

Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 16

Dario Trevisan – <https://web.dm.unipi.it/trevisan>

12/11/2025

Problemi vari

Problema 1

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.

Problema 1

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, posta T_k una variabile aleatoria con densità f_k , calcolare il valor medio di T_k .

Problema 1

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

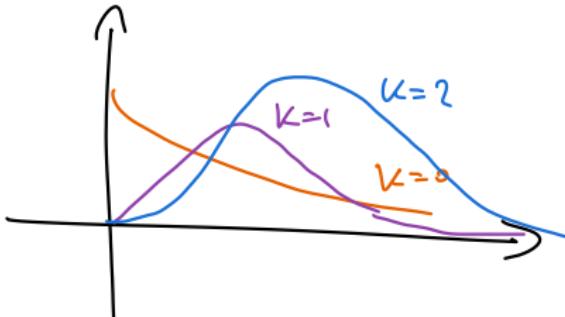
e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, posta T_k una variabile aleatoria con densità f_k , calcolare il valor medio di T_k .
3. Sia $K \in \{0, 1, 2\}$ una variabile con densità discreta $P(K = k) \propto 1 + k$ e T una variabile tale che, sapendo $K = k$, ha densità f_k . Avendo osservato $T \leq 1$, fornire una stima di K .

Risoluzione problema 1

$$c_k \rightarrow \int_0^{+\infty} f_{X_k}(t) dt = 1$$

$$\cdot k=0 \quad f_0(t) \propto \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$



$$\hookrightarrow \exp(\lambda=1) \rightarrow \boxed{c_0=1}$$

$$\cdot k=1 \quad c_1 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = c_1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1=1}$$

$\Rightarrow (c_2=\frac{1}{2})$

$$\cdot k=2 \quad c_2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = c_2 \left[t^2 (-e^{-t}) \right]_0^{+\infty} + c_2 \int_0^{+\infty} 2t e^{-t} dt$$

$\cancel{\left[t^2 (-e^{-t}) \right]_0^{+\infty}} \quad \text{"} \quad 2c_2 \cdot 1 = 1$

$$\mathbb{E}[T_0] = \mathbb{E}[\exp(1)] = 1$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_1] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_1(t) dt = \int_0^{+\infty} t \cdot t e^{-t} dt \\ &= \underbrace{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt}_{= [2]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_2] &= \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{1}{2} t^2 e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt \\ &\geq \frac{1}{2} \cancel{t^3 (-e^{-t})} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} 3t^2 e^{-t} dt \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2 = [3]\end{aligned}$$

Prior: $P(K=k) \propto 1+k$

Likelihood $L(\kappa; T \leq 1) = P(T \leq 1 | K=k)$

$$= \int_0^1 f_K(t) dt$$

Posterior: $P(K=k | T \leq 1) \propto \overbrace{(1+k)}^{(1+k)} \cdot \overbrace{\int_0^1 f_K(t) dt}^{f_{K|T}(t)}$

MAP $K_{MAP} \in \arg \max_K P(K=k | T \leq 1)$

$$L(0; T \leq 1) = \int_0^1 e^{-t} dt = \boxed{1 - e^{-1}}$$

$\frac{d}{dt}(-e^{-t})$

$$L(1; T \leq 1) = \int_0^1 t e^{-t} dt = -t e^{-t} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt$$

$\frac{d}{dt}(-e^{-t})$

$$= -e^{-1} + 1 - e^{-1}$$

$$= \boxed{1 - 2e^{-1}}$$

$$L(2; T \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{2} t^2 e^{-t} dt = -\frac{t^2}{2} e^{-t} \Big|_0^1 + \int_0^1 t e^{-t} dt$$

$\frac{d}{dt}(-e^{-t})$

$$= -\frac{1}{2} e^{-1} + 1 - 2e^{-1}$$

$$= \boxed{1 - \frac{5}{2} e^{-1}}$$

$$P(K=k \mid T \leq 1) \propto \begin{cases} 1 \cdot (1 - e^{-1}) & k=0 \\ 2 \cdot (1 - 2e^{-1}) & k=1 \\ 3 \cdot (1 - \frac{5}{2}e^{-1}) & k=2 \end{cases}$$

zu ex3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}, \quad e \approx 2,7 \\ \frac{2}{3}, \quad 0,63 \\ \cancel{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}$$



Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare) $\omega \in (0, \pi)$, si consideri una variabile aleatoria uniforme continua T sull'intervallo $[0, 1]$ e si ponga $Y_\omega := \cos(\omega T)$.

1. Scrivere esplicitamente la densità di Y_ω (in funzione di ω).

Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare) $\omega \in (0, \pi)$, si consideri una variabile aleatoria uniforme continua T sull'intervallo $[0, 1]$ e si ponga $Y_\omega := \cos(\omega T)$.

1. Scrivere esplicitamente la densità di Y_ω (in funzione di ω).
2. Calcolare il valor medio di Y_ω (in funzione di ω).

Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare) $\omega \in (0, \pi)$, si consideri una variabile aleatoria uniforme continua T sull'intervallo $[0, 1]$ e si ponga $Y_\omega := \cos(\omega T)$.

1. Scrivere esplicitamente la densità di Y_ω (in funzione di ω).
2. Calcolare il valor medio di Y_ω (in funzione di ω).
3. Calcolare la mediana di Y_ω (in funzione di ω).

Problema 2 (Esercizio 2 prova 2025-09-10)

Dato un parametro (frequenza angolare) $\omega \in (0, \pi)$, si consideri una variabile aleatoria uniforme continua T sull'intervallo $[0, 1]$ e si ponga $Y_\omega := \cos(\omega T)$.

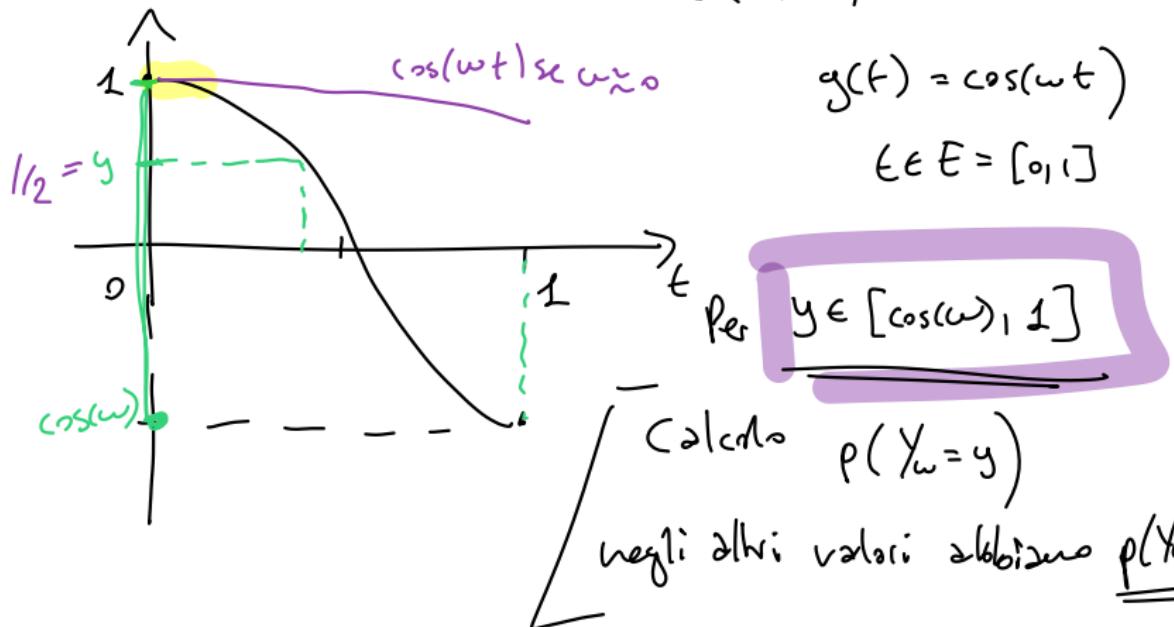
1. Scrivere esplicitamente la densità di Y_ω (in funzione di ω).
2. Calcolare il valor medio di Y_ω (in funzione di ω).
3. Calcolare la mediana di Y_ω (in funzione di ω).
4. Si osserva $Y_\omega = 1/2$. Determinare, se possibile, una stima di massima verosimiglianza per ω .

Risoluzione problema 2

① $Y_\omega = \cos(\omega T)$

T è uniforme su $[0, 1]$

$\omega \in (0, \pi)$



$$g(t) = y \rightarrow \cos(\omega t) = y \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} t = \frac{1}{\omega} \cos^{-1}(y) \\ u \\ g^{-1}(y) \end{array}}$$

$$|g'(t)| = \omega |\sin(\omega t)|$$

$$\rho(Y_{\omega}=y) = \rho(g(\tau)=y) = \underbrace{\rho(\tau=g^{-1}(y))}_{\substack{\downarrow \\ \text{densità uniforme} \\ \text{su } [0,1]}} \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

$$= \frac{1}{\omega |\sin(y \cdot \frac{1}{\omega} \cos^{-1}(y))|} = \boxed{\frac{1}{\omega \sqrt{1-y^2}}}$$

$$(2) \quad E[Y_w] = \int_{\cos(\omega)}^1 y \cdot P(Y_w=y) dy = \int_{\cos(\omega)}^1 \frac{y}{\omega \sqrt{1-y^2}} dy$$

||

$$E[\cos(\omega T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) p(T=t) dt \quad T \text{ uniform}$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\cos(\omega t) dt}_{\frac{d}{dt} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}} = \left. \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right|_0^1 = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{mediana di } Y_\omega \quad \boxed{CDF_{Y_\omega}(m) = \frac{1}{2}}$$

$$P(Y_\omega \leq m) = \int_{-\infty}^m p(Y_\omega = y) dy$$

(densità nulla)

$$= \int_{\cos(\omega)}^m \frac{1}{\omega \sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2}$$

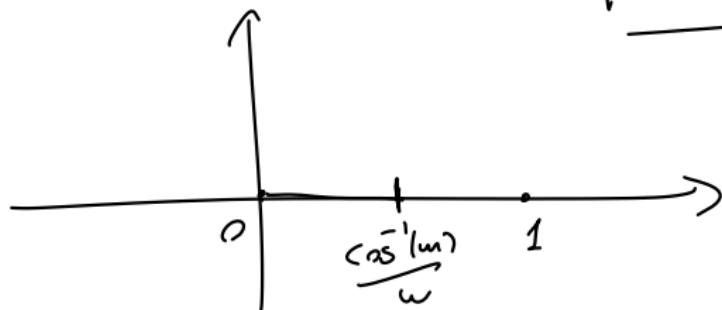
Se $y < \cos(\omega)$

$\cos(\omega + t)$ de cresce

$$P(\cos(\omega T) \leq m) \stackrel{\downarrow}{=} P(\omega T \geq \cos^{-1}(m))$$

$$= P(T \geq \frac{\cos^{-1}(m)}{\omega}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$= \int_{\frac{\cos^{-1}(m)}{\omega}}^1 1 dt = 1 - \frac{\cos^{-1}(m)}{\omega} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\cos^{-1}(m)}{\omega} = \frac{1}{2}}$$



$$\cos^{-1}(m) = \frac{\omega}{2} \rightarrow \boxed{m = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Se g é crescente / decrescente $g(\text{mediana de } T) =$
 $= \text{mediana de } (g(T))$

$$\textcircled{4} \quad \text{poniamo } y = \frac{1}{2} \quad L\left(\omega; Y_\omega = \frac{1}{2}\right) = p\left(Y_\omega = \frac{1}{2} \mid \omega\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\omega^2}} \quad \text{se } \frac{1}{2} \in [\cos(\omega), 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

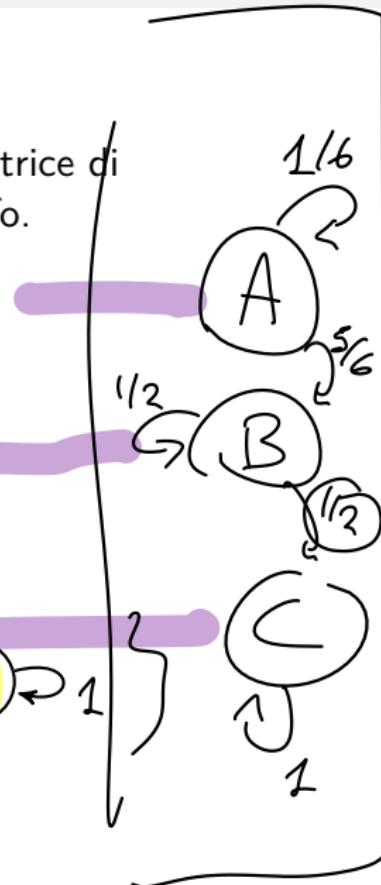
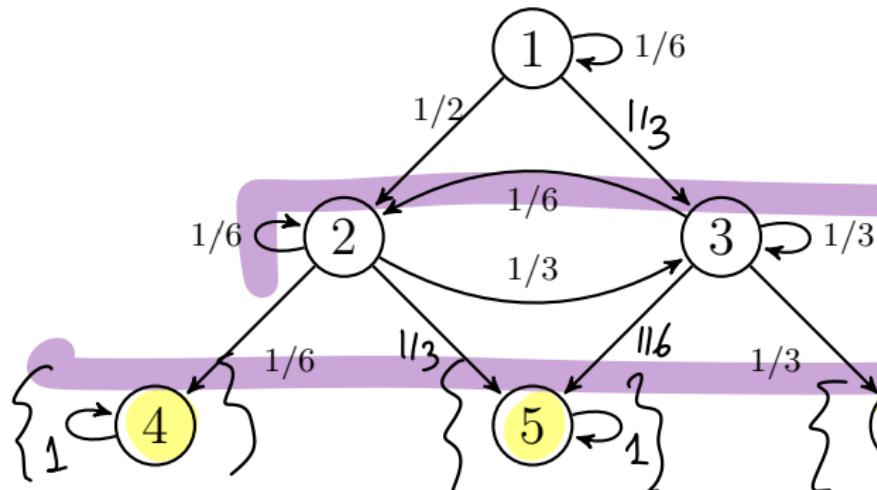
massimizziamo in $\omega \in (0, \pi)$

con il vincolo $\cos(\omega) < \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \boxed{\omega > \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}$

$$\omega_{MLE} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Problema 3 (Esercizio 3 prova 2023-02-01)

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.

Ricorrenti $\{4, 5, 6\}$ (assorbenti)

Transitori $\{1, 2, 3\}$ Es $2 \rightarrow 4$ $m_2 = 4 \not\rightarrow 2$
 $3 \rightarrow 5$ $m_3 = 5 \not\rightarrow 3$
 $1 \rightarrow ?$ $m_1 = ? \not\rightarrow 1$

Classi chiuse irr. $C_4 = \{4\}$ $C_5 = \{5\}$ $C_6 = \{6\}$

$$\begin{aligned} \mu^{C^4} &= (0, 0, 0, 1, 0, 0) & \mu^{C^6} &= (0, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \mu^{C^5} &= (0, 0, 0, 0, 1, 0) & d_4 \mu^{C^4} + d_5 \mu^{C^5} + (1-d_4-d_5) \mu^{C^6} \\ & & \underbrace{\mu = (0, 0, 0, d_4, d_5, 1-d_4-d_5)}_{\text{distribuzione}} & & \underbrace{d_4, d_5 \in [0, 1]}_{\text{distribuzione}} \end{aligned}$$

1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.

1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 4 | X_1 = 1)$.

1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 4 | X_1 = 1)$.
3. Posta $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{A, B, C\}$ definita da

$$g(1) = A, \quad g(2) = g(3) = B, \quad g(4) = g(5) = g(6) = C,$$

si ponga $Y_n = g(X_n)$. Supponendo che $X_0 = 1$, dire se $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ è anch'essa una catena di Markov e in caso affermativo calcolarne la matrice di transizione.

Risoluzione problema 3

② $P(X_n = 4 \mid X_1 = 2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(Q^\infty\right)_{1,4}$

$$\underbrace{Q^\infty = Q^\infty \cdot Q}_{Q^\infty = Q \cdot Q^\infty}$$

$$Q^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & d_{1,4} & d_{1,5} & 1-d_{1,4}-d_{1,5} \\ 2 & 0 & 0 & d_{2,4} & d_{2,5} & 1-d_{2,4}-d_{2,5} \\ 3 & 0 & 0 & d_{3,4} & d_{3,5} & - - - \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$

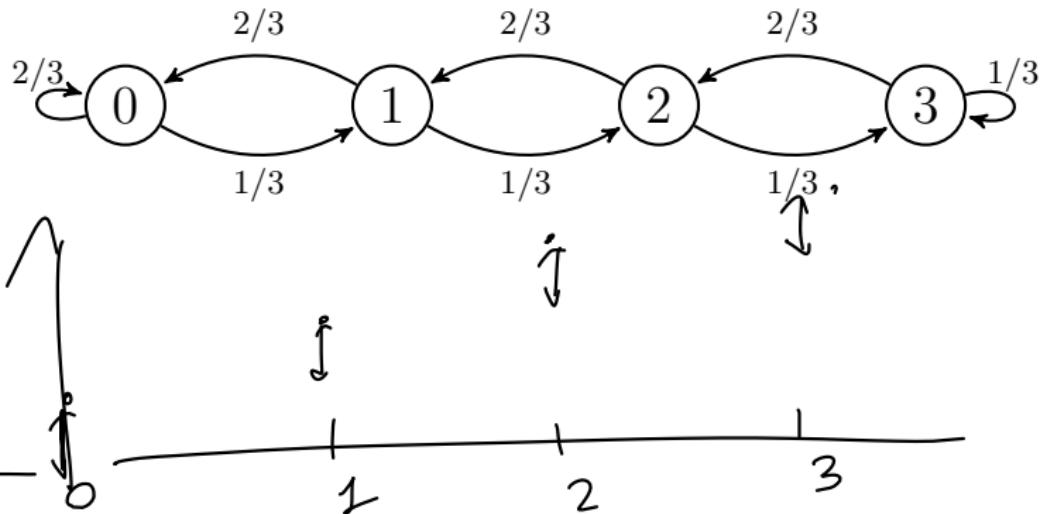
$$\underline{Q}^{\infty} = Q - \underline{Q}^{\infty}$$

$$Q_{1,4}^{\infty} = Q_{1,1} Q_{1,4}^{\infty} + Q_{1,2} Q_{2,4}^{\infty} + Q_{1,3} Q_{3,4}^{\infty}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{1,4} = \frac{1}{6} \cdot d_{1,4} + \frac{1}{2} \cdot d_{2,4} + \frac{1}{3} d_{3,4} \\ d_{2,4} = \frac{1}{6} d_{1,4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} d_{3,4} \\ d_{3,4} = \frac{1}{3} d_{3,4} + \frac{1}{6} d_{2,4} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{5}{6} d_{1,4} = \frac{1}{2} d_{2,4} + \frac{1}{3} d_{3,4} \\ \frac{5}{6} d_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} d_{3,4} \\ \frac{2}{3} d_{3,4} = \frac{1}{6} d_{2,4} \end{array} \right\} \quad \boxed{d_{3,4} = \frac{1}{4} d_{2,4}}$$

Problema 4 (Esercizio 3 prova 2025-04-14)

Si consideri una catena di Markov stazionaria $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti).



1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. % parametri a , $b \in [0, 1]$ in modo tale che la distribuzione uniforme sugli stati sia una distribuzione invariante.

1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. % parametri a , $b \in [0, 1]$ in modo tale che la distribuzione uniforme sugli stati sia una distribuzione invariante.
2. Descrivere esplicitamente la funzione di ripartizione (CDF) di X_3 .

1. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. ~~% parametri a, b ∈ [0, 1]~~ in modo tale che la distribuzione uniforme sugli stati sia una distribuzione invariante.
2. Descrivere esplicitamente la funzione di ripartizione (CDF) di X_3 .
3. Sapendo che $X_1 \neq 0$, è più probabile che sia $X_0 = 0$ o $X_0 \neq 0$?

$$\left[P(X_0 = 0 | X_1 \neq 0) = \frac{P(X_1 \neq 0 | X_0 = 0) P(X_0 = 0)}{P(X_1 \neq 0)} \right]$$

Risoluzione problema 4

$$P(x_0 \neq 0 | x_1 \neq 0) \propto P(x_1 \neq 0 | x_0 \neq 0) P(x_0 \neq 0)$$

$$1 - P(x_1 = 0 | x_0 \neq 0)$$

$$\downarrow$$
$$\sum_{k=1}^2 P(x_1 = 0 | x_0 = k) \cdot P(x_0 = k | x_0 \neq 0)$$

solo $k=2$

$$\boxed{\frac{P(x_0 = k)}{1 - P(x_0 = 0)}}$$

