3. Dato un sistema A, B, C continuo o discreto, completamente raggiungibile ed osservabile, si enunci la proprietà di separazione degli autovalori, e se ne dia una sintetica linea di dimostrazione. Si discutano inoltre le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità del sistema di ordine "2n" ottenuto mediante la reazione dello stato stimato.

Considero un sistema lineare, la sua stima e l'impulso dato dalla interazione della stima:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{\hat{x}} = A\cdot\hat{x} + B\cdot u + H\cdot(y-\hat{y}) \\ y = C\cdot x \end{cases} \qquad \underline{u = K\hat{x} + v}$$

Sostituisco e ottengo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = (A+BK)\hat{x} + Bv + HCx - HC\hat{x} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ HC & A+BK-HC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$$

• Definisco la variabile errore di stima $\varepsilon = \hat{x} - x$ e faccio un cambio di variabili per ottenere il nuovo vettore di stato $\begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}$:

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}}_{T} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x}-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$T \longrightarrow \begin{bmatrix} I & \emptyset \\ I & I \end{bmatrix} = T^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & BK \\ HC & A+BK-HC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ \cancel{HC}+A+BK-\cancel{HC} & A+BK-HC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \emptyset \end{bmatrix} v =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ A+BK & A+BK-HC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v =$$

$$= \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ -\cancel{A}-\cancel{BK}+\cancel{A}+\cancel{BK} & -\cancel{BK}+A+\cancel{BK}-HC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v =$$

Quindi la dinamica di ε (errore di stima) è:

$$\dot{\varepsilon} = (A - HC)\varepsilon$$

La dinamica dello stato x (lo stato del sistema da controllare) è:

$$\dot{x} = \underbrace{(A+BK)}_{\text{Matrice dinamica del sistema}} x + \underbrace{BK \cdot \varepsilon}_{\text{Effetto dell'errore di stima su } x} + B \cdot v$$

Matrice dinamica del sistema a ciclo chiuso ottenuta retroazionando $\hat{x}$ (e non x). Che è la stessa cosa che avrei ottenuto se avessimo retroazionato lo stato vero x.

Effetto dell'errore di stima su x, se $\varepsilon \to 0 \Rightarrow$ l'effetto sparisce

• Enunciato **PRINCIPIO DI SEPARAZIONE DEGLI AUTOVALORI:**

Dice che è possibile assegnare in modo indipendente gli autovalori del sistema e quelli dell'impianto. Siccome non posso misurare lo stato x, lo stimo e a quel punto lo retroaziono. Retroazionando $\hat{x}$, riesco ad assegnare i poli a ciclo chiuso esattamente dove li avrei assegnati se avessi retroazionato x.

• Strutturalmente vado a perdere di raggiungibilità ma non di osservabilità. Questo però va bene, perché l'ingresso non incide sulla dinamica dell'errore.

3. Si consideri il sistema tempo discreto :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

Al variare dei parametri α e β:

- si studi la stabilizzabilità mediante retroazione dello stato;
- si studi la possibilità di realizzare un controllore dead-beat, e, ove possibile, lo si progetti.

a)

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha-1 & \alpha(\alpha-1) \\ \alpha-1 & \alpha(\alpha-1) & \alpha(\alpha-1)+\alpha^2(\alpha-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ il sistema non è completamente raggiungibile.

· Impongo la condizione che $-1<\beta<1$ poichè se β che non fa parte dello spazio di raggiungibilità è stabile posso stabilizzare il sistema.

b)

Per il controllore dead-beat $\beta = \emptyset$.

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha-1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_1(\alpha-1) & K_2(\alpha-1) & K_3(\alpha-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha+K_1(\alpha-1) & \alpha+K_2(\alpha-1) & \alpha+K_3(\alpha-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ \alpha+K_1\alpha-K_1 & \alpha+K_2\alpha-K_2-\lambda & \alpha+K_3\alpha-K_3 & \alpha+K_1\alpha-1 & \alpha+K_2(\alpha-1)-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(\alpha+\alpha K_2 - K_2) + \lambda(\alpha + \alpha K_1 - K_1)$$

$$P_d(\lambda) = \lambda^3$$

$$\begin{cases} -\alpha - \alpha K_2 + K_2 = \emptyset & \Rightarrow \quad K_2(1-\alpha) = \alpha \\ -\alpha - \alpha K_1 + K_1 = \emptyset & \Rightarrow \quad K_1(1-\alpha) = \alpha \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha/(1-\alpha) & \alpha/(1-\alpha) \end{bmatrix}$$

Condizione per cui ci sia dead-beat $\Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$

3. Si consideri il sistema tempo discreto:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k = Fx_k + Gu_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = Hx_k$$

con condizioni iniziali $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$,

- Si determini il numero minimi di passi necessari a portare l'uscita y_k del sistema dal valore 0 al valore 1.
- Si determini una sequenza di ingresso $u_k = (u_0, u_1, u_2, u_3...)$ che porti l'uscita y_k da 0 a 1 nel minor numero di passi possibile e la mantenga a 1 indefinitamente.
- Si determini una legge di retroazione del tipo $u_k = Kx_k + 1$ che risolva lo stesso quesito del punto precedente.

a)

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$ completamente raggiungibile in 2 passi.

$$x_k = A^k \cdot x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \cdot B \cdot u(i)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(0) \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(0)$$

COMPLETARE

3. Dato il sistema tempo continuo caratterizzato dalle matrici dinamiche e di ingresso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e con matrice di uscita $C = (1 \ -1 \ 2)$

- Si determini se il sistema è completamente raggiungibile, e se è possibile stabilizzare il sistema utilizzando un solo ingresso (ed eventualmente quale).
- Determinare se esiste e in caso calcolarla, una matrice di reazione K in modo che l'evoluzione libera dello stato del sistema sia esponenzialmente convergente per ogni condizione iniziale e la velocità di convergenza sia al più 2 (quindi che converga più velocemente di e^{-2t}).
- Cosa si può concludere in termini di velocità di convergenza dell'uscita del sistema retroazionato con la K determinata al punto precedente?

a)

$$R_1 = \begin{bmatrix} b_1 & A \cdot b_1 & A^2 \cdot b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 17 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_1) = 2$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} b_2 & A \cdot b_2 & A^2 \cdot b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_2) = 3$$

$$R = \begin{bmatrix} B & A \cdot B & A^2 \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- Con entrambi gli ingressi il sistema è completamente raggiungibile.

È possibile stabilizzare il sistema tramite il secondo ingresso

b)

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ $\Rightarrow$ quindi i modi sono e^{t}, $t \cdot e^{t}$, e^{2t}

- Nell'evoluzione libera vedo solo gli autovalori osservabili.

- Il sistema è completamente osservabile.

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -K_1 & 2-K_2 & -K_3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 0 & 4 & 1-\lambda & 0 \\ -K_1 & 2-K_2-\lambda & -K_3 & -K_1 & 2-K_2-\lambda \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 0 & 2 \end{array}\right] =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(4-K_2) + \lambda(-5+2K_2-2K_3) - 8K_1 - K_2 + 2K_3 + 2$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+3)^3 = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 9$$

$$\begin{cases} +8K_1 + K_2 - 2K_3 - 2 = 9 \Rightarrow 8K_1 + 13 - 48 - 2 = 9 \Rightarrow K_1 = \frac{46}{8} = \frac{23}{4} \\ +5 - 2K_2 + 2K_3 = 27 \Rightarrow 5 - 26 + 2K_3 = 27 \Rightarrow K_3 = 24 \\ -4 + K_2 = 9 \Rightarrow K_2 = 13 \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} 23/4 & 13 & 24 \end{bmatrix}$$

c)

3. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = Cx$$

si determini :

- se il sistema e' stabilizzabile mediante retroazione dello stato usando un solo ingresso. Se si, si determini per quali ingressi;
- una matrice K di retroazione dello stato in modo che, per qualunque stato iniziale, l'evoluzione libera del sistema tenda a zero piu' velocemente di e^{-t};
- una matrice K' di retroazione dello stato in modo che, con ingresso nullo e per qualunque stato iniziale, l'uscita del sistema tenda a zero non piu' lentamente di e^{-2t}.

a)

$$R_1 = \begin{bmatrix} b_1 & A \cdot b_1 & A^2 \cdot b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_1) = 3$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} b_2 & A \cdot b_2 & A^2 \cdot b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_2) = 1$$

- Il sistema è stabilizzabile mediante il primo ingresso.

b)

$$(A + b_1 K) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ k_1 & k_2+2 & k_3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

parte osservabile

- Siccome nell'evoluzione libera vedo gli autovalori osservabili prendo la sotto-matrice:

$$\det((A+BK)' - \lambda I) = (k_2 + 2 - \lambda)(3 - \lambda) - 3k_3 =$$

$$= 3k_2 + 6 - 3\lambda - k_2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 3k_3 = \lambda^2 + \lambda(-k_2 - 5) - 3k_3 + k_2$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

$$\begin{cases} -3k_3 + k_2 = 4 \Rightarrow k_3 = -\frac{13}{3} \\ -k_2 - 5 = 4 \Rightarrow k_2 = -9 \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} \emptyset & -9 & -13/3 \end{bmatrix}$$

c)

4. si consideri il sistema, con $\beta \in [0, 1]$ (intervallo chiuso $0 \to 1$):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix} x = Cx$$

si determini:

- per quali valori di β non esistono stimatori asintotici dello stato;
- per quali valori di β non esistono stimatori asintotici dello stato che utilizzano una sola uscita del sistema.

a)

$$O = \begin{bmatrix} C & C A & C A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \beta \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \beta & \beta^2 & \beta \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 2\beta^2 & \beta^3 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\det(O) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \beta^2 & \beta & \beta & \beta^2 \end{array}\right] = (0+0+0) - (\beta^2 + 0 + 0) = -\beta^2$$

- Quindi $\beta \neq 0 \Rightarrow$ per $\beta = \emptyset$ il sistema non è controllabile e quindi non è possibile costruire lo stimatore asintotico.

b)

$$O_1 = \begin{bmatrix} C_1 & C_1 A & C_1 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Non è controllabile. Niente stimatore.

$$O_2 = \begin{bmatrix} C_2 & C_2 A & C_2 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & \beta \\ \beta & \beta^2 & \beta \\ 2\beta^2 & \beta^3 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Per $\beta = \emptyset$ il sistema non è controllabile.

3. Dato il sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 + \sin x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -\cos x_1 + \cos x_2 - x_3 \end{cases}$$

(a) si determini, se possibile, una legge di controllo lineare $u = Kx$ con $K = [k_1, k_2, k_3]$ tale che l'origine dello spazio di stato sia un punto di equilibrio asintoticamente stabile e che, in un intorno di questo, l'errore vada a 0 almeno come e^{-t}.

(b) "come sopra" ma con convergenza a 0 veloce almeno quanto e^{-2t}.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos x_2 & 2x_3 \\ -\cos x_1 & \cos x_2 & 0 \\ \sin x_1 & -\sin x_2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + B\cdot K) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k_1 - 1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A + BK - \lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ k_1 - 1 & k_2 - \lambda & k_3 & k_1 - 1 & k_2 - \lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \end{array}\right] = \left((1-\lambda)(k_2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0\right) - \left((k_1-1)(1-\lambda)\right) =$$

$$= (k_2 - \lambda - k_2\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) - k_1 + k_1\lambda + 1 - \lambda = k_2 - k_2\lambda - \lambda + \lambda^2 - k_2\lambda + k_2\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3 - k_1 + k_1\lambda + 1 - \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(2 + k_2) + \lambda(k_1 - 2k_2 - 2) + k_2 - k_1 + 1$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

$$\begin{cases} k_2 - k_1 + \cancel{1} = \cancel{1} \Rightarrow k_2 = k_1 \\ 2 + k_2 = 3 \Rightarrow k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$P_d(\lambda) = (\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

$$\begin{cases} k_2 - k_1 + 1 = 8 \Rightarrow k_1 = -3 \\ 2 + k_2 = 6 \Rightarrow k_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

si determini :

- per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller;
- si scelga un valore β tra questi, e si calcoli, in funzione di α la matrice di retroazione dello stato K tale che il sistema a ciclo chiuso sia di tipo dead-beat.

a)

Calcolo la matrice di raggiungibilità:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 2\beta & \beta+4\beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$ il sistema non è completamente raggiungibile.

• Dato che α non fa parte dello spazio di raggiungibilità.
Per $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ il sistema ammette dead-beat controller.

b)

Scelgo $\beta = 1$

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ K_1+1 & K_2+2 & K_3+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 & 0 & \alpha-\lambda \\ K_1+1 & K_2+2 & K_3+2-\lambda & K_1+1 & K_2+2 \end{array}\right] =$$

$$= (-\lambda(\alpha-\lambda)(K_3+2-\lambda)) - ((\alpha-\lambda)(K_1+1)) = -\lambda(\alpha K_3 + 2\alpha - \alpha\lambda - K_3\lambda - 2\lambda + \lambda^2) - \alpha K_1 - \alpha + K_1\lambda + \lambda = \emptyset$$

$$= -\alpha K_3 \lambda - 2\alpha\lambda + \alpha\lambda^2 + K_3\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 - \alpha K_1 - \alpha + K_1\lambda + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(\alpha + K_3 + 2) + \lambda(-\alpha K_3 - 2\alpha + K_1 + 1) - \alpha K_1 - \alpha$$

$$P_d(\lambda) = \lambda^3$$

$$\begin{cases} \alpha + K_3 + 2 = 0 \Rightarrow K_3 = -2-\alpha \\ -\alpha K_3 - 2\alpha + K_1 + 1 = 0 \Rightarrow \\ -\alpha K_1 - \alpha = 0 \Rightarrow K_1 = -\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}} = -1 \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2-\alpha \end{bmatrix}$$

4. Si consideri il problema di raggiungibilità in tempo finito di un punto dello spazio di stato con energia di controllo minima per un sistema lineare tempo continuo;

- Si definisca il Gramiano di Raggiungibilità $\mathcal{G}_R$.
- Si dimostri il ruolo di $\mathcal{G}_R$ nel calcolo dell'azione di controllo $u(t)$ ad energia minima.

a)

$$G_R(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T(t_1-\tau)} \, d\tau$$

b)

$$\begin{cases} \text{Stato di partenza } x' \text{ al tempo } t_0 \\ \text{Stato di arrivo } x'' \text{ al tempo } t_1 \end{cases}$$

- Trovare un ingresso $u(t)$ che porti lo stato da x' a x''.

- Se il sistema è completamente raggiungibile il problema ha soluzione $\forall x', x''$
- Se il sistema NON è completamente raggiungibile ha soluzione se x' e $x'' \in \mathbb{R}(0)$.

Nel caso x' e $x'' \in \mathbb{R}(0)$ costruiamo una soluzione in due passi:

1. $x' \longrightarrow \emptyset$ problema di controllabilità a zero
2. $\emptyset \longrightarrow x''$ problema di raggiungibilità a zero

Concentriamoci sul secondo problema (il primo si risolve in modo analogo):

$$x'' = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \cdot B u''(\tau) \, d\tau \quad \Rightarrow \quad u''(\tau) = B^T \cdot e^{A^T(t_1-t)} \cdot \underbrace{G_R^T(t_0,t_1)}_{\text{Pseudo-inversa di } G_R} \cdot x''$$

Da $x' \longrightarrow \emptyset$:

$$0 = e^{A(t_1-t_0)} x' + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B \cdot u'(\tau) \, d\tau$$

$$-e^{A(t_1-t_0)} x' = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B \cdot u'(\tau) \, d\tau$$

$$u'(t) = B^t e^{A(t_1-t)} \cdot G_R^T(t_0,t_1) \cdot \left(-e^{A(t_1-t_0)} x'\right)$$

Per andare da x' e " uso $u(t) = u'(t) + u''(t)$

$$u(t) = B^T \cdot e^{A^T(t_1-t)} \cdot G_R^T(t_0,t_1) \cdot x'' + B^t e^{A(t_1-t)} \cdot G_R^T(t_0,t_1) \cdot \left(-e^{A(t_1-t_0)} x'\right) =$$

$$= B^T \cdot e^{A^T(t_1-t)} \cdot G_R^T(t_0,t_1) \cdot \left[x'' - e^{A(t_1-t_0)} x' \right]$$

Esiste una soluzione in forma minima:

$$u(t) = B^T \cdot e^{A^T(t_1-t)} \cdot G_R^T(t_0,t_1) x'' =$$

$$= B^T e^{A^T(t_1-t)} \cdot \underbrace{\eta}_{\text{costante}} \quad \text{con} \quad \eta = G_R^T(t_0,t_1) x''$$

- Calcoliamo il costo minimo di $u(t)$:

$$\|u(t)\|_2^2 = \int_{t_0}^{t_1} u^T(\tau) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \eta^t e^{A(t_1-\tau)} \cdot B \cdot B^T e^{A^T(t_1-t)} \cdot \eta \, d\tau =$$

$$= \eta^t \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \cdot B \cdot B^T e^{A^T(t_1-t)} \cdot d\tau \cdot \eta = (x'')^T \cdot \left(G_R^T(t_0,t_1)\right)^T \cdot G_R(\cancel{t_0,t_1}) \cdot G_R^T(\cancel{t_0,t_1}) \cdot x'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|_2^2 = (x'')^T \cdot \left(G_R^T(t_0,t_1)\right)^T \cdot x'' \Longrightarrow$$

Quindi l'energia necessaria a $u(\tau)$ dipende dallo stato finale (x'') e dal Gramiano di raggiungibilità.

- Il Gramiano indica quanto costa raggiungere x''.

- Ponendoci nel caso in cui assumiamo $R(0) = \mathbb{R}^n$ (consideriamo quindi l'inversa di G_R e non la pseudo-inversa), per le proprietà di G_R lo possiamo scrivere come:

– Alcune cose da sapere su G_R:

1. G_R è una matrice simmetrica;
2. G_R è definito positivo $\rightarrow$ ha tutti autovalori maggiori di zero $(\lambda > 0)$
3. G_R è diagonalizzabile utilizzando una matrice di cambio di base ortogonale $\Rightarrow (\ )^{-1} = (\ )^T$

$$G_R = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrice ortogonale}}}{V^T} \Sigma V \Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_m = \sqrt[2]{\lambda_m}$$

$$G_R^T = G_R^{-1} = (V^T)^{-1} \cdot \Sigma^{-1} \cdot V^{-1} = V \cdot \Sigma^{-1} \cdot V^T$$

- Posso quindi risolvere il costo relativo a $u(t)$ come:

$$\|u(t)\|_2^2 = (X'')^T \cdot G_R^T(t_0, t_1) \cdot X'' = (X'')^T \cdot V \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot V^T \cdot X'' =$$

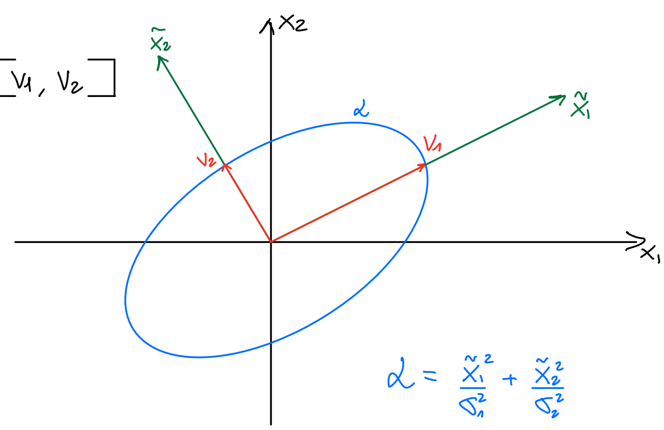
$$= (\tilde{X}'')^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \tilde{X}'' \quad \Rightarrow \quad \text{se } \tilde{X}'' = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_m \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}'' = V^T \cdot X''$$

$$\|u(t)\|_2^2 = \frac{\tilde{X}_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\tilde{X}_2^2}{\sigma_2^2} + \dots\dots + \frac{\tilde{X}_m^2}{\sigma_m^2} \Rightarrow \text{questa è l'equazione di un Ellissoide in } \mathbb{R}^m$$

Ho un nuovo sistema di riferimento $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ e avrò ad esempio in $\mathbb{R}^2$:

$V = \begin{bmatrix} V_1, V_2 \end{bmatrix}$



$$\alpha = \frac{\tilde{X}_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\tilde{X}_2^2}{\sigma_2^2}$$

- Posso raggiungere tutti i punti interni all'ellisse li posso raggiungere. I punti lungo l'ellisse li raggiungo spendendo α.

  Se considero un intervallo di tempo maggiore di quello inizialmente considerato, allora posso giungere in X spendendo meno. Infatti: $G_R^T(t_0, t_1) > G_R^T(t_0, t_2)$

Quindi posso arrivare in X'' spendendo meno, però necessito di più tempo.

3. Dato il sistema SISO tempo discreto

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

chiuso in retroazione con il controllore $u_k = K(r_k - x_k)$, con K matrice di guadagni e r_k ingresso esogeno di riferimento;

- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.

a)

TEOREMA FONDAMENTALE ASSEGNAMENTO POLI :

Dato un sistema (A, B) di ordine n, con n autovalori desiderati ( ), se e solo se (A,B) è raggiungibile, esiste ed è unica una K tale che $(A + B\cdot K)$ ha gli autovalori uguali a quelli desiderati.

• Condizione necessaria $\longrightarrow$ (A,B) è completamente raggiungibile.

Se (A,B) non è completamente raggiungibile allora posso fare la decomposizione di Kalman e trasformare A, B in forma standard di raggiungibilità :

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \tilde{A}_{12} \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right] \xrightarrow{} \text{Autovalori} \qquad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \hline \emptyset \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Raggiungibile} \\ \\ \text{non Raggiungibile} \end{array}$$

Costruisco $u = \tilde{K}\cdot\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{bmatrix}^T$

$$\tilde{A} + \tilde{B}K = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1} & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2 \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right] \longrightarrow \text{Autovalori}$$

$\Rightarrow$ Gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$ (non raggiungibili) non sono modificabili $\Rightarrow$ non posso assegnarli a quelli desiderati

• Condizione sufficiente $\longrightarrow$ se (A,B) è raggiungibile $\Rightarrow$ $\exists!\, K : \lambda(A+BK) =$ autovalori desiderati

Se (A,B) è raggiungibile posso ottenerlo in F.C.C.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \emptyset & I \\ \hline -p_0 & -p_1 \cdots\cdots -p_{n-1} \end{array}\right] \qquad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$$\det(\lambda \cdot I - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})) = \lambda^m + (p_{m-1} - k_m) \cdot \lambda^{m-1} + \ldots + (p_0 - k_1)$$

$$p_d(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^m + \bar{p}_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \ldots + \bar{p}_0$$

Facendo corrispondere i coefficienti ottengo:

$$\underbrace{\begin{cases} p_{m-1} - k_m = \bar{p}_{m-1} \\ p_0 - k_1 = \bar{p}_0 \end{cases}}_{m \text{ equazioni}} \Rightarrow m \text{ equazioni in } m \text{ incognite}$$

$k_m, \ldots, k_1 \to m$ incognite

$p_{m-1}, \ldots, p_0 \to m$ parametri

b)

Il sistema (A, B) è stabilizzabile se tutti gli autovalori instabili di A sono raggiungibili.

Dimostrazione: come visto nel teorema dell'assegnamento dei poli, la retroazione dello stato può influire solo sul sottosistema raggiungibile. Se gli autovalori che rendono il sistema instabile appartengono al sottosistema raggiungibile, allora esiste una retroazione dello stato (raggiungibile) che assegna al sottosistema raggiungibile gli autovalori desiderati (stabili). Se gli autovalori che rendono il sistema instabile non appartengono al sottosistema raggiungibile, non esiste un ingresso né tantomeno una retroazione dello stato che li possa modificare, per cui il sistema rimane instabile

2. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} x = Cx$$

si determini :

- se il sistema e' stabilizzabile mediante retroazione dello stato usando un solo ingresso. Se si, si determini per quali ingressi;
- una matrice K di retroazione dello stato in modo che, per qualunque stato iniziale, l'evoluzione libera del sistema tenda a zero piu' velocemente di e^{-2t};

a)

$$R_1 = \begin{bmatrix} b_1 & A \cdot b_1 & A^2 \cdot b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R_1) = 3$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} b_2 & A \cdot b_2 & A^2 \cdot b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 36 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{18} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_2) = 1$$

- Il sistema è stabilizzabile mediante il primo ingresso.

b)

$$\det(\lambda \cdot I - A) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 8 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda-3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 \\ 0 & 3 \end{matrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) =$$

$$= (\lambda^2 - \lambda - 2)(\lambda - 3) =$$

$$= (\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda^2 + 3\lambda - 2\lambda + 6) =$$

$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6$$

$$(A + b_1 \cdot K) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ -K_1 & 2-K_2 & -K_3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A + b_1 \cdot K - \lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -1-\lambda & 0 & 8 & -1-\lambda & 0 \\ -K_1 & 2-K_2-\lambda & -K_3 & -K_1 & 2-K_2-\lambda \\ 0 & 3 & 3-\lambda & 0 & 3 \end{array}\right] =$$

$$= (-1-\lambda)(3-\lambda)(2-K_2-\lambda) - 24K_1 + 3K_3(-1-\lambda) =$$

$$= (-3+\lambda-3\lambda+\lambda^2)(2-K_2-\lambda) - 24K_1 - 3K_3 - 3K_3\lambda =$$

$$= -6 + 3K_2 + 3\lambda + 2\lambda - K_2\lambda - \lambda^2 - 6\lambda + 3K_2\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda^2 - K_2\lambda^2 - \lambda^3 - 24K_1 - 3K_3 - 3K_3\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(4-K_2) - \lambda + 2K_2\lambda - 3K_3\lambda - 6 + 3K_2 - 24K_1 - 3K_3 =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(4-K_2) + \lambda(2K_2 - 1 - 3K_3) - 6 + 3K_2 - 24K_1 - 3K_3$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+3)^3 = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27$$

$$\begin{cases} -6 + 3K_2 - 24K_1 - 3K_3 = 27 \\ 2K_2 - 1 - 3K_3 = 27 \Rightarrow \quad 2\cdot(-5) - 1 - 3K_3 = -27 \Rightarrow \quad K_3 = \dfrac{16}{3} \\ 4 - K_2 = 9 \Rightarrow \quad K_2 = -9+4 = -5 \end{cases}$$

$$-6 + 3K_2 - 24K_1 - 3K_3 = -27 \Rightarrow \quad -6 + 3\cdot(-5) - 24K_1 - \cancel{3}\cdot\left(\frac{16}{\cancel{3}}\right) = -27$$

$$-6 - 15 - 24K_1 - 16 = -27$$

$$24K_1 = -6 - 15 - 16 + 27 \Rightarrow \quad K_1 = \frac{-10}{24} = -\frac{5}{12}$$

$$K = \begin{bmatrix} -5/12 & -5 & 16/3 \end{bmatrix}$$

3. Sia dato il sistema tempo discreto :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = Cx_k$$

si dica se :

- E' possibile costruire uno stimatore dead-beat (tutti i poli in 0);
- E' possibile costruire un controllore che, retroazionando lo stato stimato, annulli l'evoluzione libera dello stato in un numero finito di passi.

In tal caso si costruisca uno stimatore ed un controllore adeguati.

a)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C & C\cdot A & C\cdot A^2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\mathcal{O}) = 2$$

- Essendo $\lambda = \emptyset$ l'autovalore che non fa parte dello spazio di osservabilità posso comunque costruire lo stimatore dead-beat.

$$(A+HC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & H_1+1 & 0 \\ H_2+1 & H_2+1 & 0 \\ H_3 & H_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+HC-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} H_1-\lambda & H_1+1 & 0 & H_1-\lambda & H_1+1 \\ H_2+1 & H_2+1-\lambda & 0 & H_2+1 & H_2+1-\lambda \\ H_3 & H_3 & -\lambda & H_3 & H_3 \end{array}\right] =$$

$$= \Big((H_1-\lambda)(H_2+1-\lambda)(-\lambda)+0+0\Big) - \Big(-\lambda(H_2+1)(H_1+1)\Big) =$$

$$= -\lambda(H_1H_2 + H_1 - H_1\lambda - H_2\lambda - \lambda + \lambda^2) + \lambda(H_1H_2 + H_2 + H_1 + 1) =$$

$$= -\cancel{H_1H_2\lambda} - \cancel{H_1\lambda} + H_1\lambda^2 + H_2\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3 + \cancel{H_1H_2\lambda} + H_2\lambda + \cancel{H_1\lambda} + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(H_1+H_2+1) + \lambda(H_2+1)$$

$$P_d(\lambda) = \lambda^3 \Rightarrow \begin{cases} -H_2 - 1 = 0 \\ -H_1 - H_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_1+1 & K_2+1 & K_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ K_1+1 & K_2+1-\lambda & K_3 & K_1+1 & K_2+1-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left(\lambda^2(K_2+1-\lambda)+0+0\right)-\left(0+0-\lambda(K_1+1)\right) =$$

$$= K_2\lambda^2+\lambda^2-\lambda^3+K_1\lambda+\lambda = -\lambda^3+\lambda^2(K_2+1)+\lambda(K_1+1)$$

- Per annullare l'evoluzione libera dello stato in un numero finito di passi devo avere:

$$P_d(\lambda) = \lambda^3$$

$$\begin{cases} K_1+1=0 \\ K_2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema tempo discreto:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$$

- si discuta la raggiungibilità del sistema da u_k e dalle sue componenti prese singolarmente;
- si determini, se possibile, una retroazione dello stato $u_k = Kx_k$ tale che il sistema a ciclo chiuso abbia il generico polinomio caratteristico $p(z) = z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$.

a)

$$R = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rank}(R) = 4$$

$$R(A, b_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ran}(R_1) = 3$$

$$R(A, b_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ran}(R_2) = 1$$

Il sistema non è mai completamente raggiungibile da un solo ingresso, quindi non è stabilizzabile.

b)

Uso il lemma di Heymann:

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(Q) = 4$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = S \cdot Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + B \cdot M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

$$R = \begin{bmatrix} b_1 & \bar{A} \cdot b_1 & \bar{A}^2 \cdot b_1 & \bar{A}^3 \cdot b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R) = 4$$

• Costruiamo $\bar{A}_c + \bar{B}_c \cdot K_c$:

È già in F.C.C.

$$\bar{A}_c + \bar{B}_c \cdot K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1 & K_2 & 1+K_3 & K_4 \end{bmatrix} \Rightarrow P_d(z) = z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$\begin{cases} K_1 = -\alpha_0 \\ K_2 = -\alpha_1 \\ K_3 = -\alpha_2 - 1 \\ K_4 = -\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow K_c = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 - 1 & -\alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$K = M_1 + K X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 - 1 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 - 1 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

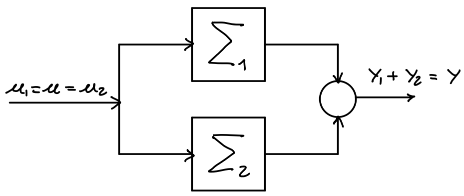
3. Siano dati i sistemi tempo continui SISO $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$ e $\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2)$, il candidato enunci e dimostri, nello spazio di stato oppure utilizzano le funzioni di trasferimento, le Condizioni Necessarie e Sufficienti affinchè:

a
- il sistema ottenuto collegando in parallelo i due sistemi Σ_1 e Σ_2 sia raggiungibile;
- il sistema ottenuto collegando in parallelo i due sistemi Σ_1 e Σ_2 sia osservabile;

b
- il sistema ottenuto collegando in serie, nell'ordine preferito, i due sistemi Σ_1 e Σ_2 sia raggiungibile;
- il sistema ottenuto collegando in serie, nell'ordine preferito, i due sistemi Σ_1 e Σ_2 sia osservabile;

a)

Due sistemi collegati in parallelo sono nella forma:



$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \emptyset \\ \emptyset & A_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

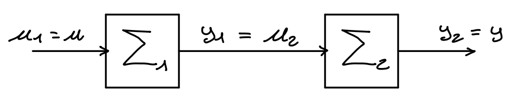
E la funzione di trasferimento è data dalla somma dei singoli elementi:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)} + \frac{n_2(s)}{d_2(s)} = \frac{n_1(s)\cdot d_2(s) + n_2(s)\cdot d_1(s)}{d_1(s)\cdot d_2(s)}$$

$\Sigma_{PARALLELO}$ completamente osservabile e raggiungibile $\iff$ Σ_1 NON ha poli in comune con Σ_2

b)

Se invece i sistemi sono in serie $\Rightarrow$



il sistema complessivo è dato da:

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)} \cdot \frac{n_2(s)}{d_2(s)}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \emptyset \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2 \cdot D_1 \cdot u \end{cases}$$

$\sum_{SERIE}$ raggiungibile $\Longleftrightarrow$ $\sum_1$ NON ha zeri coincidenti con i poli di $\sum_2$

$\sum_{SERIE}$ Osservabile $\Longleftrightarrow$ $\sum_1$ NON ha poli coincidenti con gli zeri di $\sum_2$

3. Dato il sistema SISO tempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

chiuso in retroazione con il controllore $u(t) = K(r(t) - x(t))$, con K matrice di guadagni e $r(t)$ ingresso esogeno di riferimento;

- si enunci, e si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
- si discuta il ruolo del segnale di riferimento $r(t)$ nella risposta precedente.
- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.
- si discuta il ruolo del segnale di riferimento $r(t)$ nella risposta precedente.

a)

• TEOREMA FONDAMENTALE ASSEGNAMENTO POLI:

Dato un sistema (A,B) di ordine n, con n autovalori desiderati (), se e solo se (A,B) è raggiungibile, esiste ed è unica una K tale che $(A+B\cdot K)$ ha gli autovalori uguali a quelli desiderati.

• Condizione necessaria $\longrightarrow$ (A,B) è completamente raggiungibile.

Se (A,B) non è completamente raggiungibile allora posso fare la decomposizione di Kalman e trasformare A, B in forma standard di raggiungibilità:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \tilde{A}_{12} \\ \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

Autovalori

Raggiungibile

non Raggiungibile

Costruisco $u = \tilde{K}\cdot\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 \end{bmatrix}^T$

$$\tilde{A} + \tilde{B}K = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1} & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2 \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$ (non raggiungibile)

Autovalori non sono modificabili $\Rightarrow$ non posso assegnarli a quelli desiderati

• Condizione sufficiente $\longrightarrow$ se (A,B) è raggiungibile $\Rightarrow \exists!\ K : \lambda(A+BK) =$ autovalori desiderati

Se (A,B) è raggiungibile posso ottenerlo in F.C.C.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \emptyset & I \\ \hline -P_0 & -P_1 \cdots\cdots -P_{n-1} \end{array}\right] \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \\ 1 \end{bmatrix}$$

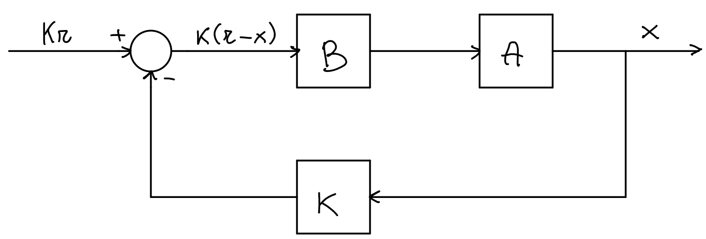
$$\det(\lambda \cdot I - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})) = \lambda^n + (p_{n-1} - k_n)\cdot\lambda^{n-1} + \dots + (p_0 - k_1)$$

$$P_d(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \bar{p}_{n-1}\cdot\lambda^{n-1} + \dots + \bar{p}_0$$

Facendo corrispondere i coefficienti ottengo:

$$\left.\begin{cases} \underbrace{p_{n-1}}_{} - \overbrace{k_n}^{n \text{ incognite}} = \bar{p}_{n-1} \\ \vdots \\ \underbrace{p_0}_{n \text{ parametri}} - k_1 = \bar{p}_0 \end{cases}\right\} n \text{ equazioni} \Rightarrow n \text{ equazioni in } n \text{ incognite}$$

b) Il segnale $r(t)$ diventa l'ingresso del nuovo sistema:



$$r = K^{-1}\cdot u'$$

$$x = (A + B\cdot K)x + B\cdot u'$$

c) Affinché il sistema retroazionato sia stabilizzabile a ciclo chiuso, gli autovalori instabili di A (se ci sono) devono appartenere al sottospazio raggiungibile.
Solo in questo modo, infatti, possono essere modificati mediante retroazione.

d)

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

si determini :

- per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller;
- si scelga un valore β tra questi, e si calcoli, in funzione di α la matrice di retroazione dello stato K tale che il sistema a ciclo chiuso sia di tipo dead-beat.

a)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 2\beta & 5\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R) = 2$$

Il sistema non è mai completamente raggiungibile $(\forall \alpha, \beta)$. Però ponendo $\alpha = \emptyset$ e $\beta \neq \emptyset$ il sistema ha come autovalori non raggiungibili proprio $\lambda = \emptyset$, quindi posso costruire il dead-beat controller.

b)

Scelgo $\beta = 1$ e impongo $\alpha = \emptyset$

$$P_d(\lambda) = \lambda^3$$

$$(A + B \cdot K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1+K_1 & 2+K_2 & 2+K_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\lambda \\ 1+K_1 & 2+K_2 & 2+K_3-\lambda & 1+K_1 & 2+K_2 \end{array}\right] = \lambda^2(2+K_3-\lambda) + \lambda(1+K_1) =$$

$$= 2\lambda^2 + K_3\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + K_1\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(2+K_3) + \lambda(1+K_1)$$

$$\begin{cases} 1+K_1 = \emptyset \\ 2+K_3 = \emptyset \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Si consideri la classe dei sistemi lineari tempo invarianti in tempo continuo;

- Si definisca il Gramiano di Raggiungibilità $\mathcal{G}_R$.
- Si dimostri il ruolo di $\mathcal{G}_R$ nel calcolo dell'azione di controllo $u(t)$ ad energia minima necessaria per portare lo stato del sistema, a partire dall'orgine, fino ad x_f in un tempo finito t_f.

a)

$$G_R(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T(t_1-\tau)} \, d\tau$$

b)

Sappiamo che il controllo a minima energia per andare da 0 a x_f in $[t_0, t_f]$ è:

$$u(t) = B^T \cdot e^{A^T(t_f-t)} \cdot G_R^T(t_0,t_f)x_f = B^T \cdot e^{A^T(t_f-t)} \cdot \eta$$

· Calcoliamo il costo minimo:

$$\|u(t)\|_2^2 = \int_{t_0}^{t_1} u^T(\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \eta^t \, e^{A(t_1-\tau)} \cdot B \cdot B^T e^{A^T(t_1-t)} \cdot \eta \, d\tau =$$

$$= \eta^t \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \cdot B \cdot B^T e^{A^T(t_1-t)} \cdot d\tau \cdot \eta = (x'')^T \cdot \left(G_R^T(t_0,t_1)\right)^T \cdot G_R(\cancel{t_0,}t_1) \cdot G_R^T(\cancel{t_0,}t_1) \cdot x'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|_2^2 = (x'')^T \cdot \left(G_R^T(t_0,t_1)\right)^T \cdot x'' \implies$$

Quindi l'energia necessaria a $u(\tau)$ dipende dallo stato finale (x'') e dal Gramiano di raggiungibilità.

$$G_R = V^T \Sigma V \implies \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_m = \sqrt[2]{\lambda_m}$$

Matrice ortogonale

$$G_R^T \equiv G_R^{-1} = (V^T)^{-1} \cdot \Sigma^{-1} \cdot V^{-1} = V \cdot \Sigma^{-1} \cdot V^T$$

- Posso quindi riscrivere il costo relativo a $u(t)$ come:

$$\|u(t)\|_2^2 = (x'')^T \cdot G_R^T(t_0,t_1) \cdot x'' = (x'')^T \cdot V \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot V^T \cdot x'' =$$

$$= (\tilde{x}'')^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \tilde{x}'' \quad \Rightarrow \quad \text{se} \quad \tilde{x}'' = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_m \end{bmatrix}$$

$\tilde{x}'' = V^T \cdot x''$

$$\|u(t)\|_2^2 = \frac{\tilde{x}_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\sigma_2^2} + \dots\dots + \frac{\tilde{x}_m^2}{\sigma_m^2} \Rightarrow \text{questa è l'equazione di un Ellissoide in } \mathbb{R}^n$$

3. Dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- si determinino i valori di α e β corrispondenti a tutti i punti $x_f = [\alpha \ \ \beta]^T$ dello spazio di stato che sono raggiungibili dallo stato iniziale $x_0 = [0 \ \ 1]^T$ in un certo tempo t_f finito.
- si scelga uno di tali punti e si calcoli l'ingresso $u(t)$ necessario a portare x_0 a x_f in un tempo $t_f = 2$.

a)

$$x_f = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left(x_f - e^{At_f} \cdot x_0\right) \in \operatorname{Im}(R)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_f \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - t_f \\ \beta - 1 \end{bmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \text{ e } \beta = 1$$

b)

Scegliamo $x_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad t_f = 2 \qquad t_0 = 0$

$$x_f - e^{At_f} x_0 = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \int_0^2 \begin{bmatrix} 1 & t_f - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \int_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau \implies \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \int_0^2 u(\tau)\, d\tau$$

$$u(\tau) = K \implies -1 = 2K(\tau)_0^2 \implies -1 = 2K(2-0) =$$

$$-1 = 4K \implies K = -\frac{1}{4}$$

- Sostituisco e ottengo $u(\tau) \implies u(\tau) = -\frac{1}{4}$

4. Si consideri il sistema SISO tempo discreto e tempo invariante:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

- si dimostri che, condizione necessaria e sufficiente affinchè, tramite una retroazione dello stato del tipo $u_k = Kx_k$ si possano assegnare tutti poli a ciclo chiuso del sistema è che la coppia (F, G) sia completamente raggiungibile.
- si discuta se l'enunciato di cui sopra rimane valido sostituendo la parola "raggiungibile" con "controllabile".

a)

• TEOREMA FONDAMENTALE ASSEGNAMENTO POLI:

Dato un sistema (A, B) di ordine n, con n autovalori desiderati ( ), se e solo se (A, B) è raggiungibile, esiste ed è unica una K tale che (A+B·K) ha gli autovalori uguali a quelli desiderati.

· Condizione necessaria → (A, B) è completamente raggiungibile.

Se (A, B) non è completamente raggiungibile allora posso fare la decomposizione di Kalman e trasformare A, B in forma standard di Raggiungibilità:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \tilde{A}_{12} \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right] \xrightarrow{} \text{Autovalori} \qquad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \hline \emptyset \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Raggiungibile} \\ \text{non Raggiungibile} \end{array}$$

Costruisco $u = \tilde{K} \cdot \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 \end{bmatrix}^T$

$$\tilde{A} + \tilde{B}K = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1} & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2 \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right] \xrightarrow{} \text{Autovalori}$$

⇒ Gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$ (non raggiungibile) non sono modificabili ⇒ non posso assegnarli a quelli desiderati

· Condizione sufficiente → se (A, B) è raggiungibile ⇒ ∃! K : λ(A+BK) = autovalori desiderati

Se (A, B) è raggiungibile posso ottenerlo in F.C.C.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \emptyset & I \\ \hline -p_0 & -p_1 \cdots\cdots -p_{n-1} \end{array}\right] \qquad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$$\det(\lambda \cdot I - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})) = \lambda^n + (P_{n-1} - K_n)\cdot \lambda^{n-1} + \ldots\ldots + (P_0 - K_1)$$

$$P_d(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \bar{P}_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots\ldots + \bar{P}_0$$

Facendo corrispondere i coefficienti ottengo:

n incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{n-1} - K_n = \bar{P}_{n-1} \\ \\ P_0 - K_1 = \bar{P}_0 \end{array} \right\} n \text{ equazioni} \Rightarrow n \text{ equazioni in } n \text{ incognite}$$

n parametri

b)

La completa raggiungibilità implica la completa controllabilità, ma a T.D. non vale il contrario.
Affinché questo sia garantito $Im(A^k) \subseteq Im(R_r)$, cosa che non è sempre vera.
Se fossimo stati a T.C. non sarebbe cambiato nulla.

3. Si consideri il sistema SISO tempo continuo non lineare:

DA VERIFICARE

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha \sin x_1 - \alpha\beta u \cos x_1 \\ y &= x_1 \end{cases}$$

con le costanti $\alpha, \beta > 0$, y l'uscita ed u l'ingresso.

(a) Si determini il punto di equilibrio del sistema più vicino all'origine.

(b) Si linearizzi la dinamica del sistema attorno a tale punto di equilibrio e si studino le proprietà strutturali del sistema lineare risultante: osservabilità, controllabilità e stabilità al variare di α e β.

(c) Determinare:

- uno stimatore asintotico dello stato con dinamica dell'errore di stima $e^{-\lambda t}$, con $\lambda > 0$ costante non specificata,
- ed un controllore che retroazionando lo stato stimato renda il sistema asintoticamente stabile con poli $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$.

a)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \alpha \sin x_1 - \alpha\beta u \cos x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha \sin x_1 = \alpha\beta u \cos x_1 \Rightarrow \frac{\cancel{\alpha}\sin x_1}{\cancel{\alpha}\cos x_1} = \cancel{\alpha}\beta u \cdot \frac{\cos x_1}{\cancel{\alpha}\cos x_1} \Rightarrow tg(x_1) = \beta \cdot u$$

$$x_1 = tg^{-1}(\beta \cdot u) \Rightarrow \text{se } \beta \cdot u = 0, \pi, 2\pi, \ldots, k\pi \quad x_1 = 0$$

L'unico punto di equilibrio è $P(0,0)$.

b)

$$A_{lin}|_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha\cos x_1 & \alpha\beta u \sin x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha\beta\cos x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha\beta \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(R) = -\alpha\beta \Rightarrow \text{se } -\alpha\beta \neq 0 \quad rank(R) = 2$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(O) = 1 \Rightarrow rank(O) = 2$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha\beta \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(O) = 1 \Rightarrow \text{rank}(O) = 2$$

Sistema completamente osservabile, è possibile costruire lo stimatore.

3. Sia dato il sistema tempo discreto :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = Cx_k$$

- si dica se e per quali valori di α e' possibile costruire uno stimatore tale che l'errore di stima sia nullo dopo un numero finito di passi;
- si scelga un valore di α adeguato e si progetti tale stimatore se esiste;
- si dica se e per quali valori di α e' possibile costruire un controllore che, retroazionando lo stato stimato, annulli l'evoluzione libera dello stato in un numero finito di passi;
- si scelga un valore di α adeguato e si progetti tale controllore se esiste.

a)

$$O = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha+1 & 0 \\ \alpha+1 & 2\alpha+1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 2$$

Poichè l'autovalore che non rientra nello spazio di O è $\lambda = \varnothing$, posso comunque costruire lo stimatore.

Con $\alpha \neq \varnothing$ posso costruire lo stimatore.

b)

$\alpha = 1$

$$(A+HC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2+1 & 0 \\ H_2+1 & H_2+1 & 0 \\ H_3 & H_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+HC-\lambda I) = \begin{vmatrix} H_1-\lambda & H_2+1 & 0 \\ H_2+1 & H_2+1-\lambda & 0 \\ H_3 & H_3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + H_1\lambda^2 + H_2\lambda^2 + \lambda^2 + H_2\lambda + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(H_1+H_2+1) + \lambda(H_2+1)$$

$P_d(\lambda) = \lambda^3$

$$\begin{cases} H_1 + H_2 + 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ H_2 + 1 = 0 \Rightarrow H_2 = -1 \end{cases}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2$$

Poiché l'autovalore che non rientra nello spazio di R è $\lambda = \emptyset$, posso comunque costruire il controllore

Con $\alpha \neq \emptyset$ posso costruire il controllore

d) $\alpha = 1$

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_1+1 & K_2+1 & K_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

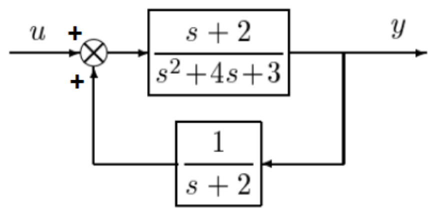
$$\det(A+BK-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ K_1+1 & K_2+1-\lambda & K_3 & K_1+1 & K_2+2-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \end{array}\right] = -\lambda^3 + K_2\lambda^2 + \lambda^2 + K_1\lambda + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(K_2+1) + \lambda(K_1+1)$$

$$P_d(\lambda) = \lambda^3$$

$$\begin{cases} K_1 + 1 = 0 \\ K_2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Sia dato il sistema in figura:



- si determini una realizzazione in variabili di stato dell'intero sistema ottenuto dalla chiusura dell'anello
- si determini se il sistema ottenuto e' raggiungibile e/o osservabile
- si discuta stabilità interna e BIBO del sistema

a)

$$Y = G_1(s)\cdot z = G_1(s)\,(u+v) = G_1(s)\cdot(u + G_2(s)\cdot Y)$$

$$Y = G_1(s)\cdot u + G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot Y \implies Y - G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot Y = G_1(s)\cdot u$$

$$Y(1 - G_1(s)\cdot G_2(s)) = G_1(s)\cdot u \implies \frac{Y}{u} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)\cdot G_2(s)}$$

$$G_{tot}(s) = \frac{\frac{s+2}{s^2+4s+3}}{1 - \frac{\cancel{s+2}}{s^2+4s+3}\cdot\frac{1}{\cancel{s+2}}} = \frac{\frac{s+2}{s^2+4s+3}}{\frac{s^2+4s+2}{s^2+4s+3}} = \frac{s+2}{\cancel{s^2+4s+3}}\cdot\frac{\cancel{s^2+4s+3}}{s^2+4s+2} =$$

$$= \frac{s+2}{s^2+4s+2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Essendo in F.C.C. il sistema è completamente raggiungibile.

$$O = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \Rightarrow \text{sistema completamente osservabile}$$

c)

- BIBO stabilità:

Vedere se i poli di $G(s)$ sono a parte reale negativa.

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+2} \Rightarrow s^2+4s+2 = \emptyset \qquad \frac{\Delta}{4} = 4-2 = 2$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \lambda_1 = -2-\sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = -2+\sqrt{2}$$

Avendo entrambi i poli con parte reale minore di zero il sistema è BIBO stabile.

Sistema internamente stabile. Autovalori $< \emptyset$.

4. Dato il sistema :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

- Se possibile determinare la piu' breve (di minor durata temporale) sequenza di ingresso che porta il sistema dallo stato iniziale $x_0 = [2, 0, 1]^T$ allo stato finale $x_f = [4, 0, 0]^T$.
- Calcolare l'insieme di tutti gli stati iniziali x_0 che sono compatibili con la sequenza di uscita libera: $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$.

a)

La formulazione del problema è la seguente. Siamo a T.D. quindi l'evoluzione dello stato è :

$$x_f = A^K \cdot x_0 + \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-i-1} \cdot B u(i)$$

• K = 1 :

$$x_f = A x_0 + B u(0)$$

$$x_f - A x_0 = B \cdot u(0) \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0)$$

Il problema non è risolvibile per K = 1

• K = 2 :

$$x_f = A^2 x_0 + AB u(0) + B \cdot u(1)$$

$$x_f - A^2 x_0 = AB u(0) + B \cdot u(1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(1)$$

Il problema è risolvibile per $k = 2$ ponendo $u(0) = 1$ e $u(1) = 4$

b)

$$y(k) = C \cdot A^k x(0)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$$\begin{cases} 2 = x_2 \\ \frac{\cancel{2}}{2} = -\frac{2x_1}{2} + \frac{\cancel{2}x_2}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}x_3}{\cancel{2}} \Rightarrow 1 = -x_1 + 2 + x_3 \Rightarrow x_1 = x_3 + 1 \\ 4 = -4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_3 + 1 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad x_3 = 2$$

3. Sia dato il sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_k$$

si determini :

- se il sistema e' raggiungibile e/o controllabile;
- se esiste, una sequenza di ingresso che porti lo stato da $x(0) = [1, 0, 0]^T$ a $x(2) = [2, 0, 2]^T$
- se esiste, una sequenza di ingresso che porti lo stato da $x(0) = [1, 0, 0]^T$ a $x(3) = [2, 0, 2]^T$; si commenti il risultato di quest'ultimo caso.

a)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 1 & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & -1 & \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$$R^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \qquad Im(R) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Per la controllabilità $\Rightarrow$ $Im(A^k) \subseteq Im(R_k)$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\underline{k=1}$:

$$Im(A^1) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > \qquad Im(R_1) = < \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$Im(A^1) \not\subseteq Im(R_1)$$

- $\underline{k=2}$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{2*} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Im(A^2) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > \qquad Im(R_2) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >

$Im(A^2) \subseteq Im(R_2)$

Il sistema è controllabile per $K=2$ e $K=3$

b)

$$X_K = A^K X(0) + \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-1-i} \cdot B u(i)$$

$\underline{K=2}$ $\Rightarrow$ $X(2) = A^2 \cdot X(0) + \left(A \cdot B \cdot u(0) + B \cdot u(1)\right)$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot u(0) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot u(1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_1(0) - u_2(0) \\ -u_1(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_2(1) \\ u_1(1) + u_2(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 + u_1(0) - u_2(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{u_1(0) = u_2(1) - 1} \\ 5 + u_1(0) - u_2(0) + u_1(1) + u_2(1) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad 5 + u_2(1) - 1 - u_2(0) + u_1(1) + u_2(1) = \emptyset \\ 1 - u_1(0) + u_2(1) = 2 \end{cases}$$

$$4 + 2u_2(1) - u_2(0) + u_1(1) = \emptyset$$

$$\underline{u_2(0) = 4 + 2u_2(1) + u_1(1)}$$

$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(1) - 1 \\ 4 + 2u_2(1) + u_1(1) \end{pmatrix} \Rightarrow \forall\, u_1(1) \text{ e } u_2(1)$$

$$x_k = A^k x(0) + \sum_{i=\emptyset}^{k-1} A^{k-1-i} \cdot B u(i)$$

$$\underline{k=3} \Rightarrow \quad x(3) = A^3 \cdot x(0) + \left(A^2 \cdot B u(0) + A \cdot B \cdot u(1) + B \cdot u(2) \right) =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ \emptyset \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix} +$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(2) \\ u_2(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ \emptyset \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2u_1(0) \\ 2u_1(0) \\ -2u_1(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_1(1) - u_2(1) \\ -u_1(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_2(2) \\ u_1(2) + u_2(2) \\ u_2(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 8 + 2u_1(0) + u_1(1) - u_2(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad u_1(1) = u_2(2) - 2u_1(0) - 6 \\ 12 + 2u_1(0) + u_1(1) - u_2(1) + u_1(2) + u_2(2) = 0 \\ -2u_1(0) - u_1(1) + u_2(2) = 2 \end{cases}$$

$$-\cancel{2u_1(0)} - u_2(2) + \cancel{2u_1(0)} - 6 = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{u_2(2)} = -8$$

1. $u_1(1) = u_2(2) - 2u_1(0) - 6 \quad \Rightarrow \quad \underline{u_1(1)} = -8 - 2u_1(0) - 6 = -14 - 2u_1(0)$

2. $12 + 2u_1(0) + u_1(1) - u_2(1) + u_1(2) + u_2(2) = 0$

$$12 + \cancel{2u_1(0)} - 14 - \cancel{2u_1(0)} - u_2(1) + u_1(2) - 8 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \underline{u_1(2)} = u_2(1) + 10$$

$$\begin{cases} \cdot\ u_1(1) = -14 - 2u_1(0) \\ \cdot\ u_1(2) = u_2(1) + 10 \\ \cdot\ u_2(2) = -8 \\ \cdot\ u_2(0) = \text{qualsiasi} \end{cases}$$

3. Sia dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 - 3 & 0 \\ 1 & -2 & \alpha^2 + 3\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

si determini :

- i valori di α per i quali esiste un osservatore asintotico dello stato;
- i valori di α per i quali il sistema è stabilizzabile tramite retroazione dinamica dell'uscita;
- i valori del parametro α per i quali e' possibile strabilizzare il sistema tramite retroazione dinamica dell'uscita ponendo tutti gli autovalori in -2
- scelto un valore per α che soddisfi le condizioni trovate al punto precedente, trovare le espressioni di stimatore e controllore relativi al punto precedente.

a)

L'osservatore asintotico dello stato esiste se il sistema (A,C) è rilevabile, il che significa che (A,C) deve essere completamente osservabile o al più che gli autovalori instabili di A siano interni allo spazio di osservabilità.

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha^2-2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 2 \quad \text{sistema non completamente osservabile}$$

Quindi l'osservatore esiste se e solo se $\lambda = \alpha^2 + 3\alpha$ è stabile. Quindi:

$$\alpha^2 + 3\alpha < 0 \Rightarrow \alpha(\alpha+3) < 0 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha < \cancel{0} \\ \alpha < -3 \end{matrix}$$

Quindi $\forall\ \alpha < -3$ esiste un osservatore asintotico dello stato.

b)

La retroazione dell'uscita è $u = Ky$, quindi il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = Ky \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x} = (A+BKC)x + Bv(t) \\ y = Cx \end{matrix}$$

Il sistema è stabilizzabile se (A,B) è completame raggiungibile o, se gli autovalori instabili di A sono contenuti nello spazio di raggiungibilità.

$$R = \begin{bmatrix} \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & (\alpha-1)(\alpha^2+3\alpha) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \quad \text{sistema non completamente raggiungibile}$$

• Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha^2 - 3$, $\lambda_3 = \alpha^2 + 3\alpha$.

l'autovalore che non appartiene allo spazio di R è $\lambda = \alpha^2 - 3$.

Quindi se $\alpha^2 - 3 < 0 \Rightarrow \alpha^2 < 3$ il sistema è stabilizzabile

c)

Per avere tutti gli autovalori in -2 l'autovalore che non fa parte dello spazio di R deve essere:

$$\alpha^2 - 3 = -2 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

Essendo il terzo autovalore non osservabile scelgo $\alpha = -1$ in modo da renderli stabili entrambi.

d)

Scelto $\alpha = -1$ avrò:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• CONTROLLORE:

$$(A+BKC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot K \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2K & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BKC-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1-2K-\lambda & 1 & 0 & 1-2K-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 & -2-\lambda \\ 1 & -2 & -2-\lambda & 1 & -2 \end{array}\right] = -\lambda^3 + \lambda^2(-3-2K) + \lambda(-8K) - 8K + 4$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

$$2K+3 = 6 \Rightarrow K = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **STIMATORE:**

$$(A - HC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_1+1 & 1 & 0 \\ -H_2 & -2 & 0 \\ -H_3+1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-HC-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} H_1+1-\lambda & 1 & 0 & H_1+1 & 1 \\ H_2 & -2-\lambda & 0 & H_2 & -2 \\ H_3+1 & -2 & -2-\lambda & H_3+1 & -2 \end{array}\right] = -\lambda^3 + \lambda^2(-H_1-3) + \lambda(-4H_1 - H_2) - 4H_1 - 2H_2 + 4$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

$$\begin{cases} +4H_1 + 4H_2 - 4 = 8 \\ +4H_1 + H_2 = 12 \Rightarrow 12 + H_2 = 12 \Rightarrow H_2 = 0 \\ -3 + H_1 = 6 \Rightarrow H_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Sia dato il sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix} u_k$$

$$y = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix} x$$

con le tre costanti α, β e γ incognite. Si determinino :

- le condizioni necessarie sulle costanti α, β e γ affinchè il sistema (A, B) sia completamente raggiungibile;
- le condizioni necessarie sulle costanti α, β e γ affinchè il sistema (A, B) sia completamente controllabile in 1, 2 o 3 passi;
- scelti tre valori opportuni per le tre costanti incognite, si determini una retroazione algebrica dello stato $u_k = Kx_k$ in modo che il sistema retroazionato $A + BK$ sia di tipo "dead-beat".

a)

$$R = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha+\beta & \alpha+3\beta+\gamma\\ \beta & \beta+\gamma & \beta+2\gamma\\ \gamma & \gamma & \gamma\end{bmatrix} \Rightarrow \text{è completamente raggiungibile se :}$$

$$\det(R) = \left[\begin{array}{ccc|cc}\alpha & \alpha+\beta & \alpha+3\beta+\gamma & \alpha & \alpha+\beta\\ \beta & \beta+\gamma & \beta+2\gamma & \beta & \beta+\gamma\\ \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma\end{array}\right] = \left(\alpha\cdot\gamma(\beta+\gamma) + (\alpha+\beta)(\beta+2\gamma)\gamma + (\alpha+3\beta+\gamma)\cdot\beta\cdot\gamma\right) +$$

$$-\left(\gamma(\beta+\gamma)(\alpha+3\beta+\gamma) + \alpha\gamma(\beta+2\gamma) + \gamma\beta(\alpha+\beta)\right) =$$

$$-\left(\gamma(\beta+\gamma)(\alpha+3\beta+\gamma) + \alpha\gamma(\beta+2\gamma) + \gamma\beta(\alpha+\beta)\right) =$$

$$= \alpha\gamma^2 + \alpha\gamma\beta + \alpha\beta\gamma + 2\alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + 2\gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma + 3\beta^2\gamma + \beta\gamma^2 - \left(\gamma\left(\beta\alpha + 3\beta^2 + \beta\gamma + \alpha\gamma + 3\beta\gamma + \gamma^2\right) + \right.$$

$$\left. + \alpha\gamma\beta + 2\alpha\gamma^2 + \alpha\gamma\beta + \gamma\beta^2\right)$$

$$= \cancel{\alpha\gamma^2} + \cancel{\alpha\gamma\beta} + \cancel{\alpha\beta\gamma} + \cancel{2\alpha\gamma^2} + \cancel{\beta^2\gamma} + 2\gamma^2\beta + \cancel{\alpha\beta\gamma} + \cancel{3\beta^2\gamma} + \cancel{\beta\gamma^2} - \cancel{\gamma\beta\alpha} - \cancel{3\beta^2\gamma} - \cancel{\beta\gamma^2} - \cancel{\alpha\gamma^2} - 3\beta\gamma^2 - \gamma^3 +$$

$$- \cancel{\alpha\gamma\beta} - \cancel{2\alpha\gamma^2} - \cancel{\alpha\gamma\beta} - \cancel{\gamma\beta^2} =$$

$$= -\gamma^3 - \beta\gamma^2 \neq 0 \Rightarrow \gamma^2(1+\beta) \neq 0$$

$$\gamma \neq 0 \quad e \quad \beta \neq -1 \quad e \quad \forall \alpha$$

b)

- $\underline{K = 1}$:

$$Im(A) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad Im(R_1) = \left\langle \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$I(A) \not\subseteq Im(R_1)$$

• $K=2$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Im(A^2) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$Im(R_2) = < \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \beta+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} > \quad \Rightarrow \quad Im(A^2) \not\subseteq Im(R_2)$$

• $K=3$:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Im(A^3) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Per $\begin{cases} \gamma^2(1+\beta) \neq 0 \\ \gamma \neq 0 \text{ e } \beta \neq -1 \text{ e } \forall \alpha \end{cases} \Rightarrow Im(A^3) \subseteq Im(R_3)$

• Sistema controllabile in 3 passi.

C)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha = \beta = \emptyset \quad \text{e} \quad \gamma = 1$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(R) = 3$$

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ K_1 & K_2 & K_3+1 \end{bmatrix}$$

$$det(A+BK-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & -\lambda \\ K_1 & K_2 & K_3+1-\lambda & K_1 & K_2 \end{array}\right] = -\lambda^3 + \lambda^2(3+K_3) + \lambda(-3+K_2-2K_3) + K_1 - K_2 + K_3 + 1$$

$$P_d(\lambda) = \lambda^3$$

$$\begin{cases} K_1 - K_2 + K_3 + 1 = 0 & K_1 = -\cancel{3} + \cancel{3} + 1 = 1 \\ -3 + K_2 - 2K_3 = 0 \Rightarrow K_2 = 3 - 6 = -3 \\ 3 + K_3 = 0 \Rightarrow K_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Si consideri il sistema LTI SISO:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ed una legge di controllo del tipo $u = Kx$, con K matrice costante di dimensioni appropriate.

Si dimostrino, in maniera formale, le seguenti affermazioni:

- se la coppia (A, B) è controllabile, e' possibile assegnare tutti i poli del sistema a ciclo chiuso;
- non e' possibile modificare i modi non controllabili del sistema;
- in nessun caso e' possibile modificare gli zeri del sistema;
- non è possibile cambiare il grado relativo del sistema;

• TEOREMA FONDAMENTALE ASSEGNAMENTO POLI:

Dato un sistema (A, B) di ordine n, con n autovalori desiderati $()$, se e solo se (A, B) è raggiungibile, esiste ed è unica una K tale che $(A + B \cdot K)$ ha gli autovalori uguali a quelli desiderati.

• Condizione necessaria → (A, B) è completamente raggiungibile.

Se (A, B) non è completamente raggiungibile allora posso fare la decomposizione di Kalman e trasformare A, B in forma standard di raggiungibilità:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \tilde{A}_{12} \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right] \rightarrow \text{Autovalori} \qquad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \hline \emptyset \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Raggiungibile} \\ \text{non Raggiungibile} \end{array}$$

Costruisco $u = \tilde{K} \cdot \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 \end{bmatrix}^T$

$$\tilde{A} + \tilde{B}K = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1} & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2 \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right] \rightarrow \text{Autovalori}$$

⇒ Gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$ (non raggiungibile) non sono modificabili ⇒ non posso assegnarli a quelli desiderati

• Condizione sufficiente → se (A, B) è raggiungibile ⇒ $\exists!$ K : $\lambda(A+BK)$ = autovalori desiderati

Se (A, B) è raggiungibile posso ottenerlo in F.C.C.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \emptyset & I \\ \hline -P_0 & -P_1 \cdots\cdots -P_{n-1} \end{array}\right] \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})) = \lambda^n + (p_{n-1} - k_n)\cdot\lambda^{n-1} + \dots + (p_0 - k_1)$$

$$P_d(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \bar{p}_{n-1}\cdot\lambda^{n-1} + \dots + \bar{p}_0$$

Facendo corrispondere i coefficienti ottengo:

n incognite

$$\begin{cases} p_{n-1} - k_n = \bar{p}_{n-1} \\ \vdots \\ p_0 - k_1 = \bar{p}_0 \end{cases}$$

n equazioni ⇒ n equazioni in n incognite

n parametri

• Se faccio la retroazione dello stato in un sistema in F.C.C. succede:

$$\bar{A} + \bar{B}K \Rightarrow \quad \bar{B}K = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{A} + \bar{B}K = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & I & \\ (-a_0 + k_1) & (-a_1 + k_2) & \cdots & (-a_{n-1} + k_n) \end{bmatrix}$$

⇒ Scegliendo $k_1 \dots k_n$ è possibile cambiare a piacere i coefficienti del P.C. di $(\bar{A} + \bar{B}K)$

Quindi la f.d.t. a ciclo chiuso diventa:

$$G(s) = \frac{b_{n-1}\cdot s^{n-1} + b_{n-2}\cdot s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + (a_{n-1} - k_n)s^{n-1} + (a_{n-2} - k_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_0 - k_1)}$$

⇒ Quindi gli zeri non possono essere modificati.

3. Dato il sistema **tempo discreto** descritto dalle matrici A, B, C,

- si descriva il problema della stima asintotica dello stato,
- si ricavino le equazioni di Luenberger fino ad ottenere la forma ricorsiva dello stimatore asintotico dello stato,
- sia diano le condizioni e le si dimostrino sotto le quali la dinamica dell'errore di stima converge a zero,
- si specifichino le condizioni per le quali l'errore di stima e_k converge al 5% del valore iniziale e_0 in N passi (con N generico).

a)

Consideriamo il seguente sistema T.D. :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A\cdot x_k + B\cdot u_k \\ y_k = C\cdot x_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F\cdot \hat{x}_k + G\cdot u_k + H\cdot y_k \\ \hat{y}_k = C\cdot \hat{x}_k \end{cases} \Rightarrow \text{sistema dinamico con il solo scopo che } \hat{x} \to x$$

Messi assieme formano un unico sistema dinamico. Quindi quando voglio costruirmi un controllore $u = K\cdot x$, al posto di x metterò $\hat{x}$ in modo da avere $u = K\cdot\hat{x}$.
Nel fare ciò voglio che $\hat{x}$ converga il più velocemente possibile a x.

b)

- Come faccio a verificare che $\hat{x} \to x$? E come scelgo F, G e H ?

Costruiamo una variabile chiamata errore di stima (ε_k) e mi vado a scrivere la dinamica dell'errore :

$$\begin{cases} \varepsilon_k = \hat{x}_k - x_k \\ \varepsilon_{k+1} = \hat{x}_{k+1} - x_{k+1} = F\cdot\hat{x}_k + G\cdot u_k + H\cdot y_k - (A\cdot x_k + B\cdot u_k) \end{cases}$$

Mi riscrivo tutto nella variabile ε:

$$\begin{cases} \hat{x}_k = \varepsilon_k + x_k \\ y_k = C\cdot x_k \end{cases}$$

$$\varepsilon_{k+1} = F\cdot\varepsilon_k + F\cdot x_k + G\cdot u_k + H\cdot C\cdot x_k - A\cdot x_k - B\cdot u_k =$$

$$= F\cdot\varepsilon_k + (F - A + A\cdot C)\cdot x_k + (G-B)\cdot u_k$$

• Se voglio che $\hat{x} \to x$ (equivale a dire che $\varepsilon \to \emptyset$), devo progettare F con tutti gli autovalori a parte $Re < \emptyset$ in modo che il sistema dinamico sia A.S.. Così facendo qualunque sia l'ε iniziale, esso mi andrà a zero.

Per ottenere l'indipendenza di ε da x e u devo scrivere che:

$$\begin{cases} F + H \cdot C - A = \emptyset \\ G - B = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = A - H \cdot C \\ G = B \end{cases}$$

Imposto questo avremo $\Rightarrow \varepsilon_{k+1} = F \cdot \varepsilon_k$

Affinché $\varepsilon_k \to \emptyset$ devo avere $F = A - HC$ asintoticamente stabile.

Posso assegnare tutti gli autovalori di $A - HC$ se (A^T, C^T) è raggiungibile.

c)

Se (A, C) non è osservabile $\Rightarrow \exists\, T : \tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T$, $\tilde{C} = C \cdot T$ per cui $(\tilde{A}, \tilde{C})$ è in forma standard di osservabilità.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{array}\right] \qquad \tilde{C} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{C}_1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \tilde{F} = \tilde{A} - \tilde{H}\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 \\ \tilde{H}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} - \tilde{H}_1 \tilde{C}_1 & 0 \\ \hline \tilde{A}_{21} - \tilde{H}_2 \tilde{C}_1 & \tilde{A}_{22} \end{array}\right]$$

Se gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$ (parte non osservabile) sono A.S. $\Rightarrow \varepsilon \to \emptyset$

d)

3. Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} u_k \\ y_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x_k \end{cases}$$

si ipotizzi una legge di controllo in reatroazione statica dello stato del tipo:

$$u_k = Kx_k + \alpha r_k$$

- trovare, se possibile, la matrice K che pone gli autovalori a ciclo chiuso in 0.5 e -0.5,
- si determini l'insieme delle condizioni iniziali del sistema retroazionato che producono una risposta libera dello stato senza oscillazioni.
- posto $\alpha = 0$, si determini l'insieme delle condizioni iniziali del sistema retroazionato che producono una uscita y_k senza oscillazioni.
- si assuma $r_k = R$ (r_k costante) e si ricavi il valore α per cui l'uscita y_k del sistema converge a regime ad R.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda + 1/2)(\lambda - 1/2) = \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

$$(A + B \cdot K) = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K_1 & 2K_2 \\ 4K_1 & 4K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}+2K_1 & \frac{1}{2}+2K_2 \\ 2+4K_1 & \frac{1}{2}+4K_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}+2K_1-\lambda & \frac{1}{2}+2K_2 \\ 2+4K_1 & \frac{1}{2}+4K_2-\lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{2}+2K_1-\lambda\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+4K_2-\lambda\right) - \left(\frac{1}{2}+2K_2\right)\cdot(2+4K_1) =$$

$$= \frac{3}{4} + 6K_2 - \frac{3}{2}\lambda + K_1 + \cancel{8K_1K_2} - 2K_1\lambda - \frac{1}{2}\lambda - 4K_2\lambda + \lambda^2 - 1 - 2K_1 - 4K_2 - \cancel{8K_1K_2}$$

$$= \lambda^2 + \lambda\left(-\frac{3}{2} - 2K_1 - \frac{1}{2} - 4K_2\right) + 6K_2 + K_1 - 2K_1 - 4K_2 - \frac{3}{4} =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-4K_2 - 2K_1 - 2) + 2K_2 - K_1 - \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} -4K_2 - 2K_1 - 2 = \emptyset \Rightarrow -2K_2 - K_1 - 1 = \emptyset \Rightarrow K_1 = -1 - 2K_2 \\ 2K_2 - K_1 - \cancel{\frac{1}{4}} = -\cancel{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$K_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$2K_2 + 1 + 2K_2 = \emptyset \qquad K_2 = -\frac{1}{4}$$

$$K = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

b)

La risposta libera dello stato a T.D. è data da:

$$x(k) = A^k \cdot x_0 \Rightarrow x(k) = (A+BK)^k \cdot x_0$$

Affinché questa non abbia oscillazioni, la risposta non deve avere in uscita il modo divergente $(\lambda - \frac{1}{2})$.

$$A+BK = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}+2K_1 & \frac{1}{2}+2K_2 \\ 2+4K_1 & \frac{1}{2}+4K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \emptyset \\ \emptyset & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda \cdot I) = (A+BK - \frac{1}{2} \cdot I) = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\alpha = \emptyset$$

d)

4. Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- determinare l'osservabilità del sistema al variare del parametro α
- scelto un valore di α appropriato, progettare uno stimatore asintotico dello stato tale che la dinamica dell'errore di stima abbia i poli in $(-1, -2, -3)$
- si dica se esiste e nel caso si trovi un valore iniziale non nullo dell'errore di stima ϵ_0 per cui l'errore di stima $\epsilon(t)$ converge a zero non più lentamente di e^{-3t}.

a)

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 3\alpha \\ \alpha & 3\alpha & -3\alpha+9\alpha \end{bmatrix} \qquad \det(O) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 3\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 3\alpha & 6\alpha & \alpha & 3\alpha \end{array}\right] = -\alpha^3 \neq 0$$

$$\alpha \neq 0$$

Per $\alpha \neq 0$ il sistema è completamente osservabile.

b)

Scelgo $\alpha = 1$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sistema completamente osservabile.}$$

$$(A - HC) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-H_1 \\ 1 & 0 & -3-H_2 \\ 0 & 1 & 3-H_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - HC) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 0 & 1-H_1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & -3-H_2 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 3-H_3-\lambda & 0 & 1 \end{array}\right] = -\lambda^3 + \lambda^2(3-K_3) + \lambda(-3-K_2) + 1 - K_1$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$\begin{cases} K_1 - 1 = 6 \\ K_2 + 3 = 11 \\ K_3 - 3 = 6 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

c)

4. Si consideri il sistema dinamico tempo continuo descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

dove α, β, γ NON sono legate al numero di matricola ma sono variabili da determinare!!!

- determinare per quali valori di α, β, γ è possibile vedere nell'uscita libera un modo divergente;
- determinare per quali valori di α, β, γ il sistema è stabilizzabile, ovvero esiste una retroazione statica dello stato stabilizzante;
- determinare per quali valori di α, β, γ il sistema è BIBO stabile;

b)

Per essere il sistema stabilizzante deve essere completamente raggiungibile o al massimo avere gli autovalori instabili all'interno dello spazio raggiungibile.

L'autovalore instabile è $\lambda = 2$ quindi $\beta \neq \emptyset$ il sistema è stabilizzabile.

c)

Un sistema per essere BiBo stabile deve avere tutti i poli della funzione di trasferimento a parte reale negativa.

Gli autovalori del sistema per spuntare nella F.d.T. devono essere sia osservabili che raggiungibili.

L'autovalore che potrebbe dare problemi per la stabilità BiBo è $\lambda = 2$.

$$(A - 2I \mid B) = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right] \Rightarrow$$

con $\beta = \emptyset$ non recupera rango e quindi non è raggiungibile. È quindi è BiBo stabile.

a)

Nell'uscita libera vedo solo gli autovalori osservabili. Quindi devo fare in modo che $\lambda = 2$ sia osservabile.

$$(A - 2I) = \left[\begin{array}{ccc} -4 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \alpha \end{array}\right] \Rightarrow$$

Con $\gamma = \alpha = 1$ e $\forall \beta$ $\lambda = 2$ è osservabile e quindi in uscita libera sarà possibile vedere un modo divergente.

3. Dato il sistema lineare tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} x(t)$$

Si progetti:

- un controllore del tipo $u(t) = -K\hat{x}(t) + v(t)$ tale che la dinamica a ciclo chiuso del sistema abbia autovalori in $(-5 \pm 7j)$ e -7;
- uno stimatore asintotico dello stato, di ordine pieno o ridotto, che stimi $\hat{x}(t)$ con dinamica dell'errore di stima scelta in maniera appropriata (e se ne giustifichi la scelta).

a)

Controllare se il sistema è completamente raggiungibile:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 3$$

• Portare il sistema in F.C.C.:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda-1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = [(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda)] - [-(\lambda+1)] =$$

$$= (\lambda^2-1)(\lambda) + \lambda + 1 = \lambda^3 \cancel{-\lambda} + \cancel{\lambda} + 1 =$$

$$= \lambda^3 + 1$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• Calcolo $A_c + B_c \cdot \tilde{K}$:

$$A_c + B_c \cdot \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 & \tilde{K}_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 & \tilde{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \tilde{K}_1-1 & \tilde{K}_2 & \tilde{K}_3 \end{bmatrix}$$

- Calcolo il polinomio desiderato:

$$P_d(\lambda) = (\lambda+7)(\lambda+5-7j)(\lambda+5+7j) =$$

$$= (\lambda+7)(\lambda^2+5\lambda+\cancel{7j\lambda}+5\lambda+25+\cancel{35j}-\cancel{7j\lambda}-\cancel{35j}+49) = (\lambda+7)(\lambda^2+10\lambda+74) =$$

$$= \lambda^3+10\lambda^2+74\lambda+7\lambda^2+70\lambda+518 =$$

$$= \lambda^3+17\lambda^2+144\lambda+518$$

$$A_{Cd} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -518 & -144 & -17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{K}_1 - 1 = -518 \\ \tilde{K}_2 = -144 \\ \tilde{K}_3 = -17 \end{cases} \Rightarrow \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} -517 & -144 & -17 \end{bmatrix}$$

- Calcolo $K = \tilde{K} \cdot M^{-1}$:

$$M = R \cdot R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$K = \tilde{K} \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} -517 & -144 & -17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80{,}5 & 17 & 250 \end{bmatrix}$$

b)

Costruiamo uno stimatore di ordine 2.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} V \\ \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}\cdot A\cdot T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_{11} & \quad A_{12} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline -14 & 12/5 & 7/10 \\ 28 & -218/35 & -7/5 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} A_{21} & \quad A_{22} \end{array} \end{array} \qquad \tilde{B} = T^{-1}\cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = C\cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La fase progettuale consiste nel trovare una matrice L tale che gli autovalori di $(A_{11} + L A_{21})$ siano quelli desiderati.

$$P_d(\lambda) = (\lambda + 1)$$

$$A_{11} + L A_{21} = -1 + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -14 \\ 28 \end{bmatrix} = -1 - 14 l_1 + 28 l_2$$

$$\det(\lambda \cdot I - (A_{11} - L A_{21})) = \lambda + 1 + 14 l_1 - 28 l_2$$

Questo polinomio deve essere uguale a quello desiderato, quindi:

$$\cancel{\lambda} + \cancel{1} + 14 l_1 - 28 l_2 = \cancel{\lambda} + \cancel{1}$$

$$\cancel{14} l_1 - 2\cancel{8} l_2 = \varnothing \Rightarrow l_1 - 2 l_2 = \varnothing$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \alpha$$

3. Si consideri il sistema lineare tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} u(t)$$

- si dica se il sistema e' stabilizzabile con retroazione dello stato tramite uno solo degli ingressi
- si dica se il sistema è stabilizzabile con entrambi gli ingressi.
- Utilizzando il lemma di Heymann applicato al primo ingresso, si calcoli, se e' possibile, una retroazione dello stato $u(t) = Kx(t)$ che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -1.

a)

$$R_1 = \begin{bmatrix} B_1 & A\cdot B_1 & A^2 B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_1) = 2$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} B_2 & A\cdot B_2 & A^2 B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_2) = 3$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico a ciclo chiuso:

$$A + B\cdot K = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ K_1+1 & K_2+2 & K_3+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot I - (A + B\cdot K)) = \det \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda-2 & 2 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ -1 & \lambda+1 & -1 & -1 & \lambda+1 \\ K_1+1 & K_2+2 & \lambda-K_3-2 & K_1+1 & K_2+2 \end{array}\right] =$$

$$= \left((\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-K_3-2) - 2(K_1+1) - (K_2+2)\right) - \left((\lambda+1)(K_1+1) - (\lambda-2)(K_2+2) - 2(\lambda-K_3-2)\right) =$$

$$= \left((\lambda^2+\lambda-2\lambda-2)(\lambda-K_3-2) - 2K_1 - 2 - K_2 - 2\right) - \left(\lambda K_1 + \lambda + K_1 + 1 - \lambda K_2 - 2\lambda + 2K_2 + 4 - 2\lambda + 2K_3 + 4\right) =$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 K_3 - 2\lambda^2 + \lambda^2 - K_3\lambda - 2\lambda - 2\lambda^2 + 2K_3\lambda + 4\lambda - 2\lambda + 2K_3 + 4 - 2K_1 - 2 - K_2 - 2 - K_1\lambda - \lambda - K_1 - 1 + K_2\lambda + 2\lambda - 2K_2 - 4 + 2\lambda - 2K_3 - 4 =$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(-K_3 - 2 + 1 - 2) + \lambda(-K_3 - 2 + 2K_3 + 4 - 2 - K_1 - 1 + K_2 + 2 + 2) - 9 + \cancel{2K_3} - 2K_1 - K_2 - K_1 - 2K_2 - \cancel{2K_3}$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(-K_3 - 3) + \lambda(K_3 + K_2 - K_1 + 3) - 9 - 3K_2 - 3K_1$$

Voglio i miei poli in : $(\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$

$$\begin{cases} -9-3K_2-3K_1 = 1 \\ K_3+K_2-K_1+3 = 3 \\ -K_3-3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3K_2+3K_1 = -10 \Rightarrow K_1 = \frac{-10-3K_2}{3} \Rightarrow K_1 = \frac{-10-4}{3} = -\frac{14}{3} \\ K_3+K_2-K_1 = \emptyset \Rightarrow -6+K_2 \frac{+10+3K_2}{3} = \emptyset \\ K_3 = -6 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$-18+3K_2+10+3K_2 = \emptyset$$

$$6K_2 = 8 \Rightarrow K_2 = \frac{4}{3}$$

Quindi avrò : $K = \begin{bmatrix} -14/3 & 4/3 & -6 \end{bmatrix}$

b)

$$R_1 = \begin{bmatrix} B_1 & A\cdot B_1 & A^2B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_1) = 2$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} B_2 & A\cdot B_2 & A^2B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_2) = 3$$

- Il sistema non è stabilizzabile con entrambi gli ingressi.

c)

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 & A\cdot B_1 & A^2B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R_1) = 2$$

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 & A\cdot B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 3$$

- Costruiamo S :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Invertiamo Q:

$$\det(Q) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] = -1$$

$a_{11} = \varnothing \quad a_{21} = -1 \quad a_{31} = \varnothing$

$a_{12} = -1 \quad a_{22} = \varnothing \quad a_{32} = \varnothing$

$a_{13} = \varnothing \quad a_{23} = -1 \quad a_{33} = -1$

$$\Rightarrow \quad Q^{-1} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = S \cdot Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Questa sarà la matrice che mi rende il sistema (A, b) controllabile dal solo ingresso b_1.

$$A + B \cdot M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

$$R = \begin{bmatrix} b_1 & \bar{A} b_1 & \bar{A}^2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(R) = 3 \quad \text{completamente raggiungibile}$$

- Costruiamo una nuova retroazione $\bar{A}_c + \bar{B}_c \cdot K_c$:

$$\det(\lambda \cdot I - \bar{A}) = \det \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda-2 & 2 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ -1 & \lambda+1 & -1 & -1 & \lambda+1 \\ 2 & 2 & \lambda-2 & 2 & 2 \end{array}\right] =$$

$$= ((\lambda-2)^2(\lambda+1) - 4 - 2) - (2(\lambda+1) - 2(\lambda-2) - 2(\lambda-2)) =$$

$$= ((\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda+1) - 6) - (\cancel{2\lambda} + 2 - \cancel{2\lambda} + 4 - 2\lambda + 4) =$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda^2 - \cancel{4\lambda} + \cancel{4\lambda} + 4 - 6 - 2 - 8 + 2\lambda =$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 12$$

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_c + \bar{B}_c \cdot K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12+K_1 & K_2-2 & K_3+3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio desiderato è :

$$(\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

$$\begin{cases} 12 + K_1 = -1 \\ K_2 - 2 = -3 \\ K_3 + 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -13 \\ K_2 = -1 \\ K_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow K_c = \begin{bmatrix} -13 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Ora dobbiamo calcolare $K = (R \cdot R_c^{-1})^{-1} \cdot K_c$:

$$R = \begin{bmatrix} b_1 & \bar{A} b_1 & \bar{A}^2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_c = \begin{bmatrix} \bar{B}_c & \bar{A}_c \bar{B}_c & \bar{A}_c^2 \bar{B}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R \cdot R_c^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(R \cdot R_c^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K^T = (R \cdot R_c^{-1})^{-1} \cdot K_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -13 & -1 & -6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 \\ -20 \\ -54 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -7 & -20 & -54 \end{bmatrix}$$

4. Il candidato:

- descriva il problema dell'assegnamento completo della dinamica di un sistema lineare tempo invariante tramite retroazione lineare dello stato
- enunci le condizioni, e le dimostri, per l'esistenza della soluzione
- enunci le condizioni, e le dimostri, per l'unicità della soluzione
- descriva le condizioni, e le dimostri in maniera formale o tramite un esempio, nelle quali il problema può avere più soluzioni
- enunci le condizioni, e le dimostri, per la stabilizzabilità di un sistema lineare tempo invariante

TEOREMA FONDAMENTALE ASSEGNAMENTO POLI:

Dato un sistema (A,B) di ordine n, con n autovalori desiderati $()$, se e solo se (A,B) è raggiungibile, esiste ed è unica una K tale che $(A+B\cdot K)$ ha gli autovalori uguali a quelli desiderati.

• Condizione necessaria $\longrightarrow$ (A,B) è completamente raggiungibile.

Se (A,B) non è completamente raggiungibile allora posso fare la decomposizione di Kalman e trasformare A, B in forma standard di raggiungibilità:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \tilde{A}_{12} \\ \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Autovalori} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \emptyset \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Raggiungibile} \\ \text{non Raggiungibile} \end{matrix}$$

Costruisco $u = \tilde{K}\cdot\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 \end{bmatrix}^T$

$$\tilde{A}+\tilde{B}K = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11}+\tilde{B}_1\tilde{K}_1} & \tilde{A}_{12}+\tilde{B}_1\tilde{K}_2 \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right] \rightarrow \text{Autovalori}$$

$\Rightarrow$ Gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$ (non raggiungibili) non sono modificabili $\Rightarrow$ non posso assegnarli a quelli desiderati

• Condizione sufficiente $\longrightarrow$ se (A,B) è raggiungibile $\Rightarrow \exists!\ K : \lambda(A+BK) =$ autovalori desiderati

Se (A,B) è raggiungibile posso ottenerlo in F.C.C.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \emptyset & I \\ \hline -p_0 & -p_1 \cdots\cdots -p_{n-1} \end{array}\right] \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot I - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})) = \lambda^m + (p_{m-1} - k_m) \cdot \lambda^{m-1} + \dots + (p_0 - k_1)$$

$$p_d(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^m + \bar{p}_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \dots + \bar{p}_0$$

Facendo corrispondere i coefficienti ottengo:

m incognite

$$\underbrace{\begin{cases} p_{m-1} - k_m = \bar{p}_{m-1} \\ p_0 - k_1 = \bar{p}_0 \end{cases}}_{m \text{ parametri}} \Bigg\} m \text{ equazioni} \Rightarrow m \text{ equazioni in } m \text{ incognite}$$

- Nel caso MIMO ad esempio posso muovermi utilizzando il metodo della forza bruta o il lemma di Heymann, e in entrambi i casi ottengo due soluzioni diverse.

Il sistema (A, B) è stabilizzabile se tutti gli autovalori instabili di A sono raggiungibili.

Dimostrazione: come visto nel teorema dell'assegnamento dei poli, la retroazione dello stato può influire solo sul sottosistema raggiungibile. Se gli autovalori che rendono il sistema instabile appartengono al sottosistema raggiungibile, allora esiste una retroazione dello stato (raggiungibile) che assegna al sottosistema raggiungibile gli autovalori desiderati (stabili). Se gli autovalori che rendono il sistema instabile non appartengono al sottosistema raggiungibile, non esiste un ingresso né tantomeno una retroazione dello stato che li possa modificare, per cui il sistema rimane instabile

3. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Determinare, se possibile, anche aiutandosi con la decomposizione di Kalman, una legge di controllo stabilizzante del tipo $u(t) = Kx(t)$ che posizioni il maggior numero possibile di autovalori in -2.
- Determinare, se possibile, un osservatore asintotico dello stato tale che la dinamica dell'errore di stima abbia il maggior numero possibile di autovalori in -2.

a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(R) = 2 \qquad \text{Im}(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(O) = 2 \qquad \text{Ker}(\bar{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} \Rightarrow \det(T) = 1$$

$$\begin{matrix} a_{11} = 0 & a_{21} = -1 & a_{31} = 0 \\ a_{12} = 1 & a_{22} = 0 & a_{32} = 0 \\ a_{13} = 0 & a_{23} = 1 & a_{33} = 1 \end{matrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

•) Gli autovalori di $\tilde{A}$ sono : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$

$\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$ sono raggiungibili quindi posso stabilizzare il sistema :

$P(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$ $\qquad a = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$

$P_d(\lambda) = (\lambda+2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$ $\qquad \alpha = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K} = -\begin{bmatrix} \alpha - a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \cdot U \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -6 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \tilde{K} \cdot \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} = T^{-1} \cdot x \Rightarrow u = K \cdot T^{-1} \cdot x$$

b)

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vedo da c che questa parte di matrice è osservabile

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 \quad \Rightarrow \quad A_{C_{des}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^T = \tilde{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot I - \tilde{A}) = (\lambda - 1)\cdot\lambda - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{cd} + B_{cd}\cdot\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{K}+2 & \tilde{K}_2+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \tilde{K}_1 + 2 = -4 \\ \tilde{K}_2 + 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{K}_1 = -6 \\ \tilde{K}_2 = -5 \end{cases} \qquad \tilde{K} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad R_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_c^{-1} = -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = R \cdot R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3/8 & 1/4 \\ -5/8 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$K = \tilde{K} \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3/8 & 1/4 \\ -5/8 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43/8 & -21/4 & \varnothing \end{bmatrix}$$

3. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

- si realizzi una decomposizione di Kalman e si calcolino le dimensioni dei sottosistemi $RO, R\bar{0}, \bar{R}O, \bar{R}\bar{O}$
- Determinare, se possibile, una legge di controllo stabilizzante del tipo $u(t) = Kx(t)$ che posizioni il maggior numero possibile di autovalori in -1.
- Determinare, se possibile, un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto e di ordine minimo (con dimensione del vettore di "stato" stimato più piccola possibile) tale che la dinamica dell'errore di stima abbia il maggior numero possibile di autovalori in -3.

a)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(R) = 1 \quad \Rightarrow \quad Im(R) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 1 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(O) = 3 \quad \Rightarrow \quad Im(\bar{O}) = \emptyset$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} RO & \overbrace{\quad\quad\quad}^{\bar{R}O} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad T^{-1} \Rightarrow \quad \det(T) = 1$$

$a_{11} = 1$ $\quad a_{21} = 0$ $\quad a_{31} = 0$

$a_{12} = -1$ $\quad a_{22} = 1$ $\quad a_{32} = 0$

$a_{13} = -1$ $\quad a_{23} = 0$ $\quad a_{33} = 1$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} Ro \quad\quad\quad\quad \\ \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \\ \bar{R}\bar{O} \end{array}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$\lambda = 1$ è raggiungibile e osservabile, è possibile stabilizzarlo:

$P(\lambda) = (\lambda - 1)$

$P_d(\lambda) = (\lambda + 1)$ $\qquad A_R = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad B_R = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

$a = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

$$\tilde{K} = -\begin{bmatrix} \alpha - a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \cdot U \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$u = \tilde{K} \cdot \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} = T^{-1} \cdot x \Rightarrow u = K \cdot T^{-1} \cdot x$$

c)

Calcolo $T^{-1} = \begin{bmatrix} V \\ \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Voglio che sia invertibile

$$T = (T^{-1})^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_{11} & \quad A_{12} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} A_{21} & \quad A_{22} \end{array} \end{array}$$

$$\tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}(R) = 1$$

- Costruiamo la matrice:

$$(A_{11} + L A_{21}) = 0 + \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = L_2$$

$$\det(\lambda \cdot I - (A_{11} + L_{A2})) = \lambda - L_2$$

$$P_d(\lambda) = \lambda + 3 \Rightarrow \begin{cases} -L_2 = 3 \\ L_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -3 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema SISO tempo discreto

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

chiuso in retroazione con il controllore $u_k = K(r_k - x_k)$, con K matrice di guadagni e r_k ingresso esogeno di riferimento;

- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.
- si proponga un esempio numerico (le matrici F e G) di un sistema la cui dinamica non puo' essere completamente assegnata ma che è stabilizzabile.
- si proponga un esempio numerico (le matrici F e G) di un sistema la cui dinamica non puo' essere completamente assegnata ma che NON è stabilizzabile.

a)

• TEOREMA FONDAMENTALE ASSEGNAMENTO POLI:

Dato un sistema (A, B) di ordine n, con n autovalori desiderati (), se e solo se (A, B) è raggiungibile, esiste ed è unica una K tale che (A + B·K) ha gli autovalori uguali a quelli desiderati.

• Condizione necessaria ⟶ (A, B) è completamente raggiungibile.

Se (A, B) non è completamente raggiungibile allora posso fare la decomposizione di Kalman e trasformare A, B in forma standard di raggiungibilità:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \tilde{A}_{12} \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right] \qquad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \hline \emptyset \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Raggiungibile} \\ \text{non Raggiungibile} \end{array}$$

$\tilde{A}_{22}$ ⟶ Autovalori

Costruisco $u = \tilde{K} \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{bmatrix}^T$

$$\tilde{A} + \tilde{B}K = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1} & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2 \\ \hline \emptyset & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right]$$

$\tilde{A}_{22}$ ⟶ Autovalori

⟹ Gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$ (non raggiungibili) non sono modificabili ⟹ non posso assegnarli a quelli desiderati

• Condizione sufficiente ⟶ se (A, B) è raggiungibile ⟹ $\exists!$ K : $\lambda(A+BK)$ = autovalori desiderati

Se (A, B) è raggiungibile posso ottenerlo in F.C.C.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \emptyset & I \\ \hline -P_0 & -P_1 \cdots\cdots -P_{n-1} \end{array}\right] \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot I - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})) = \lambda^m + (p_{m-1} - k_m) \cdot \lambda^{m-1} + \dots + (p_0 - k_1)$$

$$p_d(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^m + \bar{p}_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \dots + \bar{p}_0$$

Facendo corrispondere i coefficienti ottengo:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} p_{m-1} - k_m = \bar{p}_{m-1} \\ \\ p_0 - k_1 = \bar{p}_0 \end{array} \right.}_{m \text{ equazioni}} \Rightarrow m \text{ equazioni in } m \text{ incognite}$$

$p_{m-1}, \dots, p_0 \rightarrow$ m parametri

$k_m, \dots, k_1 \rightarrow$ m incognite

b)

Affinché il sistema retroazionato sia stabilizzabile a ciclo chiuso, gli autovalori instabili di A (se ci sono) devono appartenere al sottospazio raggiungibile.
Solo in questo modo, infatti, possono essere modificati mediante retroazione.

c)

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

Si determini, se possibile, **motivando adeguatamente il risultato**, una legge di retroazione dello stato $u_k = Kx_k$ tale che il sistema retroazionato $(A + BK, B)$ sia raggiungibile da uno solo dei due ingressi ed abbia un comportamento di tipo dead-beat.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & e_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = S \cdot R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B \cdot M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{A} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{completamente raggiungibile}$$

- Costruiamo $\bar{A}_c + \bar{B}_c \cdot K_c$:

$$\bar{A}_c = \det(\lambda \cdot I - \bar{A}) = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 1/2 & 0 & \lambda - 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lambda^2(\lambda - 1) = \lambda^3 - \lambda^2$$

$$\overline{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_c + \overline{B}_c \cdot K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2+1 & k_3 \end{bmatrix}$$

- Il polinomio desiderato è $\lambda^3 = \emptyset$ quindi avrò:

$$K_c = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Questo è quello adattato a retroazionare il vettore di stato x' che abbiamo implicitamente ottenuto quando abbiamo messo la matrice in F.C.C..
Devo quindi trovare la matrice che mi fa il cambio di coordinate da x' a x che mi serve anche per ottenere il valore di K che cerco:

$$K = (R \cdot R_c^{-1})^{-1} \cdot K_c$$

$$R = \begin{bmatrix} b_1 & \overline{A} \cdot b_1 & \overline{A}^2 \cdot b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_c = \begin{bmatrix} B_c & \overline{A}_c B_c & \overline{A}_c^2 \cdot B_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R \cdot R_c^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Questa è la matrice dei guadagni da moltiplicare per la retroazione dello stato nell'ingresso u_1. Per cui la retroazione totale che stiamo cercando sarà data da:

$$K' = H_1 + \left[\frac{K}{0}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Sia dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k = Cx_k$$

Supponendo che l'applicazione dell'ingresso $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ produca l'uscita $y_0 = 2$,$y_1 = 3$,$y_2 = 1$, si determini, se possibile, lo stato iniziale del sistema x_0.

$$\begin{cases} y_0 = C \cdot x_0 \\ y_1 = C \cdot A x_0 \\ y_2 = C \cdot A^2 x_0 \end{cases} \xRightarrow{\text{FORMA MATRICIALE}} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix} \cdot x_0$$

Quindi avrò : $Y = O \cdot x_0 \Rightarrow x_0 = O^{-1} \cdot Y$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad O^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = O^{-1} \cdot Y = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- Si determini per quali valori di α e β il sistema è controllabile.
- Si determini per quali valori di α e β il sistema è stabilizzabile.
- Scelti valori opportuni per α e β si determini un controllore nella forma $u(t) = Kx(t)$ che sia stabilizzante.
- Scelti valori opportuni per α e β si determini un controllore nella forma $u(t) = Kx(t)$ tale che il sistema a ciclo chiuso sia stabile e che il suo modo più lento converga a zero velocemente almeno quanto e^{-3t}.

a)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 3\beta \\ \beta & 2\beta & 4\beta \\ \alpha & -\alpha & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{rank}(R) = 3 \text{ per essere controllabile}$$

rank(R) = 3 quando $\beta \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \emptyset$.

b)

Un sistema è stabilizzabile se tutti gli stati non controllabili possono essere resi stabili.

Quindi significa che deve esistere un K tale che (A+BK) sia stabile.

c)

$\alpha = 1 \qquad \beta = 1$

$$(A + B \cdot K) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ K_1 & K_2+2 & K_3 \\ K_1 & K_2 & K_3-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+B\cdot K-\lambda I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ K_1 & K_2+2-\lambda & K_3 & K_1 & K_2+2-\lambda \\ K_1 & K_2 & K_3-1-\lambda & K_1 & K_2 \end{array}\right] = (-\lambda(K_2+2-\lambda)(K_3-1-\lambda) + K_3K_1) - (-K_2K_3\lambda + K_1(K_3-1-\lambda)) =$$

$$= (-K_2\lambda - 2\lambda + \lambda^2)(K_3-1-\lambda) + K_3K_1 + K_2K_3\lambda - K_1K_3 + K_1 + K_1\lambda =$$

$$= -K_2K_3\lambda + K_2\lambda + K_2\lambda^2 - 2K_3\lambda + 2\lambda + 2\lambda^2 + K_3\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 + K_3K_1 + K_2K_3\lambda - K_1K_3 + K_1 + K_1\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(K_2 + 2 - 1 + K_3) + \lambda(-\cancel{K_2}K_3 + K_2 - 2K_3 + 2 + \cancel{K_2}K_3 + K_1) + \cancel{K_3K_1} - \cancel{K_1}K_3 + K_1 =$$

$= -\lambda^3 + \lambda^2(K_2 + K_3 + 1) + \lambda(K_2 + K_1 - 2K_3 + 2) + K_1$

$P_d(\lambda) = (\lambda+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$$\begin{cases} K_1 = 1 \\ K_2 + K_1 - 2K_3 + 2 = 3 \Rightarrow K_2 - 2K_3 = \emptyset \quad K_2 = 2K_3 = \frac{4}{3} \\ K_2 + K_3 + 1 = 3 \Rightarrow 2K_3 + K_3 = 2 \Rightarrow K_3 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

d)

$P_d(\lambda) = (\lambda+3)^3 = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27$

$$\begin{cases} K_1 = 27 \\ K_2 + K_1 - 2K_3 + 2 = 27 \Rightarrow K_2 = 2K_3 + 2 = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3} \\ K_2 + K_3 + 1 = 9 \Rightarrow 2K_3 + 2 + K_3 + 1 = 9 \\ \qquad 3K_3 = 5 \Rightarrow K_3 = \frac{5}{3} \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} 27 & 16/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema SISO tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \end{pmatrix} x(t)$$

con $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. Si determini, anche avvalendosi del principio di separazione, per quali valori di α e β, è possibile costruire un controllore con retroazione dell'uscita (usando un osservatore) tale che:

- gli autovalori del sistema a ciclo chiuso si trovino tutti in -2;
- l'errore di stima dello stato converga a zero velocemente almeno quanto e^{-2t}.

Infine, per **tutti** i casi ammissibili,

- si determinino un controllore a retroazione dello stato ed un osservatore asintotico dello stato che soddisfano i requisiti.

- Verifico che il sistema sia osservabile:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -1+\alpha & -2\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \det(O) = -2\alpha - \alpha(\alpha-1) = -2\alpha - \alpha^2 + \alpha = -\alpha^2 - \alpha$$

$$-\alpha^2 - \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha(\alpha+1) \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq -1 \end{matrix}$$

Posso costruire un osservatore per valori di α diversi da 0 e -1.

- Verifico che il sistema sia raggiungibile:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \beta & 1-2\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \det(R) = (1-2\beta) + \beta \neq 0 \Rightarrow 1 - \beta \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 1$$

- CONTROLLORE:

Scelgo $\beta = 0$

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+K_1 & K_2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+BK-\lambda I) = (-1+k_1-\lambda)(-2-\lambda) - k_2 = 2+\lambda-2k_1-k_1\lambda+2\lambda+\lambda^2-k_2 =$$

$$= \lambda^2+\lambda(3-k_1)-2k_1-k_2+2$$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+2)^2 = \lambda^2+4\lambda+4$$

$$\begin{cases} -2k_1-k_2+2 = 4 \\ 3-k_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **OSSERVATORE:**

Scelgo $\alpha = 1$

$$(A-HC) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-H_1 & -H_1 \\ 1-H_2 & -2-H_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-HC-\lambda I) = (-1-H_1-\lambda)(-2-H_2-\lambda) + H_1(1-H_2) =$$

$$= 2+H_2+\lambda+2H_1+\cancel{H_1H_2}+H_1\lambda+2\lambda+H_2\lambda+\lambda^2+H_1-\cancel{H_1H_2} =$$

$$= \lambda^2+\lambda(3+H_1+H_2)+2+H_2+3H_1$$

Affinché $\varepsilon \to \emptyset$ è opportuno scegliere gli autovalori di $(A-HC)$ più veloci di quelli di $(A+BK)$

$$P_d(\lambda) = (\lambda+3)^2 = \lambda^2+6\lambda+9$$

$$\begin{cases} 2+H_2+3H_1 = 9 \Rightarrow H_2 = 7-3H_1 \Rightarrow H_2 = 7-3\cdot 2 = 1 \\ 3+H_1+H_2 = 6 \Rightarrow 3+H_1+7-3H_1 = 6 \Rightarrow 2H_1 = 3+7-6 \end{cases}$$

$$H_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$