Teoria dei Sistemi e del Controllo - 13-06-2024

1. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_2^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_1^4(t) + u(t) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio ad ingresso nullo;
   - Rappresentare nello spazio delle fasi l'andamento delle traiettorie del sistema e studiare le proprietà di stabilità dei punti di equilibrio trovati;
   - Determinare, se possibile, un ingresso che renda asintoticamente stabile l'equilibrio instabile ottenuto al punto precedente;

2. Dato il sistema **tempo discreto** formato dalla interconnessione in serie dei sistemi descritti dalle seguenti equazioni alle differenze:

$$\Sigma_1 : \; y_1(k+1) = 2u_1(k) - 2y_1(k)$$

$$\Sigma_2 : \; y_2(k+2) = y_2(k+1) - 2y_2(k) + u_2(k+1) + 2u_2(k)$$

   (a) Si scriva la forma di stato di dimensione 3 del sistema interconnesso.

   (b) Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman commentando i risultati ottenuti;

   (c) Si determini se i seguenti stati sono raggiungibili a partire dallo stato iniziale $x_0 = (1\ 0\ 0)^T$ in uno o in due passi (specificando nel caso il numero di passi): $x_1 = (\alpha\ 0\ 1)^T$, $x_2 = (\alpha\ 0\ 2)^T$, $x_3 = (\alpha\ 2\ 3)^T$, con α qualsiasi.

3. Si consideri il sistema LTI SISO **tempo discreto**:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

   ed un controllore lineare del tipo $u(k) = Kx(k)$, con K matrice costante di dimensioni appropriate.

   Si dica se sono vere o false, **proponendo una dimostrazione formale**, le seguenti affermazioni:

   - se la coppia (A, B) è controllabile, e' possibile assegnare tutti i poli del sistema a ciclo chiuso;
   - se la coppia (A, B) è raggiungibile, e' possibile assegnare tutti i poli del sistema a ciclo chiuso;
   - non e' possibile modificare i modi non raggiungibili del sistema;
   - tramite il controllore e' possibile modificare gli zeri del sistema;
   - tramite un appropriata scelta di K è possibile modificare il grado relativo del sistema;

4. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) = Cx(t)$$

   - Si dica per quali valori di α e β il sistema è detettabile, e per quali valori è osservabile;
   - si dica per quali valori di α e β il sistema è stabilizzabile e per quali valori è controllabile;
   - si scelgano α e β appropriati e:
     - si progetti un controllore stabilizzante del tipo $u(t) = Kx(t)$ così da avere il maggior numero possibile di poli a ciclo chiuso in -1
     - si progetti uno stimatore, di ordine intero o ridotto, così che l'errore di stima si annulli velocemente almeno come e^{-3t}.