

1. Si consideri la seguente matrice di trasferimento

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} \\ -\frac{6}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{pmatrix}$$

- Determinare una rappresentazione in forma di stato della matrice di trasferimento lavorando per righe o per colonne.
- Considerando il secondo ingresso e la prima uscita della rappresentazione trovata al punto precedente, commentare sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema e determinare le basi dello spazio di raggiungibilità e dello spazio di inosservabilità. Determinare la matrice che porta il sistema in forma di Kalman.

2. Si consideri il sistema **tempo continuo**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2^2(t) + x_1(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1^3(t) - x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri del sistema e si traccino gli andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi per ingressi nulli.
- Si studino le proprietà di stabilità degli equilibri trovati al punto precedente con il metodo indiretto di Lyapunov. Si commenti inoltre, per ogni equilibrio trovato, sulla possibilità di usare uno dei due ingressi di controllo come una funzione affine degli stati per rendere l'equilibrio asintoticamente stabile.
- Per l'equilibrio nell'origine, utilizzando una funzione V opportuna e il metodo diretto di Lyapunov, determinare un ingresso u_1 non lineare che renda la derivata direzionale solo semidefinita negativa e valutare se l'equilibrio risulta comunque asintoticamente stabile.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

Si determini, se possibile, **motivando adeguatamente il risultato**, una legge di retroazione dello stato $u_k = Kx_k$ tale che il sistema retroazionato $(A + BK, B)$ sia raggiungibile da uno solo dei due ingressi ed abbia un comportamento di tipo dead-beat.

4. Sia dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k = Cx_k$$

Supponendo che l'applicazione dell'ingresso $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3$ produca l'uscita $y_0 = 2, y_1 = 3, y_2 = 1$, si determini, se possibile, lo stato iniziale del sistema x_0 .