Probabilità e Processi stocastici. Ingegneria Robotica e dell'Automazione.

Prove scritte dell'anno accademico 2012-13

Prova scritta del giorno 19/12/12

Esercizio 1

Un componente elettronico prodotto da una ditta viene sottoposto a un test di controllo: se il componente è difettoso, il test segnala il guasto con probabilità 0,8 . Tuttavia c'è anche la possibilità di un falso guasto, che viene segnalato nei componenti non difettosi con probabilità 0,2 .

Si ignora qual è la percentuale di pezzi difettosi prodotti dalla ditta, tuttavia si sa che la probabilità che un generico pezzo risulti guasto al test è la metà della probabilità che il guasto non venga segnalato.

a) Si può determinare qual è la percentuale di pezzi difettosi prodotti dalla ditta (cioè la probabilità che un generico pezzo sia difettoso)?

Supponiamo ora di cominciare a testare uno dopo l'altro i pezzi prodotti e consideriamo la v.a. X che conta il numero di prove effettuate perché sia segnalato il primo guasto.

b) Qual è la distribuzione di probabilità della v.a. X e la sua speranza?

Esercizio 2

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove a e b sono due parametri reali.

a) Dire per quali valori dei parametri a e b la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

b) Assegnata una v.a. X con la densità sopra scritta, dire per quali valori dei parametri la sua speranza è massima.

c) Dire se la v.a. $Y = \sqrt{X}$ è ben definita, se ha densità ed in tal caso calcolarla.

d) Dire (in funzione di a e b) per quali interi n la variabile X possiede momento di ordine n . Fissati a e b tali che esista ogni momento di ordine n , esaminare se esiste $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[X^n\big]$.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Disegnare il grafo, classificare gli stati e determinare le classi irriducibili.
b) Determinare tutte le probabilità invarianti della catena.
c) Dire per quali valori di (i, j) si può determinare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Soluzione commentata:

Esercizio 1

a) Se indichiamo con A l'evento *"il test segnala il guasto"* e con B l'evento *"il componente è difettoso"*, abbiamo

$$\frac{1}{3} = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|B^c)\,\mathbf{P}(B^c) = 0{,}8\,p + 0{,}2\,(1-p)$$

e da qui si ricava facilmente il risultato

$$\mathbf{P}(B) = p = \frac{0{,}333\cdots - 0{,}2}{0{,}6} = 0,222\ldots$$

b) Poiché la probabilità che un componente venga segnalato come difettoso (indipendentemente dal fatto che sia guasto oppure no) è $1/3$, la v.a. X risulta essere geometrica (o geometrica modificata, secondo la dizione degli appunti) di parametro $1/3$ e, come è stato visto durante il corso, $\mathbf{E}[X] = 3$.

Esercizio 2

a) Praticamente tutti gli studenti hanno verificato che si deve avere $\int_0^2 (ax + b)\,\mathrm{d}x = 1$, che porta all'eguaglianza $a + b = 1/2$. Però diversi studenti hanno dimenticato che si deve anche verificare che la funzione sia a valori positivi: poiché si tratta di una funzione lineare, è sufficiente verificare che sia positiva nei punti 0 e 2, cioè $b \geq 0$ e $2a + b \geq 0$.
In definitiva, si trova che si deve avere $0 \leq b \leq 1$ e $a = 1/2 - b$.

b) Con facili calcoli si ottiene $\mathbf{E}[X] = \int_0^2 \big(ax^2 + bx\big)\mathrm{d}x = 8/3\,a + 2b = 4/3 - 2/3\,b$, ed il massimo si ha evidentemente per $b = 0$ ed è $4/3$.

c) Poiché la variabile X è a valori positivi, $Y = \sqrt{X}$ è ben definita: il calcolo della densità di Y è facile. Ad esempio si può usare il fatto che l'applicazione $x \to y = \sqrt{x}$ è biunivoca, derivabile con inversa derivabile, da $\left]0\,,\,2\right[$ a $\left]0\,,\,\sqrt{2}\right[$ e, detta g la densità di Y, si ha

$$g(y) \;=\; \begin{cases} (ay^2+b)2y & 0<y<\sqrt{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

d) Poiché la densità è diversa da 0 su un intervallo limitato, la v.a. X possiede momenti di ogni ordine. Si ha in particolare
$\mathbf{E}\left[X^n\right] = \int_0^2 \left(a\,x^{n+1} + b\,x^n\right) \mathrm{d}x = a\frac{2^{n+2}}{n+2} + b\frac{2^{n+1}}{n+1} = \left(\frac{1}{2} - b\right)\frac{2^{n+2}}{n+2} + b\frac{2^{n+1}}{n+1} =$
$= \frac{2^{n+1}}{n+2}\left[1 - b\,\frac{n}{n+1}\right]$

Poiché $0 \leq b \leq 1$, è facile constatare che, qualunque sia b, si ha $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[X^n\right] = +\infty$.

Esercizio 3

Le domande a) e b) erano obiettivamente facili e quasi tutti i candidati hanno risposto correttamente: gli stati 1 e 2 sono transitori, 3 è uno stato assorbente e $\{4,\ 5,\ 6\}$ formano una classe irriducibile.

Inoltre la matrice stocastica associata alla classe $\{4,\ 5,\ 6\}$ è bistocastica e di conseguenza la probabilità invariante su quella classe è la distribuzione uniforme: brevemente, le probabilità invarianti sono della forma

$$\left(0\,,0\,,\alpha\,,(1-\alpha)\frac{1}{3}\,,(1-\alpha)\frac{1}{3}\,,(1-\alpha)\frac{1}{3}\right)$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$.

Osservazione: diversi studenti hanno scritto l'espressione precedente dimenticando però di precisare che α è compreso tra 0 e 1.

Per quanto riguarda $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ il discorso meritava un poco più di attenzione.

É facile constatare che, qualunque sia i, per $j=1$ oppure $j=2$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ e inoltre, partendo da 3, $\lim_{n\to\infty} p_{33}^{(n)} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} p_{3j}^{(n)} = 0$ per $j \neq 3$.

Inoltre, poiché la matrice associata alla classe irriducibile $\{4,\ 5,\ 6\}$ è regolare, per i e j eguali a 4, 5, 6 si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1/3$ (mentre, partendo da uno di questi stati, si ha $p_{ij}^{(n)} = 0$ per $j = 1,\ 2,\ 3$).

Un poco più delicato è esaminare che cosa succede partendo dagli stati 1 e 2: per essere rigorosi, qui occorre assumere che esistano $\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)}$ e

$\lim_{n\to\infty} p_{2j}^{(n)}$ (l'esistenza di questi limiti infatti non è una conseguenza immediata dei risultati visti durante il corso, tuttavia non è difficile provare che questi limiti ci sono).

Partiamo dalla formula generale, che ricordiamo:

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{h=1}^{6} p_{ih}\, p_{hj}^{(n)}$$

che, applicata a $i = 1,\,2$ diventa

$$p_{1j}^{(n+1)} = \frac{1}{2} p_{1j}^{(n)} + \frac{1}{2} p_{2j}^{(n)}$$

$$p_{2j}^{(n+1)} = \frac{1}{3} p_{1j}^{(n)} + \frac{1}{3} p_{3j}^{(n)} + \frac{1}{3} p_{5j}^{(n)}$$

Dalla prima eguaglianza si ricava $\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{2j}^{(n)}$.

Dalla seconda si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} p_{13}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{23}^{(n)} = \frac{1}{2}$$

mentre, per $j = 4,\,5,\,6$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{2j}^{(n)} = \frac{1}{6}$$

Prova scritta del giorno 9/01/13

Esercizio 1

Una compagnia aerea dispone di un aeromobile con 160 posti e, sapendo per esperienza che in media 4 passeggeri su 100 che hanno prenotato il volo poi non si presentano, accetta fino a 164 prenotazioni per ogni volo. Supponiamo che per un dato volo siano state effettuate esattamente 164 prenotazioni.

a) Qual è il numero medio di passeggeri che si presentano all'imbarco?

b) Qual è (approssimativamente) la probabilità che la compagnia sia costretta a rifiutare l'imbarco a qualche passeggero per esaurimento dei posti sull'aereo?

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x) = C\,.\begin{cases} \mathrm{e}^{x} & x < 0 \\ \big(1+x\big)^{-4} & x \geq 0 \end{cases}$$

dove C è una opportuna costante.

a) Dire per quale valore di C la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

b) Sia assegnata una v.a. X con densità f: dire per quali valori dell'intero positivo n, X possiede momento di ordine n.

c) Esaminare se le v.a. $Y = X^2$ e $Z = X \wedge 0 = \min\{X, 0\}$ hanno densità (e in caso affermativo calcolarle).

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

a) Qual è la probabilità di trovarsi al tempo 4 nello stato 6, partendo al tempo 0 dallo stato 2 ?

b) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

c) Calcolare (quando è possibile) $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Soluzione commentata:

Esercizio 1

a) La v.a. X che indica il numero di persone che si presentano all'imbarco è *Binomiale* di parametri 164 e 0,96 (ogni persona che ha effettuato la prenotazione ha probabilità 0,96 di presentarsi all'imbarco indipendentemente dagli altri) ed il suo valore atteso è quindi $164 \times 0{,}96 = 157{,}44$.

Osservazione: diversi studenti hanno corretto questo numero in un valore intero (157 o anche 158), ma il *numero medio* non deve affatto essere necessariamente intero.

b) Si tratta di calcolare $\mathbf{P}\{X > 160\}$ (viene rifiutato qualche imbarco se si presentano più di 160 persone) e per fare questo calcolo è opportuno usare il teorema Limite Centrale (con approssimazione di continuità):

$$\mathbf{P}\{X \geq 160{,}5\} = \mathbf{P}\left\{\frac{X - 164 \times 0{,}96}{\sqrt{164 \times 0{,}04 \times 0{,}96}} \geq \frac{160{,}5 - 164 \times 0{,}96}{\sqrt{164 \times 0{,}04 \times 0{,}96}}\right\} \approx$$

$$\approx \mathbf{P}\big\{Z \geq 1{,}219\big\} = 1 - \Phi(1{,}219) \approx 1 - 0{,}88877 = 0{,}11123$$

(dove Z è una variabile gaussiana standard).

Esercizio 2

a) Poiché si deve avere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, calcoliamo separatamente $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$ e $\int_0^{+\infty} \big(1+x\big)^{-4}\,\mathrm{d}x = -1/3.\big(1+x\big)^{-3}\Big|_0^{+\infty} = 1/3$.

Ne segue che si deve avere $C = 3/4$.

b) Non conviene cercare di calcolare la funzione generatrice dei momenti (che tra l'altro non è definita in un intorno di 0): si tratta di esaminare per quali n si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Per quanto riguarda l'integrale sulla semiretta negativa non ci sono problemi: qualunque sia n si ha $\int_{-\infty}^{0} |x|^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x < +\infty$.

I problemi si hanno sulla semiretta positiva, infatti $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{\big(1+x\big)^4}\,\mathrm{d}x$ è finito per $n < 3$ e quindi (poiché n è intero) per $n \leq 2$. In definitiva, la variabile X ammette solo momenti primo e secondo.

c) Per calcolare la densità di $Y = X^2$, calcoliamo prima la funzione di ripartizione. Questa è nulla per y negativo e per y positivo è eguale a $\mathbf{P}\big\{Y \leq y\big\} = \mathbf{P}\big\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\big\} = 3/4.\Big(\int_{-\sqrt{y}}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{y}} \big(1+x\big)^{-4}\,\mathrm{d}x\Big)$

Derivando si ottiene la densità di Y: questa è nulla per y negativo, e per y positivo è eguale a

$$\frac{3}{4}\Big(\big(1+\sqrt{y}\big)^{-4}.\frac{1}{2\sqrt{y}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{y}}.\frac{1}{2\sqrt{y}}\Big)$$

Osservazione: diversi studenti hanno scritto, indicando con F la funzione di ripartizione della v.a. X, l'eguaglianza $F(-\sqrt{y}) = 1 - F(\sqrt{y})$. È bene ammonire con decisione sul fatto che questa eguaglianza è *falsissima*: se Φ è la funzione di ripartizione della v.a. *gaussiana standard*, vale l'eguaglianza $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ ma in generale questa relazione non è affatto vera (è vera solo quando la densità è una funzione pari).

Per quanto riguarda la v.a. $Z = X \wedge 0$, si dovrebbe intuire subito che non può avere densità. Infatti Z prende il valore 0 dove la X ha valori positivi, cioè $\mathbf{P}\big\{Z = 0\big\} = \mathbf{P}\big\{X \geq 0\big\} = C.\int_0^{+\infty} \big(1+x\big)^{-4}\,\mathrm{d}x = 1/4$.

Poiché la v.a. Z prende il valore 0 con probabilità strettamente positiva, non può avere densità.

Si può arrivare alla medesima conclusione anche in un altro modo: calcolando la funzione di ripartizione della v.a. Z (tralascio i conti) si vede subito che questa è discontinua in 0. Dunque la v.a. Z non può avere densità: quando una v.a. ha densità la sua funzione di ripartizione è continua (non è vero il viceversa).

Esercizio 3

Evidentemente questi esercizi sulle catene di Markov incontrano il vostro gradimento perché la maggior parte dei candidati l'ha svolto bene (o abbastanza bene).

a) La soluzione di questa domanda è decisamente meccanica e non riporto tutti i conti (la maggior parte di studenti non ha avuto difficoltà). Ricordo solo che i percorsi possibili erano 7.

b) Lo stato 2 è transitorio, mentre vi sono due classi irriducibili: $C_1 = \{1, 3\}$ e $C_2 = \{4, 5, 6\}$.

La matrice di transizione relativa alla classe C_2 è bistocastica e quindi la probabilità invariante ristretta a C_2 è $\left(1/3, 1/3, 1/3\right)$. Invece per trovare la probabilità invariante ristretta a C_1 bisogna fare esplicitamente i calcoli (ma sono facili e non li riporto): la probabilità invariante su C_1 risulta essere $\left(2/3, 1/3\right)$.

Concludendo, tutte le probabilità invarianti sono della forma

$$\left(\frac{2}{3}\alpha,\ 0,\ \frac{1}{3}\alpha,\ \frac{1}{3}(1-\alpha),\ \frac{1}{3}(1-\alpha),\ \frac{1}{3}(1-\alpha)\right)$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$.

c) È facile constatare che entrambe le matrici di transizione ristrette alle classi C_1 e C_2 sono *regolari*, e quindi sappiamo all'interno di queste classi qual è il limite di $p_{ij}^{(n)}$.

In particolare, se $i = 1$ oppure $i = 3$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 2/3 & j = 1 \\ 1/3 & j = 3 \\ 0 & j = 2, 4, 5, 6 \end{cases}$$

Viceversa, se $i = 4, 5, 6$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1/3 & j = 4, 5, 6 \\ 0 & j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Partendo dallo stato 2, usiamo la formula

$$p_{2j}^{(n+1)} = 1/3\, p_{1j}^{(n)} + 1/3\, p_{3j}^{(n)} + 1/3\, p_{6j}^{(n)}$$

Questo ci garantisce per prima cosa che il limite esiste, inoltre (tenendo conto del fatto che, qualunque sia j, $\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{3j}^{(n)}$) si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{2j}^{(n)} = \begin{cases} 4/9 & j=1 \\ 0 & j=2 \\ 2/9 & j=3 \\ 1/9 & j=4,\,5,\,6 \end{cases}$$

Prova scritta del giorno 29/01/13

Esercizio 1

Ci sono due scatole, contenenti ciascuna 10 HD, dello stesso tipo e usati: la prima scatola contiene 2 HD difettosi e la seconda 5 difettosi.

a) Per effettuare 3 riparazioni, si prelevano (in blocco) 3 HD dalla prima scatola, e indichiamo con X il numero di HD funzionanti: calcolare $\mathbf{E}\big[X\big]$.

b) Si sceglie a caso una scatola e da essa si prelevano 3 HD che risultano tutti funzionanti: qual è la probabilità che sia stata scelta la prima scatola?

Esercizio 2

Si consideri la funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & 0 < x < A \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove A è una costante positiva.

a) Dire per quali valori di A la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

b) Si consideri una v.a. X avente densità f : dire quali momenti ammette questa variabile e calcolare $\mathbf{E}\big[X\big]$.

c) Si consideri la variabile $Y = 1-X$: dire se ha densità (ed in caso affermativo calcolarla) e calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Osservazione: può essere più conveniente lasciare indicati i risultati piuttosto che calcolarli numericamente.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1,\,2,\,3,\,4,\,5\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Classificare gli stati e determinare le classi irriducibili.

b) Esaminare se le classi irriducibili sono regolari. Esprimere poi tutte le probabilità invarianti.

c) Dire per quali coppie di stati (i,j) si può calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$.

Soluzione:

Esercizio 1

a) Con facili calcoli combinatori si trova

$\mathbf{P}\big(X=1\big) = \frac{8}{\binom{10}{3}} = 0{,}066$

$\mathbf{P}\big(X=2\big) = \frac{\binom{8}{2}\times 2}{\binom{10}{3}} = 0{,}466$

$\mathbf{P}\big(X=3\big) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = 0{,}466$

e di conseguenza $\mathbf{E}[X] = 1\times 0{,}066 + 2\times 0{,}466 + 3\times 0{,}466 = 2{,}396$.

b) Chiamiamo B_1 l'evento *"è stata scelta la prima scatola"* e B_2 l'evento *"è stata scelta la seconda scatola"*: chiaramente $\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_2) = 1/2$.

Se A è l'evento *"tutti e tre gli HD sono funzionanti"*, si ha

$$\mathbf{P}\big(A\big|B_1\big) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = 0{,}466 \qquad \mathbf{P}\big(A\big|B_2\big) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = 0{,}083$$

e di conseguenza, utilizzando la formula di Bayes, si trova

$$\mathbf{P}\big(B_1\big|A\big) = \frac{\mathbf{P}\big(A\big|B_1\big).\mathbf{P}\big(B_1\big)}{\mathbf{P}\big(A\big|B_1\big).\mathbf{P}\big(B_1\big) + \mathbf{P}\big(A\big|B_2\big).\mathbf{P}\big(B_2\big)} = \frac{0{,}466}{0{,}549} = 0{,}848$$

Esercizio 2

a) Calcoliamo $\int_0^A \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 1/2.\log\big(1+x^2\big)\Big|_0^A = 1/2.\log\big(1+A^2\big)$. Imponendo $1/2.\log\big(1+A^2\big) = 1$ si ottiene $A = \sqrt{\mathrm{e}^2-1}\,\big(\approx 2{,}527\big)$.

D'ora innanzi continuiamo a scrivere A (anziché il suo valore numerico approssimato).

b) Poiché la densità è diversa da 0 su un intervallo limitato, la variabile possiede tutti i momenti. Calcoliamo in particolare la speranza

$\mathbf{E}\big[X\big] = \int_0^A \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \big(1 - \frac{1}{1+x^2}\big)\,\mathrm{d}x = A - \arctan A$

c) Per quanto riguarda la variabile $Y = 1 - X$, si nota subito che la trasformazione $x \to y = 1-x$ è biunivoca (derivabile con inversa derivabile) e che l'immagine dell'intervallo $\big]0,\,A\big[$ è l'intervallo $\big]1-A,\,1\big[$.

Tralasciando i facili conti la densità di Y risulta essere

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1-y}{1+(1-y)^2} & 1-A < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il calcolo della covarianza è in realtà facile: infatti $\mathrm{Cov}\big(1-X, X\big) = -\mathrm{Var}(X) = -\mathbf{E}\big[X^2\big] + \mathbf{E}[X]^2$

Il termine $\mathbf{E}[X]$ è già stato calcolato, rimane da calcolare $\mathbf{E}\big[X^2\big]$ (e poi mettere insieme i vari termini).

$$\mathbf{E}\big[X^2\big] = \int_0^A \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^A x\,\mathrm{d}x - \int_0^A \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = A^2/2 - 1$$

Esercizio 3

a) e b) Gli stati 1 e 2 sono transitori, mentre $\big\{3,\,4,\,5\big\}$ formano una classe chiusa irriducibile.

Per esaminare se la classe $C = \big\{3,\,4,\,5\big\}$ è *regolare*, occorre esaminare la matrice di transizione ristretta a quella classe e precisamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice non ha nessun elemento sulla diagonale strettamente positivo (condizione sufficiente a garantire che sia regolare), tuttavia è facile constatare egualmente che è regolare: questo si puo' vedere o constatando che in due passi si può andare con probabilità strettamente positiva da uno qualsiasi degli stati di C ad un altro, o calcolando la potenza seconda di questa matrice che ha tutti gli elementi strettamente positivi (questo secondo modo di procedere è ovviamente molto più lungo).

Su C esiste un'unica probabilità invariante che deve essere calcolata esplicitamente (la matrice non è *bistocastica*) e poi estesa a tutto S.

Indicando con x, y, e z rispettivamente π_3, π_4, π_5, si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 2/3\,.y + 1/2\,.z \\ y = 1/4\,.x + 1/2\,.z \\ z = 3/4\,.x + 1/3\,.y \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(ricordando che delle tre equazioni iniziali una è superflua).

Non riporto i facili calcoli, ma la soluzione è data da $x = z = 4/11$, e $y = 3/11$.

Dunque esiste un'unica probabilità invariante, eguale a

$$\bigl(0,\ 0,\ 4/11,\ 3/11,\ 4/11\bigr)$$

Osservazione: diversi studenti hanno moltiplicato per α le componenti del vettore sopra scritto ma questo non ha senso. In questo caso la probabilità invariante è unica, si introduce α quando ci sono almeno due classi chiuse irriducibili.

c) Cominciamo ad osservare che, essendo stati transitori, per $j = 1, 2$, qualunque sia i si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0$.

Inoltre, poiché abbiamo visto che la classe C è regolare, per $i = 3, 4, 5$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i,4}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{i,6}^{(n)} = 4/11$ e $\lim_{n\to\infty} p_{i,5}^{(n)} = 3/11$.

Rimane da vedere che cosa succede per $i = 1, 2$ e $j = 3, 4, 5$: partiamo dalle due identità

$$p_{1,j}^{(n+1)} = 1/3.\, p_{1,j}^{(n)} + 1/3.\, p_{2,j}^{(n)} + 1/3.\, p_{3,j}^{(n)}$$

$$p_{2,j}^{(n+1)} = 1/3.\, p_{1,j}^{(n)} + 1/3.\, p_{2,j}^{(n)} + 1/3.\, p_{5,j}^{(n)}$$

L'esistenza di $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$ per $i = 1, 2$ e $j = 3, 4, 5$ non è una conseguenza immediata dei risultati teorici visti durante il corso, tuttavia non è difficile provare che questi limiti esistono. Prendendo per buona la loro esistenza, e tenendo conto del fatto che, qualunque sia j, si ha $\lim_{n\to\infty} p_{3,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{5,j}^{(n)}$, si vede con facili conti che si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{2,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{3,j}^{(n)}$$

e di conseguenza ci si riporta ai risultati già calcolati.

Prova scritta del giorno 19/02/13

Esercizio 1

Un candidato si presenta ad un esame a quiz che consiste in 10 domande: ogni domanda ha 3 risposte (delle quali una sola è esatta). Ogni risposta esatta viene valutata 1 punto, ed ogni risposta sbagliata o non data viene penalizzata con 1/3 di punto.

a) Consideriamo un candidato che risponde completamente a caso: qual è il suo punteggio medio?

b) L'esame si considera superato se il punteggio realizzato è almeno 7: qual è la probabilità che un candidato che risponde casualmente superi l'esame?

Esercizio 2

Consideriamo la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} a & -1 < x \leq 0 \\ b & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove $a > 0\,,\ b > 0\,.$

a) Determinare sotto quali condizioni per le costanti a e b sopra indicate la funzione scritta è una densità di probabilità, e scriverne la funzione di ripartizione.

b) Si consideri una v.a. avente densità f: dopo aver mostrato che tale v.a. possiede tutti i momenti, scrivere, in funzione delle costanti a e b, l'espressione di $\mathbf{E}\big[X^n\big]$ (con n intero positivo).

c) Presa $Y = \sqrt{|X|}$, calcolare $\mathbf{E}[Y]$ e scrivere la densità di Y (specificando con attenzione su quali intervalli la densità ha una certa espressione).

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Classificare gli stati, determinare le classi chiuse irriducibili e descrivere tutte le probabilità invarianti.

b) Calcolare, quando esiste, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ fornendo argomentazioni rigorose.

Soluzione:

Esercizio 1

a) Introduciamo la v.a. X che indica il numero di risposte esatte: questa è Binomiale di parametri 10 e 1/3. Poiché le risposte sbagliate (che sono

$(10 - X)$) vengono penalizzate di 1/3, il punteggio riportato è $Y = X - 1/3.(10 - X) = 4/3.X - 10/3$.

Ricordando che la speranza di X è 10/3, si ottiene

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{4}{3}\,\mathbf{E}[X] - \frac{10}{3} = \frac{10}{9} = 1{,}11$$

b) È facile verificare che $\{Y \geq 7\} = \{X \geq \frac{31}{4}\} = \{X \geq 8\}$ (non dimentichiamo che X è a valori interi).

La probabilità cercata è dunque

$$\mathbf{P}\{X \geq 8\} = \mathbf{P}\{X = 8\} + \mathbf{P}\{X = 9\} + \mathbf{P}\{X = 10\} =$$
$$\binom{10}{8}\Big(\frac{1}{3}\Big)^8\Big(\frac{2}{3}\Big)^2 + \binom{10}{9}\Big(\frac{1}{3}\Big)^9\Big(\frac{2}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3}\Big)^{10} =$$
$$= \frac{4 \times 45 + 2 \times 10 + 1}{3^{10}} = \frac{201}{3^{10}} = 0{,}0034$$

Esercizio 2

a) L'integrale della funzione sopra scritta è $a + 2b$ e si ricava facilmente $b = \frac{1-a}{2}$ con $0 < a < 1$ (a e b devono essere strettamente positivi). D'ora innanzi usiamo a come parametro e in luogo di b scriviamo $(1 - a)/2$.

Con facili calcoli si trova che l'espressione della funzione di ripartizione è la seguente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ a(x + 1) & -1 < x \leq 0 \\ a + \frac{1-a}{2}x & 0 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

b) Poiché la densità è diversa da 0 in un intervallo limitato, la variabile possiede tutti i momenti. Fissiamo dunque un intero positivo n e calcoliamo

$$\mathbf{E}\big[X^n\big] = a\int_{-1}^{0} x^n\,\mathrm{d}x + \frac{1-a}{2}\int_{0}^{2} x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1-a}{2}\,\frac{2^{n+1}}{n+1} - a(-1)^{n+1}$$

c) Il calcolo di $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}\big[\sqrt{|X|}\,\big]$ si può fare direttamente:

$$\mathbf{E}\big[\sqrt{|X|}\,\big] = a\int_{-1}^{0} \sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x + \frac{1-a}{2}\int_{0}^{2} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,a + \frac{1-a}{3}\,2^{\frac{3}{2}}$$

Viceversa per la densità di Y occorre un poco più di attenzione. Cominciamo a calcolare la funzione di ripartizione di Y (chiamiamola G) ed osserviamo che per $y \le 0$ si ha $G(y) = 0$ mentre per $y > \sqrt{2}$ si ha $G(y) = 1$.

Per $0 < y \le 1$ si ha

$$G(y) = \mathbf{P}\big\{\sqrt{|X|} \le y\big\} = \mathbf{P}\big\{-y^2 \le X \le y^2\big\} = \int_{-y^2}^{y^2} f(x)\,\mathrm{d}x = y^2\big(\frac{1-a}{2}\big)+y^2\,a$$

mentre per $1 < y \le \sqrt{2}$ si ha

$$G(y) = \mathbf{P}\big\{\sqrt{|X|} \le y\big\} = \mathbf{P}\big\{-1 \le X \le y^2\big\} = \int_{-1}^{y^2} f(x)\,\mathrm{d}x = y^2\big(\frac{1-a}{2}\big) + a$$

e derivando si ottiene l'espressione della densità di Y:

$$g(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y(1+a) & 0 < y \le 1 \\ y(1-a) & 1 < y \le \sqrt{2} \\ 0 & y > \sqrt{2} \end{cases}$$

Esercizio 3

a) Si verifica senza difficoltà che lo stato 1 è transitorio mentre vi sono due classi chiuse irriducibili: $C = \big\{2, 3\big\}$ e $D = \big\{4, 5, 6\big\}$.

La matrice di transizione ristretta alla classe C è

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

e da questa si vede subito che la classe C è *regolare*. La matrice non è bistocastica e per trovare l'unica probabilità invariante occorre risolvere il sistema (non riporto i facili conti). Si trova comunque che la probabilità invariante su C è $(\pi_2, \pi_3) = (4/7, 3/7)$.

Invece la matrice di transizione ristretta alla classe D è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche questa classe chiusa è *regolare*: questo fatto non è immediato ma si constata senza difficoltà che in due passi si può andare da uno all'altro degli stati di D con probabilità strettamente positiva.

Anche questa volta, per trovare l'unica probabilità invariante ristretta a D, si deve risolvere il sistema ma non è difficile. Non riporto i conti che mostrano che l'unica probabilità invariante su D è $(\pi_4,\, \pi_5,\, \pi_6,\,) = (8/27,\, 9/27,\, 10/27)$.

Concludendo, tutte le probabilità invarianti sono della forma

$$\left(0,\, \alpha\,\frac{4}{7},\, \alpha\,\frac{3}{7},\, (1-\alpha)\frac{8}{27},\, (1-\alpha)\frac{9}{27},\, (1-\alpha)\frac{10}{27}\right)$$

con $0 \le \alpha \le 1$.

b) Abbiamo risultati teorici precisi sugli stati delle classi C e D che sono regolari. Più precisamente, se $i = 2,\, 3$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{4}{7} & j = 2 \\ \frac{3}{7} & j = 3 \\ 0 & j = 1,\, 4,\, 5,\, 6 \end{cases}$$

Viceversa, se $i = 4,\, 5,\, 6$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & j = 1,\, 2,\, 3 \\ \frac{8}{27} & j = 4 \\ \frac{9}{27} & j = 5 \\ \frac{10}{27} & j = 6 \end{cases}$$

Rimane aperto il caso $\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)}$, ma questo si risolve facilmente osservando che vale l'eguaglianza

$$p_{1j}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\, p_{2j}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{3j}^{(n)} + \frac{1}{6}\, p_{4j}^{(n)} + \frac{1}{6}\, p_{6j}^{(n)}$$

Tutti i termini a destra dell'eguaglianza ammettono limite per $n \to \infty$ e mettendo insieme i termini si ottiene il seguente risultato:

$$\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)} = \begin{cases} 0 & j = 1 \\ \frac{8}{21} & j = 2 \\ \frac{2}{7} & j = 3 \\ \frac{8}{81} & j = 4 \\ \frac{1}{9} & j = 5 \\ \frac{10}{81} & j = 6 \end{cases}$$

Prova scritta del giorno 11/06/13

Esercizio 1

Il proprietario di un ristorante di Viareggio, che ha al massimo 86 posti, ha accettato per domenica prossima 94 prenotazioni confidando nel fatto che in media un cliente su 10, tra quelli che hanno prenotato, non si presenta. Qual è la probabilità che il gestore del ristorante si trovi nella situazione imbarazzante di dover rifiutare il posto a un cliente che ha prenotato?

Esercizio 2

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove a e b sono due costanti.

a) Dire per quali valori di a e di b la funzione sopra scritta è la densità di probabilità di una variabile aleatoria.

b) Tra le variabili aleatorie X che hanno la densità sopra scritta (dove a e b sono due parametri possibili) dire quali hanno valore atteso massimo o minimo e varianza massima o minima.

c) Scrivere esplicitamente (in funzione dei parametri a e b) la funzione di distribuzione (c.d.f.) della v.a. X .

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Classificare gli stati, determinare le classi chiuse irriducibili e descrivere tutte le probabilità invarianti.

b) Calcolare, quando esiste, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ fornendo argomentazioni rigorose.

Soluzione:

Esercizio 1

Sia X il numero di clienti che hanno prenotato e non si presentano: è una variabile binomiale di parametri 94 e $0{,}1$. Si deve rifiutare il posto a qualcuno se X è inferiore o eguale a 7.

Approssimiamo la probabilità $\mathbf{P}\{X \leq 7\}$ utilizzando il *Teorema Limite Centrale* ed usando la *correzione di continuità*. Si ha dunque

$$\mathbf{P}\{X \leq 7{,}5\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{X - 9{,}4}{\sqrt{94 \times 0{,}9 \times 0{,}1}} \leq \frac{7{,}5 - 9{,}4}{\sqrt{94 \times 0{,}9 \times 0{,}1}}\Big\}$$

Poiché $\frac{7{,}5-9{,}4}{\sqrt{94\times 0{,}9\times 0{,}1}} = -0{,}65$, la probabilità cercata si approssima con $\Phi(-0{,}65) = 1 - \Phi(0{,}65) \approx 0{,}26$ (si tratta quindi di una probabilità decisamente alta).

Esercizio 2

a) Poiché $\int_{-1}^{1}(ax + b)\,\mathrm{d}x = 2b$, si deve avere $b = 1/2$. Però occorre anche verificare che la funzione sia a valori positivi e, poiché è lineare, basta verificare che sia positiva nei punti -1 e 1: questo porta alle diseguaglianze $a + b \geq 0$ e $-a + b \geq 0$ dalle quali segue $-1/2 \leq a \leq 1/2$.

b) Intanto la variabile ha sicuramente tutti i momenti poiché la densità è diversa da 0 su un intervallo limitato. Si ha poi
$\mathbf{E}[X] = \int_{-1}^{1}\big(1/2 + ax\big)\,x\,\mathrm{d}x = a\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}a$, e di conseguenza il valore atteso è massimo per $a = 1/2$ (e vale 1/3) ed è minimo per $a = -1/2$ (e vale $-1/3$).

Si ha poi $\mathbf{E}\big[X^2\big] = \int_{-1}^{1}\big(1/2 + ax\big)\,x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Ne segue che $Var(X) = \frac{1}{3} - \big(\frac{2}{3}a\big)^2$ è massima per $a = 0$ (e vale 1/3) ed è minima per $a = \pm\frac{1}{2}$ (e vale $\frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$).

c) La funzione di distribuzione $F(x) = \mathbf{P}\{X \leq x\}$ è eguale a 0 per $x \leq -1$ ed è eguale a 1 per $x \geq 1$, mentre per $-1 < x < 1$ si ha

$$F(x) = \int_{-1}^{x}(at + 1/2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{a}{2}(x^2 - 1)$$

Esercizio 3

a) a) Si verifica senza difficoltà che lo stato 1 è transitorio mentre vi sono due classi chiuse irriducibili: $C = \{2,\,3\}$ e $D = \{4,\,5\}$. Entrambe le classi chiuse irriducibili C e D sono *regolari* (e quindi hanno un'unica misura invariante).

La matrice di transizione ristretta alla classe C è

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

e con facili conti (che non riporto) si trova che la probabilità invariante su C è $(\pi_2,\,\pi_3) = (1/3,\,2/3)$.

Invece la matrice di transizione ristretta alla classe D è *bistocastica* e ne segue immediatamente che l'unica probabilità invariante su D è $(\pi_4,\,\pi_5,\,) = (1/2,\,1/2\,)$.

Concludendo, tutte le probabilità invarianti sono della forma

$$\Big(0,\, \alpha\,\frac{1}{3},\, \alpha\,\frac{2}{3},\, (1-\alpha)\frac{1}{2},\, (1-\alpha)\frac{1}{2}\Big)$$

con $0 \le \alpha \le 1$.

b) Abbiamo risultati teorici precisi sugli stati delle classi C e D che sono regolari. Più precisamente, se $i = 2,\,3$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{3} & j = 2 \\ \frac{2}{3} & j = 3 \\ 0 & j = 1,\,4,\,5 \end{cases}$$

Viceversa, se $i = 4,\,5$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & j = 1,\,2,\,3 \\ \frac{1}{2} & j = 4,\,5 \end{cases}$$

Rimane aperto il caso $\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)}$, ma questo si risolve facilmente osservando che vale l'eguaglianza

$$p_{1j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}\,p_{2j}^{(n)} + \frac{1}{4}\,p_{3j}^{(n)} + \frac{1}{4}\,p_{4j}^{(n)} + \frac{1}{4}\,p_{5j}^{(n)}$$

Tutti i termini a destra dell'eguaglianza ammettono limite per $n \to \infty$ e mettendo insieme i termini si ottiene il seguente risultato:

$$\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)} = \begin{cases} 0 & j = 1 \\ \frac{1}{6} & j = 2 \\ \frac{1}{3} & j = 3 \\ \frac{1}{4} & j = 4,\,5 \end{cases}$$

Prova scritta del giorno 1/07/13

Esercizio 1

Si hanno a disposizione 2 monete m_1 e m_2. La moneta m_1 è equilibrata, mentre m_2 dà *"testa"* con probabilità $1/3$. Si esegue il seguente esperimento: si lancia m_1 ripetutamente fino ad ottenere "testa" per la prima volta, quindi si cambia moneta, e anche m_2 viene lanciata ripetutamente fino ad ottenere "testa" per la prima volta; a questo punto l'esperimento termina.
(a) Indichiamo con T_1 (risp. T_2) il numero di lanci necessari per ottenere "testa" per la prima volta sulla moneta m_1 (risp. m_2). Calcolare le leggi di probabilità di T_1 e di T_2.
(b) Calcolare la probabilità che l'esperimento termini dopo esattamente tre lanci (complessivi).
(c) Calcolare la probabilità che l'esperimento termini dopo almeno 3 lanci (complessivi).

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \big(1+|x|\big) & -a < x < a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove a è una costante positiva da determinare.

a) Dire per quali valori della costante a la funzione sopra scritta è la densità di probabilità di una variabile aleatoria.

b) Presa una v.a. X avente la densità sopra scritta, se ne calcolino il valore atteso, la varianza, e se scriva esplicitamente la funzione di distribuzione (c.d.f.)

c) Siano X_1 e X_2 indipendenti, aventi entrambe la densità sopra scritta: calcolare $\mathbf{E}\big[(X_1 - X_2)^2\big]$.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5,\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Disegnare il grafo, classificare gli stati e determinare le classi chiuse irriducibili. Descrivere inoltre tutte le probabilità invarianti.

b) Qual è la probabilità di trovarsi nello stato 2 al tempo 2, partendo dallo stato 1 al tempo 0 ?

c) Calcolare, quando esiste, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Soluzione:

Esercizio 1

a) La variabile T_1 è *geometrica* di parametro $\frac{1}{2}$ (cioè $\mathbf{P}\big\{T_1 = k\big\} = \big(\frac{1}{2}\big)^k$, per $k = 1, 2, \dots$); mentre la variabile T_2 è *geometrica* di parametro $\frac{1}{3}$, cioè $\mathbf{P}\big\{T_2 = k\big\} = \big(\frac{2}{3}\big)^{k-1}\frac{1}{3}$, per $k = 1, 2, \dots$

b) Si tratta di calcolare $\mathbf{P}\big\{T_1 + T_2 = 3\big\} = \mathbf{P}\big\{T_1 = 1\,,\, T_2 = 2\big\} +$ $+\,\mathbf{P}\big\{T_1 = 2\,,\, T_2 = 1\big\} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} + \big(\frac{1}{2}\big)^2.\frac{1}{3} = \frac{7}{36} = 0{,}194$

c) Ricordiamo che una variabile geometrica prende valori finiti (cioè $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big\{T = k\big\} = 1$) e di conseguenza anche $T_1 + T_2$, comme somma di due variabili geometriche, è a valori finiti.

Conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare, cioè la probabilità che l'esperimento termini dopo due lanci. Tale probabilità è $\mathbf{P}\big\{T_1 = 1\,,\, T_2 = 1\big\} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0{,}166\,.$

La probabilità cercata è pertanto $\frac{5}{6} = 0{,}833\,.$

Esercizio 2

a) Calcolando l'integrale $\int_{-a}^{a}\big(1 + |x|\big)\,\mathrm{d}x$ si ottiene $(2a + a^2)$: imponendo che questo numero sia eguale ad 1 si hanno le soluzioni $a = -1 \pm \sqrt{2}$, ma poiché a deve essere positiva solo la prima è accettabile, cioè $a = \sqrt{2} - 1\,.$

b) Facili calcoli provano che

$\mathbf{E}[X] = \int_{1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1}\big(1 + |x|\big)x\,\mathrm{d}x = 0$

$\mathbf{E}\big[X^2\big] = \int_{1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1}\big(1 + |x|\big)x^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{2}-1}\big(x^2 + x^3\big)\,\mathrm{d}x = \big(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}\big)\Big|_0^{\sqrt{2}-1} \approx$ $0{,}0783$, e quindi $Var(X) = 0{,}0783\,.$

Per calcolare la *funzione di distribuzione*, partiamo dalla formula $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ e osserviamo che l'espressione di $F(x)$ sarà diversa su diversi intervalli. Per semplificare le notazioni, indichiamo $a = \sqrt{2} - 1\,.$

Per $-\infty < x \le a$, si ha $F(x) = 0\,.$

Per $a < x \le 0$, si ha

$F(x) = \int_{-a}^{x}(1 - t)\,\mathrm{d}t = (x + a) - \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}$

Per $0 < x \le a$, poiché $\int_{-a}^{0}(1 + |t|)\,\mathrm{d}t = 1/2$, si ha

$F(x) = 1/2 + \int_0^x(1 + t)\,\mathrm{d}t = 1/2 + x + \frac{x^2}{2}$

Per $x > a$, si ha $F(x) = 1\,.$

c) Poiché X_1 e X_2 sono indipendenti ed equidistribuite, si ha $\mathbf{E}\big[(X_1 - X_2)^2\big] = 2\mathbf{E}\big[X_1^2\big] - 2\mathbf{E}[X_1]^2 = 2\mathbf{E}\big[X_1^2\big] \approx 0{,}1566\,.$

Esercizio 3

a) Si verifica senza difficoltà che gli stati 1 e 5 sono transitori mentre vi è un'unica classe chiusa irriducibile $C = \big\{2,\, 3,\, 4\big\}$. Questa classe chiusa è anche *regolare* (e quindi ha una sola misura invariante).

La matrice di transizione ristretta alla classe C è

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e con facili conti (che non riporto) si trova che la probabilità invariante su C è $(\pi_2,\, \pi_3,\, \pi_4) = (1/2,\, 1/8,\, 3/8)\,.$

Concludendo, vi è un'unica probabilità invariante su tutto lo spazio che ha la forma

$$\Big(0,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{8},\, \frac{3}{8},\, 0\Big)$$

b) Si può andare allo stato 2 in un passo e poi restare nello stato 2, oppure andare in uno degli stati 3 e 4 e da lì passare allo stato 2. La probabilità di seguire uno di questi percorsi è pertanto

$$\frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

c) Intanto, poiché 1 e 5 sono transitori, qualunque sia i si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)} = 0\,.$

Abbiamo risultati teorici precisi sugli stati della classe C che è regolare. Più precisamente, se $i = 2,\, 3,\, 4$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & j = 2 \\ \frac{1}{8} & j = 3 \\ \frac{3}{8} & j = 4 \end{cases}$$

Rimangono aperti i casi $\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)}$ e $\lim_{n\to\infty} p_{5j}^{(n)}$.
Questi però si risolvono facilmente osservando che vale l'eguaglianza

$$p_{1j}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\, p_{2j}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{3j}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{4j}^{(n)}$$

e allo stesso modo

$$p_{5j}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\, p_{2j}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{3j}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{4j}^{(n)}$$

Tutti i termini a destra dell'eguaglianza ammettono limite per $n \to \infty$ e il limite è eguale e di conseguenza si ottiene anche per $i = 1$ e $1 = 5$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & j = 2 \\ \frac{1}{8} & j = 3 \\ \frac{3}{8} & j = 4 \end{cases}$$

Prova scritta del giorno 22/07/13

Esercizio 1

In un grande ospedale, i malati di polmonite vengono trattati per 2/3 con antibiotici tradizionali, e per il restante 1/3 con antibiotici di nuova formulazione: la scelta della medicina di vecchio o nuovo tipo viene effettuata casualmente (rispettando le proporzioni sopra indicate) e non è riportata sulla cartella clinica. Si sa da precedenti esperienze che per i malati trattati con medicine tradizionali vi è scomparsa dei sintomi entro 4 giorni con probabilità 0,36; mentre risulta che globalmente i malati di quell'ospedale presentano scomparsa dei sintomi entro 4 giorni con probabilità 0,41.

È possibile da questi dati ricavare con quale probabilità i malati trattati con i nuovi antibiotici presentano scomparsa dei sintomi entro 4 giorni?

Esercizio 2

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} C_a . x^a . \mathrm{e}^{-(x+1)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

dove a è un numero reale e C_a una opportuna costante positiva.

a) Dire per quali valori di a la funzione sopra scritta può essere la densità di probabilità di una variabile aleatoria. Si può calcolare esplicitamente C_a ? Calcolare esplicitamente almeno C_1 .

b) Sia data una v.a. X avente la densità sopra scritta (dove a è uno dei parametri possibili). Quali momenti ammette la v.a. X ? Si può dare un'espressione esplicita di $\mathbf{E}[X^n]$ (quando questo è definito) per $a = 1$?

c) Calcolare (se esiste) la densità della v.a. $Y = \frac{1}{|X|+1}$.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Classificare gli stati, determinare le classi chiuse irriducibili e descrivere tutte le probabilità invarianti.

b) Qual è la probabilità di trovarsi nello stato 2 al tempo 2, partendo dallo stato 3 al tempo 0?

c) Calcolare, quando esiste, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ fornendo argomentazioni rigorose.

Soluzione:

Esercizio 1

Se noi chiamiamo B_1 (rispettivamente B_2) gli eventi corrispondenti al fatto che il paziente è trattato col vecchio o col nuovo antibiotico, ed A l'evento corrispondente al fatto che il paziente presenta scomparsa dei sintomi entro 4 giorni, come è ben noto vale la formula

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B_1)\,\mathbf{P}(B_1) \;+\; \mathbf{P}(A|B_2)\,\mathbf{P}(B_2)$$

I dati del problema sono $\mathbf{P}(B_1) = 2/3$, $\mathbf{P}(B_2) = 1/3$, $\mathbf{P}(A|B_1) = 0{,}36$ e $\mathbf{P}(A) = 0{,}41$.

Da questi dati si ricava immediatamente che si ha $\mathbf{P}(A|B_2) = 0{,}51$.

Esercizio 2

a) L'integrale $\int_0^{+\infty} x^a \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ è finito se $a > -1$ ed in tal caso è per definizione eguale a $\Gamma(a+1)$. Dunque si deve avere $a > -1$ e affinché sia una densità deve valere l'eguaglianza $C_a \mathrm{e}^{-1}\Gamma(a+1) = 1$ cioè $C_a = \frac{\mathrm{e}}{\Gamma(a+1)}$. In particolare $C_1 = \mathrm{e}$.

b) Qualunque sia $a > -1$, la variabile che ha la densità sopra scritta ammette tutti i momenti e si può anche dare un'espressione esplicita dei momenti. Infatti

$$\mathbf{E}\big[X^n\big] = C_a.\mathrm{e}^{-1}\int_0^{+\infty} x^{a+n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = C_a.\mathrm{e}^{-1}.\Gamma(a+n+1) = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a+1)}$$

In particolare, se $a = 1$, si ha $\mathbf{E}\big[X^n\big] = (n{+}1)!$

c) Innanzi tutto, poiché X prende valori positivi, si può scrivere $Y = \frac{1}{X+1}$, la variabile Y prende valori tra 0 e 1 e si può scrivere $X = Y^{-1} - 1$.

Si può applicare quindi la formula che permette di scrivere direttamente la densità di Y e si ottiene che questa densità è la funzione $g(y)$ definita da

$$g(y) \;=\; \begin{cases} C_a\big(y^{-1} - 1\big)^a \, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}}{y^2} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 3

a) Si verifica senza difficoltà che gli stati 3 e 4 sono transitori mentre vi sono due classi chiuse irriducibili e precisamente $C = \big\{1,\, 2\big\}$ e $D = \big\{5,\, 6\big\}$. Entrambe queste classi hanno quindi una sola misura invariante.

La matrice di transizione ristretta alla classe C è

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

e con facili conti (che non riporto) si trova che la probabilità invariante su C è $(\pi_1,\, \pi_2) = (1/4,\, 3/4)$.

La matrice di transizione ristretta alla classe D è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e si trova che la probabilità invariante su D è $(\pi_5,\, \pi_6) = (1/2,\, 1/2)$.

Concludendo, le probabilità invarianti su tutto lo spazio hanno la forma

$$\Big(\alpha\frac{1}{4},\, \alpha\frac{3}{4},\, 0,\, 0,\, (1{-}\alpha)\frac{1}{2},\, (1{-}\alpha)\frac{1}{2}\Big)$$

con $0 \le \alpha \le 1$.

b) Ci sono due possibilità: o passare prima allo stato 4 e da questo allo stato 2 (e questo avviene con probabilità $\frac{2}{3} . \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$) oppure passare prima allo stato 1 e da questo a 2 (e questo avviene con probabilità $\frac{1}{3} . \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$). In conclusione la probabilità cercata è $\frac{17}{36} = 0{,}472$.

c) Intanto, poiché 3 e 4 sono transitori, qualunque sia i si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{i4}^{(n)} = 0$.

Quanto alle due classi chiuse irriducibili C e D, notiamo che tra le due c'è una differenza sostanziale: la prima è *regolare* mentre la seconda non lo è. Abbiamo quindi automaticamente risultati teorici precisi sugli stati della classe C che è regolare, più precisamente, se $i = 1,\, 2$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{4} & j = 1 \\ \frac{3}{4} & j = 2 \\ 0 & j = 3,\, 4,\, 5,\, 6 \end{cases}$$

Invece la classe D non è regolare e non è difficile constatare che non esiste, per $i,\, j = 5,\, 6$ il limite $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Infatti, ad esempio, $p_{55}^{(n)}$ è eguale a 1 se n è pari ed è eguale a 0 se n è dispari (e analoghe proprietà si hanno per $p_{66}^{(n)}$, $p_{56}^{(n)}$ e $p_{65}^{(n)}$).

Rimangono aperti i casi $\lim_{n\to\infty} p_{3j}^{(n)}$ e $\lim_{n\to\infty} p_{4j}^{(n)}$.
Questi però si possono risolvere osservando che vale l'eguaglianza

$$p_{3j}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\, p_{1j}^{(n)} + \frac{2}{3}\, p_{4j}^{(n)}$$

e allo stesso modo

$$p_{4j}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\, p_{2j}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{3j}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{6j}^{(n)}$$

Concludendo, i limiti $\lim_{n\to\infty} p_{3j}^{(n)}$ e $\lim_{n\to\infty} p_{4j}^{(n)}$ sono 0 per $j = 3,\, 4$ (come avevamo già precisato), non esistono per $j = 5,\, 6$.

Invece è un poco più delicato esaminare i limiti $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ per $i = 3,\, 4$ e $j = 1,\, 2$: si osserva intanto che, se $j = 1,\, 2$, $p_{6j}^{(n)} = 0$.

Con facili passaggi algebrici si ottiene il seguente risultato:

$$\lim_{n\to\infty} p_{3j}^{(n)} = \begin{cases} \frac{5}{28} & j = 1 \\ \frac{15}{28} & j = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{4j}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{7} & j = 1 \\ \frac{3}{7} & j = 2 \end{cases}$$

Prova scritta del giorno 11/09/13

Esercizio 1

Un certo componente elettronico, se prodotto dalla ditta A è funzionante con probabilità 0,9 e se prodotto dalla ditta B con probabilità 0,7. Si ha a disposizione una scatola contenente 5 pezzi, della quale si ignora se sia stata prodotta dalla ditta A o dalla ditta B: questa scatola viene controllata e si trova che contiene 4 pezzi funzionanti.

È più probabile che sia stata prodotta dalla ditta A o dalla ditta B?

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f(x) = C_p\big(1+x^2\big)^{-p}$, dove $p > 0$ e C_p è una opportuna constante positiva.

a) Per quali valori di p la funzione sopra scritta è, per una opportuna scelta della costante C_p, una densità di probabilità?

b) Presa una v.a. X avente la densità sopra scritta, per quali valori di p possiede speranza e per quali valori possiede varianza?

c) Si esamini se la v.a. $Y = \sqrt{1+|X|}$ ammette densità ed in caso affermativo calcolarla.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

a) Classificare gli stati, determinare le classi chiuse irriducibili e descrivere le probabilità invarianti.

b) Qual è la probabilità di trovarsi nello stato 2 al tempo 2, partendo dallo stato 3 al tempo 0?

c) Calcolare, quando esiste, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

d) Come cambiano i risultati precedenti se si sostituisce la terza riga con la seguente: 1/2 0 1/4 1/4 ? (Non completare esplicitamente i calcoli delle probabilità invarianti se questi diventano troppo lunghi)

Soluzione:

Esercizio 1

Indicando con A l'evento *"il pezzo è prodotto dalla ditta A"* (e viceversa con B), in mancanza di informazioni poniamo a priori $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$.

Se C è l'evento *" 4 pezzi su 5 sono funzionanti"*, si ha $\mathbf{P}(C|A) = 5 \times (0{,}9)^4 \times 0{,}1 \approx 0{,}328$ e $\mathbf{P}(C|B) = 5 \times (0{,}7)^4 \times 0{,}3 \approx 0{,}36$.

Poiché, dalla formula di Bayes,

$$\mathbf{P}(A|C) = \frac{\mathbf{P}(C|A).1/2}{\mathbf{P}(C|A).1/2 + \mathbf{P}(C|B).1/2}$$

è immediato constatare (anche senza svolgere i conti fino in fondo) che $\mathbf{P}(C|A) < \frac{1}{2}$ e quindi è più probabile che la scatola sia stata prodotta dalla ditta B.

Esercizio 2

a) Si tratta di vedere per quali $p > 0$ si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^p}\,\mathrm{d}x < +\infty$. Poiché, per $|x|$ grande, $(1+x^2)^p \approx |x|^{2p}$, l'integrale è finito se $2p > 1$ cioè $p > 1/2$.

b) Anche qui si tratta di vedere per quali $p > 1/2$ si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{(1+x^2)^p}\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Questa volta, per $|x|$ grande, $\frac{|x|}{(1+x^2)^p} \approx |x|^{1-2p}$ e quindi esiste il momento primo se $2p - 1 > 1$ cioè $p > 1$. Con conti analoghi si verifica che esiste il momento secondo se $2p - 2 > 1$ cioè $p > 1{,}5$.

c) Conviene calcolare la funzione di ripartizione di Y e poi derivare: detta $G(y) = \mathbf{P}\big\{Y \leq y\big\}$, questa è eguale a 0 per $y \leq 1$ (la v.a. Y prende valori maggiori di 1), e per $y > 1$ si ha

$$G(y) = \mathbf{P}\big\{\sqrt{1+|X|} < y\big\} = \mathbf{P}\big\{|X| < y^2 - 1\big\} =$$
$$= \int_{1-y^2}^{y^2-1} \frac{C_p}{(1+x^2)^p}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{y^2-1} \frac{C_p}{(1+x^2)^p}\,\mathrm{d}x$$

e derivando si ottiene la seguente espressione della densità di Y:

$$g(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \dfrac{4\,C_p\,y}{\big(y^4 - 2y^2 + 2\big)^p} & y > 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

a) Si verifica senza difficoltà che gli stati 2 e 4 sono transitori mentre gli stati 1 e 3 formano una classe chiusa irriducibile C: esiste pertanto un'unica misura invariante.

La matrice di transizione ristretta alla classe C è

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e con facili conti (che non riporto) si trova che la probabilità invariante su C è $(\pi_1,\, \pi_3) = (1/2,\, 1/2)$.

Concludendo, l'unica probabilità invariante su tutto lo spazio è data da

$$\Big(\frac{2}{5},\, 0,\, \frac{3}{5},\, 0\Big)$$

b) Non è possibile, partendo da 3, arrivare allo stato 2 e pertanto questa probabilità è 0.

c) Intanto, poiché 2 e 4 sono transitori, qualunque sia i si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{i4}^{(n)} = 0\,.$

Quanto alla classe chiuse irriducibile C , notiamo che è *regolare*: abbiamo quindi automaticamente risultati teorici precisi sui suoi stati, più precisamente, se $i,\ j = 1,\ 3$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1/2\,.$

Rimangono aperti i casi, per $j = 1,\ 3\,,$ $\lim_{n\to\infty} p_{2j}^{(n)}$ e $\lim_{n\to\infty} p_{4j}^{(n)}$: questi però si possono risolvere osservando che valgono le eguaglianze

$$p_{2j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}\ p_{1j}^{(n)} + \frac{1}{2}\ p_{2j}^{(n)} + \frac{1}{4}\ p_{3j}^{(n)}$$

e allo stesso modo

$$p_{4j}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\ p_{2j}^{(n)} + \frac{1}{3}\ p_{3j}^{(n)} + \frac{1}{3}\ p_{4j}^{(n)}$$

Tralasciamo i dettagli che a questo punto sono facili.

d) Se si cambia la terza riga nel modo detto sopra, il cambiamento è drastico: tutto lo spazio diventa un'unica classe chiusa irriducibile, che è regolare.

Per l'esistenza dell'unica probabilità invariante occorre risolvere un sistema di 4 equazioni in 4 incognite: è sufficiente impostare questo sistema nella maniera giusta (portare avanti i conti fino in fondo è veramente pesante).

Se $\pi_1, \ldots, \pi_4$ è l'unica probabilità invariante, qualunque sia i , si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j\,.$

Infine la probabilità di trovarsi nello stato 2 al tempo 2, partendo dallo stato 3 al tempo 0, è $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}\,.$

Probabilità e Processi stocastici. Ingegneria Robotica e dell'Automazione.
Prove scritte dell'anno accademico 2013-14

Prova scritta del giorno 19/12/13

Esercizio 1

Da un alfabeto di n lettere si scrive una parola di k lettere: ogni lettera vien presa a caso, indipendentemente dalle altre, e le lettere possono essere ripetute.

a) Qual è la probabilità che la lettera h (con $1 \leq h \leq n$) venga usata almeno una volta?

b) Se $n = k$ ed n è grande, come si può approssimare questa probabilità?

c) Sia ora $k = 3$: qual è il numero medio di lettere diverse che viene utilizzato? Che cosa si può dire di questo *numero medio* quando n è grande?

Esercizio 2

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = C \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & x \geq 0 \\ 1 + x & -1 \leq x < 0 \\ 0 & x < -1 \end{cases}$$

a) Dire per quale valore di C la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

b) Assegnata una v.a. X con la densità sopra scritta, scriverne la funzione di ripartizione e dire se la variabile ammette valore atteso e più in generale quali momenti ammette (non si chiede di calcolare esplicitamente i momenti).

c) Dire se la v.a. $Y = X^2 + 1$ ha densità ed in caso affermativo calcolarla.

Esercizio 3

Assegnato α con $0 \leq \alpha \leq 1/2$, si consideri la catena di Markov sugli stati $S = \{1, 2, 3\}$ associata alla matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ \alpha & 1 - 2\alpha & \alpha \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

a) In funzione del parametro α , classificare gli stati, determinare le probabilità invarianti, dire se la catena è irriducibile e se è regolare (si distinguano i caso $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$ e $0 < \alpha < 1/2$). Che cosa si può dire di $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$?

b) Qual è (sempre in funzione del parametro α) la probabilità di trovarsi nello stato 3 al tempo 3 partendo dallo stato 2 al tempo 0 ?

Una soluzione:

Esercizio 1

a) È più facile calcolare la probabilità dell'evento complementare, cioè *"la lettera h non viene mai utilizzata"*: questa probabilità è $\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ e quindi la probabilità cercata è $1 - \left(1 - 1/n\right)^k$.

b) Se $k = n$ questa probabilità diventa $1-\left(1-1/n\right)^n$ che, quando $n \to \infty$, converge a $1 - \mathrm{e}^{-1} = 0{,}6321$.

c) Sia X il numero di lettere diverse che viene utilizzato per comporre la parola, X è una v.a. che può prendere i valori 1, 2 e 3.

È facile calcolare $\mathbf{P}\big\{X = 1\big\} = \frac{1}{n^2}$, e $\mathbf{P}\big\{X = 3\big\} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$ (i casi possibili sono sempre n^3 ed i casi favorevoli nel primo caso sono n e nel secondo il numero di sottinsiemi ordinati di tre elementi, cioè $n(n-1)(n-2)$).

Ci vuole un poco più di attenzione per calcolare $\mathbf{P}\big\{X = 2\big\}$: i casi favorevoli sono $\binom{n}{2} \times 2 \times 3$ (infatti $\binom{n}{2}$ è il numero di sottinsiemi di 2 elementi, poi si deve scegliere quale delle 2 lettere del sottinsieme è presa una sola volta ed infine quale tra le 3 lettere della parola è diversa dalle altre 2).

In alternativa, si può porre $\mathbf{P}\big\{X = 2\big\} = 1 - \mathbf{P}\big\{X = 1\big\} - \mathbf{P}\big\{X = 3\big\}$; in ogni caso si ottiene $\mathbf{P}\big\{X = 2\big\} = \frac{\binom{n}{2}\times 2\times 3}{n^3} = \frac{3(n-1)}{n^2}$.

Di conseguenza $\mathbf{E}[X] = \frac{1+6(n-1)+3(n-1)(n-2)}{n^2} = \frac{3n^2-3n+1}{n^2}$. Quando $n \to \infty$ questo valore atteso converge a 3 e questo risultato è in linea con l'intuizione (se le lettere sono molto numerose con alta probabilità se ne usano tre diverse).

Esercizio 2

a) Calcoliamo separatamente $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ e $\int_{-1}^{0}(1+x)\,\mathrm{d}x = 1/2$, e di conseguenza $C = \frac{2}{3}$.

b) Per scrivere correttamente la funzione di ripartizione bisogna distinguere con attenzione i vari casi. Quando $x < -1$, si ha evidentemente $F(x) = 0$.

Quando $-1 \leq x < 0$ si ha
$F(x) = \frac{2}{3}\int_{-1}^{x}(1+t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left(x + 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2+2x+1}{3}$.

Quando $x \geq 0$, si ha
$F(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

È facile vedere che la variabile ammette tutti i momenti: si tratta infatti di provare che, qualunque sia n, si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n\, f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Calcolando separatamente i due termini dell'integrale, si ottiene da una parte $\int_{-1}^{0} |x|^n \,(1-x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ (è l'integrale di una funzione continua su un intervallo limitato).

Viceversa $\int_0^{+\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (n-1)! < +\infty$.

c) Notiamo subito che la v.a. Y prende valori maggiori di 1, e quindi la sua (eventuale) densità è eguale a 0 per $y \le 1$. Cominciamo a calcolare, per $y \ge 1$, la funzione di ripartizione

$G(y) = \mathbf{P}\big\{X^2 + 1 \le y\big\} = \mathbf{P}\big\{-\sqrt{y-1} \le X \le \sqrt{y-1}\big\}$.

A questo punto occorre distinguere il caso $1 \le y \le 2$ ed il caso $y > 2$.

Infatti nel primo caso la funzione di ripartizione è eguale a

$\frac{2}{3}\int_{-\sqrt{y-1}}^{0}(1+x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{y-1}} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

mentre per $y > 2$ la funzione di ripartizione è eguale a

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{y-1}} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Concludendo, poichè la funzione di ripartizione è continua e derivabile, la variabile Y ammette densità e l'espressione della densità è data da

$$g(y) = \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ \frac{1-\sqrt{y-1}}{3\sqrt{y-1}} + \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{y-1}}}{3\sqrt{y-1}} & 1 < y \le 2 \\ \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{y-1}}}{3\sqrt{y-1}} & y > 2 \end{cases}$$

Esercizio 3

a) C'è una sostanziale differenza tra il caso $\alpha = 0$ ed il caso $\alpha > 0$: nel primo caso infatti 1 e 3 sono transitori e 2 è assorbente, l'unica probabilità invariante è $(0,\, 1,\, 0)$ e si ha, qualunque sia i, $\lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ per $j = 1,\, 3$.

Il fatto che si abbia, anche per $i = 1,\, 3$, $\lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = 1$ è immediato: infatti per $j = 1,\, 3$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ e $p_{i1}^{(n)} + p_{i2}^{(n)} + p_{i3}^{(n)} = 1$.

Se invece $\alpha > 0$, è facile verificare che la catena è irriducibile (e quindi esiste un'unica probabilità invariante).

La ricerca della probabilità invariante non è complicata: ad esempio dalle equazioni $\pi_1 = \alpha\pi_2 + 3/4.\pi_3$ e $\pi_3 = \alpha\pi_2 + 3/4.\pi_2$ si ricava immediatamente (sottraendo) l'eguaglianza $\pi_1 = \pi_3$. Ponendo allora $\pi_1 = \pi_3 = a$ e $\pi_2 = 1-2a$, con conti usuali (che non riporto) si trova che la probabilità invariante è data da

$$\big(\pi_1,\, \pi_2,\, \pi_3\big) = \Big(\frac{4\alpha}{1+8\alpha},\, \frac{1}{1+8\alpha},\, \frac{4\alpha}{1+8\alpha}\Big)$$

C'è poi una differenza tra il caso $0 < \alpha < 1/2$ e $\alpha = 1/2$: nel primo caso infatti si vede immediatamente che la catena è regolare (poichè uno dei termini sulla diagonale della matrice di transizione è diverso da 0). Invece se

$\alpha = 1/2$ occorre verificare direttamente che la catena è regolare (si vede facilmente che in due passi si può passare da uno stato all'altro con probabilità strettamente positiva).

In ogni caso, se $\alpha > 0$, qualunque sia i vale il risultato $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$.

b) Anche qui bisogna distinguere i tre casi: se $\alpha = 0$ questa probabilità è evidentemente 0.

Se $\alpha = 1/2$ i percorsi possibili sono

$$2 \to 1 \to 2 \to 3$$

$$2 \to 3 \to 1 \to 3$$

$$2 \to 3 \to 2 \to 3$$

e la conseguente probabilità è $\frac{13}{32}$.

Se invece $0 < \alpha < 1/2$, ai precedenti percorsi se ne aggiungono altri due

$$2 \to 2 \to 2 \to 3$$

$$2 \to 2 \to 1 \to 3$$

Il conto della probabilità di tutti questi precorsi è noioso ma meccanico, ed è eguale a $4\alpha^3 - 5\alpha^2 + \frac{37}{16}\alpha$.

Prova scritta del giorno 10/01/14

Esercizio 1

La radio di un satellite artificiale è alimentata da 6 batterie che funzionano indipendentemente: la radio trasmette dati se almeno 2 batterie sono in funzione. Si supponga che la durata di vita di ogni batteria sia una v.a. esponenziale con media 2 anni, indipendente dalla durata di vita di ogni altra batteria, e che da terra non sia possibile riattivare le batterie eventualmente guastate.

Calcolare la probabilità:

a) che dopo 4 anni la radio trasmetta ancora dati;

b) che dopo 4 anni la radio trasmetta ancora, ma non tutte le batterie siano in funzione.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x) = C \,.\begin{cases} e^{-x^2} & x \leq 0 \\ \left(1 + x^2\right)^{-1} & x > 0 \end{cases}$$

dove C è una opportuna costante.

a) Dire per quale valore di C la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

b) Sia assegnata una v.a. X con densità f : dire per quali valori dell'intero positivo n, X possiede momento di ordine n .

c) Esaminare se le v.a. $Y = \arctan(X)$ e $Z = X \vee 0 = \max\{X, 0\}$ hanno densità (e in caso affermativo calcolarle).

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6,\, 7\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

b) Calcolare, al variare di i , $\lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)}$.

c) Dette $C_1, \dots, C_k$ le classi chiuse irriducibili, qual è la probabilità partendo dallo stato 1 di finire in una di queste classi?

Una possibile soluzione:

Esercizio 1

Cominciamo a calcolare la probabilità che una generica batteria sia funzionante dopo 4 anni: questa è $\int_4^{+\infty} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$ (la durata di vita di una batteria è esponenziale di parametro $1/2$). Ne segue che il numero di batterie ancora funzionanti dopo 4 anni (indicato con Y) è una variabile *Binomiale* di parametri 6 e 0,135 .

a) Questa probabilità corrisponde a
$\mathbf{P}\big\{Y \geq 2\big\} = 1 - \mathbf{P}\{Y = 0\} - \mathbf{P}\{Y = 1\} = 1 - (0{,}865)^6 - 6 \times (0{,}865)^5 \times 0{,}135 \approx 0{,}189$.

b) Alla probabilità sopra calcolata bisogna sottrarre $\mathbf{P}\{Y = 6\} = (0{,}135)^6 \approx 0{,}000006053$. Poiché i numeri precedenti erano stati calcolati approssimati alla terza cifra decimale, non ci sono apparenti differenze.

Esercizio 2

a) Cominciamo a calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ e quindi $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Inoltre $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Ne segue l'eguaglianza $C = \frac{2}{\sqrt{\pi}+\pi}$. D'ora innanzi continueremo a scrivere C per il numero appena trovato.

b) Si tratta di vedere per quali interi positivi n si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n\, f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$. Mentre qualunque sia n si ha $C.\int_{-\infty}^{0} |x|^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x < +\infty$, ci sono problemi con la parte positiva.

Più precisamente si ha $C.\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = C/2\,.\log(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$. Di conseguenza la variabile non ha momento primo e a maggior ragione non ha i momenti di ordine superiore.

c) Cominciamo con la seconda, che è più facile: infatti $\mathbf{P}\big\{Z = 0\big\} = \mathbf{P}\big\{X \geq 0\big\} = C.\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{C\,\pi}{2} > 0$.

Quindi la variabile Z prende il valore 0 con probabilità strettamente positiva e non può pertanto avere densità.

Per quanto riguarda invece la variabile Y, cominciamo ad osservare che prende valori tra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ e quindi la densità è diversa da 0 solo su quell'intervallo. Si può calcolare la funzione di ripartizione di Y e poi derivare, ma si può anche applicare direttamente la formula per il cambio di densità attraverso una trasformazione biunivoca e derivabile.

La trasformazione inversa di $y = \arctan(x)$ è $x = \tan(y)$ (la cui derivata è $\big(1+\tan^2(y)\big)$. La densità della variabile Y risulta essere

$$g(y) = C\,.\begin{cases} \mathrm{e}^{-\tan^2(y)}.\big(1+\tan^2(y)\big) & -\frac{\pi}{2} < y < 0 \\ 1 & 0 \leq y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 3

a) Gli stati 1 e 2 sono *transitori* mentre vi sono due *classi chiuse irriducibili*: $C_1 = \big(3,\,4\big)$ e $C_2 = \big(5,\,6,\,7\big)$.

È immediato constatare che entrambe le classi chiuse irriducibili sono *regolari* (le relative matrici stocastiche hanno entrambe un elemento strettamente positivo sulla diagonale); si calcola facilmente la probabilità invariante sulla prima $\big(\frac{3}{4},\,\frac{1}{4}\big)$ mentre, poiché la relativa matrice di transizione è *bistocastica*, senza fare calcoli si vede che la probabilità invariante sulla seconda è $\big(\frac{1}{3},\,\frac{1}{3},\,\frac{1}{3}\big)$. In definitiva l'espressione di tutte le probabilità invarianti è

$$\Big(0,\,0,\,\frac{3\alpha}{4},\,\frac{\alpha}{4},\,\frac{1-\alpha}{3},\,\frac{1-\alpha}{3},\,\frac{1-\alpha}{3}\Big)$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Intanto, per $i = 3, 4$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)} = 0$ mentre per $i = 5, 6, 7$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)} = 1/3$.

Resta il caso più delicato del limite quando $i = 1, 2$. Cominciamo a scrivere le eguaglianze

$$p_{15}^{(n+1)} = \frac{2}{3}\, p_{25}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{35}^{(n)}$$

$$p_{25}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\, p_{15}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{35}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{55}^{(n)}$$

Però $p_{35}^{(n)} = 0$ e, poiché definitivamente la catena finisce nella classe C_1 oppure nella classe C_2, si vede che i limiti sopra scritti esistono. Annullando il termine $p_{35}^{(n)}$ e facendo dei facili sistemi lineari si arriva al seguente risultato

$$\lim_{n\to\infty} p_{15}^{(n)} = \frac{2}{21} \qquad \lim_{n\to\infty} p_{25}^{(n)} = \frac{1}{7}$$

c) Chiamiamo rispettivamente A_1 (A_2) l'evento *"la catena finisce nella classe C_1"* (C_2): se $\mathbf{P}_1$ è la probabilità partendo dallo stato 1, si ha per $n \geq 2$

$$\mathbf{P}_1\{X_n = 5\} = \mathbf{P}_1\{X_n = 5 \,|\, A_1\} \,.\, \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}\{X_n = 5 \,|\, A_2\} \,.\, \mathbf{P}(A_2)$$

Poiché valgono i risultati

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1\{X_n = 5\} = \frac{2}{21} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1\{X_n = 5 \,|\, A_1\} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1\{X_n = 5 \,|\, A_2\} = 1/3$$

si ottiene $\mathbf{P}(A_2) = 2/7$ e quindi $\mathbf{P}(A_1) = 5/7$.

Si può rispondere a quest'ultima domanda anche in un altro modo: si arriva alla classe C_2 facendo il percorso $1 \to 2 \to 5$ (con probabilità $2/9$) oppure facendo un numero k di volte (k intero positivo) il *giro* $1 \to 2 \to 1$ (che ha ancora probabilità $2/9$) e poi il percorso $1 \to 2 \to 5$.

La probabilità di arrivare definitivamente alla sottoclasse C_2 è pertanto

$$\frac{2}{9} \,.\, \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\frac{2}{9}\Big)^k = \frac{2}{9} \,.\, \frac{1}{1 - 2/9} = \frac{2}{7}$$

Prova scritta del giorno 29/01/14

Esercizio 1

Ci sono due scatole contenenti ciascuna 8 Hard Disk rigenerati: la prima contiene 2 pezzi difettosi e la seconda 3.

a) Dalla prima scatola si prelevano 4 HD, e sia X la variabile aleatoria che conta il numero degli HD funzionanti: calcolare $\mathbf{E}[X]$.

b) Si sceglie a caso una scatola e da questa si prelevano 2 HD che risultano entrambi funzionanti: qual è la probabilità che siano stati estratti dalla seconda scatola?

Esercizio 2

Consideriamo la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} a & -1 < x \leq 0 \\ bx & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove a e b sono opportune costanti.

a) Determinare sotto quali condizioni per le costanti sopra indicate la funzione scritta è una densità di probabilità.

b) Si consideri una v.a. avente densità f: calcolare, al variare di a e b, quando sono massima e minima la *speranza* e la *varianza* di X.

c) Presa $Y = X^2$, calcolarne la *densità* (se esiste).

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

b) Dette $C_1, \ldots, C_k$ le classi chiuse irriducibili, qual è la probabilità partendo dallo stato 1 di finire in una di queste classi?

c) Dire per quali i, j esiste $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ (e quando esiste calcolarlo).

Una possibile soluzione:

Esercizio 1

a) La variabile X può prendere i valori 2, 3 e 4. Con considerazioni di calcolo combinatorio si trovano le eguaglianze

$\mathbf{P}\{X=2\} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{14}$

$\mathbf{P}\{X=3\} = \frac{2\times\binom{6}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{4}{7}$

$\mathbf{P}\{X=4\} = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{14}$

Di conseguenza $\mathbf{E}[X] = 2\times\frac{3}{14} + 3\times\frac{4}{7} + 4\times\frac{3}{14} = 3\,.$

b) Se chiamiamo B_1 l'evento *"è stata scelta la prima scatola"* (e analogamente B_2 con la seconda) ed A l'evento *"i due HD scelti sono funzionanti"* si ha $\mathbf{P}\big(A\big|B_1\big) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$ e con conti analoghi $\mathbf{P}\big(A\big|B_2\big) = \frac{10}{28}$ mentre $\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_2) = 1/2\,.$

Applicando la formula di Bayes si trova facilmente $\mathbf{P}\big(B_2\big|A\big) = 2/5\,.$

Esercizio 2

a) Si vede immediatamente che $\int_{-1}^{0} a\,\mathrm{d}x + \int_0^1 bx\,\mathrm{d}x = a + b/2$ (che deve essere eguale a 1); bisogna però anche tener conto del fatto che la densità deve essere a valori positivi e quindi $a \geq 0$ e $b \geq 0\,.$

In definitiva si deve avere $0 \leq a \leq 1$ e $b = 2(1-a)$ (d'ora innanzi usiamo a come parametro e scriviamo b in funzione di a).

b) Calcoliamo $\mathbf{E}[X] = \int_{-1}^{0} ax\,\mathrm{d}x + 2(1-a)\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - \frac{7}{6}a\,.$ Tale speranza è massima per $a=0$ e vale 2/3, minima per a=1 e vale -1/2.

Calcoliamo ora $\mathbf{E}\big[X^2\big] = \int_{-1}^{0} ax^2\,\mathrm{d}x + 2(1-a)\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{a}{6}\,.$

Di conseguenza $Var(X) = \mathbf{E}\big[X^2\big] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{-49\,a^2+50\,a+2}{36}\,.$ Esaminando la derivata si vede che questa funzione è crescente per $a < \frac{50}{98} \approx 0{,}51$ e decrescente per $a > \frac{50}{98}\,.$

La varianza massima si ha pertanto per $a = \frac{50}{98}$ (e vale circa 0,41) e confrontando i valori agli estremi si vede che la varianza è minima per $a=0$ e vale 1/18.

c) Intanto la variabile X^2 prende valori tra 0 e 1 e di conseguenza la densità di X^2 (se esiste) è nulla fuori dell'intervallo $[0,1]\,.$

Per provare che la densità esiste e calcolare questa densità, cominciamo a calcolare per $0 \leq t \leq 1$ la *funzione di ripartizione*

$$G(t) = \mathbf{P}\big\{X^2 \leq t\big\} = \mathbf{P}\big\{-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}\big\} = \int_{-\sqrt{t}}^{0} a\,\mathrm{d}x + 2(1-a)\int_0^{\sqrt{t}} x\mathrm{d}x$$

Derivando, si ottiene la densità della variabile X^2

$$g(t) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{t}} + (1-a) & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

È facile verificare che questa è effettivamente una densità di probabilità (cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$).

Esercizio 3

a) Si verifica senza difficoltà che gli 1 e 4 sono transitori mentre vi sono due classi chiuse irriducibili: $C_1 = \{2, 3\}$ e $C_2 = \{5, 6\}$. Notiamo subito che la classe C_2 è *regolare* mentre la classe C_1 non lo è.

La matrice di transizione ristretta alla classe C_1 è *bistocastica* e ne segue immediatamente che l'unica probabilità invariante è $(\pi_2, \pi_3) = (1/2, 1/2)$.

Invece la matrice di transizione ristretta alla classe C_2 è

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

e con facili conti (che non riporto) si trova che la probabilità invariante su C_2 è $(\pi_5, \pi_6) = (1/3, 2/3)$.

Concludendo, tutte le probabilità invarianti sono della forma

$$\Big(0, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, 0, \frac{1-\alpha}{3}, \frac{2(1-\alpha)}{3}\Big)$$

con $0 \le \alpha \le 1$.

b) Questa parte può essere svolta anche come conseguenza del successivo punto c) ma proviamo a svolgerla in maniera indipendente.

Si può arrivare alla classe C_1 facendo direttamente il percorso $1 \to 2$ (con probabilità $1/3$) oppure facendo un numero k di volte (k intero positivo) il *giro* $1 \to 4 \to 1$ (che ha probabilità $1/6$) e poi il percorso $1 \to 2$.

La probabilità di arrivare definitivamente alla sottoclasse C_1 è pertanto

$$\frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{6}\Big)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-1/6} = \frac{2}{5}$$

Di conseguenza la probabilità di arrivare definitivamente alla classe C_2 è $3/5$.

c) Intanto, per $j = 1, 4$ (che sono stati transitori) qualunque sia i si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. Inoltre, poiché la classe C_2 è regolare, se $i = 5, 6$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)} = 1/3$ e $\lim_{n\to\infty} p_{i6}^{(n)} = 2/3$.

Infine non esistono $\lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)}$ e $\lim_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)}$ se $i = 2, 3$ e quindi anche se $i = 1, 4$ (mentre partendo dagli stati 5 e 6 la probabilità di arrivare agli stati 2 e 3 è 0).

Resta il caso più delicato del limite quando $i = 1, 4$ e $j = 5, 6$: questi due limiti esistono perchè definitivamente si va nella classe C_1 (e quindi non si può più arrivare in 5 e 6) oppure nella classe C_2 (dove questo limite esiste). Svolgiamo questo limite senza tenere del risultato del punto c) appena svolto e partiamo dalle eguaglianze

$$p_{15}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\, p_{45}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{55}^{(n)}$$

$$p_{45}^{(n+1)} = \frac{1}{2}\, p_{15}^{(n)} + \frac{1}{2}\, p_{55}^{(n)}$$

Con facili conti si trova $\lim_{n\to\infty} p_{15}^{(n)} = 1/5$ e $\lim_{n\to\infty} p_{45}^{(n)} = 4/15$.

In modo analogo si trova $\lim_{n\to\infty} p_{16}^{(n)} = 2/5$ e $\lim_{n\to\infty} p_{46}^{(n)} = 8/15$.

Prova scritta del giorno 18/02/14

Esercizio 1

Le matricole di Ingegneria dell'Università di Ancona quest'anno sono 720: indichiamo con X il numero di studenti nati a gennaio e con Y quelli nati a maggio (supponiamo per semplicità che ogni studente abbia, indipendentemente dagli altri, probabilità 1/12 di nascere in uno qualsiasi dei mesi dell'anno).

a) Le variabili X e Y sono indipendenti? Qual è la loro distribuzione di probabilità?

b) Calcolare (approssimativamente) la probabilità $\mathbf{P}\big\{X \geq 80\big\}$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione f_α definita da

$$f_\alpha(x) = C_\alpha \begin{cases} (x-1)^\alpha\, \mathrm{e}^{-x} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale.

a) Dire per quali valori del numero α esiste una costante C_α che rende la funzione sopra scritta una densità di probabilità. Si può calcolare esplicitamente C_α (quando α è intero o anche più in generale)?

b) Presa X con la densità sopra scritta (per un valore ammissibile di α), dire se la variabile $Y = \sqrt{X-1}$ ha densità ed in tal caso calcolarla.

c) Calcolare la speranza della variabile X che ha densità f_k (dove $\alpha = k$ è intero positivo).

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

b) Qual è la probabilità, partendo dallo stato 4 al tempo 0, di trovarsi in 6 al tempo 3?

c) Dire per quali i, j esiste $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ (e quando esiste calcolarlo), fornendo argomentazioni rigorose.

Una possibile soluzione:

Esercizio 1

a) Le variabili X e Y non sono indipendenti, questo lo suggerisce anche l'intuizione: per una dimostrazione precisa, ad esempio, $\mathbf{P}\{X > 400\} = \mathbf{P}\{Y > 400\} > 0$ (non importa calcolare esattamente quanto vale, basta sapere che è strettamente positiva) mentre $\mathbf{P}\{X > 400\,, Y > 400\} = 0\,.$ Inoltre sia la variabile X che la variabile Y sono *Binomiali* di parametri 720 e 1/12.

b) Questa probabilità può essere approssimata col Teorema Limite Centrale, che utilizziamo con *l'approssimazione di continuità*: tenendo conto del fatto che X è Binomiale con $n = 720$ e $p = \frac{1}{12}$, si ha

$$\mathbf{P}\{X > 79{,}5\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{X - \frac{720}{12}}{\sqrt{720 \times \frac{1}{12} \times \frac{11}{12}}} > \frac{79{,}5 - 60}{\sqrt{720 \times \frac{1}{12} \times \frac{11}{12}}}\Big\} =$$

$$= \mathbf{P}\Big\{\frac{X - 60}{7{,}41} > 2{,}63\Big\} \approx 1 - \Phi(2{,}63) = 1 - 0{,}9957 = 0{,}0043$$

Esercizio 2

a) Il problema si pone evidentemente intorno al punto 1 (infatti per $x \to \infty$ la funzione e^{-x} va a zero talmente in fretta da rendere integrabile ogni polinomio): con conti usuali si ottiene $\int_1^2 (x-1)^\alpha \, \mathrm{d}x < +\infty \Leftrightarrow \alpha > -1$ e quindi α deve essere maggiore di -1 .

È abbastanza facile calcolare C_α facendo un cambio di variabili: ponendo infatti $y = x - 1$ si ottiene

$$\int_1^{+\infty} (x-1)^\alpha \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} y^\alpha \, \mathrm{e}^{-(y+1)} \, \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-1} \, \Gamma(\alpha+1)$$

e quindi $C_\alpha = \frac{\mathrm{e}}{\Gamma(\alpha+1)}$. Se poi α è in intero positivo (diciamo $\alpha = k$) è ben noto che $\Gamma(k+1) = k!$ e quindi $C_k = \frac{\mathrm{e}}{k!}$.

b) Il calcolo si può fare direttamente senza passare attraverso la C.D.F.: infatti la trasformazione $y = \sqrt{x-1}$ è biunivoca (derivabile con inversa derivabile) da $]1, +\infty[$ a $]0, +\infty[$ e la sua inversa è $x = y^2 + 1$. Con conti usuali si ottiene che la densità g_α della variabile Y è

$$g_\alpha(y) = C_\alpha \begin{cases} y^{2\alpha} \, \mathrm{e}^{-(y^2+1)} (2y) & y > 0 \\ 0 & y \leq 1 \end{cases}$$

c) Si possono fare conti diretti ma si può più rapidamente sfruttare un'idea che avrebbe dovuto essere suggerita dai due punti precedenti, cioè passare alla variabile $Y = X - 1$: questa ha densità Gamma di parametri $(k+1)$ e 1 e posso scrivere $X = Y + 1$ e quindi $\mathbf{E}[X] = 1 + \mathbf{E}[Y]$. Il calcolo di $\mathbf{E}[Y]$ è standard: $\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} y^{k+1} \, \mathrm{e}^{-y} \, \mathrm{d}y = k + 1$ e quindi $\mathbf{E}[X] = k + 2$.

Esercizio 3

a) Lo stato 4 è transitorio mentre vi sono due classi chiuse irriducibili; $C_1 = \{1, 2, 3\}$ e $C_2 = \{5, 6\}$. Tra queste due c'è una differenza: mentre C_2 è *regolare* (si verifica immediatamente), C_1 non lo è. Infatti ad esempio da 1 si può andare in 2 solo con un numero dispari di passi e in 3 solo con un numero pari di passi.

Il calcolo delle probabilità invarianti è facile e non lo riporto: la probabilità invariante su C_1 è $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ e quella su C_2 è $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$: in definitiva tutte le probabilità invarianti sono della forma

$$\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{4}, 0, \frac{2(1-\alpha)}{3}, \frac{1-\alpha}{3}\right)$$

al variare di α con $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Vi sono due soli percorsi possibili: il primo è

$$4 \to 6 \to 5 \to 6 \qquad \text{che ha probabilità } \frac{1}{4}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ed il secondo è

$$4 \to 4 \to 4 \to 6 \qquad\qquad \text{che ha probabilità } \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

La probabilità totale è 0,140625 .

c) Qualunque sia i si ha evidentemente $\lim_{n\to\infty} p_{i4}^{(n)} = 0$, inoltre partendo da 1, 2 e 3 la probabilità di arrivare in n passi a 5 o 6 è 0 e viceversa partendo da 5 o 6 la probabilità di arrivare in 1, 2 o 3 è 0.

È facile verificare che per i e j eguali a 1, 2 o 3 non esiste $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ mentre, poichè si tratta di una classe regolare, per $i = 5,\ 6$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)} = 2/3$ e $\lim_{n\to\infty} p_{i6}^{(n)} = 1/3$.

Rimane da vedere se e per quali j esiste $\lim_{n\to\infty} p_{4j}^{(n)}$. Si può fare l'usuale sviluppo di $p_{4j}^{(n+1)}$ ma preferiamo scegliere un'altra strada: calcoliamo la probabilità, partendo da 4, di finire nella classe C_1 .

Questo succede facendo un numero k di volte il passaggio $4 \to 4$ ($k = 0, 1 \dots$) e poi il passaggio $4 \to 3$ e questo avviene con probabilità $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = 2/3$ (e quindi la probabilità di finire nella classe C_2 è $1/3$).

Come conseguenza, non esiste $\lim_{n\to\infty} p_{4j}^{(n)}$ per $j = 1,\ 2,\ 3$ mentre si ha $\lim_{n\to\infty} p_{45}^{(n)} = 2/9$ e $\lim_{n\to\infty} p_{46}^{(n)} = 1/9$.

Prova scritta del giorno 10/06/14

Esercizio 1

Una scatola contiene 10 pezzi prodotti da una ditta: viene effettuato un controllo scegliendo a caso due pezzi dalla scatola e provandoli, se almeno uno dei due risulta difettoso la scatola viene rifiutata.

a) Supponiamo che la scatola contenga 2 pezzi difettosi: qual è la probabilità che venga respinta?

b) Supponiamo invece che il numero di pezzi difettosi sia sconosciuto, ma che ogni singolo pezzo abbia probabilità 0,2 di essere difettoso, indipendentemente dagli altri: qual è adesso la probabilità che la scatola venga respinta?

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f(x) = c(r)\, x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2r}}$ dove $r \in \mathbb{R}$ e $c(r)$ è una opportuna costante.

a) Dire per quali valori di r e di $c(r)$ la funzione sopra scritta è una densità.

b) Scelti r e $c(r)$ opportuni, dire se esistono $\mathbf{E}[X]$ e $\mathbf{E}\big[\frac{1}{X}\big]$ (e in caso affermativo calcolarli).

c) Si consideri la v.a. $Y = X^2 - 1$: dire se ha densità e in caso affermativo calcolarla.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

b) Qual è la probabilità, partendo dallo stato 2 al tempo 0, di trovarsi in 6 al tempo 3?

c) Dire per quali i, j esiste $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ (e quando esiste calcolarlo), fornendo argomentazioni rigorose.

Una possibile soluzione:

Esercizio 1

a) È più comodo calcolare la probabilità dell'evento complementare, cioè che la scatola venga accettata (cioè non viene estratto alcun pezzo difettoso).

Con facile calcolo combinatorio, in questo caso la probabilità è

$$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{56}{90} = 0{,}6222...$$

b) Nel secondo caso la probabilità che la scatola venga accettata è $0{,}8^2 = 0{,}64$. Come si vede nei due diversi casi le probabilità non differiscono molto.

Esercizio 2

a) Chiaramente r deve essere strettamente positivo; inoltre facendo il cambio di variabili $\frac{x}{\sqrt{r}} = t$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2r}}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} rt^2\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \sqrt{r}\, \mathrm{d}t = r\sqrt{r}.\sqrt{2\pi}$$

e di conseguenza $c(r) = \left[r\sqrt{r}.\sqrt{2\pi}\right]^{-1}$. Nel seguito per brevità continuiamo a scrivere $c(r)$.

b) È facile verificare che sia X che $1/X$ ammettono speranza, infatti si ha $c(r)\int_{-\infty}^{+\infty}|x|.x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2r}}\,\mathrm{d}x<+\infty$ e $c(r)\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-1}\,x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2r}}\,\mathrm{d}x<+\infty$; ed in entrambi i casi la speranza è 0 poiché si tratta di integrali di funzioni dispari (e integrabili) su tutta la retta.

c) Cominciamo a calcolare la *funzione di distribuzione* (o di ripartizione) della v.a. Y e cioè $G(y)=\mathbf{P}\big\{X^2-1\le y\big\}=\mathbf{P}\big\{X^2\le y+1\big\}$. Questa probabilità è 0 se $y\le -1$ e per $y>-1$ è eguale a

$$\mathbf{P}\big\{-\sqrt{y+1}\le X\le\sqrt{y+1}\big\}=c(r)\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}}x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2r}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=2c(r)\int_0^{\sqrt{y+1}}x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2r}}\,\mathrm{d}x$$

Non è necessario calcolare questo integrale perché si può derivare ottenendo così la densità della v.a. Y che è eguale a

$$g(y)=\begin{cases}c(r)\sqrt{1+y}\,\mathrm{e}^{-\frac{1+y}{2r}} & y>-1\\ 0 & y\le -1\end{cases}$$

Esercizio 3

a) Lo stato 2 è transitorio mentre vi sono due classi chiuse irriducibili; $C_1=\big\{1,\,4,\big\}$ e $C_2=\big\{3,\,5,\,6\big\}$. Tra queste due c'è una differenza: mentre C_2 è *regolare* (è facile constatare che si può andare in due passi da un qualsiasi stato ad un altro), C_1 non lo è. Infatti ad esempio da 1 si può andare in 4 solo con un numero dispari di passi.

Il calcolo delle probabilità invarianti è facile e non lo riporto: la probabilità invariante su C_1 è $\big(\frac12,\,\frac12\big)$ e quella su C_2 è $\big(\frac{8}{27},\,\frac{9}{27},\,\frac{10}{27}\big)$: in definitiva tutte le probabilità invarianti sono della forma

$$\Big(\frac{\alpha}{2},\,0,\,\frac{(1-\alpha)8}{27},\,\frac{\alpha}{2},\,\frac{(1-\alpha)9}{27},\,\frac{(1-\alpha)10}{27}\Big)$$

al variare di α con $0\le\alpha\le 1$.

b) Vi sono due soli percorsi possibili: il primo è

$$2\to 6\to 3\to 6 \qquad \text{che ha probabilità } \frac23.\frac12.\frac12=\frac16$$

ed il secondo è

$$2\to 6\to 5\to 6 \qquad \text{che ha probabilità } \frac23.\frac12.\frac23=\frac29$$

La probabilità totale è 0,1944..

c) Qualunque sia i si ha evidentemente $\lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = 0$, inoltre partendo da 1 e 3 la probabilità di arrivare in n passi a 3, 5 o 6 è 0 e viceversa partendo da 3, 5 o 6 la probabilità di arrivare in 1 o 4 è 0.

È facile verificare che per i e j eguali a 1 o 4 non esiste $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ mentre, poiché si tratta di una classe regolare, per $i = 3,\ 5,\ 6$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)} = \frac{8}{27}$ e $\lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)} = \frac{9}{27}$ e $\lim_{n\to\infty} p_{i6}^{(n)} = \frac{10}{27}$.

Rimane da vedere se e per quali j esiste $\lim_{n\to\infty} p_{2j}^{(n)}$. Si può fare l'usuale sviluppo

$$p_{2j}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\, p_{4j}^{(n)} + \frac{2}{3}\, p_{6j}^{(n)}$$

Come conseguenza, non esiste $\lim_{n\to\infty} p_{2j}^{(n)}$ per $j = 1, 4$ mentre si ha $\lim_{n\to\infty} p_{23}^{(n)} = \frac{16}{81}$ $\lim_{n\to\infty} p_{25}^{(n)} = \frac{18}{81}$ e $\lim_{n\to\infty} p_{26}^{(n)} = \frac{20}{81}$.

Prova scritta del giorno 22/07/14

Esercizio 1

Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di v.a. indipendenti che prendono solo i valori 1 e -1, e tali che $\mathbf{P}\{X = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{X = -1\} = (1-p)$, con $0 < p < 1$.

a) Calcolare $\mathbf{P}\{X_1 + X_2 = 0\}$.

b) Provare che se n è dispari ($n = 2k+1$), si ha $\mathbf{P}\big\{X_1 + \dots + X_n = 0\big\} = 0$; supponendo invece n pari ($n = 2k$), trovare una formula per $\mathbf{P}\big\{X_1 + \dots + X_n = 0\big\}$.

c) Fornire una approssimazione, per n grande, di $\mathbf{P}\big\{X_1 + \dots + X_n \leq 0\big\}$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f(x) = C.\mathrm{e}^{-\lambda|x|}$, dove C e λ sono due costanti positive.

a) Determinare C in funzione di λ in modo che la funzione sopra scritta sia una densità di probabilità.

b) Presa una v.a. X con questa densità, esaminare se X ammette speranza e varianza ed in caso affermativo calcolarle.

c) Consideriamo le variabili aleatorie $Y = |X|$ e $Z = X^2$: dire se Y e Z hanno densità ed in caso affermativo calcolare queste densità. Si tratta di densità note?

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\,\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

b) Qual è la probabilità, partendo dallo stato 4 al tempo 0, di trovarsi in 6 al tempo 3?

c) Dire per quali $i,\, j$ esiste $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ (e quando esiste calcolarlo), fornendo argomentazioni rigorose.

Una soluzione:

Esercizio 1

a) Questa è la somma di $\mathbf{P}\{X_1 = 1,\, X_2 = -1\}$ e $\mathbf{P}\{X_1 = -1,\, X_2 = 1\}$, cioè $2p(1-p)$.

b) Se n è dispari, è impossibile che il numero di volte nelle quali compare 1 eguagli quelle nelle quali compare (-1), quindi la probabilità è 0.

Se invece n è pari ($n = 2k$) perchè la somma faccia 0 vuol dire che k volte è comparso 1 e le restanti è comparso (-1), vanno quindi contati i sottinsiemi di k elementi. In definitiva la formula è la seguente:

$$\mathbf{P}\big\{X_1 + \cdots + X_{2k} = 0\big\} = \binom{2k}{k} p^k\,(1-p)^k$$

c) L'approssimazione è fornita dal *Teorema Limite Centrale*, tenendo conto del fatto che le variabili X_i sono indipendenti, equidistribuite, con $\mathbf{E}[X_i] = 2p-1$, e $Var(X_i) = 4p(1-p)$. Tralasciamo i facili dettagli.

Esercizio 2

a) Si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda|x|}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2/\lambda$, e di conseguenza $C = \frac{\lambda}{2}$.

b) È facile constatare che, qualunque sia n, $C.\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n\,\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\,\mathrm{d}x < +\infty$ e quindi X ammette tutti i momenti.

$\mathbf{E}[X] = C.\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\,\mathrm{d}x = 0$ (poiché si tratta dell'integrale di una funzione dispari integrabile).

$Var(X) = \mathbf{E}\big[\, X^2 \,\big] = 2.\frac{\lambda}{2}.\int_0^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \lambda\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}$

c) È facile constatare che se una v.a. X ha densità f, la v.a. $|X|$ ha densità g data da

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ f(x) + f(-x) & x > 0 \end{cases}$$

e di conseguenza Y ha densità

$$g(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} & y > 0 \end{cases}$$

cioè è esponenziale di parametro λ.

Viceversa la densità della v.a. X^2 è data da

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

e di conseguenza Z ha densità

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{z}}}{4\sqrt{z}} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

e questa non è una densità nota in modo particolare.

Esercizio 3

a) Gli stati 3 e 4 sono transitori mentre vi sono due classi chiuse irriducibili; $C_1 = \big\{1,\, 2\big\}$ e $C_2 = \big\{5,\, 6\big\}$. Tra queste due c'è una differenza: mentre C_1 è *regolare* (si verifica immediatamente), C_2 non lo è. Infatti ad esempio da 5 si può andare in 6 solo con un numero dispari di passi e tornare in 5 solo con un numero pari di passi.

Il calcolo delle probabilità invarianti è facile e non lo riporto: la probabilità invariante su C_1 è $\big(\frac{2}{5},\, \frac{3}{5}\big)$ e quella su C_2 è $\big(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\big)$. In definitiva tutte le probabilità invarianti sono della forma

$$\Big(\frac{2\alpha}{5},\, \frac{3\alpha}{5},\, 0,\, 0,\, \frac{1-\alpha}{2},\, \frac{1-\alpha}{2}\Big)$$

al variare di α con $0 \le \alpha \le 1$.

b) C'è un solo percorso possibile, e precisamente

$$4 \to 6 \to 5 \to 6 \qquad \text{che ha probabilità } \frac{1}{4}.1.1 = \frac{1}{4}$$

c) Qualunque sia i si ha evidentemente $\lim_{n\to\infty} p_{i4}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{i4}^{(n)} = 0$.

Inoltre, poiché C_1 è una classe regolare, per $i = 1, 2$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = 2/5$ e $\lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = 3/5$.

Si vede subito che, partendo da 4, si finisce nella classe C_2 (dove si oscilla ad ogni passo tra 5 e 6) e quindi non esiste, per $i = 4, 5, 6$ e $j = 5, 6$, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$; mentre per $i = 4, 5, 6$ e $j = 1, 2, 3$ si ha $p_{ij}^{(n)} = 0$.

Rimane da vedere se e per quali j esiste $\lim_{n\to\infty} p_{3j}^{(n)}$: partiamo dall'usuale sviluppo

$$p_{3j}^{(n+1)} = \frac{1}{3} p_{2j}^{(n)} + \frac{2}{3} p_{4j}^{(n)}$$

Di conseguenza si vede che non esiste, per $j = 5, 6$, $\lim_{n\to\infty} p_{3j}^{(n)}$, mentre si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{31}^{(n)} = \frac{2}{15} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} p_{32}^{(n)} = \frac{1}{5}$$

Prova scritta del giorno 16/09/14

Esercizio 1

I laureati in Ingegneria Robotica trovano lavoro entro un anno con probabilità 0,82 se si sono laureati in corso, con probabilità 0,7 se si sono laureati con un anno di ritardo e con probabilità 0,62 se si sono laureati con due o più anni di ritardo. Si sa che il 40% degli studenti che hanno raggiunto la laurea si sono laureati in corso ed il 35% si sono laureati con un anno di ritardo.

a) Un laureato in Ingegneria Robotica, quale probabilità ha di trovare lavoro entro un anno?

b) Un laureato che ha trovato lavoro nell'anno, quale probabilità ha di essersi laureato in corso?

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Per quali valori dei parametri reali a e b la funzione sopra scritta è una densità di probabilità?

b) Presa una v.a X avente la densità sopra scritta, per quali valori di a e b sono massime rispettivamente la speranza e la varianza di X?

c) Consideriamo ora la v.a. $Y = (X^2 + 1)$: dire se Y ammette densità ed in caso affermativo calcolarla.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

b) Qual è la probabilità, partendo dallo stato 4 al tempo 0, di trovarsi in 6 al tempo 4?

c) Dire per quali i, j esiste $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ (e quando esiste calcolarlo), fornendo argomentazioni rigorose.

Una soluzione:

Esercizio 1

Si tratta di una evidente applicazione della formula di Bayes: se A è l'evento *"trovare lavoro entro un anno"* e B_1 (rispettivamente B_2 e B_3) gli eventi *"laurearsi in corso"* (rispettivamente con uno o più anni di ritardo) si ha (riportando direttamente i risultati)

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}82 \times 0{,}4 + 0{,}7 \times 0{,}35 + 0{,}62 \times 0{,}25 = 0{,}728$$

$$\mathbf{P}\big(B_1 \big| A\big) = \frac{0{,}82 \times 0{,}4}{0{,}728} = 0{,}45$$

Esercizio 2

a) Dalla relazione $\int_{-1}^{+1} (ax^2 + b)\,\mathrm{d}x = 1$ si ottiene $\frac{2}{3}a + 2b = 1$; ma bisogna anche imporre che la densità sia sempre positiva, e cioè $b \geq 0$ e $(a + b) \geq 0$.

In definitiva si ottiene $a = \frac{3}{2}(1 - 2b)$ e $0 \leq b \leq \frac{3}{4}$.

b) Qualunque sia il valore di b si ottiene $\mathbf{E}[X] = 0$.

Viceversa $Var[X] = \mathbf{E}[X^2] = \int_{-1}^{+1} \big(ax^4 + bx^2\big)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b = \frac{3}{5} - \frac{8}{15}b$, e la varianza è evidentemente massima per $b = 0$ (e raggiunge il valore 3/5).

c) Poiché la variabile $Y = X^2 + 1$ ha valori tra 1 e 2, la sua densità $g(y)$ è nulla per $y \leq 1$ e per $y \geq 2$.

Per $1 < y < 2$, occorre calcolare $\mathbf{P}\big\{-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\big\}$ e quindi derivare. Al termine dei calcoli si ottiene

$$g(y) = \begin{cases} a\sqrt{y-1} + \frac{b}{\sqrt{y-1}} & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 3

a) Lo stato 4 è transitorio mentre vi sono due classi chiuse irriducibili; $C_1 = \big\{1, 2, 3\big\}$ e $C_2 = \big\{5, 6, 7\big\}$.

Entrambe queste classi sono *regolari*: mentre per C_1 il risultato è evidente, per C_2 è un po' più delicato. Tuttavia non è difficile constatare che in 5 passi si può andare da ogni stato di C_2 ad un qualsiasi altro.

Il calcolo delle probabilità invarianti è standard e non lo riporto: la probabilità invariante su C_1 è $\left(\frac{8}{17}, \frac{6}{17}, \frac{3}{17}\right)$ e quella su C_2 è $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$. In definitiva tutte le probabilità invarianti sono della forma

$$\Big(\frac{8\alpha}{17}, \frac{6\alpha}{17}, \frac{3\alpha}{17}, 0, \frac{1-\alpha}{5}, \frac{2(1-\alpha)}{5}, \frac{2(1-\alpha)}{5}\Big)$$

al variare di α con $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Ci sono due percorsi possibili, e precisamente

$$4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 6 \qquad \text{che ha probabilità } \frac{1}{2}.1.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$4 \to 4 \to 4 \to 5 \to 6 \qquad \text{che ha probabilità } \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{32}$$

La probabilità è dunque $\frac{9}{32} = 0{,}28$.

c) Non riporto tutti i dettagli perché sono standard: ci sono evidentemente risultati precisi, forniti dalla teoria, per gli stati di C_1 e C_2, mentre qualunque sia i si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i4}^{(n)} = 0$.

Per determinare, per tutti gli altri stati j, $\lim_{n\to\infty} p_{4j}^{(n)}$, occorre calcolare qual è la probabilità, partendo da 4, di finire nella classe C_1.

Questa è eguale a $\sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^h.\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ (e ovviamente la probabilità di finire nella classe C_2 è $\frac{2}{3}$). Tralasciamo gli ultimi dettagli.

Probabilità e Processi stocastici. Ingegneria Robotica e dell'Automazione.
Prova scritta del giorno 15/12/14

Esercizio 1

In ingegneria un sistema formato da n componenti è detto k su n se funziona quando almeno k tra gli n elementi sono efficienti. Consideriamo un sistema 2 su 4.

a) Supponiamo che ogni elemento sia efficiente con probabilità 0,8 indipendentemente dagli altri: qual è la probabilità che il sistema funzioni?

b) Supponiamo invece che gli elementi siano messi in serie, che il primo sia efficiente con probabilità 0,8 e che ogni elemento successivo sia efficiente con probabilità 0,8 se l'elemento precedente è efficiente, altrimenti con probabilità 0,6 : qual è ora la probabilità che il sistema funzioni?

Esercizio 2

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = C_m \cdot \begin{cases} (x-1)^m \, e^{-x} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$$

dove m è un intero (relativo) e C_m una opportuna costante.

a) Dire per quali valori di m e di C_m la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

b) Considerata una v.a. X con la densità sopra scritta (per valori ammissibili di m e di C_m), esaminare se X ammette valore atteso ed in caso affermativo calcolarlo.

c) Si può affermare che esistono tutti i momenti di ordine n ?

d) Sia $Y = (X-2)^2$: dire se la v.a. Y ha densità ed in caso affermativo calcolarla.

Esercizio 3

Sei sfere, delle quali 3 bianche e 3 rosse, sono distribuite a caso in due urne A e B (3 sfere per urna): ad ogni passo viene estratta una sfera da ciascuna urna e vengono scambiate. Fissiamo la nostra attenzione sull'urna A e consideriamo nel tempo il numero di sfere bianche contenute in A.

a) Modellizzare il problema come una catena di Markov, disegnarne il grafo e scrivere la matrice di transizione.

b) Esaminare la struttura di questa catena di Markov (classi chiuse, probabilità invarianti, ecc...)

Prova scritta del giorno 12/01/15

Esercizio 1

Un tecnico riparatore di PC ha davanti a sé due scatole contenente ciascuna 12 Hard Disk; nella prima tuttavia vi sono 3 HD difettosi e nella seconda ve n'è uno difettoso.
a) Il tecnico prende 2 HD dalla prima scatola: indicando con X il numero di HD funzionanti che sono stati presi, calcolare $\mathbf{E}[X]$.
b) Supponiamo che il tecnico scelga a caso una scatola e da questa prenda 3 HD: se tutti e tre sono funzionanti, quale è la probabilità che abbia scelto la prima scatola?

Esercizio 2

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = c \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2} & x \geq 0 \\ x^2 \mathrm{e}^{x} & x < 0 \end{cases}$$

a) Dire per quale valore della costante c la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.
b) Presa una v.a. X avente la densità sopra scritta, dire per quali valori di n (intero positivo) X ammette momento di ordine n e calcolare esplicitamente la speranza e la varianza della variabile X.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi chiuse irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.
b) Dette $C_1, \ldots, C_k$ le classi chiuse irriducibili, qual è la probabilità, partendo da un generico stato i, di finire in una di queste classi?

Prova scritta del giorno 28/01/15

Esercizio 1

Le centraline elettriche di quartiere in Italia sono prodotte da due ditte: se prodotte dalla ditta A nel corso di un anno si guastano con probabilità 0,12 e se prodotte dalla ditta B con probabilità 0,08. Inoltre il 45% delle centraline è prodotto dalla ditta A.

A Pisa vi sono 12 centraline, tutte provenienti dalla stessa ditta, e nel corso dell'ultimo anno se ne sono guastate due: è più probabile che le centraline presenti a Pisa siano state prodotte dalla ditta A oppure dalla ditta B?

Esercizio 2

Consideriamo una v.a. X la cui densità è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ c/x & a < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

dove $0 < a < b < +\infty$ e c è una opportuna costante positiva.

a) Determinare la costante c in modo che la funzione così scritta sia una densità; esaminare inoltre quali momenti possiede la variabile X.

b) Calcolare i momenti primo e secondo di X.

c) Per quali valori delle costanti a, b la v.a. $Y = 1/X$ ha la stessa densità di X?

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificare gli stati e determinare le classi chiuse irriducibili esaminando in particolare se sono regolari. Determinare inoltre tutte le probabilità invarianti della catena.

b) Qual è la probabilità, partendo da 4 al tempo 1, di trovarsi in 6 al tempo 4?

b) Esaminare, per ogni stato i, se esiste $\lim_{n\to\infty} p_{4i}^{(n)}$, ed in caso affermativo calcolarlo.

Prova scritta del giorno 17/02/15

Esercizio 1

Un'urna contiene 5 palline numerate con i numeri 1, 2, 3, 4, 5. Essa viene svuotata estraendo una pallina per volta (senza rimpiazzo). Poniamo

$$A_i = \{\text{la } i\text{−esima pallina estratta porta un numero pari}\}, \quad (i = 1, 2, \dots 5).$$

Calcolare:

a) $\mathbf{P}(A_i)$, per ogni $i = 1, 2, \dots, 5$;

b) $\mathbf{P}(A_2|A_1)$, $\mathbf{P}(A_3|A_2 \cap A_1)$.

c) Posto $X =$ *"numero della prima pallina pari estratta"*, calcolare la legge di probabilità di X e, se esiste, la sua speranza.

Esercizio 2

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = C.\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \end{cases}$$

a) Dire per quali valori della costante C la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

b) Presa una v.a. X con questa densità, calcolare (se esiste) $\mathbf{E}[X]$ e, più in generale, dire quali momenti ha la variabile aleatoria X.

c) Dire se la v.a. $Y = X^2$ ha densità, ed in caso affermativo calcolarla.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi chiuse irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.
b) Dette $C_1, \ldots, C_k$ le classi chiuse irriducibili, qual è la probabilità, partendo dallo stato 1, di finire in una di queste classi?
c) Esaminare, per ogni stato i, se esiste $\lim_{n\to\infty} p_{1i}^{(n)}$; e quando esiste calcolarlo.

**Probabilità e Processi stocastici. Ingegneria Robotica e dell'Automazione.
Prova scritta preliminare del giorno 20/11/17**

Esercizio 1

Un commerciante vuole vendere a un certo acquirente 8 schede elettroniche, e sa che 2 di esse sono difettose: le può imballare in due modi diversi, mettendole tutte in una scatola oppure suddividendole in due scatole più piccole (che ne contengono 4 ciascuna). Sa che l'acquirente, prima di acquistarle, ne vuole sottoporre 2 a verifica, e sa che se vengono imballate in due scatole diverse ne sceglierà una per ogni scatola.

Il commerciante ha tre possibili strategie:

a) sistemare tutte le schede in una scatola;

b) inserire in ognuna delle due scatole più piccole una scheda difettosa;

c) sistemare entrambe le schede difettose in una sola delle due scatole più piccole.

Con quale di queste strategie è più probabile che l'acquirente durante la sua verifica non trovi alcuna scheda difettosa?

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x) = C \,.\begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & x \geq -1 \\ |x|^{-3} & x < -1 \end{cases}$$

dove C è una opportuna costante.

a) Dire per quale valore di C la funzione sopra scritta è una densità di probabilità. Assegnata inoltre una v.a. X avente densità f, dire quali momenti possiede.

b) Dire per quali t è finita la *funzione generatrice dei momenti* $\varphi_X(t)$ (definita da $\varphi_X(t) = \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{tX}\big] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x$).

c) Esaminare se la v.a. $Y = X^2$ ha densità (e in caso affermativo calcolarla).

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

b) Calcolare, al variare di i, $\lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)}$.

c) Dette $C_1, \dots, C_k$ le classi chiuse irriducibili, qual è la probabilità partendo dallo stato 1 di finire in una di queste classi?

Una soluzione

Esercizio 1

a) In questo caso, la probabilità di non trovare alcuna scheda difettosa è

$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{6\times 5}{8\times 7} = \frac{15}{28} = 0{,}535$

b) Nel secondo caso la probabilità cercata è il prodotto delle probabilità di non trovare una scheda difettosa nella prima e poi nella seconda scatola, cioè $3/4 \times 3/4 = 9/(16) = 0{,}562$.

c) Nel terzo caso infine la probabilità cercata è semplicemente la probabilità di non trovare una scheda difettosa nella prima scatola (intendendo con questo quella in cui sono state inserite le due schede difettose): è immediato constatare che questa probabilità è $1/2 = 0{,}5$.

Di conseguenza la strategia che offre maggiore probabilità di *farla franca* è la seconda, cioè quella che consiste nell'imballare le schede in due scatole e inserire una scheda difettosa in ognuna delle due scatole.

Esercizio 2

a) Cominciamo a calcolare $\int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^{+\infty} = \mathrm{e}$ e $\int_{-\infty}^{-1} |x|^{-3}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x = 1/2$. Di conseguenza $C = \big(\mathrm{e} + 1/2\big)^{-1}$, noi continuiamo a indicarlo C.

Inoltre $\int_{-1}^{+\infty} |x|^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < +\infty$ qualunque sia n, mentre $\int_{-\infty}^{-1} |x|^n\,|x|^{-3}\,\mathrm{d}x < +\infty$ se $n < 2$: ne segue che la variabile X ha solo il momento primo.

b) Per definizione

$$\varphi_X(t) = C\Big(\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{tx}\,|x|^{-3}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\Big)$$

Il primo integrale $\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{tx}\,|x|^{-3}\,\mathrm{d}x$ è finito se $t \geq 0$, ed il secondo integrale $\int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1-t)x}\,\mathrm{d}x$ è finito se $t < 1$.

Di conseguenza $\varphi_X(t)$ è finita per $0 \leq t < 1$. Osserviamo che non poteva essere finita in un intorno di 0 perché in tal caso la variabile X avrebbe posseduto tutti i momenti.

c) Per $y > 0$, si ha $\mathbf{P}\big\{X^2 \leq y\big\} = \mathbf{P}\big\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\big\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Bisogna a questo punto distinguere due casi: se $0 \leq y \leq 1$ questo termine è eguale a

$$C\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

mentre se $y > 1$ il termine è eguale a

$$C\Big(\int_{-\sqrt{y}}^{-1} |x|^{-3}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\Big)$$

Derivando si ottiene la densità, che risulta eguale a

$$g(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ C\,\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{C}{2y^2} + \frac{C}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{y}} & y > 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

a) Gli stati 1 e 2 sono *transitori* mentre vi sono due *classi chiuse irriducibili*: $C_1 = \big(3,\,4\big)$ e $C_2 = \big(5,\,6,\,7\big)$.

È immediato constatare che entrambe le classi chiuse irriducibili sono *regolari* (le relative matrici stocastiche hanno entrambe un elemento strettamente positivo sulla diagonale); si calcola facilmente la probabilità invariante sulla prima $\big(\frac{3}{4},\,\frac{1}{4}\big)$, e con calcoli leggermente più lunghi (ma non difficili) si trova che la probabilità invariante sulla seconda è $\big(\frac{6}{13},\,\frac{3}{13},\,\frac{4}{13}\big)$. In definitiva l'espressione di tutte le probabilità invarianti è

$$\Big(0,\,0,\,\frac{3\alpha}{4},\,\frac{\alpha}{4},\,\frac{6(1-\alpha)}{13},\,\frac{3(1-\alpha)}{13},\,\frac{4(1-\alpha)}{13}\Big)$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Intanto, per $i = 3,\ 4$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)} = 0$ mentre per $i = 5,\ 6,\ 7$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)} = 6/13$.

Resta il caso più delicato del limite quando $i = 1,\ 2$. Cominciamo a scrivere le eguaglianze

$$p_{15}^{(n+2)} = \frac{2}{3}\, p_{25}^{(n+1)} + \frac{1}{3}\, p_{35}^{(n+1)}$$

$$p_{25}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\, p_{15}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{35}^{(n)} + \frac{1}{3}\, p_{55}^{(n)}$$

Però $p_{35}^{(n)} = 0$ e, poiché definitivamente la catena finisce nella classe C_1 oppure nella classe C_2, si vede che i limiti sopra scritti esistono. Annullando il termine $p_{35}^{(n)}$ e facendo dei facili sistemi lineari si arriva al seguente risultato

$$\lim_{n\to\infty} p_{15}^{(n)} = \frac{12}{91} \qquad \lim_{n\to\infty} p_{25}^{(n)} = \frac{18}{91}$$

c) Chiamiamo rispettivamente A_1 (A_2) l'evento *"la catena finisce nella classe* C_1*"* (C_2): se $\mathbf{P}_1$ è la probabilità partendo dallo stato 1, si ha per $n \geq 2$

$$\mathbf{P}_1\{X_n = 5\} = \mathbf{P}_1\{X_n = 5 \,\big|\, A_1\}\,.\,\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}\{X_n = 5 \,\big|\, A_2\}\,.\,\mathbf{P}(A_2)$$

Poiché valgono i risultati

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1\{X_n = 5\} = \frac{12}{91} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1\{X_n = 5 \,\big|\, A_1\} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1\{X_n = 5 \,\big|\, A_2\} = 6/13$$

si ottiene $\mathbf{P}(A_2) = 2/7$ e quindi $\mathbf{P}(A_1) = 5/7$.

Si può rispondere a quest'ultima domanda anche in un altro modo: si arriva alla classe C_2 facendo il percorso $1 \to 2 \to 5$ (con probabilità $2/9$) oppure facendo un numero k di volte (k intero positivo) il *giro* $1 \to 2 \to 1$ (che ha ancora probabilità $2/9$) e poi il percorso $1 \to 2 \to 5$.

La probabilità di arrivare definitivamente alla sottoclasse C_2 è pertanto

$$\frac{2}{9} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 - 2/9} = \frac{2}{7}$$

e di conseguenza la probabilità di arrivare alla sottoclasse C_1 è $5/7$.

Probabilità e Processi stocastici. Ingegneria Robotica e dell'Automazione.
Prova scritta del giorno 10/01/18

Esercizio 1

Nello scompartimento di un treno vi sono tre escursionisti che non si conoscevano precedentemente, diretti a un paesino svizzero: ognuno di essi ha riservato per conto proprio una camera d'albergo, scegliendo a caso tra i 5 alberghi presenti in quel paese.

Qual è la probabilità che vengano alloggiati in tre alberghi diversi? E tutti e tre nello stesso albergo?

Esercizio 2

Consideriamo la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove a e b sono due costanti reali.

a) Determinare per quali valori delle costanti a e b la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

b) Sia X una v.a. avente la densità sopra scritta: dopo aver spiegato perché X ammette tutti i momenti e perché, senza fare alcun calcolo, vale sicuramente la diseguaglianza $-2 \leq \mathbf{E}[X] \leq 0$, determinare per quali valori delle costanti a e b il valore atteso di X è massimo.

c) Siano X e Y due variabili indipendenti aventi entrambe la densità sopra scritta (con la stessa scelta delle costanti a e b): provare che vale la formula $\mathbf{E}\big[(X - Y)^2\big] = 2\, Var(X)$.

Esercizio 3

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2-\alpha & 1/2-\alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

dove α è un parametro reale, con $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

a) In funzione del parametro α, classificare gli stati ed identificare le classi chiuse irriducibili.

b) Esaminare se le classi irriducibili sono regolari, esprimere poi tutte le probabilità invarianti.

c) Esaminare, in funzione del parametro α, per quali j esiste $\lim_{n\to\infty} p_{3,j}^{(n)}$.

Una soluzione:

Esercizio 1

Per quanto riguarda il primo caso (i turisti alloggiati in tre alberghi diversi), i *"casi possibili"* sono 5^3 ed i *"casi favorevoli"* $\binom{5}{3}\,3!$.

La probabilità cercata è pertanto $\frac{12}{25} = 0{,}48$.

Nel secondo caso, i *"casi favorevoli"* sono 5 e la probabilità cercata è $\frac{5}{5^3} = \frac{1}{25} = 0{,}04$.

Esercizio 2

a) Poiché $\int_{-2}^0 x^2\,\mathrm{d}x = 8/3$ e $\int_{-2}^0 x\,\mathrm{d}x = -2$, la relazione che lega a e b è $\frac{8}{3}a - 2b = 1$, cioè $a = \frac{3}{8}(1+2b)$.

Ma bisogna anche garantire che si abbia $ax^2 + bx = x(ax+b) \geq 0$ per $-2 \leq x \leq 0$: questo equivale a dire $ax + b \leq 0$ per $-2 \leq x \leq 0$, cioè $b \leq 0$ e $-2a + b \leq 0$.

Sostituendo a con $\frac{3}{8}(1+2b)$ si ottiene $-3/2 \leq b \leq 0$ e $a = \frac{3}{8}(1+2b)$.

b) La prima affermazione è una conseguenza immediata del fatto che la densità è diversa da 0 solo nell'intervallo $[-2,0]$: si ha pertanto

$$-2 = \int_{-2}^0 (-2)(ax^2+bx)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-2}^0 x(ax^2+bx)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-2}^0 0.(ax^2+bx)\,\mathrm{d}x = 0$$

Inoltre poiché $\int_{-2}^0 x^2\,\mathrm{d}x = -4$, completando i calcoli si ottiene

$$\mathbf{E}[X] = -4(\frac{3}{8})(1+2b) + \frac{8}{3}\,b = -\frac{3}{2} - \frac{1}{3}b$$

Il massimo si ha evidentemente per $b = -3/2$ ed è eguale a -1.

c) In realtà questa formula non dipende dalle densità di X e di Y, ma vale per due v.a. indipendenti, equidistribuite e dotate di momento secondo: si ha infatti

$$\mathbf{E}\big[(X-Y)^2\big] = \mathbf{E}[X^2] + \mathbf{E}[Y^2] - 2\mathbf{E}[XY]$$

Poiché le variabili sono indipendenti si ha $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X].\mathbf{E}[Y]$ e poiché sono equidistribuite $\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[Y^2]$ e $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y]$: quindi

$$\mathbf{E}\big[(X-Y)^2\big] = 2\mathbf{E}[X^2] - 2\mathbf{E}[X]^2 = 2\,Var(X)$$

Esercizio 3

a) La vera differenza si ha quando $\alpha = 0$ oppure $\alpha > 0$: infatti se $\alpha \neq 0$ si vede facilmente che gli stati 1, 2 e 3 sono transitori mentre $C_1 = (4, 5)$ forma una classe chiusa irriducibile (ed è immediato constatare che è regolare). Invece se $\alpha = 0$ anche gli stati 1, 2 e 3 formano una classe chiusa C_2 che è irriducibile (e anche questa è regolare).

b) Consideriamo prima il caso $\alpha \neq 0$: facili conti che non riporto indicano che l'unica probabilità invariante su C_1 è $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ e pertanto l'unica probabilità invariante su tutto lo spazio è $\big(0, 0, 0, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}\big)$.

Se invece $\alpha = 0$, si deve calcolare anche la probabilità invariante sulla classe C_2 che è $(\frac{4}{19}, \frac{9}{19}, \frac{6}{19})$, e concludendo in questo caso le probabilità invarianti su tutto lo spazio sono della forma

$$\Big(\frac{t\,4}{19}, \frac{t\,9}{19}, \frac{t\,6}{19}, \frac{(1-t)\,3}{7}, \frac{(1-t)\,4}{7}\Big) \qquad\qquad 0 \leq t \leq 1$$

c) Cominciamo col caso $\alpha = 0$: in questo caso si parte da un punto di una classe chiusa irriducibile regolare e pertanto si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{3,j}^{(n)} \begin{cases} \frac{4}{19} & j = 1 \\ \frac{9}{19} & j = 2 \\ \frac{6}{19} & j = 3 \\ 0 & j = 4,\, 5 \end{cases}$$

Se invece $\alpha \neq 0$, poiché i primi tre stato sono transitori, si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{3,j}^{(n)} = \begin{cases} 0 & j = 1,\ 2,\ 3 \\ \frac{3}{7} & j = 4 \\ \frac{4}{7} & j = 5 \end{cases}$$

ma questa volta la giustificazione è un poco più delicata.

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ è immediata poiché $p_{3,j}^{(n+1)} = \frac{1}{2}p_{4,j}^{(n)} + \frac{1}{2}p_{5,j}^{(n)}$; ma se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ la prova è un poco più complessa. Questa volta la decomposizione diventa

$$p_{3,j}^{(n+1)} = \big(\frac{1}{2} - \alpha\big)p_{2,j}^{(n)} + \big(\frac{1}{2} - \alpha\big)p_{3,j}^{(n)} + \alpha\, p_{4,j}^{(n)} + \alpha\, p_{5,j}^{(n)}$$

ma siccome non si conosce $\lim_{n\to\infty} p_{2,j}^{(n)}$ sono necessarie ulteriori iterazioni.

Però si sa che, con probabilità 1, partendo da 3 si finisce nella classe C_1: allora, indicando con $\mathbf{P}$ la probabilità partendo dallo stato 3, si ha

$$p_{3,j}^{(n)} = \mathbf{P}\{X_n = j\} = \mathbf{P}\{X_n = j | C_1\}\mathbf{P}(C_1) + \mathbf{P}\{X_n = j | C_2\}\mathbf{P}(C_2)$$

e poiché $\mathbf{P}(C_1) = 1$ e $\mathbf{P}(C_2) = 0$, è facile concludere.

Probabilità e Processi stocastici. Ingegneria Robotica e dell'Automazione.
Prova scritta del giorno 31/01/18

Esercizio 1 (Valutazione punti 10=6+4)

La mensa dell'Università di Camerino effettua due turni di servizio per pranzo: dalle 12 alle 13 e dalle 13 alle 14. In genere ogni studente sceglie a caso (con probabilità 1/2) ed indipendentemente dagli altri uno dei due turni. In un dato giorno sono presenti all'Università 100 studenti (e tutti mangiano a mensa).
a) Se la mensa dispone di 56 posti a sedere, qual è la probabilità di riuscire ad accontentare tutti gli studenti che si presentano al primo turno? E tutti i 100 studenti (qualunque turno si presentino)?
b) Supponiamo ora che i posti a sedere siano n: calcolare (approssimativamente) il minimo valore di n tale che la probabilità di riuscire ad accontentare tutti gli studenti (in entrambi i turni) sia almeno 0,92.

Esercizio 2 (Valutazione punti 12=2+4+3+3)

Consideriamo la funzione f definita da

$$f(x) = C \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & x \geq 1 \\ \left(2-x\right)^{-2} & x < 1 \end{cases}$$

a) Dire per quali valori della costante C la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.
b) Presa una v.a. X con questa densità, dire quali momenti ammette e più in generale per quali numeri positivi p vale $\mathbf{E}\left[\,|X|^p\,\right] < +\infty$.
c) Considerata la funzione generatrice dei momenti $\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{tx}\, f(x)\,\mathrm{d}x$, dire per quali valori di t è finita.
d) Presa la v.a. $Y = \log(X^2)$, dire se è ben definita, se ammette densità e in caso affermativo calcolarla.

Esercizio 3 (Valutazione punti 8=3+3+2)

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il grafo, classificato gli stati e determinato le classi chiuse irriducibili, determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

b) Siano $C_1, \dots, C_k$ le classi chiuse irriducibili: precisare se sono regolari, e calcolare qual è la probabilità, partendo dallo stato 2 al tempo 0, di finire in una di queste classi?

c) Calcolare, per tutti gli stati i e j per i quali è possibile, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Una soluzione:

Esercizio 1

Se indichiamo con X_i la v.a. che assume il valore 1 se lo studente i–mo sceglie il primo turno (ed altrimenti il valore 0), questa è una v.a. di Bernoulli di parametro 1/2, e $X = X_1 + \cdots + X_{100}$ (il numero totale di studenti che si presentano al primo turno) è una v.a. *Binomiale* di parametri 100 e 1/2. In base al teorema limite centrale,

$$\frac{X - 100 \times 1/2}{\sqrt{100 \times 1/4}} = \frac{X - 50}{5}$$

si approssima con una v.a. gaussiana $N(0,1)$.

(a) La mensa può accontentare tutti gli studenti del primo turno se X è non superiore a 56, e può accontentare tutti gli studenti se X è anche non inferiore a 44. La probabilità di accontentare tutti gli studenti del primo turno è dunque (utilizzando l'approssimazione di continuità)

$$\mathbf{P}\Big\{X \le 56.5\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{X-50}{5} \le \frac{6.5}{5}\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{X-50}{5} \le 1.3\Big\}$$

e questo numero si approssima con $\Phi\big(1.3\big) \approx 0.903$.

In modo analogo, la probabilità di accontentare tutti gli studenti è

$$\mathbf{P}\Big\{43.5 \le X \le 56.5\Big\} = \mathbf{P}\Big\{-1.3 \le \frac{X-50}{5} \le 1.3\Big\} \approx$$

$$\approx \Phi\big(1.3\big) - \Phi\big(-1.3\big) = 2 \times \Phi\big(1.3\big) - 1 \approx 0.806$$

(b) Chiaramente il numero di posti n deve essere maggiore o eguale a 50 (altrimenti è impossibile accontentare tutti e 100 gli studenti) e riprendendo gli stessi calcoli fatti sopra, per un generico numero n di posti la probabilità di accontentare tutti è (questa volta tralasciamo l'approssimazione di continuità)

$$\mathbf{P}\Big\{\frac{50-n}{5} \le \frac{X-50}{5} \le \frac{n-50}{5}\Big\} \approx 2 \times \Phi\big(\frac{n-50}{5}\big) - 1$$

Quest'ultima diseguaglianza è eguale a $\Phi\big(\frac{n-50}{5}\big) \geq 0.96$: notiamo che la funzione Φ raggiunge il valore 0.96 all'incirca nel punto 1.75 e quindi la diseguaglianza diventa cioè $\frac{n-50}{5} \geq 1.75$ che equivale a $n \geq 58.75$.

Quindi il minimo numero di posti è 59 (notiamo che anche usando l'approssimazione di continuità si ottiene lo stesso risultato).

Esercizio 2 (Soluzione schematica)

a) Si ha $\int_1^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{-1}$ e $\int_{-\infty}^1 \big(2-x\big)^{-2}\,\mathrm{d}x = 1$. Quindi $C = \big(1+2\mathrm{e}^{-1}\big)^{-1}$.

b) Separatamente $\int_1^{+\infty} |x|^p\,x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < +\infty$ per ogni $p>0$, però $\int_{-\infty}^1 \frac{|x|^p}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x < +\infty$ se $p<1$: di conseguenza $\mathbf{E}\big[\,|X|^p\,\big] < +\infty$ per $0<p<1$. In particolare la variabile non possiede alcun momento.

c) Si ha $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{tx}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{(t-1)x}\mathrm{d}x < +\infty$ se $t<1$. Viceversa $\int_{-\infty}^1 \frac{\mathrm{e}^{tx}}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x < +\infty$ se $t \geq 0$. Concludendo $\Phi_X(t)$ è finita se $t \in [0,1[$.

d) Naturalmente Y è ben definita poiché X^2 è a valori Positivi. Per quanto riguarda la sua densità, cominciamo con un conto generico, cioè con una v.a. X di densità f: se $Y=\log(X^2)$ si ha, qualunque sia y:

$$\mathbf{P}\big\{Y \leq y\big\} = \mathbf{P}\big\{X^2 \leq \mathrm{e}^y\big\} = \mathbf{P}\big\{-\mathrm{e}^{y/2} \leq X \leq \mathrm{e}^{y/2}\big\} = \int_{-\mathrm{e}^{y/2}}^{\mathrm{e}^{y/2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

e derivando si ottiene per la densità l'espressione

$$g(y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{y/2}\big(f(\mathrm{e}^{y/2}) + f(-\mathrm{e}^{y/2})\big)$$

Inserendo l'espressione della densità della v.a. si ottiene

$$g(y) = C\begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{y/2}}{2}\Big(\mathrm{e}^{y/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{y/2}} + \frac{1}{\left(2+\mathrm{e}^{y/2}\right)^2}\Big) & y \geq 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{y/2}}{2}\Big(\frac{1}{\left(2-\mathrm{e}^{y/2}\right)^2} + \frac{1}{\left(2+\mathrm{e}^{y/2}\right)^2}\Big) & y < 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

a) Lo stato 2 è transitorio, mentre vi sono due classi irriducibili: $C_1 = \big\{1,\,3\big\}$ e $C_2 = \big\{4,\,5,\,6\big\}$.

La probabilità invariante su C_1 risulta essere $\big(2/3,\,1/3\big)$ (i conti sono molto facili), e quella su C_2 è $\big(7/18,\,1/3,\,5/18\big)$ (i conti sono più lunghi ma non difficili).

Concludendo, tutte le probabilità invarianti sono della forma

$$\Big(\frac{2}{3}\alpha,\ 0,\ \frac{1}{3}\alpha,\ \frac{7}{18}(1-\alpha),\ \frac{1}{3}(1-\alpha),\ \frac{5}{18}(1-\alpha)\Big)$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$.

b)Entrambe le classi sono regolari: per la classe C_1 è immediato (poiché la relativa matrice di transizione ha un elemento sulla diagonale non nullo), mentre per la classe C_2 si constata facilmente che in due passi si può andare da un qualsiasi stato di C_2 a un qualsiasi altro.

Il calcolo seguente è molto facile poiché, partendo da 2, al tempo successivo si è già arrivati o nella classe C_2 (con probabilità 1/3) o nella classe C_1 (con probabilità 2/3).

c) Poiché entrambe le classi C_1 e C_2 sono *regolari*, sappiamo all'interno di queste classi qual è il limite di $p_{ij}^{(n)}$.

In particolare, se $i = 1$ oppure $i = 3$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 2/3 & j = 1 \\ 1/3 & j = 3 \\ 0 & j = 2,\, 4,\, 5,\, 6 \end{cases}$$

Viceversa, se $i = 4,\, 5,\, 6$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 7/18 & j = 4 \\ 1/3 & j = 5 \\ 5/18 & j = 6 \\ 0 & j = 1,\, 2,\, 3 \end{cases}$$

Partendo dallo stato 2, usiamo la formula

$$p_{2j}^{(n+1)} = 1/3\, p_{1j}^{(n)} + 1/3\, p_{3j}^{(n)} + 1/3\, p_{6j}^{(n)}$$

Questo ci garantisce per prima cosa che il limite esiste, inoltre (tenendo conto del fatto che, qualunque sia j, $\lim_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{3j}^{(n)}$) si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{2j}^{(n)} = \begin{cases} 4/9 & j = 1 \\ 0 & j = 2 \\ 2/9 & j = 3 \\ 7/54 & j = 4 \\ 1/9 & j = 5 \\ 5/54 & j = 6 \end{cases}$$

Probabilità e Processi stocastici. Ingegneria Robotica e dell'Automazione.
Prova scritta del giorno 16/02/18

Esercizio 1 (Valutazione punti 8=2+2+4)

Le telefonate che arrivano nello studio di un avvocato vengono smistate dal centralino a due segretarie A e B del tutto casualmente ed indipendentemente una dall'altra. Supponiamo che una certa mattina siano arrivate n telefonate ($n \geq 2$).

a) Qual è la probabilità che la segretaria A abbia ricevuto esattamente due telefonate?

b) Qual è la probabilità che la segretaria A abbia ricevuto *almeno* due telefonate?

c) Qual è la probabilità che la segretaria A abbia ricevuto lo stesso numero di telefonate della segretaria B?

Esercizio 2 (Valutazione punti 11=3+4+4)

Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = C_{\alpha,\beta} \begin{cases} x^\alpha (2-x)^\beta & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove α e β sono due costanti reali.

a) Dire per quali valori delle costanti α e β esiste una costante $C_{\alpha,\beta}$ che rende la funzione una densità di probabilità (non si chiede di calcolare $C_{\alpha,\beta}$). Calcolare $C_{2,1}$.

b) Presa una v.a. X con la densità sopra scritta, si consideri $Z = 1/X$: dire (in funzione di α e β) quali momenti possiede la v.a. Z. Calcolare (se esiste) la varianza di Z quando $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

c) Siano ora X e Y due variabili indipendenti equidistribuite con la densità sopra scritta (con $\alpha = 3$ e $\beta = 0$): calcolare $\mathbf{P}\big\{ \max(X,Y) > 1 \big\}$.

Esercizio 3 (Valutazione punti 11=3+4+4)

Due giocatori A e B fanno questo gioco: a turno lanciano due monete equilibrate, se esce TT il giocatore vince, se esce CC passa le monete all'altro giocatore e se le facce sono diverse il giocatore che ha tirato prova un altro tiro. Il gioco prosegue fino a quando uno dei due giocatori vince.

a) Modellizzare questo gioco come una catena di Markov e descrivere le probabilità invarianti.

b) Supponiamo che tiri per primo il giocatore A: qual è la probabilità che A vinca esattamente al quarto lancio?

c) Qual è la probabilità che vinca il giocatore che ha tirato per primo?

Una soluzione:

Esercizio 1

Osserviamo preliminarmente che il numero di chiamate smistate alla segretaria A è una v.a. X *binomiale* di parametri n e $1/2$ e di conseguenza, per $0 \leq k \leq n$ si ha

$$\mathbf{P}\big(X = k\big) = \binom{n}{k} (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

Fatta questa osservazione, i conti diventano molto facili e riporto direttamente il risultato:

a) $\mathbf{P}\big(X = 2\big) = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$

b) Conviene passare alla probabilità dell'evento complementare e si ottiene

$$\mathbf{P}\big\{X \geq 2\big\} = 1 - \mathbf{P}\big(X = 0\big) - \mathbf{P}\big(X = 1\big) = 1 - \frac{n+1}{2^n}$$

c) Questa domanda conteneva una piccola trappola: infatti se n è dispari questa probabilità è evidentemente 0. Se invece n è pari, diciamo $n = 2h$, si ottiene $\mathbf{P}\big(X = h\big) = \binom{2h}{h} \frac{1}{2^{2h}}$.

Esercizio 2 (Soluzione telegrafica)

a) L'integrale $\int_0^2 x^\alpha (2-x)^\beta \, \mathrm{d}x$ è finito se $\alpha > -1$ e $\beta > -1$, e in tal caso $C_{\alpha,\beta}$ è l'inversa dell'integrale. Facili calcoli provano che $\int_0^2 x^2 (2-x) \, \mathrm{d}x = 4/3$ e quindi $C_{2,1} = 3/4$.

b)Poiché Z è a valori positivi, ha senso scrivere
$\mathbf{E}[Z^n] = C_{\alpha,\beta} \int_0^2 x^{\alpha-n} (1-x)^\beta \, \mathrm{d}x$ e questo numero è finito se $\alpha - n > -1$ cioè $n < \alpha + 1$: in definitiva l'esistenza del momento n-simo è determinata dal parametro α e non dipende da β.

Inoltre facili conti provano che $\mathbf{E}[Z^2] = 3/4\big(\int_0^2 (2-x) \, \mathrm{d}x\big) = 3/2$, e $\mathbf{E}[Z] = 3/4\big(\int_0^2 x(2-x) \, \mathrm{d}x\big) = 1$. Di conseguenza $Var(Z) = 1/2$.

c) $\mathbf{P}\big\{\max(X, Y > 1\big\} = 1 - \mathbf{P}\big\{\max(X, Y \leq 1\big\} =$
$= 1 - \mathbf{P}\big\{X \leq 1, Y \leq 1\big\} = 1 - \mathbf{P}\big\{X \leq 1\big\}^2$.

Poiché $C_{3,0} = 1/4$, $\mathbf{P}\big\{X \leq 1\big\} = 1/4\big(\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x\big) = 1/16$, e quindi $\mathbf{P}\big\{\max(X, Y > 1\big\} = 1 - (\frac{1}{16})^2$.

Esercizio 3

a) Indichiamo con lo stato 1 *"ha vinto il giocatore A"*, con 2 *"sta tirando A"*, con 3 *" sta tirando B"* e con 4 *"ha vinto B"*.

La matrice di transizione della relativa catena di Markov è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli stati 1 e 4 sono assorbenti, gli altri transitori, e le probabilità invarianti sono della forma

$$\big(\alpha,\, 0,\, 0,\, 1{-}\alpha\big) \qquad\qquad 0 < \alpha < 1$$

b) Ci sono quattro percorsi possibili:

$$2 \to 2 \to 2 \to 2 \to 1$$

$$2 \to 3 \to 2 \to 2 \to 1$$

$$2 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$$

$$2 \to 3 \to 3 \to 2 \to 1$$

e di conseguenza la probabilità di vincere in 4 mosse risulta essere $\frac{7}{2^7}$.

c) Partiamo dall'equazione

$$p_{2,1}^{(n+1)} = \frac{1}{2} p_{2,1}^{(n)} + \frac{1}{4} p_{1,1}^{(n)} + \frac{1}{4} p_{3,1}^{(n)}$$

Osserviamo che $p_{1,1}^{(n)} = 1$, e che, per ragioni di simmetria, $\lim_{n\to\infty} p_{3,1}^{(n)} = 1 - \lim_{n\to\infty} p_{2,1}^{(n)}$. Infatti $\lim_{n\to\infty} p_{3,1}^{(n)}$ è la probabilità che vinca A quando il primo lancio tocca a B, che evidentemente è eguale alla probabilità che vinca B quando il primo lancio tocca ad A.

Posto $\ell = \lim_{n\to\infty} p_{3,1}^{(n)}$, si ottiene l'equazione $\ell = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-\ell)$, e da qui si ricava $\ell = \frac{2}{3}$: questo è il vantaggio di giocare per primo.

Probabilità e Processi stocastici. Ingegneria Robotica e dell'Automazione.
Prova scritta del giorno 12/09/18

Esercizio 1 (Valutazione punti 9)

Siano X ed Y il primo ed il secondo numero estratti da una *"ruota del lotto"* (si tratta di un'urna contenente 90 palline numerate da 1 a 90).

a) Provare che le variabili X ed Y sono *equidistribuite* (hanno cioè la stessa funzione di probabilità) ma non sono indipendenti.

b) Calcolare (se esiste) $\mathbf{E}\big[X+Y\big]$.

Esercizio 2 (Valutazione punti 12)

Si consideri la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{x} & x \leq 1 \\ b\,x^{-4} & x > 1 \end{cases}$$

dove a e b sono due numeri reali.

a) Dire quel quali valori delle costanti a e b la funzione sopra scritta è una densità di probabilità, e quali momenti possiede una variabile che abbia quella densità (sempre in funzione delle costanti a e b).

b) Considerata una variabile aleatoria X con quella densità, dire per quali valori di a e b il suo momento secondo è massimo.

c) Si considerino le due variabili $Y = X^3$ e $Z = \max(X, 0)$: dire se queste due variabili hanno densità ed in caso affermativo calcolarla.

Esercizio 3 (Valutazione punti 9)

Sei sfere, delle quali 2 bianche e 4 rosse, sono distribuite a caso in due urne A e B (3 sfere per urna): ad ogni passo viene estratta una sfera da ciascuna urna e vengono scambiate. Fissiamo la nostra attenzione sull'urna A e consideriamo nel tempo il numero di sfere rosse contenute in A.

a) Modellizzare il problema come una catena di Markov, disegnarne il grafo e scrivere la matrice di transizione.

b) Esaminare la struttura di questa catena di Markov (classi chiuse, probabilità invarianti).

c) Partendo al tempo 1 dallo stato 2, qual è la probabilità di essere nuovamente in 2 al tempo 4? (è sufficiente indicare i vari percorsi possibili con le relative probabilità).

Una soluzione:

Esercizio 1

a) È evidente che la variabile X prende tutti i valori da 1 a 90 ciascuno con probabilità $\frac{1}{90}$; è un po' meno evidente che la stessa proprietà vale per Y . Si ha infatti, preso $1 \leq k \leq 90$,

$$\mathbf{P}\{Y = k\} = \sum_{j=1}^{90} \mathbf{P}\{Y = k \big| X = j\}.\mathbf{P}\{X = j\}$$

Poiché $\mathbf{P}\{Y = k \big| X = j\}$ è eguale a 0 per $j = k$ ed a $1/89$ per $j \neq k$ (ed i $j \neq k$ sono appunto 89), si ottiene facilmente che anche la variabile Y prende i valori da 1 a 90 ciascuno con probabilità $1/90$.

Per provare che non sono indipendenti, la cosa probabilmente più semplice è considerare la possibilità che entrambe le variabili prendano lo stesso valore (cosa ovviamente impossibile): si ha pertanto

$$0 = \mathbf{P}\{X = i\,,\, Y = i\} \neq \mathbf{P}\{X = i\}.\mathbf{P}\{Y = i\}$$

b) La speranza di $(X + Y)$ ovviamente esiste in quanto le variabili X e Y prendono solo un numero finito di valori e si ha

$$\mathbf{E}\big[X + Y\big] = 2\,\mathbf{E}[X] = 2.\sum_{k=1}^{90} \frac{k}{90} = 2.\frac{90 \times 91}{2 \times 90} = 91$$

Esercizio 2

a) Calcoliamo $\int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$, e $\int_1^{+\infty} x^{-4} \,\mathrm{d}x = 1/3$. Di conseguenza si deve avere $a\,\mathrm{e} + b/3 = 1$, inoltre sia a che b devono essere positivi. Scrivendo b in termini di a , possiamo scrivere $0 \leq a \leq 1/\mathrm{e}$, $b = 3\,(1 - a\,\mathrm{e})$.

Inoltre, qualunque sia $n \geq 0$, si ha $\int_{-\infty}^{1} |x|^n \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x < +\infty$, invece $\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{x^4} \,\mathrm{d}x < +\infty$ se $n - 4 < -1$, cioè $n < 3$. Di conseguenza, se $b \neq 0$, una variabile X che abbia quella densità possiede i momenti primo e secondo, invece se $b = 0$ (cioè $a = 1/e$), la variabile X possiede tutti i momenti.

b) Di nuovo calcoliamo separatamente $\int_1^{+\infty} x^2\, x^{-4} \,\mathrm{d}x = 1$, e $\int_{-\infty}^{1} x^2\, \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$ (questo perché la primitiva della funzione $x^2\,\mathrm{e}^x$ è la funzione $x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x$): di conseguenza per una variabile X che abbia quella densità si ha

$$\mathbf{E}[X^2] = a\,\mathrm{e} + b = a\,\mathrm{e} + 3\,(1 - a\mathrm{e}) = 3 - 2a\mathrm{e}$$

Questo numero è decrescente rispetto ad a e di conseguenza il massimo si ottiene quando a è minimo: se $a = 0$ si ha $\mathbf{E}[X^2] = 3$.

c) La funzione $x \to x^3$ è biunivoca, derivabile con inversa derivabile e quindi Y ha densità e si può scrivere direttamente l'espressione della densità. Bisogna però fare un poco di attenzione: la funzione inversa di $y = x^3$ è la *radice cubica* di y intendendo però, se $y < 0$, con radice cubica di y il numero $-|y|^{1/3}$.

Di conseguenza per scrivere correttamente la densità è bene distinguere tre casi e si ottiene

$$g(y) = \begin{cases} \frac{a}{3}\,|y|^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{e}^{-(|y|^{\frac{1}{3}})} & y \leq 0 \\ \frac{a}{3}\,y^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{e}^{(y^{\frac{1}{3}})} & 0 < y < 1 \\ \frac{b}{3}\,y^{-2} & y \geq 1 \end{cases}$$

Per la variabile Z bisogna distinguere due casi: se $a = 0$ la variabile X è a valori positivi in quanto la densità è diversa da 0 per $x \geq 1$ e quindi semplicemente $Z = X$ e pertanto ha densità.

Ma se $a \neq 0$, si ha $\mathbf{P}\{Z = 0\} = \mathbf{P}\{X \leq 0\} = a \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = a$ e quindi Z non può avere densità.

Esercizio 3

a) Il numero di sfere rosse presenti nell'urna A può essere 1, 2 oppure 3: questi sono gli stati della catena di Markov. Mi limito a scrivere la matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/9 & 5/9 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) È evidente che è presente una sola classe chiusa irriducibile (corrispondente a tutti e tre gli stati) e con facili calcoli si trova che l'unica probabilità invariante è $\big(1/5\,,\,3/5\,,\,1/5\big)$.

c) Indico di seguito i percorsi possibili con le relative probabilità:

$2 \to 2 \to 2 \to 2$	con probabilità	$5^3/3^6$
$2 \to 1 \to 1 \to 2$	con probabilità	$2^2/3^4$
$2 \to 2 \to 1 \to 2$	con probabilità	$5 \times 2^2/3^5$
$2 \to 1 \to 2 \to 2$	con probabilità	$5 \times 2^2/3^5$
$2 \to 3 \to 3 \to 2$	con probabilità	$2^2/3^4$
$2 \to 2 \to 3 \to 2$	con probabilità	$5 \times 2^2/3^5$
$2 \to 3 \to 2 \to 2$	con probabilità	$5 \times 2^2/3^5$

Corso di Laurea in Ingegneria Robotica e dell'Automazione
Probabilità e Processi Stocastici (455AA)
A.A. 2019/20 - Prova scritta 2019-12-05

La durata della prova è di **due ore**. *Le risposte devono essere giustificate.*

Problema 1

Alice (A) e Bob (B) estraggono rispettivamente n_A, $n_B \geq 1$ palline con rimpiazzo da due rispettive urne, una (A) contenente 10 palline di cui 3 rosse e l'altra (B) 15 palline di cui 7 rosse.

1. Mostrare che è possibile trovare infinite coppie n_A, n_B tali che i rispettivi valor medi di palline rosse estratte da Alice e Bob coincidano.
2. Mostrare che invece non è possibile trovare n_A, n_B in modo che *anche* le rispettive varianze del numero di palline rosse estratte da Alice e Bob coincidano.

Una soluzione:

1. Poste X_A, X_B le variabili aleatorie che contano il numero di palline rosse estratte, si ha che X_A ha legge Binomiale $(n_A, 3/10)$, mentre X_B ha legge $(n_B, 7/15)$. Si trova quindi che

$$\mathbb{E}[X_A] = n_A 3/10 = n_B 7/15 = \mathbb{E}[X_B] \quad \leftrightarrow \quad n_A = n_B 14/9.$$

pertanto tutte (e sole) le coppie $n_B = 9k$, $n_A = 14k$, al variare di $k \geq 1$ naturale sono tali che i valor medi coincidano.

2. Per la varianza, ripendento il ragionamento, dovrebbe valere

$$\mathrm{Var}(X_A) = n_A 3/10 \cdot 7/10 = n_B 7/15 \cdot 8/15 = \mathrm{Var}(X_B),$$

ma usando l'identità tra i valor medi, si trova

$$n_B 7/15 \cdot 7/10 = n_B 7/15 \cdot 8/15 \quad \leftrightarrow 7/10 = 8/15,$$

che quindi non è mai verificato.

Problema 2

Si consideri la funzione definita da $f(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x}}$ per $x \in (0,1)$, $f(x) = 0$ altrimenti, dove c è un parametro tale che f sia una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria con densità f.

1. Determinare c e calcolare il valor medio di X.
2. Calcolare la densità della variabile $X(1-X)$.

Una soluzione:

1. Osserviamo che $f(x) \geq 0$ per ogni x. Calcoliamo

$$\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x = c - 2(1-x)^{1/2}|_0^1 = 2c,$$

da cui $c = 1/2$ è il parametro cercato. Per il valor medio, calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x-1+1}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}|_0^1 + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. Per calcolare la densità di $X(1-X)$ notiamo che $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x(1-x)$ soddisfa le condizioni per applicare il cambio di variabile (generalizzato al caso non necessariamente invertibile). Poiché X assume valori in $(0,1)$ quasi certamente, la variabile $X(1-X)$ assume valori nell'immagine tramite g di $(0,1)$, ossia l'intervallo $(0,1/4)$. Per ogni $y \in (0,1/4)$, si hanno due valori x tali che $g(x) = x(1-x) = y$, precisamente

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{1-4y}}{2}, \quad x_- = \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}.$$

Calcoliamo poi

$$g'(x_+) = -2x_+ + 1 = \sqrt{1-4y}, \quad g'(x_-) = -\sqrt{1-4y},$$

e

$$f(x_+) = \frac{1}{2\sqrt{1-x_+}} = \frac{1}{2\left((1-\sqrt{1-4y})/2\right)^{1/2}} \quad f(x_-) = \frac{1}{2\sqrt{1-x_-}} = \frac{1}{2\left((1+\sqrt{1-4y})/2\right)^{1/2}}.$$

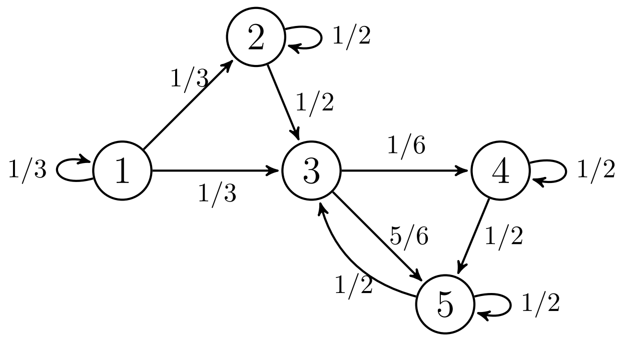
Di conseguenza la densità di $X(1-X)$ in $y \in (0,1/4)$ è data da

$$h(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-4y}} \left(\frac{1}{\left((1-\sqrt{1-4y})/2\right)^{1/2}} + \frac{1}{\left((1+\sqrt{1-4y})/2\right)^{1/2}} \right),$$

mentre la densità è nulla per y fuori dall'intervallo $(0,1/4)$.

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rappresentata graficamente in figura. Supponiamo inoltre che $X_0 = 1$.



1. Scrivere la matrice di transizione Q. Classificare gli stati della catena e le classi chiuse irriducibili (dire in particolare se sono regolari). Calcolare tutte le distribuzioni invarianti di Q.
2. Si osserva che $X_3 = 5$. Dire quale dei due eventi è più probabile:

$$A_2 = \text{“la catena ha visitato lo stato 2 in un qualche tempo } k \in \{1,2\}\text{”},$$

$$A_4 = \text{“la catena ha visitato lo stato 4 in un qualche tempo } k \in \{1,2\}\text{”}.$$

Una soluzione:

1. Troviamo (ordinando gli stati nell'ordine naturale)

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

Gli stati $\{1,2\}$ sono transitori (comunicano entrambi con 3 ma 3 non comunica con 1 o 2). Gli stati $\{3,4,5\}$ (ricorrenti) costituiscono l'unica classe chiusa irriducibile e regolare (per il criterio). gli stati sono ricorrenti, e la catena è irriducibile. Perciò vi è un'unica distribuzione invariante. Per calcolare la distribuzione invariante, consideriamo la matrice 3×3 corrispondente alla classe e risolviamo il sistema omogeneo $(Q^\tau - I)x = 0$,

$$Q^\tau - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & -1/2 & 0 \\ 5/6 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da cui troviamo che tutte le soluzioni sono del tipo $(t/2, t/6, t)$, da cui imponendo che sia a somma 1 abbiamo $t = 3/5$. Concludiamo che l'unica distribuzione invariante è

$$(0, 0, 3/10, 1/10, 3/5).$$

2. Abbiamo due soli cammini lunghi 3 che partono da 1 e visitano 2 oppure 4, terminando in 5: $C_2 : 1 \to 2 \to 3 \to 5$ e $C_4 : 1 \to 3 \to 4 \to 5$, con probabilità rispettive

$$P(C_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36},$$

$$P(C_4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$$

Pertanto la probabilità condizionata rispetto agli eventi $X_0 = 1$, $X_3 = 5$ si riduce a

$$P(A_2|X_0 = 1, X_3 = 5) = P(C_2|X_0 = 1, X_3 = 5) = \frac{P(C_2)}{P(X_0 = 1, X_3 = 5)},$$

$$P(A_4|X_0 = 1, X_3 = 5) = P(C_4|X_0 = 1, X_3 = 5) = \frac{P(C_4)}{P(X_0 = 1, X_3 = 5)},$$

e quindi A_2 è più probabile, essendo il denominatore lo stesso per entrambe le probabilità.

Corso di Laurea in Ingegneria Robotica e dell'Automazione
Probabilità e Processi Stocastici (455AA)
A.A. 2019/20 - Prova scritta 2020-01-09

La durata della prova è di **due ore**. *Le risposte devono essere giustificate.*

Problema 1

Siano X_1, X_2 variabili aleatorie indipendenti, a valori in $\{1,2,3,4\}$, aventi legge uniforme. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un parametro (non aleatorio) e si considerino le due variabili $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 + \lambda X_2$.

1. Calcolare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, valore atteso e varianza di Y_1 e Y_2.
2. Determinare λ affinché Y_1 e Y_2 siano non correlate. Per tale valore le due variabili sono anche indipendenti?

Una soluzione:

1. Osserviamo intanto che

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{5}{2},$$

$$\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \mathbb{E}\left[X_2^2\right] = \frac{1}{4}\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right) = \frac{30}{4},$$

$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}.$$

Per linearità del valore atteso,

$$\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 5,$$

$$\mathbb{E}[Y_2] = \mathbb{E}[X_1] + \lambda\mathbb{E}[X_2] = (1+\lambda)\frac{5}{2}.$$

Inoltre, sfruttando l'indipendenza di X_1 e X_2,

$$\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = \frac{5}{2}.$$

$$\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{Var}(X_1) + \lambda^2\,\mathrm{Var}(X_2) = (1+\lambda^2)\frac{5}{4}.$$

2. Calcoliamo la covarianza usando le proprietà di bilinearità:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) &= \mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_1 + \lambda X_2) \\
&= \mathrm{Cov}(X_1, X_1 + \lambda X_2) + \mathrm{Cov}(X_2, X_1 + \lambda X_2) \\
&= \mathrm{Cov}(X_1, X_1) + \mathrm{Cov}(X_1, \lambda X_2) + \mathrm{Cov}(X_2, X_1) + \mathrm{Cov}(X_2, \lambda X_2) \\
&= \mathrm{Var}(X_1) + \lambda\,\mathrm{Var}(X_2) \\
&= (1+\lambda)\frac{5}{4},
\end{aligned}$$

avendo notato che i termini 'misti' $\operatorname{Cov} X_1, X_2 = 0$ grazie all'indipendenza. Segue che l'unico valore possibile è $\lambda = -1$. Per tale valore tuttavia, le due variabili NON sono indipendenti: basta notare ad esempio che

$$P(Y_2 = 0) = P(X_1 = X_2) = \frac{1}{4},$$

mentre

$$P(Y_2 = 0 | Y_1 = 2) = P(Y_2 = 0 | X_1 = 1, X_2 = 1) = 1.$$

Problema 2

Si consideri la funzione $f(x) = cx^2 e^{-x}$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ altrimenti, dove c è un parametro tale che f sia una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria con densità f.

1. Mostrare che c è unicamente determinato (calcolarlo) e calcolare la CDF di X.
2. Posta $Y = 1/X$, calcolare la densità, il valore atteso e la varianza di Y.

Una soluzione:

1. Integrando per parti, si trova

$$\int_0^\infty f(x) dx = 2c \int_0^\infty x e^{-x} dx = 2c \int_0^\infty e^{-x} dx = 2c.$$

segue che $c = 1/2$ è il valore cercato. Integrando per parti in modo analogo troviamo la CDF (per valori $t > 0$, altrimenti vale 0):

$$\int_0^t f(x) dx = -\frac{t^2}{2} e^{-t} + \int_0^t x e^{-x} dx = -\frac{t^2}{2} e^{-t} - t e^{-t} + \int_0^t e^{-x} dx = 1 - (1 + t + t^2/2) e^{-t}.$$

2. Per calcolare la densità, usiamo la formula di cambio di variabile, posta $g(x) = 1/x$, per $x > 0$ si ha che l'immagine è $(0, \infty)$. Dato $y > 0$, l'inversa è $g^{-1}(y) = \frac{1}{y} = g(y)$, mentre $g'(x) = -1/x^2$. Di conseguenza il coefficiente $|g'(g^{-1}(y))| = y^2$ e la densità di Y è data da

$$f(1/y)/y^2 = \frac{y^4}{2} e^{-1/y}.$$

Per calcolare valore atteso e varianza invece conviene usare la densità di X e scrivere

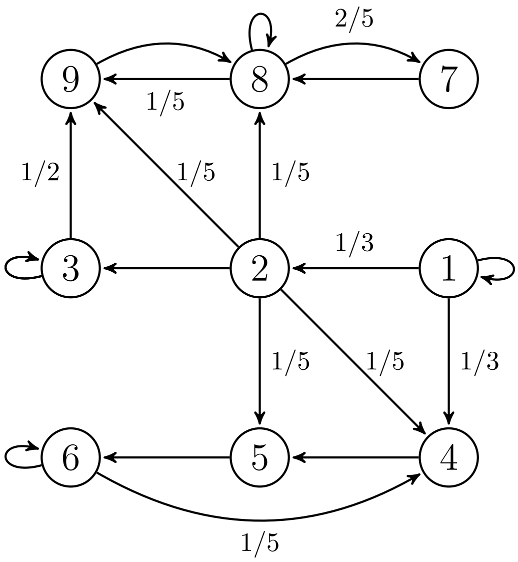
$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{x} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty x e^{-x} \mathsf{d}x = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x} \mathsf{d}x = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{Var} Y^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rappresentata graficamente in figura.



1. Scrivere (completando) la matrice di transizione Q e calcolare tutte le distribuzioni invarianti di Q.
2. Calcolare $\lim_{n\to\infty} Q^n_{1i}$ per ogni $i \in \{1,\dots,9\}$.

Una soluzione:

1. Troviamo (ordinando gli stati nell'ordine naturale)

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Gli stati $\{1,2,3\}$ sono transitori, le classi chiuse irriducibili sono $\{4,5,6\}$ e $\{7,8,9\}$. Calcoliamo separatamente le distribuzioni invarianti usando il bilancio di flusso. Troviamo

$$\pi_4 = \frac{1}{5}\pi_6, \quad \pi_5 = \pi_4,$$

da cui

$$\pi_6(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1),$$

e $\pi_6 = 5/7$. Troviamo il vettore

$$(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}).$$

Per la classe $\{7,8,9\}$, abbiamo

$$\pi_7 = \frac{2}{5}\pi_8, \quad \pi_9 = \frac{1}{5}\pi_8,$$

da cui

$$\pi_8(\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}),$$

e quindi $\pi_8 = 5/8$ e il vettore

$$(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}).$$

Tutte le distribuzioni invarianti per la catena completa sono del tipo

$$(0, 0, 0, \frac{\alpha}{7}, \frac{\alpha}{7}, \frac{5\alpha}{7}, \frac{(1-\alpha)}{4}, \frac{(1-\alpha)5}{8}, \frac{(1-\alpha)}{8}),$$

al variare di $\alpha \in [0, 1]$.

2. Poiché le classi chiuse irriducibili sono anche regolari, si tratta di determinare il parametro α del punto precedente, ossia la probabilità che la catena visiti la classe chiusa $\{4, 5, 6\}$. Per farlo la catena può andare in 4 direttamente da 1 oppure tramite un cammino che passa per 2. Se va direttamente dallo stato 1, la probabilità vale $1/3/(1/3 + 1/3) = 1/2$. Se invece passa per lo stato 2, la probabilità vale $1/3/(1/3 + 1/3) \cdot 2/5 = \frac{1}{5}$. Di conseguenza $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Robotica e dell'Automazione
Probabilità e Processi Stocastici (455AA)
A.A. 2019/20 - Prova scritta 2020-01-29

La durata della prova è di **due ore**. *Le risposte devono essere giustificate.*

Problema 1

Si hanno a disposizione due urne, una contenente il 90% di palline rosse e le rimanenti blu, l'altra contenente una frazione $x \in [0,1]$ di palline rosse e le rimanenti blu (dove x è un parametro, non una variabile aleatoria). Si effettua la seguente operazione: si estrae simultaneamente una pallina da ciascuna urna, se ne osservano i colori, e si rimettono le due palline estratte nelle rispettive urne. Si ripete poi questa operazione un'altra volta. Si pone U l'evento "in entrambe le operazioni le due palline estratte hanno lo stesso colore" (ad esempio: nella prima operazione si estrae rosso, rosso; nella seconda blu, blu) e D l'evento "in entrambe le operazioni le due palline estratte hanno colori diversi" (ad esempio: nella prima rosso blu; nella seconda blu rosso).

1. Determinare x in modo che $P(U) = 64\%$.
2. Determinare x in modo che $P(U) = P(D)$.

Una soluzione:

Poniamo $X_1 \in \{0,1\}$ la variabile che indica 1 se e solo se alla prima operazione le palline estratte hanno lo stesso colore, e $X_2 \in \{0,1\}$ quella analoga per la seconda estrazione. Le due variabili hanno legge Bernoulli di parametro

$$P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = \frac{9}{10}x + \frac{1}{10}(1-x) = \frac{1+8x}{10},$$

e sono indipendenti (sono estrazioni con rimpiazzo). Possiamo scrivere gli eventi

$$U = \{X_1 = 1, X_2 = 1\}, \quad D = \{X_1 = 0, X_2 = 0\}.$$

1. Troviamo $P(U) = \frac{(1+8x)^2}{100} = \frac{64}{100}$, quindi $1 + 8x = 8$, $x = 7/8$.
2. Troviamo $P(D) = \frac{(9-8x)^2}{100} = \frac{(1+8x)^2}{100}$ se e solo se $9 - 8x = 1 + 8x$ ossia $x = 1/2$ (la situazione $9 - 8x = -(1+8x)$ va scartata perché $x \in [0,1]$).

Problema 2

Si consideri la funzione $f(x) = \cos(x^2)|x|$ per $x \in (-c, c)$, $f(x) = 0$ altrimenti, dove $c > 0$ è un parametro tale che f sia una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria con densità f.

1. Mostrare che c è unicamente determinato (calcolarlo) e calcolare il valore atteso di X.
2. Posta $Y = X^2$, calcolare la densità e il valore atteso di Y.

Una soluzione:

1. Osserviamo che la funzione $f(x)$ è pari, quindi sarà sufficiente imporre che $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ e che $\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^c f(x)dx = \frac{1}{2}$. Dalla prima condizione e le proprietà della funzione $\cos(\cdot)$, segue che $c^2 \leq \frac{\pi}{2}$ (altrimenti f assume valori negativi). Per la seconda condizione, calcoliamo con un cambio di variabile

$$\int_0^c x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{c^2} \cos(y)dy = \frac{1}{2}\sin(c^2),$$

da cui $\sin(c^2) = 1$ e quindi $c^2 = \frac{\pi}{2}$, ossia $c = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Per calcolare il valore atteso di X, ossia l'integrale

$$\int_{-c}^{c} xf(x)dx = \int_c^{-c} x\cos(x^2)|x|dx,$$

basta notare che l'integrando è dispari (la densità è pari) e quindi vale 0.

2. Usiamo la formula di cambio di variabile applicata alla funzione $g(x) = x^2$ (non è invertibile ma basta sommare sui valori $g^{-1}(y) = \left\{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\right\}$. Si ha $g'(x) = 2x$. Per $y \in (0, \pi/2)$, troviamo la densità di Y,

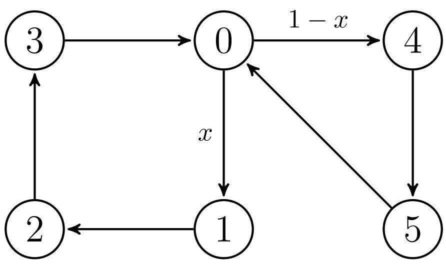
$$\varrho_Y(y) = f(-\sqrt{y})\frac{1}{|-2\sqrt{y}|} + f(\sqrt{y})\frac{1}{|2\sqrt{y}|} = \cos(y)$$

mentre vale 0 altrimenti. Per il valore atteso di Y, calcoliamo integrando per parti

$$\int_0^{\pi/2} y\cos(y)dy = y\sin(y)|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(y)dy = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Problema 3

Si consideri la catena di Markov rappresentata in figura, dove $x \in [0,1]$ è un parametro.



Al variare di $x \in [0,1]$,

1. scrivere (completando) la matrice di transizione Q, classificare gli stati della catena, le classi chiuse irriducibili e calcolare tutte le distribuzioni invarianti;
2. discutere se le classi chiuse irriducibili sono regolari.

Una soluzione:

1. Troviamo (ordinando gli stati nell'ordine naturale)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Nei casi $x \in (0,1)$, tutti gli stati sono ricorrenti e l'unica classe chiusa irriducibile è $\{0,1,2,3,4,5\}$. Per la distribuzione invariante, usando il bilancio di flusso, si trova che

$$\pi_3 = \pi_2 = \pi_1 = x\pi_0 \quad \pi_5 = \pi_4 = (1-x)\pi_0.$$

Di conseguenza, imponendo che la somma sia 1, si ha $1/\pi_0 = 1 + 3x + 2(1-x) = 3 + x$ e l'unica distribuzione invariante è

$$\frac{1}{3+x}(1, x, x, x, (1-x), (1-x)).$$

Nel caso $x = 0$, gli stati $\{1,2,3\}$ sono transitori, gli altri ricorrenti e l'unica classe chiusa irriducibile è $\{0,4,5\}$. La distribuzione invariante vale

$$\frac{1}{3}(1,0,0,0,1,1).$$

Nel caso $x = 1$, gli stati $\{4,5\}$ sono transitori, gli altri ricorrenti con l'unica classe irriducibile $\{0,1,2,3\}$ e distribuzione invariante

$$\frac{1}{4}(1,1,1,1,0,0).$$

2. Nei casi $x = 0$, $x = 1$ le classi chiuse irriducibili non sono regolari, infatti la restrizione della matrice alla classe ha un comportamento "periodico" di periodi rispettivamente 3, 4 (come gli esempi visti a lezione). Nei casi $x \in (0,1)$ invece, la catena è regolare. Osserviamo intanto che con un cammino lungo 9 si collega lo stato 0 con un qualunque stato e viceversa da qualsiasi stato si arriva in 0. Per mostrarlo, indichiamo con C_1 il cammino (lungo 4) $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 0$ e C_2 il cammino (lungo 3) $0 \to 4 \to 5 \to 0$. Abbiamo allora i seguenti cammini lunghi 9:

$$C_2 \to C_2 \to C_2 \quad \text{(collega 0 a 0)}$$

$$C_1 \to C_1 \to 1 \quad \text{(collega 0 a 1)}$$

$$C_1 \to C_1 \to 4 \quad \text{(collega 0 a 4)}$$

$$C_1 \to C_2 \to 1 \to 2 \quad \text{(collega 0 a 2)}$$

$$C_1 \to C_2 \to 4 \to 5 \quad \text{(collega 0 a 5)}$$

$$C_2 \to C_2 \to 1 \to 2 \to 3 \quad \text{(collega 0 a 3)}$$

e similmente

$$1 \to 2 \to 3 \to C_2 \to C_2 \quad \text{(collega 1 a 0)}$$

$$2 \to 3 \to C_1 \to C_2 \quad \text{(collega 2 a 0)}$$

$$3 \to C_1 \to C_1 \quad \text{(collega 3 a 0)}$$

$$4 \to 5 \to C_1 \to C_2 \quad \text{(collega 4 a 0)}$$

$$5 \to C_1 \to C_1 \quad \text{(collega 5 a 0).}$$

A questo punto segue che con un cammino lungo 18 posssiamo collegare ogni coppia di stati (basta andare prima in 0 con un cammino lungo 9 e poi da lì andare nella destinazione con un cammino lungo 9) quindi $Q_{ij}^{18} > 0$ per ogni i, $j = 0, \ldots, 5$. In realtà numericamente si vede che già $Q_{ij}^{16} > 0$ per ogni i, $j = 0, \ldots, 5$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2019/20 - Prova scritta 2020-02-19

La durata della prova è di **due ore**. *Le risposte devono essere giustificate.*

Problema 1

Una fabbrica produce componenti, di cui si sa che il 95% è funzionante e il rimanente difettoso (ciascun componente indipendentemente dagli altri). Un robot è addetto al controllo di qualità, ed esamina ciascun componente prodotto, al fine di scartarlo se lo ritiene difettoso. Si sa che se un componente è funzionante, il robot lo riconosce correttamente il 99% delle volte; mentre se un componente è difettoso, lo riconosce l'x% delle volte, dove $x \in [0, 100]$ è un parametro (non una variabile aleatoria).

1. Determinare x in modo tale che la probabilità che un componente preso a caso non venga scartato sia 99%.
2. Con il valore x determinato al punto precedente, si osserva che tre componenti vengono scartati. Calcolare la probabilità che almeno uno tra questi sia in realtà funzionante.

Una soluzione:

1. Dato un componente preso a caso, abbiamo le due alternative "è funzionante", "è difettoso", con probabilità rispettivamente 95%, 5%. Date le rispettive alternative, la probabilità che non venga scartato sono 99% e $(100-x)$%. Pertanto dobbiamo imporre l'uguaglianza

$$99\% = 95\% \cdot 99\% + 5\% \cdot (100 - x)\%,$$

da cui segue facilmente che $100 - x = 99$, ossia $x = 1$.

2. La probabilità che un componente preso a caso venga scartato è, in virtù del punto precedente, 1%. Pertanto l'evento $A =$ "tre componenti vengono scartati" è $\frac{1}{100^3}$ (per indipendendenza). Conviene calcolare la probabilità dell'evento $B =$ "nessuno tra questi 3 componenti è funzionante", e poi passare all'evento complementare. Usiamo la formula di Bayes

$$P(B|A) = P(A|B)P(B)/P(A)$$

e calcoliamo

$$P(A|B) = \frac{1}{100^3} = P(A)$$

$$P(B) = \left(\frac{5}{100}\right)^3$$

e quindi

$$P(B|A) = P(B|A) = \left(\frac{5}{100}\right)^3.$$

La probabilità cercata è $1 - P(B) = 1 - \left(\frac{5}{100}\right)^3$.

Problema 2

Sia $f(x) = cx^{-2}e^{-1/x}$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ altrimenti, dove $c > 0$ è un parametro tale che f sia una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria con densità f.

1. Mostrare che c è unicamente determinato (calcolarlo) e discutere se X ammette momento primo finito (in caso affermativo calcolarlo)
2. Posta $Y = 1/X$, calcolare la densità, il valore atteso e la varianza di Y.

Una soluzione:

1. Poiché $f \geq 0$, basta imporre che l'integrale $\int_0^\infty f(x)dx = 1$. Notiamo che $f(x)$ è integrabile (in senso improprio), e possiamo usare il cambio di variabile $y = 1/x$, trovando

$$\int_0^\infty \frac{c}{x^2} e^{-1/x} dx = \int_0^\infty c e^{-y} dy = c,$$

da cui $c = 1$. Per quanto riguarda il momento primo, notiamo che $xf(x) = \frac{1}{x}e^{-1/x}$ è confrontabile per $x \to \infty$ con $\frac{1}{x}$ (perché $e^{-1/x} \to 1$), quindi si avrà

$$\int_0^\infty xf(x)dx = +\infty,$$

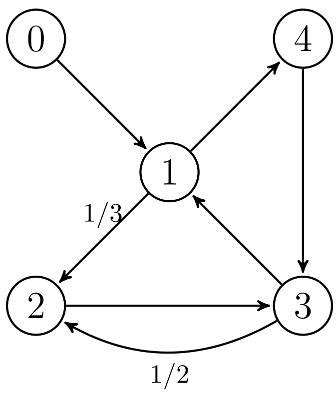
ossia la variabile non ammette momento primo finito. 2. Usiamo la formula di cambio di variabile applicata alla funzione $g(x) = 1/x$ che, tenendo conto che la variabile X è valori positivi $(0, +\infty)$ è invertibile con inversa $y \mapsto 1/y$ e derivata $|g'(x)| = 1/x^2$. Per $y \in (0, +\infty)$, troviamo la densità di Y,

$$\varrho_Y(y) = f(1/y)\frac{1}{|g'(1/y)|} = y^2 e^{-y}/y^2 = e^{-y},$$

che riconosciamo essere la densità esponenziale con parametro 1. Pertanto dai fatti noti sulle variabili esponenziali, si ha che $\mathbb{E}[Y] = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 1$.

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n=0}^\infty$ rappresentata in figura. Si supponga che $X_0 = 0$.



1. Scrivere la matrice di transizione Q, classificare gli stati della catena e calcolare tutte le distribuzioni invarianti;
2. Si osserva che $X_7 = 1$. La probabilità che la catena abbia visitato lo stato 2 in un tempo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ è maggiore o minore di 1/2?
3. *(Facoltativo: svolgere solo se i due punti precedenti sono stati risolti)* Dire se le classi chiuse irriducibili sono regolari.

Una soluzione:

1. Troviamo (ordinando gli stati nell'ordine naturale)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lo stato 0 è transitorio, i rimanenti sono ricorrenti e costituiscono l'unica classe chiusa irriducibile. Per la distribuzione invariante, consideriamo soltanto gli stati $\{1, 2, 3, 4\}$ e impostiamo il sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui le distribuzioni della forma $t(3/2, 2, 3, 1)$, e imponendo la somma uguale a 1 si trova $t = 2/15$. Concludendo, l'unica distribuzione invariante è il vettore

$$(0, \frac{1}{5}, \frac{4}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{15}).$$

2. Posto A l'evento "la catena visita lo stato 2 in qualche tempo $n < 7$, si tratta di calcolare

$$P(A|X_7 = 1) = P(A \cap \{X_7 = 1\})/P(A).$$

Calcoliamo quindi le probabilità dei singoli cammini dei casi "favorevoli", ossia

$$P(0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 | X_0 = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36},$$

$$P(0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 3 \to 1 | X_0 = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{36}$$

$$P(0 \to 1 \to 4 \to 3 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 | X_0 = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{36},$$

per cu36

$$P(A \cap \{X_7 = 1\}) = \frac{5}{36}.$$

Per il denominatore dobbiamo contare l'unico ulteriore cammino che parte da 0 e arriva in 1 senza passare per 2, la cui probabilità è

$$P(0 \to 1 \to 4 \to 3 \to 1 \to 4 \to 3 \to 1 | X_0 = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{36}.$$

Di conseguenza la probabilità cercata vale

$$P(A|X_7 = 1) = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}.$$

3. L'unica classe chiusa irriducibile $C = \{1, 2, 3, 4\}$ è regolare. Per dimostrarlo possiamo argomentare in diversi modi (ad esempio enumerando esplicitamente opportuni cammini di una lunghezza fissata che collegano ogni coppia di stati). Proviamo ad argomentare invece in questo modo: consideriamo la matrice $(Q_C)^2$ (dove Q_C è la sottomatrice relativa agli stati in C, ossia escludendo 0). Si ha

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo intepretare questa matrice come la matrice di transizione di una nuova catena di Markov (precisamente la catena che fa due passi alla volta della catena originaria). Inoltre si vede che è irriducibile e poiché esiste uno stato (ad esempio 2) con probabilità positiva di restare in se stesso, si applica il criterio di regolarità: esiste n tale che $((Q_C)^2)^n$ ha tutte componenti positive. Ma allora tornando al problema originario si avrà che $(Q_C)^{2n}$ ha tutte componenti positive.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2019/20 - Esempio di pre-test a distanza 2020-05-07

La durata della prova è di **un'ora**. *Le risposte*

Problema 1

Una macchina si può trovare in tre stati (spento, stand-by, acceso). Si sa che il 60% del tempo è spenta, il 30% è in stand-by, e il rimanente è accesa. Nel caso in cui sia nello stato spento, consuma 4 Watt di potenza[1], nel caso in cui sia in stand-by consuma 7 Watt, mentre nel caso in cui sia accesa consuma 600 Watt.

1. Calcolare media e deviazione standard della variabile aleatoria X che indica la potenza istantanea consumata dalla macchina.
2. Si osserva che la macchina non è accesa. Come cambiano media e deviazione standard di X?

Una soluzione:

```
 1. media = 64,4 sigma = 178,505
2. media = 5, sigma = 2^{1/2} [= 1,4142]
```

Problema 2

Sia $f(x) = c\frac{x^2}{1+x^3}$ per $x \in (0,1)$, $f(x) = 0$ altrimenti, dove $c > 0$ è un parametro tale che f sia una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria con densità f.

1. Mostrare che c è unicamente determinato (calcolarlo).
2. Posta $Y = (1 - X + X^2)/X^2$, calcolare il valore atteso di Y.

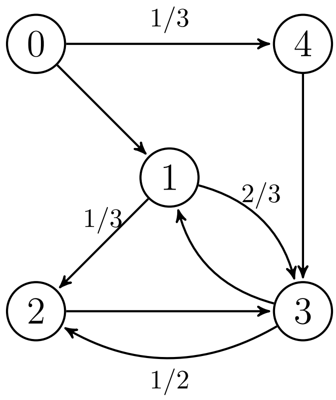
Una soluzione:

```
 1. c = 3/log(2) [ = 4.3280]
2. E[Y]=3
```

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ rappresentata in figura. Si supponga che $X_0 = 0$.

[1] questo perché anche se formalmente spenta alcune funzioni devono rimanere attive.



1. Determinare l'unica distribuzione invariante della catena.
2. Si osserva che $X_4 = 3$. Dire se è più probabile che $X_1 = 4$ oppure che $X_1 = 1$.

Una soluzione:

```
 1. Ordinando gli stati naturalmente il vettore è: (0, 3/13, 4/13, 6/13, 0)
2. P( X_1 = 1 | X_4 = 3) > P(X_1=4 | X_4=3)
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2019/20 - Pre-test 2020-06-12

La durata della prova è di **un'ora**. *Le risposte (brevi) devono essere inserite nel modulo alla pagina*

Problema 1

Una malattia infettiva si trasmette da persona a persona. Se una persona è infettiva e ne incontra un'altra sana, il contagio avviene con probabilità 50%. Inoltre si sa che il 5% della popolazione è infettivo. Alice, che ha fatto un test e sa di essere sana, incontra uno dopo l'altro e separatamente i suoi due amici, Bob e Carlo, che non sanno di essere sani o infettivi (molti non presentano sintomi, e senza test non si può essere certi di essere sani o infetti).

1. calcolare la probablità che Alice venga contagiata dopo i due incontri.
2. Bob e Carlo, dopo aver incontrato Alice vengono a sapere di essere in realtà entrambi infettivi: come cambia la probabilità che Alice venga contagiata?

Una soluzione:

```
 1. 5% x 95 % + 5% x 5 % x 3/4  [= 0,049]
2.  3/4.
```

Problema 2

Sia $f(x) = cx^3(1-x^4)$ per $x \in (0,1)$, $f(x) = 0$ altrimenti, dove $c > 0$ è un parametro tale che f sia una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria con densità f.

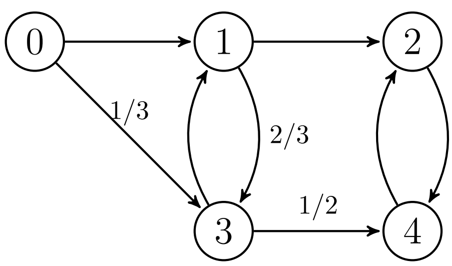
1. Mostrare che c è unicamente determinato (calcolarlo).
2. Posta $Y = X^4$, calcolare valore atteso e varianza di Y.

Una soluzione:

```
 1.  c = 8
2. E[Y]= 1/3, Var[Y] = 1/6 - (1/3)^2 =1/18.
```

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ rappresentata in figura (alcune probabilità di transizione vanno completate). Si supponga che $X_0 = 0$.



1. Determinare l'unica distribuzione invariante della catena. Dire se le classi chiuse irriducibili sono regolari.
2. Si osserva che $X_4 = 2$. È più probabile che sia $X_2 = 2$ o $X_2 = 3$?

Una soluzione:

```
 1. La distribuzione invariante è  (0, 0, 0, 1/2, 1/2).
  L'unica classe chiusa irriducibile è {1,2} e non è regolare.
2. È più probabile che sia X_2=3.
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2019/20 - Pre-test 2020-07-01

La durata della prova è di **un'ora**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione).*

Problema 1

Un braccio robotico è programmato per raccogliere degli oggetti su un tavolo. Se l'oggetto è un cubo, lo riesce a raccogliere con probabilità 80%. Se invece è una palla, la probabilità diminuisce al 60%. Si effettua il seguente test: si sceglie a caso un oggetto (cubo o palla, con probabilità uniforme), lo si pone sul tavolo e si verifica se il robot lo raccoglie; si ripete questa operazione (scegliendo ogni volta a caso un oggetto) per ulteriori 9 volte. Sia X il numero di oggetti raccolti dal robot.

1. Calcolare il valore atteso e la varianza di X.
2. Si osserva che $X = 6$. Quale dei due eventi è più probabile: $A =$ "sono stati messi sul tavolo 10 cubi" oppure $B =$ "sono state messe sul tavolo 10 palle"?

Una soluzione:

```
1. X è Binomiale di parametri (10, 0.7), quindi
 E[X]= 10*0.7 = 7, Var[X] = 10* 0.7*0.3 = 2.1.
2. B è più probabile.
```

Problema 2

Sia $f(x) = c/\sqrt{|x|}$ per $x \in (-1, 1)$, $f(x) = 0$ altrimenti, dove $c > 0$ è un parametro tale che f sia una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria con densità f.

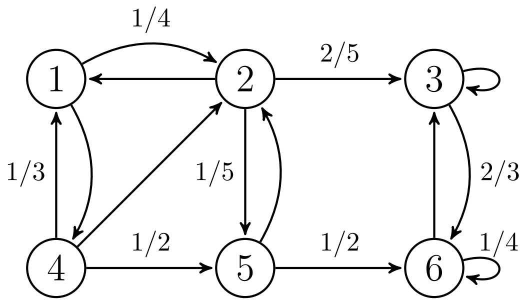
1. Mostrare che c è unicamente determinato (calcolarlo).
2. Posta $Y = 1 - \sqrt{|x|}$, calcolare valore atteso e varianza di Y.

Una soluzione:

```
1.   c = 1/4
2. E[Y]= 1/2, E[Y^2]= 1/3, Var[Y] = 1/12.
```

Problema 3

Un ambiente costituito da 6 stanze collegate tra loro viene esplorato in modo casuale da un robot. Possiamo rappresentarlo con una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ come in figura (alcune probabilità di transizione vanno completate). Si supponga che $X_1 = 1$.



1. Determinare l'unica distribuzione invariante della catena. Dire se le classi chiuse irriducibili sono regolari.
2. Calcolare la probabilità che entro il tempo 7 (incluso) il robot sia stato in ciascuna delle 6 stanze almeno una volta.

Una soluzione:

```
 1. La distribuzione invariante è  (0, 0,  9/17, 0, 0, 8/17).
  L'unica classe chiusa irriducibile è {3,6} ed è regolare.
2.  circa 0.0674
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2019/20 - Pre-test 2020-07-22

La durata della prova è di **un'ora**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione).*

Problema 1

Due droni (A e B) sono programmati per sorvegliare ciascuno una regione in modo autonomo finché non si verifichi una situazione di "allarme" (ad esempio, un incendio) in cui si richiede l'intervento di un operatore. La probabilità che ciascun drone richieda l'intervento è del 5% ma, sapendo che un drone (ad esempio, A) richiede l'intervento dell'operatore, la probabilità che pure l'altro (B) lo richieda sale al 60%.

1. Calcolare la probabilità che esattamente un drone richieda l'intervento dell'operatore.
2. Calcolare la probabilità che non venga richiesto l'intervento dell'operatore.

Una soluzione:

```
1. 4%
2. 93%
```

Problema 2

Sia $f(x) = a \arctan(x) + b$ per $x \in \mathbb{R}$, dove a, b sono parametri tali che f sia una funzione di ripartizione (CDF) di una variabile aleatoria X.

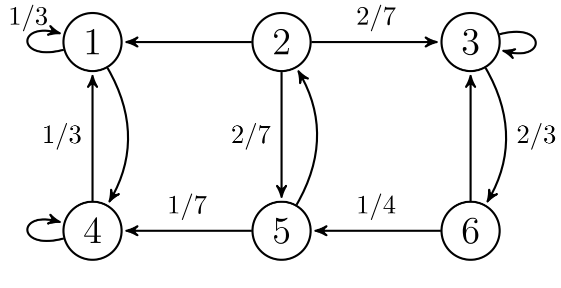
1. Calcolare a e b.
2. Posta $g(x) = x$ se $x \in [0, 4]$, 0 altrimenti, calcolare valore atteso di $g(X)$.

Una soluzione:

```
1. a = 1/pi, b=1/2
2. log(5)/(2 pi)
```

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con probabilità di transizione rappresentate in figura (alcune probabilità vanno completate). Si supponga che $X_0 = 2$.



1. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$, per ciascuno stato j.
2. Calcolare la probabilità che la catena non visiti mai né lo stato 3 né lo stato 6 *(Può essere utile la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, per $|x| < 1$.)*

Una soluzione:

```
  1. Il limite esiste ({1,4} è regolare), vale  (1/3, 0, 0, 2/3, 0, 0).
2.  23/37
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2019/20 - Pre-test 2020-09-16

La durata della prova è di **un'ora**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione).*

Problema 1

Una confezione di gelati contiene 31 pezzi, di cui almeno 10 coni, 10 biscotti, 10 stecchi e un ulteriore gelato "in regalo" scelto a caso (uniformemente) tra cono, biscotto o stecco (ad esempio, potrebbe quindi contenere 11 coni, 10 biscotti e 10 stecchi). Si estraggono due gelati dalla scatola (senza rimpiazzo).

1. Calcolare la probabilità che siano entrambi dello stesso tipo.
2. Sapendo che sono entrambi coni, calcolare la probabilità che il gelato "in regalo" sia un cono.

Una soluzione:

```
1.290/930, circa 0.312
2.110/290, circa 0.379
```

Problema 2

Sino X, Y variabili aleatorie gaussiane standard $\mathcal{N}(0,1)$ e indipendenti. Si ponga $Z = (X+2Y)^3$.

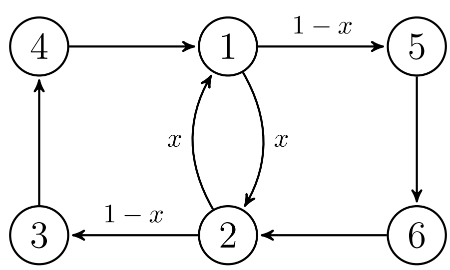
1. Calcolare il valore atteso di Z.
2. Calcolare la densità di Z.

Una soluzione:

```
1. E[Z] = 0.
2. densità f(z) = exp(-|z|^{2/3}/10) / ((2*pi*5)^{1/2} 3 |z|^{2/3}).
```

Problema 3

Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura, dove $x \in (0,1)$ è un parametro.



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti della catena.
2. Dire se la catena è regolare.

Una soluzione:

1. Con la solita notazione, si ha (1, 1, 1-x, 1-x, 1-x, 1-x)/(6-4x).
2. Non è regolare.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2019/20 - Simulazione pre-test 2020-11-23

La durata della prova è di **un'ora**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione).*

Problema 1

Un ufficio postale ha due sportelli per il pubblico, ma il 70% delle giornate solo uno è aperto. Supponiamo che il tempo di servizio per ciascuna persona, una volta allo sportello, sia una variabile esponenziale con media 5 minuti, indipendente dai tempi delle altre persone. In un momento in cui l'ufficio è vuoto (di clienti), si osservano due persone entrare, una dopo l'altra, praticamente allo stesso istante.

1. Calcolare il valore atteso del tempo totale trascorso nell'ufficio dalla persona entrata per seconda.
2. Dopo 5 minuti si osserva nessuna delle due persone è ancora uscita. Calcolare la probabilità che entrambi gli sportelli siano aperti.

Una soluzione:

Risposte brevi:

```
1. 8,5
2. 3/(7e +3), circa 0.14
```

Soluzione dettagliata:

1. Poniamo A l'evento "entrambi gli sportelli sono aperti", così $P(A) = 30\%$. Se vale A, allora il tempo trascorso T_2 dalla seconda persona entrata è una esponenziale di parametro $\lambda = 1/5$ (media 5). Altrimenti, dovrà attendere che la prima persona sia servita, quindi un tempo pari alla somma di due esponenziali di media 5. Perciò

$$\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[T_2|A]\,P(A) + \mathbb{E}[T_2|A^c]\,P(A^c) = 5 \cdot 30\% + 10 \cdot 70\% = 8.5.$$

2. Posto B l'evento nessuna persona è uscita nei primi 5 minuti, usiamo la formula di Bayes:

$$P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B).$$

Se vale A, allora B equivale al fatto che il minimo tra T_1 (il tempo impiegato dalla prima persona) e T_2 siano entrambi maggiori di 5. Si tratta di due esponenziali di parametro $1/5$, quindi il minimo è una esponenziale di parametro $2/5$ (basta calcolare la funzione di sopravvivenza del minimo):

$$P(B|A) = P(\min\{T_1, T_2\} > 5) = e^{-5 \cdot 2/5} = e^{-2}.$$

Per calcolare $P(B)$, decomponiamo

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

e osserviamo che $P(B|A^c)$ stavolta significa che $T_1 > 5$ (perché il primo ad entrare è anche il primo ad essere servito all'unico sportello, e quindi anche ad uscire).

$$P(T_1 > 5|A^c) = e^{-5\cdot 1/5} = e^{-1}.$$

Otteniamo

$$P(A|B) = \frac{e^{-2}\cdot 30\%}{e^{-2}\cdot 30\% + e^{-1}\cdot 70\%} = 3/(7e+3) \approx 0.14.$$

Problema 2

Sia $a \geq 0$ un parametro tale che, posta

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 2\sin(x) & \text{se } x \in [0,a), \\ 1 & \text{se } x \geq a, \end{cases}$$

f sia la CDF di una variabile aleatoria X con densità (continua).

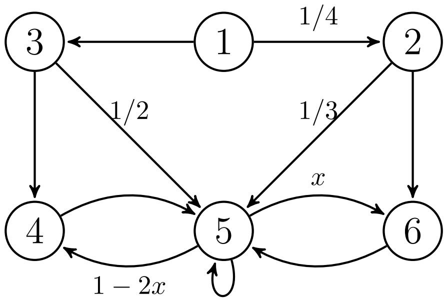
1. Determinare a e il valore atteso di X.
2. Calcolare il valore atteso e la varianza di $Y = \sin^2(X)$.

Una soluzione:

```
1. a= pi/6, E[X] = pi/6 + 3^{1/2} -2, circa 0,26
2. E[Y] = 1/12, Var(Y) = 1/80 - 1/144
```

Problema 3

Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura, dove $x \in [0,1/2]$ è un parametro.



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti della catena.
2. Posto $x = 1/3$, si osserva che $X_1 = 1$ e $X_4 = 5$. Calcolare la probabilità che $X_3 = 5$.

Una soluzione:

1. Con la solita notazione, si ha (0, 0, 0, 1-2x, 1, x)/(2-x).
2. 0,22

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2020/21 - Pre-test 2021-01-11

La durata della prova è di **75 minuti**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione) sul form MS predisposto.*

Problema 1

Un'urna contiene 10 palline di cui 9 blu e una rossa. Si "diluisce" il contenuto dell'urna nel seguente modo: si prende una pallina a caso dall'urna e la si inserisce in una seconda urna, a cui si aggiungono poi 9 palline blu (dopo questa operazione, la prima urna contiene 9 palline e la seconda 10). Si ripete poi l'operazione una seconda e una terza volta, ogni volta partendo dall'urna che contiene 10 palline (alla fine si hanno quindi a disposizione tre urne con 9 palline e una quarta urna con 10 palline).

1. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina rossa dalla quarta urna (quella contenente 10 palline).
2. Si estrae una pallina dalla prima urna e si osserva che è blu. Come cambia la probabilità di estrarre una pallina rossa dalla quarta urna? (calcolarla).

Una soluzione:

Risposte brevi:

```
1. 1/10000
2. 1/9000 (aumenta)
```

Soluzione dettagliata:

1. Poniamo R_1 l'evento "una pallina rossa è estratta nella prima estrazione", R_2, R_3 similmente, e B_1, B_2, B_3 i rispettivi eventi complementari, in modo da descrivere la "preparazione" delle 4 urne. Troviamo facilmente

$$P(R_1) = \frac{1}{10}, P(B_1) = \frac{9}{10},$$

$$P(R_2|R_1) = \frac{1}{10}, P(B_1|R_1) = \frac{9}{10},$$

$$P(R_3|R_2 \text{ e } R_1) = \frac{1}{10}.$$

Posto R_4 l'evento si estrae una pallina rossa dalla quarta urna, si ha

$$P(R_4|R_3 \text{ e } R_2 \text{ e } R_1) = \frac{1}{10},$$

mentre negli altri casi la probabilità è nulla (perché ci sono solo palline blu). Di conseguenza

$$P(R_4) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10000}.$$

2. Poniamo C l'evento "si estrae una pallina blu dalla prima urna (dopo aver preparato le 4 urne)". C equivale ad una seconda estrazione dalla prima urna, senza rimpiazzo. Sappiamo dalla teoria che, senza sapere nulla sulla prima estrazione, la probabilità è sempre data dai casi favorevoli sui casi possibili:

$$P(C) = \frac{9}{10}.$$

Inoltre $P(C|R_4) = 1$ perché se una pallina rossa è estratta nella quarta urna, necessariamente nella prima sono tutte blu. Di conseguenza,

$$P(R_4|C) = P(C|R_4)P(R_4)/P(C) = 1 \cdot 10^{-4} \cdot 10/9 = \frac{1}{9000}.$$

Problema 2

Sia Θ una variabile aleatoria continua a valori in $[0, 2\pi]$, con densità $f(\theta) = c\theta(2\pi - \theta)$ (dove c è un'opportuna costante positiva).

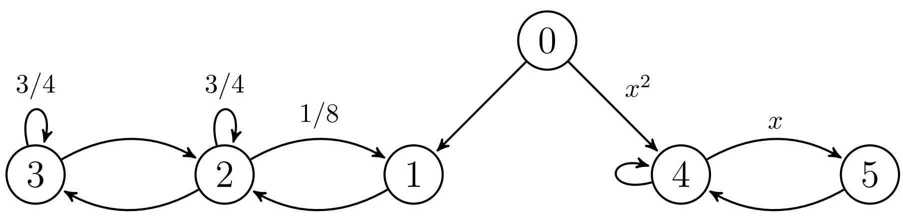
1. Determinare il valore del parametro c e calcolare valore atteso di Θ.
2. Le variabili $\sin(\Theta)$ e $\cos(\Theta)$ sono positivamente, negativamente oppure non correlate tra loro?

Una soluzione:

```
1. c = 6/(2 pi)^3, circa 0.024     E[Theta] = pi
2. non correlate
```

Problema 3

Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura (da completare), dove $x \in [0, 1]$ è un parametro.



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti della catena (esprimerle come funzione di x).
2. Supponendo $X_0 = 0$, la probabilità $P(X_3 = 5)$ è una funzione di x. Determinare $x \in [0, 1]$ in modo che tale probabilità sia massima.

Una soluzione:

```
  1.  (0, a/13, 8a/13, 4a/13, (1-a)/(1+x), (1-a)x/(1+x) )  [ 0<= a <= 1 parametro]
2. P(X_3 = 5) = x^3(1-x), massima per x= 3/4.
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2020/21 - Pre-test 2021-01-27

La durata della prova è di **75 minuti**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione) sul form MS predisposto.*

Problema 1

Un robot a guida autonoma può riconoscere ed evitare ostacoli sul suo cammino. In condizioni di laboratorio si predispone un percorso che comprende un gran numero di ostacoli disposti in modo casuale, di cui 1/4 "piccoli" e 3/4 "grandi". Si sa che se il robot incontra un ostacolo "piccolo", poiché ha difficoltà a riconoscerlo, riesce a superarlo nel 50% dei casi (altrimenti si blocca). Se invece incontra un ostacolo "grande", riesce a superarlo nel 90% dei casi (altrimenti si blocca).

1. Calcolare la probabilità che il robot superi correttamente il primo ostacolo del percorso.
2. Dopo aver superato tutti gli ostacoli tranne l'ultimo, il robot si blocca proprio all'ultimo ostacolo. Calcolare la probabilità che tale ostacolo sia "piccolo".

Una soluzione:

Risposte brevi:

```
1. 1/4 * 1/2 + 3/4 * 9/10 = 8/10
2. 1/8 / (2/10) = 5/8 = 0.625
```

Soluzione dettagliata:

1. Poniamo A_i l'evento "l'ostacolo i è piccolo", S_i l'evento "il robot supera l'ostacolo i". Allora

$$P(S_1) = P(S_1|A_1)P(A_1) + P(S_1|A_1^c)P(A_1^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10} = 0.8.$$

2. Non è noto il numero n di ostacoli, quindi è lecito ragionare come se i singoli ostacoli fossero tutti indipendenti tra loro. L'informazione che abbia superato tutti gli ostacoli precedenti all'ultimo non è rilevante. Calcoliamo allora

$$P(A_n|S_n^c) = P(S_n^c|A_n)P(A_n)/P(S_n^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}/(2/10) = \frac{5}{8} = 0.625.$$

Una possibile intepretazione, più aderente al testo, consiste nel calcolare le probabilità supponendo che $n/4$ degli ostacoli sia piccolo e i rimanenti $3n/4$ siano grandi (e si tratta quindi di estrazioni senza rimpiazzo). Allora l'informazione che abbia superato tutti gli altri ostacoli diventa rilevante. Posto B l'evento "il robot ha superato i primi $n-1$ ostacoli", abbiamo che

$$P(A_n|S_n^c \text{ e } B) = P(S_n^c \text{ e } B|A_n)P(A_n)/P(S_n^c \text{ e } B).$$

Calcoliamo separatamente

$$P(S_n^c \text{ e } B|A_n) = P(S_n^c|A_n)P(\text{"il robot ha superato } n/4-1 \text{ ostacoli piccoli e } 3/4n \text{ grandi } |A_n)$$
$$50\% \cdot (50\%)^{n/4-1} \cdot (90\%)^{3n/4}$$

mentre, ricordando che per le estrazioni senza rimpiazzo l'esito di una qualsiasi estrazione ha la stessa probabilità (se non si conosce nulla delle altre)

$$P(A_n) = \frac{1}{4}.$$

Per il denominatore, calcoliamo

$$\begin{aligned} P(S_n^c \text{ e } B|A_n^c) &= P(S_n^c|A_n^c)P(\text{"il robot ha superato } n/4 \text{ ostacoli piccoli e } 3n/4-1 \text{ grandi } |A_n^c) \\ &= 10\% \cdot (50\%)^{n/4} \cdot (90\%)^{3n/4-1}, \end{aligned}$$

e quindi

$$P(S_n^c \text{ e } B) = \frac{1}{4} \cdot 50\% \cdot (50\%)^{n/4-1} \cdot (90\%)^{3n/4} + \frac{3}{4} \cdot 10\% \cdot (50\%)^{n/4} \cdot (90\%)^{3n/4-1}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} P(A_n|S_n^c \text{ e } B) &= \frac{\frac{1}{4} \cdot 50\% \cdot (50\%)^{n/4-1} \cdot (90\%)^{3n/4}}{\frac{1}{4} \cdot 50\% \cdot (50\%)^{n/4-1} \cdot (90\%)^{3n/4} + \frac{3}{4} \cdot 10\% \cdot (50\%)^{n/4} \cdot (90\%)^{3n/4-1}} \\ &= \frac{9}{9+3\cdot 10} = \frac{9}{39}. \end{aligned}$$

Il risultato è diverso: dipende dall'intepretazione del testo, in questo caso leggermente ambiguo.

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria continua con legge uniforme a valori nell'intervallo $[0, 10^8]$.

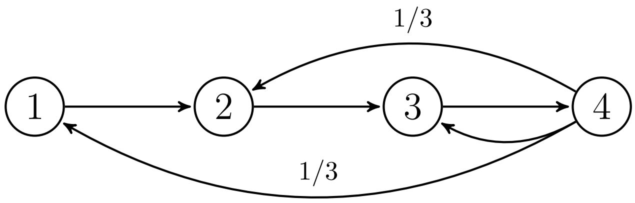
1. Calcolare la probabilità che la prima cifra decimale di X sia 1 (la prima partendo da sinistra, ad esempio se $X = 2021$ allora la prima cifra è 2; nel caso in cui $X < 1$ la prima cifra è 0).
2. Calcolare il valore atteso e la densità di $Y = \log_{10} X$.

Una soluzione:

```
1. 0.11111111
2. E[Y] = 8 - 1/log(10), f(y) = 10^(y-8) log(10) se y<8,  0 altrimenti
```

Problema 3

Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura (da completare).



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti della catena. Dire se la catena è regolare.
2. Supponendo $X_0 = 1$, calcolare la probabilità che la catena non torni più nello stato 1, ossia dell'evento $\{ X_n \neq 1 \text{ per ogni } n \geq 1\}$.

Una soluzione:

1. Con la solita notazione, si ha (1/9, 2/9, 1/3, 1/3). È regolare.
2. la probabilità è 0.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2020/21 - Pre-test 2021-02-17

La durata della prova è di **75 minuti**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione) sul form MS predisposto.*

Problema 1

La durata di una singola batteria è rappresentabile come una variabile esponenziale con media 10 settimane (anche se non viene usata). Inoltre, le durate di batterie diverse sono indipendenti tra loro. Un drone, per funzionare correttamente, necessita di almeno 1 batteria funzionante, ma può ospitarne fino a 2. Inizialmente si osserva che il drone funziona, ma non si può osservare quante batterie sono state inserite: si suppone quindi che tale numero sia una variabile uniforme nei valori $\{1, 2\}$. Posta T la durata di funzionamento del drone rimanente (senza cambiarne le batterie),

1. calcolare il valore atteso di T.
2. Avendo osservato che $T < 10$ settimane, calcolare la probabilità che le batterie inserite siano 2.

Una soluzione:

Risposta rapida:

```
1. E[T] = 12,5
2. (e-1)/(2e -1), circa 0.387
```

Soluzione dettagliata:

1. Poniamo A l'evento "ci sono due batterie nel drone". Sapendo A^c, sappiamo che T è una variabile esponenziale di parametro $1/10$. Sapendo A, invece T è data dal *massimo* tra due variabili esponenziali T_1, T_2, entrambe di parametro $1/10$ (perché dal testo segue che le batterie hanno una durata esponenziale anche se non vengono utilizzate, e ne basta una funzionante per il drone). Dobbiamo calcolare la densità del massimo: passiamo dalla CDF: per $t \geq 0$,

$$P(\max\{T_1, T_2\} \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) = (1 - e^{-t/10})^2.$$

Derivando si ottiene la densità. Equivalentemente possiamo scrivere che la densità è l'opposto della derivata della funzione di sopravvivenza:

$$p(\max T_1, T_2 = t) = -\frac{d}{dt}\left[1 - (1 - e^{-t/10})^2\right].$$

Per calcolare il valore atteso, dobbiamo allora calcolare l'integrale:

$$\mathbb{E}[T|A] = -\int_0^\infty t\frac{d}{dt}\left[1 - (1 - e^{-t/10})^2\right] dt = \int_0^\infty \left[1 - (1 - e^{-t/10})^2\right] dt$$
$$= \int_0^\infty 2e^{-t/10} - e^{-t/5} dt = 20 - 5 = 15.$$

Di conseguenza

$$\mathbb{E}\left[T\right] = \mathbb{E}\left[T|A\right] P(A) + \mathbb{E}\left[T|A^c\right] P(A^c) = \frac{1}{2}\left(15+10\right) = 12.5.$$

2. Calcoliamo usando la formula di Bayes

$$P(A|T<10) = P(T<10|A)P(A)/P(T<10)$$

e

$$P(T<10|A) = P(\max\{T_1, T_2\} \leq 10|A) = (1-e^{-10/10})^2 = (1-1/e)^2.$$

Per il denominatore, calcoliamo anche

$$P(T<10|A^c) = (1-e^{-10/10}) = 1-1/e$$

e decomponiamo

$$P(T<10) = P(T<10|A)P(A) + P(T<10|A^c)P(A^c) = \frac{1}{2}(1-1/e)(2-1/e).$$

Di conseguenza

$$P(A|T<10) = \frac{1-1/e}{2-1/e} = \frac{e-1}{2e-1}.$$

Problema 2

Si consideri una variabile aleatoria continua X a valori in $[0,1]$ avente densità $f(x) = cx/\sqrt{1-x^2}$, dove $c>0$ è una costante opportuna.

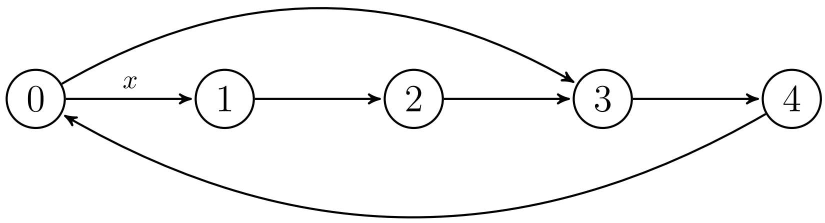
1. Determinare c.
2. Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

Una soluzione:

```
1. c =1
2. E[X] = pi/4
```

Problema 3

Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura (da completare), in cui $x \in [0,1]$ è un parametro.



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti della catena (come funzione di x).
2. Supponendo di osservare $X_0 = 0$ e $X_{15} = 0$, calcolare la probabilità che la catena non visiti lo stato 1 nei tempi compresi tra 0 e 15 (come funzione di x).

Una soluzione:

```
  1. Con la solita notazione, si ha (1, x, x, 1, 1 )/(3+2x).
2.  la probabilità è (1-x)^5/(x^3+(1-x)^5).
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2020/21 - Pre-test 2021-04-17

La durata della prova è di **75 minuti**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione) sul form MS predisposto.*

Problema 1

Un segnale viene trasmesso come una sovrapposizione di onde

$$s(t) = X\cos(t) + Y\sin(t),$$

dove $t \geq 0$ indica un tempo, mentre X, $Y \in \{0, 1\}$ codificano il segnale (e non dipendono dal tempo). Supponiamo che X, Y siano variabili aleatorie con deviazione standard $\sigma_X = \sigma_Y = 1/2$ e coefficiente di correlazione $\sigma_{XY} = 1/2$.

1. Calcolare valore atteso e varianza di $s(t)$ (in funzione di $t \geq 0$).
2. Avendo osservato che $s(\pi/4) > 0$, calcolare la probabilità che sia $X = 0$.

Una soluzione:

```
1. E[s(t)] = ( cos(t) + sin( t))/2, Var(s(t)) = 1/4 + sin(2t)/8.
2. P = 1/5.
```

Problema 2

Si consideri una variabile aleatoria continua X avente densità $f(x) = c(x^2 + 1)\exp(-x^2/2)$, dove $c > 0$ è una costante opportuna.

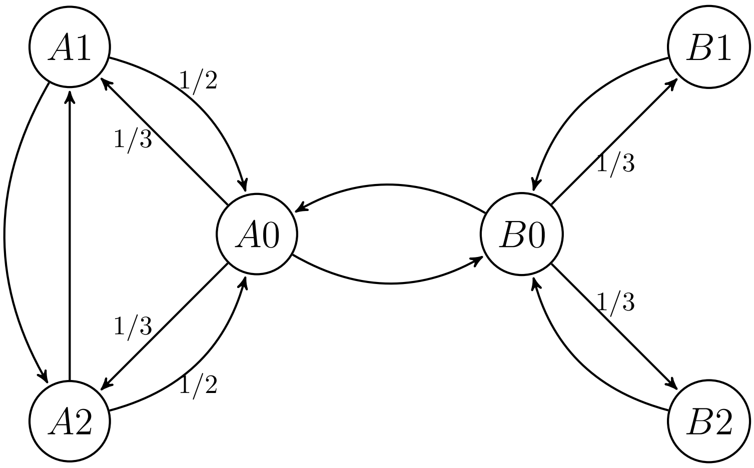
1. Determinare c e calcolare $E[X]$.
2. Calcolare $MGF_X(t)$.

Una soluzione:

```
1. c =1/(8 pi)^(1/2), E[X] = 0.
2. MGF(t) = (1+t^2/2)exp(t^2/2).
```

Problema 3

Un robot è programmato per vigilare su un ambiente composto da due stanze (A) e (B) ciascuna contenente tre punti di interesse (0, 1, 2), secondo la catena di Markov rappresentata in figura.



1. Dire se la catena è regolare, in caso affermativo trovare n tale che $(Q^n)_{ij} > 0$ per stati qualsiasi i, j (anche $i = j$), dove Q è la matrice transizione.
2. Lasciando il robot circolare per un tempo molto grande, dire se trascorre una frazione di tempo maggiore nella stanza A o nella stanza B.

Una soluzione:

```
  1. Regolare, n =6
2. A
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2020/21 - Pre-test 2021-06-09

La durata della prova è di **75 minuti**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione) sul form MS predisposto.*

Problema 1

Un software è programmato per contare il numero di occorrenze di un dato tipo di oggetto in una immagine (ad esempio, pezzi difettosi in un processo di fabbricazione, da separare successivamente rispetto a quelli funzionanti). Tuttavia, per ciascun oggetto effettivamente presente in una immagine, il software lo riconosce con probabilità 75% (ciascuno indipendentemente dagli altri). Inoltre, se effettivamente un oggetto non è presente, il software non lo conta (non crea quindi falsi positivi). Si sa inoltre che ogni immagine contiene un numero aleatorio N di occorrenze di tali oggetti dove N è Poisson di parametro 100.

1. Calcolare la probabilità che il software riconosca correttamente tutti gli oggetti presenti in una immagine.
2. Supponendo di sapere che il software ha riconosciuto correttamente tutti gli oggetti presenti in una immagine, calcolare il valore atteso del numero di occorrenze in tale immagine.

Una soluzione:

Risposta breve:

```
1. exp(-25).
2. 75.
```

Soluzione dettagliata:

1. Poniamo A l'evento "tutti gli oggetti sono riconosciuti correttamente". Supponendo che vi siano $N = n$ oggetti, allora la probabilità che li riconosca correttamente è

$$P(A|N = n) = (75\%)^n.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A|N = n)P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (75\%)^n \frac{100^n}{n!} e^{-100} \\ &= e^{-100} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{75^n}{n!} = e^{-100} e^{75} = e^{-25}. \end{aligned}$$

2. Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{E}[N|A] = \sum_{n=0}^{\infty} nP(N = n|A).$$

Per calcolare le probabilità usiamo la formula di Bayes:

$$P(N = n|A) = P(N = n)P(A|N = n)/P(A) = \frac{100^n e^{-100}}{n!} \cdot (75\%)^n / e^{-25} = \frac{(75)^n}{n!} e^{-75}.$$

Riconosciamo una densità Poisson di parametro 75, quindi

$$\mathbb{E}[N|A] = 75.$$

Problema 2

Si consideri una variabile aleatoria continua X a valori in $[0, 1]$ avente densità $f(x) = e^{x+c}$, dove c è una costante reale opportuna.

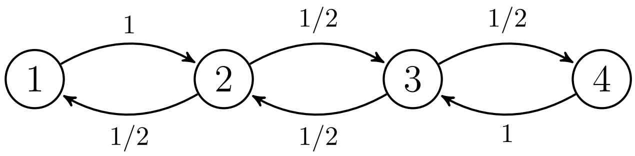
1. Determinare c.
2. Calcolare $MGF_X(t)$ e $\mathbb{E}[X]$

Una soluzione:

```
1. c = - log(e-1).
2. MGF(t) = (exp(t+1)-1)/( (t+1) (e-1)), E[X] = 1/(e-1)
```

Problema 3

Due droni programmati per monitorare un corridoio sono rappresentati come due catene di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ indipendenti tra loro, entrambe con probabilità di transizione rappresentate in figura. Si supponga che entrambe le catene siano stazionarie.



1. Calcolare la probabilità che $X_1 = Y_1$.
2. Calcolare la probabilità che i due droni non si incontrino mai, ossia dell'evento

$$A = \{X_n \neq Y_n \text{ per ogni } n \geq 1\}.$$

Una soluzione:

```
  1. 5/18
2.  0.
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2020/21 - Pre-test 2021-06-30

La durata della prova è di **75 minuti**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione) sul form MS predisposto.*

Problema 1

Un robot è programmato per riconoscere due tipi di oggetti ("A" e "B") e smistarli in contenitori corrispondenti. Si sa che, se un oggetto è del tipo "A", lo riconosce correttamente e lo pone nel contenitore corrispondente con probabilità 90%, mentre, se un oggetto è del tipo "B", la probabilità che riconosca e agisca correttamente scende all'85%. Se l'oggetto non è riconosciuto correttamente viene posto nel contenitore sbagliato. Inoltre il tipo di ciascun oggetto viene determinato dal robot in modo autonomo, indipendentemente dagli altri. In una sessione di prova vengono presentati al robot 200 oggetti, 100 per tipo, in ordine casuale, e si conta il numero di oggetti N che finiscono nel contenitore per gli oggetti di tipo "A".

1. Calcolare $\mathbb{E}[N]$.
2. Sapendo che i primi 199 oggetti sono finiti tutti nel contenitore di tipo "A", calcolare la probabilità che anche l'ultimo venga posto nello stesso.

Una soluzione:

Soluzione breve:

```
1. 105.
2. circa 0,257
```

Soluzione dettagliata:

1. Per ciascun oggetto $i \in \{1, \ldots, 200\}$, poniamo $X_i \in \{0, 1\}$ la variabile che indica se l'oggetto è finito nel contenitore A. Troviamo

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= P(X_1 = 1 | \text{oggetto di tipo "A"}) P(\text{oggetto di tipo "A"}) \\ &\quad + P(X_1 = 1 | \text{oggetto di tipo "B"}) P(\text{oggetto di tipo "B"}) \\ &= 90\% \cdot \frac{1}{2} + 15\% \cdot \frac{1}{2} = \frac{105}{200}. \end{aligned}$$

Possiamo esprimere N come la somma di tutti gli X_i, quindi per linearità del valor medio,

$$\mathbb{E}[N] = 200 \cdot \frac{105}{200} = 105.$$

2. Posto A_{199} l'evento "I primi 199 oggetti sono finiti tutti nel contenitore di tipo A", dobbiamo calcolare

$$P(X_{200} = 1 | A_{199}).$$

Decomponiamo a seconda che l'ultimo oggetto sia di tipo A oppure B:

$$\begin{aligned}
&P(X_{200} = 1|A_{199}) = \\
&= P(X_{200} = 1|A_{199} \text{ e l'ultimo è di tipo } A)P(\text{ l'ultimo è di tipo } A|A_{199}) \\
&\quad + P(X_{200} = 1|A_{199} \text{ e l'ultimo è di tipo } B)P(\text{ l'ultimo è di tipo } B|A_{199}) \\
&= 90\% \cdot P(\text{ l'ultimo è di tipo } A|A_{199}) + 15\% \cdot P(\text{ l'ultimo è di tipo } B|A_{199}).
\end{aligned}$$

Calcoliamo le due probabilità rimanenti tramite la formula di Bayes:

$$P(\text{ l'ultimo è di tipo } A|A_{199}) = \frac{P(A_{199}|\text{ l'ultimo è di tipo } A)P(\text{ l'ultimo è di tipo } A)}{P(A_{199})}.$$

Il termine $P($ l'ultimo è di tipo $A)$ si calcola facilmente ricordando che per le estrazioni senza rimpiazzo, senza sapere nulla delle altre estrazioni, la probabilità di estrarre A è comunque $1/2$ (casi favorevoli su casi possibili). Per il termine

$$P(A_{199}|\text{ l'ultimo è di tipo } A)$$

ragioniamo nel seguente modo: sapendo che l'ultimo è di tipo A, significa che il robot ha osservato 199 oggetti, di cui 99 di tipo A e 100 di tipo B (in qualche ordine). Chiediamo la probabilità che abbia classificati correttamente tutti i primi, mentre i secondi in modo sbagliato. Poiché le classificazioni sono indipendenti tra loro, si ottiene

$$P(A_{199}|\text{ l'ultimo è di tipo } A) = (90\%)^{99} \cdot (15\%)^{100}.$$

Per calcolare il denominatore della formula di Bayes, procediamo prima calcolando in modo analogo

$$P(\text{ l'ultimo è di tipo } B) = \frac{1}{2}$$

e

$$P(A_{199}|\text{ l'ultimo è di tipo } B) = (90\%)^{100} \cdot (15\%)^{99}.$$

Di conseguenza

$$P(A_{199}) = \frac{1}{2} \cdot (90\%)^{99} \cdot (15\%)^{100} + \frac{1}{2} \cdot (90\%)^{100} \cdot (15\%)^{99}.$$

Troviamo quindi

$$P(\text{ l'ultimo è di tipo } A|A_{199}) = \frac{15}{105},$$

e

$$P(\text{ l'ultimo è di tipo } B|A_{199}) = \frac{90}{105}.$$

Concludiamo quindi che

$$P(X_{200} = 1|A_{199}) = 90\% \cdot \frac{15}{105} + 15\% \cdot \frac{90}{105} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 15}{100 \cdot 105} \approx 0.257.$$

Problema 2

Si consideri un vettore aleatorio gaussiano a valori in $\mathbb{R}^2$ dato dalle variabili (X, Y) tale che X, Y siano gaussiane reali standard e $\mathbb{E}[XY] = 1/2$. Poste $U = X + Y$, $V = X - Y$,

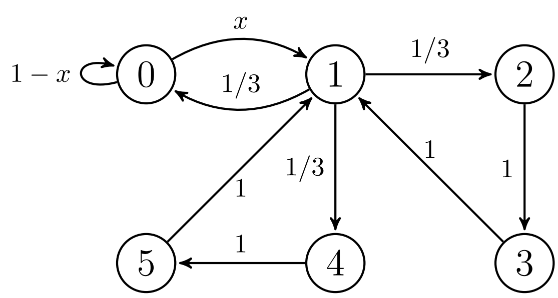
1. Determinare la legge di U.
2. Calcolare la covarianza tra U e V. Le variabili U, V sono indipendenti?

Una soluzione:

```
1. N(0, 3)
2. Cov(U,V) = 0. Sono indipendenti.
```

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con probabilità di transizione Q rappresentata in figura, dove $x \in (0, 1]$ è un parametro (non aleatorio).



1. Calcolare le distribuzioni invarianti della catena come funzione di x.
2. Se $x = 1$, la catena è regolare? Se sì, trovare n tale che $Q^n_{i,j} > 0$ per ogni i, $j \in \{0, \dots, 5\}$.

Una soluzione:

```
1. (1, 3x, x, x, x, x)/(1+7x)
2.  regolare, n=14 (non è necessariamente il minimo).
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2020/21 - Pre-test 2021-07-21

La durata della prova è di **75 minuti**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione) sul form MS predisposto.*

Problema 1

Un torneo di scacchi a eliminazione diretta è organizzato tra 4 giocatori, Aldo, Bruno, Carlo e Davide. Si sorteggiano quindi due coppie per le "semifinali" e i vincitori si sfidano nella partita finale. Dalle partite precedenti risulta una graduatoria in cui Aldo è il più forte di tutti, segue Bruno, poi Carlo e infine Davide. In una partita tra due giocatori, la probabilità che vinca il giocatore più forte è $2/3$ (mentre $1/3$ che vinca quello meno forte), ogni partita è indipendente dalle altre e non cambia la graduatoria sopra descritta.

1. Calcolare la probabilità che Carlo vinca il torneo.
2. Sapendo che uno dei giocatori della finale è Carlo, come cambia la probabilità che vinca il torneo?

Una soluzione:

1. Consideriamo separatamente i tre possibili tornei (che sono equiprobabili):

$$T_1 : (A - B)(C - D)$$
$$T_2 : (A - C)(B - D)$$
$$T_3 : (A - D)(B - C)$$

e calcoliamo la probabilità che Carlo vinca in ciascuno dei tre casi. Nel primo caso vince la prima partita con probabilità $2/3$, mentre la finale lo vede svantaggiato (chiunque tra A e B la vinca), quindi ha probabilità $1/3$ di vincere. Nel secondo caso ha probabilità $1/3$ di vincere la prima partita e poi $1/3 \cdot 2/3 + 2/3 \cdot 1/3$ (a secondo che vinca B oppure D nella semifinale) di vincere la finale. Il terzo caso è analogo al secondo. In conclusione si trova che

$$P(\text{vince Carlo}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{14}{81}.$$

2. Per la formula di Bayes, $P(\text{vince Carlo}|\text{Carlo arriva in finale})$ si riduce a

$$P(\text{Carlo arriva in finale}|\text{vince Carlo})P(\text{vince Carlo})/P(\text{Carlo arriva in finale}).$$

Poiché il primo termine è ovviamente 1 e il secondo è stato calcolato prima, basta calcolare la probabilità che Carlo arrivi in finale. Ragionando allo stesso modo del punto precedente, sui tre tornei possibili, si trova

$$P(\text{Carlo arriva in finale}) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{9}.$$

Di conseguenza

$$P(\text{vince Carlo}|\text{Carlo arriva in finale}) = \frac{14}{81} \cdot \frac{9}{4} = \frac{14}{36}.$$

Problema 2

Si consideri una variabile aleatoria X con densità (dove $c > 0$ è un parametro opportuno)

$$f(x) = c\left(\exp\left(-(x-1)^2/2\right) + \exp\left(-(x+1)^2/2\right)\right) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

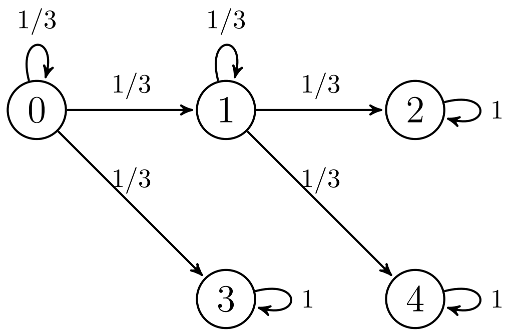
1. Determinare c,
2. Calcolare il valore atteso, la varianza e la funzione generatrice dei momenti di X.

Una soluzione:

```
1.  1/ (2 (2 pi)^{1/2} ) ~ 0,159
% AB CD -> 2/3*1/3
% AC BD -> 1/3*(2/3*1/3+1/3*2/3)
% AD BC -> 1/3*(2/3*1/3+2/3*1/3)
2. E[X] = 0, Var(X) = 2, MGF(t) = e^{t^2/2}(e^t+e^{-t})/2
```

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con probabilità di transizione rappresentate in figura e tale che $X_0 = 0$.



1. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i)$ per ciascun $i = 0, \ldots, 4$ (esprimere il risultato come vettore).
2. Determinare per quali $n > 0$ si ha $P(X_n = 1) = P(X_n = 3)$.

Una soluzione:

```
 1. (0, 0, 1/4, 1/2, 1/4)
2.  n=1.
```

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2020/21 - Pre-test 2021-09-15

La durata della prova è di **75 minuti**. *Fornire risposte brevi (senza giustificare la derivazione) sul form MS predisposto.*

Problema 1

Si considerino due variabili aleatorie X, Y, entrambe a valori in $\{0, 1\}$ e tali che

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 0|X = 0) = \frac{1}{3}, \quad P(Y = 1|X = 1) = \frac{1}{4}.$$

1. Dire se Y ha densità Bernoulli e calcolare $P(Y = 1)$.
2. Dire se le variabili X ed U sono correlate, dove si definisce

$$U = Y - \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X,$$

e σ_X, σ_Y sono le deviazioni standard di X ed Y, e il coefficiente di correlazione ρ_{XY} è definito come

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Una soluzione:

1. La variabile Y è Bernoulli (perché a valori in $\{0, 1\}$), e il parametro è

$$P(Y = 1) = P(Y = 1|X = 0)P(X = 0)+P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) = (1-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{24}.$$

2. Calcoliamo usando le proprietà della covarianza

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, U) &= \mathrm{Cov}\left(X, Y - \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X\right) \\
&= \mathrm{Cov}(X, Y) - \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mathrm{Cov}(X, X) \\
&= \mathrm{Cov}(X, Y) - \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\sigma_X^2 \\
&= \mathrm{Cov}(X, Y) - \rho_{XY}\sigma_Y\sigma_X = \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Cov}(X, Y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Problema 2

Si consideri una variabile aleatoria X avente densità esponenziale di parametro 1, e si ponga $Y = 1/X$.

1. Scrivere la densità di Y e calcolare la mediana, ossia $m \in \mathbb{R}$ tale che $P(Y \leq m) = \frac{1}{2}$.
2. Per quali $c > 0$ il valore atteso $\mathbb{E}[Y^c]$ esiste finito?

Una soluzione:

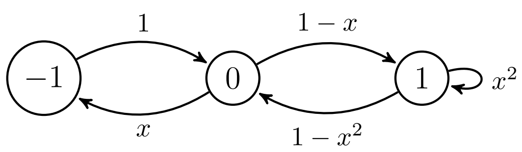
1. La densità di Y è $f(y) = e^{-1/y}y^{-2}$. La mediana è $1/\log 2$. 2. Il valore atteso si scrive

$$\mathbb{E}\left[Y^c\right] = \mathbb{E}\left[X^{-c}\right] = \int_0^\infty x^{-c}e^{-x}dx.$$

Per $x \to 0$ vi è una singolarità del tipo x^{-c}, che è integrabile se e solo se $c < 1$. (nessun problema invece per $x \to \infty$).

Problema 3

Si consideri una catena di Markov stazionaria con probabilità di transizione rappresentate in figura, dove $x \in (0,1)$ è un parametro (non aleatorio).



1. Discutere, al variare di $x \in (0,1)$ se è più probabile che sia $X_0 = 0$ oppure $X_0 \neq 0$.
2. Determinare, se esiste, un valore del parametro $x \in (0,1)$ tale che $\mathbb{E}[X] = 0$.

Una soluzione:

1. La distribuzione invariante è data (con la solita notazione vettoriale) da

$$(x(1-x), 1+x, 1) \cdot \frac{1}{2+2x-x^2}.$$

Poiché

$$\frac{P(X_0 = 0)}{P(X_0 \neq 0)} = \frac{1+x}{1+x-x^2} > 1,$$

ne segue che è sempre più probabile che sia $X_0 = 0$.

2. Il valore atteso si calcola (a meno del termine $(2+2x-x^2)$) come

$$-x(1-x) + 1 = 1 - x + x^2,$$

che non si annulla mai. Pertanto un x richiesto non esiste.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Simulazione di prova scritta 2021-11-22

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Una scatola contiene in tutto 4 cavi elettrici, indistinguibili eccetto per la lunghezza, e precisamente: 3 cavi di lunghezza 1 metro ciascuno e 1 cavo di lunghezza 3 metri. Veniamo informati che un tecnico deve prendere, uno alla volta, 3 cavi dalla scatola, per verificarne la qualità. Tuttavia non ci è stato detto se dopo ciascuna estrazione, il cavo estratto viene rimesso nella scatola, oppure no. Nel dubbio, assegniamo probabilità 90% che siano tutte estrazioni senza rimpiazzo (più ragionevole, visto il compito) e 10% che siano tutte con rimpiazzo.

1. Sapendo che i primi due cavi estratti sono entrambi lunghi un metro, calcolare la probabilità che le estrazioni siano senza rimpiazzo.
2. Sapendo che i primi due cavi estratti sono entrambi lunghi un metro, calcolare il valor medio e la varianza della lunghezza del terzo cavo estratto.

Una soluzione:

1. Poniamo L_1, L_2, $L_3 \in \{1, 3\}$ le lunghezze dei cavi estratti. Poniamo $S =$ "le estrazioni sono senza rimpiazzo", $C =$ non S.

Calcoliamo prima le probabilità di S e C sapendo che i primi due estratti sono lunghi un metro. Usiamo la formula di Bayes:

$$\begin{aligned} P(S|L_1 = L_2 = 1) &= P(L_1 = L_2 = 1|S)P(S)/P(L_1 = L_2 = 1) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}/P(L_1 = L_2 = 1), \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} P(C|L_1 = L_2 = 1) &= P(L_1 = L_2 = 1|C)P(C)/P(L_1 = L_2 = 1) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10}/P(L_1 = L_2 = 1). \end{aligned}$$

Il denominatore (che è lo stesso per entrambe le espressioni) si calcola pure

$$\begin{aligned} P(L_1 = L_2 = 1) &= P(L_1 = L_2 = 1|S)P(S) + P(L_1 = L_2 = 1|C)P(C) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$P(S|L_1 = L_2 = 1) = \frac{16}{18}, \quad \text{e} \quad P(C|L_1 = L_2 = 1) = \frac{1}{9}.$$

2. Se vale S, allora

$$P(L_3 = 1|S, L_1 = L_2 = 1) = \frac{1}{2},$$

mentre, per indipendenza se vale C,

$$P(L_3 = 1|C, L_1 = L_2 = 1) = \frac{3}{4}.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} P(L_3 = 1|L_1 = L_2 = 1) &= P(L_3 = 1|S, L_1 = L_2 = 1)P(S|L_1 = L_2 = 1) \\ &\quad + P(L_3 = 1|C, L_1 = L_2 = 1)P(C|L_1 = L_2 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{18} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{19}{36} \end{aligned}.$$

Siccome L_3 assume solo i due valori $\{1, 3\}$, la probabilità che sia $L_3 = 3$ è

$$P(L_3 = 3|L_1 = L_2 = 1) = 1 - P(L_3 = 3|L_1 = L_2 = 1) = \frac{17}{36}.$$

Il valor medio è quindi

$$\mathbb{E}\left[L_3|L_1 = L_2 = 1\right] = 1P(L_3 = 1|L_1 = L_2 = 1) + 3P(L_3 = 3|L_1 = L_2 = 1) = \frac{19}{36} + 3\frac{17}{36} = \frac{70}{36} \approx 1.94.$$

Per la varianza calcoliamo il momento secondo

$$\mathbb{E}\left[L_3^2|L_1 = L_2 = 1\right] = 1^2P(L_3 = 1|L_1 = L_2 = 1) + 3^2P(L_3 = 3|L_1 = L_2 = 1) = \frac{19}{36} + 9\frac{17}{36} = \frac{172}{36} \approx 4.7,$$

e quindi la varianza è

$$\mathbb{E}\left[L_3^2|L_1 = L_2 = 1\right] - (\mathbb{E}\left[L_3|L_1 = L_2 = 1\right])^2 \approx 4.7 - 3.8 \approx 0.9.$$

Problema 2

Sia (X, Y) una variabile aleatoria vettoriale con densità Gaussiana $\mathcal{N}(m, \Sigma)$, dove

$$m = (1, -1), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se le due variabili Y e $X + Y$ sono positivamente o negativamente correlate, oppure non correlate. Nel caso non siano correlate, sono anche indipendenti?
2. Calcolare densità e valor medio di $(X + Y)^2$.
3. *(facoltativo)* Dire se la densità condizionale di X avendo osservato $Y = -1$ è gaussiana, e in caso affermativo calcolarne i parametri. *(suggerimento: può essere utile la formula per l'inversa* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$*)*

Una soluzione:

1. Calcoliamo la covarianza usando la matrice Σ:

$$\operatorname{Cov} Y, X + Y = \operatorname{Cov} Y, X + \operatorname{Cov} Y, Y = \Sigma_{XY} + \Sigma_{YY} = -1 + 1 = 0.$$

Le variabili non sono correlate, ed essendo un vettore gaussiano, sono anche indipendenti.

2. Osserviamo prima che $Z = X + Y$ ha densità gaussiana reale di parametri $\mathcal{N}(m_Z, \sigma_Z^2)$, dove

$$m_Z = m_X + m_Y = 1 - 1 = 0, \quad \sigma_Z^2 = \Sigma_{XX} + \Sigma_{YY} + 2\Sigma_{XY} = 1,$$

quindi è una gaussiana standard,

$$p(Z = z) = \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Per calcolare la densità di $U = Z^2$, usiamo la formula di cambio di variabile con $g(z) = z^2$. La funzione è derivabile con $g'(z) = 2z$ ma non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$, ma lo è nei due intervalli $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ con le inverse rispettivamente $g^{-1}(u) = -\sqrt{u}$, $g^{-1}(u) = \sqrt{u}$, per $u \in (0, \infty)$. Pertanto la densità è, per ogni $u \in (u, \infty)$,

$$\begin{aligned} p(Z^2 = u) &= p(Z = -\sqrt{u})\frac{1}{\sqrt{2\pi}2\sqrt{u}} + p(Z = \sqrt{u})\frac{1}{\sqrt{2\pi}2\sqrt{u}} \\ &= p(Z = \sqrt{u})\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{u}} \\ &= \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi u}}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che la densità gaussiana standard è pari $p(Z = \sqrt{u}) = p(Z = -\sqrt{u})$.

3. La densità congiunta di (X, Y) è, a meno delle costanti moltiplicative,

$$p(X = x, Y = y) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1, y+1)^T \Sigma^{-1}(x-1, y+1)\right),$$

dove possiamo calcolare esplicitamente, usando il suggerimento,

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La densità condizionale si ottiene dalla formula

$$p(X = x | Y = -1) = p(X = x, Y = -1)/p(Y = -1),$$

e pertanto, a meno di costanti moltiplicative,

$$\begin{aligned} p(X = x | Y = -1) &\propto p(X = x, Y = -1) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1, -1+1)^T \Sigma^{-1}(x-1, -1+1)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1, 0)^T \Sigma^{-1}(x-1, 0)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2(\Sigma^{-1})_{11}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Riconosciamo quindi che la densità di X (condizionata ad aver osservato $Y = -1$) è gaussiana di media 1 e varianza 1.

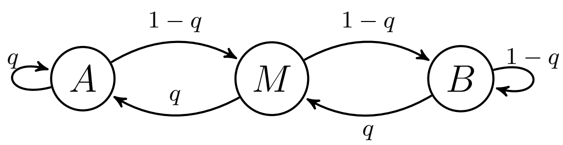
Problema 3

Una compagnia di assicurazione automobilistica ha suddiviso i suoi assicurati in tre categorie: *Alto* (A), *Medio* (M) e *Basso* (B) rischio. Ad ogni nuovo assicurato viene inizialmente attribuita la categoria di rischio *Medio*. Anno dopo anno, la nuova categoria viene ricalcolata: se l'assicurato ha causato almeno un incidente nel corso dell'anno, il successivo viene spostato nella categoria vicina, più rischiosa (se possibile, ad esempio da *Basso* a *Medio*, ma da *Alto* rimane *Alto*). Viceversa, se non ha causato alcun incidente, viene spostato in quella vicina, meno rischiosa (se possibile). Introduciamo come un parametro $q \in [0, 1]$ la probabilità che l'assicurato causi almeno un incidente in un anno, e supponiamo che in anni consecutivi gli eventuali incidenti siano indipendenti tra loro.

1. Modellizzare la categoria attribuita all'assicurato nei vari anni come una catena di Markov sugli stati $\{A, M, B\}$ e una opportuna matrice di transizione (come funzione del parametro q), e calcolarne le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare (in funzione di q) la probabilità che un assicurato nei suoi primi 4 anni con la compagnia non sia mai stato nella categoria di rischio *Alto*.
3. *(facoltativo)* Sapendo che un assicurato nei suoi primi 4 anni con la compagnia non è mai stato nella categoria di rischio *Alto*, determinare la stima di massima verosimiglianza per q.

Una soluzione:

1. Possiamo rappresentare la catena graficamente come segue:



La matrice di transizione è, ordinando gli stati nell'ordine A, M, B,

$$Q = \begin{pmatrix} q & 1-q & 0 \\ q & 0 & 1-q \\ 0 & q & 1-q \end{pmatrix}$$

Per calcolare le distribuzioni invarianti, trasponiamo e sottraiamo l'identità

$$Q^T - Id = \begin{pmatrix} q-1 & q & 0 \\ 1-q & -1 & q \\ 0 & 1-q & -q \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-q & -q & 0 \\ 0 & 1-q & -q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui tutte le soluzioni del sistema omogeneo sono del tipo

$$(u\frac{q^2}{(1-q)^2}, u\frac{q}{1-q}, u)$$

per un parametro u. Imponendo che la somma sia 1, troviamo

$$u = \left(1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)^2}\right)^{-1}.$$

2. Per non finire nella categoria ad alto rischio, l'assicurato deve seguire uno dei seguenti cammini

$$M \to B \to B \to B \quad \text{che ha probabilità } (1-q)^3,$$
$$M \to B \to B \to M \quad \text{che ha probabilità } (1-q)^2 q,$$
$$M \to B \to M \to B \quad \text{che ha probabilità } (1-q)q(1-q) = (1-q)^2 q.$$

Di conseguenza la probabilità richiesta è la somma:

$$(1-q)^3 + 2(1-q)^2 q = (1-q)^2(1+q).$$

3. La stima di massima verosimiglianza si ottiene massimizzando la probabilità $(1-q)^2(1+q)$ (in funzione di q). Derivando rispetto a q e imponendo che la derivata si annulli,

$$-2(1-q)(1+q) + (1-q)^2 = 0$$

da cui si troverebbe $q = -1/3$ o $q = 1$. Significa quindi che il massimo è raggiunto agli estremi e poiché per $q = 1$ la probabilità è nulla, la stima di massima verosimiglianza è $q = 0$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Prova scritta (unica prova in itinere) 2021-11-25

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Il *compitino* del corso di Probabilità e Processi Stocastici consiste di 3 problemi (numerati 1, 2, 3). Il docente stima che per le studentesse e gli studenti che si sono preparati, la probabilità di risolvere correttamente il problema 1 è 70%, per il problema 2 è 90%, mentre per il problema 3 è 80%, e suppone che problemi diversi siano indipendenti. Lo stesso per gli studenti che hanno trascurato la preparazione, ma le probabilità scendono al 50% per ciascun problema.

Tra le studentesse e gli studenti che al termine consegnano la prova, stima inoltre che il 75% sia preparato mentre il rimanente 25% per ragioni varie abbia trascurato la preparazione. Terminata la prova, il docente estrae a caso una delle prove scritte consegnate per iniziare le valutazioni.

1. Qual è la probabilità che nella prova estratta ci sia solo un problema risolto correttamente?
2. Sapendo nella prova estratta solo 1 problema su tre è risolto correttamente, è più probabile che chi l'abbia svolta si sia preparato oppure no?

Una soluzione:

1. Poniamo $A =$ "chi ha svolto la prova estratta si è preparato", $B =$ "solo un problema su tre è risolto correttamente", e $B_i =$ "solo il problema i è risolto correttamente", per $i = 1, 2, 3$. Sapendo A, calcoliamo, poiché B è l'unione dei B_i (che sono a due a due incompatibili),

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(B_1|A) + P(B_2|A) + P(B_3|A) \\ &\frac{1}{100^3}(70 \cdot 10 \cdot 20 + 30 \cdot 90 \cdot 20 + 30 \cdot 10 \cdot 80) \\ &= \frac{1}{10^3}(14 + 56 + 24) = \frac{94}{10^3} = 9.4\%. \end{aligned}$$

Sapendo non A, in questo caso è più facile perché il numero di problemi risolti correttamente è una binomiale di parametri $(3, 1/2)$, quindi

$$P(B|\text{non } A) = 3\frac{1}{2^3} = 37.5\%.$$

Troviamo quindi

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|\text{non } A)P(\text{non } A) \\ &= 9.4\% \cdot 75\% + 37.5\% \cdot 25\% \\ &= 0.16425 \approx 16\%. \end{aligned}$$

2. Usando la formula di Bayes, dobbiamo confrontare

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \quad \text{con} \quad P(\text{non } A|B) = \frac{P(\text{non A})P(B|\text{non } A)}{P(B)}.$$

Il denominatore (che pure abbiamo calcolato sopra) è comune quindi ci concentriamo sui numeratori, calcolando il rapporto

$$\frac{P(A|B)}{P(\text{non } A|B)} = \frac{P(\text{non A})P(B|\text{non } A)}{P(\text{non A})P(B|\text{non } A)} = \frac{9.4\% \cdot 75\%}{37.5\% \cdot 25\%} = 0.752 < 1,$$

perciò è più probabile che chi abbia svolto il compito non si sia preparato.

Problema 2

Siamo informati dall'azienda produttrice che la durata (in anni) di un dispositivo è rappresentabile come una variabile aleatoria T a valori in $[0, 10]$, con densità data dalla funzione

$$p(T = t) = ct(10 - t), \qquad \text{per } t \in [0, 10],$$

dove $c > 0$ è una opportuna costante, e densità nulla per $t \neq [0, 10]$.

1. Determinare c e calcolare moda (ossia il punto di massimo della densità), mediana e valor medio di T *(suggerimento: tracciare un grafico approssimato della densità)*.
2. Sapendo che $T > 3$, determinare moda e valor medio della durata rimamente $T - 3$.

Una soluzione:

1. Calcoliamo

$$c^{-1} = \int_0^{10} t(10 - t)dt = 10 \cdot \frac{10^2}{2} - \frac{10^3}{3} = 10^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 10^3/6,$$

quindi $c = 6/10^3$.

Per determinare la moda, deriviamo e imponiamo che la derivata si annulli: troviamo

$$\frac{d}{dt}p(T = t) = c(10 - t) - ct = 0$$

da cui $t = 5$, come si può anche vedere essendo la densità simmetrica rispetto all'asse $t = 5$. Infatti questo ci permette di ottenere anche la mediana senza calcoli (vale pure 5 la mediana). Altrimenti scriviamo la CDF_T,

$$\mathrm{CDF}_T(t) = \int_0^t cs(10 - s)ds = c\left(10\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right).$$

Si tratta di risolvere l'equazione $\mathrm{CDF}_T(t) = 1/2$ (non ovvia se non si osserva la simmetria).

Per il valor medio, calcoliamo

$$\mathbb{E}\left[T\right] = \int_0^{10} tct(10-t)dt = c\left(10\frac{10^3}{3} - \frac{10^4}{4}\right) = c\frac{10^4}{12} = \frac{10}{2} = 5.$$

Anche in questo caso per la risposta si poteva evitare il calcolo osservando la simmetria.

2. Sapendo che $T > 3$, sicuramente $T-3$ è a valori in $[0,7]$, quindi la densità è nulla fuori da tale intervallo. Per $t \in [0,7]$, è comodo calcolare la funzione di sopravvivenza di $T-3$ usando la formula di Bayes

$$\begin{aligned} P(T-3>t|T>3) &= P(T-3>t)\frac{P(T>3|T-3>t)}{P(T>3)} \\ &= \frac{P(T-3>t)}{P(T>3)} \\ &= \frac{P(T>t+3)}{P(T>3)}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $t > 0$ e quindi $P(T > 3|T-3 > t) = 1$. Derivando e cambiando di segno si trova quindi che la densità di $T-3$ è del tipo

$$p(T-3=t) = c'p(T=t+3) = c'c(t+3)(7-t),$$

per $t \in [0,7]$ (e nulla altrimenti), dove c' è una nuova costante da determinare.

Per determinare la moda non è necessario calcolare c'. Infatti derivando e imponendo che si annulli la derivata si trova

$$7-t = t+3 \quad \text{da cui} \quad t = 2.$$

Per il valor medio invece bisogna calcolare esplicitamente la densità. Ricordando che una densità è sempre ad integrale 1, possiamo calcolare

$$\int_0^7 (t+3)(7-t)dt = \left(21\cdot 7 + 4\cdot 7^2/2 - 7^3/3\right) = \frac{8\cdot 7^2}{3}$$

e quindi

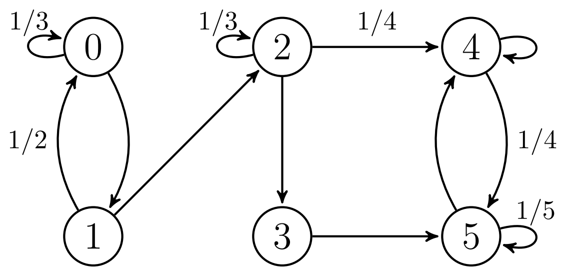
$$p(T-3=t) = \frac{3}{392}(t+3)(7-t).$$

Di conseguenza troviamo che il valor medio è

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(T-3)|T>3\right] &= \int_0^7 t\frac{3}{8\cdot 7^2}(t+3)(7-t)dt \\ &= \frac{3}{8\cdot 7^2}\left(21\cdot 7^2/2 + 4\cdot 7^3/3 - 7^4/4\right) \\ &= \frac{3}{8}\left(21/2 + 4\cdot 7/3 - 7^2/4\right) \\ &= \frac{3}{8}\cdot\frac{91}{12} = \frac{91}{32} \approx 2.8 \end{aligned}$$

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione in figura.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse (anche quelle non irriducibili) e le distribuzioni invarianti.
2. Sapendo che $X_0 = 0$, si osserva poi che $X_5 = 5$. Qual è il cammino γ più probabile che la catena abbia percorso nei tempi intermedi 1, 2, 3, 4? e il meno probabile tra quelli con probabilità positiva?

Una soluzione:

1. Gli stati $\{0, 1, 2, 3\}$ sono transitori, l'unica classe chiusa irriducibile è $\{4, 5\}$. Le altre classi chiuse sono l'insieme degli stati $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, l'insieme vuoto $\emptyset$, e $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$. La distribuzione invariante è unica e si calcola prima sulla classe $\{4, 5\}$, ad esempio il bilancio di flusso in 4 è

$$\mu_4 \frac{1}{4} = \mu_5 \frac{4}{5} \quad \text{da cui} \quad \mu_4 = \mu_5 \frac{16}{5}.$$

e imponendo che la somma sia 1, si ha

$$\mu_5 = \frac{5}{21} \quad \mu_4 = \frac{16}{21}.$$

Quindi la distribuzione invariante è il vettore (ordinando gli stati in modo naturale)

$$(0, 0, 0, 0, 16/21, 5/21).$$

2. Dato un cammino $\gamma = x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4$, dobbiamo calcolare la probabilità condizionata

$$P(X = \gamma | X_0 = 0, X_5 = 5) = \frac{P(X = \gamma \quad \text{e} \quad X_5 = 5 | X_0 = 0)}{P(X_5 = 5)}.$$

Possiamo quindi estendere il cammino γ in modo che sia

$$\gamma = x_0 = 0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 = 5$$

e calcolare

$$P(X = \gamma | X_0 = 0, X_5 = 5) = \frac{P(X = \gamma | X_0 = 0)}{P(X_5 = 5 | X_0 = 0)} = \frac{Q_\gamma}{P(X_5 = 5 | X_0 = 0)},$$

con la solita notazione per il peso del cammino γ. Visto che il denominatore è lo stesso per tutti, basta confrontare i numeratori (ossia i pesi dei cammini). Enumeriamo i cammini con peso positivo che partono al tempo 0 dallo stato 0 e arrivano al tempo 5 allo stato 5:

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Q_γ	
$0 \to$	$0 \to$	$1 \to$	$2 \to$	$4 \to$	5	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	≈ 0.0069
$0 \to$	$0 \to$	$1 \to$	$2 \to$	$3 \to$	5	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} \cdot 1$	≈ 0.046
$0 \to$	$1 \to$	$2 \to$	$2 \to$	$4 \to$	5	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	≈ 0.0069
$0 \to$	$1 \to$	$2 \to$	$2 \to$	$3 \to$	5	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} \cdot 1$	≈ 0.046
$0 \to$	$1 \to$	$2 \to$	$4 \to$	$4 \to$	5	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$	≈ 0.016
$0 \to$	$1 \to$	$2 \to$	$4 \to$	$5 \to$	5	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$	≈ 0.0042
$0 \to$	$1 \to$	$2 \to$	$3 \to$	$5 \to$	5	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5}$	≈ 0.028

Osserviamo quindi che vi sono due cammini γ che massimizzano la probabilità, precisamente $0 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 5$ e $0 \to 1 \to 2 \to 2 \to 3 \to 5$. Tra i cammini con probabilità positiva quello con probabilità minima è invece $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 5$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Prova scritta 2022-01-11

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un bambino bendato effettua estrazioni con rimpiazzo da una scatola contenente 2 palline, una rossa (R) e una blu (B), ma si sospetta che "sbirci" nella scatola. Si fanno in particolare le seguenti ipotesi:

H_0 : "Le estrazioni sono indipendenti, ciascuna con probabilità uniforme."

H_1 : "La prima estrazione ha probabilità uniforme, ma a partire dalla seconda il bambino estrae sempre la pallina che non ha estratto alla precedente estrazione (quindi alterna i colori)."

Si pone a priori $P(H_0) = 95\%$, $P(H_1) = 5\%$.

1. Calcolare la probabilità che nelle prime 6 estrazioni estragga la sequenza $RBRBRB$.
2. Sapendo che nelle prime 6 estrazioni la sequenza estratta è $RBRBRB$, quale ipotesi è più probabile? è più probabile che la settima pallina estratta sia rossa oppure blu?

Una soluzione:

1. Posto A l'evento "estrae la sequenza $RBRBRB$", troviamo

$$P(A|H_0) = \frac{1}{2^6}, \quad P(A|H_1) = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza vale

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) = \frac{1}{2^6} \cdot 95\% + \frac{1}{2} \cdot 5\% \approx 4\%.$$

2. Usando la formula di Bayes, dobbiamo confrontare

$$P(H_0|A) = \frac{P(H_0)P(A|H_0)}{P(A)} \quad \text{con} \quad P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}.$$

Il denominatore (che pure abbiamo calcolato sopra) è comune quindi ci concentriamo sui numeratori, calcolando il rapporto

$$\frac{P(H_0|A)}{P(H_1|A)} = \frac{\frac{1}{2^6} \cdot 95\%}{\frac{1}{2} \cdot 5\%} \approx 0.6 < 1,$$

perciò è più probabile H_1.

Per rispondere all'ultima domanda, posto R_7 l'evento "la settima estrazione è rossa", si tratta di capire se vale

$$P(R_7|A) > 1/2.$$

D'altra parte, decomponendo

$$\begin{aligned}P(R_7|A) &= P(R_7|A \text{ e } H_0)P(H_0|A) + P(R_7|A \text{ e } H_1)P(H_1|A)\\ &= \frac{1}{2}\cdot P(H_0|A) + 1\cdot P(H_1|A)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{P(H_1|A)}{2} > 1/2,\end{aligned}$$

avendo usato che $P(H_0|A) + P(H_1|A) = 1$ e sono entrambe strettamente positive.

Problema 2

La posizione iniziale di un robot a guida autonoma in una stanza è modellizzata tramite un vettore gaussiano (X, Y), con vettore dei valor medi e matrice di covarianza rispettivamente

$$m = (0,0), \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} c & c+1 \\ c+1 & 9c \end{pmatrix},$$

dove c è un opportuno parametro.

1. Per quali $c \in \mathbb{R}$ un tale vettore (X, Y) è ben definito?
2. Determinare un valore $a \in \mathbb{R}$, in funzione di c, in modo che $Z = aX+Y$ sia indipendente da X. Descrivere inoltre la legge di Z.
3. Calcolare $\mathbb{E}\left[X^2Y^2\right]$.

Una soluzione:

1. Bisogna garantire che Σ sia semi-definita positiva. Pertanto deve essere $c \geq 0$ e

$$\det(\Sigma) = 9c^2 - (c+1)^2 \geq 0,$$

da cui

$$3c \geq c + 1 \to c \geq 1/2.$$

2. Calcoliamo, usando le proprietà della covarianza

$$\mathrm{Cov}\,(X, aX+Y) = a\,\mathrm{Var}\,(X) + \mathrm{Cov}\,(X,Y) = ac + c + 1.$$

Imponendo che siano non correlate, si trova

$$a = -(c+1)/c.$$

Poiché sia X che $Z = aX + Y$ sono trasformazioni lineari del vettore gaussiano (X, Y) dalla non correlazione segue l'indipendenza. Infine la legge di Z è gaussiana di media nulla e varianza

$$\mathrm{Var}\,(Z) = \mathrm{Cov}\,(aX+Y, aX+Y) = a^2c + 2a(c+1) + 9c = -\frac{(c+1)^2}{c} + 9c.$$

3. Per calcolare il valore atteso richiesto, scriviamo $Y = Z - aX$ con a dal punto sopra, per poter sfruttare l'indipendenza. Si trova

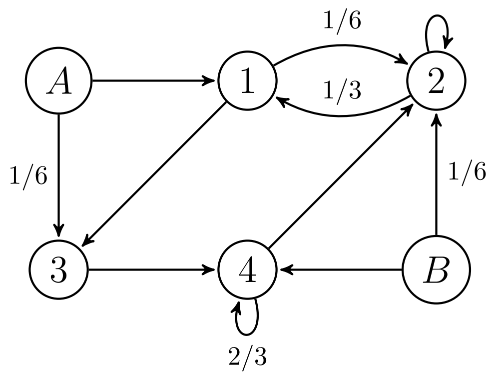
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2Y^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2(Z-aX)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2Z^2\right] - 2a\mathbb{E}\left[X^3Z\right] + a^2\mathbb{E}\left[X^4\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Z^2\right] - 2a\mathbb{E}\left[X^3\right]\mathbb{E}\left[Z\right] + a^2\mathbb{E}\left[X^4\right] \\
&= c\left(-\frac{(c+1)^2}{c} + 9c\right) + 3a^2c^2 \\
&= -(c+1)^2 + 9c^2 + 3(c+1)^2 = 9c^2 + 2(c+1)^2,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mathbb{E}\left[X^4\right] = 3c^2$, che si può ottenere ad esempio derivando oppure sviluppando in serie di Taylor la funzione generatrice generatrice dei momenti:

$$\mathrm{MGF}_X(t) = \exp\left(\frac{t^2c}{2}\right) = 1 + \frac{t^2c}{2} + \frac{3t^4c^2}{4!} + O(t^6).$$

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Si suppone inizialmente che $P(X_0 = A) = 2/3$ e $P(X_0 = B) = 1/3$. Si osserva poi che $X_3 = 2$: è più probabile che fosse $X_0 = A$ o $X_0 = B$?

Una soluzione:

1. Gli stati $\{A, B\}$ sono transitori, gli altri ricorrenti e vanno a formare l'unica classe chiusa irriducibile della catena (pure regolare). Per determinare la distribuzione invariante π, imponendo il bilancio di flusso nello stato 3 si trova che

$$\pi_3 = \frac{5}{6}\pi_1$$

mentre nello stato 4,

$$\frac{1}{3}\pi_4 = \pi_3 = \frac{5}{6}\pi_1 \quad \to \quad \pi_4 = \frac{5}{2}\pi_1.$$

Infine nello stato 2 troviamo l'equazione

$$\frac{1}{3}\pi_2 = \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_4$$

da cui

$$\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{5}{2}\pi_1 = 3\pi_1.$$

Il vettore cercato è quindi del tipo

$$t(1, 3, \frac{5}{6}, \frac{5}{2}),$$

da cui $t = 6/(24 + 5 + 15) = 3/22$. mentre π è nulla sugli stati A, B, quindi ordinando gli stati A, B, 1, 2, 3, 4, troviamo il vettore

$$\left(0, 0, \frac{3}{22}, \frac{9}{22}, \frac{5}{44}, \frac{15}{44}\right).$$

2. Usando la formula di Bayes dobbiamo confrontare

$$P(X_0 = A|X_3 = 2) = P(X_3 = 2|X_0 = A)P(X_0 = A)/P(X_3 = 2),$$

con

$$P(X_0 = B|X_3 = 2) = P(X_3 = 2|X_0 = B)P(X_0 = B)/P(X_3 = 2).$$

Essendo i denominatori gli stessi, basta confrontare i numeratori. Per calcolare la probabilità che $X_3 = 2$ sapendo $X_0 = A$, basta sommare i pesi dei cammini possibili che partono da A e arrivano allo stato 2, e similmente sapendo che $X_0 = B$:

X_0	X_1	X_2	X_3	Q_γ
$A \to$	$1 \to$	$2 \to$	2	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}$
$A \to$	$3 \to$	$4 \to$	2	$\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$
$B \to$	$2 \to$	$2 \to$	2	$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$
$B \to$	$2 \to$	$1 \to$	2	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$
$B \to$	$4 \to$	$4 \to$	2	$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$
$B \to$	$4 \to$	$2 \to$	2	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

Troviamo quindi

$$P(X_3 = 2|X_0 = A)P(X_0 = A) = \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81} \approx 0.1$$

e

$$P(X_3 = 2|X_0 = B)P(X_0 = B) = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{49}{6^2 \cdot 3^2} \approx 0.15$$

da cui segue che è più probabile $X_0 = B$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Prova scritta 2022-01-26

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Una piccola lotteria organizzata presso il bar di un paesino consiste di 100 biglietti, ciascuno del costo di 2 €, e ha 4 premi, del valore rispettivamente di 100, 50, 25 e 25 €. Alfonso non è un grande scommettitore e ha comperato solo 4 biglietti interrogandosi sulle sue probabilità di vincere. Poniamo X la variabile aleatoria che indica il valore totale dei premi vinti da Alfonso (ovviamente $X = 0$ se non vince nulla).

1. Calcolare moda e mediana di X.
2. Alfonso è particolarmente fortunato: viene informato dagli organizzatori che ha vinto in tutto $X = 100$ €. Calcolare la probabilità che abbia vinto il primo premio.

Una soluzione:

1. Osserviamo che la probabilità che $X = 0$ è molto grande: infatti possiamo ridurre il problema a 4 estrazioni senza rimpiazzo da 100 palline, di cui 4 rosse (corrispondenti ai biglietti di Alfonso) e le rimanenti blu (gli altri biglietti). L'evento $X = 0$ corrisponde a estrarre solo palline blu, quindi (aiutandosi ad esempio con un diagramma ad albero)

$$P(X = 0) = \frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} \cdot \frac{93}{97} \approx 85\%.$$

Ne segue (anche senza calcolare le probabilità degli altri valori) che la moda di X è il valore 0 e pure la mediana è 0.

2. Sapendo che $X = 100$, ci sono solo due alternative: o ha vinto solo il primo premio da 100 € (affermazione A), o ha vinto solo i tre premi rispettivamente da 50, 25 e 25 € (affermazione B). La formula di Bayes darebbe

$$P(A|X = 100) = \frac{P(X = 100|A)P(A)}{P(X = 100|A)P(A) + P(X = 100|B)P(B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

Tornando al modello dell'urna, supponiamo che le estrazioni dei premi avvengano in sequenza (prima il primo premio, poi il secondo ecc.). La probabilità di vincere solo il premio da 100 corrisponde quindi alla situazione in cui la prima estrazione è rossa (un biglietto di Alfonso) e le rimanenti sono blu (i biglietti altrui), che ha probabilità

$$P(A) = \frac{4}{100} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{95}{98} \cdot \frac{94}{97}.$$

La probabilità di vincere invece non il premio da 100 ma i rimanenti tre corrisponde alla sequenza in cui la prima è rossa e le rimanenti blu:

$$P(B) = \frac{96}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{2}{97}.$$

Di conseguenza troviamo

$$P(A|X = 100) = \frac{4 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94}{4 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 + 96 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{95 \cdot 94}{95 \cdot 94 + 3 \cdot 2} \approx 99.9\%.$$

Problema 2

È noto che il tempo di vita T (in anni) di un componente elettronico senza difetti è modellizzato come una variabile aleatoria continua con densità data dalla funzione

$$f(t) = \begin{cases} cte^{-t} & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove $c > 0$ è una opportuna costante. Si sa però che alcuni componenti presentano dei difetti, e per quelli la variabile T ha legge esponenziale di parametro $\lambda = 1/2$. Si sa infine che il 90% dei componenti sono senza difetti, ma il rimanente 10% presenta dei difetti.

Si prende a caso un componente.

1. Determinare c, il punto di massimo della densità f e calcolare il valore atteso di T.
2. Dopo un anno di utilizzo, si osserva che il componente continua a funzionare: qual è la probabilità che continui a funzionare per almeno un ulteriore anno? La probabilità che sia difettoso è aumentata o diminuita?

Una soluzione:

1. Per determinare c calcoliamo l'integrale

$$\int_0^\infty te^{-t}dt = 1$$

integrando per parti oppure notando che è il valore atteso di una variabile con densità esponenziale di parametro 1. Ne segue quindi che $c = 1$.

Per il valore atteso di T, decomponiamo secondo le due alternative $A =$ "il componente presenta difetti" e la sua negazione. Troviamo

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T|A]\, P(A) + \mathbb{E}[T|\text{non } A]\, P(\text{non } A) = 2 \cdot 90\% + \mathbb{E}[T|\text{non } A] \cdot 10\%.$$

Rimane da calcolare il valore atteso nel caso in cui il componente non abbia difetti: usando la densità troviamo

$$\mathbb{E}[T|\text{non } A] = \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = 2,$$

integrando per parti. Pertanto anche $\mathbb{E}[T] = 2$.

2. Dobbiamo calcolare ($>$ o $\geq$ non cambia nulla per variabili continue)

$$P(T > 2|T > 1) = \frac{P(T > 2)}{P(T > 1)}.$$

In generale, calcoliamo la funzione di sopravvivenza per ciascun $t > 0$:

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(T > t|A)P(A) + P(T > t|\text{non } A)P(\text{non } A) \\ &= e^{-t/2} \cdot 10\% + \left(\int_t^\infty se^{-s}ds \right) \cdot 90\% \\ &= e^{-t/2} \cdot 10\% + (t+1)e^{-t} \cdot 90\%. \end{aligned}$$

Valutando per $t = 2$, $t = 1$ otteniamo quindi

$$P(T > 2|T > 1) = \frac{e^{-1} \cdot 10\% + 3e^{-2} \cdot 90\%}{e^{-1/2} \cdot 10\% + 2e^{-1} \cdot 90\%} \approx 56\%.$$

Per capire se la probabilità che sia difettoso è aumentata o diminuita, bisogna calcolare

$$P(A|T > 1) = P(A) \cdot \frac{P(T > 1|A)}{P(T > 1)}.$$

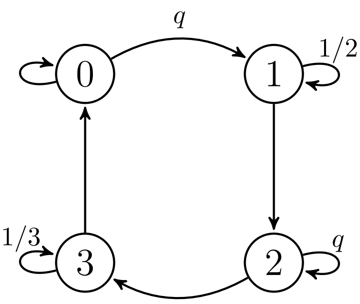
e in particolare vedere se il rapporto nella formula sopra è maggiore o minore di 1. Si ha

$$P(T > 1|A) = e^{-1/2} \approx 61\% < 62\% \approx e^{-1/2} \cdot 90\% + 2e^{-1} \cdot 10\% = P(T > 1),$$

quindi la probabilità che sia difettoso è diminuita (e quindi aumentata quella che sia senza difetti).

Problema 3

Si consideri una catena di Markov stazionaria $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione in figura, dove q è un parametro con $0 < q < 1$.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati, determinare le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti (in funzione di q).
2. Si osserva che $X_4 = 1$: determinare la stima di massima verosimiglianza per q.

Una soluzione:

1. Poiché $0 < q < 1$, tutti gli stati sono ricorrenti, e la catena è irriducibile (e pure regolare per il criterio). Per calcolare le distribuzioni invarianti $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$, imponiamo il bilancio di flusso:

$$q\pi_0 = \frac{2}{3}\pi_3, \quad \frac{1}{2}\pi_1 = q\pi_0, \quad (1-q)\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1.$$

Da cui si ricava

$$\pi_1 = 2q\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{1}{2(1-q)}\pi_1 = \frac{q}{1-q}\pi_0, \quad \pi_3 = \frac{3q}{2}\pi_0,$$

quindi

$$\pi = \pi_0 \left(1, 2q, \frac{q}{1-q}, \frac{3q}{2}\right).$$

Per trovare π_0 imponiamo che la somma delle componenti sia 1:

$$\frac{1}{\pi_0} = 1 + 2q + \frac{q}{1-q} + \frac{3q}{2} = \frac{2(1+2q)(1-q) + 2q + 3q(1-q)}{2(1-q)} = \frac{2 + 7q(1-q)}{2(1-q)}.$$

Di conseguenza si ha

$$\pi = \frac{2(1-q)}{2 + 7q(1-q)} \left(1, 2q, \frac{q}{1-q}, \frac{3q}{2}\right).$$

2. La verosimiglianza è

$$L(q; \{X_4 = 1\}) = P(X_4 = 1|q) = \frac{4q(1-q)}{2 + 7q(1-q)}.$$

Per massimizzare l'espressione è sufficiente derivare rispetto a q e porre la derivata uguale a 0 (osserviamo infatti che per $q = 0$ e $q = 1$ vale zero). Per semplificare i calcoli, osserviamo pure che $L = f(q(1-q))$, dove $f(a) = 4a/(2+7a)$. Derivando troviamo

$$L'(q) = f'(q(1-q))[q(1-q)]' = f'(q(1-q))(1-2q).$$

Poiché

$$f'(a) = \frac{4(2+7a) - 4a \cdot 7}{(2+7a)^2} = \frac{8}{(2+7a)^2}$$

è sempre strettamente positiva, ne segue che $L'(q)$ se e solo se $(1-2q) = 0$, ossia $q = 1/2$ è la stima cercata.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Prova scritta 2022-02-16

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

La durata di funzionamento media delle batterie di una bici elettrica è di 5 anni se la temperatura dell'ambiente in cui vengono conservate (quando la bici non è in uso) è compresa tra 15° C e 30° C. Se invece sono conservate in un ambiente con temperatura maggiore di 30° C, la durata media scende a 3 anni, mentre se è inferiore a 15° scende solo a 4 anni. Alice, Bruno e Carlo comprano tre bici identiche che usano allo stesso modo, eccetto che Alice ripone la sua in un garage sotterraneo, a temperatura minore di 15° C, Bruno in una stanza a 20°, e Carlo in sottotetto dove c'è una caldaia e la temperatura supera i 30°.

Supponiamo che le durate delle tre batterie siano rappresentate da variabili aleatorie con legge esponenziale, di opportuni valor medi, e indipendenti.

1. Calcolare la probabilità che dopo 3 anni solo una delle tre batterie funzioni ancora.
2. Sapendo che dopo 3 anni solo una delle tre batterie funziona ancora, calcolare la probabilità che sia quella di Bruno.

Una soluzione:

1. Siano T_A, T_B, T_C le durate (in anni) delle batterie rispettivamente di Alice, Bruno e Carlo. Dal testo segue che sono tre variabili aleatorie indipendenti con legge esponenziale di parametri rispettivamente 1/4, 1/5, 1/3 (ricordando che il parametro λ dell'esponenziale è l'inverso della media). Possiamo introdurre gli eventi

$$A = \{T_A > 3\}, \quad B = \{T_B > 3\}, \quad C = \{T_C > 3\},$$

che rappresentano rispettivamente il fatto che dopo tre anni la batteria di Alice, Bruno e Carlo funzioni ancora. Gli eventi sono indipendenti e vale

$$P(A) = e^{-3/4} \approx 47\%, \quad P(B) = e^{-3/5} \approx 55\%, \quad P(C) = e^{-3/3} = e^{-1} \approx 37\%,$$

avendo usato che la funzione di sopravvivenza di una densità esponenziale di parametro $\lambda > 0$ è

$$\int_t^\infty e^{-\lambda t} \lambda dt = e^{-\lambda t}.$$

Per calcolare la probabilità di D ="solo una delle tre batterie funziona ancora dopo 3 anni", possiamo quindi sfruttare un diagramma ad albero in cui inseriamo le alternative A, A^c, poi B, B^c e infine C, e C^c. Studiando i cammini che realizzano D si ottiene

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \text{ e } B^c \text{ e } C^c) + P(A^c \text{ e } B \text{ e } C^c) + P(A^c \text{ e } B^c \text{ e } C) \\ &= P(A)(1-P(B))(1-P(C)) + (1-P(A))P(B)(1-P(C)) \\ &\quad + (1-P(A))(1-P(B))P(C) \\ &= e^{-3/4}(1-e^{-3/5})(1-e^{-1}) + (1-e^{-3/4})e^{-3/4}(1-e^{-1}) \\ &\quad + (1-e^{-3/4})(1-e^{-3/4})e^{-1} \approx 41\%. \end{aligned}$$

2. Dobbiamo calcolare, usando la formula di Bayes,

$$P(B|D) = P(D|B)P(B)/P(D).$$

Abbiamo già calcolato $P(B) = e^{-3/5} \approx 55\%$ e $P(D) \approx 41\%$. Per calcolare $P(D|B)$, osserviamo che sapere che la batteria di Bruno funzioni ancora rende necessario che quella di Alice e Carlo non funzionino, quindi

$$P(D|B) = P(A^c \text{ e } C^c|B) = P(A^c \text{ e } C^c) = P(A^c)P(C^c) = (1 - e^{-3/4})(1 - e^{-1}) \approx 33\%$$

dove abbiamo usato anche l'indipendenza dei tre eventi. Segue che

$$P(B|D) \approx \frac{33\% \cdot 55\%}{41\%} \approx 45\%.$$

Con calcoli simili si può anche mostrare che

$$P(A|D) \approx 33\%, \quad P(C|D) \approx 22\%.$$

Problema 2

Si consideri una variabile aleatoria *continua* X a valori in $\mathbb{R}$ avente funzione di sopravvivenza

$$\mathrm{SUR}_X(t) = \begin{cases} b & \text{se } t < 2, \\ 1/\log_a(t) & \text{se } t \geq 2, \end{cases}$$

dove a, $b \in \mathbb{R}$ sono opportuni parametri ($\log_a$ indica il logaritmo in base a).

1. Determinare a, $b \in \mathbb{R}$ e calcolare la densità di X.
2. Calcolare la densità di $(X-2)^2$.

Una soluzione:

1. Essendo $\mathrm{SUR}_X(t) = P(X > t)$, la funzione deve tendere a 0 per $t \to \infty$ (cosa sempre verificata), e a 1 per $t \to -\infty$. Questo accade solo se $b = 1$. Inoltre essendo la variabile X continua, la funzione di sopravvivenza deve essere pure continua (i salti corrisponderebbero a valori assunti con probabilità positiva, quindi non possono esserci). Segue che $1/\log_a(2) = 1$, ossia $\log_a(2) = 1$ e quindi $a = a^1 = 2$. La densità si ottiene derivando e cambiando di segno, quindi

$$p(X = t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2, \\ \frac{\ln(a)}{t(\ln(t))^2}, & \text{se } t \geq 2, \end{cases}$$

dove per convenienza abbiamo riscritto il logaritmo in base 2 come logaritmo naturale (per evitare confusione lo indichiamo con $\ln()$)

$$\log_2(t) = \frac{\ln(t)}{\ln(2)}.$$

2. Usando la formula di cambio di variabile osserviamo che la funzione $g(x) = (x-2)^2$, a valori in $(0, \infty)$ è invertibile separatamente negli intervalli $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$. Tuttavia la densità di X è nulla nel primo intervallo, quindi possiamo restringerci al caso $x > 2$ e lavorare come se fosse invertibile, con inversa $g^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y}$ per $y > 0$. Inoltre $g'(x) = 2(x-2)$, quindi $|g'(g^{-1}(y))| = 2\sqrt{y}$ e quindi, per $y > 0$,

$$p((X-2)^2 = y) = p(X = 2 + \sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\ln(a)}{(2+\sqrt{y})\left(\ln(2+\sqrt{y})\right)^2 2\sqrt{y}}.$$

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ sull'insieme degli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, con matrice di transizione $(Q_{i,j})_{i,j=1,\ldots,6}$ data da

$$Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & ? & ? & 1/4 \\ 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & ? & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

dove le probabilità mancanti (?) si ottengono dalle proprietà delle matrici stocastiche.

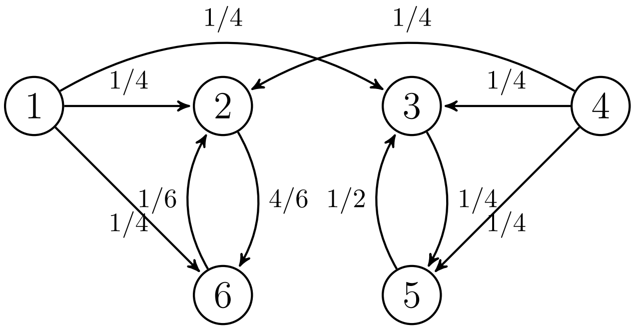
1. Classificare gli stati (transitori/ricorrenti) e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Si supponga che X_0 assuma valori dispari con probabilità uniforme $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 3) = 1/3$. Calcolare la probabilità che X_2 sia dispari.

Una soluzione:

1. La matrice Q completata con le probabilità mancanti (sfruttando che la somma sulle righe è 1 e le componenti sono tutte probabilità, quindi comprese tra 0 e 1) vale

$$Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 4/6 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

Conviene anche rappresentare graficamente la catena come segue (per semplicità omettiamo gli archi da uno stato a se stesso)



Si vede quindi che 1 e 4 sono transitori, mentre i rimanenti sono ricorrenti con le classi chiuse irriducibili $\{2, 6\}$ e $\{3, 5\}$. La distribuzione invariante della catena ristretta alla classe $\{2, 6\}$ si ottiene tramite bilancio di flusso

$$\pi_2 \frac{4}{6} = \pi_6 \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad \pi_6 = 4\pi_2,$$

da cui (imponendo che sommi ad 1) $(\pi_2, \pi_6) = (1/5, 4/5)$. Similmente per l'altra classo

$$\pi_3 \frac{1}{4} = \pi_5 \frac{2}{4} \quad \rightarrow \quad \pi_3 = 2\pi_5,$$

da cui $(\pi_3, \pi_5) = (2/3, 1/3)$.

Tutte le distribuzioni sono quindi della forma

$$\pi = (0, \alpha/5, 2(1-\alpha)/3, 0, (1-\alpha)/3, 4\alpha/5),$$

per $\alpha \in [0, 1]$.

2. Calcoliamo la probabilità di $A =$"X_2 è dispari" partendo separatamente dagli stati $X_0 = 1$, $X_0 = 3$, $X_0 = 5$. Troviamo facilmente

$$P(A|X_0 = 3) = 1$$

e pure

$$P(A|X_0 = 5) = 1,$$

perché la catena assume sicuramente un valore nella classe $\{3, 5\}$, quindi dispari. Se invece $X_0 = 1$, consideriamo i possibili cammini di lunghezza 2 che terminano in uno stato dispari:

X_0	X_1	X_2	Q_γ
1	1	1	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$
1	1	3	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$
1	3	3	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$
1	3	5	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

Concludiamo che la probabilità è

$$P(A|X_0 = 1) = \frac{1}{4^2}(1 + 1 + 3 + 1) = \frac{6}{4^2} = \frac{3}{8}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A|X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(A|X_0 = 3)P(X_0 = 3) + P(A|X_0 = 5)P(X_0 = 5)\\ &= \left(\frac{3}{8} + 2\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{24} \approx 79\%.\end{aligned}$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Prova scritta 2022-04-08

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

La piccola Delia oggi sta giocando con una scatola contenente 10 mini-puzzle diversi. Ciascun mini-puzzle consiste di due soli pezzi da unire tra loro (ciascun pezzo si può unire ad un solo altro pezzo, in tutto ci sono 20 pezzi). Inizia estraendo completamente a caso un pezzo e, senza rimetterlo nella scatola, ne estrae un secondo e prova ad unirlo al primo. Senza inserire i pezzi già estratti, ne estrae poi un terzo e prova ad unirlo ai due estratti in precedenza (se questi non si univano tra loro).

1. Calcolare la probabilità che i tre pezzi estratti permettano a Delia di completare un mini-puzzle.
2. Sapendo inoltre che ieri il fratello Tiberio aveva rimosso un pezzo dalla scatola senza più rimetterlo, la probabilità che i tre pezzi estratti oggi da Delia le permettano di completare un mini-puzzle aumenta, diminuisce o rimane invariata?

Una soluzione:

1. Poniamo $X_k \in \{1, \ldots, 10\}$ il tipo di mini-puzzle cui il pezzo all'estrazione k appartiene. Calcoliamo la probabilità che Dalia non riesca a completare un mini-puzzle (evento A^c: questo avviene quando tutti e tre i pezzi provengono da mini-puzzle diversi: pertanto si avrà

$$P(A^c) = P(X_2 \neq X_1, X_3 \neq X_2, X_3 \neq X_1) = P(X_3 \neq X_2, X_3 \neq X_1 | X_2 \neq X_1) P(X_2 \neq X_1).$$

Calcoliamo prima

$$P(X_2 \neq X_1) = \frac{18}{19},$$

perché è sufficiente che X_2 non sia l'unico pezzo che permette di completare il puzzle con X_1. Per l'altra probabilità, calcoliamo

$$P(X_3 \neq X_2, X_3 \neq X_1 | X_2 \neq X_1) = \frac{16}{18},$$

perché stavolta X_3 non deve completare il puzzle né con X_1 né con X_2 (sono puzzle diversi). Troviamo

$$P(A^c) = \frac{16}{19} \quad \rightarrow \quad P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{3}{19}.$$

2. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che il pezzo rimosso sia uno del puzzle 1. I pezzi inizialmente nella scatola sono ora 19. Se uno dei pezzi estratti è quello del puzzle 1, allora automaticamente due delle tre condizioni in A^c sono soddisfatte, e la probabilità si calcola facilmente: ad esempio

$$P(A^c | X_1 = 1) = P(X_2 \neq X_3 | X_1 = 1) = \frac{16}{17}.$$

Osserviamo anche che $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{19}$ e i tre eventi $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ sono a due a due incompatibili, quindi la probabilità che venga estratto in una delle tre estrazioni è $3/19$. Sapendo invece che il pezzo del puzzle 1 non viene mai estratto, è come se fosse effettivamente rimosso dalla scatola pure questo, quindi si tratta di ripetere il ragionamento, ma stavolta i pezzi sono 18 e i mini-puzzle sono 9. Troviamo

$$P(X_2 \neq X_1) = \frac{16}{17},$$

e

$$P(X_3 \neq X_2, X_3 \neq X_1 | X_2 \neq X_1) = \frac{14}{16},$$

da cui

$$P(A^c) = \frac{14}{17} \quad \to \quad P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{3}{17}.$$

Mettendo insieme i due casi, troviamo

$$P(A^c) = \frac{3}{19} \cdot \frac{16}{17} + \frac{16}{19} \cdot \frac{14}{17} = \frac{17 \cdot 16}{17 \cdot 19} = \frac{16}{19},$$

da cui $P(A) = 3/19$ non è cambiata.

Problema 2

Le batterie in una coppia di auricolari Bluetooth sono identiche, tuttavia l'auricolare destro (R) viene usato più spesso (ad esempio per le telefonate) e si scarica solitamente prima di quello sinistro (L). Rappresentiamo quindi le durate di una carica completa rispettivamente come due variabili aleatorie T_L, $T_R \geq 0$, entrambe con densità esponenziale, di parametri rispettivamente $\lambda_L = 1$, $\lambda_R = 4$, e tali che $\mathbb{E}[T_L T_R] = 1/2$.

1. Calcolare la covarianza tra T_L e T_R. Dire se le variabili sono indipendenti.
2. Calcolare la densità di $(T_L - 1)^2$.

Una soluzione:

1. Le variabili hanno medie rispettivamente $\mathbb{E}[T_L] = 1$, $\mathbb{E}[T_R] = 1/4$, quindi

$$\mathrm{Cov}(T_L, T_R) = \mathbb{E}[T_L T_R] - \mathbb{E}[T_L]\,\mathbb{E}[T_R] = \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

sono positivamente correlate, quindi non indipendenti.

2. Usiamo la formula di cambio di variabile, tenendo conto che la funzione $g(x) = (x-1)^2$ non è invertibile. Essendo $g'(x) = 2(x-1)$, $g^{-1}(y) = 1 \pm \sqrt{y}$ per $y > 0$, si trova $|g'(g^{-1}(y))| = 2\sqrt{y}$, da cui

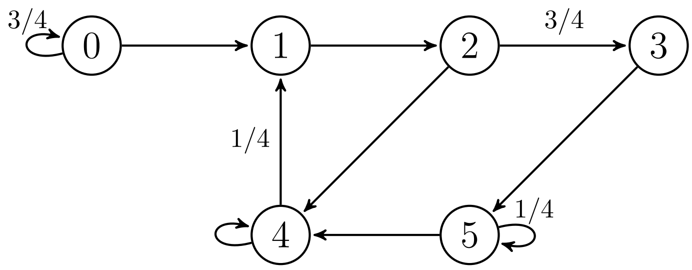
$$p((T_L - 1)^2 = y) = \left(p(T_L = 1 - \sqrt{y}) + p(T_L = 1 + \sqrt{y})\right) \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Esplicitamente, poiché la densità esponenziale $p(T_L = 1 - \sqrt{y}) = 0$ se $y > 1$, troviamo

$$p((T_L - 1)^2 = y) = \begin{cases} \left(e^{\sqrt{y}-1} + e^{-\sqrt{y}-1}\right)/(2\sqrt{y}) & \text{se } 0 < y < 1, \\ e^{-\sqrt{y}-1}/(2\sqrt{y}) & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione in figura.



1. Sapendo che $X_0 = 0$, si osserva poi che $X_4 \in \{1, 5\}$. È più probabile che sia $X_2 = 2$ o $X_2 \neq 2$?
2. Supponendo invece la catena stazionaria, calcolare il valore atteso di X_0.

Una soluzione:

1. I possibili cammini da $X_0 = 0$ a $X_4 \in \{1, 5\}$ sono elencati, con il rispettivo peso:

$$
\begin{array}{l|lll|l|l}
X_0 & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & Q_\gamma \\
0 \to & 0 \to & 0 \to & 0 \to & 1 & \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} \\
0 \to & 1 \to & 2 \to & 4 \to & 1 & \frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \\
0 \to & 1 \to & 2 \to & 3 \to & 5 & \frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{3}{4}\cdot 1
\end{array}
$$

Si trova (usando la formula di Bayes)

$$P(X_2 = 2 | X_0 = 0, X_4 \in \{1, 4\}) \propto Q_{0\to1\to2\to4\to1} + Q_{0\to1\to2\to3\to5} = \frac{4 + 4^2 \cdot 3}{4^4} = \frac{52}{4^4},$$

e

$$P(X_2 \neq 2 | X_0 = 0, X_4 \in \{1, 4\}) \propto Q_{0\to0\to0\to0\to1} = \frac{27}{4^4},$$

da cui è più probabile che sia $X_2 = 2$.

2. Dobbiamo calcolare la distribuzione invariante, che è unica perché c'è solo la classe chiusa irriducibile $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Il bilancio di flusso permette forse di risparmiare qualche conto:

$$\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_4, \quad \pi_3 = \frac{3}{4}\pi_2, \quad \frac{3}{4}\pi_5 = \pi_3$$

da cui $\pi_2 = \pi_5$ e quindi (imponendo il bilancio nello stato 4)e

$$\frac{1}{4}\pi_4 = \frac{3}{4}\pi_5 + \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_2,$$

ossia $\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_4 = \pi_2$. Ne segue che la distribuzione è del tipo

$$(\pi_2, \pi_2, \frac{3}{4}\pi_2, 4\pi_2, \pi_2),$$

e quindi si determina π_2 imponendo che la somma sia 1:

$$\pi_2(1 + 1 + \frac{3}{4} + 4 + 1) = 1, \quad \to \pi_2 = \frac{4}{31},$$

quindi la distribuzione è

$$(\frac{4}{31}, \frac{4}{31}, \frac{3}{31}, \frac{16}{31}, \frac{4}{31}).$$

Per trovare valore atteso di X_0, basta calcolare

$$\mathbb{E}[X_0] = \sum_i i \cdot \pi_i = 1 \cdot \frac{4}{31} + 2 \cdot \frac{4}{31} + 3 \cdot \frac{3}{31} + 4 \cdot \frac{16}{31} + 5 \cdot \frac{4}{31} = \frac{105}{31}.$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Prova scritta 2022-06-08

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Una intelligenza artificiale è addestrata alla classificazione di immagini di cani o lupi: è un software che prende in input una immagine e restituisce come output una sola tra le parole "cane", "lupo" (si suppone che nell'immagine data in input vi sia sempre esattamente uno e uno solo tra un cane o un lupo). Gli sviluppatori dichiarano che, se si dà in input una immagine contenente un cane, questa viene classificata correttamente con probabilità 80%, mentre se è un lupo, la probabilità sale al 90%. Per testare tale affermazione, si danno in input 10 immagini casuali, contenenti ciascuna o un cane o un lupo, con uguale probabilità (e ciascuna immagine indipendentemente dalle altre). Si ponga N il numero di immagini classificate correttamente.

1. Calcolare $\mathbb{E}[N]$.
2. Sapendo $N = 10$, è più probabile che l'ultima immagine data sia di cane o di lupo?
3. Dire se, rispetto all'informazione iniziale, gli eventi

$$A = \text{“la prima immagine data in input è classificata correttamente”},$$

$$B = \text{“l'ultima immagine data in input è di un cane”},$$

sono indipendenti. E sapendo che $N = 10$, sono indipendenti?

Una soluzione:

1. Poniamo $X_i \in \{C, L\}$ la variabile che indica se l'immagine i-esima è cane (C) o lupo (L), e poniamo $Y_i \in \{0, 1\}$ la variabile che indica se l'immagine i-esima è classificata correttamente (1) o no (0). Le ipotesi danno $P(X_i = C) = P(X_i = L) = 1/2$, $P(Y_i = 1|X_i = C) = 0.8$, $P(Y_i = 1|X_i = L) = 0.9$. Inoltre supponiamo che tutte le variabili relative a immagine diverse siano indipendenti. Con questa notazione $N = \sum_{i=1}^{10} Y_i$ è quindi binomiale di parametri $n = 10$ e

$$p = P(Y_i = 1) = 0.8 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.5 = 0.85.$$

Di conseguenza $\mathbb{E}[N] = np = 8.5$.

2. Dobbiamo calcorare $P(X_{10} = C|N = 10)$. Usando la formula di Bayes, troviamo

$$P(X_{10} = C|N = 10) = P(N = 10|X_{10} = C)P(X_{10} = C)/P(N = 10).$$

Ricordando che $N = \sum_{i=1}^{10} Y_i$ e le Y_i sono tutte indipendenti da X_{10} eccetto per $i = 10$, troviamo che

$$P(N = 10|X_{10} = C) = P(Y_i = 1 \text{per ogni } i < 10)P(Y_{10} = 1|X_1 0 = C) = P(Y_i = 1 \text{per ogni } i < 10)0.8.$$

Similmente, per $P(X_{10} = L|N = 10)$, si trova

$$P(X_{10} = L|N = 10) = P(N = 10|X_{10} = L)P(X_{10} = L)/P(N = 10).$$

Ricordando che $N = \sum_{i=1}^{10} Y_i$ e le Y_i sono tutte indipendenti da X_{10} eccetto per $i = 10$, troviamo che

$$P(N = 10|X_{10} = L) = P(Y_i = 1 \text{per ogni } i < 10)P(Y_{10} = 1|X_1 0 = L) = P(Y_i = 1 \text{per ogni } i < 10)0.9.$$

Ne segue che alcuni termini si semplificano nel quoziente:

$$\frac{P(N = 10|X_{10} = C)}{P(N = 10|X_{10} = L)} = \frac{P(Y_i = 1 \text{per ogni } i < 10)0.8 \cdot \frac{1}{2}}{P(Y_i = 1 \text{per ogni } i < 10)0.9 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{8}{9},$$

che essendo minore di 1 implica che è più probabile che sia una immagine di lupo.

3. Per ipotesi, ciascuna immagine è data e classificata indipendentemente dalle altre, quindi sì i due eventi sono indipendenti (rispetto all'informazione iniziale). Condizionatamente a $N = 10$, notiamo che in particolare $P(A|N \text{ e } B) = 1$ (se vale N, tutte le immagini sono classificate correttamente, quindi in particolare la prima). Pertanto per la regola del prodotto

$$P(B|A \,\mathrm{e}\, N) = P(B|N)P(A|N \text{ e } B) = P(B|N),$$

quindi A e B sono indipendenti (anche rispetto all'informazione N).

Problema 2

Un dispositivo elettronico presenta spesso (nel 60% dei casi) dei difetti di produzione, che ne compromette la durata complessiva di funzionamento T (misurata in anni). Se non ha tali difetti, si può modellizzare T come una variabile aleatoria uniforme continua a valori nell'intervallo $[0, 3]$. Se invece presenta difetti, T è meglio rappresentata da una variabile con densità

$$f(t) = a\cos(\pi t/6), \quad \text{per } t \in [0, 3], \quad f(t) = 0 \text{ altrimenti},$$

dove $a > 0$ è una opportuna costante.

1. Determinare il valore di a e calcolare la funzione di ripartizione di T.
2. Calcolare il valor medio di T.
3. Sapendo che un dispositivo dopo un anno continua a funzionare, è più probabile che questo abbia difetti oppure no?

Una soluzione:

1. Poniamo D = "il componente presenta difetti". Notiamo che $\cos(\pi t/6) \geq 0$ per

$t \in [0,3]$. Pertanto basta trovare a in modo che

$$1 = a\int_0^3 \cos(\pi t/6)dt = \frac{6a}{\pi}\sin(\pi t/6)|_0^3 = \frac{6a}{\pi}.$$

Pertanto $a = \pi/6$. Per la funzione di ripartizione di T, $t \mapsto F(t) = P(T \le t)$, notiamo che vale ovviamente 0 se $t < 0$, 1 se $t \ge 3$, mentre se $t \in [0,3]$,

$$P(T \le t|D) = \int_0^t a\cos(\pi s/6)ds = \sin(\pi t/6).$$

D'altronde, nel caso la densità sia uniforme,

$$P(T \le t|D^c) = t/3.$$

Di conseguenza, per $t \in [0,3]$,

$$F(t) = 60\% \cdot \sin(\pi t/6) + 40\% \cdot t/3.$$

2. Calcoliamo il valor medio di T integrando (per parti) la densità per t:

$$\mathbb{E}[T|D] = a\int_0^3 t\cos(\pi t/6)dt = a18(\pi-2)/\pi^2 = 3(1-2/\pi) \approx 1.1.$$

Se vale D^c, invece $\mathbb{E}[T|D^c] = 3/2$. Di conseguenza,

$$\mathbb{E}[T] = 60\% \cdot 3(1-2/\pi) + 40\% \cdot 3/2 \approx 1.3.$$

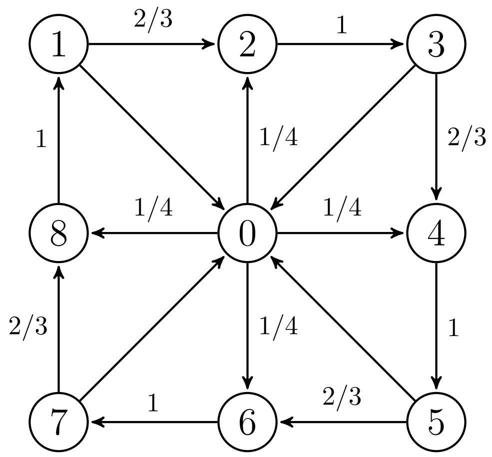
3. Si tratta di confrontare $P(D|T>1) = P(T>1|D)P(D)/P(T>1)$ con $P(D^c|T > 1) = P(T>1|D^c)P(D^c)/P(T>1)$. Al solito il denominatore è comune, quindi non è necessario calcolarlo. Per il numeratore, usiamo le funzioni di ripartizione per calcolare quelle di sopravvivenza.:

$$\frac{P(T>1|D)P(D)}{P(T>1|D^c)P(D^c)} = \frac{(1-\sin(\pi/6)\cdot 60\%}{2/3 \cdot 40\%} = \frac{0.5 \cdot 60\%}{2/3 \cdot 40\%} = 1.125 > 1,$$

quindi è più probabile che sia difettoso.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata in figura.



1. Completare con le probabilità mancanti e determinare le distribuzioni invarianti.
2. Supponendo la catena stazionaria, si osserva poi che X_0 e X_1 sono entrambi stati con valore pari. Calcolare $\mathbb{E}[X_1]$.

Una soluzione:

1. Osserviamo che per evidente simmetria, si avrà $\pi_1 = \pi_3 = \pi_5 = \pi_7 = x$, e $\pi_2 = \pi_4 = \pi_6 = \pi_8 = y$. Inoltre $\pi_0 = 1 - 4x - 4y$, perché la somma delle componenti deve fare 1. Con questa semplificazione che riduce le incognite a 2, imponendo il bilancio di flusso in 0 e in 1, si trovano due equazioni che risolte danno il vettore

$$\left(\frac{4}{28}, \frac{3}{28}, \frac{3}{28}, \frac{3}{28}, \frac{3}{28}, \frac{3}{28}, \frac{3}{28}, \frac{3}{28}, \frac{3}{28}\right).$$

2. L'informazione che X_0 e X_1 siano entrambi pari vincola che $X_0 = 0$, altrimenti se fosse uno stato tra $\{2, 4, 6, 8\}$, il successivo X_1 sarebbe necessiaremente dispari. Se segue che, dopo una transizione, la variabile X_1 è uniformemente distribuita tra $\{2, 4, 6, 8\}$, quindi

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{4}(2 + 4 + 6 + 8) = \frac{20}{4} = 5.$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Prova scritta 2022-06-29

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Si hanno a disposizione tre urne non vuote, dall'esterno indistinguibili. Una contiene solo palline rosse, una solo palline blu, mentre la terza contiene una frazione $p \in [0,1]$ di palline rosse, e la rimanente frazione $1-p$ di palline è blu. Si sceglie a caso una delle tre urne (con probabilità uniforme) e si estrae una pallina dall'urna scelta, rimettendola nella stessa urna dopo averne osservato il colore. Si ripete questa operazione (inclusa la scelta casuale dell'urna) per un totale di 10 estrazioni. Si ponga X la variabile che indica il numero totale di palline rosse così osservate.

1. L'evento $A =$ "*la prima pallina estratta è rossa*" è indipendente dall'evento $B =$ "*tutte le urne scelte nelle* 10 *operazioni contengono solo palline rosse*"?
2. Descrivere la legge di X, calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$ (esprimere il risultato in funzione del parametro p).
3. Avendo osservato $X = 4$, determinare la stima di massima verosimiglianza per p. Come cambierebbe tale stima se avessimo osservato invece $X = 2$?

Una soluzione:

1. No, gli eventi non sono indipendenti. Basta notare che $P(A) = 1/3 + p/3$, mentre $P(A|B) = 1$ (se tutte le urne contengono solo palline rosse, in particolare anche la prima).

2. I dieci esperimenti sono identici e indipendenti tra loro (le palline sono rimesse nell'urna da cui sono estratte). Identifichiamo X come una variabile avente legge binomiale, di parametri $(1+p)/3$ (la probabilità di estratte una rossa in un singolo esperimento) e $n = 10$. Pertanto

$$\mathbb{E}[X] = \frac{10}{3}(1+p), \quad \mathrm{Var}(X) = 10\frac{(1+p)(2-p)}{9}.$$

3. Scriviamo la verosimiglianza $L(p;k) = P(X = k|$"la frazione è p") usando la densità binomiale trovata al punto sopra

$$L(p;k) = \binom{10}{k}\frac{1}{3^{10}}(1+p)^k(2-p)^{10-k}.$$

In generale si tratta di massimizzare la funzione (con argomento p, k è osservato). Passando al logaritmo, derivando e imponendo che la derivata si annulli, troviamo la condizione

$$\frac{k}{1+p} - \frac{10-k}{2-p} = 0.$$

Si trova quindi che

$$k(2-p) = (10-k)(1+p) \quad \leftrightarrow \quad 3k/10 - 1 = p.$$

Avendo osservato $X = 4$, si trova quindi che $p = 12/10 - 1 = 2/10 = 1/5$. Se invece avessimo osservato $X = 2$, si troverebbe $p = 6/10 - 1 = -4/10 < 0$ che non è un valore accettabile. In tal caso il massimo è raggiunto all'estremo $p = 0$ (si vede infatti che l'espressione è maggiore che per $p = 1$) che è quindi anche la stima cercata.

Problema 2

Un robot a guida autonoma è dotato di due algoritmi (indicati rispettivamente G e U) per localizzare gli eventuali ostacoli che incontra nel percorso. Entrambi gli algoritmi stimano la posizione $m \in \mathbb{R}$ di un ostacolo in termini di variabili aleatorie. I dati dei sensori sono già processati opportunamente, in modo da avere 2 variabili aleatorie X_1, X_2 indipendenti e con la medesima densità. Nel caso dell'algoritmo G, si suppone che siano gaussiane $\mathcal{N}(m, 1)$, mentre per l'algoritmo U sono variabili continue uniformi sull'intervallo $[m-1, m+1]$.

1. Per entrambi gli algoritmi (separatamente), calcolare il valor medio, la varianza e la MGF di $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$ (esprimere il risultato come funzione di m).
2. Per entrambi gli algoritmi (separatamente), determinare una stima di massima verosimiglianza per m supponendo che i dati dei sensori siano $X_1 = 4$, $X_2 = 5$.
3. Nel caso dell'algoritmo U, dire se la stima di massima verosimiglianza trovata al punto sopra è unica.

Una soluzione:

1. Il caso G è più semplice per quanto già visto a lezione. Se X_1, X_2 sono entrambe $\mathcal{N}(m, 1)$ indipendenti, si ha che $\bar{X}$ è

$$\mathcal{N}((m+m)/2, (1+1)/4) = \mathcal{N}(m, 1/2).$$

In particolare il valor medio è m, la varianza è $1/2$ e la MGF è $e^{tm+t^2/4}$, per $t \in \mathbb{R}$.

Nel caso di U, ricordiamo (o ricalcoliamo) che $\mathbb{E}[X_1] = m$, $\operatorname{Var} X_1 = 2^2/12 = 1/3$, da cui per indipendenza il valor medio di $\bar{X}$ è pure m, la varianza è invece $2/3$. Per la MGF, ricordiamo (o ricalcoliamo) la MGF di X_1

$$\mathbb{E}\left[e^{tX_1}\right] = \frac{1}{2}\int_{m-1}^{m+1} e^{tx} dx = \frac{e^{(m+1)t} - e^{(m-1)t}}{2t} = e^{tm}\frac{e^t - e^{-t}}{2t}.$$

Per le proprietà note della MGF della somma di variabili indipendenti, si trova quindi che

$$\mathbb{E}\left[e^{t\bar{X}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t/2X_1}\right]^2 = e^{tm}\left(\frac{e^{t/2} - e^{-t/2}}{t}\right)^2.$$

2. Di nuovo, nel caso G possiamo usare quanto visto nel corso, ossia la stima di massima verosimiglianza per la media di una Gaussiana (questo sarebbe il caso di varianza nota). Si trova che m_{MLE} è la media campionaria, quindi in questo caso $m_{MLE} = (4+5)/2 = 4,5$. Nel caso U, stavolta dobbiamo scrivere la verosimiglianza. Ricordando che la densità è $\frac{1}{2} I_{m-1,m+1)}(x)$, si trova per la densità congiunta che

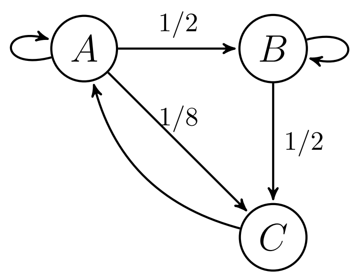
$$L(m; x_1, x_2) = p(X_1 = x_1, X_2 = x_2 | m) = \frac{1}{4} I_{(m-1,m+1)}(x_1) I_{(m-1,m+1)}(x_2).$$

Vediamo quindi che la verosimiglianza vale 0 oppure 1/4. Precisamente vale 1/4 se valgono entrambe le diseguaglianze $|m - x_1| \leq 1$, $|m - x_2| \leq 1$. Ricordando che $x_1 = 4$, $x_2 = 5$ in questo caso, si trova che $m = 4,5$ è di nuovo una possibile stima di massima verosimiglianza.

3. La stima non è unica in questo caso, infatti ogni valore $m \in (4,5)$ è una stima di massima verosimiglianza.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata in figura. Si supponga inoltre che $X_0 = A$.



1. Completare con le probabilità mancanti e determinare le distribuzioni invarianti.
2. Si osserva che $X_2 = C$. Dire se è più probabile che sia $X_1 = B$ oppure $X_1 \neq B$ (calcolare esplicitamente entrambe le probabilità condizionate).
3. Dire quanto vale la probabilità dell'evento "$(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *non visita mai lo stato* C".

Una soluzione:

1. La catena è irriducibile (e pure regolare). Impostando il bilancio di flusso (o risolvendo il sistema di equazioni) si trova con semplici passaggi che, ordinando gli stati A, B, C, l'unica distribuzione invariante è

$$\left(\frac{8}{21}, \frac{8}{21}, \frac{5}{21} \right).$$

2. Calcoliamo usando Bayes

$$P(X_1 = B | X_2 = C) = \frac{P(X_2 = C | X_1 = B) P(X_1 = B)}{P(X_2 = C)} = \frac{1/2 \cdot P(X_1 = B)}{P(X_2 = C)}.$$

Ricordando che $P(X_0 = A) = 1$, si trova

$$P(X_1 = B) = P(X_1 = B|X_0 = A) = 1/2,$$

mentre i cammini da A a C in due passi sono solo $A \to B \to C$, $A \to A \to C$, quindi

$$P(X_2 = C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{16 + 3}{64} = \frac{19}{64}.$$

Concludiamo che

$$P(X_1 = B|X_2 = C) = \frac{1/4}{19/64} = \frac{16}{19}.$$

Di conseguenza $P(X_1 \neq B|X_2 = C) = 3/19$ ed è più probabile che $X_1 = B$.

3. Si tratta di trovare i possibili cammini che non visitano mai C. Essi sono del tipo $A \to A \to A \to ...$ infinite volte, oppure $A \to A \to \ldots A \to\to B \to B \to B \to \ldots$ infinite volte. In tutti questi casi, tali cammini hanno probabilità zero: la probabilità che rimanga ferma in A infinite volte è $\lim_{n\to\infty}(3/8)^n = 0$, mentre che rimanga in B infinite volte è $\lim_{n\to\infty}(1/2)^n = 0$. Pertanto l'evento ha probabilità nulla, prima o poi la catena visiterà C. Questo si può anche vedere ricordando il teorema ergodico (ma non è necessario, basta il conto sopra): la catena deve visitare ciascuno stato con una frequenza relativa che è nel limite di tempi grandi pari alla distribuzione invariante. Essendo questa positiva anche su C, deve necessariamente prima o poi visitare C (anzi deve visitarlo una frazione di volte positiva).

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Prova scritta 2022-07-20

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Una scatola contiene in tutto 5 sensori di accelerazione, tra loro indistinguibili, di cui però si sa che 3 sono perfettamente funzionanti e 2 difettosi. Si sta costruendo un robot in cui è previsto di installare tre sensori di accelerazione, ma per un corretto funzionamento è necessario e sufficiente che almeno due dei tre sensori installati siano perfettamente funzionanti. Si estraggono quindi a caso tre sensori dalla scatola e si montano nel robot.

1. Calcolare la probabilità che il robot così montato funzioni correttamente.
2. Dopo aver montato i tre sensori, si vede che il robot non funziona correttamente. Si procede quindi nel seguente modo: si sceglie a caso uno dei due sensori ancora nella scatola e lo si installa nel robot sostituendo uno (a caso) dei tre sensori già installati. Calcolare la probabilità che dopo questa operazione il robot funzioni correttamente.
3. Dopo l'operazione del punto sopra, si vede che il robot continua a non funzionare correttamente. Si procede quindi con una ulteriore sostituzione, prendendo l'ultimo sensore ancora nella scatola e scambiandolo con uno a caso dei due sensori installati all'inizio (escludendo quindi quello appena sostituito al punto sopra). Calcolare la probabilità che dopo questa operazione il robot funzioni correttamente.

Una soluzione:

1. Possiamo rappresentare il problema come una sequenza di tre estrazioni senza rimpiazzo in un'urna con 5 palline, 3 rosse (funzionanti) e 2 blu (difettosi). L'evento A in cui il robot funziona corretamente coincide con l'estrazione di tutte palline rosse oppure 1 blu e due rosse. Possiamo anche costruire un diagramma ad albero (esercizio). Si ottiene che, con una notazione come quella usata nel corso

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(R_1R_2R_3) + P(B_1R_2R_3) + P(R_1B_2R_3) + P(R_1R_2B_3) \\
&= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot 3 = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{10}.
\end{aligned}
$$

2. L'informazione che abbiamo, in termini dell'urna, è che due palline blu sono state estratte. Nella sostituzione tuttavia si sceglie a caso una delle tre palline estratte e la sostituisce con una delle due non estratte (quindi necessariamente rosse). Il robot quindi funziona correttamente se scegliamo una delle due blu,

e non la rossa. Essendo l'estrazione uniforme, abbiamo 2/3 di probabliità di scegliere una blu. Quindi la probabilità che il robot funzioni dopo la sostituzione (condizionata a sapere che prima non funzionava) è 2/3.

3. L'informazione che ora abbiamo è che le due palline blu sono state inizialmente estratte e la sostituzione con una pallina rossa estratta dall'urna è stata effettuata con l'unica pallina rossa estratta inizialmente (perché altrimenti il robot funzionerebbe). Ora l'ultima pallina rossa rimasta nell'urna viene necessariamente scambiata con una blu (perché non si sostituisce di nuovo quella del punto precedente). L'effetto finale, qualsiasi scelta si faccia, è che nel robot avremo due palline rosse e una blu, e quindi inizierà a funzionare correttamente. Pertanto la probabilità richiesta è 1.

Problema 2

Sia (X, Y) una variabile aleatoria vettoriale con densità Gaussiana $\mathcal{N}(m, \Sigma)$, dove

$$m = (1, 1), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il segno della covarianza tra le variabili X e $X + aY$. Determinare in particolare i valori di a per cui non sono correlate e dire se per tali valori sono anche indipendenti.
2. Calcolare valor medio e densità (fornire una formula) della variabile $(X + Y)^2$.
3. Si ponga $U = X + 2Y$. Avendo osservato che $U = 3$, determinare una stima di massima verosimiglianza per X. *(Sugg: come sono le due variabili X, U?)*

Una soluzione:

1. Calcoliamo, usando la bilinearità della covarianza

$$\operatorname{Cov}(X, X + aY) = \operatorname{Var}(X) + a \operatorname{Cov}(X, Y) = 2 - a.$$

Si trova quindi che se $a < 2$ le variabili sono positivamente correlate, se $a > 2$ sono negativamente correlate, mentre se $a = 2$ sono non correlate. Trattandosi di variabili gaussiane (le trasformazioni lineari di un vettore gaussiano sono gaussiane), nel caso $a = 2$ sono anche indipendenti.

2. La variabile $Z = (X + Y)$ è Gaussiana di parametri valor medio $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 1 + 1 = 2$ e varianza

$$\operatorname{Var}(Z) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y) = 2 + 2 - 2 = 2.$$

Per il valor medio di Z^2 basta quindi ricordare che la varianza è collegata al valor medio del quadrato tramite la relazione

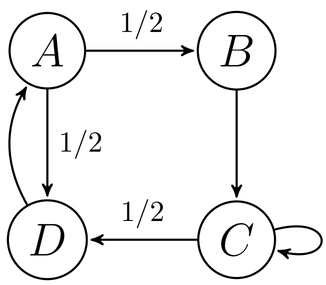
$$\operatorname{Var}(Z) = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2,$$

da cui
$$\mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{Var}(Z) + \mathbb{E}\left[Z\right]^2 = 2 + 2^2 = 6.$$
Per la densità, scriviamo prima quella di Z, ossia
$$p(Z = z) = \exp\left(-\frac{(z-2)^2}{2\cdot 2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2}}.$$
La densità di Z^2 si ottiene dalla formula di cambio di variabile: la funzione $g(z) = z^2$ non è invertibile, ma per $u > 0$ si hanno due valori $z_+ = \sqrt{u}$, $z_- = -\sqrt{u}$ e vale $|g'(z)| = 2\sqrt{u}$ in entrambi i casi. Perciò
$$\begin{aligned} p(Z^2 = u) &= p(Z = z_+)\cdot\frac{1}{g'(z_+)}p(Z = z_+)\cdot\frac{1}{g'(z_+)} \\ &= \left(\exp\left(-\frac{(\sqrt{u}-2)^2}{4}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{u}+2)^2}{4}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2}\cdot 2\sqrt{u}} \end{aligned}$$

3. Per la definizione generale di verosimiglianza, si ha
$$L(u;x) = p(X = x|U = u).$$
Ricordiamo dal punto 1 che $U = X + 2Y$ è indipendente da X, perciò
$$p(X = x|U = u) = p(X = x),$$
ossia la funzione di verosimiglianza non dipende da U, e quindi qualsiasi valore di U è una stima di massima verosimiglianza. In altre parole, l'indipendenza tra U ed X implicano che la (sola) osservazione di X non può essere usata per stimare U.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione Q rappresentata in figura. Si supponga inoltre che $X_0 = A$.



1. Completare con le probabilità mancanti di Q e determinarne le distribuzioni invarianti.
2. Si osserva che $X_3 = D$. Calcolare la probabilità che sia $X_1 = B$.

3. Dire se la catena è regolare. In caso affermativo determinare il più piccolo $n \geq 1$ tale che $(Q^n)_{ij} > 0$ per ogni i, $j \in \{A, B, C, D\}$.

Una soluzione:

1. La catena è irriducibile (e pure regolare, ma questo sarà utile dopo). Impostando il bilancio di flusso si trova con semplici passaggi che l'unica distribuzione invariante è (ordinando gli stati nell'ordine alfabetico)

$$(2/7, 1/7, 2/7, 2/7)\,.$$

2. Calcoliamo usando Bayes

$$P(X_1 = B|X_3 = D) = \frac{P(X_3 = D|X_1 = B)P(X_1 = B)}{P(X_3 = D)} = \frac{1/2 \cdot P(X_1 = B)}{P(X_2 = C)}.$$

Ricordando che $P(X_0 = A) = 1$, si trova

$$P(X_1 = B) = P(X_1 = B|X_0 = A) = 1/2,$$

mentre i cammini da A a D in tre passi sono solo $A \to B \to C \to D$, $A \to D \to A \to D$, quindi

$$P(X_3 = D) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1/2 = 1/2.$$

Concludiamo che

$$P(X_1 = B|X_3 = D) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

3. La catena è regolare per il criterio visto a lezione. Infatti è irriducibile e si ha $Q_{CC} > 0$. Per determinare il minimo n per cui tutte le componenti di Q^n sono strettamente positive, osserviamo che ogni stato può raggiungere ogni stato con un cammino lungo 6: infatti con un cammino lungo 3 si può raggiungere C (partendo da qualsiasi stato), e con un cammino lungo 3 si può raggiungere da C un qualsiasi stato. D'altra parte con un cammino lungo 5 non si riesce a raggiungere B partendo da D (infatti si può soltanto alternare $D \to A \to D \to A \to D \to A$ oppure fare un "giro" ma in tal caso in 5 passi non si può terminare in B), quindi $(Q^5)_{DB} = 0$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2021/22 - Prova scritta 2022-09-14

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un amico ci mostra una moneta solamente da un lato, su cui vediamo il simbolo "testa", ma non riusciamo a vedere l'altro lato. La moneta potrebbe quindi essere truccata, ossia con un altra "testa" nell'altro lato, oppure essere una comune moneta, con "croce" sull'altro lato. Attribuiamo inizialmente probabilità 1/100 all'evento che la moneta sia truccata con due teste.

1. Si effettua un lancio della moneta. Qual è la probabilità che esca testa?
2. Dopo aver effettuato il primo lancio, si osserva che esce testa. Qual è la probabilità che la moneta sia truccata con due teste?
3. Si supponga di effettuare $k \geq 1$ lanci e di osservare tutte teste. Calcolare il minimo k affinché la probabilità che la moneta sia truccata risulti maggiore di 1/2.

Una soluzione:

1. Posto A l'evento in cui la moneta è truccata e T l'evento "esce testa al primo lancio", si ha

$$P(T) = P(T|A)P(A) + P(T|A^c)P(A^c) = 1 \cdot 1/100 + 1/2 \cdot 99/100 = \frac{101}{200}.$$

2. Usando la formula di Bayes,

$$P(A|T) = P(T|A)P(A)/P(T) = 1 \cdot 1/100 \cdot 200/101 = \frac{2}{101}.$$

3. Ripetiamo i passaggi dei due punti precedenti con l'evento T_k "esce testa nei primi k lanci". Si trova

$$P(T_k) = P(T_k|A)P(A) + P(T_k|A^c)P(A^c) = 1 \cdot 1/100 + \frac{1}{2^k} \cdot 99/100 = \frac{2^k + 99}{2^k \cdot 100},$$

e

$$P(A|T_k) = P(T_k|A)P(A)/P(T_k) = 1 \cdot 1/100 \cdot 2^k \cdot 100/(2^k + 99),$$

che è maggiore di 1/2 appena

$$2^k > (2^k + 99)/2 \quad \leftrightarrow \quad 2^{k-1} > 99/2.$$

Osservando che $2^5 = 32$ e $2^6 = 64$, si trova che $k - 1 = 6$, quindi $k = 7$.

Problema 2

Sia (X, Y) una variabile aleatoria vettoriale con densità Gaussiana $\mathcal{N}(m, \Sigma)$, dove

$$m = (1, -1), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ una tale variabile può esistere.
2. Per $a = 1$, calcolare la densità (fornire una formula) della variabile $\exp(X + Y)$.
3. Per $a = 1/3$, mostrare che vale l'identità $X - Y/3 = 4/3$.

Una soluzione:

1. La matrice Σ deve essere (semi)definita positiva: da noti criteri si deve avere $a \geq 0$ e $\det \Sigma \geq 0$, ossia

$$3a - 1 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad a \geq 1/3.$$

Segue quindi che se $a \geq 1/3$ una tale variabile può esistere.

2. La variabile $Z = X + Y$ è Gaussiana di parametri valor medio $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 1 - 1 = 0$ e varianza

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 1 + 3 + 2 = 6.$$

Per la densità di $\exp(Z)$, scriviamo prima quella di Z, ossia

$$p(Z = z) = \exp\left(-\frac{z^2}{2 \cdot 6}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 6}}.$$

La densità di $\exp(Z)$ si ottiene dalla formula di cambio di variabile: la funzione $g(z) = \exp(z)$, con $g'(z) = g(z)$ è invertibile con inversa $g^{-1}(u) = \log(u)$ per $u > 0$. Perciò, per $u > 0$,

$$\begin{aligned} p(\exp(Z) = u) &= p(Z = \log(u)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(u))} \\ &= \exp\left(-\log(u)^2/12\right) / (u\sqrt{12\pi}). \end{aligned}$$

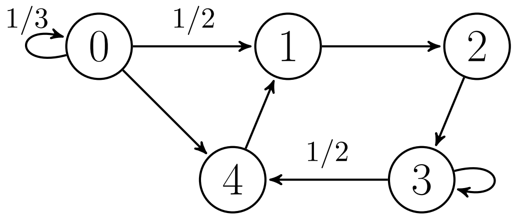
3. La variabile $X - Y/3$ è ancora Gaussiana, con media $4/3$ e varianza:

$$\mathrm{Var}(X - Y/3) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)/9 + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)/3 = 1/3 + 1/3 - 2/3 = 0.$$

Pertanto è un caso degenere in cui la variabile è costante (e quindi uguale al suo valor medio).

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione Q rappresentata in figura. Si supponga inoltre che $X_0 = 0$.



1. Completare con le probabilità mancanti di Q, classificare gli stati e determinare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Si osserva che $X_4 = 3$. Dire se è più probabile che sia $X_1 = 1$ oppure $X_1 \neq 1$.
3. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$.

Una soluzione:

1. Lo stato 0 è transitorio, gli altri stati costituiscono una classe chiusa irriducibile e regolare. Per trovare la distribuzione invariante imponiamo il bilancio di flusso negli stati 1, 2 e 3:

$$\pi_1 = \pi_4, \quad \pi_2 = \pi_1, \quad \pi_3/2 = \pi_2,$$

da cui il vettore è della forma

$$(t, t, 2t, t)$$

e quindi $t = 1/5$. Si trova quindi l'unica distribuzione invariante

$$\pi = (0, 1, 1, 2, 1)/5.$$

2. Calcoliamo usando Bayes

$$P(X_1 = 1 | X_4 = 3) = \frac{P(X_4 = 3 | X_1 = 1) P(X_1 = 1)}{P(X_4 = 3)}.$$

Ricordando che $P(X_0 = 0) = 1$, si trova che

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1 | X_0 = 0) = 1/2,$$

mentre l'unico cammino da 1 a 3 in tre passi è $1 \to 2 \to 3 \to 3$, quindi $p(X_4 = 3 | X_1 = 1) = 1 \cdot 1 \cdot 1/2$. Resta da calcolare

$$P(X_4 = 3) = 1/2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 1 + 1/6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{7}{12},$$

avendo sommato i pesi dei possibili cammini che partono da 0 al tempo 0 e arrivano in 3 in 4 passi.

Perciò
$$P(X_1 = 1|X_4 = 3) = \frac{1/2 \cdot 1/2}{7/12} = \frac{3}{7},$$
che è minore di 1/2, quindi $P(X_1 \neq 1|X_4 = 3) = 1 - 3/7 > 1/2$ è più probabile.

3. Ricordiamo che, per quanto visto nel corso, il limite $\lim_{n\to\infty} Q^n_{ij} = Q^\infty_{ij}$ esiste ed è una distribuzione invariante (per ogni i fissiato) qualora tutte le classi chiuse irriducibili siano regolari. In questo caso l'unica classe chiusa irriducibile è regolare, quindi possiamo affermare che
$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = 0) = \lim_{n\to\infty} Q^n_{0j} = \pi_j.$$
dove π è quella del punto 1. Per calcolare il limite del valor medio, basta allora scambiare la somma (finita) con il limite, ottenendo
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{j=0}^{4} j \cdot \lim_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = 0) = (1\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 3+4\cdot 1)/5 = 13/5.$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2022/23 - Prova in itinere 2022-11-25

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Si hanno a disposizione due urne, dall'esterno identiche, contenenti ciascuna 3 palline colorate di rosso o blu. Una (chiamiamola A) contiene 2 palline rosse e una pallina blu, mentre l'altra (B) contiene una pallina rossa e 2 blu (si ignora però quale delle due sia A e quale B).

Si effettua il seguente gioco: si sceglie un'urna a caso, si effettua una prima estrazione e si osserva il colore della pallina estratta. Successivamente, si può decidere se rimettere oppure no la pallina estratta nell'urna scelta. Poi si procede ad una seconda estrazione dalla stessa urna, e si osserva il colore della pallina estratta. Infine, si deve dichiarare se si ritiene che l'urna scelta sia A o B: si vince il gioco se si indovina.

Si considerino le tre seguenti strategie:

1. si decide di rimettere la prima pallina estratta nell'urna, e si dichiara A se la seconda pallina estratta è rossa, B se la seconda è blu.
2. si decide di rimettere la prima pallina estratta nell'urna, e si dichiara A se si osservano 2 palline rosse, B se si osservano 2 blu, mentre nel caso si osservi una rossa e una blu si lancia una moneta e si dichiara A se esce testa, B se esce croce.
3. come la strategia 2, ma si decide di *non* rimettere la prima pallina estratta nell'urna.

Separatamente per ciascuna delle tre strategie, calcolare la probabilità di vincere il gioco. Quale strategia giochereste (anche non necessariamente tra le tre elencate sopra)?

Una soluzione:

Indichiamo con $S \in \{A, B\}$ la variabile che indica l'urna scelta, e $D \in \{A, B\}$ quella che indica l'urna dichiarata. Dobbiamo calcolare

$$P(S = D)$$

a seconda delle tre strategie. Poniamo inoltre $X_1 \in \{R, B\}$, $X_2 \in \{R, B\}$ i colori delle due palline estratte. Osserviamo che

$$P(S = A) = P(S = B) = 1/2,$$

e usando la formula di decomposizione si trova

$$\begin{aligned} P(S = D) &= P(S = D|S = A)P(S = A) + P(S = D|S = B)P(S = B) \\ &= P(D = A|S = A)\frac{1}{2} + P(D = B)\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi calcolare $P(D = A|S = A)$, $P(D = B|S = B)$ a seconda delle varie strategie.

1. In questa strategia stiamo effettuando estrazioni con rimpiazzo e la dichiarazione coincide con il colore della seconda estratta. Abbiamo quindi $D = X_2$ e allora

$$P(D = A|S = A) = P(X_2 = A|S = A) = \frac{2}{3}, \quad P(D = B|S = B) = P(X_2 = B|S = B) = \frac{2}{3}.$$

Di conseguenza
$$P(S = D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

2. In questa strategia stiamo effettuando due estrazioni con rimpiazzo, ma abbiamo l'ulteriore lancio di moneta in caso di parità, che avviene se estraiamo una rossa e una blu (nei due ordini possibili), quindi con probabilità
$$P(X_1 = R, X_2 = B|S = A) + P(X_1 = B, X_2 = R|S = A) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$
e similmente nel caso $S = B$. Lanciando una moneta, uscirà quindi la risposta corretta con probabilità $1/2$, e allora
$$P(D = A|S = A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$
Di conseguenza
$$P(S = D) = \frac{2}{3}.$$

3. In questa strategia stiamo effettuando due estrazioni senza rimpiazzo, e abbiamo l'ulteriore lancio di moneta in caso di parità, che avviene stavolta con probabilità
$$P(X_1 = R, X_2 = B|S = A) + P(X_1 = B, X_2 = R|S = A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$
Quindi
$$P(D = A|S = A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$
$$P(D = B|S = B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}.$$
Anche in questo caso otteniamo che la probabilità $P(S = D) = \frac{2}{3}$.

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria continua a valori reali, avente densità $f(x) = cx^2(1-x^2)$ per $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ altrimenti, dove $c > 0$ è una opportuna costante.

1. Determinare c e calcolare $\mathbb{E}[X]$.
2. Calcolare la densità di $Y = X^2$.

Una soluzione:

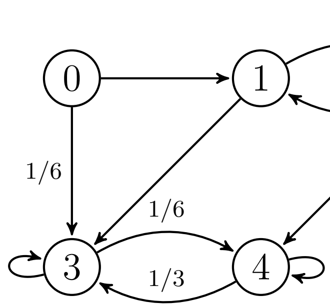
1. c è l'inverso dell'integrale
$$\int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx - \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$
Quindi abbiamo $c = 15/4$. Inoltre
$$\mathbb{E}[X] = c \int_{-1}^{1} x \cdot x^2(1 - x^2)dx = 0$$
essendo l'integranda dispari.

2. Per determinare la densità di $Y = g(X) = X^2$, osserviamo che essendo X a valori in $[-1, 1]$ con probabilità 1, possiamo limitarci a calcolarla in $y \in [0, 1]$ (per gli altri y troveremo che la densità è nulla). Notiamo che $g(x) = x^2$ è separatemente invertibile su $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, con inverse $\pm\sqrt{y}$ e nei due intervalli rispetta le condizione del teorema di cambio di variabile, in particolare $|g'(\pm\sqrt{y})| = 2\sqrt{y}$. Troviamo quindi

$$\begin{aligned} p(Y = y) &= p(X = -\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + p(X = \sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{15}{4}y(1-y)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{15}{4}y(1-y)\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{15}{4}\sqrt{y}(1-y). \end{aligned}$$

Problema 3

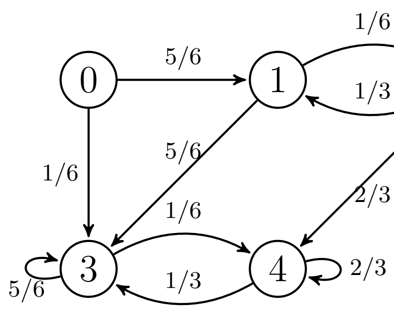
Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse (indicare quali sono irriducibili) e le distribuzioni invarianti.
2. Si supponga inizialmente che la catena sia distribuita al tempo 0 con una densità discreta $P(X_0 = i) = c(i + 1)$, per $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, e un'opportuna costante c. Si osserva poi l'evento $A =$ "$X_2 = 2$, $X_6 = 4$ e $X_{10} = 3$". Calcolare $P(X_0 = i|A)$ per $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Una soluzione:

1. Completiamo in modo che i pesi degli archi uscenti da ogni nodo sia 1.



Gli stati $\{0, 1, 2\}$ sono transitori (da tutti si raggiunge 3 in uno o due passi, ma non si può poi tornare allo stato di partenza). Gli stati $\{3, 4\}$ sono ricorrenti costituiscono l'unica classe chiusa irriducibile. Dovendo descrivere tutte le classi chiuse, notiamo che, a parte quelle banali (tutta la catena e la classe vuota), oltre a $\{3, 4\}$, si ha la classe $\{1, 2, 3, 4\}$.

Per trovare l'unica distribuzione invariante, basta restringersi alla classe $\{3, 4\}$ e impostare il bilancio di flusso ad esempio in 3: $\mu_3/6 = \mu_4/3$, da cui $\mu_3 = 2\mu_4$ e quindi $\mu_3 = 2/3$, $\mu_4 = 1/3$ e la distribuzione completa è

$$(0, 0, 0, 2/3, 1/3).$$

2. Indichiamo la distribuzione come al solito come un vettore riga, $P(X_0 = i|A) = \mu_i$,

$$(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

Applichiamo la formula di Bayes:

$$P(X_0 = i|A) = P(A|X_0 = i)P(X_0 = i)/P(A) \propto P(A|X_0 = i)P(X_0 = i).$$

Notiamo che stiamo calcolando una densità discreta di probabilità, quindi le costanti moltiplicative che non dipendono da i, in particolare il denominatore $P(A)$, possiamo lasciarle sottointese semplificando alcuni calcoli (usiamo la notazione $\propto$). Abbiamo $P(X_0 = i) \propto i + 1$. Per la regola del prodotto, abbiamo che

$$P(A|X_0 = i) = P(X_2 = 2|X_0 = i)P(X_6 = 4, X_{10} = 3|X_2 = 2, X_0 = i).$$

Applichiamo la proprietà di Markov al secondo termine, trovando

$$P(X_6 = 4, X_{10} = 3|X_2 = 2, X_0 = i) = P(X_6 = 4, X_{10} = 3|X_2 = 2)$$

che in particolare non dipende da i, quindi abbiamo che, per una qualche costante c' da determinare

$$\mu_i = c'P(X_2 = 2|X_0 = i)(i + 1).$$

Osservando i possibili cammini, vediamo inoltre che $P(X_2 = 2|X_0 = i)$ è nulla se $i = 1$, $i = 3$ o $i = 4$, mentre abbiamo

$$P(X_2 = 2|X_0 = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}, \quad P(X_2 = 2|X_0 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Di conseguenza, il vettore è del tipo

$$\left(c \cdot \frac{5}{36} \cdot (0 + 1), 0, c \cdot \frac{1}{18} \cdot (2 + 1), 0, 0\right).$$

Otteniamo il valore della costante c imponendo

$$1 = c \cdot \frac{5}{36} + c \cdot \frac{3}{18} = c \cdot \frac{11}{36}.$$

Troviamo quindi $c = 36/11$ e la distribuzione è

$$\left(\frac{5}{11}, 0, \frac{6}{11}, 0, 0\right).$$

Una soluzione leggermente alternativa consiste nell'usare prima la proprietà di Markov nella forma "futuro e passato sono indipendenti, noto esattamente il presente", usando come presente $X_2 = 2$, passato $X_0 = i$, e futuro $X_6 = 4, X_10 = 3$, così da trovare

$$P(X_0 = i|A) = P(X_0 = i|X_2 = 2).$$

Applichiamo poi la formula di Bayes,

$$P(X_0 = i|X_2 = 2) = P(X_2 = 2|X_0 = i)P(X_0 = i)/P(X_2 = 2) \propto P(X_2 = 2|X_0 = i)(i + 1).$$

e si conclude come nella precedente soluzione.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)

A.A. 2022/23 - Prova scritta 2023-01-11

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

La scatola di costruzioni giocattolo dei fratellini Aldo e Bruno contiene in tutto 4 ruote, all'apparenza del tutto identiche. Tuttavia, alcune ruote potrebbero essere bloccate e non girare bene. I fratellini costruiscono 2 moto giocattolo, attaccando a caso tutte le ruote disponibili. Se una moto ha due ruote bloccate, essa non potrà soddisfare i bambini (una sola ruota bloccata è invece accettabile).

Il numero $K \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ di ruote bloccate presenti nella scatola non è noto: si supponga inizialmente che sia una variabile con densità uniforme.

1. Calcolare la probabilità che entrambe le moto costruite soddisfino i fratellini.
2. Sapendo che entrambe le moto costruite hanno soddisfatto i fratellini, come cambia la densità di K? calcolarne inoltre il valor medio e deviazione standard.

Una soluzione:

Osserviamo che, se $K \geq 3$, allora sicuramente almeno una moto conterrà due ruote bloccate, e quindi posto $A =$ "le moto costruite soddisfano i fratellini", si ha $P(A|K \geq 3) = 0$. Siccome $P(A|K \leq 1) = 1$, perché in tal caso sicuramente entrambe le moto contegono al più una ruota bloccata, resta da calcolare $P(A|K = 2)$. Supponiamo che le estrazioni delle ruote avvengano in sequenza e le prime 2 vadano a costruire la prima moto, mentre le rimanenti costruiscano la seconda moto. Calcoliamo intanto la probabilità della sequenza $DDFF$ (indichiamo con D se difettosa, F se funzionante, quindi in questa sequenza le prime due estratte sono difettose):

$$P(DDFF) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6}.$$

Sappiamo anche dalla teoria che la probabilità di estrarre una specifica sequenza (sia nelle estrazioni con rimpiazzo che in quelle senza rimpiazzo, come in questo caso) dipende solamente dal numero di "colori" (in questo caso ruote difettose o funzionanti) presenti, non dall'ordine. Pertanto si tratta solo di contare quante sono le sequenze che soddisfano i bambini, ossia quelle in cui i pezzi difettosi sono distribuiti nelle due moto: esse sono $2 \times 2 = 4$ (si tratta di decidere in quale delle prime quattro estrazioni una difettosa è estratta, e similmente in quale delle seconde estrazioni l'altra difettosa è estratta). Possiamo anche elencarle:

$$DF\,DF \qquad FD\,DF \qquad DF\,FD \qquad FD\,FD.$$

Di conseguenza,

$$P(A|K=2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Si può anche rispondere alla domanda usando la densità ipergeometrica: se $K = 2$, le moto soddisfano i bambini se, nelle prime due estrazioni, solamente 1 è difettosa. Pertanto

$$P(A|K=2) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 3/2} = \frac{2}{3}.$$

Di consequenza,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|K \leq 1)P(K \leq 1) + P(A|K=2)P(K=2) + P(A|K \geq 3)P(K \geq 3) \\ &= 1 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

2. Usando la formula di Bayes,

$$P(K=i|A) \propto P(K=i) \cdot P(A|K=i) \propto P(A|K=i),$$

poiché $P(K=i) = \frac{1}{5}$ è costante. Siccome

$$P(A|K=i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \{0,1\}, \\ \frac{2}{3} & \text{se } i = 2, \\ 0 & \text{se } i \geq 3, \end{cases}$$

la densità di K si ottiene dividendo le espressioni sopra per $1 + 1 + 2/3 = 8/3$, ottenendo quindi

$$P(K=i|A) = \begin{cases} \frac{3}{8} & \text{se } i \in \{0,1\}, \\ \frac{1}{4} & \text{se } i = 2, \\ 0 & \text{se } i \geq 3. \end{cases}$$

Calcoliamo valor medio di K,

$$\mathbb{E}\left[K|A\right] = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8}.$$

Per la deviazione standard, calcoliamo

$$\mathbb{E}\left[K^2|A\right] = 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{8},$$

da cui

$$\operatorname{Var} K|A = \frac{11}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{88-49}{8^2} = \frac{39}{8^2},$$

e quindi

$$\sigma_{K|A} = \sqrt{39}/8 \approx 0,78.$$

Problema 2

Siano X, Y, variabili aleatorie indipendenti con densità gaussiane reali standard. Si ponga

$$U = X^2, \qquad V = XY.$$

Mostrare che

1. U non è gaussiana (calcolandone esplicitamente la densità),
2. V non è gaussiana *(sugg: può essere utile usare che* $\mathbb{E}[Z^4] = 3$ *se* Z *è gaussiana standard)*,
3. U e V non sono correlate, ma non sono indipendenti *(sugg: calcolare* $\mathbb{E}[UV^2]$*)*.

Una soluzione:

1. Per calcolare la densità di U usiamo la formula di cambio di variabile per $g(x) = x^2$, con $g'(x) = 2x$ e $g^{-1}(u) = \{\sqrt{u}, -\sqrt{u}\}$ (per $u > 0$). Si trova, per $u > 0$,

$$p(U = u) = p(g(X) = u) = 2 \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{u}},$$

evidentemente non Gaussiana.

2. Se V fosse gaussiana, dovrebbe essere standard, perché per indipendenza di X e Y,

$$\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot 0 = 0, \quad \mathbb{E}\left[V^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right] = 1 \cdot 1 = 1.$$

Allora usando il suggerimento dovrebbe essere $\mathbb{E}[V^4] = 3$, ma calcoliamo similmente

$$\mathbb{E}\left[V^4\right] = \mathbb{E}\left[X^4 Y^4\right] = \mathbb{E}\left[X^4\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^4\right] = 3 \cdot 3 = 9,$$

avendo usato di nuovo il suggerimento, perché X e Y sono gaussiane standard.

3. Poiché $\mathbb{E}[V] = 0$, la covarianza tra U e V si riduce a

$$\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}\left[X^2 \cdot XY\right] = \mathbb{E}\left[X^3\right] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0 \cdot 0 = 0,$$

e quindi U e V non sono correlate. Tuttavia non sono indipendenti. Se lo fossero, usando il suggerimento, si avrebbe che

$$\mathbb{E}\left[UV^2\right] = \mathbb{E}[U] \cdot \mathbb{E}\left[V^2\right],$$

ma calcolando separatamente i termini si trova

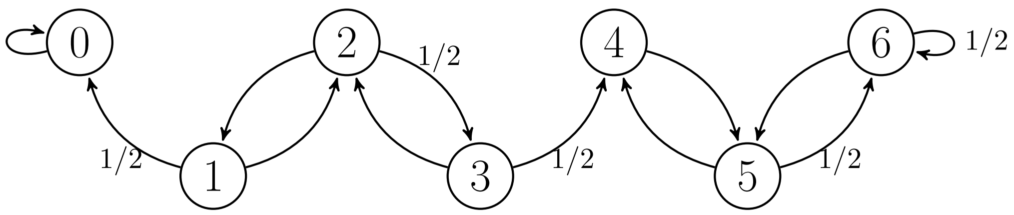
$$\mathbb{E}\left[UV^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 \cdot X^2 \cdot Y^2\right] = \mathbb{E}\left[X^4\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^2\right] = 3 \cdot 1 = 3$$

(avendo usato il suggerimento del punto precedente) mentre

$$\mathbb{E}[U] \cdot \mathbb{E}\left[V^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] \cdot \mathbb{E}\left[X^2\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^2\right] = 1.$$

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Dire se esiste $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0|X_0 = 2)$ e in caso affermativo calcolarlo.

Una soluzione:

1.Gli stati $0, 4, 5, 6$ sono ricorrenti, i rimanenti transitori. Le classi chiuse irriducibili sono $\{0\}$ e $\{4, 5, 6\}$. Per le distribuzioni invarianti, calcoliamo prima la distribuzione invariante della catena ristretta alla classe $\{4, 5, 6\}$. Per il bilancio di flusso in 4 e 6:

$$\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_5, \quad \frac{1}{2}\pi_6 = \frac{1}{2}\pi_5$$

da cui il vettore

$$(\pi_4, \pi_5, \pi_6) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}).$$

Tutte le distribuzioni invarianti sono combinazioni della distribuzione trovata e la distribuzione concentrata sullo stato 0, pertanto si scrivono come segue:

$$\left(\alpha, 0, 0, 0, \frac{1-\alpha}{5}, \frac{2(1-\alpha)}{5}, \frac{2(1-\alpha)}{5}\right), \quad \text{al variare di } \alpha \in [0, 1].$$

2. Il limite da calcolare esiste perché ogni classe chiusa irriducibile è regolare (per il criterio). Dalla teoria sappiamo anche che la matrice $Q^{\infty}_{ij} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = i)$ soddisfa i due sistemi $Q^{\infty} \cdot Q = Q \cdot Q^{\infty} = Q^{\infty}$. Il primo garantisce che ogni riga è una distribuzione invariante, quindi ricordando la parametrizzazione del punto sopra, ogni riga j è determinata da un parametro $\alpha_j \in [0, 1]$. Dobbiamo quindi calcolare α_2. Notiamo Se $j = 0$, ovviamente $\alpha_j = 1$, mentre se $j \in \{4, 5, 6\}$ si avrà $\alpha_j = 0$ (non si può uscire dalle classi chiuse irriducibili). Per calcolare i rimanenti impostiamo il secondo sistema, così

$$\alpha_2 = Q^{\infty}_{20} = Q_{21}Q^{\infty}_{10} + Q_{23}Q^{\infty}_{30} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

$$\alpha_1 = Q^{\infty}_{10} = Q_{10}Q^{\infty}_{00} + Q_{12}Q^{\infty}_{20} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_2.$$

$$\alpha_3 = Q_{30}^{\infty} = Q_{34}Q_{40}^{\infty} + Q_{32}Q_{20}^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_2.$$

Sostituendo le ultime due relazioni nella prima equazione concludiamo che

$$2\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2,$$

e quindi $\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

In realtà si può ottenere il risultato anche senza fare alcun calcolo. Supponiamo di sostituire agli stati $\{4, 5, 6\}$ un singolo stato C_2 assorbente che rappresenta la classe chiusa. Allora notiamo che la catena così diventa perfettamente simmetrica rispetto allo stato 2 (ossia sostituendo $1 \leftrightarrow 3$ e $0 \leftrightarrow C_2$). Quindi partendo da 2 si entrerà con eguale probabilità nella classe $\{0\}$ e nella classe C_2, e ciò basta per concludere che deve essere $Q_{20}^{\infty} = \frac{1}{2}$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2022/23 - Prova scritta 2023-02-01

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Il numero di email che arrivano in dato giorno ad una casella di posta elettronica è ben rappresentato da una variabile aleatoria discreta avente densità Poisson di parametro $\lambda > 0$, dove il parametro λ è caratteristico della casella. Si può inoltre supporre che a giorni diversi il numero di email in arrivo siano tra loro indipendenti (ma tutte aventi lo stesso parametro λ, per una data casella) e inoltre a caselle di posta differenti corrispondano variabili tra loro indipendenti, eventualmente con parametri λ differenti.

Alice dispone di due caselle di posta: una personale (con parametro $\lambda_p > 0$) e una lavorativa (di parametro $\lambda_\ell > 0$). Si vuole stimare i parametri sulla base di alcune osservazioni.

1. Calcolare il valor medio e la deviazione standard del numero totale delle email ricevute da Alice in 10 giorni consecutivi (esprimendo il risultato in termini dei parametri λ_p e λ_ℓ).
2. Mostrare che il numero totale delle email ricevute da Alice in un dato giorno è una variabile Poisson di parametro $\lambda_p + \lambda_\ell$. *(Sugg: calcolare la MGF della somma di due Poisson indipendenti).*
3. Alice osserva che in un primo giorno ha ricevuto 10 email nell'account personale e 20 in quello lavorativo, mentre il giorno successivo ha ricevuto in 42 email (sommando tra i due account). Fornire la stima di massima verosimiglianza per λ_p e λ_ℓ.

Una soluzione:

1. Dalle ipotesi segue che le email arrivate ogni giorno sono variabili indipendenti. Per una Poisson di parametro $\lambda > 0$, il valor medio è λ, la varianza è pure λ. Ne segue che il numero totale X in 10 giorni è la somma di 10 Poisson indipendenti di parametro λ_p (per l'account personale) più altre 10 Poisson indipendenti di parametro λ_ℓ (per quello lavorativo. Quindi valor medi e varianze si sommano (per indipendenza), e si trova che

$$\mathbb{E}[X] = 10(\lambda_p + \lambda_\ell), \mathrm{Var}(X) = 10(\lambda_p + \lambda_\ell),$$

da cui $\sigma_x = \sqrt{10(\lambda_p + \lambda_\ell)}$.

2. Usando il suggerimento notiamo prima che, se X è Poisson di parametro λ, allora

$$MGF_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{tk}}{k!} e^{-\lambda} = \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right).$$

Pertanto se X_p e X_ℓ rappresentano rispettivamente le mail arrivate all'account personale e lavorativo, per indipendenza:

$$MGF_{X_p+X_\ell}(t) = MGF_{X_p}(t) MGF_{X_\ell}(t) = \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right) \exp\left(\lambda_\ell(e^t - 1)\right) = \exp\left((\lambda_p + \lambda_\ell)(e^t - 1)\right),$$

ma riconosciamo la MGF di una Poisson di parametro $\lambda_p + \lambda_\ell$, che è pertanto la densità di $X_p + X_\ell$.

3. Dai dati osservati e l'indipendenza tra i vari giorni e il punto precedente, scriviamo la seguente verosimiglianza:

$$\begin{aligned} L(\lambda_p, \lambda_\ell; X_p^1 = 10, X_\ell^1 = 20, X^2 = 42) &= P(X_p^1 = 10|\lambda_p)P(X_\ell^1 = 20|\lambda_\ell)P(X^2 = 42|\lambda_p, \lambda_\ell) \\ &= \frac{\lambda_p^{10} e^{-\lambda_p}}{10!} \frac{\lambda_\ell^{10} e^{-\lambda_\ell}}{20!} \frac{(\lambda_p + \lambda_\ell)^{42} e^{-(\lambda_p+\lambda_\ell)}}{42!}. \end{aligned}$$

Passando al logaritmo e derivando rispetto a λ_ℓ e rispetto a λ_p, si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{10}{\lambda_p} + \frac{42}{\lambda_p+\lambda_\ell} & = 2 \\ \frac{20}{\lambda_\ell} + \frac{42}{\lambda_p+\lambda_\ell} & = 2 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si trova che

$$\lambda_\ell = 2\lambda_p,$$

da cui le stime di massima verosimiglianza $\lambda_p = 12$, $\lambda_\ell = 24$.

Problema 2

Siano X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} variabili aleatorie indipendenti con densità gaussiane reali standard. Si introducano le matrici

$$M = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ponga} \quad Y = AM,$$

dove il prodotto è inteso tra matrici.

1. Scrivere esplicitamente la matrice Y e mostrare che le sue componenti sono variabili aleatorie gaussiane.
2. Calcolare i parametri di media e varianza delle componenti di Y.
3. Le componenti di Y sono tra loro indipendenti?

Una soluzione:

1. Le componenti di Y sono gaussiane perché combinazioni lineari di variabili gaussiane. Si trova

$$Y = \begin{pmatrix} X_{11} + X_{21} & X_{12} + X_{22} \\ X_{11} - X_{21} & X_{12} - X_{22} \end{pmatrix}.$$

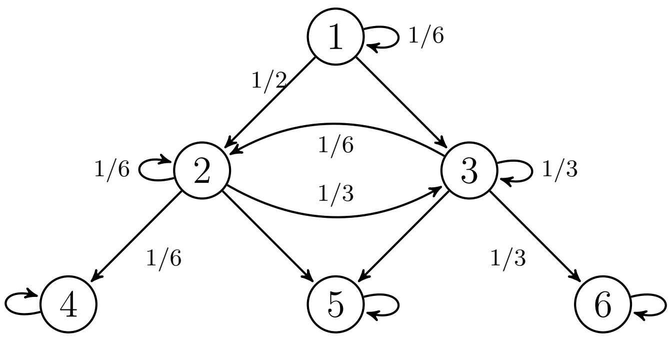
2. La media è nulla per tutte le variabili. Per la varianza, basta notare che le componenti sono date da somme (o differenze) di gaussiane standard, quindi hanno tutte varianza 2.

3. Le componenti sono indipendenti tra loro. Intanto la prima e la seconda colonna sono funzioni di variabili separatamente indipendenti, quindi sono indipendenti tra loro. Per vedere che le due variabili in ciascuna colonna sono indipendenti, basta allora vedere che non sono correlate (perché sono gaussiane). Ad esempio

$$\mathrm{Cov}(Y_{11}, Y_{21}) = \mathrm{Cov}(X_{11} + X_{21}, X_{11} - X_{21}) = \mathrm{Var}\,(X_{11}) - \mathrm{Var}\,(X_{21}) = 1 - 1 = 0.$$

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Posta $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{A, B, C\}$ definita da

$$g(1) = A, \quad g(2) = g(3) = B, \quad g(4) = g(5) = g(6) = C,$$

si ponga $Y_n = g(X_n)$. Supponendo che $X_0 = 1$, dire se $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ è anch'essa una catena di Markov e in caso affermativo calcolarne la matrice di transizione.

Una soluzione:

1. Gli stati $\{1, 2, 3\}$ sono transitori, i rimanenti ricorrenti. Le classe chiuse irriducibili sono $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Tutte le distribuzioni invarianti sono combinazioni della forma

$$(0, 0, 0, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6),$$

dove $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in [0, 1]$ e $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1$.

2. Sì, è una catena di Markov sull'insieme degli stati $\{A, B, C\}$. Calcoliamo intanto la matrice di transizione partendo dallo stato A:

$$Q_{A\to A} = P(Y_1 = A|Y_0 = A) = P(X_1 = A|X_0 = A) = 1/6,$$

$$Q_{A\to B} = P(Y_1 = B|Y_0 = A) = P(X_1 \in \{2, 3\} |X_0 = A) = 5/6,$$

$$Q_{A\to C} = 0.$$

Anche partendo dallo stato C è immediato, perché $Q_{C\to C} = 1$, $Q_{C\to A} = Q_{C\to B} = 0$ (gli stati in C sono assorbenti). Infine $Q_{B\to A} = 0$, mentre per calcolare correttamente $Q_{B\to B}$ procediamo come segue:

$$\begin{aligned}
Q_{B\to B} &= P(X_1 \in \{2, 3\} |X_0 \in \{2, 3\}) \\
&= P(X_1 \in \{2, 3\} |X_0 = 2)P(X_0 = 2|X_0 \in \{2, 3\}) + P(X_1 \in \{2, 3\} |X_0 = 3)P(X_0 = 3|X_0 \in \{2, 3\}) \\
&= \frac{1}{2}P(X_0 = 2|X_0 \in \{2, 3\}) + \frac{1}{2}P(X_0 = 2|X_0 \in \{2, 3\}) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Da cui si ricava anche che $Q_{B\to C} = 1/2$ (eventualmente usando un argomento simile).

Per verificare la proprietà di Markov, si tratta di considerare un quasiasi cammino $\gamma = y_0 \to y_1 \to \ldots \to y_n$ e mostrare che, per qualsiasi $y_{n+1} \in \{A, B, C\}$,

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_n = y_n).$$

Si tratta di discutere tre casi: se $y_n = A$, allora l'informazione $Y_n = y_n$ coincide con $X_n = 1$, e quindi usando la proprietà di Markov per X (notiamo che le affermazioni che riguardano la Y sono in particolare affermazioni sul processo X), si trova

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 1) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_n = A).$$

Se $y_n = C$, allora sicuramente $Y_{n+1} = C$ (perché tutti gli stati $4, 5, 6$ sono assorbenti), quindi possiamo trascurare tutto il cammino precedente e scrivere solo

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_{n+1} = C).$$

Il caso meno ovvio è quando $y_n = B$, che corrisponde all'informazione $X_n \in \{2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
&P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = \\
&= P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma, X_n = 2)P(X_n = 2|Y = \gamma) \\
&\quad + P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma, X_n = 3)P(X_n = 3|Y = \gamma) \\
&= P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 2)P(X_n = 2|Y = \gamma) \\
&\quad + P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 3)P(X_n = 3|Y = \gamma)
\end{aligned}$$

avendo usato la proprietà di Markov di X per ottenere che

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma, X_n = 2) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 2)$$

e similmente per $X_n = 3$. Per quanto visto nel calcolo della matrice di transizione, otteniamo che

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 2) = \begin{cases} 0 & \text{se } y_{n+1} = A, \\ \frac{1}{2} & \text{se } y_{n+1} = B, \\ \frac{1}{2} & \text{se } y_{n+1} = C, \end{cases}$$

e similmente nel caso $X_n = 3$. Ne segue che

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 2) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 3) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_n = B),$$

e quindi

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_n = B),$$

completando la prova della proprietà di Markov.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2022/23 - Prova scritta 2023-02-15

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Valentina per recarsi al lavoro a Pisa può scegliere se usare l'auto oppure andare a piedi. La sua decisione è solamente influenzata dalle condizioni atmosferiche del giorno. Se piove, allora prende l'auto con probabilità 95%. Se non piove, la stessa probabilità scende al 25%. Introduciamo un parametro $p \in (0,1)$ che indica la probabilità che in un dato giorno piova a Pisa. Supponiamo per semplicità che sia lo stesso per tutti i giorni considerati, e che il meteo in un dato giorno sia indipendente da quello degli altri giorni. Si osserva il comportamento di Valentina per una *settimana lavorativa* di 5 giorni consecutivi.

1. Supponendo noto p, calcolare la probabilità che Valentina abbia usato l'auto esattamente per tre giorni consecutivi e i rimanenti due sia andata a piedi (dare il risultato in funzione di p).
2. Si osserva che Valentina ha usato l'auto esattamente per 3 giorni (non necessariamente consecutivi). Fornire la stima di massima verosimiglianza per p.
3. Come cambia la risposta del punto precedente se si osserva più precisamente che Valentina ha usato l'auto il lunedì, il martedì e il mercoledì (e i rimanenti giorni è andata a piedi)?

Una soluzione:

1. La probabilità che Valentina usi l'auto in un dato giorno è

$$q = p \cdot 95\% + (1-p) \cdot 25\% = 25\% + p70\%.$$

Data l'indipendenza tra i vari giorni, si ha che la probabilità che prenda l'auto tre volte consecutive è

$$3q^3(1-q)^2 = 3(25\% + p70\%)^3(75\% - p70\%)^2,$$

dove il fattore 3 è dovuto ai tre casi possibili in cui ha preso l'auto: Lun-Mar-Mer, Mar-Mer-Gio, Mer-Gio-Ven.

2. Scriviamo la verosimiglianza, ossia la probabilità (noto p) che abbia usato l'auto tre volte su 5. La densità è binomiale, quindi

$$L(p) = \binom{5}{3} q^3(1-q)^2,$$

dove $q = p \cdot 95\% + (1-p) \cdot 25\%$ come al punto precedente. Passando al logaritmo e deriviamo:

$$\partial_p \log L(p) = 3\frac{\partial_p q}{q} - 2\frac{\partial_p q}{1-q} = \left(\frac{3}{q} - \frac{2}{1-q}\right)\partial_p q.$$

imponendo che la derivata si annulli, si trova che poiché $\partial_p q = 95\% - 25\% \neq 0$, deve valere

$$\frac{3}{q} - \frac{2}{1-q} = 0,$$

ossia $q = 2/5 = 40\%$, da cui

$$25\% + p70\% = 40\%, \quad \rightarrow \quad p = 15/70 \approx 22\%.$$

3. La verosimiglianza questa volta è

$$L(p) = q^3(1-q)^2,$$

quindi i calcoli sono gli stessi e si ottiene la stessa stima.

Problema 2

La durata di un dispositivo è rappresentata da una variabile esponenziale avente media 12 mesi se funzionante, mentre la media scende a 1 mese se difettoso. Si prendono due dispositivi, uno funzionante e uno difettoso, e si mettono a confronto installandoli contemporaneamente. Poniamo T_F la durata del dispositivo funzionante, T_D quella del dispositivo difettoso (si sa quale è difettoso e quale funzionante). Supponiamo che i due tempi siano indipendenti e poniamo

$$M = \max\{T_F, T_D\}, \quad N = \min\{T_F, T_D\}.$$

1. Determinare la densità della variabile N, calcolarne il valor medio e la deviazione standard.
2. Determinare la densità della variabile M, calcolarne il valor medio e la deviazione standard.
3. Le due variabili M, N sono indipendenti?

Una soluzione:

1. Sappiamo dal corso che il minimo di variabili esponenziali indipendenti è una esponenziale di parametro avente la somma dei parametri, quindi in questo caso N è esponenziale di parametro $1/1 + 1/12 = 13/12$ (le medie sono l'inverso del parametro). Quindi il valor medio è $12/13$, la varianza è $12/13$, la deviazione standard è $\sqrt{12/13}$.

2. Ricordiamo che il massimo di variabili indipendenti la CDF data dal prodotto delle due CDF. Quindi in questo caso otteniamo (per $t > 0$)

$$\mathrm{CDF}_M(t) = \mathrm{CDF}_{T_F}(t)\,\mathrm{CDF}_{T_D}(t) = (1-e^{-t})(1-e^{-t/12}).$$

La densità si ottiene derivando (per $t > 0$, altrimenti è nulla)

$$\begin{aligned} p(M=t) &= \frac{d}{dt}\mathrm{CDF}_M(t) = e^{-t}(1-e^{-t/12}) + \frac{1}{12}e^{-t/12}(1-e^{-t}) \\ &= e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-t/12} - \frac{13}{12}e^{-t13/12}. \end{aligned}$$

Per calcolare il valor medio, scriviamo l'integrale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M] &= \int_0^\infty t p(M=t) dt = \int_0^\infty t \left[e^{-t} + \frac{1}{12} e^{-t/12} - \frac{13}{12} e^{-t13/12} \right] dt \\ &= 1 + 12 - \frac{12}{13} = 13 - \frac{12}{13} \approx 12,08\end{aligned}$$

Per la varianza,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M^2\right] &= \int_0^\infty t^2 p(M=t) dt = \int_0^\infty t^2 \left[e^{-t} + \frac{1}{12} e^{-t/12} - \frac{13}{12} e^{-t13/12} \right] dt \\ &= 2 \cdot \left(1^2 + 12^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 \right) \approx 2 \cdot 169,14.\end{aligned}$$

Per la varianza, otteniamo quindi

$$\mathrm{Var}(M) = \mathbb{E}\left[M^2\right] - \mathbb{E}[M]^2 \approx 192,$$

da cui $\sigma_M \approx 13,9$.

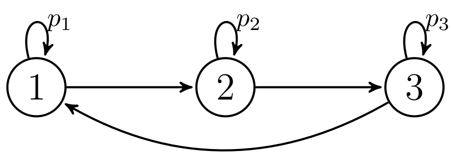
3. No, le variabili non sono indipendenti. Basta notare ad esempio che

$$P(M<1, N>1) = 0,$$

mentre $P(M<1) = \int_0^1 p(M=t)dt > 0$, $P(N>1) = \int_1^\infty p(N=t)dt > 0$, perché le densità sono strettamente positive per $t>0$.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^\infty$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo, dove $p_1, p_2, p_3 \in [0,1]$ sono parametri.



1. Al variare dei parametri p_1, p_2, p_3, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili, e dire se la catena è regolare.
2. Mostrare che la distribuzione uniforme sui tre stati è invariante se e solo se $p_1 = p_2 = p_3$. In quali casi è l'unica distribuzione invariante?
3. Supponendo $p_1 = p_2 = 1/2$, $p_3 = 1$, calcolare $P(X_3 = 2 | X_0 = 1, X_6 = 3)$.

Una soluzione:

1. Se tutti i parametri sono strettamente minori di 1, allora la catena è irriducibile (tutti gli stati comunicano tra loro). Se inoltre almeno uno è strettamente positivo, allora la

catena è anche regolare per il criterio. Se sono tutti nulli, la catena non è regolare (perché $Q^3 = I$ la matrice identica). Se alcuni parametri valgono 1, allora gli stati corrispondenti sono assorbenti, quindi ricorrenti e ciascuno (preso da solo) costituisce una classe chiusa irriducibile. I rimanenti stati sono transitori.

2. Se $p_1 = p_2 = p_3$ allora la distribuzione uniforme è invariante, ad esempio soddisfa il bilancio di flusso. Se viceversa, supponiamo che la distribuzione uniforme sia invariante. Scrivendo il bilancio di flusso, si ottiene

$$\frac{1}{3}(1-p_1) = \frac{1}{3}(1-p_3), \quad \frac{1}{3}(1-p_2) = \frac{1}{3}(1-p_1) \quad \frac{1}{3}(1-p_3) = \frac{1}{3}(1-p_2).$$

Si trova

$$1-p_1 = 1-p_3, \quad 1-p_2 = 1-p_1 \quad 1-p_3 = 1-p_2,$$

da cui $p_1 = p_2 = p_3$. Questa è l'unica distribuzione invariante se e solo se $p_1 = p_2 = p_3 < 1$ (la catena è irriducibile), altrimenti se $p_1 = p_2 = p_3$ ci sono infinite distribuzioni invarianti (tutte le distribuzioni sono invarianti).

3. Scriviamo in modo equivalente,

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2|X_0 = 1, X_6 = 3) &= \frac{P(X_3 = 2, X_6 = 3|X_0 = 1)}{P(X_6 = 3|X_0 = 1)} \\ &= \frac{P(X_6 = 3|X_3 = 2)P(X_3 = 2|X_0 = 1)}{P(X_6 = 3|X_0 = 1)}, \end{aligned}$$

avendo usato la proprietà di Markov. Per il denominatore, si tratta al solito di elencare i cammini che partono da 1 e in 6 passi (o meno) raggiungono lo stato 3 :

$$1 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^2}$$

$$1 \to 1 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^3}$$

$$1 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^3}$$

$$1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^4}$$

$$1 \to 1 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^4}$$

$$1 \to 2 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^4}$$

$$1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^5}$$

$$1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^5}$$

$$1 \to 1 \to 2 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^5}$$

$$1 \to 2 \to 2 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^5}$$

$$1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^6}$$

$$1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^6}$$

$$1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^6}$$

$$1 \to 1 \to 2 \to 2 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^6}$$

$$1 \to 2 \to 2 \to 2 \to 2 \to 2 \to 3 \quad \to \frac{1}{2^6}$$

Sommando tutte le probabilità, si trova

$$P(X_6 = 3|X_0 = 1) = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{5}{2^6}.$$

Per il numeratore, calcoliamo i cammini

$$1 \to 1 \to 1 \to 2$$

$$1 \to 1 \to 2 \to 2$$

$$1 \to 2 \to 2 \to 2$$

da cui

$$P(X_3 = 2|X_0 = 1) = \frac{3}{2^3}.$$

Per l'altro termine, usando l'omogeneità si tratta di calcolare

$$P(X_6 = 3|X_3 = 2) = P(X_3 = 3|X_0 = 2),$$

che corrisponde ai cammini

$$2 \to 2 \to 2 \to 3$$

$$2 \to 2 \to 3$$

$$2 \to 3$$

e quindi

$$P(X_6 = 3|X_3 = 2) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}.$$

In conclusione

$$P(X_3 = 2|X_0 = 1, X_6 = 3) = \frac{\frac{3}{2^3} \cdot \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{5}{2^6}} \approx 37\%.$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)

A.A. 2022/23 - Appello straordinario 2023-04-03

La durata della prova è di **90 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

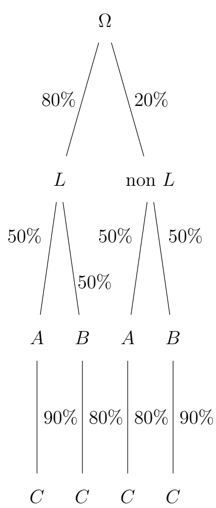
Problema 1

Un provider di servizi internet (ISP) riceve ogni giorno 1000 richieste di supporto tecnico. Di queste, 800 riguardano problemi legati alla lentezza della connessione e 200 riguardano altri problemi di connessione. L'ISP ha due squadre di supporto tecnico: Squadra A e Squadra B. Ciascuna domanda viene affidata ad una squadra, scelta con probabilità uniforme, indipendentemente dalle altre domande. La Squadra A risolve correttamente il 90% dei problemi legati alla lentezza della connessione e l'80% degli altri problemi di connessione. D'altra parte, la Squadra B risolve correttamente l'80% dei problemi legati alla lentezza della connessione e il 90% degli altri problemi di connessione. A fine giornata, si sceglie a caso una delle 1000 richieste:

1. avendo osservato solamente che è stata assegnata alla Squadra A e risolta correttamente, calcolare la probabilità che la richiesta riguardi la lentezza della connessione;
2. avendo invece osservato solamente che essa è stata risolta correttamente, è più probabile che sia stata assegnata alla Squadra A o alla Squadra B?

Una soluzione:

Poniamo $A =$ "la richiesta è assegnata alla squadra A", $B =$ non A, $C =$" la richiesta è risolta correttamente", $L =$ "la richiesta riguarda problemi di lentezza della connessione. Abbiamo dal problema il seguente grafo (manca in realtà un ulteriore livello con l'evento C, per brevità omesso).



1. Dobbiamo calcolare $P(L|A \text{ e } C)$. Usando la formula di Kolmogorov

$$P(L|A \text{ e } C) = P(\ L \text{ e } A \text{ e } C\ )/P(A \text{ e } C).$$

Aiutandoci con il grafo calcoliamo il numeratore

$$P(\ L \text{ e } A \text{ e } C\ ) = \frac{80 \cdot 1 \cdot 90}{100 \cdot 2 \cdot 100} = 0.36$$

Similmente, per il denominatore, dobbiamo sommare due rami L e (non L):

$$P(A \text{ e } C) = \frac{80 \cdot 1 \cdot 90}{100 \cdot 2 \cdot 100} + \frac{20 \cdot 1 \cdot 80}{100 \cdot 2 \cdot 100} = 0.36 + 0.08 = 0.44.$$

Di conseguenza

$$P(L|A \text{ e } C) = \frac{0.36}{0.44} = \frac{9}{11} \approx 81\%.$$

2. Dobbiamo confrontare $P(A|C)$ con $P(B|C)$. Usando ancora la formula di Kolmogorov, basterà vedere quale tra $P(A \text{ e } C)$, $P(B \text{ e } C)$ è maggiore. Usando il grafo abbiamo già calcolato

$$P(A \text{ e } C) = 0.44.$$

Calcoliamo similmente

$$P(B \text{ e } C) = \frac{80 \cdot 1 \cdot 80}{100 \cdot 2 \cdot 100} + \frac{20 \cdot 1 \cdot 90}{100 \cdot 2 \cdot 100} = 0.32 + 0.9 = 0.41.$$

Segue quindi che è più probabile che sia stata assegnata alla squadra A.

Problema 2

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, ciascuna distribuita uniformemente sull'intervallo $[0, 1]$. Si ponga

$$U = X + Y \qquad \text{e} \qquad V = X - Y.$$

1. Mostrare che U e V non sono correlate.
2. Calcolare le MGF di U e V (separatamente). U e V hanno la stessa legge?

Una soluzione:

1. Usando le proprietà di bilinearità della covarianza, abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U, V) &= \mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) \\ &= \mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Cov}(Y, Y) \\ &= \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y).\end{aligned}$$

Anche senza fare calcoli, la varianza di X è uguale a quella di Y (hanno la stessa legge uniforme). Quindi $\mathrm{Cov}(U, V) = 0$.

2. Per calcolare la MGF di U, scriviamo

$$\mathbb{E}\left[e^{tU}\right] e = \mathbb{E}\left[e^{tX} e^{tY}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] \mathbb{E}\left[e^{tY}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]\right)^2,$$

avendo usato l'indipendenza di X e Y, e il fatto che hanno la stessa legge (quindi la stessa MGF). Calcoliamo poi la MGF di X

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{e^t - 1}{t},$$

per $t \neq 0$, mentre per $t = 0$ troviamo 1. Da cui, per $t \neq 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{tU}\right] = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^2.$$

Per la MGF di V, procediamo allo stesso modo. L'unico punto da notare è che troveremo un fattore diverso:

$$\mathbb{E}\left[e^{-tY}\right] = \frac{e^{-t} - 1}{-t} = \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

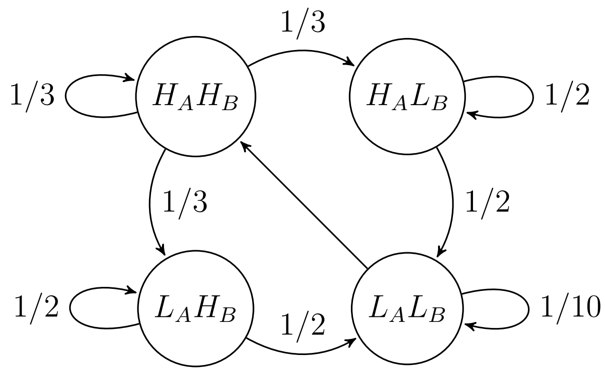
Pertanto,

$$\mathbb{E}\left[e^{tV}\right] = \frac{(e^t - 1)(1 - e^{-t})}{t^2}.$$

Le due MGF sono evidentemente diverse, quindi anche le leggi sono diverse.

Problema 3

Un'azienda manifatturiera produce due tipi di prodotti: A e B. La produzione giornaliera di ciascun prodotto può essere pianificata ed eseguita con due intensità: alto (H) e basso (L) livello di produzione, corrispondenti rispettivamente a 1000 e 100 unità di prodotto al giorno. Si può quindi rappresentare la produzione giornaliera come una catena su quattro stati $\{H_A H_B, H_A L_B, L_A H_B, L_A L_B\}$, con le probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti):



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti della catena di Markov.
2. Supponendo che la catena sia stazionaria, determinare il numero medio di unità complessivamente prodotte in un giorno dall'azienda.

Una soluzione:

La matrice di transizione è

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 9/10 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}$$

1. La catena è irriducibile, quindi la distribuzione invariante esiste ed è unica. Notiamo anche che scambiando gli stati $H_A L_B$ con $L_A H_B$, si ottiene la stessa matrice di transizione. Quindi possiamo cercare una soluzione con $\pi_{H_A L_B} = \pi_{L_A H_B} = y$. Poniamo poi $\pi_{H_A H_B} = x$ e $\pi_{L_A L_B} = z$. Per calcolare le distribuzioni invarianti, imponiamo il bilancio di flusso e la condizione $x+2y+z = 1$. Troviamo ad esempio le equazioni

$$2/3x = 9/10z, \quad 1/2y = 1/3x$$

da cui

$$y = 2/3x, \quad z = 20/27x,$$

e quindi

$$x + 4/3x + 20/27x = 1,$$

ossia

$$x = 27/83,$$

e quindi l'unica distribuzione invariante è data dal vettore

$$\pi = \frac{1}{83}(27, 18, 18, 20).$$

2. Se la catena è stazionaria, la legge marginale (in un qualsiasi istante) è data dall'unica distribuzione invariante calcolata al punto precedente. Pertanto troviamo che il numero medio di unità prodotte è

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{83}(2000 \cdot 27 + 1100 \cdot 18 + 1100 \cdot 18 + 200 \cdot 20) \approx 1176.$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)

A.A. 2022/23 - Appello del 2023-06-07

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

In un laboratorio di elettronica si ha a disposizione una scatola contenente 18 resistenze elettriche, di cui 10 resistenze da 1 Ω, 5 resistenze da 2 Ω e 3 resistenze da 5 Ω. Per un progetto, si deve estrarre (senza rimpiazzo) tre resistenze a caso dalla scatola e registrarne il valore.

1. Qual è la probabilità che le tre resistenze estratte siano da 1 Ω, 2 Ω e 5 Ω in qualsiasi ordine?
2. Se la prima resistenza estratta ha un valore di 1 Ω e l'ultima resistenza estratta ha un valore di 5 Ω, qual è la probabilità che la seconda resistenza estratta abbia un valore di 2 Ω?
3. Qual è la probabilità di estrarre tre resistenze con lo stesso valore?

Una soluzione:

1. Calcoliamo la probabilità di estrarre le tre sequenze in un ordine specifico (ad esempio $1-5-3$):

$$P(1-5-3) = \frac{10}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{16}.$$

La probabilità richiesta si ottiene moltiplicando il numero sopra per le possibili sequenze ordinate, che sono in tutto $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (si può anche elencarle), quindi vale

$$6 \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{16}.$$

2. Abbiamo visto nel corso che condizionare per l'esito di estrazioni successive è come condizionare per estrazioni precedenti (abbiamo visto per la prima estrazione, condizionando alla seconda). Pertanto la probabilità è la stessa che la terza resistenza abbia un valore di 2 Ohm, supponendo che la prima abbia 1 Ohm e la seconda 5 Ohm. Perciò si trova subito

$$\frac{5}{16}.$$

3. Per calcolare la probabilità di estrarre tre resistenze con lo stesso valore, dobbiamo considerare tre casi: tre resistenze da 1 Ω, tre resistenze da 2 Ω e tre resistenze da 5 Ω, e sommare le probabilità.

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1/2$. Si ponga $Y = \sqrt{X}$.

1. Calcolare la CDF e la densità di Y.
2. Calcolare valor medio e varianza di Y.
3. Dire se X e Y sono correlate positivamente, negativamente, oppure non correlate. *(Sugg: se Z è una gaussiana standard allora $\mathbb{E}[Z^4] = 3$)*

Una soluzione:

1. Per trovare la distribuzione di probabilità di Y, possiamo calcolare la CDF di probabilità di Y come segue: per $y > 0$:

$$P(Y \leq y) = P(X \leq y^2) = 1 - e^{-y^2/2}.$$

Derivando otteniamo $f_Y(y) = \frac{d}{dy}P(Y \leq y) = \frac{d}{dy}P(X \leq y^2) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-y^2/2})$
Svolgendo la derivata otteniamo, per $y > 0$,
$f_Y(y) = ye^{-y^2/2}$.
In alternativa si può usare la formula di cambio di variabile con $g(x) = \sqrt{x}$.

2. Per calcolare il valor medio di Y, dobbiamo calcolare

$$\int_0^\infty y^2 e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-y^2/2} dy$$

avendo usato il fatto che la funzione $y^2 e^{-y^2/2}$ è pari. Ricordando che la densità Gaussiana standard è $h(y) = e^{-y^2/2}/\sqrt{2\pi}$, otteniamo che

$$\int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}.$$

Perciò

$$\mathbb{E}[Y] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Per la varianza, basta osservare che

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \mathbb{E}[X] = 2,$$

da cui

$$\mathrm{Var}(Y) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

3. Le variabili X e Y sono positivamente correlate (intuitivamente perché Y è una funzione crescente di X). Per calcolare la covarianza tra X e Y, dobbiamo utilizzare la definizione di covarianza come segue:

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[\sqrt{X}X] - E[X]E[\sqrt{X}] = E[X^{3/2}] - E[X]E[X^{1/2}]$$

Per calcolare $E[X^{3/2}] = \mathbb{E}[Y^3]$, possiamo ragionare come nel caso del valor medio:

$$\int_0^\infty y^3 \cdot ye^{-y^2/2}dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty y^4 e^{-y^2/2}dy$$

avendo usato il fatto che la funzione $y^2e^{-y^2/2}$ è pari. Ricordando che la densità Gaussiana standard è $h(y) = e^{-y^2/2}/\sqrt{2\pi}$, otteniamo che

$$\int_{-\infty}^\infty y^4 e^{-y^2/2}dy = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^\infty y^4 e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = 3\sqrt{2\pi},$$

avendo usato che il momento quarto di una Gaussiana standard è pari a 3 (si può ottenere dalla MGF). Troviamo quindi che

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot 2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Problema 3

Si consideri una macchina che può trovarsi in uno di due stati: operativo o guasto. La macchina opera correttamente per un tempo (in giorni) casuale con distribuzione geometrica di parametro $p \in (0,1)$ e poi si guasta, ossia la probabilità che si guasti il giorno $n \geq 1$ è pari a $(1-p)^{n-1}p$. A questo punto la macchina viene riparata, ma il tecnico riparatore impiega un tempo (in giorni) casuale, con distribuzione geometrica di parametro $q \in (0,1)$: essa torna ad essere operativa dopo esattamente $n \geq 1$ giorni di fermo con probabilità $(1-q)^{n-1}q$.

1. Costruire una catena di Markov a due stati che descriva il funzionamento della macchina, dove gli stati sono:

   $0 :=$ "la macchina è operativa" $\quad 1 :=$ "la macchina è guasta".

2. Calcolare le distribuzioni invarianti della catena (in funzione di p e q)
3. Supponendo inizialmente che la macchina sia funzionante, si osserva che si rompe il ventesimo giorno, viene riparata in 2 giorni, si rompe dopo altri 23 giorni di funzionamento, e viene infine riparata in 3 giorni. È possibile stimare i parametri p e q?

Una soluzione:

La matrice di transizione della catena di Markov è:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

dove p è il parametro della distribuzione geometrica del tempo di funzionamento e q è il parametro della distribuzione geometrica del tempo di riparazione. Si può infatti verificare che la probabilità che si guasti dopo esattamente $n-1$ giorni di funzionamento corretto è data dal cammino $0 \to 0 \to \ldots \to 0 \to 1$ e quindi vale $(1-p)^{n-1}p$, e similmente per la riparazione.

2. Impostiamo il bilancio di flusso:

$$\pi_0 p = q\pi_1$$

da cui $\pi_1 = \pi_0 p/q$, e quindi

$$\pi = \pi_0(1, p/q), \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{1}{p+q}(p, q).$$

3. Scriviamo la verosimiglianza (ossia la probabilità di osservare quanto descritto supponendo p e q noti):

$$L(p,q) = (1-p)^{19}p(1-q)q(1-p)p^{22}(1-p)(1-q)^2q = (1-p)^{41}p^2(1-q)^3q^2.$$

Passando al logaritmo e derivando, si trovano le equazioni

$$\partial_p L = -41 \cdot \frac{1}{1-p} + 2\frac{1}{p} = 0,$$

$$\partial_q L = -3 \cdot \frac{1}{1-q} + 2\frac{1}{q} = 0,$$

da cui

$$p = \frac{2}{43} \quad q = \frac{2}{5}.$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)

A.A. 2022/23 - Appello del 2023-06-28

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Supponiamo di avere un'attività commerciale che riceve una media di 5 richieste di assistenza al giorno. Si assume che il numero di richieste di assistenza abbia una densità di Poisson e che i numeri relativi giorni diversi siano indipendenti tra loro.

1. Qual è la probabilità che l'attività commerciale riceva esattamente 3 richieste di assistenza in un giorno?
2. Qual è la probabilità che l'attività commerciale riceva in tutto 2 richieste di assistenza in due giorni consecutivi?
3. Sapendo che in due giorni consecutivi l'attività commerciale ha ricevuto in tutto 2 richieste di assistenza, calcolare la probabilità siano avvenute entrambe nello stesso giorno.

Una soluzione:

1. La probabilità che l'attività commerciale riceva esattamente 3 richieste di assistenza in un giorno è data dalla distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 5$, ovvero:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!} = \frac{e^{-5}5^3}{3!} \approx 14\%$$

dove X è la variabile aleatoria che rappresenta il numero di richieste di assistenza in un giorno.

2. La probabilità che l'attività commerciale riceva in tutto 2 richieste di assistenza in due giorni consecutivi è si trova considerando i vari casi: $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ (dove (a, b) indica il numero di chiamate nel primo e nel secondo giorno). Usando l'indipendenza, si trova

$$\begin{aligned} P(\text{in tutto due richieste}) &= 2P(X = 2)P(X = 0) + P(X = 1)^2 \\ &= 2e^{-10}\frac{5^2}{2!} \cdot \frac{5^0}{0!} + \left(e^{-5}\frac{5^1}{1!}\right)^2 \\ &= e^{-10} \cdot 5^2 \cdot 2 \approx 0.2\% \end{aligned} \tag{1}$$

3. Calcoliamo prima la probabilità che siano avvenute in giorni diversi, che vale

$$P(X = 1)^2 = \left(e^{-5}\frac{5^1}{1!}\right)^2.$$

Usando la definizione di probabilità condizionata, troviamo che

$$P(\text{“due giorni diversi”}|\text{in tutto due richieste}) = \frac{\left(e^{-5}\frac{5^1}{1!}\right)^2}{e^{-10}\cdot 5^2 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

quindi la probabilità che siano avvenute nello stesso giorno è pure 1/2.

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana di media $\mu = 0$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{2}$. Si definiscano le variabili

$$U = \cosh(X) = \frac{e^X + e^{-X}}{2}, \quad V = \sinh(X) = \frac{e^X - e^{-X}}{2}.$$

1. Dire se V ha densità continua e in caso affermativo calcolarla *(eventualmente il risultato può includere le inverse di funzioni trigonometriche iperboliche).*
2. Dire se U e V sono correlate positivamente, negativamente, oppure non correlate.
3. Dire se U e V sono indipendenti. *(Sugg: può essere utile l'identità* $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$*).*

Una soluzione:

1. La funzione $g(x) = \sinh(x)$ è derivabile con $g'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x) \geq 1$ per ogni x, quindi è strettamente crescente (e pertanto invertibile). Applicando la formula di cambio di variabile, otteniamo che V ha densità continua data dalla formula

$$p(U = u) = p(X = \sinh^{-1}(u))\frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(u))} = e^{-\frac{(\sinh^{-1}(u))^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}\cosh(\sinh^{-1}(u))}. \tag{2}$$

per $u \in \mathbb{R}$.

2. È richiesta di calcolare la covarianza tra U e V. Osserviamo che

$$\mathbb{E}[V] = \int_{\mathbb{R}} \sinh(x)e^{-x^2/4}\frac{1}{\sqrt{4\pi}} = 0, \tag{3}$$

perché $\sinh(x)$ è una funzione dispari. Pertanto basterà calcolare

$$\mathbb{E}[UV] = \int_{\mathbb{R}} \sinh(x)\cosh(x)e^{-x^2/4}\frac{1}{\sqrt{4\pi}} = 0 \tag{4}$$

per lo stesso motivo, $x \mapsto \sinh(x)\cosh(x)$ è una funzione dispari. Quindi le variabili non sono correlate.

3. Vediamo che però non sono indipendenti (intuitivamente è perché sono funzioni della stessa variabile X). Un modo preciso di vederlo è il seguente: partendo dall'identità

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1,$$

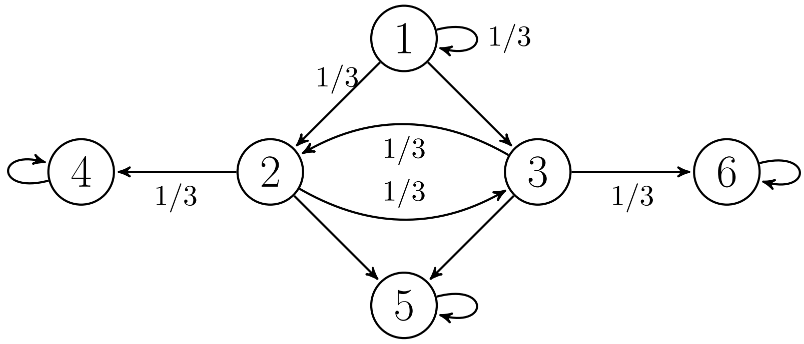
che implica $U^2 - V^2 = 1$, segue ad esempio che condizionando all'evento $A = \{-1 \leq U \leq 1\}$, si ha che $1 \leq U \leq 2$. Pertanto

$$P(1 \leq U \leq 2|A) = 1. \tag{5}$$

D'altra parte, senza condizionare per A, si trova che $P(U > 2) > 0$, infatti la X che ha densità gaussiana assume valori arbitrariamente grandi con probabilità piccola ma positiva, quindi anche la U. Pertanto $P(1 \leq U \leq 2) < 1$, e quindi le variabili non sono indipendenti.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo. Si supponga inoltre che $P(X_0 = 1) = 1$.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare *tutte* le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 5)$.
3. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$.

Una soluzione:

1. Gli stati $\{4, 5, 6\}$ sono ricorrenti (assorbenti), gli altri sono transitori. Le classi chiuse irriducibili sono $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Tutte le classi chiuse sono date da: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ e inoltre tutti i sottoinsiemi di $\{4, 5, 6\}$ (in tutto 8 classi, contando anche la classe vuota). Le distribuzioni invarianti sono, per il teorema generale visto nel corso:

$$\pi = (0, 0, 0, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \tag{6}$$

dove i tre parametri $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in [0,1]$ e soddisfano $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1$.

2. Dalla teoria vista a lezione (tutte le classi chiuse sono regolari) sappiamo che $(Q^\infty)_{ij} = \lim_{n\to\infty}(Q^n)_{ij}$ esiste per ogni $i,\ j \in \{1,\dots,6\}$. Sappiamo inoltre che le righe sono distribuzioni invarianti, quindi in particolare dobbiamo calcolare la riga corrispondente a $i = 1$, che sarà del tipo

$$(0,0,0,Q_{14}^\infty, Q_{15}^\infty, , Q_{16}^\infty).$$

Possiamo procedere in due modi: o impostiamo un sistema di equazioni per le variabili rimamenti, oppure notiamo che la catena è perfettamente simmetrica rispetto all'asse "verticale" che passa per 1 e 5 (ossia la matrice di transizione non cambia se si scambiano gli stati $4 \leftrightarrow 6$ e $2 \leftrightarrow 3$). Pertanto avremo che $Q_{14}^\infty = Q_{16}^\infty = x$, e quindi aggiungendo anche l'equazione

$$Q_{14}^\infty + Q_{15}^\infty + Q_{16}^\infty = 1, \tag{7}$$

si trova che $Q_{15}^\infty = 1 - 2x$. Con tutte queste semplificazioni, basterà quindi una sola equazione per determinare x. Senza impostare ulteriori equazioni, possiamo "collassare" gli stati 2 e 3 in un unico stato, così pure gli stati 4 e 5, con probabilità di transizione da 2 a 4 pari a un terzo, mentre la probabilità di restare in due pure pari a un terzo. Pertanto si trova che la probabilità di entrare in una delle due classi $\{4,6\}$ è $1/2$ e quindi $1 - 2x = 1/2$ e $x = 1/4$.

3. Nel punto precedente abbiamo calcolato che

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 4) = 1/4, \quad \lim_{n\to\infty} P(X_n = 6) = 1/4, \quad \lim_{n\to\infty} P(X_n = 5) = 1/2. \tag{8}$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{6} iP(X_n = i) = 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{4} = 5. \tag{9}$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)

A.A. 2022/23 - Appello del 2023-07-19

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Supponiamo che il numero di clienti che visitano un negozio di alimentari in un'ora abbia una distribuzione binomiale con parametri $n = 10$ e $p = 0.2$. Si assuma che il numero di clienti in ore diverse sia indipendente tra loro.

1. Qual è la probabilità che il negozio riceva esattamente 2 clienti in un'ora?
2. Qual è la probabilità che il negozio riceva in tutto esattamente 6 clienti in tre ore consecutive?
3. Sapendo che il negozio ha ricevuto in totale 6 clienti in tre ore consecutive, è più probabile che in almeno un'ora (delle tre) abbia ricevuto 3 o più clienti, oppure no?

Una soluzione:

1. La probabilità di ricevere esattamente 2 clienti in un'ora è data dalla densità discreta della distribuzione binomiale con $n = 10$ e $p = 0.3$ valutata in $k = 2$. Quindi:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.2^2 (1 - 0.2)^8 \approx 30\%$$

Dove X è la variabile aleatoria che rappresenta il numero di clienti in un'ora.

2. La probabilità che il negozio di alimentari riceva in esattamante 6 clienti in tre ore consecutive è ottenibile dalla densità di probabilità della somma delle variabili aleatorie binomiali indipendenti, X_1, X_2, X_3, con gli stessi parametri $n = 10$ e $p = 0.2$. Usiamo il fatto che la somma di binomiali indipendenti con lo stessa probabilità di successo p ha legge binomiale con lo stesso p ed n data dalla somma degli n, quindi $n = 30$ in questo caso,

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 6) = \binom{30}{6} 0.2^6 (1 - 0.2)^{30-6} \approx 18\%.$$

3. Poniamo A l'evento "il negozio ha ricevuto meno di 3 clienti in ogni ora". Dobbiamo calcolare

$$P(A|X_1 + X_2 + X_3 = 6) = \frac{P(A, X_1 + X_2 + X_3 = 6)}{P(X_1 + X_2 + X_3 = 6)}. \tag{1}$$

Il denominatore è già calcolato nel punto precedente. Quindi basta calcolare il numeratore. Tuttavia l'unico caso in cui può valere A e il negozio ha ricevuto esattamente 6 clienti è il caso in cui $X_1 = X_2 = X_3 = 2$. Per indipendenza, troviamo

$$P(A, X_1 + X_2 + X_3 = 6) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)P(X_3 = 2) \approx (30\%)^3 \tag{2}$$

Ne segue che la probabilità richiesta è

$$P(A|X_1 + X_2 + X_3 = 6) \approx 5\%, \tag{3}$$

e quindi è (molto) più probabile che in qualche ora abbia avuto 3 o più clienti.

Problema 2

Siano $\mu, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta > 0$ due parametri e sia X una variabile aleatoria con legge Gumbel di parametri (μ, β), ossia avente CDF data dall'espressione

$$P(X \leq x) = \exp\left(-\exp\left(-(x-\mu)/\beta\right)\right), \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

1. Dire se X ha densità continua e in caso affermativo calcolarla.
2. Dire se la variabile $2X + 1$ ha legge Gumbel e in caso affermativo determinarne i parametri.
3. Posta Y una variabile indipendente da X, ma anch'essa con legge Gumbel con gli stessi parametri (μ, β), dire se la variabile $\max\{X, Y\}$ ha legge Gumbel e in caso affermativo determinarne i parametri.

Una soluzione:

1. La CDF è differenziabile e quindi è noto che la variabile ammette densità continua data dalla derivata della CDF. Si trova quindi l'espressione per la densità, per $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} p(X = x) &= \frac{d}{dx} \exp\left(-\exp\left(-(x-\mu)/\beta\right)\right) \\ &= \frac{1}{\beta} \exp\left(-(x-\mu)/\beta - \exp\left(-(x-\mu)/\beta\right)\right). \end{aligned} \tag{4}$$

2. Possiamo procedere in due modi: usando la formula di cambio di variabile per la densità trovata sopra, oppure lavorare direttamente sulla CDF di $2X + 1$. Il secondo è più semplice, perché si trova

$$\begin{aligned} P(2X + 1 \leq z) = P(X \leq (z-1)/2) &= \exp\left(-\exp\left(-\left((z-1)/2 - \mu\right)/\beta\right)\right) \\ &\exp\left(-\exp\left(-\left(z - (2\mu+1)\right)/2\beta\right)\right), \end{aligned} \tag{5}$$

in cui riconosciamo una Gumbel di parametri $(2\mu + 1, 2\beta)$.

3. Calcoliamo la CDF del massimo $\max\{X, Y\}$, usando l'indipendenza tra le variabili:

$$\begin{aligned} P(\max\{X, Y\} \leq z) &= P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) \\ &= \exp\left(-\exp\left(-(z-\mu)/\beta\right)\right) \exp\left(-\exp\left(-(z-\mu)/\beta\right)\right) \\ &= \exp\left(-2\exp\left(-(z-\mu)/\beta\right)\right). \end{aligned} \tag{6}$$

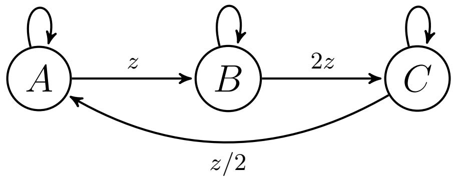
Per riconoscere anche in questo caso una opportuna Gumbel, basta scrivere $2 = \exp(\log 2)$ da cui

$$\exp\left(-2\exp\left(-(z-\mu)/\beta\right)\right) = \exp\left(-\exp\left(-\left(z - (\mu + \beta \log 2)\right)/\beta\right)\right) \tag{7}$$

e quindi riconosciamo una Gumbel di parametri $(\mu + \beta \log 2, \beta)$.

Problema 3

Lo stato di una macchina può essere *acceso* (A), *stand-by* (B), oppure *spento* (C), secondo una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ rappresentata mediante il seguente grafo, dove $z \in [0, 1/2]$ è un parametro.



1. Al variare di $z \in [0, 1/2]$ (estremi inclusi) classificare gli stati (transitori/ricorrenti) della catena e trovare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Supponendo di non conoscere inizialmente z, si accende la macchina al tempo $n = 0$ e si osserva la sequenza
$$X_0 = A, \quad X_1 = B, \quad X_2 = C, \quad X_3 = A, \quad X_4 = A, \quad X_5 = A.$$
Fornire una stima per z.
3. Supponendo ancora di non conoscere z, si osserva la macchina per un periodo molto lungo e si registra (solamente) che circa il 29% del tempo è accesa. Supponendo anche che la catena sia stazionaria, è possibile stimare z?

Una soluzione:

1. Distinguiamo i due casi $z = 0$ e $z \neq 0$. Nel primo caso tutti gli stati sono assorbenti (in particolare ricorrenti) e le distribuzioni invarianti sono tutti i vettori

$$(\pi_A, \pi_B, \pi_C) \in [0, 1]^3, \quad \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1. \tag{8}$$

Nel caso $z \neq 0$ la catena è irriducibile, tutti gli stati sono ricorrenti e l'unica distribuzione invariante si trova imponendo il bilancio di flusso. Risolvendo i soliti passaggi si trova

$$(\pi_A, \pi_B, \pi_C) = \frac{1}{7}(2, 1, 4). \tag{9}$$

2. La verosimiglianza dell'evento osservato è

$$L(z; A \to B \to C \to A \to A \to A) = z \cdot (2z) \cdot (z/2) \cdot (1 - z) \cdot (1 - z) = z^3(1 - z)^2 \tag{10}$$

Per stimare z, determiniamone il massimo:

$$L'(z) = 0 \quad 3z^2(1 - z)^3 = 2z^3(1 - z). \tag{11}$$

Escludendo i valori $z = 0$ e $z = 1$ (che comunque va escluso) si trova

$$3(1 - z) = 2z \quad z = 3/5. \tag{12}$$

Tale valore tuttavia non soddisfa la condizione $z \leq 1/2$. Siccome $L(0) = 0$ ed $L \geq 0$, si avrà quindi che L è crescente nell'intervallo $[0, 3/5]$ e poiché la stima di massima verosimiglianza va trovata comunque nell'intervallo $[0, 1/2]$, si avrà quindi che essa vale $z = 1/2$.

3. No, non è possibile stimare z soltanto usando questa informazione. Infatti supponendo che la catena sia stazionaria, segue che la distribuzione invariante è (una di quelle) trovata al punto

1. D'altra parte sappiamo che la frazione del tempo trascorso dalla catena in un preciso stato è uguale, nel limite di un tempo lungo, alla distribuzione invariante in quello stato. Però qualsiasi sia z, si trova che $\pi_A = 2/7 \approx 29\%$, quindi non permette di stimare z. L'unico caso su cui si potrebbe dire qualcosa è per $z = 0$, perché in tal caso si dovrebbe osservare che il tempo trascorso è 100% oppure 0%, quindi possiamo in effetti escludere che $z = 0$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2022/23 - Prova in itinere 2023-11-27

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un'urna contiene una 5 palline, di cui $R \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ rosse e le rimanenti blu. Il numero R non è noto. Veniamo poi informati che sono state effettuate 3 estrazioni e si è osservato nell'ordine una pallina rossa, una blu e una rossa. Tuttavia non siamo stati informati se le estrazioni sono effettuate tutte con rimpiazzo o tutte senza rimpiazzo (non supponiamo ulteriori alternative).

1. Fornire una stima di massima verosimiglianza per R, supponendo di sapere che le estrazioni siano con rimpiazzo.
2. Fornire una stima di massima verosimiglianza per R, supponendo invece di sapere invece che siano senza rimpiazzo.
3. Posta invece $M \in \{\text{con rimpiazzo}, \text{senza rimpiazzo}\}$, fornire una stima di massima verosimiglianza per la variabile congiunta (M, R).

Una soluzione:

1. Scriviamo la verosimiglianza per $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, dove A è l'evento osservato (rossa-blu-rossa) e $C =$ "estrazioni con rimpiazzo".

$$L_C(i) = L(R = i; A) = P(A|R = i, C) = \frac{i}{5} \cdot \frac{5-i}{5} \cdot \frac{i}{5} = \frac{i^2(5-i)}{5^3}. \tag{1}$$

A questo punto dobbiamo massimizzare la funzione $i \mapsto i^2(5-i)$ dove però i può assumere solo valori discreti. Calcolandone comunque la derivata si trova

$$\frac{d}{di} i^2(5-i) = 2i(5-i) - i^2 \tag{2}$$

e imponendo che si annulli si trova $\bar{i} \in \{0, 10/3\}$. Chiaramente $\bar{i} = 0$ è punto di minimo, mentre $\bar{i} = 10/3 = 3,\bar{3}$ non è accettabile come soluzione, quindi (sfruttando il fatto che L è (strettamente) crescente per $0 < i < 10/3$ e decrescente per $i > 10/3$), basterà confrontare $L_C(3) = 3^2 \cdot (5-3) = 18$ con $L_C(4) = 4^2 \cdot (5-4) = 16$. Si trova quindi che $R = 3$ è la stima di massima verosimiglianza per R.

In alternativa un calcolo esplicito della verosimiglianza nei 6 valori $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ rende

$$L(0) = \frac{0}{5^3}, \quad L(1) = \frac{4}{5^3}, \quad L(2) = \frac{12}{5^3}, \quad L(3) = \frac{18}{5^3}, \quad L(4) = \frac{16}{5^3} \quad L(5) = 0. \tag{3}$$

2. Scriviamo la verosimiglianza per $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, dove A è l'evento osservato (rossa-blu-rossa) e $S =$ "estrazioni senza rimpiazzo". Troviamo (aiutandosi eventualmente con un grafo)

$$L_S(i) = L(R = i; A) = P(A|R = i, S) = \frac{i}{5} \cdot \frac{5-i}{4} \cdot \frac{i-1}{3} = \frac{i(i-1)(5-i)}{5 \cdot 4 \cdot 3}. \tag{4}$$

A questo punto dobbiamo massimizzare la funzione $i \mapsto i(i-1)(5-i)$ dove però i può ancora assumere solo valori discreti. Calcolandone esplicitamente i valori si trova

$$L(0) = 0, \quad L(1) = 0, \quad L(2) = \frac{6}{60}, \quad L(3) = \frac{12}{60}, \quad L(4) = \frac{12}{60}, \quad L(5) = 0. \tag{5}$$

Quindi abbiamo trovato che sia $R = 3$ che $R = 4$ sono ugualmente valide stime di massima verosimiglianza.

3. Abbreviamo S = senza rimpiazzo, C = con rimpiazzo. Stavolta la verosimiglianza per la congiunta è

$$L((S, i); A) = L_S(i), \quad L((C, i); A) = L_C(i). \tag{6}$$

Basta quindi confrontare $L_S(3) = 12/60 = 24/120$ con $L_C(3) = 18/125$ e quindi otteniamo che una stima di massima verosimiglianza è M = "senza rimpiazzo", $R = 3$, ossia che le estrazioni sono senza rimpiazzo e ci sono 3 (inizialmente) tre palline rosse nell'urna. Ma anche $R = 4$ e M = "senza rimpiazzo" ha la stessa verosimiglianza, quindi è pure una stima valida.

Problema 2

Sia T una variabile aleatoria continua a valori reali, avente densità

$$f(t) = \begin{cases} c\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t/2} & \text{per } t > 0, \\ 0 & \text{per } t \leq 0. \end{cases}$$

dove $c > 0$ è una opportuna costante.

1. Posta X una variabile aleatoria con densità gaussiana standard, calcolare la densità di X^2.
2. Determinare c e calcolare $\mathbb{E}[T]$.
3. Dire per quali $s \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{MGF}_T(s) < \infty$ (non è richiesto calcolarla).

Una soluzione:

1. Usiamo la formula di cambio di variabile con la funzione $g(x) = x^2$, che è invertibile rispettivamente su $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, con $g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$ per ogni $y > 0$ (escludiamo 0 dall'immagine per semplicità). Poiché $|g'(x)| = 2|x|$ e quindi $|g'(g^{-1}(y))| = 2\sqrt{y}$ per ogni $y > 0$, troviamo

$$p(X^2 = y) = p(X = \sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + p(X = -\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}. \tag{7}$$

Pertanto la densità risulta uguale a f con $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

2. Dai calcoli svolti nel punto precedente, sappiamo che per $c = 1/\sqrt{2\pi}$ la funzione f risulta la densità di una variabile aleatoria. Poiché un tale c se esiste è unico, ne segue che $c = 1/\sqrt{2\pi}$ sarà il valore anche per la densità di T. Inoltre la densità di T è uguale a quella della variabile X^2 calcolata al punto sopra, quindi T e X^2 hanno la stessa legge e quindi

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty tp(T = t)dt = \int_0^\infty yp(X^2 = y)dy = \mathbb{E}\left[X^2\right]. \tag{8}$$

Ma abbiamo già visto a lezione che per una gaussiana standard si ha $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathrm{Var}(X) = 1$.

3. Possiamo procedere in due modi: o usando ancora che $\mathrm{MGF}_T(s) = \mathrm{MGF}_{X^2}(s)$ oppure ragionando direttamente sull'integrale che definisce MGF_T. Scegliamo il primo modo: poiché

$$\begin{aligned} \mathrm{MGF}_T(s) = \mathrm{MGF}_{X^2}(s) = \mathbb{E}\left[\exp\left(sX^2\right)\right] &= \int_{-\infty}^\infty \exp\left(sx^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \exp\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)x^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx \end{aligned} \tag{9}$$

abbiamo che $\mathrm{MGF}_T(s) < \infty$ se e solo se $s - 1/2 < 0$, ossia $s < 1/2$. In tali casi è anche possibile calcolare (ma non era richiesto) riconducendosi ad una densità gaussiana standard con il cambio di variabile $z = \sqrt{1-2s}x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(1-2s)x^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{\sqrt{1-2s}}. \tag{10}$$

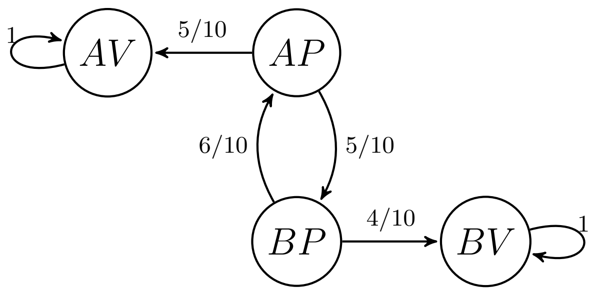
Problema 3

Alice e Beatrice giocano al seguente gioco di carte[1]. Alice ha inizialmente una sola carta di cuori in mano, mentre Beatrice ha due carte: una di cuori e una di picche. Nessuna rivela le proprie carte all'altra. Alternandosi, ciascuna deve pescare dalla mano dell'altra una carta e metterla nella propria mano, e la prima giocatrice che pesca dall'altra una carta di cuori vince e il gioco termina. La prima a pescare è Alice, che però è leggermente più abile di Beatrice nel farle pescare la carta di picche, mentre Beatrice è un po' meno abile. Precisamente, supponiamo che la probabilità che Alice peschi la carta di picche dalla mano di Beatrice sia sempre 50%, mentre la probabilità che Beatrice peschi la carta di picche da Alice sia sempre 60%.

1. Descrivere la partita tra Alice e Beatrice come una catena di Markov su un insieme di quattro stati: AP = "Alice pesca da Beatrice", BP = "Beatrice pesca da Alice", AV = "Alice vince", BV = "Beatrice vince". Classificarne gli stati e determinare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare la probabilità che Alice vinca alla sua seconda estrazione dalla mano di Beatrice.
3. Determinare la probabilità che il gioco sia vinto da Alice.

Una soluzione:

Possiamo rappresentare la catena di Markov con il seguente grafo:



1. GLi stati AP e BP sono transitori, i rimanenti ricorrenti. Le classi chiuse (irriducibili) sono due $\{AV\}$, $\{BV\}$. Tutte le distribuzioni invarianti sono del tipo $(0, 0, \alpha, 1-\alpha)$, dove $\alpha \in [0, 1]$ e abbiamo ordinato gli stati come AP, BP, AV, BV.
2. Sappiamo che inizialmente la catena si trova in AP. Si tratta di calcolare la probabilità del cammino $AP \to BP \to AP \to AV$, che è $50\% \cdot 60\% \cdot 50\%$.

[1] una versione semplificata del gioco dell'asino, detto anche della vecchia o dell'uomo nero

3. Si tratta di calcolare $Q^{\infty}_{AP\to AV}$. Impostiamo una prima equazione (proveniente dal sistema $Q^{\infty} = Q^{\infty} Q$):

$$Q^{\infty}_{AP\to AV} = Q_{AP\to AV} Q^{\infty}_{AV\to AV} + Q_{AP\to BP} Q^{\infty}_{BP\to AV} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2} Q^{\infty}_{BP\to AV} \tag{11}$$

da cui vediamo che dobbiamo anche impostare un'equazione per $Q^{\infty}_{BP\to AV}$:

$$Q^{\infty}_{BP\to AV} = Q_{BP\to BV} Q^{\infty}_{BV\to AV} + Q_{BP\to AP} Q^{\infty}_{AP\to AV} = \frac{6}{10} Q^{\infty}_{AP\to AV}. \tag{12}$$

Sostituendo nella prima equazione, troviamo quindi

$$Q^{\infty}_{AP\to AV} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} Q^{\infty}_{AP\to AV} \quad \Rightarrow \quad Q^{\infty}_{AP\to AV} = \frac{5}{7}. \tag{13}$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Prova in itinere 2024-01-10

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un'azienda vuole acquistare un algoritmo per il riconoscimento automatico della presenza di incendi tramite immagini. Nel mercato sono a disposizione proposte simili, che però dichiarano capacità di riconoscimento leggermente diverse. Per esempio, la casa di software *IAlpha* dichiara che in un esperimento in cui sono state presentate 100 immagini di principio di incendio, il proprio algoritmo ne ha rilevato la presenza in 99 casi. La casa di software *IBeta* dichiara invece che in un esperimento simile, ma su 1000 immagini, il proprio algoritmo ne ha rilevato la presenza in 990 casi.

Poniamo $\alpha \in (0,1)$ la probabilità che l'algoritmo di *IAlpha* rilevi correttamente la presenza di fuoco in un'immagine di un principio di incendio, e similmente $\beta \in (0,1)$ per l'algoritmo di *IBeta*. Supponiamo che i due algoritmi lavorino indipendentemente e che immagini diverse siano classificate le une indipendentemente dalle altre.

1. Fornire una stima di massima verosimiglianza per α.
2. Si vuole stimare α usando un approccio bayesiano e si suppone la densità a priori per α uniforme (continua) su $(0,1)$. Calcolare esplicitamente la densità a posteriori.
3. Ripetere i due punti precedenti per β (ma indicare la densità a posteriori a meno di una costante moltiplicativa). A parità di costo, quale tra le due proposte suggerireste all'azienda di scegliere?

Una soluzione:

1. Scriviamo la verosimiglianza (basta considerare soltanto l'informazione relativa ad α per l'ipotesi di indipendenza). Sapendo α, si tratta di 100 esperimenti indipendenti ripetuti, ciascuno cor probabilità α di successo. Quindi la verosimiglianza è data dalla densità binomiale

$$L(\alpha; 99 \text{ su } 100) = P(99 \text{ successi su } 100|\alpha) = \binom{100}{99}\alpha^{99}(1-\alpha). \tag{1}$$

Passando al logaritmo e derivando si trova

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log L(\alpha) = \frac{99}{\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}. \tag{2}$$

ponendo la derivata nulla si trova con facili calcoli che $\alpha_{MLE} = 99\%$.

2. Stavolta supponiamo che $\alpha \in (0,1)$ sia una variabile aleatoria con distribuzione uniforme a priori (indichiamola con X). Usando la formula di Bayes si trova la densità a posteriori

$$p(X = \alpha|99 \text{ su } 100) \propto p(X = \alpha)L(\alpha; 90 \text{ su } 100) = c\alpha^{99}(1-\alpha), \tag{3}$$

dove la costante c è data da

$$c = \left(\int_0^1 \alpha^{99}(1-\alpha)d\alpha\right)^{-1}. \tag{4}$$

Calcoliamo facilmente

$$\int_0^1 \alpha^{99}d\alpha = \frac{1}{100}, \quad \int_0^1 \alpha^{100}d\alpha = \frac{1}{101}, \tag{5}$$

da cui

$$c = 100 \cdot 101. \tag{6}$$

3. Se ripetiamo la stessa cosa per β troviamo $\beta_{MLE} = 990/1000 = 99\%$ e

$$p(\beta|990 \text{ su } 1000) = c\beta^{990}(1-\beta)^{10}, \tag{7}$$

per una costante c opportuna (non serve calcolarla esplicitamente). Vediamo che se ci limitiamo alla stima di massisma verosimiglianza i due algoritmi sembrerebbero equivalenti, tuttavia dovrebbe essere intuitivo che *IBeta* fornisce una indicazione più precisa – e quindi l'azienda dovrebbe optare per questo. Per giustificarlo, basterebbe disegnare un grafico delle due densità a posteriori, osservando che la seconda è molto più concentrata intorno al valore 99% rispetto alla prima. Per vederlo analiticamente, possiamo ad esempio calcolare l'approssimazione di Laplace intorno a 99% in entrambi i casi. Troviamo infatti che la derivata seconda del logaritmo densità di α è

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\log L(\alpha) = -\frac{99}{\alpha^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}, \tag{8}$$

che valutata in $\alpha = 99\%$ darebbe il valore $-100^2(1+1/99)$. Possiamo quindi approssimare α con una Gaussiana di media 99% e varianza $\approx 1/100$ (quindi una deviazione standard di circa $1/10$) Similmente la derivata seconda della densità di β in 99% darebbe il valore $-1000^2 \cdot (1+1/990)$ quindi approssimiamo β con una Gaussiana con la stessa media ma varianza $\approx 1/1000$, quindi una deviazione standard di circa $1/32$, quindi più piccola.

Problema 2

Dato $m \in \mathbb{R}$, sia X una variabile aleatoria gaussiana reale di parametri $\mathcal{N}(m, 1)$, avente quindi funzione caratteristica $\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = e^{itm - t^2/2}$.

1. Calcolare, in funzione di m, $\mathbb{E}[\cos(X)]$ e $\mathbb{E}[\mathrm{sen}(X)]$. *(Sugg: usare la funzione caratteristica)*
2. Calcolare, in funzione di m, $\mathrm{Var}(\cos(X))$ e $\mathrm{Var}(\mathrm{sen}(X))$. *(Sugg: usare un'identità per* $\cos(2x)$*)*
3. Determinare per quali valori di m le variabili $\cos(X)$, $\mathrm{sen}(X)$ sono positivamente correlate.

Una soluzione:

La funzione caratteristica indicata è un suggerimento, perché troviamo

$$\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \mathbb{E}\left[\cos(tX)\right] + i\mathbb{E}\left[\operatorname{sen}(tX)\right] = e^{itm-t^2/2} = e^{-t^2/2}\cos(tm) + ie^{-t^2/2}\operatorname{sen}(tm) \tag{9}$$

e quindi eguagliando rispettivamente le parte reali e le parti immaginarie scopriamo che

$$\mathbb{E}\left[\cos(tX)\right] = e^{-t^2/2}\cos(tm) \quad \mathbb{E}\left[\operatorname{sen}(tX)\right] = e^{-t^2/2}\operatorname{sen}(tm). \tag{10}$$

Usiamo allora queste identità per rispondere alle tre domande.

1. Basta porre $t = 1$ nelle identità e troviamo che

$$\mathbb{E}\left[\cos(X)\right] = e^{-1/2}\cos(m) \quad \mathbb{E}\left[\operatorname{sen}(X)\right] = e^{-1/2}\operatorname{sen}(m). \tag{11}$$

2. Per calcolare la varianza, calcoliamo prima il momento secondo. Poiché $\cos^2(X)+\operatorname{sen}^2(X) = 1$, basterà calcolare il momento secondo di $\cos(X)$. D'altra parte si ha l'identità trigonometrica $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ e quindi

$$\mathbb{E}\left[\cos^2(X)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1+\cos(2X)}{2}\right] = \frac{1+e^{-2}\cos(2m)}{2} \tag{12}$$

avendo usato l'identità preliminare con $t = 2$. Troviamo poi

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{sen}^2(X)\right] = 1 - \mathbb{E}\left[\cos^2(X)\right] = \frac{1-e^{-2}\cos(2m)}{2}, \tag{13}$$

e quindi

$$\operatorname{Var}(\cos(X)) = \frac{1+e^{-2}\cos(2m)}{2} - e^{-1}\cos^2(m), \quad \operatorname{Var}(\operatorname{sen}(X)) = \frac{1-e^{-2}\cos(2m)}{2} - e^{-1}\operatorname{sen}^2(m). \tag{14}$$

3. Ricordiamo anche l'identità $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, per cui troviamo

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{sen}(X)\cos(X)\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\operatorname{sen}(2x)\right] = \frac{e^{-2}}{2}\operatorname{sen}(2m) \tag{15}$$

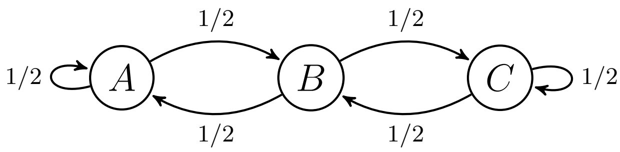
Usando le formule dei valori attesi calcolate al punto 1 abbiamo quindi

$$\operatorname{Cov}(\operatorname{sen}(X), \cos(X)) = \frac{e^{-2}}{2}\operatorname{sen}(2m) - e^{-1}\operatorname{sen}(m)\cos(m) = \frac{1}{2}e^{-1}\operatorname{sen}(2m)(e^{-1}-1). \tag{16}$$

Poiché l'ultimo fattore è negativo, le variabili sono positivamente correlate solo quando $\operatorname{sen}(2m) < 0$, ossia $m \in ((k+1/2)\pi, (k+1)\pi)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 3

Anna, Bruna e Carla hanno un nuovo videogioco, in cui però si può giocare soltanto una alla volta. Stabiliscono una regola per i turni di gioco secondo la catena di Markov rappresentata in figura, dove gli stati indicano le iniziali della giocatrice cui spetta il turno, e la giocatrice per il primo turno è scelta uniformemente tra le tre.



1. Bruna ritiene di essere sfavorita perché dopo ogni partita deve per forza passare il turno di gioco ad Anna o a Carla (mentre loro no): ha ragione? (*calcolare le distribuzioni invarianti*)
2. Calcolare la probabilità che nei primi 10 turni Bruna non abbia mai giocato.
3. Sapendo che nei primi 10 turni Bruna non ha mai giocato, calcolare la probabilità che giochi all'undicesimo turno.

Una soluzione:

1. Poiché la catena è irriducibile, quindi ha una sola distribuzione invariante. Per calcolarla basta imporre il bilancio di flusso. In A, troviamo l'equazione $\mu_A 2 = \mu_B/2$, quindi $\mu_A = \mu_B$. Similmente, troviamo dal bilancio di flusso in C che $\mu_C/2 = \mu_B/2$ e quindi anche $\mu_B = \mu_C$. Pertanto $\mu_A = \mu_B = \mu_C$ e l'unica distribuzione invariante è quella uniforme sui tre stati. Questa è anche la distribuzione iniziale, quindi la catena è stazionaria. Questo significa che ad ogni istante la probabilità che si trovi in A è 1/3, lo stesso per B e lo stesso per C. Quindi da questo punto di vista Bruna ha la stessa probabilità di giocare delle altre due, ossia non è sfavorita.

2. Dobbiamo calcolare i cammini che visitano 10 stati ma che non passano mai per B. Vista la struttura della catena, essi sono solo due $A \to A \to A \to \ldots \to A$, con peso 2^{-9} (ci sono 9 transizioni) e $B \to B \to \ldots \to B$, con probabilità 2^{-9}. La probabilità iniziale è uniforme sui tre stati, quindi otteniamo

$$P(\text{Bruna non gioca nei primi 10 turni}) = \frac{1}{3}2^{-9} + \frac{1}{3}2^{-9}. \tag{17}$$

3. Sappiamo per certo che al decimo turno Beatrice non ha giocato, quindi con probabilità 1 la catena sarà in A o in C (notiamo che non è necessario sapere cosa è accaduto prima, per la proprietà di Markov). D'altra parte non è neppure necessario sapere la probabilità con cui la catena si trova in A e quella con cui si trova in C, perché da qualsiasi stato dei due parta, con probabilità 1/2 la catena al tempo successivo si troverà in B. Pertanto la probabilità richiesta è 1/2.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Prova in itinere 2024-01-29

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Il numero di email che arrivano in una casella di posta in un dato giorno è modellizzato mediante una variabile aleatoria avente legge Poisson di parametro $\lambda > 0$. Si supponga inoltre che in giorni diversi il numero di email in arrivo siano variabili indipendenti, tutte con lo stesso parametro λ.

1. Calcolare il momento secondo (in funzione di λ) della variabile che indica il numero totale di email ricevute in cinque giorni diversi.
2. Si contano le email ricevute in cinque giorni diversi, e si registrano i risultati: 30, 15, 20, 13 e 2 email rispettivamente. Fornire una stima di massima verosimiglianza per λ.
3. Supponendo invece di osservare che il numero totale di email ricevute in cinque giorni diversi è pari a 80, dire se la stima di massima verosimiglianza per λ è diversa rispetto a quella del punto precedente.

Una soluzione:

1. Le variabili dei numeri nei cinque giorni diverse (X_1, X_2, ..., X_5) sono tra loro indipendenti. Ricordiamo inoltre che il valor medio di una Poisson di parametro λ è appunto λ, e pure la varianza è λ. Per linearità del valor medio e indipendenza tra le variabili, si avrà quindi che il numero totale nei cinque giorni ha valor medio 5λ e varianza 5λ. Il momento secondo si ottiene sommando alla varianza il quadrato del valor medio, e quindi vale $5\lambda(5\lambda + 1)$.

2. Scriviamo la verosimiglianza per λ:

$$L(\lambda; X_1 = 30, X_2 = 15, X_3 = 20, X_4 = 13, X_5 = 2) \propto \lambda^{30+15+30+13+2} e^{-5\lambda} = \lambda^{80} e^{-5\lambda}. \tag{1}$$

Con i soliti passaggi troviamo che $\lambda_{MLE} = 80/5 = 16$.

3. Stavolta l'informazione è che nei cinque giorni il numero totale è ≥ 80. Usando il fatto che la somma di Poisson indipendenti ha legge Poisson, la variabile somma delle X_i è Poisson con parametro 5λ, perciò

$$L(\lambda; \text{somma} = 80) = (5\lambda)^{80} \frac{e^{-5\lambda}}{80!}. \tag{2}$$

Sappiamo però dal conto del punto precedente che il massimo della funzione $\lambda \mapsto \lambda^{80} e^{-5\lambda}$ è per $\lambda_{MLE} = 16$, quindi il massimo della nuova verosimiglianza è lo stesso.

Problema 2

Siano X, Y variabili gaussiane reali standard e indipendenti e si ponga $Z = X + Y$.

1. Calcolare la densità di $\log |Z|$.
2. Calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio (X, Z) e determinare se le due marginali sono tra di loro indipendenti.
3. Si osserva che $Z = 1$. Fornire una stima per il valore di X.

Una soluzione:

1. È una applicazione del cambio di variabile. Però dobbiamo prima osservare che Z ha densità gaussiana $\mathcal{N}(0, 2)$ e trasformare di conseguenza la densità di Z con la funzione $g(z) = \log |z|$. L'inversa (generalizzata) è $u \mapsto g^{-1}(u) = \{e^u, e^{-u}\}$. La derivata è $g'(z) = sgn(z)/|z| = 1/z$, per cui troviamo $|g'(g^{-1}(u))| = e^{-u}$ (in entrambi i casi) e di conseguenza

$$p(g(Z) = u) = p(Z = e^u)\frac{1}{|g'(g^{-1}(u))|} = 2\exp\left(-e^{2u}/4\right)\frac{e^u}{\sqrt{2\pi \cdot 2}}. \tag{3}$$

2. Le due variabili non sono indipendenti, poiché $\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, X) = 0 + 1 = 1$ sono positvamente correlate. D'altra parte $(X, Y) \mapsto (X, X + Y)$ è una trasformazione lineare affine di un vettore gaussiano, quindi (X, Z) è un vettore gaussiano. La media è il vettore nullo $(0, 0)$ mentre la matrice di covarianza è

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

3. Possiamo applicare la formula di Bayes:

$$\begin{aligned} p(X = x|X + Y = 1) &\propto p(X + Y = 1|X = x)p(X = x) \propto p(x + Y = 1|X = x)e^{-x^2/2} \\ &\propto p(Y = 1 - x)e^{-x^2/2} = e^{-\frac{1}{2}\left((1-x)^2+x^2\right)}. \end{aligned} \tag{5}$$

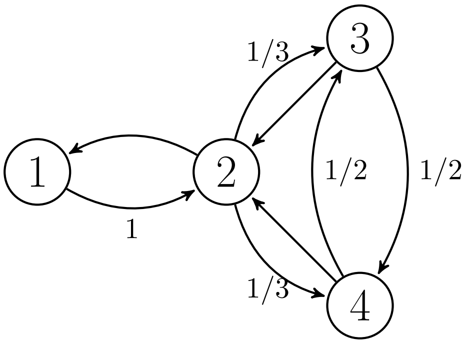
Vediamo che la densità di X condizionale a $X + Y = 1$ è ancora gaussiana. Per stimare il valore di x determiniamo ad esempio la sua moda (che comunque coinciderebbe con la media o la mediana, essendo gaussiana) e dopo i soliti passaggi (logaritmo e cambio di segno), vediamo che dobbiamo minimizzare

$$x \mapsto (1 - x)^2 + x^2 \tag{6}$$

che è chiaramente minima per $x = 1/2$. Ne segue che possiamo fornire la stima puntuale di X con il valore $1/2$.

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con matrice di transizione Q rappresentata graficamente in figura.



1. Classificare gli stati della catena e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Dire se la catena è regolare. In caso affermativo determinare il più piccolo $n \geq 1$ per cui tutte le componenti della matrice Q^n sono strettamente positive.
3. Supponendo la catena sia stazionaria, si osserva che $X_2 = 1$. Determinare lo stato (o gli stati) da cui è più probabile che la catena sia partita al tempo 0.

Una soluzione:

1. La catena è irriducibile. Esiste un'unica distribuzione invariante π. Per evidente simmetria possiamo già dire che $\pi_3 = \pi_4$. Impostando il bilancio di flusso otteniamo

$$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 \quad \pi_2 = \pi_1 + \pi_3/2 + \pi_4/2 = \pi_2/3 + \pi_3 \tag{7}$$

da cui

$$\pi = c\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \tag{8}$$

e quindi $c = 3/8$.

2. Sì la catena è regolare (anche se non soddisfa il criterio). Si trova $n = 4$ ($n = 3$ non è sufficiente perché non è possibile ritornare in 1 partendo da 1)

3. Usiamo la formula di Bayes,

$$P(X_0 = i|X_2 = 1) = \frac{P(X_0 = i)P(X_2 = 1|X_0 = i)}{P(X_2 = 1)}. \tag{9}$$

Dovendo determinare il valore i più probabile basterà confrontare i numeratori. Osserviamo che

$$(P(X_2 = i|X_0 = 1))_{i=1,\dots,4} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \tag{10}$$

Ricordando l'espressione trovata per π, calcoliamo quindi

$$(P(X_0 = i|X_2 = 1))_{i=1,\dots,4} = c\left(\frac{1}{9}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right). \tag{11}$$

Troviamo che tutti gli stati 1, 3 e 4 hanno probabilità massima.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Prova scritta 2024-02-14

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un ristorante per il pranzo di lavoro propone un menù a base di carne (C) oppure un menù vegetariano (V). Ci sono due tipologie di clienti: i vegetariani, che quindi ogni volta a pranzo scelgono il menù V, e gli "onnivori", che ogni volta a pranzo scelgono uno a caso tra il menù C (con probabilità 90%) e l'alternativa V, indipendentemente dalle volte precedenti. Si stima inoltre che in generale i vegetariani siano il 20% tra i clienti del ristorante. Aldo è un cliente del ristorante: non si sa se sia effettivamente vegetariano ma in tutte le k occasioni in cui ha pranzato lì si è osservato che ha sempre scelto il menù V (dove $k \geq 0$ è un parametro).

1. Calcolare (in funzione di k) la probabilità che Aldo sia vegetariano.
2. Qual è la probabilità (in funzione di k) che Aldo scelga il menù C al $(k+1)$-esimo pranzo?
3. Per quali k si ha che è più probabile che Aldo al $(k+1)$-esimo pranzo scelga il menù V rispetto al menù C?

Una soluzione:

1. Dobbiamo calcolar la probabilità che Aldo sia vegetariano $=: A_V$ condizionata all'informazione $B_k :=$"in k pasti ha scelto sempre V". Se poniamo A_V^c l'alternativa "Aldo è onnivoro", la forma di Bayes darebbe

$$P(A_V|B_k) = P(B_k)|A_V)P(A_V)/\left[P(B_k|A_V)P(A_V) + P(B_k|A_V^c)P(A_V^c)\right].$$

Sappiamo dal testo che

$$P(A_V) = 20\%, \quad P(A_V^c) = 80\%, \quad P(B_k|A_V) = 1 \quad P(B_k|A_V^c) = (10\%)^k = 10^{-k}$$

Troviamo allora

$$P(A_V|B_k) = \frac{1}{1 + 4 \cdot 10^{-k}},$$

mentre

$$P(A_V^c|B_k) = 1 - P(A_V|B_k) = \frac{4 \cdot 10^{-k}}{1 + 4 \cdot 10^{-k}}.$$

2. Poniamo $C_k :=$ "Aldo prende carne per la prima volta alla $k+1$-esima occasione". Se sappiamo A_V e B_k allora la probabilità è 0, mentre se sappiamo A_V^c e B_k la probabilità è $9/10$. Ne segue che per la formula di disintegrazione

$$P(C_k|B_k) = P(C_k|B_k \text{ e } A_V)P(A_V|B_k) + P(C_k|B_k \text{ e } A_V^c)P(A_V^c|B_k)$$
$$0 \cdot P(A_V|B_k) + \frac{9}{10} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-k}}{1 + 4 \cdot 10^{-k}}.$$

la probabilità richiesta è quindi

$$P(C_k|B_k) = \frac{9}{10} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-k}}{1 + 4 \cdot 10^{-k}}.$$

3. Abbiamo calcolato dal punto precedente la probabilità di C_k. Si tratta di trovare i valori di k per cui tale probabilità è $< 1/2$. Troviamo quindi

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-k}}{1 + 4 \cdot 10^{-k}} < 1/2$$

ossia

$$\frac{9}{5} \cdot 2 \cdot 10^{-k} < \frac{1}{2} + 2 \cdot 10^{-k}$$

da cui

$$10^{-k} < \frac{5}{16} \approx 0.33$$

che vale già per $k \geq 1$. Quindi già dopo una sola volta in cui Aldo chiede il menù V, è più probabile che alla volta successiva chieda il menù V.

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria continua a valori reali avente densità data dalla funzione

$$p(X = x) = c \cdot e^{-|x|} \quad \text{per } x \in \mathbb{R},$$

dove c è una opportuna costante.

1. Determinare c e calcolare il valore atteso di X.
2. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{MGF}_X(t) < \infty$.
3. Determinare la funzione quantile di X, $q_X : (0, 1) \to \mathbb{R}$.

Una soluzione:

1. Si ha $c = 1/2$. Per il valore atteso basta osservare che la densità è una funzione pari (e l'integrale improprio che definisce il valore atteso è ben definito) quindi $\mathbb{E}[X] = 0$.
2. Basta osservare che

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx-|x|} dx < \infty$$

solo se $|t| < 1$ (altrimenti l'integranda non è infinitesima a $-\infty$ oppure a $+\infty$)

3. Per calcolare la funzione quantile, osserviamo intanto che per $\alpha = 1/2$ (la mediana) si ha $q_X(\alpha) = 0$. Per $\alpha < 1/2$, dobbiamo determinare x tale che

$$\mathrm{CDF}_X(x) = \alpha,$$

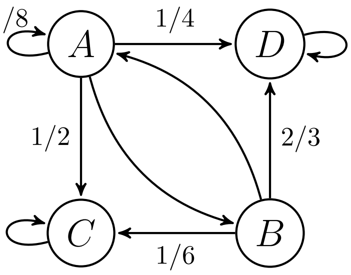
ma allora avremo $x < 0$, quindi con un cambio di variabile

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|y|} dy = \frac{1}{2}\int_{-x}^{\infty} e^{-y} dy = \frac{1}{2}e^{x}.$$

troviamo quindi $q_X(\alpha) = \log(2\alpha)$. Per il caso $\alpha > 1/2$, osserviamo che essendo la densità pari vale $q_X(\alpha) = -q_X(1 - \alpha)$, quindi $q_X(\alpha) = -\log(2(1 - \alpha))$.

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con matrice di transizione Q rappresentata graficamente in figura.



1. Classificare gli stati della catena e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty}(Q^n)_{i,j}$ per ogni $i, j \in \{A, B, C, D\}$.
3. Si sa inizialmente che $X_0 = A$ oppure $X_0 = B$. Dopo un tempo n molto grande (praticamente infinito) si osserva che $X_n = C$. Stimare X_0.

Una soluzione:

1. Gli stati $\{A, B\}$ sono transitori. Gli stati C e D sono ricorrenti (assorbenti) e costituiscono ciascuno una classe chiusa irriducibile. Pertanto le distribuzioni invarianti sono tutte della forma (ordinando gli stati nell'ordine alfabetico)

$$(0, 0, \alpha, 1 - \alpha)$$

al variare di $\alpha \in [0, 1]$.

2. Tutte le classi chiuse irriducibili sono regolari (ovviamente, essendo costituite da un singolo stato). Pertanto sappiamo dalla teoria che il limite esiste. Poniamo Q^∞ tale limite. Per calcolarlo osserviamo che, se partiamo dagli stati assorbenti, banalmente vale $Q^\infty_{C,\cdot} = (0, 0, 1, 0)$, e $Q^\infty_{D,\cdot} = (0, 0, 0, 1)$. D'altra parte se partiamo dallo stato A avremo $Q^\infty_{A,\cdot} = (0, 0, \alpha, 1 - \alpha)$ mentre $Q^\infty_{B,\cdot} = (0, 0, \beta, 1 - \beta)$ per opportuni α e $\beta \in [0, 1]$. Per determinarli impostiamo il sistema $Q^\infty = Q \cdot Q^\infty$. Bastano in realtà due equazioni:

$$Q^\infty_{AC} = Q_{AA}Q^\infty_{AC} + Q_{AC}Q^\infty_{CC} + Q_{AB}Q^\infty_{BC} + Q_{AD}Q^\infty_{DC}$$

ossia

$$\alpha = \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{8}\beta$$

e

$$Q^\infty_{BC} = Q_{BA}Q^\infty_{AC} + Q_{BC}Q^\infty_{CC} + Q_{BD}Q^\infty_{DC}$$

ossia

$$\beta = \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6} \cdot 1$$

Troviamo quindi le equazioni

$$7\alpha = 4 + \beta, \quad 6\beta = \alpha + 1$$

che risolte danno

$$\alpha = \frac{25}{41}, \quad \beta = \frac{11}{41}.$$

3. Calcoliamo la verosimigilanza

$$L(X_0 = A; X_n = C) = P(X_n = C | X_0 = A) = (Q^n)_{AC} \approx \frac{25}{41},$$

avendo usato il risultato del punto precedente e l'approssimazione $n \to \infty$. Similmente,

$$L(X_0 = B; X_n = C) = P(X_n = C | X_0 = B) = (Q^n)_{BC} \approx \frac{11}{41}.$$

Ne segue che la stima di massima verosimigilanza per X_0 è A, ossia è più probabile che inizialmente la catena si trovasse in A.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Appello straordinario 2024-04-04

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un sistema di telecomunicazioni ha due dispositivi per la trasmissione dati, A e B. A volte, per errori di trasmissione, i dati inviati da ciascuno dei dispositivi possono essere corrotti. Si stima che il dispositivo A abbia una probabilità del 50% di inviare dati corrotti, mentre il dispositivo B è più affidabile, ossia corrompe i dati con probabilità 5%, ad ogni invio, indipendentemente dalle volte precedenti.

L'ingegner Luca è un po' (troppo) sbadato e ha messo nella stessa scatola i due dispositivi, che dall'esterno sono indistinguibili. Perciò decide di condurre un esperimento in cui trasmette gli stessi dati per 5 volte consecutive. Tuttavia, ogni volta sceglie completamente a caso uno dei due dispositivi, indipendentemente dalle volte precedenti. Ad ogni trasmissione, Luca verifica se i dati sono corrotti o meno.

1. Calcolare la probabilità che Luca osservi dati corrotti in 4 trasmissioni su 5 (in qualsiasi ordine).
2. Sapendo che Luca ha osservato dati corrotti in 4 trasmissioni su 5, calcolare la probabilità che non abbia mai utilizzato il dispositivo B per la trasmissione.
3. Sapendo che Luca ha osservato dati corrotti in 4 trasmissioni su 5, calcolare la probabilità che abbia utilizzato il dispositivo B esattamente 1 volta.

Una soluzione:

1. Dal testo deduciamo che si tratta di 5 esperimenti indipendenti, ciascuno con probabilità di "successo" (ossia di inviare dati corrotti)

$$\begin{aligned} P(\text{“osserva dati corrotti”}) &= P(\text{'sceglie } A\text{'})P(\text{'}A \text{ corrompe i dati'}) + P(\text{'sceglie } B\text{'})P(\text{'}B \text{ corrompe i dati'}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100} = 0.275. \end{aligned} \tag{1}$$

Possiamo dedurne quindi che la probabilità di osservare 4 "successi" su 5 esperimenti è data dalla densità binomiale

$$P(\text{'osserva 4 corrotte su 5'}) = \binom{5}{4}(0.275)^4(1-0.275) = 5\cdot(0.275)^4\cdot 0.725 \approx 2\%. \tag{2}$$

2. Poniamo C_4 = 'osserva 4 corrotte su 5' e A_5 = 'Luca ha sempre usato il dispositivo A'. Per Bayes,

$$P(A_5|C_4) = \frac{P(A_5)\cdot P(C_4|A_5)}{P(C_4)}. \tag{3}$$

Il denominatore è stato calcolato nel punto precedente. Per il numeratore, troviamo

$$P(A_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \tag{4}$$

e

$$P(C_4|A_5) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5. \tag{5}$$

Si trova $P(A_5|C_4) \approx 24\%$.

3. Poniamo $B_1 =$ "Luca ha usato B una volta sola". Troviamo

$$P(B_1|C_4) = P(B_1 \text{ e } C_4)/P(C_4). \tag{6}$$

Il denominatore è già stato calcolato. Per il numeratore, supponiamo ad esempio che la sequenza sia $AAAAB$, la cui probabilità è $1/2^5$. Allora la probabilità che Luca osservi i dati corrotti 4 volte (ossia i dati corretti una volta sola) è $4 \cdot (50\%)^4 \cdot 5\% + (50\%)^4 \cdot 95\%$ (si tratta di determinare quale dei 5 tentativi ha trasmesso correttamente). Notiamo che tale probabilità non dipende dall'ordine e quindi (ad esempio usando la formula di disintegrazione sulle 5 possibili sequenze $AAAAB$, $AAABA$, $AABAA$, $ABAAA$, $BAAAA$) la probabilità cercata è

$$P(C_4 \text{ e } B_1) = \frac{5}{2^5} \cdot \left[4 \cdot (50\%)^4 \cdot 5\% + (50\%)^4 \cdot 95\%\right] \tag{7}$$

Si trova infine

$$P(B_1|C_4) = \frac{\frac{5}{2^5} \cdot \left[4 \cdot (50\%)^4 \cdot 5\% + (50\%)^4 \cdot 95\%\right]}{5 \cdot (0.275)^4 \cdot 0.725} \approx 54\%. \tag{8}$$

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria continua a valori reali avente densità data dalla funzione

$$p(X = x) = c \cdot \begin{cases} e^{-x} & \text{per } x \geq 0, \\ \frac{1}{|x-1|^3} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

dove c è una opportuna costante.

1. Determinare c.
2. Calcolare la mediana di X. Dire in particolare se è positiva o negativa (o nulla).
3. Calcolare la densità di $Y = X^2$ (se esiste).

Una soluzione:

1. La costante c si trova imponendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(X = x)dx = 1. \tag{9}$$

Si trova

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(X = x)dx &= c\left[\int_0^{\infty} e^{-x}dx + \int_{-\infty}^{0} |x-1|^{-3}dx\right] \\ &= c\left[1 + \int_0^{\infty} |1-x|^{-3}dx\right] \\ &= c\,[1 + 1/2] = 3c/2 \end{aligned} \tag{10}$$

concludiamo che $c = 2/3$.

2. Per la mediana dobbiamo prima calcolare la $\mathrm{CDF}_X(t)$. Se $t \le 0$, troviamo

$$\begin{aligned} P(X \le t) &= \int_{-\infty}^{t} p(X = x)dx = c\int_{-\infty}^{t} |x-1|^{-3}dx \\ &= c\int_{-t}^{\infty} |1-x|^{-3}dx = c\frac{(1-y)^{-2}}{-2}|_{-t}^{\infty} = \frac{(1+t)^{-2}}{3}. \end{aligned} \tag{11}$$

dove nell'ultima equazione abbiamo usato che $c = 2/3$. Troviamo in particolare che $P(X \le 0) = 1/3$, quindi la mediana è positiva. Per $t \ge 0$ troviamo che

$$P(X \le t) = P(X \le 0) + P(0 \le X \le t) = \frac{1}{3} + c\int_0^t e^{-x}dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-e^{-t}). \tag{12}$$

Dobbiamo quindi trovare $t \ge 0$ in modo che l'espressione sopra valga $1/2$. Si ha pertanto

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-e^{-t}) \quad \leftrightarrow \quad e^{-t} = 3/4 \tag{13}$$

e quindi la mediana vale $\log(4/3)$ (logaritmo in base naturale).

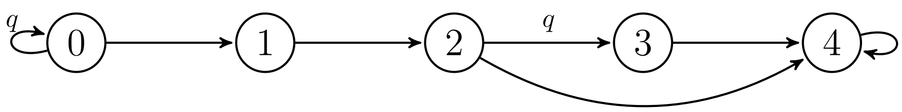
3. Poiché $y = g(x) = x^2$ soddisfa le ipotesi del cambio di variabile (generalizzato), con derivata $|g'(x)| = 2|x|$ e inversa $g^{-1}(y) = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$ per $y > 0$, $g^{-1}(0) = \{0\}$ e $g^{-1}(y) = \emptyset$ se $y < 0$, troviamo (per $y > 0$)

$$p(Y = y) = \frac{1}{3\sqrt{y}}\left[\frac{1}{(1+\sqrt{y})^3} + e^{-\sqrt{y}}\right], \tag{14}$$

mentre $p(Y = y) = 0$ se $y \le 0$.

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\ge0}$ con matrice di transizione Q rappresentata graficamente in figura, dove $q \in [0,1]$ è un parametro, e $X_0 = 0$.



1. Al variare del parametro $q \in [0,1]$ classificare gli stati della catena e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Al variare del parametro $q \in [0,1]$, calcolare $P(X_5 = 4)$.
3. Si supponga che il parametro q sia anch'esso una variabile aleatoria, distribuito a priori con una densità continua uniforme su $[0,1]$. Avendo osservato $X_5 = 4$, calcolare la densità a posteriori di q. Dire se è più probabile $q > 1/2$ o $q < 1/2$.

Una soluzione:

1. Se $0 < q < 1$ allora tutti gli archi hanno peso strettamente positivo, quindi l'unico stato ricorrente (assorbente) è 4 e i rimanenti sono transitori. L'unica distribuzione invariante è $\pi = (0,0,0,0,1)$ (ordinando gli stati nel modo naturale). Lo stesso discorso vale nel caso $q = 0$. Se $q = 1$ allora gli stati 0 e 4 sono ricorrenti (ciascuno costituisce una

classe chiusa irriducibile) e i rimanenti sono transitori, quindi le distribuzioni invarianti sono infinite e tutte del tipo $\pi = (\alpha, 0, 0, 0, 1-\alpha)$ per $\alpha \in [0, 1]$.

2. Poiché sappiamo che $X_0 = 0$, dobbiamo calcolare i pesi dei cammini che partono da 0 e arrivano in 4 in 5 passi. Troviamo solo i cammini

- $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 4 \to 4$ con peso $(1-q)^2$,
- $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 4$, con peso $q(1-q)$,
- $0 \to 0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 4$ con peso $q(1-q)^2$,
- $0 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$ con peso $q \cdot (1-q) \cdot 1 \cdot q \cdot 1 = q^2(1-q)$,
- $0 \to 0 \to 0 \to 1 \to 2 \to 4$ con peso $q \cdot q \cdot (1-q) \cdot 1 \cdot (1-q) = q^2(1-q)^2$.

Concludiamo che la probabilità cercata è

$$\begin{aligned} P(X_5 = 4) &= (1-q)^2 + q(1-q) + q(1-q)^2 + q^2(1-q) + q^2(1-q)^2 \\ &= (1-q)\left[1 - q + q + q(1-q) + q^2 + q^2(1-q)\right] \\ &= (1-q)(1 + q + q^2 - q^3) \\ &= 1 - 2q^3 + q^4. \end{aligned} \tag{15}$$

3. Avendo osservato $P(X_5 = 4)$, dobbiamo calcolare la densità a posteriori per q, data dalla formula di Bayes (caso continuo/discreto): per $x \in [0, 1]$,

$$p(q = x | X_5 = 4) \propto p(q = x) \cdot P(X_5 = 4 | q = x) \propto P(X_5 = 4 | q = x) \tag{16}$$

dove $P(X_5 = 4|q = x)$ è stata calcolata al punto precedente. Troviamo quindi

$$p(q = x|X_5 = 4) = c\left(1 - 2x^3 + x^4\right) \tag{17}$$

dove c è da determinare. Integrando tra 0 e 1, imponendo che l'integrale faccia 1 e ricordando cho $\int_0^1 x^n dx = 1/(n+1)$, si trova

$$c = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{10}{7}. \tag{18}$$

Per capire invece se sia più probabile che $q < 1/2$ o $q > 1/2$, basta integrare la densità trovata tra 0 e $1/2$, per trovare

$$P(q < 1/2|X_5 = 4) = \frac{10}{7} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{2^4 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5}\right] \approx 67\% > 1/2, \tag{19}$$

quindi è più probabile che sia $q < 1/2$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Appello 2024-06-05

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un gruppo di studenti e studentesse deve determinare una tra tre candidate (Alice, Bruna e Carla) per la rappresentanza in un'assemblea straordinaria del corpo universitario. Ogni voto si esprime dichiarando un ordine (strettamente) decrescente di preferenza tra le tre candidate (ad esempio un voto "ACB" indica che Alice è la preferita, poi segue Carla e infine Bruna). Prima di procedere al voto, si stima che, per ciascun voto espresso:

- la probabilità che Alice preceda Bruna in ordine di preferenza è $3/4$,
- la probabilità che Alice sia la prima in ordine di preferenza è $2/3$,
- la probabilità che il voto espresso sia ABC è $1/2$,
- la probabilità che Carla sia l'ultima in ordine di preferenza è $3/4$

e ciascun voto sia espresso indipedentemente dagli altri.

1. Per ciascun possibile ordine di preferenza tra le tre candidate, calcolare la probabilità che esso venga espresso.
2. Calcolare la probabilità che Bruna risulti la seconda in ordine di preferenza.
3. Si osserva che in un voto espresso Alice è la prima in ordine di preferenza. È più probabile che sia Bruna o Carla la seconda in ordine di preferenza?

Una soluzione:

1. I possibili ordini sono 6: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Le probabilità date sono

$$\begin{aligned} P(ABC \text{ o } ACB \text{ o } CAB) &= \frac{3}{4} \\ P(ABC \text{ o } ACB) &= \frac{2}{3} \\ P(ABC) &= \frac{1}{2} \\ P(ABC \text{ o } BAC) &= \frac{3}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

Usando la regola della somma (additività), poiché gli ordini sono tra loro un sistema di alternative, si trova

$$P(ACB) = P(ABC \text{ o } ACB) - P(ABC) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \tag{2}$$

$$P(BAC) = P(ABC \text{ o } BAC) - P(ABC) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \tag{3}$$

$$P(CAB) = P(ABC \text{ o } ACB \text{ o } CAB) - P(ABC \text{ o } ACB) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}. \tag{4}$$

Osserviamo infine che

$$P(ABC \text{ o } ACB \text{ o } CAB\text{o}BAC) = P(ABC \text{ o } ACB \text{ o } CAB) + P(BAC) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \tag{5}$$

Da questo deduciamo che le ultime due alternative rimaste, BCA e CBA hanno entrambe probabilità zero.

2. È richiesta la probabilità

$$P(ABC \text{ o } CBA) = P(ABC) + P(CBA) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

3. Dobbiamo confrontare $P(ABC|ABC \text{ o } ACB)$ con $P(ACB|ABC \text{ o } ACB)$. Per la formula della probabilità condizionata, basta confrontare (i numeratori) $P(ABC) = 1/2$ con $P(ACB) = 1/6$ e quindi otteniamo che è più probabile che la seconda sia Bruna.

Problema 2

Siano θ_1, θ_2 due variabili aleatorie indipendenti uniformi continue a valori in $[-\pi, \pi]$ e si definiscano le due variabili aleatorie

$$X = 2\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2), \quad Y = 2\,\mathrm{sen}(\theta_1) + \mathrm{sen}(\theta_2).$$

1. Calcolare valore atteso e varianza di X.
2. Calcolare la covarianza tra X e Y.
3. Dire se X e Y sono indipendenti.

Una soluzione:

1. Conviene osservare/ricordare gli integrali definiti

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) d\theta = 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Per il valore atteso, grazie alla proprietà di linearità troviamo

$$\mathbb{E}[X] = 2\mathbb{E}[\cos(\theta_1)] + \mathbb{E}[\cos(\theta_2)] = 2 \cdot 0 + 0 = 0 \tag{7}$$

avendo usato il primo dei due integrali notati sopra. Per la varianza, usando l'indipendenza tra θ_1 e θ_2, che implica l'indipendenza tra $\cos(\theta_1)$ e $\cos(\theta_2)$, troviamo

$$\mathrm{Var}\, X = 4\,\mathrm{Var}(\cos(\theta_1)) + \mathrm{Var}(\cos(\theta_2)) = 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \tag{8}$$

avendo usato il secondo integrale definito (la varianza coincide con il momento secondo essendo il valore atteso nullo).

2. Per calcolare la covarianza, usiamo le proprietà di bilinearità

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(2\cos(\theta_1), 2\sin(\theta_1)) + \mathrm{Cov}(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) \tag{9}$$

dove gli altri termini si sono cancellati per indipendenza. A questo punto ricordando che il valore atteso di $\cos(\theta_1)$ e $\cos(\theta_2)$ sono nulli, per concludere basta notare che

$$\mathbb{E}[\cos(\theta_1)\sin(\theta_1)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta = 0 \tag{10}$$

essendo l'integranda dispari e l'intervallo di integrazione centrato sull'origine.

3. Le variabili X e Y non sono indipendenti. Intuitivamente questo segue dal fatto che seno e coseno soddisfano la relazione trigonometrica $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$, quindi se consideriamo l'evento $Y = 3$, in cui necessariamente deve valere $\sin(\theta_1) = 1$, $\sin(\theta_2) = 1$ troviamo che $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) = 0$, quindi necessariamente $X = 0$, mentre senza sapere nulla su Y la variabile X non è sempre nulla (abbiamo visto che ha una varianza non nulla). Più rigorosamente, possiamo considerare un piccolo valore $\varepsilon \in (0,1)$ e notare che nell'evento $Y \geq 3 - \varepsilon$ si ha necessariamente $\sin(\theta_1) \geq 1 - \varepsilon$ e $\sin(\theta_2) \geq 1 - \varepsilon$. Di conseguenza si ha $|\cos(\theta_1)| \leq \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} = \sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)} \leq \sqrt{\varepsilon}$ e similmente $|\cos(\theta_2)| \leq \sqrt{\varepsilon}$ e pertanto $|X| \leq 3\sqrt{\varepsilon}$. Ma allora $\mathrm{Var}(X|Y \geq 3 - \varepsilon) \leq 9\varepsilon$, mentre $\mathrm{Var}(X) = 5/2$, che è necessariamente diverso se ε è abbastanza piccolo. D'altra parte la varianza dipende solamente dalla legge, e se fossero indipendenti la legge di X non cambia qualsiasi informazione si venga a conoscere su Y.

Problema 3

Il bambino Aldo deve effettuare delle estrazioni da un'urna contenente 2 palline rosse (R), 2 blu (B) e 2 verdi (V). Ogni volta che estrae una pallina, Aldo la rimette nell'urna, ma con certezza non la ripesca nell'estrazione immediatamente successiva, scegliendo quindi a caso una pallina tra le altre 5. La prima estrazione è invece con probabilità uniforme sulle 6 palline.

1. Dire se gli esiti delle estrazioni effettuate da Aldo sono rappresentabili da variabili aleatorie indipendenti.
2. Rappresentare la sequenza dei colori delle palline estratte da Aldo come una catena di Markov sull'insieme degli stati $\{R, B, V\}$, e determinarne tutte le distribuzioni invarianti.
3. Si osserva che la terza pallina estratta da Aldo è rossa. Come cambia la probabilità che la prima pallina estratta da Aldo sia rossa? è maggiore o minore di $1/3$?

Una soluzione:

1. No, le estrazioni successive non sono indipendenti, perché mentre alla prima estrazione si ha $P(X_1 = R) = 1/3$ (essendo uniforme sulle 6 palline) e pure alle estrazioni successive, ad esempio $P(X_2 = R) = 1/3$ per simmetria tra i tre colori (il problema non cambia se si scambiano tra loro le etichette dei tre colori), mentre abbiamo $P(X_2 = R|X_1 = R) = 1/5$ per la regola di estrazione descritta. (Osserviamo che si può rispondere più facilmente a questa domanda anche dopo aver costruito la catena del punto seguente.)

2. È possibile rappresentare gli esiti come una catena di Markov perché Aldo comunque 'dimentica' gli esiti delle estrazioni passate (quindi vale la proprietà di Markov) e inoltre la probabilità di transizione da un'estrazione alla successiva è omogenea nel tempo. Se l'insieme degli stati è $\{R, V, B\}$ (nell'ordine) troviamo la matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \tag{11}$$

È una matrice irriducibile (regolare) e bistocastica, quindi l'unica distribuzione invariante è quella uniforme sui tre colori.

3. Osserviamo che la catena è stazionaria, quindi $P(X_i = \cdot) = 1/3$ per ogni colore e per ogni estrazione i. Per Bayes si ha

$$P(X_1 = R|X_3 = R) = P(X_3 = R|X_1 = R)P(X_1 = R)/P(X_3 = R) = P(X_3 = R|X_1 = R). \tag{12}$$

Sommando i pesi dei cammini $R \to R \to R$ $(1/5 \cdot 1/5)$, $R \to B \to R$ $(2/5 \cdot 2/5)$ e $R \to V \to R$ $(2/5 \cdot 2/5)$ troviamo

$$P(X_3 = R|X_1 = R) = \frac{9}{25} > \frac{1}{3}. \tag{13}$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Appello 2024-06-25

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un'agenzia di viaggi organizza gite per gruppi di clienti. Ci sono due tipologie di gite: gite culturali (C) e gite naturalistiche (N). I clienti dell'agenzia possono essere di due categorie: amanti della cultura e amanti della natura.

Gli amanti della cultura scelgono le gite culturali C con probabilità 90%, mentre gli amanti della natura scelgono le gite naturalistiche N con probabilità 80% (indipendentemente dalle precedenti). Si stima inoltre che il 30% dei clienti siano amanti della cultura, il 70% siano amanti della natura.

Preso un cliente a caso,

1. calcolare la probabilità che in 3 gite abbia scelto due volte la gita culturale C e una volta la naturalistica N;
2. sapendo che su 3 gite ha scelto due volte la gita culturale C e una volta la naturalistica N, calcolare la probabilità che sia un amante della cultura;
3. sapendo che su 3 gite ha scelto due volte la gita culturale C e una volta la naturalistica N, calcolare la probabilità che alla gita successiva scelga la gita culturale.

Una soluzione:

1. Poniamo $X \in \{C, N\}$ una variabile che indica il tipo di cliente: $X = C$ è amante della cultura, $X = N$ se amante della natura, e Y il numero di gite culturali scelte su 3 volte. Vale $P(X = C) = 3/10$, $P(X = N) = 7/10$. Abbiamo che, condizionatamente a $X = C$, Y è binomiale di parametri $(3, 9/10)$, mentre condizionatamente a $X = N$, Y è binomiale di parametri $(3, 2/10)$. Pertanto

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= P(Y = 2|X = C)P(X = C) + P(Y = 2|X = N)P(X = N) \\ &= 3\left(\frac{9}{10}\right)^2 \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} + 3\left(\frac{2}{10}\right)^2 \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \\ &\approx 14\% \end{aligned}$$

2. Per la formula di Bayes, troviamo

$$\begin{aligned} P(X = C|Y = 2) &= \frac{P(Y = 2|X = C)P(X = C)}{P(Y = 2)} \\ &= \frac{3\left(\frac{9}{10}\right)^2 \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10}}{3\left(\frac{9}{10}\right)^2 \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} + 3\left(\frac{2}{10}\right)^2 \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10}} \\ &\approx 52\%. \end{aligned}$$

3. Poniamo $Z \in \{C, N\}$ la scelta della quarta gita del cliente. Per la formula di decomposizione (tenendo presente l'informazione $I = \{Y = 2\}$ troviamo

$$\begin{aligned} P(Z = C|Y = 2) &= P(Z = C|X = C, Y = 2)P(X = C|Y = 2) + P(Z = C|X = N, Y = 2)P(X = N|Y = \\ &= P(Z = C|X = C)P(X = C|Y = 2) + P(Z = C|X = N)P(X = N|Y = 2) \\ &= \frac{9}{10}P(X = C|Y = 2) + \frac{2}{10}(1 - P(X = C|Y = 2)), \end{aligned}$$

per cui ora basta solo inserire l'espressione per $P(X = C|Y = 2)$ trovata al punto precedente. Con l'approssimazione $P(X = C|Y = 2) \approx 52\%$ troviamo

$$P(Z = C|Y = 2) \approx 56\%.$$

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria uniforme (continua) su un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (dove $a < b$ sono parametri) e si ponga $Y = X^2$. Al variare di a e b,

1. descrivere la densità di Y,
2. calcolare la covarianza tra X e Y,
3. dire se X e Y sono indipendenti.

Una soluzione:

1. Si tratta di applicare la formula di cambio di variabile con $g(x) = x^2$ sull'intervallo $[a, b]$. Dobbiamo distingure 3 casi (poi in realtà si riducono a due): $a < b \leq 0$, $0 \leq a < b$ e il terzo $a \leq 0 \leq b$ in cui g non è invertibile. In ogni caso la densità di Y è positiva solo nell'intervallo $g([a, b])$, che è uguale a $[b^2, a^2]$ nel primo caso, $[a^2, b^2]$ nel secondo e $[0, \max(a^2, b^2)]$ nel terzo.

La derivata di g è $g'(x) = 2x$ e l'immagine inversa di $y \geq 0$ è data da $x = \left\{\pm\sqrt{y}\right\}$. Tenendo presente i tre casi sopra si trovano le formule:

$$p(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)2\sqrt{y}} & \text{per } b^2 < y < a^2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

nel primo caso. Nel secondo caso,

$$p(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)2\sqrt{y}} & \text{per } a^2 < y < b^2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nel terzo caso,

$$p(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)\sqrt{y}} & \text{per } 0 \leq y \leq \min\left\{a^2, b^2\right\}, \\ \frac{1}{(b-a)2\sqrt{y}} & \text{per } \min\left\{a^2, b^2\right\} < y \leq \max\left\{a^2, b^2\right\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Basta usare la formula $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, per cui $\mathbb{E}X = (a + b)/2$,

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X^2 = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

e

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X^3 = \int_a^b x^3 \frac{dx}{b-a} = \frac{b^4 - a^4}{4(b-a)} = \frac{(b^2 + a^2)(a + b)}{4}.$$

Mettendo insieme troviamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Y) &= \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{(a + b)(b^3 - a^3)}{6} = \frac{(b^2 + a^2)(a + b)}{4} - \frac{(b^2 + ab + a^2)(a + b)}{6} \\ &= \frac{1}{12}(a + b)\left(b^2 + a^2 - 2ab\right) = \frac{(a - b)^2(a + b)}{12}. \end{aligned}$$

3. Dalla formula sopra vediamo che la covarianza non è mai nulla a meno che $a = -b$. Se la covarianza non è nulla le variabili non sono indipendenti. Nel caso $a = -b$ comunque le variabili non sono indipendenti. Ad esempio basta osservare che

$$P(Y > a^2/4) = P(|X| > a/2) = 1/4$$

ma

$$P(Y > a^2/4||X| \leq a/2) = P(|X| > a/2||X| \leq a/2) = 0.$$

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sull'insieme degli stati $\{1, 2, 3\}$ con matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & p & (1-p) \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ (1-p) & p & 0 \end{pmatrix}$$

dove $p \in [0, 1]$ è un parametro.

1. Al variare di p, classificare gli stati della catena e calcolarne tutte le distribuzioni invarianti.
2. Supponendo che $X_0 = 1$ e $X_2 = 2$, dire se è più probabile che sia $X_1 = 2$ o $X_1 \neq 2$ (la risposta può variare in funzione di p).
3. Supponendo che la catena sia stazionaria, si osserva che $X_2 = 2$. È possibile fornire una stima per p?

Una soluzione:

1. La catena è chiaramente invariata se sostituiamo lo stato 1 con lo stato 3. Ne segue che $\pi_1 = \pi_3$ per la distribuzione invariante. Imponiamo il bilancio di flusso nello stato 1:

$$\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_2 + (1-p)\pi_3$$

da cui usando che $\pi_1 = \pi_3$ troviamo

$$p\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_2,$$

e quindi $\pi_2 = 4p\pi_1$. Troviamo quindi un vettore $\propto (1, 4p, 1)$ e quindi esplicitamente $\pi = \frac{1}{2(1+2p)}(1, 4p, 1)$.

2. Supponendo $X_0 = 1$ basta contare i pesi dei cammini lunghi due che terminano in 2, che sono solamente $1 \to 2 \to 2$, con probabilità $p/2$ e $1 \to 3 \to 2$, con probabilità $(1-p)p$. La probabilità che $X_1 = 2$ vale quindi

$$P(X_1 = 2|X_0 = 1, X_2 = 2) = \frac{p/2}{p/2 + (1-p)p}$$

Poiché $p/2 > (1-p)p$ se $1/2 > 1-p$, ossia $p > 1/2$, segue che è più probabile che sia $X_1 = 2$ nel caso $p > 1/2$.

3. Supponendo la catena stazionaria, la probabilità dell'evento osservato è $2p/(1+2p)$, che quindi può servire da verosimiglianza. Massimizzando la verosimiglianza troviamo quindi che $p = 1$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Appello 2024-07-17

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un'azienda di consegne si occupa di prodotti alimentari e per la cura della persona. Ciascuna consegna contiene un numero di prodotti alimentari rappresentato da una variabile Poisson di parametro λ_a, e un numero di prodotti per la cura della persona rappresentato da una variabile Poisson di parametro λ_c: i due numeri sono indipendenti tra loro e indipendenti per ciascuna consegna.

1. Calcolare (in funzione di λ_a e λ_c) il valor medio e la varianza del numero complessivo di prodotti in 10 consegne.
2. Sapendo che in 10 consegne sono stati portati 300 prodotti, di cui 200 alimentari e 100 per la cura della persona, fornire una stima di λ_a e λ_c.
3. Sapendo invece solamente che in 10 consegne sono stati portati 300 prodotti, è possibile fornire una stima separatamente per λ_a e λ_c?

Una soluzione:

1. Il valor medio è dato dalla somma dei valor medi, quindi $\mathbb{E}[N] = 10 * (\lambda_a + \lambda_c)$. Per indipendenza, la varianza si somma e ricordando che la varianza di una Poisson è data dal parametro, troviamo $\operatorname{Var} N = 10 * (\lambda_a + \lambda_c)$.

2. Usiamo il fatto che la somma di Poisson indipendenti è pure Poisson (si sommano i parametri): troviamo la verosimiglianza

$$L(\lambda_a, \lambda_c) \propto e^{-10(\lambda_a+\lambda_c)} \lambda_a^{200} \lambda_c^{100}. \tag{1}$$

che è massima quando $\lambda_a = 20$, $\lambda_c = 10$.

3. Scrivendo la verosimiglianza in questo caso si ottiene

$$L(\lambda_a, \lambda_c) \propto e^{-10(\lambda_a+\lambda_c)} (\lambda_a + \lambda_c)^{300}. \tag{2}$$

Non avendo informazioni a priori su λ_a, λ_c, possiamo solo trovare una stima per $\lambda_a + \lambda_c$ (in particolare otteniamo la stima $\lambda_a + \lambda_c = 30$). Ogni scelta di parametri λ_a, λ_c che somma a 30 è una possibile stima di massima verosimiglianza (però non è unica).

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria che segue una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \ln(10)$. Poniamo $Y = \log_{10} X$.

1. Determinare la densità di Y.
2. Calcolare la funzione quantile di Y.
3. Supponendo di osservare che $Y > 4$, calcolare la densità della variabile $X - 10^4$.

Una soluzione:

1. Per ogni $y \in \mathbb{R}$, scriviamo

$$P(Y > y) = P(\log_{10} X > y) = P(X > 10^y) = e^{-\lambda 10^y} = 10^{-10^y}. \tag{3}$$

Derivando e cambiando segno si ottiene quindi la densità:

$$p(Y = y) = (\ln(10)^2 10^{-10^y} \cdot 10^y. \tag{4}$$

2. Avendo trovato la funzione di sopravvivenza, la funzione quantile si ottiene invertendola (siamo nel caso continuo): dato $\alpha \in (0, 1)$, si ha

$$10^{-10^{q(\alpha)}} = 1 - \alpha \tag{5}$$

da cui

$$q(\alpha) = \log_{10}(-\log_{10}(1 - \alpha)). \tag{6}$$

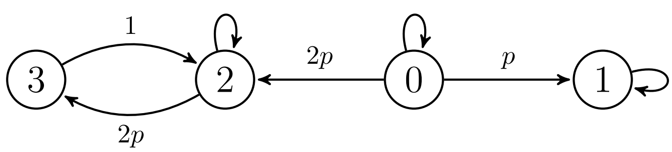
3. L'evento $Y = \log_{10}(X) > 4$ coincide con $X > 10^4$. Ne segue che $X - 10^4$ è una variabile non negativa. Calcolando la funzione di sopravvivenza, per $t > 0$ si trova

$$P(X - 10^4 > t | X > 10^4) = \frac{P(X > 10^4 + t)}{P(X > 10^4)} = \frac{\exp\left(-\lambda(10^4 + t)\right)}{\exp\left(-\lambda 10^4\right)} = \exp\left(-\lambda t\right) = 10^{-t}, \tag{7}$$

ossia $X - 10^4$ ha densità esponenziale di parametro $\lambda = \ln(10)$.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sull'insieme degli stati $\{0, 1, 2, 3\}$ con matrice di transizione rappresentata in figura



dove $p \in [0, 1/3]$ è un parametro.

1. Al variare di p, classificare gli stati della catena e calcolarne tutte le distribuzioni invarianti.
2. Supponendo di sapere che $X_0 = 0$, si osserva poi l'evento

$$A = \{\text{“}X_1 = 0 \text{ e } X_2 = 1\text{” oppure “}X_1 = X_2 = 2\text{”}\}.$$

   Fornire una stima di massima verosimiglianza per p.
3. Calcolare (in funzione di p) la probabilità $\lim_{n \to \infty} P(X_n = 1 | X_0 = 0)$

Una soluzione:

1. Se $p = 0$ lo stato 3 è transitorio, mentre 0, 1, 2 sono assorbenti: tutte le distribuzioni invarianti sono del tipo $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, 0)$ con $\alpha_i \in [0, 1]$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

In tutti gli altri casi $p \in (0, 1/3]$ solo lo stato 0 è transitorio gli altri sono ricorrenti e ci sono due classi chiuse irriducibili $\{1\}$, $\{2, 3\}$. Le distribuzioni invarianti sono quindi (impostando il bilancio di flusso per la seconda classe)

$$(0, \alpha, (1-\alpha) \cdot \frac{1}{1+2p}, (1-\alpha) \cdot \frac{2p}{1+2p}), \tag{8}$$

dove $\alpha \in [0, 1]$.

2. Fissato p, la probabilità dell'evento A si calcola pesando i due cammini $0 \to 0 \to 1$ con probabilità $(1-3p)p$, e $0 \to 2 \to 2$ con probabilità $2p(1-2p)$. Pertanto la verosimiglianza è

$$L(p; A) = (1-3p)p + 2p(1-2p). \tag{9}$$

Osserviamo che per $p = 0$ è nulla e pure per $p = 1/3$, quindi il massimo sarà in un punto interno all'intervallo $[0, 1/3]$. Derivando rispetto a p troviamo l'equazione

$$-3p + 1 - 3p + 2 - 4p - 4p = 0 \quad \to \quad p = \frac{3}{14}. \tag{10}$$

3. Se $p = 0$ avremo $P(X_n = 0 | X_0 = 0) = 1$ per ogni n, e quindi il limite richiesto vale 0. Altrimenti, per $p > 0$, si tratta di calcolare la probabilità con cui la catena entrerà nella classe chiusa irriducibile $\{1\}$ (invece di entrare in quella alternative $\{2, 3\}$. Posto T il primo istante in cui $X_n \neq 0$, si trova che $P(X_T = 1 | X_0 = 0) = p/(p + 2p) = 1/3$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Appello 2024-09-11

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un server dispone di 4 processori per il calcolo, di cui un numero $N \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ di vecchia generazione, e i rimanenti di generazione successiva, più veloci. Aldo è un nuovo tecnico e vuole stimare N, che suppone inizialmente distribuito uniformemente (non ha letto la scheda tecnica). Per questo scopo, decide di assegnare ripetutamente un programma da eseguire al server, che impiega 1 minuto se è svolto da un processore di nuova generazione e invece 2 minuti se è svolto da uno di vecchia generazione. Ad ogni esecuzione, il server infatti assegna il programma a un processore casuale, uniformemente e indipendentemente dalle esecuzioni precedenti.

Dopo 4 esecuzioni ripetute del programma, Aldo osserva che il server ha impiegato in tutto 5 minuti di tempo di calcolo.

1. Sulla base dell'informazione sopra, dare una stima di massima verosimiglianza per N.
2. Calcolare la densità di N (a posteriori).
3. Supponendo che Aldo dia lo stesso programma al server per una undicesima esecuzione, è più probabile che questo impieghi 1 minuto o 2 minuti?

Una soluzione:

1. Poniamo X il numero di processori di vecchia generazione utilizzati. Dal testo segue che $2X + (4 - X) = 5$, ossia $X = 1$. Supponendo $N = n$ noto, segue che X è distribuito come una variabile binomiale di parametri $B(4, n/4)$. Ne segue che la verosimiglianza è

$$L(n; X = 1) = \binom{10}{1} (\frac{n}{4})^1 (1 - \frac{n}{4})^3 \propto n(1 - n/4)^3 =: f(n).$$

Un calcolo diretto mostra che

$$f(0) = 0, \quad f(1) = (3/4)^3, \quad f(2) = 2 \cdot (1/2)^3 = 1/4, \quad f(3) = 3 \cdot (1/4)^3, \quad f(4) = 0.$$

Ne segue che la verosimiglianza è massima per $n = 1$.

2. Siccome la densità a priori è uniforme, basta dividere i valori sopra trovati di f per il termine

$$s = \sum_{i=0}^{4} f(i) = 0 + (3/4)^3 + 1/4 + 3 \cdot (1/4)^3.$$

La densità è $P(N = n|X = 1) = f(n)/s$.

3. Si tratta di calcolare il rapporto tra la probabilità che un processore scelto a caso tra i 4 sia di nuova generazione (evento A) rispetto all'evento complementare (entrambi condizionatamente ad $X = 1$). Si dalla formula di disintegrazione si trova

$$\frac{P(A|X = 1)}{P(A^c|X = 1)} = \frac{\sum_{n=0}^{5} P(A|X = 1, N = n)P(N = n|X = 1)}{\sum_{n=0}^{5} P(A^c|X = 1, N = n)P(N = n|X = 1)}.$$

Inserendo i valori di $P(N = n|X = 1)$ trovati al punto precedente e osservando che $P(A|X = 1, N = n) = n/4$ si trova

Problema 2

Siano A, B, C variabili aleatorie gaussiane standard indipendenti tra loro, e si consideri la matrice (aleatoria)

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Posta $X = \det(M)$:

1. calcolare il valore atteso di X,
2. calcolare la varianza di X,
3. mostrare che X non è una variabile gaussiana *(Sugg: confrontare il momento quarto con quello di una gaussiana standard).*

Una soluzione:

1. Si ha $X = AC - B^2$. Per il valore atteso si trova $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[AC] - \mathbb{E}\left[B^2\right] = 0 \cdot 0 - 1 = -1$ avendo usato l'indipendenza tra A e C e il fatto che le variabili sono centrate (e quindi il momento minuto di B è uguale alla varianza, ossia 1).

2. Per la varianza, calcoliamo prima il momento minuto $X^2 = (AC - B^2)^2 = A^2C^2 + B^4 - 2ACB^2$ e troviamo il valore atteso

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}\left[A^2\right]\mathbb{E}\left[C^2\right] + \mathbb{E}\left[B^4\right] - 2\mathbb{E}[A]\,\mathbb{E}[C]\,\mathbb{E}\left[B^2\right] = 1 \cdot 1 + 3 = 4,$$

avendo usato che il momento quarto di una gaussiana standard vale 3 (si calcola ad esempio dallo sviluppo di Taylor o derivando la MGF della gaussiana standard). Pertanto la varianza vale $4 - 1^2 = 3$.

3. Se X fosse una variabile gaussiana, allora $X/\sqrt{3}$ sarebbe una gaussiana standard (avendo media 0 e varianza 1). In particolare si avrebbe che $\mathbb{E}\left[(X/\sqrt{3})^4\right] = 3$, ossia $\mathbb{E}\left[X^4\right] = 27$. Tuttavia possiamo calcolare

$$X^4 = (A^2C^2 + B^4 - 2ACB^2)^2 = A^4C^4 + B^8 + 4A^2C^2B^4 + 2A^2C^2B^4 + ...$$

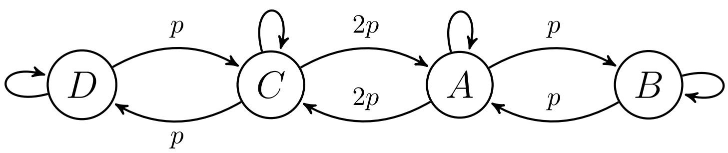
dove i termini mancanti hanno grado dispari in A e C, quindi hanno valore atteso nullo. Passando al valore atteso, si trova allora

$$\mathbb{E}\left[X^4\right] = 9 + \mathbb{E}\left[B^8\right] + 12 + 6 > 27$$

avendo usato che il momento di ordine 8 di una gaussiana standard è strettamente positivo (non serve neppure calcolarlo, è chiaro infatti che l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} x^8 e^{-x^2/2} dx$ è strettamente positivo).

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sull'insieme degli stati $\{0, 1, 2, 3\}$ con matrice di transizione rappresentata in figura



dove $p \in [0, 1/3]$ è un parametro.

1. Al variare di p, classificare gli stati della catena e calcolarne tutte le distribuzioni invarianti.
2. Supponendo che la catena sia stazionaria, si osserva poi che $X_1 = A$ e $X_2 = X_3 = C$. Fornire una stima per p.
3. Supponendo che la catena sia stazionaria, calcolare in funzione di p la probabilità $\lim_{n\to\infty} P(X_0 = A|X_n = B)$.

Una soluzione:

1. Se $p > 0$, la catena è irriducibile e regolare per il noto criterio. Tutti gli stati sono ricorrenti. Per il bilancio di flusso troviamo $\pi_D p = \pi_C p$, ossia $\pi_D = \pi_C$. Inoltre scambiando $A \leftrightarrow C$ e $D \leftrightarrow B$ otteniamo le stesse probabilità di transizione, quindi dovrà essere $\pi_C = \pi_A$, $\pi_D = \pi_B$, ossia l'unica distribuzione invariante è uniformeme sui 4 stati. Se $p = 0$ tutti gli stati sono assorbenti: tutte le distribuzioni di probabilità sono invarianti.

2. La verosimiglianza delle osservazioni è $L(p) = P(X_1 = A, X_2 = X_3 = C|p) = (2p)(1-3p)$, avendo usato che è stazionaria quindi la distribuzione invariante è uniforme (possiamo escludere il caso $p = 0$, altrimenti la transizione $A \to C$ sarebbe impossibile). Massimizzando si trova

$$L'(p) = 2(1-3p) - 6p = 0 \quad \leftrightarrow \quad p = 1/6$$

(osservando che il massimo è interno, essendo $L(0) = 0$ ed L crescente nell'intervallo $[0, 1/6]$).

3. Se $p = 0$ la probabilità è nulla. Altrimenti, usando Bayes, troviamo

$$P(X_0 = A|X_n = B) = \frac{P(X_n = B|X_0 = A)P(X_0 = A)}{P(X_n = B)} = P(X_n = B|X_0 = A) \to \frac{1}{4},$$

essendo la catena regolare.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Esercitazione 2024-11-21

Problema 1

Un'urna contiene una frazione $p \in (0,1)$ di palline rosse, e le rimanenti blu. Si effettuano estrazioni con rimpiazzo finché si non osservano, nella sequenza delle palline estratte, due palline di colore diverso. Si pone $T \in \{2, 3, \ldots\}$ il numero di estrazioni effettuate.

1. Al variare del parametro p, determinare la densità discreta di T.
2. Al variare del parametro p, calcolare il valore atteso di T *(Suggerimento: ricordare il valore atteso di una variabile geometrica)*
3. Fornire una stima di massima verosimiglianza per p supponendo di aver osservato $T = 2$. Cosa cambia se invece si osserva $T = 3$?

Una soluzione:

1. Calcoliamo la probabilità che $T = k$ al variare di $k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Posta $X_1 \in \{R, B\}$, possiamo decomporre

$$P(T = k) = P(T = k | X_1 = R) P(X_1 = R) + P(T = k | X_1 = B) P(X_1 = B)$$

Chiaramente $P(X_1 = R) = p$, $P(X_1 = B) = (1 - p)$. Sapendo $X_1 = R$, avremo $T = k$ nel caso in cui si estraggano (dopo la prima rossa) ulteriori $k - 2$ palline rosse e infine una blu, quindi ricordando la probabilità di una specifica sequenza nel caso delle estrazioni con rimpiazzo abbiamo

$$P(T = k | X_1 = R) = p^{k-2}(1 - p).$$

Equivalentemente, abbiamo che, sapendo $X_1 = R$, la variabile $T - 2$ ha densità geometrica di parametro $1 - p$. Analogamente, $P(T = K | X_1 = B) = (1 - p)^{k-2} p$, quindi la densità discreta di T è

$$P(T = k) = p^{k-1}(1 - p) + (1 - p)^{k-1} p \quad \text{per } k = 2, 3, \ldots$$

2. Dobbiamo calcolare il valore atteso

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=2}^{\infty} k P(T = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k \left[p^{k-1}(1 - p) + (1 - p)^{k-1} p \right].$$

Il suggerimento è di ricordare che per una variabile geometrica di parametro q vale

$$\mathbb{E}[\mathrm{Geom}(q)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(1 - q)^k q = (1 - q)/q.$$

In effetti spezzando in due serie si trova

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=2}^{\infty} k p^{k-1}(1 - p) + \sum_{k=2}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} p.$$

e quindi si potrebbe procedere algebricamente nel calcolo. Tuttavia, volendo procedere in modo più probabilistico, per quanto detto sopra, abbiamo visto che $T - 2$ è, condizionatamente a sapere

$X_1 = R$, una variabile geometrica di parametro $1-p$, mentre condizionatamente a $X_1 = B$ lo è di parametro p. Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[T-2]+2 = \mathbb{E}[T-2|X_1=R]\,p + \mathbb{E}[T-2|X_1=B]\,(1-p)+2\\ &= \frac{p^2}{1-p}+\frac{(1-p)^2}{p}+2\end{aligned}$$

3. La verosimiglianza è $L(p;T=k) = P(T=k|p) = [p^{k-2}+(1-p)^{k-2}]p(1-p)$. Chiaramente vediamo che l'espressione è nulla per $p \in \{0,1\}$ e non cambia se scambiamo p con $1-p$, quindi $p=1/2$ è un punto in cui si annulla la derivata. Derivando rispetto a p otteniamo

$$L'(p) = (k-2)(p^{k-3}-(1-p)^{k-3})p(1-p) + [p^{k-2}+(1-p)^{k-2}](1-2p)$$

Per $k=2$ otteniamo $L'(p) = 2(1-2p)$ che si annulla solo in $p=1/2$, che quindi è la stima di massima verosimiglianza. Per $k=3$, troviamo ancora

$$L'(p) = 1-2p,$$

quindi $p=1/2$ è ancora la stima di massima verosimiglianza.

Problema 2

Siano X_1, X_2 variabili aleatorie continue con densità uniforme sull'intervallo $[0,1]$ e tra di loro indipendenti.

1. Calcolare la densità della variabile $Y = \sqrt{X_1}$.
2. Calcolare la densità della variabile $Z = \max\{X_1, X_2\}$ (ossia la più grande tra le due variabili X_1, X_2) *(Suggerimento: calcolare* CDF_Z*)*
3. Mostrare che le due variabili Y, Z hanno la stessa legge, ma non sono indipendenti.

Una soluzione:

1. Possiamo usare la formula di cambio di variabile con $g(x) = \sqrt{x}$ invertibile nell'intervallo $(0,1)$ (con immagine $g(x) \in (0,1)$) e inversa $g^{-1}(y) = y^2$ e derivata $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$. Pertanto $g'(g^{-1}(y) = 1/(2(y^2)^{1/2}) = 1/(2y)$ e troviamo

$$p(Y=y) = p(X=y^2)\frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = 2y, \quad \text{per } y \in (0,1),$$

(poniamo $p(Y=y)=0$ per $y \notin (0,1)$).

2. Per la variabile Z seguiamo il suggerimento:

$$\mathrm{CDF}_Z(t) = P(Z \le t) = P(\max\{X_1,X_2\} \le t) = P(X_1 \le t, X_2 \le t) = P(X_1 \le t)P(X_2 \le t)$$

avendo usato l'indipendenza tra le due variabili X_1, X_2. Per $t \in (0,1)$ (i valori rilevanti essendo X_1, X_2 a valori in $(0,1)$, quindi pure Z lo sarà), abbiamo $P(X_1 \le t) = P(X_2 \le t) = t$, quindi

$$\mathrm{CDF}_Z(t) = t^2$$

derivando rispetto a t, troviamo la densità

$$p(Z=t) = \frac{d}{dt}\,\mathrm{CDF}_Z(t) = 2t.$$

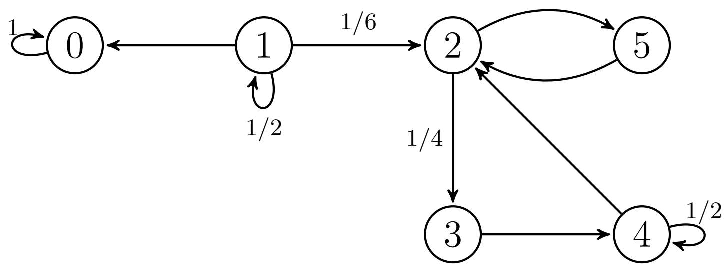
3. Le formule per le densità coincidono, quindi la legge di Y coincide con quella di Z. Però non sono indipendenti, infatti se lo fossero, dovremmo avere ad esempio che

$$P(Z \le 1/2 | Y > 1/4) = P(Z \le 1/2)$$

Però se sappiamo che $Y = \sqrt{X_1} > 1/4$, allora $X_1 > 1/2$ e quindi $Z = \max\{X_1, X_2\} \ge X_1 > 1/2$, quindi $P(Z \le 1/2 | Y > 1/4) = 0$, ma d'altra parte abbiamo calcolato che $P(Z \le 1/2) = \mathrm{CDF}_Z(1/2) = 1/4$.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura e tale che $X_0 = 1$.



1. Scrivere la matrice di transizione Q (completare con le probabilità mancanti), classificare gli stati (transitori/ricorrenti) e determinare tutte le distribuzioni invarianti della catena.
2. Avendo osservato che $X_4 = 0$, calcolare il valore atteso di X_2.
3. Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ (spiegare anche perché esiste).

Una soluzione:

1. Scriviamo la matrice ordinando gli stati nell'ordine naturale $E = \{0,1,2,3,4,5\}$. Troviamo

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo stato 1 è transitorio (infatti si raggiunge 0, da cui 1 non è raggiungibile). Gli altri stati sono ricorrenti. Le classi chiuse irriducibili sono $C_1 = \{0\}$ e $C_2 = \{2,3,4,5\}$ (entrambe regolari per il criterio). Per la classe C_1 la distribuzione invariante è banale $\mu_{C_1} = (1,0,0,0,0,0)$, mentre per calcolare μ_{C_2} impostiamo il bilancio di flusso (negli stati 5, 3, 4):

$$\mu_5 = \frac{3}{4}\mu_2 \quad \mu_3 = \frac{1}{4}\mu_2, \quad \frac{1}{2}\mu_4 = \mu_3.$$

Troviamo quindi posto $t = \mu_2$

$$\mu_{C_2} = (0, 0, t, \frac{t}{4}, \frac{t}{2}, \frac{3t}{4}),$$

da cui $t = 2/5$ (avendo imposto che la somma delle componenti sia 1). Tutte le distribuzioni invarianti sono quindi della forma

$$\mu(\alpha) = (1-\alpha)\mu_{C_1} + \alpha\mu_{C_2} = \left(1-\alpha, 0, \frac{2\alpha}{5}, \frac{\alpha}{10}, \frac{1\alpha}{5}, \frac{3\alpha}{10}\right)$$

al variare di $\alpha \in [0, 1]$.

2. Per calcolare il valore atteso

$$\mathbb{E}\left[X_2 | X_4 = 0\right] = \sum_{k=0}^{5} kP(X_2 = k | X_4 = 0)$$

dobbiamo calcolare la densità discreta $P(X_2 = k|X_4 = 0)$. Tuttavia notiamo subito che, dovendo essere $X_4 = 0$ abbiamo soltanto due possibilità per X_2: o $X_2 = 1$ oppure $X_2 = 0$, altrimenti se fosse $X_2 \in C_2$ certamente non accade che $X_4 = 0$. Quindi il valore atteso si riduce a calcolare

$$\mathbb{E}\left[X_2 | X_4 = 0\right] = P(X_2 = 1 | X_4 = 0)$$

Usando la formula di Kolmogorov troviamo quindi

$$P(X_2 = 1 | X_4 = 0) = \frac{P(X_2 = 1, X_4 = 0)}{P(X_4 = 0)}$$

Calcoliamo quindi i pesi dei cammini che realizzano i due eventi (ricordiamo che $X_0 = 1$):

$$P(1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$
$$P(1 \to 1 \to 1 \to 0 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1$$

da cui $P(X_2 = 1, X_4 = 0) = \frac{1}{8}$, mentre per calcolare $P(X_4 = 0)$ dobbiamo aggiungere i cammini

$$P(1 \to 1 \to 0 \to 0 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1$$
$$P(1 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

da cui $P(X_4 = 0) = \frac{5}{8}$ e si conclude che

$$\mathbb{E}\left[X_2 | X_4 = 0\right] = \frac{1}{5}.$$

3. Il limite esiste perché ogni classe chiusa irriducibile è regolare. Usando la notazione delle lezioni, basterà impostare delle equazioni dall'identità $Q^\infty = QQ^\infty$. In particolare troviamo

$$Q_{10}^\infty = Q_{10}Q_{00}^\infty + Q_{11}Q_{10}^\infty + Q_{12}Q_{20}^\infty$$

ma $Q_{00}^\infty = 1$, mentre $Q_{20}^\infty = 0$, quindi

$$Q_{10}^\infty = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}Q_{10}^\infty$$

da cui $Q_{10}^\infty = 2/3$. Si può anche argomentare nel seguente modo (ricordando la descrizione dei tempi di permanenza negli stati e le probabilità di salto): siccome la catena parte da 1, e l'unico modo in cui può raggiungere 0 è saltandoci direttamente, avremo che dopo un tempo di permanenza geometrico in 1, la catena salterà in 0 con probabilità data da $1/3/(1/3+1/6) = 2/3$ per poi restarvi, che è il limite richiesto.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Prova in itinere 2024-11-28

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un'urna contiene una frazione $p \in [0,1]$ di palline rosse, e le rimanenti blu. Si effettuano estrazioni con rimpiazzo finché non si osservano, in tutta la sequenza delle palline estratte, due palline di colore uguale (non necessariamente consecutive). Si pone T il numero di estrazioni effettuate.

1. Al variare del parametro p, determinare la densità discreta di T.
2. Al variare del parametro p, calcolare il valore atteso di T.
3. Fornire una stima di massima verosimiglianza per p supponendo di aver osservato $T = 2$. Cosa cambia se invece si osserva $T = 3$?

Una soluzione:

1. La variabile T assume solamente valori in $\{2, 3\}$. Infatti dopo tre estrazioni sicuramente avremo visto almeno due palline dello stesso colore (quindi non sarà necessario farne 4 o piu). Poniamo $X_1, X_2, X_3 \in \{R, B\}$ gli esiti di tre estrazioni con rimpiazzo dall'urna. Abbiamo che

$$\{T = 2\} = \{X_1 = X_2 = R\} \text{ oppure } \{X_1 = X_2 = B\}$$

e quindi

$$P(T = 2) = p^2 + (1-p)^2.$$

D'altra parte vale quindi $P(T = 3) = P(T \neq 2) = 1 - P(T = 2) = 1 - p^2 - (1-p)^2$.

3. Usiamo la densità trovata per il calcolo del valore atteso:

$$\mathbb{E}[T] = 2P(T = 2) + 3P(T = 3) = 2(p^2 + (1-p)^2) + 3(1 - p^2 - (1-p)^2) = 3 - (p^2 + (1-p)^2).$$

4. Si tratta di massimizzare $L(p; T = 2) = P(T = 2|p) = p^2 + (1-p)^2$. Osserviamo che per $p \in \{0, 1\}$ la verosimiglianza vale 1, quindi è massima in quei casi (la stima di massima verosimiglianza non è unica). Invece osserviamo che $L'(p; T = 2) = 2p - 2(1-p)2(2p-1) = 0$ se $p = 1/2$, ma in tal punto la funzione è minima (vale $1/2$). Se si osserva $T = 3$, invece la verosimiglianza è $L(p; T = 3) = 1 - L(p; T = 2)$ che quindi è massima se $p = 1/2$, che è quindi la stima di massima verosimiglianza in questo caso.

Problema 2

Siano T_1, T_2 variabili aleatorie continue, entrambe aventi densità esponenziale di parametro 1 e indipendenti fra loro.

1. Dire se la variabile $U = \min\{T_1, T_2\}$ ha densità esponenziale e calcolarne il valore atteso.
2. Dire se la variabile $V = \max\{T_1, T_2\}$ ha densità esponenziale e calcolarne il valore atteso.
3. Le variabili aleatorie U e V sono correlate? sono indipendenti?

Una soluzione:

1. Calcoliamo la funzione di sopravvivenza di U:

$$\mathrm{SUR}_U(t) = P(U > t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = \mathrm{SUR}_{T_1}(t)\,\mathrm{SUR}_{T_2}(t).$$

ricordando che per una variabile esponenziale si ha $\mathrm{SUR}_T(t) = e^{-t}$ per $t \geq 0$ (mentre $\mathrm{SUR}_T(t) = 1$ per $t < 0$) troviamo che per $t \geq 0$

$$\mathrm{SUR}_U(t) = e^{-2t}$$

da cui la densità di U (derivando e cambiando di segno) è esponenziale di parametro 2, quindi $\mathbb{E}[U] = 1/2$

2. Calcoliamo la funzione di ripartizione di V (per $t \geq 0$)

$$\mathrm{CDF}_V(t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = \mathrm{CDF}_{T_1}(t)^2 = (1 - e^{-t})^2.$$

Derivando si ottiene la densità

$$p(V = t) = 2(1 - e^{-t})e^{-t} = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

che non è del tipo esponenziale. Si trova il valore atteso

$$\mathbb{E}[V] = \int_0^\infty tp(V = t)dt = 2\int_0^\infty te^{-t} - \int_0^\infty t \cdot 2e^{-2t}dt = 2 - 1/2 = 3/2.$$

3. È facile vedere che le variabili U e V non sono indipendenti: infatti vale banalmente $U \leq V$, quindi

$$P(U > 1 | V \leq 1) = 0 \neq P(U > 1) = e^{-2}.$$

dal punto 1 calcolato prima. Per calcolare la covarianza, osserviamo che vale sempre $UV = T_1T_2$, quindi

$$\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[T_1T_2] = \mathbb{E}[T_1]\,\mathbb{E}[T_2] = 1$$

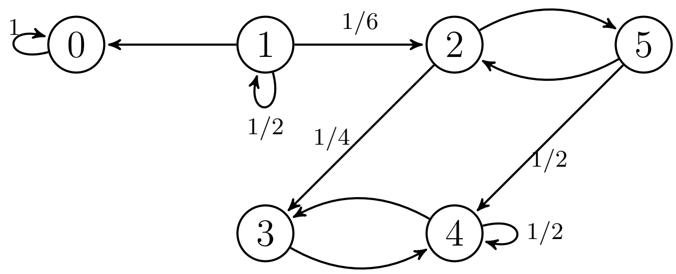
per indipendenza e allora

$$\mathrm{Cov}(U, V) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

quindi U e V sono positivamente correlate.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura



e tale che X_0 sia (a priori) una variabile discreta sull'insieme degli stati avente densità

$$P(X_0 = k) = c(k+1), \quad \text{per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

dove $c > 0$ è una opportuna costante.

1. Calcolare c, scrivere la matrice di transizione Q (completare con le probabilità mancanti), classificare gli stati (transitori/ricorrenti) e determinare tutte le distribuzioni invarianti della catena.
2. Avendo osservato che $X_2 = 0$, determinare la densità a posteriori di X_0.
3. Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} P(X_0 = 0|X_n = 0)$ (spiegare anche perché esiste).

Una soluzione:

1. Per calcolare c basta sommare i valori $\sum_{k=0}^{5}(k+1) = 1+2+3+4+5+6 = 21$ e porre $c = 1/21$. Scriviamo la matrice di transizione ordinando gli stati nell'ordine naturale $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Troviamo

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli stati 1, 2 e 5 sono transitori (infatti si raggiunge 4 da questi ma da 4 possiamo raggiungere solo 3 o 4 stesso. Gli altri stati sono ricorrenti. Le classi chiuse irriducibili sono $C_1 = \{0\}$ e $C_2 = \{3, 4\}$ (entrambe regolari per il criterio). Per la classe C_1 la distribuzione invariante è banale $\mu_{C_1} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, mentre per calcolare μ_{C_2} impostiamo il bilancio di flusso in 3

$$\mu_3 = \frac{1}{2}\mu_4$$

e troviamo quindi $\mu_3 = 1/3$, $\mu_4 = 2/3$ ossia

$$\mu_{C_2} = (0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0),$$

Tutte le distribuzioni invarianti sono quindi della forma

$$\mu(\alpha) = (1-\alpha)\mu_{C_1} + \alpha\mu_{C_2} = (1-\alpha, 0, 0, \alpha/3, 2\alpha/3, 0)$$

al variare di $\alpha \in [0, 1]$.

2.Per determinare la densità a posteriori di X_0, basta usare la formula di Bayes:

$$P(X_0 = k|X_2 = 0) \propto P(X_0 = k)P(X_2 = 0|X_0 = k) \propto (k+1)P(X_2 = 0|X_0 = k).$$

Per calcolare la verosimiglianza $P(X_2 = 0|X_0 = k)$, osserviamo che se $k \notin \{0,1\}$, allora questa è nulla (non ci sono cammini che da uno stato $k \geq 2$ portano in 0). Pertanto avremo solo $P(X_2 = 0|X_0 = 0) = 1$, e $P(X_2 = 0|X_0 = 1) = 1/3 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/3 = 1/2$ e la densità a posteriori μ_2 è del tipo

$$\mu_2 = c(1 \cdot 1, 2 \cdot 1/2, 0, 0, 0, 0) = c(1, 1, 0, 0, 0, 0) = (1/2, 1/2, 0, 0, 0, 0)$$

avendo imposto che la somma delle probabilità sia 1.

3. Usiamo nuovamente Bayes

$$P(X_0 = 0|X_n = 0) = P(X_0 = 0)P(X_n = 0|X_0 = 0)/P(X_n = 0).$$

I limiti per $n \to \infty$ di $P(X_n = 0|X_0 = 0)$ e di $P(X_n = 0)$ esistono perché ogni classe chiusa irriducibile è regolare. Infatti il secondo si ottiene per disintegrazione

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{5} P(X_n = 0|X_0 = k)P(X_0 = k).$$

Come osservato nel punto precedente, abbiamo che $P(X_n = 0|X_0 = k) = 0$ se $k \geq 2$ (e quindi anche nel limite pen $n \to \infty$). Inoltre è banalmente vero che $P(X_n = 0|X_0 = 0) = 1$ e quindi anche nel limite per $n \to \infty$. Resta quindi da calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0|X_0 = 1) = Q^\infty_{10}$ (usando la notazione delle lezioni). Impostiamo quindi un'equazione dall'identità $Q^\infty = QQ^\infty$:

$$Q^\infty_{10} = Q_{10}Q^\infty_{00} + Q_{11}Q^\infty_{10} + Q_{12}Q^\infty_{20}$$

ma $Q^\infty_{00} = 1$, mentre $Q^\infty_{20} = 0$, quindi

$$Q^\infty_{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}Q^\infty_{10}$$

da cui $Q^\infty_{10} = 2/3$. Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{21} \cdot 1 + \frac{2}{21} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{21}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} P(X_0 = 0|X_n = 0) = \frac{\frac{1}{21} \cdot 1}{\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{21}} = \frac{3}{7}.$$

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Prova 2025-01-09

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Le due sorelline Alice e Beatrice trovano sotto l'albero di Natale quattro pacchi regalo, dall'esterno indistinguibili. Ciascuna di loro ha chiesto a Babbo Natale un regalo e quindi sanno con certezza che due dei quattro pacchi contengono giocattoli. Sugli altri due pacchi, formulano due ipotesi: Alice, la più piccola, sostiene che contengano ancora giocattoli, così in tutto ciascuna sorella riceverà due doni; Beatrice sostiene invece che siano dei regali per i genitori (quindi non giocattoli). Supponiamo inizialmente equiprobabili le due ipotesi.

Al momento di aprire i pacchi, Alice ne prende prima uno a caso tra i quattro, e poi Beatrice uno a caso tra i tre rimanenti e li scartano.

1. Calcolare la probabilità che Alice trovi un giocattolo.
2. Sapendo che Alice ha trovato un giocattolo, calcolare la probabilità che Beatrice trovi pure un giocattolo.
3. Sapendo che entrambe le sorelline hanno trovato giocattoli, calcolare la probabilità che Alice abbia ragione, ossia che pure gli altri due pacchi contengano giocattoli.

Una soluzione:

1. Poniamo A l'ipotesi di Alice e B quella di Beatrice. Poniamo G_1, G_2 gli eventi in cui rispettivamente nella prima estrazione (quella di Alice) e nella seconda (quella di Beatrice) si trova un giocattolo. Se vale A, Alice trova un giocattolo con probabilità 1 (sono tutti giocattoli), mentre se vale B lo trova con probabilità 1/2. Disintegrando si ha quindi

$$P(G_1) = P(A) \cdot 1 + P(B) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

2. Disintegrando anche in questo caso:

$$P(G_2|G_1) = P(G_2|G_1, A)P(A|G_1) + P(G_2|G_1, B)P(B|G_2).$$

Se vale A e sappiamo che Alice ha trovato un giocattolo, Beatrice trova pure un giocattolo con probabilità 1, mentre se vale B e Alice ha già trovato un giocattolo, Beatrice trova un giocattolo con probabilità 1/3 (c'è un giocattolo e due altri regali che non sono giochi). D'altra parte abbiamo per Bayes e il punto precedente:

$$P(A|G_1) = P(A)P(G_1|A)/P(G_1) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

e di conseguenza $P(B|G_1) = 1/3$. Concludiamo che

$$P(G_2|G_1) = 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

3. Usiamo Bayes (tenendo G_1 come informazione nota)

$$P(A|G_1, G_2) = P(A|G_1)P(G_2|A, G_1)/P(G_2|G_1).$$

Così possiamo usare quanto calcolato nei punti precedenti:

$$P(A|G_1, G_2) = \frac{\frac{2}{3} \cdot 1}{\frac{7}{9}} = \frac{6}{7}.$$

Problema 2

Sia $X = (X_1, X_2)$ una variabile aleatoria gaussiana vettoriale con media $m = (2, 1)$ e matrice delle covarianze

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Dire se le variabili X_1, X_2 sono correlate e calcolarne il coefficiente di correlazione.
2. Dire se la variabile aleatoria $Y = X_1 - X_2$ è gaussiana (reale) e calcolarne media e varianza.
3. Si osserva $X_1 = 3$. Fornire una stima di massima verosimiglianza per X_2.

Una soluzione:

1. La matrice delle covarianze mostra in particolare che $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -1$, quindi le variabili sono negativamente correlate con coefficiente di correlazione $\rho = -1/\sqrt{2}$.

2. La variabile Y è combinazione lineare di gaussiane, quindi è pure gaussiana co media $\mathbb{E}[Y] = 2 - 1 = 1$ e varianza

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) - 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 1 + 2 + 2 = 5.$$

3.Si tratta di determinare la densità condizionale $p(X_2 = \cdot|X_1 = 3)$. Partiamo dalla densità congiunta che otteniamo invertendo la matrice delle covarianze:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza otteniamo la densità congiunta:

$$p(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (x_1 - 2, x_2 - 1)^t \Sigma^{-1} (x_1 - 2, x_2 - 1)\right)$$

La densità condizionale si ottiene (a meno di costanti moltiplicative) imponendo $x_1 = 3$, da cui

$$p(X_2 = x_2|X_1 = 3) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (1, x_2 - 1)^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (1, x_2 - 1)\right)$$

Osserviamo che è una densità gaussiana. Per trovare la stima di massima verosimiglianza, passiamo al logaritmo annulliamo la derivata (rispetto a x_2):

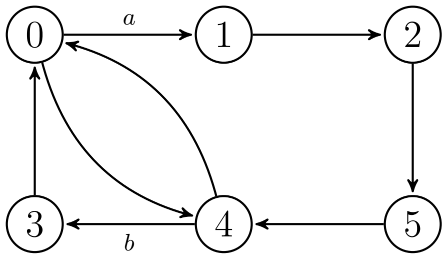
$$\partial_{x_2} \cdot (1, x_2 - 1)^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (1, x_2 - 1) = 2(x_2 - 1) + 2 = 0$$

da cui si stima $x_2 = 0$.

Problema 3

Un drone è programmato per sorvegliare su una regione suddivisa in sei zone seguendo una catena di

Markov $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti).



dove a, $b \in [0,1]$ sono parametri.

1. Al variare di a, $b \in [0,1]$, classificare gli stati della catena, determinarne le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Un osservatore registra che il drone ha effettuato il seguente cammino:
$$X_0 = 0 \to 1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 0 \to 4 \to 0 \to 4 \to 3 \to 0 \to 4 \to 3 \to 0$$
Fornire una stima per i parametri a, b (supponendo che $P(X_0 = 0) = 1$).
3. Un altro osservatore registra che in un intervallo di tempo molto lungo, il drone ha trascorso $1/4$ del tempo nello stato 0 e $1/12$ del tempo nello stato 1. È possibile usare questa informazione per dare una stima dei parametri a, b? *(Sugg: ricordare il teorema ergodico)*

Una soluzione:

1. Se a, b sono entrambi non nulli, tutti gli stati sono ricorrenti e la catena è irriducibile. Se $a = 0$, $b \neq 0$, gli stati 1, 2, 5 sono transitori, mentre i rimanenti ricorrenti e costituiscono l'unica classe chiusa irriducibile. Se $a \neq 0$, $b = 0$, lo stato 3 è transitorio, mentre i rimanenti costituiscono l'unica chiusa irriducibile. Infine se $a = b = 0$, gli stati 1, 2, 3, 5 sono transitori e i rimanenti costituiscono l'unica classe chiusa irriducibile.

Per determinare le distribuzioni invarianti impostiamo il bilancio di flusso. Notiamo che $\pi_1 = a\pi_0$, $\pi_2 = \pi_1 = a\pi_0$, $\pi_5 = \pi_2 = a\pi_0$, mentre $\pi_3 = b\pi_4$. Infine abbiamo il bilancio in 0: $\pi_0 = \pi_3 + (1-b)\pi_4 = \pi_4$. Ne segue che tutte le distribuzioni invarianti sono della forma

$$(\pi_0, a\pi_0, a\pi_0, b\pi_0, \pi_0, a\pi_0)$$

Imponendo che la somma dia 1 troviamo $\pi_0 = (2 + 3a + b)^{-1}$, ossia

$$\frac{1}{2+3a+b}\,(1, a, a, b, 1, a)\,.$$

2. Impostiamo la verosimiglianza, ossia il peso del cammino γ osservato:

$$L(a,b) = a(1-b)(1-a)(1-b)(1-a)b(1-a)b = a^2(1-a)^3 b^2 (1-b)^3$$

Tale funzione è nulla se a o $b \in \{0,1\}$, quindi possiamo massimizzarla cercandoi punti stazionari. Calcolando le derivate parziali e imponendo che si annullino si trova $a = 2/5$, $b = 2/5$.

3. Il suggerimento è di ricordare il teorema ergodico, il quale afferma che la distribuzione invariante coincide con la frazione di tempo trascorsa dalla catena (stazionaria) in ciascuno stato, per un intervallo di tempo molto lungo (infinito). Data l'informazione nel testo, imponiamo le equazioni

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2+3a+b}, \quad \frac{1}{12} = \frac{a}{2+3a+b} = \frac{a}{4}$$

da cui $a = 1/3$ e $b = 1$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Prova in itinere 2025-02-12

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Le due sorelline Adele e Bianca giocano insieme e ciascuna ha deciso di fare un puzzle: quello di Adele, la minore, consiste di 24 pezzi, mentre quello di Bianca, la maggiore, ha 48 pezzi. Le bambine hanno però messo insieme i pezzi dei loro due puzzle nella stessa scatola e procedono alternandosi ad estrarre i pezzi, uno alla volta, con questa regola: se il pezzo estratto da una bambina è del proprio puzzle, allora non lo rimette nella scatola, altrimenti lo rimette nella scatola. Adele è la prima ad estrarre un pezzo, seguita da Bianca.

1. Calcolare la probabilità che, alla sua prima estrazione, Adele trovi un pezzo del proprio puzzle.
2. Calcolare la probabilità che, alla sua prima estrazione, Bianca trovi un pezzo del proprio puzzle.
3. Sapendo che Bianca ha trovato alla sua prima estrazione un pezzo del proprio puzzle, calcolare la probabilità che Adele abbia pure trovato un pezzo del proprio puzzle alla sua prima estrazione. Confrontarla con quella della prima domanda.

Una soluzione:

1. In tutto ci sono 72 pezzi, la prima estrazione è uniforme con casi favorevoli 24, quindi posto A l'evento cercato si ha $P(A) = 24/72 = 1/3$.

2. Posto B l'evento in questione, dobbiamo considerare i due casi: se A oppure A^c si realizza (con la notazione del punto sopra):

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{48}{71} \cdot \frac{1}{3} + \frac{48}{72} \cdot \frac{2}{3}$$

che è leggermente inferiore a $2/3$.

3. Stavolta dobbiamo calcolare $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$ usando Bayes. Troviamo

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{48}{71}}{\frac{48}{71} \cdot \frac{1}{3} + \frac{48}{72} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{71}{36}}$$

che è leggermente superiore a $1/3$.

Problema 2

Sia $r > 1$ un parametro e X una variabile aleatoria continua, a valori in $(1, \infty)$, avente densità

$$p(X = x|r) = c(r)x^{-r}, \quad \text{per } x > 1$$

dove $c(r)$ è un'opportuna costante.

1. Per ogni $r > 1$, calcolare $c(r)$, la funzione di sopravvivenza di X e la mediana di X.
2. Per ogni $r > 1$, dire se la variabile $Y = X^{1/r}$ ha densità continua e in caso affermativo calcolarla.
3. Si osserva $X = 10$. Fornire una stima di massima verosimiglianza per r. Cosa cambia se si osserva invece $X \geq 10$?

Una soluzione:

1. Osserviamo che per ogni $t > 1$ si ha l'integrale

$$\int_t^\infty x^{-r} dx = \frac{t^{1-r}}{r-1}$$

Imponendo quindi che la densità integri a uno, si trova che $c(r) = (r-1)$. La funzione di sopravvivenza è quindi

$$\mathrm{SUR}_X(t) = t^{1-r}$$

(per i valori $t > 1$, altrimenti è 1). Per la mediana imponiamo $\mathrm{SUR}_X(m) = 1/2$, da cui

$$m = 2^{1/(r-1)}.$$

Osserviamo che per $r \to 1^+$ si ha $m \to \infty$.

2.Sa funzione $x \mapsto g(x) = x^{1/r}$ soddisfa le ipotesi del cambio di variabile sull'intervallo $(1, \infty)$. Si ha $g'(x) = x^{1/r-1}/r$ e $g^{-1}(y) = y^r$, quindi $g'(g^{-1}(y) = y^{1-r}/r$ e si trova che $Y = X^{1/r}$ ha densità sull'intervallo $(1, \infty)$ data da

$$p(Y = y) = p(X = y^r)\frac{1}{y^{1-r}/r} = r(r-1)y^{-r^2+r-1}.$$

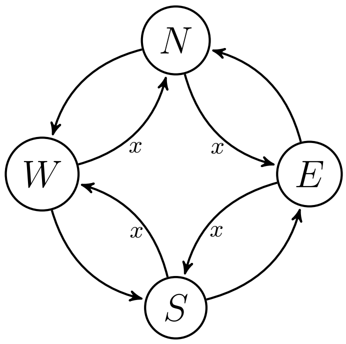
3. Nel primo caso la verosimiglianza è $L(r; X = 10) = (r-1)10^{-r}$. Osserviamo che per $r = 1$ o $r = \infty$ vale zero, quindi possiamo passare al logaritmo e derivare per trovare il massimo. Si ha

$$\frac{1}{r-1} - \ln(10) = 0$$

da cui $r = 1 + 1/\ln(10)$. Nel secondo caso la verosimiglianza è $L(r; X \geq 10) = 10^{1-r} < 1$, da cui osserviamo che al tendere di r a 1 si ha $L \to 1$, quindi sarebbe massima nel caso $r = 1$, che però è escluso (non si trova una densità di probabilità vera e propria, perché non ha integrale finito).

Problema 3

Sia $x \in [0, 1]$ un parametro e si consideri una catena di Markov stazionaria $(X_n)_n$, a valori negli stati $\{N, S, W, E\}$, con probabilità di transizione rappresentate in figura.



1. Al variare di $x \in [0, 1]$, scrivere la matrice di transizione Q, classificare gli stati e determinare tutte le distribuzioni invarianti della catena. Dire se è regolare.

2. Si osserva che $X_0 = X_4 = S$. Al variare di $x \in [0,1]$, calcolare la probabilità che $X_2 = S$.

3. Si osserva il cammino $X_0 = N \to E \to S \to W \to S \to E \to S$. Fornire una stima per x.

Una soluzione:

1. Osserviamo che la catena è (per ogni $x \in [0,1]$) irriducibile e tutti gli stati sono ricorrenti. La distribuzione uniforme è stazionaria (per simmetria oppure verificando il bilancio di flusso). La catena non è mai regolare. Infatti partendo ad esempio dallo stato N, nei tempi pari possiamo visitare solo gli stati $\{S, N\}$, mentre nei tempi dispari solo gli stati $\{E, W\}$, quindi ci sarà sempre qualche entrata nulla in Q^n.

2. Calcoliamo con la formula di Bayes

$$P(X_2 = S|X_0 = S, X_4 = S) = \frac{P(X_4 = S|X_2 = S, X_0 = S)P(X_2 = S|X_0 = S)}{P(X_4 = S|X_0 = S)}.$$

Per la proprietà di Markov e l'omogeneità,

$$P(X_4 = S|X_2 = S, X_0 = S) = P(X_4 = S|X_2 = S) = P(X_2 = S|X_0 = S) = 2x(1-x).$$

Infine calcoliamo (enumerando i cammini e i loro pesi)

$$P(X_4 = S|X_0 = S) = 6x^2(1-x)^2 + (1-x)^4 + x^4.$$

3. Essendo stazionaria, abbiamo $P(X_0 = N) = 1/4$ (che non dipende da x). Scriviamo la verosimiglianza:

$$L(x;\gamma) = \frac{1}{4}x^4(1-x)^2$$

Con i soliti calcoli si trova che la stima di massima verosimiglianza per x è $x = 2/3$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Prova 2025-04-14

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

In un laboratorio di intelligenza artificiale, due ingegneri, Marco e Lucia, trovano in un armadio sei piccoli robot, tutti identici all'esterno. Sanno che tre dei robot sono *addestrati* per eseguire compiti complessi, mentre gli altri tre lo sono per compiti base. Marco, il più ottimista, è convinto che in realtà tutti e sei i robot siano capaci di eseguire compiti complessi, mentre Lucia ritiene che solo quelli appositamente addestrati lo siano. Assumendo a priori che l'ipotesi di Lucia sia 2 volte più probabile di quella di Marco (e non ci siano altre ipotesi) decidono di vagliarle alla prova dei fatti.

Marco sceglie un robot a caso tra i sei, lo accende e gli fa svolgere un compito complesso. Successivamente, Lucia ne sceglie uno a caso tra i cinque rimanenti, lo accende e gli fa svolgere un compito complesso.

1. Calcolare la probabilità che il robot acceso da Marco riesca a eseguire il compito complesso.
2. Se il robot acceso da Marco riesce a eseguire il compito complesso, quale è la probabilità che Lucia accenda un robot appositamente addestrato per compiti complessi?
3. Se entrambi i robot accesi dai ricercatori riescono a svolgere i compiti complessi assegnati, qual è l'ipotesi più probabile?

Una soluzione:

1. Poniamo M l'ipotesi di Marco e L quella di Lucia: abbiamo quindi che $P(M) = 1/3$, $P(L) = 2/3$. Se vale M, allora tutti i robot sanno eseguire compiti complessi. Se vale L, solo 3 dei 6. Posto $C_1 =$ 'il primo robot svolge il compito complesso', abbiamo

$$P(C_1) = P(C_1|M)P(M) + P(C_1|L)P(L) = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

2. Posto $A_2 =$ 'il secondo robot è addestrato appositamente per svolgere compiti complessi', e similmente A_1. Dobbiamo calcolare

$$P(A_2|C_1) = P(A_2|C_1, M)P(M|C_1) + P(A_2|C_1, L)P(L|C_1).$$

Per la formula di Bayes abbiamo

$$P(M|C_1) = P(C_1|M)P(M)/P(C_1) = 1 \cdot 1/3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

e quindi $P(L|C_1) = 1 - P(M|C_1) = 1/2$. Inoltre, osserviamo che se vale M, allora C_1 è certa, quindi indipendente da A_2 e allora

$$P(A_2|C_1, M) = P(A_2|M) = \frac{3}{6}$$

ricordando che anche per le estrazioni senza rimpiazzo la probabilità relativa alla seconda estrazione (senza sapere nulla sulla prima) è sempre data dalla formula casi favorevoli su casi possibili.

Rimane infine $P(A_2|C_1, L)$. Sapendo L, C_1 è equivalente ad A_1 (perché il robot svolge il compito complesso se e solo se è appositamente addestrato allo scopo) e quindi abbiamo

$$P(A_2|C_1, L) = P(A_2|A_1, L) = \frac{2}{5}.$$

Concludiamo quindi che

$$P(A_2|C_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{20}.$$

3. Posta C_2 = 'il secondo robot svolge il compito complesso', calcoliamo con la formula di Bayes:

$$\frac{P(M|C_1, C_2)}{P(F|C_1, C_2)} = \frac{P(C_1, C_2|M)P(M)}{P(C_1, C_2|F)P(F)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{30}{12} > 1,$$

da cui deduciamo che l'ipotesi di Marco è a posteriori più probabile.

Problema 2

Sia $\rho \in \mathbb{R}$ un parametro e $X = (X_1, X_2)$ una variabile aleatoria vettoriale gaussiana con media $m = (0, 0)$ e matrice delle covarianze

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho^2 \\ \rho(1-\rho) & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Determinare tutti i valori di ρ ammissibili, ossia tali che una tale variabile gaussiana esista.
2. Per ciascuno dei valori di ρ determinati al punto sopra, calcolare media, moda, mediana e varianza della variabile $Z = X_1 + 2X_2$
3. Posta Z la variabile del punto sopra, si osserva $Z = 2$, fornire una stima di massima verosimiglianza per ρ (tra i valori ammissibili determinati al primo punto).

Una soluzione:

1. La matrice delle covarianze deve essere simmetrica (e semidefinita positiva). Deve quindi valere

$$\rho(1-\rho) = \rho^2$$

ossia $\rho = 0$ oppure $1 - \rho = \rho$, quindi $\rho = 1/2$. Notiamo che per entrambi i valori la matrice è definita positiva, quindi sono entrambi ammissibili.

2. Z è una combinazione lineare di due gaussiane, quindi è gaussiana. La media è la somma delle medie, quindi nulla. Essendo gaussiana, la media coincide anche con la mediana e la moda (tutte uguali a zero). Per la varianza, calcoliamola in generale usando le proprietà della covarianza:

$$\mathrm{Var}\,(Z) = \mathrm{Var}\,X_1 + \mathrm{Var}\,2X_2 + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, 2X_2) = 1 + 4 + 4\rho^2 = 5 + 4\rho^2.$$

e quindi vale 5 nel caso $\rho = 0$, mentre vale 6 nel caso $\rho = 1/2$.

3. La funzione di verosimiglianza è data dalla densità di Z valutata nel valore osservato 2. Dal punto precedente sappiamo che Z è una gaussiana di media 0 e varianza $5 + 4\rho^2$:

$$L(\rho; Z = 2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{2^2}{5 + 4\rho^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(5 + 4\rho^2)}}.$$

Troviamo quindi (passando al logaritmo, cambiando di segno e moltiplicando per 2)

$$-2\log L(\rho; Z=2) = \frac{2^2}{5+4\rho^2} + \log(2\pi(5+4\rho^2)).$$

Ovviamente dobbiamo solo confrontare i valori ammissibili di ρ. Per $\rho = 0$ si trova

$$\frac{4}{5} + \log(5) + \log(2\pi),$$

mentre per $\rho = 1/2$ si trova

$$\frac{4}{6} + \log(6) + \log(2\pi).$$

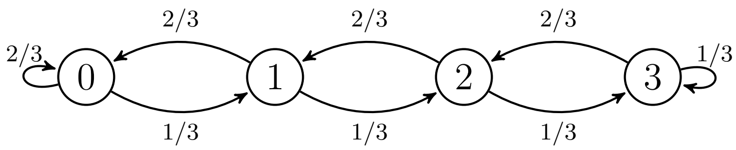
Poiché il termine $\log(2\pi)$ è in comune, basta confrontare

$$\frac{4}{5} + \log(5) \approx 2,41 < \frac{4}{6} + \log(6) \approx 2,46.$$

Poiché abbiamo cambiato di segno, la stima di massima verosimiglianza è quella per cui il valore è minore, ossia $\rho = 0$.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov *stazionaria* $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti).



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Descrivere esplicitamente la funzione di ripartizione (CDF) di X_3.
3. Sapendo che $X_1 \neq 0$, è più probabile che sia $X_0 = 0$ o $X_0 \neq 0$?

Una soluzione:

1. La catena è irriducibile, quindi vi è una sola distribuzione invariante. Calcoliamola imponendo il bilancio di flusso: in 0,

$$\frac{1}{3}\pi_0 = \frac{2}{3}\pi_1 \quad \to \quad \pi_0 = 2\pi_1.$$

in 1,

$$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_2 \quad \to \quad \pi_1 = 2\pi_2$$

in 2,

$$\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 \quad \to \quad \pi_2 = 2\pi_3.$$

Queste equazioni sono sufficienti per dedurre che

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (8, 4, 2, 1)\pi_3$$

da cui imponendo che la somma dia 1 troviamo $\pi_3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$ e quindi

$$\pi = \frac{1}{15}(8, 4, 2, 1).$$

2. La variabile X_3 è discreta con densità π (essendo la catena stazionaria, tutte le marginali hanno densità π) trovata al punto sopra. La funzione di ripartizione è quindi $\mathrm{CDF}_{X_3}(t) = P(X_3 \leq t) = \sum_{i \leq t} \pi(i)$, che è costante a tratti, con salti nei punti $\{0, 1, 2, 3\}$ pari ai valori di π trovati. Esplicitamente, troviamo quindi

$$\mathrm{CDF}_{X_3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ \frac{8}{15} & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ \frac{12}{15} & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ \frac{14}{15} & \text{se } 2 \leq t < 3, \\ 1 & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$$

3. Usando Bayes troviamo

$$P(X_0 = 0 | X_1 \neq 0) = P(X_1 \neq 0 | X_0 = 0) P(X_0 = 0) = P(X_1 \neq 0).$$

Calcoliamo $P(X_1 \neq 0 | X_0 = 0) = 1/3$, $P(X_0 = 0) = 8/15$ e infine $P(X_1 \neq 0) = P(X_0 \neq 0) = 1 - 8/15 = 7/15$ avendo usato la distribuzione invariante. Troviamo quindi

$$P(X_0 = 0 | X_1 \neq 0) = \frac{8}{21} < \frac{1}{2}$$

e di conseguenza è più probabile $X_0 \neq 0$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Prova 2025-06-05

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

C'è un contenitore con 20 lampadine a LED di tipo A e 10 di tipo B (30 in tutto), dall'esterno indistinguibili. Si sa però che ogni lampadina di tipo A si accende con probabilità 93%, mentre ogni lampadina di tipo B si accende con probabilità 99%, ciascuna indipendentemente dalle altre. Si estraggono una alla volta, senza rimpiazzo, tutte le lampadine e si prova ad accenderle (ciascuna una sola volta).

1. Qual è la probabilità che la prima lampadina estratta si accenda?
2. Sapendo che la prima lampadina estratta si acende, è più probabile che sia di tipo A o B?
3. Sapendo che la prima lampadina estratta si accende, qual è la probabilità che l'ultima lampadina estratta sia dello stesso tipo della prima?

Una soluzione:

1. Poniamo $X_1, \ldots, X_{30} \in \{A, B\}$ il tipo delle lampadine estratte. Poniamo C = 'la prima lampadina estratta si accende'. Troviamo

$$P(C) = P(C|X_1 = A)P(X_1 = A) + P(C|X_1 = B)P(X_1 = B) = 93\% \cdot \frac{2}{3} + 99\% \cdot \frac{1}{3} = 95\%.$$

2. Usando Bayes si tratta di confrontare

$$\frac{P(X_1 = A|C)}{P(X_1 = B|C)} = \frac{P(X_1 = A)L(X_1 = A; C)}{P(X_1 = B)L(X_1 = B; C)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 93\%}{\frac{1}{3} \cdot 99\%} = \frac{2 \cdot 93}{99} > 1$$

quindi è più probabile che sia del tipo A.

3.Si tratta di estrazioni senza rimpiazzo: si può suddividere nei due casi: entrambe tipo A, $X_1 = X_{30} = A$, con probabilità $20/30 \cdot 19/29 \cdot 93\%$ (perché non sappiamo nulla sulle estrazioni in mezzo), entrambe di tipo B, $X_1 = X_{30} = B$, con probabilità $10/30 \cdot 9/29 \cdot 99\%$. Sommandoli otteniamo

$$P(\text{stesso tipo e } C\ ) = \frac{2}{3} \cdot 1929 \cdot 93\% + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{29} \cdot 99\% \approx 50.86\%$$

La probabilità condizionata si ottiene dividendo per $P(C) = 95\%$ calcolata sopra, quindi

$$P(\text{stesso tipo } |C) = \frac{50,86}{95} \approx 53,53\%.$$

Problema 2

Dato un parametro $\theta > 0$, si consideri la densità di probabilità data da

$$p(x|\theta) := \begin{cases} c(\theta)x & \text{se } x \in (0, 1/\theta) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e n variabili indipendenti $(X_1, \ldots, X_n)$ tutte con densità $p(x|\theta)$.

1. Determinare la costante $c(\theta)$ in modo che $x \mapsto p(x|\theta)$ sia una funzione di densità. Calcolare il valor medio e la mediana di X_1 (in funzione di θ).
2. Calcolare la densità e il valor medio di $1/X_1$ (in funzione di θ).
3. Fornire una stima di massima verosimiglianza per θ avendo osservato $X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n$.

Una soluzione:

1. Si tratta di imporre che l'integrale valga 1. Poiché $\int_0^{1/\theta} x dx = \theta^{-2}/2$, si trova che $c(\theta) = 2\theta^2$. Per il valor medio si calcola $2\theta^2 \int_0^{1/\theta} x^2 dx = \frac{2}{3}\theta^{-1}$. Per la mediana si impone che la CDF valga $1/2$, e si trova quindi $\theta^2 m^2 = 1/2$, da cui $m = \theta^{-1}/\sqrt{2}$.

2. Per il valor medio calcoliamo $2\theta^2 \int_0^{1/\theta} 1/x \cdot x dx = 2\theta$. Per la densità basta usare il cambio di variabile, si trova che per $y > \theta$ la densità vale $2\theta^2/y^3$, altrimenti vale 0.

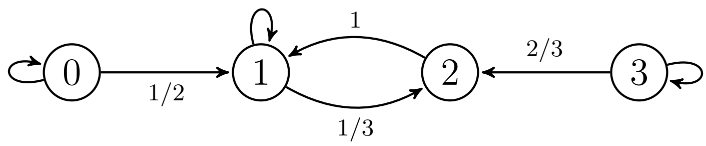
3. Scriviamo la funzione di verosimiglianza, ossia

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i|\theta) = 2^2\theta^n \prod_{i=1}^n x_i,$$

purché $x_i < 1/\theta$ per ogni i, ossia $\theta < 1/x_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ (altrimenti $L(\theta) = 0$). Dovendo massimizzare conviene quindi prendere θ più grande possibile compatibilmente con la condizione trovata, quindi $\theta < \max_{i=1,\ldots,n} 1/x_i = 1/\min_{i=1,\ldots,n} x_i$, quindi $\theta_{MLE} = 1/\min_{i=1,\ldots,n} x_i$.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti) e tale che $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 3) = 1/2$.



1. Classificare gli stati e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare il valore atteso di X_2.
3. Avendo osservato $X_{10} \in \{1, 2\}$ dire se è più probabile che sia $X_0 = 0$ o $X_0 = 3$.

Una soluzione:

1. Gli stati $\{0, 3\}$ sono transitori, i rimanenti irriducibili. Dal bilancio di flusso $\pi_1/3 = \pi_2$, qundi l'unica distribuzione invariante è $\pi = (0, 3/4, 1/4, 0)$. 2. Posta Q la matrice di transizione, si può calcolare $(1/2, 0, 0, 1/2)Q$ e poi $(1/2, 0, 0, 1/2)Q^2 \approx (0.125, 0.625, 0.194, 0.056)$. Il valor medio è quindi $0.625 + 2 \cdot 0.194 + 3 \cdot 0.056 \approx 1.18$.

3. Siccome inizialmente le due alternative sono equiprobabili, basta confrontare le verosimiglianze:

$$L(X_0 = 0; X_{10} \in \{1, 2\}) = P(X_{10} \in \{1, 2\} \,|X_0 = 0) = 1 - P(X_{10} = 0) = 1 - 2^{-10}$$

e similmente

$$L(X_0 = 3; X_{10} \in \{1, 2\}) = 1 - 3^{-10},$$

che però è leggermente più grande. Quindi, anche se di poco, è più probabile che sia $X_0 = 3$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Prova 2025-07-16

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

In un laboratorio scientifico ci sono 30 provette di tipo A, 20 di tipo B e 10 provette di tipo C (60 in tutto), tutte indistinguibili dall'esterno. Si sa però che ogni provetta di tipo A contiene una sostanza reattiva con probabilità 10%, ogni provetta di tipo B contiene una sostanza reattiva con probabilità 60%, mentre ogni provetta di tipo C contiene una sostanza reattiva con probabilità 96%, ciascuna indipendentemente dalle altre.

1. Qual è la probabilità che una provetta scelta a caso contenga una sostanza reattiva?
2. Avendo osservato che una provetta scelta a caso contiene una sostanza reattiva, qual è il suo tipo più probabile?
3. Avendo osservato che una provetta scelta a caso contiene una sostanza reattiva, è più probabile che sia di tipo B oppure che non lo sia?
4. Avendo osservato che una provetta scelta a caso contiene una sostanza reattiva, è più probabile che una ulteriore provetta selta a caso sia di tipo A oppure non lo sia?

Una soluzione:

Poniamo $R =$ 'provetta estratta è reattiva'. 1. $P(R) = \frac{1}{2} \cdot 10\% + \frac{1}{3} \cdot 60\% + \frac{1}{6} \cdot 96\% = 41\%$.

2. Per Bayes, $P(tipo|R) = P(R|tipo)P(tipo)/P(reattiva)$ per ogni $tipo \in \{A, B, C\}$, quindi basta confrontare i termini $P(R|tipo)P(tipo)$:

$$P(R|A)P(A) = 5\%, P(R|B)P(B) = 20\%, P(R|C)P(C) = 16\%$$

e quindi il tipo B è il più probabile.

3. Abbiamo calcolato le probabilità a posteriori con Bayes al punto precedente. Ora le alternative da confrontare sono due: B contro non $B = A \cup C$, per cui

$$P(B|reattiva) = \frac{20\%}{P(reattiva)}, \quad P(A \cup C|reattiva) = \frac{5\% + 16\%}{P(reattiva)} = \frac{21\%}{P(reattiva)}$$

quindi è più probabile che non sia di tipo B.

4. Usando Bayes, troviamo che la probabilità che la prima provetta estratta sia del tipo A (evento A_1) è $\propto 5\%$, mentre che non lo sia è $\propto 36\%$, quindi precisamente $P(A_1|R) = 5/41$, $P(\text{non } A_1|R) = 36/41$. Nel caso sia vero A_1, la probabilità che una nuova provetta sia del tipo A (evento A_2) è $29/59$, mentre nel secondo caso è $30/59$, quindi concludiamo che $P(A_2|R) = \frac{5}{41} \cdot \frac{29}{59} + \frac{36}{41} \cdot \frac{30}{59} \approx 50,6\%$ ossia è (leggermente) più probabile che sia del tipo A.

Problema 2

Per $\theta > 0$, si consideri la densità di probabilità continua

$$f_\theta(t) := \begin{cases} ct \exp(-t/\theta) & \text{se } t \geq 0. \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $c = c(\theta)$ è una opportuna costante che può dipendere da θ, ed $n \geq 1$ variabili aleatorie indipendenti $(T_1, \ldots, T_n)$, ciascuna con densità f_θ.

1. Determinare c in modo che f_θ sia una densità di probabilità.
2. Calcolare il valor medio di T_1 e la varianza di T_1 (in funzione di θ).
3. Scrivere la densità (se esiste) della variabile $\sqrt{T_1}$ (in funzione di θ).
4. Per $n = 8$, si osservano i valori $(T_i)_{i=1}^8 = (45, 50, 48, 47, 52, 49, 60, 49)$. Fornire una stima di massima verosimiglianza per θ.

Una soluzione:

1. Si tratta di imporre che l'integrale della densità valga sempre 1 (per ogni θ). Troviamo con un cambio di variabile che

$$\int_0^\infty t \exp(-t/\theta) dt \overset{x=t/\theta}{=} \theta^2 \int_0^\infty x \exp(-x) dx = 1$$

, quindi basta imporre $c(\theta) = \theta^{-2}$. 2. Per il valor medio usiamo la formula

$$\int_0^\infty t f_\theta(t) dt \overset{x=t/\theta}{=} \theta \int_0^\infty x^2 \exp(-x) dx = 2\theta$$

avendo integrato per parti (saltando un passaggio). Per la varianza, calcoliamo similmente il momento secondo

$$\int_0^\infty t^2 f_\theta(t) dt \overset{x=t/\theta}{=} \theta^2 \int_0^\infty x^3 \exp(-x) dx = 6\theta^2$$

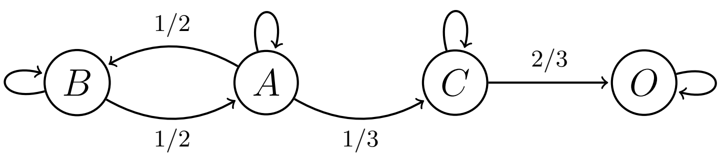
e poi otteviamo $\sigma^2 = \theta^2(6-4) = 2\theta^2$. 3. T_1 è positiva, pertanto per $x \geq 0$, $P(\sqrt{T_1} \leq x) = P(T_1 \leq x^2)$ e quindi derivando si trova

$$p(\sqrt{T_1} = x) = 2x f_\theta(x^2) = 2cx^3 \exp\left(-x^2/\theta\right).$$

(calcoli analoghi si possono fare con il cambio di variabile). 4. Impostando al solito la verosimiglianza e derivando in θ per massimizzarla, si trova lo stimatore $\theta_{MLE} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i$ dove $(x_i)_{i=1}^n$ sono le osservazioni. Pertanto si trova in questo caso che $\theta_{MLE} = 25$.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti) e tale che $P(X_0 = A) = P(X_0 = B) = P(X_0 = C) = 1/3$.



1. Classificare gli stati e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare la probabilità di osservare la parola ABACO (ossia $X_0 = A$, $X_1 = B$, $X_2 = A$, ecc.).
3. Avendo osservato $X_4 = O$, quale tra i tre stati A, B, C è il più probabile per la variabile X_0?

4. Avendo osservato $X_4 = X_0$, quale tra i tre stati A, B, C è il più probabile per la variabile X_0?

Una soluzione:

1. Gli stati $\{A, B, C\}$ sono transienti, lo stato $\{O\}$ è ricorrente (assorbente). Le distribuzioni invarianti valgono 0 sui transienti, e quindi è solo il vettore $\pi = (0, 0, 0, 1)$ (nell'ordine (B, A, C, O)).

2. Il peso del cammino $ABACO$ è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$, mentre la probabilità che $X_0 = A$ è pure $1/3$, quindi troviamo che la probabilità di osservare la parola in questione è $1/54$.

3. Essendo gli stati A, B, C inizialmente equiprobabili, si tratta solo di stabilire quello con la maggiore verosimiglianza $L(i) = P(X_4 = O|X_0 = i)$ per $i \in \{A, B, C\}$. È chiaro tuttavia che lo stato con maggiore verosimiglianza è C, perché i cammini che partono da A o B al tempo $t = 0$ e al tempo $t = 4$ sono in O devono necessariamente passare per C. Più precisamente, i contribuiti del tipo $\gamma \to C \to O$ con γ cammino solo sugli stati $\{A, B\}$, avranno verosimiglianza minore del cammino $C \to O \to O \to O \to O$. Similmente per i cammini è della forma $\gamma \to C \to C \to O$, avranno verosimiglianza minore del singolo cammino $C \to C \to O \to O \to O$ ecc. Quindi il valore più probabile a posteriori è $X_0 = C$.

4. Di nuovo, essendo gli stati A, B, C inizialmente equiprobabili, si tratta di stabilire quello con la maggiore verosimiglianza $L(i) = P(X_4 = A|X_0 = i)$ per $i \in \{A, B, C\}$. Osserviamo che nel caso $i = C$ abbiamo solo il cammino $C \to C \to C \to C \to C \to C$ che ha probabilità $1/3^4$. Per lo stato $i = B$ osserviamo che già il cammino banale $B \to B \to B \to B \to B$ darebbe un contribuito $1/2^4 > 1/3^4$, e similmente per lo stato $i = A$. Quindi $i = C$ non massimizza la verosimiglianza. Per capire quale tra A e B è massimo, osserviamo che ciascun cammino che parte da B al tempo $t = 0$ e al tempo $t = 4$ è in B può essere messo in corrispondenza con un cammino che parte da A e arriva in A al tempo $t = 4$ (e viceversa): essi saranno sequenze di sole lettere B, A e quindi basta scambiare ciascuna A con B. Ora però i pesi di questi cammini saranno diversi, poiché $Q_{B \to B} = 1/2$, mentre $Q_{A \to A} = 1/6$, e invece $Q_{A \to B} = Q_{B \to A} = 1/2$. Quindi ciascun cammino che parte da B e arriva in B avrà sempre peso maggiore del corrispondente cammino che parte da A e arriva A. In conclusione quindi abbiamo che la verosimiglianza è massima per $i = B$.

CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Prova 2025-09-10

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Alice e Beatrice fanno il seguente gioco: Alice lancia un comune dado a sei facce, e successivamente lancia un numero di monete (non truccate) pari all'esito del lancio del dado. Beatrice deve indovinare quale sia l'esito del lancio del dado, e le viene comunicato solo il numero di teste osservate nei lanci di Alice.

1. Qual è il valore atteso del numero di teste osservate?
2. Sapendo che il numero di teste osservate è 3, Beatrice vuole puntare sull'esito del dado più probabile. Qual è (o quali sono)?
3. Sapendo che il numero di teste osservate è 5, calcolare il valore atteso e la varianza dell'esito del dado.
4. Il numero di teste osservate e l'esito del lancio del dado sono correlati positivamente o negativamente, o non correlati?

Una soluzione:

1. Poniamo D la variabile esito del lancio del dato, T il numero di teste osservate. Sappiamo quindi che se $D = k$, T è una binomiale $B(k, 1/2)$. Quindi $E[T|D = k] = k/2$ e pertanto

$$E[T] = \sum_{k=1}^{6} k/2P(D = k) = 1/2E[D] = 7/4.$$

2. Per la formula di Bayes, abbiamo

$$P(D = k|T = 3) \propto P(T = 3|D = k)P(D = k) \propto P(T = 3|D = k) = \binom{k}{3} 2^{-k}$$

avendo usato la densità binomiale. Osserviamo che per $k = 1, 2$ la densità è nulla (non possiamo avere più teste del numero effettivo di lanci) e quindi basterà confrontare i valori per $k = 3, 4, 5, 6$ che sono rispettivamente:

$$2^{-3}, \quad 4 \cdot 2^{-4}, \quad \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2^{-5} = 5 \cdot 2^{-4}, \quad \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} 2^{-6} = 5 \cdot 2^{-4}$$

e quindi i valori $k = 5, 6$ sono i più probabili per l'esito del lancio.

3.Sapendo il numero di teste osservate $T = 5$, abbiamo che solo i valori $k = 5, 6$ sono possibili, con probabilità (per Bayes)

$$P(D = k|T = 5) \propto \binom{k}{5} 2^{-k} = \begin{cases} 2^{-5} & \text{se } k = 5, \\ 6 \cdot 2^{-6} & \text{se } k = 6. \end{cases}$$

ne segue quindi che $P(D = 5|T = 5) = 2^{-5}/(2^{-5} + 6 \cdot 2^{-6}) = 1/13$, e $P(D = 6|T = 6) = 12/13$. Quindi $E[D|T = 5] = 77/13 \approx 5,9$ e $Var(D|T = 5) = 12/13^2$ (senza fare calcoli: infatti D ha la stessa varianza di $D - 5$ che è a valori in $\{0, 1\}$ ha densità Bernoulli di parametro $p = 12/13$).

4. Ricordiamo che $E[T] = E[D]/2$. Calcoliamo

$$E[TD] = \sum_{k=1}^{6} E[T|D=k]kP(D=k) = \sum_{k=1}^{6} k/2 \cdot kP(D=k) = \frac{1}{2}E[D^2].$$

Ne segue che $Cov(D,T) = \frac{1}{2}(E[D^2] - E[D]^2) = \frac{1}{2}Var(D) > 0$ sono quindi positivamente correlate.

Problema 2

Dato un parametro (frequenza angolare) $\omega \in (0, \pi)$, si consideri una variabile aleatoria uniforme continua T sull'intervallo $[0,1]$ e si ponga $Y_\omega := \cos(\omega T)$.

1. Scrivere esplicitamente la densità di Y_ω (in funzione di ω).
2. Calcolare il valor medio di Y_ω (in funzione di ω).
3. Calcolare la mediana di Y_ω (in funzione di ω).
4. Si osserva $Y_\omega = 1/2$. Determinare, se possibile, una stima di massima verosimiglianza per ω.

Una soluzione:

1. Osserviamo che ωT è una variabile uniforme sull'intervallo $[0, \omega] \subseteq [0, \pi]$. La funzione $g(x) = \cos(x)$ è invertibile su tale intervallo, con inversa data da $\arccos(y)$ per $y \in [\cos(\omega), 1]$, con

$$|g'(g^{-1}(y))| = |\sin(\arccos(y))| = \sqrt{1-y^2}$$

e quindi per $y \in [\cos(\omega), 1]$, troviamo

$$p(Y_\omega = y) = p(\omega T = \arccos(y)) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\omega\sqrt{1-y^2}}.$$

2. Per calcolare il valor medio di Y_ω scriviamo

$$E[Y_\omega] = \int_0^1 \cos(\omega t)dt = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)|_0^1 = \sin(\omega)/\omega.$$

3. Per calcolare la mediana m_ω di Y_ω, dobbiamo imporre $P(Y_\omega \leq m_\omega) = 1/2$, quindi

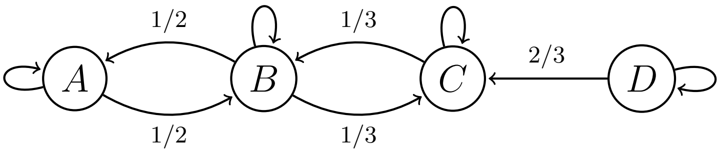
$$P(\cos(\omega T) \leq m_\omega) = P(T \geq \arccos(m_\omega)/\omega) = 1/2$$

da cui $\arccos(m_\omega)/\omega = 1/2$, ossia $m_\omega = \cos(\omega/2)$.

4. La verosimiglianza è $L(\omega) = p(Y_\omega = 1/2) = 1/(\omega\sqrt{1-1/4})$ se $\cos(\omega) \leq 1/2$, altrimenti vale $L(\omega) = 0$. Osserviamo quindi che per massimizzare tale L basterà prendere ω più piccolo possibile perché $\cos(\omega) \leq 1/2$, quindi $\omega = \arccos(1/2) = \pi/3$ è la stima cercata.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti) e tale che $P(X_0 = A) = P(X_0 = D) = 1/2$.



1. Classificare gli stati e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare la probabilità di osservare la parola ABBA (ossia $X_0 = A$, $X_1 = B$, $X_2 = B$, $X_3 = A$).
3. Avendo osservato $X_2 = B$, quale tra i due stati A, D è il più probabile per la variabile X_0?
4. Calcolare e confrontare, se esistono, i limiti

$$\lim_{n\to\infty} P(X_0 = D|X_n = B) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} P(X_0 = A|X_n = B).$$

Una soluzione:

1. Lo stato D è transitorio, gli altri ricorrenti e costituistico l'unica classe chiusta irriducibile. La distribuzione invariante π si trova con il bilancio di flusso:

$$\pi_A = \pi_B, \quad \pi_C = \pi_B$$

da cui $\pi_A = \pi_B = \pi_C = 1/3$ (vale $\pi_D = 0$ perché transitorio).

2. Si tratta di calcolare la probabilità del cammino $\gamma = X_0 = A \to B \to B \to A$. Troviamo il peso del cammino $Q_\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$ che va moltiplicato per $P(X_0 = A) = \frac{1}{2}$. Quindi la probabilità cercata è $P(\gamma) = \frac{1}{48}$.

3. Le probabilità a priori sono uniformi, quindi basta confrontare le verosimiglianze (calcolate con i cammini):

$$L(A) = P(X_2 = B|X_0 = A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$
$$L(D) = P(X_2 = B|X_0 = D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

quindi sono equiprobabili.

4. Sappiamo che $P(X_n = B|X_0 = D) \to \pi_B$ e pure $P(X_n = B|X_0 = A) = \pi_B$ perché la classe chiusa irriducibile è regolare (per il criterio). Similmente, $P(X_n = B) \to \pi_B$, quindi per Bayes

$$P(X_0 = D|X_n = B) = \frac{P(X_n = B|X_0 = D)P(X_0 = D)}{P_n = B} \to P(X_0 = D) = \frac{1}{2}$$

e lo stesso per $X_0 = A$. Quindi valgono entrambi 1/2, i due eventi $X_0 = A$, $X_0 = D$ sono equiprobabili condizionatamente a $X_n = B$ per $n \to \infty$.