Teoria dei Sistemi e del Controllo - 03-02-2022

1. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato, in forma di stato, dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Portare il sistema in forma di Kalman. Determinare la stabilitá interna e BIBO del sistema.

   (b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

   (c) Si determini se (e se ne fornisca una motivazione) i seguenti andamenti sono visibili nell'evoluzione libera o nell'evoluzione forzata dell'uscita: a) e^{2t}, b) $2e^{-t}$, c) t, d) $e^{-t}\sin(2t)$, e) $t\sin(2t)$.

2. Si consideri il sistema **tempo discreto**

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1^3(k) + x_2^3(k) \\ x_2(k+1) = ax_2(k) - x_2^3(k) \end{cases}$$

   - Si determinino gli equilibri del sistema al variare di $a \leq 1$ e se ne studino le proprietà di stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov.
   - Per i valori di a per cui non è stato possibile concludere la proprietà di stabilità dell'equilibrio con il metodo indiretto procedere con altri metodi. Suggerimento: per il caso $a = -1$, si studi la stabilità dell'origine con la funzione di una sola variabile $V(x_2) = x_2^2$.

3. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

   - Si determini per quali valori di α e β il sistema è controllabile.
   - Si determini per quali valori di α e β il sistema è stabilizzabile.
   - Scelti valori opportuni per α e β si determini un controllore nella forma $u(t) = Kx(t)$ che sia stabilizzante.
   - Scelti valori opportuni per α e β si determini un controllore nella forma $u(t) = Kx(t)$ tale che il sistema a ciclo chiuso sia stabile e che il suo modo più lento converga a zero velocemente almeno quanto e^{-3t}.

4.

5. Il candidato enunci e dimostri il **Teorema Fondamentale del Calcolo delle Variazioni**. *Nota: si richiede una dimostrazione formale con discussione dei passaggi non un mero elenco di formule!*