Teoria dei Sistemi e del Controllo - 02-02-2023

1. Dato il sistema non lineare tempo discreto in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = ax_1(t) \\ x_2(t+1) = x_2^2(t) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
   - Studiare le proprietà di stabilità con il metodo indiretto di Lyapunov al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
   - Per i casi per cui non è stato possibile concludere le proprietà di stabilità al punto precedente si proceda analizzando l'evoluzione dello stato del sistema.

2. Dato il sistema descritto dalle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   - Si studino i modi e la stabilità interna del sistema.
   - Se esiste, si determini un vettore di uscita C tale per cui l'evoluzione libera dell'uscita possa contenere i seguenti andamenti temporali: 1) $e^{-t}\sin(\sqrt{2}t)$ e e^{-2t} oppure 2) $\cos(\sqrt{2}t)$ e te^{-t} oppure 3) $\sin(2t)$ e e^{-t}. Si motivi la risposta fornita.
   - Data $C = (0 \;\; -2 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)$ determinare la matrice di cambio di base che porta il sistema in forma di Kalman.

3. Il candidato:

   - discuta, affiancando la teoria con esempi numerici, il problema dell'allocazione completa della dinamica di un sistema lineare tempo continuo in presenza di 1 o di $N > 1$ ingressi
   - discuta, affiancando la teoria con esempi numerici, il problema della stabilizzabilità di un sistema lineare tempo continuo in presenza di 1 o di $N > 1$ ingressi
   - in relazione ai due quesiti sopra, dimostri, proponendo al contempo una procedura operativa, che in alcuni casi, è possibile "trasformare" il sistema tramite una retroazione dello stato preliminare così che il problema (allocazione o stabilizzabilità) sia risolvibile anche utilizzando un solo ingresso

4. Si consideri il sistema lineare tempo invariante $\dot{x} = Ax + Bu$ e l'indice di costo :

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

   con $S_f \geq 0$, $Q \geq 0$ e $R > 0$; lo studente

   - descriva in maniera analitica la procedura che porta all'equazione differenziale di Riccati, alle relative condizioni al contorno e all'espressione del controllo ottimo $u(t)$,
   - dimostri che se S_f, Q ed R sono simmetriche allora anche la soluzione dell'equazione differenziale di Riccati lo è.