Teoria dei Sistemi e del Controllo - 22-02-2017

1. Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - ax_2 \end{cases}$$

   - Si determinino gli equilibri per $u = 0$ al variare di $a \geq 0$ e se ne studi la stabilità locale.
   - Per il caso $u = 0$ e $a = 0$ si determini una candidata di Lyapunov che ne determini le proprietà di stabilità.
   - Per $a = 1$ si determini un ingresso u funzione degli stati che renda l'origine del sistema controllato globalmente asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema lineare SISO caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   - Caratterizzare la matrice di Jordan associata ad A e commentare sulla proprietà di raggiungibilità e osservabilità di sistemi SISO con tale matrice dinamica.
   - Determinare tutte le condizioni iniziali affinchè l'evoluzione libera evolva lungo una retta.
   - Data $B = (0\,1\,1\,0\,0)^T$ e $C = (1\,0\,1\,0\,1)$ Si determini la matrice T del cambio di base per portare il sistema nella forma di Kalman.
   - Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

3. Si consideri il sistema tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k = Fx_k + Gu_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = Hx_k \end{aligned}$$

   con condizioni iniziali $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$,

   - Si determini il numero minimi di passi necessari a portare l'uscita y_k del sistema dal valore 0 al valore 1.
   - Si determini una sequenza di ingresso $u_k = (u_0, u_1, u_2, u_3 ...)$ che porti l'uscita y_k da 0 a 1 nel minor numero di passi possibile e la mantenga a 1 indefinitamente.
   - Si determini una legge di retroazione del tipo $u_k = Kx_k + 1$ che risolva lo stesso quesito del punto precedente.

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

   si ricavi l'ingresso $u(\cdot)$ che, dati: la costante $x^* \neq 0$, $x(0)$ e t_f, minimizza il funzionale:

$$J = \frac{1}{2}(x(t_f) - x^*)^T S(x(t_f) - x^*) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[(x(t) - x^*)^T Q(x(t) - x^*) + u^T Ru\right] dt$$