PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE - IL METODO DEL SIMPLESSO

$$(P) \quad \begin{array}{l} \min \ c^T x \\ Ax \le b \end{array}$$

- $\bar{x}$ è vertice di $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ $\iff$ $\bar{x}$ soddisfa all'uguaglianza n vincoli linearmente indipendenti

- Supponendo che il poliedro P non contenga rette, si può avere:
  i) $P = \emptyset$
  ii) (P) è illimitato inferiormente
  iii) $\exists\ \bar{x}$ vertice di P ottimo globale di (PL)

Il M.S esplora i vertici in modo intelligente (in modo da non controllarne uno per uno)

Il metodo del simplesso (Dantzig 1947) [ancora molto usato nei pacchetti software: CPLEX GUROBI (IBM)]
visita i vertici del poliedro P in "modo intelligente".

Per farlo occorre scrivere il problema di PL in FORMA STANDARD

ovvero nella forma $\min\ c^T x$

$Ax = b$] ← solo vincoli di uguaglianza

$x \ge 0$] ← ad esclusione dei vincoli di non negatività ($x_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, n$)

Perché scrivere un problema di PL in forma standard:

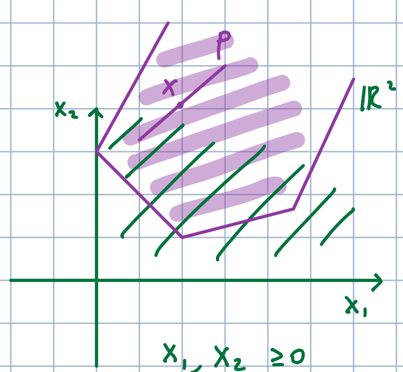
1) $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \ ; x \ge 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \ge 0\}$

↑ il poliedro P è contenuto nell'ortante positivo

⚠ (può ammettere semirette MA non rette)

$\Rightarrow$ P non contiene rette

$\forall x \in P \quad \nexists\ d \ \text{t.c.} \ x + \alpha d \in P \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$



... possiamo applicare il Teorema fondamentale della PL

2) Possiamo caratterizzare i vertici di P in modo particolare.

REGOLE PER LA SCRITTURA IN FORMA STANDARD

* $\max c^T x = - \min - c^T x$

Per scrivere disuguaglianze come uguaglianze

* $a^T x \leq b \iff a^T x + z = b$, $z \geq 0$ — z variabile di slack

* $a^T x \geq b \iff a^T x - y = b$, $y \geq 0$ — y variabile di surplus

trasf. di variabili libere in variabili ≥ 0

* $x \in \mathbb{R} \iff x = z - y$ con $z \geq 0$, $y \geq 0$

Esempi:

$\max \; 3x_1 - 2x_2$

$x_1 - x_3 \geq 3$ ← x_4 var surplus

$x_2 + x_3 \leq 2$ ← x_5 var slack

$x_1 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$ $\quad x_6, x_7 \geq 0$ t.c. $x_2 = x_6 - x_7$

$-\min \; -3x_1 + 2(x_6 - x_7)$

$x_1 - x_3 - x_4 = 3$

$x_6 - x_7 + x_3 + x_5 = 2$

$x_1 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0, \; x_5 \geq 0, \; x_6 \geq 0, \; x_7 \geq 0$

Esempio:

$$\min \; x_1 + x_2$$

$x_1 - x_2 \le 0$ ← x_3 var. slack

$x_1 \ge 1$ ← x_4 var. surplus

$x_1 \in \mathbb{R}$ ↤ $x_1 = x_5 - x_6$ $\quad x_5, x_6 \ge 0$

$x_2 \in \mathbb{R}$ ↤ $x_2 = x_7 - x_8$ $\quad x_7, x_8 \ge 0$

↓

$$\min \; x_5 - x_6 + x_7 - x_8$$

$$x_5 - x_6 - x_7 + x_8 + x_3 = 0$$

$$x_5 - x_6 - x_4 = 1$$

$$x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \ge 0$$

TEOREMA:

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b;\ x \ge 0\}$ un poliedro, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $b \in \mathbb{R}^m$.

Supponiamo P non vuoto e che rank (A) = m

Allora $\bar{x} \in P$ e' un vertice di P se e solo se le colonne di A relative alle componenti positive di $\bar{x}$ sono linearmente indipendenti.

Es:

Sia $P = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{array};\quad x \ge 0 \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -2 & \boxed{2} & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

↑ 3ª colonna

• $(0, 0, 1, 0)$ e' un vertice di P ?

e' sicuramente vertice poiche' una sola colonna e' L.I

- $(1,0,0,1)$ e' un vertice di P? $\times$ sostituendo nei vincoli e' ammissibile ✓

$\times$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e' L.I $\Rightarrow$ e' vertice

- $(2,1,0,2)$

$\times$ e' ammissibile

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ rk A non e' max

$\Rightarrow$ non sono L.I

DIM:

Supponiamo di scrivere ogni uguaglianza $a_i^T x = b_i$ $i = 1, \dots, m$ equivalentemente come due disuguaglianze:

$$a_i^T x \geq b_i$$
$$-a_i^T x \geq -b_i$$

Quindi scriviamo il poliedro P come

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{A}x \geq \bar{b}\} \quad \text{dove } \bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

vettore ad n componenti tutte nulle

Sia $\bar{x} \in P$, $\bar{x}$ e' vertice di P $\Rightarrow$ $A\bar{x} = b$ quindi soddisfa all'uguaglianza le prime $2m$ disuguaglianze del sistema $\bar{A}x \geq \bar{b}$

Supponiamo - senza perdita di generalità - che le prime r variabili di $\bar{x}$ siano positive:

$$\bar{x}_i > 0 \quad i = 1, \dots, r$$
$$\bar{x}_i = 0 \quad i = r+1, \dots, n$$

Quindi:

$$A\bar{x} = b$$
$$-A\bar{x} = -b$$
$$\bar{x}_i = 0 \qquad i = r+1, \dots, n$$

ovvero $\bar{x}$ soddisfa all'uguaglianza $2m + (n-r)$ disuguaglianze del sistema $\bar{A}x \geq \bar{b}$

Per il teorema sulla caratterizzazione dei vertici $\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se tra le righe di $\bar{A}x \geq \bar{b}$ soddisfatte all'uguaglianza ne esistono n linearmente indipendenti.

Ovvero

$$\bar{x} \text{ è un vertice di } P \iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ -A \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = n$$

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-esima componente}$$

$$\iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \\ O_{(n-r)\times r} & I_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

prima colonna di A

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r & a_{r+1} & \dots & a_n \\ & & O_{(n-r)\times r} & & & & I_{(n-r)\times(n-r)} & \end{pmatrix}$$

e_{r+1}
$\vdots$
e_n

$$\begin{pmatrix} a_1 \dots a_r & a_{r+1} \dots a_n \\ O_{n-r} & I_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

$y \in \mathbb{R}^r$, $z \in \mathbb{R}^{n-r}$

questa matrice ha rank $= n$ $\iff$ il sistema (1) ha come soluzioni
$y = 0$
$z = 0_{n-r}$

Ovvero il sistema

$$\begin{cases} (a_1 \dots a_r)\, y + (a_{r+1} \dots a_n)^T z = 0 \\ \boxed{z = 0} \end{cases}$$

ha come soluzione

$y = 0_r \qquad z = 0_{n-r}$

Ovvero

$$(a_1 \dots a_r)\, y = 0 \iff y = 0$$

quindi le colonne $\underbrace{a_1, a_2 \dots, a_r \text{ di } A}_{\text{le colonne relative alle componenti positive di } \bar{x}}$ sono L.I ■

COROLLARIO:

Sia $\bar{x} \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \;;\; x \geq 0\}$

Se $\bar{x}$ è un vertice di P allora almeno $n-m$ componenti di $\bar{x}$ sono nulle.

DIM:

Il poliedro P può essere scritto attraverso una matrice di $m+n$ righe

$$\begin{pmatrix} A \\ I_{n \times n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times n}$$

Le prime m righe sono soddisfatte all'uguaglianza.

Affinché $\bar{x}$ sia vertice di P deve soddisfare all'uguaglianza almeno $n-m$ disuguaglianze del tipo $e_j^T \bar{x} \geq 0$ con $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$

Ovvero $\bar{x}$ ha almeno $(n-m)$ componenti nulle ■

Esempio:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{aligned} &3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 6 \\ &2x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 5 \\ &-x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = 7 \end{aligned} \quad ; \; x \geq 0 \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = (2,1,1,1,0,0)^T$

- $\bar{x}$ e' ammissibile? si
- $\bar{x}$ e' un vertice di P?

$n = 6$

$m = 3$

$n - m = 3$

NO perche' ha un numero di componenti positive $> n-m$

Esempio:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &x_1 - x_4 = 1 \\ &x \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$(1 \; 0 \; 2 \; 0)^T$, $(3 \; 0 \; 0 \; 2)^T$ sono vertici?

$(1 \; 0 \; 2 \; 0)^T$: e' vertice poiche' ammissibile e $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$(3 \; 0 \; 0 \; 2)^T$: e' vertice perche' ammissibile e $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$

Esercizio 1. *Risolvere graficamente i seguenti problemi di programmazione lineare in* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\begin{array}{llcll} \min & x_1 - 2x_2 & \qquad & \min & 2x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 & & & x_1 - x_2 \geq 3 \\ & 0 \leq x_1 \leq 1 & & & -1 \leq x_1 \leq 1 \\ & x_2 \geq 0 & & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

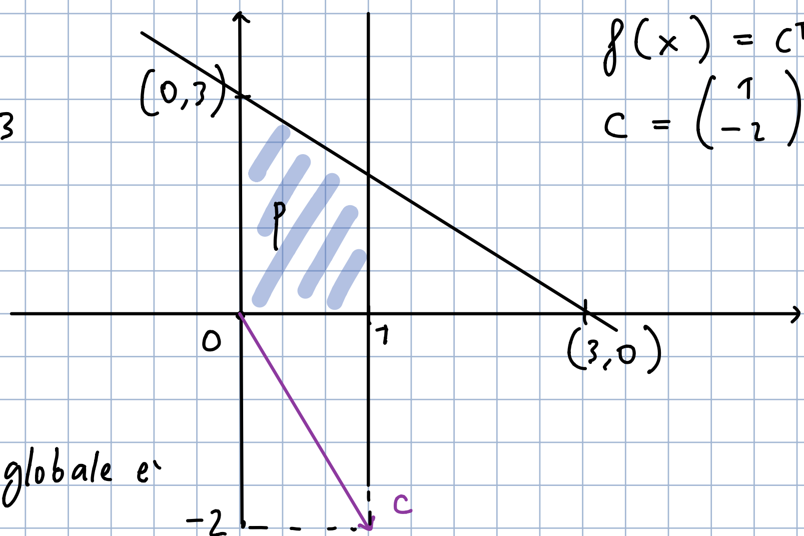
1) $\min \; x_1 - 2x_2$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \leq 1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



$f(x) = c^T x$

$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

il punto di ottimo globale e'

$(0,3)$

2) $\min \; 2x_1 - x_2$

$x_1 - x_2 \geq 3$

$x_1 \leq 1$

$x_1 \geq -1$

$x_2 \geq 0$

$P = \emptyset \implies$ il problema non e' ammissibile