Teoria dei Sistemi e del Controllo - 25-07-2024

1. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sin x_2(t) - u(t)\cos x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio ad ingresso costante. Studiare la stabilità del punto di equilibrio nell'origine per ingresso nullo;
   - Sempre ad ingresso nullo, determinare attraverso l'equazione di Lyapunov una $V(x_1, x_2)$ che verifichi le proprietà di stabilità dell'equilibrio nell'origine ottenute al punto precedente. Si commentino i risultati ottenuti in termini di definizione in segno delle matrici e si determinino l'insieme U e l'intorno W che verificano il Teorema di Cetaev;
   - Si determini un ingresso che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema **tempo discreto** in forma di stato rappresentato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Si studino i modi al variare di α numero intero compreso tra 0 e 9. Si determinino inoltre le basi dello spazio di raggiungibilità e dello spazio di inosservabilità e la matrice del cambio di base che porta il sistema in forma di Kalman sempre al variare di α numero intero compreso tra 0 e 9.
   - Per $\alpha = 5$ determinare le condizioni iniziali compatibili con le uscite $y(0) = 3$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$, a fronte degli ingressi $u(0) = u(1) = -1$.

3. Si consideri il sistema LTI SISO **tempo continuo**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

   ed un controllore lineare del tipo $u(t) = Kx(t)$, con K matrice costante di dimensioni appropriate.

   Si dica se sono vere o false, **proponendo una dimostrazione formale**, le seguenti affermazioni:

   - se la coppia (A, B) è controllabile, e' possibile assegnare tutti i poli del sistema a ciclo chiuso;
   - non e' possibile modificare i modi non raggiungibili del sistema;
   - tramite il controllore e' possibile modificare gli zeri del sistema;
   - tramite un appropriata scelta di K è possibile modificare il grado relativo del sistema;

4. Dato il sistema tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) = Cx(t)$$

   - Si dica per quali valori di α e β il sistema è detettabile, e per quali valori è osservabile;
   - si dica per quali valori di α e β il sistema è stabilizzabile e per quali valori è controllabile;
   - si scelgano α e β appropriati e:
     - si progetti un controllore stabilizzante del tipo $u(t) = Kx(t)$ così da avere il maggior numero possibile di poli a ciclo chiuso in -1
     - si progetti uno stimatore, di ordine intero o ridotto, così che l'errore di stima si annulli velocemente almeno come e^{-10t}.