4. Si consideri il sistema tempo continuo SISO (A, B, C). Si discuta il seguente problema:

(a) Trovare (se esiste) la reazione dello stato che rende il sistema stabile e che minimizza:

$$J = \int_0^\infty u^2(t)dt$$

(b) In particolare la si trovi (se esiste) nei seguenti tre casi:

i.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii.

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Data la matrice Hamiltoniana H, il candidato **dimostri** che :

- se $\lambda \in eig(H)$ allora vale anche: $-\lambda \in eig(H)$;
- nel caso di controllo ottimo ad orizzonte infinto, e' possibile calcolare la soluzione della ARE a partire dagli autovettori della H.

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

si ricavi l'ingresso $u(\cdot)$ che, dati: la costante $x^* \neq 0$, $x(0)$ e t_f, minimizza il funzionale:

$$J = \frac{1}{2}(x(t_f) - x^*)^T S(x(t_f) - x^*) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[(x(t) - x^*)^T Q(x(t) - x^*) + u^T Ru\right] dt$$

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

si imposti il problema di determinare il controllo ottimo per portare il sistema nell'origine in tempo finito. Si enuncino le ipotesi di esistenza della soluzione del problema e si ricavi la matrice di reazione K che lo risolve nel caso in cui le ipotesi siano verificate. Commentare con sufficiente livello di dettaglio come si ottiene la reazione K.

4. Si consideri il problema di controllo ottimo:

$$u^* = \arg\min_u \left[h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \right]$$

soggetto al vincolo differenziale : $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ con $x(t_0) = x_0$ ed x_0 noto.

Se ne descriva analiticamente la soluzione giungendo alle equazioni di Eulero e si discutano i 4 casi notevoli che permettono di definire le condizioni al contorno.

4. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = \underbrace{u}_{f}$$

con condizioni iniziali x_0 fissate e note. Si imposti e si risolva analiticamente un problema di controllo ottimo con tempo iniziale e finale fissati, che porti lo stato del sistema il più vicino possibile all'origine limitando il consumo. Si utilizzi un unico parametro p per controllare il trade-off tra consumo e distanza dall'origine all'istante finale. Si calcoli la soluzione in funzione del parametro p.

3. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = u$$

con condizioni iniziali x_0 fissate e note. Si imposti e si risolva analiticamente un problema di controllo ottimo con tempo iniziale e finale fissati, che porti lo stato del sistema il più vicino possibile all'origine limitando al contempo l'azione di controllo. Si utilizzi un unico parametro γ per controllare il trade-off tra azione di controllo e distanza dall'origine all'istante finale. Si calcoli la soluzione in funzione del parametro γ.

4. Si formuli il problema di controllo ottimo in tempo infinito per sistemi lineari tempo invarianti tempo continui (o LQR) e:

- si specifichino le condizioni necessarie e sufficienti perche' il problema ammetta soluzione
- si fornisca una dimostrazione dell'enunciato al punto precedente
- si fornisca un'espressione analitica per la soluzione del problema, ovvero per il guadagno ottimo.

4. Si consideri il problema del controllo ottimo per sistemi lineari tempo continui e:

- si enuncino, nella loro forma più generale, i due problemi di controllo ottimo: in tempo finito prefissato ed ad orizzonte infinito
- si discutano le differenze principali nelle due formulazioni
- si discutano le differenze principali sui requisiti da imporre perche' i due problemi abbiano soluzione
- si proponga, a grandi linee, la procedura per ottenere la soluzione ai due problemi presi in considerazione

4. Si consideri il problema di controllo ottimo:

$$u^* = \arg\min_u \left[h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \right]$$

soggetto al vincolo differenziale : $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ con $x(t_0) = x_0$ ed x_0 noto.

Se ne derivi analiticamente la soluzione giungendo alle equazioni di Eulero e si discutano i 4 casi notevoli che permettono di definire le condizioni al contorno.

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

- si ricavi la matrice Hamiltoniana $\mathcal{H}$ associata al problema di controllo ottimo che minimizza il funzionale:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u \right] dt$$

- si dimostri che se $\lambda \in eig(\mathcal{H})$ allora vale anche: $-\lambda \in eig(\mathcal{H})$;
- si discuta come e' possibile utilizzare quest'ultimo risultato per risolvere problemi di controllo ottimo quando $t_f = \infty$.

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ed il problema di controllo ottimo descritto dal funzionale

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

soggetto a : stato inziale $x(0) = x_0$ noto, stato finale desiderato $x(t_f) = x_f$ fissato, valore del tempo finale t_f fissato,

- si ricavi la matrice Hamiltoniana partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange
- si ricavi la soluzione ottima in forma chiusa $u^*(t) = ...$ in funzione delle grandezze note (suggerimento: NON usare l'equazione di Riccati, non produce una soluzione in forma chiusa).

4. Si consideri il sistema lineare tempo invariante $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

soggetto ai vincoli $x(t_0) = x_0$ ed $x(t_f) = x_f$, con x_0, x_f vettori costanti noti e $\neq 0$ in generale.

Lo studente:

- proponga opportune condizioni sulle matrici Q ed R che garantiscano la risolubilità del problema;
- descriva in maniera analitica la procedura che porta alla soluzione in forma chiusa del problema di ottimizzazione giungendo ad una espressione per il controllo ottimo del tipo:

$$u(t) = f_{opt}(x(t), t, t_f, x_f)$$

- giustifichi l'indipendenza di $f_{opt}(\cdot)$ dal vettore di condizioni iniziali x_0.

4. Si consideri il sistema tempo continuo SISO $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo:

$$J = \int_0^{\infty} u^2(t)dt$$

(a) Si descriva la procedura che permette di calcolare la legge di controllo ottima, nella forma $u = Kx$, che stabilizza l'impianto e minimizza l'indice di costo J.

(b) Si calcoli quindi, se esiste, la matrice K nei seguenti casi:

i.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ii.

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iii.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4. Il candidato descriva il concetto di luogo simmetrico delle radici ed in particolare:

- formuli il problema di controllo ottimo dal quale origina
- ricavi l'espressione del polinomio caratteristico della matrice hamiltoniana per questo caso
- mostri come si può sfruttare questo risultato per progettare controllori ottimi per sistemi SISO

4. Dato il sistema dinamico:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

si calcoli l'ingresso di controllo ottimo $u(t)$ che porta lo stato dal punto $x(t_0 = 0) = [0, 0]$ al punto $x(t_f) = [.25, 0]$ nel tempo $t_f = 1$ minimizzando l'indice di costo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2(\tau) d\tau$$

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ed il problema di controllo ottimo descritto dal funzionale

$$J = \frac{1}{2}x(t_f)^T H x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

soggetto a : stato inziale $x(0) = x_0$ noto, stato finale desiderato $x(t_f) = x_f$ NON fissato, valore del tempo finale t_f fissato,

- si ricavi la matrice Hamiltoniana partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange
- si ricavi la soluzione ottima in forma chiusa $u^*(t) = f(A, B, Q, R, H, x_0, t, t_f)$ in funzione delle grandezze note (suggerimento: NON usare l'equazione di Riccati, non produce una soluzione in forma chiusa).

4. Si consideri il sistema lineare tempo invariante $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo :

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^T R u \, dt$$

lo studente: proponga ricavi

- proponga condizioni necessarie sulle matrici S_f, ed R;
- descriva in maniera analitica la procedura che porta alla soluzione del problema di ottimizzazione, incluso le necessarie condizioni al contorno, e all'espressione del controllo ottimo $u(t)$,

4. Sia dato il sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

e l'indice di costo :

$$J = \int_0^\infty x_1^2 + u^2$$

- si discuta l'esistenza di una soluzione $u(t)$ che minimizzi J
- si determini, se esiste, la soluzione ottima nella forma $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$

4. Il candidato :

- formuli il problema di controllo ottimo lineare quadratico in tempo finito con peso sullo stato finale
- assumendo che lo stato finale sia libero ed il tempo finale fissato, formuli le equazioni di Eulero-Lagrange e le condizioni al contorno necessarie
- ricavi la soluzione in forma chiusa dell'evoluzione ottima dello stato, dell'ingresso e del costato in funzione del tempo, del tempo iniziale, del tempo finale e dello stato iniziale: $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t) = f(t, t_0, t_f, x(t_0)))$

4. Si consideri il sistema lineare tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & \epsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Il candidato :

- trovi, al variare del parametro ϵ, i valori della matrice di guadagno della legge di controllo ottimo nella forma $u(t) = K(\epsilon)x(t)$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^{\infty} y^t y + u^t u$$

- analizzi il caso particolare $\epsilon = 0$ e discuta il risultato ottenuto. Dica inoltre se si sarebbe potuti giungere, per questo valore di ϵ, allo stesso risultato con un procedimento diverso e più semplice.

4. Sia dato il sistema tempo continuo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

si calcoli la matrice di retroazione ottima K (assumendo $u = Kx$) che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^\infty y(t)^2 + u(t)^2 dt$$

4. Sia dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

si determini la legge di controllo ottima $u(t) = Kx(t)$ che rende minimo l'indice di costo:

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t) \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 4u^2(t) dt$$

4. Dato il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, e la traiettoria del vettore di stato desiderata $r(t)$, il candidato :

- ricavi il segnale di controllo $u^*(t)$ che rende minimo l'indice di costo:

$$J = 1/2(x(t_F) - r(t_F))^T S_f(x(t_F) - r(t_F)) + 1/2 \int_{t_0}^{t_F} (x(t) - r(t))^T Q(x(t) - r(t)) + u(t)^T Ru(t)dt$$

- discuta la possibilità di realizzare in forma di feedback la soluzione del problema e le sue implicazioni

4. Si consideri il sistema lineare tempo continuo SISO descritto dalle matrici A, B, C. Si trovi, se esiste, al variare di ρ una legge di controllo nella forma $u(t) = K(\rho)x(t)$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^\infty \rho u^2(t)dt$$

nei seguenti tre casi:

(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si discuta nei tre casi la dipendenza da ρ della soluzione.

4. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} x(t) = Cx(t)$$

e dato l'indice di costo:

$$J = \int_0^\infty y(t)^T y(t) + u(t)^T u(t) dt$$

- si definiscano le condizioni necessarie sui parametri α e β affinchè esista un estremale nella forma $u^*(t) = Kx^*(t)$ che renda minimo il funzionale J e stabilizzi il sistema in ciclo chiuso.
- fissate delle costanti α e β adeguate, si trovi il guadagno K del controllore ottimo stabilizzante.

5. Il candidato formuli e proponga una soluzione al problema dell'inseguitore ottimo per un sistema lineare tempo continuo tempo invariante: trovare $u(t)$ che fa si che lo stato $x(t)$, nell'intervallo di tempo (t_0, t_f), insegua e converga al segnale di riferimento $r(t)$, con peso ma senza vincoli sul valore finale dell'errore di inseguimento, moderando al contempo il transitorio dello stato $x(t)$e l'ampiezza del controllo $u(t)$.

4. Sia dato il sistema lineare tempo invariante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

con $x(t_0) = 0$.

- Si trovi la legge di controllo $u(t)$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t)u(t)dt$$

  che porta lo stato al tempo finale fissato t_f nello stato desiderato x_f.
- Si discuta la possibilità o meno di risolvere il problema in maniera esatta.
- Si discuta il caso $x_0 \neq 0$ ed eventualmente si trovi la nuova soluzione del problema.

Esercizio 3. Si consideri il sistema discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(u^2(t) + 4y^2(t) \right), \tag{3.3}$$

(i) Il controllo ottimo $u_{\text{ot}}(\cdot)$ che minimizza l'indice quadratico è stabilizzante?

(ii) Si calcolino

- la soluzione ottimizzante M_∞ dell'equazione algebrica di Riccati,
- la corrispondente matrice di reatroazione K_∞,

e si verifichi sullo spettro di $F + \mathbf{g}K_\infty$ quanto affermato al punto precedente;

(iii) per quali stati iniziali $\mathbf{x}_0$ il valore minimo dell'indice $\min_u J(u, \mathbf{x}_0)$ ha valore unitario? Quali sono gli stati $\mathbf{x}_0$ di norma euclidea minima per cui $\min_u J(u, \mathbf{x}_0) = 1$? Quanto vale questa norma?