Capitolo 3

Soluzioni dei Sistemi Lineari

Per i sistemi lineari è possibile caratterizzare le soluzioni in modo molto più articolato: per i sistemi lineari e stazionari è addirittura possibile risolverle esplicitamente.

3.1 Sistemi Lineari Tempo–Invarianti Tempo–Continui

Ricordiamo dalla analisi che la soluzione della equazione lineare a coeff. costanti con forzamento $u(t)$

$$\dot{x} = ax + bu(t),$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0$, è data dalla somma di un integrale omogeneo e di un integrale particolare, esplicitamente

$$x(t) = x_0 e^{at} + b\int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

Nel caso di un sistema di n equazioni differenziali che rappresentano un sistema lineare stazionario, con una equazione di uscita, cioè

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx + Du \end{array} \tag{3.1}$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0$, la soluzione può essere scritta in forma del tutto analoga:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) & = & Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{array} \tag{3.2}$$

Esempio: Esponenziale di Matrici

Naturalmente, l'esponenziale di una matrice necessita di una definizione appropriata. Daremo tale definizione in termini della serie di potenze

$$e^M \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + 1/2M^2 + 1/6M^3 + \cdots$$

che generalizza la definizione dell'esponenziale di uno scalare

$$e^m \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} = I + m + 1/2m^2 + 1/6m^3 + \cdots$$

Sulla base della definizione, è immediato verificare che $e^{M_1}e^{M_2} = e^{M_2}e^{M_1} = e^{(M_1+M_2)t}$ *se e solo se* $M_1M_2 = M_2M_1$. Prova: applica la definizione e l'identità delle serie di potenze.

Segue anche che $(e^M)^{-1} = e^{-M}$. Infatti, se $e^Me^{-M} = e^{M-M} = e^0 = I$. Nota bene: e^M è sempre invertibile, qualsiasi sia M.

L'esponenziale di una matrice ha altre importanti proprietà:

- Se $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, allora $e^M\mathbf{v} = \mathbf{e}^{\lambda}\mathbf{v}$. Prova: applica la definizione e ricorda $M^k\mathbf{v} = \lambda^{\mathbf{k}}\mathbf{v}$.
- $e^{T^{-1}MT} = T^{-1}e^MT$. Prova: applica la definizione e osserva che $(T^{-1}MT)^k = T^{-1}M^kT$.
- Sono possibili altre definizioni dell'esponenziale, tutte equivalenti. Ad esempio: $e^M = \lim_{m\to\infty}\left(I + \frac{M}{m}\right)^m$.

Ponendo $M = At$, si ottiene un esponenziale di matrice funzione del tempo

$$e^{At} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}t^k = I + At + 1/2A^2t^2 + 1/6A^3t^3 + \cdots$$

da cui è facile verificare che

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Dalle relazioni viste è quindi facile anche verificare che 3.2 è effettivamente una soluzione della 3.1. Infatti, valendo $e^{A0} = I$, si ha $x(0, x_0, u) = Ix_0$, e inoltre, derivando la prima delle 3.2,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t,x_0,u) &= Ae^{At}x_0 + \frac{d}{dt}\left(e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right)\\ &= Ax+Bu\end{aligned}$$

È opportuno guardare con attenzione alla struttura della soluzione stessa. Nella soluzione si distinguono due termini. Il primo, che dipende dagli stati iniziali e non dagli ingressi, si dice **evoluzione libera** del sistema; il secondo, che invece dipende dagli ingressi ma non dallo stato iniziale, si dice **evoluzione forzata**.

Per quanto riguarda l'evoluzione libera, si noti che gli stati iniziali x_0 vengono trasformati in quelli ad un dato istante t attraverso il prodotto per la matrice e^{At}, quindi in modo lineare.

Si dice traiettoria libera di un sistema l'insieme degli stati x raggiunti per qualche t da una evoluzione libera $x(t)$. Essendo l'esponenziale di una matrice sempre invertibile, due traiettorie libere di un sistema o coincidono o non si intersecano mai. Infatti, se le evoluzioni libere a partire da x_0 e x_0' si intersecano in un qualsiasi punto x, devono esistere t e t' tali che $x = e^{At}x_0 = e^{At'}x_0'$, quindi $x_0' = e^{A(t-t')}x_0$ ovvero x_0' deve appartenere alla traiettoria libera che passa da x_0 stessa, quindi le traiettorie coincidono.

Si ricordi infine che il determinante di una matrice $\det(A)$ è il prodotto dei suoi autovalori, e inoltre è pari al volume (con segno) del parallelepipedo i cui lati sono le colonne di A. Inoltre, la traccia di una matrice, $\mathsf{Tr}\ (A)$ è la somma degli autovalori. Si ha che

$$\det(e^{A}t) = e^{\mathsf{Tr}\ (A)t}$$

quindi che il volume di una regione dello spazio di stato è maggiore, uguale, o minore della sua immagine attraverso la trasformazione e^{At} a seconda che $\mathsf{Tr}\ (At)$ sia maggiore, uguale, o minore di zero.

Per quanto riguarda l'evoluzione forzata, si noti che anche l'operatore integrale che agisce sulla funzione di ingresso è lineare (l'integrale di una somma è la somma degli integrali, e l'integrale del prodotto di una funzione per una costante è pari al prodotto della costante per l'integrale della funzione). È quindi immediato, nella soluzione della eq. di stato di un sistema lineare stazionario, verificare il *principio di sovrapposizione degli effetti* degli stati e degli ingressi.

L'integrale che appare nella evoluzione forzata è detto *di convoluzione*. Più in generale, date due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ definite per $-\infty < t < \infty$, si definisce il loro prodotto di convoluzione come la funzione

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,.$$

Per funzioni $f(t)$ e $g(t)$ che si annullano identicamente per ogni $t < 0$ (quali sono i segnali nei sistemi causali che considereremo), la convoluzione diviene

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,.$$

Il termine forzato può quindi quindi essere scritto $e^{At} * Bu(t)$, dove si estenda in modo banale al prodotto tra matrici la definizione di convoluzione.

Esponenziale di Matrici Diagonalizzabili

L'espressione della definizione dell'esponenziale di una matrice non è in generale adatta al calcolo esplicito del valore della soluzione. Nel caso di una matrice A diagonalizzabile, per cui valga $\Lambda = T^{-1}AT$ con Λ diagonale, il calcolo è comunque semplice. Infatti se

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

si ha

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} t^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix}$$

cioè

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

quindi si ha

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

.

Matrici Diagonalizzabili con Autovalori Complessi – Forma Reale

Nel caso di matrici diagonalizzabili con autovalori complessi, il risultato precedente comprende ovviamente esponenziali complessi, così come colonne complesse nella matrice degli autovettori T. Se A è a valori reali (come sarà sempre il caso per le matrici dinamiche dei sistemi che studieremo), gli autovalori e autovettori complessi appaiono sempre assieme al loro coniugato, e questo fa sì che la matrice $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$ sia comunque a valori reali.

È possibile e utile in questi casi, usare un cambiamento di coordinate reale, che trasforma per similitudine la matrice diagonalizzabile (sui complessi) A in una matrice reale diagonale a blocchi, con blocchi al più di dimensione 2, e con un numero di blocchi pari al numero di coppie di autovalori complessi coniugati della matrice. Consideriamo ad esempio una matrice 2×2, diagonalizzata nella forma $A = Q\Lambda Q^{-1}$, e siano[1]

$$\begin{array}{rcl} \Lambda(1,1) & = & \sigma + \jmath\omega \\ \Lambda(2,2) & = & \sigma - \jmath\omega \\ Q(:,1) & = & q_r + \jmath q_i \\ Q(:,2) & = & q_r - \jmath q_i \end{array}.$$

Si ha

$$\begin{array}{l} A \left[\ q_r + \jmath q_i \mid q_r - \jmath q_i\ \right] = \\ \quad = \left[\ q_r + \jmath q_i \mid q_r - \jmath q_i\ \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma + \jmath\omega & 0 \\ 0 & \sigma - \jmath\omega \end{array} \right] \end{array}$$

e

$$\begin{array}{l} e^{At} \left[\ q_r + \jmath q_i \mid q_r - \jmath q_i\ \right] = \\ \quad = \left[\ q_r + \jmath q_i \mid q_r - \jmath q_i\ \right] e^{\sigma t} \left[\begin{array}{cc} e^{\jmath\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\jmath\omega t} \end{array} \right]. \end{array}$$

Ricordando le eguaglianze $e^{\alpha+\jmath\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + \jmath\sin\beta)$ e $e^{\alpha-\jmath\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta - \jmath\sin\beta)$, introduciamo la matrice complessa E e la sua inversa

$$E = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 1 & -\jmath \\ 1 & j \end{array} \right]; \quad E^{-1} = -\jmath \left[\begin{array}{cc} \jmath & \jmath \\ -1 & 1 \end{array} \right].$$

Scrivendo $AQE = Q\Lambda E = QE\,E^{-1}\Lambda E$, si ottiene

$$A\left[\ q_r \mid q_i\ \right] = \left[\ q_r \mid q_i\ \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{array} \right]$$

e

$$e^{At}\left[\ q_r \mid q_i\ \right] = \left[\ q_r \mid q_i\ \right] e^{\sigma t} \left[\begin{array}{cc} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{array} \right]$$

[1] per comodità di notazione si usa qui il simbolo Q invece che T per la matrice di cambiamento di coordinate

Esponenziale di Matrici Difettive

Per matrici difettive, il calcolo dell'esponenziale si può fare con la forma di Jordan. Si ricordi[2] che qualsiasi matrice quadrata A quadrata di dimensione n può essere trasformata per similitudine in forma di Jordan, $A = QJQ^{-1}$. Una matrice J in forma di Jordan è una matrice diagonale a blocchi,

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_N \end{bmatrix}$$

dove ogni blocco J_i è un *miniblocco di Jordan* di dimensione q_i ed autovalore λ_i, ovvero una matrice quadrata con tutti gli elementi sulla diagonale uguali a λ_1, tutti gli elementi della prima sopradiagonale pari a 1, e con ogni altro elemento zero, ovvero

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}.$$

Si noti innanzitutto che l'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi può essere calcolato per blocchi. Infatti, essendo

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix} t \right)^k = \begin{bmatrix} (A_1 t)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (A_N t)^k \end{bmatrix}$$

si ha ovviamente

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{A_N t} \end{bmatrix}$$

È quindi necessario solo calcolare l'esponenziale di un blocco di Jordan J di dimensione generica q. Si ha

$$e^{Jt} = \exp\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} t \right) =$$

$$= e^{(\lambda I t + J_0 t)} = e^{\lambda t} e^{J_0 t}$$

[2]si vedano al proposito i richiami di algebra lineare in appendice

(infatti λIt commuta con ogni matrice). Si noti che J_0 è un miniblocco di Jordan con autovalore 0, perciò nilpotente di ordine q ($J_0^q = 0$, ma $J_0^k \neq 0, \forall k < q$). Avendosi

$$e^{J_0 t} = I + J_0 t + J_0^2 \frac{t^2}{2} + \ldots + J_0^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

si ottiene infine

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^(q-2)}{(q-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Matrici Difettive con Autovalori Complessi – Forma Reale

Nel caso che A abbia miniblocchi di Jordan di dimensione $q > 1$ corrispondenti ad autovalori complessi coniugati, è ancora possibile ottenere per la matrice e per il suo esponenziale una forma reale, procedendo in modo analogo a quanto fatto per la forma reale delle matrici diagonalizzabili.

Sia ad esempio $AQ = QJ$, con

$$J = \left[\begin{array}{cccc} \sigma + \jmath\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + \jmath\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \jmath\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - \jmath\omega \end{array} \right]$$

e con

$$Q = \left[\begin{array}{cccc} q_r^{(1)} + \jmath q_i^{(1)} & q_r^{(2)} + \jmath q_i^{(2)} & q_r^{(1)} - \jmath q_i^{(1)} & q_r^{(2)} - \jmath q_i^{(2)} \end{array} \right].$$

Ponendo

$$E = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\jmath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\jmath \\ 1 & \jmath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \jmath \end{array} \right]; E^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \jmath & 0 & -\jmath & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \jmath & 0 & -\jmath \end{array} \right],$$

si ha una base reale

$$QE = \left[\begin{array}{cccc} q_r^{(1)} & q_i^{(1)} & q_r^{(2)} & q_i^{(2)} \end{array} \right]$$

rispetto alla quale, la forma reale di Jordan è

$$J_r = E^{-1}JE = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} M & I \\ 0 & M \end{array}\right]$$

Per miniblocchi di dimensioni maggiori, si può generalizzare facilmente (per esercizio) a:

$$J_r = \left[\begin{array}{ccccc} M & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & I & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & M & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M \end{array}\right]$$

Per quanto riguarda l'esponenziale, si considerino le potenze

$$J_r^k = \left[\begin{array}{cc} M^k & kM^{k-1} \\ 0 & M^k \end{array}\right],$$

e, applicando la definizione di esponenziale, si ha

$$e^{tJ_r} = \left[\begin{array}{c|c} I + Mt + M^2t^2/2 + \dots & 0 + It + 2M\frac{t^2}{2} + 3M^2\frac{t^3}{3!} + \dots \\ \hline 0 & I + Mt + M^2t^2/2 + \dots \end{array}\right]$$

cioè

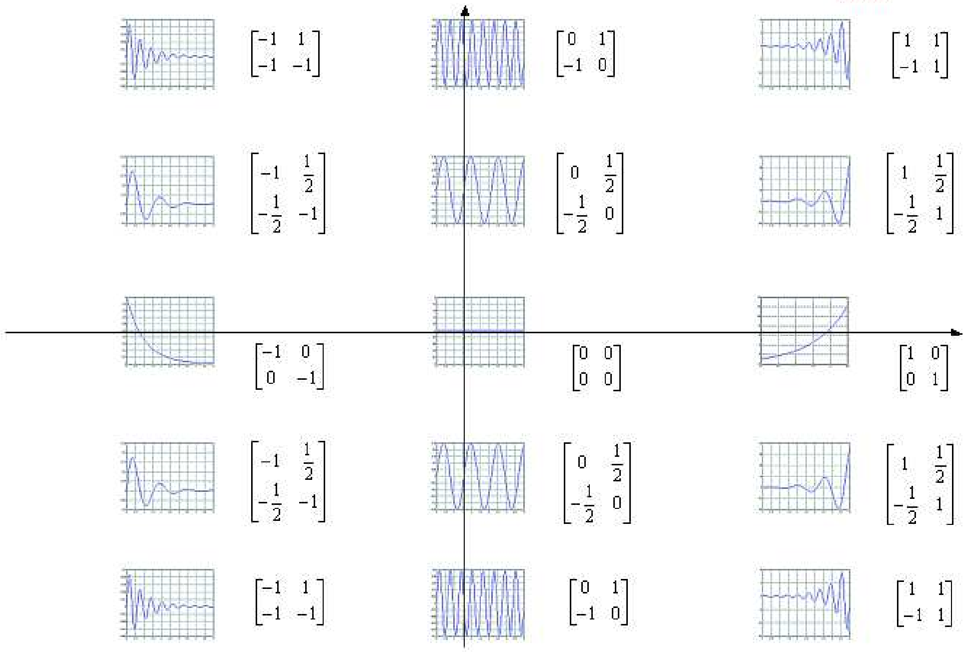
$$e^{tJ_r} = \left[\begin{array}{cc} e^{Mt} & te^{Mt} \\ 0 & e^{Mt} \end{array}\right]$$

dove ricordiamo dalla forma reale delle matrici diagonalizzabili

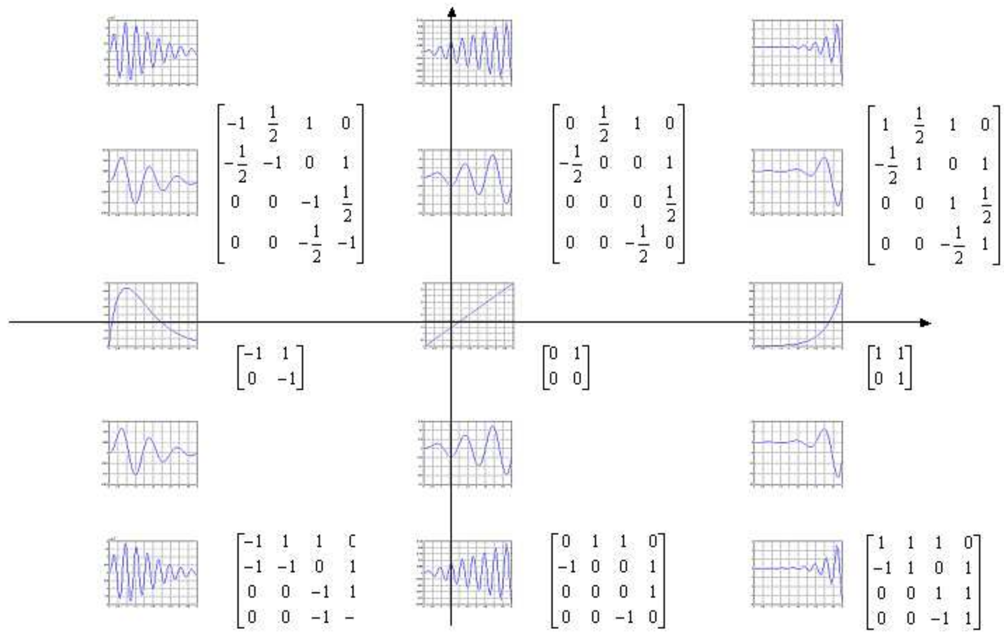
$$e^{Mt} = e^{\sigma t}\left[\begin{array}{cc} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{array}\right]$$

In generale, dunque, se J_r ha q blocchi diagonali

$$e^{tJ_r} = \left[\begin{array}{ccccc} e^{Mt} & te^{Mt} & \frac{t^2}{2!}e^{Mt} & \cdots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}e^{Mt} \\ 0 & e^{Mt} & te^{Mt} & \cdots & \frac{t^{q-2}}{(q-2)!}e^{Mt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{Mt} \end{array}\right]$$



In questa figura, sono riportati gli andamenti dei modi corrispondenti ad autovalori nelle diverse posizioni del piano complesso, nel caso di autovalori associati a miniblocchi di dimensione uno.



In questa figura, sono riportati gli andamenti dei modi corrispondenti ad autovalori nelle diverse posizioni del piano complesso, nel caso di autovalori associati a miniblocchi di dimensione due.

3.2 Sistemi Lineari Tempo–Invarianti Tempo–Discreti

Nel caso di un sistema di n equazioni alle differenze stazionario, con una equazione di uscita, cioè

$$\begin{array}{rcl} x(t+1) & = & Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t) \end{array} \tag{3.3}$$

con condizioni iniziali $x(0)=x_0$, la soluzione può essere calcolata direttamente per induzione:

$$\begin{array}{rclcl} x(1) & = & Ax(0)+Bu(0); & & \\ x(2) & = & Ax(1)+Bu(1) & = & A^2x(0)+ABu(0)+Bu(1); \\ x(3) & = & Ax(2)+Bu(2) & = & \ldots; \end{array}$$

e

$$x(t)=A^tx(0)+A^{t-1}Bu(0)+\ldots+ABu(t-2)+Bu(t-1);$$

e quindi

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & A^tx(0)+\sum_{i=0}^{t-1}A^{t-i-1}Bu(i) \\ y(t) & = & CA^tx(0)+\sum_{i=0}^{t-1}CA^{t-i-1}Bu(i)+Du(t) \end{array} \tag{3.4}$$

Poiché A^t è una matrice costante, fissato che sia il tempo t, gli stati iniziali si trasformano negli stati all'istante t linearmente; parimenti, l'operatore di convoluzione che agisce sulla successione di ingresso è lineare. Nella soluzione, si distinguono due termini di **evoluzione libera** e di **evoluzione forzata**, e si verifica immediatamente il principio di sovrapposizione degli effetti degli stati e degli ingressi.

La sommatoria che appare nella evoluzione forzata è detta *di convoluzione*. Più in generale, date due successioni $f(t)$ e $g(t)$ definite per $-\infty<t<\infty$, si definisce il loro prodotto di convoluzione come la funzione

$$w(t)=f(t)*g(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau).$$

Per successioni $f(t)$ e $g(t)$ che si annullano identicamente per ogni $t < 0$ (come considerermo nei nostri sistemi causali), la convoluzione diviene

$$w(t) = f(t) * g(t) = \sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau).$$

Il termine forzato può quindi quindi essere scritto come convoluzione tra

$$f(t) = \begin{cases} 0, \ t \le 0 \\ A^{t-1}, \ t \ge 1 \end{cases}$$

e $g(t) = Bu(t)$.

Per quanto riguarda la risposta forzata, si noti che la somma di convoluzione può essere scritta anche in forma matriciale:

$$\sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1}Bu(i) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B & AB & \cdots & A^{t-1}B \end{array} \right] \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Le potenze di una matrice hanno alcune proprietà:

- $A_1^t A_2^t = A_2^t A_1^t = (A_1 A_2)^t, \forall t$ se e solo se $A_1 A_2 = A_2 A_1$;
- Se A è invertibile, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = A^{-t}$.
- Se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, allora $A^t\mathbf{v} = \lambda^{\mathbf{t}}\mathbf{v}$.
- $(T^{-1}PT)^t = T^{-1}P^tT$.
- $\det(A^t) = (\det(A))^t$. Il volume di una regione dello spazio di stato è maggiore, uguale, o minore della sua immagine attraverso la trasformazione A^t a seconda che $\det(A)$ sia maggiore, uguale, o minore di uno.

Potenze di Matrici Diagonalizzabili

Nel caso di matrice diagonalizzabile, si ha

$$A^t = T^{-1}\Lambda^t T = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{bmatrix} T$$

Nel caso di matrici diagonalizzabili con autovalori complessi, ad es. $\lambda_1 = \sigma + \jmath\omega, \lambda_2 = \sigma - \jmath\omega$ si puo' dare una forma reale ponendo per ogni blocco della forma reale (ottenuto come nel caso visto sopra)

$$M = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \rho\mathbf{R} = \rho \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

dove $\rho = |\lambda_1| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ e $\theta = \arg(\lambda_1) = \text{atan2}\ (\omega, \sigma)$, e quindi $\omega = \rho\sin\theta$, $\sigma = \rho\cos\theta$.

Si ottiene

$$M^t = \rho^t \mathbf{R^t} = \rho^{\mathbf{t}} \begin{bmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta \\ -\sin t\theta & \cos t\theta \end{bmatrix}$$

Potenze di Matrici Difettive

Per matrici difettive, il calcolo si può effettuare usando la forma di Jordan. Tenendo conto del fatto che le potenze di una matrice a blocchi mantengono questa struttura, coi blocchi elevati a potenza, è necessario solo calcolare le potenze di un blocco di Jordan J di dimensione generica q. Si ha

$$\begin{aligned} J^t = & \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}^t = \\ & = (\lambda I + J_0)^t = \textstyle\sum_{i=0}^t (C_i^t \lambda^{t-i} J_0^i), \end{aligned}$$

dove $C_i^t = \begin{pmatrix} t \\ i \end{pmatrix} = \frac{t!}{i!(t-i)!} = \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-i+1)}{i!}$, ovvero un polinomio in t di grado i.

Si ottiene, esplicitamente per un miniblocco J $q \times q$

$$J^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & C_1^t\lambda^{t-1} & C_2^t\lambda^{t-2} & \cdots & C_{q-1}^t\lambda^{t-q+1} \\ 0 & \lambda^t & C_1^t\lambda^{t-1} & \cdots & C_{q-2}^t\lambda^{t-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^t & C_1^t\lambda^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^t \end{bmatrix}$$

dove, nel caso $t < q-1$, si deve intendere $C_j^t = 0, \forall j > t$.

Esempio:

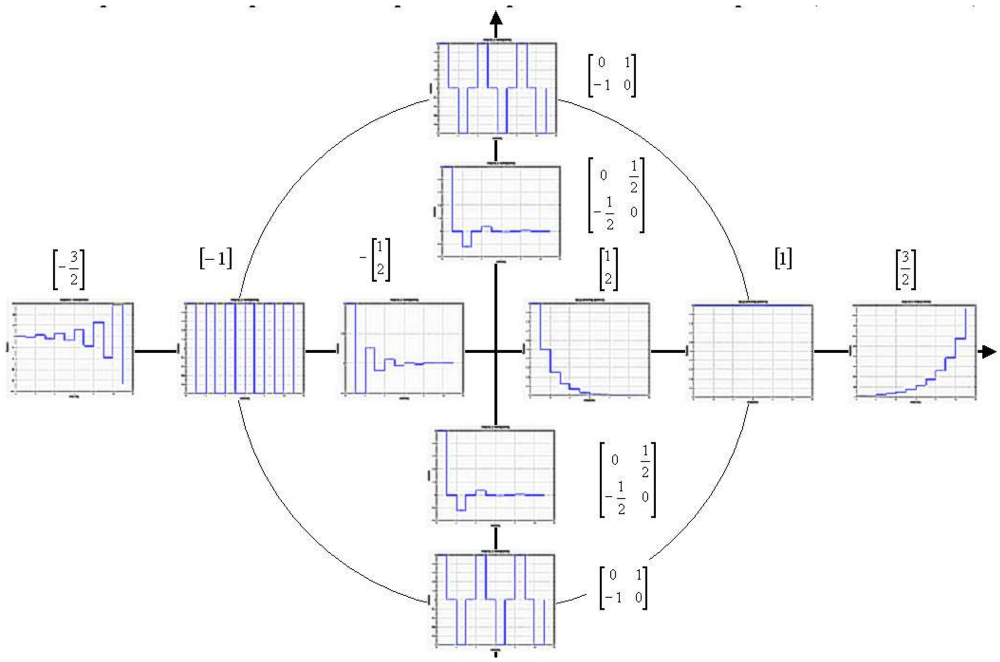
$$J^t = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2}\lambda^{t-2} \\ 0 & \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & 0 & \lambda^t \end{bmatrix}$$

Nel caso che A abbia miniblocchi di Jordan di dimensione $q > 1$ corrispondenti ad autovalori complessi coniugati, è ancora possibile ottenere per la matrice e le sue potenze una forma reale, procedendo in modo analogo a quanto fatto per la forma reale delle matrici diagonalizzabili. Considerando quindi un miniblocco reale di dimensione $2q \times 2q$

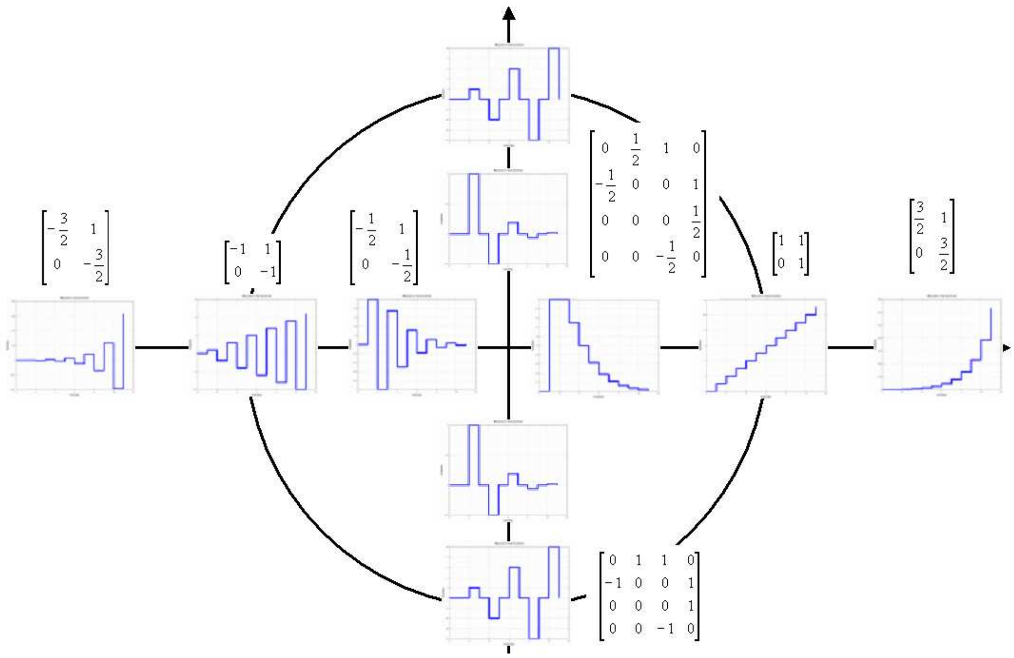
$$J_r = \begin{bmatrix} M & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & I & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & M & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M \end{bmatrix}$$

si verifica facilmente

$$J_r^t = \begin{bmatrix} M^t & C_1^t M^{t-1} & C_2^t M^{t-2} & \cdots & C_{q-1}^t M^{t-q+1} \\ 0 & M^t & C_1^t M^{t-1} & \cdots & C_{q-2}^t M^{t-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M^t & C_1^t M^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^t \end{bmatrix}$$



In questa figura, sono riportati gli andamenti dei modi corrispondenti ad autovalori nelle diverse posizioni del piano complesso, nel caso di autovalori associati a miniblocchi di dimensione uno.



In questa figura, sono riportati gli andamenti dei modi corrispondenti ad autovalori nelle diverse posizioni del piano complesso, nel caso di autovalori associati a miniblocchi di dimensione due.

3.3 Analisi Modale

Nella evoluzione libera di un sistema LTITC descritto dalle matrici (A, B, C, D), si potranno trovare, in base a quanto visto, combinazioni lineari reali di tutte e sole le funzioni che possono apparire nell'esponenziale di una matrice in forma di Jordan reale. Queste funzioni sono dette "modi" del sistema.

3.3.1 Modi dei Sistemi LTITC

Riassumendo i vari casi visti, i modi di un sistema LTITC possono essere esclusivamente dei seguenti tipi:

1) Esponenziali semplici del tipo $e^{\lambda t}$, corrispondenti a miniblocchi semplici con autovalore λ reale; questi modi sono convergenti a zero, costanti, o divergenti a seconda che λ sia minore, uguale, o maggiore di zero;

2) Quasi-polinomi di tipo $t^k e^{\lambda t}$, $0 \leq k \leq q-1$, corrispondenti a miniblocchi di dimensione $q > 1$ con autovalore reale λ; questi modi sono convergenti a zero se $\lambda < 0$, polinomialmente divergenti se $\lambda = 0$ e $k > 0$, esponenzialmente divergenti se $\lambda > 0$;

3) Funzioni oscillanti del tipo $e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$, corrispondenti a due miniblocchi semplici associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\sigma \pm j\omega$ (ovvero ad un miniblocco reale semplice); questi modi sono convergenti a zero se la parte reale degli autovalori σ è minore di 0, limitati ma non convergenti se $\sigma = 0$, esponenzialmente divergenti se $\sigma > 0$;

4) Funzioni oscillanti del tipo $t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)$, $0 \leq k \leq q-1$, corrispondenti a due miniblocchi di dimensione q associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\sigma \pm j\omega$ (ovvero ad un miniblocco reale costituito da $q \times q$ blocchi reali); questi modi sono convergenti a zero se $\sigma < 0$, polinomialmente divergenti se $\sigma = 0$ e $k > 0$, esponenzialmente divergenti se $\sigma > 0$;

3.3.2 Modi dei sistemi LTITD

Nella evoluzione libera di un sistema LTITD descritto dalle matrici (A, B, C, D), si potranno trovare, in base a quanto visto, combinazioni lineari reali di tutte e sole le successioni (modi) che possono apparire nelle potenze di una matrice in forma di Jordan reale.

Riassumendo i vari casi visti, i modi di un sistema LTITD possono essere esclusivamente dei seguenti tipi:

1) Potenze del tipo λ^t, corrispondenti a miniblocchi semplici con autovalore λ reale; questi modi sono convergenti a zero, limitati ma non convergenti, o divergenti a seconda che $|\lambda|$ sia minore, uguale, o maggiore di uno. I modi reali con $\lambda < 0$ sono successioni oscillanti, con segno alternante ad ogni campione.

2) Successioni di tipo $C_k^t \lambda^{t-k}$, $0 \leq k \leq q-1$, corrispondenti a miniblocchi di dimensione $q > 1$ con autovalore reale λ; questi modi sono convergenti a zero se $|\lambda| < 1$, polinomialmente divergenti con segno costante se $|\lambda = 1|$, esponenzialmente divergenti se $|\lambda| > 1$; hanno segno costante o alternante a seconda che λ sia maggiore o minore di zero.

2-bis) Nel caso $\lambda = 0$, la matrice J_0 è nilpotente di ordine q (cioè $J_0^q = 0$). In altri termini, ogni successione $C_k^t \lambda^{t-k}$ $(0 \leq k \leq q-1)$ vale zero per ogni $t \geq q$: ogni evoluzione libera quindi si esaurisce a zero *in un tempo finito* (e non asintoticamente come per $0 < |\lambda| < 1$): questi modi vengono detti *dead-beat*.

3) Successioni oscillanti del tipo $\rho^t \cos(\theta t)$, $\rho^t \sin(\theta t)$, corrispondenti a due miniblocchi semplici associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\rho e^{\pm j\theta}$ (ovvero ad un miniblocco reale semplice); questi modi sono convergenti a zero se il modulo degli autovalori ρ è minore di 1, limitati ma non convergenti se $\rho = 1$, esponenzialmente divergenti se $\rho > 1$. Le oscillazioni della successione sono tanto piu' frequenti quanto più alto è θ, sino al caso $\theta = \pi$, in cui il periodo è di due campioni (quest'ultimo caso coincide con quanto visto al punto 1) per $\lambda < 0$);

4) Successioni oscillanti del tipo $C_k^t \rho^{t-k} \cos(\theta(t-k))$, $C_k^t \rho^{t-k} \sin(\theta(t-k))$, $0 \leq k \leq q-1$, corrispondenti a due miniblocchi di ordine q associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\rho e^{\pm j\theta}$ (ovvero ad un miniblocco reale costituito da $q \times q$ blocchi reali); questi modi sono convergenti a zero se il modulo degli autovalori ρ è minore di 1, polinomialmente divergenti se $\rho = 1$ e $k > 0$, esponenzialmente divergenti se $\rho > 1$.