TEORIA DELLA DUALITÀ - PROB. DUALE DI WOLFE

$$\min f(x) \quad g(x) \le 0 \quad h(x) = 0 \qquad (P)$$

possiamo associare a (P) $\longleftrightarrow$ il problema duale di Wolfe

$$\max \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) \quad \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = 0 \quad \lambda \ge 0$$

$f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ convesse

h_j lineari

Abbiamo dimostrato che

- Dati $\bar{x}$ ammissibile primale, $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ ammissibile duale $\Rightarrow \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \le f(\bar{x})$

COROLLARIO:

$f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ convesse $i = 1, \dots, m$; h_j LINEARI $j = 1, \dots, p$

i) Se $\exists\, \bar{x}$ ammissibile per (P)

$\exists\, (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ ammissibile per (D) t.c.

$$\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = f(\bar{x})$$

Allora $\bar{x}$ è punto di minimo globale per (P)

e $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ è punto di massimo globale per (D)

ii) Se $\inf f(x) = -\infty \quad g(x) \le 0 \quad h(x) = 0$ $\longleftarrow$ il problema primale è illimitato inferiormente

allora il problema duale è non ammissibile

cioè $\{(x,\lambda,\mu) \mid \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = 0\ ;\ \lambda \ge 0\} = \emptyset$

iii) Se $\sup \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = +\infty \quad \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = 0 \quad \lambda \ge 0$ $\longleftarrow$ il problema duale è illimitato superiormente

allora il problema primale è non ammissibile ossia $\{(x,\lambda,\mu) \mid g(x) \le 0,\ h(x) = 0\} = \emptyset$

DIMOSTRAZIONE

i) Per la dualità debole

$$f(\bar{x}) \geq \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$$

- Sia $x \in F$ un generico punto ammissibile primale

$$f(x) \geq \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = f(\bar{x}) \iff f(\bar{x}) \leq f(x)$$

Teo dualità debole

$\iff$ $\bar{x}$ e' punto di minimo globale di (P)

- Sia (x, λ, μ) un generico punto ammissibile duale

$(\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0; \ \lambda \geq 0)$ $\quad \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \leq f(\bar{x}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \iff$ $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ e' punto di massimo globale per (D)

ii) $\inf\limits_{x \in F} f(x) = -\infty \implies$ il problema duale non e' ammissibile

Supponiamo per assurdo che $\exists (\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ t.c $\nabla_x \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = 0$, $\tilde{\lambda} \geq 0$

Ma allora per il teo della dualità debole $f(x) \geq \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ <u>ASSURDO</u>

iii) $\sup \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = +\infty$
$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0$
$\lambda \geq 0$

$\implies$ il problema primale e' non ammissibile

Supponiamo per assurdo che $\exists \hat{x} \in F$

Per il teorema della dualità debole $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \leq f(\hat{x})$ ASSURDO ☐

TEOREMA DELLA DUALITA' DI WOLFE FORTE

$f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ convesso $i = 1, \dots, m$; h_j LINEARI

Sia (x^*, λ^*, μ^*) un punto KKT per (P

Allora (x^*, λ^*, μ^*) e' soluzione ottima del prob. duale di Wolfe $\max \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$, $\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0$, $\lambda \geq 0$

e si ha

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*$$

DIMOSTRAZIONE:

(x^*, λ^*, μ^*) KKT $\Leftrightarrow$ $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$

$\lambda_i^* \geq 0$

(x^*, λ^*, μ^*) è ammissibile per il problema duale di Wolfe.

$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ $i = 1, \dots, m$

$x^* \in F$

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*) + \underbrace{\lambda^{*T} g(x^*)}_{=0} + \mu^{*T} \underbrace{h(x^*)}_{=0} = f(x^*)$$

$= 0$ condizioni di complementarietà

$= 0$ poiché $x^* \in F$

Dal corollario al teorema della dualità debole concludiamo che:

- x^* è punto di minimo globale per il problema primale

  N.B lo sapevamo già! per questo prob. le condizioni KKT sono sufficienti per l'ottimalità

- (x^*, λ^*, μ^*) è punto di massimo globale per il problema duale di Wolfe.

OSS:

Risolvendo il problema duale di Wolfe si ottiene il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale

Ma in generale la soluzione duale $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ che soddisfa

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(x^*) \quad (\text{con } x^* \text{ s. ottima } (P))$$

<u>NON</u> è t.c $\bar{x}$ è ammissibile per (P) $(\bar{x} \notin F)$

e quindi <u>NON</u> è detto che $\bar{x}$ sia ottimo per (P)