UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

10 Febbraio 2025

ESAME DI MECCANICA I - *Corso di Laurea in Ing. Biomedica*

ESAME DI MECCANICA TEORICA ED APPLICATA - *Corso di Laurea in Ing. Robotica e dell'automazione*

*COGNOME*____________________ *NOME*____________________ *MATRICOLA*______________ *CDL*______________

Esercizio 1

Si consideri il meccanismo in figura, costituito da 4 corpi: si noti che risulta essere formato da due sotto-meccanismi: 1-2-3 e 1-2-4. Sia nota la configurazione del meccanismo nell'atto di moto considerato, e la velocità del corpo 1, **ω** oraria e costante nel tempo:

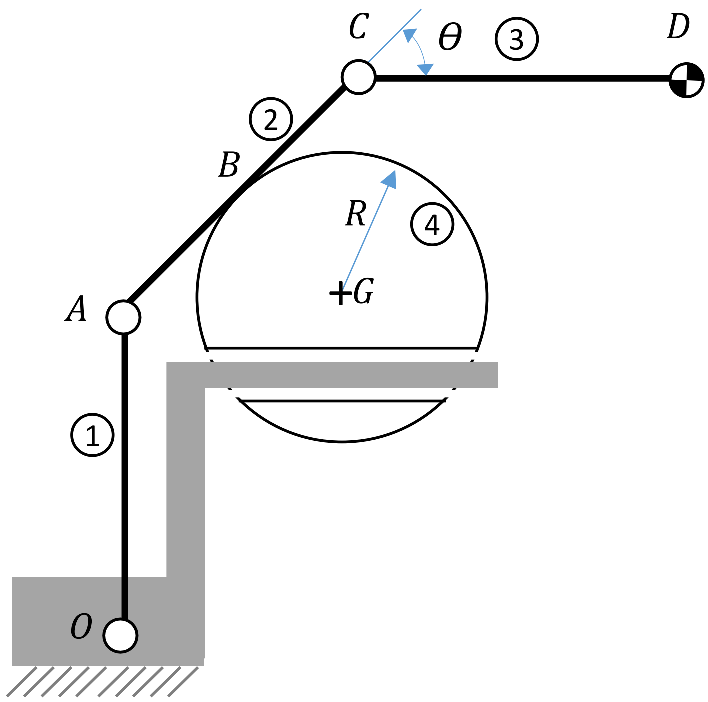
1) Fare l'analisi geometrica dei vincoli. Valutare il tipo di rotolamento in B per avere un 1 gdl.
2) Definire il moto assoluto di tutti i corpi e il moto relativo dei corpi dei corpi collegati.
3) Che tipo di meccanismo è quello costituito da 1-2-3?
4) Risolvere il problema delle velocità dei sotto-meccanismi 1-2-3 e 1-2-4:
    - Scrivere le eq.ni. di chiusura in forma vettoriale e scalare, in forma parametrica.
    - Risolvere graficamente il problema delle velocità.
5) Valutare numericamente la velocità di G del corpo 4.
6) Valutare tutti i centri delle velocità assoluti e il centro delle velocità del moto relativo 2-4.
7) Scrivere le eq.ni di chiusura delle accelerazioni dei meccanismi 1-2-3 e 1-2-4

Dati:

θ=45°, OA = CD= l =2.5 m,

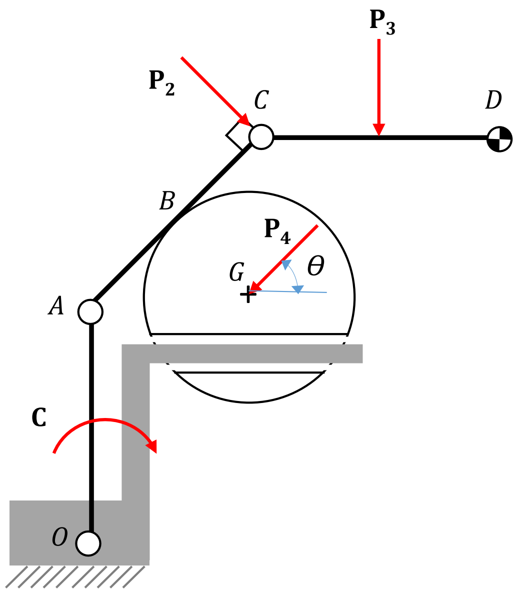
AB=BC=AC/2, AC=$l\sqrt{2}$,

R=1.8 m, |**ω**|=4.5 rad/s.



Esercizio 2

Si consideri il meccanismo dell'esercizio precedente a cui siano applicate 3 forze note $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ e $\mathbf{P_4}$ la cui azione è equilibrata da un momento **C** applicato al corpo 1, incognito. Le masse di tutti i corpi sono trascurabili.



<u>È richiesto di</u>

1) Fare l'analisi fisica dei vincoli e valutare se il sistema è complessivamente o esternamente isostatico.

Applicando il PSE valutare in forma parametrica (lasciare la soluzione in funzione di l e R)

2) DCL definitivo di tutti i corpi per ogni sottocaso
3) Contributo a **C** per ogni sottocaso
4) **C** complessivo
5) Quanto vale **C** se P_2 raddoppia intensità? E se invece P_4 dimezza intensità?

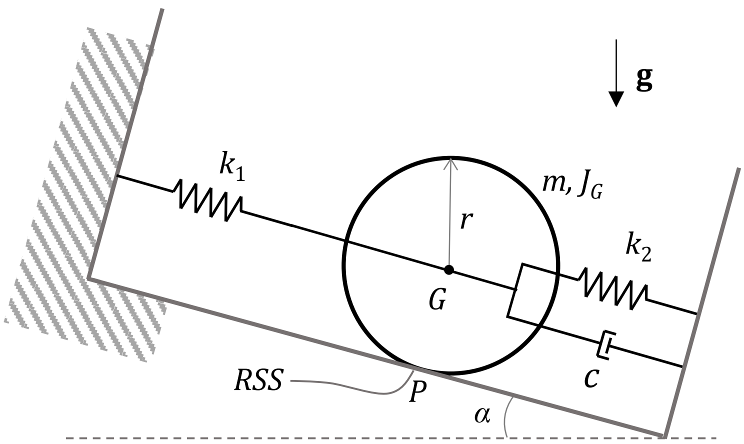
Esercizio 3

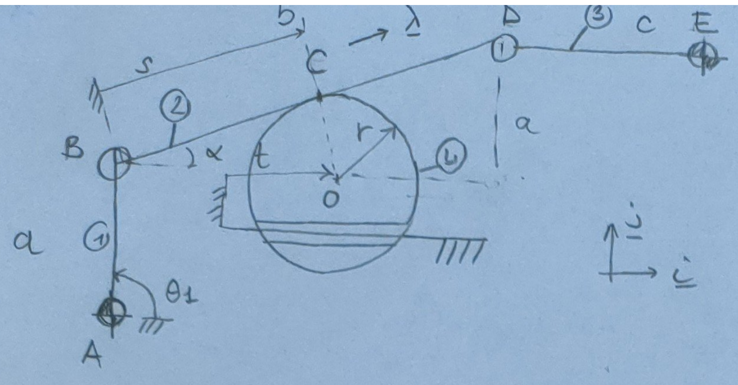
Il disco omogeneo mostrato in figura, collegato al telaio mediante due molle e uno smorzatore, rotola senza strisciare su un piano inclinato, soggetto ad oscillazioni indotte da posizione iniziale pari alla freccia statica. e velocità iniziale verso il basso di G pari a v_0.

Si vuole studiare la dinamica del disco. Siamo in presenza di gravità.

1) Specificare in modo chiaro il sistema di riferimento, la coordinata lagrangiana e le eventuali equazioni di congruenza.
2) Rappresentare DCL del disco.
3) Valutare la freccia statica.
4) Valutare l'equazione del moto in forma canonica.
5) Valutare la pulsazione naturale, il fattore di smorzamento e la pulsazione smorzata in forma parametrica e numerica.
6) Trovare la legge oraria a regime (fare i passaggi) e rappresentarla graficamente.

Dati:
m = 15 kg, r=0.1 cm, k_1=12 N/m,
k_2=8 N/m, c = 10 N m/s, v_0=2 m/s,
α=45°





gdl $= 4 \times 3 - 4 \times 2 - 1 \times 2 - x = 1$
CER CP

$12 - 8 - 2 - x = 1$

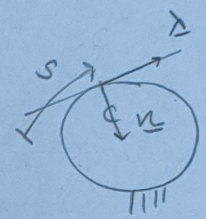
$x = 1$ RCS

⇓

2 meccanismi debolmente accoppiati

$\underline{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \underline{k}$ con $\dot{\theta}_1 < 0$ nota

NB $\underline{v}_{C2} \neq \underline{v}_{C4} \Rightarrow \underline{v}_{24}^{rel} \neq 0$ $\underline{v}_{42}^{rel} = \dot{s}\,\underline{\lambda}$



Σ_{3} $\underline{v}_{C4}^{ass} = \underline{v}_C^{rel} + \underline{v}_C^{tr} = \dot{s}\underline{\lambda} + \underline{v}_{B2} + \dot{\theta}_2 k \wedge \vec{BC}$

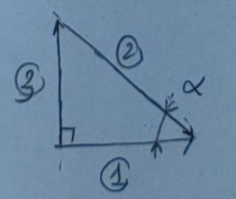
$= \dot{s}\underline{\lambda} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \wedge \vec{AB} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \vec{BC} = t\,\underline{i}$

? ? ?

Risolvo il quadri. articolato:

$\underline{v}_{B1} = \underline{v}_{B2}$ $\dot{\theta}_1 \underline{k} \wedge \vec{AB} = \dot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \vec{DB} + \dot{\theta}_3 \wedge \vec{ED}$

① ② ③



$\dot{\theta}_2 > 0 \rightarrow$ antioraria

$\dot{\theta}_3 < 0 \rightarrow$ oraria

$|\dot{\theta}_1| a = |\dot{\theta}_3| a \Rightarrow |\dot{\theta}_1| = |\dot{\theta}_3|$

$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3 < 0$ $\underline{\omega}_3$ ↻

$\dot{\theta}_2\, b \cos\alpha = |\dot{\theta}_1| a$

$\dot{\theta}_2 = \frac{a}{b} \frac{1}{\cos\alpha} |\dot{\theta}_1|$ $\dot{\theta}_2 = \frac{\sqrt{2}\,a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} |\dot{\theta}_1|$ $\underline{\omega}_2$ ↺

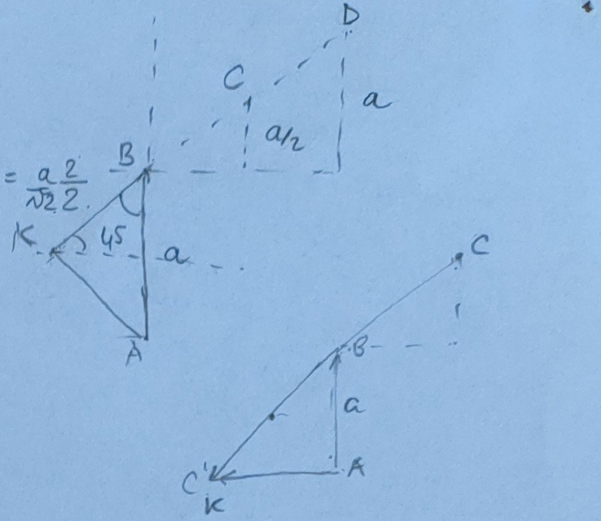
$b = \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{a\,2}{\sqrt{2}}$ se $b = \frac{2a}{\sqrt{2}}$ → $= |\dot{\theta}_1|$ $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_1$

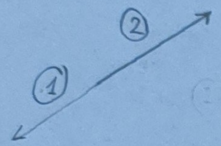
$$\dot{s}\,\underline{\lambda} + \dot{\theta}_1\,\underline{k} \wedge \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1\,\underline{k} \wedge \overrightarrow{BC} = \dot{t}\,\underline{i}$$

$$\dot{s}\,\underline{\lambda} + \dot{\theta}_1\,\underline{k} \wedge \underbrace{(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})}_{\overrightarrow{AK}} = \dot{t}\,\underline{i}$$

1 2 3

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{2}{2}$$





$$\begin{cases} \dot{t} = 0 \\ \dot{s} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -a/2 \\ +a/2 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\dot{s}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \dot{\theta}_1\,\underline{k} \wedge \left[\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \dot{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{s}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ -a/2 & a/2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$-\underline{j}\,\dot{\theta}_1\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\dot{\theta}_1\,\underline{i}$$

$$\begin{cases} \dot{s}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}\dot{\theta}_1 = \dot{t} \\ \dot{s}\frac{\sqrt{2}}{2} - \dot{\theta}_1\frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{s} = \dot{\theta}_1\frac{a}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1\frac{a}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} - \frac{a}{2}\dot{\theta}_1 = \dot{t} = 0 \end{cases}$$

$\dot{s} < 0$

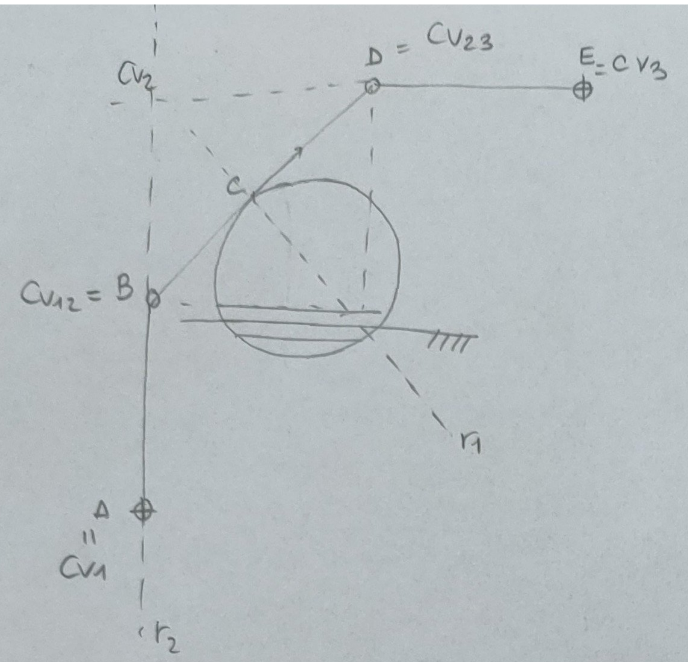
$$\underline{\omega}_{12} = (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\underline{k} = \dot{\theta}_1 - (-\dot{\theta}_2)\,\underline{k} = 2\,\dot{\theta}_1\underline{k}$$

$\underline{\omega}_{12}$

$$\underline{\omega}_{23} = (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)\underline{k} = (-\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1)\,\underline{k} = -2\dot{\theta}_1\underline{k}$$

$\underline{\omega}_{23}$

$$\underline{\omega}_{42} = \cancel{\underline{\omega}_4} - \underline{\omega}_2 = -\underline{\omega}_2 = -\dot{\theta}_2\underline{k} = \dot{\theta}_1\underline{k}$$



Cv1   Cv12
Cv2   Cv23
Cv3   Cv24
Cv4 ∞ Cv14
Cv13

Cv24 : $\underline{v}_C = \dot{s}\underline{\lambda} \rightarrow r_1$

prendiamo tripletta: Cv2 Cv4 Cv24 $\rightarrow r_2$

$\}$ Cv2 = Cv24

$$\underline{a}_{B(1)} = \underline{a}_{B(2)}$$

$$-\dot{\theta}_1^2 \underline{k} \wedge \overrightarrow{AB} = \ddot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \overrightarrow{DB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{DB} + \ddot{\theta}_3 \underline{k} \wedge \overrightarrow{ED} - \dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{ED}$$

$$\underline{a}_{C(4)} = \ddot{t}\underline{i} = \underline{a}_{C(4)} \quad \Sigma(2)$$

$\downarrow$

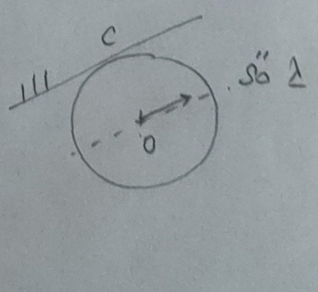
attenzione non sappiamo termine $\underline{a}^{rel}$ $\rightarrow$ $\ddot{s}\underline{\lambda} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\underline{n}$

?   ?

$$\underline{a}_{O(4)} = \ddot{t}\underline{i}$$

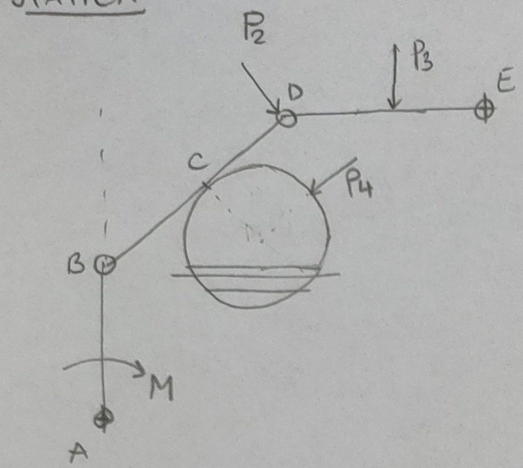
$$\underline{a}_{O(4)} \; \Sigma(2) = \underline{a}_O^{rel} + \underline{a}_O^{tr} + \underline{a}_O^{cor} = 2\underline{\omega}^{tr} \wedge \underline{v}^{rel} = 2\dot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{v}_O^{rel}$$

$$\underline{a}_O^{rel} = \ddot{s}_O \underline{\lambda} \qquad \underline{a}_O^{tr} = -\dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \overrightarrow{BO} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{BO}$$

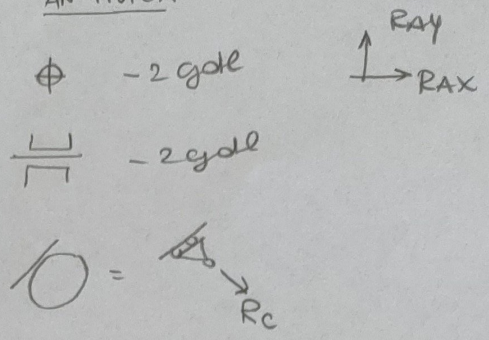


$$\underline{v}_O^{rel} = \underline{v}_C^{rel} + \underline{\omega}^{rel} \wedge \overrightarrow{CO} = \dot{s}\underline{\lambda} + \underline{\omega}_{42} \wedge \overrightarrow{CO} = \dot{s}\underline{\lambda} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \wedge \overrightarrow{CO}$$

STATICA



AN. FISICA



2 × 4

2 × 1

1

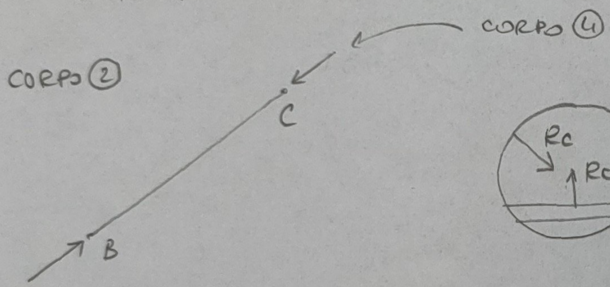
(11)

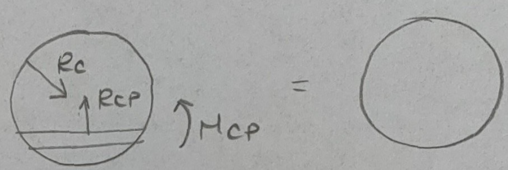
+ 1 INC. ATTIVA

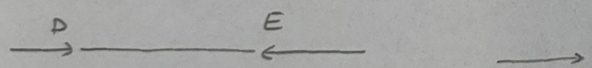
11+1 = 12 INCO. vs 12 EQNI

CASO P_2

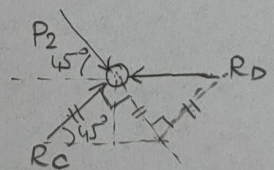
CORPI SCARICHI





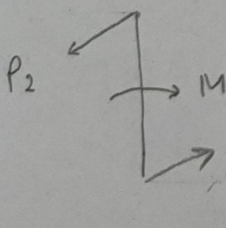


PERNO CARICO

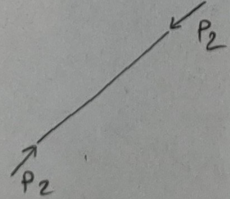


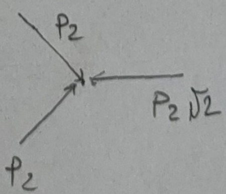
$P_2 = R_C = R_D$

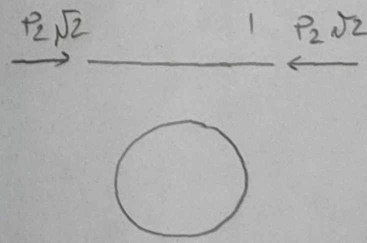
DCL DEF



$M = P_2 a \frac{\sqrt{2}}{2}$







$M = P_2 a \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} a P_2$

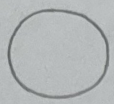
$$\begin{cases} P_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - R_C \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ P_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + R_C \frac{\sqrt{2}}{2} = R_D \end{cases}$$

$P_2 = R_C$

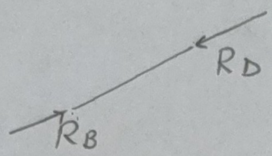
$R_D = \sqrt{2} P_2$

CASO P3

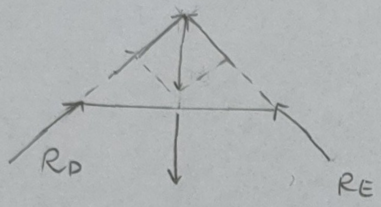
CORPO 4 SCARICO

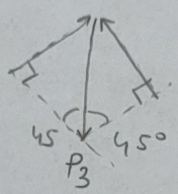


CORPO 2 SCARICO



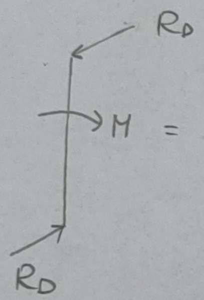
CORPO 3





$$R_D = P_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = R_E$$

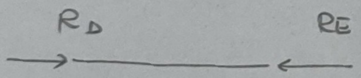
CORPO 1

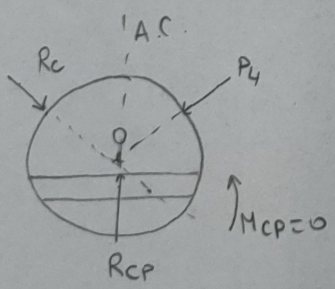


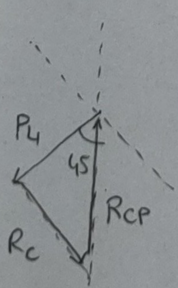
$$M = R_D\, a \cos\alpha = P_3 \frac{\sqrt{2}}{2}\, a \frac{\sqrt{2}}{2} = P_3 \frac{a}{2}$$

CASO P4

③





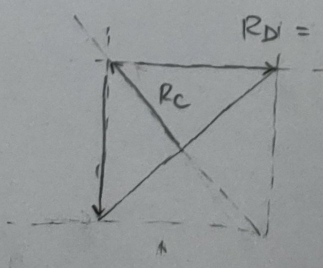


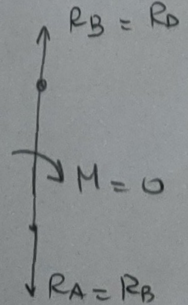
$$R_c = P_4$$

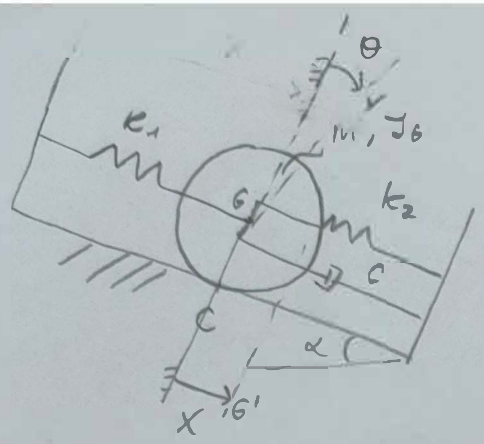
$$R_{cp} = \frac{P_4}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2}{\sqrt{2}} P_4 = \sqrt{2}\, P_4$$

$$M_{cp} = 0$$

$$R_D = \frac{R_c\, 2}{\sqrt{2}} = P_4 \sqrt{2}$$



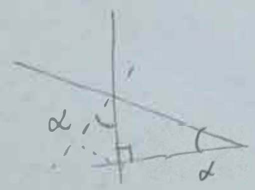


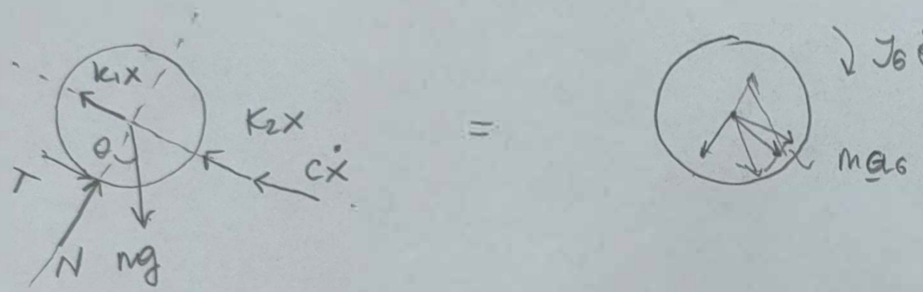


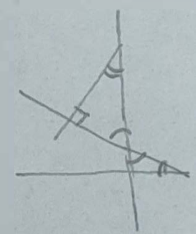
$\downarrow g$

$\alpha = 30^\circ$

$x = r\theta$







Freccia statica

$$C\circlearrowleft \quad (k_1 + k_2)\,\tilde{x}\,\cancel{r} - mg \sin\alpha\,\cancel{r} = 0$$

$$\tilde{x} = \frac{mg \sin\alpha}{k_1 + k_2}$$

CONDIZ. DINAMICHE

$$C\circlearrowleft \quad (k_1 x + k_2 x)\,r + c\dot{x}\,r - mg \sin\alpha\, r = -J_C\ddot{\theta} + (m\,\overset{0}{\cancel{\overline{CG}}} \wedge \underline{a}_C)\cdot \underline{k}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)\,\underset{r\theta}{\underset{\parallel}{x}}\,r + c\,r\,\underset{r\dot{\theta}}{\underset{\parallel}{\dot{x}}} = mg \sin\alpha\, r$$

$$\tfrac{3}{2}mr^2\,\ddot{\theta} + c r^2\,\dot{\theta} + (k_1 + k_2)\,r^2\theta = mg \sin\alpha\, r$$

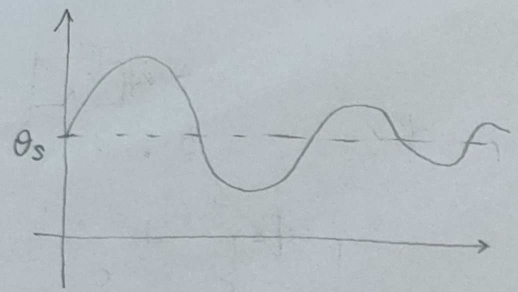
$$\tilde{J}\,\ddot{\theta} + \tilde{c}\,\dot{\theta} + \tilde{k}\,\theta = M_0$$

↳ forzante costante

↓

soluz. particolare

$$\tilde{\theta} = \frac{\tilde{x}}{r} = \frac{mg \sin\alpha}{r(k_1 + k_2)}$$



$$x_p = A_1 \sin(\omega_s t + \varphi)\, e^{-\xi \omega_n t} + x_s$$

$$\theta_p = A \sin(\omega_s t + \varphi)\, e^{-\xi \omega_n t} + \theta_s$$

$$\dot{\theta}_p = A(-\xi \omega_n) \sin(\quad) e^{-(\,)} + A e^{-\xi \omega_n t} (\omega_s \cos(\omega_s t + \varphi))$$

$$x_p(0) = x_s \rightarrow \varphi$$