Teoria dei Sistemi e del Controllo - 07-07-2022

1. Dato il sistema non lineare tempo discreto in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -\frac{1}{3}x_1(k) + \alpha x_1^2(k) + 2u(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) = 2x_1(k)x_2(k) + \frac{1}{3}x_2(k) \end{cases}$$

   - Per $u(k) = 0$ determinare i punti di equilibrio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e se ne studino le proprietà di stabilità.
   - Si commenti l'esistenza di ingressi affini negli stati che rendano asintoticamente stabili i punti di equilibrio instabili determinati al punto 1.
   - Si scriva il sistema linearizzato in forma di stato intorno ad una generica coppia ingresso stato di equilibrio $(\bar{u}, \bar{x})$ riportando esplicitamente stati e ingressi del sistema.

2. Dato il sistema **tempo continuo** rappresentato dalla matrice dinamica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

   - Calcolare gli equilibri del sistema;
   - Studiare i modi del sistema e determinare gli stati iniziali che forniscono una evoluzione libera dello stato con andamenti periodici.
   - Date le seguenti matrici di ingresso e uscita determinare una matrice di cambio di base che porta il sistema in forma canonica di Kalman

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Il candidato, considerando un generico sistema lineare tempo invariante tempo continuo,
   - ricavi l'espressione analitica dell'insieme dei punti raggiungibili nell'intervallo di tempo $[t_0, t_f]$ a partire da un generico stato $x^* = x(t_0)$;
   - si caratterizzi (come spazio/sottospazio o altro), fornendo opportuna dimostrazione/spiegazione, tale insieme nel caso in cui:
     - il sistema sia raggiungibile;
     - il sistema non sia raggiungibile ma x^* lo è;
     - il sistema non sia raggiungibile e x^* non lo è;

4. il candidato dica se è vera o falsa, e lo dimostri, la seguente frase: "dato il punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ di un sistema non lineare, anche se la matrice dinamica A del sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$ ha autovalori nulli, è possibile progettare un controllore lineare del tipo $u = K(x - \bar{x}) + \bar{u}$ che, progettato per stabilizzare il sistema linearizzato, stabilizzi anche il sistema non lineare ".

5. Il candidato formuli e proponga una soluzione al problema dell'inseguitore ottimo per un sistema lineare tempo continuo tempo invariante: trovare $u(t)$ che fa si che lo stato $x(t)$, nell'intervallo di tempo (t_0, t_f), insegua e converga al segnale di riferimento $r(t)$, con peso ma senza vincoli sul valore finale dell'errore di inseguimento, moderando al contempo il transitorio dello stato $x(t)$e l'ampiezza del controllo $u(t)$.