Teoria dei Sistemi e del Controllo - 18-01-2024

1. Dato il sistema dinamico non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)x_2(k) + x_1(k)u(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{3}{2}x_2^2(k) - x_2(k)u(k) \end{cases}$$

   - si determinino tutti gli equilibri del sistema per un generico ingresso costante $u = 5$;
   - si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti con il metodo indiretto di Lyapunov;
   - nei casi determinati al punto precedente, in cui l'equilibrio risulti instabile, si verifichino le condizioni di esistenza di un controllo affine (lineare per il sistema linearizzato) che stabilizzi tali punti.

2. Dato il sistema Tempo Continuo descritto dalla seguente matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s-2)^2} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2s}{(s-2)} & \frac{3}{(s+1)(s-2)} \end{pmatrix}$$

   - si trovi una realizzazione in forma di stato lavorando per righe;
   - si consideri il sistema ottenuto al punto precedente considerando solo il secondo ingresso e la seconda uscita, si studino i modi del sistema, gli stati inosservabili dall'origine, gli stati raggiungibili dall'origine e la matrice di cambio di base per portare il sistema in forma canonica di Kalman.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k = Cx_k$$

   - Si determini per quali valori di α il sistema è stabilizzabile;
   - si scelga α e si determini un controllore stabilizzante del tipo $u_k = Kx_k$ così da avere il maggior numero possibile di poli a ciclo chiuso in 0.
   - si scelga α (eventualmente diverso dal caso precedente) e si determini un controllore stabilizzante del tipo $u_k = Hy_k + \nu_k$ (con ν_k nuovo ingresso esterno), così da avere il maggior numero possibile di poli a ciclo chiuso in 0.
   - Si dica, relativamente al controllore progettato nella risposta precedente, se il sistema con ingresso ν_k e uscita y_k è o meno stabile BIBO.

4. Si consideri il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

   ed il problema di controllo ottimo descritto dal funzionale

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

   soggetto a : stato inziale $x(0) = x_0$ noto, stato finale desiderato $x(t_f) = x_f$ fissato, valore del tempo finale t_f fissato,

   - si mostri come è possibile ricavare la matrice Hamiltoniana partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange per il problema dato
   - si ricavi la soluzione ottima in forma chiusa $u^*(t) = U(t, t_0, t_f, x_0, x_f)$ in funzione delle grandezze note (nota: $U(\cdot)$ non è funzione di $x(t)$!).