Teoria dei Sistemi e del Controllo - 16-02-2023

1. Dato il sistema non lineare tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)^2 - x_2(t) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$.
   - Per $a \neq 0$ riportare gli andamenti delle traiettorie nel piano (x_1, x_2).
   - Per tutti i punti di equilibrio ottenuti al punto 1, se ne studino le proprietà di stabilità.

2. Dato il sistema descritto dalle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Si fornisca la definizione di stati indistinguibili. Successivamente si caratterizzino gli stati indistinguibili dallo stato $x(0) = (-1\ 0\ 1)$.
   - Si determinino gli andamenti visibili nell'evoluzione forzata dello stato.
   - Si descriva la procedura per il calcolo della matrice di cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman. Calcolare la matrice per il sistema fornito.

3. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = Cx$$

   si determini :

   - se il sistema e' stabilizzabile mediante retroazione dello stato usando un solo ingresso. Se si, si determini per quali ingressi;
   - una matrice K di retroazione dello stato in modo che, per qualunque stato iniziale, l'evoluzione libera del sistema tenda a zero piu' velocemente di e^{-t};
   - una matrice K' di retroazione dello stato in modo che, con ingresso nullo e per qualunque stato iniziale, l'uscita del sistema tenda a zero non piu' lentamente di e^{-2t}.

4. si consideri il sistema, con $\beta \in [0, 1]$ (intervallo chiuso $0 \to 1$):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix} x = Cx$$

   si determini:

   - per quali valori di β non esistono stimatori asintotici dello stato;
   - per quali valori di β non esistono stimatori asintotici dello stato che utilizzano una sola uscita del sistema.