Teoria dei Sistemi e del Controllo Prova in itinere 18-12-2024

1. Dato il polinomio dei poli della funzione $G(s)$ (già ridotta ai minimi termini) pari a $p(s) = (s-1)^2(s^2+9)$ si determini una matrice dinamica A in forma di Jordan compatibile con il polinomio dato. Si determini anche la struttura delle matrici B e C in termini di elementi non nulli o nulli. Si motivi la risposta fornita.

2. Dato il sistema in forma di stato

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + x_3(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + 2x_2(k) - u(k) \\ x_3(k+1) = -2x_1(k) - x_3(k) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases}$$

   (a) Si disegni nello spazio di stato il sottospazio inosservabile in 1, 2, e 3 passi. Si disegni inoltre lo spazio degli stati indistinguibili dallo stato $(1\ 0\ 0)^T$ in 1, 2, e 3 passi.

   (b) Si determini lo spazio di raggiungibilità in 1, 2, e 3 passi fornendone una base.

   (c) Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman.

   (d) Si determini il sistema in forma di Kalman e si determini la proprietà di BIBO stabilità del sistema.

3. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = 0$$

   (a) Calcolare, se esistono, degli ingressi che in $k = 1, 2$ o 3 passi a partire da uno stato iniziale $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T$ consentano di raggiungere i seguenti stati stati: $\tilde{x}(k) = (1\,2\,2)^T$, $\bar{x}(k) = (2\,0\,2)^T$. Commentare i risultati ottenuti.

   (b) Si consideri lo stato $x(k) = (0\,0\,0)^T$ e determinare gli stati iniziali per cui esistono degli ingressi che consentano di raggiungere lo stato $x(k)$ in uno o due passi. Si commentino adeguatamente i risultati ottenuti.

4. Dato il sistema lineare tempo continuo caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   (a) Calcolare la matrice in forma di Jordan associata ad A e la rispettiva matrice di cambio di base.

   (b) Applicare il lemma PBH all'autovalore in -1 e concludere sulle proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema.

   (c) Determinare le basi degli spazi di raggiungibilità e di inosservabilità