

# Modelli di Programmazione Lineare Intera



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Variabili binarie come Variabili Indicatrici

## Costi fissi

L'uso di variabili binarie come variabili indicatrici è necessario nella modellazione di **costi fissi**

È possibile che il costo di un'attività abbia un costo iniziale, detto **costo di set-up**, che esiste **solo se quell'attività viene svolta**

*Esempio:*

*Un prodotto può essere fabbricato usando tre macchinari: il costo del funzionamento di un macchinario deve essere considerato **solo se** tale macchinario viene usato per la fabbricazione del prodotto*

# Variabili binarie come Variabili Indicatrici

## Costi fissi

Sia  $x_i \geq 0$  la variabile continua associata alla quantità di prodotto da fabbricare

Sia  $c_i$  il costo per la produzione di  $x_i \geq 0$

Sia  $f_i \geq 0$  il **costo di SET-UP associato** a  $x_i$

Il **costo associato alla produzione di  $x_i$**  è dato da:

$$\begin{cases} c_i x_i + f_i & \text{se } x_i > 0 \\ 0 & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

# Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Costi fissi

Introduciamo la **variabile binaria**  $\delta_i \in \{0, 1\}$  associata alla produzione di  $x_i$ :

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i > 0 \\ 0 & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

Considerando  $\delta_i$ , il costo associato alla produzione di  $x_i$  può essere modellato come:

$$c_i x_i + f_i \delta_i$$

Per introdurre correttamente la variabile  $\delta_i$ , occorre inserire vincoli per **esplicitare il legame logico tra  $\delta_i$  e  $x_i$**

# Costi fissi

Legame tra  $\delta_i$  e  $x_i$

Per poter esplicitare all'interno del modello il legame tra  $\delta_i$  e  $x_i$  dobbiamo inserire i vincoli:

$$(1) \quad x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_i = 1$$

$$(2) \quad x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_i = 0$$

Il vincolo (1) si realizza come

$$x_i - M_i \delta_i \leq 0$$

con  $M_i > 0$  limite su  $x_i$

# Costi fissi

Legame tra  $\delta_i$  e  $x_i$

Per realizzare l'implicazione (2), si dovrebbe introdurre un vincolo del tipo

$$x_i - \epsilon \delta_i \geq 0 \quad \text{con} \quad \epsilon > 0$$

In realtà, **non è necessario** introdurre tale vincolo

Dalla struttura della funzione obiettivo e dal fatto che **vogliamo minimizzare i costi**, discende che

*se  $x_i = 0$ , all'ottimo deve valere  $\delta_i = 0$ , essendo  $f_i \geq 0$ ;*

ovvero **la condizione logica (2) è automaticamente verificata**

# Costi fissi

## Formulazione Generale

Supponiamo di dover fabbricare  $n$  prodotti con:

- $c_i \geq 0$  costo di produzione  $i$ -esimo
- $f_i \geq 0$  costo fisso  $i$ -esimo
- **Variabili:**  $x_i \geq 0$  quantità di prodotto  $i$ -esimo  $i = 1, \dots, n$   
 $\delta_i \in \{0, 1\}$   $i = 1, \dots, n$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se il prodotto } i \text{ viene fabbricato } (x_i > 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo*

$$\sum_{i=1}^n (c_i x_i + f_i \delta_i)$$

- **Vincoli** ( $x_i > 0 \Rightarrow \delta_i = 1$ ):

$$x_i - M_i \delta_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

# Esempio 1

In una centrale elettrica sono a disposizione tre generatori e ogni giorno si deve decidere quali usare di giorno e quali di notte per assicurare una produzione di almeno 4000 megawatts di giorno e di almeno 2800 megawatts di notte.

L'uso di un generatore comporta la presenza di personale tecnico che sorvegli il suo funzionamento

Il personale tecnico viene retribuito in maniera diversa tra il giorno e la notte e a seconda del tipo di generatore



# Esempio 1

Nella tabella che segue sono riportati la retribuzione del personale tecnico (in euro), il costo (in euro) per ogni megawatt prodotto e la massima capacità di produzione in megawatts per ogni singolo periodo (giorno/notte)

	Retribuzione personale		Costo per megawatt	Capacità max
	giorno	notte		
<b>Generatore A</b>	750	1000	3	2000
<b>Generatore B</b>	600	900	5	1700
<b>Generatore C</b>	800	1100	6	2500

Formulare un modello di PLI che permetta di rappresentare il problema in analisi

## ESEMPIO (COSTI FISSI):

Variabili:  $x_{ij} \geq 0$   $i = A, B, C$

$j = G, N$

quantità di megawatts  
generati dal generatore  $i$   
nel periodo  $j$

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il generatore } i \text{ viene attivato nel periodo } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{MIN } \underbrace{(3x_{AG} + x_{AN})}_{\substack{\text{quantità di} \\ \text{megawatts prodotti} \\ \text{da A}}} + 5 \underbrace{(x_{BG} + x_{BN})}_{\substack{\text{megawatts prodotti} \\ \text{da B}}} + 6 \underbrace{(x_{CG} + x_{CN})}_{\substack{\text{megawatts prodotti} \\ \text{da C}}}$$

$$+ 750\delta_{AG} + 1000\delta_{AN} + 600\delta_{BG} + 900\delta_{BN}$$

$$+ 800\delta_{CG} + 1100\delta_{CN}$$

$$x_{AG} + x_{BG} + x_{CG} \geq 4000$$

$$x_{AN} + x_{BN} + x_{CN} \geq 2800$$

$$x_{ij} > 0 \Rightarrow \delta_{ij} = 1$$

$$x_{ij} - M_i \delta_{ij} \leq 0$$

$M_i$  capacità massima  
del generatore  $i$

## Esempio 2

Una casa automobilistica produce quattro modelli differenti di automobili (Mod1, Mod2, Mod3, Mod4) disponendo di tre catene di montaggio (C1, C2, C3)

## Esempio 2

Una casa automobilistica produce quattro modelli differenti di automobili (Mod1, Mod2, Mod3, Mod4) disponendo di tre catene di montaggio (C1, C2, C3)

Per ottenere un modello finito di ciascun tipo di automobile è necessaria la lavorazione su una sola catena di montaggio

## Esempio 2

Una casa automobilistica produce quattro modelli differenti di automobili (Mod1, Mod2, Mod3, Mod4) disponendo di tre catene di montaggio (C1, C2, C3)

Per ottenere un modello finito di ciascun tipo di automobile è necessaria la lavorazione su una sola catena di montaggio

La tabella che segue riporta per ciascuna catena di montaggio i costi (in migliaia di euro) necessari per produrre un modello di automobile insieme ai costi di attivazione (in migliaia di euro) e alla quantità minima di automobili che devono essere prodotte

	C1	C2	C3	quantità minima di automobili
Mod1	10	12	11	15000
Mod2	9	10	9	10000
Mod3	13	14	12	7500
Mod4	15	16	15	5000
Costi attivazione	50	60	55	

## Esempio 2

Costruire un modello che permetta di determinare le quantità di ciascun modello da fabbricare su ciascuna catena di montaggio minimizzando i costi complessivi di produzione,

## Esempio 2

Costruire un modello che permetta di determinare le quantità di ciascun modello da fabbricare su ciascuna catena di montaggio minimizzando i costi complessivi di produzione, tenendo conto che per motivi tecnici possono essere utilizzate al più due catene di montaggio

## Esempio 2

Costruire un modello che permetta di determinare le quantità di ciascun modello da fabbricare su ciascuna catena di montaggio minimizzando i costi complessivi di produzione,

tenendo conto che per motivi tecnici possono essere utilizzate al più due catene di montaggio

e che le tre catene di montaggio hanno rispettivamente le seguenti capacità massime di produzione: 10000 automobili C1, 20000 automobili C2 e 25000 automobili C3