• ESAME 16 - 01 - 2017

1. Dato il sistema lineare tempo invariante e tempo continuo descritto dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si determini il più piccolo sottospazio che contenga l'evoluzione libera dello stato a partire dai seguenti stati $x_{0,1} = (1\,0\,0\,0\,0)^T$, $x_{0,2} = (0\,0\,1\,0\,0)^T$ e $x_{0,3} = (0\,0\,0\,1\,0)^T$ commentando i risultati ottenuti.
- Si calcolino polinomio caratteristico e polinomio minimo della matrice A e la Funzione di Trasferimento del sistema.
- Si indichino i modi propri del sistema ed i modi propri presenti nell'uscita per ingresso impulsivo.

b)

$$P_c(\lambda) = (-1-\lambda)^3 \cdot \left[(-1-\lambda)^2 + 1 \right] = (-1-\lambda)^3 (\lambda^2 + 2\lambda + 2) = -\lambda^5 - 5\lambda^4 - 11\lambda^3 - 13\lambda^2 - 8\lambda - 2$$

• Calcoliamo la funzione di Trasferimento:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(R) = 5 \qquad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 1 \\ -1 & \cancel{0} & \cancel{0} & -2 & 0 \\ 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & 2 & -2 \\ -1 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 4 \\ 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 3 \qquad Ker(O) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T_{RO} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$G(s) = C\cdot(s\cdot I - A)^{-1}\cdot B$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 1 & s+1 & -1 \\ 0 & -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$(s\cdot I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s+1 & 0 & 0 \\ -s+1/s^3+s^2-2s-2 & s-1/s^2-2 & 1/s^2-2 \\ -1/s^3+s^2-2s-2 & 1/s^2-2 & s+1/s^2+1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/s+1 & 0 & 0 \\ -s+1/s^3+s^2-2s-2 & s-1/s^2-2 & 1/s^2-2 \\ -1/s^3+s^2-2s-2 & 1/s^2-2 & s+1/s^2+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\[2ex] \dfrac{2}{s^3+s^2-2s-2} \\[2ex] \dfrac{s^2+2s}{s^3+s^2-2s-2} \end{bmatrix} = \frac{2s}{s^2-2}$$

c)

Gli autovalori sono :

1. $\lambda = -1 \qquad m.a. = 3 \qquad m.g. = 5 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$

2. $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1 \implies \lambda_{1,2} = -1 \pm j$

I modi propri sono : $e^{-t},\ t\cdot e^{-t},\ t^2\cdot e^{-t},\ e^{-t}\cdot\cos(t),\ e^{-t}\cdot\sin(t)$

I modi presenti nell'uscita per ingresso impulsivo sono :

a)

$$X_{0,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X_{0,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X_{0,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-j \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t\cdot e^{-t} & t^2\cdot e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t\cdot e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t}\sin(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\cdot X_{0_1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t\cdot e^{-t} & t^2\cdot e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t\cdot e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t}\sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\cdot X_{0_2} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t\cdot e^{-t} & t^2\cdot e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t\cdot e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t}\sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2\cdot e^{-t} \\ t\cdot e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\cdot X_{0_3} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t\cdot e^{-t} & t^2\cdot e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t\cdot e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t}\sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-t}\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Sia $y(t) = -e^{-2t} + e^{-2t}\sin t + 2 + t$ l'uscita di un sistema lineare:

- si determini una forma di stato di dimensione minima e in forma di Jordan compatibile con tale uscita (che sia libera o forzata).
- Data la forma di stato determinata al punto precedente trovale lo stato iniziale che, in caso di ingressi nulli, generi l'uscita indicata.

a)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$y(t) = C \cdot e^{At} \cdot x_0$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos(t) & e^{-2t}\mathrm{sim}(t) & 0 & 0 & 0 \\ -e^{-2t}\mathrm{sim}(t) & e^{-2t}\cos(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{0t} & t\cdot e^{0t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{0t} \end{bmatrix}$$

$$C \cdot e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos(t) & e^{-2t}\mathrm{sim}(t) & 0 & 0 & 0 \\ -e^{-2t}\mathrm{sim}(t) & e^{-2t}\cos(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{0t} & t\cdot e^{0t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{0t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\mathrm{sim}\, t & e^{-2t} & e^{0t} & t\cdot e^{0t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\mathrm{sim}(t) & e^{-2t} & e^{0t} & t\cdot e^{0t} \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{che mi restituisca la } y(t) \text{ indicata}$$

2. Dato il sistema lineare SISO caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Caratterizzare la matrice di Jordan associata ad A e commentare sulla proprietà di raggiungibilità e osservabilità di sistemi SISO con tale matrice dinamica.
- Determinare tutte le condizioni iniziali affinchè l'evoluzione libera evolva lungo una retta.
- Data $B = (0\,1\,1\,0\,0)^T$ e $C = (1\,0\,1\,0\,1)$ Si determini la matrice T del cambio di base per portare il sistema nella forma di Kalman.
- Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

a)

$P(\lambda) = (\lambda+1)^4(\lambda-1) \Rightarrow$ Gli autovalori sono: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$

1. $\lambda_1 = -1$ m.a. $= 4$ m.g. $= 5 - \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 5-2 = 3$

• Blocchi di ordine 1:

$n - 2r_1 + r_2 \Rightarrow r_1 = \text{rank}(A+I)$, $r_2 = \text{rank}(A+I)^2 = \text{rank} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 1$

$5 - 2\cdot(2) + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$

2. $\lambda_2 = 1$ m.a. $= 1$ m.g. $= 1$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Raggiungibilità e osservabilità:**

Abbiamo solo due autovalori: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$.

- Per $\lambda = -1$, $(A - \lambda I) = (A + I)$ ha rango 2, quindi utilizzando il lemma PBH ci accorgiamo che per recuperare rango servirebbero almeno 2 ingressi (per la raggiungibilità) e 2 uscite (per l'osservabilità).

- Per $\lambda = 1 \Rightarrow (A - \lambda I) = (A - I) = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ha rango 4

Quindi per il lemma PBH servirebbero almeno un ingresso e un'uscita per recuperare rango.

b)

c)

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R) = 2 \qquad \text{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(O) = 2 \qquad \text{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d)

Determinare la funzione di Trasferimento.

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

2. Dato il sistema tempo continuo caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e con matrice di uscita $C = [0\,0\,0\,1]$

- Si determinino i modi propri del sistema.
- Si discuta la stabilità interna e la stabilità BIBO del sistema.

a)

$$\det(\lambda I - A) = \det \cdot \begin{bmatrix} \lambda-1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (\lambda+2) \cdot \det \cdot \begin{bmatrix} \lambda-1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \lambda+1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} =$$

$$= \emptyset + (\lambda+2)\left[(\lambda-1/2)(\lambda+1/2)(\lambda+2) + \frac{1}{4}(\lambda+2)\right] = \quad (\lambda^2 - \tfrac{1}{4})$$

$$= (\lambda+2)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})(\lambda+\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{4}(\lambda+2)^2 = (\lambda^2+4\lambda+4)\overbrace{(\lambda-\tfrac{1}{2})(\lambda+\tfrac{1}{2})} + \frac{1}{4}(\lambda^2+4\lambda+4) =$$

$$= \lambda^4 - \cancel{\frac{1}{4}\lambda^2} + 4\lambda^3 - \cancel{\lambda} + 4\lambda^2 - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{4}\lambda^2} + \cancel{\lambda} + \cancel{1} = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \emptyset$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = \emptyset$$

$$\lambda^2 = \emptyset \;, \quad \lambda^2 + 4\lambda + 4 = \emptyset \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 4 - 4 = \emptyset \qquad \lambda = -2 \pm \emptyset = -2$$

- Gli autovalori sono:

1) $\lambda_1 = \emptyset$ $\quad$ m.a. = 2 $\quad$ m.g. $= 4 - \det(A) = 4 - \rho \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 1$

2) $\lambda_2 = -2$ $\quad$ m.a. = 2 $\quad$ m.g. $= 4 - \det(A+2I) = 4 - \rho \begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$

- I modi sono: $1, t, e^{-2t}, t \cdot e^{-2t}$

b)

- Stabilità Interna:

La matrice di Jordan è composta così:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Avendo due blocchi di Jordan di dimensione 2 il sistema è internamente instabile.

- Stabilità BiBo:

Vado a verificare l'autovalore $\lambda_1 = \emptyset$ che potrebbe darmi problemi:

$$(A - \lambda I \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \emptyset$ è raggiungibile poiché perde di rango ma lo recupera grazie alla matrice B.

$$\left(\frac{A - \lambda I}{C}\right) = \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Perde di rango e non lo recupera. Non è osservabile.

Il sistema è BiBo stabile

• ESAME 03-07-2017

1. Dato il sistema lineare **tempo discreto** rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; C = (1\,0\,0\,1)$$

   (a) Studiare le seguenti proprietà strutturali del sistema: stabilità interna, raggiungibilità, controllabilità a zero, stabilizzabilità e stabilità esterna (BIBO stabilità). Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

   (b) Determinare, se esistono, sequenze di ingressi che a partire da $x(0) = (0,\, 1,\, 0,\, 0)^T$ consentano di raggiungere i seguenti punti: a) $x_a = (1,\, 0,\, 1,\, -1)^T$, b) $x_b = (-1,\, 4,\, 1,\, 0)^T$, c) $x_c = (-1,\, 2,\, 1,\, 0)^T$, d) $x_d = (2,\, 1,\, 0,\, 1)^T$. Nel caso in cui esistano si riporti anche il numero di passi necessario.

   (c) Si scrivano le condizioni nelle quali per un sistema lineare tempo invariante tempo discreto con matrici $(A,\, B,\, C,\, D)$, lo stato X_F può essere raggiunto a partire dallo stato x_0.

a)

$$\det(A-\lambda) = (1-\lambda)\cdot \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\cdot\Big((-1-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda)\Big) = \varnothing$$

Gli autovalori sono: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -2$

Avendo $\lambda_4 = -2$ fuori dal cerchio unitario il sistema è INSTABILE.

• RAGGIUNGIBILITÀ:

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(R) = 3 \Rightarrow \quad \operatorname{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Il sistema non è completamente raggiungibile.

• CONTROLLABILITÀ A ZERO:

Per la controllabilità a zero $\operatorname{Im}(A^k) \subseteq \operatorname{Im}(R_k)$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3 \quad \operatorname{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 \\ -1 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A^4) = 3 \quad \operatorname{Im}(A^4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Il sistema non è controllabile a zero.

- BIBO stabilità:

· $\lambda_1 = 1$

$$(A - I \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \qquad \left(\frac{A-I}{C}\right) = \left[\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\lambda_1 = 1$ è raggiungibile ma non osservabile.

· $\lambda_1 = -1$

$$(A + I \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \left(\frac{A+I}{C}\right) = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\lambda_2 = -1$ è raggiungibile e osservabile

· $\lambda_3 = 0$

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \qquad \left(\frac{A}{C}\right) = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\lambda_3 = \emptyset$ è raggiungibile ma non osservabile.

· $\lambda_4 = -2$

$$(A + 2I \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left(\frac{A+2I}{C}\right) = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\lambda_4 = -2$ Non è né raggiungibile né osservabile.

L'unico autovalore che trovo nella funzione di trasferimento è $\lambda_2 = -1$, sistema NON BIBO stabile.

- Determinare la funzione di Trasferimento:

$$G(z) = C \cdot (z \cdot I - A)^{-1} \cdot B$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 1 \qquad \text{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & \cancel{1} \\ 1 & 2 & 3 & \cancel{2} \\ 1 & 1 & -1 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 3 \Rightarrow Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T_{RO} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = -\frac{1}{(s+1)}$$

b) $X(0) = (0,1,0,0)^T$

$X_a = (1,0,1,-1)^T \quad X_b = (-1,4,1,0)^T \quad X_c = (-1,2,1,0)^T \quad X_d = (2,1,0,1)$

$(X_k - A^k \cdot X_0) \in Im(R)$

1) $X'_a = X_a - X_0 = (1,-1,1,-1)^T$

2) $X'_b = X_b - X_0 = (-1,3,1,0)^T$

3) $X'_c = X_c - X_0 = (-1,1,1,0)^T$ $\Rightarrow$ L'unico stato che appartiene allo spazio di raggiungibilità è X_c.

4) $X'_d = X_d - X_0 = (2,0,0,1)^T$

Gli altri no poiché la differenza tra i due stati non appartiene allo spazio di raggiungibilità.

C>

• ESAME 14-09-2017

1. Si consideri il sistema lineare **tempo discreto** descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

(a) Si studi l'osservabilità e la raggiungibilità del sistema indicando, in particolare, la dimensione dello spazio raggiungibile e dello spazio inosservabile al variare del parametro β. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema.

(b) Si studi la stabilità interna al variare di $\beta \in \mathbb{R}$

(c) Per $\beta = 1$, si determinino le condizioni di esistenza di condizioni iniziali $x(0)$ che sono compatibili con le osservazioni $y(0) = 0$, $y(1) = 3$ e $y(2) = 7$ in corrispondenza alla sollecitazione in ingresso $u(0) = \alpha$ e $u(1) = 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In caso di esistenza si calcolino tutte le condizioni iniziali ammissibili.

a)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \qquad Im(R) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1+2\beta \\ 1 & 0 & 1+2\beta+4\beta^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{se } \beta = 0 \quad \text{rank}(O) = 1 \qquad Im(\bar{O}) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$\Rightarrow \text{se } \beta \neq 0 \quad \text{rank}(O) = 2 \qquad Im(\bar{O}) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

• Calcolare la funzione di Trasferimento:

$$G(s) = C \cdot (z \cdot I - A)^{-1} \cdot B$$

1. $\beta = \emptyset \Rightarrow T_{RO} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)}$$

2. $\beta \neq \emptyset \Rightarrow T_{RO} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\beta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & z-2\beta \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{z-1}$$

b)

$$\det(A-\lambda\cdot I)=\left[\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2\beta-\lambda & 0 & 0 \end{array}\right] = (1-\lambda)^2(2\beta-\lambda)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=2\beta$

•) Con $\beta\neq\frac{1}{2}$

$\lambda=1$ $\quad$ m.a. $=2$ $\quad$ $m.g. = 3-\text{rank}\begin{bmatrix} 0 & \cancel{0} & 1 \\ 2 & \cancel{0} & 0 \\ 0 & \cancel{0} & 2\beta-1 \end{bmatrix} = 3-2 = 1$

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sistema internamente instabile}$$

•) Con $\beta=\frac{1}{2}$

$\lambda=1$ $\quad$ m.a.$=3$ $\quad$ $m.g. = 3-\text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3-2 = 1$

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sistema internamente instabile}$$

c)

$y(0)=0 \quad y(1)=3 \quad y(2)=7 \quad u(0)=\alpha \quad u(1)=1$

$$y_k = C\cdot A^k\cdot x_0 + C\cdot\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}\cdot B\cdot u(i)$$

$$0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot x_0$$

$$3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot x_0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\alpha$$

$$7=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\cdot x_0$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$$3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot x_0 + \alpha$$

$$7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3-\alpha \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot x_0 \qquad (O|v) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3-\alpha \\ 1 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

$$\det(O|v) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3-\alpha & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 7 & 1 & 7 \end{array}\right] = (21+3-\alpha+0)-(0+7(3-\alpha)+7) =$$

$$= (24-\alpha-21+7\alpha-7) =$$

$$= -4+6\alpha$$

- rank$(O|v) = 2$ se:

  $6\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$

- rank$(O|v) = 3$ se:

  $6\alpha - 4 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{2}{3}$

- Se $\alpha = \frac{2}{3}$ posso determinare x_0 poiché $v \subseteq \mathrm{Im}O$.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$$
\begin{cases}
0 = X_{01} + X_{03} & \Rightarrow \quad X_{01} = -X_{03} = -\frac{7}{6} \\
\frac{7}{3} = X_{01} + 3X_{03} & \Rightarrow \quad 3X_{03} - X_{03} = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad 9X_{03} - 3X_{03} = 7 \quad \Rightarrow \quad 6X_{03} = 7 \quad \Rightarrow \quad X_{03} = \frac{7}{6} \\
7 = X_{01} + 7X_{03} &
\end{cases}
$$

$$
X_0 = \begin{bmatrix} -7/3 \\ \bar{X}_{02} \\ 7/3 \end{bmatrix}
$$

- ESAME 13-11-2017

1. Si consideri il sistema lineare **tempo continuo** descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

(a) Si studino i modi del sistema e la stabilitá interna.

(b) Studiare le proprietà di raggiungibilitá e osservabilitá del sistema e determinarne i poli.

(c) Si fornisca la definizione di stabilità BIBO. Si studi la stabilitá BIBO del sistema e si giustifichi la risposta in modo esaustivo.

a)

Gli autovalori sono:

$\lambda_1 = -1 \quad m.a = 1 \quad m.g. = 1$

$$\lambda_2 = +i \quad m.a. = 2 \quad m.g. = 5 - \text{rank}(A - i\cdot I) = 5 - \text{rank}\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1-i \end{bmatrix} = 5-4 = 1$$

$$\lambda_3 = -i \quad m.a = 2 \quad m.g = 5 - \text{rank}(A + i\cdot I) = 5 - \text{rank}\begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1+i \end{bmatrix} = 5-4 = 1$$

I modi sono: e^{-t}, $\cos(t)$, $\sin(t)$, $t\cos(t)$, $t\sin(t)$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Avendo due blocchi di Jordan di dimensione 2 il sistema è internamente instabile.

b)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 3 \qquad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 4 \qquad Ker(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T_{RO} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2+1}$$

- I poli sono $\Rightarrow s^2+1=0 \Rightarrow s^2=-1 \Rightarrow s = \pm i$

c)

Per verificare la BIBO stabilità devo andare a verificare che gli autovalori che mi andrò a trovare nella mia funzione di trasferimento sono a parte reale negativa. E per verificare ciò devo controllare se sono sia raggiungibili che osservabili.

1. $\lambda = i$

$$(A - i \mid B) = \left[\begin{array}{ccccc|c} -i & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1-i & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$ non recupera di rango quindi non è raggiungibile

2. $\lambda = -i$

$$(A + i \mid B) = \left[\begin{array}{ccccc|c} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1+i & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$ non recupera di rango quindi non è raggiungibile

3. $\lambda = -1$

$$(A - I \mid B) = \left[\begin{array}{ccccc|c} \cancel{-1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cancel{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$ recupera rango quindi è raggiungibile.

$$\left(\frac{A - I}{C}\right) = \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$ recupera rango quindi è osservabile.

Il sistema è BiBo stabile.

• ESAME 15-01-2018

● Dato il sistema **tempo discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare i modi associati alla matrice dinamica del sistema.

(b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

(c) Determinare la dimensioni dello spazio di raggiungibiltà e dello spazio di inosservabilità indicandone anche una base.

a)

Gli autovalori sono :

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow m.a. = 2 \quad m.g. = 5 - \text{rank}(A+I) = 5 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 5-3=2$

$\lambda_2 = 1 \Rightarrow m.a. = 3 \quad m.g = 5 - \text{rank}(A-I) = 5 - \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 5-3 = 2$

• $\lambda_1 = -1 \Rightarrow$ BLOCCO DI ORDINE 1 :

$m - 2r_1 + r_2$ con $m = 5$ e $r_1 = \text{rank}(A+I) = 3$

$r_2 = \text{rank}(A+I)^2 = 3$

$5 - 6 + 3 = 8 - 6 = 2$

• $\lambda_2 = 1 \Rightarrow$ BLOCCO DI ORDINE 1 :

$m - 2r_1 + r_2$ con $m = 5$ e $r_1 = \text{rank}(A-I) = 3$

$r_2 = \text{rank}(A-I)^2 = 2$

$5 - 6 + 2 = 7 - 6 = 1$

• BLOCCO DI ORDINE 2 :

$r_1 - 2r_2 + r_3$ con $r_3 = \text{rank}(A-I)^3 = 2$

$3 - 4 + 2 = 5 - 4 = 1$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ i modi sono: } \quad (-1)^k, \quad (1)^k, \quad k(1)^k$$

b)

$$G(s) = C(s \cdot I - A)^{-1} \cdot B$$

$$A_{RO} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{RO} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_{RO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{-1}{s^2-1} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s-3}{2s^2-2}$$

c)

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(R) = 1 \qquad \text{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(O) = 2 \qquad \text{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- ESAME 05-02-2018

- Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare la forma canonica di Kalman. Si determinino i modi e la stabilitá interna del sistema.

(b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

(c) Si studi la stabilitá BIBO. Se BIBO stabile motivare, altrimenti si fornisca un ingresso che non ne verifica la definizione.

a)

- Calcoliamo la forma canonica di Kalman:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} C & C A & C \cdot A^2 & C \cdot A^3 \end{bmatrix}^T$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(R) = 3 \qquad \text{rank}(O) = 3$$

$$Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad Ker(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{RO} & T_{R\bar{O}} & T_{\bar{R}O} & T_{\bar{R}\bar{O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori sono:

$$\begin{cases} \lambda = -1 & m.a. = 1 \quad m.g. = 1 \\ \lambda = 2 & m.a = 1 \quad m.g. = 1 \\ \lambda = 2j & m.a = 1 \quad m.g. = 1 \\ \lambda = -2j & m.a = 1 \quad m.g. = 1 \end{cases} \implies \text{I modi sono: } e^{-t},\ e^{2t},\ \cos(2t),\ \sin(2t)$$

- Il sistema è instabile poiché c'è un modo divergente (e^{2t}).

b)

$$A_{RO} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{RO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_{RO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -2 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2+4} \cdot \begin{bmatrix} s & -2 \\ 2 & s \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s/s^2+4 & 2/s^2+4 \\ -2/s^2+4 & s/s^2+4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{s^2+4}$$

c)

- Stabilità BiBo:

I poli della funzione di trasferimento sono: $s = \pm 2i$

Sistema non BiBo stabile.

• ESAME 21-02-2018

1. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare i modi propri del sistema e commentare sulla stabilitá interna del sistema.

(b) Determinare tutte le condizioni iniziali da cui lo stato evolve in uno spazio vettoriare di dimensione 1, per ingresso nullo.

(c) Si studi la stabilitá BIBO.

(d) Si fornisca una realizzazione minima del sistema in forma canonica di controllo.

a)

$$\begin{bmatrix} 3-j & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -j \end{bmatrix}$$

• Gli autovalori sono :

1) $\lambda_1 = -1$ m.a. $= 1$ m.g. $= 1$

2) $\lambda_2 = 2$ m.a. $= 2$ m.g. $= 5 - \rho(A - 2 \cdot I) = 5 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 1$

3) $\lambda_3 = -1 + j$ m.a. $= 1$ m.g. $= 1$

4) $\lambda_4 = -1 - j$ m.a. $= 1$ m.g. $= 1$

• I modi sono : e^{-t}, e^{2t}, $t \cdot e^{2t}$, $e^{-t} \cdot \cos(t)$, $e^{-t} \cdot \sin(t)$

Avendo un modo divergente (e^{2t}), il sistema è instabile.

b)

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \ker(A - 2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(A + I) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ker(A + I) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• Le condizioni iniziali richieste sono: $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

• Gli autovalori complessi e coniugati non sono presi in considerazione in quanto evolvono in uno spazio di dimensione 2.

c)

Studiare la stabilità BIBO:

• $\lambda_2 = 2$

$$(A-2I|B) = \left[\begin{array}{ccccc|c} \cancel{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{pmatrix} A-2I \\ \hline C \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

• $\lambda_2 = 2$ è sia raggiungibile che osservabile.

Sistema non BIBO stabile.

d)

Vediamo se il sistema in forma minima è completamente raggiungibile:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 3$$

$$\det(\lambda \cdot I - A) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda-2 & 0 & 1 & \lambda-2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 & 0 & \lambda+2 \end{array}\right] = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Dato il sistema **Tempo Continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dato $b = 0$, determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, le proprietà strutturali del sistema (stabilità interna e BIBO, raggiungibilità, osservabilità, con le dimensioni dei relativi spazi) **senza utilizzare le matrici di raggiungibilità e osservabilità**.
- Dato $b \neq 0$, determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, i sottosistemi e la tipologia di connessione che forniscono un sistema complessivo come quello fornito. Motivare le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema complessivo.

a)

$b = \emptyset$

La matrice A è Triangolare superiore quindi gli autovalori sono:

1) $\lambda_1 = -1 \qquad m.a. = 2$

2) $\lambda_2 = 1 \qquad m.a = 1$

3) $\lambda_3 = a$

Anche se a fosse a parte reale negativa c'è comunque l'autovalore $\lambda = 1$ che mi rende il sistema instabile internamente poichè mi crea un modo divergente.

• RAGGIUNGIBILITÀ:

Usiamo il lemma PBH per studiare la raggiungibilità:

1. $\lambda = -1 \quad (\text{con } a \neq -1)$

$$(A+I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+I \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right]$$

Grazie alla matrice B recupero rango e quindi l'autovalore $\lambda = -1$ è raggiungibile.

2. $\lambda = 1$ (con $a \neq 1$)

$$(A-I) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-I|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right]$$

Grazie alla matrice B recupero rango e quindi l'autovalore $\lambda = 1$ è raggiungibile.

3. $\lambda = a$ (a diverso da 1 e -1)

$$(A-aI) = \begin{bmatrix} -1-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-aI|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} -1-a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matrice $(A-aI)$ ha rango 3 e anche con la matrice B non recupero rango. L'autovalore $\lambda = a$ non è raggiungibile.

E posso concludere che il sistema non è completamente raggiungibile.

• OSSERVABILITÀ:

Usiamo il lemma PBH per studiare l'osservabilità:

1. $\lambda = -1$ (con $a \neq -1$)

$$(A+I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{A+I}{C}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $(A+I)$ ha rango 3 e anche con la matrice C non recupero rango. L'autovalore $\lambda = -1$ non è osservabile.

Posso già dire che il sistema non sarà completamente osservabile.

2. $\lambda = 1$ (con $a \neq 1$)

$$(A - I) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A - I \\ \hline C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Recupera rango, $\lambda = 1$ è osservabile.

3. $\lambda = a$ (a diverso da 1 e -1)

$$(A - aI) = \begin{bmatrix} -1-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A - aI \\ \hline C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = a$ è osservabile.

- Per a diverso da -1 e 1 la dimensione dello spazio di raggiungibilità è 3, mentre la dimensione dello spazio di osservabilità è 2.

- Per $a = 1 \rightarrow \dim(R) = 2 \qquad \dim(O) = 2$
- Per $a = -1 \Rightarrow \dim(R) = 1 \qquad \dim(O) = 1$

- STABILITÀ BIBO:

- $\lambda = 1$

$$(A - I) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A - I \\ \hline C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se $a \neq 1 \Rightarrow \lambda = 1$ è osservabile ed è anche raggiungibile, quindi il sistema non è BIBO stabile.
- Se $a = 1 \Rightarrow$ sistema BIBO stabile

b)

Per $b \neq \emptyset$ ho due sistemi connessi in parallelo. Infatti la connessione in parallelo è caratterizzata dalla forma:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

Nei sistemi in parallelo, si perde di raggiungibilità e di osservabilità se le due F.d.T. associate a ciascun sistema hanno almeno un polo in comune.
Infatti la F.d.T. complessiva è data da:

$$G_{TOT}(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

$$G_1(s) = C_1(s \cdot I - A_1)^{-1} \cdot B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)}$$

$$G_2(s) = C_2(s \cdot I - A_2)^{-1} \cdot B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-a \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-a)} + \frac{b}{(s-1)}$$

$$G_{TOT}(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s-a)} + \frac{b}{(s-1)} = \frac{(s-a)(s-1)+(s+1)(s-1)+b(s+1)(s-a)}{(s+1)(s-a)(s-1)}$$

Se $a = -1$:

$$G_{TOT}(s) = \frac{(s+1)(s-1)+(s+1)(s-1)+b(s+1)(s+1)}{(s+1)(s+1)(s-1)} = \frac{\cancel{(s+1)}\left((s-1)+(s-1)+b(s+1)\right)}{(s+1)^{\cancel{2}}(s-1)} = \frac{2(s-1)+b(s+1)}{(s+1)(s-1)}$$

2. Dato il sistema **Tempo Continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

- Portare il sistema in forma di Kalman.
- Determinare la matrice di trasferimento.
- Commentare sulla stabilità BIBO del sistema.

a)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(R) = 2 \qquad \operatorname{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(O) = 3 \qquad \operatorname{Ker}(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \qquad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1/(s+1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_1(s) = \emptyset \\ Y_2(s) = \dfrac{1}{(s+1)} \end{cases}$$

c)

$$Y_2(s) = \frac{1}{(s+1)} \Rightarrow \quad s+1 = \emptyset \Rightarrow \quad s = -1$$

Poli a parte reale negativa. Sistema BIBO stabile.

2. Dato il sistema **Tempo Discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} \overset{A_{Ro}}{\boxed{1}} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \overset{B_{Ro}}{\boxed{0 \quad 1}} \\ 1 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} \overset{C_{Ro}}{\boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Studiare lo spazio di raggiungibilità in 1, 2, 3, 4 passi. Detto R_i lo spazio di raggiungibilità in i passi, determinare se R_i è invariante per $i = 1, 2, 3, 4$. Lo spazio raggiungibile è un sottospazio ciclico?
- Determinare una realizzazione minima in forma di stato e la matrice di trasferimento del sistema.
- Durante l'evoluzione libera del sistema si misura, all'istante $k = 0$ la seguente uscita: $y(0) = [1 \ -1]^T$. Quanti ed eventualmente quali stati iniziali possono dar luogo a tale lettura?

a)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 3$$

· A-invariante:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(R_1) = 2$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(R_2) = 3 \quad \text{(se moltiplico per A il rango rimane lo stesso)}$$

R_2 (ma anche R_3 e R_4) è A-invariante per $t = 2$.

R_1 non è A-invariante

· Spazio ciclico:

Nei sistemi SISO lo spazio di raggiungibilità è sempre un sottospazio ciclico, perché è formato da:

$$S_{x_0} = \text{span}\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}$$, ovvero è formato da un vettore $x_0 = B$

e vale sia T.C che T.D.

Nei sistemi MIMO tale cosa non è garantita, poichè sono strutturati così:

$$R = \{ (B_1 \;\; B_2 \;\; AB_1 \;\; AB_2 \; \ldots \; A^{m-1}B_1 \;\; A^{m-1}B_2)\}$$

Per verificare se R è o no un sottospazio ciclico devo vedere se esiste un vettore "v" tale che:

$< v, \; A, v, \; \ldots, \; A^{m-1} v >$ sia pari alla matrice R.

Ma se B_1 e B_2 sono autovettori (come in questo caso) allora R non è un sottospazio, perchè:

$$X_0 = B_1 - AB_1 = \lambda B_1$$

b)

$$Im(R) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ -1 & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \\ 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & -1 \\ -1 & \cancel{0} & \cancel{0} & 2 \\ & \vdots & & \end{bmatrix} \qquad rank(O) = 2 \qquad Ker(O) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_{RO} & \multicolumn{2}{c}{T_{R\bar{O}}} & T_{\bar{R}O} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = T^{-1} \implies \tilde{A} = A \quad \tilde{B} = B \quad \tilde{C} = C$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = C \cdot (z \cdot I - A)^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z - 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} \\ -\frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \frac{1}{z-1} \\ \emptyset & -\frac{1}{z-1} \end{bmatrix}$$

C)

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$y(k) = C \cdot A^k \cdot X_0 \implies \text{con } k=0 \quad y(0) = C \cdot X_0$$

$$y(0) = C \cdot X_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(0) \Rightarrow x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo stato iniziale che da luogo a tale lettura è questo

2. Dato il sistema **Tempo Continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; D = [0]$$

- Studiare le proprietà strutturali del sistema (Stabilità interna, raggiungibilità e osservabilità)
- Determinare il sistema in forma di Kalman e studiare la stabilità BIBO.
- Commentare sulla relazione tra raggiungibilità e controllabilità con particolare riguardo ai sistemi tempo continui.

a)

- Gli autovalori sono:

1. $\lambda_1 = 0$ m.a. $= 2$ m.g $= 4 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4-2=2$

2. $\lambda_2 = -1$ m.a. $= 1$ m.g $= 1$

3. $\lambda_3 = 1$ m.a. $= 1$ m.g $= 1$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ i modi sono: $1, t, e^{-t}, e^{t}$

Sistema internamente instabile

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ rank(R) $= 1$ il sistema non è completamente raggiungibile.

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ rank(O) $= 2$ il sistema non è completamente osservabile.

- Volendo si può fare anche con il lemma PBH.

b)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(R) = 1 \quad \Longrightarrow \quad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(O) = 2 \quad \Longrightarrow \quad Ker(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{A_{RO}}{0} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{B_{RO}}{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} C_{RO} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **STABILITÀ BIBO:**

$A_{RO} = (0) \qquad B_{RO} (1) \qquad C_{RO} = (1)$

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B = \frac{1}{s}$$

- Sistema non BiBo stabile

C)

• ESAME 14-01-2019

1. Si consideri il sistema MIMO con seguente matrice di trasferimento

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} \\ \frac{-2}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{pmatrix}$$

- Determinare, un sistema in forma di stato che realizzi la matrice di trasferimento $G(s)$. Commentare sul perché risulta meglio lavorare per righe.
- Considerando il primo ingresso e la seconda uscita commentare sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema ottenuto al punto precedente (si prende punteggio pieno se si risponde senza calcolare le matrici di raggiungibilità e osservabilità e senza applicare il lemma P.B.H.).

a)

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} \end{bmatrix}$$

$$G_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \cdot \begin{bmatrix} s & (s-1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s-1)^2} = \frac{1}{s^2-2s+1}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{(s-1)\cdot(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)} \cdot \begin{bmatrix} -2 & (s-1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+3)} = \frac{1}{s^2-s+3s-3} = \frac{1}{s^2+2s-3}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

AR$\bar{O}$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ARO

Gli autovalori sono:

$\lambda_1 = 1$ m.a.=3 $\Rightarrow$ $\lambda'_{1,2} = 1$ Raggiungibile ma non osservabile $\Rightarrow$ $\lambda''_1 = 1$ $\Rightarrow$ raggiungibile e osservabile

$\lambda_2 = -3$ m.a.=1 $\Rightarrow$ Raggiungibile e Osservabile

Dim(R) = 4 e Dim(O) = 2

2. Si consideri il sistema lineare **tempo discreto** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si determino i modi del sistema e si discuta la stabilità interna.

(b) Si studino la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema e la stabilità BIBO della funzione di trasferimento tra il secondo ingresso e l'uscita (il tutto senza effettuare conti).

(c) Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman.

a)

$$\det(A') = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4 = \varnothing \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

$$\det(A'') = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)^2$$

Gli autovalori sono:

1. $\lambda_1 = 2$ m.a. $= 1$ m.g. $= 1$

2. $\lambda_2 = -2$ m.a. $= 1$ m.g. $= 1$

3. $\lambda_3 = -1$ m.a. $= 3$ m.g. $= 5 -$ rank$(A+I) = 5 -$ rank$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 5 - 3 = 2$

•) $\lambda_3 = -1$ Capire quanti blocchi di Jordan ho:

1. $n - 2r_1 + r_2$

$r_1 = \text{rank}(A+I) = 3$

$r_2 = \text{rank}(A+I)^2 = 2$

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \varnothing \\ 8 & 5 & \\ \varnothing & & \varnothing \end{bmatrix}$$

$5 - 6 + 2 = 1$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

I modi sono: $e^{-t}, t \cdot e^{-t}, e^{-t}, e^{-2t}, e^{2t}$

Avendo un autovalore $(\lambda = 2)$ che mi crea un modo divergente, il sistema è internamente instabile.

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Per come è costruita la B gli autovalori del blocco 2x2 non saranno mai raggiungibili. Quindi sistema non completamente raggiungibile.

- Per come è costruita la C gli autovalori del blocco 3x3 non saranno completamente osservabili. Quindi sistema non completamente osservabile.

- **STABILITÀ BIBO:**

L'autovalore $\lambda = 2$ che potrebbe darmi problemi di stabilità non è raggiungibile quindi il mio sistema è BIBO stabile.

c)

$$R = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R) = 3 \qquad \text{Im}(R) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 4 & 0 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 4 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{16} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{16} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(O) = 3 \qquad \text{Ker}(\bar{O}) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Si consideri il sistema lineare tempo continuo descritto dalle matrici

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

(a) Si porti il sistema in forma canonica di Kalman.

(b) Motivando la risposta, si determinino gli andamenti delle uscite compatibili con l'evoluzione libera del sistema: a) e^{-t}, b) e^{t}, c) t, d) $e^{-t}\cos t$.

(c) Si determinino, se esistono, gli ingressi del sistema compatibili con gli andamenti dell'uscita della forma: a) 1, b) $te^{-t}\sin t$, c) e^{-2t}.

a)

$$
R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \qquad \text{Im}(R) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >
$$

$$
O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cancel{0} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cancel{0} & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \cancel{0} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \cancel{0} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 4 \qquad \text{Ker}(\bar{O}) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >
$$

$$
T = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\qquad\qquad}^{T_{RO}} & \overbrace{\qquad\qquad}^{T_{\bar{R}O}} & \overbrace{\quad}^{T_{R\bar{O}}} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}}}^{A_{RO}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{C} = C \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

b)

Per l'evoluzione libera ci basta sapere che gli autovalori siano osservabili. Se gli autovalori che mi interessano lo sono allora posso ricavarmi quelle uscite.

- Gli autovalori sono: $\lambda_1 = 0$ con m.a. $= 2$
  $\lambda_1 = 1$ con m.a. $= 1$
  $\lambda_3 = -1 \pm i$ con m.a. $= 1$

1. $\lambda_1 = \emptyset$

$$\left(\frac{A}{C}\right) = \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \lambda = \emptyset \text{ è osservabile}$$

2. $\lambda_2 = 1$

$$\left(\frac{A - I}{C}\right) = \left[\begin{array}{ccccc} -2 & 0 & \cancel{0} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \cancel{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cancel{0} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \cancel{0} & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & \cancel{0} & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \lambda = 1 \text{ non è osservabile}$$

3. $\lambda_3 = -1 \pm i$

$$\left(\frac{A + (-1 \pm i) I}{C}\right) = \left[\begin{array}{ccccc} -2 \pm i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 \pm i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \pm i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \mp i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \lambda_3 = -1 \pm i \text{ è osservabile}$$

Dato che $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -1 \pm i$ sono osservabili e date le rispettive molteplicità algebriche posso vedere che nell'uscita libera gli andamenti delle uscite compatibili sono:

1) t e 2) $e^{-t} \cos t$

C)

Dato che $\lambda = \emptyset$ è osservabile esistono infiniti ingressi compatibili con l'andamento dell'uscita pari al punto a.

• ESAME 09-06-2019

1. Dato il sistema dinamico descritto dalle equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + 2\dot{y}_1(t) + y_1(t) = u_1 + \ddot{u}_2 + 4\dot{u}_2 + u_2 \\ \ddot{y}_2(t) + 2\dot{y}_2(t) + y_2(t) = \dot{u}_1 + u_1 + \dot{u}_2 - u_2 \end{cases}$$

- si determini la matrice di trasferimento e si calcoli il grado della forma di Smith-McMillan.
- Si determini una realizzazione minima in forma di stato del sistema.

a)

$$\begin{cases} s^2 y_1(s) + 2s y_1(s) + y_1(s) = u_1(s) + s^2 u_2(s) + 4s u_2(s) + u_2(s) \\ s^2 y_2(s) + 2s y_2(s) + y_2(s) = s u_1(s) + u_1(s) + s u_2(s) - u_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(s)(s^2+2s+1) = u_1(s) + u_2(s)(s^2+4s+1) \quad \Rightarrow \\ y_2(s)(s^2+2s+1) = u_1(s+1) + u_2(s-1) \end{cases}$$

$$G_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{(s^2+2s+1)} \quad ; \quad G_{12} = \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{(s^2+4s+1)}{(s^2+2s+1)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{(s+1)}{(s^2+2s+1)} \quad ; \quad G_{22} = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{(s-1)}{(s^2+2s+1)}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s^2+2s+1)} & \frac{(s^2+4s+1)}{(s^2+2s+1)} \\ \frac{(s+1)}{(s^2+2s+1)} & \frac{(s-1)}{(s^2+2s+1)} \end{bmatrix} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1 & (s^2+4s+1) \\ (s+1) & (s-1) \end{bmatrix}$$

$$D(0) = 1$$

$$D(1) = \text{M.C.D.}\left\{1, (s^2+4s+1), (s+1), (s-1)\right\} = 1$$

$$D(2) = \text{M.C.D.}\left\{(s-1) - (s+1)(s^2+4s+1)\right\} = (s-1) - (s^3+4s^2+s+s^2+4s+1) = s-1-s^3-4s^2-s-s^2-4s-1 =$$

$$= -s^3 - 8s^2 - 2s - 2$$

$$\lambda_1 = \frac{D_1}{D_0} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{D_2}{D_1} = -s^3 - 8s^2 - 2s - 2$$

$$M(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & -s^3-8s^2-2s-2 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1 = -1 \quad m.a. = 4 \Rightarrow \text{Grado} = 4$$

b)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s^2+2s+1)} & \dfrac{2s}{(s^2+2s+1)} \\[2ex] \dfrac{(s+1)}{(s^2+2s+1)} & \dfrac{(s-1)}{(s^2+2s+1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{s^2+4s+1}{(s+1)^2} \Rightarrow \frac{\cancel{(s+1)^2}}{\cancel{(s+1)^2}} + \frac{2s}{(s+1)^2}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lavoriamo per colonne:

$$G_1(s) = \frac{1}{(s^2+2s+1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ (s+1) \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s^2+2s+1)} \cdot \begin{bmatrix} 2s \\ (s-1) \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Dato il sistema lineare **tempo discreto** rappresentato dalle equazioni dinamiche

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2}x_2(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases}$$

- Commentare, per quanto possibile, sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema basandosi soltanto sulle equazioni dinamiche e sulle definizioni delle due proprietà (quindi senza l'appoggio del Lemma PBH, di forme standard o matrici di raggiungibilità e osservabilità).
- Si studino le proprietà di raggiungibilità, controllabilità, osservabilità e ricostruibilità. Si studi la stabilità interna e la stabilità BIBO del sistema.
- Si porti il sistema in forma di Kalman.
- Supponendo di conoscere gli ingressi $u(k)$ per $k = 0, \dots 3$ e le uscite per i soli istanti pari $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$ è possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$?

a)

$$A = \begin{bmatrix} \overset{\text{ARO}}{\boxed{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1/2}^{\text{ARO}} & 0 \\ 1 & 1 & \underset{\text{ARO}}{\boxed{0}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per come è strutturata la C il sistema sarà completamente osservabile. L'ultimo elemento di C è $\neq$ da $\varnothing$ e compensa la colonna nulla di A. Mentre l'autovalore $\lambda = 2$, per come è strutturata la B non sarà mai raggiungibile.

$\dim(R) = 2 \qquad \dim(O) = 3$

b)

$$R = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \qquad \text{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 3 \qquad \text{Ker}(O) = \varnothing$$

- Controllabilità a zero:

$\text{Im}(A^k) \subseteq \text{Im}(R_k)$

- $\underline{k = 1}$:

$$\text{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \text{Im}(A) \subseteq \text{Im}(R_1) \quad \text{NO!}$$

• $K = 2$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 1/4 & \cancel{0} \\ 2 & -1/2 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$$Im(A^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad Im(A^2) \subseteq Im(R_2) \qquad NO!$$

Sistema non controllabile per nessun K.

• Il sistema è completamente ricostruibile poiché il sistema è completamente osservabile.

• STABILITÀ INTERNA :

Gli autovalori sono : $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \quad \lambda_3 = 0$

$\lambda = 2$ fuori dal cerchio unitario sistema internamente instabile.

• BIBO STABILITÀ :

c)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1/2 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 2 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C \cdot T = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix}} & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$x_k = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \cdot B \cdot u(i)$$

$$\begin{cases} u(i) \text{ è noto} \\ y(i) \text{ è noto} \end{cases}$$

Se $u(i)$ è noto $\Rightarrow$ x_k^ℓ è noto

Se $y(i)$ è noto $\Rightarrow$ $y_i = C A^k x_0 + \boxed{C \cdot \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \cdot B \cdot u(i)}$ $\Rightarrow$ Noto

$y_k^\ell = C \cdot A^k x_0 = y_i - y_k^f$ è noto

$$\begin{bmatrix} y_0^\ell \\ \vdots \\ y_{N-1}^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} x_0$$

Con $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$ = Matrice di osservabilità (deve avere rango massimo)

2. Dato il sistema lineare rappresentato dalla matrice di trasferimento

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & -\frac{1}{s(s+1)} \end{pmatrix}$$

- Determinare il grado di McMillan della matrice di trasferimento.
- Calcolare la forma di stato del sistema lavorando per righe. Commentare, senza fare conti sulle proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema ottenuto.
- Considerando il sistema in forma di stato con il solo secondo ingresso e la sola prima uscita, si commentino le proprietà di osservabilità e di raggiungibilità del sistema. In seguito, si determinino le dimensioni e le basi degli spazi di inosservaiblità e di raggiungibilità del sistema.

a)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} (s+1) & s \\ \emptyset & (s+1) \\ \emptyset & -1 \end{bmatrix}$$

$$D_0 = 1$$

$$D_1 = \text{M.C.D.} \left\{ (s+1),\ s,\ (s+1),\ -1 \right\} = 1$$

$$D_2 = \text{M.C.D} \left\{ \begin{vmatrix} (s+1) & s \\ 0 & (s+1) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} (s+1) & s \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & (s+1) \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (s+1)^2,\ -(s+1) \right\} = (s+1)$$

$$\lambda_1 = \frac{D_1}{D_0} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{D_2}{D_1} = (s+1)$$

$$M(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & (s+1) \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \emptyset \\ \emptyset & \frac{1}{s} \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \text{GRADO} = 3$$

b)

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} (s+1) & s \end{bmatrix} \qquad s(s+1) = s^2+s$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad s(s+1) = s^2+s$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(R) = 2 \qquad \operatorname{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(O) = 2 \qquad \operatorname{Ker}(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• ESAME 18-09-2019

1. Si consideri il sistema dinamico lineare tempo continuo con matrice dinamica della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Determinare una matrice di ingressi B (più semplice possibile) che garantisca la completa raggiungibilità del sistema
- Considerando la matrice determinata al punto precedente, determinare una matrice di uscite C tale per cui le funzioni di trasferimento che costituiscono la matrice di trasferimento siano tutte BIBO stabili.
- Con $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determinare la matrice di trasformazione per portare il sistema in forma di Kalman. Determinare i poli della funzione di trasferimento.

a)

A è in forma di Jordan.

Servono almeno due impulsi per rendere il sistema completamente raggiungibile (poiché ho due colonne e due righe nulle)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cancel{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cancel{0} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 5$$

b)

Per avere BIBO stabilità devo rendere raggiungibili e osservabili solo $\lambda = -1$, quindi:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Verifichiamo con il lemma PBH:

$$\begin{pmatrix} \frac{A+I}{C} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{recupera rango quindi è osservabile.}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{RO} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{RO} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C_{RO}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(R) = 3 \qquad \operatorname{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} \cancel{0} & 1 & 0 & 1 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 0 & 1 & -1 & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 1 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 0 & 0 & -1 & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 1 & \cancel{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(O) = 3 \qquad \operatorname{Ker}(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Determinare i poli della funzione di Trasferimento:

$G(s) = C(s \cdot I - A)^{-1} \cdot B$

$$A_{R0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_{R0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_{R0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/s & -1/s^2 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 1/s+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/s^2 \\ 1/s \\ 1/s+1 \end{bmatrix} = \frac{s^2 - s - 1}{s^3 + s^2} \Rightarrow \begin{array}{l} s^3 + s^2 = 0 \\ s^2(s+1) = 0 \end{array}$$

i poli sono: $s = \varnothing$ e $s = -1$

• ESAME 14-01-2020

1. Dato il sistema **Tempo Discreto** descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = 0,$$

- Studiarne le proprietà di stabilità, osservabilità, raggiungibilitaà, stabilità BIBO.
- Portare il sistema in forma di Kalman.
- Per il sistema in forma di Kalman, si commenti sull'esistenza di condizioni iniziali per le quali si ottengono le seguenti possibili uscite in evoluzione libera: $(-2)^t$, 4, $t+3$, e^{-2t}. Si riportino le condizioni iniziali nel caso esistino.

a)

Matrice A diagonale superiore, gli autovalori sono:

1. $\lambda_1 = 1$ m.a = 2

2. $\lambda_2 = -2$ m.a = 1

Avendo $\lambda_2 = -2$ fuori dal cerchio unitario, il sistema è internamente instabile.

• Stabilità BiBo:

• $\lambda_1 = -2$

$$(A-\lambda \cdot I \mid B) = (A+2I \mid B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ è raggiungibile}$$

$$\begin{pmatrix} A+2I \\ \hline C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ Non è osservabile}$$

• $\lambda_2 = 1$

$$(A - I \mid B) = \left[\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & -3 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{è raggiungibile}$$

$$\begin{pmatrix} A - I \\ C \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \hline 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{è osservabile}$$

$\lambda_2 = 1$ è raggiungibile e osservabile quindi me lo ritrovo nella funzione di trasferimento e quindi il sistema non è BiBo stabile.

b)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 3 \qquad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 2 & \cancel{0} & 0 \\ 2 & \cancel{0} & 2 \\ 2 & \cancel{0} & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 2 \qquad Ker(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = T$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C \cdot T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

Possibili uscite : $(-2)^t$, 4, $t+3$, e^{-2t}

A Tempo discreto l'evoluzione libera è data da : $y(k) = C \cdot A^k \cdot x_0$

• ESAME 03-02-2020:

1. Dato il sistema descritto dalla seguente matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s^2-1} & \frac{s}{(s+2)(s+1)} \end{pmatrix}$$

- Si determini il grado della forma di Smith-McMillan.
- Lavorando per colonne si determini la forma di stato minima che rappresenta la matrice di trasferimento.
- Dato il sistema SISO formato dal primo ingresso e seconda uscita determinare le proprietà di raggiungibilità, osservabilità, stabilità interna e BIBO (possibilemente senza fare conti e commentando le risposte).

a)

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)} \cdot \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & (s+2)(s-1) \\ (s+2) & s(s-1) \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ Questa attenuta è la matrice polinomiale.

Calcoliamo ora:

$D_0(s) = 1$

$D_1(s) = M.C.D. \left\{ (s+2)(s+1), (s+2)(s-1), (s+2), s(s-1) \right\} = 1$

$D_2(s) = M.C.D. \left\{ s(s+2)(s+1)(s-1) - (s+2)^2(s-1) \right\} = (s+2)(s-1)\left((s^2+s) - (s+2)(s-1)\right) = 2(s+2)(s-1)$

$$\lambda_1 = \frac{D_1(s)}{D_0(s)} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{D_2(s)}{D_1(s)} = 2(s+2)(s+1)$$

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 2(s+2)(s+1) \end{bmatrix}$$

$$M(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 2(s+2)(s+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)} & \emptyset \\ \emptyset & \frac{2}{(s-1)} \end{bmatrix}$$

$\psi(s) = (s+2)(s+1)(s-1) \Rightarrow \quad p_1 = -2 \quad p_2 = -1 \quad p_3 = 1 \ (m.a. = 2)$

Il grado di McMillan del sistema è pari a 4.

b)

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)} \\ \frac{1}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix} \Rightarrow m.c.m = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \Rightarrow G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \cdot \begin{bmatrix} (s+1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s^2-1} \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (s+1) \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} \\ \frac{s}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix} \Rightarrow m.c.m = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \Rightarrow G_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} (s+2) \\ s \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{(s^2+3s+2)} \Rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (s+2) \\ s \end{bmatrix} \Rightarrow C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \emptyset \\ \emptyset & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 & \emptyset \\ \emptyset & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A_{RO} $A_{\bar{R}O}$

- Gli autovalori sono:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 & m.a. = 2 \\ \lambda_2 = 1 & m.a. = 1 \\ \lambda_3 = -2 & m.a. = 1 \end{cases}$$

- Sistema internamente instabile per la presenza di un modo divergente.

· STABILITÀ BIBO:

$\lambda = 1$

$$(A-I \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{recupera rango quindi è raggiungibile}$$

$$\left(\frac{A-I}{C}\right) = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{recupera rango quindi è osservabile}$$

Sistema non BIBO stabile

- Sistema non completamente raggiungibile.
- Sistema completamente osservabile.

- ESAME 24-02-2020:

1. Dato il sistema descritto dalle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si studino i modi del sistema e la stabilità interna;
- Se esiste, si determini (giustificando le risposte) un vettore di uscita C tale per cui l'andamento dell'uscita per il sistema in evoluzione libera possa consistere in combinazione dei seguenti andamenti temporali: 1) $e^{-t}\sin(2t)$ e e^{-2t} oppure 2) $\cos(2t)$ e te^{-2t} oppure 3) $sin(2t)$ e e^{-2t}.
- Determinare se è possibile trovare le stesse combinazioni di andamenti temporali del punto precedente per l'evoluzione forzata dello stato.
- Data $C = (0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)$ determinare la matrice di cambio di base che porta il sistema in forma di Kalman.

a)

Gli autovalori sono:

$\lambda_1 = -2 \qquad m.a. = 3 \qquad m.g. = 5 - \text{rank}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 5-3 = 2$

$\lambda_2 = 2i \qquad m.a. = 1 \qquad m.g. = 1$

$\lambda_3 = -2i \qquad m.a. = 1 \qquad m.g. = 1$

- Posso avere un blocco da 1 e un blocco da 2 o tre blocchi da 1.

- Blocco di dimensione 1:

$5 - 2R_1 + R_2 \Rightarrow R_1 = \text{rank}(A+2I) = 3$

$$R_2 = \text{Rank}(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$5 - 6 + 2 = 3 \Rightarrow$ Quindi avrò 3 blocchi di dimensione 1.

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ i modi sono: } e^{-2t},\ e^{-2t},\ e^{-2t},\ \cos(2i),\ \sin(2i)$$

Il sistema è internamente stabile, poichè nella matrice di Jordan ci sono solo blocchi di dimensione 1 (e non ho modi divergenti)

b)

I miei autovalori sono $\lambda = -2$ e $\lambda = \pm 2i$ quindi potrebbero andare bene solo:

1) $\cos(2t)$ e $t \cdot e^{-2t}$

2) $\sin(2t)$ e e^{-2t}

Per fare ciò devo trovare una C che mi renda i miei autovalori osservabili.

$$(A+2I) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 1 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(A+2I) = 3$$

Serve una C con almeno 2 righe

$$(A \pm 2iI) = \begin{bmatrix} \pm 2i & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \pm 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\pm 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\pm 2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\pm 2i \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(A \pm 2iI) = 4$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Questa C mi rende osservabili } \lambda = \pm 2i \text{ e } \lambda = -2$$

c)

Per l'evoluzione forzata gli autovalori interessati devono essere sia raggiungibili che osservabili.

$$(A+2I \mid B) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Non recupera rango quindi non è raggiungibile.

$$(A \pm 2iI \mid B) = \left[\begin{array}{ccccc|c} \pm 2i & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \pm 2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\pm 2i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2\pm 2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\pm 2i & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ non recupera rango quindi non è raggiungibile.

- Non posso trovare nessuna combinazione.

d)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 8 & -16 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & -32 \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{4} & \cancel{-8} & \cancel{16} \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(R) = 4 \qquad \operatorname{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & -2 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -4 & 4 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -4 & 0 & -8 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 16 & 16 & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(O) = 3 \qquad \operatorname{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- ESAME 15-06-2020 :

1. Dato il sistema Tempo Continuo descritto dalle seguenti matrici:

ARŌ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ARO   AR̄O

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{0 \quad 1} & 0 \end{pmatrix}$$

- si studino i modi del sistema e la stabilità interna;
- si determini la matrice che porta il sistema nella forma canonica di Kalman e la funzione di trasferimento del sistema.
- si fornisca la condizione di controllabilità a zero di un sistema lineare tempo discreto, tempo invariante e se ne discuta le implicazioni con la proprietà di raggiungibilità.

a)

- Gli autovalori sono :

$$\lambda_1 = 1 \qquad m.a. = 2 \qquad m.g. = 5 - \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 5-4 = 1$$

$$\lambda_2 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(-2-\lambda)+1 = 2\lambda+\lambda^2+1 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 1-1 = \varnothing \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad m.a. = 2 \qquad m.g. = 5 - \text{rank}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5-4 = 1$$

$$\lambda_3 = \varnothing \qquad m.a. = 1 \qquad m.g. = 1$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{i modi sono } e^{t},\ t\cdot e^{t},\ e^{-t},\ t\cdot e^{-t},\ 1$$

- Sistema internamente instabile, $\lambda = 1$ crea un modo divergente.

b)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R) = 4 \qquad \text{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(O) = 3 \qquad \text{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Determinare la funzione di Trasferimento:

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+1} & \frac{-1}{s^2+2s+1} \\ \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{s}{s^2+2s+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{s}{s^2+2s+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2+2s+1}$$

C)

Nel T.D. se il sistema è completamente raggiungibile allora è anche controllabile a zero, viceversa non vale.

Affinché questo sia vero, occorre verificare che:

$$Im(A^k) \subseteq Im(R_k)$$

Se questo è vero, allora il sistema è controllabile in K passi, altrimenti non lo è.

• ESAME 06-07-2020 :

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ e il sistema **Tempo Discreto** descritto dalle seguenti matrici:

$\alpha = 1$
$\gamma = 1$
$\beta = 1$
$\delta = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma+2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- si studino la stabililtà interna e BIBO del sistema al variare di a;
- si studino le dimensioni dello spazio di raggiungibilità e di inosservabilità;
- Dati gli ingressi $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ e le uscite $y(0) = 0, y(1) = \beta+1, y(2) = 2$ si discuta se è possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$ al variare di a.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a)

$$\det(A - \lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & a & -\lambda & 1 \\ 1/4 & -\lambda & 0 & 1/4 & -\lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \end{array}\right] = \lambda^2(3-\lambda) - \boxed{(3-\lambda)\cdot\frac{1}{4}} =$$
$$= \lambda^2(3-\lambda) - \frac{3}{4} + \frac{\lambda}{4} = \emptyset$$

$$-4\lambda^3 + 12\lambda^2 + \lambda - 3 = \emptyset$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -4 & 12 & 1 & -3 \\ 3 & & -12 & 0 & 3 \\ \hline & -4 & 0 & 1 & \emptyset \end{array} \Rightarrow (\lambda-3)\underbrace{(-4\lambda^2+1)}_{4\lambda^2 = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$$

• Gli autovalori sono :

$\lambda_1 = 3$ m.a. = 1   m.g. = 1 $\Rightarrow$ Autovalore fuori dal cerchio unitario sistema internamente instabile .

$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ m.a = 1   m.g. = 1

$\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ m.a = 1   m.g. = 1

• Studiamo la stabilità BIBO:

$\lambda_1 = 3$

$$(A-3I \mid B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Anche se a fosse uguale a $\emptyset$ o a 1 la matrice avrebbe comunque rango 3.

Quindi $\lambda = 3$ è raggiungibile.

$$\left(\frac{A-3I}{C}\right) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & a \\ 1/4 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Se $a = 0$ la matrice ha rango 2 quindi autovalore non osservabile

Se $a \neq 0$ la matrice ha rango 3 quindi autovalore osservabile.

• In conclusione se $a = \emptyset$ il sistema è BiBo stabile.

b)

• RAGGIUNGIBILITÀ:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & a & 1/2+3a \\ 0 & 1/2 & a/4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \qquad \det(R) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & a & 1/2+3a & 2 & a \\ 0 & 1/2 & a/4 & 0 & 1/2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 & 3 \end{array}\right] =$$

$$= \left(9 + \frac{a^2}{4} + \emptyset\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+3a\right) + \frac{6a}{4}\right) =$$

$$= 9 + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3a}{2} - \frac{3a}{2}$$

$a^2 + 36 - 1 - 6a - 6a = \emptyset$

$a^2 - 12a + 35 = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 36 - 35 = 1 \Rightarrow a = 6 \pm \sqrt{1} \Rightarrow a_1 = 7$, $a_2 = 5$

• Se $\begin{cases} a \neq 7 \\ a \neq 5 \end{cases}$ il sistema è completamente raggiungibile.

Quindi avrò: $Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

• Se $\begin{cases} a = 7 \\ a = 5 \end{cases}$ il sistema non è completamente raggiungibile poiché avrà rango 2.

Quindi lo spazio di raggiungibilità avrà dimensione 2.

• <u>OSSERVABILITÀ</u> :

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & a \\ 1/4 & 1/4 & 13a/4 \end{bmatrix} \qquad \det(O) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1 & a & 1/4 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 13a/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{13a}{4} + \cancel{\frac{1}{4}a} - \cancel{\frac{1}{4}a} - \frac{13a}{16} = \varnothing$$

$$52a - 13a = 0 \Rightarrow 39a = 0 \Rightarrow a = 0$$

• Se $a \neq 0$ il sistema è completamente osservabile e lo spazio di inosservabilità è nullo.

• Se $a = 0$ il sistema non è completamente osservabile e lo spazio di inosservabilità ha dimensione 1.

c)

$u(0) = 1 \qquad u(1) = 1 \qquad y(0) = 0 \qquad y(1) = 2 \qquad y(2) = 2$

$$y_k^l = C \cdot A^k \cdot x_0 + \boxed{C \cdot \sum_{i=\varnothing}^{k-1} A^{k-1-i} \cdot B \cdot u_i} \rightarrow y_k^f$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$$2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3a \\ 0 & 1/4 & a/4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} x_0 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X_0$$

$$2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1 & a \end{bmatrix} \cdot X_0 + 2$$

$$2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 13/a \end{bmatrix} \cdot X_0 + \frac{1+2a}{2} + 2$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-2a-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & a \\ 1/4 & 1/4 & 13a/4 \end{bmatrix} \cdot X_0$$

- Per $a \neq 0$ è possibile determinare x_0 poichè O ha rango pieno.
- Per $a = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \cdot X_0 \Rightarrow (O|v) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \cancel{0} & 0 \\ 1/4 & 1 & \cancel{0} & 0 \\ 1/4 & 1/4 & \cancel{0} & -1/2 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rank}(O|v) = 3$$

- $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ non appartiene a all'immagine di O e quindi non passo determinare x_0.

• ESAME 27-07-2020:

1. Dato il sistema **Tempo Continuo** descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta-4 & \alpha+1 & -\beta-4 \\ 2 & -\alpha-1 & 2 \\ 3 & -\alpha-1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$
$\beta = 1$
$\gamma = 1$
$\delta = 1$

- si porti il sistema in forma standard di raggiungibilità
- si studino i modi del sistema;
- si determinino gli autovalori interni allo spazio di inosservabilità e si studi la stabilità BIBO.

a)

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -4 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(R) = 2 \qquad Im(R) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = R_3 + R_1 = R_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = R_1 - R_3 = R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda \cdot I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -5-\lambda & 2 & -5 & -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 2 & 2 & -2-\lambda \\ 3 & -2 & 3-\lambda & 3 & -2 \end{array}\right] = \left((-5-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)+12+20\right) - \left(-15(-2-\lambda)-4(-5-\lambda)+4(3-\lambda)\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 11\lambda + \cancel{62} - \cancel{62} - 15\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1.\ \lambda = \emptyset$$

$$2.\ \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 4 = \emptyset$$

$$\lambda_{1,2} = -2$$

• Gli autovalori sono: $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -2$

$$\lambda_2 = -2 \qquad m.a. = 2 \qquad m.g. = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 2 & \emptyset & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{-2} & \cancel{5} \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ i modi sono } \quad 1,\ e^{-2t},\ t \cdot e^{-2t}$$

c)

1. $\lambda = \emptyset$

$$\left(\frac{A}{C}\right) = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ il rango di questa matrice è 3.

$\lambda = 0$ è osservabile

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & \cancel{-5} & 0 \\ 2 & -2 & \cancel{2} & 1 \\ 3 & -2 & \cancel{3} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$ il rango di questa matrice è 3.

$\lambda = 0$ è raggiungibile

2. $\lambda = -2$

$$\left(\frac{A+(2I)}{C}\right) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 2 & \emptyset & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ il rango di questa matrice è 2

$\lambda = -2$ non è osservabile

$$(A+(2I|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & \emptyset & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$ il rango di questa matrice è 2

$\lambda = -2$ non è raggiungibile.

Il sistema non è BIBO stabile.

• ESAME 25-09-2020:

1. Dato il sistema Tempo Continuo descritto dalla seguente matrice di trasferimento:

$\alpha = 1$
$\beta = 1$
$\gamma = 1$
$\delta = 1$

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\alpha-1} & \frac{s}{(s-\alpha-1)^2} \\ -\frac{\beta+1}{(s-\alpha-1)(s+\gamma+1)} & \frac{1}{(s+\gamma+1)} \end{pmatrix}$$

- si trovi una realizzazione in forma di stato lavorando per righe;
- si consideri il sistema ottenuto al punto precedente considerando solo il primo ingresso e la seconda uscita, si studino i modi del sistema e la matrice di cambio di base per portare il sistema in forma canonica di Kalman.

a)

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-2)} & \frac{s}{(s-2)^2} \end{bmatrix}$$

$$G_1(s) = \frac{1}{(s-2)^2} \cdot \begin{bmatrix} (s-2) & s \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s^2-2s+4} \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} \emptyset & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -2 & \emptyset \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{(s-2)(s+2)} & \frac{1}{(s-2)} \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s-2)(s+2)} \cdot \begin{bmatrix} -2 & (s+2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{(s^2-4)} \Rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} \emptyset & 4 \\ 1 & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda \cdot I) = \begin{bmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(2-\lambda)+4 = -2\lambda+\lambda^2+4 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 1-4 = -3$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}\, i$$

$$\det(A-\lambda \cdot I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(2-\lambda)-4 = -2\lambda+\lambda^2-4 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 1+4 = 5$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow$$ I modi sono: $e^t\cos(\sqrt{3}i)$, $e^t\sin(\sqrt{3}i)$, $e^{(1+\sqrt{5})t}$, $e^{(1-\sqrt{5})t}$

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & -4 & -8 \\ -2 & 0 & -8 & 16 \\ 0 & -2 & -4 & -16 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 4 \qquad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 2 \qquad Ker(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -(\delta+1) & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -(\delta+1) & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(\delta+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\delta+1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\delta+1) \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\gamma+1) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- si determinino i modi del sistema e la struttura della matrice di Jordan associata ad A;
- Si studino gli spazi di raggiungibilità e di inosservabilità;
- Si determini la matrice di cambio di base per portare il sistema in forma canonica di Kalman e la funzione di trasferimento del sistema

a)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ho un unico autovalore :

- $\lambda = -2$ $\quad$ m.a. = 5

$$\text{m.g.} = 5 - \text{rank}(A+2I) = 5 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Avendo m.g. = 2 potrò avere o un blocco da 4 e un blocco da 1 o un blocco da 3 e uno da 2.

- Blocco di ordine 1:

$$n - 2r_1 + r_2 \Rightarrow \quad r_1 = \text{rank}(A+2I) = 3$$

$$r_2 = \text{rank}(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$n - 2r_1 + r_2 = 5 - 6 + 1 = \emptyset$$

- Quindi per esclusione avrò un blocco di ordine 2 e uno di ordine 3.

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{i modi sono} \quad e^{-2t}, te^{-2t}, t^2e^{-2t}, e^{-2t}, te^{-2t}$$

b)

$$R = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{4} & \cancel{-8} & \cancel{16} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R) = 1 \qquad \text{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 1 \\ -2 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & -3 \\ 4 & \cancel{0} & -4 & \cancel{0} & 8 \\ -8 & \cancel{0} & 12 & \cancel{0} & -20 \\ 16 & \cancel{0} & -32 & \cancel{0} & 48 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(O) = 3 \qquad \text{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcolare funzione di Trasferimento:

• ESAME 01-02-2021 :

1. Si consideri lo schema riportato in figura

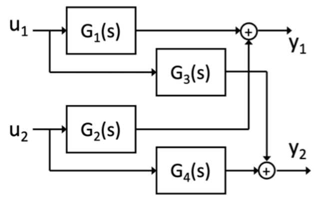

Figura 1: Schema esercizio 1

dove $G_1(s) = \frac{s-1}{s^2-1}$, $G_2(s) = \frac{s+1}{s^2-1}$, $G_3(s) = \frac{1}{s^2-1}$, $G_4(s) = \frac{s}{s^2-1}$.

- scrivere la matrice di trasferimento del sistema dinamico e lavorando per colonne determinare una forma di stato che realizza la matrice di trasferimento trovata.
- Si studi stabilità interna, la stabilità BIBO, le proprietà di raggiungibilità del sistema trovato al punto precedente considerando un solo ingresso e una sola uscita (commentando sul fatto che i risultati sono indipendenti dalla scelta effettuata).

a)

$$\begin{cases} Y_1 = G_1 \cdot u_1 + G_2 \cdot u_2 \\ Y_2 = G_3 \cdot u_1 + G_4 \cdot u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s-1}{s^2-1} & \frac{s+1}{s^2-1} \\ \frac{1}{s^2-1} & \frac{s}{s^2-1} \end{bmatrix}}_{G(s)} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} s-1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad G_2 = \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} s+1 \\ s \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori sono:

$\lambda_1 = 1 \quad m.a. = 2$

$\lambda_2 = -1 \quad m.a = 2$

Sistema internamente instabile per $\lambda = 1$ che provoca un modo divergente.

$$R = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \qquad \text{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- STABILITÀ BIBO:

Sistema non Bibo poiché nella F.d.T. mi ritrovo $\lambda = 1$.

• ESAME 22-02-2021:

1. Si consideri il sistema **tempo discreto** descritto dalle equazioni alle differenze

$$y(k+3) - 3y(k+2) + 2y(k+1) = u(k+2) - u(k+1) - 2u(k)$$

- scrivere una realizzazione del sistema di dimensione $n = 3$ e studiarne le proprietà di raggiungibilità e osservabilità, studiarne la stabilità interna.
- Commentare per questo sistema le proprietà di controllabilità a zero e di ricostruibilità dello stato.
- Determinare una realizzazione minima del sistema e studiarne la stabilità BIBO.

a)

$$S^3 y - 3S^2 y^2 + 2S y = S^2 u - S u - 2u$$

$$y(S^3 - 3S^2 + 2S) = u(S^2 - S - 2) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{S^2 - S - 2}{S^3 - 3S^2 + 2S}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -2 & 3-\lambda & 0 & -2 \end{array}\right] = (\lambda^2(3-\lambda) + 0 + 0) - (0 + 2\lambda + 0) =$$

$$= 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$

$$\det(A - \lambda I) = \varnothing \quad \Rightarrow \quad -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = \varnothing$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = \varnothing \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Delta = 9 - 8 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

• Gli autovalori sono: $\lambda_1 = \varnothing$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_1 = 1$

Sistema internamente instabile grazie alla presenza di $\lambda = 2$.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(R) = 3 \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{-8} & \cancel{8} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(O) = 2 \qquad \mathrm{Ker}(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b)

2. Dato il sistema lineare **tempo discreto** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- si studi la stabilità del sistema, si determinino le dimensioni degli spazi di raggiungibilità e di inosservabilità e si classifichino gli autovalori come interni o esterni a questi sottospazi.
- si determinino le condizioni iniziali $x(0)$ compatibili con le uscite $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ e $y(2) = \frac{1}{2}$ in risposta ad un ingresso $u(0) = 1$ e $u(1) = 0$.

a)

Gli autovalori sono:

$\lambda = \frac{1}{2}$ m.a. = 2 $m.g. = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} = 1$

$\lambda = 2$ m.a. = 1   m.g. = 1

$$J = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ I modi sono $e^{1/2 t}$, $t \cdot e^{1/2 t}$, e^{2t}

Sistema internamente instabile (modi divergenti)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \qquad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 2 \qquad \text{Ker}\, O = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- **STABILITÀ BIBO:**

i) $\lambda = 1/2$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \mid B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$ recupera rango quindi autovalore raggiungibile

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \hline C \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$ non recupera rango quindi autovalore non osservabile

•) $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} A-\lambda I \mid B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} -3/2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3/2 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \Rightarrow$$ non recupera rango quindi autovalore non raggiungibile

$$\begin{bmatrix} \dfrac{A-\lambda I}{C} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} -3/2 & 0 & 2 \\ 2 & -3/2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$ recupera rango quindi autovalore osservabile

b)

$y(0) = 1 \qquad y(1) = 1 \qquad y(2) = \frac{1}{2} \qquad u(0) = 1 \qquad u(1) = \emptyset$

$$Y_i = C \cdot A^K \cdot x_0 + C \cdot \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-1-i} \cdot B \cdot u_i + D \cdot u_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} &Y(0) = C \cdot A^0 x_0 \\ &Y(1) = C \cdot A \cdot x_0 + C B \cdot u(0) \\ &Y(2) = C \cdot A^2 x_0 + C \cdot A \cdot B \cdot u(0) + C \cdot B\, u(1) \\ &Y(3) = C \cdot A^3 x_0 + C \cdot A^2 B \cdot u(0) + C \cdot A \cdot B\, u(1) + C \cdot B\, u(2) \\ &\vdots \\ &Y(m) = C \cdot A^m x_0 + C \cdot A^{m-1} \cdot B + C \cdot A^{m-2} \cdot B + C \cdot A^{m-3} B + \dots + C \cdot A^{m-m} \cdot B \end{aligned}}$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x_0$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 2 \\ 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 5 \\ 2 & 1/4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x_0 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 2 \\ 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x_0$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_0 + 1$$

$$\frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$$y_k^{l} - y_k^{f} = O \cdot x_0 \Rightarrow$$

- Se $y_k^{l} - y_k^{f}$ sta nell'immagine di O vuol dire che esiste un x_0 per cui $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ e $y(2) = \frac{1}{2}$ sono le uscite valide per gli impulsi $u(0) = 1$ e $u(1) = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_0 \Rightarrow \mathrm{Im}(O) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(O|v) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rango}(O|v) = 3$$

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ non appartiene all'immagine di O.

Quindi non posso determinare x_0.

2. Si consideri il sistema dato dall'interconnessione in parallelo di due sistemi tempo discreto caratterizzati dalle funzioni di trasferimento: $G_1(z) = \frac{1}{z^2-0.5z-0.5}$ e $G_2(z) = \frac{1}{z-1}$.

- Si determini la forma di stato del sistema interconnesso (di dimensione 3) e se ne studino le proprietà di raggiungibilità e osservabilità.
- Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman. Si commentino le basi determinate per il calcolo della matrice del cambio di base.
- Si determinino tutte le condizioni iniziali compatibili con l'ingresso $u(0) = 1$ e le uscite $y(0) = 1$ e $y(1) = 0$.

a)

$G_{TOT} = G_1(z) + G_2(z)$ visto che è interconnesso in parallelo.

- Passo in F.C.C. per $G_1(z)$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Passo in F.C.C. per $G_2(z)$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

- Quindi il sistema totale è:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 3/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rank}(R) = 2 \quad \text{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rank}(O) = 3 \quad \text{Ker}(\bar{O}) = \emptyset$$

b)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} \Rightarrow \quad det(T) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = 1 - (1/2) = \frac{1}{2}$$

$a_{11} = 0 \qquad a_{21} = 1 \qquad a_{31} = -1/2$

$a_{12} = 0 \qquad a_{22} = -1 \qquad a_{32} = 1$

$a_{13} = 1/2 \qquad a_{23} = 1 \qquad a_{33} = -1$

$$T^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = C \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$u(0) = 1 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = \emptyset$

$$y = O \cdot x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = O^{-1} \cdot y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Si consideri il sistema **tempo discreto** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si studi la stabilità interna del sistema, gli spazi di raggiungibilità e osservabilità, la stabilità BIBO al variare di a.
- Si determini se il sistema è riscostruibile e controllabile a zero in 3 passi al variare di a.
- Se esiste, si determini un ingresso che controlli a zero lo stato iniziale $x(0) = (1\ 0\ 0)^T$ al variare di a.

a)

$$\det(A-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 2 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & a-\lambda & 0 & 0 & a-\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow (1-\lambda)^2(a-\lambda)$$

- Gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = a$.

- Se $a = 1$:

$\lambda = 1$ m.a. $= 3$ m.g. $= 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 2 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{0} \end{bmatrix} = 1$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Sistema internamente stabile.}$$

- Se $-1 \leq a \leq 1$ sistema internamente stabile.

- Se a è fuori dal cerchio unitario sistema internamente instabile.

- **Raggiungibilità e osservabilità:**

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \quad \text{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cancel{0} \\ 1 & 2-a & \cancel{0} \\ 1 & 2+(2-a)a & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Se } a = 3 \quad \text{rank}(O) = 1$$

Se $a \neq 3$ $\text{rank}(O) = 2 \Rightarrow$ $\text{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- **Stabilità BIBO:**

$\cdot\ \lambda = 1 \quad (a \neq 1)$

$$(A - I) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{recupera rango, } \lambda = 1 \text{ è raggiungibile}$$

$$\left(\frac{A - I}{C}\right) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{non recupera rango, } \lambda = 1 \text{ non è osservabile}$$

$\cdot\ \lambda = a$

$$(A - aI) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1-a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-a & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{non recupera rango, } \lambda = a \text{ non è raggiungibile}$$

$$\left(\frac{A - aI}{C}\right) = \left[\begin{array}{ccc} 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-a \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{recupera rango, } \lambda = 1 \text{ è osservabile.}$$

$$G(z) = C \cdot (z \cdot I - A)^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z-1 & 2 & 0 \\ 0 & z-a & 0 \\ 1 & 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{z-1}{z^2 - 2z}$$

b)

Per la controllabilità a zero $Im(A^k) \subseteq Im(R_k)$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2a^2+2a+2 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 3 & 2a+4 & 1 \end{bmatrix} \qquad Im(R_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per $a = \emptyset$:

$$A^3(a=\emptyset) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(A^3) = 2 \qquad Im(A^3) \subseteq Im(R_3)$$

Quindi è controllabile a zero in 3 passi.

Per $a \neq 0$ $A^3(a \neq 0)$ ha rango 3, il sistema non è controllabile a zero

Per la ricostruibilità a zero: $Ker(O_k) \subseteq Ker(A^k)$

$$Ker(O) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 \\ 1 & 2+(2-a)a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \emptyset \Rightarrow x_1 = x_2 \\ x_1 + (2-a)x_2 = \emptyset \Rightarrow x_1 + (2-a)x_1 = \emptyset \Rightarrow x_1(1+2-a) = \emptyset \\ \qquad x_1(3-a) = \emptyset \\ x_1 + (2+2a-a^2)x_2 = \emptyset \end{cases}$$

- Per $a = 3 \Rightarrow$ il $Ker(O)$ è $\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

- Per $a \neq 3 \Rightarrow$ il $Ker(O)$ è $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2a^2+2a+2 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 3 & 2a+4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ker(A^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2a^2+2a+2 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 3 & 2a+4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + (2a^2+2a+2)x_2 = \emptyset \\ a^3 x_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad x_2 = \emptyset \\ 3x_1 + (2a+4)x_2 + x_3 = \emptyset \end{cases}$$

- $a \neq 0 \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$
- $a = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 6\alpha - 4\alpha = 2\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\alpha$

- Conclusioni:

1. $Ker(O_3) \subseteq Ker(A^3) \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow$ NO!

2. $Ker(O_3) \subseteq Ker(A^3) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ NO!

Il sistema non è ricostruibile.

2. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si studino la stabilità interna del sistema e i modi.
- Si determini se è possibile vedere una evoluzione forzata dell'uscita con andamenti della forma a) e^{-2t}, b) $t+2$, c) $3sin(t)$, d) $e^{-t} - \sin(t)$. Si commenti in modo adeguato la risposta.
- Costruire la matrice T del cambio di base che porta il sistema in forma di Kalman.

a)

$\det(\lambda I - A') = (\lambda-3)(\lambda+3)+10 = \lambda^2 + \cancel{3\lambda} - \cancel{3\lambda} - 9 + 10 = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$

Gli autovalori sono:

$\lambda_1 = -1 \quad m.a. = 2 \quad m.g. = 5 - \text{rank} \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$

$\lambda_2 = \emptyset \quad m.a. = 1 \quad m.g. = 1$

$\lambda_3 = \pm i \quad m.a. = 1 \quad m.g. = 1$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \text{I modi sono: } e^{-t},\ t \cdot e^{-t},\ 1,\ \cos(t),\ \sin(t)$$

b)

Nell' evoluzione forzata vediamo solo gli autovalori RAGGIUNGIBILI e OSSERVABILI.

Quindi e^{2t} non è possibile vederlo perché dovrei avere un autovalore in $\lambda = -2$.
Per $t = 2$ non è possibile perché non ho la D.
Per $3\sin(t)$ e $e^{-t} - \sin(t)$ non è possibile poiché gli autovalori immaginari non sono osservabili.

c)

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(R) = 4 \qquad \operatorname{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & -1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 1 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & -1 & -1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(O) = 3 \qquad \operatorname{Ker}(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• ESAME 16-11-2021

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinare i modi propri, lo spazio di raggiungibilità e inosservabilità, le proprietà di controllabilità a zero e ricostruibilità del sistema. Si commenti infine la stabilità BIBO del sistema.
- Determinare la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma canonica di Kalman.

a)

$$\det(A-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \end{array}\right] = -\lambda^3 + 1 = 0$$
$$-\lambda^3 = -1$$
$$\lambda^3 = 1$$

Gli autovalori sono:

·) $\lambda = 1$ $\quad m.a. = 3 \quad m.g. = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1$

I modi del sistema sono $e^t, t \cdot e^t, t^2 \cdot e^t$.

Avendo tutti autovalori a parte reale positiva il sistema non è BIBO stabile.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & \cancel{1} & \cancel{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R) = 1 \qquad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(O) = 3$$

lo spazio di inosservabilità è nullo.

• Per la controllabilità a zero $Im(A^k) \subseteq Im(R_k)$:

$$Im(A^3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ non è contenuta nell' $Im(R_3)$

Il sistema non è controllabile a zero.

- Per la ricostruibilità $Ker(O_k) \subseteq Ker(A^k)$:

La matrice di osservabilità ha rango pieno. Quindi il sistema è ricostruibile.

b)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = C \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• ESAME 19-01-2022

1. Si consideri la seguente matrice di trasferimento

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} \\ -\frac{6}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{pmatrix}$$

- Determinare una rappresentazione in forma di stato della matrice di trasferimento lavorando per righe o per colonne.
- Considerando il secondo ingresso e la prima uscita della rappresentazione trovata al punto precedente, commentare sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema e determinare le basi dello spazio di raggiungibilità e dello spazio di inosservabilità. Determinare la matrice che porta il sistema in forma di Kalman.

a)

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} \end{bmatrix}$$

$$G_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \cdot \begin{bmatrix} s & (s-1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s-1)^2} = \frac{1}{s^2-2s+1}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} -\frac{6}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)} \cdot \begin{bmatrix} -6 & (s-1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+3)} = \frac{1}{s^2+2s-3}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -6 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & -5 & 13 \\ 1 & -5 & 13 & -41 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(R) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & -5 & 13 \\ 1 & -5 & 13 & -41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(R) = 3$$

$$\operatorname{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(O) = 2 \qquad \operatorname{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• ESAME 03-02-2022

1. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Portare il sistema in forma di Kalman. Determinare la stabilitá interna e BIBO del sistema.

(b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

(c) Si determini se (e se ne fornisca una motivazione) i seguenti andamenti sono visibili nell'evoluzione libera o nell'evoluzione forzata dell'uscita: a) e^{2t}, b) $2e^{-t}$, c) t, d) $e^{-t}\sin(2t)$, e) $t\sin(2t)$.

a)

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 8 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & -1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(R) = 3 \qquad \operatorname{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cancel{0} \\ -1 & 0 & 2 & \cancel{0} \\ 0 & -4 & 4 & \cancel{0} \\ 4 & 0 & 8 & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(O) = 3 \qquad \operatorname{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T^{-1}$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \lambda = \pm 2i$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \boxed{-1} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori della matrice sono: $\lambda_1 = \pm 2i$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$
- Stabilità Interna: il sistema non è internamente stabile per la presenza di un autovalore a parte reale positiva.
- Stabilità BIBO: Non è BiBo stabile poiché $\lambda_1 = \pm 2i$ è sia raggiungibile che osservabile.

b)

$$G(s) = C(s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 4 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(s \cdot I - A)^{-1} \Rightarrow \quad \det(sI - A) = s^2 + 4$$

$$(s \cdot I - A)^{-1} = \frac{1}{s^2+4} \cdot \begin{bmatrix} s & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s/s^2+4 & -4/s^2+4 \\ 1/s^2+4 & s/s^2+4 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s/s^2+4 & -4/s^2+4 \\ 1/s^2+4 & s/s^2+4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{s^2+4}$$

c)

• ESAME 24-02-2022

1. Dato il sistema **tempo discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Determinare tutti gli stati iniziali indistinguibili da $x_0 = (3\ 1\ 0\ -1)^T$.
- Studiare la controllabilità a zero in 1, 2, 3, 4 passi.
- Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman. Se ne deduca la funzione di trasferimento e si discuta la stabilità BIBO del sistema.

a)

$$x - x_0 = Ker(O)$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/8 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1/16 & 0 & 1/16 \end{bmatrix} \qquad Ker(O) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/8 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1/16 & 0 & 1/16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{x_4}{2} = \emptyset \\ \frac{x_2}{4} + \frac{x_4}{4} = \emptyset \\ -\frac{x_2}{8} - \frac{x_4}{8} = \emptyset \\ \frac{x_2}{16} + \frac{x_4}{16} = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{x_4}{2} = \emptyset \\ x_2 = -x_4 \end{cases} \Rightarrow x_1 + \cancel{\frac{x_4}{2}} - \cancel{\frac{x_4}{2}} = \emptyset \quad x_1 = \emptyset$$

$$Ker(O) = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x = Ker(O) + x_0 \qquad x = \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b)

Per la controllabilità a zero $Im(A^k) \subseteq Im(R_k)$ con R matrice di raggiungibilità.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2$$

- Studiare la controllabilità a zero:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/4 & 0 & -5/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 3$$

$$Im(R_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad Im(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$Im(A) \not\subseteq Im(R_1) \Rightarrow$ Il sistema non potrà mai essere controllabile in 1, 2, 3, 4 passi.

c)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \qquad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/8 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1/16 & 0 & 1/16 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 2 \qquad Ker(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Per trovare la funzione di trasferimento non mi interessa calcolare la forma di Kalman, poiché vedo che ho una matrice A disaccoppiata in due sottomatrici dove la prima in alto a sinistra sarà quella sia raggiungibile che osservabile, quindi posso scrivere direttamente le matrici:

$A_{RO} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ $B_{RO} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ $C_{RO} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

$$G(z) = C(z \cdot I - A)^{-1} \cdot B = 1 \cdot (z \cdot I - 0)^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{z}$$