3. Si consideri il sistema tempo discreto:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k = A x_k + B u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = C x_k$$

con condizioni iniziali $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$,

- Si determini il numero minimi di passi necessari a portare l'uscita y_k del sistema dal valore 0 al valore 1.
- Si determini una sequenza di ingresso $u_k = (u_0, u_1, u_2, u_3 ...)$ che porti l'uscita y_k da 0 a 1 nel minor numero di passi possibile e la mantenga a 1 indefinitamente.
- Si determini una legge di retroazione del tipo $u_k = Kx_k + 1$ che risolva lo stesso quesito del punto precedente.

$Im(A^n) \subseteq Im(R_n)$

C guarda solo x_2 $\quad y_k = \underset{C}{[1\ 0]} \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}} = x_2$

1) $R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix}$ 2 PASSI $\quad u_0 = 1$ sennò non parte

2) $x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} 1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ x(1) = A x_0 + B u_0 \\ x(2) = A x_1 + B u_1 \\ \quad = A^2 x_0 + AB u_0 + B u_1 \end{array}}$$

$x_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ u_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad u_1 = 1 - \beta$

$\vdots$

$x_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_n = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha + \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ u_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad u_n = 1 - \beta - \alpha$

3 $U = K x_k + 1 \qquad x_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha + k_1 & \beta + k_2 \end{vmatrix} x_n = \begin{vmatrix} x_2 \\ (\alpha + k_1) x_1 + (\alpha + k_2) x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ 0 \end{vmatrix}$

$A + BK = \bar{A} \qquad u_k = [-\alpha\ -\beta] x_n + 1 \qquad \bar{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ AS TD

$x_d = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

STAB A, B CON α, β

4) $\beta \notin \mathbb{R} \quad |\beta| < 1 \qquad \forall \alpha; \beta \quad \bar{A} = A + BK \rightarrow p_d = \lambda^3$

$A_R = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} TR = \alpha \\ DT = -\alpha \end{array} \qquad K = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha - 1} & \frac{\alpha}{\alpha - 1} \end{bmatrix}$

5) $d(A - \lambda I) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta \rightarrow fcc:$

$R(A_c; B_c) \rightarrow T = R R_c^{-1}; \quad K = K_c T^{-1}$

3. Dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- si determinino i valori di α e β corrispondenti a tutti i punti $x_f = [\alpha \ \ \beta]^T$ dello spazio di stato che sono raggiungibili dallo stato iniziale $x_0 = [0 \ \ 1]^T$ in un certo tempo t_f finito.
- si scelga uno di tali punti e si calcoli l'ingresso $u(t)$ necessario a portare x_0 a x_f in un tempo $t_f = 2$.

1) $R = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $Im(R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $e^{At} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$x_f - \phi_L \in R$ $\lambda = 0$ $m_a = 2$ $m_g = 1$

$\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - t_f \\ \beta - 1 \end{vmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$ $\beta = 1$

2) $x_f - \phi_L = \phi_f$

$\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \int_0^2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\tau \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix} u(\tau) \delta(\tau)$

$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \int_0^2 \begin{vmatrix} 2 \cdot u(\tau) \\ 0 \end{vmatrix} d\tau = 2 u(\tau) \Big|_0^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$

3. Dato il sistema SISO tempo continuo

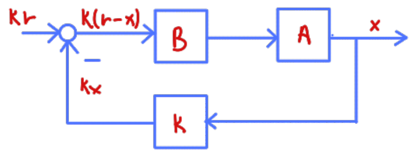
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

chiuso in retroazione con il controllore $u(t) = K(r(t) - x(t))$, con K matrice di guadagni e $r(t)$ ingresso esogeno di riferimento;

- si enunci, e si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
- si discuta il ruolo del segnale di riferimento $r(t)$ nella risposta precedente.
- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.
- si discuta il ruolo del segnale di riferimento $r(t)$ nella risposta precedente.

1) TH POLI: (N) (A,B) SIA R → FSR

(S) (A,B) È R $\exists u$ st → FCC



2) $r(t)$ NUOVO INGRESSO (ESOGENO)

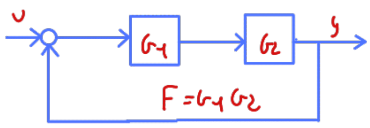
$u' = Kr \rightarrow r = K^{-1}u'$

$x = \bar{A}x + Bu'$

$u = \tilde{K}x + v' = -Kx + KK^{-1}v' = K(r-x)$

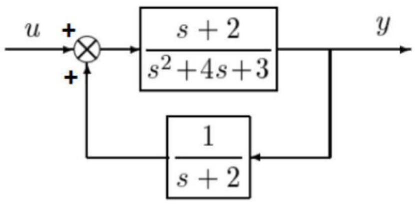
SEGNALE RIFERIMENTO SOLO STATI RAGGIUNGIBILI

EXTRA RETRO INVARIANTE ZERI:



$$W = \frac{F}{1-F} = \frac{n}{\cancel{d}} \frac{\cancel{d}}{d-n} = \frac{n}{d-n}$$

3. Sia dato il sistema in figura:



- si determini una realizzazione in variabili di stato dell'intero sistema ottenuto dalla chiusura dell'anello
- si determini se il sistema ottenuto e' raggiungibile e/o osservabile
- si discuta stabilità interna e BIBO del sistema

$$1+\Sigma_1\Sigma_2 = 1+\frac{1}{\cancel{(s+2)}}\,\frac{\cancel{(s+2)}}{(s+1)(s+3)} = \frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s+3)} \rightarrow G = \frac{\Sigma_1}{1+\Sigma_1\Sigma_2}$$

$$G = \frac{(s+2)}{(s^2+4s+2)}$$ FCC : $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix}$

3. Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} u_k \\ y_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x_k \end{cases}$$

si ipotizzi una legge di controllo in reatroazione statica dello stato del tipo:

$$u_k = Kx_k + \alpha r_k$$

- trovare, se possibile, la matrice K che pone gli autovalori a ciclo chiuso in 0.5 e -0.5,
- si determini l'insieme delle condizioni iniziali del sistema retroazionato che producono una risposta libera dello stato senza oscillazioni.
- posto $\alpha = 0$, si determini l'insieme delle condizioni iniziali del sistema retroazionato che producono una uscita y_k senza oscillazioni.
- si assuma $r_k = R$ (r_k costante) e si ricavi il valore α per cui l'uscita y_k del sistema converge a regime ad R.

1) $\bar{A} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}+2k_1 & \frac{1}{2}+2k_2 \\ 2+4k_1 & \frac{1}{2}+4k_2 \end{vmatrix} \rightarrow R = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}; \rho(R) = 2$ "[illegible]"

$d(\bar{A} - \lambda I) \triangleq \lambda^2 - \frac{1}{4}$

$K = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4}\right] \quad \hat{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

2) NO OSCILLAZIONI $\quad x_f = A^k x_0$

$(\lambda + 0.5)$ OSCILLAZIONI

$\left(\bar{A} + \frac{1}{2} I\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow K\left(\bar{A} + \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow x_0 = \begin{vmatrix} \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

3) $y = CA^k x_0 \quad \alpha = 0$

4) $r_k = R \quad u_k = \underbrace{K x_k}_{Ax} + \underbrace{R\alpha}_{\text{nuovo ingresso}} \quad y_f = \sum_0^{k-1} C A^{k-1-i} R\alpha$

$\boxed{\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(1) &= A x_0 + B u_0 \\ x(2) &= A x_1 + B u_1 \\ &= A^2 x_0 + A B u_0 + B u_1 \end{aligned}}$

$\underset{C}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \end{vmatrix}} \underset{B}{\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}} \underset{u_i}{R\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{10}$

3. Dato il sistema lineare tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} x(t)$$

Si progetti:

- un controllore del tipo $u(t) = -K\hat{x}(t) + v(t)$ tale che la dinamica a ciclo chiuso del sistema abbia autovalori in $(-5 \pm 7j)$ e -7;
- uno stimatore asintotico dello stato, di ordine pieno o ridotto, che stimi $\hat{x}(t)$ con dinamica dell'errore di stima scelta in maniera appropriata (e se ne giustifichi la scelta).

1) "CONTROLLO" SE (A,B) ST:

$\rho(R) = MAX$ OPPURE $\lambda_{\bar{R}} < 0$

$d(A+BK) \stackrel{\Delta}{=} P_d(\lambda)$ $(\alpha_0 - \alpha) = K$

"SAS" SE (A,C) RL, (A^T, C^T) ST:

$\rho(O) = MAX$ OPPURE $\lambda_{\bar{O}} < 0$

$d(A-HC) \stackrel{\Delta}{=} P_d(\lambda)$ $(\alpha_0 - \alpha) = K$

2) $$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & BK \\ HC & \bar{A} - HC \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ \hat{x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B \\ B \end{vmatrix} v$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{A} & BK \\ 0 & \tilde{A} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ \varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B \\ 0 \end{vmatrix} v'$$

$\begin{vmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{vmatrix}$ $\dot{\varepsilon} = e^{F(t-t_0)} \varepsilon_0$ $\lim_{t \to \infty} \dot{\varepsilon} = 0$

BKE DISTURBO $G\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{vmatrix} = G(x)$ $\boxed{\text{NO R - POLI}}$

3a) $\dim(y) \geq \rho(C)$ PRENDO RIGHE C L.I.

$r = \rho(C) \leq \min(l, n)$

$V = (n-l) \times n$

$L = (n-l) \times l$

$A^{(n \times n)}$ $B^{(n \times m)}$ $C^{(l \times n)}$ $D^{(l \times m)}$

PRIMA VERIFICO TUTTA C O RIGA CHE VOGLIO $\rightarrow \rho(O) = MAX$

V RENDE LA T INVERTIBILE

3b) $T^{-1} = \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ $\hat{C} = CT = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline -14 & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} \\ 28 & -\frac{48}{35} & -\frac{7}{5} \end{array}\right] \begin{array}{c} n-p \\ p \end{array} \\ \begin{array}{cc} n-p & p \end{array} \end{array}$$

$\tilde{B} = T^{-1} B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$

$$\hat{F} = A_{11} + L A_{21} = |-1| + |L_1 L_2| \begin{vmatrix} -14 \\ 28 \end{vmatrix}$$

$d(\hat{F} - \lambda I) \stackrel{\Delta}{=} P_d(\lambda)$ $\hat{x} = T \begin{bmatrix} \hat{v} - Ly \\ y \end{bmatrix}$

$$\dot{\hat{v}} = \hat{F} v + (B_1 + L B_2) u + (A_{12} + L A_{22} - FL) y$$

3. Si consideri il sistema lineare tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} u(t)$$

- si dica se il sistema e' stabilizzabile con retroazione dello stato tramite uno solo degli ingressi
- si dica se il sistema è stabilizzabile con entrambi gli ingressi.
- Utilizzando il lemma di Heymann applicato al primo ingresso, si calcoli, se e' possibile, una retroazione dello stato $u(t) = Kx(t)$ che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -1.

$\rho(R(A, b_i)) \neq MAX$ $\quad Q = [b_1 \; Ab_1 \; A^2b_1 \,\vdots\, b_2]$ l.i.

$\rho(R(A, B)) = MAX$ $\quad S = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ 2 righe 2 ingressi

$M = SQ^{-1}$ $\quad A + BM = \tilde{A}$ $\quad \rho(R(\tilde{A}; b_1)) = MAX$

$d(\tilde{A} + BK - \lambda I) \triangleq p_d(\lambda)$ $\quad K = M + \begin{vmatrix} k_1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$K = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4 il candidato dica se è vera o falsa, e lo dimostri, la seguente frase: "dato il punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ di un sistema non lineare, anche se la matrice dinamica A del sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$ ha autovalori nulli, è possibile progettare un controllore lineare del tipo $u = K(x - \bar{x}) + \bar{u}$ che, progettato per stabilizzare il sistema linearizzato, stabilizzi anche il sistema non lineare ".

$\dot{x} = f(x,u) \quad 0 = f(\bar{x},\bar{u}) \quad \tilde{a} = a - \bar{a}$

LIN $\dot{x} \simeq \cancel{f(\bar{x},\bar{u})} + \overbrace{\frac{d}{dx} f(x,u)\Big|_{\bar{x}\bar{u}}}^{A} \tilde{x} + \overbrace{\frac{d}{du} f(x,u)\Big|_{\bar{x}\bar{u}}}^{B} \tilde{u} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$

PROGETTO CONTROLLO $\tilde{u} = K\tilde{x}$ "ST" POI SOSTITUISCO $u - \bar{u} = K(x - \bar{x}) \to \boxed{u = K(x - \bar{x}) + \bar{u}}$

APPLICO AL "NL" NUOVO MODELLO: $\dot{x} = f(x,u)\big|_{u} = f(x, u) = f'(x)$

NUOVO LIN $\dot{x} \simeq f'(\bar{x}) + \frac{d}{dx} f'(x)\Big|_{\bar{x}} \tilde{x} = \cancel{f(\bar{x}, u)} + \overbrace{\frac{df'}{dx}\Big|_{\bar{x}}}^{A} \tilde{x} + \overbrace{\frac{df}{du}}^{B} \overbrace{\frac{du}{dx}}^{K}\Big|_{\bar{x}} \tilde{x} = (A + BK)\tilde{x}$

TD C.I. $e_k \longrightarrow 5\%\, e_0$ IN N - PASSI

TC) $\lambda(A_{\bar{0}}) = 0$ } STABILI
TD) $\lambda(A_{\bar{0}}) = \pm 1$ } $\varepsilon \not\to 0$

$F = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; $e^{Ft} = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\varepsilon_0 = \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

$\varepsilon = e^{Ft} \varepsilon_0 \to \begin{vmatrix} 5e^{-t} \\ 5 \end{vmatrix} \underset{t\to\infty}{\sim} \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix}$

$\varepsilon = F^k \varepsilon_0 = \begin{vmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{vmatrix} \varepsilon_0$

$\varepsilon_k = 0.05\, \varepsilon_0$