Teoria dei Sistemi e del Controllo - 19-07-2021

1. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2^2(t) + ax_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

   - Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$ e se ne studi la stabilità degli equilibri con il metodo indiretto di Lyapunov.
   - Per ogni punto di equilibrio, tra quelli trovati al punto precedente, si determini se è possibile agire su una o l'altra dinamica con un ingresso u affine nello stato che lo renda asintoticamente stabile.
   - Nel caso di ingresso nullo, per $a = 1$ si studi la stabilità dell'origine con $V = x_1^2 - x_2^2$.

2. Si consideri il sistema **tempo continuo** descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Si studino la stabilità interna del sistema e i modi.
   - Si determini se è possibile vedere una evoluzione forzata dell'uscita con andamenti della forma a) e^{-2t}, b) $t + 2$, c) $3sin(t)$, d) $e^{-t} - \sin(t)$. Si commenti in modo adeguato la risposta.
   - Costruire la matrice T del cambio di base che porta il sistema in forma di Kalman.

3. Dato il sistema SISO tempo discreto

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

   chiuso in retroazione con il controllore $u_k = K(r_k - x_k)$, con K matrice di guadagni e r_k ingresso esogeno di riferimento;

   - si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la dinamica del sistema a ciclo chiuso possa essere assegnata completamente.
   - si enunci, e la si dimostri, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabilizzabile a ciclo chiuso.
   - si proponga un esempio numerico (le matrici F e G) di un sistema la cui dinamica non puo' essere completamente assegnata ma che è stabilizzabile.
   - si proponga un esempio numerico (le matrici F e G) di un sistema la cui dinamica non puo' essere completamente assegnata ma che NON è stabilizzabile.

4. Si consideri il sistema lineare tempo continuo SISO descritto dalle matrici A, B, C. Si trovi, se esiste, al variare di ρ una legge di controllo nella forma $u(t) = K(\rho)x(t)$ che rende minimo il funzionale di costo:

$$J = \int_0^\infty \rho u^2(t)dt$$

   nei seguenti tre casi:

   (a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si discuta nei tre casi la dipendenza da ρ della soluzione.