

1. Dato il sistema lineare **tempo discreto** rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

- (a) Studiare le seguenti proprietà strutturali del sistema: stabilità interna, raggiungibilità, controllabilità a zero, stabilizzabilità e stabilità esterna (BIBO stabilità). Si determini la funzione di trasferimento del sistema.
- (b) Determinare, se esistono, sequenze di ingressi che a partire da $x(0) = (0, 1, 0, 0)^T$ consentano di raggiungere i seguenti punti: a) $x_a = (1, 0, 1, -1)^T$, b) $x_b = (-1, 4, 1, 0)^T$, c) $x_c = (-1, 2, 1, 0)^T$, d) $x_d = (2, 1, 0, 1)^T$. Nel caso in cui esistano si riporti anche il numero di passi necessario.
- (c) Si scrivano le condizioni nelle quali per un sistema lineare tempo invariante tempo discreto con matrici (A, B, C, D) , lo stato X_F può essere raggiunto a partire dallo stato x_0 .

2. Dato il sistema non lineare definito dall'equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + \alpha\dot{y}(t) + y^3(t) = u(t)$$

- (a) Si determinino i punti di equilibrio per $u(t) = 0$ e se ne discuta la stabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (dove possibile con il metodo indiretto, altrimenti cercando una candidata di Lyapunov opportuna).
- (b) Si commenti la stabilità nel caso di retroazione parziale dello stato $u(t) = \alpha\dot{y}(t)$

3. Dato il sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 + \sin x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -\cos x_1 + \cos x_2 - x_3 \end{cases}$$

- (a) si determini, se possibile, una legge di controllo lineare $u = Kx$ con $K = [k_1, k_2, k_3]$ tale che l'origine dello spazio di stato sia un punto di equilibrio asintoticamente stabile e che, in un intorno di questo, l'errore vada a 0 almeno come e^{-t} .
- (b) "come sopra" ma con convergenza a 0 veloce almeno quanto e^{-2t} .

4. Si consideri il problema di controllo ottimo:

$$u^* = \arg \min_u \left[h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \right]$$

soggetto al vincolo differenziale : $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ con $x(t_0) = x_0$ ed x_0 noto.

Se ne descriva analiticamente la soluzione giungendo alle equazioni di Eulero e si discutano i 4 casi notevoli che permettono di definire le condizioni al contorno.