Teoria dei Sistemi e del Controllo - 27-07-2020

Numero di matricola

–	–	α	β	γ	δ

1. Dato il sistema **Tempo Continuo** descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta-4 & \alpha+1 & -\beta-4 \\ 2 & -\alpha-1 & 2 \\ 3 & -\alpha-1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   - si porti il sistema in forma standard di raggiungibilità
   - si studino i modi del sistema;
   - si determinino gli autovalori interni allo spazio di inosservabilità e si studi la stabilità BIBO.

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_2^2 - (\alpha+1)^2\right) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)\left(x_1^2 + x_2^2 - (\alpha+1)^2\right) \end{cases}$$

   - si determinino tutti gli equilibri del sistema;
   - si studi la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti con il metodo indiretto di Lyapunov;
   - si verifichino le proprietà di stabilità con il metodo diretto di Lyapunov.

3. Dato il sistema lineare tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} u_k$$

   - si determini il numero minimo di passi N per passare dallo stato $x_0 = [0,1,1]^T$ allo stato $x_N = [1,0,16]^T$;
   - si determini una sequenza di ingresso che realizzi la transizione di stato di cui sopra e si dimostri che non è unica;
   - si dimostri che, al variare di u ed u' sull'insieme delle sequenze di ingresso che sono soluzione del problema di cui sopra, le differenze $\tilde{u} = u - u'$ costituiscono uno spazio vettoriale;
   - si determini infine la dimensione di tale spazio vettoriale.

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ed il problema di controllo ottimo descritto dal funzionale

$$J = \frac{1}{2}x(t_f)^T H x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

soggetto a : stato inziale $x(0) = x_0$ noto, stato finale desiderato $x(t_f) = x_f$ NON fissato, valore del tempo finale t_f fissato,

   - si ricavi la matrice Hamiltoniana partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange
   - si ricavi la soluzione ottima in forma chiusa $u^*(t) = f(A, B, Q, R, H, x_0, t, t_f)$ in funzione delle grandezze note (suggerimento: NON usare l'equazione di Riccati, non produce una soluzione in forma chiusa).