Esercizio 3. *Il signor Rossi è proprietario di una grande catena di supermercati e ha deciso di aprire 5 nuovi negozi. Ha a disposizione 10 possibili locali e ha stimato che p_i è il guadagno relativo all'apertura del supermercato nel locale i-esimo ($i = 1, \dots, 10$). Formulare un problema di programmazione lineare intera per determinare quali locali considerare per l'apertura dei supermercati tenuto conto che:*

- *se un supermercato viene aperto nel secondo locale, ne deve essere aperto uno anche nel terzo locale*
- *se vengono aperti i supermercati nei locali 1* **e** *7, non può essere aperto il supermercato nel locale 8,*
- *se vengono aperti i supermercati nei locali 3* **o** *4, non può essere aperto il supermercato nel locale 5.*

FOGLIO 7

AND	V	F
V	V	F
F	F	F

Variabili: $x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 10$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se apro il supermercato nel locale } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

X_i = "apro il supermercato nel locale i"

$\overline{\text{AND}}$	V	F
V	F	V
F	V	V

Vincoli:

1) Aprire 5 nuovi negozi $\Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_i = 5$

2) $X_2 \Rightarrow X_3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x_2 + x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 \geq x_2$

infatti se $x_2 = 1 \Rightarrow x_3 \geq 1$ quindi il vincolo ha senso

3) $X_1 \wedge X_7 \Rightarrow \overline{X}_8 \Rightarrow (\overline{X_1 \wedge X_7}) \vee \overline{X}_8$

$(1 - x_1) + (1 - x_7) + (1 - x_8) \geq 1 \Rightarrow x_1 + x_7 + x_8 \leq 2$

4) $X_3 \vee X_4 \Rightarrow \overline{X}_5 \quad \Leftrightarrow (\overline{X_3 \vee X_4}) \vee \overline{X}_5 \Leftrightarrow (\overline{X}_3 \wedge \overline{X}_4) \vee \overline{X}_5$

$\Leftrightarrow (\overline{X}_3 \vee \overline{X}_5) \wedge (\overline{X}_4 \vee \overline{X}_5)$

$\Leftrightarrow (1 - x_3) + (1 - x_5) \geq 1 \Leftrightarrow x_5 \leq 1 - x_3$

$(1 - x_4) + (1 - x_5) \geq 1 \Leftrightarrow x_5 \leq 1 - x_4$

OR	V	F
V	V	V
F	V	F

$\overline{\text{OR}}$	V	F
V	F	F
F	F	V

(se volessimo esprimere $x_1 \wedge x_7 \Rightarrow \overline{x_8} \wedge \overline{x_2} \iff (\overline{x_1 \wedge x_7}) \Rightarrow \overline{x_8} \wedge \overline{x_2}$

$$x_1 + x_7 + x_8 \geq 2$$

$$x_1 + x_7 + x_2 \geq 2$$

$$((\overline{x_1 \wedge x_7}) \vee \overline{x_8})$$
$$\wedge\ ((\overline{x_1 \wedge x_7}) \vee \overline{x_2})$$

Esercizio 4. *Lorenzo deve trasferirsi e deve traslocare n oggetti di dimensione a_j, $j = 1, \ldots, n$. Sta quindi pensando di comprare m scatole di cartone e affittare un camion di dimensione Q. Ogni scatola ha dimensione b_i, $i = 1, \ldots, m$. Lorenzo vuole capire se può fare un unico viaggio e si rivolge a voi, esperti di modelli di programmazione lineare intera: potete aiutare Lorenzo?*

Variabili : $x_{ij} \in \{0,1\}$ $\quad i = 1, \ldots, m$ $\quad j = 1, \ldots, n$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ e' inserito nella scatola } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\delta_i \in \{0,1\}$ $\quad i = 1, \ldots, m$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se la scatola } i \text{ viene inserita nel camion} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli :

- Assegno ogni oggetto ad una scatola : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n$
- Vincolo di Knapsack per la scatola : $\sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m$
- Vincolo di Knapsack per il camion : $\sum_{i=1}^{m} b_i \delta_i \leq Q$
- L'oggetto j e' inserito nel camion se viene presa la scatola δ_i a cui e' assegnato : $x_{ij} = 1 \Rightarrow \varphi_i = 1 \quad j = 1, \ldots, n$

$\overline{x_{ij}} \vee \varphi_i \longrightarrow 1 - x_{ij} + \varphi_i \geq 1 \iff \varphi_i \geq x_{ij}$

x_{ij} = "Inserisco j nella scatola i"

δ_i = "prendo la scatola i"

Il problema e' di ammissibilità:

Ammette una soluzione ammissibile?

$$\min \; c^T x$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 & j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \leq b_j & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} b_i \delta_i \leq Q & \\ x_{ij} \leq \delta_i & j = 1, \dots, n \quad i = 1, \dots, m \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \\ \delta_i \in \{0, 1\} & \end{cases}$$

Esercizio 3. *Una compagnia petrolifera dispone di 5 pozzi (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) dai quali può estrarre petrolio. Le quantità massime di petrolio estraibili giornalmente da ciascuno dei pozzi e il costo di estrazione di un ettolitro di petrolio è riportato nella seguente tabella*

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
quantità massime	1000	900	850	700	1200
costo unitario(€)	170	125	200	160	130

La compagnia deve pianificare giornalmente l'estrazione del petrolio scegliendo quali dei pozzi utilizzare e la quantità di petrolio da estrarre da ciascuno di essi dovendo soddisfare esattamente una richiesta giornaliera di 3000 ettolitri di petrolio minimizzando il costo complessivo dato dal costo di estrazione e dal costo giornaliero degli operai addetti; quest'ultimo costo è differenziato a seconda dei pozzi ed è riportato nella tabella seguente

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Costo operai(€)	50	55	45	48	52

Costruire un modello lineare che rappresenti il problema di pianificazione descritto tenendo conto che il costo degli operai è legato all'utilizzazione di un determinato pozzo cioè tale costo esiste solo se il corrispondente pozzo è effettivamente utilizzato.

FOGLIO 8

Variabili : x_i $\quad i = 1, \dots, 5$ $\quad$ quantita' di hL di petrolio estratto giornalmente da P_i

$\delta_i \in \{0, 1\}$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } P_i \text{ e' utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \; 170x_1 + 125x_2 + 200x_3 + 160x_4 + 130x_5 + 50\delta_1 + 55\delta_2 + 45\delta_3 + 48\delta_4 + 52\delta_5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 3000$$

$$x_i > 0 \implies \delta_i = 1$$

$$x_i - M_i\delta_i \leq 0 \qquad M_i = \text{quantita' massime di } x_i$$

$$i = 1, \dots, 5$$

$$x_i \geq 0$$

$$\delta_i \in \{0, 1\}$$

Esercizio 1. *Scrivere in forma standard i seguenti problemi di programmazione lineare:*

$$\begin{array}{llcll} \min & x_1 + x_2 - 2x_3 & \qquad & \min & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 & & & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 1 & & & -1 \leq x_1 \leq 1 \\ & x_3 \geq 0 & & & x \geq 0 \end{array}$$

1) $\min \; X_1 + X_2 - 2X_3$

$X_1 + X_2 \leq 3$

$X_1 \leq 1$

$X_3 \geq 0$

$\Longrightarrow$

$\min \; X_1 + X_2 - 2X_3$

$X_1 + X_2 + X_4 = 3$

$X_1 + X_5 = 1$

$X_1 = X_6 - X_7$

$X_2 = X_8 - X_9$

$X_i \geq 0 \quad i = 1, \dots 9$

$\Longrightarrow$

$\min \; X_6 - X_7 + X_8 - X_9 - 2X_3$

$X_6 - X_7 + X_8 - X_9 + X_4 = 3$

$X_6 - X_7 + X_9 = 1$

$X_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 9$

2) $\min \; 2X_1 + X_2$

$X_1 - X_2 + X_3 = 3$

$X_1 + X_5 = 1$

$X \geq 0$

Esercizio 2. *Determinare le SBA dei problemi di programmazione lineare aventi per insiemi ammissibili i seguenti poliedri:*

$$P_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_3 = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad P_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$P_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 2 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad P_4 = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

P_1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad n = 4 \quad m = 2$$

$$\binom{n}{m} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

Tutte le possibili soluzioni da A:

considero tutte le sottomatrici di A

$$I_{B_1} = \{1,2\} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ B_1 e' una base NON ammissibile

$$I_{B_2} = \{1,3\} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ e' una SBA

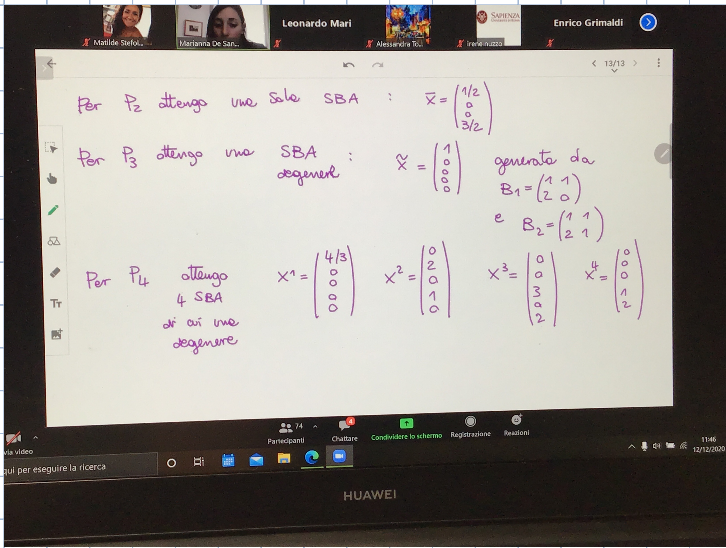
$$IB_3 = \{1,4\} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_3^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} < 0$$

non e' amm.

$IB_4 = \{2,3\}$

$IB_5 = \{2,4\}$ da finire

$IB_6 = \{3,4\}$



soluzioni altri poliedri

<u>da fare</u>

Esercizio 2. *Determinare i vertici dei seguenti poliedri:*

$$P_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ -x_1 - 3x_3 \geq -6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \qquad P_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$P_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + x_3 \geq -1 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{array} \right\} \qquad P_4 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

DA FARE

soluzioni: