LEZIONE PRECEDENTE

$\min f(x)$ $\quad$ S = insieme ammissibile

$x \in S$ $\quad$ f = funzione obiettivo

$S \subseteq X$ ← spazio delle variabili

ove $X = \mathbb{R}^n$ (prob. ottim. continua) o $X = \mathbb{Z}^n$ (prob. ott. discreta)

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE CONTINUA

$\min f(x)$ $\quad x \in S \quad S \subseteq X$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (funzione a più variabili)

Def: (INAMMISSIBILITA')

Il problema (P) e' detto INAMMISSIBILE se $S = \emptyset$
(ovv. non esistono soluzioni ammissibili)

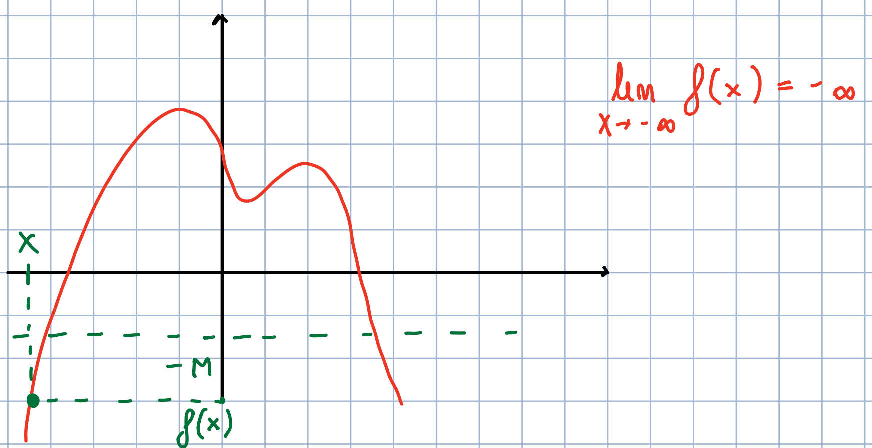
Def: (ILLIMITATO INFERIORMENTE)

Il problema (P) si dice ILLIMITATO INFERIORMENTE se $\forall M > 0 \ \exists x \in S$ t.c $f(x) < -M$

esempio

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$S = \mathbb{R}$



Def: (MINIMO GLOBALE)

Il problema (P) ammette SOLUZIONE OTTIMA se $\exists x^* \in S$ t.c $\forall x \in S$ $f(x^*) \leq f(x)$

↑

questa e' la definizione di MINIMO GLOBALE del problema

Essendo p.o. continua $X = \mathbb{R}^2 \Leftarrow$ lo spazio delle variabili che consideriamo è l'insieme delle n-uple $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale

Def. (PRODOTTO SCALARE)

Su uno spazio vettoriale possiamo definire il PRODOTTO SCALARE

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow \quad\ \downarrow & & \\ x \quad\ y & \longrightarrow & x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

esempio:

$\mathbb{R}^5$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \pi \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v^T \cdot w \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{5} v_i \cdot w_i = 3 - 2 + \pi = 1 + \pi$

... → sfruttando il prodotto scalare possiamo

Def: (LINEARITA')

Una funzione reale di variabili reali

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ si dice LINEARE se valgono le seguenti condizioni

$\quad x \mapsto f(x)$

i) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha che $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Si può verificare che f è lineare SE e SOLO SE $\exists\ c \in \mathbb{R}^n$ t.c

$$f(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

esempio (ex. fertilizzanti)

$$\max \quad \underbrace{250\, x_1 + 230\, x_2 + 110\, x_3 + 350\, x_4}$$

→ è una funzione lineare in $\mathbb{R}^4$

$$2x_1 + 1.5\, x_2 + 0.5\, x_3 + 2.6\, x_4 \le 100$$

$$0.5\, x_1 + 0.25\, x_2 + 0.25\, x_3 + x_4 \le 50$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

il nostro $c = \begin{pmatrix} 250 \\ 230 \\ 110 \\ 350 \end{pmatrix}$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100$$

$$\Updownarrow$$

$a_1^T \leq b_1$ con $a_1 \in \mathbb{R}^4$, $b_1 \in \mathbb{R}$ 1° vincolo

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \qquad b_1 = 100$$

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50$$

$$\Updownarrow$$

$a_2^T \leq b_2$ con $a_2 \in \mathbb{R}^4$, $b_2 \in \mathbb{R}$ 2° vincolo

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = 50$$

Il nostro problema può essere scritto come:

$\max c^T x$ con $x \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{l} a_1^T \leq b_1 \\ a_2^T \leq b_2 \\ x \geq 0 \end{array} = \begin{array}{l} -\min -c^T x \\ a_1^T \leq b_1 \\ a_2^T \leq b_2 \end{array}$$

Posso scrivere il problema in forma ancora più compatta

quindi

$\max c^T x$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

forma compatta di un problema di programmazione lineare

sistema di disequazioni lineari

Su $\mathbb{R}^n$ abbiamo introdotto il prodotto scalare standard a partire dal quale possiamo definire la NORMA EUCLIDEA

Def. NORMA

Una norma su $\mathbb{R}^n$ e' una funzione

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{t.c}$$
$$x \to \|x\|$$

i) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

iii) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def: (NORMA EUCLIDEA)

e' definita come:

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^T x}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_i$$

Altri esempi di NORME

1) NORMA 1

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

2) NORMA ∞

$$|\cdot|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \to \|x\|_\infty = \max |x_i|$$

$i \leq x \leq n$

Diciamo che due vettori in $x, y \in \mathbb{R}^n$ sono ortogonali se $\underbrace{x^T y = 0}$

(il loro prodotto scalare e' nullo)

Vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$x^T y \leq \|x\| \|y\|$$

norma euclidea

A partire da una norma possiamo definire la funzione DISTANZA TRA DUE PUNTI

Def ($f(x)$ DISTANZA TRA DUE PUNTI)

$$
\begin{aligned}
d : \; & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\
& \;\; x \quad\;\; y \;\;\longrightarrow d(x,y) = \|x-y\|
\end{aligned}
$$

A partire dalla definizione di distanza definiamo l'intorno sferico di un punto $x \in \mathbb{R}^n$

Def (INTORNO SFERICO)

Sia d una distanza in $\mathbb{R}^n$. L'INTORNO SFERICO di $x_0 \in \mathbb{R}^n$ di raggio $r > 0$

è l'insieme $B(x_0, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x_0, y) \leq r \}$

Esempio:

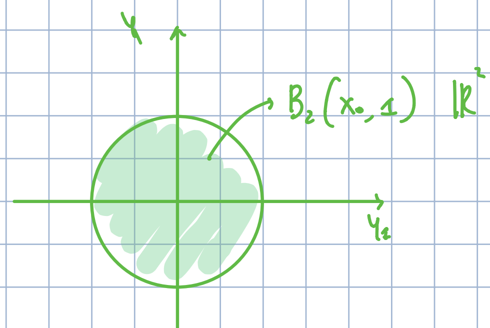
$\mathbb{R}^2 \qquad x_0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad r = 1 > 0$

consideriamo la distanza indotta dalla norma euclidea

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
B(x_0, r) &= \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x_0, y) \leq r \} = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x_0 - y\|_2 \leq r \} = \\
&= \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \|-y\|_2 \leq 1 \} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{\sum_{i=1}^{2} y_i^2} \leq 1 \right\} = \\
&= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1 \right\}
\end{aligned}
$$

$y_1^2 + y_2^2 \leq 1$



A partire dalla definizione di intorno possiamo definire gli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$

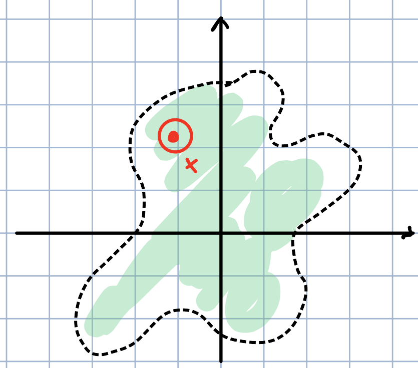
Def: (INSIEME APERTO)

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme di $\mathbb{R}^n$ si dice APERTO se $\forall x \in E, \exists r > 0$ t.c $B(x,r) \subseteq E$

$\Updownarrow$

tutti i punti di E sono interni

Per qualunque punto di E riesco a det. un intorno tutto contenuto in E.



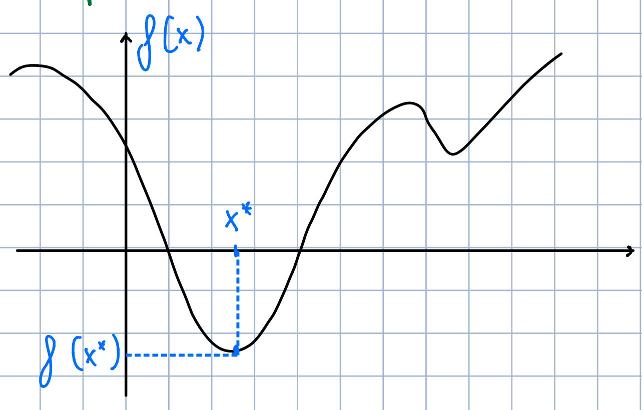
Tornando ai problemi di ottimizz. lineare

Def: (MINIMO GLOBALE)

Si dice che $x^* \in S$ e' MINIMO GLOBALE di f se $\forall x \in S \quad f(x^*) \leq f(x)$

Si dice che $x^* \in S$ e' MINIMO GLOBALE STRETTO di f se $\forall x \in S \quad f(x^*) < f(x)$

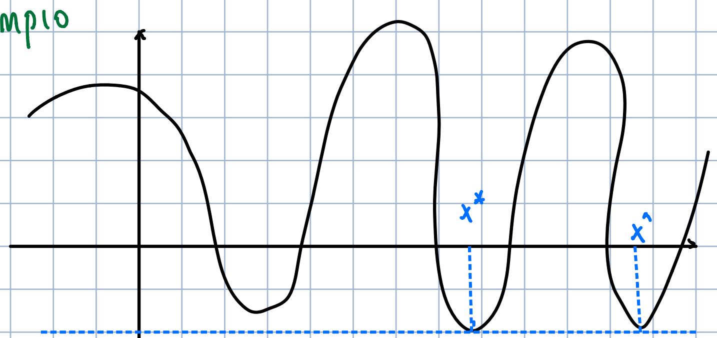
esempio



x^* e' MINIMO GLOBALE STRETTO

$f(x^*) < f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

esempio



x^* e' MINIMO GLOBALE

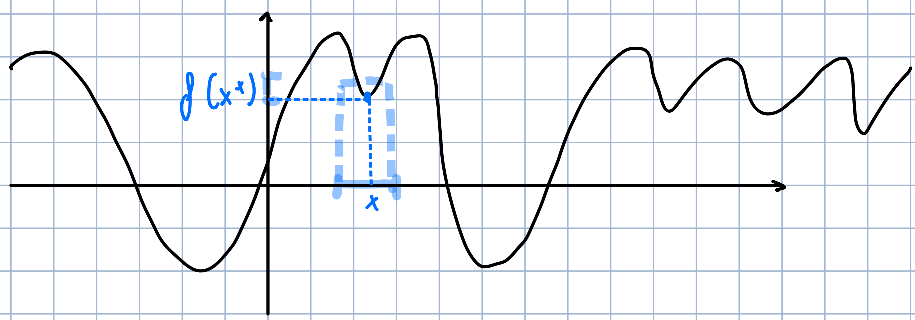
$\hat{x}$ e' MINIMO GLOBALE

Def

$x^* \in S$ e' MINIMO LOCALE di f se

$$\exists\, r>0 \text{ t.c. } f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in B(x^*, r)$$

Esempio



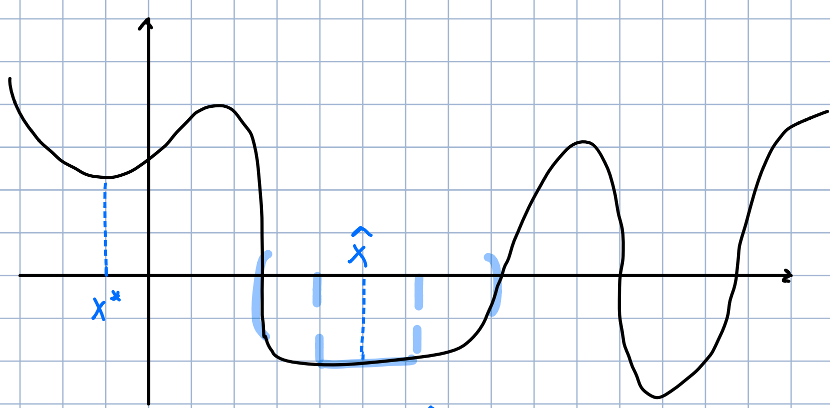
MINIMO LOCALE STRETTO

Def (MINIMO LOCALE STRETTO)

x^* e' MINIMO LOCALE STRETTO di f se

$$\exists\, r>0 \text{ t.c. } f(x^*) < f(x) \quad \forall x \in B(x^*, r)$$

esempio:



$\hat{x}$ e' minimo locale

I problemi di ottimizzazione continua si dividono in:

- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA $S = \mathbb{R}^n$
- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA $S \subset \mathbb{R}^n$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1(x) \le 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \le 0 \end{array},\ \begin{array}{l} h_1 = 0 \\ \vdots \\ h_p = 0 \end{array} \right\}$$

nei prob. che considereremo S e' definito ESPLICITAMENTE da DISUGUAGLIANZE E UGUAGLIANZE

Esempio in $\mathbb{R}^2$

$\min f(x) \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(x) = x_2$ ← è una funzione lineare

$f(x) = c^T x \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$S \left\{ \begin{array}{l} \|x\|_2^2 - 5 \leq 0 \\ \|x - x_0\|_1 - 1 \leq 0 \\ x_1 - 4 = 0 \end{array} \right.$$

VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA (i primi due)

VINCOLO DI UGUAGLIANZA (il terzo)

[S è dato dall'intersezione dei 3 vincoli]

1) $\|x\|_2^2 - 5 \leq 0 \iff \|x\|_2^2 \leq 5 \iff x_1^2 + x_2^2 \leq 25$

$\|x - x_0\|_1 - 1 \leq 0$

C ← per def. $\|\cdot\|_1$

2) $\underbrace{|x_1 - 4.5| + |x_2 - 0| \leq 1}$

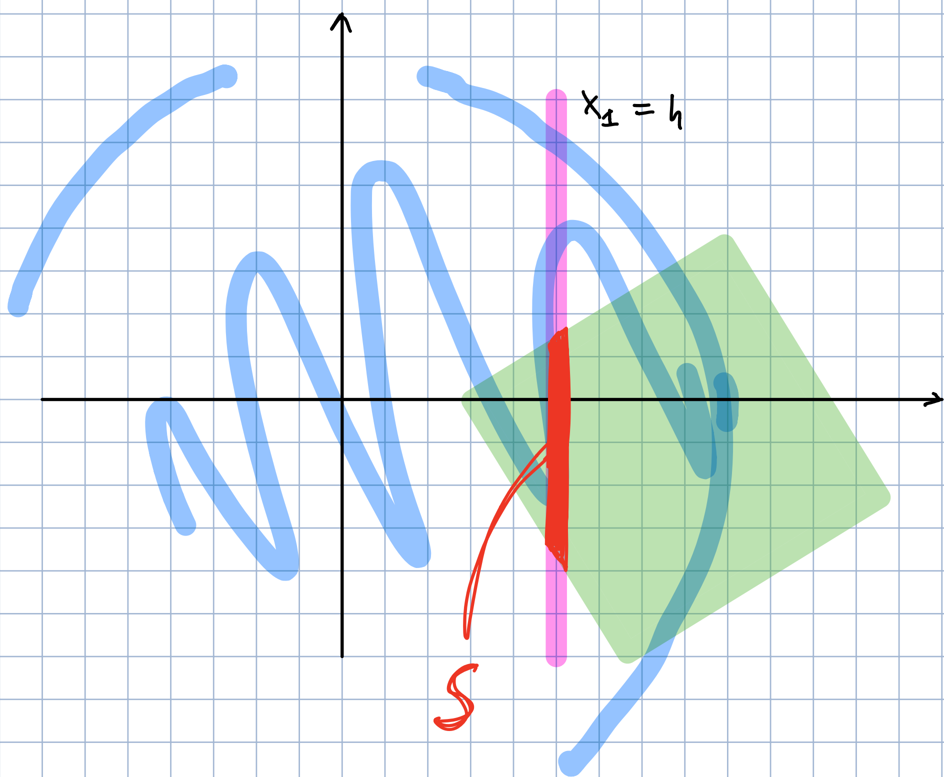
$x_1 - 4.5 + x_2 \leq 1$

$-x_1 + 4.5 + x_2 \leq 1$

$x_1 - 4.5 - x_2 \leq 1$

$-x_1 + 4.5 - x_2 \leq 1$

3) $x_1 = 4$



esempio 2.2.7 :

$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

VINCOLI : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

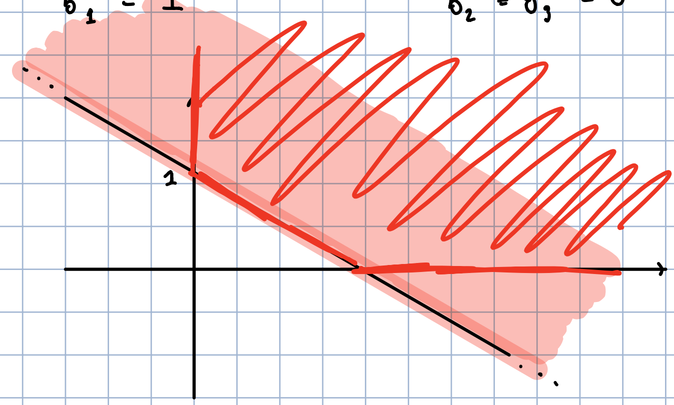
$\downarrow$

tutte le funzioni sono lineari, quindi è un prob. di PL

è nella forma $f(x^*) \leq f(x)$ ove

$g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ $g_2(x_1, x_2) = x_1$ $g_3(x_1, x_2) = x_2$

$b_1 = 1$ $b_2 = b_3 = 0$



1) $x_2 \geq 1 - 2x_2$

2) $x_1 \geq 0$

3) $x_2 \geq 0$