Esercizio di tipologia 1 – progetto di controllore e osservatore

(nota: sulla base del tempo richiesto agli altri esercizi, un esercizio di tipologia 1 potrà limitarsi al progetto del solo controllore o del solo osservatore)

Stabilizzare, se possibile, il seguente sistema attraverso retroazione dall'uscita; si faccia in modo, se possibile, che gli autovalori in ciclo chiuso siano localizzati in $s = -3 \mp j2; s = -5$; giustificare succintamente ogni affermazione.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Soluzione proposta:

Ricerco una soluzione attraverso retroazione dallo stato osservato.

Verifico la controllabilità del sistema. Per ispezione, noto che lo stato x_3 non è controllabile ($\dot{x}_3 = -3x_3$; l'ingresso non può avere effetto su x_3).

Verifico la controllabilità del sottospazio (x_1, x_2) costruendo la matrice di controllabilità:

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 1 & 8 & . \\ 2 & -2 & . \\ 0 & 0 & . \end{bmatrix}$$

Le prime due colonne sono sufficienti per concludere che $\mathbf{M_c}$ ha rango due. Poiché la parte non controllabile è associata all'autovalore -3<0, il sistema è stabilizzabile. Si potranno però assegnare solo due autovalori in ciclo chiuso; per assegnarne almeno due secondo le specifiche, si sceglie di assegnare i due autovalori complessi coniugati.

Per poter effettuare la retroazione da stato osservato verifico l'osservabilità del sistema

$$\mathbf{O}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -16 \end{bmatrix}$$

La matrice è a rango pieno, quindi il sistema è completamente osservabile.

Applicando il principio di separazione, si progetta la matrice di guadagno in retroazione dallo stato osservato come se la retroazione avvenisse dallo stato vero.

$$u = -\mathbf{Kx} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 2-k_1 & 3-k_2 & 1-k_3 \\ -2k_1 & -1-2k_2 & -2-2k_3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p_c}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = (\lambda + 3)(\lambda^2 + (k_1 + 2k_2 + 1)\lambda + 7k_1 - 4k_2 - 2)$$

Anche dalla struttura del polinomio caratteristico della matrice in ciclo chiuso si osserva che l'autovalore non controllabile rimane in -3 pure in ciclo chiuso e che il guadagno k_3 è ininfluente $\Longrightarrow k_3 = 0$.

Considero come polinomio caratteristico del sistema in ciclo chiuso solo la parte che dipende da k_1 e k_2:

$$\widetilde{\boldsymbol{p_c}} = \lambda^2 + (k_1 + 2k_2 - 1)\lambda + 7k_1 - 4k_2 - 2$$

Il polinomio caratteristico obiettivo per la parte assegnabile è:

$$\boldsymbol{p_c^*} = \big((\lambda + 3) + j2\big)\big((\lambda + 3) - j2\big) = (\lambda + 3)^2 + 4 = \lambda^2 + 6\lambda + 13$$

Eguagliando i coefficienti delle potenze di λ con lo stesso esponente nel polinomio caratteristico obiettivo e nel polinomio caratteristico del sistema in ciclo chiuso si ha:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{29}{9} = 3{,}22 \\ k_2 = \dfrac{17}{9} = 1{,}89 \end{cases}$$

Progetto ora l'osservatore dello stato, posizionando gli autovalori dell'osservatore tutti in -10[1]. Le equazioni dell'osservatore sono:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \mathbf{H}(y - [1 \quad 0 \quad -1]\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

Con

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

matrice di guadagno in retroazione dell'osservatore.

La matrice di stato in ciclo chiuso dell'osservatore è:

$$\mathbf{A} - \mathbf{HC} = \begin{bmatrix} 2 - h_1 & 3 & 1 + h_1 \\ -h_2 & -1 & -2 + h_2 \\ -h_3 & 0 & -3 + h_3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico corrispondente è:

$$\boldsymbol{p_C(A - HC)} = \lambda^3 + (h_1 - h_3 + 2)\lambda^2 + (4h_1 + 3h_2 + 2h_3 - 5)\lambda + 3h_1 + 9h_2 - 3h_3 - 6$$

---

[1] Il testo non specifica dove devono essere posizionati gli autovalori dell'osservatore, lasciando la decisione al progettista. Il criterio di scelta deve tener conto che la convergenza a zero dell'errore di osservazione deve essere più rapida della convergenza a zero dei modi associati agli autovalori assegnati in ciclo chiuso; ma quanto "più rapida"? Un possibile *criterio empirico* è il seguente: la costante di tempo più veloce del sistema in ciclo chiuso con gli autovalori assegnati λ_i tutti a parte reale negativa è circa: $\tau_{cc} = 1/|min_i Re\{\lambda_i\}|$; allora la costante di tempo più lenta dell'osservatore dello stato τ_{oss} può essere scelta nell'intervallo $\frac{1}{10}\tau_{cc} < \tau_{oss} < \frac{1}{2}\tau_{cc}$. Nel caso dell'esercizio, la scelta di porre gli autovalori dell'osservatore in -10 fa sì che $\tau_{oss} \cong 1/10$ mentre il fatto che gli autovalori in ciclo chiuso abbiano tutti *Re* = -3 implica che $\tau_{cc} \cong \frac{1}{3} \Longrightarrow \tau_{oss} = \frac{3}{10}\tau_{cc}$. Si ribadisce che il criterio di questa nota è empirico; ulteriori considerazioni o vincoli possono portare a scelte differenti, mai comunque tali da implicare che l'osservatore sia più lento del sistema desiderato in ciclo chiuso.

Il polinomio caratteristico obiettivo per l'individuazione dei guadagni dell'osservatore è;

$$\boldsymbol{p}_{oss}^{*} = (\lambda + 10)^3 = \lambda^3 + 30\lambda^2 + 300\lambda + 1000$$

Eguagliando i coefficienti delle potenze di λ con lo stesso esponente nel polinomio caratteristico obiettivo e nel polinomio caratteristico dell'osservatore in ciclo chiuso si ha:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{161}{18} = 8{,}94 \\ h_2 = \dfrac{922}{9} = 102{,}44 \\ h_3 = -\dfrac{343}{18} = -19{,}05 \end{cases}$$

(nota: nel caso la ricordiate e sappiate applicarla correttamente, potete risolvere l'esercizio anche applicando la formula di Ackerman sia per il controllo, sia per l'osservatore).

(SE&O)