MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (SOLO BORDI)

Servono in alcune situazioni speciali permettono di fare Max e Min sul BORDO di K.
(Da usare solo in situazioni particolari)

$$\text{Max } f(x,y,z) \rightsquigarrow \{(x,y,z) \mid g(x,y,z)=0\}$$

→ SFERA VA BENE

→ CUBO NON VA BENE

Come funziona il METODO

Vogliamo $\text{Max } f(x_1,\dots,x_m) \longrightarrow \{(x_1,\dots,x_m) \mid g(x_1,\dots,x_m)=0\}$

Si scrivono 2 SISTEMI

$\boxed{1}$ $\begin{cases} \nabla g = 0 \\ g=0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ m equazioni in m incognite $\longrightarrow \{P_1,\dots P_k\}$

es: $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$\nabla g = (0,0,\dots,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ 2z=0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{m+1 eq in m incognite. me lo scordo.}}$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g=0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ Le incognite sono $(\lambda, x_1,\dots,x_m)$

$(m+1)$ eq in $(m+1)$ incognite.

C'è maggiore probabilità di soluzione

SOL $\Rightarrow \begin{cases} (\lambda_1, q_1) \\ \vdots \\ (\lambda_m, q_m) \end{cases}$ ($q \in \mathbb{R}^m$) $\longrightarrow$ $\underset{\{g=0\}}{\text{Max}} f = \text{Max}\{f(P_1),\dots,f(P_k), f(Q_1)\dots(Q)\}$

$\underset{\{g=0\}}{\text{Min}} f$ = Stessa cosa ↑

27 MARZO

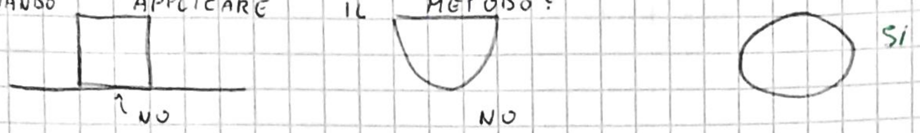
METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

ESEMPIO GENERICO

$$\text{Min} / \text{Max} \quad f(x_1, \dots, x_m)$$

$$K = \{ (x_1, \dots, x_m) \mid \underbrace{g(x_1, \dots, x_m) = 0}_{\text{VINCOLO}} \}$$

QUANDO APPLICARE IL METODO?



ESERCIZIO 1

$$\max_A f \quad e \quad \min_A f \qquad f(x,y) = x - 2y \qquad A = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 3 \}$$

① CONTROLLO I PUNTI INTERNI

$$\mathring{A} = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < 3 \} \longrightarrow \nabla f(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \partial_x f = 1 \\ \partial_y f = -2 \end{cases} \longrightarrow$$ é costante, non é mai $= 0$, non ha soluzione.

② CONTROLLO I BORDI

$$A \setminus \mathring{A} = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 = 3 \};$$ Parametrizzo:

$$\varphi : \theta \in [0, 2\pi] \longrightarrow (\sqrt{3} \cos\theta, \sqrt{3} \sin\theta)$$

- faccio la composizione:

$$f \circ \varphi = \sqrt{3} \cos\theta - 2\sqrt{3} \sin\theta.$$ Funzione in 1 variabile, risolvo con tecniche di AN I.

$$\begin{cases} f(x,y) = x - 2y \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_x g = 0 \\ \partial_y g = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Non ha soluzione. NON devo ricordare nulla

• Passiamo al 3° SISTEMA (LAGRANGE)

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

∇f e ∇g sono VETTORI PARALLELI
λ è una nuova incognita (fattore molt.)

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ -2 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Devono esistere almeno 2 SOLUZIONI
Se trovo 0 o 1 SOLUZIONE ho un Problema!

• Ammettiamo che le seguenti siano tutte le Soluzioni.

$$\begin{matrix} (x_1, y_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ (x_m, y_m, \lambda_m) \end{matrix} \xrightarrow[\lambda]{\text{MI DIMENTICO LA}} \begin{matrix} (x_1, y_1) \\ \vdots \\ (x_m, y_m) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} f(x_1, y_1) \\ \vdots \\ f(x_m, y_m) \end{matrix}$$

• λ è necessariamente ≠ 0

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2 \cdot \lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \end{cases} \rightsquigarrow$$

ho 2 SOLUZIONI per (x, y)

• $P_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right)$

• $P_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right)$

• Ora devo capire chi è max e chi min. Mi basta valutare la funzione in quei punti:

$f(P_1) = \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ MAX ; $f(P_2) = -\sqrt{\frac{3}{5}} - 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$ MIN ■

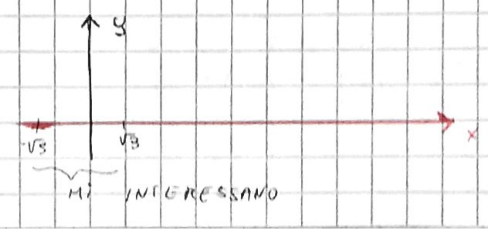
ESERCIZIO 2

Calcolare $\max_A f$ e $\min_A f$: $f(x,y) = x \cdot y^2$ $A = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 \leq 5\}$

① CONTROLLO i PUNTI INTERNI

Quando il gradiente di f è uguale a 0?

$$\nabla f = (0,0) \rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \text{ libero} \end{cases}$$



Mi Tocca Ricordare $f(x,0)=0$

- Parametrizzo

$$\frac{1}{5}\cdot x^2+\frac{3}{5}\cdot y^2=1$$

- $\varphi: [0,2\pi]\ni\theta \longrightarrow \left(\sqrt{5}\cos\theta, \sqrt{\frac{5}{3}}\operatorname{sen}\theta\right)$

- $f\circ\varphi(\theta)=\sqrt{5}\cos\theta\,(5\operatorname{sen}\theta)$

- UTILIZZIAMO LAGRANGE

$g(x,y)=x^2+3y^2-5$

$$\begin{cases}\partial_x g=0\\ \partial_y g=0\\ g=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}2x=0\\ 6y=0\\ x^2+3y^2-5=0\end{cases}$$

Non ha soluzioni. Se le avevo dovevo ricordarmele per il confronto finale.

3° SISTEMA

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}y^2=\lambda 2x\\ 2x\cdot y=\lambda 6y\\ x^2+3y^2-5=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}—\\ y(x-3\lambda)=0 \begin{cases}\to y=0 & 1\\ \to x=3\lambda & 2\end{cases}\\ —\end{cases}$$

Per $y=0$, $x=\pm\sqrt{5}$.

- Ho risolto il sistema per $y=0$ (1) ora lo risolvo per $x=3\lambda$ (2), nel frattempo mi sono trovato i punti $(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$.

REMINDER

$f(x,0)=0$; $f(\sqrt{5},0)=0$; $f(-\sqrt{5},0)=0$

$$\begin{cases}x=3\lambda\\ y^2=2\lambda\cdot x\\ x^2+3y^2-5=0\end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases}x=3\lambda\\ y^2=6\lambda^2\\ 9\lambda^2+18\lambda^2-5=0\end{cases} \longrightarrow \boxed{\lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}}$$

- $\lambda=-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\\ y^2=\frac{5}{3} \rightarrow \pm\frac{\sqrt{10}}{3}\end{cases} \longrightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ PUNTI DI MINIMO

- $\lambda=+\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\\ y=\pm\frac{\sqrt{10}}{3}\end{cases} \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ PUNTI DI MASSIMO

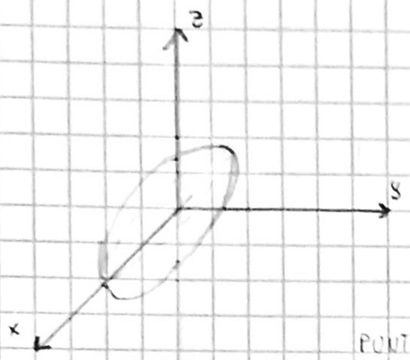
ESERCIZIO DA FARE A CASA

$\max_A (x^2 - xy + 1)$ $\min_A (x^2 - xy + 1)$

$A = \{(x,y) \mid |x| \leq 2 \quad |y| \leq \quad , \quad x^2 + y^2 \geq 1\}$

ESERCIZIO 3 — 3 VARIABILI

$f(x,y,z) = x^2 - 2y + 3xz$, $A = \{(x,y,z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 7\}$ È UN ELLISSOIDE STORTO



• In termini di Lagrange

$\hookrightarrow g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 7$

• Partiamo con lo studio $\nabla f = (0,0,0)$

PUNTI INTERNI | 1° SISTEMA

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ -2 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

MI POSSO GIÀ FERMARE NEI PUNTI INTERNI NON C'È NULLA.

2° SISTEMA

$$\begin{cases} \nabla g = (0,0,0) \\ g = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \\ 6z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 7 \end{cases}$$

ANCHE QUESTO SISTEMA È IMPOSSIBILE. VADO AVANTI

3° SISTEMA (Lagrange)

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3z = \lambda \cdot 2x \\ -2 = 4y \cdot \lambda \\ 3x = \lambda \cdot 6z \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 7 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x + 3z = \lambda 2x \\ -z = 4\lambda y \\ 3x = 6\lambda z \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 7 \end{cases}$$

$\rightarrow \lambda \neq 0$, Posso dividere $\times \lambda$

$\rightarrow z = \frac{x}{2\lambda}$

$$\begin{cases} z = \frac{x}{2\lambda} \\ 2x + \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{\lambda} - 2\lambda x = 0 \longrightarrow x\left(2 + \frac{3}{2\lambda} - 2\lambda\right) = 0 \\ = \end{cases}$$

$\rightarrow x = \emptyset$

$\rightarrow 2 + \frac{3}{2\lambda} - 2\lambda = \emptyset$

- Studio i vari casi. Per $\boxed{x = 0}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases} \longrightarrow \left(0, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right)$$

- Studio il caso $\boxed{2 + \frac{3}{2\lambda} - 2\lambda = 0}$

Moltiplico entrambi i membri per 2λ ed ottengo

$4\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$

- Per $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y = 1 \\ \cancel{2x + 3z = -x} \\ z = -x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -z \end{cases}$$

Ho infinite soluzioni

$$\rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x^2 + 2 + 3x^2 = 7 \\ 4x^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 1, +\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{matrix}$$

ALTRI 2 POSSIBILI PUNTI

28/03/2017

Completamento esercizio

$$f(x,y,z) = x^2 - 2y + 3xz \qquad \{(x,y,z) \mid x^2 + 2y + 3z^2 \le 7\}$$

$$\begin{cases} 2x + 3z = 2\lambda \\ -2 = 4\lambda y \\ 3x = 6\lambda z \rightsquigarrow z = \frac{x}{2y} \\ x^2 + 2y + 3z^2 \le 7 \end{cases} \longrightarrow 2x + \frac{3}{2\lambda}x = 2\lambda x$$

$$\| $$

$$x\left(2 + \frac{3}{2\lambda} - 2\lambda\right) = 0 \quad \to x = 0 \quad \to 2 + \frac{3}{2\lambda} - 2\lambda = 0$$

quindi:

$$\begin{cases} x = 0 \rightsquigarrow z = 0 \rightsquigarrow \left(0, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right) \\ 2y^2 = 7 \end{cases}$$

$$2 + \frac{3}{2\lambda} - 2\lambda = 0 \to \lambda = -\frac{1}{2} \to z = -x \; ; \; y = -\frac{1}{2\lambda} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt5}{2}, 1, -\frac{\sqrt5}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt5}{2}, 1, \frac{\sqrt5}{2}\right)$$

$$\to \lambda = \frac{3}{2} \to z = \frac{x}{3} \to y = -\frac{1}{3} \to x^2 + \frac{2}{9} + \frac{x^3}{3} = 7$$

$$\text{Per } \lambda = \frac{3}{2} \to x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{61}{3}} \implies \left(+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{61}{3}}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{61}{3}}\right) \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{61}{3}}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{61}{3}}\right)$$

DOPPI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

"brevissimo cenno"

- QUANDO SERVONO?

Potrei avere una funz a n variabili e voglio sapere $\max_K / \min_K$ di $f(x_1, \dots, x_n)$ dove K è dato da 2 condizioni, anziché 1!

$$K = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \,\middle|\, \begin{matrix} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{matrix} \right\}$$ HO DUE VINCOLI!

quindi avrò:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

questo è l'omologo del 2° sistema, quello del primo è più delicato.

Il primo sistema è come sono con 2 vincoli?

? sapendo che $\begin{cases} \nabla g = 0 \\ g = 0 \end{cases}$?

È la matrice $J_{2 \times m}$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Matrice Jacobiana

devo trovare i punti tali che $rk\, J < 2$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$

Il sistema sarà

$$\begin{cases} rk\, J < 2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

MASSIMI e MINIMI LOCALI

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

Si dice che un punto X_0 è di:

- **MINIMO LOCALE**

  Se $\exists\, r > 0$ t.c. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B_r(X_0)$

- **MASSIMO LOCALE**

  Se $\exists\, r > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in B_r(X_0)$

- **SELLA** (PUNTO DI SELLA)

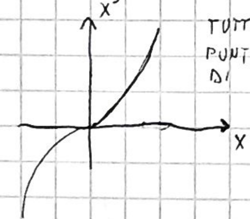
Se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x_\varepsilon, y_\varepsilon \in B_\varepsilon(X_0)$ t.c. $f(x_\varepsilon) > f(X_0)$ e $f(y_\varepsilon) < f(X_0)$

ovvero se non è né di MAX né di min.

Ad esempio il punto 0 nella $f(x) = x^3$.

In generale, se prendo un punto a caso sarà di sella.

ES.



TUTTI i PUNTI SONO DI SELLA

RICHIAMO DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE IN PIÙ VARIABILI (IN $\mathbb{R}^m$)

- $\boxed{f(x,y)}$

$$\underbrace{\frac{\partial f_x}{\partial x}} \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Longleftarrow \underbrace{\frac{\partial f_y}{\partial x}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial f_x}{\partial y}} \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Longleftarrow \underbrace{\frac{\partial f_y}{\partial y}}$$

Queste 4 sono tutte le derivate seconde di $f(x,y)$

- **ESEMPIO 1**

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(x \cdot y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

(ho derivato f prima rispetto a x poi rispetto ad y)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \cos(x \cdot y) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x y) - x y \cdot \operatorname{sen}(x y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -x^2 \operatorname{sen}(x \cdot y)$$

(ho derivato f rispetto ad y e poi ad x)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = -y^2 \cdot \operatorname{sen}(x \cdot y) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} = \cos(x y) - x y \operatorname{sen}(x \cdot y)$$

- **ESEMPIO 2**

$$f(x,y) = y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+y^2} + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} + 4 x \cdot y^2 \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} + 4 x y^2 \cdot e^{x^2+y^2}$$

NOTAZIONE

Per $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \qquad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = f_{zyx}$$

TEOREMA DI SCHWARTZ o di Inversione delle Derivate

Sia

$f(x_1, \dots, x_m)$ una funz in più variabili

Supponiamo che $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$ e se sono CONTINUE

Allora le due derivate coincidono. $\square$

Come Trovare i MAX e MIN LOCALI

1. Si cercano i PUNTI CRITICI $\Longleftrightarrow \nabla f = 0$
2. Analizza la natura di questi punti (max loc, min loc, sella?)

Introduciamo la matrice hessiana

MATRICE HESSIANA di f

$x_0 \in \Omega$, $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, Se esistono tutte le derivate parziali.

$H_f(x_0) \in Mat_{m \times m}$ con coefficienti:

- $\boxed{a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}}$
- $\boxed{H = J\nabla}$ L'HESSIANA RAPPRESENTA LA JACOBIANA del GRADIENTE
- $\boxed{\det(H_f(x_0))}$ HESSIANO in x_0 (o DISCRIMINANTE in x_0)

ESEMPIO

Come scrivere $H_f(x_0)$

$$f(x_1, \dots, x_m) \longrightarrow \overbrace{(f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3} \dots f_{x_m})}^{\nabla f}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla f_{x_1} \longrightarrow \\ \nabla f_{x_2} \longrightarrow \\ \dots \\ \nabla f_{x_m} \end{bmatrix}$$

Scrivo il gradiente di f_{x_1} lungo la prima riga.

La MATRICE deve essere SIMMETRICA Perché gli elementi fuori dalla diag. sono le derivate miste, quindi per il Th. di SCHWART si ha $\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$ (se sono continue le derivate)

ESEMPIO

$f(x,y,z) = xyz \longrightarrow (yz, xz, xy) = \nabla f$

Per studiare i punti critici vedo dove si annulla il gradiente

$$\begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ yx = 0 \end{cases}$$ INFINITE SOLUZIONI, INFINITI PUNTI CRITICI

$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ ho fatto semplicemente il gradiente del vettore ∇f in x.

Se $\nabla f(x_0) = 0$, come capisco se è Max, Min loc?

RICHIAMI DI ALGEBRA: $A \in Sym(n \times n) \rightsquigarrow \exists\, \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_n$ AUTOVALORI

- $\rightarrow A$ è def POSITIVA se $\lambda_1 > 0$ (DET > 0)
- $\rightarrow A$ è def NEGATIVA se $\lambda_n < 0$ (DET PUÒ ESSERE 0)
- $\rightarrow A$ è ~~def~~ INDEFINITA se $\lambda_1 \cdot \lambda_n < 0$ (DET $\neq 0$)

- Se L'HESSIANA è in questi casi, so TUTTO YEH.
- Sono fottuto se

A è SEMI DEFINITA, $\lambda_1 \cdot \lambda_n = 0$.

PERCHÉ NON C'È LA DEGAN? LA VUOI? SI ☐ NO ☐

TEOREMA

$\nabla f(x_0) = 0$ Se $H_f(x_0)$ è

- DEFINITA POSITIVA $\longrightarrow$ MINIMO LOC
- DEFINITA NEGATIVA $\longrightarrow$ MASSIMO LOC
- INDEFINITA $\longrightarrow$ SELLA
- SEMI-DEFINITA $\longrightarrow$ Non posso dire nulla

ESEMPIO 1

$f(x,y) = x^2 + y^2$, Studiamo punti critici e la loro natura.

~~Def~~ $Df = (2x, 2y) \longrightarrow (0,0)$ Punto CRITICO

$$Hf(2x,2y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è addirittura costante, non dipende dalle variabili!

DEFINITA POSITIVA → MINIMO LOCALE

ESERCIZIO 2

$f(x,y) = x^2 - y^2$, Studiare punti critici e la loro natura.

R)

$\nabla f = (2x, -2y) \Longrightarrow (0,0)$ punto CRITICO

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

In $(0,0)$ è punto di Sella, perché indefinita! Ma in realtà anche qui la HESSIANA è COSTANTE

ESERCIZIO 3

$$\boxed{f(x,y) = x^4 + y^4}$$

$\nabla f = (4x^3, 4y^3)$ $\quad(0,0)$ unico punto critico

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix} \text{ ed } H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'hessiana è SEMI-DEFINITA, non ci aiuta...
Ma so che $(0,0)$ è un punto di minimo.

"NEL PRE-TEST non c'è bisogno di fare l'HESSIANA"
(Nicola Visciglia, 28/03/2017)

METODO PER CAPIRE Se ... ($\mathbb{R}^2$)
capire se è def positiva, ... semidefinita

ho $A_{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- $\det > 0$ e $a_{11} > 0 \Longrightarrow$ DEF POSITIVA → MINIMO LOC
- $\det > 0$ e $a_{11} < 0 \Longrightarrow$ DEF NEGATIVA → MASSIMO LOC
- $\det < 0 \Longrightarrow$ INDEFINITA → SELLA
- $\det(A) = 0 \Longrightarrow$ SEMI DEFINITA → CAZZI AMARI

ESEMPIO 4

$f(x,y) = (\operatorname{sen} x)^2 + y^2$

$\nabla f = (2 \operatorname{sen} x \cos x \,,\, 2y)$ e si annulla per $\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(2x) = 0 \longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \,,\, k \in \mathbb{Z} \\ 2y = 0 \end{cases}$$

NB: $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$

ho infiniti punti critici! Allora studio l'Hessiano.

$$H_f = \begin{bmatrix} 2\cos(2x) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ Per K pari $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ MINIMO LOCALE

$\longrightarrow$ Per K dispari $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ SELLA

ESEMPIO 5

$f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$

cerco i $\nabla f = (0,0,0)$

- Parziali $\nabla f(x,y,z) = (6x - 2z + 2,\ 4y + 2,\ 2z - 2x)$
- Punti critici

$$\begin{cases} 4y + 2 = 0 \\ 6x - 2z + 2 = 0 \\ 2z - 2x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}} \quad \boxed{z = x = -\frac{1}{2}}$$

- Faccio l'Hessiano

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Non è Diagonale, Dovrei calcolarmi il POLINOMIO CARATTERISTICO!

Ma invece mi verifico che $\det > 0$.

$\det = 32 > 0$, Allora $\emptyset$ non è AUTOVALORE.

TEOREMA: CRITERIO DI SYLVESTER
SEGNATURA DI MAT 3×3.

Se ho una $A = Mat_{3\times3}$ simmetrica e il suo $\det A$ è diverso da $\emptyset$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a_{11}, \ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \det(A)}$$

Pongo $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

a_{11}, $\det A'$, $\det A$: VARI CASI

$\boxed{1}$ $a_{11} > 0$, $\det A' > 0$, $\det A > 0$ $\Rightarrow$ Def POSITIVO $\rightarrow$ MIN

$\boxed{2}$ $a_{11} < 0$, $\det A' > 0$, $\det A < 0$ $\Rightarrow$ Def NEGATIV $\rightarrow$ MAX

$\boxed{3}$ TUTTI < 0 $\Rightarrow$ INDEFINITA SELLA

- Tornando all'esercizio PREC.

$$H_1 f = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— $a_{11} > \emptyset$
— $\det(A') = 24 > \emptyset$
— $\det(A) = 32 > \emptyset$

Allora la Matrice è DEFINITA POSITIVA in base al criterio. Quindi quel punto è di MINIMO LOCALE.

- in sintesi L'HP $\det H_1 f \neq 0$, esclude la possibilità della semi-definita.

3/07/2017

• DIM

Perché se $\nabla f(X_0) = 0$ ed $H_f(X_0)$ é def POSITIVO (tutti gli autovalori sono positivi):

$\Longrightarrow$ X_0 é minimo locale?

• DIM in ANALISI I

$f(X_0)$ e $f'(X_0) > 0 \Longrightarrow X_0$ é di min LOCALE.

dimostro con TAYLOR.

Scrivo la formula di TAYLOR al 2° ordine (abbiamo informazioni su f' e f.)

$$f(X_0+h) = f(X_0) + \frac{1}{2!} f''(X_0) \cdot h^2 + o(h^2)$$

$$\Downarrow$$

$$f(X_0+h) - f(X_0) = \frac{1}{2!} f''(X_0) \cdot h^2 + o(h^2)$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq f(X_0+h) - f(X_0) = h^2 \left[\frac{1}{2!} f''(X_0) + o(h) \right] \geq 0$$

Per dimostrare che il punto X_0 é di min. ho dimostrato che i punti vicini hanno un Imm con valore maggiore $(f(X_0+h) - f(X_0)) \geq 0$