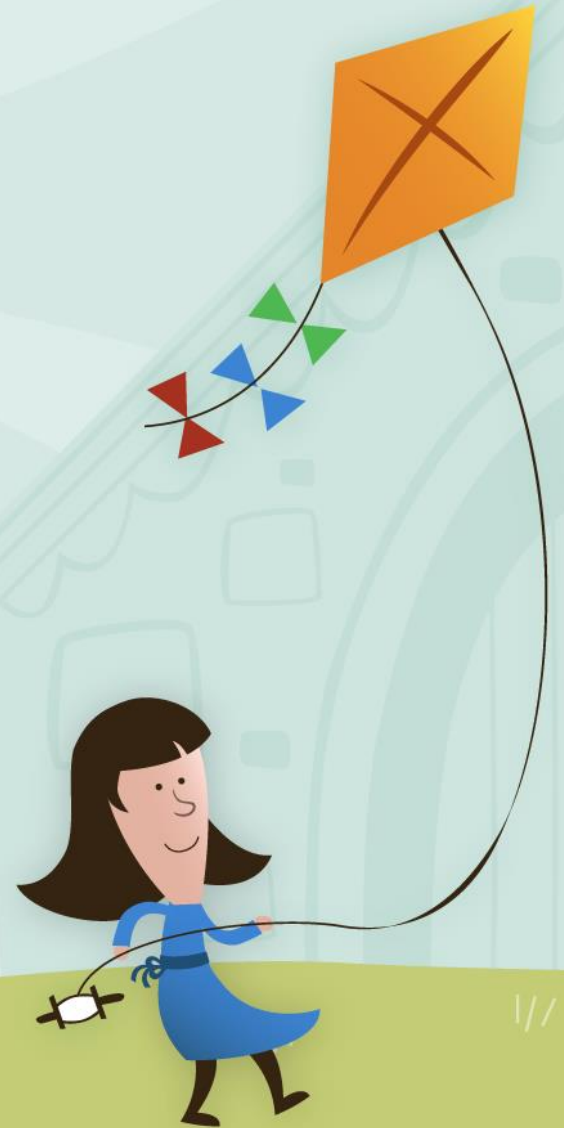


# PROCESO DE GENERALIZACIÓN

MATEMÁTICAS



# Objetivos de aprendizaje

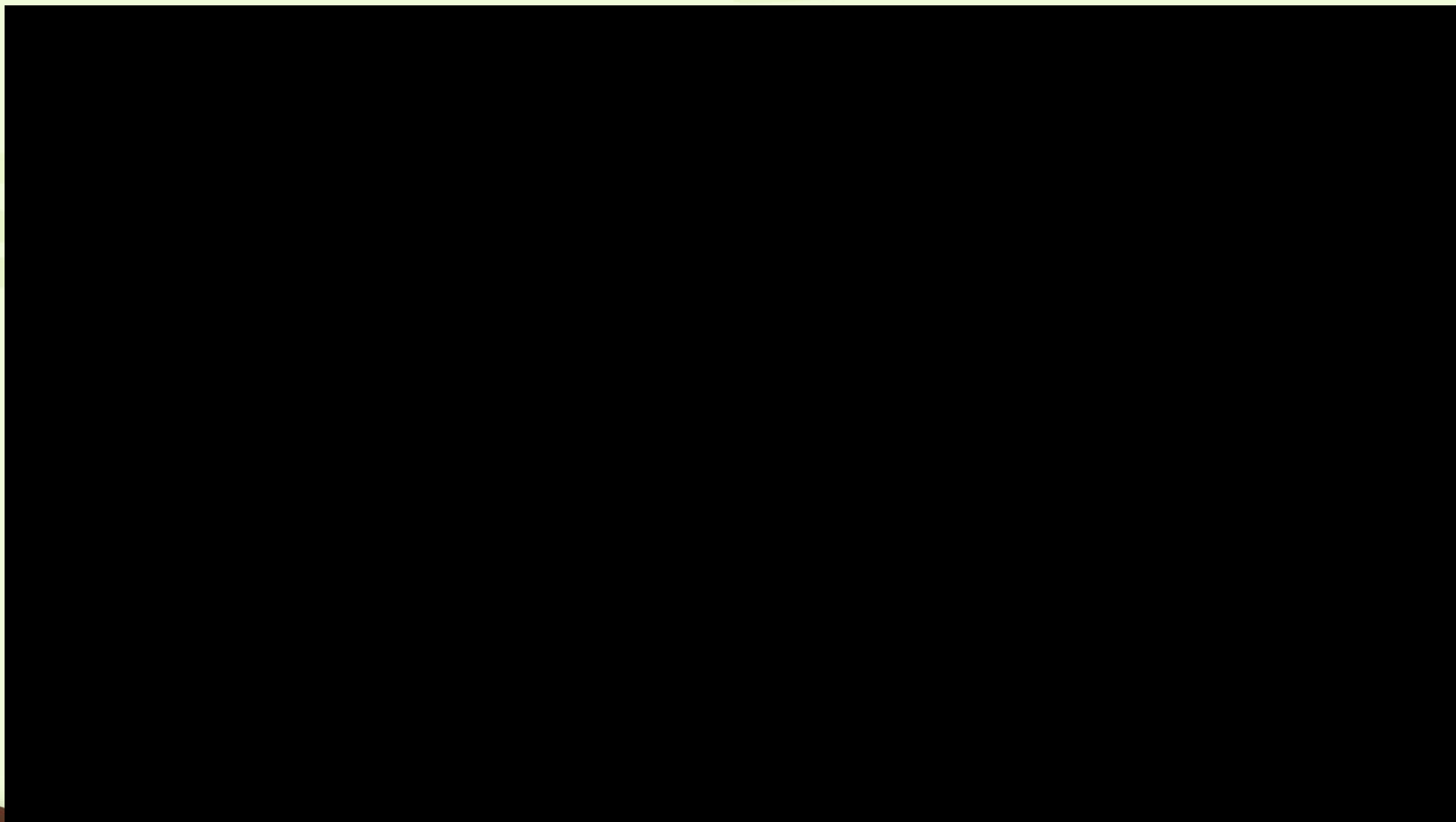
- Relacionar los estándares, DBA y mallas de aprendizaje con los contenidos curriculares sobre generalización, patrones y secuencias.
- Hallar expresiones generales descritas por secuencias a partir del reconocimiento de patrones.
- Reconoce y aplica las etapas de generalización con el fin poder usarlas en sus aulas.
- Formular expresiones generales para distintas sucesiones.



# Momentos

- Momento 1: Exploración
- Momento 2: Estructuración
- Momento 3: Práctica
- Momento 4: Trasferencia
- Momento 5: Valoración





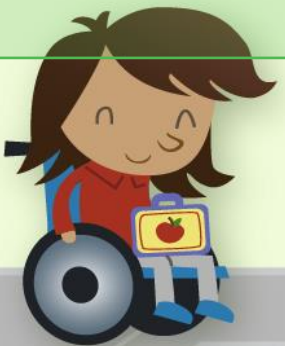
# Estándares

De acuerdo con los estándares, al finalizar 3° deben adquirir las siguientes competencias:

- Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
- Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo cómo cambian los símbolos, aunque el valor siga igual.
- Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.

Al finalizar 5°

- Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.
- Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.



	Derecho Básico de Aprendizaje				
1	Usa los números y las operaciones de suma y resta	Utiliza estrategias para contar y resolver problemas aditivos.	Utiliza las características (posicional y base 10) del Sistema de Numeración Decimal para establecer relaciones entre cantidades	Describe cualitativamente relaciones de cambio entre dos magnitudes usando diferentes representaciones.	Identifica equivalencias entre expresiones con sumas y restas, reconociendo el uso del signo igual.
2	Interpreta, propone y resuelve problemas aditivos y multiplicativos sencillos.	Utiliza diferentes estrategias para calcular o estimar el resultado de una suma y resta.	Utiliza las características del sistema de numeración decimal para comparar, ordenar y establecer relaciones entre cantidades.	Identifica regularidades y patrones utilizando propiedades, los números y las figuras geométricas.	Opera sobre secuencias numéricas para encontrar números u operaciones faltantes
3	Interpreta y resuelve problemas aditivos y multiplicativos	Propone y justifica estrategias para estimar y calcular resultados de operaciones	Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones aditivas y multiplicativas.	Describe lo que cambia en secuencias y en situaciones de variación.	Argumenta sobre situaciones en los que aparecen datos desconocidos
4	Interpreta significados de la fracción de acuerdo con el contexto.	Representa, opera y hace estimaciones con números naturales y fraccionarios (como fracción o decimal).	Establece relaciones: mayor que, menor que, igual a y relaciones multiplicativas (tanto como, tantas veces) entre números fraccionarios.	Interpreta variaciones de dependencia entre cantidades en diferentes fenómenos.	Identifica patrones en secuencias y establece generalizaciones.
5	Interpreta los números naturales y fraccionarios para resolver problemas	Desarrolla estrategias para estimar cálculos al solucionar problemas de potenciación.	Compara y ordena números fraccionarios y decimales.	Interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas	Utiliza operaciones no convencionales y encuentra propiedades y resuelve ecuaciones



# Malla de aprendizaje 3°

COMPETENCIA COMPONENTE	COMUNICACIÓN	
	APRENDIZAJE	EVIDENCIA
NUMÉRICO VARIACIONAL	Reconocer el uso de números naturales en diferentes contextos.	Asociar el cardinal al número de elementos de un conjunto de datos.
		Relacionar números ordinales con la posición de elementos en un conjunto.
		Vincular un código numérico a un objeto o conjunto.
	Reconocer equivalencias entre diferentes tipos de representaciones relacionadas con números.	Relacionar íconos con símbolos que representan cantidades.
		Establecer correspondencia entre íconos y textos que representan cantidades.
		Expresar un número de manera textual y simbólicamente.
	Construir y describir secuencias numéricas y geométricas.	Identificar un elemento en una posición determinada siguiendo un patrón previamente establecido.
		Reconocer los primeros términos de una secuencia a partir de un patrón previamente determinado.
		Identificar la posición correspondiente al término de una secuencia de acuerdo con el patrón establecido.
		Describir situaciones de variación usando lenguaje natural.
	Usar fracciones comunes para describir situaciones continuas y discretas.	Representar gráfica y simbólicamente fracciones comunes en contextos continuos.
		Representar gráfica y simbólicamente fracciones comunes en contextos discretos.

# Malla de aprendizaje 3º

COMPETENCIA	RAZONAMIENTO	
COMPONENTE	APRENDIZAJE	EVIDENCIA
NUMÉRICO VARIACIONAL	Establecer conjeturas acerca de regularidades en contextos geométricos y numéricos.	<p>Describir el cambio entre un término fijo en una secuencia respecto al anterior o el siguiente.</p> <p>Establecer relaciones entre algunos términos no consecutivos en secuencias numéricas y geométricas (cíclicas).</p> <p>Hacer explícitas similitudes y diferencias que subyacen de la comparación entre secuencias numéricas y geométricas.</p>
	Generar equivalencias entre expresiones numéricas.	<p>Establecer equivalencias entre expresiones numéricas en situaciones aditivas.</p> <p>Establecer equivalencias entre expresiones numéricas en situaciones multiplicativas.</p> <p>Establecer equivalencias entre una suma y una multiplicación en una situación determinada.</p>
	Usar operaciones y propiedades de los números naturales para establecer relaciones entre ellos en situaciones específicas.	<p>Deducir en una situación específica, que una igualdad o desigualdad se conserva al efectuar la misma transformación sobre las cantidades relacionadas (monotonía de la desigualdad).</p> <p>Establecer que un número es un múltiplo de otro en situaciones de reparto o medición.</p> <p>Establecer conjeturas que se aproximen a la justificación de la clasificación de un número como par o impar.</p>
	Establecer conjeturas acerca del sistema de numeración decimal a partir de representaciones pictóricas.	<p>Descomponer una cifra representada pictóricamente en unidades, decenas y/o centenas.</p> <p>Establecer correspondencias entre representaciones pictóricas y cifras que componen un número.</p>



# Malla de aprendizaje 5°

COMPETENCIA COMPONENTE	RAZONAMIENTO	
	APRENDIZAJE	EVIDENCIA
NUMÉRICO VARIACIONAL	Reconocer y predecir patrones numéricos.	<p>Ordenar secuencias numéricas de acuerdo con las relaciones mayor que y menor que.</p> <p>Expresar verbal y/o gráficamente el patrón de variación de una secuencia.</p> <p>Identificar patrones en secuencias numéricas y/o gráficas.</p>
	Justificar propiedades y relaciones numéricas usando ejemplos y contraejemplos.	<p>Usar ejemplos y contraejemplos para determinar la validez de propiedades y relaciones numéricas.</p> <p>Reconocer entre varios elementos el que no cumple o comparte determinada característica.</p> <p>Establecer por qué un ejemplo ilustra una propiedad o relación enunciada.</p>
	Justificar y generar equivalencias entre expresiones numéricas.	<p>Justificar por qué dos expresiones numéricas son o no equivalentes.</p> <p>Construir expresiones equivalentes a una expresión numérica determinada.</p>
	Analizar relaciones de dependencia en diferentes situaciones.	<p>Interpretar relaciones de dependencia entre variables en contextos cotidianos, sociales y de las ciencias.</p> <p>Explicar una relación de dependencia expresada tabular, verbal o gráficamente.</p>
	Usar y justificar propiedades (aditiva y posicional) del sistema de numeración decimal.	<p>Explicar y comparar el valor de una cifra según su posición.</p> <p>Construir el número dada su expansión decimal y viceversa.</p>



# Malla de aprendizaje 5°

COMPETENCIA COMPONENTE	RESOLUCIÓN	
	APRENDIZAJE	EVIDENCIA
NUMÉRICO VARIACIONAL	Resolver problemas aditivos rutinarios y no rutinarios de transformación, comparación, combinación e igualación e interpretar condiciones necesarias para su solución.	<p>Resolver situaciones aditivas rutinarias de comparación, combinación, transformación e igualación.</p> <p>Interpretar y utilizar condiciones necesarias para solucionar un problema aditivo.</p> <p>Resolver situaciones aditivas que tienen más de una solución.</p>
	Resolver y formular problemas multiplicativos rutinarios y no rutinarios de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano.	<p>Resolver situaciones multiplicativas de adición repetida, factor multiplicante y razón.</p> <p>Interpretar y utilizar condiciones suficientes para solucionar un problema multiplicativo.</p> <p>Resolver situaciones multiplicativas que tienen más de una solución.</p>
	Resolver y formular problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa.	<p>Resolver problemas que requieran identificar relaciones multiplicativas en situaciones de proporcionalidad directa, sin necesidad de determinar directamente la constante.</p> <p>Resolver problemas de proporcionalidad directa que requieran identificar la constante de proporcionalidad.</p> <p>Reconocer y usar relaciones de cambio (proporcionalidad directa e inversa) para construir tablas de variación en situaciones problema.</p> <p>Resolver problemas sencillos de proporcionalidad inversa.</p>
	Resolver y formular problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.	<p>Dar significado y utilizar la fracción como parte-todo, razón o cociente en contextos continuos y discretos para resolver problemas.</p> <p>Resolver situaciones problema sencillas con fracciones de uso común que requieran de la adición o sustracción para su solución.</p>



Activar  
Ve a Con



***“Generalizar significa descubrir alguna ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); dónde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema”(citado por Esquinas, p. 94).***

### ¿Qué es?

- Identificar en común de casos particulares.
- Buscar una propiedad común en casos particulares, regularidades.
- Conectar varias situaciones a partir de características en común.

### ¿Qué no es?

- Pasar de un caso particular (uno solo) a una expresión general.
- Definir un conjunto de objetos a partir de las propiedades de un objeto.



Mora y soler (2010)



# Fases de generalización

## Etapa 1

- La percepción de un patrón

## Etapa 2

- La expresión de la regularidad

## Etapa 3

- El registro de la regularidad

## Etapa 4

- Probar la validez de la regla hallada





# Secuencias

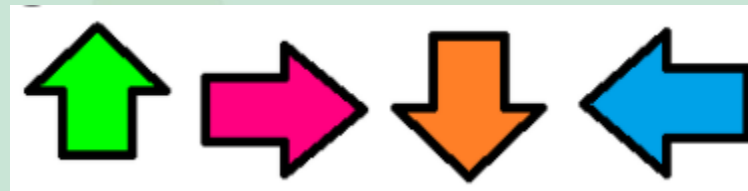
## Secuencias con el cuerpo



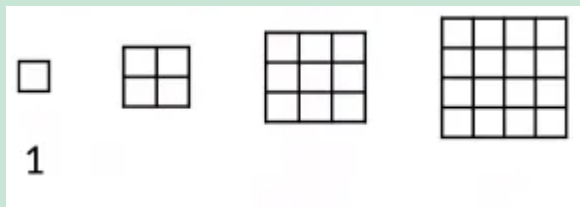
## Secuencias manipulativas



## Secuencias figurativas o icónicas



## Secuencias gráfico numéricas



## Secuencias numéricas

$$\begin{aligned} 1+2 &= 3 \\ 4+5+6 &= 7+8 \\ 9+10+11+12 &= 13+14+15 \end{aligned}$$

## Secuencias por recurrencias

1, 1, 2, 3, 5, 8, ...  
Sucesión de Fibonacci

## Secuencias tabulares

1	2	3	4	5	...
2	4	6	8	10	...



# Patrón, núcleo o unidad de patrón

“ El núcleo o unidad de un patrón de repetición es la cadena más corta de elementos que se repiten”  
(Font y Godino, 2003, p. 817)



# Distintos tipos de núcleos

Núcleo de la forma **AB**: se repiten dos elementos alternadamente.



Núcleo de la forma **ABC**: se repiten tres elementos.



Núcleo de la forma **AABB**: se repiten dos veces un elemento y a continuación dos veces otro.



Núcleo de la forma **AAB**: se repiten dos veces un mismo elemento y a continuación otro.



# Etapa 1: Percepción de un patrón

- **N1** observar la secuencia
- **N2** Analizar la secuencia, descomponiendo el todo en sus partes.
- **N3** Establecer relaciones necesarias.
- **N4** Establecer relaciones suficientes.
- **N5** Conjeturar acerca de las relaciones entre los elementos de las secuencias.

García (2011)

Tener en cuenta la siguiente pregunta

- ¿Qué cambia?

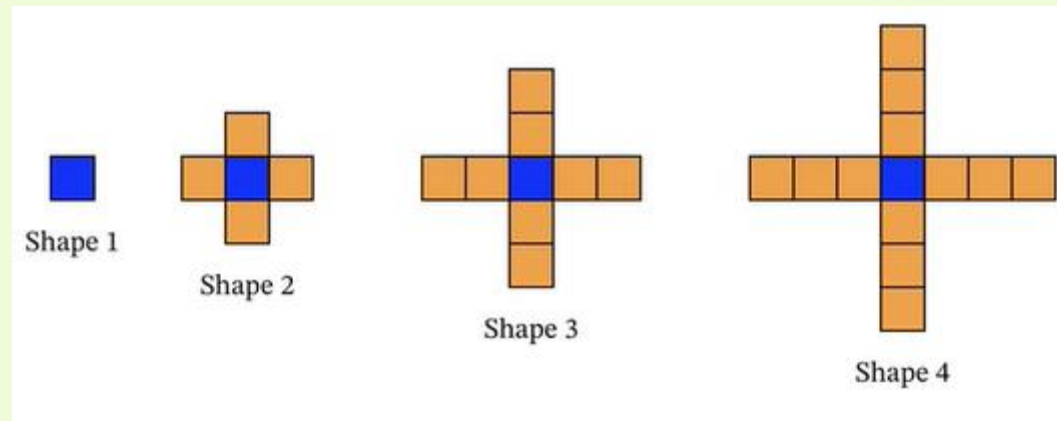




# Etapa 1: Percepción de un patrón

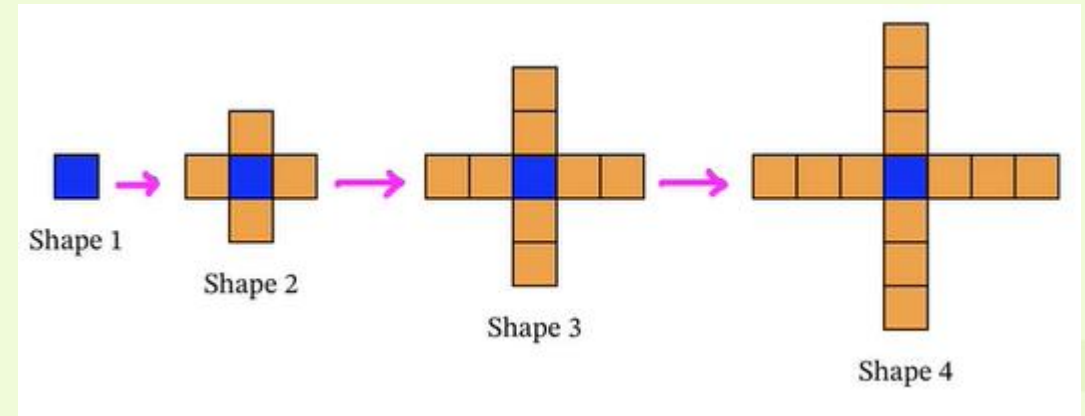
Ejemplo:

- a) Dibuje la figura que sigue en la secuencia.
- b) Describa las figuras en sus palabras.
- c) Escriba la regla que general para la secuencia
- d) ¿cuántos cuadrados tendrá la figura 10?



# ¿Qué cambia y no cambia?

Cambia	No cambia
Número de la figura. Cantidad de cuadrados.	Cuadrado azul del centro. El área de cada cuadrado.



## Etapa 2. La expresión de la regularidad

- **N1** Describir características de la secuencia como un todo.
- **N2** Describir las propiedades comunes entre los casos particulares.
- **N3** Describir la forma en que se relacionan las partes.
- **N4** Describir la conjetura observada de relaciones entre las partes.

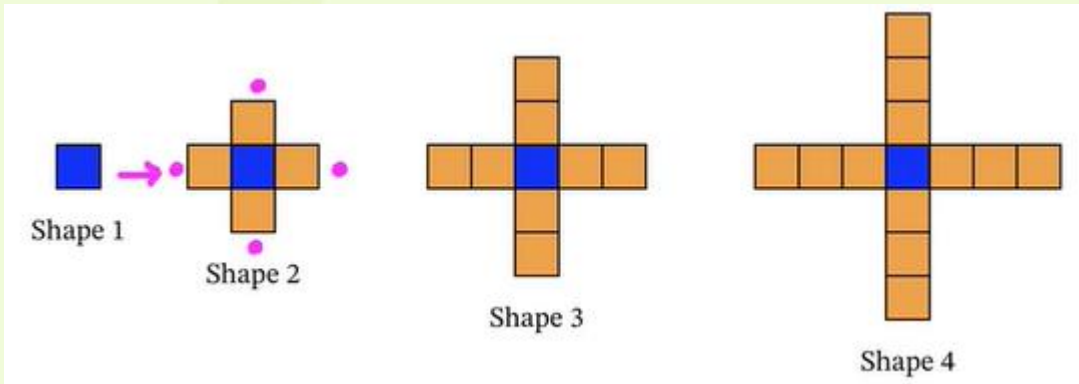
García (2011)

Tener en cuenta la siguiente pregunta

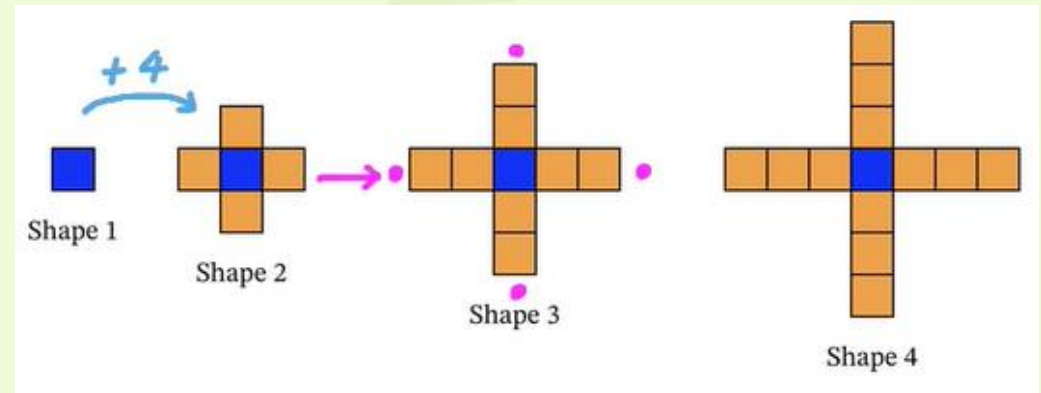
- ¿Qué hace que cambie?



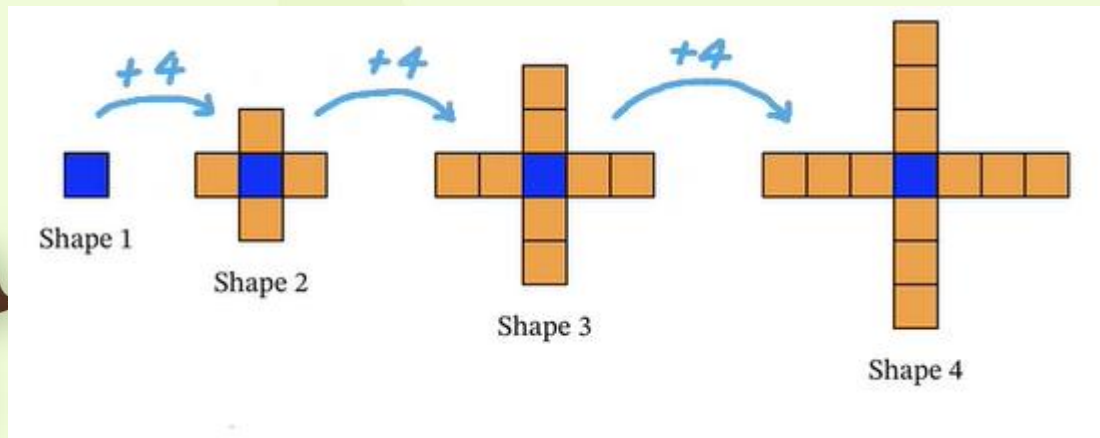
# ¿Qué hace que cambie?



Para llegar de la figura 1 a la figura 2 hay que añadir un cuadrado naranja a cada extremo del cuadrado azul.



De la figura 2 a la 3, podemos ver que cada cuadrado naranja se le añade otro cuadrado naranja.



Notamos que de la figura 3 a la 4 se han añadido cuadrados en cada lado de la figura





## Etapa 3. Registro de la regularidad

- **N1** Las características de la secuencia.
- **N2** Las propiedades comunes entre los casos particulares.
- **N3** Describir la forma en que se relacionan las partes.
- **N4** Describir la conjetura observada de relaciones entre las partes.

Puede ser en palabras, lenguaje sincopado o lenguaje matemático

García (2011)

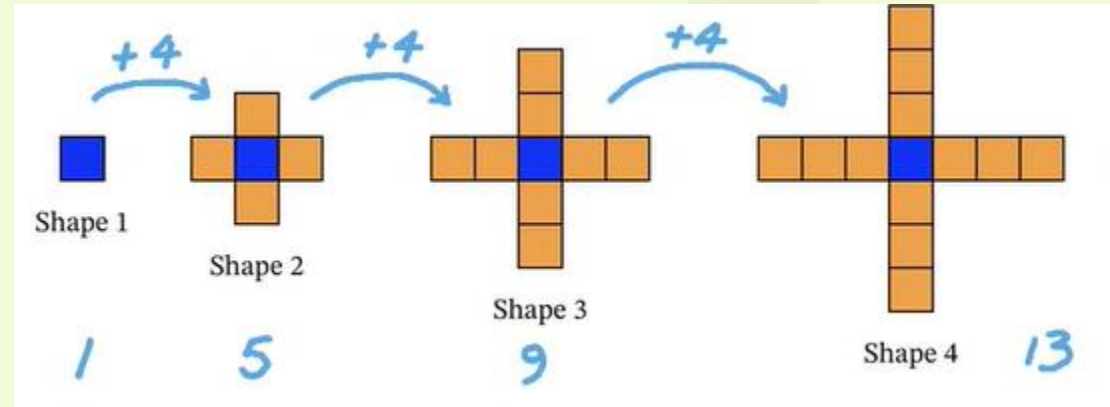
Tener en cuenta la siguiente pregunta

- ¿Cómo cambia?



# ¿Cómo cambia?

Cuando la figura aumenta, la cantidad de cuadrados aumenta.



Número de la figura	1	2	3	4	...	n
Cantidad de cuadrados	1	5	9	13	...	



## Etapa 4. Probar la validez de la regla

- **N1** Construcción de la conjetura construyendo un termino cercano.
- **N2** Comprobación de la conjetura haciendo uso de la calculadora.
- **N3** Comprobación de la conjetura manualmente.

Tener en cuenta la siguiente pregunta

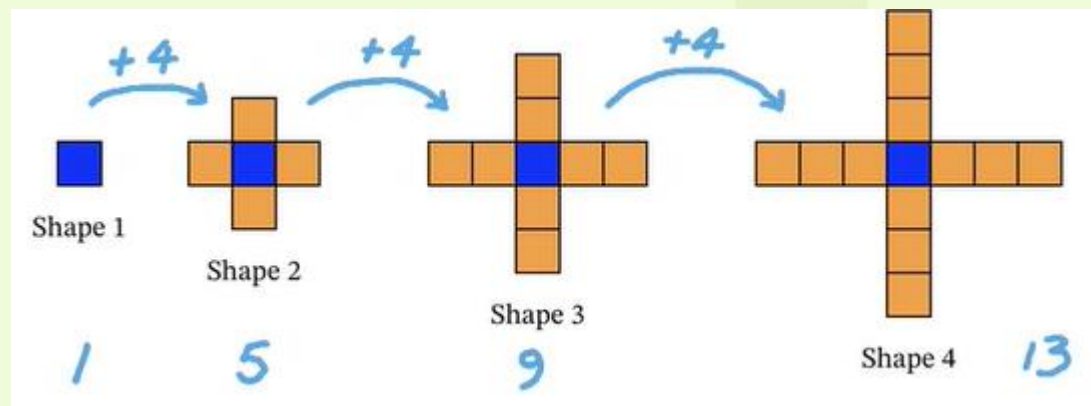
- ¿Cuánto cambia?

García (2011)



# ¿Cuánto cambia?

Escribir las observaciones a modo de prueba, hasta llegar a la regla general.



Número de la figura	1	2	3	4	...	n
Cantidad de cuadrados	1	5	9	13	...	
Observación	$4(1) - 3$	$4(2) - 3$	$4(3) - 3$	$4(4) - 3$	...	$4(n) - 3$





# Actividad

- a) Dibuja la siguiente figura.
- b) Describa las figuras en forma sucinta.
- c) Escriba una regla general en la producción de una secuencia para los fósforos.
- d) ¿Cuál figura tendrá 31 fósforos?

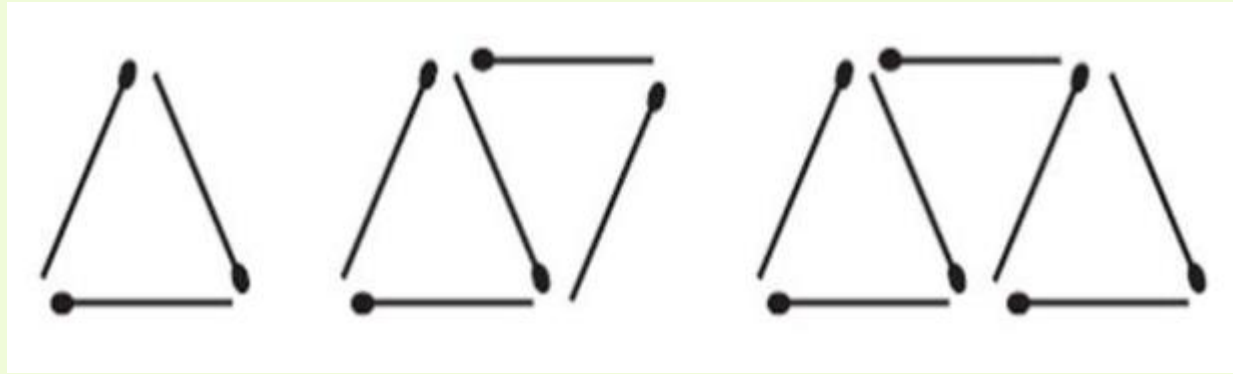


Figura 1

Figura 2

Figura 3



# TENGA EN CUENTA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

- ¿Qué cambia y no cambia?
- ¿Qué hace que cambie?
- ¿Cuánto cambia?
- ¿Cómo cambia?



# Solución

a)

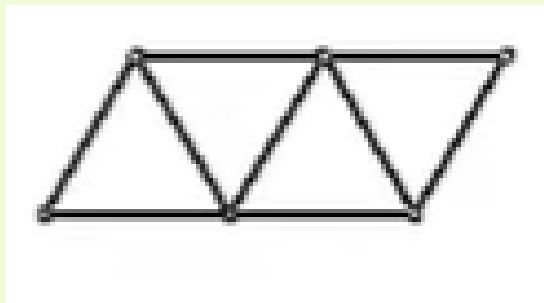


Figura 4

b)

En la figura 1 tres fósforos se ubican formando un triángulo equilátero. En la figura 2 se le añaden dos fósforos más del mismo tamaños en unos de sus lados, formado otro triángulo equilátero.



# Solución

Número de la figura	1	2	3	...	n
Cantidad de fósforos	3	5	7	...	
Observación	$2(1) + 1$	$2(2) + 3$	$2(3) + 1$	...	$2(n) + 1$

c)

La expresión general para la cantidad de fósforos es:

$$2(n) + 1$$

d)

La figura que tendrá 31 fósforos será:

$$\begin{aligned}2(n) + 1 &= 31 \\2(n) &= 31 - 1 \\2(n) &= 30 \\n &= \frac{30}{2} \\n &= 15\end{aligned}$$





# Sucesiones

Es un conjunto  
normalmente de números  
en un cierto orden.

Puede ser finita o infinita

3, 5, 7, 9, ...

1er término

2do término

3er término

4to término

los tres puntos significan  
que nunca acaba (infinito)

("término", "elemento", "miembro" significan lo mismo)



# Terminos de una sucesión

$x_n$  ← posición del término  
término

- $x_n$  es el término
- $n$  es la posición de ese término

Ejemplo: Calcula los primeros 4 términos de esta sucesión:

$$\{a_n\} = \{ (-1/n)^n \}$$

Operaciones:

- $a_1 = (-1/1)^1 = -1$
- $a_2 = (-1/2)^2 = 1/4$
- $a_3 = (-1/3)^3 = -1/27$
- $a_4 = (-1/4)^4 = 1/256$

Respuesta:

$$\{a_n\} = \{ -1, 1/4, -1/27, 1/256, \dots \}$$



# Muchas reglas de una sucesión

- ¿Cuál es el siguiente termino de la siguiente sucesión 1,2,4,7 ...?

Solución 1

1;  $1 + 1 = 2$ ;  $2 + 2 = 4$ ,  $4 + 3 = 7$ ,  **$7 + 4 = 11$**

Entonces:

$$x_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

Solución 2

1,2,4,7,12,20,33...

Entonces

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + 1$$



# Sucesión o progresión aritmética

## Ejemplos

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ...

Esta sucesión tiene una diferencia de 3 entre cada dos términos.

La regla es  $x_n = 3n - 2$

**En general**, podemos escribir una sucesión aritmética de esta forma:

$\{a, a+d, a+2d, a+3d, \dots\}$

donde:

- **a** es el primer término, y
- **d** es la diferencia entre los términos (llamada "**diferencia común**")

Y podemos establecer la regla:

$$x_n = a + d(n-1)$$

(Usamos "n-1" porque la **d** no se usa en el primer término).

Si la diferencia entre un término y el siguiente es una constante





# Sucesión o progresión geométrica

Ejemplos:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...

Esta sucesión tiene un factor 2 entre cada dos términos.

La regla es  $x_n = 2^n$

Si cada termino se calcula multiplicando el anterior por una constante

En general, podemos escribir una sucesión geométrica de esta forma:

$\{a, ar, ar^2, ar^3, \dots\}$

donde:

- $a$  es el primer término, y
- $r$  es la proporción entre cada par de términos (llamada "**razón común**")

Nota:  $r$  no puede ser 0.

- Cuando  $r=0$ , obtenemos la sucesión  $\{a, 0, 0, \dots\}$ , la cual no es geométrica.

Y la regla es:

$$x_n = ar^{(n-1)}$$

(Usamos " $n-1$ " porque  $ar^0$  es el 1er término)



# Series

Es una suma de una sucesión infinita

- Sucesión de número impares  $2n - 1$
- $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- Serie
- $\sum_{n=1}^{\infty} 2n - 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1$
- Suma parcial de los primero 3 términos
- $\sum_{n=1}^3 2n - 1 = 1 + 3 + 5 = 9$



# Práctica

- *Encuentra la regla general de la siguientes sucesiones*
- 4,7,13,16,19 ...
- 3,6,12,24,48
- ¿Qué clase de sucesión es?
- $x_n = 3n + 1$
- Sucesión aritmética
- $x_n = 3(2)^{n-1}$
- Sucesión geométrica





Cierre



<https://create.kahoot.it/share/generalizacion/6431c021-ece2-4a1d-a38e-dd8dcf7bc275>



# Bibliografía

- García, S. (2011) *Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizadas por estudiantes de 13 años*. Tesis de maestría para optar al título de Magíster en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.
- MEN. (2006). Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.
- MEN (2016) Ministerio de Educación Nacional. Mallas de aprendizaje en matemáticas. Bogotá, Colombia.
- MEN (2016) Ministerio de Educación Nacional. Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá, Colombia.
- Mora, L. y Rodríguez (20011) *La generalización en el desarrollo del pensamiento variacional y algebraico: actividades en el aula matemáticas*. II Encuentro Nacional de Estudio de clase transformando prácticas de aula para el desarrollo de competencias-MEN, Bogotá, D.C.
- Mora, L. y Soler, N. (2010) Estudiar álgebra desde la generalización: Ejemplos para la formación de profesores. En: Memorias del 11° Encuentro Colombiano de matemáticas educativa



Gracias

