MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e sia λ_0 un suo autovalore. La molteplicità algebrica è quel numero che esprime quante volte è autovalore λ_0 annulla il polinomio caratteristico (cioè quante volte compare in esso).

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA $\quad Ker\,(A-\lambda_i I) = \mu(\lambda_i)$

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e sia λ_0 un suo autovalore. La molteplicità geometrica di λ_0 è la dimensione dell'autospazio relativo a λ_0 (cioè l'insieme di vettori che per moltiplicati per la matrice dia zero).

$$mg(\lambda_0) = n - \rho\,(A - \lambda_0 I)$$

n: ordine matrice ($n \times n$)
ρ: rango matrice

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) =$$
$$= \lambda^2 - \lambda^3 - 1 + \lambda \to -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 1) =$$
$$= (1-\lambda)(-1+\lambda)(+1+\lambda)$$

Quindi:

$\lambda = 1 \to m.a. = 2$
$\lambda = -1 \to m.a = 1$

$n = 3 \to$ ordine matrice

$$A - \lambda_0 I \longrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_0 = 1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \rho = 1$$

$m.g.(\lambda_0) = 3 - 1 = 2$

$m.g.(\lambda_1) = 3 - 2 = 1$ (non ci sono i conti)

La molteplicità geometrica è proprietà strutturale di una matrice.
Indica il numero di autovettori l.i. associati a λ_i.

Queste relazioni implicano che nota A posso calcolare tutta la colonna della matrice Q.
Posso quindi scrivere la costruzione di Q:

$$\begin{cases} q_1 \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \\ q_2 \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2 \quad \text{ma} \quad q_2 \notin \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \\ \vdots \\ q_K \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^K \quad \text{ma} \quad q_K \notin \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^{K-1} \end{cases}$$

Queste 'q_k', al di fuori di q_1, non sono autovettori, ma si chiamano Autovettori Generalizzati di ordine K.
Sono di estrema importanza perché dall'equazione [2] si vede come sono strettamente legati agli autovettori veri.
Trovando l'autovettore generalizzato di ordine K posso calcolare tutti gli altri.

Esempio

Ho una matrice A non in forma di Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1 \Rightarrow$ m.a. $= 3$
m.g. $= 1$ $\xrightarrow{\text{calcolo}}$ $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) \Rightarrow (A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{Ker}(A+I) = 1$

Quindi A è simile a una $J_{-1}^{(3)}$:

$$J_{-1}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Attenzione
Questo vale perché m.g.$(\lambda) = 1$, la molteplicità geometrica dice quanti blocchi di Jordan avrà la matrice $J_\lambda^{(q)}$!

Procedo ora calcolando q_K, cioè l'Autovettore Generalizzato di Ordine massimo (3 in questo caso).

$$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A-\lambda I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-\lambda I)^3$ è matrice nulla, il che significa che nel suo Ker vi stanno tutti gli autovettori.
Sappiamo che:

$$\underbrace{q_3 \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^3}_{} \quad \text{ma} \quad \underbrace{q_3 \notin \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2}_{}$$

essendo $(A-\lambda I)^3$ una matrice nulla, nel suo Ker vi stanno tutti gli autovettori

il $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2$ ha dimensione 2; in particolare gli autovettori che lo generano sono:
$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ essendo le ultime due colonne nulle.

Quindi $q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ essendo questo l'unico autovettore linearmente indipendente da quelli appartenenti al Ker di $(A-\lambda I)^2$.

Posso quindi trovare gli altri Autovettori Generalizzati:

$$q_2 = (A-\lambda I)\, q_3 = (0 \ 1 \ 0)^T$$

$$q_1 = (A-\lambda I)\, q_2 = (0 \ 0 \ 1)^T$$

Posso finalmente comporre la matrice Q:
tale che $Q^{-1} A\, Q = J_{(-1)}^{(3)}$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

I problemi iniziano quando $m.g. > 1$.
Come detto prima, il valore della molteplicità geometrica di A indica quanti blocchi dovrà avere la matrice di Jordan simile ad A.
Per $m.g. > 1$, la matrice avrà più blocchi. Il problema è capire come sono disposti nella matrice.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\lambda = 2 \\ &m.a. = 3 \\ &m.g. = 2 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \xrightarrow{\text{autovettori}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Questo significa che la matrice in forma di Jordan simile ad A ha due blocchi.

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

← matrice nulla quindi non ha senso calcolare $(A-\lambda I)^3$ perché sarebbe uguale.

In questo caso, l'Autovettore Generalizzato di Ordine massimo è q_2:

all'aumentare di m.g. avrò meno autovettori generalizzati

$$\underbrace{q_2 \in \text{Ker}(A-\lambda I)^2}_{\text{tutti gli autovettori}} \quad \text{ma} \quad \underbrace{q_2 \notin \text{Ker}(A - \lambda I)}_{\text{il Ker ha dimensione 2, quindi vi è un unico autovettore l. i. dagli altri}}$$

$$q_2 = (0 \ 0 \ 1)^T$$

$$q_1 = (A - \lambda I) q_2 = (1 \ 0 \ 0)^T$$

Necessito però di un altro autovettore per costruire Q. Scelgo un vettore $\tilde{q}$ non trovato nella catena, il quale vale $(0 \ 1 \ 0)^T$.

$$Q = (\tilde{q} \ \ q_1 \ \ q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} A Q = J_2^{(3)} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad \boxed{2 \text{ blocchi}}$$

Attenzione!
Posso mettere $\tilde{q}$ all'inizio o alla fine di Q vettori.

Se ho λ con $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 5$ significa
dim Ker $(A-\lambda I)^4 = 5$
dim Ker $(A-\lambda I)^3 = 3$
con Ker $(A-\lambda I)^4 \supseteq$ Ker $(A-\lambda I)^3$
Quali autovettori prendo per i 'q_i'. Ho 2 vettori in Ker$(..)^4$ che non stanno nel Ker$(..)^3$.
Quale scelgo dei due? La scelta non è univoca in questo caso! Devo prenderli entrambi!

Caso con $m.g. > 1$

Consideriamo l'autovalore i-esimo λ_i
Supponiamo che:

$$\left.\begin{aligned} &\dim \text{Ker}(A - \lambda_i I) = \mu_1 \\ &\dim \text{Ker}(A - \lambda_i I)^2 = \mu_2 \\ &\quad \vdots \\ &\dim \text{Ker}(A - \lambda_i I)^p = \mu_p \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \mu_1 \le \mu_2 \le \dots \le \mu_p$$

dim ... autovettori

Non avrò n-autovettori, ma avrò autovettori generalizzati

$$mg(\lambda) = \mu_i(\lambda)$$

μ_i si trova a un certo punto in una condizione di stabilità nella quale la μ non cresce più, trovando quindi la relazione:

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda_i I)^p = \dim \text{Ker}(A - \lambda_i I)^{p+1}$$

Posso avere più μ associati a un autospazio.

quindi il successivo non mi dà informazioni aggiuntive.

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha sicuramente un $\lambda_1 = 2$ (si vede se si considera come matrice a blocchi)

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$

m.a. = 4

m.g. = 2 $\xrightarrow{\text{calcolo}}$ $Ker(A-\lambda I) = Ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ linearmente dipendenti $\rightarrow$ $\dim Ker(A-\lambda I) = 2 = \mu_1$

↳ due blocchi nella $J_2^{(0)}$

I vettori che generano il Ker sono: $< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$

se si sottraggono 1ª e 2ª colonna si annullano

se si sommano 3ª e 4ª colonna si annullano

$$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu_1 = \dim Ker(A-\lambda I) = 2$$

$\mu_1 = 2$

$$(A-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \dim Ker(A-\lambda I)^2 = 3$$

$\mu_2 = 3$

$$(A-\lambda I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu_3 = \dim Ker(A-\lambda I)^3 = 4$$

$\mu_3 = 4$

Siamo nella condizione di stabilità, perché $\dim Ker(A-\lambda I)^4 = \dim Ker(A-\lambda I)^3 = 4$.

Vettori che generano $Ker(A-\lambda I) \rightarrow < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$

Vettori che generano $Ker(A-\lambda I)^2 \rightarrow < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ $\rightarrow$ avrei potuto prendere anche lo stesso $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vettori che generano $Ker(A-\lambda I)^3 \rightarrow$ Tutti!

Quanti q_k avrò ad ogni passo? $\underline{\mu_3 - \mu_2 = 4 - 3 = 1}$ → numero di autovettori generalizzati di ordine 3

quindi avrò $q_1^{(3)}$, cioè un autovettore generalizzato di ordine 3. Essendoci un blocco di grandezza 3 ed essendo la $Q_{4\times 4}$, l'altro blocco avrà grandezza 1.

2 blocchi di Jordan → uno di Ordine 3

↳ uno di Ordine 1

Questo $q_1^{(3)}$ deve:

$\underbrace{q_1^{(3)} \in Ker(A-\lambda I)^3}$ ma $\underbrace{q_1^{(3)} \notin Ker(A-\lambda I)^2}$

tutti i vettori ne fanno parte

lo generano i vettori scritti sopra

Scelgo $q_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per comodità conviene sempre scegliere "vettori base" quando se ne ha la possibilità.

Non resta che costruire la mia catena.

catena ordine 3

$$\begin{cases} q_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ q_1^{(2)} = (A-\lambda I)\cdot q_1^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ q_1^{(1)} = (A-\lambda I)\cdot q_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

← di autovettori generalizzati di ordine 1 ne devo trovare $\mu_1 - \cancel{\mu_0} = 2$.

catena ordine 1

$$\left[\; q_2^{(1)} = (0\;0\;1\;1)^T \right.$$

→ vettore $\in Ker(A-\lambda I)$

Non resta che costruire la Q:

(1) $$\cancel{Q = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ q_1^{(3)} \quad q_1^{(2)} \quad q_1^{(1)} \quad q_2^{(1)} \end{array}}$$

E trovare finalmente la matrice di Jordan.

$$Q^{-1} A Q = J = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Ho questa forma perché prima nella Q ho messo il blocco di ordine 3.

(1)

$$Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ q_1^{(1)} \quad q_1^{(2)} \quad q_1^{(3)} \quad q_2^{(1)} \end{array}$$

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_5 = 4$

m.a. = 5

m.g. = 2

calcolo

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

nulla $1^a + 2^a$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 2$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mu_1 = 2$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2 = 4$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mu_2 = 4$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^3 = 5$

$\mu_3 = 5$

Devo fermarmi a μ_3. Dalla molteplicità geometrica so che la mia matrice di Jordan deve avere due blocchi.
Dalle nuove informazioni posso dire che questi sono: uno di ordine 3, uno di ordine 2

$\mu_3 - \mu_2 = 5 - 4 = \underline{1}$ → cioè ho un solo autovalore generico di ordine 3.

$\mu_2 - \mu_1 = 4 - 2 = \underline{2}$ → cioè ho due autovalori generici di ordine 2.

$\mu_1 = 2$ → cioè ho due autovalori generici di ordine 1.

Calcoliamo la catena.

$q_1^{(3)} \Rightarrow \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^3$ ma $\notin \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2 \to q_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$q_1^{(2)} = (A-\lambda I)\cdot q_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_1^{(1)} = (A-\lambda I)\cdot q_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2^{(2)} \to \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2 \text{ ma } \notin \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \to q_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2^{(1)} = (A-\lambda I)\cdot q_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Non resta che costruire la matrice Q:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} q_1^{(1)} & q_1^{(2)} & q_1^{(3)} & q_2^{(1)} & q_2^{(2)} \end{matrix} \end{array}$$

$$Q^{-1}\cdot A\cdot Q = J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

3x3

2x2

Procediamo calcolando l'esponenziale di Jordan, ricordandoci di lavorare blocco per blocco.
Basta seguire la regola di teoria:

$$e^{Jt} = \left(\begin{array}{ccc|cc} e^{4t} & t\cdot e^{4t} & \frac{t^2}{2} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & t\cdot e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{4t} & t\cdot e^{4t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{array}\right)$$

Ad esempio supponiamo che $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e che abbia due autovalori complessi coniugati $(\lambda, \bar{\lambda})$ ai quali corrispondono due autovettori complessi coniugati:

$$\begin{bmatrix} v & \bar{v} \end{bmatrix}$$

Autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. È il nostro caso e questo significa che questa matrice è invertibile.

$$\begin{bmatrix} v & \bar{v} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}}_{E} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} v+\bar{v} & j(v-\bar{v}) \end{bmatrix} \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$$

ma $v = q_r + j q_i$, $\bar{v} = q_r - j q_i$ quindi $\rightarrow$ $v + \bar{v} = 2 q_r$, $v - \bar{v} = 2 q_i$

quindi avrò:

$$\begin{bmatrix} v & \bar{v} \end{bmatrix} \cdot E = \begin{bmatrix} q_r & q_i \end{bmatrix}$$

In questo modo trasformo v e $\bar{v}$ in $\leftarrow$ vettore parte reale, vettore parte immaginaria $\}$ continuando a preservare il fatto che siano e.i.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} \sigma-\lambda & \omega \\ -\omega & \sigma-\lambda \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = (\sigma-\lambda)^2 + \omega^2 \qquad \lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

A è una matrice reale con autovalori complessi coniugati.
Tutte le matrici con autovalori distinti sono diagonalizzabili:

$\lambda = \sigma + j\omega \rightarrow v$

$\bar{\lambda} = \sigma - j\omega \rightarrow \bar{v}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v & \bar{v} \end{bmatrix}^{-1}}_{E[q_r\ q_i]^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v & \bar{v} \end{bmatrix}}_{[q_r\ q_i]E^{-1}} = \begin{bmatrix} \sigma+j\omega & 0 \\ 0 & \sigma-j\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

Ho effettuato un cambio di base.
Questo mi permette di passare da una matrice reale a una complessa coniugata della quale però posso calcolare e^{At}.
Qualsiasi matrice del tipo:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \text{ ha esponenziale} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda} t} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

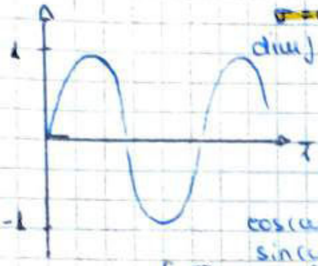
$$\boxed{e^{Mt} = e^{\sigma t}\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$\uparrow$
matrice con coefficienti reali!

$$e^{\lambda t} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t}(e^{j\omega t}) = e^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$$

λ complesso

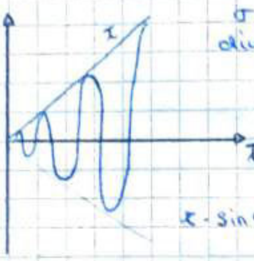
Non si studia più λ, ma σ, cioè il coefficiente reale.



$\sigma = 0$
dim J = 1

oscillazioni costanti

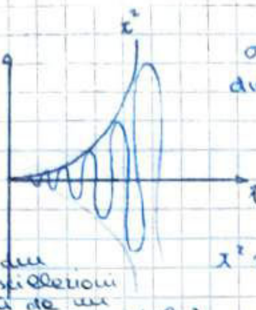
$\cos(\omega\tau)$ oppure $\sin(\omega\tau)$
$[e^{\sigma\tau}\cos(\omega\tau)]$



$\sigma = 0$
dim J = 2

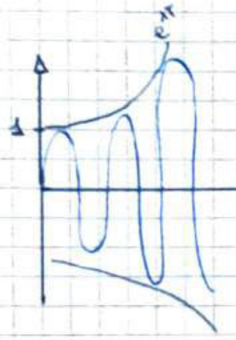
$\tau \cdot \sin(\omega\tau)$

In questi due casi le oscillazioni sono amplificate da un polinomio (retta o parabola)



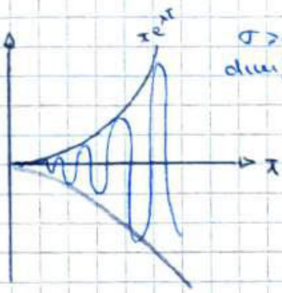
$\sigma = 0$
dim J = 3

$\tau^2 \sin(\omega\tau)$

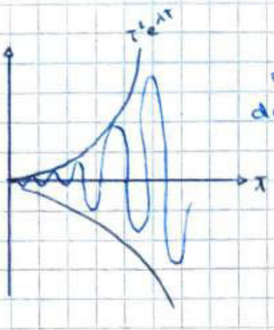


$\sigma > 0$
dim J = 1

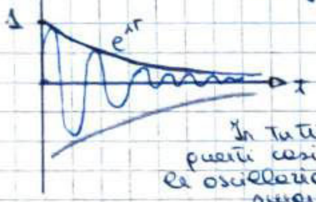
le oscillazioni tendono a crescere molto velocemente



$\sigma > 0$
dim J = 2

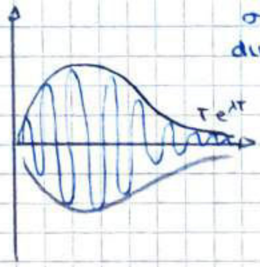


$\sigma > 0$
dim J = 3

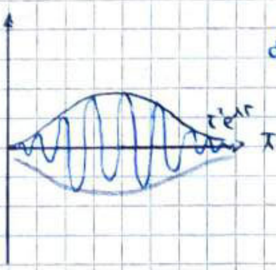


$\sigma < 0$
dim J = 1

In tutti e tre questi casi con $\sigma < 0$ le oscillazioni sono smorzate.



$\sigma < 0$
dim J = 2



$\sigma < 0$
dim J = 3

Studiare i modi di un sistema significa capire come questo si comporta nel tempo, cioè i suoi andamenti.
Abbiamo notato che:

- ogni autovalore a parte reale positiva fa divergere il sistema;
- se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, allora il sistema converge;

Il caso critico è quando l'autovalore è nullo, perché:

- $\lambda = 0$ con λ reale → il sistema resta costante
- $\sigma = 0$ con λ complesso → il sistema oscilla

cioè lo stato cambia nel tempo ma non converge né diverge. In questo caso bisogna vedere il blocco di Jordan associato a quell'autovalore.

dim J = 1 → non ci sono problemi
dim J > 1 → devo studiare la m.g. dell'autovalore

Esempio

Le due matrici:

① $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hanno uguali autovalori ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), ma diversa m.g.:

1) $\lambda = 0$ m.a. = 2, m.g. = 2

② $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\lambda = 0$ m.a. = 2, m.g. = 1

Quindi nonostante le due matrici abbiano gli stessi autovalori, avendo diversa m.g. avranno diversi modi.

1) $e^{\lambda\tau} \to e^0 = 1$ $\quad J_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ m.g. = 2 → 2 blocchi

2) $e^{\lambda\tau} + \tau e^{\lambda\tau} \to 1 + \tau$ $\quad J_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ m.g. = 1 → 1 blocco

METODO INDIRETTO DI LYAPUNOV

"Indiretto" perché dà un risultato sul sistema non lineare passando da quello linearizzato.
È il metodo da usare sempre per primo.

· Consideriamo un sistema lineare autonomo tempo invariante $x^+ = Ax$.
Questo è l'approssimazione lineare di un sistema non lineare del tipo:

$x^+ = f(x)$ [equilibrio nell'origine] $f(0)=0$

- Se A è A.S. (cioè se il linearizzato è A.S.) allora l'origine del sistema non lineare è (localmente) A.S. [dove l'origine del sistema non lineare è l'equilibrio].
Se il punto di equilibrio non è nell'origine bisogna traslare il sistema non lineare per riportarci in queste condizioni.
 - Se "localmente" perché il sistema lineare è solo un'approssimazione del sistema non lineare; quindi non posso dire che sia G.A.S.

- Se A ha un modo esponenzialmente divergente, allora l'origine del sistema non lineare è instabile.
Esiste un modo esponenzialmente divergente:

$$\begin{cases} TC & \exists \lambda \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \\ TD & \exists \lambda \quad |\lambda| > 1 \end{cases}$$

! Nulla è detto nel caso in cui gli autovalori siano divergenti (cioè anche se ho un solo autovalore a parte reale nulla non rientro in nessuno dei due casi). In questo caso non posso concludere nulla con il metodo indiretto di Lyapunov.

Esempio - Pendolo senza attrito

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/L & 0 \end{pmatrix} \qquad A(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/L & 0 \end{pmatrix}$$

$A(0,0)$ → l'equilibrio non è più A.S. perché il pendolo continua a oscillare senza mai fermarsi. Diventa quindi un Eq. Stabile. (perde l'attrattività).
$A(\pi,0)$ → l'equilibrio resta instabile

In entrambi i casi si è aggiunto un autovalore nullo, la cui presenza non mi permette di dire nulla tramite il metodo indiretto di Lyapunov

METODO DIRETTO DI LYAPUNOV

"Diretto" perché lavora direttamente sul sistema non lineare.

Questo metodo sfrutta una funzione legata all'energia definita:
l'equilibrio è il minimo dell'energia.

$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lo stato evolve

$x \rightarrow V(x)$

Ciò cui poi mi interessa è il valore della funzione $V(x(t))$ lungo le traiettorie del sistema.
La funzione V deve avere delle proprietà:

positiva definita → se $V(0)=0$
e $\exists\, r \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\forall x \in B_r \setminus \{0\}$ $V(x)>0$ ← cioè il valore della $V(x)$ è positivo in un intorno dell'origine ma non in 0

dove B_r indica i punti nello spazio in cui:

intorno dell'origine $\underline{B_r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ cioè è una palla centrata nell'origine di raggio 'r'.

[Non mi interessa cosa fa la $V(x)$ molto lontano dall'origine; mi basta sapere che $V(x)$ è positiva in un intorno dell'origine e nulla nell'origine stessa.

positiva semidefinita → se $\exists\, r \in \mathbb{R}^+$ t.c. $V(x) \geq 0$ $\forall x \in B_r$ $(V(0)=0)$
quindi la "semidefinita" mi basta che non sia negativa, ma può diventare nulla anche al di fuori dell'origine.

negativa definita → se $-V(x)$ è positiva definita

negativa semidefinita → se $-V(x)$ è positiva semidefinita

$V(0)=0$ perché lo zero è punto di equilibrio nel sistema non lineare.

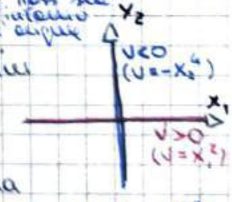
ESEMPI

Lavoriamo per semplicità in $\mathbb{R}^2$.

$V(x) = x_1^2 + x_2^2$ è P.D. perché $V(0)=0$ e $V(x)>0$ (quadratica)

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4$ è LDP cioè è definita positiva in un intorno dell'origine (quando $-x_1^4$ è più piccola di x_1^2). cioè si annulla nell'origine ma anche in $(\pm1,0)$ però quel punto non sta nell'intorno dell'origine
Al contrario, la prima funzione è GDP.

$V(x) = x_1^2 - x_2^4$ Non definita, perché nell'intorno dell'origine ho zone positive e zone negative →



$V(x) = -x_1^2$ è S.D.N. perché si annulla nell'origine ma anche per tutti i valori di x_2! Dove la funzione non è nulla ha valori negativi.

Attenzione → se $X: \mathbb{R}^1$ (e non in $\mathbb{R}^2$) allora è Definita negativa!
Bisogna fare attenzione a dove è definita la funzione.

Quando V è positiva definita, $\dot{V}$ è negativa definita] la V è detta Funzione di Lyapunov

Se è solo V p.d., è detta Funzione Candidata di Lyapunov.

Esercizio

Ho un sistema non lineare: $\dot{x} = -x^3$
è tempo continuo nella forma:
$\dot{x} = f(x)$
L'equilibrio è $f(\bar{x}) = 0$
In questo caso:

$x>0 \to \dot{x}<0 \Rightarrow x$ decresce

$x>0 \to \dot{x}>0 \Rightarrow x$ cresce

$-x^3 = 0 \to x = 0$ l'origine è un equilibrio

- Metodo Indiretto → linearizzo

$\frac{df}{dx} = -3x^2 \qquad A = \frac{df}{dx}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = 0 \qquad \dot{x} = 0$

La matrice A ha autovalore nullo, quindi il metodo indiretto di Lyapunov non mi consente di dire nulla riguardo la stabilità dell'origine.

- Metodo Diretto

Devo scegliere una $V(x)$ monodimensionale definita positiva.

• si annulla nell'origine

$V(x) = x^2$

$L_f V(x) = \frac{dV}{dx} \cdot \overbrace{f(x)}^{\dot{x}} = 2x \cdot -x^3 = -2x^4$ D.N.

Ne segue che l'origine è A.S. per il metodo diretto di Lyapunov.

Esercizio

$\dot{x} = x^3$ EQ (0)

Con il metodo indiretto non posso comunque concludere ($A = 0$)
Con il metodo diretto:

$V(x) = x^2$
$L_f V(x) = 2x^4$ P.D.

L'equilibrio è instabile.

Consideriamo lo spazio delle fasi:

$\boxed{\dot{x} = -x^3}$
- $x>0 \to \dot{x}<0$ quindi x decresce
- $x<0 \to \dot{x}>0$ quindi x cresce

(la $\dot{x}$ è come varia x essendo la sua derivata).

Anche graficamente si vede che $\dot{x} = -x^3$ è A.S. l'equilibrio in 0.

$\boxed{\dot{x} = x^3}$
- $x>0 \to \dot{x}>0$ quindi x cresce
- $x<0 \to \dot{x}<0$ quindi x decresce

Si vede che l'equilibrio in 0 è instabile.

Esercizio - Tempo Discreto

$x(k+1) = a\,x(k)$ $\longrightarrow$ Equilibrio $x(k+1) = x(k)$

$$\Downarrow$$

$$a\,x(k) = x(k)$$

- per $a \neq 1$ l'unico equilibrio è l'origine
- per $a = 1$ ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è equilibrio ($x = x$ sempre)

$\begin{cases} \text{se } |a| < 1 \text{ il sistema è A.S.} \\ \text{se } |a| > 1 \text{ il sistema è instabile} \end{cases}$

↳ questo lo so, ma vediamolo ora con Lyapunov.

$V(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) = \\ &= V(a\,x(k)) - V(x(k)) = \\ &= a^2 x^2(k) - x^2(k) = \\ &= (a^2 - 1)\,x^2(k) \end{aligned}$$

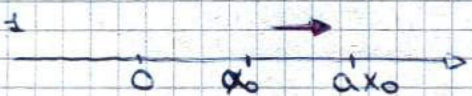
cioè stiamo vedendo come varia la V tra due iterazioni successive
{ se aumenta → si allontana dall'origine
{ se diminuisce → si avvicina

ΔV si annulla nell'origine e per $a = \pm 1$. Ne consegue che questa funzione è semidefinita negativa.
Grazie a Lyapunov possiamo concludere che l'origine è stabile.

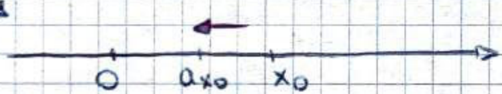
- per $|a| > 1 \rightarrow \Delta V > 0$ e per Lyapunov l'origine è instabile.
- per $|a| < 1 \rightarrow \Delta V < 0$ e per Lyapunov l'origine è A.S.

L'andamento del sistema in x è il seguente:

$a > 1$ cioè mi allontano dall'equilibrio



$a < 1$ cioè mi avvicino all'equilibrio



Esercizio 1

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3$$

sistema dinamico di dimensione 2 T.C. non lineare

Studiare i punti di equilibrio e la stabilità.

Per i punti di equilibrio si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 0 = -\bar{x}_1^3 + \bar{x}_2 \\ 0 = -\bar{x}_1^3 - \bar{x}_2^3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \bar{x}_1^3 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1^3 = -\bar{x}_2^3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \bar{x}_1^3 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = -\bar{x}_2^3 \rightarrow \bar{x}_2(1+\bar{x}_2)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow \bar{x}_1 = 0 \\ \rightarrow \bar{x}_2 = 0 \end{matrix}$$

Conviene sempre arrivare a un'equazione come questa.
L'equilibrio è uno solo in (0,0).

Verifichiamo dal sistema che (0,0) sia davvero un equilibrio [basta sostituire a x_1 e x_2].

- Per la stabilità proviamo il Metodo Indiretto, cioè calcoliamo il linearizzato:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che nel sistema linearizzato ci sono autovalori a parte reale nulla il metodo indiretto di Lyapunov non può concludere (non rientra in alcun caso del teorema)

<< Non concludo sulla stabilità dell'origine del sistema non lineare >>.

- Passiamo al metodo diretto di Lyapunov.

$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ ← candidata

$$L_f V(x) = \frac{dV}{dx} \cdot f = (x_1 \quad x_2)^T \cdot \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_1^3 - x_2^3 \end{pmatrix} = -x_1^4 + x_1 x_2 - x_1^3 x_2 - x_2^4 ;$$

$$\hookrightarrow L_f V(x) = -x_1^4 + \underline{x_1 x_2} \, \underline{- x_1^3 x_2} - x_2^4$$

È brutta da studiare perché ha termini negativi, positivi e anche termini con segno non definito.
Ne segue che questa V(x) non va bene.
Devo cercare di eliminare i termini con segno non definito. In questi termini non mi va bene il grado di x_1 (diverso tra due).
Ne consegue che devo scegliere una V(x) che mi lasci una x_1^3 nel primo di questi due termini.

Scelgo:

$$V = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{4} x_1^4$$

$$L_f V(x) = (x_1^3 \quad x_2)^T \cdot f = -x_1^6 + \cancel{x_1^3 x_2} - \cancel{x_1^3 x_2} - x_2^4$$

$$\hookrightarrow L_f V(x) = -x_1^6 - x_2^4 \quad (<0)$$ Definita Negativa (somma di potenze pari con davanti un segno meno)

Per il teorema di Lyapunov (metodo diretto) posso concludere che l'origine è A.S.
In realtà è G.A.S. perché:

$V(x)$ D.P. e $V(x)$ è Radialmente illimitata
$L_f V(x)$ D.N.

Esercizio 2

E se l'equilibrio non fosse in (0,0) cosa si fa? Traslare.

$\dot{x}_1 = (x_1 + 1) x_2$

$\dot{x}_2 = x_1 x_2$

$$\begin{cases} 0 = (x_1+1) x_2 \\ 0 = x_1 x_2 < \begin{matrix} x_1 = 0; \\ x_2 = 0 \end{matrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{per } x_1 = 0 \to x_2 = 0 \\ \text{per } x_2 = 0 \to \forall x_1 \end{cases}$$

(cioè l'intero asse delle ascisse sono punti di equilibrio).

Studio punti punti di equilibrio prendendo un punto generico e poi traslando.

Punti di Equilibrio $\{(\bar{x}_1, 0) \mid \bar{x}_1 \in \mathbb{R}\}$

Prendo un nuovo sistema (z_1, z_2) nel quale devo fare in modo che l'equilibrio sia in zero.

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \beta \\ z_2 = x_2 - 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = z_1 + \beta \\ x_2 = z_2 \end{cases} \qquad (x - \bar{x}_{eq} = z) < \begin{matrix} x_1 - \overbrace{\beta}^{\bar{x}_{ep}\ (\forall \text{ valore})} \\ x_2 - \underbrace{0}_{\bar{x}_{ep}} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_1 = \overbrace{(z_1 + \beta + 1)}^{(x_1+1)} \overbrace{z_2}^{x_2} \\ \dot{z}_2 = \dot{x}_2 = \underbrace{(z_1 + \beta)}_{x_1} \underbrace{z_2}_{x_2} \end{cases}$$

← Questo è il nuovo sistema traslato avente l'equilibrio nell'origine.

Al variare di β varia il mio sistema.

- Un'alternativa è sfruttare la traslazione della candidata di Lyapunov, ovvero:

$V(x_1, x_2) = (x_1 - \beta)^2 + x_2^2 \qquad (\beta, 0)$

e studiarla nell'intorno di $(\beta, 0)$.
In realtà è piuttosto complesso e conviene usare l'altro metodo.

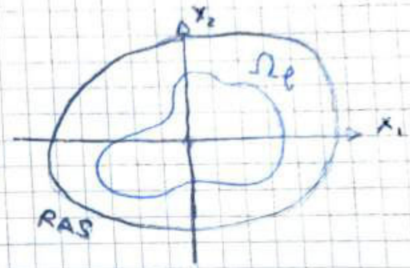
STIMA RAS

La regione di A.S. è strana e difficile da studiare; viene infatti solo stimata la RAS dell'intorno.
Quando

$V>0$ e $L_f V<0$ $\forall 0$.

posso prendere

$\Omega_\ell = \{x \mid V(x) \le \ell\}$ curva chiusa (insieme limitato) che comprende l'origine

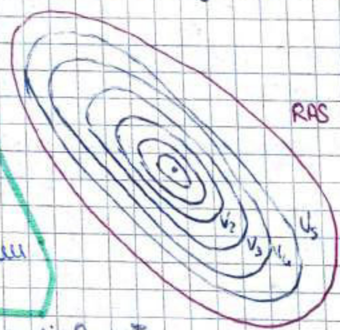


Se $\forall x \in \Omega_\ell$ $L_f V<0$ allora $\Omega_\ell \subset$ RAS.

Quindi per ogni punto della traiettoria che parte da Ω_ℓ, questa tende e converge nell'origine.

· Aumento ℓ, fino a trovare che per un certo ℓ' non rientro più nella RAS (anche solo di qualche punto).
Quella regione devo scartarla.
Tutte queste curve trovate sono curve di livello.

• Oltre ad aumentare ℓ posso considerare una V diversa (basta che le ipotesi siano sempre valide) in modo da avere una forma diversa per le curve:



GAS: Se $\exists V>0$ t.c. $L_f V<0$ (globalmente) e $\lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = +\infty$ allora l'equilibrio nell'origine è GAS.

La V radialmente illimitata

Esercizio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2+x_2^2-1) - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2+x_2^2-1) \end{cases}$$

Equilibrio $(0,0)$

Linearizzato $\rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad -1 \pm j$

Per il metodo indiretto di Lyapunov so che l'origine del sistema non lineare è A.S. (gli autovalori hanno parte reale negativa).

• Cosa possiamo dire sulla RAS?

Resto nel linearizzato e impongo:

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$L_f V = x_1^2(x_1^2+x_2^2-1) - \cancel{x_1x_2} + \cancel{x_1x_2} + x_2^2(x_1^2+x_2^2-1) =$$
$$= (x_1^2+x_2^2-1)(x_1^2+x_2^2)$$

D.N. in un intorno dell'origine (nella circonferenza unitaria $r=1$) lo esclude

Quindi è localmente definita negativa.
Ne segue che tutte le circonferenze con centro in O e raggio <1 appartengono alla RAS.

Esercizio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2^2 - x_1^3 - x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_1^3 x_2 \end{cases}$$

Studiamo gli equilibri del sistema $\rightarrow \begin{cases} 2x_2^2 - x_1^3 - x_1 = 0 \\ -2x_1^3 x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = 0 \;/\; x_2 = 0$

$x_1 = 0$: $\begin{cases} 2x_2^2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$; $x_2 = 0$: $\begin{cases} -x_1^3 - x_1 = 0 \\ -x_1(1+x_1^2) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \end{cases}$

Attenzione

$-x_1(1+x_1^2) = 0 \rightarrow x_1 = 0$

Il complesso NON devo considerarlo!

Quindi l'unico equilibrio del sistema è l'origine.

- Cerchiamo una candidata di Lyapunov:

$V = \alpha x_1^a + \beta x_2^b \qquad \alpha, \beta > 0 \qquad a, b$ pari (≥ 2)

$L_f V = \alpha a x_1^{(a-1)} (2x_2^2 - x_1^3 - x_1) + \beta b x_2^{(b-1)} (-2x_1^3 x_2) =$

$= \underline{2\alpha a x_1^{(a-1)} \cdot x_2^2} - \alpha a x_1^{a+2} - \alpha a x_1^a - \underline{2\beta b x_1^3 x_2^b}$

I termini che voglio eliminare sono //// e quindi devo scegliere opportunamente i parametri.
↳ cioè gli elementi misti

$$\begin{cases} a-1 = 3 & (x_1) \\ 2 = b & (x_2) \\ 2\alpha a - 2\beta b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ 4\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha = 1 \; ; \; \beta = 2$$

Trovo quindi:

$V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$

$L_f V = -4x_1^6 - 4x_1^4$ Semi definita negativa (si annulla $\forall x_2$)

Quindi per Lyapunov l'origine è stabile.

- Sfrutto La Salle:

$R = \{ x \mid L_f V(x) = 0 \} \supset M$?

la $V(x_1, x_2)$ ha tutte le curve di livello chiuse.

$L_f V = -4x_1^6 - 4x_1^4 \rightarrow R = \{ (0, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R} \}$ che è fatto da tutti i punti sulle ordinate.

Impongo al sistema di partire e restare in questo insieme, cioè:

$(x_1(\tau), x_2(\tau)) \in R \rightarrow x_1(\tau) = 0 \;\; \forall \tau \rightarrow \dot{x}_1(\tau) = 0 \;\; \forall \tau$

Dalla prima equazione trovo:

$0 = 2x_2^2 - 0 - 0 \rightarrow x_2 = 0 \quad \forall \tau$

Questo mi dice per il teorema di La Salle che l'equilibrio nell'origine è A.S. perché l'insieme invariante massimo contiene solo la traiettoria che parte (e resta) nell'origine.

Esempio - Pendolo

$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\sin\theta = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{mL^2}x_2 - \frac{g}{L}\sin x_1 \end{cases}$$

punti di equilibrio $(0,0)$ $(\pi, 0)$

quindi sono della forma $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$

Abbiamo già visto il sistema linearizzato (l'equilibrio nell'origine è stabile, l'altro è instabile).
Facciamolo con Lyapunov.

$(0,0)$

Per la V consideriamo l'energia:

$$V(x_1, x_2) = \underbrace{mgL(1-\cos x_1)}_{\text{potenziale}} + \underbrace{\frac{mL^2}{2}x_2}_{\text{cinetica}}$$ P.D. in un intorno dell'origine

$$L_f V = \underbrace{mgL\sin x_1}_{\frac{dV}{dx_1}}\underbrace{(x_2)}_{\dot{x}_1} + \underbrace{mL^2 x_2}_{\frac{dV}{dx_2}}\underbrace{\left(-\frac{b}{mL^2}x_2 - \frac{g}{L}\sin x_1\right)}_{\dot{x}_2} =$$

$$= mgL\cancel{x_2}\sin x_1 - bx_2^2 - mgL\cancel{x_2}\sin x_1 = -bx_2^2$$ semi definita negativa perché: $\{x \mid L_f V = 0\} = \{\alpha, 0\} \mid \alpha \in \mathbb{R}^2$

Dal teorema diretto di Lyapunov concludo che l'origine è stabile.

• Posso sfruttare LaSalle per trovare l'insieme invariante massimo.
Le curve di livello della funzione sono chiuse solo per alcuni valori; il problema sta nel coseno, avendo esso massimo e minimo (è difficile da invertire).

$\{V(x) = c\}$ $c \leq 2mgL$

Però vicino all'origine le curve di livello sono chiuse ($\alpha <<$).

• Com'è fatto l'insieme invariante massimo?

$R = \{L_f V = 0\} = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ cioè per stare dentro R devo avere 2° componente nulla

Partendo da un punto di punto insieme dentro nell'insieme (impongo che la traiettoria vi resti) parto dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_1(0) = \alpha \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Voglio vedere se $(x_1(T), x_2(T)) \in \{(\alpha, 0) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$ $\forall T$

Il fatto che valga per ogni (T) significa che $x_2(T) = 0$ $\forall T$.
Questo significa che:

$x_2(T) = 0 \rightarrow \dot{x}_2(T) = 0$

$$\hookrightarrow -\frac{b}{mL^2}x_2(T) - \frac{g}{L}\sin x_1(T) = 0 \xrightarrow[\text{se}]{\text{vero}} x_1(T) = 0$$

Questo significa che per restare dentro l'insieme dovevo partire dall'origine, la quale contiene tutta la traiettoria.
Ne segue che l'insieme invariante massimo è solo l'origine.

• Per il teorema di LaSalle, l'origine è anche A.S (localmente).
Il fatto che ci sia un altro equilibrio esclude la GAS.

Caso $b=0$ (non c'è attrito)

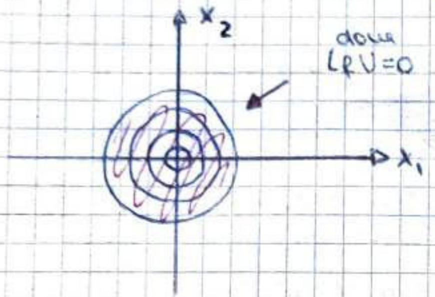
Scelgo la stessa $V(x_1, x_2)$ e trovo:

$L_f V = -bx_2^2 = 0$ semidefinita negativa (essendo nulla)

Quindi anche nel caso di assenza di attrito l'origine è stabile.

• Per LaSalle, i punti che annullano $L_f V$ vicino all'origine sono diversi punti (non più solo l'origine, ma tutte le traiettorie circolari).

Le traiettorie sono dei cerchi intorno all'origine.



Quindi non è attrattiva l'origine, cioè è solo stabile (LaSalle non può darci maggiori informazioni).

$$L_f V = 0 \rightarrow R = \{x \in \Omega_\ell \mid L_f V = 0\} = \Omega_\ell = \{x_1, x_2\}$$

quindi!

Quindi partendo da $(x_1, x_2) \in \Omega_\ell \rightarrow x(t) = \varphi(t, t_0, x_0) \in \Omega_\ell$

Non posso dire altro

Esercizio 4

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

L'equilibrio è nell'origine.
Studiare la stabilità al variare di ε.

a) **Metodo Indiretto**

$$A = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ -1 + 2\varepsilon x_1 x_2 & \varepsilon(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \varepsilon x_2 (2x_2) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1 \rightarrow$ prodotto autovalori
$\mathrm{Tr}(A) = -\varepsilon \rightarrow$ somma autovalori
$\rightarrow$ cioè il prodotto è positivo (stesso segno), la somma dipende da ε.

$\varepsilon > 0 \rightarrow$ l'origine del sistema non lineare è A.S.

$\varepsilon < 0 \rightarrow$ l'origine del sistema non lineare è instabile

$\varepsilon = 0 \rightarrow$ il Metodo indiretto non consente di concludere sulla stabilità dell'origine del sistema non lineare.

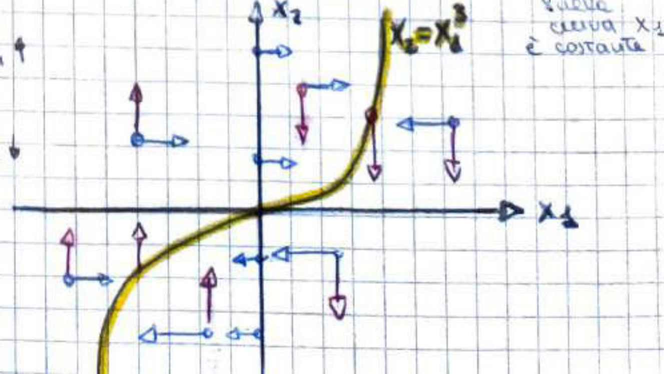
b) **Metodo Diretto** $(\varepsilon = 0)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

Sappiamo che se la derivata è positiva / negativa la variabile cresce / decresce.
Possiamo direttamente scrivere:

1) $x_2 - x_1^3 > 0 \rightarrow$ $x_2 > x_1^3 \rightarrow x_1 \uparrow$ punti sopra la curva, $x_1 \uparrow$
$x_2 < x_1^3 \rightarrow x_1 \downarrow$ punti sotto la curva, $x_1 \downarrow$

2) $-x_1 > 0 \rightarrow$ $x_1 > 0 \rightarrow x_2 \downarrow$ I, IV x_2 decresce
$x_1 < 0 \rightarrow x_2 \uparrow$ II, III, x_2 cresce



frecce orizzontali $\rightarrow$ variabile x_1
frecce verticali $\rightarrow$ variabile x_2

Guardando la linea potevo avere un'idea dell'equilibrio (non in questo caso in effetti).

- I punti lungo la curva $x_2 = x_1^3$ hanno spinta unicamente verso il basso $(x_2 > 0)$ e verso l'alto $(x_2 < 0)$.
- Nei punti lungo l'asse verticale hanno solo spinta a destra $(x_2 > 0)$ e a sinistra $(x_1 < 0)$.

Troviamo una candidata di Lyapunov:

$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ D.P.

$L_f V = -x_1^4$ S.D.N.

Per Lyapunov diciamo che l'origine è stabile.

- Con La Salle abbiamo che $R = \{(0,\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \{x \mid L_f V = 0\}$

$x_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \rightarrow x_2(t) - x_1^3(t) = 0$ e si fa così. Allora per avere la 1ª componente nulla deve essere anche la seconda.

Dal teorema di La Salle concludiamo che l'origine è A.S. (le traiettorie tendono all'origine). Infatti ho trovato che R contiene solo l'origine come traiettoria del sistema.

Esercizio 3 - Tempo Discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_2(k) - x_1^2(k)\, x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\alpha\, x_1(k) + x_1(k)\, x_2^2(k) \end{cases}$$

Studiare la stabilità nell'origine al variare di α.

- Per verificare l'equilibrio di un sistema discreto si deve verificare che gli stati non evolvano, cioè:

$x_1(k+1) = x_1(k)$
$x_2(k+1) = x_2(k)$

a) Metodo Indiretto

$$A = \begin{pmatrix} -2x_1x_2 & \alpha - x_1^2 \\ -\alpha + x_2^2 & 2x_1x_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{0,0} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono complessi $\lambda = \pm\alpha j$ ma essendo a T. Discreto mi interessa il modulo.

se $|\alpha| > 1$ -> Origine Asintoticamente Stabile
se $|\alpha| < 1$ -> Origine Instabile
se $|\alpha| = 1$ -> $|\lambda| = 1$ e non posso concludere con il metodo indiretto
se $|\alpha| = -1$ -> $|\lambda| = -1$

b) Metodo Diretto $|\alpha| = 1$

$V = x_1^2 + x_2^2$

$$\Delta V = \underbrace{(x_2 - x_1^2 x_2)^2 + (-x_1 + x_1 x_2^2)^2}_{V(x_1(k+1),\, x_2(k+1))} - \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{V(x_1(k),\, x_2(k))} = \underbrace{x_1^2 x_2^2}_{\text{sempre} \geq 0} \overbrace{(x_1^2 + x_2^2 - 4)}^{\text{negativa vicino l'origine}} < 0 \quad \text{S.P.D.} \quad \underline{\text{SDN}}$$

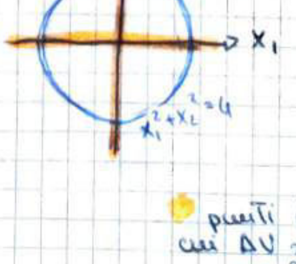
L'origine è stabile per Lyapunov.

- Consideriamo La Salle:

$R_V = \{x \mid \Delta V = 0\} = \{(\gamma, 0) \mid \gamma \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$

perché $x_1^2 x_2^2$ si annulla per tutti i punti in cui x_1 o x_2 sono nulli.

Considero per La Salle i punti in cui è verificato che $(x_1^2 + x_2^2 - 4)$, cioè dove la $V(x)$ è definita negativa.



punti in cui ΔV si annulla

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \end{cases}$$

L' equilibrio è $(0,0)$

$V(x) = x_1 x_2$ Scelta tipica per Cetaev

I quadrante) crescono sia x_1 sia x_2 senza intersecare gli assi.

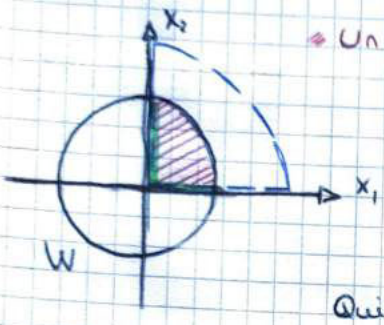
Vorrei quindi lavorare nel 1° quadrante (dato che ha questo andamento).

Scelgo:

$V = x_1 x_2$ non è definita in segno

- Come W posso scegliere un qualsiasi intorno dell' origine (disco)

Come U scelgo — — — (essendo aperto, lo scelgo ARBITRARIAMENTE).



$U \cap W$

$V = 0$ in $\delta U \cap W$

(1) $L_f V = x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 = x_1 x_2 (x_2 + x_1)$ N.D.

Devo vedere se $L_f V$ e V sono positive in $U \cap W$.

$L_f V > 0$
$V > 0$

$V \to$ positiva I, III
$L_f V \to$ positiva I

Quindi l'origine è instabile per Cetaev.

per questo scelgo U così! $U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$

$\partial U = \{(x_1, 0) \mid x_1 \geq 0\} \cup \{(0, x_2) \mid x_2 > 0\}$

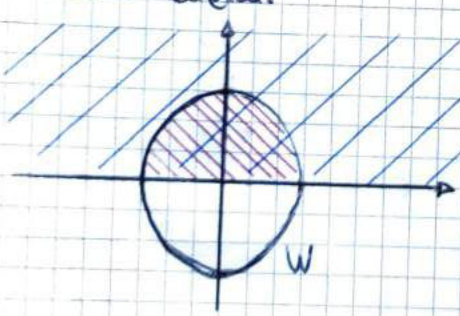
Riprendo Esercizio 3

Nel caso $|\alpha| = -1$ si può applicare Cetaev.

$V = x_1^2 + x_2^2$

$\Delta V = x_2^2 (x_1^4 + 4x_1^2 + x_2)$ S.D.P. (se $x_2 = 0$ si annulla)

Applico Cetaev in zone in cui sia V sia ΔV sia definita positiva: la V è positiva ovunque, la ΔV è solo semidefinita positiva.
Scelgo come U il semipiano superiore; la W è sempre un intorno dell' origine.



U

$V = 0$ in $\delta U \cap W$ NO!

Quindi si deve scegliere un'altra V.

$U \cap W$

(1) - L'origine $(x=0)$ sta in $\delta U \cup U$ OK

- $\forall x \in U \cap W$ $V(x) > 0$ per $x \neq 0$, $L_f V(x) > 0$ OK (scelgo U apposta)

- $x = 0$ $\forall x \in \delta U \cap W$ $V(x) = 0$ OK

L'ORIGINE INSTABILE

Esempio - Ciclo limite

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

• studiare ciclo con il metodo diretto

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$L_f V(x) = -\cancel{x_1 x_2} + x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) + \cancel{x_1 x_2} + x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) =$$

$$= \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{>0} \underbrace{(1 - x_1^2 - x_2^2)}_{>0 \text{ intorno all'origine}} \rightarrow \text{ORIGINE INSTABILE}$$

la $L_f V(x)$ è localmente Definita Positiva in una circonferenza $(x_1^2 + x_2^2 = 1)$ l'equilibrio dell'origine è instabile.
Lungo questa circonferenza la $L_f V(x)$ si annulla, inoltre questa circonferenza è anche una curva di livello. Potrebbe essere un ciclo limite:

sui punti della circonferenza V è costante, ed è una traiettoria del sistema e quindi un ciclo limite

$$C(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$$

$$V = C(x)^2 = (1 - x_1^2 - x_2^2)^2$$

$$\underbrace{L_f V = 2(1 - x_1^2 - x_2^2)}_{2C(x)\frac{dC(x)}{dx} f} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}}_{\frac{dC}{dx}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}}_{\text{dinamica sistema}} = -4 \underbrace{C(x)^2}_{>0} \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{>0}$$

ciclo limite ATTRATTIVO

Troviamo che $L_f V$ si annulla in $C(x)$ ed è D. N. Significa che $C(x)$ è un ciclo limite (quando ci arrivo ci resto) ed è anche Attrattivo (essendo definita negativa).
· Questo anche perché l'equilibrio è instabile (nell'origine) e quindi le traiettorie che partono anche da quell'interno finiscono proprio nel ciclo limite.

Facendo [illegible] si trova infatti che le traiettorie tendono alla circonferenza $(1 - x_1^2 - x_2^2)$.

$$A^T P + PA = -\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

→ conviene scegliere una Q con questa forma

$$\rightarrow \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}$$

cioè conviene sceglierla già simmetrica e poi ricavare la P risolvendo sistema

Esercizio

$\dot{x} = f(x)$ Dato un sistema, studiare l'equilibrio per $\hat{u} = -2$ e la stabilità

$$\dot{x}_1 = (x_2 + 1)^3$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 - 1)^3 + u + 2$$

Determinare u affinché il punto $(+1; -1)$ sia almeno stabile.

Sistemi non lineari non Stazionari

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = f(x,t) \\ t_0\end{array}\right\}$$

sistemi non stazionari → sistemi i quali dipendono da parametri che variano nel tempo.

Considero un sistema lineare tempo variante:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & a(t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \dot{x} = A(t)x$$

La contiene un elemento dipendente dal tempo.

Nonostante gli autovalori abbiano parte reale negativa (e siano costanti) non posso concludere sulla stabilità.
Infatti, se $a(t) = e^{2t}$ il sistema diverge.
Quindi salta tutto ciò che è stato detto fin'ora.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin t\cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Gli autovalori hanno parte reale negativa, ma il sistema diverge comunque.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \frac{15\sin(12t) - 11}{2} & \frac{15\cos(12t)}{2} \\ \frac{15\cos(12t)}{2} & \frac{-15\sin(12t) - 11}{2} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2 \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$
$\lambda_2 = -13$

L'origine è A.S. nonostante

• Nella condizione di stabilità parlavamo solo di "condizioni iniziali", ma ora dovrò parlare anche di tempo iniziale.

$\dot{x} = f(x,t) \qquad x = 0$ Equilibrio

L'equilibrio è stabile se $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(t_0) > 0$ t.c. $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

Devo quindi fissare t_0.
Questo significa che δ è una funzione di ε e di t_0. Vorrei però un concetto di stabilità indipendente da t_0.

Si dice che l'equilibrio è Uniformemente Stabile se:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ indipendente da t_0 t.c. $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$

Diremo che una funzione $\alpha : [0, a) \to [0, +\infty)$ è una funzione di classe K se è:

- continua
- strettamente crescente
- $\alpha(0) = 0$

Diremo che è una funzione di classe K_∞ se:

- è di classe K
- $a = +\infty$
- $\lim_{r \to +\infty} \alpha(r) = \infty$

Esempio

Considero un sistema non lineare e non stazionario.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \beta(T)x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

ipotesi su $\beta(t)$
con $\beta(T)$ differenziabile continua
$0 \leq \beta(T) \leq K$
$\dot{g}(T) \leq \beta(T) \quad \forall T \geq 0$

Equilibrio → origine

$$V(T,x) = x_1^2 + (1+g(T))x_2^2 \qquad \text{con} \quad \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{W_1} \leq V(T,x) \leq \underbrace{x_1^2 + (1+K)x_2^2}_{W_2}$$

è stato facile trovarle poiché $g(t)$ è limitata

$$\dot{V}(t,x) = \underbrace{\dot{g}(T)x_2^2}_{\to \frac{\partial V}{\partial T}} + 2x_1(-x_1 - g(T)x_2) +$$

$$+ 2(1+g(T))x_2(x_1 - x_2) =$$

$$= \dot{g}(T)x_2^2 + 2x_1^2 \cancel{- 2x_1x_2 g(T)} + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \cancel{+ 2g(T)x_1x_2} - 2g(T)x_2^2 =$$

$$= \dot{g}(T)x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2g(T)x_2^2 =$$

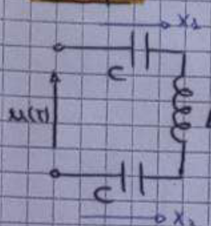
$$= -2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2\underbrace{(2 + 2g(T) - \dot{g}(T))}_{\dot{g}(T) \leq g(T)} \leq -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 =$$

≥ 2

$$= -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{PD} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \text{la } \dot{V} \text{ è Definita negativa}$$

Si può concludere che l'origine è globalmente uniformemente stabile

Esempio



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_2}{C} \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{L}x_1 - \dfrac{1}{L}x_3 + \dfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_3 = \dfrac{x_2}{C} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1/C & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cioè posso intervenire solo sulla dinamica di x_2. Tutto dipende anche da come scelgo di intervenire sul sistema.

Calcolo la matrice di Raggiungibilità:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/LC & 0 \\ 1/L & 0 & -2/L^2C \\ 0 & 1/LC & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho(R) = \underline{2} \quad (< n = 3)$$

Il rango di R non è massimo: prima e terza colonna sono e.l. ⇒ sistema non completamente rag.
Lo spazio immagine della matrice è (cioè lo spazio di ragg.):

$$\mathcal{R} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Im}(R)$$

per cui non è possibile trovare un ingresso per il quale la prima e la terza componente siano diverse!!!

Ne segue che il sistema non è completamente raggiungibile.

- Lo spazio $\mathcal{R}$ è A-invariante, cioè $\forall x \in \mathcal{R} \Rightarrow Ax \in \mathcal{R}$

Dimostrazione

Il fatto che $x \in \mathcal{R}$ significa che $x \in \operatorname{Im}(R)$ $\xrightarrow{\text{cioè}}$ $\exists\, y$ t.c. $\overbrace{Ry}^{\text{ovvero un prodotto che sta nell'Im. di R}} = x$

Ne segue che x è combinazione lineare delle colonne di R:

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} y = x$$

non è e.l. (non rientra in R)

'Ax' è combinazione lineare di $[AB \;\; A^2B \dots A^{n-1}B \;\; A^nB]$ ma, per il Teorema di C. Hamilton, anche A^nB è combinazione lineare di R.

$$\operatorname{Im}(AR) = \operatorname{Im}(R) \rightarrow Ax \in \operatorname{Im}(R) \Rightarrow Ax \in \mathcal{R}$$

Inoltre, non solo R è A-invariante, ma è il più piccolo sottospazio A-invariante di X che include Im B.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolo la matrice di Raggiungibilità:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{B} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}_{AB} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{A^2B} \end{bmatrix} \quad \rho(R) = 2 \qquad \mathcal{R} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La matrice R non è quadrata (3 righe, 6 colonne).

$$x \in \mathcal{R} \qquad x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistemi Tempo Discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dove $x(t) = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B\,u(k)$

Infatti posso scrivere la $x(t)$ come:

$$x(t) = A^t x_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{t-1}B \end{bmatrix}}_{R_t} \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

cioè la sommatoria posso scriverla come matrice - vettore

$x(0) = x_0$
$x(1) = Ax_0 + Bu(0)$
$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x_0 + AB\,u(0) + Bu(1)$
$\vdots$

questa è una sorta di matrice di raggiungibilità; l'unica differenza è che qui la A dipende dal tempo $\rightarrow A^{t-1}$

Chiamo $\mathcal{R}_t$ l'insieme degli stati raggiungibili dall'origine, cioè se lo stato è combinazione lineare delle colonne (del prodotto).

Ne segue che:

$$\text{da zero} \quad \mathcal{R}_t = \text{Im}(R_t) = \text{Im}\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{t-1}B \end{bmatrix}$$

t: discreto — matrice di raggiungibilità in t-passi

Non ho comunque senso chiedere informazioni per $t > n$. (vale comunque C. Hamilton)

Esempio - Tempo discreto

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = [B] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{R}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$R_2 = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Quindi quello che raggiungo in un passo lo raggiungo anche con più passi (non cambia nulla).

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = [B] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{R}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$R_2 = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{R}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathcal{R}_2 \supset \mathcal{R}_1$$

$$R_3 = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \supset \mathcal{R}_2$$

Quindi in tre passi il sistema è completamente raggiungibile.

Dato che $\mathcal{R}_t$ dipende dal tempo, allora che: $\mathcal{R}_{t+1} \supseteq \mathcal{R}_t$

Quello che raggiungo in un passo posso anche raggiungerlo in due passi, ma a un certo punto posso saturare: se questa dimensione è pari allo spazio di stato il sistema raggiungibile, altrimenti no.

$\dim \mathcal{R}_t \leq n \quad \forall t$

Inizialmente abbiamo detto che $\mathcal{R}$ è A-invariante.
Non è detto che lo sia $\mathcal{R}_1$:

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{R}_1 = Im(R_1) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ Non è uno spazio A-invariante, perché: $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{R}_2 = Im(R_2) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

$\mathcal{R}_3 = Im(R_3) = \mathbb{R}^3$ A-invariante (direttamente $\mathcal{R}_3$ è lo spazio massimo).

Osservazione!
Se A avesse colonne l.d., anche $\mathcal{R}$ precedente a quello massimo sarà A-invariante; vale la regola secondo la quale si ha $\mathcal{R}$ A-invariante quando si arriva alla saturazione, cioè quando $\mathcal{R}$ non cresce più.

- Se effettuo un cambio di coordinate la Raggiungibilità non varia.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ x &= Tz \end{aligned} \longrightarrow \dot{z} = T^{-1}AT\,z + T^{-1}B\,u$$

$$R_z = [\underbrace{T^{-1}B}_{B} \quad \underbrace{T^{-1}A\cancel{T}\cdot\cancel{T^{-1}}B}_{AB} \quad \underbrace{T^{-1}A^2\cancel{T}\cancel{T^{-1}}B}_{A^2B} \quad \dots \quad \underbrace{T^{-1}A^{n-1}\cancel{T}\cancel{T^{-1}}B}_{A^{n-1}B}] = T^{-1}R_x$$

Quindi la matrice R varia, ma è premoltiplicata per una matrice invertibile cioè non varia nulla a livello di dimensioni e di spazio di raggiungibilità.

Questo vale per sistemi a T.C. e a T.D., cioè che la raggiungibilità è proprietà invariante con il cambio di coordinate.

$R_z = T^{-1}R_x$ Se il sistema è completamente raggiungibile, R ha rango massimo, e posso a partire dalla R calcolare la matrice del cambio di base (T).

$R_zR_z^T = T^{-1}R_xR_z^T \longrightarrow T = R_xR_z^T(R_zR_z^T)^{-1}$

- Nel caso particolare nel quale R_x e R_z sono quadrate, trovo:

$T = R_xR_z^{-1}$ $\qquad R_z, R_x \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Vado a scegliere ~~una~~ base particolare (così come visto un paio di lezioni fa).
Ora, vale la proprietà:

$\boxed{\mathcal{R} \text{ è il più piccolo sottospazio A-invariante che contiene } Im(B).}$

Dimostrazione

1) $\mathcal{R} \subset Im(B)$?
Si, perché $\mathcal{R}$ è fatto dalle colonne di B.

2) $\mathcal{R}$ è il più piccolo sottospazio ... ?
Si, perché se S è A-invariante e $S \supset Im(B)$ allora $S \supset Im(A^kB) \supseteq \mathcal{R}$

- Andiamo quindi a lavorare con un particolare cambio di variabile:

$T_R \in \mathbb{R}^{n\times r}$ $\qquad r = \dim \mathcal{R}$ $\qquad$ cioè T_R è una matrice formata dai vettori di base di $\mathcal{R}$.

$T_N \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ dove T_N è una base complementare.

$T = [T_R \quad T_N]_{n\times n}$ è una matrice invertibile

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I blocchi sulla diagonale devono essere quadrati

Il sistema non è in forma standard.

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$rg\,R = 2$

Il sistema non è completamente raggiungibile perché il Rango di R non è massimo.

Lo Spazio generato da R è tutto il piano x_2, x_3. Una base dello spazio di Raggiungibilità è:

$$\mathcal{R} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim(\mathcal{R}) = 2 = r \longrightarrow$ Spazio raggiungibile

$n - r = 3 - 2 = 1$

- Effettuo il cambio di base per portare il sistema in forma standard di Raggiungibilità.

$$T_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{basi di } \mathcal{R}$$

$$T_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{base mancante di } \mathcal{R}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad CT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Devo ora verificare che sia davvero in forma standard.
'B' ha due zeri. So che $\mathcal{R}$ ha dimensione 2. Posso dividere B in 2. Il blocco $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ha dimen. $r = 2$ ed è il blocco raggiungibile.
Il blocco nullo (dim $n - r = 1$) è il sottosistema non raggiungibile.

Non devo farmi ingannare dal fatto che $(T^{-1}B)$ abbia due zeri. Ciò che conta sono i blocchi e la loro dimensione.

- Nella $G(s)$ non troverò tra i poli del sistema il polo 1 (della matrice A). Questo polo va infatti a essere eliminato tramite la $T^{-1}B$.
Questa cosa è abbastanza pericolosa.
Infatti questo polo è instabile (ergo lo è tutto il sistema), ma dato che nella $G(s)$ scompare vado a perdere informazioni preziose sul sistema.
Bisogna quindi fare estrema attenzione a questo.

$$A_R = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_N = [1] \Rightarrow \lambda = 1 \text{ Autovalore esterno al sottospazio di R.}$$

$\begin{vmatrix} \lambda = -1 \\ \lambda = -3 \end{vmatrix}$ autovalori interni al sottospazio di R.

Il sistema è instabile ($\lambda = 1$), ma la f.d.t. ~~[illegible]~~ non farà vedere questo andamento (perché si cancella essendo non raggiungibile).

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \cdot \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{s-1}}$$

Lemma PBH

Preso un sistema $x^+ = Ax + Bu$, il sistema è completamente raggiungibile se e soltanto se la matrice:

$$\left[\begin{array}{c|c} A-\lambda I & B \end{array}\right]$$

ha rango massimo (per righe) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. $\rightarrow \forall \lambda$ autovalore di A

La matrice $(A-\lambda I)$ non ha rango massimo se λ è un autovalore di A!

~~• Questa matrice non ha rango massimo se λ è un autovalore~~

Dimostrazione per assurdo

• L'ipotesi è che la coppia $[A, B]$ sia completamente raggiungibile.

Supponiamo che esista $\omega \neq 0$ tale che $\omega^T [A-\lambda I \quad B] = 0 \xrightarrow{\text{cioè}}$ $\omega^T B = 0$, $\omega^T A = \lambda \omega^T$

Questa ultima equazione è possibile solo se λ è autovalore di A.

La riscrivo:

$$\omega^T A = \lambda \omega^T \rightarrow \omega^T AB = \lambda \underbrace{\omega^T B}_{=0} = 0 \rightarrow \omega^T A^k B = 0 \quad \forall k \Rightarrow \omega^T R = 0 \quad \text{Assurdo}$$

È assurdo perché per ipotesi la coppia $[A, B]$ è completamente raggiungibile. Quindi per questo motivo non esiste alcun $\omega \neq 0$ tale che è verificata l'equazione di sopra.

Dimostrazione 2

• Per ipotesi so che $[A-\lambda I \quad B]$ abbia rango massimo. Voglio dimostrare che la coppia $[A, B]$ sia completamente raggiungibile.

Per assurdo suppongo che la coppia $[A B]$ non sia completamente raggiungibile.

$$\begin{pmatrix} A_R & A_{RN} \\ 0 & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_R \\ 0 \end{pmatrix}$$ dove A_R e B_R sono completamente raggiungibili.

Prendo un $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-r}$ (appartenente al sottospazio non raggiungibile) e autovettore di A_N^T, quindi:

$$A_N^T \hat{x} = \hat{\lambda} \hat{x} \rightarrow \hat{x}^T A_N = \hat{\lambda} \hat{x}^T$$

Prendo un vettore x formato da:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x} \end{bmatrix}^r$$

$$x^T \cdot [A-\lambda I \quad B] = [0 \quad \hat{x}^T] \begin{bmatrix} A_R - \lambda I_R & A_{RN} & B_R \\ 0 & A_N - \lambda I_{n-r} & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad \underbrace{\hat{x}^T (A_N - \lambda \hat{x}^T)}_{=0 \text{ per come ho scelto } \hat{x}} \quad 0] = 0$$

Questo è assurdo, perché so che la matrice $[A-\lambda I \quad B]$ ha rango massimo, mentre qui si dimostrato che esiste un vettore tale per cui si annulla (appunto Assurdo).

Esempio

Riprendo le matrici dell'esempio precedente.

Gli autovalori sono: $1, -1, -3$

Abbiamo già detto che il denominatore della $G(s)$ sarà $(s+1)(s+3)$, quindi si può parlare di stabilità nella funzione d'uscita (cosa diversa dalla stabilità del sistema).

$$[A-\lambda I \quad B] \xrightarrow[(A-I)]{\lambda=1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ (ultima colonna: B)

Il rango non è massimo (ho una riga nulla).
Quindi il sistema non è completamente raggiungibile.
In particolare, l'autovalore $\lambda = 1$ Non è Raggiungibile.

Se volessi rendere il sistema raggiungibile avrei potuto intervenire tramite la matrice B (cioè rendere l'ingresso per la prima variabile $\neq 0$).

La matrice del cambio di base è:

$$\boxed{T = R R_c^{-1}}$$

dove R: matrice di raggiungibilità del sistema di partenza (quadrata e invertibile).

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \vdots & & \cdot & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & 0 & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \cdot & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio ①

$$y^{(3)} + \underbrace{3}_{a_2} y^{(2)} + \underbrace{2}_{a_1} \dot{y} \underbrace{- y}_{a_0} = \underbrace{2}_{b_1} \dot{u} + \underbrace{3}_{b_0} u$$

Questa è un'equazione differenziale lineare in una variabile e un ingresso.

$$G(s) = \frac{2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 2s - 1}$$

dato che $\rightarrow$

$$x_1 = y \qquad \dot{x}_1 = x_2$$
$$x_2 = \dot{y} \qquad \dot{x}_2 = x_3$$
$$x_3 = y^{(2)} \qquad \dot{x}_3 = y^{(3)} = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \text{ingresso}$$

La forma canonica di controllo è:

$$A_c^{(3\times3)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & & I & \\ 0 & & & \\ 1 & & -2 & -3 \end{bmatrix} \\ \quad -a_0 \quad\; -a_1 \quad -a_2 \end{array}$$

La matrice A è (3x3) dato che la G(s) è di ordine 3.

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_c = \begin{array}{c} [\; 3 \quad 2 \quad 0 \;] \\ \; b_0 \quad b_1 \quad n>p \text{ di } 1 \end{array}$$

(quindi c'è uno zero solo)

Esempio ②

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [\,1 \;\; 0 \;\; 0\,]$$

$$R = [\,B \quad AB \quad A^2B\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Polinomio caratteristico di A $\rightarrow$ $p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2) =$
$= \lambda^2 + 1 + 2\lambda(\lambda-2) = \underline{\lambda^3 - 3\lambda - 2}$

Posso costruire il sistema di controllo:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & & I \\ 0 & & \\ -a_0 & -a_1 & \underbrace{-a_2}_{\text{lo è nullo } \lambda^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ matrice di raggiungibilità nella forma canonica di controllo

Questa matrice ha l'antidiagonale di soli 1, quindi è invertibile.

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ e quindi trovo la matrice del cambio base $\rightarrow$ $$T = R R_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

• Di fatto $\mathcal{R}$ è tutto lo spazio in cui evolve l'evoluzione forzata del sistema. Questa, indipendentemente dall'ingresso, resta in quello spazio.
È molto simile a quanto visto per l'evoluzione libera con il sottospazio ciclico.

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$$

$\leftarrow$ Di questa equazione abbiamo visto essenzialmente tutto.

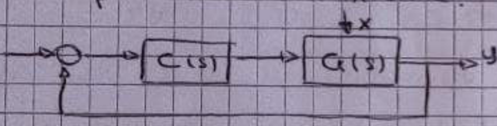
Resta da studiare l'equazione:

$$y = Cx + Du$$

Dal punto di vista computazionale y la so calcolare, ma vi sono informazioni intrinseche in C e D.
Infatti, se ad esempio C fosse nulla, in uscita non avrei nulla (ovvero perdo qualsiasi informazione del sistema).
In y non leggo interamente la x (a meno che C non sia la matrice identità), quindi la C funge da filtro, perché nasconde alcune variabili.
Questa informazione parziale mi consente di sapere tutto sul sistema?

• Spesso si impone l'ingresso

$$u(t) = K\, x(t)$$ cioè retroazionato



La matrice dinamica, nella forma $(A + BK)$ ovviamente varia, quindi variano anche i suoi autovalori e la stabilità.
Il problema è che non conosco $x(t)$ (a meno che $C = I$) quindi devo stimarlo.
Questo problema di capire com'è lo stato a partire da tutto il sistema è tipico dell'osservabilità.
Sono due i possibili approcci:

<u>1° modo</u> : si cerca di capire direttamente com'è fatta $x(t)$
Ricostruzione Stato $\Rightarrow$ Ricostruzione

<u>2° modo</u> : cerco di capire da dove è partito il sistema (cioè x_0).
Osservazione Stato $\Rightarrow$ Osservabilità

• Due stati iniziali x_0 e $\bar{x}_0$ sono indistinguibili nel futuro nell'intervallo $[0, t]$ se
$\forall u \in \mathcal{U}$ $\quad y(\tau, t_0, \bar{x}_0, u) = y(\tau, t_0, x_0, u) \quad \forall \tau \in [0, t]$

cioè $x_0 \, \tilde{I}_t \, \bar{x}_0$ (x_0 e $\bar{x}_0$ sono indistinguibili)

Questo significa che il passaggio per la C va a nascondere il fatto che gli stati sono in realtà diversi (perché vedo sempre lo stesso valore).
Definisco:

$$\tilde{I}_t\, x_0 = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \, \tilde{I}_t \, x_0 \}$$ insieme dei punti indistinguibili.

Esempio ①

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema è in forma standard?
Devo verificare la struttura di A e C e devo inoltre controllare che la coppia sia completamente osservabile.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow C \\ \leftarrow AC \\ \leftarrow A^2C \end{array}$$

La matrice 'O' non ha rango massimo, quindi il sistema non è in forma standard.

Il sottospazio non osservabile ha dimensione 2.

$$\ker O = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per portarlo in forma standard devo effettuare un cambio di variabile:

$$\underbrace{T_{\bar{o}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{non osservabile}} \qquad \underbrace{T_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{osservabile}} \longrightarrow T = T_o \mid T_{\bar{o}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice che porta il sistema alla forma standard di osservabilità.

Esempio ②

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{leggo } x_1 \\ \rightarrow \text{leggo } x_2 \end{array}$$

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \big] \; C \\ \big] \; CA \end{array}$$

Completamente osservabile

- Cambiando C in $\tilde{C} = (1 \; 0 \; 0)$ come diventa O:

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ completamente osservabile.

Quindi anche con una sola uscita il sistema resta osservabile.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{R O} & 0 & * & 0 \\ * & A_{R\bar{O}} & * & * \\ \hline 0 & 0 & A_{\bar{R}O} & 0 \\ 0 & 0 & * & A_{\bar{R}\bar{O}} \end{array}\right)$$

Divido la matrice in 4 blocchi; prima ho tutto ciò che è raggiungibile.
Presi singolarmente, ogni sottosistema è in forma standard.

Le matrici $*$ non hanno una dinamica particolare.

• Quello che è molto importante è la struttura (ovvero dove sono posti gli zeri).

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{RO} \\ B_{R\bar{O}} \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{RO} & 0 & C_{\bar{R}O} & 0 \end{pmatrix}$$

Alla fine avrò: $\boxed{G(s) = C_{RO}\,(sI - A_{RO})^{-1}\,B_{RO}}$ cioè nella f.d.t. stanno solo gli autovalori raggiungibili e osservabili del sistema.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Calcolare la funzione di trasferimento.

Il sistema non è in forma standard né di raggiungibilità né di osservabilità (la C non ha nessuna componente nulla).

Per prima cosa calcolo R:

$$R = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \cdots \right)$$
$$\underbrace{}_{B} \quad \underbrace{}_{AB} \quad \underbrace{}_{A^2B}$$

posso fermarmi ad A^2B, dato che la 2ª colonna sarà quasi sempre nulla e la 1ª è c.l. di quella precedente.

Il rango di R è 3 $\rightarrow \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Calcolo O:

$$\begin{array}{c} \\ O = \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\right] C \\ \\ \left.\right] CA \\ \\ \left.\right] CA^2 \\ \end{array}$$

Quelle basi dello spazio non osservabile sono:

$$\ker(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Seguendo la procedura, prendo: $T_R \quad T_{\bar{O}}$

$$\left(\overbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}^{R}\ \overbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}^{\bar{O}}\right) \qquad \ker(T_R \quad T_{\bar{O}}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{array}{l} \}\, w_1 \\ \\ \}\, w_2 \end{array}$$
$$\underbrace{}_{T_R} \quad \underbrace{}_{T_{\bar{O}}}$$

quindi $v = T_R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_{\bar{O}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v = T_R\, w_1 = T_{\bar{O}}\,(-w_2)$$

Ho quindi trovato quello che mi darà la base del sottospazio raggiungibile, non osservabile $T_{R\bar{O}}$.

$$T_{R\bar{O}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T_{RO} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_{\bar{R}\bar{O}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Metto nella matrice $T_{\bar{R}O}$ tutto ciò che resta:

$$T_{\bar{R}O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ovvero le basi canoniche che non sono rientrate nelle altre matrici.

Non mi resta che costruire T:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{T_{RO}} \; \underbrace{\quad}_{T_{R\bar{O}}} \; \underbrace{\quad}_{T_{\bar{R}O}} \; \underbrace{\quad}_{T_{\bar{R}\bar{O}}}$$

Data la struttura di T, posso concludere dicendo:

$A_{RO} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\qquad A_{\bar{R}O} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$A_{R\bar{O}} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ $\qquad A_{\bar{R}\bar{O}} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

Quindi il calcolo della $G(s)$ si riduce a quello appartenente a una matrice 2x2.

Esercizio - Tempo Discreto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) controllabile a zero?
2) Raggiungibile?
3) Trovare un ingresso che porta il sistema a 0 nel numero minimo di passi.
4) Forma Standard di Raggiungibilità.

1) Chiedere se il sistema sia controllabile a zero significa verificare che

$$\boxed{\mathrm{Im}(A^\tau) \subseteq \mathrm{Im}(R_\tau)}$$

$\tau=1$

$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B$ Ragg. in 1 passo

$\mathrm{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ($\tau=1$) perchè $\begin{cases} 2^a = 2 \cdot 1^a \\ 3^a = \text{nulla} \end{cases}$

Il sistema non è controllabile a zero in un passo. ($\tau=1$)

$\tau=2$

$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Ragg. in 2 passi

$\mathrm{Im}(R_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($\tau=2$) $\quad \mathrm{Im}(A^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathrm{Im}(R_2) \rightarrow$ Il sistema è controllabile a zero in due passi

2) Calcolo la matrice di Raggiungibilità:

$$R = [B \quad AB \quad \overset{n-1}{A^2}B] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \tau=3$$

Quindi dall'origine raggiungo tutto tranne gli stati con 2^a componente non nulla. Il sistema non è completamente raggiungibile.

3) $x(1) = A\,x(0) + B\,u(0)$
$x(2) = A^2 x(0) + AB\,u(0) + B\,u(1)$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^2} x(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{AB} u(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u(1)$$

[cioè pongo $x(2)$ a zero (so da prima che il sistema non è controllabile in un passo)]

L'unica soluzione è con $u(1)=0$
Esplicitando:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1(0) + 2x_2(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2u(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(1) \\ 0 \\ u(1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 4x_1(0) + 2x_2(0) + 2u(0) + u(1) \\ 0 = u(1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(1) = 0 \\ u(0) = -2x_1(0) - x_2(0) \end{cases}$$

$u(1)=0$ → ingresso da porre all'istante 1
$u(0) = -2x_1(0) - x_2(0)$ → ingresso da mettere all'istante '0'

4) $T_R = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Im}(R)} \qquad T_{\bar R} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{vettore base mancante}} \longrightarrow T = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{T_R} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}_{T_{\bar R}} \end{pmatrix}$ Matrice del cambio di base

$$\tilde A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \tilde B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

Forma Standard di Raggiungibilità

$A_{RR} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ok!

$\tilde A = T^{-1} A T \qquad \tilde B = T^{-1} B$

con $T^{-1} = -1 \begin{bmatrix} -1 & -0 & 0 \\ -0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$y(0) = C\,x(0) + D\,u(0)$
$x(1) = A\,x(0) + B\,u(0)$
$y(1) = CA\,x(0) + CB\,u(0) + D\,u(0)$
$x(2) = A^2 x(0) + AB\,u(0) + B\,u(1)$
$y(2) = CA^2 x(0) + CAB\,u(0) + CB\,u(1) + D\,u(2)$
$\vdots$

Porto a sinistra tutto ciò che è noto, e lascio a destra le incognite. Non resta che risolvere (se possibile) il sistema.

Esercizio - Tempo Discreto !

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Studiare la stabilità interna e modi.
La matrice A è in forma di Jordan. Gli autovalori sono:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = \lambda_4 = 1/2$
$\lambda_5 = \lambda_6 = -1$

Questi hanno tutti molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1 per $\lambda_1 \dots \lambda_4$ e m.g. = 2 per λ_5 e λ_6.
I modi del sistema sono:

$2^k,\ k\,2^k,\ \left(\frac{1}{2}\right)^k,\ k\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ (-1)^k$

Un autovalore ha $|\lambda| > 1$ quindi il sistema è internamente instabile.

2) Trovare tutte le condizioni iniziali per le quali l'evoluzione libera tende a zero

$A^k\,x(0)$

L'evoluzione libera tende a zero ogni volta che le prime due componenti di x(0) sono nulle (cioè non si considera l'autovalore avente modo divergente). Stessa cosa per la 5ª e la 6ª componente. Quindi x(0) deve essere:

$$x(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3) Trovare x(0) tali per cui l'evoluzione libera sia limitata nel tempo
Basta che siano nulle le prime due componenti.
Posso considerare in questo caso anche gli autovalori (-1) essendo limitati.

4) Studiare Raggiungibilità, ~~osservabilità~~ Osservabilità, stabilità esterna e forma minima.

Raggiungibilità
Conviene sfruttare il lemma PBH.
- Con l'autovalore 2 la matrice non perde di rango (lo riacquista con la B). Quindi gli autovalori '2' sono raggiungibili.
- Vale lo stesso discorso per l'autovalore '1/2' (entrambi raggiungibili).
- Con l'autovalore (-1) $A - \lambda I$ perde il rango di 2. Con B riesco a recuperarne 1, ma uno dei due non è raggiungibile.

Il sistema è difatti disaccoppiato, infatti il sottosistema avente gli autovalori (-1) ha dinamica totalmente distaccata dal resto del sistema.
Considero allora il sottosistema e l'ingresso:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

il secondo autovalore è raggiungibile.

Per l'**Osservabilità** sfrutto sempre il lemma PBH.
Qui devo però considerare le colonne e non le righe.

- Gli autovalori '2' sono entrambi Osservabili (la 1ª uscita di C la recupera di rango).
- Stesso discorso per '1/2' (entrambi osservabili).
- Con '-1' non riesco a recuperare di rango, quindi uno dei due non è osservabile.

Come prima considero il sottosistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{\Theta} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Lo spazio di non osservabilità

Quindi l'ultimo autovalore non è Osservabile.

Vado quindi a mettere nel sistema di partenza prima tutto ciò che è raggiungibile e poi ciò che non lo è:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

· Ragg
· non oss.

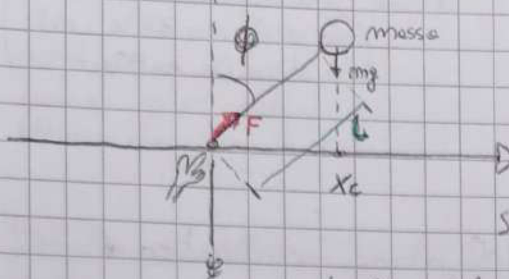
· non Rag.
· osserv.

Ho quindi portato il sistema in forma minima di Raggiungibilità.
Quindi la matrice del cambio di base è:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilità esterna?

Esempio: Pendolo invertito



Se punto di contatto si sposta solo lungo l'asse x

La forza che devo fare F per sostenere l'asta è:

$F\cos\phi = mg$ → vincolo che impone affinché il movimento sia orizzontale

~~se lo compensano~~

Se ϕ sono piccoli → $F = mg$

La forza laterale: $F\sin\phi \simeq F\phi$

~~scrivo~~ le equazioni della massa: $m\ddot{x}_c = F\phi = mg\phi \rightarrow \ddot{x}_c = g\phi$

L'angolo lo controllo accelerando il dito lungo l'asse x: $x_c = \xi + L\sin\phi \simeq \xi + L\phi$

$$\ddot{x}_c = \ddot{\xi} + L\ddot{\phi}$$

Uguagliando le due equazioni trovo:

$$g\phi = \ddot{\xi} + L\ddot{\phi} \rightarrow \ddot{\phi} = \frac{g}{L}\phi - \frac{\ddot{\xi}}{L}$$

accelerazione impressa dal dito (azione di controllo)

$$= \frac{g}{L}\phi - u \quad \text{con } u = \frac{\ddot{\xi}}{L}$$

Questa equazione differenziale, la posso portare nello spazio di stato.

$$\begin{cases} \phi = q_1 \\ \dot{\phi} = q_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = q_2 \\ \dot{q}_2 = \frac{g}{L}q_1 - u \end{cases} \rightarrow \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/L & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$$

L'uscita y è la posizione della massa ξ o l'angolo φ, legati dalla costante $L\xi$, con $\phi=0$ il pendolo è verticale

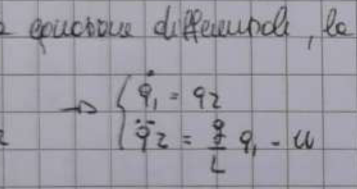
$$y = (1 \ \ 0)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \phi$$

La f.d.t.: $\frac{\phi(s)}{u(s)} \rightarrow \left(s^2\phi(s) + \frac{g}{L}\phi(s) - u(s)\right) \rightarrow \left(s^2 - \frac{g}{L}\right)\phi(s) = u(s)$

$$\rightarrow \frac{-1}{s^2 - g/L}$$

I poli del sistema: $s^2 - g/L = 0 \rightarrow s^2 = g/L \rightarrow s_{1,2} = \pm\sqrt{g/L}$

Se voglio fare un controllore output feedback, lo vediamo con il luogo delle radici, che sul piano di Gauss è:



→ per $k<0$ è sicuramente instabile (a ciclo aperto)

per $k>0$ può essere reso marginalmente stabile perché per k sufficientemente grande posso avere due poli a ciclo chiuso sull'asse immaginario

Anche posso pensare con un controllore proporzionale di "stabilizzare" che a seguito di una perturbazione, il pendolo è in grado di oscillare in modo permanente. Questo avviene con un feedback di tipo statico: $u = ky = k\phi$.

Se invece opero con il Full State Feedback:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

, ~~uscita~~ voglio $\phi = 0 \rightarrow u = kx$.

È possibile trovare k con la BASS-GURU formula, e quindi verifico le ipotesi su A e B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/L & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice di controllabilità

La matrice è invertibile e quindi completamente controllabile.

Costruisco la retroazione: $u = kx = [k_1 \quad k_2]\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = k_1 q_1 + k_2 q_2$

$(A + bk)$ = matrice a ciclo chiuso che ottengo da questa retroazione

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/L & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}(k_1 \quad k_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/L & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/L - k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

Adesso, calcoliamo il polinomio a ciclo chiuso

$$\det(sI - A - bk) = \det\begin{pmatrix} s & -1 \\ -g/L + k_1 & s + k_2 \end{pmatrix} = s(s+k_2) + (-g/L + k_1) = s^2 + s\underbrace{k_2}_{\alpha_1} + \underbrace{k_1 - g/L}_{\alpha_2} = \alpha(s)$$

Se voglio il polinomio caratteristico desiderato $\alpha(s) = (s+1)(s+2)$ così che a ciclo chiuso mi ritrovo con due autovalori (poli) in (-1 e -2), basta uguagliare le due equazioni

$$\cancel{s^2} + 3s + 2 = \cancel{s^2} + s k_2 + k_1 - g/L \qquad \text{(deve avere il polinomio monico)}$$

$$\rightarrow \quad 3s = k_2 s \quad \rightarrow \quad k_2 = 3$$

$$k_1 - g/L = 2 \quad \rightarrow \quad k_1 = 2 + g/L$$

In questo modo ottengo un controllore in full state feedback che mi causa una fdt a ciclo chiuso del mio sistema che ha un ~~polo~~ polo in -1 e un polo in -2.

Se voglio usare la BASS GURU formula: $\alpha = [3 \quad 2]$ $\quad a = [0 \quad -g/L]$, dalla fdt

$$k = -(\alpha - a)(CU)^{-1} = -[3 \quad 2 + g/L]\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \overset{a_1}{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$= -[3 \quad 2 + g/L]\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\underset{k_1}{2 + g/L} \quad \underset{k_2}{3})$$

trovando gli stessi risultati!

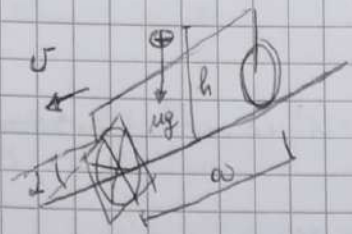
$k_1 q + k_2 q_2$ è un controllore statico? Da un punto di vista algebrico è somma prodotto. Da un punto di vista fisico ho:

$$k_1 \theta + k_2 \dot{\theta}$$

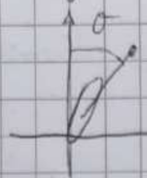
Quindi, non sto solo retroazionando l'uscita ma anche un termine contenente la derivata (rispetto al output feedback che non aveva il secondo termine)

Questo caso dovrebbe essere un PD e non solo un controllore proporzionale dato che retroaziono l'uscita e la sua derivata (è un problema di stabilizzazione e non regolazione).

Esempio: Bicicletta



La ruota davanti è girata rispetto alla direzione parallela di un angolo α che rappresenta l'angolo di sterzo.
Il baricentro è ad una altezza h con un peso mg
La distanza tra ruota anteriore e posteriore è a.
La velocità di avanzamento è v.
L'angolo di rollio (angolo di rotazione inclinazione laterale) è θ.



L'equazione della dinamica dell'angolo di rollio θ, dipendono da α (se giriamo lo sterzo la bici si muove).

La dinamica del rollio: (Sinche Optimal Robust Control)

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{h}\theta = -\frac{bv}{ha}\dot{\alpha} - \frac{v^2}{ah}\alpha$$

→ applicando Laplace → $\left(s^2 - \frac{g}{h}\right)\theta(s) = \left(-\frac{bv}{ha}s - \frac{v^2}{ah}\right)\alpha(s)$

(con velocità costante, altrimenti sarebbe non lineare)

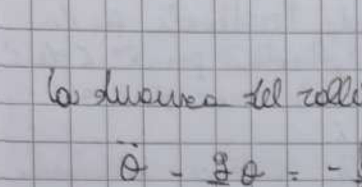
La cui fdt $G(s) = \frac{\theta(s)}{\alpha(s)} = \frac{-s\frac{bv}{ha} - \frac{v^2}{ah}}{s^2 - g/h} = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_2}$

da cui i poli $s_{1,2} = \pm\sqrt{g/h}$

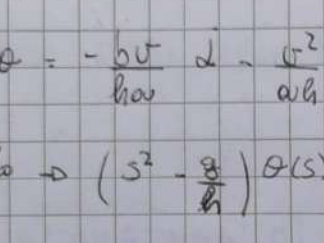
per quanto riguarda lo zero: $s\frac{bv}{ha} + \frac{v^2}{ah} = 0 \to s = -\frac{v^2}{ah}\frac{ha}{bv} = -\frac{v}{b}$ (dipende dalla velocità)

Se affrontiamo il problema con Output Feedback ($y=\theta$) abbiamo due poli simmetrici e lo zero è negativo e potrebbe essere in due posizioni a seconda di come varia la velocità ottenendo considerazioni diverse dal punto di vista del controllo

CASO 1



CASO 2



Nel caso 2, non abbiamo mai oscillazioni
Nel caso 1, in base al guadagno, possiamo ottenere poli complessi e coniugati con sussultori.

Considerando $y=\theta$ → $\alpha = ky = k\theta$, con k scalare ⇒ $\dot{\alpha} = k\dot{\theta}$

La nuova equazione: $\ddot{\theta} - (g/h)\theta = -\frac{bv}{ha}k\dot{\theta} - \frac{v^2}{ha}k\theta$ (descrive un sistema autonomo)

$$\ddot{\theta} + \frac{bv}{ha}k\dot{\theta} + \left(\frac{v^2}{ha}k - \frac{g}{h}\right)\theta = 0$$ che rappresenta la dinamica a ciclo chiuso del mio sistema.

Questo sistema sarà A.S. (visto che discende da una dinamica del 2° ordine con coefficienti da k) al variare di k se:

$\frac{bv}{ha}k > 0$ e $\left(\frac{v^2}{ha}k - \frac{g}{h}\right) > 0$ → Allora il polinomio caratt. ha due radici negative → A.S.

Se la domanda è per quali valori di k il sistema è A.S.? Per $k>0$ e $k > \frac{g}{h}\cdot\frac{ha}{v^2} = \frac{ga}{v^2}$

Quello intuito dal luogo delle radici (stabilità condizionata dalla velocità, quindi dallo zero) viene fuori dall'analisi.

Con le dirette sempre più piccola all'aumentare della velocità e quindi piccoli angoli di rollio e di sterzo. Se voglio imporre un serve con angolo di sterzo più grande per far sì che il rollio per essere stabile.

Utilizzando la tecnica Full State Feedback. La retroazione dello stato può essere parziale o completa, retroazionando solo una parte variando due coeff. di k e possono a zero.

Posso agire in due modi: posso pensare di trasformare il sistema in variabili di stato (ci viene assicurato dall'equaz. differenziale nella scrittura delle equazioni e ho effetto) superfluo, ovvero nella matrice C

$\delta = u \quad \dot{\delta} = \dot{u} \qquad \theta = x_1 \Rightarrow \underbrace{\dot{\theta} = \ddot{\theta} \; (x_1 = \ddot{x}_2)}_{?} \Rightarrow \ddot{x}_2 = x_1 = \theta$

Un altro approccio è fare una realizzazione a partire dalla fdt, costruendo un sistema dinamico in variabili di stato che abbia esattamente quella fdt (fare esercizio di controllo)

Quando possibile dovremo fare sempre a partire dalle equazioni differenziali perché così non si perde la fisica della fisica

In questo caso, $G(s) = \dfrac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/h & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = [b_1 \;\; b_2]$

definendo $k = [k_1 \;\; k_2] \Rightarrow \underset{\text{cambio il segno della retroazione}}{A - bk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 - k_1 & -a_1 - k_2 \end{bmatrix}$

Il polinomio caratteristico è: $s^2 + (a_1 + k_2)s + (a_2 + k_1) = 0$
Il polinomio desiderato è: $s^2 + d_1 s + d_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + k_2 = d_1 \\ a_2 + k_1 = d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = d_2 - a_2 \\ k_2 = d_1 - a_1 \end{cases}$ In questo modo posso scegliere la posizione dei poli ~~[illegible]~~.

Con questo approccio, ~~[illegible]~~ posso tenere i poli indipendente dalla velocità a differenza dell'output Feedback. Questo però che deve essere pure che si deve rendere indipendente dalla velocità sono costanti. ~~[illegible]~~

Regolazione dell'uscita ($y \to y_d$)

Il problema che abbiamo visto fino ad ora è cambiare la dinamica a ciclo chiuso.
Normalmente vogliamo avere un sistema stabile con la dinamica desiderata ma anche che l'uscita si porti ad un valore desiderato.
Per fare ciò dobbiamo recuperare $u = kx + v$

La dinamica del mio sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BKx + Bv = (A+BK)x + Bv$$

Se vogliamo ottenere una certa uscita costante, in generale, dobbiamo portare x ad una x_s costante e questo vuol dire $y = Cx$.
Questo comporta che x_s deve rappresentare un punto di equilibrio.

$$\dot{x}_s = 0 \to (A+BK)x_s + Bv_0, \quad \text{dove } v_0 = \text{costante}.$$

$$\to y = Cx_s = -C(A+BK)^{-1}Bv_0$$

(questo si può fare se $(A+BK)$ è invertibile, ovvero no autovalori nell'origine)

Imponendo $y = y_{desiderato}$

$$y_d = -C(A+BK)^{-1}Bv_0 \to v_0 = \frac{y_d}{-C(A+BK)^{-1}B}$$

(questo è il valore che deve avere v_0 affinché $y = y_d$)

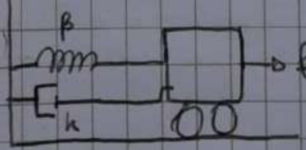
Tale condizione di esistenza è verificata quando:

$$-C(A+BK)^{-1}B = C(sI-(A+BK))^{-1}B\Big|_{s=0} = G(s)\Big|_{s=0}$$

Se la fdt $G(s)|_{s=0}$ è diversa da zero, allora esiste v_0.
La condizione $G(0) = 0$ è verificata se e solo se c'è uno zero nell'origine.

!

Esempio: sistema massa-molla-smorzatore



$$m\ddot{x} = f - \beta x - \alpha\dot{x} \to m\ddot{x} + \dot{x}\alpha + \beta x = f$$

$$\begin{cases} x_1 = x & \text{(posizione)} \\ x_2 = \dot{x} & \text{(velocità)} \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{\alpha}{m}x_2 - \frac{\beta}{m}x_1 + \frac{f}{m}, \quad \text{pongo } f/m = u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta/m & -\alpha/m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

CASO 1 $\quad y = x = x_1 \Rightarrow y = [1 \; 0]x \quad$ ovvero controllo la posizione
Prendendo $u = kx + v$, qual è il v_0 affinché $y = y_d$?

$$v_0 = \frac{y_d}{-C(A+BK)^{-1}B} \to -[1 \; 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta/m + k_1 & -\alpha/m + k_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{(-1)}{-(\beta/m + k_1)}$$

$$\stackrel{!}{=} \left(\frac{\beta}{m} - k_1\right) y_d$$

~~...~~ La soluzione di questo problema la potevamo già sapere, ovvero la forza che devo dare per tenere il sistema in equilibrio in un certo punto. Ovvero deve essere tale che tutte le forze si cancellano e il sistema è in equilibrio.
Lo smorzatore non dà forza quando si è in equilibrio, infatti non c'è b nella soluzione. La molla ha una rigidità β.

In questo caso, mi serve non solo β ma anche l'aggiunta di k perché non abbiamo questo solo una forza in ingresso, ma anche il controllore. Per cui stiamo dando ~~...~~ il valore di forza che serve a tenere in quella posizione desiderata con il controllore applicato.
La grandezza $\beta/m + k_1$ è la rigidità equivalente della molla del nuovo sistema con $u = kx + v$. Modificando la fisica dell'impianto.

~~...~~
CASO 2 $\quad y = \dot{x} = x_2 \rightarrow y = [0 \quad 1]x \quad$ controllo la velocità.

Procedendo in modo analogo,

$$v_0 = \frac{y_d}{-C(A+BK)^{-1}B} \rightarrow [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta/m + k_1 & -b/m + k_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ottenendo $v_0 = \frac{y_d}{0}$, il che non è possibile.
Questo implica che se volessi regolare la velocità per avere $y = y_d$ (costante), non esiste una soluzione. Questo lo si capisce dalla fisica del problema: sto chiedendo al carrello di andare a velocità costante e non esiste una forza costante in grado di portarlo a velocità costante.
Calcolando la f.d.t. si verifica che questo avrebbe uno zero all'origine (confermando affinché v_0 non sia definito).
Il caso v_0 è estendibile al caso MIMO, diventando v vettore. Sarà diversa la soluzione (con infinite soluzioni, se esistono) dalla scelta dei poli trovato k quando B è una matrice.
19.03
Tutto questo funziona se non ci sono disturbi.
Ci poniamo il problema di regolare $y=0$ con la presenza di disturbi.

Esistono principalmente due disturbi: il disturbo all'impianto (ingresso) e il disturbo dell'uscita.
Quest'ultimo è un tipo di disturbo che rientra nell'anello di controllo come l'uscita; ~~...~~
~~...~~
lo possiamo vedere come un disturbo della misura, indipendente dallo stato, e regolo l'uscita con un valore sbagliato.
Il disturbo all'ingresso, posso modificarlo o cancellarlo con opportune modifiche sul controllore.

Se scrivo $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$, posso modellare il disturbo complesso indipendentemente dalla struttura della matrice B.
Posso far entrare il disturbo con un vettore della stessa dimensione del vettore di stato w, interessando così tutte le variabili di stato: $\dot{x} = Ax + Bu + w$.
~~...~~ ($w' = Bw$ è un caso particolare)

La retroazione che prendiamo in considerazione ha la stessa struttura

$u = kx + v$.

Esercizio

Dato il sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$
, calcolare se possibile una retroazione dello stato ($u = kx$) che porta i poli in -3, $-2 \pm j$

Per prima cosa, devo verificare se è possibile e quindi devo calcolare la matrice di raggiungibilità:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
, il $\det = 12 \rightarrow$ è invertibile e quindi raggiungibile

Adesso metto il sistema in forma canonica di controllo e calcolo $p(\lambda)$.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1)\lambda + (-1)(-2 \cdot -1) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\rightarrow \quad A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Adesso devo calcolare la matrice M del cambio di base:

$A_c = M^{-1}AM$, nell'ipotesi di ciò, sto sottointendendo il seguente cambio di variabile

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ Mx' = x \end{cases} \rightarrow M\dot{x}' = AMx' + Bu \rightarrow \dot{x}' = M^{-1}AMx' + M^{-1}Bu$$

Se faccio una relazione del tipo $u = kx' = kM^{-1}x = k'x$

Quindi, nel nuovo mi ero trovato il controllore k che va bene per la forma canonica di controllo, per trovare il controllore u' che va bene [illegible] x devo moltiplicarlo a destra per M^{-1}.

$$M = \mathcal{C} \cdot \mathcal{C}_{f.c.c.}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Adesso trovo il h che posso per fare il match tra polinomio caratteristico desiderato e quello del sistema di partenza, $(A + Bh)$ con poli in $-3, -2 \pm j$

$$p(A+Bh) = (\lambda+3)(\lambda+2+j)(\lambda+2-j) = (\lambda+3)(\lambda^2+4\lambda+5) =$$
$$= \lambda^3 + 7\lambda^2 + 17\lambda + 15$$

Quindi: $$A_c + B_c h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 0 & \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2+h_1 & -1+h_2 & 2+h_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2 + h_1 = -15 \\ -1 + h_2 = -17 \\ 2 + h_3 = -7 \end{cases} \qquad \begin{aligned} h_1 &= -17 \\ h_2 &= -16 \\ h_3 &= -9 \end{aligned}$$

ed è il nostro controllore che va a moltiplicare x'.

Ritornando alle variabili x $\Rightarrow$ $k' = hM^{-1} = (-17 \ -16 \ -9) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= (-17 \ -16 \ -9) \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (-17 \ -16 \ -9) \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} (-44 \ -58 \ -10)$$

Un altro metodo è usare la BASS-GURA FORMULA: $k = -(\alpha - a)(\mathcal{C} U)^{-1}$

Riscrivendo il polinomio desiderato $p(A+Bh) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 17\lambda + 15$

ed il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2$

i vettori sono: $\alpha = [7 \ 17 \ 15]$, $a = [-2 \ 1 \ -2]$

la matrice di controllabilità $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

la matrice $U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathcal{C}U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$k = -[9 \ 16 \ 17] \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} [-44 \ -58 \ -10]$$

scambiando alcune righe e colonne trovo la stessa matrice di prima

Esiste un metodo alternativo chiamato "Forza Bruta". Posso pensare di forzare direttamente il risultato:

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \; k_2 \; k_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k_1 & k_2 & 1+k_3 \\ 2 & 1 & 0 \\ k_1 & 1+k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

e mi calcolo il polinomio caratteristico

$$p(A+BK) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1-k_1 & -k_2 & -1-k_3 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ -k_1 & -1-k_2 & \lambda-k_3 \end{pmatrix}$$ = trovando un polinomio in funzione di k_1, k_2, k_3 $= \lambda(k_1, k_2, k_3)$

Così facendo devo trovare dei valori di k_1, k_2 e k_3 in modo che
$\lambda(k_1, k_2, k_3) = p(A+BK)$

$$\lambda^3 + \lambda^2(-k_3-k_1-2) + \lambda(1+2k_3-2k_2) + (k_1-3k_3-2k_2-2) = \lambda^3+7\lambda^2+17\lambda+15$$

Uguagliando i coefficienti, si ottiene la soluzione del problema:

$$\begin{cases} 7 = -k_3-k_1-2 \\ 17 = 1+2k_3-2k_2 \\ 15 = k_1-3k_3-2k_2-2 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Risolvo per $K = M^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}_{\to (1-\omega)} = \dots = -\frac{1}{6}(44 \;\, 58 \;\, 10)$ ottenendo sempre lo stesso risultato

In questo metodo, vedo immediatamente che succede se rimuovo il controllore. Mettendo k_1, k_2 e k_3 a zero, ottengo $\lambda(k_1,k_2,k_3) = p(A)$

Si nota che con 3 procedimenti diversi, ottengo sempre lo stesso risultato e si può concludere che la soluzione, se esiste, è unica.

20.03

Riprendendo il discorso sulla reiezione del disturbo, mi pongo il problema di portare y a y_d anche in presenza di disturbi.

Il problema è: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx \end{cases}$ e $y \to y_d$ con $w \neq 0$ costante.

Adesso $\dot{q} = y - y_d = Cx - y_d$, dove y_d diventa ingresso del sistema.
La retroazione di stato è sempre: $u = Kx + K_q q$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + BKx + BK_q q + w \\ \dot{q} = Cx - y_d \\ y = Cx \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A+BK & BK_q \\ C & 0 \end{pmatrix}}_{A_e} \begin{pmatrix} x \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} y_d + \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} w$$

ingressi sis.

Se A_e è A.S., allora in presenza di w, il sistema raggiunge l'equilibrio (con $w \neq 0$ e $y_d \neq 0$ cost.) dove x, q sono costanti.
In questo modo, possiamo concludere:

$\dot{q} = 0 \to y - y_d = 0 \to y \to y_d$ e questo succede anche se $w \neq 0$

24.03 Assegnamento di poli quando si hanno più ingressi

Assumiamo che (A, B) sia raggiungibile, con $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dove m è il numero di ingressi. La raggiungibilità implica che, dato $B = [b_1 \dots b_m]$, la matrice di Raggiungibilità:

$\mathcal{R} = [\, b_1 \dots b_m \mid Ab_1 \dots Ab_m \mid \dots \mid A^{n-1}b_1 \dots A^{n-1}b_m \,]$ è a rango pieno.
(ovvero n colonne linearmente indipendenti).
Se non fosse raggiungibile, possiamo fare la decomposizione di Kalman, addolcendo la parte non raggiungibile.

A questo punto possiamo distinguere due casi:

CASO 1 Esiste una colonna b_i tale che $[b_i \; Ab_i \dots A^{n-1}b_i]$ è di rango pieno.
Se ciò succede, posso assegnare i poli usando solo l'ingresso i-esimo, facendo finta che gli altri ingressi che non ci siano (fissandoli a zero) ed è come se trattassi il sistema come SISO.

La matrice K_x due avere una riga per ogni ingresso (m) ed n colonne.
Basta prendere la i-esima riga e porre il resto a zero e la mia legge di controllo:

$$u = \begin{array}{c} \\ m \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ k_i^{\cdot m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n} \cdot x$$

Se $A + b_i k_i$ ha poli desiderati, allora la matrice K sarà:

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ k_i \\ 0 \end{bmatrix}$$ in posizione i-esima

CASO 2 Nessuna b_i rientra nel caso precedente. Questo significa che il sistema non è raggiungibile da un solo ingresso. Quindi, per la locazione dei poli devo usare più di un ingresso. La soluzione esiste se (A, B) è raggiungibile in modo: K è tale che $(A + BK)$ abbia i poli desiderati.
In generale, la soluzione non è unica.

Esempio: Assegnare gli autovalori in maniera arbitraria.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} u(t)$$

Per prima cosa, dobbiamo verificare la Raggiungibilità:

$$\mathcal{R} = [B \;\; AB \;\; A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & \end{bmatrix}$$

~~Se~~ Se guardassi le prime 3 colonne, sviluppando il determinante, noto che $\det \neq 0$ per cui senza sviluppare tutta la matrice, il rango è 3 $\to$ sistema RAGGIUNGIBILE

Adesso vediamo se è raggiungibile da b_1:

$$\mathcal{R}_1 = [b_1 \;\; Ab_1 \;\; A^2b_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ $\to$ rango non pieno (rank = 2) e non è raggiungibile da b_1

verifichiamo per b_2

$$\mathcal{R}_2 = [b_2 \;\; Ab_2 \;\; A^2b_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ $\to$ rango 2, non è raggiungibile solo da b_2.

2 26.03

Esempio: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} u$

Tramite il lemma di Heymann dobbiamo rendere raggiungibile il sistema da u_1 e trovare K tale che i poli a ciclo chiuso siano $-1, -1, -1$.

Scelgo b_1 e costruisco $Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & Ab_1 & A^2 b_1 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ rango pieno

↳ lin. dip. e lo elimino

Costruisco S: $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (e_2)

$M_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Il lemma di Heymann ci dice che $(\underbrace{A + BM_1}_{\bar{A}}, b_1)$ è raggiungibile. Verifico:

$Q(\bar{A}, b_1) = \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & \bar{A}b_1 & \bar{A}^2 b_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ → rango pieno e quindi raggiungibile.

$\bar{A} = A + BM_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Adesso ci rimane solo di assegnare i poli. I poli a ciclo aperto sono $(1, 1, 1)$ ma avendo effettuato la retroazione sono cambiati:

$$\det(\lambda I - \bar{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1)^2 + (-1)(\lambda-1) =$$
$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 - \lambda + 1 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$$

I polinomi desiderati sono $(-1, -1, -1)$ per cui il polinomio desiderato è:

$$(\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

La forma canonica di controllo del sistema $(\bar{A}, b_1)$ è: $A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La forma canonica di controllo desiderata è $A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

La retroazione desiderata è $A_c + B_c \underbrace{[k_1 \; k_2 \; k_3]}_{K_{cc}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 - 2 & k_3 + 3 \end{bmatrix}$

Uguagliando trovo che: $\begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 - 2 = -3 \\ k_3 + 3 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = -6 \end{cases}$ → Soluzione del problema con la forma canonica di controllo

Adesso trovo il controllore per $\bar{A}$

$$k = (R \; R_{cc}^{-1})^{-1} k_c = \; \dots \; = (\quad) \cdot (-1 \; -1 \; -6) = (-13 \; -6 \; -14)$$

$$R_{cc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(R \, R_{cc}^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

fatta l'ultima colonna

Quindi $k = M_1 + \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 & -6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -14 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

questo è il mio controllore finale

Questo è ottenuto con b_1. Se avessi usato b_2, avrei ottenuto una soluzione diversa e questo è le esempio che la soluzione non è unica.

Proviamo con il metodo "Forza Bruta". Con tale metodo $k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$ in questo modo abbiamo 6 gradi di libertà:

$$(A + Bk) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_{11} & k_{12}+1 & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23}+1 \end{pmatrix}$$

L'obiettivo è sempre quello di avere gli autovalori in $(-1, -1, -1)$

Osservando la matrice, i gradi di libertà sono 6 ma il polinomio ne prevede 3. In questo modo possiamo trascurare delle libertà per far rendere la matrice una forma particolare. Pongo $k_{21} = k_{22} = 0$

Ottengo così: $A + Bk = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ k_{11} & 1+k_{12} & k_{13} \\ \hline 0 & 0 & 1+k_{23} \end{array}\right]$ In questo modo ho forzato ad avere una matrice triangolare a blocchi

Gli autovalori desiderati sono: $(1 + k_{23})$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_{11} & 1+k_{12} \end{pmatrix}$

k_{13} è ininfluente per cui possiamo porlo a zero.

Adesso, posso scrivere: $\begin{cases} 1 + k_{23} = -1 & \rightarrow \quad k_{23} = -2 \\ \det\left(\lambda I - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_{11} & 1+k_{12} \end{pmatrix}\right) = (\lambda+1)^2 \end{cases}$

$$\det(\dots) = (\lambda - 1)(\lambda - 1 - k_{12}) - k_{11} = \lambda^2 - \lambda - \lambda k_{12} - \lambda + 1 + k_{12} - k_{11} =$$
$$= \lambda^2 - (2 + k_{12})\lambda + 1 + k_{12} - k_{11} = 0$$

Uguagliando con $(\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ ottengo

$\begin{cases} -(2 + k_{12}) = 2 \\ 1 + k_{12} - k_{11} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_{12} = -4 \\ k_{11} = -4 \end{cases}$ e la matrice di retroazione sarà:

$K = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ottenendo una matrice diversa ma con gli stessi autovalori

02.04

Esercizio: Realizzare uno stimatore Asintotico dello stato per il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [1 \ 0 \ 0] x \end{cases}$$

e che abbia tutti i poli in -3

1. Devo calcolare prima la matrice di osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ → Rango pieno, osservabile → posso assegnare i poli in $A - HC$

2. Assegnare i poli in $A-HC$ coincide con assegnare i poli in $(A-HC)^T = A^T - C^T H^T \overset{!}{=} A^T - C^T K = \bar{A} + \bar{B} K$

(cambio il segno) opzionale

2.1 Polinomio caratteristico desiderato $p(\lambda) = (\lambda+3)^3 \overset{!}{=} \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27$

2.2. Polinomio caratteristico del sistema di A^T

$$\det[\lambda I - A^T] = \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+2)(\lambda+1) + 1 = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2) + 1 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

2.3 Metto tutto in forma canonica di controllo

$$A^T_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \bar{A}, \quad B_{cc} = \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Io voglio che l'ultima riga di $\bar{A}$ fosse $[-27, -27, -9]$

Quindi: $\bar{A}_c + \bar{B}_c k_c = \begin{bmatrix} \\ x \ x \ x \end{bmatrix}$ il che mi porta a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} -1 + k_1 = -27 \\ -2 + k_2 = -27 \\ -3 + k_3 = -9 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 = -26 \\ k_2 = -25 \\ k_3 = -6 \end{cases}$$

Sapendo che la k della mia legge di controllo è $k = k_c T^{-1}$

dove $T = R (R_c)^{-1} = R(A^T, C^T)(R(\bar{A}_c, \bar{B}_c))^{-1}$:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C^T

$A^T C^T = (CA)^T$

da cui $T^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow k = k_c T^{-1} = [-26 \ -25 \ -6] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} [-6 \ -7 \ -7]$

la matrice H è pari a: $H^T = k$ e quindi $H = \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$

3. e verifico se i calcoli sono giusti

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} - y)$, e calcolo il polinomio di $A + HC$

$$\det(A + HC) = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ -8 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 27\lambda + 27$$

Stimatore Asintotico di ordine Ridotto

Il nostro osservatore, poste le condizioni di Luenberger, può essere scritto:
$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{y})$. Detto ciò, ci si può porre il seguente problema:

Avendo un sistema 3x3 con un'uscita che coincide con lo stato x_1. Perché mi devo stimare x_1 nella forma $\hat{x}_1$ dato che x_1 lo conosco? Non posso stimare solo x_2 ed x_3? Posso pensare di costruire uno stimatore che stima solo gli stati che non conosco.

Non è detto che l'unico modo di costruire uno stimatore sia che l'uscita rappresenta una variabile di stato. Potrebbe essere che l'uscita y coincide con la somma delle variabili di stato. Questo può essere esteso nel caso di più uscite.
Supponendo di avere due uscite. Guardando la matrice C e calcolando il rango$(C) = p$ (p = uscite), possiamo pensare di costruire uno stimatore di ordine ridotto $n-p$ e ricavare p variabili di stato direttamente dalle uscite y.
Nel caso semplice $\hat{x} = x_1$, la dinamica $\hat{x}_1$ sarà stimata senza dinamica dell'errore. Nel caso ho più variabili $x = x_1 - x_3$, non posso stimare x_1 ed x_3 senza una dinamica dell'errore, ma potrò stimare solo una combinazione lineare, e l'errore sarà più piccolo grazie allo stimatore ridotto.

07.04

Il problema è sempre nella forma (TD e TC è uguale)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ed assumo che rango$(C) = p$ con $p \geq 1$ e rango massimo (se non lo fosse togli righe o colonne quindi rank = max)

A questo punto, costruiamo una matrice di cambio di base T tale che

$T^{-1}x = \begin{bmatrix} w \\ \hline y \end{bmatrix}$ con y è l'uscita e w è quello che viene fuori dal cambio di base.

In questo modo $T^{-1} = \begin{bmatrix} V \\ \hline C \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n-p \text{ righe} \\ \} p \text{ righe} \end{matrix}$

Nel caso in cui dim$(y) >$ rank(C) vado a prendere solo quelle righe di C che rappresentano una sottomatrice C di rango massimo.

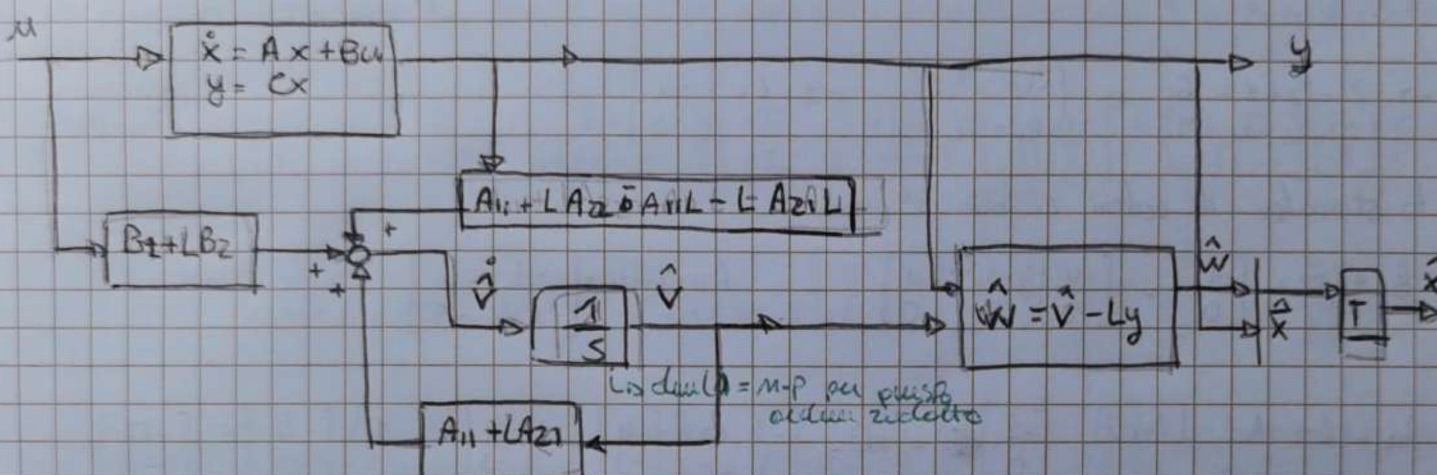
Lo stimatore per V prevede di costruire un qualcosa che abbia la forma dell'osservatore di Luenberger del sistema ridotto.
Per trovare le condizioni di Luenberger devo scrivere la dinamica dell'errore:

$$\hat{E} = \hat{V} - V \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{E}} = \dot{\hat{V}} - \dot{V} = (A_{11} + L A_{21})\,\hat{E}$$

Quindi, l'unica cosa che devo fare è far sì che $(A_{11} + LA_{21})$ sia Asintoticamente stabile. La condizione per ciò accade è se la coppia (A_{11}, A_{21}) è osservabile (dove $A_{11} = A$ e $A_{21} = C$), che si può fare se (A', C') è osservabile.

Quindi se $\hat{V}$ converge a V, posso ricostruire $\hat{\bar{x}}$

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{w} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V} - Ly \\ y \end{bmatrix}$$ ed ottenere tutto lo stato stimato $$\hat{x} = T \begin{bmatrix} \hat{V} - Ly \\ y \end{bmatrix}$$



Grazie ad L faccio sì che sia osservabile attraverso l'allocazione dei poli. Se $y = x_1$ mi ritrovo x vero non stimato, nel caso y fosse una combinazione lineare trovo un pezzo di stima. Il numero di poli da assegnare saranno di meno $(n-p)$.

Esempio: $$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = x_1 \end{cases}$$ e vogliamo costruire l'osservatore di ordine ridotto.

Dobbiamo costruire la matrice di cambio di base

$$T^{-1} : \begin{bmatrix} \; \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \\ 1\;0\;0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ la riempio per avere rango pieno $\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \quad A_{11} \qquad\quad A_{12} \\ \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \quad A_{21} \qquad\quad A_{22} \end{array}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} B_1 \\ \\ B_2 \end{array}$$

$$C' = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \qquad\quad C \\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Se voglio i poli in -3, il polinomio caratteristico desiderato di ordine ridotto (2)

$p(\lambda) = (\lambda+3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$.

Per imporlo, ho bisogno che $\lambda(A_{11} + LA_{21}) = (\lambda+3)^2$

La matrice $L = (n-p) \times p = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$

Quindi $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & l_1 \\ 1 & -2+l_2 \end{bmatrix}$

Il polinomio caratteristico è: $\det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -l_1 \\ -1 & \lambda+2-l_2 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2-l_2) - l_1 =$
$= \lambda^2 + 2\lambda + \lambda - \lambda l_2 - l_2 - l_1 =$
$= (\lambda^2 + 6\lambda + 9)$ $\rightarrow$ impongo che sia uguale al polinomio desiderato

$\rightarrow \begin{cases} 2 - l_2 + 1 = 6 \\ 2 - l_2 - l_1 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_2 = -3 \\ l_1 = -4 \end{cases} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Lo stimatore di ordine ridotto è quindi:

$B_1 + LB_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \emptyset = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad A_{11} + LA_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

$A_{12} + LA_{22} - A_{11}L - LA_{21}L = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \emptyset - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ -11 \end{bmatrix}$

Una volta trovato $\hat{v}$ e $\hat{w}$ che ricavo $\hat{\hat{x}}$. Andando a moltiplicare $\hat{x}$ per T che mi mette in prima posizione quello che ho in 3° posizione in $\hat{\hat{x}}$. In $\hat{\hat{x}}$ mi ci va y che è proprio x_1 ed è quello vero che misuro attraverso y.

$\hat{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\hat{x}}T = \hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$ $= x_1 = \hat{x}_1$, $\rightarrow \hat{x}_2$, $\rightarrow \hat{x}_3$

Quindi ho ottenuto una stima di $\hat{x}_1$ che coincide con x_1. $\hat{x}_2$ e $\hat{x}_3$ sarà una combinazione lineare dell'errore e convergono asintoticamente a x_2 e x_3.

Mentre $\hat{x}_1$ converge ad x_1 e quindi è come se sto stimando qualcosa che già misuro. Invece, con uno stimatore completo stimo anche x_1 ed otterrei $\hat{x}_1 - x_1 = \varepsilon$, al contrario con lo stimatore di ordine ridotto $\hat{x}_1 - x_1 = 0$ e non ho errore di stima.

— DA STUDIARE

Cosa succede se faccio il full state feedback retroazionando $\hat{x}$ anziché x?

La dinamica dei due sistemi collegati:

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ $\qquad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - C\hat{x})$, ci aggiungo $u = K\hat{x} + v$ $\rightarrow$ invece di x.

Questo si potrebbe stimatore anche con quello di ordine ridotto

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + H(Cx - C\hat{x}) + Bv \end{cases}$ $\Big\}$ Sono $2n$ equazioni

In questo modo possiamo dire che è possibile assegnare i poli dell'impianto e dello stimatore in maniera indipendente.

Questo fatto viene enunciato come PRINCIPIO DI SEPARAZIONE DEGLI AUTOVALORI tra stimatore e controllore.

Questo si può fare anche in presenza di rumore con l'unica differenza che E non andrà mai a zero.

Adesso vediamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = [C \;\; 0] \begin{bmatrix} sI - (A+BK) & -BK \\ 0 & sI - (A-HC) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

ottengo: $C(sI - (A+BK))^{-1}B$ che è identica a quella che avrei ottenuto retroazionando x anziché $\hat{x}$.

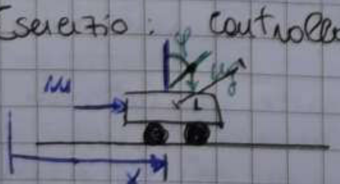
In questo caso, la fdt ha meno poli rispetto all'ordine del sistema e quindi si perdono alcune proprietà strutturali, ovvero la controllabilità.

Quando si parla di controllabilità, vuol dire che si ha lo stato potenzialmente nell'origine e tramite l'ingresso, si può variare lo stato e portarlo dove lo si vuole (stato completamente ~~[illegible]~~ controllabile).
Lo stato, in questo caso è composto sia da x che da E. L'ingresso non avendo nessun effetto sulla variabile E e quindi ~~non~~ è possibile controllare la risposta libera ma non la risposta forzata e siccome le variabili E non sono controllabili.

Saranno anche non osservabili? Affinché siano non osservabili è necessario che due diversi transitori delle variabili di stato comunque producano due uscite identiche. E, in questo caso, entra sulle variabili x tramite BK. $y = Cx$ e lo stato x esce sulla variabile y e tutto quello che sta in x va all'uscita e a meno di casi particolari E influenza l'uscita e sono osservabili (anche per le ipotesi dello stimatore AC osservabili).

Perciò si perde solo la controllabilità ed è voluta perché attraverso nemmeno vogliamo che l'ingresso non ha effetto sulla dinamica dell'errore di stima.

Esercizio: controllo del pendolo invertito



$$(J + mL^2)\ddot{\phi} - mgL\sin(\phi) + mL\ddot{x}\cos\phi = 0$$

Definisco $\to M\ddot{S} = u$ (forza applicata)

~~[illegible]~~ $\ddot{S} = \frac{u}{M}$

Sostituendo:

$$\dot{\phi} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{\phi} = \frac{g\,mL}{J+mL^2}\sin\phi - \frac{mL}{J+mL^2}\frac{u}{M}\cos x_1 = \frac{g}{L'}\sin x_1 - \frac{1}{L'M}u\cos x_1, \quad L' = \frac{J+mL^2}{mL}$$

Linearizzo attorno a $x_1 = \phi \simeq \emptyset$ per ottenere

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = g/L\, x_1 - \frac{1}{L' M} u \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/L' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L'M} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x' = \emptyset$$

E' possibile stabilizzarlo con una retroazione statica dell'uscita?
Il sistema ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ con una retroazione statica dell'uscita, ~~[illegible]~~ non e' possibile perché ho sempre un autovalore instabile.
Se ho un sensore per la posizione per realizzare un controllore e' usare un controllore dinamico come un PD. Quindi questo un controllore proporzionale all'uscita (angolo) e la sua derivata (velocità angolare) e quindi un qualcosa di simile ad un full state feedback però per implementarlo dovrò derivare ~~[illegible]~~ l'uscita.

Questo comporta un problema perché se ho un rumore, la derivata risulterà rumorosa.
Per ovviare ciò posso risolvere usando uno stimatore, ~~[illegible]~~ ed assegnare i poli in retroazione in qualunque posizione.

Se usiamo PD siamo vincolati ad un processo TRIAL and ERROR usando il luogo delle radici.
Usando uno stimatore possiamo decidere noi la dinamica dato che scegliamo noi i poli in λ_1 e λ_2.
Continuando (tale problema e' presente su Donald e Kirk - Optimal Control theory)
Progettare un controllore tale che la dinamica a ciclo chiuso abbia i poli in λ_1 e λ_2.

Definito ciò, possiamo definire qualcosa di simile per le funzioni e i funzionali.

Una norma di funzione è $\|x\|$ con $x \in \Omega$. La norma $\|x\|$ è uno scalare $\in \mathbb{R}$ come nel caso di prima. Ha le seguenti proprietà:

1) $\|x\| \geq 0$
2) $\|x\| = 0$ se e solo se (dipende da caso a caso), es: se Ω insieme delle funzioni continue di t con $t \in [t_0, t_f] \Rightarrow x(t) = 0 \ \forall t \in [t_0, t_f]$
3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x \in \Omega$
4) DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $\|x' + x''\| \leq \|x'\| + \|x''\|$

Per cui, per la classe Ω, la norma deve rispettare queste 4 proprietà, altrimenti non è una norma.

Da ciò, posso prendere due funzioni x, y e calcolare la distanza tra x e y con

$d(x, y) = \|x - y\|$ in modo che quando si farà il processo di ottimizzazione dovremo trovare delle funzioni che rendono minimo o massimo certi funzionali.

Per sapere se le funzioni rendono minimo o massimo certi funzionali dovrò vedere se spostandomi di poco il funzionale aumenta o diminuisce e per spostarmi di poco devo farlo con la distanza tra due funzioni.

Esistono infinite norme di funzioni. Ad esempio: $\|x\| = \max_{t_0 \leq t \leq t_f} |x(t)|$ è una norma?
↓
Sì se soddisfa le 4 condizioni

Dimostrazione

i) $\|x\| > 0$? In questo caso sto prendendo il massimo e il valore più grande sarà sicuramente positivo per cui è verificato dato che $|x(t)| \geq 0$.

ii) $\|x\| = 0$ se e solo se $x(t) = 0 \ \forall t \in [t_0, t_f]$? Questo è verificato perché se $x(t) \neq 0$ per qualche t allora il $\max |x(t)| \neq 0$.

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$? Devo calcolare $\max_{t_0 \leq t \leq t_f} |\alpha x(t)| = \max |\alpha| |x(t)|$, α è indip. da t $\to |\alpha| \max_t |x(t)|$ per cui è verificata

iv) $\|x' + x''\| \leq \|x'\| + \|x''\|$? Allora $\|x' + x''\| = \max_t |x'(t) + x''(t)|$

e vale sicuramente per uno specifico $t \to |x'(t) + x''(t)| \leq |x'(t)| + |x''(t)|$
quindi, se è verificato anche per un solo t, sarà verificato anche per il max e lo è anche $\forall t$.

In questo modo abbiamo trovato come dimostrare che $\|x\| = \max_t |x(t)|$ è una norma

- Incremento di funzione

Ho una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ con $q \in D$, $(q + \Delta q) \in D$. L'incremento Δf è definito:

$$\Delta f \triangleq f(q + \Delta q) - f(q) = \Delta f(q, \Delta q).$$

Qui è dove entra in gioco il concetto di distanza, ovvero quanto dista q da $q + \Delta q$? È la norma di Δq

Esempio: Incremento di $f(q)\big|_{q \in \mathbb{R}^2} = q_1^2 + 2 q_1 q_2$

$$f(q + \Delta q) - f(q) = (q_1 + \Delta q_1)^2 + 2[q_1 + \Delta q_1][q_2 + \Delta q_2] - q_1^2 + 2 q_1 q_2$$

$q + \Delta q \to q_1 + \Delta q_1,\ q_2 + \Delta q_2$; $\quad q \to q_1,\ q_2$

$$= \cancel{q_1^2} + \Delta q_1^2 + 2 q_1 \Delta q_1 + \cancel{2 q_1 q_2} + 2 \Delta q_1 q_2 + 2 \Delta q_1 q_2 + 2 \Delta q_1 \Delta q_2 - \cancel{q_1^2} - \cancel{2 q_1 q_2} = \Delta f(q, \Delta q)$$

- Incremento di un funzionale

$x \in \Omega$, $(x+\delta x) \in \Omega$

- L'incremento $\Delta J = J(x+\delta x) - J(x) = \Delta J(x, \delta x)$

Esempio: Incremento di $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)\,dt$ (non lineare)

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} (x(t)+\delta x(t))^2\,dt - \int_{t_0}^{t_f} x(t)^2\,dt = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t) + 2x(t)\delta x(t) + \delta x^2(t) - x^2(t)\,dt$$
$$= \int_{t_0}^{t_f} 2x(t)\delta x(t) + \delta x^2(t)\,dt = \Delta J(x, \delta x)$$

- Dall'incremento di una funzione f si ottiene il differenziale di f

$$\Delta f(q,\Delta q) = \underbrace{df(q,\Delta q)}_{\text{funzione lineare in } \Delta q} + \underbrace{\varrho(q,\Delta q)\|\Delta q\|}_{\text{tutti gli altri termini non lineari in } \Delta q}$$

A questo punto se il $\lim_{\|q\| \to 0} \varrho(q,\Delta q) = 0$ allora f è differenziabile e $df(q,\Delta q)$ è il differenziale di f.

Dato che $df(q,\Delta q)$ è lineare in Δq questo implica che $df(q,\Delta q) = f'(q)\Delta q$ con $f'(q)$ è la derivata nel caso in cui f è differenziabile.

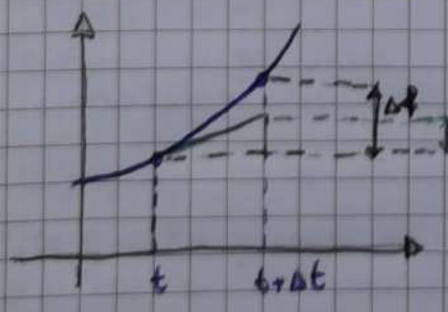
Per vedere ciò: per le funzioni di interesse in cui q è il tempo t,

$$f(t) \to \Delta f(t,\Delta t) = f(t+\Delta t) - f(t) = df(t,\Delta t) + \varrho(t,\Delta t)\|\Delta t\|$$
$$= f'(t)\Delta t + \varrho(t,\Delta t)\|\Delta t\|$$

Ricavo $f'(t) = \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \dfrac{\varrho(t,\Delta t)\|\Delta t\|}{\Delta t}$

Se prendo $\lim_{\Delta t \to 0}$, succede che $\varrho(t,\Delta t) \to 0$, $\|\Delta t\|/\Delta t \to 1$ e quindi il secondo termine $\to 0$

Ed ottengo: $f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t,\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ ottenendo così la derivata nel tempo



$df(t,\Delta t) = f'(t)\Delta t$

Da cui segue che $f'\Delta t = df$ è un'approssimazione lineare di Δf, ovvero dell'incremento (per spost. piccoli)

Per calcolare df nel caso generale:

Se ho $f(q)$ con $q = [q_1 \dots q_n]$ e $\Delta q = [\Delta q_1 \dots \Delta q_n]$ posso trovare

$df(q,\Delta q) =$ con le derivate parziali $= \dfrac{\partial f}{\partial q_1}\Delta q_1 + \dfrac{\partial f}{\partial q_2}\Delta q_2 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial q_n}\Delta q_n$

• VARIAZIONE DI UN FUNZIONALE

Dato l'incremento $\Delta J(x,\delta x) = \underbrace{\delta J(x,\delta x)}_{\text{deve essere lineare in } \delta x} + \overbrace{\varepsilon(x,\delta x)}^{\text{è una funzione del tempo}}\|\delta x\|$ (come prima)

Se il $\lim_{\|\delta x\|\to 0} \varepsilon(x,\delta x) = 0$ allora $\begin{cases} J \text{ (funzionale) è differenziabile} \\ \delta J \text{ è la variazione di } J \end{cases}$

È esattamente come $\Delta f(\varphi, \Delta\varphi)$ trovato prima, a differenza di chiamarsi differenziale si chiama variazione.

Esempio: $J = \int_0^1 x^2(t) + 2x(t)\, dt$

$$\Delta J = J(x+\delta x) - J(x) = \int_0^1 (x+\delta x)^2 + 2(x+\delta x) - x^2(t) - 2x(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 x^2 + \delta x^2 + 2x\delta x + 2x + 2\delta x - x^2 - 2x\, dt = \int_0^1 \delta x^2 + \underbrace{2x\delta x + 2\delta x}_{\text{la parte lineare}}\, dt$$

Adesso separo i termini lineari in δx e non:

$$= \int_0^1 (2x+2)\delta x\, dt + \int_0^1 \delta x^2\, dt = \delta J(x,\delta x) + \varepsilon(x,\delta x)\|\delta x\|$$

moltiplico e divido per $\|\delta x\|$ $\to \int_0^1 \frac{\delta x^2}{\|\delta x\|}\, dt\, \|\delta x\|$

Per verificare che J è differenziabile, dobbiamo vedere il limite

$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \varepsilon(x,\delta x) = 0$ (→ per verificare ciò) e prendo come norma $\|x\| = \max_{0\le t\le 1} |x(t)| \to \|x(t)\| \le \|\delta x(t)\|$

A questo punto $\varepsilon(x,\delta x) = \int_0^1 \frac{\delta x^2(t)}{\|\delta x(t)\|}\, dt = \int_0^1 \frac{|\delta x(t)|\,|\delta x(t)|}{\|\delta x(t)\|}\, dt$ → sempre ≤ 1

Inoltre $\|\delta x\| \to 0$, questo vuol dire che $\max|\delta x(t)| \to 0$ $\forall t$ allora $\delta x(t) \to 0$ $\forall t$
Per cui anche $|\delta x(t)| \cdot \frac{|\delta x(t)|}{\|\delta x(t)\|} \to 0$ e l'integrale tenderà a zero dato che l'integrando è nullo.

Possiamo concludere che $\delta J(x,\delta x) = \int_0^1 (2x+2)\delta x\, dt$ è la variazione di J

Esempio: $J = \int_0^1 x^2 + 2x\, dt$ pongo $y(t) = x^2 + 2x \to \int_0^1 y(t)\, dt$

Effettuo l'espansione in serie di Taylor $y(t) = Y(0) + \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x(0)} \delta x + o(\cdot)$

Quando vado a fare l'incremento, ci sono entrambi cioè l'integrale di y variata meno l'integrale di y di partenza. Quando vado a fare l'espansione in serie di Taylor mi ritrovo Y(0) che va a cancellarsi con $\delta x = 0$ e l'unico termine che rimane è la derivata parziale.

$\delta J(x,\delta x) = \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x}\delta x\, dt$ → questa è la variazione. (Per calcolarla in modo immediato)

Se il differenziale è un'approssimazione lineare dell'incremento (nelle funzioni). Nel funzionale, la variazione è un'approssimazione lineare dell'incremento e mi indica quanto varia il funzionale quando lo valuto, ovvero su x, su $x+\delta x$ e mi servirà per trovare i minimi e massimi di un funzionale.

A questo mi trovo!

$$dfa|_* = \frac{\partial fa}{\partial y_1} \Delta y_1 + \dots + \frac{\partial fa}{\partial y_m} \Delta y_m + \frac{\partial fa}{\partial y_{m+1}} \Delta y_{m+1} + \dots + \frac{\partial fa}{\partial y_{n+m}} \Delta y_{n+m} + \frac{\partial fa}{\partial P_1} \Delta P_1 + \dots + \frac{\partial fa}{\partial P_m} \Delta P_m$$

qualsiasi

$= \emptyset$ (valutato in "*", solo nel caso dell'ottimo è pari a zero).

grado della scelta di P_i^*

Quindi affinché $\partial fa|_* = \emptyset$ ci sono questi $y_{m+1} \dots y_{n+m}$ che sono in Δy ... gradi di libertà che devono essere qualsiasi. In questa maniera ~~...~~ $\Delta y_1 \dots \Delta y_m$ non sono indipendenti da $\Delta y_{m+1} \dots \Delta y_{m+n}$ a causa dei vincoli.

Ma per come ho costruito fa, ho ottenuto $\Delta y_1 \dots \Delta y_m$ possono essere qualsiasi e mi basta che $\Delta y_{m+1} \dots \Delta y_{n+m}$ sono i gradi di libertà indipendenti.

Affinché $dfa = \emptyset$ sul punto di estremo $y_1^* \dots y_{n+m}^*, P_1^* \dots P_m^*$ è necessario che

$$\frac{\partial fa}{\partial y_{m+1}} \dots \frac{\partial fa}{\partial y_{n+m}} = \emptyset \quad \text{altrimenti } dfa = 0 \text{ per qualunque } \Delta y_1 \dots \Delta y_m$$

Il problema di minimizzazione si riduce a trovare $y_1^* \dots y_{n+m}^*, P_1^* \dots P_m^*$ tali che

$$\frac{\partial fa}{\partial (\cdot)} = 0 \quad (1)$$

→ qualsiasi variabile $(y_1 \dots y_{n+m}, P_1 \dots P_m)$

In questo caso, prendo un problema di $n+m$ variabili, con m vincoli, ottenendo un problema più grosso, però posso trovare il minimo risolvendo $2m+n$ equazioni tutte scritte nella forma (1). Ovvero mi porto da un problema vincolato ad un problema non vincolato.

Esempio: $f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ con vincolo $y_1 + y_2 = 5 \to y_1 + y_2 - 5 = 0 = a(y_1, y_2)$

$$fa = f + P(y_1 + y_2 - 5) = y_1^2 + y_2^2 + P(y_1 + y_2 - 5) = fa(y_1, y_2, P)$$ → ho aumentato di 1 la dimensione del problema

Mi calcolo il differenziale

$$dfa = \frac{\partial fa}{\partial y_1} \Delta y_1 + \frac{\partial fa}{\partial y_2} \Delta y_2 + \frac{\partial fa}{\partial P} \Delta P = (2y_1 + P)\Delta y_1 + (2y_2 + P)\Delta y_2 + (y_1 + y_2 - 5)\Delta P$$

Trattiamo il problema come non vincolato, quindi $\frac{\partial fa}{\partial (\cdot)} = \emptyset$:

$$\begin{cases} 2y_1^* + P^* = 0 \\ 2y_2^* + P^* = 0 \\ y_1^* + y_2^* - 5 = 0 \end{cases} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{M \to \text{sarà invertibile?}} \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ P^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ P^* \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Quindi $y_1^* = 2.5$, $y_2^* = 2.5$ e $P^* = -5$ → Abbiamo ottenuto lo stesso risultato dell'es. precedente.

P^* non ci interessa molto, ma ci serve per trasformare il problema non vincolato.

Esempio: Dato il sistema $\dot{x} = u$ con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, con t_0 e t_f fissati, trovare $u(t)$ che:

1) Porti $x(t)$ il più vicino possibile a zero ~~[illegible]~~
2) Consumando il meno possibile.

Devo semplicemente scrivere il funzionale di costo

$$J = u(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x,u,t)\,dt = \underbrace{\frac{1}{2} c\, x^2(t_f)}_{\text{funzione in } t_f} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\,dt}_{\text{funzione } x,u,t} \qquad c = \text{cost.}$$

funzione in t_f → prodotto distanza $x(t_f) \to 0$

funzione x,u,t → indicatore di quanto controllo "u" è stato necessario

↳ c, in questo caso è il parametro che "sbilancia" il consumo rispetto alla distanza dall'origine

Non abbiamo mai parlato nel dettaglio delle condizioni sufficienti affinché il problema di ottimizzazione trovi effettivamente un minimo. Sappiamo solo che pone la variazione a zero per darci un max o un min (o un punto di sella).

Come faccio a forzare il problema affinché nel punto che trovo come soluzione di Eulero avrò un minimo? Devo costruire il problema in modo che presenti un minimo, potenzialmente abbia un massimo all'infinito.

Il problema, per come è strutturato, ho 2 componenti quadratiche. Per trovare il minimo ho delle difficoltà, perché la scelta di u mi condiziona il valore t_f.
Come soluzione (imponendo la 1ª variazione = 0) sarà l'unico estremale di questo problema e sarà un minimo.

Cosa ci assicura che non sia un flesso? Nulla, in un caso generico. In particolare, dato che il problema è multivariabile, può esserci benissimo un punto di sella, cosa da scongiurare.

Quindi:

1) Scrivo l'Hamiltoniana $\mathcal{H} = g + p^T f = \frac{1}{2}u^2(t) + pu$

2) Scrivo le equazioni di Eulero Lagrange
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial}{\partial p}\mathcal{H} = u \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{H} = 0 \quad \to \text{caso particolare, } g \text{ ed } f \text{ non dipendono da } x \\ 0 = \dfrac{\partial}{\partial u}\mathcal{H} = u^* + p^* = 0 \quad \to u^*(t) = -p^*(t) = \text{costante} \end{cases}$$

La condizione al contorno è

$$p^*(t_f) = \frac{\partial}{\partial x} u(x^*, t_f)\Big|_{t=t_f} = c\,x(t_f) \quad \to \quad p^*(t) = p^*(t_f) = c\,x(t_f)$$

Alla fine, avrò $u^*(t) = -c\,x(t_f)$.
Questa funzione mi dà la legge di controllo, ~~che~~ è in funzione di qualcosa che non conosco per cui il problema non è finito.
Voglio scrivere l'evoluzione temporale di $x(t)$, ovvero integro l'equazione differenziale $\dot{x} = u$ dato il controllo $u^*(t)$:

$$\dot{x} = u^*\Big|_{u=\text{costante}} \quad \to \quad x^*(t) = x(t_0) + u^*(t - t_0)$$

↓

Valuto $x(t)$ a t_f:

$$x^*(t) = x^*(t_0) + (-c\,x^*(t_f))(t-t_0)\Big|_{t=t_f} \rightarrow x^*(t_f) = x^*(t_0) - c\,x^*(t_f)(t_f-t_0)$$

Risolvo per $x^*(t_f)$ ed ottengo

$$x^*(t_f)\{1 + c(t_f-t_0)\} = x^*(t_0) \rightarrow \boxed{x^*(t_f) = \frac{x^*(t_0)}{1+c(t_0-t_f)}}$$ → valore finale di x

A questo punto calcolo $u^*(t)$:

$$\boxed{u^*(t) = -\frac{c\,x^*(t_0)}{1+c(t_f-t_0)} = -\frac{x^*(t_0)}{\frac{1}{c}+(t_f-t_0)}}$$ → Legge di controllo ottimo

L'ultimo passaggio è il calcolo di $x(t)$:

$$x^*(t) = x^*(t_0) + \frac{x^*(t_0)}{\frac{1}{c}+(t_f-t_0)}(t-t_0)$$

Legge oraria dello stato "x" soggetta al controllo ottimo.

- Cosa accade al variare di c?
  - $c=0$ non considero la distanza dall'origine di $x(t_f)$, quindi $u^*(t)=0$, $x(t)=x_0\ \forall t$
  - $c \rightarrow +\infty$, conto solo la distanza dall'origine e non il consumo; mi aspetto che $x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_f$

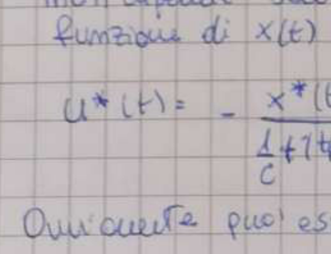
$$u^*(t) = -\frac{x^*(t_0)}{\frac{1}{c}+(t_f-t_0)}\Big|_{t=t_f} = -\frac{x^*(t_f)}{(t_f-t_0)} \rightarrow x^*(t_f) = x^*(t_0) + u^*(t_f-t_0)$$

$$= x^*(t_0) - \frac{x^*(t_0)}{(t_f-t_0)}(t_f-t_0) = 0$$

Quindi, arrivo all'origine!

In questi casi estremi: $c=0$ non si muove; $c=\infty$ va a zero.

Principio di Bellman



Se, dopo aver impostato il problema di controllo ottimo prendo il punto $x(\bar{t})$ e considero un nuovo problema di ottimo con: $x(t_0) = x(\bar{t})$, $x(t_f) = B$

Allora la traiettoria ottima sarà esattamente la stessa, ovvero ottengo la stessa soluzione.

Questo ci fa pensare che l'azione di controllo $u(t)$ non dipende solo da $x(t_0), t_0, t_f$, ma può essere scritta anche in funzione di $x(t)$

$$u^*(t) = -\frac{x^*(t_0)}{\frac{1}{c}+(t_f-t_0)} \Longrightarrow u^*(t) = -\frac{x^*(\bar{t})}{\frac{1}{c}+(t_f-\bar{t})}$$

cioè definisco a $\bar{t}$ un nuovo problema di controllo ottimo e la soluzione sarà la stessa.

Ovviamente può essere generalizzato per ogni t. Da qui:

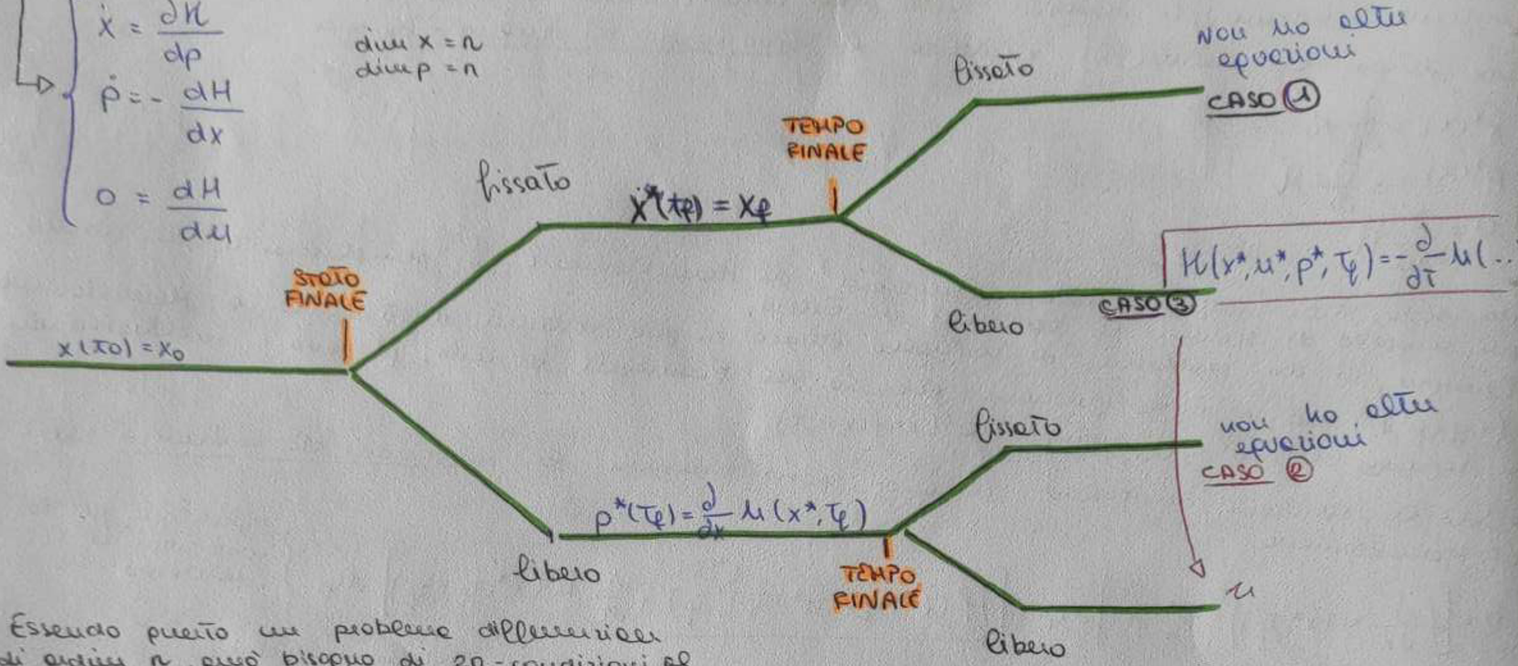
$$u^*(t) = -\frac{x^*(t)}{\frac{1}{c}+(t_f-t)} = \frac{-1}{\frac{1}{c}+(t_f-t)}x^*(t) \rightarrow \frac{-1}{\frac{1}{c}+(t_f-t)}x(t) = u^*(t)$$

ovvero posso scrivere $u^*(t)$ in retroazione dello stato.

Ogni problema deve rispettare le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dH}{dp} \\ \dot{p} = -\dfrac{dH}{dx} \\ 0 = \dfrac{dH}{du} \end{cases}$$

dim $x = n$
dim $p = n$



Essendo questo un problema differenziale di ordine n, avrò bisogno di $2n$-condizioni al contorno: quelle di partenza sono già n condizioni al contorno; se lo stato è fissato sono altre n, se invece è libero, quelle sono altre n (perché p^* è anch'esso un vettore di dimensione n).

ESEMPIO

Dato il sistema dinamico $\dot{x} = u$ con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ (e dim $x = 1$), t_0 e t_f fissati, trovare $u^*(t)$ che:

- porta $x(t)$ il più vicino possibile a zero.
- consumando il meno possibile. (dove il consumo è u).

Scrivo il funzionale di costo:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t)\, dt = \underbrace{\frac{1}{2} C x^2(t_f)}_{\text{funzione di } t_f} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\, dt}_{\text{funzione di } (x,u,t)} \qquad C: \text{costante}$$

chiaramente devo scegliere '$h(..)$' e '$g(..)$'

Cerchiamo di capirne di più:

- $h(x(t_f), t_f) = \frac{1}{2} C x^2(t_f)$

  la $h(..)$ tiene conto solo delle condizioni finali.

- $\int g(\ldots)\, dt$

  è un indice di quanto controllo è stato necessario.

Non abbiamo mai parlato nel dettaglio delle condizioni sufficienti affinché il problema di ottimizzazione trovi effettivamente un minimo. Sappiamo solo che porre le variazioni a zero può darci max/min/punto sella. Le condizioni di Eulero sono necessarie per l'ottimalità perché sono state derivate imponendo la variazione nulla (sull'estremale).

- Come faccio a forzare il problema affinché nel punto che trovo come soluzione dell'equazione di Eulero, che è effettivamente un estremale, è un minimo?
  Devo costruire il problema in modo che abbia un minimo e un massimo potenzialmente a infinito. Per cui, trovando un estremale del genere, il problema così scritto avrà di certo un minimo.

- Nel nostro caso, il funzionale ha due componenti quadratiche, per cui se volessi renderlo massimo, basterebbe mandare $\left< {u \atop x} \right|$ a infinito.

Per rendere minimo, però, ho delle difficoltà, perché la scelta di 'u' mi porta a condizionare $x(t_f)$; quindi ciò che trovo come soluzione del problema variazionale (imponendo la prima variazione nulla) sarà di fatto l'unico estremale che sarà di

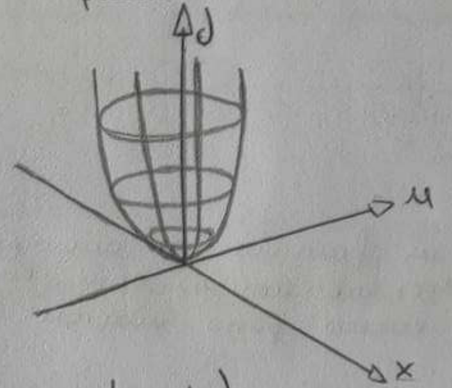
fatto un minimo (non può essere un massimo perché quello è a infinito).
Dunque mi costruisco un problema in modo che, nonostante le equazioni di Eulero Lagrange siano solo condizioni necessarie per la soluzione, di fatto diventano anche sufficienti proprio perché ho costruito il problema in modo che abbia un minimo.

È bene ricordare che le equazioni di E-L non sono sufficienti, ma necessarie, ma messe in un problema del genere con un minimo, allora diventano anche sufficienti.

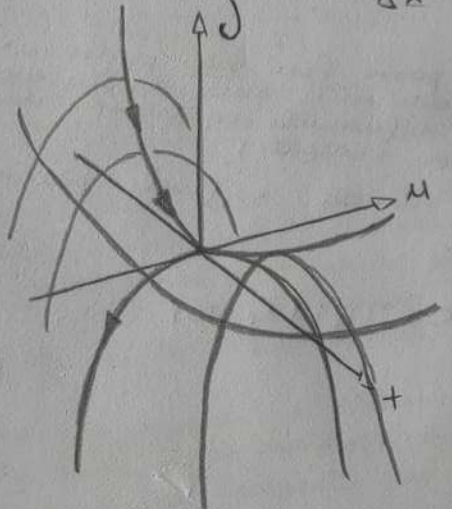
- Cosa ci assicura che non ci sia un flesso?

In un caso empirico, nella | Ovviamente, definendo J totalmente positivo come in questo caso il flesso non c'è. Però, essendo il problema multivariabili, può esserci benissimo un punto di sella (assolutamente da evitare), ovvero un punto dove l'estremale è nullo ma che un minimo per (u_1) e un max per (u_2), o viceversa.
Questo può succedere, tranne se definisco J come una combinazione di funzioni quadratiche di tutte le variabili.

Supponiamo di avere (x, u) scalari, per cui possiamo rappresentare J in questo modo



Scrivendo $\underline{J = x^2+u^2}$, questo sarà un paraboloide con minimo nell'origine.
- Se non avessi alcun vincolo, il minimo del funzionale sarà $x=0$, $u=0$
- Se avessi però un vincolo dinamico con $x(t_0)=x_0$ e le x può variare solo seguendo una certa equazione, allora la soluzione sarà diversa e l'estremale non sarà nell'origine.



Se avessi come funzionale $\underline{J = x^2-u^2}$ il grafico sarebbe ovviamente diverso:
- Guardando solo x, l'origine è un minimo.
- Guardando solo u, l'origine è un massimo.

↳ PUNTO DI SELLA

$$\left.\frac{\partial J}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} = 0 \qquad \left.\frac{\partial J}{\partial u}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} = 0 \qquad \left.\frac{d^2J}{dx^2}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} > 0 \text{ essendo un minimo}$$

$$\left.\frac{d^2J}{du^2}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} < 0 \text{ essendo un massimo}$$

Torniamo all'esempio

C'è il parametro che "sbilancia" il cammino rispetto alla distanza dall'origine. Quindi scegliendolo grande/piccolo dò più importanza alla prima o alla seconda parte del funzionale di costo.
Ovviamente avrei potuto mettere due parametri, ma alla fine non ha senso perché per dare importanza ne basta solo uno.

~ Soluzione

① Scrivo l'Hamiltoniana — essendo scalari posso togliere T

$$H = g + p^T f = \underbrace{\frac{1}{2}u^2(t)}_{g} + p\,\underbrace{u}_{f} \quad (\dot{x} = u)$$

② Scrivo le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dH}{dp} = u \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{dH}{dx} = 0 \\ 0 = \dfrac{dH}{du} = u^* + p^* \end{cases}$$

$\dot{p} = -\frac{dH}{dx} = 0 \longrightarrow$ caso particolare: sia 'g' sia 'f' non dipendono da x.

$0 = \frac{dH}{du} = u^* + p^* \longrightarrow u^*(\tau) = -p^*(\tau) \Longrightarrow \boxed{u^*(\tau) = \text{costante}}$

$\longrightarrow p(\tau) = \text{costante}$

③ condizioni al contorno con τ_f fisso, x_f libero:

$$p^*(\tau_f) = \frac{d}{dx} \underbrace{m(x^*, \tau_f)}_{\frac{1}{2}x^2 C} \Big|_{\tau_f} = \underline{C x(\tau_f)}$$

Mettendo insieme:

$$\begin{cases} u^*(\tau) = \text{costante} \\ p^*(\tau) = p^*(\tau_f) = C x(\tau_f) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{u^*(\tau) = -C x(\tau_f)}$$

Questa equazione è la legge di controllo, ma è in funzione di una grandezza che è ancora un'incognita. Ora conosco la forma di $u^*(\tau)$, ma non so dove arrivo. Per trovarlo posso scrivere la storia temporale di $x(\tau)$, ovvero posso integrare l'eq. differenziale $\dot{x} = u$, dato che u lo conosco.

$$\dot{x}^* = u^* \Big|_{u = \text{costante}} \longrightarrow x^*(\tau) = x(\tau_0) + u^*(\tau - \tau_0)$$

questo lo posso fare solo perché u^* è costante, altrimenti avrei dovuto risolvere l'equazione differenziale ad esempio con Laplace (integrale).

Di questa equazione differenziale conosco il valore iniziale e finale, quindi posso usarla per valutare quanto vale $x^*(\tau)$ a τ_f.

$$x^*(\tau) = x^*(\tau_0) + (-C x^*(\tau_f))(\tau - \tau_0) \Big|_{\tau_f} \longrightarrow x^*(\tau_f) = x^*(\tau_0) - C x^*(\tau_f)(\tau_f - \tau_0)$$

Risolvo per $x^*(\tau_f)$ ottenendo:

$$\boxed{x^*(\tau_f) = \frac{x^*(\tau_0)}{1 + C(\tau_f - \tau_0)}}$$ valore finale di x

A questo punto calcolo u^*:

$$\boxed{u^*(\tau) = -\frac{C x^*(\tau_0)}{1 + C(\tau_f - \tau_0)}}$$

LEGGE DI CONTROLLO OTTIMO

Calcolo infine $x(\tau)$:

$$x^*(\tau) = x^*(\tau_0) - \frac{x^*(\tau_0)}{1/C + (\tau_f - \tau_0)}(\tau - \tau_0)$$

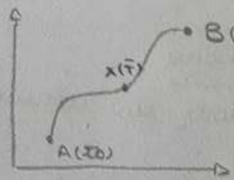
legge oraria che descrive il moto dello stato x soggetto al controllo ottimo

casi ESTREMI

- $C = 0 \rightarrow$ non considero la distanza dall'origine di $x(\tau_f)$, quindi $x(\tau) = x_0 \ \forall \tau$. Il sistema quindi non si muove.
- $C \rightarrow \infty \Rightarrow$ conta solo la distanza dall'origine, non il consumo. Il sistema va a zero, ma consuma tanto.

PRINCIPIO DI BELLMANN

Supponiamo di avere una soluzione ottima di un problema che parte da A a B:

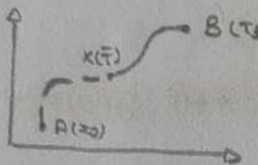


Il principio di Bellman afferma che se dopo aver impostato il problema di controllo ottimo prendo un punto che vale $x(\bar{t})$ e costruisco un nuovo problema di controllo ottimo con

$$\begin{cases} x(t_0) = x(\bar{t}) \\ x(t_f) = B \end{cases}$$

allora la traiettoria ottima sarà esattamente la stessa.

Quindi ottengo la stessa soluzione.



Tutto ciò ci può far pensare che l'azione di controllo $u(t)$ non dipende solo da $x(t_0)$, t_0, t_f ma può essere scritta in funzione di $x(t)$.

- Riprendendo l'esempio precedente, $u^*(t)$ è pure costante; guardando la sua forma:

$$u^*(t) = -\frac{x^*(t_0)}{1/c + (t_f - t_0)} \xrightarrow[\text{a } \bar{t}]{\text{Bellman}} u^*(t) = -\frac{x^*(\bar{t})}{1/c + (t_f - \bar{t})}$$

È quindi come se creo un nuovo problema di controllo ottimo a $\bar{t}$, ma la soluzione sarà esattamente quella di prima.

Questo può essere generalizzato per qualunque 't'; dato che se mi trovo sulla traiettoria ottima $x^*(t)$ è il valore della traiettoria, posso generalizzare scrivendo:

$$u^*(t) = \frac{-1}{1/c + (t_f - t)} x(t)$$

---

cioè posso scrivere $u^*(t)$ in retroazione dello stato.

- Quanto detto vale (più o meno) per tutti i problemi di controllo ottimo. Ne deriva che posso scrivere il sistema come se fosse a ciclo chiuso. Questo risultato è fondamentale dal punto di vista pratico, perché in assenza di disturbi, errori, rumori ecc.., $u^*(t)$ calcolato come soluzione di controllo ottimo, posso applicarlo da t_0 a t_f e lo stato andrà da A a B.

Invece, in presenza di disturbi.. lo stato parte da A ma non arriva a B: Costruirlo in feedback dà il vantaggio di rilevare dei disturbi e correzioni delle derive del sistema, perché permette di vedere dove ci troviamo nell'istante corrente.

↳ VANTAGGIO

Riconsideriamo un esempio già visto. Vediamo tutte le soluzioni possibili.

ESEMPIO

Dato il sistema dinamico $\dot{x} = u$ con x_0, t_0, t_f fissati, trovare $u^*(t)$ che rende minimo il funzionale:

$$J = \frac{1}{2} C\, x(t_f)^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\, dt$$

- Soluzione 1 già vista

Scrivo la funzione Hamiltoniana, le equazioni di Eulero-Lagrange e quindi le condizioni al contorno. Ottengo:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = u^* \\ \dot{\lambda} = 0 \\ 0 = u^* + \lambda^* \end{cases} \qquad \lambda^*(t_f) = C x(t_f) \longrightarrow \qquad u^*(t) = -C x^*(t_f) = \text{costante}$$

Da $\dot{x}^* = u^* \Rightarrow x^*(t) = x_0 + (t - t_0)\, u^*(t)$

- Ricavo $x^*(t_f)$ da $\left.\begin{matrix} x_0 \\ t_f \end{matrix}\right| \rightarrow x^*(t_f) = \dfrac{x^*(t_0)}{1 + C(t_f - t_0)}$
- Ricavo $u^*(t) = -\dfrac{x^*(t_0)}{1/C + (t_f - t_0)} \xrightarrow{\text{BELLMANN}} \boxed{u^*(t) = -\dfrac{1}{1/C + (t_f - t)}\, x^*(t)}$

- Soluzione 2 | Forma chiusa con esponenziale di matrice Hamiltoniana

Questo problema rientra nel caso 2 perché x_f è libero, ma t_f è fissato. Posso quindi riprendere il problema lineare quadratico, essendo il problema in questa forma. Quindi vado a sfruttare la soluzione che ho trovato in quel caso:

il problema è nella forma $\rightarrow \dot{x} = Ax + Bu$

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) H x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

la soluzione è:

$$\lambda^*(t) = \left[\Psi_{22}(t_f, t) - H\Psi_{12}(t_f, t)\right]^T \left[H\Psi_{11}(t_f, t) - \Psi_{21}(t_f, t)\right] x^*(t_f)$$

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda^*(t)$$

Pongo $A = 0$ $\quad B = 1 \quad \underset{\text{simmetriche}}{\underline{H = C}}$ s.d.n. $\underline{Q = 0}$ $\quad \underline{R = 1}$ d.p.

Scrivo dunque la Matrice Hamiltoniana:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{\lambda}^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} \longrightarrow \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Matrice Hamiltoniana}$$

$$\underbrace{\Psi(t_1, t_2)}_{\text{matrice di transizione di stato}} = e^{H(t_1 - t_2)} = \begin{bmatrix} 1 & -(t_1 - t_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi(t_f, t) = \begin{bmatrix} 1 & -(t_f - t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \hline \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{array}\right]$$

$$\lambda^*(t) = \left[\Psi_{22}(t_f, t) - H \cdot \Psi_{12}(t_f, t)\right]^{-1} \cdot \left[H\Psi_{11}(t_f, t) - \Psi_{21}(t_f, t)\right] x^*(t)$$

$$\longrightarrow \lambda^*(t) = \left[1 + C(t_f - t)\right]^{-1} \cdot \left[C(1 - 0)\right] x^*(t) =$$

$$= \frac{C\, x^*(t)}{1 + C(t_f - t)} = \frac{1}{1/C + (t_f - t)}\, x^*(t)$$

Andiamo quindi a calcolare $u^*(t)$:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T \lambda^*(t) = -\lambda^*(t) = \boxed{\frac{-1}{1/C + (t_f - t)}\, x^*(t)}$$

che è, ovviamente, la soluzione ottima trovata prima.

• soluzione 3 EQUAZIONE DI RICCATI DRE

Risolviamo l'equazione di Riccati (omettendo la dipendenza dal tempo delle variabili).

$$\dot{S} + SA + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T S = 0$$

con la condizione al contorno $S(\tau_f) = H$

Sostituisco le componenti: $A=0$ $B=1$ $R=1$ $Q=0$ $H=C$

$$\begin{cases} \dot{S} - S^2 = 0 \\ S(\tau_f) = C \end{cases}$$

devo risolvere questa equazione differenziale di dimensione 1x1.
Si tratta di un'equazione differenziale non lineare per la quale si deve necessariamente procedere a tentativi per trovare una soluzione.
La soluzione è:

$$S(\tau) = \frac{-1}{\tau + K} \quad \text{con } K \text{ incognita.}$$

K serve per poter imporre la condizione al contorno.

VERIFICA

$$\begin{cases} \dot{S}(\tau) = \dfrac{1}{(\tau+K)^2} \\ S^2(\tau) = \dfrac{1}{(\tau+K)^2} \end{cases} \longrightarrow \dot{S} - S^2 = 0 \quad \text{OK!}$$

Impongo la condizione al contorno: $S(\tau_f) = C \longrightarrow S(\tau_f) = -\frac{1}{\tau+K} = C$
e risolvo per 'K':

$$(\tau_f + K) = -\frac{1}{C} \Longrightarrow \boxed{K = -\frac{1}{C} - \tau_f}$$

$$\Longrightarrow S(\tau) = -\frac{1}{\tau - \frac{1}{C} - \tau_f} = +\frac{1}{1/C - (\tau - \tau_f)}$$

$S(\tau)$ è un tassello della relazione $\lambda^*(\tau) = S(\tau)\, x^*(\tau)$ e ne segue che:

$$\lambda^*(\tau) = \frac{1}{1/C - (\tau - \tau_f)}\, x^*(\tau)$$

Infine avrò:

$$u^*(\tau) = -R^{-1}B^T\lambda^*(\tau) = \boxed{\frac{-1}{1/C + (\tau_f - \tau)}\, x^*(\tau)}$$

uguale a quelli trovati tramite gli altri due modi.

• Nei casi numericamente più complessi c'è da far ejuito qualche calcolo in più ma il procedimento è sempre lo stesso. Chiaramente la complessità di questo terzo metodo sta nel trovare la soluzione dell'equazione differenziale. Per il resto, quest'ultimo è poi di certo più veloce degli altri due.

2° REC fino al min 14.. BOH!

× Calcoliamo la relazione tra J_{ottimo} e $S(\tau)$ soluzione della DRE.

Lemma

dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Fx \\ x(\tau_0) = x_0 \end{cases}$ e l'indice di costo $J = \frac{1}{2}x^T(\tau_f)S_f x(\tau_f) + \frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau_f} x^T H x \, d\tau$,
allora il costo ottimo è dato da $J_{ottimo} = \frac{1}{2}x^T(\tau_0)S(\tau_0)x(\tau_0)$,
dove $S(\tau)$ è soluzione di:

$$\begin{cases} \dot{S} + F^T S + SF + H = 0 \\ S(\tau_f) = S_f \end{cases}$$

← simile equazione di Riccati

Esempio

$\dot{x} = x + u$ $\qquad J = \int_0^{+\infty} u^2 \, dt$ $\qquad$ Voglio portare x a zero spendendo il meno possibile.

In questo caso notiamo che il sistema è instabile $\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$ → Sistema instabile Anello Aperto

Inoltre, $\begin{cases} R = 1 \\ Q = C^T C \end{cases}$, con $C = 0$ → Il sistema non è osservabile $(C = 0)$

Per essere rilevabile, la dinamica della parte non osservabile sia instabile. Il polo è ad 1 per cui non è rilevabile.

Per quanto riguarda la Raggiungibilità → Il sistema è completamente Raggiungibile.
Dato che è stabilizzabile ma non rilevabile non dovrei trovare soluzione.

Ad esempio se scelgo $u^*(t) = \emptyset$ cioè ottieni $\overset{u = kx \text{ con}}{k = \emptyset}$, minimizza il mio indice di costo
Però non è una soluzione che stabilizzi il mio sistema. Quindi in qualche maniera non ho impostato bene il problema.

Provo a trovare soluzione con ARE:

$$SA + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T S = \emptyset \xrightarrow[\substack{Q=0 \\ B=1 \\ R=1}]{A=1} S + S + \emptyset - S^2 = 0 \rightarrow 2S - S^2 = \emptyset$$

$$\downarrow$$

$$S(2 - S) = \emptyset$$

1) $S_\infty = 0$
2) $S_\infty = +2$

$S = \emptyset$ è la soluzione ottima della ARE perché è quella che rende J minimo.

$$J = x_0^T S x_0$$

→ con $S = 0$ → $u^* = -R^{-1}B^T S_\infty x(t) = \emptyset$

Se invece scegliessi $S_\infty = 2$ otterrei $u^* = -2x$

⇒ a ciclo chiuso ottengo $\dot{x} = x + u = x - 2x = -x$

Quindi il sistema Stabile a ciclo chiuso anche se $S_\infty = 2$ non è la soluzione ottima!

Esempio

$\dot{x} = -x + u$ $\qquad J = \int_0^{\infty} u^2 \, dt$ $\qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} R = 1 \\ Q = 0 \end{cases}$

In questo caso, il problema è ben posto:
- Sistema stabile a ciclo aperto
- Sistema Raggiungibile → stabilizzabile
- Sistema Non Osservabile $(C = 0)$
- Sistema Rilevabile

Provo a risolvere ARE:

$$SA + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T S = 0 \rightarrow -2S - S^2 = \emptyset \rightarrow S(S+2) = \emptyset \begin{cases} S = 0 \\ S = -2 \end{cases}$$

In questo caso $S = -2$ va scartata perché non semidefinita positiva ed $S = 0$ è la soluzione ottima.

$u^*(t) = 0$, con $k = 0 = -R^{-1}B^T S_\infty$ e dal punto di vista di controllo ottimo ho rispettato tutte le condizioni del problema.

Quindi anche senza usare l'ingresso, con un tempo, il sistema arriva all'origine spendendo zero. (questo perché il sistema a ciclo aperto è Asintoticamente Stabile).

Esempio

$\dot{x} = x + u$ con $J = \int x^2 + u^2$ $\qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} R = 1 \\ Q = 1 \rightarrow C = 1 \end{cases}$

Il sistema è $\begin{cases} \cdot \text{ Instabile} \\ \cdot \text{ Raggiungibile} \rightarrow \text{Stabilizzabile} \\ \cdot \text{ Osservabile} \rightarrow \text{Rilevabile} \end{cases}$

Per cui è possibile risolvere il problema.

$$SA + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T S = 0$$

$$s + s + 1 - s^2 = 0 \rightarrow s^2 - 2s - 1 = 0 \quad \begin{cases} s = 1 - \sqrt{2} \rightarrow \text{soluzione da scartare } (< 0) \\ s = 1 + \sqrt{2} \rightarrow \text{Soluzione } (\geq 0) \text{ Ottima} \end{cases}$$

Andando a calcolare il controllo Ottimo

$$u = -R^{-1}B^T S_\infty x(t) = -(1 + \sqrt{2})\, x(t)$$

La dinamica a ciclo chiuso sarà:

$$\dot{x} = x - x - \sqrt{2}x = -\sqrt{2}x$$ ed ho un polo stabile a ciclo chiuso in $-\sqrt{2}$

La legge di controllo è stabilizzante. Sotto queste ipotesi si ha l'unicità di ARE

Per mettere un polo in un posto differente basta modificare Q. (Q grandi, x piccoli e transitori veloci)

- Per quanto riguarda la necessità del teorema: se (A,B) non è stabilizzabile, non esiste un controllo che porti x ~~[illegible]~~ a zero e J diverge. Se (A,C) non è rilevabile, gli autovalori stabili non appaiono in x^TQx ed il controllo ottimo non può renderli conto che stanno divergendo e non può agire.

- Per quanto riguarda la sufficienza del teorema:

  Il sistema del controllo ottimo è posto con $t_f \rightarrow \infty$. La dinamica è descritta dal Hamiltoniano con t_f finito. Quindi, ~~la sufficienza della [illegible]~~

  $$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & A^T \end{bmatrix}$$ ~~[illegible]~~ che è scritta nelle variabili $\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$

  Faccio un cambio di base con $T = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ S_\infty & I_{n \times n} \end{bmatrix}$

$$\tilde{\mathcal{H}} = T^{-1} \mathcal{H} T = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ -S_\infty & I_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ S_\infty & I_{n\times n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -S_\infty A - Q & +S_\infty BR^{-1}B^T - A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ S_\infty & I_{n\times n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A \overbrace{- BR^{-1}B^T S_\infty}^{K} & -BR^{-1}B^T \\ \underbrace{-S_\infty A - Q - A^T S_\infty + S_\infty BR^{-1}B^T S_\infty}_{\text{ARE e quindi } = 0 \text{ perché } S_\infty \text{ è soluzione della ARE}} & -A^T \underbrace{+ S_\infty BR^{-1}B^T}_{\rightarrow -K^T} \end{bmatrix}$$