PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE CONTINUA

CONDIZIONI DI ESISTENZA

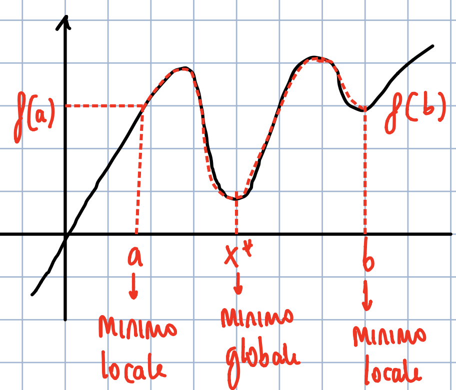
$\min f(x)$

$\quad x \in I$

- OTTIMO (o MINIMO) GLOBALE: $x^* \in I$ t.c $f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in I$
- OTTIMO locale: $x^* \in I$ t.c $\exists\, r > 0$ t.c $f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in \underbrace{B(x^*, r) \cap I}$

x^* e' massimo globale di f in I

$\min f(x)$
$x \in I$



- $I = \emptyset \iff (P)$ e' inammissibile ove P $\min\limits_{x \in I} f(x)$

- $\inf\limits_{x \in I} f(x) = -\infty \iff (P)$ e' illimitato inferiormente

Esistono casi in cui $I \neq \emptyset$ $\inf f(x) > 0$ $\forall x \in I$

↑

capitano quando $\inf\limits_{x \in I} f(x) \neq \min\limits_{x \in I} f(x)$

DEF: MAGGIORANTE / MINORANTE

$E \subseteq \mathbb{R}$ insieme.

Un numero $y \in \mathbb{R}$ si dice MINORANTE (o MAGGIORANTE) di E

(non necessariamente $y \in E$) se $y \le x$ (o $y \ge x$) $\forall x \in E$. es $E = (1,2)$ $\begin{cases} 0 \text{ minorante} \\ 3 \text{ maggiorante} \end{cases}$

Si definisce ESTREMO INFERIORE (SUPERIORE) di E il massimo (minimo) dei MINORANTI (MAGGIORANTI)

Esempio	MIN	MAX	INF	SUP
$E = \mathbb{N}$	0	$\nexists$	0	$+\infty$
$E = \{1, \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{n}\}$	$\nexists$	1	$0 \notin E$	1
$E = \mathrm{Im}\{e^x, x \in \mathbb{R}\}$	$\nexists$	$\nexists$	0	$+\infty$

ASSIOMA DI DEDEKIND (O DI COMPLETEZZA di $\mathbb{R}$)

Ogni insieme $E \subset \mathbb{R}$ $E \neq \emptyset$

limitato inferiormente (superiormente) ammette ESTREMO INFERIORE (superiore) finito.

SUCCESSIONI in $\mathbb{R}^n$ - LIMITI, PUNTI DI ACCUMULAZIONE

Def:

Una successione e' una corrispondenza univoca tra $\mathbb{N}$ e uno spazio V

$$x^k : \mathbb{N} \to V$$
$$k \mapsto x^k$$

esempi:

- $V = \mathbb{R}$

$x^k = \frac{1}{k}$ $\quad \{x^k\} \subseteq \mathbb{R}$ formato da $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots\}$

- $V = \mathbb{R}^n$

$$x^k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$$
$$k \to x^k$$

es:

$x^k = \frac{1}{k} \cdot e$ con $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ ogni componente e' pari a 1

$1 \longrightarrow e$

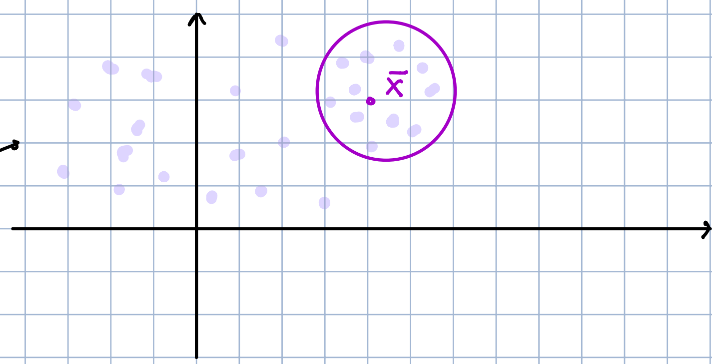
$2 \longrightarrow \frac{1}{2} e = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$3 \to \frac{1}{3} e = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

DEF:

Data una successione $\{x^k \subseteq \mathbb{R}^n\}$ una successione $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è un limite della successione $\{x^k\}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon$ t.c $\forall k \geq k_\varepsilon \quad x^k \in B(\bar{x}, \varepsilon)$

$\{x^k\}$ appartiene all'intorno $B(\bar{x}, r)$ eccetto per un numero finito di punti.



DEF: PUNTO DI ACCUMULAZIONE

$\bar{x} \in \mathbb{R}$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per $\{x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

se $\forall \varepsilon > 0, \ \forall \bar{k} \in \mathbb{N}, \ \underbrace{\exists k}_{\text{non necessariamente tutti i } k} \geq \bar{k}$ t.c $x^k \in B(\bar{x}, \varepsilon)$

OSS:

Se $\bar{x}$ è punto di accumulazione di $\{x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $\exists$ una sottosuccessione ovvero $K \subseteq \mathbb{N}$

$$\{x^k\}_K \subseteq \{x^n\} \quad \text{che converge a } \bar{x} : \lim_{\substack{k \to +\infty \\ k \in K}} x^k = \bar{x}$$

esempio

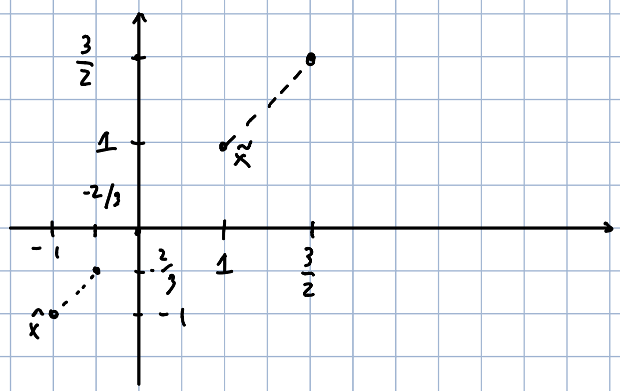
$n = 2$

$$x^k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$$
$$k \longmapsto \frac{1}{k} e + (-1)^k e \qquad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies$$

k	x^k
1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$

$K_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ dispari}\}$ $\qquad$ $K_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ pari}\}$

$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ k \in K_1}} x^k = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \hat{x} \qquad \lim_{\substack{k \to +\infty \\ k \in K_2}} x^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{x}$$



TEOREMA BOLZANO - WEIERSTRASS

Se $\{x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitata $\left(\exists\ r>0 \text{ t.c } \|x^k\| \leq r \quad \forall k \in \mathbb{N} \right)$

allora ammette un punto di accumulazione.

$\underset{\text{equivalentemente}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ una successione convergente

N.B Se $\{x^k\}$ è una successione convergente ad un limite $\bar{x}$ allora tutti i punti di accumulazione coincidono con $\bar{x}$.

DEF: INSIEME CHIUSO

Diamo due possibili definizioni:

complementare di C

i) $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso se $\mathbb{R}^n \setminus C$ è APERTO

ii) $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso se ogni punto di accumulazione di una successione di punti $\{x^k\} \subseteq C$ appartiene a C.

DEF: INSIEME COMPATTO

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ è COMPATTO $\Longleftrightarrow$ è chiuso e limitato

DEF: FUNZIONE CONTINUA

$f: D \to \mathbb{R}$; $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è CONTINUA in $\bar{x} \in D$ se $\forall \{x^k\} \subseteq D$ t.c $\lim_{k \to \infty} x^k = \bar{x}$

si ha $\lim_{k \to +\infty} f(x^k) = f(\bar{x})$

f è continua su D se è continua su tutti i punti di D.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $I \subseteq \mathbb{R}^n$ $I \neq 0$ e COMPATTO.

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora $\exists$ un punto di minimo globale di f su I.

DIMOSTRAZIONE

Sia $l = \inf_{x \in I} f(x)$

Dalla definizione di estremo inferiore abbiamo $l \leq f(x) \quad \forall x \in I$

Dato che f e' continua $\forall k \in \mathbb{N}$ possiamo det. un punto $x^k \in I$ t.c

$$f(x^k) = l + \frac{1}{k}$$

possiamo definire una successione $x^k : \mathbb{N} \to I$

$k \mapsto I$

$k \mapsto x^k$ t.c $f(x^k) = l + 1/k$

Si ha

$$\lim_{k \to +\infty} f(x^k) = \lim_{k \to \infty} l + \frac{1}{k} = l$$

I e' compatto, in particolare I e' LIMITATO

La successione

$\Rightarrow \{x^k\} \subseteq I$ e' limitata $\Rightarrow$ $\exists$ una sottosuccessione di $\{x^k\}$ convergente

$\Longleftrightarrow k \in \mathbb{N}$ t.c $\lim_{\substack{k \to \infty \\ k \in K}} x^k = \bar{x}$

I e' compatto, in particolare CHIUSO pertanto (per definizione di insieme chiuso) $\bar{x} \in I$

... Abbiamo definito $\{x^k\} \subseteq I$ t.c $\lim_{\substack{k \to +\infty \\ k \in K}} x^k = \bar{x} \in I$

In particolare $\lim_{\substack{k \to +\infty \\ k \in K}} f(x^k) = l \rightsquigarrow$ tutta la successione $\{x^k\}$ converge a l

Abbiamo che $f: I \to \mathbb{R}$ e' continua pertanto $\lim\limits_{\substack{k \to +\infty \\ k \in I}} f(x^k) = f(\bar{x})$

$\uparrow$ in particolare in $\bar{x}$

Quindi

$$\boxed{f(\bar{x}) = \lim_{\substack{k \to \infty \\ k \in K}} f(x^k) \leq f(x) \quad \forall x \in I} \quad \Leftrightarrow \bar{x} \text{ e' minimo globale di } f \text{ su } I$$

$\uparrow$ definizione di inf.

es:

$\min\limits_{x \in I} f(x) \qquad f(x) = e^x \qquad I = (-\infty, 0]$

esempio per ragionare sull'esistenza di x^k t.c $f(x^k) = \ell + 1/k$ con $\ell = \inf\limits_{x \in I} f(x)$

$\ell = 0 = \inf\limits_{x \in I} f(x) \qquad \ell + 1/k = 1/k \quad \exists\, x \in I$ t.c $e^x \overset{?}{=} \ell + 1/k$

$$\ln e^x = \ln(\ell + 1/k)$$

$$x = \ln(\ell + 1/k)$$

esempio:

$\mathbb{R}^2 \quad \min \|x\|_2^2$

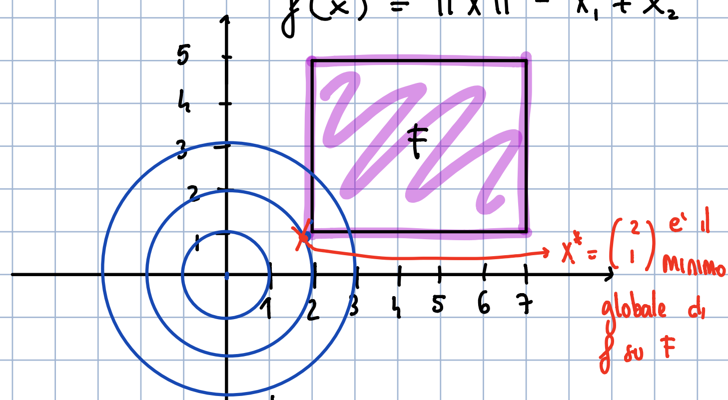
le norme sono funzioni continue!

$$\begin{bmatrix} 2 \leq x_1 \leq 7 \\ 1 \leq x_2 \leq 5 \end{bmatrix}$$

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \leq 7 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \end{array} \right\}$$

$\neq \emptyset$, chiuso e limitato

$f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$



$\{x_1^2 + x_2^2 = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$