Teoria dei Sistemi e del Controllo - 06-02-2024

1. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2^2(t) + x_1(t)\sin x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

   - si determinino tutte le coppie di equilibrio $(\bar{u}, \bar{x})$;
   - si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti con il metodo indiretto di Lyapunov;
   - nel caso di ingresso $u(t) = -x_1(t)$ si studi la stabilità dell'origine con il metodo diretto di Lyapunov.

2. Dato il sistema **tempo discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Si determinino i modi e la stabilitá interna del sistema.

   (b) Determinare il sistema in forma canonica di Kalman e si commenti sulla stabilità BIBO del sistema;

   (c) Nel sistema di coordinate iniziale, considerato lo stato iniziale $x_0 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$, si determini la forma degli stati raggiungibili in almeno 3 passi.

3. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = Cx(t)$$

   - Si determini per quali valori di α il sistema è stabilizzabile;
   - si scelga α e si determini un controllore stabilizzante del tipo $u(t) = Kx(t)$ così da avere il maggior numero possibile di poli a ciclo chiuso in -1.
   - si scelga α (eventualmente diverso dal caso precedente) e si determini un controllore stabilizzante del tipo $u(t) = Hy(t) + \nu(t)$ (con H costante e $\nu(t)$ nuovo ingresso esterno), così da avere il maggior numero possibile di poli a ciclo chiuso in -1.
   - Si dica, relativamente al controllore progettato nella risposta precedente, per quali valori di α e H il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile.

4. Si consideri il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

   ed il problema di controllo ottimo descritto dal funzionale

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

   soggetto a : stato inziale $x(0) = x_0$ noto, stato finale desiderato $x(t_f) = x_f$ fissato, valore del tempo finale t_f fissato,

   - si mostri come è possibile ricavare la matrice Hamiltoniana partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange per il problema dato
   - si ricavi la soluzione ottima in forma chiusa $u^*(t) = U(t, t_0, t_f, x_0, x_f)$ in funzione delle grandezze note (nota: $U(\cdot)$ non è funzione di $x(t)$!).