PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\min \; c^T x$$
$$(P) \qquad Ax \leq b$$

DEF: (POLIEDRO, GEOMETRICO):

Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un POLIEDRO se è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi $(a_i^T x \leq b_i)$ e iperpiani $(a_i^T x \leq b_i)$ e iperpiani $(a_i^T x = b_i)$

DEF: (POLIEDRO, ALGEBRICO):

Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un POLIEDRO

se $\exists \, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ t.c $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

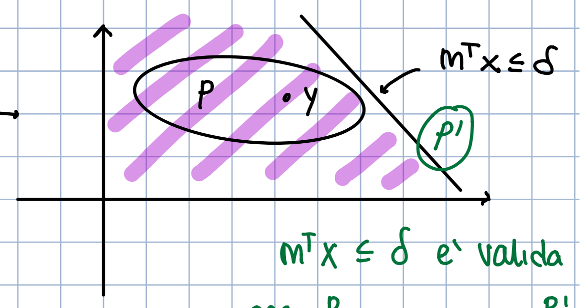
un poliedro è l'insieme di soluzioni di un sistema di disequazioni e equazioni.

DEF: (DISUGUAGLIANZA VALIDA)

Una disuguaglianza $m^T x \leq \delta$ con $m \in \mathbb{R}^n$, $\delta \in \mathbb{R}$

si dice VALIDA per l'insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se $m^T x \leq \delta$ è soddisfatta $\forall$ punto $y \in P$

è valida perché ogni $y \in$ al semispazio con P



$m^T x \leq \delta$ è valida per P ma non per P'

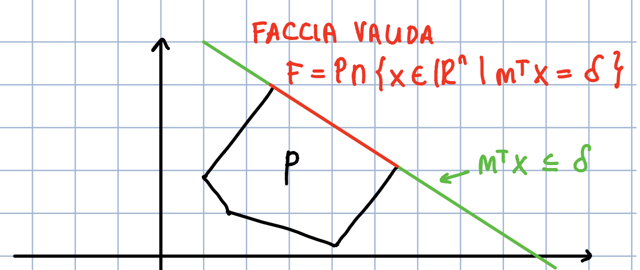
DEF: (FACCIA POLIEDRO)

Una faccia di un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'insieme definito come

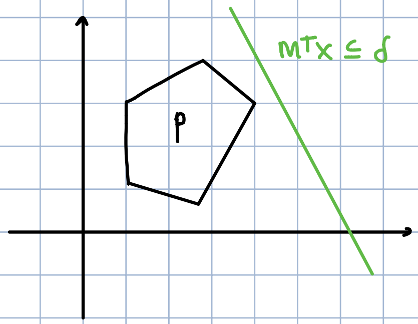
$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid m^T x = \delta\}$$

dove $m^T x \leq \delta$ è una disuguaglianza valida

in generale può capitare $F = \emptyset$

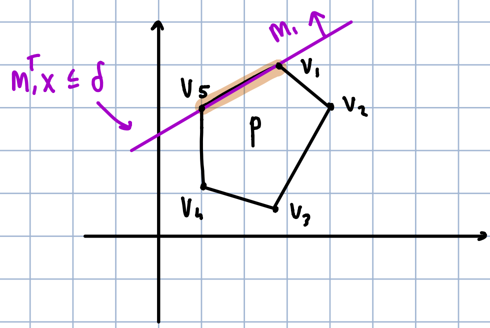


Esempi



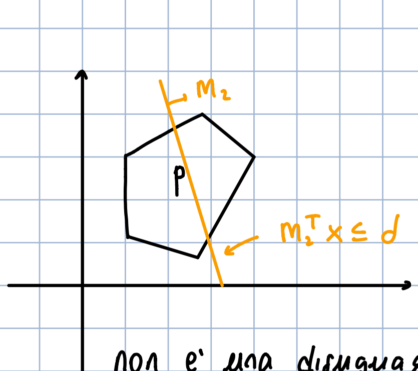
la disuguaglianza e' ammissibile e la faccia e' l'insieme vuoto

$$F_1 = P \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \mid m^T x = \delta \} = \emptyset$$

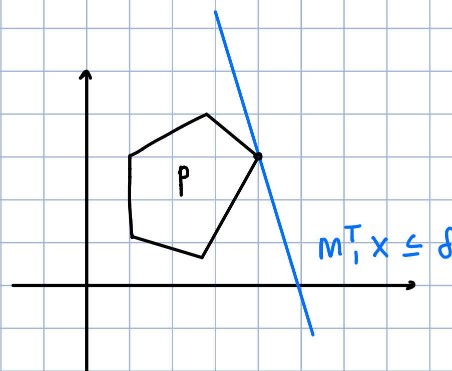


In questo caso la faccia e' il segmento $v_1 v_5$

$$F_2 = P \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \mid m_1^T x = \delta_1 \} = [v_1, v_5]$$



non e' una disuguaglianza valida perche' non e' soddisfatta da tutti i punti di P



e' una disuguaglianza valida e

$$F = [v_2]$$

DEF: (PUNTO ESTREMO)

Un punto $x \in P \subseteq \mathbb{R}^n$ e' detto PUNTO ESTREMO di P se

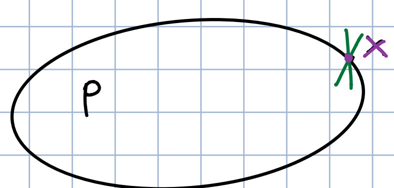
$\nexists\ x_1, x_2 \in P \quad x_1 \neq x\ ;\ x_2 \neq x\ ;\ x_1 \neq x_2$

t.c. $\quad x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \quad$ con $\lambda \in (0,1)$

N.B

Non necessariamente un punto estremo e' un vertice (NEL CASO GENERALE)

Ma noi consideriamo solo POLIEDRI



$\nexists\ x_1, x_2 \in P\ ;\ x_1 \neq x\ ;\ x_2 \neq x$

t.c. $\quad x \in [x_1, x_2]$

Nel caso dei poliedri la definizione di punto estremo e vertice e' la stessa.

TEOREMA:

Sia $P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b \}$ un poliedro e sia $\bar{x} \in P$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) $\bar{x}$ e' un punto estremo

ii) $\bar{x}$ e' un vertice

iii) $\bar{x}$ soddisfa all'uguaglianza n disuguaglianze linearmente indipendenti di $Ax \le b$

---

la cardinalita' nell'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x}$ e' $\ge n$

$|I(\bar{x})| \ge n$

DIM:

$P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b \} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \le b_i \ ; \ i = 1, \dots, m \}$

L'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x}$ e' definito come

$I(\bar{x}) = \{ i \in \{1, \dots, m\} \mid a_i^T \bar{x} = b_i \}$

(i) $\iff$ (ii) (non lo dimostriamo)

(ii) $\iff$ (iii)

$\Rightarrow$: Sia $\bar{x}$ un punto estremo di P.

Per assurdo, supponiamo che il numero di vincoli attivi in $\bar{x}$ linearmente indipendenti sia $k < n$

Quindi $\exists\, d \in \mathbb{R}^n$ non nullo t.c

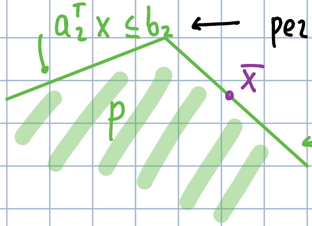
$$a_i^T d = 0 \qquad \forall i \in I(\bar{x}) \iff A_{I(x)}\, d = 0$$

Per ogni $i \notin I(\bar{x})$ si ha $a_i^T \bar{x} < b_i$

Quindi $\exists\, \varepsilon > 0$ sufficentemente piccolo t.c i vettori $y = \bar{x} - \varepsilon d$

$z = \bar{x} + \varepsilon d$

sono t.c $a_i^T y \le b_i$ e $a_i^T z \le b_i$ per $i \notin I(\bar{x})$



per il vincolo non attivo ho la libertà di muovermi

è il vincolo attivo, non posso muovermi dove voglio perché non posso uscire da P

Inoltre per $i \in I(\bar{x})$

$$a_i^T y = \underbrace{a_i^T \bar{x}}_{= b_i} - \varepsilon \underbrace{a_i^T d}_{= 0} = b_i$$

per definizione di d

$$a_i^T z = \overbrace{a_i^T \bar{x}}^{= b_i} + \varepsilon \overbrace{a_i^T d}^{= 0} = b_i$$

Pertanto $y, z \in P$

$\exists\, y, z \in P$ t.c

$\bar{x} = \lambda y + (1-\lambda) z$

con $\lambda = \frac{1}{2}$

Arrivo ad una contraddizione ($\bar{x}$ non è un punto estremo)

poiché

$$\bar{x} = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z = \frac{1}{2}(\bar{x} - \varepsilon d) + \frac{1}{2}(\bar{x} + \varepsilon d) \quad \text{con } y, z \in P$$

ovvero $\bar{x}$ può essere scritto come combinazione convessa di due punti di P.

$\Leftarrow$: Supponiamo che $\exists$ n vincoli attivi in $\bar{x}$ linearmente indipendenti.

Per assurdo, supponiamo che $\bar{x}$ non sia punto estremo di P

$\Rightarrow \exists\, y, z \in P$ t.c $\qquad \bar{x} = \lambda y + (1-\lambda) z \quad$ con $\lambda \in (0,1)$

$\qquad y \ne \bar{x}\,;\ z \ne \bar{x}$

esiste la comb. convessa che ci dà $\bar{x}$

$y, z \in P \Rightarrow a_i^T y \le b_i \quad ; \quad a_i^T z \le b_i \qquad i = 1, \dots, m$

Verifichiamo che necessariamente deve valere

$$a_i^T y = a_i^T z = b_i \qquad \forall\, i \in I(\bar{x})$$

ovvero i vincoli attivi in $\bar{x}$ sono attivi anche in y e z

lo neghiamo

Se $\exists\, j \in I(\bar{x})$ t.c $\quad a_j^T y < b_j \quad$ o $\quad a_j^T z < b_j$

si avrebbe $\quad a_j^T \bar{x} = a_j^T(\lambda y + (1-\lambda) z) = \lambda a_j^T y + (1-\lambda) a_j^T z < \lambda b + (1-\lambda) b = b$

contraddiciamo che $j \in I(\bar{x})$

Quindi $\bar{x}$, y e z condividono lo stesso insieme di vincoli attivi e questo implica che il sistema lineare

$$A_{I(\bar{x})} = b_{I(\bar{x})}$$

sistema $Ax = b$ rispetto alle righe $i \in I(\bar{x})$

ha 3 soluzioni $\bar{x} \neq y \neq z$

ASSURDO! Poiché contraddiciamo l'indipendenza lineare di a_i, $i \in I(\bar{x})$

COROLLARIO 1:

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ un poliedro

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ha un numero di righe linearmente indipendenti minore di n

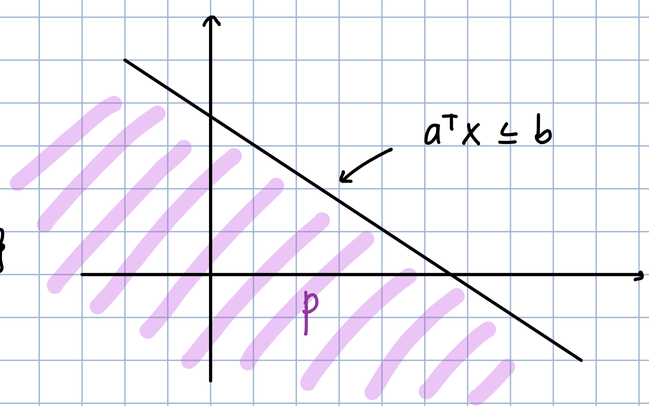
Allora P non ha vertici.

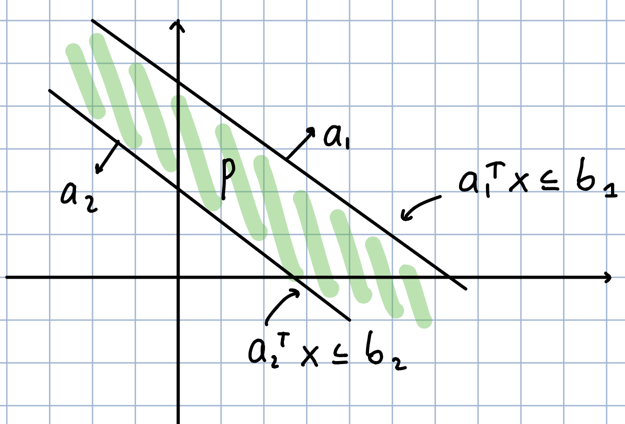
$\Rightarrow$ Quindi in particolare che se $\underbrace{m < n}_{\text{n° righe (m) minore di n}}$ NON POSSO AVERE VERTICI.

es. in $\mathbb{R}^2$

$n = 2$ se $m = 1$

$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid a^T x \leq b\}$





$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} a_1^T x \leq b_1 \\ a_2^T x \leq b_2 \end{matrix} \right\}$$

a_1 e a_2 sono l. indipendenti!

COROLLARIO 2:

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ un poliedro e sia $\bar{x} \in P$

$\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se è soluzione unica del sistema

$$A_{I(x)}\, x = b_{I(\bar{x})}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_i^T x = b_i \qquad i \in I(\bar{x})$$

$\Rightarrow$ per det. i vertici di P è necessario risolvere sistemi $n \times n$ che derivano da $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$

COROLLARIO 3:

Un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ha al più un numero finito di vertici

DIM:

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $b \in \mathbb{R}^m$

- se $m < n \Rightarrow P$ non ha vertici
- se $m > n \Rightarrow P$ ha al più $\binom{m}{n}$ vertici

numero massimo di sottoinsiemi distinti di n righe a_i, $i = 1, \dots, m$

DEF:

Si dice che un poliedro P contiene una retta se $\exists\ \bar{x} \in P$ e un vettore $d \in \mathbb{R}^n$ non nullo t.c. $\bar{x} + \alpha d \in P \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

TEOREMA:

Sia $P \neq \emptyset$ un poliedro

P possiede almeno un vertice SE e solo se P non contiene rette.

DETERMINAZIONE DI VERTICI DI UN POLIEDRO:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq b_i \; ; \; i = 1, \dots, m\}$$

- se $m < n$ P non ha vertici
- Altrimenti

1) formare gli $\binom{m}{n}$ sistemi lineari

$$a_i^T x = b_i \quad i \in I \qquad I \subseteq \{1, \dots, m\}, \; |I| = n$$

2) Per i sistemi con $a_i \; ; \; i \in I$ linearmente indipendenti,

determinare la soluzione $\bar{x}$: $a_i^T \bar{x} = b_i$, $i \in I$

3) Verificare $\bar{x} \in P$