Modelli di allocazione ottima di risorse

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Modelli di allocazione ottima di risorse

Si tratta di modelli che considerano il problema di come **dividere (allocare) risorse limitate** tra varie esigenze in competizione tra loro.

Modelli di allocazione ottima di risorse

Si tratta di modelli che considerano il problema di come **dividere (allocare) risorse limitate** tra varie esigenze in competizione tra loro.

Con *risorse* si possono intendere disponibilità di macchinari, mano d'opera, energia, tempi macchina, capitali, etc...

Modelli di allocazione ottima di risorse

Si tratta di modelli che considerano il problema di come **dividere (allocare) risorse limitate** tra varie esigenze in competizione tra loro.

Con *risorse* si possono intendere disponibilità di macchinari, mano d'opera, energia, tempi macchina, capitali, etc...

Distinguiamo tra **risorse alternative** e **risorse concorrenti**

Esempio 1

Un' impresa può usare 3 procedimenti differenti P_1, P_2, P_3 per la produzione di un bene.

Esempio 1

Un' impresa può usare 3 procedimenti differenti P_1, P_2, P_3 per la produzione di un bene.

Per la produzione di un'unità di bene è necessario l'impiego di tre macchine per tempi che dipendono dal procedimento usato e che sono riportati nella seguente tabella (in ore):

Esempio 1

Un' impresa può usare 3 procedimenti differenti P_1, P_2, P_3 per la produzione di un bene.

Per la produzione di un'unità di bene è necessario l'impiego di tre macchine per tempi che dipendono dal procedimento usato e che sono riportati nella seguente tabella (in ore):

	P1	**P2**	**P3**
Macchina A	2	1	3
Macchina B	4	2	3
Macchina C	3	4	2

continua...

Esempio 1

Esempio 1

Ogni macchina è disponibile per 50 ore.

Il **profitto netto** per la vendita di un'unità di prodotto **dipende dal procedimento usato** ed è riportato nella seguente tabella:

	P1	**P2**	**P3**
Profitto	15	18	10

Esempio 1

Ogni macchina è disponibile per 50 ore.

Il **profitto netto** per la vendita di un'unità di prodotto **dipende dal procedimento usato** ed è riportato nella seguente tabella:

	P1	**P2**	**P3**
Profitto	15	18	10

Formulare un problema di PL che permetta di **massimizzare il profitto**:

a. supponendo che un'unità di bene deve essere processata in sequenza sulle macchine A, B, C

Esempio 1

Ogni macchina è disponibile per 50 ore.

Il **profitto netto** per la vendita di un'unità di prodotto **dipende dal procedimento usato** ed è riportato nella seguente tabella:

	P1	**P2**	**P3**
Profitto	15	18	10

Formulare un problema di PL che permetta di **massimizzare il profitto**:

a. supponendo che un'unità di bene deve essere processata in sequenza sulle macchine A, B, C → RISORSE CONCORRENTI

b. supponendo che un'unità di bene può essere prodotta indifferentemente su A, B, C con tre procedimenti diversi su ciascuna macchina → RISORSE ALTERNATIVE esempio:

caso 1) RISORSE CONCORRENZIALI

(X_1, X_2, X_3 quantità di P_1, P_2, P_3)

$$f(x) = 15X_1 + 18X_2 + 10X_3$$

$$C = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{vincoli} \quad \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ \\ \end{array} \begin{cases} 2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 50 \\ 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 50 \\ 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 50 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

caso 2) RISORSE ALTERNATIVE

variabili X_{ij} $\quad i = 1,2,3 \quad j = A,B,C$
quantità di bene P_i,
prodotto con la macchina j

F.O $\quad f(x) = 15\underbrace{(P_1 \text{ prodotto})}_{X_1A + X_1B + X_1C} + 18\underbrace{(P_2 \text{ prodotto})}_{X_2A + X_2B + X_2C} + 10\underbrace{(P_3 \text{ prodotto})}_{X_3A + X_3B + X_3C}$

vincoli:

$$2X_{1A} + X_{2A} + 3X_{3A} \leq 50$$

$$4X_{1B} + 2X_{2B} + 3X_{3B} \leq 50 \quad ; \quad X_{i,j} \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ j = A,B,C \end{array}$$

$$3X_{1C} + 4X_{2C} + 2X_{3C} \leq 50$$

Esempio 1

- Nel caso *a*. distinguiamo tra unità di bene prodotta con procedimento P_1, P_2 o P_3

Esempio 1

- Nel caso *a.* distinguiamo tra unità di bene prodotta con procedimento P_1, P_2 o P_3

- Nel caso *b.* distinguiamo tra unità di bene prodotta con procedimento i ($i = P_1$, P_2 o P_3) utilizzando la macchina j ($j = A, B, C$), ovvero con modalità ij

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Supponiamo di disporre di m **risorse** $R_1, R_2, \ldots, R_m$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Supponiamo di disporre di m **risorse** $R_1, R_2, \ldots, R_m$
e di voler **fabbricare** n **prodotti** $P_1, P_2, \ldots, P_n$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Supponiamo di disporre di m **risorse** $R_1, R_2, \dots, R_m$
e di voler **fabbricare** n **prodotti** $P_1, P_2, \dots, P_n$

Il problema della pianificazione delle risorse consiste nel determinare le quantità da fabbricare di ciascun prodotto $P_1, P_2, \dots, P_n$ in modo che

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Supponiamo di disporre di m **risorse** $R_1, R_2, \dots, R_m$
e di voler **fabbricare** n **prodotti** $P_1, P_2, \dots, P_n$

Il problema della pianificazione delle risorse consiste nel determinare le quantità da fabbricare di ciascun prodotto $P_1, P_2, \dots, P_n$ in modo che

- **il profitto** sia massimizzato

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Supponiamo di disporre di m **risorse** $R_1, R_2, \dots, R_m$
e di voler **fabbricare** n **prodotti** $P_1, P_2, \dots, P_n$

Il problema della pianificazione delle risorse consiste nel determinare le quantità da fabbricare di ciascun prodotto $P_1, P_2, \dots, P_n$ in modo che

- **il profitto** sia massimizzato
- siano rispettati i **vincoli sulle risorse disponibili** o sui **livelli di produzione richiesti**

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Sia a_{ij} $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$
la **quantità di risorsa** R_i necessaria per **fabbricare un'unità del prodotto** P_j

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Sia a_{ij} $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$
la **quantità di risorsa** R_i necessaria per **fabbricare un'unità del prodotto** P_j

Possiamo quindi considerare la tabella

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Sia a_{ij} $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$
la **quantità di risorsa** R_i necessaria per **fabbricare un'unità del prodotto** P_j

Possiamo quindi considerare la tabella

	P_1	$\ldots$	P_j	$\ldots$	P_n
R_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Sia a_{ij} $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$
la **quantità di risorsa** R_i necessaria per **fabbricare un'unità del prodotto** P_j

Possiamo quindi considerare la tabella

	P_1	$\ldots$	P_j	$\ldots$	P_n
R_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}
R_2	a_{21}	$\ldots$	a_{2j}	$\ldots$	a_{2n}

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Sia a_{ij} $i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n$
la **quantità di risorsa** R_i necessaria per **fabbricare un'unità del prodotto** P_j

Possiamo quindi considerare la tabella

	P_1	$\ldots$	P_j	$\ldots$	P_n
R_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}
R_2	a_{21}	$\ldots$	a_{2j}	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
R_i	a_{i1}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{in}

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Sia a_{ij} $i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n$
la **quantità di risorsa** R_i necessaria per **fabbricare un'unità del prodotto** P_j

Possiamo quindi considerare la tabella

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & P_1 & \ldots & P_j & \ldots & P_n \\
\hline
R_1 & a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
R_2 & a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
R_i & a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
R_m & a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{array}
$$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Supponiamo che ciascuna risorsa R_i non possa superare un valore prefissato b_i, $i = 1, \ldots, m$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Supponiamo che ciascuna risorsa R_i non possa superare un valore prefissato b_i, $i = 1, \ldots, m$

R_1	R_2	$\ldots$	R_m
b_1	b_2	$\ldots$	b_m

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Supponiamo che ciascuna risorsa R_i non possa superare un valore prefissato b_i, $i = 1, \dots, m$

R_1	R_2	$\dots$	R_m
b_1	b_2	$\dots$	b_m

e che nella vendita di ciascuna unità di prodotto P_j si ricavi un profitto netto c_j, $j = 1, \dots, n$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale

Supponiamo che ciascuna risorsa R_i non possa superare un valore prefissato b_i, $i = 1, \ldots, m$

R_1	R_2	$\ldots$	R_m
b_1	b_2	$\ldots$	b_m

e che nella vendita di ciascuna unità di prodotto P_j si ricavi un profitto netto c_j, $j = 1, \ldots, n$

P_1	P_2	$\ldots$	P_n
c_1	c_2	$\ldots$	c_n

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE CONCORRENTI

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita deve **utilizzare tutte le risorse** anche se in misura diversa

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE CONCORRENTI

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita deve **utilizzare tutte le risorse** anche se in misura diversa

- **variabili:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano la quantità di prodotto $P_1, P_2, \ldots, P_n$ fabbricato

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE CONCORRENTI

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita deve **utilizzare tutte le risorse** anche se in misura diversa

- **variabili:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano la quantità di prodotto $P_1, P_2, \ldots, P_n$ fabbricato
- **funzione obiettivo:** $c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ (profitto)

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE CONCORRENTI

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita deve **utilizzare tutte le risorse** anche se in misura diversa

- **variabili:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano la quantità di prodotto $P_1, P_2, \ldots, P_n$ fabbricato
- **funzione obiettivo:** $c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ (profitto)
- **Vincoli di capacità produttiva:**

$$
\begin{aligned}
R_1 \rightarrow \quad & a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& \vdots \\
R_i \rightarrow \quad & a_{i1}x_1 + \ldots a_{in}x_n \leq b_i \\
& \vdots \\
R_m \rightarrow \quad & a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n \leq b_n
\end{aligned}
$$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE CONCORRENTI

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita deve **utilizzare tutte le risorse** anche se in misura diversa

- **variabili:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano la quantità di prodotto $P_1, P_2, \ldots, P_n$ fabbricato
- **funzione obiettivo:** $c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ (profitto)
- **Vincoli di capacità produttiva:**

$$
\begin{aligned}
R_1 \rightarrow \quad & a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& \vdots \\
R_i \rightarrow \quad & a_{i1}x_1 + \ldots a_{in}x_n \leq b_i \\
& \vdots \\
R_m \rightarrow \quad & a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n \leq b_n
\end{aligned}
$$

- **Vincoli di non negatività:** $x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE ALTERNATIVE

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita **necessita esclusivamente di una risorsa**

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE ALTERNATIVE

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita **necessita esclusivamente di una risorsa**

- **variabili:** x_{ij} $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$ rappresentano la quantità di prodotto P_j fabbricato utilizzando la risorsa R_i

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE ALTERNATIVE

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita **necessita esclusivamente di una risorsa**

- **variabili:** x_{ij} $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$ rappresentano la quantità di prodotto P_j fabbricato utilizzando la risorsa R_i
- **funzione obiettivo:**

$$c_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \ldots + c_n \sum_{i=1}^{m} x_{in}$$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE ALTERNATIVE

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita **necessita esclusivamente di una risorsa**

- **variabili:** x_{ij} $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ rappresentano la quantità di prodotto P_j fabbricato utilizzando la risorsa R_i
- **funzione obiettivo:**

$$c_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \dots + c_n \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE ALTERNATIVE

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita **necessita esclusivamente di una risorsa**

- **variabili:** x_{ij} $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$ rappresentano la quantità di prodotto P_j fabbricato utilizzando la risorsa R_i
- **funzione obiettivo:**

$$c_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_{i1}}_{\text{quantità di } P_1 \text{ prodotta}} + c_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \ldots + c_n \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

- **Vincoli di capacità produttiva:**

$$\begin{aligned} R_1 \rightarrow \quad & a_{11}x_{11} + \ldots a_{1n}x_{1n} \leq b_1 \\ & \vdots \\ R_m \rightarrow \quad & a_{m1}x_{m1} + \ldots a_{mn}x_{mn} \leq b_n \end{aligned}$$

Modelli di allocazione ottima di risorse

Schema generale - RISORSE ALTERNATIVE

Il bene fabbricato, per essere finito e pronto per la vendita **necessita esclusivamente di una risorsa**

- **variabili:** x_{ij} $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$ rappresentano la quantità di prodotto P_j fabbricato utilizzando la risorsa R_i
- **funzione obiettivo:**

$$c_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \ldots + c_n \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

- **Vincoli di capacità produttiva:**

$$\begin{aligned} R_1 \rightarrow &\quad a_{11}x_{11} + \ldots a_{1n}x_{1n} \leq b_1 \\ &\quad \vdots \\ R_m \rightarrow &\quad a_{m1}x_{m1} + \ldots a_{mn}x_{mn} \leq b_n \end{aligned}$$

- **Vincoli di non negatività:** $x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$