

TRASMISSIONE DEL CALORE

Lo scopo della Trasmissione del Calore è descrivere quantitativamente le modalità con cui la differenza di temperatura tra due corpi regola lo scambio di calore tra di essi. Queste conoscenze sono indispensabili per determinare il tempo in cui si compiono le trasformazioni termodinamiche.

E' necessario richiamare la definizione esatta di due grandezze che verranno usate nel seguito:

- Flusso termico totale o **potenza termica** (heat rate o heat flow) (W_T o \dot{Q}): il calore trasmesso attraverso una superficie per unità di tempo [W];
- Flusso termico specifico o semplicemente **flusso termico** (heat flux) ($q'' = \frac{\dot{Q}}{S}$): il calore trasmesso attraverso una superficie per unità di tempo e di superficie [W/m²].

Sia il flusso termico che la potenza termica sono caratterizzati anche da una direzione ed un verso, e sono quindi quantità vettoriali. In particolare, come vedremo meglio in seguito, esiste una certa analogia tra il flusso termico e la densità di corrente (quantità di carica elettrica che attraversa una superficie per unità di tempo e superficie).

Da un punto di vista tecnico, le modalità con cui il calore si trasmette possono essere raggruppate in tre categorie fondamentali:

1. **CONDUZIONE:** la trasmissione di calore nei corpi materiali, non associata a spostamento di materia. E' l'unica modalità di trasmissione del calore possibile all'interno dei solidi opachi (ovvero che non vengono attraversati da radiazioni elettromagnetiche).
2. **CONVEZIONE:** la trasmissione di calore nei corpi materiali, associata a spostamento di materia. In genere, è il meccanismo di scambio termico predominante nei fluidi.
3. **IRRAGGIAMENTO:** la trasmissione di calore associata alla propagazione della radiazione elettromagnetica. E' l'unica modalità di trasferimento di calore possibile nel vuoto.

Dal punto di vista fisico, invece, le modalità fondamentali di scambio termico sono solo conduzione e irraggiamento, che avvengono secondo le leggi fisiche specifiche esposte nel seguito (postulato di Fourier, legge di Stefan-Boltzmann); la convezione è invece una modalità complessa di trasporto di energia, predicibile (in teoria) tramite le altre leggi fisiche, ma che non è regolata da alcuna legge fisica particolare.

1.IRRAGGIAMENTO

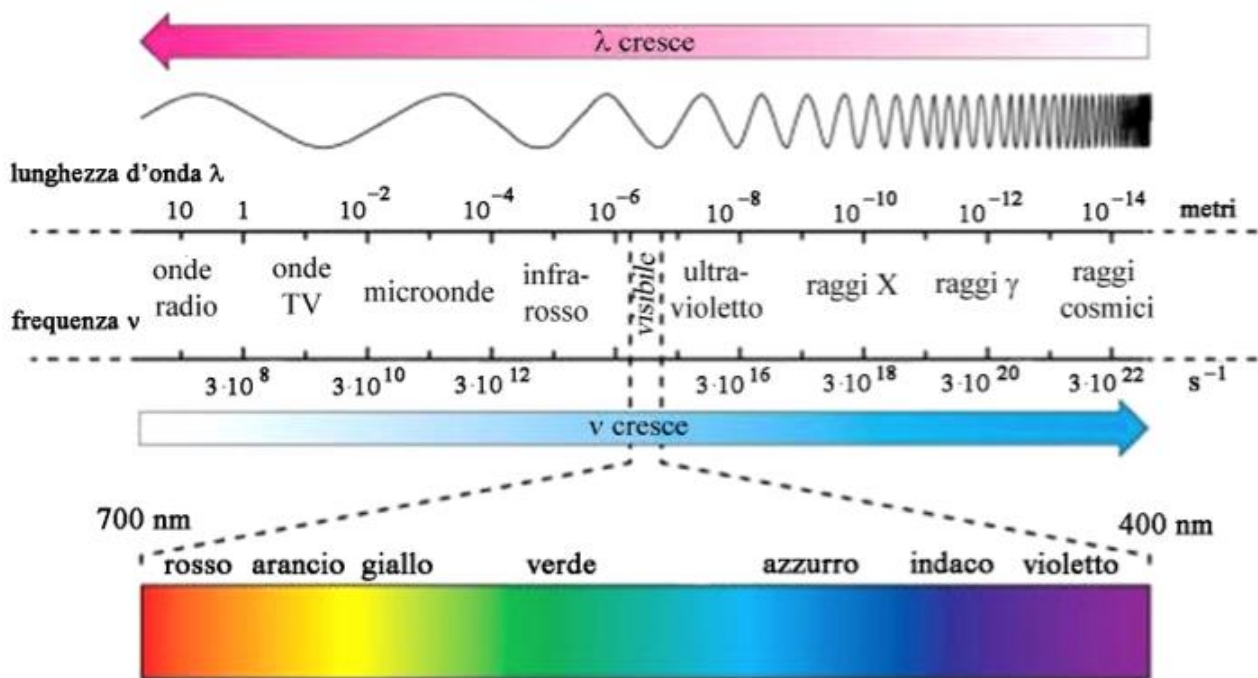
Nell'irraggiamento il calore è trasportato da radiazioni che tutti i corpi (solidi, liquidi o gassosi) emettono come risultato di cambiamenti nella configurazione elettronica degli atomi di cui sono composti.

La radiazione consiste in un'emissione da parte della materia di energia, il cui trasporto non richiede la presenza di un mezzo. Essa può essere interpretata in due modi:

- Come propagazione di particelle dette fotoni o quanti;
- Come propagazione di campi magnetici ed elettrici in rapido movimento, detti ONDE ELETTROMAGNETICHE. Le onde EM sono caratterizzate dalla frequenza ν , dalla lunghezza d'onda λ e dall'ampiezza A. Esse si propagano nello spazio alla velocità della luce che dipende dal mezzo di trasmissione (più piccola nei mezzi più densi) e nel vuoto è uguale a $c=2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. La frequenza e la lunghezza d'onda sono legate dalla relazione: $\lambda = \frac{c}{\nu}$

È conveniente trattare la radiazione come un'onda elettromagnetica in modo da poter usare una trattazione matematica "semplice".

L'insieme di tutte le onde elettromagnetiche è detto SPETTRO ELETTROMAGNETICO. Le onde EM vengono classificate in base alla lunghezza d'onda (o alla frequenza).



L'insieme di radiazioni elettromagnetiche con cui i corpi si scambiano calore per irraggiamento è detto RADIAZIONE TERMICA. Essa corrisponde al gruppo delle onde dello spettro EM comprese fra le lunghezze d'onda $0.1\text{-}100 \mu\text{m}$ (include quindi il gruppo di radiazione infrarossa, parte dell'ultravioletto e il visibile).

(PROBABILMENTE CI INTERESSA QUESTO GRUPPO DI RADIAZIONI perché LE ALTRE A LUNGHEZZE D'ONDA ALTE E BASSE SONO RISPETTIVAMENTE TROPPO POCO ENERGETICHE E TROPPO PENETRANTI OVVERO NON INTERAGISCONO COL CORPO).

Un oggetto emette radiazioni TERMICHE in tutte le lunghezze d'onda termiche, ma vedremo che l'ampiezza della radiazione per ogni lunghezza d'onda dipende dalla natura e dalla temperatura del corpo considerato. Le radiazioni possono essere emesse dal corpo in tutte le direzioni e si parla di EMETTITORE DIFFUSO, o più realisticamente ci sono alcune direzioni privilegiate ma ciò dipende solo dalla natura del corpo.

Inoltre per i gas ed i solidi semitrasparenti l'emissione è un fenomeno volumetrico, ovvero la radiazione è l'effetto di una emissione locale ed attraversa il volume. Per solidi, liquidi (e nel seguito per tutte le sostanze in generale), la radiazione verrà considerata come un fenomeno superficiale: la radiazione emessa dalle particelle in profondità è fortemente assorbita dalle particelle adiacenti.

1. POTERE EMISSIVO

Qualunque superficie a temperatura finita emette radiazioni termiche. Chiamiamo POTERE EMISSIVO MONOCROMATICO la potenza termica emessa sotto forma di radiazione a una determinata lunghezza d'onda, per unità di superficie, in tutte le direzioni:

$$E_{\lambda} \left(\frac{W}{m^2 * \mu m} \right)$$

Chiamiamo POTERE EMISSIVO TOTALE la potenza emessa sotto forma di radiazione per unità di superficie in tutte le direzioni e a tutte le lunghezze d'onda.

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

2. IL CORPO NERO E LE SUE PROPRIETÀ

Un corpo nero è un perfetto emettitore e assorbitore di radiazione:

- Emette la massima radiazione per ogni temperatura e lunghezza d'onda
- È un emettitore diffuso;
- Assorbe tutta la radiazione incidente, indipendentemente dalla sua direzione e lunghezza d'onda.

Esso fornisce un riferimento con il quale confrontare le proprietà radiative delle superfici reali. La più vicina approssimazione di un corpo nero si ottiene con una piccola cavità con superficie interna a temperatura uniforme.

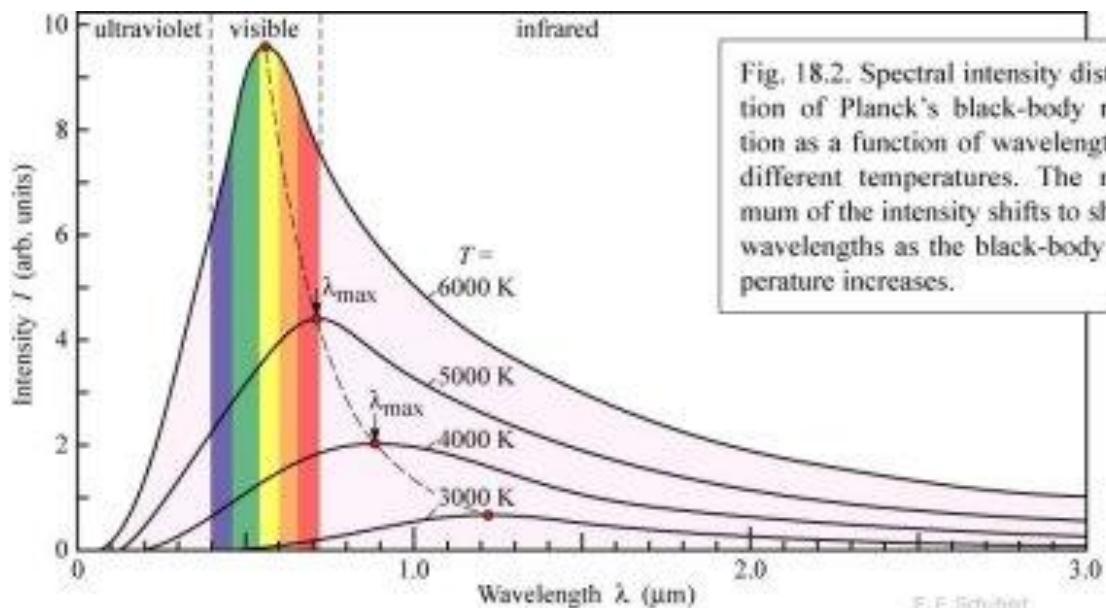
Il potere emissivo del corpo nero è ricavabile dalla LEGGE DI STEFAN-BOLTZMANN:

$$E_n = \sigma T^4 \left(\frac{W}{m^2} \right) \quad \sigma = \text{costante di Boltzmann} = 5.67 * 10^{-8} \frac{W}{m^2 * K^4}$$

Il potere emissivo monocromatico del corpo nero è ricavabile dalla LEGGE DI DISTRIBUZIONE DI PLANCK:

$$E_{n\lambda}(T) = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)} \quad \begin{array}{l} C_1 = 3.742 W * \frac{\mu m^4}{m^2} \\ C_2 = 1.439 * 10^4 \mu M * K \end{array}$$

Questa relazione è valida per una superficie che emette nel vuoto o in un gas ma può essere modificata modificando la prima costante con un indice caratteristico del mezzo.



Consideriamo l'andamento del potere emissivo del corpo nero in funzione delle lunghezze d'onda per alcune temperature:

- La radiazione emessa è funzione continua della lunghezza d'onda e presenta un picco di massimo (il Sole considerato come corpo nero a 5800K raggiunge il suo picco nella zona del visibile, mentre superfici a $T < 800K$ emettono nell'infrarosso e non sono visibili all'occhio umano);
- Fissata la lunghezza d'onda la radiazione emessa aumenta all'aumentare della T;
- All'aumentare della temperatura le curve diventano più ripide e il picco si sposta a sinistra, nella zona delle lunghezze d'onda più corte. La lunghezza d'onda in cui abbiamo il massimo può essere trovata uguagliando a zero la derivata dell'espressione di Planck, ma prima che esistessero le derivate fu formulata la LEGGE DELLO SPOSTAMENTO DI WIEN:

$$\lambda_{max} T = 2897.8 \mu m * K$$

- Integrando la formula di Planck troviamo il potere emissivo totale del corpo nero e osserviamo che rispetta la legge di Boltzmann.

Spesso siamo interessati alla quantità di radiazione emessa in una certa banda di lunghezze d'onda.

Il potere emissivo emesso dal corpo nero nella banda di lunghezze d'onda compresa tra 0 e λ è dato dalle relazione seguente e si ricava quindi dalla relazione di Planck:

$$E_{n,0-\lambda}(T) = \int_0^{\lambda} E_{n\lambda}(\lambda) d\lambda$$

Poiché questa integrazione non ha una soluzione analitica semplice si definisce una quantità adimensionale detta FUNZIONE DI RADIAZIONE DI CORPO NERO, che rappresenta la frazione di radiazione emessa dal corpo a temperatura T nella banda da 0 a λ . I valori della funzione sono tabellati in funzione di λT :

$$f_{\lambda}(T) = \frac{\int_0^{\lambda} E_{n\lambda}(\lambda) d\lambda}{\sigma T^4}$$

La frazione di radiazione emessa da un corpo nero a una temperatura T in una certa banda di lunghezze d'onda si ricava quindi dalla relazione:

$$f_{\lambda_1-\lambda_2}(T) = [f_{\lambda_2}(T) - f_{\lambda_1}(T)] \sigma T^4$$

3. EMISSIVITÀ

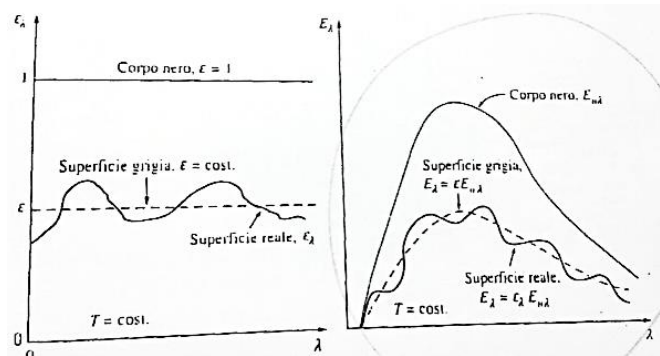
L'EMISSIVITÀ di una superficie (approssimata a emettitore diffuso) è definita come il rapporto tra la radiazione emessa dalla superficie e la radiazione emessa dal corpo nero alla stessa temperatura:

$$\varepsilon = \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{E(T)}{\sigma T^4} \quad \varepsilon = \frac{E_{\lambda}(T)}{E_{n\lambda}(T)} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 = (\text{corpo nero})$$

L'emissività di un corpo diffuso reale è quindi una funzione della lunghezza d'onda. Si può approssimare un corpo reale a CORPO GRIGIO supponendo l'emissività costante e indipendente dalla lunghezza d'onda; l'emissività di una superficie grigia corrisponde allora all'emissività totale.

L'emissività sarebbe anche funzione dell'angolo di diffusione del corpo rispetto alla normale alla superficie, ma per metalli rimane costante per $\theta < 40^\circ$ e per materiali non conduttori rimane costante per $\theta < 70^\circ$, quindi l'approssimazione a emettitore diffuso è ragionevole.

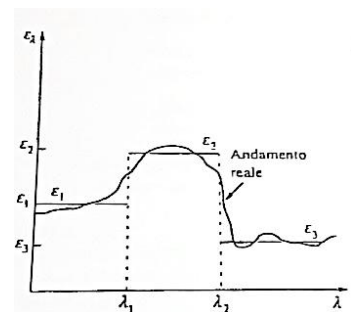
Notiamo che la curva del potere emissivo in funzione della lunghezza d'onda per un materiale reale differisce da quella di Planck e può presentare diversi massimi o minimi. La curva del corpo grigio ha lo stesso andamento di quella nel corpo nero perché si considera un valore di emissività media costante con le lunghezze d'onda, che però è minore di 1.



Poiché la superficie grigia dovrà emettere la stessa potenza radiante della superficie reale che rappresenta, a parità di temperatura, le aree sottese dalle curve di emissione delle sup. reali e grigie dovranno avere lo stesso valore:

$$\varepsilon(T)\sigma T^4 = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{n\lambda}(T) d\lambda \quad \rightarrow \quad \text{Emissività media: } \varepsilon(T) = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{n\lambda}(T) d\lambda}{\sigma T^4}$$

L'integrazione può essere effettuata facilmente dividendo lo spettro in un numero sufficiente di bande di lunghezza d'onda e ipotizzando che l'emissività resti costante in ciascuna banda, vale a dire esprimendo $\varepsilon(T)$ come funzione a gradini.



4. RADIAZIONE INCIDENTE

La radiazione incidente su una superficie per unità di area e di tempo è detta IRRADIAZIONE (G). Quando la radiazione colpisce la superficie parte di essa viene assorbita, parte riflessa e in parte trasmessa. Si definisce quindi la frazione di radiazione assorbita, riflessa e trasmessa come:

- COEFFICIENTE DI ASSORBIMENTO $\alpha = \frac{\text{radiazione assorbita}}{\text{radiazione incidente}} = \frac{G_{ass}}{G} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$
- COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE $\rho = \frac{\text{radiazione riflessa}}{\text{radiazione incidente}} = \frac{G_{rifl}}{G} \quad 0 \leq \rho \leq 1$
- COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE $\tau = \frac{\text{radiazione trasmessa}}{\text{radiazione incidente}} = \frac{G_{tras}}{G} \quad 0 \leq \tau \leq 1$

Nei corpi opachi il coefficiente di trasparenza è nullo, come avviene frequentemente, per spessori anche modesti, nei materiali solidi. In questo caso la radiazione può essere solo assorbita e/o riflessa.

Le definizioni precedenti valgono per proprietà totali emisferiche, perché G rappresenta la radiazione incidente proveniente da tutte le direzioni e di tutte le lunghezze d'onda, per cui α τ ρ sono proprietà medie per tutte le direzioni e tutte le lunghezze d'onda. Si potrebbero definire quindi coefficienti di ass, rif, tras monocromatici e direzionali (notare che il coeff. di riflessione è bidirezionale, perché dipende sia da come la radiazione incidente arriva sia da come viene riflessa; in particolare i due casi limite sono la riflessione speculare e quella diffusa). Inoltre notiamo che il coefficiente di assorbimento è quasi indipendente dalla T del corpo ma dipende dalla T della sorgente.

Per il primo principio della termodinamica la somma della radiazione assorbita, riflessa e trasmessa deve essere uguale alla radiazione incidente:

$$G_{ass} + G_{rifl} + G_{tr} = G \quad \rightarrow \quad \alpha + \rho + \tau = 1$$

4.1.LEGGE DI KIRCHOFF

Consideriamo ora un piccolo corpo di superficie A, emissività ε , coefficiente di assorbimento α , alla temperatura T, contenuto in una grande cavità approssimabile a corpo nero isoterma alla stessa temperatura T del corpo. La radiazione incidente sulla superficie del corpo è uguale a quella emessa dal corpo nero, e la radiazione assorbita dal corpo è dunque:

$$E_n(T) = \sigma T^4 \quad \rightarrow \quad G_{ass} = \alpha G = \alpha \sigma T^4$$

La radiazione emessa dal corpo è invece:

$$E_{em} = \varepsilon \sigma T^4$$

Considerando che il corpo è in equilibrio termico con la cavità, la potenza netta scambiata dal corpo deve essere nulla, cioè la radiazione emessa deve essere uguale a quella assorbita:

$$A\alpha\sigma T^4 = A\varepsilon\sigma T^4 \quad \rightarrow \quad \text{LEGGE DI KIRCHOFF: } \alpha(T) = \varepsilon(T)$$

L'espressione può essere generalizzata al caso di dipendenza dalla direzione e dalla lunghezza d'onda dei due coefficienti, ma bisogna ricordarsi che vale solo per corpi alla stessa T della sorgente.

La conseguenza della legge è che per un corpo opaco possiamo determinare tutte le proprietà della superficie conoscendo solo una di esse:

$$\rho + \alpha = 1 \quad \varepsilon = \alpha$$

5.FATTORI DI VISTA

La trasmissione di calore tra due superfici (ISOTERME) per irraggiamento dipende dall'orientamento relativo delle superfici, dalle loro proprietà radiative e dalle loro temperature. Per tenere conto dell'effetto dell'orientamento sulla trasmissione di calore per irraggiamento introduciamo il parametro FATTORE DI VISTA, che è una grandezza dipendente unicamente dalla geometria del sistema.

Si dice fattore di vista DIFFUSO quello basato sull'ipotesi che le superfici emettono e riflettono in modo diffuso (noi usiamo questo).

Il fattore di vista tra una superficie i e una J è definito come "la frazione di radiazione emessa dalla superficie i che incide direttamente sulla superficie j". Quest'ultima è proporzionale all'angolo sotteso dalla superficie vista dalla sorgente.

$$0 \leq F_{i \rightarrow j} \leq 1$$

Il fattore di vista di una superficie verso se stessa sarà 0 a meno che la stessa non sia concava.

Per il fattore di vista valgono diversi leggi:

- LEGGE DI RECIPROCIÀ: $A_i F_{i \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow i}$
- REGOLA DELLA SOMMA: la somma dei fattori di vista della superficie i di una cavità verso tutte le superfici della cavità è uguale a 1: $\sum_{j=1}^N F_{i \rightarrow j} = 1$

6. TRASMISSIONE DI CALORE PER IRRAGGIAMENTO TRA DUE CORPI NERI

Consideriamo due superfici nere di forma arbitraria a temperature uniformi T_1 e T_2 . Considerando che la potenza emessa per unità di superficie dal corpo nero è espressa dalla legge di Boltzmann e il fattore di vista rappresenta la frazione di radiazione emessa dalla superficie 1 che incide sulla superficie 2, la potenza netta trasmessa per irraggiamento dalla superficie 1 alla 2 è (usiamo la legge di reciprocità):



$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \text{radiazione emessa da 1 che incide su 2} - \text{radiazione emessa da 2 che incide su 1} =$$

$$= A_1 F_{1 \rightarrow 2} E_{n1} - A_2 F_{2 \rightarrow 1} E_{n2} = A_1 F_{1 \rightarrow 2} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (W)$$

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{1 \rightarrow 2} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = A_2 F_{2 \rightarrow 1} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Nel caso di una cavità costituita da N superficie nere a temperature costanti, la potenza termica netta trasmessa da una generica superficie i è:

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^N \dot{Q}_{i \rightarrow j} = \sum_{j=1}^N A_i F_{i \rightarrow j} \sigma (T_i^4 - T_j^4)$$

Si noti che la potenza netta scambiata da una superficie con se stessa risulta nulla indipendentemente dalla forma della superficie stessa.

7. TRASMISSIONE DI CALORE PER IRRAGGIAMENTO TRA DUE CORPI GRIGI

Definiamo RADIOSITÀ (J) la radiazione totale che abbandona una superficie per unità di tempo e di superficie. Per una superficie opaca e grigia ($\epsilon = \alpha$ $\alpha + \rho = 1$) si esprime con la relazione:

$$J = \text{radiazione emessa} + \text{radiazione riflessa}$$

$$J = \epsilon E_n + \rho G = \epsilon E_n + (1 - \epsilon) G \quad \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

Notiamo che per un corpo nero la radiosità è ($\epsilon=1$) uguale al suo potere emissivo: $J = E_n = \sigma T^4$

7.1. POTENZA TERMICA TRASMESSA DA (O A) UNA SUPERFICIE

La potenza termica netta scambiata per irraggiamento da una superficie i di area A_i è:

$$\dot{Q}_i = \text{radiazione emessa da i} - \text{incidente su i} = A_i (J_i - G_i) = A_i \left(J_i - \frac{J_i - \epsilon_i E_{n,i}}{1 - \epsilon_i} \right) = \frac{A_i \epsilon_i}{1 - \epsilon_i} (E_{n,i} - J_i)$$

Per analogia con la legge di Ohm può essere espressa come:

$$\dot{Q}_i = \frac{(E_{n,i} - J_i)}{R_i} \quad R_i = \frac{1 - \epsilon_i}{A_i \epsilon_i} = \text{RESISTENZA SUPERFICIALE ALL'IRRAGGIAMENTO}$$

Si noti che per un corpo nero la resistenza superficiale all'irraggiamento vale 0 perché $\epsilon=1$ e $J=E_n$.

Una superficie adiabatica perde per irraggiamento tutta l'energia che guadagna (considerando nulli gli scambi termici derivanti dai fenomeni convettivi e conduttivi) per cui $\dot{Q}_i = 0$. Una superficie del genere viene detta REIRRADIANTE e per l'equazione di prima vale $J = E_{n,i} = \sigma T^4$. Nei calcoli la resistenza superficiale di una superficie reirradiante viene trascurata perché non esiste trasmissione di calore attraverso essa.

7.2. SCAMBIO TERMICO NETTO TRA DUE SUPERFICI

Consideriamo due superfici opache, grigie e diffondenti a temperatura costante:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{i \rightarrow j} &= \text{radiazione che abbandona } i \text{ e incide su } j - \text{radiazione che abbandona } j \text{ e incide su } i \\ &= A_i J_i F_{i \rightarrow j} - A_j J_j F_{j \rightarrow i} = A_i F_{i \rightarrow j} (J_i - J_j)\end{aligned}$$

Per analogia con la legge di Ohm:

$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = A_i F_{i \rightarrow j} (J_i - J_j) \quad \rightarrow \quad \dot{Q}_{i \rightarrow j} = \frac{(J_i - J_j)}{R_{i \rightarrow j}}$$

$$R_{i \rightarrow j} = \frac{1}{A_i F_{i \rightarrow j}} = \text{RESISTENZA SPAZIALE IRRAGGIAMENTO}$$

Nel caso di una cavità costituita da N superficie grigie a temperature costanti, la potenza termica netta trasmessa da una generica superficie i è uguale alla somma delle potenze termiche trasmesse dalla stessa superficie verso ciascuna delle N superfici della cavità

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^N \dot{Q}_{i \rightarrow j} = \sum_{j=1}^N \frac{(J_i - J_j)}{R_{i \rightarrow j}}$$

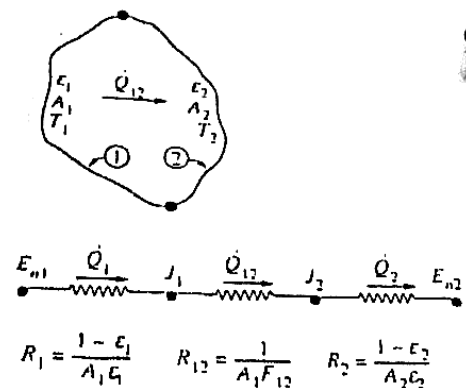
7.3. TRASMISSIONE DEL CALORE PER IRRAGGIAMENTO IN CAVITÀ CON 2 SUPERFICI

Consideriamo una cavità costituita da due superfici opache e grigie a temperatura fissata. Si voglia determinare la potenza termica netta scambiata per irraggiamento tra le due superfici con l'analogia elettrica. Il fattore di vista è unitario in questi casi. Abbiamo:

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2$$

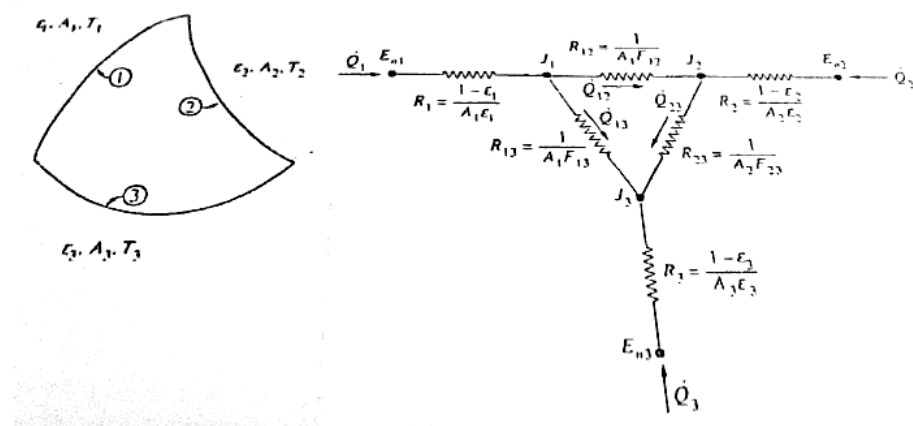
La rete di radiazione per questa cavità a due superfici consiste di due resistenze superficiali e una spaziale in serie:

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2 = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{R_1 + R_{12} + R_2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \epsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow 2}} + \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \epsilon_2}}$$



7.4. TRASMISSIONE DEL CALORE PER IRRAGGIAMENTO IN CAVITÀ CON 3 SUPERFICI

Come prima solo con 3 superfici. Si ottengono 3 equazioni imponendo che la somma delle potenze termiche ai nodi sia 0. Altre 6 equazioni sono date dalle definizioni delle potenze termiche. In questo modo possiamo trovare tutte le 9 potenze termiche incognite.



CONDUZIONE

La conduzione può essere pensata come trasferimento di energia a livello microscopico per interazione tra le particelle più energetiche (dotate di energia vibrazionale) a quelle meno energetiche.

In regime monodimensionale, in cui la temperatura T è funzione della sola x , il flusso termico (calore trasmesso per unità di tempo e superficie) che attraversa una qualunque superficie perpendicolare all'asse x è dato dal postulato di Fourier, che per una lastra piana è esprimibile come:

$$q''_x = -k \frac{dT}{dx} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Notare il segno meno, in accordo con il secondo principio della termodinamica (il calore fluisce verso le zone più fredde). Nel caso di andamento tridimensionale di temperatura il flusso termico è un vettore (caratterizzato quindi da direzione e verso oltre che dal modulo) esprimibile come:

$$\vec{q}'' = -k \nabla T$$

Il fattore di proporzionalità k [W/mK] è detto CONDUCIBILITÀ TERMICA ed è una proprietà fisica della sostanza: le sostanze con alto valore di k sono buoni conduttori termici (ovvero trasmettono elevati flussi termici con piccoli gradienti di temperatura) e quelle con basso k sono detti isolanti termici e sono usati per coibentare termicamente le strutture. Il valore di k è in generale funzione della temperatura, ma tale dipendenza può essere trascurata nella maggior parte dei casi.

1.EQUAZIONE DI FOURIER

Il punto di partenza dell'analisi di un problema di conduzione del calore è l'equazione di bilancio dell'energia ricavata per un sistema chiuso il cui volume è dV . Nel caso di un solido incompressibile (ρ =costante e $du = mc_dT$) con un termine fittizio di produzione dell'energia (dovuto ad esempio all'effetto Joule) si ha:

$$\Delta E = E_{IN} + E_{OUT} + E_{GEN} \quad \leftrightarrow \quad \dot{E} = \dot{E}_{IN} + \dot{E}_{OUT} + \dot{E}_{GEN}$$

- Dove \dot{E}_{out} e \dot{E}_{in} sono l'energia interna trasferita nell'unità di tempo fuori e dentro, rispettivamente, attraverso la superficie del sistema a causa dello scambio di calore.
- E_{gen} è l'energia generata nell'unità di tempo all'interno del sistema.
- E è l'energia immagazzinata nell'unità di tempo all'interno del sistema.

Nel nostro caso abbiamo:

$$\dot{E} = \frac{dU}{dt} = \frac{d(mc_p T)}{dt} = mc_p \frac{dT}{dt} = \rho dV c_p \frac{dT}{dt}$$

$$\dot{E}_{OUT} = \dot{Q}_{x+dx} + \dot{Q}_{y+dy} + \dot{Q}_{z+dz} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx + \dot{Q}_y + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy + \dot{Q}_z + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz$$

$$\dot{E}_{IN} = \dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z$$

$$\dot{E}_{GEN} = q_{gen} dV$$

Ora dalla definizione e per la legge di Fourier (fatto solo per la componente x ma è uguale per le altre due):

$$q'' = \frac{\dot{Q}}{S} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad e \rightarrow \quad q''_x = \frac{\dot{Q}_x}{dy dz} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow \dot{Q}_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz \rightarrow \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dV$$

Quindi il bilancio diventa: $\rho dV c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k dV \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_{gen} dV$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + q_{gen}$$

A seconda dei vari casi abbiamo:

- CASO FLUSSO MONODIMENSIONALE: $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_{gen}$
- CASO STAZIONARIO, MONODIMENSIONALE: $k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_{gen} = 0$
- CASO STAZIONARIO, MONODIMENSIONALE, SENZA GENERAZIONE: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

2.CONDIZIONI AL CONTORNO PER L'EQUAZIONE DI FOURIER

Per determinare la distribuzione di temperatura $T(x,y,z)$ in un mezzo, è necessario risolvere l'equazione del calore, che è un'equazione di secondo ordine rispetto alle coordinate spaziali e di primo ordine rispetto al tempo. Le condizioni specificabili

1. CONDIZIONE INIZIALE Nel caso generale di un problema di conduzione in transitorio è necessario conoscere in un certo istante temporale, che si assume come istante iniziale, la distribuzione di temperatura nel dominio V di integrazione:

$$T(\vec{r}, t = 0) = T_0(\vec{r}) \quad \vec{r} \in V$$

La soluzione dell'equazione della conduzione dovrà quindi fornire la distribuzione di temperatura in ogni istante successivo.

2. CONDIZIONE AL CONTORNO DEL PRIMO TIPO (O CONDIZIONE DI DIRICHLET): In questo caso è nota la distribuzione di temperatura sulla superficie S del dominio V sul quale andare ad integrare l'equazione della conduzione, cioè

$$T = f(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in A$$

Dove la prescritta temperatura superficiale $f(\vec{r}, t)$ è in generale una funzione della posizione all'interno del dominio e del tempo. Nel caso particolare in cui $T=0$ si parla di condizione al contorno del primo tipo omogenea.

Nel caso monodimensionale (sulla superficie $x=0$ ma anche sulla generica $x=L$) questo vuol dire imporre temperatura superficiale costante $T(0,t)=0$

3. CONDIZIONE AL CONTORNO DEL SECONDO TIPO (O CONDIZIONE DI NEUMANN): Questo è il caso in cui è specificato il valore del flusso termico sulla superficie, cioè:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = f(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in A$$

Dove con $\frac{\partial T}{\partial n}$ si è indicato il gradiente di temperatura valutato nella direzione normale (uscente) alla superficie. Nel caso particolare di flusso termico nullo sul contorno, ovvero di una superficie adiabatica si parla di condizione al contorno del secondo tipo omogenea e si ha:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \vec{r} \in A$$

Nel caso monodimensionale (sulla superficie $x=0$ ma anche sulla generica $x=L$) le equazioni sono di flusso termico superficiale costante:

$$\text{flusso di calore finito: } -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q''_s \quad \text{flus. nullo (sup. adiabatica): } -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

4. CONDIZIONE AL CONTORNO DEL TERZO TIPO (O CONDIZIONE DI ROBIN O MISTA): In questo caso si uguaglia sulla superficie del solido il flusso conduttivo proveniente dall'interno con quello asportato per convezione dal fluido che lo lambisce, ovvero:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha [T_\infty(\vec{r}, t) - T_0] \quad \vec{r} \in A$$

L'eventuale termine dovuto all'irraggiamento viene trascurato o linearizzato (ovvero, inglobato nel coefficiente convettivo). Ovviamente, le condizioni al contorno del primo e del secondo tipo possono essere ottenute come casi particolari della condizione al contorno del terzo tipo. Per esempio, ponendo in prossimità del contorno $k=0$, e $T_\infty(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$ si ottiene (per $\alpha \neq 0$) una condizione del primo tipo. Similmente, ponendo $hT_\infty(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$ e $T_0 = 0$ al secondo membro si ottiene una condizione del secondo tipo.

Nel caso monodimensionale:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$

3.PARETE PIANA (caso stazionario monodimensionale)

3.1.ANDAMENTO TEMPERATURA NELLA PARETE PIANA

Prendiamo una parete piana che separa due fluidi a temperature differenti. Lo scambio di calore avviene per convezione dal fluido caldo alla parete $x=0$, per conduzione attraverso la parete e per convezione dalla parete $x=L$ verso il fluido freddo,

Risolviamo l'equazione del calore nel caso stazionario:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_{gen} = 0$$

$$\int \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \int -\frac{q_{gen}}{k} dx$$

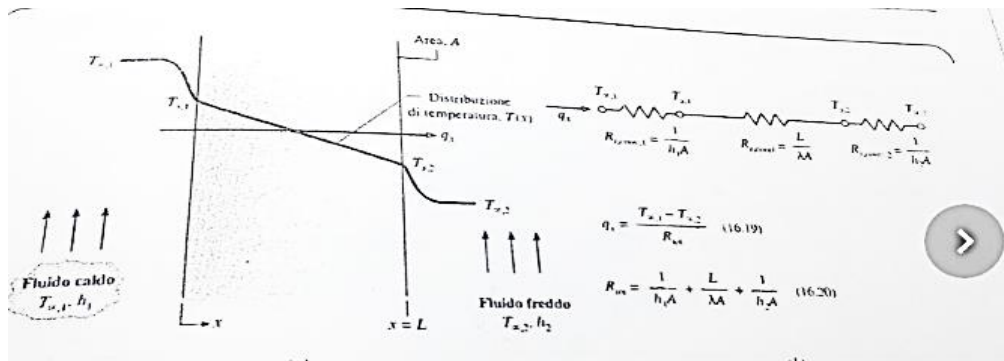
$$\frac{\partial T}{\partial x} + A = -\frac{q_{gen}}{k}x + B \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q_{gen}}{k}x + C$$

$$\text{Integrando nuovamente: } T(x) + D = -\frac{q_{gen}}{2k}x^2 + Cx + E$$

$$T(x) = -\frac{q_{gen}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

Nei casi senza generazione:

$$T(x) = C_1x + C_2$$



3.2.PARETE PIANA SENZA GENERAZIONE

Prendiamo la nostra lastra piana a contatto in $x=0$ con un oggetto a T_A e in $x=L$ con uno a T_B . La lastra ha conduttività termica k :

1. Calcolare $T(x)$ nel caso in cui non c'è generazione:

Imponiamo le condizioni iniziali del primo tipo all'equazione del calore semplificata, dicendo che la parete $x=0$ è a temperatura costante T_A e quella a $x=L$ è a temperatura T_B :

$$T(x=0) = T_A = C_2$$

$$T(x=L) = T_B = LC_1 + C_2 \rightarrow C_1 = \frac{T_B - T_A}{L}$$

$$T(x) = \left(\frac{T_B - T_A}{L}\right)x + T_A$$

2. Calcolare il flusso di calore e la potenza termica (entrambe costanti e indipendenti da x):

Per calcolare il flusso nota la distribuzione di temperatura usiamo la legge di Fourier monodimensionale:

$$q''_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \left(\frac{T_B - T_A}{L}\right)$$

$$q''_x = \frac{\dot{Q}}{S} \rightarrow \dot{Q} = q''_x S = -kS \left(\frac{T_B - T_A}{L}\right) = kS \left(\frac{\Delta T}{L}\right)$$

3.3. ANALOGIA ELETTRICA (caso stazionario, senza generazione, monodimensionale)

Possiamo modellizzare la lastra piana come una resistenza elettrica dove ciò che spinge la corrente, che in questo caso è la potenza termica, è la differenza di temperatura. Otteniamo dunque la RESISTENZA TERMICA:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{L}{\sigma S} \rightarrow R_T = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{\Delta T}{kS \left(\frac{\Delta T}{L} \right)} = \frac{L}{kS}$$

Per quanto riguarda la convenzione per la legge di Newton abbiamo:

$$\dot{Q} = hS(T_s - T_\infty) \rightarrow R_{T,conv} = \frac{T_s - T_\infty}{\dot{Q}} = \frac{T_s - T_\infty}{hS(T_s - T_\infty)} = \frac{1}{hS}$$

Poiché \dot{Q} è costante attraverso il circuito termico, risulta:

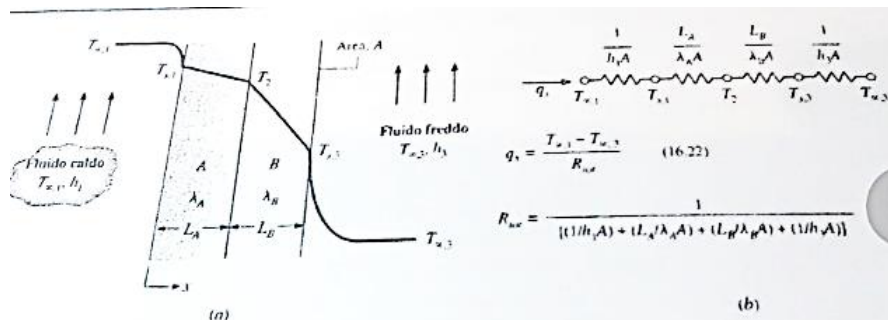
$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty,1} - T_{s1}}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{T_{s,1} - T_{s1}}{\frac{L}{kS}} = \frac{T_{s2} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2 S}} = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{tot}} \quad \text{con } R_{tot} = R_t + R_{t,conv1} + R_{t,conv2} \text{ (serie)}$$

3.4. PARETE COMPOSITA

Il caso con due pareti piane affiancate è analogo al precedente ma si aggiunge un'altra resistenza termica di conduzione alla serie delle resistenze.

Nel caso si abbino una serie di pareti come in figura (a mano), dove la parte orizzontale delle pareti è considerata adiabatica, nel tratto con due pareti si inseriscono due resistenze in parallelo, per cui:

$$R_{t,FG} = \frac{1}{\frac{1}{R_{tF}} + \frac{1}{R_{tG}}} = \frac{1}{\frac{L_{FG}}{k_F S_F} + \frac{L_{FG}}{k_G S_G}} = \frac{L_{FG}}{k_F S_F + k_G S_G}$$



4. SISTEMI CILINDRICI (stazionario, monodimensionale)

Prendiamo in considerazione un sistema formato da un cilindro cavo. Usiamo le coordinate cilindriche per cui $dV = dr dz R d\theta$. Il postulato di Fourier in coordinate cilindriche si modifica perché il gradiente assume un'espressione diversa in queste coordinate e si ha:

$$q''_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad q''_\theta = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad q''_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\dot{E}_{OUT} - \dot{E}_{IN} = -\frac{\partial \dot{Q}_r}{\partial r} dr - \frac{\partial \dot{Q}_\theta}{\partial \theta} d\theta - \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz = \frac{\partial \left(k \frac{\partial T}{\partial r} * dz R d\theta \right)}{\partial r} dr + \frac{\partial \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} * dz r d\theta \right)}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \left(k \frac{\partial T}{\partial z} * dr R d\theta \right)}{\partial z} dz =$$

$$k dV \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} * R \right)}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = k dV \nabla^2 T$$

Che mettendo nell'eq. dell'energia porta comunque a: $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + q_{gen}$

4.1. ANDAMENTO TEMPERATURA NEL CASO STAZIONARIO

Per esso l'equazione del calore diventa:

$$k \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} * R \right) + q_{gen} = 0$$

Integrando otteniamo l'andamento della temperatura nell'oggetto cilindrico:

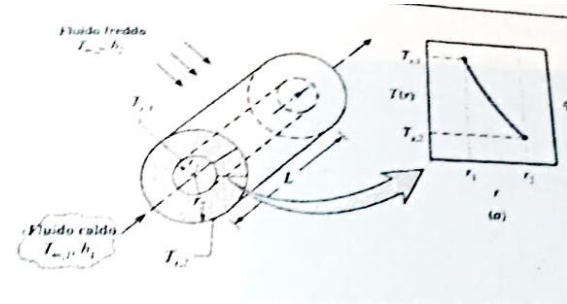
$$T(r) = -\frac{q_{gen}}{4k} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$$

Nel caso senza generazione l'equazione diventa: $T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$

4.2. CILINDRO BUCATO senza generazione

Il cilindro cavo le cui superfici interna ed esterna sono esposte a fluidi a T diversa costituisce una configurazione comune.

1. Imponiamo le condizioni iniziali del primo tipo all'equazione del calore semplificata, dicendo che la parete $r=R_1$ è a temperatura costante T_1 e quella a $r=R_2$ è a temperatura T_2 :



$$T(r = R_1) = T_1 = \ln(R_1) C_1 + C_2$$

$$T(r = R_2) = T_2 = \ln(R_2) C_1 + C_2 \rightarrow C_1 = \frac{T_2 - C_2}{\ln(R_2)} = \frac{T_2 + \ln(R_1) C_1 - T_1}{\ln(R_2)}$$

$$C_1 \ln(R_2) - \ln(R_1) C_1 = C_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \Delta T \quad C_1 = \frac{\Delta T}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$C_2 = T_2 - \ln(R_2) C_1 = T_2 - \ln(R_2) \frac{\Delta T}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$T(r) = \frac{\Delta T}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(r) + T_2 - \ln(R_2) \frac{\Delta T}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{\Delta T * \ln(R) + T_2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \Delta T * \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{\Delta T \ln\left(\frac{R}{R_2}\right) + T_2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$T(r) = \frac{\Delta T}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{R}{R_2}\right) + T_2$$

2. Calcoliamo il flusso di calore e la potenza termica (entrambe costanti e indipendenti da x):
Per calcolare il flusso nota la distribuzione di temperatura usiamo la legge di Fourier monodimensionale:

$$q''_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{k C_1}{r} \rightarrow \dot{Q} = q''_r S = -(2\pi R h) \frac{k}{r} \frac{\Delta T}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

3. Calcoliamo la resistenza termica:

$$R_T = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = -\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{(2\pi h) k}$$

5. TRASMISSIONE DEL CALORE DA SUPERFICI ESTESE: LE ALETTE

La potenza termica trasmessa da una superficie a temperatura T_s al fluido circostante a temperatura T_∞ è fornita dalla legge di Newton (S =superficie dove avviene scambio termico h =coeff di scambio termico conv):

$$\dot{Q}_{conv} = hS(T_s - T_\infty)$$

Quando le temperature sono fissate da considerazioni di progetto (come accade spesso) si può aumentare la potenza termica trasmessa aumentando h o S :

1. Aumentare h richiede l'aumento della velocità del fluido che lambisce il solido, cosa che comporta il potenziamento o l'installazione di ventilatori o pompe;
2. Aumentare S è possibile tramite l'uso di superfici estese dette ALETTE e costituite da materiali altamente conduttivi come l'alluminio.

Noi considereremo ALETTE PIANE, in condizioni stazionarie, senza generazione di calore, con h costante e uniforme su tutta la superficie dell'aletta (in realtà esso dipende molto dal movimento del fluido tra le alette).

Assumeremo inoltre condizioni monodimensionali in direzione longitudinale (x), anche se la conduzione nell'aletta è in realtà bidimensionale. In pratica tuttavia le alette sono sottili e cambiamenti di temperatura in direzione longitudinale sono molto maggiori rispetto a quelli trasversali. Considereremo inoltre come area dell'aletta solo quella laterale visto che l'area della "punta" è molto minore.

5.1. DISTRIBUZIONE DELLA TEMPERATURA NELL'ALETTA

La potenza termica trasmessa dall'aletta è idealmente, cioè se si considera tutta l'aletta come isoterma e quindi alla temperatura della parete piana:

$$\dot{Q}_{conv} = hS(T_s - T_\infty)$$

$$\text{ma realmente: } \dot{Q}_{conv} = hS(T(x) - T_\infty)$$

Per calcolare la potenza trasmessa dobbiamo dunque calcolare la distribuzione di temperatura lungo l'aletta. Definiremo dunque un opportuno volume infinitesimo e faremo il bilancio energetico.

$$\dot{Q}_{IN} - \dot{Q}_{OUT} = 0$$

$$\dot{Q}_{IN} = q''(x)A_b \quad \dot{Q}_2 = q''(x+dx)A_b \quad \delta\dot{Q}_{CONV} = hPdx(T(x) - T_\infty)$$

$$q''(x)A_b - q''(x+dx)A_b - hPdx(T(x) - T_\infty) = 0$$

$$A_b[q''(x) - q''(x+dx)] = hPdx(T(x) - T_\infty)$$

$$\text{rapporto incrementale} \rightarrow \frac{[q''(x+dx) - q''(x)]}{dx} = -\frac{hP(T(x) - T_\infty)}{A_b}$$

$$\frac{dq''(x)}{dx} = -\frac{hP(T(x) - T_\infty)}{A_b}$$

$$\text{Per il postulato di Fourier: } q''_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow \frac{dq''(x)}{dx} = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \backslash \backslash$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{hP}{kA_b}(T(x) - T_\infty) = a^2(T(x) - T_\infty) = a^2\theta(x)$$

$$(T(x) - T_\infty) = \theta(x) \text{ ma dato che } T_\infty \text{ è costante } \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{inoltre } a = \sqrt{\frac{hP}{kA_b}}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = a^2\theta(x)$$

Per risolvere l'equazione differenziale usiamo le seguenti condizioni al contorno:

1. $\theta(x=0) = T_s - T_\infty = \vartheta_0$
2. $q''(x=L) = 0$ (adiabaticità)

La soluzione generale dell'equazione è del tipo: $\theta(x) = C_1 e^{ax} - C_2 e^{-ax}$

Usando mirabolanti metodi di calcolo otteniamo che la distribuzione di temperatura nell'aletta è:

$$\theta(x) = \vartheta_0 \frac{e^{a(x-L)} - e^{-a(x-L)}}{e^{aL} - e^{-aL}} = \vartheta_0 \frac{\cosh[a(x-L)]}{\cosh(aL)}$$

Nel caso di aletta infinita come seconda condizione al contorno mettiamo:

- $\theta(\infty) = T(\infty) - T_\infty = 0$

Sostituendo le condizioni a contorno:

$$0 = C_1 e^\infty - C_2 e^{-\infty} \rightarrow C_1 = 0$$

$$C_2 e^{-a \cdot 0} = \vartheta_0 \rightarrow C_2 = \vartheta_0$$

Di conseguenza la distribuzione di temperatura nell'aletta infinita è:

$$\theta(x) = \vartheta_0 e^{-ax} \rightarrow T(x) = T_\infty + \vartheta_0 e^{-ax}$$

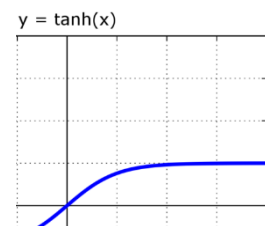
5.2.POTENZA TERMICA ALETTA

La conservazione dell'energia impone che il calore trasferito dall'aletta per convezione debba essere uguale a quello trasferito per conduzione attraverso la base dell'aletta

$$\dot{Q}_{fin} = \dot{Q}_{conv} = A_b q''(x=0) = A_b \left(-k \frac{\delta \theta}{\delta x} \Big|_{x=0} \right) = -k \vartheta_0 A_b a \frac{\sinh[-aL]}{\cosh(aL)} = (k \vartheta_0 A_b a) * \tanh(aL)$$

Come vediamo dal grafico ($x=aL$) fare l'aletta infinita vuol dire scambiare la massima potenza termica, ma ingegneristicamente è impossibile quindi ci si ferma ad un valore in cui la funzione tende ad essere asintotica.

Il potenziale che causa lo scambio termico per convezione attraverso l'aletta è la differenza di temperatura tra la base ($x=0$) e il fluido. Quindi la massima potenza termica è scambiata in caso di aletta alla stessa temperatura della base.



5.3.PARAMETRI CARATTERISTICI ALETTA

Definiamo il rendimento dell'aletta come:

$$\eta_{fin} = \frac{\text{pot. termica aletta}}{\text{pot. termica aletta ideale}} = \frac{\dot{Q}_{fin}}{\dot{Q}_{id}} = \frac{(k\vartheta_0 A_b a) * \tanh(aL)}{hLP\vartheta_0} = \frac{(kA_b a)\tanh(aL)}{hLP} \quad 0 \leq \eta_{fin} \leq 1$$

Al di là dei parametri geometrici vediamo che il rendimento è direttamente proporzionale alla conducibilità dell'aletta.

Definiamo l'efficienza dell'aletta come:

$$\varepsilon_{fin} = \frac{\text{potenza termica aletta}}{\text{potenza termica senza aletta}} = \frac{(k\vartheta_0 A_b a) * \tanh(aL)}{h\vartheta_0 A_b} = \frac{ka}{h} \tanh(aL)$$

In ogni progetto l'efficienza dovrebbe essere più grande possibile e in generale l'aletta viene usata solo se $\varepsilon_{fin} > 2$

Dalle relazioni dell'efficacia e dell'efficienza si possono trarre numerose considerazioni utili al progetto:

1. La conducibilità termica k del materiale dell'aletta deve essere la più elevata possibile (alluminio);
2. Il rapporto tra il perimetro e l'area della sezione trasversale dell'aletta deve essere il più elevato possibile; il criterio è soddisfatto da alette piane sottili e a spillo sottili;
3. Le alette sono efficaci quando abbiamo un basso coefficiente di scambio termico convettivo. Perciò l'uso delle alette è giustificato quando il fluido è un gas piuttosto che un liquido e quando si ha convezione naturale anziché forzata.

Le prestazioni dell'aletta possono essere valutate anche in termini di resistenza termica. La resistenza dell'aletta può essere definita come:

$$R_{fin} = \frac{\Delta T}{\dot{Q}_{fin}} = \frac{\theta_0}{\eta_{fin} \dot{Q}_{id}}$$

5.4.HEAT SINK (DISSIPATORE)

Sono superfici alettate usate per raffreddare componenti elettronici.

La potenza termica scambiata da una superficie che contiene N alette uguali:

$$\dot{Q}_{h.s.} = \dot{Q}_{base} + N\dot{Q}_{fin}$$

$$\dot{Q}_{h.s.} = h\vartheta_0 A_b + N\eta_{fin} \dot{Q}_{id} = h\vartheta_0 A_b + N\eta_{fin} hLP\vartheta_0 = h\vartheta_0 A_b + N\eta_{fin} hA_{fin}\vartheta_0$$

Notiamo che se l'area di base è trascurabile rispetto a NA_{fin} (come succede quasi sempre) allora:

$$\dot{Q}_{h.s.} = N\eta_{fin} hA_{fin}\vartheta_0$$

6.CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE (TRANSITORIO)

Sappiamo che in generale la temperatura di un corpo è funzione di $T=T(t,x,y,z)$. Ci sono però dei casi in cui possiamo considerare un corpo come "insieme concentrato" con temperatura interna uniforme e dipendente solo dal tempo $T=T(t)$.

Definiamo la lunghezza caratteristica con la relazione: $L_C = \frac{V}{A}$

Definiamo il numero di Biot come:

$$Bi = \frac{hL_C}{k} \leq 0.1$$

Esso si può esprimere anche come:

$$Bi = \frac{\text{resistenza conduttiva all'interno del corpo}}{\text{resistenza convettiva sulla sup. del corpo}} = \frac{L_C/k}{1/h}$$

Un valore basso del numero di Biot corrisponde a una piccola resistenza alla conduzione termica e quindi piccoli gradienti di temperatura all'interno del corpo. Poiché nel metodo dei parametri concentrati si ipotizza una distribuzione di temperatura uniforme il numero di Biot dovrebbe essere 0, ma si può continuare ad usare in modo approssimato per $Bi > 0$ purché:

$$Bi \leq 0.1$$

Il metodo dei parametri concentrati si applica bene dunque nei caso di corpi piccoli con conducibilità termica elevata immersi in un fluido immobile, cattivo conduttore di calore come aria o gas.

6.1.APPLICAZIONE DEL METODO

Consideriamo un corpo di massa m , volume V , densità ρ , calore specifico c_p , inizialmente a temperatura uniforme T_i , posto in $t=0$ in un ambiente a temperatura T_∞ . Supponiamo applicabile la schematizzazione del sistema a parametri concentrati, ovvero che $Bi \leq 0.1$ e che non ci sia generazione di potenza. Il bilancio energetico assume la forma:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}_{conv} \rightarrow \rho V c_p \frac{dT}{dt} = -hS(T(t) - T_\infty) \rightarrow \theta(t) = T(t) - T_\infty \rightarrow \rho V c_p \frac{d\theta(t)}{dt} = -hS\theta(t) \quad m = \frac{hS}{\rho V c_p}$$

$$\theta(t) = T(t) - T_\infty \rightarrow \rho V c_p \frac{d\theta(t)}{dt} = -hS\theta(t) \quad m = \frac{hS}{\rho V c_p}$$

$$\frac{d\theta(t)}{\theta(t)} = -m dt \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta(t)}{\theta(t)} = -m(t_{fin} - t_0)$$

$$\ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta_0}\right) = -mt_{fin} \rightarrow \theta(t) = \theta_0 e^{-mt_{fin}}$$

$$T(t) = T_\infty + \theta_0 e^{-mt_{fin}} \quad \text{con } \theta_0 = T_{in} - T_\infty$$

6.2.ESEMPIO SFERETTA

Prendiamo una sferetta di raggio 10mm di acciaio al carbonio che vogliamo temprare con $k=40\text{W/mK}$, inserendola in una vasca di olio con $h=100\text{W/m}^2\text{K}$. La temperatura iniziale della sferetta è 100°C , quella dell'olio è 50°C . Inoltre la densità della sferetta è 7000kg/m^3 mentre $c=200\text{J/kgK}$. Qual'è il tempo che ci serve per portare la sferetta dalla temperatura iniziale a una certa T ?

Notiamo innanzitutto che il numero di Biot è: $Bi = \frac{hL_C}{k} = \frac{100 \cdot 0.01}{40} = \frac{1}{40}$

Quindi possiamo applicare il metodo dei parametri concentrati. Il tempo richiesto sarà:

$$t_{fin} = \frac{1}{-m} \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta_0}\right) = -\frac{\rho V c_p}{hS} \ln\left(\frac{T(t_{fin}) - T_\infty}{T_{in} - T_\infty}\right) \quad \text{dove } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ e } A = 4\pi r^2$$

CONVEZIONE

La convezione (dal latino conveho, “trasporto insieme”) è la modalità di scambio termico che si ha alla superficie di un solido lambito da un fluido per l'effetto combinato della conduzione nel fluido e del trasporto di energia associato allo spostamento di materia, dovuto al moto del fluido stesso. E' da notare che perché si abbia convezione è necessario che il fluido sia in moto: nei fluidi in quiete la trasmissione del calore avviene per conduzione (ed irraggiamento se il fluido è trasparente).

Dal punto di vista pratico la convezione può essere classificata in

- **CONVENZIONE NATURALE:** quando il moto del fluido è dovuto alle differenze di densità indotte dalle differenze di temperatura (ad esempio, un fluido più caldo, essendo più leggero, tende generalmente a salire): è il caso ad esempio dell'acqua in una pentola posta sul fuoco, o dell'aria sull'asfalto caldo;
- **CONVENZIONE FORZATA:** quando il moto relativo tra il fluido e la superficie è indotto dall'esterno tramite appositi organi (in genere, pompe o ventilatori);

A seconda della geometria del sistema distinguiamo inoltre:

- **CONVENZIONE INTERNA:** quando il fluido scorre internamente ad un condotto (in genere una tubazione) in modo tale che la presenza della parete provoca effetti sul moto dell'intero fluido;
- **CONVENZIONE ESTERNA:** quando il fluido lambisce dall'esterno un oggetto (es. l'ala di un aereo, la pala di una turbina), ed, a sufficiente distanza da esso, non risente dell'influenza della parete stessa.

Inoltre la convezione, sia forzata che naturale, può essere: Monofase O Con cambio di fase: quando il fluido cambia fase (evapora o condensa) a contatto della superficie.

Un altro parametro da considerare è il regime del flusso del fluido che lambisce il solido che può essere:

- LAMINARE;
- TURBOLENTO.

1.POTENZA TRASMESSA PER CONVEZIONE

Il flusso termico per convezione è esprimibile mediante l'espressione empirica (anch'essa dovuta originariamente a Fourier, che sviluppò una precedente osservazione di Newton):

$$q''_{conv} = \alpha (T_s - T_{\infty})$$

T_s rappresenta la temperatura della superficie. T_{∞} è invece un'opportuna temperatura di riferimento del fluido: più precisamente

- **CONVEZIONE ESTERNA:** T_{∞} è data dal valore asintotico che la temperatura raggiunge a sufficiente distanza dalla superficie e che non è influenzato dalla presenza della superficie stessa;
- **CONVEZIONE INTERNA:** T_{∞} è la cosiddetta temperatura di miscela (ovvero un'opportuna media della temperatura nella sezione trasversale del condotto, che ne conserva il contenuto medio entalpico).

Il coefficiente α [W/m²K] è detto coefficiente di convezione, e (al contrario di k) non è solo una proprietà del fluido: esso è un coefficiente empirico che incorpora gli effetti dovuti alla natura del fluido, al campo di velocità in prossimità della superficie, alla geometria del sistema. Quanto più α è elevato, tanto maggiore è lo scambio termico convettivo (ovviamente, a parità di differenza di temperatura).

	Liquidi	Gas
Convezione naturale	50 - 2 000	2 - 25
Convezione forzata	100 - 20 000	25 - 250
Convezione con cambio di fase (ebollizione, condensazione)	2 500 - 100 000	

Noi tutti sappiamo per esperienza che in generale lo scambio termico in convezione forzata (e quindi il valore di α) è maggiore che in convezione naturale e che i liquidi asportano calore per convezione meglio dei gas.

2. COEFFICIENTE CONVETTIVO LOCALE E STRATO LIMITE TERMICO

Se le temperature di un fluido e della superficie che lambisce sono diverse si forma intorno ad essa uno STRATO LIMITE TERMICO: all'interno di questo spessore abbiamo un gradiente di temperature. Prendiamo una lastra piana lambita da un flusso laminare di fluido; se consideriamo che in questo strato la velocità del fluido è molto bassa, all'interno dello strato possiamo considerare il calore trasmesso per conduzione per cui abbiamo:

$$q''_{conv} = \alpha (T_s - T_\infty) = q''_{cond} = -k_{fluido} \frac{\delta T}{\delta y} \Big|_{y=0} \rightarrow \alpha = \frac{-k_{fluido} \frac{\delta T}{\delta y} \Big|_{y=0}}{(T_s - T_\infty)}$$

Quello che abbiamo trovato è il COEFFICIENTE CONVETTIVO LOCALE. Spesso però esso varia nella direzione del flusso e si fa riferimento al coefficiente di convezione medio sull'intera superficie di scambio.

3. CONVEZIONE FORZATA – DETERMINAZIONE DI A

Come già detto, la determinazione di α è nella maggior parte dei casi affidata all'esecuzione di esperimenti. Tali esperimenti hanno come risultato delle espressioni matematiche, dette CORRELAZIONI DI SCAMBIO TERMICO, che danno (generalmente in forma di gruppi adimensionali) il valore del coefficiente di convezione per determinate classi di fluidi, condizioni di moto e configurazioni geometriche. A solo titolo di esempio, si riporta una correlazione abbastanza famosa che fornisce il valore di α per convezione forzata nel caso di moto a velocità relativamente elevata (moto turbolento $Re \gg 2000$) di fluidi (tutti ad eccezione dei metalli liquidi) all'interno di condotti:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}$$
$$Nu = \frac{\alpha D}{k} \quad Re = \frac{\rho w D}{\mu} \quad Pr = \frac{c_p \mu}{k}$$

1. D =diametro idraulico del condotto;
2. K =conducibilità termica del fluido;
3. w =velocità del fluido;
4. c_p = calore specifico del fluido;
5. ρ =densità del fluido;
6. μ =viscosità dinamica (una proprietà che esprime la resistenza del fluido allo scorrimento, misurata in Pa s).

Si può notare che i tre gruppi (Nu , Re , Pr) che appaiono nell'Eq.9.12 sono adimensionali: essi sono detti rispettivamente numeri di Nusselt, Reynolds e Prandtl

ESEMPIO 9.7 - Calcolo del coefficiente di scambio convettivo in convezione forzata.

In una tubazione di uno scambiatore di calore, di diametro interno 12 mm, scorre una portata $G = 0.2$ kg/s di acqua alla temperatura di 20°C. Determinare il coefficiente di scambio convettivo utilizzando la correlazione 9.12.

La soluzione è riportata nel file C9DITTUS.XLS

Le proprietà termofisiche dell'acqua a 20 °C sono ricavabili da un manuale $k = 0.6$ W/m K; $c_p = 4180$ J/kg K; $\rho = 997$ kg/m³; $\mu = 0.000978$ Pa s. mentre la velocità va ricavata dalla portata

$$w = \frac{G}{\rho A} = \frac{G}{\rho \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0.2 \cdot 4}{997 \cdot \pi \cdot (0.012)^2} = 1.77 \text{ m/s}$$

A questo punto non resta che valutare i gruppi adimensionali Re e Pr ,

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu} = \frac{997 \cdot 1.77 \cdot 0.012}{0.000978} = 21698$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{4180 \cdot 0.000978}{0.6} = 6.81$$

da cui si ottiene il valore di Nu

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} = 146$$

ed infine

$$\alpha = Nu \frac{k}{D} = \frac{146 \cdot 0.6}{0.012} = 7298 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

Cambiando i dati, si può notare come il coefficiente di scambio aumenti con la portata del fluido e diminuisca con il diametro: tuttavia, come vedremo nei prossimi capitoli, agendo in questo modo si ottiene anche un notevole aumento delle perdite per attrito (perdite di carico) nella tubazione.

□

4.CONVEZIONE NATURALE – DETERMINAZIONE DI A

In regime di convezione naturale, la velocità del fluido dipende dai moti indotti dalle differenze di densità e pertanto non è ben definita. Non ha quindi senso definire il numero di Reynolds, che viene sostituito dal numero di Grashof:

$$Gr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)\rho^2 L^3}{\mu^2}$$

- β coefficiente di dilatazione termica del fluido,
- g accelerazione di gravità;
- T_s temperatura della parete;
- T_∞ temperatura del fluido imperturbato (a sufficiente distanza dalla parete);
- L dimensione lineare caratteristica della superficie (in genere, area/diametro).

E' da notare che $Gr = 0$, quindi non si ha convezione naturale, nel caso di fluido che non si dilati termicamente ($\beta=0$) o in caso di assenza di gravità ($g=0$). In entrambi i casi infatti viene a mancare la forza di galleggiamento che è responsabile del moto del fluido.

Per la natura stessa della convezione naturale, il coefficiente di scambio dipende quindi anche dalla temperatura della parete, il che rende il fenomeno non più linearmente dipendente da ΔT e obbliga in molti casi ad una soluzione iterativa del problema. Una tipica correlazione di scambio termico in convezione naturale, valida per piastre orizzontali, ha la forma:

$$Nu = 0.54(PrGr)^{1/4} \text{ valida per } 10^4 < PrGr < 10^7$$

ESEMPIO 9.8 – Convezione naturale.

Il processore di un personal computer ha la superficie superiore quadrata di lato $a = 80$ mm; detta superficie deve mantenersi ad una temperatura massima di 60°C . Trascurando il contributo dell'irraggiamento, determinare la potenza termica massima che può essere smaltita attraverso tale superficie se il fluido circostante (aria) si trova alla temperatura di 30°C .

Le proprietà termofisiche dell'aria a 30°C sono ricavabili da un manuale:

$k = 0.026$ W/m K; $\rho = 1.165$ kg/m³; $\mu = 1.86 \times 10^{-5}$ Pa s, $\beta = 0.0033$ K⁻¹.

Inoltre, per tutti i gas si può ritenere con buona approssimazione $Pr = 0.7$

Il numero di Grashof, avendo assunto $L = A/P = a/4 = 0.02$ m, vale quindi

$$Gr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)\rho^2 L^3}{\mu^2} = \frac{9.81 \cdot 0.0033 \cdot (60 - 30) \cdot 1.165^2 \cdot 0.02^3}{(1.86 \cdot 10^{-5})^2} = 30480$$

essendo $10^4 < PrGr < 10^7$, si può utilizzare la Eq.9.14, da cui si ottiene il valore di Nu

$$Nu = 0.54(PrGr)^{1/4} = 0.54(21336)^{1/4} = 6.5$$

ed infine

$$\alpha = Nu \frac{k}{D} = \frac{6.5 \cdot 0.026}{0.02} = 8.5 \text{ W/m}^2\text{K}$$

La potenza termica scambiata è data da

$$W_T = \alpha S(T_p - T_\infty) = 8.5 \cdot (0.08)^2 (60 - 30) = 1.63 \text{ W}$$

In caso che il chip debba dissipare una potenza maggiore è necessario aumentare la superficie di scambio dotandolo di alette (v. app.9-2) oppure passare alla convezione forzata aggiungendo una ventola. Da notare anche che è stato trascurato il contributo dell'irraggiamento, che in queste condizioni (in dipendenza dalla geometria del sistema) potrebbe superare il 30%.

□