

1. Si consideri il sistema lineare **tempo discreto** descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

- Si studi l'osservabilità e la raggiungibilità del sistema indicando, in particolare, la dimensione dello spazio raggiungibile e dello spazio inosservabile al variare del parametro β . Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema.
- Si studi la stabilità interna al variare di $\beta \in \mathbb{R}$
- Per $\beta = 1$, si determinino le condizioni di esistenza di condizioni iniziali $x(0)$ che sono compatibili con le osservazioni $y(0) = 0$, $y(1) = 3$ e $y(2) = 7$ in corrispondenza alla sollecitazione in ingresso $u(0) = \alpha$ e $u(1) = 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In caso di esistenza si calcolino tutte le condizioni iniziali ammissibili.

2. Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (a^2 - 1)x_1 - ax_2 - 2x_2^3 + u \end{aligned}$$

- per $u = 0$ determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro a ;
- per $u = 0$, studiare la stabilità del sistema nell'origine per $a \neq 1$;
- Per $a = 1$ si determini un ingresso u non nullo che renda l'origine asintoticamente stabile.

3. Dato il sistema SISO tempo discreto

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

chiuso in retroazione con il controllore $u_k = K(r_k - x_k)$, con K matrice di guadagni e r_k ingresso esogeno di riferimento;

- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinché la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
- si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.

4. Si consideri il sistema lineare tempo invariante $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo :

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_fx(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^T R u \, dt$$

lo studente: proponga ricavi

- proponga condizioni necessarie sulle matrici S_f , ed R ;
- descriva in maniera analitica la procedura che porta alla soluzione del problema di ottimizzazione, incluso le necessarie condizioni al contorno, e all'espressione del controllo ottimo $u(t)$,