# Stima dei parametri di una catena di Markov dalle osservazioni

# Stima dei parametri

Consideriamo il problema di stimare i *parametri* di un processo di Markov omogeneo, sulla base di osservazioni di una traiettoria, ossia la matrice

- delle probabilità di transizione $Q$ per una catena di Markov $(X_n)_n$

# Stima dei parametri

Consideriamo il problema di stimare i *parametri* di un processo di Markov omogeneo, sulla base di osservazioni di una traiettoria, ossia la matrice

- delle probabilità di transizione $Q$ per una catena di Markov $(X_n)_n$
- o delle intensità di salto $L$ per un processo di Markov a salti $(X_t)_t$,

# Due approcci

Si osserva che la catena $X$ segue un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$, ossia $X_0 = x_0$, $X_1 = x_1$, $\ldots$, $X_n = x_n$ (scriviamo $X = \gamma$). Consideriamo i due approcci:

- Massima verosimiglianza: massimizzare

$$Q \mapsto L(\mathcal{Q} = Q; X = \gamma) = P(X = \gamma | \mathcal{Q} = Q) = P(X_0 = x_0) Q_\gamma$$

# Due approcci

Si osserva che la catena $X$ segue un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$, ossia $X_0 = x_0$, $X_1 = x_1$, $\ldots$, $X_n = x_n$ (scriviamo $X = \gamma$). Consideriamo i due approcci:

- Massima verosimiglianza: massimizzare

$$Q \mapsto L(\mathcal{Q} = Q; X = \gamma) = P(X = \gamma | \mathcal{Q} = Q) = P(X_0 = x_0) Q_\gamma$$

- Bayesiano: si introduce una densità a priori per $\mathcal{Q}$ (vista come variabile aleatoria) e si stima tramite Bayes la densità a posteriori, noto $X = \gamma$,

$$p(\mathcal{Q} = Q | X = \gamma) \propto p(\mathcal{Q} = Q) L(\mathcal{Q} = Q; X = \gamma),$$

# Stima di massima verosimiglianza

Supponiamo per semplificare che sia $P(X_0 = x_0) = 1$, così

$$L(Q; X = \gamma) = Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n-1} Q_{x_{k-1} \to x_k}.$$

- Raccogliendo i fattori ripetuti,

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} Q_{x_{k-1} \to x_k} = \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\gamma_{i \to j}},$$

dove $\gamma_{i \to j}$ è il numero di transizioni dallo stato $i \in E$ a $j \in E$ che avvengono in $\gamma$.

# Stima di massima verosimiglianza

Supponiamo per semplificare che sia $P(X_0 = x_0) = 1$, così

$$L(Q; X = \gamma) = Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n-1} Q_{x_{k-1} \to x_k}.$$

- Raccogliendo i fattori ripetuti,

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} Q_{x_{k-1} \to x_k} = \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\gamma_{i \to j}},$$

dove $\gamma_{i \to j}$ è il numero di transizioni dallo stato $i \in E$ a $j \in E$ che avvengono in $\gamma$.

- In particolare,

$$n = \sum_{i,j \in E} \gamma_{i \to j}.$$

# Un massimo vincolato

Per calcolare il punto di massimo, di

$$Q \mapsto \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\gamma_{i \to j}}$$

dobbiamo tenere conto del vincolo che la somma delle righe della matrice $\mathcal{Q}$ sia 1.

- Per determinare massimi o minimi di funzioni vincolate in generale si usano i moltiplicatori di Lagrange: nei punti critici il gradiente della funzione sia ortogonale al vincolo.

# Una sostituzione

Nel nostro caso evitiamo i moltiplicatori esprimendo la diagonale di $\mathcal{Q}$ in termini delle altre entrate sulla riga:

$$Q_{i\to i} = 1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j} \quad \text{per ogni } i \in E.$$

- Riscriviamo la verosimiglianza

$$L(\mathcal{Q} = Q; X = \gamma) = \prod_{i\in E} (1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j})^{\gamma_{i\to i}} \prod_{j\neq i} Q_{i\to j}^{\gamma_{i\to j}}.$$

# Una sostituzione

Nel nostro caso evitiamo i moltiplicatori esprimendo la diagonale di $\mathcal{Q}$ in termini delle altre entrate sulla riga:

$$Q_{i\to i} = 1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j} \quad \text{per ogni } i \in E.$$

- Riscriviamo la verosimiglianza

$$L(\mathcal{Q} = Q; X = \gamma) = \prod_{i\in E} (1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j})^{\gamma_{i\to i}} \prod_{j\neq i} Q_{i\to j}^{\gamma_{i\to j}}.$$

- Possiamo ragionare separatamente per ciascuna riga $i$, e massimizzare

$$(Q_{i\to j})_{j\neq i} \mapsto (1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j})^{\gamma_{i\to i}} \prod_{j\neq i} Q_{i\to j}^{\gamma_{i\to j}},$$

# Conclusione

# Il metodo bayesiano

Se la densità a priori per $\mathcal{Q}$ è della forma

$$p(\mathcal{Q} = Q) \propto \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\alpha_{ij}},$$

per opportuni parametri $\alpha_{ij} \geq 0$, la moda della densità sopra è data dalla matrice

$$Q_{i \to j} = \frac{\alpha_{ij}}{\sum_{k \in E} \alpha_{ik}} \propto \alpha_{ij}.$$

- La formula di Bayes darebbe quindi come densità a posteriori

$$p(\mathcal{Q} = Q | X = \gamma) \propto \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\alpha_{ij} + \gamma_{i \to j}},$$

con stima di massima verosimiglianza

$$Q_{i \to j} = \frac{\alpha_{ij} + \gamma_{i \to j}}{\sum_{k \in E} \alpha_{ik} + \gamma_{i \to k}} \propto \alpha_{ij} + \gamma_{ij}.$$

# Processi di Markov a salti

Nel caso di processi di Markov a salti, l'argomento è analogo ma si basa sulla formula per la "densità" di probabilità di un cammino.

- Presentiamo solo la stima di massima verosimiglianza. Si consideri un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \dots x_n)$ che rimane per un tempo $t_1$ nello stato $x_0$, $t_2$ nello stato $x_1$ ecc., e si supponga di osservare $X = \gamma$, ossia tutta la traiettoria da $X_0 = x_0$ fino a $X_{t_1+\dots+t_n} = x_n$.

# Processi di Markov a salti

Nel caso di processi di Markov a salti, l'argomento è analogo ma si basa sulla formula per la "densità" di probabilità di un cammino.

- Presentiamo solo la stima di massima verosimiglianza. Si consideri un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \dots x_n)$ che rimane per un tempo $t_1$ nello stato $x_0$, $t_2$ nello stato $x_1$ ecc., e si supponga di osservare $X = \gamma$, ossia tutta la traiettoria da $X_0 = x_0$ fino a $X_{t_1+\dots+t_n} = x_n$.
- La verosimiglianza per $L$ è

$$\prod_{k=1}^{n} \exp\left(t_k L_{x_{k-1}\to x_{k-1}}\right) L_{x_{k-1}\to x_k} = \prod_{i\in E} \exp\left(\gamma_{i\to i} L_{i\to i}\right) \prod_{i\neq j\in E} L_{i\to j}^{\gamma_{i\to j}}$$

dove $\gamma_{i\to j}$ per $i \neq j$ è come prima ma $\gamma_{i\to i}$ è il tempo totale trascorso dal cammino nello stato $i \in E$.

# Massimizzazione

Eliminiamo il vincolo che la somma sulle righe di $L$ è nulla:

$$\exp\left(\gamma_{i\to i} L_{i\to i}\right) = \exp\left(-\gamma_{i\to i} \sum_{j\neq i} L_{i\to j}\right).$$

- Passando ai logaritmi e derivando si ottiene che $\mathcal{L}_{MLE}$ è data dall'espressione, per $i \neq j$,

$$L_{i\to j} = \frac{\gamma_{i\to j}}{\gamma_{i\to i}}.$$

# Modelli nascosti

Abbiamo supposto di osservare completamente la catena $X$ in un intervallo (discreto o continuo) di tempi.

- Cosa accade se mancano le osservazioni delle variabili $X_k$ in alcuni tempi?

# Modelli nascosti

Abbiamo supposto di osservare completamente la catena $X$ in un intervallo (discreto o continuo) di tempi.

- Cosa accade se mancano le osservazioni delle variabili $X_k$ in alcuni tempi?
- oppure se si osserva solamente una funzione $g(X_k)$ della catena invece, di $X_k$, o più in generale una funzione $g(X_k, Z_k)$ dove $Z$ è un processo indipendente da $X$?

# Modelli nascosti

Abbiamo supposto di osservare completamente la catena $X$ in un intervallo (discreto o continuo) di tempi.

- Cosa accade se mancano le osservazioni delle variabili $X_k$ in alcuni tempi?
- oppure se si osserva solamente una funzione $g(X_k)$ della catena invece, di $X_k$, o più in generale una funzione $g(X_k, Z_k)$ dove $Z$ è un processo indipendente da $X$?
- In questa situazione si parla di modelli di Markov nascosti (in inglese *Hidden Markov Models*, HMM) e la ricostruzione di $X_k$ è il problema del filtraggio.

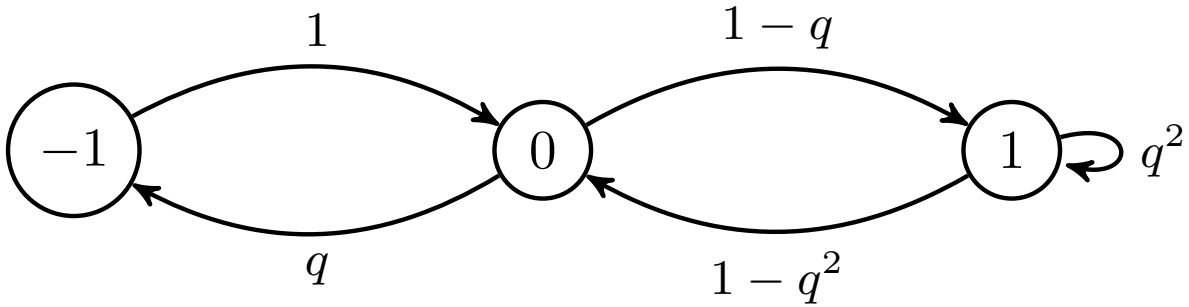
# Modelli nascosti

Abbiamo supposto di osservare completamente la catena $X$ in un intervallo (discreto o continuo) di tempi.

- Cosa accade se mancano le osservazioni delle variabili $X_k$ in alcuni tempi?
- oppure se si osserva solamente una funzione $g(X_k)$ della catena invece, di $X_k$, o più in generale una funzione $g(X_k, Z_k)$ dove $Z$ è un processo indipendente da $X$?
- In questa situazione si parla di modelli di Markov nascosti (in inglese *Hidden Markov Models*, HMM) e la ricostruzione di $X_k$ è il problema del filtraggio.
- Opportuni algoritmi (EM) permettono di stimare i parametri di un HMM.

# Un esempio/esercizio

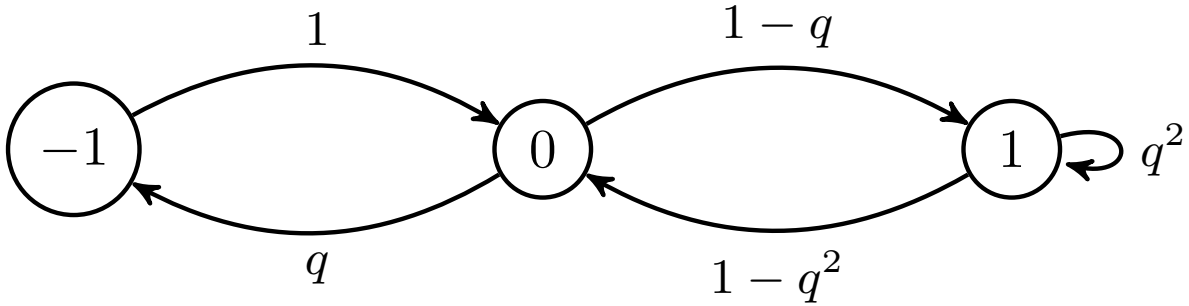
Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura, dove $q \in (0,1)$ è un parametro (non aleatorio).




1. Supponendo che $X$ sia stazionaria, dire al variare di $q \in (0,1)$ se è più probabile che sia $X_0 = 0$ oppure $X_0 \neq 0$.

# Un esempio/esercizio

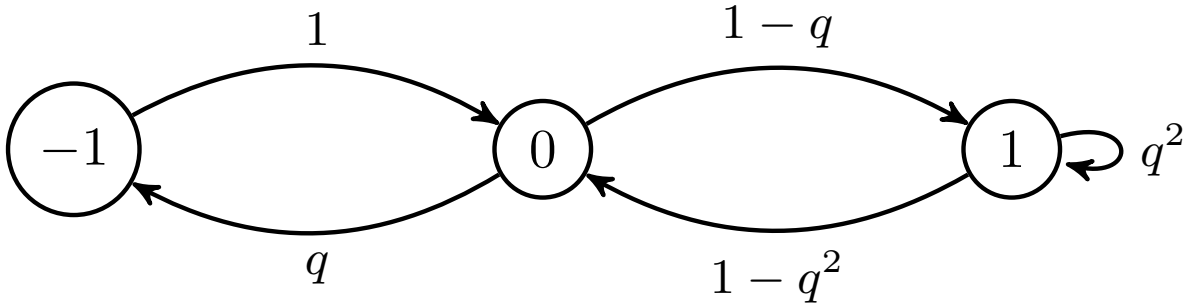
Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura, dove $q \in (0,1)$ è un parametro (non aleatorio).




1. Supponendo che $X$ sia stazionaria, dire al variare di $q \in (0,1)$ se è più probabile che sia $X_0 = 0$ oppure $X_0 \neq 0$.
2. Si supponga noto a priori che $X_0 = 0$. Si osserva il cammino $0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 1$. Determinare la stima di massima verosimiglianza $q_{\text{MLE}}$.

# Un esempio/esercizio

Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura, dove $q \in (0,1)$ è un parametro (non aleatorio).




1. Supponendo che $X$ sia stazionaria, dire al variare di $q \in (0,1)$ se è più probabile che sia $X_0 = 0$ oppure $X_0 \neq 0$.
2. Si supponga noto a priori che $X_0 = 0$. Si osserva il cammino $0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 1$. Determinare la stima di massima verosimiglianza $q_{\text{MLE}}$.
3. Si supponga noto a priori che $X$ sia stazionaria. Si osserva lo stesso cammino della domanda di prima. Determinare $q_{\text{MLE}}$.

1.

## 2.

3. Stavolta

$$L(q; X = \gamma) = P(X_0 = 0 | X \text{ staz}, q) Q_\gamma = \frac{1+q}{2+2q+q^2} q^2 (1-q) q^2.$$

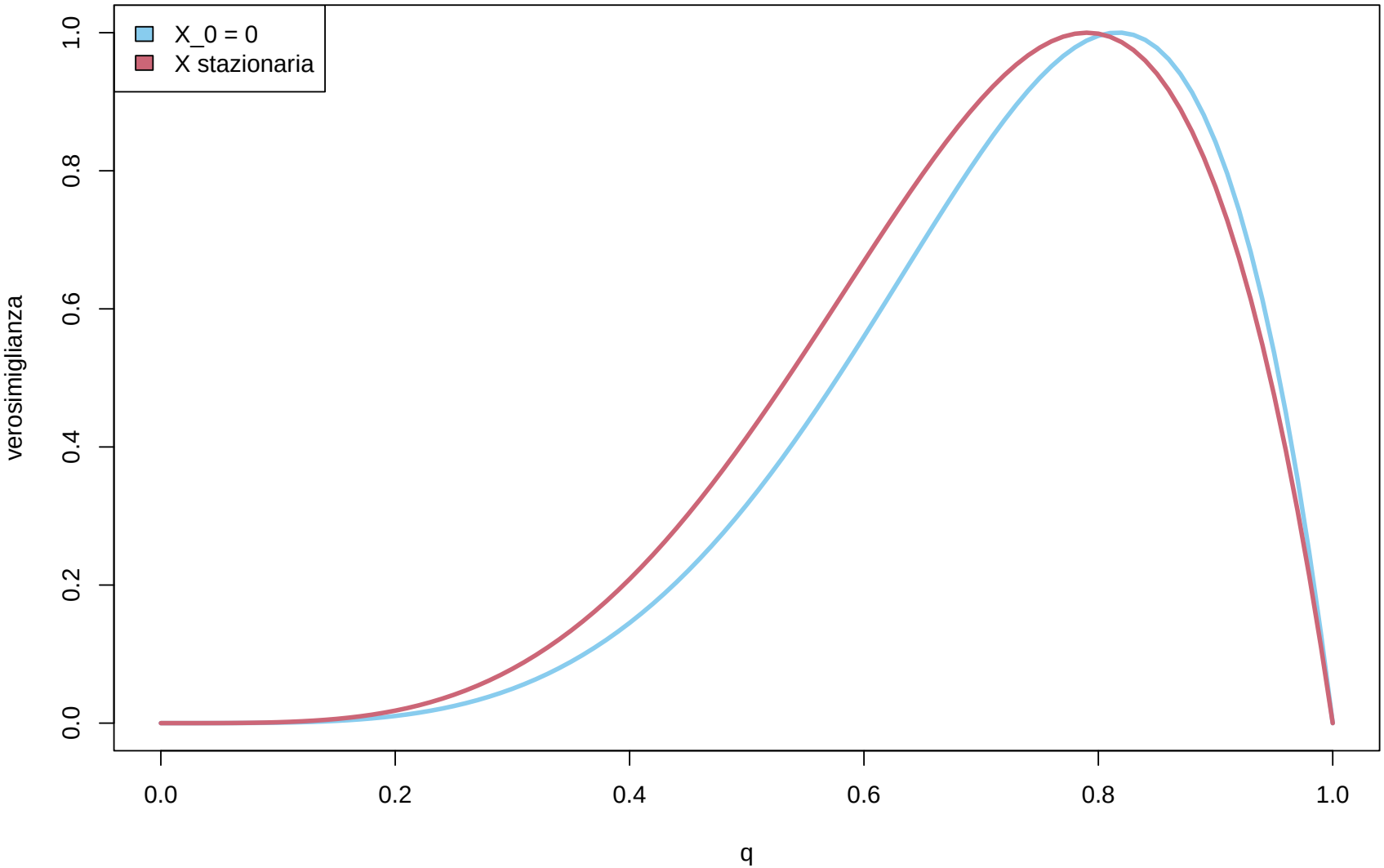
Stimiamo numericamente $q_{\text{MLE}}$.

```
likelihood_stazionaria = function(q){
  -(1-q^2)*q^4/(2+2*q+q^2)
}

x_mle = nlm(likelihood_stazionaria, 1/2)

x_mle$estimate
```

```
## [1] 0.7902904
```


X_0 = 0
X stazionaria
verosimiglianza
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
q

# Cenni alla teoria delle code

# Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)

# Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)
- veicoli che si presentano ad un casello autostradale

# Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)
- veicoli che si presentano ad un casello autostradale
- istanze di calcolo che devono essere eseguite da una o più processori in un computer...

# Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)
- veicoli che si presentano ad un casello autostradale
- istanze di calcolo che devono essere eseguite da una o più processori in un computer...
- L'obiettivo è individuare strategie per migliorare l'esperienza di chi è in attesa (ridurre i tempi) rendendone più efficiente il servizio.

# Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)
- veicoli che si presentano ad un casello autostradale
- istanze di calcolo che devono essere eseguite da una o più processori in un computer...
- L'obiettivo è individuare strategie per migliorare l'esperienza di chi è in attesa (ridurre i tempi) rendendone più efficiente il servizio.
- La teoria delle code è un campo molto esteso, presentiamo i modelli più semplici come esempi di processi di Markov a salti.

# Clienti e serventi

Per indicare le persone, le auto, le istanze ecc. da servire usiamo il termine **clienti** (in inglese si usa a volte *jobs*)

Usiamo il termine **serventi** (in inglese *servers*) per chi eroga il servizio richiesto dei clienti.

Aspetti da modellizzare:

- l'ingresso di uno o più clienti,

# Clienti e serventi

Per indicare le persone, le auto, le istanze ecc. da servire usiamo il termine **clienti** (in inglese si usa a volte *jobs*)

Usiamo il termine **serventi** (in inglese *servers*) per chi eroga il servizio richiesto dei clienti.

Aspetti da modellizzare:

- l'ingresso di uno o più clienti,
- il tempo d'attesa che un servente prenda in carico il compito richiesto,

# Clienti e serventi

Per indicare le persone, le auto, le istanze ecc. da servire usiamo il termine **clienti** (in inglese si usa a volte *jobs*)

Usiamo il termine **serventi** (in inglese *servers*) per chi eroga il servizio richiesto dei clienti.

Aspetti da modellizzare:

- l'ingresso di uno o più clienti,
- il tempo d'attesa che un servente prenda in carico il compito richiesto,
- e infine l'uscita dalla coda quando il compito è svolto

# Clienti e serventi

Per indicare le persone, le auto, le istanze ecc. da servire usiamo il termine **clienti** (in inglese si usa a volte *jobs*)

Usiamo il termine **serventi** (in inglese *servers*) per chi eroga il servizio richiesto dei clienti.

Aspetti da modellizzare:

- l'ingresso di uno o più clienti,
- il tempo d'attesa che un servente prenda in carico il compito richiesto,
- e infine l'uscita dalla coda quando il compito è svolto
- Una volta introdotto un modello, è di interesse calcolare il tempo medio di attesa, il numero medio di clienti in coda e stimare i parametri di un modello sulla base di quantità osservate nella realtà.

# Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

- $A$ indica un "processo" di arrivo dei clienti,

# Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

- $A$ indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- $S$ la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,

# Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

- $A$ indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- $S$ la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,
- $c$ il numero dei serventi.

# Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

- $A$ indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- $S$ la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,
- $c$ il numero dei serventi.
- Noi studiamo solo i modelli $M/M/c$: arrivi e tempi di servizio sono Markoviani (a tempi continui).

# Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

- $A$ indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- $S$ la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,
- $c$ il numero dei serventi.
- Noi studiamo solo i modelli $M/M/c$: arrivi e tempi di servizio sono Markoviani (a tempi continui).
- Formalmente i modelli sono processi di Markov a salti negli stati $E = \mathbb{N}$.

# Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

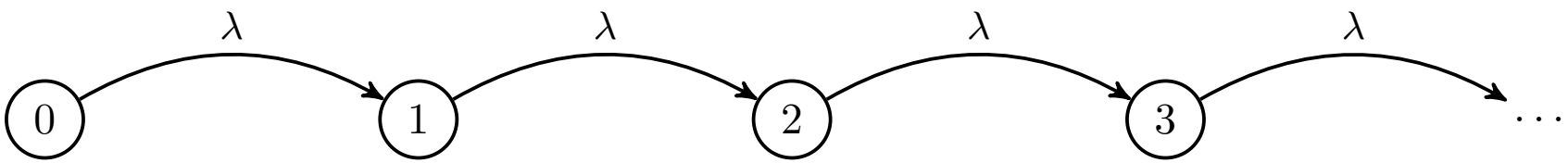
- $A$ indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- $S$ la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,
- $c$ il numero dei serventi.
- Noi studiamo solo i modelli $M/M/c$: arrivi e tempi di servizio sono Markoviani (a tempi continui).
- Formalmente i modelli sono processi di Markov a salti negli stati $E = \mathbb{N}$.
- Lo stato $n$ indica il numero di clienti in attesa o in corso di servizio.

# Caso $M/M/0$: il processo di Poisson

Il modello più semplice è il caso in cui non vi siano serventi (oppure si è interessati solo al processo di arrivo dei clienti): il processo è detto *processo di Poisson* di intensità $\lambda > 0$.

Le intensità di salto sono

$$L_{n\to n+1} = \lambda, \quad L_{n\to n} = -\lambda \quad \text{e} \quad L_{n\to k} = 0 \quad k \neq n,\, k \neq n+1.$$




- Ogni stato è transitorio, non vi sono distribuzioni invarianti.

# Legame con la densità Poisson

Se $X_0 = 0$, allora la densità marginale di $X_t$ è Poisson di intensità $\lambda t$, ossia

$$\mu_n^t \propto \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda).$$

- Basta verificare che valga la *master equation*, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}\mu_n^t = (\mu^t L)_n = \begin{cases} -\lambda \mu_0^t & \text{se } n = 0, \\ \lambda(\mu_{n-1}^t - \mu_n^t) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

# Legame con la densità Poisson

Se $X_0 = 0$, allora la densità marginale di $X_t$ è Poisson di intensità $\lambda t$, ossia

$$\mu_n^t \propto \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda).$$

- Basta verificare che valga la *master equation*, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}\mu_n^t = (\mu^t L)_n = \begin{cases} -\lambda \mu_0^t & \text{se } n = 0, \\ \lambda(\mu_{n-1}^t - \mu_n^t) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

- Calcoliamo quindi

$$\frac{d}{dt} \exp(-t\lambda) \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \begin{cases} -\lambda \exp(-t\lambda) & \text{se } n = \\ \frac{nt^{n-1}\lambda^n}{n!} \exp(-t\lambda) - \lambda \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda) & \text{se } n \end{cases}$$

# Legame con la densità Poisson

Se $X_0 = 0$, allora la densità marginale di $X_t$ è Poisson di intensità $\lambda t$, ossia

$$\mu_n^t \propto \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda).$$

- Basta verificare che valga la *master equation*, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}\mu_n^t = (\mu^t L)_n = \begin{cases} -\lambda \mu_0^t & \text{se } n = 0, \\ \lambda(\mu_{n-1}^t - \mu_n^t) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

- Calcoliamo quindi

$$\frac{d}{dt} \exp(-t\lambda) \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \begin{cases} -\lambda \exp(-t\lambda) & \text{se } n = \\ \frac{nt^{n-1}\lambda^n}{n!} \exp(-t\lambda) - \lambda \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda) & \text{se } n \end{cases}$$

- Per concludere nel caso $n \geq 1$ basta notare che

$$\frac{nt^{n-1}\lambda^n}{n!} \exp(-t\lambda) = \lambda \frac{(t\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-t\lambda) = \lambda \mu_{n-1}^t.$$

# Stima del parametro $\lambda$ dalle osservazioni

Supponiamo di osservare un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con tempi di permanenza $t_1$ (nello stato $x_0$), $t_2$ (in $x_1$), ...., $t_n$.

- Poiché i salti avvengono solo tra $n$ e $n+1$, deve essere $x_1 = x_0 + 1$, $x_2 = x_0 + 2$, ecc.

# Stima del parametro $\lambda$ dalle osservazioni

Supponiamo di osservare un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con tempi di permanenza $t_1$ (nello stato $x_0$), $t_2$ (in $x_1$), ...., $t_n$.

- Poiché i salti avvengono solo tra $n$ e $n+1$, deve essere $x_1 = x_0 + 1$, $x_2 = x_0 + 2$, ecc.
- La verosimiglianza è

$$L(\Lambda = \lambda; X = \gamma) = \prod_{k=1}^{n} \exp(-\lambda t_k)\, \lambda = \lambda^n \exp(-\lambda T)\,.$$

dove supponiamo noto a priori che $X_0 = x_0$ e $T = \sum_{k=1}^{n} t_k$.

# Stima del parametro $\lambda$ dalle osservazioni

Supponiamo di osservare un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con tempi di permanenza $t_1$ (nello stato $x_0$), $t_2$ (in $x_1$), ...., $t_n$.

- Poiché i salti avvengono solo tra $n$ e $n+1$, deve essere $x_1 = x_0 + 1$, $x_2 = x_0 + 2$, ecc.
- La verosimiglianza è

$$L(\Lambda = \lambda; X = \gamma) = \prod_{k=1}^{n} \exp(-\lambda t_k)\, \lambda = \lambda^n \exp(-\lambda T).$$

  dove supponiamo noto a priori che $X_0 = x_0$ e $T = \sum_{k=1}^{n} t_k$.
- La stima di massima verosimiglianza si trova annullando la derivata rispetto a $\lambda$ e vale

$$\frac{n}{\lambda_{MLE}} - T = 0 \quad \text{quindi} \quad \lambda_{MLE} = \frac{n}{T}.$$

# Code $M/M/1$

Supponiamo vi sia un solo servente e che il tempo di servizio per ciascun cliente sia una variabile esponenziale di parametro $\mu$ (ogni cliente sia indipendente dagli altri).

- Per arrivare al modello come un processo di Markov a salti, supponiamo non vi siano arrivi: si salta solo da $n$ verso $n-1$ (se $n \geq 1$) con dei tempi di permanenza esponenziali di parametro $\mu$. Pertanto, se $n \geq 1$,

$$L_{n \to n-1} = \mu.$$

# Code $M/M/1$

Supponiamo vi sia un solo servente e che il tempo di servizio per ciascun cliente sia una variabile esponenziale di parametro $\mu$ (ogni cliente sia indipendente dagli altri).

- Per arrivare al modello come un processo di Markov a salti, supponiamo non vi siano arrivi: si salta solo da $n$ verso $n-1$ (se $n \geq 1$) con dei tempi di permanenza esponenziali di parametro $\mu$. Pertanto, se $n \geq 1$,

$$L_{n \to n-1} = \mu.$$

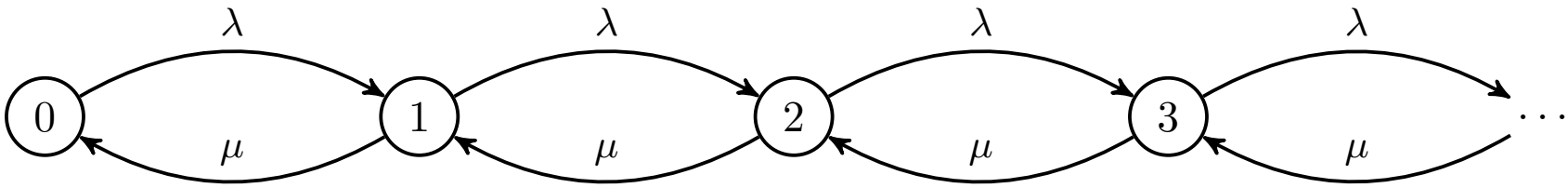
- Aggiungiamo gli arrivi come un processo di Poisson di intensità $\lambda$: per $n \geq 0$,

$$L_{n \to n+1} = \lambda,$$

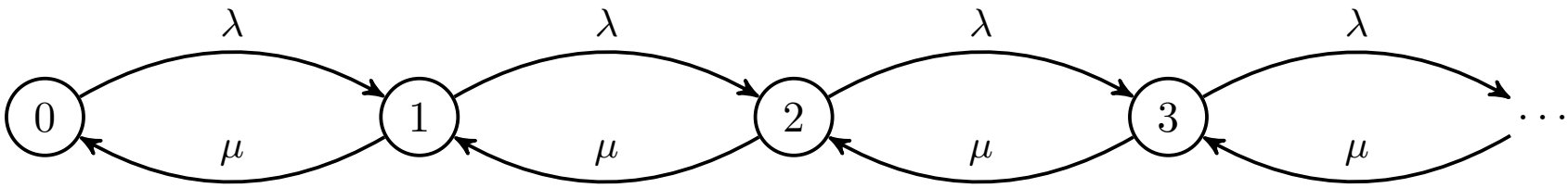
e di conseguenza

$$L_{n \to n} = \begin{cases} -\lambda & \text{se } n = 0 \\ -(\lambda + \mu) & \text{se } n \geq 1, \end{cases}$$

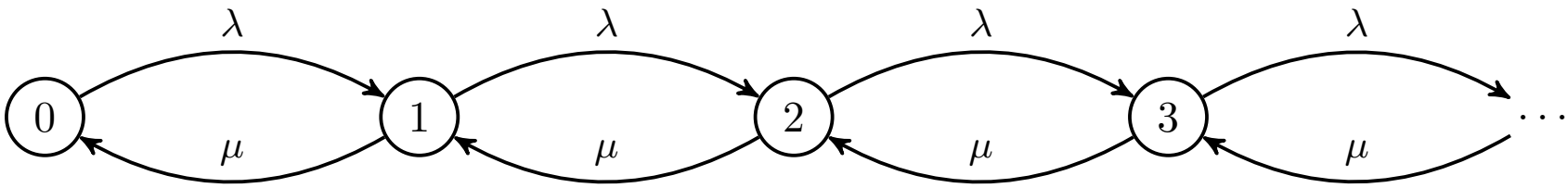
avendo posto $L_{n \to k} = 0$ se $k \notin \{n-1, n, n+1\}$




- Ogni stato è ricorrente, ma essendo infiniti stati non è ovvio che esista una distribuzione invariante.

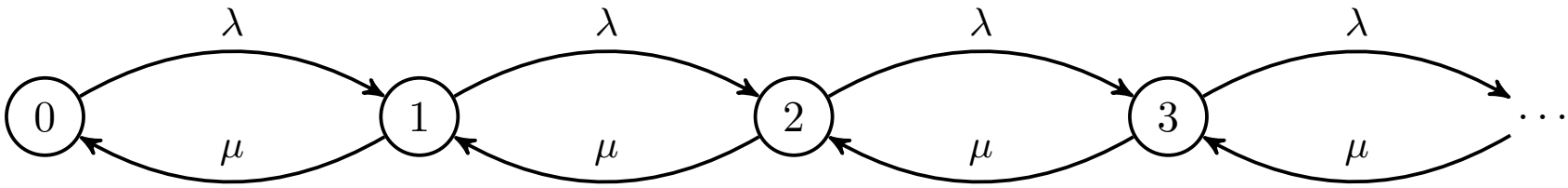



- Ogni stato è ricorrente, ma essendo infiniti stati non è ovvio che esista una distribuzione invariante.
- Vi è una competizione tra il tasso di arrivo $\lambda$ e di uscita $\mu$.




- Ogni stato è ricorrente, ma essendo infiniti stati non è ovvio che esista una distribuzione invariante.
- Vi è una competizione tra il tasso di arrivo $\lambda$ e di uscita $\mu$.
- Risolvendo l'equazione $\mu L = 0$ (o imponendo il bilancio di flusso) si trova

$$\mu_n \propto \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$




- Ogni stato è ricorrente, ma essendo infiniti stati non è ovvio che esista una distribuzione invariante.
- Vi è una competizione tra il tasso di arrivo $\lambda$ e di uscita $\mu$.
- Risolvendo l'equazione $\mu L = 0$ (o imponendo il bilancio di flusso) si trova

$$\mu_n \propto \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

- Per garantire che $\mu$ sia una densità di probabilità, bisogna che

$$\sum_n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n < \infty,$$

ossia che $\lambda < \mu$.

- La distribuzione invariante è *geometrica* di parametro $1 - \lambda/\mu$, con valor medio

$$\mathbb{E}[N] = \sum_n n\mu_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda},$$

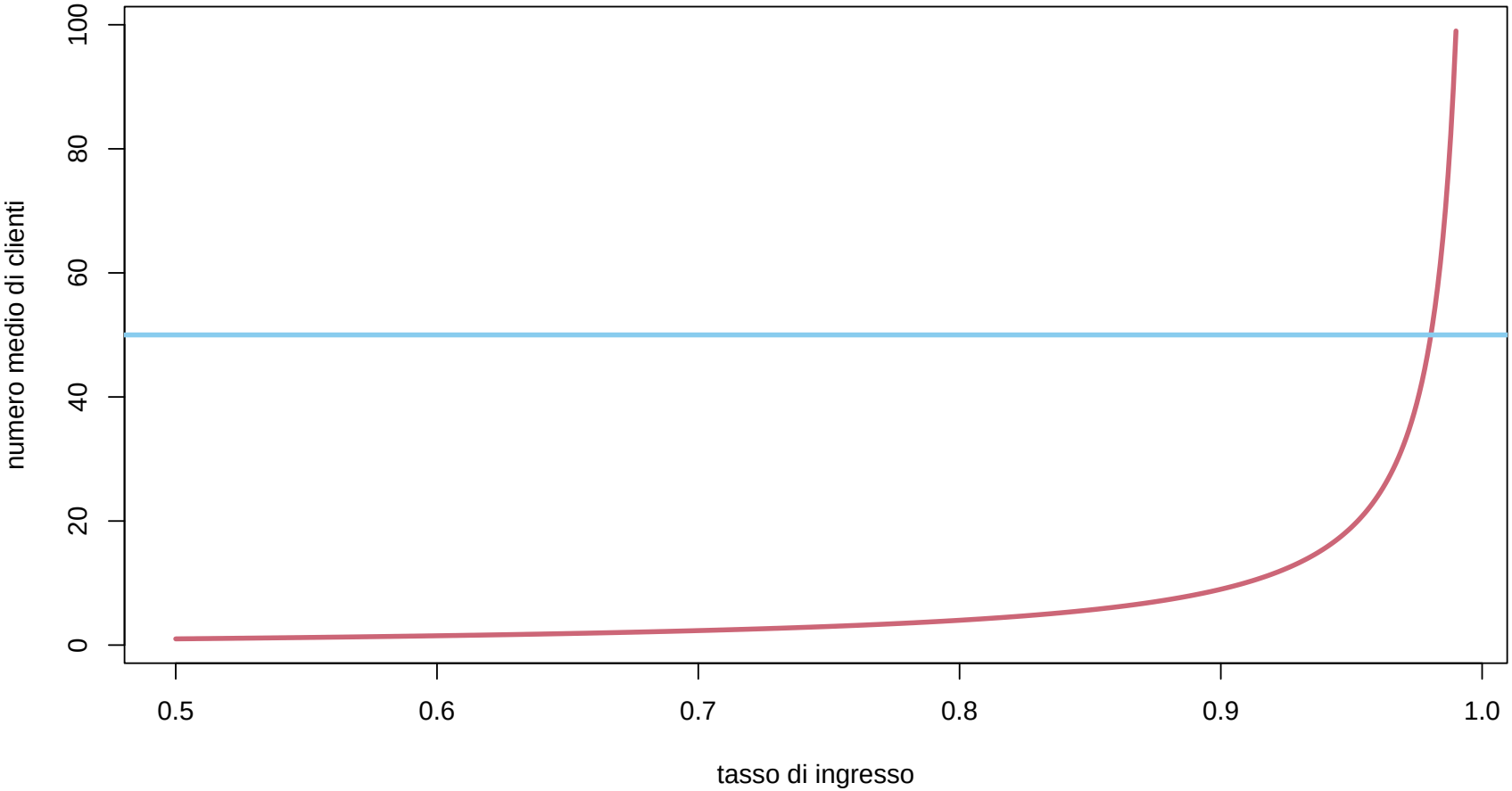



**Figure 1:** grafico di $\mathbb{E}[N]$ per $\mu = 1$ in funzione di $\lambda$ (in rosso) e una soglia massima di possibili persone in coda (in azzurro)

# Stima dei parametri dalle osservazioni

Stimiamo i parametri $(\lambda, \mu)$ avendo osservato un cammino $\gamma = (n_0 \to n_1 \to \ldots \to n_{\ell-1})$ con i tempi di permanenza $t_1$, $t_2$, $\ldots$, $t_\ell$.

- Poniamo $T = \sum_{k=1}^{\ell} t_i$ e supponiamo inoltre che il cammino osservato non passi mai per lo stato 0.

# Stima dei parametri dalle osservazioni

Stimiamo i parametri $(\lambda, \mu)$ avendo osservato un cammino $\gamma = (n_0 \to n_1 \to \ldots \to n_{\ell-1})$ con i tempi di permanenza $t_1$, $t_2$, $\ldots$, $t_\ell$.

- Poniamo $T = \sum_{k=1}^{\ell} t_i$ e supponiamo inoltre che il cammino osservato non passi mai per lo stato 0.
- La verosimiglianza è

$$L(\lambda, \mu; X = \gamma) = \exp\left(-(\lambda + \mu)\, T\right) \lambda^{\gamma_+} \mu^{\gamma_-},$$

dove $\gamma_+$ indica il numero di arrivi osservati in $\gamma$ (ossia transizioni da uno stato $n$ a $n+1$), mentre $\gamma_-$ il numero di uscite.

# Stima dei parametri dalle osservazioni

Stimiamo i parametri $(\lambda, \mu)$ avendo osservato un cammino $\gamma = (n_0 \to n_1 \to \ldots \to n_{\ell-1})$ con i tempi di permanenza $t_1$, $t_2$, $\ldots$, $t_\ell$.

- Poniamo $T = \sum_{k=1}^{\ell} t_i$ e supponiamo inoltre che il cammino osservato non passi mai per lo stato 0.
- La verosimiglianza è

$$L(\lambda, \mu; X = \gamma) = \exp\left(-(\lambda + \mu)\, T\right) \lambda^{\gamma_+} \mu^{\gamma_-},$$

  dove $\gamma_+$ indica il numero di arrivi osservati in $\gamma$ (ossia transizioni da uno stato $n$ a $n+1$), mentre $\gamma_-$ il numero di uscite.
- La stima di massima verosimiglianza è

$$\lambda_{MLE} = \frac{\gamma_+}{T}, \quad \mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T}.$$

Se il cammino osservato trascorre un tempo $T_0$ nello stato 0, l'espressione per la verosimiglianza cambia: al posto di $-(\lambda+\mu)T$ si trova $-\lambda T - \mu(T - T_0)$

- $\lambda_{MLE}$ non cambia, invece

$$\mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T - T_0}.$$

Se il cammino osservato trascorre un tempo $T_0$ nello stato 0, l'espressione per la verosimiglianza cambia: al posto di $-(\lambda+\mu)T$ si trova $-\lambda T - \mu(T - T_0)$

- $\lambda_{MLE}$ non cambia, invece

$$\mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T - T_0}.$$

- Intepretazione: il tempo in cui la coda è vuota non si può usare per stimare il tasso di uscita.

Se il cammino osservato trascorre un tempo $T_0$ nello stato 0, l'espressione per la verosimiglianza cambia: al posto di $-(\lambda+\mu)T$ si trova $-\lambda T - \mu(T - T_0)$

- $\lambda_{MLE}$ non cambia, invece

$$\mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T - T_0}.$$

- Intepretazione: il tempo in cui la coda è vuota non si può usare per stimare il tasso di uscita.
- *Esempio*: In un intervallo di 10 minuti si osservano 5 persone arrivare alla cassa di un supermercato e 3 persone uscirne. Supponendo che la cassa non sia mai senza lavoro si stimano i parametri $\lambda = 1/2$ persone al minuto, $\mu = 3/10$ persone al minuto. Se invece la cassa è rimasta priva di persone in coda per 4 minuti, si stima $\mu = 3/6 = 1/2$ persone al minuto.

# Code $M/M/\infty$

Consideriamo la situazione con un numero arbitrariamente grande, idealmente infinito, di serventi ($M/M/\infty$).

- Il tempo di servizio per ciascun cliente sia una variabile esponenziale di parametro $\mu$ (e ogni cliente sia indipendente dagli altri).

# Code $M/M/\infty$

Consideriamo la situazione con un numero arbitrariamente grande, idealmente infinito, di serventi ($M/M/\infty$).

- Il tempo di servizio per ciascun cliente sia una variabile esponenziale di parametro $\mu$ (e ogni cliente sia indipendente dagli altri).
- Per arrivare al modello , consideriamo il caso in cui non vi siano arrivi: si osservano salti da $n$ a $n-1$ con dei tempi di permanenza dati dal minimo di $n$ variabili aleatorie esponenziali indipendenti tra loro (la transizione avviene appena il cliente che impega meno tempo tra gli $n$ in servizo lascia la coda).

Esercizio: il minimo di $n$ variabili esponenziali indipendenti, tutte di parametro $\mu$, ha densità esponenziale di parametro $n\mu$.

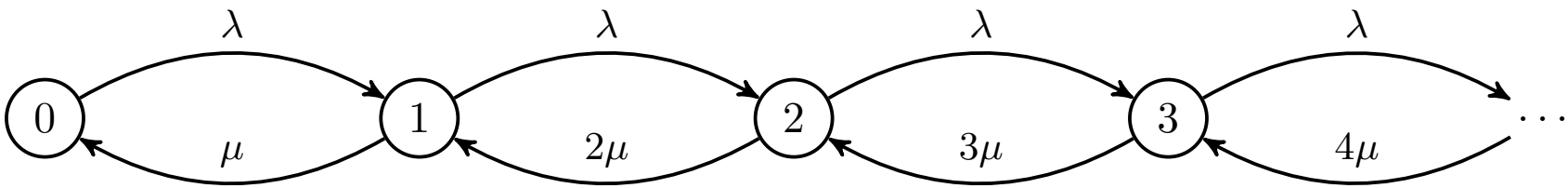
Pertanto, si avrà (se $n \geq 1$)

$$L_{n \to n-1} = n\mu.$$

Nel caso in cui vi siano arrivi con un processo di Poisson di intensità $\lambda$, poniamo, per $n \geq 0$,

$$L_{n \to n+1} = \lambda,$$

e di conseguenza



# Distribuzione invariante

Come nel caso $M/M/1$, ogni stato è ricorrente.

- La competizione tra il tasso di arrivo $\lambda$ e di uscita $\mu$, è "smorzata" dal fatto che per $n$ abbastanza grande si ha comunque $\lambda < n\mu$.

# Distribuzione invariante

Come nel caso $M/M/1$, ogni stato è ricorrente.

- La competizione tra il tasso di arrivo $\lambda$ e di uscita $\mu$, è "smorzata" dal fatto che per $n$ abbastanza grande si ha comunque $\lambda < n\mu$.
- Infatti una distribuzione invariante esiste sempre: risolvendo il sistema $\mu L = 0$ si trova una densità di Poisson di parametro $\lambda/\mu$:

$$\mu_n \propto \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

# Stima dei parametri dalle osservazioni

Come nel caso $M/M/1$, per stimare $(\lambda, \mu)$ sulla base dell'osservazione di un cammino $\gamma = (n_0 \to n_1 \to \ldots \to n_\ell)$ con i tempi di permanenza $t_1$, $t_2$, $\ldots$, $t_\ell$ scriviamo la verosimiglianza:

$$L(\lambda, \mu; X = \gamma) \propto \exp\left(-\lambda T - \mu T_\gamma\right) \lambda^{\gamma_+} \mu^{\gamma_-},$$

dove $T = \sum_{k=1}^{\ell} t_i$, $\gamma_+$ e $\gamma_-$ sono come nel caso $M/M/1$.

Il termine nuovo è

$$T_\gamma = \sum_{k=1}^{\ell} t_i n_i,$$

(il tempo totale trascorso da tutti i clienti osservati nella coda). La stima di massima verosimiglianza è è

$$\lambda_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T}, \quad \mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T_\gamma}.$$

# Il caso $M/M/c$

Il caso $M/M/c$ con $2 \leq c < \infty$ è intermedio tra i gli estremi che abbiamo considerato.

- Una distribuzione invariante esiste se e solo se $\lambda < c\mu$, ma le formule sono meno eleganti.

# PCA

# Analisi delle componenti principali (PCA)

Problema: *ridurre la dimensionalità* di una variabile $Y \in \mathbb{R}^d$ (o di un campione di taglia $n$), con $d >> 1$, definendo una variabile $X \in \mathbb{R}^k$, con $k << d$.

- Questo può essere utile per rappresentare graficamente $Y$ (ad esempio se $k = 2$) ma soprattutto anche per velocizzare l'esecuzione di algoritmi che in dimensione alta possono risultare lenti.

# Analisi delle componenti principali (PCA)

Problema: *ridurre la dimensionalità* di una variabile $Y \in \mathbb{R}^d$ (o di un campione di taglia $n$), con $d >> 1$, definendo una variabile $X \in \mathbb{R}^k$, con $k << d$.

- Questo può essere utile per rappresentare graficamente $Y$ (ad esempio se $k = 2$) ma soprattutto anche per velocizzare l'esecuzione di algoritmi che in dimensione alta possono risultare lenti.
- Problema estremamente comune e molteplici tecniche per affrontarlo. L'**analisi delle componenti principali** (in inglese *principal component analysis*, abbreviato PCA) è forse la più semplice, ma spesso efficace.

# Punto di vista teorico

La PCA si spiega a partire dalla *standardizzazione* di un vettore aleatorio.

- Data $Y \in \mathbb{R}^d$, la matrice delle covarianze $\Sigma_Y$ può essere diagonalizzata ossia esiste $U_Y \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ortogonale ($U_Y^T = U_Y^{-1}$) tale che

$$U_Y \Sigma_Y U_Y^T = D_Y$$

è diagonale (e contiene gli autovalori di $\Sigma_Y$).

# Punto di vista teorico

La PCA si spiega a partire dalla *standardizzazione* di un vettore aleatorio.

- Data $Y \in \mathbb{R}^d$, la matrice delle covarianze $\Sigma_Y$ può essere diagonalizzata ossia esiste $U_Y \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ortogonale ($U_Y^T = U_Y^{-1}$) tale che

$$U_Y \Sigma_Y U_Y^T = D_Y$$

  è diagonale (e contiene gli autovalori di $\Sigma_Y$).

- Posta $Y' = U_Y Y$, la matrice delle covarianze di $Y'$ è diagonale.

# Punto di vista teorico

La PCA si spiega a partire dalla *standardizzazione* di un vettore aleatorio.

- Data $Y \in \mathbb{R}^d$, la matrice delle covarianze $\Sigma_Y$ può essere diagonalizzata ossia esiste $U_Y \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ortogonale ($U_Y^T = U_Y^{-1}$) tale che
$$U_Y \Sigma_Y U_Y^T = D_Y$$
è diagonale (e contiene gli autovalori di $\Sigma_Y$).
- Posta $Y' = U_Y Y$, la matrice delle covarianze di $Y'$ è diagonale.
- Si definisce $X \in \mathbb{R}^k$ come la variabile congiunta delle $k$ coordinate di $Y'$ che hanno varianza maggiore. Vale quindi
$$X = \Pi_Y Y.$$
dove $\Pi_Y$ è la proiezione ortogonale sul sottospazio $k$-dimensionale di "maggior variabilità".

# Tre problemi

1. Le direzioni di maggior variabilità potrebbero essere dovute al fatto che i *valori* sono grandi, non che ci sia effettiva variabilità:
   $\Rightarrow$ passare dalla metrice delle covarianze a quella di **correlazione** (ossia riscalare/centrare componente per componente).

# Tre problemi

1. Le direzioni di maggior variabilità potrebbero essere dovute al fatto che i *valori* sono grandi, non che ci sia effettiva variabilità:
   $\Rightarrow$ passare dalla metrice delle covarianze a quella di **correlazione** (ossia riscalare/centrare componente per componente).
2. Si dispone solo di $n$ di osservazioni $(y_1, \ldots, y_n)$ associate a variabili aleatorie $(Y_1, \ldots, Y_n)$, tutte indipendenti tra loro e con la stessa legge di $Y$ (un campione). Come stimare $\Pi_Y$?

# Tre problemi

1. Le direzioni di maggior variabilità potrebbero essere dovute al fatto che i *valori* sono grandi, non che ci sia effettiva variabilità: $\Rightarrow$ passare dalla metrice delle covarianze a quella di **correlazione** (ossia riscalare/centrare componente per componente).
2. Si dispone solo di $n$ di osservazioni $(y_1, \ldots, y_n)$ associate a variabili aleatorie $(Y_1, \ldots, Y_n)$, tutte indipendenti tra loro e con la stessa legge di $Y$ (un campione). Come stimare $\Pi_Y$?
3. la PCA è una stima che si può giustificare mediante MLE/MAP?

# PCA empirica

- La matrice delle covarianze teorica $\Sigma_Y$ non è nota $\rightarrow$

$$\Sigma_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}(y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T.$$

# PCA empirica

- La matrice delle covarianze teorica $\Sigma_Y$ non è nota $\rightarrow$

$$\Sigma_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}(y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T.$$

- Il teorema spettrale applicato $\Sigma_y$ determina una matrice ortogonale $U_y \in \mathbb{R}^{d\times d}$ e una matrice diagonale $D_y \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (contenente gli autovalori di $\Sigma_y$) tali che

$$U_y \Sigma_y U_y^T = D_y.$$

# PCA empirica

- La matrice delle covarianze teorica $\Sigma_Y$ non è nota $\rightarrow$

$$\Sigma_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}(y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T.$$

- Il teorema spettrale applicato $\Sigma_y$ determina una matrice ortogonale $U_y \in \mathbb{R}^{d\times d}$ e una matrice diagonale $D_y \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (contenente gli autovalori di $\Sigma_y$) tali che

$$U_y \Sigma_y U_y^T = D_y.$$

- Definiamo $\Pi_y \in \mathbb{R}^{k\times d}$ come la proiezione nel sottospazio $k$-dim degli autovettori con autovalori il più grande possibile.

# PCA empirica

- La matrice delle covarianze teorica $\Sigma_Y$ non è nota $\rightarrow$

$$\Sigma_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}(y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T.$$

- Il teorema spettrale applicato $\Sigma_y$ determina una matrice ortogonale $U_y \in \mathbb{R}^{d\times d}$ e una matrice diagonale $D_y \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (contenente gli autovalori di $\Sigma_y$) tali che

$$U_y \Sigma_y U_y^T = D_y.$$

- Definiamo $\Pi_y \in \mathbb{R}^{k\times d}$ come la proiezione nel sottospazio $k$-dim degli autovettori con autovalori il più grande possibile.
- Il "riassunto" (loadings) è il vettore delle osservazioni proiettate $x_i = \Pi_y y_i$.

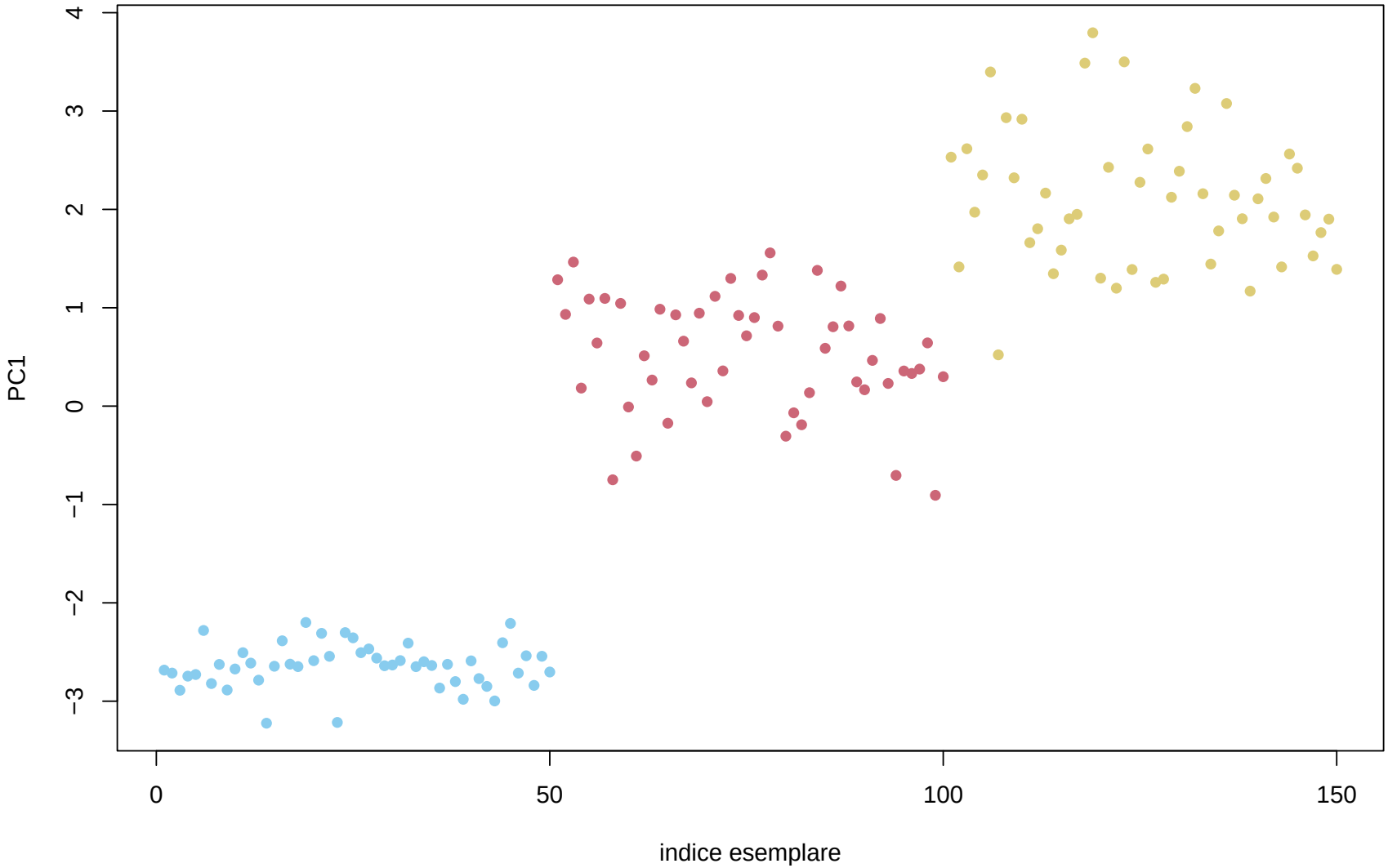
Applichiamo la PCA in R usando la funzione specifica `prcomp()` (oppure `princomp()`). Vediamo ad esempio sul dataset Iris:

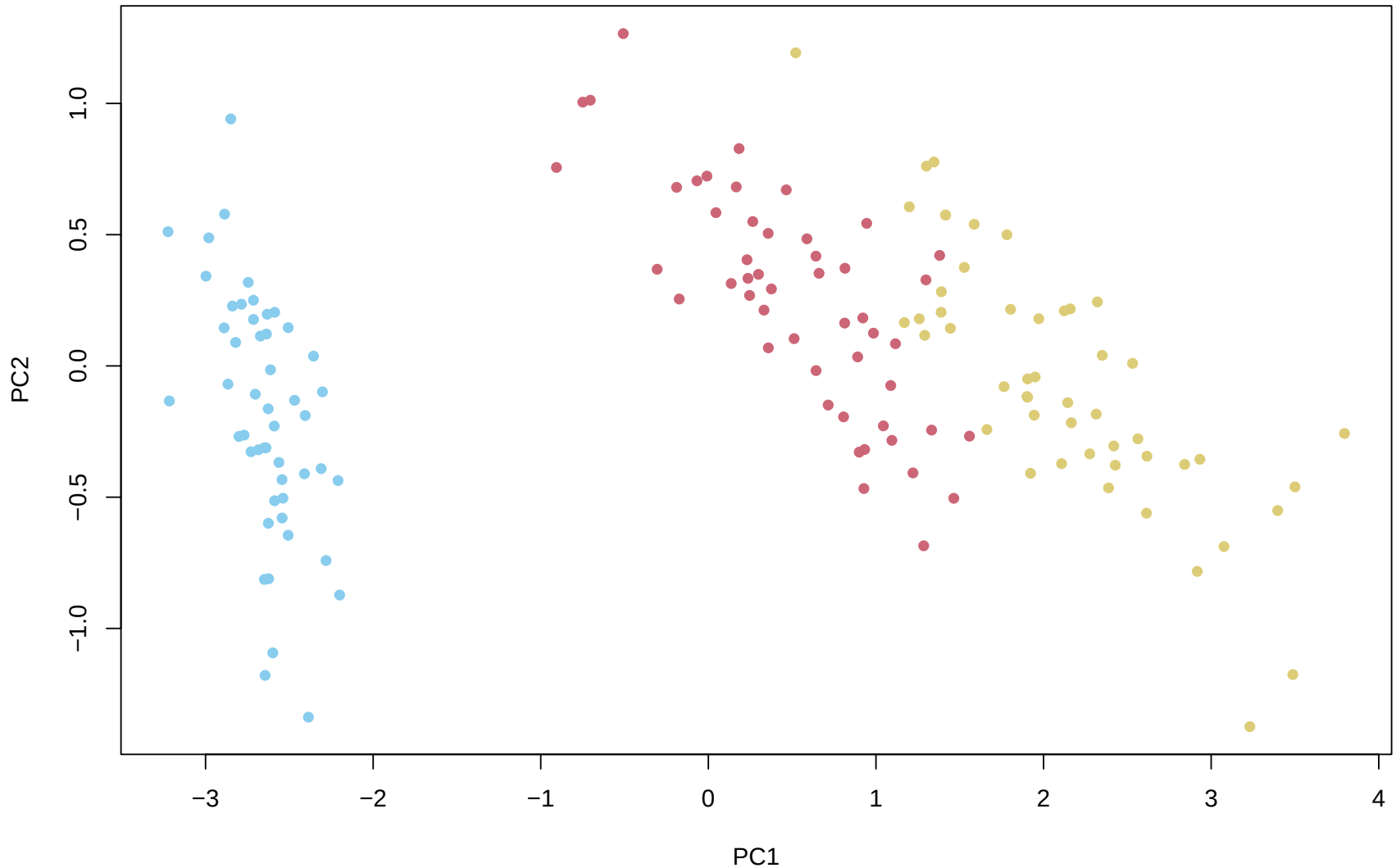
L'oggetto contiene diverse informazioni sulla PCA, la base di vettori $U$ (una matrice $4 \times 4$) e le deviazioni standard delle varie componenti.

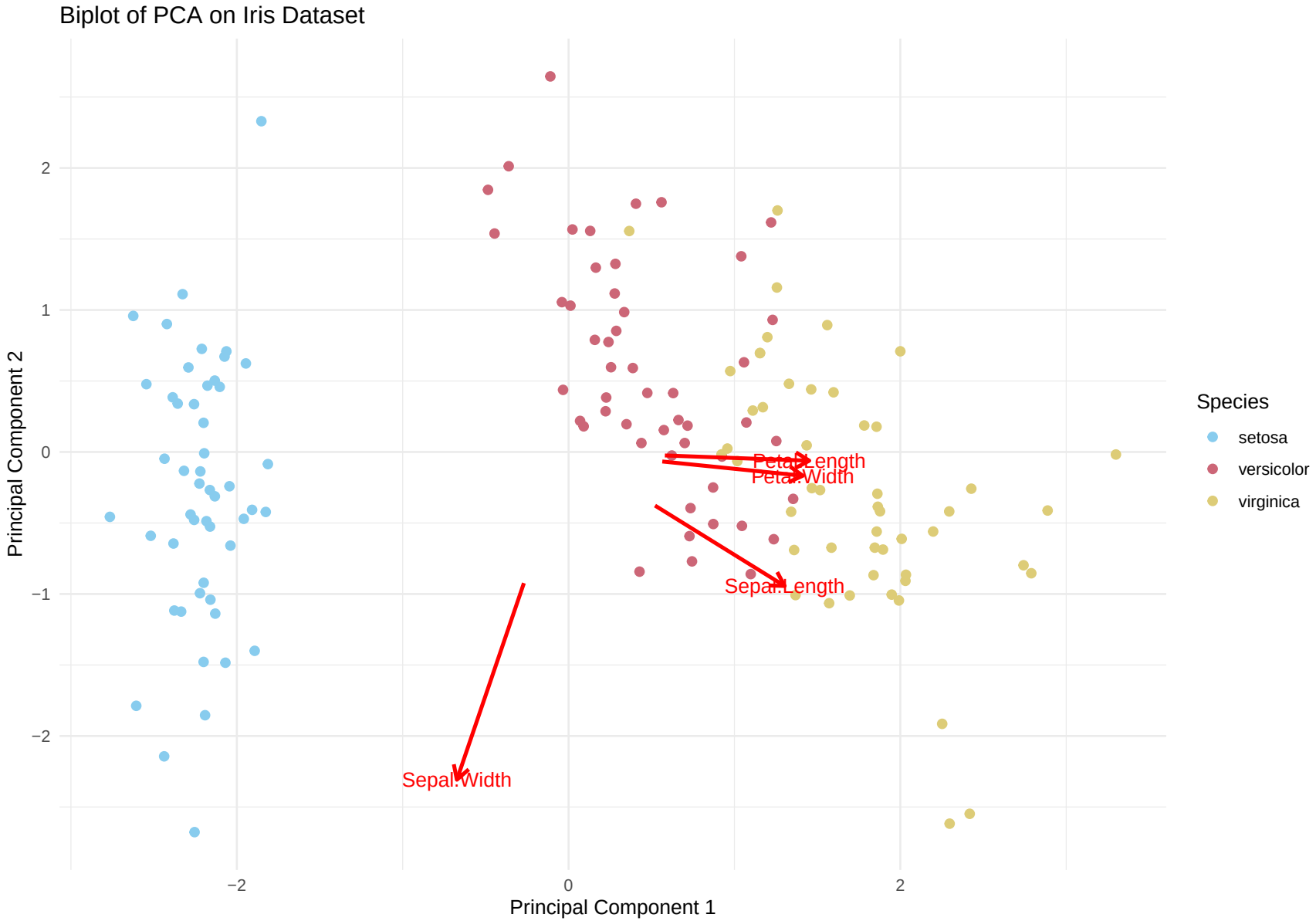
```
##                     PC1         PC2         PC3
## Sepal.Length  0.36138659 -0.65658877  0.58202985  0.3154
## Sepal.Width  -0.08452251 -0.73016143 -0.59791083 -0.3197
## Petal.Length  0.85667061  0.17337266 -0.07623608 -0.4798
## Petal.Width   0.35828920  0.07548102 -0.54583143  0.7536

## [1] 2.0562689 0.4926162 0.2796596 0.1543862
```

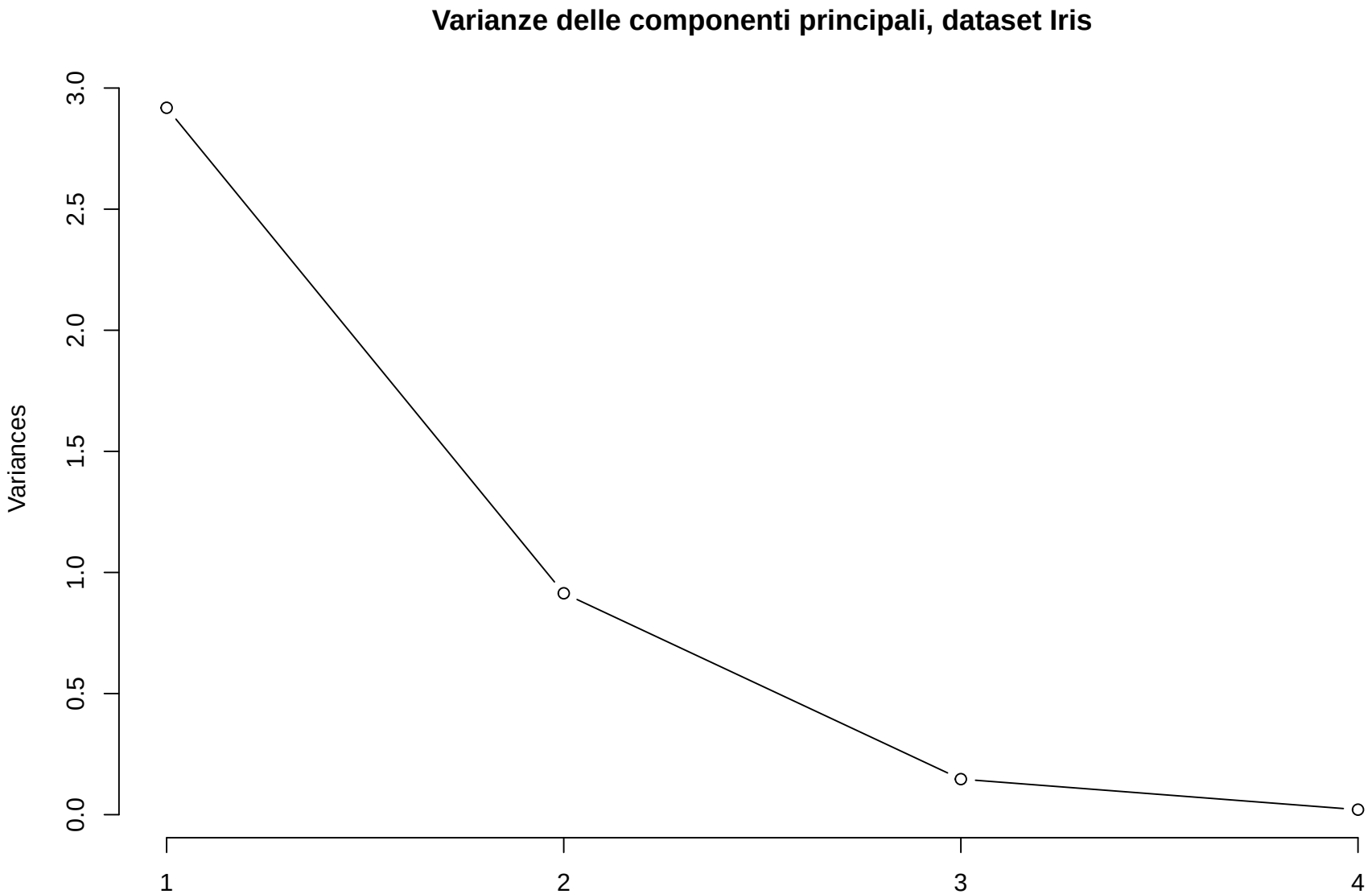
La PCA aiuta a separare tre specie (almeno la prima dalle altre due) come evidenziamo con la diversa colorazione.




PC2
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
PC1


Biplot of PCA on Iris Dataset
Principal Component 2
Principal Component 1
2
1
0
−1
−2
−2
0
2
Petal.Length
Petal.Width
Sepal.Length
Sepal.Width
Species
setosa
versicolor
virginica

# Scree plot


Varianze delle componenti principali, dataset Iris
Variances
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
1
2
3
4

# Una giustificazione tramite MLE della PCA

È possibile giustificare il metodo di PCA in termini di una stima di massima verosimiglianza per un opportuno modello gaussiano.

- **Idea:** con la PCA stiamo recuperando un "segnale" ($X$) osservandone una versione "rumorosa" e disposta su un sottospazio non noto.

- fissata la dimensione $k$, introduciamo una variabile standardizzata $Z \in \mathbb{R}^k$ e imponiamo che valga

$$Y = AZ + W,$$

dove $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ è una matrice non nota (rispetto all'informazione priori).

- fissata la dimensione $k$, introduciamo una variabile standardizzata $Z \in \mathbb{R}^k$ e imponiamo che valga

$$Y = AZ + W,$$

dove $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ è una matrice non nota (rispetto all'informazione priori).

- Il "segnale" da ricostruire è quindi $AZ$ (quello che nella PCA abbiamo chiamato $X$) e $W$ è una variabile che rappresenta il "rumore" aggiunto.

- fissata la dimensione $k$, introduciamo una variabile standardizzata $Z \in \mathbb{R}^k$ e imponiamo che valga

$$Y = AZ + W,$$

dove $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ è una matrice non nota (rispetto all'informazione priori).

- Il "segnale" da ricostruire è quindi $AZ$ (quello che nella PCA abbiamo chiamato $X$) e $W$ è una variabile che rappresenta il "rumore" aggiunto.
- Supponiamo che $Z$, $W$ siano indipendenti con densità gaussiane centrate e, oltre a $\Sigma_Z = Id$, supponiamo che $\Sigma_W = \sigma_0^2 Id$, per una costante opportuna (nota a priori e sufficientemente piccola).

Supponendo nota la matrice $A$, allora la densità di $Y$, è anch'essa una gaussiana centrata, con covarianza $\Sigma_Y = AA^T + \sigma_0^2 Id$, chè è una funzione di $A$. Pertanto la verosimiglianza di $A$ associata ad $Y$ si scrive

$$L(A; y) = p(Y = y|A) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y^T \sigma_Y^{-1} y + \log(\det(\Sigma_Y))\right)\right).$$

- se supponiamo di avere $n$ osservazioni indipendenti $Y_i = y_i$, tutte gaussiane con gli stessi parametri – in particolare con la stessa matrice $A$, la verosimiglianza si ottiene come prodotto della funzione sopra (cambiando i valori osservati)

$$L(A; y_1, \ldots, y_n) \propto \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^T \Sigma_Y^{-1} y_i + \log(\det(\Sigma_Y))\right)\right).$$

Supponendo nota la matrice $A$, allora la densità di $Y$, è anch'essa una gaussiana centrata, con covarianza $\Sigma_Y = AA^T + \sigma_0^2 Id$, chè è una funzione di $A$. Pertanto la verosimiglianza di $A$ associata ad $Y$ si scrive

$$L(A; y) = p(Y = y|A) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y^T \sigma_Y^{-1} y + \log(\det(\Sigma_Y))\right)\right).$$

- se supponiamo di avere $n$ osservazioni indipendenti $Y_i = y_i$, tutte gaussiane con gli stessi parametri – in particolare con la stessa matrice $A$, la verosimiglianza si ottiene come prodotto della funzione sopra (cambiando i valori osservati)

$$L(A; y_1, \ldots, y_n) \propto \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^T \Sigma_Y^{-1} y_i + \log(\det(\Sigma_Y))\right)\right).$$

- la massima verosimiglianza si ottiene minimizzando

$$A \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^T \Sigma_Y^{-1} y_i + \log(\det(\Sigma_Y)$$

- La stima di massima verosimiglianza per $A$ è data da

$$A_{\text{MLE}} = U_{y|k}(D_{y|k} - \sigma_0^2 Id)^{1/2},$$

dove $U_{y|k} \in \mathbb{R}^{d \times k}$ indica la matrice corrispondente ai $k$ autovettori della covarianza campionaria $\Sigma_y = \sum_{i=1}^{n} y_i y_i^T$ con autovalori più grandi, e $D_{y|k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ indica la matrice diagonale contenente tali autovalori nell'ordine corrispondente.

- La stima di massima verosimiglianza per $A$ è data da

$$A_{\text{MLE}} = U_{y|k}(D_{y|k} - \sigma_0^2 Id)^{1/2},$$

dove $U_{y|k} \in \mathbb{R}^{d\times k}$ indica la matrice corrispondente ai $k$ autovettori della covarianza campionaria $\Sigma_y = \sum_{i=1}^n y_i y_i^T$ con autovalori più grandi, e $D_{y|k} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ indica la matrice diagonale contenente tali autovalori nell'ordine corrispondente.

- Tutto questo purché $\sigma_0^2$ sia sufficientemente piccolo. Nel limite $\sigma_0 \to 0$ si ottiene che $A_{\text{MLE}} = U_{y|k} D_{y|k}^{1/2}$ e la variabile $A_{\text{MLE}} X$ si identifica con $\Pi_y Y$.