Formulario di P.P.S

Creato da: @Elefantino - @Mova801 - @Deda404

Densità Discreta

Si dice: "Densità discreta di Probabilità di X" la funzione che ad ogni valore di $x \in \mathbb{E}$ associa la probabilità che $x = X$.

$$x \to P(X = x|I)$$

Nota: La Densità discreta assume valori su $[0, 1]$ quindi deve essere tale che $\sum_{x \in E} P(X = x|I) = 1$.

Elenchiamo di seguito alcune formule utili per la Densità Discreta:

1. Variabile Aleatoria Costante: $P(X = x|I) = 1$
2. Densità Discreta Uniforme: $P(X = x|I) = 1/n$
3. Bernulli: Se x ha valori in $[0, 1]$ allora
   - caso: $P(X = 0|I) = 1 - P$
   - caso: $P(X = 1|I) = P$
4. Densità Binomiale: $P(X = x|I) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
5. Densità di Poisson: $P(X = x|I) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
6. Esponenziale: per $\lambda = 1/n$
   - $P(X = x|I) = \lambda e^{-\lambda x}$
7. Gaussiana: $P(X = x|I) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Densità Continua

Se X è una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$, e sia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, una funzione integrabile tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Si dice che X ha denistà continua se vale per ogni interballo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$:

$$P(a \leq X \leq b|I) = \int_a^b f(x)dx$$

Nota: Notazione usata: $f(x) = P(X = x|I)$

Composizione Tramite Funzione

Se X è una variabile aleatoria a valori in E e $g : E \to F$ è una funzione, si definisce la variabile aleatoria $g(X)$ a valori in F tramite il sistema di alternative per $z \in F$:

$$(g(X) = z|I) = (X \in g^{-1}(z))$$

Teorema del Cambio di Variabile

Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$ con densità continua $P(X = x|I)$.
Sia g una funzione derivabile con derivata continua e mai nulla, allora $g(x)$ ammette densità continua e vale:

$$P(g(X) = z|I) = P\left(X = g^{-1}(z)|I\right) \cdot \frac{1}{|g'(g^{-1}(z))|}$$

Variabile Congiunta

L'evento dove due variabili aleatorie X e Y assumono rispettivamente i valori x e y si indica con:

$$P((X, y) = (x, y)) = P(X = x, Y = y)$$

Le leggi marginali sono :

- $P(X = x)$
- $P(Y = y)$

Prese separatamente.

La legge congiunta è la densità: $P(X = x, Y = y)$, che associa ad ogni coppia (x, y) la probabilità che $X = x$ e $Y = y$ (come si comportano insieme).

Nota: Se conosco le marginali non è detto che io possa dire nulla sulla congiunta.

Come si risolve questo problema?
Usando la regola del prodotto:

$$P((X,Y)=(x,y))=P(X=x,Y=y)$$

$$\implies P(X=x)P(Y=y|X=x)$$

Formula di Bayes per Densità Continue

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x)P(Y=y|X=x)}{P(Y=y)}$$

ed è proporzionale a:

$$\propto P(X=x)L(X=x,Y=y)$$

INDICATORI CARATTERISTICI

Funzione Cumulativa (CDF)

La funzione cumulativa di X è definita come la funzione che ad ogni valore $x|in\mathbb{R}$ associa la probabilità che $X \leq x$:

$$x \to CDF_X(x)=P(X \leq x|I)$$

Funzione di Sopravvivenza (SUR)

E' una funzione che ad ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ associa la probabilità che $X \geq x$:

$$x \to SUR_X(x)=P(X \geq x|I)$$

Not: CDF e SUR sono collegate dalla relazione:

$$CDF_X(x)+SUR_X(x)=1$$

La CDF_X si ottiene sommando o integrando la densità su tutti i possibili valori di $X \leq x$:

- Discreta:

$$CDF_X(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i|I)$$

- Continua:

$$CDF_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$$

La SUR_X si ottiene sommando o integrando la densità su tutti i possibili valori di $X \ge x$:

- Discreta:

$$SUR_X(x) = \sum_{x_i \ge x} P(X = x_i|I)$$

- Continua:

$$SUR_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f(z)dz$$

Mediana

La mediana è definita come un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$ (se esiste) tale che:

$$CDF_X(\bar{x}) = \frac{1}{2}$$

Quantile

La funzione Quantile, è definita come: $\bar{x} = CDF_X^{-1}(\frac{1}{2})$, il fatto che la CDF_X non è invertibile fa introdurre il concetto di quantile di X come:

$$q_x : (0, 1) \to \mathbb{R}$$

ed è una funzione che ad ogni possibile $\alpha \in (0, 1)$ associa il valore:

$$q_x(\alpha) = \min x \in \mathbb{R}|(CDF_X(x) \ge \alpha)$$

detto quantile di X di livello α, si può dimostrare che vale: $\forall \alpha \in (0, 1)$.

Se X ha densità continua: $CDF_X(q_x(\alpha)) = \alpha$.

Valor Medio

Il valor medio di una variabile aleatoria $X \in \mathbb{R}$ condizionato a un informazione nota I rispetto alla quale X ammette densità, è definito come:

- Discreta:

$$E(X|I) = \sum_{x \in E} xP(X = x|I)$$

- Continua:

$$E(X|I) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Nota: Supponiamo sempre che questi convetgano in modo assoluto.

PROPRIETA' DEL VALOR MEDIO

Formula disintegrazione del valor medio

- Discreta:

$$E[X|I] = \sum_{y \in E} E[X|I, Y = y]P(Y = y|I)$$

- Continua:

$$E[X|I] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X|I, Y = y]P(Y = y|I)dy$$

Linearità del valor medio

$$E[aX|I] = aE[X|I]$$

$$E[X+Y|I] = E[X|I] + E[Y|I]$$

Monotonia del valor medio

$$P(X \geq Y|I) = 1 \implies E[X|I] \geq E[Y|I]$$

Disuguaglianza di Markov

$$P(X > c|I) \leq \frac{E[X|I]}{c}$$

Con $P(X|I) > 0$ e $c > 0$.

Valor Medio Variabile Composta

- Discreta:

$$E[g(X)|I] = \sum_{x \in E} g(x)P(X = x|I)$$

- Continua:

$$E[g(X)|I] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)P(X = x|I)dx$$

Con base $X \in \mathbb{E}$, $(E = \mathbb{R})$ e $(g : \mathbb{E} \to \mathbb{R})$.

Varianza

Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria con valor medio $E(X|I)$, si definisce varianza:

$$Var_x(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Vale dunque l'identità:

$$Var_x(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Usando la linearità del valor medio dopo aver sviluppato il quadrato della prima formula.

Deviazione Standard

La deviazione standard di una variabile aleatoria X è definita come la radice quadrata della varianza:

$$\sigma_X = \sqrt{Var_X(X)}$$

Covarianza

Date due variabili aleatorie $\in \mathbb{R}$, si definisce covarianza tra esse:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Formule alternative:

- $$Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$
- $$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Se le due variabili sono INDIPENDENTI allora:

$$Cov(X,Y) = 0$$

Matrice delle Covarianze

$$\sum_{(x,y)} = \begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix}$$

Ed è detto coefficiente di correlazione lineare tra X e Y la quantità:

$$p_{(X,Y)} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Momenti

Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria, $\forall k \in \mathbb{N}$, si definisce momento di ordine k di X :

$$\mu_k = E[X^k]$$

Nota: Momento secondo la formula della varianza: $E[X^2] = Var(X) + (E(X))^2$.

Funzione Generatrice dei Momenti (MGF)

Data $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria reale, si definisce funzione generatrice dei momenti di X la funzione:

$$MGF_x : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$$

$$t \to MGF_X(t) = E[e^{tX}]$$

- Discreta:

$$MGF_X(t) = \sum_{x \in R} e^{tx} P(X = x)$$

- Continua:

$$MGF_X(t) = \int_{x \in R} e^{tx} P(X = x) dx$$

Nota: L'integrale corrisponde alla trasformata di Laplace della: $x \to p(X = x)$

Sia $x \in \mathbb{R} / MGF_X(t) < +\infty, \forall t \in -\epsilon, +\epsilon$ con $\epsilon > 0$, allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, X ha momento di ordine k ben definito e vale:

$$\frac{d^k}{d^k t} MGF_X(0) = E[X^k]$$

Per calcolare il momento di ordine k basta derivare k volte la MGF e valutarla in $t = 0$.