

1. Dato il sistema dinamico non lineare **tempo discreto**

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1^2(k) + 2x_1(k) - u(k)x_1(k) \\ x_2(k+1) = \alpha x_1(k)x_2(k) - 2x_2(k) + u(k)x_2(k) \end{cases}$$

- Determinare i punti di equilibrio ad ingresso nullo  $u(k) = 0$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Studiare la stabilità dei punti di equilibrio ottenuti al punto precedente con il metodo indiretto di Lyapunov;
- Dire se esiste un controllo affine che renda l'equilibrio in  $(1, 0)$  ottenuto per  $\alpha = 4$  asintoticamente stabile. Motivare la risposta.

2. Dato il sistema **tempo continuo** in forma di stato rappresentato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si studino i modi propri del sistema e si determinino le condizioni iniziali per le quali l'evoluzione libera del sistema si sviluppa su una retta nello spazio tridimensionale.
- Si studino gli spazi di raggiungibilità e di inosservabilità calcolandone dimensioni e basi.
- Si determinino le matrici del cambio di base che portano il sistema in forma di Kalman, in forma standard di raggiungibilità e in forma standard di osservabilità.

3. Lo studente

- descriva la matematica degli stimatori di ordine ridotto ricavando le equazioni e lo schema a blocchi del generico stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto per un sistema lineare tempo invariante tempo continuo;
- costruisca uno stimatore di ordine minimo con modi della dinamica dell'errore non più lenti di  $e^{\lambda_{stim}}$  per il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

nei casi seguenti:

- posto  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- posto  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- posto  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

4. Dato il sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

si imposti il problema della determinazione della legge di controllo ottimo (è possibile assumere un funzionale di costo quadratico) che porta in tempo finito lo stato del sistema all'origine partendo da una generica condizione iniziale  $x_0$ . Si enuncino le ipotesi di esistenza della soluzione del problema e si ricavi simbolicamente, mostrando e motivando i passaggi in sufficiente dettaglio, in funzione di  $A, B, C, t$  e  $t_f$  la matrice di guadagno per la retroazione dello stato  $K(t)$  che lo risolve nel caso in cui le ipotesi siano verificate.