Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 19

Dario Trevisan – *https://web.dm.unipi.it/trevisan*

26/11/2025

Processi a stati continui

Presentazione

Affrontiamo lo studio dei processi stocastici a **stati continui** (e tempi discreti) X_t a valori reali.

- Introduciamo i concetti fondamentali: funzione di media, di autocovarianza o di **autocorrelazione**, stazionarietà in senso lato, e processi gaussiani.

Presentazione

Affrontiamo lo studio dei processi stocastici a **stati continui** (e tempi discreti) X_t a valori reali.

- Introduciamo i concetti fondamentali: funzione di media, di autocovarianza o di **autocorrelazione**, stazionarietà in senso lato, e processi gaussiani.
- Tre esempi fondamontali di processi (gaussiani): il rumore bianco, la passeggiata aleatoria e l'equazione lineare con smorzamento.

Presentazione

Affrontiamo lo studio dei processi stocastici a **stati continui** (e tempi discreti) X_t a valori reali.

- Introduciamo i concetti fondamentali: funzione di media, di autocovarianza o di **autocorrelazione**, stazionarietà in senso lato, e processi gaussiani.
- Tre esempi fondamontali di processi (gaussiani): il rumore bianco, la passeggiata aleatoria e l'equazione lineare con smorzamento.
- I modelli ARIMA: definizione e proprietà (stazionarietà, funzione di autocovarianza e stima dei parametri).

Presentazione

Affrontiamo lo studio dei processi stocastici a **stati continui** (e tempi discreti) X_t a valori reali.

- Introduciamo i concetti fondamentali: funzione di media, di autocovarianza o di **autocorrelazione**, stazionarietà in senso lato, e processi gaussiani.
- Tre esempi fondamontali di processi (gaussiani): il rumore bianco, la passeggiata aleatoria e l'equazione lineare con smorzamento.
- I modelli ARIMA: definizione e proprietà (stazionarietà, funzione di autocovarianza e stima dei parametri).
- Infine studiamo il problema generale di stimare la funzione di autocovarianza di un processo stazionario (gaussiano), tramite **autocorrelazione campionaria** o **densità spettrale di potenza**.

Funzione di media e di autocovarianza

Dato un processo stocastico $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ avente come stati $E=\mathbb{R}$, si definiscono

- la **funzione di media** del processo,

$$t \in \mathcal{T} \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right],$$

Funzione di media e di autocovarianza

Dato un processo stocastico $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ avente come stati $E = \mathbb{R}$, si definiscono

- la **funzione di media** del processo,

$$t \in \mathcal{T} \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right],$$

- la **funzione di autocovarianza** del processo

$$(s, t) \in \mathcal{T}^2 \mapsto \operatorname{Cov}\left(X_s, X_t\right) = K_{X_s X_t} = C(s, t),$$

Funzione di media e di autocovarianza

Dato un processo stocastico $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ avente come stati $E=\mathbb{R}$, si definiscono

- la **funzione di media** del processo,

$$t \in \mathcal{T} \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right],$$

- la **funzione di autocovarianza** del processo

$$(s,t) \in \mathcal{T}^2 \mapsto \operatorname{Cov}\left(X_s, X_t\right) = K_{X_s X_t} = C(s,t),$$

- Notiamo che la varianza è

$$C(s,s) = \operatorname{Cov}\left(X_s, X_s\right) = \operatorname{Var}\left(X_s\right)$$

Funzione di autocorrelazione

A volte si considera anche la funzione

$$R(s,t) = \mathbb{E}\left[X_s X_t\right],$$

che è legata alle funzioni di autocovarianza e di media tramite la formula alternativa per il calcolo della covarianza:

$$R(s,t) = C(s,t) + \mathbb{E}\left[X_s\right]\mathbb{E}\left[X_t\right]$$

- Una terza funzione collegata a queste è la **funzione di autocorrelazione** (ACF) data da

$$(s,t) \in \mathcal{T}^2 \mapsto \mathrm{ACF}(s,t) = \rho_{X_s X_t} = \frac{\mathrm{Cov}\left(X_s, X_t\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(X_s\right)\mathrm{Var}\left(X_t\right)}} \in [-1,1],$$

Funzione di cross-covarianza

Ci limiteremo a processi a valori reali. Ma nel caso vettoriale ossia X_t a valori in $\mathbb{R}^d$, la funzione di autocovarianza si estende alla funzione di **covarianza incrociata** *cross-covariance* in inglese)

- per ogni coppia di componenti $i, j \in \{1, \dots, d\}$, definita come

$$K_{X_i X_j}(s, t) = \mathrm{Cov}\left(X_{i,s}, X_{j,t}\right),$$

Stazionarietà e funzioni di media e covarianza

Se il processo è stazionario, le funzioni di media e covarianza dipendono da *un parametro in meno*.

- Precisamente, se $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ oppure $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e il processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è stazionario, allora

<u>Def</u>

$$(X_{t_i})_{i=1,\dots,k} \overset{\text{legge}}{\sim} (X_{t_i+\Delta t})_{i=1,\dots,k}$$

Stazionarietà e funzioni di media e covarianza

Se il processo è stazionario, le funzioni di media e covarianza dipendono da *un parametro in meno*.

- Precisamente, se $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ oppure $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e il processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è stazionario, allora
- il valor medio è costante nel tempo,

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] \quad \text{per ogni } t \in \mathcal{T},$$

Stazionarietà e funzioni di media e covarianza

Se il processo è stazionario, le funzioni di media e covarianza dipendono da *un parametro in meno*.

- Precisamente, se $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ oppure $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e il processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è stazionario, allora
- il valor medio è costante nel tempo,

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] \quad \text{per ogni } t \in \mathcal{T},$$

- l'autocovarianza dipende solamente dalla differenza (assoluta) dei due tempi,

$$C(s,t) = C(0, |t-s|), \quad \text{per ogni } s,\ t \in \mathcal{T}.$$

Stazionarietà e funzioni di media e covarianza

Se il processo è stazionario, le funzioni di media e covarianza dipendono da *un parametro in meno*.

- Precisamente, se $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ oppure $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ e il processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è stazionario, allora
- il valor medio è costante nel tempo,

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] \quad \text{per ogni } t \in \mathcal{T},$$

- l'autocovarianza dipende solamente dalla differenza (assoluta) dei due tempi,

$$C(s,t) = C(0, |t-s|), \quad \text{per ogni } s,\ t \in \mathcal{T}.$$

- In particolare, la varianza $C(s,s) = C(0,0)$ è costante.

Dimostrazione

media

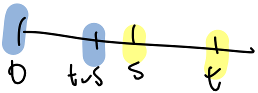
$$\mathbb{E}[X_t] = \int_{\mathbb{R}} x\, p(X_t = x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x\, p(X_0 = x)\, dx$$

$$= \mathbb{E}[X_0]$$

$s<t$

$$R(s,t) = \mathbb{E}[X_s X_t] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} x\, y\, p(X_s = x, X_t = y)\, dx\, dy$$



$$= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} x\, y\, p(X_0 = x, X_{t-s} = y)\, dx\, dy$$

Stazionarietà in senso lato

Il risultato sopra motiva un indebolimento del concetto di stazionarietà.

- Si dice che $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è **stazionario in senso lato**, se

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] \quad \text{per ogni } t,$$

e

$$C(s,t) = C(0, |t-s|), \quad \text{per ogni } s,\ t \in \mathcal{T}.$$

Stazionarietà in senso lato

Il risultato sopra motiva un indebolimento del concetto di stazionarietà.

- Si dice che $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è **stazionario in senso lato**, se

  $$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] \quad \text{per ogni } t,$$

  e

  $$C(s,t) = C(0,|t-s|), \quad \text{per ogni } s,\ t \in \mathcal{T}.$$

- Questa nozione è più debole della stazionarietà *in senso stretto*. Ad esempio non dice nulla sui momenti terzo, quarto ecc. delle marginali.

Processi gaussiani

Diciamo che il processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è **gaussiano**, se ogni variabile congiunta

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_d}), \quad \text{è gaussiana vettoriale,}$$

per qualsiasi scelta $t_1, t_2, \ldots, t_d \in \mathcal{T}$.

- Se il processo è gaussiano e stazionario in senso lato, allora lo è anche in senso stretto: la legge congiunta del processo dipende solo dalla funzione di media e di covarianza, e in particolare i vettori

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_d}), \qquad (X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \ldots, X_{t_d+s})$$

  hanno gli stessi parametri di media e covarianza (quindi la stessa legge).

Esempi

Esempio 1: Rumore bianco gaussiano

Il più semplice processo a stati continui che consideriamo consiste di variabili aleatorie $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$, tutte con la medesima legge *gaussiana e indipendenti*, con media nulla e varianza σ^2: la densità della marginale è quindi

$$p(W_t = w) = \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

- $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è detto **rumore bianco gaussiano** di **intensità** σ^2.

Il termine *rumore* è motivato da modelli di teoria dell'informazione.

- Un messaggio $(M_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è trasmesso tramite un mezzo di comunicazione reale affetto da *distorsione*, perdite ecc.

Il termine *rumore* è motivato da modelli di teoria dell'informazione.

- Un messaggio $(M_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è trasmesso tramite un mezzo di comunicazione reale affetto da *distorsione*, perdite ecc.
- Si suppone che il ricevitore osservi il processo

$$(M_t + W_t)_{t \in \mathcal{T}},$$

dove $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è un rumore bianco gaussiano di una intensità σ^2 (è un parametro che si dovrà stimare).

Il termine *rumore* è motivato da modelli di teoria dell'informazione.

- Un messaggio $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è trasmesso tramite un mezzo di comunicazione reale affetto da *distorsione*, perdite ecc.
- Si suppone che il ricevitore osservi il processo

$$(M_t + W_t)_{t\in\mathcal{T}},$$

  dove $(W_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è un rumore bianco gaussiano di una intensità σ^2 (è un parametro che si dovrà stimare).
- Il rumore è sommato, per questo a volte è detto *additivo*.

Funzione di media e di autocovarianza

Sia $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$ un rumore bianco gaussiano di intensità σ^2.

- La funzione di media è identicamente nulla:

$$t \mapsto \mathbb{E}[W_t] = 0.$$

Funzione di media e di autocovarianza

Sia $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$ un rumore bianco gaussiano di intensità σ^2.

- La funzione di media è identicamente nulla:

$$t \mapsto \mathbb{E}[W_t] = 0.$$

- Ricordando che variabili indipendenti non sono correlate, e inoltre $\mathrm{Var}(W_t) = \sigma^2$ si ha

$$C(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq t, \\ \sigma^2 & \text{se } s = t. \end{cases}$$

Funzione di media e di autocovarianza

Sia $(W_t)_{t\in\mathcal{T}}$ un rumore bianco gaussiano di intensità σ^2.

- La funzione di media è identicamente nulla:
$$t \mapsto \mathbb{E}[W_t] = 0.$$
- Ricordando che variabili indipendenti non sono correlate, e inoltre $\mathrm{Var}(W_t) = \sigma^2$ si ha
$$C(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq t, \\ \sigma^2 & \text{se } s = t. \end{cases}$$
- Notazione $C(s,t) = \sigma^2 \delta_0(t-s)$ usando la delta di Dirac discreta:
$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Funzione di media e di autocovarianza

Sia $(W_t)_{t\in\mathcal{T}}$ un rumore bianco gaussiano di intensità σ^2.

- La funzione di media è identicamente nulla:
$$t \mapsto \mathbb{E}\left[W_t\right] = 0.$$
- Ricordando che variabili indipendenti non sono correlate, e inoltre $\mathrm{Var}\left(W_t\right) = \sigma^2$ si ha
$$C(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq t, \\ \sigma^2 & \text{se } s = t. \end{cases}$$
- Notazione $C(s,t) = \sigma^2 \delta_0(t-s)$ usando la delta di Dirac discreta:
$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
- Il processo è gaussiano e stazionario.

Stima dell'intensità σ^2 dalle osservazioni

Si può stimare σ^2 a partire da n osservazioni $W_{t_i} = w_i$.

- Il problema è lo stesso della stima della varianza di un campione gaussiano (di cui la media è nota e uguale a zero).

Stima dell'intensità σ^2 dalle osservazioni

Si può stimare σ^2 a partire da n osservazioni $W_{t_i} = w_i$.

- Il problema è lo stesso della stima della varianza di un campione gaussiano (di cui la media è nota e uguale a zero).
- In particolare la stima di massima verosimiglianza in questo caso è

$$\sigma^2_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i^2.$$

Perché “bianco”?

- Supponiamo che l'insieme dei tempi sia finito $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Perché “bianco”?

- Supponiamo che l'insieme dei tempi sia finito $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
- La trasformata di Fourier di $(W_t)_{t=0}^{n-1}$ è

$$\hat{W}(\xi) = \sum_{t=0}^{n-1} W_t e^{-2\pi i \xi t/n}.$$

Perché "bianco"?

- Supponiamo che l'insieme dei tempi sia finito $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
- La trasformata di Fourier di $(W_t)_{t=0}^{n-1}$ è

$$\hat{W}(\xi) = \sum_{t=0}^{n-1} W_t e^{-2\pi i \xi t/n}.$$

- Per ciascuna frequenza $\xi \in \{0, \ldots, (n-1)\}$ la variabile aleatoria $\hat{W}(\xi)$ è una combinazione lineare (a coefficienti complessi) di variabili gaussiane indipendenti, quindi è gaussiana.

Perché "bianco"?

- Supponiamo che l'insieme dei tempi sia finito $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
- La trasformata di Fourier di $(W_t)_{t=0}^{n-1}$ è

$$\hat{W}(\xi) = \sum_{t=0}^{n-1} W_t e^{-2\pi i \xi t/n}.$$

- Per ciascuna frequenza $\xi \in \{0, \ldots, (n-1)\}$ la variabile aleatoria $\hat{W}(\xi)$ è una combinazione lineare (a coefficienti complessi) di variabili gaussiane indipendenti, quindi è gaussiana.
- Il valor medio è per linearità

$$\mathbb{E}\left[\hat{W}(\xi)\right] = \sum_{t=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[W_t\right] e^{-2\pi i \xi t/n} = 0,$$

- Il valor medio dell'energia $|\hat{W}(\xi)|^2$ sulla frequenza ξ è costante:

$$\mathbb{E}\left[|\hat{W}(\xi)|^2\right] = \sigma^2 n.$$

- Il valor medio dell'energia $|\hat{W}(\xi)|^2$ sulla frequenza ξ è costante:

$$\mathbb{E}\left[|\hat{W}(\xi)|^2\right] = \sigma^2 n.$$

- Dividendo per il tempo n si trova che la *potenza* media sulla frequenza ξ è costante e pari all'intensità σ^2.

Esempio 2: passeggiata aleatoria gaussiana

Posto $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, n\}$ o eventualmente $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, definiamo

$$S_0 = 0, \quad S_t = W_1 + W_2 + \ldots + W_t = \sum_{s=1}^{t} W_s,$$

dove $(W_s)_s$ è un rumore bianco gaussiano di instensità σ^2.

- Una definizione alternativa *ricorsiva* pone $S_0 = 0$ e per ogni $t \in \mathcal{T}$, $t \geq 1$,

$$S_t = S_{t-1} + W_t.$$

Esempio 2: passeggiata aleatoria gaussiana

Posto $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, n\}$ o eventualmente $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, definiamo

$$S_0 = 0, \quad S_t = W_1 + W_2 + \ldots + W_t = \sum_{s=1}^{t} W_s,$$

dove $(W_s)_s$ è un rumore bianco gaussiano di instensità σ^2.

- Una definizione alternativa *ricorsiva* pone $S_0 = 0$ e per ogni $t \in \mathcal{T}$, $t \geq 1$,
$$S_t = S_{t-1} + W_t.$$
- Il processo si intepreta come una "passeggiata", in cui ogni nuovo "passo" W_t sposta da S_{t-1} in $S_t = S_{t-1} + W_t$. È detto **passeggiata aleatoria gaussiana**.

Funzione di media e di autocovarianza

La media di ciascuna S_t è nulla:

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{t} W_s\right] = \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}[W_s] = 0.$$

- La varianza vale

W_t indipendenti

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_t) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{t} W_i\right) &= \sum_{i=1}^{t} \mathrm{Var}(W_i) \\ &= \sum_{i=1}^{t} \sigma^2 = t\sigma^2.\end{aligned}$$

e non è costante. **La passeggiata aleatoria non è stazionaria.**

$S_t \approx \pm \sqrt{t}\,\sigma$

Funzione di media e di autocovarianza

La media di ciascuna S_t è nulla:

$$\mathbb{E}\left[S_t\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{t} W_s\right] = \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left[W_s\right] = 0.$$

- La varianza vale

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(S_t\right) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{t} W_i\right) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{Var}\left(W_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t} \sigma^2 = t\sigma^2. \end{aligned}$$

  e non è costante. **La passeggiata aleatoria non è stazionaria.**

- Possiamo anche calcolare la funzione di autocovarianza $C(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\}$.

Stima del parametro σ^2

Si può stimare σ^2 partendo da n osservazioni $S_t = s_t$, per $t = 1, 2, \ldots, n$.

- Tramite una *differenza finita* (o derivata discreta) passiamo dalla passeggiata aleatoria al rumore bianco gaussiano:

$$w_t = s_t - s_{t-1}$$

si trovano n osservazioni.

$$S_t = S_{t-1} + W_t$$

Stima del parametro σ^2

Si può stimare σ^2 partendo da n osservazioni $S_t = s_t$, per $t = 1, 2, \ldots, n$.

$S_0 = 0$

- Tramite una *differenza finita* (o derivata discreta) passiamo dalla passeggiata aleatoria al rumore bianco gaussiano:

$$w_t = s_t - s_{t-1}$$

  si trovano n osservazioni.

- La stima di massima verosimiglianza è

$$\sigma^2_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (s_t - s_{t-1})^2.$$

Esempio 3: equazione lineare con smorzamento

Consideriamo una variante della passeggiata aleatoria: prima di ogni nuovo passo *trasformiamo* lo stato tramite una *dilatazione* di un parametro α. In formule:

- posto $(W_i)_i$ un rumore bianco gaussiano di instensità σ^2,

Esempio 3: equazione lineare con smorzamento

Consideriamo una variante della passeggiata aleatoria: prima di ogni nuovo passo *trasformiamo* lo stato tramite una *dilatazione* di un parametro α. In formule:

- posto $(W_i)_i$ un rumore bianco gaussiano di instensità σ^2,
- l'equazione ricorsiva è, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $t \geq 1$,

$$X_t = \alpha X_{t-1} + W_t.$$

Esempio 3: equazione lineare con smorzamento

Consideriamo una variante della passeggiata aleatoria: prima di ogni nuovo passo *trasformiamo* lo stato tramite una *dilatazione* di un parametro α. In formule:

- posto $(W_i)_i$ un rumore bianco gaussiano di instensità σ^2,
- l'equazione ricorsiva è, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $t \geq 1$,

$$X_t = \alpha X_{t-1} + W_t.$$

- Se $\alpha = 1$ è la passeggiata aleatoria.

Esempio 3: equazione lineare con smorzamento

Consideriamo una variante della passeggiata aleatoria: prima di ogni nuovo passo *trasformiamo* lo stato tramite una *dilatazione* di un parametro α. In formule:

- posto $(W_i)_i$ un rumore bianco gaussiano di instensità σ^2,
- l'equazione ricorsiva è, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $t \geq 1$,

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \cancel{W_t}.$$

- Se $\alpha = 1$ è la passeggiata aleatoria.
- Se $|\alpha| < 1$, l'effetto è di riavvicinare X_{t-1} verso l'origine, uno *smorzamento*. Se non ci fosse il rumore, sarebbe esponenziale:

$$X_t = \alpha X_{t-1} = \alpha^2 X_{t-2} = \ldots = \alpha^t X_0.$$

Funzione di media e varianza

Supponiamo che X_0 abbia densità gaussiana di parametri $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ e sia indipendente dal rumore bianco gaussiano.

- La funzione di media del processo è costante e nulla:

  $$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\alpha X_{t-1} + W_t] = \alpha \mathbb{E}[X_{t-1}] + \cancel{\mathbb{E}[W_{t-1}]} = \alpha \mathbb{E}[X_{t-1}],$$

  e quindi, ripetendo t volte,

  $$\mathbb{E}[X_t] = \alpha \mathbb{E}[X_{t-1}] = \alpha^2 \mathbb{E}[X_{t-2}] = \ldots = \alpha^t \mathbb{E}[X_0] = 0.$$

Funzione di media e varianza

Supponiamo che X_0 abbia densità gaussiana di parametri $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ e sia indipendente dal rumore bianco gaussiano.

- La funzione di media del processo è costante e nulla:

  $$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\alpha X_{t-1} + W_t] = \alpha\mathbb{E}[X_{t-1}] + \mathbb{E}[W_{t-1}] = \alpha\mathbb{E}[X_{t-1}],$$

  e quindi, ripetendo t volte,

  $$\mathbb{E}[X_t] = \alpha\mathbb{E}[X_{t-1}] = \alpha^2\mathbb{E}[X_{t-2}] = \ldots = \alpha^t\mathbb{E}[X_0] = 0.$$

- Per la varianza usiamo che X_{t-1} è indipendente da W_t,

  $$\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(\alpha X_{t-1} + W_t) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X_{t-1}) + \sigma^2.$$

  $\cancel{+2\,\mathrm{Cov}(X_{t-1}\alpha, W_t)}$

Condizione di stazionarietà

Sotto quali condizioni la varianza è costante $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 = \sigma_0^2$?
deve valere

$$\sigma_0^2 = \alpha^2 \sigma_0^2 + \sigma^2,$$

da cui

$$\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}.$$

- Il termine $1 - \alpha^2$ deve essere positivo, e quindi troviamo la condizione

$$|\alpha| < 1.$$

Funzione di autocovarianza

$$\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \longrightarrow C(s,s) = C(0,0) = \sigma_0^2$$

$s<t$

$$C(s,t) = Cov(X_s, X_t) = Cov(X_s, \alpha X_{t-1} + W_t)$$

$$= Cov(X_s, \alpha X_{t-1}) + Cov(X_s, W_t)$$

$f(X_0, W_1, W_2, \dots, W_s)$

NON usa W_t

$$= \alpha\, Cov(X_s, X_{t-1}) + 0$$

$$= \alpha\, C(s, t-1)$$

$$\Rightarrow \quad = \alpha^2 C(s, t-2) = \dots = \alpha^{t-s} C(s,s)$$

$$= \alpha^{t-s} \sigma_0^2$$

Funzione di autocorrelazione

La funzione di autocorrelazione è $\rho(t) = \alpha^t = ACF_X(0, t)$

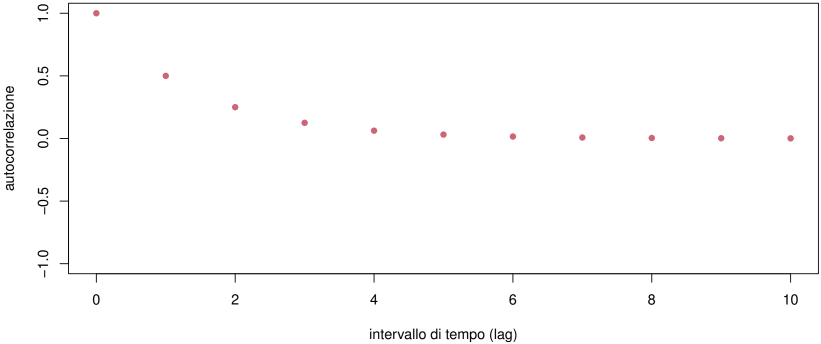


Figure 1: funzione di autocorrelazione dell'equazione lineare con smorzamento per $\alpha = 1/2$

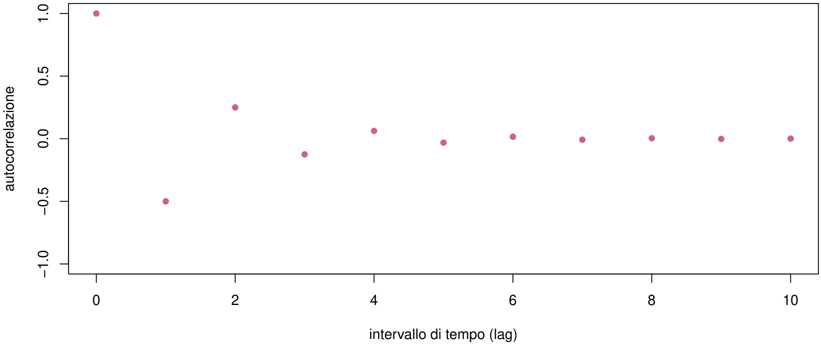


Figure 2: funzione di autocorrelazione dell'equazione lineare con smorzamento per $\alpha = -1/2$

Stima dei parametri

Possiamo stimare i parametri α e σ^2 da $n+1$ osservazioni $X_t = x_t$ per $t = 0, 1, \ldots, n$.

- Ci riconduciamo a n osservazioni di rumore bianco gaussiano

$$w_t = x_t - \alpha x_{t-1}.$$

$$X_t = \alpha X_{t-1} + W_t$$

Stima dei parametri

Possiamo stimare i parametri α e σ^2 da $n+1$ osservazioni $X_t = x_t$ per $t = 0, 1, \ldots, n$.

- Ci riconduciamo a n osservazioni di rumore bianco gaussiano

$$w_t = x_t - \alpha x_{t-1}.$$

- La stima di massima verosimiglianza si ottiene minimizzando

$$(\alpha, \sigma^2) \mapsto \sum_{t=1}^{n} \frac{(x_t - \alpha x_{t-1})^2}{\sigma^2} - n \log(\sigma^2)$$

  In particolare, α_{MLE} minimizza la somma dei quadrati dei "residui"

$$\boxed{\alpha \mapsto \sum_{t=1}^{n} (x_t - \alpha x_{t-1})^2,}$$

Stima dei parametri

Possiamo stimare i parametri α e σ^2 da $n+1$ osservazioni $X_t = x_t$ per $t = 0, 1, \dots, n$.

- Ci riconduciamo a n osservazioni di rumore bianco gaussiano
$$w_t = x_t - \alpha x_{t-1}.$$
- La stima di massima verosimiglianza si ottiene minimizzando
$$(\alpha, \sigma^2) \mapsto \sum_{t=1}^{n} \frac{(x_t - \alpha x_{t-1})^2}{\sigma^2} - n \log(\sigma^2)$$
In particolare, α_{MLE} minimizza la somma dei quadrati dei "residui"
$$\alpha \mapsto \sum_{t=1}^{n} (x_t - \alpha x_{t-1})^2,$$
pendenza
- Si trova $\alpha_{\mathrm{MLE}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t x_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}^2}$, $\sigma^2_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (x_t - \alpha_{\mathrm{MLE}} x_{t-1})^2$.

Modelli ARIMA

Introduzione

Introduciamo una famiglia generale di processi, detti ARIMA: **A**uto**R**egressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage.

- Studiamo separatamente i tre "ingredienti" di un processo ARIMA:

Introduzione

Introduciamo una famiglia generale di processi, detti ARIMA: **A**uto**R**egressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage.

- Studiamo separatamente i tre "ingredienti" di un processo ARIMA:

1. la componente autoregressiva (AR)

Introduzione

Introduciamo una famiglia generale di processi, detti ARIMA: **A**uto**R**egressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage.

- Studiamo separatamente i tre "ingredienti" di un processo ARIMA:

1. la componente autoregressiva (AR)
2. quella a media mobile (MA)

Introduzione

Introduciamo una famiglia generale di processi, detti ARIMA: **A**uto**R**egressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage.

- Studiamo separatamente i tre “ingredienti” di un processo ARIMA:

1. la componente autoregressiva (AR)
2. quella a media mobile (MA)
3. il procedimento di integrazione (I) a tempi discreti.

Introduzione

Introduciamo una famiglia generale di processi, detti ARIMA: **A**uto**R**egressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage.

- Studiamo separatamente i tre "ingredienti" di un processo ARIMA:

1. la componente autoregressiva (AR)
2. quella a media mobile (MA)
3. il procedimento di integrazione (I) a tempi discreti.

- Supponiamo che che $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, n\}$ oppure $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ o anche $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, e che $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$ sia un rumore bianco gaussiano di intensità σ^2.

Operatore di Lag

Introduciamo l'operatore L che trasforma

$$(X_t)_{t\in\mathcal{T}} \mapsto ((LX)_t)_{t\in\mathcal{T}} = (X_{t-1})_{t\in\mathcal{T}}$$

- Scriviamo semplicemente LX_t invece di $(LX)_t$.

Operatore di Lag

Introduciamo l'operatore L che trasforma

$$(X_t)_{t\in\mathcal{T}} \mapsto ((LX)_t)_{t\in\mathcal{T}} = (X_{t-1})_{t\in\mathcal{T}}$$

- Scriviamo semplicemente LX_t invece di $(LX)_t$.
- L è lineare:

$$L(X+Y)_t = X_{t-1} + Y_{t-1} = LX_t + LY_t, \quad L(cX)_t = cLX_t.$$

Operatore di Lag

Introduciamo l'operatore L che trasforma

$$(X_t)_{t\in\mathcal{T}} \mapsto ((LX)_t)_{t\in\mathcal{T}} = (X_{t-1})_{t\in\mathcal{T}}$$

- Scriviamo semplicemente LX_t invece di $(LX)_t$.
- L è lineare:

  $$L(X+Y)_t = X_{t-1} + Y_{t-1} = LX_t + LY_t, \quad L(cX)_t = cLX_t.$$

- Componendo L con se stesso si ottengono ritardi di ordine superiore: $L^2X_t = LLX_t = X_{t-2}$, $L^3X_t = X_{t-3}$, ecc.

Operatore di Lag

Introduciamo l'operatore L che trasforma

$$(X_t)_{t\in\mathcal{T}} \mapsto ((LX)_t)_{t\in\mathcal{T}} = (X_{t-1})_{t\in\mathcal{T}}$$

- Scriviamo semplicemente LX_t invece di $(LX)_t$.
- L è lineare:

$$L(X+Y)_t = X_{t-1} + Y_{t-1} = LX_t + LY_t, \quad L(cX)_t = cLX_t.$$

- Componendo L con se stesso si ottengono ritardi di ordine superiore: $L^2X_t = LLX_t = X_{t-2}$, $L^3X_t = X_{t-3}$, ecc.
- Espressioni del tipo

$$a_0X_t + a_1X_{t-1} + \ldots + a_kX_{t-k} = a_0X_t + a_1LX_t + a_2L^2X_t + \ldots a_kL^kX_t$$

si possono abbreviare come

$$p(L)X_t = (a_0 + a_1L + a_2L^2 + \ldots a_kL^k)X_t.$$

Modelli AR

I modelli autoregressivi generalizzano l'equazione lineare con smorzamento.

- L'equazione

$$X_t = \alpha X_{t-1} + W_t$$

è una regressione lineare semplice di X_t rispetto a X_{t-1}.

$$\underbrace{X}_{\text{fattore di uscita}} = \alpha \underbrace{LX}_{\text{ingresso}} + \overbrace{W}^{\text{residuo}}$$

Modelli AR

I modelli autoregressivi generalizzano l'equazione lineare con smorzamento.

- L'equazione
$$X_t = \alpha X_{t-1} + W_t$$
è una regressione lineare semplice di X_t rispetto a X_{t-1}.
- Si estende ad una regressione lineare multipla su $p \geq 1$ istanti precedenti.

Modelli AR

I modelli autoregressivi generalizzano l'equazione lineare con smorzamento.

- L'equazione

$$\boxed{X_t = \alpha X_{t-1} + W_t \qquad \text{AR}(1)}$$

  è una regressione lineare semplice di X_t rispetto a X_{t-1}.

- Si estende ad una regressione lineare multipla su $p \geq 1$ istanti precedenti.

- Dato $p \geq 0$, un processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è detto AR(p) (autoregressivo di ordine p) se esistono parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $t \in \mathcal{T}$ (tale che $t - p \in \mathcal{T}$) si abbia

$$\boxed{X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + W_t.} \quad \text{AR}(p)$$

Notazione compatta

Possiamo scrivere la ricorsione

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + W_t.$$

in modo compatto:

$$p(L) X_t = W_t,$$

dove $p(L)$ è il polinomio formale nella variabile L dato da

$$p(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p = 1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i L^i.$$

Media mobile

La media mobile su una finestra temporale sinistra di ampiezza $q \geq 1$, trasforma un processo $(Z_t)_{t \in \mathcal{T}}$ con le medie

$$\bar{Z}_t = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} Z_{t-i}.$$

- È caso particolare di *convoluzione* $Z * g$ tra il processo e il filtro

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } t = 0, 1, \ldots, (q-1) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Convoluzione e stazionarietà

Data una qualsiasi sia g (nota e fissata), se il processo Z è stazionario (in senso lato o anche in senso stretto), anche $Z * g$ lo è (nello stesso senso).

- Infatti, la funzione di media è

$$\mathbb{E}\left[(Z * g)_t\right] = \mathbb{E}\left[\sum_i Z_{t-i} g(i)\right] = \sum_i \mathbb{E}\left[Z_{t-i}\right] g(i) = \underbrace{m \sum_i g(i)}_{\text{non dipende da } t},$$

avendo indicato con $m = \mathbb{E}\left[Z_s\right]$.

Convoluzione e stazionarietà

Data una qualsiasi sia g (nota e fissata), se il processo Z è stazionario (in senso lato o anche in senso stretto), anche $Z * g$ lo è (nello stesso senso).

- Infatti, la funzione di media è

$$\mathbb{E}\left[(Z * g)_t\right] = \mathbb{E}\left[\sum_i Z_{t-i} g(i)\right] = \sum_i \mathbb{E}\left[Z_{t-i}\right] g(i) = m \sum_i g(i),$$

  avendo indicato con $m = \mathbb{E}\left[Z_s\right]$.

- La funzione di autocovariaza è, usando la bilinearità,

$$C(s,t) = \mathrm{Cov}\left((Z * g)_s, (Z * g)_t\right) = \sum_i \sum_j g(i) g(j)\, \underbrace{\mathrm{Cov}\left(Z_{s-i}, Z_{t-j}\right)}_{\text{dipende solo da } (t-j)-(s-i) \,=\, \underline{\underline{t-s}}}$$

$$= \sum_i \sum_j g(i) g(j) C((t-s) + (i-j))$$

  che dipende da $t - s$ solamente.

Modelli MA

Dato $q \geq 0$, un processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è detto MA(p) (a media mobile di ordine q) se esistono parametri $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $t \in \mathcal{T}$ (tale che $t - q \in \mathcal{T}$) si abbia

$$X_t = W_t + \beta_1 W_{t-1} + \beta_2 W_{t-2} + \ldots + \beta_q W_{t-q}.$$

- Un processo a media mobile MA(q) è semplicemente del tipo $W * g$, dove g è dato dai coefficienti 1, β_1, β_2, ..., β_q (e nullo altrove). In particolare, X è **gaussiano** e **stazionario**.

Modelli MA

Dato $q \geq 0$, un processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è detto MA(p) (a media mobile di ordine q) se esistono parametri $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $t \in \mathcal{T}$ (tale che $t - q \in \mathcal{T}$) si abbia

$$X_t = W_t + \beta_1 W_{t-1} + \beta_2 W_{t-2} + \dots + \beta_q W_{t-q}.$$

- Un processo a media mobile MA(q) è semplicemente del tipo $W * g$, dove g è dato dai coefficienti 1, β_1, β_2, ..., β_q (e nullo altrove). In particolare, X è **gaussiano e stazionario**.
- Con il polinomio dell'operatore ritardo riscriviamo

$$X_t = q(L) W_t,$$

dove

$$q(L) = 1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q = 1 + \sum_{j=1}^{q} \beta_q L^j.$$

Integrazione discreta

Consideriamo l'operazione di derivazione discreta: la derivata di un processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ a tempi discreti è

$$X_t - X_{t-1} = (1 - L)X_t,$$

per $t \geq 1$.

- Iterando, si trova

$$(1 - L)^d X_t = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (-1)^i L^i X_t.$$

Integrazione discreta

Consideriamo l'operazione di derivazione discreta: la derivata di un processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ a tempi discreti è

$$X_t - X_{t-1} = (1 - L)X_t,$$

per $t \geq 1$.

- Iterando, si trova

$$(1 - L)^d X_t = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (-1)^i L^i X_t.$$

- La formula è una convoluzione $X * g$: se X è stazionario, lo è anche ogni derivata discreta di qualsiasi ordine d.

L'integrazione discreta è l'inversa della derivata discreta: X è l'integrale discreto di Y se vale $(1-L)X = Y$, e similmente per gli integrali iterati.

- la passeggiata aleatoria gaussiana, $S_t = S_{t-1} + W_t$, ossia $(1-L)S_t = W_t$ è l'integrale di W_t.

L'integrazione discreta è l'inversa della derivata discreta: X è l'integrale discreto di Y se vale $(1-L)X = Y$, e similmente per gli integrali iterati.

- la passeggiata aleatoria gaussiana, $S_t = S_{t-1} + W_t$, ossia $(1-L)S_t = W_t$ è l'integrale di W_t.
- l'integrazione discreta non mantiene la stazionarietà di un processo.

Definizione generale ARIMA

Dati $p, d, q \geq 0$, un processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è detto ARIMA(p, d, q) se esistono parametri $(\alpha_i)_{i=1}^{p}$, $(\beta_j)_{j=1}^{q}$ reali tali che, per ogni $t \in \mathcal{T}$ (tale che $t - d - p$ e $t - q \in \mathcal{T}$), posto

$$Y_t = (1 - L)^d X_t$$

valga

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i Y_{t-i} + W_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j W_{t-j}.$$

- Usando i polinomi

  $$p(L) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i L^i, \quad \text{e} \quad q(L) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j L^j$$

  si può scrivere in forma compatta:

  $$p(L)(1 - L)^d X_t = q(L) W_t.$$

Esempi

- il rumore bianco gaussiano è ARIMA$(0, 0, 0)$,

Esempi

- il rumore bianco gaussiano è ARIMA$(0, 0, 0)$,
- la passeggiata aleatoria è ARIMA$(0, 1, 0)$

Esempi

- il rumore bianco gaussiano è ARIMA$(0,0,0)$,
- la passeggiata aleatoria è ARIMA$(0,1,0)$
- l'equazione lineare con smorzamento è ARIMA$(1,0,0)$.