Teoria dei Sistemi e del Controllo - 29-11-2018

1. Si consideri il sistema tempo discreto non lineare rappresentato in forma di stato da

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= & ax_2(k) - x_2^3(k) \\ x_2(k+1) &= & -ax_1(k) + x_1^3(k) + u \end{cases}$$

   - Determinare, per $u = 0$, le proprietà di stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare di $a \in \mathbb{R}$.
   - Determinare un ingresso lineare che renda l'origine del sistema asintoticamente stabile per $a = -1$.
   - Si determini una candidata di Lyapunov che verifica le proprietà di stabilità del sistema retroazionato.

2. Dato il sistema **Tempo Continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; D = [0]$$

   - Studiare le proprietà strutturali del sistema (Stabilità interna, raggiungibilità e osservabilità)
   - Determinare il sistema in forma di Kalman e studiare la stabilità BIBO.
   - Commentare sulla relazione tra raggiungibilità e controllabilità con particolare riguardo ai sistemi tempo continui.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

   si determini :

   - per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller;
   - si scelga un valore β tra questi, e si calcoli, in funzione di α la matrice di retroazione dello stato K tale che il sistema a ciclo chiuso sia di tipo dead-beat.

4. Si consideri la classe dei sistemi lineari tempo invarianti in tempo continuo;

   - Si definisca il Gramiano di Raggiungibilità $\mathcal{G}_R$.
   - Si dimostri il ruolo di $\mathcal{G}_R$ nel calcolo dell'azione di controllo $u(t)$ ad energia minima necessaria per portare lo stato del sistema, a partire dall'orgine, fino ad x_f in un tempo finito t_f.