

1. Dato il sistema non lineare tempo discreto in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) \cos(x_1(k)) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \cos(x_2(k)) \end{cases}$$

- Determinare tutti i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità attraverso il metodo indiretto di Lyapunov.
- Si studi la stabilità dei punti di equilibrio con il metodo diretto di Lyapunov.
- Si commenti su come deve agire l'ingresso sul sistema affinché esista un ingresso lineare nello stato che renda il sistema linearizzato nell'origine asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato dalla matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{2s+4}{s+1} \\ \frac{1}{(s+3)(s+2)} & \frac{1}{s+3} \end{pmatrix}$$

- Lavorare per righe o per colonne per ottenere una forma di stato di dimensione 5, riportare le matrici A, B, C e D ottenute;
- Considerando il sistema SISO che mette in relazione il solo primo ingresso e la sola terza uscita, si determinino le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema. Determinare delle basi dello spazio raggiungibile e dello spazio inosservabile.

3. Dato il sistema NON lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2^2(t) - x_1^3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1^3(t)x_2(t) + 2u(t) \end{cases}$$

ipotizzando di usare una legge di controllo del tipo $u(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$,

- si determini per quali valori di k_1 e k_2 il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile
- si determinino, se possibile, i guadagni k_1 e k_2 tali che il sistema non lineare converga all'origine, almeno a partire da un piccolo intorno, velocemente quanto e^{-3t}

4. Sia dato il sistema lineare tempo invariante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con a e b grandezze scalari

- si trovi la legge di controllo nella forma $u(t) = f(x_0, x_f, t)$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \rho u^2(t) dt$$

con $\rho > 0$ e soggetto alla condizione al contorno $x(t_f) = x_f$ con x_f dato

- si trovi la legge di controllo nella forma $u(t) = f(x_0, x_f, t)$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \frac{1}{2}(x(t_f) - x_f)S(x(t_f) - x_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \rho u^2(t) dt$$

con $\rho > 0$, $S > 0$ e x_f dato