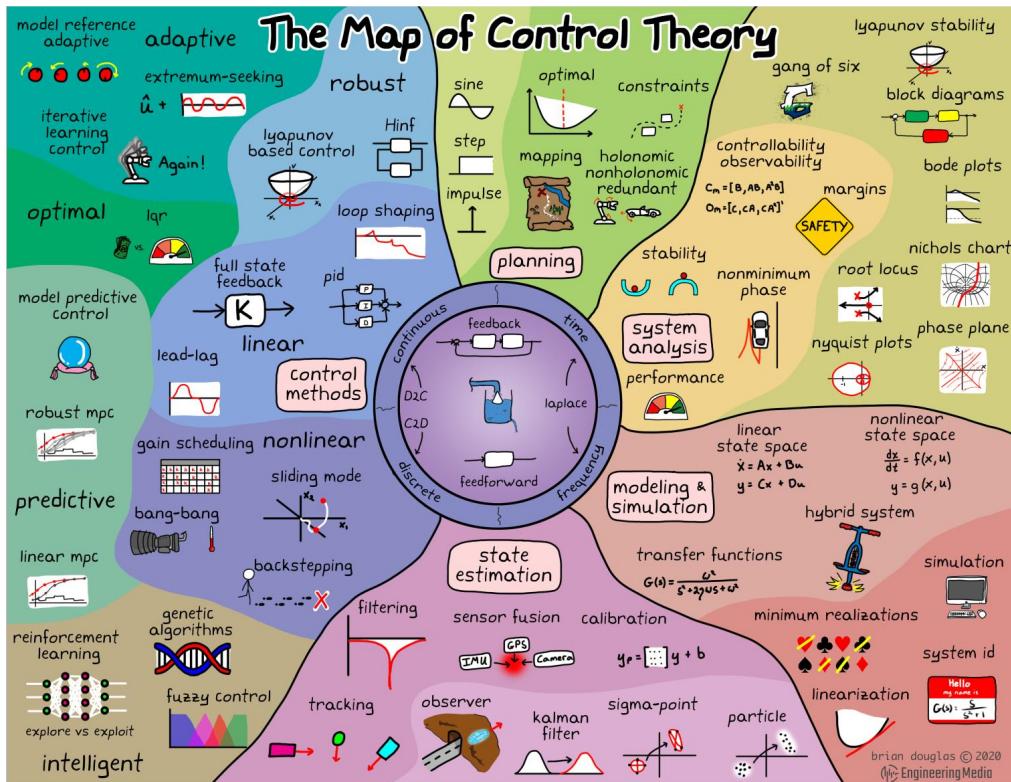


DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

Fondamenti di Automatica 2023



Autori: Marco Vita, Joaquin Gomez

Revisori: Alessio Fabbiani

Ultima modifica: 9 aprile 2025

Indice

Prefazione	V
0 Sistemi e Concetti Fondamentali	1
0.1 Variabili di ingresso, stato e uscita	1
0.2 Classificazione	1
0.3 Sistemi Lineari a Tempo Invariante	2
0.3.1 Omogeneità	2
0.3.2 Addittività/Superposizione	3
0.3.3 Stazionarietà	3
0.3.4 Risposta Impulsiva	3
1 Sistemi Lineari e Stazionari	5
1.1 Forma di Stato	5
1.2 Proprietà dei Sistemi Dinamici (Richiami)	8
1.2.1 Causalità	8
1.2.2 Stazionarietà/Tempo Invarianza	8
1.2.3 Linearità	8
1.3 Proprietà dei Sistemi Lineari (Richiami)	9
1.4 Passaggio dalla Forma Normale alla Forma di Stato nei Sistemi Lineari	10
1.5 Cambiamento di Coordinate di Stato	12
1.5.1 Cambiamento di Coordinate Lineari	12
1.6 Soluzioni Equazioni in Forma di Stato	14
1.7 Perturbazione del Movimento	14
1.8 Stabilità Interna	15
1.9 Linearizzazione di Sistemi Non Lineari	15
1.9.1 Linearizzazione	16
1.10 Equilibrio dei Sistemi Lineari	17
1.11 Esponenziale di Matrice	18
1.12 Formula di Lagrange	18
1.13 Movimento Libero e Movimento Forzato	19
1.13.1 Principio di Sovrapposizione degli Effetti	19
1.14 Stabilità del Sistema	19
1.15 Autovalori e Modi	20
1.15.1 Matrice della dinamica diagonalizzabile	20
1.15.2 Matrice della dinamica non diagonalizzabile	21
1.15.3 Modi	23
1.15.4 Stabilità e Modi	24
1.16 Stabilità del Movimento per Sistemi Non Lineari	25
1.17 Raggiungibilità e Osservabilità	25
1.17.1 Raggiungibilità	26
1.17.2 Osservabilità	28
1.17.3 Scomposizione Canonica e Forma Minima	30
1.18 Approfondimento Completa Raggiungibilità e Osservabilità	33
1.18.1 Matrici A e B per la Completa Raggiungibilità	33
1.18.2 Matrici A e C per la Completa Osservabilità	35

2 Metodo di Lyapunov	37
2.1 Matrici Definite e Semidefinite in Segno	37
2.2 Metodo di Lyapunov	38
2.2.1 Stato di Equilibrio Non Nullo	39
2.2.2 Scelta della funzione V	40
2.3 Applicazione ai Sistemi Lineari	40
3 Trasformata di Laplace	41
3.1 Dominio di Laplace	43
3.2 Proprietà	44
3.3 Segnali Canonici	45
3.3.1 Trasformate dei Segnali Canonici	46
3.4 Scomposizione in Fratti Semplici	46
3.4.1 Passaggi della Scomposizione	47
3.4.2 Poli del Denominatore	48
4 Funzione di Trasferimento	51
4.1 Definizione	51
4.1.1 Poli e Zeri	52
4.2 Matrice di Trasferimento	53
4.3 Stabilità di Sistema e Funzione di Trasferimento	54
4.4 Realizzazione	54
4.4.1 Forma Canonica di Raggiungibilità	55
4.4.2 Forma Canonica di Osservabilità	55
5 Diagrammi a Blocchi	57
5.1 Algebra dei Diagrammi a Blocchi	57
5.2 Cancellazioni	59
5.3 Stabilità dei Sistemi Interconnessi	60
5.3.1 Stabilità Blocchi in Serie	60
5.3.2 Stabilità Blocchi in Parallello	60
5.3.3 Stabilità Blocchi in Retroazione	61
5.4 Raggiungibilità e Osservabilità dei Sistemi Interconnessi	62
6 Teorema Valore Finale	65
7 Risposta di Sistema	67
7.1 Guadagno	67
7.2 Caratteristiche della Risposta allo Scalino	67
7.3 Sistemi del Primo Ordine	68
7.4 Sistemi del Secondo Ordine	69
7.4.1 Implicazioni pratiche	71
7.5 Poli Dominanti	71
7.6 Riduzione di un Sistema da Secondo a Primo Ordine	72
7.7 Sistemi di Ordine Maggiore al Secondo	74
8 Risposta in Frequenza	75
8.1 Risposta alla Sinusoide	75
8.2 Risposta in Frequenza	76
8.3 Diagrammi di Bode	77
8.3.1 Modulo e Fase	77
8.3.2 Decibel	77
8.3.3 Diagrammi di Modulo e Fase	78
8.3.4 Ritardo di Tempo	85
8.3.5 Tracciamento diagrammi asintotici	85
8.3.6 Note sui Diagrammi di Bode	85

8.4	Azione Filtrante dei Sistemi LTI	85
8.4.1	Larghezza di Banda	86
8.4.2	Filtri Passa-basso	86
8.4.3	Approssimazione a Poli Dominanti	87
8.4.4	Larghezza di Banda nei Sistemi Retroazionati	88
8.4.5	Filtro Elimina Banda	89
9	Criteri di Stabilità	91
9.1	Criterio di Routh	91
9.1.1	Tabella di Routh	91
9.2	Casi Particolari	93
10	Schema Generale di Controllo in Retroazione	97
11	Stabilità	99
11.1	Diagrammi Polari	99
11.2	Diagramma di Nyquist	101
11.2.1	Consigli per il Tracciamento dei Diagrammi di Nyquist	102
11.3	Criterio di Nyquist	102
12	Margini di Stabilità	107
12.1	Margine di Guadagno	107
12.2	Margine di Fase	109
12.3	Note sugli Indicatori di Stabilità Robusta	110
12.3.1	Margini Infiniti	110
12.3.2	Picco di Sensitività Nominale	111
13	Prestazioni e Disturbi	115
13.1	Analisi Funzione di Sensitività Complementare	116
13.1.1	Analisi Statica	116
13.1.2	Risposta in Frequenza	117
13.1.3	Smorzamento e Margine di Fase	117
13.2	Analisi Funzione di Sensitività	117
13.2.1	Analisi Statica	118
13.2.2	Risposta in Frequenza	119
13.3	Analisi Funzione di Sensitività del Controllo	119
13.3.1	Risposta in Frequenza	119
14	Requisiti e Specifiche di Progetto	121
14.1	Specifiche e Condizioni Principali	121
14.2	Visualizzazione dei Vincoli con i Diagrammi di Bode	122
14.2.1	Sintesi	123
15	Luogo delle Radici	125
15.1	Definizione	125
15.1.1	Caratterizzazione del Luogo	125
15.1.2	Posizione dei Poli nel Piano Complesso	126
15.1.3	Regole di Tracciamento	127
15.2	Sintesi Tramite il Luogo delle Radici	128
15.2.1	Vincoli	128
15.2.2	Punti di Confluenza e Diramazione	129
15.2.3	Angolo di Partenza delle Radici Complesse	130
15.2.4	Intersezioni con l'Asse Immaginario	130
15.3	Analisi Tramite il Luogo delle Radici	131
16	Reti Anticipatrici e Ritardatrici	135
16.1	Anticipo di Fase	135

16.2 Reti Stabilizzatrici	136
16.2.1 Rete anticipatrice	136
16.2.2 Rete ritardatrice	136
16.2.3 Rete a sella	136
16.3 Compensatori in Serie e Parallello	137
16.3.1 Compensatore in serie	137
16.3.2 Compensatore in parallelo	137
16.4 Progettazione	138
16.4.1 Luogo delle Radici	138
16.4.2 Diagrammi di Bode	146
17 Controllori PID	153
17.1 Regolatore Proporzionale	154
17.2 Regolatore Proporzionale Derivativo	155
17.3 Regolatore Proporzionale Derivativo Integrale	156
17.4 Realizzazione dei regolatori PID	157
17.4.1 Gestione Azione Derivativa	157
17.4.2 Carica Integrale	158
17.5 Metodi di Calibrazione Automatica	158
17.5.1 Metodo di Ziegler e Nichols in Anello Chiuso	158
18 Tracce Esame	161
18.1 Traccia 1A	161
18.1.1 Traccia 1B	162
Strumenti di Calcolo	163
Risorse Esterne	165
Bibliografia	167

PREFAZIONE

Questo libro è un'introduzione ai sistemi di controllo, risultato di un'attenta analisi e comprensione da parte degli autori degli appunti degli studenti^[2] presi durante il corso di Fondamenti di Automatica dell'anno accademico 2022/2023 integrati con il contenuto del libro Bolzern^[3] e con le dispense^[1] messe a disposizione dai professori del corso dell'anno accademico 2022/2023. Gli argomenti presenti seguono in parte il libro e in parte lo svolgimento del corso cercando di facilitare per quanto possibile la comprensione. Il materiale qui presente NON è ufficiale e in alcun modo sostitutivo del corso sopracitato, ma soltanto un ausilio allo studio o al ripasso personale.

In futuro ci auguriamo di aggiungere ulteriori risorse, come esercizi (svolti e non) e immagini, oltre che un capitolo introduttivo.

Nel caso sia necessario contattare gli autori per segnalare errori o imprecisioni è possibile mandare una e-mail all'indirizzo di posta elettronica [imova2882@gmail.com!](mailto:imova2882@gmail.com)

Marco Vita

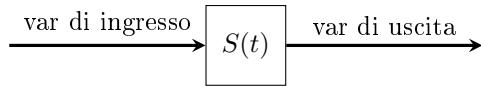
CAPITOLO 0

SISTEMI E CONCETTI FONDAMENTALI

0.1 Variabili di ingresso, stato e uscita

Un sistema dinamico a tempo continuo è un modello matematico di un oggetto fisico che interagisce con il mondo esterno attraverso due vettori di variabili dipendenti dal tempo.

Chiamiamo *variabili di ingresso* le variabili che rappresentano le azioni compiute sull'oggetto da agenti esterni che ne influenzano il comportamento. Le *variabili di uscita* rappresentano quanto del comportamento dell'oggetto è d'interesse. Tra le variabili d'ingresso e uscita c'è un rapporto di causa ed effetto; il cambiamento delle variabili di uscita descrive come l'oggetto che si sta modellando risponde alle variabili di ingresso.



Per descrivere in modo completo il sistema può essere necessario introdurre un terzo vettore di variabili, dette *variabili di stato*, che descrivono lo stato interno del sistema.

In seguito useremo questi concetti per descrivere i sistemi attraverso diverse rappresentazioni, come la *forma di stato* e la *funzione di trasferimento*.

Sistema dinamico a tempo continuo Indicando con $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^p$ rispettivamente variabili di ingresso, stato e uscita, e date due funzioni vettoriali f e g , possiamo definire un sistema dinamico a tempo continuo¹ attraverso le seguenti equazioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (0.1)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (0.2)$$

L'equazione (0.1) è l'*equazione di stato*, la (0.2) è detta *trasformazione d'uscita* e il numero di variabili di stato n è detto *ordine* del sistema.

0.2 Classificazione

Sulla base delle proprietà delle funzioni f e g nelle equazioni (0.1) e (0.2) possiamo classificare i sistemi dinamici in diversi modi.

¹Si può anche semplicemente dire *sistema*; per specificare che la variabile tempo è reale si dice più propriamente *a tempo continuo*.

Sistemi monovariabili e multivariabili (SISO e MIMO) I sistemi SISO (*Single Input Single Output*) sono sistemi con una sola variabile di ingresso e una sola variabile di uscita; i sistemi MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) sono invece sistemi con più variabili di ingresso e più variabili di uscita, o più semplicemente gli altri sistemi non SISO.

I sistemi hanno molte altre caratteristiche, che vedremo più avanti; adesso soffermiamoci sui sistemi che godono delle proprietà di *linearità* e *tempo invarianza*.

Sistemi lineari Quando le funzioni f e g sono lineari in x e u , allora il sistema si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

dove le matrici $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sono funzioni del tempo:

- $A(t)$: matrice della dinamica o di sistema;
- $B(t)$: matrice di ingresso;
- $C(t)$: matrice di uscita;
- $D(t)$: matrice di retroazione.

In questo caso il sistema si dice *lineare*.

Sistemi tempo invarianti Un sistema è *tempo invariante*, o *stazionario*, se le funzioni f e g non dipendono esplicitamente dal tempo², cioè se il sistema si può descrivere nella forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

0.3 Sistemi Lineari a Tempo Invariante

Per noi saranno di particolare interesse i sistemi *lineari a tempo invariante (LTI)* ovvero quei sistemi che godono delle proprietà di linearità e tempo invarianza. Un sistema per essere lineare deve rispettare le proprietà di *omogeneità* e *additività*.

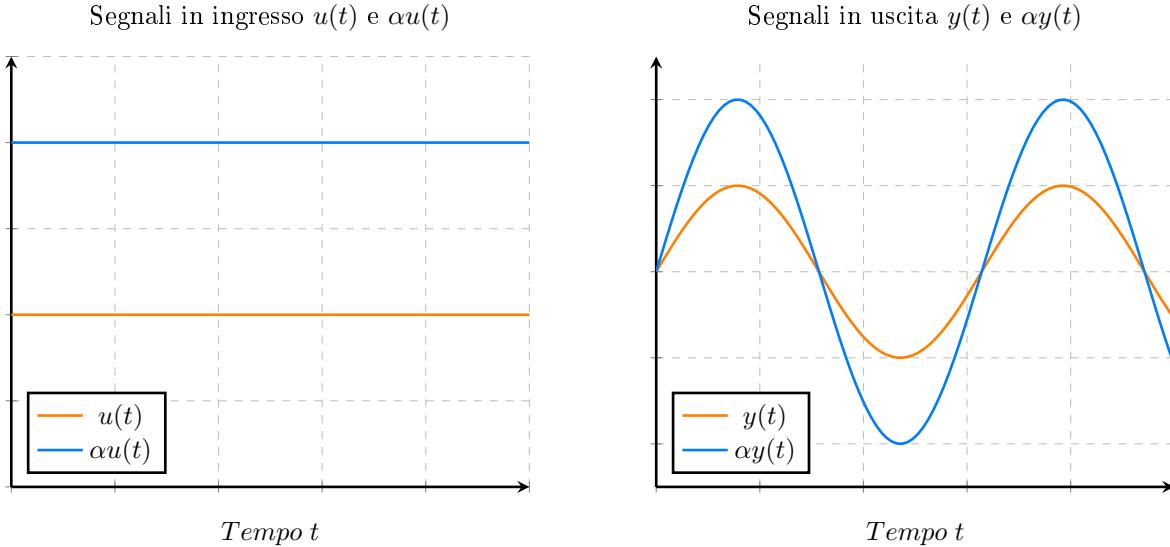
Queste condizioni sono molto restrittive e in pratica nessun sistema del mondo reale le rispetta, molti di questi sistemi possono comunque essere approssimati con un modello LTI e quindi essere risolti.

0.3.1 Omogeneità

A un segnale d'ingresso $u(t)$ moltiplicato per un fattore α corrisponde un segnale di uscita $y(t)$ moltiplicato dello stesso fattore α (si veda Grafico 0.3.1)

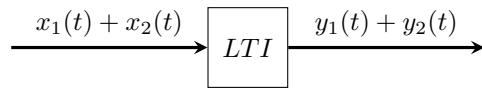
$$\alpha u(t) \Rightarrow \alpha y(t) \tag{0.1}$$

²Se anche solo una tra f e g dipende dal tempo il sistema si dice *variante nel tempo*.



0.3.2 Addittività/Superposizione

Dati i segnali d'ingresso $x_1(t)$ e $x_2(t)$ che generano rispettivamente i segnali d'uscita $y_1(t)$ e $y_2(t)$, allora la somma dei segnali d'ingresso $(x_1(t) + x_2(t))$ produce in uscita la superposizione dei due segnali d'uscita separati $(y_1(t) + y_2(t))$.



0.3.3 Stazionarietà

La proprietà di *stazionarietà*, o *tempo-invarianza*, è propria di un sistema indipendente dal tempo, ovvero in cui è valida la seguente espressione

$$y(t - t_0) \Rightarrow x(t - t_0) \quad (0.2)$$

Quindi preso un ingresso $x(t - t_0)$ traslato di un qualsiasi tempo t_0 , l'uscita del sistema sarà sempre la stessa, indipendentemente dal momento in cui si presenta l'ingresso.



0.3.4 Risposta Impulsiva

Esprimiamo la relazione tra ingresso e uscita di un sistema LTI come

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] \quad (0.3)$$

Definiamo la *risposta impulsiva* di un sistema (o *risposta all'impulso*) come

$$h(t) \triangleq \mathcal{T}[\delta(t)] \quad (0.4)$$

ovvero la risposta del sistema alla funzione impulso $\delta(t)$.

La risposta impulsiva di un sistema è fondamentale, ma per quale motivo? Prendiamo un sistema \mathcal{T} e poniamo in ingresso il segnale $x(t)$, tale che $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$. Applicando la proprietà d'invarianza rispetto al prodotto di convoluzione della delta di Dirac posso scrivere

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t) \otimes \delta(t)]$$

espandendo l'operazione di convoluzione ottengo

$$y(t) = \mathcal{T}[x(\alpha)\delta(t - \alpha)d\alpha]$$

Sfruttando il fatto che l'operatore integrale è lineare per definizione e che il sistema \mathcal{T} è lineare per ipotesi, posso scambiare il loro ordine

$$y(t) = \mathcal{T}[x(\alpha)\delta(t - \alpha)]d\alpha$$

Il sistema \mathcal{T} opera in funzione della variabile t , quindi elaboro solo il termine $\delta(t - \alpha)$ e porto fuori $x(\alpha)$

$$y(t) = x(\alpha)\mathcal{T}[\delta(t - \alpha)]d\alpha$$

a questo punto, attraverso la proprietà di tempo-invarianza (0.2), valida per ipotesi, ottengo che la relazione ingresso-uscita è

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \quad (0.5)$$

Quindi nota la risposta impulsiva $h(t)$ del sistema \mathcal{T} e dato un qualsiasi ingresso $x(t)$ sono in grado di calcolare l'uscita $y(t)$; questo vale sia per il dominio temporale che per quello frequenziale.

Dalla risposta impulsiva $h(t)$ di un sistema si può dedurre se questo è causale o meno e, si dimostra, che il sistema è non causale se $h(t)$ ha valori per $t \leq 0$.

I sistemi LTI possono essere caratterizzati in base alla risposta a una funzione impulsiva. La *risposta impulsiva* di un sistema corrisponde all'uscita del sistema a seguito dell'ingresso di una funzione impulsiva. La risposta impulsiva di un sistema può essere usata per determinare come il sistema risponderà ad altri ingressi.

Nella realtà gli impulsi e le risposte sono infinitesimali, la somma di questi nel dominio temporale è ottenuta attraverso la convoluzione $u(t) * G(t)$, con $G(t)$ risposta impulsiva del sistema

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

La convoluzione è un'operazione matematica tra due funzioni che descrive come la forma di una è modificata dalla forma dell'altra. Il risultato di ciò è l'integrale del loro prodotto.

CAPITOLO 1

SISTEMI LINEARI E STAZIONARI

Dopo aver brevemente introdotto i concetti fondamentali che ci serviranno per la descrizione di un sistema andiamo a introdurre più nel dettaglio il primo tipo di rappresentazione di un sistema, ovvero la forma di stato, per poi descrivere più nel dettaglio i sistemi LTI. Introduciamo il tutto con un esempio.

1.1 Forma di Stato

Esempio Introduttivo - Moto di un pendolo Abbiamo un pendolo di massa m attaccato a una corda di lunghezza L che si sposta con un momento u . Identifichiamo con θ l'angolo tra la corda e l'asse verticale.

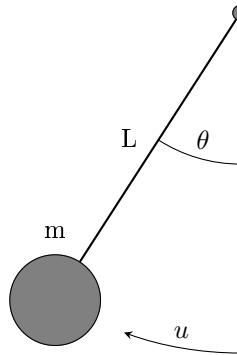


Figura 1.1

Il sistema appena descritto è un sistema dinamico in quanto possiamo descriverlo con un'equazione differenziale di moto

$$u = mL^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgL \sin(\theta) \quad (1.1)$$

Abbiamo una o più equazioni differenziali che legano la causa del moto (ingresso u) con gli effetti del moto (uscita θ). Bisogna scegliere delle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

La forma dell'equazione differenziale (1.1) è

$$F(y(t), \dot{y}(t), \dots, {}^{(n)}y(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, {}^{(p)}u(t), t) = 0, \quad n \geq p \quad (1.2)$$

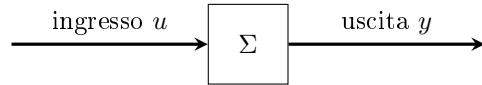
Da questa forma possiamo passare in *forma normale*, ovvero lasciare a sinistra la derivata di ordine maggiore dell'uscita $y(t)$ e portare tutto il resto a destra

$$\overset{(n)}{y}(t) = \hat{F}(y(t), \dot{y}(t), \dots, \overset{(n-1)}{y}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, \overset{(p)}{u}(t), t) \quad (1.3)$$

Nel nostro caso la forma normale è

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2}(u - c\dot{\theta} - mgL \sin(\theta)) \quad (1.4)$$

La forma normale è una equazione differenziale di grado n che lega l'ingresso u all'uscita y .



Il nostro obiettivo è passare da un'equazione differenziale di grado n ad n equazioni differenziali di grado 1, che sono più semplici da trattare.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad f(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

Per fare questo passaggio iniziamo esplicitando l'equivalenza per le condizioni iniziali. Assumendo $x(t)$ soluzione, allora

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \forall t \\ x(t_0) = x_{t_0} \end{cases}$$

Nota $x(t)$ allora $y(t)$ è una funzione non differenziale

$$y(t) = g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t) = g(x(t), u(t), t) \quad (1.5)$$

Una rappresentazione equivalente della forma normale è la *forma di stato*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t) \\ y = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Come passo dalla forma normale alla forma di stato? Ci sono diversi casi, dipendenti dal valore di p , ovvero dal numero d'ingressi; iniziamo dal più semplice e più avanti vedremo gli altri.

Caso semplice: $p = 0$ In questo caso u compare senza le sue derivate, quindi solo come u . Possiamo scegliere

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y} \end{bmatrix}$$

Da questo deriva che la forma di stato è

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ \overset{(n)}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ \hat{F}(x, u, t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t), t) \\ y = x_1 = g(x, u, t) \end{cases}$$

Con condizioni iniziali C.I. su y e derivate, quindi su x .

Riprendiamo l'equazione (1.4), forma normale del sistema precedente, con $p = 0$, e riscriviamola in forma di stato, assumendo $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 - mgL \sin(x_1)) \end{bmatrix} = f(x, u, t) \\ y = x_1 = g(x, u, t) \end{cases}$$

Le sue condizioni iniziali C.I. sono $x(t_0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$

Esempio - I carrelli Si consideri un sistema formato da due carrelli, rispettivamente di massa m_1 e m_2 , collegati tra loro da due cavi. In uno dei cavi è presente una molla con costante elastica k mentre nell'altro c'è uno smorzatore con costante di smorzamento c . Ognuno dei carrelli è soggetto a una forza, rispettivamente f_1 e f_2 , determinare le velocità y_1 e y_2 dei due carrelli.

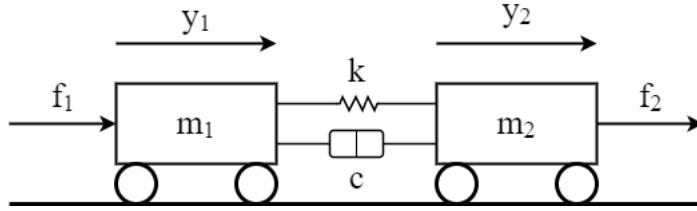


Figura 1.2

Le equazioni differenziali del sistema sono

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = f_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) = f_2 \end{cases} \quad (1.7)$$

Passiamo in forma normale (per entrambe le equazioni), considerando $u = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1}(f_1 - c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k(y_1 - y_2)) \\ \frac{1}{m_2}(f_2 - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k(y_2 - y_1)) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Adesso che siamo in forma normale possiamo portarci in forma di stato, considerando $x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{m_1}(u_1 - c(x_3 - x_4) - k(x_1 - x_2)) \\ \frac{1}{m_2}(u_2 - c(x_4 - x_3) - k(x_2 - x_1)) \end{bmatrix} = f(x, u, t) \\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = g(x, u, t) \end{cases} \quad (1.9)$$

Con condizioni iniziali C.I. $x(t_0) = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dot{y}_{10} \\ \dot{y}_{20} \end{bmatrix}$

Forma di stato In conclusione possiamo dire la forma di stato di un sistema con p ingressi e l uscite è

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases} \quad (1.10)$$

Definizione 1.1 (Proprietà di separazione passato e futuro) Definiamo x vettore di stato o stato del sistema come l'insieme di variabili **necessarie e sufficienti** tali che, conoscendo $x_{t_0} = x(t_0)$ e $u(t) \forall t > t_0$, possiamo conoscere $x(t), y(t) \forall t > t_0$.

1.2 Proprietà dei Sistemi Dinamici (Richiami)

1.2.1 Causalità

Definizione L'uscita all'istante t dipende solo dagli ingressi $u(\tau)$ con $\tau \leq t$. Un sistema è *causale*¹ se rispetta la condizione di causalità. Invece, un sistema è *strettamente causale* se $\tau < t$.

Criterio per forma normale $\overset{(n)}{y} = \hat{F}(y, \dot{y}, \dots, \overset{(n-1)}{y}, u, \dot{u}, \dots, \overset{(p)}{u}, t)$

- se $p \leq n$, allora il sistema è causale;
- se $p < n$, allora il sistema è strettamente causale.

Criterio per forma di stato

- il sistema è **sempre** causale²;
- il sistema è strettamente causale se nell'equazione di uscita non compare esplicitamente u (ingressi)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, t) \end{cases}$$

1.2.2 Stazionarietà/Tempo Invarianza

Definizione A fronte delle stesse condizioni iniziali $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ e stessi segnali d'ingresso u , il comportamento è invariante rispetto al trascorimento temporale.

Criterio per forma normale Un sistema in forma normale è stazionario se

$$\frac{\partial \hat{F}(\cdot)}{\partial t} = 0$$

Criterio per forma di stato Un sistema in forma di stato è stazionario se

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial t} = 0 \wedge \frac{\partial g(\cdot)}{\partial t} = 0$$

1.2.3 Linearità

Criterio per forma normale Un sistema in forma normale è lineare se $\hat{F}(\cdot)$ dipende dalle sue derivate $y, \dots, \overset{(n-1)}{y}, u, \dots, \overset{(p)}{u}$

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j(t) \overset{(j)}{u}(t) \quad (1.11)$$

Se il sistema è anche stazionario, allora α_i e β_j non dipendono del tempo

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j \overset{(j)}{u}(t) \quad (1.12)$$

¹Causale è sinonimo di proprio.

²Questo perché un sistema non causale non ammette forma di stato (vedi definizione 1.1).

Criterio per forma di stato Un sistema in forma di stato è lineare se

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) = A(t)x + B(t)u \\ y = g(x, u, t) = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (1.13)$$

Se il sistema è anche stazionario (LTI), allora

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y = Cx + Du & C \in \mathbb{R}^{l \times n}, D \in \mathbb{R}^{l \times m} \end{cases}$$

Con n dimensione dello stato, m numero ingressi ed l numero uscite.

Esempio Riprendiamo l'esempio dei carrelli in cui avevamo trovato la seguente forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{m_1}(u_1 - c(x_3 - x_4) - k(x_1 - x_2)) \\ \frac{1}{m_2}(u_2 - c(x_4 - x_3) - k(x_2 - x_1)) \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.14)$$

identifichiamo le matrici A, B, C e D

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \text{Matrice } A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{c}{m_1} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \text{Matrice } B \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y &= \text{Matrice } C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \text{Matrice } D \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Proprietà dei Sistemi Lineari (Richiami)

Ogni soluzione di un sistema lineare ha due parti, una *integrale omogenea* e una *integrale particolare*; la prima (omogenea) dipende solo dalle condizioni iniziali ($u = 0$) mentre la seconda (particolare) dipende solo dagli ingressi (C.I nulle).

La soluzione del sistema è: Integrale Omogenea \oplus Integrale Particolare.

Proprietà 1 $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sono n soluzioni omogenee indipendenti; ogni soluzione omogenea è combinazione lineare delle n soluzioni $y_i(t)$.

Proprietà 2 I coefficienti dipendono univocamente dalle condizioni iniziali del sistema. Considerato il sistema lineare descritto come sopra dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

con istante iniziale t_0 , siano x' e y' i movimenti dello stato e dell'uscita generati dal solo stato iniziale x'_{t_0} , e x'' e y'' i movimenti dello stato e dell'uscita generati dal solo stato iniziale x''_{t_0} . Allora, per ogni coppia di scalari α e β , i movimenti dello stato x''' e dell'uscita y''' generati dallo stato iniziale

$$x'''_{t_0} = \alpha x'_{t_0} + \beta x''_{t_0} \quad (1.15)$$

sono

$$x'''(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t) \quad (1.16)$$

$$y'''(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t) \quad (1.17)$$

Questa proprietà è chiamata *principio di sovrapposizione degli effetti* per le condizioni iniziali sulla soluzione omogenea. Lo stesso principio vale per quanto riguarda gli ingressi e dunque per la soluzione particolare.

Proprietà 3 Sia $y_p(t)$ integrale particolare per $u(t)$, allora $\dot{y}_p(t)$ è integrale particolare per $\dot{u}(t)$.

1.4 Passaggio dalla Forma Normale alla Forma di Stato nei Sistemi Lineari

Abbiamo visto in precedenza il passaggio dalla forma normale alla forma di stato per un caso semplice (singolo ingresso), vediamo adesso di analizzare casi più complessi.

$$\overset{(n)}{y}(t) = \hat{F}(y(t), \dot{y}(t), \dots, \overset{(n-1)}{y}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, \overset{(p)}{u}(t), t) \iff \begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t) \\ y = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

Caso $p = 0$ Riprendiamo l'equazione (1.11) di un sistema lineare in forma normale. Nel caso in cui $p = 0$ la seconda sommatoria si riduce al singolo termine $u(t)$

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + u(t) \quad (1.18)$$

Ne risulta quindi che, la forma di stato del sistema è

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y} \end{bmatrix}$$

A forma compagna orizzontale inferiore

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t) \end{array} \right.$$

A in questa forma è detta *compagna orizzontale inferiore* con $\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \cdots + \alpha_n \lambda^{n-1} + \lambda$ polinomio caratteristico.

Caso $0 < p < n$ Considerando sempre l'equazione (1.11) del sistema lineare in forma normale. Nel caso in cui è presente $0 < p < n$ la seconda sommatoria rimane ed è combinazione lineare di u e delle sue derivate

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j \overset{(j)}{u}(t) \quad (1.19)$$

Cerchiamo di arrivare alla forma di stato utilizzando un'equazione ausiliaria, la cui soluzione $z(t)$ è la risposta del sistema all'ingresso u

$$\overset{(n)}{z} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{z}(t) + u(t) \quad (1.20)$$

Per linearità se $y(t)$ fornisce la risposta di sistema ad una combinazione lineare delle derivate di $u(t)$, allora questa sarà una combinazione lineare delle derivate di $z(t)$ con gli stessi coefficienti

$$y(t) = \sum_{j=0}^p \beta_j z^{(j)}(t) \quad (1.21)$$

Quindi un buono stato potrebbe essere

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ {}^{(n-1)}z \end{bmatrix}$$

Questo perché descrive bene l'evoluzione dello stato e dell'uscita.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y(t) = \sum_{i=1}^{p+1} \beta_{i-1} x_i = [\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_p \ \overset{p+1}{\textcolor{red}{0}} \ \overset{n-(p+1)}{\textcolor{red}{0}} \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] x + 0u = Cx + Du \end{cases} \quad (1.22)$$

In questo caso le matrici A e B sono le stesse del caso $p = 0$ lineare.

Caso $p = n$ Nel caso in cui il sistema sia non strettamente causale

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{x_{i+1}}{\textcolor{red}{z^{(i)}(t)}} + u(t), \quad x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ {}^{(n-1)}z \end{bmatrix}, \quad y(t) = \sum_{j=0}^p \beta_j z^{(j)}(t) \quad (1.23)$$

Allora, dalle ipotesi risulta

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i + \beta_n z^{(n)} = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i - \beta_n \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} x_i + \beta_n u(t) = \\ &= \overset{C}{\textcolor{red}{\sum_{i=1}^n (\beta_{i-1} - \beta_n \alpha_{i-1})}} x_i + \overset{D}{\textcolor{blue}{\beta_n}} u(t) = Cx + Du = g(x, u, t) \end{aligned}$$

Quindi le matrici C e D sono tali che

$$C = [\beta_0 - \beta_n \alpha_0 \ \beta_1 - \beta_n \alpha_1 \ \cdots \ \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}], \quad D = [\beta_n] \quad (1.24)$$

mentre le matrici A e B continuano a calcolarsi come visto in precedenza.

Esempio - $p < n$ Sia data la seguente equazione differenziale

$$\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$$

passando alla forma in forma normale risulta

$$\ddot{y} = -y + 2u + \dot{u} \quad (p < n)$$

che è lineare, quindi la forma di stato sarà

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [2 \ 1 \ 0] x + [0] u$$

Esempio - $p = n$ Si consideri la seguente equazione in forma normale

$$\ddot{y} + 2\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 2u + \dot{u} + 3\ddot{u}$$

passando alla forma di stato risulta

$$\ddot{y} = -2\ddot{y} - 3\dot{y} - y + 2u + \dot{u} + 3\ddot{u} \quad (p = n)$$

dunque

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [2 - 3 \cdot 1 \quad 1 - 3 \cdot 3 \quad 0 - 3 \cdot 2] x + [3] u$$

Esercizio

Scrivere la forma normale e la forma di stato della funzione $\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$.

1.5 Cambiamento di Coordinate di Stato

È importante notare che la scelta dello stato **non è unica** ed è possibile cambiare coordinate di stato. Dato x che descrive lo stato, allora $\hat{x} = \phi(x)$ è una rappresentazione equivalente se e solo se $\phi(\cdot)$ è biettiva, esiste cioè $\phi^{-1}(\cdot)$.

1.5.1 Cambiamento di Coordinate Lineari

Data $\phi(x)$ lineare, allora possiamo esprimerla in forma matriciale tramite la matrice T ³

$$\hat{x} = \phi(x) = Tx, \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.25)$$

La matrice T deve essere invertibile (biettiva) e quindi $\det(T) \neq 0$

$$\exists T^{-1} : x = T^{-1}\hat{x} \quad (1.26)$$

Se abbiamo un sistema descritto da x

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases} \quad (1.27)$$

Si noti che gli ingressi (u) e le uscite (y) sono sempre gli stessi, questo perché il cambiamento è equivalente e non deve influire su questi, ma esclusivamente sullo stato.

Da questo sistema, sostituendo $\hat{x} = Tx$, possiamo ricavare le matrici equivalenti \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D}

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = T\dot{x} = TAx + TBu = TAT^{-1}\hat{x} + TBu \\ y = Cx + Du = CT^{-1}\hat{x} + CDu \end{cases} \quad \begin{array}{c} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{C} \\ \hat{D} \end{array} \quad \begin{array}{c} T \\ TB \\ CD \end{array} \quad (1.28)$$

³Si noti che $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quindi il numero di coordinate di stato non cambia.

Esempio Riprendendo l'esempio 1.1, in cui

$$u = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Avevamo trovato la forma di stato del sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Eseguiamo adesso un cambiamento di coordinate

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix} = Tx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x \quad (1.29)$$

Invertiamo T e ricaviamo T^{-1}

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Adesso siamo in grado di calcolare \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} . Partiamo da \hat{A}

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{m_1} & 0 & \frac{c}{m_1} \\ 0 & -\frac{k}{m_1} - \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{c}{m_1} - \frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Ricaviamo \hat{B} come

$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Rimane infine da trovare \hat{C}

$$\hat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Non abbiamo necessità di calcolare \hat{D} in quanto coincide sempre con D , in questo caso

$$\hat{D} = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

1.6 Soluzioni Equazioni in Forma di Stato

Si consideri $\dot{x} = f(x, u, t)$ con $x(t_0) = x_{t_0}$. Definiamo $\tilde{x}(t)$ soluzione; questa non esiste sempre e se esiste non è detto che sia unica. \tilde{x} soluzione è detta *movimento dello stato*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}, u, t) \\ y = g(\tilde{x}, u, t) \end{cases}, \quad \tilde{x}(t_0) = x_{t_0} \quad (1.34)$$

Movimento di equilibrio Alcuni movimenti di stato sono particolari, infatti, a partire da determinate condizioni iniziali e ingressi, la loro dinamica è 0, questi movimenti sono detti *movimenti di equilibrio*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_E = 0 = f(\tilde{x}_E, u_E, t) \\ y_E = g(\tilde{x}_E, u_E, t) \end{cases}, \quad x_E(t_0) = x_{E0} \quad (1.35)$$

Esempio Riprendiamo l'esempio 1.1 che descrive il moto di un pendolo (Figura 1.1).

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad y = \theta$$

La dinamica dello stato \dot{x} è

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 - mgL \sin(x_1)) \end{bmatrix}$$

Imponendo $\dot{x} = 0$ possiamo trovare l'equilibrio del sistema

$$\dot{x} = f(x, u, t) = 0 = \begin{bmatrix} x_2 = 0 \\ \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 - mgL \sin(x_1)) = 0 \end{bmatrix}$$

Risolvendo per x_1 otteniamo

$$\sin(x_1) = \frac{u}{mgL} \rightarrow x_1 = \arcsin\left(\frac{u}{mgL}\right)$$

Ne risulta che

$$u = 0 \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \vee x_1 = \pi \end{cases}, \quad \frac{u}{mgL} < 1$$

Abbiamo quindi due condizioni di equilibrio, dipendenti da x_1 ⁴.

1.7 Perturbazione del Movimento

Dato $x(t)$ *movimento perturbato* tale che

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t) \quad \text{perturbazione} \quad (1.36)$$

La dinamica della perturbazione è

$$\dot{x}(t) = \dot{\tilde{x}}(t) + \dot{\delta x}(t) = f(x, u, t) \quad (1.37)$$

Si consideri ora il caso in cui \tilde{x} sia un movimento di equilibrio \tilde{x}_E

$$\dot{x}(t) = \dot{\tilde{x}}_E(t) + \dot{\delta x}(t) = f(x, u, t) \rightarrow \dot{x}(t) = \dot{\delta x}(t) = f(x, u, t) \quad (1.38)$$

La dinamica del movimento perturbato $\dot{x}(t)$ coincide quindi con la dinamica della perturbazione $\dot{\delta x}(t)$ ⁵. Possiamo quindi dire che la dinamica della perturbazione dipende dal particolare movimento dello stato.

⁴Si noti che con $\frac{u}{mgL} > 1$ non esistono soluzioni di equilibrio dato che $\arcsin(x)$ deve avere $0 \leq x \leq 1$.

⁵Questo nel caso di perturbazione del movimento di equilibrio.

1.8 Stabilità Interna

La stabilità interna dipende dallo stato, successivamente studieremo anche la stabilità esterna, che dipende dagli ingressi e dalle uscite⁶.

Vogliamo studiare la stabilità di un movimento \tilde{x} prodotto da un sistema lineare con condizioni iniziali $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$.

Definizione 1.2 (Stabilità) Dato un movimento di stato \tilde{x} , e considerando che $\delta x_{t_0} = \delta x(t_0) = x_{t_0} - \tilde{x}_{t_0}$ e che $\delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$, questo è *stabile* (marginalmente/semplicamente) per il sistema se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \delta x_{t_0} : \|\delta x_{t_0}\| \leq \delta \Rightarrow \|\delta x(t)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (1.39)$$

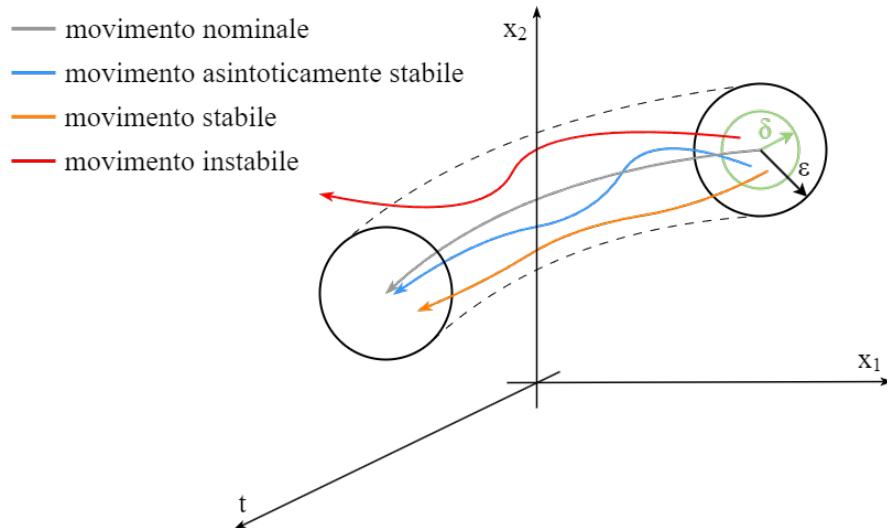


Figura 1.3: visualizzazione grafica delle definizioni di stabilità marginale, stabilità asintotica e instabilità.

Definizione 1.3 (Instabilità) Il movimento di stato \tilde{x} è instabile se la condizione per la stabilità non è verificata.

Definizione 1.4 (Stabilità asintotica) Il movimento di stato \tilde{x} è *asintoticamente stabile* per il sistema se, oltre a essere stabile, verifica la condizione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta x(t)\| = 0 \quad (1.40)$$

1.9 Linearizzazione di Sistemi Non Lineari

Si consideri un sistema, in generale MIMO, non lineare e stazionario descritto da

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.41)$$

$$y = g(x(t), u(t)) \quad (1.42)$$

che riceve un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$. Si considerino poi il suo stato di equilibrio \bar{x} e l'uscita di equilibrio associata \bar{y} tali che

$$0 = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad (1.43)$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad (1.44)$$

⁶È importante tenere presente che la stabilità esterna (o stabilità BIBO) è diversa dalla stabilità interna.

1.9.1 Linearizzazione

Quando abbiamo a che fare con sistemi non lineari vogliamo ricondurci a sistemi lineari che possiamo trattare. Il procedimento della *linearizzazione* consiste nel descrivere il comportamento di sistemi non lineari attorno all'equilibrio nominale tramite sistemi lineari. È possibile fare questo esclusivamente nell'intorno di certe condizioni di equilibrio di stato e ingresso (\bar{x}, \bar{u}) .

Si considerino le variazioni $\delta u(t)$, $\delta x(t)$, $\delta y(t)$ delle variabili di ingresso, stato e uscita rispetto a \bar{u} , \bar{x} , \bar{y} , con stato iniziale δx_{t_0} , tali che

$$u(t) = \bar{u} + \delta u(t) \quad (1.45)$$

$$x(t) = \bar{x} + \delta x(t) \quad (1.46)$$

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t) \quad (1.47)$$

$$x_{t_0} = \bar{x} + \delta x_{t_0} \quad (1.48)$$

le equazioni che descrivono il sistema diventano

$$\dot{\bar{x}} + \dot{\delta x}(t) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \quad (1.49)$$

$$\bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \quad (1.50)$$

con condizione iniziale

$$\bar{x} + \delta x(t_0) = \bar{x} + \delta x_{t_0} \quad (1.51)$$

Possiamo ottenere una rappresentazione lineare sviluppando in serie di Taylor (fermandoci ai termini del primo ordine) le funzioni f e g , supposte sufficientemente regolari, rispetto a x e u in $x = \bar{x}$ e $u = \bar{u}$. Sostituendo lo sviluppo nelle equazioni (1.49) e (1.50) si ottiene

$$\dot{\delta x}(t) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (\delta x(t)) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (\delta u(t)) \quad (1.52)$$

$$\bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (x - \bar{x}) + \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (u - \bar{u}) \quad (1.53)$$

Da queste infine, considerando anche le precedenti equazioni (1.43), (1.44) e (1.53), si ha

$$\dot{\delta x} = A\delta x(t) + B\delta u(t), \quad \delta x(t_0) = \delta x_{t_0} \quad (1.54)$$

$$\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \quad (1.55)$$

In questo modo abbiamo ottenuto un sistema LTI che lega le variazioni prime delle variabili considerate ed è chiamato *sistema linearizzato*. Questo sistema descrive in modo approssimato il comportamento del sistema non lineare stazionario iniziale attorno al particolare equilibrio. L'equilibrio è considerato nel caso in cui le variazioni di ingresso e dello stato iniziale $\delta u(t)$ e δx_{t_0} siano sufficientemente piccole in norma. Si noti che le variazioni di ingresso e stato iniziale provocano a loro volta variazioni dello stato e dell'uscita $\delta x(t)$ e $\delta y(t)$ e anch'esse dovranno essere abbastanza piccole, come le prime.

Esempio Riprendiamo il pendolo dell'esempio 1.1 e linearizziamolo. Avevamo trovato che

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 + mgL \sin(x_1)) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad y = \theta$$

con condizioni di equilibrio

$$\dot{x} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \arcsin\left(\frac{u}{mgL}\right) \end{bmatrix}$$

Considerando $m = 1 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $L = 1 \text{ m}$, $c = 1 \text{ Nms/rad}$, $\bar{u} = 5 \text{ Nm}$, troviamo che \bar{x} è tale che

$$\bar{x} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \wedge \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \bar{x}|_{\bar{u}=5} = \begin{bmatrix} \pi/6 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 5\pi/6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La dinamica della perturbazione è

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \\ \delta y = C\delta x + D\delta u \end{cases}$$

Ricaviamo le matrici A , B , C e D

$$A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} \cos(x_1) & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{mL^2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$C = \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [1 \quad 0] \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$D = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [0] \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

L'unica tra queste matrici che dipende dallo stato è A (compare x_1 negli elementi), vediamo allora in base ai valori di equilibrio di x_1 come diventa la matrice A (B , C e D rimangono identiche)

$$A \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \Big|_{\substack{x_1=\pi \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

1.10 Equilibrio dei Sistemi Lineari

Si consideri l'equazione della dinamica di un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Introduciamo \bar{u} ingresso di equilibrio che provoca un movimento di stato di equilibrio \bar{x} , allora

$$\bar{u} \rightarrow \bar{x} : A\bar{x} + B\bar{u} = 0$$

Se la matrice della dinamica A è invertibile⁷, allora la soluzione è unica e immediata

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} \tag{1.1}$$

Nel caso in cui $\bar{u} = 0$ allora l'unico stato di equilibrio \bar{x} è l'origine. Se esiste un autovalore di A nullo allora non esiste soluzione \bar{x} oppure, se esiste, anche $x' = \bar{x} + x_n$ è soluzione, con $x_n \in \ker(A)$.

⁷Una matrice è invertibile se $\det(A) \neq 0$ oppure se i valori di A tali che $\lambda_i \neq 0 \forall i$.

1.11 Esponenziale di Matrice

Sia data una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uno scalare reale $t \geq 0$, allora si definisce $\Psi(t)$ matrice esponenziale

$$\Psi(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(At)^i}{i!} = I_n + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots \quad (1.2)$$

la quale gode delle seguenti proprietà (solo alcune sono elencate):

Proprietà 1 $(e^{At})^{-1}$ esiste sempre e coincide con e^{-At} , anche nel caso di A non invertibile.

Proprietà 2 $e^{(T^{-1}AtT)} = T^{-1}e^{At}T$

Proprietà 3 $\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At}$

1.12 Formula di Lagrange

Si consideri un sistema LTI descritto da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Il movimento dello stato corrispondente all'ingresso $u(t)$, definito per $t \geq t_0$, e allo stato iniziale $x(t_0) = x_{t_0}$ è dato dalla *formula di Lagrange* così definita

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (1.3)$$

Il corrispondente movimento dell'uscita è

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_{t_0} + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(\tau), \quad t \geq t_0 \quad (1.4)$$

Questa formula ci dice che lo stato a un generico istante t è funzione dello stato all'istante iniziale t_0 , dell'ingresso nell'intervallo $[t_0, t]$ e della durata t dell'intervallo di tempo considerato.

Equazione della dinamica a partire dalla formula di Lagrange Cerchiamo di capire come si arriva all'equazione della dinamica di un sistema SISO, quindi con a e b scalari, a partire dalla formula di Lagrange

$$x(t) = x_{t_0}e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau = x_{t_0}e^{at} + be^{at} \int_0^t e^{-a\tau}u(\tau)d\tau$$

da cui

$$\dot{x}(t) = ax_{t_0}e^{at} + abe^{at} \int_0^t e^{-a\tau}u(\tau)d\tau + be^{at}e^{-at}u(t) = a \left(e^{at}x_{t_0} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau \right) + bu(t)$$

che è proprio l'equazione della dinamica di un sistema SISO

$$\dot{x} = ax + bu$$

Una volta analizzato il caso con sistemi SISO possiamo facilmente generalizzare al caso MIMO partendo dall'equazione della dinamica

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

1.13 Movimento Libero e Movimento Forzato

Dai movimenti di stato e uscita delle equazioni (1.3) e (1.4) del sistema sopra descritto è possibile individuare un contributo dipendente esclusivamente dallo stato iniziale e uno dipendente esclusivamente dall'ingresso; la somma dei due contributi costituisce il movimento della stato complessivo. Il contributo al movimento di stato e uscita del solo stato iniziale, equivalente ad avere l'ingresso nullo, è chiamato *movimento libero*, ed è dato da

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)} x_{t_0} \quad (1.5)$$

$$y_l(t) = C e^{A(t-t_0)} x_{t_0} \quad (1.6)$$

invece, il contributo dell'ingresso, equivalente a stato iniziale nullo, si chiama *movimento forzato*, ed è dato da

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

$$y_f(t) = C \int_{t_0}^t e^{A(t-t_0)} B u(\tau) d\tau + D u(t) \quad (1.8)$$

1.13.1 Principio di Sovrapposizione degli Effetti

Considerato il sistema LTI descritto come sopra dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

con istante iniziale t_0 , siano x' e y' i movimenti dello stato e dell'uscita generati dell'ingresso u' e dallo stato iniziale x'_{t_0} , e x'' e y'' i movimenti dello stato e dell'uscita generati dell'ingresso u'' e dallo stato iniziale x''_{t_0} . Allora, per ogni coppia di scalari α e β , i movimenti dello stato x''' e dell'uscita y''' generati dall'ingresso

$$u'''(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t) \quad (1.9)$$

e dallo stato iniziale

$$x'''_{t_0} = \alpha x'_{t_0} + \beta x''_{t_0} \quad (1.10)$$

sono

$$x'''(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t) \quad (1.11)$$

$$y'''(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t) \quad (1.12)$$

Grazie a questo risultato possiamo affermare che il comportamento dei sistemi con «grandi variazioni» dello stato iniziale e dell'ingresso differisce da quello relativo a «piccole variazioni» solo per un fattore di scala.

Questo principio è valido indipendentemente dalla stazionarietà di un sistema, è infatti legato alla linearità ed è già stato visto, per le condizioni iniziali, nella Sezione 1.3 che tratta le proprietà dei sistemi lineari.

1.14 Stabilità del Sistema

Vogliamo studiare la stabilità del movimento $\tilde{x}(t)$ di un sistema lineare con ingresso $\tilde{u}(t), t \geq 0$, e stato iniziale $\tilde{x}(t_0) = x_{t_0}$. Sappiamo che la perturbazione è la differenza tra movimento perturbato e movimento nominale

$$\delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \quad (1.13)$$

con condizioni iniziali $\delta x(t_0) = \delta x_{t_0}$. I due movimenti di stato (nominale e perturbato) sono descritti da

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \dot{x} &= Ax + B\tilde{u} \end{aligned}$$

Sostituendo le due equazioni sopra nella (1.13) otteniamo

$$\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t), \quad \delta x(t_0) = \delta x_{t_0} \quad (1.14)$$

Si nota che la dinamica di una perturbazione per un sistema LTI non dipende dal particolare movimento di stato \tilde{x} , ma dalla matrice di sistema A . Dunque per sistemi LTI si parla di **sistema** stabile, asintoticamente stabile o instabile⁸.

Teorema 1.1 Un movimento di un sistema LTI è stabile, asintoticamente stabile o instabile se e solo se tutti i movimenti del sistema sono rispettivamente stabili, asintoticamente stabili o instabili.

1.15 Autovalori e Modi

Per studiare il movimento libero dello stato (1.5) e dell'uscita (1.6) nel caso generale $n > 1$, quindi con e^{At} con A matrice e non scalare, è necessario analizzare la struttura della matrice esponenziale e^{At} . Per semplicità distingueremo i casi in A diagonalizzabile e A non diagonalizzabile.

1.15.1 Matrice della dinamica diagonalizzabile

Una matrice è diagonalizzabile se la sua molteplicità algebrica è uguale alla sua molteplicità geometrica: m.a = m.g. Gli autovalori di A sono tra loro distinti ed esiste una matrice di trasformazione $T = T_D$, $n \times n$, che ci permetta di portare A in forma diagonale, sia A_D

$$A_D = T_D A T_D^{-1} \quad (1.15)$$

con A_D matrice diagonale

$$A_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

e λ_i autovalori di A .

Autovalori reali Nel caso in cui gli autovalori di A siano reali, allora

$$e^{A_D t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_D t)^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sum \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

in cui ogni elemento $e^{\lambda_i t}$ è una funzione del tempo detta *modo*.

Autovalori complessi Consideriamo il caso in cui gli autovalori di A sono complessi, in particolare, se esiste

$$\lambda_i = \sigma + j\omega$$

allora esiste

$$\overline{\lambda_i} = \sigma - j\omega$$

e la matrice della dinamica A è composta da funzioni del tempo come

$$e^{(\sigma+j\omega)t} \sin(\omega t) \quad (1.18)$$

$$e^{(\sigma-j\omega)t} \cos(\omega t) \quad (1.19)$$

Si può facilmente dimostrare che le funzioni (1.18) e (1.19) si combinano sempre in funzioni reali sinusoidali come

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t), \quad e^{\sigma t} \cos(\omega t) \quad (1.20)$$

Matrice simile in forma reale Si consideri la matrice diagonale M con autovalori $\sigma + j\omega$ e $\sigma - j\omega$

$$M = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

Questa è *simile* alla matrice in *forma reale* S

$$S = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

⁸Sempre parlando di stabilità interna.

1.15.2 Matrice della dinamica non diagonalizzabile

Una matrice è non diagonalizzabile, o *difettiva*, se la sua molteplicità algebrica è diversa dalla sua molteplicità geometrica: $m.a \neq m.g.$ In questo caso A possiede autovalori multipli, ovvero non tutti distinti tra loro, e non possiamo operare una trasformazione come quella nel caso diagonalizzabile. Siamo comunque in grado di trovare una matrice di trasformazione $T = T_J$ che ci permette di portare A nella cosiddetta *forma di Jordan* A_J .

Forma di Jordan La forma di Jordan consiste in un matrice con elementi non nulli solo sulla diagonale e sulla sopradiagonale. Esiste quindi una matrice T_J ⁹, $n \times n$, tale che

$$A_J = T_J A T_J^{-1} \quad (1.21)$$

La matrice in forma di Jordan si presenta in forma diagonale a blocchi

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_N \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_h & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_h \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

con J_i detto *blocco di Jordan*. Ogni blocco di Jordan ha sulla diagonale un autovalore che compare tante volte quanto è la sua molteplicità algebrica e, inoltre, ci sono tanti blocchi J_i associati allo stesso autovalore quanto è la sua molteplicità geometrica.

Esempi matrici in forma di Jordan La prima e la seconda matrice sono in forma di Jordan, mentre la terza no; questo perché nella terza matrice ci sono due ipotetici blocchi di Jordan, ma sopra al secondo c'è un 1 (evidenziato in rosso), come se la matrice possedesse un unico blocco, cosa non possibile visto che ci sono due autovalori distinti (2 e 3).

$$\begin{array}{c|ccccc} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Considerando l'esponenziale di matrice, con matrice in forma di Jordan, allora abbiamo

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{J_N t} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

con ogni blocco

$$e^{J_i t} = e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} t} = e^{(\lambda I + J_0 t)} = e^{\lambda t} I e^{J_0 t} \quad (1.24)$$

Analizziamo $e^{J_0 t}$; per la definizione (1.2) di esponenziale di matrice risulta

$$e^{J_0 t} = I + J_0 t + J_0^2 \frac{t^2}{2} + \cdots + J_0^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} \quad (1.25)$$

Ponendo particolare attenzione alla matrice J_0 (supponiamo 5×5)

$$J_{0_{5 \times 5}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⁹Questa è una matrice di autovettori generalizzati, non approfondiremo il concetto, ma in generale una matrice con autovalori multipli può ancora essere diagonalizzabile; abbiamo visto con la matrice in forma reale.

è facile vedere che

$$J_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_0^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una volta raggiunto J_0^5 la matrice è nulla (ci sono solo zeri). Diciamo allora che J_0 è *nilpotente* di *ordine* 5.

Definizione 1.5 (Matrice nilpotente) Una matrice A si dice *nilpotente* se esiste un numero $q \in \mathbb{R}_0^+$ tale che

$$A^q = 0 \quad (1.26)$$

Il più piccolo q per cui questo è vero è detto *ordine*, o *indice*, di nilpotenza di A .

Applicando questa considerazione all'esponenziale di matrice $e^{J_0 t}$, otteniamo

$$e^{J_0 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

In questo caso, quali sono le funzioni del tempo che compaiono, combinate linearmente, in e^{At} ? Se riprendiamo l'equazione (1.24), dato che la matrice identità non ha influenza, possiamo riscrivere come

$$e^{At} = e^{\lambda t} e^{J_0 t} \quad (1.28)$$

con termini

$$\frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}, \quad 0 \leq k \leq q-1 \quad (1.29)$$

Autovalori complessi Il caso precedente con trasformazione di Jordan per matrice difettiva può essere esteso a quello con autovalori complessi con alcuni accorgimenti. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Questa è simile a una matrice in forma di Jordan reale

$$A_j = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

con autovalori $\sigma \pm j\omega$ aventi m.a = 3 e m.g = 1. I termini che compaiono in questo caso sono funzioni reali come

$$\frac{t^k}{k!} e^{\sigma t} \sin(\omega t), \quad \frac{t^k}{k!} e^{\sigma t} \cos(\omega t) \quad (1.32)$$

con $0 \leq k \leq q-1$ e q dimensione blocco Jordan.

1.15.3 Modi

Definizione 1.6 (Modi) Tutte e sole le funzioni del tempo che compaiono combinate linearmente come elementi di e^{At} . Quindi anche come elementi dell’evoluzione libera della stato $x_l(t) = e^{At}x_{t_0}$ o come evoluzione nel tempo delle sue perturbazioni a fronte d’interferenze esterne delle condizioni iniziali $\delta x(t) = e^{At}\delta x_{t_0}$.

Il comportamento dei modi varia in base agli autovalori del sistema.

Modi con matrice della dinamica diagonalizzabile Quando gli autovalori di A diagonalizzabile sono reali i modi hanno la forma $e^{\lambda t}$ e il comportamento è dettato da $\lambda \in \mathbb{R}$, infatti

- $\lambda > 0$: esponenziale crescente (divergente)
- $\lambda = 0$: costante
- $\lambda < 0$: esponenziale decrescente (convergente)

Nel caso in cui gli autovalori siano complessi i modi hanno la forma $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$, $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ e il comportamento cambia in base a $\sigma \in \mathbb{R}$

- $\sigma > 0$: oscillatorio ampiezza divergente
- $\sigma = 0$: oscillatorio ampiezza costante
- $\sigma < 0$: oscillatorio ampiezza convergente

Modi con matrice della dinamica difettiva Se gli autovalori di A difettiva sono reali i modi sono nella forma $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}$ e il comportamento cambia in base a $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\lambda > 0$: esponenziale divergente
- $\lambda = 0$: polinomiale divergente
- $\lambda < 0$: esponenziale convergente

Invece, se gli autovalori sono complessi i modi hanno la forma $\frac{t^k}{k!}e^{\sigma t} \sin(\omega t)$, $\frac{t^k}{k!}e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ ne definisce il comportamento

- $\sigma > 0$: oscillatorio esponenziale divergente
- $\sigma = 0$: oscillatorio polinomiale divergente
- $\sigma < 0$: oscillatorio esponenziale convergente

Figura 1.4a e Figura 1.4b riportano l’andamento temporale qualitativo dei modi in base alla posizione degli autovalori, indicati con delle crocette, nel piano complesso.

In generale, quando la parte reale degli autovalori è negativa, i modi convergono a zero mentre se è positiva divergono esponenzialmente. Quando la parte reale è uguale a zero ci sono due scenari possibili; se la dimensione del blocco di Jordan q è uguale a uno allora i modi sono costanti in ampiezza, altrimenti, se q è maggiore di uno, i modi hanno andamento polinomiale divergente.

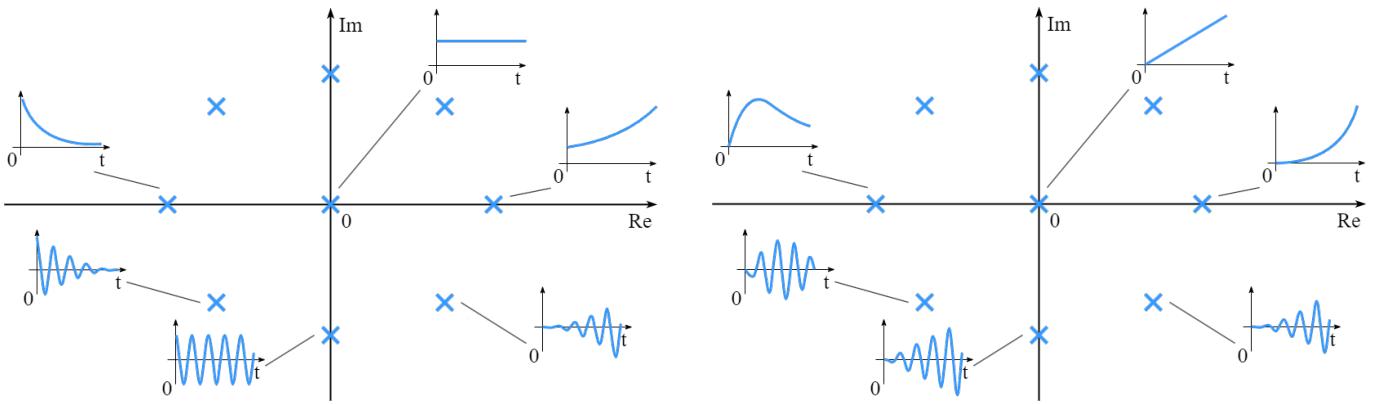


Figura 1.4

1.15.4 Stabilità e Modi

Di seguito è presente uno schema che riassume le condizioni di stabilità, stabilità asintotica e instabilità sulla base dei modi degli autovalori di un sistema LTI.

Stabilità	Modi	Autovalori
Asintoticamente stabile	Tutti i modi convergenti a zero	Tutti gli autovalori hanno $\operatorname{Re} < 0$
Stabile	Nessun modo divergente ed esiste un modo non convergente	Nessuno autovalore con $\operatorname{Re} > 0$ e almeno uno con $\operatorname{Re} = 0$; quelli con $\operatorname{Re} = 0$ devono avere $m.a = m.g$
Instabile	Esiste un modo divergente	Esiste un autovalore con $\operatorname{Re} > 0$ oppure con $\operatorname{Re} = 0$ e $m.a \neq m.g$

Tabella 1.1: stabilità del sistema sulla base dei modi e degli autovalori.

Esempio Data la matrice di sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

studiare gli autovalori di A , identificare i modi del sistema e determinare la stabilità del sistema.

- **Studio autovalori:** notiamo subito che la matrice è in forma di Jordan e osserviamo che è presente un singolo autovalore corrispondente a -1 , la cui $m.a = 5$ (compare 5 volte) e la cui $m.g = 3$ (ci sono tre blocchi di Jordan associati all'autovalore).
- **Modi del sistema:** per quanto riguarda i modi del sistema, per il primo blocco abbiamo

$$t^k e^{\lambda t}, \quad 0 \leq k \leq 2$$

da cui ricaviamo: e^{-t} , te^{-t} , $\frac{t^2}{2}e^{-t}$; mentre i modi associati agli altri due blocchi sono sempre e^{-t} . Dunque i modi del sistema sono: e^{-t} , te^{-t} , $\frac{t^2}{2}e^{-t}$.

- **Stabilità del sistema:** gli autovalori del sistema sono tutti a parte reale minore di zero, quindi, facendo riferimento alla Tabella 1.1, il sistema è asintoticamente stabile.

1.16 Stabilità del Movimento per Sistemi Non Lineari

La stabilità del movimento di un sistema non lineare è legata alla stabilità del sistema LTI associato ottenuto tramite linearizzazione, come visto nella Sezione 1.9. Questo significa che analizzando la stabilità del sistema linearizzato siamo in grado, nella maggior parte dei casi, di determinare la stabilità dello stato di equilibrio \bar{x} del sistema non lineare.

Teorema 1.2 Lo stato di equilibrio \bar{x} , relativo all'ingresso \bar{u} , di un sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad (1.33)$$

$$y = g(x(t), u(t)) \quad (1.34)$$

è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori del sistema linearizzato corrispondente hanno parte reale negativa. In altri termini, facendo riferimento alla Tabella 1.1, se il sistema linearizzato associato è asintoticamente stabile.

Teorema 1.3 Lo stato di equilibrio \bar{x} , relativo all'ingresso \bar{u} , di un sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad (1.35)$$

$$y = g(x(t), u(t)) \quad (1.36)$$

è instabile se almeno uno degli autovalori del sistema linearizzato corrispondente ha parte reale positiva oppure parte reale nulla e molteplicità algebrica diversa da molteplicità geometrica. In altri termini, facendo riferimento alla Tabella 1.1, se il sistema linearizzato associato è instabile.

Se il sistema linearizzato è marginalmente stabile non siamo in grado di determinare se lo stato di equilibrio \bar{x} relativo al sistema non lineare associato è stabile o instabile.

1.17 Raggiungibilità e Osservabilità

Introduciamo due nuove proprietà di un sistema dinamico, la *raggiungibilità* e l'*osservabilità*. La prima è la capacità di far assumere allo stato di un sistema un valore prefissato agendo sull'ingresso, la seconda è la capacità di trovare il valore dello stato iniziale conoscendo il movimento dell'uscita.

Esempio Sia dato il circuito in Figura 1.5, con variabile d'ingresso u che rappresenta la tensione ai capi del generatore e variabile di uscita y che rappresenta la tensione ai capi di uno dei due condensatori. I due condensatori hanno memoria (accumulano energia), e ne descriviamo la tensione ai capi con le variabili di stato x_1 per il primo e x_2 per secondo, rispettivamente.

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t) - u(t)) \quad (1.37)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t) - u(t)) \quad (1.38)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (1.39)$$

Scegliamo una rappresentazione equivalente delle variabili di stato x_1 e x_2

$$\hat{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (1.40)$$

$$\hat{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (1.41)$$

Il sistema equivalente risultante è

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1(t) - u(t)) \quad (1.42)$$

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = 0 \quad (1.43)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)) \quad (1.44)$$

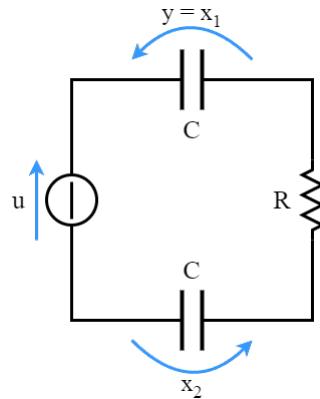


Figura 1.5

Questa rappresentazione evidenzia che è possibile agire su \hat{x}_1 tramite u , ma è impossibile influenzare \hat{x}_2 in quanto non è coinvolto nel calcolo del movimento forzato dell'uscita (Figura 1.6). Da questo esempio deduciamo che tramite

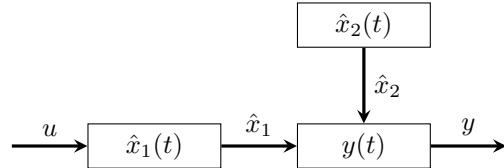


Figura 1.6: Scomposizione in parti del sistema dell'esempio.

un ingresso u non è sempre possibile raggiungere un determinato stato di un sistema. Vogliamo quindi identificare gli stati del sistema non raggiungibili dall'ingresso u .

1.17.1 Raggiungibilità

Sia dato il sistema dinamico di ordine n

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.45)$$

$$y = Cx(t) + Du(t) \quad (1.46)$$

con m ingressi e p uscite.

La raggiungibilità è una proprietà del movimento forzato dello stato così definita.

Definizione 1.7 (Raggiungibilità) Uno stato \tilde{x} del sistema (1.45), (1.46) si dice *raggiungibile* se esistono un istante di tempo finito $\tilde{t} > 0$ e un ingresso \tilde{u} , definito tra 0 e \tilde{t} , tali che, detto $\tilde{x}_f(t)$, $0 \leq t \leq \tilde{t}$, il movimento forzato dello stato generato da \tilde{u} , risulti $\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{x}$. Un sistema i cui stati sono tutti raggiungibili si dice *completamente raggiungibile*.

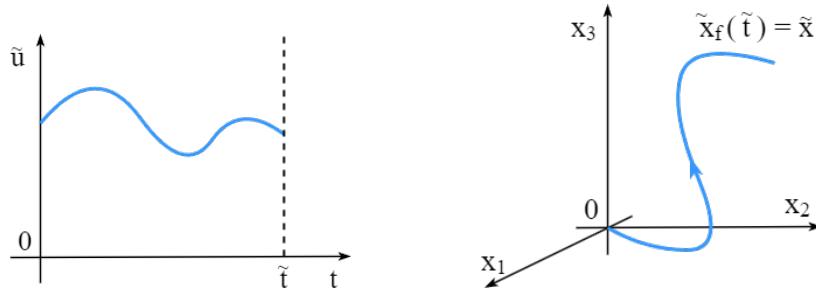


Figura 1.7: raggiungibilità.

Questo significa che \tilde{x} è uno stato raggiungibile se, con un certo ingresso, è possibile passare a quello stato in un tempo finito. È di grande importanza notare che la trasformazione d'uscita non è legata alla proprietà di raggiungibilità, si parla quindi di raggiungibilità della coppia (A, B) della trasformazione di stato.

Per determinare se un sistema è completamente raggiungibile possiamo applicare il Teorema 1.4 che si basa sulla *matrice di raggiungibilità* così definita

$$M_r = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times mn} \quad (1.47)$$

Teorema 1.4 Il sistema sopra descritto è completamente raggiungibile, ovvero la coppia (A, B) è completamente raggiungibile, se e solo se il rango della matrice di raggiungibilità è pari ad n , con n numero di stati, dunque

$$\rho(M_r) = n \quad (1.48)$$

Si evidenzia che se il sistema presenta un singolo ingresso, ovvero $m = 1$, allora la matrice M_r è $n \times n$ e la condizione necessaria e sufficiente (1.48) diventa $\det(M_r) \neq 0$.

Nel caso in cui il sistema non sia completamente raggiungibile, si può isolare la sua «parte» raggiungibile, come mostrato nel teorema seguente, dove $n_r = \rho(M_r)$.

Teorema 1.5 Effettuiamo un cambio di variabili di stato

$$\hat{x}(t) = T_r x(t)$$

con l'equazione di stato nella forma

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (1.49)$$

avente

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r} \quad (1.50)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m} \quad (1.51)$$

$$\rho([\hat{B}_a \ \hat{A}_a \hat{B}_a \ \hat{A}_a^2 \hat{B}_a \ \cdots \ \hat{A}_a^{n_r-1} \hat{B}_a]) = n_r \quad (1.52)$$

Per costruire T_r , selezioniamo n_r colonne linearmente indipendenti in M_r . Ogni stato raggiungibile è combinazione lineare delle colonne selezionate. Le colonne selezionate, moltiplicate per costanti non nulle, vengono poste in T_r^{-1} a precedere altre $n - n_r$ colonne linearmente indipendenti, tali che $\det(T_r^{-1}) \neq 0$.

Partizioniamo il vettore di stato

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_a \in \mathbb{R}^{n_r}$$

L'equazione di stato (1.49), combinata con le equazioni (1.50) e (1.51), si può scrivere nella forma

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \hat{A}_a \hat{x}_a(t) + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b(t) + \hat{B}_a u(t) \quad (1.53)$$

$$\dot{\hat{x}}_b(t) = \hat{A}_b \hat{x}_b(t) \quad (1.54)$$

Le due equazioni soprastanti sono molto importanti e la loro struttura mostra che tutti i movimenti forzati producono $\hat{x}_b(t) = 0$, $t > 0$, dato che u non influisce né direttamente, né indirettamente (tramite \hat{x}_a) mentre scegliendo opportunamente u è possibile far assumere ad \hat{x}_a un qualsiasi valore a un istante di tempo finito. Per questa ragione si dice che \hat{x}_a costituisce la *parte raggiungibile* del sistema mentre \hat{x}_b costituisce la *parte non raggiungibile*. La matrice \hat{A} è triangolare a blocchi, quindi i suoi autovalori sono quelli dei blocchi \hat{A}_a e \hat{A}_b . Gli autovalori di \hat{A}_a sono relativi alla parte raggiungibile mentre quelli di \hat{A}_b appartengono alla parte non raggiungibile.

Esempio (continua) Costruiamo la matrice di raggiungibilità del sistema. Nell'esempio abbiamo una singola variabile d'ingresso (u), che rappresenta la tensione ai capi del generatore, quindi la condizione di completa raggiungibilità si riduce a $\det(M_r) \neq 0$, con M_r pari a 2×2 .

La dinamica di sistema del sistema è data da

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/RC \\ -1/RC & -1/RC \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/RC \\ 1/RC \end{bmatrix} u$$

A questo punto possiamo facilmente ricavare M_r

$$M_r = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1/RC & -2/(RC)^2 \\ 1/RC & -2/(RC)^2 \end{bmatrix}$$

Il determinante di M_r in questo caso è nullo, questo significa che il sistema non è completamente raggiungibile. Per isolare la parte raggiungibile da quella non raggiungibile scegliamo

$$T_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_r^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Risulta

$$\hat{x} = T_r x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

a questo punto vediamo che

$$\hat{A} = T A T^{-1} = \begin{bmatrix} -2/RC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $-2/RC$ è l'autovalore appartenente alla parte raggiungibile mentre 0 è quello relativo alla parte non raggiungibile.

Controllabilità Nei sistemi LTI a tempo continuo la proprietà di raggiungibilità di uno stato \tilde{x} coincide con quella di *controllabilità*, che consiste nella capacità di portare lo stato di un sistema da $x(t_0) = \tilde{x}$ a $x = 0$ in un tempo arbitrario finito a seguito di un'opportuno ingresso.

Se la parte controllabile del sistema è asintoticamente stabile (tutti gli autovalori della parte non controllabile hanno parte reale non positiva) il sistema si dice *stabilizzabile*.

Per un sistema completamente controllabile esiste sempre almeno un ingresso che permette al sistema di spostarsi da uno stato x_a ad un stato x_b .

1.17.2 Osservabilità

Sempre considerando un sistema dinamico di ordine n

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.55}$$

$$y = Cx(t) + Du(t) \tag{1.56}$$

con m ingressi e p uscite, introduciamo la proprietà di osservabilità, legata al movimento libero dell'uscita e così definita.

Definizione 1.8 (Osservabilità) Uno stato $\tilde{x} \neq 0$ del sistema (1.55), (1.56) si dice *non osservabile* se, qualunque sia $\tilde{t} > 0$ finito, detto $\tilde{y}_l(t)$, $t \geq 0$, il movimento libero dell'uscita generato da \tilde{x} , risulta $\tilde{y}_l(t) = 0$, $0 \leq t \leq \tilde{t}$. Un sistema privo di stati non osservabili si dice *completamente osservabile*.

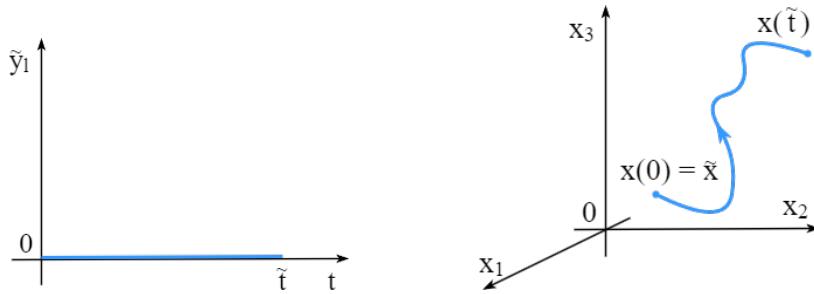


Figura 1.8: osservabilità.

In pratica, uno stato \tilde{x} è non osservabile se l'analisi di un tratto di qualunque durata del movimento libero dell'uscita corrispondente non consente di distinguerlo da $x = 0$. La proprietà di osservabilità è legata alla coppia (A, C) mentre le matrici B e D non hanno nessuna influenza.

Per capire se un sistema è completamente osservabile possiamo applicare il Teorema 1.6 che si riferisce alla *matrice di osservabilità* così definita

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n} \quad (1.57)$$

Teorema 1.6 Il sistema sopra descritto è completamente osservabile, ovvero la coppia (A, C) è completamente osservabile, se e solo se il rango della matrice di osservabilità è pari ad n , con n numero di stati, dunque

$$\rho(M_o) = n \quad (1.58)$$

Se il sistema presenta una sola uscita, ovvero $p = 1$, allora la matrice M_o è $n \times n$ e la condizione necessaria e sufficiente (1.58) diventa $\det(M_o) \neq 0$.

Nel caso in cui il sistema non sia completamente osservabile, è possibile isolare la sua «parte» osservabile, come evidenziato nel teorema seguente, dove $n_o = \rho(M_o)$.

Teorema 1.7 Applichiamo un cambio di variabili

$$\hat{x}(t) = T_o x(t)$$

possiamo porre il sistema, con ingresso nullo, nella forma

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) \quad (1.59)$$

$$y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) \quad (1.60)$$

dove

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o} \quad (1.61)$$

$$\hat{C} = [\hat{C}_a \ 0], \quad \hat{C}_a \in \mathbb{R}^{p \times n_o} \quad (1.62)$$

$$\rho([\hat{C}_a^T \ \hat{A}_a^T \hat{C}_a^T \ \hat{A}_a^{T2} \hat{C}_a^T \ \dots \ \hat{A}_a^{T(n_o-1)} \hat{C}_a^T]) = n_o \quad (1.63)$$

Per costruire T_o selezioniamo $n - n_o$ vettori linearmente indipendenti ξ_i tali che

$$M_o^T \xi_i = 0$$

Ognuno di questi vettori rappresenta uno stato non osservabile ed essi nel complesso descrivono lo spazio di stati non osservabili, ovvero tutti gli stati ottenuti combinando linearmente questi vettori sono non osservabili. I vettori selezionati, moltiplicati per costanti non nulle, vengono posti come colonne in T_o^{-1} preceduti da altre n_o colonne linearmente indipendenti, tali che $\det(T_o^{-1}) \neq 0$.

Se si partiziona il vettore \hat{x} come

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_a \in \mathbb{R}^{n_o}$$

Le equazioni (1.59) e (1.60), combinate con le equazioni (1.61) e (1.62) possono essere riscritte come

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \hat{A}_a \hat{x}_a(t) \quad (1.64)$$

$$\dot{\hat{x}}_b(t) = \hat{A}_{ba} \hat{x}_a(t) + \hat{A}_b \hat{x}_b(t) \quad (1.65)$$

$$y(t) = \hat{C}_a \hat{x}_a(t) \quad (1.66)$$

La struttura di queste equazioni mostra che tutti i movimenti liberi dell'uscita generati da stati iniziali con $\hat{x}_a(0) = 0$ sono nulli, dato che \hat{x}_b non influisce in alcun modo (né direttamente, né indirettamente, tramite \hat{x}_a) mentre un qualunque transitorio di y consente di determinare $\hat{x}_a(0)$. Si dirà quindi che $\dot{\hat{x}}_a$ costituisce la parte osservabile del sistema mentre $\dot{\hat{x}}_b$ la parte non osservabile.

Anche in questo caso, gli autovalori della matrice \hat{A} sono dati dagli autovalori della parte osservabile (relativa a \hat{A}_a) e della parte non osservabile (relativa a \hat{A}_b).

1.17.3 Scomposizione Canonica e Forma Minima

Un sistema dinamico può essere sia non completamente raggiungibile sia non completamente osservabile e può essere scomposto come mostrato nel teorema seguente.

Teorema 1.8 Applicando un cambio di variabili di stato

$$\hat{x}(t) = T_K x(t)$$

è possibile portare un sistema come quello descritto da (1.55), (1.56) nella forma

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} u(t) \quad (1.67)$$

$$y(t) = \hat{C} \hat{x}(t) + D u(t) \quad (1.68)$$

dove

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [0 \quad \hat{C}_b \quad 0 \quad \hat{C}_d] \quad (1.70)$$

con le dimensioni delle sottomatrici in cui sono stati partizionati \hat{x} , \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} che sono congruenti tra loro. Le parti \hat{B}_a e \hat{B}_b di \hat{B} sono le parti raggiungibili del sistema mentre le parti \hat{C}_b e \hat{C}_d di \hat{C} sono le parti osservabili. Da ciò, insieme alle (1.69) e (1.70), è possibile verificare che il sottosistema

$$\dot{\hat{x}}_b(t) = \hat{A}_b \hat{x}_b(t) + \hat{B}_b u(t) \quad (1.71)$$

$$y(t) = \hat{C}_b \hat{x}_b(t) + \hat{D}_b u(t) \quad (1.72)$$

è completamente raggiungibile e osservabile; dato che presenta sia \hat{B}_b , appartenente alla parte raggiungibile, sia \hat{C}_b , che appartiene alla parte osservabile. Per motivi analoghi a quanto detto sopra possiamo invece dire che il sottosistema

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_a(t) \\ \dot{\hat{x}}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_a(t) \\ \hat{x}_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \end{bmatrix} u(t) \quad (1.73)$$

$$y(t) = \hat{C}_b \hat{x}_b(t) + D u(t) \quad (1.74)$$

ha ordine n_r ed è completamente raggiungibile; e infine, il sottosistema

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_b(t) \\ \dot{\hat{x}}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_b & \hat{A}_{bd} \\ 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_b(t) \\ \hat{x}_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.75)$$

$$y(t) = \hat{C}_b \hat{x}_b(t) + \hat{C}_d \hat{x}_d(t) + Du(t) \quad (1.76)$$

ha ordine n_o ed è completamente osservabile.

Le equazioni (1.67) e (1.68) grazie alle equazioni (1.69) e (1.70) si possono scrivere nella forma

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \hat{A}_a \hat{x}_a(t) + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b(t) + \hat{A}_{ac} \hat{x}_c(t) + \hat{A}_{ad} \hat{x}_d(t) + \hat{B}_a u(t) \quad (1.77)$$

$$\dot{\hat{x}}_b(t) = \hat{A}_b \hat{x}_b(t) + \hat{A}_{bd} \hat{x}_d(t) + \hat{B}_b u(t) \quad (1.78)$$

$$\dot{\hat{x}}_c(t) = \hat{A}_c \hat{x}_c(t) + \hat{A}_{cd} \hat{x}_d(t) \quad (1.79)$$

$$\dot{\hat{x}}_d(t) = \hat{A}_d \hat{x}_d(t) \quad (1.80)$$

$$y(t) = \hat{C}_b \hat{x}_b(t) + \hat{C}_d \hat{x}_d(t) + Du(t) \quad (1.81)$$

Gli autovalori della matrice, triangolare a blocchi, \hat{A} sono l'unione di quelli delle matrici \hat{A}_a , \hat{A}_b , \hat{A}_c e \hat{A}_d ¹⁰. Questi sono rispettivamente detti autovalori della parte raggiungibile e non osservabile, autovalori della parte raggiungibile e osservabile, etc. Si parla poi di stabilità, stabilità asintotica e instabilità delle varie parti in cui il sistema è scomposto.

\hat{x} Proprietà

\hat{x}_a raggiungibile, non osservabile

\hat{x}_b raggiungibile, osservabile

\hat{x}_c non raggiungibile, non osservabile

\hat{x}_d non raggiungibile, osservabile

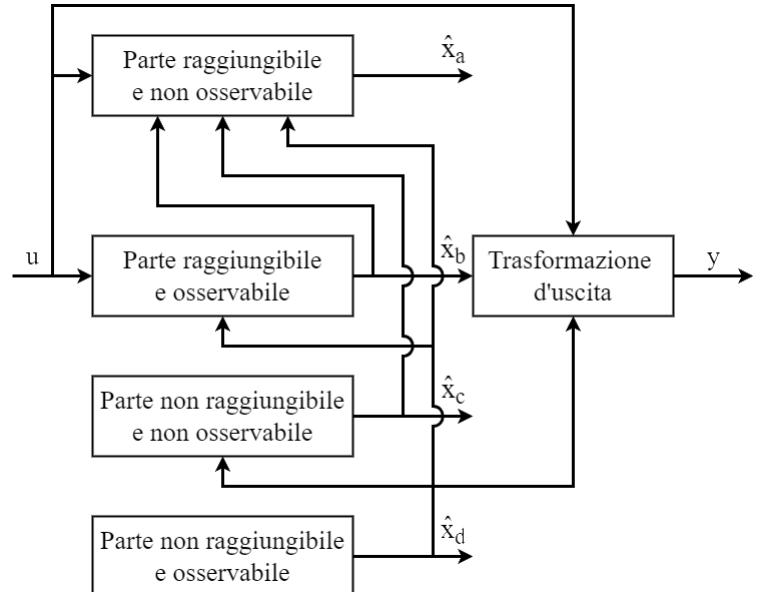


Tabella 1.2: scomposizione canonica o di Kalman.

Figura 1.9

Dalla Figura 1.9 (immagine soprastante) è facile notare che l'unica parte in cui è scomposto il sistema che è influenzata dalla variabile d'ingresso e che condiziona la variabile di uscita è la parte raggiungibile e osservabile (\hat{x}_b). Analizzando il termine $\hat{C} e^{\hat{A}t} \hat{B}$ e sfruttando la triangolarità a blocchi di \hat{A} , si ha

$$\hat{C} e^{\hat{A}t} \hat{B} = [0 \quad \hat{C}_b \quad 0 \quad \hat{C}_d] \begin{bmatrix} e^{\hat{A}_a t} & * & * & * \\ 0 & e^{\hat{A}_b t} & * & * \\ 0 & 0 & e^{\hat{A}_c t} & * \\ 0 & 0 & 0 & e^{\hat{A}_d t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{C}_b e^{\hat{A}_b t} \hat{B}_b$$

indicando i termini che non ci interessa precisare con il simbolo «*». Dunque

$$\hat{C} e^{\hat{A}t} \hat{B} = \hat{C}_b e^{\hat{A}_b t} \hat{B}_b$$

¹⁰Ovviamente in un sistema dinamico non sempre sono presenti tutte e quattro le parti.

Poi sfruttando l'equazione (1.28), per il calcolo delle matrici equivalenti, si ha

$$\hat{C}e^{\hat{A}t}\hat{B}=CT_K^{-1}e^{T_KAT_K^{-1}t}T_KB=CT_K^{-1}T_Ke^{At}T_K^{-1}T_KB=Ce^{At}B$$

perciò

$$Ce^{At}B = \hat{C}_b e^{\hat{A}_b t} \hat{B}_b \quad (1.82)$$

Questo significa che la risposta all'impulso dell'uscita di un sistema è dipendente esclusivamente dalla sua parte raggiungibile e osservabile e non dalle altre tre parti.

Teorema 1.9 Il movimento forzato dell'uscita di un sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.83)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.84)$$

dipende solo dalla parte raggiungibile e osservabile ed è dato da

$$y_f(t) = h(t) \circledast u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \hat{C}_b \int_0^t e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b u(\tau)d\tau + Du(t) \quad (1.85)$$

dove con $h(t)$ indichiamo la risposta impulsiva dell'uscita.

La trasformata di Laplace ci dice che

$$G(s) = \hat{C}_b(sI - \hat{A}_b)^{-1}\hat{B}_b + D$$

quindi la funzione di trasferimento $G(s)$ dipende esclusivamente dalla parte completamente raggiungibile e completamente osservabile. La risposta all'impulso dell'uscita costituisce un modello di *ingresso-uscita* per i sistemi dinamici in forma minima; la sola conoscenza di $h(t)$ permette di calcolare direttamente il movimento forzato dell'uscita, senza che sia necessario utilizzare, o definire, le variabili di stato.

Si noti poi che i poli della funzione di trasferimento sono un sottoinsieme degli autovalori di A . In particolare, questo sottoinsieme è dato dagli autovalori di A appartenenti alla sola parte completamente raggiungibile e completamente osservabile.

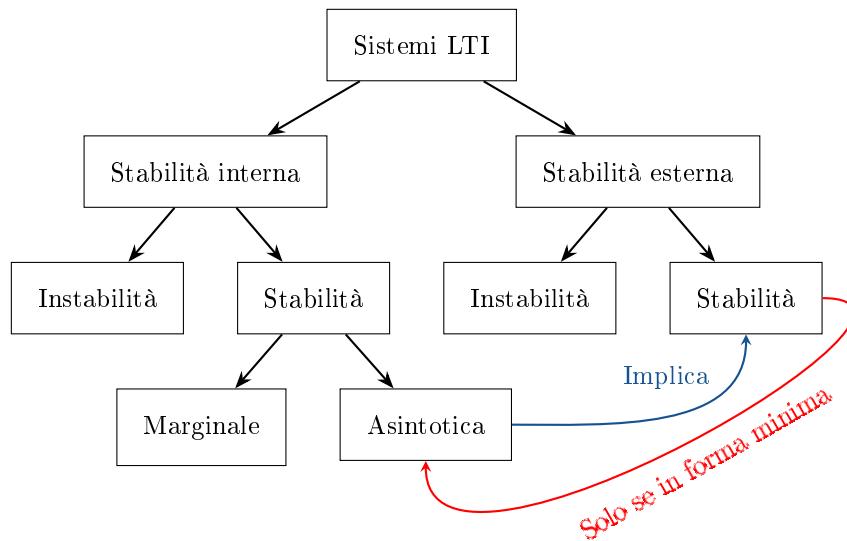


Figura 1.10: Diagramma stabilità sistemi LTI.

Definizione 1.9 (Forma minima) Un sistema raggiungibile e osservabile si dice in *forma minima*. Questo perché non è possibile utilizzare un numero inferiore di variabili di stato per descrivere la stessa relazione tra ingresso e uscita.

Le parti non raggiungibili e/o non osservabili del sistema sono sovrabbondanti se questo deve essere utilizzato solo nello studio del movimento forzato dell'uscita. Non sono invece sovrabbondanti nello studio del movimento libero dell'uscita e/o del movimento dello stato (e.g. analisi della stabilità).

Se un sistema è in forma minima vale inoltre la proprietà che il sistema è esternamente stabile se e solo se è asintoticamente stabile (Figura 1.10) (Stabilità esterna \Leftrightarrow Stabilità asintotica).

1.18 Approfondimento Completa Raggiungibilità e Osservabilità

Esistono alcuni casi particolari in cui la completa raggiungibilità e la completa osservabilità possono essere valutate per ispezione diretta delle matrici A e B per la raggiungibilità e A e C per l'osservabilità.

1.18.1 Matrici A e B per la Completa Raggiungibilità

Caso singolo ingresso (SI) e A diagonale Siano le matrici A e B tali che

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

allora la matrice di raggiungibilità è

$$M_r = \begin{bmatrix} B_1 & \lambda_1 B_1 & \lambda_1^2 B_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} B_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_n & \lambda_n B_n & \lambda_n^2 B_n & \dots & \lambda_n^{n-1} B_n \end{bmatrix}$$

Per essere completamente raggiungibile M_r deve avere rango pieno, ovvero:

- B non deve avere elementi nulli, dato che corrisponderebbero a righe nulle;
- tutti gli autovalori di A devono essere distinti (autovalori uguali corrispondono a righe linearmente dipendenti).

Lemma 1.1 (Lemma PBH (Popov-Belevitch-Hautus) per la completa raggiungibilità) La coppia (A, B) è completamente raggiungibile se e solo se $P(\lambda) := [\lambda I - A \quad B]$ ¹¹ ha rango pieno $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

In particolare, osserviamo che:

- se il coefficiente λ non è autovalore di A : $[\lambda I - A]$ ha rango pieno, dato che $\det(\lambda I - A) = 0$ solo per λ autovalore di A ;
- se il coefficiente $\lambda = \lambda_i$ è autovalore di A : $[\lambda_i I - A]$ non ha rango pieno e $P(\lambda_i)$ potrebbe non avere rango pieno.

Dimostrazione Si consideri un λ_i tale che il rango di $P(\lambda_i)$ non sia pieno (i.e. $\rho(P(\lambda_i)) < n$) e pari a n , ovvero la dimensione della matrice quadrata A , allora

$$\exists q \neq 0 : q^T P(\lambda_i) = q^T [\lambda_i I - A \quad B] = 0$$

da cui

$$q^T A = \lambda_i q^T \tag{1.86}$$

$$q^T B = 0 \tag{1.87}$$

Post-moltiplicando la (1.86) per B si ha

$$q^T AB = \lambda_i \underset{\substack{\text{0} \\ \text{---}}}{} q^T B = 0 \tag{1.88}$$

¹¹ $P(\lambda)$ ha dimensione $n \times (n + m)$.

per la (1.87). Post-moltiplicando (1.86) per AB si ha

$$q^T A^2 B = \lambda_i \underset{\text{0}}{\overline{q^T AB}} = 0 \quad (1.89)$$

dalla (1.88), quindi

$$q^T [B \ AB \ A^2 B \ \cdots \ A^{n-1} B] = q^T M_r = 0 \quad (1.90)$$

Possiamo concludere che M_r non ha rango pieno n e di conseguenza il sistema non è completamente raggiungibile.

Questo teorema può essere dimostrato anche nel verso opposto.

* * *

Caso ingresso multiplo (MI) e A in forma di Jordan Per questa casistica ci avvaliamo del Lemma 1.1. Applichiamo il lemma al caso di (A, B) con A in forma di Jordan avente p blocchi.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} \\ \vdots \\ B_{1,m_1} \\ \vdots \\ B_{p,1} \\ \vdots \\ B_{p,m_p} \end{bmatrix}$$

dunque

- se il coefficiente λ non è autovalore di A : $[\lambda I - A]$ ha rango pieno;
- se il coefficiente $\lambda = \lambda_i$ è autovalore di A : $[\lambda_i I - A]$ ha tante righe nulle quanti sono i blocchi di Jordan corrispondenti a λ_i , ovvero pari alla sua molteplicità geometrica (m.g.).

Le righe di B corrispondenti alle righe nulle di $[\lambda_i I - A]$ sono B_{i,m_i} . Affinché la matrice $P(\lambda_i) = [\lambda_i I - A \ B]$ mantenga rango pieno per tutti gli autovalori di A , tutte le ultime righe B_{i,m_i} dei blocchi corrispondenti allo stesso autovalore λ_i devono essere linearmente indipendenti.

Esempio Siano date le seguenti matrici A e B

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice B_1 è completamente raggiungibile, infatti ci sono due righe linearmente indipendenti (verde) relative all'autovalore $\lambda_1 = -1$ e una colonna diversa da zero (blu) relativa all'autovalore $\lambda_2 = 2$. La matrice B_2 è non completamente raggiungibile, è relativa a un single input (SI) con due blocchi di Jordan corrispondenti allo stesso λ_i ; come per B_2 , la matrice B_3 è non completamente raggiungibile, anche se multiple input, perché ha due righe associate a uno stesso autovalore λ_i linearmente dipendenti.

Si noti attentamente che un sistema con singolo ingresso e A in forma di Jordan per godere di completa raggiungibilità deve necessariamente avere $m.g = 1 \forall \lambda_i$. B deve inoltre avere tanti elementi diversi da zero quanti sono gli autovalori distinti di A (in corrispondenza delle ultime righe dei relativi blocchi di Jordan).

Condizione necessaria ma non sufficiente di raggiungibilità Un sistema con μ_i blocchi associati allo stesso autovalore λ_i può essere completamente raggiungibile con almeno μ_i ingressi.

1.18.2 Matrici A e C per la Completa Osservabilità

Lemma 1.2 (Lemma PBH (Popov-Belevitch-Hautus) per la completa osservabilità) La coppia (A, C) è completamente osservabile se e solo se $P_o(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$ ha rango pieno $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Similmente a prima, applichiamo il Lemma 1.2 al caso di (A, C) con A in forma di Jordan avente p blocchi e C così definita

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,m_1} & \cdots & C_{p,1} & C_{p,2} & \cdots & C_{p,m_p} \end{bmatrix}$$

le prime colonne $C_{i,mi}$ dei blocchi corrispondenti allo stesso autovalore λ_i devono essere linearmente indipendenti per avere la completa osservabilità.

Caso singolo output (SO) Per essere completamente osservabile è necessario che:

- C abbia tanti elementi diversi da zero quanti sono gli autovalori distinti (in corrispondenza delle prime colonne dei relativi blocchi di Jordan);
- tutti gli autovalori di A siano distinti ($m.g = 1 \forall \lambda_i$).

Condizione necessaria ma non sufficiente di osservabilità Un sistema con μ_i blocchi associati allo stesso autovalore λ_i può essere completamente osservabile con almeno μ_i uscite.

Esempi Date

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0 \ 1 \ 1], \quad C_2 = [1 \ 0 \ 1]$$

Il sistema è non completamente osservabile con C_1 , dato che ha uno zero come prima colonna, mentre è completamente osservabile con C_2 .

Date

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ 0 \ 1], \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è non completamente osservabile con C_1 , dato che ha un autovalore $\lambda = -2$ con $m.g = 2$ e singolo output, mentre è completamente osservabile con C_2 visto che ha due colonne linearmente indipendenti (azzurro), relative allo stesso autovalore.

CAPITOLO 2

METODO DI LYAPUNOV

2.1 Matrici Definite e Semidefinite in Segno

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice reale quadrata. La funzione

$$w^T A w , \quad w \in \mathbb{R}^n$$

si dice *forma quadratica* associata alla matrice A . La matrice A è detta *nucleo* della forma quadratica. Si noti che la forma quadratica dipende esclusivamente dalla parte simmetrica A_s del nucleo, risulta quindi

$$w^T A w = w^T A_s w$$

Per questo motivo si assume che il nucleo sia simmetrico.

Matrice semidefinita/definita positiva La matrice A si dice *definita positiva* se la forma quadratica a essa associata è positiva per tutti i vettori w non nulli, ovvero

$$w^T A w > 0 , \quad \forall w \neq 0$$

si dice invece *semidefinita positiva* se

$$w^T A w \geq 0 , \quad \forall w$$

Matrice semidefinita/definita negativa La matrice A si dice *semidefinita/definita negativa* se $-A$ è rispettivamente semidefinita/definita positiva.

In generale per sapere se una matrice simmetrica (quindi con autovalori reali) è definita o semidefinita si può far riferimento alle seguenti proprietà:

- una matrice simmetrica è definita positiva (negativa) se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi (negativi).
- una matrice simmetrica è semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti i suoi autovalori sono non negativi (non positivi).

Criterio di Sylvester Una matrice simmetrica è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali di guida¹ sono positivi. Invece, è definita negativa se e solo se tutti i suoi minori principali di guida sono negativi, se il loro ordine è dispari, e positivi, se il loro ordine è pari.

¹Un minore principale di guida è un minore (determinante di una sottomatrice quadrata) ottenuto togliendo le ultime $n - r$ righe e colonne, con r ordine della matrice. Per una matrice quadrata $n \times n$ vi sono n minori principali di guida.

Esempio La matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è definita positiva, dato che i determinanti

$$\det(2) = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 6, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

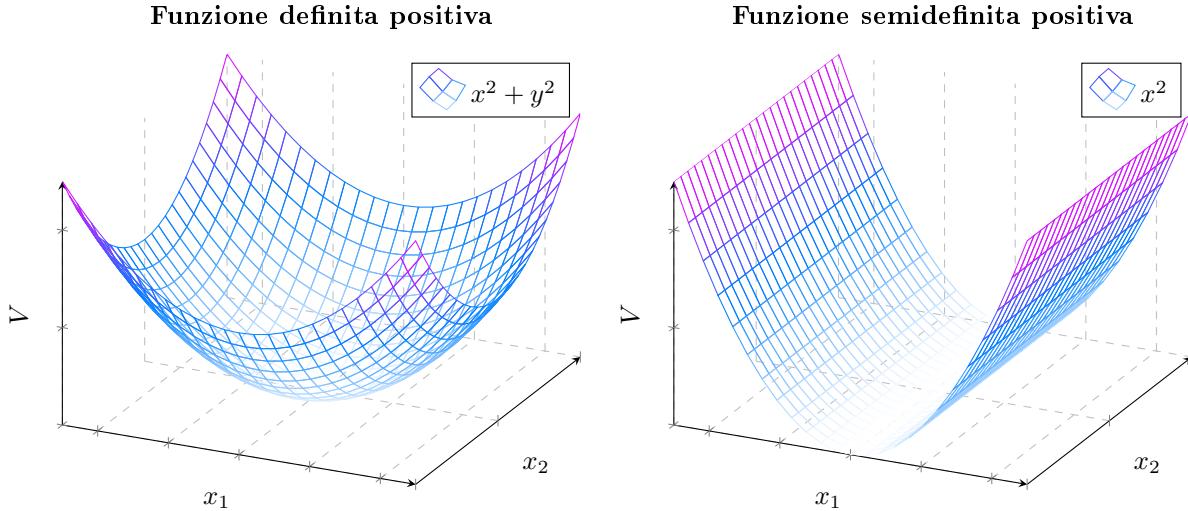
sono tutti positivi.

2.2 Metodo di Lyapunov

Il metodo di Lyapunov permette di studiare la stabilità di uno stato di equilibrio senza dover ricorrere alla linearizzazione o all'integrazione dell'equazione di stato. Prima di trattare il metodo è però necessario introdurre alcune definizioni, relative a funzioni scalari di vettori, fondamentali per la comprensione e l'applicazione del metodo stesso.

Funzione definita positiva Una funzione reale scalare $V(x)$ del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si dice *definita positiva* in x se si annulla in $x = x$ e assume valori strettamente positivi in tutti gli altri punti di un suo intorno.

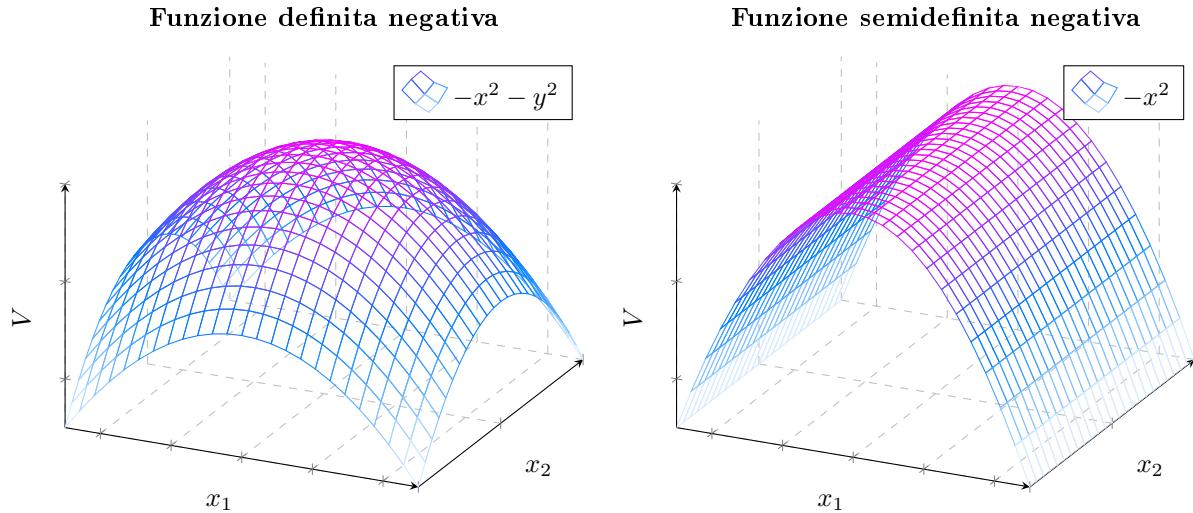
Funzione semidefinita positiva Una funzione reale scalare $V(x)$ del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si dice *semidefinita positiva* in x se si annulla in $x = x$ e assume valori positivi o nulli in un suo intorno.



Funzione definita negativa Una funzione reale scalare $V(x)$ del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si dice *definita negativa* in x se si annulla in $x = x$ e assume valori strettamente negativi in tutti gli altri punti di un suo intorno.

Funzione semidefinita negativa Una funzione reale scalare $V(x)$ del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si dice *semidefinita negativa* in x se si annulla in $x = x$ e assume valori negativi o nulli in un suo intorno².

²Un'altra definizione valida per le funzioni semidefinite/definite negative è che la funzione $-V(x)$ sia rispettivamente semidefinita/definita positiva.



2.2.1 Stato di Equilibrio Non Nullo

Si consideri \bar{x} stato di equilibrio ($f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$). Data una funzione scalare $V(x)$, si definisce la sua derivata rispetto al tempo lungo il movimento del sistema con la formula

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} f(x, \bar{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x, \bar{u}) \quad (2.1)$$

Questa definizione richiede ovviamente la continuità di V con la sua derivata in un intorno di $x = \bar{x}$. Introduciamo ora il *criterio di stabilità di Lyapunov* tramite i seguenti teoremi.

Teorema 2.1 Se esiste una funzione $V(x)$ definita positiva in \bar{x} e tale che $\dot{V}(x)$ sia semidefinita negativa in \bar{x} , allora lo stato \bar{x} è uno stato di equilibrio stabile del sistema.

Teorema 2.2 Se esiste una funzione $V(x)$ definita positiva in \bar{x} e tale che $\dot{V}(x)$ sia definita negativa in \bar{x} , allora lo stato \bar{x} è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile del sistema.

Teorema 2.3 Se esiste una funzione $V(x)$ definita positiva in \bar{x} e tale che $\dot{V}(x)$ sia semidefinita positiva in \bar{x} , allora lo stato \bar{x} è uno stato di equilibrio instabile del sistema.

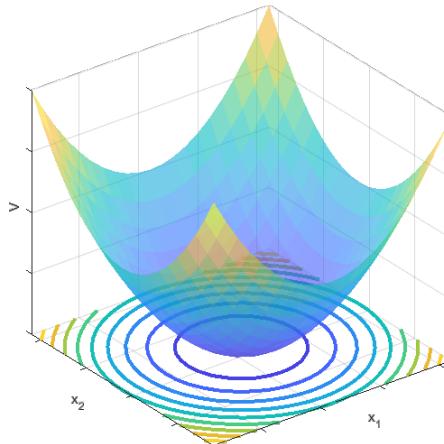


Figura 2.1: rappresentazione nello spazio (x_1, x_2, V) di una funzione definita positiva con linee di livello nel piano (x_1, x_2) .

2.2.2 Scelta della funzione V

$V(x)$ può essere scelta come funzione che descrive l'energia del sistema oppure in forma quadratica. La forma quadratica $V(x) = x^T M x$ è definita positiva in $x = 0$ se e solo se M è simmetrica e definita positiva. È invece definita negativa in $x = 0$ se e solo se M è simmetrica e definita negativa³.

2.3 Applicazione ai Sistemi Lineari

Vediamo adesso l'applicazione della teoria di Lyapunov a sistemi LTI considerando

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

e ponendo $u(t) = \bar{u} = 0$, in modo tale che il suo stato nullo sia di equilibrio. Studiando la stabilità di questo movimento nullo del sistema LTI sto studiando stabilità del sistema stesso. Introduciamo l'*equazione di Lyapunov*

$$A^T P + PA = -Q \quad (2.3)$$

che ci serve per enunciare il seguente teorema.

Teorema 2.4 Il sistema LTI (2.2) è asintoticamente stabile se e solo se, per una qualsiasi matrice Q simmetrica e definita positiva, l'equazione di Lyapunov (2.3) ammette una soluzione P simmetrica e definita positiva.

Presi infatti una matrice P simmetrica definita positiva che soddisfa l'equazione (2.3) e una funzione di Lyapunov definita positiva

$$V(x) = x^T Px$$

con derivata definita negativa, dalle equazioni (2.2) e (2.3) si ricava che

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{d(x^T Px)}{dt} = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = \\ &= x^T A^T Px + x^T PAx = x^T (A^T P + PA)x = -x^T Qx \end{aligned}$$

³Per maggiori dettagli riguardo forme quadratiche, matrici definite e semidefinite in segno si guardi la Sottosezione 2.1.

CAPITOLO 3

TRASFORMATA DI LAPLACE

La trasformata di Laplace è una trasformazione integrale che converte una funzione f a variabili *reali* (e.g. tempo) in una funzione a variabili *complesse* $s = \sigma + j\omega$. Essa assume come funzioni base sinusoidi generalizzate, la cui ampiezza varia con il tempo in maniera esponenziale, rappresentabili come

$$e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{-(\sigma+j\omega)t} = e^{-st} \quad (3.1)$$

il cui andamento indicativo è mostrato in Figura 3.1.

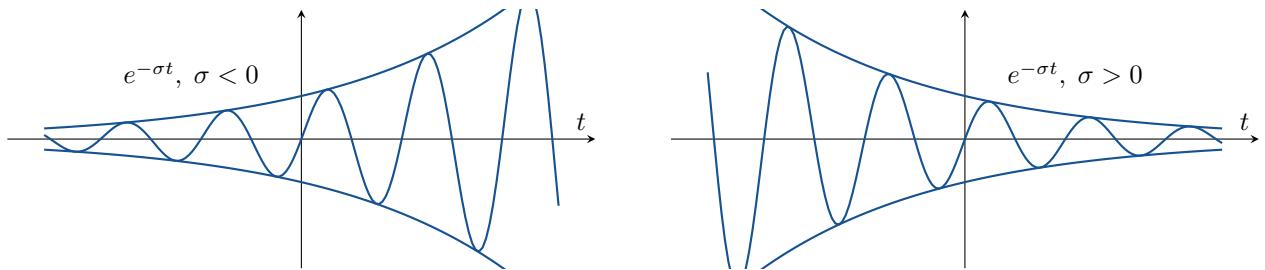


Figura 3.1: Andamento delle sinusoidi generalizzate.

La trasformata di Laplace di una funzione è così definita¹

$$\mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (3.2)$$

e permette di trattare funzioni nulle per $t < 0$, non tenendo quindi conto dell'andamento di queste per tempi negativi. Da ciò possiamo dedurre che funzioni con un diverso andamento per tempi negativi, ma lo stesso andamento per tempi positivi avranno la stessa trasformata di Laplace.

La trasformata solitamente si indica con la stessa lettera, però maiuscola, della funzione trasformanda e si scrive

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \end{aligned}$$

Antitrasformata di Laplace La funzione trasformanda $f(t)$ può essere ricavata dalla sua trasformata tramite la *formula di antitrasformazione*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}ds \quad (3.3)$$

Nel paragrafo precedente abbiamo discusso di come funzioni diverse, con stesso andamento per tempi positivi, abbiano la stessa trasformata di Laplace; quindi potrebbe sorgere il dubbio di come è possibile svolgere l'antitrasformazione e risalire alla $f(t)$ iniziale se esistono infinite funzioni che danno luogo alla stessa trasformata. Si noti però che la definizione di trasformata di Laplace presenta anche un fattore $u(t)$, ovvero la funzione gradino. Questo significa che esiste, ed è unica, l'antitrasformata di Laplace di tutta la famiglia di funzioni che hanno la stessa trasformata di Laplace e corrisponde a una funzione nulla per tempi negativi.

Esempio Data la funzione $f(t) = e^{-at}$ calcoliamone la trasformata di Laplace. Riprendendo la definizione della trasformata otteniamo

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t}dt$$

A questo punto possiamo calcolare l'integrale indefinito

$$= \frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} \Big|_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-(a+s)} = \frac{1}{s+a}$$

¹In questo caso con $u(t)$ si indica la funzione gradino e non un segnale di ingresso generico.

Caratteristiche della trasformata di Laplace La trasformata di Laplace presenta diverse proprietà che possono aiutarci nell'analisi di sistemi:

1. converte problemi differenziali in problemi algebrici;
2. ci permette di collegare un singolo ingresso a una singola uscita;
3. possiamo rappresentare sistemi interconnessi tramite dei diagrammi di blocco (vedere più avanti);

In particolare, l'operazione di *convoluzione*, computazionalmente complessa nel dominio temporale, nel dominio di Laplace diventa un prodotto di funzioni.

3.1 Dominio di Laplace

Abbiamo visto che la trasformata di Laplace sfrutta sinusoidi generalizzate la cui ampiezza varia esponenziale nel tempo, secondo la (3.1). Possiamo quindi scomporre segnali nel dominio temporale in funzioni sinusoidali ed esponenziali. La frequenza generalizzata $s = \sigma + j\omega$, è la variabile complessa che, nel dominio di Laplace, viene usata per tenere conto dell'aspetto esponenziale e sinusoidale dei segnali, in particolare:

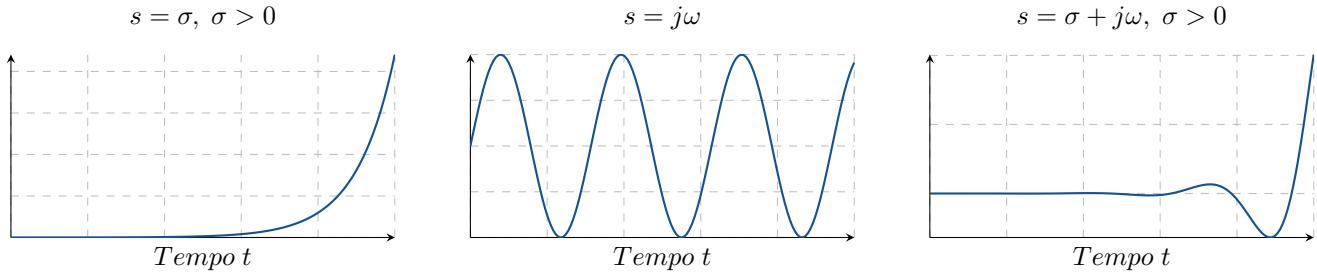
- σ è un numero reale che rappresenta l'aspetto *esponenziale* del segnale;
- ω è un numero reale che rappresenta l'aspetto *sinusoidale* del segnale.

Segnali con solo parte reale ($s = \sigma$) sono esponenziali crescenti, se $\sigma < 0$, o decrescenti, $\sigma > 0$. Invece, quando è presente la sola componente immaginaria ($s = j\omega$) si ha un segnale oscillatorio, dato che per la formula di Eulero

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \quad (3.4)$$

Nel suo caso generale ($s = \sigma + j\omega$) il segnale è oscillatorio con ampiezza crescente/decrescente nel tempo.

Quindi l'equazione e^{-st} è semplicemente una funzione esponenziale moltiplicata per una sinusode.



Possiamo rappresentare s nel piano complesso, identificando nell'asse reale l'aspetto esponenziale del segnale mentre nell'asse immaginario la frequenza dell'oscillazione, in modo tale che il valore di s identifichi un punto nel piano e descriva il segnale risultante (e^{-st}) come funzione di ω e σ (Figura 3.2).

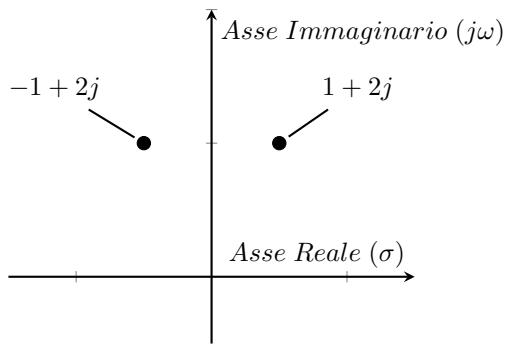


Figura 3.2: Punti $\pm 1 + 2j$ nel piano complesso.

3.2 Proprietà

La trasformata di Laplace gode di molte proprietà. Di seguito sono riportate le più importanti che sono utili per calcolare trasformate senza ricorrere alla definizione (3.2).

Linearità Date due funzioni $f(t)$ e $g(t)$, per un qualunque α e per un qualunque β risulta

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad (3.5)$$

Traslazione nel tempo Per un qualunque tempo $\tau > 0$ si ha che $f(t - \tau)$

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad (3.6)$$

Traslazione nel dominio di Laplace Per un qualunque α , la trasformata di $e^{\alpha t} f(t)$ è

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha) \quad (3.7)$$

Derivazione nel tempo Si supponga che la funzione $f(t)$ sia derivabile per tutti i $t \geq 0$. Risulta allora

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0) \quad (3.8)$$

In generale

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \left. \frac{d^{i-1} f(t)}{dt^{i-1}} \right|_{t=0} \quad (3.9)$$

Quindi se la funzione e le sue derivate sono nulle in $t = 0$, moltiplicare per s nel dominio di Laplace equivale a derivare nel dominio del tempo, cioè s si può interpretare come *operatore di derivazione*.

La formula (3.9) è iterabile e consente il calcolo delle trasformate delle derivate successive di f , ammesso che esistano. Ad esempio per la derivata seconda

$$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s\mathcal{L}[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0) = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (3.10)$$

Integrazione nel tempo Si supponga che la funzione $f(t)$ sia integrabile tra 0 e $+\infty$. Allora

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (3.11)$$

quindi dividere per s nel dominio di Laplace equivale a integrare nel dominio del tempo e $\frac{1}{s}$ può essere interpretato come *operatore di integrazione*.

Convoluzione nel tempo Date due funzioni f_1 e f_2 , il loro *prodotto di convoluzione* è

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \eta) f_2(\eta) d\eta = f_2(t) * f_1(t) \quad (3.12)$$

Se esse sono nulle per tempi negativi, allora

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \eta) f_2(\eta) d\eta = f_2(t) * f_1(t) \quad (3.13)$$

e si trova

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) F_2(s) \quad (3.14)$$

* * *

Nella tabella sottostante sono riassunte le proprietà sopra discusse.

Proprietà	Dominio temporale (t)	Dominio di Laplace (s)
Linearità	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$
Traslazione nel Tempo	$f(t - \tau)$	$e^{-\tau s} F(s)$
Traslazione in Laplace	$f(t)e^{\alpha t}$	$F(s - \alpha)$
Derivazione prima	$\dot{f}(t)$	$sF(s)$
Derivazione seconda	$\ddot{f}(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
Integrazione	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
Convoluzione	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
Valore iniziale	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$
Valore finale	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sf(s)$

Tabella 3.1: proprietà principali della trasformata di Laplace

3.3 Segnali Canonici

Nello studio di sistemi dinamici a tempo continuo si fa spesso riferimento a *segnali canonici*:

$$\text{sca}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{ram}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{par}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2/2, & t \geq 0 \end{cases}$$

Questi sono chiamati rispettivamente *scalino*, *rampa* e *parabola* e la relazione tra essi è

$$\int_{-\infty}^t \text{sca}(\tau)d\tau = \text{ram}(t), \quad \int_{-\infty}^t \text{ram}(\tau)d\tau = \text{par}(t) \tag{3.15}$$

Altri segnali canonici si possono ottenere iterando l'integrazione della parabola. Introduciamo poi la funzione *impulso di Dirac*, o semplicemente *impulso*, definita come

$$\text{imp}(t) = 0, \quad t \neq 0 \tag{3.16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{imp}(t)dt = 1 \tag{3.17}$$

Intuitivamente si può ritenere che questa funzione sia un segnale di durata estremamente breve e ampiezza estremamente elevata («infinita»)². Si osservi che, data una qualunque funzione $\varphi(t)$ continua in $t = \tau$, per la (3.16) risulta

$$\varphi(t)\text{imp}(t - \tau) = \varphi(\tau)\text{imp}(t - \tau)$$

²La funzione impulso può essere indicata anche come $\delta(t)$ mentre la funzione scalino (o gradino) può essere indicata anche come $u(t)$ o $1(t)$.

e quindi per la (3.17)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \text{imp}(t - \tau) dt = \varphi(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{imp}(t - \tau) dt = \varphi(\tau) \quad (3.18)$$

Inoltre, dalle equazioni (3.16), (3.17) risulta che, almeno per $t \neq 0$

$$\int_{-\infty}^t \text{imp}(\tau) d\tau = \text{sca}(t) \quad (3.19)$$

3.3.1 Trasformate dei Segnali Canonici

Vediamo adesso le trasformate dei segnali canonici appena introdotti.

Trasformata dell'impulso Sia $f(t) = \text{imp}(t)$; allora, qualunque sia s , per l'equazione (3.18) si ha

$$\mathcal{L}[\text{imp}(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \text{imp}(t) e^{-st} dt = e^{-s0} = 1$$

Trasformata del gradino Sia $f(t) = \text{sca}(t)$. In questo caso si ha

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \int_0^{+\infty} \text{sca}(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{s} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} - \lim_{t \rightarrow 0} e^{-st} \right) = \frac{1}{s}$$

Trasformata della rampa Si noti che $\text{ram}(t) = t \text{sca}(t)$ e quindi

$$\mathcal{L}[\text{ram}(t)] = -\frac{d(1/s)}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

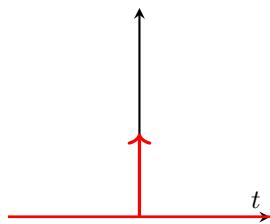
Trasformata della parabola Visto che

$$\text{par}(t) = \int_0^t \text{ram}(\tau) d\tau$$

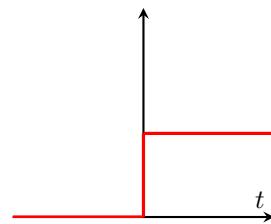
si ottiene

$$\mathcal{L}[\text{par}(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[\text{ram}(t)] = \frac{1}{s^3}$$

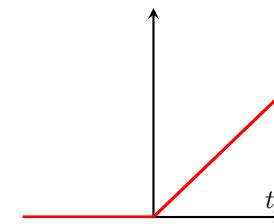
Funzione impulso



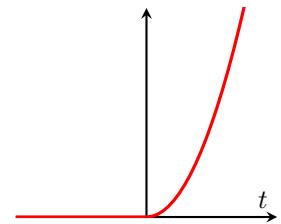
Funzione gradino



Funzione rampa



Funzione parabola



3.4 Scomposizione in Fratti Semplifici

Quella che viene ora introdotta è una tecnica che permette di antitrasformare senza ricorrere all'utilizzo della formula (3.3). In generale, per trovare l'inversa di una trasformata razionale possiamo suddividere tale funzione in una somma di termini più semplici, dei quali conosciamo le antitrasformate. Tale metodo è chiamato *scomposizione in fratti semplici*. A partire dalla funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.20)$$

In base al grado di numeratore $N(s)$ e denominatore $D(s)$ distinguiamo due casi:

$f(t)$	$F(s)$
imp	1
sca	$\frac{1}{s}$
ram	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{(s - a)}$
t^n	$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)(n + 1)}$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{(s - a)}{(s - a)^2 + b^2}$
$e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s - a)^2 - b^2}$
$e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{(s - a)}{(s - a)^2 - b^2}$

Tabella 3.2: trasformate di Laplace di funzioni semplici

- se il grado di $N(s)$ è minore del grado di $D(s)$, possiamo applicare la scomposizione in fratti semplici;
- se il grado di $N(s)$ è maggiore o uguale al grado di $D(s)$, allora dobbiamo dividere $N(s)$ per $D(s)$ fino a che il risultato non ha un resto il cui numeratore è di ordine inferiore rispetto a quello del denominatore.

Lo scopo è espandere $F(s)$ in un somma di funzioni per le quali conosciamo già la trasformazione inversa, poi grazie alla linearità possiamo semplicemente sommarle per ottenere l'inversa dell'intera funzione.

3.4.1 Passaggi della Scomposizione

Supponiamo che il grado di $N(s)$ sia minore del grado di $D(s)$.

Passo 1 Rendere *monico* il polinomio al denominatore $D(s)$; questo significa che il termine s con esponente maggiore (al massimo pari al grado di $D(s)$) al denominatore deve avere come coefficiente moltiplicativo 1.

Passo 2 Fattorizzare il polinomio al denominatore $D(s)$, in modo tale da evidenziare le radici. Una volta trovate le radici, possiamo scrivere

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{s - p_i} \quad (3.21)$$

I termini P_i prendono il nome di *residui* e per calcolarli sfruttiamo il Teorema 3.1.

Teorema 3.1 (Teorema dei residui) L' i -esimo residuo P_i della (3.21) può essere calcolato come

$$P_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s) \quad (3.22)$$

3.4.2 Poli del Denominatore

Poli reali e distinti Supponiamo di avere tutti *poli reali e distinti* e porre nell'equazione (3.20)

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s + p_i), \quad p_h \neq p_j \text{ per } h \neq j \quad (3.23)$$

con p_i radici del denominatore; questo perché dall'ipotesi che i poli siano tutti reali e distinti, ogni fattore è nella forma $s + p_i$. Possiamo trovare i residui P_i in modo che sia soddisfatta l'identità

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{s + p_i} \quad (3.24)$$

Per calcolarli applichiamo il Teorema 3.1 e moltiplichiamo quindi per $(s + p_i)$, da cui

$$(s + p_i) F(s) = \frac{N(s)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (s + p_j)} \equiv (s + p_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{P_j}{s + p_j} + P_i$$

ponendo quindi $s = -p_i$ otteniamo

$$P_i = \frac{N(-p_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (p_j - p_i)} = [(s + p_i) F(s)] \Big|_{s=-p_i} \quad (3.25)$$

Una volta ricavati gli n residui P_i di $F(s)$ nei poli $-p_i$, si ottiene che l'antitrasformata di $F(s)$ è³

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{s + p_i} \right] = \left(\sum_{i=1}^n P_i e^{-p_i t} \right) u(t) \quad (3.26)$$

* * *

Prima eccezione - funzione propria Quando $F(s)$ è propria, ovvero è data dal rapporto di due polinomi dello stesso grado, il Teorema 3.1 non fornisce valori corretti, quindi non possiamo applicarlo.

Per far fronte a questa situazione dobbiamo necessariamente abbassare il grado del numeratore e rendere $F(s)$ strettamente propria; questo attraverso una divisione tra numeratore e denominatore. Una volta eseguita la divisione e ottenuti quoziente e resto possiamo sfruttare la proprietà di linearità dell'antitrasformata e calcolare le antitrasformate singolarmente per poi sommarle e trovare l'antitrasformata della somma.

In generale, quando il grado di $N(s)$ è maggiore del grado di $D(s)$ si ha che il loro rapporto è un numero reale (corrispondente al quoziente) più il resto. Quando si antitrasforma un numero reale si ottiene un impulso $\delta(t)$, ovvero un segnale di durata infinitesima e ampiezza infinita. Questa in un sistema corrisponderebbe a una grandezza fisica di valore infinito, requisito incompatibile con la fisica realizzabilità. Nel caso in cui il grado di $N(s)$ sia superiore a $D(s)$ compariranno derivate di $\delta(t)$, con problemi analoghi, se non peggiori.

* * *

³Per il calcolo ci si può aiutare consultando la Tabella 3.2, relativa alle trasformate di funzioni semplici.

Seconda eccezione - poli reali multipli Quando $F(s)$ ha poli multipli la scomposizione è simile al caso precedente.

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s + p_1) \cdots (s + p_i)^{n_i} \cdots (s + p_\mu)}$$

Assumendo che i poli distinti siano μ e che il polo $-p_i$ abbia molteplicità n_i , esso si può scrivere come

$$D(s) = \prod_{i=1}^{\mu} (s + p_i)^{n_i}, \quad p_h \neq p_j \text{ per } h \neq j$$

La trasformata si sviluppa nella forma

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{\mu} (s + p_i)^{n_i}} \equiv \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} \frac{P_{i,h}}{(s + p_i)^h} \quad (3.27)$$

dove $P_{i,1}$ è ancora detto residuo del polo $-p_i$. Questa formula generalizza la formula (3.24). Moltiplicando per $(s + p_i)^{n_i}$ si ottiene

$$(s + p_i)^{n_i} F(s) = \frac{N(s)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mu} (s + p_j)^{n_j}} \equiv (s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq i}}^{n_i} \frac{P_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s + p_i)^{n_i-h} P_{i,h} \quad (3.28)$$

e sostituendo $s = -p_i$ otteniamo

$$P_{i,n_i} = \frac{N(-p_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mu} (p_j - p_i)^{n_j}} = [(s + p_i)^{n_i} F(s)] \Big|_{s=-p_i}$$

Derivando l'equazione (3.28) rispetto a s e valutando ancora per $s = -p_i$, si ha

$$P_{i,n_i-1} = \frac{d[(s + p_i)^{n_i} F(s)]}{ds} \Big|_{s=-p_i}$$

e in generale si ricava

$$P_{i,h} = \frac{1}{(n_i - h)!} \frac{d^{n_i-h} [(s + p_i)^{n_i} F(s)]}{ds^{n_i-h}} \Big|_{s=-p_i} \quad (3.29)$$

A questo punto, come nel caso precedente, ricavati i $P_{i,h}$ e sfruttando la Tabella 3.2 e la proprietà di derivazione⁴ si ottiene

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} \frac{P_{i,h}}{(s + p_i)^h} \right] = \left(\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} P_{i,h} \frac{t^{h-1} e^{-p_i t}}{(h-1)!} \right) \text{sca}(t) \quad (3.30)$$

Esempio

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

Le radici di $(s+2)^2$ del denominatore sono multiple, dato che il fattore è moltiplicato per una potenza intera maggiore di 1. In questo caso, la radice del denominatore -2 ha molteplicità 2.

Possiamo scrivere la scomposizione in fratti semplici come una somma di termini, dove ogni fattore forma il denominatore di ogni termine. In aggiunta, ogni radice multipla genera dei termini in più che consistono in fattori del denominatore di molteplicità ridotta.

Nel nostro caso

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

Possiamo ottenere K_1 in modo analogo al caso precedente, e troviamo $K_1 = 2$. K_2 lo troviamo moltiplicando l'equazione precedente per $(s+2)^2$

$$\frac{2}{(s+1)} = \frac{K_1(s+2)^2}{(s+1)} + K_2 + K_3(s+2)$$

⁴Facendo le derivate successive si possono isolare i residui della scomposizione delle radici multiple.

Quando $s = -2$, $K_2 = -2$. Infine, K_3 possiamo ricavarlo derivando l'equazione precedente rispetto alla variabile s

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{2(s+2)K_1}{(s+1)^2} + K_3$$

Dalla quale K_3 può essere isolato e trovato ponendo $s = -2$; il risultato è $K_3 = -2$.

Tornando alla funzione di trasferimento iniziale $F(s)$, sostituiammo i valori di K_1 , K_2 e K_3 che abbiamo trovato

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{(s+1)} + \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{-2}{(s+2)}$$

L'antitrasformata è quindi

$$y(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

* * *

Terza eccezione - Poli complessi Nel caso in cui non tutti i poli siano reali si possono usare le stesse tecniche adottate per la scomposizione in fratti semplici di poli reali. In questo caso, per il calcolo dell'antitrasformata si ha

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3.31)$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3.32)$$

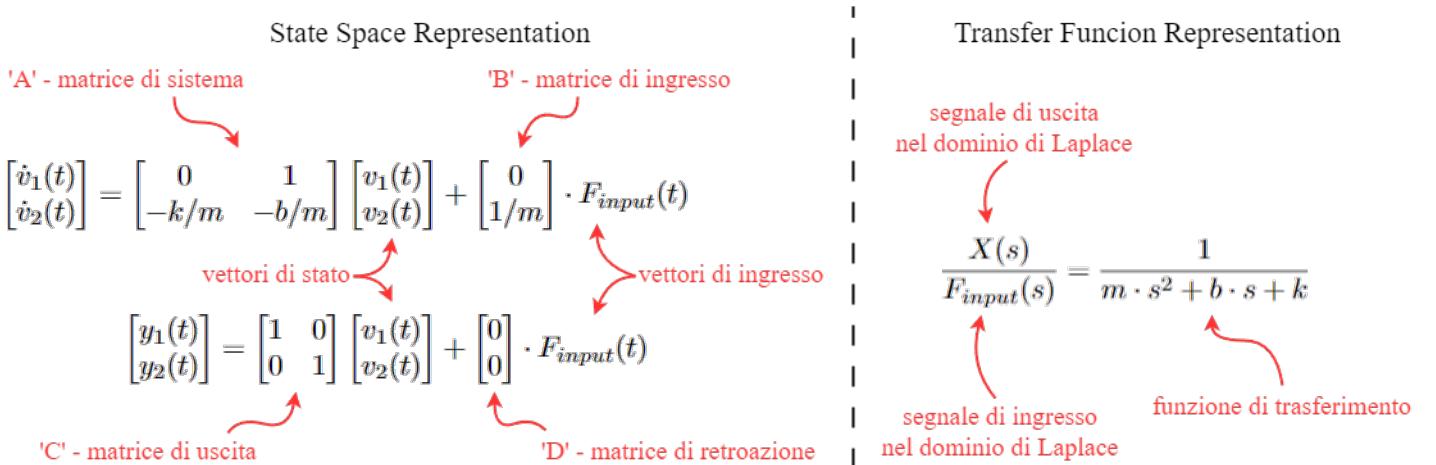
CAPITOLO 4

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

I sistemi possono essere descritti in due modi:

- rappresentazione a **spazio di stati**;
- rappresentazione con **funzione di trasferimento**.

Ogni rappresentazione ha i propri vantaggi e svantaggi. La rappresentazione in forma di stato è una rappresentazione del sistema sotto forma di matrice nel dominio temporale. La rappresentazione con funzione di trasferimento mette in relazione tra loro le trasformate di Laplace delle variabili di ingresso e di uscita nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle. Precedentemente abbiamo approfondito la rappresentazione in forma di stato e introdotto la rappresentazione con



funzione di trasferimento. Adesso andremo ad approfondire proprio quest'ultima. Per controllare un sistema è molto più semplice usare la funzione di trasferimento, in quanto possiamo comprenderne l'andamento nel tempo.

4.1 Definizione

Si consideri un sistema LTI nella forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.2)$$

Applicando la trasformazione di Laplace alle equazioni soprastanti otteniamo

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

da cui, isolando $X(s)$ e $Y(s)$ si ottiene

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0) \\ G(s) \\ | \\ Y(s) &= (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$(4.2)$$

La matrice $G(s)$ evidenziata sopra è detta *funzione di trasferimento* e, moltiplicata a destra per la trasformata di Laplace dell'ingresso u , genera la trasformata di Laplace dell'uscita y corrispondente allo stato iniziale nullo. Quindi per condizioni iniziali nulle il sistema può essere descritto con la *rappresentazione ingresso-uscita*

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (4.3)$$

È importante tenere presente che la funzione di trasferimento è una rappresentazione esterna del sistema, al contrario della forma di stato che ne è una rappresentazione interna.

Nel caso particolare di sistemi SISO la funzione di trasferimento può essere vista come il rapporto tra le trasformate di Laplace dell'uscita e dell'ingresso che l'ha prodotta. Sempre considerando sistemi SISO di ordine n , considerando un particolare ingresso $u(t) = \text{imp}(t)$, dato che $U(s) = 1$, dall'equazione (4.3) risulta $Y(s) = G(s)$, ovvero la funzione di trasferimento si può interpretare come la trasformata di Laplace della risposta all'impulso. Questa osservazione si può facilmente generalizzare ai sistemi MIMO.

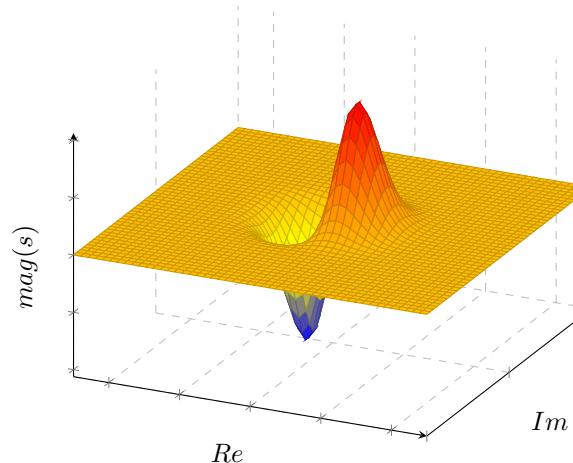
4.1.1 Poli e Zeri

Con riferimento ai sistemi SISO¹ descritti da

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{\beta_v s^v + \beta_{v-1} s^{v-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_v s^v + \alpha_{v-1} s^{v-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

si può dire che \hat{s} è uno *zero* di $G(s)$ se ne annulla il numeratore, ovvero se è tale che $N(\hat{s}) = 0$, mentre è un *polo* di $G(s)$ se ne annulla il denominatore, quindi se $D(\hat{s}) = 0$. I poli del sistema $G(s)$ sono, generalmente, un sottoinsieme delle radici dell'equazione $\det(sI - A) = 0$. I poli e gli zeri possono essere sia reali che complessi coniugati a coppie (in quanto i coefficienti α_i e β_i sono reali). In generale ci si riferisce a poli e zeri con il termine *singolarità*.

Visualizzazione polo e zero nel piano complesso



¹Nel caso di sistemi MIMO le definizioni sono più complesse.

Si osservi che sono le stesse radici del polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = 0$, questo significa che i poli del sistema sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice della dinamica A .

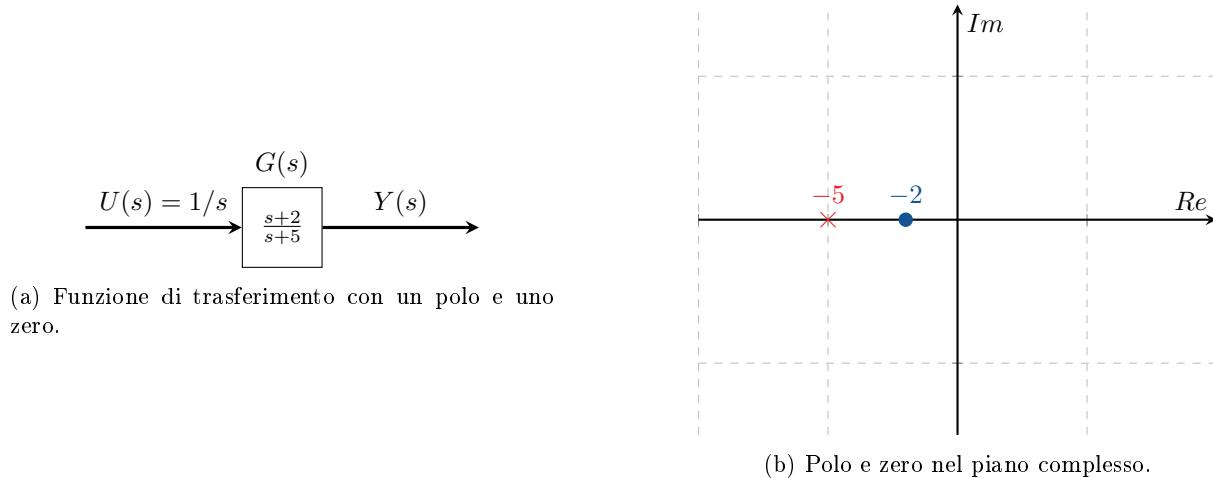


Figura 4.1

4.2 Matrice di Trasferimento

Nella sottosezione 4.1 (vedi sopra) abbiamo introdotto $G(s)$, ovvero la funzione di trasferimento (o *matrice di trasferimento*) e adesso andremo a studiarla con maggior dettaglio. La matrice di trasferimento si presenta nella forma

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4.4)$$

Ogni elemento della matrice esprime una relazione dinamica tra un ingresso e un'uscita. In particolare, ogni elemento della matrice è una funzione di trasferimento $g_{ij}(s)$ che collega l'ingresso u_j con l'uscita y_i

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(s) & \cdots & g_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

Essendo ogni $g_{ij}(s)$ una funzione di trasferimento tra singolo ingresso e singola uscita, possiamo rappresentarla nella forma numeratore e denominatore: $g_{ij}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$.

Matrice Aggiunta Nel calcolo della matrice di trasferimento $G(s)$ è richiesto il calcolo dell'inversa di $(sI - A)$; in un caso semplice non è difficile calcolare quest'ultima, ma non è sempre così, vediamo adesso una tecnica generale per il calcolo di matrici inverse più complesse. La *matrice aggiunta*, indicata con $\text{adj}(A)$, di una matrice quadrata $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è definita come

$$\text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T \quad (4.5)$$

con $\text{cof}_{i,j}(A)$ *cofattore* di A in posizione i,j tale che

$$\text{cof}_{i,j}(A) := (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

quindi $\text{cof}(A)$ è la matrice dei *cofattori* di A :

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} \text{cof}_{1,1}(A) & \cdots & \text{cof}_{1,n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cof}_{n,1}(A) & \cdots & \text{cof}_{n,n}(A) \end{pmatrix}$$

La matrice aggiunta è utile perché ci permette di calcolare l'inversa di una matrice tramite la formula

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \quad (4.6)$$

Possiamo quindi esprimere la matrice di trasferimento esplicitando l'inversa di $(sI - A)$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)B}{\det(sI - A)} + D$$

Raggiungibilità e osservabilità Per ogni $g_{ij}(s)$, i poli trovati sono i soli autovalori raggiungibili dall'ingresso u_j e osservabili dall'uscita y_i ².

Matrice di trasferimento per sistemi SISO Quando un sistema è di tipo SISO, sono presenti un singolo ingresso u ed una singola uscita y , il sistema e la matrice di trasferimento si trovano nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases}$$

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

con $c \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ scalari.

Definizione 4.1 (Stabilità Esterna) Un sistema è *esternamente stabile*, o BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) stabile se, per ogni ingresso limitato, c'è un'uscita limitata. Più formalmente, un sistema è detto BIBO stabile se esistono due costanti positive finite M e B tali che, per ogni ingresso $u(t)$ che soddisfa $|u(t)| \leq B$, l'uscita corrispondente $y(t)$ soddisfa $|y(t)| \leq M$. Un sistema lineare è BIBO stabile se e solo se i poli della funzione di trasferimento hanno parte reale minore di zero.

Definizione 4.2 (Stabilità Marginale) Un sistema è marginalmente stabile se ha una risposta oscillatoria infinita (i.e. una sinusoide con frequenza e ampiezza costanti).

Margini di Stabilità Anche se un sistema è stabile, dinamiche non considerate nel modello o la variazione di parametri possono renderlo instabile. I margini di stabilità rendono possibile la valutazione della robustezza di un sistema a queste variazioni³.

4.3 Stabilità di Sistema e Funzione di Trasferimento

La stabilità di un sistema lineare può essere determinata direttamente a partire dalla sua funzione di trasferimento. Un sistema dell' n -esimo ordine è asintoticamente stabile solo se tutte le sue componenti, in risposta a un insieme finito di condizioni iniziali, decadono a zero col passare del tempo, più formalmente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} = 0$$

dove p_i sono i poli del sistema. Per un sistema lineare modellato attraverso la sua funzione di trasferimento $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, abbiamo bisogno di analizzare le radici dell'equazione caratteristica $D(s) = 0$.

Come già discusso precedentemente un sistema è stabile se tutte le radici dell'equazione caratteristica, ovvero i poli del sistema hanno parte reale negativa: $\operatorname{Re} p_i < 0$.

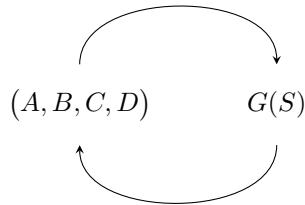
È importante notare che la stabilità dipende esclusivamente dalla struttura del sistema stesso (matrice A).

4.4 Realizzazione

Precedentemente è stato trattato il procedimento per passare da forma di stato a funzione di trasferimento. Il problema della *realizzazione* consiste nell'ottenere un modello in variabili di stato equivalente a partire dal modello con funzione di trasferimento $G(s)$.

²La matrice di trasferimento $G(s)$ include tutti e soli autovalori completamente raggiungibili e osservabili.

³Un eccesso di stabilità potrebbe non essere una cosa buona, un sistema troppo stabile tenderà a non spostarsi dall'equilibrio anche quando dovrebbe.



Essendo il problema molto complesso ci limiteremo a considerare solo sistemi SISO, che ricordiamo essere descritti da

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (4.7)$$

Al contrario del passaggio da forma di stato a funzione di trasferimento, che ha soluzione unica, una realizzazione ha infinite soluzioni equivalenti (descritte da diverse quadruple di matrici A, B, C e D della rappresentazione di stato).

Introduciamo ora due *forme canoniche*, ovvero strutture particolari per le matrici A, B, C e D , che sono caratterizzate dall'avere tutti gli elementi indipendenti dai valori α_i e β_i , eccetto $2n+1$ parametri liberi.

4.4.1 Forma Canonica di Raggiungibilità

Prendiamo l'equazione (4.7) e riscriviamola, in particolare

$$N_G(s) = \beta_n D_G(s) + (\hat{\beta}_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}) s^{n-1} + \cdots + (\hat{\beta}_1 - \beta_n \alpha_1) s + (\hat{\beta}_0 - \beta_n \alpha_0)$$

quindi

$$G(s) = \frac{\hat{\beta}_{n-1} s^{n-1} + \hat{\beta}_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \hat{\beta}_1 s + \hat{\beta}_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \hat{\beta}_n \quad (4.8)$$

dove

$$\hat{\beta}_n = \beta_n, \quad \hat{\beta}_i = \beta_i - \alpha_i \beta_n, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (4.9)$$

La *forma canonica di raggiungibilità* è caratterizzata dalle matrici A, B, C e D nella seguente forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$C = [\hat{\beta}_0 \ \hat{\beta}_1 \ \hat{\beta}_2 \ \cdots \ \hat{\beta}_{n-1}], \quad D = \hat{\beta}_n \quad (4.11)$$

Il nome di questa realizzazione deriva dal fatto che, per costruzione, il sistema che essa definisce è sempre completamente raggiungibile. L'osservabilità è legata a eventuali polinomi a fattore comune (cancellazioni) tra $N_G(s)$ e $D_G(s)$; nello specifico, questa è presente se $N_G(s)$ e $D_G(s)$ sono primi tra loro (assenza di cancellazioni). Essendo completamente raggiungibile, le cancellazioni saranno relative alla parte non osservabile.

4.4.2 Forma Canonica di Osservabilità

Un'alternativa alla rappresentazione (4.8) è la *forma canonica di osservabilità*, definita da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1], \quad D = \hat{\beta}_n \quad (4.13)$$

In questo caso il sistema è sempre completamente osservabile e la raggiungibilità è legata all'ipotesi che $N_G(s)$ e $D_G(s)$ siano primi tra loro (assenza di cancellazioni), in modo analogo a quanto visto con la forma canonica di raggiungibilità, ma con osservabilità e raggiungibilità aventi ruoli invertiti.

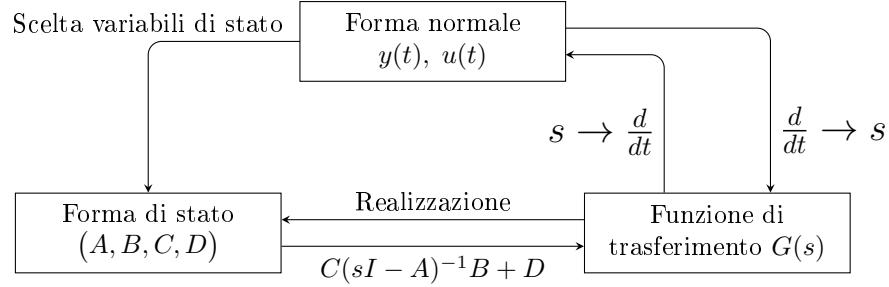


Figura 4.2: Rappresentazioni dei sistemi dinamici e relazioni corrispondenti.

CAPITOLO 5

DIAGRAMMI A BLOCCHI

I diagrammi a blocchi sono una rappresentazione grafica standard di sistemi e sottosistemi interconnessi tra loro che risulta utile nell'analisi dei sistemi dinamici, lineari e stazionari. Questa rappresentazione semplifica il calcolo della funzione di trasferimento tra una variabile di ingresso e una variabile di uscita del sistema. Inoltre, i diagrammi a blocchi mostrano le relazioni interne dei sistemi e come i segnali li attraversano.

Questi diagrammi utilizzano la seguente simbologia:

- **variabile/segnale:** freccia (\rightarrow);
- **sistema:** blocco al cui interno è specificata una funzione di trasferimento e aventi una freccia entrante (variabile di ingresso) e una freccia uscente (variabile d'uscita);
- **nodo sommatore:** cerchio con diverse frecce entranti (ognuna con relativo segno $+/ -$) e una freccia uscente; indica che la variabile associata alla freccia uscente è data dalla somma algebrica delle variabili associate alle frecce entranti (tenendo conto dei relativi segni);
- **punto di ramificazione:** rappresenta due o più variabili, identificate da frecce uscenti, aventi lo stesso valore della variabile da cui si diramano.

Di seguito, assumeremo di avere a che fare con variabili scalari e sottosistemi SISO.

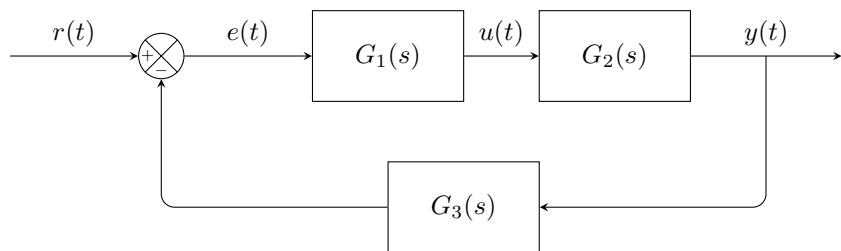


Figura 5.1: Diagramma a blocchi di un generico sistema retroazionato.

5.1 Algebra dei Diagrammi a Blocchi

I diagrammi a blocchi possono essere anche molto complessi, è quindi utile sapere come calcolare la funzione di trasferimento tra uno specifico ingresso e una specifica uscita. Esistono dei casi base che verranno approfonditi di seguito: Cascata, Parallelo e Retroazione.

L'algebra dei diagrammi a blocchi ci permette di analizzare i casi di sistemi complessi, gestendoli ricorsivamente, ovvero dividendo il sistema in sottosistemi più semplici da trattare.

Blocchi in Serie

Due sistemi

$$Y_1(s) = G_1(s)U_1(s)$$

$$Y_2(s) = G_2(s)U_2(s)$$

si dicono in *serie*, o *cascata*, quando l'uscita y_1 del primo coincide con l'ingresso u_2 del secondo, come rappresentato in Figura 5.2. Considerando $u(t) = u_1(t)$ e $y(t) = y_2(t)$ come ingresso e uscita del sistema complessivo, si ha

$$Y(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

Quindi la funzione di trasferimento complessiva è

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

In generale con n sistemi in serie risulta

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \cdots G_n(s)$$

Quindi la $G(s)$ è data dal prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli sottosistemi.



Figura 5.2: Sistemi in serie.

Blocchi in Parallello I due sistemi visti sopra si dicono in *parallello* se ogni blocco vede in ingresso lo stesso segnale (che si assume ingresso del sistema complessivo) e le loro uscite vanno a sommarsi e generare l'uscita del sistema complessivo, come mostrato in Figura 5.3.

Risulta

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s) = (G_1(s) + G_2(s))U(s)$$

possiamo quindi rappresentare il sistema complessivo come

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

che nel caso generale con n sistemi in parallello diventa

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \cdots + G_n(s)$$

Quindi la $G(s)$ è data dalla somma delle funzioni di trasferimento dei singoli sottosistemi.

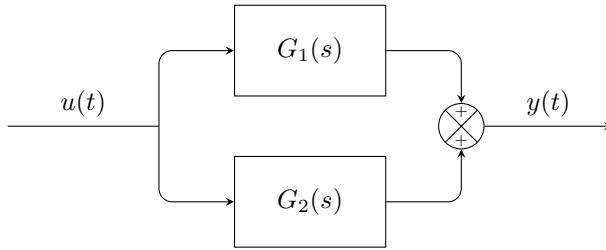


Figura 5.3: Sistemi in parallello.

Blocchi in Retroazione Se i due sistemi sono collegati come mostrato in Figura 5.4 si dicono in connessi in *retroazione* e compongono un sistema *in anello chiuso* o *retroazionato*. In questo caso, risulta

$$Y(s) = G_1(s)U_1(s) \tag{5.1}$$

$$U_1(s) = U(s) - Y_2(s) \tag{5.2}$$

$$Y_2(s) = G_2(s)Y(s) \tag{5.3}$$

Alternativamente scritto

$$Y(s) = G_1(s)(U(s) - Y_2(s)) = G_1(s)(U(s) - G_2(s)Y(s))$$

Espandendo il secondo membro si ha

$$Y(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

da cui si può facilmente ricavare, raccogliendo $Y(s)$

$$Y(s)(1 + G_1(s)G_2(s)) = G_1(s)U(s)$$

La funzione di trasferimento equivalente $G(s)$ risulta quindi essere

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

ovvero è data dal rapporto tra la funzione di trasferimento del sottosistema che appare lungo la linea di andata tra u e y (*feedforward*) e la somma tra 1 e la *funzione di trasferimento d'anello*

$$L(s) = G_1(s)G_2(s)$$

definita come il prodotto delle funzioni di trasferimento dei due sottosistemi: feedforward e feedback, presenti lungo l'anello.

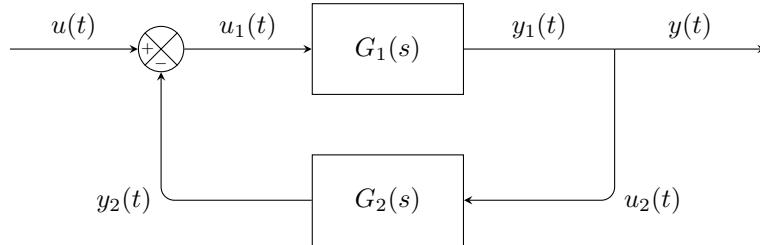


Figura 5.4: Sistemi in retroazione negativa. Per avere retroazione positiva il segno della variabile $y_2(t)$ in entrata al nodo sommatore dovrebbe essere sommata e non sottratta all'ingresso. Nel caso di retroazione positiva la $G(s)$ complessiva risulta essere

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}$$

Retroazione Unitaria La retroazione unitaria è una situazione in cui l'anello di retroazione è composto soltanto da un filo, dunque l'uscita torna in ingresso inalterata (Figura 5.5).

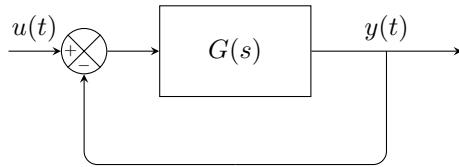


Figura 5.5: Sistema in retroazione unitaria.

5.2 Cancellazioni

Quando si mettono insieme dei sottosistemi ci si aspetta che l'ordine del sistema risultante sia dato dalla somma degli ordini dei sottosistemi che lo compongono. È però possibile che un sistema composto sia di grado inferiore rispetto alla somma delle sue componenti e che quindi la sua funzione di trasferimento abbia meno poli. Questo è dovuto a

cancellazioni ottenute per effetto della connessione, che corrispondono a parti «nascoste» del sistema. Infatti, essendo una funzione di trasferimento una relazione tra ingresso e uscita, alcune componenti intermedie potrebbero non essere visibili.

Esempio Dati due sistemi

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s}$$

collegati come in Figura 5.6, ci aspettiamo che il sistema complessivo sia del secondo ordine. Applichiamo le regole di elaborazione viste, ottenendo

$$G(s) = G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)} = \frac{s+1}{s+2} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+2}$$

che ha un solo polo, dunque è presente una parte nascosta. Questa non è visibile dalla relazione ingresso-uscita e dà luogo a un sistema che si comporta come se fosse del primo ordine.

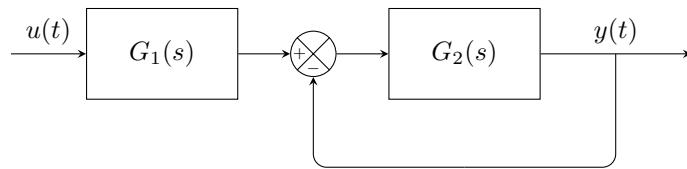


Figura 5.6: Sistema a blocchi dell'esempio.

5.3 Stabilità dei Sistemi Interconnessi

Analizziamo la stabilità di un sistema composto da sottosistemi, approfondendo in quali situazioni la stabilità asintotica dei singoli sottosistemi rappresenti una condizione sufficiente e/o necessaria a garantire la stabilità asintotica del sistema complessivo. Questo assumendo che ognuno dei sottosistemi sia rappresentato da funzioni razionali con numeratore e denominatore primi tra loro.

5.3.1 Stabilità Blocchi in Serie

Si consideri il sistema di Figura 5.2 descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

In assenza di cancellazioni, il denominatore di $G(s)$ è dato dal prodotto dei denominatori dei sottosistemi e i poli di $G(s)$ sono l'unione dei poli dei sottosistemi. In questo caso $G(s)$, e quindi il sistema, è asintoticamente stabile se e solo se i poli di $G_1(s)$ e $G_2(s)$ hanno parte reale minore di zero, ovvero se i sottosistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono individualmente asintoticamente stabili.

In presenza di cancellazioni il sistema complessivo ha un numero di poli inferiore alla somma del numero di poli dei sottosistemi ed è presente una parte nascosta corrispondente a una cancellazione. Bisogna porre attenzione al fatto che se la cancellazione ha interessato poli con parte reale positiva o nulla, allora la parte nascosta è instabile e così l'intero sistema; se una parte nascosta è instabile il sistema complessivo potrebbe sembrare erroneamente stabile, è quindi necessario fare molta attenzione e verificare che non siano avvenute cancellazioni critiche.

Le cancellazioni sono dette *critiche* se in seguito a una semplificazione algebrica si perdono informazioni sulla stabilità del sistema complessivo. Queste semplificazione non devono essere fatte in quanto non visibili direttamente dalla funzione di trasferimento.

5.3.2 Stabilità Blocchi in Parallello

La funzione di trasferimento risultante da due sistemi in parallelo (Figura 5.3) è

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

L'analisi della stabilità per sistemi in parallelo è identica a quella dei sistemi in serie.

5.3.3 Stabilità Blocchi in Retroazione

Si consideri il sistema di Figura 5.4 descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

Il caso d'interconnessione di sottosistemi retroazionati è diverso dai precedenti, in quanto i poli del sistema equivalente non sono dati dai soli poli dei sottosistemi (come accade in serie e in parallelo), ma anche dai numeratori (quindi anche dagli zeri dei sottosistemi). Infatti, i poli del sistema complessivo, o poli in anello chiuso, sono le radici dell'equazione

$$D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) = D_L(s) + N_L(s) = 0$$

anche detta *equazione caratteristica del sistema retroazionato*, che può essere riscritta come

$$1 + \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = 1 + L(s) = 0$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se le radici dell'equazione caratteristica hanno parte reale negativa. La stabilità in questo caso non dipende dalla stabilità dei singoli sottosistemi, ma dalla struttura del sistema complessivo; ne consegue che un sistema instabile può essere costituito da sottosistemi individualmente stabili. Inoltre, dato che i poli di un sistema retroazionato sono generalmente differenti da quelli dei singoli sottosistemi, possiamo posizionare dei poli in modo da modificare le dinamiche di un sistema (e.g. per stabilizzare un sistema instabile oppure per raggiungere specifiche performance).

È possibile che l'equazione caratteristica dia luogo a cancellazioni critiche, sempre corrispondenti a parti nascoste di sistema; come per i casi precedenti, in caso di cancellazioni con parte reale non negativa, le parti nascoste di sistema non sono asintoticamente stabili e neanche l'intero sistema. In questo caso specifico, prima di analizzare la stabilità del sistema retroazionato dobbiamo verificare che non avvengano cancellazioni critiche nel calcolo della funzione d'anello $L(s)$.

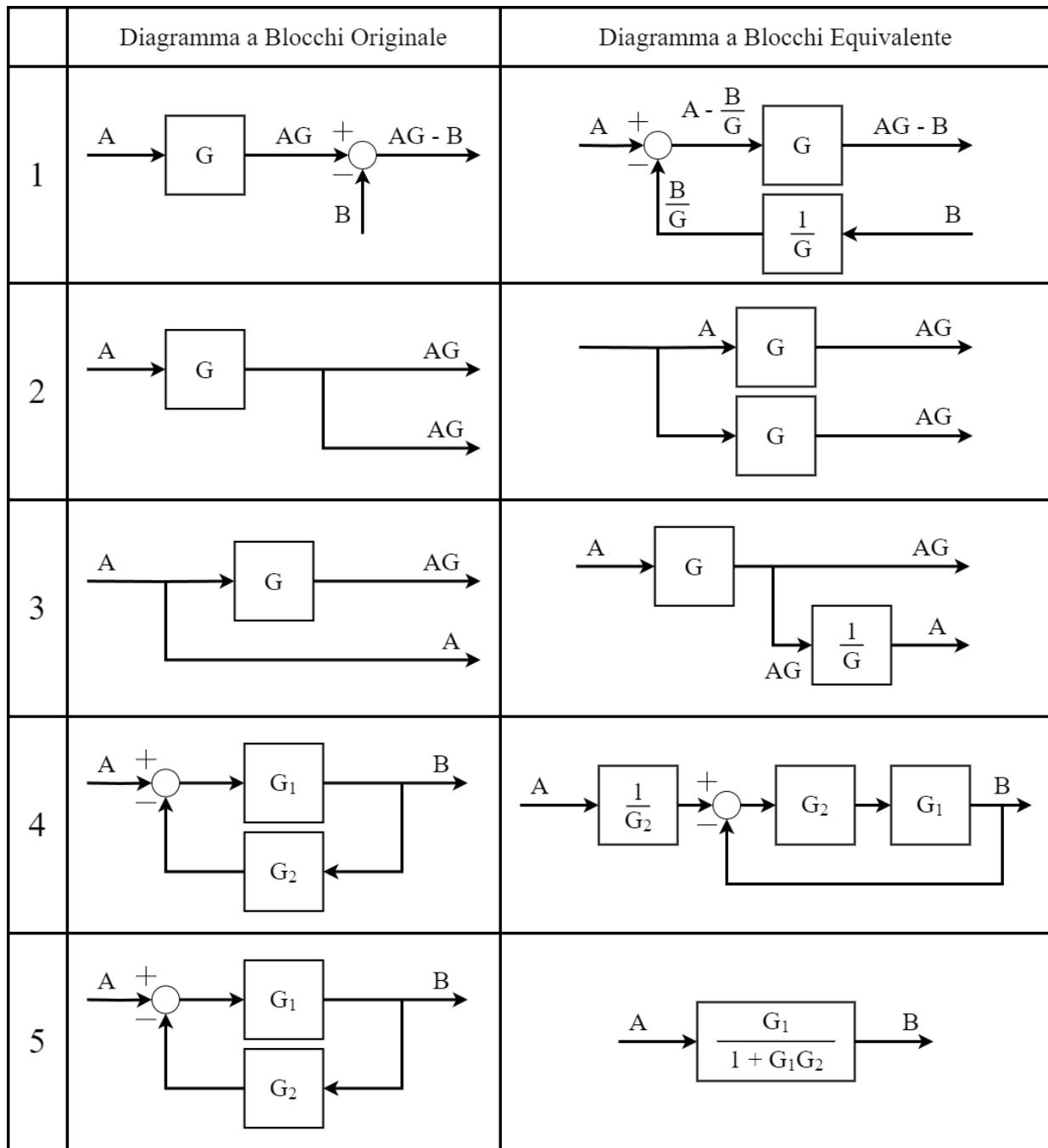


Figura 5.7: Diagrammi a blocchi equivalenti.

5.4 Raggiungibilità e Osservabilità dei Sistemi Interconnessi

Rivolgendo la nostra attenzione alle proprietà di raggiungibilità e osservabilità all'interno di un sistema descritto da uno schema a blocchi, ci possiamo chiedere quali sono le condizioni per far sì che dei sottosistemi in forma minima interconnessi producano un sistema complessivo in forma minima.

La presenza di parti nascoste, ovvero non raggiungibili e/o non osservabili, è evidenziata dall'ordine del denominatore della funzione di trasferimento complessiva se questo è inferiore all'ordine del sistema, ovvero al numero di variabili di stato. Vediamo quali sono le condizioni che generano sistemi in forma non minima.

Blocchi in Serie Quando si verificano delle cancellazioni dobbiamo capire se le parti nascoste generate sono non raggiungibili o non osservabili. Possiamo distinguere due casi di cancellazione

- **cancellazione zero-polo:** quando uno zero di $G_1(s)$ cancella un polo di $G_2(s)$ si genera una parte non raggiungibile e osservabile;
- **cancellazione polo-zero:** quando un polo di $G_1(s)$ cancella uno zero di $G_2(s)$ si genera una parte raggiungibile e non osservabile.

Blocchi in Parallello Nel caso di sistemi composti da blocchi in parallelo si dimostra che quando $G_1(s)$ e $G_2(s)$ hanno dei poli in comune si genera un parte sia non raggiungibile che non osservabile.

Blocchi in Retroazione Nel caso di sistemi retroazionati si dimostra che

- **cancellazione zero-polo:** quando uno zero di $G_1(s)$ coincide con un polo di $G_2(s)$ si genera una parte contemporaneamente non raggiungibile e non osservabile.
- **cancellazione polo-zero:** quando un polo di $G_1(s)$ coincide con uno zero di $G_2(s)$ il sistema rimane completamente raggiungibile e osservabile, questo perché il grado del denominatore non cala; il polo viene però spostato dalla retroazione.

Ai casi in cui le cancellazioni riguardano il solo feedforward o il solo feedback, si applicano le osservazioni fatte per sistemi in serie o in parallelo. Eventuali parti non raggiungibili e/o non osservabili non vengono alterate dalla retroazione.

Esempio Vediamo come cancellazioni nei blocchi in retroazione possano influenzare il sistema equivalente.

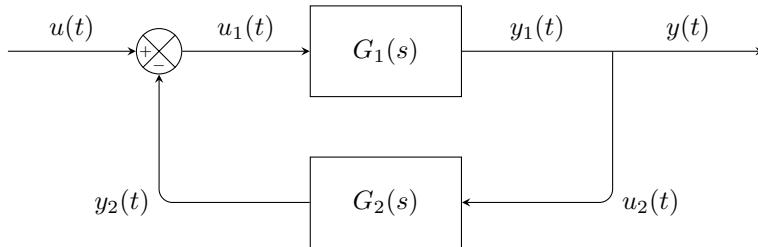


Figura 5.8: Schema a blocchi dell'esempio.

Caso 1 Uno zero di $G_1(s)$ cancella un polo di $G_2(s)$. Sia dato il sistema in Figura 5.8 formato da due sottosistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{s+3}{s+1}$$

la funzione di trasferimento del sistema complessivo è

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{s+1}{s+2}}{1 + \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+1)}} = \frac{\frac{s+1}{s+2}}{1 + \frac{s+3}{s+2}} = \frac{s+1}{(s+2) + (s+3)}$$

Caso 2 Un polo di $G_1(s)$ cancella uno zero di $G_2(s)$. Si consideri sempre il sistema di Figura 5.8 in cui però il sottosistema $G_2(s)$ è differente

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{s+2}{s+3}$$

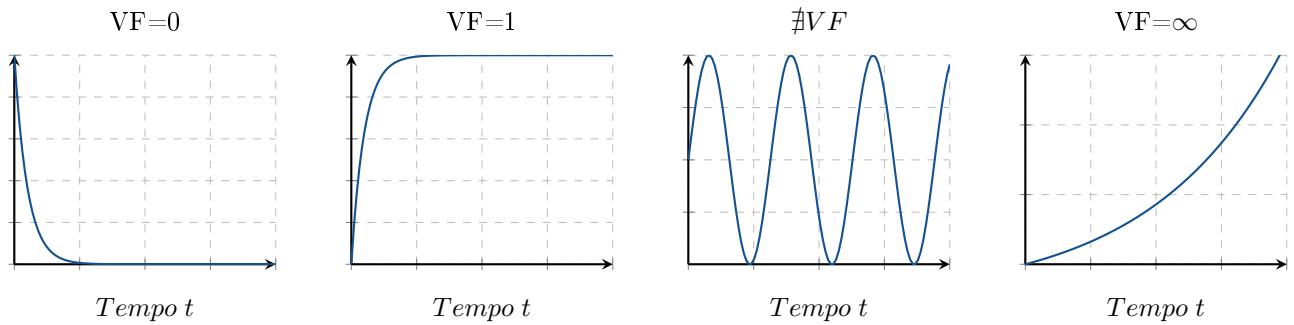
in questo caso $G(s)$ è

$$G(s) = \frac{\frac{s+1}{s+2}}{1 + \frac{s+1}{s+3}} = \frac{\frac{(s+1)(s+3)}{s+2}}{(s+3) + (s+1)} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)((s+3) + (s+1))}$$

CAPITOLO 6

TEOREMA VALORE FINALE

Il valore finale è il valore della funzione, nel tempo, calcolato ad infinito; questo esiste se la funzione converge ad un valore, altrimenti se l'uscita oscilla o diverge, il valore finale non è significativo.



Nel nostro caso il valore finale, se converge, è il valore a regime dell'uscita di un sistema. Nel dominio temporale è calcolato come

$$VF = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

Ad esempio, data un'equazione differenziale possiamo risolverla e calcolarne il limite. Nel dominio di Laplace possiamo sfruttare la trasformata dell'equazione ($F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$) per semplificare i calcoli, dato che un'equazione differenziale nel dominio temporale diventa un'equazione algebrica in quello di Laplace. Per calcolare il valore finale nel dominio di Laplace possiamo utilizzare il *Teorema del Valore Finale*.

Teorema 6.1 (Teorema del valore finale) Se una funzione reale f ha trasformata razionale F con grado del denominatore maggiore o uguale al grado del numeratore e poli con parte reale non positiva, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (6.1)$$

Quindi se un sistema LTI è stabile, dunque ha un valore finale, possiamo applicare il Teorema 6.1 per trovarlo.

Conseguenze del teorema nell'analisi di sistemi Grazie al teorema del valore finale è possibile lavorare direttamente con la trasformata di Laplace, cosa molto comoda, dato che spesso si avrà già la trasformata. Questo teorema non è valido su qualsiasi funzione di trasferimento, esistono quattro casi di applicazione distinti. Di seguito analizziamo cosa significa avere un polo in ognuna di queste regioni.

I caso - Semipiano Destro ($Re > 0$) Quando un polo ha parte reale positiva, il sistema è instabile. Il termine e^{+st} diverge, quindi il valore finale di un sistema che ha un polo nella parte destra del piano non esiste.

Esempio Applicando il teorema alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

risulta

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s-2} \right) = \frac{s}{s-2} = 0$$

che è un valore errato.

II caso - Asse Immaginario ($Re = 0$) Se un polo si trova sull'asse immaginario, il sistema avrà modi oscillatori. Il termine $e^{j\omega t}$ avrà un andamento sinusoidale e il valore finale sarà indefinito.

Esempio Se applichiamo il teorema alla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

risulta

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + 4} = 0$$

come nel caso precedente il valore ottenuto è errato.

III caso - Semipiano Sinistro ($Re < 0$) Con un polo con parte reale negativa la risposta impulsiva del sistema in questo caso è stabile ed eventualmente andrà a 0.

Esempio Il teorema applicato alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

restituisce il valore corretto

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+2} = 0$$

IV caso - Origine ($Re = 0, Im = 0$) Si sta prendendo in considerazione un sistema come l'integratore, la sua risposta impulsiva è 1.

Esempio Data la funzione di trasferimento dell'integratore

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

applicando il teorema otteniamo

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s} = 1$$

che è il valore corretto.

In conclusione, possiamo applicare il teorema del valore finale su un sistema asintoticamente stabile, quindi se tutti i poli del sistema sono nella parte sinistra del piano o nell'origine. Se anche un solo polo, o una coppia di poli complessi coniugati, possiede parte reale positiva, allora il teorema non è applicabile.

CAPITOLO 7

RISPOSTA DI SISTEMA

Quando abbiamo a che fare con un sistema, siamo interessati a come questo reagisce a specifici segnali in ingresso; adesso ci concentriamo sulla risposta allo scalino $u(t)$ di sistemi SISO, in particolar modo sui sistemi di primo e secondo ordine, cercando di estendere, per quanto possibile, ai sistemi di ordine superiore al secondo.

Di seguito approfondiremo i vari parametri che costituiscono una funzione di trasferimento:

- **tipo del sistema g :** può avere valore nullo, positivo o negativo ed è dato dal numero di radici nell'origine, in particolare ogni polo nell'origine conta positivamente, mentre ogni zero nell'origine conta negativamente;
- **guadagno μ ;**
- **costanti di tempo τ, T :** le costanti di tempo al denominatore sono legate alla velocità con cui si esauriscono i transitori del sistema, e quindi ai poli (maggiore è τ , più lentamente si esaurirà il contributo al movimento dell'uscita dato dal polo corrispondente).

7.1 Guadagno

Dato un sistema descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$, sottoposto a un ingresso costante \bar{u} , che possiamo assumere come segnale a scalino con trasformata di Laplace $U(s) = \bar{u}/s$, l'uscita tende a un valore di regime \bar{y} , calcolabile tramite il teorema del valore finale (Teorema 6.1)

$$\bar{y} = \mu \bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$$

da cui risulta

$$\mu = \bar{y}/\bar{u}$$

La costante μ è detta *guadagno*, in questo caso *statico*¹, ed è il rapporto tra il valore a regime dell'uscita del sistema e il valore d'ingresso costante che l'ha prodotta.

Il termine *guadagno* di sistema si riferisce quindi alla variazione allo stato a regime dell'uscita in conseguenza a una variazione unitaria dell'ingresso.

7.2 Caratteristiche della Risposta allo Scalino

Allo scopo di comprendere la risposta dei sistemi dobbiamo introdurre diversi parametri che la caratterizzano:

- **valore di regime y_∞ :** valore dell'uscita a transitorio esaurito; è pari al guadagno statico (se $g = 0$) o a zero (se $g < 0$).
- **valore massimo y_{\max} :** massimo valore assunto dall'uscita;

¹Talvolta ci si riferirà al guadagno statico con i simboli K o $G(0)$.

- **sovraelongazione massima percentuale $S\%$** : ampiezza, in percentuale, della sovraelongazione massima rispetto al valore di regime, data da

$$S\% = 100 \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}$$

- **tempo di massima sovraelongazione T_M** : primo istante in cui $y = y_{\max}$;
- **tempo di salita T_s** : tempo richiesto perché l'uscita passi per la prima volta dal 10% al 90% del suo valore di regime;
- **tempo di ritardo T_r** : tempo necessario perché l'uscita raggiunga per la prima volta il valore $0.5y_{\infty}$;
- **tempo di assestamento $T_{a\varepsilon}$** : tempo necessario perché il modulo della differenza tra l'uscita e il valore di regime y_{∞} rimanga definitivamente sotto $\varepsilon\%$, cioè l'uscita sia nell'intervallo $[(1 - 0.01\varepsilon)y_{\infty}, (1 + 0.01\varepsilon)y_{\infty}]$;
- **periodo dell'oscillazione T_p** : intervallo di tempo tra i primi due massimi dell'uscita.

7.3 Sistemi del Primo Ordine

Consideriamo un sistema di primo ordine con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + \tau s} \quad (7.1)$$

Antitrasformando l'uscita $Y(s) = G(s)U(s)$ con $U(s) = 1/s$ si ha

$$y(t) = \mu(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0 \quad (7.2)$$

Si noti che man mano che $t \rightarrow \infty$, la risposta di sistema $y(t)$ tende al valore μ . La velocità del sistema cambia di μ in risposta a un gradino unitario, modificando l'uscita del sistema di μ .

Il tempo di assestamento può essere calcolato come

$$T_{a\varepsilon} = \tau \ln \frac{1}{0.01\varepsilon} = -\tau \ln(0.01\varepsilon) \quad (7.3)$$

Si può verificare anche che $y(\tau) \simeq 0.64y_{\infty}$, ovvero che il sistema raggiunge il 64% del valore di regime dopo τ secondi.

y_{∞}	T_s	T_r	T_{a5}	T_{a1}
μ	$\simeq 2.2\tau$	$\simeq 0.7\tau$	$\simeq 3\tau$	$\simeq 4.6\tau$

Tabella 7.1: Parametri caratteristici della risposta allo scalino del sistema.

Ritardo del primo ordine La funzione di trasferimento dell'equazione 7.1 è nota come *ritardo del primo ordine* o *ritardo semplice* e sta a indicare che il sistema non ha risposta istantanea. Questo tipo di sistemi è caratterizzato completamente da: guadagno μ e costante di tempo τ .

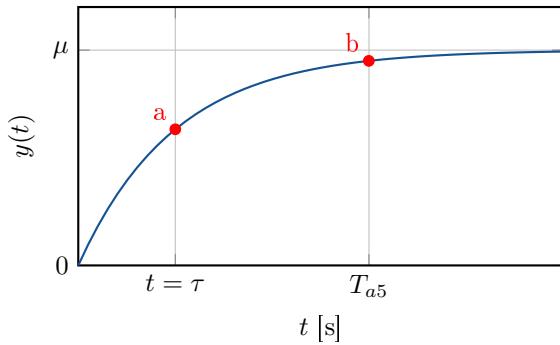


Figura 7.1: Risposta allo scalino di un sistema del primo ordine con $\tau = 2$. a) valore di $y(t)$ con $t = \tau$; b) valore di $y(t)$ dopo un tempo di assestamento di $T_{a5} = -\tau \ln(0.05)$.

7.4 Sistemi del Secondo Ordine

Consideriamo un sistema di secondo ordine con poli complessi coniugati e funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (7.4)$$

I parametri $\omega_n > 0$ e $\xi > 0$ rappresentano rispettivamente la pulsazione naturale e lo smorzamento dei poli² (si noti anche la presenza del guadagno di sistema). Il modello generale della funzione di trasferimento per sistemi del secondo ordine prevede al numeratore solo μ e si può quindi ottenere dall'eq (7.4) dividendo per ω_n^2

$$G(s) = \frac{\mu}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1} \quad (7.5)$$

I poli complessi del sistema sono

$$s = -\xi \omega_n \pm j \sqrt{1 - \xi^2}$$

Caso $0 < \xi < 1$ (Sotto-smorzamento): La risposta allo scalino del sistema nel tempo nel caso sotto-smorzato è

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \arccos \xi) \right), \quad t \geq 0 \quad (7.6)$$

dove $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ è la *frequenza naturale smorzata*; si nota subito che è composta da due termini: uno esponenziale moltiplicato per uno sinusoidale.

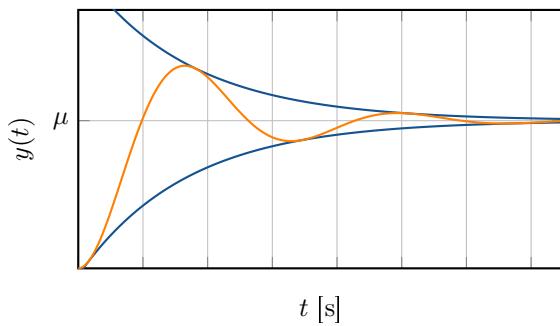


Figura 7.2: In blu è evidenziato l'inviluppo della risposta di sistema $y(t)$.

L'inviluppo della risposta $y(t)$ (Figura 7.2) è dato da

$$\mu \left(1 \pm \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

²Talvolta ω_n e ξ sono indicati con ω_0 e ζ .

e determina il decadimento delle oscillazioni della risposta di sistema; in particolare, dipende dal fattore esponenziale

$$e^{-\xi\omega_n t} = e^{-t/\tau}$$

quindi la costante di tempo del sistema τ è

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

Caso $\xi = 0$: Se il sistema ha coefficiente di smorzamento nullo, allora la risposta si semplifica

$$y(t) = \mu(1 - \sin(\omega_n t)) , \quad t \geq 0 \quad (7.7)$$

Caso $\xi = 1$ (Smorzamento critico): I sistemi con smorzamento critico raggiungono il valore di regime senza oscillazioni e nel minor tempo possibile, ma raggiungere uno smorzamento critico è complicato perché richiede una configurazione molto precisa dei parametri e anche una minima deviazione può portare il sistema a essere sovra o sotto-smorzato.

I sistemi descritti da equazioni differenziali lineari e omogenee del secondo ordine lo smorzamento critico produce due radici reali uguali e questo porta a una combinazione di termini esponenziali che decadono.

Caso $\xi > 1$ (Sovra-smorzamento): I sistemi sovra-smorzati possiedono smorzamento eccessivo e tempo di assestamento estremamente lento. Sebbene per la maggior parte delle applicazioni non sia una configurazione di sistema adatta, in casi specifici può essere utile: si pensi alle porte automatiche, vogliamo evitare che la porta si chiuda sbattendo violentemente o rimbalzando.

* * *

Nei sistemi di secondo ordine sono presenti molti parametri di interesse, già discussi nella Sezione 7.2, che possono essere calcolati come segue

$$y_{\max} = \mu \left(1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \right) \quad T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (7.8)$$

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (7.9)$$

$$S\% = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad (7.10)$$

La massima sovraelongazione percentuale dipende solo dallo smorzamento ed è una funzione monotona decrescente di ξ , più il valore di ξ è elevato più velocemente l'oscillazione di esaurisce.

Il tempo di assestamento non è semplice da ricavare, ci accontentiamo quindi di un'approssimazione, fornita da

$$T_{a\xi} \approx \bar{t}_\xi = -\frac{1}{\xi\omega_n} \ln(0.01\xi)$$

y_∞	$S\%$	T_M	T_P	stima di $T_{a\xi}$
μ	$100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$	$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$	$\frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$	$-\frac{1}{\xi\omega_n} \ln(0.01\xi)$

Tabella 7.2: parametri caratteristici della risposta allo scalino del sistema.

Possiamo associare ξ e ω_n a $S\%$, T_P , T_M , $T_{a\xi}$ con alcuni importanti accorgimenti. Per prima cosa alcune delle relazioni sono approssimate e così i risultati, inoltre, poli e zeri aggiuntivi cambiano il risultato, quindi tutti i risultati precedenti dovrebbero essere visti come linee guida. Il tempo di salita T_s , il tempo di sovraelongazione massima T_M e il tempo di assestamento $T_{a\xi}$ contengono informazioni sulla velocità della risposta nel transitorio. Queste informazioni possono essere utili per capire se la velocità e la natura della risposta degrada o meno le performance del sistema.

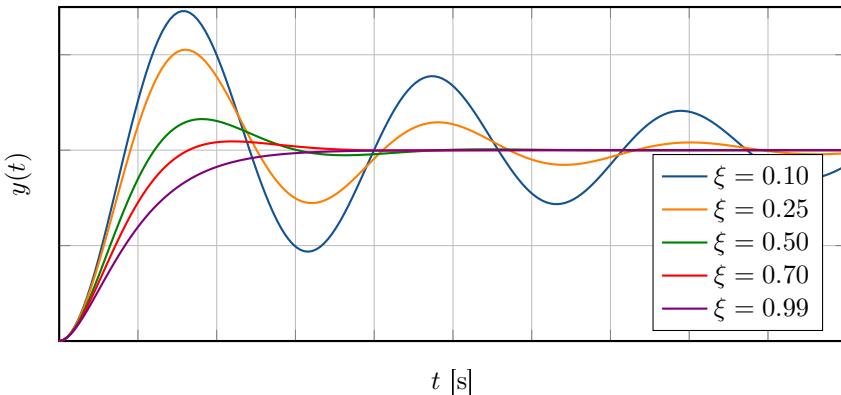


Figura 7.3: Risposta allo scalino di un sistema del secondo ordine con vari coefficienti di smorzamento ξ . Si noti come a uno ξ più grande sia associato uno smorzamento maggiore, ma anche un tempo di risposta più lungo (il sistema è più lento) mentre a uno ξ più piccolo corrispondano maggiori oscillazioni.

7.4.1 Implicazioni pratiche

Comportamento del sistema Nei sistemi di controllo industriali una risposta smorzata solitamente è preferibile a una non smorzata perché permette di avere una risposta più rapida senza oscillazioni prolungate; questo perché le oscillazioni sono tipicamente associate a instabilità o inefficienza.

Bilanciamento tra velocità e oscillazioni Durante la progettazione di un sistema di controllo bisogna cercare di trovare il giusto bilanciamento tra questi due fattori; se lo smorzamento è piccolo, il sistema potrebbe oscillare troppo e portare a instabilità, d'altro canto se fosse troppo elevato il sistema potrebbe risultare eccessivamente lento.

Esempi di applicazioni Per applicazioni che tollerano abbastanza le oscillazioni in cambio di una risposta più rapida (e.g. come certi processi produttivi) un sistema leggermente smorzato potrebbe andare bene. In scenari dove la precisione della risposta è vitale (e.g. posizionamento di un braccio robotico), è cruciale progettare un sistema che presenti oscillazioni minime, anche a costo di avere una risposta più lenta.

La scelta del livello di smorzamento nella progettazione di un sistema spesso necessita di rade-off. Anche se un sistema smorzato è spesso preferibile, capire le necessità della specifica applicazione o del processo è cruciale. Questo assicura che il sistema risponda in modo ottimale, bilanciando velocità, oscillazioni e stabilità.

7.5 Poli Dominanti

L'ordine di un sistema è determinato dal numero di poli. Ordini minori, come il primo e il secondo, sono ben compresi e facili da studiare (velocità del sistema, oscillazioni, smorzamento, etc.), ma è molto più difficile fare lo stesso con sistemi di ordini maggiori.

Un modo per semplificare e rendere accessibile l'analisi di questi sistemi è di approssimarli con sistemi di ordini minori utilizzando una tecnica chiamata *approssimazione dei poli dominanti*. Questa approssimazione presuppone che la parte più lenta del sistema domini la risposta, mentre le parti più veloci del sistema possano essere ignorate.

Poli Dominanti Dato un sistema asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $G(s)$, identifichiamo col termine *poli dominanti* i poli, reali o complessi, che più si avvicinano all'asse immaginario rispetto agli altri (si faccia riferimento alla Figura 7.4). Quindi dopo un momento transitorio iniziale, l'effetto principale della risposta è guidato dai modi più lenti. In un sistema avente poli dominanti possiamo approssimare la risposta allo scalino con quella di un sistema caratterizzato da una funzione di trasferimento $G'(s)$ avente i poli dominanti del primo e lo stesso guadagno.

Il valore della parte reale di un polo indica quanto cresce/decresce velocemente, più si allontana dall'asse immaginario e più è veloce. Assumendo il sistema asintoticamente stabile i soli poli presenti saranno quelli con parte reale negativa, dunque potranno solo decrescere. Si deve tener conto di possibili zeri che si avvicinano all'asse immaginario a distanza simile o inferiore rispetto ai poli dominanti.

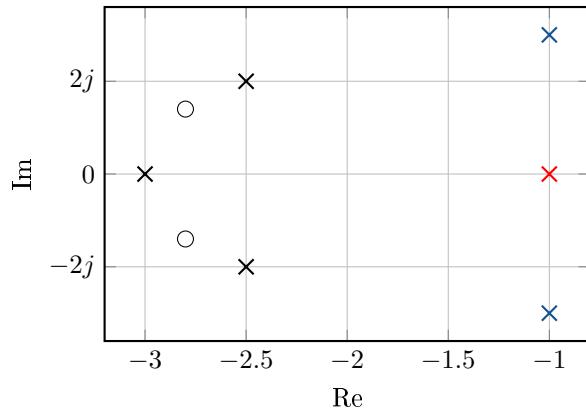


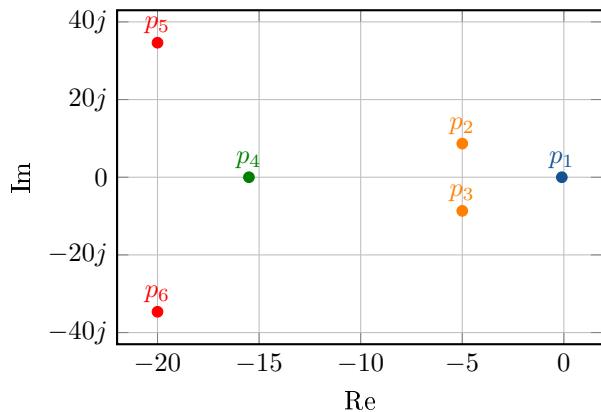
Figura 7.4: Polo dominante reale (in rosso) e complessi coniugati (in blu)

Esempio Si considerino i seguenti poli

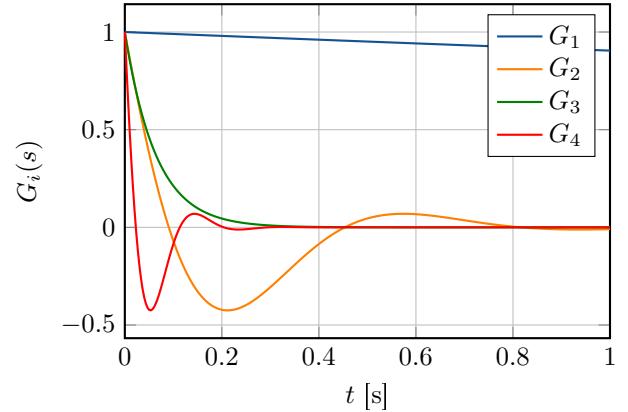
$$\begin{aligned} p_1 &= -0.1, \quad p_{2,3} = -5 \pm 8.66j \\ p_4 &= -15.5, \quad p_{5,6} = -20 \pm 34.64j \end{aligned}$$

Possiamo verificare quale output è associato a ciascuno di questi poli, per farlo definiamo quattro sistemi che hanno i poli nelle posizioni sopraintesi:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{1}{s + 0.1}, \quad G_2(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100} \\ G_3(s) &= \frac{15.5}{s + 15.5}, \quad G_4(s) = \frac{1600}{s^2 + 40s + 1600} \end{aligned}$$



(a) Poli dei sistemi dell'esempio.



(b) Modi dei sistemi associati ai poli.

Dipendentemente dalla loro distanza dall'asse immaginario la loro influenza nel tempo è diversa (Figura 7.5b). Con questo esempio è facile notare che il polo del sistema G_1 è quello dominante.

7.6 Riduzione di un Sistema da Secondo a Primo Ordine

Consideriamo un sistema di secondo ordine sovra-smorzato:

$$G(s) = K \frac{\alpha\beta}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

la cui risposta allo scalino è

$$Y(s) = K \frac{\alpha\beta}{(s + \alpha)(s + \beta)} \frac{1}{s}$$

applicando la scomposizione in fratti semplici ricaviamo la sua antitrasformata

$$y(t) = K \left(1 - \frac{\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \right)$$

Se il modulo di β è maggiore di quello di α (solitamente $\beta/\alpha > 5$) e assumendo s sufficientemente piccolo rispetto a β possiamo approssimare la funzione di trasferimento, e dunque anche la sua risposta allo scalino, sapendo però che perderemo precisione nel transitorio

$$G(s) \approx K \frac{\alpha\beta}{(s + \alpha)(\beta)}$$

a cui corrisponde la seguente risposta al gradino

$$y(s) \approx K \left(1 - \frac{\beta e^{-\alpha t}}{\beta} \right) = K(1 - e^{-\alpha t})$$

Non variando K (guadagno statico) anche il valore a regime rimane invariato. In questo modo le risposte a regime saranno uguali, perderemo però accuratezza nella fase transitoria precedente.

Esempio Si considerino due sistemi in serie

$$G_1(s) = \frac{0.1}{s + 0.1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s + 1}$$

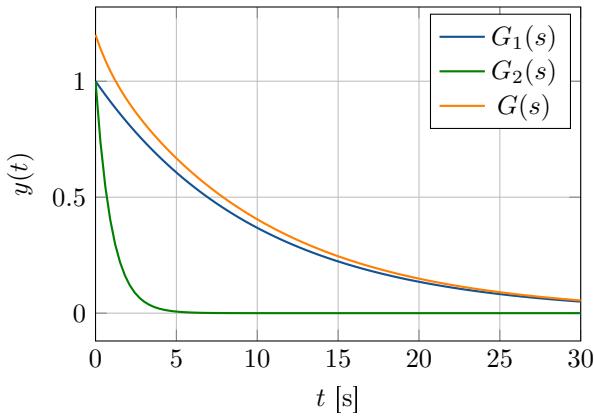
È evidente che un polo sia 10 volte maggiore dell'altro, la funzione di trasferimento complessiva è

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{0.1}{(s + 0.1)(s + 1)}$$

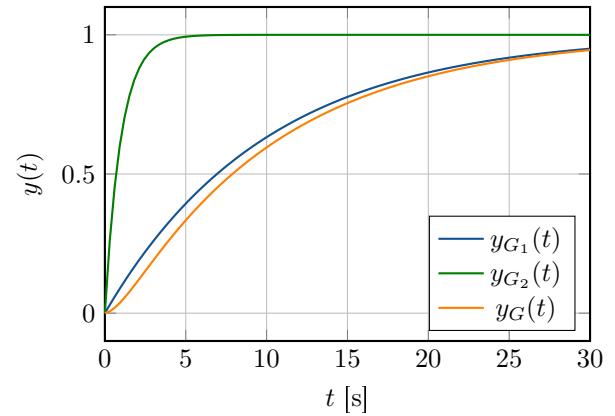
di cui possiamo osservare la risposta nel grafico in Figura 7.6b.

Vediamo come interpretare il grafico della risposta allo scalino (Figura 7.6b). Il grafico mostra tre funzioni: la risposta complessiva è $y_G(t)$, la risposta di $G_1(s)$ può essere considerata come l'approssimazione di $G(s)$ con il polo -0.1 dominante, mentre quella di $G_2(s)$, può essere vista come l'approssimazione di $G(s)$ che assume il polo -1 come dominante (si nota subito che non può essere il polo dominante visto che neanche si avvicina alla risposta di $G(s)$).

Le risposte di $G(s)$ e $G_1(s)$ sono molto vicine tra loro, quindi l'approssimazione dei poli dominanti è buona. La risposta complessiva ha due esponenziali, uno rapido con una costante temporale breve $\tau_1 = \frac{1}{p_1}$ e uno più lento con costante temporale $\tau_2 = \frac{1}{p_2}$. Se si guarda alla risposta complessiva, l'esponenziale rapido raggiunge l'equilibrio (decade a 0) molto più velocemente rispetto a quello lento, quindi la risposta più lenta domina.



(a) Modi dei sistemi dell'esempio.



(b) Risposta allo scalino dei sistemi dell'esempio.

Il sistema di secondo ordine $G(s)$ si comporta approssimativamente come $G_1(s)$ che è il sistema più lento:

$$G(s) = \frac{0.1}{(s + 0.1)(s + 1)} \approx \frac{0.1}{(s + 0.1)}$$

7.7 Sistemi di Ordine Maggiore al Secondo

L'approssimazione dei poli dominanti può essere applicata anche a sistemi di grado maggiore al secondo. Consideriamo un sistema di terzo ordine con una radice reale e una coppia di radici complesse coniugate:

$$G(s) = \frac{\alpha \cdot \omega_n^2}{(s + \alpha)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \approx \begin{cases} \frac{\alpha}{s + \alpha}, & \alpha \ll \xi\omega_n \\ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, & \xi\omega_n \ll \alpha \end{cases}$$

In questo caso si mettono a confronto α e $\xi\omega_n^2$ per l'approssimazione dei poli dominanti. Questo perché $\xi\omega_n$ è la parte reale della radice complessa coniugata. Infatti, con questo tipo di approssimazione confrontiamo solo le parti reali delle radici per determinare la dominanza, dato che è la parte reale che determina quanto velocemente la risposta decresce.

Si osservi che, come nel caso precedente, il guadagno statico K del sistema complessivo è uguale a quello dei due sistemi approssimati. Se così non fosse, il valore di regime della risposta allo scalino, determinato da K , cambierebbe e il sistema approssimato, a regime, non si comporterebbe come quello iniziale.

CAPITOLO 8

RISPOSTA IN FREQUENZA

8.1 Risposta alla Sinusoide

Vogliamo studiare il movimento di un sistema LTI quando è presentato in ingresso un segnale di tipo sinusoidale. Si consideri un sistema SISO di ordine n con funzione di trasferimento

$$G(s) = (sI - A)^{-1}B + D$$

di cui vogliamo calcolare la risposta a un ingresso sinusoidale del tipo

$$u(t) = A \sin(\omega t), \quad t \geq 0$$

Assumendo il sistema asintoticamente stabile, è possibile verificare che

$$y(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

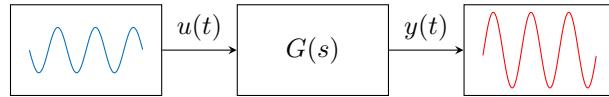


Figura 8.1: Risposta alla sinusoide.

Quindi l'uscita $y(t)$ converge a un segnale sinusoidale che ha la stessa pulsazione della sinusoide in ingresso, un'ampiezza pari a $Y = A|G(j\omega)|$ e uno sfasamento $\theta = \angle G(j\omega)$. Questo a prescindere dalle stato iniziale x_0 , infatti, dato che il sistema è asintoticamente stabile, l'effetto dello stato iniziale sull'uscita tende ad annullarsi.

Quanto appena esposto è conosciuto come teorema fondamentale della risposta in frequenza.

Teorema 8.1 (Teorema fondamentale della risposta in frequenza) Se a un sistema lineare asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $G(s)$ è presentato un ingresso sinusoidale

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t)$$

la risposta, una volta esaurito il transitorio, presenta la forma

$$\tilde{y}(t) = A|G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \angle G(j\omega_0))$$

a prescindere dallo stato iniziale.

Dunque conoscendo modulo e fase di $G(j\omega)$ al variare di ω possiamo determinare il comportamento del sistema a fronte di ingressi sinusoidali di diversa frequenza.

Se abbiamo un ingresso sinusoidale $A \sin(\omega_0 t)$ l'uscita a regime può essere nulla solo se la funzione di trasferimento $G(s)$ ha una coppia di zeri immaginari in $\pm j\omega_0$, cosicché $G(j\omega_0) = 0$.

Intuitivamente, se siamo interessati alla risposta a regime ci aspettiamo che la parte esponenziale del segnale non compaia, perché si esaurisce nel transitorio¹.

8.2 Risposta in Frequenza

La funzione complessa

$$G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D$$

definita per valori della variabile reale ω è detta *risposta in frequenza* del sistema. È possibile determinare sperimentalmente $G(j\omega)$, questo permette, se necessario, di ricostruire la funzione di trasferimento.

La risposta in frequenza può essere rappresentata graficamente attraverso diagrammi di modulo e fase, sfruttando

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

questo rende possibile analizzare modulo e sfasamento attraverso l'intero spettro delle frequenze in modo rapido ed efficace.

Nella pratica, la risposta impulsiva di un sistema può essere ottenuta applicando un ingresso che approssimi la delta di Dirac e misurandone l'uscita. Chiaramente non possiamo che usare un'approssimazione della $\delta(t)$ dato che nella realtà non è realizzabile in quanto astrazione matematica. Se riusciamo ad applicare una buona approssimazione in ingresso al sistema, otteniamo una caratterizzazione del sistema nel *dominio del tempo*.

Molto spesso però non siamo in grado o non conviene applicare al sistema una sollecitazione impulsiva; questo perché magari non si è in grado di generare una buona approssimazione o perché non si vuole rischiare di danneggiare il sistema con una sollecitazione di ampiezza elevata quale l'impulso.

Possiamo quindi pensare di applicare un diverso tipo di sollecitazione al sistema, come un segnale sinusoidale, o più in generale un'oscillazione sinusoidale complessa alla frequenza f_0 , ovvero un segnale del tipo $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$. Vogliamo calcolare l'uscita $y(t) = x(t) \otimes h(t)$, quindi

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \otimes h(t)$$

Espandiamo l'operazione di convoluzione

$$= h(\alpha)e^{j2\pi f_0(t-\alpha)}d\alpha$$

Dividiamo l'esponenziale in due termini

$$= h(\alpha)e^{j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi f_0 \alpha}d\alpha$$

Il termine esponenziale nel secondo integrale è indipendente dalla costante d'integrazione quindi lo portiamo fuori dall'integrale

$$\begin{aligned} & \text{x(t)} \quad \text{H(f}_0\text{)} \\ & \boxed{e^{j2\pi f_0 t}} \quad \boxed{h(\alpha)e^{-j2\pi f_0 \alpha}d\alpha} = x(t)H(f_0) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato che

$$y(t) = x(t)H(f_0) \tag{8.1}$$

La risposta a un'oscillazione di frequenza f_0 è sempre un'oscillazione alla stessa frequenza f_0 , ma con diversa ampiezza e fase rispetto all'ingresso di un fattore complesso detto *risposta in frequenza*, o *risposta armonica*, $H(f_0)$, che alla luce dei risultati appena ottenuti possiamo definire come

$$H(f_0) \triangleq \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=e^{j2\pi f_0 t}} \tag{8.2}$$

Al variare della frequenza f_0 , la modifica dell'ampiezza e lo sfasamento prodotti dal sistema cambiano. Per caratterizzare il sistema dobbiamo calcolare la risposta in frequenza $H(f_0)$ per tutte le frequenze.

Vediamo un metodo che possiamo impiegare nel caso in cui si riesca a generare una buona approssimazione dell'impulso da poter sottoporre al sistema senza danneggiarlo, che ci permette di ottenere la risposta impulsiva di

¹ Il tempo del transitorio, prima che l'uscita del sistema converga a $y(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$, dipende dalle dinamiche del sistema e può essere valutato usando il tempo di assestamento $T_{\alpha\varepsilon}$.

quest'ultimo. Se conosciamo la caratterizzazione temporale del sistema è possibile trovare la risposta in frequenza del sistema come segue

$$H(f) = h(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad (8.3)$$

Un metodo affidabile e senza gli svantaggi dei metodi precedenti per il calcolo della risposta in frequenza del sistema è quello di fare affidamento sul fatto che una volta ottenuta la risposta $y(t) = Y(f)$ del sistema al segnale d'ingresso $x(t) = X(f)$ possiamo ricavare la risposta in frequenza direttamente come

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (8.4)$$

Questo metodo può essere utilizzato solo quando ci troviamo nel dominio frequenziale perché le operazioni per calcolare la risposta in frequenza diventano algebriche. Inoltre, la trasformata del segnale di ingresso $X(f)$ deve essere diversa da 0.

I tre metodi per il calcolo della risposta in frequenza possono essere usati indifferentemente a seconda delle nostre necessità, sia a livello pratico che teorico.

Definiamo inoltre la *risposta in ampiezza* del sistema come $A(f) = |H(f)|$ e la *risposta in fase* come $\theta(f) = \angle H(f)$.

8.3 Diagrammi di Bode

I *diagrammi di Bode* sono uno strumento utilizzato per rappresentare graficamente la risposta in frequenza $G(j\omega)$ associata alla funzione di trasferimento $G(s)$. Questi diagrammi consistono di due funzioni della pulsazione ω che rappresentano l'andamento di modulo e fase di $G(j\omega)$ lungo lo spettro delle frequenze; rispettivamente *diagramma di Bode del modulo* e *diagramma di Bode della fase*. I diagrammi di Bode sfruttano una rappresentazione su scala logaritmica per l'ascissa, dove si trova la frequenza ω . Chiamiamo inoltre *decade* l'intervallo che intercorre tra due pulsazioni che sono tra loro in un rapporto pari a dieci.

8.3.1 Modulo e Fase

La funzione di trasferimento $G(s)$ può essere rappresentata come

$$G(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_m)}$$

Ponendo $s = j\omega$ in $G(s)$ e rappresentando le radici come modulo e fase possiamo scrivere

$$G(j\omega) = \frac{|j\omega - z_1|e^{j\angle(j\omega - z_1)}|j\omega - z_2|e^{j\angle(j\omega - z_2)} \cdots}{|j\omega - p_1|e^{j\angle(j\omega - p_1)}|j\omega - p_2|e^{j\angle(j\omega - p_2)} \cdots}$$

portando tutto sotto un unico esponente e sommando le fasi possiamo scrivere

$$G(j\omega) = \frac{|j\omega - z_1||j\omega - z_2| \cdots e^{j(\angle(j\omega - z_1) + \angle(j\omega - z_2) + \cdots)}}{|j\omega - p_1||j\omega - p_2| \cdots e^{j(\angle(j\omega - p_1) + \angle(j\omega - p_2) + \cdots)}}$$

A questo punto siamo facilmente in grado di semplificare la funzione di trasferimento e ottenere così il modulo

$$|G(j\omega)| = \frac{|j\omega - z_1||j\omega - z_2| \cdots}{|j\omega - p_1||j\omega - p_2| \cdots} \quad (8.5)$$

e la fase

$$\angle G(j\omega) = +\angle(j\omega - z_1) + \angle(j\omega - z_2) + \cdots - \angle(j\omega - p_1) - \angle(j\omega - p_2) - \cdots \quad (8.6)$$

8.3.2 Decibel

Il decibel è un'unità di misura logaritmica del rapporto fra due grandezze omogenee (di potenze). In molti fenomeni fisici l'ampiezza di un segnale può variare di molti ordini di grandezza. Quando studiamo lo spettro delle frequenze di un segnale abbiamo a che fare con grandezze che variano moltissimo. Per osservare in modo significativo la risposta

in frequenza di un sistema passiamo alla scala logaritmica, ovvero considerando i valori della risposta in frequenza in decibel (dB).

I decibel si misurano in *relazione a un riferimento*; a una misura d'intensità raddoppiata, triplicata, ecc. rispetto a una intensità di riferimento I_0 , corrisponde una intensità che varia come $(I/I_0)^2$, $(I/I_0)^3$, ecc. che quindi è efficace rappresentare con una scala logaritmica.

Nel caso della risposta in ampiezza di un sistema utilizziamo $G(j\omega_0)$ come grandezza di riferimento rispetto alla quale i decibel sono calcolati. La frequenza di riferimento ω_0 viene scelta in base alla tipologia di sistema considerata, come vedremo più avanti. Abbiamo dunque

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = \frac{10 \log_{10} |G(j\omega)|^2}{|G(j\omega_0)|^2} = \frac{20 \log_{10} |G(j\omega)|}{|G(j\omega_0)|} \quad (8.7)$$

La risposta in frequenza del sistema è elevata al quadrato poiché il decibel si riferisce a misure di potenza.

Ogni valore in decibel corrisponde ad un fattore di moltiplicazione o divisione (rispettivamente in caso di aumento o diminuzione) della grandezza misurata.

$ G(j\omega) ^2$	$ G(j\omega) _{\text{dB}}$	$ G(j\omega) ^2$	$ G(j\omega) _{\text{dB}}$
1/100	-20dB	8	9dB
1/10	-10dB	10	10dB
1/4	-6dB	25	14dB
1/2	-3dB	50	17dB
1	0dB	100	20dB
2	3dB	1000	30dB
4	6dB	10000	40dB

Di seguito sono riportate le principali proprietà del logaritmo

- $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$
- $\log(A/B) = \log(A) - \log(B)$
- $\log(y^x) = x \log(y)$

8.3.3 Diagrammi di Modulo e Fase

Con l'utilizzo della scala logaritmica e sfruttando le proprietà del logaritmo si ottiene

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log(|j\omega - z_1|) + \dots - 20 \log(|j\omega - p_1|) \dots \quad (8.8)$$

Nella realizzazione dei diagrammi di Bode è possibile descrivere un andamento qualitativo del diagramma esatto di funzioni di trasferimento anche molto complesse con un accettabile livello di approssimazione. Questo è possibile tracciando diagrammi approssimati, detti *diagrammi asintotici*, che sono molto semplici da realizzare.

Il nostro obiettivo è analizzare guadagno e sfasamento nell'intero spettro delle frequenze. Supponiamo di avere il sistema di Figura 8.2 a cui è presentato l'ingresso $u(t) = \sin(0.5t)$.

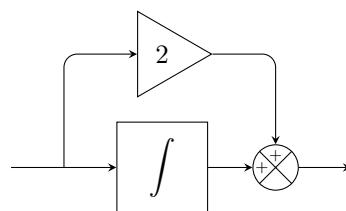


Figura 8.2: Sistema semplice.

La corrispondente uscita è

$$y(t) = 2 \sin(0.5t) + \int \sin(0.5t) dt = 2 \sin(0.5t) - 2 \cos(0.5t)$$

e fruttando l'identità trigonometrica

$$a \sin(x) + b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi), \quad \phi = \text{atan2}\left(\frac{b}{a}\right)$$

possiamo scrivere

$$y(t) = 2 \sin(0.5t) - 2 \cos(0.5t) = \sqrt{8} \sin(0.5t + \text{atan2}(-1)) \approx 2.83 \sin(0.5t - 0.785)$$

Trovata l'uscita $y(t)$ calcolare modulo e fase è molto semplice, infatti il modulo è pari a

$$20 \log_{10}|2.83| \approx 9 \text{ dB}$$

e la fase è

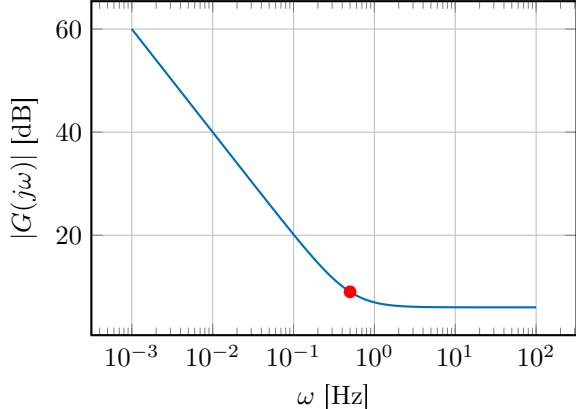
$$-0.785 \text{ rad} = -45^\circ$$

Quanto appena calcolato non è altro che la risposta in frequenza di una singola sinusoide, il nostro interesse ricade nel tracciare modulo e fase dell'interno spettro di pulsazioni. Per calcolarle manualmente possiamo generalizzare l'equazione precedente per qualsiasi pulsazione ω

$$y_t = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\omega}\right)^2} \sin\left(\omega t + \text{atan2}\left(\frac{-1/\omega}{2}\right)\right)$$

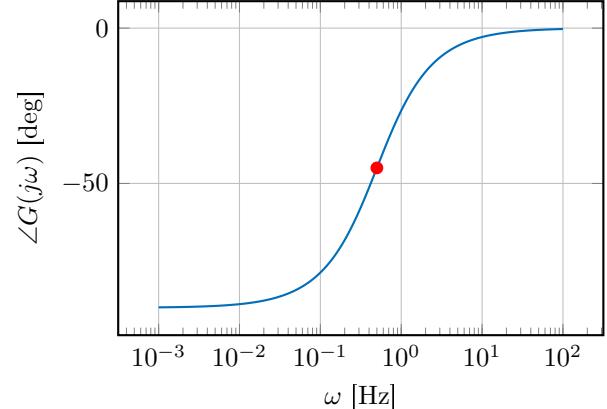
e fare poi il diagramma per un numero finito di valori di ω (Figura ??).

Diagramma di Bode del modulo



(a) Modulo della risposta in frequenza del sistema dell'esempio.

Diagramma di Bode della fase



(b) Fase della risposta in frequenza del sistema dell'esempio.

In generale possiamo ottenere il risultato direttamente dalla funzione di trasferimento. Sempre facendo riferimento al sistema di Figura 8.2, riscriviamone la funzione di trasferimento

$$G(s) = 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s + 1}{s}$$

l'uscita è

$$y(t) = \frac{2s + 1}{s} u(t)$$

Siamo interessati alla risposta a regime, quando l'aspetto esponenziale di $s = \sigma + j\omega$ è scomparso ($\sigma = 0$), quindi con $s = j\omega$. Per calcolare modulo e fase a regime poniamo $s = j\omega$ nella funzione di trasferimento

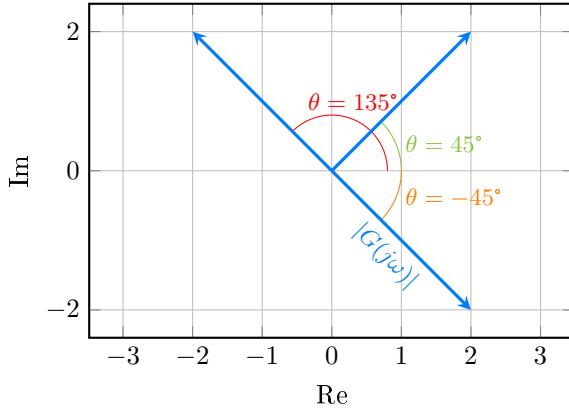
$$G(j\omega) = \frac{2s + 1}{s} \Big|_{s=j\omega} = \frac{2j\omega + 1}{j\omega} = 2 - \frac{1}{\omega}j$$

A partire da $G(j\omega)$ possiamo rappresentare graficamente il numero sul piano complesso e calcolarne modulo e fase tramite il grafico, per la pulsazione $\omega = 0.5$ si ha $2 - 2j$, dove il modulo è dato dalla distanza dall'origine (Figura 8.4a), identificando la parte reale del numero con Re e la parte immaginaria con Im possiamo scrivere

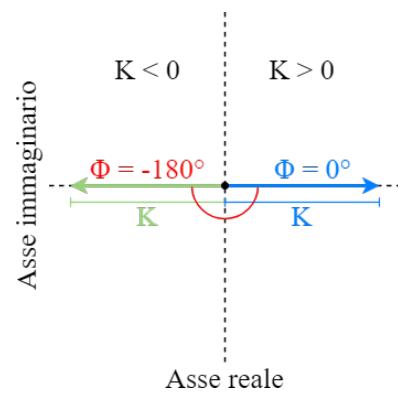
$$|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$$

Identifichiamo invece la fase con l'angolo tra la linea soprastante e il semiasse reale positivo

$$\angle G(j\omega) = \text{atan2}(\text{Im}, \text{Re})$$



(a) Rappresentazione di modulo e fase; si ricorda che il segno della fase è determinato dalla parte dell'asse reale in cui si trova il punto.



(b) Valore della fase in base al segno del guadagno.

Spaziando attraverso tutte le frequenze, da zero a infinito, è possibile visualizzare come si comportano modulo e fase, sapendo che la parte reale non cambia. In questo caso, man mano che la pulsazione si avvicina a zero il modulo e la fase crescono, fino a infinito e -90° rispettivamente quando la pulsazione è zero. Al contrario, quando la pulsazione cresce modulo e fase decrescono, fino a due e zero rispettivamente con la pulsazione a infinito.

Essendo le funzioni di trasferimento dei sistemi lineari frazioni di polinomi in s , possiamo sempre fattorizzare polinomi in termini delle loro radici (zeri e poli). Ogni polinomio è prodotto di fattori di primo e secondo ordine (potenzialmente con molteplicità maggiore di uno). Per costruire la risposta in frequenza di un sistema è necessario comprendere ogni termine, che di seguito analizzeremo.

Diagrammi del guadagno Si consideri il termine

$$G(s) = \mu \quad (8.9)$$

il modulo risultante, in decibel, è

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |\mu| \quad (8.10)$$

mentre la fase

$$\angle G(j\omega) = \angle(\mu) = \text{atan2}(0, \mu) = \begin{cases} 0^\circ, & \mu > 0 \\ -180^\circ, & \mu < 0 \end{cases} \quad (8.11)$$

a cui corrisponde un grafico costituito da un retta parallela all'asse delle ω .

Il modulo è sempre μ (distanza dall'origine), con μ positivo o negativo. Valori positivi del guadagno sono associati a una fase pari a 0° mentre valori negativi sono associati a una fase pari a -180° ².

²La scelta di -180° è una convenzione, anche 180° è corretto.

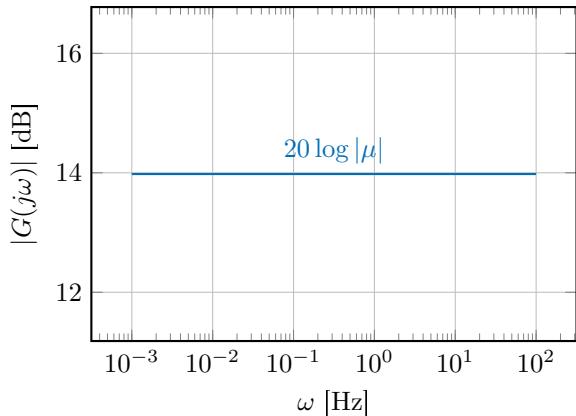
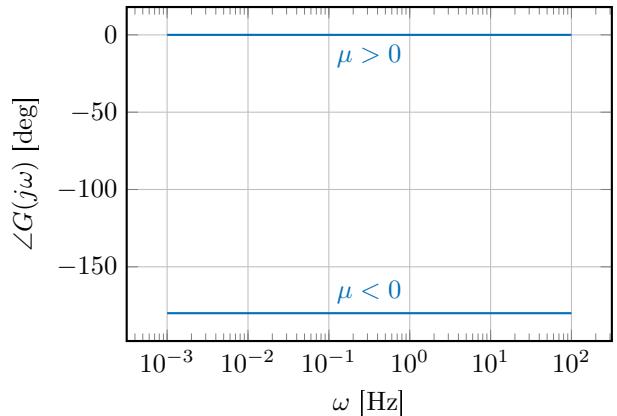
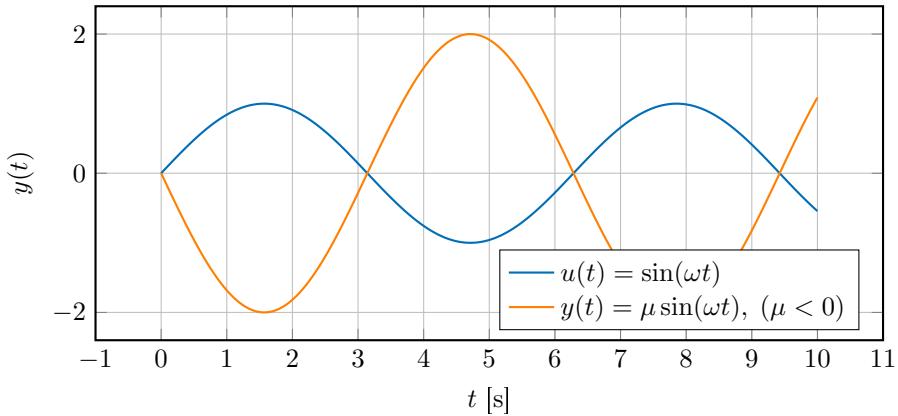
(a) Diagramma di Bode con guadagno statico μ .(b) Diagramma di Bode con guadagno statico μ .

Figura 8.5

Figura 8.6: Nel dominio temporale il sistema con guadagno μ costante a cui è presentato in ingresso $\sin(\omega t)$ ha come risposta a regime $\mu \sin(\omega t)$ con stessa pulsazione dell'ingresso, ma scalata di μ ; inoltre, se μ è minore di zero la risposta è anche sfasata di -180° .

Diagrammi dell'integratore Si consideri il termine

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (8.12)$$

segue che il modulo è

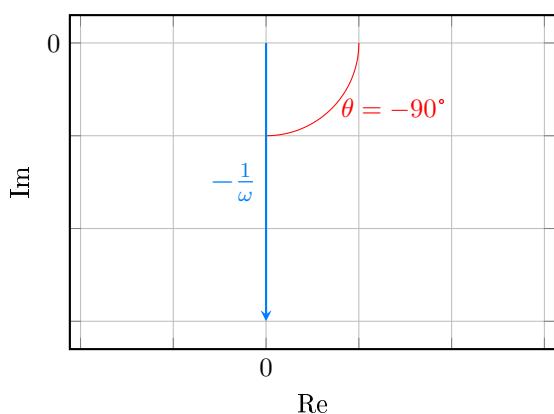
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \quad (8.13)$$

mentre la fase è

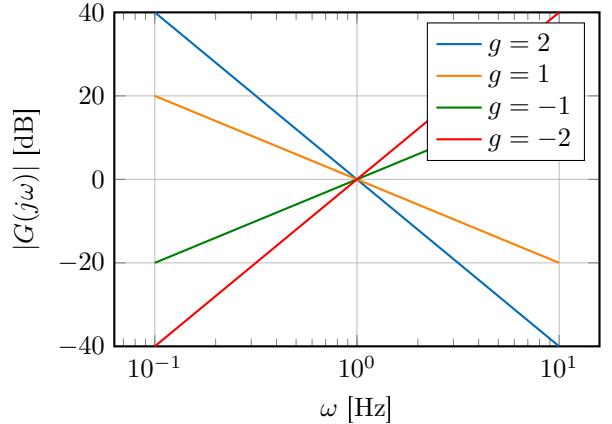
$$\angle G(j\omega) = \text{atan}22 \left(-\frac{1}{\omega}, 0 \right) = -90^\circ \quad (8.14)$$

Il diagramma risultante è una retta in quanto la dipendenza da ω è rappresentata su scala logaritmica, ne consegue che per essere tracciato è sufficiente conoscere solo due punti; a tal proposito, possiamo subito notare che $|G(j1)|_{\text{dB}} = 0$ e $|G(j10)|_{\text{dB}} = -20$, quindi la retta ha una pendenza di -20 dB/decade.

In generale, il diagramma di Bode del modulo associato a $G(s) = 1/s^g$ è una retta di ordinata 0 in $\omega = 1$ e con pendenza $-20g$, quindi «perde» $20g$ dB/decade per $g > 0$ (azioni integrali) e «guadagna» $20|g|$ dB/decade per $g < 0$ (azioni derivative).



(a) Modulo e fase dell'integratore.



(b) Pendenza del modulo con diversi valori di g.

Figura 8.7

Per quanto riguarda la fase, essendo negativa, si dice che poli nell'origine generano un *ritardo di fase*. Il diagramma di Bode della fase associato a $G(s) = 1/s^g$ è una retta parallela all'asse delle pulsazioni con ordinata pari a $-g90^\circ$. Azioni derivatevive ($g < 0$) hanno un contributo positivo, si dice quindi che zeri nell'origine inducono un *anticipo di fase*.

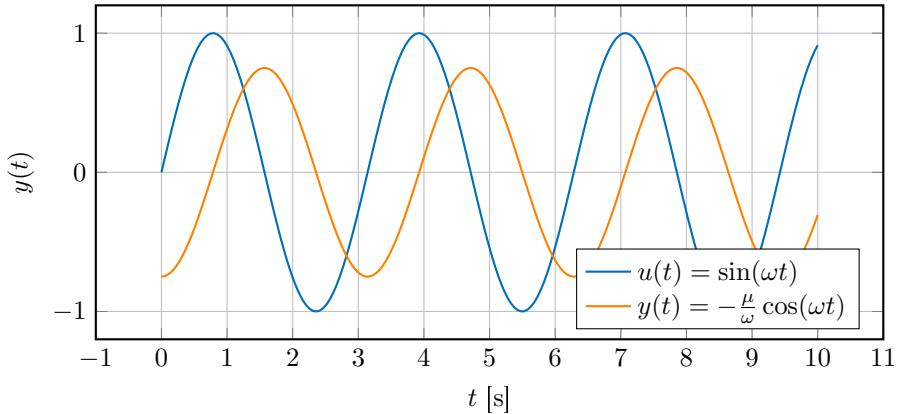


Figura 8.8: La risposta del sistema nel dominio temporale con guadagno μ costante e ingresso $\sin(\omega t)$ è $-\frac{\mu}{\omega} \cos(\omega t)$; il segnale è scalato di μ e sfasato di -90° (la fase è quindi ritardata di 90°).

Diagrammi di singolarità reali

Si consideri il termine

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad (8.15)$$

Identifichiamo con T la costante temporale tale che

$$T = \frac{1}{\omega_n}$$

con ω_n detta *frequenza d'angolo*, o *frequenza di taglio*.

Il modulo della risposta in frequenza del termine sopra citato è

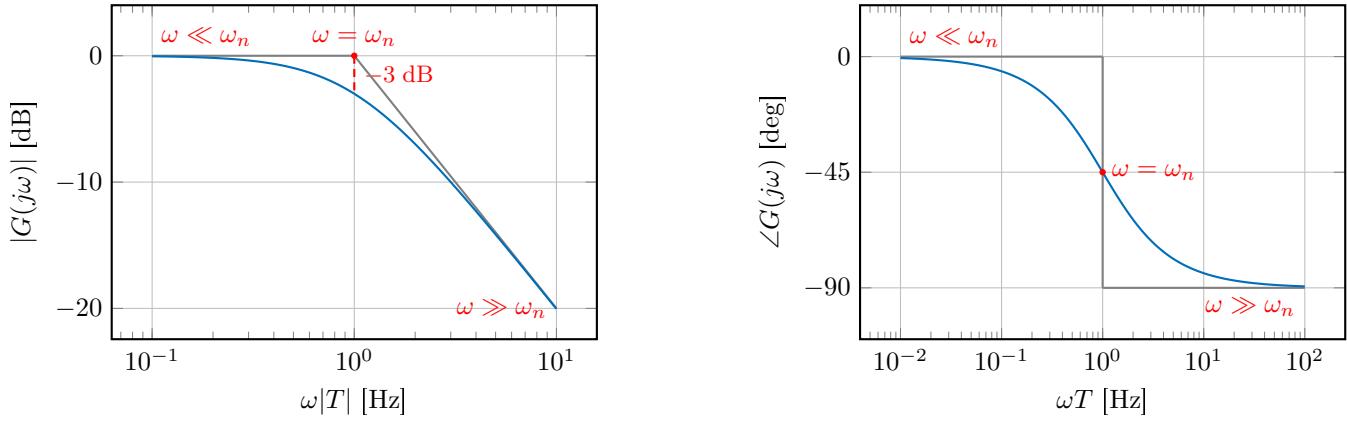
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad (8.16)$$

inoltre, risulta

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \begin{cases} -20 \log 1 = 0, & \omega \ll |\omega_n| \\ -20 \log \omega |T|, & \omega \gg |\omega_n| \end{cases}$$

quindi la curva descritta dall'equazione (8.15) può essere approssimata, attraverso un diagramma asintotico, che è tangente a quello esatto per $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow +\infty$.

Anche il diagramma dell'errore deve essere considerato; questo si ottiene sostituendo il diagramma asintotico a quello esatto e ha modulo massimo pari a $20 \log \sqrt{2} \simeq -3$ dB in $\omega = \omega_n$.



(a) Diagrammi di Bode esatto e asintotico del modulo, con evidenziato il modulo massimo dell'errore tra i due.

(b) Diagrammi di Bode esatto e asintotico della fase, con $T > 0$.

Figura 8.9

La fase della risposta in frequenza del termine (8.15) è calcolata come

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T) = -\text{atan}2(\omega T) \quad (8.17)$$

Il diagramma della fase è evidenziato in Figura 8.9b. La fase è negativa e ritardata se il polo $s = -1/T$ è negativo, è invece positiva e anticipata se il polo è positivo. Si noti che $G(j\omega_n) = \pm 45^\circ$, inoltre

$$\angle G(j\omega) \simeq \begin{cases} -\angle(1) = 0^\circ, & \omega \ll |\omega_n| \\ -\angle(j\omega T) = \begin{cases} -90^\circ, & T > 0 \\ +90^\circ, & T < 0 \end{cases}, & \omega \gg |\omega_n| \end{cases}$$

Il diagramma asintotico della fase adottato prevede che la discesa/salita cominci una decade prima di ω_n e termini una decade dopo ω_n . Nonostante questo diagramma per la fase di $G(j\omega)$ sia tangente a quello esatto per $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow +\infty$ l'approssimazione fornita per punti anche molto distanti da ω_n è piuttosto scarsa. Se necessario, è comunque possibile usare altre tipologie di diagrammi asintotici.

Infine, il diagramma associato al termine $G(s) = 1 + Ts$ è relativo a uno zero reale e simmetrico a quello di $G(s) = 1/1 + Ts$. Ne consegue che uno zero negativo provoca un anticipo di fase mentre se positivo dà luogo a un ritardo di fase.

Diagrammi di singolarità complesse Si consideri il termine

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s/\omega_n + s^2/\omega_n^2} \quad (8.18)$$

il modulo della risposta in frequenza è

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\xi s/\omega_n + s^2/\omega_n^2} \right| = -20 \log \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + 4\xi^2\omega^2/\omega_n^2} \quad (8.19)$$

Il grafico di questa funzione dipende dal valore assoluto di ξ e può essere osservato in Figura 8.10a. In particolare, se $|\xi| < 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ il grafico ha un massimo, detto *picco di risonanza*, in corrispondenza della *pulsazione di risonanza*

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (8.20)$$

da cui

$$|G(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (8.21)$$

$$|G(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\xi|} \quad (8.22)$$

Quando $\xi = 0$ risulta che $\omega_r = \omega_n$ e il picco di risonanza è infinito, questo perché in quel caso la risposta in frequenza ha due poli in $s = \pm j\omega_n$.

Il diagramma asintotico ha

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \begin{cases} -20 \log 1 = 0 & , \omega \ll \omega_n \\ -40 \log(\omega/\omega_n) & , \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

Quando $\omega \leq \omega_n$ il diagramma asintotico è costituito da un semiretta con pendenza e ordinata nulle, per $\omega > \omega_n$ dalla semiretta di pendenza di -40 dB/decade e per $\omega = \omega_n$ ordinata nulla. Come per una coppia di poli reali in $s = -\omega_n$ quindi, questo diagramma asintotico è tangente a quello esatto per $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow +\infty$. L'errore relativo alla sostituzione del diagramma asintotico a quello esatto può avere valori anche molto elevati per $\omega \simeq \omega_n$ e bassi valori di smorzamento.

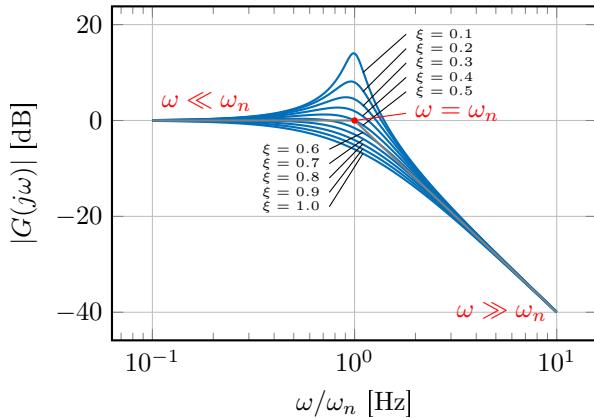
Per quanto riguarda la fase si ha

$$\angle G(j\omega) = -\angle \left(1 + \frac{2j\xi\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) = -\text{atan2} \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}, 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$$

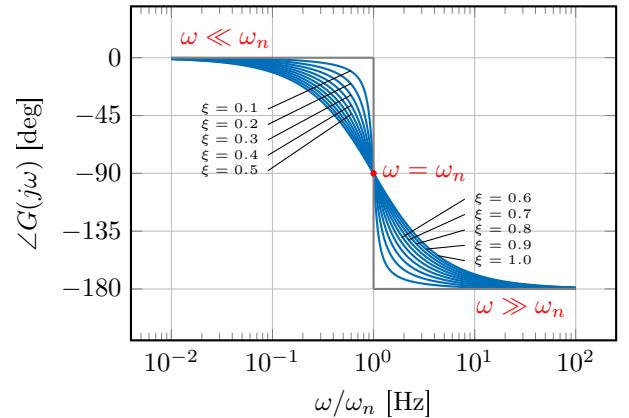
Il grafico dipende da modulo e segno di ξ . Per $\xi > 0$ (poli con parte reale negativa) si ha $\angle G(j\omega_n) = -90^\circ$, ovvero un ritardo di fase; al contrario, per $\xi < 0$ si ha $\angle G(j\omega_n) = +90^\circ$ e dunque un anticipo di fase. Infine, per $\xi = 0$ risulta

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2}$$

quindi $G(j\omega)$ è un numero reale positivo, senza sfasamento, per $\omega < \omega_n$ e negativo, con sfasamento di -180° , per $\omega > \omega_n$. Come per il termine precedente il diagramma asintotico è tangente quello esatto per $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow +\infty$. L'approssimazione del diagramma asintotico è scadente per valori di ω diversi da ω_n e smorzamenti ξ elevati. Nel caso di $G(s) = 1 + 2\xi s/\omega_n + s^2/\omega_n^2$ (zeri complessi) per i diagrammi esatto e asintotico, sia di modulo che di fase, valgono le stesse considerazioni fatte per in precedenza; in particolare, il fatto che il diagramma sia specchiato.



(a) Diagrammi di Bode esatto e asintotico del modulo della risposta in frequenza di un sistema del secondo ordine.



(b) Diagrammi di Bode esatto e asintotico della fase della risposta in frequenza di un sistema del secondo ordine.

Figura 8.10

8.3.4 Ritardo di Tempo

Prendiamo in considerazione la funzione di trasferimento del ritardo $G(s) = e^{-\tau s}$, $\tau > 0$. Da questa, risulta

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\cos^2(\tau\omega) + \sin^2(\tau\omega)} = \sqrt{1} = 1, \quad \forall \omega$$

ne consegue che

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 0, \quad \forall \omega$$

La fase invece è³

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan2}\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{\cos(\tau\omega)}\right) = -\text{atan2}(\tan(\tau\omega)) = -\omega\tau 180/\pi$$

Il diagramma del modulo è una retta orizzontale di ordinata nulla mentre quello della fase, nella scala logaritmica, ha un andamento esponenziale. Se si ha una funzione di trasferimento $G(s) = e^{-\tau s}G'(s)$, con $G'(s)$ razionale, il diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza è identico a quello di $G'(s)$, invece quello della fase è dato dalla somma di $-\omega\tau 180/\pi$ e la fase di $G'(s)$ (è ritardato di $-\omega\tau^\circ$).

8.3.5 Tracciamento diagrammi asintotici

Riassumiamo le regole di tracciamento dei diagrammi di Bode asintotici di modulo e fase della risposta in frequenza $G(j\omega)$ di una funzione di trasferimento $G(s)$.

Tracciamento diagramma asintotico del modulo

1. il tratto iniziale del diagramma ha pendenza $-g$ e in $\omega = 1$ assume valore pari a $20 \log |\mu|$;
2. in corrispondenza di valori di ω in cui è presente un polo o uno zero la pendenza diminuisce o aumenta di 20 dB/decade dipendentemente dalla molteplicità della singolarità in considerazione;
3. in corrispondenza di valori di ω in cui è presente una coppia di poli o zeri complessi coniugati la pendenza diminuisce o aumenta di 40 dB/decade dipendentemente dalla molteplicità della singolarità in considerazione.

Tracciamento diagramma asintotico della fase

1. il tratto iniziale del diagramma ha ordinata $\mu - g90^\circ$;
2. in corrispondenza di valori di ω in cui è presente un polo o uno zero l'ordinata diminuisce (zero positivo, polo negativo) o aumenta (zero negativo, polo positivo) di 90° .
3. in corrispondenza di valori di ω in cui è presente una coppia di poli o di zeri l'ordinata diminuisce (zeri positivi, poli negativi) o aumenta (zeri negativi, poli positivi) di 180° .

8.3.6 Note sui Diagrammi di Bode

L'interpretazione della risposta in frequenza con un diagramma di Bode è valida solo per sistemi stabili, o marginalmente stabili; il diagramma di Bode di un sistema instabile nonostante possa essere realizzato, non contiene informazioni affidabili e pertanto non deve essere preso in considerazione. Questo perché un ingresso sinusoidale fornito a un sistema instabile non genera un'uscita sinusoidale. Sotto ulteriori ipotesi tecniche possiamo comunque recuperare alcuni dei risultati discussi precedentemente, ma non saranno trattate qui.

8.4 Azione Filtrante dei Sistemi LTI

Considerando il fatto che i sistemi LTI amplificano/attenuano e sfasano i segnali di ingresso, possiamo dire che questi sistemi agiscono da *filtro* per i segnali di ingresso, in accordo alla loro risposta in frequenza. In particolare esistono sistemi che lasciano passare inalterate, o amplificate di un certo valore, le armoniche che compongono il segnale con pulsazioni inferiori/superiori o uguali a una data pulsazione $\bar{\omega}$ e eliminano (idealmente) le armoniche con pulsazioni maggiori/inferiori a $\bar{\omega}$ (*frequenza di taglio*). Questi tipi di sistema sono detti *filtro ideale passa-basso* e *filtro ideale passa-alto* rispettivamente.

³Il fattore $180/\pi$ serve per convertire il risultato in gradi.

8.4.1 Larghezza di Banda

La larghezza di banda (ω_b) si riferisce all'intervallo di frequenze su cui un sistema di controllo mantiene un guadagno costante, vicino al suo valore massimo. Questa è fondamentale perché determina le frequenze alle quali il sistema funziona in modo più efficace.

Determinare il punto esatto per la frequenza di taglio può essere difficile. Tuttavia, nei sistemi di controllo, spesso definiamo la larghezza di banda come l'intervallo di frequenza in cui il guadagno del sistema rimane vicino all'unità. La frequenza di taglio, in questo caso, è dove il guadagno scende a $1/\sqrt{2}$ (-3 dB) del valore unitario. Questo punto segna la transizione dal raggio operativo effettivo del sistema al punto in cui inizia ad attenuare il segnale. Selezioniamo il valore unitario e non il picco, perché un valore unitario a tutte le frequenze sarebbe il valore ideale. Corrisponderebbe al tracciamento perfetto di qualsiasi input.

All'interno della larghezza di banda, il sistema funziona in modo ottimale, elaborando i segnali con un'attenuazione minima. Questa è la gamma di frequenza in cui il guadagno del sistema è quasi piatto, il che significa una gestione del segnale stabile ed efficace. Oltre la larghezza di banda, il guadagno del sistema inizia a diminuire, indicando l'inizio dell'attenuazione del segnale. Questa caratteristica è fondamentale per filtrare i segnali ad alta frequenza indesiderati mantenendo la fedeltà dei segnali all'interno della larghezza di banda.

Negli scenari del mondo reale, i sistemi di controllo sono progettati per avere una larghezza di banda specifica che si allinea con la gamma di frequenza dei segnali che intendono gestire o controllare. Comprendendo e impostando la larghezza di banda appropriata, gli ingegneri possono garantire che il sistema risponda accuratamente alle frequenze rilevanti filtrando rumori o disturbi indesiderati.

Si evince quindi quanto la larghezza di banda nei sistemi di controllo sia un parametro critico che deve assolutamente essere ben analizzato.

Definizione 8.1 (Banda -3 dB) Una definizione informale di banda -3 dB è l'intervallo di frequenze entro il quale lo spettro di ampiezza del segnale, o analogamente la risposta in ampiezza del sistema, è attenuato fino a 3 dB, ovvero di $1/\sqrt{2}$.

8.4.2 Filtri Passa-basso

Nei sistemi di controllo, il concetto di filtro passa-basso è essenziale. Un filtro passa-basso è un tipo di sistema che consente ai segnali con frequenze inferiori a una determinata soglia di attraversarlo senza attenuazione mentre i segnali con frequenze superiori a questa frequenza di taglio vengono notevolmente indeboliti o attenuati. Questa caratteristica rende i filtri passa-basso ideali per bloccare il rumore ad alta frequenza indesiderato consentendo al contempo il passaggio dei segnali a frequenza più bassa.

La frequenza di taglio $\bar{\omega}^4$ è un punto critico in un filtro passa-basso. Determina la soglia tra le frequenze che possono passare e quelle che vengono attenuate. Fino a questa frequenza, il filtro mantiene un guadagno costante, che spesso consideriamo come unitario (nessuna variazione dell'intensità del segnale). Oltre $\bar{\omega}$, il filtro riduce drasticamente il guadagno, filtrando efficacemente le frequenze più alte.

In un filtro passa-basso ideale, questa transizione dal guadagno unitario al guadagno zero alla frequenza di taglio è brusca e distinta (Figura 8.11). Questo comportamento ideale è molto ricercato in tanti sistemi di controllo, soprattutto negli scenari in cui il filtraggio del rumore ad alta frequenza è fondamentale mantenendo l'integrità dei segnali a frequenza più bassa.

Il filtro passa-basso trova la sua utilità in vari sistemi di controllo dove è essenziale preservare i segnali a bassa frequenza (come ingressi o comandi del sistema reale) eliminando al contempo i disturbi ad alta frequenza (come rumore elettronico o fluttuazioni rapide irrilevanti).

Nella realtà non è possibile realizzare un filtro *ideale*. Un filtro *reale* passa-basso ha una risposta $G(j\omega)$ con modulo approssimativamente costante a basse frequenze e decrescente per $\omega > \bar{\omega}$. La risposta in frequenza di un sistema che agisce da filtro passa-basso è tale che

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2}, & \omega \leq \bar{\omega} \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \frac{1}{\sqrt{2}}, & \omega > \bar{\omega} \end{cases} \quad (8.23)$$

Dunque il diagramma di Bode del modulo appartiene all'intervallo $[-3$ dB, $+3$ dB] attorno al valore $|G(j0)|$ per $\omega \leq \bar{\omega}$ mentre ha valori inferiori a $|G(j0)| - 3$ dB per $\omega > \bar{\omega}$ (Figura 8.11).

⁴Espressa anche come ω_c da cutoff.

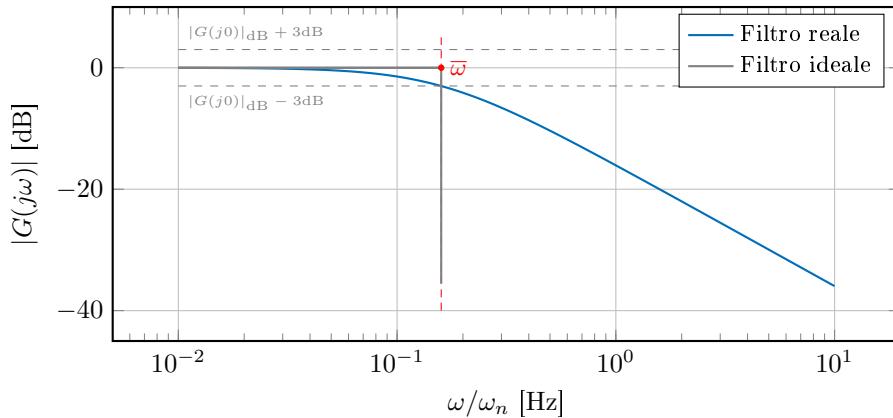


Figura 8.11: Diagramma di Bode del modulo di un filtro passa-basso ideale e reale.

L'intervallo di pulsazioni $[0, \bar{\omega}]$, ovvero l'intervallo di frequenze per cui il guadagno è significativo, è detto *banda passante*, o *larghezza di banda*, del filtro e $\bar{\omega}$ ne è l'estremo superiore.

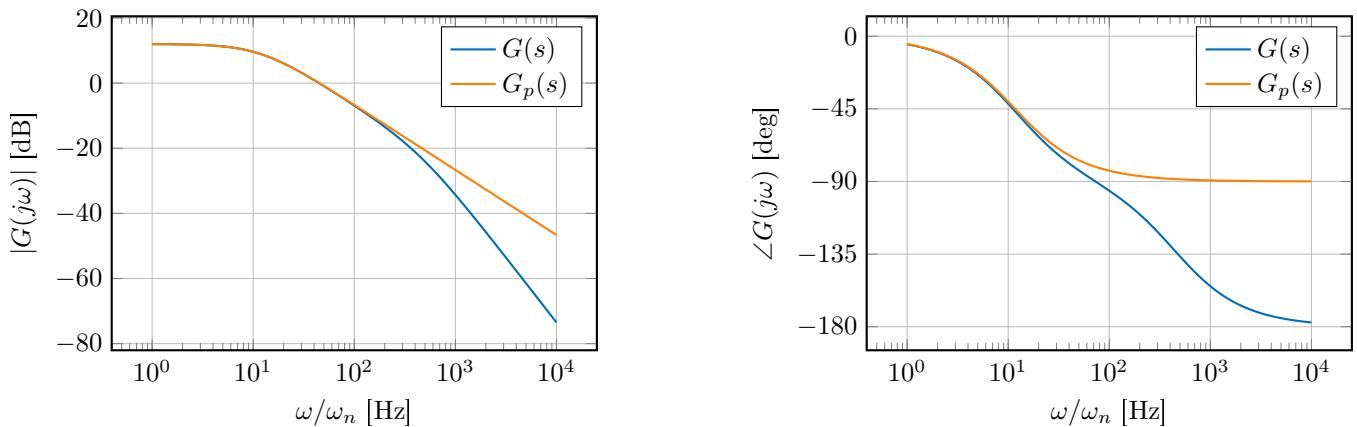
La larghezza di banda è legata al tempo di salita T_s di un sistema di primo ordine dalla relazione

$$T_s = \frac{1}{\bar{\omega}}$$

quindi il tempo di salita è inversamente proporzionale alla larghezza di banda ($T_s \propto 1/\bar{\omega}$) e direttamente proporzionale alla costante temporale $\tau = 1/\bar{\omega}$. Ne consegue che la larghezza di banda è un indicatore della velocità di risposta di un sistema; una larghezza di banda maggiore implica una risposta transitoria più rapida. Si noti infine che la (8.23) implica che la funzione di trasferimento $G(s)$ sia di tipo zero, ovvero non abbia né poli né zeri nell'origine (non ci sono né azioni integrali né azioni derivative); dunque $G(j0)$ corrispondere con il guadagno μ .

8.4.3 Approssimazione a Poli Dominanti

L'approssimazione a poli dominanti preserva la dinamica lenta del sistema, ignorando quella veloce, rappresenta quindi un modello in bassa frequenza del sistema. Quando è possibile applicare l'approssimazione a poli dominanti, la larghezza di banda è approssimata dal polo dominante.



(a) Diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento $G(s)$ e della funzione con approssimazione a poli dominanti $G_p(s)$.

(b) Diagramma di Bode della fase della funzione di trasferimento $G(s)$ e della funzione con approssimazione a poli dominanti $G_p(s)$.

Figura 8.12

Esempio Sia data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{3.98}{(1 + 0.0856s)(1 + 0.0022s)}$$

a cui può essere applicata l'approssimazione a

$$G_p(s) = \frac{3.98}{1 + 0.0856s}$$

Dai diagrammi di Bode di entrambe le funzione di trasferimento si può facilmente notare che la risposta in frequenza della funzione approssimata è una buona approssimazione della risposta in frequenza della funzione originaria, ma solo per basse frequenze.

8.4.4 Larghezza di Banda nei Sistemi Retroazionati

Nei sistemi retroazionati con elevato guadagno di anello, la larghezza di banda può essere ottenuta, in modo approssimato, dalla risposta in frequenza del guadagno di anello. Si consideri la funzione di trasferimento $G_r(s)$ di un sistema retroazionato

$$G_r(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

si supponga che la funzione di trasferimento sulla linea di retroazione sia $H(s) = 1$, e ci sia dunque retroazione unitaria, da ciò risulta

$$G_r(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \simeq \begin{cases} 1 & , \quad |G(j\omega)| \gg 1 \\ G(j\omega) & , \quad |G(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

ovvero la risposta in frequenza di $G_r(j\omega)$ risulta, nonostante possibili variazioni di $G(j\omega)$, all'incirca costante al variare della frequenza (con pulsazioni minori di $\bar{\omega}_r$, ovvero all'interno della larghezza di banda).

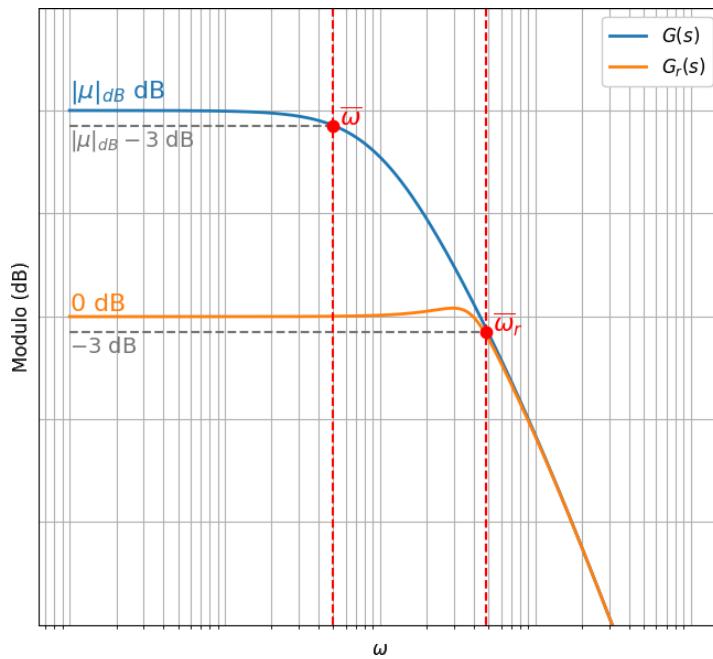


Figura 8.13: la banda passante del sistema retroazionato $[0, \bar{\omega}_r]$ è maggiore di quella del sistema ad anello aperto $[0, \bar{\omega}]$.

8.4.5 Filtro Elimina Banda

Un filtro *elimina banda*, o *filtro notch*, è un particolare filtro che blocca le frequenze in un determinato intervallo.

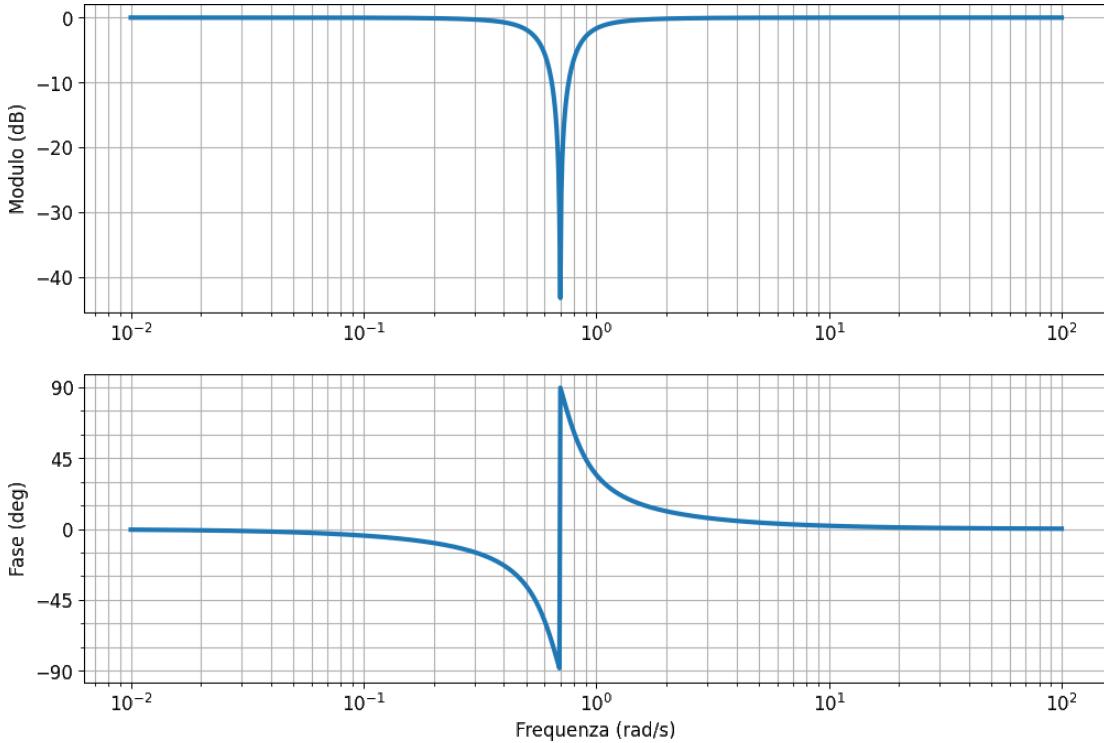


Figura 8.14: diagramma di Bode di un filtro elimina banda.

In generale possiamo definire un filtro elimina banda come composto da tre parti:

1. zeri con coefficiente di smorzamento ξ

$$\frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

2. un polo α volte maggiore di ω_n

$$\frac{\alpha\omega_n}{s + \alpha\omega_n}$$

3. un polo α volte minore di ω_n

$$\frac{\omega_n/\alpha}{s + \omega_n/\alpha}$$

con α , ξ , ω_n che determinano rispettivamente larghezza, profondità e posizione del filtro.

$$\text{notch} = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\alpha\omega_n}{s + \alpha\omega_n} \cdot \frac{\omega_n/\alpha}{s + \omega_n/\alpha} = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + (\omega_n/a)s + \omega_n^2} \quad (8.24)$$

Esempio Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.38s^2 + 0.038s + 0.209}{s^4 + 1.06s^3 + 0.56s^2 + 0.5s}$$

Vogliamo rimuovere il picco presente in $\omega = 0.7$ rad/s, per farlo possiamo sfruttare un filtro elimina banda con $\omega_n = 0.7$, $a = 2$ e $\xi = 0$

$$\frac{s^2 + 0.49}{s^2 + 0.35s + 0.49}$$

Osservando il diagramma di Bode in Figura 8.15 del modulo possiamo vedere che le frequenze intorno a $\omega = 0.7$ rad/s sono influenzate dal filtro.

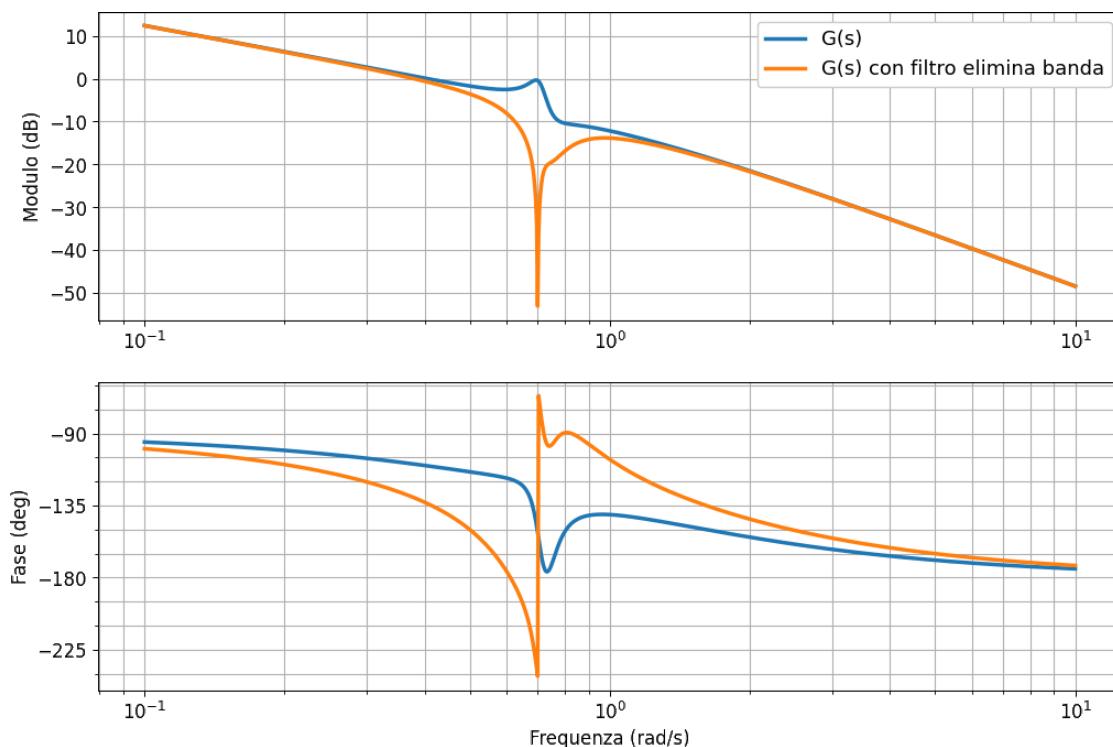


Figura 8.15: effetto del filtro elimina banda sul diagramma di Bode della funzione di trasferimento dell'esempio.

CAPITOLO 9

CRITERI DI STABILITÀ

Capire se un sistema gode della proprietà stabilità asintotica necessita della risoluzione della sua *equazione caratteristica*

$$\varphi(s) = 0 \quad (9.1)$$

che si ottiene ponendo a zero il *polinomio caratteristico*

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \varphi_n s^n + \varphi_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \varphi_1 s + \varphi_0, \quad \varphi_n \neq 0 \quad (9.2)$$

per cui già oltre il quarto grado non esiste formula risolutiva, non è quindi un problema di facile risoluzione. Per ovviare a questa problematica ci si affida a metodi che consentono di verificare quanto sopra senza la necessità di risoluzione dell'equazione caratteristica.

9.1 Criterio di Routh

Andiamo ora a introdurre il *criterio di Routh-Hurwitz*, una condizione sufficiente e necessaria a verificare la stabilità asintotica di un sistema LTI. Questo criterio permette di capire se tutte le radici del polinomio caratteristico di un sistema lineare hanno parte reale minore di zero. In particolare questo è vero se e solo se un certo insieme di combinazioni algebriche dei coefficienti del polinomio caratteristico possiede lo stesso segno.

9.1.1 Tabella di Routh

La *tabella di Routh-Hurwitz* è un vettore con struttura triangolare¹, costruito a partire dai coefficienti del polinomio caratteristico, che possiede $n + 1$ righe, ed è necessario per provare il criterio di Routh. La tabella è così costruita

¹Ogni due righe il numero di elementi per riga diminuisce di uno; a eccezione della prima riga in caso il grado del polinomio sia pari.

s^n	φ_n	φ_{n-2}	φ_{n-4}	\cdot	\cdot	\cdot
s^{n-1}	φ_{n-1}	φ_{n-3}	φ_{n-5}	\cdot	\cdot	\cdot
\vdots	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
	b_1	b_2	b_3	\cdot	\cdot	
	c_1	c_2	c_3	\cdot	\cdot	
	d_1	d_2	d_3	\cdot		
	\cdot	\cdot	\cdot			

Le prime due righe vengono riempite con i coefficienti del polinomio caratteristico. La prima contiene i coefficienti pari $\varphi_n, \varphi_{n-2}, \dots, \varphi_2, \varphi_0$, mentre la seconda i coefficienti dispari $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-3}, \dots, \varphi_3, \varphi_1$.

Ogni riga successiva si ottiene a partire proprio dagli elementi delle prime due, calcolati come segue

$$d_i = -\frac{1}{c_1} \det \begin{pmatrix} b_1 & b_{i+1} \\ c_1 & c_{i+1} \end{pmatrix} = b_{i+1} - \frac{b_1 c_{i+1}}{c_1} \quad (9.3)$$

Gli elementi necessari al calcolo di un elemento di una riga successiva che non sono definiti nelle righe precedenti quella attuale devono essere considerati nulli. Se $c_1 = 0$ non è possibile applicare la (9.3) e la tabella di Routh si dice non ben definita.

Teorema 9.1 (Criterio di Routh) Un sistema LTI è asintoticamente stabile se e solo se la tabella di Routh corrispondente, ricavata a partire dal suo polinomio caratteristico, è ben definita e tutti gli elementi della sua prima colonna hanno lo stesso segno.

Il numero di alternanze di segno degli elementi della prima colonna in una tabella di Routh ben definita indica il numero di autovalori con parte reale positiva.

Esempio Consideriamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 - s + 4)(s + 2)(s + 1)} = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

la tabella di Routh risultante è

s^4	1	3	8
s^3	2	10	
s^2	$\frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 10}{2} = -2$	$\frac{2 \cdot 8 - 1 \cdot 0}{2} = 8$	
s^1	$\frac{-2 \cdot 10 - 2 \cdot 8}{-2} = 18$	0	
s^0	$\frac{18 \cdot 8 - 2 \cdot 0}{2} = 8$		

Ci sono due cambi di segno nella prima colonna, il primo tra seconda e terza riga (-2, 8) e il secondo tra terza e quarta riga (-2, 18) quindi ci sono due autovalori con parte reale positiva e il sistema è instabile.

9.2 Casi Particolari

Durante la costruzione della tabella di Routh possono verificarsi situazioni particolari a cui bisogna prestare attenzione

I caso particolare Quando in una riga della tabella di Routh compare un elemento uguale a zero seguito da almeno un altro elemento diverso da zero nella stessa riga, il sistema è sempre instabile. La costruzione della tabella può comunque essere completata per stabilire il numero di autovalori instabili.

Per determinare elementi successivi a quello nullo si può eseguire una sostituzione, introducendo una variabile ε al posto dell'elemento mancante e facendone il limite che tende a zero.

Esempio 1 - I caso Sia data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{1s^4 + 2s^3 + 3s + 4}$$

esplicitiamo tutti i termini del polinomio a denominatore: $1s^4 + 2s^3 + 0s^2 + 3s + 4$, e costruiamone la tabella di Routh

s^4	1	0	4
s^3	2	3	0
s^2	-3/2	.	.
:	.	.	.

Notiamo che nella prima riga è presente uno 0 seguito da un 4, possiamo quindi ricondurci al primo caso particolare e concludere che il sistema è instabile. C'è inoltre un cambio di segno nella prima colonna tra seconda e terza riga.

Esempio 2 - I caso Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{1s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 4s + 5}$$

andiamo a costruire la tabella di Routh

s^4	1	2	5
s^3	2	4	0
s^2	0 : $\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0^+$	5	5
s^1	$4 - 10/\varepsilon = -\infty$	0	0
s^0	5	5	5

Anche in questo caso è presente uno 0 a precedere un numero diverso da zero, ovvero 5, il sistema è quindi instabile. Andiamo comunque a calcolare i termini della tabella per determinare il numero di cambi di segno. Ci sono ben due cambi di segno nella prima colonna e quindi due autovalori con parte reale positiva; il primo tra terza e quarta riga ($0^+, -\infty$) e il secondo tra quarta e quinta riga ($-\infty, +5$).

Si noti che per il calcolo del primo elemento della quarta riga abbiamo fatto il limite per ε che tende a zero.

II caso particolare Quando è presente un'intera riga nulla ci sono tre condizioni che possono originarla:

- due radici reali, uguali e opposte in segno: il sistema è instabile;
- due radici complesse coniugate: il sistema è marginalmente stabile;
- quattro radici equidistanti dall'origine: il sistema è instabile.

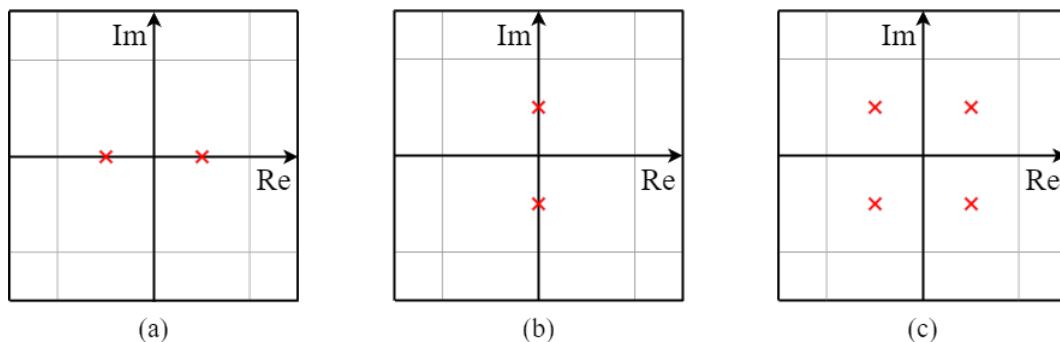


Figura 9.1: a) due radici reali reali e opposte in segno; b) due radici complesse coniugate; c) quattro radici equidistanti dall'origine.

s^{2m-2}	b_{2m}	b_{2m-2}	b_{2m-4}
s^{2m-1}	0	0	0
.	.	.	.

A prescindere dalla causa che ha generato la riga vuota, per determinare la stabilità del sistema dobbiamo procedere a costruire il *polinomio ausiliario*.

Per costruire questo polinomio prendiamo i coefficienti della riga soprastante la riga nulla e li utilizziamo come coefficienti del polinomio

$$p(s) = b_{2m}s^{2m-2} + b_{2m-2}s^{2m-4} + \dots + b_0 \quad (9.4)$$

notando che questa condizione si verifica sempre su righe corrispondenti a un numero dispari, sia $2m - 1$, minore del grado del polinomio caratteristico di partenza n . A questo punto deriviamo il polinomio appena costruito e sostituiamo gli elementi della riga nulla con i coefficienti risultanti dalla derivazione. Una volta sostituita la riga nulla siamo in grado di determinare la stabilità del sistema applicando il criterio di Routh.

Quando nella tabella di Routh si produce una riga nulla, e non sono presenti cambi di segno, significa che ci sono due radici complesse coniugate e il sistema è marginalmente stabile.

Esempio - II caso Consideriamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{1s^5 + 2s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 8s + 12}$$

La tabella di Routh risultante dal polinomio caratteristico di questa funzione di trasferimento è

s^5	1	6	8	.
s^4	2	10	12	.
s^3	1	2	0	.
s^2	6	12	0	.
s^1	$0 \rightarrow 2$	$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$	
s^0	$? \rightarrow 12$.	.	

È presente una riga nulla, dobbiamo costruire il polinomio ausiliario usando la riga soprastante della tabella Routh. I

coefficienti utilizzati per la costruzione del polinomio ausiliario sono **6, 12, 0**

$$p(s) = 6s^2 + 12s^0 = s^2 + 2$$

Adesso deriviamo il polinomio ottenendo così

$$\frac{d(p(s))}{ds} = 2s$$

i coefficienti da sostituire alla riga nulla sono quindi **2, 0, 0**.

Applichiamo il criterio di Routh e verifichiamo che in questo caso non ci sono cambi di segno negli elementi della prima colonna della tabella di Routh, quindi tutti gli autovalori hanno parte reale non negativa. In particolare, la mancanza di cambi di segno e la presenza di una riga nulla implica che ci siano due autovalori complessi coniugati e il sistema sia marginalmente stabile.

Polinomio ausiliario - note aggiuntive Il polinomio ausiliario $p(s)$ esiste se e solo se nel vettore di Routh c'è una riga nulla. Il polinomio $p(s)$ è infatti un fattore del polinomio caratteristico $\varphi(s)$ e lo divide senza resto

$$\varphi(s) = p(s)r(s) \quad (9.5)$$

Dalla relazione soprastante è possibile ricavare anche il polinomio $r(s) = \varphi(s)/p(s)$. Dall'esempio precedente si ha

$$r(s) = \frac{s^5 + 2s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 8s + 12}{s^2 + 2} = s^3 + 2s^2 + 4s + 6$$

e quindi

$$\varphi(s) = (s^2 + 2)(s^3 + 2s^2 + 4s + 6)$$

È importante notare che questo è vero solo se abbiamo una riga nulla, perché altrimenti avremmo un resto diverso da zero risultante dalla divisione polinomiale tra $\varphi(s)$ e $p(s)$.

Concentriamoci adesso sul polinomio $r(s)$ facendo riferimento alla tabella di Routh dell'esempio precedente

s^5	1	6	8
s^4	2	10	12
s^3	1	2	0
s^2	6	12	0
s^1	2	0	0
s^0	12		

Gli elementi della tabella soprastanti a quelli del polinomio ausiliario $p(s) = s^2 + 2$ sono dovuti ad $r(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + 6$, e dato che non ci sono cambi di segno possiamo dire che questo è stabile. Gli elementi successivi a quelli del polinomio ausiliario sono ovviamente dovuti a quest'ultimo e il numero di cambi di segno indica quanti autovalori positivi ci sono. In questo caso $s = \sqrt{-2} = \pm j\sqrt{2}$, corrispondenti a due radici complesse coniugate e il sistema è marginalmente stabile (come già verificato).

CAPITOLO 10

SCHEMA GENERALE DI CONTROLLO IN RETROAZIONE

Di seguito verranno illustrati i componenti e le variabili di uno schema di controllo retroazionato. Esistono molti tipi di rappresentazioni per questo genere di controlli, ma non andremo ad approfondirli. Si faccia riferimento alla Figura 10.1.

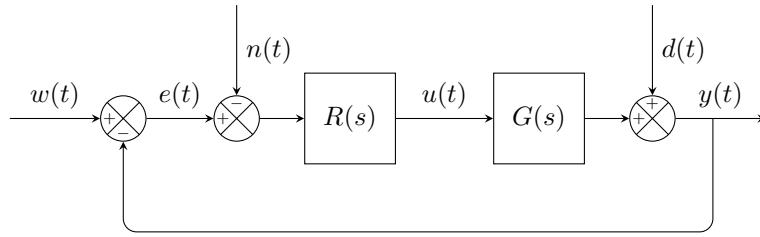


Figura 10.1: Schema di controllo in retroazione.

Nello schema sono presenti due blocchi, nel primo è rappresentata la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore R mentre nel secondo è mostrata la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema sotto controllo G . La variabile w è l'andamento desiderato, o segnale di riferimento, per la variabile d'uscita y ; e è l'errore del sistema di controllo tra il segnale di riferimento e l'uscita, mentre u è la variabile di controllo. Le variabili d , disturbo di carico, e n , rumore di misura, sono disturbi che affliggono l'uscita y e idealmente si vorrebbe che fossero nulli.

L'uscita y deve inseguire l'ingresso w e per farlo poniamo un controllore R che generi un segnale di controllo u per regolare l'impianto G cercando di limitare eventuali errori dovuti a disturbi.

Prestazioni a regime Uno degli scopi caratteristici dei sistemi di controllo è mantenere l'errore e limitato, preferibilmente nullo, una volta esaurito il transitorio iniziale. L'errore è influenzato da diversi segnali esterni quali w , d e n .

Prestazioni in transitorio Anche il comportamento nel transitorio del sistema di controllo è importante ed è utile concentrarsi sull'andamento di segnali di ingresso che possono influenzare il segnale d'uscita y o l'errore e .

Idealmente si vorrebbe che la risposta al segnale di riferimento coincidesse esattamente con il segnale di riferimento stesso. Questo non essendo possibile si riflette sull'aggiunta di requisiti sul transitorio per particolari segnali di ingresso e specifiche proprietà per la risposta in frequenza tra w e y (e.g ampiezza banda passante, picchi di risonanza contenuti nella loro estensione).

Anche per quanto riguarda gli effetti dei segnali di disturbo d e n sull'uscita non si può raggiungere una situazione ideale con disturbi nulli. Si cerca quindi di mantenere i loro effetti sull'uscita il più possibile limitati e magari annullarli passato un certo tempo, sempre ponendo particolari requisiti sull'uscita (e.g. se la banda di pulsazioni in cui si concentra

l'energia del disturbo è conosciuta, è buona pratica far sì che per quelle frequenze il modulo della risposta in frequenza tra il disturbo e l'uscita sia il più limitato possibile in ampiezza).

Anche per quanto riguarda gli effetti dei segnali di disturbo d e n sull'uscita non si può raggiungere una situazione ideale con disturbi nulli. Si cerca quindi di mantenere i loro effetti sull'uscita il più possibile limitati e magari annullarli passato un certo tempo, sempre ponendo particolari requisiti sull'uscita (e.g. se la banda di pulsazioni in cui si concentra l'energia del disturbo è conosciuta, è buona pratica far sì che per quelle frequenze il modulo della risposta in frequenza tra il disturbo e l'uscita sia il più limitato possibile in ampiezza).

CAPITOLO 11

STABILITÀ

La stabilità di un sistema lineare non dipende dagli ingressi a cui è soggetto, ma dalla sua struttura interna, facendo quindi riferimento al sistema $L(s) = R(s)G(s)$, mostrato in Figura 11.1, possiamo dire che per essere stabile il sistema retroazionato complessivo non deve presentare cancellazioni critiche; inoltre, le radici dell'equazione $1 + L(s) = 0$ devono essere tutte a parte reale negativa. Per risolvere problemi sia a livello di analisi che di sintesi oltre che valutazione della robustezza di un sistema, introdurremo il *criterio di Nyquist*.

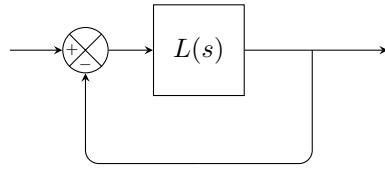


Figura 11.1: Sistema retroazionato in analisi.

11.1 Diagrammi Polari

Un *diagramma polare* è una rappresentazione della risposta in frequenza ottenuta tracciando nel piano complesso il luogo dei punti $G(j\omega)$ con $\omega \geq 0$. Questo tipo di diagrammi è rappresentato da una curva nel piano complesso, in cui è indicata la direzione di percorrenza al crescere della pulsazione ω da zero a infinito.

Per ottenere un diagramma polare accurato, con una curva ben definita, è necessario valutare la risposta in frequenza di un notevole numero di valori di ω . Questo tipo di tracciamento è adatto a essere svolto attraverso strumenti di calcolo quali la Python Control Library e MATLAB (che sono brevemente discussi nel Capitolo 18.1.1), ma è anche possibile delineare l'evoluzione qualitativa del diagramma senza coinvolgere gli strumenti sopra citati.

L'andamento del diagramma polare della risposta in frequenza $G(j\omega)$ si può ricavare a partire dalla forma fatto-rizzata della funzione di trasferimento, che tralasseremo per semplicità. Il fasore della risposta in frequenza $G(j\omega)$ risulta

$$G(j\omega) = M e^{jf} \quad (11.1)$$

dove il modulo M è

$$M = \frac{|\mu| \prod M_{zeri}}{M_o^g \prod M_{poli}}$$

e la fase

$$f = f_\mu + \sum f_{zeri} - g f_o - \sum f_{poli}$$

dove M_{zeri} e M_{poli} sono i moduli degli zeri e dei poli e M_o è il modulo dei poli nell'origine. Invece, f_{zeri} e f_{poli} sono le fasi degli zeri e dei poli, mentre f_o è la fase dei poli nell'origine. I moduli e le fasi in analisi sono da considerare in riferimento ai vettori con origine nella corrispondente singolarità di $G(s)$ e termine in $j\omega$, come mostra in Figura 11.2.

Facendo un'analisi per la pulsazione che va da zero all'infinito di modulo e fase delle singolarità di $G(s)$ è possibile determinare l'evoluzione di $G(j\omega)$.

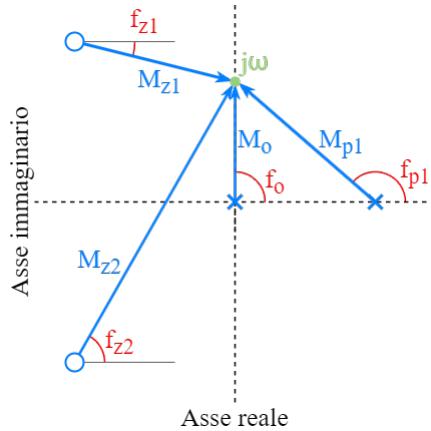


Figura 11.2: diagramma polare con evidenziati i nomi di modulo e fase delle corrispondenti singolarità.

Poli sull'asse immaginario Il diagramma polare della risposta in frequenza dell'integratore

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

poggia sul semiasse complesso negativo, dunque man mano che ci si avvicina al polo il modulo decresce mentre la fase rimane inalterata a -90° (Figura 11.3). Quando si arriva sul polo, il modulo è infinito e la fase è indefinita.

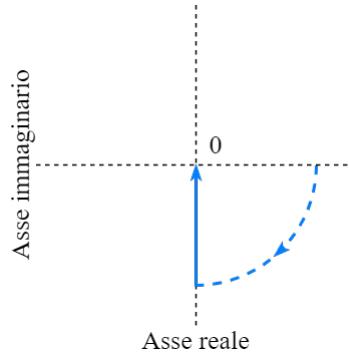


Figura 11.3: diagramma polare dell'integratore.

Per questa ragione tracciare il diagramma polare quando $G(s)$ ha un polo in sull'asse immaginario è un problema. Per risolverlo possiamo analizzare il diagramma di una funzione che abbia un polo in $s = -p$, $p > 0$, e studiarne il limite $p \rightarrow 0$. Un'altra alternativa è quella di modificare leggermente la costruzione del diagramma polare quando ci si avvicina a un polo sull'asse immaginario; in particolare dobbiamo definire come tracciare il grafico quando si hanno poli nell'origine e sull'asse immaginario. Definiamo una soglia infinitesimale ε tale per cui il diagramma polare è il luogo dei punti del semiasse immaginario positivo, dei punti $\varepsilon e^{j\theta}$, con $\theta \in [0, \pi/2]$, se $s = 0$ è un polo di $G(s)$, e dei punti $j\omega_p + \varepsilon e^{j\theta}$, con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, se $j\omega_p$ è un polo di $G(s)$.

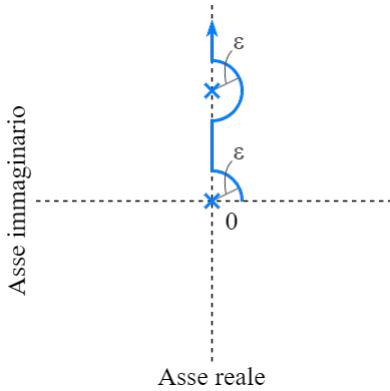


Figura 11.4: luogo dei punti modificato per il corretto tracciamento del diagramma polare in presenza di poli sull'asse immaginario.

Otteniamo quindi una deformazione semicircolare di raggio infinitesimo della curva posta sul semipiano destro, che evita il polo sull'asse immaginario.

Zeri sull'asse immaginario In presenza di uno o più zeri sull'asse immaginario si verifica una condizione analoga a quella riscontrata per i poli, avvicinandosi allo zero il modulo decresce e la fase rimane inalterata; quando ci si trova sullo zero il modulo è zero (anziché infinito) e la fase indefinita. In questo caso però il punto $j\omega_z$ che ne deriva si trova sempre nell'origine, dato il modulo nullo. Alla luce di ciò non è necessario modificare la costruzione del diagramma polare in quanto non si avvertirebbero cambiamenti.

11.2 Diagramma di Nyquist

Il *diagramma di Nyquist* è l'immagine attraverso una funzione di trasferimento $G(s)$ della curva chiusa del piano complesso che racchiude l'intero semipiano destro, compreso l'asse immaginario.

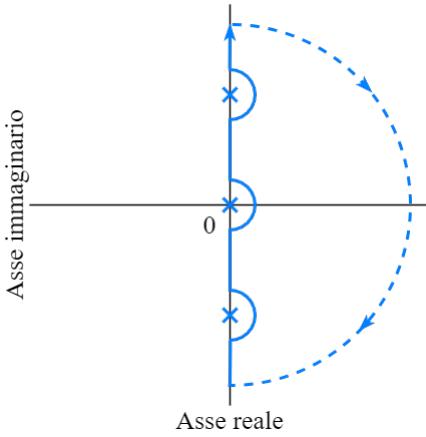


Figura 11.5: percorso di Nyquist.

La curva appena descritta è detta *percorso di Nyquist* (Figura 11.5) e per il suo tracciamento valgono tutte le considerazioni fatte per i diagrammi polari. In particolare, il diagramma di Nyquist si realizza specchiando sull'asse reale il diagramma polare associato a $G(j\omega)$, a partire da valori crescenti di ω .

Tracciamento del percorso di Nyquist per sistemi strettamente propri e non Se la funzione di trasferimento è strettamente propria, ovvero ci sono più poli che zeri, l'immagine del percorso di Nyquist corrisponde al punto $G(j\infty) = 0$. Nel caso invece in cui la funzione $G(s)$ è propria l'immagine del percorso di Nyquist per valori infiniti di ω assume un valore reale finito $G(j\infty) = x$, $x \in \mathbb{R} \neq 0$.

11.2.1 Consigli per il Tracciamento dei Diagrammi di Nyquist

Quando vogliamo tracciare manualmente un diagramma di Nyquist di funzioni abbastanza semplici non è necessario studiare il percorso di Nyquist per tutte le frequenze, basta infatti porre attenzione su quattro punti in particolare. Stimare il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ nei punti:

1. $\omega = 0$ (inizio del percorso);
2. $\omega = \infty$ (parte intermedia del percorso);
3. intersezioni con l'asse immaginario;
4. intersezioni con l'asse reale.

e specchiarlo sull'asse reale solitamente è sufficiente per dedurre la stabilità del sistema. Per funzioni di trasferimento più complesse trovare le intersezioni con gli assi diventa più complesso ed è più pratico affidarsi a strumenti di calcolo.

11.3 Criterio di Nyquist

In riferimento alla funzione d'anello $L(s)$, associata al sistema retroazionato in Figura 11.1, indichiamo con P il numero di poli di $L(s)$ con parte reale maggiore di zero e con N il numero di giri fatti dal diagramma di Nyquist di $L(s)$ attorno al punto -1 ; contando i giri in senso antiorario come positivi e quelli in senso orario come negativi. Se il diagramma passa sopra -1 allora N non è ben definito.

Introduciamo inoltre la funzione di trasferimento

$$H(s) = 1 + L(s)$$

considerando $L(s) = N_L(s)/D_L(s)$ si ha

$$H(s) = \frac{N_L(s) + D_L(s)}{D_L(s)}$$

Questa funzione di trasferimento ha come zeri i poli del sistema in anello chiuso e come poli i poli di $L(s)$. Da ciò deriva che i diagrammi di Nyquist di $H(s)$ e $L(s)$ sono equivalenti¹; inoltre $H(s)$ ha esattamente P poli con parte reale positiva. Nella stima del diagramma di Nyquist di $H(s)$ dobbiamo esaminare due casistiche distinte:

Valori nell'origine Se la funzione $H(s)$ ha uno o più valori $\hat{s} = \pm j\hat{\omega}$ per cui il diagramma di Nyquist passa per l'origine, allora il sistema in anello chiuso ha poli con parte reale nulla e il sistema non è asintoticamente stabile; inoltre, $H(\hat{s}) = 0$ equivale a $L(\hat{s}) = -1$ quindi N non è ben definito e il sistema può essere marginalmente stabile o instabile (ma non si può dire nulla a riguardo).

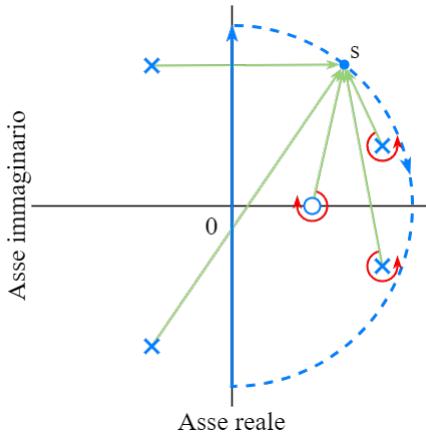
Nessun valore nell'origine Al contrario, se non esiste alcun valore che passa per l'origine si possono studiare i contributi degli zeri e dei poli per verificare quanto vale N .

Quando la variabile s esegue un giro completo del diagramma di Nyquist ogni zero di $H(s)$ interno al percorso dà un contributo di fase pari a -2π mentre ogni polo interno al percorso dà un contributo di 2π ; zeri e poli esterni al percorso non danno contributi (Figura 11.6). Da quanto appena discusso si deduce che il diagramma di Nyquist di $H(s)$ compie un giro in senso orario attorno all'origine per ogni zero interno al percorso mentre compie un giro in senso antiorario per ogni polo interno.

Definendo con Z il numero di zeri con parte reale positiva, quindi interni al percorso di Nyquist, possiamo facilmente concludere che il numero complessivo di giri eseguiti dal diagramma di Nyquist di $H(s)$ attorno all'origine è pari a $P - Z$. Il numero di giri compiuti da $H(s)$ attorno all'origine è uguale al numero di giri compiuti da $L(s)$ attorno a -1 , quindi $N = P - Z$.

In conclusione, tenendo a mente che per avere un sistema retroazionato asintoticamente stabile è necessario che $Z = 0$, possiamo formulare il criterio di Nyquist.

¹Per la precisione, i due diagrammi sono sfasati di uno, definito infatti $\tilde{s} = \pm j\tilde{\omega}$ si ha che $L(\tilde{s}) = F(\tilde{s}) + 1$, come ci aspettavamo, dato che $H(s) = 1 + L(s)$.

Figura 11.6: contributi di fase degli zeri e dei poli di $G(s)$.

Teorema 11.1 (Criterio di Nyquist) Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato in Figura 11.1 sia asintoticamente stabile è che N sia ben definito e risulti $N = P$.

Quello che ci dice il criterio di Nyquist è che per avere un sistema ad anello aperto asintoticamente stabile è necessario che $P = 0$, ovvero che i poli di $L(s)$ siano tutti a parte reale negativa. Per quanto riguarda i sistemi retroazionati, gli zeri di $H(s)$ sono i poli del sistema retroazionato e quindi per essere asintoticamente stabile bisogna che $Z = 0$ e dunque $N = P$. Equivalentemente possiamo dire che un sistema retroazionato non è asintoticamente stabile se N è ben definito e $N \neq P$.

Esempio Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

stimarne manualmente l'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist.

Consideriamo la risposta in frequenza $G(j\omega)$ e valutiamo l'andamento del diagramma di Nyquist per $\omega = 0$, $\omega = \infty$ e nelle intersezioni con gli assi.

1. $\omega = 0$ (inizio del percorso)

$$|G(j0)| = \left| \frac{1}{(j0)^2 + 3(j0) + 2} \right| = \frac{1}{2}, \quad \angle G(j0) = 0$$

2. $\omega = \infty$ (punto intermedio del percorso)

$$|G(j\infty)| = \left| \frac{1}{(\infty)^2 + 3(\infty) + 2} \right| = \frac{1}{\infty} = 0, \quad \angle G(j\infty) = -180$$

Nota per trovare le intersezioni con gli assi è conveniente rappresentare $G(j\omega)$ come $x+jy$ per esplicitare la componente reale e quella immaginaria

$$\frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2} = \frac{1}{(2 - \omega^2) + 3\omega j} \frac{(2 - \omega^2) - 3\omega j}{(2 - \omega^2) - 3\omega j} = \frac{(2 - \omega^2) - 3\omega j}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}$$

3. intersezioni con l'asse immaginario - poniamo la parte reale a zero e ricaviamo ω_{im}

$$\frac{(2 - \omega^2)}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{im} = \sqrt{2}$$

dopodiché sostituiamo ω_{im} nella parte immaginaria

$$\frac{-3\omega_{im}j}{(2 - \omega_{im}^2)^2 + 9\omega_{im}^2} = \frac{-3\sqrt{2}}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \approx -0.236$$

4. intersezioni con l'asse reale - poniamo la parte immaginaria a zero e ricaviamo ω_{re}

$$\frac{-3\omega j}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{re1} = 0, \omega_{re2} = \infty$$

Abbiamo già valutato il diagramma per i punti corrispondenti alle pulsazioni $\omega = 0, \omega = \infty$ nei primi due passi quindi non serve andare oltre.

Come si può osservare dal diagramma di Nyquist di $G(s)$ (Figura 11.7) i punti valutati forniscono una buona indicazione sulla struttura del diagramma completo.

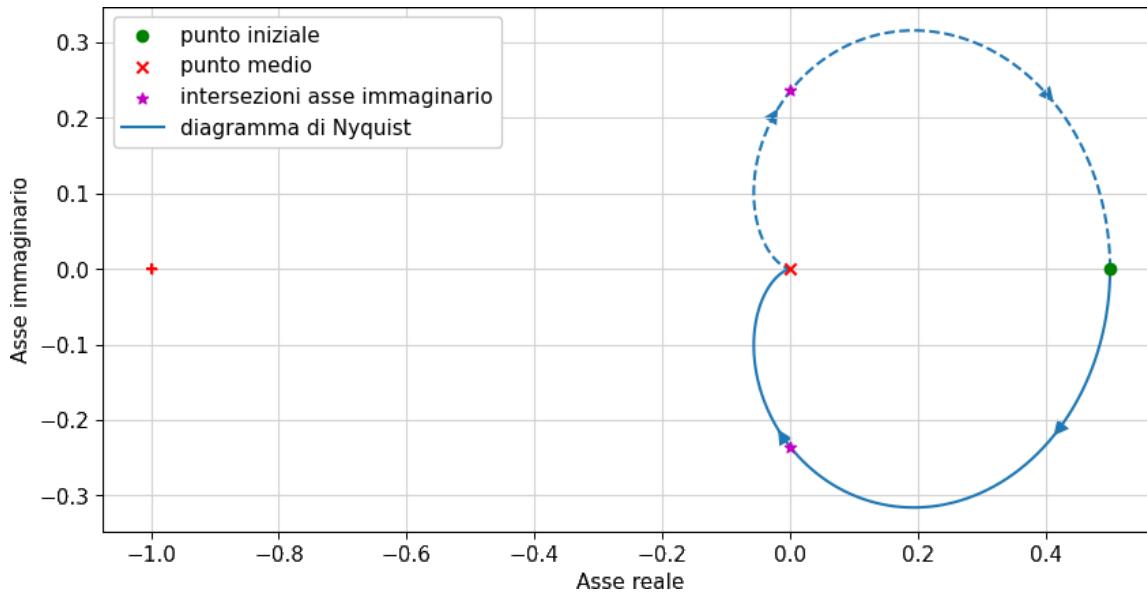


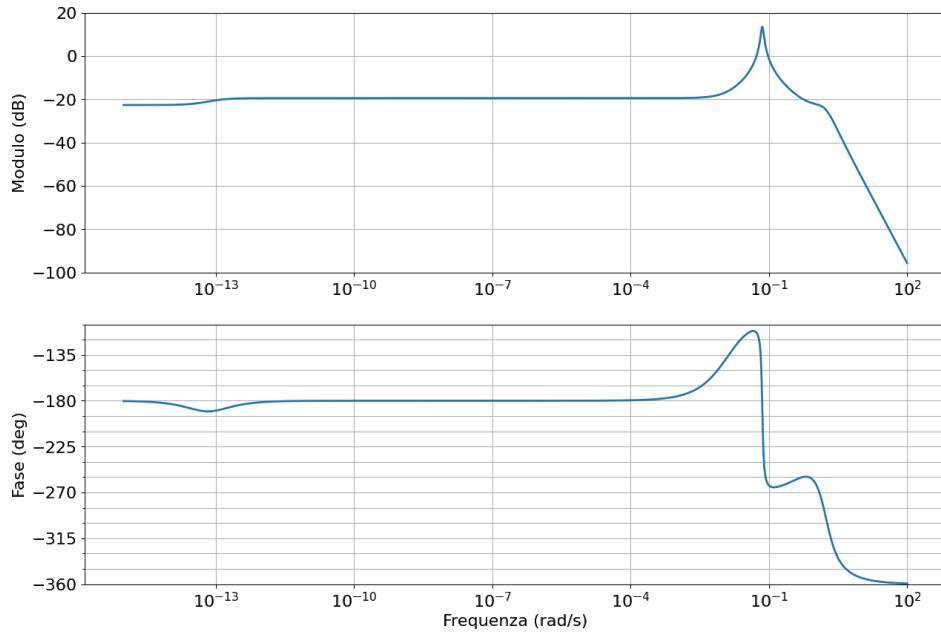
Figura 11.7: diagramma di Nyquist dell'esempio.

Note finali con esempio I diagrammi di Nyquist sono molto utili quando il sistema ad anello aperto in esame ha poli o zeri nel semipiano destro. Alcuni sistemi possono presentare poli a malapena instabili ed è difficile accorgersene con i diagrammi di Bode, mentre con i diagrammi di Nyquist sono molto più evidenti.

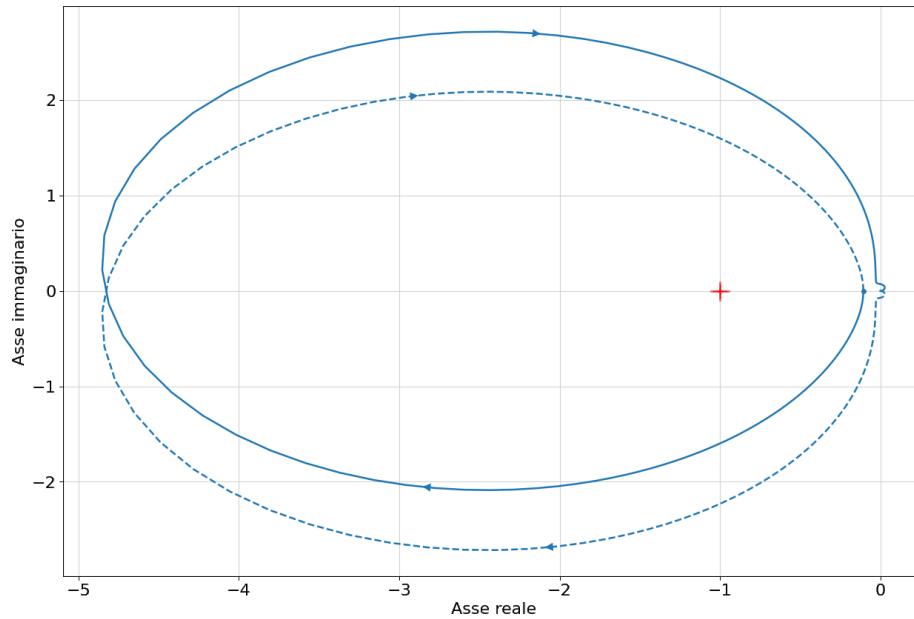
Ad esempio, si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{3.553 \times 10^{-15}s^4 - 0.1642s^3 - 0.1243s^2 - 0.00161s + 9.121 \times 10^{-17}}{s^5 + 1.825s^4 + 2.941s^3 + 0.03508s^2 + 0.01522s - 1.245 \times 10^{-15}}$$

Vorremmo migliorarne le prestazioni ponendo il sistema in retroazione unitaria, quindi ne studiamo la stabilità in anello aperto. Nell'equazione caratteristica della funzione di trasferimento c'è un cambio di segno e possiamo quindi dedurre che il sistema in anello aperto è instabile. Per verificarlo sfruttiamo i mezzi di calcolo che abbiamo a disposizione, come Python Control Library; in particolare, mettiamo a confronto i diagrammi di Bode e di Nyquist di $G(s)$.



Dal diagramma di Bode non è immediato capire cosa succede mentre dal diagramma di Nyquist si nota subito che ci sono due giri attorno al punto -1 , uno dei quali è dovuto a un polo instabile dell'anello aperto.



Il sistema in retroazione unitaria ha quindi tre poli instabili.

CAPITOLO 12

MARGINI DI STABILITÀ

Di fronte a un sistema asintoticamente stabile in condizioni nominali è molto importante studiarne la robustezza; più un sistema è robusto e maggiori sono le variazioni che può sopportare senza diventare instabile. In particolare, il criterio di Nyquist ci aiuta molto nella valutazione di questa proprietà. Supponiamo infatti che il sistema retroazionato in Figura 11.1 con funzione d'anello $L(s)$ sia asintoticamente stabile senza poli a parte reale positiva ($P = N = 0$). In queste condizioni il diagramma di Nyquist non avvolge mai il punto -1 e più il diagramma è distante da -1 maggiore è il margine di resistenza a eventuali perturbazioni della funzione d'anello che rimangono limitate.

La valutazione della robustezza di un sistema retroazionato attraverso il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento nominale può essere condotta analizzando la minima distanza tra il diagramma stesso e il punto -1 , detta *margine di stabilità vettoriale* Δ_m (Figura 12.1).

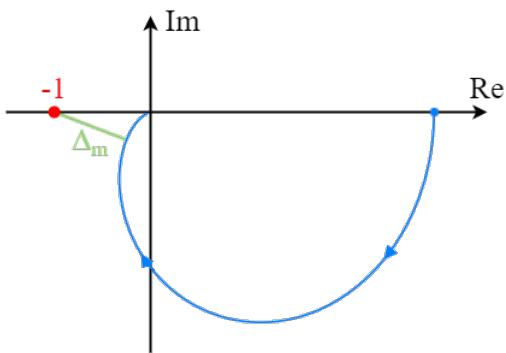


Figura 12.1: margine di stabilità vettoriale.

Modellizzando la realtà durante la progettazione di un controllore è inevitabile che assunzioni e semplificazioni sulla struttura del sistema si ripercuotano negativamente sul comportamento dello stesso; allo scopo di evitare che questi effetti gravino sul nostro modello sfruttiamo lo studio dei margini di stabilità.

Il margine di stabilità vettoriale sopra introdotto non è di facile lettura ed è quindi opportuno introdurre indicatori di robustezza quali il *margine di guadagno* e il *margine di fase* che contribuiscono separatamente alla determinazione degli effetti di variazioni del modulo e della fase della funzione di trasferimento d'anello e sono di facile trattazione attraverso i diagrammi di Bode e di Nyquist. Di seguito esporremo gli indicatori sopra citati per il calcolo semplice, seppur parziale, della robustezza.

12.1 Margine di Guadagno

Supponiamo che il sistema in Figura 11.1 abbia funzione d'anello con guadagno positivo e poli con parte reale negativa ($P = 0$). Assumiamo inoltre che il diagramma intersechi il semiasse negativo una sola volta, nel punto $A > -1$,

e che il sistema retroazionato sia quindi asintoticamente stabile ($N = P$). Un criterio di valutazione del *grado di stabilità* del sistema è indicato dalla distanza tra i punti A e -1 . In particolare, il margine di guadagno è definito come $k_m = |x_A|^{-1}$, con x_A ascissa del punto A . Il valore k_m equivale all'inverso del modulo di $L(j\omega)$ in corrispondenza della pulsazione associata al punto A sul diagramma polare ω_π

$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}, \quad \angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ \quad (12.1)$$

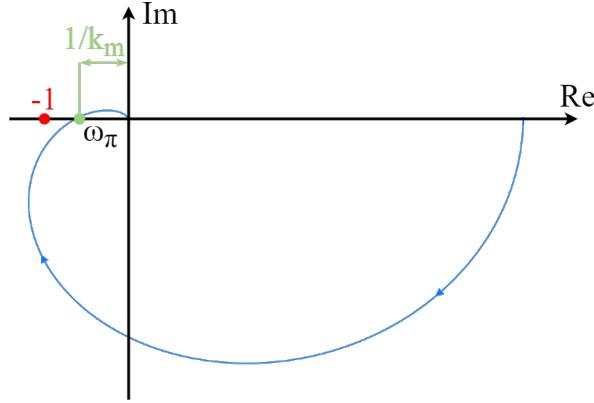


Figura 12.2: definizione del margine di guadagno.

È quindi facile valutarlo attraverso i diagrammi di Bode di modulo e fase di $L(j\omega)$ (Figura 12.3), considerando che

$$|k_m|_{dB} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

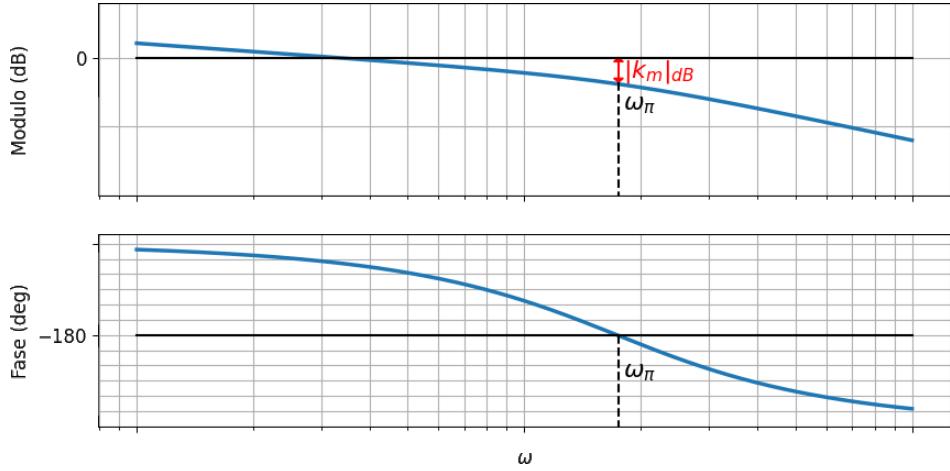
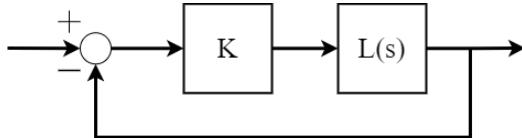


Figura 12.3: valutazione del margine di guadagno attraverso i diagrammi di Bode.

Osservando poi che il punto A si trova a destra del punto -1 risulta $k_m > 1$. Se si considera poi il sistema in Figura 12.4, con $k > 0$, il sistema risulta asintoticamente stabile per tutti i valori $k < k_m$; infatti se la condizione è rispettata il diagramma di Nyquist di $kL(s)$ non passa per il punto -1 né ci gira attorno. Il margine di guadagno è dunque da interpretare come estremo superiore dei fattori moltiplicativi del guadagno d'anello tollerabile dal sistema prima che questo diventi instabile. Di fronte a incertezze sul guadagno d'anello quindi k_m fornisce una stima della robustezza del sistema.

Figura 12.4: sistema retroazionato con guadagno d'anello k .

12.2 Margine di Fase

Sempre con l'ipotesi che il sistema in Figura 11.1 abbia funzione d'anello con guadagno positivo e poli con parte reale negativa ($P = 0$), si consideri che il diagramma polare di $L(j\omega)$ attraversi una singola volta la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origina (Figura 12.5). Si noti che essendo $L(s)$ strettamente propria l'attraversamento è dall'esterno verso l'interno della circonferenza. Sia C il punto di intersezione con la circonferenza e ω_c la pulsazione associata a C . ω_c è detta *pulsazione critica* e corrisponde alla pulsazione in cui il modulo di $L(j\omega)$ è unitario; invece, l'angolo φ_c è detto *fase critica*. Finché la fase critica è tale che $\varphi_c < 180^\circ$ il diagramma di Nyquist di $L(s)$ non circonda il punto -1 e di conseguenza il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

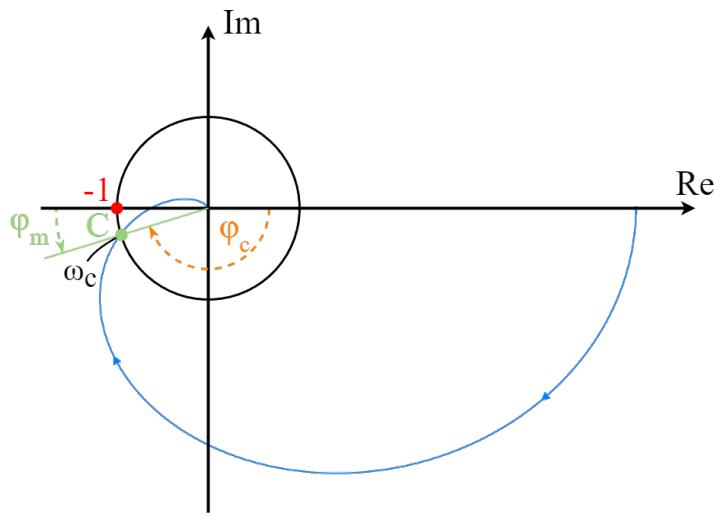
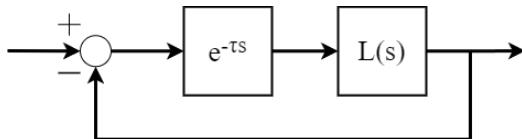


Figura 12.5: definizione del margine di guadagno.

Per valutare il grado di robustezza del sistema facciamo riferimento alla distanza tra i punti C e -1 . In particolare, chiamiamo questo indicatore *margine di fase* φ_m del sistema in retroazione, calcolato come

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|, \quad \varphi_c = \angle L(j\omega_c), \quad |L(j\omega_c)| = 1$$

Come per il margine di guadagno è facile valutarlo attraverso i diagrammi di Bode di modulo e fase di $L(j\omega)$ (Figura 12.7). Considerando il sistema retroazionato con ritardo di tempo τ (Figura 12.6), che produce uno sfasamento $-\omega\tau$ radianti nella fase lasciando inalterato il modulo, possiamo dire che il sistema è asintoticamente stabile fintanto che lo sfasamento non è tale da far coincidere i punti C e -1 ; questo se il margine di fase $\varphi > 0^\circ$.

Figura 12.6: sistema retroazionato con ritardo τ .

I punti C e -1 coincidono, e portano quindi il sistema all'instabilità, quando $\tau\omega_c = \varphi_m\pi/180^1$ o, equivalentemente,

¹La conversione in gradi ($\pi/180$) è necessaria perché ω_c è espressa in radianti al secondo mentre φ_m in gradi.

per valori di τ maggiori o uguali a $(\varphi_m/\omega_c)\pi/180$. Il margine di fase è dunque da interpretare come misura del grado di robustezza della stabilità del sistema a fronte di eventuali incertezza nella fase della funzione d'anello $L(s)$ in corrispondenza della pulsazione critica o in presenza di possibili ritardi di tempo.

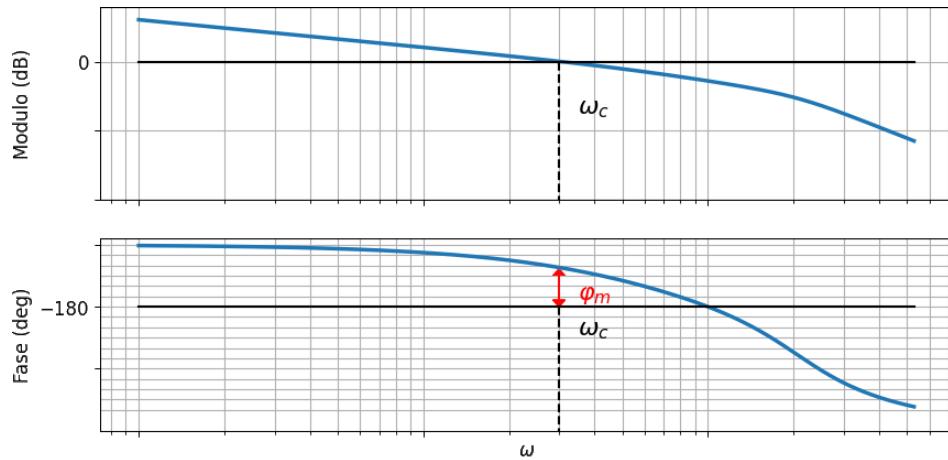


Figura 12.7: valutazione del margine di fase attraverso i diagrammi di Bode.

12.3 Note sugli Indicatori di Stabilità Robusta

Il margine di guadagno e di fase sono indicatori specifici riguardo alla stabilità robusta di un sistema, che si basano su un singolo punto della risposta in frequenza. L'uso di entrambi gli indicatori è ottimo per la stima della proprietà di robustezza, però presi singolarmente non garantiscono un'adeguata valutazione in situazioni particolari e talvolta possono fornire risultati fuorvianti.

Le situazioni particolari non verranno trattate qui, ma le definizioni di questi indicatori possono essere facilmente estese per una corretta valutazione della robustezza.

12.3.1 Margini Infiniti

Riguardo alla valutazione del margine di guadagno, possono verificarsi situazioni in cui il diagramma polare della risposta in frequenza della funzione d'anello $L(j\omega)$ non interseca mai il semiasse negativo a eccezione dell'origine, il sistema quindi mantiene la sua proprietà di stabilità asintotica indipendentemente dalla grandezza della variazione del guadagno d'anello. Il sistema ha quindi un margine di guadagno infinito (Figura 12.8).

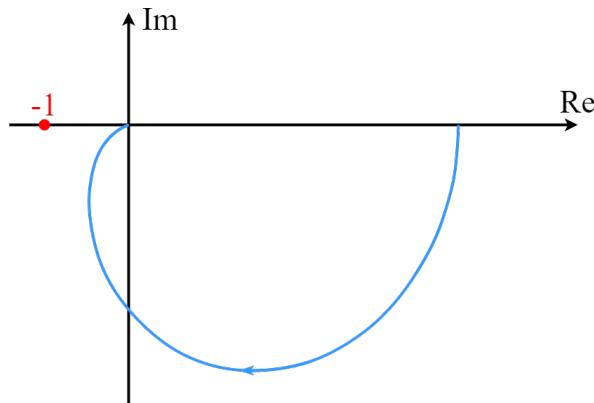


Figura 12.8: diagramma polare con margine di guadagno d'anello infinito ($k_m = \infty$).

Una situazione analoga può verificarsi per la fase quando il diagramma polare di $L(j\omega)$ si trova completamente all'interno della circonferenza unitaria, il sistema mantiene quindi la sua proprietà di stabilità asintotica indipendentemente dalla grandezza del ritardo di tempo. Il sistema ha quindi un margine di fase infinito (Figura 12.9).

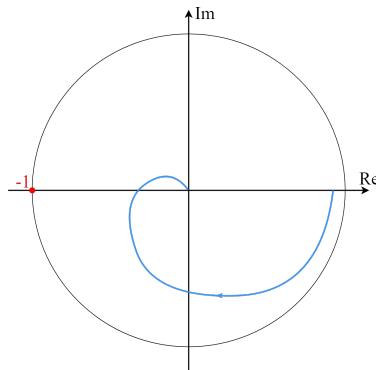


Figura 12.9: diagramma polare con margine di fase infinito ($k_m = \infty$).

12.3.2 Picco di Sensitività Nomina

In aggiunta ai margini di guadagno e di fase si può considerare il comportamento del punto che più si avvicina a -1 . Considerando la funzione di sensitività $S(s) = 1/(1 + L(s))$, per avere stabilità robusta con ampi margini di incertezza dobbiamo fare in modo da ridurre

$$S_M = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} |S(j\omega)| = \Delta_m^{-1}$$

detto *picco di sensitività nominale*.

Esempio Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.38s^2 + 0.038s + 0.209}{s^4 + 1.06s^3 + 0.56s^2 + 0.5s}$$

Se ci limitiamo all'osservazione degli ingressi w (segna di riferimento) e d , possiamo scrivere

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}W(s) + \frac{1}{1 + L(s)}D(s)$$

La funzione di sensitività ci permette di capire cosa accade al sistema soggetto a disturbi, possiamo ricavarla usando Bode (Figura 12.10). Il picco di sensitività nominale è a circa 11 dB, che se convertito da dB è 3.6, un valore molto alto visto che solitamente si aggira tra 1.3 e 2. Per ridurre il picco possiamo provare a dimezzare il guadagno, in questo modo il guadagno in anello aperto cala di 6 dB

$$G_a(s) = 0.5 \cdot G = 0.5 \frac{0.38s^2 + 0.038s + 0.209}{s^4 + 1.06s^3 + 0.56s^2 + 0.5s}$$

La funzione di sensitività può essere calcolata come

$$\frac{1}{1 + G_a}$$

Dimezzando il guadagno abbiamo migliorato notevolmente la sensitività, infatti, il picco adesso vale meno di 5 dB (1.7).

Questa modifica ha però effetti indesiderati sulla risposta di sistema, infatti questa rallenta e ha dunque un tempo di salita più lungo (Figura 12.11). Ridurre il guadagno sull'intero spettro di frequenze ha effetti sulle basse frequenze, che determinano il tempo di salita e la capacità di seguire i segnali di riferimento.

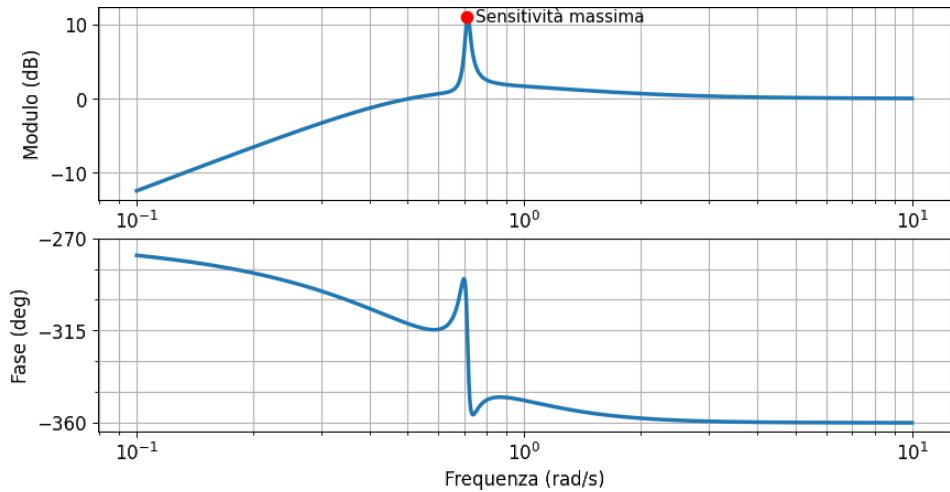


Figura 12.10: diagramma di Bode con picco di sensitività.

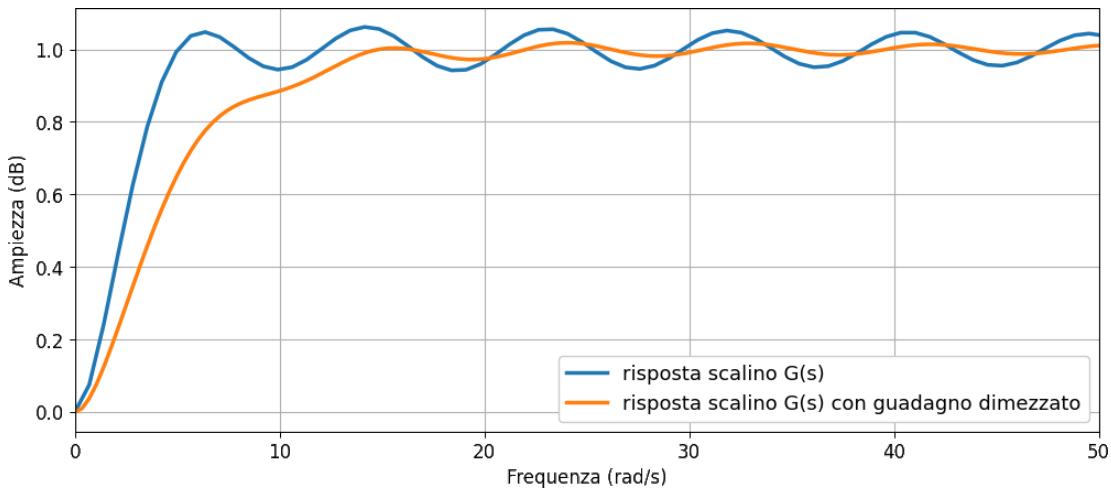


Figura 12.11: risposta allo scalino del sistema (blu) e con guadagno dimezzato (arancione).

Per ovviare al rallentamento della risposta di sistema dovremmo trovare un'alternativa al dimezzamento del guadagno. Possiamo, per esempio, utilizzare un filtro elimina banda (Sottosezione 8.4.5) per bloccare le frequenze nell'intorno del picco. Prendiamo in considerazione il filtro elimina banda centrato in 0.7 rad/s

$$\text{notch} = \frac{s^2 + 0.49}{s^2 + 0.35s + 0.49}$$

Calcoliamo anche la funzione di sensitività di $G_b = \text{notch} \cdot G$

$$\frac{1}{1 + G_b}$$

Dalla Figura 12.12 si osserva che il picco di sensitività della funzione con filtro elimina banda è spostato verso frequenze più basse e si aggira attorno ai 5 dB; inoltre, il tempo di salita della risposta allo scalino è più vicino al tempo di salita originale (Figura 12.13).

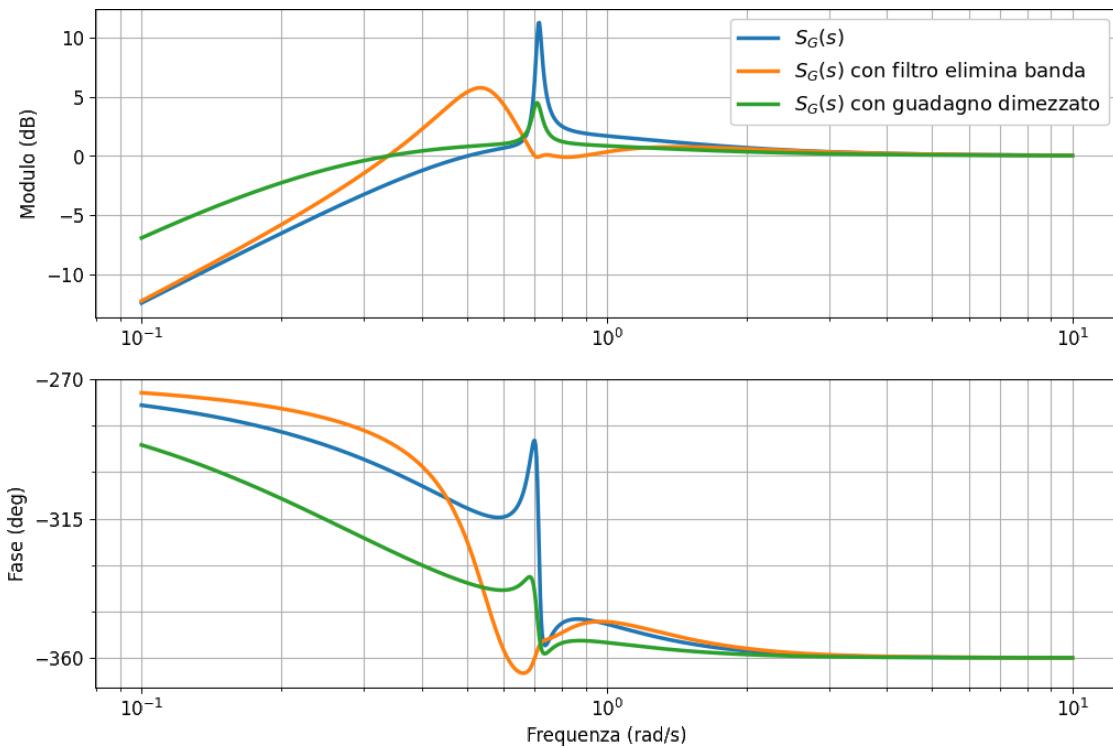


Figura 12.12: funzioni di sensitività del sistema (blu), con guadagno dimezzato (verde) e con filtro elimina banda (arancione).

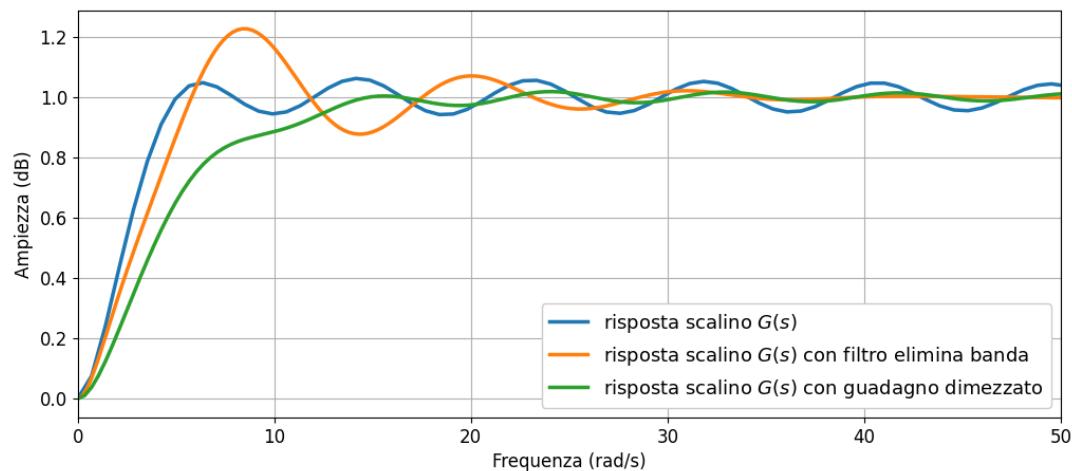


Figura 12.13: risposta allo scalino del sistema (blu), con guadagno dimezzato (verde) e con filtro elimina banda (arancione).

CAPITOLO 13

PRESTAZIONI E DISTURBI

Nel Capitolo 10 abbiamo brevemente discusso i requisiti di stabilità di un sistema e come le variabili di uscita sono influenzate dai segnali di ingresso e dai disturbi.

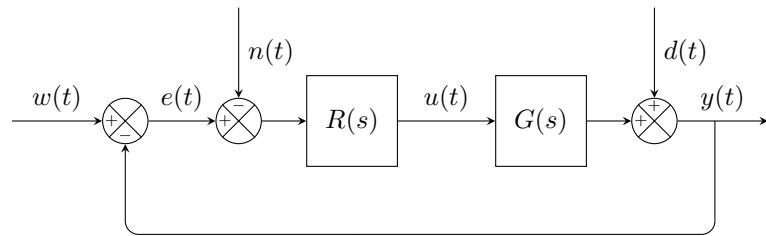


Figura 13.1: Schema di controllo in retroazione.

Introduciamo le seguenti funzioni:

- funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (13.1)$$

- funzione di sensitività complementare

$$T(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (13.2)$$

- funzione di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} = R(s)S(s) \quad (13.3)$$

Da queste, seguendo lo schema di Figura 13.1 e applicando le regole degli schemi a blocchi, andiamo a descrivere le funzioni di trasferimento tra gli ingressi w , d , n e le uscite y , u , e

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & S(s) & -T(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & -T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \quad (13.4)$$

Le funzioni $S(s)$ e $T(s)$ possiedono lo stesso denominatore, ciò significa che è possibile valutare la stabilità di entrambe a partire dalla verifica della stabilità di una sola delle due.

Si noti che per far coincidere y con w avendo effetto nullo di d su y basterebbe porre

$$T(s) = 1 \quad (13.5)$$

$$S(s) = 0 \quad (13.6)$$

Questa operazione però ha come conseguenza la totale mancanza di attenuazione dell'effetto del rumore di misura n sia sull'uscita y che sull'errore e . Da questo si denota la necessità di trovare compromessi tra le varie specifiche di un sistema.

Le due funzioni $S(s)$ e $T(s)$ sono poi legate dall'equazione

$$S(s) + T(s) = 1$$

con $S(s)$ propria e $T(s)$ strettamente propria, infatti con $s \rightarrow \infty$ risulta che $S(s) \rightarrow 1$ e $T(s) \rightarrow 0$. Da questa osservazione si deduce facilmente che le equazioni (13.5) e (13.6) pongono dei requisiti inattuabili.

13.1 Analisi Funzione di Sensitività Complementare

La funzione di sensitività complementare

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

svolge un ruolo importante nel comportamento del sistema retroazionato in Figura 13.1 dato che rappresenta:

- a la funzione di trasferimento tra il riferimento w e l'uscita y ;
- b la funzione di trasferimento tra il disturbo n e l'uscita y (cambiata di segno);
- c la funzione di trasferimento tra il disturbo n e l'errore e .

come si può facilmente osservare dalla (13.4).

Solitamente il disturbo n si concentra in modo significativo in un intervallo ad alte frequenze, mentre le specifiche sulle prestazioni di inseguimento del segnale di riferimento w da parte dell'uscita y si trovano principalmente a basse frequenze. Quindi, durante la progettazione di un controllore, è conveniente far sì che $|T(j\omega)| \simeq 1$ a basse frequenze, dove vogliamo che l'uscita inseguia il riferimento, e $|T(j\omega)| \simeq 0$ ad alte frequenze, dove è concentrato il rumore di misura n .

13.1.1 Analisi Statica

La parte della funzione di trasferimento fattorizzata relativa a

$$R(s) = \frac{\mu}{s^g} \quad (13.7)$$

è detta *parte statica*. Analizzando la funzione $T(s)$ si ricava che le proprietà statiche di quest'ultima dipendono dal valore di s che tende a zero. A partire da

$$\lim_{s \rightarrow 0} T(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g + \mu}$$

possiamo distinguere tre casistiche a seconda del tipo g della funzione d'anello; in particolare, si ha

$$\lim_{s \rightarrow 0} T(s) = \begin{cases} \frac{\mu}{1 + \mu}, & g = 0 \\ 1, & g > 0 \\ 0, & g < 0 \end{cases} \quad (13.8)$$

Essendo $T(s)$ la funzione di trasferimento che lega il segnale di riferimento all'uscita, siamo in grado di valutare le prestazioni del sistema con in ingresso uno scalino. Supponiamo che il sistema sia asintoticamente stabile, allora il valore dell'uscita a regime a fronte dell'ingresso $w(t) = U \text{sca}(t)$, per il teorema del valore finale, è

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s) \frac{U}{s} = U \lim_{s \rightarrow 0} T(s)$$

quindi:

- **Tipo nullo:** quando non ci sono radici nell'origine, il guadagno $\mu_T = \mu/(1 + \mu)$ si avvicina a 1 quando $|\mu|$ è elevato, in particolare $0 < \mu < 1$ quando μ è positivo. Se $\mu = -1$ c'è almeno un polo nell'origine e $T(s)$ non è asintoticamente stabile;
- **Tipo positivo:** quando $L(s)$ ha almeno un polo nell'origine, il guadagno μ_T della funzione $T(s)$ è unitario e $y_\infty = U = \omega_\infty$ (buone prestazioni statiche);
- **Tipo negativo:** quando $L(s)$ ha almeno uno zero nell'origine, l'uscita a regime è nulla per qualsiasi valore costante di w (non buone prestazioni statiche).

L'analisi riguardo il legame statico tra il disturbo n e l'errore e , o tra il disturbo n e l'uscita y (scambiando il segno), risulta in conclusioni opposte a quanto visto sopra per quanto riguarda la qualità del sistema di controllo.

13.1.2 Risposta in Frequenza

Vediamo adesso quali sono le relazioni che legano i diagrammi di Bode del modulo della risposta in frequenza d'anello $L(j\omega)$ e della funzione di sensitività complementare $T(j\omega)$. Il diagramma di Bode di $|L(j\omega)|$ interseca 0 dB in corrispondenza della pulsazione critica ω_c , tenendo a mente la seguente approssimazione

$$|T(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1 & , \quad \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)| & , \quad \omega > \omega_c \end{cases} \quad (13.9)$$

In base all'approssimazione sopra definita possiamo vedere che $|T(j\omega)|$ è simile ad un filtro passa-basso con guadagno unitario e che la pulsazione critica ω_c fornisce un'approssimazione dell'estremo superiore della banda passante del filtro stesso.

13.1.3 Smorzamento e Margine di Fase

Assumendo un'approssimazione dei poli dominanti, ci aspettiamo che $T(s)$ si comporti in modo simile ad un sistema del primo o del secondo ordine, ma non possiamo stabilire se i poli dominanti siano reali o complessi coniugati. Questo è di nostro interesse perché, come abbiamo visto, il comportamento dinamico di un sistema dipende dalle caratteristiche dei suoi poli dominanti. Supponendo che la pulsazione critica ω_c sia una buona approssimazione della pulsazione naturale ω_n e considerando che $L(j\omega_c)$ ha modulo unitario e fase pari a φ_c tali che $L(j\omega_c) = e^{j\varphi_c}$, e ricordando poi che $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$, ci aspettiamo che il sistema retroazionato si comporti similmente a un sistema di primo o secondo ordine. Senza addentrarci nel procedimento per ottenerlo, possiamo dire che il valore approssimativo dello smorzamento associato ai poli è

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} \quad (13.10)$$

Possiamo considerare la valutazione dello smorzamento ξ affidabile fino a valori di φ_m vicini ai 75° e verificare empiricamente che

- $0^\circ < \varphi_m \leq 75^\circ$: $T(s)$ ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n \simeq \omega_c$ e smorzamento $\xi \simeq \varphi_m/100$ e può essere approssimata da un sistema del secondo ordine;
- $\varphi_m > 75^\circ$: $T(s)$ ha un polo dominante reale con costante temporale $T \simeq 1/\omega_c$ e può essere approssimata da un sistema del primo ordine.

13.2 Analisi Funzione di Sensitività

La funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

rappresenta, come si può facilmente osservare dalla (13.4):

- la funzione di trasferimento tra il disturbo d e l'uscita y ;
- la funzione di trasferimento tra il riferimento w e l'errore e (cambiata di segno);

c la funzione di trasferimento tra il disturbo d e l'errore e .

Un requisito realizzabile per $S(s)$ è che la risposta in frequenza $S(j\omega)$ abbia modulo abbastanza piccolo nella fascia di frequenze in cui si concentrano i segnali w e d , solitamente a basse frequenze.

13.2.1 Analisi Statica

Anche nel caso di $S(s)$ possiamo identificare tre situazioni in base al tipo g della funzione d'anello

$$\lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} = \begin{cases} \frac{1}{1 + \mu}, & g = 0 \\ 0, & g > 0 \\ 1, & g < 0 \end{cases} \quad (13.11)$$

La funzione $S(s)$ lega il segnale di riferimento all'errore; possiamo valutare le prestazioni statiche del sistema a regime sull'errore e con w a scalino. Ipotizzando il sistema asintoticamente stabile, l'errore a regime con $w(t) = U \text{sa}(t)$, per il teorema del valore finale, è

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{U}{s} = U \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \begin{cases} \frac{U}{1 + \mu}, & g = 0 \\ 0, & g > 0 \\ U, & g < 0 \end{cases}$$

In conclusione:

- **Tipo nullo:** se il guadagno d'anello $\mu > 0$, la precisione aumenta all'aumentare di μ e l'errore a regime può essere attenuato a piacimento selezionando valori adeguatamente grandi di μ .
- **Tipo positivo:** se $L(s)$ ha almeno un polo nell'origine, si ha la massima precisione statica e risulta $e_\infty = 0$;
- **Tipo negativo:** se $L(s)$ ha almeno uno zero nell'origine, l'errore è grande quanto l'ingresso che lo ha generato.

Estensione a ingressi canonici L'analisi precedente può essere estesa a segnali canonici d'ingresso nella forma di Laplace U/s^i , con $i > 0$ intero. In generale si ha

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{U}{s^i} = U \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-i+1}}{s^g + \mu} = \begin{cases} \infty, & g < i - 1 \\ \frac{U}{\mu}, & g = i - 1 \\ 0, & g > i - 1 \end{cases}$$

dunque

- se $g < i - 1$, l'errore diverge;
- se $g = i - 1$, l'errore a regime è inversamente proporzionale al guadagno d'anello;
- se $g > i - 1$, l'errore è asintoticamente nullo.

La seguente tabella riporta l'errore a regime degli ingressi canonici al variare del tipo g di $L(s)$.

Il comportamento asintotico dell'errore a fronte di un disturbo canonico può essere analizzato in modo analogo a quanto visto sopra (facendo riferimento alla Tabella 13.1), avendo riguardo di invertire il segno agli elementi presenti.

Una parte dei risultati sopra ottenuti rimane valida anche in presenza d'incertezze sul modello dell'impianto $G(s)$, purché queste non vadano a inficiare sull'asintotica stabilità in anello chiuso.

	$U_{\text{sca}}(t)$	$U_{\text{ram}}(t)$	$U_{\text{par}}(t)$
$g = 0$	$\frac{U}{1 + \mu}$	∞	∞
$g = 1$	0	$\frac{U}{\mu}$	∞
$g = 2$	0	0	$\frac{U}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

Tabella 13.1: errore a regime in base a ingresso canonico e tipo di $L(s)$.

13.2.2 Risposta in Frequenza

Assumendo come nel caso precedente che il diagramma di Bode di $|L(j\omega)|$ attraversi l'asse reale una sola volta in corrispondenza di ω_c , possiamo dare la seguente approssimazione

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|}, & \omega \leq \omega_c \\ 1, & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (13.12)$$

In modo analogo e opposto alla funzione di sensitività complementare, $|S(j\omega)|$ agisce come una sorta di filtro passa-alto. S è la funzione di trasferimento tra disturbo d e uscita y e produce un effetto di attenuazione sulla variabile y per qualsiasi componente del disturbo che sia a pulsazione inferiore a ω_c . Le componenti del disturbo a pulsazioni superiori a ω_c non vengono molto attenuate. In definitiva, avere la pulsazione critica ω_c elevata è vantaggioso.

13.3 Analisi Funzione di Sensitività del Controllo

La funzione di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} = R(s)S(s) = T(s)G(s)^{-1}$$

rappresenta, com'è facilmente osservabile dalla (13.4), la funzione di trasferimento tra gli ingressi w , d , n e la variabile di controllo u (con possibile cambio di segno). Idealmente vorremmo che il modulo di $U(j\omega)$ restasse il più piccolo possibile almeno nell'intervallo di frequenze in cui gli ingressi sono significativi. Tenendo a mente che w e d si concentrano a basse frequenze e n ad alte frequenze possiamo porre come requisito che il modulo di $Q(j\omega)$ sia abbastanza piccolo per tutte le frequenze, in modo da poter operare in ogni condizione di funzionamento.

13.3.1 Risposta in Frequenza

Approssimando la funzione di sensitività del controllo otteniamo

$$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|}, & \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)|, & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (13.13)$$

come si può osservare, l'ampiezza di $|Q(j\omega)|$ con pulsazioni minori di ω_c dipende dalla risposta in frequenza del sistema sotto controllo $G(j\omega)$, mentre dipende da quella del regolatore $R(j\omega)$ per pulsazioni maggiori di ω_c ; è quindi importante in fase di progettazione evitare regolatori con $|R(j\omega)|$ elevato ad alte frequenze per limitare la variabile di controllo.

Dettagli di progettazione del controllo In generale possiamo dire che, dato un impianto G , vogliamo progettare un controllore R tale che il modulo della funzione d'anello $|L|$ sia grande a basse frequenze, per inseguire il riferimento w e per l'attenuazione del disturbo d , mentre si riduca velocemente a valori piccoli ad alte frequenze, per attenuare il rumore di misura n . Tutto questo sempre garantendo la stabilità del sistema. A questi possono poi aggiungersi requisiti aggiuntivi sulla risposta a regime (e.g. errore della risposta allo scalino sotto una certa soglia, etc.) o sulla risposta nel transitorio (e.g. tempo di assestamento, tempo di picco, sovraelongazione massima, etc.).

CAPITOLO 14

REQUISITI E SPECIFICHE DI PROGETTO

Facendo riferimento al sistema rappresentato in Figura 14.1, con w segnale di riferimento, y variabile controllata, u variabile di controllo, d e n disturbi ed e errore tra il segnale di riferimento e variabile controllata, sappiamo che diverse proprietà fondamentali del sistema retroazionato sono legate alla funzione d'anello $L(s) = R(s)G(s)$, con $R(s)$ ignoto e $G(s)$ noto.

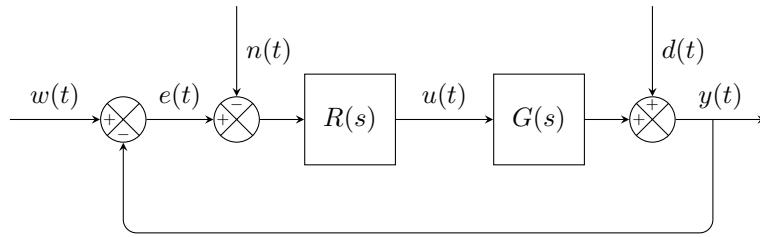


Figura 14.1: Schema di controllo in retroazione.

Il nostro scopo è quello di realizzare un controllore $R(s)$ in modo che il sistema retroazionato soddisfi determinate specifiche a fronte di specifici ingressi. L'insieme dei metodi che ci permettono di progettare un controllore è detto *modellazione della retroazione* (loop shaping) e in generale comprende tutti quei procedimenti che permettono di trasformare specifiche di progetto in vincoli sulla funzione d'anello $L(s)$.

In particolare, facciamo riferimento a caratteristiche della funzione d'anello $L(s)$ quali il guadagno μ , il tipo g e la pulsazione critica ω_c , oltre che ai margini di guadagno k_m e di fase φ_m del sistema retroazionato.

14.1 Specifiche e Condizioni Principali

Iniziamo con il discutere su quale sia una forma adatta per la funzione d'anello $L(s)$, con buone prestazioni e buoni margini di stabilità.

Inseguimento del segnale Per far sì che l'uscita y inseguia accuratamente il segnale di riferimento w è necessario che la pulsazione critica ω_c sia adeguatamente elevata.

Attenuazione dell'errore Per fare in modo che l'errore a regime e_∞ sia ridotto a fronte di ingressi e disturbi canonici, quali scalino e rampa, dobbiamo aumentare il tipo g e/o il guadagno μ di $L(s)$ (Tabella 13.1).

Attenuazioni dei disturbi Per attenuare i disturbi di carico d deve risultare $|L(j\omega)| \gg 1$ dove d si concentra, solitamente questo vincola il valore minimo della pulsazione critica ω_c .

Per quanto riguarda i rumori di misura n , concentrandosi questi ad alte frequenze, il vincolo sulla pulsazione critica ω_c pone un valore massimo.

In generale $|S|$ dovrà essere piccolo a basse frequenze, mentre $|T|$ dovrà essere piccolo ad alte frequenze; per fare ciò è necessario trovare un buon compromesso tra le due funzioni. Si noti che $|S|$ comincia a essere grande e $|T|$ a essere piccolo in corrispondenza della pulsazione critica ω_c (Figura 14.2).

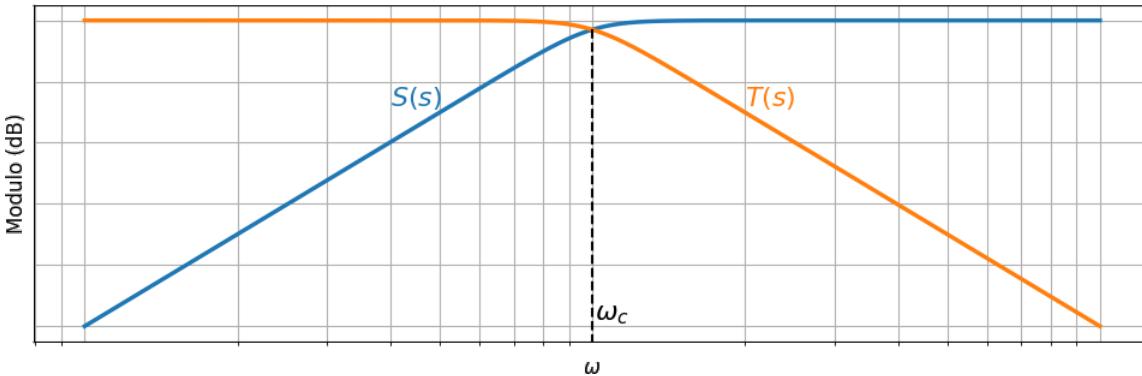


Figura 14.2: diagramma di Bode del modulo ideale delle funzioni S e T .

14.2 Visualizzazione dei Vincoli con i Diagrammi di Bode

Molti dei vincoli sulla funzione d'anello, imposti per soddisfare determinati requisiti, possono essere visualizzati come vincoli sull'andamento del diagramma di Bode della risposta in frequenza della funzione d'anello $L(j\omega)$. In questo modo è possibile determinare delle regioni di ammissibilità nelle quali il diagramma di Bode della funzione d'anello deve rimanere per soddisfare i requisiti imposti.

Il punto in cui il diagramma di $|L(j\omega)|$ attraversa 0 dB corrisponde alla separazione tra alte e basse frequenze. Buone prestazioni sono legate a $L(s)$ grande a basse frequenze e ridotta ad alte frequenze, dunque $R(s)$ dovrebbe avere un guadagno basso ad alte frequenze.

Alla luce dei vincoli precedentemente discussi, la funzione d'anello avrà una forma simile a quella riportata in Figura 14.3

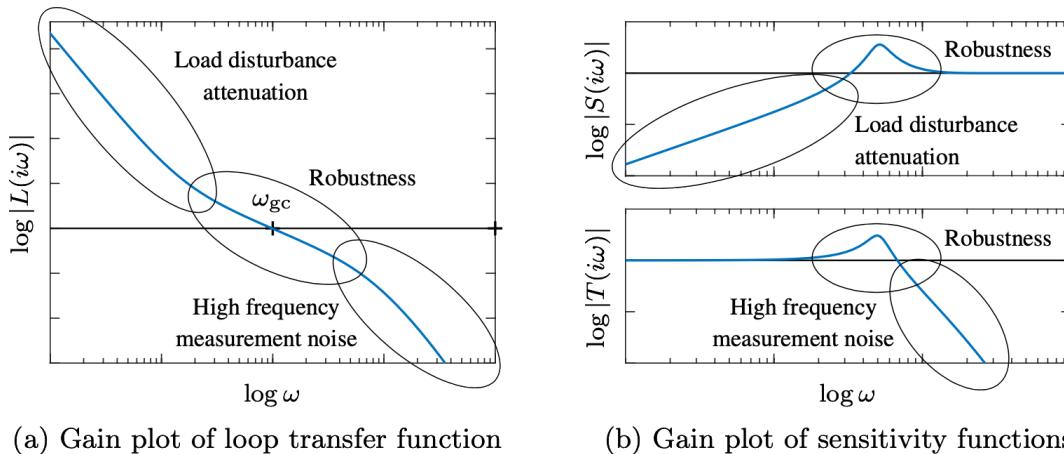


Figura 14.3: Progettazione tramite modellazione della funzione d'anello (loop shaping).

Il modulo della risposta in frequenza di $L(s)$ è unitario in corrispondenza della frequenza critica ω_c : $|L(j\omega_c)| = 1$, un modulo grande a basse frequenze e un modulo piccolo ad alte frequenze. La frequenza critica ω_c determina l'attenuazione di disturbi di carico, la larghezza di banda e il tempo di risposta del sistema retroazionato.

Basandoci solo sul diagramma del modulo non riusciamo a osservare direttamente i vincoli legati al margine di fase φ_m ; però per funzioni d'anello a *fase minima* (aventi cioè guadagno positivo, poli e zeri con parte reale negativa o nulla

e assenza di ritardi di tempo), ci si aspetta che con una bassa pendenza del diagramma di $|L(j\omega)|$ in corrispondenza della pulsazione critica ω_c (attraversamento 0 dB) il margine di fase φ_m sia abbastanza grande.

14.2.1 Sintesi

Per la progettazione di un regolatore $R(s)$, che è spesso legata ad un processo di trial and error, può essere identificata da diverse fasi rappresentative:

- traduciamo in vincoli di progetto sulla funzione d'anello $L(s)$ i requisiti imposti sul sistema; ad esempio, identifichiamo una $\omega_{c\min}$ e una $\omega_{c\max}$, regoliamo il valore dei margini di fase e/o guadagno e sull'assenza di cancellazioni critiche tra singolarità instabili (parte reale positiva o nulla);
- costruiamo una funzione d'anello $L(s)$ il cui diagramma di Bode risieda all'interno della regione ammissibile costituita a partire dai vincoli imposti e verifichiamo che rispetti anche altri eventuali vincoli che non hanno riscontro diretto nel diagramma di Bode;
- ricaviamo la funzione di trasferimento del regolatore $R(s)$ a partire dalla relazione $R(s) = L(s)/G(s)$.

Un'alternativa a questo procedimento è quello basato appunto sul trial and error, ovvero una strategia di sintesi consistente in tentativi di sintesi successivi, a partire da un candidato iniziale, che man mano viene modificato per andare a far rispettare le specifiche di progetto.

Tenendo a mente che la funzione di trasferimento di un regolatore $R(s)$ può essere fattorizzata come $R(s) = R_s(s)R_d(s)$, in cui $R_s(s)$ è la *parte statica* (composta dal guadagno e dai poli nell'origine) mentre $R_d(s)$ è la *parte dinamica* del controllore (composta da poli e zeri non nell'origine), possiamo riassumere il processo di progettazioni in due fasi:

- si scelgono il tipo g e il guadagno μ_R del regolatore, ovvero le specifiche statiche legate a $R_s(s)$.
- se necessario, si introduce $R_d(s) \neq 1$ per garantire il rispetto di tutti i vincoli e l'asintotica stabilità (che deve essere rispettata dal sistema al termine della sintesi).

Il guadagno del controllore a basse frequenze può essere incrementato attraverso quella che viene chiamata *compensazione ritardatrice*, mentre il comportamento a ridosso della frequenza critica può essere cambiato tramite la cosiddetta *compensazione anticipatrice*.

Esempio Vogliamo creare un controllore per il cruise control di una macchina, abbiamo approssimato la macchina con il seguente modello

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + u \\ y &= x\end{aligned}$$

con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Vorremmo $L(s) = K/s$, conoscendo $G(s)$ possiamo ricavare $R(s)$

$$R(s) \frac{1}{s+1} = \frac{K}{s} \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{K(s+1)}{s}$$

Il problema è teoricamente risolto, ma ci sono diversi problemi con questo approccio. Per prima cosa stiamo invertendo l'impianto $G(s)$; avere un polo/zero nel semipiano destro di $G(s)$ implica avere uno zero/polo nel semipiano destro per $R(s)$ e questo potrebbe portare a una cancellazione critica, rendendo quella parte del sistema inosservabile.

Inoltre, dobbiamo rendere il sistema robusto a fronte di eventuali incertezze e discrepanze tra il sistema reale e il modello dell'impianto. Possiamo fare questo tramite la retroazione, modellando quindi la funzione d'anello $L(s)$ tramite il controllore $R(s)$, ma non sempre è sufficiente.

Se l'impianto $G(s)$ è instabile possiamo affrontare il problema creando due regolatori, un primo regolatore con lo scopo di stabilizzare il sistema e un secondo per soddisfare i requisiti di progetto.

Esempio Stiamo progettando un sistema di controllo e uno dei requisiti di progettazione è che la massima sovraelongazione in percentuale sia minore o uguale del 15%. Sappiamo che questa si ottiene come

$$S\% = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

Risolvendo per ξ otteniamo

$$\xi \geq \sqrt{\frac{\left(\ln \frac{S\%}{100}\right)^2}{\left(\ln \frac{S\%}{100}\right)^2 + \pi^2}} \approx 0.5$$

da cui tramite la (13.10)

$$\frac{\varphi_m}{100} \simeq \xi \geq 0.5$$

dunque come approssimazione

$$\varphi_m \gtrsim 50^\circ$$

CAPITOLO 15

LUOGO DELLE RADICI

Il *luogo delle radici* è un metodo di rappresentazione grafica che permette di ottenere informazioni sulla posizione dei poli del sistema retroazionato a partire dalla funzione d'anello $L(s)$. Questo metodo è applicabile a sistemi SISO, anche instabili, ma non è utilizzabile in presenza di ritardi di tempo.

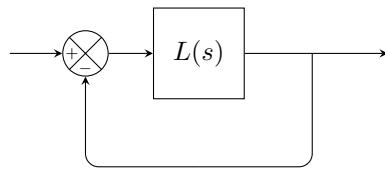


Figura 15.1: Sistema retroazionato in analisi.

15.1 Definizione

Facendo riferimento al sistema retroazionato in Figura 15.1, possiamo scrivere la sua funzione d'anello come

$$L(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \rho \frac{N(s)}{D(s)} \quad (15.1)$$

Nell'equazione (15.1) ρ è la *costante di trasferimento* mette z_i e p_i sono rispettivamente zeri e poli (reali, complessi coniugati o nulli) di $L(s)$ cambiati di segno. Il valore della costante di trasferimento ρ è proporzionale al guadagno d'anello μ .

Il nostro scopo è capire come i poli¹ in anello chiuso cambiano al variare di ρ . Conoscendo la posizione dei poli, infatti, siamo in grado di determinare stabilità e informazioni sui transitori del sistema retroazionato.

15.1.1 Caratterizzazione del Luogo

Definizione 15.1 (Luogo delle radici) Considerando il sistema in Figura 15.1 con funzione d'anello $L(s)$ come definita nella (15.1), è detto luogo delle radici il luogo descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica $1 + L(s) = 0$ al variare del parametro ρ da $-\infty$ a $+\infty$, con $\rho \neq 0$. Distinguendo il luogo in base al segno di ρ :

¹Si ricorda che i poli del sistema in anello chiuso corrispondono alle radici dell'equazione caratteristica $1 + L(s) = 0$.

- $\rho > 0$: luogo diretto (LD);
- $\rho < 0$: luogo inverso (LI).

Dalle equazioni (15.1) e $1 + L(s) = 0$ si può facilmente ricavare

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{\rho} \quad (15.2)$$

che espressa in termini di modulo e fase ci dà

$$\frac{|N(s)|}{|D(s)|} = \frac{1}{|\rho|} \quad (15.3)$$

$$\angle N(s) - \angle D(s) = 180^\circ - \angle \rho = \begin{cases} (2k+1)180^\circ, & \rho > 0, k \text{ intero (LD)} \\ 2k180^\circ, & \rho < 0, k \text{ intero (LI)} \end{cases} \quad (15.4)$$

I valori di s che soddisfano la *condizione sul modulo* e la *condizione sulla fase* sono i poli dell'equazione caratteristica. Preso poi un qualsiasi punto appartenente al luogo delle radici, possiamo determinarne il $\rho = 1/|L(s)|$. Identifichiamo con θ_i l'angolo formato con il semiasse reale positivo dal vettore che congiunge lo zero $-z_i$ al generico punto s del piano, e analogamente con φ_i l'angolo formato con il semiasse reale positivo dal vettore che congiunge il polo $-p_i$ allo stesso punto. Possiamo allora esprimere la seguente relazione

$$\angle N(s) = \sum_{i=1}^m \theta_i \quad (15.5)$$

$$\angle D(s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (15.6)$$

Un punto s del piano appartiene al luogo diretto se $\sum_i \theta_i - \sum_i \varphi_i$ è uguale a un multiplo dispari di 180° , mentre fa parte del luogo inverso se è uguale a un multiplo pari di 180° , come si può facilmente dedurre dalla (15.4).

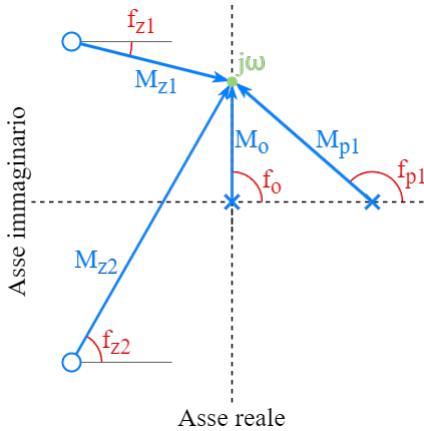


Figura 15.2: Metodo per capire se un punto s appartiene al luogo delle radici diretto o inverso.

15.1.2 Posizione dei Poli nel Piano Complesso

In un sistema i poli e gli zeri caratterizzano la risposta forzata, mentre per la risposta libera sono necessari solo i poli. Questo è direttamente collegato alla stabilità del sistema, infatti, conoscere la posizione dei poli sul piano complesso ci permette di determinare la stabilità, se la risposta è oscillatoria (e a quale frequenza) oppure esponenziale (e con che velocità), ma permette anche di trovarne lo smorzamento.

Note su un tipico scenario di progettazione Non è insolito che durante la progettazione di un controllore si abbia a che fare molteplici parametri, di cui uno incognito o variabile². Un parametro incognito rende impossibile fare qualsiasi considerazione sulla stabilità del sistema, o sulla validità dei vincoli di progetto.

Cambiando il valore di K cambia la posizione dei poli; dobbiamo capire per quale K i requisiti di progetto sono rispettati e quanto il sistema è sensibile a variazioni, anche minime, del valore stimato di K . Scegliendo un valore di K siamo in grado di studiare la funzione di trasferimento, possiamo quindi vedere come la posizione dei poli cambia al variare del parametro K e trovare quello più adatto alla nostra applicazione.

Esempio - Tornare alla forma giusta Si consideri la funzione di trasferimento seguente

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 4s^2 + \rho s + 1}$$

Questa non è nella forma corretta

$$\frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Possiamo portarla nella forma desiderata isolando per l'appunto ρ al denominatore

$$\frac{s^3 + 4s^2 + 1}{s^3 + 4s^2 + 1} + \rho \frac{s}{s^3 + 4s^2 + 1} = 1 + \rho \frac{s}{s^3 + 4s^2 + 1}$$

15.1.3 Regole di Tracciamento

Il luogo delle radici è di facile tracciamento attraverso strumenti di calcolo come MATLAB e python, ma è comunque di grande utilità, durante la progettazione ad esempio, saper tracciare il grafico manualmente. In particolare, esiste una serie di regole che ci permette di disegnare qualitativamente il luogo.

Considerando n e m i gradi dei polinomi al denominatore e al numeratore di $L(s)$, possiamo considerare $v = n - m$ il grado relativo.

Regola 1 Il luogo delle radici è formato da $2n$ rami: n relativi al luogo diretto e altri n corrispondenti al luogo indiretto. Questo si può verificare a partire da $1 + L(s) = 0$, equivalente all'equazione polinomiale di ordine n

$$D(s) + \rho N(s) = 0 \quad (15.7)$$

Regola 2 Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale. L'equazione (15.7) avendo coefficienti reali, può avere radici reali o complesse coniugate.

Regola 3 I rami «partono» dai poli di $L(s)$, infatti, per $|\rho| \rightarrow 0$ le radici della (15.7) convergono verso i poli di $L(s)$.

Regola 4 Per $|\rho| \rightarrow \infty$, m rami «arrivano» negli zeri di $L(s)$ e i restanti v rami tendono a infinito.

Questo perché quando $|\rho| \rightarrow \infty$ la (15.7) diventa un'equazione di ordine m

$$N(s) = 0$$

con solo m radici, che corrispondono agli zeri di $L(s)$, e sono anche le uniche radici al finito della (15.7).

Se $m > n$ e quindi $v < 0$, i rami che non «arrivano» agli zeri di $L(s)$ provengono da infinito.

Regola 5 I rami tendenti a infinito seguono degli asintoti che si intersecano sull'asse reale in corrispondenza di un punto detto *centroide* e calcolato come

$$x_c = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^m z_i - \sum_{i=1}^n p_i \right) \quad (15.8)$$

formando con l'asse reale angoli pari a

$$\psi_{ck} = \begin{cases} \frac{(2k+1)180^\circ}{v}, & k = 0, 1, \dots, v-1, \quad \rho > 0 \text{ (LD)} \\ \frac{2k180^\circ}{v}, & k = 0, 1, \dots, v-1, \quad \rho < 0 \text{ (LI)} \end{cases} \quad (15.9)$$

²Il luogo delle radici è limitato a un singolo parametro incognito.

Regola 6 Tutti i punti dell'asse reale che non corrispondono a singolarità di $L(s)$ appartengono al luogo delle radici. Sono parte del luogo diretto i punti a sinistra di un numero dispari di singolarità di $L(s)$, mentre fanno parte del luogo inverso tutti i punti a sinistra di un numero pari di singolarità di $L(s)$.

Regola 7 Il ramo di una radice non interseca mai sé stesso, quindi nessun valore di s può portare a più valori di ρ ; rami corrispondenti a due radici distinte possono intersecarsi.

Regola 8 Rami «entranti» o «uscenti» in corrispondenza dell'asse reale formano un angolo di 90° con esso.

Regola 9 Se almeno due rami vanno a infinito, allora la somma di tutte le radici è costante.

Questa regola non aiuta nella realizzazione grafica del luogo delle radici, ma è intuitivamente utile; stiamo spostando le radici complesse della metà rispetto a quelle reali.

15.2 Sintesi Tramite il Luogo delle Radici

15.2.1 Vincoli

Nella progettazione di sistemi di controllo possiamo avere requisiti di diverso tipo, quelli di maggior interesse ora sono: requisiti sullo smorzamento ξ , requisiti sulla pulsazione naturale ω_n e requisiti sul tempo di assestamento $T_{a\varepsilon}$. Ognuno di questi si traduce in vincoli sulla posizione dei poli in anello chiuso che differiscono a seconda della tipologia:

- vincoli sullo smorzamento ($\xi \geq \tilde{\xi}$) si traducono in costrizioni dei poli in anello chiuso all'interno di un settore del piano complesso che è confinato dalle linee di smorzamento (Figura 15.3a);
- vincoli sulla pulsazione naturale $\omega_n \geq \tilde{\omega}_n$ corrispondono a limitazioni sul posizionamento dei poli all'esterno di regioni circolari di raggio $\tilde{\omega}_n$ e centro nell'origine (Figura 15.3b);
- vincoli sul massimo tempo di assestamento si impongono come limitazioni sulla parte reale $-\sigma$ dei poli in anello chiuso, andando a definire semipiani $-\sigma \leq -\tilde{\sigma}$ (Figura 15.3c).

L'unione di molteplici requisiti fa sì che più vincoli si intersechino, creando regioni ammissibili nel piano complesso più intricate.

Si ricorda che lo smorzamento ξ è un valore normalizzato adimensionale; nel luogo delle radici possono essere disegnate anche le linee di smorzamento costante, che si irradiano dall'origine con un valore: $\xi = \cos(\phi)$. Qualsiasi coppia di poli separati che giace sulla stessa linea possiede lo stesso smorzamento.

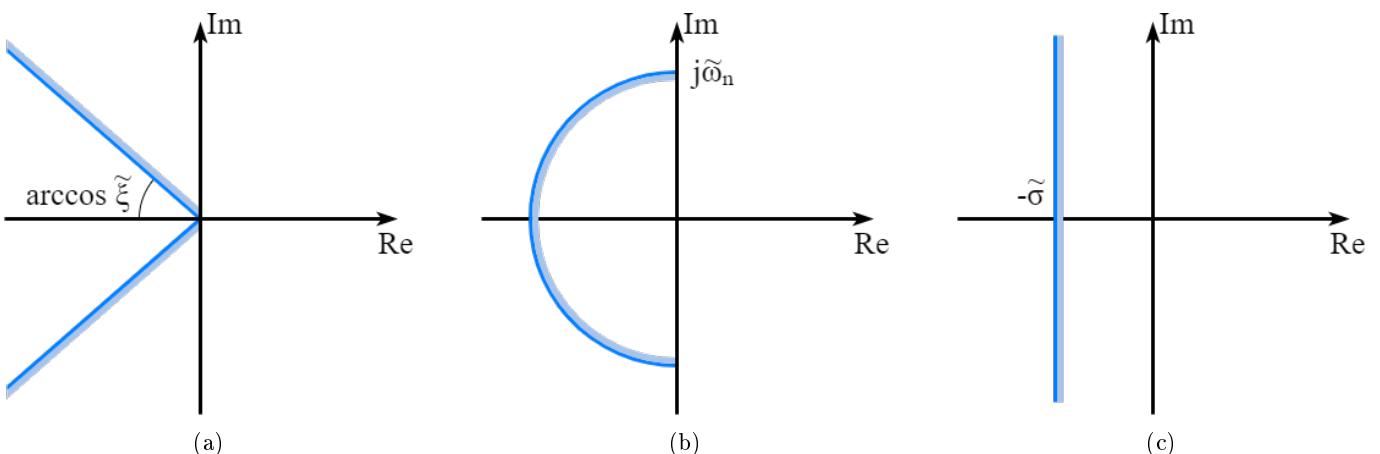


Figura 15.3: vincoli di progetto sulla posizione dei poli in ciclo chiuso.

15.2.2 Punti di Confluenza e Diramazione

I punti di *confluenza* e *diramazione* sono eventuali punti di incrocio di rami sull'asse reale. Questi possono essere individuati trovando i minimi e i massimi di

$$\gamma(x) = -\frac{D(x)}{N(x)}$$

con x reale e $\gamma(x) = \rho(x)$ quando x è sull'asse reale. Se due rami complessi confluiscano in \bar{x} sull'asse reale, allora \bar{x} è un punto di minimo e $s = \bar{x}$ appartiene al luogo diretto. Viceversa, se due rami reali si incontrano in \bar{x} e lasciano poi l'asse reale diventando complessi, allora \bar{x} è un punto di massimo e $s = \bar{x}$ appartiene al luogo diretto.

Per il luogo inverso le condizioni sono invertite.

Dimostrazione Esprimiamo l'equazione caratteristica come

$$f(s) = D(s) + \rho N(s) = 0$$

Supponiamo che $f(s)$ abbia radici multiple in corrispondenza di

$$\frac{d}{ds} f(s) = \frac{d}{ds} D(s) + \rho \frac{d}{ds} N(s) = \dot{D}(s) + \rho \dot{N}(s) = 0$$

Questo è facilmente osservabile considerando una radice di ordine $r \geq 2$: $f(s) = (s - s_1) \dots (s - s_i)^r \dots (s - s_n)$, derivando in corrispondenza di $s = s_i$ si ottiene

$$\frac{d}{ds} f(s_i) = 0$$

quindi radici multiple di $f(s)$ soddisfano l'equazione. Ricavando il coefficiente ρ dall'equazione precedente si ha

$$\rho = -\frac{\dot{D}(s)}{\dot{N}(s)}$$

che sostituito nell'equazione caratteristica dà

$$D(s) - \frac{\dot{D}(s)}{\dot{N}(s)} N(s) = \dot{N}(s)D(s) - \dot{D}(s)N(s) = 0$$

ma ρ è dato anche da

$$\rho = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

e derivandolo

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{D(s)\dot{N}(s) - \dot{D}(s)N(s)}{N^2(s)}$$

A questo punto, risolvendo per s otteniamo i punti in cui si trovano le radici multiple; quindi, i punti di confluenza e diramazione corrispondono alle radici di

$$\frac{d\rho}{ds} = 0$$



Figura 15.4: a) punto di confluenza; b) punto di diramazione.

15.2.3 Angolo di Partenza delle Radici Complesse

In presenza di coppie di poli complessi coniugati di $L(s)$ è necessario trovare l'angolo di partenza dei rami di questi poli. Conoscendo questi angoli siamo in grado di distinguere se i rami convergono verso l'asse reale o se si estendono verso gli asintoti.

Dato un polo complesso $-p_j$ di $L(s)$, la tangente del ramo uscente presenta un angolo

$$\alpha_J = \begin{cases} 180^\circ + \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{i \neq j} \varphi_i , & \rho > 0 \text{ (LD)} \\ \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{i \neq j} \varphi_i , & \rho < 0 \text{ (LI)} \end{cases}$$

Dato invece uno zero complesso $-z_j$, la tangente del ramo entrante presenta un angolo

$$\beta_j = \begin{cases} 180^\circ - \sum_{i \neq j} \theta_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i , & \rho > 0 \text{ (LD)} \\ - \sum_{i \neq j} \theta_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i , & \rho < 0 \text{ (LI)} \end{cases}$$

15.2.4 Intersezioni con l'Asse Immaginario

Usando il criterio di Routh (Capitolo 9) è possibile determinare i punti in cui il luogo delle radici interseca l'asse immaginario; identifica i valori dei parametri $\rho = \tilde{\rho}$ e $\omega = \tilde{\omega}$.

Un'alternativa al criterio di Routh è data dall'equazione caratteristica, sostituendo infatti $s = j\omega$ nell'equazione e ponendo uguale a zero la parte reale e la parte immaginaria possiamo risolvere per ω e ρ .

15.3 Analisi Tramite il Luogo delle Radici

Esempio Si supponga di dover progettare un sistema composto da una molla, una massa e uno smorzatore (Figura 15.5). Tra gli elementi necessari ci vengono forniti la massa ($m = 1$) e la molla ($k = 1$), mentre sta a noi scegliere lo smorzatore adatto ai requisiti di progetto; in questo caso è richiesto che lo smorzamento ξ sia tale che: $\xi \geq 0.75$.

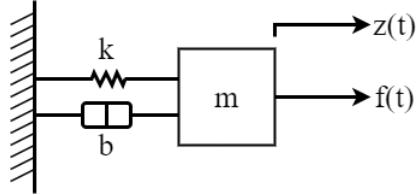


Figura 15.5: sistema da progettare.

La funzione di trasferimento del sistema sarà del tipo

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + bs + 1}$$

Il luogo delle radici ci permette di verificare come lo spostamento dei poli è influenzato dal cambiamento di b che va da 0 a ∞ (Figura 15.6). All'inizio il luogo si trova sull'asse immaginario, in corrispondenza di $b = 0$, come ci si aspetta da un sistema che non presenta attenuazione, c'è quindi oscillazione. Man mano che aumenta lo smorzamento i poli si muovono nel semipiano sinistro e verso l'asse reale, finché non viene raggiunto il valore critico dello smorzamento e questi non finiscono sull'asse reale, dove si dividono.

Si sceglie un valore arbitrario $b = 1.5$, che corrisponde ai poli $-0.75 + j0.66$ e $-0.75 - j0.66$, che soddisfano i requisiti (\times nel grafico).

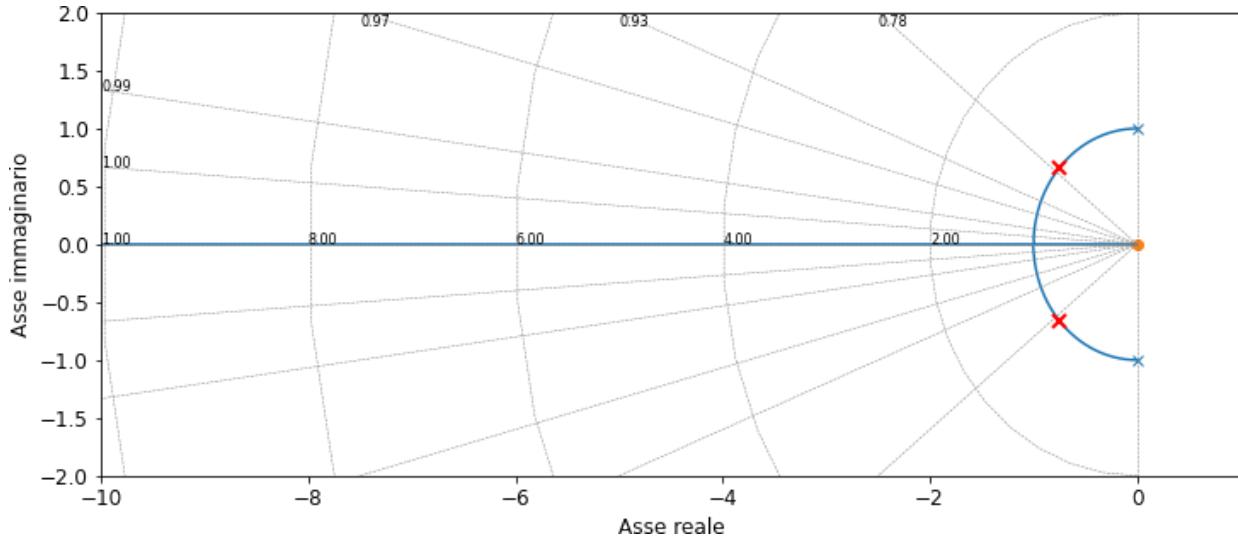


Figura 15.6: luogo radici del sistema in analisi.

Può però accadere che alcuni parametri cambino in presenza di condizioni diverse, per esempio, la molla potrebbe essere sensibile alle variazioni di temperatura:

- caldo: $0.9k$ nominale;
- freddo: $1.1k$ nominale.

C'è quindi un 10% di variazione massima del valore nominale della costante elastica k al variare della temperatura. Possiamo nuovamente utilizzare il luogo delle radici, tenendo conto della possibile variazione di k , allora

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 1.5s + k}$$

con $k \in [0.9k, 1.1k]$.



images/luogo_delle_radici/luogo-radici-esempio-0-temperatura

Figura 15.7: cambiamento dei poli al variare di $k \in [0.9k, 1.1k]$.

Ecco allora che, tenendo conto delle variazioni, il valore precedentemente scelto non va più bene se si scende al di sotto di una certa temperatura.

È possibile che sia necessario riprogettare il sistema per tenere conto di questa variazione, oppure mantenerlo com'è e segnalare che le prestazioni possono degradarsi col calore della temperatura. Questo dipende dall'applicazione finale.

Esempio A partire dal sistema in retroazione negativa con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

e $K \geq 0$ (Figura 12.4), si determini il luogo delle radici sull'asse reale, si trovino gli asintoti sul luogo, i punti di diramazione e le intersezioni con l'asse immaginario.



images/luogo_delle_radici/schema-controllo-retroazione-guadagno

Figura 15.8: schema sistema esempio.

Facendo riferimento alla formula (15.9), individuiamo $v = 3$ e $k = 0, \dots, 2$, allora

$$\psi_{c0} = \left\{ \frac{(0+1)180^\circ}{3} = 60^\circ \right. , \quad \psi_{c1} = \left\{ \frac{(2+1)180^\circ}{3} = 180^\circ \right. , \quad \psi_{c2} = \left\{ \frac{(4+1)180^\circ}{3} = 300^\circ \right.$$

confluenti nel centroide

$$x_c = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

Gli asintoti si avvicinano molto ai punti del luogo delle radici andando a infinito.

Per determinare i punti di diramazione, dobbiamo trovare i punti di minimo/massimo dell'equazione $\gamma(x) = -D(s)/N(s)$. Partiamo dall'equazione caratteristica $1 + L(s) = 0$

$$1 + L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} + 1 = 0$$

quindi $K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$. Derivando $K(x) = \gamma(x)$, per x sull'asse reale, individuiamo

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds}(-(s^3 + 3s^2 + 2s)) = -3s^3 - 6s - 2 = 0$$

da cui ricaviamo $s_1 = -0.4226$ e $s_2 = -1.5774$. Il punto di diramazione deve appartenere al luogo delle radici, tra -1 e 0 , quindi s_1 è il punto ricercato. Il valore s_2 non fa parte del luogo delle radici e dunque non è un punto di diramazione valido.

Possiamo anche ricavare i valori di K corrispondenti a s_1 e s_2 , sostituendoli in $K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$, da cui risulta: $K = 0.3849$ per s_1 e $K = -0.3849$ per s_2 .

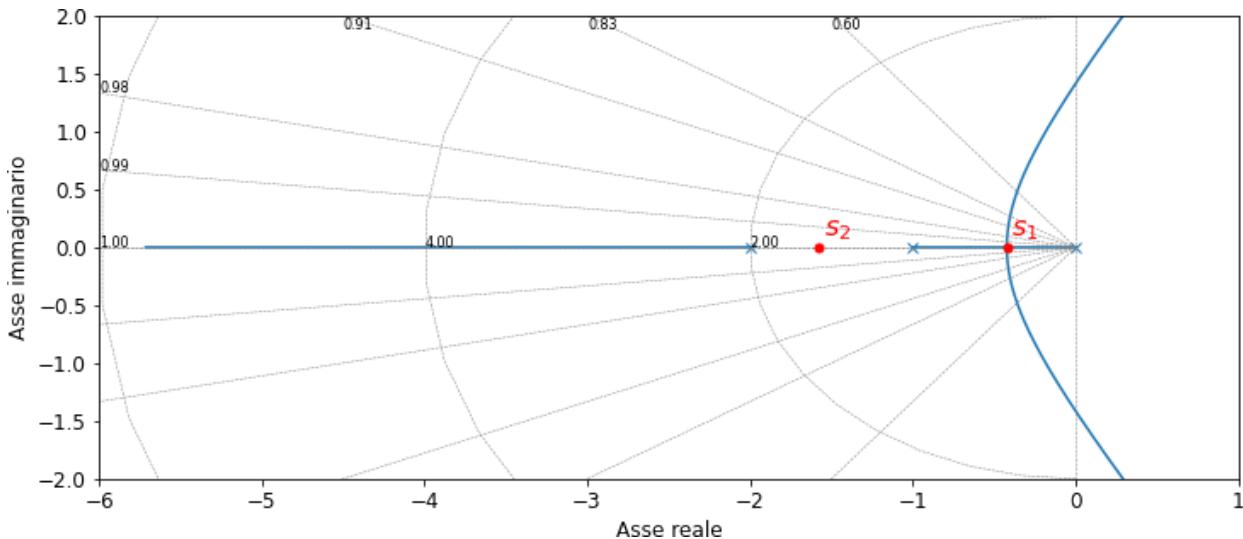


Figura 15.9: luogo delle radici dell'esempio, con evidenziati i punti sull'asse reale ottenuti da $dK/ds = 0$.

Per trovare le intersezioni con l'asse immaginario torniamo a considerare l'equazione caratteristica $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$. Possiamo calcolare il vettore di Routh

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$(6 - K)/3$	
s^0	K	

Il valore di $K = 6$ annulla il termine s . I punti di intersezione con l'asse immaginario possono quindi essere trovati risolvendo il polinomio ausiliare ottenuto dalla seconda riga

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0$$

da cui risulta

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

e dato che $s = \sigma \pm j\omega$, le frequenze nei punti di intersezione dell'asse immaginario sono $\omega = \pm j\sqrt{2}$, mentre il valore del guadagno è $K = 6$.

Vediamo come trovare i punti di intersezione anche con il metodo alternativo. Poniamo $s = j\omega$ nell'equazione caratteristica

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$$

isoliamo la parte reale dalla parte immaginaria

$$(K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

le poniamo uguali a zero e risolviamo per ω e K

$$K - 3\omega^2 = 0, \quad 2\omega - \omega^3 = 0$$

da cui ricaviamo: $\omega = \pm j\sqrt{2}$, $K = 6$ e $\omega = 0$, $K = 0$. Da questo risultato possiamo affermare che per $K = 6$ i poli dominanti giacciono sull'asse immaginario e il sistema è soggetto a oscillazioni di $\omega = \pm j\sqrt{2}$, mentre per valori di K maggiori di 6 i poli dominanti risiedono nel semipiano destro e il sistema è instabile.

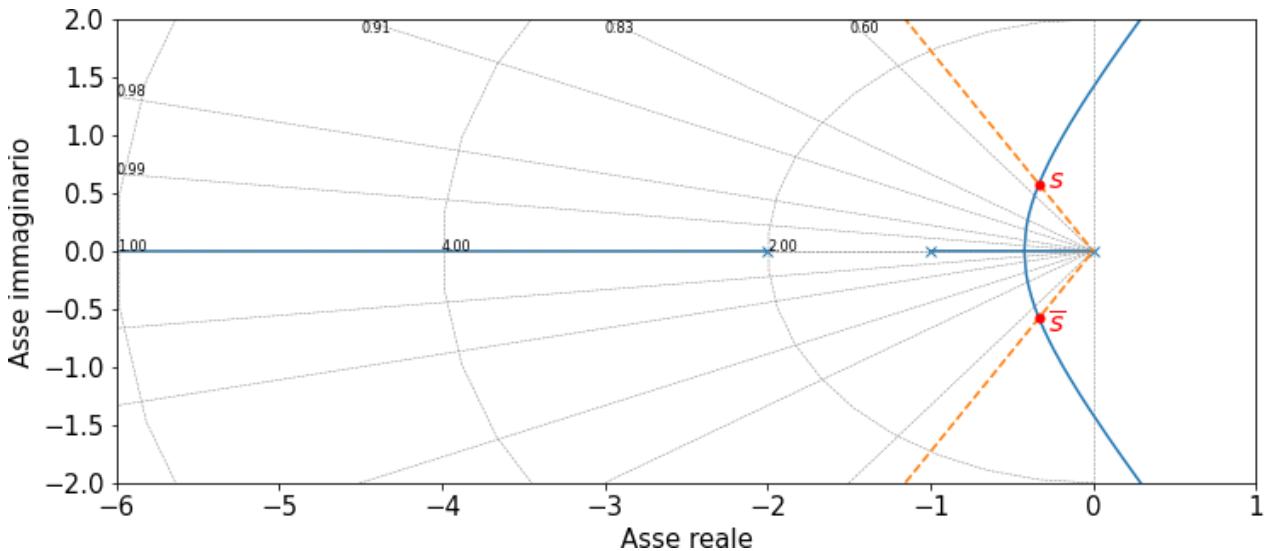


Figura 15.10: luogo delle radici dell'esempio, con evidenziate le linee di smorzamento costante pari a 0.5 e le loro intersezioni con il luogo.

Adesso che abbiamo approfonditamente analizzato il luogo delle radici andiamo a porre i vincoli per rispettare i requisiti di sistema; in particolare, è richiesto che lo smorzamento sia $\xi = 0.5$. Sappiamo che la coppia di poli complessi coniugati dominanti dovrà essere sulla linea che passa dall'origine tale che

$$\xi = \cos(\phi) \Rightarrow \cos^{-1}(\xi) = \phi$$

allora

$$\cos^{-1}(0.5) = 60^\circ$$

Da una prima analisi visiva del luogo delle radici, possiamo assumere che i poli con $\xi = 0.5$ sono posizionati approssimativamente in $s = -0.33 \pm j0.57$. A questo punto è possibile determinare il valore di K associato ai poli, tramite la condizione sul modulo, che è pari a

$$|K| = |-(s^3 + 3s^2 + 2s)|_{s=-0.33+j0.57} = 1.066$$

C'è un terzo polo da determinare, per farlo possiamo sfruttare il valore di K che abbiamo appena ricavato, sostituendolo in $s^3 + 3s^2 + 2s + K$ e risolvendo troviamo la radice reale: $s = -2.3399$.

Notiamo che per $K = 6$, il polo dominante dovrebbe essere sull'asse immaginaria con $\omega = \pm\sqrt{2}j$ ed il sistema avrà oscillazioni sostenute. Per $K > 6$ i poli dominanti saranno nella parte destra del semipiano e il sistema sarà conseguentemente instabile.

CAPITOLO 16

RETI ANTICIPATRICI E RITARDATRICI

Le reti anticipatrici e ritardatrici sono spesso impiegate nei controlli con rappresentazione attraverso funzione di trasferimento e possono essere usate in combinazione. Una rete anticipatrice può aumentare la stabilità o la velocità della risposta di sistema, mentre una rete ritardatrice può ridurre l'errore a regime, ma non eliminarlo.

16.1 Anticipo di Fase

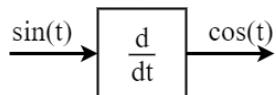


Figura 16.1: diagramma anticipo di fase.

L'anticipazione di fase anticipa la fase del segnale di ingresso di un certo valore (espresso in gradi). Si può osservare un esempio di anticipazione di fase nella Figura 16.2 che fa riferimento al sistema in Figura 16.1.

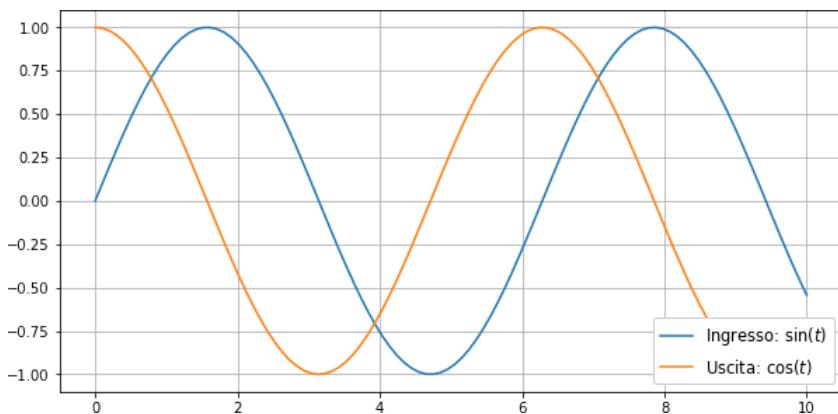


Figura 16.2: anticipazione di fase di 90° del segnale di ingresso $\sin(t)$; questo produce in uscita il segnale $\cos(t)$, che è infatti $\sin(t) - 90^\circ$.

Come si può osservare dai diagrammi di Bode in Figura 16.3 (e come già discusso in precedenza in altri capitoli), le azioni derivate danno alla fase un contributo positivo, mentre quelle integrali danno un contributo negativo. Quindi l'aggiunta di uno zero nella funzione di trasferimento aggiunge fase, mentre l'aggiunta di un polo sottrae fase.

Lo stesso effetto, limitato a intervalli di interesse, è dato dai compensatori anticipatori (aggiunta di fase) e ritardatori (sottrazione di fase).

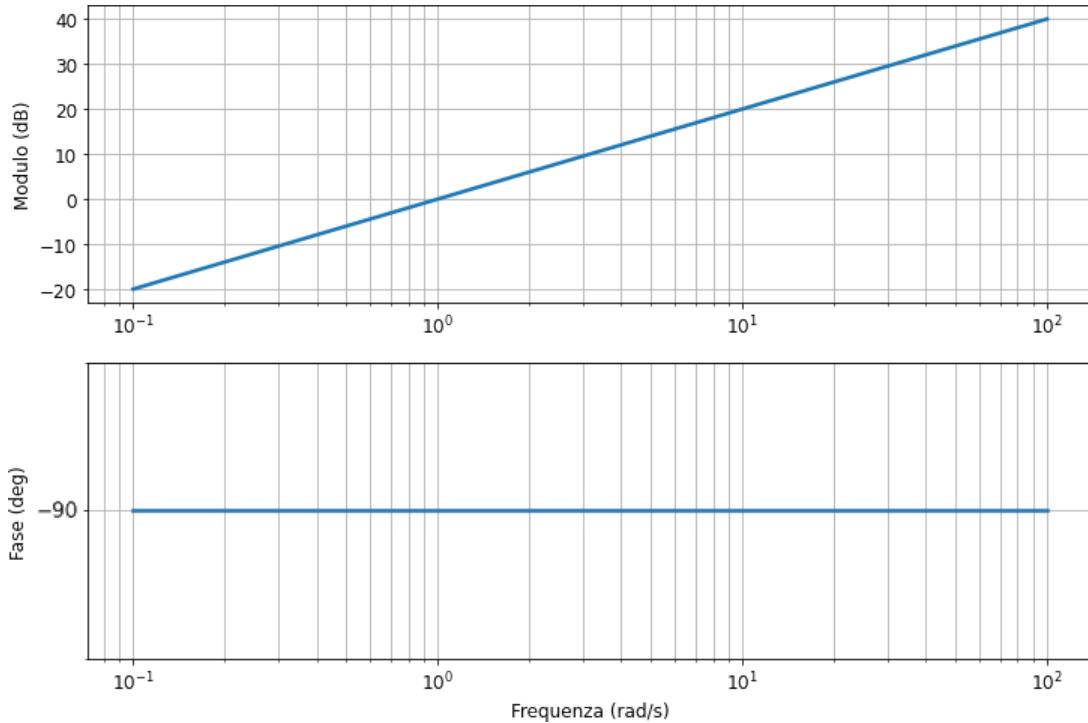


Figura 16.3: diagramma di Bode di un derivatore.

16.2 Reti Stabilizzatrici

16.2.1 Rete anticipatrice

Una *rete anticipatrice*, o *lead network*, è una rete che produce un anticipo di fase (a seguito di un ingresso sinusoidale, che produce un'uscita a regime sinusoidale). Il contributo di fase derivante dall'azione anticipatrice della rete è una funzione della frequenza di ingresso.

16.2.2 Rete ritardatrice

Una *rete ritardatrice*, o *lag network*, è una rete che produce un ritardo di fase (sempre a seguito di un ingresso sinusoidale).

Le reti anticipatrici e ritardatrici sono descritte dalla funzione di trasferimento

$$R(s) = \mu_R \frac{1 + \tau s}{1 + T s} \quad (16.1)$$

con $\mu_R = \omega_p / \omega_z > 0$, $T = 1 / \omega_p > 0$, $\tau = 1 / \omega_z > 0$ e $\omega_z < \omega_p$ nel caso di rete anticipatrice, mentre $\omega_z > \omega_p$ per la rete ritardatrice.

16.2.3 Rete a sella

Una *rete a sella*, o *lead-lag network*, è una combinazione di una rete anticipatrice e di una ritardatrice, con relativi vantaggi. Questa rete produce sia un anticipo che un ritardo di fase, ma a differenti pulsazioni. Il ritardo di fase si verifica in una regione a bassa frequenza, mentre l'anticipo di fase si trova nella regione ad alta frequenza.

Questa rete è descritta dalla funzione di trasferimento

$$R(s) = \mu_R \frac{(1 + \tau_1 s)}{(1 + T_1 s)} \frac{(1 + \tau_2 s)}{(1 + T_2 s)} \quad (16.2)$$

con $\mu_R > 0$, $T_1 > \tau_1 \geq \tau_2 > T_2 > 0$ e $T_1 = 1 / \omega_{p1}$, $T_2 = 1 / \omega_{p2}$, $\tau_1 = 1 / \omega_{z1}$, $\tau_2 = 1 / \omega_{z2}$

Compensatori che presentano caratteristiche di queste reti: anticipatrice, ritardatrice e a sella; sono detti compensatori anticipatori, ritardatori, a sella (anticipatori-ritardatori).

In questo capitolo vedremo come utilizzare due metodi, precedentemente studiati, per la progettazione di compensatori: il luogo delle radici e la risposta in frequenza. L'approccio legato al luogo delle radici è estremamente potente quando le specifiche sono espresse in termini del dominio del tempo, come smorzamento e frequenza naturale dei poli dominanti in anello chiuso, oppure, massima sovraelongazione, tempo di salita e tempo di assestamento. In ogni caso, le specifiche fornite non è detto che siano esclusivamente nel dominio del tempo o della frequenza, possono essere una combinazione dei due.

16.3 Compensatori in Serie e Parallello

I compensatori hanno effetti diversificati in base, non solo alla tipologia, ma anche al posizionamento all'interno dello schema di controllo; in particolare distinguiamo due casi.

16.3.1 Compensatore in serie

Un compensatore posizionato in serie con l'impianto forma una *compensazione in serie* (Figura 16.4).

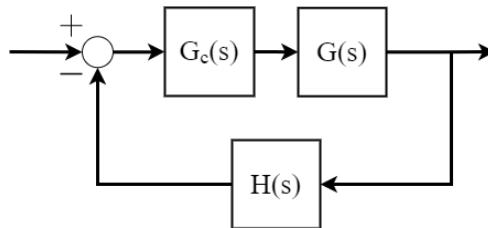


Figura 16.4: diagramma a blocchi di un compensatore in serie.

16.3.2 Compensatore in parallelo

Un'alternativa alla compensazione in serie è data dalla retroazione di uno o più segnali da uno o più elementi e con l'aggiunta di un compensatore nel percorso di retroazione (Figura 16.5). Questa approccio è chiamato *compensazione in parallelo*, o *compensazione in retroazione*.

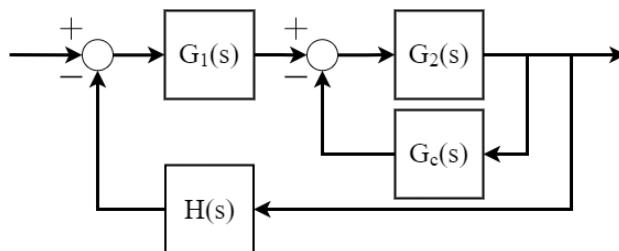


Figura 16.5: diagramma a blocchi di un compensatore in serie.

Soltanamente i problemi si riducono alla progettazione di un compensatore in serie o parallelo adatto per raggiungere le prestazioni richieste; il progettista dovrà realizzare un dispositivo fisico basato sulla funzione di trasferimento del compensatore. La scelta tra compensazione in serie e parallelo dipende dalla velocità dei segnali nel sistema, dalle componenti disponibili, dall'esperienza del progettista, da considerazioni economiche e molti altri fattori.

16.4 Progettazione

16.4.1 Luogo delle Radici

Il metodo del luogo delle radici, con regolazione del guadagno o di altri parametri di un sistema, potrebbe non essere sufficiente per garantire le prestazioni desiderate. Ad esempio, il sistema potrebbe essere instabile per qualsiasi valore del guadagno (o qualsiasi altro parametro che possiamo modificare). C'è quindi la necessità di rimodellare il luogo delle radici in modo tale da soddisfare i requisiti di progetto. A questo punto il problema di progettazione consiste nel migliorare le prestazioni di sistema, con l'ausilio di compensatori, che possono essere reti anticipatrici o ritardatrici; filtri le cui proprietà tendano a compensare le caratteristiche indesiderate dell'impianto, che non possono essere alterate direttamente.

Possiamo rimodellare il luogo delle radici del sistema aggiungendo poli e/o zeri alla funzione di trasferimento del sistema in anello aperto e forzare il luogo delle radici a passare per i poli in anello chiuso desiderati. Gli effetti degli zeri e dei poli aggiuntivi non influenzano in modo evidente le caratteristiche della risposta.

Introducendo un compensatore durante la progettazione con il luogo delle radici, siamo in grado di inserire una coppia di poli dominanti nella posizione desiderata.

Va sempre tenuto a mente che nella maggior parte dei casi le scelte di progettazione sono le più semplici; ad esempio, prima di compensare il luogo delle radici verifichiamo che il problema non possa essere risolto con una semplice regolazione del guadagno, quindi applichiamo il luogo delle radici al sistema originale non compensato.

Effetti dell'aggiunta di poli Aggiungere poli alla funzione di trasferimento in anello aperto tende a spostare i poli del luogo delle radici verso destra (Figura 16.6). Questo, inevitabilmente, lede la stabilità relativa del sistema e rallenta la risposta.

L'aggiunta di un'azione integrale ($1/s$) abbassa la stabilità del sistema perché aggiunge un polo all'origine.

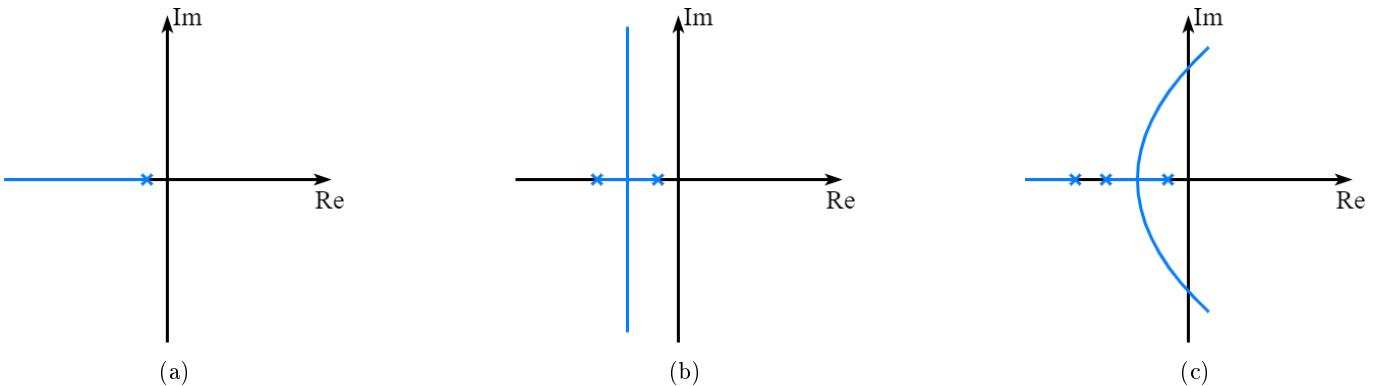


Figura 16.6: a) luogo delle radici di $1/s + 1$; b) aggiunta di un polo; c) aggiunta di due poli. Come si può vedere, con l'aggiunta dei due poli il luogo delle radici presenta poli nel semipiano destro da un certo valore del parametro in poi e il sistema è instabile.

Effetti dell'aggiunta di zeri Aggiungere zeri alla funzione di trasferimento in anello aperto ha l'effetto di spostare i poli del luogo delle radici verso sinistra (Figura 16.7), rendendo il sistema maggiormente stabile e veloce nella risposta.

L'aggiunta di un'azione derivativa (s) introduce un certo grado di anticipazione nel sistema e aumenta la velocità della risposta transiente.

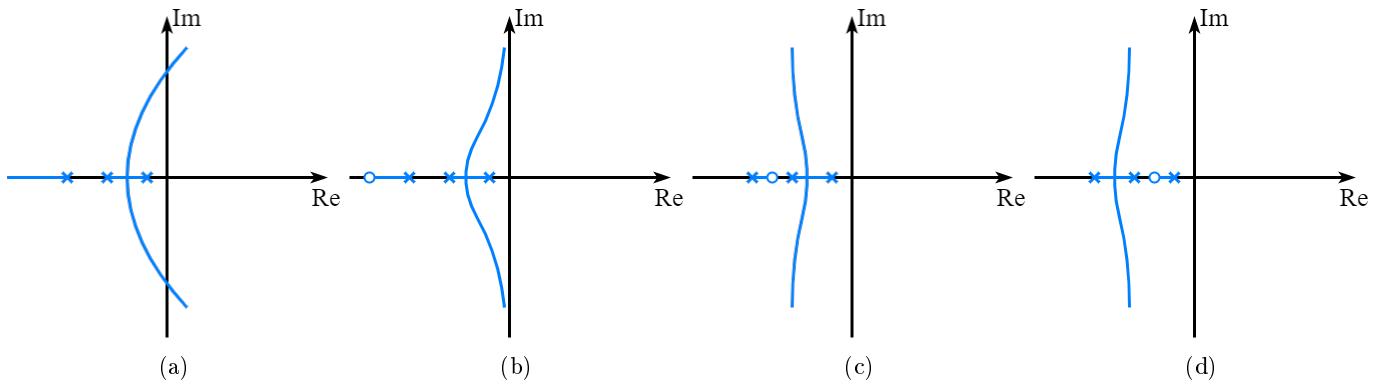


Figura 16.7: variazione luogo delle radici con l'aggiunta di uno zero in varie posizioni; si noti come il luogo viene spostato verso sinistra.

Compensatore anticipatore Assumiamo che il luogo delle radici del sistema originale non soddisfi i requisiti di progetto. Consideriamo un compensatore anticipatore descritto dalla (16.1) e con $\omega_z < \omega_p$, che possiamo ricavare dalla condizione sulla fase e dai requisiti. A questo punto determiniamo il valore del guadagno dalla condizione sul modulo e verifichiamo che il sistema compensato soddisfi le specifiche sulle prestazioni; in caso negativo si ripete la procedura spostando i poli.

Esempio Sia dato l'impianto descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

Il luogo delle radici di $G(s)$ è mostrato in Figura 16.8a.

Vediamo come il luogo cambia aggiungendo un compensatore anticipatore arbitrario, in questo caso $\omega_z = -5$ e $\omega_p = -6$ (Figura 16.8b)

$$R(s) = \frac{s+5}{s+6}$$

Con il compensatore anticipatore abbiamo spostato gli asintoti verso sinistra, aumentando così la stabilità del sistema. Incrementando il guadagno K i poli in anello chiuso si spostano sempre più a sinistra.

Solitamente quando usiamo il luogo delle radici sappiamo dove vorremmo i poli dominanti del ciclo chiuso, dato che con questo metodo convertiamo i nostri requisiti in regioni di ammissibilità dei poli. Se vogliamo spostare i poli a sinistra usiamo un compensatore anticipatore, altrimenti se abbiamo bisogno di spostarli a destra usiamo un compensatore ritardatore. Se il luogo delle radici passa già attraverso i poli desiderati sarà necessario scegliere solamente il giusto guadagno.

A partire dai poli desiderati, la procedura per ottenere un compensatore diventa un problema di trigonometria, sappiamo infatti che per essere parte del luogo delle radici un punto deve rispettare la (15.4) (Figura 16.9a).

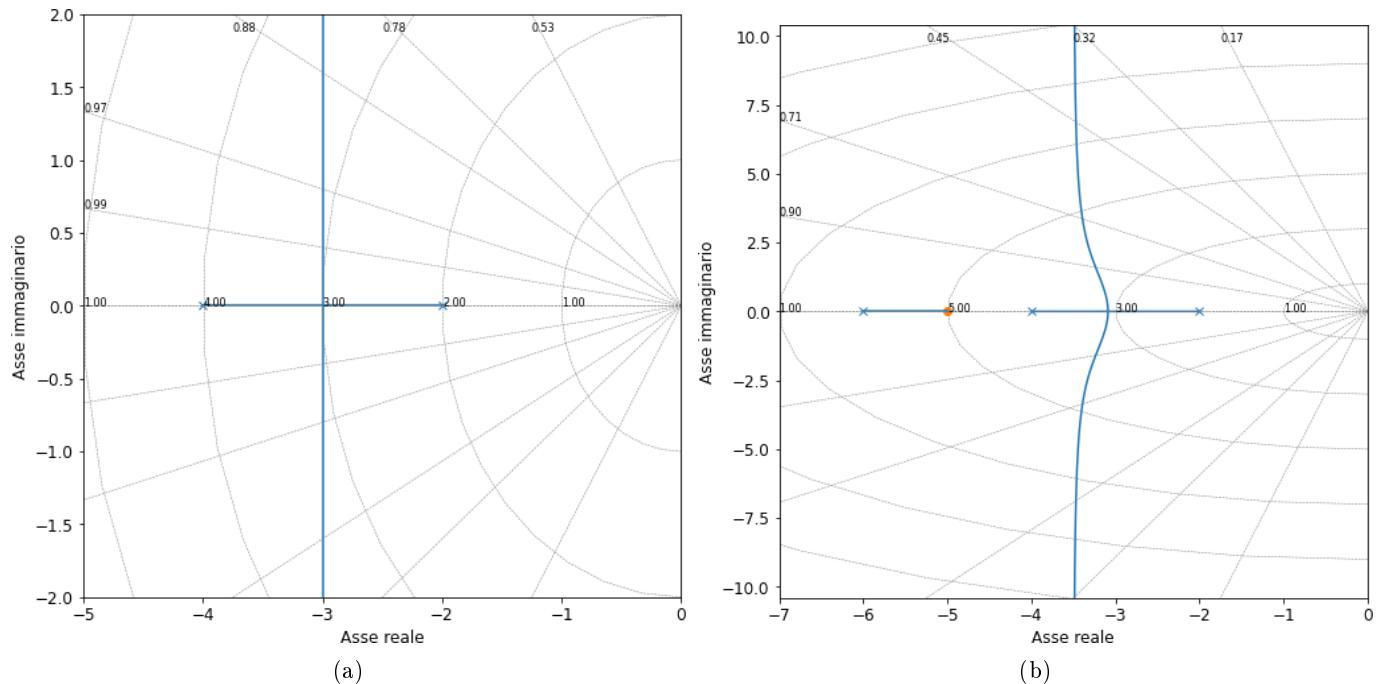


Figura 16.8: a) luogo delle radici dell'impianto $G(s)$ non compensato; b) luogo delle radici dell'impianto $G(s)$ con compensatore $R(s)$.

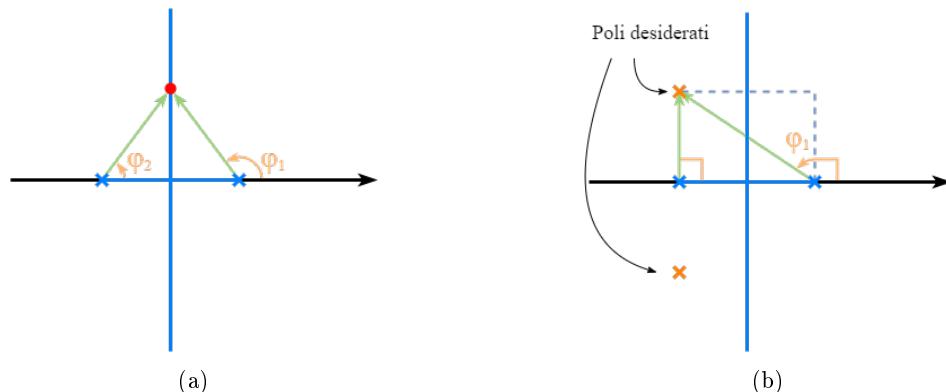


Figura 16.9: a) luogo delle radici con evidenziata la condizione sulla fase di un generico punto; la somma $\varphi_1 + \varphi_2$ è uguale a 180° quindi la condizione è rispettata e il punto appartiene al luogo; b) luogo delle radici con evidenziata la posizione desiderata per i poli.

Se vogliamo aggiungere i poli $s_d = -4 \pm j2$, dobbiamo prima di tutto verificare la condizione sulla fase $90^\circ + 90^\circ + \varphi_1$ con

$$\varphi_1 = \arctan(2/2) = \arctan(1) = 45^\circ$$

quindi la condizione sulla fase risulta 225° che non è un multiplo di 180° , dunque non appartiene al luogo delle radici. Per avere questi poli sul luogo dobbiamo togliere 45° alla fase, possiamo farlo con un compensatore anticipatore aggiungendo uno zero e un polo

$$225 + (\varphi_c - \theta_c) = 180$$

Il nostro compensatore è $\varphi_c - \theta_c$; scegliendo lo zero in -5 otteniamo $\theta_c = 63.43^\circ$ e il polo dovrà per forza andare nel punto corrispondente a $\varphi_c = 180^\circ - 225^\circ + 63.43^\circ = 18.43^\circ$, allora

$$R(s) = \frac{s+5}{s+10.015}$$

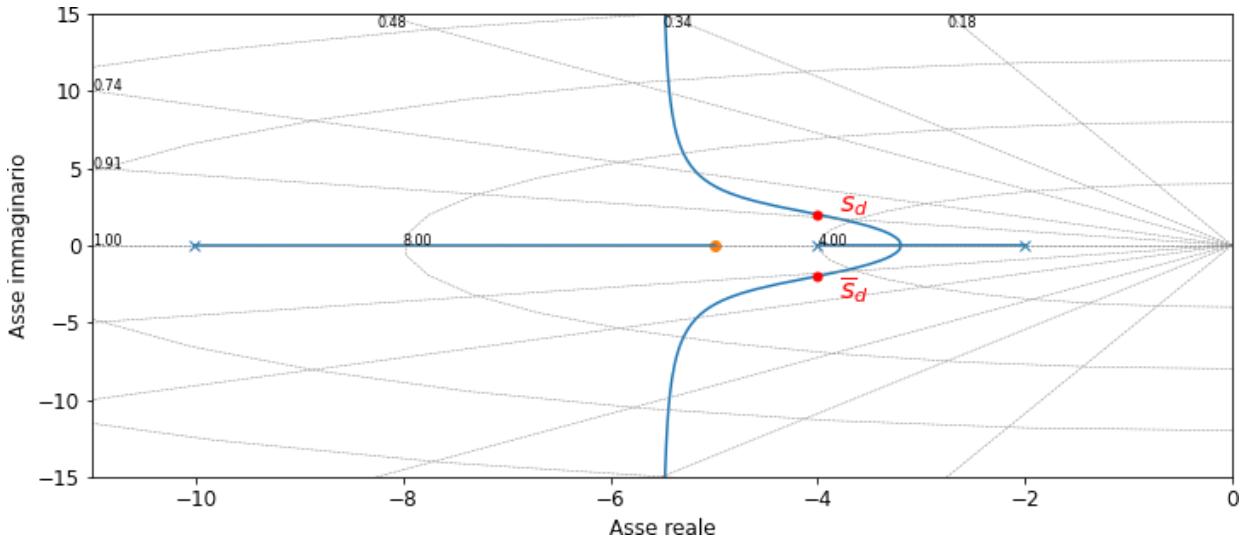


Figura 16.10: luogo delle radici del sistema compensato che passa per i poli desiderati $s_d = -4 \pm j2$.

e possiamo osservarne l'effetto sul sistema dal luogo delle radici in Figura 16.10

Adesso calcoliamo il guadagno necessario ad avere i poli in anello chiuso dove li vogliamo.

$$H(s) = \frac{KL(s)}{1 + KL(s)}$$

da cui

$$K = -\left. \frac{1}{1 + L(s)} \right|_{s=-4+j2} \approx 16$$

Scelta del primo zero La scelta del primo zero non è difficile e ha una regola di rapida applicazione. Dobbiamo avere un angolo negativo adatto a rispettare la condizione sulla fase (senza interferire con i poli dominanti).

Dalla Figura 16.11 possiamo osservare due limiti; il primo limite (destro) è dovuto al fatto che il posizionamento di uno zero nella regione evidenziata ha effetti sui poli dominanti; il secondo limite (sinistro), invece, è causato dalla limitatezza del contributo di fase che possiamo ottenere posizionando uno zero in quella regione.

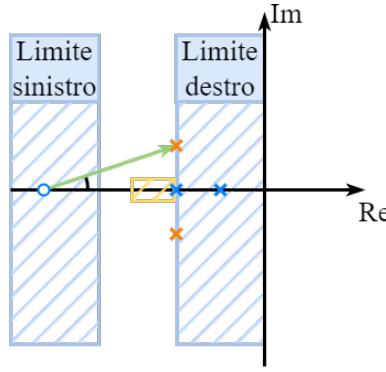


Figura 16.11: limiti di posizionamento dello zero nel luogo delle radici.

Come regola generale sceglieremo di posizionare lo zero in corrispondenza, o leggermente a sinistra, del secondo polo in anello aperto sull'asse reale (regione gialla in Figura 16.11).

Essendo una regola generale e non affidabile, non garantisce i requisiti di sovraelongazione e potrebbe essere necessario applicare una procedura di trial and error prima di arrivare ad una scelta soddisfacente. Con sistemi di ordine maggiore potrebbe essere complicato prevedere il posizionamento dei poli non dominanti e bisogna assicurarsi che non diventino instabili; inoltre, sistemi con una risposta più veloce saranno più sensibili al rumore di misura.

Metodo posizionamento zero e polo Per scegliere dove posizionare le singolarità del compensatore anticipatore possiamo sfruttare un metodo molto semplice.

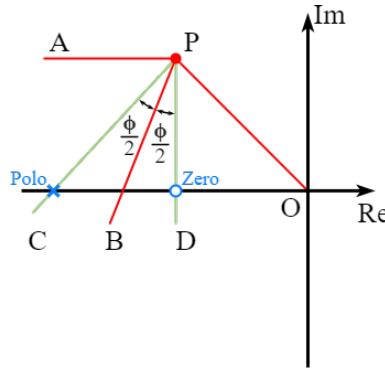


Figura 16.12: schema utilizzato come riferimento per la scelta dello zero e di un polo del compensatore anticipatore.

Indicando con ϕ l'angolo che il compensatore deve sottrarre, possiamo posizionare lo zero e il polo attraverso il seguente procedimento, che fa riferimento alla Figura 16.12:

1. si disegna il segmento orizzontale AP (con P punto corrispondente a un polo dominante in cui vogliamo che passi il luogo delle radici);
2. si disegna il segmento PO , che collega il punto P all'origine O .
3. si traccia il segmento PB , bisettrice dell'angolo \widehat{APO} .
4. si delineano due segmenti PC e PD , posizionati rispettivamente a $\pm \frac{\phi}{2}$ dalla bisettrice PB .

Una volta applicati tutti i passi, prendiamo come zero il punto d'intersezione del segmento PD con l'asse reale, mentre sceglieremo come polo il punto d'intersezione del segmento PC con l'asse reale. Il guadagno in anello aperto può essere calcolato utilizzando la solita condizione sul modulo. Questo metodo è particolarmente adatto perché ci permette di posizionare il polo più a sinistra possibile, che in generale è una cosa buona.

Esempio Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)} = \frac{10}{s^2 + s}$$

ponendo il sistema in retroazione unitaria la funzione di trasferimento diventa

$$\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

i cui poli si trovano in $-0.5 \pm j3.1225$ (Figura 16.13a). La pulsazione naturale e lo smorzamento sono rispettivamente

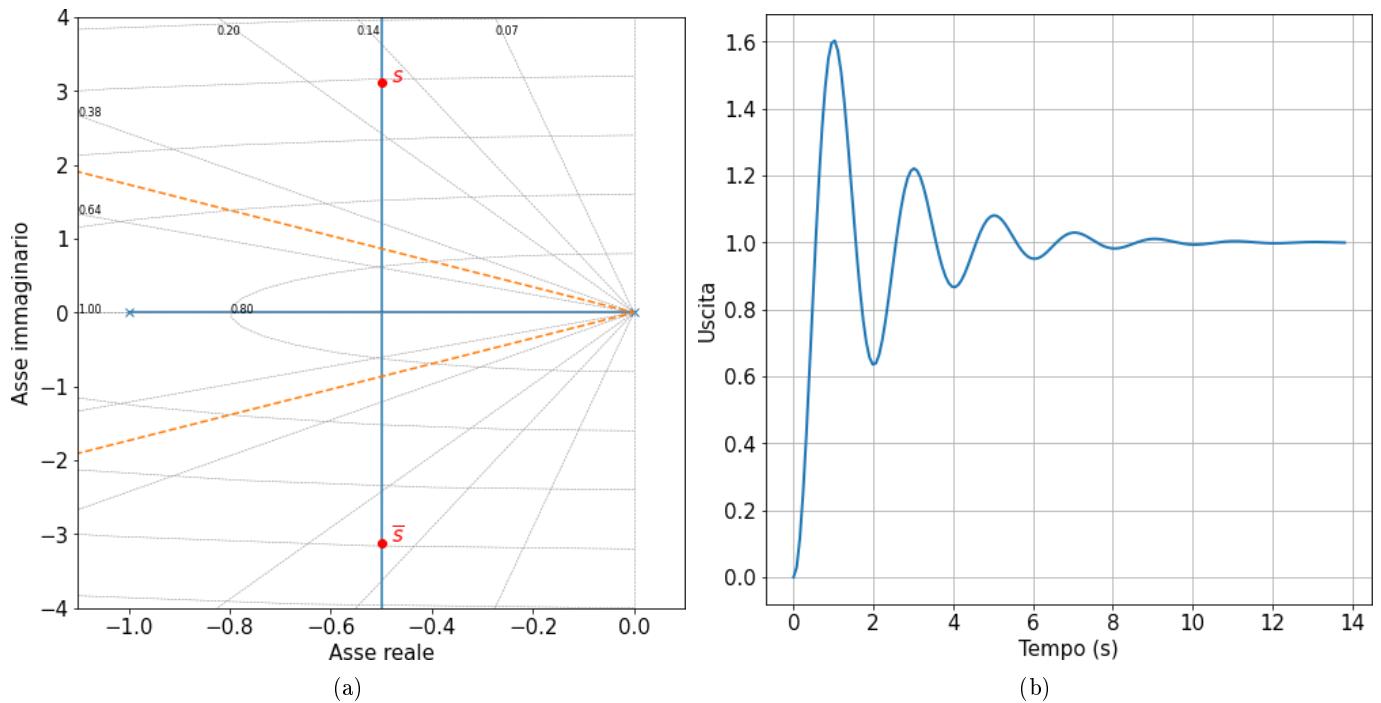
$$\omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \text{ rad/s}, \quad \xi = 0.5/\sqrt{10} = 0.1581$$

Dato che lo smorzamento è molto piccolo il sistema ha un'elevata sovraelongazione nella risposta allo scalino, caratteristica indesiderata (Figura 16.13b).

Con l'aggiunta di un compensatore anticipatore possiamo migliorare le prestazioni in modo tale che la pulsazione naturale sia $\omega_n = 3$ rad/s e lo smorzamento sia $\xi = 0.5$, allora

$$s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2 = s^2 + 3s + 9$$

corrispondente a $s = -1.5 \pm j2.5981$. La linea di smorzamento costante pari a 0.5 ha come angolo $\phi = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ$. Per prima cosa calcoliamo la somma degli angoli formati da poli e zeri del sistema originale nel punto in cui vogliamo che passino i poli in anello chiuso; successivamente determiniamo l'angolo ϕ necessario a far rispettare la condizione sulla fase. Il compensatore dovrà contribuire con ϕ , che in caso sia molto grande potrebbe richiedere l'aggiunta di più reti.

Figura 16.13: a) luogo delle radici di $G(s)$; b) risposta allo scalino di $G(s)$.

Calcoliamo l'angolo dal polo nell'origine al punto scelto come

$$\arctan 2(2.5981, -1.5) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$$

mentre l'angolo dal polo in $s = -1$ al punto scelto è

$$\arctan 2(2.5981, -1.5 + 1) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 100.893^\circ$$

L'angolo di compensazione per soddisfare la condizione di fase è

$$180 - 120 - 100.893 = -40.893$$

Un'aspetto importante di questi problemi è che le possibili soluzioni sono infinite.

Applicando il metodo di posizionamento di zero e polo, visto in precedenza, otteniamo lo zero in $s = -1.9432$ e il polo in $s = -4.6458$, da cui il compensatore

$$R(s) = \frac{s + 1.9432}{s + 4.6458}$$

sfruttando la condizione sul modulo

$$|K| = \left| \frac{1}{|L(s)|} \right|_{s=-1.5+j2.5981} = 1.2287$$

il cui luogo delle radici è esemplificato in Figura 16.14a

Avendo il sistema compensato tre poli in anello chiuso, possiamo trovare il terzo di questi dividendo l'equazione caratteristica per i fattori noti, da cui

$$s^3 + 5.646s^2 + 16.933s + 23.875 = (s + 1.5 + j2.5981)(s + 1.5 - j2.5981)(s + 2.65)$$

Compensatore ritardatore Consideriamo un compensatore ritardatore descritto dalla (16.1) e con $\omega_z > \omega_p$. Essendo la struttura della rete ritardatrici uguale a quella della rete anticipatrice, possiamo usare le stesse tecniche di

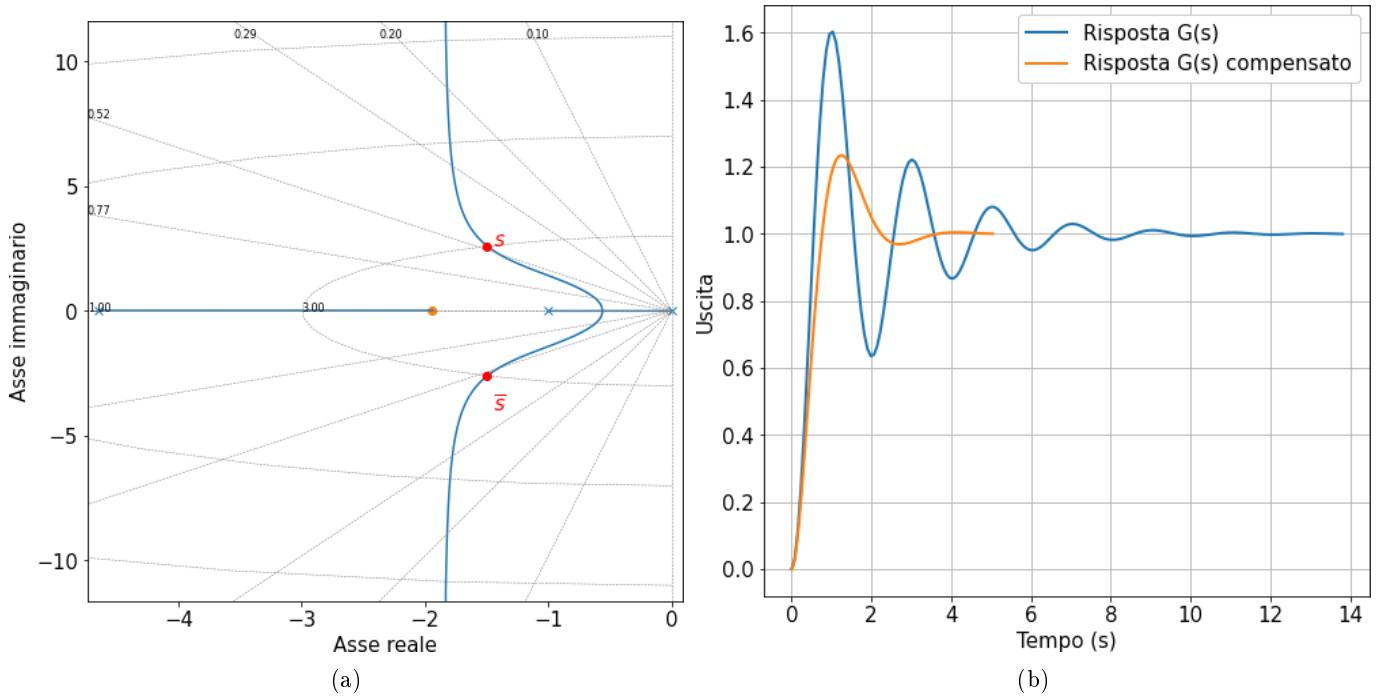


Figura 16.14: a) luogo delle radici del sistema compensato; b) risposta allo scalino del sistema compensata.

progettazione impiegate per il compensatore anticipatore, muovendo però i poli verso destra, dato che abbiamo a che fare con un compensatore ritardatore.

Questo tipo di compensatore è utilizzato anche per sopprimere a errori di regime; potendo migliorare l'errore a regime senza cambiare la posizione dei poli dominanti (già ben posizionati). Da ciò possiamo dedurre che il luogo delle radici non subirà grandi cambiamenti.

In un sistema potremmo osservare una risposta in transitorio soddisfacente, ma non altrettanto per lo stato a regime. Il luogo delle radici in prossimità dei poli dominanti in anello chiuso non dovrebbe essere modificato notevolmente, ma potremmo voler aumentare il guadagno d'anello per raggiungere le giuste prestazioni.

Per evitare considerevoli cambiamenti nel luogo, il contributo d'angolo della rete ritardatrice dovrebbe essere limitato a una piccola quantità, indicativamente meno di 5°. Per dare questo contributo d'angolo, il polo e lo zero della rete saranno relativamente vicini all'origine del piano complesso.

Riduzione errore a regime Si consideri il sistema retroazionato in Figura 16.15, dove $G(s) = N(s)/D(s)$, $R(s) = \frac{s-z}{s-p}$ e l'ingresso $W(s)$. L'errore a regime del sistema non compensato con $W(s) = \text{sca}$ è

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s)S(s) = \frac{D(0)}{D(0) + N(0)}$$

mentre per il sistema compensato risulta

$$e_{c\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s)S(s) = \frac{D(s)(s-p)}{D(s)(s-p) + N(s)(s-z)} \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{D(0)p}{D(0)p + N(0)z}$$

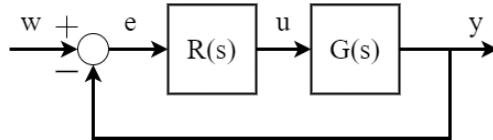
quindi

$$\frac{z}{p} = \frac{D(0) - e_{c\infty} D(0)}{e_{c\infty} N(0)}$$

Scegliendo opportunamente lo zero e il polo siamo in grado di ridurre l'errore, dato che

$$\frac{z}{p} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad e_{c\infty} = 0$$

Anche con questi accorgimenti non siamo in grado di eliminare definitivamente l'errore a regime, ma solo attenuarlo. Per eliminarlo totalmente è necessario cambiare il tipo del sistema, come abbiamo visto nel Capitolo 13.

Figura 16.15: schema sistema retroazionato con compensatore $R(s)$.

Esempio Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{5s^2 + 6s + 2}{4s^2 + s + 3}$$

ridurre l'errore a regime, in modo tale che $e_{\infty} = 0.1$.

$$\frac{z}{p} = \frac{3 - 3e_{\infty}}{2e_{\infty}} = \frac{3 - 0.3}{0.2} = 13.5$$

Adesso conosciamo il rapporto tra zero e polo, abbiamo diverse scelte possibili, come

$$\begin{aligned} z &= -0.1, \quad p = -1.35 \\ z &= 1, \quad p = 13.5 \end{aligned}$$

Non vogliamo spostare eccessivamente la posizione delle nostre radici quando andiamo ad inserire un compensatore ritardatore, dato che dobbiamo evitare di modificare il luogo delle radici, quindi $\theta_c - \varphi_c \simeq 0$. Piazzare le singolarità vicino all'asse immaginario rende più semplice rispettare la condizione sull'angolo e sul rapporto tra zero e polo. È opportuno osservare che talvolta limiti pratici impediscono di spostare le singolarità troppo vicino all'asse, come ad esempio limiti su resistori e condensatori.

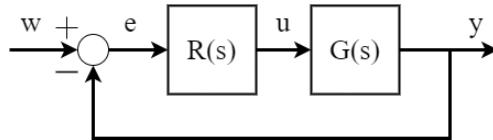
Come nel caso del compensatore anticipatore, esistono regole generali, non sempre valide che ci permettono di determinare facilmente la posizione delle singolarità; in questo caso, la regola generale dice che la posizione dello zero è approssimativamente cinquanta volte più vicina all'asse immaginario di quella del primo polo dominante. Dove con primo polo dominante si intende il polo dominante più vicino all'asse.

Esempio Si consideri il sistema in Figura 16.16 con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

e compensatore anticipatore per aumentare la stabilità e i requisiti sul tempo di salita

$$R_a(s) = \frac{16(s+4)}{s+9}$$

Figura 16.16: schema sistema retroazionato con compensatore $R_a(s)$.

L'errore a regime è

$$e_{\infty} = \frac{9 \cdot 3 \cdot 1}{9 \cdot 3 \cdot 1 + 16 \cdot 4} \approx 0.3$$

Il requisito sull'errore a regime è $E_{\infty} = 0.1$

$$\frac{z}{p} = \frac{9 \cdot 3 \cdot 1 - 0.1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1}{0.1 \cdot 16 \cdot 4} \approx 3.8$$

i poli dominanti sono $s_{1,2} = -3 \pm j2$, quindi lo zero va in $-3/50 = -0.06$, mentre il polo va in $-0.06/3.8 = -0.016$. Dunque il compensatore ritardatore, in serie al compensatore anticipatore $R_a(s)$, è

$$R_r(s) = \frac{s + 0.06}{s + 0.016}$$

16.4.2 Diagrammi di Bode

compensatore anticipatore Consideriamo l'equazione (16.1) ed esprimendola come

$$R(s) = \frac{\omega_p}{s + \omega_p} \frac{s + \omega_z}{\omega_z}, \quad \omega_z < \omega_p$$

Guardando al contributo di zero e polo separatamente attraverso il diagramma di Bode (Figura 16.17), possiamo notare che lo zero contribuisce con $+90^\circ$ e amplifica le alte frequenze; al contrario, il polo contribuisce con -90° e attenua le alte frequenze. Unendo i due contributi otteniamo il diagramma di Bode del compensatore $R(s)$.

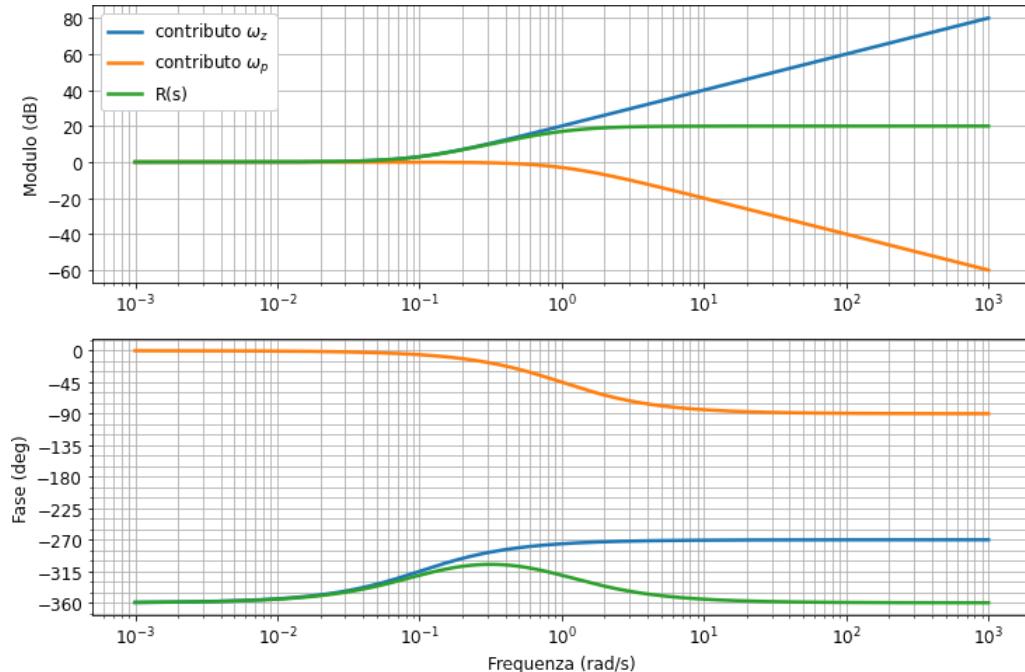


Figura 16.17: diagramma di Bode di un compensatore anticipatore e confronto con singoli contributi di zero e polo.

Dal diagramma di Bode del modulo di $R(s)$ possiamo osservare che inizialmente il compensatore si comporta come uno zero reale (a basse frequenze), per poi assestarsi con il contributo del polo (ad alte frequenze). Un compensatore anticipatore aumenta il modulo ad alte frequenze, anche se meno quanto farebbe uno zero reale; questo significa che è meno rumoroso di un singolo derivatore.

Dal diagramma di Bode della fase di $R(s)$ osserviamo, invece, che la fase aggiunta si trova esclusivamente tra le due frequenze di taglio ω_z e ω_p ; spostando le pulsazioni spostiamo e/o aumentiamo/diminuiamo l'intervallo di frequenze che risente dell'aumento di fase. Bisogna tenere conto però del fatto che avvicinando le due pulsazioni l'antico di fase sarà minore.

Durante la progettazione di un compensatore ritardatore, può essere necessario convertire i requisiti (come i margini di modulo e fase, la larghezza di banda e l'errore a regime, ecc.) nel dominio della frequenza. La progettazione può anche seguire un approccio basato sulla risposta in frequenza, in quel caso è possibile esprimere la funzione di trasferimento nella forma

$$R(s) = \frac{\alpha\tau s + 1}{\tau s + 1} \quad (16.3)$$

con $\alpha = K > 1^1$, $\omega_z = 1/\alpha\tau$ e $\omega_p = 1/\tau$.

Con questo approccio c'è un'antico di fase, e quindi un'aggiunta di fase, nell'intervallo di frequenze compreso tra $1/\alpha\tau$ e $1/\tau$. Dipendentemente dal valore di α , l'antico di fase può arrivare fino ad un massimo di 90° , anche se in pratica l'antico di fase può arrivare a un massimo di 55° . Ovviamente se sono necessari più di 90° , si possono impiegare compensatori in serie e raggiungere l'antico desiderato.

¹Quando $\alpha < 1$ abbiamo a che fare con un compensatore ritardatore.

Esempio Si consideri il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{0.2s + 1}$$

Secondo i requisiti di progettazione l'errore a regime deve essere minore di 0.02 a seguito di una rampa unitaria come segnale di ingresso e margine di fase maggiore di 48°.

Facendo riferimento alla Tabella 13.1, e assumendo il sistema stabile, per una rampa unitaria in ingresso è necessario che il sistema sia almeno di tipo uno per avere un errore finito e almeno di tipo due per avere l'errore nullo. Non possiamo soddisfare i requisiti con il solo compensatore, dato che non ha un polo nell'origine. Il controllore dovrà quindi avere la struttura iniziale

$$R(s) = K \frac{1}{s}$$

a cui aggiungere il compensatore ritardatore per soddisfare il requisito sul margine di fase. Preferibilmente si inizia sempre dal tipo del sistema, dato che l'aggiunta di un ulteriore polo nell'origine ha effetti sulla fase. In questo caso ci limitiamo a un singolo polo nell'origine (e dunque un sistema di tipo uno), questo perché l'aggiunta di poli aumenta la complessità e può inoltre ridurre la stabilità; infatti, un progettista deve essere in grado, anche secondo le necessità del progetto, di non sovra-progettare (overdesign).

Adesso scegliamo il guadagno necessario a limitare l'errore a regime sotto 0.02. Per un ingresso $W(s) = 1/s^2$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{W(s)}{1 + G(s)R(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{0.2s^2 + s}{0.2s^2 + s + K + 1} < 0.02$$

da cui $K > 49$, quindi

$$R(s) = 50 \frac{1}{s}$$

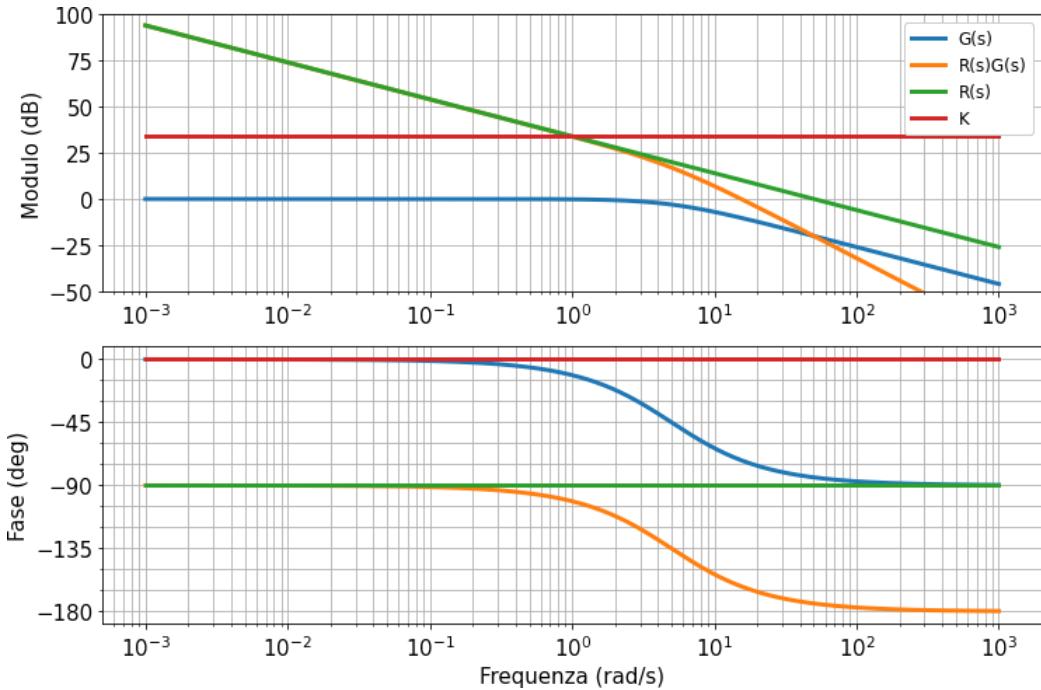


Figura 16.18: diagramma di Bode di $G(s)$, $R(s)G(s)$, $R(s)$ e K .

Dal diagramma di Bode di $R(s)G(s)$ e delle sue componenti (Figura 16.18), possiamo vedere che il margine di fase è 18° ($< 48^\circ$) ed è quindi necessario aggiungere un compensatore anticipatore; dobbiamo aumentare sia il guadagno che la fase.

Dalla funzione di trasferimento (16.3) possiamo determinare diversi punti di interesse. In particolare, identifichiamo la frequenza di taglio superiore ($\omega_s = 1/\alpha\tau$), corrispondente alla frequenza dalla quale il modulo comincia ad

aumentare; la frequenza di taglio inferiore ($\omega_i = 1/\tau$) corrispondente alla frequenza dalla quale il modulo si stabilizza su un valore costante; la fase massima

$$\angle R(j\omega_{\max}) = \sin^{-1} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)$$

ottenuta in corrispondenza della frequenza centrale ω_{\max} tra ω_s e ω_i , tale che

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

Infine, il modulo in corrispondenza della fase massima, pari a

$$|R(j\omega_{\max})| = \sqrt{a}$$

Scelta di α e τ Per prima cosa dobbiamo scegliere il valore di fase che vogliamo aggiungere, quello sarà il valore massimo della fase. Una volta scelto il valore della fase si risolve per α ; successivamente si sceglie la frequenza ω_{\max} in cui vogliamo la fase massima e poi si risolve per τ . In ogni caso l'incremento di fase potrebbe essere minore di quello voluto, talvolta è quindi utile aggiungere un fattore di fase aggiuntivo per sicurezza (e.g. 15°) oppure andare per tentativi, con il già noto trial-and-error.

Tornando all'esercizio, abbiamo bisogno di 30° in più in corrispondenza di 15 rad/s per arrivare ai 48° richiesti, più un fattore aggiuntivo di 7, quindi

$$\angle R(j\omega_{\max}) = \sin^{-1} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right) = 37^\circ$$

quindi

$$\alpha = -\frac{\sin(37^\circ) + 1}{\sin(37^\circ) - 1} = 4$$

mentre la frequenza della fase massima è

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} = 22.2 \text{ rad/s}$$

quindi $\tau = 0.022$.

In conclusione, il controllore finale è

$$R(s) = \frac{50}{s} \frac{0.088s + 1}{0.022s + 1}$$

Verifichiamo se il controllore appena ottenuto soddisfi il requisito sul margine di fase e mettiamo a confronto i diagrammi di Bode del controllore iniziale e di quello finale (Figura 16.19).

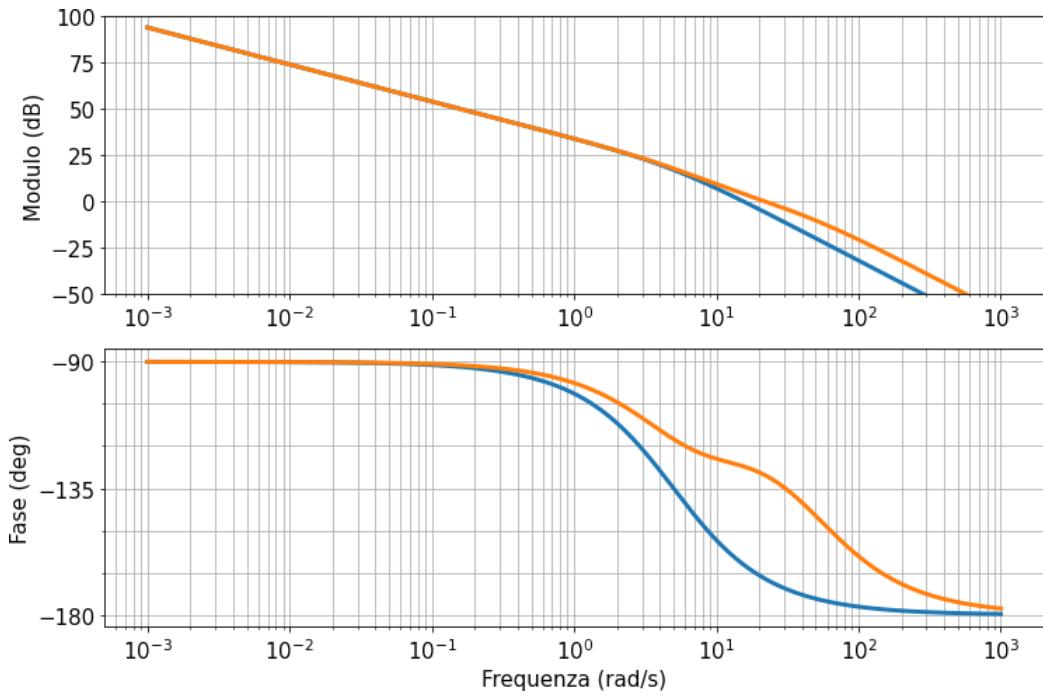


Figura 16.19: diagrammi di Bode del controllore iniziale (in blu) e del controllore finale (in arancione); si noti come i diagrammi di Bode del modulo dei due controllori siano molto simili, mentre il diagramma della fase del controllore finale abbia un margine di fase maggiore, come previsto.

Compensatore ritardatore Facendo riferimento a quanto visto per il compensatore anticipatore nel paragrafo soprastante, possiamo osservare come invertendo ω_z e ω_p (tali che $\omega_z > \omega_p$) il compensatore cambi comportamento e diventi un compensatore ritardatore (Figura 16.20).

Lo zero adesso influenza il sistema a frequenze maggiori. A basse frequenze il sistema risente solamente del contributo del polo e dunque si comporta come tale, finché l'effetto dello zero non compare e «cancella» quello del polo ad alte frequenze. Il risultato è un ritardo di fase del sistema.

Inoltre, come brevemente accennato sopra, la stessa funzione di trasferimento può produrre anticipo o ritardo di fase aggiustando la posizione del polo e dello zero.

Vediamo come progettare un compensatore, ritardatore rifacendoci all'esempio usato nel paragrafo del compensatore anticipatore.

Esempio Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{0.2s + 1}$$

Secondo i requisiti di progettazione l'errore a regime deve essere minore di 0.02 a seguito di una rampa unitaria come segnale di ingresso e margine di fase maggiore di 48° .

Dalla progettazione del compensatore anticipatore usando i diagrammi di Bode, abbiamo visto che il sistema deve essere almeno di tipo uno, così da scegliere il guadagno adatto per rispettare il vincolo sull'errore a regime. Abbiamo progettato il controllore iniziale

$$R_1(s) = \frac{50}{s}$$

che rispetta il requisito sull'errore a regime, ma non quello sul margine di fase. Nonostante nel caso precedente si sia usato un compensatore anticipatore per soddisfare il requisito sul margine di fase, alternativamente possiamo usare un compensatore ritardatore.

Con un compensatore ritardatore naturalmente il requisito sarà soddisfatto, ma con una diversa frequenza di taglio per il guadagno. Vorremo anche mantenere le prestazioni ottenute grazie al controllore iniziale, che soddisfa il requisito sull'errore a regime. Prendiamo in considerazione un compensatore ritardatore descritto da

$$R(s) = \frac{2s + 1}{4s + 1}$$

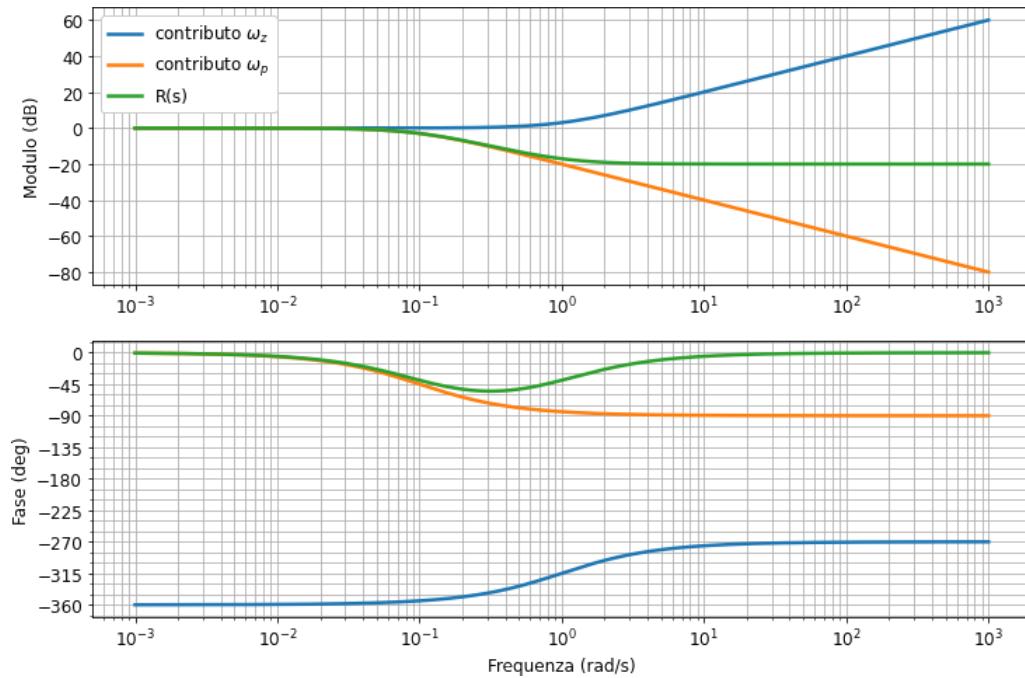


Figura 16.20: diagramma di Bode di un compensatore ritardatore e confronto con singoli contributi di zero e polo.

A basse frequenze il modulo è 0 dB, mentre ad alte frequenze è -6 dB. Possiamo sfruttare l'attenuazione ad alta frequenza con uno spostamento della frequenza di taglio, in modo tale che il modulo pari a 0 dB non impatti sullo stato a regime. Per fare questo è necessario spostare il ritardo di fase a frequenze più basse possibili.

In particolare, vorremmo ridurre il modulo di circa 18 dB per avere la frequenza di taglio con un margine di fase di 48° (Figura ??). Anche in questo caso è utile aggiungere un margine di sicurezza, per esempio abbassare il modulo di 20 dB anziché 18 dB. Possiamo calcolare come avere un calo di 20 dB (che convertito da dB risulta essere 10) nel modulo ad alte frequenze come

$$R(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}$$

da cui ricaviamo che il rapporto tra zero e polo è $\tau/T = 10$

$$R(s) = \frac{\tau s + 1}{10Ts + 1}$$

Vogliamo le singolarità più vicine possibile all'asse immaginario, per impedire al compensatore di interferire sul sistema originale, dunque τ e T devono essere elevate.

Avvalendoci della regola generale per il piazzamento dello zero (un cinquantesimo più vicino all'origine del polo dominante più vicino), risulta $s = 5/50 = 0.1$, che espresso in termini della costante temporale dà $0.2 * 50 = 10$. Quindi il compensatore è

$$R_2(s) = \frac{10s + 1}{100s + 1}$$

e il controllore finale

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{50}{s} \frac{10s + 1}{100s + 1}$$

Dalla Figura 16.21 si può osservare che i diagrammi di Bode del modulo dei controllori sono invariati a basse frequenze. Dato che abbiamo spostato la frequenza di taglio a pulsazioni più basse nel controllore ritardatore, il sistema è più lento (Figura 16.22).

In definitiva possiamo affermare che il sistema originale è meno stabile, inoltre, il sistema con compensatore anticipatore è più veloce, mentre quello con compensatore ritardatore è più lento.

Un sistema più lento non reagisce in modo evidente al rumore ad alta frequenza, tende quindi a essere migliore. Dunque se non abbiamo la necessità di tracciare segnali veloci, un sistema più lento può essere una buona soluzione.

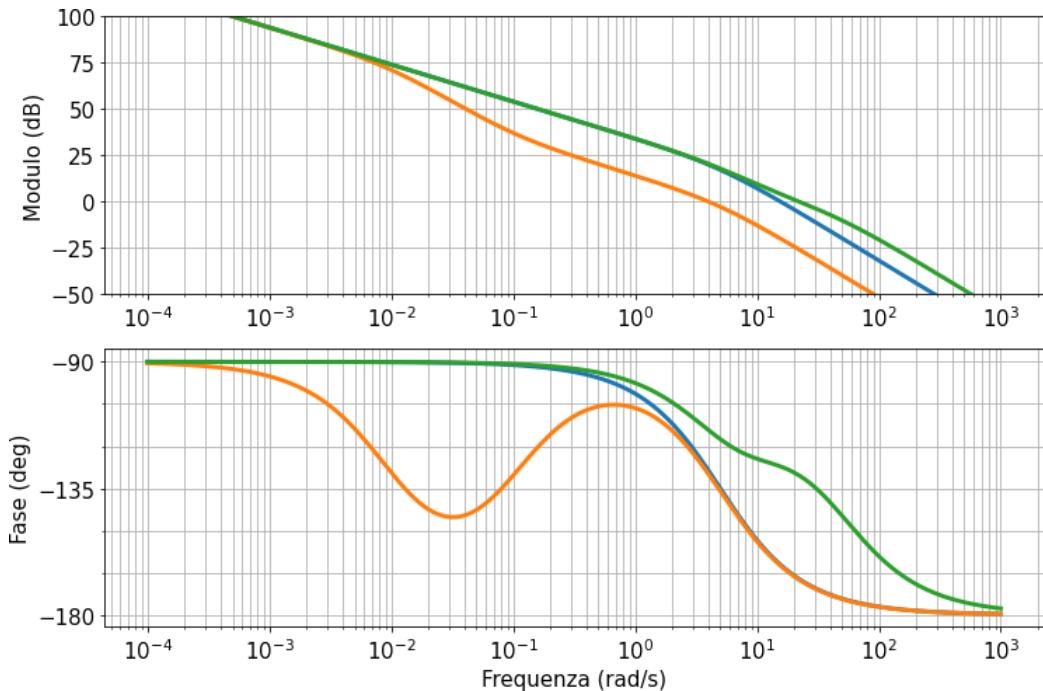


Figura 16.21: diagrammi di Bode del controllore iniziale (in blu), del controllore ritardatore (in arancione) e del controllore anticipatore (in verde).

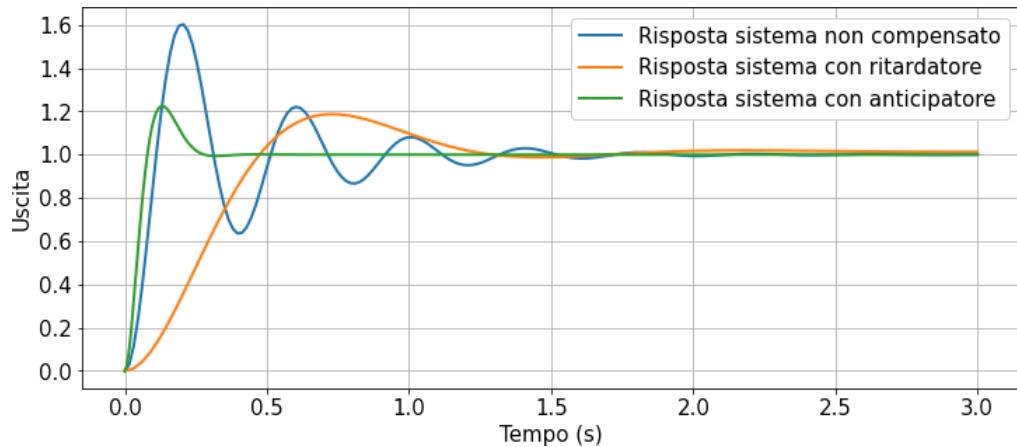


Figura 16.22: Risposte di sistema non compensato, compensato con anticipatore e compensato con ritardatore.

Compensatore anticipatore-ritardatore Un compensatore a sella anticipa la fase a basse frequenze e la ritarda ad alte frequenze, come esemplificato dai diagrammi di Bode della Figura 16.23, ed è descritto dalla (16.2) che possiamo esprimere come

$$R(s) = \frac{\omega_{p1}}{\omega_{z1}} \frac{s + \omega_{z1}}{s + \omega_{p1}} \frac{\omega_{p2}}{\omega_{z2}} \frac{s + \omega_{z2}}{s + \omega_{p2}}$$

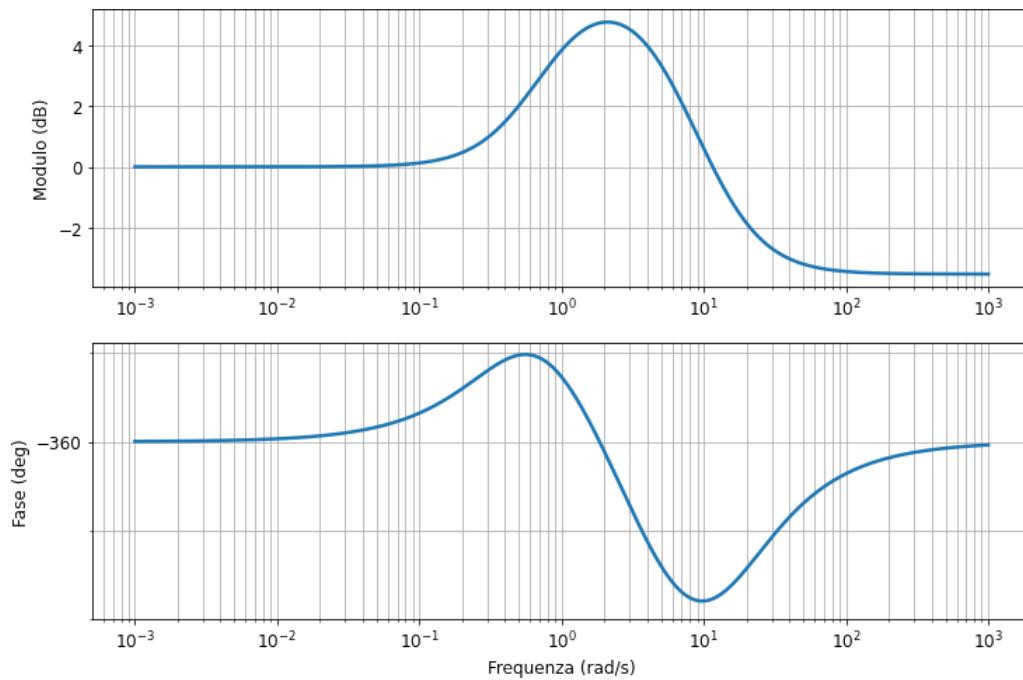


Figura 16.23: diagramma di Bode di un compensatore a sella.

CAPITOLO 17

CONTROLLORI PID

I controllori lineari più utilizzati sono i PID, o *regolatori ad azione Proporzionale, Integrata, Derivativa*, grazie alla loro versatilità e metodi di autoregolazione che permettono la realizzazione di controlli complessi in breve tempo.

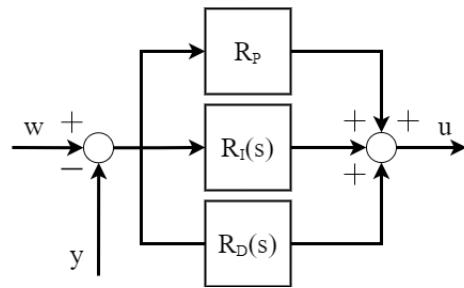


Figura 17.1: struttura generale di un regolatore PID.

Il termine PID descrive come la variabile di controllo u è generata, ovvero come somma di tre contributi:

- **primo contributo:** proporzionale all'errore e tra il segnale di riferimento w e la variabile di uscita y del sistema;
- **secondo contributo:** proporzionale all'integrale dell'errore e e quindi al suo valore medio; impone l'annullamento asintotico dell'errore a fronte di segnali di riferimento con disturbi additivi costanti;
- **terzo contributo:** proporzionale alla derivata di e , tenta di gestire l'andamento dell'errore negli istanti di tempo futuri; ad esempio, con una derivata dell'errore positiva, e guadagno del sistema positivo, u deve essere aumentata per incrementare y e diminuire e .

Considerando i contributi sopra introdotti e facendo riferimento allo schema di controllo in Figura 17.1 possiamo dire che il legame tra l'errore e e la variabile di controllo u , anche detto *legge di controllo*, è descritto da

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (17.1)$$

con K_P , K_I e K_D costanti positive o nulle (sempre ipotizzando che il guadagno sia positivo). In particolare, K_P è il *coefficiente dell'azione proporzionale*, K_I il *coefficiente dell'azione integrata* e K_D il *coefficiente dell'azione derivativa*.

Ponendo $t_0 = 0$ e applicando la trasformata di Laplace alla (17.1) si ricava che la funzione di trasferimento che descrive i PID è

$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \quad (17.2)$$

in cui è possibile individuare i tre termini, $R_P = K_P$ (proporzionale), $R_I(s) = K_I/s$ (integrale) e $R_D = K_D s$ (derivativo). Una forma alternativa della (17.2) è

$$R_{PID}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_P \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s} \quad (17.3)$$

in cui identifichiamo con $T_I = K_P/K_I$ il *tempo integrale* e con $T_D = K_D/K_I$ il *tempo derivativo*.

Dalle equazioni (17.2) e (17.3) notiamo che un controllore PID è composto da due zeri con parte reale negativa e un polo nell'origine. Quindi il PID è un sistema improprio, e in particolare per termine derivativo $R_D(s)$. Per renderlo realizzabile è necessario modificare l'implementazione del termine derivativo come

$$R_D^r(s) = \frac{K_P T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} = \frac{K_D s}{1 + \frac{\hat{K}_D}{N} s} \quad (17.4)$$

dove spesso la costante \hat{K}_D è uguale a K_D/K_P e la costante positiva N è tale che il polo $s = -N/T_D$, aggiunto per la realizzabilità, sia all'esterno della banda di frequenze di interesse per il controllo. La funzione di trasferimento di un PID in forma reale è quindi

$$R_{PID}^r(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{K_P T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} \right) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \frac{\hat{K}_D}{N} s} \quad (17.5)$$

Il polo in $s = -N/T_D$ modifica anche la posizione degli zeri di $R_{PID}^r(s)$, ma con N avente un valore abbastanza elevato, gli zeri coincidono approssimativamente con quelli di (17.2).

Com'è facile intuire, non è necessario che tutte le azioni siano presenti contemporaneamente, ma si può usare una loro qualsiasi combinazione. Di fatto, esistono diversi regolatori particolari che si possono ottenere a partire da un controllore PID, come i regolatori P, I, D, PI e PD.

17.1 Regolatore Proporzionale

Quando è presente solamente il contributo proporzionale, abbiamo un controllore proporzionale $u(t) = K_P e(t)$. Con questa tipologia di regolatore la variabile di controllo risultante è data dall'errore scalato K_P volte; e elevato risulta in u elevata, mentre e ridotto risulta in u ridotta.

Si consideri una funzione di trasferimento generica

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

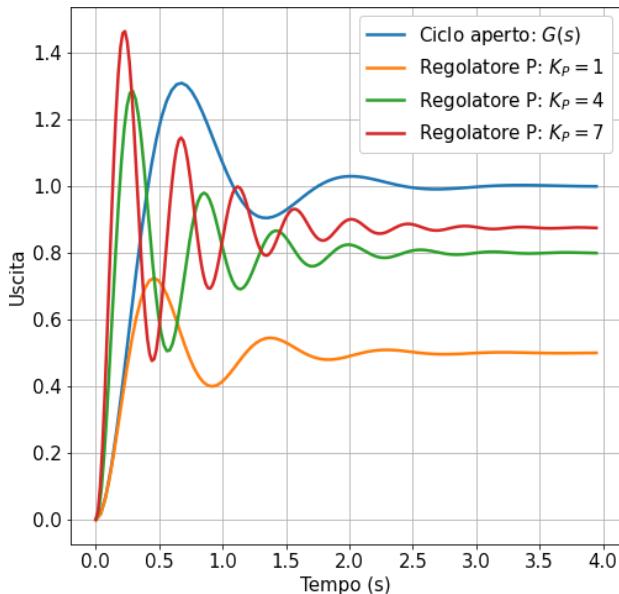
la cui equazione caratteristica è $1 + K_P G(s) = 0$, allora

$$s^2 + a_1 s + a_2 + K_P A = 0$$

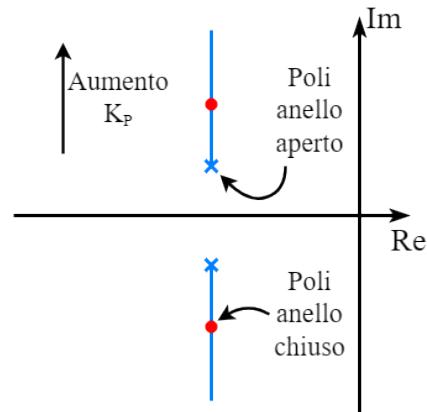
Possiamo a questo punto ricavare la pulsazione naturale

$$\omega_n = \sqrt{a_2 + K_P A}$$

con l'aumento di K_P aumenta anche ω_n . Possiamo osservare come il sistema reagisce al gradino in presenza di K_P diversi dalla Figura 17.2a.



(a)



(b)

Figura 17.2: a) risposte allo scalino di $G(s)$ in anello aperto e con retroazione, con vari K_P ; b) variazione posizione poli in anello chiuso all'aumentare di K_P .

17.2 Regolatore Proporzionale Derivativo

Per aggiungere smorzamento a un sistema si è soliti impiegare un termine derivativo al controllore, in modo tale che

$$u(t) = K_P e(t) + K_D \dot{e}(t)$$

corrispondente alla funzione di trasferimento

$$R_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_D s)$$

Con i regolatori derivativi la variabile di controllo risultante è data dal rapporto di variazione dell'errore; più velocemente cambia e maggiore è u .

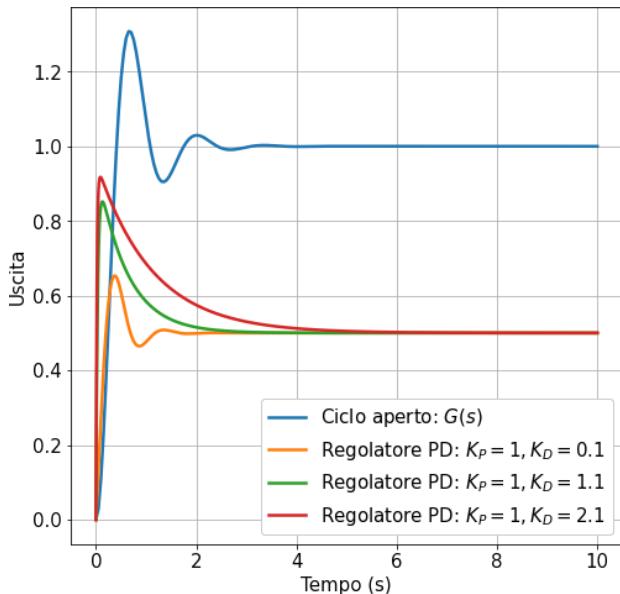
Considerando sempre una funzione di trasferimento e considerando l'equazione caratteristica $1 + (K_P + K_D s)G(s) = 0$, tale che

$$1 + \frac{(K_P + K_D s)A}{s^2 + a_1 s + a_2} = 0$$

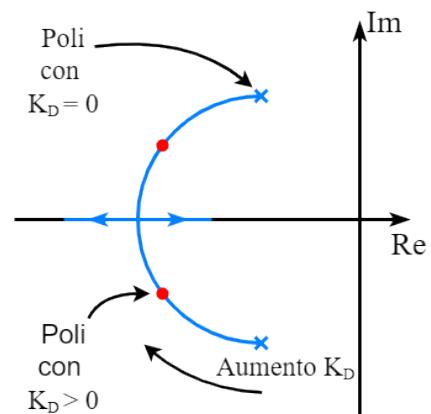
da cui

$$s^2 + (a_1 + K_D A)s + (a_2 + K_P) = 0$$

si può notare che aumentando K_D lo smorzamento del sistema aumenta, senza variare la pulsazione naturale (Figura 17.3a).



(a)



(b)

Figura 17.3: a) risposte allo scalino di $G(s)$ in anello aperto e con retroazione, con vari K_D ; b) variazione posizione poli in anello chiuso all'aumentare di K_D e K_P costante.

17.3 Regolatore Proporzionale Derivativo Integrale

Specialmente nei sistemi di tipo zero, potremmo voler aggiungere un integratore al controllore, per annullare l'errore a regime. Aggiungendo quindi un termine integrale al regolatore si ha la corrispondente funzione di trasferimento

$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

da cui ricaviamo

$$U(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) E(s)$$

Nel percorso integrale l'errore viene sommato continuamente, man mano cambia nel tempo (moltiplicandolo per la costante K_I). Questo percorso è usato per rimuovere errore costante nel tempo; anche il minimo errore si accumula, istante per istante, e aumenta per regolare la variabile di controllo (Figura 17.4).

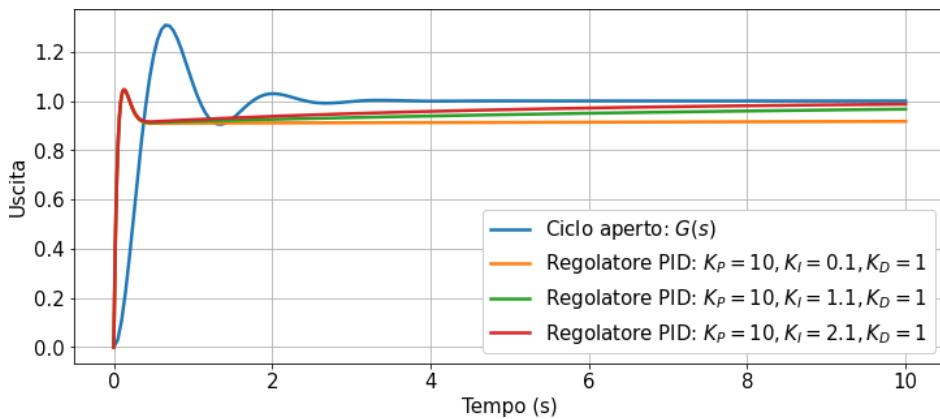


Figura 17.4: risposte allo scalino di $G(s)$ in anello aperto e con retroazione, con vari K_I .

I regolatori PID hanno un polo nell'origine del piano complesso e, idealmente, due zeri in

$$s_{1,2} = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I(T_I - 4T_D)}}{2T_IT_D} \quad (17.6)$$

Nel caso reale, gli zeri sono leggermente spostati, rispetto a quello ideale, e si aggiunge un polo a pulsazione maggiore.

17.4 Realizzazione dei regolatori PID

17.4.1 Gestione Azione Derivativa

L'azione derivativa effettuata sull'errore, come espressa nello schema in Figura 17.5a, in presenza di segnali di riferimento come lo scalino, può generare un andamento impulsivo della variabile di controllo u . Per evitare queste brusche variazioni solitamente l'azione derivativa è applicata alla variabile d'uscita y , anziché all'errore e , dato che normalmente le variazioni dell'uscita sono contenute.

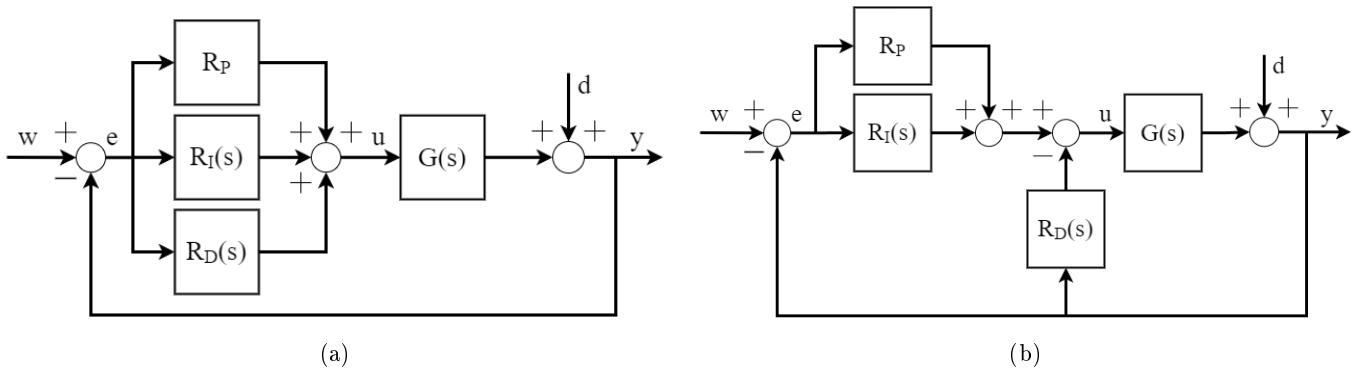


Figura 17.5: a) diagramma a blocchi di un controllore PID con derivazione dell'errore; b) diagramma a blocchi di un controllore PID con derivazione dell'uscita.

Allo stesso tempo però bisogna prestare attenzione al valore di N , infatti, per evitare che componenti ad alta frequenza del disturbo d siano amplificate oltremodo su u , è necessario scegliere N basso, anche se abbastanza alto da lasciarlo fuori dalla banda di interesse.

Se i parametri dei PID non sono ben tarati, possono verificarsi, soprattutto in presenza di azioni derivative, sollecitazioni eccessive della variabile di controllo u , che possono anche avere effetti negativi sul sistema. Questo fenomeno è generalmente indicato con il termine inglese di *setpoint kick* (o più raramente *derivative kick*).

Evitare il setpoint kick Il fenomeno del setpoint kick può essere evitato filtrando il segnale di riferimento prima che arrivi al controllore, oppure cambiando la struttura del controllore PID stesso

$$u(t) = K_P \left(\beta w(t) - y(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + T_D \left(\gamma \frac{dw(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right) \right) \quad (17.7)$$

con β e γ parametri aggiuntivi. L'effetto che ne deriva è quello di introdurre un elemento d'errore per ogni termine della legge di controllo. Mentre il termine dell'integrale deve essere basato sulla retroazione dell'errore per garantire uno specifico stato a regime, gli errori dei termini proporzionale e derivativo includono i parametri aggiuntivi β e γ che hanno lo scopo di modificare la risposta alle modifiche del riferimento.

Solitamente γ è posto uguale a zero, in modo tale da eliminare completamente l'azione derivativa del riferimento. Quando incorporato nel regolatore PID, questa legge di controllo è detta *derivativa sull'uscita*, dato che la parte derivativa del controllore vede in ingresso $y(t)$ anziché $e(t)$.

Il parametro β invece è generalmente regolato in modo tale che rispetti specificamente i requisiti di progetto. Nel caso in cui il tracciamento del riferimento non abbia elevata priorità, β può essere posto uguale a zero

17.4.2 Carica Integrale

Ipotizziamo di avere un attuatore, con in ingresso u e in uscita m , tale che

$$m(t) = \begin{cases} -u_M & , u(t) < -u_M \\ u(t) & , |u(t)| < u_M \\ u_M & , u(t) > u_M \end{cases}$$

Quando l'errore e conserva lo stesso segno per un periodo di tempo prolungato, l'uscita dell'integratore u cresce sempre di più in modulo. La situazione si presenta anche se m è limitata tra i valori $-u_M$ e u_M dalla saturazione dell'attuatore. Quando si verifica questa situazione, se l'errore cambia di segno bisogna aspettare che u si scarichi, ovvero che torni ad assumere valori in modulo minori di u_M , tale che $m(t) = u(t)$. La situazione ideale si avrebbe se la variabile di controllo u lasciasse immediatamente il valore di saturazione ($\pm u_M$) al cambio di segno dell'errore e . Questo fenomeno è chiamato *carica integrale*, o *integral windup* (Figura 17.6a) e può verificarsi con qualsiasi tipo di regolatore che presenti un'azione integrale.

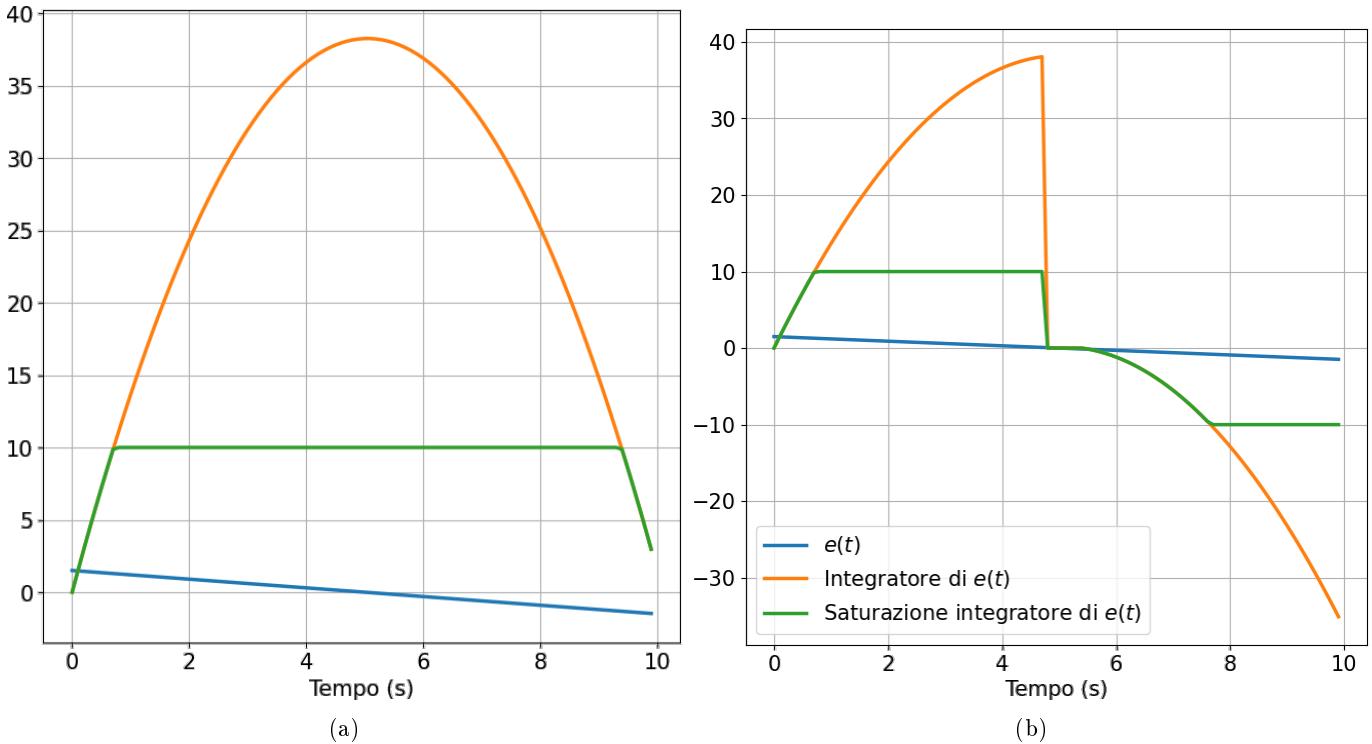


Figura 17.6: a) esempio di integral windup; b) esempio di soluzione all'integral windup.

17.5 Metodi di Calibrazione Automatica

Quando la funzione di trasferimento del sistema sotto controllo non è nota e considerando che spesso determinare un modello a partire dalle leggi che descrivono un fenomeno è un compito abbastanza complesso e impegnativo, possono tornare utili metodi automatici di taratura. Questo è possibile a partire da test sul processo atti a stimare un modello approssimato del sistema sotto controllo.

Di seguito assumeremo che il modello sotto controllo sia asintoticamente stabile e con guadagno positivo.

17.5.1 Metodo di Ziegler e Nichols in Anello Chiuso

Questo metodo permette di assegnare il margine di guadagno o di fase del sistema retroazionato. Ziegler e Nichols proposero delle regole per determinare i valori del guadagno proporzionale K_P , del tempo integrale T_I e del tempo derivativo T_D sulla base delle caratteristiche del transitorio di un dato processo.

Inizialmente si tiene conto della sola azione proporzionale, aumentando il valore di K_P finché il sistema non raggiunge il limite di stabilità. Questo avviene quando, a fronte di variazioni a scalino del segnale di riferimento w , l'uscita y del sistema oscilla in modo permanente con periodo \bar{T} . Il valore del guadagno proporzionale relativo a questo andamento è chiamato *guadagno critico* \bar{K}_P (Figura 17.7). A partire da \bar{K}_P e \bar{T} , i valori dei parametri sono tarati sulla base della Tabella 17.1

	K_P	T_I	T_D
P	$0.5\bar{K}_P$		
PI	$0.45\bar{K}_P$	$0.8\bar{T}$	
PID	$0.6\bar{K}_P$	$0.5\bar{T}$	$0.125\bar{T}$

Tabella 17.1: regole di taratura di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

Interpretazione di \bar{K}_P e \bar{T} Il guadagno critico \bar{K}_P coincide con il guadagno k'_m del sistema sotto controllo e descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$; ne deriva che è possibile utilizzare questo metodo nel solo caso in cui il margine di guadagno del processo è finito. Inoltre $\bar{T} = 2\pi/\omega'_\pi$, con ω'_π pulsazione corrispondente al punto di intersezione del diagramma polare di $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo. Possiamo concludere quindi che questa tecnica permette di individuare le caratteristiche del punto $G(j\omega'_\pi) = -1/k'_m$ della risposta in frequenza del sistema sotto controllo.

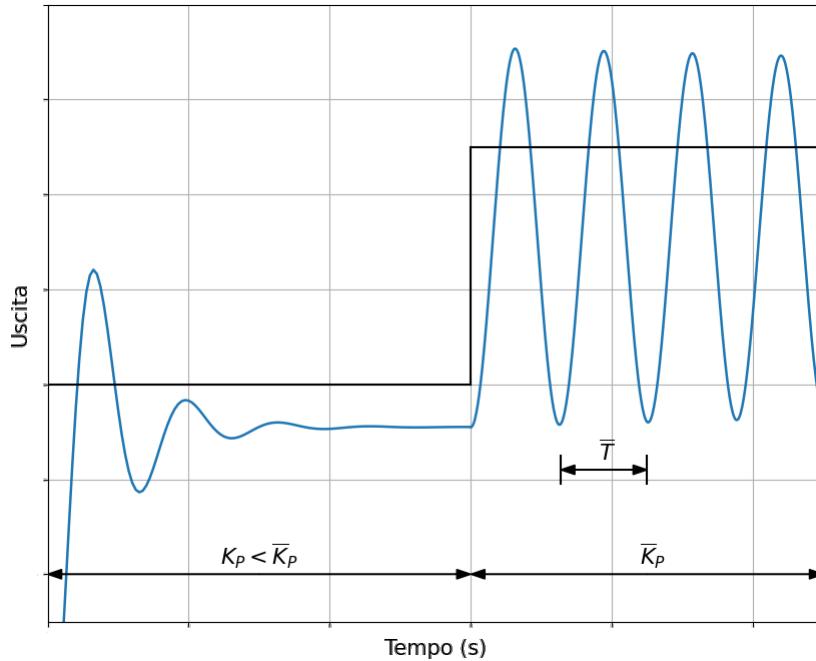


Figura 17.7: andamento di w e y durante la fase di taratura con il metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

CAPITOLO 18

TRACCE ESAME

18.1 Traccia 1A

Domanda 1

Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1 \ 0], \quad D = -1$$

- determinare la stabilità interna e analizzare i modi;
- determinare la raggiungibilità e l'osservabilità;
- determinare la BIBO stabilità (stabilità esterna).

Domanda 2

Data

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+10)}$$

- tracciare il luogo delle radici e discuterne della stabilità;
- verificare intervalli di stabilità con i criteri di Routh e Nyquist.

Domanda 3

Data

$$G(s) = \frac{s^2 + 20s + 87}{s^2 + 4s + 29}$$

- calcolare la risposta al gradino unitario;
- disegnare la risposta $y(t)$ per ingresso $u(t) = 10$;
- calcolare il valore a regime $y(\infty)$;
- stimare il tempo di assestamento T_a e il periodo dell'eventuale oscillazione.

Domanda 4

Discutere del criterio di Nyquist.

18.1.1 Traccia 1B

Domanda 1

Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = -1$$

- determinare la stabilità interna e analizzare i modi;
- determinare la raggiungibilità e l'osservabilità;
- determinare la BIBO stabilità (stabilità esterna).

Domanda 2

Data

$$G(s) = \frac{K}{(1+2s)(1+4s)}$$

- tracciare Nyquist;
- progettare una rete correttiva per avere margine di fase $\phi_M > 45^\circ$;

Domanda 3

Descrivere e discutere il teorema del valore finale.

Domanda 4

Data

$$G(s) = \frac{20(0.5s + 1)}{(10s^2 + 6s + 11)(3 + s)(0.04s + 2)}$$

- calcolare la risposta al gradino unitario;
- disegnare qualitativamente la risposta $y(t)$ al gradino $u(t) = 10$;
- calcolare il valore a regime $y(\infty)$;
- stimare il tempo di assestamento T_a e il periodo dell'eventuale oscillazione.

STRUMENTI DI CALCOLO

Mezzi utili per un'analisi e/o un riscontro diretto dei problemi di controllo che si stanno trattando sono la [Python Control System Library](#), un insieme di classi e funzioni python che implementano operazioni comuni per l'analisi e la progettazione di sistemi di controllo retroazionato, e il [MATLAB Control System Toolbox](#), che fornisce algoritmi e applicazioni per analizzare, progettare e regolare sistematicamente i sistemi di controllo lineari. È possibile specificare il sistema come funzione di trasferimento, modello stato-spazio, rappresentazione poli-zeri-guadagno o risposta in frequenza. Le app e le funzionalità, quali il grafico della risposta allo scalino e il diagramma di Bode, consentono di analizzare e visualizzare il comportamento del sistema nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza.

La Python Control System Library possiede un modulo di compatibilità con MATLAB che fornisce molte delle funzioni comuni corrispondenti ai comandi disponibili in MATLAB Control Systems Toolbox, rendendo così più agevole l'utilizzo di entrambi gli strumenti.

RISORSE ESTERNE

Risorse online utili per l'aiuto alla comprensione degli argomenti trattati. Si consiglia di utilizzare queste fonti come supplemento allo scopo di approfondire temi già affrontati e non come alternativa.

Playlist consigliate:

- **Control Systems in Practice** [[vai alla playlist](#)] tecniche di controllo comuni: programmazione del guadagno e feedforward; ritardi nei sistemi dinamici: da dove provengono, perché sono importanti e perché è più conveniente cercare di ridurli alla sorgente anziché gestirli con un controllore.
- **State Space** [[vai alla playlist](#)] tecniche di controllo basate sulla rappresentazione in forma di stato, modi intuitivi di pensare alle variabili di stato e vantaggi di questa rappresentazione. Analisi di un semplice controllore retroazionato chiamato pole placement, o full state feedback, che mostra come è possibile spostare gli autovalori del sistema in analisi.
- **Understanding Control Systems** [[vai alla playlist](#)] concetti di base dietro i sistemi di controllo a ciclo aperto e in retroazione attraverso esempi quotidiani e come ottimizzarli. Principi di base sul funzionamento alla base del controllo ad anello aperto e retroazionato. Influenza dei cambiamenti ambientali imprevisti (disturbi), rumore di misurazione o variazioni nel sistema e come affrontarli. Componenti di base di un sistema di controllo in retroazione (come "impianti", "attuatori" e "sensori"), e come interagiscono tra loro.

Per gli argomenti trattati si consigliano i canali [MATLAB \[YouTube\]](#) e [ControlLectures - Brian Douglas \[YouTube\]](#). Inoltre, per avere un cenno riguardo a quello che può significare progettare un sistema di controllo si consiglia la visione di [A real control system - how to start designing](#) di Brian Douglas.

Altri link utili:

- [Risposta Impulsiva - Convoluzione](#)

BIBLIOGRAFIA

- [1] Riccardo Costanzi Andrea Munafò. *Dispense messe a disposizione*. 2023.
- [2] Joaquin Gomez Marco Vita. *Appunti personali presi a lezione*. 2023.
- [3] N. Schiavoni P. Bolzern, R. Scattolini. *Fondamenti di controlli automatici*. McGraw-Hill Education, iv edition, 2015.