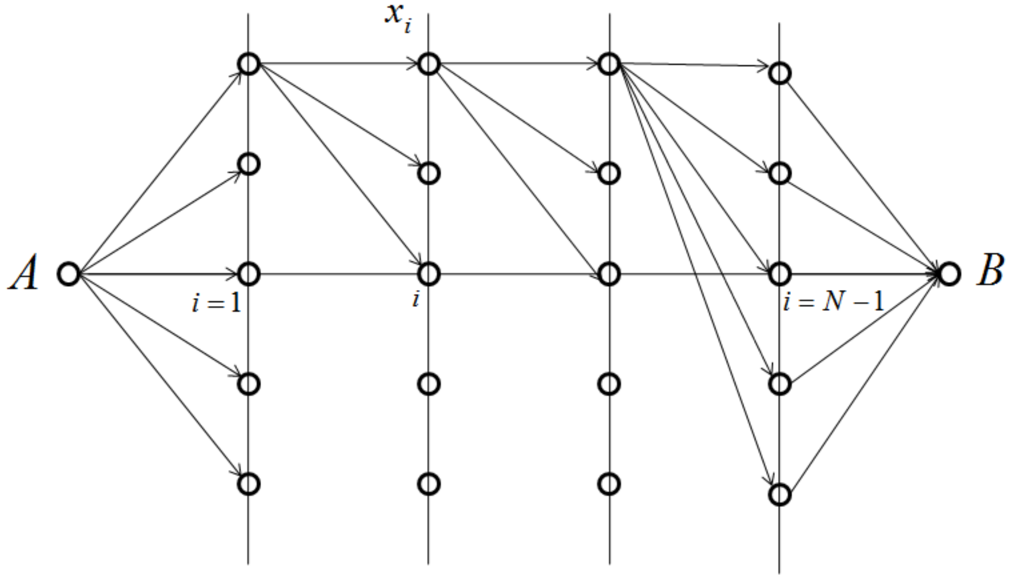
PROGRAMMAZIONE DINAMICA (PD)

NOTE ELABORATE DA ANDREA CAITI SULLA BASE DEGLI APPUNTI DELL'INSEGNAMENTO DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA E OTTIMIZZAZIONE TENUTO DAL PROF. RICCARDO ZOPPOLI,

UNIVERSITA' DI GENOVA

ESEMPIO: rottadi tempo minimo di un aereo (in presenza di perturbazionimeteo - *weather routing*)



AB è suddiviso in N intervalli

x_i è la variabile che individua i possibili punti di transito, ha valore intero.

$x_0 = \hat{x} = x_A$.

La generica traiettoria sarà data da una spezzata che unisce punti. Lo scopo dell'esercizio è trovare la traiettoria di percorso minimo.

Supponiamo di avere un campo di vettori che definiscono il vento in intensità e direzione. Supponiamo altresì di disporre di un programma di calcolo che, note le caratteristiche dell'aereo, determini la velocità $v_i(x_i,\, x_{i+1})$ di crociera sull'arco in oggetto. Ipotizziamo anche che il campo delle velocità del vento sia stazionario nel tempo di traversata.

Tutte queste ipotesi ci permettono di calcolare il tempo di transito sull'arco:

$T_i(x_i, x_{i+1}) = \frac{l_i(x_i,x_{i+1})}{v_i(x_i,x_{i+1})}$ con $l_i(x_i, x_{i+1})$ lunghezza dell'arco.

Il costo sarà dato dal tempo totale della traversata

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} T_i(x_i, x_{i+1}).$$

Il problema si traduce nel determinare la traiettoria ottima $\underline{x}_1^o, \ldots \underline{x}_{N-1}^o$ che minimizza J.

Introduciamo ora la decisione $u_i = x_{i+1}$.

1) Sistema dinamico

$x_{i+1} = u_i$

In generale: $x_{i+1} = f[x_i, u_i]$

2) Equazione di costo

$$J = \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} T_i(x_i, u_i)}_{\boxed{h_i(x_i, u_i)}} \quad \text{(in generale)}$$

Principio di ottimalità (Bellman)

Condizione necessaria affinchè un nodo x_i del reticolo (in generale uno stato x_i della traiettoria di stato) appartenga alla traiettoria ottima è che il percorso che va da x_i a x_B(traiettoria $\underline{x}_i, \underline{x}_{i+1}, \ldots, \underline{x}_N$) sia esso stesso un percorso ottimo, cioè tale da minimizzare il tempo parziale e ottenere il tempo minimo parziale:

$$J_i^o(x_i) = \min_{x_{i+1},\ldots,x_{N-1}} \sum_{k=i}^{N-1} T_k(x_k, x_{k+1})$$

I costi parziali sono denominati COST-TO-GO.

- Enunciazione alternativa: la seconda parte di una traiettoria ottima è essa stessa una traiettoria ottima
- Ulteriore enunciazione: non importa come si arrivi in x_i (in generale $\underline{x}_i$), l'importante è proseguire in maniera ottima.

Nel caso di attraversamento del grafo si ha la ricorsione a ritroso (*backward*) della Programmazione: Dinamica:

$$\boxed{\begin{cases} J_i^o(x_i) = \min\limits_{x_{i+1}}[T_i(x_i, x_{i+1}) + J_{i+1}^o(x_{i+1})] \; \textit{con} \; i = N-1, N-2, ..., 0 \\ J_N^o(x_N = B) = 0 \end{cases}}$$

Il problema generale consiste in $\underbrace{\min\limits_{x_1,..,x_{N-1}} \sum\limits_{i=0}^{N-1} T_i(x_i, x_{i+1})}_{J_0^o(x_0)} = \min\limits_{x_1,..,x_{N-1}} [T_0(x_0, x_1) + \sum\limits_{i=1}^{N-1} T_i(x_i, x_{i+1})]$

la decisione $x_1$influenza tutta la traiettoria mentre le altre decisioni non influenzano $T_0(x_0, x_1)$

$$\min\limits_{x_1,..,x_{N-1}} [T_0(x_0, x_1) + \sum\limits_{i=1}^{N-1} T_i(x_i, x_{i+1})] = \min\limits_{x_1}[T_0(x_0, x_1) + \underbrace{\min\limits_{x_2,..,x_{N-1}} \sum\limits_{i=1}^{N-1} T_i(x_i, x_{i+1})}_{J_1^o(x_1)}]$$

Abbiamo così dimostrato che $J_0^o(x_0) = \min\limits_{x_1}[T_0(x_0, x_1) + J_1^o(x_1)]$.

Iterando la procedura si dimostrano le equazioni ricorsive backward della programmazione dinamica: $J_i^o(x_i) = \min[T_i(x_i, x_{i+1}) + J_{i+1}^o(x_{i+1})]$.

Controllo ottimo: caso LQ - sistema Lineare, costo Quadratico

In generale le equazioni della programmazione dinamica si possono risolvere solo numericamente. Nel caso di sistemi dinamici lineari (non necessariamente stazionari) e costo quadratico si possono risolvere analiticamente. In questo caso parliamo di controllo ottimo LQ.

1) Sistema dinamico

$$\begin{cases} \underline{x}_{i+1} = A\underline{x}_i + B\underline{u}_i \\ \underline{x}_0 = \hat{\underline{x}} \ \text{i=0,1,...N-1} \end{cases}$$

2) Equazione di costo

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} (\underline{x}_i^T V \underline{x}_i + \underline{u}_i^T P \underline{u}_i) + \underline{x}_N^T V_N \underline{x}_N$$

$$V = V^T \geq 0 \quad V_N = V_N^T \geq 0 \quad P = P^T > 0$$

Si vuole trovare la sequenza delle funzioni decisionali

$$\underline{u}_i^o = \underline{\gamma}_i^o(\underline{x}_i) \qquad \text{con } i = 0, 1, .., N-1$$

che minimizzano J

OSSERVAZIONI:

- Nel caso di sistema dinamico non stazionario (tempo-variante) basta aggiungere i pedici *i* alle matrici *A* e *B*
- Le variabili $\underline{x}_i$ e $\underline{u}_i$ non devono essere vincolate per poter fare i conti (sia nel caso stazionario che in quello tempo variante

Risoluzione del problema LQ con PD

Stadio N-1

$$J^o_{N-1}(\underline{x}_{N-1}) = \min_{\underline{u}_{N-1}} \underline{x}^T_{N-1} V \underline{x}_{N-1} + \underline{u}^T_{N-1} P \underline{u}_{N-1} + \underline{x}^T_N V_N \underline{x}_N$$

$$\underline{x}_N = A\underline{x}_{N-1} + B\underline{u}_{N-1}$$

$$J^o_{N-1}(\underline{x}_{N-1}) = \underline{x}^T_{N-1} V \underline{x}_{N-1} + \min_{\underline{u}_{N-1}} [\underline{u}^T_{N-1} P u_{N-1} + (Ax_{N-1} + Bu_{N-1})^T V_N (Ax_{N-1} + Bu_{N-1})]$$

NOTA - CALCOLO DEL MINIMO DI UNA FORMA QUADRATICA (con termine lineare):

$\min_{\underline{z}}(\underline{z}^T Q \underline{z} + 2\underline{c}^T \underline{z})$ con Q simmetrica **strettamente** definita positiva e quindi invertibile.

$\nabla \underline{z}^T Q \underline{z} = 2Q\underline{z}$; $\nabla \underline{c}^T \underline{z} = \underline{c}$; $\Rightarrow \nabla(\underline{z}^T Q \underline{z} + 2\underline{c}^T \underline{z}) = 2Q\underline{z} + 2\underline{c}$; $\min_{\underline{z}} : \nabla = 0 \Rightarrow 2Q\underline{z} + 2\underline{c} = 0 \Rightarrow \underline{z}^o = -Q^{-1}\underline{c}$

Sostituendo $\underline{z}^o$ nell'equazione di partenza $\rightarrow f(\underline{z}^o) = -\underline{c}^T Q^{-1} \underline{c}$

N.B: se Q non fosse simmetrica si può renderla tale: $\underline{z}^T Q \underline{z} = \underline{z}^T (\frac{Q+Q^T}{2})\underline{z} + \underline{z}^T(\frac{Q-Q^T}{2})\underline{z}$; $(\frac{Q-Q^T}{2})$ espanso in serie si annulla $\widetilde{Q} = (\frac{Q+Q^T}{2})$

Ora:

$(A\underline{x}_{N-1} + B\underline{u}_{N-1})^T V_N (A\underline{x}_{N-1} + B\underline{u}_{N-1}) = (A\underline{x}_{N-1})^T V_N A\underline{x}_{N-1} + (A\underline{x}_{N-1})^T V_N B\underline{u}_{N-1} + (B\underline{u}_{N-1})^T V_N A\underline{x}_{N-1} + (B\underline{u}_{N-1})^T V_N B\underline{u}_{N-1} =$

$$= (\underline{x}^T_{N-1} A^T) V_N A\underline{x}^T_{N-1} + (\underline{x}^T_{N-1} A^T) V_N B\underline{u}^T_{N-1} + \underbrace{(\underline{u}^T_{N-1} B^T) V_N A\underline{x}_{N-1}}_{\boxed{\text{Scalare, lo posso trasporre } \underline{x}^T_{N-1} A^T V_N B\underline{u}_{N-1}}} + (\underline{u}^T_{N-1} B^T) V_N B\underline{u}_{N-1}$$

$$J^o_{N-1}(\underline{x}_{N-1}) = \underline{x}^T_{N-1} V \underline{x}_{N-1} +$$
$$+ \min_{\underline{u}_{N-1}} [\underline{u}^T_{N-1} P \underline{u}_{N-1} + \underline{x}^T_{N-1} A^T V_N A \underline{x}_{N-1} + 2\underline{x}^T_{N-1} A^T V_N B \underline{u}_{N-1} + \underline{u}^T_{N-1} B^T V_N B \underline{u}_{N-1}]$$
$$J^o_{N-1}(\underline{x}_{N-1}) = \underline{x}^T_{N-1} V \underline{x}_{N-1} + \underline{x}^T_{N-1} A^T V_N A \underline{x}_{N-1} +$$
$$+ \min_{\underline{u}_{N-1}} [\underbrace{\underline{u}^T_{N-1} P \underline{u}_{N-1} + \underline{u}^T_{N-1} B^T V_N B \underline{u}_{N-1}} + 2 \underbrace{\underline{x}^T_{N-1} A^T V_N B} \underline{u}_{N-1}]$$
$$\boxed{\underline{u}^T_{N-1} \underbrace{(P + B^T V_N B)}_{Q} \underline{u}_{N-1}} \quad \boxed{\underline{c}^T}$$
$$\min_{\underline{u}_{N-1}} [\underline{u}^T_{N-1} Q \underline{u}_{N-1} + 2\underline{c}^T \underline{u}_{N-1}] = \min_{\underline{z}} (\underline{z}^T Q \underline{z} + 2\underline{c}^T \underline{z})$$
$$\underline{u}^o_{N-1} = -\underbrace{(P + B^T V_N B)^{-1} B^T V_N A}_{\boxed{L_{N-1}}} \underline{x}_{N-1} \qquad \Rightarrow \underline{u}^o_{N-1} = L_{N-1} \underline{x}_{N-1}$$
$$J^o_{N-1} = \underline{x}^T_{N-1} (V + \overline{A^T V_N A})\, \underline{x}_{N-1} - \underline{c}^T Q^{-1} \underline{c} =$$
$$= \underline{x}^T_{N-1} (V + A^T V_N A) \underline{x}_{N-1} - \underline{x}^T_{N-1} A^T V_N B (P + B^T V_N B)^{-1} B^T V_N A \underline{x}_{N-1}$$
$$J^o_{N-1} = \underline{x}^T_{N-1} T_{N-1} \underline{x}_{N-1}$$
con $T_{N-1} = [(V + A^T V_N A - A^T V_N B (P + B^T V_N B)^{-1} B^T V_N A)]$

$$T_{N-1} = V + A^T [V_N - V_N B (P + B^T V_N B)^{-1} B V_N] A$$

Stadio N-2

$$J^o_{N-2}(\underline{x}_{N-2}) = \min_{\underline{u}_{N-2}} [\underline{x}^T_{N-2} V \underline{x}_{N-2} + \underline{u}^T_{N-2} P \underline{u}_{N-2} + \underbrace{J^o_{N-1}(\underline{x}_{N-1})}_{\boxed{\underline{x}^T_{N-1} T_{N-1} \underline{x}_{N-1}}}]$$

$$V_N \rightarrow T_{N-1}$$

$$\underline{u}^o_{N-2} = -\underbrace{(P + B^T V_N B)^{-1} B^T T_{N-1} A}_{\boxed{L_{N-2}}} \underline{x}_{N-1}$$

$$J^o_{N-2}(\underline{x}_{N-2}) = \underline{x}^T_{N-2} T_{N-2} x_{\underline{N}-2}$$

$$T_{N-2} = V + A^T [T_{N-1} - T_{N-1} B (P + B^T T_{N-1} B)^{-1} B^T T_{N-1}] A$$

Procedendo a ritroso (fase backward della Programmazione dinamica) si ottiene:

$$\underline{u}^o_i = -L_i \underline{x}_i \qquad L_i = [(P + B^T T_{i+1} B)^{-1} B^T T_{i+1} A] \quad \text{con } i = 0, 1, ..., N-1$$

$$J^o_i(\underline{x}_i) = \underline{x}^T_i T_i \underline{x}_i \qquad T_i = V + A^T [T_{i+1} - T_{i+1} B (P + B^T T_{i+1} B)^{-1} B^T T_{i+1}] A$$

$i = N-1, N-2, ..., 0$

$$T_N = V_N \qquad T_i = F_i(T_{i+1})$$

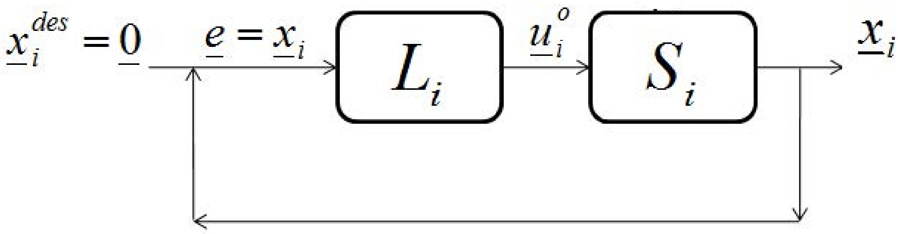
EQUAZIONE DI RICCATI: $\begin{cases} T_i = V + A^T [T_{i+1} - T_{i+1} B (P + B^T T_{i+1} B)^{-1} B^T T_{i+1}] A \\ T_N = V_N \end{cases}$

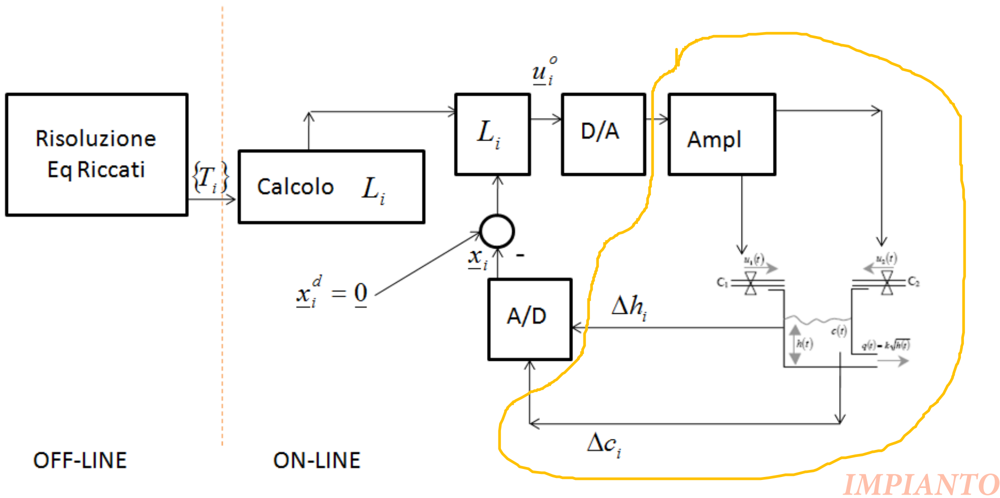
ESEMPIO E

COMMENTI:

Si vuole minimizzare il costo quadratico $J = \sum_{i=0}^{N-1}(\underline{x}_i^T V \underline{x}_i + \underline{u}_i^T P \underline{u}_i) + \underline{x}_N^T V_N \underline{x}_N$ a partire da $\underline{x}_0 = \hat{\underline{x}}$ per esempio si vuole annullare $\hat{\underline{x}}$ (vedi costo $\underline{x}_i^T V \underline{x}_i$) con un basso costo del controllo (vedi costo $\underline{u}_i^T P u_i$)

Schema a blocchi:





2-

P deve essere definita positiva e V e V_N semidefinite positive per permettere l'inversione dell'espressione $(P + B^T T_{i+1} B)^{-1}$.

3-

L_i è tempo variante. anche con sistema stazionario