Teoria dei Sistemi e del Controllo - 15-06-2023

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t)^3 x_2(t) - 3x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_2(t) - \frac{1}{3} x_1(t)^2 x_2(t) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Si studio la stabilità dei punti di equilibrio determinati al punto precedente con il metodo indiretto di Lyapunov.
   - Si studio la stabilità dei punti di equilibrio per i quali non è stato possibile concludere al punto precedente.

2. Dato il sistema **tempo discreto** descritto dalle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   - Si determini la forma generica degli stati raggiungibili dall'origine in 1, 2, 3 e 4 passi.
   - Si determini una matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman.
   - Sapendo che gli autovalori della matrice sono in 0, -1, 1 1 si determini una forma di Jordan $\tilde{A}$ simile ad A e la conseguente struttura delle matrici $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ simili a B e C (non fare cambio di base ma indicare quali elementi di $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ devono essere nulli e quali no).

3. Il candidato dimostri che, dato un sistema tempo discreto con più ingressi, se il sistema è raggiungibile nella sua globalità ma non lo è invece dai singoli ingressi presi uno ad uno, allora esiste sempre una retroazione dello stato che lo rende raggiungibile da un solo ingresso scelto a piacere. Si fornisca altresì un metodo per calcolare tale retroazione e se ne dimostri la validità.

4. Dato il sistema tempo continuo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x = Cx$$

   il candidato determini, se possibile, la legge di controllo $u = Kx$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = 100 \int_0^\infty y^T y + u^T u \, dt$$

   utilizzando almeno due metodi diversi.