

# Capitolo 2

## Stabilità

Consideriamo un sistema tempo-invarianti generale definito in uno spazio di stato  $x \in \mathbb{R}^n$  del tipo

$$\mathbb{D}x = f(x, u), \quad x(0) = x_0$$

e le sue soluzioni (o “movimenti”)  $\bar{x}(x_0, \bar{u}, t)$ , tra cui in particolare quelli che abbiamo chiamato di equilibrio (per i quali  $\bar{u}$  e  $\bar{x}$  sono costanti). Sia inoltre data una norma  $\|\cdot\|$  per i vettori in  $\mathbb{R}^n$ .

Intuitivamente associato al concetto di equilibrio è quello di stabilità (si pensi al caso di un pendolo), in particolare rispetto alle variazioni delle condizioni iniziali. Considereremo cioè comparativamente le soluzioni del sistema in condizioni nominali  $\bar{x}(x_0, \bar{u}, t)$  e in condizioni perturbate  $\bar{x}(x', \bar{u}, t)$ , e diremo stabili quei movimenti che sono poco alterati da piccole alterazioni delle condizioni iniziali. Cercheremo di rendere preciso questo concetto, e di stabilire tecniche per decidere della stabilità o meno di un equilibrio.

### 2.1 Definizioni

Poiché in quel che segue considereremo sempre  $\bar{u}$  come una particolare funzione o successione di ingresso, si potrà fare a meno di citarla esplicitamente nella descrizione del sistema e delle sue soluzioni:

$$Dx = f(x), \quad x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

Un movimento  $\bar{x}(t) = x(x_0, t)$  è stabile per il sistema (2.1) se tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a  $x_0$  rimangono arbitrariamente vicine a  $x(x_0, t)$  stesso; ovvero, più precisamente, se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che se  $\|x' - x_0\| < \delta$ , allora  $\|x(x', t) - x(x_0, t)\| < \epsilon, \forall t$  (vedi fig. 2.1).

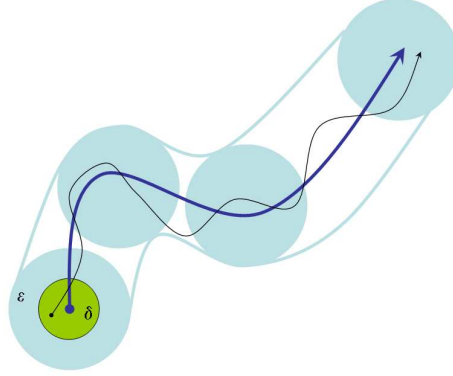


Figura 2.1: Illustrazione del concetto di stabilità di un movimento

Un movimento  $\bar{x} = x(x_0, t)$  è attrattivo per il sistema (2.1) (ovvero il sistema è convergente rispetto a quel movimento) se, per tempi sufficientemente lunghi, tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a  $x_0$  tendono a  $\bar{x}(t)$ ; ovvero, se  $\exists \delta > 0 : \|x' - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(x', t) - \bar{x}(x_0, t)\| = 0$ .

Un movimento è asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo (vedi fig. 2.2). È instabile se non è stabile.

Sia  $x(\bar{x}, t)$  il movimento di un sistema  $\dot{x} = f(x)$  a partire da  $x(0) = \bar{x}$ . Si dice *orbita* (o *traiettoria*)  $T_{\bar{x}}$  del sistema passante per  $\bar{x}$  la curva (cioè l'insieme dei punti) percorsa dallo stato, ovvero  $T_{\bar{x}} = \{\xi \in X | \exists t, \xi = x(\bar{x}, t)\}$ . Si dice distanza di un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  da un'orbita  $T_{\bar{x}}$  la quantità  $d(x, T(\bar{x})) = \min_{z \in T_{\bar{x}}} \|x - z\|$ .

Un'orbita  $T_{\bar{x}}$  è stabile per il sistema (2.1) se tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a  $T_{\bar{x}}$  rimangono arbitrariamente vicine a  $T_{\bar{x}}$ ; ovvero se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che se  $d(x', T_{x_0}) < \delta$ , allora  $d(x', t), T_{x_0}) < \epsilon, \forall t$ . L'orbita è attrattiva per il sistema se  $\exists \delta > 0 : d(x', T_{x_0}) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(x(x', t), T_{x_0}) = 0$ .

Questi concetti si specializzano per le particolari soluzioni che sono i punti di equilibrio (vdi fig. 2.3):

Uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  è stabile per il sistema (2.1) se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x' - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(x', t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t$ .

Uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  è attrattivo per il sistema (2.1) se  $\exists \delta > 0 : \|x' - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(x', t) - \bar{x}\| = 0$ .

Uno stato di equilibrio è asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo. È instabile se non è stabile. Un equilibrio stabile, ma non asintoticamente stabile, viene talvolta detto *semplicemente* o *marginalmente* stabile.

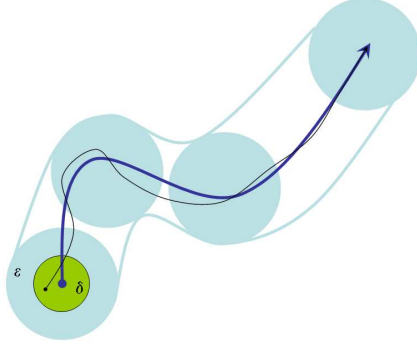
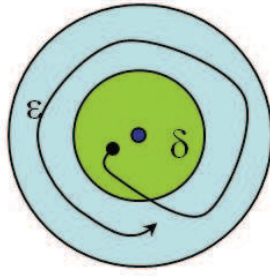
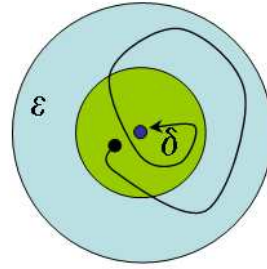


Figura 2.2: Illustrazione del concetto di asintotica stabilità di un movimento.



Equilibrio stabile



Equilibrio asintoticamente stabile

Figura 2.3: Illustrazione dei concetti di stabilità di un equilibrio

I problemi di stabilità e attrattività di un qualsiasi stato di equilibrio di un sistema possono essere riportati allo studio delle analoghe proprietà dell'origine per un sistema opportuno. Allo stesso modo, i problemi relativi ai movimenti di un sistema possono sempre essere riportati ad analoghi problemi di stati di equilibrio di un differente sistema, i cui stati sono le differenze tra il movimento perturbato e quello di riferimento. Infatti, se definiamo  $\tilde{x}(t) = x(x', t) - x(x_0, t) = x(t) - \bar{x}(t)$ , si ottiene da (2.1)

$$D\tilde{x} = f(x, t) - f(\bar{x}, t) \stackrel{def}{=} \tilde{f}(\tilde{x}, t)$$

con condizioni iniziali  $\tilde{x}(0) = x' - x_0$ , ed equilibrio in  $\tilde{x} = 0$ . Si noti che il sistema ottenuto può essere non stazionario, anche se il sistema per il quale

si voleva studiare la stabilità del movimento era stazionario.

Ad esempio, si consideri il sistema  $\dot{x} = \sin(x) + u$ , con  $\bar{u} = 1$  e  $x_0 = 1$ . La soluzione di riferimento è in questo caso calcolabile esplicitamente come  $\bar{x}(t) = -2 \arctan(\frac{2+t-c}{t-c})$ , con  $c = 2/(1 + \tan(0.5))$  (ovviamente, in altri casi una soluzione esplicita può non essere disponibile). Si ha

$$\dot{\tilde{x}} = \sin(x) + 1 - \sin(\bar{x}) - 1 = \sin(\tilde{x} + \bar{x}) - \sin(\bar{x}) \stackrel{def}{=} \tilde{f}(\tilde{x}, t)$$

con  $\tilde{x}(0) = x(0) - 1$ . Il modello linearizzato attorno all'equilibrio  $\tilde{x} = 0$  ( $\tilde{f}(0, t) \equiv 0$ ) è dato da

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$$

con  $A = \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=0} = \cos(-2 \arctan(\frac{2+t-c}{t-c}))$  (si osservi incidentalmente che  $A > 0$  per  $t < T \approx 0.3$ , e  $A < 0$  per  $t > T$ ).

## 2.2 Sistemi LTI

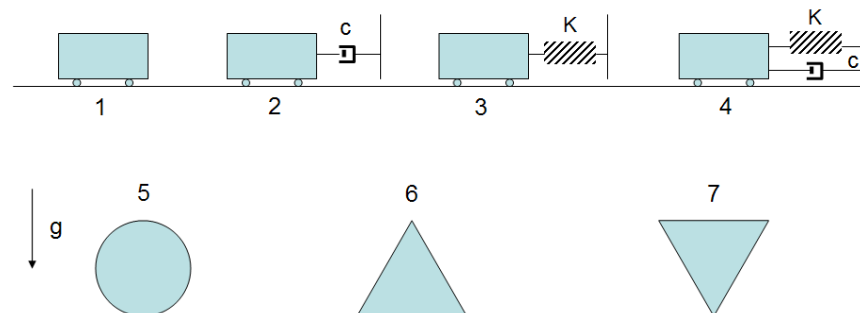
Per i sistemi LTI, conoscendo già le soluzioni esplicite, è possibile applicare questi concetti immediatamente:

1. L'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema  $\dot{x} = Ax$  se tutti i modi del sistema sono convergenti a zero (ovvero se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale strettamente negativa); è semplicemente stabile se tutti i modi del sistema sono limitati (ovvero se tutti gli autovalori hanno parte reale non positiva, e quelli a parte reale nulla hanno tutti molteplicità geometrica pari a quella algebrica); è instabile altrimenti.
2. L'origine è un punto di equilibrio stabile e attrattivo per il sistema  $x(t+1) = Ax(t)$  se tutti i modi del sistema sono convergenti a zero (ovvero se tutti gli autovalori di  $A$  hanno modulo strettamente minore di uno); è semplicemente stabile se tutti i modi del sistema sono limitati (ovvero se tutti gli autovalori hanno modulo non maggiore di uno, e quelli a modulo unitario hanno tutti molteplicità geometrica pari a quella algebrica); è instabile altrimenti.
3. Se uno stato (in particolare l'origine) di un sistema LTI è stabile [rispettivamente, as. stabile], allora ogni altro stato di equilibrio, ed ogni movimento di riferimento sono stabili [as. stabili]. Si può quindi parlare di stabilità *del sistema*.

4. La asintotica convergenza a zero degli stati vale a partire da qualsiasi condizione iniziale: un sistema LTI asintoticamente stabile è anche *globalmente* asintoticamente convergente.
5. In un sistema LTI, la attrattività comporta la stabilità, e la instabilità comporta la divergenza (cioè la illimitatezza) dei movimenti.
6. In un sistema LTI asint. stabile, tutti i modi convergono a zero esponenzialmente.

Riguardo al punto 3, si osservi che, se l'origine è asintoticamente stabile, allora è anche l'unico punto di equilibrio per il sistema. Si può ciononostante parlare di asintotica stabilità di movimento, ad esempio in corrispondenza a ingressi  $\bar{u} \neq 0$ . Se invece esiste un punto di equilibrio  $\bar{x} \neq 0$ , allora ovviamente esiste un intero sottospazio di punti di equilibrio, coincidente con il kernel di  $A$ . Perchè ciò accada, è necessario e sufficiente che  $A$  abbia un autovalore nullo.

**Esempio:** Si considerino i sistemi meccanici di figura, tutti dotati di massa. Gli elementi elastici e gli smorzatori hanno caratteristica lineare non precisata. Per i sistemi 5, 6 e 7, si consideri impossibile lo strisciamento sul piano.



Lo stato di equilibrio del sistema 1) rappresentato in figura è instabile in assenza di attrito di strisciamento. Infatti, condizioni iniziali arbitrariamente piccole, ma non nulle, portano il sistema a divergere (in particolare, una velocità iniziale non nulla genera un moto uniforme e quindi la divergenza della posizione). Analiticamente, il sistema è lineare e può essere considerato esso stesso instabile: ha infatti un autovalore in zero con molteplicità algebrica pari a due e geometrica pari a uno.

L'equilibrio del sistema 2) è marginalmente stabile. Infatti, stabiliti limiti arbitrari agli stati (posizioni e velocità), è sempre possibile trovare condizioni iniziali non nulle ma sufficientemente piccole, tali che i limiti non siano mai superati nella evoluzione libera del sistema. In termini analitici, il sistema lineare 2) ha un autovalore in zero e un autovalore reale negativo.

L'equilibrio del sistema 3) è anch'esso marginalmente stabile: se inizializzato in uno stato non di equilibrio, ha un moto oscillatorio non smorzato, che è può essere limitato a regioni arbitrariamente piccole dello spazio di stato scegliendo condizioni iniziali sufficientemente prossime all'equilibrio. Il sistema ha due autovalori immaginari puri.

Il punto di equilibrio del sistema 4) rappresentato in figura è asintoticamente stabile: l'effetto della molla è quello di fare oscillare il sistema attorno all'origine, mentre lo smorzatore causa la continua dissipazione di energia e la diminuzione della velocità, quindi attenua l'ampiezza delle oscillazioni. Lo stato del sistema tende quindi asintoticamente all'origine. Il sistema ha due autovalori a parte reale negativa.

In assenza di attrito di rotolamento, lo stato di equilibrio del sistema 5) rappresentato in figura è instabile. Infatti, anche in presenza di attrito di strisciamento tra le superfici in contatto, è sufficiente che all'istante iniziale la velocità di rotazione sia non nulla perché il sistema si allontani indefinitamente dallo stato di equilibrio con velocità costante. Nel caso invece in cui sia presente attrito di rotolamento l'equilibrio è marginalmente stabile: infatti l'attrito volvente introduce nel sistema una dissipazione di energia che fa diminuire la velocità, e quindi rende possibile limitare le traiettorie a regioni arbitrariamente piccole dello spazio di stato scegliendo opportune condizioni iniziali.

Nel caso del sistema 6), è necessario considerare moti perturbati che consistono di rotazioni attorno agli spigoli con transizioni modellabili come urti col piano. Se gli urti sono perfettamente elastici, l'equilibrio è marginalmente stabile, in quanto il corpo si manterrebbe indefinitamente in oscillazione (di ampiezza limitata e proporzionale alle condizioni iniziali). Se gli urti sono anelastici, l'equilibrio è asintoticamente stabile.

Lo stato di equilibrio del sistema 7) rappresentato in figura è instabile, poiché se lo stato iniziale non coincide esattamente con quello di equilibrio il sistema si allontana indefinitamente da quest'ultimo.

## 2.3 Peculiarità dei Sistemi Nonlineari

Nei sistemi nonlineari i fenomeni sono più complessi che nei sistemi lineari:

- Non tutti gli equilibri hanno le stesse caratteristiche di stabilità per un sistema. Ad esempio, l'equilibrio inferiore di un pendolo è stabile, quello superiore è instabile. Per condizioni iniziali abbastanza prossime all'equilibrio inferiore, se vi è attrito, l'equilibrio inferiore è anche attrattivo, quindi asintoticamente stabile, ma non globalmente: esistono condizioni iniziali (quale appunto l'equilibrio superiore) a partire dalle quali le traiettorie non convergono.
- Non necessariamente gli equilibri attrattivi sono stabili. Un esempio di equilibrio attrattivo ma non stabile in TD è offerto dal sistema

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{se } \|x\| > 1 \end{cases}$$

Un esempio analogo in TC è dato dal sistema (di Vinograd)  $\dot{x} = f(x)$ , con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2(x_2-x_1)+x_2^5}{(x_1^2+x_2^2)[1+(x_1^2+x_2^2)^2]} \\ \frac{x_2^2(x_2-2x_1)}{(x_1^2+x_2^2)[1+(x_1^2+x_2^2)^2]} \end{cases}$$

per  $x \neq 0$ , e  $f(0) = 0$ , ha unico equilibrio nell'origine. I movimenti di questo sistema a partire da punti vicini all'origine sono descritti in fig. 2.4

- La convergenza ad un equilibrio asintoticamente stabile può essere meno che esponenziale, ovvero più lenta di quella di qualsiasi sistema lineare. Ad esempio, il sistema  $\dot{x} = -x^3$ , con  $x(0) = x_0$ , ha soluzione  $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1+2x_0^2t}}$ . Converge quindi all'equilibrio per  $t \rightarrow \infty$ , come  $t^{-1/2}$ , cioè molto lentamente, e più lentamente di qualsiasi sistema lineare convergente. Infatti, la convergenza di qualsiasi sistema lineare asintoticamente stabile  $\dot{\xi} = -a\xi$  ( $a > 0$ ) è un esponenziale  $\xi(t) = \xi_0 e^{-at}$ , ma per qualsiasi  $a > 0$  e qualsiasi condizione iniziale  $\xi_0 > 0$ , esiste un  $\bar{t}$  tale per cui,  $\forall t > \bar{t}$ , si ha

$$x_0 \frac{1}{\sqrt{1+2x_0^2t}} > \xi_0 e^{-at}, \text{ ovvero } t > c + \frac{1}{2} \log(1+2x_0^2t),$$

con  $c = \frac{1}{a}(\log \xi_0 - \log x_0)$ .

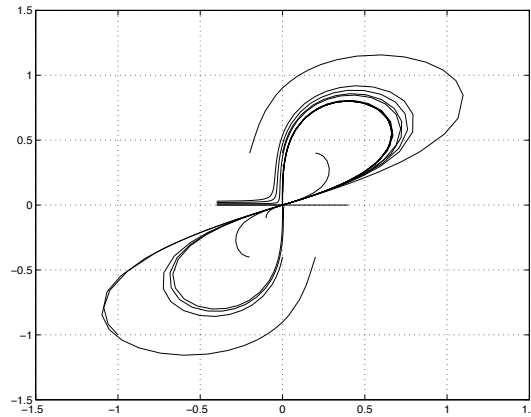


Figura 2.4: Traiettorie di un sistema di Vinograd, con equilibrio nell'origine instabile ma attrattivo.

- Possono esistere moti che divergono da un equilibrio instabile senza allontanarsene indefinitamente, ma rimanendo a distanza limitata. Ad esempio, il sistema detto “oscillatore di Van der Pol”  $\ddot{x} = -(x^2 - 1)\dot{x} - x$ , ovvero, in forma di stato,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 \quad (2.3)$$

ha un equilibrio nell'origine. Ogni traiettoria che inizia fuori dall'origine però converge asintoticamente ad una orbita chiusa che costituisce un *ciclo limite* dell'oscillatore (fig. 2.5).

È quindi necessario, per studiare sistemi nonlineari, disporre di definizioni più articolate di stabilità:

- Il sottoinsieme dello spazio di stato formato dalle condizioni iniziali le cui corrispondenti traiettorie convergono ad un dato equilibrio asintoticamente stabile, è detto *bacino di attrattività* o *regione di asintotica stabilità* (RAS);
- Un equilibrio si dice *globalmente asintoticamente stabile* (GAS) se la sua RAS coincide con tutto lo spazio di stato;
- L'origine si dice *esponenzialmente stabile* per un sistema se, per  $\delta$  sufficientemente piccoli, esistono due reali positivi  $\alpha, \lambda$  tali per cui



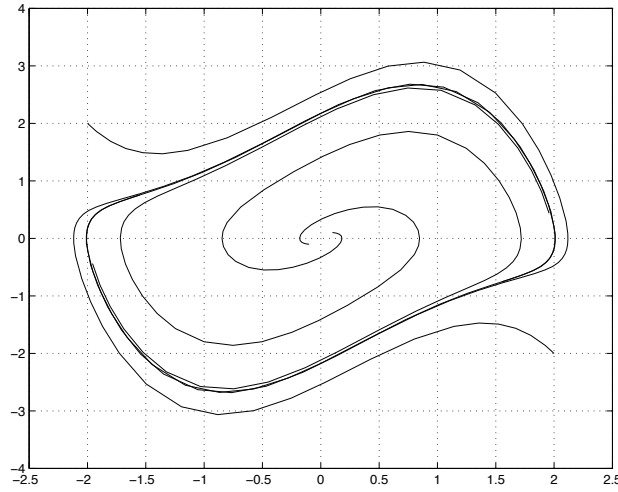


Figura 2.5: Traiettorie di un oscillatore di Van der Pol che divergono dall'origine e vengono attratte da un ciclo limite.

$\forall x(0) : \|x(0)\| < \delta, \|x(x(0), t)\| \leq \alpha e^{-\lambda t}, \forall t > 0$ . Il numero  $\lambda$  si dice velocità di convergenza esponenziale.<sup>1</sup>

## 2.4 Teoremi di Lyapunov

I più importanti strumenti di cui disponiamo per lo studio della stabilità dei sistemi nonlineari sono i teoremi di Lyapunov:

### 2.4.1 Metodo indiretto di Lyapunov

Si consideri la approssimazione lineare  $Dx = Ax$  del sistema nonlineare stazionario  $Dx = f(x)$ :

1. Se  $Dx = Ax$  è asintoticamente stabile, l'origine è (localmente) asintoticamente stabile anche per il sistema originale  $Dx = f(x)$ ;
2. Se  $Dx = Ax$  ha almeno un modo esponenzialmente divergente, l'origine è instabile anche per  $Dx = f(x)$ ;

<sup>1</sup>La norma usata è tipicamente la norma Euclidea, o norma 2 ( $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$ ). Peraltro, poichè per qualsiasi norma  $\|\cdot\|_i$  e  $\|\cdot\|_j$ , si può dimostrare che esistono  $\alpha_1 > 0$  e  $\alpha_2 > 0$  tali che  $\alpha_1 \|x\|_i \leq \|x\|_j \leq \alpha_2 \|x\|_i$ , la velocità di convergenza  $\lambda$  è la stessa qualsiasi norma si consideri.

Si osservi che, sulla base di queste due proposizioni, nulla si può dire sulla stabilità della origine per  $Dx = f(x)$  se  $Dx = Ax$  non ha modi esponenzialmente divergenti, ma ne possiede almeno uno non convergente.

Si osservi che il caso 2) occorre per sistemi TC se  $A$  ha almeno un autovalore a parte reale strettamente positiva, e per sistemi TD se  $A$  ha almeno un autovalore con modulo strettamente maggiore di uno.

La inconcludenza del teorema si verifica nei sistemi TC se il linearizzato ha tutti autvalori a parte reale non positiva e almeno un autovalore a parte reale nulla; per sistemi TD se il linearizzato ha tutti autovalori a modulo non maggiore di uno, con almeno un autovalore a modulo unitario.

Il metodo indiretto, il cui contenuto è abbastanza intuitivo, necessita per la dimostrazione del successivo teorema. È stato presentato prima in quanto metodo di rapida applicazione, anche se di molto minor potenza, del successivo.

### 2.4.2 Metodo diretto di Lyapunov.

Il metodo diretto di Lyapunov può essere visto come una importante generalizzazione dei criteri di stabilità per sistemi meccanici basati sullo studio della energia del sistema. Qualitativamente, una funzione di energia generalizzata è una funzione scalare dello stato, che è sempre positiva eccetto che nella configurazione di quiete (equilibrio) del sistema, dove ha un minimo. È opportuno introdurre alcune definizioni. Una funzione  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice

- positiva definita (p.d.) se  $V(0) = 0$  e se esiste un intorno  $B_r$  dell'origine per cui vale  $\forall x \in B_r \setminus 0, V(x) > 0$ ;
- positiva semi-definita (p.s.d.) se  $\exists B_r$  tale che  $V(x) \geq 0, \forall x \in B_r$ ;
- negativa definita e semi-definita risp. se  $-V(x)$  è p.d. o p.s.d.;
- *globalmente* positiva definita se  $V(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ , positiva semi-definita se  $V(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ ; etc..

**Esempio:** Per  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $V = x_1^2 + x_2^2$  è globalmente p.d.;  $V = x_1^2 + x_2^2 - x_1^3$  è localmente p.d.;  $V = x_1^2 + \sin^2(x_2)$  è p.d. localmente, p.s.d. globalmente;  $V = x_1^2 + \sin^2(x_1)$  è globalmente p.s.d.;  $V(x) = x_1^2 - x_2^2$  si dice non-definita.

**Esempio:** Tipiche funzioni che verranno spesso usate nel metodo di Lyapunov sono le forme quadratiche  $V = x^T Px$ , con  $P$  matrice  $n \times n$ .

Ai fini della forma quadratica  $V$ , la parte antisimmetrica di  $P$  è irrilevante:  $V = x^T Px = x^T \left( \frac{(P+P^T)}{2} + \frac{(P-P^T)}{2} \right) x = x^T \left( \frac{(P+P^T)}{2} \right) x$ . Assumeremo quindi che  $P$  sia simmetrica.

Ricordiamo che  $V$  è p.d. (p.s.d.), cioè  $x^T Px > 0, \forall x \neq 0$  ( $x^T Px \geq 0$ ) se la matrice  $P$  è p.d. (rispettivamente p.s.d.).

Ricordiamo due criteri per stabilire se una matrice è p.d. (p.s.d.):

- gli autovalori di  $P$  sono tutti positivi (non negativi);
- $\det(P(1 : i, 1 : i)) > 0, i = 1, \dots, n$  ( $\det(P_i) \geq 0, P_i$  sottomatrici principali);

Se  $P$  è p.d. (p.s.d), allora

- l'angolo formato tra  $x$  e  $Px$  è strettamente minore di  $\pi/2, \forall x$  (minore o uguale se p.s.d.);
- $\exists R, \det(R) \neq 0 : P = R^T R$  ( $\exists R : P = R^T R, \det(R) = 0$ ).

L'ultima condizione ci dice che una forma quadratica può essere vista come (il quadrato) di una norma euclidea di un vettore in opportune coordinate:  $x^T Px = x^T R^T R x = y^T y = \|y\|^2, y = Rx$ . La scelta di  $R$  non è unica; una particolare determinazione è  $R = \sqrt{P} = \sqrt{Q\Lambda Q^{-1}} = Q\sqrt{\Lambda}Q^T$ , che è simmetrica e p.d. (p.s.d., risp.).

### 2.4.3 Teoremi del Metodo Diretto di Lyapunov

**Sistemi a tempo continuo.** Sia  $x = 0$  un punto di equilibrio per il sistema tempo-invariante  $\dot{x} = f(x)$ . Si consideri una funzione  $V(x) \in C^1$  positiva definita, e si consideri la sua derivata direzionale lungo il campo  $f(x)$ , cioè  $L_f V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, t)$ . Se  $L_f V(x)$  è negativa semi-definita, l'origine è stabile; se è negativa definita, l'origine è asintoticamente stabile; se è positiva definita, l'origine è instabile.

**Sistemi a tempo discreto.** Sia  $x = 0$  un punto di equilibrio per il sistema tempo invariante  $x(t+1) = f(x(t))$ . Si consideri una funzione  $V(x) \in C$  positiva definita, e si consideri la sua differenza direzionale lungo il campo  $f(x)$ , cioè  $\Delta_f V(x) = V(f(x)) - V(x)$ . Se  $\Delta_f V(x)$  è negativa semi-definita, l'origine è stabile; se è negativa definita, l'origine è asintoticamente stabile; se è positiva definita, l'origine è instabile.

**Dimostrazione del metodo diretto di Lyapunov T.C.:**

**Stabilità:** Si consideri un intorno sferico  $B_\epsilon$  dell'origine, tutto contenuto in una regione  $S$  in cui  $L_f V \leq 0$ : poiché  $V$  è continua e p.d., esiste  $M = \min_{x \in \partial(B_\epsilon)} V(x)$ , ed esisterà un  $B_\delta : V(x) < M, \forall x \in B_\delta$ . Supponiamo per assurdo che una traiettoria del sistema  $x(x_0, t)$  che parta da  $x_0 \in B_\delta$  al tempo 0, esca da  $B_\epsilon$  per  $\bar{t} > 0$ : sarebbe  $V(x(x_0, \bar{t})) > M > V(x_0)$ . D'altronde, se si considera la funzione  $V(x(t, x_0))$  come funzione del tempo, si ha che la sua derivata totale vale  $\dot{V} = \frac{d}{dt} V = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x(x_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = L_f V$ , quindi dalla ipotesi che  $L_f V(x)$  sia negativa semi-definita discende che  $V$  è monotona non crescente nel tempo, il che dimostra l'assurdo.

**Asintotica stabilità:** si consideri ancora un intorno  $B_\delta$  che garantisce che la traiettoria non esca mai da  $B_\epsilon$ . Poiché  $V$  è limitata inferiormente e strettamente decrescente nel tempo ( $\dot{V} = L_f V$  n.d.), essa deve tendere ad un limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = W \geq 0$ . Dobbiamo escludere il caso  $W > 0$ : se così fosse, infatti, le traiettorie iniziate in  $B_\delta$  al tempo 0 non potrebbero mai entrare in un intorno  $B_W : \max_{x \in B_W} V(x) < W$ . Ma, poichè anche  $\dot{V}$  è continua e n.d., deve avere un massimo (negativo)  $-w < 0$  sull'insieme  $B_\epsilon \setminus B_W$ , quindi  $V$  decresce almeno con velocità  $|w|$ . Una traiettoria del sistema, in  $x_0 \in B_\delta$  al tempo 0, dopo al più un tempo  $t = (V(x_0) - W)/w$ , porterebbe a  $V(t > \Delta t) < W$ , che dimostra l'assurdo.

**Instabilità:** Dato  $\epsilon > 0$ , si supponga per assurdo che esista un  $\delta$  quale richiesto nella definizione di stabilità. Sia  $V_\epsilon = \min_{x \in \partial B_\epsilon} V(x)$ . Si consideri inoltre  $0 < \epsilon' < \delta$  e gli intorni sferici  $B_\epsilon$  e  $B_{\epsilon'}$ . Sia  $\min_{x \in B_\epsilon \setminus B_{\epsilon'}} L_f V(x) = m > 0$ . Una evoluzione dello stato che inizi in  $B_\epsilon \setminus B_{\epsilon'}$  uscirà certamente da  $B_\epsilon$  in un tempo non superiore a  $t = V_\epsilon/m$ , dimostrando l'assurdo.

Una funzione  $V(x)$  p.d. tale che  $L_f V(x)$  ovvero  $\Delta_f V(x)$  è n.s.d. (compreso il caso n.d.), si dice una *funzione di Lyapunov* per il sistema  $\dot{x} = f(x)$  nell'equilibrio considerato.

**Esempio:** Per il sistema monodimensionale  $\dot{x} = -x^3$ , l'origine è unico equilibrio. Il metodo approssimato non fornisce indicazioni in questo

caso: infatti, l'unico autovalore del linearizzato è zero. Si consideri una candidata di Lyapunov  $V(x) = x^2$ . Si ha  $L_f V(x) = 2x(-x^3) = -x^4$ , che è n.d.. La funzione  $V(x)$  è quindi una funzione di Lyapunov, e si può concludere per la stabilità asintotica dell'equilibrio.

Più in generale, per sistemi del primo ordine  $\dot{x} = -c(x)$ , con  $c(x)$  una qualsiasi funzione con grafico strettamente nel primo e terzo quadrante ( $xc(x) > 0, \forall x \neq 0$ ), una candidata  $V(x) = x^2$  mostra la G.A.S. dell'origine.

Si consideri adesso  $\dot{x} = x^3$ . Si osservi che il linearizzato coincide con quello del sistema precedente. Si consideri la stessa candidata  $V(x) = x^2$ . Si ha  $L_f V(x) = 2x(-x^3) = -x^4$ , che è p.d.. Si può quindi concludere per la instabilità dell'equilibrio.

Si osservi che il linearizzato approssimato nell'origine dei due sistemi  $\dot{x} = -x^3$  e  $\dot{x} = x^3$  è identico.

**Esempio:** Sia dato il sistema lineare t.d.  $x(t+1) = ax(t)$ , e studiamolo con il metodo diretto mediante la candidata  $V(x) = x^2$ . Si ha  $\Delta V = a^2 x^2 - x^2 = x^2(a^2 - 1)$ . Si ottiene quindi che per  $|a| = 1$  l'equilibrio nell'origine è stabile, per  $|a| < 1$  è asintoticamente stabile, per  $|a| > 1$  è instabile.

**Esempio:** Sia dato il sistema t.d.  $x(t+1) = ax^3(t)$ , e la candidata  $V(x) = x^2$ . Si ha  $\Delta V = a^2 x^6 - x^2 = x^2(a^2 x^4 - 1)$ . Si ottiene quindi che, per  $x$  sufficientemente piccoli ( $x^2 < 1/|a|$ ),  $\Delta V < 0$ , quindi  $\Delta V$  è n.d. ed il sistema è asintoticamente stabile, qualsiasi sia  $a$ .

#### 2.4.4 Estensione al caso di Globale Asintotica Stabilità

Se, oltre alle ipotesi del metodo diretto di Lyapunov nel caso di asintotica stabilità di un equilibrio, vale anche

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

(cioè, se  $V(x)$  è radialmente illimitata, e quindi le sue superfici di livello sono chiuse), allora l'equilibrio è anche G.A.S.

La dimostrazione è una diretta riapplicazione del metodo diretto; la condizione di chiusura delle superfici di livello è necessaria per evitare che traiettorie con  $V$  strettamente decrescente possano divergere.

**Esempio:** Analizzare il sistema  $\dot{x}_1 = 2x_2 - 6\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2}$ ;  $\dot{x}_2 = -2\frac{x_1+x_2}{(1+x_1^2)^2}$ , mediante una candidata  $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$  (le cui curve di livello sono riportate in fig. 2.6).

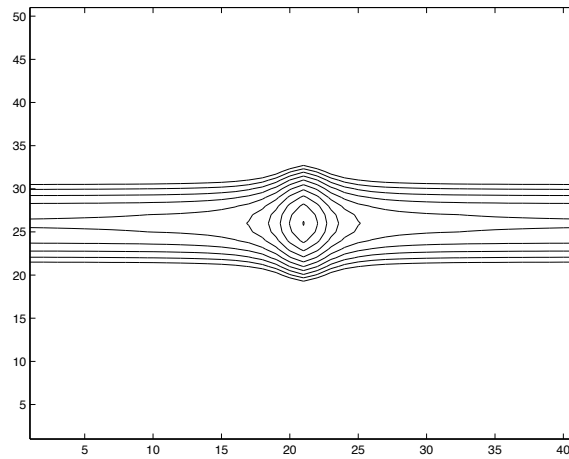


Figura 2.6: Curve di livello di una  $V(x)$  on radialmente illimitata

**Esercizio:** Si dimostri che l'origine è equilibrio G.A.S per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

## 2.5 Teorema dell'Insieme Invariante Massimo

Il metodo diretto di Lyapunov non permette di concludere sulla attrattività dell'equilibrio nel caso  $L_f V$  sia solo n.s.d.. In questo caso, è assai utile il teorema dell'insieme invariante massimo.

Un insieme  $M$  è invariante per un sistema dinamico se tutte le orbite del sistema che intersecano  $M$  sono interamente contenute in  $M$ . Ad esempio, gli equilibri sono insiemi invarianti, così come ogni orbita del sistema è (ovviamente) un insieme invariante. I cicli limite, ovvero le orbite chiuse di un sistema, sono anch'essi insiemi invarianti di particolare interesse. Ogni unione di insiemi invarianti è un insieme invariante. Ogni insieme invariante

è una unione di orbite. Anche una regione contenuta all'interno di una superficie di livello chiusa di una funzione di Lyapunov per un sistema dato, è un insieme invariante (come consegue direttamente dalla dimostrazione del teorema di Lyapunov).

**Teorema dell'Insieme Invariante Massimo.**

Sia  $V(x)$  p.d. e sia  $S$  un sottoinsieme aperto dello spazio di stato contenente l'origine nel quale vale  $L_f V(x) \leq 0, \forall x \in S$ . Si supponga che, per qualche  $l$ , le superfici di livello  $V(x) = l$  siano curve chiuse e delimitino l'insieme  $\Omega_l = \{x | V(x) < l\}$ , e sia  $\Omega_l \subseteq S$ .

Sia  $R = \{x \in \Omega_l | L_f V(x) = 0\}$  e  $M$  il massimo (nel senso insiemistico) insieme invariante contenuto in  $R$ . Allora, ogni traiettoria  $x(x_0, t)$  con  $x_0 \in \Omega_l$  converge all'insieme  $M$  (cioè,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{m(t) \in M} \|x(x_0, t) - m\| = 0$ ).

**Dimostrazione (cenno).**  $V(x(t))$  è non crescente, limitata inferiormente: quindi possiede un limite per  $t \rightarrow \infty$ . Inoltre  $L_f V(x(t))$  è uniformemente continua rispetto a  $t$  e di conseguenza (per il lemma di Barbalat)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t)) = 0$  (overo  $\Delta V = 0$  in t.d.). Poiché  $\Omega_l$  è limitato, la traiettoria non può che tendere a  $M$ .

**Osservazione** Si noti che il teorema vale per funzioni  $V$  non esplicitamente dipendenti dal tempo. Nel caso fosse  $V(x, t)$ , il teorema resta valido nella ulteriore ipotesi (in t.c.) che  $L_f V(x(t), t)$  sia uniformemente continua in  $t$ , ciò che si può dimostrare ad es. facendo vedere che  $\frac{d}{dt} L_f V$  è limitata per ogni  $t$ .

**Corollario:** se per una funzione di Lyapunov  $V(x)$  p.d. con  $L_f V(x)$  n.s.d. l'unica orbita del sistema contenuta in  $R$  è un equilibrio, allora questo è stabile asintoticamente.

Il teorema dell'Insieme Invariante Massimo è noto anche come teorema di **LaSalle**, che lo ha formulato in questa forma; oppure come teorema di **Krasovski**, che ne aveva dimostrato in precedenza il corollario.

### 2.5.1 Applicazione alla Stima della R.A.S.

Supponiamo che  $V(x)$  sia una funzione di Lyapunov per il sistema  $\dot{x} = f(x)$  con origine asintoticamente stabile. Dato uno stato iniziale  $\bar{x}$ , come possiamo sapere se la traiettoria a partire da  $\bar{x}$  convergerà all'origine?

Ovviamente, la condizione  $L_f V(\bar{x}) < 0$  non è sufficiente: la traiettoria  $x(\bar{x}, t)$  è infatti costretta a portarsi verso livelli inferiori di  $V$  sino a che rimane in  $S$ , ma potrebbe poi uscirne e quindi allontanarsi (vedi fig. 2.7). Una condizione sufficiente è la seguente:

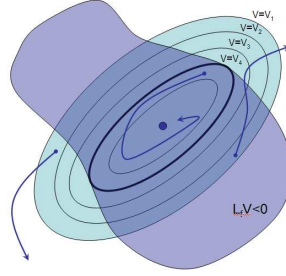


Figura 2.7: Applicazione del Teorema di Lasalle alla stima della RAS

**Teorema** Sia l'origine un punto di equilibrio A.S. per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , e sia  $V(x)$  una funzione di Lyapunov con  $L_f V(x)$  n.d.. Se nella regione chiusa  $\Omega_\ell$  delimitata da una curva di livello  $V(x) = \ell$  vale  $L_f V(x) < 0$  (ovunque eccetto che nell'origine), allora  $\Omega_\ell$  è compresa nella R.A.S. dell'origine.

È quindi possibile ottenere una stima per difetto (quindi cautelativa) della RAS di un equilibrio cercando la più ampia curva  $V(x) = \text{cost.} > 0$  contenuta in una regione  $L_f V(x) = \text{cost.} < 0$ .

Il metodo di stima della RAS basato sul teorema dell'I.I.M. può essere usato più volte con diverse funzioni di Lyapunov  $V(x)$ , per raffinare successivamente le stime: l'unione di insiemi contenuti nella RAS è ovviamente ancora contenuta nella RAS. Inoltre, il metodo si estende al caso in cui  $L_f V(x)$  sia solo negativa semidefinita e si sia usato Krasovski per dimostrare che l'origine è A.S., e infine, se  $V(x)$  è radialmente illimitata, alla G.A.S.

**Esempio:**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}$$

Il metodo indiretto indica già la asintotica stabilità dell'origine. Il metodo diretto, con la funzione di Lyapunov  $V(x) = x^T x$ , offre lo stesso risultato. Il teorema dell'I.I.M. con la stessa candidata permette di affermare che la regione  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  è compresa nella R.A.S. Infatti  $L_f V(x) \leq 0$  in  $\Omega_l$  per  $l = 1$ , e  $R = \{0\}$ . L'origine è un equilibrio, e quindi l'I.I.M. in  $R$  è l'origine stessa. Tutte le traiettorie che partono da dentro il cerchio unitario convergono quindi all'origine, che quindi è contenuto nella R.A.S.. In effetti, è facile vedere che la R.A.S. coincide col cerchio unitario aperto: questo sistema ha un ciclo limite instabile sulla circonferenza unitaria.

La caratterizzazione degli insiemi invarianti per un sistema è in generale



difficile. Spesso però la restrizione allo studio degli insiemi invarianti contenuti in  $R$  permette una facile e completa analisi: basta infatti utilizzare le relazioni che definiscono  $R$  stessa (cioè  $L_f V(x) \equiv 0, \forall x \in R$ ) e applicarle alla dinamica del sistema  $\dot{x} = f(x)$ .

**Esempio:** Si consideri l'equazione di un pendolo

$$mR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgR \sin \theta = 0,$$

ovvero, in forma di stato,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{mR^2}x_2 - \frac{g}{R} \sin x_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Gli equilibri sono in  $x_2 = 0, \sin(x_1) = 0$ .

Il metodo di linearizzazione porta immediatamente a concludere che l'equilibrio in  $(0, 0)$  è A.S. se  $b > 0$ , instabile se  $b < 0$ , mentre non si può concludere nulla nel caso  $b = 0$ . L'equilibrio in  $(\pi, 0)$  è invece sempre instabile.

Per applicare il metodo diretto, si consideri come candidata di Lyapunov la somma della energia potenziale e della energia cinetica del pendolo,

$$V(x) = mgR(1 - \cos x_1) + mR^2 \frac{x_2^2}{2}.$$

Si ha

$$L_f V(x) = mgRx_2 \sin x_1 + mR^2 x_2 \left( -\frac{b}{mR^2}x_2 - \frac{g}{R} \sin x_1 \right) = -bx_2^2$$

Per  $b \geq 0$  si ha  $L_f V(x)$  n.s.d., quindi in base al metodo diretto si può concludere per la stabilità (ma non per la convergenza).

Possiamo però adesso applicare il teorema di Krasovski con la stessa candidata. Si osservi infatti che le curve di livello definite da  $V(x) = \ell$  sono chiuse quando  $\ell \leq 2mgR$  (si trovino le intercette della curva di livello con l'asse  $x_1$ ). Fissato  $\ell$ , per  $b > 0$  si ha poi

$$L_f V \equiv 0 \Rightarrow x_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0$$

Avendo così caratterizzato l'insieme  $R$ , dobbiamo trovare quale sia l'insieme invariante massimo al suo interno. Questo significa imporre l'appartenenza a  $R$  delle soluzioni della dinamica (2.4). Sostituendo quindi

in (2.4) le relazioni  $x_2 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$ , si ottiene facilmente la ulteriore relazione

$$\sin(x_1) \equiv 0$$

che deve essere soddisfatta da ogni punto di un insieme invariante in  $R$ . Si ha quindi  $M = \{x | x_2 = 0, x_1 = k\pi, k \in \mathbb{N}\} \cap \Omega_\ell$ . Per  $\ell = 2mgR$ ,  $M$  comprende la sola origine (infatti i punti di equilibrio in  $x_1 = \pm\pi$  sono sul bordo di  $\Omega_\ell$ , e non vi appartengono). La origine è quindi equilibrio asintoticamente stabile per  $b > 0$ , con bacino di attrazione l'intera regione  $\Omega_\ell$ . Ovviamente, per  $b = 0$  si ha solo stabilità, in quanto in questo caso si ha  $R = \Omega_\ell$ , ed  $M$  è formato da tutte le traiettorie periodiche contenute in  $R$  del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{R} \sin x_1\end{aligned}$$

Nella sua versione più generale, il teorema dell'I.I.M. può essere usato per determinare anche la attrattività dei cicli limite. Nella formulazione del teorema dell'insieme invariante, l'ipotesi che  $V(x)$  sia p.d. non è strettamente necessaria: infatti nella dimostrazione si chiede solo che  $\Omega_l$  sia limitato. Si possono usare  $V(x)$  non p.d. ad esempio per la stabilità dei cicli limite.

**Esempio:** (Ciclo limite attrattivo)

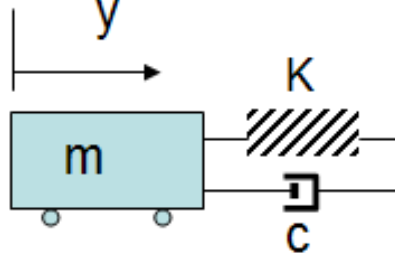
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - 3x_2^5(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)\end{aligned}$$

L'insieme descritto da  $C(x) = x_1^4 + 2x_2^2 - 10 = 0$  è invariante per questo sistema: infatti

$$L_f C(x) = -(4x_1^4 + 12x_2^6)(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$$

si annulla sull'insieme. Il sistema, inizializzato su  $C(x) = 0$ , vi rimane, muovendosi in senso orario ( $\dot{x}_1 = x_2$ , ovvero  $\dot{x}_2 = -x_1^3$ ). Si consideri  $V(x) = C^2(x)$  (che soddisfa le ipotesi dell'I.I.M. ma non è p.d. propriamente):  $L_f V = 2C(x)L_f C(x) \leq 0$ ,  $\forall x$ , e  $R$  è formato dal ciclo limite più l'origine, che sono entrambe insiemi invarianti. L'origine è però instabile: ogni traiettoria che inizi nell'insieme  $V(x) < 100$  (che contiene ogni punto interno al ciclo limite, ma esclude l'origine, ed è limitato) converge al ciclo limite.

**Esempio:** Si consideri il sistema di figura, in cui lo smorzatore e la molla siano elementi nonlineari, rispettivamente con caratteristica  $f_s = cy^3$  e  $f_m = ky^3$ . Si studi la stabilità del sistema al variare dei parametri  $c \geq 0$  e  $k \geq 0$ .



Scelto come vettore di stato  $x = (y, \dot{y}) = (x_1, x_2)$ , si ottiene la dinamica:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1^3 - \frac{c}{m}x_2^3 \end{cases}$$

Per  $k \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , l'unico punto di equilibrio risulta l'origine  $\bar{x} = (0, 0)$ . Il linearizzato del sistema è il seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3k}{m}x_1^2 & -\frac{3c}{m}x_2^2 \end{pmatrix}$$

che, calcolato nell'origine, vale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avendo il linearizzato autovalori nulli, non ci permette di dedurre alcunché riguardo alla stabilità del sistema. Introduciamo allora una candidata di Lyapunov definita come l'energia meccanica del sistema, che è data dalla somma della energia cinetica  $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$  e della energia potenziale elastica  $U = \int_0^y kw^3dw = \frac{k}{4}y^4$ . Posto  $V = U + T = \frac{k}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}mx_2^2$ , si ottiene

$$\dot{V} = -cx_2^4,$$

quindi il sistema, per  $k > 0$  e  $c > 0$ , è stabile. Per concludere sulla asintotica stabilità è necessario studiare ulteriormente il sistema col criterio dell'I.I.M.: le traiettorie che rimangono nel luogo in cui si verifica  $\dot{V} \equiv 0$  hanno  $x_2 \equiv 0$ , quindi anche  $\dot{x}_2 = 0$ , e ciò, per la seconda equazione

dinamica del sistema, è possibile solo dove  $x_1 = 0$ . Quindi, essendo il massimo insieme invariante interno al luogo in cui  $\dot{V} = 0$  costituito dalla sola origine, l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile. Essendo poi  $V(x)$  illimitata radialmente, possiamo concludere anche sulla globale asintotica stabilità.

Nel caso  $k \neq 0$ ,  $c = 0$ , la  $\dot{V}$  è identicamente nulla al variare di  $x_1$  e  $x_2$ , quindi non si può concludere per la asintotica stabilità. In effetti in tal caso il sistema è marginalmente stabile, essendo le traiettorie confinate a curve di livello della  $V$ : se il sistema è inizializzato in una condizione tale da avere  $V(x(0)) = V_0$ , essendo  $\dot{V} \equiv 0$  sarà  $V(x(t)) \equiv V_0$ .

Nel caso  $k = 0$ ,  $c \neq 0$ , la funzione  $V$  sopra considerata non è positiva definita, né ha curve di livello chiuse, quindi non è a rigore una candidata di Lyapunov. Si può però osservare in questo caso che il sistema è di fatto dissaccoppiato, essendo la dinamica di  $x_2$  indipendente da  $x_1$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2^3 \end{cases}$$

Per il sistema  $\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2^3$ , la candidata  $V = \frac{m}{2}x_2^2$  è p.d., e  $\dot{V} = -cx_2^4$  è n.d., quindi  $x_2$  converge globalmente asintoticamente a zero. Naturalmente, altrettanto non si può dire per  $x_1$ , del quale sappiamo solo che tenderà ad un valore costante tanto più piccolo quanto minori sono le condizioni iniziali in  $x_1$  e  $x_2$ . Tutti gli stati con  $x_2 = 0$ ,  $\forall x_1$  sono dunque tutti equilibri marginalmente stabili.

Infine, nel caso  $k = 0$ ,  $c = 0$ , il sistema è lineare, ed è instabile avendo due autovalori nulli con molteplicità geometrica uno (il sistema è ridotto ad una massa libera di muoversi sulla retta, per la quale una condizione iniziale arbitrariamente piccola sulla velocità  $\dot{y} = x_2$  porta a divergenza della posizione  $y = x_1$ ). Vale la pena osservare che, se il teorema di Lyapunov venisse applicato scorrettamente in questo caso ( $k = c = 0$ ), cioè trascurando la necessaria ipotesi che  $V$  sia definita positiva, si potrebbe giungere (essendo  $\dot{V} = 0$ ) a concludere falsamente per la stabilità del sistema.

### 2.5.2 Applicazioni alla sintesi del controllo

Le tecniche di analisi alla Lyapunov possono essere molto utili anche nella sintesi di leggi di controllo per sistemi non lineari. Si consideri il problema

seguinte:

Dato un sistema controllato  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , trovare una legge di *retroazione degli stati sugli ingressi*  $u = u(x)$  tale che per il nuovo sistema autonomo  $\dot{x} = \hat{f}(x) = f(x) + g(x)u(x)$  l'origine sia A.S..

Per una candidata di Lyapunov  $V(x)$ , sia  $\dot{V} = L_f V(x) + L_g V(x)u(x)$ : se posso scegliere  $u(x)$  tale che  $V$  sia una funzione di Lyapunov, si è ottenuto lo scopo.

**Esempio:** Per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 + u\end{aligned}$$

si consideri  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Si ha  $L_f V = 2x_1 x_2^3 + 2x_2 x_1^3$  e  $L_g V = 2x_2$ , per cui la scelta

$$u(x) = -\frac{2x_1 x_2^3 + 2x_2 x_1^3}{2x_2} + x_2$$

fa sì che  $\dot{V}$  si n.s.d. Il controllore proposto in questo caso rende marginalmente stabile l'origine.

**Esempio:** Algoritmi per gli zeri di funzioni. Sia  $h(q) = 0$  un sistema di  $n$  equaz. in  $n$  incognite; si vuole trovare una legge di aggiornamento delle stime  $\dot{q} = u(q)$  che converga agli zeri  $\hat{q}$  a partire da  $q$  suff. vicini a  $\hat{q}$ . Si ponga  $V(q) = \frac{h^T h}{2}$  e quindi  $\dot{V} = h^T \frac{\partial h}{\partial q} u$ :

**A)** scegliendo  $u(q) = -k \left( \frac{\partial h}{\partial q} \right)^T h(q)$  con  $k > 0$ , si ha  $\dot{V} = -k h^T \frac{\partial h}{\partial q}^T \frac{\partial h}{\partial q} h$  n.s.d.. Questa tecnica è nota nel calcolo numerico come metodo del gradiente (o "steepest descent").

**B)** scegliendo (dove possibile!)  $u(q) = -k \left( \frac{\partial h}{\partial q} \right)^{-1} h(q)$  si ha  $\dot{V} = -k h^T h = -k V(q)$  n.d.. Questa tecnica è nota come metodo di Newton-Raphson, e garantisce convergenza esponenziale con velocità  $k$  (quindi arbitrariamente veloce).

L'analisi della convergenza del metodo (A), e della fattibilità del metodo (B), dipendono dalla invertibilità del jacobiano  $\frac{\partial h}{\partial q}$ . In un intorno sufficientemente piccolo di una soluzione isolata del sistema di equazioni,

questo è garantito, ma non in grande: i metodi possono non convergere, o convergere a minimi locali.

**Esempio:** Riconsideriamo la soluzione di equazioni algebriche nonlineari  $h(q)$ , ma tenendo conto della realizzazione in TD, cioè l'aggiornamento sia dato da  $q(t+1) = q(t) + u(t)$ .

Sia  $V(q) = h^T h$ , la differenza direzionale è

$$\Delta V = h^T(q(t+1))h(q(t+1)) - h^T(q(t))h(q(t)).$$

Per  $u(t)$  suff. piccoli, si ha

$$h(t+1) = h(q(t)) + \frac{\partial h}{\partial q} u(t) + O(u^2(t)),$$

quindi

$$\Delta V = 2h^T \frac{\partial h}{\partial q} u(t) + O(u^2(t)).$$

Scegliendo

$$u(t) = -k \left( \frac{\partial h}{\partial q} \right)^T h(q(t))$$

ovvero

$$u(t) = -k \left( \frac{\partial h}{\partial q} \right)^{-1} h(q(t)),$$

si ha convergenza locale per  $k$  piccoli. È evidente che per  $k$  elevati, questa analisi non è più valida.

Una funzione  $V(x)$  si dice *funzione di Lyapunov di controllo* (o Control Lyapunov Function, CLF) per il sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ,  $f(0) = 0$ , se per ogni  $\bar{x}$  dove vale  $L_g V(\bar{x}) = 0$  si ha  $L_f V(\bar{x}) < 0$ .

Se un sistema ammette una CLF, è possibile realizzare un controllore. Ad esempio, quando fosse possibile definire una retroazione

$$u(x) = -\frac{L_f V}{L_g V} - \alpha L_g V, \quad \alpha > 0$$

si otterrebbe immediatamente

$$\dot{V} = -\alpha L_g^2 V$$

che è almeno semidefinita negativa. Questa legge potrebbe non essere applicabile in seguito alle possibili discontinuità della retroazione in vicinanza dell'equilibrio.

In casi abbastanza generali la formula (di Artstein-Sontag) fornisce una retroazione continua nella forma

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } L_g V(x) = 0 \\ -\frac{L_f V}{L_g V} - \frac{\sqrt{(L_f V)^2 + (L_g V)^4}}{L_g V} & \text{altrove} \end{cases}$$

che stabilizza globalmente asintoticamente il sistema nell'origine.

**Esempio:** Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

e la candidata funzione di Lyapunov di controllo  $V = \frac{x^T x}{2}$ .

Si ha  $L_f V = 2(x_1^2 - x_2^4)$  e  $L_g V = 2x_1^4$ , per cui la funzione data è una funzione di Lyapunov di controllo. Una retroazione stabilizzante ( $C^\infty$  quasi ovunque) è

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x_1 = 0 \\ -\frac{(x_1^2 - x_2^4)}{x_1^4} - \frac{\sqrt{16x_1^{16} + 2(x_1^2 - x_2^4)^2}}{2x_1^4} & x_1 \neq 0 \end{cases}$$

## 2.6 Teoremi inversi e di instabilità

Il criterio diretto di Lyapunov è solo sufficiente: se non conosco una funzione di Lyapunov, non posso concludere nulla. Esiste peraltro una serie di teoremi inversi, di importanza soprattutto teorica, tra i quali i seguenti

- Se l'origine è un equilibrio stabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , allora esiste una funzione di Lyapunov  $V(x)$ ;
- Se l'origine è un equilibrio asintoticamente stabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , allora esiste una funzione di Lyapunov  $V(x)$  con  $L_f V(x)$  (o  $\Delta V(x)$  in T.D.) negativa definita;
- Se l'origine è un equilibrio esponenzialmente stabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , allora esiste una funzione di Lyapunov quadratica  $V(x) = x^T P x$ ;

- (corollario del precedente) l'origine è un equilibrio esponenzialmente stabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$  se e solo se il sistema linearizzato approssimato in quel punto è esponenzialmente stabile.

**Esempio:** La stabilità asintotica di un pendolo con smorzamento è stata dimostrata in precedenza con una funzione di Lyapunov con derivata solo negativa semi-definita, usando il teorema di Lasalle. Dal secondo dei teoremi inversi, sappiamo che deve esistere una funzione di Lyapunov con derivata negativa definita. Infatti, per un pendolo con costanti  $\frac{g}{R} = \frac{b}{mR^2} = 1$ , la  $V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + 2(1 - \cos x_1)$  ha  $L_f V(x)$  negativa definita.

In taluni casi si può dover dimostrare la instabilità di un sistema. Abbastanza ovviamente, se si dispone di una  $V$  p.d. e si verifica  $L_f V$  (o  $\Delta V(x)$  in T.D.) anch'essa p.d., si avrà instabilità. Ma vi sono risultati più precisi. Il primo teorema rinuncia alla definitezza di  $V(x)$ :

**Teorema di instabilità di Lyapunov.** Sia  $V(x) \in C^1$ ,  $V(0) = 0$ , e  $L_f V(x)$  (o  $\Delta V(x)$  in T.D.) p.d.. Se  $V(x)$  può assumere valori positivi arbitrariamente vicino all'origine, l'equilibrio nell'origine è instabile.

**Esempio:** L'origine è un equilibrio instabile per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3.\end{aligned}$$

Infatti, posto  $V = x_1 x_2$ , con  $V > 0$  nel primo quadrante, si ha  $\dot{V} = x_1^4 + x_2^4$  p.d.

**Esempio:** L'origine è instabile per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3.\end{aligned}$$

Infatti, usando  $V = x_1^3 x_2$ , si ha  $\dot{V} = x_1^2 x_2^2 (3 - x_1 x_2)$ , che è positiva per tutti i punti di un cerchio di raggio  $R < \sqrt{3}$ .

Nel secondo teorema, si rinuncia anche alla definitezza di  $L_f V(x)$  (o  $\Delta V(x)$ ):



## 2.7. STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI CON LYAPUNOV 35

**Teorema di instabilità di Cetaev.** Sia  $V(x) \in C^1$ . Se, dato un intorno del punto di equilibrio nell'origine  $W$ , esiste un insieme aperto  $U$  tale che

- $0 \in \partial(U) \cup U$ ;
- $\forall x \in U \cap W, V(x \neq 0) > 0$  e  $L_f V(x \neq 0) > 0$  (ovvero  $\Delta V(x \neq 0) > 0$ );
- Per  $x = 0$  e  $\forall x \in \partial(U) \cap W, V(x) = 0$

allora l'equilibrio è instabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ .

**Esempio:** Per il sistema  $\dot{x} = x^3$ , l'instabilità della origine può essere evidenziata anche con il teorema di Cetaev: scegliendo  $V = x$ , per la quale si ha  $\dot{V} = x^3$ , le ipotesi di Cetaev sono verificate nella regione  $U = \{x > 0\}$ .

**Esempio:** Per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2\end{aligned}$$

l'origine è instabile: infatti, scelta  $V = x_1 x_2$  le ipotesi di Cetaev sono verificate in  $U = \{x_1 > 0, x_2 > 0\}$ .

## 2.7 Stabilità dei Sistemi Lineari Stazionari con Lyapunov

### 2.7.1 Sistemi Lineari Tempo-Continui

Per il sistema  $\dot{x} = Ax$ , si consideri la funzione quadratica candidata di Lyapunov  $V = x^T P x$ , e

$$\dot{V} = 2x^T P \dot{x} = 2x^T P A x = x^T (P A + A^T P) x \stackrel{def}{=} -x^T Q x.$$

dove definiamo  $-Q$  la parte simmetrica di  $2PA$ .

Il sistema sarà stabile se, per  $P$  p.d., anche  $Q$  risulterà p.s.d., e asintoticamente stabile se  $Q$  è p.d. In generale, preso  $P$  arbitrariamente,  $Q$  non risulterà definita.

Conviene procedere in questo caso in senso inverso: fissiamo  $Q$  p.d., e cerchiamo  $P$  risolvendo l'equazione

$$PA + A^T P = -Q.$$

Questa equazione matriciale, detta *equazione di Lyapunov*, è equivalente ad un sistema di  $n(n+1)/2$  equazioni lineari in  $n(n+1)/2$  incognite. Questo sistema può essere riscritto come  $Mp = q$ , dove  $p$  e  $q$  sono vettori a  $n(n+1)/2$  componenti formati ad es. giustapponendo le colonne di  $P$  e  $Q$ . Si dimostrerà che l'equazione di Lyapunov con  $Q$  p.d. ha un'unica soluzione  $P$  p.d. se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  sono a parte reale strettamente negativa ( $s(A) \subset \text{OLHP}$ ).

In queste ipotesi la soluzione esiste: infatti se  $A$  è asintoticamente stabile, posso porre

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

e quindi verificare che

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= \int_0^\infty \left( A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A \right) dt \\ &= \int_0^\infty d \left( e^{A^T t} Q e^{At} \right) = \\ &= \left[ e^{A^T t} Q e^{At} \right]_0^\infty = 0 - Q, \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che  $e^{A0} = I$  e che, se tutti gli autovalori di  $A$  sono a parte reale negativa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$ .

Poichè la soluzione del problema  $Mp = q$  esiste per qualsiasi  $q$ , lo spazio nullo di  $M$  è vuoto, quindi la soluzione è unica<sup>2</sup>.

**Nota:** se  $\dot{x} = Ax$  è marginalmente stabile, l'equazione di Lyapunov  $A^T P + P A = -Q$  non può ovviamente avere soluzioni  $P$  p.d. per  $Q$  p.d.. Sappiamo comunque dal teorema inverso di Lyapunov che una funzione di Lyapunov esiste per il sistema: si tratta quindi di cercare una soluzione con  $Q$  semidefinita positiva.

Questa soluzione non esisterà sempre, ma solo per opportune  $Q$ . Quando la soluzione  $P$  esiste, non sarà di conseguenza unica.

---

<sup>2</sup>L'equazione di Lyapunov può essere risolta con l'aiuto del comando Matlab `P=lyap(M,Q)`. Si faccia però attenzione che questo comando risolve l'equazione  $MP + PM^T = -Q$ , quindi deve essere invocato utilizzando al posto di  $M$  la trasposta di  $A$ , ovvero `P=lyap(A',Q)`.

**Esempio:** Un esempio semplicissimo è il sistema  $\dot{x} = 0$ , ovvero  $A = 0$ . L'equazione di Lyapunov  $0P + P0 = -Q$  è risolubile solo per  $Q = 0$  (che è p.s.d.). In questo caso, qualsiasi  $P$  è soluzione.

Nel caso in cui  $\dot{x} = Ax$  sia marginalmente stabile con  $m$  autovalori nell'origine, possiamo assumere senza perdere di generalità di esserci messi nelle coordinate della forma di Jordan, per cui

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} J_0 & 0 \\ \hline 0 & J_n \end{array} \right]$$

dove  $J_n \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  è asintoticamente stabile, e  $J_0 \in \mathbb{R}^{m \times m} = 0$  (essendo  $A$  per ipotesi marginalmente stabile, l'autovalore in zero è associato a  $m$  minimiblocchi indipendenti). L'equazione di Lyapunov è quindi in questo caso

$$\left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & J_n \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} P_0 & P_d \\ \hline P_d & P_n \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} P_0 & P_d \\ \hline P_d & P_n \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & J_n \end{array} \right] = - \left[ \begin{array}{c|c} Q_0 & Q_d \\ \hline Q_d & Q_n \end{array} \right]$$

Assumendo  $Q$  diagonale ( $Q_d = 0$ ), la soluzione è possibile solo se  $Q_0 = 0$ . In questo caso le soluzioni hanno  $P_d = 0$ ,  $P_n$  soluzione di  $J_n^T P_n + P_n^T J_n = -Q_n$ , e qualsiasi  $P_0$ .

Il caso di matrice  $A$  con autovalori immaginari puri è lasciato per esercizio.

### 2.7.2 Sistemi Lineari Tempo-Discreti

Per il sistema  $x(t+1) = Ax(t)$ , si consideri  $V = x^T P x$ , e

$$\begin{aligned} L_f V &= x^T(t+1)Px(t+1) - x^T(t)Px(t) \\ &= x(t)^T (A^T P A - P) x(t) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} -x^T Q x \end{aligned}$$

L'equazione  $-Q = A^T P A - P$  è detta equaz. di Lyapunov t.d.: si procede anche in questo caso alla soluzione per  $P$  dato  $Q$ , soluzione che esiste ed è unica se e solo se  $s(A) \subset \text{OUC}$ . La soluzione è

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k Q A^k$$

serie che esiste se i modi di  $A$  convergono, e che è p.d. perchè composta dalla somma di un primo termine ( $Q$ ) p.d., con latr tutti p.s.d.

infatti

$$\begin{aligned} A^T P A - P &= A^T \left( \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k Q A^k \right) A - \left( \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k Q A^k \right) \\ &= A^T (Q + A^T Q A + \dots) A - (Q + A^T Q A + \dots) \\ &= -Q \end{aligned}$$

L'unicità discende ancora dalla linearità dell'equazione negli elementi di  $P$ .

### 2.7.3 Dimostrazione del metodo di linearizzazione

Per il sistema  $\dot{x} = f(x) = Ax + h(x)$ , con  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|h(x)\|}{\|x\|} = 0$ , si consideri la funzione candidata di Lyapunov  $V = x^T P x$ , con  $P$  p.d. soluzione di  $A^T P + P A = -I$ . Si ha  $L_f V = x^T P f(x) + f^T(x) P x = x^T (P(Ax + h(x)) + (Ax + h(x))^T P) x = -x^T I x + 2x^T P h(x)$ . Per cui, per  $\|x\|$  sufficientemente piccoli,  $\|h(x)\| < \frac{\|x\|}{2\|P\|}$ , quindi  $L_f V$  n.d.

Supponiamo invece che  $A$  abbia  $n_1$  autovalori a parte reale positiva, e  $n_2 = n - n_1$  a parte reale negativa (non zero per il momento). Scegliendo opportunamente la base della rappresentazione di stato, si avrà

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x$$

dove  $s(-A_1) \subset \text{OLHP}$  e  $s(A_2) \subset \text{OLHP}$ . Consideriamo l'equazione

$$\begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ 0 & A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned} (-A_1^T)P_1 + P_1(-A_1) &= -I \\ A_2^T P_2 + P_2 A_2 &= -I \end{aligned}$$

che ammettono una unica soluzione, d.p.. Se considero una funzione  $V(x) = x^T P x$ , con  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix}$ , essa ha dunque  $L_f V = x^T x + 2x^T P h(x)$  p.d., ma  $V(x)$  assume valori positivi arbitrariamente vicino all'origine, quindi, per il criterio di Lyapunov, l'equilibrio è instabile.

Nel caso che  $A$  abbia anche qualche autovalore sull'asse immaginario, basterà considerare una diversa scrittura del sistema,  $\dot{x} = f(x) = Ax + h(x) =$

$(\bar{A} + \epsilon I)x + h(x)$ , così che nessun autovalore di  $\bar{A} = A - \epsilon I$  (pari a quelli di  $A$  meno  $\epsilon$ ) sia sull'asse immaginario ma quelli a parte reale positiva rimangono tali. Ragionando come sopra su  $\bar{A}$ , si trova  $L_f V = x^T x + 2x^T P h(x) + 2\epsilon V(x)$ . Nella regione dell'intorno dell'origine contenuta nel cono in cui  $V(x) > 0$  è anche  $L_f V > 0$ , quindi (ora per Cetaev) si ha instabilità.

L'interesse della applicazione del metodo diretto di Lyapunov ai sistemi lineari risiede nel fatto che esso non richiede il calcolo esplicito degli autovalori di  $A$  (che per sistemi di grandi dimensioni è problema difficile). D'altronde, le indicazioni date sono minori, e riguardano solo le proprietà qualitative delle soluzioni. Il risultato è quindi analogo all'utilizzo del criterio di Routh (e la sua controparte TD Jury) per determinare il segno della parte reale delle radici di un polinomio, che, se applicato al polinomio caratteristico di  $A$ , ci dà indicazioni sulla stabilità di  $\dot{x} = Ax$ .

Un'altra applicazione comune della equazione di Lyapunov riguarda sistemi nonlineari, per i quali la  $V(x) = x^T P x$  con  $P$  calcolata in base al linearizzato, ma applicata al vero sistema, può dire qualcosa di più sulla R.A.S. di quanto non dica il metodo indiretto da solo.

## 2.8 Stima numerica della RAS

Si consideri un sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

per il cui modello linearizzato  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  sia stato progettato un controllore stabilizzante di equazioni  $\dot{x}_r = A_r x_r + B_r y$ ,  $u = C_r x_r + D_r y$ .

Il sistema costituito dalla connessione in retroazione dell'impianto effettivo con il controllore progettato è quindi descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) = (A + B_r D_r C) x + B C_r x_r + \tilde{g}(x, x_r) \\ \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y = A_r x_r + B_r C x + B_r \tilde{h}(x)\end{aligned}$$

Indicando con  $z = [x^T, x_r^T]^T$  lo stato complessivo, si può riscrivere  $\dot{z} = A_f z + \tilde{f}(z)$ , dove

$$A_f = \begin{bmatrix} A + B_r D_r C & B C_r \\ B_r C & A_r \end{bmatrix}; \quad \tilde{f}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{g}(x, x_r) \\ B_r \tilde{h}(x) \end{bmatrix}.$$

Si noti che, quando il termine di errore  $\tilde{f}(\cdot)$  fosse nullo, il sistema non-lineare complessivo coinciderebbe con quello linearizzato che sappiamo essere stato stabilizzato. Per tale sistema linearizzato si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo  $V_Q = z^T P_Q z$ , con  $P_Q$  soluzione della equazione di

Lyapunov  $P_Q A_f + A_f^T P_Q = -Q$  (ad esempio col comando `Pq=lyap(Af',Q)`<sup>3</sup>, per qualche  $Q$  simmetrica positiva definita.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema nonlineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione  $\dot{V}_Q = -z^T Q z + 2z^T P_Q \tilde{f}(z) < 0$ , e trovare la più grande curva di livello di  $V_Q$  interamente contenuta in quella regione. Che questa regione non sia vuota è garantito dal fatto che il secondo ed il terzo addendo sono infinitesimi rispettivamente di almeno terzo e quarto ordine rispetto a  $\|z\|$ , mentre il primo addendo è di secondo ordine. Solo in casi rari la disequazione può essere studiata analiticamente. È però possibile verificarla numericamente in un grande numero di casi, per giungere ad una conclusione non perfettamente rigorosa, ma comunque molto affidabile. Questo può essere fatto ad esempio generando numeri casualmente distribuiti sulla curva  $V_Q = R$  e guardando al segno di  $\dot{V}_Q$  al variare di  $R$ , come descritto nella semplice procedura seguente:

```
function evalvdot(P,Q,R)
    M=inv(sqrtm(P));
    for i=1:1:500000          % Numero di tentativi casuali
        x = (rand(size(P,1),1)-0.5);
        y=sqrt(R)*x/norm(x);  % Vettore di direzione random e lunghezza sqrt(R)
        z=M*y;                % Punto random sulla curva di livello
        % ftilde = ...;        % definizione della funzione ftilde(x)
        vdot=-z'*Q*z+2*z'*P*ftilde(z);
    if vdot > 0 disp('Punto forse esterno alla R.A.S.!'), break; end
    end
```

## 2.9 Velocità di Convergenza

Nelle applicazioni, è importante determinare se la convergenza all'equilibrio è più o meno veloce: se è esponenziale innanzitutto, e con quale esponente nel caso che lo sia.

Vale qui la pena ricordare che, tra i teoremi di esistenza, abbiamo incontrato un risultato che esclude la possibilità di convergenza esponenziale verso un equilibrio per un sistema nonlineare il cui linearizzato non fosse asintoticamente stabile.

Ricordiamo che in generale si dice velocità di convergenza di un sistema verso un equilibrio esponenzialmente stabile il più grande scalare  $\beta > 0$  tale che, per condizioni iniziali  $\xi_0$  sufficientemente vicine all'equilibrio, una norma dello stato decresca come  $\|\xi(\xi_0, t)\| \leq \alpha e^{-\beta t}$  per qualche  $\alpha > 0$ .

---

<sup>3</sup>si faccia attenzione alla sintassi del comando

Se si riesce a determinare una relazione tra una funzione di Lyapunov e la sua derivata direzionale del tipo

$$\dot{V} = L_f V(x) \leq -\lambda V(x), \quad \lambda > 0$$

si ha che lungo le traiettorie  $\dot{V}(t) + \lambda V(t) = Z(t) \leq 0$ , quindi

$$V(t) \leq e^{-\lambda t} V(0).$$

Infatti la soluzione di  $\dot{V} = -\lambda V + Z(t)$  è  $V(t) = e^{-\lambda t} V(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Z(\tau) d\tau$ , e l'integrale è non positivo.

Ad esempio, per una funzione di Lyapunov  $V(x) = x^T x = \|x\|^2$ , si avrebbe  $\|x(t)\|^2 \leq e^{-\lambda t} \|x(0)\|^2$  ovvero  $\|x(t)\| \leq e^{-\frac{\lambda t}{2}} \|x(0)\|$ , quindi convergenza esponenziale con velocità (almeno)  $\lambda/2$ .

Nel caso TD si ha analogamente che  $V(x(t+1)) < \lambda V(x(t))$  con  $\lambda < 1$  implica  $V(t) \leq \lambda^t V(0)$ .

Analogamente a quanto visto per la stabilità, ci possiamo chiedere fino a che punto una specifica di progetto del controllore per il sistema linearizzato quale il tempo di assestamento si conservi quando il controllore è applicato al sistema effettivo nonlineare.

Per ricollegare il concetto di polo dominante, tipico della analisi in frequenza, con il concetto di velocità di convergenza introdotto nello studio della stabilità, si consideri quanto segue.

Si osservi preliminarmente che, detti  $\lambda_{\max}(R)$ ,  $\lambda_{\min}(R)$  il massimo e minimo autovalore di una matrice  $R$  simmetrica e definita positiva, valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \xi^T R \xi &\geq \lambda_{\min}(R) \|\xi\|^2; \\ \xi^T R \xi &\leq \lambda_{\max}(R) \|\xi\|^2; \\ R &\leq \lambda_{\max}(R) I; \\ R &\geq \lambda_{\min}(R) I, \end{aligned}$$

dove con la disequazione matriciale  $R_1 \geq R_2$  si intende che la matrice  $R_1 - R_2$  è semi-definita positiva (ovvero definita positiva se vale  $>$  strettamente). Applicando queste relazioni alle matrici  $P$  e  $Q$  della equazione di Lyapunov relativa al sistema linearizzato controllato la cui matrice dinamica è  $A_f$ , ovvero  $PA_f + A_f^T P = -Q$ , e ricordando che queste determinano una funzione di Lyapunov per il sistema  $V = \xi^T P \xi$ , si può scrivere

$$\dot{V} = -\xi^T Q \xi \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\xi\|^2 = -\lambda_{\min}(Q) \frac{\xi^T (\lambda_{\max}(P) I) \xi}{\lambda_{\max}(P)} \leq -\gamma V,$$

dove  $\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ .

Dalla relazione  $\dot{V}(t) \leq -\gamma V(t)$  si ha immediatamente che  $V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t}$ , quindi  $\|\xi\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} V(t) \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|\xi_0\|^2 e^{-\gamma t}$  da cui infine  $\|\xi\| \leq \alpha e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ . In conclusione, la velocità di convergenza di un sistema lineare è non inferiore a  $\gamma/2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ .

Questa stima dipende ovviamente dalla scelta di  $Q$ . Si può dimostrare che la migliore stima della velocità di convergenza si ottiene nel caso in cui si scelga  $Q = I$ . In questo caso, supponendo per semplicità che la matrice dinamica abbia tutti autovalori reali e distinti, possiamo porre il sistema nelle coordinate in cui la matrice dinamica  $\hat{A}_f$  è diagonale. La soluzione della equazione di Lyapunov  $P\hat{A}_f + \hat{A}_f^T P = -I$  è in questo caso  $P = -1/2\hat{A}_f^{-1}$ , da cui si ha che  $\gamma = -2\lambda_{\max}(A_f)$ : quindi, l'autovalore più lento (dominante) del sistema rappresenta proprio la velocità di convergenza.

Dato un sistema nonlineare il cui linearizzato approssimato ha velocità di convergenza esponenziale  $\gamma/2$ , si può dimostrare che il sistema nonlineare ha la stessa velocità di convergenza verso l'equilibrio. Infatti, la definizione di velocità di convergenza è locale, cioè per condizioni iniziali  $\xi_0$  sufficientemente piccole. Usando la stessa funzione di Lyapunov  $\xi^T P \xi$  per il sistema nonlineare, si ha  $\dot{V} = -\xi^T Q \xi + 2\xi^T P \tilde{f}(\xi)$ , con  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{f}(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$ . Fissato  $\beta > 0$ , con  $\gamma > \beta$ , si può scegliere quindi  $\xi_0$  tale per cui  $\frac{\|\tilde{f}(\xi)\|}{\|\xi\|} < \beta \frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}$ , quindi  $\dot{V} \leq -(\gamma - \beta)V$ , dove  $\beta$  può essere fissato arbitrariamente piccolo.

## 2.10 Costruzione di Krasovski

Quando il linearizzato di un sistema non è asintoticamente stabile, non abbiamo alcun metodo generale per costruire funzioni di Lyapunov per il sistema. Una tecnica talvolta utile è la costruzione di Krasovski. Per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , con  $x = 0$  punto di equilibrio, si consideri la candidata  $V(x) = f(x)^T f(x)$ . Detto  $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$  il jacobiano di  $f(x)$  e  $F(x) = A(x) + A^T(x)$  la sua parte simmetrica, se  $F(x)$  è negativa definita (localmente o globalmente), allora si ha asintotica stabilità (locale o globale) dell'equilibrio<sup>4</sup>.

Si ha infatti

$$L_f V(x) = f^T(x) A(x) f(x) + f^T(x) A^T(x) f(x) = f(x)^T F(x) f(x).$$

che è definita negativa. Infatti,  $F(x)$  è negativa definita per ipotesi: per dimostrare che  $L_f V(x) = 0$  solo in  $x = 0$  (almeno localmente), dobbiamo an-

<sup>4</sup>Si osservi esplicitamente che  $A(0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0}$  è la matrice dinamica del linearizzato, che ovviamente non si richiede qui essere definita negativa.



cora escludere il caso che  $f(x)$  possa annullarsi in punti  $x \neq 0$ . Ma se  $F(x)$  è n.d., allora  $A(x)$  è nonsingolare localmente per ogni  $x \neq 0$ : se così non fosse, e fosse per assurdo  $A(x)v = 0$ , sarebbe anche  $v^T F(x)v = 2v^T A(x)v = 0$ , contraddizione. Quindi, per il teorema del Dini,  $f(x)$  è invertibile univocamente laddove  $F(x)$  è definita negativa, cioè l'equilibrio nell'origine è isolato.

Si noti che questa tecnica può essere utile per casi in cui il metodo indiretto non dà risultati perchè  $A(0)$  ha autovalori a parte reale nulla. In questi casi non è possibile costruire una  $V(x)$  quadratica col metodo della equazione di Lyapunov, e quindi non si potrà mai avere esponenziale stabilità.

**Esempio:** Per il sistema  $\dot{x} = -x^3$ , si ha  $A(x) = -3x^2$  e  $F(x) = -6x^2$  n.d.. L'origine è stabile asintoticamente, anche se la velocità di convergenza sarà meno che esponenziale.

## 2.11 Sistemi non stazionari

Nel caso di un sistema non stazionario, ovvero con dipendenza esplicita dal tempo del tipo  $\mathbb{D}x = f(x, t)$ , i metodi di studio della stabilità devono essere posti con maggiore cautela.

Questo è già evidente dallo studio dei sistemi lineari tempo varianti, nei quali già si osservano importanti differenze col caso tempo invariante.

Per un sistema lineare tempo variante

$$\dot{x} = A(t)x$$

la condizione che la parte reale degli autovalori di  $A(t)$  sia negativa per ogni  $t$  non è sufficiente per affermare la stabilità.

Si consideri infatti ad esempio il sistema LTCTV

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} -1 & a(t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad (2.5)$$

che ha spettro  $\rho(A(t)) = \{-1, -1\}$  per ogni  $t$ . Questo non è sufficiente a garantire la sua stabilità: basta considerare ad esempio il caso  $a(t) = e^{2t}$ , le cui soluzioni chiaramente divergono.

Non è sufficiente neppure aggiungere un'ipotesi di limitatezza delle funzioni che formano  $A(t)$ , ad esempio imponendo che una norma di  $A(t)$  sia

limitata (cioè che  $\exists M : \|A(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$ ): un controesempio in tal senso è fornito da

$$A(t) = R^T(t) \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} R(t), \text{ con } R(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

il cui spettro è  $\rho(A(t)) = \{-1\}$ , ma è comunque instabile.

In effetti, la condizione di negatività della parte reale degli autovalori di  $A(t)$  non è neppure necessaria, come mostrato da questo sistema

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{15 \sin 12t - 11}{2} & \frac{15 \cos 12t}{2} \\ \frac{15 \cos 12t}{2} & -\frac{15 \sin 12t + 11}{2} \end{bmatrix}$$

per il quale  $\rho(A(t)) = \{2, -13\}$ , ma che è esponenzialmente stabile.

In effetti, ci si può attendere che quando il sistema fosse tempo variante in modo sufficientemente lento, le proprietà di stabilità possano essere derivate da quelle del corrispondente modello “a tempo congelato”. Una condizione di questo tipo è espressa da un teorema di H. H. Rosenbrock per sistemi lineari tempo varianti  $\dot{x} = A(t)x$ .

**Teorema** Sia  $A(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  differenziabile, uniformemente limitata (cioè  $\exists M > 0$  tale che  $\|A(t)\| \leq M, \forall t$ ), con autovalori a parte reale uniformemente negativa nel tempo (cioè  $\exists \alpha > 0$  tale che  $\operatorname{Re}(\lambda(A(t))) \leq -\alpha, \forall \lambda \in \rho(A(t))$ ). L'equilibrio nell'origine è esponenzialmente stabile se vale una delle condizioni:

- i)  $\alpha > 4M$ ;
- ii)  $\|\dot{A}(t)\| \leq \delta, \forall t$  con  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo

Una determinazione quantitativa esplicita (ma solo sufficiente) del bound del teorema di Rosenbrock è disponibile nella forma  $\delta < \frac{2}{2n-1} \frac{\alpha^{4n-2}}{2M^{4n-4}}$ . Le dimostrazioni di questi ultimi risultati si appoggiano sull'uso di funzioni di Lyapunov tempo varianti, oggetto del prossimo paragrafo.

### 2.11.1 Studio di sistemi non stazionari con il metodo di Lyapunov

Per studiare i sistemi non stazionari, anche quando lineari, può dunque essere necessario usare tecniche alla Lyapunov, anche se queste richiedono particolare attenzione.

Nel caso di sistemi tempo-varianti, è innanzitutto utile precisare le nozioni di stabilità e convergenza, introducendo il concetto di *uniformità* nel tempo. Considerando il sistema non-stazionario

$$Dx = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.6)$$

il suo movimento generico  $\bar{x}(t) = x(x_0, t_0, t - t_0)$  dipende in generale oltre che da  $x_0$  anche dal tempo  $t_0$  in cui questa condizione è verificata. Diremo che il movimento è *uniformemente stabile* per il sistema (2.1) se tutti i movimenti che originano in qualsiasi tempo  $t'$  da condizioni iniziali sufficientemente vicine a  $x_0$  rimangono arbitrariamente vicine a  $x(x_0, t_0, t - t_0)$  stesso; ovvero, se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  indipendente da  $t_0$  tale che se  $\|x' - x_0\| < \delta$ , allora  $\|x(x', t', t - t') - x(x_0, t_0, t - t_0)\| < \epsilon, \forall t, t_0, t'$ . Estensioni analoghe definiscono la uniforme convergenza, la uniforme asintotica stabilità etc.

### Candidate stazionarie

Per studiare la stabilità di un equilibrio, consideriamo innanzitutto il caso in cui si usi una candidata di Lyapunov stazionaria  $V(x)$ . La funzione  $\dot{V} = L_f V(x, t)$  è in generale non stazionaria: una condizione sufficiente per l'asintotica stabilità dell'equilibrio è che  $L_f V(x, t)$  sia *uniformemente* negativa definita, cioè che  $\exists m > 0 : L_f V(x, t) < -m\|x\|, \forall x \in B_r(0), \forall t$ .

La necessità della condizione di uniforme n.d. è illustrata da questo esempio: sia  $\dot{x} = a(t)x$ , con  $a(t) < 0, \forall t$ , e sia  $V(x) = x^2$ . Pur avendosi  $L_f V(x) = 2a(t)x^2 < 0$  in ogni istante, la uniformità nel tempo di questa proprietà non è garantita per qualsiasi  $a(t)$ . In effetti, se si pone ad esempio  $a(t) = -e^{-2t}$ , il sistema non converge all'equilibrio nell'origine.

Dal precedente risultato si deriva immediatamente che una condizione sufficiente per la stabilità di un sistema LTCTV è che gli autovalori della sua parte simmetrica abbiano parte reale uniformemente negativa. Dato infatti  $\dot{x} = A(t)x$ , si consideri la candidata tempo invariante  $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$ , per la quale si ha  $\dot{V} = x^T (\frac{A(t)+A^T(t)}{2})x$ .

Nell'esempio (2.5), il polinomio caratteristico della parte simmetrica di  $A(t)$  vale  $\pi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - a^2/4$ , quindi  $L_f V(x, t)$  è uniformemente n.d. se  $\exists M$  tale che,  $\forall t$ , valga  $|a(t)| \leq M < 2$ . Questa condizione è ovviamente molto cautelativa: basta pensare che nel caso di  $a$  costante, il sistema è stabile per qualsiasi valore di  $a$ .

### Candidate non stazionarie

Per studiare la stabilità di sistemi non stazionari è spesso utile, e talvolta necessario, usare candidate di Lyapunov esse stesse non stazionarie, cioè del tipo  $V(x, t)$ .

La possibilità che la  $V(x, t)$ , e quindi le sue curve di livello, cambino nel tempo introduce però la necessità di riformulare il concetto di “positiva definitezza”. Per evidenziare il possibile assurdo in cui si potrebbe incorrere altrimenti, è sufficiente considerare il sistema a una dimensione  $\dot{x} = \lambda x$  e la candidata  $V(x, t) = x^2 e^{-\alpha t}$ , che soddisfa la condizione  $V(x, t) > 0 \forall x \neq 0$ , e per la quale si avrebbe  $\dot{V} = (2\lambda - \alpha)x^2 e^{-\alpha t}$ . Per  $\alpha > 2\lambda$ ,  $\dot{V}(x, t) < 0 \forall x \neq 0$ , che indicherebbe asintotica stabilità anche per  $\lambda$  positivi, il che è chiaramente assurdo. La ragione di questo fenomeno è che le curve di livello della  $V$  si allargano ad una velocità maggiore di quella con cui le traiettorie del sistema divergono.

Il teorema diretto di Lyapunov deve essere opportunamente riformulato in questo caso, mediante le seguenti definizioni:

Una funzione scalare  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  si dice “di classe  $\mathcal{K}$ ” se  $\alpha(0) = 0$  ed è strettamente crescente (quindi in particolare  $\alpha(x) > 0, \forall x > 0$ ). Si dice “di classe  $\mathcal{K}_\infty$ ” se è di classe  $\mathcal{K}$ , è definita sulla semiretta positiva ( $a = \infty$ ) e  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ .

I teoremi del metodo diretto di Lyapunov possono essere formulati per un sistema  $\dot{x} = f(x, t)$ , con equilibrio nell’origine (cioè con  $f(0, t) = 0 \forall t \geq 0$ ) e con  $f(x, t)$  sufficientemente regolare (cioè Lipschitz rispetto a  $x$  e continua a tratti rispetto a  $t$ ), come segue:

**Teorema.** Si consideri un intorno  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dell’origine. Se esiste una funzione differenziabile  $V(x, t)$  tale che,  $\forall t \geq 0$  e  $\forall x \in \Omega$ , vale

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

e

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

allora si ha che l’equilibrio è:

1. uniformemente stabile se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono funzioni di classe  $\mathcal{K}$  e  $\alpha_3(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$ ;
2. uniformemente asintoticamente stabile se tutte le  $\alpha_i$  sono funzioni di classe  $\mathcal{K}$  in  $\Omega$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

3. globalmente uniformemente asintoticamente stabile se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono funzioni di classe  $\mathcal{K}_\infty$  e  $\alpha_3(x)$  è di classe  $\mathcal{K}$  su  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ;
4. esponenzialmente stabile se tutte le  $\alpha_i$  sono funzioni esponenziali del tipo  $\alpha_i(x) = k_i x^\gamma$  su  $\Omega$ , con  $k_i > 0$  e  $\gamma > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  (globalmente esponenzialmente stabile se  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ).

Consideriamo infine la generalizzazione del principio di invarianza di LaSalle al caso di funzioni  $V(x, t)$  non stazionarie. Questa è non banale: infatti, l'insieme  $R = \{x | \dot{V}(x, t) = 0\}$  può essere esso stesso tempo-variante. Se però per una opportuna funzione  $W(x) \geq 0$  vale  $\dot{V}(x, t) \leq -W(x) \leq 0$ , allora si può affermare che il sistema convergerà, a partire da condizioni iniziali contenute in opportune regioni, all'insieme in cui si annulla  $W(x)$ . Il teorema si enuncia più precisamente così:

**Teorema** (LaSalle-Yoshizawa). Dato il sistema  $\dot{x} = f(x, t)$  si consideri una funzione  $V(x, t)$  con

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

dove  $\alpha_1, \alpha_2$  sono funzioni di classe  $\mathcal{K}$  in  $\Omega$ , e valga

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -W(x) \leq 0$$

per una funzione  $W(\cdot) \geq 0$ . Allora, tutte le traiettorie che partono da  $\Omega$  sono limitate, e  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0$ , quindi  $x(t) \rightarrow S = \{x | W(x) = 0\}$ .

Un risultato simile al precedente teorema è spesso usato nelle dimostrazioni relative al controllo adattivo:

**Lemma di Barbalat applicato alla stabilità** Dato il sistema  $\dot{x} = f(x, t)$ , si consideri una funzione  $V(x, t) \geq 0$ , sia  $\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t)$  uniformemente continua, e valga  $\dot{V}(x, t) \leq 0$ . Allora vale  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t)) = 0$ , quindi  $x(t) \rightarrow \{x | \dot{V}(x) = 0\}$ .

La condizione di uniforme continuità di  $\dot{V}(x, t)$  in  $t$  è richiesta dal lemma di Barbalat: infatti, esistono funzioni che, pur convergendo ad un valore costante, hanno derivata che non si annulla (ad esempio  $f(t) = \sin(t^2)/t$ ,  $t > 1$ ).

Si ricorda che una condizione sufficiente per la uniforme continuità di  $\dot{V}(x, t)$  è che  $\ddot{V}(x, t)$  sia limitata, cosa questa spesso più facile da dimostrare.