Teoria dei Sistemi e del Controllo - 16-01-2017

1. Dato il sistema lineare tempo invariante e tempo continuo descritto dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Si determini il più piccolo sottospazio che contenga l'evoluzione libera dello stato a partire dai seguenti stati $x_{0,1} = (1\,0\,0\,0\,0)^T$, $x_{0,2} = (0\,0\,1\,0\,0)^T$ e $x_{0,3} = (0\,0\,0\,1\,0)^T$ commentando i risultati ottenuti.
   - Si calcolino polinomio caratteristico e polinomio minimo della matrice A e la Funzione di Trasferimento del sistema.
   - Si indichino i modi propri del sistema ed i modi propri presenti nell'uscita per ingresso impulsivo.

2. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

   - Trovare tutti gli stati di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
   - Studiare la stabilità dell'equilibrio nell'origine con il metodo diretto di Lyapunov.

3. Dato un sistema A, B, C continuo o discreto, completamente raggiungibile ed osservabile, si enunci la proprietà di separazione degli autovalori, e se ne dia una sintetica linea di dimostrazione. Si discutano inoltre le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità del sistema di ordine "2n" ottenuto mediante la reazione dello stato stimato.

4. Si consideri il sistema tempo continuo SISO (A, B, C). Si discuta il seguente problema:

   (a) Trovare (se esiste) la reazione dello stato che rende il sistema stabile e che minimizza:

$$J = \int_0^\infty u^2(t)dt$$

   (b) In particolare la si trovi (se esiste) nei seguenti tre casi:

      i.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

      ii.
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

      iii.
$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$