METODO DELLE PENALITA' SEQUENZIALI

Il metodo delle penalità sequenziali produce una successione di punti $\{x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, punti stazionari di problemi NON VINCOLATI.

Ad ogni iterazione il metodo delle penalità sequenziali considera il problema di ott. NON VINCOLATA

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P(x, \varepsilon^k) \qquad (P^k)$$

con

$$P(x, \varepsilon^k) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\}^2 + \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{j=1}^{p} h_j^2(x)$$

FUNZIONE DI PENALITA'

aggiunge dei termini positivi a $f(x)$ nel caso siano violati i vincoli

$\varepsilon^k =$ parametro di penalità

(Si parte da ε^k abbastanza grandi poi diminuendolo si spera di raggiungere punti che possono essere minimi del problema)

SCHEMA METODO PENALITA' SEQUENZIALI:

Passo 0: $x^0 \in \mathbb{R}^n$; $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0,1)$; $\varepsilon^0 > 0$, $\delta^0 > 0$, $k = 0$

Passo 1:

$$\lambda_i^k = \frac{2}{\varepsilon^{k-1}} \max\{0, g_i(x^k)\} \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\mu_j^k = \frac{2}{\varepsilon^{k-1}} \cdot h_j(x^k) \qquad j = 1, \dots, m$$

se (x^k, λ^k, μ^k) è un punto KKT $\boxed{\text{STOP}}$

altrimenti

Passo 2: A partire da x^k calcolare x^{k+1} t.c

$$\| \nabla_x P(x^{k+1}, \varepsilon^k) \| \leq \delta^k$$

criterio di arresto per il metodo non vincolato per (P^k)

Passo 3: se (sommo le violazioni)

$$\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x^{k+1})\}^2 + \sum_{j=1}^{p} h_j^2(x^{k+1}) \leq \theta_1 \left(\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x^k)\}^2 + \sum_{j=1}^{p} h_j^2(x^k) \right)$$

$\theta_1 \in (0,1)$ confronto la violazione dei vincoli in x^{k+1} e x^k

allora

$$\varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k$$

altrimenti

$$\varepsilon^{k+1} = \theta_2 \varepsilon^k$$

se dal confronto il mio punto non ha migliorato la situazione allora diminuiamo ε^k

Passo 4: Si pone $\delta^{k+1} = \theta_3 \delta^k$

$k = k+1$

e si torna al passo 1

$\theta_3 \in (0,1)$

all'aumentare delle iterazioni si richiede una precisione sempre più accurata nel determinare i punti stazionari di $\min_{x \in \mathbb{R}^n} P(x, \varepsilon^k)$

OSS:

$$\nabla_x P(x, \varepsilon^k) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{2}{\varepsilon^k} \max\{0, g_i(x)\}}_{\lambda_i} \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\frac{2}{\varepsilon^k} h_j(x^k)}_{\mu_j} \nabla h_j(x^k)$$

$$\| \nabla_x P(x^k, \varepsilon^k) \| \leq \delta^k \iff \| \nabla \mathcal{L}(x^k, \lambda^k, \mu^k) \| \leq \delta^k$$

TEOREMA

$f, g_i, h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$

Sia $\{x^k\}$ la successione prodotta dal metodo delle penalità sequenziali.

Sia $\bar{x}$ un punto di accumulazione di $\{x^k\}$ che soddisfa:

- $\nexists$ $\alpha_i \geq 0$ $\quad i \in \tilde{I}(\bar{x}) = \{ i \in \{1, \dots, m\} \mid g_i(\bar{x}) \geq 0 \}$

  β $\quad j = 1, \dots, p$

  NON TUTTI NULLI t.c.

$$\sum_{i \in \tilde{I}(\bar{x})} \alpha_i \nabla_i g(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

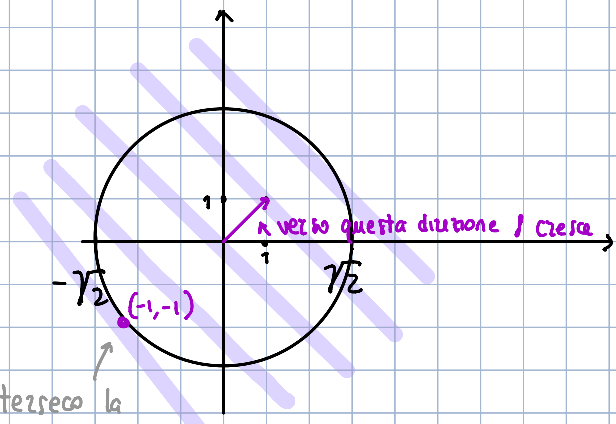
Allora

$\bar{x}$ è un punto KKT

Esempio :

$$\min \; x_1 + x_2 \quad \text{e' lineare } c^T x \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \quad \leftarrow h(x) = 0$$



interseco la linea di livello con il vincolo nella parte più a sud ovest

$$\mathcal{L}(\alpha) = \{(x_1, x_2) \mid f(x) = \alpha\} = $$
$$= \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = \alpha\}$$

Graficamente riconosciamo che $(-1,-1)$ e' il minimo locale di (P)

La funzione di penalita' utilizzata da metodo delle penalita' sequenziali :

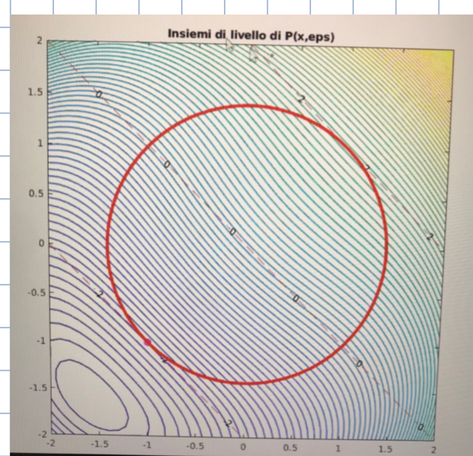
$$P(x, \varepsilon^k) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon^k} h(x)^2$$

$\bar{x}$ minimo globale $\Rightarrow$ $\bar{x}$ minimo locale $\Rightarrow$ $\bar{x}$ e' F-J in realta' e' KKT perche' vale banalmente la LICQ (c'e' un unico vincolo di disug.)

$\downarrow$
$(-1,1)$

Cerchiamo $\mu \in \mathbb{R}$ t.c

$$\nabla f(\bar{x}) + \mu \nabla h(\bar{x}) = 0$$



$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 2\mu \bar{x}_1 = 0 \\ 1 + 2\mu \bar{x}_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 2\mu = 0 \\ 1 - 2\mu = 0 \end{cases} \iff \mu = 1/2 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \right) \text{ e' KKT}$$