TEORIA DELLA DUALITÀ - PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\min \; c^T x \qquad \text{(P)} \qquad\qquad \text{(D)} \qquad \max \; b^T \lambda$$

$$A x \geq b \qquad\qquad\qquad\qquad A^T \lambda = c$$

$$\lambda \geq 0$$

Si può verificare che il duale di

$$\min \; c^T x + d^T y$$

variabili duali associate

$$z \dashrightarrow Cx + Dy = h$$

$$v \dashrightarrow Ex + Fy \geq g$$

$$x \geq 0$$

(P) ← PROBLEMA di PL nelle variabili x e y

vincolate in segno ($x \geq 0$) $x \in \mathbb{R}^{n_1}$

variabili libere $y \in \mathbb{R}^{n_2}$

con $C \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$; $D \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$; $h \in \mathbb{R}^{m_1}$

$E \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$; $F \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$; $g \in \mathbb{R}^{m_2}$

Arriviamo a $\max \; h^T z + g^T v$

$$C^T z + E^T v \leq \boxed{c}$$

$$D^T z + F^T v = \boxed{d}$$

$$v \geq 0$$

termini noti di (P) diventano coefficienti di (D)

coefficienti della f.o primale diventano i termini noti nel (D)

z e v sono le variabili del problema duale

z: è libera $z \in \mathbb{R}^{m_1}$

v: è vincolata in segno ($v \geq 0$) $v \in \mathbb{R}^{m_2}$

OSS:

PROBLEMA PRIMALE		PROBLEMA DUALE
# vincoli	=	# variabili
vincolo di uguaglianza		variabile libera ($\in \mathbb{R}$)
vincolo di disuguaglianza $\geq$ / $\leq$		variabile vincolata in segno ≥ 0 / ≤ 0

posso leggere lo schema anche in modo inverso

# variabili	=	# vincoli
variabile libera		vincolo di uguaglianza
variabile vincolata in segno	$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$	vincolo di disuguaglianza $\geq c_j$ $\leq c_j$

Problema primale

$\min \quad c^T x$

$a_i^T x \geq b_i \quad i \in M_1$

$a_i^T x \leq b_i \quad i \in M_2$

$a_i^T x = b_i \quad i \in M_3$

$x_j \geq 0 \quad j \in N_1$

$x_j \leq 0 \quad j \in N_2$

$x_j \in \mathbb{R} \quad j \in N_3$

Problema duale

$\max \quad b^T \lambda$

$\lambda_i \geq 0 \quad i \in M_1$

$\lambda_i \leq 0 \quad i \in M_2$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$

$\lambda^T A_j \leq c_j \quad j \in N_1$

$\lambda^T A_j \geq c_j \quad j \in N_2$

$\lambda^T A_j = c_j \quad j \in N_3$

$M_1, M_2, M_3 \subseteq \{1, \dots, m\}$ $\qquad c \in \mathbb{R}^m$

$N_1, N_2, N_3 \subseteq \{1, \dots, n\}$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; b \in \mathbb{R}^m$

PRIMALE	min	max	DUALE
VINCOLI	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 $\in \mathbb{R}$	VARIABILI
VARIABILI	≥ 0 ≤ 0 $\in \mathbb{R}$	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	VINCOLI

Esempio:

$$\min \quad 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

n (variabili) = 3

m (vincoli) = 2

(P)

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \quad \leftrightarrow \quad a_1^T x \geq b_1$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \quad \leftrightarrow \quad a_2^T x \geq b_2$$

← N.B $x_i = 1, 2, 3$ libera in segno!

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow a_1 \\ \leftarrow a_2 \end{matrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(D)

$$\max \quad b^T \lambda$$

$$A^T \lambda \ ? \ c$$

$$\lambda \geq 0 \ ?$$

$$\lambda \leq 0 \ ?$$

$$\lambda_i \in \mathbb{R} \ ?$$

$\Longrightarrow$ (D)

$$\max \quad 2\lambda_1 + 4\lambda_2$$

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 4$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = -3$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

Esempio:

(P)

$$\min \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$$

$$3x_1 + x_4 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

vincolate $\qquad x_3, x_4$ libere

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}$$

(D)

$$\max \quad 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3$$

$$3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \leq 2$$

poiché $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

$$\lambda_2 + \lambda_2 \leq 2$$

$$-\lambda_2 - 3\lambda_3 = -1$$

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 1$$

x_3, x_4 libere

$$\lambda_1 \geq 0 \qquad \lambda_2 \leq 0 \qquad \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Ex 3 foglio 6

1) $\min \quad -x_1 - x_2$

(P)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(D)
$$\max \quad 12\lambda_1 + 9\lambda_2$$
$$2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -1$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -1$$
$$\lambda_1 \leq 0$$
$$\lambda_2 \leq 0$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

poiche' tutte le x sono $x \geq 0$

---

2) $\min \quad -x_1 + 2x_3$

(P)
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 - 2x_3 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ +2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(D)
$$\max \quad \lambda_1 + 2\lambda_2$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq -1$$
$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 2$$
$$\underbrace{\lambda_1 \in \mathbb{R}}_{} \quad , \quad \underbrace{\lambda_2 \leq 0}_{}$$

1° vincolo e' di uguaglianza

perche' il secondo vincolo e' ≤ 0

③ (P)

$$\min \ 2x_1 + x_3$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 4$$
$$x_3 \geq 0$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(D)

$$\max \ \lambda_1 + 4\lambda_2$$
$$2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$-2\lambda_1 \leq 1$$
$$\lambda_1 \in \mathbb{R}, \ \lambda_2 \geq 0$$

Ex 4:

$$\min \ 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + x_2 \geq 5$$
$$x_1 \geq 1$$
$$x_2 \geq 2$$

1) Dimostrare che $x^* = (3,2)^T$ è s. ottima, mostrando che la funzione obiettivo in una qualsiasi soluzione ammissibile è almeno 12

- Scriviamo (P) in forma standard ovvero : $\min \ c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$

$\downarrow$ utile perché poi il metodo del simplesso si applica solo in forma standard

quindi $\min \ 2x_1 + 3x_2$

$$x_1 + x_2 \geq 5 \longrightarrow -x_1 - x_2 \leq -5$$
$$x_1 \geq 1 \longrightarrow -x_1 \leq -1$$
$$x_2 \geq 2 \qquad -x_2 \leq -2$$

$$\min \; 2x_1 + 3x_2$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = -5$$

$$-x_1 + x_4 = -1$$

$$-x_2 + x_5 = -2$$

$$x_i \geqslant 0 \qquad i = 1, \dots, 5$$

cambio i segni ai vincoli aggiungendo le variabili di slack $\underbrace{x_3, x_4, x_5}$

una per ogni variabile che voglio cambiare di segno

$$x^* = (3, 2, \underbrace{0, 0, 0}_{\text{variabili di slack aggiunte}}) \qquad f(x^*) = 12$$

1° vincolo   2° vincolo

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \geq \overset{\lambda_1}{-2}(\underbrace{-x_1 - x_2 + x_3}_{= -5}) + \underset{\lambda_3}{-1}(\underbrace{-x_2 + x_5}_{= -2}) = +2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_2 - x_5$$

maggioro con una combinazione dei vincoli

$$= 2x_1 + 3x_2 \underbrace{- 2x_3 - x_5}_{0} =$$

$$= +10 + 2 = 12$$

Scegliendo come combinazione dei vincoli quella data

da $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = -1$ $(-2, 0, -1) \rightarrow$ soluzione (D)

ottengo $f(x) \geq 12$ $\forall x$ ammissibile per (P)