

1. Dato il sistema non lineare tempo invariante e tempo discreto caratterizzato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2}x_2(k) + \epsilon x_2^2(k) \end{cases},$$

- Si determinino al variare del parametro $\epsilon \in \mathbb{R}$ gli equilibri del sistema.
- Per ogni equilibrio determinato si discuta, sempre al variare del parametro $\epsilon \in \mathbb{R}$, la stabilità del sistema non lineare con il metodo indiretto di Lyapunov (metodo del linearizzato).
- Si enunci il Teorema diretto di Lyapunov per sistemi tempo discreto.

2. Dato il sistema tempo continuo caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e con matrice di uscita $C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

- Si determinino i modi propri del sistema.
- Si discuta la stabilità interna e la stabilità BIBO del sistema.

3. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = [0 \ 1 \ 1] x = Cx$$

si determini :

- se il sistema è stabilizzabile mediante retroazione dello stato usando un solo ingresso. Se sì, si determini per quali ingressi;
- una matrice K di retroazione dello stato in modo che, per qualunque stato iniziale, l'evoluzione libera del sistema tenda a zero più velocemente di e^{-t} ;
- una matrice K' di retroazione dello stato in modo che, con ingresso nullo e per qualunque stato iniziale, l'uscita del sistema tenda a zero non più lentamente di e^{-2t} .

4. si consideri il sistema, con $\beta \in [0, 1]$ (intervallo chiuso $0 \rightarrow 1$):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix} x = Cx$$

si determini:

- per quali valori di β non esistono stimatori asintotici dello stato;
- per quali valori di β non esistono stimatori asintotici dello stato che utilizzano una sola uscita del sistema.