UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

04 Giugno 2025

ESAME DI MECCANICA I - *Corso di Laurea in Ing. Biomedica*

ESAME DI MECCANICA TEORICA ED APPLICATA - *Corso di Laurea in Ing. Robotica e dell'Automazione*

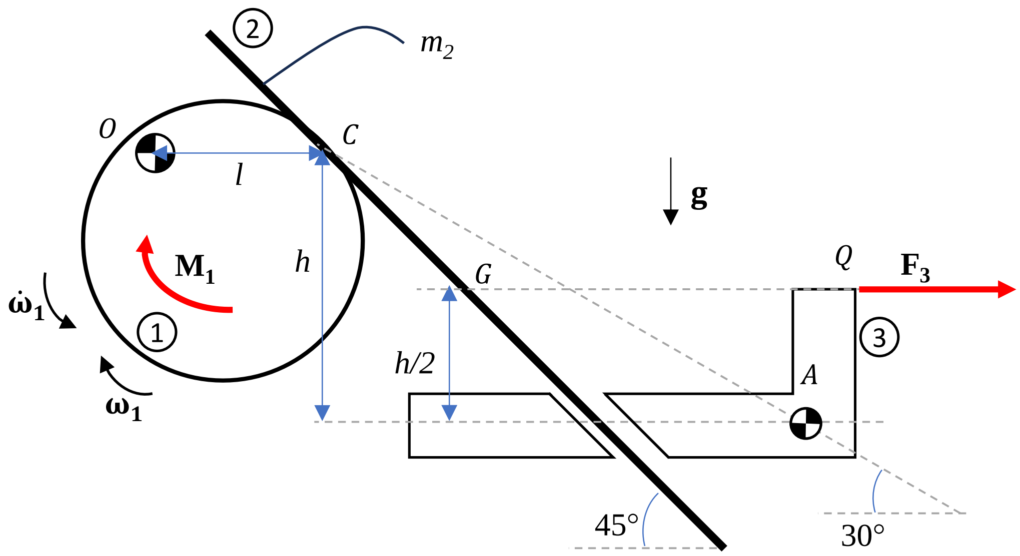
*COGNOME*_______________________ *NOME*________________________ *MATRICOLA*_______________ *CDL*______________

Esercizio 1

Si consideri il meccanismo in figura, costituito da 3 corpi. Sia nota la configurazione del meccanismo nell'atto di moto considerato, e la velocità e l'accelerazione angolare del corpo 1, rispettivamente oraria e antioraria:

1) Fare l'analisi geometrica dei vincoli e stabilire il tipo di rotolamento in *C* affinché il sistema abbia 1 gdl.
2) Che tipo di moto relativo c'è tra i corpi 1-2 e 2 e 2-3?
3) Scrivere l'eq.ne di chiusura delle velocità in forma vettoriale e scalare, in forma parametrica.
4) Risolvere graficamente il problema delle velocità.
5) Risolvere parametricamente il problema delle velocità.
6) Valutare tutti i centri delle velocità, assoluti e relativi.
7) Valutare l'accelerazione relativa dei corpi 1-2 in *C*.
8) Scrivere l'eq.ne di chiusura delle accelerazioni in forma parametrica.

Facoltativo: impostare soluzione grafica del problema delle accelerazioni.



Esercizio 2

Si consideri Il meccanismo dell'Esercizio 1 in presenza di gravità. L'unico con corpo con massa non trascurabile è il 2, con massa m_2. Il corpo 3 è caricato dall'esterno con una forza nota $\mathbf{F_3}$ applicata in Q. Per garantire l'equilibrio statico, si applica una coppia incognita $\mathbf{M_1}$ al corpo 1.

1) Fare l'analisi fisica dei vincoli.
2) valutare se il sistema è complessivamente isostatico ed esternamente isostatico.

Applicare il PSE, e valutare per ogni caso:

3) Momento M_1 in forma parametrica.
4) DCL definitivi.
5) L'asse centrale della coppia prismatica tra il corpo 2 e 3.

Esercizio 3

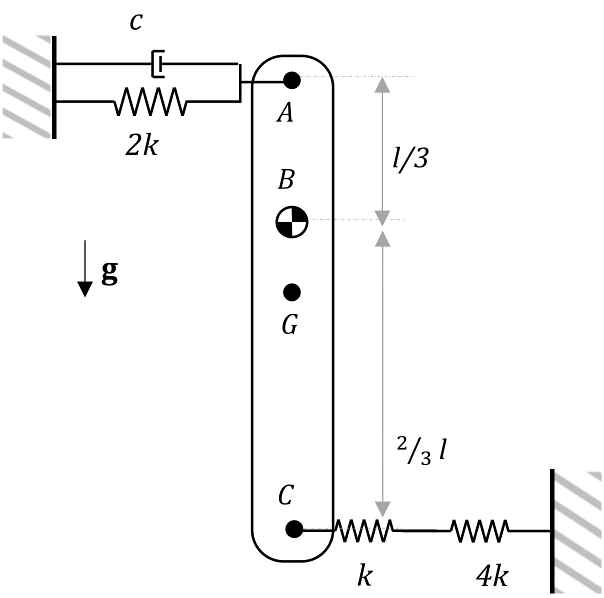
La barretta omogenea mostrata in figura, è collegata al telaio mediante due molle e smorzatore.

Si vuole studiare la dinamica della barretta nelle ipotesi di piccole oscillazioni. Siamo in presenza di gravità.

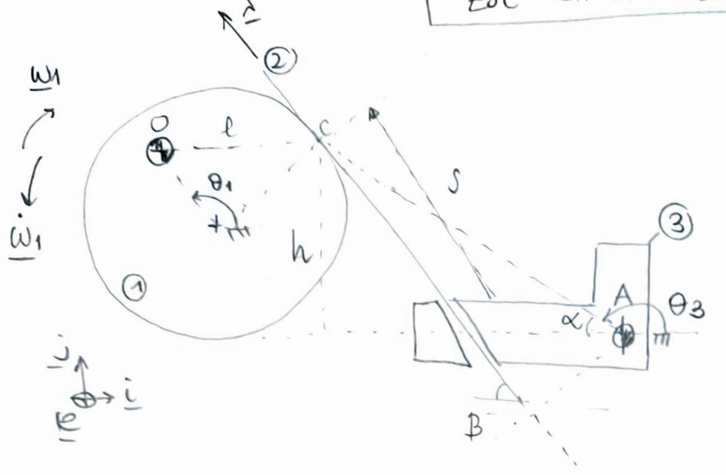
1) Specificare in modo chiaro il sistema di riferimento, la coordinata lagrangiana e le equazioni di congruenza.
2) Rappresentare tutte le forze agenti sulla barretta (DCL) per una configurazione generica.
3) Valutare l'equazione del moto in forma canonica
4) Valutare la pulsazione naturale e il fattore di smorzamento in forma parametrica e numerica: che tipo di oscillazioni si verfiicano?

Facoltativo: Trovare la legge oraria a regime e rappresentarla graficamente.

Dati: m = 1.5 kg, l=0.3 m, k=2 N/m, c = 5 N m/s.



ESE CINEMATICA



$\underline{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \underline{k}$ con $\dot{\theta}_1 < 0$

$\alpha = 30$

$\beta = 45$

$$gdl = 3\times 3 - \underset{CP}{2} - \underset{CR}{2\times 2} - x = 1$$

$x = 2$ RSS in C

$$\underset{\text{noto}}{\underline{v}_{C①}} = \underline{v}_{C②} \rightarrow C = C_r \text{ del moto relativo}$$

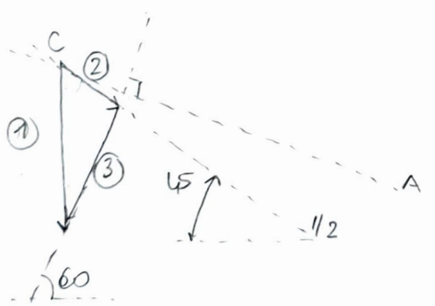
TCV Σ_3

$$\underline{v}^{ass}_{C②} = \underline{v}^{rel}_{C} + \underline{v}^{tr}_{C} = \dot{s}\underline{\lambda} + \underline{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{AC}$$

con $\underline{\omega}_3 = \underline{\omega}_2 = \dot{\theta}_3 \underline{k}$

$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_2$

$$\boxed{\underbrace{\underline{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OC}}_{1} = \underbrace{\dot{s}\underline{\lambda}}_{2} + \underbrace{\underline{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{AC}}_{3}}$$



$\dot{s} < 0$

$\omega_3 > 0$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ \ell & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{s}\begin{pmatrix} -\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ -h/tg\alpha & h & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} AC_y = h \\ AC_x = -h/tg\alpha \end{cases}$$

$$\frac{1}{tg 30} = \frac{\cos 30}{\sin 30} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

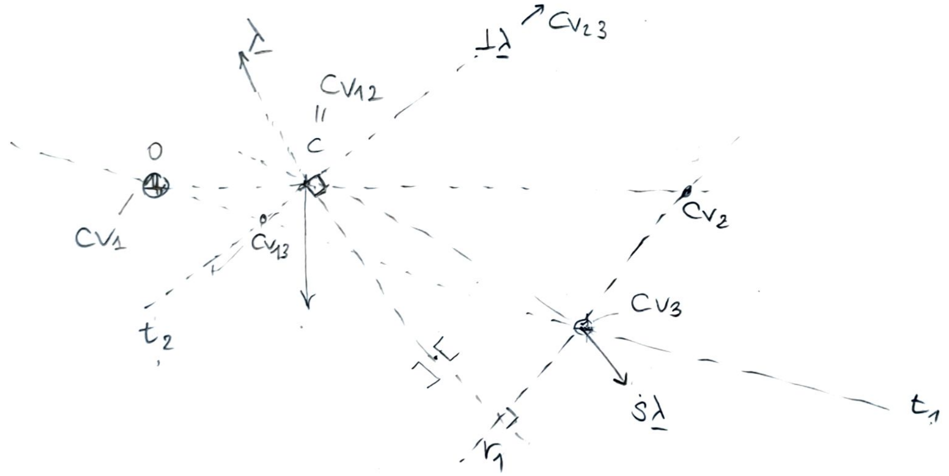
$$+\ell\omega_1\underline{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{s}\,\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{s}\,\underline{j} + -h\sqrt{3}\,\omega_3\,\underline{j} - h\,\omega_3\,\underline{i}$$

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{s} - h\,w_3 = 0 \\ +\ell\, w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{s} - h\sqrt{3}\,w_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{\ell}{\sqrt{2}} h\, w_3 = -\sqrt{2}\, h w_3 \\ +\ell\, w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\, h w_3 - h\sqrt{3}\, w_3 \end{cases}$$

$$h\, w_3 + h\sqrt{3}\, w_3 = -\ell\, w_1$$

$$\begin{cases} w_3 = -\frac{\ell}{h}\frac{1}{1+\sqrt{3}} w_1 \quad \rightarrow \quad \text{se } w_1 < 0,\ w_3 > 0 \\ \dot{s} = +\sqrt{2}\,\cancel{h}\,\frac{\ell}{\cancel{h}}\frac{1}{1+\sqrt{3}} w_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\ell\, w_1 \qquad \dot{s} < 0 \end{cases}$$



C_{V2}
C_{V13}

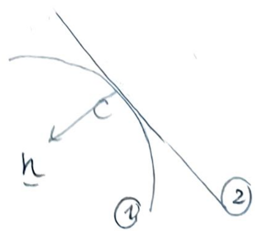
$C_{V2} \Rightarrow \quad v_{C②}$

$\Sigma_3 \quad v^{ass}_{A②} = \dot{s}\,\underline{\lambda} + \underline{0} \qquad \perp \underline{\lambda}$

$C_{V13} \Rightarrow$ | 1 3 0 $\Rightarrow$ C_{V1} C_{V3} C_{V13} t_1
1 3 2 $\Rightarrow$ C_{V12} C_{V23} C_{V13} t_2

$\Sigma_2 \quad \underline{a}_C^{rel} = \underline{a}_{Cr} = -D\, w_{rel}^2\, \underline{n}$

$$\underline{w}_{rel} = \underline{w}_1 - \underset{\underset{\underline{w}_3}{\parallel}}{\underline{w}_2} = \underset{\underset{<0}{|}}{w_1}\left(1 + \frac{\ell}{h}\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)\underline{k}$$



$$2 - 5 = 2$$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_M} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \qquad D = -r$$

$$\underline{a}_C^{rel} = +r\left(1+\frac{e}{h(1+\sqrt{3})}\right)^2 \omega_1^2 \, \underline{n} \qquad (*)$$

$$\boxed{\underline{a}_{C_2} = \underline{a}_{C_1}}$$

TR $\qquad$ TCA

TR: $\underline{a}_{C_2} = \underbrace{\dot{\omega}_1}_{>0} \underline{k} \wedge \vec{OC} - \omega_1^2 \vec{OC}$

TCA $\quad \Sigma_2 \quad \underline{a}_{C_1}^{ass} = \underline{a}_C^{rel} + \underline{a}_C^{tr} + \underline{a}_C^{cor}$

$$= (*) + \underline{a}_{C_2} + 2\, \underline{\omega}^{tr} \wedge \underbrace{\underline{v}^{rel}}_{\varnothing}$$

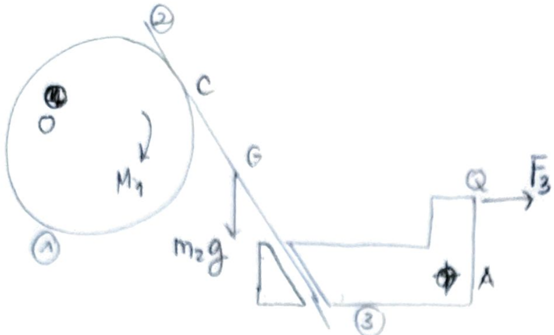
TCA $\quad \Sigma_3 \quad \underline{a}_{C_2} = \underline{a}_C^{rel} + \underline{a}_C^{tr} + \underline{a}_C^{cor}$

$$= \ddot{s}\underline{\lambda} + (\dot{\underline{\omega}}_3 \wedge \vec{AC} - \omega_3^2 \vec{AC}) + 2\, \underline{\omega}_3 \wedge \dot{s}\underline{\lambda}$$

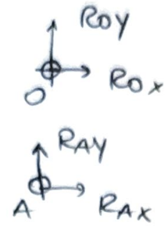
Eq^{ne} chiusura :

$$\dot{\omega}_1 \underline{k} \wedge \vec{OC} - \omega_1^2 \vec{OC} = r\left(1+\frac{e}{h(1+\sqrt{3})}\right)^2 \omega_1^2 \underline{n} + \ddot{s}\underline{\lambda} + \dot{\underline{\omega}}_3 \wedge \vec{AC} - \omega_3^2 \vec{AC} + 2\, \underline{\omega}_3 \wedge \dot{s}\underline{\lambda}$$

ESERCIZIO STATICA



•) AFV - Reaz. vinc. ester.



- REAZ. VIN. INT

•) AFA M_1 ?

F_2, $m_2 g$ note

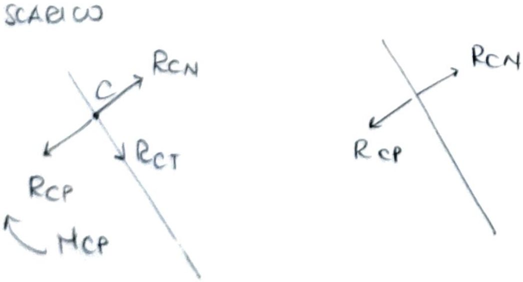
SCI : $8 + 1 = 9$ incog. $= 9$ Ep^{ni} (SI)

SEI : $3 - 5 \neq 0$ (NO)

∃ scorpi scarichi : si de appli. il PSE

•) $\boxed{\text{I CASO}}$ M_1 (F_3, Q)

(2) SCARICO

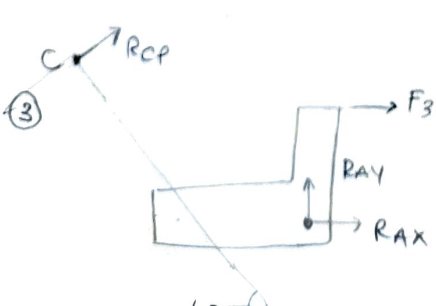


DCL PRELIM.

$M_{CP} = 0$ → AC della CP passante per C

$R_{CT} = 0$

CORPO 3



$$x: \begin{cases} + F_3 + R_{AX} + R_{CP\,x} = 0 \\ R_{AY} + R_{Cy} = 0 \end{cases}$$

y:

$$C\circlearrowleft \quad + F_3 \, h/2 + R_{Ay} \frac{h}{tg\alpha} + R_{Ax} \cdot h = 0$$

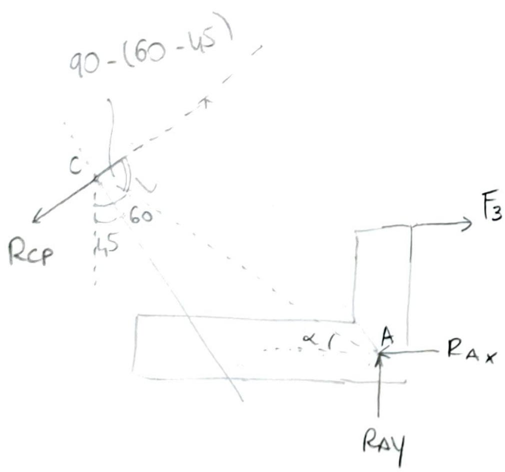
$$-h\begin{cases} +F_3 + R_{Ax} + \frac{\sqrt{2}}{2} R_{CP} = 0 \\ R_{Ay} = -R_{Cy} = -R_{CP}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ +F_3\frac{h}{2} - \sqrt{3}h\frac{\sqrt{2}}{2}R_{CP} + R_{Ax}h = 0 \end{cases}$$

$$-F_3 h - hR_{Ax} - \frac{\sqrt{2}}{2}hR_{CP} + F_3\frac{h}{2} - \sqrt{3}h\frac{\sqrt{2}}{2}R_{CP} + \cancel{R_{Ax}h} = 0$$

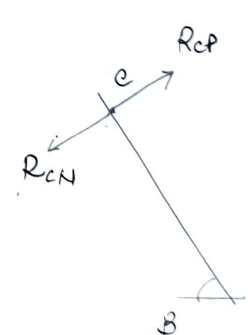
$$-F_3\frac{\cancel{h}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{h}R_{CP}(1+\sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{cases} R_{CP} = -F_3\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} \\ R_{Ay} = +\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}F_3 \\ R_{Ax} = -F_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_3\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = F_3\left(-1+\frac{1}{2(1+\sqrt{3})}\right) \end{cases}$$

$$= F_3\left(\frac{-2-2\sqrt{3}+1}{2(1+\sqrt{3})}\right) = -F_3\frac{1+2\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})2}$$



DCL DEF. 3



alternativa

$A\circlearrowleft \quad -F_3 h/2 - R_{CP} b_{CP} = 0$

$b_{CP} = AC\sin(90-(60-45)) = AC\cos(60-45)$

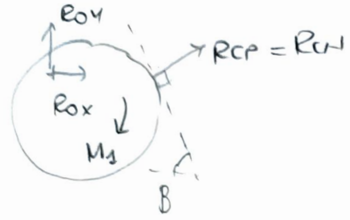
$= 2h(\cos 60\cos 45 + \sin 60\sin 45)$

$AC\sin\alpha = h$

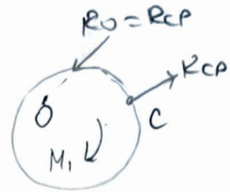
$= 2h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}h$

$$R_{CP} = -F_3 \frac{h}{2} \frac{2}{h(\sqrt{3}+1)} = -\frac{F_3}{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}$$

CORPO 1



$\Rightarrow$



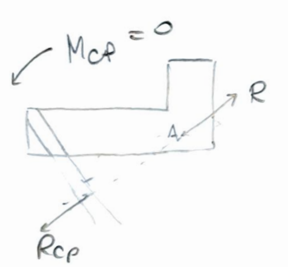
$$M_1 = |R_{CP}| \, \ell \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_1 = F_3 \frac{\ell}{(\sqrt{3}+1)\, 2}$$

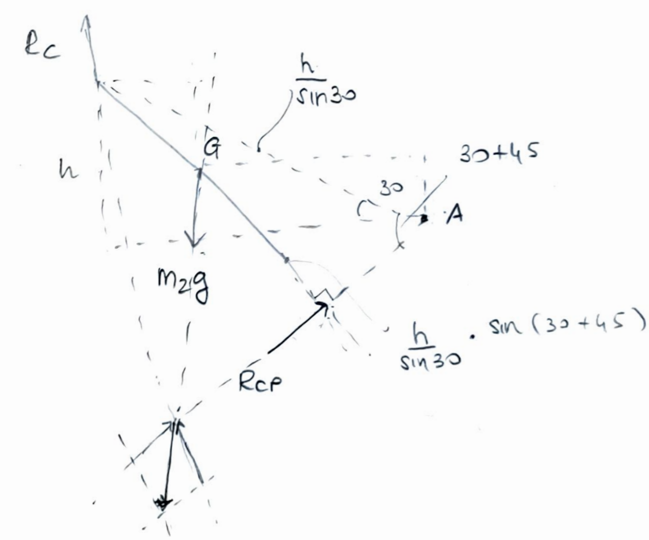
·) $\boxed{\text{II CASO}}$ $\quad \underline{M_1}, \ (\underline{m_2 g}, G)$

DCL PRELIMINARI + SOL. GRAFICA $\rightarrow$ DCL DEF

CORPO 3 $\rightarrow$ SCARICO



CORPO 2



$$\begin{cases} R_{CPx} - R_{Cx} = 0 \\ R_{CPy} - m_2 g + R_{Cy} = 0 \end{cases}$$

$$C \circlearrowleft \; -m_2 g \frac{h}{2} + R_{CP}\left(\frac{h}{\sin\alpha} \sin(\alpha+\beta)\right) = 0$$

$$2(\sin 30 \cos 45 + \cos 30 \sin 45) = \cancel{2} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$-m_2 g \frac{1}{2} + R_{CP} \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} = 0 \qquad = m_2 g \frac{1}{2(\sqrt{3}+1)}$$

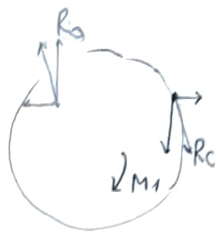
$$R_{CP} = m_2 g \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} \rightarrow R_{Cx} = R_{CP}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad R_{Cy} = -R_{CP}\frac{\sqrt{2}}{2} + m_2 g$$

$$R_{cy} = m_2 g \left(\frac{-1}{2(\sqrt{3}+1)} + 1 \right) = \frac{-1 + 2\sqrt{3} + 2}{2(\sqrt{3}+1)} m_2 g = \frac{2\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{3}+1)} m_2 g$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{3-1} m_2 g = \frac{2 \cdot 3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1}{2 \quad 2} m_2 g$$

$$= \frac{5-\sqrt{3}}{4} m_2 g$$

CORPS L

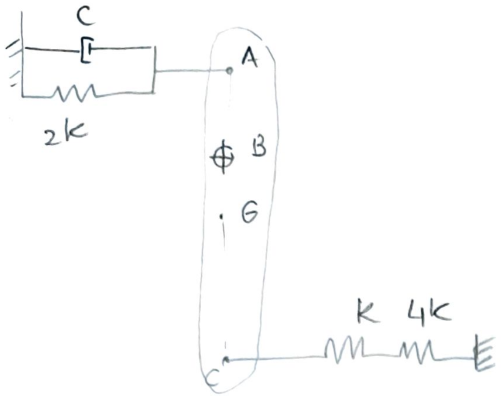


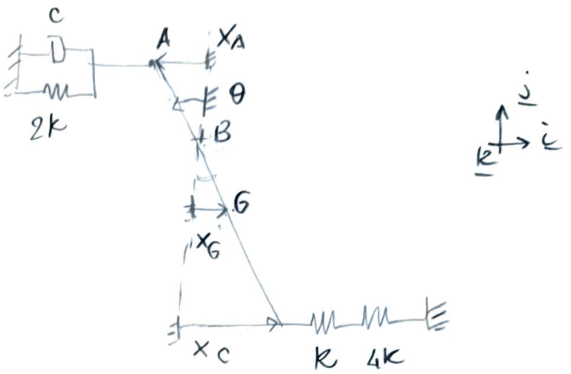
$$O \circlearrowleft \quad -M_1 - R_{cy} \, l = 0$$

$$M_1 = -R_{cy} \, l = -m_2 g l \frac{5-\sqrt{3}}{4} \quad < 0$$

$$\underline{M_1} = \left(\underbrace{F_3 \frac{l}{(\sqrt{3}+1)2}}_{>0} + \underbrace{m_2 g \; l \frac{5-\sqrt{3}}{4}}_{<0} \right)$$

OSCILLAZIONI LIBERE



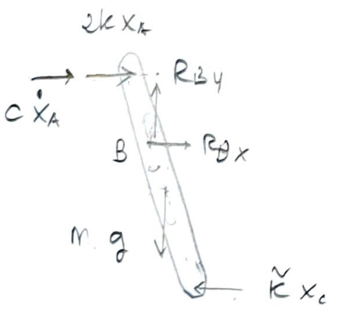


Eq.^ni congruenza =>

$$x_A = \frac{\ell}{3}\sin\theta \simeq \frac{\ell}{3}\theta$$

$$x_C = \frac{2}{3}\ell\theta$$

$$x_G = \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3}\right)\theta = \frac{\ell}{6}\theta$$



$$\tilde{k} \Rightarrow F = k x_1 = 4k x_2$$

$$F = \tilde{k}(x_1 + x_2)$$

$$1 = \tilde{k}\left(\frac{F}{k} + \frac{F}{4k}\right)$$

$$\frac{1}{\tilde{k}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{4k}$$

$$\tilde{k} = \frac{4k}{5}$$

$$B\circlearrowleft \quad (-c\dot{x}_A - 2kx_A)\frac{\ell}{3}\overset{1}{\cos\theta} - mg\frac{\ell}{6}\overset{\theta}{\sin\theta} - \frac{4}{5}kx_c\frac{2}{3}\ell\overset{1}{\cos\theta} = \underset{J_G + m\overline{BG}^2}{J_B}\,\ddot{\theta}\,\underline{k}$$

$$\left(J_G + m\left(\frac{\ell}{6}\right)^2\right)\ddot{\theta} + \frac{2\ell^2}{9}k\theta + c\frac{\ell^2}{9}\dot{\theta} + mg\frac{\ell}{6}\theta + \frac{4}{5}k\frac{4\ell^2}{9}\theta = 0$$

$$\left(J_G + m\left(\frac{\ell}{6}\right)^2\right)\ddot{\theta} + \left[\frac{26}{45}\ell^2 k + mg\frac{\ell}{6}\right]\theta + c\frac{\ell^2}{9}\dot{\theta} = 0$$

$$J_{eq}\ \ddot{\theta} + c_{eq}\dot{\theta} + k_{eq}\ \theta = 0$$

$$J_{eq} = 0.015 \qquad c_{eq} = 0.05 \qquad k_{eq} = 0.8397$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{J_{eq}}} = 7.482 \ \text{rad/s}$$

$$\xi = \frac{c_{eq}}{2 J_{eq} \omega_n} = 0.223 \quad < 1$$

oscillazioni smorzate periodiche