Capitolo 3

Raggiungibilità e Controllabilità

Un problema di rilievo nella teoria dei sistemi che coinvolge gli stati e gli ingressi è quello del raggiungimento di un desiderato stato finale a partire da un dato stato iniziale, mediante applicazione di un opportuna azione di controllo.

Questo problema ha applicazioni dirette nel senso della pianificazione delle azioni di controllo da esercitare su un sistema in "anello aperto", cioè basandosi esclusivamente sulla conoscenza a priori del modello del sistema e del suo stato iniziale.

Inoltre, esso ha importantissime conseguenze sulle proprietà ottenibili dal sistema in "anello chiuso", cioè quando nella scelta del controllo si utilizzino anche misure effettuate sullo stato o sulle uscite.

Nei problemi di pianificazione, ci troveremo spesso di fronte a problemi che possono essere ricondotti a sistemi di equazioni in più incognite, per i quali si pongono i problemi di esistenza delle soluzioni (problema di raggiungibilità) e di non–unicità, e quindi di scelta, tra le soluzioni (problema di controllo ottimo).

Consideriamo un sistema tempo invariante in forma di stato

$$\mathbb{D}x(t) = f(x(t), u(t)),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, e $u(\cdot) \in U$, dove U è lo spazio di funzioni o successioni in cui è possibile scegliere i controlli. Sia al solito $x(x_0, u(\cdot), t)$ il valore della soluzione corrispondente a $x(0) = x_0$ e controllo $u(\tau), \tau \in [0, t]$, al tempo t.

U può ad esempio rappresentare un insieme di controlli ad ampiezza limitata ($U = \{u | \|u(\cdot)\|_\infty \leq 1\}$), o a quadrato sommabile limitato ($U = \{u | \|u(\cdot)\|_2 \leq 1\}$); la classe più generale usualmente considerata è quella dei controlli quasi–continui (con un numero finito di discontinuità su qualsiasi intervallo finito).

Si definisce insieme dei punti *raggiungibili* al tempo t da x_0 l'insieme $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \exists \bar{u} \in U : x(x_0, \bar{u}, t) = \bar{x}\}$.

3.1 Insieme di raggiungibilità

3.1.1 Sistemi LTITC

Consideriamo l'insieme di raggiungibilità per il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \tag{3.1}$$

nell'ipotesi che tutte le componenti dell'ingresso $u(t)$ siano funzioni analitiche in $[0, t]$, cioè funzioni lisce (differenziabili con continuità infinite volte) e sviluppabili in serie di potenze. Usando per semplicità f_t per indicare la funzione $f(t)$ valutata in t (quindi ad esempio u_0 indica $u(0)$), si ha

$$u_t = \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)} \frac{t^k}{k!}$$

dove con $u_t^{(0)}$ si intende la funzione non derivata.

In queste ipotesi, anche la soluzione della equazione differenziale (3.1) è sviluppabile in serie di potenze:

$$x(x_0, u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_0^{(k)} \frac{t^k}{k!}$$

Differenziando (3.1) si ottengono le espressioni delle derivate che appaiono nella serie:

$$\begin{array}{ccc} x^{(1)} & = & Ax + Bu \\ x^{(2)} & = & A^2x + ABu + Bu^{(1)} \\ x^{(3)} & = & A^3x + A^2Bu + ABu^{(1)} + Bu^{(2)} \\ \vdots & = & \vdots \\ x^{(k)} & = & A^kx + \sum_{i=1}^{k} A^{k-i}Bu^{(i-1)} \end{array}$$

da cui, valutando in $t = 0$ e sostituendo, si ha

$$x(x_0, u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} A^{k-i} B u_0^{(i-1)} \frac{t^k}{k!}.$$

La prima sommatoria a sinistra vale $e^{At}x(0)$ e rappresenta l'evoluzione libera del sistema. Scrivendo i primi termini dello sviluppo esplicito della seconda sommatoria,

$$Bu_0 t + ABu_0\frac{t^2}{2} + Bu_0^{(1)}\frac{t^2}{2} + A^2Bu_0\frac{t^3}{3!} + ABu_0^{(1)}\frac{t^3}{3!} + Bu_0^{(2)}\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

si osserva che le somme possono essere riorganizzate in un prodotto matriciale scrivendo

$$x(x_0,u,t) = e^{At}x_0 + \left[B|AB|A^2B|\cdots|A^{r-1}B|\cdots\right]\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)}\frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)}\frac{t^{k+3}}{(k+3)!} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)}\frac{t^{k+r}}{(k+r)!} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Si osservi a questo punto che le serie che appaiono nel vettore di infinite componenti a destra convergono agli integrali indefiniti successivi degli ingressi u_t. Infatti, poichè si è ipotizzato u_t liscia, quindi senza impulsi nell'origine, si ha

$$\begin{aligned} u_t^{(-1)} &\overset{def}{=} \int_0^t u(t_1)dt_1 = u_0^{(-1)} + u_0^0 t + u_0^{(1)}\tfrac{t^2}{2} + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)}\tfrac{t^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t^{(-2)} &\overset{def}{=} \int_0^t\int_0^{t_1} u(t_2)dt_2dt_1 = u_0^{(-2)} + u_0^{(-1)}t + u_0^0\tfrac{t^2}{2} + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)}\tfrac{t^{k+2}}{(k+2)!} \end{aligned}$$

e in generale

$$u_t^{(-r)} = \overbrace{\int_0^t\int\cdots\int}^{rvolte} u(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)}\frac{t^{k+r}}{(k+r)!}$$

Si può dunque riscrivere

$$x(x_0,u,t) = e^{At}x_0 + \left[B|AB|A^2B|\cdots|A^{r-1}B|\cdots\right]\begin{bmatrix} u_t^{(-1)} \\ u_t^{(-2)} \\ u_t^{(-3)} \\ \vdots \\ u_t^{(-r)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Essendo le funzioni di ingresso lisce ma peraltro non vincolate in alcun modo, esse possono assumere valori arbitrari nell'intervallo $[0, t]$. Pertanto, anche i loro integrali valutati al tempo t possono assumere valori arbitrari.

Consideriamo innanzitutto l'insieme degli stati raggiungibili al tempo t a partire dall'origine $x(0) = 0$. Tenendo conto del teorema di Cayley–Hamilton, esso risulta in effetti indipendente da t e vale

$$\mathcal{R} = \mathsf{Im}\,(R) \stackrel{def}{=} \mathsf{Im}\,(\left[\ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\ \right]$$

L'insieme raggiungibile dall'origine al tempo t è dunque raggiungibile in effetti in tempo arbitrario, lo stesso stato essendo raggiunto in tempo più breve a costo di un più energico controllo. Questo insieme è poi un sottospazio vettoriale, detto *sottospazio di raggiungibilità* del sistema. La matrice R viene detta *matrice di raggiungibilità del sistema*.

L'insieme degli stati raggiungibili a partire dallo stato generico $x(0) = x_0$ al tempo t è pertanto dato da

$$\mathcal{R}_t(x_0) = \left\{x = e^{At}x_0 + r, \forall r \in \mathcal{R}\right\}$$

ed è quindi un iperpiano, parallelo al sottospazio di raggiungibilità, passante per $e^{At}x_0$. Al variare di t, l'insieme raggiungibile descrive una famiglia di iperpiani paralleli, la cui unione costituisce l'insieme degli stati raggiungibili.

Si noti che l'insieme dei punti raggiungibili è l'intero spazio di stato nel caso in cui $\mathsf{dim}\,(\mathcal{R}) = \mathsf{rank}\,(R) = n$; tutti gli stati sono in effetti raggiungibili in tempo arbitrariamente piccolo. In questo caso, il sistema stesso si dice *completamente raggiungibile*.

3.1.2 Sistemi LTITD

Consideriamo l'insieme di raggiungibilità per il sistema

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{3.2}$$

La soluzione della equazione alle differenze (3.2) (che indicheremo con $x(x_0, u, t)$) è data da

$$x(x_0, u, t) = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1}Bu(k)$$

che si può riscrivere nella forma

$$x(x_0, u, t) = A^t x_0 + \left[B|AB|A^2B|\cdots|A^{t-1}B\right] \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ u(t-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Consideriamo innanzitutto l'insieme degli stati raggiungibili in t passi a partire dall'origine $x(0) = 0$:

$$\mathcal{R}_t = \mathsf{Im}\,(R_t) \stackrel{def}{=} \mathsf{Im}\,(\left[\ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{t-1}B\ \right]$$

che, in modo del tutto analogo al caso TC, viene detto *sottospazio di raggiungibilità in t passi* del sistema, mentre la matrice R viene detta *matrice di raggiungibilità in t passi del sistema*.

È evidente che il sottospazio di raggiungibilità in $t+1$ passi $\mathcal{R}_{t+1}$ contiene $\mathcal{R}_t$, e che quindi la successione definita dalle dimensioni dei sottospazi di raggiungibilità al crescere del numero di passi è non decrescente; essa è peraltro superiormente limitata dalla dimensione dello spazio di stato n, per cui la successione si stabilizzerà in un valore finito. Per il teorema di Cayley–Hamilton, il sottospazio di raggiungibilità in un numero arbitrariamente grande di passi può essere calcolato arrestandosi all'n–esimo passo,

$$\mathcal{R} = \mathsf{Im}\,(R) \stackrel{def}{=} \mathsf{Im}\,(\left[\ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\ \right]).$$

Questo viene detto *sottospazio di raggiungibilità* del sistema, mentre la matrice R viene detta *matrice di raggiungibilità del sistema*. Ogni stato raggiungibile a partire dall'origine in un numero qualsiasi di passi può essere anche raggiunto in non più di n passi.

L'insieme degli stati raggiungibili a partire dallo stato generico $x(0) = x_0$ al tempo t è pertanto dato da

$$\mathcal{R}_t(x_0) = \left\{x = A^t x_0 + r, \forall r \in \mathcal{R}_t\right\}$$

ed è quindi ancora un iperpiano, parallelo al sottospazio di raggiungibilità, passante per $A^t x_0$.

L'insieme dei punti raggiungibili è l'intero spazio di stato nel caso in cui $\mathsf{dim}\,(\mathcal{R}) = \mathsf{rank}\,(R) = n$. In tal caso, il sistema stesso si dice *completamente raggiungibile*.

3.1.3 Controllabilità all'origine

Un particolare interesse riveste talvolta il raggiungimento dell'origine dello spazio degli stati, che rappresenta spesso la condizione di riposo o di riferimento per il sistema. Si definisce per questo motivo un ulteriore insieme, l'insieme degli stati *controllabili a zero* al tempo t come

$$\mathcal{C}_t = \{\bar{x} \in \mathrm{I\!R}^n | \exists u \in U : x(\bar{x}, u, t) = 0\}\,.$$

Esplicitando la definizione nel caso LTITD, si ha

$$0 = A^t \bar{x} + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B u(k)$$

ovvero, $\bar{x}$ è controllabile a zero se $-A^t\bar{x}$ è raggiungibile dall'origine. Dato uno stato $\bar{x}$ controllabile a zero in t passi, ogni stato $\bar{x}+\tilde{x}$ con $\tilde{x} \in \ker(A^t)$ lo è anch'esso. L'insieme controllabile a zero in t passi è dunque un sottospazio vettoriale, dato da

$$\mathcal{C}_t = \left\{ x | x = \hat{x} + \tilde{x}, A^t\hat{x} \in \mathcal{R}_t, \tilde{x} \in \ker(A^t) \right\}$$

Se ogni stato è controllabile a zero in t passi, si dice che *il sistema* è controllabile a zero in t passi. Ciò significa che

$$\mathrm{Im}\,(A^t) \subseteq \mathrm{Im}\,(R_t)$$

Se esiste un tempo t per il quale questa relazione è soddisfatta, il sistema si dice controllabile. Dal teorema di Cayley–Hamilton segue che un sistema è controllabile se e solo se è controllabile in n passi, quindi se

$$\mathrm{Im}\,(A^n) \subseteq \mathcal{R} = \mathrm{Im}\,\left(\left[B | AB | \cdots | A^{n-1}B \right] \right)$$

Naturalmente, la raggiungibilità implica la controllabilità, ma non viceversa. Ad esempio, un sistema con matrice A nulla è certamente controllabile, mentre non è raggiungibile a meno che vi siano almeno tanti ingressi quanti stati e $\mathrm{rank}\,(B) = n$. Controllabilità e raggiungibilità nei sistemi LTITD sono sinonimi se A è nonsingolare.

Nei sistemi LTITC, l'insieme controllabile a zero in tempo t è definito in modo analogo come l'insieme degli stati che risolvono l'equazione

$$0 = e^{At}\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

quindi, per quanto visto sopra, essendo sempre e^{At} invertibile $\mathcal{C}_t = \mathcal{R}_t$. Nei sistemi tempo–continui, i concetti di controllabilità e raggiungibilità di uno stato sono coincidenti.

3.1.4 Raggiungibilità di sistemi non LTI

L'analisi della raggiungibilità per sistemi tempo–varianti e nonlineari in generale è sostanzialmente più complessa che nei casi sinora visti. Daremo perciò solo alcune indicazioni generali, lasciando lo studio dei casi più generali a corsi più avanzati.

Per un sistema *lineare tempo variante* TC, gli argomenti usati nella dimostrazione della raggiungibilità LTITC possono essere estesi: sviluppando la soluzione di

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x_0 \tag{3.3}$$

con ingresso $u(t)$ analitico in $[0, t]$, si ha

$$x(x_0, u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}$$

dove

$$\begin{array}{rcl} x^{(1)} & = & Ax + Bu \\ x^{(2)} & = & A^2x + ABu + B\dot{u} + \dot{A}x + \dot{B}u \\ x^{(3)} & = & A^3x + A^2Bu + AB\dot{u} + B\ddot{u} + A\dot{A}x + \dot{A}Ax + \dot{A}Bu + A\dot{B}u + \dot{B}u + \ddot{A}x \\ \vdots & = & \vdots \end{array}$$

Introducendo l'operatore $\Delta \stackrel{def}{=} \left(A - \frac{d}{dt}\right)$, valutando le derivate in $t = 0$, sostituendo e raccogliendo opportunamente si ottiene, per $x_0 = 0$

$$x(0, u, t) \in \mathsf{Im}\ \left(\left[B|\Delta B|\Delta^2 B|\cdots|\Delta^{r-1}B|\cdots\right]\right)$$

In questo caso non è detto che si possa arrestare la costruzione della matrice all'n–esimo blocco di colonne.

Per sistemi nonlineari la situazione è più complessa. Si può dimostrare che vale il seguente teorema:

Teorema. Se per il sistema $\dot{x} = f(x, u)$ il sistema linearizzato approssimato attorno a $\bar{x}, \bar{u}$ $(f(\bar{x}, \bar{u}) = 0)$, $\dot{z} = Az + Bu$ è raggiungibile, allora l'insieme raggiungibile da $\bar{x}$ contiene un intorno di $\bar{x}$.

Quindi, la raggiungibilità (globale) del linearizzato approssimato implica la raggiungibilità (locale) del sistema effettivo. Questa condizione è solo sufficiente: ad esempio, il sistema che rappresenta la cinematica di un veicolo su ruote che avanza con velocità lineare $u_1 = v$ e angolare $u_2 = w$, data da

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \\ w \end{bmatrix}$$

ha un linearizzato (in un equilibrio qualsiasi) con $A = 0$ e $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, quindi non è raggiungibile. Comunque, il vero sistema è certamente raggiungibile.

3.2 Cambiamenti di Coordinate

Le proprietà di raggiungibilità e controllabilità non sono alterate da cambiamenti di coordinate (si dicono per questo proprietà *strutturali*). Si consideri infatti il cambiamento di coordinate $x = Tz$, e il sistema $\mathbb{D}z = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$, per il quale si ha

$$\hat{R} = \left[T^{-1}B|T^{-1}ATT^{-1}B|\cdots|T^{-1}A^{n-1}TT^{-1}B\right] = T^{-1}R$$

che ha lo stesso rango di R. Per la controllabilità, basta osservare che anche $(T^{-1}AT)^t = T^{-1}A^tT$, quindi entrambe i membri dell'equazione che definisce il sottospazio di controllabilità a zero sono premoltiplicati per T^{-1}.

Date due rappresentazioni in coordinate diverse dello stesso sistema raggiungibile, e note le matrici di raggiungibilità nei due casi, è possibile trovare la matrice che trasforma la prima nella seconda. Infatti avendosi $\hat{R} = T^{-1}R$, si ha $\hat{R}\hat{R}^T = T^{-1}R\hat{R}^T$, da cui (essendo $\hat{R}$ a pieno rango righe) $T = R\hat{R}^T\left(\hat{R}\hat{R}^T\right)^{-1}$.

Nel caso SISO, R e $\hat{R}$ sono quadrate e invertibili, per cui si ha semplicemente

$$T = R\hat{R}^{-1}$$

Si osservi che, per sistemi SISO, la matrice R è quadrata di dimensione n, quindi se la condizione di completa raggiungibilità per il sistema viene ottenuta, R è invertibile. Nei sistemi MIMO con m ingressi, invece, $R \in \mathbb{R}^{n\times nm}$. La condizione $\mathsf{rank}\,([B|AB|\cdots|A^{p-1}B]) = n$ può ottenersi per qualche $p < n$: il minimo di tali p si dice indice di raggiungibilità del sistema MIMO (nel caso TD, p rappresenta il minimo numero di passi con i quali è possibile raggiungere un punto arbitrario). Perchè sia $p < n$ è necessario e sufficiente che sia $\mathsf{rank}\,(B) \geq 2$.

3.3 Scomposizione Standard dei Sistemi

3.3.1 Sottospazi invarianti

Un sottospazio vettoriale $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione n_v può essere descritto mediante una sua *matrice di base* V, cioè una matrice $n \times n_v$ tale che, $\forall x_v \in \mathcal{V}, \exists!y : x_v = Vy$, ovvero $\mathcal{V} = \mathsf{Im}\,(V)$ (notazione: anche $\mathcal{V} = \mathcal{R}(V)$, $\mathcal{V} = \text{span}\,(V)$).

Supponiamo che un vettore $x_v \in \mathcal{V}$ sia descritto in certe coordinate correnti. Consideriamo un cambiamento di coordinate $x = Tz$, dove $T = [V|V_c]$

è invertibile, e V_c rappresenta una matrice $n \times (n - n_v)$ di colonne indipendenti tra loro e da quelle di V (cioè una *matrice di base complementare a* V *per* $\mathbb{R}^n$). Se le nuove coordinate di x_v sono z_v, cioè se $x_v = Tz_v$, allora le ultime $n - n_v$ coordinate di z_v sono nulle.

Infatti, suddividendo a blocchi, si deve poter scrivere

$$
\begin{aligned}
x_v = Vy = \left[\begin{array}{c|c} V & V_c \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z_1 \\ \hline z_2 \end{array}\right] = Vz_1 + V_c z_2 \\
\Rightarrow z_1 = y, z_2 = 0_{n-n_v \times 1}
\end{aligned}
$$

Un sottospazio $\mathcal{V}$ si dice invariante rispetto ad una matrice A se $\forall x_v \in \mathcal{V}$, anche $Ax_v \in \mathcal{V}$.

Ad esempio, lo spazio generato da un numero qualsiasi di autovettori associati allo stesso autovalore è uno sottospazio invariante; così anche per gli autospazi generalizzati incontrati nella forma di Jordan. L'intero spazio, così come lo spazio banale (comprendente solo l'origine) sono ovviamente spazi invarianti.

Nelle coordinate T sopra associate ad un sottospazio, se questo è A–invariante, la matrice A ha anch'essa struttura a blocchi, e poiché vale

$$
\begin{aligned}
T^{-1}Ax_v = \left[\begin{array}{c} \star \\ \hline 0 \end{array}\right] = T^{-1}ATz_v = \hat{A}z_v \\
= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hline \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \star \\ \hline 0 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

(dove $\star$ denota un vettore non nullo in generale la cui espressione qui non interessa), deve essere $\hat{A}_{21} = 0$, cioè

$$
\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hline 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right]
$$

Questa proprietà delle coordinate adattate ad un sottospazio A-invariante sono molto utili a caratterizzare l'evoluzione di un sistema.

Se lo stato iniziale di un sistema LTI (A, B, C, D) appartiene ad un sottospazio A–invariante, allora tutta la evoluzione libera appartiene allo stesso sottospazio. Infatti, sia e^{At} in TC, che A^t in TD, mantengono la struttura triangolare a blocchi della matrice A (supponendo di essersi già posti in coordinate adatte).

Date le condizioni iniziali x_0, il più piccolo sottospazio W che contiene tutta la evoluzione libera dello stato è dato da

$$
W = \mathsf{Im} \left[\begin{array}{c|c|c|c} x_0 & Ax_0 & \cdots & A^{n-1}x_0 \end{array}\right]
$$

(*sottospazio ciclico generato da* x_0).

Infatti, nel caso TC, si ha

$$x(t) = e^{At}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A_k x_0$$
$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} x_0 & Ax_0 & A^2x_0 & \cdots \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline t \\ \hline \frac{t^2}{2} \\ \hline \vdots \end{array}\right]$$

Per il teorema di Cayley–Hamilton, se $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ è il polinomio caratteristico di A, allora $\pi(A) = 0$, quindi $A^k = -a_0 - \ldots - a_{n-1}A^{n-1}$; cioè A^k (e tutte le successive potenze di A) sono combinazioni lineari delle prime $n-1$ potenze; e ciò vale anche a fortiori per $A^k x_0$, quindi la tesi.

Nel caso TD, la dimostrazione è del tutto simile, usando la formula della evoluzione libera relativa.

3.3.2 Forma Standard di Raggiungibilità

Il sottospazio di raggiungibilità, sia nel caso LTITC che LTITD, ha una importante caratterizzazione geometrica: esso è il più piccolo sottospazio A–invariante che contiene $\mathsf{Im}\,(B)$ (che si denota $< A|B >$).

È ovvio infatti che $\mathsf{Im}\,([B|AB|\cdots|A^{n-1}B])$ contiene $\mathsf{Im}\,(B)$ e che è A–invariante. Inoltre, se $\mathcal{S}$ contiene $\mathsf{Im}\,(B)$ ed è A–invariante, esso contiene anche $\mathsf{Im}\,(A^kB)$, $\forall k$, e quindi $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}$.

Sia $T_R \in \mathbb{R}^{n\times r}$ una matrice di base per il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{R} = \mathsf{Im}\,(R)$ del sistema LTI

$$\mathbb{D}x = Ax + Bu,$$

e $T_N \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ una matrice di base complementare. Nelle nuove coordinate descritte da

$$x = Tz \stackrel{def}{=} \left[\begin{array}{c|c} T_R & T_N \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z_R \\ \hline z_N \end{array}\right]$$

il sistema diviene $\mathbb{D}z = T^{-1}ATz + T^{-1}B$, ovvero

$$\left[\begin{array}{c} \mathbb{D}z_R \\ \hline \mathbb{D}z_N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_R & A_{RN} \\ \hline 0 & A_N \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z_R \\ \hline z_N \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_R \\ \hline 0 \end{array}\right] u$$

dove $z_R \in \mathbb{R}^r$ e $z_N \in \mathbb{R}^{n-r}$.

In queste coordinate, il sistema è dunque riscritto nella forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}z_R & = & A_R z_R + A_{RN} z_N + B_R u \\ \mathbb{D}z_N & = & A_N z_N \end{array} \tag{3.4}$$

cioè effettivamente scomposto in due sottosistemi, dei quali il secondo, con stato z_N, evolve autonomamente (secondo la $z_N(t) = e^{A_N t} z_N(0)$, ovvero la $z_N(t) = A_N^t z_N(0)$), quindi non dipende dall'ingresso né direttamente, né indirettamente attraverso lo stato z_R. Il sottospazio di raggiungibilità del sottosistema z_N è vuoto.

Per quanto riguarda il sottosistema con stato z_R e matrici (A_R, B_R), esso è completamente raggiungibile: infatti, la matrice di raggiungibilità dell'intero sistema nelle nuove coordinate è

$$R' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_R & A_R B_R & \cdots & A_R^{n-1} B_R \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] = T^{-1} R$$

quindi, avendo R' rango r come R, le sue prime r righe, le sole non nulle, sono indipendenti. La presenza del termine incrociato A_{RN} non influenza la raggiungibilità di un arbitrario stato $z_N(t)$ desiderato a partire da qualsiasi stato iniziale $z_N(0)$ del sottosistema (in tempo t arbitrario per sistemi TC, e almeno in $t = r$ passi per sistemi TD), essendo questo sottosistema completamente controllabile.

La forma (3.4) viene detta *forma standard di raggiungibilità* del sistema. Il sottosistema (A_R, B_R) (o $(A_R, B_R, C_R = CT_R, D)$ se si include l'equazione di uscita) è detto *sottosistema raggiungibile*; il sottosistema $(A_N, B_N, C_N = CT_N, D)$ è detto *sottosistema non raggiungibile*.

La scelta delle matrici di base T_R e complementare T_N è arbitraria: qualsiasi matrice $T_R' = T_R Q_R$ e $T_N' = T_N Q_N$, con $Q_R \in \mathbb{R}^{r\times r}$ e $Q_N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ invertibili, potrebbero essere usate per costruire la forma standard. Si avrebbe in tal caso $T' = [T_R Q_R | T_N Q_N] = T\ \mathsf{diag}\ (Q_R, Q_N)$ e la forma standard risultante

$$\left[\begin{array}{c} \mathbb{D}w_R \\ \hline \mathbb{D}w_N \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Q_R^{-1} A_R Q_R & Q_R^{-1} A_{RN} Q_N \\ \hline 0 & Q_N^{-1} A_N Q_N \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w_R \\ \hline w_N \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} B_R Q_R \\ \hline 0 \end{array} \right] u$$

che evidentemente ha blocchi diagonali diversi ma simili (algebricamente equivalenti) a quelli ottenuti in altra base. Gli autovalori di A_R e quelli di A_N sono quindi invarianti in numero e in posizione con i cambiamenti di coordinate, e sono quindi proprietà strutturali del sistema. I primi vengono detti *autovalori interni al sottospazio di raggiungibilità*, i secondi *esterni*.

La funzione di trasferimento di un sistema non dipende dalla sua parte non raggiungibile. Infatti,

$$\begin{aligned}
G(s) &= C\,(sI-A)^{-1}\,B + D = \\
&= \left[\, C_R \mid C_N \,\right] \left[\begin{array}{c|c} sI_r - A_R & -A_{RN} \\ \hline 0 & sI_{n-r} - A_N \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} B_R \\ \hline 0 \end{array}\right] + D = \\
&= \left[\, C_R \mid C_N \,\right] \left[\begin{array}{c|c} (sI_r - A_R)^{-1} & M \\ \hline 0 & (sI_{n-r} - A_N)^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_R \\ \hline 0 \end{array}\right] + D = \\
&= C_R\,(sI_r - A_R)^{-1}\,B_R + D
\end{aligned}$$

(dove M indica una matrice il cui calcolo esplicito è superfluo).

Il fatto che la f.d.t di un sistema non dipenda dal sottosistema non raggiungibile, e che quindi il sottosistema non raggiungibile non influenzi il rapporto ingresso–uscita, ha importanti implicazioni. In particolare, tra i poli della $G(s)$ non appariranno gli autovalori di A_N: ciò significa che questi ultimi vengono sistematicamente cancellati da zeri coincidenti nella espressione

$$G(s) = \frac{C\ \mathsf{adj}\ (sI - A)\,B}{\det\,(sI - A)} + D$$

3.4 Lemma P.B.H.

La condizione di completa raggiungibilità è verificabile per ispezione diretta delle matrici del sistema in alcuni casi.

Se la matrice dinamica A di un sistema SISO è diagonale, $A = \ \mathsf{diag}\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, la matrice di raggiungibilità è

$$R = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B_1 & \lambda_1 B_1 & \lambda_1^2 B_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} B_1 \\ B_2 & \lambda_2 B_2 & \lambda_2^2 B_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_n & \lambda_n B_n & \lambda_n^2 B_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} B_n \end{array}\right]$$

Perchè questa sia di pieno rango, è necessario che tutte le componenti di B siano diverse da zero, e che tutti gli autovalori siano distinti (si avrebbero altrimenti righe nulle o righe proporzionali). Queste condizioni sono anche sufficienti: infatti si può riscrivere

$$R = \mathsf{diag}\,(B_1, B_2, \ldots, B_n)\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

ed il determinante della matrice a destra (che è una matrice di Vandermonde) non si annulla per λ_i distinti.

Nel caso più generale di sistema MIMO con forma di Jordan nota, la verifica di raggiungibilità può essere fatta ricorrendo al *Lemma P.B.H.* (Popov, Belevitch, Hautus):

Teorema Il sistema LTI con matrici (A, B) è raggiungibile se e solo se la matrice

$$P(\lambda) = \left[\ \lambda I - A \mid B\ \right] \tag{3.5}$$

ha rango pieno per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Basterà considerare $\lambda = \lambda_i \in s(A)$, $\forall i$. Supponiamo che per qualche λ_i, $\mathsf{rank}\,(P(\lambda_i)) < n$: allora esisterà un vettore $q \neq 0$ tale che $q^T P(\lambda_i) = 0$, ovvero tale che al contempo

$$q^T B = 0 \ \text{ e } q^T A = \lambda_i q^T \tag{3.6}$$

Postmoltiplicando la seconda per B, si ha

$$q^T AB = \lambda_i q^T B = 0$$

e postmoltiplicando per AB si ha

$$q^T A^2 B = \lambda_i q^T AB = 0$$

Iterando questa procedura, si trova che

$$q^T \left[\ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\ \right] = 0$$

per cui R non ha rango n, e il sistema non è raggiungibile.

Di converso, supponiamo che il sistema non sia raggiungibile; senza perdere in generalità possiamo assumere che A, B siano in forma standard di raggiungibilità, e dobbiamo far vedere che, se A_N ha dimensione $n - r > 0$,

allora esiste un $\bar{q}$ che soddisfa (3.6).
Per questo $\bar{q}$ sarà

$$\bar{q}^T B = \bar{q}^T \left[\frac{B_R}{0} \right] = 0 \Rightarrow \bar{q}^T = \left[\ 0 \mid \bar{q}_R^T\ \right]$$

e inoltre basterà scegliere

$$\bar{q}_R^T A_N = \lambda_i \bar{q}_R^T$$

Applichiamo il lemma PBH al caso di una coppia (A, B) con A in forma di Jordan, con p miniblocchi:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c|cccc}
\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\
0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 & & \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
 & 0 & & & \ddots & & 0 & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\
 & 0 & & & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\
 & & & & & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\
 & & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p
\end{array}\right] ; \quad B = \left[\begin{array}{c}
B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{1,m_1} \\ \hline \vdots \\ \hline B_{p,1} \\ B_{p,2} \\ \vdots \\ B_{p,m_p}
\end{array}\right]$$

Risulta che, per essere raggiungibile, le ultime righe B_{i,m_i} per ogni miniblocco corrispondente ad autovalori coincidenti, devono essere linearmente indipendenti. Infatti la matrice $\lambda_i I - A$ ha tante righe nulle quante sono i miniblocchi associati a λ_i, cioè la molteplicità geometrica μ_i di λ_i , ed il rango di $P(\lambda_i)$ non diminuisce se e solo se le corrispondenti righe estratte da B hanno rango μ_i.

In particolare, per un sistema SISO, è necessario che la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori sia pari a uno, e che B abbia almeno tanti elementi diversi da zero quanti gli autovalori distinti di A

Se in un sistema SISO vi sono più catene di autovalori generalizzati corrispondenti ad uno stesso autovalore, solo i modi di (al più) la più lunga di queste catene potranno apparire nella risposta forzata del sistema. In altri termini, nella f.d.t. il polo corrispondente apparirà con molteplicità pari (al più) alla dimensione del miniblocco di ordine più elevato.

Esempio: Per il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}^T; D = 0$$

si ha

$$G(s) = \frac{C \begin{bmatrix} (\lambda+1)^2 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix} B}{(\lambda+1)^3} = \frac{C_1B_2 + (C_1B_1 + C_2B_2 + C_3B_3)(\lambda+1)}{(\lambda+1)^2}$$

Un sistema con μ_i miniblocchi associati ad un unico autovalore λ_i può essere raggiungibile solo se ha almeno μ_i ingressi.

3.5 Forma canonica di controllo

Si consideri un sistema SISO con matrici (A_c, B_c) nella particolare forma

$$A_c = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{array}\right]; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La forma di A_c si dice *compagna orizzontale inferiore*. Il polinomio caratteristico (o *compagno*) $\pi_c(s)$ di una matrice $A_{c,n}$ di dimensione n in questa forma, si può calcolare ricorsivamente sviluppando il determinante secondo gli elementi della prima colonna:

$$\begin{aligned}
\pi_c(s) = \det(sI - A_{c,n}) &= \det\left(\left[\begin{array}{c|cccc} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \hline a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s+a_{n-1} \end{array}\right]\right) = \\
&= (-1)^{n-1}a_0(-1)^{n-1} + s\det(sI - A_{c,n-1}) = \\
&= a_0 + s\det\left(\left[\begin{array}{c|cccc} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & s+a_{n-1} \end{array}\right]\right)
\end{aligned}$$

da cui

$$\pi_c(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n.$$

I coefficienti dell'ultima riga della forma compagna orizzontale inferiore sono quindi i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice stessa, ordinati secondo le potenze crescenti di s da sinistra a destra e cambiati di segno.

La matrice di raggiungibilità per il sistema (A_c, B_c)vale

$$R_c = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \star & \star \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 & \star & \star \end{array}\right]$$

(dove $\star$ indica elementi il cui calcolo esplicito è tralasciato), che è invertibile. Un sistema in questa forma è quindi sempre raggiungibile, a prescindere dai valori dei coefficienti del polinomio caratteristico.

Ricordiamo che il polinomio caratteristico di una matrice non cambia per trasformazioni di similitudine (la similitudine non cambia infatti gli autovalori di una matrice, che sono le radici del polinomio caratteristico stesso).

Dato quindi un qualsiasi altro sistema SISO (A, B) che abbia lo stesso polinomio caratteristico con matrice di raggiungibilità R, si ha:

- se (A, B) è algebricamente equivalente a (A_c, B_c) (ovvero $A = TA_cT^{-1}$, $B = TB_c$), allora è raggiungibile: infatti $R = TR_c$ ha rango pieno;
- Se (A, B) è raggiungibile, R ha rango pieno, quindi esiste una T invertibile, data da $T = RR_c^{-1}$, che trasforma le coordinate in modo tale da avere $T^{-1}AT = A_c$, $T^{-1}B = B_c$.

La forma (A_c, B_c) in cui possono essere messi tutti e soli i sistemi completamente raggiungibili si chiama *canonica di controllo*.

La matrice R_c^{-1} ha una forma particolare (detta di Hankel) di facile memorizzazione (verificare per esercizio):

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sulla base di queste osservazioni, è facile portare un sistema LTI raggiungibile SISO (A, B, C, D) nella forma canonica di controllo. Si procede infatti come segue:

1. Si costruisce la matrice di raggiungibilità R e se ne verifica l'invertibilità;
2. Si calcola il polinomio caratteristico di A, $\det(sI-A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$;
3. Con i coefficienti del polinomio caratteristico si costruiscono le matrici A_c e R_c;
4. Si calcola $T = RR_c^{-1}$;
5. Si trova $C_c = CT$.

Si ricorda che la matrice D rimane invariata per cambiamento di variabili di stato.

Ricordiamo che, dato un sistema SISO in forma normale

$$\mathbb{D}^n y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i \mathbb{D}^i y(t) + \sum_{i=0}^{n} b_j \mathbb{D}^j u(t)$$

ovvero in forma di f.d.t.

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} U(s)$$

si può porlo in forma di stato direttamente ponendo

$$\mathbb{D}z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_m & -a_{m+1} & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_o - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & b_2 - b_n a_2 & \ldots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} x + [b_n]\, u$$

Dato un sistema LTI SISO in forma normale, è dunque sempre possibile scrivere un sistema in forma di stato con matrici (A, B, C, D) ad esso equivalente con (A, B) in forma canonica di controllo (quindi raggiungibile). "Equivalente" si intende nel senso che, dato un ingresso e delle condizioni iniziali per il primo, esistono degli stati iniziali tali per cui l'uscita del secondo sistema corrispondente allo stesso ingresso è la stessa.

Esempio: Data l'equazione $\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$, un sistema in forma di stato che la realizza (in forma canonica di controllo) è

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \; D = 0. \end{aligned}$$

Lo stesso rapporto ingresso-uscita è realizzato anche ad esempio ponendo $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ e $x_3 = y + \dot{y}$, quindi dal sistema

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C' &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D' = 0 \end{aligned}$$

In questo secondo caso però la coppia (A', B') non è raggiungibile.