PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE CONVESSA

$$\min f(x) \quad x \in F$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa su F

con F <u>convesso</u>

$$\max f(x) \quad x \in F$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ concava su F

$\forall x, y \in F, \ \forall \alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

$\forall x, y \in F, \ \forall \alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \ge \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

PROP:

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso. $f: F \to \mathbb{R}$ convessa (strettamente convessa)

Allora ogni punto di minimo locale di f su F e' anche un punto di minimo globale.

(Allora anche il punto di minimo locale di f su F e' anche di minimo globale)

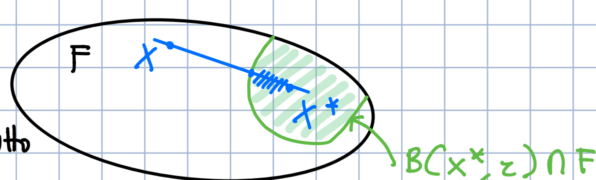
DIM:

Sia $x^* \in F$ un punto di minimo locale di f su F — def. min. loc.

$\exists\, r > 0$ t.c. $f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in B(x^*, r) \cap F$

Vogliamo dimostrare che $f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in F$ — def. min glob

Sia $x \in F$; $x \ne x^*$



essendo F convesso, il seg. $\overline{xx^*}$ e' tutto contenuto in F e

$$z(\alpha) = \alpha x + (1-\alpha) x^* \quad \text{con } \alpha \in [0,1]$$

rappresenta il generico punto appartenente al segmento chiuso x e x^*

F convesso $\Rightarrow z(\alpha) \in F \quad \forall \alpha \in [0,1]$

per $\alpha = 0$ $z(0) = x^*$ per $\alpha = 1$ $z(1) = x$

Esistenza $\bar{\alpha} > 0$, $\bar{\alpha} \in [0,1]$ t.c $z(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} x + (1-\bar{\alpha})x^* \in B(x^*, \varepsilon) \cap F$

In particolare $f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f(\bar{\alpha} x + (1-\bar{\alpha})x^*)$

perche' f e' convessa

$$\leq \bar{\alpha} f(x) + (1-\bar{\alpha}) f(x^*) = \bar{\alpha} f(x) + f(x^*) - \bar{\alpha} f(x^*)$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq \bar{\alpha}(f(x) - f(x^*))$$

dato che $\bar{\alpha} > 0$ possiamo dividere per $\bar{\alpha}$ e otteniamo $f(x^*) \leq f(x)$

e quindi x^* e' punto di minimo globale di f su F. ∎

Se nelle ipotesi della proposizione f e' strettamente convessa la dimostrazione si concluderebbe come:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f(\bar{\alpha} x + (1-\bar{\alpha})x^*)$$

f strett. convessa

$$< \bar{\alpha} f(x) + (1-\bar{\alpha}) f(x^*)$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \bar{\alpha}(f(x) - f(x^*))$$

$$f(x^*) < f(x) \quad \forall x \in F,\ x \neq x^*$$

Quindi x^* e' l'unico minimo globale di f su F. ∎

PROP:

$\min f(x)$ con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa (strettamente), $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$x \in \mathbb{R}^n$

Allora un punto stazionario di f su F e' un (il) minimo globale di f su F.

DIM:

Sia $x^* \in F$ punto stazionario $\Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^1(\mathbb{R}^n) \\ f \text{ e' convessa} \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(x) \overset{>}{\geq} f(x^*) + \cancel{\underbrace{\nabla f(x^*)}_{=0}}^T(x - x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \neq x^*$$

$$f(x^*) \overset{<}{\leq} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad ∎ \quad x \neq x^*$$

PROP:

Sia $F = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \ ; \ h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, p \}$

con $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ convessa $i = 1, \dots, m$

$h_j = a_j^T x - b_j$ ← vincoli di uguaglianza lineari $j = 1, \dots, m$

Sia $f : F \to \mathbb{R}$ convessa e $C^1(F)$

Allora se x^* e' un punto di KKT per (P) $\min_{x \in F} f(x)$

x^* e' punto di minimo globale di f su F

le condizioni di KKT sono suff. per l'ott. globale

DIM:

- Dimostriamo che F e' convesso:

dati $\bar{x}, \hat{x} \in F$ allora $[\bar{x}, \hat{x}] \subseteq F$

ovvero $\alpha \bar{x} + (1-\alpha)\hat{x} \in F \quad \forall \alpha \in [0,1]$

$\Updownarrow$

$g_i(\bar{x}) \leq 0$

$g_i(\hat{x}) \leq 0$ $\quad i = 1, \dots, m$

$h_j(\bar{x}) = 0$

$h_j(\hat{x}) = 0$ $\quad j = 1, \dots, p$

Sia $y = \alpha \bar{x} + (1-\alpha)\hat{x}$

$$g_i(y) = g_i(\alpha \bar{x} + (1-\alpha)\hat{x}) \leq \alpha \underbrace{g_i(\bar{x})}_{\leq 0} + (1-\alpha) \underbrace{g_i(\hat{x})}_{\leq 0} \leq 0$$

$$h_j(y) = h_j(\alpha \bar{x} + (1-\alpha)\hat{x}) = \alpha \underbrace{h_j(\bar{x})}_{=0} + (1-\alpha) \underbrace{h_j(\hat{x})}_{=0} = 0$$

poiche' h_j e' lineare

F e' convesso $\Longleftarrow$

- Supponiamo che (x^*, λ^*, μ^*) KKT $\Rightarrow$ x^* e' minimo globale per (P)

- $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h(x^*) = 0$
- $\lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$
- $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m$

$\Rightarrow f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in F$

Sia $x \in F \Rightarrow g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \Rightarrow \underbrace{\lambda_i^*}_{\geq 0} g_i(x) \leq 0$

$$f(x) \geq f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x)}_{\leq 0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(x)}_{= 0}$$

aggiungo a $f(x)$ termini non positivi

Dalla convessità di f e di g_i $\quad i = 1, \dots, m$; $f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$

dalla linearità di h_j $\quad j = 1, \dots, p$

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*)$$

$$g_i(x) \geq g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*) \qquad i = 1, \dots, m$$

$$h_j(x) = a_j^T x - b_j = a_j^T (x - x^*) \qquad j = 1, \dots, p$$

Minoriamo ulteriormente l'espressione:

$h_j(x) = a_j^T x - b_j$

$\nabla h_j(x) = a_j^T$

$$f(x) \geq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(x)$$

$$\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \left(g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*) \right) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j a_j^T (x - x^*)$$

$$= f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) + \left(\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \underbrace{\nabla h_j(x^*)}_{= a_j} \right)^T (x - x^*)$$

quindi

$$f(x) \geq f(x^*) + \overbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)}^{=0} + \Big(\underbrace{\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*)}_{=0} \Big)^T (x - x^*)$$

poiché (x^*, λ^*, μ^*) è KKT $\qquad \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$

e $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m$

Quindi abbiamo dimostrato che

$\forall x \in F \qquad f(x) \geq f(x^*)$

ovvero x^* è il minimo globale di f su F ■

SCHEMA SUI RISULTATI TEORICI PER PROB. DI PROGRAMMAZIONE CONVESSA

- x^* minimo locale $\iff$ x^* minimo globale

- $F = \mathbb{R}^n$

  x^* punto stazionario $\nabla f(x^*) = 0$ $\Rightarrow$ x^* minimo globale

  $\Leftarrow$ condizione necessaria

- $F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0 \\ h_j(x) = 0 \end{array} \right\}$

  $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ convesse

  h_j lineari

  x^* KKT $\Rightarrow$ x^* minimo globale

  $\Leftarrow$ solo se valgono condizioni di regolarità

$$\min f(x)$$
$$x \in F$$

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso

f convessa

oppure

$$\max f(x)$$
$$x \in F$$

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso

f concava