Teoria dei Sistemi e del Controllo - 17-09-2018

1. Si consideri il sistema tempo continuo non lineare rappresentato in forma di stato da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1(x_1^2 + x_2^2) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \end{cases}$$

   - Determinare su u la condizione di esistenza di equilibri (reali).
   - Per $u = 0$ si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

2. Dato il sistema **Tempo Discreto** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

   - Studiare lo spazio di raggiungibilità in 1, 2, 3, 4 passi. Detto R_i lo spazio di raggiungibilità in i passi, determinare se R_i è invariante per $i = 1, 2, 3, 4$. Lo spazio raggiungibile è un sottospazio ciclico?
   - Determinare una realizzazione minima in forma di stato e la matrice di trasferimento del sistema.
   - Durante l'evoluzione libera del sistema si misura, all'istante $k = 0$ la seguente uscita: $y(0) = [1 \; -1]^T$. Quanti ed eventualmente quali stati iniziali possono dar luogo a tale lettura?

3. Dato il sistema SISO tempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

   chiuso in retroazione con il controllore $u(t) = K(r(t) - x(t))$, con K matrice di guadagni e $r(t)$ ingresso esogeno di riferimento;

   - si enunci, e si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
   - si discuta il ruolo del segnale di riferimento $r(t)$ nella risposta precedente.
   - si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.
   - si discuta il ruolo del segnale di riferimento $r(t)$ nella risposta precedente.

4. Sia dato il sistema tempo continuo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

   si calcoli la matrice di retroazione ottima K (assumendo $u = Kx$) che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^\infty y(t)^2 + u(t)^2 dt$$