Modelli di Programmazione Lineare Intera

Modelli di Programmazione Lineare Intera (PLI)

Iniziamo a parlare di modelli di PLI presentando due modelli classici di ottimizzazione combinatoria:

- **Il problema dello zaino** (*Knapsack problem*)
- **Il problema dell'assegnamento** (*Assignment problem*)

Ruolo delle variabili binarie

rappresentazione di scelte di tipo Sì-NO

Supponiamo che in un problema dobbiamo decidere se un evento si verifichi o meno

ci dice se un evento si verifica o no

Per modellare questa dicotomia **usiamo una variabile binaria** x:

$$x = \begin{cases} 1 & \text{se l'evento accade} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ruolo delle variabili binarie

rappresentazione di scelte di tipo Sì-NO

Le variabili binarie - in generale - possono essere utilizzate per esprimere vincoli logici:

devo decidere fare queste prop. logiche

Data X_i una proposizione logica (*es. "Inserisco un oggetto nello zaino", "assegno questo lavoro a questa persona", "uso il mio capitale in questo investimento"*),

associamo a X_i una variabile binaria $x_i \in \{0, 1\}$ tale che

X_i è vera **se solo se** $x_i = 1$

Problema del Knapsack binario

Supponiamo di avere uno zaino la cui capienza è $b > 0$

Supponiamo di avere n oggetti che vogliamo trasportare e che l'i-esimo oggetto abbia volume $a_i > 0$ e un determinato valore c_i

Vogliamo riempire lo zaino con gli oggetti, **senza eccedere la capienza massima** dello zaino e **massimizzando il valore trasportato**

(lo ho già i miei oggetti, devo scegliere quali oggetti portare)

Problema del Knapsack binario

Formulazione

- **Variabili:** $x_i \in \{0,1\}, \; i = 1, \ldots, n$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto viene inserito nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Funzione Obiettivo:** *massimizzare il valore trasportato*

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c^T x$$

- **Vincoli:** (vincolo di knapsack)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

ossia non voglio eccedere la capienza del mio zaino

Problema del Knapsack binario

Formulazione

Quindi, la formulazione del problema di Knapsack binario è

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c^T x \\
& a^T x \leq b \\
& x \in \{0,1\}^n
\end{aligned}
$$

Esempio

problema di capital budgeting

"CAPIENZA ZAINO"

Si supponga di disporre di un capitale di 18 mila euro e di poterlo investire in 4 progetti diversi

- nel primo progetto si devono investire 8 euro per ricavarne 40
- nel secondo si debbono investire 6 euro per ricavarne 24
- nel terzo progetto si devono investire 5 euro per ricavarne 15
- nel quarto progetto si debbono investire 4 euro per ricavarne 8

Formulare il problema di PLI che consente di scegliere l'insieme di progetti che massimizza il profitto rispettando i vincoli di disponibilità di capitale.

Esempio :

Ho 4 possibili progetti su cui investire

Variabili : $x_i \in \{0, 1\}$ $\quad i = 1, 2, 3, 4$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se decido di investire nel progetto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\max \quad 40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4$$

vincolo di knapsack $\leftarrow$ $\quad 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 18$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

$a^T x \leq b$

$a = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = 18$

Problema dell'assegnamento

Supponiamo che ci siano n persone disponibili a svolgere n lavori

Ogni persona i può essere assegnata ad un unico lavoro j

Supponiamo di avere una stima del costo c_{ij} relativo al fatto che la persona i è assegnata al lavoro j

Il problema dell'assegnamento è **minimizzare il costo** per lo svolgimento degli n lavori assegnando ogni lavoro ad una persona (e viceversa!)

Problema dell'assegnamento

Formulazione

- **Variabili:** $x_{ij} \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, n$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la presona } i \text{ esegue il lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo per lo svolgimento dei lavori*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- **Vincoli:**
  - ogni persona i svolge un unico lavoro:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

per n lavori ho
1 persona x lavoro

  - ogni lavoro j è svolto da un'unica persona:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

Quindi, la formulazione del problema dell'assegnamento è

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, \ldots, n \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n \\
& & j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Esempio

problema di assegnamento

Una compagnia finanziaria necessita di ricoprire tre lavori **LAV1**, **LAV2**, **LAV3**, che richiedono differenti abilità ed esperienza.

Sono disponibili tre candidati **C1**, **C2**, **C3**, che possono essere assunti con il medesimo salario

A causa delle loro differenti capacità, il costo di assegnazione di ciascun candidato che la compagnia deve sostenere dipende dal tipo di lavoro al quale è assegnato

Esempio

problema di assegnamento

La stima di tale costo riferito a ciascun candidato se fosse assegnato a ciascuno dei tre lavori è riportato nella tabella seguente

	LAV1	**LAV2**	**LAV3**
C1	5	4	7
C2	6	7	3
C3	8	11	2

Si desidera assegnare ogni candidato esattamente ad un lavoro in modo da minimizzare il costo complessivo che la compagnia deve sostenere

Esempio: PROBLEMA DI ASSEGNAMENTO

Variabili: $x_{ij} \in \{0,1\}$ $\quad i = 1,2,3$

$\quad j = 1,2,3$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il candidato } i \text{ e' assegnato al lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

MIN $5x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} + 8x_{31} + 11x_{32} + 2x_{33}$

$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 1 \; ; \; \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 1 \; ; \; \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 1$ $\longrightarrow$ ad ogni lavoro un candidato

$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 1 \; ; \; \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 1 \; ; \; \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = 1$ $\longrightarrow$ ogni candidato ha un solo lavoro.

$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3 \; , \; j = 1,2,3$

Vincoli logici

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$ le variabili binarie del modello corrispondenti alle proposizioni logiche $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Considerando i connettivi logici

- **AND** ($\wedge$)
- **OR** ($\vee$)
- **NOT** (–)

possiamo modellare proposizioni logiche anche molto complesse

Vincoli logici

esempio

x_1 o non x_3 non x_1 o x_2 o x_4 non x_2 o non x_3 o non x_4

$$(X_1 \vee \bar{X}_3) \wedge (\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_4) \wedge (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4) \tag{1}$$

La proposizione logica (1) **è vera se e solo se** sono vere le proposizioni

$$(X_1 \vee \bar{X}_3), \quad (\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_4), \quad (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4)$$

Vincoli logici

esempio

Analizziamo $(X_1 \vee \bar{X}_3)$:

è vera **se e solo se una tra X_1 e $\bar{X}_3$ è vera**

- X_1 è rappresentata da x_1
- X_3 è rappresentata da $x_3 \Rightarrow \bar{X}_3$ è rappresentata da $1 - x_3$

Quindi

$$(X_1 \vee \bar{X}_3) \text{ è vera } \quad \Leftrightarrow \underbrace{x_1 + (1 - x_3)}_{\text{sono vere se ne vale almeno una o entrambe.}} \geq 1$$

Vincoli logici

esempio

Allo stesso modo:

$$(\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_4) \text{ è vera } \Leftrightarrow (1 - x_1) + x_2 + x_4 \geq 1$$

$$(\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4) \text{ è vera } \Leftrightarrow (1 - x_2) + (1 - x_3) + (1 - x_4) \geq 1$$

Pertanto la proposizione (1) è vera **se e solo se** x_1, x_2, x_3, x_4 **soddisfano il sistema di disuguaglianze lineari**

$$\begin{aligned} x_1 + (1 - x_3) &\geq 1 \\ (1 - x_1) + x_2 + x_4 &\geq 1 \\ (1 - x_2) + (1 - x_3) + (1 - x_4) &\geq 1 \end{aligned}$$

Vincoli logici

Possiamo modellare anche implicazioni del tipo

$$X_1 \Rightarrow X_2 \tag{2}$$

Poiché (2) equivale a

$$\bar{X}_1 \vee X_2$$

la modelliamo con la disuguaglianza

$$1 - x_1 + x_2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$$

Esempio

Consideriamo l'esempio visto come problema di knapsack:

Si supponga di disporre di un capitale di 18 mila euro e di poterlo investire in 4 progetti diversi

- nel primo progetto si devono investire 8 euro per ricavarne 40
- nel secondo si debbono investire 6 euro per ricavarne 24
- nel terzo progetto si devono investire 5 euro per ricavarne 15
- nel quarto progetto si debbono investire 4 euro per ricavarne 8

Esempio

Vogliamo imporre ulteriori vincoli:

- si possono fare solo due investimenti
- se viene fatto l'investimento 2 deve essere fatto anche l'investimento 4
- se viene fatto l'investimento 1, l'investimento 3 non può essere fatto

VINCOLI LOGICI

Variabili $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se investo nel progetto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- si possono fare solo due investimenti:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2$$

- $\underbrace{(x_2 = 1)}_{x_2} \Rightarrow \underbrace{(x_4 = 1)}_{x_4}$ lo scrivo come $\bar{x}_2 \vee x_4$

$$x_2 \le x_4$$