

Funzioni di piu' variabili

$$\frac{\partial f_{(x_0)}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{dg_{(0)}}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \right)$$

Differenziabilita'

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \left(\frac{f_{(\mathbf{x})} - f_{(\mathbf{x}_0)} - \nabla f_{(\mathbf{x}_0)} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) = 0 \rightarrow \frac{dg_{(0)}}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\nabla f_{(\mathbf{x}_0)} \cdot (t\mathbf{v})}{t} \right)$$

Piano tangente in un punto

$$z = f_{(x_0, y_0)} + f_{x_{(x_0)}}(x - x_0) + f_{y_{(x_0)}}(y - y_0)$$

Taylor

$$f_{(x_0 + \mathbf{x})} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{x} \cdot \nabla)^j f(\mathbf{x}_0)}{j!}$$

Campi vettoriali e Potenziale Vettore F

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\mathbf{F} = 0\hat{i} + \left(\int_{x_0}^x V_{z(t,y,z)} dt \right) \hat{j} + \left(\int_{y_0}^y V_{x(x_0,s,z)} ds - \int_{x_0}^x V_{y(t,y,z)} dt \right) \hat{k} + \nabla \varphi$$

Curve

$$l_{(T)} = \int_a^b |\mathbf{v}(t)| dt$$

$$\int_{\varphi} f_{(x,y,z)} ds = \int_{t_1}^{t_2} f_{(r_{x(t)}, r_{y(t)}, r_{z(t)})} \left| \frac{dr}{dt} \right| dt$$

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ k = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} \\ \hat{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} \\ \tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot (\dot{\mathbf{a}})}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} \\ \hat{N} = \hat{T} \times \hat{B} = \frac{d\hat{T}/dt}{|d\hat{T}/dt|} \end{array} \right.$$

$$\int_{\varphi} \mathbf{f}_{(x,y,z)} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left[f_{1(\dots)} \frac{dx}{dt} + f_{2(\dots)} \frac{dy}{dt} + f_{3(\dots)} \frac{dz}{dt} \right] dt$$

Jacobiano

$$J = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial u} & \frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial v} \\ \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial u} & \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} x_{(u,v)} \\ y_{(u,v)} \\ z_{(u,v)} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (y,z)}{\partial (u,v)} \\ \frac{\partial (z,x)}{\partial (u,v)} \\ \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \end{pmatrix}$$

Fattori integranti

$$\frac{\partial(\mu_{(x,y)} F_{x(x,y)})}{\partial y} = \frac{\partial(\mu_{(x,y)} F_{y(x,y)})}{\partial x}$$

Arene di superfici

$$dA = \sqrt{1 + (\nabla f_{(x,y)})^2} dx dy \quad dA = \frac{|\nabla g_{(x,y,z)}|}{\frac{\partial g_{(x,y,z)}}{\partial z}} dx dy$$

Arene di zone piane

$$A = \iint_D dx dy = - \int_{\partial_+ D} y dx = \int_{\partial_+ D} x dy = \frac{1}{2} \int_{\partial_+ D} x dy - y dx$$

Teoremi vettoriali

Green-Stokes 2D

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial_+ D} F_x dx + F_y dy \quad \iint_D \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial_+ D} F_x dy - F_y dx$$

Green – Stokes e divergenza in 3D

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot \nabla g_{(x,y,z)} dx dy = \int_{\partial_+ \Sigma} F \cdot \hat{T} ds$$

$$\iiint_D (\nabla \cdot F) dx dy dz = \iint_{\partial D} F \cdot \nabla g_{(x,y,z)} dx dy = \phi_{F(D)}$$

Ottimizzazione

$$\begin{cases} \nabla f_{(x,y)} = \sum_{j=0}^n \lambda_{i(x,y)} \nabla g_{i(x,y)} \\ g_{i(x,y)} = 0 \quad \forall i \end{cases} \quad L = f_{(x,y)} + \sum_{j=0}^n \lambda_{i(x,y)} g_{i(x,y)} \quad \nabla_{x,y, \lambda_{i(x,y)}} L = 0$$

Serie

Convergenza totale per serie di funzioni, serie di Potenze e Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup |f_{n(x)}| \quad f_{(x)}^k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \quad \sum_{j=m}^n x^j = \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x}$$

Serie di Fourier

$$f_{(x)} = \frac{a_{(0)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{(n)} \cos(nx) + b_{(n)} \sin(nx)$$

$$\begin{cases} a_{(n)} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_{(x)} \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \\ b_{(n)} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_{(x)} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \end{cases} \quad \begin{cases} a_{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} \cos(nx) dx \\ b_{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} \sin(nx) dx \end{cases}$$

Teorema delle funzioni implicite

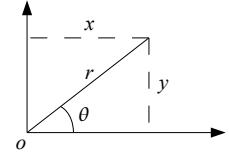
$$\frac{\partial y_{(x)}}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}}{\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}} \quad \frac{\partial^2 y_{(x)}}{\partial x^2} = \frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{f_y^3} \quad \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} \neq 0$$

Tavola di relazioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche dell'angolo

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad \cosec \theta = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

la funzione seno è dispari, la funzione coseno è pari, la funzione tangente è dispari.



Relazioni fondamentali

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Espressione delle funzioni goniometriche mediante una di esse

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha =$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha =$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha =$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$\cot \alpha$

Angoli associati, complementari e che differiscono di $\pi/2$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$
$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$	$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$	$\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan \alpha$
$\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(\pi/2 + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi/2 + \alpha) = -\tan \alpha$

Formule di addizione e sottrazione

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta & \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} & \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha} \end{aligned}$$

Formule di duplicazione, triplicazione e bisezione

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 & \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha & \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha & \tan 3\alpha &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} & \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} & \tan \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Formule parametriche

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} & \cos \alpha &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} & \tan \alpha &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Formule di prostaferesi

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Formule di Werner

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

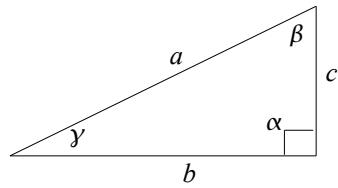
Teoremi sui triangoli

Triangoli rettangoli

$$\begin{array}{lll} b = a \sin \beta & c = a \sin \gamma & b = c \tan \beta \\ b = a \cos \gamma & c = a \cos \beta & b = c \cot \gamma \\ & & c = b \cot \beta \end{array}$$

Teorema di Pitagora

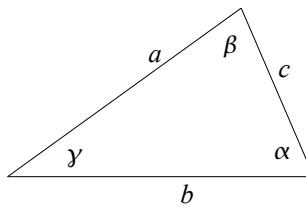
$$a^2 = b^2 + c^2$$



Triangoli qualsiasi

Teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



Teorema delle proiezioni

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta \quad b = c \cos \alpha + a \cos \gamma \quad c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

Teorema del coseno o di Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Altro

Sviluppo di Taylor delle funzioni trigonometriche

$$\sin \vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} + \dots \quad \cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} + \dots$$

Formule di Eulero (esponenziale complesso)

$$e^{\pm i\vartheta} = \cos \vartheta \pm i \sin \vartheta \quad \sin \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \quad \cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

Funzioni iperboliche

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\sin(i\vartheta)}{i} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(i\vartheta) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

il seno iperbolico è dispari, il coseno iperbolico è pari, la tangente iperbolica è dispari.

Valori delle funzioni trigonometriche di angoli particolari

gradi	radianti	seno	coseno	tangente	cotangente
0°	0	0	1	0	non definita
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non definita	0
180°	π	0	-1	0	non definita
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	non definita	0
360°	2π	0	1	0	non definita

TABELLA INTEGRALI

$\int 0 \cdot dx = c$	
$\int dx = x + c$	$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + c$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin f(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = \sin f(x) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg} f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\operatorname{ctg} f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arcsin f(x) + c$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int (x+a)^m dx = \frac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + c$	$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + c$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + c$
$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + c$	$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + c$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$	$\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$

$\int \frac{1}{1-\cos x} dx = -ctg \frac{x}{2} + c$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + c$
$\int ctg x dx = \ln \sin x + c$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right + c$
$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln\left \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right + c$	$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$
$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$	$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln 1+x^2 + c$
$\int \operatorname{arcctg} x dx = x \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} \ln 1+x^2 + c$	$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln a+bx + c$
$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x \right) + c$	$\int \frac{dx}{a-bx^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left \frac{\sqrt{ab+bx}}{\sqrt{ab-bx}} \right + c$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln x + \sqrt{a^2 + x^2} + c$	$\int \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{3b} \sqrt{(a+bx)^3} + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \ln x + \sqrt{a^2 \pm x^2} + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} + c$
$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + c$	$\int \ln x dx = x \ln x - x + c$
$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$	$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c$
$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + c$	$\int \cos^2(x-a) dx = \frac{1}{2} (x + \sin(x-a) \cos(x-a)) + c$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right + c$	$\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln\left \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right + c$

TAVOLA DEGLI SVILUPPI DI TAYLOR DELLE FUNZIONI ELEMENTARI PER $x \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + o(x^{10}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + o(x^{10}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{arctanh} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

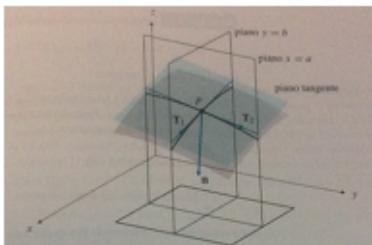
con

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

TAVOLA DI PRIMITIVE DI FUNZIONI ELEMENTARI

$$\begin{aligned}
 \int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{se } a \neq -1 \\
 \int \frac{1}{x} dx &= \log|x| + C \\
 \int a^x dx &= \frac{a^x}{\log a} + C \\
 \int \cos x dx &= \sin x + C \\
 \int \sin x dx &= -\cos x + C \\
 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\
 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cotan x + C \\
 \int \cosh x dx &= \sinh x + C \\
 \int \sinh x dx &= \cosh x + C \\
 \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx &= \tanh x + C \\
 \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx &= -\coth x + C \\
 \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C \\
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \operatorname{arcsinh} x + C = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C \\
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \operatorname{arccosh} x + C = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C \quad \text{per } x > 1
 \end{aligned}$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

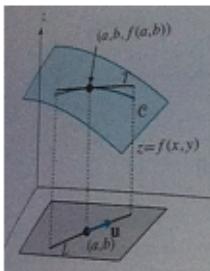


Ogni risultato esposto, con un po di aggiunta in notazioni, e' estendibile a più variabili.

Data una funzione $f(x, y)$ si intendono le derivate parziali come derivate della curva trovata intersecando la superficie con un piano fisso (corrispondente alla coordinata che si sta mantenendo costante).

In tal modo si potrà generalizzare una derivata parziale con una derivata direzionale, tale da effettuare tale derivazione su un piano

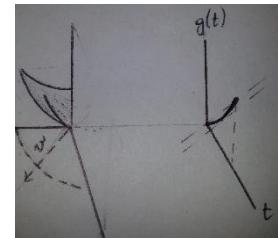
"storto". Definendo r la retta che passa per il punto x_0 con direzione v , $r_{(t)} = x_0 + tv$ ci si può



"sganciare" dalla rappresentazione in due variabili, e considerare la proiezione della curva trovata tramite l'intersezione del piano su piano $(t, g(t))$ dove:

$$g(t) = f(x_0 + tv)$$

Una funzione di due variabili si dice **derivabile** se ammette tutte le derivate parziali direzionali.

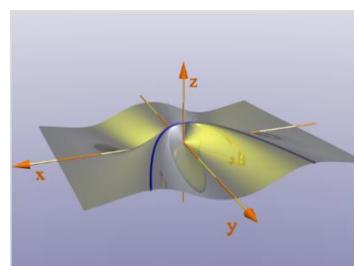


Risulta, dunque, che la derivata direzionale di $f(x, y)$, se esiste e' una derivata della funzione $g(t)$! Se la funzione non e' continua e viene definita in $f(x_0)$, per calcolare la derivata direzionale va usato il rapporto incrementale.

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial v} = \frac{dg_0}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \right)$$

Continuità : una funzione è continua se ammette limite

Nelle funzioni di due variabili, differentemente da quelle di una, se una funzione ammette anche tutte le derivate parziali, non per questo risulta essere continua. Le derivate parziali sono infatti estrapolate lungo delle direzioni lineari, ma ampliando i gradi di libertà bisognerebbe verificare l'esistenza del limite per tutte le possibili direzioni parametriche immaginabili corrispondenti a curve che giacciono sulla superficie.



$$\text{es. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

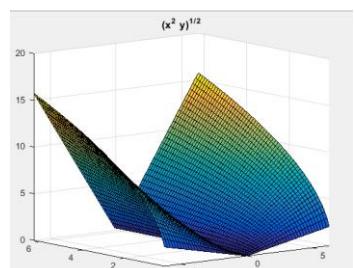
La funzione ammette tutte le derivate direzionali. Tutte le sostituzioni lineare $y = kx$ portano a concludere che il limite sia zero

Ma con $y = kx^2$, cioè percorrendo una parabola, si trova che il limite vale $\frac{k}{1+k^2}$

Per la determinazione della corretta sostituzione da affrontare per risolvere il limite è spesso utile osservare attentamente la forma della $f(x, y)$

-< grafico di una funzione non differenziabile (vedi sotto).

Lungo gli assi si apre un 'esfoliatura', come una "cuspide" tridimensionale. Ciò provoca la discontinuità delle derivate parziali prime.



Differenziabilita'

In funzioni di una variabile, la derivabilita' implicava la continuita'. Inoltre, se una funzione era derivabile, era sempre localmente approssimabile con una retta.

Cio' non vale per le funzioni di due variabili, che anche se sono derivabili non sempre risultano essere approssimabili da piani. Da cio' si definisce la **differenziabilita'** (condizione piu stretta della derivabilita')

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} \right) = 0$$

In forma direzionale il limite si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x_0 + t\mathbf{v}) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot (t\mathbf{v})}{t} \right) = \frac{dg_{(0)}}{dt} - \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\nabla f(x_0) \cdot (t\mathbf{v})}{t} \right)$$

Risulta dunque, che se e solo se $f(x, y)$ e' differenziabile, la derivata direzionale si puo scrivere come:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \mathbf{v}} = \nabla f(x, y) \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

Tale formula provoca la "linearita'" delle derivate parziali, se la funzione e' differenziabile.

La derivata parziale risulta dunque massima se diretta come il versore gradiente. Il limite, sta proprio ad indicare che, avvicinandosi al punto x_0 si vuole che la funzione sia "linearizzabile" ovvero che sia approssimabile con l'**equazione piano tangente π** . Chiaramente una funzione differenziabile e' quindi continua.

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0)(x - x_0) + f_y(y_0)(y - y_0) \quad \text{equazione del piano tangente in } x_0$$

Teorema del differenziale totale

$$d(f(x)) = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i$$

$d(f(x))$ viene chiamato **differenziale totale** della funzione.

Il teorema del differenziale totale afferma che se una funzione ammette derivate parziali continue, e' differenziabile.

dimostrazione

Dal teorema di Lagrange in due variabili, risulta

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(\zeta, y_0)}{\partial x}(x - x_0) \quad , \quad f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, \eta)}{\partial y}(y - y_0)$$

Per un qualche ζ, η fra x e x_0 Sommando, si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f(\zeta, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, \eta)}{\partial y}(y - y_0)$$

e il limite si riduce a:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\left(\frac{\partial f(\zeta, y_0)}{\partial x} - f_x(x_0) \right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial f(x_0, \eta)}{\partial y} - f_y(x_0) \right)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right)$$

maggiorabile a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\left(\frac{\partial f(\zeta, y_0)}{\partial x} - f_x(x_0) \right) + \left(\frac{\partial f(x_0, \eta)}{\partial y} - f_y(x_0) \right) \right) = 0$$

essendo dunque le derivate continue, esso e' univocamente nullo dato che $(\zeta, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)$

Derivate seconde

Una funzione di n variabili, avrà n^j derivate j -esime. Partendo sempre dalla derivata direzionale

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial \mathbf{v})^2} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \mathbf{v} \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

La derivata quindi sarà una forma bilineare, che dipende dalla matrice delle derivate seconde, chiamata anche matrice **hessiana**.

Taylor

$$g(t) = g(0) + t g'(0) + \frac{1}{2} t^2 g''(0)$$

La $g(t)$ implica la formula, di validità generale per funzioni differenziabili

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \sigma((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2)$$

Teorema di Schwarz

Se le derivate seconde sono continue, ovvero se la funzione $f(x, y)$ è differenziabile due volte,

$f_{xy} = f_{yx}$, ovvero l'ordine di derivazione nella derivate parziali miste è indifferente.

dimostrazione omessa, si applica due volte il teorema di Lagrange.

Cio' implica, che, nel caso si abbia una funzione differenziabile due volte, se il suo gradiente si annulla, esso è un punto stazionario (*teorema di Fermat in piu' variabili*) e per analizzare la sua natura basta determinare la segnatura della matrice $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$

nota: da una analisi della forma quadratica, risulta che le derivate parziali miste sono "uno sbilanciamento", ovvero, se $f_{yx}^2 > f_{xx} f_{yy}$, il punto sarà una sella, altrimenti un massimo od un minimo. Qualora la funzione non fosse differenziabile due volte, bisognerebbe analizzare la funzione ausiliaria

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

per la determinazione del punto stazionario, e per trovarlo, bisognerebbe analizzare i punti critici del dominio delle derivate parziali (come nel caso ad una variabile).

Taylor in ordini maggiori del secondo

Se possibile, si cerca di fare una sostituzione tale da ricondursi alle tabelle che si hanno per una variabile, altrimenti si utilizza la formula ricorsiva, riconducibile al triangolo di tartaglia,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{x} \cdot \nabla)^j f(\mathbf{x}_0)}{j!} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

! $(\mathbf{x} \cdot \nabla)^j$ è un operatore, prende come argomento $f(\mathbf{x}_0)$

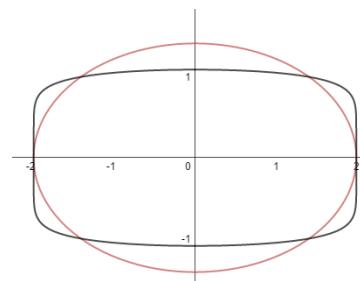
Nota sul gradiente: Il gradiente è perpendicolare alla curve di livello della funzione, se si considera $z = f(x, y)$ il suo gradiente si proietta sul piano xy essendo le curve di livello su questo piano. Se puoi si vuole un gradiente come vettore "tridimensionale" bisognerà applicarlo alla funzione $g(x, y, z) = f(x, y) - z$, che è una funzione di tre variabili. Il grafico di $z = f(x, y)$ è una delle curve di livello di $g(x, y, z)$ e da cui deriva la forma tridimensionale del suo gradiente. Se non diversamente specificato, si considererà sempre la tipologia di gradiente del primo tipo, sul piano xy .

Contrazioni grafiche delle funzioni implicite

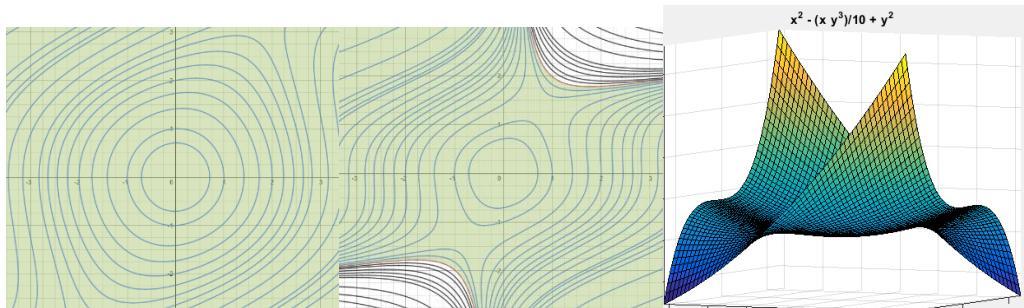
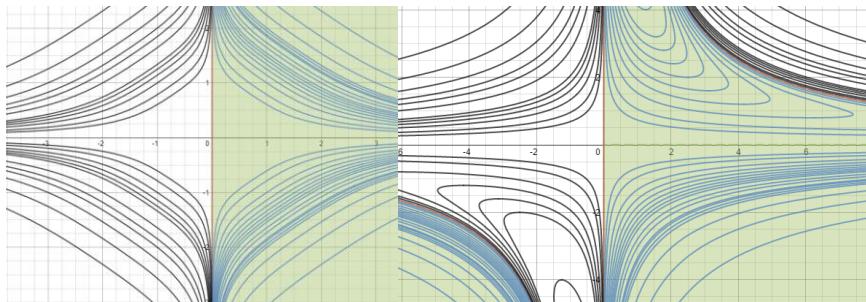
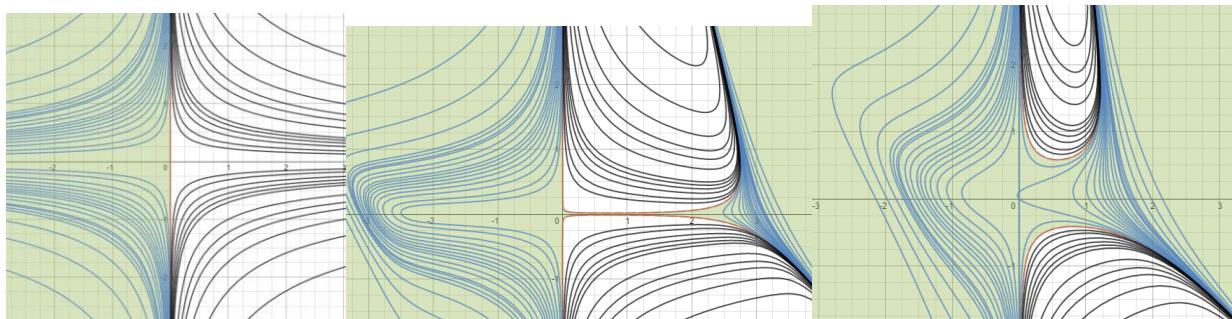
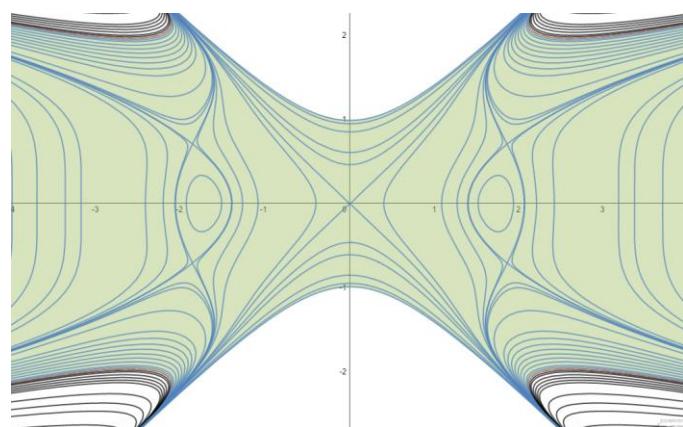
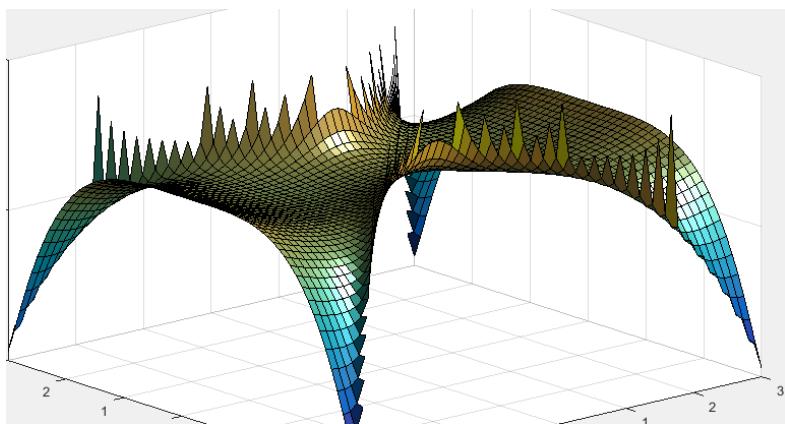
Si consideri una $f(x, y) = c$, e ora si consideri una $f(x^3, y) = c$.

L'ultima curva risulterà più contratta sull'asse x per $|x| > 1$, espansa per $|x| < 1$ (attenzione se la potenza è pari!)

Prodotto di curve di livello: si parte dal disegnare le curve $z=0$ dei singoli fattori e le altre a esse adiacenti.



Variazione delle curve di livello per funzioni di piu variabili



OTTIMIZZAZIONE

Per ottimizzazione si intende la ricerca di massimi e minimi di una funzione, eventualmente vincolata su una frontiera tramite **vincoli di uguaglianza** o **disuguaglianza**. I massimi chiaramente, potranno essere interni al limite di disuguaglianza, e verranno detti **interni al dominio**, o punti di **massimo** o **minimo** forte, oppure esisteranno solo a causa del vincolo.

Punti critici interni al dominio

Se la funzione $f_{(x,y)}$ risulta essere differenziabile, saranno tali che il gradiente si annulli in tale punto, e dunque tutte le derivate direzionali saranno nulle, per il teorema di Fermat. Se la funzione non è differenziabile, bisogna analizzare i punti problematici a parte

Punti di estremo sul vincolo (punto di estremo condizionato) Condizioni di Khun-Tucker

$f_{(x,y)}$ potra' avere anche dei massimi o minimi in un dominio con una frontiera, solo a causa della frontiera e non per l'annullamento del gradiente. In tal caso, pero', se viene indicata con $g_{(x,y)} = 0$ l'equazione del vincolo, i gradienti di $f_{(x,y)}$ e di $g_{(x,y)}$, (ovvero le perpendicolari alle loro curve di livello in 2 dimensioni) saranno linearmente dipendenti. Cio' vale anche nel caso in cui $f_{(x,y)}$ sia soggetta a piu vincoli di equazioni $g_{i(x,y)}$, si deve cioe' avere per n vincoli che:

$$\begin{cases} \nabla f_{(x,y)} = \sum_{j=0}^n \lambda_{i(x,y)} \nabla g_{i(x,y)} \\ g_{i(x,y)} = 0 \quad \forall i \end{cases} \quad \text{Condizioni di Khun - Tucker}$$

La prima equazione vettoriale corrisponde a 2 equazioni scalari, mentre la seconda a n equazioni, una per ogni vincolo. Essendo le incognite $n + 2$ (ovvero tutti i valori dei **moltiplicatori di Lagrange** $\lambda_{i(x,y)}$) e i due valori (x, y) il sistema e' completamente risolvibile, anche qualora i vincoli siano linearmente dipendenti (caso nel quale si cercano n equazioni linearmente dipendenti).

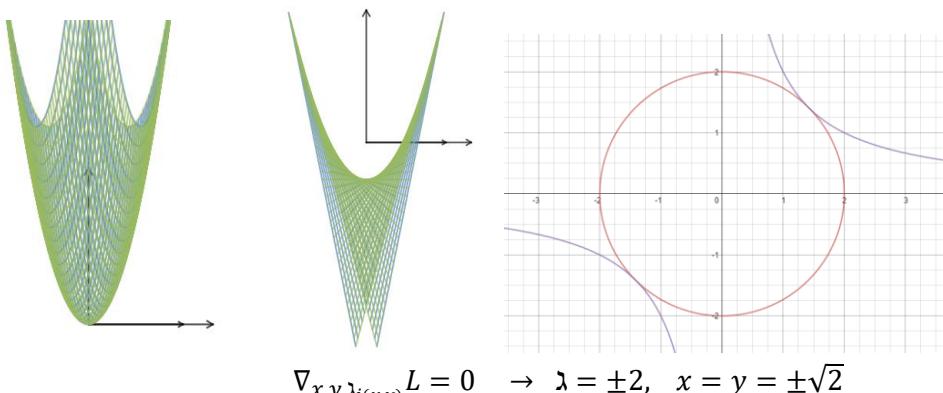
Si puo scrivere la formula in modo piu' esplicito ponendo che il gradiente di una funzione creata ad hoc, chiamata **funzione Lagrangiana**, si annulli nei punti che soddisfano le equazioni del sistema

$$L = f_{(x,y)} + \sum_{j=0}^n \lambda_{i(x,y)} g_{i(x,y)} \quad \nabla_{x,y,\lambda_{i(x,y)}} L = 0$$

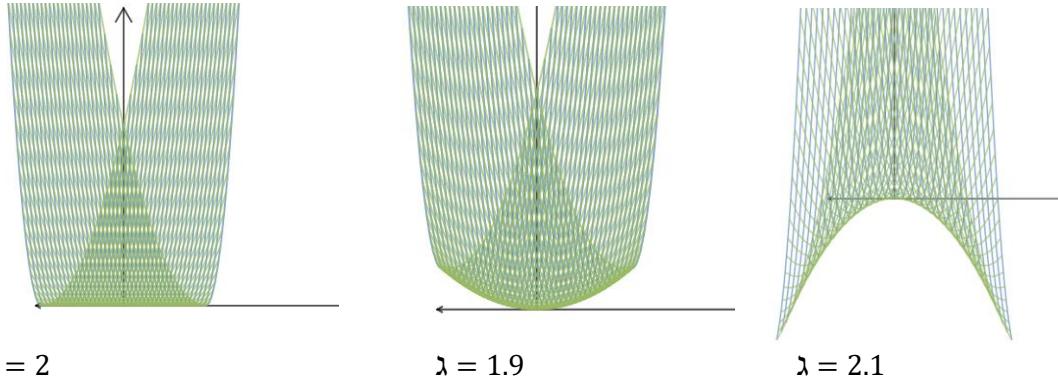
La lagrangiana risulta essere se le funzioni sono di due variabili, dipendenti da tre variabili, e le sue curve di livello sono quindi grafici tridimensionali, i cui punti critici, per il giusto parametro, sono le soluzioni del problema di ottimizzazione.

esempi

Si minimizzi $f_{(x,y)} = x^2 + y^2$ su $g_{(x,y)} = xy - 2 = 0$ $L = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2)$



Plotando le curve di livello della lagrangiana al variare del parametro λ , si trova che per $\lambda = 2$ la lagrangiana ha un punto critico per $x = y = \pm\sqrt{2}$ (in questo caso $x = y$ dato che il parametro non e' funzione di x,y).



Come si nota, per qualsiasi λ , $x = y = 0$ e' soluzione del problema, ma non soddisfa $xy - 2 = 0$

Determinazione della natura dei punti stazionari

Punti interni al dominio

Nel caso in cui i punti stazionari siano interni al dominio, basta analizzare la matrice Hessiana e determinarne la segnatura. Cio' e' possibile con il criterio di Sylvester analizzando le sottomatrici o con altri metodi. Tuttavia, nel caso in cui la funzione non sia differenziabile, come detto prima, va fatta una verifica del valore della funzione nei punti non differenziabili. Nel caso di una matrice Hessiana degenere, puo' essere fuorviante analizzare le derivate direzionali, in quanto esse possono esser anche tutte positive e il punto non essere un punto di minimo (controesempio piu' sotto) ma bisogna fare uno studio sul segno della funzione ausiliaria (x_0, y_0) sono le coordinate del minimo:

$$\widetilde{f(x,y)} = f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)}$$

esempio: si consideri $f_{(x,y)} = y^2 - 3x^2y + 2x^4$

analizzando la matrice Hessiana, si trova un autovalore nullo e uno uguale a 2, non si puo' concludere se il punto $(0,0)$ sia un minimo oppure un punto di sella.

Analizzando le derivate direzionali lungo la direzione $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ si trova:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 2v_2^2 - 18t v_1^2 v_2 + 24t^2 v_1^4 \quad \frac{\partial^2 g_{(0)}}{\partial t^2} = 2v_2^2$$

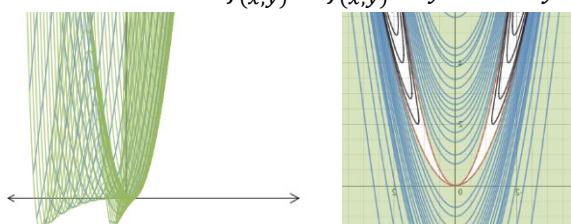
Si nota che la derivata direzionale seconda e' sempre positiva tranne che per $v_2 = 0$ dove e' nulla.

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t^3} = -18v_1^2 v_2 + 48t v_1^4 \quad \frac{\partial^3 g_{(0)}}{\partial t^3} = -18v_1^2 v_2 = 0 \text{ se } v_2 = 0$$

mentre

$$\frac{\partial^4 g_{(0)}}{\partial t^4} = 48v_1^4 \text{ sempre}$$

e si sarebbe portati a concludere che $(0,0)$ sia di minimo, invece non lo e', in quanto, analizzando la funzione ausiliaria $\widetilde{f(x,y)} = f_{(x,y)} = y^2 - 3x^2y + 2x^4 = (y - x^2)(y - 2x^2)$ si scopre che e' sella.



Lo sbaglio e' dovuto al fatto che le derivate direzionali non prendono in considerazione le derivate miste, alcune delle quali sono qui negative nella zona bianca e prevalgono. Si poteva notare dal fatto che $-18v_1^2 v_2$ e' negativo per $\sigma(v_2) > 0$

Punti sulla frontiera

Per la determinazione della natura dei punti stazionari della Lagrangiana, solitamente si puo fare una verifica diretta e qualitativa sulla funzione. In alcuni casi, in cui i vincoli sono molti o le funzioni complesse, esiste pero' un metodo che prende in considerazione la matrice Hessiana della funzione da minimizzare (supponiamo che sia non degenere, altrimenti si ricade nel caso qualitativo). Trovati i punti critici della Lagrangiana, bisognerla valutare l'Hessiana della funzione in tali punti. Tuttavia, essendo soggetta a dei vincoli, non tutte le "direzioni" della Hessiana sono ammissibili, e bisognera' applicare la formula di restrizione a un sottospazio per una matrice bilineare:

$$H_{ristretta} = \varepsilon^T H \varepsilon$$

Le basi ortonormali degli spazi tangentи nei punti critici, che formano la matrice di cambiamento di base ε , saranno da determinare imponendo la perpendicolarita' rispetto ai gradienti (valutati nei punti critici) della funzione da minimizzare. La dimensione dell'Hessiana ristretta sara' quindi $(n - k) \times (n - k)$ dove n sono il numero di variabili della funzione da minimizzare, k i vincoli. La segnatura di questa Hessiana ridotta dara' informazioni sulla natura dei punti trovati (come nel caso non vincolato).

Significato del valore del moltiplicatore di Lagrange

Si consideri che il vincolo dipende da un parametro, ovvero sia funzione di tre variabili $g_{(x,y,k)}$

Dalla Lagrangiana, dovendo essere (a, b) soluzione del problema e punto stazionario, si arriva a dire:

$$\frac{\partial f_{(a,b)}}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial g_{(x,y,k)}}{\partial x} \quad \frac{\partial f_{(a,b)}}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial g_{(x,y,k)}}{\partial y}$$

Ma dovendo essere $g_{(x,y,k)} = 0$ sempre, si deve avere che il suo differenziale e' nullo, ed, essendo a, b anche possibilmente funzioni di k

$$\frac{dg_{(a,b,k)}}{dk} = \frac{\partial g_{(a,b,k)}}{\partial x} \frac{da}{dk} + \frac{\partial g_{(a,b,k)}}{\partial y} \frac{db}{dk} + \frac{\partial g_{(a,b,k)}}{\partial k} \quad \frac{\partial f_{(a,b)}}{\partial k} = \frac{\partial f_{(a,b)}}{\partial x} \frac{da}{dk} + \frac{\partial f_{(a,b)}}{\partial y} \frac{db}{dk}$$

Sostituendo,

$$\frac{\partial f_{(a,b)}}{\partial k} = \lambda \frac{dg_{(a,b,k)}}{dk}$$

Dunque il moltiplicatore di lagrange indica di quanto la $f_{(a,b)}$, valutata nella soluzione (a, b) cambi di valore al variare del parametro che fa cambiare il vincolo.

Cenni alla programmazione lineare

Si immagini di voler minimizzare la funzione

$$\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2$$

Il principale motivo per volerlo fare e' cercare la retta che meglio approssimi dati punti (x_i, y_i) . Il motivo dell'elevamento al quadrato e' che si vuole minimizzare la distanza in modulo della retta, e far pesare di piu punti più distanti. Esistono anche sommatorie sulle radici...

Risulta che, i coefficienti della retta minima soluzione sono:

$$m = \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{x} * \bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad q = \bar{y} - m\bar{x}$$

Dove l'apice indica una media su tutti i valori presenti.

FUNZIONI IMPLICITE

Si consideri il caso di un'equazione $f_{(x,y)} = 0$ in forma implicita. Si vuole determinare se essa è esplicitabile nella forma $y_{(x)}$ oppure nella forma $x_{(y)}$.

Per determinarlo, si consideri il differenziale di $f_{(x,y_{(x)})} = 0$,

$$df_{(x,y_{(x)})} = 0 = \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} \frac{\partial y_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}$$

Dove chiaramente si è posto che y fosse funzione di x e non il viceversa

$$\frac{\partial y_{(x)}}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}}{\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}}$$

condizione affinché la funzione sia dunque esplicitabile in y e che $\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} \neq 0$

Un'analogia relazione varrebbe se si volesse esplicitare su $x_{(y)}$

$$\frac{\partial x_{(y)}}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}}{\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}} \quad \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x} \neq 0$$

Procedendo con lo stesso metodo è possibile anche calcolare le derivate seconde e k -esime della funzione se è di classe C^k ,

$$\frac{\partial^2 y_{(x)}}{\partial x^2} = \frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{f_y^3} \quad \frac{\partial^2 x_{(y)}}{\partial y^2} = -\frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{f_x^3}$$

Cio' vale una relazione analoga per i rapporti fra le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 y_{(x)}}{\partial x^2} = -\frac{f_x}{f_y^3}$$

Generalizzazione a più dimensioni, a più variabili

Nel caso si abbia un sistema di equazioni (indipendenti) e si voglia esplicitare rispetto alle variabili y_i si ottengono simili risultati: che prendono il nome di **teorema del Dini** o **della funzione implicita'**

$$\begin{cases} F_1(y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_m) = 0 \\ \dots \\ F_n(y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_m) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1 \dots x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1 \dots x_m) \end{cases} \quad \text{se } J = \left| \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)} \right| \neq 0$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(y_1 \dots y_{j-1}, x_j, \dots y_n)}}{\frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)}}$$

Determinazione grafica di una funzione implicita

Per la determinazione grafica di una funzione implicita di due variabili, bisogna sostanzialmente fare una curva di livello di un grafico tridimensionale. Il risultato è agevolato se si conoscono il luogo dei punti tali

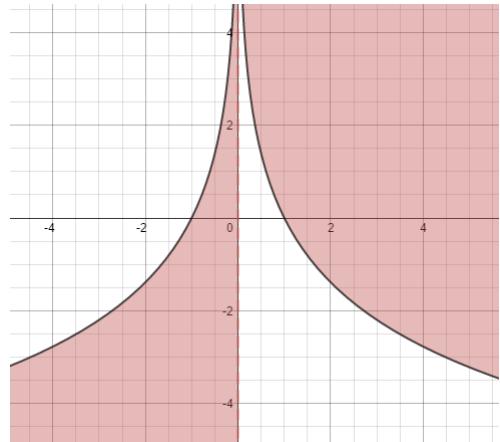
che $\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} = 0$ e se si studia il segno di $-\frac{\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}}{\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}}$. Nel caso in cui la funzione implicita, come spesso

accade, sia somma di più funzioni di due variabili, ad esempio $f_{(x,y)} = h_{(x,y)} - g_{(x,y)}$ il suo grafico sarà unione delle intersezioni delle isocurve di livello.

esempio:

Si consideri l'equazione $f_{(x,y)} = y - x^2 e^y = 0$ ma si generalizzi per ogni sua curva di livello.

Analizzando il segno di $-\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}$ si giunge alla negatività intorno alla zona rosa evidenziata in figura:

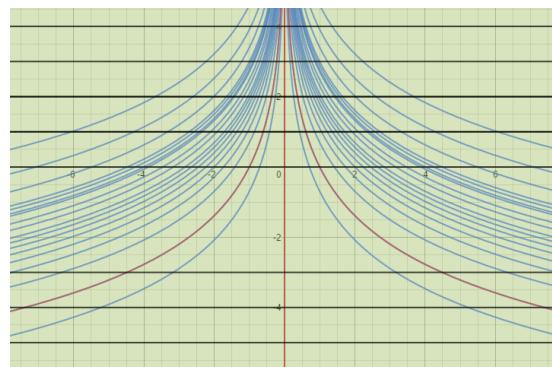


Nella parte della curva nera si ha invece $\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} = 0$

quindi in tali punti $\frac{\partial y_{(x)}}{\partial x} = \pm\infty$

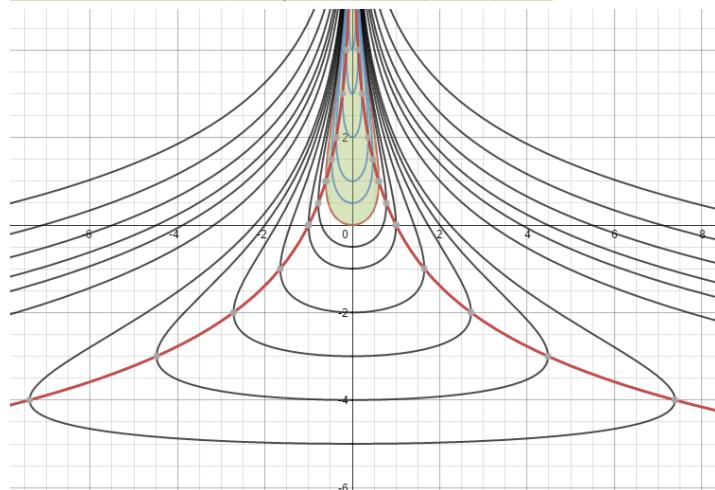
Analizzando anche i luoghi in cui $\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x} = 0$ si conoscono i punti stazionari di $y_{(x)}$ (asse $x=0$ in questo caso).

Si considerino ora le curve di livello della funzione $h_{(x,y)} = y$ e della $g_{(x,y)} = x^2 e^y$



Sostanzialmente, per determinare le intersezioni delle curve isolivelliche al variare del parametro $f_{(x,y)} = c$ si "tentano" delle direzioni. Muovendosi in una direzione, entrambe le curve di livello devono aumentare se quella e' la direzione giusta per $y_{(x)}$.

Si giunge alla determinazione delle curve di livello $f_{(x,y)} = c$



Come si nota, si e' fatto attenzione a porre assieme tutti i risultati precedentemente esposti: lungo la retta rossa la derivata e' infinita e non esiste una y in funzione di x . E la crescita e decrescenza segue il

segno di $-\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}$.

In altri casi, quando non si riescano ad esplicitare neanche $\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}$, conviene fare uno sviluppo in serie di Taylor delle funzioni.

Trasformate di Legendre

Le trasformare di Legendre permettono di descrivere una funzione $f_{(x)}$ tramite una funzione $f_{(x)}^*$ che dipenda solo dalla derivata $\frac{df_{(x)}}{dx} = f'_{(x)}$

Sia definita $f_{(x)}^* = xf'_{(x)} - f_{(x)}$

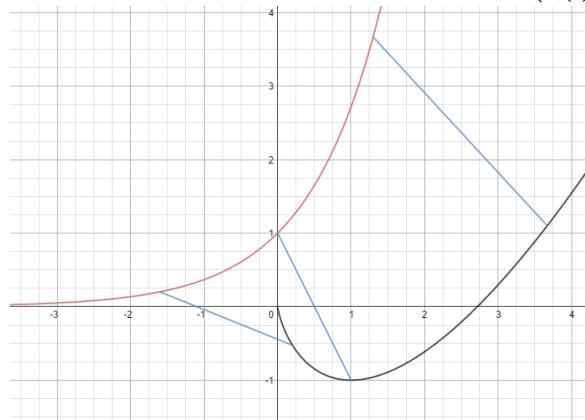
Calcolando il suo differenziale, si nota che dipende solo da $f'_{(x)}$ e quindi si puo esplicitare $f_{(x)}^*$ in funzione della sola derivata di $f_{(x)}$

$$df_{(x)}^* = xdf'_{(x)} + f'_{(x)} - f'_{(x)} = xdf'_{(x)}$$

La trasformata di legendre va chiaramente esplicitata rispetto alla nuova variabile $f'_{(x)}$ e dunque sara':

$$f_{(f'_{(x)})}^* = x_{(f'_{(x)})}f'_{(x)} - f_{(f'_{(x)})}$$

esempio: $f_{(x)} = e^x \quad f_{(x)}^* = xe^x - x \quad f_{(f'_{(x)})}^* = f'_{(x)} \ln(f'_{(x)}) - f'_{(x)}$



Trasformata di Legendre in nero per ogni punto collegato dalla freccia blu.

Si immagini di esprimere la funzione tramite la derivata, così, il punto $(0,1)$ trasla nel punto $(1, f^*)$. In quanto la derivata in quel punto e' 1 Per ogni punto, l'incremento di f^* e' il prodotto fra la derivata di $f_{(x)}$ e x. E' normale dunque aspettarsi un punto stazionario sull'immagine di $f_{(0)} = 1$

Tali funzioni sono molto utili in termodinamica, ingegneria. L'Hamiltoniana, in meccanica razionale, e' una trasformata di Legendre della Lagrangiana.

Trasformata di Legendre per piu' variabili

Subito si generalizza nel caso in cui si abbia una $f_{(x,y)}$

$$f_{\left(\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}, \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}\right)}^* = \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}x + \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}y - f_{(x,y)} \quad df_{\left(\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}, \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}\right)}^* = xd\left(\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}\right) + yd\left(\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}\right)$$

Funzioni omogenee

Una funzione omogenea e' tale da avere contrazioni / dilatazioni che dipendono dalla sua stessa variabile.

$$f_{(tx,ty)} = t^k f_{(x,y)} \quad k = \text{Grado}$$

Teorema di Eulero

Diffenziando la definizione rispetto a t , per $t = 1$ si ottiene:

$$\binom{x}{y} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} \end{pmatrix} = kf_{(x,y)}$$

sostanzialmente, si puo' vedere $f_{(x,y)}$ come immagine di un applicazione lineare.

Approssimazione della funzione esplicita di una funzione implicita mediante serie di Taylor

Si consideri nuovamente l'equazione in forma implicita $f_{(x,y)} = 0$

Si controlli se essa e' esprimibile localmente mediante una funzione $y_{(x)}$ e la si scriva come serie di potenze, per i primi gradi di cui si interessa calcolare i coefficienti. Reinscrivere i coefficienti nell'equazione $f_{(x,y_{(x)})} = 0$ si puo usare di nuovo taylor o Maclaurin per esprimere la funzione come funzione polinomiale dei coefficienti, e si possono dunque determinare i coefficienti ugualando i coefficienti delle potenze uguali. Da tali coefficienti a_n si possono anche calcolare le n derivate della funzione $y_{(x)}$.

Equazioni implicite con perturbazioni

Si supponga di avere un'equazione implicita che, se non a causa di una funzione trascendente moltiplicata per un piccolo coefficiente, sarebbe esplicitabile senza problemi.

Sia $f_{(x,y,\varepsilon)}$ tale funzione dove ε e' il parametro che fa da coefficiente, come se ne fosse funzione. In tal modo, si riescono a descrivere le variazioni che tale parametro implica sulla soluzione esplicita mediante le proprietà dei differenziali, infatti, derivando rispetto al parametro e scrivendo tramite taylor $f_{(x,y)}$,

$$f_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)} + \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon^j}{j!} \frac{\partial^j f_{(x_0,y_0)}}{\partial \varepsilon^j} |_{(x_0,y_0)}$$

dove chiaramente le derivate vanno valutate nel punto da cui si vuole trovare l'approssimazione.

Il valore di ε originale presente inizialmente nella forma implicita andrà poi sostituito per avere l'approssimazione desiderata al grado n

CENNI DI GEOMETRIA e TOPOLOGIA

Data l'equazione di una retta in R^3 come intersezione di due piani, essa e' il prodotto vettoriale fra i gradienti. Da cio consegue che il vettore tangente ad una curva data come intersezione di due equazioni cartesiane e' sempre il prodotto vettoriale fra i gradienti.

Date le equazioni di due piani che delimitano una retta, l'equazione del fascio di piani che passano per la stessa retta e' combinazione dei gradienti.

$$d_{P|\pi} = \frac{|aX_0 + bY_0 + cZ_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad d_{P|r} = \frac{(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_r) \times \mathbf{v}_r}{|\mathbf{v}|} \quad d_{s|r} = \frac{(\mathbf{P}_s - \mathbf{P}_r) \cdot (\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s)}{|(\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s)|}$$

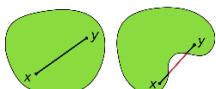
Insieme aperto Un insieme si dice aperto, se per ogni punto $x_0 \in I$, esiste $x_1 - x_0 = \varepsilon$ tale che x_1 faccia ancora parte dell'insieme. Generalmente, un insieme aperto, deriva da una disuguaglianza non stretta, $< >$. Es: $I: \rho < 1 \quad \forall \rho$ Mi posso avvicinare quanto voglio ad uno, senza uscirvene.

Insieme chiuso Ogni insieme non aperto, e' chiuso. Fanno eccezione due insiemi che sono sia aperti che chiusi contemporaneamente: l'insieme vuoto e l'insieme totale. L'insieme chiuso e' complementare di un insieme aperto. L'insieme chiuso deriva di solito da un disuguaglianza stretta, $\leq \geq$

Insieme limitato/illimitato: Se gli estremi dell'insieme sono finiti / non finiti

Insiemi compatti: Se un insieme e' sia chiuso che limitato

Insieme convesso e non convesso:



Insieme连通的

Se qualsiasi due punti dell' insieme sono raggiungibili da almeno una curva che non esca dall'insieme.

Insiemi stellati

Ogni insieme che contenga almeno un punto P tale che per ogni punto P_2 scelto, il segmento PP_2 sia interamente contenuto nell'insieme. Un insieme convesso e' stellato. Un insieme stellato e' composizione di insiemi connessi.

Insieme semplicemente connesso

Un insieme semplicemente connesso in un aperto E e' ogni curva semplice che puo essere contratta a piacimento, rimanendo in E, ad un punto. In un insieme semplicemente connesso le curve chiuse sono tutte omotope. La condizione di irrotationalita' per un campo vettoriale e' sufficiente, se definito in un insieme aperto semplicemente connesso, per dimostrare la conservativita' del campo stesso. Insiemi convessi e insiemi stellati sono semplicemente connessi

Curve omotope

Due curve sono omotope se sono una riducibile nell'altra mediante trasformazioni che le portano a non uscire mai dal loro insieme di definizione: es. due curve in un dominio R^2 con un punto anomalo, non sono omotope se racchiudono il "buco". Ma le stesse curve in R^3 sono omotope, non lo sarebbero qualora ci fosse una retta fuori dal dominio. Due curve omotope, con stessi estremi, hanno circuitazione uguale per forme differenziali chiuse. Un campo vettoriale in un dominio che contenga curve non omotope, puo essere non conservativo anche se il suo rotore e' nullo.

Punti interni, esterni o di frontiera Se rispettivamente appartengono all'insieme, non appartengono, oppure sono sugli estremi di definizione dell'insieme (per insiemi chiusi) o sull'estremo di definizione dell'insieme chiuso complementare (per insiemi aperti). Un punto interno e' di accumulazione.

Punto di accumulazione: se esistono altri punti vicino a questo che appartengono allo stesso insieme.

METRICA e SPAZI FUNZIONALI

Gli spazi metrici si occupano di determinare le relazioni che intercorrono fra gli elementi (punti, vettori) di un insieme. Sono di fondamentale importanza nello spazio euclideo, nella teoria differenziale, in statistica.

*Un insieme si dice **spazio metrico** se e' definita un applicazione lineare $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni elemento appartenente allo spazio metrico, d sia positivo, sia simmetrico e valga la diseguaglianza triangolare.*

Nello spazio metrico euclideo, d e' la distanza fra due punti. Tale spazio metrico risulta essere anche lineare.

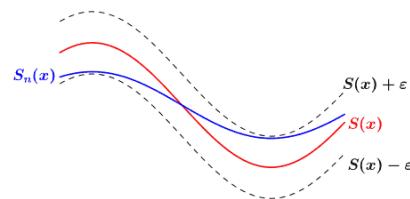
Esistono spazi lineari che definiscono d come la radice delle distanze, o come gli integrali delle distanze. Essi sono utili in statistica dove si preferisce un approccio dello "scarto quadratico medio" per fare in modo che tutti i punti non si "discostino troppo" da un punto considerato.

Metrica Lagrangiana

La metrica lagrangiana di classe C^k definisce la distanza fra due funzioni $f_{(t)}, g_{(t)}$

$$d_{(f_{(t)}, g_{(t)})} = \sum_{j=0}^k \sup \left| f_{(t)}^j - g_{(t)}^j \right|$$

Dove l'esponente j indica la derivata j -esima.



Questa condizione, se ad esempio si pone che la distanza sia limitata, impone che la funzione $g_{(t)}$ non si "discosti" troppo da $f_{(t)}$ (e anche le loro derivate k -esime).

Per utilizzare tali definizioni l'insieme di definizione delle funzioni deve essere compatto.

La metrica permette di dare molte informazioni sulla topologia e sulla convergenza, si indichi:

Successione convergente: una successione di numeri a_n per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (d_{(a_n, a)}) = 0$$

Successione fondamentale o di Cauchy se:

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} (d_{(a_n, a_m)}) = 0$$

Solitamente, una successione fondamentale e' anche una successione convergente, ma cio' non vale in tutti gli spazi metrici, ma solo in quelli definiti come **spazi metrici completi**. Lo spazio euclideo e lagrangiano con $k \geq 1$ sono completi. \mathbb{Q} non e' completo, \mathbb{R}^n sì. Gli spazi metrici completi lagrangiani si chiamano anche **spazi di Lagrange**. Si definisce il **Criterio di convergenza di Cauchy**, che afferma che basta che $d_{(a_n, a_m)} < \varepsilon$ per qualche $n, m > L$, affinché la successione sia anche convergente. Questo criterio e' utile perché spesso non si conosce $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, che sarebbe necessario per verificare la convergenza della successione numerica.

Definizioni

Uno spazio metrico si dice **compatto** se da ogni sua copertura e' possibile estrarre una famiglia di insiemi aperti che sia ancora una copertura.

Uno spazio metrico si dice **compatto per successioni** se da ogni successione in X si puo estrarre una sottosequenza convergente.

Si dice che un insieme e' **denso** in uno spazio metrico, se possiamo approssimare, nella metrica di X , gli elementi di X come elementi di E tanto bene quanti si voglia. Ad esempio, i numeri razionali sono densi nei numeri reali.

Si dice **varietà lineare** un sottoinsieme dello spazio lineare metrizzato X , che sia esso stesso metrizzato.

Si dice **sottospazio** se tale varietà lineare non e' solo metrizzata e lineare, ma anche compatta. Ad esempio, la successione di polinomi e' un sottospazio, in quanto varietà lineare, ma non compatta, perché tende all'esponenziale, che non e' un polinomio.

Contrazioni: Un'applicazione lineare F (che sia lipschitziana) si dice contrazione se modifica le distanze in modo che: $d_{(F(x), F(y))} \leq \rho d_{(x, y)}$ con $\rho < 1$

Teorema delle contrazioni o di Banach-Cacciopoli: in uno spazio metrico completo una contrazione ammette sempre un unico punto fisso (avendo punti la cui distanza non viene modificata).

Metrica dello spazio trigonometrico a campo reale e complesso con Serie di Fourier

Si definisca un prodotto scalare come segue:

Prodotto scalare “integrale”

$$\langle x_{(t)}, y_{(t)} \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} x_{(t)} y_{(t)} dt$$

Tale operazioni associa a due funzioni un numero, le funzioni si diranno “ortogonalni” se quell’integrale risulta esser nullo.

Sistema trigonometrico su campo reale e complesso

Dalle formule di prostaferesi, si possono dimostrare le seguenti identità:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt, \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt = 0 \quad \forall m, n$$

tali funzioni, risultano quindi essere *ortogonalni* secondo il prodotto scalare definito sopra, e possono completare a base (con infiniti generatori) uno spazio, che chiameremo spazio trigonometrico. Visti in tal modo, una funzione del tipo $\cos(nt)/\pi$ o $\sin(nt)/\pi$ è un vero e proprio versore di norma unitaria. *Il sistema trigonometrico è un esempio di sistema limitato, infinito, senza punti di accumulazioni (tutte le funzioni (punti visti in rappresentazione nel sistema) sono a distanza fissata l’uno dall’altro $\sqrt{2}$).*

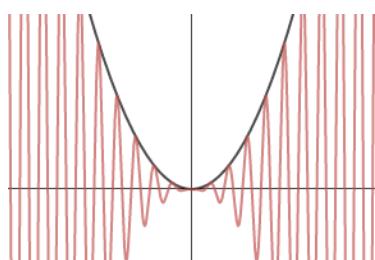
La norma in questo sistema (che crea uno spazio di Hilbert) risulterà essere la radice di $\langle x_{(t)}, x_{(t)} \rangle$.

Per dimostrare la **completezza** della metrica indotta da tali definizioni, si dimostra prima la convergenza a questa norma, e poi la convergenza alla $x_{(t)}$.

Legame con la serie di Fourier

Considerata ora la serie di Fourier,

$$f_{(x)} = \frac{a_{(0)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{(n)} \cos(nx) + b_{(n)} \sin(nx)$$



i coefficienti $a_{(n)}, b_{(n)}$ saranno semplicemente la rappresentazione della funzione sui versori del sistema trigonometrico, ovvero saranno le sue proiezioni su tali versori. Se la funzione ha certe regolarità (discusse nelle successioni) questi coefficienti tenderanno a zero, essendo l’integrale tendente a zero di una funzione che, all’aumentare di n , diventa sempre più “fitta”.

-< grafico di $f_{(x)} \cos(nx)$ con $f_{(x)} = x^2$, $n = 20$

Per le stesse funzioni di prima, risulta anche l'**identità di Parseval**, ovvero,

$$\langle f_{(x)}, f_{(x)} \rangle = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Che altro non è che la norma al quadrato della funzione nel sistema trigonometrico.

Note aggiuntive

Spazi di Banach: uno spazio metrico che sia normato (abbia struttura vettoriale) e completo

Spazi di Hilbert: uno spazio di Banach che sia munito di prodotto scalare.

Teorema di Ascoli-Arzela’ : Teorema sulla compattezza degli spazi normati. Permette di dimostrare che, un’equazione differenziale con funzione continua ma non lipschitziana, ha soluzione anche se non unica.

CURVE e INTEGRALI CURVILINEEI

TEOREMI DI PAPPO DEL CENTROIDE

Dalla determinazione di un punto particolare di una curva o di una superficie, chiamato **centroide** x_c , e' possibile determinare l'area o il volume di rotazione generato, rispettivamente, dalla curva o dalle superficie

$$x_c = \frac{\int x \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds}{\int \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds} \quad \text{per curve} \quad x_c = \frac{\int x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial y} ds dy}{\int \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial y} ds dy} \quad \text{per superfici}$$

La determinazione del centroide segue da considerazioni puramente geometriche. Nel solo caso in cui la densita' massica sia uniforme, si puo' dare al centroide il significato di media pesata sulle masse delle coordinate. In tal caso, il centroide coincide con il baricentro, ed i termini $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ e $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial y}$ sono rispettivamente densita' lineare e superficiale.

Area per superfici ottenute mediante una rivoluzione di angolo ϑ della curva φ

$$A = \vartheta x_c l_{(\varphi)}$$

dimostrazione

$$A = \int_0^\vartheta d\vartheta \int_{s_1}^{s_2} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \int_0^\vartheta d\vartheta \frac{\int_{s_1}^{s_2} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds}{\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \vartheta x_c l_{(\varphi)}$$

Volume per solidi ottenuti mediante una rivoluzione di angolo ϑ della superficie Ψ

$$V = \vartheta x_c A_{(\Psi)} \quad \text{dimostrazione analoga}$$

CURVE

Sia $r : I \rightarrow R^3$ con $I \subset R^3$ e $\varphi = Im(r)$. r rappresenta una parametrizzazione della curva φ .

E' descrivibile quindi tramite il passaggio in coordinate parametriche, di parametro t , tali che

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = v_{(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2}$$

Si nota subito che nei punti in cui $v_{(t)} = 0$ la curva potrebbe essere non liscia, in quanto la radice puo provocare punti di non derivabilita' quali cuspidi...

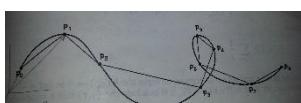
Curva semplice: e' una curva senza autointersezioni (ovvero r e' iniettiva su I)

Curva piana: $r \rightarrow R^2$

Curve di Jordan: se una curva e' semplice, piana, o chiusa, e' una curva di Jordan. Il **sostegno di una curva** di Jordan e' frontiera di due insiemi aperti nel piano, uno limitato (interno) e uno illimitato (esterno).

Curve regolari o regolari a tratti: Tali che $v_{(t)} \neq 0$

Curve rettificabili Sono tali che la poligonale della curva, definita da:



$$l_{(T)} = \sum_{j=0}^{n-1} \| \mathbf{r}_{(t_{j+1})} - \mathbf{r}_{(t_j)} \| \neq \infty \quad l = \sup(l_{(T)})$$

esempio di curva non rettificabile, per riconducibilita' alla serie armonica: $x(t) = y(t) = t \sin\left(\frac{a}{t}\right)$

Le curve regolari sono sempre rettificabili, e tali che vale la classica formula della cinematica:

$$l_{(T)} = \int_a^b |\mathbf{v}(t)| dt$$

$$\text{es. } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dt}\right)^2} dt \text{ parametrizz. in } x, \quad \int_a^b \sqrt{f_{(\vartheta)}^2 + \left(\frac{df_{(\vartheta)}}{d\vartheta}\right)^2} d\vartheta \text{ parametrizz in } \vartheta$$

Nel caso speciale in cui il parametro t sia uguale al parametro s detto intrinseco, $v_{(s)} = 1$

Il parametro intrinseco di una curva è dato dalla sua stessa lunghezza, ovvero $\frac{\partial x}{\partial s} = 1$ in quanto ad ogni incremento vettoriale corrisponde sempre un eguale incremento in lunghezza. La derivata delle singole componenti rappresentano i coseni direttori della curva. Spesso non è semplice trovare la parametrizzazione di una curva in forma intrinseca. Bisogna prima calcolare $l_{(T)} = s(t)$, ricavare poi $t(s)$ e risostituire in $r(t(s))$

es. sia data l'elica di equazione $r(t) = R\cos(t)\hat{i} + R\sin(t)\hat{j} + ct\hat{k}$

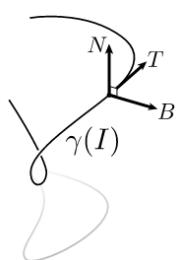
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 + c^2} du = \sqrt{R^2 + c^2} t \rightarrow r(s) = R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + c^2}}\right)\hat{i} + R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + c^2}}\right)\hat{j} + \frac{cs}{\sqrt{R^2 + c^2}}\hat{k}$$

Curve in coordinate polari

$$d\gamma = dt \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2} \quad \tan(\beta) = \frac{r(\theta)}{\left(\frac{\partial(r(\theta))}{\partial \theta}\right)} \quad A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r(\theta))^2 d\theta$$

β è l'angolo fra il vettore congiungente il punto della curva con l'origine ed il vettore tangente alla curva
 A è l'area racchiusa fra due raggi β ed α dalla curva $r(\theta)$.

Triade di Frenet-Serret

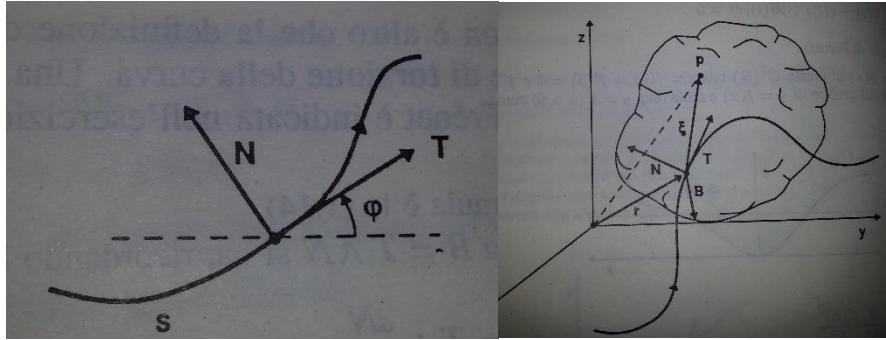


Data una curva, è possibile identificarla e riportarla in R^3 conoscendo tre parametri, i versori \hat{T} , \hat{N} , \hat{B} tali che \hat{T} sia il versore tangente alla curva, \hat{N} (versore normale) dia' informazioni sulla curvatura (è diretto come l'accelerazione centripeta che un corpo sentirebbe se sottoposto al vincolo della curva) e \hat{B} (verso binormale) il prodotto vettoriale dei due, ovvero indentifichi il "miglior" piano tangente alla curva in quel punto, cioè quello tangente anche nei punti subito vicini (per ogni punto, i piani tangenti sono chiaramente infiniti). I coefficienti k e τ vengono rispettivamente chiamati curvatura e torsione della curva. Una curva piana ha come sostegno il piano osculatore di un qualsiasi punto, essendo \hat{B} fisso. Curvatura e torsione non cambiano in diversi sistemi di riferimento

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ k = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} \\ \hat{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} \\ \tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot (\dot{\mathbf{a}})}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} \\ \hat{N} = \hat{T} \times \hat{B} = \frac{d\hat{T}/dt}{|d\hat{T}/dt|} \end{array} \right.$$

La torsione e la curvatura rappresentano un importante fattore cinematico. La curvatura puo esser intesa come la derivata dell'angolo che la curva forma con un asse del sistema di riferimento fisso, la velocita' angolare sara', nel caso sia presente anche torsione, data dal *vettore di Darboux*:



$$\mathbf{w} = -\tau \hat{T} + k \hat{B}, \quad \frac{d \dots}{ds} = \mathbf{w} \times \dots$$

In questa interpretazione, i versori $\begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$ sono solidali ad un corpo rigido in rotazione vincolato alla curva.

Il vettore $\frac{dB}{ds}$ viene chiamato anche vettore di torsione.

Accelerazione centripeta, cerchio osculatore e raggio osculatore

Si consideri, per semplicita' (ma senza perdita di generalita') un moto circolare uniforme. L'accelerazione centripeta si trovera' derivando due volte la posizione (coord. Radiali), e dev'essere della forma:

$$\mathbf{x} = \rho \hat{\varphi} \rightarrow \mathbf{v} = \rho \dot{\varphi} \hat{T} \rightarrow \mathbf{a} = \rho \ddot{\varphi}^2 \hat{N} = \frac{v^2}{\rho} \hat{N}$$

Nel caso non circolare uniforme, si potra' avere chiaramente un accelerazione anche tangenziale, e un raggio non costante, ma forma dell'accelerazione dev'essere chiaramente la stessa, per un raggio ρ_c detto osculatore. Si nota anche che maggiore e' la curvatura k minore dovrà esser ρ_c , infatti

un'altra relazione che lega le grandezze e' proprio: $k = \frac{1}{\rho_c}$

Dalla definizione di k si puo ora definire, parametrizzando nel tempo o in altri parametri, il raggio osculatore, ed il piano osculatore (perpendicolare a \hat{B}), che contiene il cerchio osculatore.

esempio bidimensionale: calcolo dei raggi osculatori

per una curva nel piano xy , data in forma parametrica $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, in ogni punto e' possibile trovare, partendo dalla curvatura,

$$\rho_c = \left| \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \right|$$

per una curva data in forma esplicita', $y - f(x) = 0$ si puo parametrizzare in x , trovando:

$$\rho_c = \left| \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|$$

per una curva data in forma implicita, $f(x, y, \dots) = 0$, si puo esprimere come la divergenza per il versore del gradiente di $f(x, y, \dots)$, ovvero la divergenza del campo vettoriale gradiente:

$$\rho_c = \frac{1}{\left| \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \right|}$$

Si chiama curva evoluta il luogo dei punti che contengono i raggi dei cerchi osculatori.

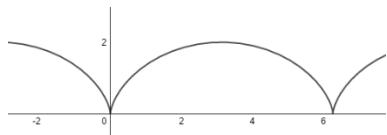
Teorema fondamentale delle curve spaziali

La curva e' interamente determinata dai coefficienti k e τ

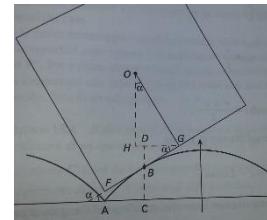
dimostrazione: derivazione di $f(s) = \widehat{T}_1 \cdot \widehat{T}_2 + \widehat{N}_1 \cdot \widehat{N}_2 + \widehat{B}_1 \cdot \widehat{B}_2$.

Lemma: se k e τ costanti si ha cerchio oppure elica.

Curve particolari



$$\text{Cicloide} \begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$$



Curva di percorrenza di una ruota quadrata: *catenaria* (ponendo la distanza del centro del quadrato come costante durante il moto)

INTEGRALI SU CURVE

Integrale curvilineo di prima specie ovvero *integrale di uno scalare $f_{(x,y,z)}$ lungo una linea $r_{(x(t),y(t),z(t))}$*

$$\int_{\varphi}^{t_2} f_{(x,y,z)} ds = \int_{t_1}^{t_2} f_{(r_{x(t)}, r_{y(t)}, r_{z(t)})} \left| \frac{dr}{dt} \right| dt$$

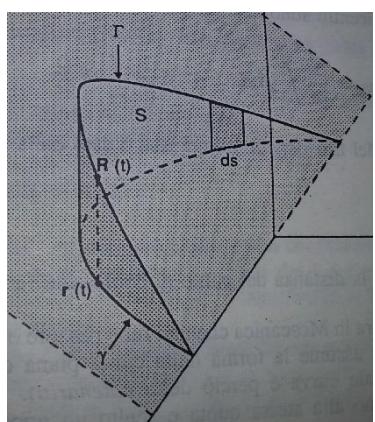
I due integrali sono equivalenti per la regola di derivazione di una funzione composta. La funzione $f_{(x,y,z)}$ va chiaramente valuta come $f_{(r_{x(t)}, r_{y(t)}, r_{z(t)})}$, ovvero considerati i suoi valori solo sulla curva.

es. $r(t) = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j} + t\hat{k}$ $f_{(x,y,z)} = x^2 + y - z^3$

$$f_{(r_{x(t)}, r_{y(t)}, r_{z(t)})} = (\cos(t))^2 + \sin(t) - t^3 \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{2}$$

$$\int_{\varphi}^{t_2} f_{(x,y,z)} ds = \sqrt{2} \int_{t_1}^{t_2} [(\cos(t))^2 + \sin(t) - t^3] dt$$

Nel caso in cui la curva sia chiusa, si puo indicare \oint_{φ} ...



Significato

La funzione $f_{(x,y,z)}$ puo essere una densita di massa, e in tal caso l'integrale risulta esse la massa di un tratto definito di linea. Nel caso la curva sia piana, si puo interpretare l'integrale come l'aria formata da tanti rettangoli di altezza $f_{(x,y)}$ (che puo essere plottata in 3D) e base la curva.

L'integrale curvilineo di prima specie ha le proprieta' di linearita, additivita' rispetto al cammino di integrazione, ed e' indipendente dalla parametrizzazione scelta per il suo calcolo e dal suo verso (infatti gli estremi di integrazione cambiano col parametro).

Integrale curvilineo di seconda specie ovvero di un vettore $\mathbf{f}_{(x,y,z)}$ lungo una linea $r_{(x(t),y(t),z(t))}$

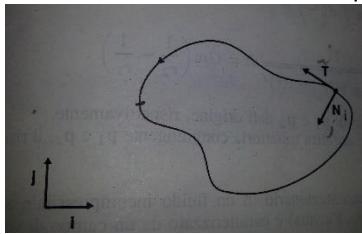
$$\mathbf{f}_{(x,y,z)} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} \quad d\mathbf{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

Si definisce integrale curvilineo di seconda specie, l'integrale del prodotto scalare:

$$\oint_{\varphi} \mathbf{f}_{(x,y,z)} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b w = \int_a^b \left[f_1(\dots) \frac{dx}{dt} + f_2(\dots) \frac{dy}{dt} + f_3(\dots) \frac{dz}{dt} \right] dt = \int_a^b [\mathbf{f}_{(x(t),y(t),z(t))} \cdot \mathbf{v}_{(x(t),y(t),z(t))}] dt$$

Dove si e' definito il differenziale w per una scrittura piu agevole. Si nota che l'integrale di seconda specie puo esser riconducibile ad un integrale di prima specie, ed ha le stesse proprietà eccetto l'indipendenza dal verso di parametrizzazione della curva scelta per fare l'integrazione.

Il differenziale $w = f_1(\dots)dx + f_2(\dots)dy + f_3(\dots)dz$ rappresenta il lavoro infinitesimo fatto dalla forza $\mathbf{f}_{(x,y,z)}$ per uno spostamento $d\mathbf{r}$. Tale interpretazione ha senso pero' anche qualora il vettore non sia una forza ma velocita' o quant'altro.



Data l'importante dell'orientamento, si definisce **positivo** un senso di percorrenza antiorario (ovvero tale che il parametro si muova sulla curva in modo antiorario) e **negativo** un senso di percorrenza orario. Il versore \hat{T} seguirà il senso di percorrenza, e seguendo \hat{N} il versore \hat{T} in senso antiorario di 90 gradi (come avviene per i versori \hat{i}, \hat{j}) esso sarà interno alla curva se orientata positivamente, esterno se orientata negativamente.

esempio La forma della curva, essendo $\mathbf{f}_{(x,y,z)}$ irrotazionale, non ha importanza

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{(x,y,z)} &= -\frac{Gm}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & L &= -Gm \int_{\varphi} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = -Gm \int_{\varphi} \frac{|\mathbf{r}| |d\mathbf{r}|}{r^3} \\ &= -Gm \int_{t_1}^{t_2} \frac{dr}{r^2 dt} dt = \frac{-Gm}{r_1} + \frac{Gm}{r_2} & \text{opposto del potenziale gravitazionale, } x \text{ qualsiasi curva} \end{aligned}$$

esempio 2 calcolo di un flusso in modo esplicito (provare successivamente ad utilizzare teorema di Green, e della divergenza per verificare l'uguaglianza)

Sia $\mathbf{v}_{(x,y,z)}$ un campo di velocità di un fluido, $\hat{T} = \frac{dx}{ds} \hat{i} + \frac{dy}{ds} \hat{j}$, $\hat{N} = -\frac{dy}{ds} \hat{i} + \frac{dx}{ds} \hat{j}$, $\varphi =$ cerchio

L'integrale seguente rappresenta il flusso entrante (se si considera la curva orientata positivamente, essendo \hat{N} rivolto verso l'interno), ovvero la quantità di fluido che sta entrando nel volume di controllo

$$\oint_{\varphi} \mathbf{v}_{(x,y,z)} \cdot \hat{N} ds = \int_{s_1}^{s_{1f}} \left[v_y \frac{dx}{ds} - v_x \frac{dy}{ds} \right] ds$$

Tale quantità è nulla se $\nabla \cdot \mathbf{v}_{(x,y,z)} = 0$ condizione che si verifica quando il fluido è incomprimibile.

TEORIA DELL' INTEGRAZIONE MULTIPLA

Richiami di analisi uno

Per la creazione di un integrale definito univocamente si crea una successione di somme inferiori e una successione di somma superiore. Si tende alla suddivisione degli intervalli a infinito per il superiore della somma inferiore e l'inferiore della somma superiore, fino a dimostrare che i due combaciano, se la funzione ha particolari ipotesi di regolarita', per la quale si dira' che e' **integrabile**. Una funzione integrabile e' continua a tratti (o meglio, continua **generalmente**). Esistono anche integrali impropri che hanno intervallo di integrazione infiniti o punti in cui la funzione, se **integrabile in senso improprio**, e' **convergente**. L'operato di integrazione prende una funzione e restituisce un numero reale, essa e' dunque un'applicazione lineare (funzionale) con le proprietà di **linearità**, **monotonia**, **teorema della media**.

Risultati notevoli

L'integrale improprio,

$$\int_{x^2+y^2+z^2>0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^a} dx dy dz \text{ e' convergente per } a > \frac{3}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \sqrt{\pi}$$

Con il giusto cambianeto di coordinate, integrali molto complessi posso diventare semplici.

Proprietà degli integrali

Esistono alcune operazioni che, se l'integranda e' di una opportuna regolarità, si possono effettuare sugli operatori integrali. Di solito, tali regolarità sono un'opportuna **limitatezza** dell'integrante.

Teorema della convergenza dominante

In una successione di funzioni e' possibile svolgere il limite fuori o dentro dal segno dell'integrale, indifferentemente, se $|f_{k(x)}| \leq g_{(x)}$ $\forall k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_{k(x)} dx = \int f_{(x)} dx$$

Cio' permette di svolgere facilmente alcuni integrali altrimenti complessi. Si noti che l'ipotesi $|f_{k(x)}| \leq g_{(x)}$ per la successione e' molto meno stringente della convergenza uniforme, e si dice **convergenza dominante**.

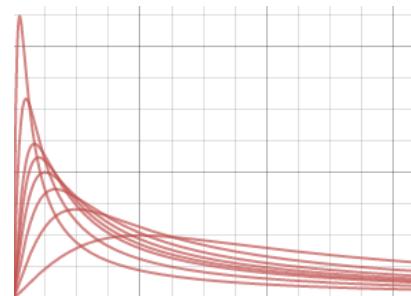
$$\text{es. } f_k(x) = \frac{k^{\frac{3}{2}}x}{1+k^2x^2} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_{k(x)} = \int f_{(x)} = 0$$

come si nota graficamente, la convergenza non e' uniforme in $x = 0$

Teorema della media

$$\iint f(x, y) dA = f(x_0, y_0) * \text{Area}$$

(x_0, y_0) e' legato al centroide se la funzione $f(x, y)$ e' lineare



Lo stesso teorema puo chiaramente essere generalizzato in caso si parli di serie di funzione, in quanto non sono altro che una successione di somme parziali.

es.

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \sin(ax) e^{-kx} = \sum_{k=1}^\infty \frac{a}{a^2 + k^2}$$

E' stato possibile lo scambio verificando che $g_{(x)}$ esistesse, ovvero che l'integrale di una funzione maggiorante di quella data convergesse.

Derivazione sotto il segno di integrale

Se $|f_{(x,y)}| \leq g_{0(x)}$ e lo stesso vale anche per la derivata, $|f'_{(x,y)}| \leq g_{i(x)}$ si potranno scambiare l'operatore integrale con quello di derivazione $\frac{\partial}{\partial y}$ sotto il segno di integrale.

! Nota, tale ipotesi sta proprio a indicare la limitatetta delle integrande.

Cenni sulla trasformata di Fourier

Dato il prodotto scalare trigonometri (o spettro), $\langle f_{(x)}, e^{-ixt} \rangle$, la trasformata di Fourier e' definita da:

$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f_{(x)}, e^{-ixt} \rangle$ Su di essa vale il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, ed e' di fondamentale utilizzo per l'analisi delle frequenze in analisi numerica...

Integrali iterati (teoria)

Il passaggio da un integrale a piu integrali iterati e' permesso dal teorema di Fubini e di Tonelli, che affermano che, se la funzione e' integrabile, indifferentemente dalla scelta degli integrali iterati, l'integrale trovato con gli integrali iterati sara' lo stesso dell'integrazione in $dxdy$

$$\iint f_{(x,y)} dxdy = \int dx \int f_{(x,y)} dy = \int dy \int f_{(x,y)} dx \quad \int_{a_{min}}^{a_{max}} da \int_{b_{min}(a)}^{b_{max}(a)} db \int_{c_{min}(b,a)}^{c_{max}(b,a)} f_{c(b,a)} dc$$

SUPERFICI IN \mathbb{R}^3

Le superfici, dal punto di vista della metrica, sono un concetto molto diverso dalle curve, in quanto una curva e' sostanzialmente una linea deformata, non sempre una superficie si puo invece ottenere tramite la deformazione di un piano, o meglio, eventuali coordinate scelte sulla superficie possono avere proprietie ben diverse da quelle scelte su un piano.

Trascurando questo aspetto, definiamo una superficie regolare $\mathbf{r}_{(u,v)}$ tale che

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial v} \neq 0$$

Tale condizione sta ad indicare che la superficie non abbia in nessun punto gradiente nullo. Puo accadere tale condizione quando i vettori delle linee coordinate sono linearmente dipendenti l'uno con l'altro, e si parlera' di **punto singolare**. In un punto singolare, la superficie e' degenerata in una curva, e il gradiente e' nullo o non definito (ad esempio, l'origine e' un punto singolare per un cono).

Generalmente l'equazione di una superficie viene data nella forma $\mathbf{r}_{(x,y,z)} = \mathbf{0}$ ma e' importante notare, che, differentemente da cio' che avviene per le trasformazioni lineari, tale equazione cartesiana non sempre identifica un sottospazio con due gradi di liberta', dato che le relazioni non possono essere lineari.

Curve giacenti sulla superficie

Una curva dipenderà da un parametro t e dunque si dovrà avere che u, v siano funzione di t

$$\varphi(t) = \mathbf{r}_{(u(t), v(t))}$$

Piani tangenti a una superficie data in forma parametrica

Una generica retta passante per un punto $\mathbf{x}_{(u_0, v_0)}$ della superficie sarà della forma:

$$\mathbf{r}: \begin{pmatrix} x - x_{(u_0, v_0)} \\ y - y_{(u_0, v_0)} \\ z - z_{(u_0, v_0)} \end{pmatrix}$$

Affinché ci siano due rette che descrivano un piano tangente si dovrà avere

$$\mathbf{r} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{(u, v)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{(u, v)}}{\partial v} \right) = \mathbf{0} \quad \begin{pmatrix} x - x_{(u_0, v_0)} \\ y - y_{(u_0, v_0)} \\ z - z_{(u_0, v_0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial_{(y, z)}}{\partial_{(u, v_0)}} \\ \frac{\partial_{(z, x)}}{\partial_{(u, v_0)}} \\ \frac{\partial_{(x, y)}}{\partial_{(u, v_0)}} \end{pmatrix} = 0$$

Caso in coordinate cartesiane

In coordinate cartesiane con parametri x, y , il vettori sono:

$$\begin{pmatrix} x - x_{(u_0, v_0)} \\ y - y_{(u_0, v_0)} \\ z - z_{(u_0, v_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial_{(y, z)}}{\partial_{(u, v)}} \\ \frac{\partial_{(z, x)}}{\partial_{(u, v)}} \\ \frac{\partial_{(x, y)}}{\partial_{(u, v)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$$

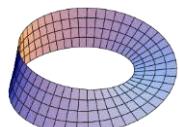
e dunque descrivono l'equazione del piano tangente al punto $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$:

$$(x - x_0) \frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f_{(x_0, y_0)}}{\partial y} - (z - z_0) = 0$$

Versore normale

Il versore normale alla superficie è dato da $\frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{(u, v)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{(u, v)}}{\partial v} \right)}{\left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{(u, v)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{(u, v)}}{\partial v} \right) \right\|}$. Nel caso si consideri il gradiente $\nabla f_{(x, y)}$ il

modulo a denominatore è $\sqrt{1 + (\nabla f_{(x, y)})^2}$ in quanto sarebbe il modulo di $\nabla g_{(x, y, z)} = 0$ la cui curva di livello è $f_{(x, y)}$. Una superficie si dirà **orientabile** se è possibile scegliere il versore in modo tale che, in una superficie chiusa, compiendo una traiettoria il versore abbia la stessa orientazione. Un esempio di superficie non orientabile è il nastro di Möbius in figura.

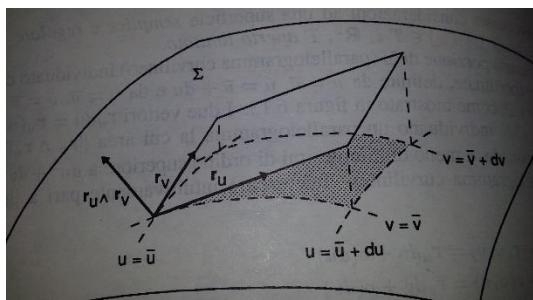


Convenzionalmente, per le superfici chiuse, si sceglie come verso preferenziale di orientazione quello che provoca un versore normale uscente. Considerato che, se il Jacobiano di un cambiamento di coordinate è positivo, la normale non cambia di orientazione, è possibile definire una **superficie orientata**. Per superficie (non chiusa) 'orientata lungo l'asse z' si intende che la componente del versore normale su \hat{k} è positiva.

$$\text{Toro } (\rho - a)^2 + z^2 = b^2$$

Area di una superficie

Due vettori ζ, η appartenente alla curva sara, per un du e dv infinitesimo



$$\zeta = r_{(u+du, v)} - r_{(u, v)} = \frac{\partial r}{\partial u} du + \sigma_{(du)}$$

$$\eta = r_{(\bar{u}, v+dv)} - r_{(u, v)} = \frac{\partial r}{\partial v} dv + \sigma_{(dv)}$$

e facendone il prodotto vettoriale si trova che un elemento infinitesimo di area (parallelogramma dato dai due vettori col prodotto vettoriale, e':

$$\zeta \times \eta = dA = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial v} \right| du dv$$

Se 'l'equazione della superficie e'data in forma esplicita' $f_{(x,y)}$ risulterà',

$$dA = \sqrt{1 + (\nabla f_{(x,y)})^2} dx dy$$

Se e'data in forma $g_{(x,y,z)} = 0$ implicita risulterà'

$$dA = \frac{|\nabla g_{(x,y,z)}|}{\frac{\partial g_{(x,y,z)}}{\partial z}} dx dy$$

tali risultato sono dei particolari casi di cambiamento dei parametri di integrazione con le matrici Jacobiane.

es. Calcolo di un flusso di un campo vettoriale $\mathbf{F}_{(x,y)}$ su una superficie esplicita $z = f_{(x,y)}$

$$\iint \mathbf{F}_{(x,y)} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint \mathbf{F}_{(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla f_{(x,y)})^2}} \sqrt{1 + (\nabla f_{(x,y)})^2} dx dy = \iint \mathbf{F}_{(x,y)} \cdot \nabla g_{(x,y,z)} dx dy$$

Sostanzialmente, gli effetti del Jacobiano si annullano e bisogna determinare solo il gradiente della funzione $\mathbf{g}_{(x,y,z)} = f_{(x,y)} - z$. Il flusso non e'dipendente dalla parametrizzazione ma cambia di segno se si orienta il versore al contrario $-\hat{\mathbf{n}}$. Cioè utile per determinare il flusso uscente da una delle superfici laterali di una superficie orientata "a pezzi" col teorema della divergenza (vedi sotto).

Cenni sulla formula di Guldino

La formule di Guldino permette di trovare il volume di una famiglia di curve in movimento nello spazio in funzione del centroide, sostanzialmente, sono una forma del teorema del Centroide di pappo dove il parametro e' il tempo.

Coordinate ellittiche

$$\int xy dx dy \quad \text{sulla superficie } S: 3x^2 + y^2 \leq 4$$

Si ponga $\begin{cases} x = \frac{\rho}{\sqrt{3}} \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$ in modo che S sia descritto da $S: \rho \leq 2$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{(\rho,\vartheta)}}{\partial \rho} & \frac{\partial x_{(\rho,\vartheta)}}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y_{(\rho,\vartheta)}}{\partial \rho} & \frac{\partial y_{(\rho,\vartheta)}}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{3}}$$

$$\int xy dx dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^2 \rho^3 d\rho$$

Cenni sulle curvature Considerato le coniche tangenti ad una superficie si puo avere un approssimazione migliore che con un piano, e si trova che un punto puo, principalmente, essere ellittico, iperbolico, parabolico o planare in funzione di due curvature fondamentali, **curvatura media e gaussiana**, che sono legate alla divergenza del gradiente. Tale teoria e' fondamentale per capire come variano le "lunghezze" in deformazioni di tipo geometrico, differenza sostanziale, come accennato, fra una superficie e una curva. Tramite il **theorema Egregium** che lega isometria curvature e diffeomorfismi e' possibile descrivere geometria come quelle ellittiche e iperboliche, che non sono euclidee.

Teoremi Vettoriali

I prossimi teoremi fanno l' ipotesi di un dominio "ammissibile" (molto meno ristrettiva di un dominio semplicemente connesso)

Formula di Gauss – Green nel piano

Si consideri un campo vettoriale in 2 dimensioni della forma

$$F = \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Si indichi ora con D un dominio semplice e con ∂D la frontiera del dominio. La dicitura $\partial_+ D$ indica che la percorrenza sul bordo del dominio e' in senso antiorario, ovvero si e' orientati **positivamente**. Un'orientazione positiva, lascia alla propria sinistra il dominio. Allora, dalle proprietà degli integrali iterati:

$$\iint_D \frac{\partial F_x}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial_+ D} F_x dx = \int_{\partial_- D} F_x dx$$

$$\iint_D \frac{\partial F_y}{\partial x} dx dy = \int_{\partial_+ D} F_y dy = - \int_{\partial_- D} F_y dy$$

Tali relazioni permettono di collegare integrali di superficie con circuitazioni. Il motivo per cui cambia il segno con il cambiamento di orientazione e' dovuto al fatto che gli estremi di integrazioni diventano gli opposti. Le quantità $F_x dx$ e $F_y dy$ sono sostanzialmente lavori infinitesimi fatti da una forza \mathbf{F} .

Sottraendo la seconda alla prima delle equazioni si puo giungere a :

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial_+ D} F_x dx + F_y dy \quad \text{Teorema Gauss – Green nel piano}$$

$$\iint_D (\nabla \times F) \cdot \hat{k} dx dy = \int_{\partial_+ D} F \cdot \hat{T} ds \quad \text{Formula di Stokes}$$

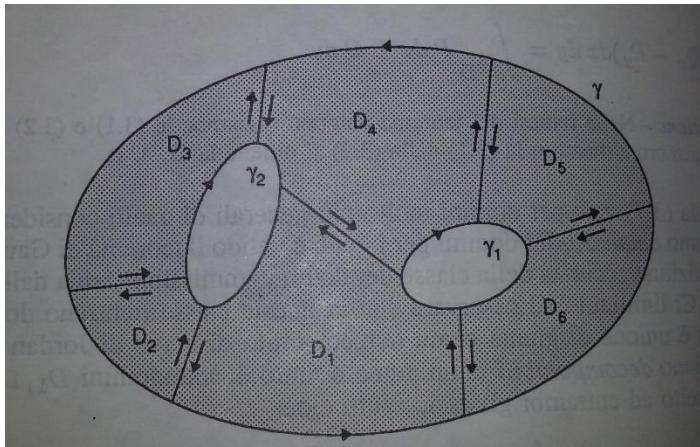
Il flusso del campo vettoriale rotore di F attraverso D uguaglia la circuitazione di F

Formula simile, di cui si omette la dimostrazione ma che si trova osservando la forma dell'equazione di Gauss, e' la seguente:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial_+ D} F_x dy - F_y dx \quad \text{Divergenza nel piano}$$

$$\iint_D (\nabla \cdot F) dx dy = \int_{\partial_+ D} F \cdot \hat{n}_{uscente} ds$$

Il flusso di F uscente dalla frontiera di D e' uguale all'integrale della divergenza in D

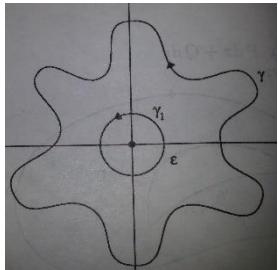


Nel caso in cui un dominio sia decomponibile, bisognerà considerare le circuitazioni intorno ai punti disconnessi come negative e quindi sottrarle all'integrale del flusso del rotore.

Calcolo di aree

Essendo area di una regione D legata a $dxdy$, dalla formula di Gauss si può calcolare l'area facilmente anche se nulla ha a che fare con un vettore

$$A = \iint_D dxdy = - \int_{\partial+D} ydx = \int_{\partial+D} xdy = \frac{1}{2} \int_{\partial+D} xdy - ydx$$



Risultato notevole

Si consideri un campo irrotazionale, $\nabla \times F = 0$ di cui però si voglia calcolare la circuitazione in una regione non semplicemente connessa. Si immagini ora di poter trovare un'altra curva φ_2 tale che sia sempre interna a quella data e che la regione che le divide sia irrotazionale per il campo. Le loro circuitazioni sono uguali. Ciò permette il calcolo di circuitazioni molto complesse su domini non semplicemente connessi con campi irrotazionali.

Teorema di Stokes nello spazio

Il risultato precedentemente trovato si generalizza subito se, anziché il versore \hat{k} , si considera il versore normale a ogni superficie infinitesima di una superficie Σ

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dA = \int_{\partial+\Sigma} F \cdot \hat{T} ds \quad \text{Formula di Stokes}$$

ricordante che $\hat{n} dA = \nabla g_{(x,y,z)} dx dy$ nel caso in cui la superficie sia data in forma di equazione implicita'

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot \nabla g_{(x,y,z)} dx dy = \int_{\partial+\Sigma} F \cdot \hat{T} ds$$

Potenziali vettori

Si immagini ora di voler calcolare il flusso di un campo vettoriale V dato su una superficie molto complessa ma con un contorno semplice. Se si trova un campo vettoriale tale che

$$\nabla \times F = V$$

basterebbe calcolare la circuitazione sul bordo orientato positivamente. Condizione necessaria ma non sufficiente affinché esista un tale F (potenziale vettore) è che la divergenza di V sia nulla, dato che il rotore di una divergenza è univocamente nullo:

$$\nabla \cdot V = 0$$

In tal caso, non solo F è un potenziale vettoriale, ma lui aggiunto a un qualsiasi altro gradiente di scalare, essendo il rotore di un gradiente sempre nullo non influenza l'uguaglianza

$$F' = F + \nabla \varphi$$

L'ipotesi sulla divergenza diventa anche sufficiente quando il dominio (un po' come nel caso del rotore e la circuitazione) e' abbastanza semplice. Tuttavia, non basta che sia semplicemente connesso, ma deve essere **fortemente connesso** ovvero, l'interno della superficie anche deve essere parte del dominio. Si consideri una sfera privata, nel dominio, del centro perche' ivi non e' definito il campo vettoriale. Pur essendo un dominio semplicemente connesso, non e' **fortemente connesso** e dunque l'ipotesi sulla divergenza non e' ivi sufficiente (fortemente connesso \cong stellato)

Per trovare un potenziale vettore, considerando che non e' univocamente definito, si puo porre una sua componente nulla. *Dimostrazione omessa* Sue componenti risultano essere:

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x V_z(t,y,z) dt \\ \int_{y_0}^y V_x(x_0,s,z) ds - \int_{x_0}^x V_y(t,y,z) dt \end{pmatrix}$$

Teorema della divergenza (o di Gauss) in 3 dimensioni

Anche il teorema della divergenza in due dimensioni puo esser, naturalmente generalizzato nel caso di superfici **chiuse**.

Si indica $dA_{(xy)}$ come la superficie infinitesima generata dai versori \hat{i}, \hat{j} , si avra:

$$\iiint_D \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial D} F (\hat{n}_{usce} \cdot \hat{k}) dA_{(xy)}$$

Analoghe relazioni valgono per le altre componenti. Tuttavia, tale formule e' poco utilizzabile in questa forma in quanto $dA_{(xy)}$ e sono un fattore dell'area infinitesima dA della superficie, sommando:

$$\iiint_D (\nabla \cdot F) dx dy dz = \iint_{\partial D} F \cdot \hat{n}_{uscente} dA = \iint_{\partial D} F \cdot \nabla g_{(x,y,z)} dx dy = \phi_{F(D)}$$

In tale scrittura ∂D rappresenta la superficie del solido che genera il dominio D .

Nel caso di campi solenoidali, la formula di Gauss da importanti informazioni anche sul flusso di una superficie non chiusa, infatti, esiste una **invarianza di flusso per deformazioni** di superficie se il campo e' di tipo solenoidale. Ovvero, indipendentemente dalla superficie, il flusso dipende solo dal bordo della superficie. Cio' e' utile per calcolare flussi su superfici complesse, nel caso in cui e' possibile anche esplicitare il calcolo su una superficie che abbia in comune soltanto il bordo. Inoltre, sempre a causa della solenoidalita' del campo, si puo anche utilizzare la formula di Stokes per esplicitare questo calcolo in un calcolo di circuitazione sul bordo se si conosce un potenziale vettore per il campo solenoidale.

- Per calcolare un flusso, se la superficie e' chiusa, si puo utilizzare il teorema della divergenza. Nel caso in cui la superficie non sia chiusa, e' possibile calcolare il flusso con il teorema su una superficie piu' ampia che sia chiusa e sottrarre il flusso della superficie aggiunta (scegliendola di facile calcolo), oppure, se il campo e' solenoidale, si puo cercare un potenziale vettoriale e calcolarne la circuitazione, oppure ancora calcolarlo su una superficie che abbia lo stesso bordo. Il calcolo e' superfluo se il campo e' solenoidale e la superficie e' chiusa (flusso nullo).
- Per calcolare una circuitazione, si fa un calcolo esplicito oppure si utilizza il teorema di Green – Stokes, con il calcolo di un flusso su una superficie che abbia come bordo la curva su cui si fa la circuitazione. Nel caso in cui il rotore sia nullo e il dominio semplicemente connesso, non e' necessario esplicitare il calcolo perche' tale circuitazione e' nulla, per una curva chiusa. Qualora la curva non fosse chiusa ma il campo irrotazionale, conviene trovare il potenziale scalare e fare un calcolo tramite quello.

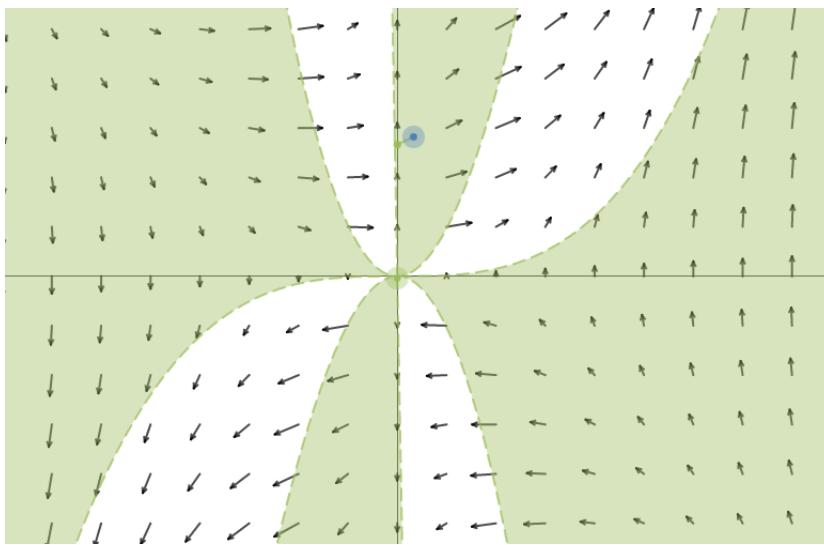
CAMPPI VETTORIALI E OPERATORI

Si consideri un campo vettoriale $\mathbf{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ in tre dimensioni. Viene indicato con **divergenza** del campo vettoriale, un operatore che restituisce uno scalare:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Si noti che nulla ha a che fare con il differenziale del campo vettoriale, dato che si stanno trascurando le derivate delle componenti F_i nelle variabili $\neq i$. Tale scrittura, sostanzialmente, descrive l'aumento delle componenti del campo vettoriale solo verso l'avanzamento proprio del versore della componente considerata. Se si immagina di effettuare una derivazione punto per punto, che prende in considerazione sia la direzione che l'aumento di intensità sulla componente, si può dare alla divergenza il significato di "dispersione" del campo vettoriale, o "addenamento". Essa descrive quindi, se si prende un volume di controllo, la "quantità" di frecce uscenti e quelle entranti. Per questo è legata ad un flusso.

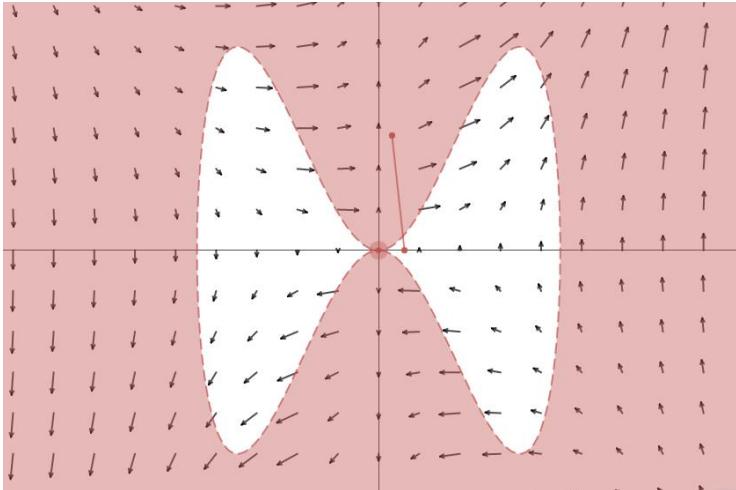
Nelle zone verdi, la divergenza è positiva (dispersione), nelle zone bianche è negativa (addenamento).



E' possibile definire anche il **rotore** del campo vettoriale, che restituisce un altro campo vettoriale ortogonale al primo,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Come si nota, questa volta di trascurano le derivate nella direzione in cui "punta" il vettore, e dunque il rotore da informazioni sulla "rotazione" dei vettori. Se si immagina di considerare solo il suo modulo, essendo sempre diretto su \hat{k} per un campo vettoriale piano, si giunge a grafici simili:



Stesso campo vettoriale, rotore positivo nella zona rossa e negativo nella zona bianca. Un rotore negativo, tende a far ruotare un ipotetica particella soggetto a quel campo di velocità in senso orario, un rotore positivo in senso antiorario. Se si immaginasse di calcolare la circuitazione del campo vettoriale su una curva in parte contenuta nella zona rossa e in parte in quella bianca, tale circuitazione potrebbe anche essere nulla, essendo il “flusso” del rotore lungo l’area delimitata dalla linea.

Il principale motivo per cui un campo, per avere circuitazione nulla lungo una linea ed essere dunque conservativo, è legato al fatto che deve essere associato a una funzione scalare. Esso il campo vettoriale un gradiende del campo scalare (potenziale), il suo rotore dev’essere indenticamente nullo, essendo il rotore di un gradiente sempre nullo. Tuttavia c’è di più. Dovendo essere il campo vettoriale del gradiente sempre ortogonale alle curve di livello, il fatto che esistano campi vettoriali con rotore non nullo, è come affermare che non per tutti i campi vettoriali è possibile trovare delle curve di livello ortogonali a tutti i vettori. Provando a cercarle nel campo vettoriale sopra, infatti, si fallisce.

Esistono alcuni campi vettoriali particolari, che sembrano, dalla loro forma, avere una divergenza od un rotore, ed invece non ce l’hanno. Un esempio è il campo elettrico generato da una carica puntiforme. Esso è tale che le frecce “divergano”, però nel farlo diminuiscono anche di modulo, dunque la divergenza totale, per un particolare esponente che è proprio quello del campo elettrico, è nulla (nei punti diversi dalla sorgente, ovvero nei punti diversi dall’origine).

Il campo di induzione magnetico sembrerebbe dover, graficamente, avere un rotore diverso da zero, e invece anche lui, a causa della diminuzione del modulo con l’aumentare della distanza, è tale da averlo indenticamente nullo. Tuttavia, non è comunque conservativo, in quanto è associato a un dominio non semplicemente connesso (non è definito, in tre dimensioni, in un intera retta).

Invece il rotore del campo elettrico statico, come ci si aspetta anche graficamente, è nullo, ed è conservativo (in quanto è in un dominio semplicemente connesso, si toglie solo l’origine e non un intera retta).

Relazioni notevoli fondamentali per gli operatori gradiente, divergenza e rotore

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \\ \nabla \times \nabla \varphi = 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \end{array} \right.$$

Operatore	Coordinate cartesiane (x,y,z)	Coordinate cilindriche (ρ, ϕ, z)	Coordinate sferiche (r, θ, ϕ)
Definizione delle coordinate		$\begin{bmatrix} x &= & \rho \cos \phi \\ y &= & \rho \sin \phi \\ z &= & z \end{bmatrix}.$	$\begin{bmatrix} x &= & r \sin \theta \cos \phi \\ y &= & r \sin \theta \sin \phi \\ z &= & r \cos \theta \end{bmatrix} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \phi < 2\pi$ $0 \leq r < +\infty$
		$\begin{bmatrix} \rho &= & \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= & \arctan(y/x) \\ z &= & z \end{bmatrix}.$	$\begin{bmatrix} r &= & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= & \arccos(z/r) \\ \phi &= & \arctan(y/x) \end{bmatrix}.$
A Campo vettoriale \mathbf{A}	$A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$	$A_\rho \hat{\mathbf{\rho}} + A_\phi \hat{\mathbf{\phi}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$	$A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\mathbf{\theta}} + A_\phi \hat{\mathbf{\phi}}$
Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\mathbf{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\mathbf{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) \hat{\mathbf{x}} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) \hat{\mathbf{y}} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) \hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}) \hat{\mathbf{\rho}} + (\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}) \hat{\mathbf{\phi}} + \frac{1}{\rho} (\frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}) \hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r \sin \theta} (\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)) \hat{\mathbf{\theta}} + \frac{1}{r} (\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}) \hat{\mathbf{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}) \hat{\mathbf{\rho}} + (\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}) \hat{\mathbf{\phi}} + (\nabla^2 A_z - \frac{A_z}{\rho^2}) \hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}) \hat{\mathbf{r}} + (\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}) \hat{\mathbf{\theta}} + (\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}) \hat{\mathbf{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\mathbf{\rho}} + \rho d\phi \hat{\mathbf{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\mathbf{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\mathbf{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dy dz \hat{\mathbf{x}} + dx dz \hat{\mathbf{y}} + dx dy \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\mathbf{\rho}} + \rho d\rho dz \hat{\mathbf{\phi}} + \rho d\rho d\phi \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\mathbf{\theta}} + rdr d\theta \hat{\mathbf{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Il motivo sostanziale del cambiamento dell'operatore nabla con un cambiamento di coordinate e' dovuto al Jacobiano del cambiamento di coordinate.

Trovare funzione scalare in caso di domini non semplicemente connesso e $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

Qualora esistesse una funzione scalare, bisognerebbe verificare la sua esistenza nei punti critici del dominio, oppure fare un calcolo esplicito della circuitazione per curve contenenti i punti critici.

FORME DIFFERENZIALI

Forma differenziale

Una forma differenziale, continua di classe C^1 o maggiore, e' definita da:

$$w = \sum_{h=1}^n f_h(\mathbf{x}) dx_h$$

Il differenziale di una funzione e' una forma differenziale, w risulta essere una forma differenziale lineare, e costituisce uno spazio lineare (cioe' ha la proprieta di additivita' lineare con altri vettori).

Forma differenziale chiusa

Una forma differenziale e' chiusa se il rotore del campo vettoriale $f(x)$ e' nullo, ovvero se vale:

$$\frac{\partial f_h(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_h} \quad \forall i,$$

Cio' equivale al dire che w e' il differenziale di una qualche funzione $U_{(x,y,z)} \subset C^2$

$$w = dU_{(x,y,z)}$$

in quanto risulta che

$$\nabla U = \mathbf{f}_{(x,y,z)}$$

e dunque, essendo il rotore di un gradiente identicamente nullo per ogni campo scalare C^2 , deve risultare, affinche il differenziale w possa essere chiuso:

$$\nabla \times \mathbf{f}_{(x,y,z)} = 0$$

Tali considerazioni prendono il nome di **condizioni di Cauchy-Riemann**, che asseriscono che sia le funzioni componenti di $\mathbf{f}_{(x,y,z)}$ che il potenziale sono funzioni armoniche.

E' importante notare che l'insieme di definizione gioca un ruolo importante, infatti solo se esso e' connesso (semplicemente) i potenziali di tutte le curve hanno tutta la stessa forma.

Forma differenziale esatta

Una forma differenziale esatta e' tale che la sua circuitazione su una linea chiusa sia nulla. Dal teorema di Schwarz, si puo dimostrare, che in un insieme stellato una forma differenziale chiusa e' anche esatta. Dai successivi teoremi vettoriali di Gauss-Green (2D) e Stokes (3D) il risultato si amplia per ogni insieme semplicemente connesso, come prima accennato. Se invece ci sono problemi topologici, non e' assicurato che una forma differenziale chiusa sia anche esatta, ma si dovrà fare una verifica integrando.

Differenziali e gradienti

Si prenda in considerazione una funzione $f_{(x,y,z)}$. Il suo differenziale risulterà essere:

$$df_{(x,y,z)} = \frac{\partial f_{(x,y,z)}}{\partial x} dx + \frac{\partial f_{(x,y,z)}}{\partial y} dy + \frac{\partial f_{(x,y,z)}}{\partial z} dz$$

Se si prende in considerazione una curva di livello, risulta essere $df_{(x,y,z)} = 0$, e dunque:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial f_{(x,y,z)}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_{(x,y,z)}}{\partial y} \\ \frac{\partial f_{(x,y,z)}}{\partial z} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0$$

sostanzialmente, immaginando i differenziali come dei vettori, la curva di livello e' tale che i suoi differenziali siano ortogonali al gradiente.

Matrice Jacobiana di un cambiamento di coordinate

Si consideri il sistema, come rappresentazione biunivoca, dato dalla seguente:

$$\begin{cases} x = f_{(u,v)} \\ y = g_{(u,v)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = \frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial u} du + \frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial u} du + \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial v} dv \end{cases}$$

Se, di nuovo, si immaginano i differenziali come vettori, si avra che:

$$du \times du = 0, \quad dv \times dv = 0 \quad dx \times dy = \frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial u} \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial v} du \times dv + \frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial v} \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial u} dv \times du$$

Ovvero, togliendo per semplicita' di scrittura il simbolo del prodotto vettoriale,

$$dxdy = \left(\frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial u} \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial v} - \frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial v} \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial u} \right) dudv$$

Si puo considerare il termine in parentesi come il determinante di una matrice chiamata **Jacobiana**, delle derivate parziali,

$$J = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial u} & \frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial v} \\ \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial u} & \frac{\partial g_{(u,v)}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Chiaramente, in dimensioni maggiori valgono le stesse considerazioni. Il $\det J$ rappresenta uno riscalamento di aree di differenziali.

Linee coordinate e coordinate locali in coordinate cartesiane

Si consideri una superficie $z = f_{(x,y)}$ nella sua forma vettoriale in coordinate cartesiane, ovvero:

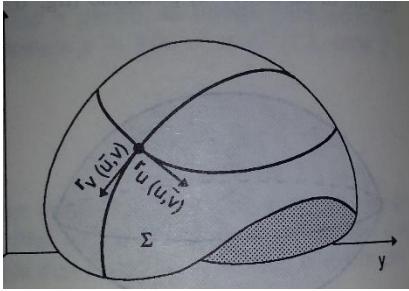
$$\mathbf{f}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f_{(x,y)} \end{pmatrix}$$

Esisteranno delle curve, $\mathbf{f}_{(\bar{x},y)}$ e $\mathbf{f}_{(x,\bar{y})}$ appartenenti alla superficie e rispettivamente prese tenendo x fisso e y fisso. I vettori tangentи a tali curve saranno, come nel caso di due curve, le derivate parziali:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{(\bar{x},y)}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{f}_{(\bar{x},y)}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Tale sistema di versori si chiamera' di linee coordinate, e x ed y saranno delle coordinate locali. Il prodotto vettoriale fra tali linee coordinate, sara', punto per punto, il $\nabla \mathbf{f}_{(x,y,z)}$ dove $f_{(x,y,z)} = f_{(x,y)} - z$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$$



Linee coordinate e coordinate locali in coordinate qualsiasi
 Date coordinate qualsiasi, il discorso e' subito generalizzato, essendo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{(u,v)} &= \begin{pmatrix} x_{(u,v)} \\ y_{(u,v)} \\ z_{(u,v)} \end{pmatrix} & \frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial u} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{(u,v)}}{\partial u} \\ \frac{\partial y_{(u,v)}}{\partial u} \\ \frac{\partial z_{(u,v)}}{\partial u} \end{pmatrix} & \frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{(u,v)}}{\partial v} \\ \frac{\partial y_{(u,v)}}{\partial v} \\ \frac{\partial z_{(u,v)}}{\partial v} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anche il vettore $\frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{(u,v)}}{\partial v}$ è parallelo al gradiente della superficie.

Coordinate curvilinee

Il Jacobiano di un cambiamento di coordinate cilindre e' $|J| = \rho$, quello in sferiche e' $|J| = \rho^2 \sin\theta$

Cenni su equazioni differenziali alle derivate parziali

Di Laplace

$\nabla^2 f_{(x,y)} = 0$ sono funzioni sempre analitiche, assumono massime e minimi sui contorni.
 e sono funzioni armoniche. Sono tipiche per trovare la distribuzione della temperatura in caso stazionario.

Delle onde

$\frac{\partial^2 f_{(x,y)}}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 f_{(x,y)}}{\partial y^2} = 0$ Descrivono la distribuzione di una corda che e' stata pizzicata

Possano essere anche derivabili solo due volte.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Equazioni differenziali in forma normale

Si definisce in forma *normale* un'equazione differenziale esplicitata in funzione della derivata di ordine massimo:

$$y^{(k)}(t) = f(\dots)$$

Se la $f(\dots)$ non dipende esplicitamente dal tempo, si definisce *autonoma*.

E' *lineare* se gli esponenti delle $y^{(j)}$ per ogni j sono uno.

Chiaramente, data un'equazione differenziale di k -esimo grado, dipenderà da k parametri, che, nel caso del problema di Cauchy, sono determinabili conoscendo tutti i valori delle $y^{(j)}$ con $j < k$

Soluzione

Si definisce soluzione, una funzione $y(t)$ che sia differenziabile k volte sull'insieme I di definizione sul quale si sta cercando.

! La definizione non lascia spazio a fraintendimenti: $y(t)$ per esser considerata soluzione, deve essere continua e derivabile, ed esplicitabile come funzione di t in ogni punto dell'intervallo.

Da una semplice integrazione, risulta che la soluzione deve soddisfare l'equazione:

$$y(t) - \zeta = \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s)) ds \quad \zeta = y(0)$$

che non risulta quasi mai, chiaramente, integrabile, ma sarà utile per la dimostrazione dei seguenti:

Teorema di esistenza locale della soluzione:

Se la $f(s, y(s))$ risulta essere continua, la soluzione esiste sempre.

Dimostrazione

Si crei una successione ricorsiva per la descrizione della successione con sempre migliori approssimazioni

$$y_{k(t)} = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{k-1}(s)) ds$$

Se la funzione risulta continua, vale il teorema del punto medio, e, per un certo L e M , si potrà dire:

$$|y_{k(t)} - y_{(k-1)(t)}| \leq \frac{ML^{k-1}|t - t_0|^k}{k!}$$

Passando alle serie, la serie a destra risulta convergente, e dunque anche la successione delle somme parziali lo risulta

$$\sum_{k=1}^n |y_{k(t)} - y_{(k-1)(t)}| = y_{n(t)} \quad (\text{telescopica})$$

Dunque, col limite $n \rightarrow \infty$, $y(t)$ risulta essere la funzione limite della convergenza totale della serie telescopica. E' chiaro che se $f(s, y(s))$ non fosse continua, $y(t)$ non sarebbe derivabile e dunque non derivante da una successione con convergenza uniforme. Per la definizione che si è data precedentemente di soluzione, una soluzione, $y(t)$ di tal tipo non è differenziabile, e dunque non è soluzione (anche se geometricamente ha un senso).

Teorema di unicità della soluzione

Se la funzione $f_{(s,y(s))}$ risulta essere continua la soluzione potrebbe essere più di una. Dalla precedente dimostrazione, si è verificato che se essa è continua, lo spazio metrico in cui è definita risulta essere completo. Se la soluzione è unica, $y_{(t)}$ dev'essere immagine di una contrazione dello spazio metrico (**teorema di Banach-Caccioppoli**). Cio', si concretizza prendendo due soluzione $y_{(t)}$ e $x_{(t)}$ con stesse condizioni iniziali e dimostrando che sono la stessa, :

$$|y_{(t)} - x_{(t)}| = \left| \int_{t_0}^t f_{(s,y(s))} - f_{(s,x(s))} ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f_{(s,y(s))} - f_{(s,x(s))}| ds \leq L \int_{t_0}^t |y_{(s)} - x_{(s)}| ds \leq L\delta d_{(x(t),y(t))}$$

Ovvero $L\delta < 1$ affinche si abbia una contrazione. La funzione deve essere quindi localmente

lipschitziana, ovvero avere una crescita limitata nell intervallo $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Rimanendo ad un punto di vista puramente intuitivo, il fatto che la funzione abbia un tasso di crescita limitato (e quindi derivata $\neq \pm\infty$) indica che lo spazio in quell'intorno sia poco 'susceptibile' a variazioni, ovvero 'stabile' .

Dal punto di vista grafico, puo avvenire che tali derivate siano infinite, e dunque $y_{(t)}$ non sia localmente funzione di t , ma abbia variazione talmente grande da essere "istantaneamente diversa" . Oppure puo' avvenire che una soluzione rimanga ancorata per un tempo τ nel punto critico e poi, a sua scelta, se ne discosti. Ad esempio,

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \text{ ha come soluzione } y = \begin{cases} 0 \\ x^3 \end{cases} \text{ intercambiabili dopo un tempo } \tau.$$

Cio' avviene proprio perche' $y = 0$ e' punto di equilibrio ma fortemente "instabile".

Altre funzione che sono localmente non derivabili, ma lipschitziane, ammettono unica soluzione, perche non "instabili". Es: $y' = \sqrt{x}$

Prolungamento delle soluzioni e esistenza globale

Si consideri l'equazione differenziale $\dot{y} = y^2$, integrabile per parti con soluzione $y = \frac{1}{1-t}$. Essa risulta "esplodere in tempo finito" , o, formalmente, avere un intervallo massimale destro. Cio avviene perche' la \dot{y} non e' esprimibile mediante una funzione lineare di y . In generale, una funzione $f_{(s,y(s))}$ limitata, o crescente al massimo linearmente con $y_{(s)}$, dara' luogo a soluzione di esistenza globale.

Dipendenza dalle condizioni iniziali

Essendo soluzione dei sistemi di tipo esponenziale, soluzioni con condizioni simili si allontaneranno esponenzialmente in funzione del tempo. Risulta importante capire come esse cambiano in funzione della precisione delle condizioni iniziali, considerato il sistema di equazioni (posto vettorialmente):

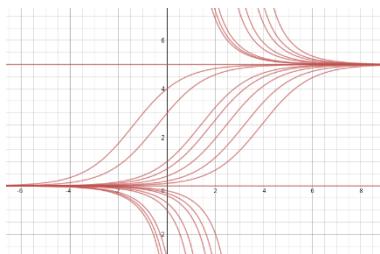
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(s) = f_{(s,\mathbf{y}(s))} \\ \mathbf{y}(s) = \zeta \end{cases}$$

Dal teorema di Schwarz, risulta una **equazioni alle variazioni** sulla matrici Jacobiane:

$$\dot{J}\zeta_{(\mathbf{y}(s))} = J_{\mathbf{y}(\mathbf{y}(s))} J\zeta_{(\mathbf{y}(s))}$$

Integrali di frontiera o singolari

Un integrale di frontiera e' una soluzione che sia interamente definita sulla frontiera dell'insieme di definizione della funzione, ovvero una soluzione integrale che in ogni punto non verica le condizioni di esistenza ed unicità'. Es.



$$\dot{y} = 2t\sqrt{1-y^2} \quad \begin{cases} y = \pm 1 \\ y = \sin(t^2 + c) \end{cases}$$

$$\dot{y} = ay(1-by) \text{ grafico a lato}$$

Equazioni differenziali e differenziali esatti

Un'equazione del tipo, e' riconducibile alla forme di un differenziale w

$$\dot{y} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \quad w = F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy$$

La soluzione di tale equazione si puo trovare in una funzione definita implicitamente $\psi_{(x,y)}$, se il rotore del campo vettoriale $\begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix}$ e' nullo. Generalmente, per farcelo diventare, si deve moltiplicare il differenziale per un fattore integrante μ , che deve soddisfare un equazione differenziale:

$$\frac{\partial(\mu_{(x,y)}F_x(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu_{(x,y)}F_y(x,y))}{\partial x}$$

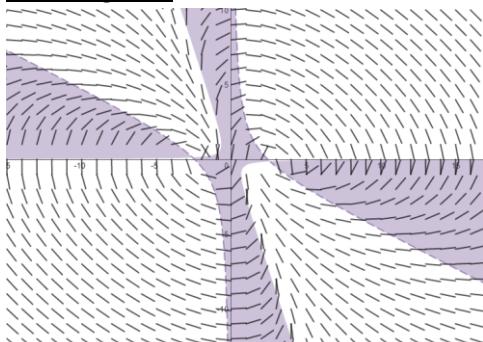
Se si conosce la forma della $\mu_{(x,y)}$ le derivate parziali si possono esprimere in modo da trovare un equazione differenziale semplicemente integrabile per la $\mu_{(x,y)}$. Trovato il fattore integrante,

$$\psi_{(x,y)} = \int_0^x \mu_{(x,y)} F_x(x,y) dx + \int_0^y \mu_{(x,y)} F_y(x,y) dy$$

Le curve di livello della funzione tridimensionale $\psi_{(x,y)}$ risulteranno essere le orbite del sistema.

Se si vuole, si puo risolvere l'integrazione anche prima in x, porre una costante dipendente da y, e trovarne l'espressione integrale.

Metodi grafici



Analizzando il segno di \dot{y} si possono dedurre le pendenze di un campo vettoriale che e' sempre tangente a tali curve di livello, soluzione dell'equazione differenziale.
(in viola la zona di crescenza).

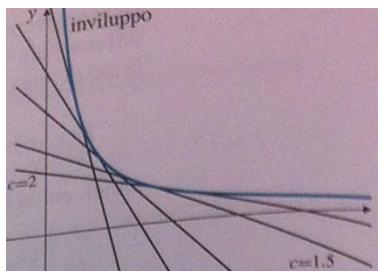
Per verificare la lipschitzianità della funzione $-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

generalmente basta porre $F_y(x,y) \neq 0$

Spesso analizzare il segno di \dot{y} da' ulteriori importanti informazioni sull'andamento delle curve di livello soluzione.

A livello intuitivo, sarebbe possibile esprimere anche equazioni differenziali di gradi maggiore del primo tramite pendenze simili....

Inviluppi



Un inviluppo e' la traiettoria di una famiglia di curve, $f_{(x,y,c)} = 0$ al variare del parametro c , e si trova ponendo la derivata nulla della funzione nel parametro. Cioe' e' come dire, che, per tutti i parametri, famiglie di curve infinitamente vicine si incontrino in un punto, (come se c fosse la variabile temporale)

$$\begin{cases} f_{(x,y,c)} = 0 \\ \frac{\partial f_{(x,y,c)}}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

Metodi approssimativi per la risoluzione delle equazioni differenziali

La creazione della successione convergente alla soluzione

$$y_{k(t)} = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{k-1}(s)) ds$$

era un esempio di approssimazione della soluzione. Un altro metodo, legato a Newton e Picard, permette di trovare la soluzione come serie di funzioni a coefficienti noti. Spesso, si riesce a trovare una ricorsivita' nei coefficienti, ma alcune volte non e' possibile determinare la primitiva (dato che non si conosce la convergenza di tale specifica serie).

Equazioni differenziali di Eulero o equidimensionali

$$ax^2\ddot{y}_{(x)} + bx\dot{y}_{(x)} + cy_{(x)} = 0 \quad \text{Si risolve } ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

$$\text{Reali distinti } y_{(x)} = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}$$

$$\text{Reali uguali } y_{(x)} = c_1|x|^r + c_2|x|^r \ln|x|$$

$$\text{Immaginare } y_{(x)} = |x|^a(c_1 \cos(\beta \ln|x|) + c_2 \sin(\beta \ln|x|))$$

Equazioni riconducibili a metodi per variabili separabili

Equazioni omogenee

$$\dot{y}_{(x)} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{posto } t = \frac{y}{x} \quad \text{diventa} \quad x\dot{t}_{(x)} = f(t) - t$$

Equazioni con funzioni dipendenti da funzioni lineari in y, x

$$\dot{y}_{(x)} = f(ax+by+c) \quad \text{si pone } t_{(x)} = ax + by_{(x)} + c$$

Equazioni riconducibili ad equazioni lineari

Equazioni di Bernoulli non lineare a coefficienti variabili

$$\dot{y}_{(x)} = a_{(x)}y_{(x)} + b_{(x)}y_{(x)}^k$$

Si linearizza mediante il cambiamento di variabili $y_{(x)} = (t_{(x)})^{\frac{1}{1-k}}$ diventando,

$$\dot{t}_{(x)} = (1-k)a_{(x)}t_{(x)} + (1-k)b_{(x)}$$

Equazioni di secondo grado lineari a coefficienti costanti non omogenee

$$a_2\ddot{y}_{(x)} + a_1\dot{y}_{(x)} + a_0y_{(x)} = f_{(x)}$$

$$y_{(x)} = c_1y_{1(x)} + c_2y_{2(x)} + u_{1(x)}y_{1(x)} + u_{2(x)}y_{2(x)}$$

$$u_{1(x)} = \int -\frac{f_{(x)}y_{2(x)}}{W_{(x)}a_2} dx \quad u_{2(x)} = \int \frac{f_{(x)}y_{1(x)}}{W_{(x)}a_2} dx \quad \text{con Wronksiano} = \begin{vmatrix} y_{1(x)} & y_{2(x)} \\ y_{1(x)}' & y_{2(x)}' \end{vmatrix}$$

dove $y_{1(x)}, y_{2(x)}$ sono le due soluzioni del sistema autonomo.

Equazioni lineari

$$\dot{y}_{(x)} = a_{(x)}y_{(x)} + b_{(x)} \quad y_{(x)} = e^{\int a_{(x)}dx} \left(c + \int (b_{(x)}e^{\int -a_{(x)}dx}) dx \right)$$

Approfondimenti sulle differenziali

Esempi famosi di equazioni differenziali, in economia, termodinamica e altre materie sono stati molti. Il **modello di Malthus** e' il primo modello di dinamica delle popolazioni (fertilita', mortalita), o di quelli che vengono usualmente chiamati **modelli logistici**. Uno dei piu famosi, e' quello di Lotka-Volterra, della preda e del predatore. Il metodo di approssimazione delle equazioni differenziali tramite funzioni analitiche con serie di potenze e' chiamato **Metodo di Frobenius**. Con esso e' possibile risolvere alcune equazioni famose, come l'equazione differenziale di Bessel, di Hermite, di Laguerre, di Legendre, di Mathieu. Tale metodo e' chiaramente applicabile solo laddove ci si aspetta una soluzione di tipo analitico (ovvero anche l'equazione differenziale sia di tipo analitico, infintamente derivabile).

Analisi dei sistemi omogenei e Wronksiano

Si ponga il sistema dinamico $\dot{x} = A_{(t)}x$ con la matrice che puo dipendere dal tempo.

Si considerino delle basi particolari, in cui, come coordinate si considerino il valore delle derivate, dalla prima, alle n-1 esima delle componenti di x . In una matrice di questo tipo, le condizioni iniziali, poste con il problema di Cauchy fino alla derivata n-1 esima, saranno rappresentato come un vettore ζ .

Si consideri ora una matrice Wronksiana, che ha come colonne le componenti e come righe le derivate.

$$W = \begin{matrix} x_{1(t)} & x_{2(t)} & x_{3(t)} & \dots \\ \dot{x}_{1(t)} & \dot{x}_{2(t)} & \dot{x}_{3(t)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Esso soddisfera la stessa equazione $\dot{W} = A_{(t)}W$ in forma matriciale per chiari motivi (la soddisfa la prima riga, la seconda...e cosi via). Per un teorema chiamato di **Liouville**, il suo determinante soddisfa la seguente equazione, con $(a)_{(t)}$ la traccia della matrice $A_{(t)}$. $\dot{W} = a_{(t)}W$

Una soluzione del sistema dinamico, sara' della forma:

$$x_{(t)} = W_{(t)}\zeta$$

Nel caso speciale in cui $A_{(t)}$ sia costante (non dipendente dal tempo), $W_{(t)} = e^{At}$

Altrimenti, risulterà in generale: $W_{(t)} = e^{\int A_{(t)}dt}$

Analisi dei sistemi non omogenei

In caso si abbia $\dot{x} = A_{(t)}x + B_{(t)}$ risolta che non si ha la certezza che il vettore ζ (che ora non rappresenta piu, al variare di t, la configurazione iniziale ζ_0 , ma solo inizialmente lo e'), non dipenda dal tempo, in particolare, si avra':

$$x_{(t)} = W_{(t)}\zeta_{(t)} = W_{(t)} \int_0^t W^{-1}_{(t)} B_{(t)} dt \quad \zeta_{(0)} = \zeta_0 \quad \dot{\zeta}_{(t)} = W^{-1}_{(t)} B_{(t)}$$

Da alcune proprieta del Wronksiano, nel caso in cui il sistema sia scalare e non vettoriale si puo scrivere anche:

$$x_{(t)} = \zeta_0 + \sum_{i=1}^n x_{i(t)} \int_0^t \frac{W_{ni(t)}}{W_{(t)}} B_{(t)} dt$$

Sostanzialmente, $\sum_{i=1}^n x_{i(t)} \int_0^t \frac{W_{ni(t)}}{W_{(t)}} B_{(t)} dt$ e' la soluzione particolare del sistema non omogeneo e $W_{ni(t)}$ il complemento algebrico della matrice $W_{(t)}$. Si riconosce facilmente nelle formule a coefficienti costanti per le equazioni differenziali di secondo grado un caso particolare di questo risultato.

Tale risultato e' stato trovato utilizzando un metodo chiamato **metodo delle variazione delle costanti arbitrarie** dovuto a Lagrange. Il trucco sta nell'imporre che il termine $B_{(t)}$ influenzi solo le derivate n-1 esime, ma tale imposizione non fa perdere alla soluzione la sua generalita'. La matrice $W_{(t)}$ e vista quindi come un applicazione lineare che cambia il tempo, che descrive tutte le configurazione (e le loro derivate) a partire lla condizione iniziale ζ_0 , mentre il termine dovuto alla non omogeneita' e' come un 'aggiustamento' perche' il vincolo si sta muovendo. In tal modo, $x_{(t)}$ ha come componenti proprio le coordinate lagrangiane e le loro derivate. Nel caso particolare in cui il Wronksiano si annulla, si avra la dipendenza lineare di alcune delle coordinate lagrangiane.

Problemi di Storum- Liouville – Problemi ai limiti per che pongono condizioni iniziali sulle derivate a sistema

SERIE E SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Si definisce successione, una scrittura del tipo f_n , serie una sommatoria degli f_n .

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Una successione di funzioni $f_{n(x)}$ si comporta come se fosse una successione di numeri al variare del parametro x , e si puo' definire una tipologia di convergenza del tutto simile a quella delle serie numeriche (convergenza di Cauchy)

Convergenza puntuale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n(x)} = f_{(x)}$$
$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists v : \forall n > v \quad |f_{n(x)} - f_{(x)}| \leq \varepsilon$$

Se per ogni x nell'insieme E , e per ogni ε positivo, esiste una v (eventualmente dipendente da x e ε) tale che la successione valutata per i valori maggiori di v sia vicina quanto si voglia a $f_{(x)}$.

La convergenza puntuale indica che il valore ε di scarto, e' in qualche modo in dipendenza anche di x e dunque nulla ci dice su come e' fatta la $f_{(x)}$. Se $f_{(x)}$ ha un asintoto, non c'e' convergenza puntuale.

La convergenza puntuale e' quella indotta da una metrica di tipo euclideo.

Convergenza uniforme

Considerata la dipendenza della serie anche dal valore di x , esistera' una tipologia di convergenza tale che il valore di scarto non dipenda da x , ma solo dal valore di v . Essa sara' una condizione piu' "stringente" rispetto alla convergenza puntuale, e si indicherà formalmente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n(x)} = f_{(x)}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists v : \forall n > v, \forall x \in E \quad |f_{n(x)} - f_{(x)}| \leq \varepsilon$$

Se per ogni ε positivo esiste una v (dipendente quindi solo da ε) tale che, per ogni x , valga....

Un metodo operativo per verificare se una serie e' convergente uniformemente, e' valutare il superiore di $|f_{n(x)} - f_{(x)}|$ e vedere se esso tende a zero indipendentemente da x in certi intervalli,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(|f_{n(x)} - f_{(x)}|) = 0 \quad \forall x \in A$$

esempi:

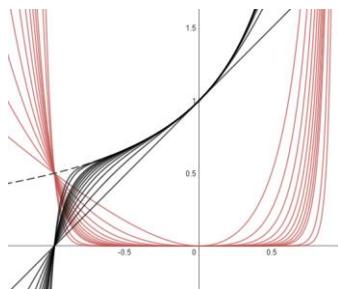
si consideri la successione:

$$f_{n(x)} = \frac{1 - |x|^{n+1}}{1 - x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n(x)} = \frac{1}{1 - x} \quad \{-1 < x < 1\}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(|f_{n(x)} - f_{(x)}|) = \frac{|x|^{n+1}}{1 - x} \leq \frac{|\rho|^{n+1}}{1 - \rho} = 0 \quad \{-1 < \rho < 1\}$$

Il limite tende a zero indipendentemente da x ed in particolare si puo sempre scegliere una v , tale che $\sup(|f_{n(x)} - f_{(x)}|) < \frac{|\rho|^{n+1}}{1 - \rho}$ che tende di suo a zero, dunque

$f_{n(x)}$ converge uniformemente a $\frac{1}{1-x}$ in $\{-1 < x \leq 1\}$

Analisi grafica: facendo variare il parametro n e disegnando $f_{(x)}$ si osserva



in rosso $|f_{n(x)} - f_{(x)}|$, che tende a zero in $\{-1 < x \leq 1\}$

in nero tratteggiato la funzione limite $f_{(x)}$

in nero le $f_{n(x)}$ al variare di n

! Una successione puo convergere uniformemente in un intervallo, aperto o chiuso, e puntualmente agli estremi. In questo caso, la successione converge puntualmente a 0 in $x = -1$. Al di fuori dell'intervallo, non esiste convergenza.

Il fatto che nell'esempio precedente $f_{(x)}$ sia continua non e' un caso. La convergenza uniforme viene indotta in una metrica di tipo lagrangiano, e, in generale, negli spazi di Lagrange, esistono delle operazioni che e' consentito effettuare sulle $f_{(x)}$ data la convergenza uniforme:

Continuita' La convergenza uniforme implica la continuita' della $f_{(x)}$

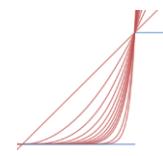
controesempio di $f_{(x)}$ con convergenza solo puntuale: $f_{n(x)} = x^n$ in $x=1 \rightarrow$

! In verita' la continuita' della $f_{(x)}$ e' garantita da una condizione meno stringente della convergenza uniforme ma piu' stringente di quella puntuale, denominata *convergenza quasi-uniforme*. Approfondire Teorema di Ascoli-Arzela a riguardo.

Teorema dello scambio dei limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_{n(x)}$$

L'unica ipotesi che si fa e' che x_0 sia un punto di accumulazione dell'intervallo di convergenza uniforme (altrimenti la convergenza potrebbe essere puntuale e non varrebbe lo scambio dei limiti)



Teorema dello scambio del limite con l'integrale

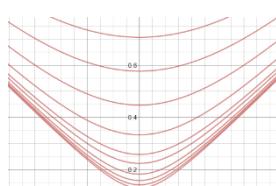
Se $f_{(x)}$ converge uniformemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{n(x)} dx = \int dx \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n(x)}$$

Teorema dello scambio del limite con la derivata

Generalmente, la $f_{(x)}$ non e' derivabile anche se la convergenza e' uniforme. Affinche lo sia, si deve avere che $f'(x)$ sia essa stessa convergente in modo uniforme. In tal caso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_{n(x)}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n(x)}$$



successione con convergenza uniforme ma $f_{(x)}$ non derivabile

SERIE DI FUNZIONI

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n(x)}$$

Tale scrittura e' sostanzialmente diversa dalla successione, ma e' ad essa riconducibile, in quanto,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_{k(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{n(x)}$$

La corrispondente successione di funzioni $g_{n(x)}$ che descrivere una serie di funzioni e' quindi data dalla cosiddetta serie di somme parziali, $\sum_{k=0}^n f_{k(x)}$, di cui si fa il limite.

Le successioni di funzioni sono state utili per introdurre alcune proprietà che si manterranno anche nelle serie di funzioni convergenti uniformemente. Le serie di funzioni sono utili per risolvere integrali, approssimare funzioni, o risolvere le sommatorie esplicitamente, dunque bisogna trovare utili criteri che ci permettano di verificare la convergenza uniforme, per saper se si possono applicare le proprietà di scambio integrali/derivate...

Criterio della convergenza totale o di Weierstrass

Analizzare la funzione $\sup(|g_{n(x)} - f_{(x)}|)$ non e' ora sempre possibile, dato che non si conosce il valore della sommatoria $g_{n(x)} = \sum_{k=0}^n f_{k(x)}$, tuttavia vale la seguente:

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sup|f_{n(x)}|$ converge, si dirà che la serie di funzioni converge totalmente.

Una convergenza totale implica una convergenza uniforme. Non vale sempre il viceversa, ma determinarla e' piu' semplice e ci da' informazioni sulla convergenza uniforme. La convergenza totale della serie si analizzerà con i consueti metodi praticati in Analisi I. Spesso si riesce a non far dipendere il $\sup|f_{n(x)}|$ da x ed a ricondurre il problema della convergenza ad una convergenza di serie numerica, di cui si conoscono i comportamenti confrontando con la serie armonica...Gli stessi teoremi citati prima, di scambio per successioni convergenti uniformemente, varranno se la serie e' uniformemente (o meglio ancora totalmente) convergente, con la differenza che al posto di uno scambio del limite ci sarà uno scambio della sommatoria. Nel caso in cui con quel limite non si possa concludere, può esser utile analizzare l'integrale $\int_0^{\infty} f_{k(x)} dk \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_{k(x)}$ per avere informazioni sulla convergenza uniforme.

es. nell'esempio di prima, la $f_{n(x)} = \frac{1-|x|^{n+1}}{1-x}$ risultava essere

$$f_{n(x)} = \sum_{k=0}^n x^k$$

es. si svolga l'integrale:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^t - 1} = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w \frac{t^3 dt}{e^t - 1} = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w \sum_{n=0}^{\infty} t^3 e^{-(n+1)t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t^3 e^{-(n+1)t} dt = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4}$$

I passaggi sono stati possibili grazie alle ipotesi fatte sulla convergenza uniforme della serie.

L'inserimento del $\lim_{w \rightarrow \infty}$ e' un passaggio formale per svolgere un integrale improprio come proprio.

SERIE DI POTENZE

Un caso particolare di serie di funzioni sono le serie di potenze:

$$f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n \quad \text{con } x = t - t_0$$

Un importante proprietà delle serie di potenze, è che se esse convergono in un intervallo, sicuramente convergono totalmente (e dunque anche uniformemente) (**teorema di Abel**). Cio' si dimostra riconducendo la serie ed una serie geometrica. Inoltre, $f_{(x)}$ ammette derivate di qualsiasi ordine, e dunque anche le serie delle derivate convergono uniformemente negli stessi intervalli.

Derivando piu volte rispetto ad x, si ottiene infatti:

$${f_{(x)}}^k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \rightarrow {f_{(0)}}^k = k! a_k$$

Da cio' si dimostra che la serie di potenze non sono altro che le serie di taylor di una funzione, infatti, risostituendo a_k ,

$$f_{(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{f_{(0)}}^k}{k!} (x)^k$$

Tale risultato e' molto utile per trovare il valore a cui convergono serie di potenze date, cercando di ricondurle a $f_{(x)}$ (tramite derivazioni, integrali) di cui si conosce la serie di Taylor. Per determinare l'intervallo di convergenza di una serie di potenze, e' utile trovare il **raggio di convergenza** (definito solo per le serie di potenze), definito come il reciproco del limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right) = \frac{1}{R}$$

se il calcolo dei limiti risulta essere poco agevole, e' possibili utilizzare anche $\sup |a_n|$

Funzioni analitiche

Purtroppo pero', non tutte le funzioni sono **analitiche**, ovvero sviluppabili tramite serie di Taylor (e dunque in serie di potenze). Cio' avviene solo se gli a_n si mantengono con l'aumentare dell'approssimazione, ovvero solo se le derivate sono limitate entro centri intervalli. In particolare, la funzione risulterà analitica se esiste, all'interno dello pseudo raggio di convergenza $(-r, r)$ una costante M , indipendente da n e da x , tale che:

$$\sup(|{f_{(x)}}^k|) \leq M k! r^{-k} \quad \{-r < x < r\}$$

Altrimenti, la serie di potenze non convergerebbe. Tuttavia, vale il

Teorema di Weierstrass

E' sempre possibile trovare una forma polinomiale, che se la funzione non e' analitica, avrà coefficienti che cambieranno in tutto il polinomio da un grado di approssimazione all'altro, e che avrà un grado qualsiasi, per l'approssimazione di una funzione $f_{(x)}$ continua in un aperto.

SERIE DI FOURIER

Le serie di potenze, essendo polinomiali, sono infinitamente derivabili, e dunque riescono a descrivere solo funzioni di classe C^∞ e di una certa regolarità. Esistono metodi per creare delle serie che descrivano anche funzioni non derivabili, o addirittura non sempre continue, ma periodiche. Si consideri una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)^n$. Studiarla nel suo raggio di convergenza r , $z = re^{i\vartheta}$, per l'identità di Eulero, porta a studiare una serie del tipo:

$$s_{(n)} = a_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos(n\vartheta) + i a_n r^n \sin(n\vartheta)$$

Serie di Fourier di una funzione

Per una funzione di periodo T , che soddisfi le condizioni di Dirichlet, la serie di Fourier risulta:

$$f_{(x)} = \frac{a_{(0)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{(n)} \cos(nx) + b_{(n)} \sin(nx) \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{(n)} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_{(x)} \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \\ b_{(n)} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_{(x)} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \end{cases}$$

Nel caso in cui il periodo della funzione sia $T = 2\pi$ le formule si riducono alle:

$$\begin{cases} a_{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} \cos(nx) dx \\ b_{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f_{(x)} \sin(nx) dx \end{cases}$$

Nota: L'integrale di una funzione periodica, risulta essere indipendente da j come estremo di integrazione. Si scelga quello più comodo. Se la funzione è dispari, $a_{(n)} = 0$. Se pari, $b_{(n)} = 0$

Dimostrazioni delle formule per il calcolo dei coefficienti

Per trovare $a_{(n)}$ basta moltiplicare la (1) per $\cos(nx)$ e per $b_{(n)}$ si usa $\sin(nx)$. Ricordando le identità trigonometriche (dimostrabili con la prostaferesi, (vedi parte della metrica)) e isolando i coefficienti, si trovano le loro espressioni. Le serie di Fourier sono le uniche serie i cui coefficienti dipendano da integrali e non da differenziali.

Condizioni su $f_{(x)}$ per l'esistenza della serie di Fourier

Prima condizione che deve soddisfare, è chiaramente l'integrabilità, essendo l'integrale di $f_{(x)}$ estremo superiore di quello dei coefficienti, se esso non esiste, non esisteranno i coefficienti.

Da ciò, si può dimostrare la **disegualanza di Bessel**, caso generale della **identità di Parseval**:

$$\langle f_{(x)}, f_{(x)} \rangle \geq \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Segue che non solo i coefficienti esistono, ma, per una funzione limitata ed integrabile, essi sono infinitesimi per $n \rightarrow \infty$, condizione necessaria per la convergenza della serie di Fourier.

In tali ipotesi, la successione delle somme parziali converge in media quadratica alla funzione $f_{(x)}$. Per poter ulteriormente discutere la convergenza, bisogna preoccuparsi di determinare quando lo spazio metrico trigonometrico (delimitato dal prodotto scalare integrale, vedi capitolo sulla metrica) risulta essere anche **completo**.

Convergenza puntuale

Affinché la serie converga in modo puntuale alla $f_{(x)}$, non c'è neanche bisogno che essa sia continua in tutti i punti, ma deve soddisfare almeno una delle seguenti condizioni **di Dirichlet**:

- Esser continua a tratti, ovvero ammettere sempre limite destro e sinistro con derivate destre e sinistre diverse da ∞
- Avere discontinuità di prima specie (ovvero di tipo Salto)
- Esser divisibile in sottointervalli finiti in cui risulta monotona, indipendentemente dai punti prima.

Se soddisfa le precedenti ipotesi (ad esempio, $f_{(x)} = \sqrt{|x|}$ verifica solo la terza), non c'è neanche bisogno che essa abbia derivata continua in tutti i punti. Si dimostra che inoltre vale il teorema di scambio integrale con la sommatoria, non solo se la funzione non è derivabile, ma anche nei tratti in cui non è continua. L'unica accortezza da notare è che, nei punti di discontinuità, la serie ha valore intermedio fra il limite destro e sinistro. Questo è il motivo del termine $\frac{a_{(0)}}{2}$ nella serie.

Per dimostrare questo risultato, si utilizza la formula di Dirichlet, della successione delle somme parziali:

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos(jx) = \frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$s_{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x+t)} \frac{\sin\left(nt + \frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{(n)} = f_{(x)}$$

Convergenza uniforme

Con le condizioni di prima, la convergenza risultava già essere uniforme tranne che nei punti in cui la $f_{(x)}$ era di per sé non continua. Si dovrà avere una funzione di partenza continua e derivabile a tratti per garantire la convergenza uniforme.

Con tale ipotesi, si riesce a dimostrare facilmente la convergenza dei singoli termini

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{(n)}| \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_{(n)}|$$

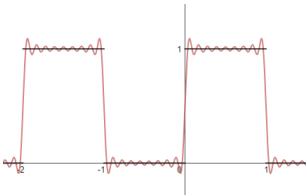
In quanto, già dalla diseguaglianza di Bessel (che per funzioni con tale regolarità si riduce all'uguaglianza di Parseval) le serie quadrate risultavano convergere, i coefficienti della serie derivata risultano essere, anch'essi convergenti con la sommatoria:

$$a'_{(n)} = nb_{(n)} \quad b'_{(n)} = -na_{(n)}$$

Dalla diseguaglianza triangolare, si dimostra così:

$$|a_{(n)}| \leq \frac{1}{2} \left(n^2 |a_{(n)}|^2 + \frac{1}{n^2} \right) \quad |b_{(n)}| \leq \frac{1}{2} \left(n^2 |b_{(n)}|^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

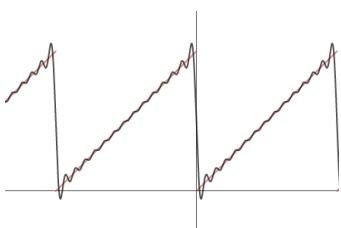
Che risultano essere convergenti, dunque le serie considerate convergono.



Analisi grafica:

La precisione di uno sviluppo in serie di Fourier risiedera' nel grado di approssimazione (n) che si vuole compiere. Nei punti di discontinuita', chiaramente, la serie risulta essere meno "precisa".

Gli σ piccolo, saranno dipendenti dal gradi di derivabilita' della funzione C^k di $f(x)$ in modo che $\sigma \sim \sigma\left(\frac{1}{n^k}\right)$



Si consideri la funzione mantissa, il suo sviluppo risulta essere;

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi nx)$$

Ponendo $x = \frac{1}{4}$, e' possibile calcolare il valore di convergenza della serie $\sum (-1)^{n+1} / (2n+1) = \pi/4$

Curiosita' sulle serie trigonometriche

Le serie, in generale, sono di utilissima importanza per la risoluzione di equazioni differenziali. Le serie trigonometriche nascono inizialmente per descrivere il comportamento di onde, e per risolvere l'*equazione del calore* di Fourier. Esse risultano sostanzialmente diverse (e piu' potenti) delle serie di Taylor. La quasi-similitudine di due funzioni analitiche in un certo intervallo, implica che le loro serie di Taylor siano molto simili. La quasi-similitudine di due funzioni non implica nulla sulla serie trigonometrica del suo sviluppo in Fourier, (che puo esser anche molto diversa) se non la sua convergenza. Nell'insieme delle funzioni, quelle analitiche sono una ristretta minoranza.

Esempio di utilizzo di una serie di potenze per la risoluzione di un equazione differenziale

Si consideri la differenziale lineare omogenea $xy'' + (1-x)y' + 3y = 0$ e si voglia trovare una soluzione come serie di potenze centrate in 0.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y' = \sum_{n=1,0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2,1,0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$xy'' + (1-x)y' + 3y = \sum_{n=2,1,0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1,0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1,0}^{\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Raggruppando,

$$\sum_{n=2,1,0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (3-n) a_n x^n = 0$$

Ora, potendo essere le sommatoria svolte separatamente, e' possibile sostanzialmente traslare la n senza perdita di generalita', in modo da poter mettere in comune il termine x^{n-1} e x^n ponendo $n' = n + 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((3-n)a_n + (n+1)^2 a_{n+1}) x^n = 0$$

dunque si conclude trovando una relazione ricorsiva fra i coefficienti, dovendo essere la parentesi nulla $\forall x$

$$a_{n+1} = \frac{(n-3)}{(n+1)^2} a_n \quad a_0 = y_0$$

Come spesso accade, la soluzione e' un polinomio di grado finito (se $a_n = 0$ tutti i successivi sono nulli).

Identita' di Jacobi e Identita' di Lagrange

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = 0 \quad |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Il prodotto vettoriale induca uno spazio dove vale l'Algebra di Lie (comune per forme quadratiche antisimmetriche con identita' di Jacobi)

Integrali con Hermite: decomposizione di rapporti fra polinomi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{x - \lambda_1} + \dots + \frac{a_2x + a_3}{x^2 + sx + t} + \frac{d}{dx} \left(\frac{(p_{(x)})^{m_1-2}}{(x - \lambda_1)^{m_1-1}} * \dots \right)$$

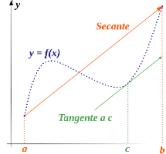
Integrali di linea disuguaglianze $\left| \int_a^b v(t) dt \right| \leq \int_a^b |v(t)| dt$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dF = F(b) - F(a) \quad f(x) \in C^1([a, b])$$

Teoremi vettoriali per le identita' degli operatori laplaciani valgono se il campo vettoriale e' almeno C^2

Richiami di Analisi I



Teorema di Lagrange (Rolle come caso particolare) Ruffini: si fa con la somma.

Utile per la dimostrazione del teorema del differenziale totale e di Schwarz.

Vale anche in più variabili ma solo per campi reali (non per funzioni vettoriali, anche se esistono generalizzazioni...).

Serie Geometrica moltiplicando la serie geometrica per $(1 - x)$ si ottiene una serie telescopica, dunque:

$$(1 - x) \sum_{n=0}^m x^n = 1 - x^{m+1}$$

Integrazione secondo Cauchy: Non comprende funzioni discontinue

Integrazione secondo Riemann: Comprende integrazione con funzioni discontinue a tratti

Teorema di Weierstrass: Una funzione assume almeno un massimo o minimo in un intervallo

Criterio di Sylvester per la determinazione veloce della segnatura

Definita con A_i la matrice togliendo ad A righe e colonne successive a i

La matrice A e' definita positiva se $\det(A_i) > 0 \quad \forall i$, definita negativa se $(-1)^i \det(A_i) > 0 \quad \forall i$

Indefinita negli altri casi.

Dimostrare la regolarita' di una curva: se la curva e' data in forma parametrica, basta verificare che le derivate delle sue componenti siano, almeno una, diverse da zero. Se la curva e' una curva di livello, bisogna verificare che non contenga punti in cui il gradiente della funzione si annulla (dal Teorema del Dini segue la regolarita' della curva). Es. curve di livello contenenti la sella non sono regolari. Una curva che contenga punti in cui il gradiente si annulla puo "autointersecarsi", o essere non derivabile li'.

Dimostrare che una curva di livello e' limitata: si cercano, se esistono, estremi in x o in y della curva. Se ad esempio x ed y aumentano a piacere e risolvono comunque l'equazione implicita, la curva di livello e' illimitata. Alternativamente, si puo calcolare il limite $\lim_{\rho \rightarrow \infty} f_{(x,y)} = a$ e la curva $f_{(x,y)} = b$ risulta essere limitata per ogni $b < a$ (solitamente, si ha $a = \infty$). Puo tornare utile la diseguaglianza triangolare:

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

Intervallo massimale di esistenza, e' l'intervallo del codominio della soluzione

Serie di potenze e convergenza uniforme

Una serie di potenze con raggio di convergenza R e' uniformemente convergente in tutti i compatti contenuti nell'intervallo $] -R, R [$ ma non si puo dire che lo e' in $] -R, R [$

Esistenza punti stazionario massimi e minimi Va giustificata con Weierstrass (ad esempio, esiste un massimo se per x,y scelti in un dominio D con frontiera ∂D si ha $\lim_{x,y \rightarrow \partial D} f_{(x,y)} = -\infty$)