2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

- Trovare tutti gli stati di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
- Studiare la stabilità dell'equilibrio nell'origine con il metodo diretto di Lyapunov.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2) = \emptyset \\ -x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) = \emptyset \end{cases} \Rightarrow -x_1 + x_1^3 + x_1 x_2^2 = 0$$

$$x_1(x_1^2 - 1 + x_2^2) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1^2 = 1 - x_2^2 \end{cases}$$

$$x_1 = \pm\sqrt{1-x_2^2} \Rightarrow \text{con } 1 - x_2^2 \geq \emptyset$$

$$x_2^2 \leq 1$$

- Se $x_1 = \emptyset \Rightarrow -x_2 + x_2^3 = 0 \Rightarrow x_2(x_2^2 - 1) = \emptyset$ $\begin{cases} x_2 = \emptyset \\ x_2 = \pm 1 \end{cases}$

- Se $x_1 = \sqrt{1-x_2^2}$ :

$$-x_2 + x_2(1 - \cancel{x_2^2} + \cancel{x_2^2}) = 0 \Rightarrow -x_2 + x_2 = \emptyset \Rightarrow \emptyset = 0$$

- I punti di equilibrio sono: $P_1(0,0)$ $P_2(0,\pm 1)$ $P_3(\pm 1, \bar{x}_2)$

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} -1 + 3x_1^2 + x_2^2 & x_1 \\ x_2 & -1 + x_1^2 + 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Autovalori a parte reale negativa sistema A.S.

$$A_{lin}\big|_{0,1} = \begin{bmatrix} -1 + 3x_1^2 + x_2^2 & x_1 \\ x_2 & -1 + x_1^2 + 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Autovalore a parte reale positiva sistema non stabile.

$$A_{lin}\big|_{0,-1} = \begin{bmatrix} -1 + 3x_1^2 + x_2^2 & x_1 \\ x_2 & -1 + x_1^2 + 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Autovalore a parte reale positiva sistema non stabile.

$$A_{lin}\big|_{1,\bar{x}_2} = \begin{bmatrix} -1 + 3x_1^2 + x_2^2 & x_1 \\ x_2 & -1 + x_1^2 + 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \bar{x}_2^2 & 1 \\ \bar{x}_2 & 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix}$$

dato che abbiamo $\bar{x}_2^2$, anche se avessimo $\bar{x}_2 > 2$ il sistema risulterebbe comunque instabile poiché $3\bar{x}_2^2$ è sempre maggiore di 0.

b)

$$V = (x_1^2 + x_2^2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L}_f V = x_1(-x_1 + x_1^3 + x_1 x_2^2) + x_2(-x_2 + x_2 x_1^2 + x_2^3) =$$

$$= -x_1^2 + x_1^4 + x_1^2 x_2^2 - x_2^2 + x_2^2 x_1^2 + x_2^4 =$$

$$= -x_1^2 - x_2^2 + x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 \implies \text{d.p.} \quad \text{P.E. instabile}$$

• ESAME 03-02-2017

1. Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \max(0, x_1)\max(0, x_2) \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri e la loro stabilità.
- Si disegni qualitativamente l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.

a)

$$\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} X_2 = \emptyset \\ -X_1 - \max(0, X_1)\max(0, X_2) = \emptyset \end{cases} \Rightarrow -X_1 - \max(0, X_1)\max(0,0) = \emptyset$$

$$X_1 = \emptyset$$

. L'unico punto di equilibrio è (0,0).

$$V = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)$$

$$L_f V = X_1(X_2) + X_2(-X_1 - \max(0,X_1)\max(0,X_2)) =$$

$$= \cancel{X_1X_2} - \cancel{X_1X_2} - X_2\max(0,X_1)\max(0,X_2) \Rightarrow \begin{cases} \emptyset \text{ intorno all'origine} \\ -X_2(X_1 \cdot X_2) = -X_2^2X_1 \quad \text{è s.d.n.} \end{cases}$$

Quindi (0,0) è un punto di equilibrio stabile.

• Sfrutto Lasalle:

Devo verificare se l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine:

$$R: \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid L_f V(x) = 0 \} = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \emptyset \\ \dot{X}_1 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = \emptyset \\ \dot{X}_2 = \emptyset \end{cases}$$

P(0,0) è A.S.

b)

• ESAME 22-02-2017

1. Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - ax_2 \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri per $u = 0$ al variare di $a \geq 0$ e se ne studi la stabilità locale.
- Per il caso $u = 0$ e $a = 0$ si determini una candidata di Lyapunov che ne determini le proprietà di stabilità.
- Per $a = 1$ si determini un ingresso $u$ funzione degli stati che renda l'origine del sistema controllato globalmente asintoticamente stabile.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_1^3 - x_2 = \emptyset \\ x_1 - ax_2 = 0 \Rightarrow x_1 = ax_2 \end{cases} \quad -3ax_2 + a^3x_2^3 - x_2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x_2(a^3x_2^2 - 3a - 1) = \emptyset$$

$$x_2 = \emptyset$$

$$x_2^2 = \frac{3a+1}{a^3} \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{3a+1}{a^3}}$$

Quindi se $x_2 = 0$ anche $x_1 = 0$. Se $x_2 = \sqrt{\frac{3a+1}{a^3}}$, $x_1 = a\cdot\sqrt{\frac{3a+1}{a^3}}$ e $x_1 = -a\cdot\sqrt{\frac{3a+1}{a^3}}$.

I punti di equilibrio sono: $P_1(0,0)$, dato che $a \geq 0$ questi due $P_2\left(a\sqrt{\frac{3a+1}{a^3}}, \sqrt{\frac{3a+1}{a^3}}\right)$ $P_3\left(-a\sqrt{\frac{3a+1}{a^3}}, \sqrt{\frac{3a+1}{a^3}}\right)$ non possono essere punti di equilibrio.

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} -3+3x_1^2 & -1 \\ 1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3a+1 \Rightarrow$$ se $a>0$ segni concordi, punto di equilibrio Asintoticamente Stabile.

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow L_f V = x_1(-3x_1 + x_1^3 - x_2) + x_2(x_1 - ax_2) =$$

$$= -3x_1^2 + x_1^4 - \cancel{x_1x_2} + \cancel{x_1x_2} - ax_2^2 =$$

Vicino all'origine $x_1^4$ è molto più piccolo di $x_1^2$, quindi: $\Rightarrow L_f V = -3x_1^2 - ax_2^2 \Rightarrow$ il sistema è A.S in un intorno nell'origine.

b)

$u = \emptyset$ e $a = \emptyset$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow L_f V = x_1(-3x_1 + x_1^3 - x_2) + x_2(x_1) =$$

$$= -3x_1^2 + x_1^4 - \cancel{x_1x_2} + \cancel{x_1x_2} =$$

$$= -3x_1^2 + x_1^4 \Rightarrow x_1^4 \ll x_1^2 \Rightarrow L_f V = -3x_1^3 \Rightarrow \text{Sistema A.S.}$$

c)

$a = 1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \implies L_f V = x_1(-3x_1 + x_1^3 - x_2 + u) + x_2(x_1 - x_2) =$$

$$= -3x_1^2 + x_1^4 - \cancel{x_1 x_2} + x_1 \cdot u + \cancel{x_1 x_2} - x_2^2$$

$$u = -x_1^3 \implies L_f V = -3x_1^2 + \cancel{x_1^4} - \cancel{x_1^4} - x_2^2 = -3x_1^2 - x_2^2 \implies d.m.$$

• ESAME 12-06-2017

1. Dato il sistema non lineare tempo invariante e tempo discreto caratterizzato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= \frac{1}{2}x_1(k) + x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -\frac{1}{2}x_2(k) + \epsilon x_2^2(k) \end{cases},$$

- Si determinino al variare del parametro $\epsilon \in \mathbb{R}$ gli equilibri del sistema.
- Per ogni equilibrio determinato si discuta, sempre al variare del parametro $\epsilon \in \mathbb{R}$, la stabilità del sistema non lineare con il metodo indiretto di Lyapunov (metodo del linearizzato).
- Si enunci il Teorema diretto di Lyapunov per sistemi tempo discreto.

a)

$$\begin{cases} X_1(k+1) = X_1(k) \\ X_2(k+1) = X_2(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(k) = \frac{1}{2}X_1(k) + X_1(k)X_2(k) \\ X_2(k) = -\frac{1}{2}X_2(k) + \epsilon X_2^2(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}X_1(k) + X_1(k)X_2(k) = \emptyset \\ -\frac{3}{2}X_2(k) + \epsilon X_2^2(k) = \emptyset \Rightarrow X_2(k)\left(-\frac{3}{2} + \epsilon X_2(k)\right) = \emptyset \end{cases}$$

Se $X_2(k) = \emptyset$ $\quad X_1(k) = \emptyset$

Se $X_2(k) = \frac{3}{2\epsilon}$ (con $2\epsilon \neq \emptyset \Rightarrow \epsilon \neq \emptyset$)

$-\frac{X_1(k)}{2} + X_1(k)\cdot\frac{3}{2\epsilon} = \emptyset$

$X_1(k)\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2\epsilon}\right) = \emptyset \Rightarrow X_1(k) = \emptyset$

• I punti di equilibrio sono: $P_1(0,0)$ $P_2(0, \frac{3}{2\epsilon})$

b)

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} 1/2 + X_2 & X_1 \\ \emptyset & -1/2 + 2\epsilon X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)$$

• Autovalori all'interno del cerchio unitario.
Punto di equilibrio A.S.

$$A_{lin}\big|_{0,\frac{3}{2\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1/2 + X_2 & X_1 \\ \emptyset & -1/2 + 2\epsilon X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{3}{2\epsilon} & \emptyset \\ \emptyset & -\frac{1}{2}+\cancel{2\epsilon}\cdot\frac{3}{\cancel{2\epsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{3}{2\epsilon} & \emptyset \\ \emptyset & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$$

fuori dal cerchio unitario.
Punto di equilibrio instabile.

c)

Dato un sistema tempo invariante autonomo, per cui $x^+ = f(x)$, se per esso esiste una candidata di Lyapunov per cui:

1. $\Delta_f \cdot V \leq \emptyset$ allora l'origine è un punto di equilibrio stabile.
2. $\Delta_f \cdot V < \emptyset$ allora l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
3. $\Delta_f \cdot V > \emptyset$ allora l'origine è un punto di equilibrio instabile.

2. Dato il sistema non lineare definito dall'equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + \alpha\dot{y}(t) + y^3(t) = u(t)$$

(a) Si determinino i punti di equilibrio per $u(t) = 0$ e se ne discuta la stabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (dove possibile con il metodo indiretto, altrimenti cercando una candidata di Lyapunov opportuna).

(b) Si commenti la stabilità nel caso di retroazione parziale dello stato $u(t) = \alpha\dot{y}(t)$

a)

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 - x_1^3 \end{cases} \qquad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \emptyset \\ -\alpha x_2 - x_1^3 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow x_1 = \emptyset$$

· l'unico punto di equilibrio è $P(0,0)$.

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ -3x_1^2 & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & -\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \text{non posso concludere}$$

$$V(x) = x_1^4 + 2x_2^2$$

$$L_f \cdot V(x) = 4x_1^3(x_2) + 4x_2(-\alpha x_2 - x_1^3) = \cancel{4x_1^3 x_2} - 4\alpha x_2^2 - \cancel{4x_2 x_1^3} =$$
$$= -4\alpha x_2^2$$

• Sfrutto Lasalle:

Devo verificare se l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine:

$$R : \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid L_f \cdot V(x) = 0 \} = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$P(0,0)$ è A.S.

b)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\cancel{\alpha x_2} - x_1^3 + \cancel{\alpha x_2} \end{cases} \qquad P.E \Rightarrow P(0,0)$$

$$V(x) = x_1^4 + 2x_2^2$$

$$L_f \cdot V(x) = 4x_1^3(x_2) + 4x_2(-x_1^3) = 4x_1^3 x_2 - 4x_1^3 x_2 = \emptyset$$

Conclusione $\Rightarrow$ non è possibile stabilizzare il punto di equilibrio.

2. Dato il sistema non lineare scritto in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \left(2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \left(2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) x_2(t) + x_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

(a) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità sia con il metodo indiretto basato sul linearizzato che determinando una candidata di Lyapunov opportuna.

(b) Determinare se esistono cicli limite ed eventualmente caratterizzarli e stabilirne le proprietà di stabilità considerando una opportuna candidata di Lyapunov.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_1^3 - x_1 x_2^2 - x_2 = \emptyset \\ 2x_2 - x_1^2 x_2 - x_2^3 + x_1 = \emptyset \end{cases}$$

l'unico punto di equilibrio è $P(0,0)$.

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} 2 - 3x_1^2 - x_2^2 & -2x_1x_2 - 1 \\ -2x_1x_2 + 1 & 2 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 5 \quad Tr(A) = 4$$

Autovalori a parte reale positiva quindi P.E. instabile.

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\nabla f \cdot V = x_1\left(x_1(2 - x_1^2 - x_2^2) - x_2\right) + x_2\left(x_2(2 - x_1^2 - x_2^2) + x_1\right) =$$

$$= x_1^2(2 - x_1^2 - x_2^2) - \cancel{x_1 x_2} + x_2^2(2 - x_1^2 - x_2^2) + \cancel{x_1 x_2} =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2)(2 - x_1^2 - x_2^2)$$

Se sono vicino all'origine $(2 - x_1^2 - x_2^2)$ è positivo e quindi $V(x)$ è d.p. e $P(0,0)$ è instabile.

b)

2. Dato il sistema

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = (a^2 - 1)x_1 - a x_2 - 2x_2^3 + u$$

(a) per $u = 0$ determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro $a$;

(b) per $u = 0$, studiare la stabilità del sistema nell'origine per $a \neq 1$;

(c) Per $a = 1$ si determini un ingresso $u$ non nullo che renda l'origine asintoticamente stabile.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \varnothing \\ (a^2-1)x_1 - a x_2 - 2x_2^3 = \varnothing \end{cases} \Rightarrow x_1(a^2-1) = \varnothing$$

$$x_1 = \varnothing$$

· l'unico punto di equilibrio è $P(0,0)$.

b)

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} \varnothing & 1 \\ a^2-1 & -a-6x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & 1 \\ a^2-1 & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -a^2+1 \Rightarrow \text{con } a \neq 1 \text{ è sempre } < \varnothing$$

P.E. instabile.

c)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 2x_2^3 + u \end{cases}$$

$$V = x_1^2 + x_2^2$$

$$L_f V = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_2 - 2x_2^3 + u) =$$

$$= 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 4x_2^3 + 2x_2 \cdot u = \qquad u = -x_1 + 2x_2^2$$

$$= \cancel{2x_1x_2} - 2x_2^2 - \cancel{4x_2^3} - \cancel{2x_1x_2} + \cancel{4x_2^3} = -2x_2^2 \Rightarrow \text{è d.n.} \quad P(0,0) \text{ è A.S.}$$

• Sfrutto Lasalle:

Devo verificare se l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine:

$$R: \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid L_f V(x) = 0 \} = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \varnothing \\ x_1 = \varnothing \end{cases}$$

$P(0,0)$ è A.S.

2. Dato il sistema

$$\dot{x_1} = 2x_2^2 - x_1^3 - x_1$$
$$\dot{x_2} = -2x_1^3 x_2 + u$$

(a) Per $u = 0$, si determinino gli equilibri e se ne studino le proprietà di stabilità;

(b) Si determinino tutti i coefficienti $k_1$, $k_2$ di un ingresso $u(x) = k_1x_1 + k_2x_2$ che renda l'origine equilibrio asintoticamente stabile anche per il sistema linearizzato.

(c) Si fornisca l'enunciato del teorema utilizzato per determinare la proprietá di stabilitá dell'origine al primo punto.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} 2x_2^2 - x_1^3 - x_1 = \varnothing \\ -2x_1^3 x_2 = \varnothing \Rightarrow x_2 = \varnothing \end{cases}$$

$$x_1^3 - x_1 = \varnothing$$
$$x_1(x_1^2 - 1) = 0 \quad x_1 = \varnothing, \quad x_1 = \pm 1$$

• I punti di equilibrio sono $P_1(0,0)$ $P_2(1,0)$ $P_3(-1,0)$

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} -1-3x_1^2 & 4x_2^2 \\ -6x_1^2 x_2 & -2x_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Non posso concludere}$$

$$A_{lin}|_{1,0} = \begin{bmatrix} -1-3x_1^2 & 4x_2^2 \\ -6x_1^2 x_2 & -2x_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 8, \ Tr(A) = -6 \quad P_2(1,0) \text{ è A.S.}$$

$$A_{lin}|_{1,0} = \begin{bmatrix} -1-3x_1^2 & 4x_2^2 \\ -6x_1^2 x_2 & -2x_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 8, \ Tr(A) = -6 \quad P_3(-1,0) \text{ è A.S.}$$

b)

$$u = K_1 x_1 + K_2 x_2$$

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} -1-3x_1^2 & 4x_2^2 \\ -6x_1^2 x_2 + K_1 & -2x_1^3 + K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \emptyset \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{con} \quad K = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

P(0,0) è stabile

1. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + u \end{cases}$$

(a) Data $u = 0$ trovare gli equilibri del sistema e discutere la stabilità dell'origine.

(b) Determinare una retroazione dello stato $u(x)$ che renda il sistema asintoticamente stabile nell'origine.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_1x_2^2 = \emptyset \\ x_1^2 x_2 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow -x_1(1+2x_2^2) = 0$$

se $x_1 = \emptyset$, $x_2$ è qualsiasi

$x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$, $x_1 = \emptyset \Rightarrow$ NON VA BENE

- l'unico punto di equilibrio è $P(0, \bar{x}_2)$, $P(0,0)$

$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2^2)$

$$L_f V = x_1(-x_1 - 2x_1x_2^2) + 2x_2(x_1^2 x_2) =$$

$$= -x_1^2 - 2x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2^2 = -x_1^2 \Rightarrow \text{s.d.n.}\ P(0,0) \text{ è semplicemente stabile.}$$

- Sfrutto Lasalle:

Devo verificare se l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine:

$$R : \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid L_f V(x) = 0 \} = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \emptyset \\ \dot{x}_1 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \emptyset = \emptyset \\ \dot{x}_2 = \emptyset \end{cases}$$

$P(0,0)$ è A.S.

b)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + B \cdot K) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A + B\cdot K - \lambda I) = -K_2 - K_2\lambda + \lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda(1 - K_2) - K_2$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} -K_2 = 1 \\ 1 - K_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \end{bmatrix} x$$

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2 \sin x_1 + u \end{cases}$$

(a) Determinare i punti di equilibrio del sistema per $u = 0$ e discuterne la stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov.

(b) Determinare un ingresso $u$ che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} -x_1 x_2 = \varnothing \implies \text{se } x_2 = 0 \text{ anche } x_1 = 0 \\ x_1^2 + x_2 \sin x_1 = \varnothing \end{cases}$$

- I punti di equilibri è l'origine $P(0,0)$, $P(\bar{x}_1, 0)$

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} -x_2 & -x_1 \\ 2x_1 + x_2 \cos x_1 & \sin x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Non posso concludere nulla}$$

$$A_{lin}\big|_{\bar{x}_1,0} = \begin{bmatrix} -x_2 & -x_1 \\ 2x_1 + x_2 \cos x_1 & \sin x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{x}_1 \\ 2\bar{x}_1 & \sin \bar{x}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Non posso concludere}$$

b)

$$V = x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{d}{dt}V = 2x_1(-x_1 x_2) + 2x_2(x_1^2 + x_2 \sin x_1 + u) = \cancel{-2x_1^2 x_2} + \cancel{2x_1^2 x_2} + 2x_2^2 \sin x_1 + 2x_2 u =$$
$$= 2x_2^2 \sin x_1 + 2x_2 u$$

$$u = -x_2 \sin x_1 - x_2$$

$$\frac{d}{dt}V = 2x_2^2 \sin x_1 + 2x_2(-x_2 \sin x_1 - x_2) = \cancel{2x_2^2 \sin x_1} - \cancel{2x_2^2 \sin x_1} - 2x_2^2 =$$
$$= -2x_2^2 \Rightarrow \text{è s.d.n.}$$

- Applico Lasalle:

$$R: \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid \tfrac{d}{dt}V(x) = 0 \} = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = \varnothing \\ \dot{x}_2(t) = \varnothing \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \varnothing \\ 0 = x_1^2 \end{cases}$$

$P(0,0)$ è A.S.

2. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} &= (y+3)^3 \\ \dot{y} &= -ax \end{cases}$$

(a) Determinare gli stati di equilibrio del sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(b) Descrivere gli andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi per $a \leq 0$.

(c) Discutere la stabilità degli equilibri al variare di $a$.

a)

$$\dot{x} = \dot{y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (y+3)^3 = 0 \\ -ax = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y^3 + 9y^2 + 27y + 27 = 0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 9 | 27 | 27 |
| -3 | | -3 | -18 | -27 |
| | 1 | 6 | 9 | 0 |

$\cdot)$ $(y+3)(y^2+6y+9) = 0$

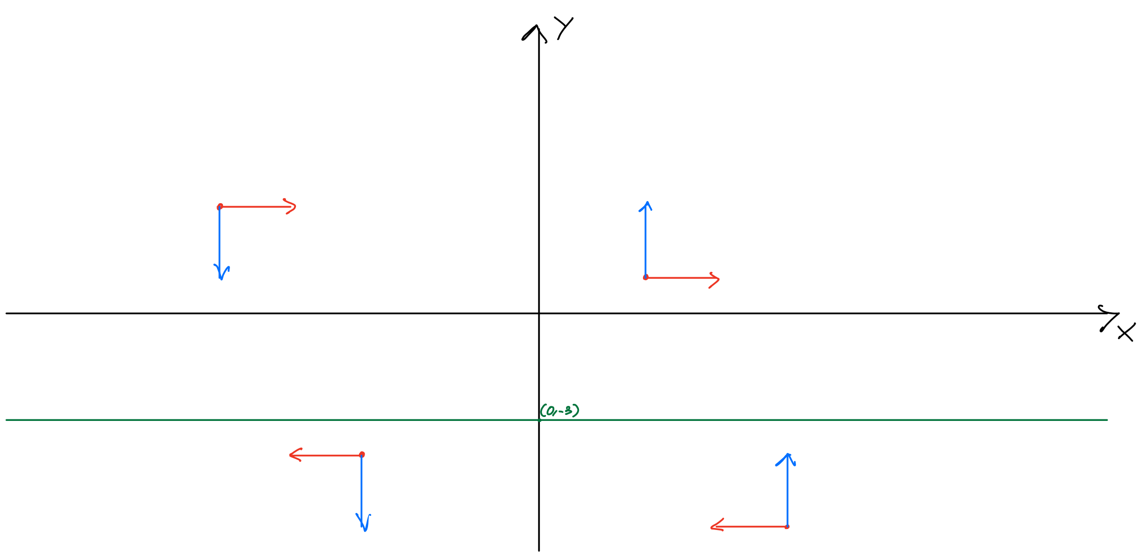
1. $y = -3$
2. $y^2+6y+9 = 0 \quad \frac{\Delta}{4} = 9-9 = 0 \Rightarrow y_{1/2} = -3$

I punti di equilibrio sono:
- $a = 0 \Rightarrow P(\bar{x}_1, -3)$
- $a \neq 0 \Rightarrow P(0, -3)$

b)

1. $\dot{x} = (y+3)^3 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} > 0 \\ \dot{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > -3 \\ y < -3 \end{cases}$

2. $\dot{y} = -ax$ (per $a<0$) $\Rightarrow \begin{cases} \dot{y} > 0 \\ \dot{y} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$



c)

$$A_{lin}|_{0,-3} = \begin{bmatrix} \emptyset & 3(y+3)^2 \\ -a & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 3y^2+18y+27 \\ -a & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 27-54+27 \\ -a & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ -a & \emptyset \end{bmatrix}$$

Non posso concludere.

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = (x_2+3)^3 \\ \dot{x}_2 = -a x_1 \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\alpha f \cdot V(x) = x_1 (x_2+3)^3 + x_2(-a x_1)$$

• ESAME 02-07-2018

1. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_2^4 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_1^3 \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio ad ingresso nullo e studiarne le proprietà di stabilità.
- Verificare formalmente che esiste un ingresso lineare nello stato che rende il punto $(-1, -1)$ un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Dopo averne determinato l'esistenza, trovarlo.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} -x_2 - x_2^4 = \emptyset \quad x_2(x_2^3+1) = \emptyset \\ -x_2^3 + x_1^3 = \emptyset \end{cases}$$

$x_2 = \emptyset$, $x_1 = \emptyset$

$x_2^3 = -1 \Rightarrow (x_2+1)(x_2^2 - x_2 + 1) = 0$

$x_2 = -1$

$\Delta = 1 - 4 = -3 \quad x_2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

NON VA BENE

• Se $x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$

• Se $x_2 = \emptyset \Rightarrow x_1 = \emptyset$

I punti di equilibrio sono: $P(0,0)$ $P(-1,-1)$

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} \emptyset & -1-4x_2^3 \\ 3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & -1 \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Non posso concludere}$$

$$A_{lin}|_{-1,-1} = \begin{bmatrix} \emptyset & -1-4x_2^3 \\ 3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -12 \Rightarrow \text{Punto di equilibrio instabile.}$$

$$V(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$L_f V(x) = x_1^3(-x_2 - x_2^4) + x_2(-x_2^3 + x_1^3) =$$

$$\cancel{-x_1^3 x_2} - x_1^3 x_2^4 - x_2^4 + \cancel{x_1^3 x_2} = -x_2^4(-x_1^3 - 1)$$

• Applico Lasalle - Krasowski:

Devo verificare se l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine:

$$R: \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid L_f V(x) = 0 \} = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$P(0,0)$ è A.S.

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1-4x_2^3 \\ 3x_1^2 & -3x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2$$ Quindi esiste $u$ tale che $P(-1,-1)$ è A.S

$$(A + B \cdot K) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} K_1 & 3+K_2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A + B \cdot u - \lambda I) = \begin{bmatrix} K_1 - \lambda & 3+K_2 \\ 3 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (K_1-\lambda)(-3-\lambda) - 3(3+K_2) =$$

$$= -3K_1 - K_1\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 9 - 3K_2 =$$

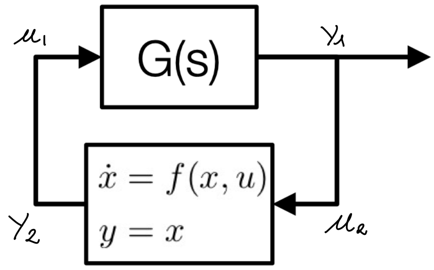
$$= \lambda^2 + \lambda(3-K_1) - 9 - 3K_2 - 3K_1$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} -9 - 3K_2 - 3K_1 = 1 \Rightarrow -9 - 3K_2 - 3 = 1 \Rightarrow K_2 = -\frac{13}{3} \\ 3 - K_1 = 2 \Rightarrow K_1 = 1 \end{cases} \qquad u = \begin{bmatrix} 1 & -13/3 \end{bmatrix} x$$

· ESAME 23-07-2018

1. Si consideri il sistema tempo continuo costituito dallo schema a blocchi riportato in figura,




dove $G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ e $f(x,u) = -x - \sin^2 x + u$.

- Determinare il sistema in forma di stato.
- Determinare gli equilibri del sistema e studiarli con il metodo indiretto.
- Enunciare il Corollario di LaSalle–Krasowskii.

a)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \sin^2 x + u \\ y = x \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1} \Rightarrow A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da qui ho:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax + B\cdot u = x_2 \\ \dot{x}_2 = A\cdot x + B\cdot u = -x_1 - x_2 + u_1 \end{cases}$$

con $\begin{cases} u_1 = y_2 \\ u_2 = y_1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = C\cdot x = (1 \;\; 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$

$y = x \Rightarrow y_2 = x_3 = u_1$

$f(x,u) = -x - \sin^2 x + u_2$

$\hookrightarrow \dot{x}_3 = -x_3 - \sin^2 x_3 + u_2$

Il mio sistema completo sarà:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 - \sin^2 x_3 + x_1 + x_2 \end{cases}$$

b)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \\ -x_3 - \sin^2 x_3 + x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \cancel{-x_1} - \sin^2 x_1 + \cancel{x_1} = 0 \end{cases}$$

$$\sin^2 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \arcsin 0 = \emptyset$$

• l'unico punto di equilibrio è $P(0,0,0)$

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 & \emptyset \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-2\sin(x_3)\cos(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda \cdot I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 & -1 & -1-\lambda \\ 1 & 1 & -1-\lambda & 1 & 1 \end{array}\right] = -\lambda(-1-\lambda)^2 \cancel{+1} \cancel{+\lambda} \cancel{-1} \cancel{-\lambda} = 0$$

$$\lambda(-1-\lambda)^2 = \emptyset \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = \emptyset \\ \lambda = -1 \end{matrix}$$

• Non posso concludere.

c)

COROLLARIO DI LASALLE - KRASOWSI:

Se l'origine è punto di equilibrio per il sistema $\dot{x} = f(x)$, se $V(x)$ è d.p e $\frac{d}{dt} V(x)$ è s.d.n., e se, dato l'insieme $R = \{ x \in \Omega \mid \frac{d}{dt} V(x) = \emptyset \}$, l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine come traiettoria, $M \subseteq \mathbb{R}$ risulta $M \equiv \{\emptyset\}$, allora $P(0,0)$ è un punto di equilibrio A.S.

• ESAME 17-09-2018

1. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare rappresentato in forma di stato da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1(x_1^2+x_2^2)+x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1+u \end{cases}$$

- Determinare su $u$ la condizione di esistenza di equilibri (reali).
- Per $u=0$ si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

a)

$$\dot{X}_1 = \dot{X}_2 \Rightarrow \begin{cases} -X_1(X_1^2+X_2^2)+X_2 = \varnothing \\ -X_1+u=\varnothing \Rightarrow X_1 = u \end{cases}$$

$$-u(u^2+X_2^2)+X_2=\varnothing \Rightarrow -u^3-uX_2^2+X_2=0$$

$$uX_2^2-X_2+u^3=\varnothing \qquad \Delta = 1-4u^4 \geq \varnothing$$

$$1-4u^4 \geq \varnothing \Rightarrow u^4 \leq \frac{1}{4}$$

$$u \leq \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \Rightarrow u \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b)

$$\dot{X}_1 = \dot{X}_2 \Rightarrow \begin{cases} -X_1(X_1^2+X_2^2)+X_2 = \varnothing \\ -X_1 = \varnothing \Rightarrow X_1 = \varnothing \text{ e } X_2 = \varnothing \end{cases}$$

l'unico punto di equilibrio è $P(0,0)$.

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} -3X_1^2-X_2^2 & -2X_1X_2+1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=1 \quad Tr(A)=\varnothing$$

Non posso concludere

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$L_f V = X_1(-X_1^3-X_1X_2^2+X_2)+X_2(-X_1) =$$

$$= -X_1^4-X_1^2X_2^2+\cancel{X_1X_2}-\cancel{X_1X_2} = -X_1^2(X_1^2+X_2^2) \qquad \text{S.D.N.}$$

- Applico Lasalle:

Devo verificare se l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine:

$R : \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid \alpha_f \cdot V(x) = 0 \} = \{ (0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \emptyset \\ \dot{x}_1 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \emptyset \\ \dot{x}_2 = \emptyset \end{cases}$

P(0,0) è A.S.

• ESAME 29-11-2018

1. Si consideri il sistema tempo discreto non lineare rappresentato in forma di stato da

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= ax_2(k) - x_2^3(k) \\ x_2(k+1) &= -ax_1(k) + x_1^3(k) + u \end{cases}$$

- Determinare, per $u = 0$, le proprietà di stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- Determinare un ingresso lineare che renda l'origine del sistema asintoticamente stabile per $a = -1$.
- Si determini una candidata di Lyapunov che verifica le proprietà di stabilità del sistema retroazionato.

a)

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} \varnothing & a - 3x_2^2 \\ -a + 3x_1^2 & \varnothing \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & a \\ -a & \varnothing \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Non posso concludere}$$

$$V(x) = (x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Delta V(x) = (x_1(k+1))^2 + (x_2(k+1))^2 - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= (ax_2 - x_2^3)^2 + (-ax_1 + x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= a^2x_2^2 - \cancel{2ax_2^4} + \cancel{x_2^6} + a^2x_1^2 - \cancel{2ax_1^4} + \cancel{x_1^6} - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= a^2x_2^2 + a^2x_1^2 - x_1^2 - x_2^2 = (x_1^2 + x_2)(a^2 - 1)$$

- Se $a = 1$, $a = -1$ $\rightarrow$ $\Delta V(x) = \varnothing \Rightarrow$ Equilibrio stabile (S.D.N.)

Se $a > \varnothing \Rightarrow \Delta V(x) > \varnothing \Rightarrow$ Equilibrio instabile (D.P.)

Se $a < 1$ $(a \neq -1)$ $\Rightarrow \Delta V(x) < \varnothing \Rightarrow$ Equilibrio A.S. (D.N.)

b)

$a = -1$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + x_2^3(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_1^3(k) + u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sistema stabilizzabile}$$

$$(A+B\cdot K) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1+K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+B\cdot K - \lambda I) = -\lambda(K_2-\lambda)+1+K_1 = \lambda^2 - \lambda K_2 + 1 + K_1$$

$$P_d(\lambda) = \lambda^2$$

$$\begin{cases} 1+K_1 = 0 \\ -K_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

c)

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x$$

$$\Delta V = x^T(A^T P A - P)x = -x^T Q x$$

$$-Q = A^T \cdot P \cdot A - P \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_1 & P_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -P_1 & -P_3 \\ -P_3 & P_1-P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -P_1 = -1 \Rightarrow P_1 = 1 \\ P_3 = 0 \\ P_1 - P_2 < -1 \Rightarrow P_2 = 2 \end{cases} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$V(X) = X^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X$$

2. Dato il sistema non lineare tempo continuo della forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

- Si determinino i punti di equilibrio al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- Si studi la stabilità del punto di equilibrio al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2) = \emptyset \\ -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2) = \emptyset \end{cases}$$

· Dalla 1° eq:

$$(x_1+x_2)(k^2-x_1-x_2^2+x_1^2+x_2^2+k^2) = \emptyset \Rightarrow (x_1+x_2)\cdot 2k^2 = \emptyset \Rightarrow x_1 = -x_2$$

· Dalla 2° eq:

$$x_2(k^2+x_2^2+x_2^2) + x_2(k^2-x_2^2-x_2^2) = \emptyset$$

$$x_2k^2 + \cancel{2x_2^3} + x_2k^2 - \cancel{2x_2^3} = \emptyset \Rightarrow 2x_2k^2 = \emptyset \Rightarrow x_2 = \emptyset$$

L'unico punto di equilibrio è $P(0,0)$.

b)

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} k^2-3x_1^2-x_2^2+2x_1x_2 & -2x_1x_2+k^2+x_1^2+3x_2^2 \\ -k^2-3x_1^2-x_2^2 & k^2-x_1^2-3x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 & k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \det(A) = k^4+k^4 = 2k^4 \\ \mathrm{Tr}(A) = 2k^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} k > \emptyset \\ k < \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Punto di equilibrio instabile}$$

$k = \emptyset \Rightarrow$ non posso concludere

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

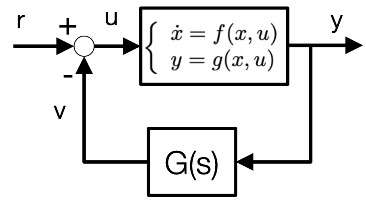
$$L_f \cdot V(x) = x_1\left(x_1(-x_1^2-x_2^2)+x_2(x_1^2+x_2^2)\right)+x_2\left(-x_1(x_1^2+x_2^2)+x_2(-x_1^2-x_2^2)\right) =$$

$$= x_1^2(-x_1^2-x_2^2)+\cancel{x_1x_2(x_1^2+x_2^2)} - \cancel{x_1x_2(x_1^2+x_2^2)} + x_2^2(-x_1^2-x_2^2) =$$

$$= -x_1^4-x_1^2x_2^2-x_1^2x_2^2-x_2^4 = -x_1^4-x_2^4-2x_1^2x_2^2 \Rightarrow \text{d.n. P.E. stabile}$$

• ESAME 04-02-2019

1. Si consideri il sistema tempo continuo costituito dallo schema a blocchi riportato in figura,




dove $G(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+4}$ e $\dot{x} = f(x,u)$ è: $\dot{x}_1 = -x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - (x_1 - x_2)^2 + u^2$. La funzione di uscita è $y = g(x,u) = x_1 - x_2$.

(a) Determinare la forma di stato del sistema tra il riferimento $r$ e l'uscita $y$.

(b) Determinare gli equilibri del sistema per $r = \bar{r}$ costante, discutendone l'esistenza, e studiare la stabilità dell'equilibrio per $\bar{r} = 0$.

(c) Enunciare il Teorema del metodo indiretto di Lyapunov.

a)

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+4}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - (x_1 - x_2)^2 + u^2 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -4x_3 - 3x_4 + y \\ v = 4x_3 + x_4 \end{cases}$$

Il sistema completo sarà:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - (x_1 - x_2)^2 + u^2 \quad \Rightarrow \text{ con } u = r - v = r - 4x_3 - x_4 \\ y = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -4x_3 - 3x_4 + y \quad \Rightarrow \text{ con } y = x_1 - x_2 \\ v = 4x_3 + x_4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - (x_1 - x_2)^2 + (\bar{r} - 4x_3 - x_4)^2 \\ y = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -4x_3 - 3x_4 + x_1 - x_2 \\ v = 4x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - (x_1 - x_2)^2 + \bar{r}^2 - 8\bar{r}x_3 - 2\bar{r}x_4 + 16x_3^2 + 8x_3x_4 + x_4^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -4x_3 - 3x_4 + x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \emptyset = -x_1 - x_2 \\ \emptyset = x_1 - x_2 - (x_1 - x_2)^2 + \bar{r}^2 - 8\bar{r}x_3 - 2\bar{r}x_4 + 16x_3^2 + 8x_3x_4 + x_4^2 \\ \emptyset = x_4 \\ \emptyset = -4x_3 - 3x_4 + x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = \emptyset \\ -4x_3 - 2x_2 = \emptyset \Rightarrow x_2 = 2x_3 \\ \emptyset = -2x_2 - (-2x_2)^2 + \bar{r}^2 - 8\bar{r}x_3 + 16x_3^2 \end{cases}$$

$$\bar{r}^2 - 8\bar{r}x_3 + \cancel{16x_3^2} - 4x_3 - \cancel{16x_3^2} = \emptyset \Rightarrow -8\bar{r}x_3 - 4x_3 + \bar{r}^2 = \emptyset \Rightarrow x_3(-8\bar{r} - 4) = \bar{r}^2 \Rightarrow x_3 = -\frac{\bar{r}^2}{4(2\bar{r}-1)}$$

$$x_2 = 2x_3 = \cancel{2} \cdot -\frac{\bar{r}^2}{\cancel{4}_2(2\bar{r}-1)} = -\frac{\bar{r}^2}{2(2\bar{r}-1)}$$

$$x_1 = -x_2 = \frac{\bar{r}^2}{2(2\bar{r}-1)}$$

Il punto di equilibrio è: $P\left(\frac{\bar{r}^2}{2(2\bar{r}-1)}, -\frac{\bar{r}^2}{2(2\bar{r}-1)}, -\frac{\bar{r}^2}{4(2\bar{r}-1)}, x_4\right)$

Ho soluzione per $2\bar{r} - 1 \neq \emptyset \Rightarrow \bar{r} \neq \frac{1}{2}$

Per $\tau = \emptyset$ il punto di equilibrio è $P(0,0,0,0)$.

$$A_{lin}|_{0,0,0,0} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \emptyset & \emptyset \\ 1-2x_1+2x_2 & -1+2x_1-2x_2 & 32x_3+8x_4 & 8x_3+2x_4 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 4 \cdot \det \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = 4\big((0+0+0)-(-1)\big) = 4$$

$\det(A) > \emptyset$ $\quad Tr(A) = -5$ $\quad P(0,0,0,0)$ è A.S.

c)

• ESAME 20-02-2019

1. Si consideri il seguente sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^4 + \alpha x_1 \cos x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 \end{cases}$$

(a) Determinare gli equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Si studi la stabilità degli equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ con il metodo indiretto di Lyapunov.

(c) Per l'equilibrio nell'origine si studi la stabilità con altri metodi.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x_2^4 + \alpha x_1 \cos x_2 = \emptyset \Rightarrow \alpha x_1 = \emptyset \Rightarrow x_1 = \emptyset \\ -x_1 x_2 = \emptyset \Rightarrow x_2 = \emptyset \end{cases}$$

• L'unico punto di equilibrio è $P(0,0)$.

b)

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} \alpha \cos x_2 & 4x_2^3 - \alpha x_1 \sin x_2 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Non posso concludere}$$

c)

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4$$

$$L_f V = x_1(x_2^4 + \alpha x_1 \cos x_2) + x_2^3(-x_1 x_2) = \cancel{x_1 x_2^4} + \alpha x_1^2 \cos x_2 - \cancel{x_1 x_2^4} = \alpha x_1^2 \cdot \cos x_2$$

1. Per $\alpha < \emptyset$ e $\cos x_2 > \emptyset \Rightarrow L_f V$ d.n. $P(0,0)$ stabile

2. Per $\alpha > 0$ e $\cos x_2 < \emptyset \Rightarrow L_f V$ d.n. $P(0,0)$ stabile

2. Dato il sistema dinamico non lineare descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 + u \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri al variare dell'ingresso costante $u(t) = k \in \mathbb{R}$ e se ne determinino le proprietà di stabilità.
- Si determini se esiste un ingresso affine negli stati che renda gli equilibri asintoticamente stabili. In caso affermativo si determinino delle condizioni (in funzione di $k$) sui coefficienti dell'ingresso affinchè gli equilibri siano asintoticamente stabili riportando l'espressione esplicita dell'ingresso nelle variabili $(x_1, x_2)$.

a)

$$\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} X_1^2 + X_2 = \emptyset \Rightarrow X_1^2 = -X_2 \\ -X_1^2 + X_2 + K = \emptyset \Rightarrow X_2 + X_2 + K = 0 \end{cases}$$

$$2X_2 = -K$$

$$X_2 = -\frac{K}{2}$$

- Se $X_2 = -\frac{K}{2}$ :

$$X_1^2 = \frac{K}{2} \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{K}{2}}$$

- I punti di equilibrio sono: $P\left(\sqrt{\frac{K}{2}}, -\frac{K}{2}\right)$ $P\left(-\sqrt{\frac{K}{2}}, -\frac{K}{2}\right)$ con $K > \emptyset$
- Il punto di equilibrio è: $P(0,0)$ con $K = \emptyset$

$$A_{lin}\Big|_{\sqrt{\frac{K}{2}}, -\frac{K}{2}} = \begin{bmatrix} 2X_1 & 1 \\ -2X_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \\ -2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 2\sqrt{\frac{K}{2}} + 2\sqrt{\frac{K}{2}} = 4\sqrt{\frac{K}{2}} \Rightarrow Tr(A) = 1 + 2\sqrt{\frac{K}{2}} \Rightarrow \text{Sempre positivo}$$

Punto di equilibrio instabile.

$$A_{lin}\Big|_{-\sqrt{\frac{K}{2}}, -\frac{K}{2}} = \begin{bmatrix} 2X_1 & 1 \\ -2X_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \\ 2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -2\sqrt{\frac{K}{2}} - 2\sqrt{\frac{K}{2}} = -4\sqrt{\frac{K}{2}} \Rightarrow \text{Segni discordi}$$

Punto di equilibrio instabile.

$$A_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} 2X_1 & 1 \\ -2X_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Autovalore a parte reale positiva}$$

P.E. instabile.

b)

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ la R è così per entrambi punti ed è completamente raggiungibile.

Quindi esiste un impusso affine che rende gli equilibri A.S.

- $P\left(\sqrt{\frac{K}{2}}, -\frac{K}{2}\right)$:

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \\ -2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \\ -2\sqrt{\frac{K}{2}} + K_1 & 1+K_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \left(2\sqrt{\frac{K}{2}} - \lambda\right)(1+K_2-\lambda) + 2\sqrt{\frac{K}{2}} - K_1 =$$

$$= 2\sqrt{\frac{K}{2}} + 2K_2\sqrt{\frac{K}{2}} - 2\sqrt{\frac{K}{2}}\lambda - \lambda - \lambda K_2 + \lambda^2 + 2\sqrt{\frac{K}{2}} - K_1 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda\left(-2\sqrt{\frac{K}{2}} - 1 - K_2\right) + 4\sqrt{\frac{K}{2}} + 2K_2\sqrt{\frac{K}{2}} - K_1$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} 4\sqrt{\frac{K}{2}} + 2K_2\sqrt{\frac{K}{2}} - K_1 = 1 \Rightarrow K_1 = 4\sqrt{\frac{K}{2}} + 2\sqrt{\frac{K}{2}}\left(-3 - 2\sqrt{\frac{K}{2}}\right) - 1 = -2\sqrt{\frac{K}{2}} - 2K - 1 \\ -2\sqrt{\frac{K}{2}} - 1 - K_2 = 2 \Rightarrow K_2 = -3 - 2\sqrt{\frac{K}{2}} \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\frac{K}{2}} - 2K - 1 & -3 - 2\sqrt{\frac{K}{2}} \end{bmatrix}$$

- $P\left(-\sqrt{\frac{K}{2}}, -\frac{K}{2}\right)$:

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \\ 2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\frac{K}{2}} & 1 \\ 2\sqrt{\frac{K}{2}} + K_1 & 1+K_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \left(-2\sqrt{\frac{K}{2}} - \lambda\right)(1+K_2-\lambda) - 2\sqrt{\frac{K}{2}} - K_1 =$$

$$= -2\sqrt{\frac{K}{2}} - 2K_2\sqrt{\frac{K}{2}} + 2\sqrt{\frac{K}{2}}\lambda - \lambda - \lambda K_2 + \lambda^2 - 2\sqrt{\frac{K}{2}} - K_1 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda\left(+2\sqrt{\frac{K}{2}} - 1 - K_2\right) - 4\sqrt{\frac{K}{2}} - 2K_2\sqrt{\frac{K}{2}} - K_1$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2+2\lambda+1$$

$$\begin{cases} -4\sqrt{\frac{k}{2}} - 2k_2\sqrt{\frac{k}{2}} - k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = 4\sqrt{\frac{k}{2}} + 2\sqrt{\frac{k}{2}}\left(-3+2\sqrt{\frac{k}{2}}\right) - 1 = -2\sqrt{\frac{k}{2}} + k - 1 \\ 2\sqrt{\frac{k}{2}} - 1 - k_2 = 2 \Rightarrow k_2 = -3+2\sqrt{\frac{k}{2}} \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\frac{k}{2}} + k - 1 & -3+2\sqrt{\frac{k}{2}} \end{bmatrix}$$

• ESAME 01-07-2019

1. Dato il sistema dinamico non lineare descritto dalle equazioni alle differenze:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1^2(k) + \frac{1}{2}u^2(k) \\ x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_1^2(k) + \frac{1}{2}x_2(k) \\ y(k) = \frac{1}{2}x_1(k)x_2(k) \end{cases}$$

- si determino gli equilibri del sistema nel caso $u(k) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e nel caso $u(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- Si scrivano le equazioni dinamiche $(A, B, C, D)$ del sistema linearizzato per una generica coppia ingresso-stato di equilibrio riportando le variabili (stato, ingresso e uscita) del linearizzato rispetto a quelle del sistema non lineare.
- Se possibile, si caratterizzi la stabilità per tutti gli equilibri del sistema non lineare calcolati al primo punto, attraverso il metodo indiretto di Lyapunov.

a)

• CASO $u = 1$:

$X_1(K+1) = X_1(K)$

$X_2(K+1) = X_2(K)$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(K) = \frac{1}{2}X_1^2(K) + \frac{1}{2} \\ X_2(K) = \frac{1}{2}X_1^2(K) + \frac{1}{2}X_2(K) \\ y(K) = \frac{1}{2}X_1(K)X_2(K) \end{cases}$$

$\Rightarrow X_1^2(K) - 2X_1(K) + 1 = \varnothing$ $\qquad \frac{\Delta}{4} = 1 - 1 = \varnothing$

$X_1 = +\frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow X_2(K) = \frac{1}{2}X_1^2(K) + \frac{1}{2}X_2(K) \Rightarrow X_2(K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}X_2(K) \Rightarrow 2X_2(K) = 1 + X_2(K) \Rightarrow X_2(K) = 1$

$\Rightarrow y(K) = \frac{1}{2}$

I punti di equilibrio sono: $P(1,1)$

• CASO $u = 0$:

$X_1(K+1) = X_1(K)$

$X_2(K+1) = X_2(K)$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(K) = \frac{1}{2}X_1^2(K) \\ X_2(K) = \frac{1}{2}X_1^2(K) + \frac{1}{2}X_2(K) \\ y(K) = \frac{1}{2}X_1(K)X_2(K) \end{cases}$$

$\Rightarrow X_1^2 - 2X_1 = \varnothing \Rightarrow X_1(X_1 - 2) = 0$

1. $X_1 = 0$
2. $X_1 = 2$

$\Rightarrow$ Per $X_1 = \varnothing$:

$X_2(K) = \frac{1}{2}X_1^2(K) + \frac{1}{2}X_2(K) \Rightarrow X_2(K) - \frac{1}{2}X_2(K) = 0 \Rightarrow X_2(K) = 0$

$y(K) = \frac{1}{2}X_1(K)X_2(K) \Rightarrow y(K) = \varnothing$

- Per $x_1 = 2$ :

$x_2(k) = \frac{1}{2} x_1^2(k) + \frac{1}{2} x_2(k) \Rightarrow x_2(k) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2} + \frac{1}{2} x_2(k) \Rightarrow 2x_2(k) - x_2(k) = 4$

$x_2(k) = 4$

$y(k) = \frac{1}{2} x_1(k) x_2(k) \Rightarrow y(k) = 4$

I punti di equilibrio sono : $P_1(0,0)$ , $P_2(2,4)$

b)

- Per $u(k) = 1$ e $P(1,1)$ avrò :

$$A_{lin}\big|_{1,1} = \begin{bmatrix} x_1 & \emptyset \\ x_1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1/2\, x_2 & 1/2\, x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad D = \emptyset$$

c)

$$A_{lin}\big|_{1,1} = \begin{bmatrix} x_1 & \emptyset \\ x_1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ non posso concludere poiché ho $\lambda = 1$

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} x_1 & \emptyset \\ x_1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = -\lambda\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) = \emptyset$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$ P.E. stabile

$$A_{lin}\big|_{2,4} = \begin{bmatrix} x_1 & \emptyset \\ x_1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ $\lambda = 2$ fuori dal cerchio unitario.

P.E. instabile

• ESAME 22-07-2019

1. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = e^{x_2(t)} - (1 - 3u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \sin(x_1(t) + x_2(t)) + 2u^2(t) \end{cases}$$

- si determino gli equilibri del sistema nel caso $u(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e se ne studi la stabilità.
- Per gli equilibri asintoticamente stabili si determini una candidata di Lyapunov.
- Per gli equilibri instabili si determini, se esiste, una retroazione dello stato che li renda asintoticamente stabili.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} e^{x_2(t)} - 1 = \varnothing \Rightarrow e^{x_2(t)} = 1 \Rightarrow x_2 = \ln(1) = \varnothing \\ \sin(x_1(t) + x_2(t)) = \varnothing \Rightarrow \sin(x_1) = \varnothing \quad \text{per} \quad x_1 = K \cdot \pi \quad \text{con} \quad K = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono: $P(K\pi, 0)$.

• Con $K = 0, 2, 4, \dots, n$ (con $n$ pari):

$$A_{lin}\Big|_{K\pi,0} = \begin{bmatrix} \varnothing & e^{x_2} \\ \cos(x_1+x_2) & \cos(x_1+x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -1 \quad \text{Segni discordi}$$

P.E. instabile.

• Con $K = 1, 3, 5, \dots, n$ (con $n$ dispari):

$$A_{lin}\Big|_{K\pi,0} = \begin{bmatrix} \varnothing & e^{x_2} \\ \cos(x_1+x_2) & \cos(x_1+x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \quad \text{Tr}(A) = -1 \quad \text{P.E. Stabile}$$

b)

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x$$

$$-Q = A^T P + P \cdot A \Rightarrow \frac{d}{dt} V(x) = -x^T Q x$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varnothing & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_3 & -P_2 \\ P_1-P_3 & P_3-P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_3 & P_1-P_3 \\ -P_2 & P_3-P_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2P_3 & -P_2+P_1-P_3 \\ P_1-P_3-P_2 & 2P_3-2P_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2P_3 = -1 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{2} \\ -P_2+P_1-P_3 = \emptyset \quad P_1 = \frac{3}{2} \\ 2P_3-2P_2 = -1 \Rightarrow P_2 = 1 \end{cases}$$

$$V_x = x^T \cdot P \cdot x = x^T \cdot \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot x$$

C)

Il sistema è nella forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2$$ sistema completamente raggiungibile quindi esiste $K : (A+BK)$ è A.S.

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K_1 & 3K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K_1 & 3K_2+1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \begin{bmatrix} 3K_1-\lambda & 3K_2+1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3K_1-\lambda)(1-\lambda) - 3K_2 - 1 = 3K_1 - 3K_1\lambda - \lambda + \lambda^2 - 3K_2 - 1 =$$

$$= \lambda^2 - \lambda(3K_1+1) - 3K_2 - 1 + 3K_1$$

$$P_d(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} -3K_1 - 1 = 2 \\ 3K_1 - 1 - 3K_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} -1 & -5/3 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} -1 & -5/3 \end{bmatrix} \cdot x$$

2. 

- Dato un sistema lineare tempo continuo asintoticamente stabile si descriva una procedura per calcolare una candidata di Lyapunov che attraverso il metodo diretto di Lyapunov ne verifichi la stabilità.
- Si applichi il metodo al sistema
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -x_2 \end{cases}$$
- Con quanto ottenuto nei punti precedenti, determinare (con il metodo diretto di Lyapunov) la stabilità dell'origine del sistema non lineare
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1 + x_1x_2 + 3x_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1^2 + x_2^2 - x_2 \end{cases}$$

a)

Dato un sistema lineare A.S. una candidata che ne verifica la stabilità è sicuramente:

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x \Rightarrow \frac{d}{dt} V(x) = -x^T \cdot Q \cdot x$$

dove P è una matrice simmetrica che si costruisce imponendo:

$$-Q = A^T P + PA$$

Dove A è la matrice dinamica del sistema (lineare e linearizzato) e Q è una matrice d.p. (di solito $Q = I$).
La matrice P si trova come soluzione del problema solo se la matrice A è A.S.. Se così non fosse o trovo infinite P o non ne trovo alcuna.

b)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = \emptyset \Rightarrow x_1 = \emptyset \\ -x_2 = \emptyset \Rightarrow x_2 = \emptyset \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio è $P(0,0)$.

$$A_{lin|0,0} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \emptyset & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ entrambi gli autovalori a parte reale negativa, A è A.S.

$$-Q = A^T P + PA \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \emptyset & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_1 & -P_3 \\ 3P_1 - P_3 & 3P_3 - P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_1 & 3P_1 - P_3 \\ -P_3 & 3P_3 - P_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2P_1 & 3P_1 - 2P_3 \\ 3P_1 - 2P_3 & 6P_3 - 2P_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2P_1 = -1 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} \\ 3P_1 - 2P_3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} = 2P_3 \Rightarrow P_3 = \frac{3}{4} \\ 6P_3 - 2P_2 = -1 \Rightarrow \cancel{6}^{3} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_{2}} - 2P_2 = -1 \end{cases}$$

$$9 - 4P_2 = -1 \Rightarrow P_2 = \frac{10}{4}$$

$$V(x) = x^T \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 3/4 & 10/4 \end{bmatrix} \cdot x$$

C)

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 + 3 \\ 2x_1 & 2x_2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \emptyset & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

È identica al punto precedente quindi P(0,0) è A.S e la candidata trovata nel punto precedente lo dimostra.

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)x_2(k) + 2x_2(k)u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k)(x_1(k)-3) + u(k) \end{cases}$$

- si determino gli equilibri del sistema per ingresso nullo $u(k) = 0$, $\forall k \geq 0$ e se ne studi la stabilità.
- Si commenti l'esistenza di un ingresso che dipenda linearmente dallo stato e che renda asintoticamente stabile gli eventuali equilibri instabili trovati al punto precedente.

a)

$$\begin{cases} X_1(K+1) = X_1(K) \\ X_2(K+2) = X_2(K) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(K) = X_1(K)X_2(K) \\ X_2(K) = X_2(K)(X_1(K) - 3) \end{cases} \Rightarrow X_1(K)(X_2(K)-1) = \varnothing$$

se $X_1(K) = \varnothing$, $X_2(K) + 3X_2(K) = \varnothing \Rightarrow X_2(K) = \varnothing$

se $X_2(K) = 1$, $X_1(K) = 4$

• I punti di equilibrio sono: $P_1(0,0)$, $P_2(4,1)$

$$A_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} X_2 & X_1 \\ X_2 & X_1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & -3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3$, Punto di equilibrio instabile.

$$A_{lin}\Big|_{4,1} = \begin{bmatrix} X_2 & X_1 \\ X_2 & X_1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 3 = 4$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

•) $P_2(4,1)$ è instabile poiché $\lambda_1 = 3$ è fuori dal cerchio unitario.

b)

$$A_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} X_2 & X_1 \\ X_2 & X_1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & -3 \end{bmatrix} \qquad B_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} 2X_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin}\Big|_{4,1} = \begin{bmatrix} X_2 & X_1 \\ X_2 & X_1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{lin}\Big|_{4,1} = \begin{bmatrix} 2X_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi la risposta è che esiste $u$, poiché (per come è fatta la B) posso agire sugli autovalori.

2. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^3 + \frac{1}{2}x_1x_2^4 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1^2x_2 \end{cases}$$

- si determinino gli equilibri del sistema per ingresso nullo $u(t) = 0$, $\forall t \geq 0$ e se ne studi la stabilità.
- si determini un ingresso che renda l'equilibrio nell'origine stabile.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1^3 + \frac{1}{2}x_1x_2^4 = \emptyset \\ -x_1^2x_2 = \emptyset \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono : $P(0,0)$ e $P(0,\bar{x}_2)$

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} 6x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^4 & 2x_1x_2^3 \\ -2x_1x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Non posso concludere}$$

$$A_{lin}|_{0,\bar{x}_2} = \begin{bmatrix} 6x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^4 & 2x_1x_2^3 \\ -2x_1x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}_2^4}{2} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Non posso concludere}$$

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{8}x_2^4$$

$$L_f V = x_1(2x_1^3 + \frac{1}{2}x_1x_2^4) + \frac{x_2^3}{2}(-x_1^2x_2) = 2x_1^4 + \cancel{\frac{1}{2}x_1^2x_2^4} - \cancel{\frac{1}{2}x_1^2x_2^4} \Rightarrow \text{s.d.p.} \quad \text{Punto di equilibrio instabile}$$

b)

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{8}x_2^4$$

$$L_f V = x_1(2x_1^3 + \frac{1}{2}x_1x_2^4 + u) + \frac{x_2^3}{2}(-x_1^2x_2) = 2x_1^4 + x_1u + \cancel{\frac{1}{2}x_1^2x_2^4} - \cancel{\frac{1}{2}x_1^2x_2^4}$$

$$u = -2x_1^3 - x_1$$

$$L_f V = 2x_1^4 + x_1(-2x_1^3 - x_1) = \cancel{2x_1^4} - \cancel{2x_1^4} - x_1^2 = -x_1^2 \Rightarrow \text{s.d.n.} \quad P(0,0) \text{ è semplicemente stabile}$$

2. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) \end{cases}$$

- si determinino gli equilibri del sistema e se ne studi la stabilità col metodo indiretto.
- per l'equilibrio nell'origine si utilizzi il metodo diretto per determinarne la regione di asintotica stabilità.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 + x_1x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2^2 = \emptyset \\ 2x_1^2x_2 + x_2x_1^2 + x_2^3 - 4x_2 = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^3 - x_1x_2^2 - 4x_1 = \emptyset \\ x_2^3 + 3x_1^2x_2 - 4x_2 = \emptyset \Rightarrow x_2(x_2^2 + 3x_1^2 - 4) = \emptyset \end{cases}$$

1. $x_2 = \emptyset$
2. $x_2^2 = 4 - 3x_1^2 \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{4-3x_1^2}$

·) se $x_2 = 0 \Rightarrow x_1^3 - 4x_1 = 0 \quad x_1(x_1^2 - 4) = \emptyset$

$x_1 = 0$

$x_1 = \pm 2$

·) se $x_2 = \sqrt{4-3x_1^2} \Rightarrow x_1^3 - x_1(4-3x_1^2) - 4x_1 = \emptyset$

$x_1^3 - 4x_1 + 3x_1^3 - 4x_1 \Rightarrow 4x_1^3 - 8x_1 = \emptyset \Rightarrow 4x_1(x_1^2 - 2) = \emptyset$

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{4-3x_1^2} = \sqrt{4} = \pm 2$
- $x_1 = +\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{4-3x_1^2} = \sqrt{4-6} = \pm\sqrt{2}\,i$
- $x_1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{4-3x_1^2} = \sqrt{4-6} = \pm\sqrt{2}\,i$

} Non si considerano

I punti di equilibrio sono: $P_1(0,0)$, $P_2(-2,0)$, $P_3(2,0)$, $P_4(0,2)$, $P_5(0,-2)$

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 - 4 & -2x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_2^2 + 3x_1^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & \emptyset \\ \emptyset & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 16 \Rightarrow Tr(A) = -8$$

· Punto di equilibrio A.S.

$$A_{lin}|_{0,2} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 - 4 & -2x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_2^2 + 3x_1^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-4 & \emptyset \\ \emptyset & 12-4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & \emptyset \\ \emptyset & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -64 \Rightarrow \text{segni discordi}$$

· Punto di equilibrio instabile

$$A_{lin}|_{0,-2} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 - 4 & -2x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_2^2 + 3x_1^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-4 & \emptyset \\ \emptyset & 12-4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & \emptyset \\ \emptyset & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -64 \Rightarrow \text{segni discordi}$$

· Punto di equilibrio instabile

$$A_{lin}|_{2,0} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 - 4 & -2x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_2^2 + 3x_1^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-4 & \emptyset \\ \emptyset & 12-4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & \emptyset \\ \emptyset & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 64 \Rightarrow Tr(A) = 16$$

· Punto di equilibrio instabile

$$A_{lin}|_{-2,0} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 - 4 & -2x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_2^2 + 3x_1^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-4 & \emptyset \\ \emptyset & 12-4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & \emptyset \\ \emptyset & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 64 \Rightarrow Tr(A) = 16$$

· Punto di equilibrio instabile

b)

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$L_f V(x) = x_1(x_1^3 + x_1 x_2^2 - 4x_1 - 2x_1 x_2^2) + x_2(2x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^3 - 4x_2) =$$

$$= x_1^4 + x_1^2 x_2^2 - 4x_1^2 - \cancel{2x_1^2 x_2^2} + \cancel{2x_1^2 x_2^2} + x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - 4x_2^2 =$$

$$= x_1^2(x_1^2 + x_2^2 - 4) + x_2^2(x_2^2 + x_1^2 - 4) =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 4)$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 > \emptyset \Rightarrow \text{si annulla nell'origine} \\ x_1^2 + x_2^2 - 4 > \emptyset \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 > 4 \Rightarrow \text{si annulla per } (x_1^2 + x_2^2) = 4 \end{cases}$$

2. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

- si determinino gli equilibri del sistema per ingresso nullo, si disegni l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.
- si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti e si commentino i risultati ottenuti in relazione agli andamenti trovati al punto precedente.
- per l'equilibrio nell'origine si determini un ingresso $u$ che renda l'origine asintoticamente stabile.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} -x_1^3 + x_2 = \emptyset \\ 2x_1 - x_2 = \emptyset \Rightarrow x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

- Se $x_2 = 2x_1 \Rightarrow -x_1^3 + 2x_1 = \emptyset \Rightarrow x_1(-x_1^2 + 2) = \emptyset \Rightarrow$ 1. $x_1 = \emptyset$
  2. $x_1 = \pm\sqrt{2}$

I punti di equilibrio sono: $P(0,0)$, $P_2(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $P_3(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

- Si disegni l'andamento delle fasi:

b)

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{0} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -2$$

Punto di equilibrio instabile.

$$A_{lin}|_{\sqrt{2},2\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 4 \quad Tr(A) = -7 \Rightarrow$$

Punto di equilibrio Asintoticamente stabile.

$$A_{lin}|_{-\sqrt{2},-2\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 4 \quad Tr(A) = -7 \Rightarrow$$

Punto di equilibrio Asintoticamente stabile.

c)

Se $u = -8x_1$

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 6 \quad Tr(A) = -9$$

Quindi $P(0,0)$ è A.S

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)\left((\alpha+2)x_1^2(k) + (\delta+2)x_2^2(k)\right) \\ x_2(k+1) = x_2(k)\left((\alpha+2)x_1^2(k) + (\delta+2)x_2^2(k)\right) \end{cases}$$

- si determinino tutti gli equilibri del sistema;
- si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti con il metodo indiretto di Lyapunov;
- per l'equilibrio nell'origine si verifichi, con il metodo diretto di Lyapunov, la proprietà di stabilità ottenuta al punto precedente.

a)

$$\begin{cases} X_1(K+1) = X_1(K) \\ X_2(K+1) = X_2(K) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(K) = X_1(K)(3X_1^2(K) + 3X_2^2(K)) \\ X_2(K) = X_2(K)(3X_1^2(K) + 3X_2^2(K)) \end{cases} \Rightarrow X_1 = 3X_1^3 + 3X_2^2 X_1$$

$$X_1(3X_1^2 + 3X_2^2 - 1) = 0$$

$$X_1 = 0 \quad e \quad 3X_1^2 = 1 - 3X_2$$

- Se $X_1 = \emptyset$ :

$$X_2 = 3X_2^3 \Rightarrow 3X_2^3 - X_2 = 0 \Rightarrow X_2(3X_2^2 - 1) = \emptyset \Rightarrow \begin{array}{l} 1.\ X_2 = \emptyset \\ 2.\ X_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Quindi i punti di equilibrio sono: $P(0,0)$, $P(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $P(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

- Se $3X_1^2 = 1 - 3X_2$ :

$$X_2 = X_2(1 - 3X_2 + 3X_2^2) \Rightarrow \cancel{X_2} = \cancel{X_2} - 3X_2^2 + 3X_2^3 \Rightarrow X_2^2(3X_2 - 3) = \emptyset \Rightarrow \begin{array}{l} 1.\ X_2 = \emptyset \\ 2.\ X_2 = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ NON VA BENE

Quindi i punti di equilibrio sono: $P(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $P(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$

b)

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} 9X_1^2 + 3X_2^2 & 6X_1X_2 \\ 6X_1X_2 & 3X_1^2 + 9X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Punto di equilibrio stabile}$$

$$A_{lin}\big|_{0,\frac{1}{\sqrt{3}}} = \begin{bmatrix} 9X_1^2 + 3X_2^2 & 6X_1X_2 \\ 6X_1X_2 & 3X_1^2 + 9X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 3 \text{ è fuori dal cerchio unitario,}$$

punto di equilibrio instabile.

$$A_{lin}\big|_{0,-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \begin{bmatrix} 9X_1^2 + 3X_2^2 & 6X_1X_2 \\ 6X_1X_2 & 3X_1^2 + 9X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Uguale a quello precedente.}$$

$$A_{lin}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}},0} = \begin{bmatrix} 9x_1^2+3x_2^2 & 6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_1^2+9x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{uguale a quello precedente.}$$

$$A_{lin}\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}},0} = \begin{bmatrix} 9x_1^2+3x_2^2 & 6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_1^2+9x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{uguale a quello precedente.}$$

C)

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x_1\Big(x_1(3x_1^2+3x_2^2)\Big) + x_2\Big(x_2(3x_1^2+3x_2^2)\Big) - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= 3x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + 3x_2^4 - x_1^2 - x_2^2 =$$

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_2^2 - (\alpha+1)^2\right) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)\left(x_1^2 + x_2^2 - (\alpha+1)^2\right) \end{cases}$$

- si determinino tutti gli equilibri del sistema;
- si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti con il metodo indiretto di Lyapunov;
- si verifichino le proprietà di stabilità con il metodo diretto di Lyapunov.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 4) = \varnothing \\ (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 4) = \varnothing \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} 1.\ x_1 - x_2 = \varnothing \\ 2.\ x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{array}$$

1. Se $x_1 = x_2$

$$2x_1(2x_1^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 1.\ x_1 = \varnothing \\ 2.\ x_1^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{2} \end{array}$$

2. Se $x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ qualsiasi

I punti di equilibrio sono $P(0,0)$ $P(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

b)

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4 & -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4 \\ 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4 & +x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -16 + 16 = \varnothing$$

Non posso concludere

$$A_{lin}\big|_{-\sqrt{2},-\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4 & -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4 \\ 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4 & +x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & \varnothing \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 16 > \varnothing,$$

Punto di equilibrio instabile.

$$A_{lin}\big|_{\sqrt{2},\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4 & -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4 \\ 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4 & +x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & \varnothing \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 16 > \varnothing,$$

Punto di equilibrio instabile.

c)

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k)u(k) + (\gamma+1)x_1^2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) \end{cases}$$

- si determinino tutti gli equilibri del sistema per un generico ingresso costante $u = \bar{u} \geq 0$;
- si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti con il metodo indiretto di Lyapunov per $\bar{u} = 2$;
- nei casi instabili trovati al punto precedente si verifichino le condizioni di esistenza di un controllo affine (lineare per il sistema linearizzato) che stabilizzi il punto di equilibrio in esame.

a)

$$\begin{cases} X_1(K+1) = X_1(K) \\ X_2(K+1) = X_2(K) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -X_1 \cdot \bar{u} + 2X_1^2 \\ X_2 = X_2\bar{u} + X_1X_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2X_1^2 - X_1(\bar{u}+1) = \emptyset$

$X_1(2X_1 - \bar{u} - 1) = \emptyset \Rightarrow$ 1. $X_1 = \emptyset$ 2. $X_1 = \frac{\bar{u}+1}{2}$

- Se $X_1 = \emptyset$ :

$X_2 = X_2\bar{u} \Rightarrow X_2(\bar{u}-1) = \emptyset \Rightarrow X_2 = \emptyset$

- Se $X_1 = \frac{\bar{u}+1}{2}$ :

$X_2 = X_2\bar{u} + X_2 \cdot \left(\frac{\bar{u}+1}{2}\right) \Rightarrow 2X_2 = 2X_2\bar{u} + X_2\bar{u} + X_2 \Rightarrow 3X_2\bar{u} - X_2 = \emptyset \Rightarrow X_2(3\bar{u}-1) = 0$

$\Rightarrow X_2 = \emptyset$

- I punti di equilibrio sono : $P(0,0)$ $P\left(\frac{\bar{u}+1}{2}, 0\right)$

b)

$\bar{u} = 2$

$$A_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} -2+4X_1 & \emptyset \\ X_2 & 2+X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \emptyset \\ \emptyset & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Punto di equilibrio instabile.
Autovalori fuori dal cerchio unitario.

$$A_{lin}\Big|_{\frac{3}{2},0} = \begin{bmatrix} -2+4X_1 & \emptyset \\ X_2 & 2+X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \emptyset \\ \emptyset & 7/2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Punto di equilibrio instabile.
Autovalori fuori dal cerchio unitario.

c)

$$B_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B_{lin}\big|_{\frac{3}{2},0} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

· Non è possibile stabilizzare nessuno dei due punti di equilibrio.

• ESAME 14-01-2021 : $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$

1. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 4x_2^3 + ax_2^2 + u \\ \dot{x}_2 = (\gamma + 1)x_1 \end{cases}$$

- si determinino tutti gli equilibri del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ per ingresso nullo $u = \bar{u} = 0$ e se ne studi la stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov;
- Determinare un ingresso in funzione del parametro $a$ che renda l'origine del sistema un equilibrio asintoticamente stabile determinando anche la candidata di Lyapunov che ne provi la stabilità asintotica.

a)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \emptyset \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 4x_2^3 + a x_2^2 = \emptyset \\ 2x_1 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow a x_2^2 - 4x_2^3 = \emptyset$$

$$x_2^2(a - 4x_2) = \emptyset \quad \begin{cases} x_2 = \emptyset \\ x_2 = \frac{a}{4} \quad \text{con } a \neq \emptyset \end{cases}$$

• I punti di equilibrio sono : $P(0,0)$ e $P(0, \frac{a}{4})$

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} -2 & -12x_2^2 + 2ax_2 \\ 2 & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \emptyset \\ 2 & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \text{non posso concludere}$$

$$A_{lin}|_{0,\frac{a}{4}} = \begin{bmatrix} -2 & -12x_2^2 + 2ax_2 \\ 2 & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{a(2-3a)}{4} \\ 2 & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \frac{-a(2-3a)}{2} = \frac{3a^2 - 2a}{2} \text{ sempre positivo.}$$

$Tr(A) = -2$ quindi P.E. stabile.

b)

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$L_f V = x_1(-2x_1 - 4x_2^3 + a x_2^2 + u) + x_2(2x_1) =$$

$$= -2x_1^2 - 4x_2^3x_1 + a x_2^2 x_1 + u x_1 + 2x_1x_2$$

$$u = 4x_2^3 - a x_2^2 - 2x_2 - x_1x_2^2$$

$$L_f V = -2x_1^2 - 4x_2^3x_1 + a x_2^2 x_1 + x_1(4x_2^3 - a x_2^2 - 2x_2 - x_1x_2^2) + 2x_1x_2 =$$

$$= -2x_1^2 - \cancel{4x_2^3x_1} + \cancel{a x_2^2 x_1} + \cancel{4x_2^3x_1} - \cancel{a x_2^2 x_1} - \cancel{2x_1x_2} - x_1^2x_2^2 + \cancel{2x_1x_2} = -2x_1^2 - x_1^2x_2^2 \quad \text{d.n. P.E. A.S.}$$

2. Dato il sistema non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + 2x_1(k)\,(1 - x_1(k)) - x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + 2x_2(k)\,(1 - x_2(k)) - x_1(k)x_2(k) \end{cases}$$

- si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discutano le proprietà di stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov;
- supponendo di poter agire su una o sull'altra equazione alle differenze attraverso un ingresso additivo $u$ determinare se esiste un ingresso lineare (o affine) nello stato che renda gli equilibri asintoticamente stabili e nel caso in quale delle due equazioni dinamiche deve intervenire.

a)

$$\begin{cases} \cancel{x_1} = \cancel{x_1} + 2x_1(1-x_1) - x_1x_2 \\ \cancel{x_2} = \cancel{x_2} + 2x_2(1-x_2) - x_1x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_1^2 - x_1x_2 = 0 \\ 2x_2 - 2x_2^2 - x_1x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1(2 - 2x_1 - x_2) = 0$$

$x_1 = 0$

$x_1 = \frac{2-x_2}{2}$

·) $x_1 = 0$ :

$$2x_2 - 2x_2^2 - x_1x_2 = 0 \Rightarrow 2x_2 - 2x_2^2 = 0$$

$$2x_2(1-x_2) = 0$$

$x_2 = 0$

$x_2 = 1$

·) $x_1 = \frac{2-x_2}{2}$ :

$$2x_2 - 2x_2^2 - x_1x_2 = 0 \Rightarrow 2x_2 - 2x_2^2 - \left(\frac{2x_2 - x_2^2}{2}\right) = 0$$

$$4x_2 - 4x_2^2 - 2x_2 + x_2^2 = 0$$

$$2x_2 - 3x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2(2 - 3x_2) = 0$$

$x_2 = 0$

$x_2 = \frac{2}{3}$

$x_1 = \frac{2-x_2}{2} \Rightarrow$ · $x_2 = 0$ : $x_1 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1$

· $x_2 = \frac{2}{3}$ : $x_1 = \frac{2-\frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} = \frac{2}{3}$

· I punti di equilibrio sono: $P(0,0)$, $P(0,1)$, $P(1,0)$, $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$$A_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} 1+2-4x_1-x_2 & x_1 \\ x_2 & 1+2-4x_2-x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4x_1-x_2 & x_1 \\ x_2 & 3-4x_2-x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \emptyset \\ \emptyset & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ P.E. instabile. (autovalori fuori dal cerchio di raggio unitario)

$$A_{lin}\Big|_{0,1} = \begin{bmatrix} 3-4x_1-x_2 & x_1 \\ x_2 & 3-4x_2-x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \emptyset \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ P.E. instambile (autovalori fuori dal cerchio di raggio unitario)

$$A_{lin}\Big|_{1,0} = \begin{bmatrix} 3-4x_1-x_2 & x_1 \\ x_2 & 3-4x_2-x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \emptyset & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ P.E. instambile (autovalori fuori dal cerchio di raggio unitario)

$$A_{lin}\Big|_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}} = \begin{bmatrix} 3-4x_1-x_2 & x_1 \\ x_2 & 3-4x_2-x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = (\lambda+\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{4}{9} = \lambda^2 + \tfrac{2}{3}\lambda + \tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{9} =$$

$$= \lambda^2 + \tfrac{2}{3}\lambda - \tfrac{1}{3}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \tfrac{4}{9} + 4\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{3} = \frac{4+12}{9} = \frac{16}{9} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\tfrac{2}{3} \pm \tfrac{4}{3}$$

$\lambda_1 = \frac{2}{3}$

$\lambda_2 = -2 \rightarrow$ Fuori dal cerchio unitario P.E. instabile.

b)

2. Dato il sistema non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\gamma+1)^2 x_1 + x_2 - x_1\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (\gamma+1)^2 x_2 - x_2\left(x_1^2+x_2^2\right) \end{cases} \qquad \gamma = 1$$

- si determinino i punti di equilibrio del sistema. Si discuta la stabilità nell'origine con il metodo indiretto di Lyapunov, successivamente determinare una candidata di Lyapunov che confermi quanto ottenuto con il metodo indiretto.
- Data la derivata direzionale ottenuta al punto precedente determinare se esiste un ciclo limite del sistema motivando la risposta e caratterizzarne le proprietà di attrattività o meno.

a)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 4x_2 - x_2(x_1^2+x_2^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2) = \emptyset \\ -x_1 + 4x_2 - x_2(x_1^2+x_2^2) = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 = \emptyset \\ -x_1 + 4x_2 - x_2x_1^2 + x_2^3 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \text{il punto di equilibrio è } P(0,0)$$

$$A_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} 4-3x_1^2-x_2^2 & 1-2x_1x_2 \\ -1-x_2^2 & 4-x_1^2+3x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 16+1 = 17 \quad tr(A) = 8$$

P.E. instabile

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$d_f \cdot V(x) = x_1(4x_1 + x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2) + x_2(-x_1 + 4x_2 - x_2x_1^2 + x_2^3) =$$

$$= 4x_1^2 + \cancel{x_1x_2} - x_1^4 - x_1^2x_2^2 - \cancel{x_1x_2} + 4x_2^2 - x_2^2x_1^2 + x_2^4 =$$

$$= 4x_1^2 + 4x_2^2 - x_1^4 - x_2^4 - 2x_1^2x_2^2 =$$

$$= (x_1^2+x_2^2)(4-x_1^2-x_2^2) \Rightarrow \text{d.p.} \quad \text{P.E. instabile}$$

b)

• ESAME 16-04-2021 :

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalla equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + b\dot{y}(t)^3 + (4 - a^2)y(t) = u(t)$$

- Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$ e $u(t) = 0$.
- Si studi la stabilità degli equilibri per $a \neq 2$.
- Per $a = 2$ determinare un ingresso $u(t)$ che renda l'origine un equilibrio asintoticamente stabile.

a)

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_2 - bx_2^3 - (4-a^2)x_1 + u(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \emptyset \\ -ax_2 - bx_2^3 - (4-a^2)x_1 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow x_1(4-a^2) = \emptyset$$

l'unico punto di equilibrio è $P(0,0)$.

b) $a \neq 2$

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ -4-a^2 & -a-3bx_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ -4-a^2 & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = a^2+4 > \emptyset \quad Tr(A) = -a$$

Se $a>0$ il P.E. è stabile
Se $a<0$ il P.E è instabile
Se $a=0$ non posso concludere

c) $a = 2$

$$A = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ -4-a^2 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A+B\cdot K) = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_1 & K_2-2 \end{bmatrix}$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2+2\lambda+1$$

$$\begin{cases} K_1 = 2 \\ K_2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot x$$

## • ESAME 07 - 06 - 2021

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + a x_2(t) + x_1^2(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = b - a x_2(t) - x_1^2(t) x_2(t) \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
- Si studi la stabilità degli equilibri per $b = 0$ al variare di $a \neq 0$.
- Per $a = b = 0$ si commenti sulla stabilità dei punti di equilibrio studiando gli andamenti nello spazio delle fasi.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + a x_2 + x_1^2 x_2 = \emptyset \Rightarrow x_2(x_1^2 + a) = x_1 \quad x_2 = \dfrac{x_1}{x_1^2 + a} \\ b - a x_2 - x_1^2 x_2 = \emptyset \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$b - a \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + a} - x_1^2 \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + a} = \emptyset \Rightarrow x_1^2 b + ab - a x_1 - x_1^3 = \emptyset$$

$$x_1^3 - x_1^2 b + a x_1 - ab = \emptyset$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -b & a & -ab \\ b & & b & \emptyset & ab \\ \hline & 1 & \emptyset & a & \emptyset \end{array} \Rightarrow (x_1 - b)(x_1^2 + a) = \emptyset \Rightarrow \cdot)\ x_1 = b \quad x_1^2 = -a$$

1. Se $x_1 = b$ | punti di equilibrio sono $\Rightarrow \left(b, \dfrac{b}{b^2 + a}\right)$ con $a + b^2 \neq 0$
2. Se $x_1^2 = -a$ :

$$\begin{cases} \text{Se } a < 0 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{a} \text{ non esistono punti di equilibrio.} \\ \text{Se } a > 0 \Rightarrow x_1 = \pm j\sqrt{a} \text{ non esistono punti di equilibrio.} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} -x_1 + a x_2 + x_1^2 x_2 = 0 \\ -a x_2 - x_1^2 x_2 = 0 \Rightarrow x_2(a + x_1^2) = \emptyset \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

· L'unico punto di equilibrio è $(0,0)$.

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} -1 + 2x_1 x_2 & a + x_1^2 \\ -2x_1 x_2 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

•) Con $a > 0$ il $\det(A) = a$ e il sistema è A.S (Traccia di $A < 0$).

•) Con $a < 0$ il $\det(A) = -a$ sistema instabile.

•) Con $a = 0$ non posso concludere.

c)

$$\begin{cases} -x_1 + x_1^2 x_2 = 0 \\ -x_1^2 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{il punto di equilibrio è } (0, \bar{x}_2)$$

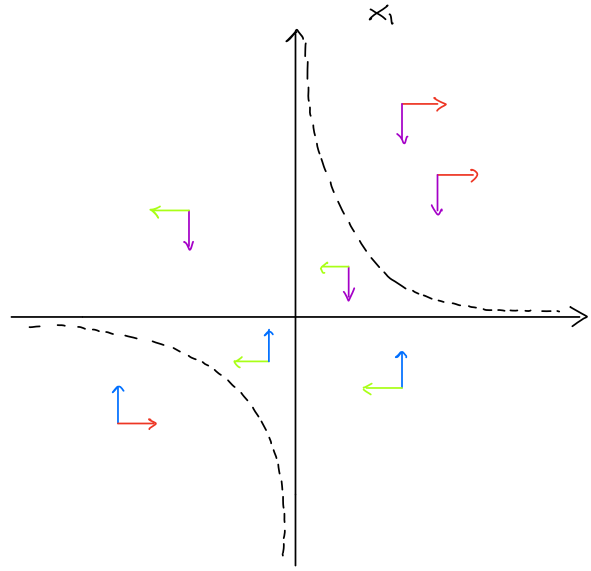
- Per $\dot{x}_1 > 0$ :

$-x_1 + x_1^2 x_2 > 0 \Rightarrow x_1(x_1 x_2 - 1) > 0$

$x_1 x_2 - 1 > 0 \Rightarrow x_2 > \frac{1}{x_1}$ con $x_1 > 0$

- Per $\dot{x}_2 > 0$ :

$-x_1^2 x_2 > 0$



- $\dot{x}_1 > 0 \rightarrow$
- $\dot{x}_1 < 0 \rightarrow$
- $\dot{x}_2 > 0 \rightarrow$
- $\dot{x}_2 < 0 \rightarrow$

• ESAME 28-06-2021

1. Si consideri il sistema **tempo discreto** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = ax_1(k) + 2x_1^2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + bx_1(k)x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

- Per $u(k) = 0$ determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
- Per $u(k) = 0$ si studi la stabilità degli equilibri con il metodo indiretto di Lyapunov al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
- Per $a \leq 1$ si commenti sull'esistenza di un ingresso lineare che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile (solo utilizzando il metodo indiretto.

a)

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(k) = ax_1(k) + 2x_1^2(k) \\ \cancel{x_2(k)} = \cancel{x_2(k)} + bx_1(k)x_2(k) \end{cases} \Rightarrow bx_1(k)x_2(k) = \emptyset$$

• I punti di equilibrio sono:

1. l'origine $(0,0)$
2. Se $x_1 = 0 \Rightarrow (0, \bar{x}_2)$
3. Se $\begin{matrix} b = \emptyset \\ a \neq 1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\frac{1-a}{2}, \bar{x}_2\right) \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} 2x_1^2 + ax_1 - x_1 = \emptyset \\ x_1(2x_1 + a - 1) = \emptyset \\ x_1 = \emptyset \text{ e } x_1 = \frac{1-a}{2} \end{matrix}}$
4. Se $\begin{matrix} b \neq 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\frac{1-a}{2}, 0\right)$

b)

$$A_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} a+4x_1 & 0 \\ bx_2 & 1+bx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Avendo $\lambda = 1$, anche se $a$ avesse modulo minore di $1$, non posso comunque concludere nulla. Se $a > 1$ il punto è instabile.

$$A_{lin}\Big|_{0,\bar{x}_2} = \begin{bmatrix} a+4x_1 & 0 \\ bx_2 & 1+bx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b\bar{x}_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ stessa cosa di prima

• $b = \emptyset,\ a \neq 1$

$$A_{lin}\Big|_{\frac{1-a}{2},\bar{x}_2} = \begin{bmatrix} a+4x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \frac{\cancel{4}^{2}(1-a)}{\cancel{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

= stessa cosa di prima

• $b \neq 0,\ a \neq 1$

$$A_{lin}\Big|_{\frac{1-a}{2},0} = \begin{bmatrix} a+4x_1 & 0 \\ bx_2 & 1+bx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \frac{\cancel{4}^{2}(1-a)}{\cancel{2}} & \emptyset \\ \emptyset & 1 + \frac{b(1-a)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-a & 0 \\ 0 & \frac{2+b-ab}{2} \end{bmatrix} =$$

- Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2-a$ e $\lambda_2 = \frac{2+b-ab}{2}$.

- $\lambda_1 = 2-a \Rightarrow -1 < 2-a < 1$

$-3 < -a < 1-2$

$1 < a < 3$

- $\lambda_2 = \frac{2+b-ab}{2} \Rightarrow -1 < \frac{2+b-ab}{2} < 1$

$-4 < b-ab < \emptyset \Rightarrow -4 < b(1-a) < 0$

$-4 < b < 0 \qquad -5 < -a < -1$

$5 > a > 1$

- Con queste soluzioni il sistema è A.S.

c)

- $a \leq 1$

• ESAME 19-07-2021

**Teoria dei Sistemi e del Controllo - 19-07-2021**

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2^2(t) + ax_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$ e se ne studi la stabilità degli equilibri con il metodo indiretto di Lyapunov.
- Per ogni punto di equilibrio, tra quelli trovati al punto precedente, si determini se è possibile agire su una o l'altra dinamica con un ingresso $u$ affine nello stato che lo renda asintoticamente stabile.
- Nel caso di ingresso nullo, per $a = 1$ si studi la stabilità dell'origine con $V = x_1^2 - x_2^2$.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - x_1x_2 = \emptyset \Rightarrow x_1(x_1 - x_2) = \emptyset \begin{cases} \to x_1 = 0 \\ \to x_1 = x_2 \end{cases} \\ -x_2^2 + ax_1x_2 = \emptyset \Rightarrow x_2(ax_1 - x_2) = \emptyset \end{cases}$$

- Se $x_1 = 0$, $x_2 = 0$
- Se $x_1 = x_2 \Rightarrow ax_2^2 - x_2^2 = \emptyset \quad x_2^2(a-1) = 0$ $\begin{cases} \text{se } a = 1 \Rightarrow P(\alpha,\alpha) \\ \text{se } a \neq 1 \Rightarrow P(0,0) \end{cases}$

- I punti di equilibrio sono: $P_1(0,0)$ $P_2(\alpha,\alpha)$

$$A_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 \\ ax_2 & -2x_2 + ax_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Non posso concludere}$$

$$A_{lin}\Big|_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 \\ ax_2 & -2x_2 + ax_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda) = (\alpha - \lambda)(-\alpha - \lambda) + \alpha =$$

$$= -\alpha^2 - \cancel{\alpha\lambda} + \cancel{\alpha\lambda} + \lambda^2 + \alpha \Rightarrow \lambda^2 = \alpha^2 - \alpha$$

↓

Numero sempre maggiore di zero

$P(\alpha,\alpha)$ è instabile

b)

$A_{0,0}$ è tutta nulla e non sarà possibile renderlo A.S.

$$A_{\alpha,\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$ $\Longrightarrow$ è possibile renderlo stabile agendo su entrambe le dinamiche

c)

$a=1$ $\quad V(x) = x_1^2 - x_2^2$

$$L_f V = 2x_1(x_1^2 - x_1x_2) - 2x_2(-x_2^2 + x_1x_2) = 2x_1(x_1(x_1-x_2)) - 2x_2(x_2(x_1-x_2)) =$$

$$= 2x_1^2(x_1-x_2) - 2x_2^2(x_1-x_2) =$$

$$= 2(x_1^2(x_1-x_2) - x_2^2(x_1-x_2)) = 2\left[(x_1-x_2)(x_1^2-x_2^2)\right] =$$

$$= 2\left[(x_1-x_2)(x_1-x_2)(x_1+x_2)\right] = 2\cdot(x_1-x_2)^2(x_1+x_2)$$

2. Si consideri il sistema **tempo continuo**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_2(t) + a x_1(t) x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^3(t) - x_2(t) \end{cases}$$

- Si determinino al variare di $a \in \mathbb{R}$ i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità con il metodo indiretto per $u(t) = 0$.
- Per l'equilibrio nell'origine si valuti e commenti sull'esistenza di un controllo lineare nello stato che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
- Si costruisca un ingresso non lineare nello stato che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile e si fornisca l'associata candidata di Lyapunov.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} -x_1^3 + x_2 + a x_1 x_2 = \emptyset \\ -x_1^3 - x_2 = \emptyset \Rightarrow x_2 = -x_1^3 \end{cases} \Longrightarrow -x_1^3 - x_1^3 + a x_1^4 = \emptyset$$

$$-x_1^3(1+1-a x_1) = \emptyset$$

- $x_1 = \emptyset$
- $x_1 = -\frac{2}{a}$ con $a \neq \emptyset$

- Se $x_1 = \emptyset$, $x_2 = \emptyset$
- Se $x_1 = -\frac{2}{a}$, $x_2 = +\frac{8}{a^3}$

$$A_{lin}\Big|_{0,0} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 + a x_2 & 1 + a x_1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda(\lambda+1) = \emptyset \quad \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{matrix} \Rightarrow$$

Non posso concludere poiché $\lambda = 0$.

$$A_{lin}\Big|_{-\frac{2}{a}, \frac{8}{a^3}} \begin{bmatrix} -3x_1^2 + a x_2 & 1 + a x_1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot \frac{4}{a^2} + \cancel{a} \cdot \left(\frac{8}{a^{\cancel{3}2}}\right) & 1 - \cancel{a} \cdot \frac{2}{\cancel{a}} \\ -3 \cdot \frac{4}{a^2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{a^2} & -1 \\ -\frac{12}{a^2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda) = \left(-\frac{4}{a^2} - \lambda\right)(-1-\lambda) - \frac{12}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2}\lambda + \lambda + \lambda^2 - \frac{12}{a^2} = \emptyset$$

$$4 + 4\lambda + a^2\lambda + a^2\lambda^2 - 12 = 0$$

$$a^2\lambda^2 + \lambda(4+a^2) - 8 = 0$$

$$\Delta = (4+a^2)^2 + 4(a^2 \cdot 8) =$$

$$= 16 + 8a^2 + a^4 + 32a^2 = 16 + a^4 + 40a^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 - a^2 \pm \sqrt{16 + a^4 + 40a^2}}{2a^2}$$

$$(-4-a^2)^2 > 16 + a^4 + 40a^2$$

$$\cancel{16} + 8a^2 + \cancel{a^4} > \cancel{16} + \cancel{a^4} + 4a^4 \implies 8a^2 > 40a^2$$

Questo non è mai verificato. Ciò significa che $\exists$ almeno un $\lambda$ con $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, quindi il punto $\left(-\frac{2}{a}, \frac{8}{a^3}\right)$ è un punto di instabilità.

c)

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$L_f V = x_1 \cdot (-x_1^3 + x_2 + a x_1 x_2 + u(t)) + x_2(-x_1^3 - x_2) =$$

$$= -x_1^4 + x_1 x_2 + a x_1^2 x_2 + x_1 \cdot u(t) - x_1^3 x_2 - x_2^2$$

$$u(t) = -x_2 - a x_1 x_2 + x_1^2 x_2$$

$$L_f V = -x_1^4 + x_1 x_2 + a x_1^2 x_2 + x_1(-x_2 - a x_1 x_2 + x_1^2 x_2) - x_1^3 x_2 - x_2^2 =$$

$$= -x_1^4 + \cancel{x_1 x_2} + \cancel{a x_1^2 x_2} - \cancel{x_1 x_2} - \cancel{a x_1^2 x_2} + \cancel{x_1^3 x_2} - \cancel{x_1^3 x_2} - x_2^2 =$$

$= -x_1^4 - x_2^2$ è d.n. il sistema è AS

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + B \cdot K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2+1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A + BK - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} K_1 - \lambda & K_2 + 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (K_1 - \lambda)(-1-\lambda) = -K_1 - K_1\lambda + \lambda + \lambda^2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(1 - K_1) - K_1$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} -K_1 = -1 \\ -1 - K_1 = -2 \end{cases} \implies K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Si consideri il sistema **tempo continuo**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2^2(t) + x_1(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1^3(t) - x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri del sistema e si traccino gli andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi per ingressi nulli.
- Si studino le proprietà di stabilità degli equilibri trovati al punto precedente con il metodo indiretto di Lyapunov. Si commenti inoltre, per ogni equilibrio trovato, sulla possibilità di usare uno dei due ingressi di controllo come una funzione affine degli stati per rendere l'equilibrio asintoticamente stabile.
- Per l'equilibrio nell'origine, utilizzando una funzione V opportuna e il metodo diretto di Lyapunov, determinare un ingresso $u_1$ non lineare che renda la derivata direzionale solo semidefinita negativa e valutare se l'equilibrio risulta comunque asintoticamente stabile.

a)

$$\begin{cases} -x_2^2 + x_1 = \emptyset \\ x_1^3 - x_2 = \emptyset \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow x_1 = x_2^2 \\ \Rightarrow (x_2^2)^3 - x_2 = \emptyset \end{matrix}$$

$$x_2^6 - x_2 = \emptyset \Rightarrow x_2(x_2^5 - 1) = \emptyset$$

$$x_2 = \emptyset$$
$$x_2 = 1$$

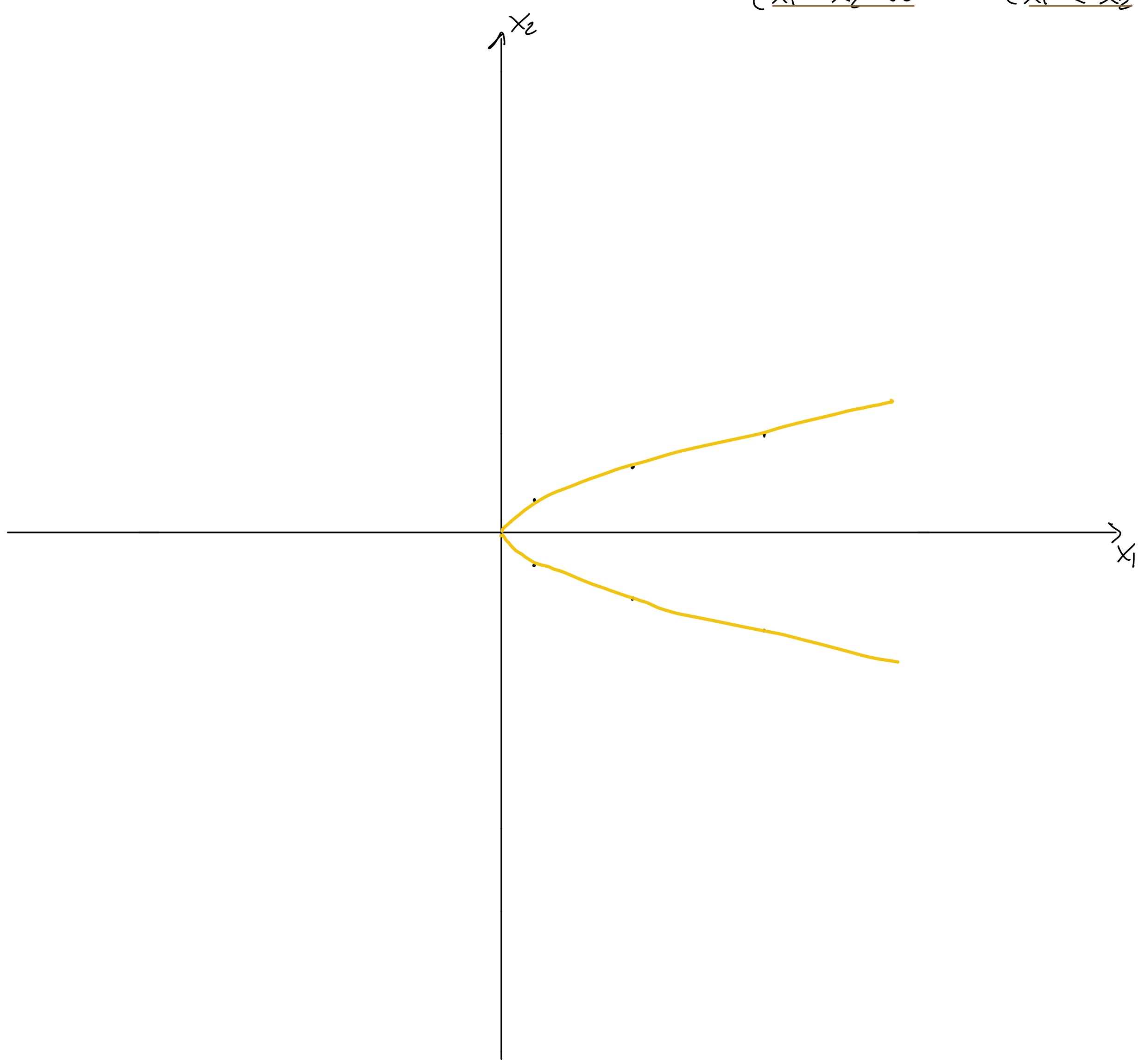
- I punti di equilibrio sono: $P(0,0)$, $P(1,1)$

• Tracciare gli andamenti nello spazio delle fasi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 > 0 \\ \dot{x}_1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 > 0 \\ \dot{x}_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_2^2 + x_1 > 0 \\ -x_2^2 + x_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > x_2^2 \\ x_1 < x_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^3 - x_2 > 0 \\ x_1^3 - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 > x_2 \\ x_1^3 < x_2 \end{cases}$$



b)

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} 1 & -2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -1 \Rightarrow$$

• segni discordi, P.E. instabile.

$$A_{lin}|_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & -2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 6 \Rightarrow$$

• segni discordi, P.E. instabile.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Per come sono fatte $B_1$ e $B_2$ non è possibile rendere l'equilibrio A.S.

c)

$$V(x) = (x_1^2 + x_2^2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$L_f V(x) = x_1(-x_2^2 + x_1 + u_1) + x_2(x_1^3 - x_2) =$$

$$= -x_1 x_2^2 + x_1^2 + x_1 u_1 + x_1^3 x_2 - x_2^2 =$$

$$u_1 = (x_2^2 - x_1 - x_1^2 x_2)$$

$$= -x_1 x_2^2 + x_1^2 + x_1(x_2^2 - x_1 - x_1^2 x_2) + x_1^3 x_2 - x_2^2 =$$

$$= -\cancel{x_1 x_2^2} + \cancel{x_1^2} + \cancel{x_1 x_2^2} - \cancel{x_1^2} - \cancel{x_1^3 x_2} - x_2^2 = -x_2^2$$

• Sfrutto Lasalle:

Devo verificare se l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine:

$$R: \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid L_f V(x) = 0 \} = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \dot{x}_1 = 0 \end{cases}$$

$P(0,0)$ è A.S.

2. Si consideri il sistema **tempo discreto**

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1^3(k) + x_2^3(k) \\ x_2(k+1) = ax_2(k) - x_2^3(k) \end{cases}$$

- Si determinino gli equilibri del sistema al variare di $a \leq 1$ e se ne studino le proprietà di stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov.
- Per i valori di $a$ per cui non è stato possibile concludere la proprietà di stabilità dell'equilibrio con il metodo indiretto procedere con altri metodi. Suggerimento: per il caso $a = -1$, si studi la stabilità dell'origine con la funzione di una sola variabile $V(x_2) = x_2^2$.

a)

$$\begin{cases} x_1 = -x_1^3 + x_2^3 \\ x_2 = ax_2 - x_2^3 \end{cases} \Rightarrow \quad x_2^3 + x_2 - ax_2 = \emptyset$$

$$x_2(x_2^2 + 1 - a) = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2^2 = a-1 \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{a-1} \end{cases}$$

$a = 1 \quad x_2 = \emptyset$

$a < 1$ escludo

- I punti di equilibrio sono: $P(0,0)$

$$A_{lin}\big|_{0,0} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ 0 & a - 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Se $-1 < a < 1$ il punto di equilibrio è stabile.

Se $a = \pm 1$ non posso concludere.

Se $a < -1$ il punto di equilibrio è instabile.

b)

2. Si consideri il sistema dinamico descritto dalla equazione differenziale non lineare:

$$\ddot{y}(t) + y(t) - y(t)^3 + y(t)\dot{y}(t)^2 + \dot{y}(t) = u(t)$$

- Si porti il sistema in forma di stato e se ne determinino gli equilibri per $u(t) = 0$.
- Si studi la stabilità degli equilibri ottenuti al punto precedente.
- Si riportino degli ingressi affini nello stato che rendano asintoticamente stabili gli equilibri risultati instabili (un ingresso per ogni punto di equilibrio, da scrivere in modo esplicito come funzione degli stati).

a)

$$\ddot{y} + y - y^3 + y\dot{y}^2 + \dot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = y^3 - \dot{y} - y\dot{y}^2 - y$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 - x_2 - x_1 x_2^2 - x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \emptyset \\ \dot{x}_2 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \emptyset = x_2 \\ \emptyset = x_1^3 - x_2 - x_1 x_2^2 - x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1^3 - x_1 = \emptyset$$

$$x_1(x_1^2 - 1) = \emptyset \quad \begin{cases} x_1 = \emptyset \\ x_1 = \pm 1 \end{cases}$$

- I punti di equilibrio sono: $P(\emptyset,\emptyset)$, $P(1,0)$, $P(-1,0)$

b)

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ 3x_1^2 - x_2^2 - 1 & -1 - 2x_1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \quad Tr(A) = -1 \Rightarrow \text{P.E A.S}$$

$$A_{lin}|_{1,0} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ 3x_1^2 - x_2^2 - 1 & -1 - 2x_1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -2 \Rightarrow \text{P.E. non A.S.}$$

$$A_{lin}|_{-1,0} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ 3x_1^2 - x_2^2 - 1 & -1 - 2x_1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -2 \Rightarrow \text{P.E. non A.S.}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Completamente raggiungibile

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_1+2 & K_2-1 \end{bmatrix}$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\det(A+B\cdot K - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda(-K_2+1) - K_1 - 2$$

$$\begin{cases} -K_1 - 2 = 1 \\ -K_2 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -2 \\ K_2 = -1 \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$u = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot x \Rightarrow$ Va bene per entrambi i punti di equilibrio