

Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 6

Dario Trevisan – <https://web.dm.unipi.it/trevisan>

8/10/2025

- ▶ Variabili aleatorie $X = \{X = x\}_{x \in E}$

- ▶ Variabili aleatorie $X = \{X = x\}_{x \in E}$
- ▶ Densità discreta/continua

- ▶ Variabili aleatorie $X = \{X = x\}_{x \in E}$
- ▶ Densità discreta/continua
- ▶ Variabili composte $g(X)$ e trasformazione delle densità

- ▶ Variabili aleatorie $X = \{X = x\}_{x \in E}$
- ▶ Densità discreta/continua
- ▶ Variabili composte $g(X)$ e trasformazione delle densità
- ▶ Variabili congiunte e marginali

- ▶ Variabili aleatorie $X = \{X = x\}_{x \in E}$
- ▶ Densità discreta/continua
- ▶ Variabili composte $g(X)$ e trasformazione delle densità
- ▶ Variabili congiunte e marginali
- ▶ Formula di Bayes

$$p(Y = y|X = x) \propto p(Y = y)L(Y = y; X = x)$$

Indipendenza per v. z.

Indipendenza: caso discreto

L'indipendenza tra sistemi di alternative si traduce per variabili discrete:

- ▶ Siano $X_1 \in E_1, \dots, X_k \in E_k$ variabili aleatorie con densità discreta (rispetto ad una informazione nota I). Allora esse si dicono **indipendenti** (condizionatamente ad I) se vale

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k | I) = \prod_{i=1}^k P(X_i = x_i | I),$$

per ogni $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_k \in E_k$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned} &P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell = x_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ &= P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I). \end{aligned}$$

Indipendenza: caso discreto

L'indipendenza tra sistemi di alternative si traduce per variabili discrete:

- ▶ Siano $X_1 \in E_1, \dots, X_k \in E_k$ variabili aleatorie con densità discreta (rispetto ad una informazione nota I). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad I) se vale

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k | I) = \prod_{i=1}^k P(X_i = x_i | I),$$

per ogni $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_k \in E_k$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned} &P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell = x_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ &= P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I). \end{aligned}$$

- ▶ Il membro a sinistra è la densità discreta della variabile congiunta (X_1, \dots, X_k) , mentre a destra abbiamo il prodotto delle densità discrete delle marginali.

Indipendenza: caso continuo

- Siano $X_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \dots, X_k \in \mathbb{R}^{d_k}$ variabili aleatorie con densità continua (rispetto ad una informazione nota I). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad I) se la variabile congiunta $X = (X_1, \dots, X_k)$ ammette densità continua e vale

$$p(X = x|I) = p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k|I) = \prod_{i=1}^k p(X_i = x_i|I),$$

per ogni $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}, \dots, x_k \in \mathbb{R}^{d_k}$, o
equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned} & p(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell = x_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ &= p(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I). \end{aligned}$$

Indipendenza: caso generale

- Possiamo immaginare definizioni valide anche per i casi “misti”, in cui alcune variabili sono discrete e altre continue. Ma è possibile dare una definizione generale (che include quelle sopra).

Indipendenza: caso generale

- Possiamo immaginare definizioni valide anche per i casi “misti”, in cui alcune variabili sono discrete e altre continue. Ma è possibile dare una definizione generale (che include quelle sopra).
- Siano $X_1 \in E_1, \dots, X_k \in E_k$ variabili aleatorie (generali). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad una informazione nota I) se vale

$$P(X_1 \in U_1, X_2 \in U_2, \dots, X_k \in U_k | I) = \prod_{i=1}^k P(X_i \in U_i | I),$$

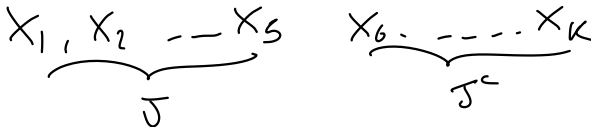
per ogni $U_1 \subseteq E_1, U_2 \subseteq E_2, \dots, U_k \subseteq E_k$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned} &P(X_j \in U_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell \in U_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ &= P(X_j \in U_j \text{ per ogni } j \in J | I). \end{aligned}$$

Indipendenza e composizione

Vale il seguente risultato:

- Siano $X_1 \in E_1, \dots, X_k \in E_k$ variabili aleatorie (generali). Allora esse **sono indipendenti** (condizionatamente ad una informazione nota I) se e solo se, dato un qualsiasi sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, k\}$, qualsiasi affermazione A associata alle variabili $\{X_j\}_{j \in J}$ è indipendente (sapendo I) da qualsiasi affermazione B associata alle rimanenti variabili $\{X_\ell\}_{\ell \in \{1, \dots, k\} \setminus J}$.



Indipendenza e composizione

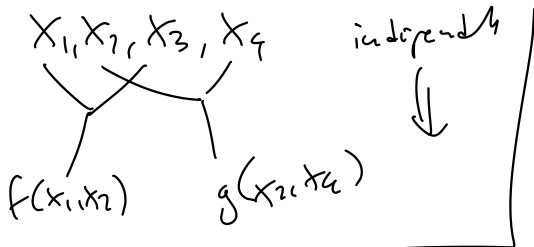
Vale il seguente risultato:

- ▶ Siano $X_1 \in E_1, \dots, X_k \in E_k$ variabili aleatorie (generali). Allora esse sono indipendenti (condizionatamente ad una informazione nota I) se e solo se, dato un qualsiasi sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, k\}$, qualsiasi affermazione A associata alle variabili $\{X_j\}_{j \in J}$ è indipendente (sapendo I) da qualsiasi affermazione B associata alle rimanenti variabili $\{X_\ell\}_{\ell \in \{1, \dots, k\} \setminus J}$.
- ▶ Una **conseguenza fondamentale**: ogni variabile ottenuta tramite funzione delle sole $(X_j)_{j \in J}$, è indipendente da ogni variabile ottenuta tramite funzione delle sole $(X_\ell)_{\ell \notin J}$.

X_1, X_2 independent



$f(x_1)$ $g(x_2)$ independent



$$P(f(x_1, x_2, x_3) = z_1, g(x_3) = z_2) = P(\dots = z_1) P(\dots = z_2)$$

Reti bayesiane

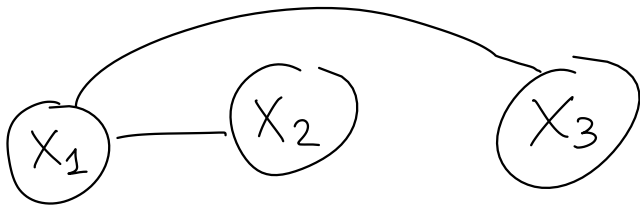
$$X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_k \in E_k$$

Presentiamo un metodo grafico per rappresentare le densità di variabili aleatorie (una specie di estensione dei diagrammi ad albero per variabili invece di eventi)

- Passo zero: si fissa un ordinamento tra le variabili (che corrisponde all'ordine in cui i sistemi di alternative vengono aggiunti nella costruzione del grafo ad albero): X_1, X_2, \dots, X_k

Il diagramma è un grafo orientato su k nodi corrispondenti alle k variabili, viene costruito in k passi:

- ▶ nel primo passo si introduce solamente il nodo corrispondente alla variabile X_1 ;



No Arcs $\rightarrow P(X_3=x_3 | X_1=x_1, X_2=x_2) = P(X_3=x_3)$

$$P(X_3=x_3 | X_1=x_1, X_2=x_2) = P(X_3=x_3 | X_1=x_1) \quad \forall x_2$$

Il diagramma è un grafo orientato su k nodi corrispondenti alle k variabili, viene costruito in k passi:

- ▶ nel primo passo si introduce solamente il nodo corrispondente alla variabile X_1 ;
- ▶ nel passo i -esimo, si introduce il nodo corrispondente alla variabile X_i , e si considera la densità di X_i condizionata a tutte le variabili inserite X_1, \dots, X_{i-1} ,

$$P(X_i = x_i | I, X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1).$$

Il diagramma è un grafo orientato su k nodi corrispondenti alle k variabili, viene costruito in k passi:

- ▶ nel primo passo si introduce solamente il nodo corrispondente alla variabile X_1 ;
- ▶ nel passo i -esimo, si introduce il nodo corrispondente alla variabile X_i , e si considera la densità di X_i condizionata a tutte le variabili inserite X_1, \dots, X_{i-1} ,

$$P(X_i = x_i | I, X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1).$$

- ▶ si individua un sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, i-1\}$ tale che la densità dipenda solo dalle $(X_j)_{j \in J}$, ossia, per ogni x_1, \dots, x_i , valga

$$\begin{aligned} P(X_i = x_i | I, X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1) \\ = P(X_i = x_i | I, X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J). \end{aligned}$$

Il diagramma è un grafo orientato su k nodi corrispondenti alle k variabili, viene costruito in k passi:

- ▶ nel primo passo si introduce solamente il nodo corrispondente alla variabile X_1 ;
- ▶ nel passo i -esimo, si introduce il nodo corrispondente alla variabile X_i , e si considera la densità di X_i condizionata a tutte le variabili inserite X_1, \dots, X_{i-1} ,

$$P(X_i = x_i | I, X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1).$$

- ▶ si individua un sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, i-1\}$ tale che la densità dipenda solo dalle $(X_j)_{j \in J}$, ossia, per ogni x_1, \dots, x_i , valga

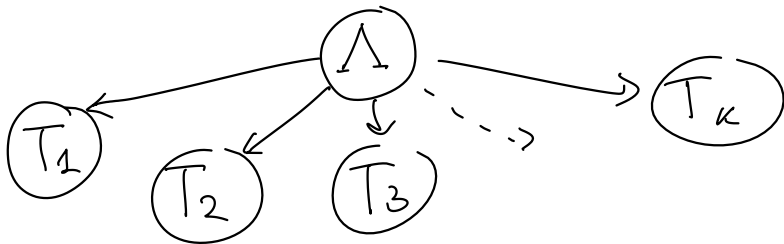
$$\begin{aligned} P(X_i = x_i | I, X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1) \\ = P(X_i = x_i | I, X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J). \end{aligned}$$

- ▶ si inseriscono gli archi orientati (freccie) da ciascun nodo corrispondente alle variabili $X_j, j \in J$, verso il nodo corrispondente ad X_i .

Date k variabili aleatorie indipendenti X_1, \dots, X_k , l'algoritmo produce il diagramma:



- Si consideri una variabile aleatoria Λ tale che, condizionatamente ad essa, le variabili T_1, \dots, T_k sono indipendenti (un esempio concreto è $\Lambda = \lambda$ individua il parametro delle variabili T_i che hanno legge esponenziale).



- ▶ Si consideri una variabile aleatoria Λ tale che, condizionatamente ad essa, le variabili T_1, \dots, T_k sono indipendenti (un esempio concreto è $\Lambda = \lambda$ individua il parametro delle variabili T_i che hanno legge esponenziale).
- ▶ La densità congiunta ha la forma

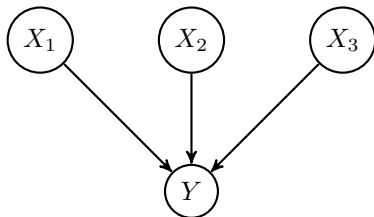
$$\underbrace{P(\Lambda, T_1, T_2, T_3, T_4)} = P(\Lambda)P(T_1|\Lambda)P(T_2|\Lambda)P(T_3|\Lambda)P(T_4|\Lambda).$$

- ▶ Si consideri una variabile aleatoria Λ tale che, condizionatamente ad essa, le variabili T_1, \dots, T_k sono indipendenti (un esempio concreto è $\Lambda = \lambda$ individua il parametro delle variabili T_i che hanno legge esponenziale).
- ▶ La densità congiunta ha la forma

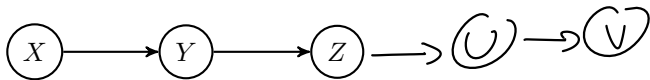
$$P(\Lambda, T_1, T_2, T_3, T_4) = P(\Lambda)P(T_1|\Lambda)P(T_2|\Lambda)P(T_3|\Lambda)P(T_4|\Lambda).$$

- ▶ La rete bayesiana costruita inserendo prima la variabile Λ e poi le rimanenti è la seguente:

Si considerino k variabili X_1, \dots, X_k indipendenti tra loro (rispetto all'informazione iniziale) e sia $Y = g(X_1, \dots, X_k)$ (ad esempio $Y = X_1 + \dots + X_k$ nel caso di variabili a valori in \mathbb{R}). La rete bayesiana è rappresentata in figura.



Si consideri la rete bayesiana rappresentata in figura. Condizionando rispetto ad Y , si ottiene che X e Z sono indipendenti. Questo è un semplice esempio di *catena di Markov*.



$$\begin{aligned} &P(X) P(Y|X) P(Z|Y) P(U|Z) P(V|U) \\ &= P(X, Y, Z, U, V) \end{aligned}$$

Cenni ai metodi numerici

Dalla teoria alla pratica

- ▶ In teoria abbiamo tutti gli strumenti per affrontare problemi concreti:

Dalla teoria alla pratica

- ▶ In teoria abbiamo tutti gli strumenti per affrontare problemi concreti:
 - a. Si definisce un *modello* con parametri Θ e quantità osservabili X (una opportuna rete bayesiana)

Dalla teoria alla pratica

- ▶ In teoria abbiamo tutti gli strumenti per affrontare problemi concreti:
 - a. Si definisce un *modello* con parametri Θ e quantità osservabili X (una opportuna rete bayesiana)
 - b. Si stabiliscono probabilità *a priori* per Θ (ad es. uniformi) e *verosimiglianza* $L(\Theta = \theta; X = x) = P(X = x | \Theta = \theta)$

Dalla teoria alla pratica

- ▶ In teoria abbiamo tutti gli strumenti per affrontare problemi concreti:
 - a. Si definisce un *modello* con parametri Θ e quantità osservabili X (una opportuna rete bayesiana)
 - b. Si stabiliscono probabilità *a priori* per Θ (ad es. uniformi) e *verosimiglianza* $L(\Theta = \theta; X = x) = P(X = x | \Theta = \theta)$
 - c. Si aggiorna il modello incorporando i dati *osservati* (Bayes)

Dalla teoria alla pratica

- ▶ In teoria abbiamo tutti gli strumenti per affrontare problemi concreti:
 - a. Si definisce un *modello* con parametri Θ e quantità osservabili X (una opportuna rete bayesiana)
 - b. Si stabiliscono probabilità *a priori* per Θ (ad es. uniformi) e *verosimiglianza* $L(\Theta = \theta; X = x) = P(X = x | \Theta = \theta)$
 - c. Si aggiorna il modello incorporando i dati *osservati* (Bayes)
 - d. Si stimano i parametri Θ (ad es. mediante MAP o MLE)

Dalla teoria alla pratica

- In teoria abbiamo tutti gli strumenti per affrontare problemi concreti:
 - a. Si definisce un *modello* con parametri Θ e quantità osservabili X (una opportuna rete bayesiana)
 - b. Si stabiliscono probabilità *a priori* per Θ (ad es. uniformi) e *verosimiglianza* $L(\Theta = \theta; X = x) = P(X = x | \Theta = \theta)$
 - c. Si aggiorna il modello incorporando i dati *osservati* (Bayes)
 - d. Si stimano i parametri Θ (ad es. mediante MAP o MLE)
 - e. Si fanno *previsioni* su eventuali variabili non osservate usando

↓
la legge →
problematici

Dalla teoria alla pratica

- ▶ In teoria abbiamo tutti gli strumenti per affrontare problemi concreti:
 - a. Si definisce un *modello* con parametri Θ e quantità osservabili X (una opportuna rete bayesiana)
 - b. Si stabiliscono probabilità *a priori* per Θ (ad es. uniformi) e *verosimiglianza* $L(\Theta = \theta; X = x) = P(X = x | \Theta = \theta)$
 - c. Si aggiorna il modello incorporando i dati *osservati* (Bayes)
 - d. Si stimano i parametri Θ (ad es. mediante MAP o MLE)
 - e. Si fanno *previsioni* su eventuali variabili non osservate usando
- ▶ Il problema è che nella pratica la numerosità sia dei dati osservati sia dei **parametri** è elevata e questo si richiede di calcolare densità di probabilità su spazi di **dimensione elevata**, che diventa impraticabile analiticamente.

$$\{0,1\}^d \leadsto \underline{2^d \text{ valori}}$$

Densità coniugate

Per certe funzioni di verosimiglianza, si possono introdurre delle densità a priori (*coniugate*) particolarmente convenienti perché la densità a posteriori è nella stessa classe.

- ▶ In n esperimenti indipendenti, ciascuno con probabilità di successo $Y = y$, il numero X di successi ha una densità binomiale θ

$$L(Y = y; X = k) = P(X = k | Y = y) = \binom{n}{k} y^k (1 - y)^{n-k}.$$

$$\text{Biu}(n, y)$$

Densità coniugate

Per certe funzioni di verosimiglianza, si possono introdurre delle densità a priori (*coniugate*) particolarmente convenienti perché la densità a posteriori è nella stessa classe.

- In n esperimenti indipendenti, ciascuno con probabilità di successo $Y = y$, il numero X di successi ha una densità binomiale

$$L(Y = y; X = k) = P(X = k | Y = y) = \binom{n}{k} y^k (1 - y)^{n-k}.$$

- Se la densità di Y a priori è *Beta* di parametri $\alpha, \beta > 0$, ossia

$$p(Y = y) \propto y^{\alpha-1} (1 - y)^{\beta-1},$$

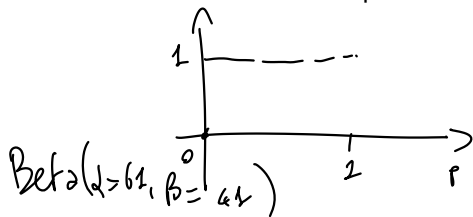
allora la densità a posteriori avendo osservato $X = k$ successi è ancora Beta:

$$p(Y = y | X = k) \propto y^{\alpha+k-1} (1 - y)^{\beta+n-k-1}.$$

Problema

Una routine probabilistica fornisce l'output desiderato con probabilità $\theta \in [0, 1]$, inizialmente non nota. Ogni applicazione dell'algoritmo produce esiti tra di loro indipendenti. Si modella inizialmente θ come una variabile uniforme su $[0, 1]$.

- Dopo aver effettuato 100 esperimenti, avendo osservato che l'output è corretto su 60 di questi, scrivere la densità a posteriori per θ e riconoscere una densità beta. Determinare la stima di massimo a posteriori.



$$\begin{aligned} L(\theta; X=60) &= P(X=60 | \theta) \\ &= \binom{100}{60} \theta^{60} (1-\theta)^{40} \\ &\propto p(\theta | X=60) \end{aligned}$$

Problema

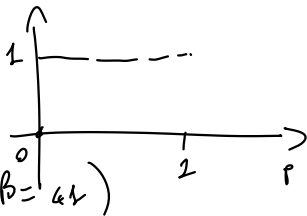
Una routine probabilistica fornisce l'output desiderato con probabilità $p \in [0, 1]$, inizialmente non nota. Ogni applicazione dell'algoritmo produce esiti tra di loro indipendenti. Si modella inizialmente p come una variabile uniforme su $[0, 1]$.

- ▶ Dopo aver effettuato 100 esperimenti, avendo osservato che l'output è corretto su 60 di questi, scrivere la densità a posteriori per p e riconoscere una densità beta. Determinare la stima di massimo a posteriori.
- ▶ Come cambia la risposta se invece si effettuano 1000 esperimenti e si osserva un output corretto su 600 di questi?

Beta (601, 401)

Soluzione

θ



$$L(\theta; X=60) = P(X=60 | \theta)$$

$$= \binom{100}{60} \theta^{60} (1-\theta)^{40}$$

$$\propto p(\theta | X=60)$$

Priori Beta(α, β) dopo k osservazioni di successi in esperimenti

$$\text{Beta}(\alpha+k, \beta+n-k)$$

modello Beta(α, β)

$$\frac{d}{dy} \left(y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \right) = (\alpha-1) y^{\alpha-2} (1-y)^{\beta-1} - (\beta-1) y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-2} = 0$$

Soluzione

$$(\alpha-1)(1-y) - (\beta-1)y = 0$$

$$\alpha-1 - \alpha y + y - \beta y + y = 0$$

$$\alpha-1 = (\alpha+\beta-2)y \quad \longrightarrow$$

$$y = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$$

$$\text{Ber}_2(k+1, n-k+1) \xrightarrow{\text{mod } 2} \left(\frac{k}{n} \right)$$

Le densità coniugate non risolvono completamente il problema, in particolare se la numerosità delle osservazioni è molto grande.

Si ricorre a metodi numerici. Due approcci fondamentali:

- ▶ Approssimare tutta la densità a posteriori di Y

Le densità coniugate non risolvono completamente il problema, in particolare se la numerosità delle osservazioni è molto grande.

Si ricorre a metodi numerici. Due approcci fondamentali:

- ▶ Approssimare tutta la densità a posteriori di Y
- ▶ Determinare solamente la stima di massima verosimiglianza y_{MAP}

Integrazione numerica

Nel primo caso il problema è quindi di approssimare numericamente un integrale

$$P(Y \in U|I) = \int_U p(Y = y|I) dy.$$

- Negli esempi seguiamo un approccio elementare: calcolare $p(Y = y|I)$ su una griglia

Integrazione numerica

Nel primo caso il problema è quindi di approssimare numericamente un integrale

$$P(Y \in U|I) = \int_U p(Y = y|I) dy.$$

- ▶ Negli esempi seguiamo un approccio elementare: calcolare $p(Y = y|I)$ su una griglia
- ▶ Problema: se Y è a valori in $[0, 1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$ e il passo è δy , si devono calcolare circa

$$\frac{1}{\delta^d}$$

valori (e d è molto grande).

Integrazione numerica

Nel primo caso il problema è quindi di approssimare numericamente un integrale

$$P(Y \in U|I) = \int_U p(Y = y|I)dy.$$

- ▶ Negli esempi seguiamo un approccio elementare: calcolare $p(Y = y|I)$ su una griglia
- ▶ Problema: se Y è a valori in $[0, 1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$ e il passo è δy , si devono calcolare circa

$$\frac{1}{\delta^d}$$

valori (e d è molto grande).

- ▶ Approcci alternativi cercano di ottimizzare la scelta dei punti, anche mediante scelte (pseudo)-casuali (metodi Monte Carlo).

Metodi di ottimizzazione

Nel secondo caso il problema è di determinare il punto di massimo di una funzione

$$y_{MLE} = \arg \max \{L(Y = y; X = x)\}.$$

- Il problema generale è studiatissimo e vi sono molteplici algoritmi (Newton, ascesa gradiente. . .)

Metodi di ottimizzazione

Nel secondo caso il problema è di determinare il punto di massimo di una funzione

$$y_{MLE} = \arg \max \{L(Y = y; X = x)\}.$$

- ▶ Il problema generale è studiatissimo e vi sono molteplici algoritmi (Newton, ascesa gradiente...)
- ▶ In R le funzioni `nlm()` e `optim()` permettono di applicare i principali.

Metodi di ottimizzazione

Nel secondo caso il problema è di determinare il punto di massimo di una funzione

$$y_{MLE} = \arg \max \{L(Y = y; X = x)\}.$$

- ▶ Il problema generale è studiatissimo e vi sono molteplici algoritmi (Newton, ascesa gradiente...)
- ▶ In R le funzioni `nlm()` e `optim()` permettono di applicare i principali.
- ▶ Se la numerosità delle osservazioni X è troppo elevata, si ricorre a metodi probabilistici.

Metodi di ottimizzazione

Nel secondo caso il problema è di determinare il punto di massimo di una funzione

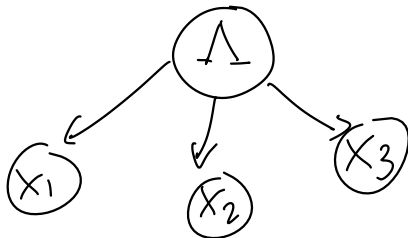
$$y_{MLE} = \arg \max \{L(Y = y; X = x)\}.$$

- ▶ Il problema generale è studiatissimo e vi sono molteplici algoritmi (Newton, ascesa gradiente...)
- ▶ In R le funzioni `nlm()` e `optim()` permettono di applicare i principali.
- ▶ Se la numerosità delle osservazioni X è troppo elevata, si ricorre a metodi probabilistici.
- ▶ A volte $Y = (Y_{\text{par}}, Y_{\text{hid}})$ e si richiede di massimizzare solo la verosimiglianza di Y_{par} . Necessità di ricorrere a metodi “misti” (ad esempio Expectation-Maximization).

Problema

Il numero di clienti che entrano in un negozio in un dato giorno è rappresentato da una variabile con densità Poisson di parametro $\Lambda > 0$ (inizialmente non noto). Si vuole stimare λ osservando gli ingressi in tre giorni consecutivi. Si suppone che a giorni diversi corrispondano numeri di ingressi indipendenti tra loro.

- Supponendo di avere osservato in sequenza $X_1 = 4$, $X_2 = 5$ e 3 ingressi nei tre giorni, fornire una stima di massima verosimiglianza per λ .



Problema

Il numero di clienti che entrano in un negozio in un dato giorno è rappresentato da una variabile con densità Poisson di parametro $\Lambda > 0$ (inizialmente non noto). Si vuole stimare λ osservando gli ingressi in tre giorni consecutivi. Si suppone che a giorni diversi corrispondano numeri di ingressi indipendenti tra loro.

- ▶ Supponendo di avere osservato in sequenza $X_1 = 4$, $X_2 = 5$ e 3 ingressi nei tre giorni, fornire una stima di massima verosimiglianza per λ .
- ▶ Supponendo che Λ sia a priori distribuito come una variabile esponenziale di parametro 1, avendo osservato la stessa sequenza 4, 5, 3 di ingressi, fornire la densità a posteriori e la stima di massimo a posteriori.

Problema

Il numero di clienti che entrano in un negozio in un dato giorno è rappresentato da una variabile con densità Poisson di parametro $\Lambda > 0$ (inizialmente non noto). Si vuole stimare λ osservando gli ingressi in tre giorni consecutivi. Si suppone che a giorni diversi corrispondano numeri di ingressi indipendenti tra loro.

- ▶ Supponendo di avere osservato in sequenza $X_1 = 4$, $X_2 = 5$ e 3 ingressi nei tre giorni, fornire una stima di massima verosimiglianza per λ .
- ▶ Supponendo che Λ sia a priori distribuito come una variabile esponenziale di parametro 1, avendo osservato la stessa sequenza 4, 5, 3 di ingressi, fornire la densità a posteriori e la stima di massimo a posteriori.
- ▶ Come cambiano le risposte se invece si osservano in sequenza $X_1 \leq 4$, $X_2 \leq 5$ e $X_3 \leq 3$ ingressi?

Soluzione

$$\textcircled{1} \quad 4, 5, 3 \quad p(\Lambda | \text{oss}) \propto p(\Lambda) \cdot \underline{L(\Lambda; \text{oss})}$$

$$L(\Lambda; \text{oss}) = P(\text{oss} | \Lambda) = P(X_1=4, X_2=5, X_3=3 | \Lambda=\lambda)$$

$$= P(X_1=4 | \lambda) P(X_2=5 | \lambda) P(X_3=3 | \lambda)$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^5}{5!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!} = \frac{e^{-3\lambda} \lambda^{4+5+3}}{4! 5! 3!}$$

$$\hookrightarrow p(\Lambda=\lambda | \text{oss}) = \frac{e^{-3\lambda} \lambda^{12}}{c} \quad c = \int_0^{+\infty} e^{-3\lambda} \lambda^{12} d\lambda$$

Soluzione

$$\lambda_{MAP} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} e^{-3\lambda} \lambda^{12} = L(\lambda)$$

$$\frac{d}{d\lambda} = 0$$

$$\log L(\lambda) = -3\lambda + 12 \log \lambda$$

$$\frac{d}{d\lambda} \log L = -3 + \frac{12}{\lambda} = 0$$

$$3\lambda = 12 \rightarrow \lambda = \frac{12}{3}$$

$$\lambda = \frac{3+4+5}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad L(\lambda; \text{OSS}) &= P(x_1 \leq 4, x_2 \leq 5, x_3 \leq 3 | \lambda) \\
 &= P(x_1 \leq 4 | \lambda) P(x_2 \leq 5 | \lambda) P(x_3 \leq 3 | \lambda) \\
 &= \left(e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} \right) \\
 &= e^{-3\lambda} \left(\rho_{\text{ol}}(\lambda) \right)
 \end{aligned}$$

\nearrow however $\lambda_{\text{MAP}} = \lambda_{\text{MLE}}$