# Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

## Lezione 1

Dario Trevisan – *https://web.dm.unipi.it/trevisan*

22/09/2025

# Introduzione al corso

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)
6. Processi a stati continui (gaussiani, ARIMA)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)
6. Processi a stati continui (gaussiani, ARIMA)
7. Teoremi limite (Legge dei grandi numeri, Teorema Ergodico, Teorema limite centrale)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)
6. Processi a stati continui (gaussiani, ARIMA)
7. Teoremi limite (Legge dei grandi numeri, Teorema Ergodico, Teorema limite centrale)

- Introdurremo inoltre le basi del linguaggio R.

# Materiale didattico

- Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso
*https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html*

trovate

# Materiale didattico

- Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso
*https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html*

trovate

- **Appunti**

# Materiale didattico

- Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso
*https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html*

trovate

- **Appunti**
- Raccolta di prove scritte anni precedenti

# Materiale didattico

- Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso
*https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html*

trovate

- **Appunti**
- Raccolta di prove scritte anni precedenti
- Note delle lezioni (slides annotate)

# Materiale didattico

- Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso
*https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html*

trovate

- **Appunti**
- Raccolta di prove scritte anni precedenti
- Note delle lezioni (slides annotate)
- Registrazioni (anni precedenti)

# Orario lezioni

- Lunedì F7 10:30 - 13:30

# Orario lezioni

inizio 10:40
pausa 15 min
fine 13:10

- Lunedì F7 10:30 - 13:30
- Mercoledì F7 11:30 - 13:30

inizio 11:30
fine 13:00

# Ricevimento

- Giorno:

# Ricevimento

- Giorno:
- Orario:

# Ricevimento

- Giorno: Lunedì
- Orario: 18-20
- Comunque su appuntamento, anche su Teams

# Ricevimento

- Giorno:
- Orario:
- Comunque su appuntamento, anche su Teams
- Contattatemi **sempre** via mail o messaggio su Teams.

# Modalità di esame

- Prova **scritta** con problemi sugli argomenti da 1 a 5 (inclusi) a risoluzione analitica.

# Modalità di esame

- Prova **scritta** con problemi sugli argomenti da 1 a 5 (inclusi) a risoluzione analitica.
- Prova **orale** con domande principalmente sulla teoria (tutto il programma svolto).

# Modalità di esame

2h tempo

- Prova **scritta** con problemi sugli argomenti da 1 a 5 (inclusi) a risoluzione analitica.
- Prova **orale** con domande principalmente sulla teoria (tutto il programma svolto). → 30 min
- Ogni prova scritta superata permette di accedere ad una (e una sola) prova orale: non necessariamente quella immediatamente successiva, **purché nella medesima sessione** (il compitino vale per la sessione invernale).

Altro:

- potere usare appunti/libri cartacei per la prova scritta
- calcolatrice non programmabile
- compitino fine novembre

# Capitolo 1: probabilità elementare

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)
- **formula di Bayes**

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)
- **formula di Bayes**
- stima bayesiana di un'ipotesi sulla base di dati osservati e metodo di **massima verosimiglianza**, cenni ai test statistici

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)
- **formula di Bayes**
- stima bayesiana di un'ipotesi sulla base di dati osservati e metodo di **massima verosimiglianza**, cenni ai test statistici
- Introduzione ad **R** ed RStudio.

# Cos'è la probabilità?

*La probabilità misura il grado di fiducia che un soggetto attribuisce alla validità di una affermazione, avendo a disposizione una informazione parziale (che in generale non permette di dedurre la verità o la falsità dell'affermazione).*

Quale soggetto? $\leftarrow$ soggetto ideale e razionale

Assegnate

1. una informazione, che indichiamo con $I$, nota e ritenuta vera,

è richiesto di misurare il grado di incertezza circa la validità di $A$, *sulla base di tutta e sola l'informazione* $I$, nel modo più razionale possibile.

Tale misura, detta la **probabilità di** $A$ **sapendo** $I$ si indica

$$P(A|I).$$

.

Assegnate

1. una informazione, che indichiamo con $I$, nota e ritenuta vera,
2. una affermazione, che indichiamo con $A$, che nella realtà può essere solo vera oppure falsa (quindi senza ambiguità),

è richiesto di misurare il grado di incertezza circa la validità di $A$, *sulla base di tutta e sola l'informazione $I$*, nel modo più razionale possibile.

Tale misura, detta la **probabilità di $A$ sapendo $I$** si indica

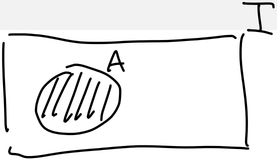
$$\boxed{0 \leq P(A|I) \leq 1} \qquad P(A)$$

probabilità di A, sapendo che I è vera

# Proprietà elementari

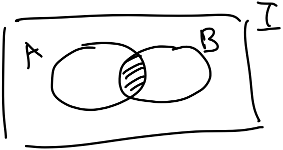
- $P(A \mid I) \in [0, 1]$ $\qquad 0 \leq P(A \mid I) \leq 1$
- $P(A \mid I) = 1 \longleftrightarrow$ A è ritenuta vera sapendo I
- $P(A \mid I) = 0 \longleftrightarrow$ A è ritenuta falsa sapendo I
"trascurabile"

# Operazioni logiche tra affermazioni

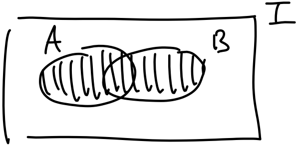



$A =$ "ora piove a Pisa"

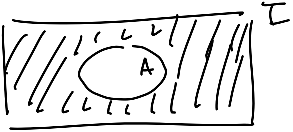
$B =$ "Alessio porta l'ombrello"




- Congiunzione $\quad A$ e $B \Leftrightarrow A \cap B$
  $A \wedge B$

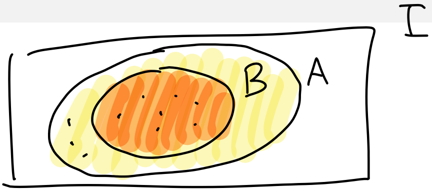



- Disgiunzione inclusiva $\quad A$ oppure $B \quad A \cup B$
  $A \vee B$




- Negazione "non $A$", $\neg A \quad A^c = I \setminus A$

$P(A|I)$ "$=$ $P(I \rightarrow A)$" $\neq P(A \wedge I)$




Date due affermazioni $A$ e $B$ e l'informazione nota $I$, se $A$ **è vera in qualsiasi situazione in cui** $B$ **sia vera** (supponendo sempre vera $I$), allora

$$\boxed{P(B|I) \leq P(A|I).}$$

Conseguenza

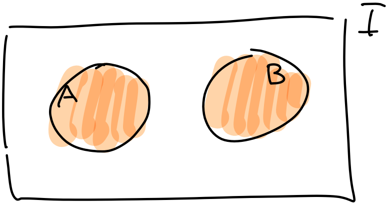
$$P(\underline{A \text{ e } B} \mid I) \leq P(A|I) \leq P(B|I)$$

potrebbe accadere $P(A|I \text{ e } B) \geq P(A|I)$

# Regola della somma (additività)

- Date $A$, $B$ e l'informazione nota $I$, se $A$ e $B$ non possono in nessun caso essere entrambe vere (supponendo $I$ vera), allora

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I).$$




A e B sono detti incompatibili (sapendo I)

# Regola della somma

- Date $A$, $B$ e l'informazione nota $I$, se $A$ e $B$ non possono in nessun caso essere entrambe vere (supponendo $I$ vera), allora

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I).$$

- $A$ e $B$ si dicono **incompatibili** (o mutuamente esclusivi) se non possono essere entrambe vere (rispetto ad una informazione $I$), ossia

$$P(A \text{ e } B|I) = 0.$$

# Regola della somma

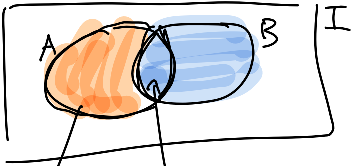
- Date $A$, $B$ e l'informazione nota $I$, se $A$ e $B$ non possono in nessun caso essere entrambe vere (supponendo $I$ vera), allora

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I).$$

- $A$ e $B$ si dicono **incompatibili** (o mutuamente esclusivi) se non possono essere entrambe vere (rispetto ad una informazione $I$), ossia

$$P(A \text{ e } B|I) = 0.$$

- Come calcolare $P(A \text{ oppure } B)$ in generale?




$A \setminus B$ $\quad$ $A \text{ e } B$ $\quad$ incompatibili

$$P(A \setminus B \mid I) + P(A \text{ e } B \mid I) = P(A \mid I)$$

$$-\left[ P(A \setminus B \mid I) + P(B \mid I) = P(A \text{ o } B \mid I) \right]$$

$$P(A \text{ e } B) - P(B) = P(A) - P(A \text{ o } B)$$

$$\boxed{P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)}$$

<u>OSS</u> $$P(\cancel{A\ B}) + P(A \text{ e } B) \leq P(A)$$

regola della somma $\implies$ monotonia

# Alternativa semplice

Eventi $\longleftrightarrow$ Affermazione

Partendo da $A \rightsquigarrow$ non $A$ è incompatibile


La coppia $(A, \text{non } A)$ è alternativa semplice

$$P(A \circ (\text{non } A) \mid I) = 1$$

$$= P(A \mid I) + P(\text{non } A \mid I) = 1$$

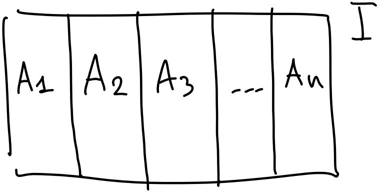
# Sistemi di alternative

Un **sistema di alternative** (rispetto ad una informazione $I$) è una famiglia $(A_i)_{i=1}^n$ di affermazioni (dette alternative)

1. a due a due incompatibili (o mutuamente esclusive) e

Un **sistema di alternative** (rispetto ad una informazione $I$) è una famiglia $(A_i)_{i=1}^n$ di affermazioni (dette alternative)

1. a due a due incompatibili (o mutuamente esclusive) e
2. tali che almeno una tra loro è sicuramente vera.

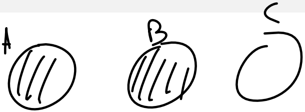



Lancio un dado

$A_i =$ "esce faccia $i$"

$i = 1 \dots 6$

# Sistemi di alternative




$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Un **sistema di alternative** (rispetto ad una informazione $I$) è una famiglia $(A_i)_{i=1}^n$ di affermazioni (dette alternative)

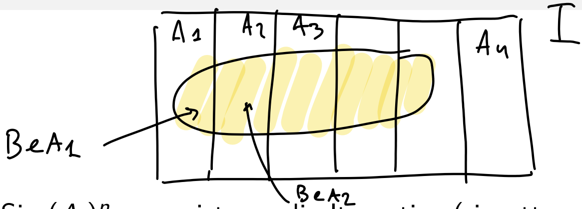
1. a due a due incompatibili (o mutuamente esclusive) e
2. tali che almeno una tra loro è sicuramente vera.

- In breve, **una e una sola** tra le alternative è sicuramente vera (nota $I$).

$P(\text{almeno uno tra gli } A_i \text{ è vero}) = 1$

$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

# Formula di decomposizione




Sia $(A_i)_{i=1}^n$ un sistema di alternative (rispetto all'informazione $I$) e sia $B$ una (qualsiasi) affermazione.

Allora

$$P(B|I) = P(B \text{ e } A_1|I) + \ldots + P(B \text{ e } A_n|I).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \text{ e } A_i \mid I)$$

# Densità discreta

Ad un sistema di alternative $(A_i)_{i=1}^n$ (rispetto all'informazione $I$) possiamo associare la collezione delle probabilità

$$\boxed{(P(A_i|I))_{i=1}^n.}$$

densità discreta del sistema di alternative

$P(A_i) \in [0,1]$ $\quad \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

# Densità Bernoulli

Sistema di alternative semplice $A$, non $A$

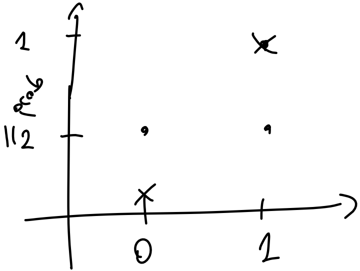
non $A := A_0$ $\quad$ $A := A_1$

$p = P(A \mid I)$

$1-p = P(\text{non } A \mid I)$

$p \in [0,1]$

densità Bernoulli "$(1-p,\ p)$"



# Densità Uniforme

$n$ alternative $\quad A_1, A_2, \dots, A_n$

L'informazione $I$ non favorisce alcuna alternativa

Principio di indifferenza di Laplace $\Rightarrow$ stessa probabilità

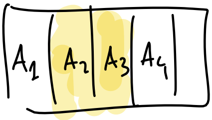
$$P(A_i|I) = P(A_j|I) \qquad \text{per ogni } i,j$$

$$\Downarrow$$

$$= \frac{1}{n}$$

$\#F$ = numero di elementi di $F$

Conseguenza: Se $B = \bigcup_{i \in F} A_i$, $\quad F \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$




regola della somma

$$P(B|I) = \sum_{i \in F} P(A_i|I) = \frac{\#F}{n}$$

## Notazione $\propto$ "proporzionale"

$$p_i = f(i) \qquad \text{e.s.} \quad p_i = c \cdot i^2 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

dove $c$ è tale che $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$

**Es**

$$\sum_{i=1}^{6} (c\, i^2) = 1$$

$$\Updownarrow$$

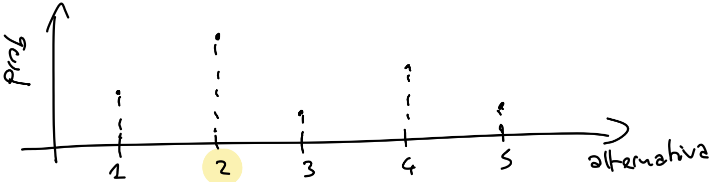
$$c \cdot \sum_{i=1}^{6} i^2 = 1 \iff c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{6} i^2}$$

---

**Notazione** $p_i \propto f(i)$ per dire che $\exists\, c$ tale che

$$p_i = c\, f(i) \qquad \left( \longrightarrow \quad c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f(i)} \right)$$

# Moda di una densità discreta




La moda indica l'alternativa **più probabile**, ossia

$$i_{\text{max}} \in \arg\max\{P(A_i|I) : i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

OSS se $p_i \propto f(i)$ $i = 1 \ldots n$

$\Rightarrow$ moda $= \arg\max \{ f(i) : i = 1 \ldots n \}$

# Regola del prodotto (Probabilità composta)

Date affermazioni $A$, $B$ e l'informazione nota $I$, vale

$$P(A \text{ e } B|I) = P(A|I)P(B|A, I).$$

[Non invece $P(A \text{e} B) = P(A)P(B)$]

<u>OSS</u> $P(B|A,I) \leq 1 \Rightarrow P(A \text{e} B) = P(A) \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\leq 1}$

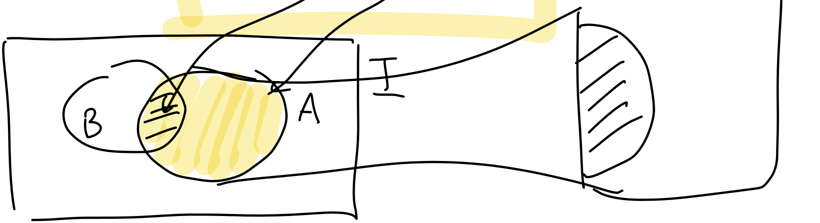
$P(A \text{e} B) \leq P(A)$

monotonia!

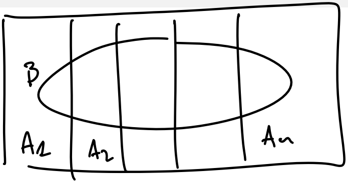
# Formula di Kolmogorov per la probabilità condizionata:

$$\frac{P(A \text{ e } B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(A)}\, P(B|A)}{\cancel{P(A)}}$$

$$P(B|A, I) = \frac{P(A \text{ e } B|I)}{P(A|I)}.$$



# Formula di disintegrazione




Sia $(A_i)_{i=1}^n$ un sistema di alternative rispetto ad una informazione $I$. Allora, data una affermazione $B$ (qualsiasi),

$$\boxed{P(B|I) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i, I)P(A_i|I).}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \text{ e } A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

# Notazione "proporzionale"

Data una densità discreta $(p_i)_{i=1}^n$ e una funzione $f(i)$ a valori positivi (non necessariamente $f(i) \leq 1$) scriviamo

$$p_i \propto f(i)$$

per dire che $p_i = cf(i)$, dove la costante $c$ è data da

$$c = \left( \sum_i f(i) \right)^{-1}$$

per garantire che la somma delle $p_i$ sia 1.

- Esempio: densità uniforme $p_i \propto 1$

# Notazione "proporzionale"

Data una densità discreta $(p_i)_{i=1}^n$ e una funzione $f(i)$ a valori positivi (non necessariamente $f(i) \leq 1$) scriviamo

$$p_i \propto f(i)$$

per dire che $p_i = cf(i)$, dove la costante $c$ è data da

$$c = \left( \sum_i f(i) \right)^{-1}$$

per garantire che la somma delle $p_i$ sia 1.

- Esempio: densità uniforme $p_i \propto 1$
- Esercizio: determinare $c$ se $p_i \propto i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.