METODO DEL SIMPLESSO - OPERAZIONE DI PIVOT

Data $\bar{x}$ SBA associata alla base B

Se $\bar{x}$ non soddisfa il criterio di ottimalità né il criterio di illimitatezza.

Allora costruiamo una nuova SBA $\tilde{x}$ come :

- Scegliendo $h \in I_N$ t.c $\gamma_h < 0$

$$I_{\tilde{B}} = I_B \cup \{h\}$$

- Calcolando $k \in I_B$ attraverso il criterio del rapporto minimo :

$$\frac{(B^{-1}b)_k}{(B^{-1}N)_{kh}} = \min_{\substack{i \in I_B \\ (B^{-1}N)_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ih}} \right\}$$

$$I_{\tilde{B}} = (I_B \cup \{h\}) \setminus \{k\}$$

... otteniamo $\tilde{B}$ nuova base ammissibile

per proseguire il metodo del simplesso deve calcolare

$$\tilde{B}^{-1} b \quad \text{e} \quad \tilde{B}^{-1} \tilde{N}$$

quantità che dipendono da $\tilde{B}^{-1}$

MA il metodo del simplesso non calcola $\tilde{B}^{-1}$ ma esegue un'operazione di pivot

operazione molto onerosa a livello computazionale

DEF: (MATRICE DI PIVOT)

La seguente matrice $m \times m$ è detta MATRICE DI PIVOT

$$T = \underbrace{I_m}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{identità} \\ m \times m}} + \underbrace{\frac{1}{(B^{-1}N)_{kh}}}_{\substack{\cap \\ \mathbb{R} \\ \text{(è uno scalare)}}} \cdot \left(\underbrace{e_k}_{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^m}} - \underbrace{(B^{-1}N)_h}_{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^m \\ h\text{-esima colonna} \\ \text{della matrice} \\ B^{-1}N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}}} \right) e_k^T \Big/ \in \mathbb{R}^m$$

Guardiamo alle <u>colonne</u> della matrice T

ovvero consideriamo il vettore Te_i $\quad i = 1, \dots, m$

vettore base canonica di $\mathbb{R}^m$

- $i \neq k$

$$Te_i = I_m e_i + \frac{1}{(B^{-1}N)_{kh}} \cdot \left(e_k - (B^{-1}N)_h \right) \underbrace{e_k^T e_i}_{=0} =$$

$$= I_m e_i = e_i$$

- $i = k$

$$Te_k = I_m e_k + \frac{1}{(B^{-1}N)_{kh}} \cdot \left(e_k - (B^{-1}N)_h \right) e_k^T e_k \qquad = 1$$

Quindi

$$Te_k = e_k + \frac{e_k}{(B^{-1}N)_{kh}} - \frac{(B^{-1}N)_h}{(B^{-1}N)_{kh}}$$

In particolare

$$(Te_k)_j = - \frac{(B^{-1}N)_{jh}}{(B^{-1}N)_{kh}} \qquad j \neq k$$

$$(Te_k)_k = \cancel{1} + \frac{1}{(B^{-1}N)_{kh}} - \cancel{\frac{(B^{-1}N)_{kh}}{(B^{-1}N)_{kh}}} = \frac{1}{(B^{-1}N)_{kh}}$$

$= 1$

TEOREMA:

Sia T una MATRICE DI PIVOT

allora

i) T e' invertibile

ii) $Te_i = e_i$ $\longleftarrow$ l'i-esima colonna di T e' l'i-esimo vettore della base canonica

iii) $T(B^{-1}N)_h = e_k$

DIM:

verifichiamo iii):

$$= (B^{-1}N)_{kh}$$

$$T(B^{-1}N)_h = \left(I_m + \frac{1}{(B^{-1}N)_{kh}}(e_k - (B^{-1}N)_h)e_k^T\right)(B^{-1}N)_h$$

$$= \cancel{(B^{-1}N)_h} + e_k - \cancel{(B^{-1}N)_h} = e_k$$

TEOREMA:

Sia T una MATRICE DI PIVOT

Allora

i) $\tilde{B}^{-1} = TB^{-1}$ per ottenere $\tilde{B}^{-1}$ basta moltiplicare B^{-1} per T

ii) $\tilde{B}^{-1}b = T(B^{-1}b)$

iii) $\tilde{B}^{-1}\tilde{N} = T((B^{-1}N)_1, \dots, (B^{-1}N)_{h-1}, e_k, (B^{-1}N)_{h+1}, \dots, (B^{-1}N)_{n-m})$

DIM:

$$\tilde{B}^{-1} = TB^{-1} \iff \tilde{B}^{-1}\tilde{B} = TB^{-1}\tilde{B}$$

Verifichiamo la i):

Vogliamo verificare $TB^{-1}\tilde{B}^{-1} = I_m$

ovvero

$$(TB^{-1}\tilde{B}^{-1})e_i = e_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$(TB^{-1}\tilde{B}^{-1})e_i = TB^{-1}\tilde{B}_i^{-1} \underset{i \neq k}{=} TB^{-1}B_i = Te_i \underset{i \neq k}{=} e_i$$

i-esima colonna di $\tilde{B}^{-1}$ che coincide con la i-esima colonna di B^{-1} se $i \neq k$

$$\Rightarrow (TB\tilde{B}^{-1})e_i = e_i \quad \forall i = 1, \dots, m \; ; \; i \neq k$$

Se $i = k$

per il teorema precedente

$$(TB^{-1}\tilde{B})e_k = TB^{-1}\tilde{B}_k = TB^{-1}N_h = T(B^{-1}N)_h = e_k \quad \blacksquare$$

h-esima colonna fuori base rispetto a B (cioè N_h)

COROLLARIO:

Sia T la matrice di pivot:

Allora

$$(e_k \mid \tilde{B}^{-1}\tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1}b) = TM$$

dove M è la matrice data da

$$M = \left((B^{-1}N)_h \mid (B^{-1}N)_1, \dots, (B^{-1}N)_{h-1}, e_k, (B^{-1}N)_{h+1}, (B^{-1}N)_{n-m} \mid B^{-1}b\right)$$

Moltiplicare M per T equivale a:

elemento di pivot

i) Dividere la k-esima riga di M per $(B^{-1}N)_{kh}$

ii) Sommare a ciascuna riga di M $(i \neq k)$ la riga k-esima ottenuta in i) moltiplicando per l'elemento $-(B^{-1}N)_{ih}$

SCHEMA FASE 2 - METODO DEL SIMPLESSO

(B base ammissibile)

Passo 1: Calcolo il vettore dei costi ridotti

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)c_B$$

Passo 2: Verifica del criterio di ottimalità:

Se $\gamma_i \geq 0 \quad \forall i \in I_N$ allora $x_B^* = B^{-1}b$, $x_N^* = 0_{n-m}$ è una SBA ottima (STOP)

Passo 3: Verifica del criterio di illimitatezza

Se $\exists j \in I_N$ t.c.:

- $\gamma_j < 0$
- $(B^{-1}N)_j \leq 0$ allora (PL) è illimitato inferiormente (STOP)

Passo 4: Costruzione di una nuova base ammissibile:

1) Scelgo $h \in I_N$ t.c $\gamma_h < 0$ $\longrightarrow$ la variabile corrispondente entra in base

2) Criterio del rapporto minimo: scelgo $k \in I_B$ t.c

$$\frac{(B^{-1}b)_k}{(B^{-1}N)_{kh}} = \min_{\substack{i \in I_B \\ (B^{-1}N)_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ih}} \right\}$$ $\longrightarrow$ la variabile corrispondente esce dalla base

Passo 5: Operazione di pivot:

- $(B^{-1}N)_{kh}$ elemento di pivot
- $M = ((B^{-1}N)_h \mid (B^{-1}N)_1, \dots, (B^{-1}N)_{h-1}, e_k, (B^{-1}N)_{h+1}, \dots (B^{-1}N)_{n-m} \mid B^{-1}b)$

i) si divide la k-esima riga per $(B^{-1}N)_{kh}$

ii) si somma ogni riga i-esima $(i \neq k)$ la riga k-esima moltiplicata per $-(B^{-1}N)_{ih}$

Esempio:

$$\min \; x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3$$
$$2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fase II:

1ª iterazione

$I_{B_1} = \{4, 5, 6\}$ $\quad I_{N_1} = \{1, 2, 3\}$ $\quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B_1^{-1} N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = N_1$

la sol. di base ammissibile $\bar{x} = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 1)^T$

Passo 1: Calcolo $\gamma_1 = C_{N_1} - (B_1^{-1}N_1)^T C_{B_1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

X^1 non è una SBA ottima

Passo 2: verifico il criterio di illimitatezza

dato che $(B^{-1}N)_i \not\leq 0$ per $i \in I_{N_1}$ t.c $\gamma_i < 0$

la verifica del criterio è fallita

Passo 3: Scelgo $h \in I_N$ t.c $\gamma_h < 0$

1) prendo $h = 1 \Rightarrow x_1$ entra in base

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $$\min_{\substack{i \in I_B \\ (B^{-1}N)_{ih} > 0}} \left\{ \frac{3}{1}, \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}}, \frac{1}{1} \right\} = 1$$

ho due elementi che mi realizzano il minimo

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Scegliamo $k = 2 \Rightarrow x_5$ esce dalla base

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi la nuova base ammissibile induce la partizione

$I_{B_2} = \{4, 1, 6\}$ $\quad I_{N_2} = \{5, 2, 3\}$

Passo 4: Operazione di pivot

$$M_1 = \left((B^{-1}N)_h \,|\, (B^{-1}N)_1 \dots (B^{-1}N)_{h-1}, e_k, (B^{-1}N)_{h+1}, \dots, (B^{-1}N)_{n-m} \,|\, B^{-1}b \right)$$

$$= \left((B^{-1}N)_1 \,\middle|\, e_2 (B^{-1}N)_2 (B^{-1}N)_3 \,\middle|\, B^{-1}b \right) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$(B^{-1}N)_{kh}$ elemento di Pivot

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

ho diviso la k esima riga per $(B^{-1}N)_{kh}$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1/2 & 5/2 & 11/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

sommiamo alla prima riga la riga k-esima moltiplicata per $-(B^{-1}N)_{1h}$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1/2 & 5/2 & 11/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & 3/2 & 0 \end{array}\right)$$

sommiamo alla terza riga la riga k-esima moltiplicata per $-(B^{-1}N)_{3h}$

$$\parallel$$

$$\left(e_k \,\middle|\, B_2^{-1}N_2 \,\middle|\, B_2^{-1}b\right)$$

la SBA associata a B_2 è $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & & & 4 & & 6 \end{array}$$

N.B è degenere

Da fare per casa un'ulteriore iterazione