Teoria dei Sistemi e del Controllo - 21-11-2022

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2^5(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -kx_1^2(t)x_2^2(t) - x_2(t) \end{cases}$$

   - Determinare tutti i punti di equilibrio del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$ con $k \geq 0$, per $u(t) = 0$.
   - Si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti al punto precedente nel caso $k = 0$.
   - Per il caso $k > 0$ si valuti la stabilità del punto di equilibrio nell'origine per $u(t) = 0$ e poi si determini una $u(t)$ che renda l'origine un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema **tempo discreto** rappresentato dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = 0,$$

   - Determinare la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma canonica di Kalman.
   - Determinare i modi propri del sistema e discutere la stabilità interna e la BIBO stabilità.
   - Determinare gli stati indistinguibili dallo stato $(-1,-1,1)^T$ e quelli indistinguibili dallo stato $(-1,2,-1)^T$ motivando la risposta. Trovare infine gli stati raggiungibili dall'origine.

3. Lo studente

   - descriva la matematica degli stimatori di ordine ridotto ricavando le equazioni e lo schema a blocchi del generico stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto per sistemi lineare tempo invarianti tempo continui;
   - costruisca uno stimatore di ordine minimo con dinamica dell'errore pari a $e^{\lambda_{stim}}$ per il sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y_k = Cx(t)$$

   nei casi seguenti:

     - posto $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
     - posto $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
     - posto $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. Dato il sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

si imposti il problema della determinazione della legge di controllo ottimo (è possibile assumere un funzionale di costo quadratico) che porta il sistema da una generica condizione iniziale x_0 all'origine dello spazio di stato in tempo finito. Si enuncino le ipotesi di esistenza della soluzione del problema e si ricavi la matrice di guadagno per retroazione dello stato $K(t)$ che lo risolve nel caso in cui le ipotesi siano verificate. Commentare con sufficiente livello di dettaglio la procedura per ottenere la matrice di retroazione $K(t)$.