Teoria dei Sistemi e del Controllo - 14-01-2020

1. Dato il sistema **Tempo Discreto** descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = 0,$$

   - Studiarne le proprietà di stabilità, osservabilità, raggiungibilitaà, stabilità BIBO.
   - Portare il sistema in forma di Kalman.
   - Per il sistema in forma di Kalman, si commenti sull'esistenza di condizioni iniziali per le quali si ottengono le seguenti possibili uscite in evoluzione libera: $(-2)^t$, 4, $t+3$, e^{-2t}. Si riportino le condizioni iniziali nel caso esistino.

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)x_2(k) + 2x_2(k)u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k)(x_1(k) - 3) + u(k) \end{cases}$$

   - si determino gli equilibri del sistema per ingresso nullo $u(k) = 0$, $\forall k \geq 0$ e se ne studi la stabilità.
   - Si commenti l'esistenza di un ingresso che dipenda linearmente dallo stato e che renda asintoticamente stabile gli eventuali equilibri instabili trovati al punto precedente.

3. Si consideri il sistema LTI SISO:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

   ed una legge di controllo del tipo $u = Kx$, con K matrice costante di dimensioni appropriate.

   Si dimostrino, in maniera formale, le seguenti affermazioni:

   - se la coppia (A, B) è controllabile, e' possibile assegnare tutti i poli del sistema a ciclo chiuso;
   - non e' possibile modificare i modi non controllabili del sistema;
   - in nessun caso e' possibile modificare gli zeri del sistema;
   - non è possibile cambiare il grado relativo del sistema;

4. Si consideri il sistema lineare tempo invariante $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

   soggetto ai vincoli $x(t_0) = x_0$ ed $x(t_f) = x_f$, con x_0, x_f vettori costanti noti e $\neq 0$ in generale.

   Lo studente:

   - proponga opportune condizioni sulle matrici Q ed R che garantiscano la risolubilità del problema;
   - descriva in maniera analitica la procedura che porta alla soluzione in forma chiusa del problema di ottimizzazione giungendo ad una espressione per il controllo ottimo del tipo:

$$u(t) = f_{opt}(x(t), t, t_f, x_f)$$

   - giustifichi l'indipendenza di $f_{opt}(\cdot)$ dal vettore di condizioni iniziali x_0.