Determinazione dei punti di equilibrio

Sistema tempo-continuo	Sistema discreto
Porre a sistema le equazioni $\dot{x}_1 = 0$ $\dot{x}_2 = 0$	Porre a sistema le equazioni $x_1(k+1) = x_1(k)$ $x_2(k+1) = x_2(k)$

Data un'equazione differenziale in una variabile, scrivere il sistema non lineare corrispondente

Porre a sistema le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases}$$

Dato un punto, verificare se è di equilibrio

Sostituire le coordinate del punto nel sistema e verificare che ne risulta un'identità

Linearizzare il sistema in un intorno di un punto di equilibrio

Il sistema si linearizza in un intorno di x_0 ponendo
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

dove $A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_u} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_u} \end{bmatrix}_{x=x_0}$ e $B = \left[\dfrac{\partial f}{\partial u}\right]_{x=x_0}$

Studiare la stabilità col criterio ridotto di Lyapunov

Calcolo gli autovalori ($\det(\lambda I - A) = 0$) della matrice A

Sistema tempo-continuo	Sistema discreto
$Re(\lambda)<0 \Rightarrow$ asintot. stabile $Re(\lambda)>0 \Rightarrow$ instabile $Re(\lambda)=0 \Rightarrow$ non si può dire niente	$\lvert\lambda\rvert<1 \Rightarrow$ asintot. stabile $\lvert\lambda\rvert>1 \Rightarrow$ instabile $\lvert\lambda\rvert=1 \Rightarrow$ non si può dire niente

Studiare la stabilità con una funzione di Lyapunov

Verifico che $V(x_1,x_2)$ sia >0 in un intorno del punto di equilibrio

Sistema tempo-continuo	Sistema discreto
Trovo $\dot{V}(x_1,x_2) = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2$	Trovo $\Delta V(x(k)) =$ $= V(x(k+1)) - V(x(k))$

Se la funzione trovata è
$< 0 \Rightarrow$ stabilità asintotica

$\leq 0 \Rightarrow$ stabilità semplice
$> 0 \Rightarrow$ instabilità

Data la semplice stabilità di un punto studiarne quella asintotica con il criterio di La Salle-Krasowskii

1. Trovo l'insieme N, cioè l'insieme dei punti per cui si annulla $\dot{V}$ (o ΔV).
2. Verifico che N non contenga traiettorie perturbate, cioè sostituisco i punti di N nel sistema iniziale e verifico che quelli che soddisfano le equazioni differenziali non siano contenuti in N, a parte il punto di equilibrio stesso.

Dato un sistema lineare continuo, calcolare l'evoluzione libera e quella forzata

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$
con condizione iniziale x_0 e ingresso u_0

1. Trovo gli autovalori di A imponendo $\det(\lambda I-A)=0$
2. Trovo gli autovettori corrispondenti ad ogni autovalore risolvendo il sistema $(A-\lambda_i I)\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ dove v_1 ... v_n sono le componenti di ogni autovettore. Nel caso di molteplicità >1 devo trovare una catena di autovettori generalizzati di ordine pari alla molteplicità. Li trovo ponendo: $(A-\lambda_i I)v_2=v_1$ $(A-\lambda_i I)v_3=v_2$ e così via fino al numero necessario.
3. Calcolo la matrice T, le cui colonne sono formate dagli autovettori di A: $T = [v_1 \ ... \ v_n]$
4. Calcolo la matrice inversa di T: T^{-1}
5. Calcolo la forma canonica di Jordan della matrice A, $\overline{A} = T^{-1}AT$
6. Calcolo l'evoluzione libera $x(t) = e^{At}x_0 = T e^{\overline{A}t} T^{-1}x_0$
7. Calcolo l'evoluzione forzata $y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t Ce^{At}Bu(t-\tau)d\tau$

Calcolare la forma standard di raggiungibilità e il sottospazio raggiungibile

1. Trovo la matrice di raggiungibilità R^+
   $R^+ = [B \ \ AB \ \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$
   N.B.: Devo eliminare da R^+ le colonne linearmente dipendenti fino ad avere una matrice quadrata
   Se $\det(R^+) \neq 0 \Rightarrow$ il sistema è completamente raggiungibile
   Altrimenti:
2. Trovo il sottospazio raggiungibile X^+
   $X^+ = \mathrm{Im}(R^+) = \mathrm{span}\{$vettori linearmente indipendenti di $R^+\}$
3. Calcolo la matrice di trasformazione T, formata dai vettori di X^+, messi in colonna, più eventuali altri vettori linearmente indipendenti dai primi per avere una matrice quadrata di ordine n (= dim(A))
4. Applico la trasformazione T alle matrici A, B e C per ottenere la forma standard di raggiungibilità: $\overline{A} = T^{-1}AT$, $\overline{B} = T^{-1}B$, $\overline{C} = CT$
   $$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overline{C} = [C_1 \quad C_2]$$

Il sistema $S_1\{A_{11}, B_1, C_1\}$ è completamente raggiungibile
Il sistema $S_2\{A_{22}, C_2\}$ non è raggiungibile
N.B.: se ho più ingressi e mi interessa studiare la raggiungibilità del sistema con un solo ingresso, al posto di B uso b_i, l'ingresso che devo esaminare

Calcolare la forma standard di osservabilità e il sottospazio non osservabile

- Trovo la matrice di raggiungibilità O^-

$$O^- = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Se $\det(O^-) \neq 0 \Rightarrow$ il sistema è completamente osservabile
- Trovo il sottospazio non osservabile E^-
- $E^- = \ker(O^-)$, cioè lo span dei vettori che hanno trasformata nulla ($[O^-]v = 0$)
- Trovo la matrice quadrata P^{-1}, che è formata dai vettori linearmente indipendenti di O^-, presi a righe, più eventuali altri vettori linearmente indipendenti in modo che $\dim(P) = n$
- Applico la trasformazione P alle matrici A, B e C per ottenere la forma standard di osservabilità: $\overline{A} = P^{-1}AP$, $\overline{B} = P^{-1}B$, $\overline{C} = CP$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad \overline{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema $S_1\{A_{11}, B_1, C_1\}$ è completamente osservabile
Il sistema $S_2\{A_{22}, B_2\}$ non è osservabile

Fare una scomposizione canonica di Kalman del sistema

- Trovo il sottospazio raggiungibile X^+
- Trovo il sottospazio non osservabile E^-
- Determino le basi B_1, B_2, B_3, B_4 tenendo presente che
  $B_2 = X^+ \cap E^-$, $\quad B_1 \cup B_2 = X^+$, $\quad B_2 \cup B_4 = E^-$
  determino inoltre B_3 in modo che la trasformazione $T = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]$ non sia singolare e abbia dimensione n
- Applico la trasformazione T alle matrici A, B e C per ottenere la forma standard di osservabilità: $\overline{A} = T^{-1}AT$, $\overline{B} = T^{-1}B$, $\overline{C} = CT$
- $$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix}$$
- Il sistema $S_1\{A_{11}, B_1, C_1\}$ è completamente osservabile e raggiungibile
- Il sistema $S_2\{A_{22}, B_2, 0\}$ non è osservabile, ma è raggiungibile
- Il sistema $S_3\{A_{33}, 0, C_3\}$ è completamente osservabile, ma non raggiungibile
- Il sistema $S_4\{A_{44}, 0, 0\}$ non è osservabile né raggiungibile

Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato che posizioni in x_0 il maggior numero di poli del sistema retroazionato

1. Verifico se è possibile fare la retroazione, cioè se il sistema di partenza è completamente raggiungibile, o se comunque la parte non raggiungibile ha tutti gli autovalori stabili ($Re(\lambda)<0$ nel caso continuo, $|\lambda|<1$ nel caso discreto)
2. Determino il polinomio caratteristico della parte raggiungibile
   $P(\lambda) = \lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_1\lambda+\alpha_0$
3. Determino il polinomio desiderato
   $D(\lambda) =\lambda^n+d_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+d_1\lambda+d_0$
4. $K_c = [\alpha_0-d_0 \quad \alpha_1-d_1 \ldots \alpha_{n-1}-d_{n-1}]$
5. Calcolo R^+ della sola parte raggiungibile
6. Calcolo $(R_c^+)^{-1}$
   $$\left(R_c^+\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \iddots & \alpha_{n-1} & 1 & 0 \\ \vdots & \alpha_{n-1} & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
7. $K =K_c[R^+(R_c^+)^{-1}]^{-1}$
8. N.B. Questo K va bene se il sistema era raggiungibile, altrimenti quello che ho trovato finora è $\overline{K}$. Per trovare K uso la formula
   $K = \left[\overline{K} \quad \alpha\right]T^{-1}$ con α parametro arbitrario

Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato che posizioni in x_0 il maggior numero di poli del sistema retroazionato facendo uso del lemma di Heymann

1. Verifico se è possibile fare la retroazione, cioè se il sistema di partenza è completamente raggiungibile, o se comunque la parte non raggiungibile ha tutti gli autovalori stabili ($Re(\lambda)<0$ nel caso continuo, $|\lambda|<1$ nel caso discreto)
2. Calcolo la matrice $Q =[b_1 \; Ab_1 \; A^{\nu 1}b_1 \,|\ldots|b_n \; A^{\nu n}b_n]$
   mi fermo non appena trovo un vettore linearmente dipendente
3. Calcolo la matrice $S =[0\ldots e_2|\ldots|0\ldots e_k|\ldots|0\ldots 0]$
   e_2 corrisponde alla ν_1 colonna
   e_k corrisponde alla $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{k-1})$ colonna
4. Calcolo la matrice $M_1 =SQ^{-1}$
5. Trovo $A+BM_1$ e il suo $P(\lambda)$
   $P(\lambda) = \lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_1\lambda+\alpha_0$
6. Da punto 3 a punto 6 del caso precedente
7. $K_1 =K_c[R^+(R_c^+)^{-1}]^{-1}$
8. $K = M_1 + \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni L di un osservatore asintotico di ordine pieno che posizioni in un punto gli autovalori dell'osservatore

1. Verifico se è possibile fare l'osservatore, cioè se il sistema di partenza è completamente osservabile, o se comunque la parte non osservabile ha tutti gli autovalori stabili ($Re(\lambda)<0$ nel caso continuo, $|\lambda|<1$ nel caso discreto)

2. Prendo la parte osservabile del sistema
3. L = $-P(A)(O^{-})^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ dove P(A) è il P(λ) desiderato con la matrice A al posto di λ
4. N.B. Questo L va bene se il sistema era osservabile, altrimenti quello che ho trovato finora è $\overline{L}$. Per trovare L uso la formula
   L =$T\begin{bmatrix}\overline{L}\\\beta\end{bmatrix}$ se ho usato la forma standard di osservabilità
   L = $T\begin{bmatrix}l_1\\\beta\\l_2\end{bmatrix}$ se ho usato la scomposizione di Kalman, dove l_1, l_2 sono le componenti di L trovato al punto 3
5. La formula dello stimatore asintotico dello stato è
   $\dot{x}$(t) =(A+LC)x(t) - Ly(t) + Bu(t)

Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni L di un osservatore asintotico di ordine ridotto che posizioni in un punto gli autovalori dell'osservatore

1. Verifico se è possibile fare l'osservatore, cioè se il sistema di partenza è completamente osservabile, o se comunque la parte non osservabile ha tutti gli autovalori stabili (Re(λ)<0 nel caso continuo, |λ|<1 nel caso discreto)
2. Trovo la matrice P^{-1}
   P^{-1} =$\begin{bmatrix}V\\C\end{bmatrix}$ dove V sono vettori linearmente indipendenti che rendono la matrice P non singolare e di ordine n = dim(A)
3. Applico la trasformazione P alle matrici A, B e C
4. Calcolo la matrice $A_{11}+LA_{21}$ e impongo che abbia gli autovalori desiderati, in questo modo determino L
5. La formula dello stimatore asintotico dello stato è
   $\hat{x}(t) = P\begin{bmatrix}v(t)-Ly(t)\\y(t)\end{bmatrix}$
   $\dot{v}$(t)= $[A_{11}+LA_{21}]v(t)+[A_{12}+LA_{22}-A_{11}L-LA_{21}L]y(t)+[B_1+LB_2]u(t)$

Calcolare la funzione di trasferimento del sistema lineare

G(s) =$C(sI-A)^{-1}B$
N.B. La funzione di trasferimento del sistema è funzione della sola parte osservabile del sistema stesso

Verificare se il sistema è stabilizzabile mediante una retroazione dell'uscita

u(t) = $\overline{K}$ y(t) = $\overline{K}$ Cx(t)
La matrice del sistema retroazionato è A+B$\overline{K}$C.
Calcolo il P(λ) di tale matrice e vedo se tutti gli autovalori sono stabili

Determinare la sequenza di ingresso u che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale x_0 allo stato finale x_f

Calcolo in quanti passi lo stato $x_f - A^k x_0$ è raggiungibile, cioè $\in$ Im(R^+)
Per k = 1 deve $\in$ Im(B), per k = 2 deve $\in$ Im(B AB) e così via
Se arrivo a K = n mi fermo perché il problema non ha soluzione
Se det(R^+) $\neq$ 0 determino la successione di u nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = [R^+]^{-1}(x_f - A^k x_0)$$ dove a K sostituisco quello che ho trovato

Se det(R^+) = 0 risolvo il seguente sistema:

$$\left[x_f - A^k x_0\right] = \left[V\right] \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$ dove V sono i vettori linearmente indipendenti di R^+, presi a righe.

Se trovo una soluzione particolare di questo sistema x_p, la soluzione generale è data da x_p + una soluzione del sistema omogeneo associato

$$\left[0\right] = \left[V\right] \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Calcolare l'insieme degli stati iniziali x_0 = x(0) compatibili con l'evoluzione libera data da y(0) =…, y(1) = …, y(2) = …

Se det(R^+) $\neq$ 0 determino x_0 nel seguente modo:

$$x_0 = \left[O^-\right]^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix}$$

Se det(O^-) = 0 risolvo il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = [V]x_0$$ dove V sono i vettori linearmente indipendenti di O^-, presi a righe

Se trovo una soluzione particolare di questo sistema x_p, la soluzione generale è data da x_p + E^-

Scrivere le matrici F, G e H che si ottengono per campionamento con tempo T

F = e^{AT} G = $\int_0^T e^{A\sigma} B d\sigma$ H = C

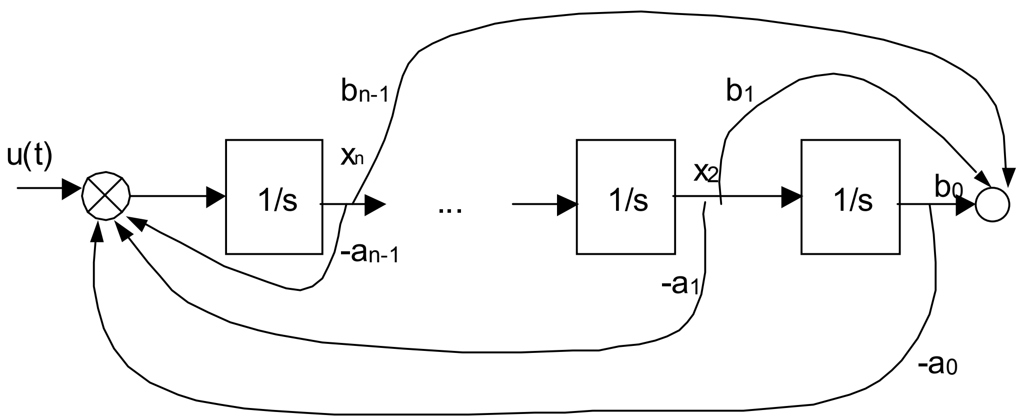
Scrivere una realizzazione nello spazio degli stati della seguente funzione di trasferimento: G(s) = …

SISTEMA SISO

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

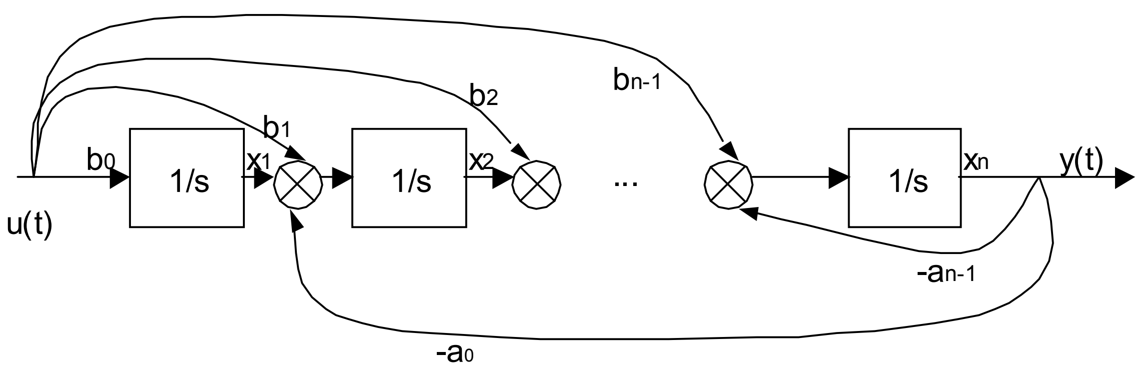
Una realizzazione RAGGIUNGIBILE della funzione di trasferimento è

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$



Una realizzazione OSSERVABILE della funzione di trasferimento è

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \ldots & \ddots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$



SISTEMA MIMO (p$\times$m)

Per ogni singola funzione di trasferimento metto in evidenza numeratore N e denominatore D.

$$G(s) = [G_{ij}(s)] = \left[\frac{N_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}\right]$$

$d(s)$ = minimo comune multiplo di tutti i denominatori

$d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots a_1 s + a_0$

$$G(s) = \frac{1}{d(s)}[B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \ldots + B_{n-1}s^{n-1}]$$

Una realizzazione RAGGIUNGIBILE della funzione di trasferimento è

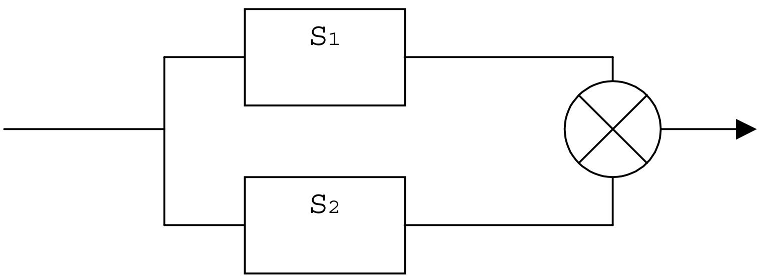
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \cdots & \ldots \\ 0_m & 0_m & \ddots & \ddots & 0_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & I_m \\ -a_0 I_m & -a_1 I_m & \ldots & \ldots & -a_{n-1} I_m \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \ldots & B_{n-1} \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Una realizzazione OSSERVABILE della funzione di trasferimento è

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0_p & 0_p & 0_p & -a_0 I_p \\ I_p & 0_p & 0_p & -a_1 I_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_p & 0_p & I_p & -a_{n-1} I_p \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \ldots \\ B_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0_p & \ldots & 0_p & I_p \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Fare una realizzazione del seguente sistema

PARALLELO DI DUE SISTEMI

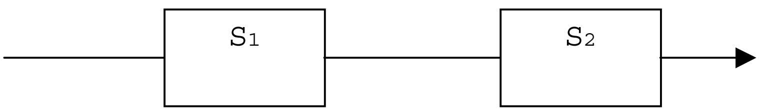


Faccio una realizzazione di ciascun sistema singolarmente: $S_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $S_2\{A_2, B_2, C_2\}$, la realizzazione del sistema totale è

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

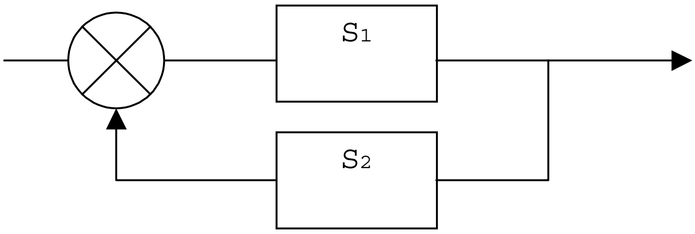
SERIE DI DUE SISTEMI



Faccio una realizzazione di ciascun sistema singolarmente: $S_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $S_2\{A_2, B_2, C_2\}$, la realizzazione del sistema totale è

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

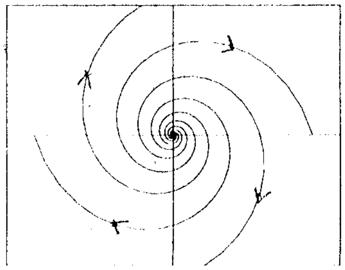
SISTEMI IN RETROAZIONE



Faccio una realizzazione di ciascun sistema singolarmente: $S_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $S_2\{A_2, B_2, C_2\}$, la realizzazione del sistema totale è

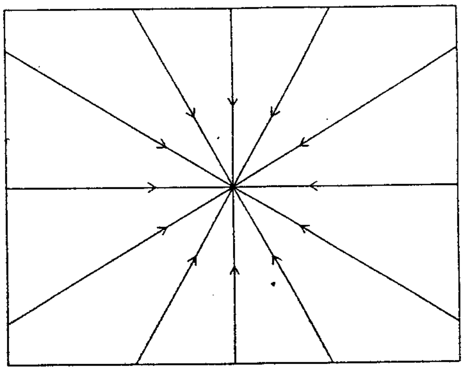
$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

ANDAMENTO DELLE TRAIETTORIE

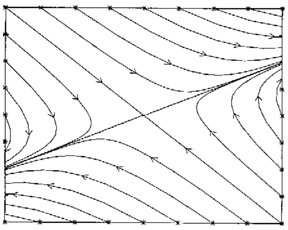


2 autovalori complessi coniugati
Se $\sigma>0$ le frecce vanno verso l'infinito, se $\sigma<0$ verso l'origine

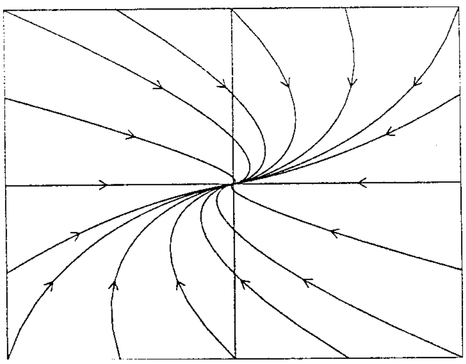
N.B. Se $\sigma = 0$ ($Re(\lambda)=0$) le traiettorie sono cerchi concentrici percorsi in senso antiorario



2 autovalori reali coincidenti a cui sono associati due autovettori linearmente indipendenti



2 autovalori reali distinti di segno opposto



2 autovalori coincidenti a cui corrisponde 1 solo autovettore reale

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Prova in itinere 23-12-2020

Numero di matricola						
	$-$	$-$	α	β	γ	δ

1. Dato il sistema lineare tempo continuo caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare i modi del sistema;

   (b) Determinare la struttura della matrice in forma di Jordan associata ad A e la corrispondente matrice di trasformazione;

   (c) Determinare le condizioni iniziali $x(0)$ tale per cui l'evoluzione libera del sistema evolve in un piano;

   (d) Date le matrici di ingresso e uscita $B = (1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0)^T$ e $C = (1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1)$ determinare la matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma canonica di Kalman.

2. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -(\delta+1) & 0 \\ \delta+1 & -2(\delta+1) & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare se e da quali condizioni iniziali è possibile raggiungere lo stato $x(k) = (0,\, 0,\, \gamma+1)^T$.

   (b) Determinare se e da quali condizioni iniziali è possibile raggiungere lo stato $x(k) = (0,\, 0,\, 0)^T$.

   (c) Calcolare una base dello spazio raggiungibile e calcolarne gli autovalori interni;

   (d) Determinare se è possibile riconoscere se il sistema è partito dalle condizioni iniziali $x(0) = (\alpha,\, \beta,\, \gamma+1)^T$ e $\tilde{x}(0) = (\alpha,\, \beta,\, \delta+10)^T$ conoscendo gli ingressi e le uscite del sistema.

   (e) Calcolare una base dello spazio non osservabile e calcolarne gli autovalori interni;

   (f) Determinare la forma della funzione di trasferimento del sistema.

Soluzione

1. Data

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) \end{pmatrix}$$

(a) Si nota che la matrice ha una struttura tirangolare superiore a blocchi con blocco di dimensione 3 e blocco di dimensione 2. Il blocco di dimensione 2 è il blocco di Jordan di dimensione 2 associato all'autovalore $-(\gamma+1)$. Il primo blocco invece è a sua volta triangolare inferiore a blocchi e si vede che ha autovalore in 0 con molteplicità algebrica pari a 3. La molteplicità geometrica si vede dalla struttura triangolare della matrice che consente di vedere come il nullo della matrice stessa abbia dimensione pari a 1. Ci sono quindi due blocchi di Jordan associati alla matrice, uno di dimensione 3 associato all'autovalore nullo e uno di dimensione 2 associato all'autovalore $-(\gamma+1)$. I modi pertanto sono 1, t, t^2, $e^{-(\gamma+1)t}$, $te^{-(\gamma+1)t}$.

(b) Dal punto precedente ci sono due blocchi di Jordan associati alla matrice, uno di dimensione 3 associato all'autovalore nullo e uno di dimensione 2 associato all'autovalore $-(\gamma+1)$. Per la struttura della matrice è sufficiente prima portare il blocco di dimensione 3 in forma di Jordan. Infatti lavorando sul sottosistema è poi possibile completare i vettori ottenuti con due componenti nulle per poterli usare nella matrice di trasformazione. Si consideri quindi il sottosistema:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il nullo ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $e_2 \in \mathbb{R}^3$ (autovettore dell'autovalore nullo). Per calcolare gli autovettori generalizzati di ordine è necessario calcolare

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'autospazio generalizzato di ordine 2 ha dimensione 2 ed è generato dai vettori e_1, $e_2 \in \mathbb{R}^3$. Come autovettore generalizzato di ordine 3 si può quindi scegliere il vettore $e_3 \in \mathbb{R}^3$ da cui seguono nella catena $e_1 - e_2 = A_1 e_3$ e $e_2 = A_1(e_1 - e_2)$. La Matrice del cambio di base del sistema di partenza ha quindi come prime tre colonne i vettori $(0, 1, 0, 0, 0)^T$, $(1, -1, 0, 0, 0)^T$ e $(0, 0, 1, 0, 0)^T$. Per l'autovalore $-(\gamma+1)$ invece è necessario lavorare con l'intera matrice

$$A + (\gamma+1)I = \begin{pmatrix} (\gamma+1) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (\gamma+1) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma+1) & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui nullo è generato dal vettore $e_4 \in \mathbb{R}^5$. L'unico conto da fare è quello di $(A + (\gamma+1)I)^2$ che risulta pari a

$$(A + (\gamma+1)I)^2 = \begin{pmatrix} (\gamma+1)^2 & 0 & 2(\gamma+1) & 0 & 2 \\ 2(\gamma+1) & (\gamma+1)^2 & 1 - 2(\gamma+1) & 0 & -2 \\ 0 & 0 & (\gamma+1)^2 & 0 & 2(\gamma+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'autovettore generalizzato di ordine 2 deve quindi annullare il prodotto con la terza riga della matrice $(A+(\gamma+1)I)^2$ da cui segue che presa pari a 2 la sua terza componente deve avere quinta componente pari a $-(\gamma+1)$, la quarta componente può essere scelta pari a 0. Si consideri quindi il vettore della forma $v = (v_1,\, v_2,\, 2,\, 0,\, -(\gamma+1))^T$ e si vanno ad annullare i prodotti con le altre righe di $(A+(\gamma+1)I)^2$ da cui segue $(\gamma+1)^2 v_1 + 4(\gamma+1) - 2(\gamma+1) = 0$ e $2(\gamma+1)v_1 + (\gamma+1)^2 v_2 + 2 - 4(\gamma+1) + 4(\gamma+1) = 0$. Dalla prima segue che $v_1 = -\frac{2}{\gamma+1}$ mentre $v_2 = \frac{2+2(\gamma+1)}{(\gamma+1)^2}$. L'autovettore generalizzato di ordine 2 risulta quindi $v = (-\frac{2}{\gamma+1},\, \frac{2+2(\gamma+1)}{(\gamma+1)^2},\, 2,\, 0,\, -(\gamma+1))^T$ da cui segue che l'autovettore generalizzato di ordine 1 risulta: $(A+(\gamma+1)I)v = -(\gamma+1)e_4 \in \mathbb{R}^5$. A questo punto si hanno tutti i vettori della matrice del cambio di base.

(c) Per evolvere in un piano le condizioni iniziali devono essere gli autovettori generalizzati di ordine 2 calcolati al punto precedente.

(d) Date le matrici di ingresso e uscita $B = (1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0)^T$ e $C = (1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1)$ si ottengono le matrici di raggiungibilità e di osservabilità seguenti:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -(\gamma+1) & (\gamma+1)^2 & -(\gamma+1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\; O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(\gamma+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+(\gamma+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(2+(\gamma+1)^2)(\gamma+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2+(\gamma+1)^2)(\gamma+1)^2 \end{pmatrix}$$

La matrice R ha rango 3 e una base dello spazio di raggiungibilità è data dai vettori

$$T_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di osservabilità ha rango 3 e il nullo è generato dai vettori

$$T_{\bar{O}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base dello spazio intersezione è data quindi da

$$T_{R\bar{O}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per completare la base dello spazio raggiungibile abbiamo quindi la matrice

$$T_{RO} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre non esiste sottospazio non raggiungibile non osservabile. A completamento della base di tutto lo spazio si ottiene la matrice

$$T_{\bar{R}O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice del cambio di base è data dalla matrice $T = (T_{RO},\, T_{R\bar{O}},\, T_{\bar{R}O})$.

2. Sistema dinamico lineare tempo discreto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -(\delta+1) & 0 \\ \delta+1 & -2(\delta+1) & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) La domanda richiede se è possibile raggiungere lo stato $x(k) = (0, 0, \gamma + 1)^T$ anche da condizioni iniziali non nulle. Lo spazio di raggiungibilità è generato dal solo vettore $\mathcal{R} = (0, 0, 1)^T$ e quindi affinché $x(k) - A^k x(0)$ sia nello spazio raggiungilibe è necessario che lo stato iniziale sia della forma $x(0) = (0, 0, a)^T$, questo si vede dalla struttura triangolare di A che viene mantenuta nelle sue potenze, il primo blocco infatti non è nullo e quindi devono esserlo necessariamente le prime due componenti dello stato iniziale.

(b) Si può valutare se il sistema è controllabile a zero. Essendo A triangolare si nota subito come le varie potenze di A generano una immagine che ha come base vettori con le prime due componenti non nulle e quini non appartenenti allo spazio di raggiungibilità. Il sistema quindi non è controllabile a zero. Per i punti da cui si può raggiungere l'origine (che non saranno quindi tutti quelli dello spazio) vale la risposta del punto precedente.

(c) Lo spazio di raggiungibilità è generato dal solo vettore $\mathcal{R} = (0, 0, 1)^T$. L'autovalore -2 (lo si trova dalla struttura triangolare inferiore a blocchi di A) è per il lemma PBH raggiungibile pertanto è l'unico autovalore interno allo spazio di raggiungibilità. La cosa la si nota anche perchè l'ingresso agisce direttamente sulla terza variabile che però non influenza le prime due che pertanto fanno parte del sottosistema non raggiungibile.

(d) Si richiede se $x(0)$ e $\tilde{x}(0)$ sono indistinguibili o equivalentemente se $x(0) - \tilde{x}(0) \in Ker(O)$. La matrice di osservabilità risulta avere ultima colonna nulla e quindi lo spazio non osservabile ha dimensione uno ed è generato dal vettore $e_3 \in \mathbb{R}$. Essendo $x(0) - \tilde{x}(0 = (0, 0, \gamma - \delta - 9)^T$ si ha che sono indistinguibili.

(e) Lo spazio non osservabile ha dimensione uno ed è generato dal vettore $e_3 \in \mathbb{R}$ e il sistema risulta in forma standard di osservabilità quindi l'autovalore -2 è interno allo spazio di inosservabilità.

(f) Gli autovalori sono tutti non raggiungibili o non osservabili quindi la funzione di trasferimento è nulla avendo anche $D = 0$.

Teoria dei Sistemi - 9 cfu - L.M. in Ingegneria dell'Automazione
Compito del 26/02/2013

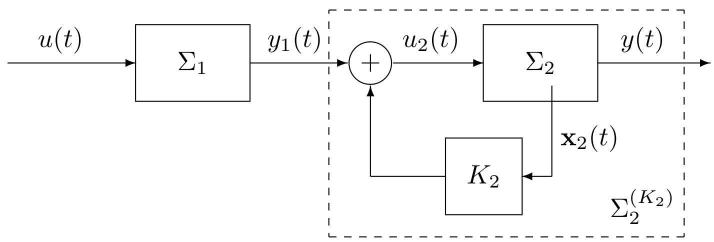
Esercizio 1 Si considerino le funzioni di trasferimento (a tempo discreto)

$$w_1(z) = \frac{z^2}{z^3+1}, \quad w_2(z) = \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2+z+1}. \tag{1.1}$$

1_i Si costruiscano una realizzazione minima $\Sigma_1 = (F_1, \mathbf{g}_1, H_1)$ di $w_1(z)$ ed una minima $\Sigma_2 = (F_2, \mathbf{g}_2, H_2)$ di $w_2(z)$.

1_{ii} Si stabilisca se il sistema serie di Σ_1 seguito da Σ_2 è raggiungibile e/o osservabile e se lo stato zero del sistema serie è semplicemente stabile.

1_{iii} Si costruisca per il sistema Σ_2 una retroazione K_2 dallo stato in modo che ogni evoluzione libera dello stato di Σ_2 si annulli in un numero finito di passi. Si determini se il sistema complessivo (cfr. figura) è semplicemente stabile, raggiungibile e/o osservabile.



1_{iv} Si determinino tutti gli stati iniziali del sistema serie, reazionato come al punto 1_{iii}, che danno luogo a uscite libere $y(t)$ di durata finita.

1_i*) Ricorriamo a due realizzazioni, in forma canonica di osservazione la prima e di controllo la seconda:*

$$\Sigma_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [0 \quad 0 \quad 1] \right), \quad \Sigma_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \quad 1 \quad 1] \right)$$

1_{ii}*) Il sistema serie*
- è raggiungibile, dato che i polinomi $H_1 \mathrm{adj}(zI - F_1)\mathbf{g}_1 = z^2$ *e* $\det(zI - F_2) = z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(z^2+1)$ *sono coprimi,*
- è osservabile, perché sono coprimi i polinomi $H_2 \mathrm{adj}(zI - F_2)\mathbf{g}_2 = z^2 + z + 1$ *e* $\det(zI - F_1) = z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$
- è realizzazione minima della funzione trasferimento prodotto

$$\frac{z^2(z^2+z+1)}{(z+1)^2(z^2-z+1)(z^2+1)},$$

pertanto la sua matrice di transizione di stato è ciclica e nella sua forma di Jordan l'autovalore $\lambda = -1$ *compare in un miniblocco di dimensione 2. Quindi l'origine non è punto di equilibrio semplicemente stabile.*

1_{iii}*)* K_2 *è un controllore dead-beat per il sistema* Σ_2*, quindi deve essere* $K_2 = [1 \quad 1 \quad 1]$.
Il sistema risultante
- è osservabile , poiché sono rimasti immutati rispetto alla situazione precedente i polinomi $H_2 \mathrm{adj}(zI - F_2)\mathbf{g}_2 = z^2 + z + 1$ *e* $\det(zI - F_1) = z^3 + 1$,

non è raggiungibile perché non sono coprimi $H_1 \mathrm{adj}(zI - F_1)\mathbf{g}_1 = z^2$ *e* $\det(zI - F_2 - \mathbf{g}_2 K_2) = z^3$.
- è semplicemente stabile perché gli autovalori della matrice di transizione di stato sono $\lambda_1 = 0$ *con molteplicità algebrica 3, e* $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = e^{j\frac{\pi}{3}}, \lambda_4 = e^{-j\frac{\pi}{3}}$ *con molteplicità algebrica 1.*

1_{iv}*) Il sistema* $\Sigma_2^{(K_2)}$ *ha memoria finita, quindi le sue uscite libere hanno tutte durata finita. Ne consegue che nel sistema complessivo hanno durata finita tutte le uscite libere indotte da stati iniziali* $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$, *qualunque sia lo stato* $\mathbf{x}_2$ *del sistema* $\Sigma_2^{(K_2)}$.
Se lo stato iniziale di Σ_1 *non è nullo, l'uscita libera del sistema complessivo è somma*
- dell'uscita libera di $\Sigma_2^{(K_2)}$ *indotta dallo stato iniziale* $\mathbf{x}_2(0)$*, che ha durata finita;*
- dell'uscita forzata di $\Sigma_2^{(K_2)}$*, indotta dall'ingresso* $U_2(z) = H_1(zI - F_1)^{-1} z \mathbf{x}_1(0)$ *che rappresenta*[1] *l'uscita libera del sistema* Σ_1 *indotta dallo stato iniziale* $\mathbf{x}_1(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$*:*

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z^2+z+1}{z^3} H_1 (zI - F_1)^{-1} z \mathbf{x}_1(0) \\ &= \frac{z^2+z+1}{z^2} H_1 \frac{\mathrm{adj}(zI - F_1)}{\det(zI - F_1)} \mathbf{x}_1(0) = \frac{z^2+z+1}{z^2} \frac{[\,1 \quad z \quad z^2\,]}{z^3+1} \mathbf{x}_1(0) \\ &= \frac{(z^2+z+1)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)}{z^2(z+1)(z^2-z+1)} \end{aligned}$$

Se $\mathbf{x}_1(0) \neq 0$*, è evidente che* $Y(z)$ *rappresenta un segnale periodico di durata infinita. Quindi hanno durata finita soltanto le uscite libere che si ottengono scegliendo* $\mathbf{x}_1(0) = 0$.

[1] L'ultima riga di $\mathrm{adj}(zI - F_1)$ coincide con $H_1 \mathrm{adj}(zI - F_1)$ e vale $[\,1 \quad z \quad z^2\,]$

Esercizio 2 Si consideri il sistema discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t)$$

Si determinino

2_i il sottospazio raggiungibile in un passo, in due passi e in tre passi;

2_{ii} il sottospazio controllabile in un passo, in due passi e in tre passi;

2_{iii} la forma standard di raggiungibilità.

2_i $X_1^R = \operatorname{Im} G = \operatorname{span}\Big\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}$.

$X_2^R = \operatorname{Im}\,[\,G \quad FG\,] = \operatorname{span}\Big\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big\} = \operatorname{span}\Big\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}$.

X_2^R coincide con X_3^R e quindi con X^R.

2_{ii} *Il sottospazio controllabile in un passo*

$$\begin{aligned} X_1^C &= \Big\{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in X_1^R\Big\} = \Big\{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \operatorname{span}\Big\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}\Big\} = \Big\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\Big\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}\Big\} \\ &= \Big\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}, \alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \Big\} \end{aligned}$$

ha dimensione 3. Il sottospazio controllabile in due passi è

$$\begin{aligned} X_2^C = \Big\{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in X_2^R\Big\} &= \Big\{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \operatorname{span}\Big\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}\Big\} \\ &= \Big\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\Big\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}\Big\} = \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

2_{iii} *Per calcolare la forma standard di raggiungibilità, si considera una matrice di cambiamento di base T le cui prime tre colonne sono una base per lo spazio raggiungibile*

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T^{-1}$$

ottenendo

$$T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; T^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema discreto

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t)\\ y(t) &= [1 \quad 0]\,\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{3.2}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(u^2(t) + 4y^2(t)\right), \tag{3.3}$$

(i) Il controllo ottimo $u_{\rm ot}(\cdot)$ che minimizza l'indice quadratico è stabilizzante?

(ii) Si calcolino

- la soluzione ottimizzante M_∞ dell'equazione algebrica di Riccati,
- la corrispondente matrice di reatroazione K_∞,

e si verifichi sullo spettro di $F + \mathbf{g}K_\infty$ quanto affermato al punto precedente;

(iii) per quali stati iniziali $\mathbf{x}_0$ il valore minimo dell'indice $\min_u J(u, \mathbf{x}_0)$ ha valore unitario? Quali sono gli stati $\mathbf{x}_0$ di norma euclidea minima per cui $\min_u J(u, \mathbf{x}_0) = 1$? Quanto vale questa norma?

Si noti che nel problema di controllo ottimo in considerazione l'indice ha matrici $R = 1$ *e* $Q = C^TC = \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}[2 \quad 0] = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.
La coppia $(F, \mathbf{g})$ *è raggiungibile, quindi stabilizzabile, quindi il controllo ottimo esiste. La coppia* (F, C) *è in forma standard di osservabilità (quindi non è osservabile), ma il sottosistema non osservabile ha autovalore* $\frac{1}{2}$, *quindi la coppia* (F, C) *è rivelabile.*

3_i *La risposta è positiva, dato che* (F, C) *è rivelabile.*

3_{ii} *L'equazione alle differenze di Riccati*

$$\begin{aligned}M(-t-1) &= Q + F^TM(-t)F - F^TM(-t)\mathbf{g}(R + \mathbf{g}^TM(-t)\mathbf{g})^{-1}\mathbf{g}M(-t)F\\ &= \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}M(-t)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\\ &- \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}M(-t)\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}(1 + [-1 \quad 1]\,M(-t)\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix})^{-1}[-1 \quad 1]\,M(-t)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

se inizializzata da $M(0) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, *ha per ogni* $t > 0$ *una soluzione con struttura*

$$M(-t) = \begin{bmatrix}m_{11}(-t) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

quindi anche $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M(-t)$ *ha diversa da zero solo la componente di posizione* $(1, 1)$. *Essendo* M_∞ *una soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati*

$$M = Q + F^TMF - F^TM\mathbf{g}(R + \mathbf{g}^TM\mathbf{g})^{-1}\mathbf{g}MF,$$

ponendo $M = M_\infty = \begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *si perviene all'equazione*

$$\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}(1+[\,-1 \quad 1\,]\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix})^{-1}[\,-1 \quad 1\,]\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

da cui si ricava

$$m = 4 + m - \frac{m^2}{1+m}$$

e infine $m^2 - 4m - 4 = 0$*, che ha per soluzioni* $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$*. La condizione che* M_∞ *sia semidefinita positiva impone di scegliere la soluzione positiva, pervenendo a*

$$M_\infty = \begin{bmatrix}2+2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

La matrice K_∞ *è allora*

$$\begin{aligned}K_\infty &= -(R+\mathbf{g}^T M_\infty \mathbf{g})^{-1}\mathbf{g}^T M_\infty F = -(1+2+2\sqrt{2})^{-1}[\,-1 \quad 1\,]\begin{bmatrix}2+2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\\ &= -\frac{1}{3+2\sqrt{2}}[\,-2-2\sqrt{2} \quad 0\,] = \begin{bmatrix}\frac{2+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix} = [\,-2+2\sqrt{2} \quad 0\,] \end{aligned} \tag{3.4}$$

da cui

$$F + \mathbf{g}K_\infty = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}[\,-2+2\sqrt{2} \quad 0\,] = \begin{bmatrix}3-2\sqrt{2} & 0\\ -1+2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

che ha entrambi gli autovalori a modulo minore di 1.

3_{iii} *Il valore minimo dell'indice vale 1 in corrispondenza agli stati iniziali* $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ *che soddisfano la condizione*

$$1 = [\,\alpha \quad \beta\,]\begin{bmatrix}2+2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \alpha^2(2+2\sqrt{2})$$

quindi agli stati iniziali

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\\ \beta\end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Fra gli stati indicati sopra, quelli a norma euclidea minima sono ovviamente $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\\ 0\end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\\ 0\end{bmatrix}$*, entrambi di norma* $\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$.

Esercizio 4. Si consideri il sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t)$$

4_i Si determini qual è il numero minimo di uscite affinché lo stato risulti osservabile e si scelga H in modo che ciò avvenga.

4_{ii} Si determini una matrice di reazione K tale che lo stato del sistema $(F + GK, G, H)$ risulti osservabile con una sola uscita e per una scelta opportuna della matrice riga H. Si scelga $\bar{H} \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ in modo che $(F + GK, G, \bar{H})$ risulti osservabile.

4_{iii} Se $(F+GK, G, \bar{H})$ è il sistema di cui al punto precedente, si costruisca, se possibile, uno stimatore di ordine intero tale che l'errore di stima sia sempre esprimibile come combinazione dei modi $(e^{-t}\cos t)$ e $(e^{-t}\sin t)$.

4_i *La matrice F è in forma canonica di Jordan*

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ed ha tre miniblocchi relativi all'autovalore 0. *Affinché lo stato possa essere osservabile, sono necessarie almeno tre uscite (criterio di osservabilità relativo alla forma di Jordan). Come matrice H si può scegliere, ad esempio,*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4_{ii} *È necessario e sufficiente che $F + GK$ sia una matrice ciclica.*
Poiché (F, G) è raggiungibile, esiste una matrice K per cui $F+GK$ risulta ciclica. Per calcolarla si può utilizzare il procedimento esposto nella prova del lemma di Heymann. Dalla matrice di raggiungibilità di (F, G)

$$\mathcal{R} = [\,\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{g}_3 \quad F\mathbf{g}_1 \quad F\mathbf{g}_2 \quad F\mathbf{g}_3 \quad \ldots]$$

si ottiene la matrice

$$Q = [\,\mathbf{g}_1 \quad F\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{g}_3\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e si costruiscono

$$\begin{aligned} S &= [\,\mathbf{0} \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{0}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ M &= SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} := K \end{aligned}$$

Il sistema reazionato con K ha la matrice

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ciclica, con vettore ciclico $\mathbf{g}_1$.
Una scelta di $\bar{H}$ in corrispondenza a cui $(F + GK, \bar{H})$ è osservabile, è $\bar{H} = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,]$.

4_{iii} *Uno stimatore con le caratteristiche richieste non esiste. Infatti, per ogni scelta di $L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{bmatrix}$, la matrice $(F + GK) + L\bar{H}$ è ciclica e l'errore di stima è soluzione dell'equazione omogenea*

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (F + GK + L\bar{H})\mathbf{e}(t),$$

la cui soluzione generale contiene 4 modi linearmente indipendenti.

Introduzione e analisi modale

1° Dato un sistema lineare, stazionario, discreto, con n autovalori distinti tutti reali negativi, allora:

- la matrice di stato del sistema è diagonalizzabile

2° Il grado di molteplicità di un autovalore λ nel polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice A di dimensione n

- È sempre $\leq$ al grado di molteplicità dell'autovalore nel polinomio caratteristico $\Delta(\lambda)$
- È sempre pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan associato a quell'autovalore

3° Scrivere le relazioni che permettono di calcolare l'esponenziale di matrice e^{At} e la potenza A^k utilizzando, rispettivamente, le trasformate di Laplace e le Z-trasformate

- $e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$ $A^k = Z^{-1}[z(zI-A)^{-1}]$

4° Siano $m_A(\lambda)$ e $\Delta_A(\lambda)$, rispettivamente, il polinomio minimo e il polinomio caratteristico della matrice A

- Il polinomio $m_A(\lambda)$ è un divisore di $\Delta_A(\lambda)$
- I polinomi $m_A(\lambda)$ e $\Delta_A(\lambda)$ possono coincidere
- Gli zeri dei polinomi $m_A(\lambda)$ e $\Delta_A(\lambda)$ coincidono

5° Descrivere un procedimento per calcolare il polinomio minimo $m_A(\lambda)$ associato ad una matrice A

- $m_A(\lambda) = \dfrac{\Delta_A(\lambda)}{MCD[agg(\lambda I - A)]}$

6° Il numero di autovalori distinti di una matrice A di dimensione n

- È pari al numero di blocchi di Jordan della matrice A

7° Scrivere in funzione delle matrici A e B la funzione di transizione dello stato $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\bullet))$ del seguente sistema continuo tempo-invariante $\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)$:

- $x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

8° Scrivere in funzione delle matrici A e B la funzione di transizione dello stato $x(k) = \psi(k, h, x(h), u(\bullet))$ del seguente sistema discreto tempo-invariante $x(k+1) = Ax(k)+Bu(k)$:

- $x(k) = A^{k-h}x(h) + \sum_{j=h}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j)$

9° Sia $A \in R^{n\times n}$ una matrice con tutti gli autovalori nell'origine

- La matrice A è identicamente nulla quando il polinomio minimo è $m(\lambda) = \lambda$
- La matrice A può avere n autovettori reali

10° Dato un sistema lineare stazionario tempo-discreto con n autovalori tutti reali e distinti allora

- La matrice di stato del sistema è diagonalizzabile
- È possibile scomporre il sistema dato in n sottosisitemi non interagenti
- Il polinomio minimo della matrice di stato ha grado n

11° Sia data una matrice A caratterizzata da un solo autovalore con grado di molteplicità n

- Può accadere che la matrice A sia diagonalizzabile
- Il grado del polinomio minimo di A è pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan

12° Il grado r del polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice A di dimensione n

- È $\geq$ al numero di autovalori distinti della matrice A
- È sempre $\leq$ n

13° Sia $A \in R^{n\times n}$ una matrice idempotente di ordine k cioè $A^{k-1} \neq 0$ ed $A^k = 0$ con $0 < k < n$

- La matrice A ha tutti gli autovalori nulli
- La matrice A può avere più autovettori reali linearmente indipendenti

14° Dato un sistema lineare stazionario continuo con n autovalori reali tutti coincidenti allora

- Nel sistema esiste almeno un autovettore reale
- Il numero degli autovettori reali del sistema è pari al numero q dei mini-blocchi di Jordan della matrice di sistema

Analisi della stabilità

1° Enunciare il criterio di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi discreti

- Sia x = 0 uno stato di equilibrio per il sistema discreto x(k+1) = f(x(k)). Se in un intorno W dell'origine esiste una funzione V(x) definita positiva e se la funzione $\Delta V(x) = V(f(x(k)))-V(x)$ è semidefinita negativa allora l'origine è stabile. Se la funzione $\Delta V(x)$ è definita negativa, allora l'origine è asintoticamente stabile.

2° Enunciare il criterio di instabilità di Cetaev nel caso di sistemi tempo-continui

- Sia x=0 un punto di equilibrio per il seguente sistema autonomo tempo-continuo: $\dot{x}(t)=f(x(t))$ e sia A un insieme aperto la cui chiusura contenga l'origine. Si supponga inoltre che in un intorno W dell'origine esista una funzione $V(x):W\rightarrow R$ continua con le derivate prime continue, che soddisfi le seguenti ipotesi: 1)V(x) e $\dot{V}(x)$ assumono valori positivi in $\{W\cap A\}\backslash\{0\}$ 2)V(x) è nulla nell'origine e sulla eventuale intersezione $\partial A\cap W$ allora x=0 è un punto di equilibrio instabile

3° Per sistemi regolari tempo-varianti

- La stabilità è completamente determinata dalla norma della matrice di transizione $\Phi(t, t_0)$

4° Scrivere l'equazione di Lyapunov 1) per sistemi tempo-continui 2) per sistemi tempo discreti

- 1)$A^TP+PA = -Q$ 2)$A^TPA-P = -Q$

5° Enunciare il criterio di instabilità di Lyapunov nel caso di sistemi 1) continui 2) discreti

- 1) Sia x = 0 un punto di equilibrio per $\dot{x}(t)=f(x(t))$. Se in un intorno W dell'origine è definita una funzione $V(x):W\rightarrow R$ continua con derivata continua e nulla nell'origine tale per cui: 1) l'origine è punto di accumulazione per l'insieme dei punti in cui è V(x)>0 2) $\dot{V}$ (x) è definita positiva in W, allora il punto x = 0 è un punto di equilibrio instabile

- 2) Sia x = 0 un punto di equilibrio per il sistema x(k+1)=f(x(k)). Se in un intorno W dell'origine è definita una funzione V(x):W→R continua nulla nell'origine tale per cui: 1) l'origine è punto di accumulazione per l'insieme dei punti in cui è V(x)>0 2) ΔV è definita positiva in W, allora il punto x = 0 è un punto di equilibrio instabile

6° Dato un sistema lineare tempo-continuo $\dot{x}$(t) = Ax(t) CNS affinché tale sistema sia stabile è che per ogni matrice Q simmetrica e definita positiva l'equazione matriciale lineare

- $A^TP+PA = -Q$ nella matrice incognita P ammetta una soluzione simmetrica definita positiva

7° Dato il movimento di un sistema dinamico $\psi(t,\bar{t}_i,\bar{x}(\bar{t}_i),\bar{u}(\bullet))$, dove $\bar{t}_i,\bar{x}(\bar{t}_i),\bar{u}(\bullet)$ sono rispettivamente istante iniziale, stato iniziale e funzione di ingresso, enunciare la definizione di stabilità di tale movimento rispetto a perturbazioni dello stato iniziale secondo Lyapunov

- Un movimento $\psi(t,\bar{t}_i,\bar{x}(\bar{t}_i),\bar{u}(\bullet))$ è stabile secondo Lyapunov se ∀ ε>0 ∃ δ>0 t.c. per tutti gli stati iniziali $x(\bar{t}_i)$ t.c. $\|x(\bar{t}_i) - \bar{x}(\bar{t}_i)\|<\delta$ si ha che $\|\psi(t,\bar{t}_i,x(\bar{t}_i),\bar{u}(\bullet)) - \psi(t,\bar{t}_i,\bar{x}(\bar{t}_i),\bar{u}(\bullet))\|<\varepsilon$ ∀ t $\geq \bar{t}_i$

8° Sia dato un sistema non-lineare tempo-discreto x(k+1) =f(x(k)) i punti di equilibrio di questo sistema si ottengono:

- Determinando i punti x_e t.c. $x_e(k) = f(x_e)$
- I sistemi non lineari possono non avere punti di equilibrio

9° Sia $\dot{x}$ = f(x(t)) un sistema non lineare autonomo e sia $\dot{x}$ = Ax(t) il corrispondente sistema linearizzato nel punto di equilibrio x = 0. In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che

- Se gli autovalori di A sono tutti a parte reale negativa il sistema è asintoticamente stabile in x = 0

10° Sia x(t) = $\psi(t, t_0, x(t_0), u(\bullet))$ la funzione di transizione dello stato di un sistema dinamico continuo. Completare la seguente definizione di stato di equilibrio uniformemente stabile

- Uno stato di equilibrio $\bar{x}$, corrispondente ad un ingresso $\bar{u}(\bullet)$ e ad un istante iniziale $\bar{t}_0$ si dice uniformemente stabile se … ∀ ε > 0 ∃ δ > 0 t.c. ∀ $x(\bar{t}_0)$ che soddisfano la relazione $\|x(\bar{t}_0) - \bar{x}\| < \delta$ si ha $\|\psi(t, \bar{t}_0, x(\bar{t}_0), \bar{u}(\bullet)) - \bar{x}\| < \varepsilon$ ∀ t > $\bar{t}_0$ e dove δ non dipende da $\bar{t}_0$

11° Nell'intorno del punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ la funzione $V(x_1, x_2) = (x_1-1)^2+x_2^5$

- Non è definita positiva né negativa

12° Relativamente ad un sistema dinamico tempo-continuo sia (t, x(t)) il movimento corrispondente alla traiettoria x(t) allora si può affermare che

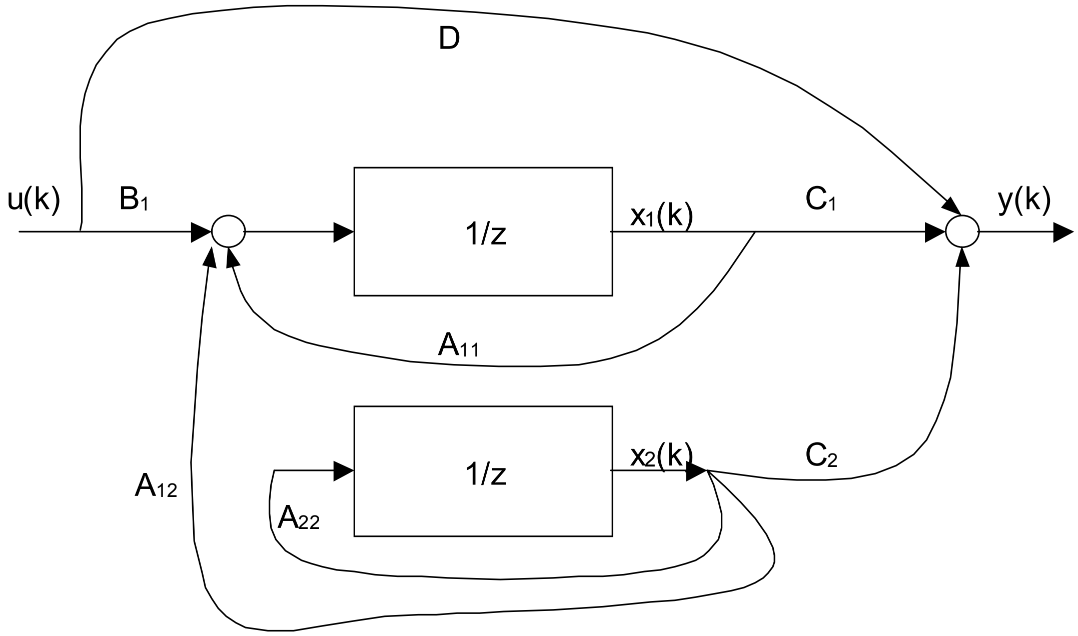
- La stabilità del sistema rispetto al movimento (t, x(t)) implica anche la stabilità rispetto alla traiettoria x(t)

Raggiungibilità e controllabilità

1° Disegnare lo schema a blocchi della forma standard di raggiungibilità di un sistema lineare tempo-discreto caratterizzato dalle matrici A, B, C, D

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x(k) + Du(k) \end{cases}$$

-



2° Siano X^+ e X^+_K i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici (A, B) e (A+BK, B). Il legame esistente fra questi sottospazi è il seguente

- $X^+ = X^+_K$

3° Il sottospazio di raggiungibilità X^+ di un sistema lineare S (A, B, C) caratterizzato dalle matrici A, B e C

- È il più piccolo sottospazio invariante di A contenente Im(B)

4° Sia (A, b) un sistema lineare ad un ingresso e sia n > 1 la dimensione dello spazio degli stati. Se il vettore b coincide con uno degli autovettori della matrice A, allora

- Il sistema non è completamente raggiungibile
- Il sottospazio di raggiungibilità X^+ ha dimensione unitaria

5° Nel caso di sistemi lineari scrivere il legame esistente tra sottospazio raggiungibile X^+ e sottospazio controllabile X^- se 1) il sistema è tempo-continuo 2) il sistema è tempo-discreto

- 1) $X^+ = X^-$ 2) $A^k x \subseteq X^+$

6° Per un sistema lineare tempo-discreto e stazionario di dimensione n

- La completa raggiungibilità implica la controllabilità

7° Siano X^+ e E^- rispettivamente i sottospazi raggiungibile e non osservabile di un sistema lineare tempo-continuo

- Se $x(0) \in X^+$, $x(t) \in X^+$ $\forall$ $t \geq 0$ e $\forall$ funzione di ingresso

8° Sia dato un sistema lineare stazionario tempo-discreto di dimensione n $x(k+1) = Ax(k)+Bu(k)$, $y(k) = Cx(k)$

- Mediante la retroazione stato-ingresso è possibile allocare a piacimento gli autovalori della parte raggiungibile del sistema
- La retroazione stato-ingresso non consente di modificare la dimensione del sottospazio di raggiungibilità
- È sempre possibile stabilizzare il sistema mediante retroazione stato-ingresso se gli autovalori del sottosistema relativo alla parte non raggiungibile hanno modulo inferiore all'unità

9° Sia $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\bullet))$ la funzione di transizione dello stato di un sistema dinamico continuo. Completare le seguenti definizioni
- Uno stato $x(t_1)$ è raggiungibile dallo stato $x(t_0)$ nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ se…
  $\exists$ una funzione di ingresso $u(\bullet) \in U$ t.c. $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\bullet))$
- Uno stato $x(t_0)$ è controllabile allo stato $x(t_1)$ nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ se…
  $\exists$ una funzione di ingresso $u(\bullet) \in U$ t.c. $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\bullet))$

10° Nel caso di sistemi discreti scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinché uno stato finale x_f sia raggiungibile in k passi a partire dallo stato iniziale x_0
- $x(k)-A^k x_0 \in \mathrm{Im}[B\ AB\ \dots\ A^{k-1}B]$

11° Enunciare il lemma di Heymann
- Se (A, B) è raggiungibile e se b_i è una colonna non nulla di B, allora $\exists$ una matrice $M_i \in R^{m\times n}$ t.c. $(A+BM_i, b_i)$ è raggiungibile

12° Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la raggiungibilità in k passi dello stato x_f a partire dallo stato nullo relativamente al sistema lineare discreto $x(k+1) = Ax(k)+Bu(k)$, $y(k) = Cx(k)$
- $x_f \in X^+(k) = \mathrm{Im}(R^+(k)) = \mathrm{Im}[B\ AB\ \dots\ A^{k-1}B]$

Osservabilità e ricostruibilità

1° Scrivere in funzione delle sottomatrici A_{ij}, B_i, C_j l'espressione finale della matrice di trasferimento H(z) di un sistema discreto caratterizzato da matrici A, B, C aventi la seguente struttura

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

- $H(z) = C_1(zI-A_{11})^{-1}B_1$

2° Sia S_D il sistema duale del sistema discreto S = (A, B, C, D)
- Se S è raggiungibile $\Rightarrow$ S_D è ricostruibile
- Se S è raggiungibile $\Rightarrow$ S_D è osservabile
- Se S è controllabile $\Rightarrow$ S_D è ricostruibile
- Se S è ricostruibile $\Rightarrow$ S_D è controllabile
- Se S è osservabile $\Rightarrow$ S_D è raggiungibile
- Se S è osservabile $\Rightarrow$ S_D è controllabile

3° Relativamente al sistema lineare discreto x(k+1) = Ax(k)+Bu(k), y(k) = Cx(k), scrivere in termini delle matrici A, B e C una CNS per garantire che i due stati x_1 e x_2 siano indistinguibili nel futuro in k passi

- $x_1 - x_2 \in \ker\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} = \ker O^-(k)$

4° Una retroazione dello stato applicata ad un sistema in forma canonica di controllo

- Modifica solo i poli del sistema retroazionato

5° Relativamente ad un sistema lineare continuo [$\dot{x}$(t) = Ax(t)+Bu(t), y(t) = Cx(t)] scrivete le equazioni dello stimatore asintotico dello stato in catena aperta

- $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)$

6° In un sistema lineare discreto tempo-invariante, due stati x_1 e x_2 sono indistinguibili nel futuro se per ogni successione di ingresso u(•)

- le corrispondenti successioni di uscita $y_1(\tau)$ e $y_2(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$
- le corrispondenti evoluzioni libere $y_{l1}(\tau)$ e $y_{l2}(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$
- se il vettore $x_1 - x_2 \in E^-$

7° Enunciare la proprietà di separazione

- La sintesi del blocco di retroazione (A+BK) e del blocco di stima (A+LC) può essere fatta in modo indipendente: det[zI-A] = det[zI-(A+BK)]det[zI-(A+LC)]

8° Dato un sistema dinamico lineare tempo-continuo stazionario instabile completamente osservabile allora

- Non è possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena aperta perché l'errore di stima diverge
- È possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena chiusa con errore di stima convergente

9° Sia dato un sistema lineare discreto tempo-invariante descritto dalle matrici A, B, C. Completare la seguente definizione

- Due stati x_1 e x_2 sono indistinguibili nel futuro in k passi se…
  $\forall$ successione di ingresso u(0), …, u(k-1) le successioni di uscita $y_1(\bullet)$ e $y_2(\bullet)$ che corrispondono agli stati iniziali $x_1(0)$ e $x_2(0)$ coincidono nei primi k passi $x_1(0) \overset{k}{\approx} x_2(0) \;\Leftrightarrow\; y_1(\tau) \equiv y2(\tau) \quad 0 \leq \tau \leq k$

10° Relativamente al sistema lineare discreto x(k+1) = Ax(k)+Bu(k), y(k) = Cx(k), scrivere in termini delle matrici A, B e C una CNS per la completa ricostruibilità del sistema

- $E^- = \ker\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} \subseteq \ker A^n$

11° Sia S' = ($T^{-1}AT$, $T^{-1}B$, CT) il sistema che si ottiene da S = (A, B, C) applicando la trasformazione di coordinate x=Tx'. La matrice di trasformazione $\tilde{T}$ che permette di passare dal sistema S_D (duale di S) al sistema S'_D (duale di S') in base all trasformazione di coordinate $x_D = \tilde{T} x'_D$ è

- $\tilde{T} = (T^T)^{-1}$
- $\tilde{T} = (T^{-1})^T$

12° Enunciare il lemma di Heymann

- Se (A, B) è raggiungibile e se b_i è una colonna non nulla di B, allora $\exists$ una matrice $M_i \in R^{m\times n}$ t.c. ($A+BM_i$, b_i) è raggiungibile

13° Nella sintesi del regolatore la proprietà di separazione

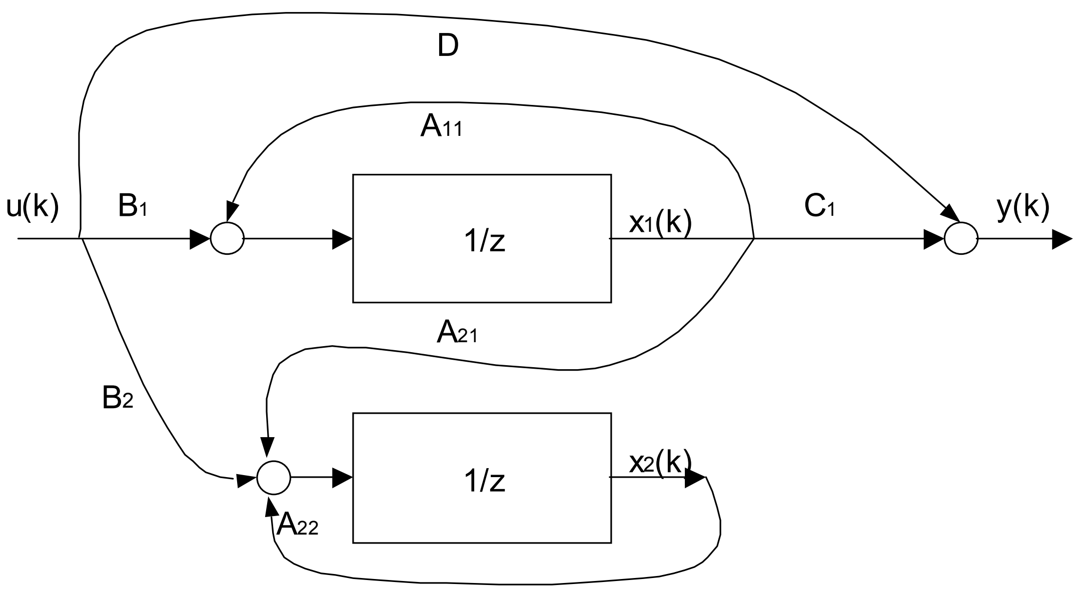
- Afferma che la sintesi dell'osservatore può essere fatta indipendentemente dalla sintesi della retroazione statica
- È valida anche nel caso di osservatore asintotico di ordine ridotto

14° Siano E^- e E^-_L i sottospazi di non osservabilità associati alle coppie di matrici (A, C) e (A+LC, C), il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

- $E^- = E^-_L$

15° Disegnare lo schema a blocchi della forma standard di osservabilità di un sistema lineare tempo-discreto caratterizzato dalle matrici A, B, C, D

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \overline{x}(k) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + Du(k) \end{cases}$$

- 

16° Relativamente ad un sistema lineare stazionario discreto x(k+1) = Ax(k)+Bu(k) che ha almeno un autovalore nell'origine è possibile affermare che

- Se il sistema è completamente raggiungibile allora è anche completamente controllabile
- Se il sistema è completamente osservabile allora è anche completamente ricostruibile

17° Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici A, B, e C aventi la seguente struttura $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ $C = [C_1 \quad 0]$

- Il sistema non è completamente osservabile
- Il sistema può essere controllabile

18° Per un sistema lineare stazionario discreto x(k+1) = Ax(k)+Bu(k) avente la matrice di sistema A non singolare è possibile affermare che

- Se il sistema è completamente controllabile è anche completamente raggiungibile
- Se il sistema è completamente raggiungibile è anche completamente controllabile
- Se il sistema è completamente osservabile è anche completamente ricostruibile
- Se il sistema è completamente ricostruibile è anche completamente osservabile

19° Un sistema dinamico lineare stazionario è caratterizzato da matrici A, B, e C aventi la seguente struttura $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = [C_1 \quad 0]$

- Il sistema non è completamente osservabile
- Il sistema è in forma canonica di osservabilità

Teoria della realizzazione

G(s) è in forma minima SSE è controllabile e osservabile

Collegamento in parallelo

Il sistema S complessivo è raggiungibile e osservabile SSE S_1 ed S_2 sono raggiungibili e osservabili e non hanno poli in comune (non si fanno eliminazioni fra i due denominatori)

Collegamento in serie

Il sistema S complessivo è raggiungibile SSE S_1 ed S_2 sono raggiungibili e non vi sono cancellazioni fra il numeratore di S_1 e il denominatore di S_2

Il sistema S complessivo è osservabile SSE S_1 ed S_2 sono osservabili e non vi sono cancellazioni fra il numeratore di S_2 e il denominatore di S_1

Retroazione

Il sistema S complessivo è raggiungibile e osservabile SSE S_1 ed S_2 sono raggiungibili e osservabili e non vi sono cancellazioni fra il numeratore di S_1 e il denominatore di S_2

1° Relativamente al sistema tempo-continuo lineare stazionario riportato di seguito scrivere la trasformata di Laplace Y(s) del segnale di uscita y(t) in funzione della condizione iniziale x_0 e del segnale di ingresso U(s) = L[u(t)]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- $Y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0+[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s)$

2° La funzione di trasferimento G(s) di un sistema SISO lineare e continuo $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases}$ completamente raggiungibile ma non completamente osservabile è caratterizzata dal fatto che

- Il grado del polinomio a numeratore è < del grado del polinomio al denominatore

Sistemi a segnali campionati

1° Sia x(k+1) = Fx(k) il sistema discreto ottenuto campionando con periodo di campionamento T un sistema continuo $\dot{x}$(t)=Ax(t) asintoticamente stabile. Si può allora affermare che

- La matrice F ha tutti gli autovalori a modulo <1

2° Sia dato un sistema lineare continuo completamente raggiungibile e osservabile … . Indicare per quali valori del periodo di campionamento T il corrispondente sistema a segnali campionati non è più completamente raggiungibile

- $Im(\lambda_i-\lambda_j) = 2k\pi/T$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ e $Re(\lambda_i)=Re(\lambda_j)$

Esercizi

1. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - 2x_1x_2^2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2x_2 + u_2 \end{cases}$$

1.a) Posto $u_1 = u_2 = 0$, trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;

1.b) Posto $u_1 = -x_1$ e $u_2 = -x_2$, studiare la stabilità dell'origine utilizzando il criterio di Lyapunov e la funzione definita positiva $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

1.a) Posto $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, un punto $\mathbf{x}_0$ è di equilibrio per il sistema se vale la relazione $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Nel caso in esame si ha

$$\begin{cases} 0 &= -x_1 - 2x_1x_2^2 \\ 0 &= x_1^2x_2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} 0 &= -x_1(1 + 2x_2^2) \\ 0 &= x_1^2x_2 \end{cases}$$

Sono punti di equilibrio tutti quelli appartenenti alla retta $x_1 = 0$, x_2 qualsiasi. Per poter applicare il criterio ridotto di Lyapunov si procede al calcolo dello Jacobiano del sistema

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -1-2x_2^2 & -4x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{J}(x_1, x_2)|_{x_1=0} = \begin{bmatrix} -1-2x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo presente un autovalore a parte reale nulla, il criterio ridotto di Lyapunov in questo caso non permette di affermare nulla riguardo la stabilità del punto di equilibrio.

1.b) Posto $u_1 = -x_1$ e $u_2 = -x_2$, il sistema retroazionato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_1(1 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(1 - x_1^2) \end{cases}$$

Utilizzando la funzione candidata di $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, e derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{V} \;=\; 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -4x_1^2(1 + x_1^2) - 2x_2^2(1 - x_1^2) < 0$$

Nell'origine, la funzione $\dot{V}$ è definita negativa per cui è possibile affermare che l'origine è un punto asintoticamente stabile.

2. Si consideri il seguente sistema lineare discreto [$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$]

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Calcolare la trasformazione $\mathbf{T}$ che porta il sistema in forma canonica di Jordan. Calcolare quindi l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,\ 0,\ 1]^T$.

2.b) Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema complessivo.

2.a) Per portare il sistema nella forma canonica di Jordan occorre calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice $\mathbf{A}$

$$\Delta_{\mathbf{A}}(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = (z-1)(z-2)(z+1)$$

Gli autovalori del sistema sono $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ e $z_3 = -1$. I corrispondenti autovettori sono:

$$(\mathbf{A} - z_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - z_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - z_3\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La trasformazione cercata è

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato nella forma canonica di Jordan è il seguente

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}u(k) \\ y(k) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

L'evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,\ 0,\ 1]^T$ è quindi la seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2^k & (-1)^k \\ 0 & 0 & -(-1)^k \\ 1 & 2^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^k & (-1)^k - 2^k & \\ 0 & -(-1)^k & 0 \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il sistema rimane fermo sullo stato iniziale.

2.b) La funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema complessivo si ricava facilmente dalla forma canonica di Jordan

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z-2 & 0 \\ 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

3. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + x_2^3 \end{cases}$$

3.a) Si studi la stabilità del sistema nell'origine utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov al variare del parametro α;

3.b) Posto $\alpha = 1$ e utilizzando la funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + \beta x_2^2$, si determini se esistono valori per il parametro β che permettano di decidere sulla stabilità o meno del sistema nell'origine.

3.a) L'origine è chiaramente un punto di equilibrio. Lo Jacobiano del sistema è il seguente:

$$\mathbf{J}(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & \alpha \\ -3x_1^2 & +3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Nell'origine gli autovalori dello Jacobiano sono nulli:

$$\mathbf{J}(x_1,\, x_2)|_{(0,\,0)} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il criterio ridotto di Lyapunov non è efficace

3.b) Derivando la funzione di Lyapunov si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1,\, x_2) &= 4x_1^3\dot{x}_1 + 2\beta x_2\dot{x}_2 \\ &= 4x_1^3(x_1^3 + x_2) + 2\beta x_2(-x_1^3 + x_2^3) \\ &= 4x_1^6 + 4x_1^3x_2 - 2\beta x_2 x_1^3 + 2\beta x_2^4 \\ &= 4x_1^6 + 2(2-\beta)x_1^3x_2 + 2\beta x_2^4 > 0 \end{aligned}$$

Per $\beta = 2$ la funzione $\dot{V}(x_1,\, x_2)$ è definita positiva per cui in base al criterio di instabilità di Lyapunov si può concludere che nell'origine il sistema è instabile.

4. Dato il sistema non–lineare tempo–continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \;=\; 2x_2^2(t) \,-\, x_1^3(t) \,-\, x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \;=\; -\,2x_1^3(t)\,x_2(t) \,+\, u(t) \end{cases}$$

4.a) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine considerando $u(t) = 0$. Si impieghi il criterio ridotto di Lyapunov e, se necessario, la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ ed il teorema di La Salle–Krasowskii;

4.b Imponendo $u(t) = k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t)$ si determini per quali valori non nulli dei guadagni k_1 e k_2 l'origine è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

4.a) L'origine è un punto di equilibrio. Lo jacobiano del sistema è:

$$J(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 4x_2 \\ -6x_1^2x_2 & -2x_1^3 \end{bmatrix}$$

Calcolando tale Jacobiano nell'origine si ottiene:

$$J(0,\, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uno degli autovalori è sull'asse immaginario per cui il criterio ridotto di Lyapunov non è efficace per studiare la stabilità del punto. Se si utilizza la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1,\, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ si ottiene:

$$\dot{V}(x_1,\, x_2) = -4x_1^4(1 + x_1^2) \le 0$$

Essendo $\dot{V}$ semidefinita negativa, si può concludere che il sistema è almeno semplicemente stabile nell'interno dell'origine. L'insieme N dei punti per cui $\dot{V} = 0$ è

$$N = \{x_1 = 0,\; x_2 \in R\}$$

L'unico punto dell'insieme N che soddisfa le equazioni differenziali del sistema dato è $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Per il teorema di La Salle Krasowskii si può quindi affermare che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

4.b) In presenza della retroazione $u(t) = k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t)$, il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2^2(t) - x_1^3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1^3(t)\, x_2(t) + k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t) \end{cases}$$

In questo caso lo jacobiano si trasforma come segue

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 4x_2 \\ k_1 - 6x_1^2 x_2 & k_2 - 2x_1^3 \end{bmatrix}$$

Calcolando tale Jacobiano nell'origine si ottiene:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

È chiaro quindi che l'origine è asintoticamente stabile per $k_2 < 0$ e $\forall k_1 \in R$.

5. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

5.a) Calcolare gli autovalori del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ del sistema. Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{k}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;

5.b) Calcolare gli autovalori del sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

5.a) La matrice di raggiungibilià del sistema dato è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema dato non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Una matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$, il sistema trasformato che si ottiene ha la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Gli autovalori che caratterizzano il sottospazio $\mathcal{X}^+$ sono gli autovalori della sottomatrice $\mathbf{A}_{11}$, cioè $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$. L'autovalore che caratterizza la parte non raggiungibile è $\lambda = -1$, quindi un autovalore stabile. È quindi possibile determinare una retroazione dello stato $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ che stabilizza il sistema complessivo. Il vettore $\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ che posiziona in -2 gli autovalori della parte raggiungibile si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\Delta_{\overline{\mathbf{A}}_{1,1}+\overline{\mathbf{b}}_1\overline{\mathbf{k}}}(s) &= \det[s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_{1,1} - \overline{\mathbf{b}}_1\overline{\mathbf{k}}] = \begin{vmatrix} s-k_1 & -k_2 \\ -3 & s-3 \end{vmatrix} \\ &= (s-3)(s-k_1) - 3k_2 = s^2 - (3+k_1)s + 3k_1 - 3k_2\end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\overline{\mathbf{A}}_{1,1}+\overline{\mathbf{b}}_1\overline{\mathbf{k}}}(s) = (s+2)^2 = s + 4s + 4$$

occorre utilizzare il vettore

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{25}{3} \end{bmatrix}$$

Il vettore dei guadagni $\mathbf{k}$ si ottiene applicando la trasformazione inversa

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{k}} & k_3 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{25}{3} & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + k_3 & -7 & k_3 \end{bmatrix}$$

5.b) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

L'autovalore della parte non osservabile è instabile, $\lambda = 3$, per cui non esiste nessun osservatore asintotico dello stato.

6. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

6.a) Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(k) = \mathbf{k}\mathbf{x}(k)$ in modo che il sistema retroazionato $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}$ sia di tipo "dead-beat";

6.b) Per il sistema dato si costruisca, se possibile, uno stimatore dead beat di ordine ridotto.

6.a) La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è non singolare ($\det\mathcal{R}^+ = -1$) per cui il sistema è completamente raggiungibile. Esiste quindi una retroazione statica dello stato $u(k) = \mathbf{k}\mathbf{x}(k)$ che posiziona a piacere i poli del sistema retroazionato. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} z-1 & -1 & 0 \\ 0 & z-1 & -1 \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$$

Il polinomio caratteristico desiderato per il sistema retroazionato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}}(z) = z^3$$

La matrice $\mathbf{k}$ si determina, per esempio, utilizzando la formula $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Un modo alternativo per calcolare il vettore $\mathbf{k}$ è quello di utilizzare la formula di Ackermann:

$$\mathbf{k} = -\mathbf{q}(\mathcal{R}^+)^{-1} p(\mathbf{A}) = -\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1}\mathbf{A}^3$$

dove $p(z)$, in questo caso $p(z) = z^3$, è il polinomio caratteristico desiderato. Sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

6.b) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è non singolare, il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto. Il primo passo é quello di calcolare una matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti la matrice $\mathbf{c}$ ad assumere la forma $\bar{\mathbf{c}} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\mathbf{P}^{\text{-1}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \hline \mathbf{c} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema trasformato $[\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \bar{\mathbf{c}}\mathbf{x}(k)]$ è

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{\mathbf{x}}(k+1) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(k) \\ y(k) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{array}\right.$$

Le matrici $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{b}}$ vengono partizionate come segue

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \qquad \bar{\mathbf{b}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ siano entrambi nulli

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array}\right], \qquad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \left[\begin{array}{cc} 1 & l_1 \\ 1 & 1 + l_2 \end{array}\right]$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21}}(z) = (z-1)(z-1-l_2) - l_1 = z^2 - (2+l_2)z + 1 + l_2 - l_1$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array}\right]$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{P} \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{array}\right]$$

dove

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(k) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(k) + [\mathbf{b}_1 + \mathbf{L}\mathbf{b}_2]u(k)$$

e cioè

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right] \hat{\mathbf{v}}(k) + \left[\begin{array}{c} -2 \\ -3 \end{array}\right] y(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array}\right] u(k)$$

7. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right] u(k) \\ y(k) & = & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathbf{x}(k) \end{array}\right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \left[\begin{array}{c} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{array}\right]$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

7.a) Determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Portare il sistema nella forma standard di osservabilità.

7.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

7.a) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(k+1) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(k) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{array} \right.$$

L'autovalore della parte non osservabile è stabile: $\lambda = 0$. È quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

7.b) La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ viene fatta facendo riferimento alla forma standard di osservabilità. In base alla partizione sopra riportata, la matrice $\bar{\mathbf{L}}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ siano entrambi nulli

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 2 \\ l_2 - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ è

$$\Delta(z) = (z - l_1)(z - 1) - 2(l_1 - 1) = z^2 - (l_1 + 1)z + l_1 + 2 - 2l_2$$

Imponendo $\Delta(z) = z^2$ si trova la soluzione cercata

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ da utilizzare sul sistema originario è

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0.5 - l_3 \\ -1 - l_3 \end{bmatrix}$$

8. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

8.a) Calcolare i sottospazi raggiungibili con il solo ingresso u_1, con il solo ingresso u_2 oppure con entrambi gli ingressi. Si dica se il sistema è stabilizzabile con retroazione dello stato tramite un solo ingresso o con entrambi gli ingressi.

8.b) Utilizzando il lemma di Heymann applicato al primo ingresso, si calcoli, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -1.

8.a) I sottospazi di raggiungibilià del sistema rispetto al primo e al secondo ingresso sono

$$\mathcal{X}_{b1}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{X}_{b2}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è raggiungibile utilizzando un solo ingresso. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è il seguente

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^3 - 3s^2 + 3s - 1 = (s-1)^3$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono quindi tutti instabili, $\lambda_{1,2,3} = 1$, per cui se si utilizza un solo ingresso, la parte non raggiungibile è sicuramente instabile. Ne segue che il sistema non è stabilizzabile mediante una retroazione dello stato che utilizzi un solo ingresso. Utilizzando entrambi gli ingressi, il sottospazio di raggiungibilià del sistema è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è completamente raggiungibile per cui esiste una matrice $\mathbf{K}$ di retroazione dello stato tale da posizionare a piacere i poli del sistema retroazionato.

8.b) Applichiamo il lemma di Heymann per rendere il sistema raggiungibile mediante il primo ingresso. Le matrici $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{M}_1$ hanno la seguente struttura

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{cc|c} b_1 & \mathbf{A}b_1 & b_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & e_2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema che si ottiene retroazionato la matrice $\mathbf{M}_1$ è il seguente

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{M}_1} = s^3 - 3s^2 + 2s = s(s-1)(s-2)$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}} = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{K}_1$ che impone al sistema retroazionato gli autovalori desiderati è

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -20 & -14 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice di retroazione complessiva è quindi

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -20 & -14 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Si consideri il seguente sistema lineare discreto [$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$]

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

9.a) Determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Portare il sistema nella forma standard di osservabilità.

9.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

9.a) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k) &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0.25 & 0.75 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array} \right] u(k) \\ y(k) &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x}(k) \end{aligned} \right.$$

L'autovalore della parte non osservabile è stabile: $\lambda = 0$. È quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

9.b) La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ viene fatta facendo riferimento alla forma standard di osservabilità. In base alla partizione sopra riportata, la matrice $\bar{\mathbf{L}}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11}+\bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ siano entrambi nulli

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{A}_{11}+\bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}+\bar{\mathbf{L}}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta(z) = (z-l_1)z-(l_2+1) = z^2-l_1 z-l_2-1$$

Imponendo $\Delta(z)=z^2$ si trova la soluzione cercata

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ da utilizzare sul sistema originario è

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -0.25+\alpha \end{bmatrix}$$

10. Si consideri il seguente sistema lineare, stazionario discreto [$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{b}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)$]

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $\mathbf{y}(k)$ il vettore di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

10.a) Utilizzando l'ingresso $u(k)$ e la sola seconda uscita $y_2(k)$, si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato di ordine ridotto di tipo dead-beat.

10.b) Si risolva lo stesso problema del punto precedente (stimatore dead-beat di ordine ridotto) utilizzando l'ingresso $u(k)$ ed entrambe le uscite del sistema.

10.a) La matrice di osservabilità del sistema rispetto alla seconda uscita è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore di ordine ridotto. D'altra parte il sistema è già nella forma più idonea per la sintesi dell'osservatore di ordine ridotto

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ siano entrambi nulli

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1+l_1 \\ 1 & 2+l_2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta(z) = z(z-2-l_2)+1-l_1 = z^2-(2+l_2)z+1-l_2$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

dove

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(k) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(k) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(k)$$

e cioè

$$\mathbf{v}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(k)$$

10.b) Anche nel caso in cui si utilizzino entrambe le uscite, il sistema è già nella forma opportuna per la sintesi dell'osservatore di ordine ridotto

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che l'unico autovalore della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ sia nullo

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \end{bmatrix}$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & l_2 \end{bmatrix} \qquad \forall\ l_2 \in \mathcal{R}$$

Posto $l_2 = 0$, l'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} v(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \qquad v(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} y(k)$$

11. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

11.a) Portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità. Calcolare gli autovalori del sottospazio non raggiungibile.

11.b) Determinare, se è possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;

11.c) Portare il sistema nella forma standard di osservabilità. Calcolare gli autovalori del sottospazio non osservabile.

11.d) Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

11.a) La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema dato non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Una matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{\text{-1}} = \left[\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Sia $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$. Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Gli autovalori che caratterizzano il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ sono: $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. L'autovalore che caratterizza la parte non raggiungibile del sistema è $\lambda = -1$.

11.b) Siccome la parte non raggiungibile è stabile, esiste quindi una retroazione dello stato $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ che stabilizza il sistema complessivo e tale da posizionare in -2 gli autovalori della parte raggiungibile. Per calcolare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ che, nella forma standard di raggiungibilità, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(\lambda) = \lambda^2 - 1 \qquad\qquad \Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_1\tilde{K}}(\lambda) = (\lambda+2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

La matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_c\mathbf{T}_c^{\text{-1}} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{\text{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{\text{-1}} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & \alpha \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -0.5-\alpha & -4.5-\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

11.c) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{O}^- = 0$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è singolare, il sistema non è completamente osservabile. Per portare il sistema nella forma standard di osservabilità è possibile utilizzare la seguente matrice di trasformazione:

$$
\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \left[\begin{array}{rrr} -0.5 & -0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$
\left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_1 & \mathbf{O} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.
$$

La parte non osservabile del sistema è caratterizzata da un autovalore stabile $\lambda = -1$ per cui ̀possibile progettare un osservatore asintotico dello stato sia di ordine pieno che di ordine ridotto.

11.d) Il progetto dell'osservatore di ordine ridotto parte dal calcolo una matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti la matrice $\mathbf{C}$ ad assumere la forma $\bar{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$
\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \hline \mathbf{C} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
$$

Il sistema trasformato che si ottiene assume la forma

$$
\left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 2 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.
$$

Al punto precedente abbiamo visto che il sistema non è completamente osservabile e certamente la parte non osservabile non è quella relativa alla variabile x_3 perchè tale variabile coincide esattamente con il segnale di uscita $y(t)$. Ne segue che la parte non osservabile è quella relativa alla coppia di matrici $(\mathbf{A}_{11},\ \mathbf{A}_{21})$. Se infatti si calcola la matrice di osservabilità di questa sottoparte, si trova una matrice singolare:

$$
\mathcal{O}_1^- = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{array}\right]
$$

Quindi nel progetto dell'osservatore di ordine ridotto, la matrice $\mathbf{L}$ non potrà spostare l'autovalore $\lambda = -1$ della parte non osservabile, ma potrà agire solamente sull'autovalore della parte osservabile posizionandolo, come richiesto in -2.

$$
\mathbf{L} = \left[\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array}\right], \qquad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \left[\begin{array}{cc} -1 - 2l_1 & 2l_1 \\ -2 - 2l_2 & 1 + 2l_2 \end{array}\right]
$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è:

$$
\begin{aligned}
\Delta(s) &= (\lambda + 1 + 2l_1)(\lambda - 1 - 2l_2) + 2l_1(2 + 2l_2) \\
&= \lambda^2 - 1 - 4l_1l_2 + 2l_1(\lambda - 1) - 2l_2(\lambda + 1) + 4l_1 + 4l_1l_2 \\
&= \lambda^2 - 1 + 2l_1\lambda - 2l_1 - 2l_2\lambda - 2l_2 + 4l_1 \\
&= \lambda^2 - 1 + 2(l_1\lambda - 2l_2\lambda - 2l_2 + 2l_1
\end{aligned}
$$

Imponendo l'uguaglianza con il polinomio desiderato:

$$
d(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2
$$

si ottiene:

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}y(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(t) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(t) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(t)$$

e cioè

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

12. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,u(t),\ \ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove:} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

12.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori del 4 sottosistemi $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ e $\mathcal{S}_4$.

12.b) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizzi il sistema e che posizioni in -4 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato.

12.c) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine intero (pieno) che posizioni in -4 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

12.a) Per operare la scomposizione canonica di Kalman del sistema, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \ker\mathcal{O}^- = \ker \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & -10 & 10 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathbf{X}_2 = \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio è nullo in quanto il vettore che genera $\mathcal{E}^-$ non è combinazione lineare dei vettori di base del sottospazio $\mathcal{X}^+$, infatti la seguente matrice ha rango pieno

$$\det \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = 1 \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{B}_2 = \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \{0\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_2 = 0, \qquad \mathcal{B}_3 = 0, \qquad \mathcal{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è basata sulla matrice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 & \mathcal{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Il sistema dato è composto da una parte raggiungibile e osservabile $\mathcal{S}_1$ di dimensione 2 e da una parte non raggiungibile e non osservabile $\mathcal{S}_4$ di dimensione 1.

$$\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{S}_4 = \{\mathbf{A}_{44}, 0, 0\} = \{-1, 0, 0\}$$

Gli autovalori della parte $\mathcal{S}_1$ sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. L'autovalore della parte $\mathcal{S}_4$ è $\lambda = -1$.

12.b) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non raggiungibile del sistema è stabile per cui esiste una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizza il sistema e che pone in -4 i due autovalori della parte raggiungibile. Per sintetizzare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(s) = s^2 - 1 \qquad \Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{K}}}(s) = (s+4)^2 = s^2 + 8\,s + 16$$

La matrice $\bar{K}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_c\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & -8 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & -8 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{7}{4} & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{4} - \alpha & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} + \alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

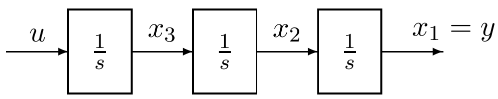
12.c) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non osservabile del sistema è stabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato. La matrice $\mathbf{L}$ potrà agire quindi solo su due dei tre autovalori del sistema, cioè potrà agire solo sugli autovalori della parte osservabile. La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ risulterà agevole se si parte dalla forma canonica di Kalman ottenuta al punto 2.a). La matrice $\tilde{\mathbf{L}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte osservabile si calcola nel modo seguente:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{P}_c\mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 14 & -10 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} -17 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.375 \\ -1.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ si calcola nel modo seguente:

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.375 \\ -1.625 + \alpha \\ -2.375 + \alpha \end{bmatrix}$$

13. Sia dato il seguente sistema dinamico (cascata di tre integratori):



Scrivere il sistema nella forma $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ e calcolare le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ del corrispondente sistema discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$ che si ottiene mediante campionamento. Si ponga $T = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Una descrizione nello spazio degli stati del sistema dinamico dato è la seguente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{array}\right.$$

La matrice $\mathbf{F}$ del corrispondente sistema a segnali campionati è la seguente:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{G}$ è invece la seguente:

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \sigma & \frac{\sigma^2}{2} \\ 0 & 1 & \sigma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

14. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array}\right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

essendo $\mathbf{x}(t)$ il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

14.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori della parte raggiungibile e della parte osservabile.

14.b) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizzi il sistema e che posizioni in -3 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato.

14.c) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -3 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

14.a) Per operare la scomposizione canonica di Kalman del sistema, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \ker\mathcal{O}^- = \ker \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio coincide con il sottospazio $\mathcal{E}^-$, infatti la seguente matrice ha determinante nullo

$$\det \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right] = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti:

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_4 = 0$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è la seguente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 2 \\ \hline -2 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\[2ex] y(t) &= \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Il sottosistema raggiungibile è composto dalle prime due componenti dello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_r} \bar{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_r} \mathbf{u}(t) \\[2ex] y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

ed è caratterizzato dagli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. La parte non raggiungibile è stabile: $\lambda_3 = -1$.

Il sottosistema osservabile è dato dalla prima e dalla terza componenti dello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_o} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\[2ex] y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_o} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Anche il sottosistema osservabile è caratterizzato dagli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_3 = -1$. La parte non osservabile è stabile: $\lambda_2 = -1$.

14.b) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non raggiungibile del sistema è stabile per cui esiste una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizza il sistema e che pone in -3 i due autovalori della parte raggiungibile. Per sintetizzare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire sintetizzando la matrice $\bar{\mathbf{K}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_r$ e quello della matrice $\mathbf{A}_r + \mathbf{B}_1\bar{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_r}(s) = s^2 - 1 \qquad\qquad \Delta_{\mathbf{A}_r + \mathbf{B}_1\bar{K}}(s) = (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

La matrice $\bar{\mathbf{K}}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_c\mathbf{T}_c^{\text{-1}} = \begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{\text{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^{\text{-1}} = \begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La stessa matrice $\bar{\mathbf{K}}$ poteva essere calcolata anche utilizzando la formula di Ackerman:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{\text{-1}}(\mathbf{A}_r + 3\mathbf{I})^2 \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{\text{-1}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}^2 \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{\text{-1}} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 10 & \alpha & 2-\alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

14.c) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non osservabile del sistema è stabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato. La matrice $\mathbf{L}$ potrà agire quindi solo su due dei tre autovalori del sistema, cioè gli autovalori della parte osservabile. La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ risulterà agevole se si parte dalla forma canonica di Kalman ottenuta al punto 2.a). La matrice $\bar{\mathbf{L}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte osservabile si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{L}} &= \mathbf{P}_c\mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{\text{-1}} \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{\text{-1}} \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

In questo caso si ha che $\mathbf{L}_c = \mathbf{K}_c^T$ in quanto il polinomio caratteristico e il polinomio desiderato sono gli stessi del punto precedente. La matrice $\mathbf{L}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} l_1 \\ \beta \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ \beta \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ \beta - 8 \\ \beta - 20 \end{bmatrix}$$

dove β è un parametro arbitrario.

15. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

15.a) Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$.

15.a) Il sistema non è completamente osservabile

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{E}^- = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

L'insieme degli stati iniziali compatibili con l'evoluzione libera $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$ si determina calcolando una soluzione $\mathbf{x}_p$ e sommando ad essa il sottospazio di non osservabilità $\mathcal{E}^-$. La soluzione $\mathbf{x}_p$ si determina risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'insieme cercato degli stati iniziali è quindi il seguente:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_p + \mathcal{E}^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

16. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

16.a) Determinare, se è possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;

16.b) Portare il sistema in forma standard di osservabilità. Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di "ordine pieno" che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

16.a) La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{R}^+ = 8$$

Il sistema dato è completamente raggiungibile. Esiste quindi una retroazione dello stato $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ che stabilizza il sistema complessivo e che posiziona in -1 tutti gli autovalori del sistema. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ -1 & -1 & s \end{vmatrix} = s^3 + 3s = s^2(s+3)$$

Il polinomio caratteristico desiderato è il seguente

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}}(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

La matrice $\mathbf{K}$ si calcola in base alla seguente formula:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

16.b) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{O}^- = 0$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è singolare. Il sistema non è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato solo se la parte non osservabile è asintoticamente stabile. Il primo passo é quello di calcolare una matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti il sistema in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

La parte non osservabile è "semplicemente" stabile in quanto ha un autovalore nell'origine: $s = 0$. Non è quindi possibile giungere alla sintesi di un osservatore "asintotico" dello stato. In questo caso l'osservatore sarebbe "semplicemente stabile", cioè la stima dello stato sarebbe nota a meno di una costante che è funzione della condizione iniziale della parte non osservabile.

Il fatto che la parte non osservabile non fosse asintoticamente stabile poteva essere dedotto dal fatto che tutti e tre gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono sull'asse immaginario: $s_1 = 0$, $s_{1,2} = \pm\sqrt{3}j$.

17. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

17.a) Si determini se il sistema è osservabile e/o ricostruibile. Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$.

17.a) La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 2 per cui il sistema non è completamente osservabile. Per verificare se il sistema è ricostruibile, occorre verificare se $\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- \subseteq \ker \mathbf{A}^3$:

$$\ker \mathbf{A}^3 = \ker \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La condizione $\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- \subseteq \ker \mathbf{A}^3$ è verificata per cui il sistema è ricostruibile.

L'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con l'evoluzione libera: $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$ sono tutti e soli quelli che soddisfano la seguente relazione:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \mathcal{O}^{-}\mathbf{x}_0 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

Il vettore $\bar{y}$ non è combinazione lineare delle colonne della matrice $\mathcal{O}^{-}$, per cui il sistema non ammette soluzioni. Non esiste quindi nessuna condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ compatibile con l'evoluzione libera assegnata.

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Prova in itinere 23-12-2020

Numero di matricola						
	–	–	α	β	γ	δ

1. Dato il sistema lineare tempo continuo caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare i modi del sistema;

   (b) Determinare la struttura della matrice in forma di Jordan associata ad A e la corrispondente matrice di trasformazione;

   (c) Determinare le condizioni iniziali $x(0)$ tale per cui l'evoluzione libera del sistema evolve in un piano;

   (d) Date le matrici di ingresso e uscita $B = (1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0)^T$ e $C = (1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1)$ determinare la matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma canonica di Kalman.

2. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -(\delta+1) & 0 \\ \delta+1 & -2(\delta+1) & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare se e da quali condizioni iniziali è possibile raggiungere lo stato $x(k) = (0,\, 0,\, \gamma+1)^T$.

   (b) Determinare se e da quali condizioni iniziali è possibile raggiungere lo stato $x(k) = (0,\, 0,\, 0)^T$.

   (c) Calcolare una base dello spazio raggiungibile e calcolarne gli autovalori interni;

   (d) Determinare se è possibile riconoscere se il sistema è partito dalle condizioni iniziali $x(0) = (\alpha,\, \beta,\, \gamma+1)^T$ e $\tilde{x}(0) = (\alpha,\, \beta,\, \delta+10)^T$ conoscendo gli ingressi e le uscite del sistema.

   (e) Calcolare una base dello spazio non osservabile e calcolarne gli autovalori interni;

   (f) Determinare la forma della funzione di trasferimento del sistema.

Soluzione

1. Data

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\gamma+1) \end{pmatrix}$$

(a) Si nota che la matrice ha una struttura tirangolare superiore a blocchi con blocco di dimensione 3 e blocco di dimensione 2. Il blocco di dimensione 2 è il blocco di Jordan di dimensione 2 associato all'autovalore $-(\gamma+1)$. Il primo blocco invece è a sua volta triangolare inferiore a blocchi e si vede che ha autovalore in 0 con molteplicità algebrica pari a 3. La molteplicità geometrica si vede dalla struttura triangolare della matrice che consente di vedere come il nullo della matrice stessa abbia dimensione pari a 1. Ci sono quindi due blocchi di Jordan associati alla matrice, uno di dimensione 3 associato all'autovalore nullo e uno di dimensione 2 associato all'autovalore $-(\gamma+1)$. I modi pertanto sono 1, t, t^2, $e^{-(\gamma+1)t}$, $te^{-(\gamma+1)t}$.

(b) Dal punto precedente ci sono due blocchi di Jordan associati alla matrice, uno di dimensione 3 associato all'autovalore nullo e uno di dimensione 2 associato all'autovalore $-(\gamma+1)$. Per la struttura della matrice è sufficiente prima portare il blocco di dimensione 3 in forma di Jordan. Infatti lavorando sul sottosistema è poi possibile completare i vettori ottenuti con due componenti nulle per poterli usare nella matrice di trasformazione. Si consideri quindi il sottosistema:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il nullo ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $e_2 \in \mathbb{R}^3$ (autovettore dell'autovalore nullo). Per calcolare gli autovettori generalizzati di ordine è necessario calcolare

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'autospazio generalizzato di ordine 2 ha dimensione 2 ed è generato dai vettori e_1, $e_2 \in \mathbb{R}^3$. Come autovettore generalizzato di ordine 3 si può quindi scegliere il vettore $e_3 \in \mathbb{R}^3$ da cui seguono nella catena $e_1 - e_2 = A_1 e_3$ e $e_2 = A_1(e_1 - e_2)$. La Matrice del cambio di base del sistema di partenza ha quindi come prime tre colonne i vettori $(0, 1, 0, 0, 0)^T$, $(1, -1, 0, 0, 0)^T$ e $(0, 0, 1, 0, 0)^T$. Per l'autovalore $-(\gamma+1)$ invece è necessario lavorare con l'intera matrice

$$A + (\gamma+1)I = \begin{pmatrix} (\gamma+1) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (\gamma+1) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma+1) & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui nullo è generato dal vettore $e_4 \in \mathbb{R}^5$. L'unico conto da fare è quello di $(A + (\gamma+1)I)^2$ che risulta pari a

$$(A + (\gamma+1)I)^2 = \begin{pmatrix} (\gamma+1)^2 & 0 & 2(\gamma+1) & 0 & 2 \\ 2(\gamma+1) & (\gamma+1)^2 & 1 - 2(\gamma+1) & 0 & -2 \\ 0 & 0 & (\gamma+1)^2 & 0 & 2(\gamma+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'autovettore generalizzato di ordine 2 deve quindi annullare il prodotto con la terza riga della matrice $(A+(\gamma+1)I)^2$ da cui segue che presa pari a 2 la sua terza componente deve avere quinta componente pari a $-(\gamma+1)$, la quarta componente può essere scelta pari a 0. Si consideri quindi il vettore della forma $v = (v_1,\, v_2,\, 2,\, 0,\, -(\gamma+1))^T$ e si vanno ad annullare i prodotti con le altre righe di $(A+(\gamma+1)I)^2$ da cui segue $(\gamma+1)^2 v_1 + 4(\gamma+1) - 2(\gamma+1) = 0$ e $2(\gamma+1)v_1 + (\gamma+1)^2 v_2 + 2 - 4(\gamma+1) + 4(\gamma+1) = 0$. Dalla prima segue che $v_1 = -\frac{2}{\gamma+1}$ mentre $v_2 = \frac{2+2(\gamma+1)}{(\gamma+1)^2}$. L'autovettore generalizzato di ordine 2 risulta quindi $v = (-\frac{2}{\gamma+1},\, \frac{2+2(\gamma+1)}{(\gamma+1)^2},\, 2,\, 0,\, -(\gamma+1))^T$ da cui segue che l'autovettore generalizzato di ordine 1 risulta: $(A+(\gamma+1)I)v = -(\gamma+1)e_4 \in \mathbb{R}^5$. A questo punto si hanno tutti i vettori della matrice del cambio di base.

(c) Per evolvere in un piano le condizioni iniziali devono essere gli autovettori generalizzati di ordine 2 calcolati al punto precedente.

(d) Date le matrici di ingresso e uscita $B = (1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0)^T$ e $C = (1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1)$ si ottengono le matrici di raggiungibilità e di osservabilità seguenti:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -(\gamma+1) & (\gamma+1)^2 & -(\gamma+1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(\gamma+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+(\gamma+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(2+(\gamma+1)^2)(\gamma+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2+(\gamma+1)^2)(\gamma+1)^2 \end{pmatrix}$$

La matrice R ha rango 3 e una base dello spazio di raggiungibilità è data dai vettori

$$T_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di osservabilità ha rango 3 e il nullo è generato dai vettori

$$T_{\bar{O}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base dello spazio intersezione è data quindi da

$$T_{R\bar{O}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per completare la base dello spazio raggiungibile abbiamo quindi la matrice

$$T_{RO} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre non esiste sottospazio non raggiungibile non osservabile. A completamento della base di tutto lo spazio si ottiene la matrice

$$T_{\bar{R}O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice del cambio di base è data dalla matrice $T = (T_{RO},\, T_{R\bar{O}},\, T_{\bar{R}O})$.

2. Sistema dinamico lineare tempo discreto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -(\delta+1) & 0 \\ \delta+1 & -2(\delta+1) & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) La domanda richiede se è possibile raggiungere lo stato $x(k) = (0,\, 0,\, \gamma+1)^T$ anche da condizioni iniziali non nulle. Lo spazio di raggiungibilità è generato dal solo vettore $\mathcal{R} = (0,\, 0,\, 1)^T$ e quindi affinché $x(k) - A^k x(0)$ sia nello spazio raggiungilibe è necessario che lo stato iniziale sia della forma $x(0) = (0,\, 0,\, a)^T$, questo si vede dalla struttura triangolare di A che viene mantenuta nelle sue potenze, il primo blocco infatti non è nullo e quindi devono esserlo necessariamente le prime due componenti dello stato iniziale.

(b) Si può valutare se il sistema è controllabile a zero. Essendo A triangolare si nota subito come le varie potenze di A generano una immagine che ha come base vettori con le prime due componenti non nulle e quini non appartenenti allo spazio di raggiungibilità. Il sistema quindi non è controllabile a zero. Per i punti da cui si può raggiungere l'origine (che non saranno quindi tutti quelli dello spazio) vale la risposta del punto precedente.

(c) Lo spazio di raggiungibilità è generato dal solo vettore $\mathcal{R} = (0,\, 0,\, 1)^T$. L'autovalore -2 (lo si trova dalla struttura triangolare inferiore a blocchi di A) è per il lemma PBH raggiungibile pertanto è l'unico autovalore interno allo spazio di raggiungibilità. La cosa la si nota anche perchè l'ingresso agisce direttamente sulla terza variabile che però non influenza le prime due che pertanto fanno parte del sottosistema non raggiungibile.

(d) Si richiede se $x(0)$ e $\tilde{x}(0)$ sono indistinguibili o equivalentemente se $x(0) - \tilde{x}(0) \in Ker(O)$. La matrice di osservabilità risulta avere ultima colonna nulla e quindi lo spazio non osservabile ha dimensione uno ed è generato dal vettore $e_3 \in \mathbb{R}$. Essendo $x(0) - \tilde{x}(0 = (0,\, 0,\, \gamma - \delta - 9)^T$ si ha che sono indistinguibili.

(e) Lo spazio non osservabile ha dimensione uno ed è generato dal vettore $e_3 \in \mathbb{R}$ e il sistema risulta in forma standard di osservabilità quindi l'autovalore -2 è interno allo spazio di inosservabilità.

(f) Gli autovalori sono tutti non raggiungibili o non osservabili quindi la funzione di trasferimento è nulla avendo anche $D = 0$.

Esercizi su risposta forzata

1. *Dato il sistema descritto da*

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= 2x_1(t) + x_2(t)
\end{aligned}
$$

determinare $\Phi(s)$ *e* $\Phi(t)$.
Soluzione. Basta ricordarsi che

$$
\Phi(s) = (sI - A)^{-1}
$$

Infatti, essendo

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

si ottiene

$$
\Phi(s) = \begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{(s+1)(s-3)} & \frac{2}{(s+1)(s-3)} \\ \frac{2}{(s+1)(s-3)} & \frac{s-1}{(s+1)(s-3)} \end{pmatrix}
$$

Si deve adesso antitrasformare ciascun elemento della matrice $\Phi(s)$ e quindi sviluppare in frazioni parziali le funzioni

$$
\frac{s-1}{(s+1)(s-3)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s-3}
$$

con

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \left[\frac{s-1}{(s+1)(s-3)}(s+1)\right]_{s=-1} = \frac{1}{2} \\
R_2 &= \left[\frac{s-1}{(s+1)(s-3)}(s-3)\right]_{s=3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

e

$$
\frac{2}{(s+1)(s-3)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s-3}
$$

con

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \left[\frac{2}{(s+1)(s-3)}(s+1)\right]_{s=-1} = -\frac{1}{2} \\
R_2 &= \left[\frac{2}{(s+1)(s-3)}(s-3)\right]_{s=3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Si può dunque riscrivere la matrice $\Phi(s)$ nel modo seguente

$$
\Phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-3)} & -\frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-3)} \\ -\frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-3)} & \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-3)} \end{pmatrix}
$$

e antitrasformando

$$
\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}
$$

Naturalmente è possibile calcolare $\Phi(t)$ anche utilizzando l'analisi modale (cioè attraverso il calcolo di autovalori e autovettori).

2. *Dato il sistema descritto da*

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t)
\end{aligned}
$$

determinare $\Phi(s)$ *e* $\Phi(t)$.
Soluzione. La matrice A è la seguente

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

e quindi

$$
\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s^2-2s+2} & \frac{-1}{s^2-2s+2} \\ \frac{1}{s^2-2s+2} & \frac{s-1}{s^2-2s+2} \end{pmatrix}
$$

dove

$$
p = 1 \pm j \rightarrow \alpha = 1, \omega = 1
$$

Lo sviluppo in frazioni parziali permette di ricavare

$$\frac{s-1}{(s-1-j)(s-1+j)} = \frac{R}{s-1-j} + \frac{R^*}{s-1+j}$$

$$R = \left[(s-1-j)\frac{s-1}{(s-1-j)(s-1+j)}\right]_{s=1+j} = \frac{1}{2} \rightarrow R_a = \frac{1}{2}, R_b = 0$$

e

$$\frac{1}{(s-1-j)(s-1+j)} = \frac{R}{s-1-j} + \frac{R^*}{s-1+j}$$

$$R = \left[(s-1-j)\frac{1}{(s-1-j)(s-1+j)}\right]_{s=1+j} = -\frac{j}{2} \rightarrow R_a = 0, R_b = -\frac{1}{2}$$

e

$$\frac{-1}{(s-1-j)(s-1+j)} = \frac{R}{s-1-j} + \frac{R^*}{s-1+j}$$

$$R = \left[(s-1-j)\frac{-1}{(s-1-j)(s-1+j)}\right]_{s=1+j} = \frac{j}{2} \rightarrow R_a = 0, R_b = \frac{1}{2}$$

ricordando che per ciascun termine

$$L^{-1}[F(s)] = 2e^{\alpha t}[R_a \cos(\omega t) - R_b \sin(\omega t)]$$

si scrive

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{1/2}{s-1-j} + \frac{1/2}{s-1+j} & \frac{j/2}{s-1-j} + \frac{-j/2}{s-1+j} \\ \frac{-j/2}{s-1-j} + \frac{j/2}{s-1+j} & \frac{1/2}{s-1-j} + \frac{1/2}{s-1+j} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$L^{-1}\left[\frac{1/2}{s-1-j} + \frac{1/2}{s-1+j}\right] = 2e^{t}\left[\frac{1}{2}\cos(\omega t)\right]$$

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{j/2}{s-1-j}-\frac{j/2}{s-1+j}\right] &= -2e^{t}\left[\frac{1}{2}\sin\left(\omega t\right)\right]\\
L^{-1}\left[\frac{-j/2}{s-1-j}+\frac{j/2}{s-1+j}\right] &= 2e^{t}\left[\frac{1}{2}\sin\left(\omega t\right)\right]
\end{aligned}
$$

in conclusione si ottiene

$$
\Phi\left(t\right)=e^{t}\begin{pmatrix}\cos\left(t\right) & -\sin\left(t\right)\\ \sin\left(t\right) & \cos\left(t\right)\end{pmatrix}
$$

3. *Dato il sistema descritto da*

$$
W\left(s\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{s\left(s+1\right)}\\ \dfrac{1}{s+2}\end{pmatrix}
$$

determinare $W\left(t\right)$.
Soluzione. Basta antitrasformare i singoli elementi e quindi

$$
\frac{2}{s\left(s+1\right)}=\frac{R_{11}}{s}+\frac{R_{21}}{s+1}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \left[s\frac{2}{s\left(s+1\right)}\right]_{s=0}=2\\
R_{21} &= \left[\left(s+1\right)\frac{2}{s\left(s+1\right)}\right]_{s=-1}=-2
\end{aligned}
$$

perciò

$$
W\left(s\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}\\ \dfrac{1}{s+2}\end{pmatrix}\rightarrow W\left(t\right)=\begin{pmatrix}2-2e^{-t}\\ e^{-2t}\end{pmatrix}
$$

4. *Dato il sistema descritto da*

$$
W\left(s\right)=\frac{5s^{2}+17s+2}{\left(s+2\right)\left(s-1\right)s}
$$

determinare $W(t)$.
Soluzione.

$$W(s) = \frac{5s^2+17s+2}{(s+2)(s-1)s} = \frac{R_{11}}{s+1} + \frac{R_{21}}{s-1} + \frac{R_{31}}{s}$$

Residui:

$$\begin{aligned} R_{11} &= [W(s)(s+2)]_{s=-2} = -2 \\ R_{21} &= [W(s)(s-1)]_{s=1} = 8 \\ R_{31} &= [W(s)s]_{s=0} = -1 \end{aligned}$$

perciò

$$W(s) = -\frac{2}{s+2} + \frac{8}{s-1} - \frac{1}{s} \rightarrow W(t) = -2e^{-2t} + 8e^{t} - 1$$

5. *Dato il sistema descritto da*

$$W(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^2(s-1)}$$

determinare $W(t)$.
Soluzione. Ricordando la formula generale nel caso di poli multipli

$$\begin{aligned} W(s) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k} \\ W(t) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{p_i t} \\ R_{ik} &= \frac{1}{(m_i-k)!}\frac{d^{m_i-k}}{ds^{m_i-k}}\left[W(s)(s-p_i)^{m_i}\right]_{s=p_i} \end{aligned}$$

che in questo caso $p_1 = 1, m_1 = 1, p_2 = -1, m_2 = 2$ e quindi

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{R_{11}}{s-1} + \frac{R_{21}}{s+1} + \frac{R_{22}}{(s+1)^2} \\ W(t) &= R_{11}e^{t} + R_{21}e^{-t} + R_{22}te^{-t} \end{aligned}$$

Residui:

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= [W(s)(s-1)]_{s=1} = \frac{1}{2} \\
R_{21} &= \frac{d}{ds}\left[W(s)(s+1)^2\right]_{s=-1} = \left[\frac{s^2-2s-1}{(s-1)^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2} \\
R_{22} &= \left[W(s)(s+1)^2\right]_{s=-1} = -1
\end{aligned}
$$

perciò

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - te^{-t}$$

6. *Dato il sistema descritto da*

$$W(s) = \frac{s^3 - 11s^2 - 21s - 1}{(s+1)(s-1)^2(s+3)}$$

determinare $W(t)$.
Soluzione.

$$W(t) = e^{-t} - 4te^{t} - 2e^{t} + 2e^{-3t}$$

7. *Dato il sistema descritto da*

$$W(s) = \frac{s^3 + 5s^2 - 17s + 99}{(s-4)(s+1)^2(s+3)}$$

determinare $W(t)$.
Soluzione.

$$W(t) = e^{4t} - 12te^{-t} + 6e^{-t} - 6e^{-3t}$$

8. *Dato il sistema descritto da*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \, x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_3 = -2$ *e con*

$$u(t) = e^{-t} - e^{-4t}$$

determinare la risposta nello stato (forzata + libera).
Soluzione. Per la determinazione della risposta libera si possono calcolare gli autovettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi risolvere

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue immediatamente

$$c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$$

e quindi

$$x_l\left(t\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la risposta forzata si deve trasformare l'ingresso

$$L\left[e^{-t} - e^{-4t}\right] = U\left(s\right) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4} = \frac{3}{\left(s+1\right)\left(s+4\right)}$$

e calcolare la risposta impulsiva nello stato

$$\left(sI - A\right)^{-1} B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2s+3}{(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)} \\ \frac{2}{(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)} \\ \frac{2}{s(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)} \end{pmatrix}$$

Si ottiene poi

$$X_f\left(s\right) = \left(sI - A\right)^{-1} BU\left(s\right) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \frac{2s+3}{(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)(s+4)} \\ \frac{2}{(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)(s+4)} \\ \frac{2}{s(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)(s+4)} \end{pmatrix}$$

e si antitrasforma ciascun elemento di $X_f(s)$

$$\frac{2s+3}{(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)(s+4)} = -\frac{1}{3(s+2)} + \frac{16}{21\left(s+\frac{1}{2}\right)} - \frac{2}{3(s+1)} + \frac{5}{21(s+4)}$$

$$\frac{2}{(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)(s+4)} = \frac{2}{3(s+2)} + \frac{16}{21\left(s+\frac{1}{2}\right)} - \frac{4}{3(s+1)} - \frac{2}{21(s+4)}$$

$$\frac{2}{s(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)(s+4)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{3(s+2)} - \frac{32}{21\left(s+\frac{1}{2}\right)} + \frac{4}{3(s+1)} + \frac{1}{42(s+4)}$$

da cui segue che la risposta complessiva è la seguente

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{16}{21}e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{21}e^{-4t} \\ \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{16}{21}e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{2}{21}e^{-4t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{32}{21}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{42}e^{-4t} \end{pmatrix}$$

9. *Dato il sistema descritto da*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) *determinare le matrici* $\Phi(s)$ e $W(s)$;

2) *determinare la risposta nell'uscita corrispondente all'ingresso*

$$u(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e allo stato iniziale

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{pmatrix}$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'evoluzione libera nell'uscita si può antitrasformare $C\Phi(s)$ ottenendo così

$$C\Phi(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} \end{pmatrix}$$

e

$$C\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

pertanto

$$y_l(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-3t}$$

Per calcolare la parte forzata si deve antitrasformare l'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} \to U(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Y_f(s) = W(s)\,U(s) = \frac{3s + s^2 + 1}{(s+2)(s+1)^2 s}$$

Sviluppando in frazioni parziali si ottiene

$$\frac{3s + s^2 + 1}{(s+2)(s+1)^2 s} = \frac{R_{11}}{s} + \frac{R_{21}}{s+2} + \frac{R_{31}}{s+1} + \frac{R_{32}}{(s+1)^2}$$

con

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \left[s\frac{3s+s^2+1}{(s+2)(s+1)^2 s}\right]_{s=0} = \frac{1}{2}\\
R_{21} &= \left[(s+2)\frac{3s+s^2+1}{(s+2)(s+1)^2 s}\right]_{s=-2} = \frac{1}{2}\\
R_{31} &= \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{3s+s^2+1}{(s+2)(s+1)^2 s}\right]_{s=-1} = -1\\
R_{32} &= \left[(s+1)^2\frac{3s+s^2+1}{(s+2)(s+1)^2 s}\right]_{s=-1} = 1
\end{aligned}$$

e quindi, antitrasformando

$$y_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t}$$

In conclusione, la risposta è

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = e^{-3t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t}$$

10. *Dato il sistema descritto da*

$$\begin{aligned}
C\Phi(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} & \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix}\\
B &= \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

determinare la risposta forzata nell'uscita corrispondente all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t}\\ 1-e^{-t} \end{pmatrix}$$

Soluzione. La risposta impulsiva (funzione di trasferimento) è la seguente

$$W(s) = C\Phi(s)B = \begin{pmatrix} \frac{s^2+5s+5}{(s+2)^2(s+1)} & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix}$$

e la trasformata dell'ingresso è

$$L\left[\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 1-e^{-t} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{2}{s-2} \\ \frac{1}{s}-\frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Y_f(s) = \begin{pmatrix} \frac{s^2+5s+5}{(s+2)^2(s+1)} & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{s-2} \\ \frac{1}{s}-\frac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \frac{13s^3+19s^2+6s+2s^4+4}{(s+2)^2(s+1)^2(s-2)s}$$

Sviluppando in frazioni parziali:

$$\frac{13s^3+19s^2+6s+2s^4+4}{(s+2)^2(s+1)^2(s-2)s} = \frac{R_{11}}{s} + \frac{R_{21}}{s-2} + \frac{R_{31}}{s+1} + \frac{R_{32}}{(s+1)^2} + \frac{R_{41}}{s+2} + \frac{R_{42}}{(s+2)^2}$$

dove

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \left[s\frac{13s^3+19s^2+6s+2s^4+4}{(s+2)^2(s+1)^2(s-2)s}\right]_{s=0} = -\frac{1}{2} \\
R_{21} &= \left[(s-2)\frac{13s^3+19s^2+6s+2s^4+4}{(s+2)^2(s+1)^2(s-2)s}\right]_{s=2} = \frac{19}{24} \\
R_{31} &= \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{13s^3+19s^2+6s+2s^4+4}{(s+2)^2(s+1)^2(s-2)s}\right]_{s=-1} = -\frac{5}{3} \\
R_{32} &= \left[(s+1)^2\frac{13s^3+19s^2+6s+2s^4+4}{(s+2)^2(s+1)^2(s-2)s}\right]_{s=-1} = 2 \\
R_{41} &= \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\frac{13s^3+19s^2+6s+2s^4+4}{(s+2)^2(s+1)^2(s-2)s}\right]_{s=-2} = \frac{11}{8} \\
R_{42} &= \left[(s+2)^2\frac{13s^3+19s^2+6s+2s^4+4}{(s+2)^2(s+1)^2(s-2)s}\right]_{s=-2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e quindi

$$Y_f(s) = -\frac{1}{2s} + \frac{19}{24(s-2)} - \frac{5}{3(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{11}{8(s+2)} - \frac{1}{2(s+2)^2}$$

in conclusione

$$y_f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{19}{24}e^{2t} - \frac{5}{3}e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{11}{8}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}$$

11. *Dato il sistema a tempo continuo descritto da*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) *determinare le matrici* $\Phi(s)$ e $W(s)$;

2) *determinare la risposta forzata nell'uscita corrispondente all'ingresso*

$$u(t) = 1$$

Soluzione.

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2} \\ -\frac{1}{s^2+2s+2} & \frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{s}{(s+2)(s^2+2s+2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

$$W(s) = C\Phi(s)B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^2+2s+2} \\ -\frac{1}{s^2+2s+2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2+2s+2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'ingresso è

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

e l'uscita forzata è data da

$$Y_f(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2+2s+2} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2+2s+2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{R}{s+1-j} + \frac{R^*}{s+1+j}$$

dove

$$R = \left[(s+1-j) \frac{1}{(s+1-j)(s+1+j)} \right]_{s=-1+j} = -\frac{j}{2} \rightarrow R_a = 0, R_b = -\frac{1}{2}$$

e quindi

$$y_f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizi su risposta libera e modi naturali nel dominio del tempo

1. *Effettuare l'analisi modale del sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

per

$$x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è

$$\det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 \\ 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

perciò

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -3$$

Autovettore relativo a $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a-b \\ -a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

una soluzione è

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Autovettore relativo a $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-b \\ -a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

una soluzione è

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bisogna determinare i coefficienti in modo che $x(0) = c_1 u_1 + c_2 u_2$, cioè

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1$$

per cui

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

e in uscita

$$y(t) = Cx(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}] =$$

$$y(t) = e^{-t} + 3e^{-3t}$$

2. *Effettuare l'analisi modale del sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

per

$$x(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Autovalori:

$$\lambda = 1 \pm 2j$$

In generale, per gli autovettori complessi, si può scrivere

$$A(u_a + ju_b) = (\alpha + j\omega)(u_a + ju_b)$$

avendo posto

$$\lambda = \alpha + j\omega$$

che, in forma compatta, separando la parte reale da quella immaginaria, diventa

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Con i dati del problema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, una soluzione è

$$u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bisogna determinare i coefficienti in modo che $x(0) = c_a u_a + c_b u_b$, cioè

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = c_a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava

$$c_a = \frac{1}{2}, \quad c_b = -\frac{1}{2}$$

e

$$m = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\varphi &= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

perciò

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

in conclusione

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t [\sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \begin{pmatrix} \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

e

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t [\cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right)]$$

3. *Effettuare l'analisi modale del sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x(t)\end{aligned}$$

per

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 11\lambda - 15$$

e gli autovalori

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1 \pm 2i$$

Per trovare gli autovettori si deve risolvere il sistema

$$Au_1 = 3u_1$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

e cioè

$$\begin{aligned}&a - 2c = 3a \to a = -c \\ &2a + b - 2c = 3b \to a - c = b \\ &4a - 2b + 3c = 3c \to 2a = b\end{aligned}$$

da cui si ricava subito una soluzione

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Analogamente, per gli autovettori corrispondenti ad autovalori complessi coniugati, si dieve risolvere

$$A\left[\begin{array}{cc} u_a & u_b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} u_a & u_b \end{array}\right] \left(\begin{array}{cc} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{array}\right)$$

e quindi

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} a & d \\ b & e \\ c & f \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & d \\ b & e \\ c & f \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{array}\right)$$

da cui si ricava

$$\begin{array}{l} a - 2c = a - 2d \rightarrow c = d \\ d - 2f = 2a + d \rightarrow a = -f \\ 2a + b - 2c = b - 2e \rightarrow a - c = -e \\ 2d + e - 2f = 2b + e \rightarrow b = d - f \\ 4a - 2b + 3c = c - 2f \rightarrow b = d - f \\ 4d - 2e + 3f = 2c + f \rightarrow e = d + f \end{array}$$

e quindi una soluzione è la seguente

$$u_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) + j \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)$$

Coefficienti:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) = c_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right) + c_a \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) + c_b \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)$$

da cui

$$c_1 = -1, \quad c_a = 0, \quad c_b = 2$$

e in definitiva

$$x(t) = -e^{3t} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right) + 2e^t [\sin(2t) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) + \cos(2t) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)]$$

4. *Determinare per quali valori delle condizioni iniziali, l'evoluzione libera del sistema*

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x(t)$$

è non divergente.

Soluzione. Autovalori e autovettori:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per cui l'evoluzione libera è del tipo

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e per non essere divergente, deve essere $c_2 = 0$, cioè

$$x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. *Effettuare l'analisi modale del sistema descritto dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Poichè

$$e^{At} = \gamma_0 I + \gamma_1 A$$

in questo caso

$$e^{At} = \gamma_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con le condizioni

$$\begin{aligned} e^{-2t} &= \gamma_0 - 2\gamma_1 \\ e^{-3t} &= \gamma_0 - 3\gamma_1 \end{aligned}$$

da cui

$$\gamma_0 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}, \quad \gamma_1 = -e^{-3t} + e^{-2t}$$

e quindi

$$e^{At} = \left(3e^{-2t} - 2e^{-3t}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(-e^{-3t} + e^{-2t}\right) \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-3t} & 2e^{-3t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-3t} + e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-3t} \end{pmatrix}$$

L'esponenziale di matrice si può calcolare in un altro modo, utilizzando la forma di Jordan. Autovalori e autovettori:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2, \lambda_2 = -3 \\ u_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ricordando che

$$e^{At} = U \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} U^{-1}$$

con

$$U = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-3t} & -2e^{-2t} + 2e^{-3t} \\ e^{-2t} - e^{-3t} & 2e^{-2t} - e^{-3t} \end{pmatrix}$$

6. *Effettuare l'analisi modale del sistema*

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

per

$$x\left(0\right)=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$$

Soluzione. Autovalori ed autovettori:

$$\lambda_1=1\rightarrow u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \lambda_2=-1\rightarrow u_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\ \lambda_3=2\rightarrow u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Coefficienti:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

da cui

$$c_1=\alpha, c_2=c_3=0$$

e quindi

$$x\left(t\right)=\begin{pmatrix}\alpha e^t\\0\\0\end{pmatrix}$$

7. *Effettuare l'analisi modale del sistema*

$$\dot{x}\left(t\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}x\left(t\right)$$

Soluzione. Autovalori ed autovettori:

$$\lambda_1=0\rightarrow u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \lambda_2=1\rightarrow u_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

i modi sono

$$c_1u_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},c_2e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x(0) = Ue^{\Lambda t}U^{-1}x(0) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1+e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} x(0)
\end{aligned}
$$

8. *Dato il sistema descritto da*

$$
\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x(t)
$$

determinare per quali valori delle condizioni iniziali, l'evoluzione libera risulta costante.
Soluzione. Autovalori ed autovettori

$$
\lambda_1 = 0 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 5 \rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x(0) = Ue^{\Lambda t}U^{-1}x(0) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} x(0) = \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}e^{5t} & \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{5t} \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^{5t} & \frac{6}{5} - \frac{1}{5}e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}x_1(0) + \frac{3}{5}x_2(0) + \frac{3}{5}e^{5t}(2x_1(0) - x_2(0)) \\ -\frac{2}{5}x_1(0) + \frac{6}{5}x_2(0) + \frac{1}{5}e^{5t}(2x_1(0) - x_2(0)) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

L'evoluzione libera resta costante se

$$
2x_1(0) - x_2(0) = 0
$$

e cioè per stati inziali del tipo

$$
x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}
$$

9. Dato il sistema descritto da

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) - u(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -x_3(t) + u(t) \\
y(t) &= x_3(t)
\end{aligned}
$$

(a) Determinare le matrici A, B, C, D;

(b) Determinare i modi naturali;

(c) Calcolare l'evoluzione libera nello stato e nell'uscita a partire dallo stato iniziale

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 1$$

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = 0$$

Autovalori ed autovettori:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = -2, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -1, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = -3$$

i modi naturali sono quindi

$$c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si vuole poi che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo

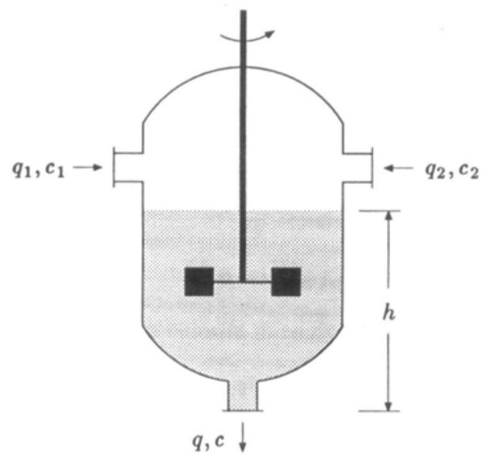
$$c_1 = 0, c_3 = 0, c_2 = 1$$

e pertanto

$$x_l(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$y_l(t) = Cx_l(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-t}$$

10. Un reattore chimico continuo a mescolamento perfetto (CSTR), isotermo, a sezione costante S, è schematizzato in figura:



dove $h(t)$ rappresenta il livello del liquido interno. Il reattore è alimentato da due *ingressi* di portata variabile $q_1(t)$ e $q_2(t)$ con concentrazioni costanti c_1 e c_2 di una stessa sostanza della quale si vuole determinare la dinamica della concentrazione $c(t)$ nel flusso d'*uscita*.

Le equazioni che caratterizzano il reattore sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= c(t) + q_1(t) + q_2(t) \\ \dot{c}(t) &= -2c(t) - 2h(t) + q_1(t) - q_2(t) \end{aligned}$$

con

$$h(0) = 0 \quad c(0) = 1;$$

Determinare:

(a) le matrici A, B, C e D di una rappresentazione con lo spazio di stato del reattore;

(b) la matrice e^{At}

(c) l'evoluzione libera nell'uscita;

(d) l'istante di tempo per cui si ha, in assenza di ingresso, la scomparsa della sostanza nel flusso d'uscita.

Soluzione. Assumendo come variabili di stato:

$$x_1 = h, x_2 = c, u_1 = q_1, u_2 = q_2, y = x_2$$

si ricava

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, D = 0$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pertanto

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} t} = U e^{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} t} U^{-1}$$

dove $\lambda = -1 \pm j$ e

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$x_l(t) = e^{At} x(0) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$y_l(t) = C x_l(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

oppure, alternativamente, si poteva calcolare

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow c_a = 0, c_b = 1$$

$$m = 1, \sin\varphi = 0, \cos\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0$$

$$x(t) = e^{-t}[\sin t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}] = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

ottenendo (ovviamente!) lo stesso risultato. Infine, per avere $x_2(t) = c(t) = 0$ deve accadere che $\cos t - \sin t = 0$ e quindi $t = \frac{\pi}{4}$.

11. Dato un sistema descritto da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

determinare:

(a) i modi naturali del sistema

(b) la matrice e^{At}

(c) l'evoluzione libera nello stato e nell'uscita a partire dallo stato iniziale

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Autovalori ed autovettori:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = -1, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -2, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = -3$$

i modi naturali sono quindi

$$c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si vuole poi che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

e pertanto

$$x_l\left(t\right) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$y_l\left(t\right) = Cx_l\left(t\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t}$$