PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE PARTICOLARI

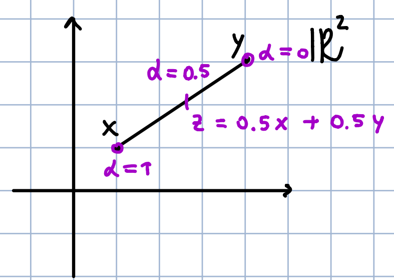
$$\min_{x \in F} f(x) \qquad \text{con } f \text{ convessa}, \quad F \subseteq \mathbb{R}^n \text{ convesso}$$

Def:

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ l'insieme di punti di $\mathbb{R}^n$ ottenuti come combinazione convessa di x e y:

$z = \alpha x + (1-\alpha) y$ al variare di $\alpha \in [0,1]$

viene definito SEGMENTO CHIUSO di estremi x e y



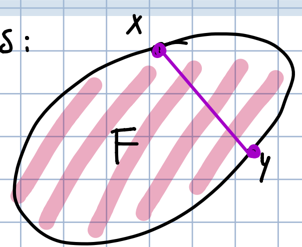
Def:

$F \subseteq \mathbb{R}^n$, $F \neq \emptyset$, è detto CONVESSO se $\forall x, y \in F$ e $\forall \alpha \in [0,1]$

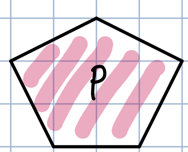
il punto $\alpha x + (1-\alpha) y \in F$

⟿ o equivalentemente il segmento $[x,y]$ è tutto contenuto in F.

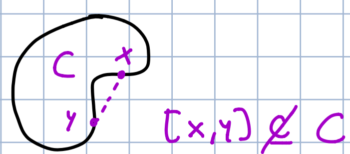
Es:



POLIEDRI



(convesso)



(non convesso)

PROP:

Siano $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ convessi

Allora se $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, $X_1 \cap X_2$ è un insieme convesso

DIMOSTRAZIONE

Chiamiamo $X = X_1 \cap X_2$

e siano $x, y \in X \Rightarrow x, y \in X_1$ e $x, y \in X_2$

poiché X_1 è convesso $[x,y] \subseteq X_1$

poiché X_2 è convesso $[x,y] \subseteq X_2$

$\Rightarrow [x,y] \subseteq X$

COROLLARIO

$\Rightarrow$ L'intersezione di un numero finito di insiemi convessi è convessa.

DIMOSTR. CHE I POLIEDRI SONO INSIEMI CONVESSI

Def:

Sia $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$

L'insieme $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$

è detto IPERPIANO definito dall'equazione $a^T x = b$

- $n = 2$, $a^T x = b$ esprime l'equazione di una retta
- $n = 3$ $a^T x = b$ esprime l'equazione di un piano

Def:

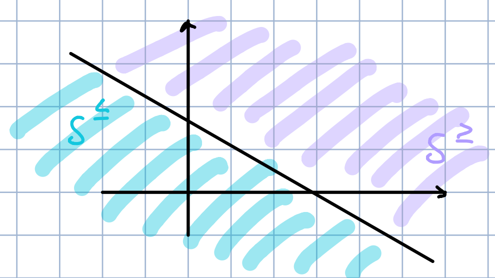
Sia $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ e $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$

Gli insiemi

$$S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$$
$$S^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b\}$$

sono detti SEMISPAZI CHIUSI definiti da $a^T x \leq b$ e $a^T x \geq b$

Es: $n = 2$ $H = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 1 - x_1\}$



manca un pezzo

PROP.

Un semispazio chiuso e' un insieme convesso

DIM:

Dimostriamo il risultato per $S^{\leq} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b \}$ con $a \in \mathbb{R}^m$

Siano $x, y \in S^{\leq}$ vogliamo verificare che $[x,y] \subseteq S^{\leq}$.

$x, y \in S^{\leq} \iff a^T x \leq b \; ; \; a^T y \leq b$

Il generico punto $z \in [x,y]$ e' definito come

$$\alpha x + (1-\alpha) y \quad \text{per } \alpha \in [0,1]$$

Vogliamo verificare che $a^T z \leq b$ e $\iff z \in S^{\leq}$

$$a^T z = a^T(\alpha x + (1-\alpha) y) = \alpha \underbrace{a^T x}_{\leq b} + (1-\alpha) \underbrace{a^T y}_{\leq b} \leq \alpha b + (1-\alpha) b = b$$

poiche' $x, y \in S$

COROLLARIO:

Un iperpiano $H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b \}$ e' un insieme convesso.

DIM:

$H = S^{\leq} \cap S^{\geq} \implies H$ e' convesso come intersezione di due insiemi convessi.

Def: (POLIEDRO)

Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ e' un POLIEDRO se e' dato dall'intersezione finita di iperpiani e semispazi chiusi. $\implies$ UN POLIEDRO E' UN INSIEME CONVESSO

Quindi P si scrive come

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1^T x \leq b_1 \\ \vdots \\ a_m^T x \leq b_m \\ a_{m+1}^T x \leq b_{m+1} \\ \vdots \\ a_p^T x = x_p \end{array} \right\}$$

FUNZIONI CONVESSE / CONCAVE

Def:

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, non vuoto

$f: C \to \mathbb{R}$ è detta

- CONVESSA se (STRETTAMENTE)

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad (<)$$

$$\forall x, y \in C \; ; \; \forall \alpha \in [0,1] \quad (\forall \alpha \in (0,1))$$

- CONCAVA se (STRETTAMENTE)

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad (>)$$

$$\forall x, y \in C \; ; \; \forall \alpha \in [0,1] \quad \forall \alpha \in (0,1)$$

PROP:

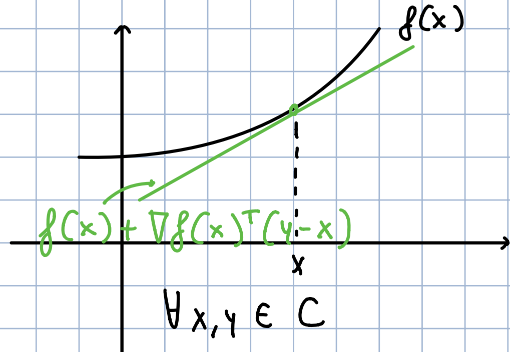
Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e convesso.

Sia $f: C \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(C)$

Allora

- f è convessa (strettamente) su C se e solo se

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) \quad \forall x, y \in C \quad (>)$$



$\forall x, y \in C$

- f è concava (strettamente) su C se e solo se

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) \quad \forall x, y \in C \quad (<)$$

PROP:

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e convesso.

Sia $f: C \to \mathbb{R}$; $f \in C^2(C)$

Allora

- f è (strettamente) convessa su C se e solo se $\forall x \in C$

$$d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0 \;\; (>0) \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n \;\; (d \neq 0)$$

- f è (strettamente) concava su C se e solo se $\forall x \in C$

$$d^T \nabla^2 f(x) d \leq 0 \;\; (<) \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n \;\; (d \neq 0)$$

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE CONVESSA

Def:

Si definisce problema di programmazione convessa un problema di minimizzazione del tipo

$$\min_{x \in F} f(x)$$

con $F \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso

e $f: F \to \mathbb{R}$ concava

Oppure equiv.

$$\max_{x \in F} f(x)$$

con $F \subseteq \mathbb{R}^n$ concavo

e $f: F \to \mathbb{R}$ convessa

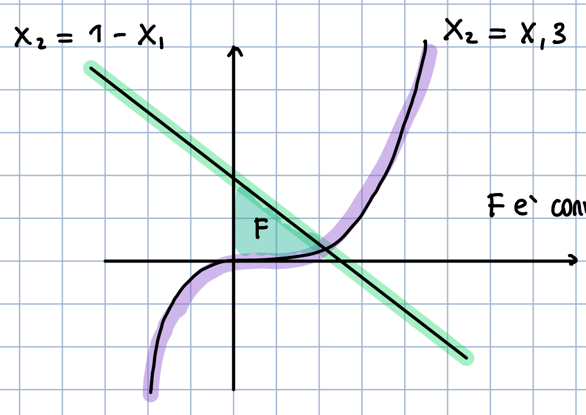
Esempio

$$\max \; x_1 + x_2$$

$$x_2 - x_1^3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



F è convesso

$\Rightarrow$ f e' concava $\Leftrightarrow$ $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq f(\alpha x) + (1-\alpha) f(y)$

Vogliamo verificare che $f(x) = x_1 + x_2$ sia concava

$f(x) = c^T x$ con $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' concava?

$$c^T(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha c^T x + (1-\alpha) c^T y$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)} \overset{?}{\geq} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 + \alpha x_2 + (1-\alpha)y_2 \overset{?}{\geq} \alpha(x_1 + x_2) + (1-\alpha)(y_1+y_2)$$

sì

ottengo l'uguaglianza!

Poiché F e' convesso e f e' concava $\Rightarrow$ (P) e' un problema di programmazione convessa

PROP:

Le funzioni lineari sono sia concave che convesse (ma non lo sono strettamente)

DIM:

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e convesso e sia

$f(x) = c^T x + d$ con $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$

Dati $x, y \in C$

$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = c^T(\alpha x + (1-\alpha)y) + d =$

$= \alpha c^T x + (1-\alpha) c^T y + d =$

$= \alpha c^T x + (1-\alpha) c^T y + \overset{\alpha d + (1-\alpha)d}{d} = \underbrace{\alpha f(x) + (1-\alpha) f(x)}$

$\alpha c^T x + \alpha d + (1-\alpha) c^T y + d = \alpha(c^T x + d) + (1-\alpha)(c^T x + d)$

Ex 1 (foglio 4):

Esercizio 1. *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$ definito come $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0\}$, con $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa, per ogni $i = 1, \dots, m$. Dimostrare che C è un insieme convesso.*

Dobbiamo verificare che

Dati $x, y \in C$, il segmento $[x, y]$ è tutto contenuto in C:

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in C \qquad \forall \alpha \in [0,1]:$$

$x \in C \Rightarrow g_i(x) \leq 0$; $y \in C \Rightarrow g_i(y) \leq 0$

$$g_i(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \underbrace{g_i(x)}_{\leq 0} + (1-\alpha)\underbrace{g_i(y)}_{\leq 0} \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

Ex 3 (foglio 4):

Esercizio 3. *Dimostrare che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\top Q x$, con $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice simmetrica e definita positiva è una funzione strettamente convessa (senza sfruttare che $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$).*

$$[\nabla^2 f(x) = Q \quad \forall x \in \mathbb{R}^n]$$

verificare quindi che

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad \forall \alpha \in (0,1)$$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = (\alpha x + (1-\alpha)y)^T Q (\alpha x + (1-\alpha)y) =$$

$$= [\alpha^2 x^T Q x + (1-\alpha)^2 y^T Q y + 2\alpha(1-\alpha) x^T Q y \overset{?}{<} \alpha x^T Q x + (1-\alpha) y^T Q y] = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

$\Updownarrow$ (portando a destra i termini di sinistra)

equivale a dimostrare

$$\alpha(1-\alpha) x^T Q x + \alpha(1-\alpha) y^T Q y - \alpha(1-\alpha) x^T Q y - \alpha(1-\alpha) y^T Q y > 0$$

Dividendo per $\alpha(1-\alpha) > 0$ poiché $\alpha \in (0,1)$

ottengo $x^T Q x - y^T Q y - x^T Q y - y^T Q x > 0$

cioè $(x-y)^T Q (x-y) > 0$ poiché Q è definita positiva e $x \neq y$