Esercizio di tipologia 2 – controllo ottimo

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto, lineare e tempo invariante, descritto dalle seguenti equazioni di stato:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

con condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$*. Si determini se possibile il controllo ottimo su un orizzonte di due passi sotto le seguenti condizioni:*

- *Costo dello stato finale:* $\mathbf{x}^T(2) \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \mathbf{x}(2)$*;*
- *Costo degli stati intermedi: nessuno;*
- *Costo dell'azione di controllo:* $6u^2(k)$ *per ogni valore di k*

Giustificare succintamente ogni affermazione

Notizie utili:

$$\underline{u}_i^o = -L_i \underline{x}_i \qquad L_i = [(P + B^T T_{i+1} B)^{-1} B^T T_{i+1} A] \quad \text{con } i = 0, 1, ..., N-1$$

$$J_i^o(\underline{x}_i) = \underline{x}_i^T T_i \underline{x}_i \qquad T_i = V + A^T [T_{i+1} - T_{i+1} B (P + B^T T_{i+1} B)^{-1} B^T T_{i+1}] A$$

$$i = N-1, N-2, ..., 0$$

$$T_N = V_N \qquad T_i = F_i(T_{i+1})$$

(nota: lo scopo di questa tipologia di esercizio è di verificare che lo studente sappia correttamente passare dalle formule generali delle equazioni del controllo ottimo ai casi particolari proposti. I casi particolari si prestano usualmente a soluzioni ricorsive o anche analitiche facilmente ottenibili con carta e matita. Le formule generali più complesse saranno sempre fornite assieme al testo dell'esercizio, nella stessa forma in cui sono presentate nelle dispense e/o nel materiale didattico distribuito. L'equazione di Riccati NON VA MEMORIZZATA!)

Soluzione proposta:

Riporto innanzitutto i dati dell'esercizio in relazione con le formule generali. In particolare, P, matrice della forma quadratica di peso del controllo, è uno scalare pari a 6. $\boldsymbol{V}_N$, matrice della forma quadratica di peso dello stato finale, è pari a 100**I**, dove **I** è la matrice identica di dimensione 2x2. Le matrici delle forme quadratiche di peso degli stati intermedi **V** sono nulle.

Osservo che il problema ammette soluzione perché P è invertibile (scalare diverso da zero); inoltre, essendo 2 lo stato finale e 0 lo stato iniziale, devo determinare le matrici di guadagno in retroazione al passo 0 e al passo 1. A tal fine, procediamo a ritroso a partire dallo stato finale.

Stato finale 2, matrice $\mathbf{L_1}$

Calcoliamo i vari contributi. Determiniamo preliminarmente il termine $(P + B^T T_2 B)^{-1}$:

$$\left(6 + [0 \quad 1]100\mathbf{I}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{106}$$

Il guadagno in retroazione al passo 1 è quindi dato da:

$$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{106}[0 \quad 1]\ 100\mathbf{I}\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1/2\end{bmatrix} = \frac{50}{53}[0 \quad 1/2]$$

Matrice $\mathbf{T_1}$

Osservo che la matrice $\mathbf{T_1}$ è esprimibile in funzione di $\mathbf{L_1}$, appena calcolata, in quanto in generale:

$$T_i = V + A^T T_{i+1}(A - BL_i)$$

Nel nostro caso:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}100\mathbf{I}\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} - \frac{50}{53}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right) =$$

$$= 100\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} - \frac{50}{53}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\right) =$$

$$= 100\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & \frac{3}{106}\end{bmatrix} = 100\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & \frac{215}{212}\end{bmatrix}$$

Stato finale 2, matrice $\mathbf{L_0}$

Come in precedenza, Determiniamo preliminarmente il termine $(P + B^T T_1 B)^{-1}$:

$$\left(6 + [0 \quad 1]100\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & \frac{215}{212}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)^{-1} = 6 + 100\frac{215}{212} \cong 107{,}41$$

Il guadagno in retroazione al passo 2 è quindi dato da:

$$\mathbf{L}_0 = \frac{1}{107{,}41}[0 \quad 1]\ 100\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & \frac{215}{212}\end{bmatrix} = \frac{100}{107{,}41}\begin{bmatrix}-2 & \frac{215}{212}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1/2\end{bmatrix} \cong 0{,}93[-4 \quad 2{,}51]$$

Avendo determinato le matrici di guadagno in retroazione e non essendo richiesto il calcolo del costo ottimo, non occorre iterare nuovamente l'equazione di Riccati. La parte backward è terminata, possiamo ora eseguire la parte in avanti e determinare la sequenza di controllo ottimo:

$$u^o(0) = -\mathbf{L}_0\mathbf{x}(0) \quad \cong 30{,}27$$

Determino lo stato successivo attraverso le equazioni dinamiche del sistema:

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 30{,}27 \cong \begin{bmatrix} 15 \\ 27{,}78 \end{bmatrix}$$

Determino il controllo ottimo al tempo 1:

$$u^o(1) = -\mathbf{L}_1 \mathbf{x}(1) \quad \cong -13{,}1$$

La sequenza di controllo ottimo a partire dalle condizioni iniziali date è quindi:

$$u^o(0) = 30{,}27$$

$$u^o(1) = -13{,}1$$

(Nota: iterando le equazioni dinamiche, lo stato al secondo e ultimo passo risulta [2,23 ; 0,78]; provate a risolvere l'esercizio togliendo ogni peso al controllo, oppure aumentando la penalità sullo stato finale, oppure calcolando il costo totale, cambiando le condizioni iniziali, ecc.)

(SE&O)