Modelli di miscelazione

Sapienza Università di Roma

Modelli di miscelazione

Introduzione

Nei problemi che vengono formulati come modelli di miscelazione si dispone di un insieme di **materie prime** ("ingredienti") ciascuna caratterizzata da un contenuto noto di determinati "componenti"

Modelli di miscelazione

Introduzione

Nei problemi che vengono formulati come modelli di miscelazione si dispone di un insieme di **materie prime** ("ingredienti") ciascuna caratterizzata da un contenuto noto di determinati "componenti"

L'**obiettivo è miscelare (combinare) gli ingredienti** secondo opportune proporzioni, per ottenere un prodotto finito ("miscela") che soddisfi determinati **requisiti di qualità** esprimibili in termini di contenuto complessivo dei componenti della miscela

Modelli di miscelazione
Introduzione

Nei problemi che vengono formulati come modelli di miscelazione si dispone di un insieme di **materie prime** (“ingredienti”) ciascuna caratterizzata da un contenuto noto di determinati “componenti”

L’**obiettivo è miscelare (combinare) gli ingredienti** secondo opportune proporzioni, per ottenere un prodotto finito (“miscela”) che soddisfi determinati **requisiti di qualità** esprimibili in termini di contenuto complessivo dei componenti della miscela

Un esempio classico è quello del **problema della dieta**

Problema della dieta - un po' di storia

Il problema della dieta è uno dei primi problemi di ricerca operativa studiato a inizio degli anni $'40$

Problema della dieta - un po' di storia

Il problema della dieta è uno dei primi problemi di ricerca operativa studiato a inizio degli anni ′40

Il problema era motivato dal desiderio dell'esercito statunitense di nutrire "correttamente" le truppe in Europa, ma spendendo lo stretto necessario

Problema della dieta - un po' di storia

Il problema della dieta è uno dei primi problemi di ricerca operativa studiato a inizio degli anni $'40$

Il problema era motivato dal desiderio dell'esercito statunitense di nutrire "correttamente" le truppe in Europa, ma spendendo lo stretto necessario

Uno dei primi ricercatori ad affrontare il problema è stato **George Stigler** (Stigler diet: `https://en.wikipedia.org/wiki/Stigler_diet`)

Problema della dieta - un po' di storia

Il problema della dieta è uno dei primi problemi di ricerca operativa studiato a inizio degli anni ′40

Il problema era motivato dal desiderio dell'esercito statunitense di nutrire "correttamente" le truppe in Europa, ma spendendo lo stretto necessario

Uno dei primi ricercatori ad affrontare il problema è stato **George Stigler** (Stigler diet:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Stigler_diet`)

Risolvendo il modello "a mano" con un *metodo euristico* trovò una soluzione che costava 39.93$ per anno (prezzi del 1939)

Problema della dieta - un po' di storia

Nell'autuno del 1947, Jack Laderman usò il metodo del simplesso (da poco proposto da **George Dantzig**) per risolvere *esattamente* il modello di Stigler

Problema della dieta - un po' di storia

Nell'autuno del 1947, Jack Laderman usò il metodo del simplesso (da poco proposto da **George Dantzig**) per risolvere *esattamente* il modello di Stigler

Il problema di programmazione lineare aveva 77 variabili e 9 vincoli

Problema della dieta - un po' di storia

Nell'autuno del 1947, Jack Laderman usò il metodo del simplesso (da poco proposto da **George Dantzig**) per risolvere *esattamente* il modello di Stigler

Il problema di programmazione lineare aveva 77 variabili e 9 vincoli

Fu necessario il lavoro di 9 impiegati usando un calcolatore semi-manuale per un totale di 120 mesi uomo per trovare la soluzione ottima di 39.69$

Esempio 1

Una dieta prescrive fabbisogni minimi giornalieri di nutrienti: carboidrati (150g), proteine (50g) e grassi (70g)

Esempio 1

Una dieta prescrive fabbisogni minimi giornalieri di nutrienti: carboidrati (150g), proteine (50g) e grassi (70g)

Questi sono assunti da cinque alimenti base: pane, latte, uova, carne, dolci

Esempio 1

Una dieta prescrive fabbisogni minimi giornalieri di nutrienti: carboidrati (150g), proteine (50g) e grassi (70g)

Questi sono assunti da cinque alimenti base: pane, latte, uova, carne, dolci

I nutrienti contenuti in 100g di ciascun alimento sono i seguenti:

	pane	latte	uova	carne	dolci
carboidrati	80	4	0	0	80
proteine	0	10	50	60	0
grassi	14	60	35	20	20

continua...

Esempio 1

Il costo (in euro) per 100g di ciascun alimento e la sua dose massima giornaliera sono:

	pane	latte	uova	carne	dolci
costo	0.3	0.5	1.5	3	2
dose max (g)	100	120	50	300	100

Esempio 1:

variabili : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 → quantità degli alimenti in etti

F.O : $\min \quad 0.3\,x_1 + 0.5\,x_2 + 1.5\,x_3 + 3\,x_4 + 2\,x_5$

Vincoli sui nutrienti :

$80\,x_1 + 4\,x_2 + 80\,x_5 \geq 150$ carboidrati

$10\,x_2 + 50\,x_3 + 60\,x_4 \geq 50$ proteine

$14\,x_1 + 60\,x_2 + 35\,x_3 + 20\,x_4 + 20\,x_4 \geq 70$ grassi

(in etti) $x_1 \leq 1 \quad x_2 \leq 1.2 \quad x_3 \leq 0.5 \quad x_4 \leq 3 \quad x_5 \leq 1$ ← dosi massime

$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5$

Esempio 1

Il costo (in euro) per 100g di ciascun alimento e la sua dose massima giornaliera sono:

	pane	latte	uova	carne	dolci
costo	0.3	0.5	1.5	3	2
dose max (g)	100	120	50	300	100

Formulare un modello di Programmazione Lineare che permetta di **decidere la dieta di costo minimo**

Formulazione generale

Supponiamo di avere n sostanze diverse $S_1, \ldots, S_n$ ciascuna contenente una certa quantità di m componenti $C_1, \ldots, C_m$

Formulazione generale

Supponiamo di avere n sostanze diverse $S_1, \dots, S_n$ ciascuna contenente una certa quantità di m componenti $C_1, \dots, C_m$

Supponiamo che ogni sostanza S_j abbia costo unitario p_j, $j = 1, \dots, n$

Formulazione generale

Supponiamo di avere n sostanze diverse $S_1, \ldots, S_n$ ciascuna contenente una certa quantità di m componenti $C_1, \ldots, C_m$

Supponiamo che ogni sostanza S_j abbia costo unitario p_j, $j = 1, \ldots, n$

Sia a_{ij} la quantità di componente C_i presente nella sostanza S_j

Formulazione generale

Supponiamo di avere n sostanze diverse $S_1, \ldots, S_n$ ciascuna contenente una certa quantità di m componenti $C_1, \ldots, C_m$

Supponiamo che ogni sostanza S_j abbia costo unitario p_j, $j = 1, \ldots, n$

Sia a_{ij} la quantità di componente C_i presente nella sostanza S_j

Si vuole ottenere la miscela di $S_1, \ldots, S_n$ più economica che soddisfi determinati requisiti qualitativi, ovvero contenga una quantità non inferiore a b_i di ciascun C_i, $i = 1, \ldots, m$

Formulazione generale

- **Variabili:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano la quantità di sostanza S_j da utilizzare nella miscela, $j = 1, \ldots, n$

Formulazione generale

- **Variabili:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano la quantità di sostanza S_j da utilizzare nella miscela, $j = 1, \ldots, n$
- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo* della miscela

Formulazione generale

- **Variabili:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano la quantità di sostanza S_j da utilizzare nella miscela, $j = 1, \ldots, n$
- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo* della miscela

$$\min p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \min p^T x$$

Formulazione generale

- **Variabili:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano la quantità di sostanza S_j da utilizzare nella miscela, $j = 1, \ldots, n$
- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo* della miscela

$$\min p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \min p^T x$$

- **Vincoli:**
  - vincoli di qualità: la miscela deve contenere una quantità non inferiore a b_i di ciascun componente c_i

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_j, \quad j = 1, \ldots, n; \;\; i = 1, \ldots, m$$

Formulazione generale

- **Variabili:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano la quantità di sostanza S_j da utilizzare nella miscela, $j = 1, \ldots, n$
- **Funzione Obiettivo:** *minimizzare il costo* della miscela

$$\min p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \min p^T x$$

- **Vincoli:**
  - vincoli di qualità: la miscela deve contenere una quantità non inferiore a b_i di ciascun componente c_i

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \leq b_j, \quad j = 1, \ldots, n; \; i = 1, \ldots, m$$

  - vincoli di non negatività: $x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n$

Esempio 2

L'acciaio è uno dei prodotti più facilmente riciclabili (e riciclati) al mondo

Esempio 2

L'acciaio è uno dei prodotti più facilmente riciclabili (e riciclati) al mondo

È sufficiente fondere qualsiasi rottame di ferro per incenerire tutti gli eventuali residui plastici o di vernice contenuti nel rottame, restando così con solo metallo liquido

Esempio 2

L'acciaio è uno dei prodotti più facilmente riciclabili (e riciclati) al mondo

È sufficiente fondere qualsiasi rottame di ferro per incenerire tutti gli eventuali residui plastici o di vernice contenuti nel rottame, restando così con solo metallo liquido

Il problema nasce in quanto è difficile separare i diversi metalli presenti nel rottame, per cui, insieme al ferro, si ritrovano nel metallo liquido anche rame, nichel, cromo e altri metalli

Esempio 2

L'acciaio è uno dei prodotti più facilmente riciclabili (e riciclati) al mondo

È sufficiente fondere qualsiasi rottame di ferro per incenerire tutti gli eventuali residui plastici o di vernice contenuti nel rottame, restando così con solo metallo liquido

Il problema nasce in quanto è difficile separare i diversi metalli presenti nel rottame, per cui, insieme al ferro, si ritrovano nel metallo liquido anche rame, nichel, cromo e altri metalli

In diverse produzioni alcuni metalli sono desiderati e altri no

Esempio 2

Ad esempio, nella produzione dell'acciaio 18/10 (utilizzato nella produzione di pentole), si vuole avere il 18% di cromo ed il 10% di nichel nel prodotto finito

Esempio 2

Ad esempio, nella produzione dell'acciaio 18/10 (utilizzato nella produzione di pentole), si vuole avere il 18% di cromo ed il 10% di nichel nel prodotto finito

L'eventuale presenza di questi metalli nei rottami di ferro è altamente desiderabile, in quanto cromo e nichel sono molto più costosi sia dei rottami che dello stesso acciaio 18/10

Esempio 2

Ad esempio, nella produzione dell'acciaio 18/10 (utilizzato nella produzione di pentole), si vuole avere il 18% di cromo ed il 10% di nichel nel prodotto finito

L'eventuale presenza di questi metalli nei rottami di ferro è altamente desiderabile, in quanto cromo e nichel sono molto più costosi sia dei rottami che dello stesso acciaio 18/10

Al contrario i rame è un'impurità che rovina le caratteristiche estetiche dell'acciaio 18/10

Esempio 2

ACC-ricrea è un'azienda che produce acciaio 18/10

Esempio 2

ACC-ricrea è un'azienda che produce acciaio 18/10

L'azienda ha analizzato le caratteristiche di sei lotti di rottami di ferro, riportate nella seguente tabella, dove sono riportati anche il peso di ciascun lotto e il costo unitario di acquisto:

Esempio 2

ACC-ricrea è un'azienda che produce acciaio 18/10

L'azienda ha analizzato le caratteristiche di sei lotti di rottami di ferro, riportate nella seguente tabella, dove sono riportati anche il peso di ciascun lotto e il costo unitario di acquisto:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
Ferro (%)	93	76	74	65	76	68
Nichel (%)	5	13	11	16	6	23
Cromo (%)	0	11	12	14	20	8
Impurità (%)	2	0	3	5	2	1
Peso	30	90	50	70	60	50
Costo	50	100	80	85	92	115

Esempio 2

ACC-ricrea è un'azienda che produce acciaio 18/10

L'azienda ha analizzato le caratteristiche di sei lotti di rottami di ferro, riportate nella seguente tabella, dove sono riportati anche il peso di ciascun lotto e il costo unitario di acquisto:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
Ferro (%)	93	76	74	65	76	68
Nichel (%)	5	13	11	16	6	23
Cromo (%)	0	11	12	14	20	8
Impurità (%)	2	0	3	5	2	1
Peso	30	90	50	70	60	50
Costo	50	100	80	85	92	115

L'obiettivo per ACC-ricrea è produrre, al costo minimo, almeno 100 quintali di acciaio 18/10 con una presenza del 18% di cromo e 10% di nichel, almeno il 65% di ferro e al più un 1% di impurità

Esempio:

Variabili: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ → quantità in quintali di rottame di tipo j, $j = 1, \dots, 6$

F.O: $\min\ 50x_1 + 100x_2 + 80x_3 + 85x_4 + 92x_5 + 115x_6$

Vincoli di qualità:

Ferro: $0.93x_1 + 0.76x_2 + 0.74x_3 + 0.65x_4 + 0.76x_5 + 0.68x_6 \geq 0.65\sum_{i=1}^{6} x_i$

Cromo: $0.11x_2 + 0.12x_3 + 0.14x_4 + 0.20x_5 + 0.08x_6 = 0.1\sum_{i=1}^{6} x_i$

Nichel: $0.05x_1 + 0.13x_2 + 0.11x_3 + 0.16x_4 + 0.20x_5 + 0.08x_6 = 0.10\sum_{i=1}^{6} x_i$

Impurità: $0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5 + 0.01x_6 \leq 0.01\sum_{i=1}^{6} x_i$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 100, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6$$

disponibilità: $x_1 \leq 30,\ x_2 \leq 90,\ x_3 \leq 50,\ x_4 \leq 70,\ x_5 \leq 60,\ x_6 \leq 50$