Esercizi su autovalori, autovettori e polinomio caratteristico

Corso: Teoria dei Sistemi e Controllo

Indicazioni

Per ogni esercizio:

- Calcola il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- Trova gli autovalori (con molteplicità algebrica).
- Determina gli autovettori non nulli (spazio proprio) per ogni autovalore.
- Commenta la molteplicità geometrica rispetto a quella algebrica.

Esercizi

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluzioni

Esercizio 1: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- Polinomio caratteristico:

$$p_{A_1}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(4-\lambda).$$

- Autovalori: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 4$ (tutti semplici, cioè con molteciplità algebrica 1). Essendo una matrice diagonale gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale.

- Autovettori:

$$\lambda = 2: \ (A_1 - 2I)x = 0 \Rightarrow x = (1,0,0)^T \text{ (generatore);}$$
$$\lambda = -1: \ x = (0,1,0)^T;$$
$$\lambda = 4: \ x = (0,0,1)^T.$$

Esercizio 2: $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- La matrice è triangolare superiore $\Rightarrow$ e quindi il polinomio caratteristico è il prodotto degli elementi diagonali:

$$\chi_{A_2}(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda).$$

- Autovalori: $\lambda = 3, 2, 5$ (sempre gli elementi sulla diagonale, sono distinti e quindi ammettono un solo autovettore, o suoi multipli).

- Autovettori (risolvi $(A_2 - \lambda I)x = 0$):

  - $\lambda = 3$:

  $$A_2 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Dovendo appartenere al nullo della matrice $A_2 - 3I$ un autovettore risulta: $v_1 = (1,0,0)^T$.

  - $\lambda = 2$:

  $$A_2 - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Si noti che le prime due colonne di $A_2 - 2I$ sono identiche e pertanto la matrice moltiplicata per qualsiasi multiplo di $v_2 = (1,-1,0)^T$ fornisce il vettore nullo. Pertanto $v_2 = (1,-1,0)^T$ è un autovettore.

  - $\lambda = 5$:

  $$A_2 - 5I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Se non è facile trovare un elemento del nullo della matrice si possono imporre le relative equazioni: 1) $-2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1$, 2) $-3x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow -3(2x_1) + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}x_1$. Per evitare frazioni prendo $x_1 = 2$ e ottengo $x_2 = 4, x_3 = 3$. Un autovettore: $v_3 = (2,4,3)^T$.

Tutti gli autovalori distinti con spazi propri monodimensionali (la matrice è diagonalizzabile).

Esercizio 3: $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Triangolare superiore $\Rightarrow$
$$p_{A_3}(\lambda) = (2-\lambda)^3.$$
- Autovalore unico $\lambda = 2$ di molteplicità algebrica 3.
- Autovettori: $A_3 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nel nullo della matrice ci sono solo i multipli di $(1,0,0)^T$ e pertanto esiste un solo autovettore.
  - La molteplicità geometrica coincide con la dimensione dello spazio nullo della matrice $A_3 - 2I$ che risulta essere 1, minore della molteplicità algebrica 3 $\Rightarrow$ matrice non diagonalizzabile (si noti che la matrice corrisponde ad un blocco di Jordan di dimensione 3 associato all'autovalore 2).

Esercizio 4: $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- La matrice è sia triangolare superiore che diagonale a blocchi (primo blocco di dimensione 2) e pertanto:
$$p_{A_4}(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$
- Autovalori: $\lambda = 1, 3, 4$ che sono gli elementi sulla diagonale o equivalentemente gli autovalori dei due blocchi sulla diagonale.
- Autovettori:
  - $\lambda = 1 : (A_4 - I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ che ha come elementi del nullo i multipli di $v = (1,0,0)^T$.
  - $\lambda = 3 : (A_4 - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. In questo caso sommando le prime due colonne della matrice si ottiene il vettore nullo e pertanto $v = (1,1,0)^T$ è un autovettore.
  - $\lambda = 4 : (A_4 - 4I) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e chiaramente un autovettore risulta essere $v = (0,0,1)^T$.

Esercizio 5: $A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- Polinomio caratteristico ottenuto dal fatto che la matrice è triangolare superiore:
$$p_{A_5}(\lambda) = (2-\lambda)^2(4-\lambda).$$

- Autovalori: $\lambda = 2$ (algeb. 2), $\lambda = 4$ (algeb. 1).
- Autovettori:
  - $\lambda = 2 : A_5 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ che ha come elementi del nullo i vettori multipli di $v = (1, 0, 0)^T$ che risulta quindi essere autovettore. La molteplicità geometrica dell'autospazio per $\lambda = 2$ è 1 (minore della molteplicità algebrica 2). Si noti infatti la presenza di un blocco di Jordan di dimensione 2 associato all'autovalore 2.
  - $\lambda = 4 : (A_5 - 4I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e chiaramente un autovettore risulta essere $v = (0, 0, 1)^T$.

    Si noti che vengono trovati solo due autovettori linearmente indipendenti e pertanto la matrice non è diagonalizzabile.

Esercizio 6: $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Polinomio caratteristico: calcoliamo la determinante

$$p_{A_6}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} (2 - \lambda).$$

Ora $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - (1)(-1) = \lambda^2 + 1$. Quindi

$$p_{A_6}(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(2 - \lambda).$$

- Autovalori: $\lambda = 2$ (reale), e $\lambda = \pm j$ (complessi). Se ti interessa solo lo spazio proprio reale, analizziamo $\lambda = 2$.
- Autovettori reali:
  - Per $\lambda = 2$: $A_6 - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da cui segue che un autovettore reale per $\lambda = 2$ è $v = (0, 0, 1)^T$.
  - Per $\lambda = \pm j$ gli autovettori sono complessi (uno coniugato dell'altro) ma si segue la stessa procedura andando a cercare un vettore che stia nel nullo della matrice: $A_6 - jI = \begin{pmatrix} -j & 1 & 0 \\ -1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2-j \end{pmatrix}$. Moltiplicando la prima colonna per il numero j si ottiene la seconda colonna, sottraendole si ottiene il vettore nullo e pertanto un autovettore complesso è $v = (j, -1, 0)^T$. Il vettore coniugato $v = (-j, -1, 0)^T$ risulta nel nullo della matrice $A_6 + jI$.

Note finali e suggerimenti

- Per matrici triangolari gli autovalori sono i termini sulla diagonale, se ha una struttura a blocchi (triangolare o diagonale) gli autovalori sono quelli dei blocchi.

- In presenza di autovalori ripetuti, confronta *molteplicità algebrica* (esponente nel polinomio caratteristico) e *molteplicità geometrica* (dimensione dello spazio nullo di $A - \lambda I$). Se sono diverse la matrice non è diagonalizzabile.