Capitolo 6

Osservabilità e Ricostruibilità

Si è in passato già sottolineato il fatto che, nel modello in forma di stato di un sistema, l'uscita (di misura) ha il significato di specificare quelle grandezze di cui, a differenza dello stato, si ha a disposizione una misura ad ogni istante del processo. Essendo la conoscenza degli stati necessaria per effettuare la loro retroazione, è perciò fondamentale determinare se, dalla conoscenza delle uscite (e degli ingressi, che sono ovviamente a nostra disposizione), è possibile conoscere (o più in generale stimare) lo stato attuale del sistema.

La capacità di stimare lo stato di un sistema è d'altronde importante anche in senso diretto in molte applicazioni, dove è importante risalire dalla osservazione di fenomeni misurabili alla situazione "interna" del sistema, di per sé non accessibile.

Se i dati di ingresso/uscita sono misurati in un intervallo $[0, t]$, il problema di ricavare informazione sullo stato $x(0)$ al tempo 0 si dice di *osservazione dello stato*; viceversa, il problema di ricavare lo stato $x(t)$ al tempo t si dice di *ricostruzione dello stato*. Si vedrà che i due problemi sono equivalenti per sistemi LTITC, ma non per sistemi LTITD.

Nelle questioni di osservazione/ricostruzione, ci troveremo spesso di fronte a problemi che possono essere ricondotti a sistemi di equazioni lineari sovradeterminati (con meno incognite che equazioni), che in pratica saranno spesso inconsistenti. Per questi problemi si porranno quindi questioni di approssimazione ottima ad una soluzione impossibile.

6.1 Insieme indistinguibile per sistemi LTI

Consideriamo un sistema tempo invariante in forma di stato

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}x(t) & = & f(x(t), u(t)), \\ y(t) & = & h(x(t), u(t)) \end{array}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$ e $u \in \mathbb{R}^m$. Sia al solito $x(\bar{x}, u(\cdot), t)$ il valore della soluzione corrispondente a $x(0) = \bar{x}$ e controllo $u(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, al tempo t; si indichi poi con $y(\bar{x}, u(\cdot), t) = h\left(x(\bar{x}, u(\cdot), t), u(t)\right)$.

Ci chiediamo se, conoscendo

- il modello del sistema
- l'ingresso $u(\cdot)$ sull'intervallo $[0, t]$;
- l'uscita $y(\cdot)$ sull'intervallo $[0, t]$,

è possibile osservare $x(0) = \bar{x}$ (ricostruire $x(t)$).

È ovvio (almeno in linea teorica) che, se è possibile osservare $\bar{x}$, la conoscenza dell'ingresso, del modello e quindi della sua soluzione (che si suppone unica nel futuro per il determinismo del modello) implica che si possa determinare univocamente $x(t) = x(\bar{x}, u, t)$. Il viceversa non è detto: per i sistemi TD, in particolare, abbiamo già visto che le traiettorie di un sistema non sono univocamente determinate nel passato (si pensi alla possibile non invertibilità di A^t per sistemi LTITD).

Poniamo adesso la questione della osservabilità dello stato in termini leggermente diversi. Due stati iniziali $\bar{x}$ e $\bar{x}_1$ si dicono *indistinguibili* (nel futuro) nell'intervallo $[0, t]$ (si scrive $\bar{x} I_t \bar{x}_1$) se, qualsiasi ingresso $u(\cdot) \in U$ venga applicato al sistema, le uscite corrispondenti alle evoluzioni relative sono uguali, cioè

$$\bar{x} I_t \bar{x}_1 \Leftrightarrow \forall u \in U,\ y(\bar{x}, u, \tau) = y(\bar{x}_1, u, \tau)\, \forall \tau \in [0, t]$$

Gli stati sono detti *indistinguibili* tout–court se sono indistinguibili per ogni t (si scrive $\bar{x} I \bar{x}_1$).

Si definisce insieme dei punti *indistinguibili* nell'intervallo $[0, t]$ da $\bar{x}$ l'insieme

$$\mathcal{I}_t(\bar{x}) \stackrel{def}{=} \left\{ \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n | y(\bar{x}, u, \tau) = y(\bar{x}_1, u, \tau)\, \forall \tau \in [0, t], \forall u \in U \right\}.$$

Ovviamente, se questo insieme contiene altri punti diversi da $\bar{x}$ stesso, non sarà possibile determinare univocamente lo stato dalle uscite.

6.1.1 Sistemi LTITC

Consideriamo l'insieme di indistinguibilità per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{6.1}$$

con $x(0) = \bar{x}$, e la corrispondente soluzione per le uscite:

$$y(\bar{x}, u, \tau) = Ce^{A\tau}\bar{x} + \int_0^\tau Ce^{A(\tau-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma + Du(\tau)$$

Confrontando le uscite per due stati iniziali diversi, si ha

$$\bar{x}_1 I_t \bar{x} \Leftrightarrow Ce^{A\tau}\bar{x}_1 = Ce^{A\tau}\bar{x},\ \forall \tau \in [0, t] \Leftrightarrow Ce^{A\tau}(\bar{x}_1 - \bar{x}) = 0,\ \forall \tau \in [0, t]$$

per cui lo studio della indistinguibilità di $\bar{x}_1$ da $\bar{x}$ può essere riformulato come lo studio della indistinguibilità dello stato $\tilde{x} \stackrel{def}{=} \bar{x}_1 - \bar{x}$ dall'origine. Inoltre è evidente che in questo problema, gli ingressi non giocano alcun ruolo (questo è vero solo perchè il sistema è lineare!)

Uno stato $\tilde{x}$ indistinguibile dall'origine nell'intervallo $[0, t]$ viene detto *non osservabile* in $[0, t]$. Non si specifica l'intervallo se questo vale per ogni intervallo. Se per un sistema l'insieme dei punti non osservabili contiene solo l'origine, si dice che *il sistema* è (completamente) osservabile.

Dunque, la distinguibilità di uno stato $\bar{x}_1$ da $\bar{x}$ su $[0, t]$ dipende dalla eguaglianza dei due corrispondenti vettori di uscita per ogni istante dell'intervallo. Supponiamo ancora una volta che gli ingressi applicati al sistema (e quindi anche le sue soluzioni) siano analitici. L'uguaglianza di due funzioni analitiche in ogni punto di un intervallo implica ed è implicata dalla uguaglianza delle funzioni e di tutte le loro derivate nel punto iniziale dell'intervallo. Considerando quindi ancora l'espressione della k–esima derivata dello stato

$$x^{(k)} = A^k x + \sum_{i=1}^{k} A^{k-i}Bu^{(i-1)},$$

si ha

$$\begin{array}{rcl} y(\bar{x}, u, 0) - y(\bar{x}_1, u, 0) & = & C(\bar{x} - \bar{x}_1) \\ \dot{y}(\bar{x}, u, 0) - \dot{y}(\bar{x}_1, u, 0) & = & CA(\bar{x} - \bar{x}_1) \\ \vdots & = & \vdots \\ y^{(k)}(\bar{x}, u, 0) - y^{(k)}(\bar{x}_1, u, 0) & = & CA^k(\bar{x} - \bar{x}_1) \end{array}$$

Queste equazioni, che definiscono gli stati $\bar{x}_1$ indistinguibili da $\bar{x}$, possono essere riscritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}^{(1)}(0) \\ \tilde{y}^{(2)}(0) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(k)}(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \\ \vdots \end{bmatrix} \tilde{x}$$

dove $\tilde{y}(t) = y(\bar{x}, u, t) - y(\bar{x}_1, u, t)$.

Dunque $\tilde{x}$ è non osservabile (ovvero $\bar{x}_1$ è indistinguibile da $\bar{x}$) se appartiene allo spazio nullo della matrice composta con infinite righe sopra riportata. In seguito al teorema di Cayley–Hamilton, sappiamo comunque che ogni gruppo di righe CA^r con $r \geq n$ è combinazione lineare delle prime n righe della matrice stessa. Possiamo dunque dire che l'insieme dei punti non osservabili nell'intervallo $[0, t]$ è in effetti un sottospazio, detto *sottospazio di inosservabilità*, dato da

$$\bar{\mathcal{O}} = \ker(O) \stackrel{def}{=} \ker\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right)$$

La matrice O viene detta *matrice di osservabilità* del sistema.

Il sottospazio di inosservabilità nell'intervallo $[0, t]$ non dipende in effetti dalla durata dell'intervallo di osservazione t: se uno stato è indistinguibile dall'origine in un tempo t, tale rimarrà per ogni durata della osservazione. Viceversa, se uno stato è osservabile con osservazioni della uscita di una certa durata, lo sarà anche con osservazioni di durata arbitrariamente breve. Quindi, per sistemi in TC, si ometterà di specificare la durata del tempo di osservazione. Un sistema è completamente osservabile se e solo se $\ker(O) = \{0\}$.

L'insieme dei punti indistinguibili dal generico punto $\bar{x}$ è dunque dato da

$$\mathcal{I}_t(\bar{x}) = \left\{x = \bar{x} + r, \forall r \in \bar{\mathcal{O}}\right\}$$

ed è quindi un iperpiano, parallelo al sottospazio di inosservabilità, passante per $\bar{x}$ ed anch'esso indipendente da t. Nessun punto, eccetto $\bar{x}$, è indistinguibile da $\bar{x}$ nel caso che il sistema sia osservabile.

6.1.2 Sistemi LTITD

Consideriamo l'insieme di inosservabilità per il sistema

$$\begin{array}{rcl} x(t+1) & = & Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{array} \tag{6.2}$$

con $x(0) = \bar{x}$

La soluzione per le uscite della equazione alle differenze (6.2) (che indicheremo con $y(\bar{x}, u, \tau)$) è data da

$$y(\bar{x}, u, \tau) = CA^{\tau}\bar{x} + \sum_{k=0}^{\tau-1} CA^{\tau-k-1}Bu(k)$$

Consideriamo la differenza tra le uscite corrispondenti a due diversi stati iniziali $\bar{x}$ e $\bar{x}_1$, indicandola con

$$\tilde{y}(\tau) \stackrel{def}{=} y(\bar{x}, u, \tau) - y(\bar{x}_1, u, \tau).$$

Impilando in un solo vettore i vettori di differenze tra le uscite negli istanti $0, 1, \ldots, t$ si può scrivere

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}(1) \\ \vdots \\ \tilde{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{t} \end{bmatrix} (\bar{x} - \bar{x}_1) \stackrel{def}{=} O_t\tilde{x}$$

Due stati iniziali sono quindi indistinguibili in t passi se la loro differenza $\tilde{x}$ appartiene allo spazio nullo della *matrice di osservabilità in t passi* O_t, che viene detto *sottospazio di inosservabilità in t passi*, $\bar{\mathcal{O}}_t \stackrel{def}{=} \mathsf{ker}\,(O_t)$.

È evidente che il sottospazio di inosservabilità in t passi $\bar{\mathcal{O}}_t$ contiene $\bar{\mathcal{O}}_{t+1}$, e che quindi la successione definita dalle dimensioni dei sottospazi di inosservabilità al crescere del numero di passi è non crescente; per cui la successione si stabilizzerà in un valore finito ≥ 0. Per il teorema di Cayley–Hamilton, il sottospazio di inosservabilità in un numero arbitrariamente grande di passi può essere calcolato arrestandosi all'$(n-1)$–esimo passo,

$$\bar{\mathcal{O}} = \mathsf{ker}\,(O) \stackrel{def}{=} \mathsf{ker} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

che viene detto *sottospazio di inosservabilità* del sistema, mentre la matrice O viene detta *matrice di osservabilità del sistema*. Ogni stato distinguibile dall'origine in un numero qualsiasi di passi può essere anche distinto in non più di $n-1$ passi.

L'insieme degli stati indistinguibili dallo stato generico $\bar{x}$ al passo t è pertanto dato da

$$\mathcal{I}_t(\bar{x}) = \left\{ x = \bar{x} + r, \forall r \in \bar{\mathcal{O}}_t \right\}$$

ed è quindi ancora un iperpiano, parallelo al sottospazio di inosservabilità in t passi, passante per $\bar{x}$.

L'insieme dei punti indistiguibili da $\bar{x}$ si riduce al solo punto $\bar{x}$ se $\mathsf{rank}\,(O) = n$. In tal caso, il sistema stesso si dice *completamente osservabile*.

6.1.3 Ricostruibilità

Il problema di ricostruire, a partire dalle misure delle uscite in un intervallo $[T-t, T]$, lo stato all'istante T stesso riveste particolare importanza in relazione alla possibilità di retroazionare lo stato.

Due stati del sistema al tempo T, $x_1(T)$ e $x_2(T)$, si dicono *indistinguibili nel passato in t passi* se entrambi sono possibili soluzioni del sistema a partire da condizioni iniziali compatibili con le misure compiute sull'intervallo $[T-t, T]$.

Per la tempo–invarianza del sistema considerato, posso porre $T = t$. Scrivendo la soluzione dello stato al tempo t a partire dallo stato iniziale $\bar{x}_1$ si ha

$$x_1(t) \stackrel{def}{=} x(\bar{x}_1, u, t) = A^t\bar{x}_1 + \sum_{k=0}^{\tau-1} A^{t-k-1}Bu(k)$$

Se, in base alle misure delle uscite fatte nei passi da 0 a t, posso osservare $\bar{x}_1$, certamente potrò anche stabilire univocamente $x_1(t)$. Nel caso però in cui esista un insieme non banale di indistinguibilità in t passi, non sarò in grado di distinguere, sulla base delle misure di uscita, lo stato iniziale $\bar{x}_1$ da uno stato $\bar{x}_2$ se $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = \tilde{x} \in \mathsf{ker}\, O_t$. D'altronde, lo stato al passo t a partire da $\bar{x}_2$ vale

$$\begin{array}{rcl} x_2(t) \stackrel{def}{=} x(\bar{x}_2, u, t) & = & A^t\bar{x}_2 + \sum_{k=0}^{\tau-1} A^{t-k-1}Bu(k) = \\ & = & A^t\tilde{x} + x(\bar{x}_1, u, t) = A^t\tilde{x} + x_1(t) \end{array}$$

quindi l'indistinguibilità dello stato iniziale è irrilevante ai fini della determinazione dello stato al tempo t (l'insieme dei punti indistinguibili nel passato da x_1 in t passi contiene solo x_1) se $\tilde{x} \in \mathsf{ker}\,(A^t)$.

Questo vale in generale per qualsiasi stato iniziale indistinguibile (nel futuro) se e solo se

$$\mathsf{ker}\,(O)_t \subseteq \mathsf{ker}\,(A^t)$$

Se questa condizione è verificata, si dice che il sistema è *ricostruibile in t passi*.

Il sistema si dice *ricostruibile* se è ricostruibile per qualche t. Per il teorema di Cayley–Hamilton, questo equivale alla condizione $\mathsf{ker}\,(O) \subseteq \mathsf{ker}\,(A^n)$

Naturalmente, la osservabilità implica la ricostruibilità, ma non viceversa. Ad esempio, un sistema con matrice A nulla è certamente ricostruibile (lo stato al passo n essendo certamente 0 a meno della evoluzione forzata che è nota) mentre non è osservabile a meno che vi siano almeno tante uscite quante stati e $\mathsf{rank}\,(C) = n$. Ricostruibilità e osservabilità nei sistemi LTITD sono sinonimi se A è nonsingolare.

Nei sistemi LTITC, l'insieme ricostruibile in tempo t è definito in modo analogo. Per la invertibilità di e^{At}, comunque, nei sistemi tempo–continui i concetti di ricostruibilità e osservabilità sono coincidenti.

6.1.4 Cambiamenti di Coordinate

Le proprietà di osservabilità e ricostruibilità non sono alterate da cambiamenti di coordinate (sono proprietà *strutturali*). Si consideri infatti il cambiamento di coordinate $x = Tz$, e il sistema

$$\begin{aligned} \mathbb{D}z &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y &= CTz + Du, \end{aligned}$$

per il quale si ha

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CTT^{-1}A^{n-1}T \end{bmatrix} = OT$$

che ha lo stesso spazio nullo di O (per la ricostruibilità, basta osservare che anche $(T^{-1}AT)^t = T^{-1}A^tT$)

Date due rappresentazioni in coordinate diverse dello stesso sistema osservabile, e note le matrici di osservabilità nei due casi, è possibile trovare la matrice che trasforma la prima nella seconda. Infatti avendosi $\hat{O} = OT$, si ha $O^T\hat{O} = O^TOT$, da cui (essendo O a pieno rango colonne) $T = (O^TO)^{-1}O^T\hat{O}$; nel caso SISO, O e $\hat{O}$ sono quadrate e invertibili, per cui si ha semplicemente

$$T = O^{-1}\hat{O}$$

6.2 Stima ottima

Torniamo a considerare il problema di stimare lo stato iniziale $\bar{x}$ di un sistema conoscendone esattamente il modello e gli ingressi nell'intervallo $[0, t]$, oltreché le uscite nello stesso intervallo. Nel caso LTITD la conoscenza esatta del valore delle uscite su n campioni determina esattamente lo stato: se il numero di misure N è maggiore, se ne possono in linea di principio trascurare $N - n$. Nel caso LTITC ci troviamo davanti ad una serie continua di misure su $[0, t]$: anche in questo caso è concepibile utilizzare solo il numero strettamente necessario di misure prese ad istanti discreti nell'intervallo, trascurando le altre infinite misure disponibili che non possono che essere linearmente dipendenti da quelle considerate.

Naturalmente questo approccio alla stima dello stato è molto riduttivo, e non ci dice nulla né sul come scegliere le misure da utilizzare, né sul perché si debbano scartare misure che comunque contengono informazione sul sistema. Per una migliore comprensione del problema, è necessario considerare che la conoscenza delle uscite ad un dato istante non può che essere pensata, nella grande maggioranza delle applicazioni, come affetta da errori di misura. Questi ultimi possono essere introdotti nel modello del sistema aggiungendo un termine non noto di errore δy, cioè

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}x(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx + Du + \delta y(t) \end{array}$$

Non si faranno in questa sede considerazioni sulla caratterizzazione del termine di errore di misura, che potrebbe essere fatta in termini probabilistici (media, varianza etc.) o deterministici (massimo valore dell'errore nel peggior caso), lasciandole a corsi specialistici. Ci limiteremo qui a supporre che δy sia piccolo rispetto alle misure y.

6.2.1 Stima ottima LTITD

Considerando la funzione di uscita in dipendenza dal punto iniziale, si ha per un sistema LTITD

$$y(\bar{x}, u(\cdot), \tau) = CA^{\tau}\bar{x} + y_f(\tau) + \delta y(\tau)$$

che rappresenta, ad ogni istante τ, un sistema di p equazioni lineari nelle n incognite $\bar{x}$. Il termine forzato $y_f(\tau)$ è noto se si suppone noto l'ingresso ed il modello: pertanto possiamo pensare di inglobarlo nelle misure, e lo trascureremo d'ora innanzi. L'insieme delle misure su un intervallo $[0, t]$ può dunque essere scritto

$$Y = O_t\bar{x} + \delta Y.$$

Essendo il vettore dei termini di rumore $dY \in \mathbb{R}^{pt}$ ignoto, la stima dello stato deve essere fatta cercando una soluzione al sistema di pt equazioni lineari in n incognite

$$Y = O_t\bar{x},$$

il quale, assumendo di avere misure sufficienti a rendere determinato il problema, quindi $pt > n$, risulterà inconsistente (non esisterà cioè alcuna soluzione esatta). Avrà senso quindi porsi il problema di trovare la stima migliore di $\bar{x}$ nel senso di minimizzare una norma degli errori residui, cioè

$$\hat{\bar{x}} = \arg\min_{\bar{x}} \|Y - O_t\bar{x}\|$$

Scegliendo in particolare la norma due pesata, o meglio il suo quadrato, si ottiene un problema di minimi quadrati

$$\bar{x}_{LS} = \arg\min_{\bar{x}} (Y - O_t\bar{x})^T W_y (Y - O_t\bar{x})$$

che è risolto, derivando la funzione da minimizzare rispetto a $\bar{x}$ e uguagliando a zero la derivata

$$2(Y - O_t\bar{x})^T W_y O_t = 0$$

da

$$\hat{\bar{x}} = (O_t^T W_y O_t)^{-1} O_t^T W_y Y$$

Il significato che può essere dato alla matrice di pesi W_y è quello di affidabilità delle misure (per un sistema SISO, l'elemento diagonale i-esimo è tanto maggiore quanto maggiore è l'affidabilità della misura al passo i–esimo); questo concetto si formalizza meglio, in presenza di una caratterizzazione statistica degli errori di misura, con la inversa della covarianza degli stessi. Altra importante funzione di W_y è quella di normalizzare le dimensioni fisiche delle equazioni, e di rendere quindi la soluzione invariante al variare dei sistemi di riferimento e di unità di misura.

6.2.2 Stima ottima LTITC

Nel caso LTITC, si procede in modo analogo a scrivere una equazione di misura (in cui si tenga già conto della risposta forzata) $y(\tau) = Ce^{A\tau}\bar{x} + \delta y(\tau)$, in ognuno degli (infiniti) istanti dell'intervallo continuo $[0, t]$. Ci troviamo quindi anche qui di fronte ad un sistema di equazioni inconsistente (infinite equazioni in n incognite con errori), e al problema di stimare

$$\hat{\bar{x}} = \arg\min_{\bar{x}} \|y(t) - Ce^{At}\bar{x}\|$$

dove la norma della funzione residuo è da intendersi come una norma su uno spazio di funzioni definite su $[0, t]$.

Considerando in particolare la norma due pesata, o meglio il suo quadrato, si ha

$$\hat{\bar{x}} = \arg\min_{\bar{x}} \int_0^t (y(\tau) - Ce^{A\tau}\bar{x})^T W_y(\tau)(y(\tau) - C\exp A\tau\bar{x})d\tau$$

e, ancora ponendo uguale a zero la derivata rispetto a $\bar{x}$, si ottiene

$$\int_0^t e^{A^T\tau}C^T W_y(\tau)y(\tau)d\tau = \int_0^t e^{A^T\tau}C^T W_y(\tau)Ce^{A\tau}\bar{x}d\tau \stackrel{def}{=} \mathcal{G}_{Ot}\bar{x}$$

Se il sistema è osservabile, la matrice di integrali che moltiplica $\bar{x}$ nel termine a destra (detta *Gramiano di Osservabilità*) è invertibile. Sappiamo infatti che se il sistema è osservabile, è osservabile per qualsiasi t: se quindi la matrice è invertibile, lo deve essere per qualsiasi intervallo di integrazione. Inoltre, dal fatto che il Gramiano è perlomeno semi-definito positivo (integrale di prodotti di matrici una trasposta dell'altra, con W_y definita positiva), e dal consueto sviluppo dell'esponenziale di matrice, segue che il Gramiano è non–invertibile se e solo se esiste un vettore $\bar{x}$ che annulla tutti i prodotti del tipo $C\bar{x}$, $CA\bar{x}$, $CA^2\bar{x}$, ..., quindi se e solo se il sistema è non–osservabile.

Per un sistema osservabile, si ha dunque

$$\hat{\bar{x}} = \mathcal{G}_{Ot}^{-1} \int_0^t e^{A\tau}C^T W_y y(\tau)d\tau$$

La matrice $p \times p$ $W_y(\tau)$, eventualmente funzione del tempo, ha ancora il significato di pesare la affidabilità delle p misure prese all'istante τ tra di loro, e rispetto a quelle prese in altri istanti.

6.3 Dualità

Come si è potuto osservare, molte delle considerazioni svolte con riguardo alle proprietà di osservabilità di sistemi sono in stretta relazione con quelle fatte per le proprietà di raggiungibilità. In effetti questa "simmetria" di trattamento è formalizzabile nel concetto di *dualità* di sistemi. Dato il sistema LTI

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{rcl} Dx &=& Ax + Bu \\ y &=& Cx + Du, \end{array} \right.$$

si definisce come suo *sistema duale* il sistema

$$\Sigma' : \left\{ \begin{array}{rcl} Dx &=& A^T x + C^T u \\ y &=& B^T x + Du \end{array} \right.$$

Ovviamente, il duale del duale è il sistema stesso, detto talvolta *primale*: $(\Sigma')' = \Sigma$.

Per le matrici di ragiungibilità e osservabilità tra sistemi duali valgono le relazioni

$$\begin{array}{rcl} R^T & = & O' \\ O^T & = & R'. \end{array}$$

Le proprietà (nonché gli algoritmi) studiati a riguardo della raggiungibilità di un sistema possono quindi dare luogo ad analoghi per la osservabilità, se applicate al sistema duale.

6.4 Osservabilità di sistemi non LTI

Come è logico attendersi, l'analisi della osservabilità per sistemi tempo–varianti e nonlineari in generale è più complessa che nei casi LTI. Osserviamo solamente che vale il seguente

Teorema. Se per il sistema $\dot{x} = f(x,u)$ con uscita $y = h(x)$, il sistema linearizzato approssimato attorno a $\bar{x}, \bar{u}$ ($f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$), $\dot{z} = Az + Bu$, $\tilde{y} = Cz$ è osservabile, allora l'insieme indistinguibile da $\bar{x}$ contiene, in un intorno di $\bar{x}$, il solo punto $\bar{x}$.

Quindi, la osservabilità (globale) del linearizzato approssimato implica la osservabilità (locale) del sistema effettivo. Questa condizione è solo sufficiente: ad esempio, il sistema che rappresenta la localizzazione di un veicolo su ruote mediante triangolazione di due traguardi ottici in posizione $(0, 0)$ e $(0, d)$, che si scrive

$$\begin{array}{rcl} \left[\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{array}\right] & = & \left[\begin{array}{c} v\cos\theta \\ v\sin\theta \\ w \end{array}\right] \\ y_1 & = & \pi - \theta + \arctan(\frac{y}{x}) \\ y_1 & = & \pi - \theta + \arctan(\frac{y-d}{x}) \end{array}$$

ha un linearizzato (in un equilibrio qualsiasi) con $A = 0$ e $C \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, quindi non è osservabile. Comunque, il vero sistema è certamente osservabile.

6.5 Forma Standard di Osservabilità

Il sottospazio di inosservabilità, sia nel caso LTITC che LTITD, ha anch'esso una caratterizzazione geometrica: esso è il più grande sottospazio

A–invariante contenuto in $\ker(C)$. È ovvio infatti che

$$\ker \left[\begin{array}{c} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{(n-1)} \end{array}\right]$$

è contenuto in $\ker(C)$, e che è A–invariante. Inoltre, se $\mathcal{S}$ è contenuto in $\ker(C)$ ed è A–invariante, esso è contenuto anche in $\ker(CA^k)$, $\forall k$, e quindi $\mathcal{S} \subseteq \bar{\mathcal{O}}$.

Sia $T_{\bar{O}} \in \mathbb{R}^{n\times\bar{o}}$ una matrice di base per il sottospazio di inosservabilità $\bar{\mathcal{O}} = \ker(O)$ del sistema LTI

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}x & = & Ax + Bu, \\ y & = & Cx + Du \end{array}$$

e $T_O \in \mathbb{R}^{n\times(n-\bar{o})}$ una matrice di base complementare. Nelle nuove coordinate descritte da

$$x = Tz \stackrel{def}{=} \left[\begin{array}{c|c} T_O & T_{\bar{O}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z_O \\ \hline z_{\bar{O}} \end{array}\right]$$

il sistema diviene

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}z & = & T^{-1}ATz + T^{-1}B \\ y & = & CTz + Du \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{rcl} \left[\begin{array}{c} \mathbb{D}z_O \\ \hline \mathbb{D}z_{\bar{O}} \end{array}\right] & = & \left[\begin{array}{c|c} A_O & 0 \\ \hline A_{O\bar{O}} & A_{\bar{O}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z_O \\ \hline z_{\bar{O}} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_O \\ \hline B_{\bar{O}} \end{array}\right] u \\ y & = & \left[\begin{array}{c|c} C_O & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z_O \\ \hline z_{\bar{O}} \end{array}\right] + Du \end{array}$$

dove $z_O \in \mathbb{R}^{n-\bar{o}}$ e $z_{\bar{O}} \in \mathbb{R}^{\bar{o}}$.

In queste coordinate, il sistema è dunque riscritto nella forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}z_O & = & A_O z_O + B_O u \\ \mathbb{D}z_{\bar{O}} & = & A_{O\bar{O}} z_O + A_{\bar{O}} z_{\bar{O}} + B_{\bar{O}} u \\ y & = & C_O z_O + Du \end{array} \tag{6.3}$$

cioè scomposto in due sottosistemi, dei quali il secondo è completamente inosservabile: infatti, lo stato $z_{\bar{O}}$ non influenza l'uscita ne direttamente, nè attraverso lo stato z_O (il contributo di z_O alla evoluzione del secondo sottosistema si può guardare come un ulteriore ingresso, che mostreremo ora essere noto).

Per quanto riguarda il sottosistema con stato z_O e matrici (A_O, B_O, C_O, D), esso è completamente osservabile: infatti, la matrice di osservabilità dell'intero sistema nelle nuove coordinate è

$$O' = \left[\begin{array}{c|c} C_O & 0 \\ \hline C_O A_O & 0 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline C_O A_O^{n-1} & 0 \end{array}\right] = OT$$

quindi, avendo O' rango $n - \bar{o}$ come O, le sue prime $n - \bar{o}$ colonne, le sole non nulle, sono indipendenti.

La forma (6.3) viene detta *forma standard di osservabilità* del sistema. Il sottosistema (A_O, B_O, C_O, D) è detto *sottosistema osservabile*; il sottosistema $(A_{\bar{O}}, B_{\bar{O}}, C_{\bar{O}} = 0, D)$ è detto *sottosistema non osservabile.*

La scelta delle matrici di base $T_{\bar{O}}$ e complementare T_O è arbitraria: qualsiasi altra scelta porterebbe ad una forma analoga, con blocchi diagonali diversi ma simili (algebricamente equivalenti) a quelli ottenuti in altra base. Gli autovalori di $A_{\bar{O}}$ e quelli di A_O sono quindi invarianti in numero e in posizione con i cambiamenti di coordinate, e sono quindi proprietà strutturali del sistema. I primi vengono detti *autovalori interni al sottospazio di inosservabilità*, i secondi *esterni.*

La parte non osservabile di un sistema non influenza la sua funzione di trasferimento. Infatti,

$$\begin{aligned}
G(s) &= C\,(sI - A)^{-1}\,B + D = \\
&= \left[\begin{array}{c|c} C_O & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} sI_{(n-\bar{o})} - A_O & 0 \\ \hline -A_{O\bar{O}} & sI_{\bar{o}} - A_{\bar{O}} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} B_O \\ \hline B_{\bar{O}} \end{array}\right] + D = \\
&= \left[\begin{array}{c|c} C_O & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \left(sI_{(n-\bar{o})} - A_O\right)^{-1} & 0 \\ \hline M & (sI_{\bar{o}} - A_O)^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_O \\ \hline B_{\bar{O}} \end{array}\right] + D = \\
&= C_O\,(sI_{n-\bar{o}} - A_O)^{-1}\,B_O + D
\end{aligned}$$

(dove M indica una matrice il cui calcolo esplicito è superfluo).

Il fatto che la f.d.t di un sistema non dipenda dal sottosistema non osservabile, e che quindi il sottosistema non osservabile non influenzi il rapporto ingresso–uscita, implica che tra i poli della $G(s)$ non appariranno gli autovalori di $A_{\bar{O}}$: ciò significa che questi ultimi vengono sistematicamente cancellati da zeri coincidenti nella espressione

$$G(s) = \frac{C \,\mathsf{adj}\, (sI - A)\, B}{\det\,(sI - A)} + D$$

6.6 Lemma P.B.H.

La verifica di osservabilità può essere fatta anche ricorrendo al *Lemma P.B.H.* (Popov, Belevitch, Hautus):

Teorema Il sistema LTI con matrici (A, C) è osservabile se e solo se la matrice

$$P_o(\lambda) = \left[\begin{array}{c} \lambda I - A \\ \hline C \end{array}\right] \tag{6.4}$$

ha rango pieno per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. La dimostrazione verte sulla possibilità di trovare un vettore q tale che $P_o(\lambda) q = 0$. Si riconduce direttamente a quella del lemma PBH per la raggiungibilità considerando l'equazione $q^T P_o^T(\lambda) = 0$.

Applichiamo il lemma PBH al caso di una coppia (A, C) con A in forma di Jordan, con p miniblocchi:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c|cccc}
\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\
0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & & & 0 & \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
 & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\
\hline
 & & & & & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\
 & 0 & & & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\
 & & & & & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\
 & & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p
\end{array}\right];$$

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c|cccc} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{m_1,1} & \cdots & C_{p,1} & C_{2,p} & \cdots & C_{m_p,p} \end{array}\right]$$

Risulta che, per essere osservabile, le prime colonne per ogni miniblocco corrispondente ad autovalori coincidenti, devono essere linearmente indipendenti. In particolare, per un sistema SISO, è necessario che la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori sia pari a uno, e che C abbia almeno tanti elementi diversi da zero quanti gli autovalori distinti di A. Un sistema con μ_i miniblocchi associati ad un unico autovalore λ_i può essere osservabile solo se ha almeno μ_i uscite indipendenti.

6.7 Forma canonica di osservazione

Per un sistema SISO con matrici dinamica e di uscita nella particolare forma

$$\begin{array}{rcl} A_o & = & \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{array}\right]; \\ C_o & = & \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

(la forma di A_o si dice *compagna verticale destra*), la matrice di osservabilità ha la stessa forma della matrice di raggiungibilità della forma canonica di controllo. Infatti

$$O_o = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \star & \star \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2}+a_{n-1}^2 & \star & \star \end{array}\right]$$

quindi è osservabile. Un qualsiasi altro sistema SISO (A, B, C, D) con matrice di osservabilità O può essere posto per cambiamento di coordinate in questa forma (canonica di osservazione) se e solo se è completamente osservabile.

La matrice dinamica in forma compagna verticale destra è la trasposta della forma compagna orizzontale inferiore usata nella forma canonica di controllo, così come la matrice $C_o = B_c^T$. I coefficienti dell'ultima colonna della forma compagna verticale destra sono quindi i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice stessa, ordinati secondo le potenze crescenti di s dall'alto in basso. Per porre un sistema SISO osservabile in forma canonica di osservazione, basterà dunque

1. Calcolare il polinomio caratteristico di A, $\det(sI-A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$;

2. costruire la matrice di osservabilità O e verificarne il rango;

3. costruire A_o, C_o;

4. calcolare $T^{-1} = O_o^{-1}O$;

5. trovare $B_o = T^{-1}B$

Se il sistema è strettamente proprio, $b_n = 0$ quindi $D = 0$ e $B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}$.

Dato un sistema LTI SISO in forma normale, è dunque sempre possibile scrivere un sistema in forma di stato con matrici (A_o, B_o, C_o, D_o) in forma canonica di osservazione (quindi osservabile) che ha lo stesso rapporto ingresso/uscita.

La funzione di trasferimento per un sistema SISO strettamente proprio in forma canonica di osservazione vale $G(s) = C_o(sI - A_o)^{-1}B_o$. Si verifica facilmente che

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

In altre parole, nella forma canonica di osservazione di un sistema strettamente proprio si trovano i coefficienti del polinomio caratteristico nell'ultima colonna della matrice dinamica A_o, e i coefficienti del polinomio degli zeri nella matrice degli ingressi B_o.

Per un sistema proprio non strettamente, operando una opportuna divisione tra i polinomi a numeratore e denominatore, cioè scrivendo $G(s) = G'(s) + b_n$ con $G'(s)$ strettamente proprio, si hanno in B_o i primi n coefficienti del polinomio degli zeri di $G'(s)$, ed in D_o il coefficiente del termine di grado n, b_n.

6.8 Iniezione delle Uscite

L'operazione *duale* della reazione degli stati sugli ingressi è una operazione mediante la quale l'uscita di un sistema viene riportata a influenzare direttamente l' evoluzione degli stati, e si dice *iniezione delle uscite*. Anche se questa operazione può apparire fisicamente impossibile in questi termini, ne troveremo più avanti una spiegazione ed una specifica utilità. L'iniezione lineare delle uscite sugli stati avviene attraverso una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$:

$$\begin{aligned} Dx &= Ax + Bu + Ly = (A + LC)x + (B + LD)u \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Così come la retroazione degli stati non altera la raggiungibilità di un sistema, la iniezione delle uscite non ne altera la osservabilità (la dimostrazione è analoga, e può essere fatta ad esempio per dualità).

Come conseguenza, una retroazione delle uscite, ovvero la particolare scelta $u(x) = KLy$, non altera né raggiungibilità né osservabilità di un sistema, essendo essa equivalente sia ad una particolare retroazione dello stato $u = \bar{K}x$, con $\bar{K} = KLC$, che ad una particolare iniezione delle uscite $\bar{L}y$, con $\bar{L} = BKL$[1].

È infine evidente, ricorrendo ancora alla dualità, che in un sistema completamente osservabile, una scelta opportuna della matrice L può allocare gli autovalori della matrice $A + LC$ dove desiderato.

[1]Di questo risultato è possibile dare una interpretazione in termini di luogo delle radici per la f.d.t. del sistema con retroazione proporzionale dell'uscita e guadagno $k = KL \in \mathbb{R}$: i poli sono tutti spostati dalla reazione lungo i rami del luogo, ma non raggiungono gli zeri per nessun k finito

Capitolo 7

Realizzazioni e Connessioni di Sistemi

7.1 Scomposizione canonica (o di Kalman)

Si è visto in precedenza che un sistema LTI può essere scritto in due forme standard, che riflettono le sue proprietà di raggiungibilità e osservabilità. Combinando questi due risultati, si giunge ad una forma più articolata, che li contiene entrambe.

Siano dunque per il sistema LTI con matrici (A, B, C) rispettivamente $\mathcal{R}$ e $\bar{\mathcal{O}}$ i sottospazi di raggiungibilità e inosservabilità. Essendo entrambe A–invarianti, lo sarà anche la loro intersezione $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{O}}$.

Esempio: Siano T_R e $T_{\bar{O}}$ due matrici di base rispettivamente per $\mathcal{R}$ e $\bar{\mathcal{O}}$. Una base $T_{R\bar{O}}$ per la intersezione si trova risolvendo l'equazione $T_R\xi_1 = T_{\bar{O}}\xi_2$. Se

$$N = \left[\begin{array}{c} N_1 \\ \hline N_2 \end{array}\right]$$

è una base di ker $[T_R|T_{\bar{O}}]$, allora $T_{R\bar{O}} = T_R N_1 = -T_{\bar{O}} N_2$ è una base del sottospazio cercato. Un'algoritmo è realizzato ad esempio in linguaggio Matlab come segue:

```
function [C]=intersect(A,B);
% C: Basis Matrix for Intersection
%    of Range(A) with Range(B)
[ra,ca]=size(A);
[rb,cb]=size(B);
```

```
C=null([A B]);
if length(C) > 0
   C=orth(A*C(1:ca,:));
else
  C=[];
end
```

Le funzioni Matlab `null.m` e `orth.m` sono usate per calcolare rispettivamente lo spazio nullo di una matrice, e per operare una ortogonalizzazione di Gram–Schmidt sulle colonne di una matrice (l'uso della ortogonalizzazione non è necessario, ma migliora il condizionamento numerico della base ottenuta).

Si consideri inoltre una matrice di base T_{RO} complementare a $T_{R\bar{O}}$ per $\mathcal{R}$.

Esempio: Anche questa operazione si può effettuare con un semplice algoritmo, espresso in linguaggio Matlab come segue:

```
function [D] = base_compl(A,B)
% D : base di range(A) complementare a B
[ra,ca] = size(A);
[rb,cb] = size(B);
D = gramschmidt([B A]);
[rd,cd] = size(D);
D = D(:,cb+1:cd);
```

Si proceda allo stesso modo a costruire una matrice di base $T_{\bar{R}\bar{O}}$ complementare a $T_{R\bar{O}}$ per $\bar{\mathcal{O}}$. Infine, si costruisca una matrice di base $T_{\bar{R}O}$ complementare a $[T_{RO}|T_{R\bar{O}}|T_{\bar{R}\bar{O}}]$ per l'intero spazio $\mathbb{R}^n$.

La matrice $[T_{RO}|T_{R\bar{O}}|T_{\bar{R}O}|T_{\bar{R}\bar{O}}]$ è quadrata e invertibile. Se usata per cambiare le coordinate del sistema, si ottiene la forma

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} A_{RO} & 0 & A_{\bar{R}O,RO} & 0 \\ A_{RO,R\bar{O}} & A_{R\bar{O}} & A_{\bar{R}O,R\bar{O}} & A_{\bar{R}\bar{O},R\bar{O}} \\ 0 & 0 & A_{\bar{R},O} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\bar{R}O,\bar{R}\bar{O}} & A_{\bar{R}\bar{O}} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{RO} \\ B_{R\bar{O}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
C &= \begin{bmatrix} C_{RO} & 0 & C_{\bar{R}O} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dalla interpretazione di questa forma, risulta evidente che solo la parte raggiungibile e osservabile del sistema partecipa al rapporto ingresso–uscita. I poli di $G(s)$ saranno pertanto tutti e soli gli autovalori di A_{RO}:

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B = C_{RO}\,(sI - A_{RO})^{-1}\,B_{RO}$$

7.2 Realizzazione di sistemi

Il problema della trasformazione di un modello ingresso–uscita di un sistema in forma di stato è stato già affrontato alcune volte in passato, in relazione alla trasformazione delle forme normali in forma di stato. Il problema è importante perchè, nonostante le tecniche di regolazione, di identificazione, e di controllo ottimo siano risolte nel modo più semplice nello spazio di stato, spesso il modello del sistema a nostra disposizione è dato da una relazione ingresso–uscita. Inoltre, la questione è rilevante ai fini della scrittura di algoritmi numerici e programmi che implementino su un computer date f.d.t. ottenute ad esempio come risultato di un progetto classico di controllore, algoritmi che usano naturalmente la scrittura nello spazio di stato. A questo problema si dà il nome di problema della realizzazione.

Si è visto in particolare come per i sistemi SISO LTI sia possibile facilmente, a partire da una funzione di trasferimento, ottenere due realizzazioni che garantiscono rispettivamente la raggiungibilità e la osservabilità. Si è anche già visto che, dato un sistema nello spazio di stato, solo gli autovalori del sottosistema raggiungibile ed osservabile sono poli della f.d.t. corrispondente.

Ci chiediamo ora quale sia il più piccolo numero di stati che possa essere utilizzato per realizzare una data f.d.t. SISO. Iniziamo dal considerare che la f.d.t. che esprime un dato rapporto ingresso/uscita non è unica. Infatti, si consideri ad esempio il sistema in forma normale

$$y(t+2) + 2y(t+1) + y(t) = u(t+1) + u(t)$$

con condizioni iniziali $y(0) = y(1) = 0$, cui corrisponde una rappresentazione nell'operatore z del tipo

$$(z^2 + 2z + 1)Y(z) = (z+1)U(z)$$

ovvero una f.d.t. $G(z) = \frac{z+1}{(z+1)^2}$.

Confrontando il precedente al sistema

$$y(t+1) + y(t) = u(t)$$

con condizioni iniziali $y(0) = 0$, si ottiene che le evoluzioni dei due sistemisono coincidenti per qualsiasi sequenza di ingresso, quindi sono equivalenti. Al secondo sistema corrisponde la f.d.t. $G(z) = \frac{1}{z+1}$, eguale alla precedente eccetto che per la semplificazione tra i fattori comuni a numeratore e denominatore.

Dato un rapporto ingresso–uscita LTI, esiste una e una sola rappresentazione in termini di f.d.t. che abbia grado minimo e coefficiente unitario della potenza più alta della variabile complessa (che indicheremo con p) a denominatore. Una tale f.d.t, che può essere ottenuta semplicemente mediante divisione di polinomi, si dirà ridotta ai minimi termini o *coprima*.

Diremo che un sistema LTI descritto dalle sue matrici (A, B, C, D) è una realizzazione della m.d.t. $G(p)$ se vale

$$G(p) = C\,(pI - A)^{-1}\,B + D.$$

Una realizzazione (A, B, C, D) nello spazio di stato si dice *minima* se qualsiasi altra realizzazione (A', B', C', D') che dà luogo alla stessa f.d.t. coprima, ha numero di stati uguale o superiore. Una realizzazione è minima solo se è completamente raggiungibile ed osservabile. Se così non fosse, infatti, il sistema

$$(A_{RO}, B_{RO}, C_{RO}, D),$$

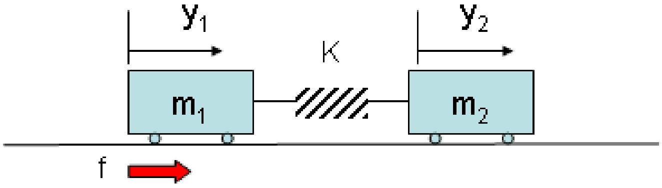
che realizza la stessa f.d.t. a meno di cancellazioni polo–zero, avrebbe numero di stati inferiore.

Una realizzazione di una data f.d.t. non può avere dimensione inferiore al numero di poli della f.d.t. stessa (si ricordi che i poli sono un sottoinsieme degli autovalori). Pertanto, una realizzazione in foma canonica di controllo di un sistema SISO descritto da una f.d.t coprima, è minimo, quindi anche osservabile. Vale il viceversa per una realizzazione in forma canonica di osservazione.

Se si applica la costruzione delle forme canoniche ad una f.d.t. non coprima, si otterranno invece delle realizzazioni raggiungibili ma non osservabili, ovvero osservabili ma non raggiungibili, quindi non minime.

Ogni realizzazione minima di una f.d.t. è algebricamente equivalente ad ogni altra, cioè esiste una matrice di trasformazione di coordinate che le lega. Le formule esplicite per il calcolo di tale cambiamento di base utilizzano le matrici di raggiungibilità o osservabilità dei due sistemi, e sono già state viste in passato.

Esempio: Con riferimento alla figura, si discuta la raggiungibilità e la osservabilità del sistema sottoposto ad ingresso f al variare della costante elastica della molla, nei due casi in cui la misura disponibile sia alternativamente la posizione della prima o della seconda massa.



Indicando con y_1 e y_2 le posizioni delle due masse m_1 e m_2, le equazioni del moto del sistema sono le seguenti:

$$m_1\ddot{y}_1 + k(y_1 - y_2) = f$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) = 0$$

Ponendo $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = \dot{y}_1$ e $x_4 = \dot{y}_2$, si ha la forma di stato

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & 0 & 0 \\ k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix} f,$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Si trova immediatamente

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1/m_1 & 0 & -k/m_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k/(m_1m_2) \\ 1/m_1 & 0 & -k/m_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -k/(m_1m_2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Per la prima uscita y_1 si ha

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k/m_1 & k/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k/m_1 & k/m_1 \end{bmatrix}$$

mentre per y_2 vale

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k/m_2 & -k/m_2 \end{bmatrix}.$$

È dunque facile osservare che si ha completa raggiungibilità e osservabilità da entrambe le uscite se $k \neq 0$. Se $k = 0$, il sottospazio raggiungibile consiste nelle sole posizioni e velocità della prima massa. Il sottospazio inosservabile dalla prima uscita consiste nelle posizioni e velocità della seconda massa, mentre quello inosservabile dalla seconda uscita consiste nella posizione e velocità della prima.

Studiamo adesso il problema usando le trasformate. Si consideri il caso in cui la misura disponibile sia la posizione y_1 della massa m_1; la funzione di trasferimento che descrive il sistema è la seguente:

$$Y_1(s) = \frac{m_2 s^2 + k}{s^2[m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s).$$

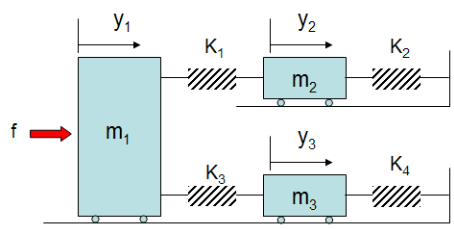
Per $k \neq 0$ la funzione di trasferimento non presenta cancellazioni polo - zero, quindi il sistema è completamente raggiungibile e osservabile. Per $k = 0$, invece, si hanno due cancellazioni nella funzione di trasferimento, e si ottiene $Y_1(s) = \frac{1}{m_1 s^2} F(s)$. Questa relazione esprime nel dominio delle frequenze la legge del moto della massa m_1 soggetta alla sola forza f. Questa funzione di trasferimento è coprima, quindi i due stati di una realizzazione minima sono sono sia raggiungibili che osservabili. Se si sceglie una realizzazione in forma canonica di controllo, si ottiene ancora la dinamica della massa m_1 con stati y_1 e $\dot{y}_1$. Gli stati y_2 e $\dot{y}_2$ sono invece non raggiungibili e non osservabili.

Si consideri ora il caso in cui l'uscita disponibile sia la posizione y_2 della massa m_2; la funzione di trasferimento che descrive il sistema è la seguente:

$$Y_2(s) = \frac{k}{s^2[m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s)$$

Per $k \neq 0$ la funzione di trasferimento non presenta cancellazioni, quindi il sistema è completamente raggiungibile e osservabile (come già visto per altra via). Per $k = 0$, invece, la funzione di trasferimento è nulla. Questo è conseguente al fatto prima osservato che gli stati y_1 e $\dot{y}_1$ sono raggiungibili ma non osservabili, mentre gli stati y_2 e $\dot{y}_2$ sono non osservabili ma non raggiungibili. Non vi è quindi alcuna connessione tra l'ingresso e l'uscita, il ché è rappresentato da una f.d.t. nulla.

Esempio: Si discuta la raggiungibilità e la osservabilità del sistema in figura, sottoposto ad ingresso f e con misura della posizione della prima massa y_1, al variare delle costanti elastiche delle molle. Si vogliono trovare i casi nei quali alcune di tali proprietà non sono verificate e fornire una interpretazione fisica di tali casi.



Indicando con y_i le posizioni della massa m_i, $i = 1, 2, 3$ le equazioni del moto del sistema sono le seguenti:

$$\begin{gathered} m_1\ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_2) + k_3(y_1 - y_3) = f \\ m_2\ddot{y}_2 + k_1(y_2 - y_1) + k_2 y_2 = 0 \\ m_3\ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_1) + k_4 y_3 = 0 \end{gathered}$$

Applicando la trasformata di Laplace alle equazioni appena scritte, e ponendo $p_1(s) = m_1 s^2 + k_1 + k_3$, $p_2(s) = m_2 s^2 + k_1 + k_2$, $p_3(s) = m_3 s^2 + k_3 + k_4$, si ottengono le relazioni:

$$\begin{gathered} p_1(s)Y_1(s) - k_1 Y_2(s) - k_3 Y_3(s) = F(s) \\ Y_2(s) = \tfrac{k_1}{p_2(s)} Y_1(s) \\ Y_3(s) = \tfrac{k_3}{p_3(s)} Y_1(s), \end{gathered}$$

da cui

$$\left(p_1(s) - \frac{k_1^2}{p_2(s)} - \frac{k_3^2}{p_3(s)} \right) Y_1(s) = F(s),$$

e infine

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{p_2(s)p_3(s)}{p_1(s)p_2(s)p_3(s) - k_1^2 p_3(s) - k_3^2 p_2(s)}.$$

Essendo il denominatore della f.d.t. considerata di ordine 6 (ogni polinomio $p_i(s)$ è del secondo ordine), il sistema di tre masse è completamente raggiungibile ed osservabile se e solo se non vi sono cancellazioni polo/zero.

Si può avere una cancellazione se $k_1 = 0$: in tal caso infatti, le radici (immaginarie) di $p_2(s) = 0$ sono comuni a numeratore e denominatore. Il modo oscillante corrispondente è quindi non osservabile, oppure non raggiungibile, o entrambe. Dalla osservazione fisica del sistema, si capisce facilmente che è il terzo il caso che si applica al nostro esempio: infatti il moto della massa m_2 non è influenzato dall'ingresso f, né influenza l'uscita y_1 quando $k_1 = 0$.

Analoghe conclusioni si raggiungono nel caso $k_3 = 0$, per quel che riguarda la irraggiungibilità e la inosservabilità dei modi propri della massa m_2.

Un ultimo caso, meno banale, di cancellazione si può avere con k_1 e k_2 non nulle, quando $p_2(s)$ e $p_3(s)$ hanno radici comuni, cioè quando

$$\frac{k_1 + k_2}{m_2} = \frac{k_3 + k_4}{m_3}.$$

Ponendo ad esempio $p_2(s) = p(s)$ e $p_3(s) = \alpha p(s)$, si ha

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{\alpha p^2(s)}{p_1(s)p^2(s) - (\alpha k_1^2 + k_3^2)p(s)} = \frac{\alpha p(s)}{p_1(s)p(s) - (\alpha k_1^2 + k_3^2)}$$

In questo caso, la cancellazione è causata dalla uguaglianza dei rapporti tra coefficienti elastici e inerziali dei due sottosistemi oscillanti collegati alla prima massa. La raggiungibilità del sistema è compromessa, in quanto non è possibile far raggiungere al sistema complessivo stati arbitrari a partire da condizioni niziali arbitrarie: i due sottosistemi interni, se inizializzati con posizioni e velocità uguali, non potranno evidentemente essere mai portati ad avere stati diversi in quanto eccitati dallo stesso moto di m_1.

Anche la osservabilità è persa: infatti, una oscillazione di pari ampiezza e frequenza delle due masse, ma in opposizione di fase, darebbe effetto risultante nullo sulla massa m_1, quindi sulla misura.

È naturalmente possibile trovare identici risultati studiando il sistema nello spazio di stato, con le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_3}{m_3} & 0 & -\frac{k_3+k_4}{m_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le matrici di raggiungibilità e osservabilità sono

$$
R = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & 0 & a \\
0 & 0 & 0 & \frac{k_1}{m_2} & 0 & b \\
0 & 0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & 0 & c \\
1 & 0 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & 0 & a & 0 \\
0 & 0 & \frac{k_1}{m_2} & 0 & b & 0 \\
0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & 0 & c & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
O = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_2} & \frac{k_3}{m_3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_2} & \frac{k_3}{m_3} \\
a & b & c & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

dove si è posto

$$
\begin{aligned}
a &= \tfrac{(k_1+k_3)^2}{m_1^2} + \tfrac{k_1^2}{m_1 m_2} + \tfrac{k_3^2}{m_1 m_3}, \\
b &= -\tfrac{k_1}{m_2}\left(\tfrac{k_1+k_3}{m_1} + \tfrac{k_1+k_2}{m_2}\right), \\
c &= -\tfrac{k_3}{m_3}\left(\tfrac{k_1+k_3}{m_1} + \tfrac{k_3+k_4}{m_3}\right).
\end{aligned}
$$

Mediante scambio di righe o colonne (operazioni che non cambiano il rango di una matrice), si può riscrivere

$$
R = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; \quad O = \begin{bmatrix} M^T & 0 \\ 0 & M^T \end{bmatrix}
$$

dove

$$
M = \begin{bmatrix}
1 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & a \\
0 & \frac{k_1}{m_2} & b \\
0 & \frac{k_3}{m_3} & c
\end{bmatrix}.
$$

Sia R che O perdono rango esattamente dove perde rango M, cioè quando

$$
c\frac{k_1}{m_2} - b\frac{k_3}{m_3} = 0,
$$

ovvero quando

$$
\frac{k_1 k_3}{m_2 m_3}\left(\frac{k_1+k_2}{m_2} - \frac{k_3+k_4}{m_3}\right) = 0,
$$

da cui

- se $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, e $\frac{k_1+k_2}{m_2} \neq \frac{k_3+k_4}{m_3}$, il sistema è completamente controllabile con f e osservabile da y_1;
- se $k_1 = 0$ e $k_3 \neq 0$, oppure se $k_1 \neq 0$ e $k_3 = 0$, il sottosistema non raggiungibile e non osservabile ha dimensione due;
- se $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, ma $\frac{k_1+k_2}{m_2} = \frac{k_3+k_4}{m_3}$, il sottosistema non raggiungibile e non osservabile ha ancora dimensione due.

7.3 Effetti di Retroazione dello Stato e Iniezione delle Uscite

Abbiamo visto in precedenza che la retroazione degli stati non altera la raggiungibilità di un sistema, e la iniezione delle uscite non ne altera la osservabilità.

Come corollario, una retroazione delle uscite, ovvero la particolare scelta $u(x) = KGy$, non altera né raggiungibilità né osservabilità di un sistema, essendo essa equivalente sia ad una particolare retroazione dello stato $u = \bar{K}x$, con $\bar{K} = KGC$, che ad una particolare iniezione delle uscite $\bar{G}y$, con $\bar{G} = BKG$[1].

Al contrario, la retroazione degli stati può alterare la osservabilità, e la iniezione delle uscite può alterare la raggiungibilità. Si noti in particolare che la retroazione degli stati sposta la posizione degli autovalori interni al sottospazio di raggiungibilità, e quindi anche di quelli tra questi esterni al sottospazio di inosservabilità, cioè quelli che coincidono con i poli della f.d.t. corrispondente. Dalla forma canonica di raggiungibilità applicata al sottosistema raggiungibile e osservabile, in cui i coefficienti del polinomio degli zeri appaiono nella matrice C, si osserva che la retroazione lascia invariati gli zeri della f.d.t.. È quindi possibile che i poli vengano spostati in modo che uno o più tra loro venga a coincidere con uno o più zeri, dando così luogo ad una cancellazione: in tal caso, il sistema realizzato in forma di controllo non sarebbe più di dimensione minima, il che implica che si sia persa la osservabilità.

[1]Di questo risultato è possibile dare una interpretazione in termini di luogo delle radici per la f.d.t. del sistema con retroazione proporzionale dell'uscita e guadagno $k = KG \in \mathbb{R}$: i poli sono tutti spostati dalla reazione lungo i rami del luogo, ma non raggiungono gli zeri per nessun k finito

In modo analogo, si consideri il (sotto)sistema raggiungibile e osservabile in forma canonica di osservazione (A_o, B_o, C_o, D_o), e si proceda ad una iniezione delle uscite sugli stati, cioè

$$\dot{x} = A_o x + B_o u + GC_o x = (A_o + GC_o)x + B_o u$$

Anche in questo caso, gli autovalori di A_o, cioè i poli della f.d.t. corrispondente, sono spostati ad arbitrio dalla retroazione, mentre gli zeri restano fissi (i coefficienti del polinomio degli zeri sono in B_o). Se qualche coppia polo/zero si cancella, la realizzazione non è più minima, nel qual caso la proprietà venuta a mancare non può che essere la raggiungibilità.

7.4 Grado Relativo

Si dice *grado relativo* di una f.d.t. SISO la differenza tra il grado del denominatore e quello del numeratore, ovvero tra il numero dei poli (n) e quello degli zeri (m):

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + s^n}$$

Per il grado relativo $n - m = r$ di un sistema proprio vale $r \geq 0$; se strettamente proprio, $r > 0$.

Il grado relativo ha una diretta interpretazione fisica nei sistemi TD: esso rappresenta il tempo (numero di istanti) dopo il quale si manifesta nella uscita l'effetto dell'ingresso. Si ricordi infatti che (per $D = 0$) vale

$$\begin{array}{rcl} y(0) & = & Cx(0) \\ y(1) & = & CAx(0) + CBu(0) \\ y(2) & = & CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) \\ \vdots & = & \vdots \end{array}$$

e si consideri per il sistema una realizzazione in forma canonica di controllo: si osserva che

$$\left[\begin{array}{cccc} CB & CAB & CA^2B & \cdots \end{array}\right] = CR =$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc} b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \star \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & \star \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 & \cdots & \star \end{array}\right]$$

quindi che $CB = CAB = \cdots = CA^{n-m-1}B = 0$, mentre $CA^{(n-m)}B = b_m \neq 0$.

Nel caso TC, il grado relativo rappresenta il numero di volte per il quale si deve derivare l'uscita prima che l'ingresso appaia esplicitamente nella sua espressione. Infatti si ha adesso che (per $D = 0$) vale

$$\begin{array}{lcl} y^{(0)} & = & Cx \\ y^{(1)} & = & CAx + CBu^{(0)} \\ y^{(2)} & = & CA^2x + CABu^{(0)} + CBu^{(1)} \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

7.5 Raggiungibilitá e Osservabilitá di Sistemi Connessi

Si supponga adesso che due sistemi LTI Σ_1 e Σ_2, alternativamente in tempo continuo o in tempo discreto, siano descritti nel rapporto ingresso-uscita da f.d.t. $G_1(p) = \frac{n_1(p)}{d_1(p)}$ e $G_2(p) = \frac{n_2(p)}{d_2(p)}$ in cui tutte le eventuali cancellazioni siano state effettuate, cosicché i polinomi $n_i(p)$ e $d_i(p)$ sono primi tra loro per $i = 1, 2$. Sia inoltre disponibile per entrambe una realizzazione in forma minima, ovvero

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}x_1 = A_1x_1 + B_1u \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}x_2 = A_2x_2 + B_2u \\ y_2 = C_2x_2D_2u, \end{array} \right. . \tag{7.1}$$

Per quanto detto, questi sistemi sono siano sia raggiungibili che osservabili. Ci chiediamo se tali proprietà possono essere alterate quando i sistemi siano connessi tra loro, in partioclare secondo le tre modalità fondamentali della cosiddetta *algebra dei blocchi*, cioè in parallelo, in serie, o in retroazione.

7.5.1 Connessione in Serie

Nella connessione in serie l'uscita del primo sistema costituisce l'ingresso del secondo. Ponendo $u_2 = y_1$, $u = u_1$ e $y = y_2$ in (7.1), si ha

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}\bar{x} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} & + & \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{pmatrix} \bar{x} & + & D_2D_1u \end{array} \tag{7.2}$$

Proposizione *Il sistema "serie" (7.2)è raggiungibile se e solo se Σ_1 non ha zeri coincidenti con poli di Σ_2; osservabile se e solo se Σ_1 non ha poli*

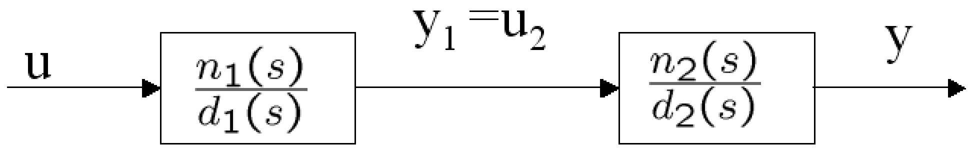


Figura 7.1: Connessione in serie di due sistemi LTI.

coincidenti con zeri di Σ_2.

Nella rappresentazione con f.d.t. della connessione in serie, si ha

$$G(p) = \frac{n_1(p)}{d_1(p)}\frac{n_2(p)}{d_2(p)} = \frac{n_1(p)n_2(p)}{d_1(p)d_2(p)}$$

si può avere quindi una cancellazione se e solo se $n_1(p)$ e $d_2(p)$ hanno una radice in comune, ovvero se la hanno $n_2(p)$ e $d_1(p)$. In entrambe i casi, la f.d.t. risultante può essere semplificata: pertanto, unaa rappresentazione in forma di stato che usi tutti gli stati di Σ_1 e Σ_2, non risulta più minima.

Il fatto che nel primo caso si perda la raggiungibilità dell'autovalore corrispondente al polo cancellato in $d_2(p)$ è piuttosto intuitivo: infatti, il rapporto tra gli stati del sistema Σ_2 e l'uscita non viene alterato in alcun modo dalla connessione, e pertanto l'autovalore corrispondente al polo cancellato non può aver perso la sua osservabilità.

Viceversa, che nel secondo caso si perda la osservabilità dell'autovalore corrispondente al polo cancellato in $d_1(p)$ discende dal fatto che il rapporto tra gli ingressi e gli stati del sistema Σ_1 non viene alterato dalla connessione, e pertanto l'autovalore corrispondente al polo cancellato non può aver perso la sua raggiungibilità.

7.5.2 Connessione in Parallelo

Possiamo facilmente costruire una realizzazione del sistema risultante dalla connessione in parallelo dei sistemi Σ_1 e Σ_2, costruendo un nuovo stato aggregato $\bar{x}^T = (x_1^T, x_2^T)$ e ponendo $u_1 = u_2 = u$ e $y = y_1 + y_2$ in (7.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\bar{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\bar{x} + (D_1 + D_2)u \end{aligned} \tag{7.3}$$

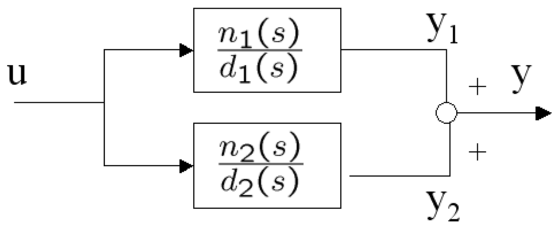


Figura 7.2: Connessione in parallelo di due sistemi LTI.

Proposizione *Il sistema "parallelo" (7.3) è raggiungibile e osservabile se e soltanto se* Σ_1 *e* Σ_2 *non hanno modi comuni.*

Consideriamo la rappresentazione con f.d.t. della connessione. Si ha

$$G(p) = \frac{n_1(p)}{d_1(p)} + \frac{n_2(p)}{d_2(p)} = \frac{n_1(p)d_2(p) + n_2(p)d_1(p)}{d_1(p)d_2(p)}$$

si può avere quindi una cancellazione se e solo se $d_1(p)$ e $d_2(p)$ hanno una radice in comune, cioè se i due sistemi hanno un polo in comune. In questo caso, la f.d.t. risultante può essere semplificata: pertanto, la rappresentazione in forma di stato sopra ottenuta, che usa tutti gli stati di Σ_1 e Σ_2, non risulta più minima: si deve essere persa almeno una delle proprietà strutturali di raggiungibilità e/o di osservabilità.

È possibile stabilire che in realtà la cancellazione polo/zero che interviene per due sistemi in parallelo con un polo a comune implica che l'autovalore corrispondente perde *entrambe* le proprietà.

Infatti, per il lemma PBH la matrice

$$(sI - A|B) = \left[\begin{array}{cc|c} sI_1 - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & sI_2 - A_2 & B_2 \end{array}\right] \tag{7.4}$$

valutata per s pari all'autovalore in comune, non può aver rango pieno (il rango del blocco a sinistra diminuisce di due, mentre il blocco a destra è una singola colonna). In modo del tutto analogo si procede per il caso duale della osservabilità:

$$\left[\begin{array}{c} sI - A \\ \hline C \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} sI_1 - A_1 & 0 \\ 0 & sI_2 - A_2 \\ \hline C_1 & C_2 \end{array}\right] \tag{7.5}$$

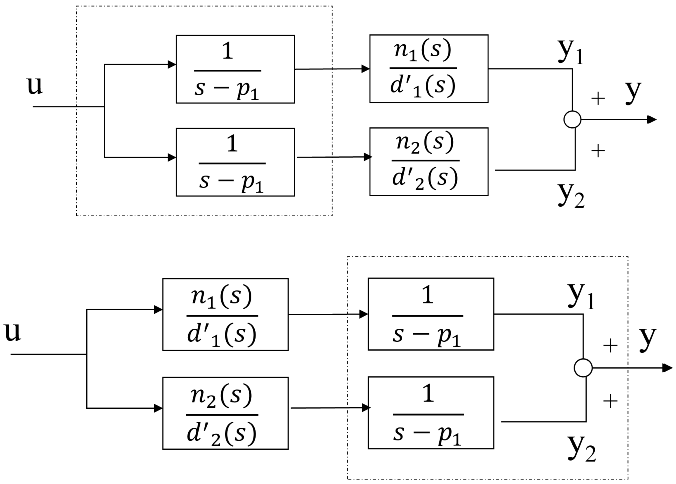


Figura 7.3: Schemi equivalenti di connessione inparalleo di sistemi con un polo a comune

Una dimostrazione alternativa dello stesso risultato si può dare in termini degli schemi di fig. 7.3. Nello schema superiore, il polo a comune è fattorizzato a sinistra. Guardando alla realizzazione del sottosistema racchiuso in tratteggio, si ha

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\mathbb{D}x_1\\ \mathbb{D}x_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}p_1 & 0\\ 0 & p_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u\\ \begin{bmatrix}y'_1\\ y'_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

per il quale la matrice di raggiungibilità vale

$$R=\begin{bmatrix}1 & p_1\\ 1 & p_1\end{bmatrix}$$

il cui rango è uno, dimostrando così che un autovalore in p_1 è esterno al sottospazio di raggiungibilità.

Nello schema inferiore, invece, il polo a comune è fattorizzato a destra, e la realizzazione del sottosistema racchiuso in tratteggio vale

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\mathbb{D}x_1\\ \mathbb{D}x_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}p_1 & 0\\ 0 & p_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u'_1\\ u'_2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}y\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

per il quale la matrice di osservabilità vale

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_1 \end{bmatrix}$$

Si dimostra così che l'autovalore in p_1 è anche interno al sottospazio di inosservabilità.

7.5.3 Connessione in Retroazione

Nella connessione in retroazione (fig. 7.4) l'ingresso u_2 del sistema Σ_2 in retroazione coincide con l'uscita y_1 del sistema Σ_1 in catena diretta. È utile

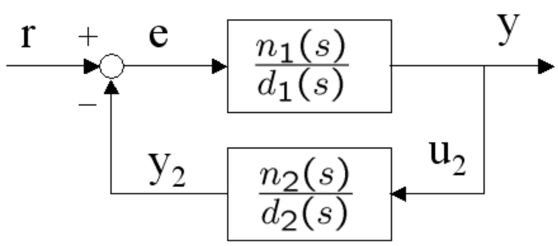


Figura 7.4: Connessione in retroazione di due sistemi LTI.

considerare in questo schema anche la presenza di un ulteriore ingresso di riferimento $r(t)$, cui l'uscita y_2 del sistema Σ_2 in retroazione si sottrae a formare il segnale di errore e che entra nel sistema Σ_1 in catena diretta (si noti che la scelta dei segni al nodo sommatore e' puramente convenzionale). Ponendo quindi $u_2 = y_1$ e $u_1 = e = r - y_2$ in (7.1), si ottiene

$$\begin{cases} \mathbb{D}x_1 = A_1x_1 - B_1C_2x_2 + B_1r - B_1D_2y \\ \mathbb{D}x_2 = A_2x_2 + B_2y \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'uscita, si può poi scrivere

$$y = C_1x_1 - D_1C_2x_2 + D_1r - D_1D_2y$$

ovvero

$$(1 + D_1D_2)y = C_1x_1 - D_1C_2x_2 + D_1r$$

da cui risulta che il sistema è ben posto solo se $D_1D_2 \neq -1$. In tale ipotesi si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{pmatrix} A_1 - \frac{B_1C_1D_2}{1+D_1D_2} & -B_1C_2 + \frac{B_1C_2D_1D_2}{1+D_1D_2} \\ B_2C_1\frac{1}{1+D_1D_2} & A_2 - \frac{B_2C_2D_1}{1+D_1D_2} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 - \frac{B_1D_1D_2}{1+D_1D_2} \\ B_2D_1\frac{1}{1+D_1D_2} \end{pmatrix} r \\ y &= \begin{pmatrix} C_1\frac{1}{1+D_1D_2} & -D_1C_2\frac{1}{1+D_1D_2} \end{pmatrix} \bar{x} + \frac{D_1}{1+D_1D_2} r \end{aligned} \tag{7.6}$$

La situazione sinora descritta in massima generalità, che ammette che entrambe i sistemi siano proprii ma non strettamente (abbiano cioè grado relativo nullo) creando cosi' un cosidetto "anello algebrico", è comunque assai rara anche quando ammissibile. Il caso di gran lunga più frequente nelle applicazioni è quello in cui sia il sistema in catena diretta sia strettamente proprio ($D_1 = 0$), per cui si ha

$$\mathbb{D}\bar{x} = \begin{pmatrix} A_1 - B_1C_1D_2 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} r$$
$$y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} \ .$$

Se il sistema in catena diretta non è strettamente proprio, il sistema in retroazione viene spesso scelto in modo da esserlo ($D_2 = 0$), per cui si ha

$$\mathbb{D}\bar{x} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 - B_2C_2D_1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix} r$$
$$y = \begin{pmatrix} C_1 & -D_1C_2 \end{pmatrix} \bar{x} \ + D_1 r \ .$$

Proposizione *Il sistema "retroazionato" (7.6) è raggiungibile e osservabile se e solo se Σ_1 non ha zeri coincidenti con poli di Σ_2. Non è completamente raggiungibile né osservabile altrimenti.*

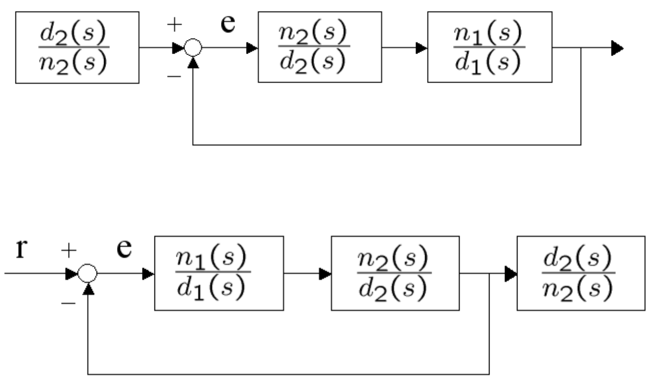


Figura 7.5: Sistemi equivalenti a quello nella figura precedente.

Nella rappresentazione con f.d.t. della connessione in serie, si ha

$$G(p) = \frac{n_1(p)d_2(p)}{d_1(p)d_2(p) - n_1(p)n_2(p)}.$$

Si può avere quindi una cancellazione se e solo se $n_1(p)$ e $d_2(p)$ hanno una radice in comune. Il fatto che l'autovalore corrispondente al polo cancellato divenga sia irraggiungibile che inosservabile, può essere spiegata come segue. Si consideri lo schema equivalente a quello di figura (7.4) riportato in alto nella figura (7.5): la cancellazione di un polo in d_2 comporta la perdita di osservabilità del sistema-serie in catena diretta. Sappiamo che peraltro la retroazione della uscita non altera né la raggiungibilità né l'osservabilità di un sistema, quindi l'autovalore corrispondendte al polo cancellato resta inosservabile anche nel sistema retroazionato.

Si consideri adesso l'ulteriore schema equivalente riportato nella stessa figura in basso. La cancellazione di un polo in d_2 comporta questa volta la perdita di raggiungibilità del sistema-serie in catena diretta. Per i motivi sopra detti, anche il sistema in retroazione resta irraggiungibile.