INTRODUZIONE ALLA RICERCA OPERATIVA

è alla base di molti problemi reali che hanno diverse scelte come soluzione

↓

R.O propone modelli per la scelta della soluzione migliore.

(prima della R.O si usava il buon senso)

APPROCCIO MODELLISTICO

↓

quello su cui si basa la R.O

esempio GEORGE DANTZIG

Ho 70 dipendenti e 70 mansioni da assegnare.

Ho 70! possibili assegnamenti ($\gg 10^{100}$) → il problema di assegnam. valutando le soluzioni una per una non basterebbe un calcolatore. (Troppo tempo)

Non sempre è possibile analizzare ogni caso

Serve quindi un approccio MODELLISTICO

1) Rappresentazione attraverso un MODELLO MATEMATICO
   a) Analisi problema
   b) Costruzione del modello
   c) Analisi del modello

2) Risoluzione attraverso un METODO MATEMATICO
   a) Soluzione numerica
   b) Validazione del modello (Ha senso nella vita reale?)

La costruzione di un modello è un processo ITERATIVO

MODELLI DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

un problema di ottimizzazione è definito come: $\min f(x) \quad x \in S$

dove:

$S \subseteq X$ = l'insieme dei vincoli

X = spazio delle variabili

Risolvere questo problema significa det. se esiste

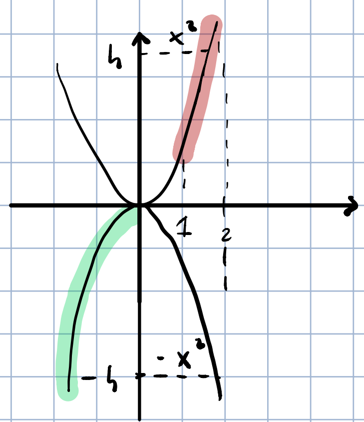
$$x^* \in S \ \ t.c \ \ f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in S$$

ogni problema $\max f(x) \quad x \in S$ si può trasf. in min

$$\max f(x) = -\min -f(x)$$

esempio

$\max x^2 \quad x \in [1,2] \qquad f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$x \in S \ \ t.c \ \ f(x^*) \geq f(x) \ \ \forall x \in [1,2]$

nel nostro caso in $x^* = 2$

$$4 \geq x^2 \iff -2 < x < 2$$

$$\max x^2 = -\min -x^2$$

In base allo spazio delle variabili X e alla struttura dell'insieme S, si distinguono le seguenti classi di problemi:

- $X = \mathbb{R}^n$ **problemi di ottimizzazione continua**
  - $S = \mathbb{R}^n$ problemi di ottimizzazione continua **nonvincolata**
  - $S \subset \mathbb{R}^n$ problemi di ottimizzazione continua **vincolata**
- $X = \mathbb{Z}^n$ **problemi di ottimizzazione discreta**
  - $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ problemi di programmazione **a numeri interi**
  - $S \subseteq \{0,1\}^n$ problemi di ottimizzazione **combinatoria**

Formulazione di modelli

La costruzione formale di un modello di Programmazione matematica si effettua a partire da una **descrizione logica e qualitativa del problema di decisione** ed è quindi necessario:

- Associare opportune **VARIABILI DI DECISIONE** alle grandezze reali
- Esprimere formalmente l'**OBIETTIVO** che si intende massimizzare/minimizzare
- Esprimere quantitativamente i **legami** esistenti tra le variabili e le **limitazioni** derivanti dal problema. Tali legami e limitazioni definiscono i **VINCOLI** del modello

Esempio

Un'industria chimica fabbrica 4 tipi di fertilizzanti, **F1**, **F2**, **F3**, **F4**, la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezionamento.

Per ciascun tipo di fertilizzante i tempi (in ore) di lavorazione in ogni reparto per avere una tonnellata di fertilizzante sono i seguenti:

	F1	**F2**	**F3**	**F4**
Reparto produzione	2	1.5	0.5	2.5
Reparto confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

Ciascuna tonnellata di fertilizzante dà i seguenti profitti:

	F1	**F2**	**F3**	**F4**
profitti netti (Euro per tonnellata)	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di fertilizzante in modo da **massimizzare il profitto complessivo**, sapendo che ogni settimana, il reparto produzione e il reparto confezionamento hanno una **capacità lavorativa massima rispettivamente di 100 e 50 ore**.

Soluzione

1) Capire qual'e' la funzione obbiettivo

OBIETTIVO = massimizzare il profitto e det. le quantità da produrre per farlo

VARIABILI : x_1 x_2 x_3 x_4 ove x_i = quantità di fertilizzante i da produrre in 1 sett.

OBIETTIVO : max $250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$

VINCOLI : $2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \le 100$

$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \le 50$

$x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$ $x_3 \ge 0$ $x_4 \ge 0$ (non posso produrre in negativo)

2) max $f(x)$ $x \in S$

$f(x) = 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \le 100 \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \le 50 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \end{array} \right\}$$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$

$x \subseteq \mathbb{R}^4$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$x^* \in S$ t.c $f(x^*) \ge f(x) \quad \forall x \in S$

$x^* = (0 \quad 0 \quad 200 \quad 0)$ $\qquad f(x^*) = 22.000$ €