Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 15

Dario Trevisan – *https://web.dm.unipi.it/trevisan*

10/11/2025

Distribuzioni invarianti

Richiami sulle distribuzioni invarianti

- $\mu \in \mathbb{R}^E$ tale che $\mu = \mu Q$ per catene (o $\mu L = 0$ per processi a salti)

Richiami sulle distribuzioni invarianti

- $\mu \in \mathbb{R}^E$ tale che $\mu = \mu Q$ per catene (o $\mu L = 0$ per processi a salti)
- distribuzione iniziale invariante $\Leftrightarrow$ processo stazionario

Richiami sulle distribuzioni invarianti

- $\mu \in \mathbb{R}^E$ tale che $\mu = \mu Q$ per catene (o $\mu L = 0$ per processi a salti)
- distribuzione iniziale invariante $\Leftrightarrow$ processo stazionario
- Teorema di esistenza: se E finito, esiste sempre almeno una distribuzione invariante.

Classificazione degli stati

Data una matrice di transizione Q, si dice che lo stato $y \in E$ è **accessibile** (o raggiungibile) da $x \in E$ se esiste un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con $x_0 = x$ e $x_n = y$ e peso strettamente positivo:

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} Q_{x_{k-1}x_k} > 0.$$

- Nel caso di una matrice di intensità di salto L, il peso Q_γ va sostituito con
$$L_\gamma = \prod_{k=1}^{n} L_{x_{k-1}x_k}.$$

Classificazione degli stati

Data una matrice di transizione Q, si dice che lo stato $y \in E$ è **accessibile** (o raggiungibile) da $x \in E$ se esiste un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con $x_0 = x$ e $x_n = y$ e peso strettamente positivo:

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} Q_{x_{k-1}x_k} > 0.$$

- Nel caso di una matrice di intensità di salto L, il peso Q_γ va sostituito con

$$L_\gamma = \prod_{k=1}^{n} L_{x_{k-1}x_k}.$$

$(Q^n)_{xy}$

- $\cancel{Q^n_{xy}}$ è la somma dei pesi di tutti i cammini lunghi n che collegano x a y: y è raggiungibile da x se esiste $n \geq 1$ tale che $Q^n_{xy} > 0$.

Se $y \in E$ è raggiungibile da $x \in E$, e $z \in E$ è raggiungibile da y, allora z è raggiungibile da x.

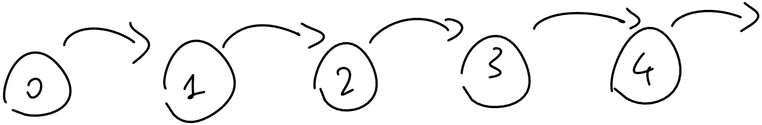
- Non è detto che anche x sia raggiungibile da y: se questo appunto non accade, lo stato x è detto **transitorio**: uno stato transitorio è tale che esista y raggiungibile da x ma x non è raggiungibile da y.

Se $y \in E$ è raggiungibile da $x \in E$, e $z \in E$ è raggiungibile da y, allora z è raggiungibile da x.

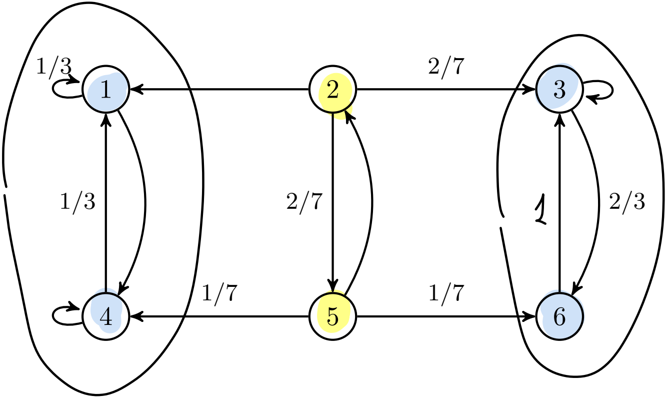
- Non è detto che anche x sia raggiungibile da y: se questo appunto non accade, lo stato x è detto **transitorio**: uno stato transitorio è tale che esista y raggiungibile da x ma x non è raggiungibile da y.
- Se x non è transitorio, è detto **ricorrente**.

Se $y \in E$ è raggiungibile da $x \in E$, e $z \in E$ è raggiungibile da y, allora z è raggiungibile da x.

- Non è detto che anche x sia raggiungibile da y: se questo appunto non accade, lo stato x è detto **transitorio**: uno stato transitorio è tale che esista y raggiungibile da x ma x non è raggiungibile da y.
- Se x non è transitorio, è detto **ricorrente**.
- Se l'insieme degli stati E è finito, non possono essere tutti transitori, deve esserci almeno uno stato ricorrente.



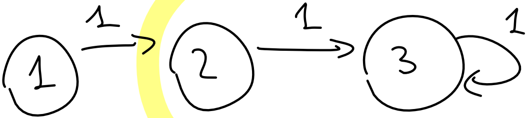
Un esempio



Classi chiuse

Un sottoinsieme $C \subseteq E$ di stati è detto **classe chiusa** se, per ogni $x \in C$ e $y \in E$ raggiungibile da x, anche $y \in C$.

- Una classe chiusa C è detta **irriducibile** se non contiene altre classi chiuse $C' \subseteq C$ (diverse dai casi banali $C' = \emptyset$ oppure $C' = C$ stessa).



Classi chiuse

Un sottoinsieme $C \subseteq E$ di stati è detto **classe chiusa** se, per ogni $x \in C$ e $y \in E$ raggiungibile da x, anche $y \in C$.

- Una classe chiusa C è detta **irriducibile** se non contiene altre classi chiuse $C' \subseteq C$ (diverse dai casi banali $C' = \emptyset$ oppure $C' = C$ stessa).
- La matrice Q (oppure L) è detta **irriducibile** se tutto l'insieme degli stati E è una classe chiusa irriducibile.

Da uno stato in una classe chiusa non è possibile raggiungere stati al di fuori di essa (mentre è possibile entrarvi)

- una classe chiusa è irriducibile quando da ogni stato in essa si può raggiungere qualsiasi altro stato in essa.

Una catena è irriducibile se e solo se

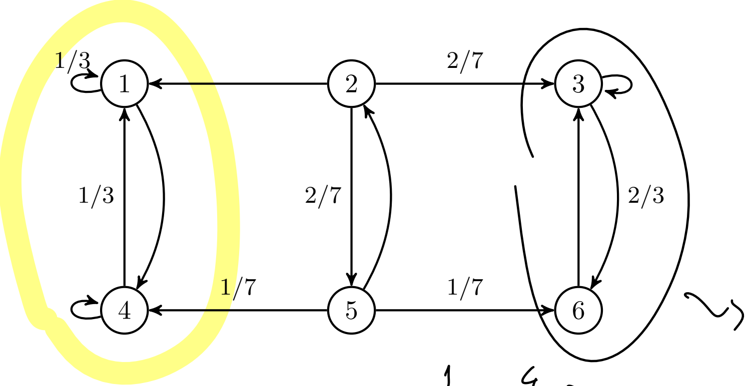
per ogni x per ogni $y \in E$ esiste un

cammino γ da x a y con peso $\partial\gamma > 0$

Da uno stato in una classe chiusa non è possibile raggiungere stati al di fuori di essa (mentre è possibile entrarvi)

- una classe chiusa è irriducibile quando da ogni stato in essa si può raggiungere qualsiasi altro stato in essa.
- Data una classe chiusa è ben definita la *restrizione* della matrice Q su $C \times C$, perché $Q_{x \to y} = 0$ per $x \in C$ e $y \notin C$, e quindi $(Q_{x \to y})_{y \in C}$ sono densità discrete di probabilità (la somma delle righe vale ancora 1). Un ragionamento analogo vale nel caso di matrici di intensità di salto L.

$C = \{1, 4\}$



$$Q|_{C\times C} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1/3 & 2/3 \\ 4 & 1/3 & 2/3 \end{array}$$

Il teorema di unicità

Sia Q una matrice di transizione (oppure L di intensità di salto) irriducibile su un insieme di stati E finito. Allora esiste una e una sola distribuzione invariante.

Classificazione delle distribuzioni invarianti

Se E è finito, si può sempre partizionare in insiemi a due a due disgiunti

$$E = \{\text{stati transitori}\} \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k,$$

dove le C^i sono classi chiuse irriducibili.

- Consideriamo la restrizione di Q su ciascuna classe chiusa irriducibile C^i: esiste una e una sola distribuzione invariante associata μ^i,

Classificazione delle distribuzioni invarianti

Se E è finito, si può sempre partizionare in insiemi a due a due disgiunti

$$E = \{\text{stati transitori}\} \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k,$$

dove le C^i sono classi chiuse irriducibili.

- Consideriamo la restrizione di Q su ciascuna classe chiusa irriducibile C^i: esiste una e una sola distribuzione invariante associata μ^i,
- Si può dimostrare (non lo faremo) che **tutte** le distribuzioni invarianti sono ottenibili come combinazioni

$$\mu = \alpha_1 \mu^1 + \alpha_2 \mu^2 + \ldots, + \alpha_k \mu^k,$$

dove α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in [0, 1]$ sono tali che

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1.$$

Classificazione delle distribuzioni invarianti

Se E è finito, si può sempre partizionare in insiemi a due a due disgiunti

$$E = \{\text{stati transitori}\} \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k,$$

dove le C^i sono classi chiuse irriducibili.

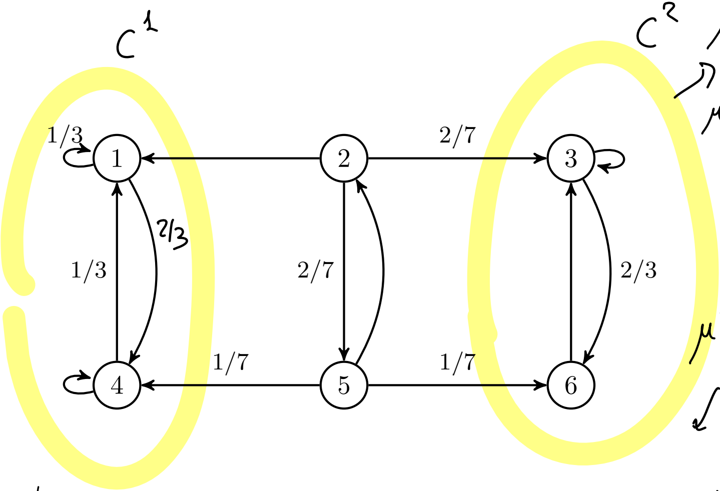
- Consideriamo la restrizione di Q su ciascuna classe chiusa irriducibile C^i: esiste una e una sola distribuzione invariante associata μ^i,
- Si può dimostrare (non lo faremo) che **tutte** le distribuzioni invarianti sono ottenibili come combinazioni

  $$\mu = \alpha_1\mu^1 + \alpha_2\mu^2 + \ldots, +\alpha_k\mu^k,$$

  dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in [0,1]$ sono tali che

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1.$$

- In particolare ogni distribuzione invariante è nulla sugli stati transitori.



$\mu_3 \cdot \frac{2}{3} = \mu_6$

$\mu^{C^2} = \left(\mu_3, \frac{2}{3}\mu_3\right)$

$= \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

$\mu^{C^2} = \left(0, 0, \frac{3}{5}, 0, 0, \frac{2}{5}\right)$

$\mu_1 \frac{2}{3} = \mu_4 \cdot \frac{1}{3} \to \mu_4 = 2\mu_1$

$\Rightarrow \mu^{C^1} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$

$\mu = \left(\frac{\alpha_1}{3}, 0, \frac{\alpha_2 3}{5}, \frac{\alpha_1 2}{3}, 0, \frac{2\alpha_2}{5}\right)$

$\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

Teorema di esistenza

Se l'insieme degli stati E di una catena di Markov (o processo di Markov a salti) è finito allora esiste sempre almeno una distribuzione invariante μ.

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione nel caso delle catene di Markov.

- Si consideri una qualsiasi densità discreta μ_0 (come vettore riga).

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione nel caso delle catene di Markov.

- Si consideri una qualsiasi densità discreta μ_0 (come vettore riga).
- Se μ_0 è la densità marginale di una catena di Markov $(X_n)_n$ al tempo $n = 0$, la densità marginale al tempo $k = 0, 1, 2, \ldots$, è

$$\mu_0 Q^k.$$

Se $\lim_{k\to\infty} \mu_0 Q^k = \mu_\infty$ allora è invariante

$$\mu_\infty \cdot Q = \left(\lim_{k\to\infty} \mu_0 Q^k\right) \cdot Q$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu_0 Q^{k+1} = \mu_\infty$$

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione nel caso delle catene di Markov.

- Si consideri una qualsiasi densità discreta μ_0 (come vettore riga).
- Se μ_0 è la densità marginale di una catena di Markov $(X_n)_n$ al tempo $n = 0$, la densità marginale al tempo $k = 0, 1, 2, \ldots$, è

$$\mu_0 Q^k.$$

- Consideriamo le medie

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_0 Q^k,$$

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione nel caso delle catene di Markov.

- Si consideri una qualsiasi densità discreta μ_0 (come vettore riga).
- Se μ_0 è la densità marginale di una catena di Markov $(X_n)_n$ al tempo $n = 0$, la densità marginale al tempo $k = 0, 1, 2, \ldots$, è

$$\mu_0 Q^k.$$

- Consideriamo le medie

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_0 Q^k,$$

- ciascuna $\bar{\mu}_n$ è una densità discreta di probabilità (quindi un vettore a componenti in $[0, 1]$ e a somma 1)

Per il caso vettoriale del teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una *sottosuccessione* $\bar{\mu}_{n_k}$ con $n_k \to \infty$ che converge ad un limite

$$\bar{\mu}_\infty = \lim_{k\to\infty} \bar{\mu}_{n_k},$$

ossia ogni componente del vettore $\bar{\mu}_{n_k}$ converge alla corrispondente componente di $\bar{\mu}_\infty$.

- Anche il limite è una densità discreta di probabilità sugli stati E, perché ciascuna componente del vettore è in $[0,1]$, essendo limiti di valori compresi tra 0 e 1, e la somma dei limiti delle componenti coincide con il limite della somma, che vale 1.

Per il caso vettoriale del teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una *sottosuccessione* $\bar{\mu}_{n_k}$ con $n_k \to \infty$ che converge ad un limite

$$\bar{\mu}_\infty = \lim_{k\to\infty} \bar{\mu}_{n_k},$$

ossia ogni componente del vettore $\bar{\mu}_{n_k}$ converge alla corrispondente componente di $\bar{\mu}_\infty$.

- Anche il limite è una densità discreta di probabilità sugli stati E, perché ciascuna componente del vettore è in $[0,1]$, essendo limiti di valori compresi tra 0 e 1, e la somma dei limiti delle componenti coincide con il limite della somma, che vale 1.
- Quindi, basta dimostrare che vale

$$\bar{\mu}_\infty = \bar{\mu}_\infty Q.$$

Per ogni n, si ha l'identità

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_n Q &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_0 Q^k\right) Q \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_0 Q^{k+1} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_0 Q^k + \frac{1}{n}\left(\mu_0 Q^{n+1} - \mu_0 Q\right) \\
&= \bar{\mu}_n + \frac{1}{n}\left(\mu_0 Q^{n+1} - \mu_0 Q\right).
\end{aligned}$$

probabilità

Al tendere di $n \to \infty$, il termine

$$\frac{1}{n}\left(\mu_0 Q^{n+1} - \mu_0 Q\right) \to 0$$

è infinitesimo al tendere di $n \to \infty$, perché le componenti del vettore $\mu_0 Q^{n+1}$ sono comprese tra $[0, 1]$, e si divide per n. Ponendo $n = n_k \to \infty$, concludiamo quindi che $\bar{\mu}_\infty$ è una distribuzione invariante.

Il teorema di unicità

Sia Q una matrice di transizione (oppure L di intensità di salto) irriducibile su un insieme di stati E finito. Allora esiste una e una sola distribuzione invariante.

Niente dimostrazione

Dimostrazione

Consideriamo solo il caso di matrice Q di transizione. Introduciamo la matrice

$$R = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} Q^n,$$

che è una matrice stocastica e grazie all'ipotesi di irriducibilità vale $R_{xy} > 0$ per ogni x, $y \in E$.

- Se μ è una distribuzione invariante per Q, vale l'identità

  $$\mu R = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \mu Q^n = \mu \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \mu,$$

  ossia μ è distribuzione invariante anche per la matrice di transizione R

Consideriamo una seconda distribuzione invariante $\tilde{\mu}$ e scriviamo la seguente diseguaglianza:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in E} |\mu_x - \tilde{\mu}_x| &= \sum_{x\in E} |\sum_{y\in E} \mu_y R_{yx} - \sum_{y\in E} \tilde{\mu}_y R_{yx}| \\
&= \sum_{x\in E} |\sum_{y\in E} (\mu_y - \tilde{\mu}_y) R_{yx}| \\
&\le \sum_{x\in E} \sum_{y\in E} |\mu_y - \tilde{\mu}_y| R_{yx} \\
&= \sum_{y\in E} |\mu_y - \tilde{\mu}_y| \sum_{x\in E} R_{yx} \\
&= \sum_{y\in E} |\mu_y - \tilde{\mu}_y|.
\end{aligned}$$

Poiché la prima e l'ultima espressione coincidono, devono essere tutte uguaglianze, in particolare quando si stima

$$|\sum_{y\in E} (\mu_y - \tilde{\mu}_y) R_{yx}| \le \sum_{y\in E} |\mu_y - \tilde{\mu}_y| R_{yx}.$$

È noto che la diseguaglianza triangolare tra numeri reali

$$|\sum_i z_i| \leq \sum_i |z_i|$$

è una uguaglianza se e solo se hanno tutti lo stesso segno, ossia $z_i \geq 0$ per ogni i oppure $z_i \leq 0$ per ogni i.

- Supponiamo che valga, per ogni $y \in E$,

  $$(\mu_y - \tilde{\mu}_y)R_{yx} \geq 0,$$

  essendo $R_{yx} > 0$ si ottiene (dividendo) che $\mu_y \geq \tilde{\mu}_y$ per ogni $y \in E$.

È noto che la diseguaglianza triangolare tra numeri reali

$$|\sum_i z_i| \leq \sum_i |z_i|$$

è una uguaglianza se e solo se hanno tutti lo stesso segno, ossia $z_i \geq 0$ per ogni i oppure $z_i \leq 0$ per ogni i.

- Supponiamo che valga, per ogni $y \in E$,

  $$(\mu_y - \tilde{\mu}_y)R_{yx} \geq 0,$$

  essendo $R_{yx} > 0$ si ottiene (dividendo) che $\mu_y \geq \tilde{\mu}_y$ per ogni $y \in E$.

- Poiché sono entrambe densità di probabilità,

  $$\sum_{y \in E} \mu_y = 1 = \sum_{y \in E} \mu_y,$$

  ne segue che deve valere $\mu_y = \tilde{\mu}_y$.

Classificazione delle distribuzioni invarianti

Se E è finito, si può sempre partizionare in insiemi a due a due disgiunti

$$E = \{\text{stati transitori}\} \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k,$$

dove le C^i sono classi chiuse irriducibili.

- Consideriamo la restrizione di Q su ciascuna classe chiusa irriducibile C^i: esiste una e una sola distribuzione invariante associata μ^i,

Classificazione delle distribuzioni invarianti

Se E è finito, si può sempre partizionare in insiemi a due a due disgiunti

$$E = \{\text{stati transitori}\} \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k,$$

dove le C^i sono classi chiuse irriducibili.

- Consideriamo la restrizione di Q su ciascuna classe chiusa irriducibile C^i: esiste una e una sola distribuzione invariante associata μ^i,
- Si può dimostrare (non lo faremo) che **tutte** le distribuzioni invarianti sono ottenibili come combinazioni

  $$\mu = \alpha_1 \mu^1 + \alpha_2 \mu^2 + \ldots, + \alpha_k \mu^k,$$

  dove α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in [0,1]$ sono tali che

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1.$$

Classificazione delle distribuzioni invarianti

Se E è finito, si può sempre partizionare in insiemi a due a due disgiunti

$$E = \{\text{stati transitori}\} \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k,$$

dove le C^i sono classi chiuse irriducibili.

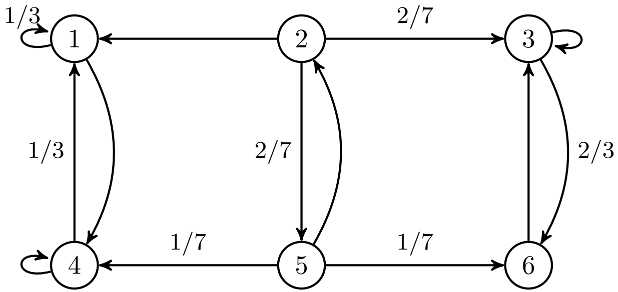
- Consideriamo la restrizione di Q su ciascuna classe chiusa irriducibile C^i: esiste una e una sola distribuzione invariante associata μ^i,
- Si può dimostrare (non lo faremo) che **tutte** le distribuzioni invarianti sono ottenibili come combinazioni

  $$\mu = \alpha_1 \mu^1 + \alpha_2 \mu^2 + \ldots, + \alpha_k \mu^k,$$

  dove α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in [0,1]$ sono tali che

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1.$$

- In particolare ogni distribuzione invariante è nulla sugli stati transitori.


1/3
1
2
2/7
3
1/3
2/7
2/3
1/7
1/7
4
5
6

Catene regolari

Sul limite di Q^n per $n \to \infty$

Data una catena di Markov con matrice di tranzione Q su un insieme di stati finito, quando esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} (Q^n)_{ij}? \qquad i,j \in E$$

Se esiste, come si calcola?

Due sistemi di equazioni

$$Q^\infty = \lim_{k\to\infty} Q^k = \lim_{k\to\infty} Q^{k+1} = Q^\infty \cdot Q$$

- Troviamo dal primo sistema

$$Q^\infty = Q^\infty \cdot Q, \qquad Q^\infty_{ij} = \sum_{k\in E} Q^\infty_{ik} Q_{kj}$$

ossia ogni riga di Q^∞ è una distribuzione invariante

Due sistemi di equazioni

- Troviamo dal primo sistema

$$Q^{\infty} = Q^{\infty} \cdot Q, \qquad Q^{\infty}_{ij} = \sum_{k \in E} Q^{\infty}_{ik} Q_{kj}$$

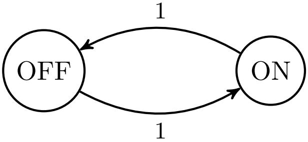
ossia ogni riga di Q^{∞} è una distribuzione invariante

- e inoltre

$$Q^{\infty} = Q \cdot Q^{\infty}, \qquad Q^{\infty}_{ij} = \sum_{k \in E} Q_{ik} Q^{\infty}_{kj},$$

che permette di determinare completamente Q^{∞}.

Un esempio in cui il limite Q^{∞} non esiste



$$Q = \begin{array}{c|cc} & ON & OFF \\ \hline ON & 0 & 1 \\ OFF & 1 & 0 \end{array}$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

$$Q^3 = Q^2 \cdot Q = Id \cdot Q = Q$$

$$Q^4 = Id$$

$$\mu = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Catene regolari

Sia Q una matrice di transizione di una catena di Markov su un insieme E di stati finito. Diciamo che Q (o la catena) è **regolare** se

- esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la potenza Q^n abbia tutte entrate strettamente positive, ossia

$$(Q^n)_{ij} > 0 \quad \text{per ogni } i, j \in E.$$

Catene regolari

Sia Q una matrice di transizione di una catena di Markov su un insieme E di stati finito. Diciamo che Q (o la catena) è **regolare** se

- esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la potenza Q^n abbia tutte entrate strettamente positive, ossia

$$(Q^n)_{ij} > 0 \quad \text{per ogni } i, j \in E.$$

- Una catena è irriducibile se per ogni $i, j \in E$ esiste un cammino di una lunghezza n che li collega, ossia $(Q^n)_{ij} > 0$.

Catene regolari

Sia Q una matrice di transizione di una catena di Markov su un insieme E di stati finito. Diciamo che Q (o la catena) è **regolare** se

- esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la potenza Q^n abbia tutte entrate strettamente positive, ossia

$$(Q^n)_{ij} > 0 \quad \text{per ogni } i, j \in E.$$

- Una catena è irriducibile se per ogni $i, j \in E$ esiste un cammino di una lunghezza n che li collega, ossia $(Q^n)_{ij} > 0$.
- Nel caso di catena *regolare*, si richiede che la lunghezza n sia la stessa per tutti gli $i, j \in E$ (anche quando $i = j$).

Catene regolari

Sia Q una matrice di transizione di una catena di Markov su un insieme E di stati finito. Diciamo che Q (o la catena) è **regolare** se

- esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la potenza Q^n abbia tutte entrate strettamente positive, ossia

$$(Q^n)_{ij} > 0 \quad \text{per ogni } i, j \in E.$$

- Una catena è irriducibile se per ogni $i, j \in E$ esiste un cammino di una lunghezza n che li collega, ossia $(Q^n)_{ij} > 0$.
- Nel caso di catena *regolare*, si richiede che la lunghezza n sia la stessa per tutti gli $i, j \in E$ (anche quando $i = j$).
- *Se la catena è regolare, allora è anche irriducibile*

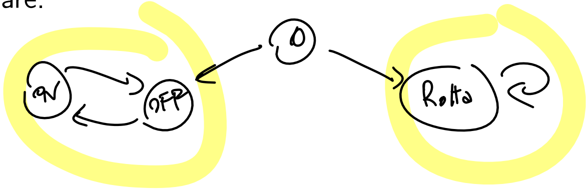
Un teorema

Sia Q una matrice di transizione *irriducibile* su un insieme di stati E finito. Allora esiste il limite

$$Q_{ij}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} (Q^n)_{ij} \quad \text{per ogni } i, j \in E,$$

se e solo se Q è regolare.

- Se Q non è irriducibile, il limite esiste (per ogni $i, j \in E$) *se e solo se* la catena ristretta a ciascuna classe chiusa irriducibile è regolare.



Come verificare che Q sia regolare?

- Una strategia è di moltiplicare Q per se stessa finché le componenti non sono tutte positive.

Come verificare che Q sia regolare?

- Una strategia è di moltiplicare Q per se stessa finché le componenti non sono tutte positive.
- Un metodo più veloce è di considerare solo le potenze di 2, ossia calcolare

$$Q^2 = Q \cdot Q, \quad Q^4 = Q^2 \cdot Q^2, \quad Q^8 = Q^4 \cdot Q^4, \quad \text{ecc.,}$$

Come verificare che Q sia regolare?

- Una strategia è di moltiplicare Q per se stessa finché le componenti non sono tutte positive.
- Un metodo più veloce è di considerare solo le potenze di 2, ossia calcolare

$$Q^2 = Q \cdot Q, \quad Q^4 = Q^2 \cdot Q^2, \quad Q^8 = Q^4 \cdot Q^4, \quad \text{ecc.},$$

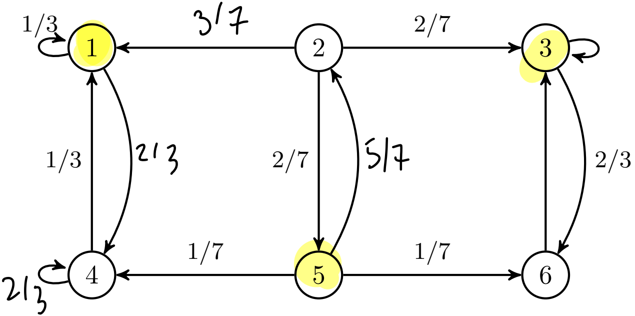
- **Criterio di regolarità.** Sia Q una matrice di transizione *irriducibile* su un insieme di stati E finito. Se esiste (almeno) uno stato $i \in E$ tale che $Q_{ii} > 0$, allora Q è anche *regolare*.

Problema

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_n$ rappresentata in figura.

1. Classificare gli stati.
2. Determinare tutte le distribuzioni invarianti.
3. Supponendo che $X_0 = 2$ determinare $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1)$

$(Q^n)_{21}$



(3) Calcoliamo $(Q^\infty)_{ij}$ $\forall i,j$

$$Q^\infty = \begin{pmatrix} \underline{\mu^1} \\ \underline{\mu^{\alpha_2}} \\ \underline{\mu^0} \\ \underline{\mu^1} \\ \underline{\mu^{\alpha_3}} \\ \mu^0 \end{pmatrix}$$

$\mu^\alpha =$

$= \alpha \mu^{C_1} + (1-\alpha)\mu^{C_2}$

$$Q^{\infty} = Q^{\infty} \cdot Q \quad \Big| \quad Q^{\infty} = Q \cdot Q^{\infty}$$

$$Q^{\infty}_{21} = Q_{21} \cdot Q^{\infty}_{11} + Q_{23} \cdot Q^{\infty}_{31} + Q_{25} \cdot Q^{\infty}_{51}$$

$$\boxed{\overset{\shortparallel}{\mu^{\alpha_2}_1} = \frac{3}{7}\mu^1_1 + \cancel{\frac{2}{7} \cdot 0} + \frac{2}{7} \cdot \mu^{\alpha_5}_1}$$

$$Q^{\infty}_{54} = \frac{1}{7} \cdot Q^{\infty}_{44} + \frac{5}{7} \cdot Q^{\infty}_{24}$$

$$\boxed{\mu^{\alpha_5}_4 = \frac{1}{7}\mu^1_4 + \frac{5}{7}\mu^{\alpha_2}_4}$$

$$\mu^{\alpha} = \alpha\mu^{C_1} + (1-\alpha)\mu^{C_2} = \left(\frac{\alpha}{3}, 0, \frac{3(1-\alpha)}{5}, \frac{2\alpha}{3}, \underbrace{\frac{2(1-\alpha)}{5}}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_2}{3} = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{7}\dfrac{\alpha_5}{3} \\[2ex] \dfrac{2\alpha_5}{3} = \dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{7}\dfrac{2\alpha_2}{3} \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}\alpha_5$$

$$\boxed{2\alpha_5 = \frac{2}{7} + \frac{5\cdot 2}{7}\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\alpha_5\right)}$$

Problemi vari

Problema 1

Si consideri una catena di Markov sugli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Classificare gli stati, determinare tutte le classi chiuse (dire quali sono irriducibili).

Problema 1

Si consideri una catena di Markov sugli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

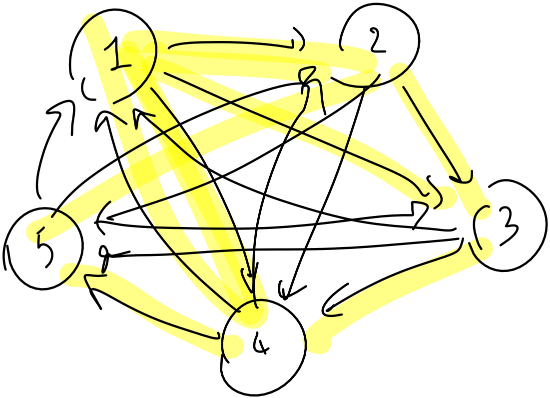
1. Classificare gli stati, determinare tutte le classi chiuse (dire quali sono irriducibili).
2. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. La catena è regolare?

Problema 1

Si consideri una catena di Markov sugli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Classificare gli stati, determinare tutte le classi chiuse (dire quali sono irriducibili).
2. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. La catena è regolare?
3. Si supponga inizialmente che $P(X_0 = i) \propto i$. Avendo osservato $X_3 = 3$, determinare la stima di massimo a posteriori per X_0.



Catena irriducibile

- Classi chiuse $\emptyset$, E
- Distribuzione uniforme è l'unica invariante

Regolarità Q^2 è regolare? Se sì $\Longrightarrow$ Q regolare

$$\underbrace{Q^2_{ij} > 0 \quad \forall i \; \forall j \quad Q \text{ Regolare}}$$

③ $P(X_0 = i) = c \cdot i \qquad i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

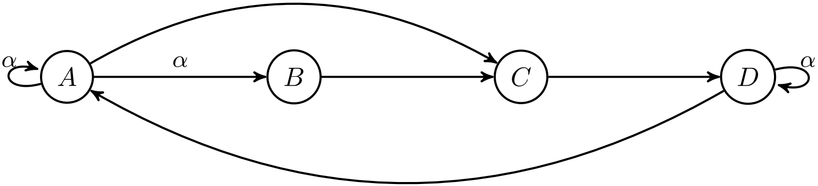
$$P(X_0 = i \mid X_3 = 3) \propto P(X_0 = i)\underbrace{P(X_3 = 3 \mid X_0 = i)}_{L(i)}$$

$$L(i) = (Q^3)_{i3}$$

- oppure elencare i cammini lunghi che in 3 passi partendo da i portano in 3

Problema 2

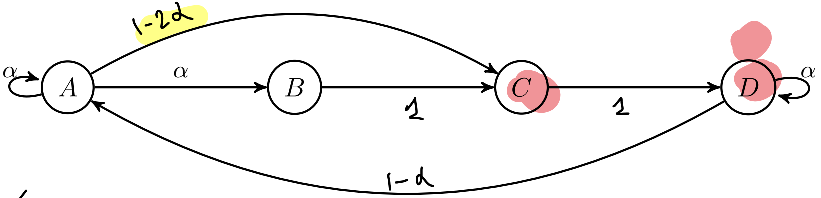
Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione in figura, dove $\alpha \in [0, 1/2]$ è un parametro.



1. Al variare di α, classificare gli stati, determinare le classi chiuse irriducibili della catena (dire se sono regolari), e calcolare le distribuzioni invarianti (come funzione di α)

Problema 2

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione in figura, dove $\alpha \in [0, 1/2]$ è un parametro.

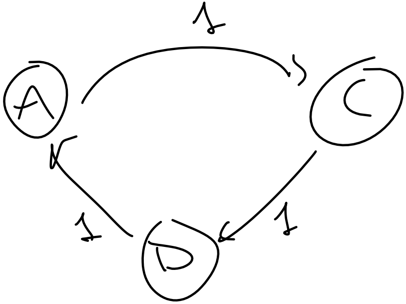


1. Al variare di α, classificare gli stati, determinare le classi chiuse irriducibili della catena (dire se sono regolari), e calcolare le distribuzioni invarianti (come funzione di α)

2. Si supponga che la catena si stazionaria. Si osserva poi che $X_4 \in \{C, D\}$ e $X_5 = D$. È possibile stimare α?

MLE

Regolarità se $\alpha = 0$



$P^3 = Id$

$P^n \in \{Id, P, P^2\}$

<u>Non Regolare</u>

$\mu = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Distr. inv. per $\alpha > 0$

$$\begin{cases} \boxed{\mu_B = \mu_A \cdot \alpha} \\ \mu_C = \mu_B + (1-2\alpha)\mu_A \\ \mu_D(1-\alpha) = \mu_C \end{cases}$$

$$\mu_C = \alpha \mu_A + (1-2\alpha)\mu_A$$

$$\boxed{\mu_C = \mu_A(1-\alpha)}$$

$$\mu_D \cancel{(1-\alpha)} = \mu_A \cancel{(1-\alpha)}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{3}, \frac{(1-\alpha)}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

② $L(\alpha;\ X_4 \in \{C, D\},\ X_5 = D)$

$$= P(X_{\underset{\underset{0}{\uparrow}}{4}} \in \{C, D\},\ X_{\underset{\underset{1}{\uparrow}}{5}} = D \mid \alpha, \text{stazionarietà})$$

$$= P(X_0 \in \{C, D\},\ X_1 = D \mid \alpha, \text{staz.})$$

$$= P(\cancel{X_0 \in \{C, D\}},\ X_1 = D \mid \alpha, X_0 = C)\, P(X_0 = C \mid \alpha)$$

$$+ P(\cancel{X_0 \in \{C, D\}},\ X_1 = D \mid \alpha, X_0 = D)\, P(X_0 = D \mid \alpha)$$

$$= 1 \cdot \frac{1-\alpha}{3} + \alpha \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \longrightarrow \text{ogni } \alpha \text{ è } \alpha_{MLE}$$

Problema 3

Aldo partecipa al seguente gioco. Egli ha a davanti a sé tre urne, dall'esterno identiche, contenenti

- una (A) 2 palline colorate di rosso,

Aldo ignora inizialmente però quale urna sia la A, quale la B e quale la C.

Aldo può effettuare due estrazioni in sequenza (anche eventualmente con rimpiazzo) scegliendo ogni volta l'urna che preferisce (nella seconda estrazione può tenere conto del colore estratto nella prima), e vince il gioco qualora abbia estratto due palline di colore diverso.

Problema 3

Aldo partecipa al seguente gioco. Egli ha a davanti a sé tre urne, dall'esterno identiche, contenenti

- una (A) 2 palline colorate di rosso,
- una (B) 2 palline blu

Aldo ignora inizialmente però quale urna sia la A, quale la B e quale la C.

Aldo può effettuare due estrazioni in sequenza (anche eventualmente con rimpiazzo) scegliendo ogni volta l'urna che preferisce (nella seconda estrazione può tenere conto del colore estratto nella prima), e vince il gioco qualora abbia estratto due palline di colore diverso.

Problema 3

Aldo partecipa al seguente gioco. Egli ha a davanti a sé tre urne, dall'esterno identiche, contenenti

- una (A) 2 palline colorate di rosso,
- una (B) 2 palline blu
- una (C) contenente 1 pallina rossa e una blu.

Aldo ignora inizialmente però quale urna sia la A, quale la B e quale la C.

Aldo può effettuare due estrazioni in sequenza (anche eventualmente con rimpiazzo) scegliendo ogni volta l'urna che preferisce (nella seconda estrazione può tenere conto del colore estratto nella prima), e vince il gioco qualora abbia estratto due palline di colore diverso.

1. Supponendo che Aldo giochi la strategia “scelgo un’urna a caso ed estraggo con rimpiazzo due palline da tale urna’ ’, calcolare la probabilità che vinca il gioco.

1. Supponendo che Aldo giochi la strategia “scelgo un'urna a caso ed estraggo con rimpiazzo due palline da tale urna' ', calcolare la probabilità che vinca il gioco.
2. Supponendo che Aldo giochi la strategia “scelgo un'urna a caso ed estraggo senza rimpiazzo due palline da tale urna' ', calcolare la probabilità che vinca il gioco.

1. Supponendo che Aldo giochi la strategia "scelgo un'urna a caso ed estraggo con rimpiazzo due palline da tale urna'', calcolare la probabilità che vinca il gioco.
2. Supponendo che Aldo giochi la strategia "scelgo un'urna a caso ed estraggo senza rimpiazzo due palline da tale urna'', calcolare la probabilità che vinca il gioco.
3. Supponendo che Aldo giochi la strategia "scelgo un'urna a caso ed estraggo una pallina, poi estraggo la seconda pallina da una delle rimanenti due urne (scegliendo a caso tra queste)'', calcolare la probabilità che vinca il gioco.

Problema 4

Supponendo che le date dei compleanni siano distribuite uniformemente sui 365 giorni di un anno e persone diverse abbiano giorni di compleanno indipendenti tra loro:

1. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone almeno due festeggino il compleanno nello stesso giorno.

Problema 4

Supponendo che le date dei compleanni siano distribuite uniformemente sui 365 giorni di un anno e persone diverse abbiano giorni di compleanno indipendenti tra loro:

1. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone almeno due festeggino il compleanno nello stesso giorno.
2. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone (diverse da te) almeno una festeggi il compleanno nel tuo stesso giorno.

Problema 4

Supponendo che le date dei compleanni siano distribuite uniformemente sui 365 giorni di un anno e persone diverse abbiano giorni di compleanno indipendenti tra loro:

1. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone almeno due festeggino il compleanno nello stesso giorno.
2. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone (diverse da te) almeno una festeggi il compleanno nel tuo stesso giorno.
3. Rispondere alle domande precedenti sostituendo a 3 un numero $n \geq 1$ qualsiasi di persone. Per quale n la probabilità del primo quesito diventa 1? e per il secondo quesito?

Problema 5

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.

Problema 5

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, posta T_k una variabile aleatoria con densità f_k, calcolare il valor medio di T_k.

Problema 5

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, posta T_k una variabile aleatoria con densità f_k, calcolare il valor medio di T_k.
3. Sia $K \in \{0, 1, 2\}$ una variabile con densità discreta $P(K = k) \propto 1 + k$ e T una variabile tale che, sapendo $K = k$, ha densità f_k. Avendo osservato $T \leq 1$, fornire una stima di K.