3. Dato un sistema A, B, C continuo o discreto, completamente raggiungibile ed osservabile, si enunci la proprietà di separazione degli autovalori, e se ne dia una sintetica linea di dimostrazione. Si discutano inoltre le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità del sistema di ordine “2n” ottenuto mediante la reazione dello stato stimato.

3. Si consideri il sistema tempo discreto :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

Al variare dei parametri α e β:

- si studi la stabilizzabilità mediante retroazione dello stato;
- si studi la possibilità di realizzare un controllore dead-beat, e, ove possibile, lo si progetti.

3. Si consideri il sistema tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k = F x_k + G u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = H x_k \end{aligned}$$

con condizioni iniziali $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$,

- Si determini il numero minimi di passi necessari a portare l'uscita y_k del sistema dal valore 0 al valore 1.
- Si determini una sequenza di ingresso $u_k = (u_0, u_1, u_2, u_3 ...)$ che porti l'uscita y_k da 0 a 1 nel minor numero di passi possibile e la mantenga a 1 indefinitamente.
- Si determini una legge di retroazione del tipo $u_k = K x_k + 1$ che risolva lo stesso quesito del punto precedente.

3. Dato il sistema tempo continuo caratterizzato dalle matrici dinamiche e di ingresso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e con matrice di uscita $C = (1 \; -1 \; 2)$

- Si determini se il sistema è completamente raggiungibile, e se è possibile stabilizzare il sistema utilizzando un solo ingresso (ed eventualmente quale).
- Determinare se esiste e in caso calcolarla, una matrice di reazione K in modo che l'evoluzione libera dello stato del sistema sia esponenzialmente convergente per ogni condizione iniziale e la velocità di convergenza sia al più 2 (quindi che converga più velocemente di e^{-2t}).
- Cosa si può concludere in termini di velocità di convergenza dell'uscita del sistema retroazionato con la K determinata al punto precedente?

3. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = Cx$$

si determini :

- se il sistema e' stabilizzabile mediante retroazione dello stato usando un solo ingresso. Se si, si determini per quali ingressi;
- una matrice K di retroazione dello stato in modo che, per qualunque stato iniziale, l'evoluzione libera del sistema tenda a zero piu' velocemente di e^{-t};
- una matrice K' di retroazione dello stato in modo che, con ingresso nullo e per qualunque stato iniziale, l'uscita del sistema tenda a zero non piu' lentamente di e^{-2t}.

4. si consideri il sistema, con $\beta \in [0, 1]$ (intervallo chiuso $0 \to 1$):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix} x = Cx$$

si determini:

- per quali valori di β non esistono stimatori asintotici dello stato;
- per quali valori di β non esistono stimatori asintotici dello stato che utilizzano una sola uscita del sistema.

3. Dato il sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 + \sin x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -\cos x_1 + \cos x_2 - x_3 \end{cases}$$

(a) si determini, se possibile, una legge di controllo lineare $u = Kx$ con $K = [k_1, k_2, k_3]$ tale che l'origine dello spazio di stato sia un punto di equilibrio asintoticamente stabile e che, in un intorno di questo, l'errore vada a 0 almeno come e^{-t}.

(b) "come sopra" ma con convergenza a 0 veloce almeno quanto e^{-2t}.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

si determini :

- per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller;
- si scelga un valore β tra questi, e si calcoli, in funzione di α la matrice di retroazione dello stato K tale che il sistema a ciclo chiuso sia di tipo dead-beat.

4. Si consideri il problema di raggiungibilità in tempo finito di un punto dello spazio di stato con energia di controllo minima per un sistema lineare tempo continuo;

- Si definisca il Gramiano di Raggiungibilità $\mathcal{G}_R$.
- Si dimostri il ruolo di $\mathcal{G}_R$ nel calcolo dell'azione di controllo $u(t)$ ad energia minima.

3. Dato il sistema SISO tempo discreto

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

chiuso in retroazione con il controllore $u_k = K(r_k - x_k)$, con K matrice di guadagni e r_k ingresso esogeno di riferimento;

- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.

2. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} x = Cx$$

si determini :

- se il sistema e' stabilizzabile mediante retroazione dello stato usando un solo ingresso. Se si, si determini per quali ingressi;
- una matrice K di retroazione dello stato in modo che, per qualunque stato iniziale, l'evoluzione libera del sistema tenda a zero piu' velocemente di e^{-2t};

3. Sia dato il sistema tempo discreto :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = Cx_k$$

si dica se :

- E' possibile costruire uno stimatore dead-beat (tutti i poli in 0);
- E' possibile costruire un controllore che, retroazionando lo stato stimato, annulli l'evoluzione libera dello stato in un numero finito di passi.

In tal caso si costruisca uno stimatore ed un controllore adeguati.

3. Dato il sistema tempo discreto:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$$

- si discuta la raggiungibilità del sistema da u_k e dalle sue componenti prese singolarmente;
- si determini, se possibile, una retroazione dello stato $u_k = Kx_k$ tale che il sistema a ciclo chiuso abbia il generico polinomio caratteristico $p(z) = z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$.

3. Siano dati i sistemi tempo continui SISO $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$ e $\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2)$, il candidato enunci e dimostri, nello spazio di stato oppure utilizzano le funzioni di trasferimento, le Condizioni Necessarie e Sufficienti affinchè:

a
- il sistema ottenuto collegando in parallelo i due sistemi Σ_1 e Σ_2 sia raggiungibile;
- il sistema ottenuto collegando in parallelo i due sistemi Σ_1 e Σ_2 sia osservabile;

b
- il sistema ottenuto collegando in serie, nell'ordine preferito, i due sistemi Σ_1 e Σ_2 sia raggiungibile;
- il sistema ottenuto collegando in serie, nell'ordine preferito, i due sistemi Σ_1 e Σ_2 sia osservabile;

3. Dato il sistema SISO tempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

chiuso in retroazione con il controllore $u(t) = K(r(t) - x(t))$, con K matrice di guadagni e $r(t)$ ingresso esogeno di riferimento;

- si enunci, e si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
- si discuta il ruolo del segnale di riferimento $r(t)$ nella risposta precedente.
- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.
- si discuta il ruolo del segnale di riferimento $r(t)$ nella risposta precedente.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

si determini :

- per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller;
- si scelga un valore β tra questi, e si calcoli, in funzione di α la matrice di retroazione dello stato K tale che il sistema a ciclo chiuso sia di tipo dead-beat.

4. Si consideri la classe dei sistemi lineari tempo invarianti in tempo continuo;

- Si definisca il Gramiano di Raggiungibilità $\mathcal{G}_R$.
- Si dimostri il ruolo di $\mathcal{G}_R$ nel calcolo dell'azione di controllo $u(t)$ ad energia minima necessaria per portare lo stato del sistema, a partire dall'orgine, fino ad x_f in un tempo finito t_f.

3. Dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- si determinino i valori di α e β corrispondenti a tutti i punti $x_f = [\alpha \;\; \beta]^T$ dello spazio di stato che sono raggiungibili dallo stato iniziale $x_0 = [0 \;\; 1]^T$ in un certo tempo t_f finito.
- si scelga uno di tali punti e si calcoli l'ingresso $u(t)$ necessario a portare x_0 a x_f in un tempo $t_f = 2$.

4. Si consideri il sistema SISO tempo discreto e tempo invariante:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

- si dimostri che, condizione necessaria e sufficiente affinchè, tramite una retroazione dello stato del tipo $u_k = Kx_k$ si possano assegnare tutti poli a ciclo chiuso del sistema è che la coppia (F, G) sia completamente raggiungibile.
- si discuta se l'enunciato di cui sopra rimane valido sostituendo la parola "raggiungibile" con "controllabile".

3. Si consideri il sistema SISO tempo continuo non lineare:

DA VERIFICARE

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha \sin x_1 - \alpha\beta u \cos x_1 \\ y &= x_1 \end{cases}$$

con le costanti $\alpha, \beta > 0$, y l'uscita ed u l'ingresso.

(a) Si determini il punto di equilibrio del sistema più vicino all'origine.

(b) Si linearizzi la dinamica del sistema attorno a tale punto di equilibrio e si studino le proprietà strutturali del sistema lineare risultante: osservabilità, controllabilità e stabilità al variare di α e β.

(c) Determinare:

- uno stimatore asintotico dello stato con dinamica dell'errore di stima $e^{-\lambda t}$, con $\lambda > 0$ costante non specificata,
- ed un controllore che retroazionando lo stato stimato renda il sistema asintoticamente stabile con poli $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$.

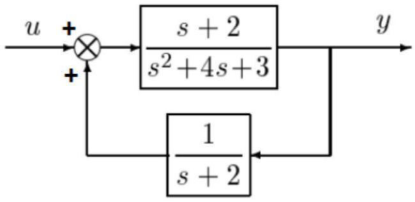
3. Sia dato il sistema tempo discreto :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = Cx_k$$

- si dica se e per quali valori di α e' possibile costruire uno stimatore tale che l'errore di stima sia nullo dopo un numero finito di passi;
- si scelga un valore di α adeguato e si progetti tale stimatore se esiste;
- si dica se e per quali valori di α e' possibile costruire un controllore che, retroazionando lo stato stimato, annulli l'evoluzione libera dello stato in un numero finito di passi;
- si scelga un valore di α adeguato e si progetti tale controllore se esiste.

3. Sia dato il sistema in figura:



- si determini una realizzazione in variabili di stato dell'intero sistema ottenuto dalla chiusura dell'anello
- si determini se il sistema ottenuto e' raggiungibile e/o osservabile
- si discuta stabilità interna e BIBO del sistema

4. Dato il sistema :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

- Se possibile determinare la piu' breve (di minor durata temporale) sequenza di ingresso che porta il sistema dallo stato iniziale $x_0 = [2, 0, 1]^T$ allo stato finale $x_f = [4, 0, 0]^T$.
- Calcolare l'insieme di tutti gli stati iniziali x_0 che sono compatibili con la sequenza di uscita libera: $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$.

3. Sia dato il sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_k$$

si determini :

- se il sistema e' raggiungibile e/o controllabile;
- se esiste, una sequenza di ingresso che porti lo stato da $x(0) = [1, 0, 0]^T$ a $x(2) = [2, 0, 2]^T$
- se esiste, una sequenza di ingresso che porti lo stato da $x(0) = [1, 0, 0]^T$ a $x(3) = [2, 0, 2]^T$; si commenti il risultato di quest'ultimo caso.

3. Sia dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 - 3 & 0 \\ 1 & -2 & \alpha^2 + 3\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

si determini :

- i valori di α per i quali esiste un osservatore asintotico dello stato;
- i valori di α per i quali il sistema è stabilizzabile tramite retroazione dinamica dell'uscita;
- i valori del parametro α per i quali e' possibile strabilizzare il sistema tramite retroazione dinamica dell'uscita ponendo tutti gli autovalori in -2
- scelto un valore per α che soddisfi le condizioni trovate al punto precedente, trovare le espressioni di stimatore e controllore relativi al punto precedente.

3. Sia dato il sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} u_k$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

con le tre costanti α, β e γ incognite. Si determinino :

- le condizioni necessarie sulle costanti α, β e γ affinchè il sistema (A, B) sia completamente raggiungibile;
- le condizioni necessarie sulle costanti α, β e γ affinchè il sistema (A, B) sia completamente controllabile in 1, 2 o 3 passi;
- scelti tre valori opportuni per le tre costanti incognite, si determini una retroazione algebrica dello stato $u_k = Kx_k$ in modo che il sistema retroazionato $A + BK$ sia di tipo "dead-beat".

3. Si consideri il sistema LTI SISO:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ed una legge di controllo del tipo $u = Kx$, con K matrice costante di dimensioni appropriate.

Si dimostrino, in maniera formale, le seguenti affermazioni:

- se la coppia (A, B) è controllabile, e' possibile assegnare tutti i poli del sistema a ciclo chiuso;
- non e' possibile modificare i modi non controllabili del sistema;
- in nessun caso e' possibile modificare gli zeri del sistema;
- non è possibile cambiare il grado relativo del sistema;

3. Dato il sistema **tempo discreto** descritto dalle matrici A, B, C,

- si descriva il problema della stima asintotica dello stato,
- si ricavino le equazioni di Luenberger fino ad ottenere la forma ricorsiva dello stimatore asintotico dello stato,
- sia diano le condizioni e le si dimostrino sotto le quali la dinamica dell'errore di stima converge a zero,
- si specifichino le condizioni per le quali l'errore di stima e_k converge al 5% del valore iniziale e_0 in N passi (con N generico).

3. Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} u_k \\ y_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x_k \end{cases}$$

si ipotizzi una legge di controllo in reatroazione statica dello stato del tipo:

$$u_k = Kx_k + \alpha r_k$$

- trovare, se possibile, la matrice K che pone gli autovalori a ciclo chiuso in 0.5 e -0.5,
- si determini l'insieme delle condizioni iniziali del sistema retroazionato che producono una risposta libera dello stato senza oscillazioni.
- posto $\alpha = 0$, si determini l'insieme delle condizioni iniziali del sistema retroazionato che producono una uscita y_k senza oscillazioni.
- si assuma $r_k = R$ (r_k costante) e si ricavi il valore α per cui l'uscita y_k del sistema converge a regime ad R.

4. Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- determinare l'osservabilità del sistema al variare del parametro α
- scelto un valore di α appropriato, progettare uno stimatore asintotico dello stato tale che la dinamica dell'errore di stima abbia i poli in $(-1, -2, -3)$
- si dica se esiste e nel caso si trovi un valore iniziale non nullo dell'errore di stima ϵ_0 per cui l'errore di stima $\epsilon(t)$ converge a zero non più lentamente di e^{-3t}.

4. Si consideri il sistema dinamico tempo continuo descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

dove α, β, γ NON sono legate al numero di matricola ma sono variabili da determinare!!!

- determinare per quali valori di α, β, γ è possibile vedere nell'uscita libera un modo divergente;
- determinare per quali valori di α, β, γ il sistema è stabilizzabile, ovvero esiste una retroazione statica dello stato stabilizzante;
- determinare per quali valori di α, β, γ il sistema è BIBO stabile;

3. Dato il sistema lineare tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} x(t)$$

Si progetti:

- un controllore del tipo $u(t) = -K\hat{x}(t) + v(t)$ tale che la dinamica a ciclo chiuso del sistema abbia autovalori in $(-5 \pm 7j)$ e -7;
- uno stimatore asintotico dello stato, di ordine pieno o ridotto, che stimi $\hat{x}(t)$ con dinamica dell'errore di stima scelta in maniera appropriata (e se ne giustifichi la scelta).

3. Si consideri il sistema lineare tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} u(t)$$

- si dica se il sistema e' stabilizzabile con retroazione dello stato tramite uno solo degli ingressi
- si dica se il sistema è stabilizzabile con entrambi gli ingressi.
- Utilizzando il lemma di Heymann applicato al primo ingresso, si calcoli, se e' possibile, una retroazione dello stato $u(t) = Kx(t)$ che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -1.

4. Il candidato:

- descriva il problema dell'assegnamento completo della dinamica di un sistema lineare tempo invariante tramite retroazione lineare dello stato
- enunci le condizioni, e le dimostri, per l'esistenza della soluzione
- enunci le condizioni, e le dimostri, per l'unicità della soluzione
- descriva le condizioni, e le dimostri in maniera formale o tramite un esempio, nelle quali il problema può avere più soluzioni
- enunci le condizioni, e le dimostri, per la stabilizzabilità di un sistema lineare tempo invariante

3. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Determinare, se possibile, anche aiutandosi con la decomposizione di Kalman, una legge di controllo stabilizzante del tipo $u(t) = Kx(t)$ che posizioni il maggior numero possibile di autovalori in -2.
- Determinare, se possibile, un osservatore asintotico dello stato tale che la dinamica dell'errore di stima abbia il maggior numero possibile di autovalori in -2.

3. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

- si realizzi una decomposizione di Kalman e si calcolino le dimensioni dei sottosistemi $RO, R\bar{0}, \bar{R}O, \bar{R}\bar{O}$
- Determinare, se possibile, una legge di controllo stabilizzante del tipo $u(t) = Kx(t)$ che posizioni il maggior numero possibile di autovalori in -1.
- Determinare, se possibile, un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto e di ordine minimo (con dimensione del vettore di "stato" stimato più piccola possibile) tale che la dinamica dell'errore di stima abbia il maggior numero possibile di autovalori in -3.

3. Dato il sistema SISO tempo discreto

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

chiuso in retroazione con il controllore $u_k = K(r_k - x_k)$, con K matrice di guadagni e r_k ingresso esogeno di riferimento;

- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.
- si proponga un esempio numerico (le matrici F e G) di un sistema la cui dinamica non puo' essere completamente assegnata ma che è stabilizzabile.
- si proponga un esempio numerico (le matrici F e G) di un sistema la cui dinamica non puo' essere completamente assegnata ma che NON è stabilizzabile.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

Si determini, se possibile, **motivando adeguatamente il risultato**, una legge di retroazione dello stato $u_k = Kx_k$ tale che il sistema retroazionato $(A + BK, B)$ sia raggiungibile da uno solo dei due ingressi ed abbia un comportamento di tipo dead-beat.

4. Sia dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k = Cx_k$$

Supponendo che l'applicazione dell'ingresso $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ produca l'uscita $y_0 = 2$,$y_1 = 3$,$y_2 = 1$, si determini, se possibile, lo stato iniziale del sistema x_0.

3. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- Si determini per quali valori di α e β il sistema è controllabile.
- Si determini per quali valori di α e β il sistema è stabilizzabile.
- Scelti valori opportuni per α e β si determini un controllore nella forma $u(t) = Kx(t)$ che sia stabilizzante.
- Scelti valori opportuni per α e β si determini un controllore nella forma $u(t) = Kx(t)$ tale che il sistema a ciclo chiuso sia stabile e che il suo modo più lento converga a zero velocemente almeno quanto e^{-3t}.

3. Dato il sistema SISO tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \end{pmatrix} x(t)$$

con $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. Si determini, anche avvalendosi del principio di separazione, per quali valori di α e β, è possibile costruire un controllore con retroazione dell'uscita (usando un osservatore) tale che:

- gli autovalori del sistema a ciclo chiuso si trovino tutti in -2;
- l'errore di stima dello stato converga a zero velocemente almeno quanto e^{-2t}.

Infine, per **tutti** i casi ammissibili,

- si determinino un controllore a retroazione dello stato ed un osservatore asintotico dello stato che soddisfano i requisiti.

3. Il candidato, considerando un generico sistema lineare tempo invariante tempo continuo,

- ricavi l'espressione analitica dell'insieme dei punti raggiungibili nell'intervallo di tempo $[t_0, t_f]$ a partire da un generico stato $x^* = x(t_0)$;
- si caratterizzi (come spazio/sottospazio o altro), fornendo opportuna dimostrazione/spiegazione, tale insieme nel caso in cui:
  - il sistema sia raggiungibile;
  - il sistema non sia raggiungibile ma x^* lo è;
  - il sistema non sia raggiungibile e x^* non lo è;

4) il candidato dica se è vera o falsa, e lo dimostri, la seguente frase: "dato il punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ di un sistema non lineare, anche se la matrice dinamica A del sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$ ha autovalori nulli, è possibile progettare un controllore lineare del tipo $u = K(x - \bar{x}) + \bar{u}$ che, progettato per stabilizzare il sistema linearizzato, stabilizzi anche il sistema non lineare ".

3. Dato il sistema **tempo discreto**:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k$$

- ipotizzando di utilizzare l'ingresso : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, e di osservare l'uscita: $y_0 = 2$, $y_1 = 3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 19$, determinare se possibile lo stato iniziale x_0.
- si progetti se possibile uno stimatore asintotico dello stato con opportuna dinamica dell'errore di stima.

Teoria dei Sistemi - 9 cfu - L.M. in Ingegneria dell'Automazione
Compito del 26/02/2013

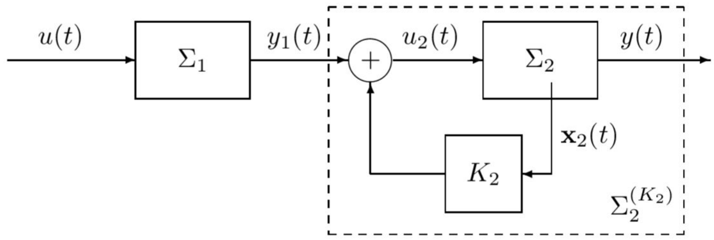
Esercizio 1 Si considerino le funzioni di trasferimento (a tempo discreto)

$$w_1(z) = \frac{z^2}{z^3+1}, \quad w_2(z) = \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2+z+1}. \tag{1.1}$$

1_i Si costruiscano una realizzazione minima $\Sigma_1 = (F_1, \mathbf{g}_1, H_1)$ di $w_1(z)$ ed una minima $\Sigma_2 = (F_2, \mathbf{g}_2, H_2)$ di $w_2(z)$.

1_{ii} Si stabilisca se il sistema serie di Σ_1 seguito da Σ_2 è raggiungibile e/o osservabile e se lo stato zero del sistema serie è semplicemente stabile.

1_{iii} Si costruisca per il sistema Σ_2 una retroazione K_2 dallo stato in modo che ogni evoluzione libera dello stato di Σ_2 si annulli in un numero finito di passi. Si determini se il sistema complessivo (cfr. figura) è semplicemente stabile, raggiungibile e/o osservabile.



1_{iv} Si determinino tutti gli stati iniziali del sistema serie, reazionato come al punto 1_{iii}, che danno luogo a uscite libere $y(t)$ di durata finita.

Esercizio 4. Si consideri il sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t)$$

4_i Si determini qual è il numero minimo di uscite affinché lo stato risulti osservabile e si scelga H in modo che ciò avvenga.

4_{ii} Si determini una matrice di reazione K tale che lo stato del sistema $(F + GK, G, H)$ risulti osservabile con una sola uscita e per una scelta opportuna della matrice riga H. Si scelga $\bar{H} \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ in modo che $(F + GK, G, \bar{H})$ risulti osservabile.

4_{iii} Se $(F+GK, G, \bar{H})$ è il sistema di cui al punto precedente, si costruisca, se possibile, uno stimatore di ordine intero tale che l'errore di stima sia sempre esprimibile come combinazione dei modi $(e^{-t} \cos t)$ e $(e^{-t} \sin t)$.