Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 12

Dario Trevisan – *https://web.dm.unipi.it/trevisan*

29/11/2025

Problemi vari

Eventi e variabili aleatorie discrete

Un nostro amico appassionato di dadi ci propone il seguente gioco: egli ha con sé un dado a 4 facce (tetraedro) numerate da 1 a 4 e uno a sei facce, numerate da 1 a 6. Sceglie uno dei due dadi (senza mostrarci quale) ed esegue con esso 2 lanci consecutivi, ottenendo come esiti due numeri X_1, X_2 (a noi non noti).

1. Calcolare media e varianza della variabile X_1.

Un nostro amico appassionato di dadi ci propone il seguente gioco: egli ha con sé un dado a 4 facce (tetraedro) numerate da 1 a 4 e uno a sei facce, numerate da 1 a 6. Sceglie uno dei due dadi (senza mostrarci quale) ed esegue con esso 2 lanci consecutivi, ottenendo come esiti due numeri X_1, X_2 (a noi non noti).

1. Calcolare media e varianza della variabile X_1.
2. Supponendo che l'esito del primo lancio sia 3, determinare la densità di X_2.

Eventi e variabili aleatorie discrete

Un nostro amico appassionato di dadi ci propone il seguente gioco: egli ha con sé un dado a 4 facce (tetraedro) numerate da 1 a 4 e uno a sei facce, numerate da 1 a 6. Sceglie uno dei due dadi (senza mostrarci quale) ed esegue con esso 2 lanci consecutivi, ottenendo come esiti due numeri X_1, X_2 (a noi non noti).

1. Calcolare media e varianza della variabile X_1.
2. Supponendo che l'esito del primo lancio sia 3, determinare la densità di X_2.
3. Le variabili X_1, X_2 sono indipendenti? sono correlate?

$F \in \{4, 6\}$ $\qquad X_1, X_2 \in \{1, 2, \dots, 6\}$

$$\begin{tikzcd} & X_1 \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & X_2 \end{tikzcd}$$

Rete bayesiana

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_1 \mid F=4]\, P(F=4) + \mathbb{E}[X_1 \mid F=6]\, P(F=6)$$

$$= \frac{1+2+3+4}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2{,}5 + 3{,}5}{2} = 3$$

$$\mathrm{Var}(X_1) = \cancel{\mathrm{Var}(X_1 \mid F=4)\, P(F=4) + \mathrm{Var}(X_1 \mid F=6)\, P(F=6)}$$

$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - (\underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{3})^2$$

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \mid F=4]\, P(F=4) + \mathbb{E}[X_1^2 \mid F=6]\, P(F=6)$$

$$= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \ldots$$

$$P(X_2 = k \mid X_1 = 3) = P(X_2 = k \mid \cancel{X_1 = 3}, F = 4) \cdot P(F = 4 \mid X_1 = 3)$$

$$+ P(X_2 = k \mid \cancel{X_1 = 3}, F = 6) \cdot P(F = 6 \mid X_1 = 3)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot P(F=4 \mid X_1 = 3) + \frac{1}{6} P(F = 6 \mid X_1 = 3) & k = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{1}{6} P(F = 6 \mid X_1 = 3) & k = 5, 6 \end{cases}$$

$$P(F = 4 \mid X_1 = 3) = \frac{P(F=4) \cdot P(X_1 = 3 \mid F = 4)}{P(X_1 = 3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{P(X_1 = 3)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{12}{20}$$

$$P(X_1 = 3) = P(X_1 = 3 \mid F = 4) P(F = 4) + P(X_1 = 3 \mid F = 6) P(F = 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$$

Covarianza $\quad \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])]$

$$= \mathbb{E}[X_1 X_2] - \underbrace{\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]}_{9}$$

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1 X_2 \mid F=4] P(F=4) + \mathbb{E}[X_1 X_2 \mid F=6] P(F=6)$$

$$= \mathbb{E}[X_1 \mid F=4] \cdot \mathbb{E}[X_2 \mid F=4] \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{E}[X_1 \mid F=6]\, \mathbb{E}[X_2 \mid F=6] \frac{1}{2}$$

$$= (2{,}5)^2 \cdot \frac{1}{2} + (3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(2{,}5)^2 + (3{,}5)^2}{2} - 9 > 0$$

--- calcolare ρ_{X_1, X_2}

Due amici, Andrea e Bruno, vanno a pesca. La probabilità che Andrea prenda almeno un pesce in un dato giorno è $1/2$ e anche la probabilità che Bruno ne prenda almeno uno è $1/2$. Tuttavia Bruno sospetta che se Andrea pesca qualcosa in un dato giorno le sue possibilità diminuiscano. Poniamo $p \in (0, 1)$ la probabilità che Bruno prenda almeno un pesce, sapendo che Andrea ne ha pescato almeno uno.

1. Supponendo p noto, e sapendo che uno solo tra Andrea e Bruno è riuscito a prendere qualcosa in un dato giorno, calcolare la probabilità che si tratti di Andrea.

Due amici, Andrea e Bruno, vanno a pesca. La probabilità che Andrea prenda almeno un pesce in un dato giorno è $1/2$ e anche la probabilità che Bruno ne prenda almeno uno è $1/2$. Tuttavia Bruno sospetta che se Andrea pesca qualcosa in un dato giorno le sue possibilità diminuiscano. Poniamo $p \in (0, 1)$ la probabilità che Bruno prenda almeno un pesce, sapendo che Andrea ne ha pescato almeno uno.

1. Supponendo p noto, e sapendo che uno solo tra Andrea e Bruno è riuscito a prendere qualcosa in un dato giorno, calcolare la probabilità che si tratti di Andrea.

2. Gli amici hanno riportato in tabella i pesci pescati in 5 giorni di attività.

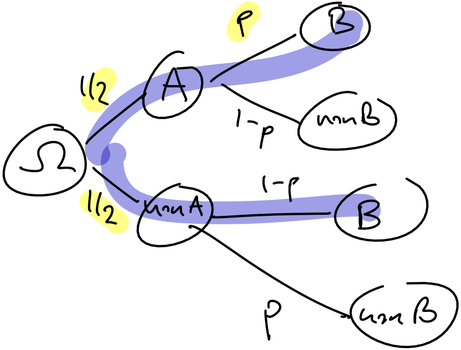
Giorno	1	2	3	4	5
Andrea	1	0	2	1	4
Bruno	0	0	2	0	0

   Supponendo che gli eventi relativi ai diversi giorni siano indipendenti determinare la stima di massima verosimiglianza per p.

(1) A = "Andrea pesca" B = "Bruno pesca"

non A non B

$P(B|A) = p$ $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

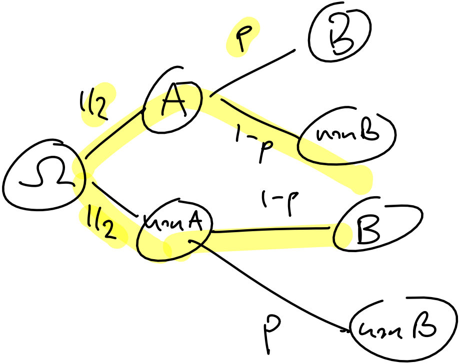


$$P(B) + P(\text{non } B) = 1$$

$$P(B) = \frac{1}{2}\cdot p + \frac{1}{2} q + \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-q)$$

$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{q = 1-p}$$



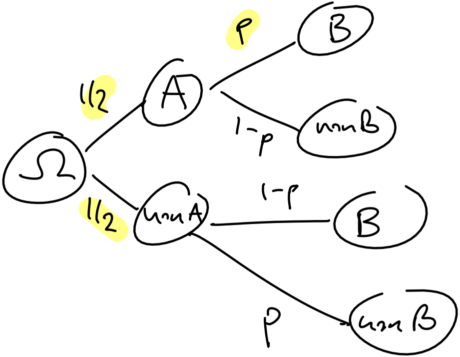
$$P(A \mid U)$$

$$U = (A \text{ e non } B) \text{ o } (\text{non } A \text{ e } B)$$

Kolmorov

$$= \frac{P(A \text{ e } U)}{P(U)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(1-p)}{\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{2}(1-p)}$$

$$= \frac{1}{2}$$



$$P(p \mid D) \propto p^2(1-p)^3$$

$$L(p) = \left(\frac{1}{2}\cdot(1-p)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot p\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot p\right)\left(\frac{1}{2}\cdot(1-p)\right)\left(\frac{1}{2}(1-p)\right)$$

$$= \frac{1}{2^5}\cdot \underbrace{p^2\cdot(1-p)^3}$$

$$\frac{d}{dp}\log\left(L(p)\right) = \frac{d}{dp}\left(2\log p + 3\log(1-p)\right)$$

$$= \frac{2}{p} - \frac{3}{1-p} = 0$$

$$2(1-p) = 3p \qquad p = \frac{2}{5}$$

Variabili aleatorie continue

Un supermercato ha acquistato un nuovo frigorifero per l'esposizione dei surgelati in vendita. La durata di funzionamento dell'apparecchio è descritta da una variabile aleatoria T con distribuzione esponenziale di media 120 mesi.

1. Si calcoli la funzione di sopravvivenza del tempo di funzionamento.

Variabili aleatorie continue

Un supermercato ha acquistato un nuovo frigorifero per l'esposizione dei surgelati in vendita. La durata di funzionamento dell'apparecchio è descritta da una variabile aleatoria T con distribuzione esponenziale di media 120 mesi.

1. Si calcoli la funzione di sopravvivenza del tempo di funzionamento.
2. Sapendo che sono passati 60 mesi di funzionamento e il frigorifero funziona correttamente, si calcoli la densità del tempo di funzionamento rimanente (ossia $T - 60$).

Variabili aleatorie continue

Un supermercato ha acquistato un nuovo frigorifero per l'esposizione dei surgelati in vendita. La durata di funzionamento dell'apparecchio è descritta da una variabile aleatoria T con distribuzione esponenziale di media 120 mesi.

1. Si calcoli la funzione di sopravvivenza del tempo di funzionamento.
2. Sapendo che sono passati 60 mesi di funzionamento e il frigorifero funziona correttamente, si calcoli la densità del tempo di funzionamento rimanente (ossia $T - 60$).
3. Mentre i primi 5 anni di funzionamento sono coperti da garanzia, il costo della riparazione del frigorifero è per contratto $\exp(T/10)$ se una rottura avviene in un tempo T tra i 60 e i 120 mesi dall'installazione. Calcolare il valore atteso del costo di una riparazione appena il frigorifero è installato.

① $T \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ $\qquad \mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{1}{120}$

$$P(T > t) = \int_t^{+\infty} p(T = x)\,dx = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{se } t > 0 \\ 1 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

---

② $p(T - 60 = t \mid T > 60)$

Calcolo $\quad SUR_{T-60 \mid T>60}(t) = P(T - 60 > t \mid T > 60)$

$\underline{t > 0}$

$$= P(T > 60 + t \mid T > 60) = \frac{e^{-\lambda(60+t)} \cdot 1}{e^{-\lambda 60}}$$

$= e^{-\lambda t}$ $\rightsquigarrow$ derivo

(3) $C = \begin{cases} \exp\left(\frac{T}{10}\right) & \text{se } T \in (60, 120) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\mathbb{E}[C] = \mathbb{E}[g(T)] = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-\frac{t}{120}} \frac{dt}{120}$$

$$= \int_{60}^{120} \exp\left(\frac{t}{10} - \frac{t}{120}\right) \frac{dt}{120}$$

$$= \int_{60}^{120} \exp\left(t \cdot \frac{11}{120}\right) \frac{dt}{120} = \frac{1}{\cancel{120}} \frac{\exp\left(t \frac{11}{120}\right)}{\frac{11}{\cancel{120}}} \Bigg|_{60}^{120}$$

Il prezzo in una data futura delle azioni di un'azienda quotata in borsa è rappresentabile, secondo alcuni studiosi dei mercati, da una variabile della forma

$$C = exp(X)$$

dove X è una variabile aleatoria reale con densità $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Calcolate la densità di C, il valore atteso e la varianza.

Il prezzo in una data futura delle azioni di un'azienda quotata in borsa è rappresentabile, secondo alcuni studiosi dei mercati, da una variabile della forma

$$C = exp(X)$$

dove X è una variabile aleatoria reale con densità $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Calcolate la densità di C, il valore atteso e la varianza.
2. Gli studiosi hanno stimato che $\sigma^2 = 1$, mentre sono indecisi sul parametro m. Supponendo di osservare nella data futura che $C = 3$, determinare la stima di massima verosimiglianza per m.

- $L(m ; C=3 \mid \sigma^2=1) = P(C=3 \mid m, \sigma^2=1)$
- $C=3 \leftrightarrow \underline{X=\ln 3} \longrightarrow m_{MLE}=\ln(3)$

① Densità di $\underline{\underline{C = \exp(X)}}$

- Cambio di variabile
- USANDO CDF

$g(x) = \exp(x)$

$g^{-1}(y) = \ln(y) \qquad y > 0$

$g'(x) = \exp(x)$

$$p(C = y) = p(X = \ln(y)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \qquad g'(g^{-1}(y)) = y$$

$$\boxed{= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y) - m}{\sigma}\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{y}}$$

$$CDF_C(y) = P(C \leq y) = P(X \leq \ln(y))$$

$$\mathbb{E}[C] = \mathbb{E}[\exp(X)]$$

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

$$= MGF_X(1) = \exp\left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

$$\mathbb{E}[C^2] = \mathbb{E}[(\exp(X))^2] = \mathbb{E}[\exp(2X)]$$

$$= MGF_X(2) = \exp\left(2m + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 4\right)$$

$$\mathrm{Var}(C) = \exp(2m + 2\sigma^2) - \exp(2m + \sigma^2)$$

$$= \exp(2m)\left(\exp(2\sigma^2) - \exp(\sigma^2)\right)$$

Processi stocastici (stati discreti)

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- e poi dei processi di Markov a salti.

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- e poi dei processi di Markov a salti.
- Studiamo esistenza e unicità delle distribuzioni invarianti associate ad un processo di Markov

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- e poi dei processi di Markov a salti.
- Studiamo esistenza e unicità delle distribuzioni invarianti associate ad un processo di Markov
- Accenniamo al problema della stima dei parametri di un processo a partire dalle osservazioni.

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- e poi dei processi di Markov a salti.
- Studiamo esistenza e unicità delle distribuzioni invarianti associate ad un processo di Markov
- Accenniamo al problema della stima dei parametri di un processo a partire dalle osservazioni.
- Concludiamo con degli esempi fondamentali dalla teoria delle code.

Definizioni generali

Un **processo stocastico** è una collezione di variabili aleatorie $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$,

- tutte a valori nello stesso insieme E, detto insieme degli **stati** del processo,

Definizioni generali

Un **processo stocastico** è una collezione di variabili aleatorie $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$,

- tutte a valori nello stesso insieme E, detto insieme degli **stati** del processo,
- indicizzate da un insieme $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ detto insieme dei **tempi** del processo.

Il calcolo delle probabilità fornisce strumenti utili per affrontare problemi circa

- il *futuro* di un processo (questo è il problema della *previsione*)

Il calcolo delle probabilità fornisce strumenti utili per affrontare problemi circa

- il *futuro* di un processo (questo è il problema della *previsione*)
- il *passato*,

Il calcolo delle probabilità fornisce strumenti utili per affrontare problemi circa

- il *futuro* di un processo (questo è il problema della *previsione*)
- il *passato*,
- oppure anche il *presente* (se non è esattamente osservato, è il *filtraggio*).

Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- a **stati discreti** se E discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio $E = \mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{N}$)

In base all'insieme $\mathcal{T}$ dei tempi:

Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- a **stati discreti** se E discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio $E = \mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{N}$)
- a **stati continui** se E è infinito continuo, $E = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ (e di solito ciascuna X_t ammetta densità continua)

In base all'insieme $\mathcal{T}$ dei tempi:

Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- a **stati discreti** se E discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio $E = \mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{N}$)
- a **stati continui** se E è infinito continuo, $E = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ (e di solito ciascuna X_t ammetta densità continua)

In base all'insieme $\mathcal{T}$ dei tempi:

- a **tempi discreti** se $\mathcal{T}$ è discreto (ad esempio finito, oppure $\mathcal{T} = \mathbb{N}$),

Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- a **stati discreti** se E discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio $E = \mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{N}$)
- a **stati continui** se E è infinito continuo, $E = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ (e di solito ciascuna X_t ammetta densità continua)

In base all'insieme $\mathcal{T}$ dei tempi:

- a **tempi discreti** se $\mathcal{T}$ è discreto (ad esempio finito, oppure $\mathcal{T} = \mathbb{N}$),
- a **tempi continui** se $\mathcal{T} = [0, T]$ è un intervallo (anche illimitato, ad esempio $\mathcal{T} = [0, \infty)$).

Traiettorie e marginali

È utile pensare a $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ come ad una variabile aleatoria vettoriale a valori in uno spazio di **traiettorie**,

$$E^{\mathcal{T}} = \{(x_t)_{t\in\mathcal{T}}\}.$$

- Ad esempio, se $\mathcal{T} = \{1, \ldots, d\}$, allora un processo $(X_i)_{i=1}^d$ può essere pensato come una variabile aleatoria congiunta X, a valori in E^d.

Traiettorie e marginali

È utile pensare a $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ come ad una variabile aleatoria vettoriale a valori in uno spazio di **traiettorie**,

$$E^{\mathcal{T}} = \{(x_t)_{t\in\mathcal{T}}\}\,.$$

- Ad esempio, se $\mathcal{T} = \{1,\ldots,d\}$, allora un processo $(X_i)_{i=1}^d$ può essere pensato come una variabile aleatoria congiunta X, a valori in E^d.

- Ricordiamo la differenza tra la legge delle marginali

  $$P(X_t \in U|I),$$

  al variare di $U \subseteq E$ e $t \in \mathcal{T}$, e la legge congiunta, in questo caso detta semplicemente **legge del processo** $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$, che è definita come tutte le probabilità del tipo

  $$P(X_{t_1} \in U_1, X_{t_2} \in U_2, \ldots, X_{t_k} \in U_k|I),$$

Nel caso di processi a stati discreti, per ogni $t \in \mathcal{T}$ la densità discreta della marginale al tempo t è

$$P(X_t = x|I).$$

- La densità discreta del processo è la collezione di tutte le probabilità

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_k} = x_k|I),$$

Nel caso di processi a stati discreti, per ogni $t \in \mathcal{T}$ la densità discreta della marginale al tempo t è

$$P(X_t = x|I).$$

- La densità discreta del processo è la collezione di tutte le probabilità

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_k} = x_k|I),$$

- Nel caso di processi a stati continui (con densità continua), basta sostituire la "P" di probabilità con "p" della densità di probabilità.

Come parametrizzare un processo?

Determinare la legge di un processo tramite pochi parametri è un problema difficile, soprattutto se l'insieme dei tempi diventa grande.

- Se $E = \{0, 1\}$, la densità discreta di un processo su $\mathcal{T} = \{1, \ldots, d\}$ è praticamente una qualsiasi funzione da $\{0, 1\}^d$ a valori in $[0, 1]$ $\rightarrow$ circa 2^d "parametri".

Come parametrizzare un processo?

Determinare la legge di un processo tramite pochi parametri è un problema difficile, soprattutto se l'insieme dei tempi diventa grande.

- Se $E = \{0, 1\}$, la densità discreta di un processo su $\mathcal{T} = \{1, \ldots, d\}$ è praticamente una qualsiasi funzione da $\{0, 1\}^d$ a valori in $[0, 1] \to$ circa 2^d "parametri".
- Le d densità marginali si ottengono descrivendo solo d "parametri" (la probabilità $P(X_t = 1|I)$), anche meno se le leggi sono tutte uguali.

Come parametrizzare un processo?

Determinare la legge di un processo tramite pochi parametri è un problema difficile, soprattutto se l'insieme dei tempi diventa grande.

- Se $E = \{0, 1\}$, la densità discreta di un processo su $\mathcal{T} = \{1, \ldots, d\}$ è praticamente una qualsiasi funzione da $\{0, 1\}^d$ a valori in $[0, 1] \to$ circa 2^d "parametri".
- Le d densità marginali si ottengono descrivendo solo d "parametri" (la probabilità $P(X_t = 1|I)$), anche meno se le leggi sono tutte uguali.
- Non si può ricostruire la densità del processo a partire dalle densità marginali, senza ulteriori ipotesi.

Proprietà di Markov

La proprietà afferma che *il futuro e il passato sono condizionatamente indipendenti, noto esattamente il presente*.

- Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *di Markov* (o markoviano) se, per ogni $x \in E$, $t \in \mathcal{T}$, le due variabili congiunte relative ai tempi "passati" $(X_s)_{s<t}$ e "futuri" $(X_r)_{r>t}$ sono indipendenti, rispetto all'informazione in cui si conosce esattamente il presente, ossia $\{X_t = x\}$.

Proprietà di Markov

La proprietà afferma che *il futuro e il passato sono condizionatamente indipendenti, noto esattamente il presente*.

- Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *di Markov* (o markoviano) se, per ogni $x \in E$, $t \in \mathcal{T}$, le due variabili congiunte relative ai tempi "passati" $(X_s)_{s<t}$ e "futuri" $(X_r)_{r>t}$ sono indipendenti, rispetto all'informazione in cui si conosce esattamente il presente, ossia $\{X_t = x\}$.

- Se A è una affermazione che che riguarda solo le variabili $(X_s)_{s<t}$, e B è una riguarda solamente le variabili $(X_r)_{r>t}$, allora A, B sono indipendenti rispetto all'informazione $\{X_t = x\}$:

$$P(A, B|X_t = x) = P(A|X_t = x)P(B|X_t = x),$$

oppure

$$P(A|X_t = x, B) = P(A|X_t = x),$$

o anche

$$P(B|X_t = x, A) = P(B|X_t = x).$$

In termini grafici, la proprietà di Markov si traduce in una rete bayesiana associata al processo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ del seguente tipo:

Densità di un processo di Markov

Processi omogenei

Per procedere ulteriormente e sviluppare una teoria semplice:

1. consideriamo come insiemi di tempi $\mathcal{T}$ intervalli discreti $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ o continui $\mathcal{T} = [0, T]$.

Processi omogenei

Per procedere ulteriormente e sviluppare una teoria semplice:

1. consideriamo come insiemi di tempi $\mathcal{T}$ intervalli discreti $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ o continui $\mathcal{T} = [0, T]$.

2. consideriamo processi di Markov **omogenei**, ossia tali che le probabilità di transizione dal tempo s al tempo t dipendano solamente dalla differenza dei tempi $t - s$, o equivalentemente, per ogni $\Delta t \geq 0$ si abbia

$$P(X_t = y | X_s = x) = P(X_{t+\Delta t} = y | X_{s+\Delta t} = x)$$

per stati x, $y \in E$.

Processi stazionari

Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ si dice **stazionario** se, per ogni $\Delta t \geq 0$, la legge (congiunta) del processo coincide con quella del “traslato” $(X_{t+\Delta t})_{t\in\mathcal{T}}$ (purché i tempi $t+\Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$).

- Più precisamente, per ogni $k \geq 1$ e $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$ e $\Delta t \geq 0$, la legge congiunta di $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ coincide con quella di $(X_{t_1+\Delta t}, \ldots, X_{t_k+\Delta t})$, purché i tempi $t_i + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$.

Processi stazionari

Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ si dice **stazionario** se, per ogni $\Delta t \geq 0$, la legge (congiunta) del processo coincide con quella del "traslato" $(X_{t+\Delta t})_{t\in\mathcal{T}}$ (purché i tempi $t+\Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$).

- Più precisamente, per ogni $k \geq 1$ e t_1, t_2, ..., $t_k \in \mathcal{T}$ e $\Delta t \geq 0$, la legge congiunta di $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ coincide con quella di $(X_{t_1+\Delta t}, \dots, X_{t_k+\Delta t})$, purché i tempi $t_i + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$.
- In particolare, nel caso di stati discreti, vale

  $$P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_k} = x_k) = P(X_{t_1+\Delta t} = x_1, \dots, X_{t_k+\Delta t} = x_k),$$

  per qualsiasi scelta di stati x_1, ..., $x_k \in E$.

Processi stazionari

Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ si dice **stazionario** se, per ogni $\Delta t \geq 0$, la legge (congiunta) del processo coincide con quella del "traslato" $(X_{t+\Delta t})_{t\in\mathcal{T}}$ (purché i tempi $t + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$).

- Più precisamente, per ogni $k \geq 1$ e t_1, t_2, ..., $t_k \in \mathcal{T}$ e $\Delta t \geq 0$, la legge congiunta di $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ coincide con quella di $(X_{t_1+\Delta t}, ..., X_{t_k+\Delta t})$, purché i tempi $t_i + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$.
- In particolare, nel caso di stati discreti, vale

  $$P(X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_k} = x_k) = P(X_{t_1+\Delta t} = x_1, \ldots, X_{t_k+\Delta t} = x_k),$$

  per qualsiasi scelta di stati x_1, ..., $x_k \in E$.
- Nel caso continuo l'identità sopra vale per le densita continue (scrivendo la densità p al posto della probabilità P).

Processi stazionari

Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ si dice **stazionario** se, per ogni $\Delta t \geq 0$, la legge (congiunta) del processo coincide con quella del "traslato" $(X_{t+\Delta t})_{t\in\mathcal{T}}$ (purché i tempi $t+\Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$).

- Più precisamente, per ogni $k \geq 1$ e t_1, t_2, ..., $t_k \in \mathcal{T}$ e $\Delta t \geq 0$, la legge congiunta di $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ coincide con quella di $(X_{t_1+\Delta t}, ..., X_{t_k+\Delta t})$, purché i tempi $t_i + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$.
- In particolare, nel caso di stati discreti, vale

  $$P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_k} = x_k) = P(X_{t_1+\Delta t} = x_1, \dots, X_{t_k+\Delta t} = x_k),$$

  per qualsiasi scelta di stati x_1, ..., $x_k \in E$.
- Nel caso continuo l'identità sopra vale per le densita continue (scrivendo la densità p al posto della probabilità P).
- Se un processo X è stazionario, necessariamente tutte le leggi delle marginali X_t coincidono: basta usare $k = 1$ nella definizione sopra.