• ESAME 16-01-2017

1. Dato il sistema lineare tempo invariante e tempo continuo descritto dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si determini il più piccolo sottospazio che contenga l'evoluzione libera dello stato a partire dai seguenti stati $x_{0,1} = (1\,0\,0\,0\,0)^T$, $x_{0,2} = (0\,0\,1\,0\,0)^T$ e $x_{0,3} = (0\,0\,0\,1\,0)^T$ commentando i risultati ottenuti.
- Si calcolino polinomio caratteristico e polinomio minimo della matrice A e la Funzione di Trasferimento del sistema.
- Si indichino i modi propri del sistema ed i modi propri presenti nell'uscita per ingresso impulsivo.

2. Sia $y(t) = -e^{-2t} + e^{-2t} \sin t + 2 + t$ l'uscita di un sistema lineare:

- si determini una forma di stato di dimensione minima e in forma di Jordan compatibile con tale uscita (che sia libera o forzata).
- Data la forma di stato determinata al punto precedente trovale lo stato iniziale che, in caso di ingressi nulli, generi l'uscita indicata.

2. Dato il sistema lineare SISO caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Caratterizzare la matrice di Jordan associata ad A e commentare sulla proprietà di raggiungibilità e osservabilità di sistemi SISO con tale matrice dinamica.
- Determinare tutte le condizioni iniziali affinchè l'evoluzione libera evolva lungo una retta.
- Data $B = (0\,1\,1\,0\,0)^T$ e $C = (1\,0\,1\,0\,1)$ Si determini la matrice T del cambio di base per portare il sistema nella forma di Kalman.
- Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

2. Dato il sistema tempo continuo caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e con matrice di uscita $C = [0\,0\,0\,1]$

- Si determinino i modi propri del sistema.
- Si discuta la stabilità interna e la stabilità BIBO del sistema.

• ESAME 03-07-2017

1. Dato il sistema lineare **tempo discreto** rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; C = (1\,0\,0\,1)$$

(a) Studiare le seguenti proprietà strutturali del sistema: stabilità interna, raggiungibilità, controllabilità a zero, stabilizzabilità e stabilità esterna (BIBO stabilità). Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

(b) Determinare, se esistono, sequenze di ingressi che a partire da $x(0) = (0,\,1,\,0,\,0)^T$ consentano di raggiungere i seguenti punti: a) $x_a = (1,\,0,\,1,\,-1)^T$, b) $x_b = (-1,\,4,\,1,\,0)^T$, c) $x_c = (-1,\,2,\,1,\,0)^T$, d) $x_d = (2,\,1,\,0,\,1)^T$. Nel caso in cui esistano si riporti anche il numero di passi necessario.

(c) Si scrivano le condizioni nelle quali per un sistema lineare tempo invariante tempo discreto con matrici $(A,\,B,\,C,\,D)$, lo stato X_F può essere raggiunto a partire dallo stato x_0.

• ESAME 14-09-2017

1. Si consideri il sistema lineare **tempo discreto** descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

(a) Si studi l'osservabilità e la raggiungibilità del sistema indicando, in particolare, la dimensione dello spazio raggiungibile e dello spazio inosservabile al variare del parametro β. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema.

(b) Si studi la stabilità interna al variare di $\beta \in \mathbb{R}$

(c) Per $\beta = 1$, si determinino le condizioni di esistenza di condizioni iniziali $x(0)$ che sono compatibili con le osservazioni $y(0) = 0$, $y(1) = 3$ e $y(2) = 7$ in corrispondenza alla sollecitazione in ingresso $u(0) = \alpha$ e $u(1) = 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In caso di esistenza si calcolino tutte le condizioni iniziali ammissibili.

• ESAME 13-11-2017

1. Si consideri il sistema lineare **tempo continuo** descritto dalle matrici:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

(a) Si studino i modi del sistema e la stabilitá interna.

(b) Studiare le proprietà di raggiungibilitá e osservabilitá del sistema e determinarne i poli.

(c) Si fornisca la definizione di stabilità BIBO. Si studi la stabilitá BIBO del sistema e si giustifichi la risposta in modo esaustivo.

• ESAME 15-01-2018

- Dato il sistema **tempo discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare i modi associati alla matrice dinamica del sistema.

(b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

(c) Determinare la dimensioni dello spazio di raggiungibiltà e dello spazio di inosservabilità indicandone anche una base.

• ESAME 05-02-2018

- Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare la forma canonica di Kalman. Si determinino i modi e la stabilitá interna del sistema.

(b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

(c) Si studi la stabilitá BIBO. Se BIBO stabile motivare, altrimenti si fornisca un ingresso che non ne verifica la definizione.

• ESAME 21-02-2018

1. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare i modi propri del sistema e commentare sulla stabilitá interna del sistema.

(b) Determinare tutte le condizioni iniziali da cui lo stato evolve in uno spazio vettoriare di dimensione 1, per ingresso nullo.

(c) Si studi la stabilitá BIBO.

(d) Si fornisca una realizzazione minima del sistema in forma canonica di controllo.

2. Dato il sistema **Tempo Continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dato $b = 0$, determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, le proprietà strutturali del sistema (stabilità interna e BIBO, raggiungibilità, osservabilità, con le dimensioni dei relativi spazi) **senza utilizzare le matrici di raggiungibilità e osservabilità**.
- Dato $b \neq 0$, determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, i sottosistemi e la tipologia di connessione che forniscono un sistema complessivo come quello fornito. Motivare le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema complessivo.

2. Dato il sistema **Tempo Continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

- Portare il sistema in forma di Kalman.
- Determinare la matrice di trasferimento.
- Commentare sulla stabilità BIBO del sistema.

2. Dato il sistema **Tempo Discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} \overset{\text{Aro}}{\boxed{1}} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \overset{\text{Bro}}{\boxed{0 \quad 1}} \\ 1 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} \overset{\text{Cro}}{\boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Studiare lo spazio di raggiungibilità in 1, 2, 3, 4 passi. Detto R_i lo spazio di raggiungibilità in i passi, determinare se R_i è invariante per $i = 1, 2, 3, 4$. Lo spazio raggiungibile è un sottospazio ciclico?
- Determinare una realizzazione minima in forma di stato e la matrice di trasferimento del sistema.
- Durante l'evoluzione libera del sistema si misura, all'istante $k = 0$ la seguente uscita: $y(0) = [1 \ -1]^T$. Quanti ed eventualmente quali stati iniziali possono dar luogo a tale lettura?

2. Dato il sistema **Tempo Continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; D = [0]$$

- Studiare le proprietà strutturali del sistema (Stabilità interna, raggiungibilità e osservabilità)
- Determinare il sistema in forma di Kalman e studiare la stabilità BIBO.
- Commentare sulla relazione tra raggiungibilità e controllabilità con particolare riguardo ai sistemi tempo continui.

• ESAME 14-01-2019

1. Si consideri il sistema MIMO con seguente matrice di trasferimento

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} \\ \frac{-2}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{pmatrix}$$

- Determinare, un sistema in forma di stato che realizzi la matrice di trasferimento $G(s)$. Commentare sul perché risulta meglio lavorare per righe.
- Considerando il primo ingresso e la seconda uscita commentare sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema ottenuto al punto precedente (si prende punteggio pieno se si risponde senza calcolare le matrici di raggiungibilità e osservabilità e senza applicare il lemma P.B.H.).

2. Si consideri il sistema lineare **tempo discreto** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si determino i modi del sistema e si discuta la stabilità interna.

(b) Si studino la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema e la stabilità BIBO della funzione di trasferimento tra il secondo ingresso e l'uscita (il tutto senza effettuare conti).

(c) Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman.

2. Si consideri il sistema lineare tempo continuo descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si porti il sistema in forma canonica di Kalman.

(b) Motivando la risposta, si determinino gli andamenti delle uscite compatibili con l'evoluzione libera del sistema: a) e^{-t}, b) e^{t}, c) t, d) $e^{-t}\cos t$.

(c) Si determinino, se esistono, gli ingressi del sistema compatibili con gli andamenti dell'uscita della forma: a) 1, b) $te^{-t}\sin t$, c) e^{-2t}.

• ESAME 09-06-2019

1. Dato il sistema dinamico descritto dalle equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + 2\dot{y}_1(t) + y_1(t) = u_1 + \ddot{u}_2 + 4\dot{u}_2 + u_2 \\ \ddot{y}_2(t) + 2\dot{y}_2(t) + y_2(t) = \dot{u}_1 + u_1 + \dot{u}_2 - u_2 \end{cases}$$

- si determini la matrice di trasferimento e si calcoli il grado della forma di Smith-McMillan.
- Si determini una realizzazione minima in forma di stato del sistema.

2. Dato il sistema lineare **tempo discreto** rappresentato dalle equazioni dinamiche

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2}x_2(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases}$$

- Commentare, per quanto possibile, sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema basandosi soltanto sulle equazioni dinamiche e sulle definizioni delle due proprietà (quindi senza l'appoggio del Lemma PBH, di forme standard o matrici di raggiungibilità e osservabilità).
- Si studino le proprietà di raggiungibilità, controllabilità, osservabilità e ricostruibilità. Si studi la stabilità interna e la stabilità BIBO del sistema.
- Si porti il sistema in forma di Kalman.
- Supponendo di conoscere gli ingressi $u(k)$ per $k = 0, \ldots 3$ e le uscite per i soli istanti pari $y(0),\ y(2),\ y(4)$ è possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$?

2. Dato il sistema lineare rappresentato dalla matrice di trasferimento

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & -\frac{1}{s(s+1)} \end{pmatrix}$$

- Determinare il grado di McMillan della matrice di trasferimento.
- Calcolare la forma di stato del sistema lavorando per righe. Commentare, senza fare conti sulle proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema ottenuto.
- Considerando il sistema in forma di stato con il solo secondo ingresso e la sola prima uscita, si commentino le proprietà di osservabilità e di raggiungibilità del sistema. In seguito, si determinino le dimensioni e le basi degli spazi di inosservaiblità e di raggiungibilità del sistema.

- ESAME 18-09-2019

1. Si consideri il sistema dinamico lineare tempo continuo con matrice dinamica della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Determinare una matrice di ingressi B (più semplice possibile) che garantisca la completa raggiungibilità del sistema
- Considerando la matrice determinata al punto precedente, determinare una matrice di uscite C tale per cui le funzioni di trasferimento che costituiscono la matrice di trasferimento siano tutte BIBO stabili.
- Con $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determinare la matrice di trasformazione per portare il sistema in forma di Kalman. Determinare i poli della funzione di trasferimento.

· ESAME 14-01-2020

1. Dato il sistema **Tempo Discreto** descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = 0,$$

- Studiarne le proprietà di stabilità, osservabilità, raggiungibilitaà, stabilità BIBO.
- Portare il sistema in forma di Kalman.
- Per il sistema in forma di Kalman, si commenti sull'esistenza di condizioni iniziali per le quali si ottengono le seguenti possibili uscite in evoluzione libera: $(-2)^t$, 4, $t+3$, e^{-2t}. Si riportino le condizioni iniziali nel caso esistino.

• ESAME 03-02-2020:

1. Dato il sistema descritto dalla seguente matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s^2-1} & \frac{s}{(s+2)(s+1)} \end{pmatrix}$$

- Si determini il grado della forma di Smith-McMillan.
- Lavorando per colonne si determini la forma di stato minima che rappresenta la matrice di trasferimento.
- Dato il sistema SISO formato dal primo ingresso e seconda uscita determinare le proprietà di raggiungibilità, osservabilità, stabilità interna e BIBO (possibilmente senza fare conti e commentando le risposte).

• ESAME 24-02-2020 :

1. Dato il sistema descritto dalle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si studino i modi del sistema e la stabilità interna;
- Se esiste, si determini (giustificando le risposte) un vettore di uscita C tale per cui l'andamento dell'uscita per il sistema in evoluzione libera possa consistere in combinazione dei seguenti andamenti temporali: 1) $e^{-t}\sin(2t)$ e e^{-2t} oppure 2) $\cos(2t)$ e te^{-2t} oppure 3) $sin(2t)$ e e^{-2t}.
- Determinare se è possibile trovare le stesse combinazioni di andamenti temporali del punto precedente per l'evoluzione forzata dello stato.
- Data $C = (0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$ determinare la matrice di cambio di base che porta il sistema in forma di Kalman.

- ESAME 15-06-2020 :

1. Dato il sistema Tempo Continuo descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{matrix}}^{A_{R\bar{O}}} & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{matrix}}_{A_{RO}} & 1 \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 \quad 0 & \boxed{0}_{A_{\bar{R}O}} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{0 \quad 1} & 0 \end{pmatrix}$$

- si studino i modi del sistema e la stabilità interna;
- si determini la matrice che porta il sistema nella forma canonica di Kalman e la funzione di trasferimento del sistema.
- si fornisca la condizione di controllabilità a zero di un sistema lineare tempo discreto, tempo invariante e se ne discuta le implicazioni con la proprietà di raggiungibilità.

• ESAME 06-07-2020 :

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ e il sistema **Tempo Discreto** descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma+2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$
$\gamma = 1$
$\beta = 1$
$\delta = 1$

- si studino la stabililtà interna e BIBO del sistema al variare di a;
- si studino le dimensioni dello spazio di raggiungibilità e di inosservabilità;
- Dati gli ingressi $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ e le uscite $y(0) = 0, y(1) = \beta + 1, y(2) = 2$ si discuta se è possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$ al variare di a.

• ESAME 27-07-2020:

1. Dato il sistema **Tempo Continuo** descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta - 4 & \alpha + 1 & -\beta - 4 \\ 2 & -\alpha - 1 & 2 \\ 3 & -\alpha - 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$
$\beta = 1$
$\gamma = 1$
$\delta = 1$

- si porti il sistema in forma standard di raggiungibilità
- si studino i modi del sistema;
- si determinino gli autovalori interni allo spazio di inosservabilità e si studi la stabilità BIBO.

• ESAME 25-09-2020:

1. Dato il sistema Tempo Continuo descritto dalla seguente matrice di trasferimento:

$\alpha = 1$
$\beta = 1$
$\gamma = 1$
$\delta = 1$

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\alpha-1} & \frac{s}{(s-\alpha-1)^2} \\ -\frac{\beta+1}{(s-\alpha-1)(s+\gamma+1)} & \frac{1}{(s+\gamma+1)} \end{pmatrix}$$

- si trovi una realizzazione in forma di stato lavorando per righe;
- si consideri il sistema ottenuto al punto precedente considerando solo il primo ingresso e la seconda uscita, si studino i modi del sistema e la matrice di cambio di base per portare il sistema in forma canonica di Kalman.

2. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -(\delta+1) & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -(\delta+1) & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(\delta+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\delta+1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\delta+1) \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\gamma+1) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- si determinino i modi del sistema e la struttura della matrice di Jordan associata ad A;
- Si studino gli spazi di raggiungibilità e di inosservabilità;
- Si determini la matrice di cambio di base per portare il sistema in forma canonica di Kalman e la funzione di trasferimento del sistema

• ESAME 01-02-2021 :

1. Si consideri lo schema riportato in figura

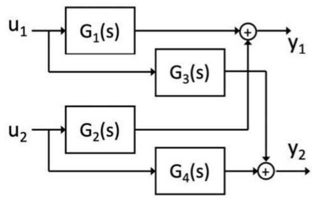


Figura 1: Schema esercizio 1

dove $G_1(s) = \frac{s-1}{s^2-1}$, $G_2(s) = \frac{s+1}{s^2-1}$, $G_3(s) = \frac{1}{s^2-1}$, $G_4(s) = \frac{s}{s^2-1}$.

- scrivere la matrice di trasferimento del sistema dinamico e lavorando per colonne determinare una forma di stato che realizza la matrice di trasferimento trovata.
- Si studi stabilità interna, la stabilità BIBO, le proprietà di raggiungibilità del sistema trovato al punto precedente considerando un solo ingresso e una sola uscita (commentando sul fatto che i risultati sono indipendenti dalla scelta effettuata).

• ESAME 22-02-2021:

1. Si consideri il sistema **tempo discreto** descritto dalle equazioni alle differenze

$$y(k+3) - 3y(k+2) + 2y(k+1) = u(k+2) - u(k+1) - 2u(k)$$

- scrivere una realizzazione del sistema di dimensione $n = 3$ e studiarne le proprietà di raggiungibilità e osservabilità, studiarne la stabilità interna.
- Commentare per questo sistema le proprietà di controllabilità a zero e di ricostruibilità dello stato.
- Determinare una realizzazione minima del sistema e studiarne la stabilità BIBO.

2. Dato il sistema lineare **tempo discreto** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- si studi la stabilità del sistema, si determinino le dimensioni degli spazi di raggiungibilità e di inosservabilità e si classifichino gli autovalori come interni o esterni a questi sottospazi.
- si determinino le condizioni iniziali $x(0)$ compatibili con le uscite $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ e $y(2) = \frac{1}{2}$ in risposta ad un ingresso $u(0) = 1$ e $u(1) = 0$.

2. Si consideri il sistema dato dall'interconnessione in parallelo di due sistemi tempo discreto caratterizzati dalle funzioni di trasferimento: $G_1(z) = \frac{1}{z^2-0.5z-0.5}$ e $G_2(z) = \frac{1}{z-1}$.

- Si determini la forma di stato del sistema interconnesso (di dimensione 3) e se ne studino le proprietà di raggiungibilità e osservabilità.
- Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman. Si commentino le basi determinate per il calcolo della matrice del cambio di base.
- Si determinino tutte le condizioni iniziali compatibili con l'ingresso $u(0) = 1$ e le uscite $y(0) = 1$ e $y(1) = 0$.

2. Si consideri il sistema **tempo discreto** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si studi la stabilità interna del sistema, gli spazi di raggiungibilità e osservabilità, la stabilità BIBO al variare di a.
- Si determini se il sistema è riscostruibile e controllabile a zero in 3 passi al variare di a.
- Se esiste, si determini un ingresso che controlli a zero lo stato iniziale $x(0) = (1\ 0\ 0)^T$ al variare di a.

2. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si studino la stabilità interna del sistema e i modi.
- Si determini se è possibile vedere una evoluzione forzata dell'uscita con andamenti della forma a) e^{-2t}, b) $t+2$, c) $3sin(t)$, d) $e^{-t} - \sin(t)$. Si commenti in modo adeguato la risposta.
- Costruire la matrice T del cambio di base che porta il sistema in forma di Kalman.

• ESAME 16-11-2021

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinare i modi propri, lo spazio di raggiungibilità e inosservabilità, le proprietà di controllabilità a zero e ricostruibilità del sistema. Si commenti infine la stabilità BIBO del sistema.
- Determinare la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma canonica di Kalman.

• ESAME 19-01-2022

1. Si consideri la seguente matrice di trasferimento

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} \\ -\frac{6}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{pmatrix}$$

- Determinare una rappresentazione in forma di stato della matrice di trasferimento lavorando per righe o per colonne.
- Considerando il secondo ingresso e la prima uscita della rappresentazione trovata al punto precedente, commentare sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema e determinare le basi dello spazio di raggiungibilità e dello spazio di inosservabilità. Determinare la matrice che porta il sistema in forma di Kalman.

• ESAME 03-02-2022

1. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Portare il sistema in forma di Kalman. Determinare la stabilitá interna e BIBO del sistema.

(b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

(c) Si determini se (e se ne fornisca una motivazione) i seguenti andamenti sono visibili nell'evoluzione libera o nell'evoluzione forzata dell'uscita: a) e^{2t}, b) $2e^{-t}$, c) t, d) $e^{-t}\sin(2t)$, e) $t\sin(2t)$.

- ESAME 24-02-2022

1. Dato il sistema **tempo discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Determinare tutti gli stati iniziali indistinguibili da $x_0 = (3\ 1\ 0\ -1)^T$.
- Studiare la controllabilità a zero in 1, 2, 3, 4 passi.
- Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman. Se ne deduca la funzione di trasferimento e si discuta la stabilità BIBO del sistema.

2. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato dalla matrice dinamica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- Calcolare gli equilibri del sistema;
- Studiare i modi del sistema e determinare gli stati iniziali che forniscono una evoluzione libera dello stato con andamenti periodici.
- Date le seguenti matrici di ingresso e uscita determinare una matrice di cambio di base che porta il sistema in forma canonica di Kalman

2. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = 0,$$

- Determinare i modi propri del sistema e l'insieme delle condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera dello stato evolva lungo una retta di $\mathbb{R}^3$;
- Determinare le basi dello spazio raggiungibile e dello spazio inosservabile;
- Portare il sistema in forma canonica di Kalman e determinare la funzione di trasferimento.

Teoria dei Sistemi - 9 cfu - L.M. in Ingegneria dell'Automazione
Compito del 26/02/2013

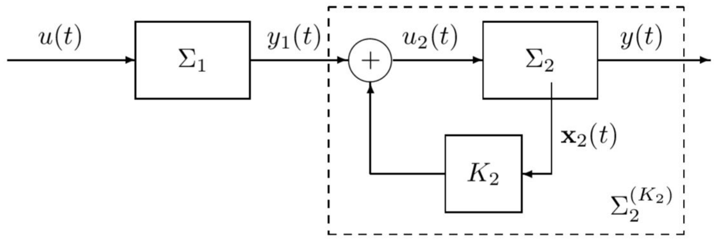
Esercizio 1 Si considerino le funzioni di trasferimento (a tempo discreto)

$$w_1(z) = \frac{z^2}{z^3+1}, \quad w_2(z) = \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2+z+1}. \tag{1.1}$$

1_i Si costruiscano una realizzazione minima $\Sigma_1 = (F_1, \mathbf{g}_1, H_1)$ di $w_1(z)$ ed una minima $\Sigma_2 = (F_2, \mathbf{g}_2, H_2)$ di $w_2(z)$.

1_{ii} Si stabilisca se il sistema serie di Σ_1 seguito da Σ_2 è raggiungibile e/o osservabile e se lo stato zero del sistema serie è semplicemente stabile.

1_{iii} Si costruisca per il sistema Σ_2 una retroazione K_2 dallo stato in modo che ogni evoluzione libera dello stato di Σ_2 si annulli in un numero finito di passi. Si determini se il sistema complessivo (cfr. figura) è semplicemente stabile, raggiungibile e/o osservabile.



1_{iv} Si determinino tutti gli stati iniziali del sistema serie, reazionato come al punto 1_{iii}, che danno luogo a uscite libere $y(t)$ di durata finita.

Esercizio 2 Si consideri il sistema discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t)$$

Si determinino

2_i il sottospazio raggiungibile in un passo, in due passi e in tre passi;

2_{ii} il sottospazio controllabile in un passo, in due passi e in tre passi;

2_{iii} la forma standard di raggiungibilità.

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Prova in itinere 23-12-2020

Numero di matricola						
	–	–	α	β	γ	δ

1. Dato il sistema lineare tempo continuo caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare i modi del sistema;
   (b) Determinare la struttura della matrice in forma di Jordan associata ad A e la corrispondente matrice di trasformazione;
   (c) Determinare le condizioni iniziali $x(0)$ tale per cui l'evoluzione libera del sistema evolve in un piano;
   (d) Date le matrici di ingresso e uscita $B = (1, 0, 0, 1, 0)^T$ e $C = (1, 0, 0, 0, 1)$ determinare la matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma canonica di Kalman.

2. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -(\delta+1) & 0 \\ \delta+1 & -2(\delta+1) & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare se e da quali condizioni iniziali è possibile raggiungere lo stato $x(k) = (0,\, 0,\, \gamma+1)^T$.

(b) Determinare se e da quali condizioni iniziali è possibile raggiungere lo stato $x(k) = (0,\, 0,\, 0)^T$.

(c) Calcolare una base dello spazio raggiungibile e calcolarne gli autovalori interni;

(d) Determinare se è possibile riconoscere se il sistema è partito dalle condizioni iniziali $x(0) = (\alpha,\, \beta,\, \gamma+1)^T$ e $\tilde{x}(0) = (\alpha,\, \beta,\, \delta+10)^T$ conoscendo gli ingressi e le uscite del sistema.

(e) Calcolare una base dello spazio non osservabile e calcolarne gli autovalori interni;

(f) Determinare la forma della funzione di trasferimento del sistema.