UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

24 Giugno 2025

ESAME DI MECCANICA I - *Corso di Laurea in Ing. Biomedica*

ESAME DI MECCANICA TEORICA ED APPLICATA - *Corso di Laurea in Ing. Robotica e dell'Automazione*

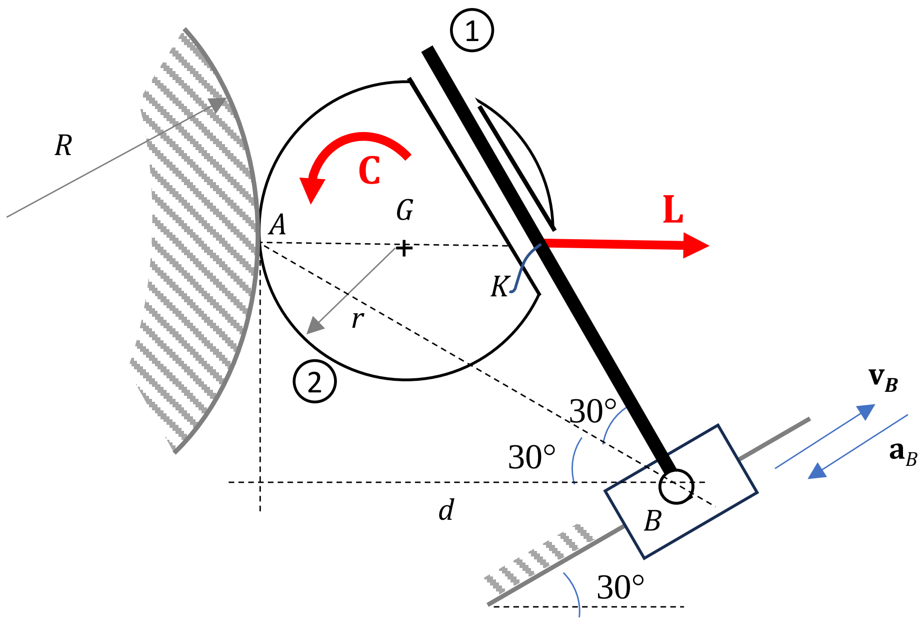
*COGNOME*____________________ *NOME*____________________ *MATRICOLA*______________ *CDL*____________

Esercizio 1

Si consideri il meccanismo in figura, costituito da 2 corpi. Sia nota la configurazione del meccanismo nell'atto di moto considerato, la velocità e l'accelerazione del punto *B* del corpo 1, tutte le grandezze indicate in figura:

1) Fare l'analisi geometrica dei vincoli e valutare il tipo di rotolamento in *A* affinché il sistema abbia 1 gdl.
2) Scrivere l'eq.ne. di chiusura della velocità in forma vettoriale e scalare (forma parametrica).
3) Risolvere graficamente il problema delle velocità (trovare segno incognite).
4) Risolvere parametricamente il problema delle velocità.
5) Valutare tutti i centri delle velocità assoluti e relativi.
6) Scrivere l'eq.ne di chiusura delle accelerazioni.

Facoltativo: impostare poligono delle accelerazioni (facendo le dovute ipotesi).



Esercizio 2

Si consideri il meccanismo dell'esercizio 1. Il sistema è in equilibrio sotto l'azione del momento **C** applicato al corpo 2, completamente noto, e una forza orizzontale **L** applicata al corpo 1 in K, incognita. Siamo in presenza di gravità: il corpo 2 ha massa m e baricentro in G, mentre il corpo 1 ha massa trascurabile.

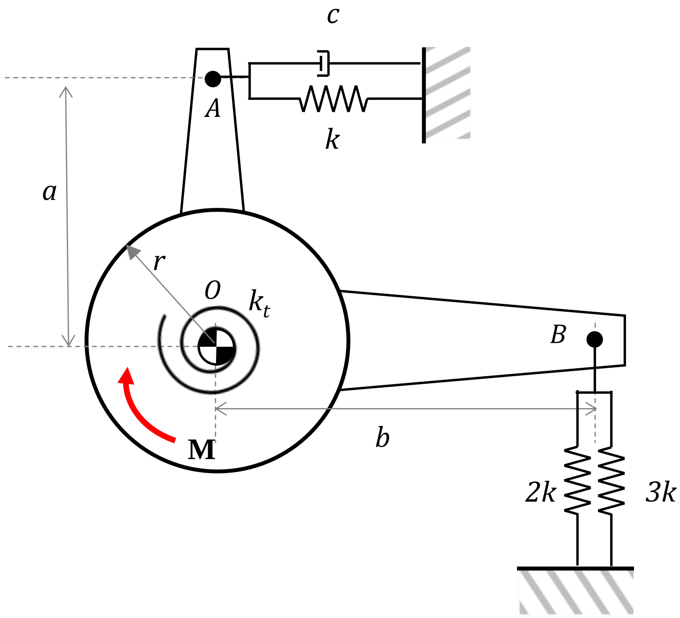
Si considerino tutti i vicoli come bilaterali.

1) Fare l'analisi fisica dei vincoli e valutare se il sistema è complessivamente isostatico.
2) Valutare la forza **L** e DCL definitivi, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.
3) Valutare l'asse centrale della coppia prismatica tra corpo 1 e 2 nei due sottocasi.
4) Cosa cambierebbe se nel vincolo tra il corpo 1 e il telaio ci fosse attrito di strisciamento?

Esercizio 3

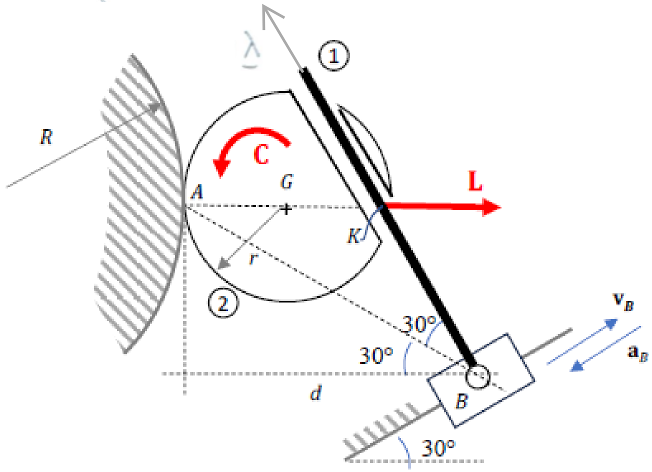
Il disco mostrato in figura, è incernierato al telaio in O, e collegato ad esso mediante una molla torsionale (k_t) e molle e smorzatori inseriti nei punti A e B. Al disco è applicata una forzante armonica $M=M_0 \cos(\Omega t)$.
Si vuole studiare la dinamica del disco nell'ipotesi di piccole oscillazioni. Siamo in assenza di gravità.

1) Specificare in modo chiaro il sistema di riferimento, la coordinata lagrangiana e le equazioni di congruenza.
2) Rappresentare tutte le forze agenti sul corpo (DCL), in una configurazione generica.
3) Valutare l'equazione del moto in forma canonica.
4) Valutare la pulsazione naturale e il fattore di smorzamento: che tipo di oscillazioni si verificano?
5) Cosa si intende per condizioni di risonanza? Siamo vicini o lontani alla risonanza?



Dati: m = 3.5 kg, $r=a/2$; a= 10 cm; b=15 cm, k_t=0.5 N m , k=1.5 N/m, c = 3 N m/s, M_0=0.1 Nm, Ω=15 rad/s.

CINEMATICA



$n\,gdl = 3 \times 2 - \underset{CP}{2} - \underset{CAE}{1} - x = 1$

$6 - 3 - x = 1$

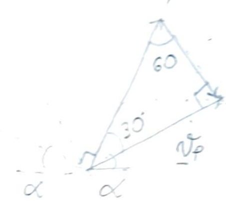
$x = 2 \Rightarrow$ RSS in C

moto TCV Σ 1

$\underline{v}_{P②} = \underline{v}_{P②}$

$= \underline{v}_P^{rel} + \underline{v}_P^{tr} = \boxed{\underset{①}{\dot{s}\,\underline{\lambda}} + \underset{②}{\dot{\theta}_1 \underline{k} \wedge \overrightarrow{CP}} = \underset{③}{v_P\,\underline{c}}}$

$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$



$\begin{cases} \dot{\theta}_1 > 0 \\ \dot{s} < 0 \end{cases}$

$$\dot{s}\begin{pmatrix} -\cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{pmatrix} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \wedge \begin{pmatrix} +\ell \\ -\ell\, tg\alpha \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\dot{s}\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ \ell & -\frac{\sqrt{3}}{3}\ell & 0 \end{vmatrix} = v\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$tg(30) = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

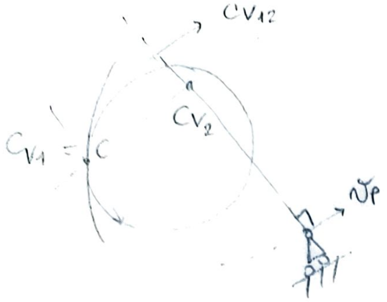
$$\begin{cases} -\frac{\dot{s}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\ell\,\dot{\theta}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{s} + \dot{\theta}_1 \ell = \frac{1}{2}v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{\sqrt{3}}{2}v + \frac{\sqrt{3}}{6}\ell\,\dot{\theta}_1 \\ -\frac{3}{4}v + \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}\,2}\dot{\theta}_1\ell + \dot{\theta}_1\ell = \frac{1}{2}v \end{cases}$$

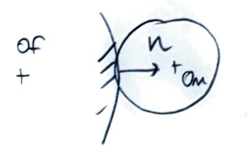
$$\begin{cases} \dot{s} = v\, tg(30) = \frac{\sqrt{3}}{3}v \\ \dot{\theta}_1\,\overline{CP}\,\cos(30) = v \end{cases}$$

$\dot{\theta}_1 = \frac{v\,2}{\sqrt{3}}\frac{\cos 30}{\ell} = \frac{v}{\ell}$

5)



$$\underline{v}_{C2} = \underbrace{\underline{v}^{rel}}_{=\,\dot{s}\underline{\lambda}} + \underbrace{\underline{v}^{tr}}_{=\,\underline{0}}$$



6) $\underline{a}_{C①} = \underline{a}_{cr} = -D\underbrace{\omega^2}_{\omega\,=\,\dot{\theta}_1}\underline{n}$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = -\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{-r+R}{Rr}$$

$$D = -\frac{Rr}{r-R}$$

$$\underline{a}_{cr} = -\frac{Rr}{R-r}\dot{\theta}_1^2\,\underline{n} \quad // -\underline{i}$$

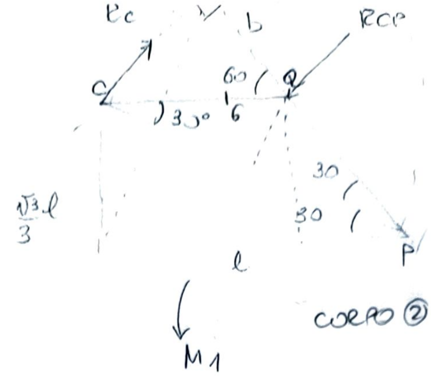
noto —— TCV $\Sigma①$

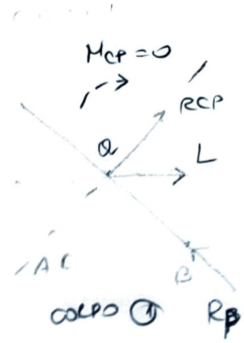
$$\boxed{\underline{a}_{P③} = \underline{a}_{P②}}$$

$$\rightarrow \underline{a}_P^{rel} + \underline{a}_P^{tr} + \underline{a}_P^{cor} = \underline{a}_P^{ass}$$

$$a_P\lambda = \ddot{s}\underline{\lambda} + \left[\underline{a}_{C①} + \ddot{\theta}_1\,\underline{k}\wedge\overrightarrow{CP} - \dot{\theta}_1^2\,\overrightarrow{CP}\right] + 2\,\dot{\theta}_1\,\underline{k}\wedge\dot{s}\underline{\lambda}$$

I ROTTO SALDO $(M_1 + L)$





a) $-R_c\, b + M_1 = 0$

$$R_c = \frac{M_1}{b}$$

$$b = \overline{CQ}\cos(60) = \frac{\overline{CQ}}{2}$$

$$\overline{CQ}\cos 30 = \frac{\overline{CP}}{2}$$

$$\overline{CP} = \frac{l}{\cos 30} = \frac{l\,2}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{CQ} = \frac{CP}{2}\frac{1}{\cos 30} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\,l}{\sqrt{3}} = \frac{2\,l}{3}$$

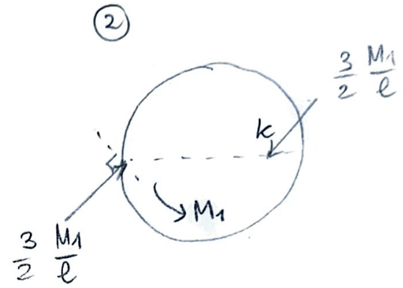
$$b = \frac{l}{3}$$

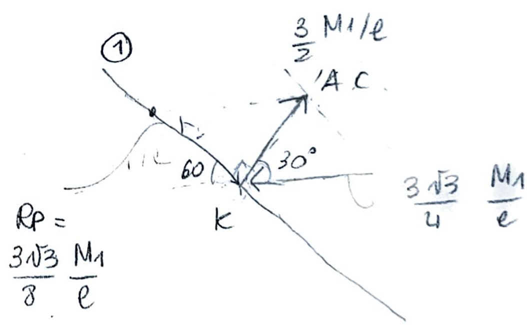
$$\Rightarrow R_c = \frac{M_1}{b} = 3\,\frac{M_1}{l}$$

$$\Rightarrow F\cos 30 = R_c \qquad F = \frac{3\cdot 2}{\sqrt{3}}\frac{M_1}{l} = -F'$$

$$\Rightarrow R_P = F\sin 30 = \frac{3}{\sqrt{3}}\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\frac{M_1}{l} = \sqrt{3}\,\frac{M_1}{l}$$

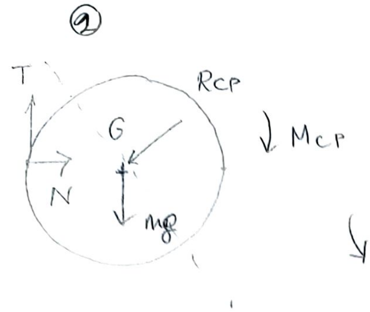
DCL DEFIN

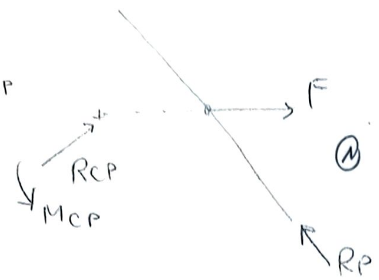


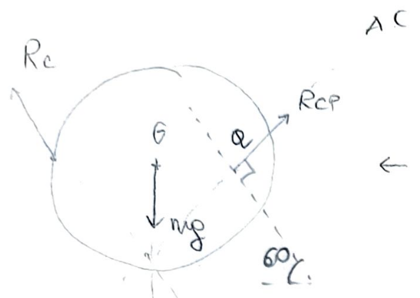


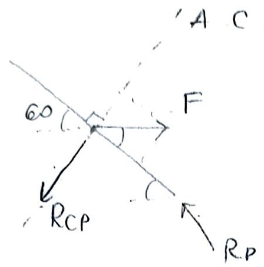
II SOTTO CASO $(mg + L)$

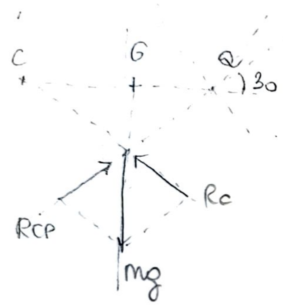
R_{cp}, T, N, M_{cp}, F











$$\begin{cases} F \cos 60 = R_p \\ F \sin 60 = R_{cp} \end{cases}$$

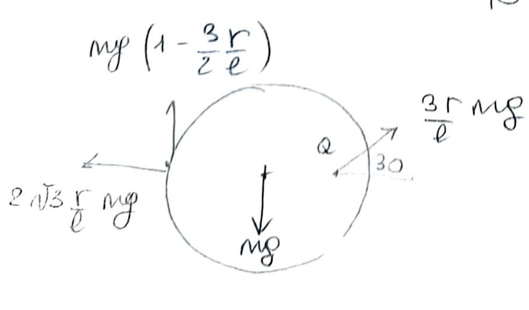
$$\begin{cases} R_{cp} \cos 30 = R_{cx} \\ R_{cp} \sin 30 + R_{cy} = mg \\ \circlearrowleft \; mg\, r - R_{cp}\, b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{cp} = mg \frac{r}{\ell} 3 \\ R_{cx} = mg \frac{3r}{\ell} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\frac{r}{\ell} mg \\ R_{cy} = -mg \frac{3r}{\ell} \cdot \frac{1}{2} + mg = mg\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r}{\ell}\right) \end{cases}$$

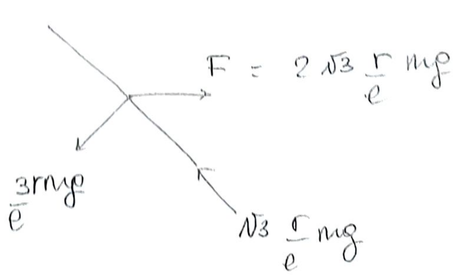
$$F = mg \frac{r3}{\ell} \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\frac{r}{\ell} mg$$

$$R_P = \sqrt{3}\frac{r}{\ell} mg$$

DCL DEFIN.

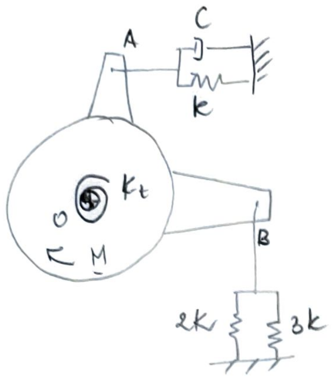


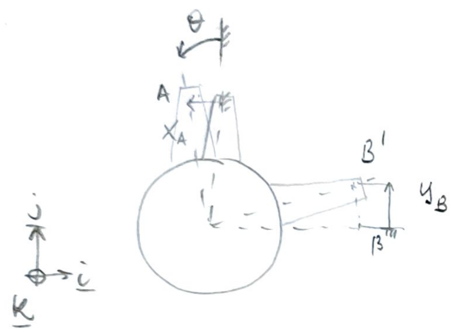
CORPO 2

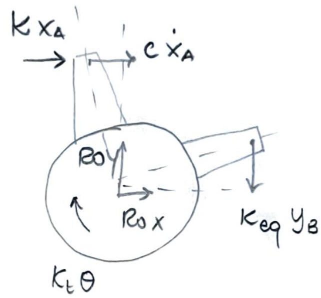


CORPO 1

ESERCIZIO 3







Hp piccole oscillazioni

- $x_A = a\theta$
- $y_B = b\theta$

$\sin\theta = \theta$
$\cos\theta = 1$

$$k_{ep} \rightarrow \quad F = F_1 + F_2 = \underbrace{(2k + 3k)}_{k_{ep} = 5k} y_B$$

$$O \circlearrowleft \quad -(k x_A + c\dot{x}_A)\, a \underbrace{\cos\theta}_{1} - 5k\, y_B\, b \underbrace{\cos\theta}_{1} - k_t\theta = J_O \ddot{\theta}$$

$$\underbrace{J_O}_{J_{eq}} \ddot{\theta} + \underbrace{c a^2}_{c'_{eq}} \dot{\theta} + \underbrace{(k(a^2 + 5b^2) + k_t)}_{k_{eq}} \theta = 0$$

$$J_{ep} \ddot{\theta} + C_{eq} \dot{\theta} + k_{ep} \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{J_{ep}}} = 12.5 \text{ rad/s}$$

$$\xi = \frac{c_{ep}}{2 J_{ep} \omega_n} = 0.27$$

$$\theta(t) = \theta_{om}(t) + \theta_p(t)$$

$\hookrightarrow \theta_p(t) = \theta_0 \cos(\Omega t - \varphi)$

$$\begin{cases} \theta_0 = 10.6 \text{ rad} \\ \varphi = -85{,}8 \end{cases}$$

$$\theta_0 = \frac{M_0 / K_{eq}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$