Teoria dei Sistemi e del Controllo - 24-07-2017

1. Dato il sistema lineare SIMO (un ingresso, due uscite) rappresentato dalle equazioni differenziali

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + 6\dot{y}_1(t) + 5y_1(t) = u(t) \\ y_2^{(3)}(t) + 6\ddot{y}_2(t) + 5\dot{y}_2(t) = \dot{u}(t) - 2\alpha u(t) \end{cases}$$

   (a) Per $\alpha = 1$ determinare la matrice di trasferimento, i poli e gli zeri con relativa molteplicità e grado di McMillan.

   (b) Determinare una realizzazione minima in forma di stato al variare di α.

2. Dato il sistema non lineare scritto in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \left(2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \left(2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) x_2(t) + x_1(t) \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità sia con il metodo indiretto basato sul linearizzato che determinando una candidata di Lyapunov opportuna.

   (b) Determinare se esistono cicli limite ed eventualmente caratterizzarli e stabilirne le proprietà di stabilità considerando una opportuna candidata di Lyapunov.

3. Dato il sistema tempo discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_k$$

   si determini :

   - per quali valori di α e β il sistema ammette un dead-beat controller;
   - si scelga un valore β tra questi, e si calcoli, in funzione di α la matrice di retroazione dello stato K tale che il sistema a ciclo chiuso sia di tipo dead-beat.

4. Si consideri il problema di raggiungibilità in tempo finito di un punto dello spazio di stato con energia di controllo minima per un sistema lineare tempo continuo;

   - Si definisca il Gramiano di Raggiungibilità $\mathcal{G}_R$.
   - Si dimostri il ruolo di $\mathcal{G}_R$ nel calcolo dell'azione di controllo $u(t)$ ad energia minima.