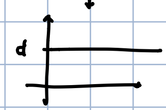
PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE CONCAVA

$\min f(x)$	$\max f(x)$
$x \in F$	$x \in F$
$F \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso	$F \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso
$f: F \to \mathbb{R}$ concava	$f: F \to \mathbb{R}$ convessa

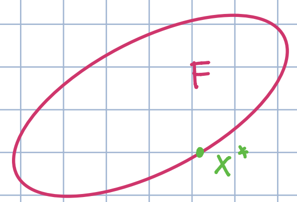
è molto complesso det. minimi locali poiché ce ne sono molti, ma usiamo comunque a dim. un risultato.

TEOREMA

Sia $F \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e sia $f: F \to \mathbb{R}$ concava e NON COSTANTE $(f(x) \neq d)$ senno' viene vista sia concava che convessa perché lineare



Allora se $\exists$ un punto di minimo globale di f su F questo appartiene alla frontiera di F.



esempio: $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 < 1\}$

$\partial F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1\}$

DIMOSTRAZIONE: (registrazione)

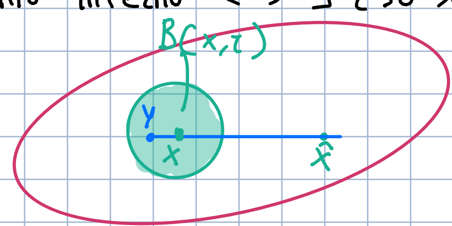
Sia $x^* \in F$ la soluzione ottima di $\min_{x \in F} f(x)$

$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in F$

Vogliamo dimostrare che $x^* \in \partial F$. ← verifichiamo che $f(x^*) < f(x) \ \forall x \in F$ interno

$$\left.\begin{array}{l} f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in F \\ f \text{ è NON COSTANTE} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \hat{x} \in F \text{ t.c } f(x^*) < f(\hat{x})$$

Consideriamo $x \in F$ punto interno $\Leftrightarrow \exists\, r > 0$ t.c $B(x,r) \subseteq F$



Dato che F è convesso, poiché x è punto interno

$\exists\, y \neq x,\ y \in B(x,r)$ t.c $x \in [y, \hat{x}] \subseteq F$

Quindi in particolare $x = \alpha y + (1-\alpha)\hat{x}$ per qualche $\alpha \in (0,1)$

Usiamo la concavità di f

$$f(x) = f(\alpha y + (1-\alpha)\hat{x}) \ge \underbrace{\alpha}_{>0}\,\underbrace{f(y)}_{\ge f(x^*)} + \underbrace{(1-\alpha)}_{>0}\,\underbrace{f(\hat{x})}_{> f(x^*)} > f(x^*)$$

$f(y) \ge f(x^*)$

$f(\hat{x}) > f(x^*)$

Quindi $f(x) > f(x^*)$ qualunque sia $x \in F$ interno.

Pertanto non può esistere una soluzione ottima di $\min_{x \in F} f(x)$ (f concava non costante, F convesso) che sia punto interno di F.

esempio: PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$\min \; c^T x$ ← sia concava che convessa

$$\underbrace{F}_{\text{convessa}} = \begin{cases} a_i^T x \le b_i & i = 1, \dots, m \\ a_j^T x = b_j & j = 1, \dots, p \end{cases}$$

/

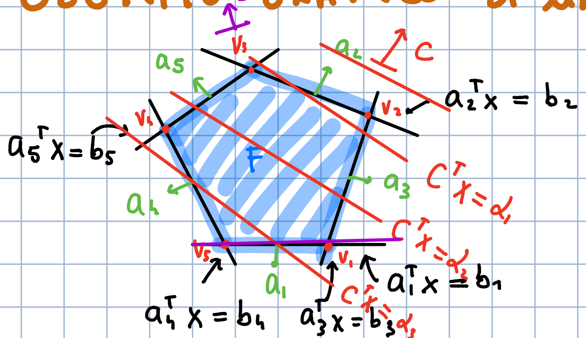
$\max \; c^T x$

$$F = \begin{cases} a_i^T x \le b_i \\ a_j^T x = b_j \end{cases}$$

Quindi a seconda di come guardo il problema i p. lineari possono sia essere concavi che convessi. Quindi ereditano tutte le proprietà

- convessa → minimo locale = minimo globale, KKT c. suff.
- concava → il minimo si trova sulla frontiera

ESEMPIO GRAFICO DI UN PROBLEMA DI PL IN $\mathbb{R}^2$



$\min \; c^T x$

$a_i^T x \le b_i$

$i = 1, \dots, 5$

$g_i(x) \le 0$

$g_i(x) = a_i^T x - b_i$

$f(x) = c^T x$

$\nabla f(x) = c$

In questo caso stiamo trattando la f. concava visto che gli ottimi sono nella frontiera

$\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$

V_5 è il punto di minimo globale se c è orientato in quel modo

il segmento da V_1 a V_5 è il minimo del problema per $\tilde{c}$

ALGORITMI PER PROBLEMI CON INSIEME AMMISSIBILE CONVESSO

$\min f(x)$
$x \in F$
F convesso
$f \in C^1(\mathbb{R}^n)$

PROP:

Sia $F \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e sia $\bar{x} \in F$

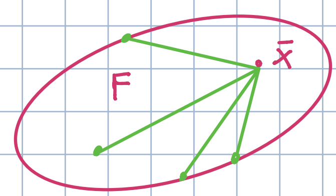
Allora $\forall x \in F$, $x \neq \bar{x}$

la direzione $d = x - \bar{x}$ e' una direzione ammissibile per F in $\bar{x}$

$\uparrow$

d e' t.c $\exists \delta > 0$ per cui

$\bar{x} + \alpha d \in F \quad \forall \alpha \in (0, \delta)$



mi riesco a muovere in ogni direzione visto che F e' convessa.

$$\bar{x} + \alpha d = \bar{x} + \alpha(x - \bar{x}) = \bar{x} + \alpha x - \alpha \bar{x} = \alpha x + (1-\alpha)\bar{x} \in F$$

PROP: (condizioni necessarie di ottimalita')

$\min f(x)$
$x \in F$

Sia $F \subseteq \mathbb{R}^n$, convesso

Sia $x^* \in F$ sia minimo locale di f su F, con $f \in C^1(F)$

Allora

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in F$$

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo per assurdo $\exists\ \hat{x} \in F$ t.c

$$\nabla f(x^*)^T (\hat{x} - x^*) < 0$$

$d = \hat{x} - x^*$ e' una direzione ammissibile per F in x^*

$$\nabla f(x^*)^T (\hat{x} - x^*) < 0 \iff \nabla f(x^*)^T d < 0 \implies d \text{ e' una direzione di discesa}$$

Arriviamo a contraddire che x^* e' punto di minimo poiche' abbiamo definito una direzione ammissibile di discesa

$\Downarrow$

$\exists \delta > 0$ t.c $f(x^* + \delta d) < f(x^*)$ ASSURDO $\blacksquare$

Esercizio 4. *Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata in $\mathbb{R}^2$:*

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ & -20x_1 + 5x_2 + 16 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad g_1(x) \leq 0 \\ & \|x\|_2^2 - 3 \leq 0. \quad \leftrightarrow \quad g_2(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Verificare che si tratta di un problema di programmazione convessa e dimostrare che i punti di massimo locale coincidono con i punti di massimo globale.

- $F = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) \leq 0, \; g_2(x) \leq 0 \}$ e' convesso

$g_1(x) = 20x_1 - 5x_2 - 16 \longrightarrow$ e' una f. lineare $\Rightarrow$ convessa

$g_2(x) = \underbrace{\|x\|_2^2}_{\nabla^2 g_2(x) \text{ def. positiva}} - 3 \longrightarrow$ e' una funzione convessa

F e' convesso perche' intersezione di convessi.

$f(x) = x_2$ e' convessa ? si perche' e' lineare $f(x) = c^T x$ con $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ il mio prob. e' un prob. di ottimizzazione convessa $\Rightarrow$ i minimi locali coincidono con quelli globali

Esercizio 5. dalle dispense del Prof. Locatelli - corso di "Ricerca Operativa"
L'acciaieria PLASTIK deve evadere un ordine di 1000 tonnellate di acciaio INOX. Per questa produzione servono manganese (almeno l'1% in peso), cromo (almeno il 18%) e molibdeno (almeno il 2%). Per esigenze di mercato, i fornitori di metalli non ferrosi vendono questi prodotti in tre tipi di confezioni differenti. La prima confezione contiene 2 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 10 euro. La seconda confezione contiene 2 Kg. di manganese, 3 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 15 euro. La terza confezione contiene 1 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 5 Kg. di molibdeno e costa 20 euro. Formulare il modello di Programmazione Lineare per minimizzare il costo di acquisto delle confezioni.

Variabili : x_1, x_2, x_3 (# confezioni di tipo 1,2,3 acquistate)

f.o min $10x_1 + 15x_2 + 20x_3$

peso

Vincoli

$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10\,000$ ← 1% peso — manganese

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 18\,000$ ← 18% — cromo

$x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 20\,000$ ← 2% peso — molibdeno

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \; ; \; x_i \in \mathbb{Z} \quad i = 1,2,3$