Teoria dei Sistemi e del Controllo - 24-02-2020

1. Dato il sistema descritto dalle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   - Si studino i modi del sistema e la stabilità interna;
   - Se esiste, si determini (giustificando le risposte) un vettore di uscita C tale per cui l'andamento dell'uscita per il sistema in evoluzione libera possa consistere in combinazione dei seguenti andamenti temporali: 1) $e^{-t}\sin(2t)$ e e^{-2t} oppure 2) $\cos(2t)$ e te^{-2t} oppure 3) $sin(2t)$ e e^{-2t}.
   - Determinare se è possibile trovare le stesse combinazioni di andamenti temporali del punto precedente per l'evoluzione forzata dello stato.
   - Data $C = (0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)$ determinare la matrice di cambio di base che porta il sistema in forma di Kalman.

2. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) \end{cases}$$

   - si determinino gli equilibri del sistema e se ne studi la stabilità col metodo indiretto.
   - per l'equilibrio nell'origine si utilizzi il metodo diretto per determinarne la regione di asintotica stabilità.

3. Dato il sistema **tempo discreto** descritto dalle matrici A, B, C,
   - si descriva il problema della stima asintotica dello stato,
   - si ricavino le equazioni di Luenberger fino ad ottenere la forma ricorsiva dello stimatore asintotico dello stato,
   - sia diano le condizioni e le si dimostrino sotto le quali la dinamica dell'errore di stima converge a zero,
   - si specifichino le condizioni per le quali l'errore di stima e_k converge al 5% del valore iniziale e_0 in N passi (con N generico).

4. Si consideri il sistema tempo continuo SISO $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo:

$$J = \int_0^\infty u^2(t)dt$$

   (a) Si descriva la procedura che permette di calcolare la legge di controllo ottima, nella forma $u = Kx$, che stabilizza l'impianto e minimizza l'indice di costo J.

   (b) Si calcoli quindi, se esiste, la matrice K nei seguenti casi:

   i.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   ii.

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   iii.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$