Teoria dei Sistemi e del Controllo - 18-09-2019

1. Si consideri il sistema dinamico lineare tempo continuo con matrice dinamica della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   - Determinare una matrice di ingressi B (più semplice possibile) che garantisca la completa raggiungibilità del sistema
   - Considerando la matrice determinata al punto precedente, determinare una matrice di uscite C tale per cui le funzioni di trasferimento che costituiscono la matrice di trasferimento siano tutte BIBO stabili.
   - Con $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determinare la matrice di trasformazione per portare il sistema in forma di Kalman. Determinare i poli della funzione di trasferimento.

2.
   - Dato un sistema lineare tempo continuo asintoticamente stabile si descriva una procedura per calcolare una candidata di Lyapunov che attraverso il metodo diretto di Lyapunov ne verifichi la stabilità.
   - Si applichi il metodo al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -x_2 \end{cases}$$

   - Con quanto ottenuto nei punti precedenti, determinare (con il metodo diretto di Lyapunov) la stabilità dell'origine del sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1 + x_1x_2 + 3x_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1^2 + x_2^2 - x_2 \end{cases}$$

3. Sia dato il sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} u_k$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

   con le tre costanti α, β e γ incognite. Si determinino :

   - le condizioni necessarie sulle costanti α, β e γ affinchè il sistema (A, B) sia completamente raggiungibile;
   - le condizioni necessarie sulle costanti α, β e γ affinchè il sistema (A, B) sia completamente controllabile in 1, 2 o 3 passi;
   - scelti tre valori opportuni per le tre costanti incognite, si determini una retroazione algebrica dello stato $u_k = Kx_k$ in modo che il sistema retroazionato $A + BK$ sia di tipo "dead-beat".

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

   ed il problema di controllo ottimo descritto dal funzionale

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u \right] dt$$

   soggetto a : stato inziale $x(0) = x_0$ noto, stato finale desiderato $x(t_f) = x_f$ fissato, valore del tempo finale t_f fissato,

   - si ricavi la matrice Hamiltoniana partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange
   - si ricavi la soluzione ottima in forma chiusa $u^*(t) = ...$ in funzione delle grandezze note (suggerimento: NON usare l'equazione di Riccati, non produce una soluzione in forma chiusa).