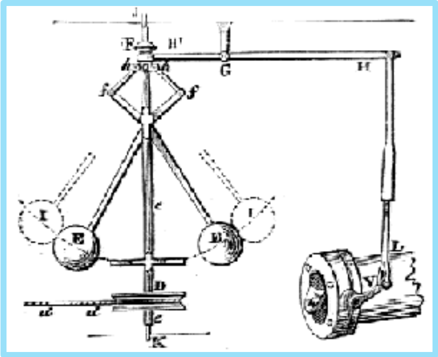
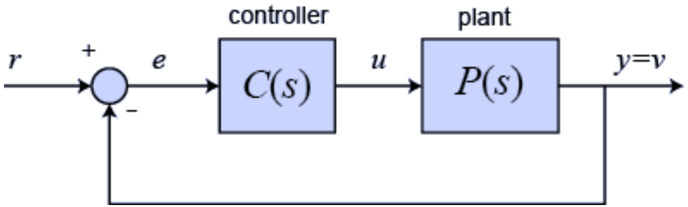


$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$[B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{k-1}B]$$

Modelli ed Esempi di Sistemi

Prof.ssa Lucia Pallottino



MODELLI

Modello: rappresentazione semplificata di un sistema

Perché usiamo i modelli?

- **Comprendere:** Ci aiutano a capire come funzionano i sistemi complessi.
- **Prevedere:** Permettono di prevedere il comportamento futuro del sistema.
- **Progettare:** Essenziali per progettare nuovi sistemi o controllarne di esistenti.
- **Testare:** Possiamo testare scenari diversi senza intervenire sul sistema reale

DETERMINAZIONE MODELLO

1. **Identificazione del Sistema e Obiettivi:** Cosa vogliamo modellare e perché?
2. **Definizione delle Variabili:** Quali sono le grandezze importanti (input, output, stato interno)?
3. **Scelta della Struttura del Modello:** Lineare o non lineare? Continuo o discreto? Deterministico o stocastico?
4. **Stima dei Parametri:** Determinare i valori numerici che rendono il modello aderente ai dati reali.

Esempio: Modellare la relazione tra pedale e velocità del veicolo

- **Variabili?**

Quando un modello è troppo complesso?

- **Difficile da Calibrare:** Troppi parametri da stimare, spesso con dati insufficienti.
- **Difficile da Interpretare:** Non si capisce più "perché" il modello fa ciò che fa.
- **Sovraccarico (Overfitting):** Il modello si adatta troppo bene ai dati passati, perdendo la capacità di generalizzare e prevedere il futuro.
- **Costi Computazionali Elevati:** Richiede troppe risorse per essere eseguito.

Il principio di Parsimonia (Rasoio di Occam): Tra due modelli che spiegano ugualmente bene i dati, scegli quello più semplice.

REALTA' O SEMPLICITA'

SEMPLICITA' vs ACCURATEZZA

- Un modello **troppo semplice** non cattura le dinamiche essenziali e fornisce previsioni inaccurate.
- Un modello **troppo complesso** è difficile da gestire, calibrare e può portare a overfitting.

Il processo di modellazione è iterativo:

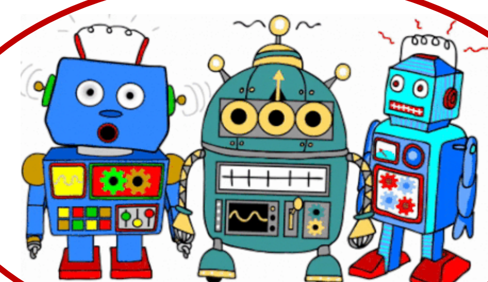
1. Si inizia con un modello semplice.
2. Si valuta la sua performance.
3. Lo si affina e lo si rende più complesso solo se necessario e giustificato dai dati.

Modello di Trasferimento di Risorse

- Oggetto di interesse: **RISORSE** (umane, beni, servizi, CPU, etc.)

- Risorse caratterizzate da **QUALITA'** (dipendono dal contesto: colore, dimensione, locazioni, livelli stipendiali, età, costo, etc.)

- Singoli elementi della risorsa considerati come **INDISTINGUIBILI**



Modello di Trasferimento di Risorse

CC BY-NC

CC BY-NC-ND

CC BY

Modello di Trasferimento di Risorse

- Risorse suddivise in **COMPARTIMENTI** (Logici) e possono migrare tra compartimenti in conseguenza ad una causa

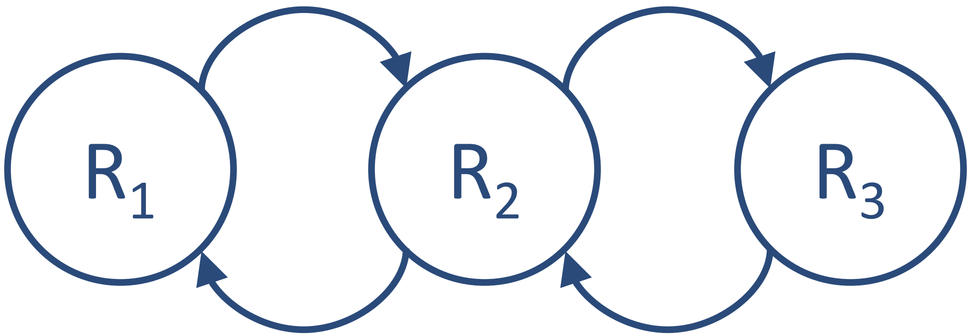
⇨ Sistema dinamico

- Se la quantità di risorse in un compartimento dipende solo dalle risorse stesse si parla di **SISTEMA ISOLATO** altrimenti dipendono da altre variabili dette **INDIPENDENTI**

Modello di Trasferimento di Risorse

- Rappresentazione con grafo:

  - **Nodi** = Compartimenti
  - **Archi** = trasferimenti di risorse



Modello di Trasferimento di Risorse

- In caso di trasferimenti continui si parla di **MODELLI DI FLUSSO CONTINUO** e per ogni nodo vale la proprietà di bilanciamento

$$\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i^{in}(t) - f_i^{out}(t)$$

- "i" compartimento "x_i" quantità di risorsa in i
- Flussi entranti e uscenti

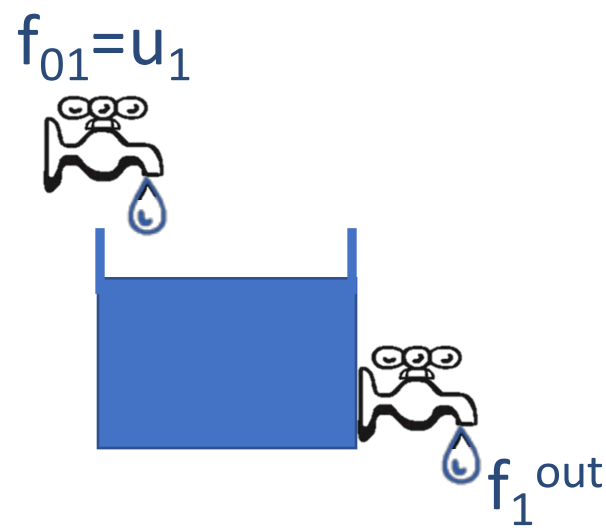
Esempio: reti di distribuzione

Compartimento = serbatoio

Risorsa = liquido

X_i = Volume di liquido

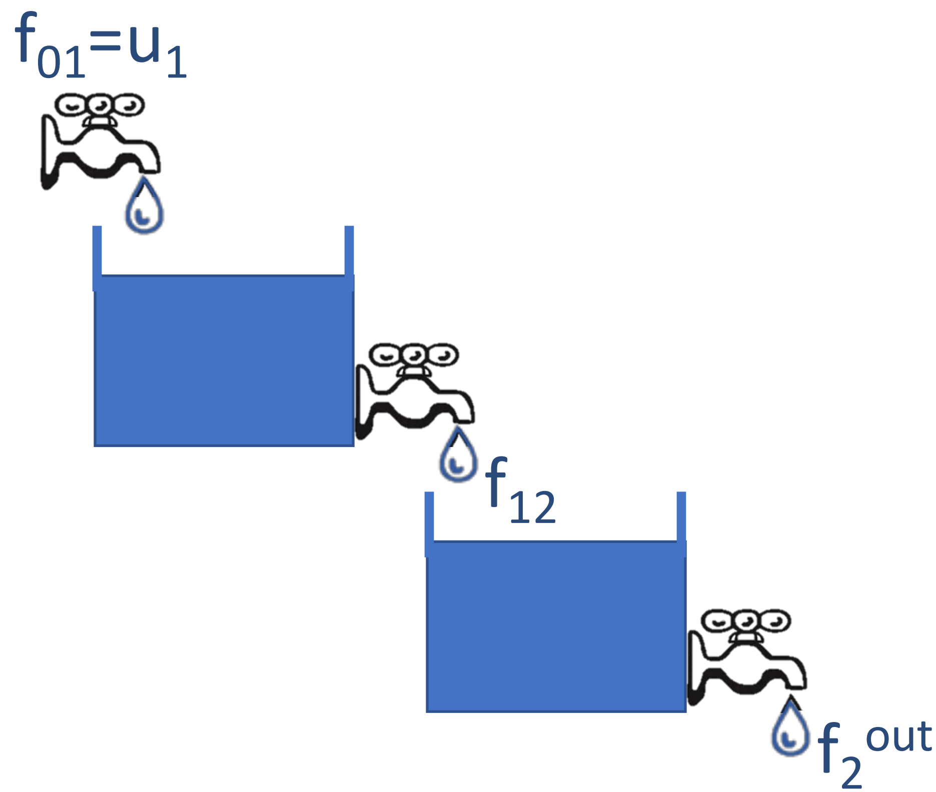
$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) - f_1^{out}(t)$$



Modello di Trasferimento di Risorse

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) - f_{12}(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_{12}(t) - f_2^{out}(t)$$



Esempio: risorse umane

Compartimento = livello stipendiale (3 livelli) e livello competenze (2 livelli: competente e incompetente)

Risorsa = persone

X_1 = Numero Incompetenti al I livello stipendiale

X_2 = Numero Competenti al I livello stipendiale

X_3 = Numero Incompetenti al II livello stipendiale

X_4 = Numero Competenti al II livello stipendiale

X_5 = Numero Incompetenti al III livello stipendiale

X_6 = Numero Competenti al III livello stipendiale

Modello di Trasferimento di Risorse

Esempio: risorse umane

Modello semplificato:

Unico ingresso

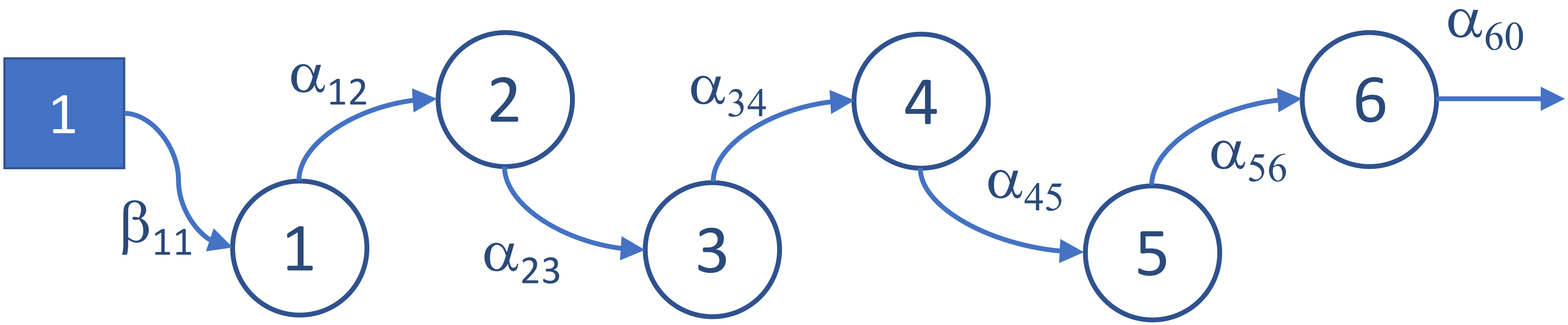
u_1 = Numero di assunzioni di incompetenti al I livello

Una volta diventati competenti possono passare di livello, non sono ammessi doppi scatti

Si suppone che gli eventi che determinano gli avanzamenti di carriera (promozioni, corsi di aggiornamento etc) sono tanti rispetto l'orizzonte temporale e asincroni

Modello di Trasferimento di Risorse

Esempio: risorse umane



α e β sono densità di flusso

Come varia il numeri di componenti nei vari livelli?

Esempio: risorse umane

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & -\alpha_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & -\alpha_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{45} & -\alpha_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{56} & -\alpha_{60} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supponiamo un afflusso costante di risorse: $u_1(t) = u$

BILANCIO DI FLUSSO

Se $\beta_{11}\, u - \alpha_{12}\, x_1 > 0$ il numero di risorse nel primo compartimento cresce fino a che

$$\alpha_{12}\, x_1 = \beta_{11}\, u$$

Se $\beta_{11}\, u - \alpha_{12}\, x_1 < 0$ il numero di risorse nel primo compartimento decresce fino a che

$$\alpha_{12}\, x_1 = \beta_{11}\, u$$

Quindi $x_1 \to \beta_{11}\, u / \alpha_{12}$

Esempio: risorse umane

Imponendo il bilanciamento di flusso per ogni compartimento si ottiene che il vettore x tende a

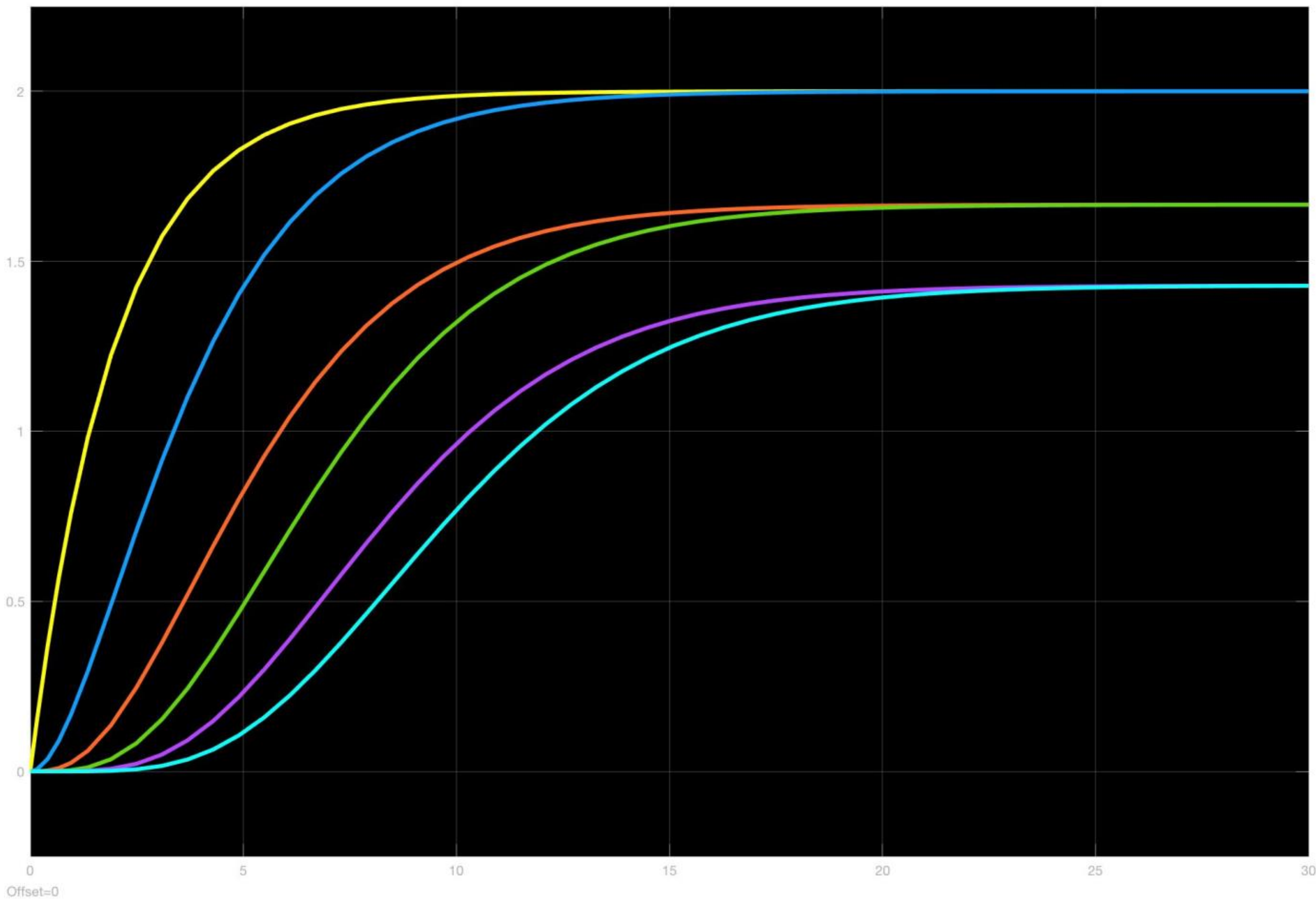
$$\bar{x} = \beta_{11} u \begin{pmatrix} 1/\alpha_{12} \\ 1/\alpha_{23} \\ 1/\alpha_{34} \\ 1/\alpha_{45} \\ 1/\alpha_{56} \\ 1/\alpha_{60} \end{pmatrix}$$

Decidere i parametri α e β per ottenere una configurazione aziendale desiderata

Per ottenere una configurazione piramidale (pochi livello 6 e tanti livello 1) è sufficiente scegliere

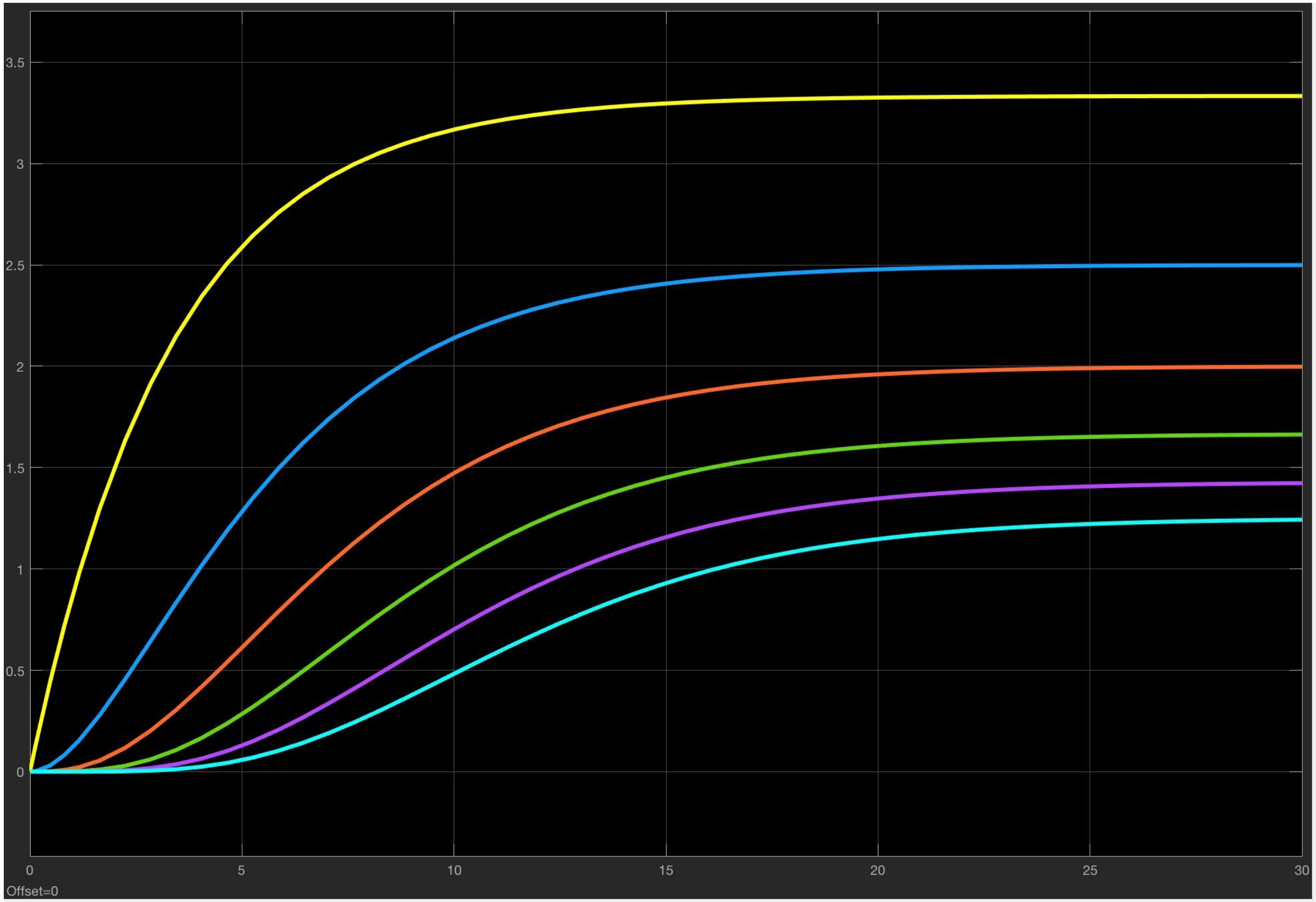
$$\frac{1}{\alpha_{12}} > \frac{1}{\alpha_{23}} > \frac{1}{\alpha_{34}} > \frac{1}{\alpha_{45}} > \frac{1}{\alpha_{56}} > \frac{1}{\alpha_{60}}$$

Modello di Trasferimento di Risorse



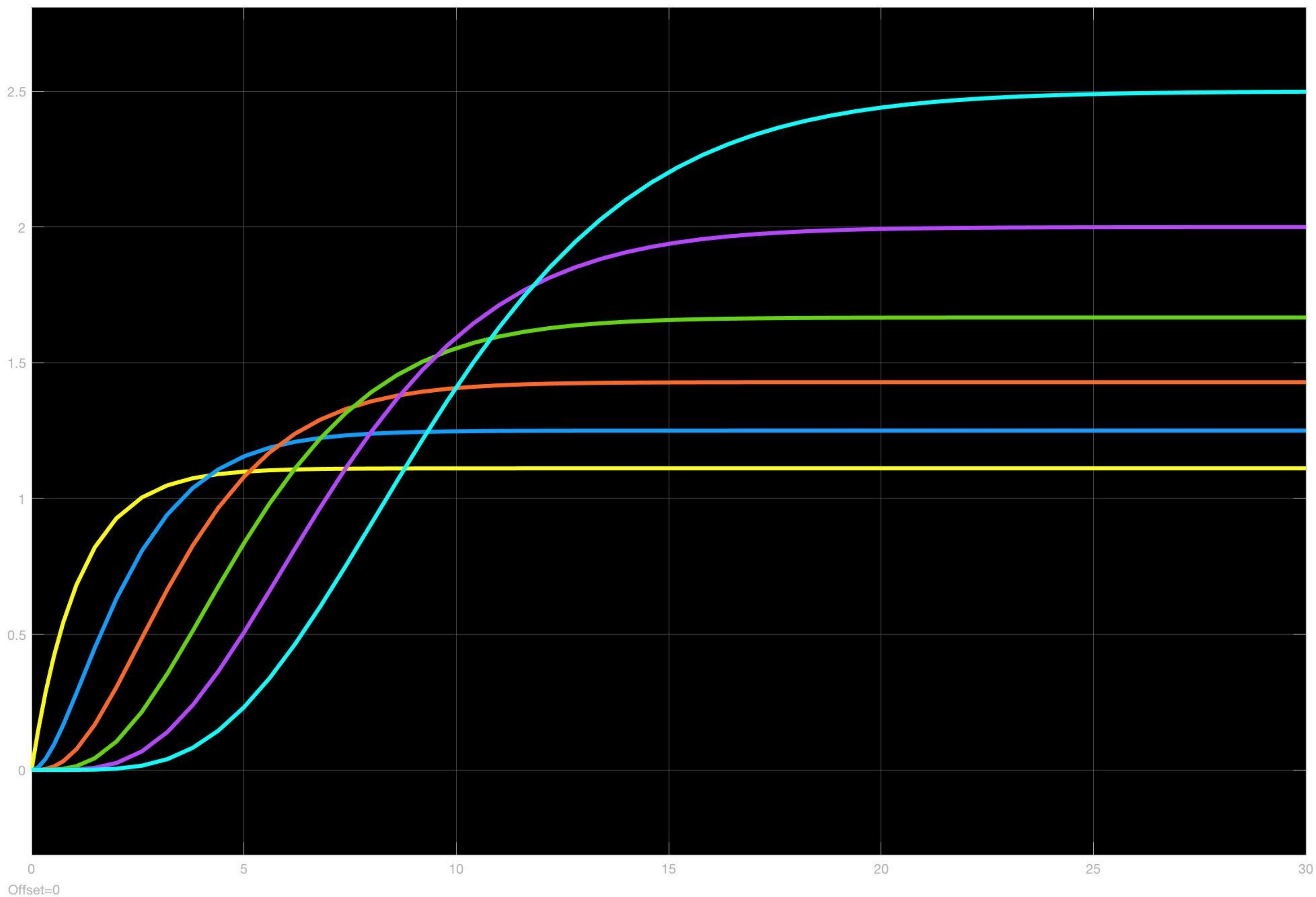
$$\beta_{11} = 1$$
$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = 0.5$$
$$\alpha_{34} = \alpha_{45} = 0.6$$
$$\alpha_{56} = \alpha_{60} = 0.7$$

Modello di Trasferimento di Risorse



$$\beta_{11} = 1$$
$$\alpha_{12} = 0.3$$
$$\alpha_{23} = 0.4$$
$$\alpha_{34} = 0.5$$
$$\alpha_{45} = 0.6$$
$$\alpha_{56} = 0.7$$
$$\alpha_{60} = 0.8$$

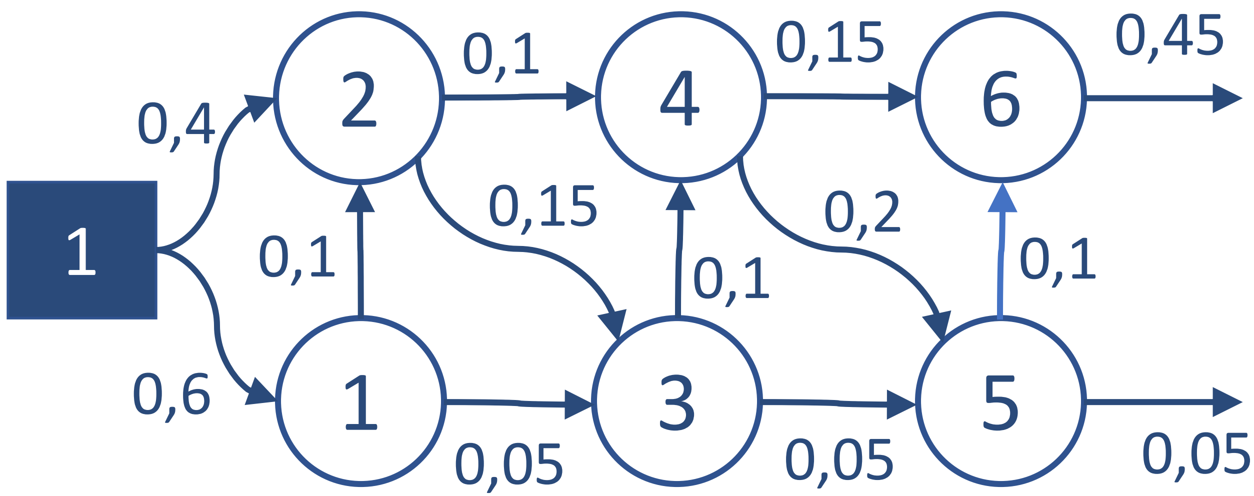
Modello di Trasferimento di Risorse



$$\beta_{11} = 1$$
$$\alpha_{12} = 0.9$$
$$\alpha_{23} = 0.8$$
$$\alpha_{34} = 0.7$$
$$\alpha_{45} = 0.6$$
$$\alpha_{56} = 0.5$$
$$\alpha_{60} = 0.4$$

PRINCIPIO DI PETER (1969)

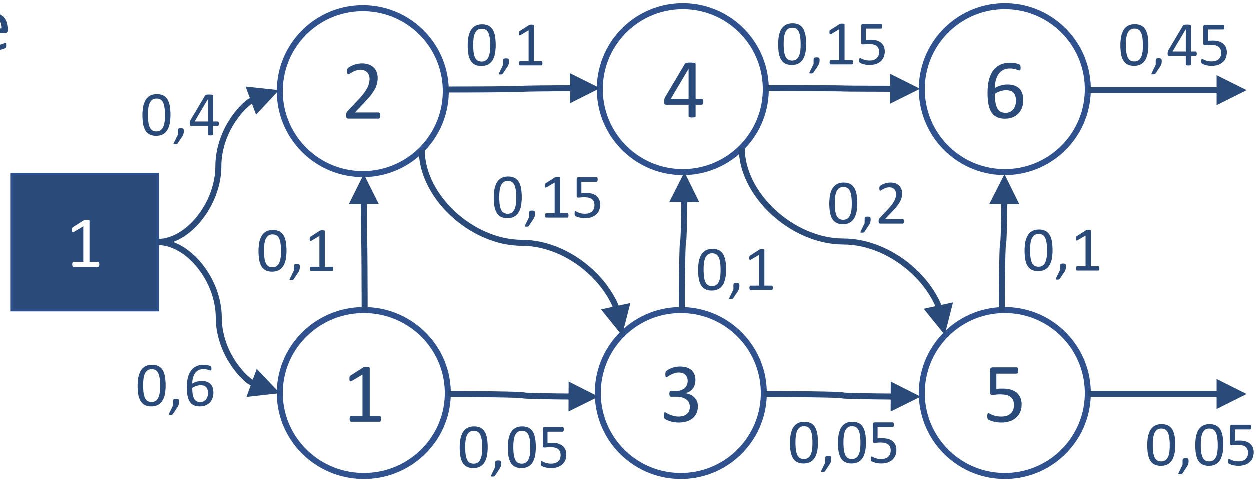
In ogni gerarchia un dipendente tende a salire fino al proprio livello di incompetenza



Percentuali per trimestre

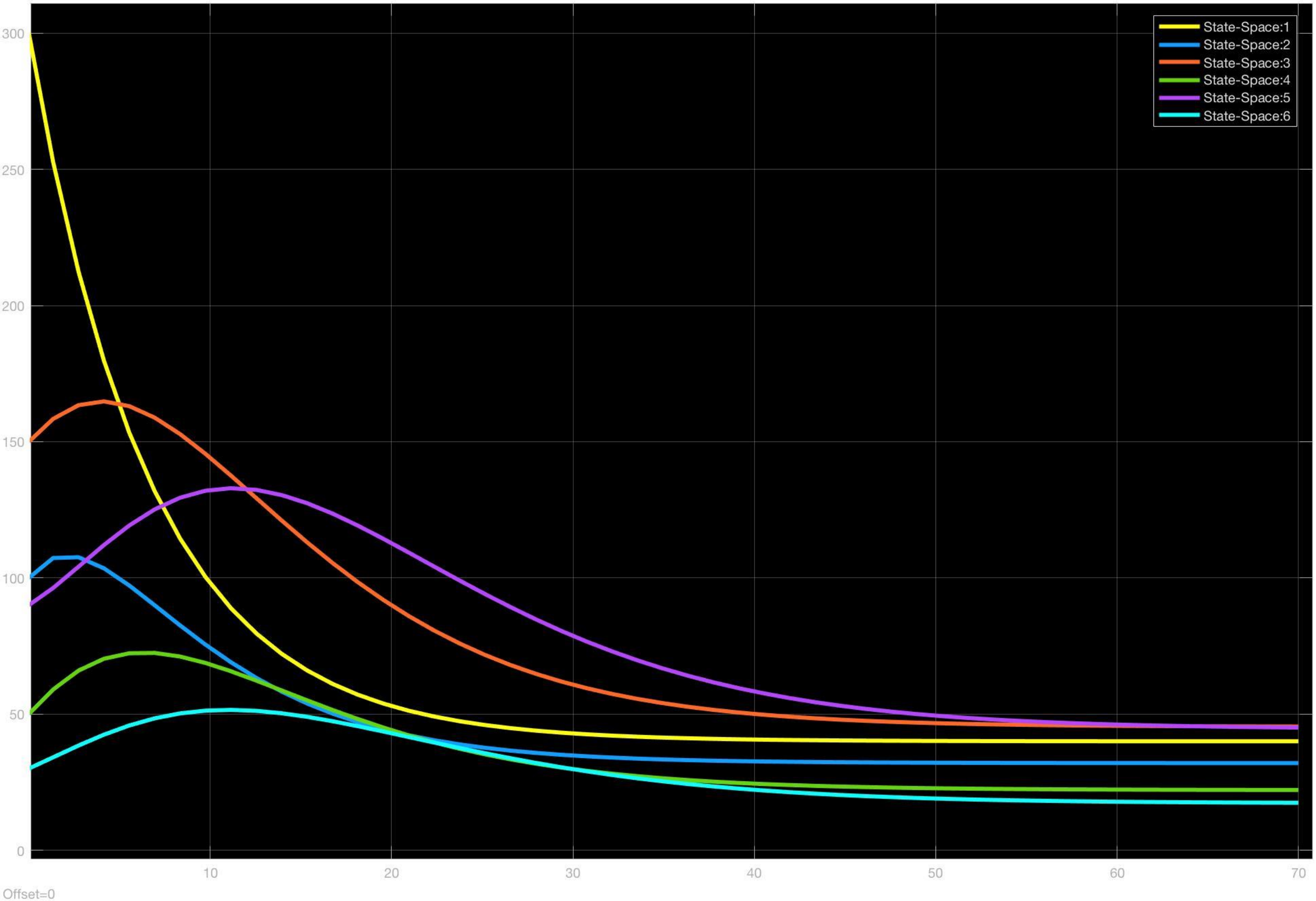
Modello di Trasferimento di Risorse

Esempio: risorse umane



$$A = \begin{pmatrix} -0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,15 & -0,15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & -0,35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,2 & -0,15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0,1 & -0,45 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Modello di Trasferimento di Risorse



$$u = 10$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 150 \\ 50 \\ 90 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Modello di Transizione tra stati

- Oggetto di interesse: presenza o assenza di qualità (es. Clima)
- Modifica della qualità comporta una transazione tra stati (es. Da soleggiato a nuvoloso)

- Sia la transizione che lo stato hanno carattere probabilistico
- Sistemi tipicamente caratterizzati da un indice k

- $x_i(k)$ è la probabilità di avere la i-esima qualità all'istante k

Modello di Transizione tra stati

- Si modellano come grafi con archi che rappresentano probabilità di transizione

- Spesso si suppone che $x(k+1)$ dipende solo da $x(k)$ –> proprietà di Markov (Prob. e Statistica, CISI, Modell.& Simulazione Sistemi Produttivi Discreti)

Modello di Transizione tra stati

Esempio: Ranking pagine di Google (1998)

Modello semplificato: navigazione casuale

Evento: click su link (concetto di tempo?)

Come quantifico l’importanza di una pagina?

Modello di Transizione tra stati

N_i numero di link ad altre pagine

La pagina i distribuisce la sua importanza a N_i pagine

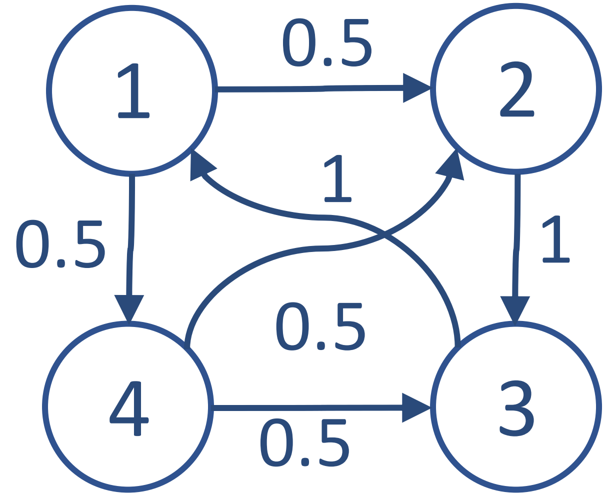
$\alpha_{ij} = 1/N_i$ probabilità che venga scelta la pagina j
$\alpha_{ij} = 0$ se non è presente un link alla pagina j

$x(k+1)=A\,x(k)$ dove $a_{ii} = 0$ e $\mathbf{a_{ij} = \alpha_{ji}}$

$x_i(k)$ probabilità che l'utente sia sulla pagina i dopo k eventi
A regime può essere un indice di ranking

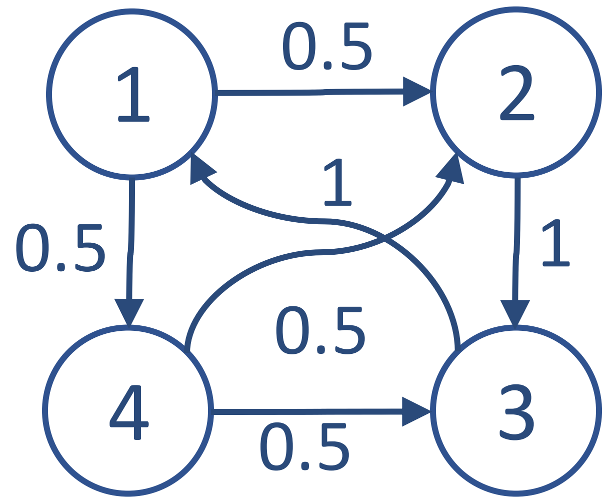
Modello di Transizione tra stati

Pagina 1 ha link a pagina 2 e 4
Pagina 2 ha link a pagina 3
Pagina 3 ha link a pagina 1
Pagina 4 ha link a pagina 2 e 3



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_3(k) \\ x_2(k+1) &= 0.5x_1(k) + 0.5x_4(k) \\ x_3(k+1) &= x_2(k) + 0.5x_4(k) \\ x_4(k+1) &= 0.5x_1(k) \end{aligned}$$



x(k+1)=A x(k)

Lo stato converge verso l'equilibrio

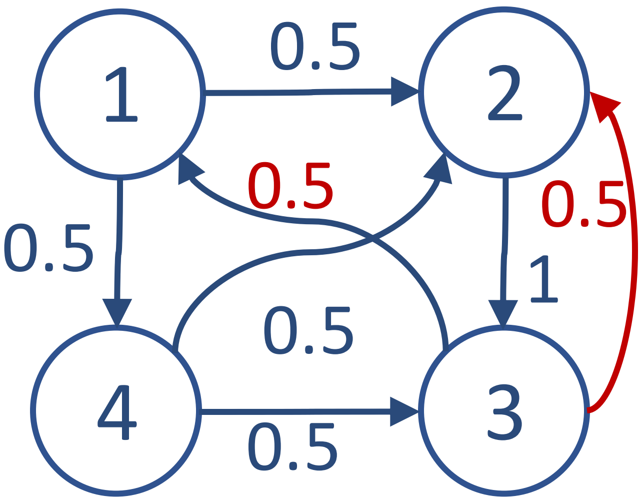
x=A x

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 4/13$$
$$x_2 = 3/13$$
$$x_3 = 4/13$$
$$x_4 = 2/13$$

Modello di Transizione tra stati

Aggiungendo un link
dalla pagina 3 alla pagina 2



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 4/21$$
$$x_2 = 7/21$$
$$x_3 = 8/21$$
$$x_4 = 2/21$$

Modello di Transizione tra stati

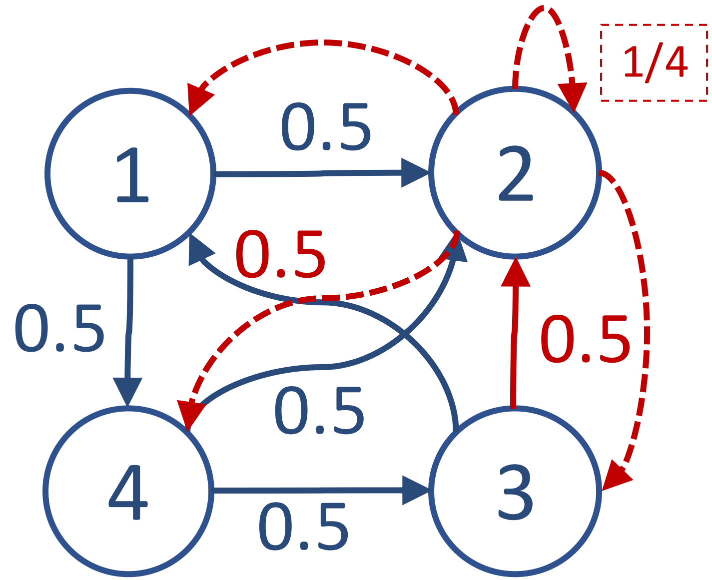
Possiamo complicare il modello

Nel caso una pagina non abbia link, l'utente va in una pagina a caso nella rete (N pagine)

$\alpha_{ij} = 1/N_i$ se esiste link a j da pagina i
$\alpha_{ij} = 0$ se non è presente un link alla pagina j (ma ci sono altri link)
$\alpha_{ij} = 1/N$ se alla pagina i non ci sono link

Modello di Transizione tra stati

Pagina 1 ha link a pagina 2 e 4
Pagina 2 non ha link
Pagina 3 ha link a pagina 1 e 2
Pagina 4 ha link a pagina 2 e 3



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

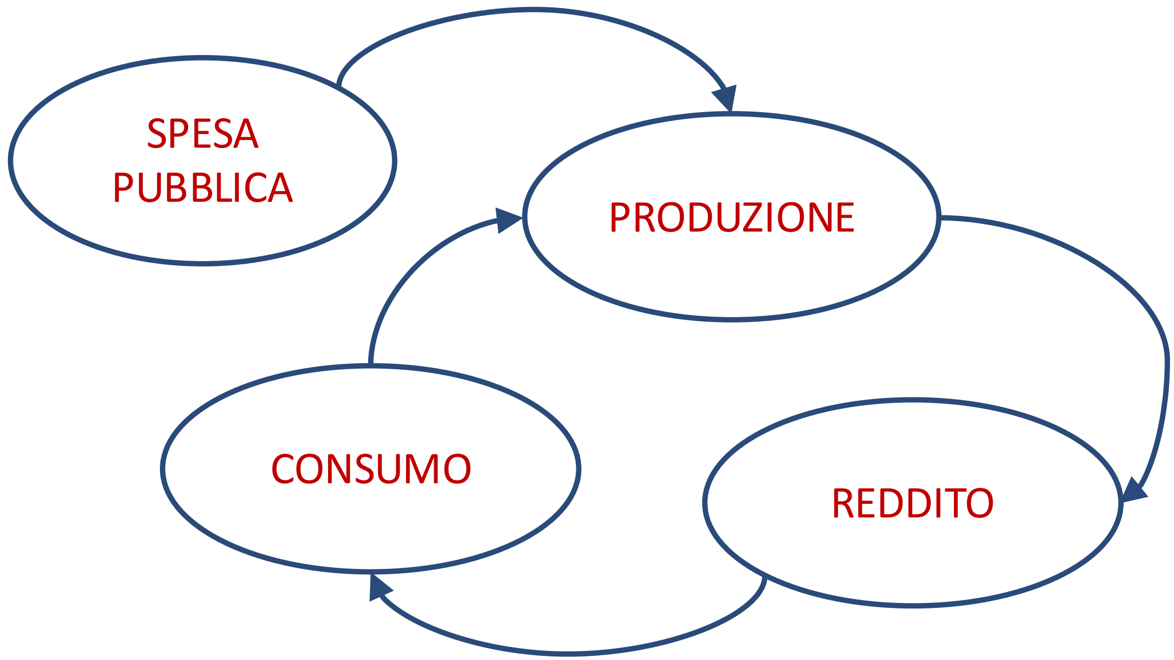
$$x_1 = 1/5$$
$$x_2 = 2/5$$
$$x_3 = 1/5$$
$$x_4 = 1/5$$

Modelli di influenza

- Oggetto di interesse: interazioni tra le variabili

- Nel grafo il nodo è la variabile, l'arco indica che la variabile i influenza la variabile j (nella sua evoluzione)

- Grafo di influenza

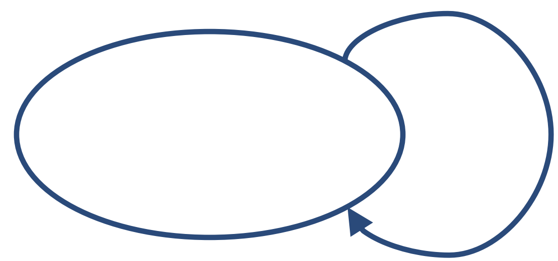


Modelli di influenza

- Oggetto di interesse: interazioni tra le variabili

- Nel grafo il nodo è la variabile, l'arco indica che la variabile i influenza la variabile j (nella sua evoluzione)

- In generale la dinamica di una variabile può essere influenzata anche dalla variabile stessa



Modelli di influenza

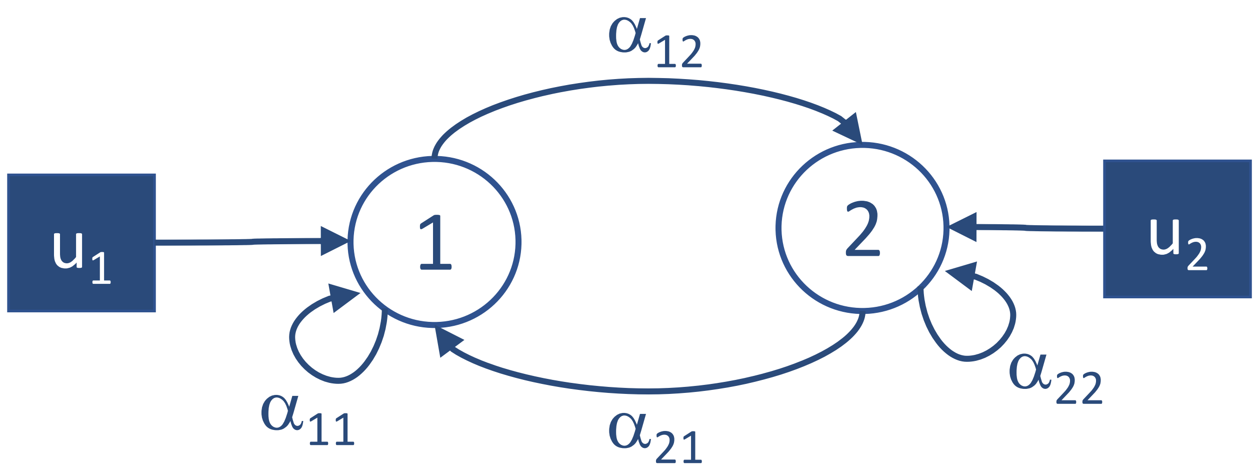
- Esempio: corsa agli armamenti

- Assunzione: una nazione con potenziale difensivo limitato è un possibile obiettivo di invasione

- x_i spesa per armamenti del paese i

- u_i variabile indipendente rappresentante dell’influenza di carattere sociale o psicologico che tende a far aumentare la spesa per gli armamenti

- Esempio: corsa agli armamenti



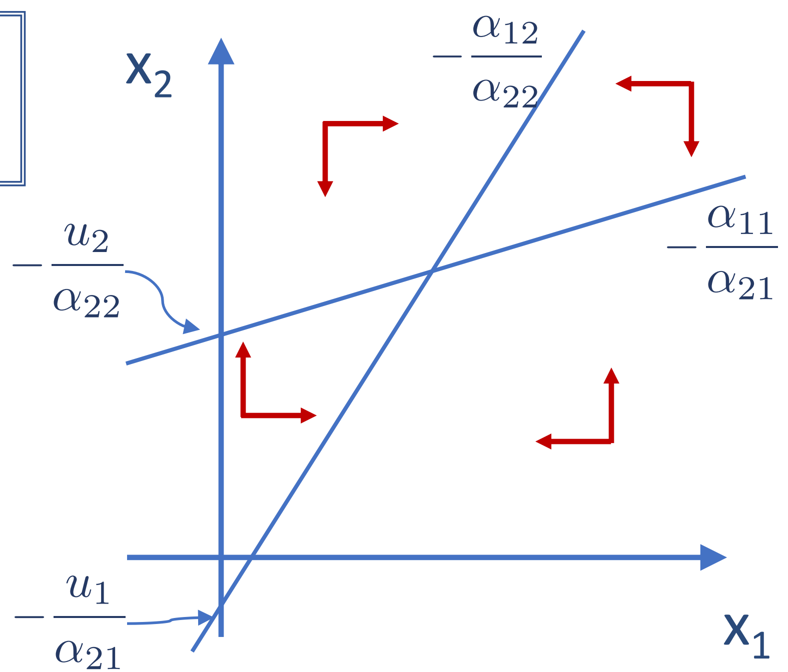
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{21}x_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha_{12}x_1(t) + \alpha_{22}x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

$\alpha_{ij}>0$ coefficienti di difesa, $\alpha_{ii}<0$ coefficienti di saturazione

- Se u_1 e u_2 sono valori costanti l'andamento nello spazio delle fasi è caratterizzato dalle rette con pendenze positive

$$\begin{cases} x_2(t) = -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} x_1(t) - \frac{u_1}{\alpha_{21}} \\ x_2(t) = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} x_1(t) - \frac{u_2}{\alpha_{22}} \end{cases}$$

$$\boxed{-\frac{u_1}{\alpha_{21}} < 0 < -\frac{u_2}{\alpha_{22}}}$$



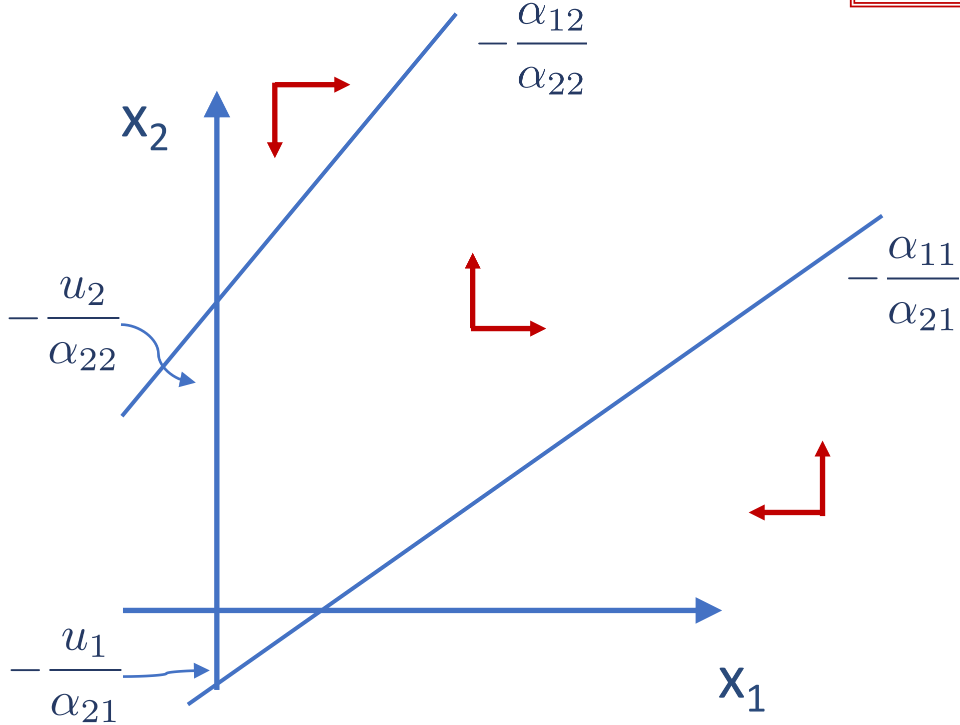
$$\boxed{-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} > -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}}$$

Modelli di influenza

$$\begin{cases} x_2(t) = -\dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} x_1(t) - \dfrac{u_1}{\alpha_{21}} \\ x_2(t) = -\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} x_1(t) - \dfrac{u_2}{\alpha_{22}} \end{cases}$$

$$\boxed{-\frac{u_1}{\alpha_{21}} < 0 < -\frac{u_2}{\alpha_{22}}}$$

$$\boxed{-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} < -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}}$$



Che abbiamo imparato?

Cosa cambia nel sistema?

Cosa determina il cambiamento?

Cosa riesco a misurare/vedere del sistema?

Cosa succede dopo un tempo sufficientemente lungo?

Modelli fisici

- Descrivono principalmente fenomeni fisici basati su leggi fondamentali della fisica (es. Circuiti elettrici, sistemi meccanici)

- Risorsa trasferita è ENERGIA (elettrica, meccanica, idraulica o termica) ma non è di interesse la risorsa in se quanto le grandezze che la determinano (velocità, temperatura, intensità di corrente etc.)

  -> variabili di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Modelli fisici

- Tempo può essere continuo o discrete ma ci sono sistemi che hanno anche un spazio di stato discreto (o anche finito)

- Esempio: macchina del caffè
- 1 caffè costa 0.30€
- Macchina accetta monete da 0.05€, 0.10€, 0.20€, 0.50€ e non dà resto
- A seconda dell'importo possono uscire 0, 1 o 2 caffè

Macchina del caffè

- Tempo?

  scandito da inserimento delle monete

- Ingressi?

  U={0.05€, 0.10€, 0.20€, 0.50€}

- Stati?

  X={0€, 0.05€, 0.10€, 0.15€, 0.20€, 0.25€} (a 0.30€ esce un caffè)

- Uscite?

  numero di caffè Y={1, 2, 0, IMP}

Modelli fisici

x(k)	u(k)	x(k+1)	y(k)
0.00€	0.05€	0.05€	0 (caffè)
0.00€	0.10€	0.10€	0
0.00€	0.20€	0.20€	0
0.00€	0.50€	0.20€	1
		…	
0.20€	0.50€	0.10€	2
		….	

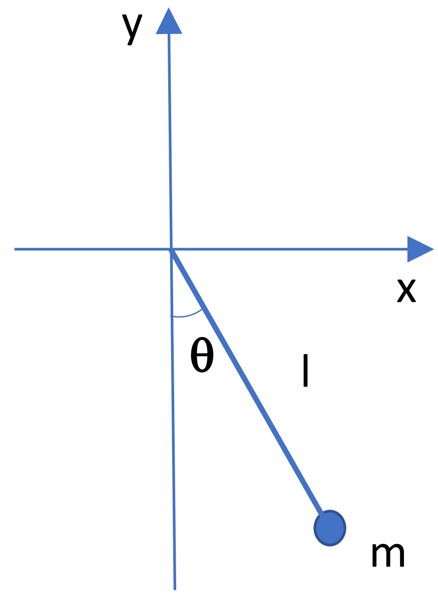
- Dato x(k) e u(k) calcoliamo x(k+1) e y(k)

$x(k+1)=\phi(k,x(k),u(k))$ Funzione di transizione

- Dato x(k) e u(k) calcoliamo x(k+1) e y(k)

x(k+1)=ϕ(k,x(k),u(k)) Funzione di transizione

Esempio tempo continuo: pendolo



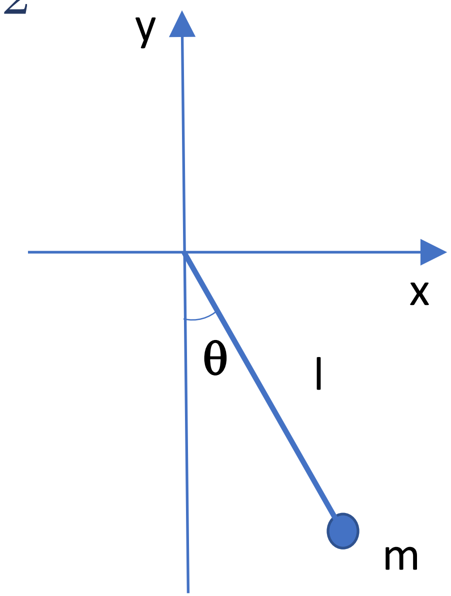
$$\begin{cases} x(t) = l\sin\theta(t) \\ y(t) = -l\cos\theta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = l\cos\theta(t)\dot{\theta}(t) \\ \dot{y}(t) = -l\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) \end{cases}$$

Modelli fisici

- Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$



- Energia potenziale

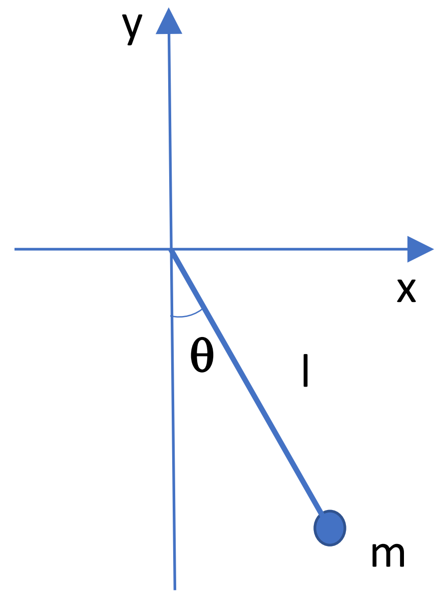
$$U = mgy = -mgl\cos\theta$$

- Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T - U$$

- Equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(\theta,\dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}(\theta,\dot{\theta})}{\partial \theta} = F_{diss}$$



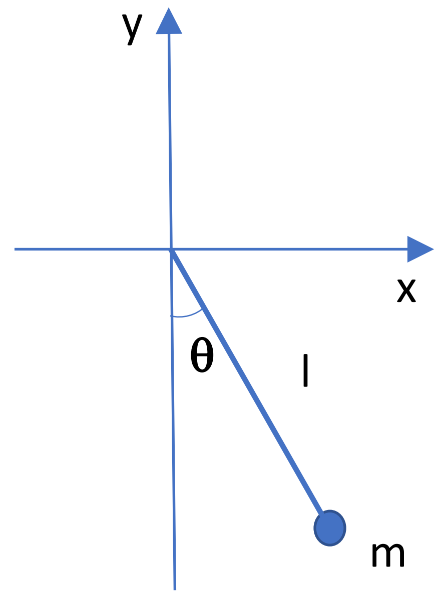
- Equazioni del moto

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + b\dot{\theta} = 0$$

Modelli fisici

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + b\dot{\theta} = 0$$

- Sistema dinamico caratterizzato da:
  - Tempo?
  - Spazio di stato?
  - Stati: Quanti? Quali?
  - Ingressi? Uscite?
  - Lineare o non lineare?
  - Equilibri?



$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + b\dot{\theta} = \tau$$

Domande aperte - TDS

- Esiste un ingresso in grado di mantenere l'asta in verticale?
- Esiste un ingresso che in un certo istante porti il pendolo in orizzontale con velocità nulla?
- Se misuro la velocità angolare posso capire dove è il pendolo?