Teoria dei Sistemi e del Controllo - 28-06-2021

1. Si consideri il sistema **tempo discreto** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = ax_1(k) + 2x_1^2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + bx_1(k)x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

   - Per $u(k) = 0$ determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
   - Per $u(k) = 0$ si studi la stabilità degli equilibri con il metodo indiretto di Lyapunov al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
   - Per $a \leq 1$ si commenti sull'esistenza di un ingresso lineare che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile (solo utilizzando il metodo indiretto.

2. Si consideri il sistema **tempo discreto** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   - Si studi la stabilità interna del sistema, gli spazi di raggiungibilità e osservabilità, la stabilità BIBO al variare di a.
   - Si determini se il sistema è riscostruibile e controllabile a zero in 3 passi al variare di a.
   - Se esiste, si determini un ingresso che controlli a zero lo stato iniziale $x(0) = (1\ 0\ 0)^T$ al variare di a.

3. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

   - si realizzi una decomposizione di Kalman e si calcolino le dimensioni dei sottosistemi $RO, R\bar{0}, \bar{R}O, \bar{R}\bar{O}$
   - Determinare, se possibile, una legge di controllo stabilizzante del tipo $u(t) = Kx(t)$ che posizioni il maggior numero possibile di autovalori in -1.
   - Determinare, se possibile, un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto e di ordine minimo (con dimensione del vettore di "stato" stimato più piccola possibile) tale che la dinamica dell'errore di stima abbia il maggior numero possibile di autovalori in -3.

4. Dato il problema di ottimizzazione descritto dal funzionale di costo:

$$J(u(t)) = h(x(t_F), t_F) + \int_{t_0}^{t_F} g(x(t), u(t), t)dt$$

   soggetto al vincolo dinamico $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ ed alla condizione iniziale $x(t_0) = x_0$

   - dimostrare che è possibile riformulare l'indice di costo, usando una appropriata funzione $g'(\cdot)$, nella forma :

   $$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_F} g'(x(t), u(t), t)dt + costante$$

     e discutere il ruolo della costante nell'espressione sopra ai fini della soluzione del problema.
   - sfruttando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange λ e l'equazione di Eulero, assunta nota, ricavare l'espressione delle equazioni di Eulero per le tre variabili x,u e λ discutendo, nello specifico, il ruolo della funzione $h(\cdot)$.