

# Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

## Lezione 13

Dario Trevisan – <https://web.dm.unipi.it/trevisan>

03/11/2025

## Processi a stati discreti

- ▶ Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.

# Presentazione

- ▶ Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- ▶ Vediamo la teoria di base delle catene di Markov

# Presentazione

- ▶ Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- ▶ Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- ▶ e poi dei processi di Markov a salti.

- ▶ Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- ▶ Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- ▶ e poi dei processi di Markov a salti.
- ▶ Studiamo esistenza e unicità delle distribuzioni invarianti associate ad un processo di Markov

- ▶ Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- ▶ Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- ▶ e poi dei processi di Markov a salti.
- ▶ Studiamo esistenza e unicità delle distribuzioni invarianti associate ad un processo di Markov
- ▶ Accenniamo al problema della stima dei parametri di un processo a partire dalle osservazioni.

# Presentazione

- ▶ Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- ▶ Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- ▶ e poi dei processi di Markov a salti.
- ▶ Studiamo esistenza e unicità delle distribuzioni invarianti associate ad un processo di Markov
- ▶ Accenniamo al problema della stima dei parametri di un processo a partire dalle osservazioni.
- ▶ Concludiamo con degli esempi fondamentali dalla teoria delle code.



# Definizioni generali

Un **processo stocastico** è una collezione di variabili aleatorie  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,

- ▶ tutte a valori nello stesso insieme  $E$ , detto insieme degli **stati** del processo,

# Definizioni generali

Un **processo stocastico** è una collezione di variabili aleatorie  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,

- ▶ tutte a valori nello stesso insieme  $E$ , detto insieme degli **stati** del processo,
- ▶ indicizzate da un insieme  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$  detto insieme dei **tempi** del processo.

Il calcolo delle probabilità fornisce strumenti utili per affrontare problemi circa

- ▶ il *futuro* di un processo (questo è il problema della *previsione*)

Il calcolo delle probabilità fornisce strumenti utili per affrontare problemi circa

- ▶ il *futuro* di un processo (questo è il problema della *previsione*)
- ▶ il *passato*,

Il calcolo delle probabilità fornisce strumenti utili per affrontare problemi circa

- ▶ il *futuro* di un processo (questo è il problema della *previsione*)
- ▶ il *passato*,
- ▶ oppure anche il *presente* (se non è esattamente osservato, è il *filtraggio*).

# Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- ▶ a **stati discreti** se  $E$  discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio  $E = \mathbb{Z}$  oppure  $\mathbb{N}$ )

In base all'insieme  $\mathcal{T}$  dei tempi:

# Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- ▶ a **stati discreti** se  $E$  discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio  $E = \mathbb{Z}$  oppure  $\mathbb{N}$ )
- ▶ a **stati continui** se  $E$  è infinito continuo,  $E = \mathbb{R}$ ,  $E = \mathbb{R}^k$  (e di solito ciascuna  $X_t$  ammetta densità continua)

In base all'insieme  $\mathcal{T}$  dei tempi:

# Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- ▶ a **stati discreti** se  $E$  discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio  $E = \mathbb{Z}$  oppure  $\mathbb{N}$ )
- ▶ a **stati continui** se  $E$  è infinito continuo,  $E = \mathbb{R}$ ,  $E = \mathbb{R}^k$  (e di solito ciascuna  $X_t$  ammetta densità continua)

In base all'insieme  $\mathcal{T}$  dei tempi:

- ▶ a **tempi discreti** se  $\mathcal{T}$  è discreto (ad esempio finito, oppure  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ),



# Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- ▶ a **stati discreti** se  $E$  discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio  $E = \mathbb{Z}$  oppure  $\mathbb{N}$ )
- ▶ a **stati continui** se  $E$  è infinito continuo,  $E = \mathbb{R}$ ,  $E = \mathbb{R}^k$  (e di solito ciascuna  $X_t$  ammetta densità continua)

In base all'insieme  $\mathcal{T}$  dei tempi:

- ▶ a **tempi discreti** se  $\mathcal{T}$  è discreto (ad esempio finito, oppure  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ),
- ▶ a **tempi continui** se  $\mathcal{T} = [0, T]$  è un intervallo (anche illimitato, ad esempio  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ ).

# Traiettorie e marginali

È utile pensare a  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  come ad una variabile aleatoria vettoriale a valori in uno spazio di **traiettorie**,

$$E^{\mathcal{T}} = \{x : \mathcal{T} \rightarrow E\} = \{(x_t)_{t \in \mathcal{T}}\}.$$

- ▶ Ad esempio, se  $\mathcal{T} = \{1, \dots, d\}$ , allora un processo  $(X_i)_{i=1}^d$  può essere pensato come una variabile aleatoria congiunta  $X$ , a valori in  $E^d$ .

# Traiettorie e marginali

È utile pensare a  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  come ad una variabile aleatoria vettoriale a valori in uno spazio di **traiettorie**,

$$E^{\mathcal{T}} = \{x : \mathcal{T} \rightarrow E\} = \{(x_t)_{t \in \mathcal{T}}\}.$$

- ▶ Ad esempio, se  $\mathcal{T} = \{1, \dots, d\}$ , allora un processo  $(X_i)_{i=1}^d$  può essere pensato come una variabile aleatoria congiunta  $X$ , a valori in  $E^d$ .
- ▶ Ricordiamo la differenza tra la legge delle marginali

$$P(X_t \in U | I),$$

al variare di  $U \subseteq E$  e  $t \in \mathcal{T}$ , e la legge congiunta, in questo caso detta semplicemente **legge del processo**  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , che è definita come tutte le probabilità del tipo

$$P(X_{t_1} \in U_1, X_{t_2} \in U_2, \dots, X_{t_k} \in U_k | I),$$

Nel caso di processi a stati discreti, per ogni  $t \in \mathcal{T}$  la densità discreta della marginale al tempo  $t$  è la collezione delle probabilità

$$P(X_t = x|I).$$

- La densità discreta del processo è la collezione di tutte le probabilità

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_k} = x_k|I),$$

Nel caso di processi a stati discreti, per ogni  $t \in \mathcal{T}$  la densità discreta della marginale al tempo  $t$  è la collezione delle probabilità

$$P(X_t = x|I).$$

- ▶ La densità discreta del processo è la collezione di tutte le probabilità

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_k} = x_k|I),$$

- ▶ Nel caso di processi a stati continui (con densità continua), basta sostituire la “ $P$ ” di probabilità con “ $p$ ” della densità di probabilità.

# Come parametrizzare un processo?

Determinare la legge di un processo tramite pochi parametri è un problema difficile, soprattutto se l'insieme dei tempi diventa grande.

- ▶ Se  $E = \{0, 1\}$ , la densità discreta di un processo su  $\mathcal{T} = \{1, \dots, d\}$  è praticamente una qualsiasi funzione da  $\{0, 1\}^d$  a valori in  $[0, 1] \rightarrow$  circa  $2^d$  “parametri”.

# Come parametrizzare un processo?

Determinare la legge di un processo tramite pochi parametri è un problema difficile, soprattutto se l'insieme dei tempi diventa grande.

- ▶ Se  $E = \{0, 1\}$ , la densità discreta di un processo su  $\mathcal{T} = \{1, \dots, d\}$  è praticamente una qualsiasi funzione da  $\{0, 1\}^d$  a valori in  $[0, 1] \rightarrow$  circa  $2^d$  “parametri”.
- ▶ Le  $d$  densità marginali si ottengono descrivendo solo  $d$  “parametri” (la probabilità  $P(X_t = 1|I)$ ), anche meno se le leggi sono tutte uguali.

# Come parametrizzare un processo?

Determinare la legge di un processo tramite pochi parametri è un problema difficile, soprattutto se l'insieme dei tempi diventa grande.

- ▶ Se  $E = \{0, 1\}$ , la densità discreta di un processo su  $\mathcal{T} = \{1, \dots, d\}$  è praticamente una qualsiasi funzione da  $\{0, 1\}^d$  a valori in  $[0, 1] \rightarrow$  circa  $2^d$  “parametri”.
- ▶ Le  $d$  densità marginali si ottengono descrivendo solo  $d$  “parametri” (la probabilità  $P(X_t = 1|I)$ ), anche meno se le leggi sono tutte uguali.
- ▶ Non si può ricostruire la densità del processo a partire dalle densità marginali, senza ulteriori ipotesi.



# Proprietà di Markov

La proprietà afferma che **il futuro e il passato sono condizionatamente indipendenti, noto esattamente il presente.**

- ▶ Un processo  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  è *di Markov* (o markoviano) se, per ogni  $x \in E$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , le due variabili congiunte relative ai tempi “passati”  $(X_s)_{s < t}$  e “futuri”  $(X_r)_{r > t}$  sono indipendenti, nota l'informazione esatta sul presente, ossia  $\{X_t = x\}$ .

# Proprietà di Markov

La proprietà afferma che **il futuro e il passato sono condizionatamente indipendenti, noto esattamente il presente.**

- ▶ Un processo  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  è *di Markov* (o markoviano) se, per ogni  $x \in E$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , le due variabili congiunte relative ai tempi “passati”  $(X_s)_{s < t}$  e “futuri”  $(X_r)_{r > t}$  sono indipendenti, nota l'informazione esatta sul presente, ossia  $\{X_t = x\}$ .
- ▶ Se  $A$  è una affermazione che riguarda solo le variabili  $(X_s)_{s < t}$ , e  $B$  è una riguarda solamente le variabili  $(X_r)_{r > t}$ , allora  $A$ ,  $B$  sono indipendenti rispetto all'informazione  $\{X_t = x\}$ :

$$P(A, B | X_t = x) = P(A | X_t = x)P(B | X_t = x),$$

oppure

$$P(A | X_t = x, B) = P(A | X_t = x),$$

o anche

$$P(B | X_t = x, A) = P(B | X_t = x).$$

In termini grafici, la proprietà di Markov si traduce in una rete bayesiana associata al processo  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  del seguente tipo:

# Densità di un processo di Markov

# Processi omogenei

Per procedere ulteriormente e sviluppare una teoria semplice:

1. consideriamo come insiemi di tempi  $\mathcal{T}$  intervalli discreti  $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  o continui  $\mathcal{T} = [0, T]$ .

# Processi omogenei

Per procedere ulteriormente e sviluppare una teoria semplice:

1. consideriamo come insiemi di tempi  $\mathcal{T}$  intervalli discreti  $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  o continui  $\mathcal{T} = [0, T]$ .
2. consideriamo processi di Markov **omogenei**, ossia tali che le probabilità di transizione dal tempo  $s$  al tempo  $t$  dipendano solamente dalla differenza dei tempi  $t - s$ , o equivalentemente, per ogni  $\Delta t \geq 0$  si abbia

$$P(X_t = y | X_s = x) = P(X_{t+\Delta t} = y | X_{s+\Delta t} = x)$$

per stati  $x, y \in E$ .

# Processi stazionari

Un processo  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  si dice **stazionario** se, per ogni  $\Delta t \geq 0$ , la legge (congiunta) del processo coincide con quella del “traslato”  $(X_{t+\Delta t})_{t \in \mathcal{T}}$  (purché i tempi  $t + \Delta t$  appartengano a  $\mathcal{T}$ ).

- Più precisamente, per ogni  $k \geq 1$  e  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathcal{T}$  e  $\Delta t \geq 0$ , la legge congiunta di  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  coincide con quella di  $(X_{t_1+\Delta t}, \dots, X_{t_k+\Delta t})$ , purché i tempi  $t_i + \Delta t$  appartengano a  $\mathcal{T}$ .

# Processi stazionari

Un processo  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  si dice **stazionario** se, per ogni  $\Delta t \geq 0$ , la legge (congiunta) del processo coincide con quella del “traslato”  $(X_{t+\Delta t})_{t \in \mathcal{T}}$  (purché i tempi  $t + \Delta t$  appartengano a  $\mathcal{T}$ ).

- ▶ Più precisamente, per ogni  $k \geq 1$  e  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathcal{T}$  e  $\Delta t \geq 0$ , la legge congiunta di  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  coincide con quella di  $(X_{t_1+\Delta t}, \dots, X_{t_k+\Delta t})$ , purché i tempi  $t_i + \Delta t$  appartengano a  $\mathcal{T}$ .

- ▶ In particolare, nel caso di stati discreti, vale

$$P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_k} = x_k) = P(X_{t_1+\Delta t} = x_1, \dots, X_{t_k+\Delta t} = x_k),$$

per qualsiasi scelta di stati  $x_1, \dots, x_k \in E$ .



# Processi stazionari

Un processo  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  si dice **stazionario** se, per ogni  $\Delta t \geq 0$ , la legge (congiunta) del processo coincide con quella del “traslato”  $(X_{t+\Delta t})_{t \in \mathcal{T}}$  (purché i tempi  $t + \Delta t$  appartengano a  $\mathcal{T}$ ).

- ▶ Più precisamente, per ogni  $k \geq 1$  e  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathcal{T}$  e  $\Delta t \geq 0$ , la legge congiunta di  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  coincide con quella di  $(X_{t_1+\Delta t}, \dots, X_{t_k+\Delta t})$ , purché i tempi  $t_i + \Delta t$  appartengano a  $\mathcal{T}$ .

- ▶ In particolare, nel caso di stati discreti, vale

$$P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_k} = x_k) = P(X_{t_1+\Delta t} = x_1, \dots, X_{t_k+\Delta t} = x_k),$$

per qualsiasi scelta di stati  $x_1, \dots, x_k \in E$ .

- ▶ Nel caso continuo l'identità sopra vale per le densità continue (scrivendo la densità  $p$  al posto della probabilità  $P$ ).

# Processi stazionari

Un processo  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  si dice **stazionario** se, per ogni  $\Delta t \geq 0$ , la legge (congiunta) del processo coincide con quella del “traslato”  $(X_{t+\Delta t})_{t \in \mathcal{T}}$  (purché i tempi  $t + \Delta t$  appartengano a  $\mathcal{T}$ ).

- ▶ Più precisamente, per ogni  $k \geq 1$  e  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathcal{T}$  e  $\Delta t \geq 0$ , la legge congiunta di  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  coincide con quella di  $(X_{t_1+\Delta t}, \dots, X_{t_k+\Delta t})$ , purché i tempi  $t_i + \Delta t$  appartengano a  $\mathcal{T}$ .
- ▶ In particolare, nel caso di stati discreti, vale
$$P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_k} = x_k) = P(X_{t_1+\Delta t} = x_1, \dots, X_{t_k+\Delta t} = x_k),$$
per qualsiasi scelta di stati  $x_1, \dots, x_k \in E$ .
- ▶ Nel caso continuo l'identità sopra vale per le densità continue (scrivendo la densità  $p$  al posto della probabilità  $P$ ).
- ▶ Se un processo  $X$  è stazionario, necessariamente tutte le leggi delle marginali  $X_t$  coincidono: basta usare  $k = 1$  nella definizione sopra.

## Catene di Markov

# Catene di Markov (omogenee)

Studiamo processi di Markov  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  a *tempi discreti*, con

$$\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$$

e *stati discreti* (spesso finiti).

- Ci limitiamo a processi *omogenei*. Le *probabilità di transizione* tra  $k$  e  $k+1 \in \mathcal{T}$  dipendono solo dagli stati  $x, y \in E$ , e non da  $k$ :

$$P(X_{k+1} = y | X_k = x) = P(X_1 = y | X_0 = x).$$

# Matrice di transizione

Le probabilità di transizione

$$Q_{x \rightarrow y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$$

al variare di  $x, y \in E$  sono spesso raccolte in una *matrice* quadrata, con tante righe e colonne quanti gli stati (eventualmente infinite),  
 $Q \in \mathbb{R}^{E \times E}$

## Un esempio

$$E = \{\text{OFF}, \text{ON}\}.$$

$$\begin{pmatrix} Q_{\text{OFF} \rightarrow \text{OFF}} & Q_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}} \\ Q_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}} & Q_{\text{ON} \rightarrow \text{ON}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0.1 \\ 0.7 & \end{pmatrix}$$

- ▶ la somma delle probabilità in ciascuna riga della matrice di transizione vale 1, perché

$$(Q_{x \rightarrow y})_{y \in E} = (P(X_1 = y | X_0 = x))_{y \in E}$$

sono la densità discreta della variabile  $X_1$  (rispetto all'informazione  $X_0 = x$ ).

# Matrici stocastiche

- ▶ la somma delle probabilità in ciascuna riga della matrice di transizione vale 1, perché

$$(Q_{x \rightarrow y})_{y \in E} = (P(X_1 = y | X_0 = x))_{y \in E}$$

sono la densità discreta della variabile  $X_1$  (rispetto all'informazione  $X_0 = x$ ).

- ▶ In generale, una qualsiasi matrice  $Q$  con entrate a valori in  $[0, 1]$  e tale che la somma sulle righe sia costante e uguale ad 1 è detta **matrice stocastica**.



# Matrici stocastiche

- ▶ la somma delle probabilità in ciascuna riga della matrice di transizione vale 1, perché

$$(Q_{x \rightarrow y})_{y \in E} = (P(X_1 = y | X_0 = x))_{y \in E}$$

sono la densità discreta della variabile  $X_1$  (rispetto all'informazione  $X_0 = x$ ).

- ▶ In generale, una qualsiasi matrice  $Q$  con entrate a valori in  $[0, 1]$  e tale che la somma sulle righe sia costante e uguale ad 1 è detta **matrice stocastica**.
- ▶ Se anche la somma sulle colonne è uguale ad 1 è detta **matrice bistocastica**

# Legge di una catena di Markov

► Vale

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n Q_{x_{k-1} \rightarrow x_k},$$

# Legge di una catena di Markov

- Vale

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n Q_{x_{k-1} \rightarrow x_k},$$

- un **cammino** è una sequenza ordinata di stati  $\gamma = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n)$ :

$$P(X = \gamma) = P(X_0 = x_0) Q_\gamma$$

dove il “peso” di  $\gamma$  è

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^n Q_{x_{k-1} \rightarrow x_k}.$$

## Un esempio

# Una strategia generale

Per calcolare la probabilità di una qualsiasi affermazione  $A$  circa una catena di Markov  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ , basta

- ▶ rappresentare  $A$  in termini di cammini (a partire dal tempo iniziale)

# Una strategia generale

Per calcolare la probabilità di una qualsiasi affermazione  $A$  circa una catena di Markov  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ , basta

- ▶ rappresentare  $A$  in termini di cammini (a partire dal tempo iniziale)
- ▶ sommare le probabilità corrispondenti ottenute tramite la formula sopra,

# Una strategia generale

Per calcolare la probabilità di una qualsiasi affermazione  $A$  circa una catena di Markov  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ , basta

- ▶ rappresentare  $A$  in termini di cammini (a partire dal tempo iniziale)
- ▶ sommare le probabilità corrispondenti ottenute tramite la formula sopra,
- ▶ purché gli eventi relativi a cammini diversi siano a due a due incompatibili!.

# Una strategia generale

Per calcolare la probabilità di una qualsiasi affermazione  $A$  circa una catena di Markov  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ , basta

- ▶ rappresentare  $A$  in termini di cammini (a partire dal tempo iniziale)
- ▶ sommare le probabilità corrispondenti ottenute tramite la formula sopra,
- ▶ purché gli eventi relativi a cammini diversi siano a due a due incompatibili!.
- ▶ Questo avviene anche se i cammini hanno lunghezze diverse, ma *nessun cammino considerato si può ottenere come prolungamento di un altro.*



## Un esempio

Calcoliamo

$$P(X_2 = \text{OFF oppure } X_3 = \text{ON})$$

tramite cammini (sapendo che  $X_0 = \text{OFF}$ )

$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Q_\gamma$
OFF	$\rightarrow$ OFF	$\rightarrow$ OFF		$0.9 \cdot 0.9$
OFF	$\rightarrow$ ON	$\rightarrow$ OFF		$0.1 \cdot 0.7$
OFF	$\rightarrow$ OFF	$\rightarrow$ ON	$\rightarrow$ ON	$0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.3$
OFF	$\rightarrow$ ON	$\rightarrow$ ON	$\rightarrow$ ON	$0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.3$

# Grafo associato alla catena

- ▶ Il calcolo dei cammini si può effettuare tramite diagrammi ad albero (ma diventano troppo grandi!).

# Grafo associato alla catena

- ▶ Il calcolo dei cammini si può effettuare tramite diagrammi ad albero (ma diventano troppo grandi!).
- ▶ Nella pratica si introduce un grafo pesato orientato i cui nodi corrispondono agli *stati*  $i \in E$ , e l'arco da  $i$  ad  $j \in E$  è pesato con la probabilità di transizione  $Q_{ij}$  (se la probabilità è nulla non viene rappresentato).

# Grafo associato alla catena

- ▶ Il calcolo dei cammini si può effettuare tramite diagrammi ad albero (ma diventano troppo grandi!).
- ▶ Nella pratica si introduce un grafo pesato orientato i cui nodi corrispondono agli *stati*  $i \in E$ , e l'arco da  $i$  ad  $j \in E$  è pesato con la probabilità di transizione  $Q_{ij}$  (se la probabilità è nulla non viene rappresentato).
- ▶ Il grafo associato permette facilmente di calcolare le probabilità

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^n Q_{x_{k-1}x_k}$$

associate ad un cammino  $\gamma = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n)$ ,

# Grafo associato alla catena

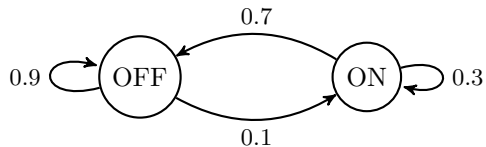
- ▶ Il calcolo dei cammini si può effettuare tramite diagrammi ad albero (ma diventano troppo grandi!).
- ▶ Nella pratica si introduce un grafo pesato orientato i cui nodi corrispondono agli *stati*  $i \in E$ , e l'arco da  $i$  ad  $j \in E$  è pesato con la probabilità di transizione  $Q_{ij}$  (se la probabilità è nulla non viene rappresentato).
- ▶ Il grafo associato permette facilmente di calcolare le probabilità

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^n Q_{x_{k-1}x_k}$$

associate ad un cammino  $\gamma = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n)$ ,

- ▶ Nel grafo non è rappresentata la probabilità marginale al tempo iniziale ( $t = 0$ ).

## Un esempio



# Tempo di permanenza

Supponiamo di osservare che al tempo 0 la catena si trova nello stato  $x_0$ . Poniamo  $T_1$  il più piccolo tempo  $k \in \{1, 2, \dots\}$  tale che  $X_k \neq x_0$ .

- ▶  $T_1 = k$  significa che osserviamo il cammino  $X_0 = x_0, X_1 = x_0, \dots, X_k = y$  dove  $y \neq x_0$ .

## Tempo di permanenza

Supponiamo di osservare che al tempo 0 la catena si trova nello stato  $x_0$ . Poniamo  $T_1$  il più piccolo tempo  $k \in \{1, 2, \dots\}$  tale che  $X_k \neq x_0$ .

- ▶  $T_1 = k$  significa che osserviamo il cammino  $X_0 = x_0, X_1 = x_0, \dots, X_k = y$  dove  $y \neq x_0$ .
- ▶ Si trova  $P(T_1 = k | X_0 = x_0) = Q_{x_0 \rightarrow x_0}^{k-1} (1 - Q_{x_0 \rightarrow x_0})$  ossia  $T_1 - 1$  ha densità geometrica di parametro  $p = 1 - Q_{x_0 \rightarrow x_0}$ .



## Tempo di permanenza

Supponiamo di osservare che al tempo 0 la catena si trova nello stato  $x_0$ . Poniamo  $T_1$  il più piccolo tempo  $k \in \{1, 2, \dots\}$  tale che  $X_k \neq x_0$ .

- ▶  $T_1 = k$  significa che osserviamo il cammino  $X_0 = x_0, X_1 = x_0, \dots, X_k = y$  dove  $y \neq x_0$ .
- ▶ Si trova  $P(T_1 = k | X_0 = x_0) = Q_{x_0 \rightarrow x_0}^{k-1} (1 - Q_{x_0 \rightarrow x_0})$  ossia  $T_1 - 1$  ha densità geometrica di parametro  $p = 1 - Q_{x_0 \rightarrow x_0}$ .
- ▶ *Esercizio*: mostrare che

$$P(X_{T_1} = y | X_0 = x_0) = \frac{Q_{x_0 \rightarrow y}}{1 - Q_{x_0 \rightarrow x_0}} \propto Q_{x_0 \rightarrow y} \quad \text{per } y \neq x_0$$

mentre ovviamente  $P(X_{T_1} = x_0 | X_0 = x_0) = 0$ .

## Tempo di permanenza

Supponiamo di osservare che al tempo 0 la catena si trova nello stato  $x_0$ . Poniamo  $T_1$  il più piccolo tempo  $k \in \{1, 2, \dots\}$  tale che  $X_k \neq x_0$ .

- ▶  $T_1 = k$  significa che osserviamo il cammino  $X_0 = x_0, X_1 = x_0, \dots, X_k = y$  dove  $y \neq x_0$ .
- ▶ Si trova  $P(T_1 = k | X_0 = x_0) = Q_{x_0 \rightarrow x_0}^{k-1} (1 - Q_{x_0 \rightarrow x_0})$  ossia  $T_1 - 1$  ha densità geometrica di parametro  $p = 1 - Q_{x_0 \rightarrow x_0}$ .
- ▶ *Esercizio:* mostrare che

$$P(X_{T_1} = y | X_0 = x_0) = \frac{Q_{x_0 \rightarrow y}}{1 - Q_{x_0 \rightarrow x_0}} \propto Q_{x_0 \rightarrow y} \quad \text{per } y \neq x_0$$

mentre ovviamente  $P(X_{T_1} = x_0 | X_0 = x_0) = 0$ .

- ▶ Possiamo interpretare  $X$  come una successione di **permanenze** aventi distribuzione geometrica **salto** con distribuzione ottenuta da  $Q$ .

## Densità marginali

Le densità marginali di una catena di Markov si ottengono sommando la densità congiunta su tutti i possibili valori delle altre variabili.

$$P(X_n = x_n) = \sum_{x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in E} P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n Q_{x_{k-1}x_k}.$$

► Vale un'equazione *ricorsiva*:

$$\begin{aligned} P(X_n = x_n) &= \sum_{x_{n-1} \in E} P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) P(X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= \sum_{x_{n-1} \in E} Q_{x_{n-1}x_n} P(X_{n-1} = x_{n-1}). \end{aligned}$$

Se  $Q$  è una matrice in  $\mathbb{R}^{E \times E}$  e  $P(X_n = \cdot)$  è un *vettore riga*

$$\mu_n(x) = P(X_n = x),$$

allora

$$\mu_n = \mu_{n-1} Q$$

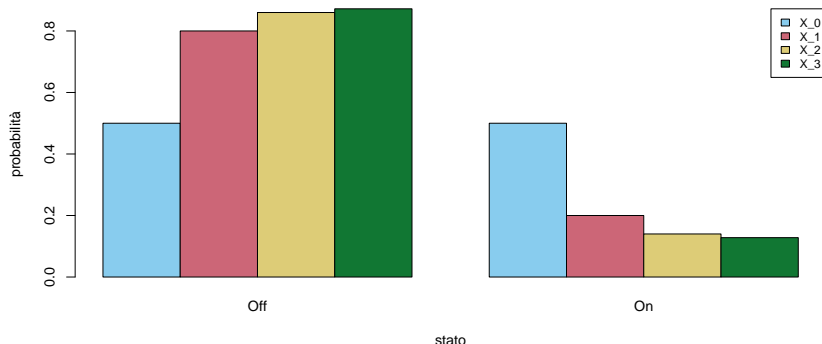
► Iterando otteniamo

$$\mu_n = \mu_{n-1} Q = \mu_{n-2} Q^2 = \dots = \mu_0 Q^n,$$

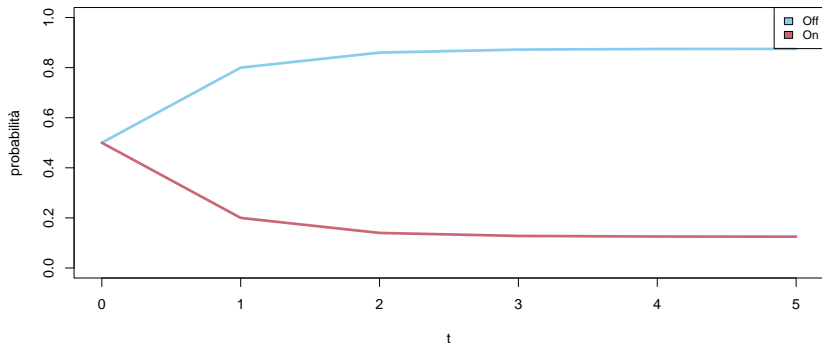
dove le potenze  $Q^k$  sono intese nel senso del prodotto di matrici.

# Un esempio in R

In R il prodotto tra matrici si ottiene tramite il comando `%*%`.



**Figure 1:** Grafico a barre della densità marginale della catena ai tempi 0 (uniforme), 1, 2 e 3.



**Figure 2:** grafico delle densità marginali in funzione del tempo  $t = 0, 1, \dots, 5$  partendo dalla densità uniforme al tempo 0.

## Processi di Markov a salti

# Richiami sulle catene di Markov

Abbiamo definito una *catena di Markov*  $(X_n)_{n=0}^N$  come un processo stocastico **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.

- ▶ Matrice di transizione  $Q_{x \rightarrow y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$  (stocastica)



# Richiami sulle catene di Markov

Abbiamo definito una *catena di Markov*  $(X_n)_{n=0}^N$  come un processo stocastico **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.

- ▶ Matrice di transizione  $Q_{x \rightarrow y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$  (stocastica)
- ▶ Rappresentazione grafica

# Richiami sulle catene di Markov

Abbiamo definito una *catena di Markov*  $(X_n)_{n=0}^N$  come un processo stocastico **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.

- ▶ Matrice di transizione  $Q_{x \rightarrow y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$  (stocastica)
- ▶ Rappresentazione grafica
- ▶ Peso di un cammino  $\gamma = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ ,

$$Q_\gamma = Q_{x_0 x_1} Q_{x_1 x_2} \dots Q_{x_{n-1} x_n}$$

# Richiami sulle catene di Markov

Abbiamo definito una *catena di Markov*  $(X_n)_{n=0}^N$  come un processo stocastico **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.

- ▶ Matrice di transizione  $Q_{x \rightarrow y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$  (stocastica)
- ▶ Rappresentazione grafica
- ▶ Peso di un cammino  $\gamma = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ ,

$$Q_\gamma = Q_{x_0 x_1} Q_{x_1 x_2} \dots Q_{x_{n-1} x_n}$$

- ▶ Legge del processo

$$P(X = \gamma) = P(X_0 = x_0) Q_\gamma$$

# Richiami sulle catene di Markov

Abbiamo definito una *catena di Markov*  $(X_n)_{n=0}^N$  come un processo stocastico **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.

- ▶ Matrice di transizione  $Q_{x \rightarrow y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$  (stocastica)
- ▶ Rappresentazione grafica
- ▶ Peso di un cammino  $\gamma = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ ,

$$Q_\gamma = Q_{x_0 x_1} Q_{x_1 x_2} \dots Q_{x_{n-1} x_n}$$

- ▶ Legge del processo

$$P(X = \gamma) = P(X_0 = x_0) Q_\gamma$$

- ▶ Legge marginale  $\mu_n = \mu_{n-1} Q$ , da cui  $\mu_n = \mu_0 Q^n$ .

# Processi di Markov a salti: definizione

- ▶ I processi di Markov  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  a tempi continui

$$\mathcal{T} = [0, T]$$

e a stati discreti sono detti *a salti*, perché le traiettorie “saltano” da uno stato all'altro.

# Processi di Markov a salti: definizione

- ▶ I processi di Markov  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  a tempi continui

$$\mathcal{T} = [0, T]$$

e a stati discreti sono detti *a salti*, perché le traiettorie “saltano” da uno stato all'altro.

- ▶ Ci limitiamo a considerare processi omogenei, ossia tali che, per ogni  $t \in [0, T]$ ,  $\delta t > 0$  tale che  $t + \delta t \in [0, T]$ , si abbia

$$P(X_{t+\delta t} = y | X_t = x) = P(X_{\delta t} = y | X_0 = x).$$

# Matrice delle intensità di salto

Nel caso dei processi di Markov a salti, invece di  $Q$  si usa la **matrice delle intensità di salto**

$$\begin{aligned} L_{x \rightarrow y} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P(X_t = y | X_0 = x) \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(X_{\delta t} = y | X_0 = x) - P(X_0 = y | X_0 = x)}{\delta t}, \end{aligned}$$

## Proprietà della matrice $L$

La derivata della matrice (stocastica) delle intensità di salto *non* è una matrice stocastica. Dati  $x, y \in E$ ,

► se  $x \neq y$ , vale  $P(X_0 = y | X_0 = x) = 0$  e quindi

$$L_{xy} = \frac{d}{dt} P(X_t = y | X_0 = x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{\delta t} = y | X_0 = x)}{\delta t} \geq 0$$



## Proprietà della matrice $L$

La derivata della matrice (stocastica) delle intensità di salto *non* è una matrice stocastica. Dati  $x, y \in E$ ,

- ▶ se  $x \neq y$ , vale  $P(X_0 = y | X_0 = x) = 0$  e quindi

$$L_{xy} = \frac{d}{dt} P(X_t = y | X_0 = x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{\delta t} = y | X_0 = x)}{\delta t} \geq 0$$

- ▶ se invece  $x = y$ , allora  $P(X_0 = y | X_0 = x) = 1$  e quindi

$$L_{xy} = \frac{d}{dt} P(X_t = y | X_0 = x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{\delta t} = y | X_0 = x) - 1}{\delta t} \leq 0.$$

## Proprietà della matrice $L$

La derivata della matrice (stocastica) delle intensità di salto *non* è una matrice stocastica. Dati  $x, y \in E$ ,

- ▶ se  $x \neq y$ , vale  $P(X_0 = y | X_0 = x) = 0$  e quindi

$$L_{xy} = \frac{d}{dt} P(X_t = y | X_0 = x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{\delta t} = y | X_0 = x)}{\delta t} \geq 0$$

- ▶ se invece  $x = y$ , allora  $P(X_0 = y | X_0 = x) = 1$  e quindi

$$L_{xy} = \frac{d}{dt} P(X_t = y | X_0 = x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{\delta t} = y | X_0 = x) - 1}{\delta t} \leq 0.$$

- ▶ La condizione che la somma su ciascuna riga valga 1 diventa

$$\sum_{y \in E} L_{xy} = \frac{d}{dt} \sum_{y \in E} P(X_t = y | X_0 = x) = \frac{d}{dt} 1 = 0,$$

equivalentemente  $L_{xx} = - \sum_{y \neq x} L_{xy}$ .

## Un esempio

$E = \{\text{Off}, \text{Standby}, \text{On}\}$ , con matrice delle intensità di salto

$$L = \begin{pmatrix} * & 5 & 10 \\ 1 & * & 3 \\ 0 & 4 & * \end{pmatrix}.$$

# Approssimazione tramite tempi discreti

Per ricondursi alle catene di Markov, l'idea è di discretizzare i tempi

$$\mathcal{T}^\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots, \lfloor T/\delta \rfloor \delta\},$$

e passare al limite  $\delta \rightarrow 0$ .

► Il processo

$$X_k^\delta := X_{k\delta},$$

è una catena di Markov con matrice di transizione

$$P_{xy}^\delta = P(X_\delta = y | X_0 = x) = Id_{xy} + L_{xy}\delta + O(\delta^2) \approx Id + L\delta.$$

## Densità marginali

Indicando con  $\mu_t(x) = P(X_t = x)$  il vettore (riga) della densità discreta marginale al tempo  $t$ , si ha per i tempi  $t = h\delta$ ,

$$\mu_t = \mu_0(P^\delta)^h \approx \mu_0 \left( Id + \frac{tL}{h} \right)^h,$$

avendo scritto  $\delta = t/h$ .

- Fissato  $t \in [0, T]$  si possono trovare  $h \rightarrow \infty$  in modo che  $\delta \rightarrow 0$  e quindi, ricordando il limite notevole (che vale anche per le matrici)

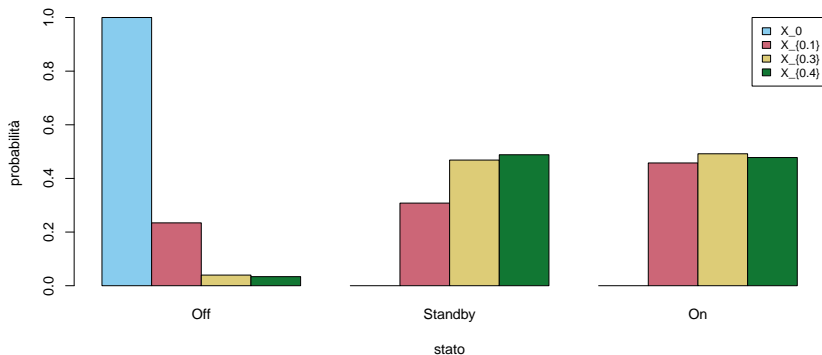
$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left( Id + \frac{A}{h} \right)^h = \exp(A),$$

si trova che

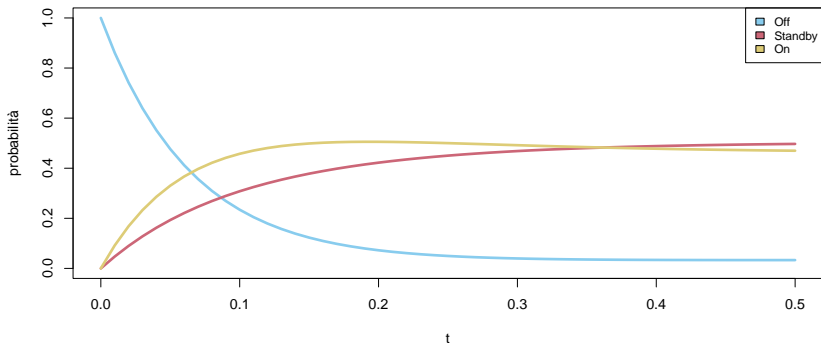
$$\mu_t = \mu_0 \exp(tL).$$

# Un esempio (in R)

L'esponenziale di matrice è la funzione `expm()` nella libreria `Matrix`.



**Figure 3:** Grafico a barre della densità marginale del processo a salti ai tempi 0 (Off), 0.1, 0.3 e 0.4.



**Figure 4:** grafico delle densita' marginali in funzione del tempo  $t \in [0, 0.5]$  partendo dallo stato  $X_0 = \text{Off}$ .

# La master equation

L'analogia dell'equazione ricorsiva è l'equazione differenziale ottenuta derivando la formula sopra:

$$\frac{d}{dt}\mu_t = \mu_t L$$

- Equazione differenziale *lineare* è detta anche equazione di Kolmogorov in avanti (o anche *master equation*).



# Legge del processo di Markov a salti

Consideriamo la probabilità di osservare un cammino che visiti nell'ordine gli stati  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ .

- ▶ Trattandosi di tempi continui, dobbiamo specificare i *tempi di permanenza* in ciascuno stato  $t_1, \dots, t_n$ , in modo che il processo “salti” al tempo  $t_1$  dallo stato  $x_0$  verso  $x_1$ , al tempo  $t_1 + t_2$  da  $x_1$  verso  $x_2$ , e così via.

# Legge del processo di Markov a salti

Consideriamo la probabilità di osservare un cammino che visiti nell'ordine gli stati  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ .

- ▶ Trattandosi di tempi continui, dobbiamo specificare i *tempi di permanenza* in ciascuno stato  $t_1, \dots, t_n$ , in modo che il processo “salti” al tempo  $t_1$  dallo stato  $x_0$  verso  $x_1$ , al tempo  $t_1 + t_2$  da  $x_1$  verso  $x_2$ , e così via.
- ▶ Fissato  $\delta$  tale che  $t_1 = \delta h_1$ ,  $t_2 = \delta h_2$  ecc., si trova l'approssimazione

$$\begin{aligned} P(X^\delta = (x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_n)) &\approx P(X_0 = x_0) \left( Id_{x_0 x_0} + \frac{t_1 L_{x_0 x_0}}{h_1} \right)^{h_1} \delta L_{x_0 x_1} \\ &\cdot \left( Id_{x_1 x_1} + \frac{t_2 L_{x_1 x_1}}{h_2} \right)^{h_2} (\delta L_{x_1 x_2}) \cdot \dots \\ &\cdot \left( Id_{x_{n-1} x_{n-1}} + \frac{t_n L_{x_{n-1} x_{n-1}}}{h_n} \right)^{h_n} (\delta L_{x_{n-1} x_n}). \end{aligned}$$

- Al tendere di  $\delta$  a zero si trova che

$$\begin{aligned}
 P(X^\delta = (x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_n)) &\approx P(X_0 = x_0) \left(1 + \frac{t_1 L_{x_0 x_0}}{h_1}\right)^{h_1} (\delta L_{x_0 x_1}) \cdot \\
 &\cdot \left(1 + \frac{t_2 L_{x_1 x_1}}{h_2}\right)^{h_2} (\delta L_{x_1 x_2}) \cdot \dots \\
 &\cdot \left(1 + \frac{t_n L_{x_{n-1} x_{n-1}}}{h_n}\right)^{h_n} (\delta L_{x_{n-1} x_n}) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

- Al tendere di  $\delta$  a zero si trova che

$$\begin{aligned}
 P(X^\delta = (x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_n)) &\approx P(X_0 = x_0) \left(1 + \frac{t_1 L_{x_0 x_0}}{h_1}\right)^{h_1} (\delta L_{x_0 x_1}) \cdot \\
 &\cdot \left(1 + \frac{t_2 L_{x_1 x_1}}{h_2}\right)^{h_2} (\delta L_{x_1 x_2}) \cdot \dots \\
 &\cdot \left(1 + \frac{t_n L_{x_{n-1} x_{n-1}}}{h_n}\right)^{h_n} (\delta L_{x_{n-1} x_n}) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

- Dividendo per  $\delta^n$  si ottiene una “densità di probabilità” non nulla, data dall’espressione

$$p(X = \gamma) = P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n \exp(t_k L_{x_{k-1} x_{k-1}}) \prod_{k=1}^n L_{x_{k-1} x_k} \cdot$$

La derivazione rigorosa si ottiene introducendo

- ▶ le variabili aleatorie  $T_1, T_2, \dots, T_n$  come tempi di permanenza del processo in ciascuno degli stati visitati  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$

La derivazione rigorosa si ottiene introducendo

- ▶ le variabili aleatorie  $T_1, T_2, \dots, T_n$  come tempi di permanenza del processo in ciascuno degli stati visitati  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$
- ▶ tempi di salto sono dati dalle somme  $S_1 = T_1, S_2 = T_1 + T_2, \dots, S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ .

La derivazione rigorosa si ottiene introducendo

- ▶ le variabili aleatorie  $T_1, T_2, \dots, T_n$  come tempi di permanenza del processo in ciascuno degli stati visitati  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$
- ▶ tempi di salto sono dati dalle somme  $S_1 = T_1, S_2 = T_1 + T_2, \dots, S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ .
- ▶ La densità è quindi

$$\begin{aligned} p(T_1 = t_1, X_{S_1} = x_1, T_2 = t_2, X_{S_2} = x_2, \dots, T_n = t_n, X_{S_n} = x_n) \\ = P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n \exp(-t_k L_{x_{k-1}x_{k-1}}) L_{x_{k-1}x_k}, \end{aligned}$$

La derivazione rigorosa si ottiene introducendo

- ▶ le variabili aleatorie  $T_1, T_2, \dots, T_n$  come tempi di permanenza del processo in ciascuno degli stati visitati  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$
- ▶ tempi di salto sono dati dalle somme  $S_1 = T_1, S_2 = T_1 + T_2, \dots, S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ .
- ▶ La densità è quindi

$$\begin{aligned} p(T_1 = t_1, X_{S_1} = x_1, T_2 = t_2, X_{S_2} = x_2, \dots, T_n = t_n, X_{S_n} = x_n) \\ = P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n \exp(-t_k L_{x_{k-1}x_{k-1}}) L_{x_{k-1}x_k}, \end{aligned}$$

- ▶ le variabili  $T_1, T_2, \dots, T_n$  sono continue, mentre le variabili  $X_{S_1}, X_{S_2}, \dots, X_{S_n}$  sono discrete.



# Una interpretazione alternativa dei processi a salti

La formula si può riscrivere separando le variabili continue da quelle discrete:

$$P(X_{S_1} = x_1, X_{S_2} = x_2, \dots, X_{S_n} = x_n) = P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n \frac{L_{x_{k-1}x_k}}{-L_{x_{k-1}x_{k-1}}},$$

e

$$\begin{aligned} & p(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n | X_{S_1} = x_1, \dots, X_{S_n} = x_n) \\ &= P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n (-L_{x_{k-1}x_{k-1}}) \exp(t_k L_{x_{k-1}x_{k-1}}). \end{aligned}$$

$$P(X_{S_1} = x_1, X_{S_2} = x_2, \dots, X_{S_n} = x_n) = P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n \frac{L_{x_{k-1}x_k}}{-L_{x_{k-1}x_{k-1}}},$$

- La prima equazione mostra che le variabili  $X_0, X_{S_1}, \dots, X_{S_n}$  che indicano gli stati visitati dal processo sono una catena di Markov (a tempi discreti) con probabilità di transizione (per  $x \neq y$ )

$$Q_{xy} = \frac{L_{xy}}{-L_{xx}},$$

$$\begin{aligned}
 & p(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n | X_{S_1} = x_1, \dots, X_{S_n} = x_n) \\
 &= P(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n (-L_{x_{k-1}x_{k-1}}) \exp(t_k L_{x_{k-1}x_{k-1}}).
 \end{aligned}$$

- ▶ la seconda mostra che, noti gli stati visitati, i *tempi di permanenza*  $T_1, T_2, \dots, T_n$  sono variabili aleatorie indipendenti tra loro, e ciascuna  $T_k$  ha densità continua esponenziale di parametro  $-L_{x_{k-1}x_{k-1}}$ .

# Simulazione di processi di Markov

- ▶ *Catene*: campionare  $X_0$  con probabilità  $\mu_0$ , poi per  $i \geq 0$ :

# Simulazione di processi di Markov

- ▶ *Catene*: campionare  $X_0$  con probabilità  $\mu_0$ , poi per  $i \geq 0$ :
  - ▶ tempo di permanenza  $T_i$  in  $X_i$  è v.a. geometrica (modificata) di parametro  $1 - Q_{X_i \rightarrow X_i}$

# Simulazione di processi di Markov

- ▶ *Catene*: campionare  $X_0$  con probabilità  $\mu_0$ , poi per  $i \geq 0$ :
  - ▶ tempo di permanenza  $T_i$  in  $X_i$  è v.a. geometrica (modificata) di parametro  $1 - Q_{X_i \rightarrow X_i}$
  - ▶ stato al tempo  $X_{T_i}$  è scelta con probabilità  $\propto Q_{X_i \rightarrow y}$ ,  $y \neq X_i$

# Simulazione di processi di Markov

- ▶ *Catene*: campionare  $X_0$  con probabilità  $\mu_0$ , poi per  $i \geq 0$ :
  - ▶ tempo di permanenza  $T_i$  in  $X_i$  è v.a. geometrica (modificata) di parametro  $1 - Q_{X_i \rightarrow X_i}$
  - ▶ stato al tempo  $X_{T_i}$  è scelta con probabilità  $\propto Q_{X_i \rightarrow y}$ ,  $y \neq X_i$
- ▶ *Processi a salti*: campionare  $X_0$  con probabilità  $\mu_0$ , poi per  $i \geq 0$ :

# Simulazione di processi di Markov

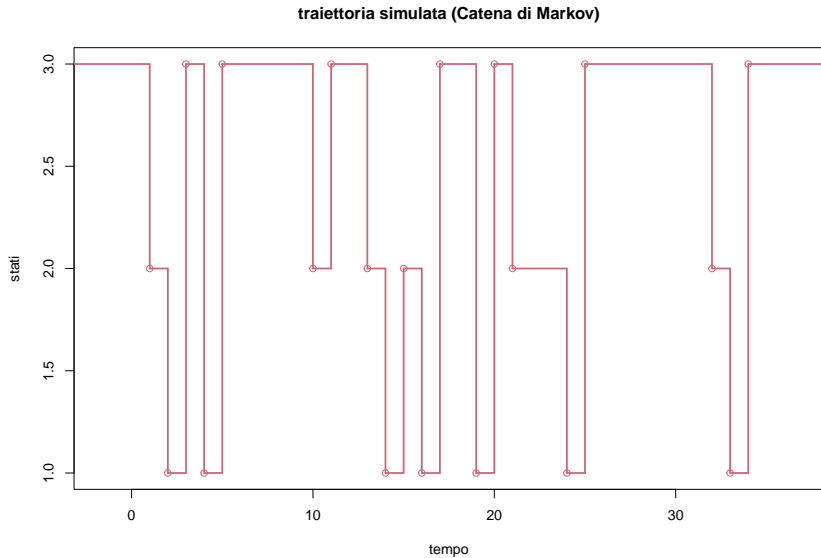
- ▶ *Catene*: campionare  $X_0$  con probabilità  $\mu_0$ , poi per  $i \geq 0$ :
  - ▶ tempo di permanenza  $T_i$  in  $X_i$  è v.a. geometrica (modificata) di parametro  $1 - Q_{X_i \rightarrow X_i}$
  - ▶ stato al tempo  $X_{T_i}$  è scelta con probabilità  $\propto Q_{X_i \rightarrow y}$ ,  $y \neq X_i$
- ▶ *Processi a salti*: campionare  $X_0$  con probabilità  $\mu_0$ , poi per  $i \geq 0$ :
  - ▶ tempo di permanenza  $T_i$  in  $X_i$  è v.a. esponenziale di parametro  $-L_{X_i \rightarrow X_i}$



# Simulazione di processi di Markov

- ▶ *Catene*: campionare  $X_0$  con probabilità  $\mu_0$ , poi per  $i \geq 0$ :
  - ▶ tempo di permanenza  $T_i$  in  $X_i$  è v.a. geometrica (modificata) di parametro  $1 - Q_{x_i \rightarrow x_i}$
  - ▶ stato al tempo  $X_{T_i}$  è scelta con probabilità  $\propto Q_{x_i \rightarrow y}$ ,  $y \neq x_i$
- ▶ *Processi a salti*: campionare  $X_0$  con probabilità  $\mu_0$ , poi per  $i \geq 0$ :
  - ▶ tempo di permanenza  $T_i$  in  $X_i$  è v.a. esponenziale di parametro  $-L_{x_i \rightarrow x_i}$
  - ▶ stato al tempo  $X_{T_i}$  è scelta con probabilità  $\propto L_{x_i \rightarrow y}$ ,  $y \neq x_i$

## Esempi



traiettoria simulata (processo di Markov a salti)

