• ESAME 03-02-2017

1. Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \max(0, x_1)\max(0, x_2) \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri e la loro stabilità.
- Si disegni qualitativamente l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.

1)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \max(0,x_1) & -\max(0,x_1) \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

TR(0)
d (1)
NON DEF

TR < 0
DT > 0 A.S.

2)

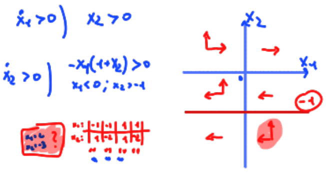
$V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$ $\quad \dot{V}(x) = x_1 x_2 + x_2(-x_1 - x_1 x_2)$

NON DEF SEGNO : $\cancel{x_1 x_2} - \cancel{x_1 x_2} - x_1 x_2^2$

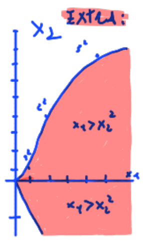
3)

$\dot{x}_1 > 0)$ $x_2 > 0$

$\dot{x}_2 > 0)$ $-x_1(1+x_2) > 0$
$x_1 < 0;\ x_2 > -1$



EXTRA:



4)

$x(k+1) = \alpha x$
$x(1-\alpha) = 0$
$\alpha \neq 1$ SENNO $\forall x$
$A = \alpha$ $\quad A_{(0,0)} = \alpha$

$V = x^2$
$\Delta V = V x_{k+1} - V x_k$
$= (\alpha x)^2 - x^2$
$= (\alpha^2 - 1) x^2$

$(\alpha^2 - 1) < 0$?
$\alpha < 1$
$-1 < x < 1$

EXTRA:

$x_1(x_1^2 + x_2^2) - x_2 = 0$
$x_1 - u = 0$
PER REALI : $\Delta \geq 0$
$x^2 u - x + u^3 = 0$

DP : $x_1^2 + x_2^2$
DN : $-x_1^2 - x_2^2$
SDN : $-x_1^2$
NON DEF : $x_1^2 - x_2^4$
LDP : $x_1^2 - x_1^4 + x_2^2$

NB:

$x_1(k+1) = x_1 - x_2$
$x_2(k+1) = x_1 x_2^2 - x_1$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2(1 - x_1 x_2) + x_1 = 0 \end{cases}$ $\quad x_1(k+1) = x_1$ $\quad$ PEQ

$$A \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x_2^2 - 1 & 2x_1 x_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

TR (1)
D (-1)

2. Dato il sistema non lineare scritto in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \left(2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \left(2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) x_2(t) + x_1(t) \end{cases} \tag{1}$$

(a) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità sia con il metodo indiretto basato sul linearizzato che determinando una candidata di Lyapunov opportuna.

(b) Determinare se esistono cicli limite ed eventualmente caratterizzarli e stabilirne le proprietà di stabilità considerando una opportuna candidata di Lyapunov.

INST AS NON CONC

$T > 0$ $\quad T < 0$ $\quad T = 0$

$\Delta > 0$ $\quad \Delta > 0$ $\quad \Delta > 0$

AS

TD $\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{vmatrix}$ $\quad T < 1$, $\Delta > 1$

$\alpha < -1 ; \alpha > 1$

$\Delta = \alpha^2 > 1 \rightarrow \alpha > \pm 1$

$|\alpha| > 1$ AS

$|\lambda| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} < 1$

$(2 - x_1^2 - x_2^2) \rightarrow c(x)$ ciclo limite $\quad (0,0)$ unico $\exists$ eq.

$A = \begin{vmatrix} c & -x_1x_2-1 \\ -x_1x_2+1 & c \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad T(A) = 4 \quad \lambda = 2 \pm i$

$d(A) = 5$ INSTAB

$V(x) = c(x)^2 = (-x_1^2 - x_2^2 + 2)^2$

$\dot{V}(x) = 2(-x_1^2 - x_2^2 + 2)\begin{bmatrix} -2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$

DI RAGGIO $r = 2$

$= -4\underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{>0}\underbrace{(2 - x_1^2 - x_2^2)^2}_{>0}$

1. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2x_2 + u \end{cases}$$

(a) Data $u = 0$ trovare gli equilibri del sistema e discutere la stabilità dell'origine.

(b) Determinare una retroazione dello stato $u(x)$ che renda il sistema asintoticamente stabile nell'origine.

(b) POLI IN $u=Kx$ LEGGE CONTROLLO ; ORIGINE PEQ , ERRORE VADA 0 ALMENO $e^{-t} \iff \lambda = -1 \to \lambda + 1 = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad R : \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

VERIFICO (A,B) ST $\lambda(\bar{A}) = -1$ AS

$\bar{A} = A + BK \to d(\bar{A} - \lambda I) \triangleq p_d = (\lambda+1)^2$

$\tilde{u} = [K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$

• ESAME 22-07-2019

1. Dato il sistema dinamico non lineare

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = e^{x_2(t)} - (1 - 3u(t)) \\
\dot{x}_2(t) = \sin(x_1(t) + x_2(t)) + 2u^2(t)
\end{cases}
$$

- si determino gli equilibri del sistema nel caso $u(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e se ne studi la stabilità.
- Per gli equilibri asintoticamente stabili si determini una candidata di Lyapunov.
- Per gli equilibri instabili si determini, se esiste, una retroazione dello stato che li renda asintoticamente stabili.

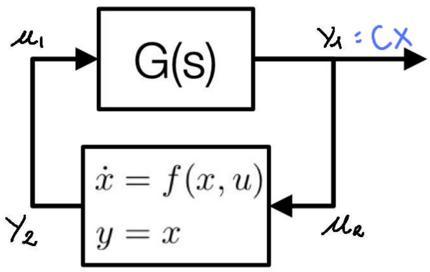
$$
\begin{cases} 1 = e^{x_2} \\ 0 = s(x_1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = k\pi \end{cases} \quad \left. \begin{vmatrix} 0 & e^{x_2} \\ c(x_1+x_2) & c(x_1+x_2) \end{vmatrix} \right|_{(k\pi, 0)} = \underset{k \text{ pari}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \; ; \; \underset{k \text{ dispari}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}
$$

INSTAB STAB

$$
\begin{cases} V = x^T P x \\ \dot{V} = -x^T Q x \\ -Q = A^T P + P A \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}
$$

· ESAME 23-07-2018

1. Si consideri il sistema tempo continuo costituito dallo schema a blocchi riportato in figura,



$\frac{s+4}{s^2+3s+4}$

dove $G(s) = \frac{s+4}{s^2+s+4}$ e $f(x,u) = -x - \sin^2 x + u$.

- Determinare il sistema in forma di stato.
- Determinare gli equilibri del sistema e studiarli con il metodo indiretto.
- Enunciare il Corollario di LaSalle–Krasowskii.

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad |4 \quad 1|$

$u_1 = y_2 = x_3$
$u_2 = y_1 = 4x_1 + x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2 + u_1 \\ \dot{x}_3 = -x_3 - s^2 x_3 + u_2 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(0,0)}$$

$2sc = 0$

2. Dato il sistema non lineare definito dall'equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + \alpha\dot{y}(t) + y^3(t) = u(t)$$

(a) Si determinino i punti di equilibrio per $u(t) = 0$ e se ne discuta la stabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (dove possibile con il metodo indiretto, altrimenti cercando una candidata di Lyapunov opportuna).

(b) Si commenti la stabilità nel caso di retroazione parziale dello stato $u(t) = \alpha\dot{y}(t)$

1) $\left[\begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{array}\right. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - \alpha x_2 + u \end{cases}$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -\alpha \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix}$ tr (α) NON
d (0) CONCLUDO

3) $V(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 \; ; \; \dot{V}(x) = x_1^3 x_2 + x_2(-x_1^3 - \alpha x_2) = \cancel{x_1^3 x_2} - \cancel{x_1^3 x_2} - \alpha x_2^2$

($\alpha > 0$ SDN MA NON CONCLUDO)

4) (0,0) UNICA TRAIETTORIA NEL "SS INV MAX" SODDISFA

$R = \{x \in \mathbb{R} \mid L_f V_x = 0\} = \{(0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ UNICO PUNTO (0,0)

xk la vedo varia solo x_2

$\begin{cases} x_2 = 0 \rightarrow \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \rightarrow 0 = -x_1^3 \end{cases}$ $\alpha > 0$ AS.

5) $u = \alpha\dot{y} = \alpha x_2 \rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 \end{array}$

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2 \sin x_1 + u \end{cases}$$

(a) Determinare i punti di equilibrio del sistema per $u = 0$ e discuterne la stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov.

(b) Determinare un ingresso u che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

1) $(0, \alpha)$ EQ

SIST TRASLATO AVENTE EQ ORIGINE

$z_1 = x_1 - \bar{x}_1 = x_1$

$z_2 = x_2 - \bar{x}_2 = x_2 - \alpha$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_1 = -z_1(z_2 + \alpha) \\ \dot{z}_2 = \dot{x}_2 = z_1^2 + (z_2 + \alpha) S(z_1) \end{cases}$$

$V = z_1^2 + z_2^2 = x_1^2 + (x_2 - \alpha)^2$

• ESAME 20-02-2019

1. Si consideri il seguente sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^4 + \alpha x_1 \cos x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 \end{cases}$$

   (a) Determinare gli equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Si studi la stabilità degli equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ con il metodo indiretto di Lyapunov.

   (c) Per l'equilibrio nell'origine si studi la stabilità con altri metodi.

$V = x_1 x_2$

NO DEF SEGNO
NO TOCCA ASSI

$\dot{V} = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2$

1) $(0,0) \in \delta U \cup U$
2) $\dot{V}, V > 0 \ \forall x \in U \cap B_r$
3) $V_{00} = 0 \ \forall x \in \delta U \cap B_r$