

Modelli di allocazione ottima di risorse

Modelli di allocazione di risorse

recap

Nell'ambito dei **modelli di allocazione di risorse** abbiamo introdotto:

Modelli di allocazione di risorse

recap

Nell'ambito dei **modelli di allocazione di risorse** abbiamo introdotto:

- Modelli con **risorse concorrenti**

nella produzione di un bene occorre combinare tutte le risorse

Modelli di allocazione di risorse

recap

Nell'ambito dei **modelli di allocazione di risorse** abbiamo introdotto:

- Modelli con **risorse concorrenti**

nella produzione di un bene occorre combinare tutte le risorse

- Modelli con **risorse alternative**

ogni risorsa può autonomamente produrre il bene

Modelli di allocazione di risorse

Introduciamo ora altri due esempi di modelli di allocazione di risorse:

Modelli di allocazione di risorse

Introduciamo ora altri due esempi di modelli di allocazione di risorse:

- **Modelli Multi-Plant**

si hanno a disposizione più impianti di produzione

Modelli di allocazione di risorse

Introduciamo ora altri due esempi di modelli di allocazione di risorse:

- **Modelli Multi-Plant**

si hanno a disposizione più impianti di produzione

- **Modelli Multi-Periodo**

la pianificazione della produzione prevede anche la gestione di come deve avvenire la produzione in un arco temporale formato da periodi elementari

Modelli Multi-Plant

Nell'ipotesi di avere più impianti di produzione si può decidere di farli lavorare

Modelli Multi-Plant

Nell'ipotesi di avere più impianti di produzione si può decidere di farli lavorare

- in **MODO SEPARATO**

decidendo **a priori** quanta produzione è assegnata ad ogni impianto (e quindi avrò n problemi separati, con n numero di impianti che lavorano in modo separato)

Modelli Multi-Plant

Nell'ipotesi di avere più impianti di produzione si può decidere di farli lavorare

- in **MODO SEPARATO**

decidendo **a priori** quanta produzione è assegnata ad ogni impianto (e quindi avrò n problemi separati, con n numero di impianti che lavorano in modo separato)

- in **MODO COMBINATO**

facendo **decidere al modello** come distribuire la produzione tra gli impianti

Esempio

Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica i prodotti P_1 e P_2 utilizzando due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura.

Esempio

Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica i prodotti P_1 e P_2 utilizzando due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura.

Per avere un prodotto finito è necessario l'uso di entrambe le macchine. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel primo impianto sono rispettivamente di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali.

Esempio

Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica i prodotti P_1 e P_2 utilizzando due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura.

Per avere un prodotto finito è necessario l'uso di entrambe le macchine. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel primo impianto sono rispettivamente di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali.

La tabella che segue riporta, per ciascun prodotto, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina

Esempio

Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica i prodotti **P₁** e **P₂** utilizzando due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura.

Per avere un prodotto finito è necessario l'uso di entrambe le macchine. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel primo impianto sono rispettivamente di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali.

La tabella che segue riporta, per ciascun prodotto, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina

	IMPIANTO 1		IMPIANTO 2	
	P1	P2	P1	P2
levigatura	4	2	5	3
pulitura	2	5	5	6

Esempio

Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo.

Esempio

Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo.

Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto P_1 e P_2 è rispettivamente di 10€ e 15€.

Esempio

Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo.

Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto P_1 e P_2 è rispettivamente di 10€ e 15€.

- (a) Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti in ciascun impianto sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto.

Esempio

Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo.

Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto P_1 e P_2 è rispettivamente di 10€ e 15€.

- (a) Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti in ciascun impianto sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto.
- (b) Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti supponendo che l'industria non allochi a priori 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto, ma lasci al modello la decisione di come ripartire tra i due impianti 120 Kg complessivi disponibili di questo materiale grezzo.

MODELLO MULTI-PLANT

Si hanno a disposizione più impianti di produzione

L'azienda può decidere se lavorare:

1) IN MODO SEPARATO → dicendo a priori quanta produzione è assegnata a ogni impianto (in prob. separati, con n impianti)

2) IN MODO COMBINATO → facendo decidere al modello come distribuire la produzione tra impianti

Esempio:

Il materiale grezzo viene decesso a priori, entrambe le macchine devono essere usate

4 kg di materiale
per unità di prodotto

	IMPIANTO 1		IMPIANTO 2		h_1	h_2
	P_1	P_2	P_1	P_2		
levigatura	4	2	5	3	80	60
pulitura	2	5	5	6	60	75
	10€	15€	10€	15€		

a) MODO SEPARATO

Variabili: $\underbrace{x_1, x_2}_{P_1 \text{ e } P_2}$

$\underbrace{x_3 \text{ e } x_4}_{P_1 \text{ e } P_2}$

fabbricati da I_1 , fabbricati da I_2

$I_1, 75 \text{ kg}$
 $I_2, 45 \text{ kg}$

F.O.: $\max 10(\text{quantità di } P_1) + 15(\text{quantità di } P_2)$

$$\max 10(x_1 + x_3) + 15(x_2 + x_4)$$

Vincoli: macchina levigatura:

$$I_1 \rightarrow 4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$I_2 \rightarrow 5x_3 + 3x_4 \leq 60$$

$$\left. \begin{array}{l} 4(x_1 + x_3) \leq 75 \\ 4(x_2 + x_4) \leq 45 \end{array} \right\}$$

Macchina di pulitura

$$I_1 \rightarrow 2x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$I_2 \rightarrow 5x_3 + 6x_4 \leq 75$$

Vincoli sulla quantità di materiale grezzo da allocare

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \quad \} \text{ vincoli di non negatività}$$

Il modello lo posso vedere spezzato, scrivo due modelli:

$$\max 10(x_1 + x_3) + 15(x_2 + x_4) = \max(10x_1 + 15x_2) + \max(10x_3 + 15x_4)$$

$$\left. \begin{array}{l} h(x_1 + x_2) \leq 75 \\ h(x_3 + x_4) \leq 45 \end{array} \right\} \text{materiale} \quad \left. \begin{array}{l} h(x_1 + x_2) \leq 75 \\ hx_1 + 2x_2 \leq 80 \end{array} \right\} \text{grazie} \quad \left. \begin{array}{l} h(x_3 + x_4) \leq 45 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \end{array} \right.$$

resta
il modo in cui siamo
ammissibile quindi

e' meno vantaggioso $h x_1 + 2 x_2 \leq 80$

$$5x_3 + 3x_4 \leq 60$$

$$5x_3 + 6x_4 \leq 75$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$5x_3 + 3x_4 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

b) MODO COMBINATO

120 kg e' il modello a decidere
come dividere il materiale

Ci fara' un unico modello

$$\max 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4$$

$$hx_1 + hx_2 + hx_3 + hx_4 \leq 120$$

$$hx_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$5x_3 + 3x_4 \leq 60$$

$$5x_3 + 6x_4 \leq 75$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Nel caso a) il guadagno e' $225 \text{ €} + 168.75 \text{ €} = 393.75 \text{ €}$

Nel caso b) = e' 404.15 €

Formulazione del caso (a)

Questo caso corrisponde a costruire due modelli indipendenti: uno riferito al primo impianto, uno riferito al secondo impianto. Una “risorsa” (il materiale grezzo) è già allocata a priori.

Formulazione del caso (a)

Questo caso corrisponde a costruire due modelli indipendenti: uno riferito al primo impianto, uno riferito al secondo impianto. Una “risorsa” (il materiale grezzo) è già allocata a priori.

IMPIANTO 1: La formulazione relativa al primo impianto è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 + 15x_2 \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

IMPIANTO 2: La formulazione relativa al secondo impianto è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_3 + 15x_4 \\ & 4x_3 + 4x_4 \leq 45 \\ & 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ & 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ & x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Formulazione del caso (b)

Questo caso corrisponde a costruire un unico modello comprendente entrambi gli impianti. **L'allocazione della “risorsa” data dal materiale grezzo è lasciata al modello stesso.**

La formulazione relativa a questo caso è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4 \\ & 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & \quad \quad \quad 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ & \quad \quad \quad 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Soluzioni ottime e osservazione

Nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di

$$225\text{€} + 168.75\text{€} = 393.75\text{€}$$

Soluzioni ottime e osservazione

Nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di

$$225\text{€} + 168.75\text{€} = 393.75\text{€}$$

Nel caso (b) si ottiene un guadagno di 404.15€

Soluzioni ottime e osservazione

Nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di

$$225\text{€} + 168.75\text{€} = 393.75\text{€}$$

Nel caso (b) si ottiene un guadagno di 404.15€

Nel caso (b) si richiede al modello di ripartire i 120 Kg di materiale grezzo piuttosto che effettuare un'allocazione arbitraria a priori (e quindi non necessariamente ottima!!)

Modelli multiperiodo

Si tratta di problemi di allocazione ottima di risorse limitate dove
la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da più periodi elementari

Modelli multiperiodo

Si tratta di problemi di allocazione ottima di risorse limitate dove
la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da più periodi elementari

Ad esempio, si richiede di estendere la programmazione mensile della produzione di un'azienda in modo da ottenere un piano di produzione semestrale con possibilità di giacenze al termine di ciascun mese

Esempio

Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente esempio nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione

Esempio

Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente esempio nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione

Si deve programmare la produzione dei due prodotti P_1 e P_2 nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al piú 12 prodotti P_1 e 4 prodotti P_2 , mentre nella seconda si potranno vendere al piú 8 prodotti P_1 e 12 prodotti P_2

Esempio

Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente esempio nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione

Si deve programmare la produzione dei due prodotti P_1 e P_2 nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al piú 12 prodotti P_1 e 4 prodotti P_2 , mentre nella seconda si potranno vendere al piú 8 prodotti P_1 e 12 prodotti P_2

Inoltre nella prima settimana c'è la possibilità di produrre piú prodotti rispetto a quelli che si possono vendere, immagazzinando i prodotti in eccesso prevedendo un loro utilizzo nella settimana successiva

Esempio

Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente esempio nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione

Si deve programmare la produzione dei due prodotti P_1 e P_2 nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al più 12 prodotti P_1 e 4 prodotti P_2 , mentre nella seconda si potranno vendere al più 8 prodotti P_1 e 12 prodotti P_2

Inoltre nella prima settimana c'è la possibilità di produrre più prodotti rispetto a quelli che si possono vendere, immagazzinando i prodotti in eccesso prevedendo un loro utilizzo nella settimana successiva

Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti nelle due settimane sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo e che il costo di immagazzinamento di un prodotto (sia di tipo P_1 sia di tipo P_2) è di 2€

MODELLI MULTIPERIODO

↓

la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da più periodi temporali.

] - ad esempio planifico quanto produco in un mese. non è detto che vendo tutto quando ho delle giacenze per il mese successivo.

Esempio:

1^a settimana : 12 prodotti P₁, 4 prodotti P₂

2^a settimana : 8 = P₁, 12 = P₂

75 kg di materiale grezzo

costo di immagazzinamento è di 2 € (sia per P₁ che per P₂)

IMPIANTO 1	
P ₁	P ₂
levigatura	4 2
pulitura	2 5
	10 € 15 €

Variabili : (X_1, X_2) P₁ e P₂ prodotti nella prima settimana

$P_1 - (X_3, X_4)$ P₁ e P₂ prodotti nella seconda settimana

Y_1, Y_2 P₁ e P₂ immagazzinate

$$\text{F.O} \quad \max \quad 10 \left(\begin{array}{l} \text{quantità} \\ \text{di P}_1 \text{ venduto} \\ \text{nelle due settimane} \end{array} \right) + 15 \left(\begin{array}{l} \text{quantità} \\ \text{di P}_2 \text{ venduto} \\ \text{nelle due settimane} \end{array} \right) - 2 \left(\begin{array}{l} \text{quantità} \\ \text{di P}_1 \text{ e P}_2 \\ \text{immagazzinato} \end{array} \right)$$

tutto quello che produco deve essere venduto

$$\text{Quantità di P}_1 \text{ venduto nelle 2 settimane} : \underbrace{(X_1 - Y_1)}_{\text{prima settimana}} + \underbrace{(Y_1 + X_3)}_{\text{seconda settimana}} = X_1 + X_3$$

$$\text{Quantità di P}_2 \text{ venduto nelle due settimane} : \underbrace{(X_2 - Y_2)}_{\text{prima settimana}} + \underbrace{(Y_2 + X_4)}_{\text{seconda settimana}} = X_2 + X_4$$

$$\text{Quantità di P}_1 \text{ e P}_2 \text{ immagazzinate} : Y_1 + Y_2$$

$$\Rightarrow \max 10(X_1 + X_3) + 15(X_2 + X_4) - 2(Y_1 + Y_2)$$

$$\text{VINCOLI : } \left. \begin{array}{l} 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \end{array} \right\} \text{PRIMA SETTIMANA}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x_3 + 4x_4 \leq 70 \\ 4x_3 + 2x_4 \leq 80 \\ 2x_3 + 5x_4 \leq 60 \end{array} \right\} \text{SECONDA SETTIMANA}$$

Vincoli sui prodotti che possono essere immagazzinati

$$x_1 - y_1 \leq 12 \quad P_1 \text{ venduto nella prima settimana}$$

$$x_2 - y_2 \leq 4 \quad P_2 \text{ venduto nella prima settimana}$$

$$y_1 + x_3 \leq 8 \quad P_1 \text{ venduto nella seconda settimana}$$

$$y_2 + x_4 \leq 12 \quad P_2 \text{ venduto nella seconda settimana}$$

Devo impostare che il prodotto immagazzinato non sia superiore al prodotto fabbricato:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq y_1 \\ x_2 \geq y_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{per come e' definita la F.O.} \\ \text{sono redundanti ovvero la soluzione ottima (e quindi l'algoritmo risolutivo non cercherà punti per cui } x_i < y_i) \end{array}$$

$$\text{Non negativita'} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Formulazione

$$\max \quad 10(x_1 + x_2) + 15(x_3 + x_4) - 2(y_1 + y_2)$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 75$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$4x_3 + 4x_4 \leq 75$$

$$4x_3 + 2x_4 \leq 80$$

$$2x_3 + 5x_4 \leq 60$$

$$x_1 - y_1 \leq 12$$

$$x_2 - y_2 \leq 4$$

$$x_3 + y_1 \leq 8$$

$$x_4 + y_2 \leq 12$$

$$-x_1 + y_1 \leq 0$$

$$-x_2 + y_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$