

# Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

## Lezione 1

Dario Trevisan – <https://web.dm.unipi.it/trevisan>

22/09/2025

## **Introduzione al corso**

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)
6. Processi a stati continui (gaussiani, ARIMA)



# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)
6. Processi a stati continui (gaussiani, ARIMA)
7. Teoremi limite (Legge dei grandi numeri, Teorema Ergodico, Teorema limite centrale)

# Argomenti

1. Calcolo delle probabilità (eventi, formula di Bayes, indipendenza)
  2. Variabili aleatorie (densità continue e discrete, congiunte, marginali)
  3. Indicatori caratteristici (media, varianza, covarianza, correlazione)
  4. Variabili aleatorie Gaussiane e applicazioni (reali e vettoriali, PCA, Regressione lineare)
  5. Processi stocastici a stati discreti (catene di Markov, processi di Markov a salti, esempi dalla teoria delle code)
  6. Processi a stati continui (gaussiani, ARIMA)
  7. Teoremi limite (Legge dei grandi numeri, Teorema Ergodico, Teorema limite centrale)
- Introdurremo inoltre le basi del linguaggio R.

- ▶ Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso

*<https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html>*

trovate

- ▶ Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso

*<https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html>*

trovate

- ▶ **Appunti**

- ▶ Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso

*<https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html>*

trovate

- ▶ **Appunti**
- ▶ Raccolta di prove scritte anni precedenti

- ▶ Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso

*<https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html>*

trovate

- ▶ **Appunti**
- ▶ Raccolta di prove scritte anni precedenti
- ▶ Note delle lezioni (slides annotate)

- ▶ Iscrivetevi al Team del corso per le comunicazioni.

Alla pagina web del corso

*<https://web.dm.unipi.it/trevisan/it/courses/455AA.html>*

trovate

- ▶ **Appunti**
- ▶ Raccolta di prove scritte anni precedenti
- ▶ Note delle lezioni (slides annotate)
- ▶ RegISTRAZIONI (anni precedenti)

# Orario lezioni

- ▶ Lunedì F7 10:30 - 13:30



# Orario lezioni

- ▶ Lunedì F7 10:30 - 13:30
- ▶ Mercoledì F7 11:30 - 13:30

► Giorno:

# Ricevimento

- ▶ Giorno:
- ▶ Orario:

- ▶ Giorno:
- ▶ Orario:
- ▶ Comunque su appuntamento, anche su Teams

- ▶ Giorno:
- ▶ Orario:
- ▶ Comunque su appuntamento, anche su Teams
- ▶ Contattatemi **sempre** via mail o messaggio su Teams.

# Modalità di esame

- ▶ Prova **scritta** con problemi sugli argomenti da 1 a 5 (inclusi) a risoluzione analitica.

# Modalità di esame

- ▶ Prova **scritta** con problemi sugli argomenti da 1 a 5 (inclusi) a risoluzione analitica.
- ▶ Prova **orale** con domande principalmente sulla teoria (tutto il programma svolto).

# Modalità di esame

- ▶ Prova **scritta** con problemi sugli argomenti da 1 a 5 (inclusi) a risoluzione analitica.
- ▶ Prova **orale** con domande principalmente sulla teoria (tutto il programma svolto).
- ▶ Ogni prova scritta superata permette di accedere ad una (e una sola) prova orale: non necessariamente quella immediatamente successiva, **purché nella medesima sessione** (il compitino vale per la sessione invernale).





# Capitolo 1: probabilità elementare

## Cosa vedremo in questo capitolo:

- ▶ la probabilità dal punto di vista **soggettivo**

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- ▶ la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- ▶ regola della **somma** (o additività) e conseguenze

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- ▶ la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- ▶ regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- ▶ sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- ▶ la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- ▶ regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- ▶ sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- ▶ regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- ▶ la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- ▶ regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- ▶ sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- ▶ regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- ▶ problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- ▶ la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- ▶ regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- ▶ sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- ▶ regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- ▶ problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)
- ▶ **formula di Bayes**



# Cosa vedremo in questo capitolo:

- ▶ la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- ▶ regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- ▶ sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- ▶ regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- ▶ problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)
- ▶ **formula di Bayes**
- ▶ stima bayesiana di un'ipotesi sulla base di dati osservati e metodo di **massima verosimiglianza**, cenni ai test statistici

# Cosa vedremo in questo capitolo:

- ▶ la probabilità dal punto di vista **soggettivo**
- ▶ regola della **somma** (o additività) e conseguenze
- ▶ sistemi di **alternative** (finiti) e densità discrete
- ▶ regola del **prodotto** (o della probabilità composta) e conseguenze
- ▶ problemi elementari tramite **diagrammi ad albero** e modello delle estrazioni da un'urna (senza rimpiazzo)
- ▶ **formula di Bayes**
- ▶ stima bayesiana di un'ipotesi sulla base di dati osservati e metodo di **massima verosimiglianza**, cenni ai test statistici
- ▶ Introduzione ad **R** ed RStudio.

# Cos'è la probabilità?

*La probabilità misura il grado di fiducia che un soggetto attribuisce alla validità di una affermazione, avendo a disposizione una informazione parziale (che in generale non permette di dedurre la verità o la falsità dell'affermazione).*

Quale soggetto?

Assegnate

1. una informazione, che indichiamo con  $I$ , nota e ritenuta vera,

è richiesto di misurare il grado di incertezza circa la validità di  $A$ , *sulla base di tutta e sola l'informazione  $I$* , nel modo più razionale possibile.

Tale misura, detta la **probabilità di  $A$  sapendo  $I$**  si indica

$$P(A|I).$$

.

Assegnate

1. una informazione, che indichiamo con  $I$ , nota e ritenuta vera,
2. una affermazione, che indichiamo con  $A$ , che nella realtà può essere solo vera oppure falsa (quindi senza ambiguità),

è richiesto di misurare il grado di incertezza circa la validità di  $A$ , *sulla base di tutta e sola l'informazione  $I$* , nel modo più razionale possibile.

Tale misura, detta la **probabilità di  $A$  sapendo  $I$**  si indica

$$P(A|I).$$

.

# Proprietà elementari

# Operazioni logiche tra affermazioni

Date due affermazioni  $A$  e  $B$  e l'informazione nota  $I$ , se  $A$  è **vera in qualsiasi situazione in cui  $B$  sia vera** (supponendo sempre vera  $I$ ), allora

$$P(B|I) \leq P(A|I).$$



# Regola della somma

- Date  $A$ ,  $B$  e l'informazione nota  $I$ , se  $A$  e  $B$  non possono in nessun caso essere entrambe vere (supponendo  $I$  vera), allora

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I).$$

## Regola della somma

- ▶ Date  $A$ ,  $B$  e l'informazione nota  $I$ , se  $A$  e  $B$  non possono in nessun caso essere entrambe vere (supponendo  $I$  vera), allora

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I).$$

- ▶  $A$  e  $B$  si dicono **incompatibili** (o mutuamente esclusivi) se non possono essere entrambe vere (rispetto ad una informazione  $I$ ), ossia

$$P(A \text{ e } B|I) = 0.$$

# Regola della somma

- ▶ Date  $A$ ,  $B$  e l'informazione nota  $I$ , se  $A$  e  $B$  non possono in nessun caso essere entrambe vere (supponendo  $I$  vera), allora

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I).$$

- ▶  $A$  e  $B$  si dicono **incompatibili** (o mutuamente esclusivi) se non possono essere entrambe vere (rispetto ad una informazione  $I$ ), ossia

$$P(A \text{ e } B|I) = 0.$$

- ▶ Come calcolare  $P(A \text{ oppure } B)$  in generale?



## Alternativa semplice

Un **sistema di alternative** (rispetto ad una informazione  $I$ ) è una famiglia  $(A_i)_{i=1}^n$  di affermazioni (dette alternative)

1. a due a due incompatibili (o mutuamente esclusive) e

Un **sistema di alternative** (rispetto ad una informazione  $I$ ) è una famiglia  $(A_i)_{i=1}^n$  di affermazioni (dette alternative)

1. a due a due incompatibili (o mutuamente esclusive) e
2. tali che almeno una tra loro è sicuramente vera.

Un **sistema di alternative** (rispetto ad una informazione  $I$ ) è una famiglia  $(A_i)_{i=1}^n$  di affermazioni (dette alternative)

1. a due a due incompatibili (o mutuamente esclusive) e
  2. tali che almeno una tra loro è sicuramente vera.
- In breve, **una e una sola** tra le alternative è sicuramente vera (nota  $I$ ).



## Formula di decomposizione

Sia  $(A_i)_{i=1}^n$  un sistema di alternative (rispetto all'informazione  $I$ ) e sia  $B$  una (qualsiasi) affermazione.

Allora

$$P(B|I) = P(B \text{ e } A_1|I) + \dots + P(B \text{ e } A_n|I).$$

Ad un sistema di alternative  $(A_i)_{i=1}^n$  (rispetto all'informazione  $I$ ) possiamo associare la collezione delle probabilità

$$(P(A_i|I))_{i=1}^n.$$

# Densità Bernoulli

# Densità Uniforme



# Moda di una densità discreta

La moda indica l'alternativa **più probabile**, ossia

$$i_{\max} \in \arg \max \{P(A_i|I) : i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

# Regola del prodotto

Date affermazioni  $A$ ,  $B$  e l'informazione nota  $I$ , vale

$$P(A \text{ e } B|I) = P(A|I)P(B|A, I).$$

## Formula di Kolmogorov per la probabilità condizionata:

$$P(B|A, I) = \frac{P(A \text{ e } B|I)}{P(A|I)}.$$



# Formula di disintegrazione

Sia  $(A_i)_{i=1}^n$  un sistema di alternative rispetto ad una informazione  $I$ .  
Allora, data una affermazione  $B$  (qualsiasi),

$$P(B|I) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i, I)P(A_i|I).$$



# Notazione “proporzionale”

Data una densità discreta  $(p_i)_{i=1}^n$  e una funzione  $f(i)$  a valori positivi (non necessariamente  $f(i) \leq 1$ ) scriviamo

$$p_i \propto f(i)$$

per dire che  $p_i = cf(i)$ , dove la costante  $c$  è data da

$$c = \left( \sum_i f(i) \right)^{-1}$$

per garantire che la somma delle  $p_i$  sia 1.

- Esempio: densità uniforme  $p_i \propto 1$

# Notazione “proporzionale”

Data una densità discreta  $(p_i)_{i=1}^n$  e una funzione  $f(i)$  a valori positivi (non necessariamente  $f(i) \leq 1$ ) scriviamo

$$p_i \propto f(i)$$

per dire che  $p_i = cf(i)$ , dove la costante  $c$  è data da

$$c = \left( \sum_i f(i) \right)^{-1}$$

per garantire che la somma delle  $p_i$  sia 1.

- ▶ Esempio: densità uniforme  $p_i \propto 1$
- ▶ Esercizio: determinare  $c$  se  $p_i \propto i$  per  $i = 1, 2, 3, 4$ .