

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_1(t) (1 + x_1^2(t) + x_2^2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = (\alpha x_1^2(t) - 1) (1 + x_2^2(t)) x_2(t) \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Si studi la stabilità dei punti di equilibrio determinati al punto precedente con il metodo indiretto di Lyapunov.
- Per gli equilibri per i quali non è stato possibile concludere al punto precedente si studi la stabilità attraverso il metodo diretto di Lyapunov e il Teorema di Krasowski.

2. Dato il sistema **tempo discreto** descritto dalle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Studiare le stabilità interna del sistema, la dimensione e le basi degli spazi di raggiungibilità e inosservabilità e la stabilità esterna (BIBO stabilità). Si determini almeno il denominatore della funzione di trasferimento del sistema.
- Dato lo stato iniziale  $x(0) = (0, 1, 0, -1)^T$ , si determinino se esistono le sequenze di ingressi che consentano di raggiungere i seguenti stati:  $x_1 = (0, 2, 2, 1)^T$ ,  $x_2 = (0, 2, -2, 2)^T$ ,  $x_3 = (1, 1, 0, 0)^T$ ,  $x_4 = (0, 1, 0, 0)^T$ . Se esistono determinare anche il numero minimo di passi per raggiungerli motivando la risposta.

3. Il candidato descriva il concetto di ellissoide di raggiungibilità e **dimostri** come lo si può utilizzare per evidenziare le direzioni dello spazio di stato lungo le quali gli spostamenti richiedono minore energia di controllo.

4. Dato il sistema tempo continuo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x = Cx$$

il candidato determini, se possibile:

- la legge di controllo  $u = K(R)x$  che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^T y + u^T R u \, dt$$

- un requisito sul valore di R affinché la dinamica a ciclo chiuso del sistema sia composta solo da modi non oscillatori
- un requisito sul valore di R affinché la dinamica a ciclo chiuso del sistema sia composta solo da modi più veloci di  $e^{-t}$ .