PROVA IN ITINERE 19.12.2016

1) Dato il sistema dinamico non lineare TC:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = K x_1 + x_1 x_2^2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{cases}$$

a) per $u=0$ studiare gli equilibri al variare di $K \in \mathbb{R}$.
b) per $u=0$ studiare la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare di $K \in \mathbb{R}$.
c) Confermare i risultati ottenuti con il Metodo Diretto.
d) Proporre un controllo $u(x_1, x_2)$ che renda l'origine un equilibrio GAS per $K \geq 0$.

$\underline{u=0}$

$$\begin{cases} 0 = K x_1 + x_1 x_2^2 \\ 0 = -x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 (K + x_2^2) = 0 \\ -x_2 (x_2^2 + x_1^2) = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$ $\quad \underline{K \neq 0}$
$x_2 = 0 \rightarrow \forall x_1$ $\quad \underline{K = 0}$

$x_1 = 0 \rightarrow x_2^2 = -K$ NO! Non lo considero perché non appartiene ai reali!

Per $u=0$ il sistema presenta due equilibri:

$(0,0)$ per $K \neq 0$
$(x_1, 0)$ per $K = 0$

Per lo studio della stabilità nell'origine seguito inizialmente il <u>metodo indiretto</u> di Lyapunov:

$$A = \begin{vmatrix} K & 2x_1x_2 \\ -\cancel{3x_2^2} - 2x_1x_2 & -3x_2^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \rightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Avendo la matrice A almeno un autovalore nullo, non posso concludere con questo metodo.
Procedo con il <u>metodo diretto</u>.

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

D.P.

$$\mathcal{L}V(x) = K x_1^2 + \cancel{x_1^2 x_2^2} - x_2^4 - \cancel{x_1^2 x_2^2} = \underline{-x_2^4 + K x_1^2}$$

La '$\mathcal{L}V(x)$' è definita negativa solo se $K<0$. Se questo è vero, allora l'origine è un punto di equilibrio A.S. In caso contrario è instabile.

$K<0 \rightarrow$ origine A.S ($\mathcal{L}V(x)$ D.N.)
$K>0 \rightarrow$ origine instabile ($\mathcal{L}V(x)$ D.P.)

- Affinché l'origine sia GAS per $K \geq 0$, la $\mathcal{L}V(x)$ deve risultare D.N. e la $V(x)$ deve inoltre essere inferiormente limitata.

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\mathcal{L}V(x) = x_1 (K x_1 + x_1 x_2^2 + u) + x_2 (-x_2^3 - x_1^2 x_2) =$$

$$= K x_1^2 + \cancel{x_1^2 x_2^2} + u x_1 - x_2^4 - \cancel{x_1^2 x_2^2} = K x_1^2 + u x_1 - x_2^4$$

$$\boxed{u = -K x_1 - x_1} \rightarrow \mathcal{L}_f V(x) = -x_1^2 - x_2^4 \quad \text{D.N.}$$

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = +\infty$$

L'origine è GAS per $K \geq 0$ con l'ingresso di controllo trovato.

② Dato il sistema lineare TC:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right| \qquad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Trovare la matrice di trasformazione per ottenere la decomposizione canonica di Kalman.
b) Calcolare polinomio caratteristico e polinomio minimo di A.
c) Determinare modi propri e f.d.t. del sistema.
d) Caratterizzare stabilità interna ed esterna del sistema.

Per il calcolo della matrice di trasformazione occorrono le basi dello spazio di raggiungibilità e di non osservabilità.

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & +1 & -1 \\ -2 & -1 & +1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \dim R = 3 \qquad \operatorname{Im} R = \left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & -4 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & +8 & 0 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \dim \bar{O} = 2 \qquad \bar{O} = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$$T_{R\bar{O}} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \operatorname{Ker}(T_{R\bar{O}}) = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right] W_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right] W_2 \end{matrix}$$

$$T_{R\bar{O}} = T_R \cdot W_1 = T_{\bar{O}}(-W_2) = \langle (-1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)^T \rangle$$

$$T_{RO} = \langle (1\,0\,0\,0\,0\,0)^T; (0\,1\,0\,0\,0\,0)^T \rangle$$

$$T_{\bar{R}\bar{O}} = \langle (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1)^T$$

$$T_{\bar{R}O} = \langle (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)^T \rangle ; \langle (0\,0\,0\,0\,1\,0)^T \rangle$$

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| T_{RO} \;\vdots\; T_{R\bar{O}} \;\vdots\; T_{\bar{R}O} \;\vdots\; T_{\bar{R}\bar{O}} \right|$$

T_{RO} $T_{R\bar{O}}$ $T_{\bar{R}O}$ $T_{\bar{R}\bar{O}}$

$$T^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Scrivo il sistema in forma di Kalman:

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left|\begin{array}{cccccc} -2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right| \cdot T \Rightarrow \tilde{A} = \left|\begin{array}{cc|cccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -3 & -1 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{-2} \end{array}\right|$$

A_{RO}

$$\tilde{B} = T^{-1} B = \left|\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ \hline -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right| B_{RO} \qquad \tilde{C} = CT = \left|\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| C_{RO}$$

$$G(s) = C_{RO}\,(sI - A_{RO})^{-1} B_{RO} = \left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{array}\right|^{-1} \cdot \left|\begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{(s^2+2s+2)} \left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array}\right| = \frac{1}{(s^2+2s+2)} \left|\begin{array}{cc} 2s+2 & -\cancel{2}+s+\cancel{2} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array}\right| =$$

$$\longrightarrow G(s) = \frac{\cancel{-2s} - 2 \cancel{+2s}}{s^2+2s+2} = \boxed{\frac{-2}{(s+1+j)\,(s+1-j)}}$$

Il sistema è BIBO stabile, avendo la funzione di trasferimento poli a parte reale negativa.

Gli autovalori della matrice dinamica sono:

$\lambda_1 = 1$ m.a. $= 2$ m.g. $= 1$

$\lambda_2 = -2$ m.a. $= 2$ m.g. $= 1$

$\lambda_3 = -1 \pm j$

$\xrightarrow{\text{modi}} e^{t}, t e^{t}, e^{-2t}, t e^{-2t}, e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)$

Poiché 2 autovalori sono a parte reale positiva, si può concludere che il sistema non è internamente stabile.

- Passo ora allo studio del polinomio caratteristico:

$$(A - \lambda I) = \left|\begin{array}{ccccccc} (1-\lambda) & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & (-1-\lambda) & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-2-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & (-2-\lambda) \end{array}\right| = (-2-\lambda)^2 (1-\lambda)^2 \left[(-1-\lambda)^2 + 1\right] =$$

$$= (-2-\lambda)^2 (1-\lambda)^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 2) =$$

$$= (4 + \lambda^2 + 4\lambda)(1 + \lambda^2 - 2\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = \ldots$$

Il polinomio minimo:

$$m_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 (-2-\lambda)^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

Perché considero come esponente il massimo grado del blocco di Jordan associato a quel dato autovalore

③ Si consideri il sistema MIMO con matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)} \end{vmatrix}$$

a) Trovare poli e zeri della matrice di trasferimento e il grado di McMillan.

b) Determinare una rappresentazione di stato in forma minima del sistema.

· Porto la matrice di trasferimento in forma di Smith.

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \begin{vmatrix} (s+2)(s-1) & 0 & (s-1)^2 \\ (s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1) \end{vmatrix}$$

Procedo calcolando i divisori 'λ_i':

$D_0 = 1$

$D_1 = \text{m.c.d.} \left\{ s^2+2s-s-2 \ , \ s^2-2s+1, \ s^2+s+2s+2, \ s^2-1 \ , \ s^2-1 \right\} =$ sono tutti monici, quindi non devo fare correzioni

$= \text{m.c.d.} \{ .. \} = \underline{1}$

$$D_2 = \text{m.c.d.} \left\{ \begin{vmatrix} (s+2)(s-1) & 0 \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} (s+2)(s-1) & (s-1)^2 \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & (s-1)^2 \\ (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1) \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \text{m.c.d.} \left\{ (s-1)^2(s+1)(s+2), \ (s+2)(s-1)^2(s+1) + (s-1)^2(s+1)(s+2), \ -(s-1)^3(s+1) \right\} =$$

$$= (s-1)^2(s+1)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{D_1}{D_0} = 1 \\ \lambda_2 &= \frac{D_2}{D_1} = (s-1)^2(s+1) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \Lambda(s) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s-1)^2(s+1) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ricavo infine la matrice di Smith McMillan:

$$M(s) = \begin{vmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(s-1)}{(s+2)} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Zeri $\Rightarrow$ $s = 1$

Poli $\Rightarrow$ $(s+2)$, $(s-1)$, $(s+1)$

Il grado di Smith-McMillan è $\underline{\underline{4}}$, essendo dato dalla somma dei gradi massimi al denominatore.

Scelgo la rappresentazione in forma minima per cicli: (forma canonica di osservazione)

$$C_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 & \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} (s+2) & 0 & (s-1) \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow s^2+s+2s+2 = \underline{s^2+3s+2}$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \qquad B_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s-1)} & \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} -(s+2) & (s-1) & (s-1) \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow s^2-s+2s-2 = \underline{s^2+s-2}$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \tilde{C} = \begin{vmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

COMPITO 16·01·2017

① Dato il sistema TC:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) Trovare il più piccolo sottospazio che contiene l'evoluzione libera dello stato a partire dagli stati:

$$x_{0,1} = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$$

$$x_{0,2} = (0\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$$

$$x_{0,3} = (0\ 0\ 0\ 1\ 0)^T$$

b) Calcolare polinomio caratteristico e polinomio minimo di A. Calcolare la f.d.T. del sistema.

c) Si indichino i modi propri del sistema e i modi propri presenti nell'uscita per ingresso impulsivo

---

a) $x_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Ax_{0,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A^2x_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cancel{A^3x_{0,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

combinazione lineare dei precedenti.

$S_{x_{0,1}} = \langle x_{0,1}, Ax_{0,1}, A^2x_{0,1} \rangle$ l'evoluzione libera avviene su un piano

$x_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cancel{Ax_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$S_{x_{0,2}} = \langle x_{0,2} \rangle$ l'evoluzione libera è costante

$x_{0,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Ax_{0,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$S_{x_{0,3}} = \langle x_{0,3}, Ax_{0,3} \rangle$ l'evoluzione libera avviene su una retta

b) Procedo con il calcolo del polinomio caratteristico di A:

$$p(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^3 \cdot \left[(-1-\lambda)^2 + 1\right] =$$

$$= (-1-\lambda^3-3\lambda-3\lambda^2)(1+\lambda^2+2\lambda+1) =$$

$$= (-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+2) =$$

$$= -\lambda^5-3\lambda^4-3\lambda^3-\lambda^2-2\lambda^4-6\lambda^3-6\lambda-2\lambda-2\lambda^3$$

$$-6\lambda^2-6\lambda-2 =$$

$$= -\lambda^5-5\lambda^4-11\lambda^3-7\lambda^2-14\lambda-2$$

Gli autovalori della matrice A sono:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \qquad m.a. = 3 \\ \qquad\qquad\quad m.g. = 1 \\ \\ \lambda_2 = -1 \pm j \end{array}\right] \longrightarrow \underline{\text{Modi}} : e^{-t},\ t e^{-t},\ t^2 e^{-t},\ e^{-t}\cos(t),\ e^{-t}\sin(t)$$

Il polinomio minimo è:

$$m(A) = (\lambda+1)^3\,(\lambda+1-j)\,(\lambda+1+j)$$

· Procedo con il calcolo della f.d.t.

$$G(s) = C\,(sI-A)^{-1}B$$

$$(sI-A)^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|cc} s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s+1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s+1 \end{array}\right|^{-1} \Rightarrow A_{11}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^3}\begin{vmatrix} (s+1)^2 & (s+1) & 1 \\ 0 & (s+1)^2 & (s+1) \\ 0 & 0 & (s+1)^2 \end{vmatrix}^T$$

$$A_{22}^{-1} = \frac{1}{s^2+1+2s+1}\begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix}^T$$

$$G(s) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(s+1)^3} & \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\cdot\cdot} & \frac{(s+1)}{\cdot\cdot} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 & \frac{s+1-1}{s^2+2s+2} & \frac{s+2}{s^2+2s+2} \end{bmatrix} \cdot B =$$

$$\longrightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{s^2+2s+2+s^2+s+2s+2}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{2s^2+5s+4}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

Dato che l'ingresso impulsivo è pari a $U(s) = 1$, i modi presenti in uscita per ingresso impulsivo sono:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{2s^2+5s+4}{(s+1)(s^2+2s+2)} \longrightarrow e^{-t},\ e^{-t}\cos(t),\ e^{-t}\sin(t)$$

Questi corrispondono ai modi propri del sistema.

② Dato il sistema non lineare TC:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

a) Trovare gli equilibri e discutere la stabilità.

b) Studiare la stabilità nell'origine con il metodo diretto di Lyapunov.

Studio gli equilibri del sistema:

$$\begin{cases} 0 = -x_1 + x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ 0 = -x_2 + x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$x_1 = 0 \rightarrow 0 = x_2 (x_2^2 - 1) \Rightarrow x_2 = \pm 1$

$x_2 = 0 \rightarrow 0 = x_1 (x_1^2 - 1) \Rightarrow x_1 = \pm 1$

<u>EQUILIBRI</u> $(0,0)$
$(\pm 1, 0)$
$(0, \pm 1)$

Studio la stabilità degli equilibri trovati mediante il metodo indiretto di Lyapunov.

$$A = \begin{vmatrix} -1 + 3x_1^2 + x_2^2 & 2x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & -1 + x_1^2 + 3x_2^2 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow A(0,0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad tr(A) = -2$, $\det(A) = 1$ | L'origine è un equilibrio A.S.

$\rightarrow A|_{(1,0)} = \begin{vmatrix} -1+3 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{vmatrix}$ Non posso concludere sull'equilibrio $(\pm 1, 0)$

$\rightarrow A|_{(0,\pm 1)} = \begin{vmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1+3 \end{vmatrix}$ Non posso concludere sulla stabilità dell'equilibrio $(0, \pm 1)$

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{V}(x) = \cancel{-x_1^2 + x_1^4 + x_1^2x_2^2 - x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^4} \Rightarrow -x_1^2 + x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - x_2^2 + x_2^2(x_1^2 + x_2^2) =$$

$$\cancel{= -x_1^2 - x_2^2 + (x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2) =} \qquad = -x_1^2 - x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) =$$

$$\cancel{= -x_1^2 - x_2^2 +} \qquad = -x_1^2 - x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2)^2$$

Nell'intorno dell'origine la $\dot{V}(x)$ è definita negativa, quindi l'origine è un equilibrio A.S.

③ Dato un sistema A, B, C continuo o discreto, completamente raggiungibile e osservabile, si enunci la proprietà di separazione degli autovalori e se ne dia un'idea di dimostrazione.
Si discutano anche le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema di ordine '2n' ottenuto mediante la retroazione dello stato stimato.

La proprietà di separazione degli autovalori dice che si possono assegnare i poli a ciclo chiuso dell'impianto e dello stimatore in modo indipendente.
Consideriamo un sistema dato da:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

e imponiamo che la retroazione sia dello stato stimato $\hat{x}$ e non dello stato x:

$$u = K\hat{x} + v$$

con $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - C\hat{x})$

Sostituendo otteniamo un sistema di 2n-equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = (A+BK)\hat{x} + Bv + H(y - C\hat{x}) \end{cases}$$

in forma matriciale $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ HC & A+BK-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$

Effettuo un cambio di base, in modo da ottenere le equazioni nelle variabili (x, ε), dove il secondo è l'errore di stima $(\varepsilon = \hat{x} - x)$.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ HC & A+BK-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Per cui il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)x + BK\varepsilon + Bv \\ \dot{\varepsilon} = (A-HC)\varepsilon \end{cases}$$

la seconda è la dinamica dell'errore di stima e chiaramente non cambia per avendo retroazionato lo stato stimato; la prima, invece presenta l'elemento $(BK\varepsilon)$ in più rispetto al caso con $u = Kx$.
Per quanto riguarda l'assegnamento dei poli, il sistema ha comunque i poli di $(A+BK)$, quindi è chiaro che non varia nulla da punto punto di vista, per avendo usato la stima come retroazione.

Per quanto riguarda la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema di ordine 2n ottenuto retroazionando $\hat{x}$, si va a perdere raggiungibilità. La perdita è comunque accettabile, perché l'ingresso non incide sulla dinamica dell'errore.

④ Si consideri il sistema SISO tempo continuo (A, B, C). Trovare, se esiste, la retroazione dello stato che rende il sistema stabile e che minimizza:

$$J = \int_0^\infty u^2(\tau)\, d\tau$$

In particolare la si trovi (se esiste) nei casi:

1] $A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{vmatrix}$ $\quad B_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

2] $A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad B_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

3] $A_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad B_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

Devo per prima cosa verificare se la matrice dinamica è stabile; se così non fosse devo vedere se gli autovalori instabili sono contenuti nel sotto spazio Raggiungibile.

caso 1

$p(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda+3)(\lambda+1) \rightarrow$ stabile $\qquad R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{vmatrix}$

Sistema
- stabile a ciclo aperto
- Raggiungibile → stabilizzabile
- Non è Osservabile ($C = 0 \Rightarrow Q = C^T C = 0$)
- Rilevabile

] Quindi il problema è ben posto e posso trovare soluzioni.

~~Risolvo ARE~~:

~~SA~~

caso 2

$p(\lambda) = -\lambda^3 + 6 + 7\lambda = (\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+1)$ INSTABILE $\qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Il sistema è
- instabile a ciclo aperto
- stabilizzabile (è Raggiungibile)
- non è osservabile ($C = 0 \Rightarrow Q = 0$)
- rilevabile (A^T, B^T)

] Posso trovare soluzioni

caso 3

$p(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-2)$ instabile $\qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Il sistema è
- instabile
- non stabilizzabile

] Non posso trovare soluzioni (problema mal posto).

Nei primi due casi trovo sicuramente una soluzione

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Gli autovalori stabili di H sono quelli che devo imporre ad (A+BU) per risolvere il problema di ottimo.

Autovalori $H = \underline{(\lambda+2)}\,\underline{(\lambda+3)}\,\underline{(\lambda+1)}\,(\lambda-1)\,(\lambda-5/2)^2$

Gli autovalori stabili di H sono quelli di A, quindi non ho bisogno di alcuna situazione $(u=0)$

$$H_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

<u>autovalori</u>: $(\lambda-3)\,\underline{(\lambda+2)}\,\underline{(\lambda+1)}\,(\lambda-1)\,\underline{(\lambda+3)}\,(\lambda-2)$

Gli autovalori da imporre al sistema sono: $(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda+3) = \underline{\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6}$

$$[A+BU] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6+k_1 & 7+k_2 & k_3 \end{bmatrix} \qquad \det(A+BU-\lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6+u_1 & 7+u_2 & u_3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2(u_3-\lambda) + 6 + u_1 + \lambda(7+u_2) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 u_3 + 7\lambda + u_2\lambda + 6 + u_1 \triangleq \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$\begin{cases} -u_3 = 6 \\ -7 - u_2 = 11 \\ -6 - u_1 = 6 \end{cases} ; \qquad \begin{aligned} u_3 &= -6 \\ u_2 &= -18 \\ u_1 &= -12 \end{aligned} \qquad K = \begin{bmatrix} -12 & -18 & -6 \end{bmatrix}$$

COMPITO 03-02-2017

① Dato il sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \max(0, x_1) \cdot \max(0, x_2) \end{cases}$$

0 dove $0 > x_1$
x_1 dove $x_1 > 0$

- Trovare gli equilibri e studiarne la stabilità.
- Disegnare l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -x_1 - x_1 x_2 \end{cases}$$

EQUILIBRI
$(0,0)$
$(x_1, -1)$

$\rightarrow 0 = -\cancel{x_1}(1 + x_2)$

$x_2 = -1$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1-x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \rightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Gli autovalori di A sono a parte reale nulla, quindi non posso concludere sulla stabilità dell'origine

$$\rightarrow A|_{(x_1,-1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -x_1 \end{vmatrix}$$

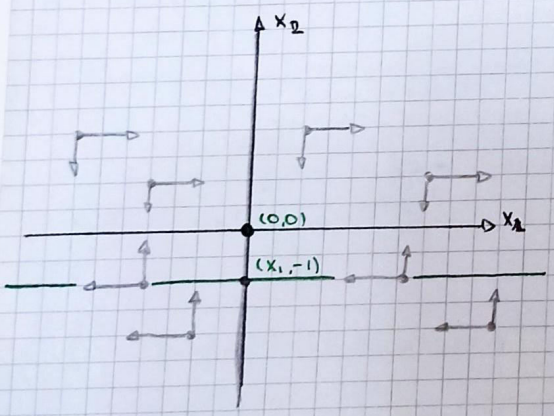
Non posso concludere sulla stabilità

$U(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$\dot{U}(x) = x_1\cancel{x_2} - \cancel{x_1 x_2} - x_1 x_2^2$

Non è definita in segno, quindi non posso concludere.

Per lo spazio delle fasi devo vedere dove le funzioni sono positive e negative.



$\dot{x}_1 > 0 \rightarrow x_2 > 0$
$\dot{x}_1 < 0 \rightarrow x_2 < 0$

$\dot{x}_2 > 0 \rightarrow -x_1(1 + x_2) > 0$ $\quad x_1(1+x_2) < 0$

vero per $\rightarrow x_1 < 0 \mid x_2 < -1$

$\dot{x}_2 < 0 \rightarrow -x_1(1 + x_2) < 0$ $\quad x_1(1+x_2) > 0$

vero per $\rightarrow x_1 > 0 \mid x_2 > -1$

COMPITO 03·02·2017

① Dato il sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \max(0, x_1) \cdot \max(0, x_2) \end{cases}$$

0 dove $0 > x_1$ | x_1 dove $x_1 > 0$ |

- Trovare gli equilibri e studiarne la stabilità.
- Disegnare l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -x_1 - x_1 x_2 \end{cases}$$

$\rightarrow 0 = -\cancel{x_1}(1 + x_2)$

$x_2 = -1$

EQUILIBRI
$(0,0)$
$(x_1, -1)$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1-x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \rightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Gli autovalori di A sono a parte reale nulla, quindi non posso concludere sulla stabilità dell'origine

$$\rightarrow A|_{(x_1,-1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -x_1 \end{vmatrix}$$

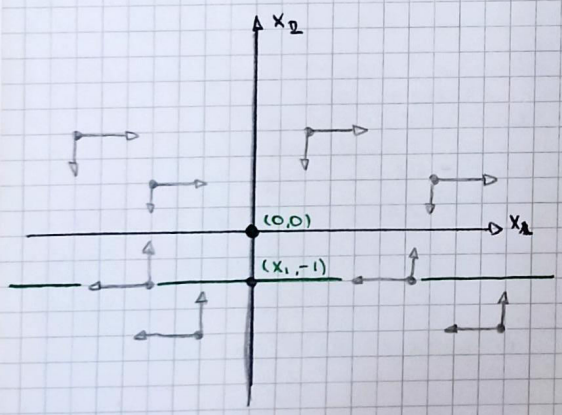
Non posso concludere sulla stabilità

$U(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$\dot{U}(x) = \cancel{x_1 x_2} - \cancel{x_1 x_2} - x_1 x_2^2$

Non è definita in segno, quindi non posso concludere.

Per lo spazio delle fasi devo vedere dove le funzioni sono positive e negative.



$\dot{x}_1 > 0 \rightarrow x_2 > 0$
$\dot{x}_1 < 0 \rightarrow x_2 < 0$

$\dot{x}_2 > 0 \rightarrow -x_1(1 + x_2) > 0$ $\quad x_1(1+x_2) < 0$

uno per $\rightarrow$ $x_1 < 0$ | $x_2 < -1$

$\dot{x}_2 < 0 \rightarrow -x_1(1 + x_2) < 0$ $\quad x_1(1+x_2) > 0$

uno per $\rightarrow$ $x_1 > 0$ | $x_2 > -1$

② Data ~~[illegible]~~ l'uscita di un sistema lineare:

$$y(t) = -e^{-2t} + e^{-2t}\sin t + 2 + t$$

- Trovare una forma di stato di dimensione minima e in forma di Jordan compatibile con questa uscita.
- Data la forma di stato trovata precedentemente, trovare lo stato iniziale che, per ingresso nullo, dà l'uscita desiderata.

Dall'uscita si vedono i modi nel sistema con le rispettive molteplicità. In particolare gli autovalori sono:

$\lambda_1 = -2 \quad m.g = 1$

$\lambda_2 = -2 \pm j$

$\lambda_3 = 0 \quad m.g. = 2$

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A \rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\cos & e^{-t}\sin & 0 & 0 \\ 0 & -\sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma Minima → Completamente Raggiungibile o Osservabile, quindi B e C devono essere tali per cui il sistema lo sia.

$$B = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T \qquad C = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

ingresso nullo → risposta libera:

$$y(t) = C e^{At} x_0 = [e^{-2t} \quad e^{-2t}\cos t \quad e^{-2t}\sin t \quad 1 \quad t] \cdot x_0$$

$$x_0 = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1]^T$$

③ Si consideri il sistema Tempo Discreto:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

al variare di α e β:

- studiare la stabilizzabilità mediante retroazione dello stato
- studiare la possibilità di realizzare un controllore dead-beat e dove possibile lo si progetti. (tutti gli autovalori sono $=0$)

Un sistema (A, B) è stabilizzabile mediante retroazione dello stato $(u = Kx)$ se esiste una matrice K t.c. $(A+BK)$ è stabile.
Sono due i possibili casi:

A stabile → $(A+BK)$ stabile

A instabile → $(A+BK)$ è stabile solo se gli autovalori instabili $\in \mathbb{R}$.

Nel nostro caso, gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = \beta$

$\lambda_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} \quad tr(A_1) = \alpha, \quad det(A_1) = -\alpha$

Per $\beta < 0$ e $\alpha < 0$ la matrice A è stabile e il sistema è sicuramente stabilizzabile

Per $\beta \geq 0$ il sistema non è stabilizzabile perché l'autovalore a parte reale >0 non entra nello spazio di raggiungibilità.

Per $\alpha > 0$ ho due autovalori instabili. Il sistema è comunque stabilizzabile per $\alpha > 0$ ma $\neq 1$.
Infatti in questo caso ($\alpha \neq 1$) gli autovalori instabili rientrano nel sottospazio raggiungibile, quindi il sistema è stabilizzabile mediante retroazione.

$\beta < 0$, $\alpha < 0$ $\rightarrow$ STABILIZZABILE $\leftarrow$ $\beta < 0$, $\alpha > 0$ ma $\alpha \neq 1$

$\beta > 0$, $\forall \alpha$ | NON STABILIZZABILE

$\beta = 0 \rightarrow$ STABILIZZABILE
$\alpha = 0 \rightarrow$ NON STABILIZZABILE

• Il controllore dead-beat è caratterizzato dall'avere tutti gli autovalori nulli. Posso già porre $\underline{\beta = 0}$, così ho già un autovalore nullo e il sistema è comunque stabilizzabile.

$$\beta = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} x_k + \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{vmatrix} u_k$$

$$(A+BK) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ (\alpha+1)k_1 + \alpha & \alpha + (\alpha+1)k_2 & 1 + k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(A+BK-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ (\alpha+1)k_1 + \alpha & (\alpha+1)k_2 + \alpha - \lambda & 1 + k_3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2((\alpha+1)k_2 + \alpha - \lambda) + \lambda((\alpha+1)k_1 + \alpha) =$$
$$= \underline{\lambda^2(\alpha+1)k_2 + \lambda^2\alpha} - \lambda^3 + \lambda(\alpha+1)k_1 + \lambda\alpha \;;$$

$$\lambda^3 - \lambda^2((\alpha+1)k_2 + \alpha) - \lambda(\alpha + (\alpha+1)k_1) \overset{\Delta}{=} \lambda^3$$

$$(\alpha+1)k_2 + \alpha = 0 \longrightarrow k_2 = \frac{\alpha}{\alpha+1} = k_1 \qquad k_3 = 0$$
$$(\alpha+1)k_1 + \alpha = 0$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+1} & \frac{\alpha}{\alpha+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Il dead-beat controller ampere esiste ma per $\underline{\alpha \neq -1}$.

④ Data la matrice Hamiltoniana H si dimostri che:

- se $\lambda \in eig(H)$ allora anche $-\lambda \in eig(H)$
- nel caso di controllo ottimo a orizzonte infinito si può calcolare la soluzione della ARE a partire dagli autovalori di H.

La matrice Hamiltoniana presenta un polinomio caratteristico pari, il che significa che se (λ) è un suo polo, allora lo è anche $(-\lambda)$.

Considero una matrice così strutturata:

$$\begin{bmatrix} A & W \\ X & -A^T \end{bmatrix}$$

con X e W simmetriche (la struttura è la stessa della matrice Hamiltoniana).

Vado dunque a studiare il polinomio caratteristico di questa matrice:

$$\det([\,..\,]) = \det(A-\lambda I)\det\left[(-A^T-\lambda I) - X(A-\lambda I)^{-1}W\right]$$

$\downarrow$ TRASPONGO

$$\underline{(-1)^n}\det(A^T-\lambda I)\cdot\det\left[(-A-\lambda I) - X^T(A^T-\lambda I)^{-1}W^T\right]\ \underline{(-1)^n} =$$

$$= \det(-A^T+\lambda I)\cdot\det\left[(A+\lambda I) - X(-A^T+\lambda I)^{-1}W\right]$$

$$\hookrightarrow \det\begin{bmatrix} A+\lambda I & W \\ X & -A^T+\lambda I \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A-\lambda I & W \\ X & -A^T-\lambda I \end{bmatrix}$$

Quindi se (λ) è soluzione del polinomio caratteristico lo sarà anche $(-\lambda)$.

- Quando la matrice Hamiltoniana, posso effettuare un cambio di base a partire dalla matrice:

$$T = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ S_\infty & I_{n\times n} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{H} = T^{-1}HT = \begin{bmatrix} A+BK & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -A^T-K^TB \end{bmatrix}$$

Quindi gli autovalori di $\tilde{H}$ (e dunque di H essendo simili) sono quelli di $(A+BK)$ e i loro opposti.
Ovvero, gli autovalori di H a parte quelli negativi sono quelli che deve avere il sistema retroazionato $(A+BK)$ affinché il sistema sia stabile e sia minimo il funzionale di costo a orizzonte infinito.

COMPITO 22.02.2017

1) Dato il sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a x_2 \end{cases}$$

- Trovare gli equilibri per $u=0$ al variare di $a \geq 0$ e se ne studi la stabilità locale.
- Per $u=0$ e $a=0$ trovare una candidata di Lyapunov che ne determini la stabilità.
- Per $a=1$ trovare un ingresso limitato degli stati che tende l'origine GAS.

$$\begin{cases} 0 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 \\ 0 = x_1 - a x_2 \end{cases}$$

EQUILIBRI

$(0,0) \quad \forall a$

$\left(\pm a \sqrt{\frac{3a+1}{a^3}} ; \pm \sqrt{\frac{3a+1}{a^3}} \right)$ per $a>0$

$$\begin{cases} x_1 = a x_2 \\ 0 = -3a x_2 + a^3 x_2^3 - x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = a x_2 \\ x_2 (-3a - 1 + a^3 x_2^2) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{matrix} x_1 = a x_2 \\ x_2 = \sqrt{\frac{3a+1}{a^3}} \end{matrix} \quad \left(\pm a \sqrt{\frac{3a+1}{a^3}} ; \pm \sqrt{\frac{3a+1}{a^3}} \right)$$

$$A = \begin{vmatrix} -3+3x_1^2 & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}$$

CASO 1 $\quad A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}$ $\quad tr(A) = -3-a < 0 \rightarrow a > -3$, $\quad \det = 3a+1 > 0 \rightarrow 3a > -1$ $\rightarrow \boxed{\begin{cases} a > -3 \\ a > -1/3 \end{cases}}$

Per $a > -3$ l'equilibrio $(0,0)$ è A.S. Altrimenti è instabile

CASO 2 $\quad A|_{(..)} = \begin{vmatrix} -3+3a^2\frac{(3a+1)}{a^3} & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} \Rightarrow tr(A) = -3 + \frac{9a+3}{a} < 0 \rightarrow a < -1/2$

$\det = 3a - 9a + 3 + 1 > 0$;

$-6a > -4 \rightarrow a > -2/3$

Per nessun valore di 'a' il secondo equilibrio è A.S.

- Impongo $u=0$ e $a=0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$\dot{V}(x) = -3x_1^2 + x_1^4 - \cancel{x_1 x_2} + \cancel{x_1 x_2}$

nei punti dell'origine il sistema è A.S. Con la Sallo-Krasovski si verifica la stabilità asintotica.

$R: \{ x \in \mathbb{R} \mid \dot{V}(x) = 0 \} \rightarrow R = \{ (0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

- Impongo $a=1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$U(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$4U(x) = -3x_1^2 + x_1^4 - \cancel{x_1 x_2} + u x_1 + \cancel{x_1 x_2} - x_2^2$$

Scelgo $\underline{u = -x_1^3}$

In questo modo ottengo:

$$4U(x) = -3x_1^2 - x_2^2$$ Quindi l'origine diventa A.S.

② Dato il sistema SISO caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

- Trovare la matrice di Jordan associata ad A e commentare sul Raggiungibilità dei sistemi SISO tramite questa.
- Trovare le c.i. per le quali l'evoluzione libera evolve su una retta.
- Date le matrici:

$$B = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T \qquad C = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

trovare la matrice del cambio base (T) per portare il sistema in forma di Kalman.
- Trovare la f.d.t. del sistema.

- Gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = -1$ m.a. = 4, m.g. = 3 $\longrightarrow (A+I) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \ker(A+I) = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$

$\lambda_2 = 1$ m.a. = 1, m.g. = 1 $\longrightarrow (A-I)$

Posso costruire la matrice di Jordan associata ad A:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Dalla molteplicità ottenuta nello studio degli autovalori è infatti emerso che in J sono presenti:

1 blocco per $\lambda = 1$
3 blocchi per $\lambda = -1$

Per questo riguarda lo studio di Raggiungibilità e Osservabilità, nei sistemi SISO si può facilmente concludere che vengono entrambe a mancare in presenza di un autovalore con m.g. > 1. Infatti, in questo caso servirebbe una matrice B e una C con più righe/colonne per far tornare di rango la matrice

$$[A - \lambda I \ \vdots \ B] \qquad \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \hline C \end{bmatrix}$$ come PBH

- L'evoluzione libera è su una retta quando le c.i. sono i vettori $\in \ker(A - \lambda I)$.

In questo caso:

$$\left\langle \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}}_{\ker(A+I)}; \underbrace{\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}}_{\ker(A-I)} \right\rangle \qquad \underline{\mathcal{S}_{x_0} = \langle x_0 \rangle}$$

• Per trovare la matrice del cambio base bisogna studiare R e O; in particolare servono lo spazio raggiungibile e quello non-osservabile.

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \rho(R) = 2 \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \rho(O) = 2 \rightarrow \dim \bar{O} = 3 \qquad \mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$$T_{R\bar{O}} \Rightarrow \mathrm{Ker}(T_{R\bar{O}}) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right] W_1 \; \left] W_2 \right.$$

$$T_{R\bar{O}} = T_R(w_1) = T_{\bar{O}}(-w_2) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$T_{RO} = |\, 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \,|^T$ le scelgo a completamento di T_R.

$T_{\bar{R}\bar{O}} = |\, 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; -1 \,|^T ; |\, 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \,|^T \rangle$ li scelgo a completamento di $T_{\bar{O}}$.

$T_{\bar{R}O} = |\, 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \,|^T$ le scelgo a completamento di T, per rendere invertibile

$$T = \left| \begin{array}{c|c|c|c} T_{RO} & T_{R\bar{O}} & T_{\bar{R}O} & T_{\bar{R}\bar{O}} \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

• Per trovare la f.d.t. del sistema conviene portarlo in forma di Kalman (usando la T), in modo da usare solo il sottospazio completamente osservabile e raggiungibile.

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \boxed{A_{12}^{-1} = -A_{11}^{-1}(A_{12} \cdot A_{22}^{-1})}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$\tilde{B} = T^{-1} B = [\, \underset{B_{RO}}{1} \,|\, 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \,]^T$ $\qquad$ T_{RO} ha dim 1

$\tilde{C} = C T = [\, \underset{C_{RO}}{1} \,|\, 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \,]$

$$G(s) = C_{RO}(sI - A_{RO})^{-1} \cdot B_{RO} = 1 \cdot \left(\frac{1}{s+1} \right) \cdot 1 \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{(s+1)}}$$

③ Si consideri il sistema TD:

$$x_{k+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} x_k + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x_k$$

con condizioni iniziali $x_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix}$

- Determinare il numero minimo di passi necessari a portare l'uscita del sistema da 0 a 1.
- Trovare una sequenza di ingresso (u_k) che porta l'uscita y_k da 0 a 1 nel minimo numero di passi e la tenga a 1 indefinitamente.
- Determinare una legge di retroazione $u_k = Kx_k + 1$ che faccia lo stesso del punto precedente.

- Per determinare il numero minimo di passi studio la raggiungibilità:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix}$$

Il sistema è completamente raggiungibile in due passi.

- Per far arrivare l'uscita a 1 devo portare lo stato x_2 al valore 1. Per quanto detto prima, questo è possibile farlo in due passi.

$x_1 = Ax_0 + Bu_0$
$x_2 = Ax_1 + Bu_1$

$$\underset{(n=0)}{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_k \Rightarrow \underline{u_{(0)} = 1} \qquad x_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{(n=1)}{x_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_{(1)} \rightarrow \underline{u_{(1)} = (1-\beta)} \qquad x_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{(n=1)}{x_i} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_i \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha+\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_i \Rightarrow \underline{u_i = (1-\alpha-\beta)} \qquad x_i = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Con questa sequenza d'ingressi trovata, l'uscita va da 0 a 1 in due passi e vi resta indefinitamente.

- $\underline{u_k = Kx_k + 1}$ con $x_{DES} = [1 \quad 1]$

$$[A+BK] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{vmatrix} \rightarrow [A+BK] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha+K_1 & \beta+K_2 \end{vmatrix}$$

$$x_{k+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha+K_1 & \beta+K_2 \end{vmatrix} x_k \Rightarrow \begin{vmatrix} x_2 \\ (\alpha+K_1)x_1 + (\beta+K_2)x_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} (\alpha+K_1) = 0 \\ (\beta+K_2) = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} K_1 = -\alpha \\ K_2 = -\beta \end{matrix}$$

$$\boxed{u_k = (-\alpha-\beta)x_k + 1}$$

$$[A+BK] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

A.S. nel caso tempo discreto!

④ Dato il sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ricavare l'ingresso che, dati $\left/ \begin{array}{l} x^* \neq 0 \\ t_f \text{ FISSO} \end{array} \right|$ minimizzi il funzionale:

$$J = \frac{1}{2}(x(t_f) - x^*)^T S (x(t_f) - x^*) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [(x(t) - x^*)^T Q (x(t) - x^*) + u^T R u]\, dt$$

Il caso proposto è il Problema <u>Lineare Quadratico Vincolato</u>. Infatti vogliamo portare $x(t)$ nel tempo t_f il più vicino possibile a uno stato x^* costante, ma diverso da zero.
Conviene definire una nuova variabile:

$$\xi_1 = x(t_f) - x^* \rightarrow \dot{\xi}_1(t) = \dot{x}(t) = Ax + Bu \qquad (\underline{x = \xi_1 + x^*})$$

Vado dunque a riscrivere la dinamica del sistema in ξ_1.

$$\dot{\xi}_1(t) = A\xi_1 + Ax^* + Bu \quad \Big| \text{ VINCOLO}$$

$$J = \frac{1}{2}\xi_1^T S \xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^t [\xi_1^T Q \xi_1 + u^T R u]\, dt \quad \Big| \text{ FUNZIONALE}$$

Scrivo quindi per scrivere l'Hamiltoniana:

$$H = g + \lambda^T f = \frac{1}{2}\xi_1^T Q \xi_1 + \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T (A\xi_1 + Bu + Ax^*)$$

Da qui ricavo le equazioni di Eulero Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \dfrac{dH}{d\lambda} = A\xi_1^* + Bu^* + Ax^* \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{dH}{d\xi_1} = -Q\xi_1^* - A^T\lambda^* \\ 0 = \dfrac{dH}{du} = Ru^* + B^T\lambda^* \rightarrow \boxed{u^* = -R^{-1}B^T\lambda^*} \end{cases}$$

Conosco dunque la struttura che il mio ingresso deve avere; devo solo andare a calcolare $\underline{\lambda(t)}$.

Sono nel caso 2 perché ho $\left/ \begin{array}{l} t_f \text{ FISSO} \\ x_f \text{ LIBERO} \end{array} \right|$ quindi devo imporre una condizione al contorno:

$$\lambda(t_f) = S_f \xi_1(t_f) = S_f x(t_f) - S_f x^*$$

Quindi non posso risolvere il problema "normalmente", dato che λ non dipende solo da $x(t_f)$.
La relazione tra λ e x è del tipo:

$$\underline{\lambda(t) = S(t)x(t) + g(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(t) = S(t)\xi_1(t) + g(t)$$

Riscrivo in base a questa le equazioni di Eulero Lagrange:

$$\dot{\lambda} = -Q\xi_1 - A^T\lambda = -Q\xi_1 - A^T(S(t)\xi_1(t) + g(t)) \triangleq \frac{d}{dt}[S(t)\xi_1(t) + g(t)] =$$

$$= \dot{S}(t)\xi_1(t) + S(t)\dot{\xi}_1(t) + \dot{g}(t) \;;$$

$$-Q\xi_1 - A^T S \xi_1 - A^T g(\tau) = \dot{S}\xi_1 + S\underbrace{\dot{\xi}_1}_{A\xi_1 + B(-R^{-1}B^T\lambda) + Ax^*} + \dot{g}(\tau) \quad ;$$

$$-Q\xi_1 - A^T S \xi_1 - A^T g = \dot{S}\xi_1 + SA\xi_1 - SBR^{-1}B^T[S\xi_1 + g] + SAx^* + \dot{g}(\tau) \quad ;$$

$$[\dot{S} + S(\tau)A + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T S]\xi_1(\tau) + [\dot{g} + A^T g - SBR^{-1}B^T g + SAx^*] = 0$$

Questo deve valere $\forall \xi_1(\tau)$ e $\forall x^*$.
La prima parentesi raccomanda la DRE (Differential Riccati Equation); la seconda è un'equazione differenziale in g.

Applicando le condizioni al contorno si trova:

$$\lambda(\tau_f) = S_f\, \xi_1(\tau_f)\Big|_{S(\tau_f)=S_f} = S_f\, \xi_1(\tau_f) + g(\tau_f) \longrightarrow \underline{g(\tau_f) = 0}$$

Nota $g(\tau_f)$, si integra a ritroso e si ottiene il valore di $g(\tau)$. A quel punto si calcola λ e si sostituisce nell'espressione dell'ingresso.

$$x_f = \varphi_{11}(\tau_f,\tau)x(\tau) + \varphi_{12}(\tau_f,\tau)\lambda(\tau)$$

$$\lambda(\tau) = \underbrace{-\varphi_{12}^{-1}(\tau_f,\tau)\,\varphi_{11}(\tau_f,\tau)\,x(\tau)}_{Sx} + \underbrace{\varphi_{12}(\tau_f,\tau)^{-1}\,x_f}_{g}$$

$$\underline{u^* = -R^{-1}B^T\lambda(\tau)}$$

COMPITO 26.06.2017

① Dato il sistema lineare tempo invariante e TC caratterizzato dalla matrice dinamica:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

- Determinare le c.i. da cui l'evoluzione libera evolve in un sottospazio di dimensione 1 e quelli per cui è di dimensione 2.
- Come sono caratterizzate le matrici d'ingresso B per cui l'evoluzione forzata può evolvere in uno spazio di massimo dim 2?

- Per trovare le c.i. richieste dobbiamo trovare gli autovettori associati ad $(A-\lambda I)$. In questo caso gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = 1 \longrightarrow (A-I) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$

$\lambda = -1 \pm 2j$

$(A-I)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$ $\left[\frac{1}{2+2j} \quad \frac{-1+j}{2+2j} \quad 0 \quad 0 \right]$

$\longrightarrow (A+1+2j) = \begin{vmatrix} 2+2j & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2+2j & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2j & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2j \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 1 \end{vmatrix}$ $q_r = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $q_i = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\cancel{(A+1+2j)^2 = \begin{vmatrix} 8j & 0 & 2+4j & -2 \\ -2+4j & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}}$

L'evoluzione libera evolve in uno spazio di dimensione 1 per:

$x_{01} = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$ L'autovalore complesso non lo considero perché mi fa evolvere in uno spazio di dimensione 2.

Dimensione 2

$x_{01} = \left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$ $x_{02} = \langle$

- La dimensione dell'evoluzione forzata altro non è che quella dello spazio di raggiungibilità.
Per avere uno spazio di dim 2 posso avere sia gli autovalori complessi sia gli altri, basta che dim R = 2.

$B = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Autovettori gen. ordine 2 oppure i complessi (una solo la parte reale)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ oppure $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

② Descrivere la tecnica di decomposizione di Kalman e del calcolo delle matrici di cambio base associata. Riportare l'esempio di un sistema in forma di Kalman con 4 stati in cui non ci sono poli in $\bar{R}\bar{O}$.

La decomposizione di Kalman prevede di costruire una matrice T di cambio base partendo a partire dagli spazi di raggiungibilità e di inosservabilità.
Tale matrice è così strutturata:

$$T = \left[T_{RO} \,\vdots\, T_{R\bar{O}} \,\vdots\, T_{\bar{R}O} \,\vdots\, T_{\bar{R}\bar{O}} \right]$$

Nella sua costruzione si parte sempre da $T_{R\bar{O}}$. In particolare, si mettono sulle stesse matrici i vettori dell'immagine di R e del nullo di O (ovvero dell'immagine di $\bar{O}$) e si studia il nullo di questa matrice.
I vettori del nullo vengono poi scritti in due vettori a seconda della dimensione dell'im di R e la relazione è:

$$T_{R\bar{O}} = T_R \cdot (w_1) = T_{\bar{O}} (-w_2)$$

Si procede costruendo T_{RO} con le basi mancanti per formare T_R e in modo analogo si costruisce $T_{\bar{R}\bar{O}}$. Infine $T_{\bar{R}O}$ serve a completare la matrice T e a renderla invertibile.

Una volta costruita T si procede con il cambio base:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1} A T \\ \tilde{B} &= T^{-1} B \\ \tilde{C} &= C T \end{aligned}\right\}$$

Il sistema così ottenuto avrà 4 'sezioni' di dimensioni pari al numero di vettori base trovati per quella data T.

$\dim T_{RO} = 3$

$$\rightarrow \tilde{A} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \tilde{B} = \left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right| \quad \tilde{C} = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|$$

A_{RO} $A_{\bar{R}O}$

③ Dato il sistema TC caratterizzato dalle matrici:

$$A = \left|\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right| \quad B = \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right| \quad C = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \end{matrix}\right|$$

- Determinare se il sistema è completamente raggiungibile e se possibile stabilizzabile usando un solo ingresso.
- Determinare una matrice di retroazione K in modo che l'evoluzione libera sia esponenzialmente convergente $\forall$ c.i. e la velocità di convergenza sia al più 2 (e^{-2t})
- Cosa si può concludere in termini di velocità di convergenza dell'uscita del sistema retroazionato con la K trovata prima?

- Il sistema è completamente raggiungibile usando l'ingresso b_2:

$$R_2 = \left|\begin{matrix} 0 & 0 & -8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{matrix}\right| \qquad \rho(R_2) = 3$$

Invece, usando l'ingresso b_1 il sistema non è completamente raggiungibile:

$$R_1 = \left|\begin{matrix} 1 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}\right| \qquad \rho(R_1) = 2$$

Per quanto riguarda la stabilizzabilità, tutti gli autovalori di A sono a parte reali > 0, quindi solo con ingresso b_2 il sistema risulta essere stabil.

• $(A+b_2K) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -K_1 & 2-K_2 & -K_3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Ne calcolo ~~gli autovalori~~ il polinomio caratteristico e lo impongo pari a quello desiderato.

$$(A+b_2K-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ -K_1 & 2-K_2-\lambda & -K_3 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$P_d = (\lambda+3)^3 = \lambda^3+27+9\lambda^2+27\lambda$$

$$(1-2\lambda+\lambda^2)(2-K_2-\lambda) - 8K_1 + 2K_3(1-\lambda) =$$

$$= 2-K_2 \underline{-\lambda-4\lambda} \underline{+2K_2\lambda} \underline{+2\lambda^2+2\lambda^2-K_2\lambda^2} - \lambda^3 - 8K_1 + 2K_3 \underline{-\lambda 2K_3} =$$

$$= +\lambda^3 + \lambda^2(K_2-4) + \lambda(2K_3+5-2K_2) + (K_2-2+8K_1-2K_3) \triangleq (\lambda^3+9\lambda^2+27\lambda+27)$$

$$\begin{cases} K_2-4 = 9 \\ 2K_3+5-2K_2 = 27 \\ K_2-2+8K_1-2K_3 = 27 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} K_2 = 13 \\ 2K_3 = 27-5+26 \Rightarrow K_3 = 20 \\ 8K_1 = 27+2-13+48 \Rightarrow K_1 = 7 \end{array} \qquad K = \begin{vmatrix} 7 \\ 13 \\ 20 \end{vmatrix}$$

• Per quanto riguarda la velocità di convergenza dell'uscita, poiché la uscita dell'uscita è data da:

$$y(T) = Ce^{AT}x_0 + C\int_{T_0}^{T_f} e^{A(T_f-T)} B\, u(T)\, dT$$

anche l'uscita convergerà a zero alla medesima velocità imposta.

④ Dato il sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Impostare il problema di controllo ottimo per portare il sistema nell'origine in tempo finito. Si enuncino le ipotesi di esistenza della soluzione del problema e si ricavi la matrice K di retroazione che lo risolve nel caso in cui le ipotesi siano verificate

---

Si tratta del controllo a zero. Siamo nel caso 1, perché $\begin{cases} x(T_f) = 0 & \text{FISSATO} \\ T_f & \text{FISSATO} \end{cases}$

Il funzionale è nella forma:

$$J = \frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_f} [x^TQx + u^TRu]\, dT$$

Determino l'Hamiltoniana e, da questa, le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$H = \frac{1}{2}x^TQx + \frac{1}{2}u^TRu + \lambda^T(Ax+Bu)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dH}{d\lambda} = Ax + Bu \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{dH}{dx} = -Qx - A^T\lambda \\ 0 = \dfrac{dH}{du} = Ru + B^T\lambda \end{cases}$$

Scrivo in forma matriciale le prime due equazioni.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(T_0) \\ \lambda(T_0) \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{integro}} \begin{vmatrix} x(T) \\ \lambda(T) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Psi_{11}(T,T_0) & \Psi_{12}(T,T_0) \\ \Psi_{21}(T,T_0) & \Psi_{22}(T,T_0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(T_0) \\ \lambda(T_0) \end{vmatrix}$$

Dalla seconda equazione ho:

$$\underline{0 = x(T_f)} = \Psi_{11}\, x(T_0) + \Psi_{12}\, \lambda(T_0) \rightarrow \lambda(T) = -\Psi_{12}^{-1}(T_f,T) \cdot \Psi_{11}(T_f,T)\, x(T) = S(T)\, x(T)$$

Per cui il controllo è dato da:

$$u(T) = -R^{-1}B^T \lambda(T) = \underbrace{-R^{-1}B^T S(T)}_{K}\, x(T)$$

La matrice di retroazione che risolve il problema è pari a:

$$\boxed{K = -R^{-1}B^T S(T)}$$

Chiaramente le condizioni di esistenza sono che
- $R > 0$ definita positiva
- $Q \geq 0$ semidefinita positiva

COMPITO 12.06.2017

① Dato il sistema non lineare, tempo invariante e TD:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2} x_1(k) + x_1(k) x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2} x_2(k) + \varepsilon x_2^2(k) \end{cases}$$

- Trovare gli equilibri al variare di $\varepsilon \in \mathbb{R}$.
- Per ogni equilibrio si discuta la stabilità del sistema con il metodo indiretto.
- Si enunci il Teorema Diretto per sistemi discreti.

- $$\begin{cases} x_1(k) = \frac{1}{2} x_1(k) + x_1(k) x_2(k) \\ x_2(k) = -\frac{1}{2} x_2(k) + \varepsilon x_2^2(k) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \left[\frac{1}{2} + x_2(k) - 1\right] x_1(k) = 0 \\ \left[-1 - \frac{1}{2} + \varepsilon x_2(k)\right] x_2(k) = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \left[-\frac{1}{2} + 1\right) = x_2(k) \\ x_2(k) = \frac{3}{2\varepsilon} \end{cases}$$

EQUILIBRI

$(0,0) \quad \forall \varepsilon$

$\left(x_1, \frac{3}{2\varepsilon}\right) \quad \varepsilon \neq 0$

Perché:

1ª $0 = -x_1(k) + \frac{1}{2} x_1(k) + x_1(k) x_2(k)$;

$0 = -\frac{1}{2} x_1\cancel{(k)} + x_1\cancel{(k)} x_2(k) \rightarrow \forall x_1 \; ; \; x_2 = \frac{1}{2}$

Uguaglio il valore di x_2 nella seconda:

$0 = -x_2(k) - \frac{1}{2} x_1(k) + \varepsilon x_2^2(k)$;

$0 = x_2\cancel{(k)} \left[-\frac{3}{2} + \varepsilon x_2(k)\right] \rightarrow x_2(k) = \frac{3}{2\varepsilon}$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} + x_2(k) & x_1(k) \\ 0 & -\frac{1}{2} + 2\varepsilon x_2 \end{vmatrix}$$

CASO 1 $(0,0)$

$$A\big|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} tr(A) = 0 \\ det(A) = -\frac{1}{4} \end{matrix}$$

L'origine è un equilibrio instabile

CASO 2 $\left(x_1, \frac{3}{2\varepsilon}\right)$

$$A\big|_{\left(x_1, \frac{3}{2\varepsilon}\right)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2\varepsilon} & x_1 \\ 0 & -\frac{1}{2} + 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} tr(A) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{5}{2} = 3 + \frac{3}{2\varepsilon} < 0 \\ det(A) = \frac{5}{4} + \frac{15}{4\varepsilon} > 0 \end{matrix}$$

$tr(A) < 0 \rightarrow 6\varepsilon + 3 < 0 \rightarrow \varepsilon < -1/2$

$det(A) > 0 \rightarrow 5\varepsilon + 15 > 0 \rightarrow \varepsilon > -3 \rightarrow \varepsilon < 3$

Per $\varepsilon < -1/2$ l'equilibrio è A.S.

- Determinare una funzione $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positiva definita e tale che:
  $V(0)=0$
  $\exists\, r \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall x \in B_r / 0 \quad V(x)>0$

Si consideri l'equilibrio nell'origine del sistema. Si definisce:

$$\Delta_f V = V(f(x(n))) - V(x(n)) \qquad \text{con } f(x(n)) = x(n+1)$$

Se questa $\Delta_f V$ è definita negativa in un intorno dell'origine, allora l'origine è un equilibrio A.S.

② Dato il sistema T.C.:

$$A = \left|\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right| \qquad B = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right| \qquad C = |0\ 0\ 0\ 1|$$

- si determinino i modi propri del sistema;
- si discuta la stabilità interna e la BIBO stabilità.

- Gli autovalori della matrice A sono:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 0 \\ \downarrow \\ m.a. = 2 \\ m.g. = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \to \ m.a. = 2 \\ \quad\ m.g. = 1 \end{array} \qquad \to (A+2I) = \left|\begin{array}{cccc} 5/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

I modi del sistema sono dunque:

<u>Modi</u>: $1,\ t,\ e^{-2t},\ t e^{-2t}$

- Il sistema non è internamente stabile, perché gli autovalori nulli hanno $m.a. \neq m.g.$
  Per lo studio della BIBO stabilità bisogna calcolare la ~~[illegible]~~ funzione di trasferimento del sistema.

$$G(s) = C\,(sI-A)^{-1} \cdot B = \qquad \text{con } (sI-A)^{-1} = \left|\begin{array}{cc|cc} s-1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & s+1/2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s+2 \end{array}\right|^{-1} =$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline \underline{0} & \begin{array}{cc} \frac{1}{(s+1)} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+2)} \end{array} \end{array}\right|$$

$$= \left|\ 0 \quad 0 \quad \frac{1}{(s+2)^2} \quad \frac{1}{(s+2)}\ \right| \cdot B =$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

Il sistema è BIBO stabile, perché presenta due poli in (-2). Ne segue che i due autovalori nulli non sono Raggiungibili e Osservabili.

③ Dato il sistema TC:

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} u$$

$$y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} x$$

determinare se:

- il sistema è stabilizzabile mediante retroazione di un solo ingresso.
- una matrice K di retroazione in modo che, $\forall$ stato iniziale, l'evoluzione libera tenda a zero più velocemente di e^{-t}.
- una matrice K' di retroazione dello stato in modo che, con ingresso nullo e per ogni stato iniziale, l'uscita tenda a zero con e^{-2t}.

- Il sistema (A, B) è stabilizzabile o se A ha solo autovalori stabili o se gli autovalori instabili fanno parte del sottospazio raggiungibile.
In questo caso gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = -1 \qquad \underline{\lambda_2 = 2} \qquad \underline{\lambda_3 = 3}$

Quindi presenta due autovalori a parte reale positiva.
Studiamo la dimensione del sottospazio raggiungibile relativo a ciascun ingresso.

$$b_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \longrightarrow R_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 15 \end{vmatrix} \qquad \rho(R_1) = 3$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \longrightarrow R_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \qquad \rho(R_2) = 1$$

Il sistema è stabilizzabile per b_2.

- Considero il solo sistema stabilizzabile. Cerco una matrice di retroazione che faccia quanto richiesto.

$$[A+BK] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 8 \\ k_1 & 2+k_2 & k_3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Studio il polinomio caratteristico di (A+BK) e lo impongo pari al polinomio desiderato $[(\lambda+2)^3 = \lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8]$

$$[(A+BK)-\lambda I] = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 8 \\ k_1 & 2+k_2-\lambda & k_3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2+k_2-\lambda)(3-\lambda) + 24k_1 - 3k_3(-1-\lambda) =$$

$$\Rightarrow -2-k_2+\underbrace{\lambda-2\lambda}_{-\lambda}-k_2\lambda+\lambda^2)(3-\lambda)+24k_1+3k_3+3k_3\lambda =$$

$$= -6-3k_2-3\lambda-3k_2\lambda+3\lambda^2+2\lambda+k_2\lambda+\lambda^2+k_2\lambda^2-\lambda^3+24k_1+3k_3+3k_3\lambda;$$

$$-\lambda^3+\lambda^2(3+1+k_2)+\lambda(-3-3k_2+2+k_2+3k_3)+(-6-3k_2+24k_1+3k_3) \triangleq \lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8$$

$$\begin{cases} -4-k_2 = 6 \\ 3+3k_2-2-k_2-3k_3 = 12 \\ 6+3k_2-24k_1-3k_3 = 8 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} k_2 = -10 \\ k_3 = -31/3 \\ k_1 = -1/24 \end{matrix} \qquad K = \begin{bmatrix} -1/24 \\ -10 \\ -31/3 \end{bmatrix}$$

• Devo trovare una matrice K' in modo che per ingresso nullo ($u=0$) l'uscita tende a zero non più lentamente di e^{-2t}.

$$u = KX + V \underline{=0} \rightarrow K'X = -V$$

dove 'V' è l'ingresso del sistema retroazionato.
La soluzione è dunque la medesima di quella vista al punto precedente.

④ Si consideri un sistema con $\beta \in [0,1]$

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} u \qquad y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \beta \end{vmatrix} x$$

determinare:

- per quali valori di β non esistono stimatori asintotici dello stato.
- per quali valori di β non esistono stimatori asintotici che usano una sola uscita del sistema.

• Esiste uno stimatore asintotico dello stato per:

(A^T, C^T) Raggiungibile
(A, C) Rilevabile

chiaramente vale la dualità, dunque basta verificarne uno solo.

(A,C) rilevabile $\rightarrow$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & \beta^2 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ 2\beta^2 & \beta^3 & \beta \end{vmatrix}$$

per $\underline{\beta = 0}$ non esistono stimatori dello stato perché $\mathrm{Im}(R) = 1$.

per $\underline{\beta \neq 0}$ esistono.

• Considero ora singolarmente le uscite del sistema.

$$y_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(A, C_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Per nessun valore di β esiste uno stimatore asintotico dello stato che usa soltanto la prima uscita del sistema.

$$y_2 = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \beta \end{vmatrix}$$

$$(A, C_2) = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \beta \\ \beta & \beta^2 & \beta \\ 2\beta^2 & \beta^3 & \beta \end{vmatrix}$$

Per $\beta \neq 0$ esiste lo stimatore asintotico dello stato che usa soltanto la seconda uscita del sistema.

COMPITO 03.07.2017

(1) Dato il sistema Tempo Discreto:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right| \qquad B = \left|\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right| \qquad C = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

- Studiare stabilità interna, raggiungibilità, controllabilità a zero, stabilizzabilità e BIBO stabilità. Si determini la funzione di trasferimento del sistema.
- Trovare, se esistono, sequenze di ingressi che a partire da:

$x(0) = (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)^T$

permettano di raggiungere i punti:

$x_a = (1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -1)^T$
$x_b = (-1 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 0)^T$
$x_c = (-1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 0)^T$
$x_d = (2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1)^T$

Dire anche il numero di passi necessari a raggiungerli.

- Scrivere le condizioni nelle quali per un sistema lineare tempo invariante, tempo discreto, lo stato x_f può essere raggiunto a partire da x_0.

- Gli autovalori del sistema sono:

$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_3 = 1$
$\lambda_2 = -1 \qquad \lambda_4 = 0$

dato che almeno un autovalore è esterno alla circonferenza di raggio unitario, il sistema non è internamente stabile.

$$R = \left|\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Il sistema non è completamente raggiungibile in k passi.

$\rho(R) = 3$

- Per quanto riguarda la controllabilità a zero, devo far delle verifiche. Se il sistema fosse stato completamente raggiungibile, allora sia anche completamente controllabile a zero.

Se:

$\mathrm{Im}(A^\tau) \subseteq \mathrm{Im}(R_\tau)$ allora il sistema è controllabile a zero

$$\mathrm{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathrm{Im}(R_4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Il sistema non è controllabile a zero, perché $\mathrm{Im}(A^\tau) \not\subseteq \mathrm{Im}(R_\tau)$ per alcun τ.

- La stabilizzabilità è una proprietà che dice:

(A, B) è stabilizzabile se $\exists K$ tale per cui $(A + BK)$ è stabile. Ciò si traduce nel fatto che se A è stabile, allora il sistema è di certo stabilizzabile; se invece il sistema presenta autovalori instabili, allora il sistema è stabilizzabile solo se gli autovalori instabili di A appartengono allo spazio raggiungibile.

In questo sistema l'autovalore instabile è $\lambda = 2$ non rientra nello spazio di raggiungibilità. Dunque il sistema non è stabilizzabile.

Procedo al calcolo della f.d.t. del sistema.

$$(sI - A)^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|c} s+1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & s-1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & s & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & s+2 \end{array}\right|^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{1}{s(s+1)(s-1)} & 1/(s-1) & \frac{1}{s(s-1)} & \vdots \\ -\frac{1}{s(s+1)} & 0 & 1/s & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{array}\right|$$

$A_{12}^{-1} = -A_{11}^{-1}(A_{12} \cdot A_{22}^{-1})$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B = \left| \frac{1}{(s+1)} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+2)} \right| \cdot B = -\frac{1}{(s+1)}$$

la funzione di trasferimento presenta un polo in un punto sulla circonferenza di raggio unitario. Essendo a TD, il sistema <u>non</u> è BIBO stabile.

- Per trovare gli ingressi che a partire da un certo x_0 ~~arrivo~~ permettono di raggiungere un determinato stato finale basta applicare:

$$x_f - A^k x_0 \in \mathcal{R}_k \qquad A^k x_0 = \langle (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)^T \rangle = A^k x_0$$

dato che x_0 è un autovettore di A.

Posso già dire che per nessun ingresso posso raggiungere x_a e x_d, perciò presentano la variabile x_4 che non entra nel sottospazio raggiungibile.

b) $$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \underline{\mathbb{R}_3}$$

sono necessari <u>3 passi</u> per raggiungere questo stato.

c) $$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \underline{\mathcal{R}_1}$$

è raggiungibile in <u>1 passo</u>

In <u>tempo discreto</u> le condizioni per le quali x_f può essere raggiunto da x_0 sono che:

$$(x_f - A^k x_0) \in \mathrm{Im}(R_k)$$

Per trovare gli ingressi basta applicare:

$$x = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B\, u(k)$$

① $x_f = A x_0 + B u(0)$

② $x_f = A^2 x_0 + AB u(0) + B u(1) = A x(1) + B u(1)$

③ $x_f = A^3 x_0 + A^2 B u(0) + AB u(1) + B u(2)$

ⓒ $\underline{u=1}$ $$x_c = A x_0 + B u(0) \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) \Rightarrow \underline{u(0) = 1}$$

ⓑ $\underline{u=3}$

$$x_b = A^3 x_0 + A^2 B u(0) + AB u(1) + B u(2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(1) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(2)$$

$$\begin{cases} u(0) = -2/5 \\ u(1) = 18/5 \\ u(2) = -3 \end{cases}$$

risolto a sistema

② Dato il sistema non lineare definito dall'equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + \alpha \dot{y}(t) + y^3(t) = u(t)$$

- Trovare gli equilibri per $u(t) = 0$ e si discuta la stabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Si commenti la stabilità nel caso di retroazione parziale dello stato $u = \alpha \dot{y}(t)$.

$$\begin{matrix} x_1 = y \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} \end{matrix} \Bigg| \rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(t) \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2(t) - x_1^3(t) + u(t) \end{cases}$$

Impongo $u(t) = 0$ e cerco gli equilibri.

$$\begin{cases} 0 = x_2(t) \\ 0 = -\alpha x_2(t) - x_1^3(t) \end{cases}$$

EQUILIBRI

$(0, 0)$ $\forall \alpha$ è l'unico equilibrio.

Studio l'equilibrio nell'origine.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -\alpha \end{vmatrix} \longrightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} tr(A) = -\alpha \\ det(A) = 0 \end{matrix} \Bigg|$$

non posso concludere con il metodo indiretto di Lyapunov!

$$V(x) = \frac{1}{4} x_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\mathcal{L}V(x) = x_1^3 (x_2) + x_2 (-\alpha x_2 - x_1^3) =$$
$$= \cancel{x_1^3 x_2} - \alpha x_2^2 - \cancel{x_1^3 x_2} = -\alpha x_2^2$$

La Salle - Krasovskii

Se l'origine è l'unica traiettoria contenuta nel sottoinsieme invariante massimo, allora posso concludere sulla stabilità asintotica dell'origine.

$$R = \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L}V(x) = 0 \} = \{ (0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

imponendo: $\begin{matrix} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \\ 0 = -x_1^3 \end{matrix} \Bigg|$

L'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per $\alpha > 0$. Se fosse $\alpha > 0$, sarebbe instabile.

- Considero la retroazione $u(t) = \alpha \dot{y}(t) = \alpha x_2(t)$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(t) \\ \dot{x}_2 = -x_1^3(t) \end{cases} \longrightarrow \text{L'equilibrio è l'origine}$$

$$V(x) = \frac{1}{4} x_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\mathcal{L}V(x) = \cancel{x_1^3 x_2} - \cancel{x_2 x_1^3} = 0$$

Con La Salle concludo di nuovo sulla stabilità asintotica dell'origine.

③ Dato il sistema non lineare, TC:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 + \sin x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -\cos x_1 + \cos x_2 - x_3 \end{cases}$$

- Trovare una legge di controllo lineare $u = Kx$ tale che l'origine dello spazio di stato sia un equilibrio AS e che in un suo intorno, l'errore vada a zero almeno come e^{-t}.
- Come sopra, ma con convergenza veloce almeno quanto e^{-2t}.

- Linearizzo il sistema e lo scrivo in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos x_2 & 2x_3 \\ -\cos x_1 & \cos x_2 & 0 \\ \sin x_1 & -\sin x_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\downarrow$$

$$A|_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Per prima cosa devo vedere se il sistema sia completamente raggiungibile. Infatti, per il teorema fondamentale dell'assegnamento dei poli, dato un sistema (A,B) di dimensione n e dati n-autovalori desiderati, esiste ed è unico un intero K che permette al sistema di avere tali autovalori. Questo però è possibile solo se il sistema è completamente raggiungibile.

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \rho(R) = 2$$

il sistema non è completamente raggiungibile e l'autovalore non raggiungibile è -1.

Possiamo però comunque allocare gli altri due poli e farlo in modo che l'origine sia A.S. e che l'errore converga a zero come e^{-t}. Più di questo (cioè a velocità maggiori) è impossibile.

Considero:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad B_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$(A_1 + BK) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1+k_1 & 1+k_2 \end{vmatrix} \longrightarrow [(A+BK) - \lambda I] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1+k_1 & 1+k_2-\lambda \end{vmatrix};$$

$$(1-\lambda)(1+k_2-\lambda) + 1 - k_1 =$$

$$= 1 - \lambda + k_2 - k_2\lambda - \lambda + \lambda^2 + 1 - k_1 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-2-k_2) + (2+k_2-k_1) \triangleq (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} -2 - k_2 = 2 \\ 2 + k_2 - k_1 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} k_2 = -4 \\ k_1 = -3 \end{matrix} \qquad K = \begin{vmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- Non posso avere una convergenza veloce almeno come e^{-2t}, perché l'autovalore non raggiungibile è $\underline{\lambda = -1}$ e non posso modificarlo in alcun modo.

④ Si consideri il problema di controllo ottimo:

$$u^* = \underset{u}{\arg\min} \left[h(x(\tau_f), \tau_f) + \int_{\tau_0}^{\tau_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau \right] = J(u)$$

soggetto al vincolo differenziale $\dot{x} = f(x(\tau), u(\tau), \tau)$ con $x(\tau_0) = x_0$

- Se ne descriva la soluzione giungendo alle equazioni di Eulero e si discutano i casi notevoli che permettono di definire le condizioni al contorno.

Considero il funzionale aumentato:

$$J_a = \int_{\tau_0}^{\tau_f} g(x, u, \tau) + \frac{d}{dx} h(x(\tau_f), \tau_f) + \frac{d}{d\tau} h(x(\tau), \tau_f) + \lambda^* \left(f(x, u, \tau) - \dot{x} \right) d\tau$$

Posso pensare di cercare le equazioni di Eulero direttamente dalla g_a:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} g_a(..) - \frac{d}{d\tau} \frac{d}{d\dot{x}} g_a(..) = 0 \\ \frac{d}{du} g_a(..) = 0 \\ \frac{d}{d\lambda} g_a(..) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\dot{x}} g_a(..)\, dx_f \Big|_{\tau_f} + \cancel{\frac{d}{du} g_a(..)\, du} + \cancel{\frac{d}{d\dot{\lambda}} g_a(..)\, d\lambda} + \left[g_a(..) - \frac{d}{d\dot{x}} g_a(..)\, dx(\tau) \right] d\tau_f =$$

$$= \frac{d}{d\dot{x}} \left[\cancel{g(..)} + \frac{d}{dx} h(x(\tau), \tau)\dot{x} + \cancel{\frac{d}{d\tau} h(x(\tau), \tau)} + \lambda^T \left[f(x, u, \tau) - \dot{x} \right] dx_f + \left\{ g(..) + \frac{d}{dx} h(x, \tau)\dot{x} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{d}{d\tau} h(x(\tau), \tau) + \lambda^T \left[f(x, u, \tau) - \dot{x} \right] - \frac{d}{d\dot{x}} g_a(..)\, dx(\tau) \right\} d\tau_f =$$

$$= \left[\frac{d}{dx} h^T(x^*(\tau), \tau) - \lambda^*(\tau_f) \right] dx(\tau_f) + \left[g(x^*, u^*, \tau) + \frac{d}{d\tau} h(x^*, \tau) + p^{*T}(\tau_f)\, f(x^*, u^*, \tau_f) \right] d\tau_f$$

Questa trovata è la somma delle condizioni al contorno. Possono essere ricavate in base alla funzione Hamiltoniana:

$$H = g + \lambda^T f$$

$$\rightarrow \left[\frac{d}{dx} h^T(x^*(\tau), \tau) - \lambda^*(\tau_f) \right] dx(\tau_f) + \left[H(x^*, u^*, \lambda^*, \tau) + \frac{d}{d\tau} h(x^*, \tau) \right] d\tau_f$$

A seconda del caso nel quale ci troviamo si applicano le condizioni al contorno nel nostro problema di ottimo:

<u>caso 1</u> x_f / τ_f FISSI $\rightarrow$ non ho condizioni al contorno

<u>caso 2</u> x_f LIBERO, τ_f FISSO $\rightarrow$ $\lambda^*(\tau_f) = \frac{d}{dx} h^T(x^*(\tau), \tau) \Big|_{\tau_f}$

<u>caso 3</u> x_f FISSO, τ_f LIBERO $\rightarrow$ $H + \frac{d}{d\tau} h(x^*(\tau), \tau) = 0$

<u>caso 4</u> x_f / τ_f LIBERI $\rightarrow$ applicano entrambe le condizioni.

la soluzione del problema la ricavo dalle equazioni di Eulero - Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = g(x^*, u^*, \tau) \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial x} g(x^*, u^*, \tau) - \dfrac{\partial}{\partial x} \lambda^T f(x^*, u^*, \tau) \\ 0 = \dfrac{\partial H}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u} g(x^*, u^*, \tau) + \left[\dfrac{\partial}{\partial u} f(x^*, u^*, \tau)\right]^T \lambda^*(\tau) = 0 \end{cases}$$

COMPITO 14 · 07 · 2017

① Dato il sistema lineare SIMO (un ingresso e due uscite) rappresentato dalle equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + 6\dot{y}_1(t) + 5y_1(t) = u(t) \\ \dddot{y}_2(t) + 6\ddot{y}_2(t) + 5\dot{y}_2(t) = \dot{u}(t) - 2\alpha u(t) \end{cases}$$

- Per $\alpha = 1$ determinare la matrice di trasferimento, i poli e gli zeri con relativa molteplicità e il grado di McMillan.
- Determinare una realizzazione in forma minima al variare di α.

$$\begin{cases} s^2 y_1 + 6s y_1 + 5 y_1 = u(s) \\ y_2 + 6s^2 y_2 + 5s y_2(t) = s\,u(s) - 2\alpha u(s) \end{cases}$$

$G_{11}(s) = \dfrac{y_1(s)}{u(s)} \rightarrow y_1(s^2+6s+5) = u_1(s)$ $\qquad G_{12}(s) = 0$

$G_{22}(s) = \dfrac{y_2(s)}{u_2(s)} \rightarrow y_2(6s^2+5s+1) = (s-2\alpha)\,u_2(s)$ $\qquad G_{21}(s) = 0$

$$\rightarrow G(s) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{s^2+6s+5} & 0 \\ 0 & \dfrac{(s-2\alpha)}{6s^2+5s+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+5)} & 0 \\ 0 & \dfrac{(s-2\alpha)}{(s+1/3)(s+1/2)} \end{vmatrix}$$

Posto il sistema in forma di Smith:

O una matrice è in forma di Smith quando è diagonale?

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)(s+1/3)(s+1/2)} \cdot \begin{vmatrix} (s+1/3)(s+1/2) & 0 \\ 0 & (s-2)(s+1)(s+5) \end{vmatrix}$$

$D_0(s) = 1$

$D_1(s) = \{(s+1/3)(s+1/2),\ (s-2)(s+1)(s+5)\} = 1$

$D_2(s) = \{(s+1/3)(s+1/2)(s-2)(s+1)(s+5)\} = \dots$

$\lambda_1(s) = 1$

$\lambda_2(s) = \dots$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{1}{\dots}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dots \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\dots} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Grado: 5

poli: $2, -1, -5, -1/3, -1/2$

Forma canonica controllo (colonna)

$$G_1(s) = \begin{vmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+5)} \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$G_2(s) = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{(s-2\alpha)}{(s+1/3)(s+1/2)} \end{vmatrix} = \frac{1}{(s+1/3)(s+1/2)} \begin{vmatrix} 0 \\ (s-2\alpha) \end{vmatrix} = \frac{1}{s^2+\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}s+\frac{1}{6}} = \frac{1}{s^2+\frac{5}{6}s+\frac{1}{6}}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & -5/6 \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2\alpha & +1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/6 & -5/6 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

② Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (2 - x_1^2(t) - x_2^2(t))\, x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (2 - x_1^2(t) - x_2^2(t))\, x_2(t) + x_1(t) \end{cases}$$

- Trovare gli equilibri e discuterne la stabilità con entrambi i metodi.
- Determinare, se esistono, cicli limite, caratterizzarli e stabilirne la stabilità considerando un'opportuna candidata di Lyapunov.

$$\begin{cases} 0 = (2 - x_1^2(t) - x_2^2(t))\, x_1(t) - x_2(t) \\ 0 = (2 - x_1^2(t) - x_2^2(t))\, x_2(t) + x_1(t) \end{cases}$$

EQUILIBRI
$(0,0)$
~~$(\pm 1, \pm 1)$~~

↳ $x_1 = 0$

$2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2 \rightarrow (\pm 1, \pm 1)$

ma non va bene per la 2ª equazione.

$$A = \begin{vmatrix} 2 - 3x_1^2 - x_2^2 & -2x_2x_1 - 1 \\ -2x_1x_2 + 1 & 2 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{vmatrix} \rightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$Tr(A) = 4$
$\det(A) = 3$

L'origine è un equilibrio INSTABILE

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{V}(x) = x_1(2x_1 - x_1^3 - x_1^2x_1 - x_2) + x_2(2x_2 - x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1) =$$
$$= 2x_1^2 - x_1^4 - x_1^2x_1^2 - \cancel{x_1x_2} + 2x_2^2 - x_1^2x_2^2 - x_2^4 + \cancel{x_1x_2} =$$
$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + (-2x_1^2x_2^2 - x_1^4 - x_2^4)$$

Nei pressi dell'origine la $\dot{V}(x)$ è DP, quindi l'origine è un equilibrio instabile.

- Nella circonferenza $(x_1^2 + x_2^2 = 0)$ la $\dot{V}(x)$ si annulla, quindi posso vedere se questa è un ciclo limite del sistema.

$$V(x) = [c(x)]^2 = (-x_1^2 - x_2^2 + 2)^2$$

$$\dot{V}(x) = 2(2 - x_1^2 - x_2^2) \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -x_2 + x_1(2 - x_1^2 - x_2^2) \\ +x_1 + x_2(2 - x_1^2 - x_2^2) \end{bmatrix} =$$

$$= 2(2 - x_1^2 - x_2^2)\left(\cancel{2x_1x_2} - 2x_1^2(2 - x_1^2 - x_2^2) - \cancel{2x_1x_2} - 2x_2^2(2 - x_1^2 - x_2^2)\right] =$$

$$= 2(2 - x_1^2 - x_2^2)\left((2 - x_1^2 - x_2^2)(-2x_1^2 - 2x_2^2)\right) =$$

$$= -4\underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{>0}\underbrace{(2 - x_1^2 - x_2^2)^2}_{>0} \Rightarrow \dot{V}(c(x)) < 0 \quad \text{D.N.}$$

Il ciclo limite è attrattivo. Potremmo aspettarcelo dato che l'origine è un equilibrio instabile.

③ Dato il sistema TD:

$$x_{k+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} x_k + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{vmatrix} u_k$$

determinare:

- per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller.
- scegliere tra questi un valore di β e calcolare in funzione di α la matrice di retroazione K tale che il sistema a ciclo chiuso sia dead-beat.

Per prima cosa devo vedere se il sistema è completamente raggiungibile.

$$R = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 2\beta & \beta+4\beta \end{vmatrix}$$

Il sistema non è completamente raggiungibile.

Da qui, posso avere un controllore <u>dead-beat</u> (con tutti $\lambda = 0$) solo per:

$$\begin{vmatrix} \alpha = 0 \\ \beta \neq 0 \end{vmatrix}$$

- Scelgo $\underline{\beta = 1}$. Il mio sistema è quindi:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$(A+BK) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1+k_1 & 2+k_2 & 2+k_3 \end{vmatrix} \rightarrow [(A+BK)-\lambda I] = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1+k_1 & 2+k_2 & 2+k_3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda^2(2+k_3-\lambda) + \lambda(1+k_1) =$$

$$= 2\lambda^2 + k_3\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + k_1\lambda \triangleq \lambda^3$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2(2+k_3) - \lambda(1+k_1) \triangleq \lambda^3$$

$$\begin{aligned} +2+k_3 &= 0 \\ +1+k_1 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} k_1 &= -1 \\ k_3 &= -2 \end{aligned} \qquad K = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$$

④ Si consideri il problema di Raggiungibilità in tempo finito di un punto nello spazio di stato con energia di controllo minima per un sistema lineare TC.

- si definisca il Gramiano di raggiungibilità
- si mostri il ruolo di G_R nel calcolo dell'ingresso di controllo a energia minima.

$$x_1 = \int_0^T e^{A(T)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau$$

Voglio raggiungere lo stato x_1 a partire dall'origine. Per far ciò, esiste una soluzione in forma chiusa, data da:

$$u(\tau) = B^T e^{A^T(\tau)}\, G_R^{+}(0,T)\, x_1$$

Questo è l'ingresso che devo porre per giungere in x_1 a energia minima. Infatti, sostituendolo trovo:

$$x_1 = \int_0^T e^{A\tau} B B^T e^{A^T(T)}\, G_R^{+} x_1 \Rightarrow x_1 = \int_0^T G_R(0,T) \cdot G_R^{+}(0,T)\, x_1 \Rightarrow x_1 = x_1$$

Tale controllo $u(\tau)$ è quello a energia minima. Infatti, andando a definire la funzione che mappa la funzione d'ingresso dall'insieme $\mathcal{U}$ a X, questa è data da:

$$\phi_f(u) = \int_0^T e^{AT} B \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, bend left, "\phi_f(u)"] & X \arrow[l, bend left, "\phi_f^*(x)"] \end{tikzcd}$$

Mentre l'operatore aggiunto $\phi_f^*(x)$ lo trovo da:

$$\langle \phi_f(u), x \rangle = x^T \int_0^T e^{AT} B\, \underline{u(\tau)}\, d\tau$$

$$\langle \phi_f^*(x), u \rangle = \int_0^T \phi_f^*(x) \cdot \underline{u^T(\tau)}\, d\tau$$

Poiché i due ingressi devono essere uguali, trovo:

$$\phi_f^*(x) = B^T e^{A^T(\tau)} x$$

Ne segue che l'ingresso soluzione del mio problema lo posso riscrivere come:

$$u(\tau) = \phi_f^*(x)\, G_R^{+}(0,T)\, x_1$$

Quindi $u(\tau) \in \mathrm{Im}\{\phi_f^*(x)\}$ e ciò dimostra che è il controllo a energia minima.
Se infatti considerassi lo stesso ingresso con un'altra componente $\delta u \in \mathrm{Ker}(\phi_f)$ questa sarebbe comunque una soluzione (perché mi porta comunque allo stato desiderato), ma non è in forma minima:

$$\| u(\tau) + \delta u \| > \| u(\tau) \|$$

- Il ruolo del Gramiano di Raggiungibilità è importante per quanto riguarda il costo delle leggi di controllo.

$$u(\tau) = B^T e^{A^T} \underbrace{G_R^+(\tau_0, \tau_f) \cdot x_f}_{\eta} \qquad x_f = G_R(0,\tau_f)\,\eta$$

$$\|u(\tau)\|^2 = \int_0^T u^T(\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^T \eta^T e^{A\tau} B B^T e^{A^T(\tau)} \eta \, d\tau = \eta^T \int_0^T \dots \eta \, d\tau =$$

$$= x_f^T \cdot (G_R^+(0,\tau_f))^T \cdot \cancel{G_R(0,\tau) \cdot G_R^+(0,\tau)} \cdot x_f =$$

$$\Rightarrow \|u(\tau)\|^2 = x_f^T \cdot G_R^+(0,\tau)\, x_f$$

Questo è il costo della legge di controllo per andare da 0 a x_f. Il Gramiano è quindi un indice del costo di energia necessario a raggiungere x_f.
Tale costo dipende quindi da com'è fatta la base del gramiano e se x_f ha o no componenti in esso.
Sono due i casi:

1) l'immagine del Gramiano è tutto lo spazio raggiungibile
2) l'immagine del Gramiano non è tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$.

Nel primo caso consideriamo l'inversa. Focalizziamoci nel caso 1.
Poiché il Gramiano è simmetrico e d.p. lo posso scrivere come:

$$G_R = V \Sigma V^T$$

con $\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{vmatrix} \qquad \sigma_i^2 = \lambda_i$

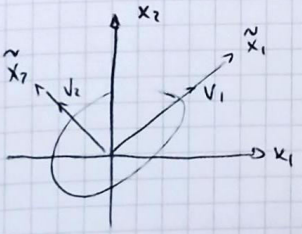
$$\rightarrow G_R^{-1} = (V^T)^{-1} \Sigma^{-1} V^{-1} = V \Sigma^{-1} V^T$$

$$\|u(\tau)\|^2 = \underbrace{x_f^T V}_{\tilde{x}_f^T} \begin{vmatrix} 1/\sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sigma_n^2 \end{vmatrix} \underbrace{V^T x_f}_{x_f}$$

La matrice V contiene gli autovettori corrispondenti agli autovalori sulla diagonale.
Di fatto vè a rimappare ogni punto dello spazio di stato in un altro punto mediante gli autovettori del sistema.

$$\|u(\tau)\|^2 = \tilde{x}_{f_1}^2 \frac{1}{\sigma_1^2} + \dots + \tilde{x}_{f_i}^2 \cdot \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Quindi l'energia di controllo u dipende da come lo stato desiderato di arrivo è mappato sugli autovettori.



(x_1, x_2): spazio di stato originario
$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$: nuovo spazio di stato definito dagli autovettori (v_1, v_2).

Posto $\|u(\tau)\|^2 = \alpha = \frac{\tilde{x}_1^2}{\sigma_1} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\sigma_2}$ ovvero ho un limite (nel piano è un'ellisse)

Questa ellisse ha tutti i punti raggiungibili dall'origine spendendo α. Ovviamente i punti interni li raggiungo spendendo meno.

Infine, se impiego più tempo a raggiungere α, spendo meno, perché:

$$G_R^+(0,\tau_1) > G_R^+(0,\tau_3)$$

COMPITO 16.09.2017

① Si consideri il sistema lineare TD:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Studiare osservabilità e raggiungibilità al variare di β. Calcolare la f.d.t.
- Studiare la stabilità interna al variare di β.
- Per $\beta = 1$ trovare le condizioni di esistenza di condizioni iniziali $x(0)$ compatibili con le osservazioni:

$y(0) = 0 \qquad y(1) = 3 \qquad y(2) = 7$

con ingresso:

$u(0) = \alpha \qquad u(1) = 0$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcolare tutte le c.i. ammissibili.

- Calcolo la matrice di Raggiungibilità e quella di Osservabilità:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \dim(R) = 2 \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$$

Il sistema non è completamente raggiungibile per nessun valore di β.

$$O = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2\beta+1 \\ 1 & 0 & 1+4\beta^2+2\beta \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{lll} \dim(O) = 2 & \text{per } \beta \neq 0 & \dim(\bar{O}) = 1 \\ \dim(O) = 1 & \text{per } \beta = 0 & \dim(\bar{O}) = 2 \end{array}$$

$$\mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} ; \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}}_{\text{per } \beta = 0} \right\rangle$$

$$A_{22}^{-1} = -A_{11}^{-1}\left[A_{12} \cdot A_{22}^{-1}\right]$$

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ -2 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-2\beta \end{vmatrix}^{-1} \cdot B =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{(s-1)} & 0 & -\frac{1}{(s-1)(s-2\beta)} \\ \frac{2}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-2\beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{s-1}}$$

- Gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = 1 \qquad m.a. = 2 \qquad m.g = 1 \qquad \longrightarrow \qquad (A - I) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta-1 \end{vmatrix}$

$\lambda_2 = 2\beta \qquad m.a. = 1$

Il sistema è dunque instabile internamente per $\forall \beta$. Infatti la matrice A presenta due autovalori nella circonferenza di raggio unitario, la cui $m.a. \neq m.g.$

• Impongo $\beta = 1$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad y(k) = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B\, u(i)$$

Abbiamo dimostrato prima che il sistema non è completamente osservabile. In particolare lo stato $x_2 \in \mathcal{N}(\bar{O})$. Ne segue che per qualsiasi c.i. non possiamo osservare in uscita tale stato.

$$\begin{cases} y(0) = C x_0 \\ y(1) = CAx_0 + CB\,u(0) \\ y(2) = CA^2 x_0 + CAB\,u(0) + CB\,u(1) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 0 = |1 \quad 0 \quad 1|\ x(0) \qquad \rightarrow x(0) = \bar{0} \\ 3 = |1 \quad 0 \quad 3|\ x(1) + \alpha \\ 7 = |1 \quad 0 \quad 7|\ x(2) + \alpha \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 0 = x_1 + x_3 \\ 3 = x_1 + 3x_3 + \alpha \\ 7 = x_1 + 7x_3 + \alpha \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ +2x_3 = 3 - \alpha \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_3 = \frac{3-\alpha}{2} \\ x_1 = \frac{\alpha - 3}{2} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{x_0 = \begin{vmatrix} \frac{\alpha-3}{2} \\ 0 \\ \frac{3-\alpha}{2} \end{vmatrix}}$$

~~Devo verificare che questo vettore sia osservabile.~~

~~Per $\beta = 1$ l'immagine della matrice di osservabilità è:~~

$$\cancel{\mathcal{I}m(O) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{vmatrix}}$$

~~Per $\alpha \neq 5$ il vettore entra nell'immagine di O.~~

$$\underline{y = y_e + y_f}$$

$y_f(0) = 0$

$y_f(1) = CB\,u(0)$

$y_f(2) = CAB\,u(0) + CB\,u(1)$

$\vdots$

$y_e(0) = y(0)$

$y_e(1) = y_e(1) - y_f(1)$

$\vdots$

$$\begin{bmatrix} y_e(0) \\ \vdots \\ y_e(n) \end{bmatrix} = O\, x_0 \Rightarrow x_0 = O^{-1} \begin{bmatrix} y_e(0) \\ \vdots \\ y_e(1) \end{bmatrix}$$

② Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (a^2-1)x_1 - a x_2 - 2x_2^3 + u \end{cases}$$

- per $u=0$ determinare gli equilibri al variare di a.
- per $u=0$ studiare la stabilità nell'origine per $a \neq 1$.
- per $a=1$ trovare un ingresso u non nullo che renda l'origine GAS.

- $\underline{u=0}$

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = (a^2-1)x_1 - a x_2 - 2x_2^3 \end{cases} \quad ; \quad x_2 = 0 \begin{cases} x_1 = 0 & (a \neq 1) \\ \forall x_1 & (a = 1) \end{cases}$$

Studio la stabilità con il metodo indiretto

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a^2-1 & -a-6x_2^2 \end{vmatrix} \longrightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a^2-1 & -a \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} tr(A) &= -a \\ det(A) &= 1-a^2 \end{aligned}$$

affinché l'origine sia equilibrio A.S. la traccia di A deve essere negativa e il determinante positivo.

$tr(A) < 0 \rightarrow -a < 0 \Rightarrow a > 0$

$det(A) > 0 \rightarrow 1-a^2 > 0 \rightarrow -a^2 > -1 \; ; \; a^2 < 1 \begin{cases} a < 1 \\ a > -1 \end{cases}$

Quindi per $a \in (0, 1)$ l'origine è A.S.

- $\underline{a=1}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 2x_2^3 + u \end{cases}$$

$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$\dot{V}(x) = x_1 x_2 - x_2^2 - 2x_2^3 + u$

Scelgo $u = -x_1 x_2 - x_1^2 \rightarrow \dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_2^3$

nell'intorno dell'origine $\dot{V}(x)$ è DN, quindi l'origine è un equilibrio A.S.

$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = +\infty \Rightarrow$ <u>GAS</u>

③ Dato il sistema SISO, TD:

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k$$

chiuso in retroazione con il controllore $u_k = K(r_k - x_k)$ con K matrice dei guadagni e r_k ingresso esogeno.

- enunciare e dimostrare la condizione necessaria e sufficiente affinché la dinamica a ciclo chiuso di un sistema può essere assegnata completamente.
- enunciare e dimostrare la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.

- Teorema fondamentale assegnamento poli

Dato un sistema SISO (A,B) di ordine n e dati n autovalori desiderati λ, il sistema retroazionato (A+BK) ha gli n-autovalori desiderati se e solo se (A,B) è completamente raggiungibile.

condizione necessaria → (A,B) c.R.

Per assurdo supponiamo non lo sia. Posso allora scrivere il sistema in forma standard di raggiungibilità:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_R \\ \dot{\tilde{z}}_{\bar{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_R \\ \tilde{z}_{\bar{R}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \begin{cases} \dot{\tilde{z}}_R = A_{11}\tilde{z}_R + A_{12}\tilde{z}_{\bar{R}} + Bu \\ \dot{\tilde{z}}_{\bar{R}} = A_{22}\tilde{z}_{\bar{R}} \end{cases}$$

Il sottosistema non raggiungibile non dipende dall'ingresso u, quindi se anche andassi a retroazionare lo stato ($u = Kx$) e la matrice A_{22} non la potrei comunque modificare.

condizione sufficiente → se (A,B) è c.R, allora $\exists K$

Dato che il sistema è completamente raggiungibile lo posso scrivere in forma canonica di controllo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & I_{(n-1)\times(n-1)} & \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (A+BK) = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & I_{(n-1)\times(n-1)} & \\ -a_0-k_1 & \cdots & -a_{n-1}-k_n \end{bmatrix}$$

Per assegnare gli n-autovalori devo risolvere un sistema di n-equazioni in n incognite per cui è sempre risolubile.

- Affinché il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso, il sistema di partenza (A,B) deve essere completamente raggiungibile. Se così non è, allora gli eventuali autovalori instabili di A devono appartenere al sottospazio raggiungibile.

④ Dato il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo:

$$J = \frac{1}{2} x^T(T_f) S\, x(T_f) + \frac{1}{2} \int_0^{T_f} u^T R\, u\, d\tau$$

- scrivere le condizioni necessarie sulle matrici.
- descrivere la procedura che porta alla soluzione del problema di ottimo con le relative condizioni al contorno.

LQ (Linear Quadratic)

---

le matrici devono essere: S reale, semipositiva, simmetrica
R reale, simmetrica, positiva.

Scrivo la funzione Hamiltoniana:

$$H = g + \lambda^T f = \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

e da qui le equazioni di Eulero Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{dH}{d\lambda} = A^* x^* + B u^* \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{dH}{dx} = -A^T \lambda^* \\ 0 = \dfrac{dH}{du} = u^* R + B^T \lambda^* \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u^* = -R^{-1} B^T \lambda^* \\ \dot{x}^* = A^* x^* - B R^{-1} B^T \lambda^* \\ \dot{\lambda}^* = -A^T \lambda^* \end{cases} ;$$

Pongo le due dinamiche a sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda \end{bmatrix}^*$$ dove quella è la matrice Hamiltoniana

Risolvo il problema di ottimo mediante integrazione.

$$\begin{bmatrix} x^*(T_f) \\ \lambda^*(T_f) \end{bmatrix} = e^{H(T_f - T)} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(T_f, T_0) & \varphi_{12}(T_f, T_0) \\ \varphi_{21}(T_f, T_0) & \varphi_{22}(T_f, T_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

Per il principio di Bellman posso anche scrivere punti espressioni per un generico 'T' e non per 'to'; la soluzione non varia.

Trovo quindi le equazioni:

$$\begin{cases} x^*(T_f) = \varphi_{11}(T_f, T_0)\, x(T_0) + \varphi_{12}(T_f, T_0)\, \lambda(T_0) \\ \lambda^*(T_f) = \varphi_{21}(T_f, T_0)\, x(T_0) + \varphi_{22}(T_f, T_0)\, \lambda(T_0) \end{cases}$$

A seconda dei casi, devo che considerare le condizioni al contorno:

caso 1] NO condizioni

caso 2] $\lambda^*(T) = \frac{\partial}{\partial x} h(x(T_f), T_f) \Rightarrow \underline{\lambda^*(T_f) = S\, x^*(T)}$

caso 3] $\underline{H(x^*, \lambda^*, u^*, T) = \frac{\partial}{\partial T} h(x(T), T) = 0}$

caso 4] entrambe le condizioni precedenti.

<u>caso 1</u>

$$\lambda(T_0) = \varphi_{12}^{-1}(T_f, T) \left[x(T_f) - \varphi_{11}(T_f, T_0)\, x(T_0) \right]$$

$$\underline{\lambda^*(T)} = \varphi_{21}(T, T_0)\, x(T_0) + \varphi_{22}(T, T_0)\, \varphi_{12}^{-1}(T_f, T_0) \left[x(T_f) - \varphi_{11}(T_f, T_0), x(T_0) \right]$$

$$\boxed{u^*(T) = -R^{-1} B^T \underline{\lambda^*(T)}}$$

<u>caso 2</u>

$$\lambda^*(T_f) = S\, x^*(T) \Rightarrow S \left(\varphi_{11}(T_f, T_0)\, x(T_0) + \varphi_{12}(T_f, T_0)\, \lambda(T_0) \right) = \varphi_{21}(T_f, T)\, x(T) + \varphi_{22}(T_f, T)\, \lambda(T)$$

Ricavo $\lambda(T)$ e procedo come nel caso 1.

COMPITO 15.01.2018

① Dato il sistema TD:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- trovare i modi associati alla matrice dinamica.
- determinare la f.d.t. del sistema.
- trovare le dimensioni dello spazio di raggiungibilità e di inosservabilità indicandone una base.

- Gli autovalori della matrice A sono:

$\lambda_1 = -1$ m.a. = 2 m.g. = 2 $\longrightarrow$ $(A+I) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\lambda_2 = 1$ m.a. = 3 m.g. = 2 $\longrightarrow$ $(A-I) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

I modi associati alla matrice dinamica sono:

$(-1)^k, (-1)^k, k\,1^k$

- la f.d.t. è data da:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-1)} & \underline{0} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & \\ \underline{0} & & * \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)(s-1)} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \longrightarrow G(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)(s-1)} =$$

$$= \frac{(s-1)+2}{2(s+1)(s-1)} = \frac{\cancel{s+1}}{2\cancel{(s+1)}(s-1)} = \boxed{\frac{1}{2(s-1)}}$$

- Dalla f.d.t. è chiaro che il sistema non è completamente raggiungibile né completamente osservabile, altrimenti tutti i modi apparirebbero in essa. Solo un autovalore $\lambda = 1$ è sia raggiungibile sia osservabile.

$$R = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & \\ 1 & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} \qquad \underline{\rho(R) = 1} \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \end{vmatrix} \qquad \rho(O) = 2 \quad \hookrightarrow \dim(\bar{O}) = 3 \qquad \mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\rangle$$

② Dato il sistema TC non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + u \end{cases}$$

- con $u=0$ trovare gli equilibri e discutere della stabilità nell'origine.
- determinare una retroazione dello stato $u(x)$ che renda il sistema A.S. nell'origine.

- $\underline{u=0}$

$$\begin{cases} 0 = -x_1 - 2x_1x_2^2 \\ 0 = x_1^2 x_2 \end{cases}$$

$x_1 = 0 \quad \forall x_2$

$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 0$

EQUILIBRI

$(0, x_2)$

$(0,0)$

Studio la stabilità dell'origine partendo dal metodo indiretto di Lyapunov.

$$A = \begin{vmatrix} -1-2x_2^2 & -4x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} \longrightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Non posso concludere con questo metodo perché la matrice A ha un autovalore nullo.

$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$\dot{V}(x) = -x_1^2 - \cancel{2x_1^2x_2^2} + \cancel{2x_1^2x_2^2} = \underline{-x_1^2}$ S.D.N.

Sfrutto Lasalle.
Devo verificare se l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine.
Se è così, posso concludere sulla stabilità asintotica dell'origine.

$R = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} =$

$\Rightarrow \begin{matrix} x_1(t) = 0 \\ \dot{x}_1(t) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{matrix}$ | l'origine è un equilibrio A.S.

- $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2) + x_2^2$

$\dot{V}(x) = -x_1^2 - \cancel{2x_1^2x_2^2} + \cancel{2x_1^2x_2^2} + 2ux_2 = -x_1^2 + 2ux_2$

$u = -\frac{x_2}{2} \Rightarrow \underline{\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2}$ l'origine è A.S.

Oppure:

$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad R = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ Il sistema è comunque stabilizzabile (l'autovalore (-1) che non appartiene a R è A.S.)

$(A+Bu) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A+Bu-\lambda I) = (-1-\lambda)(u_2-\lambda) =$

$= -u_2 - u_2\lambda + \lambda + \lambda^2 \triangleq (\lambda+1)^2$

$K = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}^T \quad u_u = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}^T x_u$

③ Dato un sistema A, B, C TC di ordine n, si dica sotto quali condizioni vale la "proprietà di separazione degli autovalori", la si enunci e se ne dia la dimostrazione. Si discutano anche le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema di ordine 2n ottenuto tramite retroazione dello stato stimato.

La proprietà di separazione degli autovalori dice che è possibile assegnare in modo indipendente gli autovalori a ciclo chiuso dell'impianto e dello stimatore.
Consideriamo un sistema dato da:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

e la sua stima:
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{y}) =$$
$$= A\hat{x} + Bu + H(Cx - C\hat{x})$$

Partiamo in forma matriciale entrambe le dinamiche; andando però a considerare una retroazione (u) dello stato stimato e non di quello vero.

$$u = K\hat{x} + v$$

Partiamo in forma matriciale entrambe le dinamiche; andando però a considerare una retroazione (u) dello stato stimato e non di quello vero.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} A & BK \\ HC & A - HC + BK \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ \hat{x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B \\ B \end{vmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = (A + BK)\hat{x} + Bv + H(Cx - C\hat{x}) \end{cases}$$ sistema di 2n-equazioni

Vado ora a riscrivere il sistema portandolo in funzione di x e ε, dove quest'ultimo è l'errore di stima:

$$\varepsilon = \hat{x} - x \rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\hat{x}} - \dot{x}$$

La matrice di trasformazione è $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{vmatrix}$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ HC & A+BK-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Per cui, le dinamiche sono:

$$\dot{\varepsilon} = (A - HC)\varepsilon$$

$$\dot{x} = (A + BK)x + \underline{BK\varepsilon} + Bv$$

- La dinamica dell'errore non viene minimamente alterata dall'aver posto in retroazione lo stato stimato.
- Per quanto riguarda $\dot{x}$, questo è esattamente identico a quando pongo in retroazione lo stato (x). L'unica differenza sta nella presenza di (BKε), il quale appare come un disturbo che però converge a zero, dato che per $t \to \infty$ $\varepsilon \to 0$.
Ne segue che ho ottenuto lo stesso risultato che avrei ottenuto retroazionando lo stato.

Strutturalmente vado a perdere di raggiungibilità, ma non di osservabilità. Questo però va bene, perché l'ingresso non incide sulla dinamica dell'errore.

④ Dato il sistema dinamico $\dot{x} = u$, con condizioni iniziali x_0 fissate e note. Impostare e risolvere analiticamente un problema di controllo ottimo con t_0 e t_f fissati che porti lo stato il più vicino possibile all'origine. Si usi un parametro γ per controllare il trade-off tra avere di controllo e distanza dall'origine all'istante finale.

Il funzionale di costo è dato da:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t)\, dt = \frac{1}{2}\gamma x^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t)\, dt = \frac{1}{2}\gamma x^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2\, dt$$

'γ' è un parametro di bilancia il consumo rispetto alla distanza dall'origine. In base al suo valore grande o piccolo vado a privilegiare l'uno o l'altro aspetto.

Costruisco la funzione Hamiltoniana:

$$H = g + \lambda^T f = \frac{1}{2}u^2 + \lambda u$$

e da questa ricavo le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dH}{d\lambda} = u \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{dH}{dx} = 0 \\ 0 = \dfrac{dH}{du} = u^* + \lambda^* \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \dot{x}^* = u^* \\ \dot{\lambda}^* = 0 \rightarrow \lambda(t) = \text{costante} \\ u^* = -\lambda^* \end{array}$$

Devo ora fissare le condizioni al contorno. Siamo nel caso 2, ovvero t_f FISSO, x_f VARIABILE per cui, dato che le condizioni al contorno sono:

$$0 = \left[\frac{d}{dx} h^T(x(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f)\right] x(t_f) + \cancel{\left[H(x^*, u^*, \dot{x}^*, \lambda^*) - \frac{d}{dt} h(x(t_f), t_f)\right] dt_f}$$

$$\longrightarrow \lambda^*(t_f) = \frac{d}{dx} h(x(t_f), t_f) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\gamma x^2(t_f)\right) \Rightarrow \underline{\lambda^*(t_f) = \gamma x^*(t_f)}$$

Riscrivo quindi le equazioni di Eulero Lagrange:

$$\dot{x}^* = u^*$$

$$\lambda^*(t) = \text{costante} = \gamma x^*(t_f)$$

$$u^*(t) = -\gamma x^*(t_f)$$

Devo ora conoscere la storia temporale di $x(t)$. Dato che conosco u, posso fare l'integrale del vincolo:

$$\dot{x}^* = u^* \rightarrow x^*(t)\Big|_{t_f} = u^*(t - t_0) + x(t_0) = -\gamma \underline{x^*(t_f)} + x(t_0) = x^*(t_f)$$

$$x^*(t_f) = \frac{x^*(t_0)}{1 - \gamma(t - t_0)}$$

A questo punto calcolo la legge di controllo:

$$u^*(t) = -\gamma \frac{x^*(t_0)}{1 - \gamma(t - t_0)}$$

Questa trovata è la legge di controllo ottimo.

compito 05.02.2018

(1) Dato il sistema TC:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Determinare la forma di Kalman. Trovare i modi e stabilità interna del sistema.
- Determinare la f.d.t. del sistema.
- Studiare la BIBO stabilità. Se BIBO stabile motivare, altrimenti dare un ingresso che non ne verifica la definizione.

- Calcolo la forma di Kalman.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & +1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \dim(R) = 3 \longrightarrow \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix} \qquad \dim(O) = 3 \longrightarrow \mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$$T_{R\bar{O}} = \left[T_R \,\vdots\, T_{\bar{O}} \right] = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \qquad \mathrm{Ker}(T_{R\bar{O}}) = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \right\rangle \begin{array}{l} T_R = W_1 \\ T_{\bar{O}} = W_2 \end{array}$$

$$T_{R\bar{O}} = T_R\, W_1 = T_{\bar{O}}(-W_2) = \langle (0\ 1\ 0\ 0)^T \rangle$$

$$T_{RO} = \langle (1\ 0\ 0\ 0)^T ; (0\ 0\ 0\ 1)^T \rangle$$

$$T_{\bar{R}\bar{O}} = \emptyset$$

$$T_{\bar{R}O} = \langle (0\ 0\ 1\ 0)^T \rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[T_{RO} \,\vdots\, T_{R\bar{O}} \,\vdots\, T_{\bar{R}O} \,\vdots\, T_{\bar{R}\bar{O}} \right] \longrightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} T \Rightarrow \tilde{A} = \begin{array}{c} A_{RO} \\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\tilde{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} B_{RO} \qquad \tilde{C} = \begin{array}{c} C_{RO} \\ \left[1 \quad 0 \,\vdots\, 0 \quad 1 \right] \end{array}$$

Gli autovalori di A (uguali a quelli di $\tilde{A}$ essendo simili) sono:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = \pm 2j \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array} \xrightarrow[\text{tutti con } \underline{m.a. = 1} = m.g.]{\text{MODI}} e^{-t},\ e^{2t},\ \cos(2t),\ \sin(2t)$$

Il sistema non è internamente stabile perché un autovalore ha parte reale maggiore di zero.

Per il calcolo della funzione di trasferimento basta considerare il sistema completamente raggiungibile e completamente osservabile appena trovato:

$$G(s) = C_{RO}(sI - A_{RO})^{-1} B_{RO} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 2 \\ -2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+4} \begin{bmatrix} s & -2 \\ 2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2+4} \begin{bmatrix} s & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-2}{s^2+4}.$$

La $G(s)$ ha due poli complessi coniugati a parte reale nulla. Il sistema dunque non è BIBO stabile.
La BIBO stabilità dice che per ingresso limitato anche l'uscita deve essere limitata.
Se quindi considero un ingresso limitato, pulso:

$$u(s) = \frac{1}{(s^2+4)}$$

$$y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{(s^2+4)^2} \rightarrow \text{DIVERGENTE!}$$

② Dato il sistema non lineare TC:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2 \sin x_1 + u \end{cases}$$

- determinare gli equilibri per $u=0$ e studiarne la stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov.
- determinare un ingresso che rende il sistema A.S. nell'origine.

- $u=0$

$$\begin{cases} 0 = -x_2 x_1 \\ 0 = x_1^2 + x_2 \sin x_1 \end{cases} ; \quad \begin{array}{ll} \text{per } x_1 = 0 & \forall x_2 \\ \text{per } x_2 = 0 & x_1 = 0 \end{array}$$

$$\cancel{\dot{x}_1 = -x_2 x_1}$$

$$A = \begin{vmatrix} -x_2 & -x_1 \\ 2x_1 + x_2 \cos x_1 & \sin x_1 \end{vmatrix} \longrightarrow$$

$$A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$ Non posso concludere sulla stabilità dell'origine.

$$A|_{(0,x_1)} = \begin{vmatrix} -x_2 & 0 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix}$$ Non posso concludere sulla stabilità dell'equilibrio.

- $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$$\dot{V}(x) = -\cancel{x_1^2 x_2} + \cancel{x_1^2 x_2} + x_2^2 \sin x_1 + x_2 u$$

$$u = -x_2 \sin(x_1) - x_2$$

$$\dot{V}(x) = -x_2^2 \quad \text{S.D.N.}$$

La sola $R: \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid \dot{V}(x) = 0 \} = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \rightarrow \begin{array}{l} x_2(t) = 0 \\ \dot{x}_1(t) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0 \\ 0 = x_1^2 \end{array}$ | A.S.

③ Dato il sistema TC:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} x$$

- determinare se il sistema è stabilizzabile mediante retroazione dello stato usando un solo ingresso. Se sì, determinare per quali ingressi.
- determinare una matrice K di retroazione dello stato in modo che, per ogni stato iniziale, l'evoluzione libera del sistema tende a zero più velocemente di e^{-2t}.

- Il sistema (A,B) è stabilizzabile mediante un ingresso retroazionato $u = Kx$ se $\exists$ K t.c. (A+BK) è stabile. Questo si traduce nel fatto che (A,B) deve essere stabile, allora (A+BK) è stabilizzabile, altrimenti se la matrice A ha autovalori instabili, questi devono essere interni al sottospazio raggiungibile.

Gli autovalori di A sono:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = (-2\overbrace{-2\lambda+\lambda}^{-\lambda}+\lambda^2)(3-\lambda) =$$

$$= -6 - 3\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 =$$

$$= +\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-2)$$

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	/

Per il criterio di Routh, la matrice A ha due autovalori positivi (ho due cambi di segno nel polinomio caratteristico).

Devo quindi studiare la matrice di Raggiungibilità relativa ai singoli ingressi

$$b_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \longrightarrow R_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -24 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -13 \end{vmatrix} \qquad \rho(R_1) = 3 \rightarrow \text{il sistema è stabilizzabile per } b_1$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \longrightarrow R_2 = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 18 \end{vmatrix} \qquad \rho(R_2) = 1 \rightarrow \text{il sistema non è stabilizzabile per } b_2.$$

- Devo trovare un K t.c. $\forall x_0$ l'evoluzione libera tende a zero più velocemente di e^{-2t}. Quindi il polinomio desiderato è dato da:

$$(\lambda+3)^3 = \lambda^3 + 27 + 9\lambda^2 + 27\lambda \Rightarrow P_d(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27$$

$$(A + b_1 K) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 8 \\ -k_1 & 2-k_2 & -k_3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \longrightarrow \det(A + b_1 K - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 8 \\ -k_1 & 2-k_2-\lambda & -k_3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(2-k_2-\lambda)(3-\lambda) - 24k_1 + 3k_3(-1-\lambda) =$$

$$= (-2 + k_2 + \lambda - 2\lambda + k_2\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) - 24k_1 - 3k_3 - 3k_3\lambda =$$

$$= -6 + 3k_2 + 3\lambda - 6\lambda + 3k_2\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda - k_2\lambda - \lambda^2 + 2\lambda^2 - k_2\lambda^2 - \lambda^3 - 24k_1 - 3k_3 - 3k_3\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(3 - 1 + 2 - k_2) + \lambda(3 - 6 + 3k_2 + 2 - k_2 - 3k_3) + (-6 + 3k_2 - 24k_1 - 3k_3) =$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2(4 - k_2) - \lambda(-1 + 2k_2 - 3k_3) + (-6 - 24k_1 + 3k_2 - 3k_3) \triangleq \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27$$

$$\begin{cases} -4 + k_2 = 9 \\ 1 - 2k_2 + 3k_3 = 27 \\ 6 + 24k_1 - 3k_2 + 3k_3 = 27 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} k_2 = 13 \\ k_3 = 27 - 1 + 2k_2 = 52/3 \\ k_1 = 8/24 \end{matrix} \qquad K = \begin{bmatrix} \frac{8}{24} & 13 & \frac{52}{3} \end{bmatrix}$$

④ Si consideri il problema di raggiungibilità in tempo finito di un punto dello spazio di stato a energia minima.

- si definisca il gramiano G_R
- si dimostri il ruolo di G_R nel calcolo dell'ingresso di controllo $u(t)$ a energia minima.

$$G_R(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} \, d\tau$$

Siamo in un punto x_1 dello spazio di stato e vogliamo raggiungere un punto x_{11}. Possiamo suddividere il problema in due sottoproblemi:

$x_1 \to 0$ problema di controllabilità a zero
$0 \to x_{11}$ problema di raggiungibilità a zero

Concentriamoci sul secondo problema (il primo si risolve in modo analogo) e formalizziamolo:

$$x_{11} = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) \, d\tau$$

Esiste una soluzione in forma chiusa per tale problema:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} G_R^{+}(t_0, t_1) x_{11}$$

Questa soluzione è anche quella che fa spendere la minor energia, quindi è la migliore in termini di costo.
Infatti, calcolandone il costo troviamo che:

$$\eta = G_R^{+}(t_0, t_1) x_{11}$$

$$\|u(t)\|^2 = \int_0^{t_1} u^T(\tau) u(\tau) \, d\tau = \eta^T \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} \cdot \eta \, d\tau =$$

$$= x_{11}^T \cdot \left(G_R^{+}(t_0, t_1)\right)^T \cdot G_R(t_0, t_1) \cdot \left(G_R^{+}(t_0, t_1)\right) x_{11} =$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|^2 = x_{11}^T \cdot G_R^T(t_0, t_1) \, x_{11}$$

Quindi l'energia necessaria a $u(t)$ dipende soltanto dallo stato finale e dal gramiano di raggiungibilità.

Ponendoci nel caso in cui lo spazio del Gramiano è tutto $\mathbb{R}^n$ (consideriamo quindi la sua inversa e non la pseudoinversa), per le proprietà di G_R lo possiamo scrivere come:

$$G_R = V^T \Sigma V \qquad \text{con } V^T = V^{-1} \qquad \Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{vmatrix} \qquad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$$\Downarrow$$

$$G_R^{-1} = \left(V^T\right)^{-1} \Sigma^{-1} \left(V^T\right)^{-1} = V \begin{vmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n^2 \end{vmatrix} V^T$$

Posso quindi riscrivere il costo relativo all'ingresso $u(t)$ come:

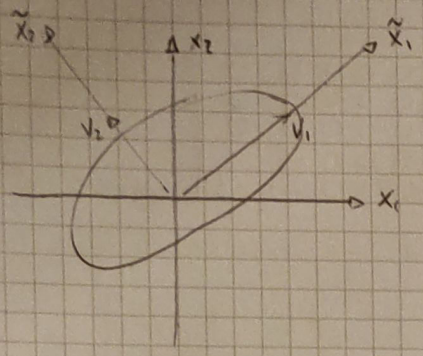
$$\|u(t)\|^2 = x_{11}^T \cdot V \begin{vmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n^2 \end{vmatrix} V^T x_{11} = \tilde{x}_{11}^T \begin{vmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n^2 \end{vmatrix} \tilde{x}_{11}$$

La matrice V è una matrice simmetrica e definita positiva. Essa è formata ~~dagli~~ autovettori associati agli autovalori di Σ, quindi agli elementi sulla diagonale.
Andando a moltiplicarla per x_f andiamo a rimappare x_f in un nuovo spazio di stato, mediante gli autovettori del sistema.

$$\|u(\tau)\|^2 = \tilde{x}_{11}^2 \frac{1}{\sigma_1^2} + \dots + \tilde{x}_{1i}^2 \frac{1}{\sigma_n^2}$$

Quindi l'energia di controllo di arrivo dipende da come lo stato viene rimappato sugli autovettori.

A seguito di questa operazione ho un nuovo sistema di riferimento $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.
Se un versore di R^2 ha componenti allineate con v_1, appartiene chiaramente come un versore.



$$\|u(\tau)\| = \frac{\tilde{x}_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\tilde{x}_2}{\sigma_2^2} = \alpha$$

Ottengo un'ellisse. Tutti i punti interni li posso raggiungere. I punti lungo l'ellisse li raggiungo spendendo α.

Se considero un intervallo di tempo maggiore di quello inizialmente considerato, allora posso giungere in x spendendo meno. Infatti:

$$C_R^+(t_0, t_1) > C_R^+(t_0, t_2)$$

Quindi posso arrivare in x_{11} spendendo meno, però necessito di più tempo.

COMPITO 21.02.2018

① Dato il sistema TC:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- determinare i modi propri del sistema e commentare sulla stabilità interna.
- trovare le c.i. da cui lo stato evolve in uno spazio di dimensione uno per ingresso nullo.
- studiare la BIBO stabilità.
- fornire una realizzazione minima in forma canonica di controllo.

Gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = 2$ m.a. = 2 m.g. = 1 $\longrightarrow (A-2I) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

$\lambda_2 = -1$ m.a. = 1 = m.g.

$\lambda_3 = -1 \pm j$

Modi $\Rightarrow e^{-t}, e^{2t}, t e^{2t}, e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)$

Il sistema non è internamente stabile perché presenta almeno un autovalore a parte reale positiva.

- Ponendo l'ingresso nullo andiamo a considerare la sola risposta libera dello stato, ovvero:

$x(t) = e^{At} x_0$ a TC.

Nel nostro caso è chiesto di trovare le c.i. da cui lo stato evolve in uno spazio di dimensione 1; occorre dunque prendere gli autovettori generalizzati di ordine 1, quindi:

$$(A-2I) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \longrightarrow \ker(A-2I) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$(A+I) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \ker(A+I) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le condizioni iniziali richieste sono: $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\qquad S_{x_0} = \text{SPAN}\{x_0\}$

Gli autovalori complessi coniugati non sono stati presi in considerazione in quanto evolvono in uno spazio di dimensione 2.

- Per la BIBO stabilità devo studiare la f.d.t. del sistema:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = C \begin{vmatrix} s+2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s+1 \end{vmatrix}^{-1} B =$$

$$= C \begin{vmatrix} \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \to \frac{1}{(s-2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s^2+2s+2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2+2s+2} \end{vmatrix} B$$

$$= C \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{(s-2)} & 0 & \frac{1}{(s-2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-2)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{s^2+2s+2} & \frac{s+1}{s^2+2s+2} \end{array}\right] \cdot B =$$

$$= \left[\frac{1}{(s-2)} \quad \frac{1}{(s+1)} \quad \frac{1}{(s-2)^2} \quad \frac{s+1}{s^2+2s+1} \quad \frac{1}{s^2+2s+1}\right] \cdot B = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s-2)^2} \; ;$$

$$G(s) = \frac{(s-2)^s + s+1}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{s^2-4s+4+s+1}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{s^2-3s+5}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{s^2-3s+5}{s+1)(s^2+4-4s)} = \frac{s^2-3s+5}{s^3+s^2+4s+4-4s^2+4}$$

Il sistema non è BIBO stabile in quanto i poli non sono tutti a parte reale negativa.

- Porto il sistema in forma canonica di controllo:

$$\tilde{A} = \left|\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -4 & -8 & 3 \end{array}\right| \qquad G(s) = \frac{s^2-3s+5}{s^3-3s^2+8s+4}$$

$$\tilde{B} = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right| \qquad \tilde{C} = \left|\begin{array}{ccc} 5 & -3 & 0 \end{array}\right|$$

Per verificare che questa sia in forma minima devo studiarne l'osservabilità.

$$\tilde{O} = \left|\begin{array}{ccc} 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 12 & 24 & -4 \end{array}\right| \qquad \rho(O) = 3$$

Il sistema trovato è in forma minima. È infatti completamente controllabile e completamente osservabile.

② Dato il sistema TC non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x} = (y+3)^3 \\ \dot{y} = -ax \end{cases}$$

- Trovare gli equilibri al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- Descrivere gli andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi per $a \leq 0$.
- Discutere la stabilità degli equilibri al variare di a.

Pongo $x = x_1$, $y = x_2$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_2+3)^3 \\ \dot{x}_2 = -a x_1 \end{cases}$

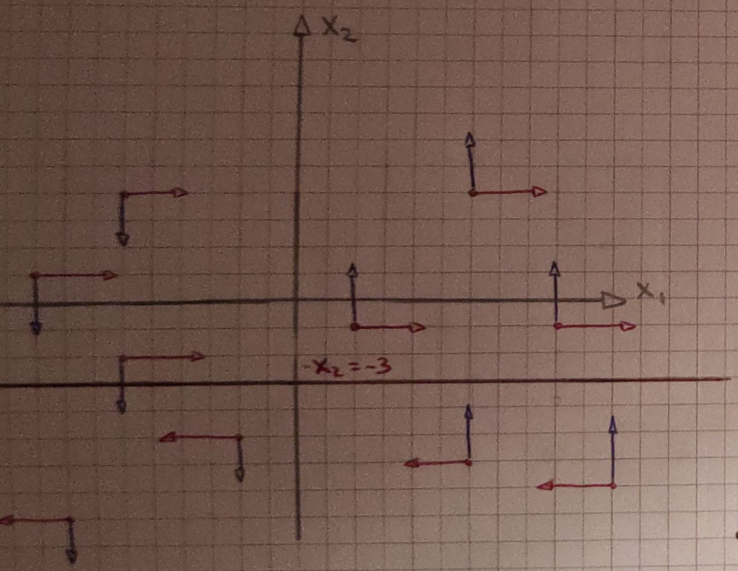
Studio gli equilibri:

$$\begin{cases} 0 = (x_2+3)^3 = x_2^3 + 27 + 9x_2^2 + 27x_2 \\ 0 = -a x_1 \end{cases} ;$$

EQUILIBRI

$x_2 = -3$
$0 = -a x_1$ $\longrightarrow$ $a = 0$ $(\forall x_1, -3)$

$a \neq 0$ $(0, -3)$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_2+3)^3 \longrightarrow \begin{cases} x_2 > -3 & \dot{x}_1 > 0 \\ x_2 < -3 & \dot{x}_1 < 0 \end{cases} \\ \text{frecce orizzontali} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\underbrace{a}_{\text{negativo}} x_1 \longrightarrow \begin{cases} x_1 > 0 & \dot{x}_2 > 0 \\ x_1 < 0 & \dot{x}_2 < 0 \end{cases} \text{ per } a < 0 \\ \text{frecce verticali} \end{cases}$$

L'equilibrio in $(0, -3)$ dello spazio delle fasi risulta essere instabile.

Studio la stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3x_2 + 18x_2 + 27 \\ -a & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} tr(A) = 0 \\ det(A) = a(3(-3) + 18(-3) + 27) = \\ \qquad = a(-36) \end{array}$$

Per $a \leq 0$ non posso concludere. Per $a > 0$ l'equilibrio è instabile.

③ Dato il sistema TD:

$$x_{k+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} x_k + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} x_k$$

si dica se:

- è possibile costruire uno stimatore dead-beat. In caso positivo, costruirlo.
- è possibile costruire un controllore che, retroazionando lo stato stimato, annulla l'evoluzione libera dello stato in un numero finito di passi. In tal caso, calcolarlo.

- Lo stimatore dead-beat è caratterizzato dall'avere tutti i poli nulli. Affinché si possa costruire bisogna verificare che (A, C) sia rivelabile, cioè che la matrice di osservabilità sia di rango pieno.

$$O = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \rho(O) = 2$$

Però l'autovalore che non rientra nello spazio di O è $\lambda = 0$, quindi lo stimatore può comunque essere realizzato.

$$A + LC = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & 1+l_1 & 0 \\ 1+l_2 & 1+l_2 & 0 \\ l_3 & l_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Affinché $(A+LC)$ abbia tutti i poli nulli occorre porre:

$$l_3 = 0 \qquad l_1 = 0 \qquad l_2 = -1 \longrightarrow L = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$A + LC = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- Per il controllore devo invece studiare:

$$A + BK = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+u_1 & 1+u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

È richiesto che l'evoluzione libera si annulli in un numero finito di passi. Ciò si traduce nel fatto che la matrice $(A+BK)$ deve avere tutti gli autovalori nulli.
Basta quindi porre:

$$u_1 = -1 \quad u_2 = -1 \quad u_3 = 0 \longrightarrow K = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

④ Formulare il problema di controllo ottimo in tempo infinito per sistemi lineari TI, TC. e:

- si specifichino le condizioni necessarie e sufficienti perché il problema ammette soluzioni.
- si dia una dimostrazione dell'enunciato precedente.
- si dia una espressione analitica per la soluzione (eventuale ottimo).

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt \qquad \text{con } \underline{\dot{x} = Ax + Bu}$$

Affinché il problema ammetta soluzione il sistema deve essere tale per cui:

(A,B) sia stabilizzabile, ovvero sia completamente raggiungibile o gli autovalori non raggiungibili devono essere A.S.

(A,C) deve essere rilevabile, quindi (A,C) completamente osservabile (o (A^T, C^T) completamente raggiungibile) altrimenti tali per cui gli autovalori instabili appartengono al sottospazio osservabile.

necessario

Perché se (A,B) non è stabilizzabile, allora non esiste alcun controllo che porti lo stato da zero; se (A,C) non è osservabile, gli autovalori instabili non compaiono in $\underline{Q = C^T C}$ quindi anche se il sistema diverguisse il controllo non se ne renderebbe conto.

sufficiente

Il sistema di controllo ottimo è posto con $t_f \to \infty$, quindi ovvero fare un cambio di base per l'Hamiltoniana (che lì era è descritto con un t_f finito).

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ -S_\infty & I_{n\times n} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H} = T^{-1} H T = \begin{vmatrix} I & 0 \\ -S_\infty & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -S_\infty A - Q & -A^T + S_\infty BR^{-1}B^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ S_\infty & I \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A - S_\infty BR^{-1}B^T & -BR^{-1}B^T \\ -S_\infty A - Q - S_\infty A^T + S_\infty BR^{-1}B^T S_\infty & -A^T + S_\infty BR^{-1}B^T \end{bmatrix}$$

$\underline{-S_\infty R^{-1} B^T = K}$

$$= \begin{bmatrix} A + BK & -BR^{-1}B^T \\ \underbrace{S_\infty A + A^T S_\infty + Q - S_\infty BR^{-1}B^T S_\infty}_{\text{ARE } (S_\infty \text{ è soluzione della ARE, quindi questo elemento } = 0)} & -A^T - K^T B^T \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice $\tilde{H}$, e conseguentemente della matrice Hamiltoniana essendo simili, sono quelli di $(A+BK)$ e i loro opposti. Questo perché il polinomio caratteristico di H è pari.
Chiaramente gli autovalori negativi di H sono quelli da imporre al controllore retroazionato $(A+BK)$ perché K sia stabilizzante per il sistema.

In breve, vado a calcolare gli autovalori di H, considero solo quelli asintoticamente stabili e vado a risolvere il problema di "pole placement", ovvero trovo un vettore 'K' tale per cui $(A+BK)$ abbia gli autovalori desiderati.

Questo è un metodo alternativo al risolvere la ARE:

$$SA + A^T S + Q - SBR^{-1}B^T S = 0$$

COMPITO 02.07.2018

(1) Si consideri il sistema TC non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^4 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^3 \end{cases}$$

- determinare i punti di equilibrio per $u=0$ e studiarne la stabilità.
- verificare che esiste un ingresso lineare nello stato che rende il punto $(-1,-1)$ un equilibrio A.S. Dopo averlo trovato, determinarlo.

- $$\begin{cases} 0 = -x_2 - x_1^4 \\ 0 = -x_2^3 + x_1^3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} 0 = -x_2(1+x_2^3) \\ 0 = -x_2^3 + x_1^3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \quad x_1 = 0 \\ x_2^3 = -1 \quad \text{OU!} \quad x_1 = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 0 = -x_2 - x_1^4 \\ x_1^3 = x_2^3 \end{cases} \longrightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = -1$$

EQUILIBRI
$(0,0)$
$(-1,-1)$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1-4x_2^3 \\ 3x_1^2 & -3x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$ Non posso concludere

$$A|_{(-1,-1)} = \begin{vmatrix} 0 & +3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$ $\left.\begin{matrix} tr(A) = -3 \\ det(A) = -9 \end{matrix}\right]$ INSTABILE! un autovalore ha parte reale >0.

$$V(x) = \frac{1}{2}(1+x_1^2) + \frac{1}{4}x_1^4$$

$$\dot{V}(x) = \cancel{-x_1^3 x_2} - x_1^3 x_2^4 - x_2^4 + \cancel{x_1^3 x_2} =$$
$$= -x_1^3 x_2^4 - x_2^4 = -x_2^4(1+x_1^3)$$

Nell'intorno dell'origine la $\dot{V}(x)$ è S.D.N., quindi l'origine è un equilibrio stabile

La Salle - Krasovski:

$R: \{ x(t) \in \mathbb{R} \mid \dot{V}(x(t)) = 0 \}$

$$\left.\begin{matrix} x_2(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = 0 \end{matrix}\right| \longrightarrow \left.\begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \\ 0 = x_1^3 \end{matrix}\right\}$$ L'origine è un equilibrio A.S.

- Devo verificare che il sistema linearizzato (A,B) è stabilizzabile, cioè se è completamente raggiungibile.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad R(A,B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \rho(R) = 2$$

Il sistema è stabilizzabile. Vado dunque a cercare un ingresso u che stabilizzi il sistema.

$$\det(A+Bu-\lambda I) = \begin{vmatrix} u_1-\lambda & 3+u_2 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (u_1-\lambda)(-3-\lambda) - 9 - 3u_2 \triangleq (\lambda+1)^2$$

$$\lambda^2 + \lambda(3-u_1) + (-3u_1 - 9 - 3u_2) \triangleq \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} 3-u_1 = 2 \\ -3u_1 - 9 - 3u_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} u_1 = 5 \\ u_2 = \frac{25}{3} \end{matrix} \qquad u = \begin{bmatrix} 5 & \frac{25}{3} \end{bmatrix} x$$

② Dato il sistema TC:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- Dato $b=0$ determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ le proprietà del sistema (stabilità interna, BIBO, raggiungibilità e osservabilità con il dettaglio dei relativi spazi).
- Dato $b \neq 0$ determinare il valore $a \in \mathbb{R}$, rappresentare e la tipologia di connessioni che deve un sistema complessivo a parità funzione. Motivare le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema complessivo.

Stabilità interna $\qquad b=0$

Gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = a$

$\forall a \in \mathbb{R}$ il sistema è internamente instabile

BIBO stabilità

$$G(s) = C\,(sI-A)^{-1}B = C \begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-a \end{vmatrix}^{-1} B = C \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)^2} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)} & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \frac{1}{(s-1)} & 0 \\ & & 0 & \frac{1}{(s-a)} \end{array}\right] B =$$

$$= \left[0 \quad \frac{1}{(s+1)} \quad \frac{1}{(s-1)} \quad \frac{1}{(s-a)}\right] B \Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s-1)} = \frac{s-\cancel{1}+s+\cancel{1}}{(s-1)(s+1)} = \frac{2s}{(s-1)(s+1)}$$

Il sistema non è BIBO stabile perché la $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva.

Raggiungibilità & Osservabilità

$\lambda_1 = -1 \qquad m.a. = 2 \qquad m.g. = 1$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = a \end{array}\right]$ per $a=1$ $\quad m.a. = 2 \quad m.g. = 2$ $\Rightarrow$ il sistema non è né completamente R né completamente osservabile (nei sistemi SISO condizione necessaria per avere completa Raggiungibilità e Osservabilità è avere $m.g = 1$).
Lo stesso vale anche per $a = -1$.

$a = 1$, $a = -1$ $\quad \dim(R) = 2 = \dim(O)$

Il sistema non è mai completamente raggiungibile, in quanto l'autovalore associato ad a non appartiene mai allo spazio raggiungibile (R) data la struttura di B.

Allo stesso modo, il sistema non è mai completamente osservabile. Al più lo spazio di Osservabilità ha $\dim = 3$ per $a \neq (0, 1, -1)$, altrimenti ha $\dim = 2$.

• per $b \neq 0$ ho due sistemi connessi in parallelo. Infatti la connessione in parallelo è caratterizzata dalle forme:

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \end{vmatrix} \qquad \tilde{C} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

Nei sistemi in parallelo si perde di raggiungibilità e di osservabilità se le due f.d.t. associate a ciascun sistema hanno almeno un polo in comune. Infatti la f.d.t. complessiva è data da:

$$G_{TOT}(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{n_1(s)\, d_2(s) + n_2(s)\, d_1(s)}{d_1(s) \cdot d_2(s)}$$

Nel nostro caso, per $b \neq 0$, questo avviene solo se $a = -1$.

$$\left.\begin{aligned} G_1(s) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & (s+1) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(s+1)} \\ G_2(s) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-a \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1 \\ b \end{vmatrix} = \frac{1}{(s-a)} + \frac{b}{(s-1)} \end{aligned}\right\}$$

③ Dato il sistema TD:

$$x_{k+1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} x_k + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} u_k$$

• si discuta la raggiungibilità del sistema da u_k e dalle sue componenti prese singolarmente.
• si determini, se possibile, una retroazione dello stato $u_k = K x_k$ tale che il sistema a ciclo chiuso abbia il generico polinomio caratteristico $p(\lambda) = z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$.

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots$$

$\rho(R) = 4$ il sistema è completamente raggiungibile.

$$b_1 \rightarrow R(A, b_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \rho(R) = 3$$

Il sistema non è mai completamente raggiungibile da un solo ingresso. Ne segue che non è stabilizzabile, in quanto non posso intervenire sugli autovalori non raggiungibili, cioè non posso portarli al valore desiderato.

Posso usare il lemma di Hamilton, in quanto pur l'ultimo permette che il sistema di partenza sia completamente raggiungibile, cosa in questo caso.

Vado a costruire la matrice Q:

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} b_1 & Ab_1 & A^2 b_1 & b_2 \end{array}$$

Mi fermo ad $(A^2 b_1)$ perché il vettore successivo è l.d. dei precedenti.

Vado ora a costruire la matrice S: $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$H = SQ^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{T} \rightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per cui il sistema ottenuto con punto retroazione proporzionale è dato da:

$$(A+BH) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Quindi il sistema è completamente raggiungibile nel primo ingresso

$$R(A+BH, b_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \underline{\rho(R) = 4}$$

Vado ora a determinare la retroazione per imporre al nuovo sistema gli autovalori desiderati.

$$(A+BH+b_1u) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1+u_3 & u_4 \end{vmatrix} \rightarrow \det(A+BH+b_1u-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ u_1 & u_2 & 1+u_3 & u_4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ u_2 & 1+u_3 & u_4-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ u_1 & 1+u_3 & u_4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2(u_4-\lambda) + u_2 + \lambda(1+u_3)\right) - (u_1) =$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 u_4 - \lambda^3 + u_2 + \lambda + \lambda u_3\right) - u_1 =$$

$$= -\lambda^3 u_4 + \lambda^4 - \lambda u_2 - \lambda^2 - \lambda^2 u_3 - u_1 =$$

$$= \lambda^4 - \lambda^3 u_4 + \lambda^2(-1-u_3) + \lambda(-u_2) - u_1 \triangleq z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$\begin{cases} -u_4 = \alpha_3 \\ -1-u_3 = \alpha_2 \\ -u_2 = \alpha_1 \\ -u_1 = \alpha_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \cancel{u_1 = \alpha_0} \\ \cancel{u_2 = \alpha_1} \\ u_3 = \\ \end{matrix} \quad \begin{cases} u_1 = -\alpha_0 \\ u_2 = -\alpha_1 \\ u_3 = -1-\alpha_2 \\ u_4 = -\alpha_3 \end{cases}$$

La matrice di retroazione complessiva è:

$$K = H + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_1 & -1-\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_1 & -1-\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

④ Si consideri il problema del controllo ottimo per sistemi lineari TC e:

- si enunciino i due problemi di controllo ottimo: tempo finito prefissato e a orizzonte infinito.
- si discutano le differenze nelle due formulazioni.
- si discutano le differenze nei requisiti da imporre perché i due problemi abbiano soluzione.
- si proponga la procedura per avere la soluzione.

TEMPO FINITO

$$J = \frac{1}{2} x^T S x + \frac{1}{2}\int_0^{T_f} [x^T Q x + u^T R u]\, d\tau$$

TEMPO INFINITO

$$J = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u]\, d\tau$$

Nel problema a Tempo Finito le condizioni da imporre sono che le matrici devono essere:

- S, Q reali, simmetriche e semi definite positive.
- R reale, simmetrica e definita positiva.

A tempo infinito bisogna imporre che il sistema di partenza sia tale per cui:

- (A,B) sia stabilizzabile (altrimenti il controllo andrebbe a divergere).
- (A,C) sia rivelabile (in modo che i modi instabili appaiano nel funzionale e se anche il sistema tende a divergere il controllore se ne accorga).

Si tratta di problemi strutturalmente molto diversi. Nel controllo a tempo finito (LQR - Linear Quadratic Regular) vogliamo trovare un ingresso che minimizzi il funzionale e che soddisfi certi requisiti (nel caso del vincolato).
La soluzione si trova scrivendo la funzione Hamiltoniana e ricavando da questa le equazioni di Eulero Lagrange.

$$H = g + \lambda^T f = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T [A x + B u]$$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{dH}{d\lambda} = A x^* + B u^* \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{dH}{dx} = -Q x^* - A^T \lambda^* \\ 0 = \dfrac{dH}{du} = u^* R + B^T \lambda^* \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} u^* &= -R^{-1} B^T \lambda^* \\ \dot{x}^* &= A x^* - B R^{-1} B^T \lambda^* \\ \dot{\lambda}^* &= -Q x^* - A^T \lambda^* \end{aligned}$$

Scrivendo le due dinamiche $(\dot{x}^*, \dot{\lambda}^*)$ in forma matriciale si ricava la matrice Hamiltoniana.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}^*$$

Integrando si trovano i valori di $x(t_f)$ e $\lambda(t_f)$ in funzione di $\lambda(t_0)$ e $x(t_0)$ (o volte anche in funzione di un ignoto 't' mediante il teorema di Bellman). Facendo le dovute sostituzioni si calcola il valore di $\lambda(t_0)$, poi quello di $\lambda^*(t_f)$ che si va a sostituire nell'ingresso per trovare il risultato desiderato.

Chiaramente questa proposta è la soluzione al caso non vincolato e senza condizioni al contorno $(x(t_f), t_f)$ fissi.
Se così non fosse, la soluzione ha comunque la medesima struttura, quindi si calcola allo stesso modo, però occorre imporre delle condizioni.

$$\lambda^*(T) = S(x(T))\, x(T)$$

$$H + \frac{d}{dT} u(x(0,T)) = 0$$

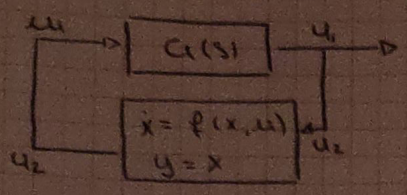
A tempo infinito, chiaramente non abbiamo la componente legata a:

$X^{+}(\infty) S(\infty) X_{\infty}$

ovvero perché se $x_0 \neq 0$ l'integrale diverge ed è chiaramente una condizione da evitare.
La soluzione prende di calcolare gli autovalori della matrice Hamiltoniana e di considerare tra punti solo quelli stabili.
Mediante una iterazione del tipo $(M = LX)$ si vanno in pesca tali autovalori al sistema.

COMPITO 23.07.2018

① Si consideri il sistema TC:



$$\dot{x} = -x - \sin^2 x + u$$
$$y = x$$
$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

- Determinare il sistema in forma di stato.
- Trovare gli equilibri e studiarne la stabilità con il metodo indiretto
- Enunciare il corollario LaSalle Mosomulli.

Porto il sistema in forma canonica di controllo:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Da qui ho:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + -x_2 + u_1 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} u_1 = y_2 \\ u_2 = y_1 \end{matrix}$$

$$f(x,u) = -x - \sin^2 x + u_2$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 - \sin^2 x_3 + x_1 + x_2 \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 - \sin^2 x_3 + x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$y_2 = x_3 = u_1$$

Gli equilibri sono:

$$\begin{cases} 0 = \cancel{x_2} \\ 0 = -x_1 - \cancel{x_2} + x_3 \\ 0 = -x_3 - \sin^2(x_3) + x_1 + \cancel{x_2} \end{cases} ;$$

EQUILIBRI
(0,0,0)

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ 0 = -\cancel{x_3} - \sin^2(x_3) + \cancel{x_3} \end{cases}$$

L'origine è l'unico equilibrio del sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-2\cos(x_3) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow -\lambda(-1-\lambda)(-3-\lambda) - 3 - \cancel{\lambda} + 1 + \cancel{\lambda} =$$
$$= (\lambda^2+\lambda)(-3-\lambda) - 2 =$$
$$= -3\lambda^2 - 3\lambda - \lambda^3 - \lambda^2 - 2 =$$
$$= +\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

L'origine è un equilibrio A.S. per il criterio di Routh (tutti i coefficienti sono positivi e non ho cambi di segno).

- Il corollario di LaSalle-Mosomulli dice che se la $V(x)$ è D.P. e $\mathcal{L}V(x)$ è SDN, ma tale che:

$$R = \{x \in \Omega \mid \mathcal{L}V(x) = 0\}$$

cioè tale che l'insieme invariante massimo contiene solo l'origine come traiettoria, allora quest'ultima è un equilibrio A.S.

② Dato il sistema TC:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- portare il sistema in forma di Kalman.
- trovare la $G(s)$.
- commentare la BIBO stabilità del sistema.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 3 & \\ 1 & -1 & 1 & \end{bmatrix} \qquad \rho(R) = 2 \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ & \vdots & & \end{bmatrix} \qquad \rho(O) = 3 \qquad \mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T_{R\bar{O}} = \left[T_R \mid T_{\bar{O}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ker(T_R, T_{\bar{O}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix}] \, w_1 \\ ] \, w_2 \end{matrix}$$

$$T_{R\bar{O}} = T_R \, w_1 = T_{\bar{O}} (-w_2) = \langle (0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)^T \rangle$$

$$T_{RO} = \langle (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1)^T \rangle$$

$$T_{\bar{R}\bar{O}} = \emptyset$$

$$T_{\bar{R}O} = \langle (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)^T ; (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)^T \rangle$$

$$T = \left[T_{RO} \mid T_{R\bar{O}} \mid T_{\bar{R}\bar{O}} \mid T_{\bar{R}\bar{O}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T^{-1}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \overset{A_{RO}}{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_{RO}} \qquad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C_{RO}

$$G(s) = C_{RO} (sI - A_{RO})^{-1} B_{RO} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{s+1} \cdot 1 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

la f.d.t. ha solo poli a parte reale minore di zero, quindi il sistema è BIBO stabile.

③ Dati i sistemi TC SISO Σ_1 e Σ_2 enunciare e dimostrare le condizioni necessarie e sufficienti affinché:

- il sistema ottenuto collegando in parallelo i due sistemi sia raggiungibile e osservabile.
- il sistema in serie sia raggiungibile
- il sistema in serie sia osservabile.

Due sistemi collegati in parallelo sono nella forma:

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \end{vmatrix} \qquad C = (C_1 \quad C_2)$$

e la f.d.t. totale è data dalla somma di quelle dei singoli sistemi.

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)} + \frac{n_2(s)}{d_2(s)} = \frac{n_1 d_2 + n_2 d_1}{d_1(s)\, d_2(s)}$$

Ne segue che, eseguendo una connessione in parallelo si ha una cancellazione nella $G(s)$ solo se le due f.d.t. hanno almeno un polo in comune.

In questo caso si perde sia di raggiungibilità sia di osservabilità, perché il sistema complessivo ha a perdere e autovalori che nel caso SISO non posso recuperare né con B né con C.

- Se invece i sistemi sono in serie, allora sono:

$$\xrightarrow{u} \boxed{\Sigma_1} \xrightarrow[u_2]{u_1 =} \boxed{\Sigma_2} \xrightarrow{y_2} \qquad u = u_1 \quad y = y_2 \qquad u_2 = y_1$$

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B u$$
$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 \cdot C x_1$$

$$y_1 = C_1 x_1$$
$$y_2 = C_2 x_2 = y$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Per la f.d.t., quella è data dal prodotto delle singole. Possono quindi avvenire due casi:

$$\longrightarrow \boxed{\frac{n_1(s)}{d_1(s)}} \longrightarrow \boxed{\frac{n_2(s)}{d_2(s)}}$$

Perdo di Raggiungibilità perché perdo qualcosa per aver posto un qualcosa in ingresso.

$$\longrightarrow \boxed{\frac{n_1(s)}{d_1(s)}} \longrightarrow \boxed{\frac{n_2(s)}{d_2(s)}}$$

Perdo osservabilità, perché ho posto qualcosa in uscita

④ Si consideri il problema di controllo ottimo:

$$u^* = \arg\min_u \left[h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\, dt \right]$$

soggetto al vincolo differenziale $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ con $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x_0 \text{ noto} \end{cases}$. Trovare analiticamente la soluzione ricorrendo alle equazioni di Eulero e discutere i 4 casi notevoli che permettono di definire le condizioni al contorno.

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\, dt = \int_{t_0}^{t_f} \left[g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dx} h(x(t), t)\, \dot{x} + \frac{d}{dt} h(x(t), t) \right] dt$$

Scrivo il funzionale aumentato:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dx} h(x(t), t)\, \dot{x} + \frac{d}{dt} h(x(t), t) + \lambda^T \left[f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) \right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} g_a(x(t), u(t), \lambda(t), t)\, dt$$

Posso risolvere il problema o imponendo le equazioni di Eulero alla g_a o calcolando la matrice Hamiltoniana e ricavando da questa le equazioni di Eulero-Lagrange.

$$H(x(t), u(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda^T f(x(t), u(t), t)$$

Da questa ricavo le equazioni di Eulero Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{dH}{d\lambda} = f(x^*(t), u^*(t), t) \\ \dot{\lambda}^*(t) = -\dfrac{dH}{dx} = -\dfrac{d}{dx} g(x^*(t), u^*, t) - \left[\dfrac{d}{dx} f(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T \lambda^*(t) \\ 0 = \dfrac{dH}{du} = \dfrac{d}{du} g(x^*(t), u^*(t), t) + \left[\dfrac{d}{du} f(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T \lambda^*(t) = 0 \end{cases}$$

Posso quindi scrivere le condizioni al contorno mediante l'Hamiltoniana:

$$0 = \left[\frac{d}{dx} h^T(x^*, t_f) - p^*(t) \right] dx_f + \left[H(x^*(t), u^*(t), t) + \frac{d}{dt} h(x^*, t_f) \right] dt_f$$

In base al caso nel quale mi trovo dovrò imporre l'una e/o l'altra condizione.

<u>caso 1</u> $\left.\begin{matrix} t_f \\ x_f \end{matrix}\right|$ fisso $\rightarrow$ non devo aggiungere alcune condizioni al contorno al problema di ottimo.

<u>caso 2</u> $\left.\begin{matrix} t_f \text{ FISSO} \\ x_f \text{ LIBERO} \end{matrix}\right| \rightarrow$ devo imporre $\lambda^*(t) = \dfrac{d}{dx} h^T(x^*, t_f)$

<u>caso 3</u> $\left.\begin{matrix} x_f \text{ FISSO} \\ t_f \text{ LIBERO} \end{matrix}\right| \rightarrow$ devo imporre $H(x^*(t), u^*(t), t) + \dfrac{d}{dt} h(x^*, t_f) = 0$

<u>caso 4</u> $\begin{matrix} x_f \\ t_f \end{matrix}$ LIBERI $\rightarrow$ devo imporre entrambi i vincoli per risolvere il mio problema di ottimo.

Compito 17.09.2018

(1) Si consideri il sistema TC non lineare:

$$\dot{x}_1 = -x_1(x_1^2+x_2^2)+x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1+u$$

- per $u=0$ trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
- determinare per u la condizione di esistenza di equilibri reali.

$\underline{u=0}$

$$\begin{cases} 0 = -x_1(x_1^2+x_2^2)+x_2 \\ 0 = -x_1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} x_1=0 \rightarrow x_2=0 \\ \underline{(x_1^2+x_2^2)=0} \Rightarrow x_1^2=-x_2^2 \quad \text{NO!} \end{array}$$

EQUILIBRIO : $(0,0)$

Studio la stabilità con il metodo indiretto:

$$A = \begin{vmatrix} -3x_1^2-x_2^2 & -2x_1x_2+1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} Tr(A)=0 \\ det(A)=1 \end{array}$$

Non posso concludere perché la matrice A ha un autovalore nullo

Procedo nello studio della stabilità dell'equilibrio con il Metodo Diretto.

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2(x_1^2+x_2^2)+\cancel{x_1x_2}-\cancel{x_1x_2} \quad \underline{\text{S.D.N.}}$$

La $\dot{V}(x)$ è SDN perché si annulla nell'origine, ma anche per $(0, \forall x_2)$. Ne segue che l'origine è un equilibrio localmente stabile.
Devo studiare l'insieme.

$$R = \{x \in \mathcal{D} \mid \dot{V}(x)=0\} = \{(0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t)=0 \\ x_1(t)=0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} 0=x_2 \\ \dot{x}_2=0 \end{array} \quad \text{l'origine è un equilibrio A.S.}$$

- Determino la c. di esistenza per equilibri reali.

$$\begin{cases} 0 = -x_1(x_1^2+x_2^2)+x_2 \\ 0 = -x_1+u \end{cases} \quad \begin{cases} u = x_1 \\ 0 = -u^3 - ux_2^2+x_2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 = ux_2^2 - x_2 + u^3 \\ u = x_1 \end{array}$$

$$\Delta = 1-4u^4 \geq 0$$

affinché il sistema abbia soluzioni reali, il determinante deve essere maggiore/uguale a zero. Quindi:

$$4u^4 \leq 1 \rightarrow u \leq \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \rightarrow u \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \; u \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

② Dato il sistema TD:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\1&0&0&0\\-1&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

- studiare lo spazio di raggiungibilità in $i=1,\dots,4$ passi. Determinare se R_i è invariante. Lo spazio raggiungibile è un sottospazio ciclico?
- determinare una realizzazione minima in forma di stato e la $G(s)$.
- durante l'evoluzione libera di minimo (per $k=0$) è uscito $y(0)=[1\ \ -1]^T$. Quanti e quali stati possono permettere questa estrema?

$$R_{T=1}=B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad \rho(R_1)=2$$

$$R_{T=2}=[B\ \ AB]=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\1&0&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad \rho(R_{T=2})=3$$

$$R_{T=3}=[B\ \ AB\ \ A^2B]=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&1\\1&0&-1&-1&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad \rho(R_{T=3})=\rho(R_{T=4})=\rho(R_{T=2})=3$$

Lo spazio di raggiungibilità è A-invariante per $(T=2)$; infatti dopo due passi la matrice va in saturazione. Il fatto che sia A-invariante significa che:

$$\forall x\in R \rightarrow Ax\in R$$

Per quanto riguarda il sottospazio ciclico, nei sistemi SISO lo spazio di raggiungibilità è sempre un sottospazio ciclico, perché generato da:

$$S_{x_0}=\text{SPAN}\{B,\ AB,\ \dots,\ A^{n-1}B\}$$, ovvero è generato da un vettore $(x_0=B)$

e questo vale sia a TC sia a TD.
Nei sistemi MIMO, invece, tale proprietà non è garantita, però lo spazio di raggiungibilità può essere non generabile da un solo vettore.

$$\text{MIMO} \rightarrow R=\{[B_1\ \ B_2\ \ AB_1\ \ AB_2\ \dots]\}$$

Per verificare se R è o no un sottospazio ciclico devo vedere se $\exists$ un vettore 'v' tale che:

$$\langle v,\ Av,\ \dots,A^{n-1}v\rangle$$ sia pari alla matrice di raggiungibilità

Ma, se B_1 e B_2 sono autovettori (come in questo caso) allora R non è un sottospazio ciclico, perché:

$$x_0=B_1-AB_1=\lambda B_1$$

- Scrivo la realizzazione minima di Kalman

$$\text{Im}(R_2)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\qquad T_R\in\mathbb{R}^{4\times3}\qquad T_{\bar R}\in\mathbb{R}^{4\times1}\qquad \text{Ker}(\bar O)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$T=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{T_{RO}\ \ T_R\ \ T_{\bar RO}\ \ T_{\bar R}}=T^{-1}$$

$$\tilde A=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\1&0&0&0\\-1&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\qquad \tilde B=T^{-1}B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad \tilde C=CT=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

A_{RO}, B_{RO}, C_{RO}

Quindi la forma minima di controllabilità è:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per vedere se è in forma minima bisogna verificare che sia completamente osservabile.

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ NO!

$$A_{00} = 1 \qquad B_{00} = [0 \ 1] \qquad C_{00} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C_{00}(sI - A_{00})^{-1} B_{00} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(s-1)} \\ 0 & \frac{-1}{(s-1)} \end{bmatrix}$$

• $k = 0$

$$y(k) = CA^k x(0) \xrightarrow{k=0} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underset{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{C} x(0) \longrightarrow x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

③ Dato il sistema SISO TC: $\dot{x} = Ax + Bu$

chiuso in retroazione con $u(t) = K(r(t) - x(t))$ con K matrice dei guadagni e $x(t)$ uscita scelta di riferimento:

- enunciare e dimostrare la condizione necessaria e sufficiente affinché la dinamica a ciclo chiuso sia totalmente osservabile.
- discutere il ruolo di $r(t)$ nel punto precedente.
- enunciare e dimostrare la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.
- discutere il ruolo di $r(t)$ nel punto precedente.

• <u>Teorema fondamentale assegnamento poli</u>

Dato un sistema SISO (A,B) di dimensione n e dati n autovalori λ desiderati, esiste ed è unico un ingresso u tale che $(A+Bu)$ ha gli $n-\lambda$ desiderati se e solo se (A,B) è completamente raggiungibile.

<u>Condizione necessaria</u> $\Rightarrow$ (A,B) è completamente raggiungibile

Per assurdo (A,B) non è c.R. Allora la porto in forma standard di raggiungibilità:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_R \\ \tilde{x}_{\bar{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_R \\ \tilde{x}_{\bar{R}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

dove:

$\dot{\tilde{x}}_R = A_{11}\tilde{x}_R + A_{12}\tilde{x}_{\bar{R}} + B_1 u$ è il sottosistema c.R.

$\dot{\tilde{x}}_{\bar{R}} = A_{22}\tilde{x}_{\bar{R}}$ è il sottosistema non raggiungibile

Mediante la retroazione avrei:

$$(A+Bu) = \begin{vmatrix} A_{11} B_1 u_1 & A_{12} B_2 u_2 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}$$

quindi con la retroazione non posso intervenire sugli autovalori di A_{22}, cioè della parte non raggiungibile

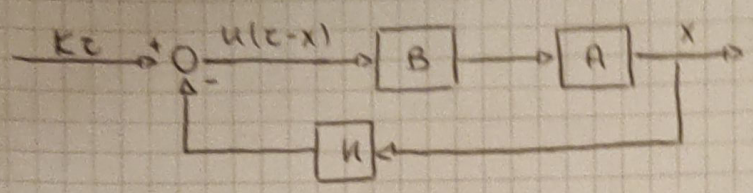
Condizione sufficiente → se (A,B) è c.R. allora $\exists K$.

Scrivo il sistema in forma canonica di controllo

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \mathcal{E}_{n-1\times n-1} \\ 0 & & \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1} \end{vmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow (\tilde{A}+\tilde{B}K) = \begin{bmatrix} 0 & & I \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ -a_0+k_1 & \cdots & -a_{n-1}+k_n \end{bmatrix}$$

Per l'assegnamento degli autovalori devo risolvere un sistema di n equazioni in n incognite, il quale è sempre risolvibile.

• Il segnale $r(\tau)$ diventa l'ingresso del nuovo sistema:



$$\underline{r = K^{-1}u'}$$

$$\dot{x} = (A+BK)x + Bu'$$

• Affinché il sistema retroazionato sia stabilizzabile e cioè chiuso, gli autovalori instabili di A (se ci sono) devono appartenere al sottospazio raggiungibile. Solo in questo modo, infatti, possono essere modificati mediante retroazione.

Il segnale $r(\tau)$ diventa il nuovo riferimento, ma solo per gli stati raggiungibili.

(4) Dato il sistema TC:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

calcolare la matrice di retroazione ottima K $(u = Kx)$ che minimizza il funzionale:

$$J = \int_0^\infty y(\tau)^2 + u(\tau)^2 \, d\tau \rightarrow \int_0^\infty x^T Q x + u(\tau)^2$$

Calcolo la matrice Hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

con $Q = C^T C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad R = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Gli autovalori di H sono quelli di $(A+BK)$ e i loro opposti.

$$(H-\lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\left((-2-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2)\right) + 1(-1) =$$
$$= -\lambda(4\lambda + \cancel{2\lambda^2} - \cancel{2\lambda^2} - \lambda^3) - 1 = \underline{\lambda^4 - 4\lambda^2 - 1}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda^2 = x \\ \lambda^4 = x^2 \end{matrix}\right] \; x^2 - 4x - 1 = (x+2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$$

$$\lambda = \sqrt{x} = \pm\sqrt{(-2+\sqrt{3})} \; \pm\sqrt{(-2-\sqrt{3})} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = i\sqrt{-2+\sqrt{3}} & \lambda_2 = i\sqrt{-2-\sqrt{3}} \\ \lambda_3 = -i\sqrt{-2+\sqrt{3}} & \lambda_4 = -i\sqrt{-2-\sqrt{3}} \end{matrix}$$

devo imporre gli autovalori ad un sistema retroazionato per minimizzare il funzionale di costo.

$$(A+BK) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & -2k_2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A+BK) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ k_1 & -2k_2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-2k_2-\lambda) - k_1 = \lambda^2 + 2k_2\lambda - k_1 \triangleq (\lambda+\sqrt{2-\sqrt{3}})(\lambda+\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

COMPITO 29.11.2018

① Dato il sistema TD:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a x_2(k) - x_2^3(k) \\ x_2(k+1) = -a x_1(k) + x_1^3(k) + u \end{cases}$$

- determinare per $u=0$ la stabilità dell'origine al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- trovare un ingresso lineare che renda l'origine A.S. per $a=-1$.
- trovare una candidata di Lyapunov che verifica la stabilità del sistema retroazionato.

$\underline{u=0}$ STABILITÀ ORIGINE

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a-3x_2^2 \\ -a+3x_1^2 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}$$

Gli autovalori sono complessi a parte reale nulla, quindi non posso concludere con il metodo indiretto.

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Delta_f V(x) = [x_1(k+1)]^2 + [x_2(k+1)]^2 - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= a^2 x_2^2 + \cancel{x_2^6} - 2a x_2^4(k) + a^2 x_1^2(k) + \cancel{x_1^6(k)} - 2a x_1^4(k) - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= -2a(\cancel{x_2^4 + x_1^4}) + a^2(x_2^2 + x_1^2) - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= (a^2 - 1)(x_2^2 + x_1^2)$$

- $a = 1$, $a = -1$ $\Big]$ $\Delta_f V(x) = 0 \rightarrow$ Equilibrio stabile (SDN)
- $a > 1$ $\Delta_f V(x) > 0 \rightarrow$ Equilibrio instabile (DP)
- $a < 1$ $(a \neq -1)$ $\Delta_f V(x) < 0 \rightarrow$ Equilibrio A.S. (D.N.)

- $\underline{a=-1}$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad R(A,B) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Il sistema è stabilizzabile!

$$\det[(A+BK) - \lambda I] = \det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1+k_1 & k_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - k_2\lambda + 1 + k_1 \triangleq (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} -k_2 = 2 \\ 1 + k_1 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} k_1 = 0 \\ k_2 = -2 \end{matrix} \qquad K = [0 \quad -2]$$

$\underline{u = Kx}$ ingresso lineare che rende l'origine A.S. per $\underline{a=-1}$

$$(A+BK) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$V(x) = x^T P x$

$\Delta V = x^T(A^T P A - P)x = -x^T Q x$ | T.D.

$$-Q = A^T P A - P \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} P_3 & P_2 \\ -P_1 - 2P_3 & -P_3 - 2P_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - P = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & -P_3-2P_2 \\ -P_3-2P_2 & P_1-\cancel{2P_3}+\cancel{2P_3}+4P_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_2-P_1 & -2P_3-2P_2 \\ -2P_3-2P_2 & P_1+3P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} P_2-P_1=-1 \\ -2P_3-2P_2=0 \\ P_1+3P_2=-1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} P_2=1+P_1 \rightarrow P_2=0 \\ P_1=-1 \\ P_3=0 \end{cases} \qquad P=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x)=x^T \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x$$

④ Dato il sistema TC:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- studiare stabilità interna, raggiungibilità e osservabilità.
- determinare la forma di Kalman e la BIBO stabilità.
- commentare la relazione tra raggiungibilità e controllabilità nei sistemi TC.

Gli autovalori di A sono: $\left.\begin{array}{l} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-1 \\ \lambda_3=1 \end{array}\right|$ poiché un autovalore non ha parte reale minore di zero, allora il sistema diverge, quindi il sistema non è internamente stabile.

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Il sistema non è né completamente raggiungibile né completamente osservabile.

$$\mathcal{I}m(R)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathcal{I}m(O)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{I}m(\bar{O})=\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $T_{R\bar{O}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \ker(T_{R\bar{O}})=\emptyset$

$T_{R\bar{O}}=\emptyset$

$T_{RO}=\langle (1\ 0\ -1\ 0)^T \rangle$

$T_{\bar{R}\bar{O}}=\langle (0\ 0\ 1\ 0)^T ; (0\ 0\ 0\ 1)^T \rangle$

$T_{\bar{R}O}=\langle (0\ 1\ 0\ 0)^T \rangle$

$$T = \left[T_{RO} \mid T_{RO} \mid T_{RO} \mid T_{RO} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot T \Rightarrow \tilde{A} = \overset{A_{RO}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \overset{B_{RO}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \qquad \tilde{C} = CT = \overset{C_{RO}}{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}$$

$$G(s) = C_{RO} (sI - A_{RO})^{-1} B_{RO} = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot 1 = \frac{1}{s}$$

Il sistema non è BIBO stabile, infatti la funzione di trasferimento presenta un polo a parte reale nulla. Andando a imporre un ingresso limitato ($1/s$) l'uscita diverrebbe ($y(s) = 1/s^2$).

- Il problema della raggiungibilità è strettamente legato a quello della controllabilità, soprattutto a tempo continuo.
  Se, note una certa c.i. x_0 vogliamo raggiungere un punto x_f, tale problema può essere risolto in modo ovvio se:

  $x_f \in R(x_0, t_0, t_f)$

  $x_0 \in C(x_f, t_0, t_f)$

  Q.T.C. avere un sistema completamente raggiungibile implica che questo è anche completamente controllabile e viceversa.
  Questo è garantito perché la matrice e^{At} è sempre invertibile (a differenza che in TD A^k non lo è sempre e infatti il "viceversa" non è garantito ma deve essere verificato).

③ Dato il sistema TD:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

determinare:
- per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller.
- si scelga un β tra questi e si calcoli in funzione di α la matrice K di retroazione tale che il sistema a ciclo chiuso sia un dead-beat.

- Devo vedere per quali valori di α e β il sistema è stabilizzabile.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 2\beta & 4\beta + \beta \end{bmatrix} \qquad \rho(R) = 2$$

Il sistema non è mai completamente raggiungibile ($\forall \alpha, \beta$). Però ponendo $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ il sistema ha così autovalori non raggiungibili proprio $\lambda = 0$, quindi posso costruire il dead beat controller.

- Scelgo $\underline{\beta = 1}$, e impongo $\underline{\alpha = 0}$ (unico modo per ottenere il sistema richiesto).

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1+k_1 & 2+k_2 & 2+k_3 \end{bmatrix} \rightarrow (A + BK - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1+k_1 & 2+k_2 & 2+k_3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$= \lambda^2(2+u_3-\lambda) + \lambda(1+u_1) =$

$= 2\lambda^2 + u_3\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + u_1\lambda =$

$= -\lambda^3 + \lambda^2(2+u_3) + \lambda(1+u_1) \triangleq \lambda^3$

$$\begin{cases} -2-u_3 = 0 \\ -1-u_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = -2 \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(4) Si considerino i sistemi lineari tempo invarianti e tempo continuo.
- definire il problema di raggiungibilità.
- dimostrare il ruolo del problema nel calcolo di $u(\tau)$ a energia minima necessaria a portare lo stato del sistema dall'origine a x_f nel tempo t_f.

$$G_R = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} B B^T e^{A^T(t_f-\tau)} d\tau \qquad u(\tau) = B^T e^{A^T(t_f-\tau)} \underbrace{G_R^+(t_f,\tau)\, x_f}_{\eta}$$

$$\|u(\tau)\|^2 = \int u^T(\tau)\, u(\tau)\, d\tau = \eta^T \int e^{A(\tau)} B B^T e^{A^T(\tau)} \eta =$$

$$= x_f^T G_R^{+T}(t_f,\tau) \cdot \cancel{G_R(t_f,\tau)} \cdot \cancel{G_R^+(t_f,\tau)}\, x_f \Rightarrow \boxed{\|u(\tau)\|^2 = x_f^T G_R^+(t_f,\tau)\, x_f}$$

$$G_R = V^T \Sigma V^* = V^T \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_1^2 \end{bmatrix} V^* ;$$

$$G_R^{-1} = (V^T)^{-1} \Sigma^{-1} V^{-1} = V \Sigma^{-1} V^T \Rightarrow \|u(\tau)\|^2 = x_f^T V \Sigma^{-1} V^T x_f = \tilde{x}_f^T \Sigma^{-1} \tilde{x}_f$$

L'energia di controllo dipende da come lo stato finale viene mappato dagli autovettori.

PROVA IN ITINERE 18.12.2018

① Dato il sistema non lineare TC:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t)\,x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 2x_1^5(t) + x_2^2(t) + u(t)$$

- trovare gli equilibri per $u(t)=0$ e studiarne la stabilità usando $V = -x_1^4 + x_2^2$.
- trovare un ingresso $u(t)$ che renda l'origine A.S.

$u(t)=0$

$$\begin{cases} 0 = x_1^2(t)\,x_2(t) \\ 0 = 2x_1^5 + x_2^2 \end{cases}$$

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0$
$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 0$ | $(0,0)$ è l'unico equilibrio del sistema

$$A = \begin{vmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 \\ 10x_1^4 & 2x_2 \end{vmatrix} \rightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

non posso concludere sulla stabilità (autovalori nulli)

$V(x) = -x_1^4 + x_2^2$ SDP in un intorno dell'origine

$$\dot{V}(x) = -4x_1^3(x_1^2x_2) + 2x_2(2x_1^5 + x_2^2) =$$
$$= \cancel{-4x_1^5x_2} + \cancel{4x_1^5x_2} + 2x_2^3$$

D.P.

- $V(x) = +x_1^4 + x_2^2$

$$\dot{V}(x) = \cancel{-4x_1^5x_2} + \cancel{4x_1^5x_2} + 2x_2^3 + 2x_2\,u(t)$$

$u(t) = -x_2^2 - x_2 \rightarrow \dot{V}(x) = -2x_2^2$ S.D.N.

LaSalle

$R = \{(0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \rightarrow$ $x_1(t)=0$, $x_2(t)=0$ | $\dot{x}_1(t)=0$, $0 = 2x_1^5$ | l'origine è A.S. per $u(t)$ trovato

② Dato il sistema TD.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

- determinare gli ingressi (e il numero minimo di passi) che a partire da $x_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ permettono di raggiungere:

$x_a = (3 \quad 2 \quad -1)^T$ $\quad x_b = (2 \quad 0 \quad 0)^T$ $\quad x_c = (9 \quad -1 \quad -1)^T$

- trovare gli stati iniziali compatibili con:

$u(0) = -1$
$u(1) = 0$

ⓐ $y(0) = 2$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$

ⓑ $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $y(2) = 0$

ⓒ $y(0) = 0$, $y(1) = 4$, $y(2) = 4$

- Siamo a TD, quindi l'evoluzione dello stato è data da:

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B\,u(k) = \underline{A^k x_0 + R_T\,u(k)}$$

Impongo dunque il problema nel seguente modo:

$$\mathcal{V}_{rec}(R) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$x_f - A^k x_0 = R_k\, u(k)$$

① $$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$\underline{k=1}$ x_0 è raggiungibile in un passo con $\underline{u(0) = 1}$.

② $$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$ $\underline{k=1}$ NO

$\underline{k=2}$ $$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}}_{A^2 x_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{R_2} u(k)$$ Per nessun ingresso

③ $$\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$ $k=1$ $\underline{NO}$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ NO!

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 16 \\ -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 \\ -17 \\ 15 \end{vmatrix}$$ $\underline{NO}$ Per nessun ingresso!

- $$y(k) = CA^k x_0 + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B\, u(i)$$

$\underline{k=0}$ $y(0) = Cx_0 \rightarrow 2 = [2 \quad -1 \quad -2]\, x_0$

$\underline{k=1}$ $y(1) = CAx_0 + CBu(0) \Rightarrow 0 = [2 \quad 0 \quad 2]\, x_0 + 2(-1)$

$\underline{k=2}$ $y(2) = CA^2 x_0 + CAB\, u(0) + \cancel{CBu(1)} \Rightarrow 1 = [0 \quad -4 \quad 0]\, x_0 + 4(-1)$

$$\begin{cases} 2 = 2x_{01} - x_2 - 2x_3 \\ 2 = 2x_1 + x_3 \\ 5 = -4x_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = -5/4 \\ 2 - \frac{5}{4} = 2x_{01} - 2x_3 \\ 2 = 2x_1 + x_3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = -5/4 \\ 3/4 + 2x_3 = 2x_1 \\ 2 = \frac{3}{4} + 2x_3 + x_3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = 19/24 \\ x_2 = -5/4 \\ x_3 = 5/12 \end{cases}$$

$\underline{y_e = y - y_f}$

$y_e = O x_0 \Rightarrow x_0 = O^{-1} y_e$

COMPITO 14.01.2019

① Si consideri il sistema MIMO tempo c.d.t.:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} \\ \frac{-2}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

- determinare un sistema in forma di stato che realizza la $G(s)$. Commentare sul perché è meglio lavorare per righe.
- considerando il 1° ingresso e la 2ª uscita commentare su raggiungibilità e osservabilità del sistema ottenuto (senza calcolare R / O e senza PBH).

- Conviene lavorare per righe perché in questo modo i termini sono almeno un fattore a denominatore in comune, quindi i costi sono più equilibrati. Inoltre in questo modo la A avrà dimensioni minori rispetto che lavorando per colonne.

Forma canonica osservazione

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s & s-1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \underbrace{1}_{s} & \underbrace{1}_{s-1} \end{bmatrix} \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+3)(s-1)} \begin{bmatrix} -2 & s-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+2s-3} \begin{bmatrix} -2 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{TOT} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \qquad B_{TOT} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ \underbrace{0}_{1^\circ \text{ ingresso}} & 1 \end{bmatrix} \qquad C_{TOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{] 2ª uscita}$$

- Considero solo il primo ingresso e la seconda uscita ottenuti.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dalla struttura di A e di C, il blocco A_{22} risulta essere completamente osservabile, mentre il blocco A_{11} non è osservabile.

Per quanto riguarda la controllabilità, studio gli autovalori di A:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Rightarrow \underline{\lambda = 1} \quad m.a. = 2$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}$$

Ho quindi l'autovalore $\lambda = 1$ con m.a. = 3. Ne studio la molteplicità geometrica.

$$(A-I) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underline{m.g. = 2}$$

Nei sistemi SISO per avere completa raggiungibilità e osservabilità gli autovalori devono avere m.g. = 1.
In questo caso non è così, quindi il sistema non è né raggiungibile né osservabile completamente.

② Dato il sistema TC:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

- trovare gli equilibri al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- studiare la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 0 = x_1(u^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(k^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ 0 = -x_1(u^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(u^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases};$$

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \qquad \forall k$

$u^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow \underline{x_1^2 = u^2 - x_2^2}$ $\quad \begin{cases} 0 = x_1(\cancel{u^2 - u^2 + x_2^2} - x_2^2) + x_2(u^2 + u^2 - \cancel{x_2^2} + \cancel{x_2^2}) \\ 0 = -x_1(k^2 + u^2) + x_2 \end{cases};$

$$\begin{cases} 0 = x_2(2u^2) + x_1 \\ 0 = -x_1(2u^2) + x_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = -x_2(u^2) \\ 0 = x_2(u^2) + x_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 = x_2(1 + u^2) \rightarrow x_2 = 0 \\ \qquad u^2 = -1 \text{ NO!} \end{cases}$$

L'unico equilibrio è $(0,0)$ $\forall u$.

$$A_{(0,0)} = \begin{bmatrix} u^2 & u^2 \\ -u^2 & u^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} tr(A) &= 2k^2 \quad (<0) \\ det(A) &= k^4 + u^4 = 2k^4 \quad (>0) \end{aligned}$$

- $k > 0$
- $k < 0$ } l'origine è un equilibrio instabile
- $k = 0$ non posso concludere con il metodo indiretto $(\lambda = 0)$

$\underline{k=0}$ $\qquad V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$$\dot{V}(x) = x_1^2(-x_1^2 - x_2^2) + \cancel{x_1 x_2(x_1^2 + x_2^2)} - \cancel{x_1 x_2(x_1^2 + x_2^2)} + x_2^2(-x_1^2 - x_2^2) =$$

$$= \underbrace{(-x_1^2 - x_2^2)}_{<0} \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{>0} =$$

$$= -(x_1^2 + x_2^2)^2 \qquad \underline{D.N.}$$

L'origine è un equilibrio A.S. per $\underline{u=0}$.

③ Dato il sistema:

$$\dot{x}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(\tau) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau)$$

- trovare i valori di α e β corrispondenti ai punti $x_f = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ dello spazio di stato che sono raggiungibili dallo stato iniziale $x_0 = [0 \quad 1]^T$ in un tempo t_f finito.
- si scelga uno di questi punti e si calcoli l'ingresso $u(\tau)$ necessario a portare x_0 a x_f in un tempo $t_f = 2$.

- la matrice di Raggiungibilità è data da:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left(x_f - e^{At_f} x_0\right) \in \underline{\mathrm{Im}(R)} \quad (= \text{risposta forzata})$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_f \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - t_f \\ \beta - 1 \end{bmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \forall \alpha \\ \beta = 1 \end{matrix}$$

- Scelgo $x_f = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Un ingresso $u(\tau)$ porta il sistema da x_0 a x_f in un determinato intervallo di tempo se e solo se:

$$x_f = e^{At} x_0 + \int_{\tau_0}^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$$

Verificato che lo stato finale è raggiungibile da x_0, applicando l'equazione trovo:

$$x_f - e^{At_f} x_0 = \int_0^2 e^{A(t_f - \tau)} B\, u(\tau)\, d\tau \quad ;$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \int_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 2-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau \quad ;$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \int_0^2 \begin{bmatrix} 2u(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \quad ;$$

$$\begin{bmatrix} +1 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^2 \begin{bmatrix} 2u(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = 2u(\tau) \Big|_0^2 = u = 1/2$$

(4) Dato il sistema SISO tempo discreto:

$$x_{k+1} = F x_k + G u_k$$

- dimostrare che, condizione necessaria e sufficiente affinché, tramite una retroazione dello stato del tipo $u_k = K x_k$ si possano assegnare i poli a ciclo chiuso è che (F, G) sia completamente raggiungibile.
- si discuta se è enunciato resta valido parlando controllabilità e non raggiungibilità.

Punto 1 → Teorema Fondamentale Assegnamento Poli + dimostrazione

- la completa raggiungibilità implica la completa controllabilità, ma a TD non vale il viceversa!
Affinché questo sia consentito $\mathcal{K}er(A^t) \subseteq \mathcal{K}er(R_t)$, cosa che non è sempre vera.
Se fossimo stati a TC, invece, non sarebbe cambiato nulla.

COMPITO 09·06·2019

① Dato il sistema descritto dalle equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + 2\dot{y}_1(t) + y_1(t) = u_1 + \dot{u}_1 + 4\dot{u}_2 + u_2 \\ \ddot{y}_2(t) + 2\dot{y}_2(t) + y_2(t) = \dot{u}_1 + u_1 + \dot{u}_2 - u_2 \end{cases}$$

- determinare la matrice di trasferimento e calcolare il grado di Smith-McMillan.
- determinare una realizzazione minima in forma di stato.

- Porto il sistema nel dominio di Laplace:

$$\begin{cases} s^2 y_1(s) + 2s\, y_1(s) + y_1(s) = u_1(s) + s^2 u_2(s) + 4s\, u_2(s) + u_2(s) \\ s^2 y_2(s) + 2s\, y_2(s) + y_2(s) = s\, u_1(s) + u_1(s) + s\, u_2(s) - u_2(s) \end{cases};$$

$$\begin{cases} y_1(s)\,(s^2+2s+1) = u_1(s) + u_2(s)\,(s^2+4s+1) \\ y_2(s)\,(s^2+2s+1) = u_1(s)\,(s+1) + u_2(s)\,(s-1) \end{cases};$$

$$G_{11}(s) = \frac{y_1(s)}{u_1(s)} = \cancel{\frac{}{(s^2+2s+1)}} = \frac{1}{(s^2+2s+1)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{y_1(s)}{u_2(s)} = \cancel{\frac{(s^2+2s+1)}{(s^2+4s+1)}} = \frac{s^2+4s+1}{(s^2+2s+1)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{y_2(s)}{u_1(s)} = \cancel{\frac{(s^2+2s+1)}{(s+1)}} = \frac{s+1}{(s^2+2s+1)}$$

$$G_{22}(s) = \frac{y_2(s)}{u_2(s)} = \cancel{\frac{(s^2+2s+1)}{(s-1)}} = \frac{s-1}{(s^2+2s+1)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+2s+1)}\begin{bmatrix} 1 & s^2+4s+1 \\ s+1 & s-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} 1 & (s+1)^2+2s \\ (s+1) & (s-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} 1 & 2s \\ (s+1) & (s-1) \end{bmatrix}$$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$D_0 = 1$

$D_1 = \text{m.c.d.}\{1, 2s, s+1, s-1\} = 1$

$D_2 = \text{m.c.d.}\{(s-1) - (s+1)\} = -2s^2 - s - 1$

$\lambda_0 = \frac{D_1}{D_0} = 1$

$\lambda_1 = \frac{D_2}{D_1} = -2s^2 - s - 1$

$$\longrightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2s^2-s-1 \end{bmatrix}$$

Questo 1 compare da: $\cancel{\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2}} + \frac{2s}{(s+1)^2}$

Forma di Smith-McMillan:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-2s^2-s-1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Il grado di Smith-McMillan è 4.

- Scelgo la forma canonica di Controllo (canone per colonne).

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} 1 \\ (s+1) \end{bmatrix} \longrightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} 2s \\ (s-1) \end{bmatrix} \longrightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

la forma canonica di controllo è:

$$A_{TOT} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \qquad B_{TOT} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$C_{TOT} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

② Dato il sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 + u \end{cases}$$

- trovare gli equilibri ponendo $u(t) = k$ = costante e determinarne la stabilità.
- trovare un ingresso che renda gli equilibri A.S. Se esiste trovare delle condizioni in funzione di k sui coefficienti dell'ingresso affinché gli equilibri siano A.S. riportando l'espressione esplicita dell'ingresso nelle variabili (x_1, x_2).

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 + x_2 \\ 0 = -x_1^2 + x_2 + k \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1^2 = -x_2 \\ 0 = 2x_2 + k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^2 = -x_2 \\ 2x_2 = -k \end{cases} ; \quad \begin{array}{l} x_2 = -k/2 \\ x_1^2 = k/2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{k=0} & (0,0) \\ k \neq 0 & \left(\pm\sqrt{k/2}\,;\, -k/2\right) \end{array}\right\} \text{ EQUILIBRI AL VARIARE DI } k \in \mathbb{R}$$

Studio la stabilità con il metodo indiretto.

$$A = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ -2x_1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Non posso concludere per la presenza di un autovalore nullo in A.

$$A|_{(\sqrt{k/2}\,;\,-k/2)} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{k/2} & 1 \\ -2\sqrt{k/2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = 2\sqrt{\frac{k}{2}} + 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{k/2} < -1/2 \Rightarrow \underline{k < 1/2} \quad \text{NO! } \underline{\text{IMPOSSIBILE}}$$

$$\det(A) = \cancel{k}\sqrt{k/2} > 0 \rightarrow \underline{k > 0}$$

Per $\forall k$ l'equilibrio $(\sqrt{k/2}\,;\,-k/2)$ è instabile!

$$U(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_1^2)$$

$$\dot{U}(x) = x_1^3 + x_1 x_2 - x_1^2 x_2 + x_2^2 =$$

Equilibrio instabile

- $U(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$$\dot{U}(x) = x_1(x_1^2 + x_2) + x_2(-x_1^2 + x_2 + u) =$$

$$= x_1^3 + x_1 x_2 - x_2 x_1^2 + x_2^2 + x_2 u \qquad u = -x_1 + x_1^2 - x_2$$

$$\cancel{4U(x) = x_1^3 + x_2x_1 - x_1^2x_2 + x_2^2 + u_1x_1^2 + u_2x_2x_2 =} \qquad \begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = -1 \end{cases}$$

$$\cancel{= -(u-1)x_1^2}$$

$$u = k_1(x_1 - \bar{x}_1) + u_2(x_2 - \bar{x}_2) =$$

$$= \underline{u_1(x_1) + u_2(x_2)}$$

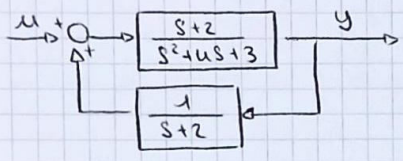
$$4U(x) = x_1^3 + \underline{x_2x_1} - x_1^2x_2 + x_2^2 + \underline{u_1x_1x_2} + \underline{u_2x_2^2} =$$

$$\underline{k_1 = -1} \qquad \Rightarrow x_1^3 - x_1^2x_2 = -x_1^2(x_1 - x_2)$$

$$\underline{u_2 = -1}$$

$$\boxed{u = -x_1 - x_2}$$

③ Dato il sistema:



- determinare una realizzazione in variabili di stato del sistema ottenuto.
- verificare se il sistema è raggiungibile e osservabile.
- discutere stabilità interna e BIBO.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix}$$

$$B_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad B_2 = 1 \qquad C_2 = 1$$

$$C_1(s) = \frac{\Sigma_1(s)}{1 - \Sigma_1(s)\Sigma_2(s)} = \frac{y(s)}{u(s)} \Rightarrow$$

$$\Sigma_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$\Sigma_2(s) = \frac{1}{(s+2)}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + u_1 \\ y_1 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -2x_3 + u_2 \\ y_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} u_1 = u + y_2 \\ u_2 = y_1 \\ y = y_1 \end{vmatrix}$$

$$1 - \Sigma_1(s)\Sigma_2(s) = 1 - \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{(s+1)(s+3) - 1}{(s+1)(s+3)} = \frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$C(s) = \frac{\frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}}{\frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s+3)}} = \frac{(s+2)}{s^2+4s+2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ottengo il sistema in forma canonica di controllo. Ne segue che il sistema è sicuramente raggiungibile. Inoltre, dato che la $C(s)$ dipende solo dagli autovalori osservabili e raggiungibili, chiaramente il sistema è anche completamente osservabile.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \rho(R) = 2 \qquad O = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \rho(O) = 2$$

Gli autovalori della matrice A sono: $p(\lambda) = \lambda(-4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = (\lambda \mp 2 \pm \sqrt{2})$
quindi sono entrambi a parte reale negativa.
Il sistema è internamente stabile.
Il sistema è di conseguenza BIBO stabile.

④ Dato il sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \qquad y_k = [0 \ 1 \ 0] \, x_k$$

- determinare la più breve sequenza d'ingresso che porta il sistema da $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $x_f = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Calcolare l'insieme degli stati iniziali x_0 compatibili con la sequenza libera di uscita:

$$y(0) = 2$$
$$y(1) = 2$$
$$y(2) = 4$$

- la formulazione del problema è la seguente. Siamo a TD, quindi l'evoluzione dello stato è:

$$x_f = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)$$

Basta sostituire e fare i calcoli.

$\underline{k=1}$

$$x_f = A x_0 + B u(0) \; ;$$

$$x_f - A x_0 = B u(0) \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0)$$

Il problema non è risolubile per $k=1$.

$\underline{k=2}$

$$x_f = A^2 x_0 + AB u(0) + B u(1) \; ;$$

$$x_f - A^2 x_0 = AB u(0) + B u(1) \; ;$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(1)$$

Il sistema è risolubile per $k=2$ ponendo $\underline{\underline{u(0) = 1}}$; $\underline{\underline{u(1) = 4}}$.

- L'uscita libera è data da:

$$y_\ell(k) = C A^k x_0$$

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{k=0} & y(0) = C x_0 \rightarrow & 2 = [0 \ 1 \ 0] \, x_0 \\ \underline{k=1} & y(1) = C A x_0 \rightarrow & 2 = [-2 \ 2 \ 2] \, x_0 \\ \underline{k=2} & y(2) = C A^2 x_0 \rightarrow & 4 = [-4 \ 4 \ 4] \, x_0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} 2 = x_{02} \\ \cancel{2} = -\cancel{2} x_{01} + \cancel{2} x_{02} + \cancel{2} x_{03} \\ \cancel{4} = -\cancel{4} x_{01} + \cancel{4} x_{02} + \cancel{4} x_{03} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_{02} = 2 \\ -x_{01} + x_{03} = -1 \\ -x_{01} + x_{03} = -1 \end{cases} \longrightarrow x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

COMPITO 01.07.2019

① Dato il sistema non lineare descritto dalle equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2} x_1^2(k) + \frac{1}{2} u^2(k) \\ x_2(k+1) = \frac{1}{2} x_1^2(k) + \frac{1}{2} x_2(k) \\ y(k) = \frac{1}{2} x_1(k) x_2(k) \end{cases}$$

- trovare gli equilibri per $u(k)=1$ e per $u(k)=0$.
- scrivere le equazioni dinamiche (A, B, C, D) del sistema linearizzato per una generica coppia ingresso - equilibrio riportando le variabili del linearizzato rispetto a quelle del sistema non lineare.
- caratterizzare la stabilità di tutti gli equilibri (1° punto) con il metodo indiretto di Lyapunov.

$u(k)=0$

$$\begin{cases} x_1(k) = \frac{1}{2} x_1^2(k) \\ x_2(k) = \frac{1}{2} x_1^2(k) + \frac{1}{2} x_2(k) \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 = x_1\left(\frac{1}{2} x_1 - 1\right) \\ 0 = \frac{1}{2} x_1^2(k) - \frac{1}{2} x_2(k) \end{cases} ;$$

1ª equazione $\longrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$\longrightarrow \frac{1}{2} x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$0 = \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} x_2(k) \Rightarrow x_2 = 4$

Per $u(k)=0$ gli equilibri sono:

$$\begin{cases} (0,0) \\ (2,4) \end{cases}$$

$u(k)=1$

$$\begin{cases} x_1(k) = \frac{1}{2} x_1^2(k) + \frac{1}{2} \\ x_2(k) = \frac{1}{2} x_1^2(k) + \frac{1}{2} x_1(k) \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 = x_1\left(\frac{1}{2} x_1 - 1\right) + \frac{1}{2} \\ 0 = \frac{1}{2} x_1^2(k) - \frac{1}{2} x_2(k) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 0 = x_1^2(k) - x_2(k) \\ 0 = x_1^2(k) \mp 2x_1(k) + 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 = x_1^2(k) - x_2(k) \\ 0 = (x_1 \mp 1)^2 \end{cases} ; \quad \underline{x_1 = 1} \Rightarrow \underline{x_2 = -1}$$

Per $u(k)=1$ l'equilibrio è:

$(1, -1)$

- Svolgo $u(k)=1$ come ingresso e $(1,-1)$ come equilibrio.

$$A = \begin{bmatrix} x_1(k) & 0 \\ x_1(k) & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow A|_{(1,-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1/2\, x_2 & 1/2\, x_1 \end{bmatrix} \rightarrow C|_{(1,-1)} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

le equazioni dinamiche del sistema linearizzato sono: [per $u(k) = 1$ e equilibrio $(1,-1)$]

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} x(k)$$

• Studiamo la stabilità degli equilibri trovati.

$\underline{u(k) = 0}$

$$A|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Quando la matrice A almeno un autovalore a parte reale nulla non posso concludere sulla stabilità dell'equilibrio mediante questo metodo.

$$A|_{(2,4)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} tr(A) = 2 + 1/2 = 5/2 \\ det(A) = 1 \end{array}\right]$$ l'equilibrio $(2,4)$ è <u>instabile</u>.

$\underline{u(k) = 1}$

$$A|_{(1,-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} tr(A) = 1 + 1/2 = 3/2 \\ det(A) = 1/2 \end{array}\right]$$ l'equilibrio $(1,-1)$ è <u>instabile</u>.

② Dato il sistema lineare TD:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2} x_2(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases}$$

• commentare per quanto possibile su Raggiungibilità e Osservabilità del sistema basandosi sulle equazioni dinamiche e sulle definizioni delle due proprietà.
• studiare Rag, Contr, Osserv, e Ricost. Studiare la stabilità interna e la BIBO.
• portare il sistema in forma di Kalman.
• noti gli ingressi $u(k)$ per $k = 0, \dots, 3$ e le uscite $y(0), y(2), y(4)$, si può determinare lo stato iniziale $x(0)$?

---

il sistema è nella forma:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice A ha tre autovalori distinti, dunque almeno di essi ha m.g. = 1 (condizione necessaria e sufficiente per essere completamente Raggiungibile e Osservabile).
La matrice dinamica ha l'ultima colonna nulla, ma per come è strutturata la matrice C il sistema è completamente osservabile.
Al contrario, il sistema non è completamente raggiungibile. Per la struttura delle matrici A e B, infatti, l'autovalore $\lambda = 2$ non può mai essere raggiunto.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \rho(R) = 2 \quad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Il sistema non è completamente raggiungibile.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho(O) = 3 \qquad \mathrm{Ker}\, O = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathrm{Ker}(\bar{O}) = 0$$

Il sistema è completamente osservabile, quindi è anche ricostruibile.

Per la controllabilità, invece, occorre verificare che:

$$\mathrm{Ker}(A^u) \subseteq \mathrm{Ker}(R_u)$$

Infatti, poiché il sistema non è completamente raggiungibile non si può concludere a priori.

$\underline{u=1}$

$$\mathrm{Ker} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathrm{Ker}(R_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \underline{NO}$$

$\underline{u=2}$

$$\mathrm{Ker}(A^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathrm{Ker}(R_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad NO$$

Poiché l'elemento x_1 ($\in A$) è sempre $\neq 0$, mentre in R è sempre nullo, posso concludere che il sistema non è controllabile per alcun k.

La matrice A ha 3 autovalori:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= -1/2 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right]$$

Poiché almeno un autovalore è a ~~[illegible]~~ modulo > 1, il sistema diverge, quindi il sistema non è internamente stabile.

Tuttavia, l'autovalore $\lambda = 2 \notin \mathrm{Ker}(R)$ e poiché la f.d.t. dipende solo dagli autovalori completamente raggiungibili e completamente osservabili, ~~[illegible]~~ questo non vi appartiene. Tuttavia ci sarà $\underline{\lambda = 0}$, quindi il sistema non è BIBO stabile.

- Per la forma di Kalman occorre calcolare la matrice del cambio base.

$$T_{R\bar{O}} = [T_R \quad T_{\bar{O}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{Im}(T_{R\bar{O}}) = \emptyset \Rightarrow T_{R\bar{O}} = \emptyset$$

$$T_{RO} = \langle (0 \ 1 \ 0)^T ; (0 \ 0 \ 1)^T \rangle \qquad \underline{\text{dim } 2}$$

$$T_{\bar{R}O} = \langle (1 \ 0 \ 0)^T \rangle$$

$$T_{\bar{R}\bar{O}} = \emptyset$$

$$T = [T_{RO} \mid T_{R\bar{O}} \mid T_{\bar{R}O} \mid T_{\bar{R}\bar{O}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} T \Rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_{RO}$$

$$\tilde{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} B_{RO} \qquad \tilde{C} = C T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{RO}$$

Forma di Kalman

- $y(u) = C A^u x_0 + C \sum_{i=0}^{u-1} A^{u-i-1} B u(i)$

③ Dato un sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_k$$

determinare:

- se il sistema è raggiungibile e/o controllabile.
- se esiste una sequenza d'ingresso che porta lo stato da $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a $x(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- se esiste una sequenza d'ingresso che porta lo stato da $x(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a $x(3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \rho(R_1) = 2$$

il sistema non è completamente raggiungibile dal 1° ingresso.

$$R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho(R_2) = 1$$

il sistema non è completamente raggiungibile dal secondo ingresso

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{}_{B} \quad \underbrace{}_{AB} \quad \underbrace{}_{A^2B}$$

$\rho(R) = 3$ il sistema è completamente raggiungibile. Per definizione è anche controllabile.

- $$x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(k) \qquad A x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{k=2}$ $x(2) = A^2 x_0 + AB u(0) + B u(1)$;

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(1) \quad e$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1(0) - u_1(1) = -1 \\ u_1(0) + u_1(1) + u_2(1) = -5 \\ -u_1(0) + u_2(1) = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_1(0) = -1 + u_1(1) \\ -1 + u_1(1) + u_1(1) + u_2(1) = -5 \\ \cancel{+1} - u_1(1) + u_2(1) = \cancel{1} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} u_1(0) = -1 + u_1(1) \\ 2u_1(1) + u_2(1) = -4 \\ u_1(1) = u_2(1) \end{cases} ; \quad \begin{matrix} u_1(1) = u_2(1) \\ 3u_1(1) = -4 \Rightarrow u_1(1) = -4/3 = u_2(1) \\ u_1(0) - 1 - 4/3 = -7/3 \end{matrix}$$

La soluzione trovata è:

$u_1(0) = -7/3$ $\quad u_2(0)$ qualsiasi $\quad u_1(1) = -4/3$ $\quad u_2(1) = -4/3$

∘ $\underline{K=3}$

$$x(3) = A^3 x_0 + A^2 B u(0) + AB u(1) + B u(2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(2) \\ u_2(2) \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{cases} 2u_1(0) + u_1(1) - u_2(2) = -6 \\ 2u_1(0) + u_1(1) + u_1(2) + u_2(2) = -12 \\ -2u_1(0) - u_1(1) + u_2(2) = 2 \end{cases}$$

Ho un sistema di 3 equazioni in 4 incognite, quindi avrò infinite soluzioni.
Sommo la prima due equazioni e ottengo:

$$4u_1(0) + 2u_1(1) + u_1(2) = -18 \qquad (1^a + 2^a)$$

$$u_1(2) + 2u_2(2) = -10 \qquad (2^a + 3^a)$$

$$(2^a - 1^a)$$

Una soluzione è:

$u_1(0) = 8 \quad \forall u_2(0) \qquad u_1(1) = 2 \quad \forall u_2(1) \qquad u_1(2) = -6 \quad u_2(2) = -2$

(b) Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -2 & -1 & \end{array}\right] x(t) + \left|\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}\right| u(t)$$

trovare una legge di controllo ottima $u(t) = Kx$ che rende minimo il funzionale:

$$J = \int_0^\infty x^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 4u^2(t)\, dt$$

Costruisco la matrice Hamiltoniana.

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \qquad \text{dove } Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = I$$

L'Hamiltoniana ha polinomio caratteristico pari, quindi se λ è un suo autovalore, allora lo sarà anche $-\lambda$. Inoltre, gli autovalori di H a parte reale <0 sono quelli desiderati per il sistema a ciclo chiuso (da imporre con $A+BK$).

$$H = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ \hline -5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow (H - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 0 & 4 \\ -5 & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda\left((-1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - (-2(-1-\lambda))\right) - 1\left(2\lambda(1-\lambda) + 20 - 4\right) =$$

$$= -\lambda\left((\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) - (2+2\lambda)\right) - (2\lambda - 2\lambda^2 + 16) =$$

$$= -\lambda(\lambda - \cancel{\lambda^2} + \cancel{\lambda^2} - \lambda^3 - 2 - 2\lambda) - (2\lambda - 2\lambda^2 + 16) =$$

$$= \lambda^4 + \lambda^2 + \cancel{2\lambda} - \cancel{2\lambda} + 2\lambda^2 - 16 =$$

$$= \lambda^4 + 3\lambda^2 - 16$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda^2 \\ x^2 = \lambda^4 \end{array}\right| \rightarrow x^2 + 3x - 16 \rightarrow \Delta = 73 \qquad x = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2} \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{73}}{2} > 0 \\ \frac{-3-\sqrt{73}}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \sqrt{x} = \pm\sqrt{\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}}$$

Prendo solo gli autovalori stabili $\Rightarrow \left(\frac{-3-\sqrt{73}}{2} \; ; + \sqrt{\frac{-3-\sqrt{73}}{2}}\right)$

mediante retroazione ($u = Kx$) impongo gli autovalori trovati ad $(A+B)$.

$$\det(A+Bu) - \lambda I = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2+2u_1 & -1+2u_2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(-1+2u_2-\lambda) + 2 - 2u_1 =$$

$$= \lambda - 2u_2\lambda + \lambda^2 + 2 - 2u_1 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-2u_2+1) + (2-2u_1) \triangleq \left(\lambda + \frac{-3-\sqrt{73}}{2}\right)\left(\lambda - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{73}}{2}}\right) =$$

$$= \lambda^2 - \frac{-3-\sqrt{73}}{2}\lambda - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{73}}{2}}\,\lambda + \left(\frac{-3-\sqrt{73}}{2} \cdot \sqrt{\frac{-3+\sqrt{73}}{2}}\right)$$

$$(-2u_1+1) = +\frac{3+\sqrt{73}}{2} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{73}}{2}}$$

$$2-2u_1 = \left(\frac{-3-\sqrt{73}}{2} \cdot \sqrt{\frac{-3+\sqrt{73}}{2}}\right)$$

COMPITO 22.07.2019

① Dato il sistema TC:

$$\dot{x}_1(t) = e^{x_2} - 1 + 3u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \sin(x_1 + x_2) + 2u^2(t)$$

- determinare gli equilibri per $u(t)=0$ e studiarne la stabilità.
- per gli equilibri A.S. trovare una candidata di Lyapunov.
- per gli equilibri instabili trovare una retroazione dello stato che li renda A.S.

- $u(t)=0$

$$\begin{cases} 0 = e^{x_2} - 1 \\ 0 = \sin(x_1 + x_2) \end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} e^{x_2} = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \quad \text{unica soluzione} \\ 0 = \sin(x_1) \rightarrow \sin(x_1) = 0 \quad \text{per } x_1 = k\pi \quad \text{con } k = 0, 1, \dots \end{array}$$

Equilibri per $u(t)=0$

$(k\pi, 0)$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & e^{x_2} \\ \cos(x_1+x_2) & \cos(x_1+x_2) \end{vmatrix} \Rightarrow A|_{(k\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & e^0 \\ \cos(k\pi) & \cos(k\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(k\pi) & \cos(k\pi) \end{bmatrix}$$

k pari $(k = 0, 2, \dots)$

$$A|_{(k\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} tr(A) = 1 \\ det(A) = -1 \end{array}\right] \quad \text{l'equilibrio } (k\pi, 0) \text{ con k pari è instabile}$$

k dispari $(k = 1, 3, \dots)$

$$A(k\pi,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} tr(A) = -1 \\ det(A) = 1 \end{array}\right] \quad \text{l'equilibrio } (k\pi, 0) \text{ con k dispari è A.S.}$$

Procedo trovando una candidata di Lyapunov per l'equilibrio A.S.

$V(x) = x^T P x$

$A^T P + PA = -Q \Rightarrow \dot{V}(x) = -x^T Q x$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\begin{bmatrix} -P_3 & -P_2 \\ P_1 - P_3 & P_3 - P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_3 & P_1 - P_3 \\ -P_2 & P_3 - P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\begin{bmatrix} -2P_3 & P_1 - P_2 - P_3 \\ P_1 - P_2 - P_3 & 2P_3 - 2P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\begin{cases} -2P_3 = -1 \\ P_1 - P_2 - P_3 = 0 \\ 2P_3 - 2P_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P_3 = 1/2 \\ P_2 = 1 \\ P_1 = 3/2 \end{array} \rightarrow P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V(x) = x^T \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} x$$

Questa candidata di Lyapunov si può usare solo se A è asintoticamente stabile (come in questo caso).

• L'equilibrio è instabile quando K è pari.
Il sistema è nella forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

affinché esista un ritorno K di stabilizzazione dello stato (con parte gli autovalori di A a essere A.S.) il sistema deve essere completamente raggiungibile.

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{\rho(R) = 2} \Rightarrow \exists\, K \text{ t.c. } (A+BK) \text{ è A.S.}$$

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 3K_1 & 1+3K_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3K_1-\lambda & 1+3K_2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= 3K_1 - \lambda - 3K_1\lambda + \lambda^2 - 1 - 3K_2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-1-3K_1) + (3K_1 - 1 - 3K_2) \triangleq (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} -1-3K_1 = 2 \\ 3K_1 - 1 - 3K_2 = 1 \end{cases} ; \qquad \begin{matrix} -3K_1 = 3 \rightarrow K_1 = -1 \\ -3-1-3K_2 = 1 \rightarrow K_2 = -5/3 \end{matrix} \qquad K = [-1 \quad -5/3]$$

Una stabilizzazione dello stato che rende gli equilibri instabili A.S. è:

$$u(x) = [-1 \quad -5/3]\, x$$

② Dato il sistema rappresentato dalla matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/s & \frac{1}{s+1} \\ 0 & 1/s \\ 0 & -\frac{1}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

• trovare il grado di Smith-McMillan
• calcolare la forma di stato per sistemi lineari tempo rapp. e oss. del sistema trovato.
• considerando 2° ingresso e 1° uscita commentare su R e O. Trovare le dimensioni e le basi degli spazi $\bar{O}$ e R.

• Per trovare il grado di Smith-McMillan devo prima portare il sistema in forma di Smith.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} (s+1) & s \\ 0 & (s+1) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D_0 = 1$$
$$D_1 = \text{m.c.d.}\{s+1, s, -1\} = 1$$
$$D_2 = \text{m.c.d.}\{(s+1)^2, -s-1\} = (s+1)$$

$$\rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{D_1}{D_0} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{D_2}{D_1} = (s+1)$$

Il sistema in forma di Smith-McMillan è:

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & 0 \\ 0 & 1/s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grado di Smith-McMillan $= \underline{3}$

- Calcolo la forma di stato per ciclo (forma canonica di Osservazione).

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} 1/s & 1/(s+1) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+s} \begin{bmatrix} s+1 & s \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right] \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{}_{s+1}$ $\underbrace{}_{s}$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1/s \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_3(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{s(s+1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+s} \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{TOT} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\underline{0}} & \multicolumn{2}{c}{\underline{0}} \\ 1 & -1 & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\underline{0}} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

~~Il sistema ottenuto è completamente osservabile (dall'altra parte è la forma canonica di controllo, quindi deve esserlo). Tuttavia non è completamente raggiungibile. La prima componente di A, infatti, non fa parte dell'immagine di R.~~

- 2° ingresso / 1ª uscita

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & \\ -1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & \end{bmatrix} \qquad \rho(R) = 2 \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix} \qquad \rho(O) = 2 \qquad \dim(\bar{O}) = 4$$

$$\mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

③ Dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2-3 & 0 \\ 1 & -2 & \alpha^2+3\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha-1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

determinare:
- i valori di α per i quali esiste un osservatore asintotico dello stato.
- i valori di α per i quali il sistema è stabilizzabile mediante retroazione dell'uscita.
- i valori di α per i quali si può stabilizzare il sistema mediante retroazione dell'uscita ponendo gli autovalori a (-2).
- scelto tra quanti un α trovare le espressioni di stimatore e controllore relativi.

- L'osservatore asintotico dello stato esiste quando il sistema (A,C) è rivelabile, il che significa che (A,C) deve essere completamente osservabile o al più gli autovalori instabili di A devono essere interni allo spazio di osservabilità.

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha^2-2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho(O) = 2 \qquad \mathrm{Im}(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha^2-2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

L'osservatore asintotico esiste solo se l'autovalore $(\lambda = +\alpha^2+3\alpha)$ è stabile. Devo quindi imporre:

$$\alpha(\alpha+3) < 0 \quad \begin{cases} \alpha < 0 \\ \underline{\alpha < -3} \end{cases}$$

Quindi, $\forall\, \alpha < -3$ esiste un osservatore asintotico dello stato.

- La retroazione dell'uscita significa che $\underline{u = Ky}$, quindi il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = Ky \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \dot{x} = (A+BKC)x + Bu(t) \\ y = Cx \end{matrix}$$

Il sistema è stabilizzabile se (A,B) è completamente raggiungibile o, se così non fosse, se gli autovalori di A instabili sono contenuti in R (spazio di raggiungibilità).

$$R = \begin{bmatrix} \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1+(\alpha-1)(\alpha^2+3\alpha) \end{bmatrix} \qquad \underline{\rho(R) = 2}$$

Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha^2-3$, $\lambda_3 = \alpha^2+3\alpha$ — Per $\alpha \in [-3, 3]$ il sistema è stabilizzabile mediante retroazione.

- Per porre tutti gli autovalori a (-2), l'unico non raggiungibile deve essere pari a (-2), quindi:

$$\alpha^2 - 3 = -2;$$

$$\alpha^2 = 1 \Rightarrow \underline{\alpha = \pm 1}$$

Devo però anche considerare che il 3° autovalore non è osservabile. Scelgo quindi in definitiva:

$$\alpha = -1$$

* $\alpha = -1$

$$(A+BKC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2k_1 & -2k_2 & -2k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2k_1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BKC-\lambda I) = (1-2k_1-\lambda)(-2-\lambda)(-2-\lambda) =$$

$$= (1-2k_1-\lambda)(4+2\lambda+2\lambda+\lambda^2) =$$

$$= 4+4\lambda+\lambda^2-8k_1-4k_1\lambda-4k_1\lambda-2k_1\lambda^2-4\lambda-2\lambda^2-2\lambda^2-\lambda^3 =$$

$$= -\lambda^3+\lambda^2(1-2k_1-2-2)+\lambda(\cancel{4}-4k_1-4k_1-\cancel{4})+(4-8k_1) =$$

$$= \lambda^3+\lambda^2(3+2k_1)+\lambda(8k_1)+(8k_1-4) \triangleq (\lambda+2)^3$$

$k_1 = 3/2$ $\qquad K = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \underline{u = Ky + v(t)}$ controllore

$$F = A - HC \rightarrow F^T = A^T - C^T H^T$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H^T = \begin{bmatrix} 1-h_1 & -h_2 & 1-h_3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-h_1-\lambda)(-2-\lambda)^2 + 8h_2(-2-\lambda) =$$

$$= (1-h_1-\lambda)(4+4\lambda+\lambda^2) - 2h_2 - h_2\lambda =$$

$$= 4+4\lambda+\lambda^2-4h_1-4h_1\lambda-h_1\lambda^2-4\lambda-4\lambda^2-\lambda^3-2h_2-h_2\lambda =$$

$$= -\lambda^3+\lambda^2(1-h_1-4)+\lambda(\cancel{4}-4h_1-\cancel{4}-h_2)+(4-4h_1-2h_2) \triangleq \lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8$$

$$\begin{cases} -1+h_1+4 = 6 \\ 4h_1+h_2 = 12 \\ -4+4h_1+2h_2 = 8 \end{cases} ; \quad \begin{bmatrix} h_1 = 3 \\ h_2 = 0 \end{bmatrix} \rightarrow h = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

④ Enunciare e dimostrare il "Principio di Separazione".

Il principio di separazione degli autovalori dice che è possibile assegnare in modo indipendente gli autovalori del sistema e quelli dell'osservatore.
Nello specifico, questo significa che ponendo in retroazione la stima dello stato e non lo "stato vero" non cambia nulla nel problema di controllo.

Consideriamo un sistema lineare, la sua stima e l'ingresso dato dalla retroazione della stima:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{y}) \end{cases} \qquad \underline{u = K\hat{x} + v}$$

Sostituisco e ottengo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A+BK)\hat{x} + Bv + HCx - HC\hat{x} \\ \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK-HC & HC \\ BK & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$$

Porto il sistema nelle variabili x e ε (errore di stima).

$$\underline{\dot{\varepsilon} = \dot{\hat{x}} - \dot{x}}$$

$$\begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+BK-HC & HC \\ BK & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-HC & 0 \\ B & A+BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} v$$

Quindi le dinamiche del sistema sono:

$$\underline{\dot{\varepsilon} = (A-HC)\varepsilon}$$

$$\underline{\dot{x} = (A+BK)x + Bv + B\varepsilon}$$

La dinamica dell'errore non è completamente cambiata sostituendo $\hat{x}$ al posto di x; nella dinamica di $\dot{x}$ è comparso un disturbo ($B\varepsilon$) che comunque tende a zero per $t \to \infty$. Il sistema è dunque analogo a quello che avevamo trovato sostituendo x al posto di $\hat{x}$.

COMPITO 18.09.2019

① Dato il sistema TC:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

- trovare una matrice d'ingressi B che garantisca la compl. R.
- Trovare una matrice C tale per cui le f.d.t. siano tutte BIBO stabili.
- con $B = (0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T$ e $C = (0\ 1\ 0\ 1\ 1)$ trovare la matrice di trasf. per portare il sistema in forma di Kalman. Determinare i poli delle f.d.t.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\rho(R) = 5}$$

$$\underbrace{}_{B} \quad \underbrace{}_{AB} \quad \underbrace{}_{A^2B}$$

- Affinché le f.d.t. siano BIBO stabili, queste devono avere solo poli a parte reale negativa. La matrice A ha 3 autovalori nulli e due a (-1). Per avere BIBO stabilità devono comparire nella $G(s)$ solo questi ultimi, quindi la matrice C deve essere:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Per trovare la matrice T di trasformazione per Kalman devo studiare gli spazi di Raggiungibilità e Osservabilità del sistema:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \qquad \dim(R) = 3 \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \dim(O) = 3 \\ \dim(\bar{O}) = 2 \end{array} \qquad \mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T_{R\bar{O}} = [T_R \quad T_{\bar{O}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Ker}(T_{R\bar{O}}) = \emptyset$$

$T_{R\bar{O}} = \emptyset$

$T_{RO} = \langle (0\ 1\ 0\ 0\ 0)^T; (0\ 0\ 1\ 0\ 0)^T; (0\ 0\ 0\ 1\ 0)^T \rangle$

$T_{\bar{R}\bar{O}} = \langle (1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T; (0\ 0\ 0\ 1\ -1)^T \rangle$

$T_{\bar{R}O} = \emptyset$

$$T = [T_{RO} \mid T_{R\bar{O}} \mid T_{\bar{R}O} \mid T_{\bar{R}\bar{O}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad A_{RO} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} B_{RO} \qquad \tilde{C} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad C_{RO}$$

$\Longrightarrow$

$$G(s) = C_{RO}\,(sI - A_{RO})^{-1} B_{RO} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 1/(s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s+1)} = \frac{s^2+s+1}{s^2(s+1)}$$

I poli della $G(s)$ sono $\begin{cases} s = -1 \\ s = 0 \quad m.a. = 2 \end{cases}$

ⓔ Dato un sistema lineare TC A.S., descrivere la procedura per calcolare una candidata di Lyapunov che mediante il metodo diretto ne verifichi la stabilità.

- Si applichi il metodo al sistema:

$$\dot{x}_1(T) = -x_1 + 3x_2$$
$$\dot{x}_2(T) = -x_2$$

- Determinare con il metodo diretto la stabilità dell'equilibrio del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(T) = -x_1 + x_1 x_2 + 3x_2 \\ \dot{x}_2(T) = x_1^2 + x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

- Dato un sistema lineare A.S. una candidata che ne verifica la stabilità è sicuramente:

$$V(x) = x^T P x \Rightarrow \varphi V(x) = -x^T Q x \qquad \underline{a\ TC}$$

dove P è una matrice simmetrica che si costruisce imponendo:

$$\underline{-Q = A^T P + PA}$$

dove A è la matrice dinamica del sistema (lineare o linearizzato) e Q è una matrice definita positiva (generalmente è la matrice identità). La matrice P si dice come soluzione del problema solo se la matrice A è A.S. Se così non fosse o trovo infinite P o non ne trovo alcuna.

- Considero il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(T) = -x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2(T) = -x_2 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} 0 = -x_1 + 3x_2 \\ 0 = -x_2 \end{matrix}\right] \quad (0,0) \text{ è l'unico equilibrio}$$

Costruisco la matrice linearizzata:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice A ha entrambi gli autovalori a parte reale negativa, quindi è A.S. e posso applicare il metodo di sopra.

$$A^T P + PA = -Q \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} -P_1 & -P_3 \\ 3P_1 - P_3 & 3P_3 - P_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -P_1 & 3P_1 - P_3 \\ -P_3 & 3P_3 - P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} -2P_1 & 3P_1-2P_3 \\ 3P_1-2P_3 & 6P_3-2P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} +2P_1 = +1 \\ 3P_1 - 2P_3 = 0 \\ 6P_3 - 2P_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 = 1/2 \\ 3\cdot(1/2) = 2P_3 \rightarrow P_3 = 3/4 \\ P_2 = \frac{11}{4} \end{cases} \qquad V(x) = x^T \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 3/4 & 11/4 \end{bmatrix} x$$

• Vado a considerare la matrice A del sistema, per vedere se è possibile calcolare la matrice P soluzione al mio problema.

$$A = \begin{bmatrix} -1+x_2 & x_1+3 \\ 2x_1 & 2x_2-1 \end{bmatrix} \rightarrow A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

È identica alla matrice trovata al punto precedente. L'origine è quindi un equilibrio A.S. e la candidata di Lyapunov che ho dimostrato è la V(x) trovata al punto 2.

③ Dato il sistema

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

determinare:
- condizioni su (α, β, γ) affinché il sistema sia compl. R.
- condizioni su (α, β, γ) affinché il sistema sia controllabile in 1, 2 o 3 passi
- scelti 3 valori determinare una retroazione $u_k = Kx_k$ in modo che il sistema $(A+BK)$ sia "dead-beat".

$$R = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha+\beta & \alpha+2\beta+\gamma \\ \beta & \beta+\gamma & \beta+2\gamma \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{bmatrix} \qquad \underline{\gamma = 1}$$

affinché il sistema sia completamente raggiungibile $\gamma \neq 0$ sempre (altrimenti si perde un autovalore). Per quanto riguarda α e β, basta imporre che non devono essere entrambi nulli. Quindi

$\gamma \neq 0$ sempre

- $\alpha = 0 \rightarrow \beta \neq 0$
- $\beta = 0 \rightarrow \alpha \neq 0$

$$A^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Se il sistema è completamente raggiungibile, allora è anche completamente controllabile (a TD non vale il viceversa, ma questa proprietà vale).
Studiamo la controllabilità in k passi.

$\underline{k=1}$ $\quad \mathcal{I}m(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathcal{I}m(R_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\quad$ NO!

$\Rightarrow \neq 0$ allora il sistema è controllabile in 1 passo.

$\underline{k=2}$ $\quad \mathcal{I}m(A^2) = \mathcal{I}m(A) \subseteq \mathcal{I}m(R_2) \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \beta+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad$ $\gamma = 1$, $\alpha = 1$ $\beta = 0$ oppure $\alpha = 0$ $\beta = 1$

NO!

$\underline{k=3}$ il sistema è completamente raggiungibile per le condizioni scritte al punto precedente, quindi per le medesime condizioni è anche compl. controllabile

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u$ = $\begin{vmatrix} 1+u_1 & 1+u_2 & u_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ u_4 & u_2 & 1+u_3 \end{vmatrix}$ $\quad u_1 = u_4 = u_5 = u_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1+u_1-\lambda & 1+u_2 & u_3 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ u_1 & u_2 & 1+u_3-\lambda \end{bmatrix}$$

$(1+u_1-\lambda)(1-\lambda)(1+u_3-\lambda) + u_1(1+u_2) - u_1u_3(1-\lambda) - u_2(1+u_1-\lambda) =$

$= 1+u_1-\lambda-\lambda-u_1\lambda+\lambda^2)(1+u_3-\lambda) + u_1 + u_1u_2 - u_1u_3 + u_1u_3\lambda - u_2 - u_1u_2 - u_2\lambda$

$= 1+u_1-2\lambda-u_1\lambda+\lambda^2+u_3+u_1u_3-2u_3\lambda-u_1u_3\lambda+u_3\lambda^2-\lambda-u_1\lambda+2\lambda^2+u_1\lambda^2$

$-\lambda^2+u_1+u_1u_2-u_1u_3+u_1u_3\lambda \quad -u_2-u_1u_2-u_2\lambda$

$u_1 = -1 \quad u_2 = -1 \quad u_3 = -1$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{matrix}$$

$\lambda^2(1-\lambda) - 1 + \lambda$

$\lambda^2 - \lambda^3 - 1 + \lambda$

$+\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$

$\lambda^2(1-\lambda) + 1 - \lambda =$

$= \lambda^2 - \lambda^3 + 1 - \lambda$

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$-\lambda(-1-\lambda+\lambda+\lambda^2) - 2$

$-\lambda^3 + \lambda - 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} |u_1 u_2 u_3|$$

$1 + u_3 = 0 \rightarrow u_3 = -1$

$(-1-\lambda)(1-\lambda)$

$-1-\lambda+1+\lambda^2$

$\lambda^2 = 0$

$\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1+u_1-\lambda & 1+u_2 & 1+u_3 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ u_1 & u_2 & 1+u_3-\lambda \end{bmatrix}$$

$(1-\lambda)(1+u_1-\lambda) =$

$1-\lambda-u_1\lambda+u_1-\lambda+\lambda^2$

$\lambda^2 + \lambda(-2-u_1) + (1+u_1)$

$+2+u_1 = 0$

$u_1 = -2$

$u_1 = -1$

$u_1 = -2$

COMPITO 16.01.2020

① Dato:

$$H = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T [A x + B u]$$

$A = [$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A x + B \underbrace{u}_{-R^{-1}B^T\lambda} \\ \dot{\lambda}^* &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -Q x + A^T \lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u R + B^T \lambda \rightarrow u = -R^{-1} B^T \lambda^*$$

$$H = \begin{vmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x \\ \lambda \end{vmatrix} = e^{HT} \begin{vmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{vmatrix}$$

$R = [$

$$x(T_f) = \Psi_{11} x(0) + \Psi_{12} \underline{\underline{\lambda(0)}}$$

$$\lambda(0) = \Psi_{12}^{-1} \cdot [-\Psi_{11} x(0) + x(T_f)]$$

$$\lambda(T)^* = \Psi_{21} x(T) + \Psi_{22} \underline{\lambda(0)}$$

$O =$

$$u^*(T) = -R^{-1} B^T \lambda$$

1	1	2
0	1	2
1	1	1
	1	
	xc	

0	1	5
1	2	4
1	1	
	1	
	xs	

	5	0
	5	6
	10	4
	5	1

COMPITO 14.01.2020

① Dato il sistema TD:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

- studiarne stabilità, osservabilità, raggiungibilità e stabilità BIBO.
- portare il sistema in forma di Kalman.
- commentare sull'esistenza di c.i. per le quali si hanno le seguenti uscite in evoluzione libera:
  $(-2)^t$, 4, $t+3$, e^{-2t}

La matrice A è divisibile a blocchi, pertanto appare chiaro che gli autovalori sono:

$\lambda_1 = -2$ m.a. $= 1$
$\lambda_2 = 1$ m.a. $= 2$ m.g. $= 1$

Poiché siamo a TD, condizione necessaria per avere stabilità interna è che tutti gli autovalori siano interni alla circonferenza di raggio unitario, ovvero abbiano modulo minore di 1.
Il punto sistema un autovalore ha modulo $1 \cdot 1 = 2$, quindi il sistema non è internamente stabile.
In realtà, gli altri due autovalori hanno modulo unitario ma m.a. $\neq$ m.g., quindi anche essi rendono il sistema instabile.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rho(R) = 3 \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Il sistema è completamente raggiungibile.

$$O = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \rho(O) = 2 \qquad \mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Il sistema non è completamente osservabile (non appare in uscita l'autovalore (-2)).

La stabilità BIBO dipende dai poli della $G(s)$: se questi sono tutti a parte reale negativa, allora il sistema si dice BIBO stabile. La $G(s)$ dipende soltanto dagli autovalori raggiungibili e osservabili, quindi in questo caso:

$\lambda_1 = 1$

Poiché a TD dobbiamo considerare il modulo, ed entrambi gli autovalori hanno modulo $= 1$, cioè sono sulla circonferenza unitaria, il sistema non è BIBO stabile.

- Per portare il sistema in forma di Kalman devo per prima cosa calcolare la matrice di trasformazione.

$$T_{R\bar{O}} = \left[T_R \mid T_{\bar{O}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ker(T_{R\bar{O}}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}$$

$T_{R\bar{O}} = T_R w_1 = T_{\bar{O}}(-w_2) = \langle (0 \ 1 \ 0)^T \rangle$

$T_{RO} = \langle (1 \ 0 \ 0)^T \rangle ; \langle (0 \ 0 \ 1)^T \rangle$

$T_{\bar{R}\bar{O}} = \emptyset$

$T_{\bar{R}O} = \emptyset$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \quad A_{RO}$$

$$\tilde{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} B_{RO}$$

$$\tilde{C} = C T = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad C_{RO}$$

Questo è il sistema in forma di Kalman

$\dim T_{RO} = 2$

- A tempo discreto, l'evoluzione libera è data da:

$$y_e(k) = C A^k x_0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} x_0$$

$$O = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$(-2)^T$

$\downarrow$

$T+3$

e^{-2T}

② Dato il sistema TD

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1 x_2 + 2 x_2 u(k) \\ x_2(k+1) = x_2 (x_1 - 3) + u(k) \end{cases}$$

- trovare gli equilibri per $u(k)=0$ e studiarne la stabilità.
- commentare sull'esistenza di un ingresso che dipenda linearmente dallo stato e che renda A.S. gli equilibri instabili trovati.

$u(k)=0$ TD

$$\begin{cases} x_1(k) = x_1 x_2 \\ x_2(k) = x_2 (x_1 - 3) \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} 0 = x_1 (x_2 - 1) \\ 0 = x_2 (x_1 - 4) \end{matrix}$$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_2 = 1 \Rightarrow$

$0 = x_1 (x_2 - 1)$ — ① $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 = x_2 (-4) \end{cases} \rightarrow (0,0)$

② $\begin{cases} x_2 = 1 \\ 0 = x_1 - 4 \end{cases} \rightarrow (4,1)$

$0 = x_2 (x_1 - 4)$ — ① $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = -x_1 \end{cases} \rightarrow (0,0)$

② $\begin{cases} x_1 = 4 \\ 0 = \cancel{4} x_2 - \cancel{4} \end{cases} \rightarrow (4,1)$

EQUILIBRI

$(0,0)$

$(4,1)$

Studio la stabilità degli equilibri con il metodo indiretto.

$$A = \begin{vmatrix} x_2 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 - 3 \end{vmatrix} \qquad A\big|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Non posso concludere con questo metodo perché ho un autovalore nullo

$$A\big|_{(4,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \left[\begin{matrix} Tr(A) = 2 \\ det(A) = -1 \end{matrix} \right]$$

l'equilibrio è INSTABILE

Studio la stabilità dell'origine con il metodo diretto di Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Delta V(x) = (x_1 x_2)^2 + (x_1 x_2 - 3x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 9x_2^2 - 6x_1 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= 2x_1^2 x_2^2 - 6x_1 x_2^2 - x_1^2 + 8x_2^2 \Rightarrow$$ Equilibrio instabile

- L'ingresso dipendente linearmente dallo stato che rende gli equilibri A.S. esiste solo se il sistema è stabilizzabile, ovvero se (A,B) è completamente raggiungibile o, se anche non lo fosse, che gli autovalori instabili appartengano a R. In questo caso, la matrice degli ingressi è:

$$B = \begin{vmatrix} 2x_2 \\ 1 \end{vmatrix} \longrightarrow (4,1) \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad R = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \rho(R) = 2$$

Il sistema è stabilizzabile, quindi esiste un ingresso del tipo $u = Kx_k$ che rende A.S. l'equilibrio $(4,1)$

Per quanto riguarda l'equilibrio all'origine, il sistema è:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \longrightarrow R = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \qquad \rho(R) = 1$$

Il sistema non è completamente raggiungibile, ma mediante retroazione posso modificare l'autovalore (-3). Quindi è comunque stabilizzabile.

③ Si consideri il sistema SISO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad \text{con } u = Kx$$

si dimostri:

- se (A,B) è controllabile posso assegnare tutti i poli a ciclo chiuso.
- non si possono modificare i modi non controllabili.
- in alcuni casi si possono modificare gli zeri del sistema.
- non si può cambiare il grado relativo del sistema.
  (n - m)

- Teorema fondamentale assegnamento Poli

Se (A,B) è completamente raggiungibile posso assegnare mediante retroazione dello stato ($u = Kx$) gli autovalori desiderati al mio sistema e il vettore K che fa ciò è unico.

La raggiungibilità e la controllabilità sono concetti praticamente analoghi a TC, infatti a TD ottengo sempre verificare la controllabilità dal fatto che $\mathcal{M}_{ra}(A^T) \subseteq \mathcal{M}_{ra}(R_T)$

La dimostrazione del teorema si divide in due parti:

- condizione necessaria

Per assurdo (A,B) non è completamente controllabile. Allora esiste una matrice T di cambio base con cui porta il sistema in forma standard di controllabilità.

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_R \\ \tilde{z}_{\bar{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_R \\ \tilde{z}_{\bar{R}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Il sistema non raggiungibile (la cui dinamica è $\tilde{z}_{\bar{R}}$) non dipende dall'ingresso quindi se anche retroazionassi lo stato ($u = Kx$), questa retroazione non avrebbe effetti sulla parte non controllabile del sistema.

- Condizione Sufficiente

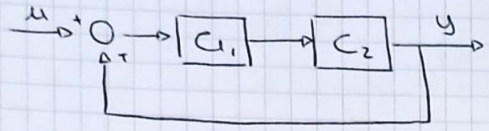
(A,B) è controllabile, quindi li scrivo in forma canonica di controllo:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & \mathcal{I} & \\ 0 & & \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+Bu) = \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & \mathcal{I} & \\ -a_0+u_1 & \cdots & -a_{n-1}+u_n \end{vmatrix} \triangleq \lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Ottengo un sistema di n equazioni in n incognite che è sempre risolvibile, quindi il metodo K è unico.

• la retroazione non può spostare gli zeri. Se infatti considero un sistema:



dove z_i è uno zero di $C_1(s)$ o di $C_2(s)$, questo sarà uno zero anche di C_{TOT}, data da:

$$C_{TOT} = \frac{C_1 C_2}{1 - C_1 C_2}$$

Quindi gli zeri non posso modificarli mediante retroazione.

(4) Dato il sistema lineare TI:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} x^T Q x + u^T R u \, d\tau \qquad \text{con vincoli} \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_f) = x_f \end{cases}$$

• dare condizioni sulle matrici Q e R che rendano il sistema risolvibile.
• descrivere la procedura che porta alla soluzione in forma chiusa.

Affinché il sistema sia risolvibile le condizioni da imporre sono:

• Q → matrice simmetrica, semidefinita positiva ($Q \geq 0$)
• R → matrice simmetrica, definita positiva ($R > 0$)

Scrivo la funzione Hamiltoniana:

$$H = g + \lambda^T f = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

Da questa ricavo le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax^* + Bu^* \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -Qx^* - A^T\lambda^* \\ 0 = \dfrac{\partial H}{\partial u} = u^* R + B^T \lambda^* \Rightarrow u^* = -R^{-1}B^T\lambda^* \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* - BR^{-1}B^T\lambda^* \\ \dot{\lambda}^* = -Qx^* - A^T\lambda^* \\ u^* = -R^{-1}B^T\lambda^* \end{cases}$$

Scrivo il sistema in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix}^* = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\text{matrice Hamiltoniana}} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}^*$$

la soluzione in forma chiusa la trovo integrando:

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}^* = e^{H(t-0)} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t,t_0) & \varphi_{12}(t,t_0) \\ \varphi_{21}(t,t_0) & \varphi_{22}(t,t_0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{vmatrix}^*$$

$$x(t_f) = \varphi_{11}(t_f, t_0)\, x(t_0) + \varphi_{12}\, \underline{\underline{\lambda(t_0)}}$$

$$\hookrightarrow \lambda(t_0) = \varphi_{12}^{-1}(t_f, t_0)\left[x(t_f) - \varphi_{11}(t_f, t_0)\, x(t_0)\right]$$

Ottengo $\lambda(t)$:

$$\lambda^*(t) = \varphi_{21}(t,t_0)\, x(t_0) + \varphi_{22}(t,t_0)\, \lambda(t_0) =$$

$$= \varphi_{21}(t,t_0)\, x(t_0) + \varphi_{22}(t,t_0)\, \varphi_{12}^{-1}(t_f,t_0)\left[x_f - \varphi_{11}(t_f,t_0), x(t_0)\right]$$

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T \underline{\lambda^*(t)}$$

Questa soluzione è funzione dell'Hamiltoniana, quindi di (A, B, Q, R), di x_f e del tempo.

L'indipendenza da $x(t_0)$ è giustificata dal principio di Bellman, il quale afferma che, avendo un problema di controllo ottimo che parte da A e B e trovando una soluzione ottima $u(t)$, se costruisco un nuovo problema che mi parte da C in B la soluzione sarà la stessa.
Quindi l'azione di controllo può essere scritta in funzione di $x(t)$ e non necessariamente di $x(t_0)$.

COMPITO 03.02.2020

① Dato il sistema descritto dalla matrice di trasferimento

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)} & \frac{1}{(s+1)} \\ \frac{1}{(s^2-1)} & \frac{s}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix} \qquad (s^2-1) = (s+1)(s-1)$$

- determinare il grado di Smith McMillan.
- lavorando per colonne trovare la forma di stato minima che rappresenta la matrice di trasferimento.
- Dato il sistema SISO formato dal 1° ingresso e la 2ª uscita determinare la raggiungibilità, l'osservabilità, la stabilità interna e la BIBO.

- Porto il sistema in forma di Smith:

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \cdot \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & (s-1)(s+2) \\ (s+2) & (s-1) \end{bmatrix}$$

$D_0(s) = 1$

$D_1(s) = \text{m.c.d.}\left\{ s^2+3s+2,\ s+2,\ s-1,\ s^2+s-2 \right\} = 1$

$D_2(s) = \text{m.c.d.}\left\{ (s-1)(s+1)(s+2) - (s-1)(s+2)^2 \right\} = \text{m.c.d.}\left\{ \cancel{s^3} - 2s^2 - s - 2 - \cancel{s^3} - 3s^2 + 4 \right\} =$

$= \cancel{\text{m.c.d.}\left\{ s^2 + \frac{1}{4}s - \frac{1}{2} \right\}} = \cancel{\left(s^2 + \frac{1}{4}s - \frac{1}{2}\right)} = \text{m.c.d.}\left\{ (s-1)\left[(s+1)(s+2) - (s+2)^2 \right] \right\} =$

$= \text{m.c.d.}\left\{ (s-1)(s+2)\left[s+1 - s-2 \right] \right\}$

$= \text{m.c.d.}\left\{ (s-1)(s+2)(3) \right\}$

GRADO: 4

$$M(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3(s-1)(s+2) \end{bmatrix}$$

- colonne ⇒ Forma Minima controllo

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)^2} \begin{bmatrix} s+1 \\ (s-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3-s^2-s+1} \begin{bmatrix} s+1 \\ s-1 \end{bmatrix}$$

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_1(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B_2(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_2(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{TOT} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \qquad C = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A sono:

$$A_2 - \lambda I = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$A_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - 1 + \lambda = \lambda^2 - \lambda^3 - 1 + \lambda = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) =$$
$$= (\lambda+1)^3$$

Il sistema è internamente stabile. Nel senso che è anche di tipo BIBO stabile.

- Il sistema non è completamente raggiungibile; nello specifico il blocco A_2 è quello non raggiungibile, mentre il blocco A_1 lo è.
- Il sistema è completamente osservabile.

② Dato il sistema dinamico non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^3 + \frac{1}{2} x_1 x_2^4 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 \end{cases}$$

- Trovare gli equilibri per ingresso nullo e studiarne la stabilità.
- Trovare un ingresso che renda l'equilibrio nell'origine stabile.

$\underline{u=0}$

$$\begin{cases} 0 = 2x_1^3 + \frac{1}{2} x_1 x_2^4 \\ 0 = -x_1^2 x_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 = x_1 \left(2x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^4\right) \\ 0 = -x_1^2 x_2 \end{cases}$$

$x_1 = 0 \quad \forall x_2$

$2x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^4 = 0 \; ; \quad 2x_1^2 = -\frac{1}{2} x_2^4$ NO!

EQUILIBRI

$(0,0)$
$(0, \forall x_2)$

Metodo Indiretto

$$A = \begin{vmatrix} 6x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^4 & 2x_1 x_2^3 \\ -2x_1 x_2 & -x_1^2 \end{vmatrix}$$

$A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ non posso concludere sulla stabilità dell'origine con il metodo indiretto.

$A|_{(0,x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} x_2^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ Non posso concludere.

$$U(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^4$$

$$\dot{U}(x) = 2x_1^4 + \cancel{\frac{1}{2} x_1^2 x_2^4} - \cancel{\frac{1}{2} x_1^2 x_2^4}$$ SDP $\Rightarrow$ Equilibrio instabile!

$$U(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^4$$

$$\dot{U}(x) = 2x_1^4 + \cancel{\frac{1}{2} x_1^2 x_2^4} - \cancel{\frac{1}{2} x_1^2 x_2^4} + u x_1 \qquad u = -2x_1^3 - x_1$$

$\dot{U}(x) = -x_1^2$ S.D.N. $\Rightarrow$ Equilibrio nell'origine stabile

③ Dato un sistema A, B, C continuo o discreto, completamente raggiungibile e osservabile, enunciare e dimostrare la proprietà di separazione degli autovalori.

(4) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases} \qquad e \qquad J = \int_0^\infty x_1^2 + u^2$$

- discutere se esiste una soluzione che minimizza J.
- determinare tale soluzione.

COMPITO 26·02·2020

① Dato il sistema descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- studiare i modi e la stabilità interna.
- determinare, se esiste, un vettore d'uscita 'C' tale per cui l'andamento dell'uscita per il sistema in evoluzione libera sia:

1) $e^{-t}\sin(2t) + e^{-2t}$
2) $\cos(2t) + t e^{-2t}$
3) $\sin(2t) - e^{-2t}$

- determinare se è possibile trovare le varie combinazioni di andamenti temporali per l'evoluzione forzata.
- data $C = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$ determinare la matrice del cambio base T che porta il sistema in forma di Kalman.

- Gli autovalori della matrice A sono:

$\lambda_1 = -2$ mi a. = 3, mi g. = 2 $\longrightarrow$ $(A+2I) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = \pm 2j$

Il sistema è internamente stabile, perché gli autovalori sono a parte reale negativa e quelli complessi hanno parte reale nulla. La presenza di quest'ultimo implica che il sistema è solo stabile e non asintoticamente.

I modi sono: $\cos(2t)$, $\sin(2t)$, e^{-2t}, te^{-2t}

- $C = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 8 & -16 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & -32 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{bmatrix} \qquad \dim(R) = 4 \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \qquad \dim(\bar{O}) = 2 \qquad \mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T_{\bar{R}\bar{O}} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \mathrm{Ker}(T_{R\bar{O}}) = (\underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 1}_{w_1} \ \underbrace{-1 \ 0}_{w_2})^T$$

$T_{\bar{R}\bar{O}} = \langle (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T \rangle$

$T_{R\bar{O}} = \langle (1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1)^T ; (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)^T ; (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1)^T \rangle$

$T_{\bar{R}\bar{O}} = \langle (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T \rangle$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• L'evoluzione libera a TC è data da: $y_e(t) = C e^{At} x_0$.
La prima combinazione d'ingressi non può comparire in uscita per alcuna c.i. infatti l'autovalore complesso ha parte reale nulla e non pari a (-1) come invece richiesto.
Gli altri due modi invece, possono comparire in uscita, basta scegliere un x_0 che permette solo il zero o il coseno e l'altro autovalore.

• L'immagine dell'uscita forzata altro non è che l'immagine di R. Occorre dunque verificare se ~~[illegible]~~ quei modi siano o no raggiungibili. In caso affermativo appariranno nella risposta forzata, in caso negativo allora no.

② Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) \end{cases}$$

• trovare gli equilibri e studiarne la stabilità con il metodo indiretto.
• per l'equilibrio nell'origine usare il metodo diretto per determinare la RAS.

$$\begin{cases} 0 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) - 2x_1x_2^2 \\ 0 = 2x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4 - 2x_2^2) \\ 0 = x_2(2x_1^2 + x_1^2 + x_2^2 - 4) \end{cases} ;$$

① $\begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - 4 = 0 \end{cases}$ $\quad \underline{x_1^2 = 4 + x_2^2}$

$0 = x_2(8 + 2x_2^2 + \cancel{4} + x_2^2 + x_2^2 - \cancel{4}) = x_2(8 + 4x_2^2)$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 4x_2^2 = -8 \ \underline{NO} \end{cases}$

② $\begin{cases} x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ 3x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \rightarrow x_2^2 = 4 - 3x_1^2 \end{cases} \Rightarrow 0 = x_1(x_1^2 - 4 + 3x_1^2) = x_1(4x_1^2 - 8)$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1^2 = 2 \end{cases}$

<u>EQUILIBRI</u> $(0,0)$ $(\pm 2, 0)$ $(0, \pm 2)$

$$A = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 - 4 - 2x_2^2 & 2x_1x_2 - 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 + 2x_1x_2 & 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_1^2 - 4 \end{bmatrix} \rightarrow A|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} tr(A) = -8 \\ det(A) = 16 \end{matrix} \Big] \text{ l'origine è un equilibrio A.S.}$$

$$A|_{(2,0)} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} tr(A) = 18 \\ det(A) = 80 \end{matrix} \Big] \text{ INSTABILE}$$

$$A|_{(0,2)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} tr(A) = 8 \\ det(A) = - \end{matrix} \Big] \text{ INSTABILE}$$

• Per la stima della RAS considero una candidata di Lyapunov:

$$U(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{U}(x) = x_1^2(x_1^2 + x_2^2 - 4) - \cancel{2x_1^2x_2^2} + \cancel{2x_1^2x_2^2} + x_2^2(x_1^2 + x_2^2 - 4) =$$

$$= \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{\substack{>0 \\ \text{si annulla} \\ \text{nell'origine}}} \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 - 4)}_{\substack{>0 \text{ si annulla} \\ \text{per } \underline{(x_1^2 + x_2^2) = 4}}}$$

Vicino all'origine il secondo elemento è definito negativo, quindi la $\dot{V}(x)$ è localmente definita negativa. La RAS è quindi formata da tutti i punti interni alla circonferenza ($x_1^2 + x_2^2 = u$). Le curve di livello sono anch'esse circonferenze.

$$\{x_1^2 + x_2^2 = c\} = \{V = c\} \qquad c < u \Rightarrow \{V = c\} \subset \underline{RAS}$$

③ Dato il sistema TD,

- descrivere il problema della stima sintetica dello stato.
- ricavare le equazioni di Luenberger fino a ottenere la forma ricorsiva dello stimatore
- si dicano le condizioni e si dimostrino per cui la dinamica dell'errore di stima converge a zero.
- specificare le condizioni per le quali l'errore di stima converge al 5% del valore iniziale ed in N passi.

Il problema di stima entra in gioco quando non conosciamo la dinamica dello stato ma vogliamo comunque effettuare il Full State Feedback. La stima è una buona approssimazione dello stato reale (per tempi molto lunghi la stima tende a x), quindi è un buon compromesso quello di usare l'identificazione e ricavare così la stima.

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu + Hy$$

L'errore di stima è dato da:

$$\varepsilon = \hat{x} - x \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = F\hat{x} + Gu + Hy - Ax - Bu =$$

$$= F(\varepsilon + x) + Gu + HCx - Ax - Bu =$$

$$= F\varepsilon + Fx + Gu + HCx - Ax - Bu =$$

$$= F\varepsilon + (F - A + HC)x + (G - B)u$$

Questa trovata è la dinamica dell'errore di stima. Poiché vogliamo che questa dinamica tenda a zero, in modo che la stima converga con lo stato reale, allora impongo:

$$\begin{cases} F = A - HC \\ G = B \end{cases} \qquad \underline{F \to A.S.}$$

Queste sono le equazioni alla Luenberger. Ogni stimatore che le rispetta entra in tale categoria.

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{(A - HC)\hat{x} + Bu}_{\text{predizione}} + \underbrace{H(y - \hat{y})}_{\text{correzione}}$$

La dinamica dell'errore di stima, quindi, tende a zero sotto le condizioni sopra citate. Chiaramente, devo scegliere H in modo che F sia A.S.; questo è possibile solo se (A,C) è osservabile. Infatti:

$$F = A - HC \to F^T = A^T - C^T H^T \quad \leftarrow \text{è nella stessa forma di } (A + BK)$$

Quindi o (A,C) è osservabile o (A^T, C^T) è stabilizzabile; essendo il problema duale, una condizione implica l'altra.

④ Dato il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice $J = \int_0^\infty u^2(\tau)\,d\tau$

- descrivere la procedura che permette di calcolare la legge di controllo ottima.
- calcolarla se esiste nei casi:

---

① $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -12 & -6 & 0 & 0 & 25 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Autovalori di H: $\underline{(\lambda+2)^3}\ (\lambda-2)^{\cancel{4}}\ (\lambda-2)\ \underline{(\lambda+2)^3}$

② $A_2 = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ $\quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$R = \begin{bmatrix} 2 & -18 & * \\ -2 & -4 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Il sistema non è stabilizzabile, quindi non posso trovare la matrice K richiesta.

③ $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$

autovalori di $A_3 \Rightarrow +\lambda^2(-2-\lambda) + 8 + 4\lambda =$

$= -2\lambda^2 - \lambda^3 + 8 + 4\lambda = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = (\lambda-2)(\lambda+2)^2$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -2 & 0 & 0 & 100 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{(\lambda-2)}(\lambda+2)^2\ \underline{(\lambda-2)}\ (\lambda+2\sqrt{2})\ \underline{(\lambda-2\sqrt{2})}$$

$$(A+BU) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8+10u_1 & 4+10u_2 & -2-10u_3 \end{bmatrix}$$

$\lambda^2(-2-10u_3-\lambda) + 8 + 10u_1 + \lambda(4+10u_2) =$

$= +2\lambda^2 + 10u_3\lambda^2 + \lambda^3 - 8 - 10u_1 - 4\lambda - 10u_2\lambda =$

$= \lambda^3 + \lambda^2(2+10u_3) + \lambda(-14-10K_2) - 8 \triangleq \lambda^3 + \lambda^2(-4-2\sqrt{2}) + \lambda(4+8\sqrt{2}) - 8\sqrt{2}$

$2 + 10u_3 = -4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow K_3 = \dfrac{-3+\sqrt{2}}{5}$

$-14 - 10u_2 = 4 + 8\sqrt{2} \Rightarrow u_2 = \dfrac{5-4\sqrt{2}}{5}$

COMPITO 15-06-2020

① Dato il sistema TC:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- studiare i modi e la stabilità interna.
- trovare la matrice T e la f.d.t.
- dare le condizioni di controllabilità a zero di un sistema TD e discutere le implicazioni con la raggiungibilità.

Gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = 0$ m.a. = 1

$\lambda_2 = 1$ m.a. = 2 m.g. = 1

$\lambda_3 = -1$ m.a. = 2 m.g. = 1

$$(A - I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è internamente stabile, infatti presenta almeno un autovalore con parte reale positiva.

I modi del sistema sono:

$$1,\ e^{t},\ te^{t},\ e^{-t},\ te^{-t}$$

$$(A + I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Per trovare la matrice T devo calcolare l'immagine dello spazio di raggiungibilità e quello dello spazio di inosservabilità.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\dim(R) = 4} \qquad \mathrm{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \dim(O) = 5 \\ \dim(\bar{O}) = 2 \end{array} \qquad \mathrm{Im}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T_{R\bar{O}} = \left[T_R \mid T_{\bar{O}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ker(T_{R\bar{O}}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \end{array}$$

$$T_{R\bar{O}} = T_R(w_1) = T_{\bar{O}}(-w_2) = \langle (1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T;\ (0\ 1\ 0\ 0\ 0)^T \rangle$$

$$T_{RO} = \langle (0\ 0\ 1\ 0\ 0)^T;\ (0\ 0\ 0\ 1\ 0)^T \rangle$$

$$T_{\bar{R}\bar{O}} = \emptyset$$

$$T_{\bar{R}O} = \langle (0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T \rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \left[T_{RO} \mid T_{R\bar{O}} \mid T_{\bar{R}O} \mid T_{\bar{R}\bar{O}} \right]$$

la f.d.t. è data da:

$$G(s) = C\,(sI-A)^{-1}B = C \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & s-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & s+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} B =$$

$$= C \begin{bmatrix} 1/s-1 & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{(s-1)^2} & 1/s-1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1/s & 1/s(s+1) & \\ 0 & 0 & 1/s(s+2) & 1/s+2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/s \end{bmatrix} B =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} & * \end{bmatrix} \cdot B \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{(s+2)}}$$

• Q TD, se il sistema è completamente raggiungibile ($\rho(R)=n$) allora è anche controllabile a zero, ma non vale il viceversa. Affinché questo sia vero, occorre verificare che:

$$\mathrm{Im}(A^t) \subseteq \mathrm{Im}(R_\tau)$$

Se questo è vero, allora il sistema è controllabile in τ-passi, altrimenti non lo è. Questo criterio vale solo a tempo discreto perché mentre e^{At} è sempre invertibile, lo stesso non si può dire per A^t.

② Dato il sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

• per $u=0$ si trovino gli equilibri e si disegnino le traiettorie nello spazio delle fasi.
• studiare la stabilità.
• per l'equilibrio nell'origine, trovare un ingresso che lo renda A.S.

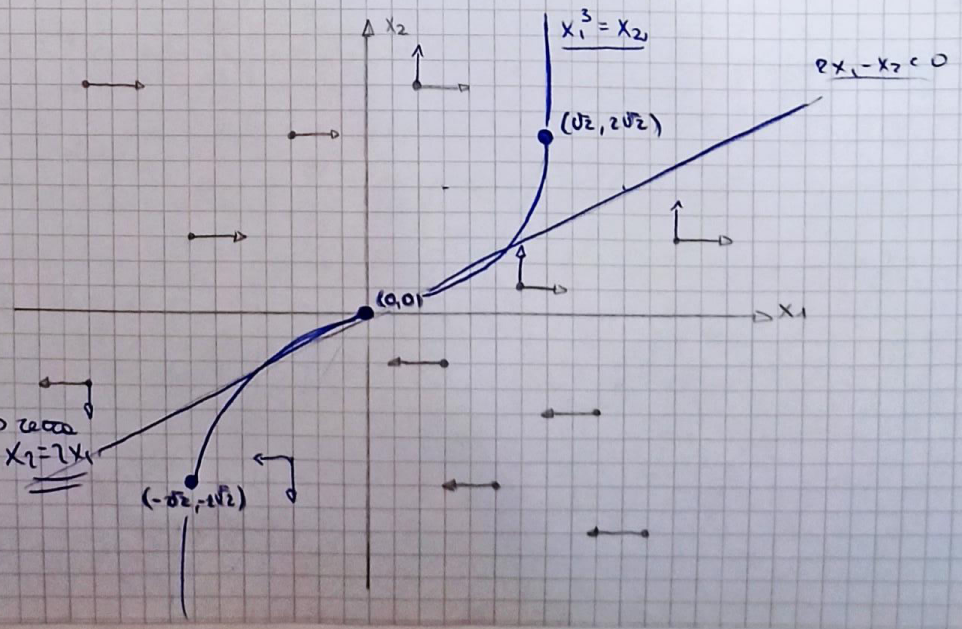
$$\begin{cases} 0 = -x_1^3 + x_2 \\ 0 = 2x_1 - x_2 \end{cases} ; \quad \begin{matrix} 0 = -x_1^3 + 2x_1 = x_1(-x_1^2+2) \\ x_2 = 2x_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \\ x_1^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{2} \quad x_2 = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

EQUILIBRI

$(0,0)$
$(\sqrt{2}, +2\sqrt{2})$
$(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

$\dot{x}_1 > 0 \quad \underline{x_1^3 - x_2 > 0}$

$\dot{x}_2 > 0 \quad 2x_1 - x_2 > 0$
$2x_1 - x_2 = 0 \rightarrow$ retta
$\underline{2x_1 > x_2}$
$\underline{\underline{x_2 = 2x_1}}$



Studio la stabilità con il metodo indiretto:

$$A = \begin{vmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

① $A|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \left.\begin{matrix} tr(A) = -1 \\ det(A) = -2 \end{matrix}\right]$ l'origine è un equilibrio INSTABILE!

② $A|_{(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \left.\begin{matrix} tr(A) = -7 \\ det(A) = 4 \end{matrix}\right]$ gli equilibri $(\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$ sono localmente stabili per il sistema.

Questo andamento degli equilibri si rispecchia con quanto riportato nello spazio delle fasi: le linee si allontanano dall'origine e tendono ad andare verso gli altri equilibri.

- Studio Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\mathcal{L}V(x) = -x_1^4 + x_1x_2 + x_1u + 2x_1x_2 - x_2^2 \qquad u = -3x_2 - x_1^3 - x_1$$

$\Rightarrow \mathcal{L}V(x) = -x_1^2 - x_2^2$ D.N. $\Rightarrow$ l'origine è un equilibrio A.S. mediante l'ingresso appena trovato.

③ Dato il sistema descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} u_k \\ y_k = (1 \quad 2)\, x_k \end{cases} \qquad u_k = Kx_k + \alpha r_k$$

- trovare la matrice K che pone gli autovalori a ciclo chiuso in (0,5) e (-0,5)
- determinare l'insieme delle c.i. del sistema tendenziale che producono una risposta libera dello stato senza oscillazioni.
- posto $\alpha = 0$, trovare l'insieme delle c.i. che producono un'uscita senza oscillazioni.
- assumendo $r_k = R$ trovare il valore di α per cui l'uscita y_k converge a regime a R.

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \rho(R) = 2$$

il sistema è completamente raggiungibile, quindi posso imporre mediante retroazione dello stato gli autovalori desiderati.

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + 2k_1 & \frac{1}{2} + 2k_2 \\ 2 + 4k_1 & \frac{1}{2} + 4k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A+BK-\lambda I) = \left(\frac{3}{2} + 2k_1 - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} + 4k_2 - \lambda\right) - \underbrace{(2 + 4k_1)\left(\frac{1}{2} + 2k_2\right)}_{} =$$

$$= \frac{3}{4} + k_1 - \frac{1}{2}\lambda + 6k_2 + \cancel{8k_1k_2} - 4k_2\lambda - \frac{3}{2}\lambda - 2k_1\lambda + \lambda^2 - 1 - 2k_1 - 4k_2 - \cancel{8k_1k_2} =$$

$$= \lambda^2 + \lambda\left(-\frac{1}{2} - 4k_2 - \frac{3}{2} - 2k_1\right) + \left(\frac{3}{4} + k_1 + 6k_2 - 1 - 2k_1 - 4k_2\right) =$$

$$= \lambda^2 + \lambda\left(-2 - 4k_2 - 2k_1\right) + \left(-\frac{1}{4} - k_1 + 2k_2\right) \triangleq \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} -2 - 4k_2 - 2k_1 = 0 \\ -\cancel{\frac{1}{4}} - k_1 + 2k_2 = -\cancel{\frac{1}{4}} \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1 + 2k_2 + k_1 = 0 \rightarrow k_1 = -1 - 2k_2 \\ 1 + 2k_2 + 2k_2 = 0 \rightarrow k_2 = -1/4 \end{matrix}$$

$$K = \left[-1/2 \quad -1/4\right]$$

la risposta libera dello stato a TD è data da:

$x_e(u) = A^u x_0 \rightarrow (A+BK)^u x_0$

Affinché punto non abbia oscillazioni, la risposta non deve avere in uscita il modo di ampiezza $(\lambda - 0,5)$.

$$\underbrace{(A-\lambda I) = (A_1 + \tfrac{1}{2} I)}_{(A+BK-\lambda I)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \ker(A + \tfrac{1}{2} I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Quindi posso scegliere come c.i. $x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Tale risposta non presenta oscillazioni.

- $\underline{\alpha = 0}$

$y(u) = CA^u x_0$ ← perché ho posto $\alpha = 0$, quindi considero l'ingresso nullo, avendo quindi solo la risposta libera del sistema.

$$y_e = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \end{bmatrix} x_0$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall \alpha$$

- $\underline{r_u = R} \rightarrow \underline{u_u = K x_u + R\alpha}$

$$y(u) = \sum_{i=0}^{u-i-1} CA^{u-i-1} B \, \underline{R\alpha}$$

④ Dato il sistema descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

- determinare l'osservabilità al variare di α.
- scelto un α, progettare uno stimatore dello stato tale che la dinamica dell'errore di stima abbia i poli in $(-1, -2, -3)$.
- dire se esiste (e si trovi) un valore iniziale non nullo dell'errore di stima per cui questo converge a zero come e^{-3t}.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 3\alpha \\ \alpha & 3\alpha & -3\alpha+9\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 3\alpha \\ \alpha & 3\alpha & 6\alpha \end{bmatrix}$$

- per $\alpha \neq 0$ il sistema è completamente osservabile.
- per $\alpha = 0$ il sistema non è osservabile

la dinamica dell'errore è associata alla matrice:

$$A - HC \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-h_1 \\ 1 & 0 & -3-h_2 \\ 0 & 1 & -3-h_3 \end{vmatrix}$$

$$+\lambda^2(-3-h_3-\lambda) + 1 - h_1 - \lambda(-3-h_2) =$$

$$= -3\lambda^2 - h_3\lambda^2 - \lambda^3 + 1 - h_1 + 3\lambda + h_2\lambda =$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(3+h_3) + \lambda(-3-h_2) + (h_1 - 1) \triangleq (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$\begin{cases} 3 + h_3 = 6 \\ -3 - h_2 = 11 \\ h_1 - 1 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} h_1 = 7 \\ h_2 = -14 \\ h_3 = 3 \end{matrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Teorema insieme invariante massimo

1) V positiva definita, $S \subset X$ sottoinsieme aperto con $0 \in S$ t.c. $\mathcal{L}V(x) = 0 \quad \forall x \in S$
2) $\exists \ell$ t.c. la curva di livello $V(x) = \ell$ sono chiuse e delimitano l'insieme Ω_ℓ:
$\Omega_\ell = \{ x \mid V(x) \leq \ell \}$
3) Dato $R = \{ x \in \Omega_\ell \mid \mathcal{L}V(x) = 0 \}$ e $M \subset R$ è l'insieme invariante massimo.

allora $\forall x_0 \in \Omega_\ell \rightarrow \phi(t, t_0, x_0)$ converge a M

Curva di livello

Data una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e dato $k \in \mathbb{R}$, una curva di livello è l'insieme formato dai punti del dominio che soddisfano l'equazione:
$f(x_1, x_2) = k$

Per $k \in \mathcal{J}m(f)$, la curva di livello $L(f, k)$ corrisponde a un luogo geometrico dei punti del piano individuato dall'equazione di sopra.

Teorema CETAEV

$V \in C^1$. Se, dato un intorno dell'origine (equilibrio) W, $\exists$ un insieme aperto U tale che:

- $0 \in \partial U \cup U$
- $\forall x \in U \cap W \quad V(x \neq 0) > 0 \quad e \quad \mathcal{L}V(x \neq 0) > 0$
- in $x = 0$ e $\forall x \in \partial U \cap W \quad V(x) = 0$

allora l'origine è instabile.

$V = x^T P x$

$\mathcal{L}V(x) = -x^T Q x \qquad \boxed{-Q = A^T P + PA} \qquad \underline{\underline{TC}}$

$\mathcal{L}V(x) = -x^T Q x \qquad \boxed{-Q = A^T P A - P} \qquad \underline{\underline{TD}}$

$$A_{12}^{-1} = -A_{11}^{-1} [A_{12} \; A_{22}^{-1}]$$

$\underline{M_i = S Q^{-1}}$

$$\dot{v} = (A_{11} + LA_{21}) v + (A_{12} + LA_{22} - A_{11}L - LA_{21}L) y + (B_1 + B_2) u$$

$$\hat{x} = T \begin{bmatrix} \hat{v} - Ly \\ y \end{bmatrix}$$

$$0 = \left[\frac{d}{dx} u^T(x^*, \tau_f) - \lambda^*(\tau_f) \right] dx_f + \left[\frac{d}{d\tau} u(x, \tau) + g(x^*, u^*, \tau_f) + \lambda^{*T}(\tau_f) (f(x^*, u^*, \tau_f)) \right] d\tau_f$$