Teoria dei Sistemi e del Controllo - 29-10-2024

1. Dato il sistema dinamico non lineare **tempo continuo**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_1 + x_2^3 + 1) \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \\ y = 2x_1x_2 \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio $\bar{x}$ del sistema per ingresso costante $u(t) = \bar{u}$;
   - Determinare il sistema traslato nella coppia di equilibrio $\bar{u} = 1$ e $\bar{x}$ (calcolati al punto precedente) nel caso $k \neq 0$;
   - Studiare la stabilità dell'origine per il sistema ottenuto al punto precedente (quindi con $k \neq 0$).

2. Dato il sistema **tempo discreto** in forma di stato rappresentato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = 0$$

   - Si fornisca una base per i seguenti spazi: raggiungibilità in 1, 2, e 3 passi, inosservabilità in 1, 2, e 3 passi. Si studi inoltre la controllabilità a zero in 1, 2, e 3 passi.
   - Si studino i modi propri del sistema.
   - Si determinino le matrici del cambio di base che portano il sistema in forma di Kalman.

3. Lo studente

   - descriva la matematica degli stimatori di ordine ridotto ricavando le equazioni e lo schema a blocchi del generico stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto per un sistema lineare tempo invariante tempo continuo;
   - costruisca uno stimatore di ordine minimo con modi della dinamica dell'errore non più lenti di $e^{\lambda_{stim}}$ per il sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

   nei casi seguenti:

     - posto $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
     - posto $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
     - posto $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

4. Dato il sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx \end{cases}$$

   si imposti il problema della determinazione della legge di controllo ottimo (è possibile assumere un funzionale di costo quadratico) che porta in tempo finito lo stato del sistema all'origine partendo da una generica condizione iniziale x_0. Si enuncino le ipotesi di esistenza della soluzione del problema e si ricavi simbolicamente, mostrando e motivando i passaggi in sufficiente dettaglio, in funzione di A, B, C, t e t_f la matrice di guadagno per la retroazione dello stato $K(t)$ che lo risolve nel caso in cui le ipotesi siano verificate.