

# Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

## Lezione 3

Dario Trevisan – <https://web.dm.unipi.it/trevisan>

29/09/2025

## **Cenni agli assiomi di Kolmogorov**

## Richiami: probabilità elementare

►  $0 \leq P(A|I) \leq 1$

## Richiami: probabilità elementare

- ▶  $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- ▶ **Somma**  $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$  purché  $A, B$  incompatibili,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

## Richiami: probabilità elementare

- ▶  $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- ▶ **Somma**  $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$  purché  $A, B$  incompatibili,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- ▶ Negazione  $P(\text{ non } A) = 1 - P(A)$

## Richiami: probabilità elementare

- ▶  $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- ▶ **Somma**  $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$  purché  $A, B$  incompatibili,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- ▶ Negazione  $P(\text{non } A) = 1 - P(A)$
- ▶ **Prodotto**  $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$ .

## Richiami: probabilità elementare

- ▶  $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- ▶ **Somma**  $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$  purché  $A, B$  incompatibili,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- ▶ Negazione  $P(\text{ non } A) = 1 - P(A)$
- ▶ **Prodotto**  $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$ .
- ▶ Sistema di alternative  $(A_i)_{i=1}^n$  se esattamente una delle  $A_i$  si realizza (ma non si sa quale)

# Richiami: probabilità elementare

- ▶  $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- ▶ **Somma**  $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$  purché  $A, B$  incompatibili,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- ▶ Negazione  $P(\text{non } A) = 1 - P(A)$
- ▶ **Prodotto**  $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$ .
- ▶ Sistema di alternative  $(A_i)_{i=1}^n$  se esattamente una delle  $A_i$  si realizza (ma non si sa quale)
- ▶ Formula di **Bayes**

$$P(A_i|B) \propto P(A_i)L(A_i; B)$$



# Richiami: probabilità elementare

- ▶  $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- ▶ **Somma**  $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$  purché  $A, B$  incompatibili,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- ▶ Negazione  $P(\text{non } A) = 1 - P(A)$
- ▶ **Prodotto**  $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$ .
- ▶ Sistema di alternative  $(A_i)_{i=1}^n$  se esattamente una delle  $A_i$  si realizza (ma non si sa quale)
- ▶ Formula di **Bayes**

$$P(A_i|B) \propto P(A_i)L(A_i; B)$$

- ▶ **Verosimiglianza**  $L(A; B) = P(B|A)$

# Problemi dell'approccio elementare

1. Come attribuire le **probabilità iniziali** (quelle che abbiamo chiamato *a priori*)?

# Problemi dell'approccio elementare

1. Come attribuire le **probabilità iniziali** (quelle che abbiamo chiamato *a priori*)?
2. Come garantire la **consistenza** del calcolo, ossia che  $P(A|I)$  sia ben definita?

# Problemi dell'approccio elementare

1. Come attribuire le **probabilità iniziali** (quelle che abbiamo chiamato *a priori*)?
2. Come garantire la **consistenza** del calcolo, ossia che  $P(A|I)$  sia ben definita?
3. Come trattare i **passaggi al limite**, in particolare, nel caso di infinite affermazioni?

Alcune risposte sono fornite dalla **descrizione assiomatica** della probabilità proposta da Kolmogorov.

**L'idea:** formalizzare i diagrammi di Eulero-Venn, identificando

- ▶ le affermazioni (eventi)  $A$ ,  $I$  ecc. con *sottoinsiemi* di un insieme “universo”  $\Omega$  (l'informazione iniziale)

Alcune risposte sono fornite dalla **descrizione assiomatica** della probabilità proposta da Kolmogorov.

**L'idea:** formalizzare i diagrammi di Eulero-Venn, identificando

- ▶ le affermazioni (eventi)  $A$ ,  $I$  ecc. con *sottoinsiemi* di un insieme “universo”  $\Omega$  (l'informazione iniziale)
- ▶ la probabilità  $P(A|I)$  con una nozione astratta di *area* (relativa), definendo prima la probabilità rispetto all'informazione iniziale  $\Omega$ .

## a) insieme $\Omega$

Si fissa un insieme “universo”  $\Omega$  che rappresenta tutte le possibili situazioni (scenari) che si potrebbero presentare nel problema che si sta considerando.

Ad esempio, nel caso di un lancio di dado,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

che corrisponde ai possibili esiti (ovviamente altre scelte sono ragionevoli).

## b) Eventi

Si identificano quali affermazioni  $A \subseteq \Omega$  sono d'interesse per il problema che si vuole affrontare.

Insieme  $\mathcal{A}$  i cui elementi  $A \in \mathcal{A}$  sono sottoinsiemi di  $\Omega$ , detto la  *$\sigma$ -algebra degli eventi*:

►  $\Omega \in \mathcal{A},$



## b) Eventi

Si identificano quali affermazioni  $A \subseteq \Omega$  sono d'interesse per il problema che si vuole affrontare.

Insieme  $\mathcal{A}$  i cui elementi  $A \in \mathcal{A}$  sono sottoinsiemi di  $\Omega$ , detto la  *$\sigma$ -algebra degli eventi*:

- ▶  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,
- ▶ se  $A, B \in \mathcal{A}$ , anche  $A^c$  ("non  $A$ "),  $A \cap B$  (" $A$  e  $B$ ") e  $A \cup B$  (" $A$  oppure  $B$ ") sono eventi in  $\mathcal{A}$ .

## b) Eventi

Si identificano quali affermazioni  $A \subseteq \Omega$  sono d'interesse per il problema che si vuole affrontare.

Insieme  $\mathcal{A}$  i cui elementi  $A \in \mathcal{A}$  sono sottoinsiemi di  $\Omega$ , detto la  *$\sigma$ -algebra degli eventi*:

- ▶  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,
- ▶ se  $A, B \in \mathcal{A}$ , anche  $A^c$  (“non  $A$ ”),  $A \cap B$  (“ $A$  e  $B$ ”) e  $A \cup B$  (“ $A$  oppure  $B$ ”) sono eventi in  $\mathcal{A}$ .
- ▶ Inoltre, per permettere di passare al limite, si richiede che valga lo stesso per l'unione infinita di eventi: dati  $A_n \in \mathcal{A}$ , pure  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

## c) funzione di probabilità (iniziale)

Si introduce una  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  tale che  $P(\Omega) = 1$  e, per ogni  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \cap B = \emptyset$  valga

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- ▶  $P(A)$  corrisponde alla probabilità  $P(A|\Omega)$  rispetto all'informazione iniziale, di cui si richiede valga la regola della somma (per eventi incompatibili).

## c) funzione di probabilità (iniziale)

Si introduce una  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  tale che  $P(\Omega) = 1$  e, per ogni  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \cap B = \emptyset$  valga

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- ▶  $P(A)$  corrisponde alla probabilità  $P(A|\Omega)$  rispetto all'informazione iniziale, di cui si richiede valga la regola della somma (per eventi incompatibili).
- ▶ Per passare al limite, si richiede in più che la regola della somma si estenda ad infiniti  $A_n \in \mathcal{A}$  tali che  $A_n \cap A_m = \emptyset$  per  $n \neq m$ :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

## d) Probabilità condizionata ad $I$

Per ogni  $A, I \in \mathcal{A}$  tale che  $P(I) > 0$ , si pone

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)}.$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  è uno **spazio di probabilità** secondo Kolmogorov.



## **Indipendenza probabilistica**

# Definizione di indipendenza

- ▶ Regola del prodotto  $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$ .



# Definizione di indipendenza

- ▶ Regola del prodotto  $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$ .
- ▶ Due affermazioni  $A$ ,  $B$  si dicono **indipendenti** (condizionatamente all'informazione nota  $I$ ) se

$$P(A|B, I) = P(A|I) \quad \text{oppure} \quad P(B|A, I) = P(B|I),$$

oppure ancora

$$P(A, B|I) = P(A|I)P(B|I).$$

## Estrazioni con rimpiazzo: seconda estrazione

## Estrazioni con rimpiazzo: terza estrazione

## Sistemi di alternative indipendenti

Dati  $k \geq 2$  sistemi di alternative  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_k$ , essi si dicono indipendenti tra loro (rispetto all'informazione  $I$ ) se

$$P(A^1, A^2, \dots, A^k | I) = \prod_{i=1}^k P(A^i),$$

per ogni scelta di  $A^1 \in \mathcal{S}_1, A^2 \in \mathcal{S}_2, \dots, A^k \in \mathcal{S}_k$ .

# Densità binomiale

$$\begin{aligned} &P(\text{estrarre con ripiasso una specifica sequenza lunga } n \text{ con } r \text{ rosse}) \\ &= p^r(1-p)^{n-r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(\text{estrarre con ripiasso una qualsiasi sequenza lunga } n \text{ con } r \text{ rosse}) \\ &= \binom{n}{r} p^r(1-p)^{n-r}. \end{aligned}$$

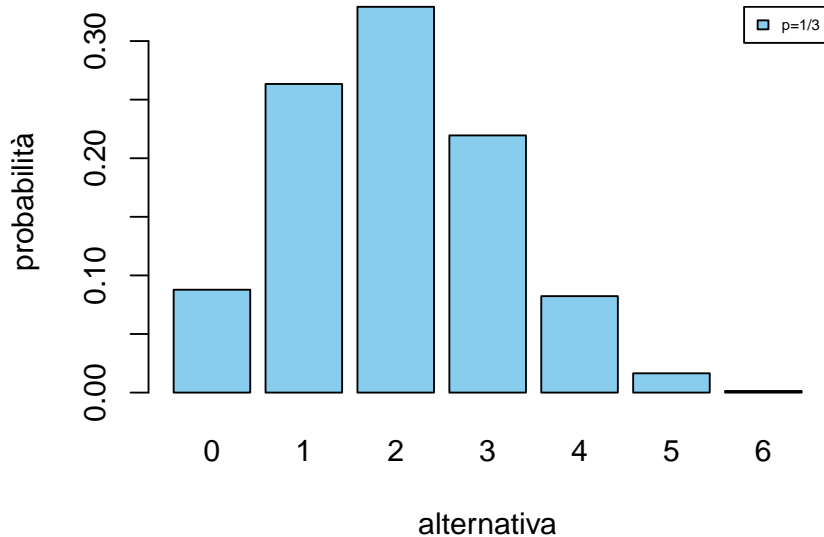




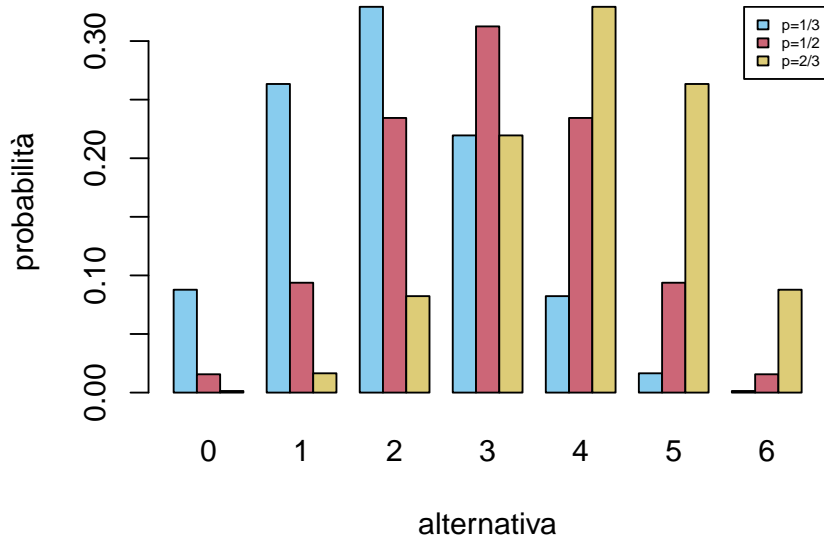




## Densità binomiale $p = 1/3$ , $n = 6$



## Densità binomiali a confronto



## Problemi

# Problema 1

Supponiamo che il 70% degli studenti di una scuola abbia superato un esame di matematica. Se selezioniamo casualmente 8 studenti di questa scuola, qual è la probabilità che esattamente 5 di essi abbiano superato l'esame?





## Problema 2

Si sa che una malattia rara colpisce circa l'1 per mille della popolazione di una regione. Si prendono a caso rispettivamente un campione di

- a. 10 persone,

Calcolare le probabilità nei tre casi che nessuno del campione sia affetto dalla malattia.

## Problema 2

Si sa che una malattia rara colpisce circa l'1 per mille della popolazione di una regione. Si prendono a caso rispettivamente un campione di

- a. 10 persone,
- b. 100 persone,

Calcolare le probabilità nei tre casi che nessuno del campione sia affetto dalla malattia.



## Problema 2

Si sa che una malattia rara colpisce circa l'1 per mille della popolazione di una regione. Si prendono a caso rispettivamente un campione di

- a. 10 persone,
- b. 100 persone,
- c. 1000 persone.

Calcolare le probabilità nei tre casi che nessuno del campione sia affetto dalla malattia.

## Problema 3

Si sa che una malattia rara colpisce una piccola frazione della popolazione di una regione. Si suppongono inizialmente tre possibili scenari, ciascuno con probabilità uniforme: essa colpisce una persona ogni

a. 10

## Problema 3

Si sa che una malattia rara colpisce una piccola frazione della popolazione di una regione. Si suppongono inizialmente tre possibili scenari, ciascuno con probabilità uniforme: essa colpisce una persona ogni

- a. 10
- b. 100

## Problema 3

Si sa che una malattia rara colpisce una piccola frazione della popolazione di una regione. Si suppongono inizialmente tre possibili scenari, ciascuno con probabilità uniforme: essa colpisce una persona ogni

- a. 10
- b. 100
- c. 1000.

## Problema 3

Si sa che una malattia rara colpisce una piccola frazione della popolazione di una regione. Si suppongono inizialmente tre possibili scenari, ciascuno con probabilità uniforme: essa colpisce una persona ogni

- a. 10
  - b. 100
  - c. 1000.
1. Si considera un campione di 70 persone e si osserva che nessuno è affetto dalla malattia. Dire quale delle tre ipotesi è più probabile.

## Problema 3

Si sa che una malattia rara colpisce una piccola frazione della popolazione di una regione. Si suppongono inizialmente tre possibili scenari, ciascuno con probabilità uniforme: essa colpisce una persona ogni

- a. 10
  - b. 100
  - c. 1000.
1. Si considera un campione di 70 persone e si osserva che nessuno è affetto dalla malattia. Dire quale delle tre ipotesi è più probabile.
  2. Si completa successivamente la ricerca analizzando altre 30 persone e si osserva che una persona è affetta dalla malattia. Dire quale delle tre ipotesi è più probabile.

## Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

- a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda.  
Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.

## Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

- a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.
- b. L'urna contiene 5 palline rosse e 5 palline blu.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda.  
Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.



## Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

- a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.
- b. L'urna contiene 5 palline rosse e 5 palline blu.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda. Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.

1. Dire se le alternative relative alle varie estrazioni sono tra loro indipendenti.

## Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

- a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.
- b. L'urna contiene 5 palline rosse e 5 palline blu.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda. Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.

1. Dire se le alternative relative alle varie estrazioni sono tra loro indipendenti.
2. Supponendo di avere estratto  $k \geq 1$  palline e di avere osservato solo palline rosse, dire qual è il più probabile contenuto dell'urna (come funzione di  $k$ )

## Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

- a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.
- b. L'urna contiene 5 palline rosse e 5 palline blu.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda. Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.

1. Dire se le alternative relative alle varie estrazioni sono tra loro indipendenti.
2. Supponendo di avere estratto  $k \geq 1$  palline e di avere osservato solo palline rosse, dire qual è il più probabile contenuto dell'urna (come funzione di  $k$ )
3. Come cambiano le risposte se le estrazioni sono senza rimpiazzo?









## Problema 5

Un'urna da cui un amico effettua estrazioni contiene inizialmente 40 palline di cui 10 rosse e 30 blu. Un amico ci informa che ha estratto la sequenza, nell'ordine

rosso, rosso, blu, rosso.

Sappiamo inoltre sicuramente che l'amico ha effettuato tutte estrazioni o con rimpiazzo o senza rimpiazzo, ma non sappiamo esattamente come (supponiamo a priori probabilità uniforme).

1. Dire se è più probabile che le estrazioni siano state effettuate con rimpiazzo o senza.



## Problema 5

Un'urna da cui un amico effettua estrazioni contiene inizialmente 40 palline di cui 10 rosse e 30 blu. Un amico ci informa che ha estratto la sequenza, nell'ordine

rosso, rosso, blu, rosso.

Sappiamo inoltre sicuramente che l'amico ha effettuato tutte estrazioni o con rimpiazzo o senza rimpiazzo, ma non sappiamo esattamente come (supponiamo a priori probabilità uniforme).

1. Dire se è più probabile che le estrazioni siano state effettuate con rimpiazzo o senza.
2. Calcolare la probabilità che la pallina successiva estratta dall'amico sia rossa.





