Teoria dei Sistemi e del Controllo - 18-09-2025

1. Si consideri il sistema **tempo discreto**

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)x_2(k) - x_1(k) \\ x_2(k+1) = -x_2(k) + \alpha x_2^2(k) + 3x_2(k)u(k) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio per ingresso nullo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Studiare la stabilità dei punti ottenuti al passo precedente con il metodo indiretto di Lyapunov.
   - Commentare sull'esistenza di ingressi lineari o affini che rendano i punti di equilibrio asintoticamente stabili.

2. Dato $\beta \in \mathbb{R}$ e il sistema **Tempo Discreto** descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   - si studino la stabililtà interna e BIBO del sistema al variare di $\beta \in \mathbb{R}$;
   - si studino le dimensioni dello spazio di raggiungibilità e di inosservabilità al variare di $\beta \in \mathbb{R}$;
   - Dati i valori di ingresso $u(0)$ e $u(1)$, determinare per quali valori di uscita $y(0), y(1), y(2)$ è possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$ al variare di β.

3. Si consideri il sistema:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_k$$

   - **considerando solo la prima uscita**, si realizzi, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto di tipo dead-beat;
   - **considerando solo la seconda uscita**, si realizzi, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto di tipo dead-beat;
   - **considerando entrambe le uscite**, si realizzi, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto di tipo dead-beat;
   - si commentino i risultati ottenuti nei tre casi in relazione gli uni con gli altri.

4. Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

   ed il problema di controllo ottimo descritto dal funzionale

$$J = \frac{1}{2}x(t_f)^T H x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

   soggetto a : stato inziale $x(0) = x_0$ noto, stato finale desiderato $x(t_f) = x_f$ NON fissato, valore del tempo finale t_f fissato,

   - si ricavi la matrice Hamiltoniana partendo dalle equazioni di Eulero-Lagrange
   - si ricavi la soluzione ottima in forma chiusa $u^*(t) = f(A, B, Q, R, H, x_0, t, t_f)$ in funzione delle grandezze note (suggerimento: NON usare l'equazione di Riccati, non produce una soluzione in forma chiusa).