

1. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) (x_1^2(t) + x_2^2(t)) + x_1(t) \end{cases}$$

- Si determinino tutte le possibili coppie di equilibrio (\bar{u}, \bar{x}) ;
- Si studi la stabilità dei punti di equilibrio nel caso di ingresso nullo.
- Nel caso di ingresso $u(t) = \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si commenti sull'esistenza di un ingresso affine negli stati che renda il punto di equilibrio asintoticamente stabile.

2. Data l'equazione alle differenze:

$$y(k+2) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)y(k+1) + \frac{\alpha}{2}y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

- Si determini una rappresentazione del sistema in forma di stato.
- Si studi la stabilità interna e stabilità BIBO al variare del parametro α .
- Senza calcolare la molteplicità geometrica degli autovalori si commenti sulla forma di Jordan associata alla matrice dinamica trovata nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$.
- Si descriva, nel caso di sistemi lineari tempo discreto, come si ottiene che l'immagine della matrice di raggiungibilità in n passi determini lo spazio degli stati raggiungibili dall'origine in n passi.

3. Sia dato il sistema tempo discreto :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k = Cx_k$$

- si dica se e per quali valori di α e' possibile costruire uno stimatore tale che l'errore di stima sia nullo dopo un numero finito di passi;
- si scelga un valore di α adeguato e si progetti tale stimatore se esiste;
- si dica se e per quali valori di α e' possibile costruire un controllore che, retroazionando lo stato stimato, annulli l'evoluzione libera dello stato in un numero finito di passi;
- si scelga un valore di α adeguato e si progetti tale controllore se esiste.

4. Si consideri il sistema LTI descritto dalla relazione ingresso uscita :

$$Y(s) = \frac{2}{s-1}U(s)$$

dove $U(s)$ è la trasformata di Laplace dell'ingresso $u(t)$ del sistema e $Y(s)$ è la trasformata di Laplace dell'uscita $y(t)$.

- Si trovi il controllore ottimo $u(t) = Ky(t)$ che rende minimo l'indice di costo:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [y^T Q y + u^T R u] dt$$

posti $Q = 1, R = 1$.

- si trovi la corrispondente dinamica a ciclo chiuso (in forma di stato o funzione di trasferimento).