• ESAME 03-07-2017

1. Dato il sistema lineare **tempo discreto** rappresentato dalle matrici

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right),\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ C = (1\ 0\ 0\ 1)$$

   (a) Studiare le seguenti proprietà strutturali del sistema: stabilità interna, raggiungibilità, controllabilità a zero, stabilizzabilità e stabilità esterna (BIBO stabilità). Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

   (b) Determinare, se esistono, sequenze di ingressi che a partire da $x(0) = (0, 1, 0, 0)^T$ consentano di raggiungere i seguenti punti: a) $x_a = (1, 0, 1, -1)^T$, b) $x_b = (-1, 4, 1, 0)^T$, c) $x_c = (-1, 2, 1, 0)^T$, d) $x_d = (2, 1, 0, 1)^T$. Nel caso in cui esistano si riporti anche il numero di passi necessario.

   (c) Si scrivano le condizioni nelle quali per un sistema lineare tempo invariante tempo discreto con matrici (A, B, C, D), lo stato X_F può essere raggiunto a partire dallo stato x_0.

CONTROLL A ZERO) TD

$Im(A^T) \subseteq Im(R_T)$

$$R = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\subseteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NO BIBO : $\lambda = -1$ RECUPERA RANGO DI $\begin{vmatrix} A+I & B \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A+I & C \end{vmatrix}^T$

ST: $R = MAX\ \rho$; $\lambda(\bar{R}) < 0$: $\lambda = -2$ NO R

(BIBO $|A+2I \mid B|$ NO RECUPERA RANGO) "NO ST"

2) $X_f - \phi_L = \phi_f \in R_K$

$\phi_L = A^K x_0 = A^K e_2 = e_2$

b) $x_B - e_2 \in R^3$

c) $x_C - e_2 \in R^4$

$x - \phi_L = R_K [U_K\ U_{K-1} \dots U_0]^T$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R_3 \begin{pmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(2) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(1) + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u(0)$ INCOGNITE

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R_1 (u(0)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(0)$ INCOGNITA

FDT $= C(SI - A)^{-1} B = -\frac{1}{S+1}$

NB: $A_{12}^{-1} = -A_{11}^{-1}(A_{12} A_{22}^{-1}) = 0$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{3\times 3} & A_{12}^{3\times 1} \\ \hline 0 = A_{21}^{1\times 3} & A_{22}^{1\times 1} \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

R_1 R_3 $n=1$ $n=3$

2. Dato il sistema **Tempo Continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dato $b = 0$, determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, le proprietà strutturali del sistema (stabilità interna e BIBO, raggiungibilità, osservabilità, con le dimensioni dei relativi spazi) **senza utilizzare le matrici di raggiungibilità e osservabilità**.
- Dato $b \neq 0$, determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, i sottosistemi e la tipologia di connessione che forniscono un sistema complessivo come quello fornito. Motivare le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema complessivo.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 = -1 & \lambda_3 = \alpha \\ \lambda_2 = 1 & \alpha \neq \pm 1 \end{bmatrix}$$

BIBO: $\lambda = 1$

$|A - I \,|\, B|$

$|A - I \,|\, C|^T$

$\begin{bmatrix} R + O \\ NO \\ BIBO \end{bmatrix}$

RECUPERO RANGO

$\begin{pmatrix} NO & R \\ NO & O \end{pmatrix}$ SISO $m_g \neq 1$ SE $\alpha = \pm 1$

• ESAME 24-02-2020 :

1. Dato il sistema descritto dalle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si studino i modi del sistema e la stabilità interna;
- Se esiste, si determini (giustificando le risposte) un vettore di uscita C tale per cui l'andamento dell'uscita per il sistema in evoluzione libera possa consistere in combinazione dei seguenti andamenti temporali: 1) $e^{-t}\sin(2t)$ e e^{-2t} oppure 2) $\cos(2t)$ e te^{-2t} oppure 3) $sin(2t)$ e e^{-2t}.
- Determinare se è possibile trovare le stesse combinazioni di andamenti temporali del punto precedente per l'evoluzione forzata dello stato.
- Data $C = (0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$ determinare la matrice di cambio di base che porta il sistema in forma di Kalman.

1) $\lambda = -2$ $\quad m_a = 3$ $\quad m_g = 2$ $\quad \text{DIM}(K(A+2I))$

$\lambda = \pm 2j$ $\quad$ MODI $\; c(2t);\ s(2t);\ e^{-2t};\ te^{-2t}$

2) $R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 8 & -16 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & -16 \\ 1 & -2 & 4 & 8 & 16 \end{vmatrix}$ $\quad \rho R = 4$ $\quad Im(R) = (e_1; e_2; e_3 + e_5; e_4)$

$O = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$ $\quad \rho O = 3$ $\quad Im(\bar{O}) = (e_4; e_5)$

$T = \left[T_{RO}\ T_{R\bar{O}}\ T_{\bar{R}O}\ T_{\bar{R}\bar{O}} \right]$ $\qquad \hat{A} = T^{-1}AT \quad \hat{C} = CT$

$\qquad \hat{B} = T^{-1}B \quad \hat{D} = D$

$T_{R\bar{O}} = [T_R | T_{\bar{O}}]$ $\quad K(T_{R\bar{O}}) = (\underbrace{0\,0\,0\,1}_{w_1} | \underbrace{-1\,0}_{w_2})^T$

$T_{R\bar{O}} = e_4$ $\quad T_{RO} = e_1, e_2; e_3 - e_5$ $\quad T_{\bar{R}\bar{O}} = e_5$

3) $\begin{vmatrix} c2 & s2 & 0 & 0 & 0 \\ -s2 & c2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{vmatrix}$ $\quad y_L = Ce^{At}x_0;\ [1\,0\,0\,1\,0]$

$= [c(2t)\ \ s(2t)\ \ 0\ \ e^{-2t}\ \ te^{-2t}]\, x_0$

4) $y_F = C\,\phi_F$ $\quad Im(R_+)$

VERIFICO $Im(\phi_f) = Im(R_+)$ QUINDI:

"BIBO R-O" SU λ INTERESSE O VUARDO (R-O) MUX

• ESAME 16-01-2017

1. Dato il sistema lineare tempo invariante e tempo continuo descritto dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si determini il più piccolo sottospazio che contenga l'evoluzione libera dello stato a partire dai seguenti stati $x_{0,1} = (1\,0\,0\,0\,0)^T$, $x_{0,2} = (0\,0\,1\,0\,0)^T$ e $x_{0,3} = (0\,0\,0\,1\,0)^T$ commentando i risultati ottenuti.
- Si calcolino polinomio caratteristico e polinomio minimo della matrice A e la Funzione di Trasferimento del sistema.
- Si indichino i modi propri del sistema ed i modi propri presenti nell'uscita per ingresso impulsivo.

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{cl}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $S_{x_0} = \{x_0, Ax_0, A^2x_0\}$ PIANO

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{cl}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $S_{x_0}\{x_0\}$ COSTANTE

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \underset{cl}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $S_{x_0}\{x_0, Ax_0\}$ RETTA

2) MINIMO: $p(\lambda) = d(A - \lambda I) \Rightarrow (A-\lambda_1)^{3}(A-\lambda_2) = 0$

METTO GLI AUTOVALORI E TROVO A CHE MI VERIFICA IL MINIMO

3) FDT $G = C(SI - A)^{-1}B$

$\lambda_1 = -1 \quad m_a = 3 \quad m_g = K(\bar{A}) = 1$

$\lambda_2 = -1 \pm j \quad m_a = 1 \quad m_g = K(\bar{A}_\lambda) = 1$

MODI: $e^{-t}; te^{-t}; t^2e^{-2t}, e^{-t}c(t), e^{-t}s(t)$

$(SI - A)^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & (s+1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (s+1)^{-2} & (s+1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (s+1)^{-3} & (s+1)^{-2} & (s+1)^{-1} \end{vmatrix}$

4) INGRESSO IMPULSIVO $U(s) = 1$

$y(s) = G(s) \cdot U(s) = \dfrac{2s^2 + 5s + 4}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$

MODI $e^{-t}, e^{-t}c(t), e^{-t}s(t)$

• ESAME 09-06-2019

1. Dato il sistema dinamico descritto dalle equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + 2\dot{y}_1(t) + y_1(t) = u_1 + \ddot{u}_2 + 4\dot{u}_2 + u_2 \\ \ddot{y}_2(t) + 2\dot{y}_2(t) + y_2(t) = \dot{u}_1 + u_1 + \dot{u}_2 - u_2 \end{cases}$$

- si determini la matrice di trasferimento e si calcoli il grado della forma di Smith-McMillan.
- Si determini una realizzazione minima in forma di stato del sistema.

1)

$y_1\,(s^2+2s+1) = u_1(1) + u_2(s^2+4s+1)$

$y_2\,(s^2+2s+1) = u_1(s+1) + u_2(s-1)$

$G_{11} = \frac{1}{s^2+2s+1}$ $G_{12} = \frac{s^2+4s+1}{s^2+2s+1}$ $G_{21} = \frac{s+1}{s^2+2s+1}$ $G_{22} = \frac{s-1}{s^2+2s+1}$

$$G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{vmatrix} 1 & s^2+4s+1 \\ s+1 & s-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{MCD} \qquad \Delta(0) = 1 \\ \Delta(1) = \{1, s^2+4s+1, s+1, s-1\} = 1 \\ \Delta(2) = (\det 2\times2) = -s^3-8s^2-2s-2 = x \end{cases}$$

$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 1$; $\lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = x$

$$M(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}$$

$\lambda = -1$ $m_p = 4$ GRADO 4

2)

$$G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{vmatrix} 1 & s^2+4s+1 \\ s+1 & s-1 \end{vmatrix}$$

$$G_{12} = \frac{s^2+4s+1}{s^2+2s+1} = 1 + \frac{2s}{s^2+2s+1}$$

COLONNE FCC : SIMO [PARALLELO PERDO R.O. POLI COMUNI ecc.]

$$G_1 = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{vmatrix} 1 \\ s+1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{vmatrix} 2s \\ s-1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{n\times n}{A} = \left|\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right| \qquad \underset{n\times p}{B} = \left|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\underset{h\times n}{C} = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right| \qquad \underset{h\times p}{D} = \left|\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|$$

- **ESAME 06-07-2020 :**

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ e il sistema **Tempo Discreto** descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma + 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$
$\gamma = 1$
$\beta = 1$
$\delta = 1$

- si studino la stabililtà interna e BIBO del sistema al variare di a;
- si studino le dimensioni dello spazio di raggiungibilità e di inosservabilità;
- Dati gli ingressi $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ e le uscite $y(0) = 0, y(1) = \beta + 1, y(2) = 2$ si discuta se è possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$ al variare di a.

1)

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \beta + 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & \alpha \\ 1/4 & 1/4 & \frac{13}{4}a \end{vmatrix} x_0 + \begin{vmatrix} 0 \\ CB \\ CAB + CB \end{vmatrix}$$

$$y(0) = C\ x(0)$$
$$y(1) = C\ A x(0) + CB\ u(0)$$
$$y(2) = C A^2 x(0) + CAB\ u(0) + CB\ u(1)$$

$$y = y_\ell + y_f \Rightarrow y - y_f = O x_0$$
$$V = O x_0$$

$|O | V| \rightarrow$ SE RECUPERO RANGO
$V \notin Im(O)$

NB) LO SPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ $R_n = [B\ AB \dots A^{n}]$ È INVARIANTE
SE $\rho(R) = MAX$ NON CAMBIA PIU' $Sx_0\{b_1 \dots A^{n-1} b_1, b_2 \dots\}$

SS CICLICO SISO SEMPRE / MIMO SE $\nexists$ CC TRA b_1 b_2

• ESAME 01-02-2021 :

1. Si consideri lo schema riportato in figura

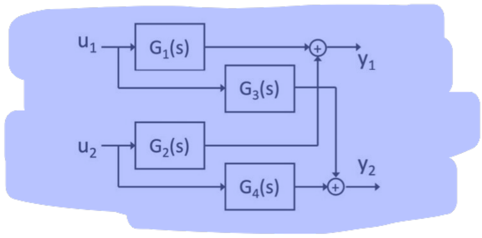

Figura 1: Schema esercizio 1

dove $G_1(s) = \frac{s-1}{s^2-1}$, $G_2(s) = \frac{s+1}{s^2-1}$, $G_3(s) = \frac{1}{s^2-1}$, $G_4(s) = \frac{s}{s^2-1}$.

- scrivere la matrice di trasferimento del sistema dinamico e lavorando per colonne determinare una forma di stato che realizza la matrice di trasferimento trovata.
- Si studi stabilità interna, la stabilità BIBO, le proprietà di raggiungibilità del sistema trovato al punto precedente considerando un solo ingresso e una sola uscita (commentando sul fatto che i risultati sono indipendenti dalla scelta effettuata).

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{s^2+2s+2}{s^2+2s+1} & 0 \\ 0 & -\frac{2s+1}{s+1} \\ -\frac{1}{s^2-2s+2} & \frac{s-1}{s^2-2s+2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{s^2+2s+2}{s^2+2s+1} = 1 + \frac{1}{s^2+2s+1}$$

$$-\frac{2s+1}{s+1} = -2 + \frac{1}{s+1}$$

FCO:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left(-1 \right) \quad \left(0 \quad 1 \right) \quad \left| 1 \right|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5×5

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5×2

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3×5

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3×2

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

• ESAME 24-02-2022

1. Dato il sistema **tempo discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Determinare tutti gli stati iniziali indistinguibili da $x_0 = (3\ 1\ 0\ -1)^T$.
- Studiare la controllabilità a zero in 1, 2, 3, 4 passi.
- Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman. Se ne deduca la funzione di trasferimento e si discuta la stabilità BIBO del sistema.

$$K(b) = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/16 & 0 & 1/16 \end{vmatrix} \tilde{x} = 0$$

$$I_n(\bar{0}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{vmatrix} \qquad \tilde{x} = x - x_0$$

$\langle x_0 \rangle$ $\qquad \bar{x} \in K(A)$

$\langle x_0, Ax_0 \rangle$ $\qquad x_0 \in K(A - \lambda I)$ e retta $\mathbb{R}^n$

$\langle x_0, Ax_0, A^2x_0 \rangle$ $\qquad \hat{x}_0 \in K(A - \lambda I)^2$ e piano $\mathbb{R}^n$