = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

$$(0, 1, 0) \longleftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = (-\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, 0)$

- $\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi)$

Facciamo il prodotto esterno. (TROVIAMO LA FORMA)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2 \varphi \cos \theta \\ -\sin^2 \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}$$

- Andiamo a sostituire con  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (secondo il versore)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• ha già lunghezza unitaria! Non ho bisogno di dividerlo per la NORMA.

- quindi i vettori moltipli sono

$$\pm \begin{pmatrix} -\sin^2 \varphi \cos \theta \\ -\sin^2 \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^4 \varphi \cos^2 \theta + \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}} = \pm \begin{pmatrix} -\sin^2 \varphi \cos \theta \\ -\sin^2 \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$= \pm \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

All'origine di  $\theta = \varphi = 0$  mi danno tutti i vettori NORMA!

## FLUSSO DI UN CAMPO LUNGO S

- $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$  | CAMPO VETTORIALE
  - $S$  superficie | SCHEMA DEL VERSORE
  - Scelte due v.m.s. dei due vertici opposti:  $\vec{m}$
- (ho 2 possibilità)

Allora il flusso del campo  $F$ , sulla superficie  $S$ , scelto ~~è~~ il versore (sempre) del vertice è?

Flusso di  $F$  su  $S$ .

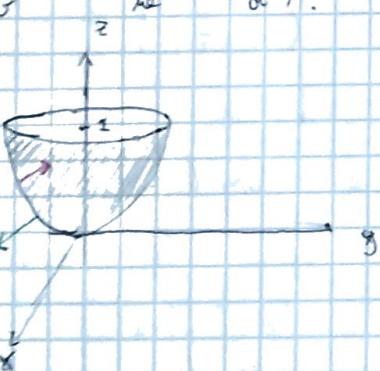
$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{m} dS$$

ovvero integrale di un SUPERFICIE

## ESEMPIO 1

Vogliamo calcolare il flusso lungo una superficie sferica regolare umi vertici opposti:

- Scelgiamo un campo  $\vec{F} = (x, 0, y+z)$
- Scelgiamo una superficie  $S = \{(x, y, z) \mid z = y^2 + x^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$
- Scelgo la dir. normale che punta verso l'interior.



$$\varphi: (u, v) \rightarrow (u, v, u^2 + v^2)$$

SUPERFICIE CARTESIANA

Allora

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{m}) dS = \iint_{\{u^2 + v^2 \leq 1\}} \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)}{\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \|} dudv$$

Vogliamo di qui semplificare in

$$\int \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) du dv$$

$$\cdot \partial_u \phi = (1, 0, 2v) \quad \cdot \partial_v \phi = (0, 1, 2v)$$

$$\partial_u \phi \wedge \partial_v \phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2v \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2v, -2v, 1)$$

Ponendo  $u=v=0$  si ha che il vettore normale in  $(0,0)$  punta verso l'alto, dunque quinque combinate di **SEGUO**.

(Qui il prodotto c'è terms  $\vee$  fatt.)

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (u, 0, u^2 + v^2 + v) \cdot (-2v, -2v, 1) du dv \\ & (\Omega^2 + v^2 < 1) = \Omega \\ & = \iint_{\Omega} (2v^2 + v - u^2 - v^2) du dv \\ & = \iint_{\Omega} (u^2 - v^2 - v) du dv = \underbrace{\iint_{\Omega} (u^2 - v^2) du dv}_{0} + \underbrace{\iint_{\Omega} -v du dv}_{0} = 0 \end{aligned}$$

Perché entrambi gli integrali fanno  $0$  per motivi di SIMMETRIA

### ESEMPIO 2

• CAMPO  $\vec{F} = (x, y, z)$  (POTENZIALE RADIALE)

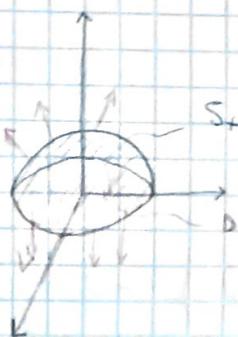
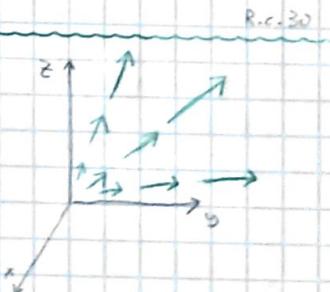
•  $S = \partial \Omega \quad \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$

•  $\vec{m}$  normale che punta verso l'esterno

ha  $z$  figura, una semi-sfera ed un disco

Ha  $z$  integrali:

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{m}) dG + \int_D \vec{F} \cdot (0, 0, -1) ds$$



→ D

$$S_2 = \{(u^2 + v^2) < 1\}$$

$$\psi: (u, v) \longrightarrow (u, v, 0)$$

$$\rightarrow \iint_D (u, v, 0) \cdot (0, 0, 1) \cdot \sqrt{1+0} \, du \, dv = 0$$

Quindi il contributo del flusso lungo  $S$  è nullo.

→ S+

$$\Psi: (\vartheta, \varphi) \longrightarrow (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi)$$

$$(0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\iint_{S^+} \vec{F}(\Psi) \cdot \frac{\partial_\vartheta \Psi \wedge \partial_\varphi \Psi}{\|\partial_\vartheta \Psi \wedge \partial_\varphi \Psi\|} d\vartheta d\varphi$$

$$\vec{F}(\Psi) = (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi)$$

- $\partial_\vartheta \Psi = (-\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, 0)$
- $\partial_\varphi \Psi = (\cos \varphi \cos \vartheta, \cos \varphi \sin \vartheta, -\sin \varphi)$

$$\partial_\vartheta \Psi \wedge \partial_\varphi \Psi = \begin{pmatrix} + & -\sin^2 \varphi \cos \vartheta \\ - & -\sin^2 \varphi \sin \vartheta \\ ? & -\sin \varphi \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Per coprire il segno del vettore dovrà provare e coprire se è ucente o entroente.

Per  $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (0, -1, 0)$ . quindi rimane

il segno meno.

$$\int \vec{F}(\Psi) \cdot (-\partial_\vartheta \Psi \wedge \partial_\varphi \Psi) d\vartheta d\varphi$$

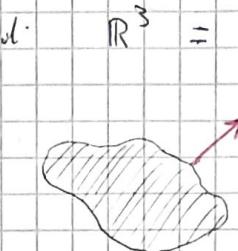
TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Se si ha:

i) un campo vettoriale  $\vec{F}$ ii) Una regione chiusa di  $\mathbb{R}^3 = \Omega \subset \mathbb{R}^3$  non aperto.

allora:

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, d\text{cont}$$



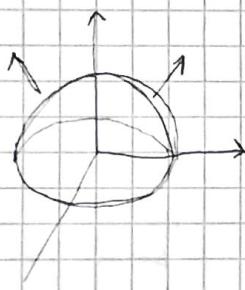
NB:

$\partial\Omega$  è il bordo  
di  $\Omega$ , quindi  
una superficie.

Per calcolarlo come

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

INTEGRAZIONE TRIPLO

ESEMPIOPRECEDENTERIVISTO

$$\partial\Omega \text{ con } \Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

$$\iiint_{\Omega} 3z \, dx \, dy \, dz = 3 \cdot \operatorname{Vol}(\Omega) = 3 \cdot \frac{2}{3} \pi = 2\pi$$

ESEMPIOPRECEDENTE2

$$\vec{F} = (x, 0, y+z)$$

$$S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$\vec{m}$  motomole che punta verso l'esterno.

Calcolare il flusso  $(\vec{F}, \vec{m}, S)$ .

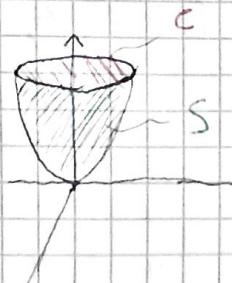
Qui non serve usare il Th.

Sulla divergenza perché ha una

superficie aperta (non bordo di qualcosa)

Possiamo comunque com "coprirci" che la chiude

e poi, dal risultato finale eliminare il flusso sul copertivo.



Hi calcolo quindi il flusso lungo  
(S ∪ C)

Per il Th. delle div. si ha:

$$\underbrace{\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma}_{\text{QUELLO CHE CERCO}} + \underbrace{\int_C \vec{F} \cdot (0,0,1) \, d\sigma}_{\text{COPERTO}} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz$$

Così posso calcolarmi anche superfici che inizialmente non sono escalabili con il Th. delle DIVERGENZE. Basta che il "copertivo" che aggiunge per chiudere la superficie sia facile da calcolare.

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz = 2 \cdot \operatorname{Vol}(\Omega) \quad \begin{matrix} \text{PER IL TH. DELLA DIVERGENZA} \\ \text{TOTALE} \end{matrix}$$

• integrando per lezioni  $\operatorname{Vol}(\Omega) = \int_0^1 dz = \frac{\pi}{2}$ , quindi:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz = \frac{\pi}{2} \quad \text{TOTALE}$$

ora calcoliamo il flusso lungo C

$$\int_C \vec{F} \cdot (0,0,1) \, d\sigma$$

$$\varphi: (u,v) \mapsto (u, v, 1)$$

$$\left\{ \begin{matrix} u^2 + v^2 < 1 \\ u > 0 \end{matrix} \right\}$$

Dato che  $\vec{F} = (x, u, v+z)$

$$\iint_{\{u^2+v^2<1\}} (u, 0, 1+v) \cdot (0, 0, 1) \cdot \sqrt{1+0^2} \, du dv = \iint_{\{u^2+v^2<1\}} (1+v) \, du dv = \pi$$

$$\text{Flusso di } S = \text{Flusso di } (S \cup C) - \text{Flusso di } C = \pi - \pi = \boxed{0} \quad \text{C.V.D.}$$

## RASSUNTO

## TIPI d' INTEGRAZIONE

### INTEGRALI DOPPI

$$\iint_R f(x,y) dx dy$$

- 2 VAR

CAMBIO OL. VARIABILI  
POLARI

GAUSS - GREEN

### INTEGRALI DI CURVE (1° SPECIE)

$$\int_C f \, dn \rightarrow \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

- 1 VAR

### INTEGRALI DI 2° SPECIE (con vettoriale) - 1 VAR

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1 dx_1 + \dots + \int_C F_m \cdot dx_m = \int_a^b F_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i(t) \, dt$$

H. DIVERGENZA

### INTEGRALI TRIPLOI

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz$$

3 VAR

PER FICI  
PER SEZIONE

### INTEGRALI DI SUPERFICIE (analogo int. di 1° specie per curve)

$$\int_S f \, d\sigma$$

Cose diventano gl. integrali d.

Superficie di 1° specie?  $\rightarrow$  (forme differenziali)

FINE LEZIONI

## RIEPILOGO

## FORMULG.

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

COUCH 3 - SCHWARTZ.

$$\chi_{m,z} = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)(x - x_0)$$

PIANO TANGENZ.  
 $f(\vec{s}) = \dots$ 

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \circ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \emptyset$$

PIANO TANG.  
SUP. IMPRESA  
 $f(x, y, z) = 0$

PIANO TANGENTE  
Punto  $(x_0, y_0)$

$$Z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\begin{cases} \text{1} & \nabla g(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ & g(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{2} & \nabla f(x_1, \dots, x_m) = \lambda \nabla g(x_1, \dots, x_m) \\ & g(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

SISTEMI  
MULTIPLICAT  
DI  
LAGRANGE  
 $(\lambda, x_1, \dots, x_m)$

$\lambda, x_1, \dots, x_m$  imponibili.

$$\begin{cases} \text{1} & F.K(J) < 2 \\ & g_1 = 0 \\ & g_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{2} & \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ & g_1 = 0 \\ & g_2 = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

DOPPIO MOLTIPLICATORI / LAGRANGE (e vincoli) /

$$f: (x_1, \dots, x_m) \xrightarrow{\nabla f} (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}, f_{x_4}, \dots, f_{x_m})$$

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}$$

DEFINITA POSITIVA  $x_0$   $\forall f(x_0) = 0$ , allora  $H(x_0)$   
DEFINITA POSITIVA  $\rightarrow$  MINIMO LOCALE  
DEFINITA NEGATIVA  $\rightarrow$  MASSIMO LOCALE  
INDEFINITA  $\rightarrow$  SELLA  
SEMI-DEFINITA  $\rightarrow$  NUOLO SOLO

MATRICI HESSIANA e NATURA del PUNTO CRITICO

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \det(A) > 0 \wedge a_{11} > 0 \\ \det(A) > 0 \wedge a_{11} < 0 \\ \det(A) < 0 \\ \det(A) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{POSITIVA - MIN} \\ \text{NEGATIVA - MAX} \\ \text{INDIFINITA - SELLA} \\ \text{SELLA - NEUT} \end{array}$$

Hessiana  
L'una  
Matrice 2x2

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \det(a_{11}) > 0 \wedge \det(A') > 0 \wedge \det(A) > 0 \Rightarrow \text{POS / MIN} \\ \det(a_{11}) < 0 \wedge \det(A') > 0 \wedge \det(A) < 0 \Rightarrow \text{NEG - MAX} \\ \text{TUTTI } < 0 \Rightarrow \text{SELLA} \end{array}$$

CRITERIO di SYLVESTER

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\text{J}(f)_{K \times m} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_K \end{bmatrix}$$

JACOBI

$$g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$J(f \circ g)(x) \Rightarrow J_g[f(x)] \circ J_f(x)$$

JACOBI COMPOSTO

## TEOREMA FUBINI ~ INTEGRALI DUPPI

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$$

$f(x,y)$  continua

$$\text{per } \Omega = [a,b] \times [c,d]$$

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\Psi(x)}^{\Psi(x)} f(x,y) dy$$

$$\text{per } \Omega = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq b \wedge \Psi(x) \leq y \leq \Phi(x) \}$$

## ✓ TH. DOMINI NORMALI RISPETTO A Y - INT. DUPPI

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x,y,z) dz$$

$$\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [\alpha, \beta]$$

## INTEGRALI TRIPLOI

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iint_A dz dy \cdot \int_{\Psi(x,y)}^{\Phi(x,y)} f(x,y,z) dz$$

$A$  è la proiezione (v. n. 2) dell'el. (v. 1) dell'oggetto sul piano.  $\Psi$  e  $\Phi$  sono le funz. inferiori e superiori di  $Z$ .

## ✓ INTEGRALI TRIPLOI - INTEGRAZIONE PER FIBI

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{A_z} f(x,y,z) dx dy$$

$A_z$  è il dominio della funzione e quindi i termini di (coda cilindro)

## INTEGRALI TRIPLOI PER SEZIONE

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_A \phi(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det J\phi| du dv$$

INT. DUPPI

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_A \phi(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |\det J\phi| du dv dw$$

INT. TRIPLOI

## ✓ CAMBIO DI VAR.

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_{A_p} f(p \cos \vartheta, p \sin \vartheta) \cdot p \cdot dp d\vartheta$$

PASSAGGIO ALLE COORD POLARI

## COORD. SFERICHE

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{A_s} f(p \sin \varphi \cos \theta, p \sin \varphi \sin \theta, p \cos \varphi) p^2 \sin \varphi dp d\vartheta d\varphi$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{A_z} f(p \cos \theta, p \sin \theta) p \cdot dp d\theta$$

## COORD. CILINDRICHE

CASO PIANI. INT. 101 SEE

$$\int_Y f d\sigma_Y = \int_a^b f(\gamma_1(n), \dots, \gamma_m(n)) \cdot \sqrt{(\dot{\gamma}_1(n))^2 + \dots + (\dot{\gamma}_m(n))^2} dn$$

**INTEGRALE di 1° SPECIE (lungo CURVE)**  
ORIENTAZIONE NON IMPORTANTE

$$\gamma: [a, b] \rightarrow (\gamma_1(s), \dots, \gamma_m(s))$$

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\oint_Y \vec{F} \cdot d\vec{F} = \oint_Y F_1 \cdot dx_1 + \dots + F_m \cdot dx_m = \int_a^b F_1(\gamma_1(n), \dots, \gamma_m(n)) \cdot \dot{\gamma}_1(n) dn + \dots + \int_a^b F_m(\gamma_1(n), \dots, \gamma_m(n)) \cdot \dot{\gamma}_m(n) dn$$

**INTEGRALE di 2° SPECIE (CURVILINEO)**  
ORIENTAZIONE IMPORTANTE

$$\gamma: [a, b] \rightarrow (\gamma_1(n), \dots, \gamma_m(n))$$

$$F: \mathbb{R}^m \rightarrow (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m))$$

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} f(\psi(u, v)) \cdot \|\partial_u \psi \wedge \partial_v \psi\| du dv$$

**INTEGRALE di SUPERFICIE**  
LUNGO SUP. PARAMETRIZZATA.

$$\psi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

FLUSSO di un  
CAMPO  $\vec{F}$  su  
una SUP.  $S$

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial \Omega} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

**TEOREMA di GAUSS-GREEN**  
INT. DOPPIO  $\Leftrightarrow$  INT. 2° SPECIE

(CURVA CHIUSA)

$$P(x, y) = Q(x, y)$$

funzioni continue e classe  $C^1$

$$\oint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$$

**TEOREMA della DIVERGENZA**  
INT. SUPERFICIE  $\Leftrightarrow$  INT. TRIPLO.

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 dxdy$$

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$$

Area. di una Sup.  $\Omega$

Area di una sup. parametrizzata  $S$

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{\alpha}_1(t))^2 + \dots + (\dot{\alpha}_m(t))^2}$$

$$\alpha: [\alpha, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$$

**LUNGHEZZA di una CURVA Parametrizzata**

LUNG. CURVA CARTESIANA

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + (\alpha'(t))^2} dt$$

LUNG. CURVA PRE. IN POLARI

$$l(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2} d\theta$$

$$\text{AREA di una SUPERFICIE PARAMETRIZZATA}$$

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2} du dv$$

$$f: (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (u, v, f(u, v)) \in S \subset \mathbb{R}^3$$

$$(X_G, Z_G) = \left( \frac{\iint_{\Omega} x_0 x dx dz}{\text{Area}(\Omega)}, \frac{\iint_{\Omega} z dx dz}{\text{Area}(\Omega)} \right)$$

BARICENTRO di una  
REGIONE  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  nel piano  $X-Z$

$$(X_\gamma, Z_\gamma) = \left( \frac{\int_{\gamma} x dm}{l(\gamma)}, \frac{\int_{\gamma} z dm}{l(\gamma)} \right)$$

BARICENTRO di una  
CURVA  $\gamma$  nel piano  $X-Z$   
 $\gamma$  CURVA CHIUSA

GULDINO #1 SUPERFICI  $\rightarrow$  VOLUME DI ROTAZIONE

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \cdot X_G \cdot \text{Area}(\Omega)$$

VOLUME DI ROTAZIONE

VOLUME ottenuto  
 $\Omega$ ; superficie del  
PIANO  $X-Z$ ,  
ottenuto all'orno  $Z$ .

GULDINO #2 CURVE CHIUSE  $\rightarrow$  SUPERFICI DI ROTAZIONE

$$\text{Area}(S) = 2\pi \cdot X_\gamma \cdot l(\gamma)$$

Superficie ottenuta ruotando  $\gamma$   
intorno all'orno  $Z$ .