Modelli di Programmazione Lineare Intera

Variabili binarie per i vincoli disgiuntivi

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Uso delle variabili binarie

Soddisfacimento di vincoli disgiuntivi

In diversi applicazioni, può essere necessario modellare che **solo un sottoinsieme di vincoli deve essere soddisfatto** se scatta una determinata condizione dipendente da una variabile binaria

Esempio: Supponiamo di avere i vincoli

$$a_1^\top x \leq b_1$$
$$a_2^\top x \leq b_2$$

Introduciamo le variabili

$$y_1,\ y_2 \in \{0, 1\}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il vincolo i-esimo deve essere soddisfatto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Uso delle variabili binarie

Soddisfacimento di vincoli disgiuntivi

Vogliamo **modellare il fatto che solo uno dei vincoli venga effettivamente imposto** nel modello

Supponiamo che $M > 0$ sia tale che

$$a_i^T x \leq b_i + M$$

diventa un vincolo ridondante per il modello

Possiamo modellare questa situazione come:

$$a_1^T x \leq b_1 + M(1 - y_1)$$
$$a_2^T x \leq b_2 + M(1 - y_2)$$
$$y_1 + y_2 = 1$$
$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Uso delle variabili binarie

Soddisfacimento di vincoli disgiuntivi

Poiché $y_1 = 1 - y_2$,possiamo utilizzare un'unica variabile booleana e scrivere i vincoli come

$$a_1^T x \leq b_1 + M(1 - y_1)$$
$$a_2^T x \leq b_2 + My_1$$
$$y_1 \in \{0, 1\}$$

Esempio

Delicious, azienda alimentare inglese specializzata nel settore dolciario, sta valutando la possibilità di avviare la produzione di tre nuovi prodotti

L'azienda dispone di due stabilimenti, che possono essere utilizzati per realizzare tutti i prodotti

I tempi necessari per produrre una confezione di ciascun prodotto, insieme al profitto unitario in euro, sono riportati nella seguente tabella

Prodotto	**Stab1**	**Stab2**	**Profitto**
P1	2	2	10
P2	3	1	8
P3	1	4	12

Esempio

Il primo stabilimento può essere utilizzato al massimo 10 ore al giorno, mentre il secondo stabilimento può essere utilizzato al massimo 18 ore al giorno

Al fine di limitare i costi logistici, l'azienda ha deciso che **solo uno dei due stabilimenti dovrà essere utilizzato** per la produzione e **al massimo due dei tre prodotti dovranno essere messi in produzione**

L'obiettivo che si vuole raggiungere è quello di massimizzare il profitto giornaliero

Esempio - vincoli disgiuntivi

Variabili : x_1, x_2, x_3 — quantità di prodotto da fabbricare.

Vincoli di capacità

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \quad \text{(1° stabilimento)}$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 18 \quad \text{(2° stabilimento)}$$

solo uno dei due stabilimenti deve lavorare

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{se lavora il primo stabilimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

nel caso in cui vogliamo modellare la disgiunzione

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 + M(1-\delta)$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 18 + M\delta$$

con M costante molto grande (che fa divent. ridondante uno dei due vincoli)

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo prodotto viene fabbricato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inseriamo i vincoli che modellano $x_i > 0 \Rightarrow y_i = 1$

$$x_i - P_i y_i \leq 0$$

con P_i limite superiore sulla produzione x_i

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

fabbrichiamo al più due prodotti

Nel nostro modello massimizziamo il profitto :

Una classe di problemi in cui vengono usati vincoli disgiuntivi sono i **problemi di scheduling**:

problemi di produzione in cui si deve decidere l'ordine di processamento di una sequenza di lavori su una macchina in grado di eseguire un lavoro alla volta

Soddisfacimento di vincoli disgiuntivi

Problemi di Scheduling

- Si hanno n lavori
  - INDIPENDENTI *il tempo di esecuzione di ciascun lavoro non dipende da quando viene eseguito*
  - INDIVISIBILI *ciascun lavoro deve essere completato prima di poter eseguire il successivo*
- La macchina può iniziare la lavorazione di un qualunque lavoro in qualsiasi momento pause
- $p_i \quad i = 1, \ldots, n$ tempo di processamento del lavoro i-esimo

Nei problemi di scheduling si vuole **determinare gli istanti $t_i, \ i = 1, \ldots, n$ in cui la macchina inizia la lavorazione del lavoro i-esimo**, in modo da ottimizzare un opportuno criterio

Problemi di Scheduling

Formulazione

- **Variabili:**
  - $t_i \geq 0 \; i = 1, \ldots n$
    istanti di tempo di inizio dei lavori
  - $y_{ij} \in \{0,1\}; 1 \leq i < j \leq n$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro i-esimo precede} \\ & \text{il lavoro j-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Funzione obiettivo:**

  Ci sono varie funzioni obiettivo "standard", la più classica è *minimizzare il tempo medio di permanenza nel sistema*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i + p_i)$$

con $(t_i + p_i)$ tempo di permanenza del sistema del lavoro i-esimo

- **Vincoli:**
  - Se il lavoro i precede il lavoro j deve valere

$$t_j \geq t_i + p_i \quad \Leftrightarrow \quad t_i - t_j + p_i \leq 0$$

  - Se il lavoro j precede il lavoro i deve valere

$$t_i \geq t_j + p_j \quad \Leftrightarrow \quad t_j - t_i + p_j \leq 0$$

Sia $M > 0$ **un limite superiore** per entrambi i vincoli

Dobbiamo quindi inserire i vincoli

$$\begin{aligned} t_i - t_j + p_i &\leq M(1 - y_{ij}) & 1 \leq i < j \leq n \\ t_j - t_i + p_j &\leq My_{ij} & 1 \leq i < j \leq n \end{aligned}$$

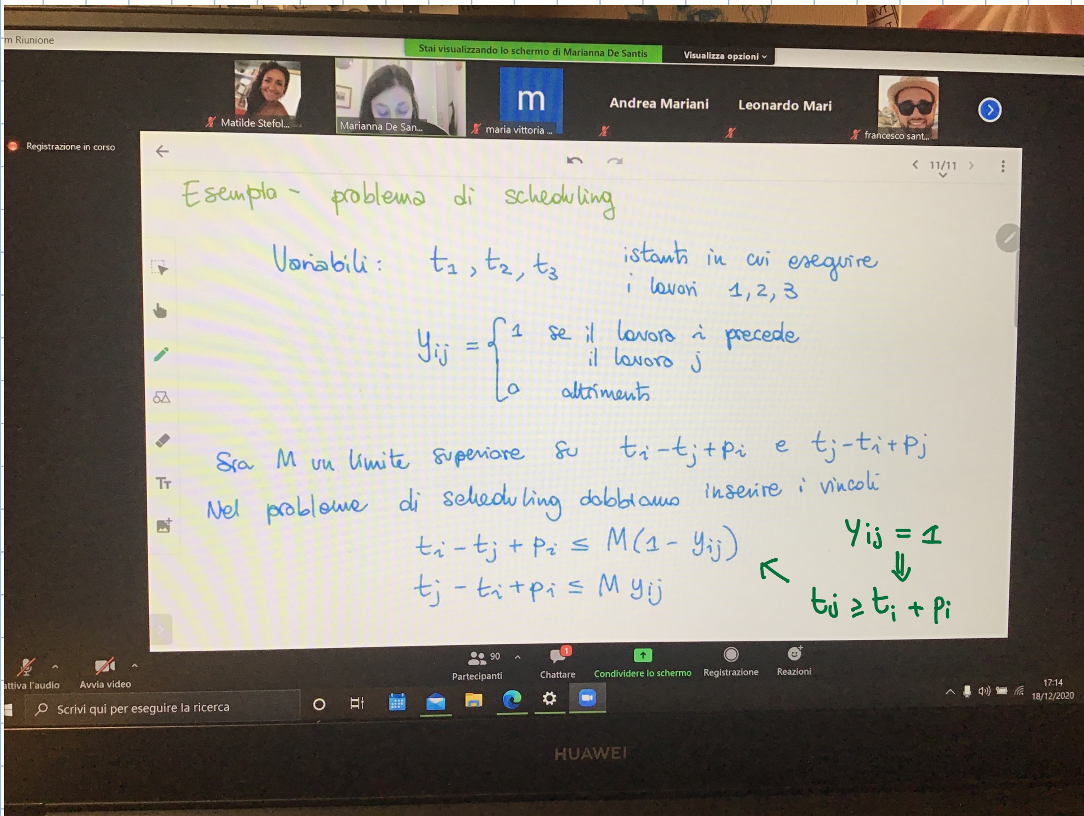
Esempio

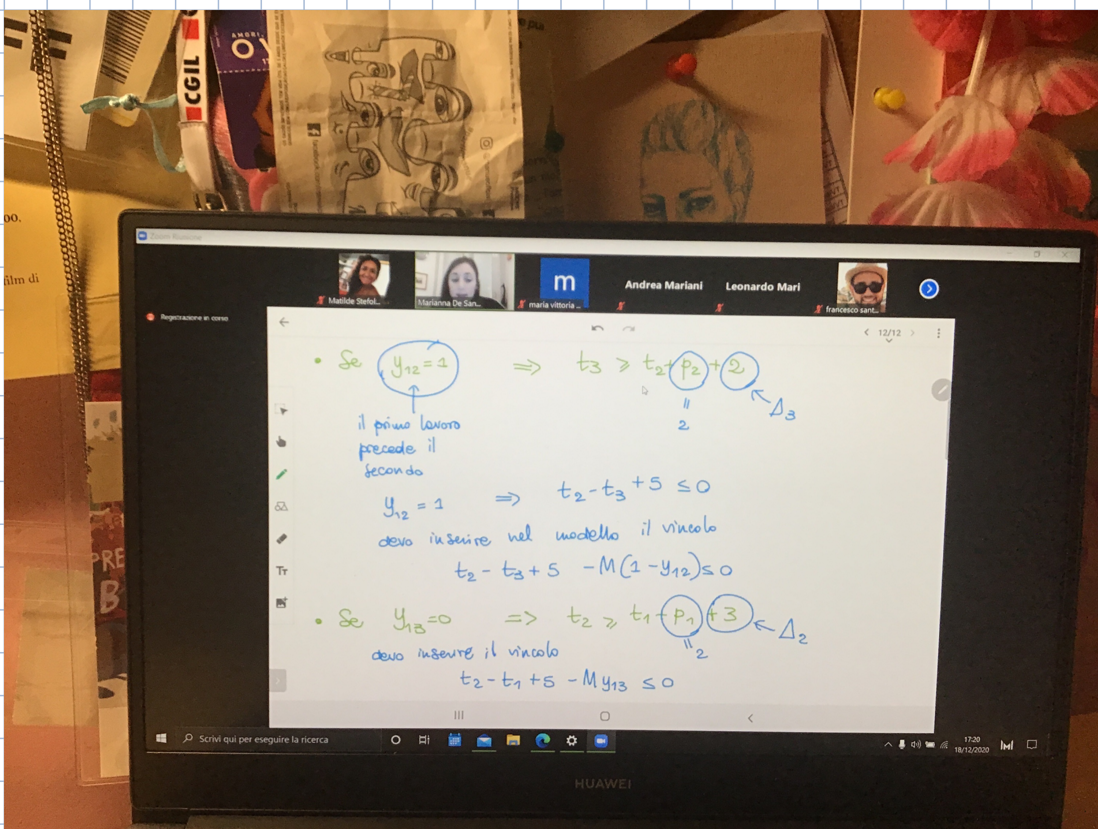
Sia data una macchina a capacità unitaria (ovvero in grado di eseguire un lavoro alla volta) che deve effettuare tre lavori aventi tempo di processamento $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 4,$

Formulare il problema di scheduling che consenta di determinare la sequenza che minimizza il tempo medio di permanenza nel sistema

tenendo conto che

- se il primo lavoro precede il secondo, l'inizio del terzo lavoro deve aspettare un tempo $\Delta_3 = 2$ dopo il termine del secondo lavoro
- se il terzo lavoro precede il primo, l'inizio del secondo deve attendere un tempo $\Delta_2 = 3$ dopo il termine del primo lavoro


Esempio - problema di scheduling
Variabili: t_1, t_2, t_3 istanti in cui eseguire i lavori 1, 2, 3
$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ precede il lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
Sia M un limite superiore su $t_i - t_j + p_i$ e $t_j - t_i + p_j$
Nel problema di scheduling dobbiamo inserire i vincoli
$t_i - t_j + p_i \leq M(1 - y_{ij})$
$t_j - t_i + p_i \leq M y_{ij}$
$y_{ij} = 1 \Downarrow t_j \geq t_i + p_i$


• Se $y_{12} = 1 \implies t_3 \geqslant t_2 + p_2 + 2$
$p_2 = 2$
Δ_3
il primo lavoro precede il secondo
$y_{12} = 1 \implies t_2 - t_3 + 5 \leq 0$
devo inserire nel modello il vincolo
$t_2 - t_3 + 5 - M(1 - y_{12}) \leq 0$
• Se $y_{13} = 0 \implies t_2 \geqslant t_1 + p_1 + 3$
$p_1 = 2$
Δ_2
devo inserire il vincolo
$t_2 - t_1 + 5 - M y_{13} \leq 0$