Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 16

Dario Trevisan – *https://web.dm.unipi.it/trevisan*

12/11/2025

Problemi vari

Problema 1

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.

Problema 1

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, posta T_k una variabile aleatoria con densità f_k, calcolare il valor medio di T_k.

Problema 1

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, posta T_k una variabile aleatoria con densità f_k, calcolare il valor medio di T_k.
3. Sia $K \in \{0, 1, 2\}$ una variabile con densità discreta $P(K = k) \propto 1 + k$ e T una variabile tale che, sapendo $K = k$, ha densità f_k. Avendo osservato $T \leq 1$, fornire una stima di K.

Risoluzione problema 1

Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare) $\omega \in (0, \pi)$, si consideri una variabile aleatoria uniforme continua T sull'intervallo $[0, 1]$ e si ponga $Y_\omega := \cos(\omega T)$.

1. Scrivere esplicitamente la densità di Y_ω (in funzione di ω).

Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare) $\omega \in (0, \pi)$, si consideri una variabile aleatoria uniforme continua T sull'intervallo $[0, 1]$ e si ponga $Y_\omega := \cos(\omega T)$.

1. Scrivere esplicitamente la densità di Y_ω (in funzione di ω).
2. Calcolare il valor medio di Y_ω (in funzione di ω).

Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare) $\omega \in (0, \pi)$, si consideri una variabile aleatoria uniforme continua T sull'intervallo $[0, 1]$ e si ponga $Y_\omega := \cos(\omega T)$.

1. Scrivere esplicitamente la densità di Y_ω (in funzione di ω).
2. Calcolare il valor medio di Y_ω (in funzione di ω).
3. Calcolare la mediana di Y_ω (in funzione di ω).

Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

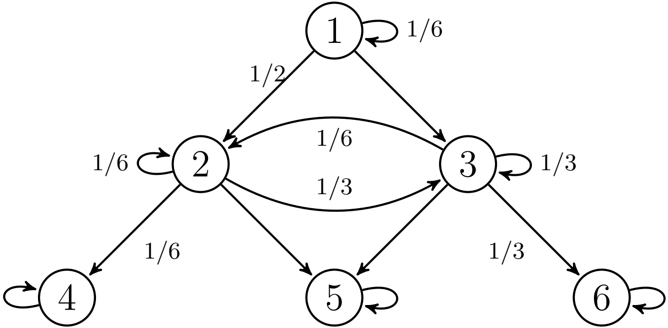
Dato un parametro (frequenza angolare) $\omega \in (0, \pi)$, si consideri una variabile aleatoria uniforme continua T sull'intervallo $[0, 1]$ e si ponga $Y_\omega := \cos(\omega T)$.

1. Scrivere esplicitamente la densità di Y_ω (in funzione di ω).
2. Calcolare il valor medio di Y_ω (in funzione di ω).
3. Calcolare la mediana di Y_ω (in funzione di ω).
4. Si osserva $Y_\omega = 1/2$. Determinare, se possibile, una stima di massima verosimiglianza per ω.

Risoluzione problema 2

Problema 3 (Esercizio 3 prova 2023-02-01)

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.

1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 4|X_1 = 1)$.

1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 4|X_1 = 1)$.
3. Posta $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{A, B, C\}$ definita da

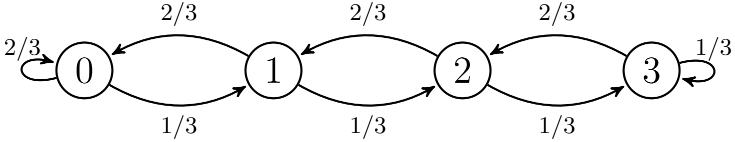
$$g(1) = A, \quad g(2) = g(3) = B, \quad g(4) = g(5) = g(6) = C,$$

si ponga $Y_n = g(X_n)$. Supponendo che $X_0 = 1$, dire se $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ è anch'essa una catena di Markov e in caso affermativo calcolarne la matrice di transizione.

Risoluzione problema 3

Problema 4 (Esercizio 3 prova 2025-04-14)

Si consideri una catena di Markov *stazionaria* $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti).



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. % parametri a, $b \in [0, 1]$ in modo tale che la distribuzione uniforme sugli stati sia una distribuzione invariante.

1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. % parametri a, $b \in [0, 1]$ in modo tale che la distribuzione uniforme sugli stati sia una distribuzione invariante.
2. Descrivere esplicitamente la funzione di ripartizione (CDF) di X_3.

1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. % parametri a, $b \in [0, 1]$ in modo tale che la distribuzione uniforme sugli stati sia una distribuzione invariante.
2. Descrivere esplicitamente la funzione di ripartizione (CDF) di X_3.
3. Sapendo che $X_1 \neq 0$, è più probabile che sia $X_0 = 0$ o $X_0 \neq 0$?

Risoluzione problema 4