2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

- Trovare tutti gli stati di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
- Studiare la stabilità dell'equilibrio nell'origine con il metodo diretto di Lyapunov.

• ESAME 03-02-2017

1. Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \max(0, x_1)\max(0, x_2) \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri e la loro stabilità.
- Si disegni qualitativamente l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.

- ESAME 22-02-2017

1. Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - ax_2 \end{cases}$$

   - Si determinino gli equilibri per $u = 0$ al variare di $a \geq 0$ e se ne studi la stabilità locale.
   - Per il caso $u = 0$ e $a = 0$ si determini una candidata di Lyapunov che ne determini le proprietà di stabilità.
   - Per $a = 1$ si determini un ingresso u funzione degli stati che renda l'origine del sistema controllato globalmente asintoticamente stabile.

• ESAME 12-06-2017

1. Dato il sistema non lineare tempo invariante e tempo discreto caratterizzato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) & = \frac{1}{2}x_1(k) + x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) & = -\frac{1}{2}x_2(k) + \epsilon x_2^2(k) \end{cases},$$

- Si determinino al variare del parametro $\epsilon \in \mathbb{R}$ gli equilibri del sistema.
- Per ogni equilibrio determinato si discuta, sempre al variare del parametro $\epsilon \in \mathbb{R}$, la stabilità del sistema non lineare con il metodo indiretto di Lyapunov (metodo del linearizzato).
- Si enunci il Teorema diretto di Lyapunov per sistemi tempo discreto.

2. Dato il sistema non lineare definito dall'equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + \alpha\dot{y}(t) + y^3(t) = u(t)$$

(a) Si determinino i punti di equilibrio per $u(t) = 0$ e se ne discuta la stabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (dove possibile con il metodo indiretto, altrimenti cercando una candidata di Lyapunov opportuna).

(b) Si commenti la stabilità nel caso di retroazione parziale dello stato $u(t) = \alpha\dot{y}(t)$

2. Dato il sistema non lineare scritto in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \left(2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \left(2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) x_2(t) + x_1(t) \end{cases} \tag{1}$$

(a) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità sia con il metodo indiretto basato sul linearizzato che determinando una candidata di Lyapunov opportuna.

(b) Determinare se esistono cicli limite ed eventualmente caratterizzarli e stabilirne le proprietà di stabilità considerando una opportuna candidata di Lyapunov.

2. Dato il sistema

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = (a^2 - 1)x_1 - ax_2 - 2x_2^3 + u$$

(a) per $u = 0$ determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro a;

(b) per $u = 0$, studiare la stabilità del sistema nell'origine per $a \neq 1$;

(c) Per $a = 1$ si determini un ingresso u non nullo che renda l'origine asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema

$$\dot{x_1} = 2x_2^2 - x_1^3 - x_1$$
$$\dot{x_2} = -2x_1^3 x_2 + u$$

(a) Per $u = 0$, si determinino gli equilibri e se ne studino le proprietà di stabilità;

(b) Si determinino tutti i coefficienti k_1, k_2 di un ingresso $u(x) = k_1 x_1 + k_2 x_2$ che renda l'origine equilibrio asintoticamente stabile anche per il sistema linearizzato.

(c) Si fornisca l'enunciato del teorema utilizzato per determinare la proprietá di stabilitá dell'origine al primo punto.

1. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2x_2 + u \end{cases}$$

(a) Data $u = 0$ trovare gli equilibri del sistema e discutere la stabilità dell'origine.

(b) Determinare una retroazione dello stato $u(x)$ che renda il sistema asintoticamente stabile nell'origine.

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2 \sin x_1 + u \end{cases}$$

(a) Determinare i punti di equilibrio del sistema per $u = 0$ e discuterne la stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov.

(b) Determinare un ingresso u che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

2. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} &= (y+3)^3 \\ \dot{y} &= -ax \end{cases}$$

(a) Determinare gli stati di equilibrio del sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(b) Descrivere gli andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi per $a \leq 0$.

(c) Discutere la stabilità degli equilibri al variare di a.

• ESAME 02-07-2018

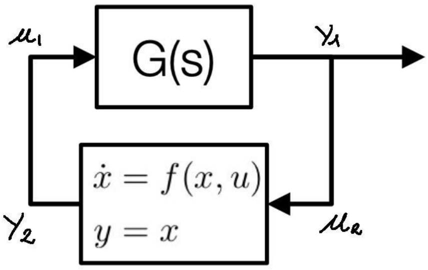
1. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_2^4 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_1^3 \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio ad ingresso nullo e studiarne le proprietà di stabilità.
- Verificare formalmente che esiste un *ingresso lineare nello stato che rende il punto* $(-1,\ -1)$ *un punto* di equilibrio asintoticamente stabile. Dopo averne determinato l'esistenza, trovarlo.

· ESAME 23-07-2018

1. Si consideri il sistema tempo continuo costituito dallo schema a blocchi riportato in figura,



dove $G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ e $f(x,u) = -x - \sin^2 x + u$.

- Determinare il sistema in forma di stato.
- Determinare gli equilibri del sistema e studiarli con il metodo indiretto.
- Enunciare il Corollario di LaSalle–Krasowskii.

• ESAME 17-09-2018

1. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare rappresentato in forma di stato da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1(x_1^2 + x_2^2) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \end{cases}$$

- Determinare su u la condizione di esistenza di equilibri (reali).
- Per $u = 0$ si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

· ESAME 29-11-2018

1. Si consideri il sistema tempo discreto non lineare rappresentato in forma di stato da

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= a x_2(k) - x_2^3(k) \\ x_2(k+1) &= -a x_1(k) + x_1^3(k) + u \end{cases}$$

- Determinare, per $u = 0$, le proprietà di stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- Determinare un ingresso lineare che renda l'origine del sistema asintoticamente stabile per $a = -1$.
- Si determini una candidata di Lyapunov che verifica le proprietà di stabilità del sistema retroazionato.

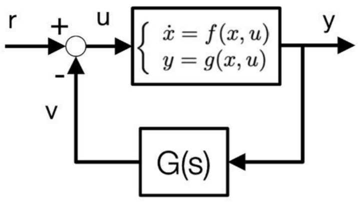
2. Dato il sistema non lineare tempo continuo della forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

- Si determinino i punti di equilibrio al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- Si studi la stabilità del punto di equilibrio al variare di $k \in \mathbb{R}$.

• ESAME 04-02-2019

1. Si consideri il sistema tempo continuo costituito dallo schema a blocchi riportato in figura,



dove $G(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+4}$ e $\dot{x} = f(x,u)$ è: $\dot{x}_1 = -x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - (x_1 - x_2)^2 + u^2$. La funzione di uscita è $y = g(x,u) = x_1 - x_2$.

(a) Determinare la forma di stato del sistema tra il riferimento r e l'uscita y.

(b) Determinare gli equilibri del sistema per $r = \bar{r}$ costante, discutendone l'esistenza, e studiare la stabilità dell'equilibrio per $\bar{r} = 0$.

(c) Enunciare il Teorema del metodo indiretto di Lyapunov.

• ESAME 20-02-2019

1. Si consideri il seguente sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^4 + \alpha x_1 \cos x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 \end{cases}$$

(a) Determinare gli equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Si studi la stabilità degli equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ con il metodo indiretto di Lyapunov.

(c) Per l'equilibrio nell'origine si studi la stabilità con altri metodi.

2. Dato il sistema dinamico non lineare descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 + u \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri al variare dell'ingresso costante $u(t) = k \in \mathbb{R}$ e se ne determinino le proprietà di stabilità.
- Si determini se esiste un ingresso affine negli stati che renda gli equilibri asintoticamente stabili. In caso affermativo si determinino delle condizioni (in funzione di k) sui coefficienti dell'ingresso affinchè gli equilibri siano asintoticamente stabili riportando l'espressione esplicita dell'ingresso nelle variabili (x_1, x_2).

• ESAME 01-07-2019

1. Dato il sistema dinamico non lineare descritto dalle equazioni alle differenze:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1^2(k) + \frac{1}{2}u^2(k) \\ x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_1^2(k) + \frac{1}{2}x_2(k) \\ y(k) = \frac{1}{2}x_1(k)x_2(k) \end{cases}$$

- si determino gli equilibri del sistema nel caso $u(k) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e nel caso $u(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- Si scrivano le equazioni dinamiche (A, B, C, D) del sistema linearizzato per una generica coppia ingresso-stato di equilibrio riportando le variabili (stato, ingresso e uscita) del linearizzato rispetto a quelle del sistema non lineare.
- Se possibile, si caratterizzi la stabilità per tutti gli equilibri del sistema non lineare calcolati al primo punto, attraverso il metodo indiretto di Lyapunov.

• ESAME 22-07-2019

1. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = e^{x_2(t)} - (1 - 3u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \sin(x_1(t) + x_2(t)) + 2u^2(t) \end{cases}$$

- si determino gli equilibri del sistema nel caso $u(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e se ne studi la stabilità.
- Per gli equilibri asintoticamente stabili si determini una candidata di Lyapunov.
- Per gli equilibri instabili si determini, se esiste, una retroazione dello stato che li renda asintoticamente stabili.

2.

- Dato un sistema lineare tempo continuo asintoticamente stabile si descriva una procedura per calcolare una candidata di Lyapunov che attraverso il metodo diretto di Lyapunov ne verifichi la stabilità.
- Si applichi il metodo al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -x_2 \end{cases}$$

- Con quanto ottenuto nei punti precedenti, determinare (con il metodo diretto di Lyapunov) la stabilità dell'origine del sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1 + x_1 x_2 + 3x_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1^2 + x_2^2 - x_2 \end{cases}$$

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)x_2(k) + 2x_2(k)u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k)(x_1(k) - 3) + u(k) \end{cases}$$

- si determino gli equilibri del sistema per ingresso nullo $u(k) = 0$, $\forall k \geq 0$ e se ne studi la stabilità.
- Si commenti l'esistenza di un ingresso che dipenda linearmente dallo stato e che renda asintoticamente stabile gli eventuali equilibri instabili trovati al punto precedente.

2. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^3 + \frac{1}{2}x_1 x_2^4 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 \end{cases}$$

- si determinino gli equilibri del sistema per ingresso nullo $u(t) = 0$, $\forall t \geq 0$ e se ne studi la stabilità.
- si determini un ingresso che renda l'equilibrio nell'origine stabile.

2. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) \end{cases}$$

- si determinino gli equilibri del sistema e se ne studi la stabilità col metodo indiretto.
- per l'equilibrio nell'origine si utilizzi il metodo diretto per determinarne la regione di asintotica stabilità.

2. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

- si determinino gli equilibri del sistema per ingresso nullo, si disegni l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.
- si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti e si commentino i risultati ottenuti in relazione agli andamenti trovati al punto precedente.
- per l'equilibrio nell'origine si determini un ingresso u che renda l'origine asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)\left((\alpha+2)x_1^2(k) + (\delta+2)x_2^2(k)\right) \\ x_2(k+1) = x_2(k)\left((\alpha+2)x_1^2(k) + (\delta+2)x_2^2(k)\right) \end{cases}$$

- si determinino tutti gli equilibri del sistema;
- si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti con il metodo indiretto di Lyapunov;
- per l'equilibrio nell'origine si verifichi, con il metodo diretto di Lyapunov, la proprietà di stabilità ottenuta al punto precedente.

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_2^2 - (\alpha+1)^2\right) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)\left(x_1^2 + x_2^2 - (\alpha+1)^2\right) \end{cases}$$

- si determinino tutti gli equilibri del sistema;
- si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti con il metodo indiretto di Lyapunov;
- si verifichino le proprietà di stabilità con il metodo diretto di Lyapunov.

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k)u(k) + (\gamma+1)x_1^2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) \end{cases}$$

- si determinino tutti gli equilibri del sistema per un generico ingresso costante $u = \bar{u} \geq 0$;
- si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti con il metodo indiretto di Lyapunov per $\bar{u} = 2$;
- nei casi instabili trovati al punto precedente si verifichino le condizioni di esistenza di un controllo affine (lineare per il sistema linearizzato) che stabilizzi il punto di equilibrio in esame.

• ESAME 14-01-2021 : $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$

1. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 4x_2^3 + ax_2^2 + u \\ \dot{x}_2 = (\gamma + 1)x_1 \end{cases}$$

- si determinino tutti gli equilibri del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ per ingresso nullo $u = \bar{u} = 0$ e se ne studi la stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov;
- Determinare un ingresso in funzione del parametro a che renda l'origine del sistema un equilibrio asintoticamente stabile determinando anche la candidata di Lyapunov che ne provi la stabilità asintotica.

2. Dato il sistema non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + 2x_1(k)\,(1 - x_1(k)) - x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + 2x_2(k)\,(1 - x_2(k)) - x_1(k)x_2(k) \end{cases}$$

- si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discutano le proprietà di stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov;
- supponendo di poter agire su una o sull'altra equazione alle differenze attraverso un ingresso additivo u determinare se esiste un ingresso lineare (o affine) nello stato che renda gli equilibri asintoticamente stabili e nel caso in quale delle due equazioni dinamiche deve intervenire.

2. Dato il sistema non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\gamma + 1)^2 x_1 + x_2 - x_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (\gamma + 1)^2 x_2 - x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{cases}$$

$\gamma = 1$

- si determinino i punti di equilibrio del sistema. Si discuta la stabilità nell'origine con il metodo indiretto di Lyapunov, successivamente determinare una candidata di Lyapunov che confermi quanto ottenuto con il metodo indiretto.
- Data la derivata direzionale ottenuta al punto precedente determinare se esiste un ciclo limite del sistema motivando la risposta e caratterizzarne le proprietà di attrattività o meno.

• ESAME 16-04-2021 :

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalla equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + b\dot{y}(t)^3 + (4 - a^2)y(t) = u(t)$$

- Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$ e $u(t) = 0$.
- Si studi la stabilità degli equilibri per $a \neq 2$.
- Per $a = 2$ determinare un ingresso $u(t)$ che renda l'origine un equilibrio asintoticamente stabile.

• ESAME 07 - 06 - 2021

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + ax_2(t) + x_1^2(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = b - ax_2(t) - x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
- Si studi la stabilità degli equilibri per $b = 0$ al variare di $a \neq 0$.
- Per $a = b = 0$ si commenti sulla stabilità dei punti di equilibrio studiando gli andamenti nello spazio delle fasi.

• ESAME 28-06-2021

1. Si consideri il sistema **tempo discreto** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = ax_1(k) + 2x_1^2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + bx_1(k)x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

- Per $u(k) = 0$ determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
- Per $u(k) = 0$ si studi la stabilità degli equilibri con il metodo indiretto di Lyapunov al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
- Per $a \leq 1$ si commenti sull'esistenza di un ingresso lineare che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile (solo utilizzando il metodo indiretto.

• ESAME 19-07-2021

Teoria dei Sistemi e del Controllo - 19-07-2021

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2^2(t) + a x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$ e se ne studi la stabilità degli equilibri con il metodo indiretto di Lyapunov.
- Per ogni punto di equilibrio, tra quelli trovati al punto precedente, si determini se è possibile agire su una o l'altra dinamica con un ingresso u affine nello stato che lo renda asintoticamente stabile.
- Nel caso di ingresso nullo, per $a = 1$ si studi la stabilità dell'origine con $V = x_1^2 - x_2^2$.

2. Si consideri il sistema **tempo continuo**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_2(t) + a x_1(t) x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^3(t) - x_2(t) \end{cases}$$

- Si determinino al variare di $a \in \mathbb{R}$ i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità con il metodo indiretto per $u(t) = 0$.
- Per l'equilibrio nell'origine si valuti e commenti sull'esistenza di un controllo lineare nello stato che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
- Si costruisca un ingresso non lineare nello stato che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile e si fornisca l'associata candidata di Lyapunov.

2. Si consideri il sistema **tempo continuo**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2^2(t) + x_1(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1^3(t) - x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri del sistema e si traccino gli andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi per ingressi nulli.
- Si studino le proprietà di stabilità degli equilibri trovati al punto precedente con il metodo indiretto di Lyapunov. Si commenti inoltre, per ogni equilibrio trovato, sulla possibilità di usare uno dei due ingressi di controllo come una funzione affine degli stati per rendere l'equilibrio asintoticamente stabile.
- Per l'equilibrio nell'origine, utilizzando una funzione V opportuna e il metodo diretto di Lyapunov, determinare un ingresso u_1 non lineare che renda la derivata direzionale solo semidefinita negativa e valutare se l'equilibrio risulta comunque asintoticamente stabile.

2. Si consideri il sistema **tempo discreto**

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1^3(k) + x_2^3(k) \\ x_2(k+1) = ax_2(k) - x_2^3(k) \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri del sistema al variare di $a \leq 1$ e se ne studino le proprietà di stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov.
- Per i valori di a per cui non è stato possibile concludere la proprietà di stabilità dell'equilibrio con il metodo indiretto procedere con altri metodi. Suggerimento: per il caso $a = -1$, si studi la stabilità dell'origine con la funzione di una sola variabile $V(x_2) = x_2^2$.

2. Si consideri il sistema dinamico descritto dalla equazione differenziale non lineare:

$$\ddot{y}(t) + y(t) - y(t)^3 + y(t)\dot{y}(t)^2 + \dot{y}(t) = u(t)$$

- Si porti il sistema in forma di stato e se ne determinino gli equilibri per $u(t) = 0$.
- Si studi la stabilità degli equilibri ottenuti al punto precedente.
- Si riportino degli ingressi affini nello stato che rendano asintoticamente stabili gli equilibri risultati instabili (un ingresso per ogni punto di equilibrio, da scrivere in modo esplicito come funzione degli stati).

• ESAME 07-07-2022:

~~1~~. Dato il sistema non lineare tempo discreto in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -\frac{1}{3}x_1(k) + \alpha x_1^2(k) + 2u(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) = 2x_1(k)x_2(k) + \frac{1}{3}x_2(k) \end{cases}$$

- Per $u(k) = 0$ determinare i punti di equilibrio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e se ne studino le proprietà di stabilità.
- Si commenti l'esistenza di ingressi affini negli stati che rendano asintoticamente stabili i punti di equilibrio instabili determinati al punto 1.
- Si scriva il sistema linearizzato in forma di stato intorno ad una generica coppia ingresso stato di equilibrio $(\bar{u}, \bar{x})$ riportando esplicitamente stati e ingressi del sistema.

Teoria dei Sistemi e del Controllo - 15-09-2022

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \alpha x_1(t) x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_2(t) - \alpha x_1^2(t) x_2(t) \end{cases}$$

   - Determinare tutti i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti al punto precedente nel caso $\alpha \leq 0$.
   - Per il caso $\alpha > 0$ si valuti se possibile la stabilità dei punti di equilibrio con il linearizzato e si commenti l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.