Teoria dei Sistemi e del Controllo - 24-02-2022

1. Dato il sistema **tempo discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   - Determinare tutti gli stati iniziali indistinguibili da $x_0 = (3\ 1\ 0\ -1)^T$.
   - Studiare la controllabilità a zero in 1, 2, 3, 4 passi.
   - Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman. Se ne deduca la funzione di trasferimento e si discuta la stabilità BIBO del sistema.

2. Si consideri il sistema dinamico descritto dalla equazione differenziale non lineare:

$$\ddot{y}(t) + y(t) - y(t)^3 + y(t)\dot{y}(t)^2 + \dot{y}(t) = u(t)$$

   - Si porti il sistema in forma di stato e se ne determinino gli equilibri per $u(t) = 0$.
   - Si studi la stabilità degli equilibri ottenuti al punto precedente.
   - Si riportino degli ingressi affini nello stato che rendano asintoticamente stabili gli equilibri risultati instabili (un ingresso per ogni punto di equilibrio, da scrivere in modo esplicito come funzione degli stati).

3. Si consideri il sistema SISO tempo discreto e tempo invariante:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

   - si dimostri che, condizione necessaria e sufficiente affinchè, tramite una retroazione dello stato del tipo $u_k = Kx_k$ si possano assegnare tutti poli a ciclo chiuso del sistema è che la coppia (F, G) sia completamente raggiungibile.
   - si discuta se l'enunciato di cui sopra rimane valido sostituendo la parola "raggiungibile" con "controllabile" e, se necessario, si proponga una riformulazione corretta.

4. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} x(t) = Cx(t)$$

   e dato l'indice di costo:

$$J = \int_0^\infty y(t)^T y(t) + u(t)^T u(t) dt$$

   - si definiscano le condizioni necessarie sui parametri α e β affinchè esista un estremale nella forma $u^*(t) = Kx^*(t)$ che renda minimo il funzionale J e stabilizzi il sistema in ciclo chiuso.
   - fissate delle costanti α e β adeguate, si trovi il guadagno K del controllore ottimo stabilizzante.