Domande

1. Scrivere la definizione di sistema dinamico;

2. Quali sono le due funzioni che definiscono un sistema dinamico?
   La funzione di transizione dello stato:

$$x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

   e la funzione di uscita:

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$$

3. Un sistema dinamico caratterizzato dalla funzione di uscita $y(t) = \eta(t, x(t))$

   ⊗ è un sistema tempo variante;

   ⊗ è un sistema strettamente causale;

   ○ è un sistema autonomo;

4. Quali sono le proprietà della funzione di transizione dello stato $x(t) = \psi(t, t, x(t), u(\cdot))$?
   Consistenza, Irreversibilità, Composizione e Causalità

5. Che cosa afferma la proprietà di *Consistenza* della funzione di transizione dello stato $x(t) = \psi(t, t, x(t), u(\cdot))$?

$$x(t) = \psi(t, t, x(t), u(\cdot)) \qquad \forall (t, x(t), u(\cdot)) \in \mathcal{T} \times X \times \mathcal{U}$$

6. Che cosa afferma la *Proprietà di separazione* di un sistema dinamico?

7. Dare la definizione di evento, movimento e traiettoria.

8. Per un sistema continuo regolare a dimensioni finite, la funzione di transizione dello stato $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ è soluzione di quale equazione differenziale?

$$\dot{x}(t) \triangleq \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

9. Relativamente ad un sistema dinamico tempo-discreto, la funzione $x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$ è

   ○ la *funzione di transizione dello stato* del sistema;

   ⊗ è la *funzione di stato* del sistema;

   ⊗ è l'equazione alle differenze che definisce la dinamica del sistema;

10. Un sistema dinamico caratterizzato dalla funzione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t))$

   ⊗ è un sistema tempo invariante;

   ○ è un sistema strettamente causale;

   ⊗ è un sistema autonomo;

11. Come viene indicata la *matrice di transizione dello stato* di un sistema dinamico lineare tempo variante?

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0)$$

12. Scrivere il *movimento libero* di un sistema dinamico lineare tempo variante in termini di *matrice di transizione dello stato*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0), \qquad\qquad \mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k, h)\mathbf{x}(h)$$

13. Il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

rappresenta un sistema dinamico

⊗ lineare;

⊗ tempo variante;

○ strettamente proprio;

14. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(k,h)$ nel caso di sistemi dinamici discreti lineari tempo-varianti:

$$\mathbf{\Phi}(k,h) = \begin{cases} \mathbf{A}(k-1)\dots\mathbf{A}(h+1)\mathbf{A}(h) & \text{se } k > h \\ \mathbf{I} \text{ (Matrice identità)} & \text{se } k = h \end{cases}$$

15. Scrivere la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$ in funzione della matrice di transizione dello stato $\mathbf{\Phi}(k,h)$.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k,h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k,j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j)$$

16. Nel caso di sistemi lineari continui tempo-varianti, la matrice di transizione dello stato $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$ è soluzione di quale equazione differenziale matriciale?

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t,t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0), \qquad \mathbf{\Phi}(t_0,t_0) = \mathbf{I}$$

17. Qual è il significato fisico della i-esima colonna della matrice di transizione dello stato $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$?
È la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}\Phi_i(t,t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi_i(t,t_0) \qquad \Phi_i(t_0,t_0) = \mathbf{e}_i$$

cioè è l'evoluzione libera del sistema a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{e}_i$.

18. Qual è la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$ essendo $\mathbf{x}(t_0)$ lo stato all'istante iniziale t_0?

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

19. Dare la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(k,h)$ nel caso di sistemi dinamici discreti lineari tempo-invarianti:

$$\mathbf{\Phi}(k,h) = \mathbf{A}^{k-h}$$

20. Scrivere la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ essendo $\mathbf{x}(h)$ lo stato all'istante iniziale h.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{k-h}\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

21. Un sistema discreto lineare tempo invariante è invertibile (cioè è possibile determinare lo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ partendo dalla conoscenza dello stato $\mathbf{x}(k)$ all'istante k e dell'ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ nell'intervallo $[0, k-1]$)

⊗ se la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile;

⊗ se la matrice $\mathbf{A}$ non ha autovalori nell'origine;

○ se la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ è invertibile;

○ se la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ non ha autovalori in 1;

22. Dare la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ nel caso di sistemi dinamici tempo-continui lineari invarianti:
$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$$

23. Qual è la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0)$?
$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

24. La definizione di esponenziale di matrice è la seguente:

   ⊗ $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}$
   ⊗ $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A})^n t^n}{n!}$
   ○ $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A})^n}{n!}$

25. Applicando al sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ una trasformazione lineare $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ si ottiene un sistema trasformato $(\overline{\mathbf{A}},\ \overline{\mathbf{B}},\ \overline{\mathbf{C}})$ tale per cui le matrici $\mathbf{A}$ e $\overline{\mathbf{A}}$

   ⊗ hanno gli stessi autovalori;
   ○ hanno gli stessi autovettori;
   ⊗ hanno lo stesso polinomio caratteristico;
   ⊗ hanno lo stesso polinomio minimo;

26. Sia λ un autovalore della matrice $\mathbf{A}$ con grado di molteplicità r. L'autospazio U_λ

   ⊗ è un sottospazio vettoriale invariante rispetto ad $\mathbf{A}$;
   ○ ha dimensione pari ad r;
   ⊗ ha dimensione minore od uguale r;
   ⊗ è composto da tutti e soli gli autovettori della matrice $\mathbf{A}$ associati all'autovalore λ;

27. La molteplicità *geometrica* di un autovalore λ della matrice $\mathbf{A}$

   ○ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$;
   ○ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$;
   ⊗ è la dimensione dell'autospazio U_λ;

28. Lo *spettro* di una matrice $\mathbf{A}$

   ⊗ è l'insieme degli autovalori della matrice $\mathbf{A}$;
   ○ è l'insieme degli autovettori della matrice $\mathbf{A}$;
   ○ è il diagramma di Bode dei moduli della matrice $\mathbf{A}$;

29. La molteplicità *algebrica* di un autovalore λ della matrice $\mathbf{A}$

   ⊗ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$;
   ○ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$;
   ○ è la dimensione dell'autospazio U_λ;

30. Sia data l'equazione differenziale del secondo ordine $M\ddot{x} + F\dot{x} + Kx = F$ (la forza F è l'ingresso e la posizione x è l'uscita). Posto $y = x = x_1$ e $\dot{x}_1 = x_2$, scrivere la dinamica del sistema nello spazio degli stati:
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{F}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

31. Una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n è *ciclica rispetto al vettore* $\mathbf{b}$

   ○ se i vettori $\{\mathbf{Ab},\ \mathbf{Ab}^2,\ \ldots,\ \mathbf{Ab}^{n-1},\ \mathbf{Ab}^n\}$ sono linearmente indipendenti;

⊗ se i vettori $\{\mathbf{b},\ \mathbf{Ab},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \dots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\}$ sono linearmente indipendenti;

⊗ se l'insieme $\mathcal{B} = \{\mathbf{b},\ \mathbf{Ab},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \dots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\}$ è una base per lo spazio degli stati;

32. Un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$ in cui la matrice $\mathbf{A}$ è ciclica rispetto al vettore $\mathbf{b}$ può essere portato in forma compagna utilizzando quale trasformazione di coordinate?

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T} = [\mathbf{b},\ \mathbf{Ab},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \dots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$$

33. Sia $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico di una matrice $\mathbf{A}$ ciclica rispetto al vettore $\mathbf{b}$. Mostrare la struttura delle matrici $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{b}}$ che si ottengono portando il sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ in forma compagna.

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

34. Sia dato un sistema dinamico tridimensionale $\mathbf{x} = [x_1,\ x_2,\ x_3]^{\mathrm{T}}$ lineare stazionario caratterizzato dal seguente legame statico $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ tra le variabile di stato. Scrivere una trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ tale per cui la dinamica del sistema trasformato sia esprimibile utilizzando le sole prime due componenti dello spazio degli stati trasformato.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

35. Applicando al sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$, $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$ una trasformazione di coordinate tempo variante $\mathbf{x} = \mathbf{T}(t)\overline{\mathbf{x}}$ si ottiene un sistema trasformato $\dot{\overline{\mathbf{x}}} = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}$ caratterizzato da quali matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$)?

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} - \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{T}}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{CT}$$

36. Come si determina il polinomio minimo annullante del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla matrice $\mathbf{A}$?
Si determina il più piccolo intero k tale per cui i vettori

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x},\ \mathbf{Ax},\ \mathbf{A}^2\mathbf{x},\ \dots,\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}\}$$

sono linearmente indipendenti e il vettore $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ è combinazione lineare dei vettori dell'insieme $\mathcal{B}$

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = -\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \mathbf{A}^i\mathbf{x}$$

I coefficienti α_i di tale combinazione lineare definiscono univocamente il polinomio minimo annullante

$$p_{\mathbf{x}}(\lambda) = \lambda^k + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

37. Il polinomio minimo annullante $p_{\mathbf{x}}(\lambda)$ del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla matrice $\mathbf{A}$ gode delle seguenti proprietà:

○ $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;

○ $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{o}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$;

⊗ $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{o}$ per ogni $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x},\ \mathbf{Ax},\ \mathbf{A}^2\mathbf{x},\ \dots,\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}\}$;

⊗ $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{o}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathrm{span}\{\mathbf{x},\ \mathbf{Ax},\ \mathbf{A}^2\mathbf{x},\ \dots,\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}\}$;

38. Siano $p_{\mathbf{x}}(\lambda)$ ed $p_{\mathbf{y}}(\lambda)$ i polinomi minimi dei due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ rispetto alla matrice $\mathbf{A}$. Il polinomio minimo annullante $p_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda)$ del sottospazio generato dai due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$

○ è il Massimo Comun Divisore (M.C.D.) dei due polinomi minimi $p_{\mathbf{x}}(\lambda)$ ed $p_{\mathbf{y}}(\lambda)$:

$$p_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) = M.C.D.\{p_{\mathbf{x}}(\lambda),\ p_{\mathbf{y}}(\lambda)\}$$

⊗ è il minimo comune multiplo (m.c.m.) dei due polinomi minimi $p_{\mathbf{x}}(\lambda)$ ed $p_{\mathbf{y}}(\lambda)$:

$$p_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) = m.c.m.\{p_{\mathbf{x}}(\lambda),\ p_{\mathbf{y}}(\lambda)\}$$

○ è il prodotto dei due polinomi minimi $p_{\mathbf{x}}(\lambda)$ ed $p_{\mathbf{y}}(\lambda)$:

$$p_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) = p_{\mathbf{x}}(\lambda) \cdot p_{\mathbf{y}}(\lambda)$$

39. Una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n è diagonalizzabile

⊗ se ha n autovalori reali distinti;

⊗ se ha n autovettori linearmente indipendenti;

○ se il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico;

⊗ se è una matrice simmetrica;

⊗ se gli autovalori sono radici semplici del polinomio minimo;

⊗ se gli autovalori sono radici semplici del polinomio caratteristico;

⊗ se i miniblocchi di Jordan hanno tutti dimensione unitaria;

40. Una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n è diagonalizzabile

○ se e solo se ha n autovalori reali distinti;

⊗ se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti;

○ se e solo se il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico;

○ se e solo se è una matrice simmetrica;

⊗ se e solo se gli autovalori sono radici semplici del polinomio minimo;

○ se e solo se gli autovalori sono radici semplici del polinomio caratteristico;

⊗ se e solo se i miniblocchi di Jordan hanno tutti dimensione unitaria;

41. Il polinomio minimo $m(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$ gode delle seguenti proprietà:

⊗ $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;

⊗ $m(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{o}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$;

⊗ $m(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{o}$ per ogni vettore della base canonica $\mathbf{x} \in \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n\}$;

⊗ è un divisore di qualunque altro polinomio $p(\lambda)$ annullante per la matrice $\mathbf{A}$;

42. Il polinomio minimo $m(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$:

⊗ è un divisore del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$;

○ ha lo stesso grado del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$;

⊗ ha le stesse radici del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$;

43. Il polinomio caratteristico $\Delta(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$

⊗ è un polinomio annullante per la matrice $\mathbf{A}$;

○ è il polinomio minimo annullante per la matrice $\mathbf{A}$;

⊗ gode della proprietà $\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;

44. Il polinomio minimo $m(\lambda)$ può essere determinato

⊗ come il m.c.m dei polinomi minimi annullanti dei vettori $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots, \mathbf{e}_n$ della base canonica di $\mathbf{R}^n$:

$$m(\lambda) = m.c.m.\{p_{\mathbf{e}_1}(\lambda),\ p_{\mathbf{e}_2}(\lambda),\ \ldots,\ p_{\mathbf{e}_n}(\lambda)\}$$

○ come il M.C.D dei polinomi minimi annullanti dei vettori $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots, \mathbf{e}_n$ della base canonica di $\mathbf{R}^n$:

$$m(\lambda) = M.C.D.\{p_{\mathbf{e}_1}(\lambda),\ p_{\mathbf{e}_2}(\lambda),\ \ldots,\ p_{\mathbf{e}_n}(\lambda)\}$$

⊗ utilizzando la seguente relazione:

$$m(\lambda) = \frac{\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)}{b(\lambda)}$$

dove $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$ è il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ e $b(\lambda)$ è il massimo comun divisore della matrice $\text{agg}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

45. Sia $f(\lambda)$ una generica funzione del parametro λ sviluppabile in serie di potenze $f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda^i$ e sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n. La funzione di matrice $f(\mathbf{A})$

⊗ è definita come $f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{A}^i$;

○ è definita come $f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n} c_i \mathbf{A}^i$;

⊗ è esprimibile come $f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{h-1} \gamma_i \mathbf{A}^i$ dove h è il grado del polinomio minimo;

○ è esprimibile come $f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{h-1} \gamma_i \mathbf{A}^i$ dove h è il grado del polinomio caratteristico;

46. Siano $\mathbf{A}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ due matrici simili: $\mathbf{A} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}$. Qualunque funzione di matrice $f(\mathbf{A})$ gode della proprietà

○ $f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}^{-1}\, f(\overline{\mathbf{A}})\, \mathbf{T}$;

⊗ $f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}\, f(\overline{\mathbf{A}})\, \mathbf{T}^{-1}$;

○ $f(\mathbf{A}) = \mathbf{f}(T)\, f(\overline{\mathbf{A}})\, f(\mathbf{T}^{-1})$;

47. Mostrare la struttura del generico miniblocco di Jordan associato all'autovalore λ.

$$\mathbf{J}_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

48. Il numero di miniblocchi di Jordan di una matrice $\mathbf{A}$ posta in forma canonica di Jordan

○ è pari al numero di autovalori distinti della matrice $\mathbf{A}$;

⊗ è pari al numero di autovettori linearmente indipendenti della matrice $\mathbf{A}$;

○ è pari al grado del polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$;

49. Mostrare come si calcola la catena di autovettori generalizzati associati ad un autovalore λ avente grado ν sia nel polinomio minimo che nel polinomio caratteristico.
Si determina l'unico autovettore $\mathbf{v}$ *associato all'autovalore* λ*:*

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = 0$$

e poi si determina la catena di autovettori generalizzati risolvendo in modo ricorsivo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_\nu &= \mathbf{v}_{\nu-1} \end{cases}$$

50. Una matrice $\mathbf{N}$ nilpotente di ordine ν è una matrice

⊗ tale per cui $\mathbf{N}^\nu = \mathbf{0}$;

○ tale per cui $\mathbf{N}^\nu = \mathbf{I}$;

⊗ che ha tutti gli autovalori nell'origine;

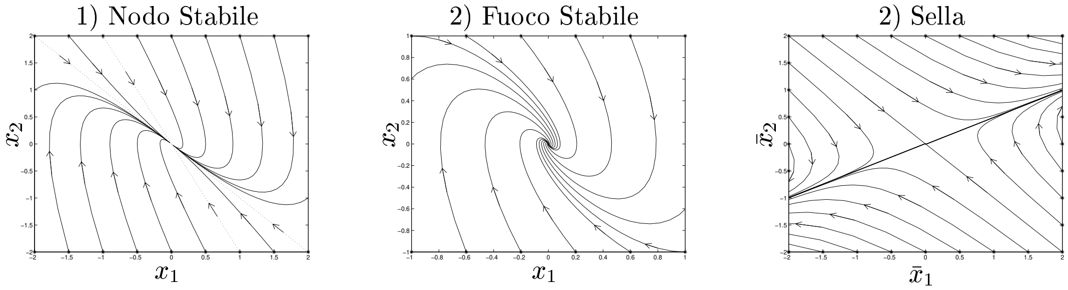
○ che ha tutti gli autovalori unitari;

51. Calcolare l'esponenziale di matrice $e^{\mathbf{j}\alpha t}$:

$$\mathbf{j}\alpha t = \begin{bmatrix} 0 & \alpha t \\ -\alpha t & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad e^{\mathbf{j}\alpha t} = \begin{bmatrix} \cos\alpha t & \sin\alpha t \\ -\sin\alpha t & \cos\alpha t \end{bmatrix}$$

52. Disegnare qualitativamente le traiettorie di un sistema lineare del secondo ordine caratterizzato da 1) un nodo stabile; 2) un fuoco stabile; 3) una sella.

1) Nodo Stabile — 2) Fuoco Stabile — 2) Sella



53. Scrivere le matrici di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ ed $\mathbf{H}(z)$ di un sistema continuo e di un sistema discreto in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ che caratterizzano il sistema lineare.

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \qquad \mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

54. Gli elementi della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ di un sistema lineare di ordine n

- ○ sono polinomi in s di grado minore od uguale ad n;
- ○ sono polinomi in s di grado minore ad n;
- ○ sono funzioni razionali fratte in s a grado relativo $r \geq 0$;
- ⊗ sono funzioni razionali fratte in s a grado relativo $r \geq 1$;

55. Come è possibile calcolare la matrice di transizione dello stato $e^{\mathbf{A}t}$ di un sistema continuo lineare stazionario utilizzando le trasformate di Laplace?

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

56. L'elemento $H_{i,j}(s)$ della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ di un sistema lineare di ordine n è la trasformata di Laplace

- ○ dell'uscita i-esima quando un gradino è applicato all'ingresso j-esimo;
- ○ dell'uscita j-esima quando un gradino è applicato all'ingresso i-esimo;
- ⊗ dell'uscita i-esima quando un impulso è applicato all'ingresso j-esimo;
- ○ dell'uscita j-esima quando un impulso è applicato all'ingresso i-esimo;

57. La matrice di transizione dello stato $\mathbf{A}^k$ di un sistema discreto lineare stazionario può essere calcolata utilizzando le $\mathcal{Z}$-trasformate nel modo seguente:

- ○ $\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})]$
- ○ $\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})]$
- ○ $\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$
- ⊗ $\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$

58. Sia $\mathbf{A}$ una matrice diagonalizzabile di ordine n. Qualunque funzione di matrice è esprimibile nel modo seguente

$$f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{T}f(\mathbf{D})\mathbf{T}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^{*T}$$

Qual è il significato fisico dei vettori $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_i^{*T}$?
I vettori $\mathbf{v}_i$ sono gli autovettori della matrice $\mathbf{A}$. I vettori $\mathbf{v}_i^{*T}$ sono le righe della matrice $\mathbf{T}^{-1}$ dove $\mathbf{T}$ è la matrice che ha per colonne gli autovettori $\mathbf{v}_i$.

Qual è il significato fisico delle matrici $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^{*T}$?
Le $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^{*T}$ sono matrici di proiezione sull'autovettore v_i lungo il sottospazio generato da tutti gli altri $n-1$ autovettori.

****

59. Quali sono i *modi* di un sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$ nel caso in cui gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ siano tutti reali e distinti?

$$\lambda_1^k,\ \lambda_2^k,\ \ldots,\ \lambda_n^k$$

60. I *modi* di un sistema lineare invariante continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ sono le funzioni continue del tempo:

- ○ che coincidono con gli elementi della matrice $\mathbf{A}^t$
- ○ che coincidono con gli elementi della matrice $e^{\mathbf{A}t}$
- ○ che compaiono nella matrice $\mathbf{A}_J^t$ essendo $\mathbf{A}_J$ la forma canonica di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
- ⊗ che compaiono nella matrice $e^{\mathbf{A}_J t}$ essendo $\mathbf{A}_J$ la forma canonica di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;

61. I *modi* di un sistema lineare possono essere eccitati singolarmente in modo indipendente

- ○ sempre;
- ○ se il sistema ha tutti autovalori distinti;
- ⊗ se il sistema ha tutti autovalori reali distinti;

62. Un sistema lineare di ordine n posto in forma diagonale è rappresentabile graficamente come

- ○ la cascata di n sistemi lineari del primo ordine;
- ⊗ il parallelo di n sistemi lineari del primo ordine;

63. Scrivere, per sistemi continui e per sistemi discreti, i *modi reali* associati ad una coppia di poli complessi coniugati $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega = |\lambda| e^{j\theta}$:

tempo discreto	tempo continuo
$\lvert\lambda\rvert^k \cos(k\theta),\ \ \lvert\lambda\rvert^k \sin(k\theta),$	$e^{\sigma t}\cos\omega t,\ \ e^{\sigma t}\sin\omega t$

64. Quali sono i *modi* di un sistema lineare *discreto* di grado n, $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$, nel caso in cui la matrice $\mathbf{A}$ sia caratterizzata da un solo miniblocco di Jordan associato all'autovalore reale λ

$$\lambda^k, k\lambda^{k-1}, \left(\frac{k(k-1)}{2!}\right)\lambda^{k-2}, \ldots, \left(\frac{k(k-1)\ldots(k-n+2)}{(n-1)!}\right)\lambda_i^{k-n+1}$$

65. Quali sono i *modi* di un sistema lineare *continuo* di grado n, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, nel caso in cui la matrice $\mathbf{A}$ sia caratterizzata da un solo miniblocco di Jordan associato all'autovalore reale λ

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t},\ \ldots,\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}$$

66. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= \alpha \sin x_2(k) + x_1(k) \\ x_2(k+1) &= 1 - x_1(k) + x_2^2(k)\sin x_2(k) \end{cases}$$

a) Si verifichi se il punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ è di equilibrio per il sistema. Utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov, si studi poi la stabilità di tale punto al variare del parametro α;

b) Analizzando direttamente le equazioni alle differenze del sistema dato, mostrare che per $\alpha = 0$ il sistema non può essere asintoticamente stabile nell'intorno del punto di equilibrio $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

Soluzione.

a) Il punto $(x_1 = 1,\ x_2 = 0)$ è di equilibrio per il sistema se in tale punto valgono le relazioni:

$$\begin{cases} x_1(k) &= \alpha \sin x_2(k) + x_1(k) \\ x_2(k) &= 1 - x_1(k) + x_2^2(k)\sin x_2(k) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 &= 1 \\ 0 &= 1 - 1 \end{cases}$$

$(x_1 = 1,\ x_2 = 0)$ è quindi un punto di equilibrio per il sistema dato. Per poter applicare il criterio ridotto di Lyapunov si procede al calcolo dello Jacobiano del sistema

$$\mathbf{J}(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha\cos x_2 \\ -1 & x_2^2\cos x_2 + 2x_2\sin x_2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{J}(x_1,\, x_2)|_{(x_1=1,\ x_2=0)} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è il seguente

$$\det[z\mathbf{I}_2 - \mathbf{J}] = 0 \qquad \rightarrow \qquad z^2 - z + \alpha = 0$$

Le radici del polinomio caratteristico sono:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4\alpha}\right)$$

Il punto di equilibrio è asintoticamente stabile se i due autovalori della matrice $\mathbf{J}$ sono interni al cerchio unitario, cioè è stabile per tutti i valori di α tali per cui $|z_{1,2}| < 1$. È facile mostrare che si ha stabilità asintotica quando

$$0 < \alpha < 1$$

Un modo alternativo per dimostrare tale risultato è quello di utilizzare la trasformazione bilineare e applicare il criterio di Routh. Il polinomio caratteristico si trasforma come segue

$$z^2 - z + \alpha = 0\Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \qquad \rightarrow \qquad (2+\alpha)w^2 + 2(1-\alpha)w + \alpha = 0$$

Imponendo che tutti e tre i coefficienti del polinomio siano positivi si ottiene la condizione $0 < \alpha < 1$.

b) Per $\alpha = 0$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &=& x_1(k) \\ x_2(k+1) &=& 1 - x_1(k) + x_2^2(k)\sin x_2(k) \end{cases}$$

La prima equazione non è influenzata dalla seconda variabile x_2 e rappresenta un sistema lineare semplicemente stabile in quanto ha un polo in $z = 1$. Ne segue che il punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ non può essere asintoticamente stabile.

9) Indicare quali delle seguenti funzioni $V(x_1, x_2)$ sono definite positive nell'intorno dell'origine:

○ $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$;
⊗ $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
○ $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2(x_1^2 + x_2^2)$;
⊗ $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4$;

67. Dato il seguente sistema lineare continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),\, y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &=& \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &=& \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

a) Determinare l'evoluzione libera $\mathbf{x}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [1,\ -2]^{\mathrm{T}}$.

b) Determinare l'evoluzione forzata dell'uscita $y(t)$ in risposta al gradino unitario in ingresso $u(t) = 1$.

Soluzione.

a) Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è il seguente:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

La matrice $\mathbf{A}$ ha un solo autovalore $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica 2. A tale autovalore corrisponde un solo autovettore $\mathbf{v}_1$ che si determina risolvendo il seguente sistema omogeneo:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{o} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Un autovettore generalizzato del secondo ordine $\mathbf{v}_2$ si determina risolvendo il seguente sistema lineare:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione di coordinate $\mathbf{x}=\mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ che porta il sistema in forma canonica di Jordan è la seguente

$$\mathbf{T}=[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad\qquad \mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di stato $\overline{\mathbf{A}}$ del sistema trasformato ha la forma seguente:

$$\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera $x(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0=[1,\ -2]^{\mathrm{T}}$ si determina come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0=\mathbf{T}e^{\overline{\mathbf{A}}t}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t}+te^{-t} & te^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}\mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t}+te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}-te^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-t}-te^{-t} \\ te^{-t}-2e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

b) L'evoluzione forzata $y(t)$ si determina in base alla relazione:

$$y(t)=\mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau=\mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(t-\tau)\,d\tau$$

Utilizzando il risultato ottenuto al punto precedente relativamente al calcolo dell'esponenziale di matrice si ha che

$$y(t)=\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-\tau}+\tau e^{-\tau} & \tau e^{-\tau} \\ -\tau e^{-\tau} & e^{-\tau}-\tau e^{-\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}d\tau=0$$

Quindi la risposta al gradino di questo sistema è identicamente nulla. Un modo alternativo per giungere allo stesso risultato è quello di utilizzare le trasformate di Laplace. La funzione di trasferimento del sistema è

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)}=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-A)^{-1}\mathbf{B} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-1)^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=0
\end{aligned}$$

Siccome la funzione di trasferimento $G(s)$ è nulla, la risposta forzata del sistema è nulla anche per qualunque altro segnale di ingresso.

68. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{b}\mathbf{u}(k),\ y(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\left\{\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k)
\end{aligned}\right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k)=\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

(a) Calcolare la matrice $\mathbf{T}$ che porta il sistema in forma canonica di Jordan. Calcolare l'evoluzione libera dell'uscita del sistema a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Sol. Il sistema è già in forma canonica di Jordan per cui la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ coincide con la matrice identità: $\mathbf{T} = \mathbf{I}$. L'evoluzione libera dell'uscita a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = \mathbf{C}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 + k + \frac{k(k-1)}{2} \end{aligned}$$

69. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) \qquad\qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

70. Sia $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ un sistema non lineare autonomo e sia $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ il corrispondente sistema linearizzato nel punto di equilibrio $\mathbf{x} = 0$. In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che

- ○ se gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono tutti a parte reale negativa o nulla il sistema è stabile in $\mathbf{x} = 0$;
- ⊗ se gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono tutti a parte reale negativa il sistema è asintoticamente stabile in $\mathbf{x} = 0$;
- ○ se la matrice $\mathbf{A}$ ha autovalori immaginari con grado di molteplicità maggiore o uguale a due, allora il sistema è instabile in $\mathbf{x} = 0$;

71. Sia dato il seguente sistema non–lineare tempo–continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 - u(t)\cos x_1 \end{cases}$$

(a) Linearizzare il sistema non lineare nell'intorno dell'origine. Calcolare le matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ del corrispondente sistema lineare essendo $u(t)$ l'ingresso, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ lo stato e $y(t) = x_1$ l'uscita.

(b) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dell'origine utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov.

(c) Facendo riferimento al sistema lineare ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$), calcolare l'evoluzione libera dello stato $\mathbf{x}(t)$ a patire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

(d) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ del sistema lineare ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$).

Soluzione.

(a) Quando $u = 0$, l'unico punto di equilibrio del sistema è $\mathbf{x} = 0$. Linearizzando nell'intorno di questo punto di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{(0,0)}\mathbf{x} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right]_{(0,0)} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos x_1 + u\sin x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos x_1 \end{bmatrix}_{(0,0)} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

(b) Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono reali distinti:

$$\Delta_A(s) = s^2 - 1 = (s+1)(s-1) \qquad \rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov il sistema è instabile nell'intorno dell'origine in quanto uno degli autovalori è instabile.

(c) Sia $\mathbf{T}$ la matrice degli autovettori del sistema:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$$

Le due colonne $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ della matrice $\mathbf{T}$ sono gli autovettori associati, rispettivamente, all'autovalore $\lambda_1 = -1$ e all'autovalore $\lambda_2 = 1$. L'esponenziale della matrice $\mathbf{A}$ si calcola nel seguente modo:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{T}e^{\bar{\mathbf{A}}}\mathbf{T}^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{t}+e^{-t} & e^{t}-e^{-t} \\ e^{t}-e^{-t} & e^{t}+e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'evoluzione libera del sistema a partire da $\mathbf{x}(0)$ risulta quindi essere la seguente:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{bmatrix}$$

(d) La funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema lineare è:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{s^2-1}$$

72. Dato un sistema lineare, stazionario, a tempo discreto, con n autovalori tutti reali e distinti. Allora:

- ⊗ La matrice di stato del sistema è diagonalizzabile.
- ⊗ É possibile scomporre il sistema dato in n sottosistemi non interagenti.
- ⊗ Il polinomio minimo della matrice di stato ha grado n.

73. Sia dato un sistema invariante:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

allora:

- ⊗ La asintotica stabilità della funzione di uscita g per una perturbazione dello stato iniziale è garantita se la g è uniformemente continua e il movimento del sistema è asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale.
- ○ Per studiare la stabilità della funzione di uscita non occorre valutare la stabilità del movimento del sistema.

74. Dato un sistema lineare, allora:

- ⊗ Se un movimento è stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale, allora è stabile qualunque altro movimento e per qualunque altro stato iniziale.
- ⊗ Se un movimento è stabile rispetto a piccole perturbazioni dello stato iniziale, allora è stabile rispetto a perturbazioni di qualunque entità.
- ⊗ L'origine è sempre un punto di equilibrio.

75. Dato un sistema lineare a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t)$, condizione necessaria e sufficiente affinchè tale sistema sia stabile è che per ogni matrice Q simmetrica e definita positiva, l'equazione matriciale lineare:

- ⊗ $A^TP + PA = -Q$ nella matrice incognita P ammetta una soluzione simmetrica e definita positiva.

◯ $A^T PA + P = -Q$ nella matrice incognita P ammetta una soluzione simmetrica e definita positiva.

◯ $A^T P + PA = -Q$ nella matrice incognita P ammetta una soluzione simmetrica e definita negativa.

◯ $A^T PA + P = -Q$ nella matrice incognita P ammetta una soluzione simmetrica e definita negativa.

76. Dato il *movimento* di un sistema dinamico $\psi(t, \bar{t}_i, \bar{x}(\bar{t}_i), \bar{u}(.))$, dove $\bar{t}_i, \bar{x}(\bar{t}_i)$ e $\bar{u}(.)$ sono, rispettivamente, istante iniziale, stato iniziali e funzione di ingresso, enunciare la definizione di stabilità di tale movimento rispetto a perturbazioni dello stato iniziale (secondo Lyapunov).

Un movimento $\psi(t, \bar{t}_i, \bar{x}(\bar{t}_i), \bar{u}(.))$ è stabile secondo Lyapunov se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che per tutti gli stati iniziali $x(\bar{t}_i)$ tali che

$$||x(\bar{t}_i) - \bar{x}(\bar{t}_i)|| < \delta$$

si ha che

$$||\psi(t, \bar{t}_i, x(\bar{t}_i), \bar{u}(.)) - \psi(t, \bar{t}_i, \bar{x}(\bar{t}_i), \bar{u}(.))|| < \epsilon, \qquad \forall t \geq \bar{t}_i$$

77. Sia dato un sistema non–lineare, tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$. I punti di equilibrio di questo sistema si ottengono:

◯ Risolvendo l'equazione $0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$, in $\mathbf{x}(k)$.

⊗ Determinando i punti $\mathbf{x}_e$ tali che $\mathbf{x}_e(k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e)$.

⊗ I sistemi non–lineari possono non avere punti di equilibrio.

78. Date le matrici di stato in forma di Jordan di due sistemi dinamici tempo–continui

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare

- autovalori e molteplicità:
$$\lambda_{1,2,3} = 1, \qquad \lambda'_{1,2,3} = 1$$
- polinomi caratteristici:
$$p(s) = (s-1)^3, \qquad p'(s) = (s-1)^3$$
- polinomi minimi:
$$m(s) = (s-1)^2, \qquad m'(s) = (s-1)$$
- modi:
$$e^t,\ te^t, \qquad e^t$$
- autospazi associati agli autovalori:
$$\mathcal{A} = \text{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{A}' = \text{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

79. Dato il seguente sistema non–lineare tempo–continuo:

$$\dot{x} = x - x^3$$

a) Calcolare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov.

b) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio anche utilizzando le seguenti funzioni di Lyapunov: $V_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, $V_2(x) = \frac{1}{2}(1-x)^2$, $V_3(x) = \frac{1}{2}(1+x)^2$. Utilizzare per ogni punto di equilibrio la funzione di Lyapunov più appropriata.

Soluzione.

a) I punti di equilibrio del sistema sono:

$$1)\ x_1 = 0, \qquad 2)\ x_2 = 1, \qquad 3)\ x_3 = -1$$

Il sistema dinamico che si ottiene linearizzando il sistema dato è il seguente:

$$\dot{x} = [1 - 3x^2]x$$

Nell'intorno di questi tre punti di equilibrio si ottengono i seguenti sistemi lineari:

$$1)\ \dot{x} = x, \qquad 2)\ \dot{x} = -2x, \qquad 3)\ \dot{x} = -2x$$

Se ne deduce che l'origine $x_1 = 0$ è un punto di lavoro instabile, mentre gli altri due punti di equilibrio $x_2 = 1$ e $x_3 = -1$ sono punti di equilibrio asintoticamente stabili.

b) Per studiare la stabilità nell'origine si utilizza la funzione di Lyapunov $V_1(x) = \frac{1}{2}x^2$. Essa è definita positiva, e la sua derivata vale

$$\dot{V}_1(x) = x\dot{x} = x^2(1 - x^2) > 0$$

Nell'intorno dell'origine la funzione $\dot{V}_1(x)$ è definita positiva per cui, in base al teorema di instabilità di Lyapunov, l'origine è un punto di lavoro instabile.
Per studiare la stabilità nel punto $x_2 = 1$ si utilizza la funzione di Lyapunov $V_2(x) = \frac{1}{2}(1 - x)^2$. La sua derivata vale

$$\dot{V}_2(x) = -(1 - x)\dot{x} = -(1 - x)x(1 - x^2) = -x(1 - x)^2(1 + x) < 0$$

Nell'intorno del punto $x_2 = 1$ la funzione $\dot{V}_2(x)$ è definita negativa per cui, in base al criterio di stabilità di Lyapunov, il punto $x_2 = 1$ è un punto di lavoro asintoticamente stabile.
Per studiare la stabilità nel punto $x_3 = -1$ si utilizza la funzione di Lyapunov $V_3(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^2$. La sua derivata vale

$$\dot{V}_3(x) = (1 + x)\dot{x} = (1 + x)x(1 - x^2) = x(1 + x)^2(1 - x) < 0$$

Nell'intorno del punto $x_3 = -1$ la funzione $\dot{V}_3(x)$ è definita negativa per cui, in base al criterio di stabilità di Lyapunov, il punto $x_3 = -1$ è un punto di lavoro asintoticamente stabile.

80. Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_1^4 - x_2^2 + x_2^4$:

    ○ è definita positiva;
    ⊗ è definita negativa;
    ○ è semi-definita positiva;
    ○ è semi-definita negativa;
    ○ non è definita positiva né negativa.

81. Andamento delle traiettorie

82. Stabilità nei sistemi lineari e non lineari

83. ...

84. Il grado r del polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

- ◯ è pari al numero di autovalori distinti della matrice $\mathbf{A}$;
- ◯ è pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
- ◯ è pari al numero di miniblocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
- ⊗ è sempre minore od uguale ad n.

85. Scrivere l'equazione di Lyapunov 1) per sistemi tempo continui e 2) per sistemi tempo discreti

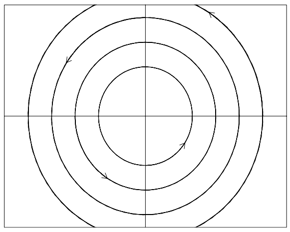
$$1)\quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}=-\mathbf{Q} \qquad\qquad 2)\quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}-\mathbf{P}=-\mathbf{Q}$$

86. Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1,x_2)=x_1^2-x_1^4+x_2^2-x_2^4$:

- ⊗ è definita positiva;
- ◯ è semi-definita positiva;
- ◯ è semi-definita negativa;
- ◯ non è definita positiva né negativa.

87. Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori complessi coniugati: $\lambda_{1,2}=\pm j$.
Ad autovalori immaginari corrispondono degli andamenti concentrici:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}t}\mathbf{x}_0$$



88. Il numero di autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

- ⊗ è pari al numero di blocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
- ◯ è pari al numero di miniblocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
- ◯ è pari al grado r del polinomio minimo $m(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$;
- ⊗ è minore od uguale al numero di autovettori linearmente indipendenti della matrice $\mathbf{A}$.

89. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0)=[x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \qquad\qquad \mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

90. Enunciare il criterio di instabilità di Lyapunov nel caso di sistemi discreti.
Sia $\mathbf{x}=0$ uno stato di equilibrio per il sistema discreto $\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{f}(x(k))$. Se in un intorno W dell'origine esiste una funzione $V(\mathbf{x})$ definita positiva e se la funzione

$$\Delta V(\mathbf{x})=V(\mathbf{f}(x(k)))-V(\mathbf{x})$$

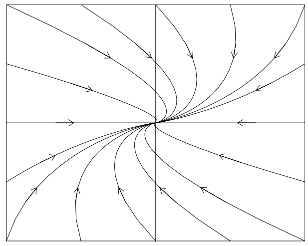
è semidefinita negativa, allora l'origine è stabile. Se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è definita negativa, allora l'origine è asintoticamente stabile.

91. Per sistemi regolari tempo-varianti

- ◯ gli stati di equilibrio di determinano imponendo ingressi costanti;
- ◯ la stabilità è completamente determinata dalla posizione degli autovalori della matrice di sistema $\mathbf{A}$;
- ⊗ la stabilità è completamente determinata dalla norma della matrice di transizione $\Phi(t,t_0)$;

92. Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori coincidenti $\lambda_{1,2} = -1$ a cui corrisponde un solo autovettore reale, per esempio $\mathbf{v} = [1,\ 0]^{\mathrm{T}}$.
Ad autovalori coincidenti caratterizzati da un solo autovettore reale corrispondono gli andamenti mostrati in figura:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t} \mathbf{x}_0$$



93. Dato un sistema lineare, stazionario, discreto, con n autovalori distinti tutti reali negativi, allora:

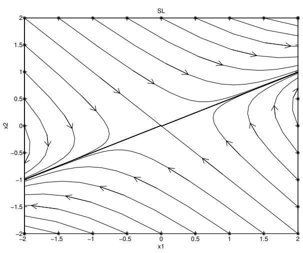
- ⊗ la matrice di stato del sistema è diagonalizzabile;
- ○ il sistema è stabile;
- ○ il sistema è raggiungibile;
- ○ il sistema è osservabile;

94. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t & 0 \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

95. Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_1 = 2$ a cui corrispondono due autovettori reali v_1 e v_2 perpendicolari tra di loro.
Ad autovalori reali distinti corrispondono gli andamenti mostrati in figura (andamenti delle traiettorie a "sella"):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t} \mathbf{x}_0$$



96. Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^4 x_4^2 (x_1^2 + x_2^2)$:

- ○ è definita positiva;
- ⊗ è semi-definita positiva;
- ○ è semi-definita negativa;
- ○ non è definita positiva né negativa.

97. Sia dato un sistema lineare SISO caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ della corrispondente forma canonica di controllo. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

98. Il grado di molteplicità di un autovalore λ nel polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

- ⊗ è sempre minore od uguale al grado di molteplicità dell'autovalore nel polinomio caratteristico $\Delta(\lambda)$;
- ⊗ è sempre pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan associato a quel autovalore;
- ○ è sempre pari numero di autovettori associati a quel autovalore;

99. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto ($A = \sqrt{13},\ \ \theta = \arctan \frac{2}{3}$):

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} A^k \cos(k\theta) & A^k \sin(k\theta) & 0 \\ -A^k \sin(k\theta) & A^k \cos(k\theta) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

100. Scrivere le relazioni che permettono di calcolare l'esponenziale di matrice $e^{\mathbf{A}t}$ e la potenza $\mathbf{A}^k$ utilizzando, rispettivamente, la trasformata di Laplace e la $\mathcal{Z}$-trasformate

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right], \qquad \mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]$$

101. Nell'intorno del punto $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, la funzione $V(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_1 + 1) + (x_2^2 - 2x_2 + 1)$:

- ⊗ è definita positiva;
- ○ è semi-definita positiva;
- ○ è semi-definita negativa;
- ○ non è definita.

Domande

1. Sia $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ la funzione di transizione dello stato di un sistema dinamico continuo. Completare le seguenti definizioni:

   Uno stato $x(t_1)$ è raggiungibile dallo stato $x(t_0)$ nell'intervallo di tempo $[t_0,\, t_1]$ se ...

   esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$.

   Uno stato $x(t_0)$ è controllabile allo stato $x(t_1)$ nell'intervallo di tempo $[t_0,\, t_1]$ se ...

   esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$.

2. Sia dato un sistema *lineare, discreto, tempo–invariante* descritto dalle matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Completare la seguente definizione:

   Due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro in k passi *se ...*

   per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$, le successioni di uscita $\mathbf{y}_1(\cdot)$ e $\mathbf{y}_2(\cdot)$, che corrispondono agli stati iniziali $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{x}_2(0)$, coincidono nei primi k passi:

   $$\mathbf{x}_1(0) \overset{k}{\approx} \mathbf{x}_2(0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y}_1(\tau) = \mathbf{y}_2(\tau), \qquad 0 \le \tau \le k$$

3. Relativamente al sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, scrivere in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ una condizione necessaria e sufficiente per la completa ricostruibilità del sistema:

   $$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

4. Sia $S' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT},\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{CT})$ il sistema che si ottiene da $S = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ applicando la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'$. La matrice di trasformazione $\tilde{\mathbf{T}}$ che permette di passare dal sistema S_D (duale di S) al sistema S'_D (duale di S') in base alla trasformazione di coordinate $\mathbf{x}_D = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x}'_D$ è

   $\bigcirc$ $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}$
   $\bigcirc$ $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}$
   $\otimes$ $\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}$
   $\otimes$ $\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}^{-1})^{\mathrm{T}}$

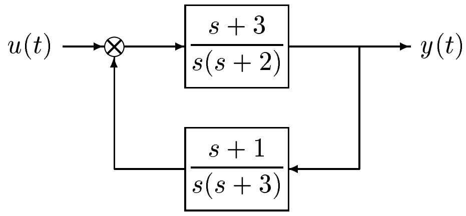
5. Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo (raggiungibile e osservabile) caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, quando si utilizza un periodo di campionamento $T = 2\pi$

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   $$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   $\otimes$ è un sistema raggiungibile;
   $\bigcirc$ è un sistema non raggiungibile;
   $\otimes$ è un sistema osservabile;
   $\bigcirc$ è un sistema non osservabile;

6. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

   $\bigcirc$ Il sistema è completamente raggiungibile;
   $\otimes$ Il sistema non è completamente raggiungibile;
   $\bigcirc$ Il sistema è completamente osservabile;
   $\otimes$ Il sistema non è completamente osservabile,



7. Scrivere la forma finale a cui si giunge applicando ad un sistema dinamico lineare stazionario la scomposizione canonica di Kalman nel caso in cui la parte non raggiungibile e non osservabile sia assente (cioè abbia dimensione nulla):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix}$$

8. Calcolare una realizzazione completamente raggiungibile della seguente matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s(s+3)} \\ \dfrac{1}{s(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+6s} \\ \dfrac{s+3}{s(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Per un sistema lineare, tempo discreto e stazionario di dimensione n:

- ⊗ La completa raggiungibilità implica la controllabilità.
- ○ La completa controllabilità implica la raggiungibilità.

10. Dato un sistema dinamico lineare a tempo continuo, stazionario, instabile, completamente osservabile, allora:

- ⊗ Non è possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena aperta perchè l'errore di stima diverge.
- ⊗ È possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena chiusa, con errore di stima convergente.
- ○ Non è possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena chiusa.

11. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

Scrivere le equazioni dello stimatore asintotico dello stato di ordine pieno in catena chiusa:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

12. Siano $\mathcal{X}^+$ e $\mathcal{E}^-$ rispettivamente i sottospazi raggiungibile e non osservabile di un sistema lineare tempo–continuo:

- ⊗ se $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}^+$ per ogni $t \geq 0$ e per ogni funzione di ingresso
- ○ se $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}^-$, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{E}^-$ per ogni $t \geq 0$ e per ogni funzione di ingresso

13. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

- ⊗ Mediante la retroazione stato–ingresso è possibile allocare a piacimento gli autovalori della parte raggiungibile del sistema.
- ⊗ La retroazione stato–ingresso non consente di modificare la dimensione del sottospazio di raggiungibilità.
- ⊗ E' sempre possibile stabilizzare il sistema mediante retroazione stato–ingresso se gli autovalori del sottosistema relativo alla parte non–raggiungibile hanno modulo inferiore all'unità.

14. Scrivere una realizzazione completamente osservabile e completamente raggiungibile della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+4)(s+3)} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

15. Nel caso di sistemi discreti, scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinchè uno stato finale $\mathbf{x}_f$ sia raggiungibile in k passi a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 \in \mathrm{Im} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

16. Enunciare il *Lemma di Heymann*:

Se $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *è raggiungibile e se* $\mathbf{b}_i$ *è una colonna non nulla di* $\mathbf{B}$*, allora esiste una matrice* $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m\times n}$ *tale che* $(\mathbf{A} + \mathbf{BM}_i, \mathbf{b}_i)$ *è raggiungibile.*

17. Nella sintesi del regolatore, la proprietà di separazione

$\bigcirc$ afferma che mediante retroazione è sempre possibile stabilizzare un qualsiasi sistema dinamico lineare;

$\otimes$ afferma che la sintesi dell'osservatore può essere fatta indipendentemente dalla sintesi della retroazione statica;

$\bigcirc$ è valida solo nel caso di osservatore asintotico di ordine pieno;

$\otimes$ è valida anche nel caso di osservatore asintotico di ordine ridotto;

18. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$:

$\otimes$ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è ricostruibile;

$\bigcirc$ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è raggiungibile;

$\bigcirc$ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è ricostruibile;

$\bigcirc$ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è raggiungibile;

19. Sia dato un sistema lineare continuo completamente raggiungibile e osservabile avente due soli poli complessi coniugati in $p_{12} = -4 \pm j$. Indicare per quali valori del periodo di campionamento T il corrispondente sistema a segnali campionati è completamente raggiungibile:

$$T \neq k\pi \qquad\qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

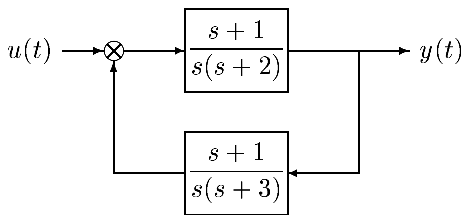
20. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

$\otimes$ Il sistema è completamente osservabile;

$\bigcirc$ Il sistema non è completamente osservabile,

$\otimes$ Il sistema è completamente raggiungibile;

$\bigcirc$ Il sistema non è completamente raggiungibile;

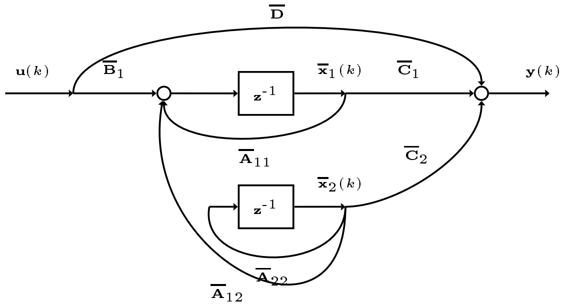


21. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

22. Disegnare lo schema a blocchi della forma standard di raggiungibilità di un sistema lineare tempo-discreto caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}(k+1) & = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & \overline{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(k) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$



23. Relativamente ad un sistema lineare discreto, riportare la struttura di uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto.

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = (\overline{\mathbf{A}}_{11} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{v}}(k) + (\overline{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{22} - \overline{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)\mathbf{u}(k)$$

24. Siano $\mathcal{X}^+$ e $\mathcal{X}_K^+$ i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}, \mathbf{B})$. Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

- ○ $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X}_K^+$
- ○ $\mathcal{X}_K^+ \subset \mathcal{X}^+$
- ⊗ $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}_K^+$
- ○ nessuna delle precedenti

25. Il sistema duale $\mathcal{S}_D$ del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$ è :

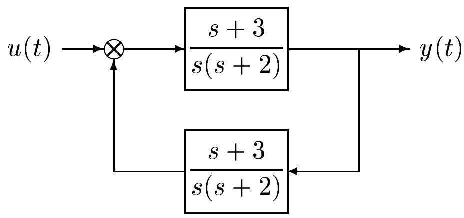
- ○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D})$
- ⊗ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$
- ○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$
- ○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D})$

26. Sia $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k)$ il sistema discreto ottenuto campinando, con periodo di campionamento T, un sistema continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ asintoticamente stabile. Si può allora affermare che

- ○ La matrice $\mathbf{F}$ ha tutti gli autovalori a parte reale negativa;
- ⊗ La matrice $\mathbf{F}$ ha tutti gli autovalori a modulo minore di 1;
- ○ La matrice $\mathbf{F}$ è stabile solo se $T \neq \frac{2k\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j)}$

27. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- ⊗ Il sistema è completamente raggiungibile;
- ○ Il sistema non è completamente raggiungibile;
- ⊗ Il sistema è completamente osservabile;
- ○ Il sistema non è completamente osservabile.



28. Scrivere in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$ l'espressione finale della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di una sistema discreto caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix}$$

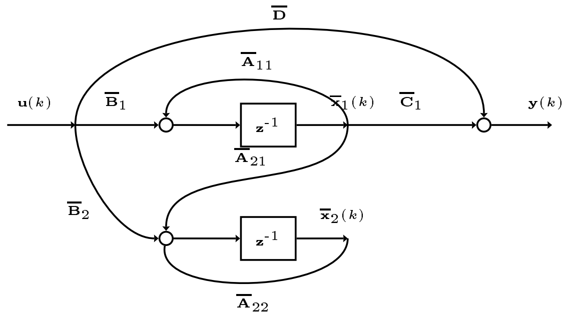
$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}_1(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{B}_1$$

29. Sia dato un sistema lineare SISO caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ della corrispondente forma canonica di controllo. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_C = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{array}\right], \qquad \mathbf{b}_C = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{C}_C = \left[\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} \end{array}\right]$$

30. Disegnare lo schema a blocchi della forma standard di osservabilità di un sistema lineare tempo-discreto caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}(k+1) & = \left[\begin{array}{cc} \overline{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \overline{\mathbf{A}}_{21} & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{c} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \end{array}\right] \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = \left[\begin{array}{cc} \overline{\mathbf{C}}_1 & 0 \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(k) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$



31. Relativamente ad un sistema lineare continuo, riportare la struttura di uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto.

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{array}\right]$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = (\overline{\mathbf{A}}_{11} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{v}}(t) + (\overline{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{22} - \overline{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L})\mathbf{y}(t) + (\overline{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\overline{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(t)$$

32. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

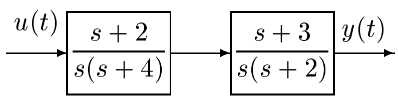
- ⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
- ⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;
- ○ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
- ⊗ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;

33. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente al seguente sistema dinamico:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) \end{aligned} \qquad G(s) = \frac{8s^3 + 7s^2 + 6s + 5}{s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

34. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- ○ Il sistema è completamente raggiungibile;
- ⊗ Il sistema non è completamente raggiungibile;
- ⊗ Il sistema è completamente osservabile;
- ○ Il sistema non è completamente osservabile.



35. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right], \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{4,4} \end{array}\right] \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{array}\right] \\ \mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C}_1 & 0 \end{array}\right] \end{cases}$$

36. Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la completa controllabililità in k passi del sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

37. Per un sistema lineare stazionario discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ avente matrice di sistema $\mathbf{A}$ non singolare, è possibile affermare che:

⊗ se il sistema è completamente controllabile è anche completamente raggiungibile;

⊗ se il sistema è completamente raggiungibile è anche completamente controllabile;

⊗ se il sistema è completamente osservabile è anche completamente ricostruibile;

⊗ se il sistema è completamente ricostruibile è anche completamente osservabile;

38. Un sistema dinamico lineare stazionario è caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

⊗ Il sistema è in forma standard di ossevabilità

○ Il sistema è in forma standard di raggiungibilità

⊗ Il sistema non è completamente osservabile

○ Il sistema non è completamente raggiungibilile

39. Il sistema duale $\mathcal{S}_D$ del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ è :

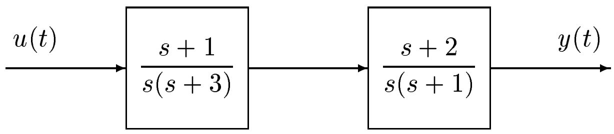
○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}})$

○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}})$

○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}})$

⊗ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}})$

40. Sia dato il seguente sistema lineare continuo:



○ Il sistema è completamente controllabile;

⊗ Il sistema è completamente osservabile;

⊗ Per tale sistema esiste un osservatore asintotico dello stato;

41. Sia dato un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ completamente raggiungibile. Il corrispondente sistema a dati campionati (essendo T il periodo di campionamento) è completamente raggiungibile se e solo se per ogni coppia λ_i, λ_j di autovalori distinti di $\mathbf{A}$ aventi la stessa parte reale, vale la relazione:

$$\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \qquad\qquad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

42. Sia dato il seguente sistema lineare continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Scrivere le equazioni dello stimatore asintotico dello stato di ordine pieno:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{LC}]\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

43. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

○ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;

⊗ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;

⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;

⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;

44. Sia dato un sistema lineare continuo completamente raggiungibile e osservabile avente quattro soli poli complessi coniugati in $p_{1,2} = -3 \pm j$ e $p_{3,4} = -3 \pm j2$. Indicare per quali valori del periodo di campionamento T il corrispondente sistema a segnali campionati è completamente raggiungibile:

$$T \neq \frac{2k\pi}{1}, \qquad T \neq \frac{2k\pi}{2}, \qquad T \neq \frac{2k\pi}{3}, \qquad T \neq \frac{2k\pi}{4}, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

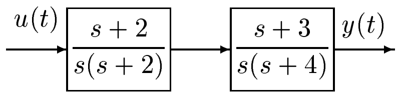
45. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

⊗ Il sistema può essere completamente raggiungibile;

○ Il sistema non è completamente raggiungibile;

⊗ Il sistema può essere completamente osservabile;

○ Il sistema non è completamente osservabile.



46. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{2,3} & \mathbf{A}_{2,4} \\ 0 & \mathbf{A}_{3,3} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{4,3} & \mathbf{A}_{4,4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_3 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

47. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ di un sistema lineare $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$

○ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$

○ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$

⊗ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente $\mathrm{Im}\mathbf{B}$

○ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente $\mathrm{Im}\mathbf{B}$

48. Sia $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ un sistema lineare ad un ingresso e sia $n > 1$ la dimensione dello spazio degli stati. Se il vettore $\mathbf{b}$ coincide con uno degli autovettori della matrice $\mathbf{A}$, allora

⊗ il sistema non è completamente raggiungibile;

○ il sistema può essere completamente raggiungibile;

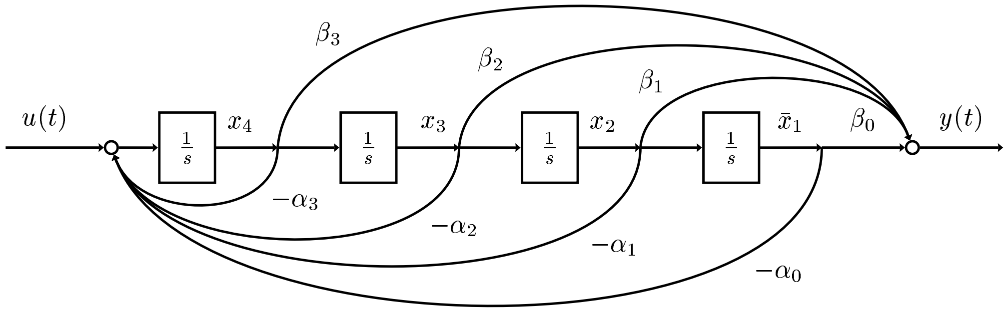
⊗ il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ ha dimensione unitaria.

49. Relativamente al sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, scrivere in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ una condizione necessaria e sufficiente per garantire che i due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ siano indistinguibili del futuro in k passi:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k \end{bmatrix} = \mathcal{E}^-(k)$$

50. Disegnare lo schema a blocchi di un sistema tempo-continuo caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ in forma canonica di controllo.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$



51. Scrivere una realizzazione completamente controllabile e completamente osservabile della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} \qquad \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

52. Nella sintesi del regolatore, la proprietà di separazione

- ○ è valida solo nel caso di osservatore asintotico di ordine pieno;
- ⊗ è valida anche nel caso di osservatore asintotico di ordine ridotto;
- ○ afferma che mediante retroazione è sempre possibile stabilizzare un qualsiasi sistema dinamico lineare;
- ⊗ afferma che la sintesi dell'osservatore può essere fatta indipendentemente dalla sintesi della retroazione statica;

53. Sia dato il seguente sistema lineare continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Scrivere, in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e del periodo di campionamento T, l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati.

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

54. Scrivere in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$ l'espressione finale della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di una sistema discreto caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1} & 0 \\ (*) & (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_2(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{B}_2$$

55. Sia dato un sistema tempo-discreto $S = (\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C},\, \mathbf{D})$ con m ingressi e p uscite. Il corrispondete sistema duale ha la seguente struttura:

$S_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}},\ )$ avente p ingressi e m uscite

Indicare inoltre quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $\otimes$ S osservabile $\Rightarrow$ S_D controllabile;
- $\bigcirc$ S controllabile $\Rightarrow$ S_D osservabile;
- $\bigcirc$ S ricostruibile $\Rightarrow$ S_D osservabile;
- $\otimes$ S raggiungibile $\Rightarrow$ S_D ricostruibile;

56. Data la seguente "matrice" di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ di un sistema del quarto ordine tempo continuo con un solo ingresso (m=1) ed una sola uscita (p=1) completamente raggiungibile

$$\mathbf{H}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s^2+2)^2} = \frac{s^2+6s+8}{s^4+4s^2+4}$$

scrivere la corrispondente forma canonica di controllo $(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{c}_c)$.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_c = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una retroazione dello stato applicata al sistema $(\mathbf{A}_c,\, \mathbf{b}_c,\, \mathbf{c}_c)$:

- $\otimes$ modifica solo i poli del sistema retroazionato;
- $\bigcirc$ modifica solo gli zeri del sistema retroazionato;
- $\bigcirc$ modifica sia i poli che gli zeri del sistema retroazionato;

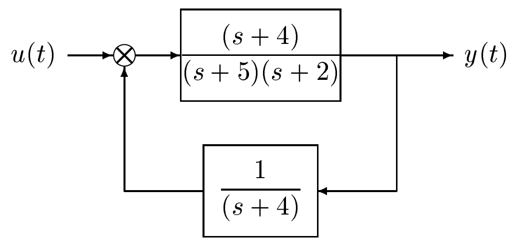
57. Dire come si costruisce la matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che permette di portare un sistema $(\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C})$ in forma canonica di osservabilità $(\mathbf{A}_o,\, \mathbf{B}_o,\, \mathbf{C}_o)$. Indicare inoltre la struttura delle matrici $\mathbf{A}_o$, $\mathbf{B}_o$ e $\mathbf{C}_o$:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = [(\mathcal{O}_c^-)^{-1}\mathcal{O}^-]^{-1}$$

58. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- $\bigcirc$ Il sistema è completamente raggiungibile;
- $\otimes$ Il sistema non è completamente raggiungibile;
- $\bigcirc$ Il sistema è completamente osservabile;
- $\otimes$ Il sistema non è completamente osservabile,



59. In un sistema lineare discreto tempo-invariante, due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro se per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$

- $\otimes$ le corrispondenti successioni di uscita $\mathbf{y}_1(\tau)$ e $\mathbf{y}_2(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$;
- $\otimes$ le corrispondenti evoluzioni libere $\mathbf{y}_{l,1}(\tau)$ e $\mathbf{y}_{l,2}(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$;
- $\bigcirc$ se i vettori $\mathbf{x}_1$ ed $\mathbf{x}_2$ appartengono al sottospazio $\mathcal{E}^-$;
- $\otimes$ se il vettore $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ appartiene al sottospazio $\mathcal{E}^-$;

60. Sia $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C})$ un sistema lineare caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ e sia $\mathcal{S}_c = (\mathbf{A}_c,\, \mathbf{B}_c,\, \mathbf{C}_c)$ il corrispondente sistema in forma canonica (di raggiungibilità o di osservabilità). Scrivere, in funzione delle matrici di raggiungibilità e di osservabilità dei due sistemi, le matrici $\mathbf{T}$ e $\mathbf{P}$ che portano il sistema $\mathcal{S}$ nella corrispondente forma canonica

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^{+}(\mathcal{R}_c^{+})^{-1}, \qquad\qquad \mathbf{P} = \left[(\mathcal{O}_c^{-})^{-1}\mathcal{O}^{-}\right]^{-1}$$

61. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema continuo $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

⊗ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
○ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;
⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è ricostruibile;

62. Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, quando si utilizza un periodo di campionamento $T = 2\pi$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

⊗ è un sistema non raggiungibile;
⊗ è un sistema non osservabile;

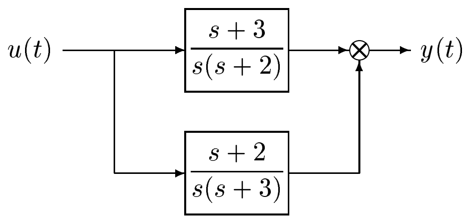
63. Enunciare la *Proprietà di separazione*:

La sintesi del blocco di retroazione $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$ *e del blocco di stima* $(\mathbf{A} + \mathbf{LC})$ *può essere fatta in modo indipendente*

$$\det[z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] = \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]\,\det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})]$$

64. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

⊗ Il sistema non è completamente raggiungibile;
○ Il sistema è completamente raggiungibile;
⊗ Il sistema non è completamente osservabile;
○ Il sistema è completamente osservabile.



65. Siano $\mathcal{E}^{-}$ e $\mathcal{E}^{-}_{\mathbf{L}}$ i sottospazi di non osservabilità associati alle coppie di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{LC}, \mathbf{C})$. Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

○ $\mathcal{E}^{-} \subset \mathcal{E}^{-}_{\mathbf{L}}$
○ $\mathcal{E}^{-}_{\mathbf{L}} \subset \mathcal{E}^{-}$
⊗ $\mathcal{E}^{-} = \mathcal{E}^{-}_{\mathbf{L}}$
○ nessuna delle precedenti

66. Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo (raggiungibile e osservabile) caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, quando si utilizza un periodo di campionamento $T = 2\pi$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

○ è un sistema raggiungibile;
⊗ è un sistema non raggiungibile;
○ è un sistema osservabile;

⊗ è un sistema non osservabile;

67. Relativamente ad un sistema lineare stazionario discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ che ha almeno un autovalore nell'origine, è possibile affermare che:

○ se il sistema è completamente controllabile allora è anche completamente raggiungibile;

⊗ se il sistema è completamente raggiungibile allora è anche completamente controllabile;

⊗ se il sistema è completamente osservabile allora è anche completamente ricostruibile;

○ se il sistema è completamente ricostruibile allora è anche completamente osservabile;

68. Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

○ Il sistema non è completamente raggiungibile;

⊗ Il sistema non è completamente osservabile;

⊗ Il sistema può essere raggiungibile;

69. Scrivere la forma finale a cui si giunge applicando ad un sistema dinamico lineare stazionario la scomposizione canonica di Kalman nella forma più generale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & 0 & \mathbf{A}_{1,3} & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{2,3} & \mathbf{A}_{2,4} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{4,3} & \mathbf{A}_{4,4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{C}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

70. Nel caso di sistemi discreti lineari invarianti, i sottospazi $\mathcal{X}^+(k)$ raggiungibili in k passi soddisfano le seguenti relazioni:

○ $\mathcal{X}^+(1) \subset \mathcal{X}^+(2) \subset \ldots \subset \mathcal{X}^+(k) \subset \ldots$

⊗ $\mathcal{X}^+(1) \subseteq \mathcal{X}^+(2) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{X}^+(k) \subseteq \ldots$

○ $\mathcal{X}^+(1) \supset \mathcal{X}^+(2) \supset \ldots \supset \mathcal{X}^+(k) \supset \ldots$

○ $\mathcal{X}^+(1) \supseteq \mathcal{X}^+(2) \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{X}^+(k) \supseteq \ldots$

71. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di raggiungibilità $\mathcal{R}_1^+$ ed $\mathcal{R}_2^+$ esiste il legame:

⊗ $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}\mathcal{R}_2^+$

○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}_2^+$

○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}$

○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}^{-1}$

72. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di osservabilità $\mathcal{O}_1^-$ ed $\mathcal{O}_2^-$ esiste il legame:

○ $\mathcal{O}_1^- = \mathbf{T}\mathcal{O}_2^-$

○ $\mathcal{O}_1^- = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{O}_2^-$

○ $\mathcal{O}_1^- = \mathcal{O}_2^-\mathbf{T}$

⊗ $\mathcal{O}_1^- = \mathcal{O}_2^-\mathbf{T}^{-1}$

73. Nel caso di sistemi lineari invarianti $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$, la controllabilità implica la raggiungibilità:

○ sempre;

⊗ se il sistema è tempo continuo;

- ○ se il sistema è tempo discreto;
- ⊗ se la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare;

74. Nel caso di sistemi discreti lineari invarianti $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,u(k)$, la successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \ldots, \mathbf{u}(\bar{k}-1)$ che consente di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(\bar{k})$:

- ⊗ esiste se il sistema è raggiungibile;
- ○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{k}) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$;
- ○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{k}) - e^{\mathbf{A}\bar{k}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$;
- ⊗ esiste se $\mathbf{x}(\bar{k}) - \mathbf{A}^{\bar{k}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$;
- ○ se esiste è unica;

75. Nel caso di sistemi continui lineari invarianti $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, la funzione di ingresso $\mathbf{u}(t)$, per $t \in [0,\, \bar{t}]$, che consente di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(\bar{t})$:

- ⊗ esiste se il sistema è raggiungibile;
- ○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{t}) \in \mathcal{X}^+$;
- ⊗ esiste se $\mathbf{x}(\bar{t}) - e^{\mathbf{A}\bar{t}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$;
- ○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{A}^{\bar{t}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$;
- ○ se esiste è unica;

76. Nel caso di sistemi continui lineari invarianti $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, l'insieme $\mathcal{X}^+(t)$ degli stati raggiungibili dall'origine nell'intervallo di tempo $[0,\, t]$:

- ⊗ è un sottospazio;
- ⊗ è indipendente dal tempo t;
- ⊗ è uno spazio invariante di $\mathbf{A}$;

77. La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di un sistema discreto:

- ⊗ è funzione della sola parte raggiungibile del sistema;
- ⊗ è funzione della sola parte osservabile del sistema;
- ○ è funzione delle condizioni iniziali del sistema;

78. Il seguente sistema lineare continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ posto in forma canonica di Jordan:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

- ○ è raggiungibile;
- ⊗ non è raggiungibile;
- ○ è controllabile;
- ⊗ non è controllabile;

79. Mediante retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ è possibile posizionare a piacere:

- ○ tutti gli autovalori del sistema;
- ⊗ tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;
- ○ tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;

80. Mediante retroazione statica dell'uscita $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{K}}\mathbf{y}$, è possibile :

- ○ posizionare a piacere tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;
- ○ posizionare a piacere tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;

⊗ modificare la posizione di alcuni autovalori della parte raggiungibile del sistema;
○ modificare la posizione di alcuni autovalori della parte osservabile del sistema;

81. Il "PBH test" afferma che "il sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ è raggiungibile se e solo se"

⊗ la matrice $\left[\ s\mathbf{I}-\mathbf{A}\ \middle|\ \mathbf{B}\ \right]$ ha rango pieno per ogni $s \in \mathcal{C}$.
○ la matrice $\left[\ s\mathbf{I}-\mathbf{A}^k\ \middle|\ \mathbf{B}\ \right]$ ha rango pieno per ogni $k \in \mathcal{Z}$.
○ la matrice $\left[\ s\mathbf{I}-e^{\mathbf{A}t}\ \middle|\ \mathbf{B}\ \right]$ ha rango pieno per ogni $t \in \mathcal{R}$.

82. Un sistema $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ può essere portato in forma canonica di controllo

○ sempre;
⊗ se e solo se è raggiungibile;
○ se e solo se è controllabile;
○ solo se la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare;

83. La formula di Ackerman per il calcolo del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato può essere utilizzata

○ per qualunque sistema;
⊗ solo se il sistema è raggiungibile;
⊗ solo per sistemi ad un solo ingresso;

84. Una retroazione algebrica dello stato

⊗ modifica i poli del sistema di partenza;
○ modifica gli zeri del sistema di partenza;
○ modifica il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ del sistema di partenza;

85. Un sistema $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ è "stabilizzabile" mediante retroazione statica dello stato

⊗ se il sistema è stabile;
⊗ se il sistema è raggiungibile;
⊗ se la parte instabile del sistema è raggiungibile;
⊗ se la parte non raggiungibile del sistema è stabile;

86. Uno stimatore asintotico dello stato "in catena aperta" di ordine pieno può essere utilizzato

⊗ solo se il sistema è stabile;
○ solo se il sistema è osservabile;
○ solo se la parte non osservabile del sistema è stabile;
○ solo se la parte instabile del sistema è osservabile;

87. Uno stimatore asintotico dello stato "in catena chiusa" di ordine pieno può essere utilizzato

○ solo se il sistema è stabile;
○ solo se il sistema è osservabile;
⊗ solo se la parte non osservabile del sistema è stabile;
⊗ solo se la parte instabile del sistema è osservabile;

88. Per poter utilizzare uno stimatore asintotico dello stato "in catena chiusa" e di ordine "ridotto"

○ il sistema deve essere stabile;
○ il sistema deve essere osservabile;
⊗ la parte non osservabile del sistema deve essere stabile;

89. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione K) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

○ è un sistema raggiungibile ed osservabile;

⊗ è un sistema non raggiungibile;

○ è un sistema non osservabile;

90. Due realizzazioni diverse della stessa matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$

○ hanno sempre la stessa dimensione;

⊗ possono avere dimensioni diverse;

○ hanno lo stesso sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$;

91. Una qualunque realizzazione "minima" di una matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$

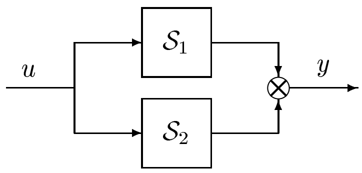
⊗ è raggiungibile;

⊗ è osservabile;

○ è stabile;

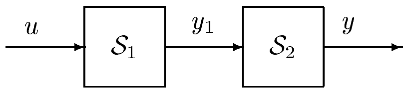
⊗ è algebricamente equivalente a qualunque altra realizzazione minima;

92. Scrivere le equazioni di stato del sistema $\mathcal{S}$ che si ottiene ponendo in *parallelo* i due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$:



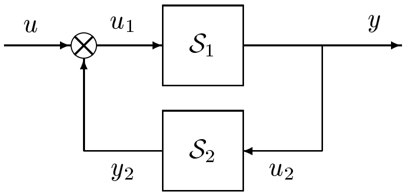
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

93. Scrivere le equazioni di stato del sistema $\mathcal{S}$ che si ottiene ponendo in *serie* i due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

94. Scrivere le equazioni di stato del sistema $\mathcal{S}$ che si ottiene ponendo in *retroazione* i due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

95. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ di un sistema lineare $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$

○ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente il $\ker \mathbf{C}$;

○ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$;

○ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente il $\ker \mathbf{C}$;

⊗ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$;

96. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

97. In un sistema lineare discreto tempo-invariante, uno stato $\mathbf{x}_1$ è indistinguibile nel futuro dallo stato nullo $\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$ se per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$

- ○ la corrispondente successione di uscita $\mathbf{y}_1(\tau)$ è identicamente nulla: $\mathbf{y}_1(\tau) = 0$ per $\tau \geq 0$;
- ⊗ la corrispondente evoluzione libera $\mathbf{y}_{l,1}(\tau)$ è identicamente nulla: $\mathbf{y}_{l,1}(\tau) = 0$ per $\tau \geq 0$;
- ⊗ se il vettore $\mathbf{x}_1$ appartiene al sottospazio $\mathcal{E}^-$;

98. Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

- ○ Il sistema è raggiungibile;
- ⊗ Il sistema non è raggiungibile;
- ○ Il sistema è osservabile;
- ○ Il sistema non è osservabile;

99. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di osservabilità $\mathcal{O}_1^-$ ed $\mathcal{O}_2^-$ esiste il legame:

- ○ $\mathcal{O}_2^- = \mathbf{T}\mathcal{O}_1^-$
- ○ $\mathcal{O}_2^- = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{O}_1^-$
- ⊗ $\mathcal{O}_2^- = \mathcal{O}_1^-\mathbf{T}$
- ○ $\mathcal{O}_2^- = \mathcal{O}_1^-\mathbf{T}^{-1}$

100. Un sistema lineare $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ può essere scomposto nella forma canonica di Kalman

- ⊗ sempre;
- ○ solo se il sistema è raggiungibile;
- ○ solo se il sistema è controllabile;
- ○ solo se la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare;

101. Il seguente sistema lineare continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ posto in forma canonica di Jordan:

- ⊗ è raggiungibile;
- ○ non è raggiungibile;
- ⊗ è controllabile;
- ○ non è controllabile;

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 \\ 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]$$

102. La formula $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \mathbf{k}_c^{\mathrm{T}}[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}$ per il calcolo del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato può essere utilizzata

- ○ per qualunque sistema;
- ⊗ solo se il sistema è raggiungibile;
- ○ solo se il sistema è osservabile;
- ⊗ solo per sistemi ad un solo ingresso;

Esercizi

1) Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & -x_1 - 2x_1x_2^2 + u_1 \\ \dot{x}_2 & = & x_1^2x_2 + u_2 \end{cases}$$

1.a) Posto $u_1 = u_2 = 0$, trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;

1.b) Posto $u_1 = -x_1$ e $u_2 = -x_2$, studiare la stabilità dell'origine utilizzando il criterio di Lyapunov e la funzione definita positiva $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

1.a) Posto $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, un punto $\mathbf{x}_0$ è di equilibrio per il sistema se vale la relazione $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Nel caso in esame si ha

$$\begin{cases} 0 & = & -x_1 - 2x_1x_2^2 \\ 0 & = & x_1^2x_2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} 0 & = & -x_1(1 + 2x_2^2) \\ 0 & = & x_1^2x_2 \end{cases}$$

Sono punti di equilibrio tutti quelli appartenenti alla retta $x_1 = 0$, x_2 qualsiasi. Per poter applicare il criterio ridotto di Lyapunov si procede al calcolo dello Jacobiano del sistema

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -1 - 2x_2^2 & -4x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{J}(x_1, x_2)|_{x_1=0} = \begin{bmatrix} -1 - 2x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo presente un autovalore a parte reale nulla, il criterio ridotto di Lyapunov in questo caso non permette di affermare nulla riguardo la stabilità del punto di equilibrio.

1.b) Posto $u_1 = -x_1$ e $u_2 = -x_2$, il sistema retroazionato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & -2x_1(1 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 & = & -x_2(1 - x_1^2) \end{cases}$$

Utilizzando la funzione candidata di $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, e derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{V} \;=\; 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -4x_1^2(1 + x_1^2) - 2x_2^2(1 - x_1^2) < 0$$

Nell'origine, la funzione $\dot{V}$ è definita negativa per cui è possibile affermare che l'origine è un punto asintoticamente stabile.

2) Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) & = & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Calcolare la trasformazione $\mathbf{T}$ che porta il sistema in forma canonica di Jordan. Calcolare quindi l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}$.

2.b) Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema complessivo. Calcolare l'evoluzione forzata del sistema per ingresso a gradino unitario.

2.a) Per portare il sistema nella forma canonica di Jordan occorre calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice $\mathbf{A}$

$$\Delta_{\mathbf{A}}(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = (z-1)(z-2)(z+1)$$

Gli autovalori del sistema sono $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ e $z_3 = -1$. I corrispondenti autovettori sono:

$$(\mathbf{A} - z_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - z_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - z_3\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La trasformazione cercata è

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato nella forma canonica di Jordan è il seguente

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}u(k) \\ y(k) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \right.$$

L'evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}$ è quindi la seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2^k & (-1)^k \\ 0 & 0 & -(-1)^k \\ 1 & 2^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^k & (-1)^k - 2^k & \\ 0 & -(-1)^k & 0 \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il sistema rimane fermo sullo stato iniziale.

2.b) La funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema complessivo si ricava facilmente dalla forma canonica di Jordan

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z-2 & 0 \\ 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

L'evoluzione forzata dell'uscita per ingresso a gradino è quindi la seguente

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{1}{z+1}\frac{z}{z-1} = z\left[\frac{0.5}{z-1} - \frac{0.5}{z+1}\right]$$

da cui si ottiene

$$y(n) = 0.5[1-(-1)^n]$$

3) Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^3 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + x_2^3 \end{cases}$$

3.a) Si studi la stabilità del sistema nell'origine utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov al variare del parametro α;

3.b) Posto $\alpha = 1$ e utilizzando la funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + \beta x_2^2$, si determini se esistono valori per il parametro β che permettano di decidere sulla stabilità o meno del sistema nell'origine.

3.a) L'origine è chiaramente un punto di equilibrio. Lo Jacobiano del sistema è il seguente:

$$\mathbf{J}(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & \alpha \\ -3x_1^2 & +3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Nell'origine gli autovalori dello Jacobiano sono nulli:

$$\mathbf{J}(x_1,\, x_2)|_{(0,\,0)} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il criterio ridotto di Lyapunov non è efficace

3.b) Derivando la funzione di Lyapunov si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1,\, x_2) &= 4x_1^3\dot{x}_1 + 2\beta x_2\dot{x}_2 \\ &= 4x_1^3(x_1^3 + x_2) + 2\beta x_2(-x_1^3 + x_2^3) \\ &= 4x_1^6 + 4x_1^3x_2 - 2\beta x_2x_1^3 + 2\beta x_2^4 \\ &= 4x_1^6 + 2(2-\beta)x_1^3x_2 + 2\beta x_2^4 > 0 \end{aligned}$$

Per $\beta = 2$ la funzione $\dot{V}(x_1,\, x_2)$ è definita positiva per cui in base al criterio di instabilità di Lyapunov si può concludere che nell'origine il sistema è instabile.

4) Dato il sistema non–lineare tempo–continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2^2(t) - x_1^3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1^3(t)\,x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

4.a) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine considerando $u(t) = 0$. Si impieghi il criterio ridotto di Lyapunov e, se necessario, la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ ed il teorema di La Salle–Krasowskii;

4.b Imponendo $u(t) = k_1\,x_1(t) + k_2\,x_2(t)$ si determini per quali valori non nulli dei guadagni k_1 e k_2 l'origine è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

4.a) L'origine è un punto di equilibrio. Lo jacobiano del sistema è:

$$J(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 4x_2 \\ -6x_1^2 x_2 & -2x_1^3 \end{bmatrix}$$

Calcolando tale Jacobiano nell'origine si ottiene:

$$J(0,\, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uno degli autovalori è sull'asse immaginario per cui il criterio ridotto di Lyapunov non è efficace per studiare la stabilità del punto. Se si utilizza la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1,\, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ si ottiene:

$$\dot V(x_1,\, x_2) = -4x_1^4(1 + x_1^2) \leq 0$$

Essendo $\dot V$ semidefinita negativa, si può concludere che il sistema è almeno semplicemente stabile nell'interno dell'origine. L'insieme N dei punti per cui $\dot V = 0$ è

$$N = \{x_1 = 0,\ x_2 \in R\}$$

L'unico punto dell'insieme N che soddisfa le equazioni differenziali del sistema dato è $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Per il teorema di La Salle Krasowskii si può quindi affermare che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

4.b) In presenza della retroazione $u(t) = k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t)$, il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = 2x_2^2(t) - x_1^3(t) - x_1(t) \\ \dot x_2(t) = -2x_1^3(t)\, x_2(t) + k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t) \end{cases}$$

In questo caso lo jacobiano si trasforma come segue

$$J(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 4x_2 \\ k_1 - 6x_1^2 x_2 & k_2 - 2x_1^3 \end{bmatrix}$$

Calcolando tale Jacobiano nell'origine si ottiene:

$$J(0,\, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

È chiaro quindi che l'origine è asintoticamente stabile per $k_2 < 0$ e $\forall k_1 \in R$.

1) Il grado r del polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

- ○ è pari al numero di autovalori distinti della matrice $\mathbf{A}$;
- ○ è pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
- ○ è pari al numero di miniblocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
- ⊗ è sempre minore od uguale ad n.

2) Scrivere l'equazione di Lyapunov 1) per sistemi tempo continui e 2) per sistemi tempo discreti

1) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ 2) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$

3) Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1^4 + x_2^2 - x_2^4$:

- ⊗ è definita positiva;

◯ è semi-definita positiva;

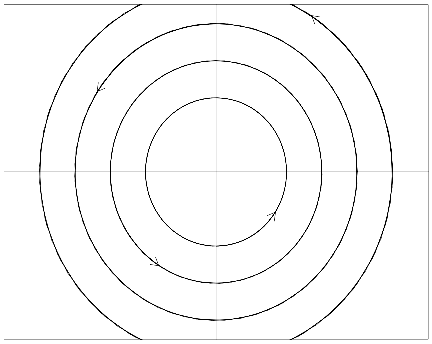
◯ è semi-definita negativa;

◯ non è definita positiva né negativa.

4) Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori complessi coniugati: $\lambda_{1,2} = \pm j$.

Ad autovalori immaginari corrispondono degli andamenti concentrici:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} \mathbf{x}_0$$



5) Il numero di autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

⊗ è pari al numero di blocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;

◯ è pari al numero di miniblocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;

◯ è pari al grado r del polinomio minimo $m(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$;

⊗ è minore od uguale al numero di autovettori linearmente indipendenti della matrice $\mathbf{A}$.

6) Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

7) Enunciare il criterio di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi discreti.
Sia $\mathbf{x} = 0$ uno stato di equilibrio per il sistema discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(x(k))$. Se in un intorno W dell'origine esiste una funzione $V(\mathbf{x})$ definita positiva e se la funzione

$$\Delta V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{f}(x(k))) - V(\mathbf{x})$$

è semidefinita negativa, allora l'origine è stabile. Se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è definita negativa, allora l'origine è asintoticamente stabile.

8) Per sistemi regolari tempo-varianti

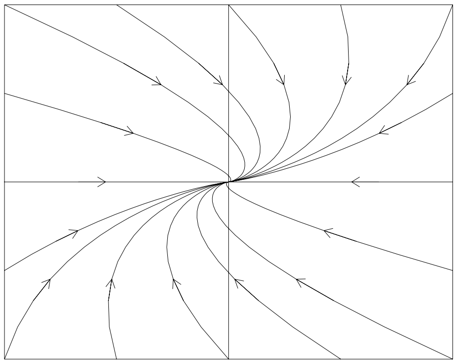
◯ gli stati di equilibrio di determinano imponendo ingressi costanti;

◯ la stabilità di un sistema lineare tempo variante è completamente determinata dalla posizione degli autovalori della matrice di sistema $\mathbf{A}(t)$;

⊗ la stabilità di un sistema lineare tempo variante è completamente determinata dalla norma della matrice di transizione $\Phi(t, t_0)$;

9) Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori coincidenti $\lambda_{1,2} = -1$ a cui corrisponde un solo autovettore reale, per esempio $\mathbf{v} = [1,\ 0]^{\mathrm{T}}$.
Ad autovalori coincidenti caratterizzati da un solo autovettore reale corrispondono gli andamenti mostrati in figura:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right]t}\mathbf{x}_0$$



10) Dato un sistema lineare, stazionario, discreto, con n autovalori distinti tutti reali negativi, allora:

- ⊗ la matrice di stato del sistema è diagonalizzabile;
- ○ il sistema è stabile;
- ○ il sistema è raggiungibile;
- ○ il sistema è osservabile;

11) Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \left[\begin{array}{ccc} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t & 0 \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{array}\right]$$

12) Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_1 = 2$ a cui corrispondono due autovettori reali v_1 e v_2 perpendicolari tra di loro.

Ad autovalori reali distinti corrispondono gli andamenti mostrati in figura (andamenti delle traiettorie a "sella"):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right]t}\mathbf{x}_0$$

13) Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^4 x_4^2(x_1^2 + x_2^2)$:

- ○ è definita positiva;
- ⊗ è semi-definita positiva;
- ○ è semi-definita negativa;
- ○ non è definita positiva né negativa.

14) Sia dato un sistema lineare SISO caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ della corrispondente forma canonica di controllo. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_C = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{array}\right], \qquad \mathbf{b}_C = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{c}_C = \left[\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} \end{array}\right]$$

15) Il grado di molteplicità di un autovalore λ nel polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

- $\otimes$ è sempre minore od uguale al grado di molteplicità dell'autovalore nel polinomio caratteristico $\Delta(\lambda)$;
- $\otimes$ è sempre pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan associato a quel autovalore;
- $\bigcirc$ è sempre pari numero di autovettori associati a quel autovalore;

16) Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto ($A = \sqrt{13},\ \ \theta = \arctan\frac{2}{3}$):

$$\mathbf{x}(k{+}1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} A^k\cos(k\theta) & A^k\sin(k\theta) & 0 \\ -A^k\sin(k\theta) & A^k\cos(k\theta) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

17) Scrivere le relazioni che permettono di calcolare l'esponenziale di matrice $e^{\mathbf{A}t}$ e la potenza $\mathbf{A}^k$ utilizzando, rispettivamente, la trasformata di Laplace e la $\mathcal{Z}$-trasformate

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right], \qquad \mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]$$

10) Nell'intorno del punto $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, la funzione $V(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_1 + 1) + (x_2^2 - 2x_2 + 1)$:

- $\otimes$ è definita positiva;
- $\bigcirc$ è semi-definita positiva;
- $\bigcirc$ è semi-definita negativa;
- $\bigcirc$ non è definita.