METODO DEL SIMPLESSO - CRITERIO DI ILLIMITATEZZA

Supponiamo che tutte le SBA di $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$

siano NON DEGENERI

($\Rightarrow$ il criterio di ottimalità è sia sufficiente che necessario)

Supponiamo di essere ad una generica iterazione k del metodo del simplesso

x^k SBA per P, non ottima

$\longrightarrow \exists j \in I_N$ t.c $\gamma_j < 0$

Il metodo del simplesso passa da x^k a x^{k+1}

definendo la direzione $d^k \in \mathbb{R}^n$: $d_i^k = 0 \quad i \in I_{N^k};\ i \neq j$

$$\boxed{d_j^k = 1}$$

$$d^k_{B_k} = -[B^{k-1} N^k]_j$$

Dimostreremo che $Ad^k = 0 \Rightarrow A(x^k + \alpha d^k) = Ax^k + \alpha A d^k = b$

$\Updownarrow$

ma non è detto che sia mantenuta l'ammissibilità rispetto ai vincoli di non-negatività.

lungo la direzione d^k è mantenuta l'ammissibilità rispetto ai vincoli di uguaglianza

Distinguiamo due possibilità:

1) $d^k \geq 0$ in questo caso $\underbrace{x^k}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha d^k}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall \alpha \geq 0$

Questo significa che $x^k + \alpha d^k$ è ammissibile $\forall \alpha \geq 0$

(In particolare α può andare a $+\infty$ e $\lim_{\alpha \to +\infty} c^T(x^k + \alpha d^k) = -\infty$

$\Rightarrow$ (PL) illimitato inferiormente

2) $\exists i$ t.c $d_i < 0 \longrightarrow$ riesco a definire una nuova SBA x^{k+1} t.c

TEOREMA:

Sia B una base ammissibile per A e sia $\bar{x}$ la SBA associata $\bar{x}_B = B^{-1}b$

se $\exists j \in I_N$ t.c $\bar{x}_N = 0_{n-m}$

i) $\gamma_j < 0$

ii) la colonna j-esima della matrice $B^{-1}N$ e' tutta non positiva, $(B^{-1}N)_j \le 0_m$

Allora il problema (PL) e' ILLIMITATO INFERIORMENTE

DIM:

Consideriamo la direzione definita come:

$$d = \begin{cases} d_B = -(B^{-1}N)_j \\ d_i = 0 & i \in I_N ;\ i \neq j \\ d_j = 1 \end{cases}$$

$$B d_B = -B(B^{-1}N)_j = -BB^{-1}N_j = -N_j$$

$$N d_N = N \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-esima componente} \quad = N_j$$

Consideriamo il punto $\bar{x}(\alpha) = \bar{x} + \alpha d$

- verifichiamo che $\bar{x}(\alpha)$ e' ammissibile $\forall \alpha \ge 0$

$$A\bar{x}(\alpha) = \underbrace{A\bar{x}}_{= b \text{ poiche' } \bar{x} \text{ SBA}} + \alpha A d = b + \alpha (B \quad N)\begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix} =$$

$$= b + \alpha(-N_j + N_j)$$

Quindi $A\bar{x}(\alpha) = b \quad \forall \alpha \geq 0$

D'altra parte $\bar{x}(\alpha) \ge 0$ poiche' $\bar{x} \ge 0$ $\quad d \ge 0$ essendo $(B^{-1}N)_j \le 0$

Pertanto $\bar{x}(\alpha) \in P \quad \forall \alpha \ge 0$

Valutiamo la f. obiettivo in $\bar{x}(\alpha)$:

$$c^T\bar{x}(\alpha) = c^T(\bar{x} + \alpha d) = \begin{pmatrix} c_B^T \\ c_N \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -(B^{-1}N)_j \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right.$$

j-esima componente $j \in I_N$

$$= c_B^T(\bar{x}_B - \alpha(B^{-1}N)_j) + \underbrace{c_N^T \bar{x}_N}_{=0 \text{ poiche' } \bar{x} \text{ SBA}} + \alpha c_j$$

$\alpha c_N^T c_j$

$$= c_B^T\left(\bar{x}_B - \alpha(B^{-1}N)_j\right) + \alpha c_N^T e_j =$$

$$= c_B^T B^{-1} b - \alpha \left[c_B^T \left(B^{-1} N \right) e_j - c_N^T e_j \right] =$$

$$= c_B^T B^{-1} b + \alpha \Big[\underbrace{c_N - \left(B^{-1} N \right)^T c_B}_{\gamma} \Big]^T e_j =$$

$$= c_B^T B^{-1} b + \alpha \underbrace{\gamma_j}_{\wedge 0}$$

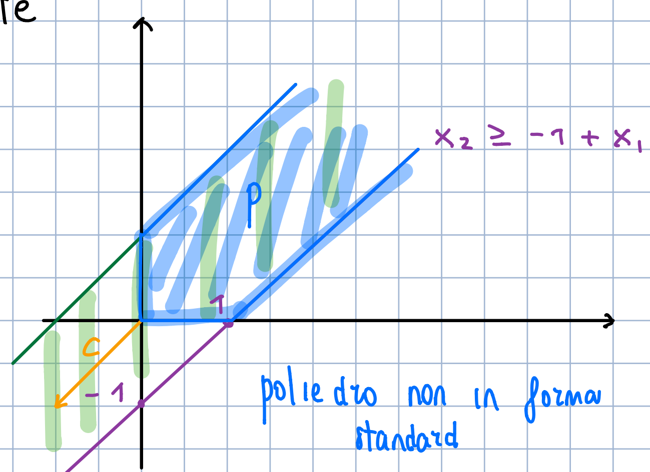
non dip. da α

Quindi $\lim_{\alpha \to +\infty} c^T \bar{x}(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} c_B^T B^{-1} b + \alpha \overbrace{\gamma_j}^{<0} = -\infty$ $\boxtimes$

Esempio:

$$(P) \quad \begin{array}{rl} \min & -x_1 - x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{1) scrivo in forma standard}} \quad \begin{array}{rl} \min & -x_1 - x_2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

graficamente



$c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

poliedro non in forma standard

graficamente noto che e' illimitato inferiormente

con il metodo del simplesso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RICORDA

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$I_B = \{1, 4\} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$(B^{-1}N)_1$

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\gamma_1 < 0 \Rightarrow$ il criterio di ottimalità non è soddisfatto $(j = 1)$

$(B^{-1}N)_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0_{n-m} \Rightarrow$ il criterio di illimitatezza è soddisfatto

$\Rightarrow$ (P) è illimitato inferiormente

Esempio (quesito):

In un'iterazione del metodo del simplesso si ha

$$x_B = (x_4, x_3)^T$$
$$x_N = (x_1, x_2, x_5)^T$$

N.B L'ordine delle componenti conta!

Inoltre si ha

$$c_B^T B^{-1} b = 1 \qquad B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) il problema è illimitato inferiormente → vero ⇒ [poiché ho due componenti di $\gamma < 0$, se trovo una colonna tutta ≤ 0 ⇒ ill. inf. (ne basta una)]

b) il problema non è ammissibile → FALSO

⇓

[poiché $P \neq \emptyset$, poiché $B^{-1}b \neq \emptyset$
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in P$$]

c) $(0, 0, 1, 2, 0)^T$ è una sol. ottima del problema → FALSO

↓

[γ non soddisfa il criterio suff. di ottimalità]

d) il valore di f. obiettivo nel punto $(0, 1, 1, 1, 0)^T$ (ammissibile) è 1

FALSA

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N = 1 + (2\ -1\ -4)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$