

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + ax_2(t) + x_1^2(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = b - ax_2(t) - x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
- Si studi la stabilità degli equilibri per $b = 0$ al variare di $a \neq 0$.
- Per $a = b = 0$ si commenti sulla stabilità dei punti di equilibrio studiando gli andamenti nello spazio delle fasi.

2. Si consideri il sistema dato dall'interconnessione in parallelo di due sistemi tempo discreto caratterizzati dalle funzioni di trasferimento: $G_1(z) = \frac{1}{z^2 - 0.5z - 0.5}$ e $G_2(z) = \frac{1}{z-1}$.

- Si determini la forma di stato del sistema interconnesso (di dimensione 3) e se ne studino le proprietà di raggiungibilità e osservabilità.
- Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman. Si commentino le basi determinate per il calcolo della matrice del cambio di base.
- Si determinino tutte le condizioni iniziali compatibili con l'ingresso $u(0) = 1$ e le uscite $y(0) = 1$ e $y(1) = 0$.

3. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Determinare, se possibile, anche aiutandosi con la decomposizione di Kalman, una legge di controllo stabilizzante del tipo $u(t) = Kx(t)$ che posizioni il maggior numero possibile di autovalori in -2 .
- Determinare, se possibile, un osservatore asintotico dello stato tale che la dinamica dell'errore di stima abbia il maggior numero possibile di autovalori in -2 .

4. Dato il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, e la traiettoria del vettore di stato desiderata $r(t)$, il candidato :

- ricavi il segnale di controllo $u^*(t)$ che rende minimo l'indice di costo:

$$J = 1/2(x(t_F) - r(t_F))^T S_f(x(t_F) - r(t_F)) + 1/2 \int_{t_0}^{t_F} (x(t) - r(t))^T Q(x(t) - r(t)) + u(t)^T R u(t) dt$$

- discuta la possibilità di realizzare in forma di feedback la soluzione del problema e le sue implicazioni