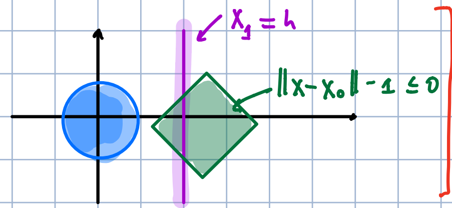
esempio

(problema di ottimizzazione continua vincolata) $\min f(x)$ $x \in S$ $S \subseteq \mathbb{R}^n$

$\min (x_2)$ [Considerando $\|x\|_2^2 - 5 \leq 0$ S risultava vuoto]



$$\begin{cases} \|x\|_2 - 5 \leq 0 \\ \|x - x_0\|_1 - 1 \leq 0 \\ x_1 - 4 = 0 \end{cases}$$

ove $x_0 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

la loro intersezione forma S

Nel nostro caso

$x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ ottenuto intersecando $\|x - x_0\|_1 - 1 \leq 0$ e $x_1 - 4 = 0$

ottimo globale

è un PO vincolato perché ci sono disuguaglianze e uguaglianze

PROPRIETÀ DEI VINCOLI

Def:

Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ il vincolo di disuguaglianza $g_i(x) \leq 0$ si dice:

- VIOLATO in $\bar{x}$ se $g_i(\bar{x}) > 0$
- ATTIVO in $\bar{x}$ se $g_i(\bar{x}) = 0$

Def:

Un vincolo si dice RIDONDANTE se eliminandolo l'insieme ammissibile non cambia

es:

$g_1(x) \leq 0$ è ridondante se

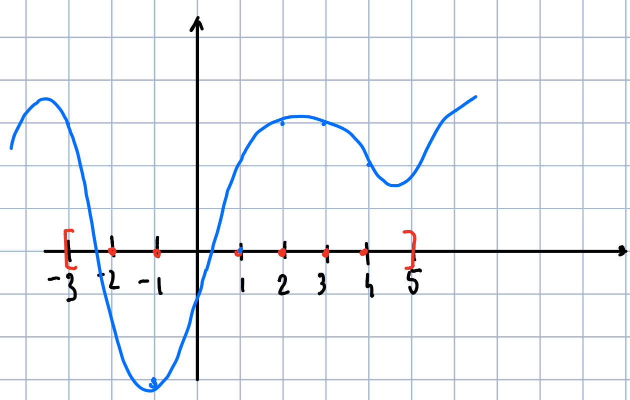
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} g_1 \leq 0 \\ \vdots \\ g_n \leq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} g_2 \leq 0 \\ \vdots \\ g_n \leq 0 \end{matrix} \right\}$$

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE DISCRETA

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S \cap \mathbb{Z}^n \end{cases} \qquad S \subseteq \mathbb{R}^n$$

esempio:

$S = [-3, 5] \subseteq \mathbb{R}$



Def:

Dato un problema di ottimizzazione discreta $x^* \in S \cap \mathbb{Z}^n$ è ottimo globale per il problema

se $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S \cap \mathbb{Z}^n$

$x^* \in S \cap \mathbb{Z}^n$ è ottimo locale per il problema

se $\exists\, r > 0$ t.c $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in B(x^*, r)$

La prima cosa da fare quando si vuole risolvere un problema di ottimizzazione $\min f(x)$

è chiedersi se AMMETTE SOLUZIONE

Occorre escludere

- $S = \emptyset$ ovvero che il problema sia inammissibile

- $\inf_{x \in S} f(x) = -\infty$ ovvero che il problema sia illimitato inferiormente

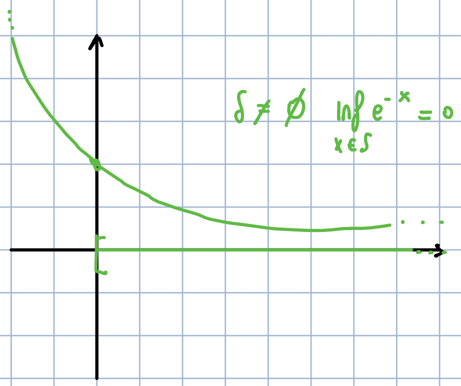
Non è sufficiente chiedere che si abbia

$S \neq 0$ e $\inf_{x \in S} f(x) > -\infty$ affinché il problema ammetta soluzione

vedere esempio annotato

esempio:

$\min e^{-x} \quad x \in [0, +\infty]$



$S \neq \emptyset \quad \inf_{x \in S} e^{-x} = 0$

* non riesco mai ad ottenere 0.

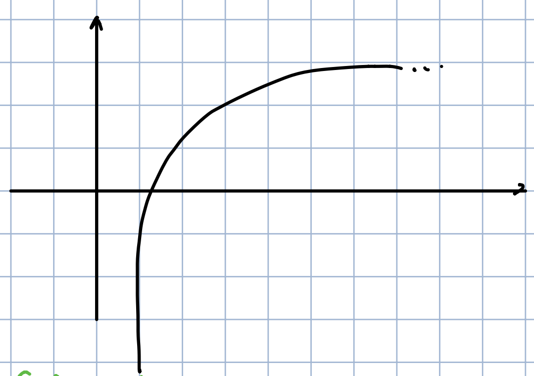
esempio:

$f(x) = \ln(x)$

$\begin{cases} \min \ln(x) \\ x \in S \end{cases}$

è illimitato inferiormente

$\forall M > 0 \ \exists x \in S \ \text{t.c.} \ f(x) < -M$



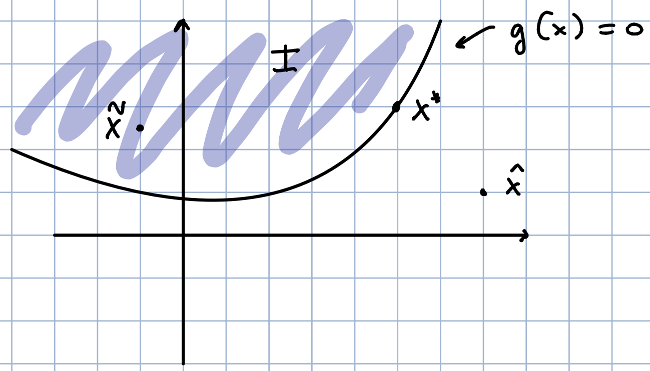
$\begin{cases} \max \ln x \\ x \in S \end{cases}$

illimitato superiormente

S deve essere contenuto nell'insieme di definizione di f $\quad S = (0, +\infty)$

esempio:

$I = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) \leq 0 \}$



In x^* g si dice ATTIVO

In $g(x^*) = 0$

In $\tilde{x}$ $\quad g(\tilde{x}) < 0$

In $\hat{x}$ $\quad g(\hat{x}) > 0 \Rightarrow g$ è violato

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA PO

TEOREMA

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme LIMITATO e sia $S \cap \mathbb{Z}^n$ non vuoto

Allora $\exists$ il minimo globale di f su $S \cap \mathbb{Z}^n$ $\Longleftrightarrow$ Condizione sufficiente affinché (P) ammette soluzione è che S sia limitato

DIM:

S limitato $\Rightarrow \exists\ r > 0 \quad \|x\|_{\infty} < r \quad \forall x \in S$

consideriamo la norma ∞

per definizione

$\|x\|_{\infty} < r \Longleftrightarrow \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i| < r \Rightarrow |x_i| < r$

Definiamo $r_z \in \mathbb{N}$ $(r_z > 0)$ t.c $r_z < r$

$S \cap \mathbb{Z}^n \subseteq S \Rightarrow |x_i| < r_z \Longleftrightarrow -r_z < x_i < r_z$

Dato il generico punto $x \in S \cap \mathbb{Z}^n$

$$x_i \in \{-r_z, -r_z - 1, -r_z - 2, \dots, 0, 1, \dots, r_z - 1, r_z\}$$

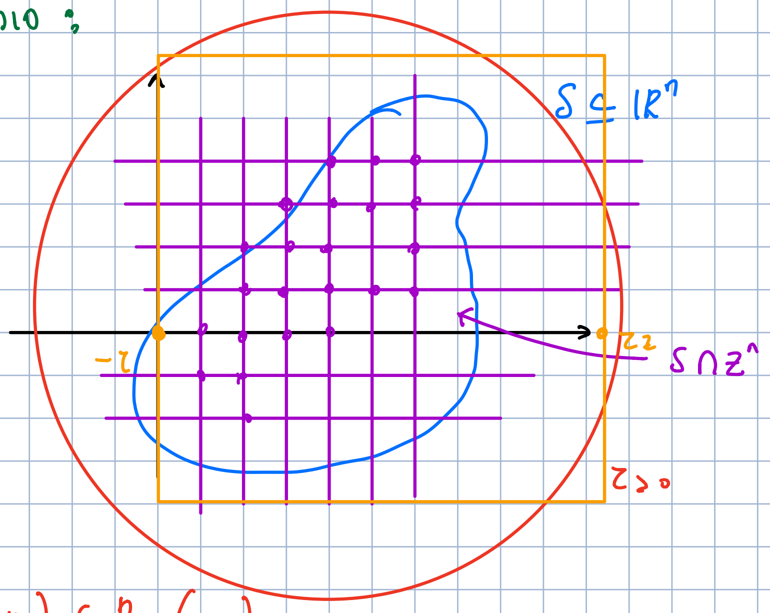
Ogni componente di un punto ammissibile può ammettere al più $2r_z + 1$ valori

$\Downarrow$

$S \cap \mathbb{Z}^n$ è formato al più $\underbrace{\text{da } (2r_z + 1)^n \text{ punti}}_{\text{un numero finito!}}$

L'ottimo globale sarà dato dal punto $\underbrace{x \in S \cap \mathbb{Z}^n}_{\text{insieme finito!}}$ t.c $\underbrace{f(\hat{x}) \le f(x) \quad \forall x \in S \cap \mathbb{Z}^n}_{\text{per determinarlo posso valutare la f.o in ogni } x \in S \cap \mathbb{Z}^n}$

esempio:



$B_2(0,r) \subseteq B_\infty(0,r)$

$\|x\|_\infty < r \iff |x_i| < r$

esempio:

$|x_i| < r \quad \exists\, r_2 < r$ t.c. $|x_i| < r_2 < r$