Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 5

Dario Trevisan – *https://web.dm.unipi.it/trevisan*

6/10/2025

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

$$\{X = t\}$$

Kolmogorov $\quad X : \Omega \longrightarrow E$

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.

$$\{X \geq 0\} \qquad \{X^2 = 1\}$$

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.
- Legge di una variabile $U \mapsto P(X \in U|I)$

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.
- Legge di una variabile $U \mapsto P(X \in U|I)$
- Densità discreta
  $(P(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \sum_{x \in U} P(X = x)$

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.
- Legge di una variabile $U \mapsto P(X \in U|I)$
- Densità discreta
  $(P(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \sum_{x \in U} P(X = x)$
- Densità continua
  $(p(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \int_U P(X = x) dx$

$p_X(x) = p(x)$

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.
- Legge di una variabile $U \mapsto P(X \in U|I)$
- Densità discreta
  $(P(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \sum_{x \in U} P(X = x)$
- Densità continua
  $(p(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \int_U P(X = x) dx$
- **ATTENZIONE**: esistono variabili X né discrete né continue!

Caso vettoriale

Estendiamo la densità continua al caso vettoriale (richiede integrali in più variabili, ma non richiesti negli esercizi).

- X a valori in $\mathbb{R}^d$ ha densità continua f (rispetto all'informazione I) se vale, per ogni *rettangolo*

$$U = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d) \subseteq \mathbb{R}^d,$$

l'identità

$$P(X \in U|I) = \int_U f = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int_{a_d}^{b_d} dx_d\, f(x_1, \ldots, x_d).$$

Se Discreto

$$P(X \in U | I) = \sum_{x \in U} P(X = x | I)$$

Caso vettoriale

Estendiamo la densità continua al caso vettoriale (richiede integrali in più variabili, ma non richiesti negli esercizi).

- X a valori in $\mathbb{R}^d$ ha densità continua f (rispetto all'informazione I) se vale, per ogni *rettangolo*

$$U = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d) \subseteq \mathbb{R}^d,$$

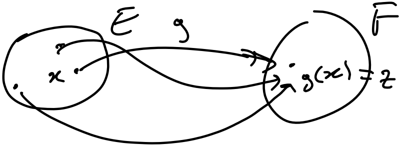
  l'identità

$$P(X \in U|I) = \int_U f = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int_{a_d}^{b_d} dx_d\, f(x_1, \ldots, x_d).$$

- notazione $f(x) = p(X = x|I)$.

Trasformazioni di variabili aleatorie

Composizione tramite funzione



Sia X a valori in E e $g : E \to F$ una funzione.

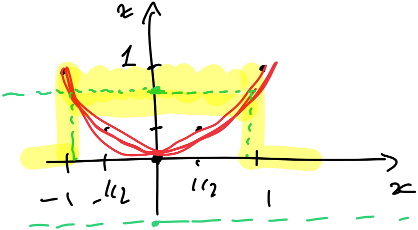
- Definiamo la **variabile composta** $g(X)$ tramite il sistema di alternative, per $z \in F$,

$$\{g(X) = z\} = \left\{X \in \underbrace{g^{-1}(z)}_{\text{i valori } x \text{ tali che } g(x)=z}\right\}.$$

Esempi

$X \in [-1, 1]$ continua uniforme

$g(x) = x^2$



$\{g(X) = X^2 \geq 1/2\}$

$\{X^2 \geq 1/2\}$

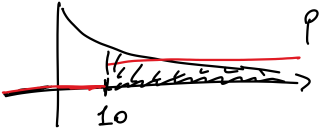
$\shortparallel$

$\{X > \frac{1}{\sqrt{2}}$ oppure $X < -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

<u>OSS</u> $\{g(X) = z\} = \{X = g^{-1}(z)\}$ se <u>g invertibile</u>

<u>Es</u> $g(x) = x^3$ $\{X^3 = z\} = \{X = \sqrt[3]{z}\}$

X esponenziale di parametro $\lambda = 1$



$$p(X=x) = e^{-x} \quad x > 0$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 10 \\ 0 & \text{se } x \leq 10 \end{cases}$$

$g(X) \in \{0, 1\} \longrightarrow$ densità Bernoulli

$$P(g(X) = 1) = P(X > 10) =$$

$$= \int_{10}^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{10}^{+\infty}$$

$$= e^{-10}$$

Trasformazione della densità: caso discreto

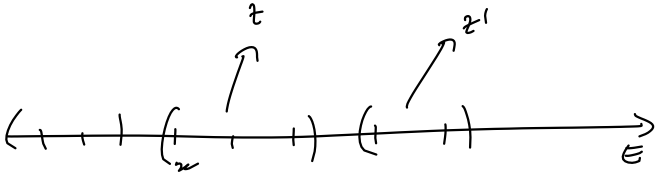
$z \in F \mapsto P(g(X) = z | I)$ densità discreta

Se X è discreta (e quindi $g(X)$ è discreta)

$$P(g(X) = z|I) = \sum_{x \in g^{-1}(z)} P(X = x|I).$$

Se X ha densità continua e $g(X)$ è discreta,

$$P(g(X) = z|I) = \int_{g^{-1}(z)} p(X = x|I)dx.$$



Trasformazione della densità: caso continuo

Segue da un cambio di variabile il seguente risultato:

- Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$, con densità continua $p(X = x|I)$.

Senza ipotesi su g NON è detto che

g(x) sia continua

Trasformazione della densità: caso continuo

Segue da un cambio di variabile il seguente risultato:

- Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$, con densità continua $p(X = x|I)$.
- Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile, derivabile, con derivata continua e mai nulla $g'(x) \neq 0$.

$g(x) = ax + b$

$a \neq 0$

$$\begin{cases} g(x) = x^3 \\ g'(x) = 3x^2 \end{cases}$$

Trasformazione della densità: caso continuo

Segue da un cambio di variabile il seguente risultato:

- Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$, con densità continua $p(X = x|I)$.
- Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile, derivabile, con derivata continua e mai nulla $g'(x) \neq 0$.
- Allora $g(X)$ ammmette densità continua e vale

$$\left[\frac{\text{prob}}{g}\right] = \quad p(g(X) = z|I) = p(X = \underbrace{g^{-1}(z)}_{\left[\frac{\text{prob}}{x}\right]}|I) \cdot \frac{1}{|g'(g^{-1}(z))|} \quad \left[\frac{x}{g}\right]$$

valore assoluto

$$g' = \frac{dg}{dx}$$

Esempio Caso lineare

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$g(x) = ax + b$ $\qquad g'(x) = a$ $\qquad a \neq 0$

$g^{-1}(z) = \frac{z-b}{a}$ $\qquad ax+b=z$ $\qquad x = \frac{z-b}{a}$

$$p(aX+b=z) = p\left(X = \frac{z-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|}$$

$$= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\frac{z-b}{a}}\frac{1}{|a|} & \text{se } \frac{z-b}{a} \geq 0 \\ 0 & \text{se } \frac{z-b}{a} < 0 \end{cases}$$

$\mathrm{Exp}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

$g(x) = ax$ con $a>0$

$$\longrightarrow p(aX=z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a}e^{-\frac{\lambda}{a}z} & z \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

Esempio Caso lineare $g(x) = ax+b$ $a \neq 0$

X continua uniforme su $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ $aX+b$ uniforme su $g([c,d])$

Cenno di dimostrazione

$X \quad p(X=x)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente

$U = [a,b]$

$$P(g(X) \in [a,b]) \stackrel{?}{=} \int_a^b f(z)\,dz$$

densità di $g(X)$

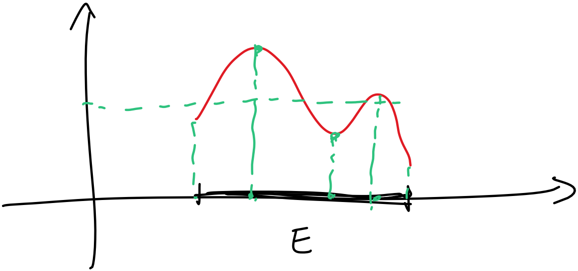
$$P(a \le g(X) \le b) = P(g^{-1}(a) \le X \le g^{-1}(b))$$

$$= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} p(X=x)\,dx \stackrel{[z=g(x)]}{=} \int_a^b p(X=g^{-1}(z))\,\frac{dz}{g'(g^{-1}(z))}$$

$[x = g^{-1}(z) \qquad dz = g'(x)\,dx]$

Una estensione (utile nei problemi):

- se X assume con probabilità 1 valori in un intervallo $E \subseteq \mathbb{R}$



Una estensione (utile nei problemi):

- se X assume con probabilità 1 valori in un intervallo $E \subseteq \mathbb{R}$
- $g : E \to \mathbb{R}$ è tale che si può decomporre E in una unione finita di intervalli a due a due disgiunti in cui, all'interno di ciascun intervallo, g sia invertibile, derivabile con derivata continua e mai nulla $g'(x) \neq 0$.

Una estensione (utile nei problemi):

- se X assume con probabilità 1 valori in un intervallo $E \subseteq \mathbb{R}$
- $g : E \to \mathbb{R}$ è tale che si può decomporre E in una unione finita di intervalli a due a due disgiunti in cui, all'interno di ciascun intervallo, g sia invertibile, derivabile con derivata continua e mai nulla $g'(x) \neq 0$.
- Allora $g(X)$ ammette densità continua

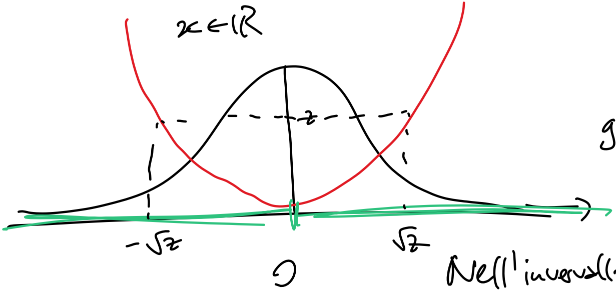
$$p(g(X) = z|I) = \sum_{x \in g^{-1}(z)} p(X = x|I) \cdot \frac{1}{|g'(x)|}.$$

Esempio

X continua con densità gaussiana standard

$$p(X=x) = c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad c>0 \qquad c = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx}$$

$x \in \mathbb{R}$



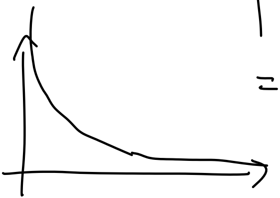
$$\underline{g(x) = x^2}$$

Nell'intervallo $(-\infty, 0)$ abbiamo che g è invertibile con $g(z) = -\sqrt{z}$

Cambio di variabile generale $\quad g(x) = x^2$ ha densità continua $\quad \underline{z \geq 0}$

$$g'(x) = 2x$$

$$p(X^2 = z) = \sum_{x : x^2 = z} p(X = x) \frac{1}{|g'(x)|}$$



$$= \underbrace{p(X = -\sqrt{z})} \frac{1}{|-2\sqrt{z}|} + \underbrace{p(X = \sqrt{z})} \cdot \frac{1}{|2\sqrt{z}|}$$

$$= c \exp\left(-\frac{(-\sqrt{z})^2}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{z}} + c \exp\left(-\frac{(\sqrt{z})^2}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$\boxed{= c \exp\left(-\frac{z}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{z}}}$$

$$\underline{\chi^2(1) = \Gamma(1/2, 1/2)}$$

Trasformazione della densità: caso vettoriale

- Sia X una variabile aleatoria vettoriale, a valori in $\mathbb{R}^d$, con densità continua $p(X = x|I)$.

Trasformazione della densità: caso vettoriale

- Sia X una variabile aleatoria vettoriale, a valori in $\mathbb{R}^d$, con densità continua $p(X = x|I)$.
- Sia $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione invertibile, derivabile con derivata continua e invertibile in ogni punto, ossia

$$\det \left(\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\ldots,d} \right) \neq 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

Trasformazione della densità: caso vettoriale

- Sia X una variabile aleatoria vettoriale, a valori in $\mathbb{R}^d$, con densità continua $p(X = x|I)$.
- Sia $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione invertibile, derivabile con derivata continua e invertibile in ogni punto, ossia

$$\det \left(\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\ldots,d} \right) \neq 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

- Allora $g(X)$ ammmette densità continua e vale

$$p(g(X) = z|I) = p(X = g^{-1}(z)|I) \cdot \frac{1}{|\det(Dg)(g^{-1}(z))|}$$

Esempi

Caso $g(x) = Ax + b$ $\quad A \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$$Dg(x) = A \qquad \underline{\det A \neq 0}$$

$g(X)$ è continua se X è continua

$$p(AX + b = z) = p(X = A^{-1}(z - b)) \frac{1}{|\det A|}$$

Esempio se $d = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\underline{\det A = 1} \rightsquigarrow p(AX = z) = p(X = A^{-1}z)$

Problema

Sia X una variabile con densità uniforme continua su $(-1, 3)$.

1. Scrivere la densità di X

Problema

Sia X una variabile con densità uniforme continua su $(-1, 3)$.

1. Scrivere la densità di X
2. Scrivere la densità di X^2.

Problema

Sia X una variabile con densità uniforme continua su $(-1, 3)$.

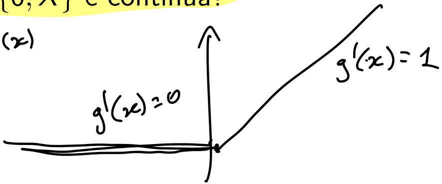
1. Scrivere la densità di X
2. Scrivere la densità di X^2.
3. Scrivere la densità di X^4, verificare che il risultato ottenendo applicando la formula di cambio di variabile direttamente da X è lo stesso che applicando in sequenza due volte la formula per $x \mapsto x^2$, ossia $X^4 = (X^2)^2$.

Problema

Sia X una variabile con densità uniforme continua su $(-1, 3)$.

1. Scrivere la densità di X
2. Scrivere la densità di X^2.
3. Scrivere la densità di X^4, verificare che il risultato ottenendo applicando la formula di cambio di variabile direttamente da X è lo stesso che applicando in sequenza due volte la formula per $x \mapsto x^2$, ossia $X^4 = (X^2)^2$.
4. La variabile $\max\{0, X\}$ è continua?

$= g(x)$

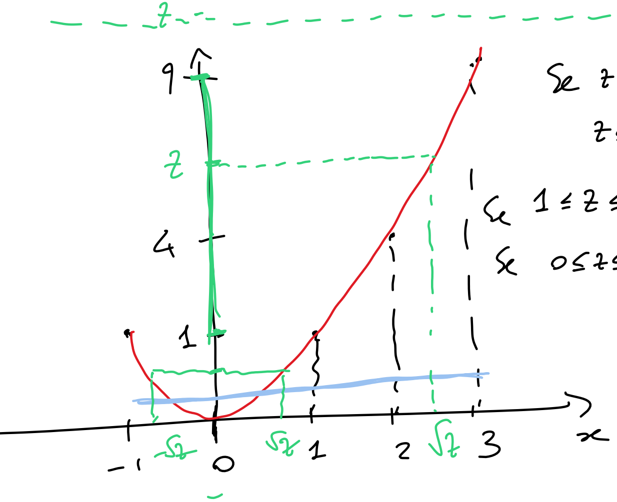


1. Densità di X

$[a,b] = [-1,3]$

$$p(X=x) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } x\in[-1,3] \\ 0 & \text{se } x\notin[-1,3] \end{cases}$$

$b-a = 3-(-1) = 4$



Se $z > 9 \rightsquigarrow p(X^2 = z) = 0$

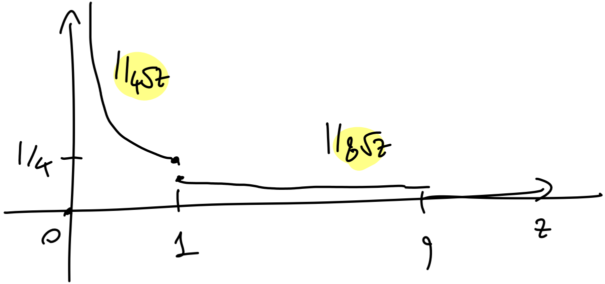
$z \le 0 \rightsquigarrow p(X^2 = z) = 0$

Se $1 \le z \le 9 \rightsquigarrow p(X^2 = z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{8\sqrt{z}}$

Se $0 \le z \le 1 \rightsquigarrow p(X^2 = z) = \frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{z}}$

$= \frac{1}{4\sqrt{z}}$

Densità di $X^2 = Z$

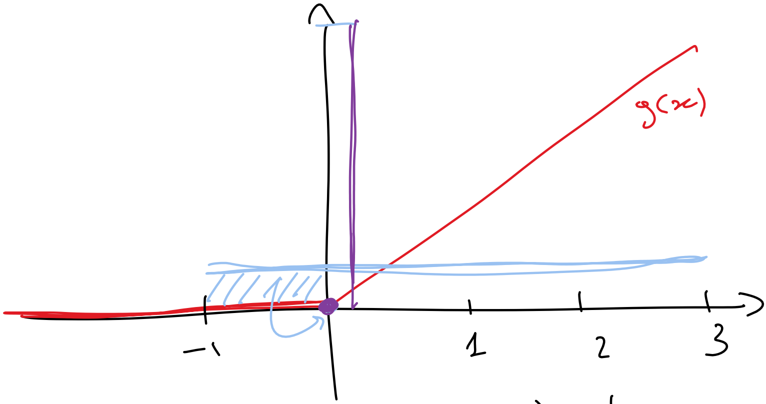


Densità di X^4 Applico $g(x) = x^2$ a $Z = X^2$

$$p(g(Z) = u) = p(Z = \sqrt{u}) \cdot \frac{1}{|2\sqrt{u}|}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4u^{1/4}} & \text{se } 0 \le u \le 1 \\ \dfrac{1}{8u^{1/4}} & \text{se } 1 \le u \le 81 \end{cases}$$

$$g(x) = x^+ = \mathrm{ReLU}(x) = \max\{0, x\}$$



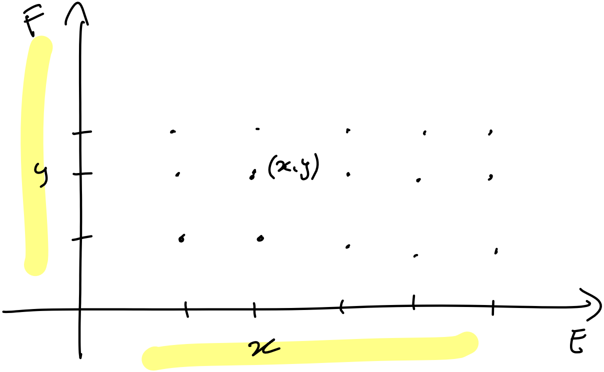
$$P(\max\{0, X\} = 0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{4}$$

ma $P(\max\{0, X\} = z) = 0$ se $z \neq 0$

Variabile congiunta

Date due variabili aleatorie $X \in E$, $Y \in F$, come definire la variabile *congiunta* (X, Y) a valori nelle coppie ordinate $(x, y) \in E \times F$?

- *Esempio*: si vuole applicare una funzione $g(x, y)$.



Variabile congiunta

Date due variabili aleatorie $X \in E$, $Y \in F$, come definire la variabile *congiunta* (X, Y) a valori nelle coppie ordinate $(x, y) \in E \times F$?

- *Esempio*: si vuole applicare una funzione $g(x, y)$.
- Dai sistemi di alternative $(\{X = x\})_{x \in E}$, $(\{Y = y\})_{y \in F}$, si definisce la variabile aleatoria *congiunta* (X, Y) a valori in $E \times F$ tramite il sistema di alternative

$$\{(X, Y) = (x, y)\} = \{X = x, Y = y\} = \{X = x\} \text{ e } \{Y = y\}.$$

Le variabili X, Y (considerate separatamente) sono le *marginali* della variabile congiunta (X, Y).

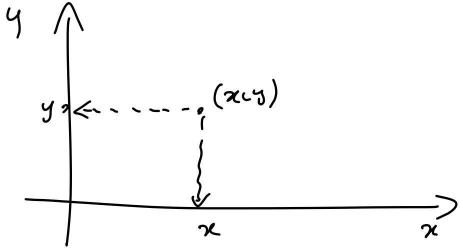
Dalla legge congiunta alle leggi marginali

- Dalla legge congiunta è sempre possibile ottenere le leggi delle marginali, tramite composizione di opportune funzioni.

Dalla legge congiunta alle leggi marginali

- Dalla legge congiunta è sempre possibile ottenere le leggi delle marginali, tramite composizione di opportune funzioni.
- La variabile X è ottenibile dalla (X, Y) tramite la funzione

$$g : E \times F \to E, \quad (x, y) \mapsto x.$$



Dalla legge congiunta alle leggi marginali

- Dalla legge congiunta è sempre possibile ottenere le leggi delle marginali, tramite composizione di opportune funzioni.
- La variabile X è ottenibile dalla (X, Y) tramite la funzione
$$g : E \times F \to E, \quad (x, y) \mapsto x.$$
- La variabile Y è ottenibile dalla (X, Y) tramite la funzione
$$g : E \times F \to E, \quad (x, y) \mapsto y.$$

- Troviamo quindi, nel caso discreto,

$$P(X = x|I) = \sum_{y \in F} P(X = x, Y = y|I) = \sum_{y \in F} P((X, Y) = (x, y)|I),$$

$$P(Y = y|I) = \sum_{x \in E} P((X, Y) = (x, y)|I).$$

Nel caso continuo $E = \mathbb{R}^d$, $F = \mathbb{R}^k$,

$$p(X = x|I) = \int_{\mathbb{R}^k} p((X, Y) = (x, y)|I)dy.$$

$$p(Y = y|I) = \int_{\mathbb{R}^d} p((X, Y) = (x, y)|I)dx.$$

Dalle leggi marginali alla legge congiunta?

- La conoscenza delle leggi di X, Y (separatamente) **non** determina la legge di (X, Y).

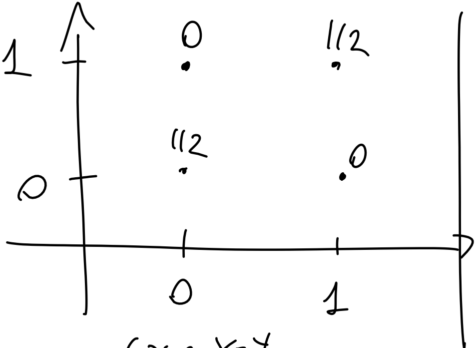
Esempio X è Bernoulli$(1/2)$

Y è Bernoulli$(1/2)$

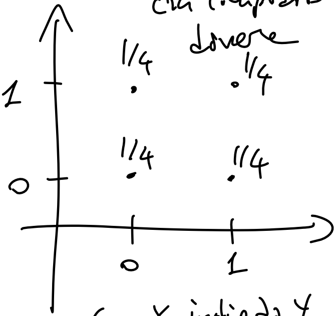
Nulla vieta che sia $X=Y$ oppure X è indipendente da Y

stessa estrazione

estrazione con rimpiazzo dovere



Caso $X=Y$



Caso X indip da Y

Esempio Bayes

Estensione al caso di k variabili aleatorie $X_1 \in E_1, \ldots, X_k \in E_k$.

- La variabile congiunta $X = (X_1, \ldots, X_k)$ a valori nelle k-uple ordinate

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \ldots \times E_k$$

è definita tramite il sistema di alternative

$$\begin{aligned}\{X = x\} &= \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k\} \\ &= \{X_1 = x_1\} \text{ e } \ldots \{X_k = x_k\}.\end{aligned}$$

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$\begin{aligned} P((X, Y) = (x, y)) &= P(X = x \text{ e } Y = y) \\ &= P(X = x)P(Y = y|X = x). \end{aligned}$$

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$\begin{aligned} P((X,Y)=(x,y)) &= P(X=x \text{ e } Y=y) \\ &= P(X=x)P(Y=y|X=x). \end{aligned}$$

- Nel caso di variabili discrete, la densità della variabile congiunta è determinata da

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$\begin{aligned} P((X,Y)=(x,y)) &= P(X=x \text{ e } Y=y) \\ &= P(X=x)P(Y=y|X=x). \end{aligned}$$

- Nel caso di variabili discrete, la densità della variabile congiunta è determinata da
  1. La densità della marginale X

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$\begin{aligned} P((X,Y)=(x,y)) &= P(X=x \text{ e } Y=y) \\ &= P(X=x)P(Y=y|X=x). \end{aligned}$$

- Nel caso di variabili discrete, la densità della variabile congiunta è determinata da
  1. La densità della marginale X $\#E = d$ $\#F = k$
  2. La densità della marginale Y, condizionata all'informazione $X = x$ per ciascun $x \in E$ (condizionata ad X).

$d \times k$

valori

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$
\begin{aligned}
P((X, Y) = (x, y)) &= P(X = x \text{ e } Y = y) \\
&= P(X = x)P(Y = y | X = x).
\end{aligned}
$$

- Nel caso di variabili discrete, la densità della variabile congiunta è determinata da
  1. La densità della marginale X
  2. La densità della marginale Y, condizionata all'informazione $X = x$ per ciascun $x \in E$ (condizionata ad X).
- In pratica in molti casi la legge congiunta è proprio definita tramite queste due quantità.

Formula di Bayes

Formula di bayes per variabili: caso discreto

La formula di Bayes si può quindi riscrivere

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = y) &= P(X = x) \cdot \frac{P(Y = y|X = x)}{P(Y = y)} \\ &\propto P(X = x)L(X = x; Y = y) \end{aligned}$$

- Il denominatore $P(Y = y)$ si calcola imponendo che la somma su x sia 1:

$$P(Y = y) = \sum_{x \in E} P(X = x)L(X = x; Y = y).$$

Stime MAP e MLE: caso discreto

Spesso interessa solo il valore più probabile della X, avendo osservato $Y = y$.

Si definisce la stima per X:

- di massimo a posteriori

$$x_{\mathrm{MAP}} \in \arg\max \{P(X = x) \cdot L(X = x; Y = y) : x \in E\}$$

Stime MAP e MLE: caso discreto

Spesso interessa solo il valore più probabile della X, avendo osservato $Y = y$.

Si definisce la stima per X:

- di massimo a posteriori

$$x_{\mathrm{MAP}} \in \arg\max \{P(X = x) \cdot L(X = x; Y = y) : x \in E\}$$

- di massima verosimiglianza (a priori uniforme)

$$x_{\mathrm{MLE}} \in \arg\max \{L(X = x; Y = y) : x \in E\}.$$

Stime MAP e MLE: caso discreto

Spesso interessa solo il valore più probabile della X, avendo osservato $Y = y$.

Si definisce la stima per X:

- di massimo a posteriori

$$x_{\text{MAP}} \in \arg\max \{P(X = x) \cdot L(X = x; Y = y) : x \in E\}$$

- di massima verosimiglianza (a priori uniforme)

$$x_{\text{MLE}} \in \arg\max \{L(X = x; Y = y) : x \in E\} .$$

- Anche se E è infinito la stima x_{MLE} ha senso (anche ne non c'è densità a priori uniforme)

Esempio

- un'urna contiene metà palline rosse e metà palline blu, da cui si effettuano un certo numero di estrazioni con rimpiazzo.

Esempio

- un'urna contiene metà palline rosse e metà palline blu, da cui si effettuano un certo numero di estrazioni con rimpiazzo.
- Il numero esatto delle estrazioni non è noto, ma solo che il numero di palline rosse estratte è 10.

Esempio

- un'urna contiene metà palline rosse e metà palline blu, da cui si effettuano un certo numero di estrazioni con rimpiazzo.
- Il numero esatto delle estrazioni non è noto, ma solo che il numero di palline rosse estratte è 10.
- Possiamo stimare il numero M di estrazione effettuate?

- A priori uniforme su $\{0, 1, \ldots, \bar{m}\}$:

$$P(M = m|\Omega) = \frac{1}{\bar{m}}$$

- A priori uniforme su $\{0, 1, \ldots, \bar{m}\}$:

$$P(M = m|\Omega) = \frac{1}{\bar{m}}$$

- Verosimiglianza

$$L(M = m; N_R = \overset{\overset{10}{\shortparallel}}{k}) = P(N_R = \overset{\overset{10}{\shortparallel}}{k}|M = m) = \binom{m}{k} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}}$$

$$= \binom{m}{\underset{k=10}{k}} \frac{1}{2^m}.$$

- A priori uniforme su $\{0, 1, \ldots, \bar{m}\}$:

$$P(M = m|\Omega) = \frac{1}{\bar{m}}$$

- Verosimiglianza

$$L(M = m; N_R = k) = P(N_R = k|M = m) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}$$
$$= \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}.$$

- Formula di Bayes (per $m \leq \bar{m}$)

$$P(M = m|N_R = k) \propto \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}.$$

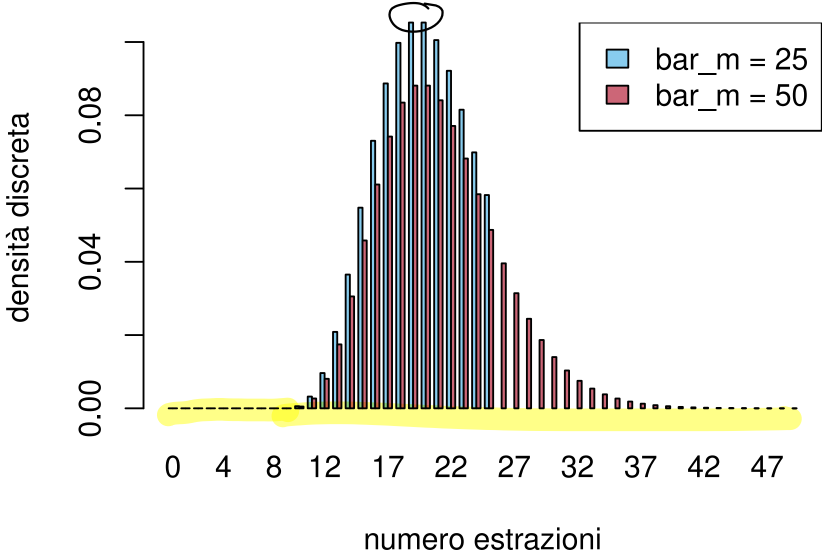


Figure 1: grafico della densità discreta di M sapendo $N_R = 10$

Caso variabile congiunta continua

Si introduce una "regola del prodotto" nel caso in cui vi sia la densità congiunta:

$$\begin{aligned} p((X,Y)=(x,y)) &= p(X=x, Y=y) \\ &= p(X=x)p(Y=y|X=x), \end{aligned}$$

- il termine $p(Y=y|X=x)$ è la *densità condizionale di* Y *rispetto ad* X

Caso variabile congiunta continua

Si introduce una "regola del prodotto" nel caso in cui vi sia la densità congiunta:

$$\begin{aligned} p((X,Y)=(x,y)) &= p(X=x, Y=y) \\ &= p(X=x)p(Y=y|X=x), \end{aligned}$$

- il termine $p(Y=y|X=x)$ è la *densità condizionale di Y rispetto ad X*
- formula di Kolmogorov nel caso continuo:

$$\boxed{p(Y=y|X=x) = \frac{p(X=x, Y=y)}{p(X=x)}}.$$

- formula di Bayes per densità continue:

$$p(X = x|Y = y) = p(X = x) \cdot \frac{p(Y = y|X = x)}{p(Y = y)}$$
$$\propto p(X = x)L(X = x; Y = y)$$

dove

$$p(Y = y) = \int_{\mathbb{R}^d} p(Y = y|X = x)p(X = x)dx.$$

- formula di Bayes per densità continue:

$$\begin{aligned} p(X=x|Y=y) &= p(X=x) \cdot \frac{p(Y=y|X=x)}{p(Y=y)} \\ &\propto p(X=x)L(X=x;Y=y) \end{aligned}$$

dove

$$p(Y=y) = \int_{\mathbb{R}^d} p(Y=y|X=x)p(X=x)dx.$$

- Stima del massimo a posteriori

$$x_{\mathrm{MAP}} \in \arg\max \{p(X=x)L(X=x;Y=y), x \in E\}$$

- formula di Bayes per densità continue:

$$p(X = x|Y = y) = p(X = x) \cdot \frac{p(Y = y|X = x)}{p(Y = y)}$$
$$\propto p(X = x)L(X = x; Y = y)$$

dove

$$p(Y = y) = \int_{\mathbb{R}^d} p(Y = y|X = x)p(X = x)dx.$$

- Stima del massimo a posteriori

$$x_{\mathrm{MAP}} \in \arg\max \{p(X = x)L(X = x; Y = y), x \in E\}$$

- Stima di massima verosimiglianza

$$x_{\mathrm{MLE}} \in \arg\{\max p(Y = y|X = x) : x \in [a, b]\}.$$

ATTENZIONE : potrebbe essere max agli estremi

Un esempio

La durata della carica di un dispositivo (ad esempio, uno smartphone, o un drone) è modellizzata da una variabile aleatoria T avente densità continua *esponenziale* di un certo parametro λ, ossia

$$p(T = t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{per } t \geq 0,$$

mentre $p(T = t) = 0$ altrimenti.

Per stimare Λ si suppone che sia a priori uniformemente distribuito su $[0, 1]$, ossia, per $\lambda \in [0, 1]$, $p(\Lambda = \lambda) = 1$, mentre la verosimiglianza vale

$$L(\Lambda = \lambda; T = t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Supponendo di osservare $T = 10$, formula di Bayes implica

$$
\begin{aligned}
p(\Lambda = \lambda | T = 10) &\propto p(\Lambda = \lambda) L(\Lambda = \lambda; T = 10) \\
&\propto \lambda e^{-\lambda \cancel{t} 10}. \qquad\qquad \lambda \in [0,1]
\end{aligned}
$$

Imponendo che sia una densità (per $\lambda \in [0, 1]$), troviamo il denominatore

$$
p(T = 10) = \underbrace{\int_0^1 \lambda e^{-10\lambda} d\lambda}.
$$

$\rightarrow$ calcolare per esercizio

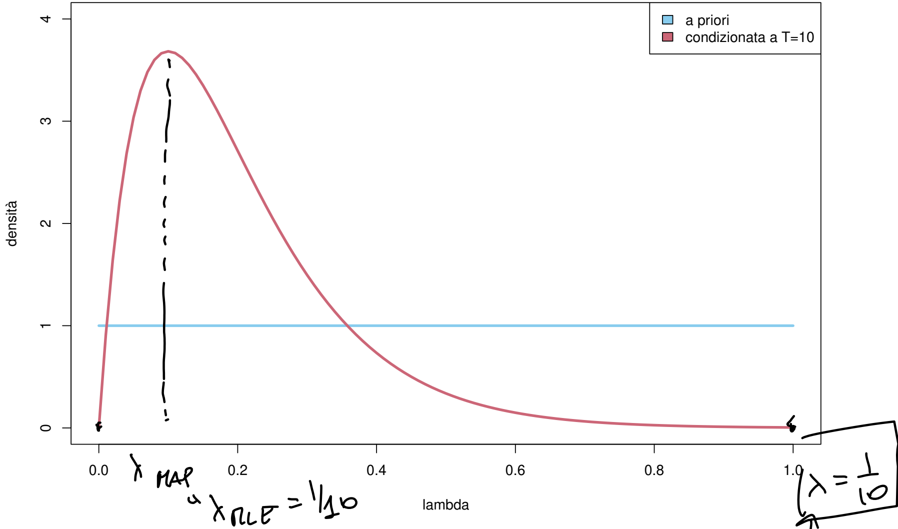


Figure 2: densità per Λ: a priori e avendo osservato $T = 10$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda e^{-10\lambda}\right) = e^{-10\lambda} + \lambda(-10)e^{-10\lambda} = 0$$

Per la stima di massima verosimiglianza, si deve determinare

$$\lambda_{\mathsf{MLE}} \in \arg\max \left\{ \lambda e^{-10\lambda} : \lambda \in [0,1] \right\},$$

- Basta derivare e imporre che la derivata sia nulla, trovando

$$e^{-10\lambda} - 10\lambda e^{-10\lambda} = 0 \quad \text{ossia} \quad \lambda = 1/10.$$

Per la stima di massima verosimiglianza, si deve determinare

$$\lambda_{\mathsf{MLE}} \in \arg\max \left\{ \lambda e^{-10\lambda} : \lambda \in [0,1] \right\},$$

- Basta derivare e imporre che la derivata sia nulla, trovando

$$e^{-10\lambda} - 10\lambda e^{-10\lambda} = 0 \quad \text{ossia} \quad \lambda = 1/10.$$

- (andrebbe anche verificato che il massimo non sia raggiunto agli estremi dell'intervallo, ma dal grafico sopra è evidente).

Formula di Bayes: casi misti

Menzioniamo anche il caso misto, in cui $X \in E$ ha densità discreta mentre Y, condizionata ad $\{X = x\}$, ha densità continua ~~continua~~, per ogni $x \in E$.

- Il problema è che in generale la variabile congiunta non ha densità né continua né discreta (bisogna usare un approccio più flessibile)

Formula di Bayes: casi misti

Menzioniamo anche il caso misto, in cui $X \in E$ ha densità discreta mentre Y, condizionata ad $\{X = x\}$, ha densità continua continua, per ogni $x \in E$.

- Il problema è che in generale la variabile congiunta non ha densità né continua né discreta (bisogna usare un approccio più flessibile)
- La formula di Bayes rimane valida:

$$P(X = x | Y = y) = P(X = x) \cdot \frac{p(Y = y | X = x)}{p(Y = y)}$$
$$\propto P(X = x) L(X = x; Y = y).$$

dove

$$p(Y = y) = \sum_{x \in E} p(Y = y | X = x) P(X = x).$$

Formula di Bayes: casi misti

Menzioniamo anche il caso misto, in cui $X \in E$ ha densità discreta mentre Y, condizionata ad $\{X = x\}$, ha densità continua continua, per ogni $x \in E$.

- Il problema è che in generale la variabile congiunta non ha densità né continua né discreta (bisogna usare un approccio più flessibile)
- La formula di Bayes rimane valida:
$$P(X = x|Y = y) = P(X = x) \cdot \frac{p(Y = y|X = x)}{p(Y = y)}$$
$$\propto P(X = x)L(X = x; Y = y).$$
dove
$$p(Y = y) = \sum_{x \in E} p(Y = y|X = x)P(X = x).$$
- Nel caso simmetrico, ossia X continua e Y discreta:
$$p(X = x|Y = y) \propto p(X = x)L(X = x; Y = y)$$

Un esempio

Un'urna contiene palline rosse oppure blu, ma non è noto né il numero totale né la frazione di palline rosse sul totale.

- Avendo effettuato 10 estrazioni con rimpiazzo, sono state osservate 3 palline rosse.

Un esempio

Un'urna contiene palline rosse oppure blu, ma non è noto né il numero totale né la frazione di palline rosse sul totale.

- Avendo effettuato 10 estrazioni con rimpiazzo, sono state osservate 3 palline rosse.
- Come stimare la frazione di palline rosse sul totale?

Un esempio

Un'urna contiene palline rosse oppure blu, ma non è noto né il numero totale né la frazione di palline rosse sul totale.

- Avendo effettuato 10 estrazioni con rimpiazzo, sono state osservate 3 palline rosse.
- Come stimare la frazione di palline rosse sul totale?
- Variabile aleatoria $F_R \in [0, 1]$ per indicare la frazione di palline rosse, con densità a priori uniforme.

Un esempio

Un'urna contiene palline rosse oppure blu, ma non è noto né il numero totale né la frazione di palline rosse sul totale.

- Avendo effettuato 10 estrazioni con rimpiazzo, sono state osservate 3 palline rosse.
- Come stimare la frazione di palline rosse sul totale?
- Variabile aleatoria $F_R \in [0,1]$ per indicare la frazione di palline rosse, con densità a priori uniforme.
- Verosimiglianza (binomiale)

$$L(F_R = r; N_R = k) = P(N_R = k | F_R = r) = \binom{10}{k} r^k (1-r)^{10-k}.$$

La formula di Bayes (nel caso "misto") implica, per $r \in [0,1]$,

$$p(F_R = r | N_R = 3) = p(F_R = r|\Omega) \frac{L(F_R = r; N_R = 3)}{P(N_R = 3|\Omega)} \propto \binom{10}{3} r^3(1-r)^7,$$

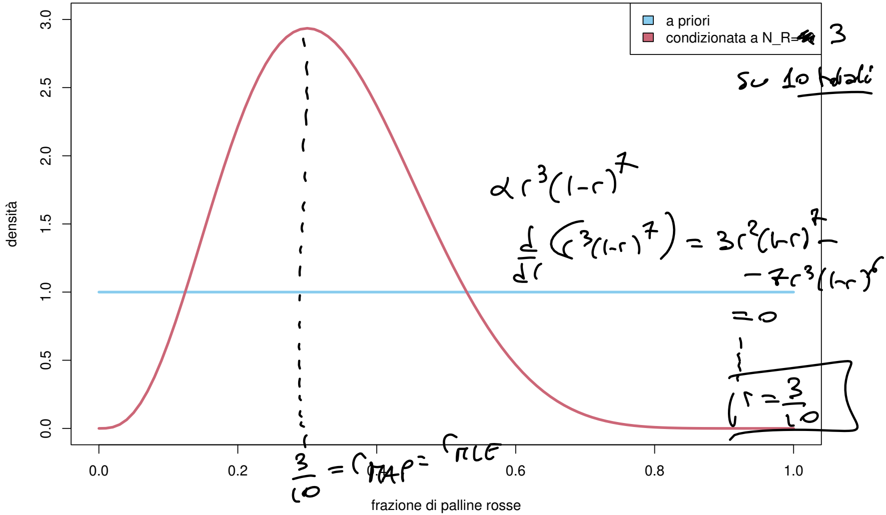


Figure 3: densità continua della frazione di palline rosse a priori e avendo osservato in 10 estrazioni con rimpiazzo 3 palline rosse

Indipendenza

.

Indipendenza: caso discreto

L'indipendenza tra sistemi di alternative si traduce per variabili discrete:

- Siano $X_1 \in E_1, \dots X_k \in E_k$ variabili aleatorie con densità discreta (rispetto ad una informazione nota I). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad I) se vale

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k | I) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i = x_i | I),$$

per ogni $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., $x_k \in E_k$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, k\}$,

$$P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell = x_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J)$$
$$= P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I).$$

Indipendenza: caso discreto

L'indipendenza tra sistemi di alternative si traduce per variabili discrete:

- Siano $X_1 \in E_1, \ldots X_k \in E_k$ variabili aleatorie con densità discreta (rispetto ad una informazione nota I). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad I) se vale

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k | I) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i = x_i | I),$$

  per ogni $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $\ldots$, $x_k \in E_k$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$,

$$P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell = x_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ = P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I).$$

- Il membro a sinistra è la densità discreta della variabile congiunta $(X_1, \ldots, X_k)$, mentre a destra abbiamo il prodotto delle densità discrete delle marginali.

Indipendenza: caso continuo

- Siano $X_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \ldots X_k \in \mathbb{R}^{d_k}$ variabili aleatorie con densità continua (rispetto ad una informazione nota I). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad I) se la variabile congiunta $X = (X_1, \ldots, X_k)$ ammette densità continua e vale

$$p(X = x|I) = p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k|I) = \prod_{i=1}^{k} p(X_i = x_i|I),$$

per ogni $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$, ..., $x_k \in \mathbb{R}^{d_k}$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned} &p(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J|I, X_\ell = x_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ &= p(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J|I). \end{aligned}$$

Indipendenza: caso generale

- Possiamo immaginare definizioni valide anche per i casi “misti”, in cui alcune variabili sono discrete e altre continue. Ma è possibile dare una definizione generale (che include quelle sopra).

Indipendenza: caso generale

- Possiamo immaginare definizioni valide anche per i casi “misti”, in cui alcune variabili sono discrete e altre continue. Ma è possibile dare una definizione generale (che include quelle sopra).
- Siano $X_1 \in E_1, \ldots X_k \in E_k$ variabili aleatorie (generali). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad una informazione nota I) se vale

$$P(X_1 \in U_1, X_2 \in U_2, \ldots, X_k \in U_k | I) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i \in U_i | I),$$

per ogni $U_1 \subseteq E_1$, $U_2 \subseteq E_2$, $\ldots$ $U_k \subseteq E_k$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$,

$$P(X_j \in U_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell \in U_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J)$$
$$= P(X_j \in U_j \text{ per ogni } j \in J | I).$$

Indipendenza e composizione

Vale il seguente risultato:

- Siano $X_1 \in E_1, \ldots X_k \in E_k$ variabili aleatorie (generali). Allora esse sono indipendenti (condizionatamente ad una informazione nota I) se e solo se, dato un qualsiasi sottoinsieme $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$, qualsiasi affermazione A associata alle variabili $\{X_j\}_{j \in J}$ è indipendente (sapendo I) da qualsiasi affermazione B associata alle rimanenti variabili $\{X_\ell\}_{\ell \in \{1,\ldots,k\} \setminus J}$.

Indipendenza e composizione

Vale il seguente risultato:

- Siano $X_1 \in E_1, \dots X_k \in E_k$ variabili aleatorie (generali). Allora esse sono indipendenti (condizionatamente ad una informazione nota I) se e solo se, dato un qualsiasi sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, k\}$, qualsiasi affermazione A associata alle variabili $\{X_j\}_{j \in J}$ è indipendente (sapendo I) da qualsiasi affermazione B associata alle rimanenti variabili $\{X_\ell\}_{\ell \in \{1,\dots,k\} \setminus J}$.
- Una **conseguenza fondamentale**: ogni variabile ottenuta tramite funzione delle sole $(X_j)_{j \in J}$, è indipendente da ogni variabile ottenuta tramite funzione delle sole $(X_\ell)_{\ell \notin J}$.