METODO DEL SIMPLESSO - CALCOLO DELLA NUOVA SBA

$$(PL)\quad \begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ad ogni iterazione a partire da una SBA $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$ $\quad \bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0_m \quad \bar{x}_N = 0_{n-m}$

il metodo del simplesso

1) Verifica se e' soddisfatto il CRITERIO DI OTTIMALITA'

se $\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m}$

allora $\bar{x}$ e' punto di ottimo globale di (PL)

2) Verifica se e' soddisfatto il CRITERIO DI ILLIMITATEZZA

Se $\exists\ i \in \{j_1, \dots, j_{n-m}\} = I_N$ tale che

- $\gamma_i < 0$
- $(B^{-1}N)_i \leq 0$

allora il mio problema (PL) e' illimitato inferiormente

Altrimenti

... viene generata una nuova soluzione ammissibile

$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$ SBA

tale che

$\forall\ h \in I_N$ tale che $\gamma_h < 0$

l'insieme $\{k \in I_B \mid (B^{-1}N)_{kh} > 0\} \neq \emptyset$

sono nella situazione in cui ne' il criterio di ottimalita' ne' il criterio di illimitatezza sono soddisfatti

$\exists$ almeno una componente della colonna h-esima della matrice $B^{-1}N$ che e' POSITIVA!

TEOREMA (scelta indice h - di direzione di discesa)

Sia B una matrice di base ammissibile per A.

Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ la SBA associata a B

Sia γ il vettore dei costi ridotti

Sia $h \in I_N$ t.c. $\gamma_h < 0$

allora $c^T x(\rho) \leq c^T x$

dove
$$x(\rho) = \begin{cases} x_B(\rho) = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{x}_B} - \rho (B^{-1}N)\underbrace{e_h}_{\in \mathbb{R}^{n-m}} \\ x_N(\rho) = \rho\, e_h \end{cases}$$

$$x(\rho) = \bar{x} + e^d \quad \text{con } d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B^{-1}N)e_h \\ e_h \end{pmatrix}$$

DIM:

$$c^T x(\rho) = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x_B(\rho) \\ x_N(\rho) \end{pmatrix} = c_B^T x_B(\rho) + c_N^T x_N(\rho) =$$

$$= c_B^T B^{-1} b + \rho \Big(\underbrace{c_N - (B^{-1}N)^T c_B}_{\gamma}\Big)^T e_h =$$

$$= \underbrace{c_B^T B^{-1} b}_{\substack{= c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N \\ = c^T \bar{x}_N}} + \rho \cdot \gamma^T e_h = c^T x + \underbrace{\rho}_{\geq 0} \underbrace{\gamma_h}_{< 0} < c^T x \qquad \blacksquare$$

→ Quindi se $\bar{x}$ non soddisfa il criterio di ottimalità, riusciamo a definire una direzione di discesa partendo da $h \in I_N$

TEOREMA - scelta dell'indice k

Sia B una matrice di base ammissibile di A, $\bar{x}$ la SBA associata.

Sia γ il vettore dei costi ridotti.

Sia $h \in I_N$ t.c $\gamma_h < 0$

e sia $\bar{\rho} \geq 0$ definito come

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(B^{-1}N)_{kh}} = \min_{\substack{i \in I_B \\ (B^{-1}N)_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ih}} \right\}$$

Allora i punti
$$x(\rho) = \begin{cases} x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho(B^{-1}N)e_h \\ x_N(\rho) = \rho e_h \end{cases}$$

con $\rho \in [0, \bar{\rho}]$ sono ammissibili per (PL)

DIM:

Supponendo che per $\bar{x}$ non sia verificato né il criterio di ottimalità

né il criterio di illimitatezza il valore $\bar{\rho}$ è ben definito

$$\Downarrow$$

$\exists\ i \in I_B$ t.c $(B^{-1}N)_{ih} > 0$

Verifichiamo che

$Ax(\rho) = b$ (ammissibilità rispetto ai vincoli di uguaglianza)

$$(B\ \ N)\begin{pmatrix} x_B(\rho) \\ x_N(\rho) \end{pmatrix} = Bx_B(\rho) + Nx_N(\rho) = B(B^{-1}b - \rho(B^{-1}N)e_h) + N(\rho e_h) =$$

$$= \overbrace{BB^{-1}}^{I}b - \rho \overbrace{BB^{-1}}^{I}Ne_h + \rho Ne_h =$$

$$= b - \rho Ne_h + e Ne_h = b$$

Verifichiamo l'ammissibilità rispetto ai vincoli di non negatività:

Verifichiamo che $x(\rho) \geq 0 \quad \forall \rho \in [0, \bar{\rho}]$

$$x_N(\rho) = \rho e_h = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow h\text{-esima} \geq 0 \qquad \forall \rho \geq 0$$

h-esima colonna della matrice $(B^{-1}N)$

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho\, \overbrace{(B^{-1}N) e_h} \in \mathbb{R}^m$$

deve valere

$$x_B(\rho)_1 = (B^{-1}b)_1 - \rho (B^{-1}N)_{1h} \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_B(\rho)_m = (B^{-1}b)_m - \rho (B^{-1}N)_{mh} \geq 0$$

Per la generica componente $i \in I_B$ deve valere

poiché $\bar{x}$ SBA

$$\rho (B^{-1}N)_{ih} \leq \underbrace{(B^{-1}b)_i}_{\geq 0} \qquad \forall i \text{ t.c. } (B^{-1}N)_{ih} > 0$$

ovvero

$$\rho \leq \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ih}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho \leq \bar{\rho} = \min_{\substack{i \in I_B \\ (B^{-1}N)_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ih}} \right\} \qquad \blacksquare$$

TEOREMA:

Sia $B = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m})$ matrice di base ammissibile di A

Sia γ il corrispondente vettore dei costi ridotti e sia $h \in I_N$ t.c $\gamma_h < 0$

Sia $\bar{\rho}$ e $k \in I_B$ t.c

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(B^{-1}b)_{kh}} = \min_{\substack{i \in I_B \\ (B^{-1}N)_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ih}} \right\}$$

Allora il punto

$$\tilde{x} = x(\bar{\rho}) = \begin{cases} x_B(\bar{\rho}) = B^{-1}b - \bar{\rho}(B^{-1}N)e_h \\ x_N(\bar{\rho}) = \bar{\rho}\, e_h \end{cases}$$

è una SBA per (PL)

e la matrice di base $\tilde{B}$ associata a $\tilde{x}$ è data da

$$\tilde{B} = (a_{j_1}, a_{j_2} \dots, a_{j_{k-1}}, \underbrace{a_{j_{m+h}}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m})$$

entra in base la colonna (h-esima di A)

INDICE DI FUORI BASE

esce dalla base la colonna k-esima di A.

Esempio:

$$\min \; -3x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6$$

$$x \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $I_{B_1} = \{4,5,6\}$ $\quad I_{N_1} = \{1,2,3\}$ $\quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B_1^{-1} b = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad B_1^{-1} N_1 = N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verifico il CRITERIO DI OTTIMALITÀ

$$\gamma^1 = C_{N^1} - (B_1^{-1} N_1)^T c_{B_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\exists\, h \in I_N$ t.c. $\gamma_h < 0 \Rightarrow x^1$ non è ottimo

tutte e 3 negative

- Allora verifico il CRITERIO DI ILLIMITATEZZA

$$B_1^{-1} N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

le colonne di $(B^{-1}N)_h$ hanno tutte componenti ≥ 0

$\Rightarrow$ il test di illimitatezza fallisce

- Scelgo $h = 1$

$\Rightarrow I_{B_2} = \{4,5,6\} \cup \{1\}$

prima componente di I_N

ma devo escludere una di loro e per farlo scelgo il criterio del rapporto minimo

Per il criterio del rapporto minimo

$$\min_{i \in I_{B_1}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ih}} \right\} = \left\{ \frac{2}{2} ; \frac{5}{1} ; \frac{6}{2} \right\} = \{1, 5, 3\}$$

$k = 1$ realizza il minimo per prima

$$(B_1^{-1} N_1)_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (B_1^{-1} b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Quindi la nuova base sarà data da $I_{B_2} = (\{4,5,6\} \cup \{1\}) \setminus \{4\} = \{1,5,6\}$

La mia nuova SBA sarà data da $\quad x_2^2 = B_2^{-1} b$

$x_N^2 = 0_3$

La mia nuova SBA sarà data da

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x^2 = (1,0,0,0,4,4)^T$$

$$x_B^2 = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x_N^2 = 0_3$$

Se fosse stato $k = 2$

$$I_{B_2} = (\{4,5,6\} \cup \{1\}) \setminus \{5\} = \{4,1,6\}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

prima colonna di A

OSS:

- $\bar{x}$ SBA con B base ammissibile associata

  da $\bar{x}$ si determina una nuova SBA $\tilde{x}$ associata a $\tilde{B}$

  con $\quad c^T \tilde{x} < c^T \bar{x}$

  facendo ENTRARE IN BASE una qualunque variabile alla quale è associato un costo ridotto negativo

  e facendo USCIRE DALLA BASE una variabile scelta con il criterio del rapporto

  $$I_{\tilde{B}} = (I_B \setminus \{k\}) \cup \{h\}$$

- se $\displaystyle k = \min_{\substack{i \in I_B \\ (B^{-1}N)_{ih} > 0}} \left(\frac{(B^{-1}b)}{(B^{-1}N)_{ih}} \right)$ non è univocamente definito si può far uscire dalla base una qualunque delle variabili che realizzano il minimo

$\longrightarrow$ e' il caso di SBA degenere:

la nuova SBA $\tilde{x}$ e' degenere e sono nulle tutte le componenti in base per cui si e' raggiunto il minimo

- $\bar{\rho} = 0 \iff \exists\, k \in I_B$ t.c. $(B^{-1}b)_k = 0$

(può accadere solo se $\bar{x}$ e' degenere)