CONDIZIONI DI ESISTENZA PO CONTINUA

$f: \underbrace{D}_{\text{dominio}} \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underbrace{F}_{\text{insieme ammissibile}} \subseteq D$ continua su F.

Con $F \neq \emptyset$ e F compatto (chiuso e limitato) $\Rightarrow$ P ammette ottimo globale

cioè $\exists\, x^* \in F$ t.c. $f(x^*) \le f(x)$ $\forall x \in F$

In questa lezione ci iniziamo a chiedere quali possano essere delle assunzioni sulla funzione obiettivo $f(x)$ che garantiscono l'esistenza di soluzioni ottime per il problema (P) $\min_{x \in F} f(x)$.

Senza assumere che F sia compatto

In particolare $\boxed{F = \mathbb{R}^n}$ → caso dei problemi NON vincolati

INSIEME DI LIVELLO DI f

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$

Si definisce INSIEME DI LIVELLO di f su D ogni insieme non vuoto del tipo

$$\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in D : f(x) \le \alpha\}$$

esempio:

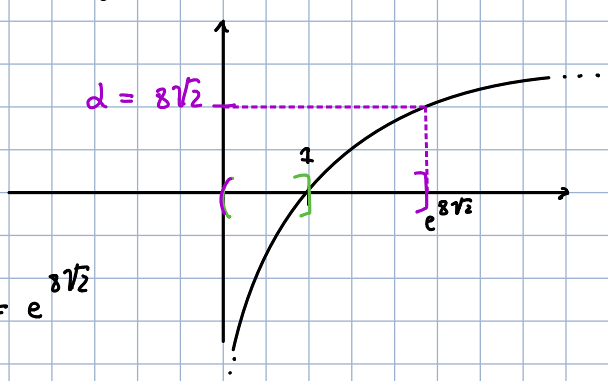
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \ln x \quad D = (0, +\infty)$

Sia $\alpha = 0$

$\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(0) = \{x \in D \mid f(x) \le 0\} = \{x \in D \mid \ln(x) \le 0\} = (0, 1]$

Sia $\alpha = 8\sqrt{2}$

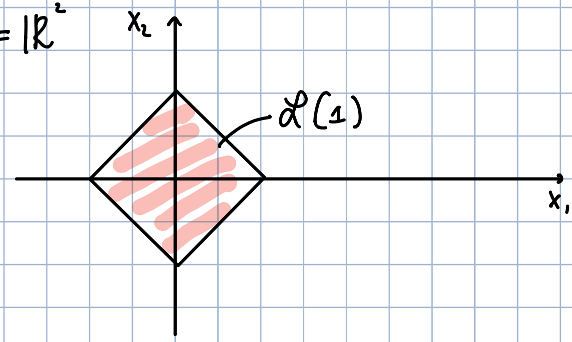
$\mathcal{L}(\alpha) = (0, e^{8\sqrt{2}}]$



$\ln(x) = 8\sqrt{2} \Rightarrow x = e^{8\sqrt{2}}$

esempio:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \quad D = \mathbb{R}^2$

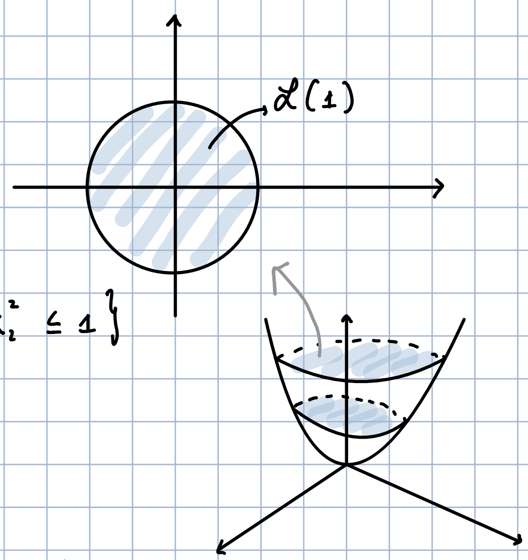


- $\alpha = 1$

$\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in D \mid f(x) \le \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \le 1\}$

esempio:

- $f(x) = \|x\|_2^2 \quad D = \mathbb{R}^2$



$\alpha = 1$

$\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2^2 \le 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$

In particolare se $x^0 \in F$ posso definire l'insieme di livello

$$\mathcal{L}(f(x^0)) = \{x \in F \mid f(x) \le f(x^0)\}$$

PROP:

Sia $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: F \to \mathbb{R}$ continua

Se $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ t.c $\underbrace{\mathcal{L}(\alpha)}_{\text{insieme di livello}} = \{x \in F \mid f(x) \le \alpha\}$ e' compatto e non vuoto.

allora $\exists$ un punto di minimo globale di f su F.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il problema

$$\min f(x) \quad x \in \mathcal{L}(\alpha)$$

$\Rightarrow$ essendo $f(x)$ continua e F compatto (e non vuoto) ammette sol. e possiamo applicare Waierstrass.

$\Rightarrow \exists\ x^* \in \mathcal{L}(\alpha)$ t.c $f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in \mathcal{L}(\alpha)$

Per definizione $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in F \mid f(x) \le \alpha\} \subseteq F$

sia $x \in F \rightarrow \begin{cases} \cdot\ x \in \mathcal{L}(\alpha) & x^* \text{ e' t.c } f(x^*) \le f(x) \\ \cdot\ x \in F \setminus \mathcal{L}(\alpha) & f(x) > \alpha \geq f(x^*) \Rightarrow f(x^*) \le f(x) \end{cases}$

prendo un generico punto x e considero due casi

sia $\underline{x^* \in \mathcal{L}(\alpha)}$ t.c $f(x^*) \le f(x)$ $\forall x \in \mathcal{L}(\alpha)$

$\exists$ per il teorema di W.