Teoria dei Sistemi e del Controllo - 27-07-2023

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - (x_2(t)-1)^2 \\ \dot{x}_2(t) = k\,(x_2(t)-1) + 4x_1(t)\,(x_2(t)-1) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
   - Si studi la stabilità dei punti di equilibrio determinati al punto precedente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
   - Per il caso $k = 0$ disegnare l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.

2. Dato il sistema **tempo continuo** descritto dalle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Studiare le stabilità interna del sistema. Attraverso il lemma P.B.H. studiare la BIBO stabilità.
   - Dato lo stato iniziale $x(0) = (1,0,0,0)^T$, si determini una base dello spazio in cui evolve l'evoluzione libera del sistema.
   - Determinare gli stati indistinguibili dai seguenti stati iniziali $x_1(0) = (1,0,1,0)^T$, $x_2(0) = (0,1,-1,1)^T$.
   - Si determini una condizione iniziale che garantisca una evoluzione complessiva dell'uscita (libera+forzata) asintoticamente convergente.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

   si determini :

   - per quali valori di α e β il sistema è stabilizzabile;
   - per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller;
   - si progetti, al variare di β e α tra i valori ammissibili, un controllore del tipo $u_k = K(\alpha,\beta)x_k$ tale che il sistema a ciclo chiuso sia di tipo dead-beat.

4. Si consideri il problema ottimizzazione:

$$u^* = \arg\min_u \left[h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt \right]$$

   soggetto al vincolo differenziale : $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ con $h(\cdot)$ e $f(\cdot)$ funzioni scalari di variabili vettoriali, e con $x(t_0) = x_0$ ed x_0 noto.

   - si descriva il metodo utilizzabile per trasformare il problema in un problema equivalente non vincolato
   - si descriva il metodo utilizzabile per trasportare la funzione di peso $h(\cdot)$ all'interno dell'integrale
   - sfruttando risultati noti sulla minimizzazione di funzionali di costo integrali del tipo $\int_{t_0}^{t_F} g(w, \dot{w}, t)$, si mostri come è possibile giungere alle equazioni di Eulero per il problema in questione
   - infine si discuta la necessità o meno di condizioni al contorno aggiuntive