Teoria dei Sistemi e del Controllo - 26-06-2025

1. Dato il sistema dinamico non lineare **tempo continuo**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &=& x_1(t)\left(\frac{3}{2}k^2 + x_2(t) - x_1^2(t)\right) \\ \dot{x}_2(t) &=& -\frac{1}{2}x_1^2(t) - x_2(t), \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Si studi la stabilità degli equilibri ottenuti.
   - Per $k \neq 0$, nel caso dell'equilibrio nell'origine determinare su quale componente dello stato deve agire l'ingresso affinchè sia possibile trovare un ingresso lineare nello stato che renda l'origine asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema lineare **tempo discreto** rappresentato dalle equazioni dinamiche

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + x_3(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2}x_2(k) + x_3(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + u(k) \\ y(k) = x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

   - Basandosi solo sulla forma di stato del sistema, argomentare sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità senza l'utilizzo del Lemma PBH o il calcolo di matrici di raggiungibilità e osservabilità.
   - Si studino le proprietà di raggiungibilità, controllabilità, osservabilità. Si studi la stabilità interna e la stabilità BIBO del sistema.
   - Si determini la matrice di cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman.
   - Determinare gli andamenti visibili nell'evoluzione forzata e nell'evoluzione libera dell'uscita.

3. Sia dato il sistema tempo discreto :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = Cx_k$$

   si dica :

   - per quali valori di α il sistema è sia detettabile che stabilizzabile;
   - se e per quali valori di α e' possibile costruire uno stimatore dead-beat;
   - se e per quali valori di α e' possibile costruire un controllore con retroazione dello stato stimato tale che l'evoluzione libera dello stato si annulli completamente in al più 3 passi.

   Si scelga se esiste un valore di α per ottenere sia stimatore che controllore di tipo dead-beat e li si costruisca.

4. Si formuli il problema di controllo ottimo lineare quadratico in tempo infinito per sistemi lineari tempo invarianti tempo continui (o LQR) e:

   - si specifichino le condizioni necessarie e sufficienti perche' il problema ammetta soluzione
   - si fornisca una giustificazione, anche attraverso l'uso di esempi o controesempi, dell'enunciato al punto precedente
   - si descriva in sufficiente dettaglio una procedura per la soluzione del problema, ovvero per il calcolo del guadagno ottimo.