

# Modelli di Programmazione Lineare Intera



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo che il nostro modello utilizzi una variabile continua

$$x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0$$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo che il nostro modello utilizzi una variabile continua

$$x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0$$

e che noi **vogliamo imporre vincoli logici** del tipo

- $x_i > 0 \Rightarrow A$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo che il nostro modello utilizzi una variabile continua

$$x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0$$

e che noi **vogliamo imporre vincoli logici** del tipo

- $x_i > 0 \Rightarrow A$
- $x_i = 0 \Rightarrow \bar{A}$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo che il nostro modello utilizzi una variabile continua

$$x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0$$

e che noi **vogliamo imporre vincoli logici** del tipo

- $x_i > 0 \Rightarrow A$
- $x_i = 0 \Rightarrow \bar{A}$

dove  $A$  è una certa proposizione

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo che il nostro modello utilizzi una variabile continua

$$x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0$$

e che noi **vogliamo imporre vincoli logici** del tipo

- $x_i > 0 \Rightarrow A$
- $x_i = 0 \Rightarrow \bar{A}$

dove  $A$  è una certa proposizione

*Esempi:*

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo che il nostro modello utilizzi una variabile continua

$$x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0$$

e che noi **vogliamo imporre vincoli logici** del tipo

- $x_i > 0 \Rightarrow A$
- $x_i = 0 \Rightarrow \bar{A}$

dove  $A$  è una certa proposizione

*Esempi: “se fabbrico il prodotto  $i$ -esimo deve essere fabbricato anche il prodotto  $j$ -esimo”,*



# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo che il nostro modello utilizzi una variabile continua

$$x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0$$

e che noi **vogliamo imporre vincoli logici** del tipo

- $x_i > 0 \Rightarrow A$
- $x_i = 0 \Rightarrow \bar{A}$

dove  $A$  è una certa proposizione

*Esempi: “se fabbrico il prodotto  $i$ -esimo deve essere fabbricato anche il prodotto  $j$ -esimo”, “se l’ingrediente  $i$ -esimo non è inserito nella miscela non deve essere inserito neanche l’ingrediente  $j$ -esimo”,*

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo che il nostro modello utilizzi una variabile continua

$$x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0$$

e che noi **vogliamo imporre vincoli logici** del tipo

- $x_i > 0 \Rightarrow A$
- $x_i = 0 \Rightarrow \bar{A}$

dove  $A$  è una certa proposizione

*Esempi: “se fabbrico il prodotto  $i$ -esimo deve essere fabbricato anche il prodotto  $j$ -esimo”, “se l’ingrediente  $i$ -esimo non è inserito nella miscela non deve essere inserito neanche l’ingrediente  $j$ -esimo”, ecc...*

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo di conoscere un valore  $M > 0$  **limite superiore per la variabile**  $x_i$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo di conoscere un valore  $M > 0$  **limite superiore per la variabile**  $x_i$

Sia  $\delta \in \{0, 1\}$  la **variabile binaria associata alla proposizione**  $A$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo di conoscere un valore  $M > 0$  **limite superiore per la variabile**  $x_i$

Sia  $\delta \in \{0, 1\}$  la **variabile binaria associata alla proposizione**  $A$

Il **vincolo** che può modellare

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad A$$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo di conoscere un valore  $M > 0$  **limite superiore per la variabile**  $x_i$

Sia  $\delta \in \{0, 1\}$  la **variabile binaria associata alla proposizione**  $A$

Il **vincolo** che può modellare

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad A \quad \Leftrightarrow$$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo di conoscere un valore  $M > 0$  **limite superiore per la variabile**  $x_i$

Sia  $\delta \in \{0, 1\}$  la **variabile binaria associata alla proposizione**  $A$

Il **vincolo** che può modellare

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad A \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} \quad \Rightarrow \quad x_i = 0$$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo di conoscere un valore  $M > 0$  **limite superiore per la variabile**  $x_i$

Sia  $\delta \in \{0, 1\}$  la **variabile binaria associata alla proposizione**  $A$

Il **vincolo** che può modellare

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad A \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} \quad \Rightarrow \quad x_i = 0$$

è il seguente



# Vincoli Logici

## Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Supponiamo di conoscere un valore  $M > 0$  **limite superiore per la variabile**  $x_i$

Sia  $\delta \in \{0, 1\}$  la **variabile binaria associata alla proposizione**  $A$

Il **vincolo** che può modellare

$$x_i > 0 \Rightarrow A \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} \Rightarrow x_i = 0$$

è il seguente

$$x_i - \delta M \leq 0, \quad \delta \in \{0, 1\}$$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Il vincolo che può modellare

$$x_i = 0 \Rightarrow \bar{A}$$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Il vincolo che può modellare

$$x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{A} \quad \Leftrightarrow$$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Il vincolo che può modellare

$$x_i = 0 \Rightarrow \bar{A} \Leftrightarrow A \Rightarrow x_i > 0$$

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Il vincolo che può modellare

$$x_i = 0 \Rightarrow \bar{A} \Leftrightarrow A \Rightarrow x_i > 0$$

è il seguente

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Il vincolo che può modellare

$$x_i = 0 \Rightarrow \bar{A} \Leftrightarrow A \Rightarrow x_i > 0$$

è il seguente

$$x_i - \epsilon\delta \geq 0, \quad \delta \in \{0, 1\}$$

con  $\epsilon > 0$  (valore molto piccolo)

# Vincoli Logici

Variabili binarie come Variabili Indicatrici

Il vincolo che può modellare

$$x_i = 0 \Rightarrow \bar{A} \Leftrightarrow A \Rightarrow x_i > 0$$

è il seguente

$$x_i - \epsilon\delta \geq 0, \quad \delta \in \{0, 1\}$$

con  $\epsilon > 0$  (valore molto piccolo)

**N.B:**  $x_i - \epsilon\delta > 0$  imporrebbe  $x_i > 0$   
per qualunque valore di  $\delta \in \{0, 1\}$

# Esempio

Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di calorie, proteine e calcio, intese come fabbisogni minimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base (pane, latte, uova, carne, dolce)



# Esempio

Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di calorie, proteine e calcio, intese come fabbisogni minimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base (pane, latte, uova, carne, dolce)

Tali fabbisogni minimi sono di 2000 calorie, 50 g. di proteine, 700 mg. di calcio

# Esempio

Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di calorie, proteine e calcio, intese come fabbisogni minimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base (pane, latte, uova, carne, dolce)

Tali fabbisogni minimi sono di 2000 calorie, 50 g. di proteine, 700 mg. di calcio

Dalle tabelle dietetiche si ricavano i seguenti contenuti di calorie (in cal.), proteine (in g.), calcio (in mg.) per ogni singola porzione di ciascun alimento, intendendo come porzione una quantità espressa in grammi e quindi frazionabile

# Esempio

Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di calorie, proteine e calcio, intese come fabbisogni minimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base (pane, latte, uova, carne, dolce)

Tali fabbisogni minimi sono di 2000 calorie, 50 g. di proteine, 700 mg. di calcio

Dalle tabelle dietetiche si ricavano i seguenti contenuti di calorie (in cal.), proteine (in g.), calcio (in mg.) per ogni singola porzione di ciascun alimento, intendendo come porzione una quantità espressa in grammi e quindi frazionabile

	pane	latte	uova	carne	dolci
calorie	110	160	180	260	420
proteine	4	8	13	14	4
calcio	2	285	54	80	22

# Esempio

I costi (in Euro) e il numero massimo di porzioni tollerate giornalmente sono i seguenti

	pane	latte	uova	carne	dolci
costo	2	3	4	19	20
porzione	4	8	3	2	2

# Esempio

I costi (in Euro) e il numero massimo di porzioni tollerate giornalmente sono i seguenti

	pane	latte	uova	carne	dolci
costo	2	3	4	19	20
porzione	4	8	3	2	2

Determinare una dieta a costo minimo che soddisfi le prescrizioni richieste, considerando i seguenti vincoli:

# Esempio

I costi (in Euro) e il numero massimo di porzioni tollerate giornalmente sono i seguenti

	pane	latte	uova	carne	dolci
costo	2	3	4	19	20
porzione	4	8	3	2	2

Determinare una dieta a costo minimo che soddisfi le prescrizioni richieste, considerando i seguenti vincoli:

(a) Se si mangia carne non si devono mangiare uova

# Esempio

I costi (in Euro) e il numero massimo di porzioni tollerate giornalmente sono i seguenti

	pane	latte	uova	carne	dolci
costo	2	3	4	19	20
porzione	4	8	3	2	2

Determinare una dieta a costo minimo che soddisfi le prescrizioni richieste, considerando i seguenti vincoli:

- (a) Se si mangia carne non si devono mangiare uova
- (b) Se si mangia pane non si devono mangiare dolci

# Variabili binarie come Variabili Indicatrici

## Schema

### Condizione Logica

### Vincolo

$$x_i > 0 \Rightarrow A$$

$$x_i - M\delta \leq 0$$

$$x_i > 0 \Rightarrow \bar{A}$$

$$x_i - M(1 - \delta) \leq 0$$

$$x_i = 0 \Rightarrow A$$

$$x_i - \epsilon(1 - \delta) \geq 0$$

$$x_i = 0 \Rightarrow \bar{A}$$

$$x_i - \epsilon\delta \geq 0$$

con

- $M > 0$  limite superiore per la variabile  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $x_i \geq 0$
- $\delta \in \{0, 1\}$  variabile binaria associata alla proposizione  $A$
- $\epsilon > 0$