METODO DEL SIMPLESSO - CONVERGENZA

$$(PL) \quad \begin{array}{l} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\ ;\ x \geq 0\}$$

$\boxed{\text{supponiamo che } P \neq \emptyset \text{ e che } \operatorname{rank}(A) = m}$

- $P \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\} \implies P$ non contiene rette

PER ASSURDO

$\iff x \in P\ ;\ d \neq 0_n$ t.c $\underbrace{x + \lambda d \in P \ \forall \lambda \in \mathbb{R}}_{\text{non può essere vero perché } x \geq 0}$

$\Downarrow$

Dal teo f. della PL

- (PL) è illimitato inferiormente
- $\exists$ un [vertice di P] punto di ottimo globale di (PL)

$\leftrightarrow$ SBA

TEOREMA:

Se nell'applicazione del metodo del simplesso non viene mai generata due volte la stessa base (cioè nessuna base si ripete nella successione di basi prodotte dal metodo) allora

$\exists\ t \geq 1$ (indice) t.c la base B_t nella successione prodotta dal metodo del simplesso soddisfa il criterio di ottimalità oppure quello di illimitatezza.

... NB il metodo del simplesso può ciclare in presenza di SBA degeneri

poiché potrebbero essere prodotte come basi ammissibili

$B_1, B_2, \dots, B_q$ con $B_q = B_1$, con ogni B_i associate alla stessa SBA

COROLLARIO:

Se ogni SBA di (PL) è non degenere, allora in un numero finito di passi, il metodo del simplesso converge ad una SBA ottima oppure conclude che il problema è illimitato inferiormente.

REGOLA ANTICICLAGGIO DI BLAND

Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad entrare in base si sceglie quella con indice h più piccolo.

Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad uscire dalla base si sceglie quella con indice k più piccolo.

TEOREMA:

Il metodo del simplesso con la regola di Bland converge in un numero finito di passi.

Ovvero $\exists\ t \geq 1$ t.c la base B_t produce una SBA per la quale è soddisfatto il criterio di illimitatezza.

senza Bland il metodo del simpl. genera una seq. infinita.

SCHEMA SUI RISULTATI DI CONVERGENZA DEGLI ALGORITMI (visti nel corso)

PROBLEMA	ALGORITMO	RISULTATO DI CONVERGENZA
(P) $\min f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ci conviene se $f(x)$ è coerciva	METODO DEL GRADIENTE	Supponendo $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{L}(f(x_0)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x^0)\}$ Ogni punto di accumulazione di $\{x^k\}$ è punto stazionario per (P)
(P) $\min f(x)$ $g(x) \leq 0$ $h(x) = 0$	METODO DELLE PENALITÀ SEQUENZIALI $f, g, h \in C^1$	$\bar{x}$ punto di accumulazione di $\{x^k\}$, soddisfa la condizione (1) allora $\bar{x}$ è un punto KKT
(P) $\min f(x)$ $x \in C$ C convesso	METODO DI FRANK-WOLFE	Ogni punto di accumulazione x^* di $\{x^k\}$ è t.c. $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$
(PL) $\min c^T x$ $Ax = b$ $x \geq 0$	METODO DEL SIMPLESSO	Supponendo di usare la regola di bland e $P \neq \emptyset$, $\operatorname{rank}(A) = m$ termina in un numero finito di passi.

(1) non esistono $\alpha_i \geq 0$, $i \in \tilde{I}(\bar{x})$, β_j NON TUTTI NULLI

t.c. $\sum \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum \beta_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$ $\qquad \tilde{I}(x) = \{i \mid g_i(\bar{x}) \geq 0\}$

FASE I DEL METODO DEL SIMPLESSO

Facciamo la seguente assunzione:

il vettore $b \in \mathbb{R}^m$ dei termini noti dei vincoli è t.c $b \geq 0_m$

(se si ha un indice i t.c $b_i < 0$ si sostituisce il vincolo $a_i^T x = b_i$

con $-a_i^T x = -b_i$)

Per arrivare a definire una SBA di partenza avendo $b \geq 0_m$

si può "forzare" la matrice A a possedere come colonne gli m vettori

della base canonica introducendo delle $\boxed{\text{variabili artificiali.}}$

Dato il problema in forma standard

$$\min \; c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$(b \geq 0_m)$

Introduciamo le variabili $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ e

definiamo il seguente problema di PL:

$$\min \quad c^T x + M \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \qquad = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$
$$Ax + I_m \alpha = b \qquad (PL_\alpha)$$
$$x \geq 0_n$$
$$\alpha \geq 0_m$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ M \\ M \\ \vdots \\ M \end{pmatrix}$$

(PL) $\qquad$ (PL_α)

(PL_α) ha $n+m$ variabili!!

(PL_α) è un problema di programmazione lineare che si può risolvere applicando

la FASE II del metodo del simplesso partendo dalla SBA

$(x, \alpha) = (0, b)$ ottenuta a partire dalla

base ammissibile $B = I_m$

$\downarrow$

$N = A$

N.B Il poliedro $\{Ax + I_m \alpha = b \; ; \; x \geq 0 \, , \, \alpha \geq 0\} \neq \emptyset$ (e' non vuoto)

$rg((A \; I_m)) = m \longleftarrow$ ho verificate le assunzioni per la convergenza del metodo del simplesso

TEOREMA :

Se $\exists \, \bar{M} \in \mathbb{R}$ t.c $\forall M \geq \bar{M}$

- (PL_α) ammette soluzione ottima (x^*, α^*)

  allora :

  i) se $\alpha^* = 0_m$ $\quad x^*$ e' SBA ottima per (PL)

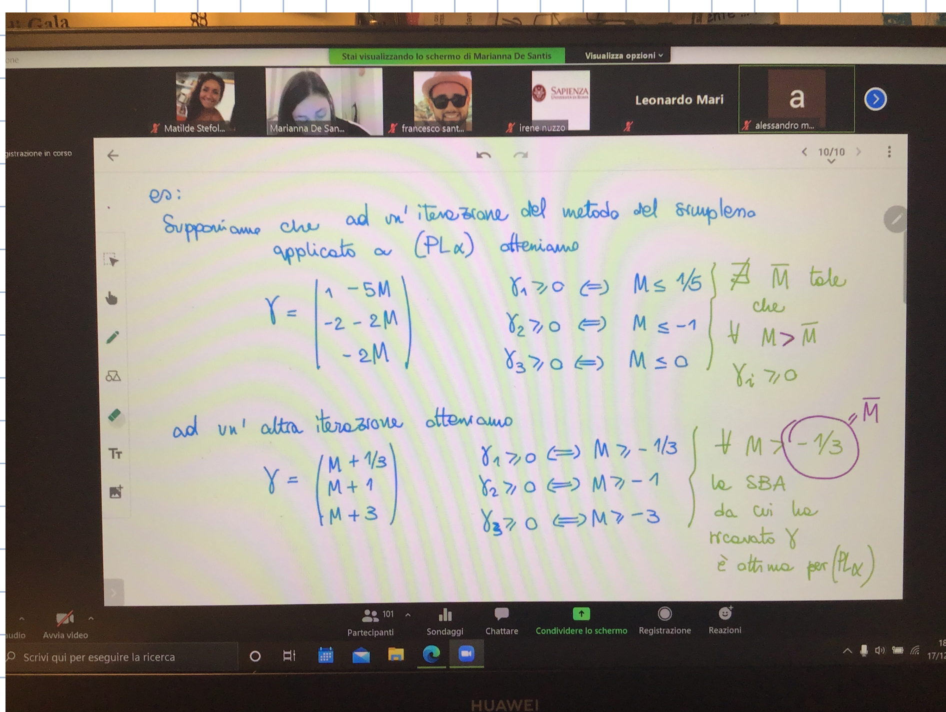
  ii) se $\alpha^* \neq 0_m$ $\quad (PL)$ e' non ammissibile

- (PL_α) e' illimitato inferiormente

  allora

  (PL) e' illimitato inferiormente o non ammissibile

(Da non usare le v. artificiali all'esame)



Completiamo l'esercizio di 16/12/2020

- $I_{B_2} = \{4, 1, 6\}$ $\quad I_{N_2} = \{5, 2, 3\}$ $\quad x^2 = (1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0)^T$

$$B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \qquad B_2^{-1} N_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

non e' verif. il crit. di ottimalità

SECONDA ITERAZIONE

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 9/2 \\ 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -5/2 \\ -7/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ < 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$(B_2^{-1} N_2)_2 \not\leq 0 \qquad (B_2^{-1} N_2)_3 \not\leq 0 \iff$ non e' verificato il criterio di illimitatezza

- Scelgo $h = 3 \longrightarrow x_3$ entra in base

- $\min\limits_{i \in I_B} (B_2^{-1} N_2)_{ih} > 0 \quad \left\{ \frac{2}{11} \cdot 2 \ ; \ \frac{2}{3} \cdot 0 \right\} = 0 \implies k = 3 \longrightarrow x_6$ esce dalla base

Operazione di pivot:

$$M = \left((B^{-1}N)_h \ \middle|\ (B^{-1}N)_1 \dots (B^{-1}N)_{h-1}\ e_k\ (B^{-1}N)_{h+1} \dots (B^{-1}N)_{n-m} \ \middle|\ B^{-1}b \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|cccc|c} 11/2 & -1/2 & 5/2 & 0 & 2 \\ -5/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & 5/2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$(B^{-1}N)_{33}$ e' l'elemento di Pivot

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 11/2 & -1/2 & 5/2 & 0 & 2 \\ -5/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1/3 & 5/3 & 2/3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 4/3 & -20/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & -1/3 & 11/3 & 5/3 & 1 \\ 1 & -1/3 & 5/3 & 2/3 & 0 \end{array} \right)$$

$x^3 = (1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0)^T$

TERZA ITERAZIONE

$$\gamma = c_{N_3} - (B_3^{-1} N_3)^T c_{B_3}$$

$I_{B_3} = \{4, 1, 3\}$

$I_{N_3} = \{5, 2, 6\}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1/3 \\ -20/3 & 11/3 & 5/3 \\ -11/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ -4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 10/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

$x^3 = (1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0)^T$

è SBA ottima!