PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\min c^T x \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

$$(P) \quad Ax \leq b \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \; ; \; b \in \mathbb{R}^m$$

TEOREMA:

Sia $\bar{x} \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq b_i \; ; \; i = 1, \dots, m\}$

i) $\bar{x}$ e' un vertice di P

ii) $\bar{x}$ e' un punto estremo di P

iii) $\bar{x}$ soddisfa all'uguaglianza n disuguaglianze $a_i^T x \leq b_i$ con a_i L.I

Esempio:

Calcolare tutti i vertici del seguente poliedro

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$

$n = 3$ (variabili)

$m = 5$ ($n°$ vincoli)

$(m > n)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \\ \geq \\ \geq \end{array} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

I vertici di P sono al piu'

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

numero dei possibili sistemi 3×3 che riesco a scrivere a partire da A e b.

MA essendoci un vincolo di uguaglianza ci si può limitare a considerare i sistemi che lo contengono.

Quindi P ha al piu' $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2 \cdot 1} = 6$

$n°$ di modi in cui scegliere 2 righe a partire da 4.

Dobbiamo considerare i sistemi con la 2 perche' essendo uguaglianza deve essere verif.

Scrivo i possibili sistemi: → se questi sistemi sono L.I se ammettono soluzione ammissibile

- $I = \{1,2,3\}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \\ x_3 = -1 \end{array}$$

NON AMMISSIBILE perché $x_3 < 0$

- $I = \{1,2,4\}$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{array}{l} x_1 = 5/3 > 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2/3 > 0 \end{array}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \in P$$ e' un vertice

- $I = \{1,2,5\}$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 < 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \qquad \notin P$$

- $I = \{2,3,4\}$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{array} \qquad \notin P$$

- $I = \{2,4,5\}$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 1 > 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

e $2x_1 - x_2 + x_3 \le 4$

→ e' vertice $\in P$

· $I = \{2,3,5\}$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det A_6 = 0 \implies \text{rank}(A_6) = 2 < 3 \leftarrow a_2, a_3, a_5$ sono linearmente dipendenti

non ott. un'unica sol. quindi non ho un vertice

Quindi P ha due vertici

$$\begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

LEMMA:

Si considera un problema di PL

$$(P) \quad \min c^T x$$
$$Ax \leq b$$

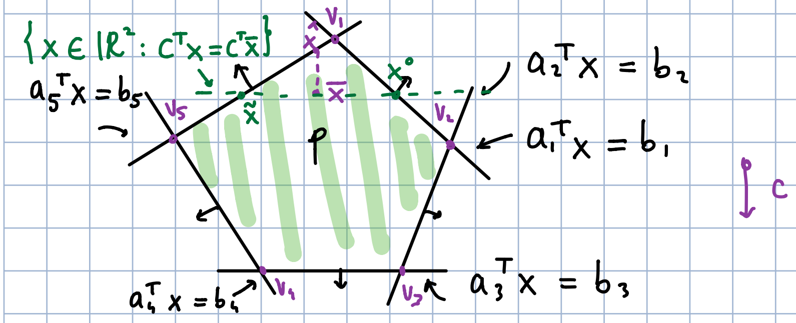
Supponiamo che il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

sia non vuoto e non contenga rette ($\Leftarrow$ P ammette almeno un vertice)

Allora se $\bar{x}$ è un punto di P, $\bar{x}$ non vertice di P è possibile det. $\hat{x} \in P$

t.c. $c^T\hat{x} \leq c^T x$

e il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in $\hat{x}$ è maggiore che in $\bar{x}$.



$f(x) = c^T x$

$n = 2$

$m = 5$ $\quad V_1$ soluzione ottima

$I(\bar{x}) = \emptyset$

$c^T \hat{x} < c^T \bar{x}$

non e' vertice

$I(\hat{x}) = \{5\}$

ma posso $c^T V_1 \leq c^T \hat{x}$

det. uno nuovo che e' vertice

$I(x^\circ) = \{1\}$

$c^T x^\circ = c^T \bar{x}$

TEOREMA FOND. DELLA PL:

Si consideri il problema di PL

$$(P) \quad \min \ c^T x \quad Ax \leq b$$

Supponiamo che $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ non contenga rette.

Allora una e una sola di queste affermazioni e' vera:

1) Il problema (P) e' non ammissibile ovvero il poliedro (P) e' vuoto
2) Il problema (P) e' illimitato inferiormente
3) Il problema (P) ammette soluzioni ottime e almeno una di queste soluzioni e' un vertice del poliedro P.

DIM:

Dimostriamo che se né 1. né 2. sono verificate allora vale necessariamente la 3.

Stiamo quindi supponendo che

- $P \neq \emptyset \implies$ P ammette almeno un vertice

P non contiene rette

- (P) non e' illimitato inferiormente

(*) Se supponiamo che $P = \{\bar{x}\}$ (ovvero P è formato da un unico punto)

non c'è nulla da dimostrare : $\bar{x}$ è vertice e soluzione ottima di (P)

(*) Se supponiamo che P contiene almeno due punti $x, y \in P$ necessariamente

$[x, y] \subseteq P$ (poiché P è convesso) e quindi P è formato da infiniti punti.

Sia $x \in P$ e supponiamo che x non sia un vertice.

Possiamo applicare il lemma e determinare $\hat{x}$ t.c $c^T\hat{x} \leq c^T x$

e il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in $\hat{x}$

è maggiore del numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in x.

Se $\hat{x}$ non è un vertice, possiamo riapplicare il lemma

un numero finito di volte (questo perché il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti è al più n)

e determinare un vertice $v \in P$ t.c

$$c^T v \leq c^T \hat{x} \leq c^T x$$

$\overset{\wedge}{\vdots}$

Abbiamo dimostrato che partendo da $x \in P$, x non vertice, $\exists\, v \in P$ v vertice t.c $c^T v \leq c^T x$

Sappiamo che il numero di vertici di P è al più $\binom{m}{n}$

Sia $V = \{v_1, v_2, \dots, v_z\}$ con $z \leq \binom{m}{n}$ numero di vertici di P

e sia

$$c^T v_{\hat{\imath}} = \min_{i=1,\dots,z} c^T v_i \leftarrow$$

Valuto la f.o sui vertici di P e scelgo un vertice che realizza il valore minimo.

Pertanto, $\forall\, x \in P$

$\exists\, k \in \{1, \dots, z\}$ t.c

$$c^T v_{\hat{\imath}} \leq c^T v_k \leq c^T x$$

ovvero $v_{\hat{\imath}}$ è ottimo globale per il problema (P) ∎

Il teorema fondamentale della PL ci autorizza a limitare la ricerca di una soluzione ottima tra i vertici del poliedro (supponendo che il problema sia ammissibile e non sia illimitato inferiormente)

Una procedura può essere:

1) Calcolo tutti i vertici del poliedro $v_1, \dots, v_r$
2) Valuto la f.o nei vertici
3) Scelgo v^* t.c $c^T v^* = \min_{i=1,\dots,r} c^T v_i$

$\Rightarrow$ v^* è ottimo globale del problema

... il numero dei vertici di un poliedro cresce esponenzialmente con n:

es: $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_i \le 1 ; \; i = 1, \dots, n\}$

$n = 2$ $\quad 4 = 2^2$ vertici

$n = 3$ $\quad 8 = 2^3$ vertici

$\vdots$

2^n vertici

DEF:

Un poliedro limitato è detto POLITOPO $\left(S \subseteq \mathbb{R}^n \text{ è limitato se } \|x\| \le M \;\; \forall x \in S \text{ con } M \in \mathbb{R}_+ \right)$

COROLLARIO:

Se $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ è un politopo non vuoto allora il problema

$$\min c^T x$$
$$Ax \le b$$

ammette soluzione ottima (finita) in un vertice di P.