Teoria dei Sistemi e del Controllo - 15-09-2022

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \alpha x_1(t) x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_2(t) - \alpha x_1^2(t) x_2(t) \end{cases}$$

   - Determinare tutti i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti al punto precedente nel caso $\alpha \leq 0$.
   - Per il caso $\alpha > 0$ si valuti se possibile la stabilità dei punti di equilibrio con il metodo indiretto di Lyapunov e si commenti l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.

2. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = 0,$$

   - Determinare i modi propri del sistema e l'insieme delle condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera dello stato evolva lungo una retta di $\mathbb{R}^3$;
   - Determinare le basi dello spazio raggiungibile e dello spazio inosservabile;
   - Portare il sistema in forma canonica di Kalman e determinare la funzione di trasferimento.

3. Dato il sistema **tempo discreto**:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k$$

   - ipotizzando di utilizzare l'ingresso : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, e di osservare l'uscita: $y_0 = 2$, $y_1 = 3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 19$, determinare se possibile lo stato iniziale x_0.
   - si progetti se possibile uno stimatore asintotico dello stato con opportuna dinamica dell'errore di stima.

4. Sia dato il sistema lineare tempo invariante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

   con $x(t_0) = 0$.

   - Si trovi la legge di controllo $u(t)$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) u(t) dt$$

     che porta lo stato al tempo finale fissato t_f nello stato desiderato x_f.
   - Si discuta la possibilità o meno di risolvere il problema in maniera esatta.
   - Si discuta il caso $x_0 \neq 0$ ed eventualmente si trovi la nuova soluzione del problema.