Modelli di Programmazione Lineare Intera

Variabili binarie per il soddisfacimento di vincoli

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Uso delle variabili binarie

Riepilogo

- Date **due variabili** $x_1 \in \{0, 1\}$ **e** $x_2 \in \{0, 1\}$ relative a **due proposizioni logiche A e B** possiamo modellare

$$A \quad \Rightarrow \quad B$$

attraverso il vincolo

$$x_1 \leq x_2$$

- Data **una variabile continua** $x \geq 0$ e una **variabile binaria** $\delta \in \{0, 1\}$ possiamo modellare

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 1$$

attraverso il vincolo

$$x - M\delta \leq 0$$

Uso delle variabili binarie

Più in generale

- Dato **un vincolo** $\Phi(x) \geq 0$ e una **variabile binaria** $\delta \in \{0, 1\}$ possiamo modellare

$$\Phi(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 1$$

attraverso il vincolo

$$\Phi(x) - M\delta \leq 0$$

Uso delle variabili binarie

soddisfacimento dei vincoli

Supponiamo di voler modellare l'implicazione

$$\Phi(x) > \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta = 1 \tag{1}$$

Supponiamo che esista $M > 0$ tale che $\Phi(x) \leq M$ è un vincolo ridondante per il modello

Vogliamo quindi modellare le seguenti implicazioni

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) \leq \alpha$$

$$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) \leq M$$

Quindi, il vincolo che può modellare (1) è

$$\Phi(x) \leq M + (\alpha - M)(1 - \delta)$$

Uso delle variabili binarie
soddisfacimento dei vincoli

Supponiamo di voler modellare l'implicazione

$$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) > \alpha \tag{2}$$

Inserire nel modello disuguaglianze strette è problematico perché:

- potrebbero portare a definire insiemi ammissibili non chiusi
- numericamente può essere difficile capire se due quantità sono distinte se la loro differenza è estremamente piccola

Al posto della (2) consideriamo

$$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) \geq \alpha + \epsilon$$

Uso delle variabili binarie

soddisfacimento dei vincoli - Caso 2

Supponiamo che esista $m > 0,\ m \leq \alpha$ tale che $\Phi(x) \geq m$ è un vincolo ridondante per il modello

Vogliamo quindi modellare le seguenti implicazioni

$$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) \geq \alpha + \epsilon$$

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) \geq m$$

Quindi, il vincolo che può modellare (2) è

$$\Phi(x) \geq m + (\alpha + \epsilon - m)\delta$$

Esempio

Introdurre una variabile $\delta \in \{0, 1\}$ per indicare soddisfacimento del vincolo

$$5x_1 + 3x_2 \leq 2$$

sapendo che x_1 e x_2 sono variabili continue tali che

$$0 \leq x_1 \leq 2 \quad 0 \leq x_2 \leq 2$$

Esempio:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 5x_1 + 3x_2 \le 2 \\ 0 & \end{cases} \iff \Phi(x) \le \alpha$$

con

$\Phi(x) = 5x_1 + 3x_2$

$\alpha = 2$

Vogliamo modellare

i) $\delta = 1 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 \le 2$

ii) $5x_1 + 3x_2 \le 2 \Rightarrow \delta = 1$

i) $\Phi(x) \le M + (\alpha - M)\delta$ con M massimo valore assunto da $\Phi(x)$

ovvero 16

$5x_1 + 3x_2 \le 16 \quad \forall\, x_1, x_2 \in [0,2]$

ii) $\Phi(x) \ge m + (\alpha + \varepsilon - m)(1-\delta)$ con $\varepsilon = 10^{-3}$

valore piccolo

$m = 0$

poiché $x_1, x_2 \in [0,2]$

$\Rightarrow$ il minimo valore assunto da $\Phi(x)$ è 0.