

1. Dato il sistema lineare **tempo discreto** rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

- (a) Studiare le seguenti proprietà strutturali del sistema: stabilità interna, raggiungibilità, controllabilità a zero, stabilizzabilità e stabilità esterna (BIBO stabilità). Si determini la funzione di trasferimento del sistema.
- (b) Determinare, se esistono, sequenze di ingressi che a partire da  $x(0) = (0, 1, 0, 0)^T$  consentano di raggiungere i seguenti punti: a)  $x_a = (1, 0, 1, -1)^T$ , b)  $x_b = (-1, 4, 1, 0)^T$ , c)  $x_c = (-1, 2, 1, 0)^T$ , d)  $x_d = (2, 1, 0, 1)^T$ . Nel caso in cui esistano si riporti anche il numero di passi necessario.
- (c) Si scrivano le condizioni nelle quali per un sistema lineare tempo invariante tempo discreto con matrici  $(A, B, C, D)$ , lo stato  $X_F$  può essere raggiunto a partire dallo stato  $x_0$ .

2. Dato il sistema non lineare definito dall'equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + \alpha \dot{y}(t) + y^3(t) = u(t)$$

- (a) Si determinino i punti di equilibrio per  $u(t) = 0$  e se ne discuta la stabilità al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  (dove possibile con il metodo indiretto, altrimenti cercando una candidata di Lyapunov opportuna).
- (b) Si commenti la stabilità nel caso di retroazione parziale dello stato  $u(t) = \alpha \dot{y}(t)$

3. Dato il sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 + \sin x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -\cos x_1 + \cos x_2 - x_3 \end{cases}$$

- (a) si determini, se possibile, una legge di controllo lineare  $u = Kx$  con  $K = [k_1, k_2, k_3]$  tale che l'origine dello spazio di stato sia un punto di equilibrio asintoticamente stabile e che, in un intorno di questo, l'errore vada a 0 almeno come  $e^{-t}$ .
- (b) "come sopra" ma con convergenza a 0 veloce almeno quanto  $e^{-2t}$ .

4. Si consideri il problema di controllo ottimo:

$$u^* = \arg \min_u \left[ h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \right]$$

soggetto al vincolo differenziale :  $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$  con  $x(t_0) = x_0$  ed  $x_0$  noto.

Se ne descriva analiticamente la soluzione giungendo alle equazioni di Eulero e si discutano i 4 casi notevoli che permettono di definire le condizioni al contorno.