

1. Dato il sistema lineare tempo invariante e tempo continuo caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

- Si determinino tutte le condizioni iniziali da cui l'evoluzione libera del sistema evolva in uno sotto-spazio di dimensione 1 e quelle per cui l'evoluzione libera evolva in uno sottospazio di dimensione 2.
 - Come sono caratterizzate le matrici di ingresso B per cui l'evoluzione forzata può evolvere soltanto in uno spazio di dimensione al più 2?
2. Descrivere la tecnica di decomposizione Canonica di Kalman e del calcolo delle matrici di cambio di base associata. Si riporti l'esempio di un sistema lineare in forma di Kalman con 4 stati in cui non siano presenti poli che sono interni al sottospazio di inosservabilità ed esterni a quello di raggiungibilità.
3. Dato il sistema tempo continuo caratterizzato dalle matrici dinamiche e di ingresso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e con matrice di uscita $C = (1 \ -1 \ 2)$

- Si determini se il sistema è completamente raggiungibile, e se è possibile stabilizzare il sistema utilizzando un solo ingresso (ed eventualmente quale).
 - Determinare se esiste e in caso calcolarla, una matrice di reazione K in modo che l'evoluzione libera dello stato del sistema sia esponenzialmente convergente per ogni condizione iniziale e la velocità di convergenza sia al più 2 (quindi che converga più velocemente di e^{-2t}).
 - Cosa si può concludere in termini di velocità di convergenza dell'uscita del sistema retroazionato con la K determinata al punto precedente?
4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

si imposti il problema di determinare il controllo ottimo per portare il sistema nell'origine in tempo finito. Si enuncino le ipotesi di esistenza della soluzione del problema e si ricavi la matrice di reazione K che lo risolve nel caso in cui le ipotesi siano verificate. Commentare con sufficiente livello di dettaglio come si ottiene la reazione K .