Modelli di Programmazione Lineare Intera

Presenza di Costi Fissi

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Presenza di costi fissi

Analizziamo due classi di problemi
in cui si deve tenere conto **dei costi fissi**

- Problemi di Gestione delle Scorte
- Problemi di Localizzazione di Impianti

Problemi di gestione delle scorte

Uso dei costi fissi

Nell'ambito di problemi di allocazione di risorse abbiamo parlato di modelli *multiperiodo*:

problemi in cui la pianificazione della produzione è effettuata su un **orizzonte temporale formato fa più periodi elementari** e si suppone di poter **immagazzinare della merce prodotta** tra un periodo e l'altro

Vediamo un **modello più generale che tiene conto della presenza di costi fissi** in ogni periodo elementare

Formulazione Generale

Problemi di gestione delle scorte

Supponiamo di voler pianificare la produzione di un bene in un periodo $T = \{1, \ldots, t\}$

In ogni periodo è possibile immagazzinare una certa quantità di questo bene che potrà essere usata nel periodo successivo

Supponiamo di avere i seguenti dati:

- d_i, $i = 1, \ldots, t$:
  domanda nel periodo $i \in T$ (da soddisfare esattamente)
- c_i, $i = 1, \ldots, t$:
  costo della produzione di un'unità di bene nel periodo $i \in T$
- f_i, $i = 1, \ldots, t$:
  costo dell'avviamento della produzione nel periodo $i \in T$
- b_i, $i = 1, \ldots, t-1$:
  costo di stoccaggio di un'unità di bene nel periodo $i \in T$

Formulazione Generale

Problemi di gestione delle scorte

- **Variabili:**
  - $x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, t$:
    quantità di bene prodotto nel periodo $i \in T$
  - $s_i \geq 0,\ i = 1, \dots, t-1$:
    quantità di bene immagazzinato nel periodo $i \in T$
  - $\delta_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \dots, t$:
    $\delta_i = 1$ se nel periodo $i \in T$ c'è produzione

- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare i costi*

costi fissi x avviare la produzione

$$\sum_{i=1}^{t} (c_i x_i + f_i \delta_i) + \sum_{i=1}^{t-1} \underbrace{b_i s_i}$$

costo x la produzione dell'i-esimo bene della quantità x

costo di immagazzinamento dei prodotti

Formulazione Generale

Problemi di gestione delle scorte

- **Vincoli** :
  - Vincoli di domanda:

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 + s_1 \\ s_{i-1} + x_i &= d_i + s_i, \quad i = 2, \ldots, t-1 \\ s_{t-1} + x_t &= d_t \end{aligned}$$

  - Presenza dei costi fissi:

i costi fissi ci sono solo se avviene la produzione

$$x_i - M\delta_i \leq 0$$

M può essere posto pari a $\sum_{i=1}^{t} d_i$

  - Nonnegatività:

$$x_i \geq 0, \; s_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, t$$

  - $\delta_i \in \{0, 1\}, \; i = 1, \ldots, t$

Esempio 1

Un'industria deve pianificare la produzione di un unico prodotto per i prossimi tre mesi

La domanda mensile che il mercato è in grado di assorbire è nel primo, nel secondo e nel terzo mese pari rispettivamente a 120, 150 e 90 tonnellate

Questa industria dispone di magazzini e quindi ha la possibilità di stoccare le quantità prodotte nel primo o nel secondo mese, ma al termine del trimestre non intende lasciare scorte in magazzino

Lo stoccaggio ha un costo unitario (in migliaia di Euro per tonnellata) pari a 2

Esempio 1

Per la produzione di ciascuna tonnellata di prodotto l'industria deve sostenere un costo (variabile nei tre mesi) pari a 10, 12 e 11 migliaia di Euro rispettivamente nel primo, nel secondo e nel terzo mese

Per avviare la produzione in ogni mese l'industria ha un costo di set-up pari a 3000 euro

Si deve determinare quanto produrre mensilmente e quanto stoccare nei primi due mesi in modo da minimizzare il costo complessivo

Esempio problema gestione delle scorte:

Variabili: $x_i \quad i = 1,2,3$ $\longrightarrow$ quantita' dell'unico bene da produrre nel mese i.

s_1 , s_2 $\longrightarrow$ quantita' di bene da immagazzinare nei mesi 1 e 2.

$\delta_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se nel periodo i-esimo avviene la produzione} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \sum_{i=1}^{3} c_i x_i \Big) = 10x_1 + 12x_2 + 11x_3$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} f_i \delta_i \Big) = \sum_{i=1}^{3} 3\delta_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} b_i s_i \Big) = 2s_1 + 2s_2$$

vincoli di domanda

$$\begin{cases} x_1 = 120 + s_1 \\ x_2 + s_1 = 150 + s_2 \\ x_3 + s_2 = 90 \end{cases}$$

$M = 120 + 150 + 90 = 360$

$x_i - M\delta_i \leq 0 \quad i = 1,\dots,3\}$ $\leftarrow$ vincoli per esplicitare il legame tra x_i e δ_i $(x_i > 0 \Rightarrow \delta_i = 1)$

$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3, \quad s_1 \geq 0, \; s_2 \geq 0; \; \delta_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3$

$x_i > 0 \Rightarrow \delta_i = 1$

$\uparrow$ avviene la produzione

$x_i - M\delta_i \leq 0$ con M limite superiore su x_i

$\delta_i = 1$ $\quad$ $\delta_i \leq 1$

$x_i \leq M$

cv

Manca un pezzo

Problema di Localizzazione di Impianti

Si tratta di problemi che nascono nell'ambito della pianificazione industriale che possono essere schematizzati nel seguente modo:

- $A_1, \dots A_n$:
  aree distribuite su un territorio dove poter costruire una fabbrica/ aprire un negozio/ ...
- p_i:
  massima capacità produttiva dell'impianto aperto nell'area A_i
- f_i:
  costo fisso per l'apertura dell'impianto aperto nell'area A_i
- $C_1, \dots C_m$:
  siti dei magazzini ai quali deve essere trasportata la merce prodotta
- r_j:
  domanda del sito C_j, $j = 1, \dots, m$

Problema di Localizzazione di Impianti

Dati

- f_{ij}:
  costo fisso costruzione della strada da A_i a C_j, $i = 1, \ldots, n$
  $j = 1, \ldots, m$
- c_{ij}:
  costo del trasporto di un'unità di merce da A_i a C_j,
  $i = 1, \ldots, n$ $j = 1, \ldots, m$
- M_{ij}:
  quantitativo massimo di merce trasportabile da A_i a C_j,
  $i = 1, \ldots, n$ $j = 1, \ldots, m$

Problema di Localizzazione di Impianti

Si vuole determinare:

- quante ~~fabbriche~~ IMPIANTI costruire e su quali aree
- quali strade costruire

in modo da soddisfare le richieste dei clienti minimizzando i costi

- di costruzione delle fabbriche
- di costruzione delle strade
- del trasporto della merce

e determinando il piano per il trasporto della merce

Problema di Localizzazione di Impianti

Formulazione generale

- **Variabili:**
  - $x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, m$:
    quantità di merce trasportata dalla fabbrica costruita in A_i al sito C_j, $\quad i = 1, \ldots, n \ \ j = 1, \ldots, m$
  - $\delta_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, n$:
    $\delta_i = 1$ se viene costruita una fabbrica in A_i
  - $y_{ij} \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, m$:
    se viene costruita la strada che collega A_i e C_j

Problema di Localizzazione di Impianti

Formulazione generale

- **Vincoli di Richiesta:**

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = r_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

- **Vincoli Logici:**
  - Se $x_{ij} > 0$ allora $y_{ij} = 1$:

$$x_{ij} - M_{ij} y_{ij} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m$$

  - Se $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} > 0$ allora $\delta_i = 1$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - p_i \delta_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

- **Vincolo sulla quantità di fabbriche da aprire**: $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leq q$

Problema di Localizzazione di Impianti

Formulazione generale

- **Funzione obiettivo:** Minimizziamo i costi di

$$
\begin{array}{rcr}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & + & \text{trasporto} \\
\sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i & + & \text{apertura delle fabbriche} \\
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} y_{ij} & & \text{costruzione delle strade}
\end{array}
$$

Esempio 1

Una compagnia di distribuzione deve rifornire i suoi clienti $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$, $\mathbf{C_4}$ e $\mathbf{C_5}$ che sono dislocati in località diverse di una regione

Per ottimizzare il rifornimento la compagnia vuole costruire un numero di depositi non superiore a due disponendo di tre possibili zone dove costruirli

A seconda della zona in cui vengono costruiti, i tre possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi

	Costo costruzione	**Capacità massima**
Deposito 1	10000	180
Deposito 2	15000	230
Deposito 3	13000	500

Esempio 1

Il quantitativo di merce (in tonnellate) richiesto da ciascun cliente è riportato nella tabella che segue insieme ai costi (in migliaia di euro) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Richiesta	91	170	135	153	110
Deposito 1	15	13	27	9	7
Deposito 2	12	21	34	21	3
Deposito 3	7	10	2	17	12

Costruire un modello lineare che rappresenti il problema in analisi per soddisfare esattamente la richiesta minimizzando il costo complessivo trascurando la possibilità di costruire ulteriori collegamenti rispetto a quelli esistenti e supponendo che non ci siano limitazioni sulle quantità massime di merci trasportabili

Esempio localizzazione di impianti

Variabili: x_{ij} $\quad i = 1,2,3 \quad j = 1,\dots,5$ quantità di merce trasportata dal deposito D_i a C_j

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se viene costruito l'iesimo deposito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}\,x_{ij} \;) \rightarrow \text{costi di trasporto}$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} f_i\,\delta_i \;) \rightarrow \text{costi fissi}$$

$$\sum_{i=1}^{3} f_i\,\delta_i = 10.000\,\delta_1 + 15.000\,\delta_2 + 13.000\,\delta_3$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 91 \\ &\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 170 \\ &\quad\vdots \\ &\sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 110 \end{aligned}\right\} \text{VINCOLI DI DOMANDA}$$

Dobbiamo inserire i vincoli che esplicitano il ruolo di δ_i

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se viene aperto il deposito } i\text{-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} > 0 \iff \delta_i = 1$$

vincoli logici $\longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_{ij} - M_i\,\delta_i \le 0 \qquad i = 1,2,3$ con M_i limite superiore sulla quantità di merce nel deposito i-esimo (CAPACITA' MASSIMA

apro al più due depositi $\leftarrow$ $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \le 2$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1,\dots,3 \qquad j = 1,\dots,5$$

$$\delta_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3$$