Teoria dei Sistemi e del Controllo - 21-11-2023

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(k-5)(x_1-3) + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1-3)x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

   (a) Determinare gli equilibri del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 4$;

   (b) Studiare gli equilibri ottenuti al punto precedente con il metodo indiretto di Lyapunov al variare di $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 4$;

   (c) Per gli equilibri per cui non è stato possibile concludere al punto precedente, determinare la proprietà di stabilità con in metodo diretto di Lyapunov.

2. Dato il sistema **tempo continuo** descritto dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare la forma di Jordan associata alla matrice dinamica. Valutare a partire dalla forma ottenuta se il sistema può essere completamente raggiungibile e completamente osservabile commentando la risposta fornita.

   (b) Dato il sistema fornito, determinare le basi dello spazio inosservabile e dello spazio raggiungibile.

   (c) Determinare le matrici del sottosistema raggiungibile e osservabile.

   (d) Commentare sulla stabilità esterna (BIBO stabilità) del sistema.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

   Si determini, se possibile, **motivando adeguatamente il risultato**, una legge di retroazione dello stato $u_k = Kx_k$ tale che il sistema retroazionato $(A + BK, B)$ sia raggiungibile da uno solo dei due ingressi ed abbia un comportamento di tipo dead-beat.

4. Sia dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k = Cx_k$$

   - Supponendo che l'applicazione dell'ingresso $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ produca l'uscita $y_0 = 2$,$y_1 = 3$,$y_2 = 1$, si determini, se possibile, lo stato iniziale del sistema x_0.
   - si dica, motivando adeguatamente la risposta, se la soluzione del punto precedente è unica (unico possibile stato iniziale x_0).