4. Si consideri il sistema tempo continuo SISO (A, B, C). Si discuta il seguente problema:

(a) Trovare (se esiste) la reazione dello stato che rende il sistema stabile e che minimizza:

$$J = \int_0^\infty u^2(t)dt$$

(b) In particolare la si trovi (se esiste) nei seguenti tre casi:

i.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii.
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii.
$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\, dt \Rightarrow J = \int_0^\infty u^2 dt \quad \text{con} \quad Q = \emptyset,\ R = I$$

Le condizioni per minimizzare J sono:

1) Verificare che il sistema è osservabile.

Se non lo è verificare che non ci siano autovalori instabili.

Per legge la Q deve essere uguale a $\Rightarrow Q = C^T C$ $\Rightarrow$ Dato che in QUESTO caso $Q = \emptyset$ anche $C = \emptyset$
Quindi sistema non osservabile

2) STABILIZZABILITÀ:

Un sistema (A,B) è stabilizzabile mediante retroazione dello stato se esiste K tale che $(A+BK, B)$ è stabile.

b)

- Nel caso tre il sistema non è stabilizzabile a causa dell'autovalore $\lambda = 3$ non controllabile e associato ad un modo divergente.

- Mentre nel caso uno e due il sistema è completamente controllabile essendo in F.C.C.

1) · FACCIO RICCATI:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} A & -M \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \Rightarrow M = B \cdot R^{-1} B^T$$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\det(\lambda I - H) = \det(a) \cdot \det(d - c a^{-1} b) = \det(a) \cdot \det(d)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = A - \lambda I \,,\; d = -A^T - \lambda I \\ c = -Q \,,\; b = -M = -B \cdot R^{-1} \cdot B^T \end{array}}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -1 & & -1 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 6) \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lambda_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

Questi sono gli autovalori di $A - \lambda I$. Di conseguenza quelli di $-A^T - \lambda I$ saranno: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$

Gli autovalori sono tutti a parte reale negativa, quindi il sistema risulta A.S.

$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, quindi $u = \emptyset$.

2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} A & -M \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \Rightarrow M = B \cdot R^{-1} B^T$$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 7\lambda - 6 \Rightarrow \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \emptyset \end{array} \Rightarrow P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

Gli autovaloni sono : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K_1+6 & K_2+7 & K_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A + BK) = -\lambda^3 + K_3\lambda^2 + \lambda(7 + K_2) + K_1 + 6$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) = (\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 2$$

$$\begin{cases} -K_1 - 6 = 2 \\ -7 - K_2 = 5 \\ -K_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

4. Data la matrice Hamiltoniana H, il candidato **dimostri** che :

- se $\lambda \in eig(H)$ allora vale anche: $-\lambda \in eig(H)$;
- nel caso di controllo ottimo ad orizzonte infinto, e' possibile calcolare la soluzione della ARE a partire dagli autovettori della H.

a)

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \qquad M = -BR^{-1}B^T \qquad Q \text{ e } M = \text{Matrici simmetriche}$$

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} A & M \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) = \det \left[\begin{array}{c|c} A-\lambda I & M \\ \hline -Q & -A^T-\lambda I \end{array}\right] =$$

$$= \det(A-\lambda I) \cdot \det\left[(-A^T-\lambda I) - (-Q)(A-\lambda I)^{-1} \cdot M \right] = \det \begin{bmatrix} A-\lambda I & M \\ -Q & -A^T-\lambda I \end{bmatrix}^T =$$

$$= \det \begin{bmatrix} A^T-\lambda I & -Q^T \\ M^T & -A-\lambda I \end{bmatrix} = \det(A^T-\lambda I) \cdot \det\left[(-A-\lambda I) - (\underset{\substack{\| \\ M}}{M^T})(A^T-\lambda I)^{-1} \cdot \underset{\substack{\| \\ -Q}}{(-Q)^T} \right] =$$

$$= \underbrace{(-1)^m \det(A^T-\lambda I)}\cdot \underbrace{(-1)^m \cdot \det\left[(-A-\lambda I) - (M)(A^T-\lambda I)^{-1}(-Q) \right]} =$$

$$= \det\underbrace{(-A^T+\lambda I)}_{A_{22}} \cdot \det\left[\underbrace{(A+\lambda I)}_{A_{11}} - \underbrace{(M)}_{A_{12}} \cdot \underbrace{(-A^T+\lambda I)}_{A_{22}}{}^{-1} \cdot \underbrace{(-Q)}_{A_{21}} \right] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} A+\lambda I & M \\ -Q & -A^T+\lambda I \end{bmatrix} = \underbrace{\det \begin{bmatrix} A-\lambda I & M \\ -Q & -A^T-\lambda I \end{bmatrix}}_{\text{Questa è l'espressione di partenza}} = P(\lambda)$$

Quindi abbiamo dimostrato che $P(\lambda) = P(-\lambda)$ ovvero che il polinomio caratteristico è una funzione pari.

E quindi abbiamo dimostrato che $\lambda \in eig(H)$ e $-\lambda \in eig(H)$

b)

$$\mathcal{H} = \left[\begin{array}{c|c} A & -M \\ \hline -Q & -A^T \end{array}\right] \quad \text{con} \quad M = B \cdot R^{-1} \cdot B^T$$

$\Rightarrow$ con M e Q matrici simmetriche

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_\infty & I \end{bmatrix}$ in modo tale che:

$$\tilde{H} = T^{-1} \cdot H \cdot T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_\infty & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A & -BR^{-1} \cdot B^T \\ -S_\infty A - Q & S_\infty B \cdot R^{-1} B^T - A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T S_\infty & -BR^{-1} \cdot B^T \\ -S_\infty A - Q + S_\infty B \cdot R^{-1} B^T - A^T S_\infty & S_\infty B \cdot R^{-1} B^T - A^T \end{bmatrix}$$

Questa è l'equazione algebrica di Riccati che deve essere uguale a zero

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T S_\infty & -BR^{-1} \cdot B^T \\ \emptyset & S_\infty B \cdot R^{-1} B^T - A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BR^{-1}B^T \\ \emptyset & -A^T - K^T B^T \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad K = R^{-1} B^T \cdot S_\infty$$

$$\det(H - \lambda I) = \det(\tilde{H} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} A + BK - \lambda I & -BR^{-1}B^T \\ \emptyset & -A^T - K^T B^T - \lambda I \end{bmatrix} =$$

$$= \det(A + BK - \lambda I) \cdot \det(-A^T - K^T B^T - \lambda I)$$

Quindi gli autovalori di H sono gli autovalori di A+BK.

Quindi è possibile calcolare la soluzione della ARE a partire dagli autovettori della H.

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

si ricavi l'ingresso $u(\cdot)$ che, dati: la costante $x^* \neq 0$, $x(0)$ e t_f, minimizza il funzionale:

$$J = \frac{1}{2}(x(t_f) - x^*)^T S(x(t_f) - x^*) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[(x(t) - x^*)^T Q(x(t) - x^*) + u^T R u\right] dt$$

Definisco $\Rightarrow \xi(t) = x(t) - x^* \Rightarrow x(t) = \xi(t) + x^* \Rightarrow \dot{\xi}(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \dot{\xi}(t) = Ax(t) + Ax^* + Bu(t)$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\xi^T(t_f)\cdot S\cdot\xi(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(\xi^T(t)\cdot Q\cdot\xi(t) + u^T R u)\,dt$$

Scrivo la funzione Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}\xi^T Q\xi + \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T\left[A\xi + Bu + Ax^*\right]$$

Scrivo le equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} \dot{\xi}^* = A\xi^* + Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi} = -Q\xi^* - A^T\lambda^* \\ 0 = \dfrac{\partial H}{\partial u} = Ru^* + B^T\lambda^* \Rightarrow u^* = -R^{-1}B^T\lambda^* \end{cases}$$

Quindi sostituendo risulta:

$$\begin{cases} \dot{\xi}^* = A\xi^* + Ax^* + B(-R^{-1}B^T\lambda^*) = A\xi^* + Ax^* - BR^{-1}B^T\lambda^* \\ \dot{\lambda}^* = -Q\xi^* - A^T\lambda^* \end{cases}$$

La condizione al contorno è: $\lambda(t_f) = S_f\,\xi(t_f) = S_f\,x(t_f) - S_f\,x^*$

Imponendo per il criterio di Bellman $\lambda^* = S\cdot\xi^* + q$, deve risultare sempre:

$$\dot{\lambda}^* = \dot{S}\xi^* + S\cdot\dot{\xi}^* + \dot{q} = -Q\xi^* - A^T\lambda^* \Rightarrow$$

$$-Q\xi^* - A^T\lambda^* = \dot{S}\xi^* + S\cdot(A\xi^* + Bu^* + Ax^*) + \dot{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Q\xi^* - A^T\lambda^* = \dot{S}\xi^* + S(A\xi^* + B(-R^{-1}B^T\lambda^*) + Ax^*) + \dot{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Q\xi^* - A^T S\xi^* - A^T q = \dot{S}\xi^* + SA\xi^* - SBR^{-1}B^T S\xi^* - SBR^{-1}B^T q + SAx^* + \dot{q}$$

$$(\dot{S} + SA + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T)\xi^* + \dot{q} + SAx^* - SBR^{-1}B^T q - A^T q = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{S} + SA + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T = 0 \\ \dot{q} + SAx^* - SBR^{-1}B^T q - A^T q \end{array}}$$

Impongo la condizione al contorno $\lambda(t_f) = S_f \cdot x(t_f) - S_f \cdot x^*$:

$$\lambda(t) = S(t)\xi(t) + q(t) = S(t)(x(t) - x^*) + q(t) \Big|_{t=t_f} = S(t_f)\cdot x(t_f) - S(t_f)x^* + q(t_f)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} S(t_f) = S_f \\ q(t_f) = \emptyset \end{array}}$$

Con $x^* \neq \emptyset$ risolvo $\dot{q}(t)$ e ottengo: $\boxed{u(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t) = -R^{-1}B^T S(t)\xi(t) - R^{-1}B^T q(t)}$

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

si imposti il problema di determinare il controllo ottimo per portare il sistema nell'origine in tempo finito. Si enuncino le ipotesi di esistenza della soluzione del problema e si ricavi la matrice di reazione K che lo risolve nel caso in cui le ipotesi siano verificate. Commentare con sufficiente livello di dettaglio come si ottiene la reazione K.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^T Q x + u^T R u$$ con condizioni al contorno $x(t_f) = \emptyset$

· Scriviamo la funzione Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

Scrivo le equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx^* - A^T\lambda^* \\ 0 = \frac{\partial H}{\partial u} = Ru^* + B^T\lambda^* \quad \Rightarrow \quad u^* = -R^{-1}B^T\lambda^* \end{cases}$$

Quindi sostituisco e ottengo:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* + B(-R^{-1}B^T\lambda^*) = Ax^* - BR^{-1}B^T\lambda^* \\ \dot{\lambda}^* = -Qx^* - A^T\lambda^* \end{cases}$$

Me lo riscrivo sotto forma di matrice

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{\lambda}^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\text{Matrice Hamiltoniana}} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t_f,t_0) & \Psi_{12}(t_f,t_0) \\ \Psi_{21}(t_f,t_0) & \Psi_{22}(t_f,t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix}$$

$$x(t_f) = \Psi_{11}(t_f,t_0)\cdot x(t_0) + \Psi_{12}(t_f,t_0)\lambda(t)$$

$$\Psi_{11}(t_f,t_0)\cdot x(t_0) + \Psi_{12}(t_f,t_0)\lambda(t) = \emptyset$$

$$\lambda(t) = -(\Psi_{12}(t_f,t_0))^{-1}\Psi_{11}(t_f,t_0)\cdot x(t_0) = S(t)\cdot x(t_0) \quad \Rightarrow \quad u^* = \underbrace{-R^{-1}B^T S(t)}_{K}\cdot x(t) = K\cdot x(t)$$

4. Si consideri il problema di controllo ottimo:

$$u^* = \arg\min_u \left[h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \right]$$

soggetto al vincolo differenziale : $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ con $x(t_0) = x_0$ ed x_0 noto.

Se ne descriva analiticamente la soluzione giungendo alle equazioni di Eulero e si discutano i 4 casi notevoli che permettono di definire le condizioni al contorno.

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\, dt = \int_{t_0}^{t_f} \left[g(x(t), u(t), t) + \left(\frac{d}{dx} h\, x(t), t\right)^T \cdot \dot{x} + \frac{d}{dt} h(x(t), t) \right] dt$$

Scrivo il funzionale aumentato:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dx} h(x(t), t)^T \cdot \dot{x} + \frac{d}{dt} h(x(t), t) + \lambda^T \cdot \left[f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) \right]}_{g_a(x, \dot{x}, u, \lambda, t)} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)\, dt$$

• Posso risolvere il problema o imponendo le equazioni di Eulero alla g_a o calcolando la funzione Hamiltoniana e ricavando da questa le equazioni di Eulero-Lagrange.

$$H(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) \cdot f(x(t), u(t), t)$$

Da questa ricavo le eq. di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{dH}{d\lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = f(x^*(t), u^*(t), t) \\[2ex] \dot{\lambda}^*(t) = -\dfrac{dH}{dx}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = -\dfrac{d}{dx}\left[g(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^T(t) f(x^*(t), u^*(t), t) \right] \\[2ex] \emptyset = \dfrac{dH}{du}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \dfrac{d}{du}\left[g(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^T(t) f(x^*(t), u^*(t), t) \right] \end{cases}$$

Posso quindi scrivere la condizione al contorno mediante l'Hamiltoniana:

$$0 = \left[\frac{d}{dx} h(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right] dx_f + \left[H(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) + \frac{d}{dt} h(x^*(t_f), t_f) \right] dt_f$$

- **CASO 1**: t_f, x_f | Fissati $\Rightarrow$ non devo aggiungere nessuna condizione al contorno.

- **CASO 2**: t_f | Fisso, x_f | Libero $\Rightarrow$ devo imporre $\lambda^*(t) = \frac{d}{dx} h(x^*(t_f), t_f)$

- **CASO 3**: t_f | Libero, x_f | Fisso $\Rightarrow$ devo imporre $H(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) = -\frac{d}{dt} h(x^*(t_f), t_f)$

- **CASO 4**: t_f, x_f | Liberi $\Rightarrow$ devo imporre entrambi i vincoli per risolvere il mio problema di controllo ottimo.

4. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = \underbrace{u}_{f}$$

con condizioni iniziali x_0 fissate e note. Si imposti e si risolva analiticamente un problema di controllo ottimo con tempo iniziale e finale fissati, che porti lo stato del sistema il più vicino possibile all'origine limitando il consumo. Si utilizzi un unico parametro p per controllare il trade-off tra consumo e distanza dall'origine all'istante finale. Si calcoli la soluzione in funzione del parametro p.

Il funzionale di costo è dato da:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x,u,t)\,dt = \frac{1}{2} p\, x^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{u^2(t)\,dt}_{g}$$

Costruisco la funzione Hamiltoniana:

$$H = g + \lambda^T \cdot f = \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda(t)\cdot u(t)$$

e da questa mi ricavo le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = u^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \emptyset \Rightarrow \lambda^*(t) = \text{costante} \\ \emptyset = \dfrac{\partial H}{\partial u} = \cancel{2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot u^*(t) + \lambda^*(t) \Rightarrow u^*(t) = -\lambda^*(t) \end{cases}$$

• Devo ora fissare le condizioni al contorno. Ci troviamo nel caso 2, poiché t_f è fisso e x_f è libero, per cui, dato che le condizioni al contorno sono:

$$\Rightarrow \lambda^*(t_f) = \frac{d}{dx} h(x(t_f), t_f) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} p\, x^2(t_f)\right) \Rightarrow \lambda^*(t_f) = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} p \cdot x^*(t_f) = p \cdot x^*(t_f)$$

• Risolvo le equazioni di Eulero Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t) \\ \lambda^*(t) = \text{costante} = p\, x^*(t_f) \\ u^*(t) = -\lambda^*(t) = -p \cdot x^*(t_f) \end{cases}$$

Devo ora conoscere la storia temporale di $x(t)$. Dato che conosco u, posso fare l'integrale del vincolo:

$$\dot{x}^* = u^* \Rightarrow x(t) = x(t_0) + u(t-t_0)$$

$$x^*(t)\Big|_{t=t_f} = x^*(t_0) + u^*(t-t_0) = x^*(t_0) - p\, x^*(t_f)(t_f - t_0)$$

$$\Rightarrow x^*(t_f) = x^*(t_0) - p\, x^*(t_f)(t_f - t_0)$$

$$x^*(t_f) + p\, x^*(t_f)(t_f - t_0) = x^*(t_0)$$

$$x^*(t_f) = \frac{x^*(t_0)}{1 + p\cdot(t_f - t_0)}$$

A questo punto calcolo la legge di controllo:

$$u^*(t) = -p\, x^*(t_f) = -p \cdot \frac{x^*(t_0)}{1 + p\cdot(t_f - t_0)}$$ $\Rightarrow$ Questa trovata è la legge di controllo ottimo.

3. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = u$$

con condizioni iniziali x_0 fissate e note. Si imposti e si risolva analiticamente un problema di controllo ottimo con tempo iniziale e finale fissati, che porti lo stato del sistema il più vicino possibile all'origine limitando al contempo l'azione di controllo. Si utilizzi un unico parametro γ per controllare il trade-off tra azione di controllo e distanza dall'origine all'istante finale. Si calcoli la soluzione in funzione del parametro γ.

Il funzionale di costo è dato da:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t)\, dt = \frac{1}{2} \gamma x^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\, dt$$

Costruisco la funzione Hamiltoniana:

$$H = g + \lambda^T \cdot f = \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda(t) \cdot u(t)$$

e da questa mi ricavo le equazioni di Eulero - Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = u^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \emptyset \Rightarrow \lambda^*(t) = \text{costante} \\ \emptyset = \dfrac{\partial H}{\partial u} = \cancel{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot u^*(t) + \lambda^*(t) \Rightarrow u^*(t) = -\lambda^*(t) \end{cases}$$

- Devo ora fissare le condizioni al contorno. Ci troviamo nel caso 2, poiché t_f è fisso e x_f è libero, per cui, dato che le condizioni al contorno sono:

$$\Rightarrow \lambda^*(t_f) = \frac{d}{dx} h(x(t_f), t_f) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \rho\, x^2(t_f)\right) \Rightarrow \lambda^*(t_f) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \rho \cdot x^*(t_f) = \rho \cdot x^*(t_f)$$

- Risolvo le equazioni di Eulero Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t) \\ \lambda^*(t) = \text{costante} = \rho\, x^*(t_f) \\ u^*(t) = -\lambda^*(t) = -\rho \cdot x^*(t_f) \end{cases}$$

Devo ora conoscere la storia temporale di $x(t)$. Dato che conosco u, posso fare l'integrale del vincolo:

$$\dot{x}^* = u^* \implies x(t) = x(t_0) + u(t - t_0)$$

$$x^*(t)\Big|_{t=t_f} = x^*(t_0) + u^*(t - t_0) = x^*(t_0) - \gamma x^*(t_f)(t_f - t_0)$$

$$\implies x^*(t_f) = x^*(t_0) - \gamma x^*(t_f)(t_f - t_0)$$

$$x^*(t_f) + \gamma x^*(t_f)(t_f - t_0) = x^*(t_0)$$

$$x^*(t_f) = \frac{x^*(t_0)}{1 + \gamma(t_f - t_0)}$$

A questo punto calcolo la legge di controllo:

$$u^*(t) = -\gamma x^*(t_f) = -\gamma \cdot \frac{x^*(t_0)}{1 + \gamma(t_f - t_0)}$$ $\implies$ Questa trovata è la legge di controllo ottimo.

4. Si formuli il problema di controllo ottimo in tempo infinito per sistemi lineari tempo invarianti tempo continui (o LQR) e:

- si specifichino le condizioni necessarie e sufficienti perche' il problema ammetta soluzione
- si fornisca una dimostrazione dell'enunciato al punto precedente
- si fornisca un'espressione analitica per la soluzione del problema, ovvero per il guadagno ottimo.

L' indice di costo che prendiamo come riferimento è:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} \left[x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u^T(t) \cdot R \cdot x(t) \right] dt \qquad \text{con} \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

con $H, Q, R \Rightarrow$ matrici simmetriche a coefficienti reali

a)

Affinché il problema ammetta soluzione il sistema deve essere tale per cui:

- (A,B) sia stabilizzabile, ovvero sia completamente raggiungibile o gli autovalori non raggiungibili devono essere A.S.

- (A,C) deve essere rilevabile, quindi (A,C) completamente osservabile (o (A^T, C^T) completamente raggiungibile) altrimenti tale per cui gli autovalori instabili appartengono al sottospazio osservabile.

Condizione necessaria

Se (A,B) non è stabilizzabile, allora non esiste alcun controllo che porti lo stato da $x(t) \to \varnothing$. Se (A,C) non è osservabile, gli autovalori instabili non compaiono in $Q = C^T \cdot C$ quindi anche se il sistema divergesse il controllo non se ne renderebbe conto.

b)

Il sistema di controllo ottimo è posto con $t_f \to \infty$, quindi occorre fare un cambio di base per l' Hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} A & -B \cdot R^{-1} \cdot B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

Creo una trasformazione di similitudine:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} I_{m \times m} & 0 \\ \hline S_\infty & I_{m \times m} \end{array}\right] \Rightarrow T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_{m \times m} & 0 \\ \hline -S_\infty & I_{m \times m} \end{array}\right]$$

Soluzione ARE

$$\tilde{H} = T^{-1} \cdot H \cdot T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_\infty & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & -B \cdot R^{-1} \cdot B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A & -B \cdot R^{-1} \cdot B^T \\ -S_\infty \cdot A - Q & S_\infty B \cdot R^{-1} \cdot B^T - A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A \overset{K_{ottimo}}{-B R^{-1} B^T \cdot S_\infty} & -B \cdot R^{-1} \cdot B^T \\ \underbrace{-S_\infty A - Q + S_\infty B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S_\infty - A^T \cdot S_\infty}_{-\,ARE} & \underbrace{S_\infty B \cdot R^{-1}}_{-K_{ottimo}^T} \cdot B^T - A^T \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \boxed{A + B \cdot K_{ott}} & -B R^{-1} B^T S_\infty \\ \hline \emptyset & \boxed{-A^T - K_{ott}^T \cdot B^T} \end{array}\right]$$

$$\lambda(\tilde{H}) \equiv \lambda(H) = \lambda(A + B \cdot K) \cup \lambda(-A^T - K_{ott}^T \cdot B^T)$$

$$\lambda(-A^T - K_{ott}^T \cdot B^T) = \lambda\left((-A^T - K^T B^T)^T\right) = \lambda(-A - BK) = \lambda(-(A+BK)) = -\lambda(A+BK)$$

Gli autovalori della matrice $\tilde{H}$, e conseguentemente della matrice Hamiltoniana essendo simili, sono quelli di $(A+BK)$ e i loro negati. Questo perché il polinomio caratteristico di H è pari.
Chiaramente gli autovalori negativi di H sono quelli da imporre al controllore retroazionato $(A+BK)$ perché sia stabilizzante per il sistema.

- In breve:

1. Scrivo la H.
2. Calcolo $\lambda(H)$ e li raggruppo in Λ^+ e Λ^-
3. Risolvo un problema di allocazione autovalori, ovvero trovo K : $(A+BK)$ abbia gli autovalori desiderati.

$\Rightarrow$ Questo trovato è il K ottimo.

c)

Partendo dalla DRE:

$$\dot{S} + SA + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T S = \emptyset$$

$$S(t_f) = S_f$$

quando $t_f \to \infty$ tende a un valore costante: $\lim_{t \to \infty} S(t) = S_\infty$

con S_∞ indipendente da t e da S_f.

Se $S(t) \xrightarrow{t \to \infty} S_\infty \implies \dot{S}_\infty = \emptyset$

per cui posso scrivere la soluzione S_∞ come soluzione della DRE ponendo $\dot{S}(t) \xrightarrow{t \to \infty} \emptyset$:

$$\dot{S} + SA + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T S = 0$$

$$\Big\downarrow \; t \to t_f$$

$$\boxed{S_\infty A + A^T S_\infty + Q - S_\infty B R^{-1} B^T S_\infty = 0}$$ → Equazione algebrica di Riccati

$$\implies u = \underbrace{-R^{-1}B^T R \cdot S_\infty}_{\text{costante}} \cdot x(t) = K \cdot x(t)$$

4. Si consideri il problema del controllo ottimo per sistemi lineari tempo continui e:

- si enuncino, nella loro forma più generale, i due problemi di controllo ottimo: in tempo finito prefissato ed ad orizzonte infinito
- si discutano le differenze principali nelle due formulazioni
- si discutano le differenze principali sui requisiti da imporre perche' i due problemi abbiano soluzione
- si proponga, a grandi linee, la procedura per ottenere la soluzione ai due problemi presi in considerazione

a)

1. TEMPO FINITO

$$J = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u)\, dt$$

2. TEMPO INFINITO

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R \cdot u)\, dt$$

b)

Nel problema a Tempo finito le condizioni da imporre sono che le matrici devono essere:

- S, Q simmetriche e semi-definite positive
- R simmetrica e definita positiva

A Tempo infinito bisogna imporre che il sistema di partenza sia tale per cui:

- (A,B) sia stabilizzabile, ovvero sia completamente raggiungibile o gli autovalori non raggiungibili devono essere A.S.
- (A,C) deve essere rilevabile, quindi (A,C) completamente osservabile (o (A^T, C^T) completamente raggiungibile) altrimenti tale per cui gli autovalori instabili appartengono al sottospazio osservabile.

c)

d)

4. Si consideri il problema di controllo ottimo:

$$u^* = \arg\min_u \left[h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \right]$$

soggetto al vincolo differenziale : $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ con $x(t_0) = x_0$ ed x_0 noto.

Se ne derivi analiticamente la soluzione giungendo alle equazioni di Eulero e si discutano i 4 casi notevoli che permettono di definire le condizioni al contorno.

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\, dt = \int_{t_0}^{t_f} \left[g(x(t), u(t), t) + \left(\frac{d}{dx} h(x(t), t)\right)^T \cdot \dot{x} + \frac{d}{dt} h(x(t), t) \right] dt$$

Scrivo il funzionale aumentato:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dx} h(x(t), t)^t \cdot \dot{x} + \frac{d}{dt} h(x(t), t) + \lambda^T \cdot \left[f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) \right]}_{g_a(x, \dot{x}, u, \lambda, t)} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)\, dt$$

• Posso risolvere il problema o imponendo le equazioni di Eulero alla g_a o calcolando la matrice Hamiltoniana e ricavando da questa le equazioni di Eulero-Lagrange.

$$H(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) \cdot f(x(t), u(t), t)$$

Da questa ricavo le eq. di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{dH}{d\lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = f(x^*(t), u^*(t), t) \\[2ex] \dot{\lambda}^*(t) = -\dfrac{dH}{dx}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = -\dfrac{d}{dx}\left[g(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^T(t) f(x^*(t), u^*(t), t) \right] \\[2ex] \emptyset = \dfrac{dH}{du}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \dfrac{d}{du}\left[g(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^T(t) f(x^*(t), u^*(t), t) \right] \end{cases}$$

Posso quindi scrivere la condizione al contorno mediante l'Hamiltoniana:

$$0 = \left[\frac{d}{dx} h(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right] dx_f + \left[H(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) + \frac{d}{dt} h(x^*(t_f), t_f) \right] dt_f$$

- **CASO 1**: t_f, x_f | Fissati => non devo aggiungere nessuna condizione al contorno.

- **CASO 2**: t_f | Fisso; x_f | Libero => devo imporre $\lambda^*(t) = \frac{d}{dx} h(x^*(t_f), t_f)$

- **CASO 3**: t_f | Libero; x_f | Fisso => devo imporre $H(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t) = -\frac{d}{dt} h(x^*(t_f), t)$

- **CASO 4**: t_f, x_f | Liberi => devo imporre entrambi i vincoli per risolvere il mio problema di controllo ottimo.

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

- si ricavi la matrice Hamiltoniana $\mathcal{H}$ associata al problema di controllo ottimo che minimizza il funzionale:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [x^T Q x + u^T R u]\, dt$$

- si dimostri che se $\lambda \in eig(\mathcal{H})$ allora vale anche: $-\lambda \in eig(\mathcal{H})$;
- si discuta come e' possibile utilizzare quest'ultimo risultato per risolvere problemi di controllo ottimo quando $t_f = \infty$.

a)

Cominciamo definendo la funzione Hamiltoniana:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

Imponendo le equazioni di Eulero avremo:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = -Qx^* - A^T\lambda^* \\ 0 = \dfrac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = Ru^* + B^T\lambda^* \end{cases}$$

Da cui ricavo che: $u^*(t) = -R^{-1}B^T\lambda^*$ e quindi sostituendo avrò:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* + B(-R^{-1}B^T\lambda^*) = Ax^* - BR^{-1}B^T\lambda^* \\ \dot{\lambda}^* = -Qx^* - A^T\lambda^* \end{cases}$$

Quindi la matrice Hamiltoniana sarà:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

b)

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \qquad M = -BR^{-1}B^T \qquad Q \text{ e } M = \text{Matrici simmetriche}$$

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} A & M \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right) = \det\left[\begin{array}{c|c} A-\lambda I & M \\ \hline -Q & -A^T-\lambda I \end{array}\right] =$$

$$= \det(A-\lambda I)\cdot \det\left[(-A^T-\lambda I)-(-Q)(A-\lambda I)^{-1}M\right] = \det\begin{bmatrix} A-\lambda I & M \\ -Q & -A^T-\lambda I \end{bmatrix}^T =$$

$$= \det\begin{bmatrix} A^T-\lambda I & M^T \\ -Q^T & -A-\lambda I \end{bmatrix} = \det(A^T-\lambda I)\cdot\det\left[(-A-\lambda I)-(\underset{=-Q}{-Q^T})(A^T-\lambda I)^{-1}\underset{=M}{M^T}\right] =$$

$$= \underbrace{(-1)^n \det(A^T-\lambda I)}\cdot \underbrace{(-1)^n\cdot\det\left[(-A-\lambda I)-(-Q)(A^T-\lambda I)^{-1}M\right]} =$$

$$= \det(-A^T+\lambda I)\cdot\det\left[(A+\lambda I)-(-Q)\cdot(-A^T+\lambda I)^{-1}M\right] =$$

$$= \det\begin{bmatrix} A+\lambda I & -Q \\ M & -A^T+\lambda I \end{bmatrix} = \underbrace{\det\begin{bmatrix} A-\lambda I & -Q \\ M & -A^T-\lambda I \end{bmatrix}} = P(\lambda)$$

Questa è l'espressione di partenza

Quindi abbiamo dimostrato che $P(\lambda) = P(-\lambda)$ ovvero che il polinomio caratteristico è una funzione pari.

E quindi abbiamo dimostrato che $\lambda \in eig(H)$ e $-\lambda \in eig(H)$

c)

Partendo sempre dalla matrice Hamiltoniana creo una trasformazione di similitudine:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_\infty & I \end{bmatrix} \quad \text{in modo tale che:}$$

$$\tilde{H} = T^{-1}\cdot H\cdot T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_\infty & I \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}\cdot B^T \\ -S_\infty A - Q & S_\infty B \cdot R^{-1} B^T - A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T S_\infty & -BR^{-1}\cdot B^T \\ -S_\infty A - Q + S_\infty B \cdot R^{-1} B^T - A^T S_\infty & S_\infty B \cdot R^{-1} B^T - A^T \end{bmatrix}$$

Questa è l'equazione algebrica di Riccati che deve essere uguale a zero

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T S_\infty & -BR^{-1}\cdot B^T \\ \emptyset & S_\infty B \cdot R^{-1} B^T - A^T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A + BK & -BR^{-1}B^T \\ \hline \emptyset & -A^T - K^T B^T \end{array}\right] \quad \text{con} \quad K = R^{-1} B^T \cdot S_\infty$$

$$\lambda(\tilde{H}) \equiv \lambda(H) = \lambda(A+BK) \cup \lambda(-A^T - K^T B^T) \Rightarrow \lambda(A+BK) = -\lambda(A+BK)$$

Gli autovalori di H sono quelli ottenuti dal controllo ottimo a ciclo chiuso: $\lambda(A+BK)$ ed i loro opposti (poiché il P.C. di H è pari)

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ed il problema di controllo ottimo descritto dal funzionale

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u \right] dt$$

soggetto a : stato inziale $x(0) = x_0$ noto, stato finale desiderato $x(t_f) = x_f$ fissato, valore del tempo finale t_f fissato,

- si ricavi la matrice Hamiltoniana partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange
- si ricavi la soluzione ottima in forma chiusa $u^*(t) = ...$ in funzione delle grandezze note (suggerimento: NON usare l'equazione di Riccati, non produce una soluzione in forma chiusa).

a)

Cominciamo definendo la funzione Hamiltoniana:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

Imponendo le equazioni di Eulero avremo:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = -Qx^* - A^T \lambda^* \\ 0 = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = Ru^* + B^T \lambda^* \end{cases}$$

Da cui ricavo che: $u^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda^*$ e quindi sostituendo avrò:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* + B(-R^{-1} B^T \lambda^*) = Ax^* - BR^{-1}B^T \lambda^* \\ \dot{\lambda}^* = -Qx^* - A^T \lambda^* \end{cases}$$

Quindi la matrice Hamiltoniana sarà:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

b)

La soluzione in forma chiusa la trovo integrando:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{H(t-t_0)} \cdot \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\tau,t_0) & \varphi_{12}(\tau,t_0) \\ \varphi_{21}(\tau,t_0) & \varphi_{22}(\tau,t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix}$$

- Siccome $x(t_f)$ è noto $= x_f$:

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ \lambda^*(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t_f,t_0) & \varphi_{12}(t_f,t_0) \\ \varphi_{21}(t_f,t_0) & \varphi_{22}(t_f,t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix}$$

$$x^*(t_f) = x_f = \varphi_{11}(t_f,t_0)\,x(t_0) + \varphi_{12}(t_f,t_0)\,\lambda(t_0)$$

$$\lambda(t_0) = \varphi_{12}^{-1}(t_f,t_0) \cdot \left[x_f - \varphi_{11}(t_f,t_0)\,x(t_0) \right]$$

$$\lambda^*(\tau) = \varphi_{21}(\tau,t_0)\,x(t_0) + \varphi_{22}(\tau,t_0)\,\lambda(t_0) =$$

$$= \varphi_{21}(\tau,t_0)\,x(t_0) + \varphi_{22}(\tau,t_0)\,\varphi_{12}^{-1}(t_f,t_0) \cdot \left[x_f - \varphi_{11}(t_f,t_0)\,x(t_0) \right]$$

$$u^*(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot \lambda^*(\tau) \Rightarrow \text{funzione di } t, t_0, t_f, x_f, x_0$$

4. Si consideri il sistema lineare tempo invariante $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

soggetto ai vincoli $x(t_0) = x_0$ ed $x(t_f) = x_f$, con x_0, x_f vettori costanti noti e $\neq 0$ in generale.

Lo studente:

- proponga opportune condizioni sulle matrici Q ed R che garantiscano la risolubilità del problema;
- descriva in maniera analitica la procedura che porta alla soluzione in forma chiusa del problema di ottimizzazione giungendo ad una espressione per il controllo ottimo del tipo:

$$u(t) = f_{opt}(x(t), t, t_f, x_f)$$

- giustifichi l'indipendenza di $f_{opt}(\cdot)$ dal vettore di condizioni iniziali x_0.

a)

Affinché il sistema sia risolubile le condizioni da imporre sono:

1. $Q \Rightarrow$ matrice simmetrica, s.d.p. $(Q \geq \emptyset)$

2. $R \Rightarrow$ matrice simmetrica, d.p. $(R > \emptyset)$

b)

Scrivo la funzione Hamiltoniana:

$$H = g + \lambda^T \cdot f = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

Da questa ricavo le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{dH}{d\lambda} = Ax^* + Bu^* \\[2ex] \dot{\lambda}^* = -\dfrac{dH}{dx} = -Qx^* - A^T\lambda^* \\[2ex] \emptyset = \dfrac{dH}{du} = u^* R + B^T \lambda^* \Rightarrow u^* = -R^{-1} B^T \lambda^* \end{cases}$$

Scrivo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{\lambda}^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\text{Matrice Hamiltoniana}} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}$$

La soluzione in forma chiusa la trovo integrando:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{\lambda}^* \end{bmatrix} = e^{H(t-t_0)} \cdot \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\tau,t_0) & \varphi_{12}(\tau,t_0) \\ \varphi_{21}(\tau,t_0) & \varphi_{22}(\tau,t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix}$$

$$x(t_f) = x_f = \varphi_{11}(t_f,t_0)\, x(t_0) + \varphi_{12}(t_f,t_0)\, \lambda(t_0)$$

$$\lambda(t_0) = \varphi_{12}^{-1}(t_f,t_0) \cdot \left[x_f - \varphi_{11}(t_f,t_0)\, x(t_0) \right]$$

$$\lambda^*(\tau) = \varphi_{21}(\tau,t_0)\, x(t_0) + \varphi_{22}(\tau,t_0)\, \lambda(t_0) =$$

$$= \varphi_{21}(\tau,t_0)\, x(t_0) + \varphi_{22}(\tau,t_0)\, \varphi_{12}^{-1}(t_f,t_0) \cdot \left[x_f - \varphi_{11}(t_f,t_0)\, x(t_0) \right]$$

$$u^*(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot \lambda^*(\tau)$$

C)

L'indipendenza da $x(t_0)$ è giustificata dal principio di Bellman il quale afferma che, avendo un problema di controllo ottimo che porta da A a B e trovando una soluzione ottima $u(t)$, se costruisco un nuovo problema che mi porta da C in B la soluzione sarà la stessa.
Quindi l'azione di controllo può essere scelta in funzione di $x(t)$ e non necessariamente di $x(t_0)$.

4. Si consideri il sistema tempo continuo SISO $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo:

$$J = \int_0^\infty u^2(t)dt$$

(a) Si descriva la procedura che permette di calcolare la legge di controllo ottima, nella forma $u = Kx$, che stabilizza l'impianto e minimizza l'indice di costo J.

(b) Si calcoli quindi, se esiste, la matrice K nei seguenti casi:

i.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ii.
$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iii.
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a)

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\, dt \Rightarrow J = \int_0^\infty u^2 dt \qquad \text{con} \qquad Q = \emptyset,\ R = I$$

Le condizioni per minimizzare J sono:

1) Verificare che il sistema è osservabile.

Se non lo è verificare che non ci siano autovalori instabili.

Per legge la Q deve essere uguale a $\Rightarrow Q = C^T C$ $\Rightarrow$ Dato che in QUESTO caso $Q = \emptyset$ anche $C = \emptyset$
Quindi sistema non osservabile

2) STABILIZZABILITÀ:

Un sistema (A, B) è stabilizzabile mediante retroazione dello stato se esiste K tale che $(A+BK, B)$ è stabile.

b)

- A_1 e A_2 sono in forma canonica di controllo quindi il sistema è completamente controllabile.
- Mentre per il sistema 3, non è stabilizzabile a causa dell'autovalore $\lambda = 2$ non controllabile e associato ad un modo divergente.

- Faccio Riccati:

1.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q & -A_1^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -12 & -6 & 0 & 0 & 25 \\ & & & 0 & 0 & 8 \\ & \emptyset & & -1 & 0 & 12 \\ & & & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ -2 & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \emptyset \end{array} \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+4)$$

$$(\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda+2) \Rightarrow (\lambda+2)^3$$

- Gli autovalori sono $\lambda_{1,2,3} = -2$.

$\lambda = -2$ è a parte reale negativa $\Rightarrow$ il sistema risulta A.S.

$K = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$, quindi $u = \emptyset$.

2.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q & -A_2^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -2 & 0 & 0 & 100 \\ & & & 0 & 0 & -8 \\ & \emptyset & & -1 & 0 & -4 \\ & & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -4 & -8 \\ 2 & & 2 & 8 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \emptyset \end{array} \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda^2+4\lambda+4)$$

$$(\lambda-2)(\lambda+2)^2$$

• Ho un autovalore a parte reale positiva $\Rightarrow \lambda = 2$

Faccio $A+BK$:

$$A+BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10K_1 & 10K_2 & 10K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10K_1+8 & 10K_2+4 & 10K_3-2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 10K_1+8 & 10K_2+4 & 10K_3-2-\lambda \end{bmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \\ 10K_1+8 & 10K_2+4 \end{bmatrix} = -\lambda^3 + (10K_3-2)\lambda^2 + (10K_2+4)\lambda + (10K_1+8)$$

• Ipotizzo che:

$$P_d(\lambda) = (\lambda+2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

$$\begin{cases} -10K_1 - 8 = 8 \\ -10K_2 - 4 = 12 \\ -10K_3 + 2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \varnothing \\ K_2 = -\frac{16}{10} = -\frac{8}{5} \\ K_3 = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} 0 & -8/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

• Conclusione:

$u = K \cdot x \Rightarrow$ la mia legge di controllo u è influenzata da K, quindi $J \neq \varnothing$ poiché $u \neq \varnothing$.

Il sistema è stabile.

4. Il candidato descriva il concetto di luogo simmetrico delle radici ed in particolare:

- formuli il problema di controllo ottimo dal quale origina
- ricavi l'espressione del polinomio caratteristico della matrice hamiltoniana per questo caso
- mostri come si può sfruttare questo risultato per progettare controllori ottimi per sistemi SISO

a)

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y^T(t)\, \overset{q}{Q}\, y(t) + u^T(t)\, \overset{r}{R}\, u(t)\, dt = \qquad Q \geq 0 \qquad R \geq 0$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} q\, y^2(t) + r\, u^2(t)\, dt = \frac{1}{2}\cdot q \int_0^{\infty} \cancel{\frac{q}{q}}\, y^2(t) + \frac{r}{q}\, u^2(t)\, dt =$$

$$J' = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y^2(t) + \rho\, u^2(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad \text{con } \rho = \frac{r}{q}$$

$$J' = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^T(t)\cdot C\cdot C^T\cdot x(t) + \rho\cdot u^2(t)\, dt$$

b)

Costruisco la matrice Hamiltoniana:

$$H = \begin{bmatrix} A & -B\rho^{-1}B^T \\ -C^TC & -A^T \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di H:

$$\det(\lambda I - H) = \det\begin{bmatrix} \lambda I - A & -B\rho^{-1}B^T \\ -C^TC & \lambda I + A^T \end{bmatrix} = \det(\lambda I - A)\cdot \det\left((\lambda I + A^T) - C^TC(\lambda I - A)^{-1}B\rho^{-1}B^T\right) =$$

$$= \det(\lambda I - A)\cdot \det\left(\left[I_{m\times m} - C^TC(\lambda I - A)^{-1}B\rho^{-1}B^T(\lambda I + A^T)^{-1}\right](\lambda I + A^T)\right) =$$

$$= \det(\lambda I - A)\cdot \det(\lambda I + A^T)\cdot \det\left(\left[I_{m\times m} - \underbrace{C^T}_{A_{m\times 1}}\underbrace{C(\lambda I - A)^{-1}B\rho^{-1}B^T(\lambda I + A^T)^{-1}}_{B_{m\times 1}}\right]\right) =$$

$$= \det(\lambda I - A)\cdot \det(\lambda I + A^T)\cdot \det\left(\left[I_{1\times 1} - \underbrace{C(\lambda I - A)^{-1}B}_{G(\lambda)}\rho^{-1}\underbrace{B^T(\lambda I + A^T)^{-1}C^T}\right]\right) =$$

$$B^T(\lambda I + A^T)^{-1}C^T \longrightarrow C(\lambda I + A)^{-1}B = -C(-\lambda I - A)^{-1}B = -G(-\lambda)$$

$$= \det(\lambda I - A)\cdot \det(\lambda I + A^T)\cdot \left(1 + \rho^{-1}G(\lambda)(G(-\lambda))\right)$$

dato $G(\lambda) = \dfrac{m(\lambda)}{d(\lambda)}$ e visto che $d(\lambda) = det(\lambda I - A)$ e che :

$$det(\lambda I + A^T) = det((-\lambda I - A^T)(-1)) = det((-\lambda I - A)(-1)) = det(-\lambda I - A) \cdot (-1)^m = d(-\lambda) \cdot (-1)^m$$

$$det(\lambda \cdot I - H) = d(\lambda) \cdot d(-\lambda) \cdot (-1)^m \cdot \left(1 + \rho^{-1} \cdot \frac{m(\lambda)}{d(\lambda)} \cdot \frac{m(-\lambda)}{d(-\lambda)}\right) =$$

$$= \left(d(\lambda) \cdot d(-\lambda) + \rho^{-1} \cdot m(\lambda) \cdot m(-\lambda)\right)(-1)^m$$

Posso ottenere $\lambda(H)$ dalla soluzione : $d(\lambda) \cdot d(-\lambda) + \rho^{-1} \cdot m(\lambda) \cdot m(-\lambda) = \varnothing$

C)

4. Dato il sistema dinamico:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

si calcoli l'ingresso di controllo ottimo $u(t)$ che porta lo stato dal punto $x(t_0 = 0) = [0, 0]$ al punto $x(t_f) = [.25, 0]$ nel tempo $t_f = 1$ minimizzando l'indice di costo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2(\tau) d\tau$$

Scegliamo $x_f = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad t_f = 1 \quad t_0 = 0$

$$x_f - e^{At_f} x_0 = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & t_f - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u^2(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u^2(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^2 \begin{bmatrix} 1-\tau \\ -1 \end{bmatrix} u^2(\tau)\, d\tau \implies \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^2 \begin{bmatrix} (2-\tau)u^2(\tau) \\ -u^2(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ed il problema di controllo ottimo descritto dal funzionale

$$J = \frac{1}{2}x(t_f)^T H x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

soggetto a : stato inziale $x(0) = x_0$ noto, stato finale desiderato $x(t_f) = x_f$ NON fissato, valore del tempo finale t_f fissato,

- si ricavi la matrice Hamiltoniana partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange
- si ricavi la soluzione ottima in forma chiusa $u^*(t) = f(A, B, Q, R, H, x_0, t, t_f)$ in funzione delle grandezze note (suggerimento: NON usare l'equazione di Riccati, non produce una soluzione in forma chiusa).

a)

Cominciamo definendo la funzione Hamiltoniana:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

Imponendo le equazioni di Eulero avremo:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = -Qx^* - A^T\lambda^* \\ \emptyset = \dfrac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = Ru^* + B^T\lambda^* \end{cases}$$

Da cui ricavo che: $u^*(t) = -R^{-1}B^T\lambda^*$ e quindi sostituendo avrò:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* + B(-R^{-1}B^T\lambda^*) = Ax^* - BR^{-1}B^T\lambda^* \\ \dot{\lambda}^* = -Qx^* - A^T\lambda^* \end{cases}$$

Quindi la matrice Hamiltoniana sarà:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} x_f & \text{Libero} \\ t_f & \text{Fissato} \end{array}$$

La condizione al contorno che devo imporre è

$$\lambda^* = \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f)$$

$$\lambda^* = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}x^T H x\right] = H x^*(t_f)$$

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ \lambda^*(t_f) \end{bmatrix} = \Psi(t, t_0) \cdot \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ \lambda^*(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t_f,t_0) & \Psi_{12}(t_f,t_0) \\ \Psi_{21}(t_f,t_0) & \Psi_{22}(t_f,t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix}$$

$$x^*(t_f) = \Psi_{11}(t_f,t_0) \cdot x^*(t_0) + \Psi_{12}(t_f,t_0) \cdot \lambda^*(t_0)$$

$$x^*(t_f) = \Psi_{11}(t_f,t) \cdot x^*(t) + \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)$$

$$\lambda^*(t_f) = \Psi_{21}(t_f,t) x^*(t) + \Psi_{22}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t) = H \cdot x^*(t_f) = H \cdot \left[\Psi_{11}(t_f,t) \cdot x^*(t) + \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)\right]$$

- Risolvo per $\lambda^*(t)$

$$\Psi_{21}(t_f,t) x^*(t) + \Psi_{22}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t) = H \cdot \left[\Psi_{11}(t_f,t) \cdot x^*(t) + \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)\right]$$

$$\Psi_{21}(t_f,t) x^*(t) + \Psi_{22}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t) = H \Psi_{11}(t_f,t) x^*(t) + H \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)$$

$$\Psi_{21}(t_f,t) x^*(t) - H \Psi_{11}(t_f,t) x^*(t) = H \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t) - \Psi_{22}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)$$

$$\lambda^*(t) = \left[H \Psi_{12}(t_f,t) - \Psi_{22}(t_f,t)\right]^{-1} \cdot x^* \left[\Psi_{21}(t_f,t) - H \Psi_{11}(t_f,t)\right] = \Lambda(t_f,t) \cdot x^*(t)$$

- Calcolo $u^*(t)$:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda^*(t) = -R^{-1} B^T \cdot \Lambda(t_f,t) \cdot x^*(t) = K(t_f,t) \cdot x^*(t)$$

4. Si consideri il sistema lineare tempo invariante $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo :

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^T R u \, dt$$

lo studente: proponga ricavi

- proponga condizioni necessarie sulle matrici S_f, ed R;
- descriva in maniera analitica la procedura che porta alla soluzione del problema di ottimizzazione, incluso le necessarie condizioni al contorno, e all'espressione del controllo ottimo $u(t)$,

a)

S_f simmetrica, reale e semidefinita positiva.

R simmetrica, reale e definita positiva.

b)

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^T R u \, dt$$

$$H = \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T(Ax + Bu)$$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = A^T\lambda^* \\ 0 = \dfrac{\partial H}{u} = Ru^* + B^T\lambda^* \quad \Rightarrow \quad u^* = -R^{-1}B^T\lambda^* \end{cases}$$

Com condizione al contorno: $\lambda^*(t_f) = S_f \cdot x^*(t_f)$

$\lambda^*(t) = S(t)\cdot x^*(t)$ con $S(t)$ incognita

Derivo $\lambda^*(t) \Rightarrow \dot{\lambda}^*(t) = \dot{S}(t)\cdot x^*(t) + S(t)\cdot \dot{x}^*(t)$

Sostituisco e ottengo:

$$A^T\lambda^* = \dot{S}(t)\cdot x^*(t) + S(t)(Ax^* + Bu^*) \Rightarrow A^T(S(t)\cdot x^*(t)) = \dot{S}(t)\cdot x^*(t) + S(t)Ax^* + S(t)BR^{-1}B^TS(t)x^*$$

$$\cancel{x(t)}\cdot\left(\dot{S}(t) + S(t)A + S(t)BR^{-1}B^TS(t)\right) = \varnothing$$

$$\dot{S}(t) + S(t)A + S(t)BR^{-1}B^T S(t) = \emptyset$$

Questa è l'equazione differenziale di Riccati: (con $Q = 0$)

La soluzione della DRE $\Longrightarrow u^*(t) = -R^{-1}B^T S(t)\, x(t)$

4. Sia dato il sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

e l'indice di costo :

$$J = \int_0^{\infty} x_1^2 + u^2$$

- si discuta l'esistenza di una soluzione $u(t)$ che minimizzi J
- si determini, se esiste, la soluzione ottima nella forma $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R) = 2$$

Sistema stabilizzabile

b)

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 \qquad \lambda^4 = t^2 \qquad \lambda^2 = t$$

$t^2 - 2t + 1 = \emptyset \qquad \frac{\Delta}{4} = 1 - 1 = 0 \qquad t_{1,2} = 1 \implies$ sostituisco $\lambda^2 = 1 \implies \lambda_{1,2} = \pm 1$

Il mio polinomio è $P(\lambda) = (\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & -1+k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A + BK - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda(1 - k_2) - k_1$$

$$\begin{cases} 1 - k_2 = 2 \implies k_2 = -1 \\ -k_1 = 1 \implies k_1 = -1 \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Il candidato :

- formuli il problema di controllo ottimo lineare quadratico in tempo finito con peso sullo stato finale
- assumendo che lo stato finale sia libero ed il tempo finale fissato, formuli le equazioni di Eulero-Lagrange e le condizioni al contorno necessarie
- ricavi la soluzione in forma chiusa dell'evoluzione ottima dello stato, dell'ingresso e del costato in funzione del tempo, del tempo iniziale, del tempo finale e dello stato iniziale: $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t) = f(t, t_0, t_f, x(t_0)))$

a)

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) \cdot H\, x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

con – H, Q simmetriche, reali e semidefinite positive

– R simmetrica, reale e definita positiva.

$H \geq \emptyset$, $Q \geq \emptyset$, $R > \emptyset$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

• Scrivo le equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -Qx^* - A^T\lambda^* \\ 0 = \dfrac{\partial H}{\partial u} = Ru^* + B^T\lambda^* \Rightarrow u^* = -R^{-1}B^T\lambda^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* + -BR^{-1}B^T\lambda^* \\ \dot{\lambda}^* = -Qx^* - A^T\lambda^* \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{\lambda}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = H(t) \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} x_f & \text{libero} \\ t_f & \text{Fissato} \end{array}$$

La condizione al contorno che devo imporre è

$$\lambda^* = \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f)$$

$$\lambda^* = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2} x^T H x\right] = H x^*(t_f)$$

c)

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ \lambda^*(t_f) \end{bmatrix} = \Psi(t, t_0) \cdot \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ \lambda^*(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t_f,t_0) & \Psi_{12}(t_f,t_0) \\ \Psi_{21}(t_f,t_0) & \Psi_{22}(t_f,t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix}$$

$$x^*(t_f) = \Psi_{11}(t_f,t_0) \cdot x^*(t_0) + \Psi_{12}(t_f,t_0) \cdot \lambda^*(t_0)$$

$$x^*(t_f) = \Psi_{11}(t_f,t) \cdot x^*(t) + \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)$$

$$\lambda^*(t_f) = \Psi_{21}(t_f,t) x^*(t) + \Psi_{22}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t) = H \cdot x^*(t_f) = H \cdot \left[\Psi_{11}(t_f,t) \cdot x^*(t) + \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)\right]$$

- Risolvo per $\lambda^*(t)$

$$\Psi_{21}(t_f,t) x^*(t) + \Psi_{22}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t) = H \cdot \left[\Psi_{11}(t_f,t) \cdot x^*(t) + \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)\right]$$

$$\Psi_{21}(t_f,t) x^*(t) + \Psi_{22}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t) = H \Psi_{11}(t_f,t) x^*(t) + H \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)$$

$$\Psi_{21}(t_f,t) x^*(t) - H \Psi_{11}(t_f,t) x^*(t) = H \Psi_{12}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t) - \Psi_{22}(t_f,t) \cdot \lambda^*(t)$$

$$\lambda^*(t) = \left[H \Psi_{12}(t_f,t) - \Psi_{22}(t_f,t)\right]^{-1} \cdot x^* \left[\Psi_{21}(t_f,t) - H \Psi_{11}(t_f,t)\right] = \Lambda(t_f,t) \cdot x^*(t)$$

- Calcolo $u^*(t)$:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda^*(t) = -R^{-1} B^T \cdot \Lambda(t_f,t) \cdot x^*(t) = K(t_f,t) \cdot x^*(t)$$

4. Si consideri il sistema lineare tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & \epsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Il candidato :

- trovi, al variare del parametro ϵ, i valori della matrice di guadagno della legge di controllo ottimo nella forma $u(t) = K(\epsilon)x(t)$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^{\infty} y^t y + u^t u$$

- analizzi il caso particolare $\epsilon = 0$ e discuta il risultato ottenuto. Dica inoltre se si sarebbe potuti giungere, per questo valore di ϵ, allo stesso risultato con un procedimento diverso e più semplice.

Q)

$$Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_\infty A + A^T S_\infty + Q - S_\infty B R^{-1} B^T S_\infty = \emptyset$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \epsilon \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \epsilon & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} = \emptyset$$

$$\begin{bmatrix} -s_1^2 + 4s_1 + 1 & \epsilon s_1 - s_1 s_2 + s_2 \\ \epsilon s_1 - s_1 s_2 + s_2 & -s_2^2 + 2\epsilon s_2 - 2s_3 \end{bmatrix} = \emptyset$$

$\boxed{S \text{ deve essere semi definita positiva}}$

$$\begin{cases} -s_1^2 + 4s_1 + 1 = \emptyset \implies s_1^2 - 4s_1 - 1 = \emptyset \quad \frac{\Delta}{4} = 4 + 1 = 5 \quad s_1 = 2 \pm \sqrt{5} \implies \text{Scelgo } s_1 = 2 + \sqrt{5} \geq \emptyset \\ \epsilon s_1 - s_1 s_2 + s_2 = \emptyset \implies s_2(1 - s_1) = -\epsilon s_1 \implies s_2 = -\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})} \\ \epsilon s_1 - s_1 s_2 + s_2 = \emptyset \\ -s_2^2 + 2\epsilon s_2 - 2s_3 = \emptyset \implies \left(\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})}\right)^2 + \frac{2\epsilon^2(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})} - 2s_3 = \emptyset \end{cases}$$

$$S_3 = \frac{\left(\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})}\right)^2 + \frac{2\epsilon^2(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})}}{2}$$

$$S_\infty = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & -\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})} \\ -\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})} & \frac{\left(\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})}\right)^2 + \frac{2\epsilon^2(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})}}{2} \end{bmatrix}$$

$$K = -R^{-1} \cdot B^T \cdot S_\infty = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & -\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})} \\ -\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})} & \frac{\left(\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})}\right)^2 + \frac{2\epsilon^2(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(2+\sqrt{5}) & +\frac{\epsilon(2+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})} \end{bmatrix}$$

b)

Con $\epsilon = \emptyset$

$$S_\infty = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$K = -R^{-1} \cdot B^T \cdot S_\infty = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2+\sqrt{5}) & \emptyset \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo è:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) = (1-\lambda) \cdot \det \left[\begin{array}{ccc|cc} 2-\lambda & 0 & -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 & -1-\lambda \\ -1 & 0 & -2-\lambda & -1 & 0 \end{array}\right] = (1-\lambda) \cdot \begin{bmatrix} (2-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda) + 1 + \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda)+1+\lambda\right] = (1-\lambda)(4+2\lambda+4\lambda+2\lambda^2-2\lambda-\lambda^2-2\lambda^2-\lambda^3+1+\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda^3-\lambda^2+5\lambda+5) =$$

$$= -\cancel{\lambda^3}-\lambda^2+\cancel{5\lambda}+5+\lambda^4+\cancel{\lambda^3}-5\lambda^2-\cancel{5\lambda} =$$

$$= \lambda^4-6\lambda^2+5$$

- Sostituisco: $\begin{cases} \lambda^4 = t^2 \\ \lambda^2 = t \end{cases}$

$$t^2-6t+5=0 \qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{6}{2}\right)^2-5 = 9-5 = 4$$

$$t_{1,2} = 3 \pm 2$$

$$\lambda^2 = (3\pm 2) \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{3\pm 2} \qquad \Rightarrow \quad P_d(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+\sqrt{5}) =$$

$$= \lambda^2+\sqrt{5}\lambda+\lambda+\sqrt{5}$$

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+K_1 & K_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = (2+K_1-\lambda)(-1-\lambda) = -2-2\lambda-K_1-K_1\lambda+\lambda+\lambda^2 =$$

$$= \lambda^2+\lambda(-1-K_1)-2-K_1$$

$$-2-K_1 = \sqrt{5} \Rightarrow K_1 = -2-\sqrt{5} \qquad K = \begin{bmatrix} -2-\sqrt{5} & \emptyset \end{bmatrix}$$

4. Sia dato il sistema tempo continuo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

si calcoli la matrice di retroazione ottima K (assumendo $u = Kx$) che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^{\infty} y(t)^2 + u(t)^2 dt$$

• Luogo simmetrico delle radici:

$$J = \int_0^{\infty} q\, y^2(t) + r\, u^2(t)\, dt = q \int_0^{\infty} \frac{\cancel{q} \cdot y^2(t)}{\cancel{q}} + \frac{r}{q} u^2(t)\, dt \qquad \frac{r}{q} = \rho$$

$$J = \int_0^{\infty} y^2(t) + \rho\, u^2(t)\, dt \qquad y = C \cdot x \Rightarrow y^2 = x^T C^T C x \qquad C^T C = Q$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x + \rho\, u^2(t)\, dt$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \rho = 1$$

• Scrivo la matrice Hamiltoniana:

$$H = \begin{bmatrix} A & -B \rho^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H - \lambda I) = \lambda^4 - 4\lambda^2 + 1$$

$$\begin{cases} \lambda^4 = t^2 \\ \lambda^2 = t \end{cases} \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = \varnothing \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 1 = 3 \Rightarrow t_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\lambda^2 = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda + \sqrt{2+\sqrt{3}})(\lambda + \sqrt{2-\sqrt{3}}) = \lambda^2 + \lambda\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + 1$$

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_1 & K_2-2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = -\lambda(K_2-2-\lambda) - K_1 = -K_2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - K_1 = \lambda^2 + \lambda(2-K_2) - K_1$$

$$\begin{cases} -K_1 = 1 \\ 2-K_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} -1 & 2-\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

- Si poteva svolgere anche con le ARE.

4. Sia dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

si determini la legge di controllo ottima $u(t) = Kx(t)$ che rende minimo l'indice di costo:

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t) \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 4u^2(t)dt$$

$$J = \int_0^{\infty} X^T(t) \cdot Q \cdot X(t) + 4u^2(t) \, dt$$

a)

$$H = \begin{bmatrix} A & -B \cdot R^{-1} \cdot B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(H - \lambda \cdot I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & -4 \\ -5 & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= +1 \cdot \det \left[\begin{matrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -4 \\ -5 & 0 & 2 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \\ -5 & 0 \end{matrix} \right] - \lambda \cdot \det \cdot \left[\begin{matrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix} \right] =$$

$$= \lambda^4 + 3\lambda^2 + 24 \qquad \begin{cases} \lambda^4 = t^2 \\ \lambda^2 = t \end{cases}$$

$$t^2 + 3t + 24 = \emptyset \qquad \Delta = 9 - 96 = -87$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{87}}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{-3 + i\sqrt{87}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-3 - i\sqrt{87}}{2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \pm\sqrt{\dfrac{-3+i\sqrt{87}}{2}} \\ \lambda_2 = \pm\sqrt{\dfrac{-3-i\sqrt{87}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \left(\lambda + \sqrt{\frac{-3+i\sqrt{87}}{2}}\right)\left(\lambda + \sqrt{\frac{-3-i\sqrt{87}}{2}}\right)$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \cdot \sqrt{\frac{-3 - i\sqrt{87}}{2}} + \lambda \sqrt{\frac{-3 + i\sqrt{87}}{2}} + \left(\sqrt{\frac{-3 + i\sqrt{87}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{-3 - i\sqrt{87}}{2}}\right)$$

$$(A + B \cdot K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2k_1 - 2 & 2k_2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$P(A + B \cdot K - \lambda I) = -\lambda(2k_2 - 1 - \lambda) - 2k_1 + 2 = \lambda^2 + \lambda(-2k_2 + 1) - 2k_1 + 2$$

$$\begin{cases} -2k_1 + 2 = \sqrt{\frac{-3 + i\sqrt{87}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{-3 - i\sqrt{87}}{2}} \\ -2k_2 + 1 = \sqrt{\frac{-3 + i\sqrt{87}}{2}} + \sqrt{\frac{-3 - i\sqrt{87}}{2}} \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{-\left(\sqrt{\frac{-3 + i\sqrt{87}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{-3 - i\sqrt{87}}{2}}\right) + 2}{2} & \dfrac{-\left(\sqrt{\frac{-3 + i\sqrt{87}}{2}} + \sqrt{\frac{-3 - i\sqrt{87}}{2}}\right) + 1}{2} \end{bmatrix}$$

4. Dato il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, e la traiettoria del vettore di stato desiderata $r(t)$, il candidato :

- ricavi il segnale di controllo $u^*(t)$ che rende minimo l'indice di costo:

$$J = 1/2(x(t_F) - r(t_F))^T S_f (x(t_F) - r(t_F)) + 1/2 \int_{t_0}^{t_F} (x(t) - r(t))^T Q(x(t) - r(t)) + u(t)^T Ru(t)dt$$

- discuta la possibilità di realizzare in forma di feedback la soluzione del problema e le sue implicazioni

(INSEGUITORE OTTIMO)

a) $\boxed{e(t) = x(t) - r(t)}$

$$H = \frac{1}{2} e^T(t) \cdot Q \cdot e(t) + u(t)^T R\, u(t) + \lambda^T (Ax + Bu)$$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -Q\, e^*(t) - A^T \lambda^*(t) = -Q x^* - A^T \lambda^* + Qr \\ 0 = Ru^* + B^T \lambda^* \Rightarrow u^* = -R^{-1} B^T \lambda^* \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ \hline Q \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t_f,t) & \Psi_{12}(t_f,t) \\ \Psi_{21}(t_f,t) & \Psi_{22}(t_f,t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t_f,\tau) & \Psi_{12}(t_f,\tau) \\ \Psi_{21}(t_f,\tau) & \Psi_{22}(t_f,\tau) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \emptyset \\ \hline Q r(\tau) \end{bmatrix} \cdot d\tau$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t_f,t) & \Psi_{12}(t_f,t) \\ \Psi_{21}(t_f,t) & \Psi_{22}(t_f,t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

- Dalle condizioni al contorno : $\lambda(t_f) = S_f \cdot e(t_f) = S_f\, x(t_f) - S_f \cdot r(t_f)$

$$\lambda(t_f) = S_f \cdot \left[\Psi_{11}(t_f,t) x(t) + \Psi_{12}(t_f,t) \lambda(t) + f_1(t) \right] - S_f \cdot r(t_f)$$

$$S_f \cdot \left[\Psi_{11}(t_f,t)\,x(t) + \Psi_{12}(t_f,t)\,\lambda(t) + f_1(t) \right] - S_f \cdot r(t_f) = \Psi_{21}(t_f,t)\cdot x(t) + \Psi_{22}(t_f,t)\,\lambda(t) + f_2(t)$$

$$\lambda(t)\cdot\left[S_f \Psi_{12}(t_f,t) - \Psi_{22}(t_f,t) \right] = x(t)\cdot\left[-S_f \Psi_{11}(t_f,t) + \Psi_{21}(t_f,t) \right] + \left[-S_f f_1(t) + S_f r(t) + f_2(t) \right]$$

$$\lambda(t) = \left[S_f \Psi_{12}(t_f,t) - \Psi_{22}(t_f,t) \right]^{-1} \cdot \left(\left[-S_f \Psi_{11}(t_f,t) + \Psi_{21}(t_f,t) \right] \cdot x(t) + \left[-S_f f_1(t) + S_f r(t) + f_2(t) \right] \right)$$

$$\lambda(t) = S(t)\,x(t) + g(t)$$

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\lambda^* = -R^{-1}B^T\left(S(t)\,x(t) + g(t) \right)$$

4. Si consideri il sistema lineare tempo continuo SISO descritto dalle matrici A, B, C. Si trovi, se esiste, al variare di ρ una legge di controllo nella forma $u(t) = K(\rho)x(t)$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^{\infty} \rho u^2(t)dt$$

nei seguenti tre casi:

(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si discuta nei tre casi la dipendenza da ρ della soluzione.

$$H = \rho u^2 + \lambda^T(Ax + Bu)$$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -A^T\lambda^* \\ 0 = \dfrac{\partial H}{\partial u} = 2\rho u^* + B^T\lambda^* \end{cases} \Rightarrow \quad u^* = -(2\rho)^{-1}B^T\lambda^*$$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* - B(2\rho)^{-1}B^T\lambda^* \\ \dot{\lambda}^* = -A^T\lambda^* \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{\lambda}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B(2\rho)^{-1}B^T \\ \varnothing & -A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}$$

a)

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Gli autovalori sono: } \lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = -6,\ \lambda_3 = -1$$

Tutti autovalori a parte reale negativa, quindi il sistema risulta A.S.

$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, quindi $u = \emptyset$.

b)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori sono: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$

$\lambda_3 = 3$ non è raggiungibile e quindi il sistema non è stabilizzabile.

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

È in forma canonica di controllo, sistema stabilizzabile.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & * & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$$

	-1	-1	1	1
1		-1	-2	-1
	-1	-2	-1	$\varnothing$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

1. $\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

2. $-\lambda^2 - 2\lambda - 1 = \varnothing \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = \varnothing \qquad \frac{\Delta}{4} = 1 - 1 = \varnothing$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

Gli autovalori sono:

$$\Lambda(A - \lambda I) = \{-1, -1, 1\} \qquad e \qquad \Lambda(-A^T - \lambda I) = \{1, 1, -1\}$$

Quindi $P_d(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$

$$(A + B \cdot K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1+3K_1 & 1+3K_2 & -1+3K_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A + B \cdot K - \lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & -\lambda \\ 1+3K_1 & 1+3K_2 & -1+3K_3-\lambda & 1+3K_1 & 1+3K_2 \end{array}\right] = \left(\lambda^2(-1+3K_3-\lambda) + 1 + 3K_1\right) + \lambda(1+3K_2) =$$

$$= -\lambda^2 + 3K_3\lambda^2 - \lambda^3 + 1 + 3K_1 + \lambda + 3K_2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(3K_3 - 1) + \lambda(1 + 3K_2) + 1 + 3K_1$$

$$\begin{cases} -1 - 3K_1 = 1 \\ -1 - 3K_2 = 3 \\ 1 - 3K_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} -2/3 & -4/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

4. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} x(t) = Cx(t)$$

e dato l'indice di costo:

$$J = \int_0^\infty y(t)^T y(t) + u(t)^T u(t) dt$$

- si definiscano le condizioni necessarie sui parametri α e β affinchè esista un estremale nella forma $u^*(t) = Kx^*(t)$ che renda minimo il funzionale J e stabilizzi il sistema in ciclo chiuso.
- fissate delle costanti α e β adeguate, si trovi il guadagno K del controllore ottimo stabilizzante.

a)

Condizione necessaria affinchè il problema di controllo ottimo abbia soluzione è che:

- la coppia (A,B) sia stabilizzabile.
- la coppia (A,C) sia rilevabile.

Verifico che (A,C) sia completamente raggiungibile:

$$O = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha+\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \det(O) = \alpha(\alpha+\beta) \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq -\beta \end{matrix}$$

Scelgo $\alpha = 1 \quad \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

b)

Uso l'equazione algebrica di Riccati (ARE):

$$S_\infty \cdot A + A^T S_\infty + Q - S_\infty B R^{-1} B^T S_\infty = \emptyset$$

$$Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = 1$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} = \varnothing$$

$$\begin{bmatrix} 0 & s_1+s_2 \\ 0 & s_2+s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_1+s_2 & s_2+s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & s_2 \\ 0 & s_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} = \varnothing$$

$$\begin{bmatrix} 1 & s_1+s_2 \\ s_1+s_2 & 2s_2+2s_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2^2 & s_2 s_3 \\ s_2 s_3 & s_3^2 \end{bmatrix} = \varnothing$$

$$\begin{bmatrix} 1-s_2^2 & s_1+s_2-s_2 s_3 \\ s_1+s_2-s_2 s_3 & 2s_2-s_3^2+2s_3 \end{bmatrix} = \varnothing$$

$$\begin{cases} 1-s_2^2 = \varnothing \quad \Rightarrow \quad s_2 = \pm 1 \quad \text{scelgo} \quad s_2 = 1 \quad S \text{ deve essere} \geq \varnothing \\ s_1+s_2-s_2 s_3 = \varnothing \\ 2s_2 - s_3^2 + 2s_3 = \varnothing \quad \Rightarrow \quad -s_3^2 + 2s_3 + 2 = \varnothing \end{cases}$$

$$s_3^2 - 2s_3 - 2 = \varnothing \qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 2 = 3$$

$$s_3 = 1 \pm \sqrt{3} = 1+\sqrt{3}$$

$$s_1+s_2-s_2 s_3 = \varnothing \qquad s_1 = -s_2 + s_2 s_3 = -1+1+\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$S_\infty = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad u^* = \underbrace{-R^{-1}B^T S_\infty}_{K} \cdot x(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

$$u^* = \begin{bmatrix} -1 & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$