POLIEDRI IN FORMA STANDARD - SOLUZIONI DI BASE AMMISSIBILE

$$(PL) \quad \begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

DEF:

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice che definisce il poliedro

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \, ; \, x \geq 0\}$

Siano $\{a_1, \dots, a_n\}$ le colonne della matrice A

Una sottomatrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m})$, in $\{1, \dots, n\}$

non singolare è detta MATRICE DI BASE DI A

DEF:

Sia $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$ una matrice di base di A

- La sottomatrice $N = (a_{J_{m+1}} \; a_{J_{m+2}} \dots a_{J_n})$

  è detta MATRICE delle COLONNE FUORI BASE di A

Quindi in particolare la matrice A può essere partizionata come $A = (B \quad N)$

- L'insieme $I_B = \{J_1, \dots, J_m\}$ è l'INSIEME degli INDICI di BASE
- L'insieme $I_N = \{J_{m+1}, \dots, J_n\}$ è l'insieme degli INDICI FUORI BASE

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, x può essere partizionato come

$$\underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{x_B}} = \begin{pmatrix} x_{J_1} \\ \vdots \\ x_{J_m} \end{pmatrix} \quad e \quad \underset{\mathbb{R}^{n-m}}{\overset{\cap}{x_N}} = \begin{pmatrix} x_{J_{m+1}} \\ \vdots \\ x_{J_n} \end{pmatrix}$$

I vettori x_B e x_N sono detti
- VETTORE DELLE VARIABILI DI BASE
- VETTORE DELLE VARIABILI FUORI BASE

- le componenti x_i, $i \in I_B$ sono dette VARIABILI DI BASE
- le componenti x_i, $i \in I_N$ sono dette VARIABILI FUORI BASE.

Esempio:

Consideriamo il poliedro:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 - x_6 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_7 = 4 \end{array} \; ; \; x \geq 0 \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$m = 3$

$n = 7$

(ma $m+n = 10$ sono gli effettivi lati)

Consideriamo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$\det(B) = 2 + 9 + 1 \neq 0 \implies B$ e' una base

$I_B = \{2, 4, 5\}$ $\quad (J_1 = 2,\ J_2 = 4,\ J_3 = 5)$

$\uparrow$

Indici delle colonne che hanno formato la base

$I_N = \{1, 3, 6, 7\}$

$\uparrow$

Indici colonne che non sono base.

$\bar{x} \in \mathbb{R}^7$ $\qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{x}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\qquad \bar{x}_N = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

questo ci viene dato

Quindi I_B e I_N rappresentano una partizione dell'insieme di indici $\{1, 2, \dots, n\}$ e il sistema

$Ax = b$ può scrivere equivalentemente come

$$\boxed{B x_B + N x_N = b}$$

poiché B è una base

$$B x_B = b - N x_N \iff \boxed{x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N}$$

Considerando la partizione $I_B \cup I_N = \{1, \dots, n\}$

il problema (PL) può essere scritto come

$$\min \; c_B^T x_B + c_N^T x_N \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

$$x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \qquad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_B \geq 0_m \\ x_N \geq 0_{n-m} \end{array}\right\} \leftarrow$$

vettori nulli di m e $n-m$ componenti rispettivamente.

DEF:

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una matrice di base di A

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto SOLUZIONE DI BASE di $Ax = b$

se $\bar{x}_B = B^{-1} b$

$$\boxed{\bar{x}_N = 0_{n-m}}$$

una soluzione di base ha $\bar{x}_n = 0$

+ è ammissibile per il poliedro se $B^{-1}b$ con componenti ≥ 0

$$Ax = b \iff B x_B + N x_N = b \iff x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

$\uparrow$ moltiplico a sx e a dx per B^{-1}

DEF:

Sia (PL) un problema di PL in forma standard.

Sia B una base di A t.c $B^{-1}b \geq 0_m$

Allora $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b$$

$$\bar{x}_n = 0_{n-m}$$

è detta SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE

Esempio:

Consideriamo il poliedro dell'esempio precedente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} -3/12 \\ 45/12 \\ -21/12 \end{pmatrix} \begin{matrix} < 0 \\ \\ < 0 \end{matrix}$$

NON è una soluzione ammissibile

se prendiamo invece

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_{\tilde{B}} = \{1, 2, 6\} \qquad \tilde{B}^{-1}b = \begin{pmatrix} 19/8 \\ 6/8 \\ 9/8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

$$\tilde{x}_B = \tilde{B}^{-1}b$$

$$\tilde{x}_N = 0_4$$

è una SBA

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 19/8 \\ 6/8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9/8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA:

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \,;\, x \geq 0\}$

$\bar{x}$ è un vertice di P $\iff$ $\bar{x}$ è una SBA

soluzione di base ammissibile

$\updownarrow$

$\exists\, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ base di A t.c $\bar{x}_B = B^{-1}b$, $\bar{x}_N = 0_{n-m}$

DIM:

$\bar{x}$ SBA $\Rightarrow$ $\bar{x}$ vertice

$\bar{x}$ SBA $\Leftrightarrow$ $\exists\, B$: $\left.\begin{array}{l} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0_{n-m} \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ $\bar{x}$ ha almeno $n-m$ componenti nulle

e $\{ i \mid \bar{x}_i > 0 \} \subseteq I_B$

B è non $\underbrace{\text{singolare}}$ (poiché è una base)

matrice quadrata con det = 0 o rank non massimo

$\Rightarrow$ B è formata da colonne linearmente indipendenti

$\Rightarrow$ le colonne relative agli indici per cui $\bar{x}_i > 0$ sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ è un vertice (per il teo visto lunedì!) ☒

TEO:

Il numero di SBA - e quindi di vertici - di un poliedro scritto in forma standard

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b ;\ x \geq 0 \}$$

è finito e pari al più a $\binom{n}{m}$ ← numero di combinazioni di n elementi

---

COROLLARIO:

Un punto $\bar{x} \neq 0$ è una SBA

$\Leftrightarrow$ le colonne di A corrispondenti alle componenti di $\bar{x}$ positive sono linearmente indipendenti.

OSS:

Puo' succedere che più basi B t.c $B^{-1}b \geq 0_m$ generino la stessa SBA

... questo è legato al fatto che il vettore $B^{-1}b$ può contenere degli zeri.

DEF:

Sia $\bar{x} \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b;\ x \geq 0\}$ una SBA.

$\bar{x}$ è detto SBA degenere se il numero di componenti positive di $\bar{x}$ è minore di m.

TEOREMA:

Se una SBA è NON DEGENERE $\left(\Leftrightarrow (B^{-1}b)_i > 0 \quad i = 1, \dots, m\right)$ allora $\exists!$ B base di A t.c

$$\bar{x}_B = B^{-1}b$$

$$\bar{x}_N = 0_{n-m}$$

DIM:

Supponiamo per assurdo che $\exists\ \tilde{B} \neq B$ t.c $\quad \bar{x}_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1}b$

$$\bar{x}_{\tilde{N}} = 0_{n-m}$$

$\tilde{B} \neq B \Rightarrow \exists\ i \in I_B$ t.c $i \notin I_{\tilde{B}}$

$\bar{x}$ è non degenere $\Rightarrow \bar{x}_i > 0$ ma dall'altra parte $i \notin I_{\tilde{B}}$ $\bar{x}_i = 0$

ASSURDO!

PROCEDURA PER COSTRUIRE SBA (vertici di poliedri scritti in forma standard)

1) Scegliere m colonne di A l.i

$$B = (a_{J_1} \dots a_{J_m})$$

2) Calcolare $\bar{x}_B = B^{-1}b$ (ovvero risolvere $Bx_B = b$)

3) Se $\bar{x}_B \geq 0$ allora

$$\bar{x}_B = B^{-1}b$$
$$\bar{x}_N = 0_{n-m}$$

è una SBA $\iff$ un vertice

(se $\exists\, i \in I_B$ t.c. $\bar{x}_i = 0$ la SBA è degenere)

POLIEDRO $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ (forma generale)	POLIEDRO $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b;\ x \geq 0\}$ (in forma standard)
$\bar{x}$ vertice $\implies \exists\, n$ vincoli soddisfatti all'uguaglianza l.i	$\bar{x}$ vertice $\iff$ le colonne di A corrispondenti alle componenti positive di $\bar{x}$ sono l.i
$\#$ vertici $\leq \binom{m}{n}$	$\#$ vertici $= \#$ SBA $\leq \binom{n}{m}$
$\exists$ sicuramente almeno un vertice di P se $P \neq \emptyset$ e non contiene rette	P non contiene rette (poiché $\subseteq \{x \geq 0\}$). Se $P \neq \emptyset \implies P$ ammette almeno un vertice.

Esempio (quesito d'esame):

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$x \geq 0$$

a) $(1,1,1,0)^T$ e' un vertice

b) le colonne $\{a_1, a_2, a_4\}$ formano una matrice di base

c) $(3,0,0,0)^T$ e' una SBA

d) $(0,0,0,0)^T$ e' un vertice degenere

SOL:

$m = 3$

$n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $(1,1,1,0)^T$ e' un vertice $\Leftrightarrow$ + $(a_1\ a_2\ a_3)$ sono l.i e

deve essere ammissibile (lo e')

ma

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \text{a) FALSA}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det B = 2 \neq 0 \qquad \text{VERA}$$

c) VERO perche' c'e' solo una colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ L.I

inoltre e' ammissibile

d) FALSA perche' non e' ammissibile