

Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 22

Dario Trevisan – <https://web.dm.unipi.it/trevisan>

10/12/2025

Il teorema limite centrale

Un raffinamento della legge dei grandi numeri

Torniamo all'esempio delle estrazioni con rimpiazzo da un'urna contenente una frazione $r \in (0, 1)$ di palline rosse.

- ▶ Posto R_n il numero di palline rosse estratte, la legge dei grandi numeri afferma informalmente che

$$\frac{R_n}{n} \approx r \pm \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}.$$

Un raffinamento della legge dei grandi numeri

Torniamo all'esempio delle estrazioni con rimpiazzo da un'urna contenente una frazione $r \in (0, 1)$ di palline rosse.

- ▶ Posto R_n il numero di palline rosse estratte, la legge dei grandi numeri afferma informalmente che

$$\frac{R_n}{n} \approx r \pm \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}.$$

- ▶ Il *teorema limite centrale* rende più preciso il simbolo \pm , mostrando che per una variabile gaussiana Z standard, ossia $\mathcal{N}(0, 1)$, vale

$$\frac{R_n}{n} \approx r + Z \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}},$$

dove l'approssimazione è nel senso della convergenza in legge.

Un raffinamento della legge dei grandi numeri

Torniamo all'esempio delle estrazioni con rimpiazzo da un'urna contenente una frazione $r \in (0, 1)$ di palline rosse.

- ▶ Posto R_n il numero di palline rosse estratte, la legge dei grandi numeri afferma informalmente che

$$\frac{R_n}{n} \approx r \pm \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}.$$

- ▶ Il *teorema limite centrale* rende più preciso il simbolo \pm , mostrando che per una variabile gaussiana Z standard, ossia $\mathcal{N}(0, 1)$, vale

$$\frac{R_n}{n} \approx r + Z \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}},$$

dove l'approssimazione è nel senso della convergenza in legge.

- ▶ In altre parole la variabile binomiale R_n si approssima con una variabile gaussiana avente la stessa media nr e varianza $nr(1-r)$.

Confronto grafico tra le densità

Possiamo visualizzare questo risultato graficamente confrontando la densità discreta binomiale e la gaussiana corrispondente.

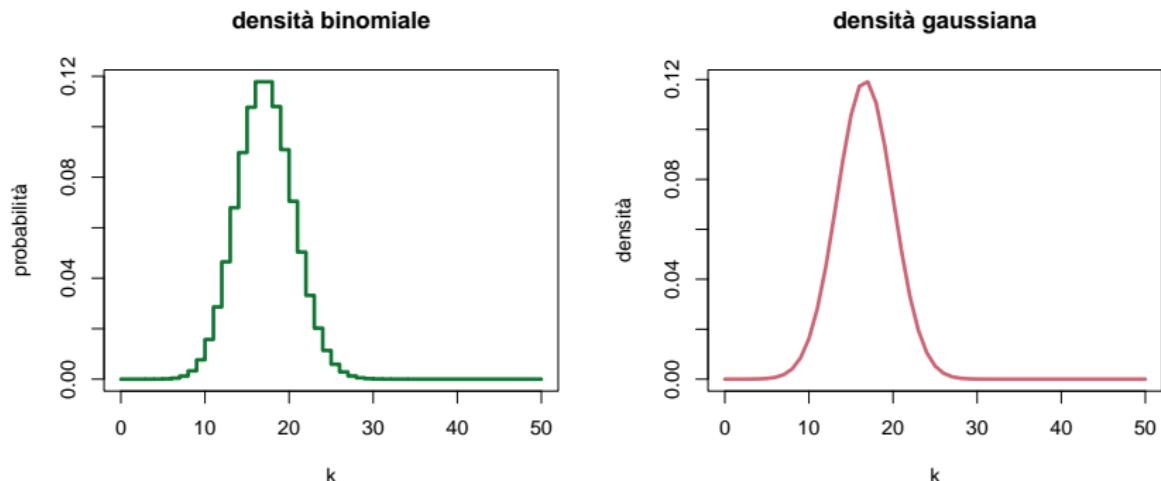


Figure 1: confronto tra densità binomiale di parametri $n = 50$, $r = 1/3$ e la densità gaussiana con medesima media nr e varianza $nr(1 - r)$.

Confronto tra le CDF

L'approssimazione vale nel senso della convergenza in legge: si confrontano le CDF piuttosto che le densità.

- Rigorosamente: dati $a \leq b \in \mathbb{R}$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \leq \frac{R_n}{n} - r \leq b \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \right) = \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}.$$

Confronto tra le CDF

L'approssimazione vale nel senso della convergenza in legge: si confrontano le CDF piuttosto che le densità.

- Rigorosamente: dati $a \leq b \in \mathbb{R}$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \leq \frac{R_n}{n} - r \leq b \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \right) = \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}.$$

- Conviene introdurre le variabili standardizzate delle R_n/n , ossia

$$Z_n = \left(\frac{R_n}{n} - r \right) \sqrt{\frac{n}{r(1-r)}},$$

in modo che la convergenza in legge sia

$$\text{CDF}_{Z_n}(t) \rightarrow \text{CDF}_Z(t) = \int_{-\infty}^t e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}.$$

Possiamo verificare numericamente l'approssimazione scrivendo CDF_{Z_n} in termini della CDF_{R_n} , che è binomiale.

- ▶ usiamo l'identità, per $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$,

$$\text{CDF}_{aX+b}(t) = \text{CDF}_X((t - b)/a).$$

Possiamo verificare numericamente l'approssimazione scrivendo CDF_{Z_n} in termini della CDF_{R_n} , che è binomiale.

- ▶ usiamo l'identità, per $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$,

$$\text{CDF}_{aX+b}(t) = \text{CDF}_X((t - b)/a).$$

- ▶ Scriviamo

$$\text{CDF}_{Z_n}(t) = \text{CDF}_{R_n} \left(nr + t\sqrt{nr(1-r)} \right),$$

e visualizziamo graficamente in R.

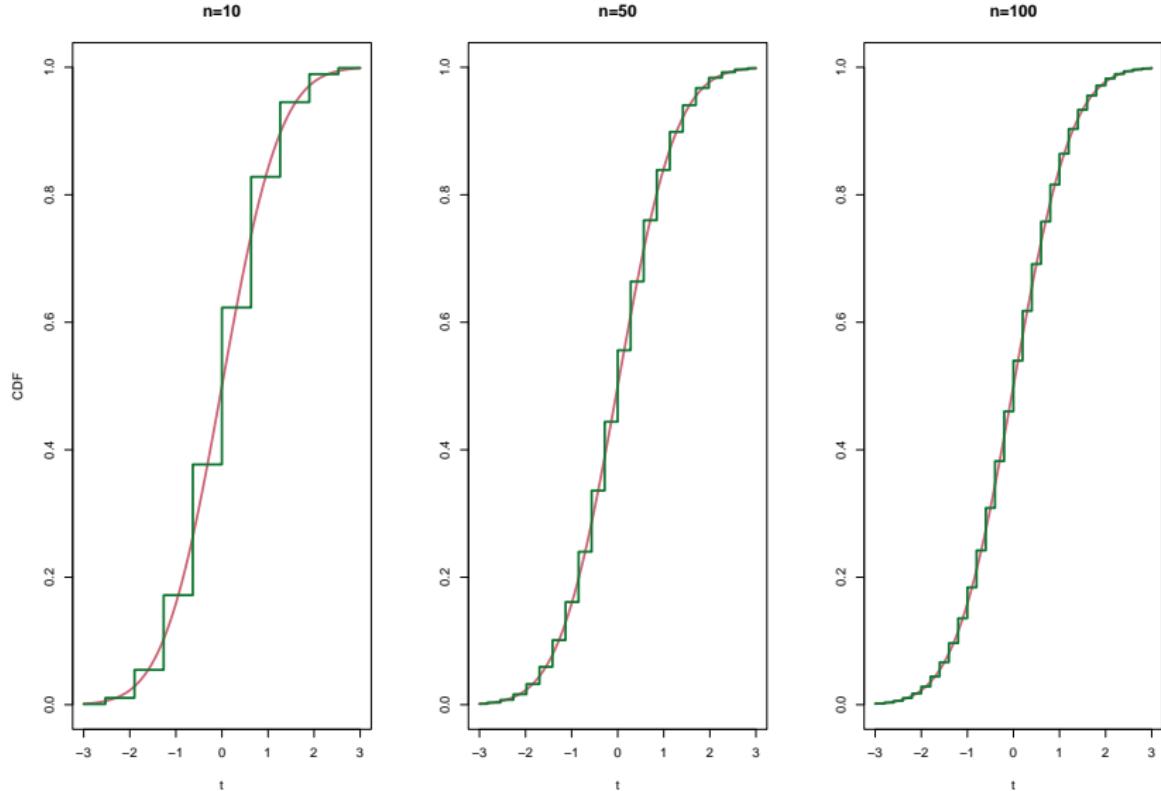


Figure 2: confronto tra le CDF_{Z_n} e CDF_Z al crescere di n .

Il caso generale

Affrontiamo direttamente una dimostrazione del risultato generale per l'approssimazione gaussiana delle medie campionarie di variabili indipendenti.

Ricordiamo che informalmente, la legge dei grandi numeri dava

$$\bar{X}_n \approx m \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

- ▶ Possiamo rendere più preciso il simbolo \pm introducendo una variabile gaussiana Z standard $\mathcal{N}(0, 1)$. L'approssimazione è nel senso della convergenza in legge.

Enunciato del teorema limite centrale

Siano $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ variabili aleatorie reali indipendenti, tutte con la stessa legge e quindi

$$m = \mathbb{E}[X_n] \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X_n) \in (0, \infty).$$

Allora, posta $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e

$$Z_n = (\bar{X}_n - m) \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

la sua standardizzata, si ha la convergenza in legge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z,$$

dove Z è gaussiana standard.

- ▶ Per ogni $a \leq b$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a\sigma/\sqrt{n} \leq \bar{X}_n - m \leq b\sigma/\sqrt{n}\right) = \int_a^b e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}.$$

Dimostrazione

Cenni al caso vettoriale

Se le variabili aleatorie sono a valori vettoriali indipendenti, a valori in \mathbb{R}^d , tutte con la stessa legge, quindi

$$\mathbb{E}[X_i] = m, \quad \Sigma_{X_i} = \Sigma,$$

allora si ha la convergenza in legge

$$(\bar{X}_n - m) \sqrt{n} \rightarrow Z$$

dove Z è una variabile gaussiana vettoriale con densità $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.

- ▶ Oltre alle convergenze delle marginali si ha quindi anche convergenza delle variabili congiunte.

Cenni ai metodi Monte Carlo

Simulare variabili aleatorie

Una delle applicazioni principali dei teoremi limite è di combinarli alle tecniche di *generazione* di numeri pseudo-casuali mediante opportuni algoritmi (che non descriviamo nel dettaglio).

- ▶ Tramite semplici comandi in R è possibile *simulare* variabili aleatorie con densità comuni (uniformi, binomiali, poisson, esponenziali, gaussiane ecc.).

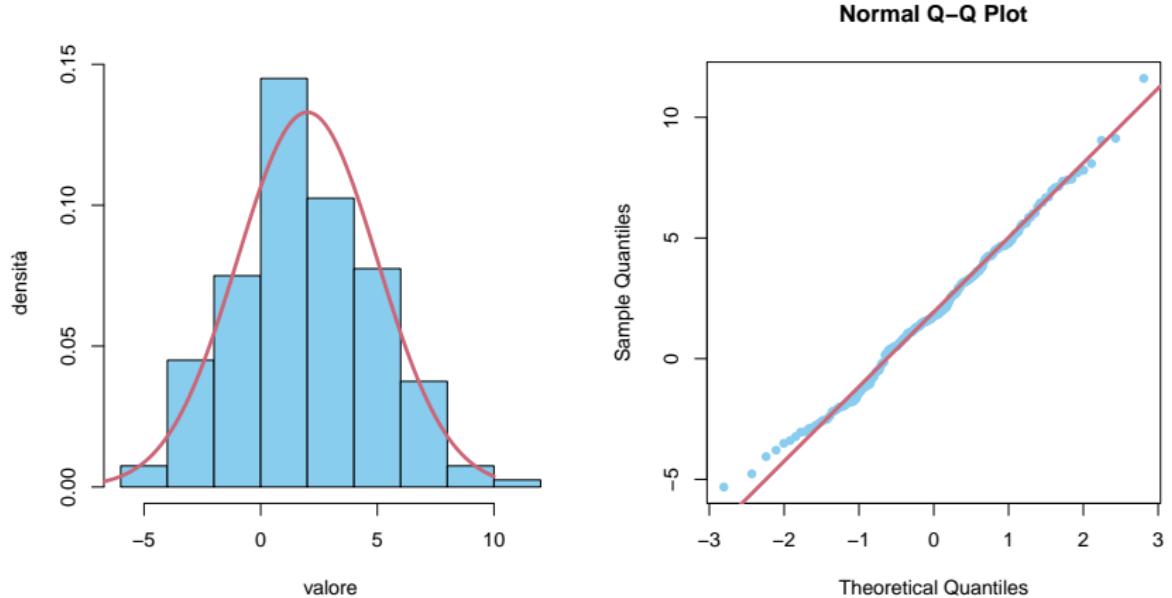


Figure 3: istogramma e qqplot di 200 variabili gaussiane indipendenti

Monte Carlo per l'integrazione numerica

I metodi *Monte Carlo* sono algoritmi che usano un gran numero di simulazioni di variabili per risolvere dei problemi numericamente, anche non legati alla probabilità in apparenza.

- ▶ Ad esempio, per calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)p(X=x)dx,$$

si ricorre alla simulazione di n variabili indipendenti con densità $p(X = \cdot)$ e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)p(X=x)dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i),$$

Monte Carlo per l'integrazione numerica

I metodi *Monte Carlo* sono algoritmi che usano un gran numero di simulazioni di variabili per risolvere dei problemi numericamente, anche non legati alla probabilità in apparenza.

- ▶ Ad esempio, per calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)p(X=x)dx,$$

si ricorre alla simulazione di n variabili indipendenti con densità $p(X = \cdot)$ e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)p(X=x)dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i),$$

- ▶ Il teorema limite centrale garantisce oscillazioni gaussiane:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)p(X=x)dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \approx \frac{Z\sigma}{\sqrt{n}}.$$

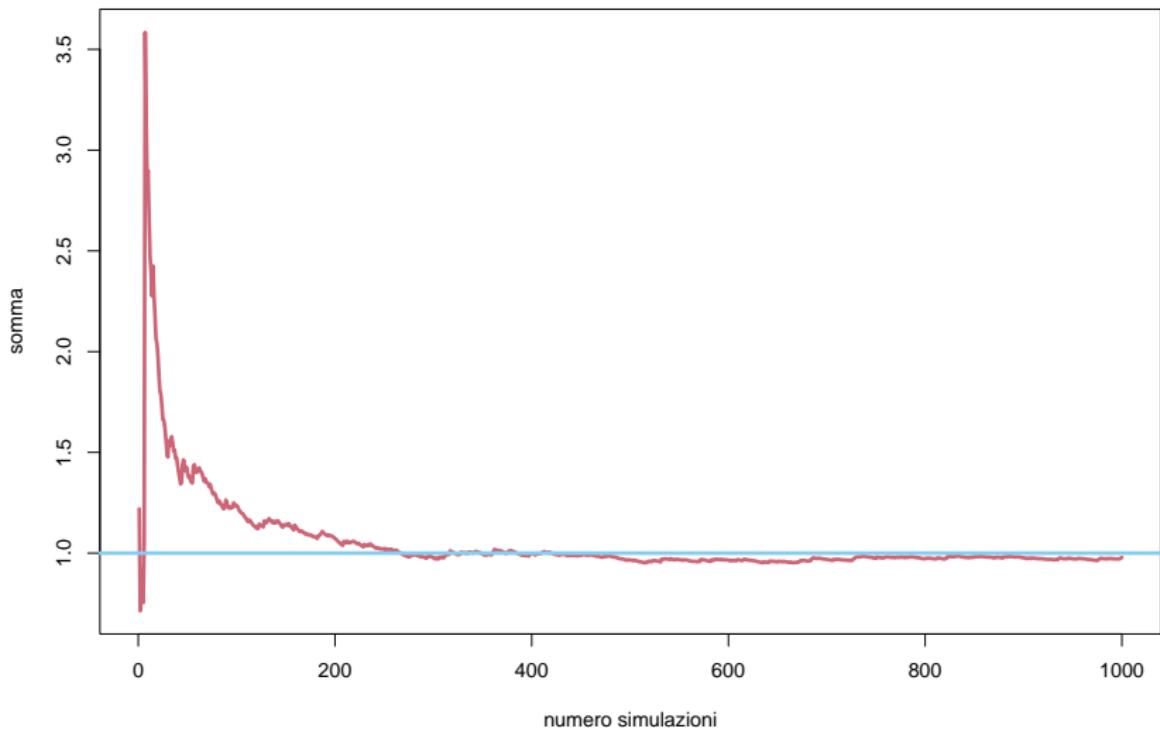


Figure 4: Calcolo del momento secondo di una gaussiana standard tramite media empirica di un campione indipendente

Cenni agli eventi estremi

Massimo e minimo di variabili

È molto rilevante ai fini pratici lo studio delle caratteristiche *estreme* di una famiglia di variabili aleatorie.

- ▶ Invece della media campionaria, studiamo il massimo

$$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i,$$

o il minimo

$$m_n = \min_{i=1,\dots,n} X_i.$$

Massimo e minimo di variabili

È molto rilevante ai fini pratici lo studio delle caratteristiche *estreme* di una famiglia di variabili aleatorie.

- ▶ Invece della media campionaria, studiamo il massimo

$$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i,$$

o il minimo

$$m_n = \min_{i=1,\dots,n} X_i.$$

- ▶ Supponendo che le variabili $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ siano indipendenti e tutte con la stessa legge, si può investigare il limite al tendere di $n \rightarrow \infty$ delle due variabili.

Per comprendere M_n è utile considerarne la CDF:

$$\begin{aligned}\text{CDF}_{M_n}(t) &= P(\max_{i=1,\dots,n} X_i \leq t) \\ &= P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t) \\ &= P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t) \dots P(X_n \leq t).\end{aligned}$$

- ▶ Nel caso di densità continue delle X_i , derivando questa identità si trova la densità di M_n .

Per comprendere M_n è utile considerarne la CDF:

$$\begin{aligned}\text{CDF}_{M_n}(t) &= P(\max_{i=1,\dots,n} X_i \leq t) \\ &= P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t) \\ &= P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t) \dots P(X_n \leq t).\end{aligned}$$

- ▶ Nel caso di densità continue delle X_i , derivando questa identità si trova la densità di M_n .
- ▶ Supponiamo che tutte le X_i abbiano la stessa legge (e quindi la stessa CDF) e mostriamo un risultato analogo alla legge dei grandi numeri.

Un teorema generale

Siano $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ variabili aleatorie a valori reali, indipendenti e tutte con la stessa legge.

- ▶ Se $t \in \mathbb{R}$ è tale che $\text{CDF}_{X_1}(t) < 1$, ossia

$$P(X_1 > t) > 0,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n > t) = 1.$$

Un teorema generale

Siano $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ variabili aleatorie a valori reali, indipendenti e tutte con la stessa legge.

- ▶ Se $t \in \mathbb{R}$ è tale che $\text{CDF}_{X_1}(t) < 1$, ossia

$$P(X_1 > t) > 0,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n > t) = 1.$$

- ▶ Se X_1 assume con probabilità positiva (anche piccola) valori arbitrariamente grandi, allora M_n converge verso $+\infty$.

Un teorema generale

Siano $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ variabili aleatorie a valori reali, indipendenti e tutte con la stessa legge.

- ▶ Se $t \in \mathbb{R}$ è tale che $\text{CDF}_{X_1}(t) < 1$, ossia

$$P(X_1 > t) > 0,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n > t) = 1.$$

- ▶ Se X_1 assume con probabilità positiva (anche piccola) valori arbitrariamente grandi, allora M_n converge verso $+\infty$.
- ▶ Informalmente è perché se un evento ha probabilità positiva, prima o poi si realizzerà (ma in un tempo tipico inversamente proporzionale alla probabilità).

Dimostrazione

Un teorema più preciso

Siano $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ variabili aleatorie indipendenti, tutte con densità esponenziale del medesimo parametro $\lambda > 0$. Allora si ha la convergenza in legge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n - \frac{\log n}{\lambda} = G,$$

dove G è una variabile con distribuzione di Gumbel, ossia con funzione di ripartizione, per $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{CDF}_G(t) = \exp(-e^{-t}).$$

- ▶ La densità di G si ottiene derivando:

$$\frac{d}{dt} \text{CDF}_G(t) = \exp(-t - e^{-t}).$$

Dimostrazione