Modelli di Pianificazione dei Trasporti

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Modelli di pianificazione dei trasporti

Nei modelli di pianificazione dei trasporti si hanno

Modelli di pianificazione dei trasporti

Nei modelli di pianificazione dei trasporti si hanno

- m **località di origine**

$$O_1,\ O_2,\ \ldots,\ O_m$$

Modelli di pianificazione dei trasporti

Nei modelli di pianificazione dei trasporti si hanno

- m **località di origine**

$$O_1,\ O_2,\ \ldots,\ O_m$$

- n **località di destinazione**

$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_m$$

Modelli di pianificazione dei trasporti

- Ogni origine può fornire una certa quantità $a_i \geq 0$ di merce $i = 1, \ldots, m$ che deve essere interamente trasferita dalle origini alle destinazioni

Modelli di pianificazione dei trasporti

- Ogni origine può fornire una certa quantità $a_i \geq 0$ di merce $i = 1, \ldots, m$ che deve essere interamente trasferita dalle origini alle destinazioni
- Da ogni destinazione D_j è richiesta una quantità $b_j \geq 0$ di merce $j = 1 \ldots, n$

Modelli di pianificazione dei trasporti

- Ogni origine può fornire una certa quantità $a_i \geq 0$ di merce $i = 1, \dots, m$ che deve essere interamente trasferita dalle origini alle destinazioni
- Da ogni destinazione D_j è richiesta una quantità $b_j \geq 0$ di merce $j = 1 \dots, n$
- Il costo del trasporto di un'unità di merce da O_i a D_j è definito come $c_{ij} \geq 0$

Modelli di pianificazione dei trasporti

- Ogni origine può fornire una certa quantità $a_i \geq 0$ di merce $i = 1, \ldots, m$ che deve essere interamente trasferita dalle origini alle destinazioni
- Da ogni destinazione D_j è richiesta una quantità $b_j \geq 0$ di merce $j = 1 \ldots, n$
- Il costo del trasporto di un'unità di merce da O_i a D_j è definito come $c_{ij} \geq 0$

Il problema consiste nel pianificare i trasporti in modo da soddisfare le richieste delle destinazioni minimizzando il costo del trasporto complessivo

Modelli di pianificazione dei trasporti

- **Variabili:** x_{ij} quantità di merce da trasportare da O_i a D_j, $\quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$

Modelli di pianificazione dei trasporti

- **Variabili:** x_{ij} quantità di merce da trasportare da O_i a D_j, $\quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$
- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo* dei trasporti

Modelli di pianificazione dei trasporti

- **Variabili:** x_{ij} quantità di merce da trasportare da O_i a $D_j, \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$
- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo* dei trasporti

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Modelli di pianificazione dei trasporti

- **Variabili:** x_{ij} quantità di merce da trasportare da O_i a $D_j, \quad i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n$
- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo* dei trasporti

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- **Vincoli:**
  - vincoli di origine:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

(la merce deve essere interamente trasferita)

Modelli di pianificazione dei trasporti

- **Variabili:** x_{ij} quantità di merce da trasportare da O_i a D_j, $\quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n$
- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo* dei trasporti

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- **Vincoli:**
  - vincoli di origine:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

    (la merce deve essere interamente trasferita)
  - vincoli di destinazione:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

    (le richieste devono essere soddisfatte esattamente)

Modelli di pianificazione dei trasporti

- **Variabili:** x_{ij} quantità di merce da trasportare da O_i a D_j, $\quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$
- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo* dei trasporti

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- **Vincoli:**
  - vincoli di origine:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

    (la merce deve essere interamente trasferita)
  - vincoli di destinazione:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

    (le richieste devono essere soddisfatte esattamente)
  - vincoli di non negatività: $x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m\ j = 1, \ldots, n$

Esempio 1

Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ e di tre impianti di produzione $\mathbf{P_1}$ $\mathbf{P_2}$ $\mathbf{P_3}$

Esempio 1

Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ e di tre impianti di produzione $\mathbf{P_1}$ $\mathbf{P_2}$ $\mathbf{P_3}$

Il minerale estratto deve essere giornalmente trasportato agli impianti di produzione soddisfacendo le rispettive richieste

Esempio 1

Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ e di tre impianti di produzione $\mathbf{P_1}$ $\mathbf{P_2}$ $\mathbf{P_3}$

Il minerale estratto deve essere giornalmente trasportato agli impianti di produzione soddisfacendo le rispettive richieste

Le miniere $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ producono giornalmente rispettivamente 130 e 200 tonnellate di minerale

Esempio 1

Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale

P1	**P2**	**P3**
80	100	150

Esempio 1

Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale

P1	**P2**	**P3**
80	100	150

Il costo (in euro) del trasporto da ciascuna miniera a ciascun impianto di produzione di una tonnellata di minerale è riportato nella seguente tabella

	P1	**P2**	**P3**
M1	10	8	21
M2	12	20	14

Esempio 1

Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale

P1	**P2**	**P3**
80	100	150

Il costo (in euro) del trasporto da ciascuna miniera a ciascun impianto di produzione di una tonnellata di minerale è riportato nella seguente tabella

	P1	**P2**	**P3**
M1	10	8	21
M2	12	20	14

Formulare un modello che descriva il trasporto dalle miniere agli impianti di produzione in modo da minimizzare il costo globale del trasporto

LOCALITA' DI ORIGINE : MINIERE $\xrightarrow{\text{destinazione}}$ WOGHT

Variabili: x_{ij} $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$

↑ Miniere ↑ Impianti di produzione

quantità di minerale che dalla miniera i viene trasportata all'impianto j

f.o $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$ $c = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 21 \\ 12 & 20 & 14 \end{pmatrix}$

Vincoli

- DI ORIGINE $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 130$ ← quantità trasp. da M_1

↓ tutto il minerale prodotto venga inviato agli impianti

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200$ ← quantità trasp. da M_2

- DI DESTINAZIONE

$x_{11} + x_{21} = 80$ ← l'impianto P_1 deve ricevere 80 tonnellate di minerale

$x_{12} + x_{22} = 100$

$x_{13} + x_{23} = 150$

Vincoli di non negatività $x_{ij} \geq 0$ $i, j = 1,2,3$

Esempio 2

Un'industria di acque minerali ha due stabilimenti con le seguenti disponibilità giornaliere

	Viterbo	**Latina**
Disponibilità di acqua (hl)	50	55

Esempio 2

Un'industria di acque minerali ha due stabilimenti con le seguenti disponibilità giornaliere

	Viterbo	**Latina**
Disponibilità di acqua (hl)	50	55

Giornalmente l'industria deve trasportare l'acqua dagli stabilimenti a tre impianti di imbottigliamento che devono essere riforniti rispettivamente di

Napoli	**Roma**	**Rieti**
30 hl	40 hl	35 hl

Esempio 2

I costi del trasporto dell'acqua sono riportati nella seguente tabella:

Costi (euro/hl)	**Napoli**	**Roma**	**Rieti**
Viterbo	250	100	85
Latina	120	80	150

Esempio 2

I costi del trasporto dell'acqua sono riportati nella seguente tabella:

Costi (euro/hl)	**Napoli**	**Roma**	**Rieti**
Viterbo	250	100	85
Latina	120	80	150

Si vogliono determinare le quantità di acqua minerale da trasportare giornalmente da ciascuno stabilimento a ciascun impianto minimizzando il costo di trasporto

Esempio 2

I costi del trasporto dell'acqua sono riportati nella seguente tabella:

Costi (euro/hl)	**Napoli**	**Roma**	**Rieti**
Viterbo	250	100	85
Latina	120	80	150

Si vogliono determinare le quantità di acqua minerale da trasportare giornalmente da ciascuno stabilimento a ciascun impianto minimizzando il costo di trasporto

in modo da soddisfare esattamente le richieste degli impianti e in modo che non ci siano giacenze di acqua non trasportata

variabili : x_{ij} hL di acqua minerale trasportata
dallo stabilimento $i = 1,2$
all'impianto $j = 1,2,3$

f.o: $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\, x_{ij}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 250 & 100 & 85 \\ 120 & 80 & 150 \end{pmatrix}$

nel problema voglio minimizzare $f(x)$

vincoli

ORIGINE : $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 55$ $\leftarrow$ P. prog. lineare
6 vincoli

DESTINAZIONE : $x_{11} + x_{21} = 30$

$x_{12} + x_{22} = 40$

$x_{13} + x_{23} = 35$

non negatività : $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 ; \ j = 1,2,3$

Condizione di esistenza

Dimostriamo un risultato che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché il problema dei trasporti abbia soluzione

Condizione di esistenza

Dimostriamo un risultato che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché il problema dei trasporti abbia soluzione

Theorem

Il problema dei trasporti

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} \geq 0 & \end{array}$$

è ammissibile **se e solo se**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1}$$

Condizione di esistenza

dimostrazione - necessità

Dimostriamo che se esiste una soluzione ammissibile che denotiamo con $\bar{x}_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, allora la condizione (1) deve essere verificata

Condizione di esistenza

dimostrazione - necessità

Dimostriamo che se esiste una soluzione ammissibile che denotiamo con $\bar{x}_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, allora la condizione (1) deve essere verificata

Poiché $\bar{x}_{ij}$ deve soddisfare i vincoli, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Condizione di esistenza

dimostrazione - necessità

Dimostriamo che se esiste una soluzione ammissibile che denotiamo con $\bar{x}_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, allora la condizione (1) deve essere verificata

Poiché $\bar{x}_{ij}$ deve soddisfare i vincoli, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

Condizione di esistenza

dimostrazione - necessità

Dimostriamo che se esiste una soluzione ammissibile che denotiamo con $\bar{x}_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, allora la condizione (1) deve essere verificata

Poiché $\bar{x}_{ij}$ deve soddisfare i vincoli, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

e sottraendo membro a membro si ha

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 0$$

che è la (1)

Condizione di esistenza

dimostrazione - sufficienza

Dimostriamo ora la sufficienza: supponiamo che valga la (1) e poniamo

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A.$$

Vogliamo dimostrare che esiste una soluzione ammissibile

Condizione di esistenza

dimostrazione - sufficienza

Dimostriamo ora la sufficienza: supponiamo che valga la (1) e poniamo

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A.$$

Vogliamo dimostrare che esiste una soluzione ammissibile

Sia

$$\bar{x}_{ij} := \frac{a_i b_j}{A}, \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

Condizione di esistenza

dimostrazione - sufficienza

Dimostriamo ora la sufficienza: supponiamo che valga la (1) e poniamo

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A.$$

Vogliamo dimostrare che esiste una soluzione ammissibile

Sia

$$\bar{x}_{ij} := \frac{a_i b_j}{A}, \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

Verifichiamo che $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per il problema dei trasporti

Condizione di esistenza

dimostrazione - sufficienza

Innanzitutto risulta $\bar{x}_{ij} \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ per la non negatività degli a_i e dei b_j

Condizione di esistenza

dimostrazione - sufficienza

Innanzitutto risulta $\bar{x}_{ij} \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ per la non negatività degli a_i e dei b_j

inoltre

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{A} = a_i$$

Condizione di esistenza

dimostrazione - sufficienza

Innanzitutto risulta $\bar{x}_{ij} \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ per la non negatività degli a_i e dei b_j

inoltre

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{A} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{A} = b_j$$

Condizione di esistenza

dimostrazione - sufficienza

Innanzitutto risulta $\bar{x}_{ij} \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ per la non negatività degli a_i e dei b_j

inoltre

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{A} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{A} = b_j$$

e quindi $\bar{x}$ soddisfando i vincoli del problema è una soluzione ammissibile $\square$

Varianti della formulazione classica

- può accadere che non tutte le rotte di trasporto siano disponibili

Varianti della formulazione classica

- può accadere che non tutte le rotte di trasporto siano disponibili

  se non è possibile il trasporto da una certa origine $\mathbf{O_i}$ ad una destinazione $\mathbf{D_j}$ si pone, per convenzione, $c_{ij} = \infty$ (e $x^*_{ij} = 0$)

Varianti della formulazione classica

- può accadere che non tutte le rotte di trasporto siano disponibili

  se non è possibile il trasporto da una certa origine $\mathbf{O_i}$ ad una destinazione $\mathbf{D_j}$ si pone, per convenzione, $c_{ij} = \infty$ (e $x^*_{ij} = 0$)

- possono esistere rotte di trasporto in cui vi sono limitazioni sulle quantità massima di merci trasportabili

Varianti della formulazione classica

- può accadere che non tutte le rotte di trasporto siano disponibili

  se non è possibile il trasporto da una certa origine $\mathbf{O_i}$ ad una destinazione $\mathbf{D_j}$ si pone, per convenzione, $c_{ij} = \infty$ (e $x^*_{ij} = 0$)

- possono esistere rotte di trasporto in cui vi sono limitazioni sulle quantità massima di merci trasportabili

- si può supporre che la disponibilità complessiva possa essere superiore alla domanda cioè

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Varianti della formulazione classica

Varianti della formulazione classica

Nel caso in cui si suppone che la disponibilità complessiva possa essere superiore alla domanda i vincoli di origine o di destinazione dovranno essere modificati:

Varianti della formulazione classica

Nel caso in cui si suppone che la disponibilità complessiva possa essere superiore alla domanda i vincoli di origine o di destinazione dovranno essere modificati:

- se supponiamo che ci siano delle giacenze nelle origini:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

(la merce trasportata è inferiore a quella disponibile)

Varianti della formulazione classica

Nel caso in cui si suppone che la disponibilità complessiva possa essere superiore alla domanda i vincoli di origine o di destinazione dovranno essere modificati:

- se supponiamo che ci siano delle giacenze nelle origini:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

  (la merce trasportata è inferiore a quella disponibile)

- se supponiamo che ci siano delle giacenze nelle destinazioni:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

  (la merce ricevuta è superiore a quella richiesta)