

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalla equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + b\dot{y}(t)^3 + (4 - a^2)y(t) = u(t)$$

- Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $b \geq 0$  e  $u(t) = 0$ .
- Si studi la stabilità degli equilibri per  $a \neq 2$ .
- Per  $a = 2$  determinare un ingresso  $u(t)$  che renda l'origine un equilibrio asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema lineare **tempo discreto** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- si studi la stabilità del sistema, si determinino le dimensioni degli spazi di raggiungibilità e di inosservabilità e si classifichino gli autovalori come interni o esterni a questi sottospazi.
- si determinino le condizioni iniziali  $x(0)$  compatibili con le uscite  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 1$  e  $y(2) = \frac{1}{2}$  in risposta ad un ingresso  $u(0) = 1$  e  $u(1) = 0$ .

3. Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1) + x_2 + x_3^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \sin(x_2) + u \\ \dot{x}_3 = -\cos(x_1) + \cos^2(x_2) - \lambda x_3 \end{cases}$$

- si ponga  $\lambda = 1$  e si determini, se possibile, un controllore lineare del tipo  $u = Kx$ , con  $K = [k_1, k_2, k_3]$  in modo che l'origine dello spazio di stati sia un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema in questione.
- si studi per quali valori di  $\lambda$  il problema è risolvibile e si determini, nel caso, un controllore lineare del tipo indicato, se necessario funzione di  $\lambda$ , valido per tali valori.

4. Il candidato:

- descriva il problema dell'assegnamento completo della dinamica di un sistema lineare tempo invariante tramite retroazione lineare dello stato
- enunci le condizioni, e le dimostri, per l'esistenza della soluzione
- enunci le condizioni, e le dimostri, per l'unicità della soluzione
- descriva le condizioni, e le dimostri in maniera formale o tramite un esempio, nelle quali il problema può avere più soluzioni
- enunci le condizioni, e le dimostri, per la stabilizzabilità di un sistema lineare tempo invariante