Teoria dei Sistemi e del Controllo - 21-09-2023

1. Dato il sistema non lineare tempo discreto in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1^2(k) x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\alpha x_1(k) x_2^2(k) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Si studi la stabilità dei punti di equilibrio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Determinare la regione di asintotica stabilità del punto di equilibrio nell'origine attraverso una candidata di Lyapunov.

2. Dato il sistema **tempo continuo** descritto dalla matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s^2-3s+2} & \frac{s}{s^2-1} \\ \frac{2s^2-5s+4}{s^2-3s+2} & \frac{s+1}{s^2-1} \end{pmatrix}$$

   - Determinare le matrici A, B, C e D della forma di stato lavorando per righe o per colonne scegliendo la soluzione che porta ad utilizzare il minor numero di stati.
   - Dato il sistema ottenuto al punto precedente si consideri il sistema SISO costituito dal secondo ingresso e dalla prima uscita, si determini l'appartenenza o meno degli autovalori al sottospazio di raggiungibilità e al sottospazio di osservabilità.
   - Determinare la matrice del cambio di base che porta il sistema SISO del punto precedente nella forma canonica di Kalman.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

   si determini :

   - per quali valori di α e β il sistema è stabilizzabile;
   - per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller;
   - si progetti, al variare di β e α tra i valori ammissibili, un controllore del tipo $u_k = K(\alpha, \beta)x_k$ tale che il sistema a ciclo chiuso sia di tipo dead-beat.

4. Si consideri il problema ottimizzazione:

$$u^* = \arg\min_u \left[h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt \right]$$

   soggetto al vincolo differenziale : $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ con $h(\cdot)$ e $f(\cdot)$ funzioni scalari di variabili vettoriali, e con $x(t_0) = x_0$ ed x_0 noto.

   - si descriva il metodo utilizzabile per trasformare il problema in un problema equivalente non vincolato
   - si descriva il metodo utilizzabile per trasportare la funzione di peso $h(\cdot)$ all'interno dell'integrale
   - sfruttando risultati noti sulla minimizzazione di funzionali di costo integrali del tipo $\int_{t_0}^{t_F} g(w, \dot{w}, t)$, si mostri come è possibile giungere alle equazioni di Eulero per il problema in questione
   - infine si discuta la necessità o meno di condizioni al contorno aggiuntive