Teoria dei Sistemi e del Controllo - 01-07-2019

1. Dato il sistema dinamico non lineare descritto dalle equazioni alle differenze:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1^2(k) + \frac{1}{2}u^2(k) \\ x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_1^2(k) + \frac{1}{2}x_2(k) \\ y(k) = \frac{1}{2}x_1(k)x_2(k) \end{cases}$$

   - si determino gli equilibri del sistema nel caso $u(k) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e nel caso $u(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
   - Si scrivano le equazioni dinamiche (A, B, C, D) del sistema linearizzato per una generica coppia ingresso-stato di equilibrio riportando le variabili (stato, ingresso e uscita) del linearizzato rispetto a quelle del sistema non lineare.
   - Se possibile, si caratterizzi la stabilità per tutti gli equilibri del sistema non lineare calcolati al primo punto, attraverso il metodo indiretto di Lyapunov.

2. Dato il sistema lineare **tempo discreto** rappresentato dalle equazioni dinamiche

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2}x_2(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases}$$

   - Commentare, per quanto possibile, sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema basandosi soltanto sulle equazioni dinamiche e sulle definizioni delle due proprietà (quindi senza l'appoggio del Lemma PBH, di forme standard o matrici di raggiungibilità e osservabilità).
   - Si studino le proprietà di raggiungibilità, controllabilità, osservabilità e ricostruibilità. Si studi la stabilità interna e la stabilità BIBO del sistema.
   - Si porti il sistema in forma di Kalman.
   - Supponendo di conoscere gli ingressi $u(k)$ per $k = 0, \dots 3$ e le uscite per i soli istanti pari $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$ è possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$?

3. Sia dato il sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_k$$

   si determini :

   - se il sistema e' raggiungibile e/o controllabile;
   - se esiste, una sequenza di ingresso che porti lo stato da $x(0) = [1, 0, 0]^T$ a $x(2) = [2, 0, 2]^T$
   - se esiste, una sequenza di ingresso che porti lo stato da $x(0) = [1, 0, 0]^T$ a $x(3) = [2, 0, 2]^T$; si commenti il risultato di quest'ultimo caso.

4. Sia dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

   si determini la legge di controllo ottima $u(t) = Kx(t)$ che rende minimo l'indice di costo:

$$J = \int_0^\infty x^T(t) \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 4u^2(t)dt$$