Teoria dei Sistemi e del Controllo - 04-07-2024

1. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_1(t) + (\alpha^2 - 1)x_2(t) - 2x_1^3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio ad ingresso nullo al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati con il metodo indiretto di Lyapunov;
   - Per il caso $\alpha = 0$ si studi la stabilità dell'origine con il metodo diretto;
   - Per il caso $\alpha = -1$ si determini un ingresso non nullo che renda il punto $(0, -1)$ asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema **tempo continuo** in forma di stato rappresentato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   - Si commenti sulle proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema senza effettuare conti.
   - Si determinino i modi del sistema, si dica quali di questi sono visibili nell'evoluzione libera dell'uscita e quali in quella forzata dello stato.
   - Si determini la matrice del cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman. Si discuta infine la stabilità BIBO del sistema.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

   si determini :

   - per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller;
   - si scelga un valore β tra questi, e si calcoli, in funzione di α la matrice di retroazione dello stato K tale che il sistema a ciclo chiuso sia di tipo dead-beat.

4. Sia dato il sistema tempo continuo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

   si calcoli la matrice di retroazione ottima $K(\alpha)$, assumendo un controllore del tipo $u = K(\alpha)x$, che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^\infty \alpha^2 \, y(t)^2 + u(t)^2 dt$$

   con $\alpha \neq 0$.