

1. Si consideri il sistema **tempo discreto**

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + x_1(k)u(k) \\ x_2(k+1) = x_2^2(k) + x_2(k)u(k) \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio per ingressi costanti $u = \bar{u}$.
- Si studi la stabilità dei punti ottenuti al passo precedente con il metodo indiretto di Lyapunov
- Per i punti di equilibrio determinati al primo punto, si commenti sull'esistenza di ingressi lineari o affini che rendano l'equilibrio asintoticamente stabile.

2. Si consideri il sistema **tempo discreto** descritto dalle equazioni alle differenze

$$y(k+3) - \frac{1}{2}y(k+2) - \frac{1}{2}y(k+1) = u(k+2) + \frac{3}{2}u(k+1) + \frac{1}{2}u(k)$$

- scrivere una realizzazione di dimensione $n = 3$ per il sistema e studiarne le proprietà di raggiungibilità e osservabilità, studiare inoltre la stabilità interna e BIBO.
- Commentare per questo sistema le proprietà di controllabilità a zero e di ricostruibilità dello stato.
- Determinare una realizzazione minima del sistema.

3. Sia dato il sistema tempo continuo :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^3, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

si dica:

- Il sistema è stabilizzabile? se si per quali valori di α ?
- Il sistema è completamente raggiungibile? se si per quali valori di α ?

Si progetti, se possibile, scelto un opportuno valore di α , un controllore a retroazione dello stato del tipo $u(t) = Kx(t)$ in modo tale che il sistema a ciclo chiuso abbia gli autovalori in $\{-2, -3, -4\}$.

4. Si consideri il sistema LTI SISO:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

ed una legge di controllo del tipo $u = Kx$, con K matrice costante di dimensioni appropriate.

Si dimostrino, in maniera formale, le seguenti affermazioni:

- se la coppia (A, B) è controllabile, è possibile assegnare tutti i poli del sistema a ciclo chiuso;
- non è possibile modificare i modi non controllabili del sistema;
- il sistema a ciclo chiuso $(A + BK, B)$ mantiene la stessa proprietà di raggiungibilità del sistema a ciclo aperto (A, B) ;
- il sistema a ciclo chiuso $(A + BK, C)$ potrebbe non mantenere la stessa proprietà di osservabilità del sistema a ciclo aperto (A, C) ;
- in nessun caso è possibile modificare gli zeri del sistema;
- non è possibile cambiare il grado relativo del sistema;