Teoria dei Sistemi e del Controllo - 06-06-2025

1. Dato il sistema dinamico non lineare **tempo continuo**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + x_1^2(t) - \alpha x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t), \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per ingresso nullo. Si studi la stabilità degli equilibri con il metodo indiretto di Lyapunov.
   - Per $\alpha = -4$, trovare un ingresso $u(t)$ che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
   - Per $\alpha = 1$ si disegnino gli andamenti delle traiettorie nel piano (x_1, x_2).

2. Dato il sistema **tempo discreto** rappresentato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = 0$$

   - Si determinino i modi del sistema.
   - Si determinino i valori di α e β per cui il sistema sia in forma minima. Si studi la Bibo stabilità al variare di α e β.
   - Per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ si determino gli stati indistinguibili dallo stato $x = (2 \ -3 \ 1)^T$.
   - Per $\beta = 4$, determinare la forma degli stati raggiungibili da $x(0) = (1 \ 0 \ 0)^T$ in 1, 2 e 3 passi.

3. Si consideri il sistema SISO tempo continuo non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha \sin x_1 - \alpha\beta u \cos x_1 \\ y &= x_1 \end{cases}$$

   con le costanti $\alpha, \beta > 0$, y l'uscita ed u l'ingresso.

   (a) Si determini il punto di equilibrio del sistema più vicino all'origine.

   (b) Si linearizzi la dinamica del sistema attorno a tale punto di equilibrio e si studino le proprietà strutturali del sistema lineare risultante: osservabilità, controllabilità, stabilità, stabilizzabilità e detettabilità (rilevabilità) al variare di α e β.

   (c) Determinare:
      - uno stimatore asintotico dello stato con dinamica dell'errore di stima $e^{-\lambda t}$, con $\lambda > 0$ costante non specificata,
      - ed un controllore che retroazionando lo stato stimato renda il sistema asintoticamente stabile con poli $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$.

   .

4. Dato il sistema dinamico:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

   si calcoli la soluzione di controllo ottimo a ciclo aperto $u(t)$ che porta lo stato dal punto $x(t_0 = 0) = [0, 0]$ al punto $x(t_f) = [\frac{1}{4}, 0]$ al tempo $t_f = 1$ minimizzando l'indice di costo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2(\tau) d\tau$$