

# Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

## Lezione 16

Dario Trevisan – <https://web.dm.unipi.it/trevisan>

12/11/2025

## Problemi vari

# Problema 1

Per  $k \in \{0, 1, 2\}$ , si consideri la funzione  $f_k(t)$  definita per  $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e  $f_k(t) = 0$  per  $t < 0$ , dove  $c_k > 0$  è una costante opportuna.

1. Per ogni  $k \in \{0, 1, 2\}$ , determinare  $c_k$  in modo che  $f_k$  sia una densità continua di probabilità.

# Problema 1

Per  $k \in \{0, 1, 2\}$ , si consideri la funzione  $f_k(t)$  definita per  $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e  $f_k(t) = 0$  per  $t < 0$ , dove  $c_k > 0$  è una costante opportuna.

1. Per ogni  $k \in \{0, 1, 2\}$ , determinare  $c_k$  in modo che  $f_k$  sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni  $k \in \{0, 1, 2\}$ , posta  $T_k$  una variabile aleatoria con densità  $f_k$ , calcolare il valor medio di  $T_k$ .

# Problema 1

Per  $k \in \{0, 1, 2\}$ , si consideri la funzione  $f_k(t)$  definita per  $t \in [0, \infty)$

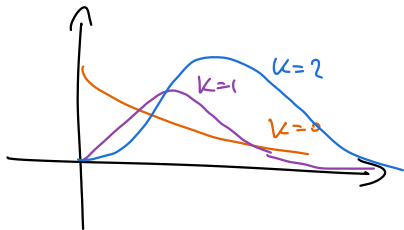
$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e  $f_k(t) = 0$  per  $t < 0$ , dove  $c_k > 0$  è una costante opportuna.

1. Per ogni  $k \in \{0, 1, 2\}$ , determinare  $c_k$  in modo che  $f_k$  sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni  $k \in \{0, 1, 2\}$ , posta  $T_k$  una variabile aleatoria con densità  $f_k$ , calcolare il valor medio di  $T_k$ .
3. Sia  $K \in \{0, 1, 2\}$  una variabile con densità discreta  $P(K = k) \propto 1 + k$  e  $T$  una variabile tale che, sapendo  $K = k$ , ha densità  $f_k$ . Avendo osservato  $T \leq 1$ , fornire una stima di  $K$ .

# Risoluzione problema 1

$$c_k \rightarrow \int_0^{+\infty} f_k(t) dt = 1$$



•  $k=0$   $f_0(t) \propto \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

$$\hookrightarrow \text{Exp}(\lambda=1) \rightarrow \boxed{c_0=1}$$

•  $k=1$   $c_1 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = c_1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1=1}$

"  $E[\text{Exp}(1)]$

$2c_2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$

•  $k=2$   $c_2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \cancel{c_2 t^2 (-e^{-t})} \Big|_0^{+\infty} + c_2 \int_0^{+\infty} 2t e^{-t} dt$

$$\mathbb{E}[T_0] = \mathbb{E}[\text{Exp}(1)] = 1$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_1] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_1(t) dt = \int_0^{+\infty} t \cdot t e^{-t} dt \\ &= \underbrace{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt}_{= 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_2] &= \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{1}{2} t^2 e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^3 \underbrace{e^{-t}}_{\frac{d}{dt}(-e^{-t})} dt \\ &= \cancel{\frac{1}{2} t^3 (-e^{-t})} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} 3t^2 e^{-t} dt \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2 = \boxed{3}\end{aligned}$$

Priori  $P(K=k) \propto 1+k$

Likelihood  $L(k; T \leq 1) = P(T \leq 1 | K=k)$

$$= \int_0^1 f_k(t) dt$$

Posteriori  $P(K=k | T \leq 1) \propto (1+k) \cdot \int_0^1 f_k(t) dt$

MAP  $K_{\text{MAP}} \in \arg \max_k P(K=k | T \leq 1)$

$$L(0; T \leq 1) = \int_0^1 \underbrace{e^{-t}}_{\frac{d}{dt}(-e^{-t})} dt = \boxed{1 - e^{-1}}$$

$$\begin{aligned} L(1; T \leq 1) &= \int_0^1 t \underbrace{e^{-t}}_{\frac{d}{dt}(-e^{-t})} dt = -te^{-t} \Big|_0^1 + \int_0^1 \overbrace{e^{-t}}^{\frac{d}{dt}(-e^{-t})} dt \\ &= -e^{-1} + 1 - e^{-1} \\ &= \boxed{1 - 2e^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(2; T \leq 1) &= \int_0^1 \frac{1}{2} t^2 \underbrace{e^{-t}}_{\frac{d}{dt}(-e^{-t})} dt = -\frac{t^2}{2} e^{-t} \Big|_0^1 + \int_0^1 t \underbrace{e^{-t}}_{\frac{d}{dt}(-e^{-t})} dt \\ &= -\frac{1}{2} e^{-1} + 1 - 2e^{-1} \\ &= \boxed{1 - \frac{5}{2} e^{-1}} \end{aligned}$$

$$P(K=k | T \leq 1) \propto \begin{cases} 1 \cdot (1 - e^{-1}) & k=0 \\ 2 \cdot (1 - 2e^{-1}) & k=1 \\ 3 \cdot (1 - \frac{5}{2}e^{-1}) & k=2 \end{cases}$$

21 ex 3

$e \approx 2,7$

$$\begin{cases} 2/3 \cdot \\ 2/3 \cdot \\ \cancel{1/2} \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} 0,63 \\ 0,52 \end{matrix}}$$

## Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare)  $\omega \in (0, \pi)$ , si consideri una variabile aleatoria uniforme continua  $T$  sull'intervallo  $[0, 1]$  e si ponga  $Y_\omega := \cos(\omega T)$ .

1. Scrivere esplicitamente la densità di  $Y_\omega$  (in funzione di  $\omega$ ).

## Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare)  $\omega \in (0, \pi)$ , si consideri una variabile aleatoria uniforme continua  $T$  sull'intervallo  $[0, 1]$  e si ponga  $Y_\omega := \cos(\omega T)$ .

1. Scrivere esplicitamente la densità di  $Y_\omega$  (in funzione di  $\omega$ ).
2. Calcolare il valor medio di  $Y_\omega$  (in funzione di  $\omega$ ).

## Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare)  $\omega \in (0, \pi)$ , si consideri una variabile aleatoria uniforme continua  $T$  sull'intervallo  $[0, 1]$  e si ponga  $Y_\omega := \cos(\omega T)$ .

1. Scrivere esplicitamente la densità di  $Y_\omega$  (in funzione di  $\omega$ ).
2. Calcolare il valor medio di  $Y_\omega$  (in funzione di  $\omega$ ).
3. Calcolare la mediana di  $Y_\omega$  (in funzione di  $\omega$ ).

## Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare)  $\omega \in (0, \pi)$ , si consideri una variabile aleatoria uniforme continua  $T$  sull'intervallo  $[0, 1]$  e si ponga  $Y_\omega := \cos(\omega T)$ .

1. Scrivere esplicitamente la densità di  $Y_\omega$  (in funzione di  $\omega$ ).
2. Calcolare il valor medio di  $Y_\omega$  (in funzione di  $\omega$ ).
3. Calcolare la mediana di  $Y_\omega$  (in funzione di  $\omega$ ).
4. Si osserva  $Y_\omega = 1/2$ . Determinare, se possibile, una stima di massima verosimiglianza per  $\omega$ .

## Risoluzione problema 2

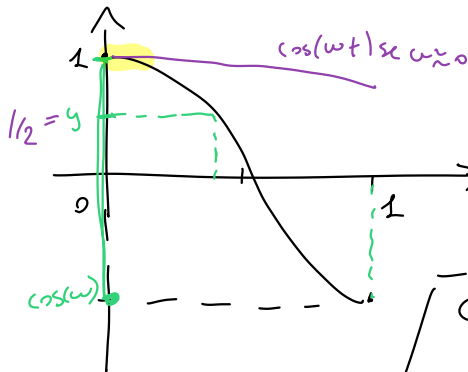
①  $Y_\omega = \cos(\omega T)$

$T$  è uniforme su  $[0,1]$

$\omega \in (0, \pi)$

$y(t) = \cos(\omega t)$

$t \in E = [0,1]$



Per  $y \in [\cos(\omega), 1]$

Calcolo  $p(Y_\omega = y)$

negli altri valori abbiamo  $p(Y_\omega = y) = 0$

$$g(t) = y \rightarrow \cos(\omega t) = y \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{\omega} \cos^{-1}(y)}$$

$\uparrow$   
 $g^{-1}(y)$

$$|g'(t)| = \omega |\sin(\omega t)|$$

$$p(Y_\omega = y) = p(g(T) = y) = \underbrace{p(T = g^{-1}(y))}_{\substack{\downarrow \\ \text{densità uniforme} \\ \text{su } [0,1]}} \cdot \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

$$= \frac{1}{\omega |\sin(\cancel{\omega} \cdot \frac{1}{\cancel{\omega}} \cos^{-1}(y))|} = \boxed{\frac{1}{\omega \sqrt{1-y^2}}}$$

$$(2) \quad E[Y_\omega] = \int_{\cos(\omega)}^1 y \cdot P(Y_\omega = y) dy = \int_{\cos(\omega)}^1 \frac{y}{\omega \sqrt{1-y^2}} dy$$

||

$$E[\cos(\omega T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) p(T=t) dt \quad \text{T unit is [s]}$$

$$= \int_0^1 \cos(\omega t) dt = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^1 = \frac{\frac{d}{dt} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}}{\omega} = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

③ mediana di  $Y_w$

$$\boxed{CDF_{Y_w}(m) = \frac{1}{2}}$$

$$P(Y_w \leq m) = \int_{-\infty}^m P(Y_w = y) dy$$

$$= \int_{\cos(w)}^m \frac{1}{w \sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2}$$

Densità nulla

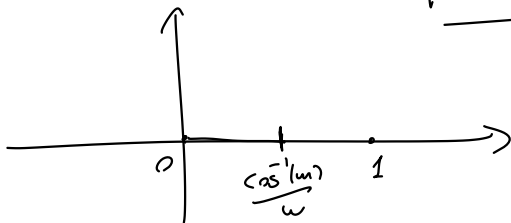
se  $y < \cos(w)$

$$P(\cos(\omega T) \leq m) = P(\omega T \geq \cos^{-1}(m))$$

$$= P\left(T \geq \frac{\cos^{-1}(m)}{\omega}\right) = \frac{1}{2}$$

$$= \int_{\frac{\cos^{-1}(u)}{\omega}}^1 1 dt = 1 - \frac{\cos^{-1}(u)}{\omega} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\cos^{-1}(u)}{\omega} = \frac{1}{2}}$$



$$\cos^{-1}(u) = \frac{\omega}{2} \rightarrow \boxed{u = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Se  $g$  é crescente / decrescente  $g(\text{mediana di } T) =$   
 $= \text{mediana di } (g(T))$

④ poniamo  $y = \frac{1}{2}$   $L(\omega; Y_{\omega} = \frac{1}{2}) = \underline{p(Y_{\omega} = \frac{1}{2} | \omega)}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \frac{1}{\sqrt{1-1/4}} \\ 0 & \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{se } \frac{1}{2} \in [\cos(\omega), 1] \\ \text{altrimenti} \end{array}$$

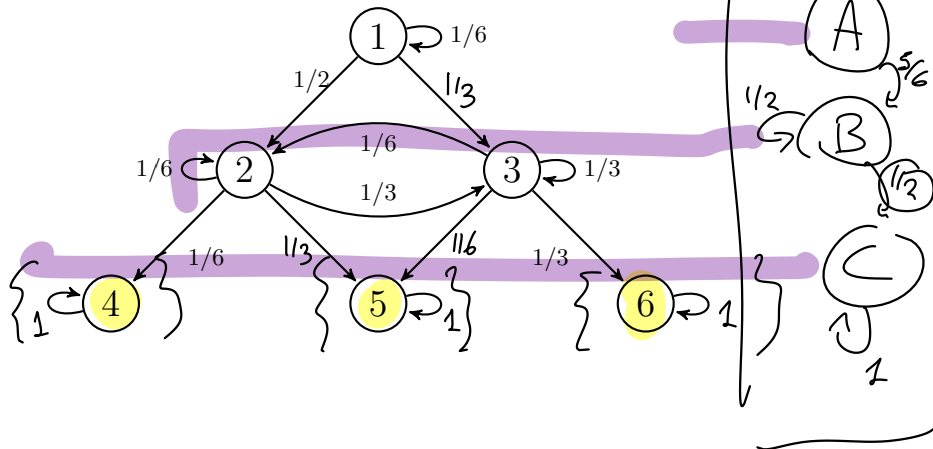
massimizzare in  $\omega \in (0, \pi)$

con il vincolo  $\cos(\omega) < \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\omega > \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}$

$$\omega_{MLE} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

## Problema 3 (Esercizio 3 prova 2023-02-01)

Si consideri una catena di Markov  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$  con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.

Ricorrenti  $\{4, 5, 6\}$  (assorbenti)  
Transitori  $\{1, 2, 3\}$   $\Rightarrow$   $2 \rightarrow 4$  ma  $4 \not\rightarrow 2$   
 $3 \rightarrow 5$  ma  $5 \not\rightarrow 3$   
 $1 \rightarrow ?$  ma  $? \not\rightarrow 1$

---

Classi chiuse:  $C_4 = \{4\}$   $C_5 = \{5\}$   $C_6 = \{6\}$

$\mu^{C_4} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$   $\mu^{C_6} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$   
 $\mu^{C_5} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$

$d_4 \mu^{C_4} + d_5 \mu^{C_5} + (1 - d_4 - d_5) \mu^{C_6}$   
 $\mu = (0, 0, 0, d_4, d_5, 1 - d_4 - d_5)$

$d_4, d_5 \in [0, 1]$   
 $d_4 + d_5 \leq 1$

1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.

1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare, se esiste,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 4 | X_1 = 1)$ .

1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare, se esiste,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 4 | X_1 = 1)$ .
3. Posta  $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{A, B, C\}$  definita da

$$g(1) = A, \quad g(2) = g(3) = B, \quad g(4) = g(5) = g(6) = C,$$

si ponga  $Y_n = g(X_n)$ . Supponendo che  $X_0 = 1$ , dire se  $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$  è anch'essa una catena di Markov e in caso affermativo calcolarne la matrice di transizione.

## Risoluzione problema 3

$$(2) \quad P(X_n = 4 \mid X_1 = 2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Q^\infty)_{1,4}$$

$$Q^\infty = Q^\infty \cdot Q$$

$$Q^\infty = Q \cdot Q^\infty$$

$$Q^\infty = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & d_{1,4} & d_{1,5} & 1-d_{1,4}-d_{1,5} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & d_{2,4} & d_{2,5} & 1-d_{2,4}-d_{2,5} \\ 3 & 0 & 0 & 0 & d_{3,4} & d_{3,5} & - & - & - \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\underline{a^\infty = a \cdot a^\infty}$$

$$a_{1,4}^\infty = a_{1,1} a_{1,4}^\infty + a_{1,2} a_{2,4}^\infty + a_{1,3} a_{3,4}^\infty$$

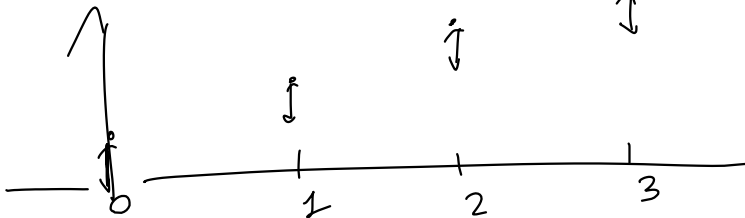
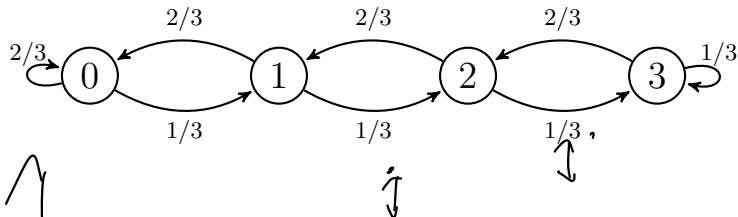
$$\begin{cases} a_{1,4} = \frac{1}{6} a_{1,4} + \frac{1}{2} a_{2,4} + \frac{1}{3} a_{3,4} \\ a_{2,4} = \frac{1}{6} a_{2,4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} a_{3,4} \Rightarrow \\ a_{3,4} = \frac{1}{3} a_{3,4} + \frac{1}{6} a_{2,4} \end{cases}$$

$\frac{5}{6} a_{1,4} = \frac{1}{2} a_{2,4} + \frac{1}{3} a_{3,4}$   
 $\frac{5}{6} a_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} a_{3,4}$   
 $\frac{2}{3} a_{3,4} = \frac{1}{6} a_{2,4}$   
 $\Downarrow$   
 $\frac{5}{6} a_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} a_{2,4} \Rightarrow \frac{9}{12} a_{2,4} = \frac{2}{12}$   
 $\Rightarrow a_{2,4} = \frac{2}{9}$   
 $\Rightarrow a_{3,4} = \frac{1}{4} a_{2,4}$



## Problema 4 (Esercizio 3 prova 2025-04-14)

Si consideri una catena di Markov *stazionaria*  $(X_n)_n$  con probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti).



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. % parametri  $a, b \in [0, 1]$  in modo tale che la distribuzione uniforme sugli stati sia una distribuzione invariante.

1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. % parametri  $a, b \in [0, 1]$  in modo tale che la distribuzione uniforme sugli stati sia una distribuzione invariante.
2. Descrivere esplicitamente la funzione di ripartizione (CDF) di  $X_3$ .

1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. % parametri  $a, b \in [0, 1]$  in modo tale che la distribuzione uniforme sugli stati sia una distribuzione invariante.
2. Descrivere esplicitamente la funzione di ripartizione (CDF) di  $X_3$ .
3. Sapendo che  $X_1 \neq 0$ , è più probabile che sia  $X_0 = 0$  o  $X_0 \neq 0$ ?

$$\left[ P(X_0 = 0 \mid X_1 \neq 0) = \frac{P(X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) P(X_0 = 0)}{P(X_1 \neq 0)} \right]$$

## Risoluzione problema 4

$$P(X_0 \neq 0 | X_1 \neq 0) \propto \underbrace{P(X_1 \neq 0 | X_0 \neq 0)}_{\leftarrow} P(X_0 \neq 0)$$

$$1 - P(X_1 = 0 | X_0 \neq 0)$$

$$\downarrow$$
$$\rightarrow \sum_{k=1}^2 \underbrace{P(X_1 = 0 | X_0 = k, \cancel{X_0 \neq 0})}_{\text{solo } k=2} \cdot \underbrace{P(X_0 = k | X_0 \neq 0)}_{\boxed{\frac{P(X_0 = k)}{1 - P(X_0 = 0)}}}$$





