Teoria dei Sistemi e del Controllo - 20-2-2019

1. Si consideri il seguente sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^4 + \alpha x_1 \cos x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 \end{cases}$$

   (a) Determinare gli equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Si studi la stabilità degli equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ con il metodo indiretto di Lyapunov.

   (c) Per l'equilibrio nell'origine si studi la stabilità con altri metodi.

2. Si consideri il sistema lineare tempo continuo descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Si porti il sistema in forma canonica di Kalman.

   (b) Motivando la risposta, si determinino gli andamenti delle uscite compatibili con l'evoluzione libera del sistema: a) e^{-t}, b) e^{t}, c) t, d) $e^{-t}\cos t$.

   (c) Si determinino, se esistono, gli ingressi del sistema compatibili con gli andamenti dell'uscita della forma: a) 1, b) $te^{-t}\sin t$, c) e^{-2t}.

3. Sia dato il sistema tempo discreto :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = Cx_k$$

   - si dica se e per quali valori di α e' possibile costruire uno stimatore tale che l'errore di stima sia nullo dopo un numero finito di passi;
   - si scelga un valore di α adeguato e si progetti tale stimatore se esiste;
   - si dica se e per quali valori di α e' possibile costruire un controllore che, retroazionando lo stato stimato, annulli l'evoluzione libera dello stato in un numero finito di passi;
   - si scelga un valore di α adeguato e si progetti tale controllore se esiste.

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

   - si ricavi la matrice Hamiltoniana $\mathcal{H}$ associata al problema di controllo ottimo che minimizza il funzionale:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

   - si dimostri che se $\lambda \in eig(\mathcal{H})$ allora vale anche: $-\lambda \in eig(\mathcal{H})$;
   - si discuta come e' possibile utilizzare quest'ultimo risultato per risolvere problemi di controllo ottimo quando $t_f = \infty$.