

28/08/2020

## Fluidodinamica (Nuria Vittoria Solerdi)

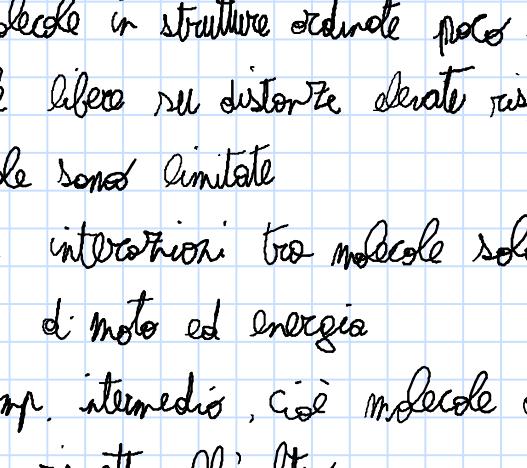


Liberi solo consigliati : Buratti

Si studia moto dei fluidi e forze fra un corpo e un fluido

**Fluido** : [liquidi e gas, cioè sostanze senza forma definita → deformabilità]

sost. che si deforma sotto l'azione di forza tangenziale anch'infinitesima.



Se il fluido è fermo il  $dV$  può resistere alle forze normali alla superficie (forze di pressione) (in stato di quiete)

le proprietà macroscopiche di solidi, liquidi e gas dipendono dalla struttura molecolare.

SOLIDI : molecole in struttura ordinata poco mobili rotolavate (fatti legati interdipendenti)

GAS : molecole libere ma distorte rispetto alle corrispondenti nel solidi e le interazioni fra molecole sono limitate

GAS PERFETTO : interazioni tra molecole solo tramite collisioni → scambio di quanto di moto ed energia

LIQUIDI : comp. intermedio, cioè molecole organizzate in gruppi che si muovono uno rispetto all'altro

**Ipotesi di moto continuo**:

Il comportamento del fluido può essere descritto da un p.t.o di moto macro ignorando il moto delle singole molecole  $\longleftrightarrow$  **PARTICELLA FLUIDA**

Con un  $dV$  piccolo, il n° di molecole contenuto è piccolo → se allarga cambia signific. Il n° delle molecole è cambio signif. la misura

Quando  $dV$  diventa abbastanza grande, un aumento di  $dV$  non cambia signif. il n° di molecole aggiunte → la misura resta stabile

$dV$  è ancora abbastanza piccolo da essere considerato puntiforme

Se aumenta ancora  $dV$  il vol. non è più puntiforme → la misura può variare perché sta misurando zone dello spazio con proprietà diverse.

**Particella fluido**: vol. di fluido sufficientemente piccolo da poter essere considerato puntiforme e suff. grande da contenere un n° di molecole oltre diversi per evitare una diff. significativa all'aumentare di  $dV$  (indipendente da piccole  $dV$ ).

[Corretto definibile se il fluido è abbastanza denso]

Ipotesi di moto continuo e def. di particelle fluido sono verificate nella maggior parte dc cor. d'interesse aeronomico.

Ese: aria in cond. standard a vol. del moto, un calo di volo  $1\mu\text{m}$  ( $10^{-6}\text{ m}$ ) d'aria contiene  $\sim 2,7 \cdot 10^7$  molecole

A questo volto elevato nell'atmosfera  $h = 80-90\text{ km}$ , l'aria è troppo rarefatta da non permettere l'ipotesi di moto continuo → GAS RAREFATTI

Tutte le grandezze fluidodinam. sono riferite a una particella fluida e sono ottenute come media sulle molecole che fanno parte della particella fluida

Ese:  $\vec{v}(P) \rightarrow$  vel. part. fluido che all'int. considerato occupa la pos. P

**Grandezze fluidodinamiche**

$$\rho(P) = \frac{dm}{dV} \quad dV \text{ part. fluido che occupa il punto } P$$

$$[\rho] = \frac{M}{L^3} \quad \text{u.d.m. : } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

denso

grande

$$\rho = \frac{1}{\rho_0} \rightarrow [\rho] = \frac{1}{\rho_0} \quad \text{u.d.m. : } \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

vol. specifico

densità ↔ compressibilità: variazioni di densità dovute a variazioni di pressione (legge del moto del fluido), misurato dal **coff. di compressibilità**

$$K = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right) \quad \Delta P > 0 \rightarrow \Delta \rho < 0$$

$$K = \frac{C_0}{\rho_0} \quad \Delta P < 0 \rightarrow \Delta \rho > 0$$

$K$  alto → grande var. relativa di  $\rho$  per

una data var. di pressione → fluido molto compressibile (gas)

$K$  basso → piccola var. di  $\rho$  per una data  $\Delta P$  → fluido poco compressibile (liquidi)

Ese: acqua a  $T$  e  $P$  cost. →  $K \sim 5 \cdot 10^7$

aria in cond. standard →  $K$  3-4 ordini di grand. superiore

velocità : grand. rettangolare

→ sist. di rifer. =  $(0; x, y, z)$

$$\vec{v}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$$

Notazione alternativa

$$\vec{v} = (0; u_1, u_2, u_3) \quad \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t))$$

Fluido in quiete :  $\vec{v}(x, y, z, t) = 0$

**Forze agenti su un volumetto di fluido**



• forze di volume (o di massa) :

prop. al volume o alla massa, dovute a corpi di accelerazione a cui è sottoposto il fluido

- es.: forze peso (campo di gravità)

$$d\vec{F}_p = \underbrace{\rho g V}_{\text{d.m.}} \vec{g} \rightarrow \vec{F}_p = \underbrace{\int_V \rho g \vec{g} dV}_{\text{prop. al volume e alla massa}}$$

$\vec{g}$ : forza di volume per unità di massa

$$\text{FORZA PESO : } \vec{g} = \vec{g} \quad [\vec{g}] = \frac{1}{T_2} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$\vec{g}$  NO TO e non dipende dal moto

• forze di contatto : forze agenti sulla superficie del volumetto dovute al contatto con il resto del fluido o con una superficie solida (corpo immerso in un fluido)

→ dipendono dal MOTO

fluido in quiete

fluido in movimento

SOLO forze normali alla sup., cioè forze di pressione

forze di pressione + forze tangenziali

→ FORZE NON NUTE

**FORZE di contatto**

forze normali forze tangenziali

o di pressione (solo con fluido in moto)

**Forze di pressione**



in verso normale esterno

alla superficie

$d\vec{F}_{p\text{ext}} \rightarrow$  forza di pressione esercita

su  $dS$

$$d\vec{F}_{p\text{ext}} = \rho \vec{n} dS$$

$\rho$  grandezza scalare → **pressione**

$$P(x, y, z, t) : \text{variabile scalare} \quad [\rho] = \frac{[F]}{[L]^2} = \frac{M}{T^2 L^2}$$

$$\rho_{\text{atm}} = \frac{N}{m^2} = \frac{\text{kg}}{m^2 s^2} \frac{1}{m^2} = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

pressione → var. termodinamico → legge con altre variabili è data dalle leggi di stato termodinamico

**legge di stato perfetto**

$$\rho = \rho RT \quad R = \text{c.t. del gas} = \frac{P_0}{\rho_0} \quad \text{c.t. universale}$$

$$\rho \propto \text{massa molecolare}$$

$$R = \frac{P_0}{\rho_0 T} = \frac{101325}{1 \cdot 10^5 \cdot 287,1} \frac{m^2}{K^2} = \frac{m^2}{s^2 K^2} = m^2 s^{-2} K^{-1}$$

Temperatura :  $T(x, y, z, t)$  var. termodinamico

$T \leftrightarrow$  agitazione molecolare (energia cinetica delle molecole)

$$[T] = ^\circ K$$

$$0^\circ C = 273,15^\circ K$$

pressione → var. termodinamico → legge con altre variabili è data dalle leggi di stato termodinamico

**legge di stato perfetto**

$$\rho = \rho RT \quad R = \text{c.t. del gas} = \frac{P_0}{\rho_0} \quad \text{c.t. universale}$$

$$\rho \propto \text{massa molecolare}$$

$$R = \frac{P_0}{\rho_0 T} = \frac{101325}{1 \cdot 10^5 \cdot 287,1} \frac{m^2}{K^2} = \frac{m^2}{s^2 K^2} = m^2 s^{-2} K^{-1}$$

Temperatura :  $T(x, y, z, t)$  var. termodinamico

$T \leftrightarrow$  agitazione molecolare (energia cinetica delle molecole)

$$[T] = ^\circ K$$

$$0^\circ C = 273,15^\circ K$$

## Forze di pressione

- Fluido in quiete  $\rightarrow$  soggetto solo a forze di pressione

legge di Laplace / Stenso

Consideriamo volumetto infinitesimo di fluido

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 0 \\ \text{dir. } x : \quad P(x), \quad P(x+dx) \\ P(x+dx) - P(x) &= \rho g dx \\ \text{Analogo per dir. } y \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  La pressione non varia in dir.  $x$  e  $y$ . In un fluido in quiete la pressione è tale se ne piani  $\perp$  all'occ. d'gravità.

dir.  $z$

$$\begin{aligned} -P(z+dz)dx dy + P(z)dx dy - \rho g dx dy dz &= 0 \\ P(z+dz) - P(z) &= -\rho g dz \quad \text{legg Stenso o Laplace} \end{aligned}$$

$$\text{- es: } P(z_2) - P(z_1) = - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz \quad \text{fluido compressibile}$$

$$P(z_2) - P(z_1) = \rho g (z_1 - z_2) \quad \text{fluido incompressibile}$$

## Forze tangenziali

Se il fluido è in moto nascono forze tangenziali, perché?

- Caso semplice: gas perfetto in moto bidimensionale in una direzione (unidimensionale)

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u(y), 0, 0) \\ \text{due partec. fluide} \quad u(y+dy) &> u(y) \\ \text{la vel. delle part. fluide} &\text{è la media dell'ad. delle sue mole.} \\ \text{gas perfetto: (le molecole si muovono casualmente (moto Browniano))} \end{aligned}$$

Dopo un att. alcune molecole possono delle partec. A e delle B e viceversa

le prime hanno in media vel. minori di quelle in B  $\rightarrow$  riducono la velocità della

partec. B  $\rightarrow$  effetto d. DECELERAZIONE

Viceversa per le seconde  $\rightarrow$  effetto d. ACCELERAZIONE

Gradiente di forza:  $\tau$  forza tangenziale (forza per unità di superficie)

$$\begin{aligned} \text{①} &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \text{②} &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{forze tangenziali} + \tau \text{ e} - \tau \text{ dovute allo scontro} \\ \text{d'quantità di moto e causa del moto molecolare} \\ \cdot \text{ forze tang. sono incognite del moto} \quad \text{then Newton said}$$

LE FORZE TANGENZIALI SONO LEGATE alla VARIAZIONE di VELOCITA  $\rightarrow \frac{du}{dy}$

$$\cdot \tau = \mu \left( \frac{du}{dy}, T \right) \quad \text{La temperatura è una misura d'agitazione molecolare,} \\ \text{quand un calore pote a un maggior scontro d'q.tà di moto}$$

di fluido newtoniano valido per gas perfetto (aria)

$$\tau = \mu(T) \frac{du}{dy} \quad \text{legg: coefficiente di viscosità molecolare}$$

$$[\mu] \sim \frac{[\tau]}{\left[ \frac{du}{dy} \right]} = \frac{[F]}{[L]^2} \frac{[L]}{[v]} = \frac{[M][L]}{[T]^2 [L]} \frac{[T]}{[L]} = \frac{[M]}{[T][L]} \rightarrow \text{udm} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

$$\mu = \mu(T) \quad \text{è una funz. crescente} \quad \mu \propto \sqrt{T}$$

Tutto lo punto precedente è valido per un gas, in cui le molecole si muovano liberamente

- Per un liquido è più complesso, SHIKASHI il modello d. fluido newt. è valido anche per la maggior parte dei liquidi (acqua)

\* {N.D.R. "SHIKASHI" significa "TUTTAVIA"}

$$\tau = \mu(T) \frac{du}{dy} \quad \mu(T) \rightarrow \text{funz. fortemente decrescente con } T$$

- esempi fluidi non newt.: SANGUE, polimeri allo stato liquido

NON siamo considerati  $\Rightarrow$  SOLO FLUIDI NEWTONIANI

N-Newton-CHAN  
B-BE SOFT PLEASE

In generale c'è variazioni delle 3 componenti in tutte e 3 le direzioni

$\rightarrow$  generalizzazione al caso 3D, ma tanto il fenomeno fisico è lo stesso.

$$\text{Coef. di viscosità cinetica} \quad \gamma = \frac{\mu}{\rho} \quad [\gamma] = \frac{[L]}{[T]} \quad \text{udm} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

## Trasporto di calore

- Macchinismo fisico responsabile del trasporto di calore in un gas è dello stesso tipo d'quello che serve alla marcia d'azioni tangenziali, avendo scontro d.

Azione tan.: scontro d'quantità di moto dovuto al moto molecolare

Trasp. d. cal.: scontro termico tra partec. diverse dovuto al moto molecolare

- es: gas perfetto che si muove in un campo d. T che varia in una direzione

$$\begin{array}{l} y \\ \uparrow \\ \text{③} \quad \text{②} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{array} \quad T(y) \quad \begin{array}{l} \text{le molecole da ① a ③ scontrano in media uno} \\ \frac{dT}{dy} > 0 \quad T \text{ minore tende a RAFFREDDARE} \quad \text{②} \\ \text{Vicino da ③ ad ① tende a RISCALDARE} \quad \text{④} \end{array}$$

$$q_y = \lambda \left( \frac{dT}{dy}, T \right)$$

(per un d'app.)

Legge di Fourier

$$q_y = -K(T) \frac{dT}{dy}$$

K(T): **legg. di conduttività termica**

udm  $\frac{J}{m \cdot K}$

Gas perfetto:  $K \propto \sqrt{T}$

Liquido: vale Fourier per la maggior parte, BUT  $K$  è funz. cresc d. T

Estensione al caso 3D: trasmissione del calore per conduzione

SEMPRE presente nel moto d'un fluido (altri fonti di trasmissione)

5/10/2020

## Estensione delle leggi di Fourier al caso generale 3D

$$T(x, y, z, t) \rightarrow \vec{q} = (q_x, q_y, q_z) \quad \text{componente analogo al 2D}$$

vettore flusso di calore

$$\begin{cases} q_x = -K(T) \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y = -K(T) \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z = -K(T) \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{q} = -K(T) \nabla T$$

Il gradiente (in fluido) è un operatore spaziale  
(no der. rispetto al tempo)

Numeri adimensionali importanti !!! (n° Mach, n° Reynolds)

Numero di Mach

$$M = \frac{|\vec{U}(x, y, z, t)|}{a(x, y, z, t)} \quad \begin{matrix} \text{vel. fluido} \\ \text{a. (x, y, z, t)} \end{matrix}$$

- Def: velocità di propagazione di un disturbo infinitesimo di pressione

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{cost.}} \quad (\text{estremo})$$

per un gas perfetto vale la legge dell'isentropica

$$\rho \rho^{-\gamma} = c \cdot t \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad \begin{matrix} \text{vel. sp.} & \text{a. t.} \\ \text{c. v.} & \text{c. p.} \end{matrix}$$

gas perfetto isotropico (aria)

$$c_v = \frac{5}{2} R \quad c_p = \frac{7}{2} R \quad \gamma = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$d(\rho \rho^{-\gamma}) = 0 \Rightarrow \rho^{-\gamma} d\rho + \rho d(\rho^{-\gamma}) = 0$$

$$\rho^{-\gamma} d\rho - \gamma \rho^{-\gamma-1} d\rho = 0 \quad \left( \frac{d\rho}{\rho} \right)_{s=\text{cost.}} = \gamma \frac{1}{\rho} = a^2$$

$$\text{legge stato} \rightarrow \frac{P}{\rho} = RT \quad a = \sqrt{\gamma RT}$$

v. siamo per un  
gas perfetto  
a dipende solo da RT

In base al numero di Mach vengono classificati i vari regimi di flusso:  
subsonico, transonico, supersonico, ipersonico.

- Il numero di Mach è legato alla comprensibilità e mi dice se a potranno essere delle condizioni di moto in cui anche un gas può essere considerato incompressibile

- Analisi ordine di grandezza

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{cost.}} \rightarrow \Delta p \sim \frac{\Delta p}{a^2} \quad \begin{matrix} \text{ordine d'ordine} \\ \text{variazioni d'densità} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{ordine d'ordine} \\ \text{variazioni d'pressione} \end{matrix}$$

ter Bernoulli:  $\rho + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost.}$

$$\Rightarrow \Delta p \sim \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$\Delta p \sim \frac{1}{2} \rho \left( \frac{v^2}{a^2} \right) \sim \frac{1}{2} \rho M^2 \rightarrow \frac{\Delta p}{\rho} \sim \frac{1}{2} M^2$$

ordine d'ordine delle variazioni di densità relative, date da moto

PER CUI

- $M \ll 1 \rightarrow$  variazioni relative molto piccole

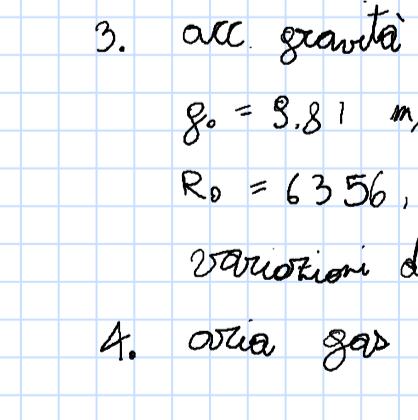
se  $M = 0,1 \rightarrow \frac{\Delta p}{\rho} < 1\%$

$\Rightarrow$  posso trascurare  $\Delta p$  e allora ho l'equazione di flusso incompressibile ( $P = c \cdot t$ ) escluso per un gas

limite ingeneristico  $M \leq 0,3$   $M(x, y, z, t) = \frac{|\vec{U}(x, y, z, t)|}{a(x, y, z, t)}$   
q.t. de variaz. nello spazio e nel tempo

Numero di Reynolds

Consideriamo un volumetto elementare di fluido di lat.  $dx, dy, dz$



- es.: volumetto si muove in dir. x con  
velocità variabile solo in dir. y

$$\vec{v} = (u(y), 0, 0)$$

Agiscono forze tangenziali e visciose e coglie  
la risultante

$\vec{F}$  agiscono sulle facce giacenti sul piano ( $x, z$ ) e sono dirette lungo  $x$

$$\tau: R_T = -\tau(y) dx dz + \tau(y+dy) dx dz \quad \text{scilpato in serie}$$

d. Taylor

$$\tau(y+dy) = \tau(y) + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} dy^2 + \dots \quad \text{trunc al 1° ordine}$$

$$\Rightarrow R_T = \frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy dz$$

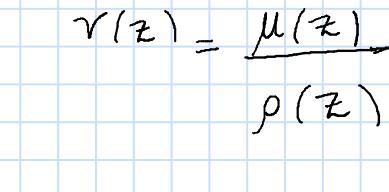
Risultante delle forze visciose per unità di volume

$$\rightarrow R_T' = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \begin{matrix} \text{legge d'} \\ \text{fluido newtoniano} \end{matrix}$$

$$R_T' = \frac{1}{2} \left( \mu \frac{du}{dy} \right)^2 = \mu \frac{du}{dy} \frac{du}{dx} = \mu \frac{du}{dx} u$$

$$\text{ord. d'ordine} \quad R_T' \sim \mu \frac{u^2}{L} \quad \begin{matrix} \text{vel. caratteristica del mio problema} \\ \text{lung. corr. del problema} \end{matrix}$$

- es: flusso in condotto circolare



$$r = r_i$$

$$L = R \quad \sigma \quad L = l$$

$\rightarrow$  forze d'inerzia agenti sul volumetto (lungo  $x$ )

$$R_T = \rho dx dy dz \frac{du}{dt}$$

Forze d'inerzia per unità di volume

$$R_T' = \rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = \rho \frac{du}{dx} u$$

$$\text{ord. d'ordine} \quad R_T' \sim \rho \frac{u^2}{L} \quad \begin{matrix} \text{vel. e lung. corr.} \\ \text{rel. alla lunghezza} \end{matrix}$$

Numero di Reynolds: rapporto fra l'ordine di grandezza delle forze d'inerzia e delle forze visciose agenti sul volumetto elementare

$$Re = \rho \frac{u^2}{\mu} \frac{L}{\mu} = \rho \frac{u L}{\mu} \quad \begin{matrix} \text{adimensionale perché è un rapporto} \\ \text{di forze} \end{matrix}$$

vel. e lung. corr.

SIGNIFICATO fisico

$Re \approx 1$ : ord. grand. forze visciose  $\gg$  di quelle d'inerzia

$Re \gg 1$ : " // " " // " " // "

$\hookrightarrow$  ambito aeronomico ( $Re \sim 10^6$ )

$$Re = \rho \frac{u L}{\mu} = \frac{\rho L}{\mu} = \frac{v L}{\gamma}$$

$\rightarrow$   $\gamma$  viscosità cinetica

Aerosfera o aria standard

Tutti gli elementi nell'aeriosfera  $\rightarrow$  definire le sue proprietà in quanto le proprietà fluidodinamiche variano con la quota, la posizione geografica, le stagioni, l'inquinamento, l'umidità ecc.  $\rightarrow$  necessità di standardizzare

Aeriosfera standard ipotesi:

- aria secca di comp. costante (78% azoto, 21% ossigeno, 1% altro)

- fluido in quiete  $\rightarrow$  variazione di pressione data da Stoenz  $dP = -\rho(z) g(z) dz$  ( $z=0$  dal mare)

- acc. gravità varia con la quota  $g(z) = g_0 \left( \frac{R_0}{R_0 + z} \right)^2$

$$g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$R_0 = 6356,766 \text{ km raggio terrestre}$$

variazioni di  $g$  quindi sono molto piccole  $\rightarrow g \approx g_0$

- aria gas perfetto  $\rho(z) = \rho(z) R T$

$$R = 287,1 \text{ m}^2 \text{ K}^2 \text{ Pa}^{-1}$$

5. variazione di temperatura con la quota:

$$dT = \alpha dz$$

$$\alpha = -0,0065 \frac{K}{m}$$

$$T = \text{cost.} = T(11000) \quad \begin{matrix} 0 \leq z \leq 11000 \text{ m} \\ \text{(terreno)} \end{matrix}$$

$$\boxed{q_v, \rho, T, g, z} \quad \begin{matrix} 5 \text{ var.} \\ \text{posso risolvere le variabili in funz. della quota} \end{matrix}$$

$\hookrightarrow$  si integra partendo dalle cond. a quota  $z=0$  scelte per completezza

$$p(0) = 1,025 \text{ kg/m}^3 \quad \rho(0) = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$T(0) = 15^\circ \text{C} = 288,15 \text{ K} \quad g(0) = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$R = 287,1 \frac{\text{m}^2}{\text{K}^2 \text{Pa}}$$

$$\bullet \text{rel. sime} \quad \alpha(z) = \sqrt{\gamma R T(z)}$$

$\bullet \mu \text{ coeff. di viscosità molecolare } \mu \propto \sqrt{T}$

$$\text{Legge di Sutherland} \quad \frac{\mu(z)}{\mu(0)} = \left( \frac{T(0) + 117}{T(z) + 117} \right) \left( \frac{T(z)}{T(0)} \right)^{3/2}$$

$$\mu(0) = 1,78 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$$

$$\bullet \gamma \text{ coeff. di viscosità dinamica } \gamma = \frac{1}{\rho} \mu(z)$$

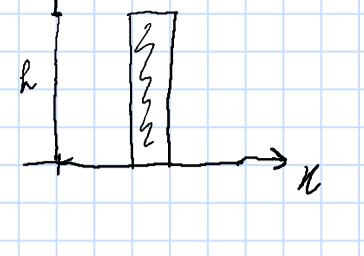
$$\gamma(0) = \frac{\mu(0)}{\rho(0)} = 1,453 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\bullet \nu(z) = \frac{\mu(z)}{\rho(z)} \quad \text{è l'unica variabile che aumenta con la quota}$$

perché  $\rho(z)$  è più rapido che  $\mu(z)$

**Esercizio statica dei fluidi**

## 1. colonna d'acqua



$h = 4 \text{ m}$  base circolare  $r = 0.5 \text{ m}$   
 $p(0) = 1 \text{ atm}$

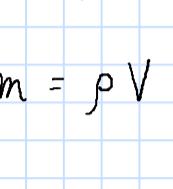
$F$  sulla base?

$$F = p(0) \pi r^2 \quad p(0) = p(z) + \rho g h = 1,4 \text{ atm}$$

$$F = \pi r^2 (p(z) + \rho g h)$$

$$\text{BENZINA, ARIA} \quad \rho = 680 \text{ kg/m}^3 \quad 1,225 \text{ kg/m}^3$$

## 2. serbatoio sferico



$R = 3 \text{ m}$   $\rho = 20 \text{ atm}$   $T = 18^\circ\text{C}$   
 $m_{aria} = ?$

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\rho = \frac{\rho}{R T} = 24,2 \text{ kg/m}^3$$

**Atmosfera Standard**

- velivolo che vola a quota cost. misura  $T = 4^\circ\text{C}$

1. quota d' volo?

2.  $\nu$  e  $\rho$  a quella quota?

$$\int dT = \int \alpha dz \quad \alpha = -0,0065 \text{ K/m}$$

$$T(z) - T(0) = \alpha z \quad \bar{z} = \frac{T(z) - T(0)}{\alpha} = 1682 \text{ m}$$

$$\nu(\bar{z}), \rho(\bar{z})$$

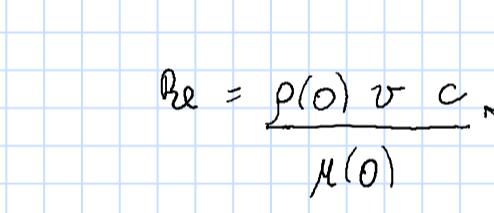
$$\beta = \frac{\rho(2000) - \rho(1500)}{2000 - 1500} = -1,032 \cdot 10^{-4} \quad \rho(z) = \beta z + \rho(0)$$

$$\rho(1682) = 1,038 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu(\bar{z}) = \rho(\bar{z}) R T(\bar{z}) = 82,583 \text{ m/s}$$

**Esercizi n° adimensionali**

## Aerodinamica 1a



$$\nu = 40 \text{ kg/h} \quad h \approx 0 \text{ m}$$

n° d' Mach e Reynolds?

$$M = \frac{\nu}{a(0)} = 0,033$$

$$a(0) = 340,3 \text{ m/s}$$

$\Rightarrow$  ip. d' flusso incompressibile giustificata

$$Re = \frac{\rho(0) \nu c}{\mu(0)} = 1,147 \cdot 10^5$$

corda dell'ala  
per convenzione

$Re \gg 1 \rightarrow$  ordine di grand. forze visive è  
molto più piccolo delle forze d'urto

## • Payer PA 28

$$h = 1000 \text{ m} \quad \nu = 230 \text{ Km/h} \quad \text{ala d' forma generica}$$



$$S = 15,78 \text{ m}^2 \quad b = 10,8 \text{ m}$$

↑  
apertura alare

$$M = \frac{\nu}{a(1000)} = 0,18 \quad \rightarrow$$
 ip. incompressibilità

$$Re = \frac{\nu L}{\gamma(1000)}$$

$$\gamma = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\text{Per un'ala d' forma generica} \quad S = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c(y) dy$$

$\rightarrow$  corda media geometrica: velocità media della corda

$$\bar{c} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c(y) dy \quad \Rightarrow S = b \bar{c} \quad \text{qualsiasi forma in piano}$$

$$Re = \frac{\nu \bar{c}}{\gamma(1000)} = \frac{\nu S}{\gamma(1000) b} = 5,8 \cdot 10^4 \quad Re \gg 1$$

## • Boeing 747

$$M = 0,78 \quad h = 35000 \text{ ft} \quad S = 523,2 \text{ m}^2 \quad b = 59,64 \text{ m}$$

Re?

flusso compressibile!

$$Re = \frac{\nu \bar{c}}{\gamma(h)}$$

$$\bar{c} = \frac{S}{b} = 8,88 \text{ m}$$

$$1 \text{ ft} = 0,305 \text{ m}$$

$$h = 10,675 \text{ m} \sim 10,500 \text{ m}$$

$$\nu = M a(h) = 234,84 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\nu \bar{c}}{\gamma(10500)} = 5,6 \cdot 10^7 \quad Re \gg 1$$

## • automobile

$$\nu = 300 \text{ Km/h}$$

$$L = 4 \text{ m}$$

Lunghezza d' rif.: lunghezza

M, Re?

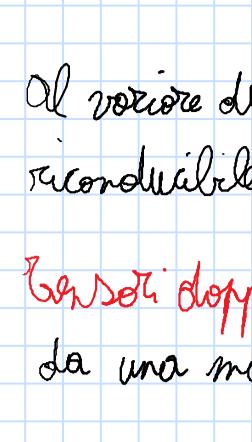
$$M = \frac{\nu}{a(0)} = 0,245 \quad \text{sempre flusso incompressibile}$$

$$Re = \frac{\rho(0) \nu L}{\mu(0)} = 2,28 \cdot 10^7 \quad Re \gg 1 \text{ anche per i veicoli terrestri}$$

12/10/2020

### Definizione di un vettore

Grandezza fisica rappresentata geometricamente da un segmento rettilineo con direzione, verso e modulo.

 Quindi un Sd F =  $\vec{b} = (0, x_1, y_1, z)$  il vettore è individuato da uno stato di "mossa scalare" che sono le componenti lungo gli assi.

Il vettore del Sd F le componenti cambiano secondo una Regge lineare (conducibile a una matrice (di rotazione, di traslazione))

**verso doppio**: grandezza fisica definita in un sistema di riferimento dato da una matrice  $3 \times 3$  (8 componenti)

$$\text{vettore } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \text{tensori } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

le sue componenti variano al variare del Sd F e sono legate da leggi lineari che sono l'estensione delle leggi di variazione delle coord. di un vettore.

$$tr(\mathbf{T}) = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \sum_{i=1}^3 T_{ii}$$

### Operazioni tra vettori

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \vec{c} = (0, x_1, y_1, z_1)$$

• **pr. scalare** → SCALARE

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_i a_i b_i$$

[NOTAZIONE d'INSTEIN: gli indici ripetuti sostituiscono la sommatoria]  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$

• **pr. vettoriale** → VETTORE

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - b_2 a_3) \hat{i}_1 - (a_1 b_3 - b_1 a_3) \hat{i}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{i}_3$$

### Operazioni tra tensori e vettori

• **pr. vettoriale** → VETTORE

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \mathbf{T} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} T_{11} & \dots \\ T_{21} & \dots \\ T_{31} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 T_{11} + a_2 T_{21} + a_3 T_{31} \\ a_1 T_{12} + a_2 T_{22} + a_3 T_{32} \\ a_1 T_{13} + a_2 T_{23} + a_3 T_{33} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \cdot \mathbf{T})_i = \sum_{s=1}^3 a_s T_{is}$$

$$\mathbf{T} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots \\ T_{21} & \dots \\ T_{31} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} a_1 + T_{12} a_2 + T_{13} a_3 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{T} \cdot \vec{a})_i = \sum_{s=1}^3 a_s T_{is}$$

Il prodotto interno non è commutativo, lo è solo per tensori simmetrici

• **pr. diadike**: due vettori → un TENSORE

$$\vec{a} \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (\vec{a} \vec{b})_{ij} = a_i b_j \quad \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

• **pr. scalare tra tensori** → SCALARE

$$\mathbf{T} = (T_{is}) \quad \mathbf{D} = (D_{is})$$

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} \leftarrow T_{11} D_{11} + T_{12} D_{12} + T_{13} D_{13} + \dots = \sum_{i=1}^3 \sum_{s=1}^3 T_{is} D_{is}$$

### Operatori differenziali

**Gradiente**: operatore che aumenta di uno l'ordine tensoriale

( $\nabla$  (scalare) → vettore     $\nabla$  (vettore) → tensori )

funzione scalare:  $f(x_1, x_2, x_3, t)$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\vec{a} = (a_1(x_1, x_2, x_3, t), a_2(x_1, x_2, x_3, t), a_3(x_1, x_2, x_3, t))$$

$$\nabla \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} & \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_2} & \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} & \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_2} & \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} & \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_2} & \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\nabla \vec{a})_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

**Rotore**: vettore → vettore

$$\text{rot}(\vec{a}) = \nabla \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \hat{i}_1 - \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \hat{i}_2 + \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \hat{i}_3$$

**Divergenza**: operatore che abbassa di uno l'ordine tensoriale

( $\text{div}(\text{vettore})$  → scalare     $\text{div}(\text{tensori})$  → vettore )

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

$$\text{div}(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{div}(\mathbf{T})_i = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial T_{is}}{\partial x_s}$$

### Proprietà

$\text{div}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  → VETTORE

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\text{div}(\vec{a} \cdot \vec{b})_i = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial (a_s b_s)}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^3 (a_s \frac{\partial b_s}{\partial x_s} + b_s \frac{\partial a_s}{\partial x_s}) = \sum_{s=1}^3 a_s \frac{\partial b_s}{\partial x_s} + \sum_{s=1}^3 b_s \frac{\partial a_s}{\partial x_s} = (\text{div}(\vec{b}))_i + \vec{b} \cdot \text{div}(\vec{a})$$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \nabla \vec{b} + \vec{b} \cdot \text{div}(\vec{a})$$

**CINEMATICA**: descrizione del moto di un fluido

**Descrizione lagrangiana**: descrive la variazione delle varie grandezze del moto voluto segnando la particella fluida nel suo moto.

 part. in un punto P con vel.  $\vec{v}$ . Lo stesso L consiste nel determinare  $\vec{v}(t)$  le coord.  $(x, y, z)$  che la particella occupa a un vel.  $\vec{v}(x, y, z, t)$  che ha ai suoi istanti di tempo.

Per descrivere il moto, deve descrivere il moto di tutte le particelle fluide del mio problema.

### PRO

+ particella fluida è l'elemento base, quindi tutti i principi di conservazione della mecc.

dei fluidi si applicano a insiemini formati dalle stesse parti fluidi → i principi di conservazione si enunciano naturalmente in termini di descrizione lagrangiana.

### CONS

- descrizione molto complessa

- problema dipende dal tempo (fino del moto delle parti fluide)

• **descr. L**:  $L(x(t), y(t), z(t), t)$  posizione occupata al tempo t

descr. E:  $E(x, y, z, t)$  → n. f. fiso

+ molto più semplice della descr. L

+ è possibile eliminare la dipendenza dal tempo

- per espriare i principi di conservazione dello meccanico dei fluidi in termini E bisogna fare delle manipolazioni matematiche.

### Derivata materiale (fatto in descr. L)

Qf: variazione di una grandezza nell'intervallo di tempo voluto segnando il moto di una particella fluida.

grandezza scalare A

$$A(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$\frac{DA}{Dt} A / u(t), y(t), z(t), t$$

espressione della der. materiale in termini E

$$\frac{DA}{Dt} A(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$dA / dt + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$dA / dt = \vec{v} \cdot \nabla A = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) e_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) e_2 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_3) e_3$$

$$\vec{v} = (u, v, w) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x, y, z)}{dt}$$

**Cinematica fluido**

Der. materiale  
(der. rispetto a t)  
secondo il moto delle  
particelle fluide

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{A}$$

termine convettivo

$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}}$   
der. E esp. e t  
in punti fissi

$\vec{A}$  pte vettoriale  $\vec{A} = (A_1(x, y, z, t), A_2(x, y, z, t), A_3(x, y, z, t))$

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla A_i; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{A}$$

per interno

es.  $\vec{A} = \vec{v}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad \vec{v} = (u_1, u_2, u_3)$$

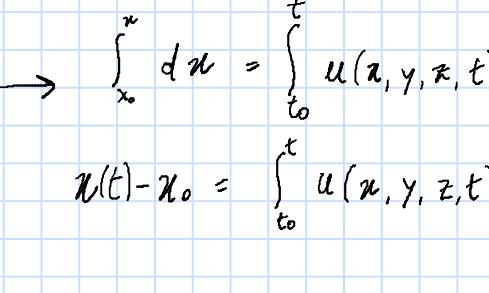
$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}}$   
accelerazione

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$t \cdot (\nabla \vec{v}) = dV(\vec{v}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

**Definizione**

**Traiettoria (punto)**: luogo di p.t. occupato da una part. fluida al variare del tempo (concrete L dipende dal tempo)



Determinazione analitica delle traiettoria

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

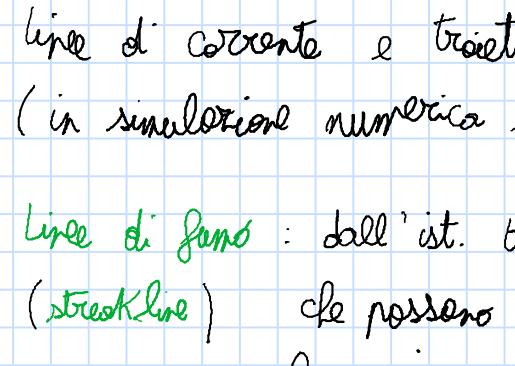
$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt} \\ v(x, y, z, t) = \frac{dy}{dt} \\ w(x, y, z, t) = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_x dx = \int_{t_0}^t u(x, y, z, t) dt$$

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t u(x, y, z, t) dt$$

stessa cosa per le altre coordinate  
 $t > t_0$

**Linee di corrente**: concetto intuitorio definito ad un istante  $t$ . Una linea che in (streamline) ogni suo punto è tangente al vett. velocità all'ist.  $t$



Det. analiticamente: dà vettore tang. alla

linea di corrente di lung. infinitesima

$$d\vec{s} = (dx, dy, dz)$$

$$d\vec{s} \parallel \vec{v}(x, y, z, t)$$

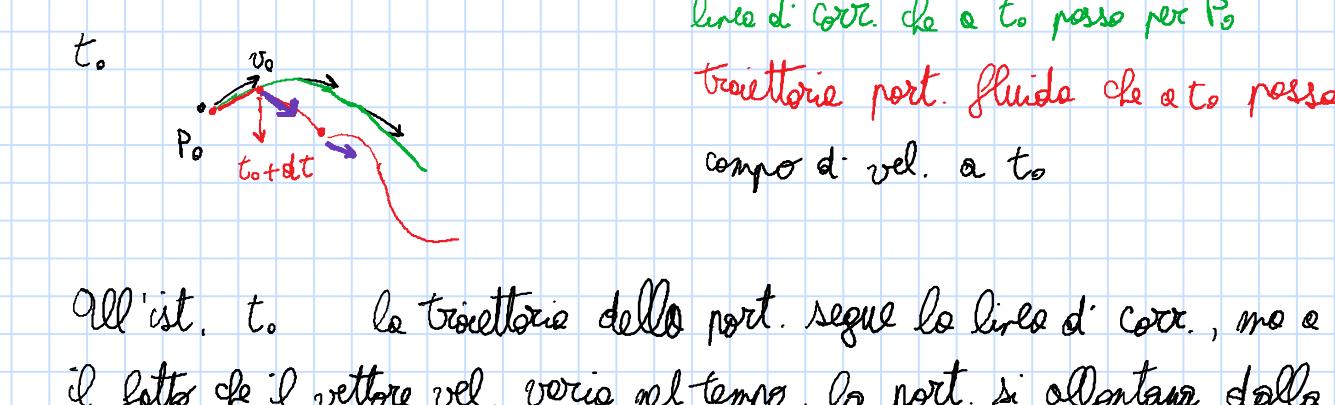
$$\text{allora } \frac{dx}{v(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)}$$

Si determina integrando da una pos. iniziale  $P_0$  alla pos. generica  $P(x, y, z)$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{y_0}^y \frac{u(x, y, z, t)}{v(x, y, z, t)} dy \rightarrow x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{w(y)}{v(y)} dy \quad \text{analoga per le altre coordinate}$$

linee di corrente e traiettoria sono difficili da visualizzare sperimentalmente (in simulazione numerica sono facili da vedere le linee di corrente)

**Linee di fumo**: dall'ist.  $t_0$  nel pt.  $P_0$  usciranno fumo e corrente, le particelle fluide (streamline) che passano da  $P_0$  per  $t \geq t_0$  si "colorano". La linea di fumo è la posizione occupata all'istante  $t$  delle particelle che per  $t_0 \leq t \leq t$  sono passate per il punto  $P_0$

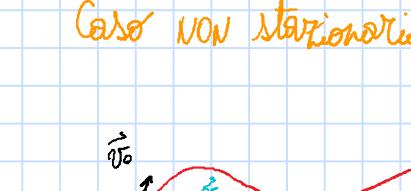


linee di fumo sono in concetto misto L.e.E.: seguendo il moto delle particelle ma visualizzando la linea di fumo a istanti fissi.

Det. analitico complesso.

Se il campo di velocità è non stazionario le traiettorie e le linee non coincidono, viceversa se è stazionario (che nel in ogni pt. del campo di vel. non varia nel tempo) allora le tre forniscono le linee di corrente.

• **Campo di vel. NON STAZIONARIO**



linea di corr. che a  $t_0$  passa per  $P_0$

traiettoria part. fluide che a  $t_0$  passa per  $P_0$

campo di vel. a  $t_0$

All'ist.  $t_0$  la traiettoria della part. segue la linea di corr., ma a  $t_0 + dt$  per il fatto che il vettore vel. varia nel tempo, la part. si allontana dalla linea di corr. → traiettoria e linea di corr. non coincidono

• **Campo di vel. STAZIONARIO**



linea di corr. per  $P_0$  all'ist.  $t_0$

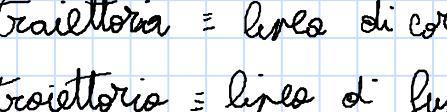
traiettoria part. che a  $t_0$  passa per  $P_0$

campo di vel. a  $t_0$

Le linee di corr. che passa per  $P_0$  all'ist.  $t$ , sono uguali a quelle che passa a  $t$  poiché il campo è stazionario e differente dal caso non stazionario.

La traiettoria, poiché il campo di vel. non varia, coincide con la linea di corrente che è sempre la stessa  $\forall t$ .

**Caso NON STAZIONARIO**



traiettoria part. per  $P_0$  a  $t_0$

traiettoria part. per  $P_0$  a  $t$ ,

per tutte part. all'ist.  $t$

Le posizioni delle part. che si sono colorate a  $t$  appartengono alle traiettorie, allora coincidono.

traiettoria = linea di corrente

traiettoria = linea di fumo

Allora tutte e tre coincidono in caso stazionario



traiettoria part. da  $P_0$  a  $t_0$

traiettoria part. da  $P_0$  a  $t$

Le traiettorie sono sempre le stesse  $\forall t$

Es un'equazione di linea in campo di velocità noto

### Flusso bidimensionale stazionario

$$\vec{v} = (u(x,y), v(x,y), w(x,y)) \quad \vec{b} = (0; x, y, z)$$

campo d'vel.

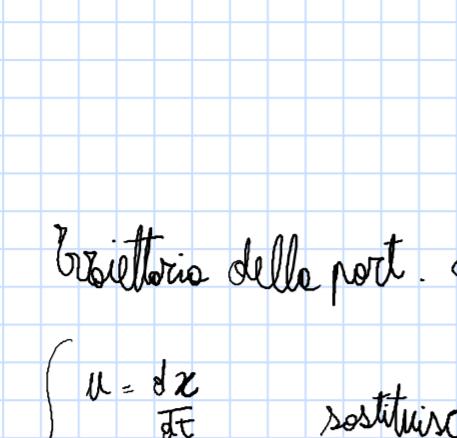
$$\begin{cases} u = -\frac{v_0}{L} x \\ v = \frac{v_0}{L} y \end{cases}$$

$v_0$  vel. cost.

$L$  lung. cost.

flusso stazionario  $\rightarrow$  linee di corrente, di fumo e

traiettorie particelle



linea di corrente per  $P_0$

dobbiamo imporre  $\vec{v} \parallel d\vec{s}$

$$\frac{u}{v} = \frac{dx}{dy} \text{ sostituisci}$$

$$-\frac{v_0}{L} \frac{x}{y} = \frac{dx}{dy} \rightarrow -\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_x^{x_0} \frac{dx}{x} \rightarrow \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = \ln\left(\frac{x_0}{x}\right) \rightarrow y = \frac{y_0}{x_0} x$$

ipotesi che passa per  $P_0$  e ha gli assi come orientato

all'istante  $t$

traiettoria delle part. che a  $t=0$  è in  $P_0$

$$\begin{cases} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

sostituisce

$$\begin{cases} -\frac{v_0}{L} x = \frac{dx}{dt} \\ \frac{v_0}{L} y = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dt = -\frac{L}{v_0} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} \\ dt = \frac{L}{v_0} \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} \end{cases}$$

$$t = \frac{L}{v_0} \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) = -t \frac{v_0}{L} \rightarrow x(t) = e^{-\frac{t v_0}{L}}$$

eq. pos. par. della particolar

$$t = \frac{L}{v_0} \ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) = t \frac{v_0}{L} \rightarrow y(t) = e^{\frac{t v_0}{L}}$$

$$e^{\frac{t v_0}{L}} = y(t)$$

$$x(t) = \frac{x_0 y_0}{y(t)}$$

$\forall t$

eq. della linea di corrente

Calcolare la derivata materiale

$$\frac{D \vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

dato per flusso stazionario  $\leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = (u, v, 0)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{Dv}{Dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

valida in generale

per un flusso stazionario bidimensionale

caso particolare:

$$\begin{cases} u = -\frac{v_0}{L} x \\ v = \frac{v_0}{L} y \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{v_0}{L} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_0}{L} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{Du}{Dt} = \left(\frac{v_0}{L}\right)^2 x \\ \frac{Dv}{Dt} = \left(\frac{v_0}{L}\right)^2 y \end{cases}$$

- ds.

$$\vec{v} = (u, v, 0) \quad \vec{b} = (0; x, y, z)$$

$$\begin{cases} u = v_0 \cos wt \\ v = v_0 \sin wt \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 \text{ vel. cost.} \\ w \text{ cost. nota} \end{cases} \quad \text{flusso non stazionario}$$



a  $t$  fissato la vel. è uniforme nello spazio

$$c=0 \quad t=t$$

linea di corrente all'istante  $t$  che passa per il punto  $P_0$

$$\frac{u}{v} = \frac{dx}{dy} \quad \frac{v_0 \cos wt}{v_0 \sin wt} = \frac{dx}{dy}$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^x \tan(wt) dx$$

$$y - y_0 = \tan(wt)(x - x_0)$$

retta che passa per  $P_0$  e ha pendenza  $\tan(wt) \parallel$  dir. della vel.

Le linee di corrente non sono le stesse al variazione del tempo

• traiettoria part. fluida

$$\begin{cases} dx = v_0 \cos(wt) dt \\ dy = v_0 \sin(wt) dt \end{cases}$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 \cos(wt) dt \rightarrow x(t) - x_0 = \frac{v_0}{w} \sin(wt) \quad \textcircled{1}$$

$$y(t) - y_0 = -\frac{v_0}{w} (\cos(wt) - 1) \quad \textcircled{2}$$

quadrato della  $\textcircled{1}$  + quadrato della  $\textcircled{2}$

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0 - \frac{v_0}{w})^2 = \frac{v_0^2}{w^2} \sin^2(wt) + \frac{v_0^2}{w^2} \cos^2(wt)$$

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - (y_0 + \frac{v_0}{w}))^2 = \frac{v_0^2}{w^2} \quad \text{TRAIETTORIA delle particelle da } \alpha t=0 \text{ ora in } P_0$$

• traiettoria

circosfera  $C = (x_0, y_0 + \frac{v_0}{w})$

e raggio  $R = \frac{v_0}{w}$

• traiettoria

23/10/2020

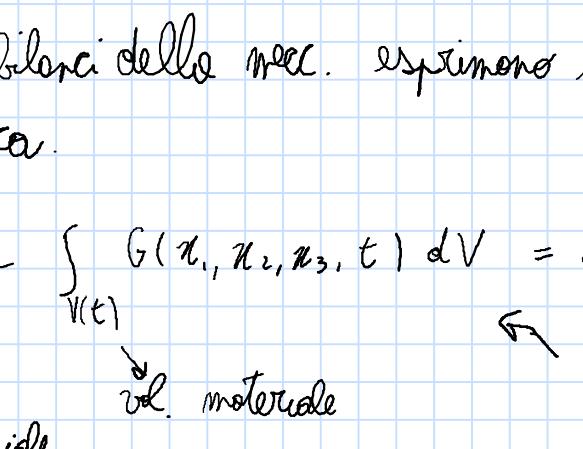
### Termodinamica dei fluidi:

#### Bilanci sottili meccanici

1. bil. di massa
2. bil. qte di moto
3. bil. energia

Per quale entità valgono i bilanci? (elemento base: port. fluido)

Si applicano ai volumi materiali, ovvero un volume composto sempre dalle stesse particelle fluidi.



Il vol. materiale si sposta e si deforma nel tempo. Il vol. mat. è un concetto L.

I bilanci della mecc. esprimono la variazione nel tempo d'una grandezza fisica.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} G(x_1, x_2, x_3, t) dV = \dots$$

↓  
vol. materiale

→ Nel punto d'origine materiale è complesso

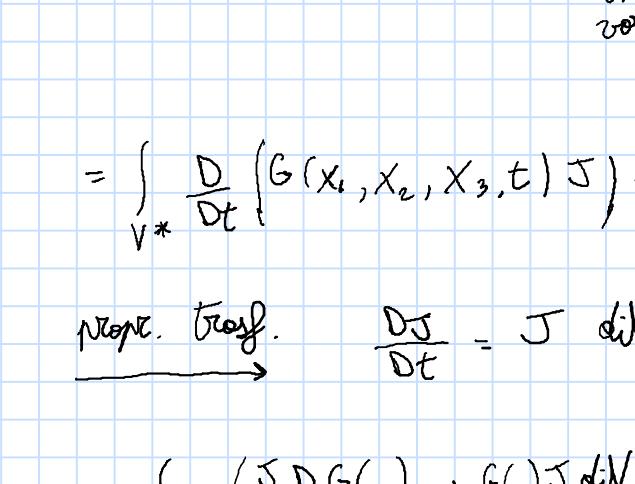
- es: bil. di massa

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0$$

↓  
massa del vol. mat.

### Teorema del trasporto

vol. che varia nel tempo e vol. sull'integrale d'questo volume



Mappare le pos. d'ogni pt del vol. mat. all'int. t (port. fluido) in funzione della sua pos. ad un istante d'istante  $t^*$ .

→ trasformazione materiale che associa ogni punto della conf attuale a quello d'istante.

$$x_i^* = (x_1, x_2, x_3, t^*)$$

matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1^*} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2^*} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3^*} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1^*} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2^*} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3^*} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1^*} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2^*} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3^*} \end{pmatrix}$$

J = determinante matr. Jac.

$$dV = J dV^*$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \frac{\partial x_3}{\partial X_3} + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_1} + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \frac{\partial x_3}{\partial X_2}$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} G(x_1, x_2, x_3, t) dV = \frac{D}{Dt} \int_{V^*} \underbrace{(G(x_1, x_2, x_3, t) J)}_{\text{corrispondente}} dV^* =$$

vol. fissa

$$= \int_{V^*} \frac{D}{Dt} (G(x_1, x_2, x_3, t) J) dV^* = \int_{V^*} \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla G \right) dV^* =$$

Propri. transf.  $\frac{D}{Dt} = J \frac{D}{Dt} \vec{v} \quad \vec{v} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right)$

$$= \int_{V^*} \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla G \right) dV^* = \text{transf. inversa d'coordinate}$$

$$= \int_{V(t)} \underbrace{\left( \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla G \right)}_{\text{operator E.}} dV \quad \text{sono riuscite a portare dentro la der. materiale}$$

me aggiungendo un termine

forma mista del

teorema del trasporto

Può essere utile ricavare il teo del trasporto in sol. termini E

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} G dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla G \right) dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla G + G \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) dV =$$

↳ ricavato in termini E

• G scalare

$$\vec{v} \cdot \nabla G + G \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = u_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial G}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial G}{\partial x_3} + G \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + G \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + G \frac{\partial u_3}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{\partial (Gu_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (Gu_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (Gu_3)}{\partial x_3} =$$

$$= dN(G \vec{v})$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} G dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial G}{\partial t} + dN(G \vec{v}) \right) dV \quad *$$

\*

• G vettore (prop. prodotto di vettori)

$$dN(\vec{v} \vec{G}) = \vec{v} dN(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla \vec{G}$$

$$\rightarrow dN(\vec{v} \vec{G}) = \vec{G} dN(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla \vec{G}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \vec{G} dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + dN(\vec{v} \vec{G}) \right) dV \quad *$$

tenore di vettori

\*

tenore di vettori

26/10/2020

**Bilancio di massa**

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \quad \text{cons. massa}$$

Applichiamo il Teo del Transporto

$$\textcircled{1} \quad \int_{V(t)} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \rho dN \vec{v} \right) dV = 0 \quad \text{forma mista}$$

$$\textcircled{2} \quad \int_{V(t)} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + dN(p \vec{v}) \right) dV = 0 \quad \text{forma E}$$

$$\int_{V(t)} \frac{\partial p}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{forma E + dN}$$

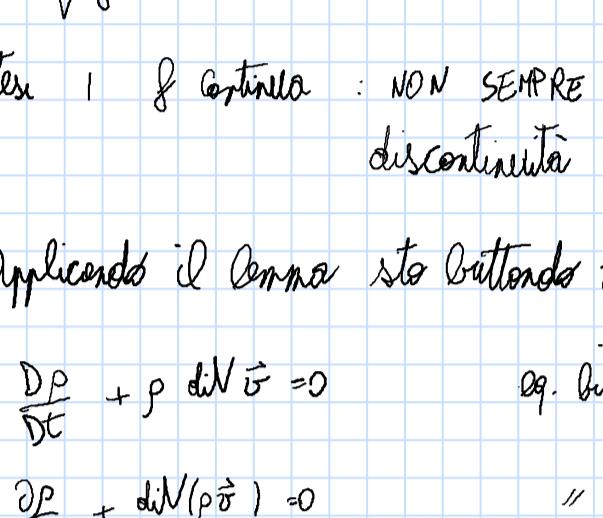
Togliendo oltretutto un'eq. differenziale di bilancio di massa would  $\textcircled{1} \neq \textcircled{2}$ **Lema di Localizzazione**

Ipotesi: 1. funzione integrande continua

$$2. \int_V f dV = 0 \quad \forall V$$

$$\Rightarrow f = 0$$

- es.



Se prendo V intervallo simm. a x=0

$$\rightarrow \int_V f(x) dV = 0 \quad \Rightarrow f(x) = 0$$

Se prendo V non simm. non è zero

Ipotesi 2 non verificata!!!

Le due ipotesi sono verificate in fluidodinamica?

• ipotesi 2: sì

$$f = \frac{Dp}{Dt} + \rho dN \vec{v} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{v}$$

infatti i bilanci integrali di massa devono valere per ogni vel. materiale

$$\int_V f dV = 0 \quad \forall V \text{ è vero}$$

• ipotesi 1: f continua: NON SEMPRE verificata, lo è se le non sono presenti discontinuità (onde d'urto (in regime supersonico)) nel campo vel.

 $\Rightarrow$  Applichiamo il teorema sto buttando via i casi con onde d'urto, otengo

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho dN \vec{v} = 0 \quad \text{eq. bilancio di massa forma mista}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{" " " forma E}$$

• 1 eq. scalare

•  $\vec{v} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $p$  è inc. scalare• ap. alle derivate parziali:  $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ 

• NON LINEARE

Posso trovare un'altra forma del teo. del trasporto con il bilancio di massa

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} G dV \quad \text{caso particolare: } G = pF \quad F: \text{q.tz scalare o vettoriale}$$

$$\rightarrow \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} p F dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (pF) + pF \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial pF}{\partial t} + F \frac{\partial p}{\partial t} + pF \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] dV =$$

$$= \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial pF}{\partial t} + F \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \right] \right] dV$$

= 0 per l'eq. di bil. di massa

in forma mista

Poco qui con il bil. di massa ho ottenuto

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} p F dV = \int_{V(t)} p \frac{\partial F}{\partial t} dV \quad \text{forma non conservativa del teo del trasporto}$$

Quando applico il bilancio di massa in forma differenziale ho buttato via le soluzioni discontinue (onde d'urto). Quella ottenuta è una forma non cons.

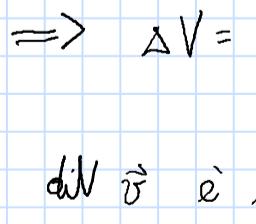
L.  $\rightarrow$  sviluppando  $\frac{D}{Dt}$  posso ottenere la forma E.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} p F dV = \int_V p \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F \right) dV \quad \text{forma non conservativa teo del trasporto E.}$$

Consideriamo l'eq. diff. di bilancio di massa in forma mista

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho dN \vec{v} = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}}_{\text{var. nel tempo relativa della densità di uno particella fluida}} = - dN \vec{v}$$

Supponiamo fisico:

significato fisico  $dN \vec{v}$  $\Rightarrow$  considero un volumetto materiale infinitesimo di fluidosi muove in un flusso e ad. vettore  $\vec{v} = (u, v, w)$ 

come si deforma il volumetto nel moto per effetti delle componenti ad. perpendicolari alle sue facce?

forza ① sta alle coord. x

forza ② sta a  $x + \Delta x$ su ① agisce  $u(x)$  e su ② agisce  $u(x + \Delta x) \neq u(x)$ su ③  $w(z)$  e su ④  $w(z + \Delta z)$ su ⑤  $v(y)$  e su ⑥  $v(y + \Delta y)$ all'intorno  $t$  il volumetto corre lat.  $dx, dy, dz$ all'intorno  $t + dt$  la lungh. dei lat. varia perché le vel. agят. sulle forzenon sono uguali e saranno  $\delta x + \Delta x, \delta y + \Delta y, \delta z + \Delta z$ ora dobbiamo legare  $\Delta x, \Delta y$  e  $\Delta z$  con il campo delle vel.Quindi durante  $dt$ ① si sposta di  $u(x) dt$ , ② si sposta di  $u(x + \Delta x) dt$ 

$$\Delta x = u(x + \Delta x) dt - u(x) dt = (u(x + \Delta x) - u(x)) dt$$

analogamente per le altre direzioni.

Sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine

$$u(x + \Delta x) \approx u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \dots \quad \text{errore } O(\delta x^2, \delta y^2, \delta z^2) \ll 1$$

$$\Delta x = (u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x - u(x)) dt = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x dt$$

la lungh. dei lat. all'int.  $t + dt$ :

$$(\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x dt, \delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y dt, \delta z + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z dt)$$

$$V(t) = \delta x \delta y \delta z$$

$$V(t + dt) = (\delta x + \Delta x)(\delta y + \Delta y)(\delta z + \Delta z)$$

Variazione del volumetto nell'intervallo  $dt$ 

$$\Delta V = V(t + dt) - V(t) = (\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x dt)(\delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y dt)(\delta z + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z dt) - \delta x \delta y \delta z =$$

= si considerano solo gli infinitesimi di ordine 4 scartando gli altri

$$\approx \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta y \delta z dt + \frac{\partial v}{\partial y} \delta x \delta y \delta z dt + \frac{\partial w}{\partial z} \delta x \delta y \delta z dt =$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z dt$$

$$\Rightarrow \Delta V = dN \vec{v} V(t) dt \quad dN \vec{v} = \frac{\Delta V}{V(t) dt}$$

 $dN \vec{v}$  è la variazione per unità di volume e unità di tempo del volume di un volumetto elementare di fluido, al primo ordine è dovuta solo alle componenti di velocità perpendicolari alle forze.

Le componenti di velocità parallele alle forze non dipendono var. di volume

$$\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = - dN \vec{v} \quad dN \vec{v} > 0 \rightarrow V(t + dt) > V(t)$$

per conservare massa  $\rightarrow \frac{Dp}{Dt} < 0$ 

$$dN \vec{v} < 0 \rightarrow \frac{Dp}{Dt} > 0$$

$$dN \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad \text{Fluido incompressibile}$$

- es.

compo di vel.  $\vec{v} = (u, v, 0)$ 

$$\begin{cases} u = \frac{\partial x}{\partial t} \\ v = \frac{\partial y}{\partial t} \end{cases} \quad dN \vec{v} = 0 \rightarrow \Delta V = 0 \quad \text{DOMOSTRA!}$$



come si deforma il volumetto?

$$V(t) = \delta x \delta y \delta z$$

$$A = (0, 0)$$

$$A' = (0, 0)$$

$$B = (\delta x, 0)$$

$$B' = \left( \delta x - \frac{\partial x}{\partial t} \delta t, 0 \right)$$

$$C = (\delta x, \delta y)$$

$$C' = \left( \delta x - \frac{\partial x}{\partial t} \delta t, \delta y + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t \right)$$

$$D = (0, \delta y)$$

$$D' = (0, (1 + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t) \delta y)$$

$$A = (0, 0)$$

$$A' = (0, 0)$$

$$B = (\delta x, 0)$$

$$B' = \left( \delta x - \frac{\partial x}{\partial t} \delta t, 0 \right)$$

$$C = (\delta x, \delta y)$$

$$C' = \left( \delta x - \frac{\partial x}{\partial t} \delta t, \delta y + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t \right)$$

$$D = (0, \delta y)$$

$$D' = (0, (1 + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t) \delta y)$$

$$\Delta V = V(t + dt) - V(t) = \dots$$

Troncando al primo ordine ottieni  $\approx 0$

30/10/2020

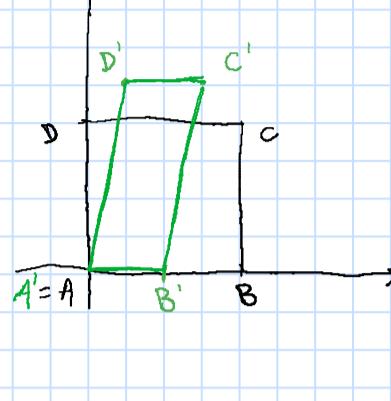
$$dN \vec{v} = \frac{\Delta V}{V(t) dt}$$

var. di volume d'un vettore di fluido nell'intervallo  
dt al "primo ordine"

- es.

$$\begin{cases} u = -\frac{v_0}{L} x + \frac{v_0}{L} y \\ v = \frac{v_0}{L} y \end{cases}$$

$$dN \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{v_0}{L} + \frac{v_0}{L} = 0$$



$$A = (0,0)$$

$$B = (\delta x, 0)$$

$$C = (\delta x, \delta y)$$

$$D = (0, \delta y)$$

$$\vec{v}_A = (0, 0, 0)$$

$$\vec{v}_B = \left( -\frac{v_0}{L} \delta x, 0, 0 \right)$$

$$\vec{v}_C = \left( -\frac{v_0}{L} \delta x + \frac{v_0}{L} \delta y, \frac{v_0}{L} \delta y, 0 \right)$$

$$\vec{v}_D = \left( \frac{v_0}{L} \delta y, \frac{v_0}{L} \delta y, 0 \right)$$

$$\Delta V = V(t+dt) - V(t) = \left( \delta x - \frac{v_0}{L} \delta x dt \right) \left( \delta y + \frac{v_0}{L} \delta y dt \right) - \delta x \delta y = \dots = 0 \text{ al primo ordine}$$

le componenti di velocità parallele alle forze non contano nella variazione di volume.

### Bilancio quantità di moto

la variazione nell'unità di tempo delle qte di moto nel vol. materiale è uguale alla risultante delle forze agenti su di esso

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \vec{F} \quad \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \vec{F} \quad \text{eq. vett.}$$

ptà d' moto per  
unità d' volume

ris. forze agenti  
su  $V(t)$

$$\xrightarrow{\text{calcoli}} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho u_i dV = F_i \quad i=1,2,3$$

Applico il teo del trasporto

• Teo trasporto forma mista

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{D(\rho \vec{v})}{Dt} + \rho \vec{v} \cdot \nabla V \vec{v} \right] dV = \vec{F} \quad (A)$$

• Teo trasporto forma E

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla V (\rho \vec{v} \vec{v}) \right] dV = \vec{F} \quad (B)$$

• Teo trasporto forma non conservativa

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D \vec{v}}{Dt} dV = \vec{F} \quad (C)$$

### Risultante delle forze agenti sul volume materiale

$$\vec{F} = \vec{F}^v + \vec{F}^c$$

↑ ↑  
ris. forza d' ris. forza d'  
volume contatto

#### Forze di volume

$\hat{f}(x_1, x_2, x_3, t)$ : forza d' vol. e di massa per unità di massa  $\Rightarrow$  accelerazione

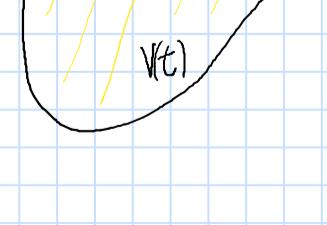
$$- \text{es: } \hat{f} = \vec{g} \quad \vec{g} \text{ mto}$$

$$\vec{F}^v = \int_{V(t)} \rho \hat{f} dV$$

forza per  
unità d' vol.

: ris. forze di volume e di massa

#### Forze di contatto



$\vec{t}_n$ : tensione agente sulla sup. infinitesima  $dS$  di normale  $n$

Tensione o sforzo: forza per unità di sup.

$$d\vec{F}^c = \vec{t}_n dS$$

$$\vec{F}^c = \int_{S(t)} \vec{t}_n dS \quad : \text{ris. forze di contatto agenti sul vol. materiale}$$

Possiamo sostituire le ris. delle forze in (A), (B) e (C)

$$\vec{F} = \int_{V(t)} \rho \hat{f} dV + \int_{S(t)} \vec{t}_n dS$$

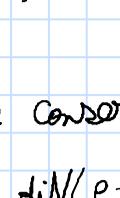
\_\_\_\_\_

fattore problematico perché:

- è un int. d' superficie  $\rightarrow$  aggiustiamo!

-  $\vec{t}_n$  è un'incognita del mto (da esprimere in altre variabili del mto)

## Principio di Conservazione delle q.tà d' moto

+  
Teo del trasporto+  
Risultante forze agenti sul vol. materiale

forma conservativa mista

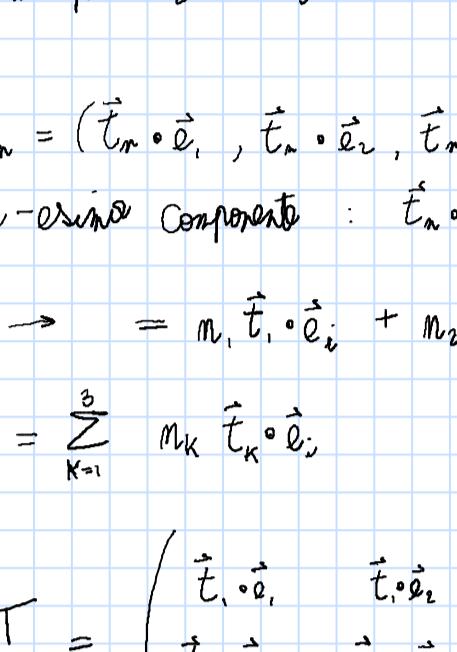
$$\int_{V(t)} \left[ \frac{D \rho \vec{\sigma}}{Dt} + \rho \vec{\sigma} \cdot dV \vec{\sigma} \right] dV = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} dV + \int_{S(t)} \vec{\tau}_n dS$$

forma conservativa E

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho \vec{\sigma}}{\partial t} + dV(\rho \vec{\sigma} \vec{\sigma}) \right] dV = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} dV + \int_{S(t)} \vec{\tau}_n dS$$

forma non Cons.

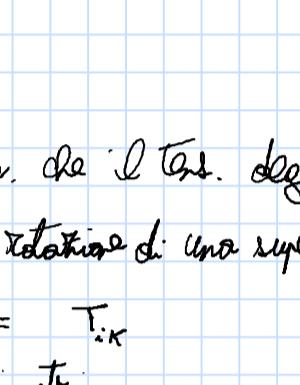
$$\int_{V(t)} \rho \frac{D \vec{\sigma}}{Dt} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} dV + \int_{S(t)} \vec{\tau}_n dS$$

 $\vec{\tau}_n$ : tensione agente sulla superficie d.S di normale  $\vec{n}$ 

Teorema di Cauchy: scrivere la tensione agente sulla sup. di normale in qualunque delle tensioni agenti sui tre piani coordinati

$$\vec{\tau}_n = m_1 \vec{\tau}_1 + m_2 \vec{\tau}_2 + m_3 \vec{\tau}_3$$

$$\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$$

 $\vec{\tau}_i$ : tensione agente sulla sup. di normaleè.  $\rightarrow$  sul piano  $(x_2, x_3)$ sime per  $\vec{\tau}_2$  e  $\vec{\tau}_3$ 

$$\vec{\tau}_n = (\vec{\tau}_n \cdot \vec{e}_1, \vec{\tau}_n \cdot \vec{e}_2, \vec{\tau}_n \cdot \vec{e}_3)$$

i-erme componenti:  $\vec{\tau}_n \cdot \vec{e}_i$  USO CAUCHY

$$\rightarrow = m_1 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{e}_1 + m_2 \vec{\tau}_2 \cdot \vec{e}_1 + m_3 \vec{\tau}_3 \cdot \vec{e}_1 =$$

$$= \sum_{k=1}^3 m_k \vec{\tau}_k \cdot \vec{e}_1 \quad \text{introduciamo il TENSORE degli SFORZI}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{\tau}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{\tau}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{\tau}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{\tau}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{\tau}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{\tau}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{\tau}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{\tau}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{comp. } \vec{\tau}_1 \\ \text{comp. } \vec{\tau}_2 \\ \text{comp. } \vec{\tau}_3 \end{array}$$

$$\vec{\tau}_k \cdot \vec{e}_i = T_{ki}$$

$$\text{allora } \vec{\tau}_n \cdot \vec{e}_i = \sum_k m_k T_{ki} = (\vec{m} \cdot \mathbf{T})_i$$

Quindi: utilizzando teo di Cauchy e def. di tensore degli sforzi: otengo

$$\vec{\tau}_n \cdot \vec{e}_i = (\vec{m} \cdot \mathbf{T})_i \quad i=1,2,3$$

$$\vec{\tau}_n = \vec{m} \cdot \mathbf{T} \quad \text{si può dim. che il tensore degli sforzi è isotropico (es. alla rotazione d'una superficie)}$$

$$T_{kk} = T_{xx}$$

$$\Rightarrow \vec{m} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \vec{m} \quad \text{per la simmetria}$$

$$\text{quindi: } \int_{S(t)} \vec{\tau}_n dS = \int_{S(t)} \mathbf{T} \cdot \vec{m} dS \quad \text{per il Teo della divergenza}$$

$$\Rightarrow \int_{S(t)} \vec{\tau}_n dS = \int_{V(t)} dV(\mathbf{T}) dV \quad !!!$$

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{D \rho \vec{\sigma}}{Dt} + \rho \vec{\sigma} \cdot dV \vec{\sigma} \right] dV = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} dV + \int_{V(t)} dV(\mathbf{T}) dV \quad \text{forma conservativa mista}$$

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho \vec{\sigma}}{\partial t} + dV(\rho \vec{\sigma} \vec{\sigma}) \right] dV = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} dV + \int_{V(t)} dV(\mathbf{T}) dV \quad \text{forma conservativa E}$$

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D \vec{\sigma}}{Dt} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} dV + \int_{V(t)} dV(\mathbf{T}) dV \quad \text{forma non Cons.}$$

Applichiamo il lemma di localizzazione all'eq. de

$$\left( \text{q: } \cdot \int_{V(t)} \mathbf{F} dV = 0 \quad \forall V \right) \quad \text{eq. differenziale di bilancio}$$

della quantità di moto

$$\frac{D(\rho \vec{\sigma})}{Dt} + \rho \vec{\sigma} \cdot dV \vec{\sigma} = \rho \vec{\sigma} + dV(\mathbf{T}) \quad \text{forma conservativa mista}$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{\sigma})}{\partial t} + dV(\rho \vec{\sigma} \vec{\sigma}) = \rho \vec{\sigma} + dV(\mathbf{T}) \quad \text{forma conservativa E}$$

$$\rho \frac{D \vec{\sigma}}{Dt} = \rho \vec{\sigma} + dV(\mathbf{T}) \quad \text{forma non Cons. mista}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \right) = \rho \vec{\sigma} + dV(\mathbf{T}) \quad \text{forma non Cons. E}$$

DIVERGENZA ( $\mathbf{T}$ )<sub>i</sub>

$$dV(\mathbf{T})_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (\vec{\tau}_i \cdot \vec{e}_k)}{\partial x_k} = dV(\vec{\tau}_i)$$

Inozite ed equazioni

$$\text{eq. bilancio di massa} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + dV(\rho \vec{\sigma}) = 0 \quad \text{1 scalare}$$

$$\text{eq. bilancio di q.tà d' moto} \quad \frac{\partial(\rho \vec{\sigma})}{\partial t} + dV(\rho \vec{\sigma} \vec{\sigma}) = \rho \vec{\sigma} + dV(\mathbf{T}) \quad 3 scalari$$

→ 4 eq. scalari

inc. scalari:  $\rho$  (1),  $\vec{\sigma}$  (3),  $\mathbf{T}$  (6) (poiché simmetrica)

→ 10 inc. scalari

vanno aggiunte UN SACCO di EQ. !!!

Se il fluido è in quiete agiscono solo forze normali d' pressione

$$\vec{\tau}_n = -p_n \hat{n}$$

presso d' equilibrio

$$\hat{n} \downarrow p_n \hat{n}$$

termodinamico

tensione viscosa agisce su

d.S di normale  $\hat{n}$ 

→ decomposizione tensione degli sforzi

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} p_n & 0 & 0 \\ 0 & -p_n & 0 \\ 0 & 0 & -p_n \end{pmatrix} + \mathbf{T}_v$$

dove  $p_n$  è pressione

tensione viscosa: dura

$$\mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} \vec{\tau}_{nn} \cdot \vec{e}_1 & \vec{\tau}_{nv} \cdot \vec{e}_2 & \vec{\tau}_{nv} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{e}_1 & \vec{\tau}_{vv} \cdot \vec{e}_2 & \vec{\tau}_{vv} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{e}_1 & \vec{\tau}_{vv} \cdot \vec{e}_2 & \vec{\tau}_{vv} \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

le pressioni sono normali alle superfici → appartengono alla diagonale principale + sono il  $\vec{\sigma}$  $\tau_{nn}$ : tensione viscosa agente sul piano di normale  $\hat{n}$  ecc. ecc.

$$\mathbf{T} = -p_n \mathbf{I} + \mathbf{T}_v \quad \rightarrow \text{introduco la decomposizione di } \mathbf{T} \text{ nella eq. d' q.tà d' moto}$$

$$\Rightarrow dV(\mathbf{T}) = dV(-p_n \mathbf{I} + \mathbf{T}_v) = dV(-p_n \mathbf{I}) + dV(\mathbf{T}_v) =$$

$$= -\vec{\nabla} p_n + dV(\mathbf{T}_v)$$

$$\Rightarrow \dots = \rho \vec{\sigma} - \vec{\nabla} p_n + dV(\mathbf{T}_v) \quad \text{abbiamo creato un' eq. in più}$$

## Bilancio energia totale

Enunciato: La variazione nell'unità di tempo dell'energia totale di un volume materiale d' fluido è uguale al lavoro fatto nell'unità di tempo delle forze agenti sul vol. mat. + il calore introdotto nel vol. mat. nell'unità di tempo

Definisco l'energia totale per unità di massa: somma dell'energia interna per unità di massa (e)

+ energia cinetica per unità di massa ( $\frac{1}{2} v^2$ )

$$\Rightarrow e + \frac{1}{2} v^2 = e_T$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho (e + \frac{1}{2} v^2) dV = L_g + L_p + L_c + Q$$

energia totale nel volume

L<sub>g</sub>: lavoro per unità di tempo forze di volume agenti su V(t)L<sub>p</sub>: " " " " forze di pressione " " "L<sub>c</sub>: " " " " forze viscose " " "

Q: calore introdotto in V(t) nell'unità di tempo !!!

Applico il Teorema del trasporto :

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{D \rho \vec{\sigma}}{Dt} + \rho \vec{\sigma} \cdot dV \vec{\sigma} \right] dV = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} dV + \int_{S(t)} \vec{\tau}_n dS$$

cons. misto

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho \vec{\sigma}}{\partial t} + dV(\rho \vec{\sigma} \vec{\sigma}) \right] dV + \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} dV + \int_{S(t)} \vec{\tau}_n dS$$

cons. E

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D \vec{\sigma}}{Dt} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} dV + \int_{S(t)} \vec{\tau}_n dS$$

non cons.

$$L_g = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dV$$

$$Q = \int_{S(t)} -\vec{q} \cdot \hat{n} dS = - \int_{S(t)} dV(\vec{q}) dV$$

en. inv.

$$L_p = \int_{S(t)} -p_n \hat{n} \cdot \vec{v} dS = - \int_{S(t)} dV(p_n \vec{v}) dV$$

en. inv.

$$L_c = \int_{S(t)} \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} dS$$

en. inv.

non inv.

. . . =  $\int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dV - \int_{S(t)} p_n \hat{n} \cdot \vec{v} dS + \int_{S(t)} \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} dS - \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \hat{n} dS$ 

non inv.

$$L_c = \int_{S(t)} \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} dS$$

non è scritto sotto forza d' flujo quindi non posso usare il teo. della div.

non inv.

. . . =  $\int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dV - \int_{S(t)} p_n \hat{n} \cdot \vec{v} dS + \int_{S(t)} \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} dS - \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \hat{n} dS$ 

non inv.

$$. . . = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dV - \int_{S(t)} p_n \hat{n} \cdot \vec{v} dS + \int_{S(t)} \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} dS - \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \hat{n} dS$$

non inv.

$$. . . = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dV - \int_{S(t)} p_n \hat{n} \cdot \vec{v} dS + \int_{S(t)} \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} dS - \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \hat{n} dS$$

non inv.

$$. . . = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dV - \int_{S(t)} p_n \hat{n} \cdot \vec{v} dS + \int_{S(t)} \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} dS - \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \hat{n} dS$$

non inv.

$$. . . = \int_{V(t)} \rho \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dV - \int_{S(t)} p_n \hat{n} \cdot \vec{v} dS + \int_{S(t)} \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} dS - \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \hat{n} dS$$

6/11/2020

Bilancio energie totale

$\downarrow$   
ter. trasporto  $\rightarrow$  ter. differenza

$\downarrow$

forma conservativa mista

Genere di lavoro per unità di tempo delle forze viscole

$$\vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 (\vec{\tau}_{vn_i} \cdot \hat{e}_i) u_i$$

def. pr. valore

per il ter. di Cauchy

$$\vec{\tau}_{vn_i} \cdot \hat{e}_i = \sum_K m_K \vec{\tau}_{v_K} \cdot \hat{e}_i$$

$\vec{\tau}_{v_K}$   $\Rightarrow$  tensione viscosa agente sul piano di normale  $\hat{e}_K$

Dalla def. di tensore degli effetti viscosi

$$\vec{\tau}_v = \begin{pmatrix} \vec{\tau}_{v_1} \cdot \hat{e}_1 & \vec{\tau}_{v_1} \cdot \hat{e}_2 & \vec{\tau}_{v_1} \cdot \hat{e}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{\tau}_{v_3} \cdot \hat{e}_1 & \vec{\tau}_{v_3} \cdot \hat{e}_2 & \vec{\tau}_{v_3} \cdot \hat{e}_3 \end{pmatrix} \quad \vec{\tau}_{v_K} \cdot \hat{e}_i = (\vec{\tau}_v)_{Ki} = \text{siccome è simmetrico}$$

$$= (\vec{\tau}_v)_{ik} = \vec{\tau}_{v_i} \cdot \hat{e}_k$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{vn_i} \cdot \hat{e}_i = \sum_K m_K \vec{\tau}_{v_K} \cdot \hat{e}_i = \sum_{K=1}^3 m_K \vec{\tau}_{v_K} \cdot \hat{e}_K = \vec{\tau}_{v_i} \cdot \sum_{K=1}^3 m_K \hat{e}_K = \vec{\tau}_{v_i} \cdot \vec{m}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \vec{\tau}_{v_i} \cdot \hat{e}_i u_i = \sum_{i=1}^3 \vec{\tau}_{v_i} \cdot \hat{m} u_i$$

termine di flusso

$$\int_{S(t)} \vec{\tau}_{vn} \cdot \vec{v} dS = \int_{S(t)} \sum_i \vec{\tau}_{v_i} \cdot \hat{m} u_i dS = \sum_i \int_{S(t)} (u_i \cdot \vec{\tau}_{v_i}) \cdot \hat{m} dS =$$

$$\underbrace{\text{ter. di flusso}}_{\int_{V(t)} dV} = \sum_i \int_{V(t)} dV (u_i \cdot \vec{\tau}_{v_i}) \quad \hookrightarrow \text{tensione visc. agente sul piano di normale } \hat{e}_i$$

per cui il termine è destro

$$\dots = \int_{V(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{V(t)} dV (\rho \vec{v}) \cdot \vec{v} + \sum_i \int_{V(t)} dV (u_i \cdot \vec{\tau}_{v_i}) - \int_{V(t)} dV \vec{q} \cdot \vec{v}$$

L'equazione di localizzazione

$$\int_{V(t)} F dV = 0 \quad \forall V$$

$\cdot F$  continua  $\Rightarrow F = 0 \Rightarrow$  eq. diff. Bilancio energie totale

$$\frac{D}{Dt} \left( \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \frac{D}{Dt} \vec{v} = \dots \quad \text{cons. mista}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \nabla \cdot \left( \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right) = \dots \quad \text{cons. E}$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = \dots \quad \text{non cons.}$$

$$\dots = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \sum_{i=1}^3 \nabla \cdot (u_i \cdot \vec{\tau}_{v_i}) - \nabla \cdot \vec{q}$$

Eq. del moto (eq. di Navier-Stokes)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{forma mista}$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p_\rho + \nabla \cdot (\vec{\tau}_v) \quad \text{forma non cons.}$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \sum_i \nabla \cdot (u_i \cdot \vec{\tau}_{v_i}) - \nabla \cdot \vec{q}$$

Sistema di eq. chiuso?

5 eq. scalarie (1 massa, 3 qte d. moto, 1 energia tot.)

n° inc.  $\rho(1), \vec{v}(3), p_\rho(1), \vec{\tau}_v(6), e(1), \vec{q}(3)$

15 inc.

NON è un sist. chiuso perché valgono per un fluido qualsiasi

Ho bisogno di eq. costitutive che mi specificano le proprie. del fluido

Equazioni costitutive: mi permettono di legare tra di loro le eq. d. stato termodin.

GENERICI

$$p_\rho = p_\rho(\rho, T)$$

$$e = e(\rho, T)$$

GAS PERFETTO

$$p_\rho = \rho R T$$

$$e = c_v T$$

$$\text{gas diatomico } C_v = \frac{5}{2} R$$

legge di Fourier

$$\vec{q} = -K(T) \nabla T$$

$\hookrightarrow$  dipende dal fluido

$$\text{n° eq.} = 5 + 2 + 3 = 10$$

$$\text{n° inc.} = 15 + T = 16$$

Mancano le rel. costitutive per  $\vec{\tau}_v$

es. semplice

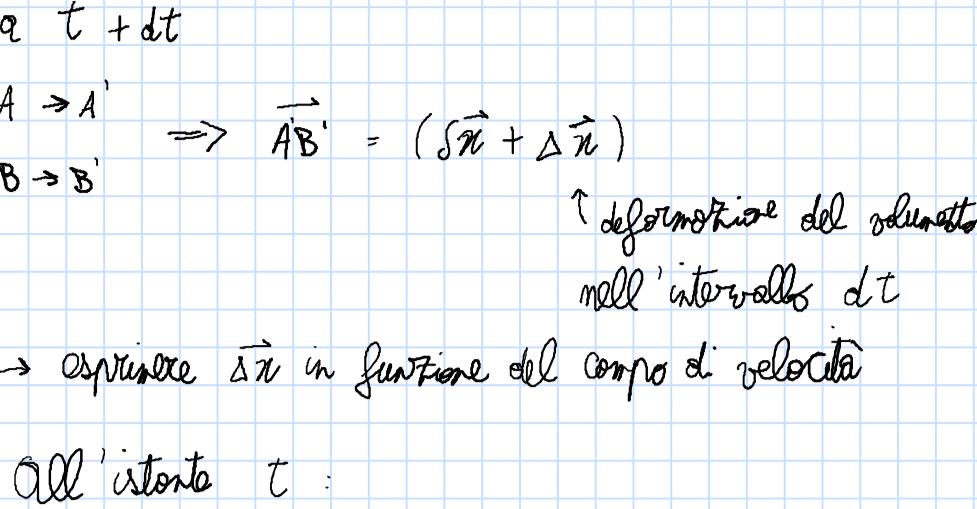


$$\vec{\tau} = \mu(T) \frac{du}{dx}$$

$\rightarrow$  estendere al caso di un moto 3D generico

### Equazione costitutiva per il tensore degli sforzi: (velocità)

Per def. di fluido gli sforzi sono legati alla deformazione di un volumetto elementare di fluido soggetto a un campo di velocità 3D generico in un istante.



vel. elementare all'istante  $t$        $\delta x, \delta y, \delta z \neq 0$

prendendo due spigoli opposti

$$\vec{AB} = \delta \vec{x} = (\delta x, \delta y, \delta z)$$

a  $t + dt$

$$A \rightarrow A' \Rightarrow \vec{A'B'} = (\delta \vec{x} + \Delta \vec{x})$$

$B \rightarrow B'$       ↑ deformazione del volumetto

nell'intervallo  $dt$

→ esprimere  $\Delta \vec{x}$  in funzione del campo di velocità

All'istante  $t$ :

$$A = (0, 0, 0) \quad \vec{v}_A = (u_A, v_A, w_A)$$

$$B = (\delta x, \delta y, \delta z) \quad \vec{v}_B = (u_B, v_B, w_B)$$

All'istante  $t + dt$

$$A \rightarrow A' \equiv (u_A dt, v_A dt, w_A dt) \quad \vec{v}_{A'}$$

$$B \rightarrow B' \equiv (\delta x + u_A dt, \delta y + v_A dt, \delta z + w_A dt)$$

$$\vec{A'B'} = (\delta x + (u_B - u_A) dt, \delta y + (v_B - v_A) dt, \delta z + (w_B - w_A) dt) = \underbrace{\delta \vec{x}}_{\vec{AB}} + \Delta \vec{x}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{x} = ((u_B - u_A) dt, (v_B - v_A) dt, (w_B - w_A) dt) \quad (1)$$

$$\text{Se } \vec{v}_B = \vec{v}_A \rightarrow \Delta \vec{x} = 0$$

Dopo leggere  $u_B$  a  $u_A$  usando lo sviluppo in serie di Taylor troncato al 1° ordine

$$u_B(\delta x, \delta y, \delta z, t) = u_A(0, 0, 0, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z + \cancel{\dots}$$

analogamente le altre componenti.

Sostituisce gli sviluppi nell'espressione di  $\Delta \vec{x}$

$$\Delta \vec{x} \approx \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \right] dt, \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \right] dt, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \right] dt$$

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \delta \vec{x} = (\delta x, \delta y, \delta z) \quad \Rightarrow \Delta \vec{x} = (\delta \vec{x} \cdot \nabla \vec{v}) dt$$

⇒ La deformazione del volumetto nell'intervallo  $dt$  è data da  $\nabla \vec{v}$

Scomponendo la deformazione in deformazioni elementari

→ Scompongo  $\nabla \vec{v}$  nella somma di 4 motrici (ognuna di esse sarà una def. elementare)

$$\nabla \vec{v} = A + B + C + \Sigma$$

$$\text{tr}(\nabla \vec{v}) = dV(\vec{v})$$

Allo scorrimento sulla diagonale:

$A$  è una matrice diagonale isotropa (tutti i comp. sulla diag. uguali)

$B$  " " " " deviatorica ( $\text{tr} = 0$ )

Termini sulla diagonale:

$C$  " " " " estensoresi simmetrica

$\Sigma$  " " " " antisimmetrica

$A + B$  mi dà dove dare una matrice diag. che contiene gli elementi della diagonale di  $\nabla \vec{v}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} dN \vec{v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} dN \vec{v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} dN \vec{v} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} dN \vec{v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} dN \vec{v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{diag. deviatorica}$$

$C + \Sigma$  dà dove dare gli elementi extra-diagonali di  $\nabla \vec{v}$

(Si fa la somma dei termini a indici inversi)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \vec{x} = (\delta \vec{x} \cdot \nabla \vec{v}) dt = (\delta \vec{x} \cdot (A + B + C + \Sigma)) dt =$$

$$= (\delta \vec{x} \cdot A) dt + (\delta \vec{x} \cdot B) dt + (\delta \vec{x} \cdot C) dt + (\delta \vec{x} \cdot \Sigma) dt$$

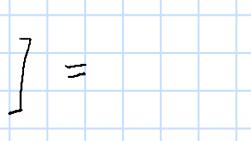
Contributi alla deformazione totale

$$(\Delta \vec{x})_A = (\delta \vec{x} \cdot A) dt = \text{dilatazione isotropa}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} dN \vec{v} \delta x dt \\ \frac{1}{3} dN \vec{v} \delta y dt \\ \frac{1}{3} dN \vec{v} \delta z dt \end{pmatrix}$$

i lati sono moltiplicati tutti per lo stesso quantitativo, quindi allungamento o accorciamento

uguale



$$(\Delta \vec{x})_B = (\delta \vec{x} \cdot B) dt = \text{deformazione di lato orizzontale}$$

$$= \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \right) \delta x dt \\ \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \right) \delta y dt \\ \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \right) \delta z dt \end{pmatrix}$$

allungamento o accorciamento di lati

diversi tra loro tale che il volume resta invariato



$$V(t+dt) = (\delta x + \alpha \delta x)(\delta y + \alpha \delta y)(\delta z + \alpha \delta z) \approx \delta x \delta y \delta z + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \right) \delta x \delta y \delta z dt +$$

$$+ \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \right) \delta x \delta y \delta z dt + \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \right) \delta x \delta y \delta z dt + \cancel{\dots}$$

$$= \delta x \delta y \delta z = V(t) \quad \text{al primo ordine NON ha variaz. il volume}$$

$$(\Delta \vec{x})_A = \text{dil. isotropa} \rightarrow \text{var. dt. volume}$$

$$\Delta V = V(t+dt) - V(t) \approx \delta x \delta y \delta z - \delta x \delta y \delta z + dV(\vec{v}) \delta x \delta y \delta z dt + \cancel{\dots}$$

$$= dV(\vec{v}) \delta x \delta y \delta z dt$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V(t) dt} = dV(\vec{v}) \quad \text{al primo ordine la dil. isotropa è l'unica def. dilat. che dà una variaz. di volume}$$

$$(\Delta \vec{x})_C = (\delta \vec{x} \cdot C) dt = \text{distorsione pura}$$

$$= \begin{pmatrix} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta z \right) dt \\ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta z \right) dt \\ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta y \right) dt \end{pmatrix}$$

i lati non variano di lunghezza, ma variano

l'angolo tra i lati

lunghezza →  $(\Delta V)_C = 0$



$$(\Delta \vec{x})_\Sigma = (\delta \vec{x} \cdot \Sigma) dt = \text{rotazione rigida}$$

$$= \begin{pmatrix} dt \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \right) \delta x dt \\ dt \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \right) \delta x dt \\ dt \left( \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{1}{3} dN \vec{v} \right) \delta x dt \end{pmatrix}$$

varia la direzione delle basette, ma

non l'angolo tra i lati

lunghezza →  $(\Delta V)_\Sigma = 0$



$$\frac{1}{2} \vec{w} \wedge \delta \vec{x} = \frac{1}{2} [(w_x \delta z - w_z \delta x) \hat{i} + (w_y \delta x - w_x \delta z) \hat{j} + (w_z \delta y - w_y \delta x) \hat{k}] =$$

$$= \vec{w} \cdot \vec{\delta x} = \text{sostituendo le componenti di } \vec{w} \text{ si vede che } \vec{w} = \delta \vec{x} - \vec{\delta x}$$

Quindi:

$$(\Delta \vec{x})_\Sigma = (\delta \vec{x} \cdot \vec{\omega}) dt = \frac{1}{2} (\vec{w} \wedge \delta \vec{x}) dt$$

•  $\vec{w}$  ·  $\vec{\delta x}$  dice che coincide con l'asse di rotazione

• verso positivo il verso antiorario

•  $|\vec{w}|$  è pari a due volte la vel. ang.

Il significato fisico della rotazione è legato alla rotazione rigida di un volumetto tramite le precedenti caratteristiche: asse rotazione coincide con la rotazione di  $\vec{w}$  e vel. ang. =  $\frac{1}{2} |\vec{w}|$



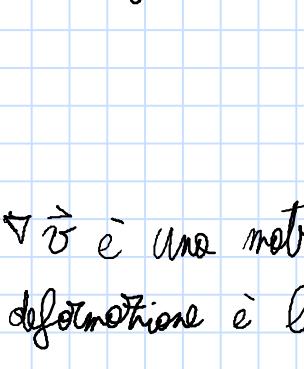
13/11/2020

### Scomposizione delle deformazioni di un volumetto in retrodeformazioni elementari

$$(\delta \vec{x} \cdot \nabla \vec{v}) dt = \underbrace{(\delta \vec{x}, A) dt}_{\text{dil. isotropa}} + \underbrace{(\delta \vec{x}, B) dt}_{\text{def. lin. isovolumica}} + \underbrace{(\delta \vec{x}, C) dt}_{\text{distorsione pura}} + \underbrace{(\delta \vec{x}, \Omega) dt}_{\text{rotazione rigida}}$$

- es.

$$\begin{cases} u = -\frac{v_0}{L} x \\ v = \frac{v_0}{L} y \end{cases}$$



$$\vec{v} = (u, v, 0) \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{v_0}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_0}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \Delta N \vec{v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \Delta N \vec{v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \Delta N \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$\Delta N \vec{v} = -\frac{v_0}{L} + \frac{v_0}{L} = 0 \rightarrow A = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$$

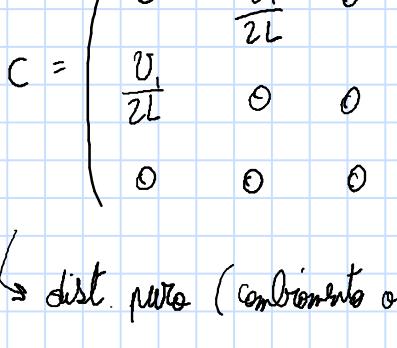
C e s2 sono el. diagonali  $\rightarrow$  sono nulli

$\nabla \vec{v}$  è una matrice diagonale e  $\text{Tr}(\nabla \vec{v}) = 0 \rightarrow \nabla \vec{v} = B$  e l'unica deformazione è la deformazione lineare isovolumica

- es.

$$\begin{cases} u = -\frac{v_0}{L} x + \frac{v_1}{L} y \\ v = \frac{v_0}{L} y \end{cases}$$

$$\vec{v} = (u, v, 0) \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$



$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{v_0}{L} & 0 & 0 \\ \frac{v_1}{L} & \frac{v_0}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Delta N \vec{v} = 0 \rightarrow A = 0 \quad \Delta V = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{v_0}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_0}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

def. lin. linea uguali a  
a quelle precedenti

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1}{L} & 0 \\ \frac{v_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_1}{2L} & 0 \\ \frac{v_1}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$  dist. pura (campeggi angol.)

$\hookrightarrow$  rot. rigida (rot. diurna Biot-Born)

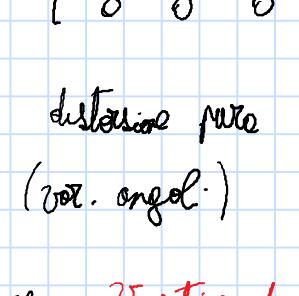
↑  
vorticita'

$$\vec{w} = (w_x, w_y, w_z) = (0, 0, w_z)$$

rotazione in senso orario

- es.

$$\begin{cases} u = \frac{v_1}{L} y \\ v = 0 \end{cases} \quad \vec{v} = (u, v, 0) \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$



distr. simile al campeggi angol. in uno stretto canale

$$A = B = 0 \quad \text{NO dil. isotropa}$$

NO def. lin. isovolumica

$$\rightarrow \Delta V = 0$$

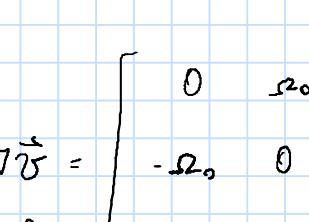
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1}{2L} & 0 \\ \frac{v_1}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_1}{2L} & 0 \\ \frac{v_1}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

distorsione pura (rot. angol.)

$$\text{rotazione rigida} \rightarrow \text{vorticita'} \rightarrow w_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v_1}{L}$$

- es. Vortice di Rankine

campe 2D



$$r = \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{v} = (u_r, u_\theta, u_z)$$

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = -r u_r \quad 0 \leq r < R_0 \\ u_z = \frac{R_0^2}{r} \quad r \geq R_0 \end{cases}$$

indipendente da theta

gradienti di vel. in

coord. cilindriche

$$\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_r}{\partial \theta} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_r \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & r_0 & 0 \\ -r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -r_0 \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 & 0 \\ -r_0 \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$  matrice extradiag. antisim.

$$\Rightarrow \nabla \vec{v} = \Omega$$

$$w_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} =$$

$$= 2 r_0$$

rot. rigida in verso antiorario

con vel. ang.  $r_0$

$$\Rightarrow \nabla \vec{v} = C$$

distorsione pura e non ha vorticita'

$$w_z = 0$$

hanno  $r \leq R_0$  a vorticita' costante e vort. uguali a zero all'esterno con

vel.  $u_\theta \propto \frac{1}{r}$  indotta dal vortice

Se  $R_0 \rightarrow 0$  vortice uniforme

## Modellizzazione del tensore degli sforzi

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \mathbf{\tau}_v$$

tensore forza vissuti

Ipotesi di modellizzazione (dovute a Stokes)

1.  $\mathbf{\tau}_v = f(\mathbf{E}) \quad \mathbf{E} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$

$$\begin{array}{c} \text{tensore di rotazione} \\ \text{di deformazione} \end{array} = \text{parte simmetrica di } \nabla \vec{v}$$

giustificazione finita:

• gli sforzi vissuti sono legati alla deformazione, che a sua volta è legata a  $\nabla \vec{v}$ • non si considera  $\vec{v}$  poiché è associato a una rotazione rigida che non è una vera e propria deformazione2. omogeneità del fluido: il legame tra  $\mathbf{\tau}_v$  ed  $\mathbf{E}$  non varia col variare della posizione ( $\mathbf{\tau}_v$  ed  $\mathbf{E}$  variano nello spazio!!! è solo il legame che non cambia)3. isotropia del fluido: il legame tra  $\mathbf{\tau}_v$  ed  $\mathbf{E}$  non varia per rotazioni rigide4. fluido in quiete ( $\vec{v} = 0, \mathbf{E} = 0$ )  $\mathbf{\tau}_v = 0 \rightarrow \mathbf{T} = -p \mathbf{I}$ 5. fluido newtoniano: legame fra  $\mathbf{\tau}_v$  ed  $\mathbf{E}$  è lineareSi può dimostrare che la forma più generale di  $\mathbf{\tau}_v$ , che verifica le ipotesi è

$$\mathbf{\tau}_v = \lambda \operatorname{div} \vec{v} \mathbf{I} + 2\mu \underbrace{\mathbf{E}}_{\substack{\text{coff.} \\ \text{termodynamico}}} + \underbrace{\eta \operatorname{div} \vec{v} \mathbf{S}_{ik}}_{\substack{\text{coff. di visc.} \\ \text{molecolare}}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\tau}_v &= \lambda \operatorname{div} \vec{v} \mathbf{I} + 2\mu (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) = \lambda \operatorname{div} \vec{v} \mathbf{I} + \underbrace{\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v} \mathbf{I}}_{\substack{\text{parte} \\ \text{astotropia} \\ \text{di } \mathbf{\tau}_v}} + \underbrace{2\mu (\mathbf{B} + \mathbf{C})}_{\substack{\text{parte} \\ \text{deformazione} \\ (\text{a } \vec{v} \text{ nulla})}} = \\ &= \underbrace{(\lambda + \frac{2}{3}\mu) \operatorname{div} \vec{v} \mathbf{I}}_{\substack{\text{Coff.} \\ \eta : \text{coff. di visc.} \\ \text{e' uguale a } \sigma \text{ di dilatazione}}} + 2\mu (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T} = (-p_v + \eta \operatorname{div} \vec{v}) \mathbf{I} + 2\mu (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{\tau}_v)_{ik} = \eta \operatorname{div} \vec{v} S_{ik} + 2\mu (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{ik}$$

$$S_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) & \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) & \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} S_{ik}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{\tau}_v)_{ik} = \eta \operatorname{div} \vec{v} S_{ik} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} S_{ik}$$

$$(\mathbf{T})_{ik} = (-p_v + \eta \operatorname{div} \vec{v}) S_{ik} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} S_{ik}$$

6 eq. newton  
costitutive

## Def. di PRESSIONE MECCANICA

$$p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{T}) = -\frac{1}{3} (T_{11} + T_{22} + T_{33}) \quad (\text{il meno perché la press. puro vede l'interno})$$

Significato meccanico: è l'opposto della media degli sforzi normali agenti sui 3 nomi coordinate in un generico punto

$$\mathbf{T} = \underbrace{\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}}_{\substack{-p \mathbf{I} \\ \text{matrice isotropa}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} T_{11} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{T} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{T} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{T} \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{T} \\ \text{matrice deviatorica}}}$$

La def. di press. mecc. è necessaria nei casi in cui non puoi def. la press. termodynamica → flusso incomprensibile e q. è stato dimostrato  $p = \text{cost.} \rightarrow$  non ha più senso parlare di pressione termodynamica, mentre la press. meccanica è sempre definita

Qual è il legame tra press. meccanica e termodynamica?

La due decomposizioni A e B del tensore degli sforzi devono essere uguali:

$$(-p_v + \eta \operatorname{div} \vec{v}) \mathbf{I} + 2\mu (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = -p \mathbf{I} + \mathbf{\tau}$$

Le due parti astotropie e le due deviatoriche devono essere uguali:

uguagliano le parti astotropie:  $-p_v + \eta \operatorname{div} \vec{v} = -p$  Legge tra le pressioni

si vede sperimentalmente che per la maggior parte dei fluidi

$$\eta \operatorname{div} \vec{v} \ll p_v, p$$

$$\Rightarrow p \approx p_v \quad \text{ipotesi di Stokes}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\tau}_v = \eta \operatorname{div} \vec{v} \mathbf{I} + 2\mu (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{\tau}$$

allora però solo i pressioni sono indifferenti, e meno che il flusso non sia incompressibile e in tal caso è solo quella meccanica

(ci sono casi in cui  $\eta \operatorname{div} \vec{v}$  non è trascurabile, ad esempio quando lo effettivo di pressione è altissimo frequentemente)

Riassunto eq. costitutive per fluido newtoniano + eq. di Stokes + legge di Fourier

$$p = f(p, T) \quad (\text{per perfetto } p = pRT)$$

$$e = c(p, T) \quad (\text{per perfetto } e = c_v T)$$

$$\vec{q} = -K(T) \vec{v} \quad \text{Legge di Fourier}$$

$$(\mathbf{\tau}_v)_{ik} = -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v} S_{ik} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

$$\text{eq. Navier-Stokes (forma cons. E)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p \vec{v}) = 0$$

bil. massa

$$\frac{\partial p \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(p \vec{v} \vec{v}) = p \vec{v} - \vec{v} p + \operatorname{div}(p \vec{v})$$

bil. q.t. di moto

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( p \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left( p \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right) = p \vec{v} \cdot \vec{v} - \operatorname{div}(p \vec{v}) + \frac{2}{3} \operatorname{div}(p \vec{v}) \vec{v} - \operatorname{div} \vec{v}$$

bil. energia tot.

$$\text{eq. navier-Stokes (5)} + \text{eq. cont. (1)} \Rightarrow 16 \text{ eq. scalari}$$

$$p(1), \vec{v}(3), p(1), T(6), e(1), \vec{q}(3), T(1) \Rightarrow 16 \text{ inc. scalari}$$

$$\Rightarrow \text{insieme chiuso !!!}$$

↳ specificare il problema considerato (ad es. flusso d'aria intorno a un aereo)

tranne le condizioni iniziali e le condizioni al contorno

5 variabili: le condizioni inc. delle eq. di Navier-Stokes e le altre dell'eq. costitutiva

↳  $p, \vec{v}, e$  (o pure  $T$ ) ricavate da Navier-Stokes, le altre dall'eq. costitutiva

$$\Rightarrow c.i. \text{ sulle variabili relazionate da N-S}$$

$$p(x, y, z, 0) = p_0(x, y, z) \quad (\text{funz. nota})$$

sono per sol. ad esempio (o temperatura) c.i. note

c.c. dipendono dal tipo di contorno e sono più "incerte"

- es. flusso in un tubo



La matematica mi dice quanto c.c. posso

il problema ha matematicamente ben posto

→ sol. esiste, è unico e dipende in modo continuo dai dati al contorno

Lo fisico mi dice qual'è cc.

caro pozzo solido per un problema forza deve dare una condizione al bordo su  $\vec{v}$ e una sulla  $T$  (o energia interna)- cond. su  $\vec{v}$  o  $\rightarrow$  Condizione di aderenza (vel. rel. tra pozzo fluido e pozzo è zero)- cond. su  $T$  o  $\rightarrow$  Condizione di calore (temp. rel. tra pozzo fluido e pozzo è zero)alla pozzo  $\vec{v} - \vec{v}_p = 0$ 

vel. rel. fluido

pozzo solido

La cond. di aderenza si dà alle forze viscose

e quindi allo scorrere di q.t. di moto fra

pozzo fluido e pozzo

- cond. su  $T \rightarrow$  La pozzo ha delle proprie di cond. termico

bisogna scegliere le eq. di Navier-Stokes con quello del comportamento termico delle pozzate → TROPPO COMPLESSO per i problemi inf.

⇒ cond. semplificate (non realistiche ma utili)

5 equazioni: le condizioni inc. delle eq. di Navier-Stokes e le altre dell'eq. costitutiva

↳  $p, \vec{v}, e$  (o pure  $T$ ) ricavate da Navier-Stokes, le altre dall'eq. costitutiva

⇒ c.i. sulle variabili relazionate da N-S

sono per sol. ad esempio (o temperatura) c.i. note

c.c. dipendono dal tipo di contorno e sono più "incerte"

- es. flusso in un tubo

La matematica mi dice quanto c.c. posso

il problema ha matematicamente ben posto

→ sol. esiste, è unico e dipende in modo continuo dai dati al contorno

Lo fisico mi dice qual'è cc.

caro pozzo solido per un problema forza deve dare una condizione al bordo su  $\vec{v}$ e una sulla  $T$  (o energia interna)- cond. su  $\vec{v}$  o  $\rightarrow$  Condizione di aderenza (vel. rel. tra pozzo fluido e pozzo è zero)- cond. su  $T$  o  $\rightarrow$  Condizione di calore (temp. rel. tra pozzo fluido e pozzo è zero)alla pozzo  $\vec{v} - \vec{v}_p = 0$ 

vel. rel. fluido

pozzo solido

- cond. su  $T \rightarrow$  La pozzo ha delle proprie di cond. termico

bisogna scegliere le eq. di Navier-Stokes con quello del comportamento termico delle pozzate → non è compatibile con la fase di progetto in cui si

devono prendere molte configurazioni

⇒ necessarie semplificazioni delle eq. di N-S

Lo sviluppo di soluzioni negli anni '50-'70 si è basato su queste eq. semplificate

- la sol. num. per problemi di controllo ing. richiede risorse computazionali molto elevate

e tempi di risposta molto lunghi → non è compatibile con la fase di progetto in cui si

devono prendere molte configurazioni

- soluzioni analitiche esistenti, ma solo per problemi molto semplici di poco interesse ing.

- si risolvono numericamente al calcolatore (codici di computational fluid dynamics)

- la sol. num. per problemi di controllo ing. richiede risorse computazionali molto elevate

20/11/2020

Prima di cercare la semplificazione di N-S

Forme alternative Bilancio d'energia

Bilancio energia totale

$$\rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{v^2}{2}) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - dN(p \vec{v}) + \sum_{i=1}^3 dN(u_i \vec{v}_{i,i}) - dN \vec{q} \quad (1)$$

Ricavare un'eq. d. Bilancio per l'energia interna  $\Rightarrow e = e(p, T)$

per un gas perfetto  $e = c_v T$  quindi mi dà anche  $T$

Il termine a sinistra dell'eqn.

$$\rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{v^2}{2}) = \rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{D \frac{v^2}{2}}{Dt}$$

$\uparrow$  der. mot.  $e$        $\downarrow$  der. mot. energia cin.

Bilancio energia totale - bil. energia cin. = bil. energia interna

Bilancio energia cin. dal bil. qto d'mot.

$$\vec{v} \cdot \rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = (\rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + dN(\tau_v)) \cdot \vec{v}$$

$$\rho \frac{D \frac{v^2}{2}}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} + dN(\tau_v) \cdot \vec{v} \quad (2) \quad \text{bil. energia cinetica}$$

(1) - (2)

$$\rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{D \frac{v^2}{2}}{Dt} - \rho \frac{D \frac{v^2}{2}}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - dN(p \vec{v}) + \sum_i dN(u_i \vec{v}_{i,i}) - dN \vec{q} - \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} - dN(\tau_v) \cdot \vec{v}$$

$$- dN(p \vec{v}) = - \rho dN \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p$$

$$- dN(\tau_v) \cdot \vec{v} = - \sum_i \underbrace{dN(\tau_{v,i})}_{\text{der. m.}} u_i \underbrace{|}_{\text{negat. d.}} = - \sum_i dN(\tau_{v,i}) u_i$$

$$\sum_i dN(u_i \vec{v}_{i,i}) = \sum_i u_i dN(\tau_{v,i}) + \sum_i \tau_{v,i} \cdot \vec{v} u_i$$

$$\Rightarrow \rho \frac{De}{Dt} = - \rho dN \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \sum_i u_i dN(\tau_{v,i}) + \sum_i \tau_{v,i} \cdot \vec{v} u_i - dN \vec{q} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p - \sum_i dN(\tau_{v,i}) u_i$$

$$= - \rho dN \vec{v} + \sum_i \tau_{v,i} \cdot \vec{v} u_i - dN \vec{q} \quad \text{eqn. d. Bilancio energia interna}$$

Significato fisico bilancio energia totale ed interna

$$\rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{v^2}{2}) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - dN(p \vec{v}) + \sum_{i=1}^3 dN(u_i \vec{v}_{i,i}) - dN \vec{q}$$

flusso d'calore per  
unità di tempo e  
di volume

$\downarrow$  der. mot.  $e$        $\downarrow$  lavoro per unità di  
tempo e di volume delle  
forze di pressione       $\downarrow$  lavoro per unità di  
tempo e di volume delle  
forze inverse

lavoro per unità di  
tempo e di volume delle  
forze di pressione

lavoro per unità di  
tempo e di volume delle  
forze inverse

Le forze d'urto non  
contribuiscono alla var. d'  
energia interna

lavoro per unità di  
tempo e di volume delle  
forze di pressione fatto  
per le deformazioni isotropiche  
(agendo alla var. di volume)

lavoro per unità di  
tempo e di volume delle  
forze inverse per  
le porose contrappese  
della deformazione

$$\sum_i \tau_{v,i} \cdot \vec{v} u_i = \phi$$

surfase d'  
disposizione

Cioè essendo stabile trovare il bilancio d'entalpia

$$h = e + \frac{pv}{\rho}$$

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{D \frac{v^2}{2}}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{Dp}{Dt}$$

$\uparrow$  bil. energia int.       $\uparrow$  bil. massa ( $\frac{Dp}{Dt} + \rho dN \vec{v} = 0$ )

$$\rightarrow \rho \frac{Dh}{Dt} = - \rho dN \vec{v} + \phi - dN \vec{q} + \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \rho dN \vec{v}$$

$$= \phi - dN \vec{q} + \frac{Dp}{Dt} \quad \text{bilancio d'  
entalpia}$$

Entalpia Totale

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2}$$

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \left( \frac{Dh}{Dt} + \frac{D \frac{v^2}{2}}{Dt} \right) \rho$$

$\uparrow$  bil. entalpia       $\uparrow$  bil. energia cin.

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \phi - dN \vec{q} + \frac{Dp}{Dt} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \sum_{i=1}^3 dN(u_i \vec{v}_{i,i})$$

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \frac{Dp}{Dt} + \sum_{i=1}^3 dN(u_i \vec{v}_{i,i}) - dN \vec{q} \quad \text{bilancio d'  
entalpia Totale}$$

Bilancio d'entropia

$$\text{def (primo principio): } T dS = dQ + \nu d(\frac{1}{P}) = dQ - \frac{\nu}{P^2} dP$$

$$\rightarrow \rho T \frac{DS}{Dt} = \left( \frac{DQ}{Dt} - \frac{\nu}{P^2} \frac{DP}{Dt} \right) \rho$$

$\uparrow$  bil. ent.       $\uparrow$  bil. massa

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = - \rho dN \vec{v} + \phi - dN \vec{q} + \frac{p}{\rho} \rho dN \vec{v}$$

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \phi - dN \vec{q}$$

RiconSIDERARE il bil. d'energia interna

$$\rho \frac{De}{Dt} = - \rho dN \vec{v} + \phi - dN \vec{q}$$

$\downarrow$  parte rev.       $\downarrow$  parte irreversibile delle  
var. d'e

• Bilancio energia totale

X // // cinetica

// // interno

• Bilancio d'entalpia

// // totale

// // entropia

Sono tutti equivalenti tranne quello d'energia cinetica perché ricavato dalla qto d'urto.

Semplificazione delle eqn. del moto

Eg. N-S  $\rightarrow$  sistema d'eqn. differenziali accoppiate alle der. partit., evolutive, non lineari

- Possibile ipotesi semplificativa  $\rightarrow$  flusso stazionario: le variabili fluidodinamiche non dipendono dal tempo  $\frac{\partial}{\partial t} \cdot = 0$

La validità di tale ipotesi può dipendere dalla scelta del sistema di riferimento



corpo che si muove con v rel. cte

in un fluido

$\cdot \vec{v} = (0, x, y, z)$  solido al fluido

Fluido "intorno al corpo" fermo, vicino al corpo si mette in moto per effetto delle perturbazioni dovute al passaggio  $\rightarrow$  il flusso non potrà mai essere stazionario

Perché il corpo si muove con v rel. cte  $\rightarrow$  SdR solido al corpo



$$\vec{U} = (0, x', y', z')$$

corpo fermo e investito da un flusso uniforme

in questo SdR il flusso può essere stazionario (formazione, pie...)



In moto/ fluido sottratto



SE ho un corpo che si muove con v cte in un fluido

muovo un SdR solido al corpo.

23/11/2020

### Semplificazione delle eqn di Navier - Stokes

- Flusso stazionario:  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Non basta come ipotesi ad arrivare ad eqn risolvibili in forma chiusa e numericamente in modo rapido

- Flusso incompressibile  $\rho = \text{cte}$  (densità del fluido)

E' un'ipotesi giustificata: - per i liquidi

- per i gas quando il numero di Mach è "piccolo" ( $M \leq 0,3$ )

Obliamo visto che  $\frac{\Delta p}{\rho} \sim \frac{1}{2} M^2$  e con  $M \leq 0,3 \rightarrow \frac{\Delta p}{\rho} \ll 1 \rightarrow$  flusso incompressibile

ordine di grandezza  
var. d'adatto relativa  
al moto

### Semplificazione delle eqn

$$\cancel{\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

$$\cancel{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f} - \vec{\nabla} p + \rho \operatorname{div} (\vec{v}_v)}$$

$$\cancel{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{f} - \vec{\nabla} p} \quad \text{bil. energia interna}$$

gas perfetto:  $e = c_v T$ ,  $\rho = \text{cte}$

$\rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0 \leftrightarrow \operatorname{div} \vec{v}$  legge alle var. d'volume d'un cont. masso volumetto di fluido

apn. bil. energia interna:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{f} - \vec{\nabla} p \rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{f} - \vec{\nabla} p \quad \text{D}$$

Per la legge di Joule:  $\vec{f} = -K(T) \nabla T$  sostituiamo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_v} (\vec{f} + \operatorname{div} (K(T) \nabla T))$$

$\Rightarrow$  Eq. in semplificata (fin'ora)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\vec{v}_v) \end{array} \right.$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_v} (\vec{f} + \operatorname{div} (K(T) \nabla T)) \right.$$

inc.:  $\vec{v}, \rho, T$

La temperatura oppone nel bil. dell'energia interna e nel termine  $\vec{v}_v$ :

$$(\vec{v}_v)_{ik} = -\frac{2}{3} \mu \cancel{\operatorname{div} \vec{v}} S_{ik} + \cancel{\mu} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

$\downarrow \mu(T)$  cost. viscose molecolare

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_v} (\vec{f} + \operatorname{div} (K(T) \nabla T))$$

Le var. di temperatura in un flusso incompressibile è dovuta ai termini visosi e al flusso di calore  $\rightarrow$  se non ci sono sorgenti di calore esterne, la var. di temp. dovuta a quest. due termini è molto più piccola di quella che fa nel calo compressibile dovuto al termine di pressione ( $-\rho \operatorname{div} \vec{v}$ )

$\rightarrow \Delta T \ll 1$

$\mu(T) \propto \sqrt{T}$  quindi pressione orde dura  $\mu \approx \text{cte}$  ip. giustificato per  $K(T) \propto \sqrt{T}$  K  $\approx \text{cte}$  flusso incompressibile

$\Rightarrow$  discoprirete eqn. d'bil. energia interna da bil. d'urto e q.tà d'moto

$\Rightarrow$  ulteriori semplificazioni dei termini di contengono  $\mu$  e  $K$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\vec{v}_v)_i = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{v}_{ek}}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right) =$$

$$= \frac{\mu}{\rho} \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) =$$

$$\xrightarrow{\text{visc. aerostatica}} = Y \left[ \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \rightarrow \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\vec{v}_v)_i = Y \Delta u_i \quad i=1,2,3$$

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\vec{v}_v) = Y \Delta \vec{v}$$

nel bil. energia interna

$$\operatorname{div} (K(T) \nabla T) = K \operatorname{div} (\nabla T) = K \Delta T$$

$\rightarrow$  lo d'urto di un gradiente è un laplaciano

Eqn del moto (eqn N-S) per flusso incompressibile

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{bil. massa} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + Y \Delta \vec{v} \quad \text{bil. q.tà d'moto} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + Y \Delta \vec{v} \end{array} \right.$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\rho c_v} (\vec{f} + K \Delta T) \right.$$

Guadagno?

① apn. d'bil. energia interna è discopriabile da bil. massa e q.tà d'moto

$\rightarrow$  da bil. massa e q.tà d'moto ricavo  $\vec{v}, p$

$\rightarrow$  da bil. energia interna ricavo  $T$

$\rightarrow$  spesso possiamo ignorare il bil. energia interna  $\Rightarrow$  eliminare un'eqn

② La densità non è più un'inc.  $\rightarrow$  cte dipendente dal fluido

③ Le eqn. d'bil. massa e q.tà d'moto sono un rest. d'eqn. alle due parti, decapitate e non lineare (termine convettivo non lineare)

④ La pressione oppone sotto forma di  $\vec{\nabla} p$   $\rightarrow$  "complica" la risoluzione

$\Rightarrow$  esistono sol. analitiche per problemi d'interesse pratico, ma sono ancora lontane da altre sol. ingegneristiche

• La sol. numerica delle eqn. d'urto per flusso incompressibile richiedono ancora tempi di calcolo troppo lunghi

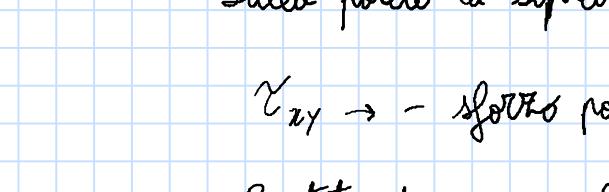
$\Rightarrow$  O' punto d'incompatibilità da sola non basta !!!

Soluzioni analitiche delle eqn. d'urto per flusso incompressibile per problemi semplici d'interesse pratico

• Flusso d' Poiseuille piano

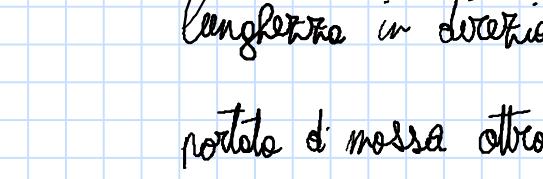
Flusso fra due pareti piane infinite

flusso incompressibile e stazionario e  $f = 0$



infinito nella direz.  $x \neq 0$ ,  $\neq$  distanza  $2h$  in dir.  $y$

Modellino per piani piani con dimensioni  $\gg$  della loro distanza



flusso bidimensionale nel piano  $x, y \rightarrow w = 0$

$$\vec{v}(u(x,y), v(x,y), 0)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

la parete è infinita entro in dir.  $x \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$u \neq 0$  parete provoca flusso in dir.  $x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$\rightarrow$  non si smette perché è la regola del moto del fluido

Per avere  $u > 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} < 0$

• ipotesi:  $\frac{\partial u}{\partial x} = -G$   $\rightarrow$  cte nata  $> 0$

$$\rightarrow \frac{G}{\rho} + Y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{G}{\rho Y}$$

eqn. d'ordine diff. ordinario d'ordine secondo

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

$\rightarrow u(y) = -\frac{G}{2\rho Y} y^2 + A y + B$

c.c.

$$u(h) = 0 \quad \text{cond. d'aderenza}$$

$$u(-h) = 0 \quad \text{cond. d'aderenza}$$

$$u(h) = -\frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 + A h + B = 0$$

$$u(-h) = -\frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - A h + B = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = \frac{G h^2}{2 \rho Y} \end{array} \right.$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} (h^2 - y^2)$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

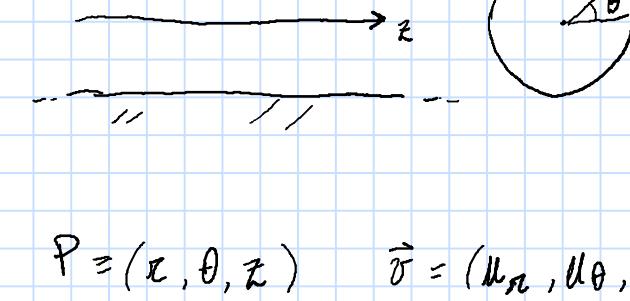
$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} y^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{G}{\rho Y} h^2 - \frac{1}{2} \frac{G}{\rho$$

27/11/2020

### Flusso di Hagen - Poiselle

Flusso in un condotto di sezione circolare o lunghezza infinita  $\rightarrow L \gg R$



- flusso incompressibile
- flusso stazionario
- $\vec{g} = 0$
- $\frac{\partial u}{\partial z} = -G$   $G > 0$  nota

$$P = (x, \theta, z) \quad \vec{v} = (u_x, u_\theta, u_z)$$

$$\text{Lung. infinita} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\text{nelle cord. } \theta \text{ il problema è periodico} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad u_\theta = 0$$

$$\vec{v} = (u_x(x), 0, u_z(z))$$

spese fluido massa

$$\mathrm{d}V \vec{v} = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\mu} \frac{\partial (u_z z)}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad u_x z = C \text{te}$$

cond. aderenza alla parete

$$u_x(R) = 0 \rightarrow u_x(R) = 0 \rightarrow u_x = 0$$

spese fluido q.tà d' moto in direzione z

$$\underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial t}}_{\text{tempe. stat.}} + \underbrace{u_x \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_x}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{u_z}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z}}_{\text{tempe. convett.}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{G}{\rho} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{dipende da una sola variabile}$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z}}_{\text{tempe. stat.}} = -\frac{G}{\mu}$$

$$\hookrightarrow \chi \frac{d u_z}{d z} = -\frac{G}{\mu} z^2 + \frac{A}{R}$$

$$\Rightarrow u_z(z) = -\frac{G}{4\mu} z^2 + A \ln z + B$$

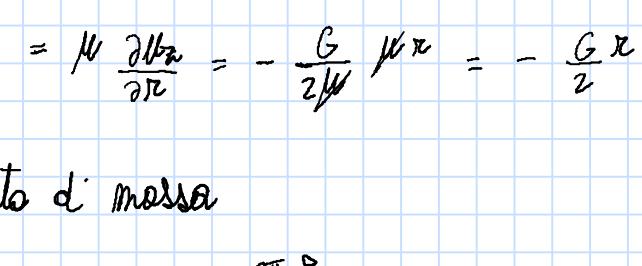
imposto cond. di aderenza alla parete

$$u_z(R) = 0 \rightarrow B = \frac{G}{4\mu} R^2$$

$$u_z(0) \text{ finita} \rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow u_z(z) = \frac{G}{4\mu} (R^2 - z^2)$$

$$u_{z,\text{max}} = u_z(0) = \frac{G}{4\mu} R^2 \quad \begin{array}{l} \text{ogni parte} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{array}$$



Sol. molto utile in idraulico

A basso num. d Re  $Re = \frac{U_{max} R}{\nu}$  la sol. non tiene conto della turbolenza (flusso laminare)

$$- \vec{v} = (0, w_\theta, 0) \quad w_\theta = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial r} = +\frac{G}{2\mu} z > 0$$

$$w_{\theta,\text{max}} = \frac{G}{2\mu} R$$

$$- \tau_z = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{G}{2\mu} \mu z = -\frac{G}{2} z \quad \tau_z|_{\text{parete}} = -\frac{G}{2} R$$

- portata d' massa

$$W = \int_S \rho u_z dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho u_z r d\theta dr = \int_0^R \rho \frac{G}{4\mu} (R^2 - r^2) r dr = \rho \frac{G}{2\mu} \pi \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \rho \frac{G R^4}{8\mu} \pi$$

### Flusso di Couette

Flusso tra due piastre parallele infinite a distanza h, con una piatta in movimento a v.z c.t.

In:

• flusso incompressibile

•  $\vec{g} = 0$

•  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

flusso 2D in  $x, y \rightarrow \begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial}{\partial z}=0 \end{cases}$

cond. aderenza alle piastre

$$v(0) = 0 \rightarrow w = 0$$

$$v(h) = V \rightarrow A = \frac{V}{h}$$

$$\rightarrow u(y) = \frac{V}{h} y$$

utile per prob. d' lubrificazione

realistica se  $L_x, L_z \gg h$

rotazione c.t. negativa

$$w_z = \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{V}{h} = \mu \frac{V}{h} y$$

$v'(h) = \mu \frac{V}{h}$  perché è diretta come y

$$v(0) = -\mu \frac{V}{h} \quad \text{perché è diretta opposta}$$

$$W = \int_S \rho u dS = \int_0^h \int_0^{L_x} \rho \frac{V}{h} y dy dx = \rho \frac{V}{2} h L_x$$

$$\text{Per esp. stesso caso con } \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\mathrm{d}V \vec{v} = 0 \rightarrow v = C$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} G$$

$$\rightarrow u(z) = -\frac{G}{2\mu} z^2 + A z + B$$

$$u(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$u(h) = V \rightarrow A = \frac{V}{h} + \frac{G h}{2\mu}$$

$$u(z) = -\frac{G}{2\mu} z^2 + \left( \frac{V}{h} + \frac{G h}{2\mu} \right) z = \frac{V}{h} z + \frac{G}{2\mu} z (h - z)$$

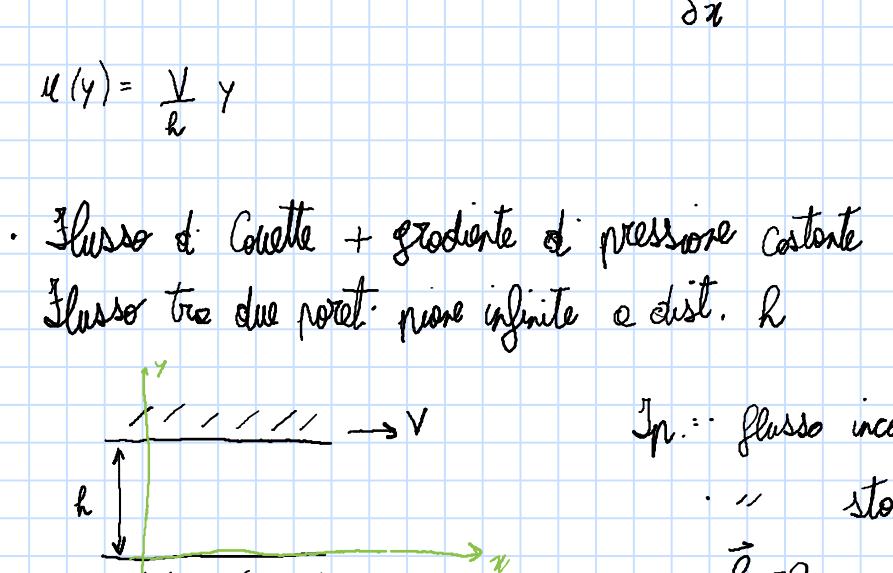
$$-\frac{G}{\mu} z + \frac{V}{h} + \frac{G h}{2\mu} = 0 \quad z = \frac{V}{G} + \frac{h}{2}$$

$$w_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = +\frac{G}{\mu} z - \left( \frac{V}{h} + \frac{G h}{2\mu} \right)$$

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -Gy + \frac{V}{h} + \frac{Gh}{2}$$

Sol. analitiche delle eqn. di N-S per flusso incompressibile

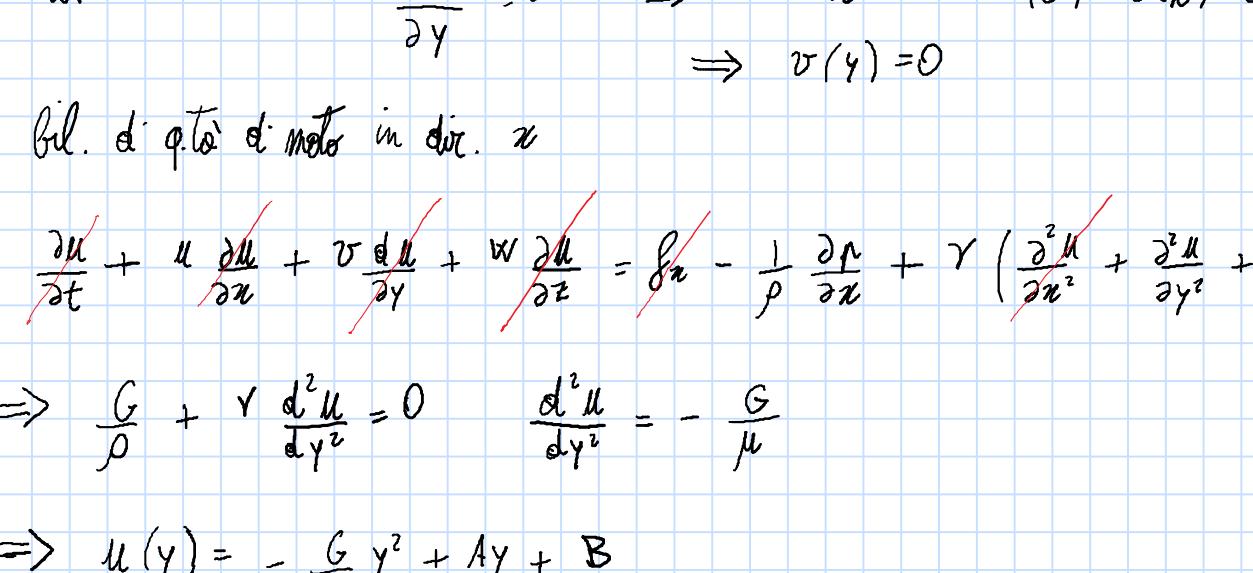
Flusso d' Couette



$$u(y) = \frac{V}{2} y$$

• Flusso d' Couette + gradiente di pressione costante

Flusso fra due piani neri infiniti a dist. h



$$\text{piani inf. } \rightarrow w=0, \frac{\partial u}{\partial z}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\vec{v} = (u(y), v(y), 0)$$

Bil. d' massa

$$dN \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v = C_0 \quad v(0) = v(h) = 0 \quad \Rightarrow v(y) = 0$$

bil. d' qta d' moto in dir. x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \vec{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{G}{\mu}$$

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{G}{\mu} y^2 + A y + B$$

c.c.

$$u(0) = 0 \quad B = 0$$

$$u(h) = V \quad A = \frac{G}{\mu} h + \frac{V}{h}$$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{V}{h} y + \frac{G}{\mu} y \left( h - y \right)$$

cond. d' aderenza

& questi non compatibili con le non lineari delle eqn. di N-S

$\underbrace{\text{piani d' inf.}}_{\text{piani d' inf.}} \quad \underbrace{\text{piani quadrati}}_{\text{piani d' inf.}} \quad \text{flusso d' Couette piano}$   
 $= \text{grado d' simmetria}$

MA

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \gamma \Delta \vec{v}$$

$\underbrace{\text{termine conv.}}_{\text{non lineare}}$

nel caso d' flusso d' Couette e parallelo piano il termine convettivo va a zero  
per le piani regolari  $\rightarrow$  il problema diventa lineare

In generale le eqn. di N-S endo con le p. d' flusso incompressibile sono troppo complicate per essere usate in fase d' progetto accademico di ol/olce

$\Rightarrow$  FLUSSO INCOMPRESSIBILE + FLUSSO IRROTATORIALE

$$\vec{w} = 0$$

1. Quando è giustificato l'ipotesi d' flusso irrotazionale?  $\rightarrow$  si vede poi LOL

2. Semplificazione delle eqn. di N-S che ricorrono dell'ipotesi:

Eqn. d' N-S per flusso incompressibile

$$dN \vec{v} = 0 \quad \text{Bil. massa}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \gamma \Delta \vec{v} \quad \text{Bil. qta d' moto}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\rho c_v} (\vec{f} + K \Delta T) \quad \text{Bil. energia (disoccupata)}$$

Eqn. d' flusso irrotazionale

$$\vec{w} = \text{ret. } \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) \quad \varphi : \text{grado. scalare} \rightarrow \text{potenziale d' velocità}$$

perciò  $\varphi$  ret( $\vec{v}\varphi$ ) = 0

$$\vec{v} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{ret}(\vec{v}\varphi) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) i - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) j + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) k = 0$$

$$\text{ret. } \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{v}\varphi$$

sostituisco

$$\rightarrow dN \vec{v} = dN(\vec{v}\varphi) = 0 \rightarrow \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \gamma \Delta \vec{v} \quad \text{effetto delle identità ott. per far comparire la vorticità}$$

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{v} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) + \vec{v} \times \vec{v}$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v} (dN \vec{v}) - \text{ret}(\text{ret} \vec{v})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{v} + \vec{v} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \gamma \text{ret}(\vec{v})$$

$\uparrow$   
per le p. d' flusso irrotazionale va via il termine viscoso

per quanto riguarda i compi d' p e  $\vec{v}$ , con le p. d' flusso incompressibile + irrotazionale il flusso si comporta come non viscoso

all'eq. n. della temperatura  $\theta$  non s'annulla quindi il termine viscoso

viscoso forte

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\downarrow \quad \rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right)$$

• ipotesi aggiuntiva: forze di massa conservative

$$\vec{f} = -\nabla \Sigma \quad \Sigma(x, y, z)$$

$$\Rightarrow \vec{v} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + \vec{v} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) = -\nabla \Sigma - \vec{v} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right)$$

$$\vec{v} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) + \Sigma + \frac{1}{\rho} p = 0$$

Cte nella spazia

$\underbrace{\text{flusso non}}_{\text{stazionario}} \quad \underbrace{\text{flusso stazionario}}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Sigma + \frac{1}{\rho} p = f(t)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} p = \text{cost.}$$

$\hookrightarrow$

Tutte Bernoulli

• forza per  $\Sigma = g z$

se è cost. d' quota sono piccole  $\rightarrow$  a teorizzabile

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} p = \text{cost.}$$

$v, p_\infty, \infty$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

la cost. si determina dalle condizioni d' flusso induttato

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} p = \frac{2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} + \Sigma_\infty$$

NOTE

RIEPILO GII UNO

eqn. del moto per flusso incompressibile e irrotazionale con forze d' massa conservative

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{Bil. d' massa}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{1}{\rho} p = \vec{f}(t) \quad \text{flusso non staz.}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \Sigma = \text{cost.}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} p = \text{cost.}$$

$\hookrightarrow$

flusso stazionario

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Sigma + \frac{1}{\rho} p = f(t)$$

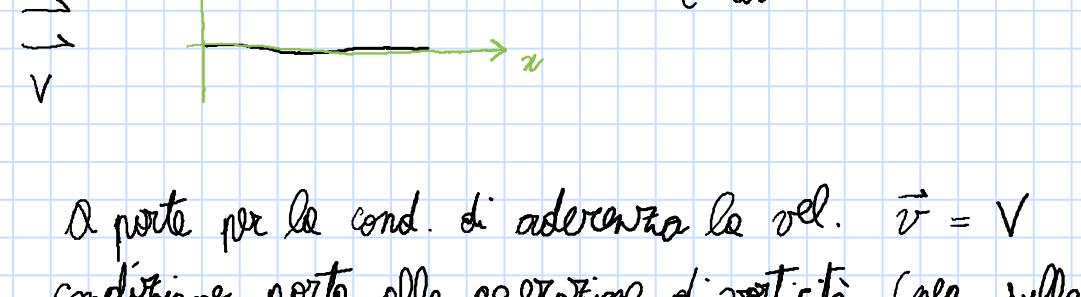
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} p = \text{cost.}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} p = \text{cost.$$

3/12/2020

Quando è giustificata l'ip. di flusso irrotazionale?

Non è possibile in presenza di una parete piana



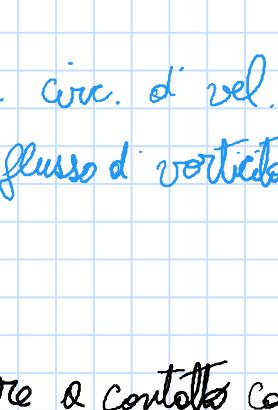
A parte per la cond. di aderenza la vel.  $\vec{v} = V$ , ma tale condizione porta alla generazione di vorticità (neg. sulla faccia superiore e pos. su quella inferiore)

**Quanta vorticità si forma?**

$$\text{TEO di Stokes} !!! \quad \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS$$

calcolo della vorticità di un  
rettore su una  
linea chiusa

sup. racchiusa dal  
rettore



$$\Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS$$

vett. tg della curva d.  
lung. del rettore in  
verso antiorario

dipende tra circ. di vel. su linea  
chiusa e flusso di vorticità su sup.

Applichiamo il TEO di Stokes al volume elementare e controlla con la destra.



$$\Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{Sx} -U dz$$

$\vec{v} = 0$

$$\int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS = \int_{Sx} \omega_z dz \approx \omega_z dx dy$$

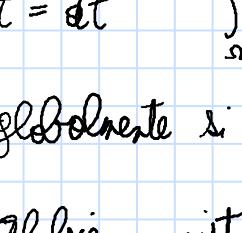
retto infinitesimo e  
quindi  $\omega_z \approx c_t$

$$\Rightarrow -U dx = \omega_z dx dy \rightarrow \underline{\omega_z dy} = -U$$

vorticità in uno strato vicino alla lastre  
di spessore  $dy$

$\neq 0$  sulla faccia superiore della lastre

Q.tà globale di vorticità che si forza nello strato  $dy$  sulla parete sup. è pari a  $-UL$



$$\Gamma = \dots = U dx$$

$$\int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS = \omega_z dx dy$$

$$\Rightarrow \omega_z dy = U \quad \text{Q.tà di vorticità in uno strato di spess. } dy \text{ sulla parete yg.}$$

$\Rightarrow$  Q.tà globale di vorticità è  $UL$

- **Piropolo**: quando la lastre si mette in moto si formano una q.tà di vort. in uno strato di spessore  $dy$  sulla faccia superiore pari a  $-UL$  e opposto sulla faccia inferiore

$$t=0 \quad \vec{w}=0 \quad \int_S \vec{\omega} d\Omega = 0$$

↑ compo  
di moto

$$t=dt \quad \int_S \vec{\omega} d\Omega = 0 \quad \begin{array}{c} -UL \\ UL \end{array} \quad \text{SIMMETRIE}$$

globalmente si annulla

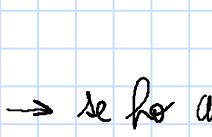
altrimenti visto allo posteriore, ma lo stesso meccanismo di prod. di vorticità avviene  $\neq t$

$\hookrightarrow$  la parete è una sorgente continua di vorticità a causa della cond. di aderenza

- **CORPO SIMMETRICO** con SPESSEZZO con vel. c.t. parallela all'asse di sim.



volume elementare di fluido sulla superficie superiore



$$\text{su AB} \rightarrow \vec{v}=0$$

$$\text{su DC} \rightarrow v_t(z) \neq U \text{ perché il corpo ha spessore } \Rightarrow \text{flusso deve deviare}$$

Applico Stokes

$$\int_{AB+BC+CD+DA} \vec{v} \cdot d\vec{l} = -v_t(z) dy \quad \int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS = \omega_z(z) dy$$

$$\Rightarrow \omega_z(z) dy = -v_t(z) dy$$

in uno strato di spessore  $dy$  sulla faccia sup. si forma

una vorticità neg. pari a  $-v_t(z)$

La vort. è diversa sezione per sezione

Sulla faccia inf. sarà identica e opposta

$$\Rightarrow \omega_z dy = v_t(z)$$

$$\bullet \int_S \vec{\omega} d\Omega = 0 \quad \text{SIMM.}$$



$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{\omega} d\Omega = 0$$

↑ compo  
di moto

teo d. cond. della vorticità (nel caso 2D è difficile da dim.)

dominio nel 1880

dominio non semp. convesso

$\Rightarrow$  se ho un corpo che parte dalla quiete  $t=0 \quad \vec{w}=0$  poiché  $\vec{v}=0$

$$\int_S \vec{\omega}(x, y, z, 0) d\Omega = 0 \quad \text{per il TEO d. cond. della vorticità}$$

↓

$$\int_S \vec{\omega}(x, y, z, t) d\Omega = 0 \quad \neq t$$

$\Rightarrow$  la vort. di vort. positiva che si genera una volta che il corpo si è messo in moto deve essere bilanciata da una stessa vort. negativa

$\hookrightarrow$  vole per un corpo di forma generica

la cond. di aderenza fa sì che la parete sia una sorgente continua di vorticità

(\*)

$\hookrightarrow$  NON posso usare la cond. di flusso irrotazionale

Una volta formata alla parete dove va a finire?

SPERANZA: che rimanga confinato in una porzione piccola del corpo di moto

$\vec{w}$  = q.m. effett

$\vec{v}=0$

q.m. semplici

Ricorda l'eqn. della dinamica della vorticità !!!

7/12/2020

Dove va a finire le vorticità che si formano alla parete?

→ Eq. dinamico delle vorticità per flusso incompressibile + forze di massa conservative

$\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$  punto dell'eqn d'bil. d'grd si mette in forma non conservativa Lavoriamo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}_{\text{eqn della dinamica delle vorticità}} = -\nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{F}_p + \gamma \Delta \vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{w} \wedge \vec{v} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + \gamma \Delta \vec{v}$$

Applichiamo l'operatore rotore a tutti i termini:

$$\cdot \text{rot} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{w}$$

$$\cdot \text{rot} (\vec{w} \wedge \vec{v}) = \vec{w} \text{ rot } \vec{v} - \vec{v} \text{ rot } \vec{w} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{w} - \vec{w} \cdot \nabla \vec{v}$$

da  $\text{rot } \vec{v} = 0$   
 $\vec{w} \text{ è a d. nulla}$

$$\rightarrow \text{rot} (\vec{w} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{w} - \vec{w} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\cdot \text{rot} \left[ \nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) \right] = 0 \quad \text{rot} (\nabla \cdot) = 0$$

$$\cdot \text{rot} (\gamma \Delta \vec{v}) = \gamma \Delta (\text{rot } \vec{v}) = \gamma \Delta \vec{w}$$

Applichiamo l'operatore rotore al bil. grd d'grd ottengo

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{w} - \vec{w} \cdot \nabla \vec{v} = \gamma \Delta \vec{w} \quad \text{eqn della dinamica delle vorticità per flusso incompressibile e con forze di massa conservative}$$

### SIGNIFICATO TERMINI

$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \rightarrow$  variaz. d' $\vec{w}$  nel tempo in punti fissi dello spazio

$\vec{v} \cdot \nabla \vec{w} \rightarrow$  termine convettivo

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{w} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \quad \text{dec. temporale di } \vec{w}$$

$\vec{w} \cdot \nabla \vec{v} \rightarrow$  non ha analogo nell'eqn d'N-S

$\gamma \Delta \vec{w} \rightarrow$  termine radiale

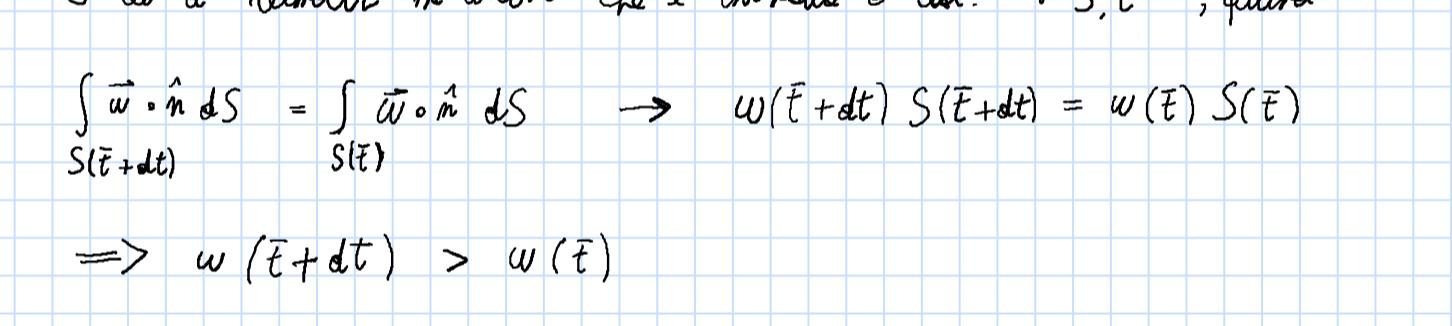
$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{w} = \underbrace{\gamma \Delta \vec{w}}_{\substack{\text{dec. temporale} \\ \text{termine radiale}}} + \underbrace{\vec{w} \cdot \nabla \vec{v}}_{\substack{\text{?} \\ \text{vediamo!}}}$$

Il termine di pressione e di forze di massa (conservative) non influenzano la dinamica delle vorticità.

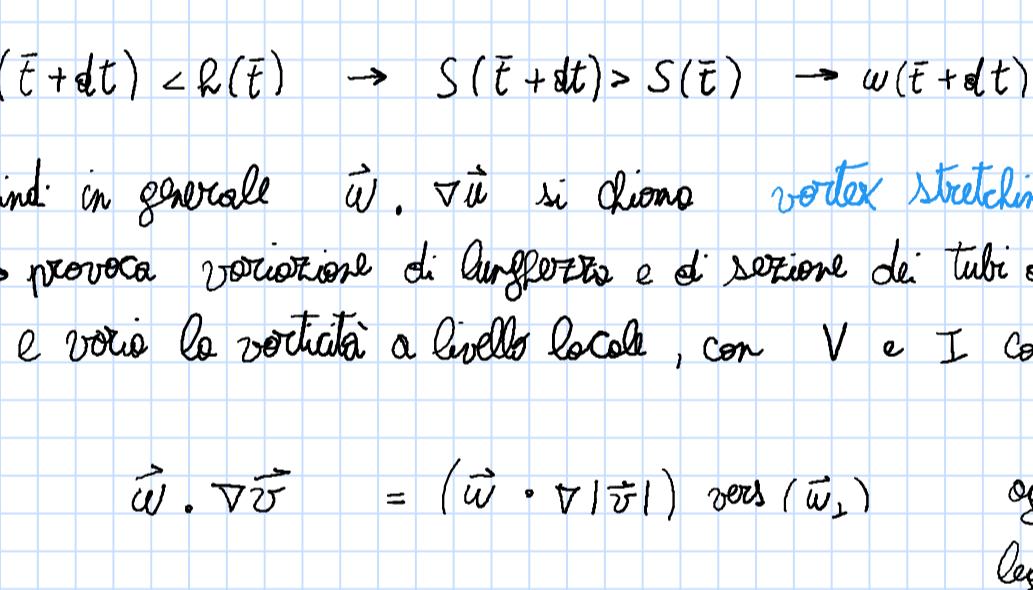
### Significato fisico d' $\vec{w} \cdot \nabla \vec{v}$

- Def. il concetto di linea vorticale (o di vorticità):

Linee tangenti in ogni loro punto al vettore vorticità a un istante fissato  $t$



- Tubo di vorticità  $\rightarrow$  insieme di tutte le linee di vorticità presenti per uno stesso istante



$$I = \int \vec{w} \cdot \hat{n} dS$$

flusso d' vorticità attraverso la

sezione  $S$  del tubo

$$\text{Per il teo di Stokes} \quad I = \oint \vec{v} \cdot \hat{n} d\ell = \int \vec{w} \cdot \hat{n} dS$$

Osservazione: in generale l'intensità dipende dalla sezione e a parte di sezione dipende dal tempo

- Consideriamo nullo il termine viscolo per studiare il significato fisico di  $\vec{w} \cdot \nabla \vec{v}$ , poi sommiamo gli effetti.

$\rightarrow$  in d' flusso non visoso  $\rightarrow$  valgono i teoremi di Helmholtz

### Teoremi di Helmholtz

- Le linee di vorticità sono linee materiali, cioè composte sempre dalle stesse particelle fluidi

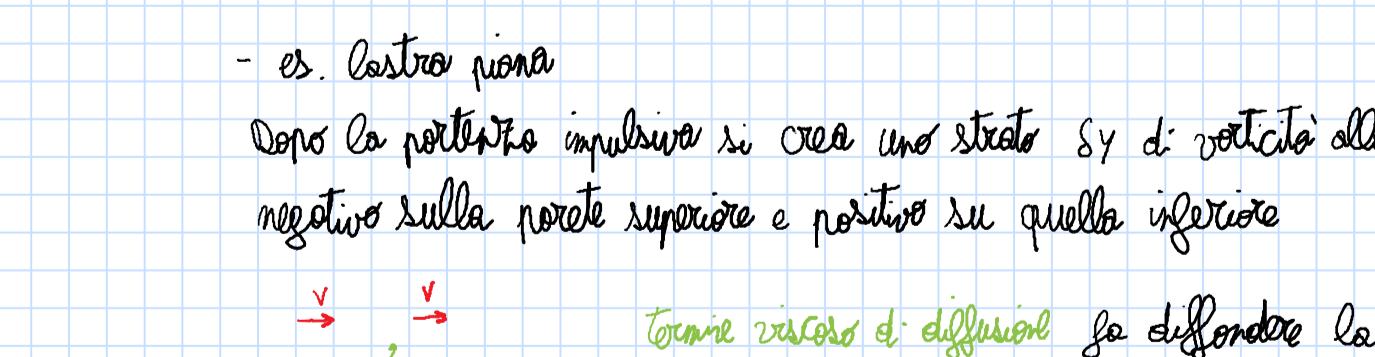
$\rightarrow$  tubo di flusso è un volume materiale  $\rightarrow$  posso applicare i bilanci della meccanica dei fluidi.

- L'intensità di tubo di vorticità è costante nel tempo

- L'intensità di tubo di vorticità è anche indipendente dalla sezione

- Considero un tubo di vorticità infinitesimo

cilindro retto con asse parallelo alla direzione locale della vorticità



$$\rightarrow \vec{w} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\bullet \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} = \vec{u} \cdot \nabla (1 \vec{u} \text{ vers } \vec{w}) = \underbrace{(\vec{w} \cdot \nabla \vec{u})}_{\text{velocità}} \text{ vers } \vec{w}$$

termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$$\bullet \text{Supponendo } u_B > u_A$$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec{u} \cdot \nabla u_A \rightarrow$  termine che esiste lungo l'asse del tubo vorticale dentro alla zon. della corrente parallela a  $\vec{w}$  e in d.  $\vec{w}$

$\rightarrow$   $\vec{u} \cdot \nabla u_B > \vec$

Rigido

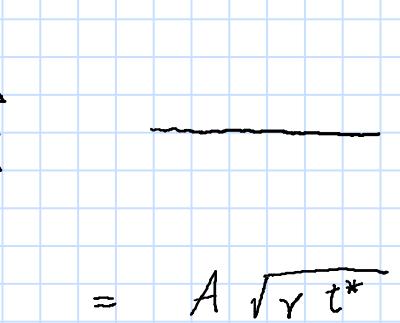
. Il vortice solido a causa della cond. d'aderenza è sorgente di vort.

. Dove va a finire?

$$\hookrightarrow \text{Eq. di dinamica delle vorticità: } \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + \gamma \Delta \vec{\omega}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}_z}{\partial t} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega}_z}_{\text{Transporto le vorticità}} = \underbrace{\gamma \Delta \vec{\omega}_z}_{\text{fa diffondere la vorticità in tutte le direzioni}}$$

Dopo un transitorio si raggiunge una situazione stazionaria



Lo spessore dello strato dipende dall'importanza dei termini correttivi rispetto ai visosi, cioè dipende dal n. di Reynolds  $Re = \frac{UL}{\nu}$  che è il rapporto tra l'ordine di grandezza di termini correttivi e visosi.

Soluzione esatta per la testa piana

$$\frac{\partial \vec{\omega}_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega}_z = \gamma \Delta \vec{\omega}_z$$

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_0 & \text{per } x < L \\ \vec{v}_0 & \text{per } x > L \end{cases}$$

$$\int \frac{\partial \vec{\omega}_z}{\partial t} = A \sqrt{\gamma t^*}$$

spessore in cui è contenuta  
una certa percentuale  
di vorticità (33%)

$$\Rightarrow \delta = A \sqrt{\frac{\gamma}{L} t^*}$$

spessore della zona  
rispetto alla dimensione  
longitudinale

A: c'è nota da dipende dello spessore  
scatto (con il 33%,  $A \rightarrow 5$ )

$t^*$ : tempo caratteristico; se  $\delta$  è lo spessore con  
la maggior parte di vort. allo spigolo posteriore  
della testa, è il tempo che a volte una part.  
fluida per ordine di spigoli anteriori e posteriori

Il risultato quantifica la dipendenza da  $Re$  e vale per la testa piana.

Per un corpo di forma aperta si fa qualitativamente lo stesso

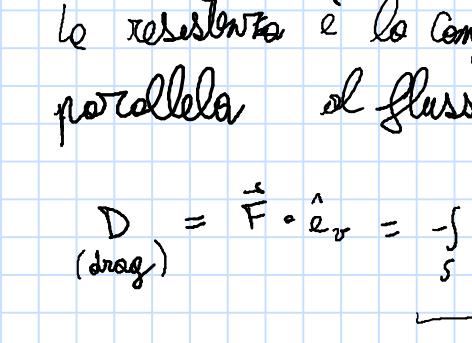
$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_0 & \text{per } x < L \\ \vec{v}_0 & \text{per } x > L \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \rightarrow \text{flusso orario} \rightarrow \text{ap. ai simboli}$$

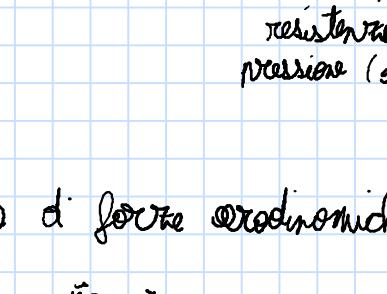
$$\vec{v} = \vec{v}_0 \quad \vec{v}_0 = \begin{cases} \vec{v}_0 & \text{per } x < L \\ \vec{v}_0 & \text{per } x > L \end{cases}$$

Per determinare la forza sul corpo dovo determinare pressione e forza  
viscosa sul corpo, che è immerso nella zona in cui è presente vorticità  
→ risolvere le equazioni N-S

Definizione delle forze aerodinamiche agenti su un corpo in flusso



le forze aerodinamiche agenti dipendono  
dalla forza di contatto



Superficie dS infinitesima in un punto P

Risultante forze aerodinamiche agenti sul corpo

$$\vec{F} = \int_S (-p \hat{n} + \vec{t}_n) dS = - \underbrace{\int_S p \hat{n} dS}_{\text{contributo di pressione}} + \underbrace{\int_S \vec{t}_n dS}_{\text{contributo viscosa}}$$

$$\vec{F} \text{ ha intensità e direzione che dipendono dal problema}$$

La portanza è la componente delle risultante delle forze aerodinamiche in direzione  
perpendicolare al flusso orizzontale (direzione orientamento corpo)

$$\vec{F} = \vec{F} \cdot \hat{e}_r = - \int_S p \hat{n} \cdot \hat{e}_r dS + \int_S \vec{t}_n \cdot \hat{e}_r dS$$

La direzione è trovata con  
la somma vettoriale delle due  
componenti, quindi si ha che  
l'intensità incognita e varia punto  
per punto

$$D_{(porta)} = \vec{F} \cdot \hat{e}_r = - \int_S p \hat{n} \cdot \hat{e}_r dS + \int_S \vec{t}_n \cdot \hat{e}_r dS$$

$$D_{(porta)} = \int_S \vec{t}_n \cdot \hat{e}_r dS$$

$$R_{(resist.)} = \vec{F} \cdot \hat{e}_t = - \int_S p \hat{n} \cdot \hat{e}_t dS + \int_S \vec{t}_n \cdot \hat{e}_t dS$$

$$R_{(resist.)} = \int_S \vec{t}_n \cdot \hat{e}_t dS$$

$$D_{(porta)} = \int_S \vec{t}_n \cdot \hat{e}_r dS + \int_S \vec{t}_n \cdot \hat{e}_t dS$$

$$D_{(porta)} = D_{(porta)} + R_{(resist.)}$$

Possibile ipotesi semplificativa: trascurare lo strato di velocità intorno al corpo e a volte d'esso (se il corpo ha forza apertura e se è chiuso al vento) → flusso incompressibile e irrotazionale ovunque

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\text{lungo}} = 0 \\ \vec{\nabla} \varphi \Big|_{\infty} = \vec{U} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \vec{\nabla} \varphi = \vec{\nabla} \varphi \\ \text{cond. d' scorrimento } (\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0 \\ \rightarrow \vec{v}(\varphi) \end{array}$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \quad \leftarrow \text{Parall. per flusso staz. e } \vec{f} = 0$$

$$\rightarrow p(\varphi)$$

$\rightarrow p$  sul corpo  $\rightarrow$  forze aerodinamiche

$$\vec{F} = - \int_S p \vec{n} dS + \int_S \vec{f}_m dS$$

Il calcolo delle forze aerodin. con queste ipotesi è ovvio, ma what about accuratezza delle stime di  $\vec{F}$ ?

Caso 3D: si dimostra che qualunque sia la forma del corpo e la rel. asintotica unica  $\vec{F} = 0$  Falso dell'ordine spaziale (paradosso di D'Alambert) o però dovrebbe avere un modello accostato nel punto chiave  $\Rightarrow$  no  $\hookrightarrow$  in contrasto con il fatto che spazialmente le  $\vec{F}$  non tendono a zero all'aumentare di Reynolds

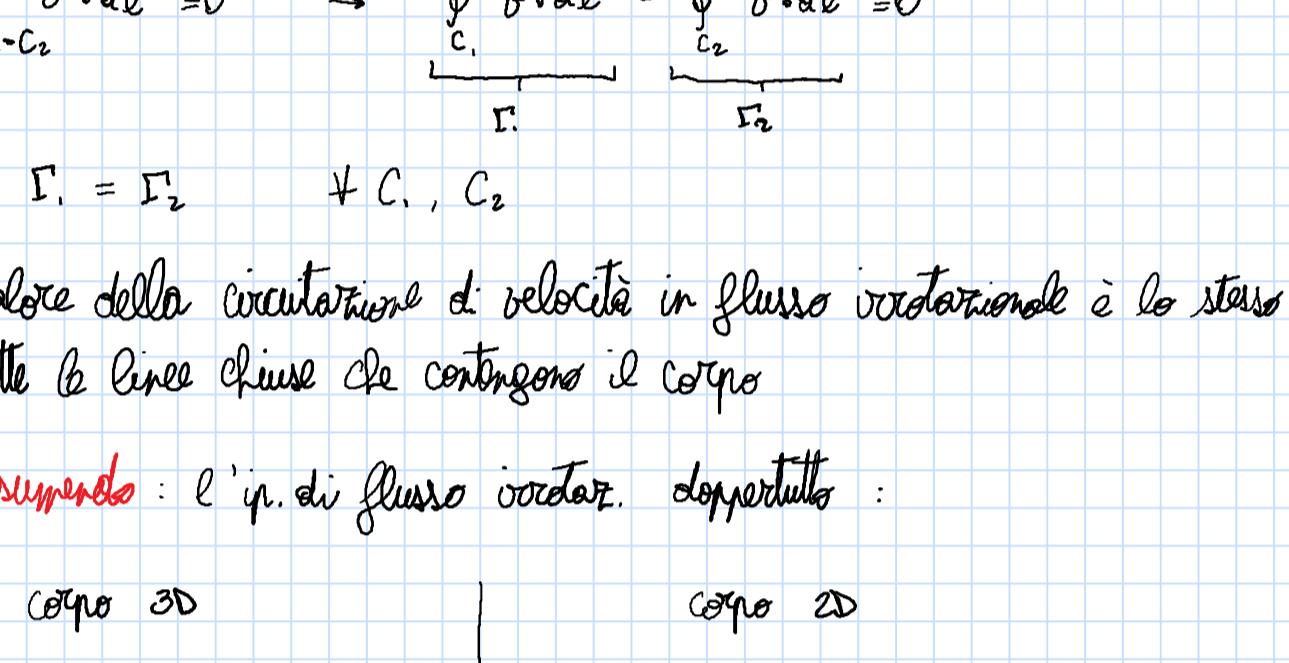
$\rightarrow$  Per un problema 3D il modello di flusso irrotaz. doppietto NON FUNZIONA (risultato falso)

$\rightarrow$  Per un corpo 2D (negli aerei), le eqni di flusso irrotaz.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\text{lungo}} = 0 \\ \vec{\nabla} \varphi \Big|_{\infty} = \vec{U} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{infinte soluzioni} \\ (\text{perché il dominio d'integrazione}) \\ \text{non è semplicemente connesso} \end{array}$$

Problema: come salire tra le infinite sol.?

Aggiungo una condizione che mi disciama tra le sol. !!!



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\text{lungo}} = 0 \\ \vec{\nabla} \varphi \Big|_{\infty} = \vec{U} \\ \Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \Gamma_0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \text{unica soluzione} \rightarrow \vec{v}(\varphi)$$

$$\Gamma + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \quad \rightarrow p(\varphi) \rightarrow \vec{F}$$

Si dimostra che per qualunque forma e rel. asintotica :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = -\rho U \Gamma_0 \quad \rightarrow \text{se riduci a dare un valore accorto di } \Gamma_0 \rightarrow \text{stima accorta di } L \\ D = 0 \quad \text{FALSO (inutile)} \end{array} \right.$$

$L = -\rho U \Gamma_0$  Geometria di Kutta-Joukowski

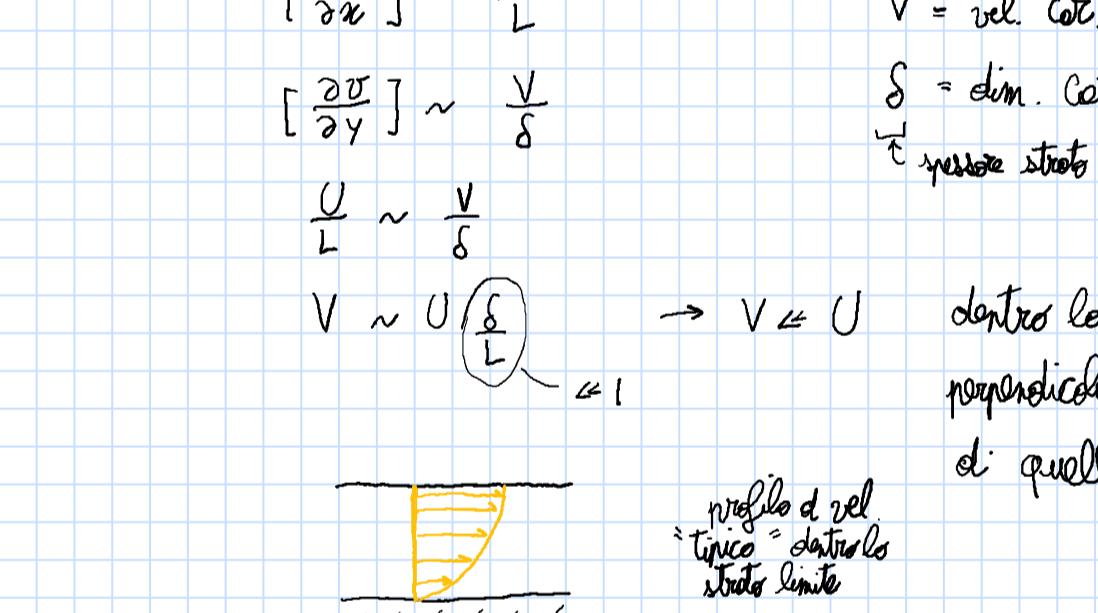
Il veloce di  $\Gamma_0$  dipende dal veloce della velocità lungo la curva

$\rightarrow$  dare cordone il corpo è rel. reale

Per i profili aeri esiste un modo intelligente di assegnare un valore accorto di  $\Gamma_0$  (secondo accorto)

• Come vota  $\Gamma_0$  al vertice della curva?

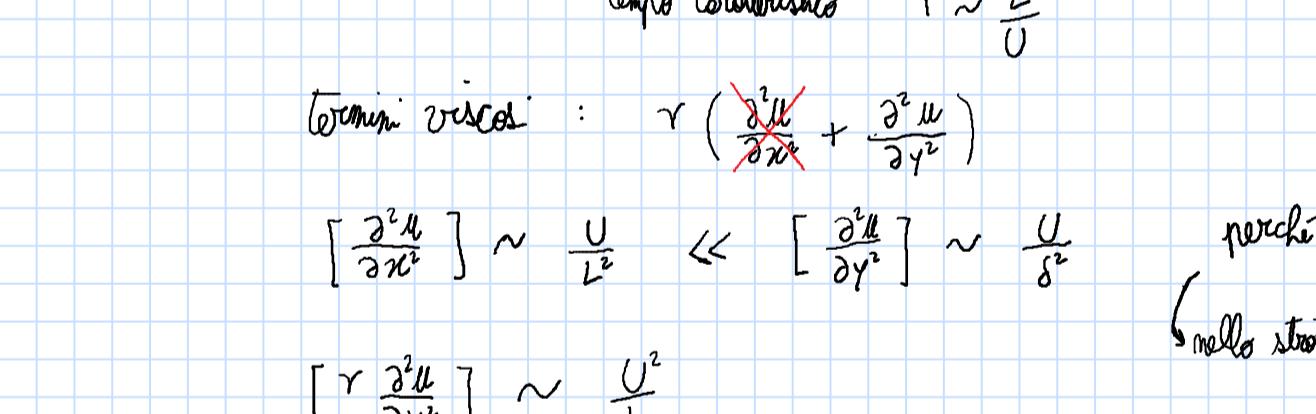
$\hookrightarrow$  Il veloce di  $\Gamma$  è indipendente dalla scelta della curva chiusa



Applico il Teorema di Stokes alla superficie S compresa tra  $C_1$  e  $C_2$

Non posso applicarlo perché il dominio S non è semplicemente connesso!

Soluzione: rendo il dominio semp. conn. facendo un taglio lungo il segmento AB e ricomponendo



$$\oint_{C_1 + AB - C_2 + B\bar{A}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{w} \cdot \hat{n} dS = 0$$

= 0  
per flusso irrotaz.  
(vel. zero in  
una apertura)

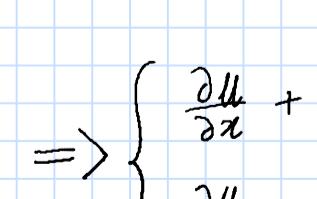
$$\Rightarrow \oint_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

Il veloce della circolazione di velocità in flusso irrotazionale è lo stesso su tutte le linee chiuse che contengono il corpo

Riassumendo: l'ip. di flusso irrotaz. doppietto:

$\left. \begin{array}{l} \text{corpo 3D} \\ \vec{F} = 0 \quad \text{paradosso d' D'Alambert} \\ \downarrow \\ \text{FALSO} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \text{corpo 2D} \\ L = -\rho U \Gamma_0 \quad \text{buona stima della rotazione se ho una buona linea di } \Gamma_0 \quad (\text{pos. per negl. } \vec{f}) \\ D = 0 \quad \rightarrow \text{FALSO} \end{array} \right.$
---	--

Se voglio una stima delle forze aerodinamiche su un corpo 3D e della resistenza su un corpo 2D, devo considerare la regione contenente velocità intorno al corpo e a volte d'esso  $\therefore$



Teoria dello strato limite di Prandtl che semplifica le eqni del moto anche nella zona in cui  $\vec{w} \neq 0$  (uniquo 1800)

Prandtl ha ragionato in termini di viscosità

• se  $Re \gg 1$ , forze incidenziali molto più grandi di quelle viscole

$\rightarrow$  è giustificata l'ipotez. di flusso non viscole, ma in flusso complesso non viscole non si verifica la condizione di aderenza alla parete

$\rightarrow$  esiste uno strato sottile intorno alla parete in cui la velocità anche in un flusso con  $\vec{w} \neq 0$  è elevata, è importante per poter utilizzare la cond. di aderenza

flusso non viscole  $\Rightarrow \vec{w} \neq 0$  perché in flusso viscole i termini viscoli si cancellano

$\rightarrow$  strato limite  $\rightarrow$  viscosità "conta"  $\Leftrightarrow \vec{w} \neq 0$  Prandtl ha semplificato le eqni di N-S dentro lo strato limite

• Interv.:

$$1. \int_L \omega \sim 1 \quad \delta = \text{spessore strato limite} \quad L = \text{dimensione caratteristica}$$

$$\Leftrightarrow \text{d' strato limite sottile} \Leftrightarrow Re \gg 1$$

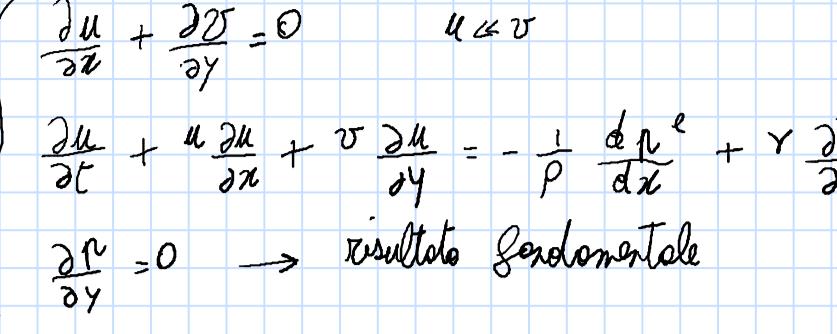
$$2. \text{ Dentro lo strato limite è ordine di grandezza} \quad \text{di viscosità} \quad \text{di grandezza}$$

$$\Leftrightarrow \text{Le condizioni di grandezza di viscosità sono:}$$

$$\$$

18/12/2020

**EQUAZIONI DI STATO LIMITE PER FLUSSO INCOMPRESSIBILE SU PARETE PIANO 2D E  $\vec{F} = 0$**



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & u \ll v \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^e}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{risultato fondamentale} \end{cases}$$

con cond. al contorno

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad +x$$

$$\vec{v}(x, \delta(x)) = \vec{v}^*(x) \quad \text{da flusso orizzontale}$$

oppure

$$w_z(x, \delta(x)) = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x, \delta(x)) = 0$$

$$\rightarrow u(x, y), v(x, y) \quad \text{dentro lo stato limite}$$

$$\rightarrow \text{forza agit. sulla parete} \quad p(x, 0) = p^*(x)$$

Sforzo viscoso alla parete :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \approx \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \right] &\leq \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ \rightarrow \boxed{\vec{v}_{xy}(x) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}} &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{v}{l} &\leq \frac{U}{S} \end{aligned}$$

$$\text{Note } u(x, y) \Rightarrow v_w(x) + x$$

$v_w(x)$  è legato all'inclinazione della tang. del profilo di vel. alla parete

Il bordo dello stato limite è individuato da  $\delta(x) \rightarrow$  spessore dello stato limite

Def. operatore spessore dello stato limite :



i)  $\delta(x)$  è la dist. della parete a cui

$$\vec{v}(x, y) = A v^*(x)$$

$A = 0.85$  frazione delle forze  
a parete

ii)  $\delta(x)$  è la dist. dalla parete in cui

è contenuto il  $A\%$  delle forze

della sezione  $x$

$$\int_0^{\delta(x)} u dy \quad \text{distanza progressivamente } \bar{y} \text{ fin quando l'integrale zero}\\ \text{meno d': } (100 - A) \% \Rightarrow \delta(x) = \bar{y}$$

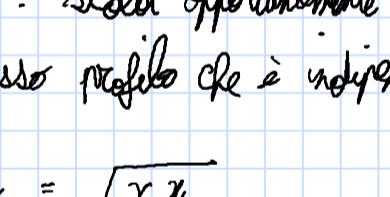
$$\text{Spessore di spostamento : } \delta^*(x) = \int_0^{\delta(x)} \left( 1 - \frac{u(x, y)}{u^*(x)} \right) dy \quad +x$$

$$\delta^*(x) = \int_0^{\delta(x)} \frac{u^*(x) - u(x, y)}{u^*(x)} dy = \frac{1}{u^*(x)} \int_0^{\delta(x)} [u^*(x) - u(x, y)] dy$$

$$\delta^*(x) u^*(x) = u^*(x) \delta(x) - \int_0^{\delta(x)} u(x, y) dy$$

$$p \int_0^{\delta(x)} u(x, y) dy = u^*(x) (\delta(x) - \delta^*(x)) \cdot p$$

notare messo nello stato



portato che ora c'è con vel.

c'è in uno spessore  $\delta(x) - \delta^*(x)$

limite alla sezione  $x$

→ spessore di spostamento è lo spessore che deve raggiungere alla parete per avere lo stesso portata che ha nello stato limite con rel. c'è per. a  $u^*(x)$

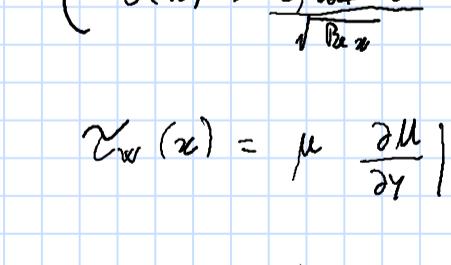
$$\text{Spessore di qte di moto : } \theta(x) = \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x, y)}{u^*(x)} \left( 1 - \frac{u(x, y)}{u^*(x)} \right) dy$$

legato agli spost.

veloc. agit. sulla parete

Stato limite su lastre piane e incidenza nulla

la lastre ha spessore zero



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^e}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{2} \rho v^2(x) + p^e(x) = \frac{1}{2} \rho U^2 + p_\infty$$

Perché lastre ha spessore nullo, se non ci fosse lo stato limite  $\rightarrow \vec{v}(x, y) \approx \vec{U}$

Sappiamo che  $\delta(x) \ll 1 \rightarrow$  flusso orizzontale vede un corpo con spessore molto piccolo

$$\Rightarrow u^*(x) \approx U$$

$$\text{Dal Teor. d' Bernoulli : } \frac{1}{2} \rho u^e(x)^2 + p^e(x) = \frac{1}{2} \rho U^2 + p_\infty$$

$$\Rightarrow p^e(x) \approx p_\infty \rightarrow \frac{dp^e(x)}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Sol. analitica di Blasius (1908)

↓

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{u(x, y)}{U} dy$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = \frac{y}{\delta(x)}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

$$\eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\delta(x)}{U}}$$

$$\frac{u(x, y)}{U} = g(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\Delta$$