

# 1. Übung: Systemanalyse

**Aufgabe 1.1 (Magnetlagerung).** Diese Aufgabe soll die Bedeutung von Ruhelagen am Beispiel der eindimensionalen magnetischen Lagerung aus Abbildung 1.1 zeigen. Ein Elektromagnet wird dabei mit einer Spannung  $v$  versorgt, welche einen Strom  $i$  und damit eine Magnetkraft  $f_m$  zur Folge hat. Auf das zu lagernde Objekt mit der Masse  $m$  wirken die Magnetkraft, die Gewichtskraft und eine äußere Lastkraft  $f_l$ . Der Luftspalt zwischen Elektromagnet und dem Objekt ist mit  $\delta$  bezeichnet und die Geschwindigkeit des Objekts mit  $w$ . Ferner ist in Abbildung 1.1 das magnetische Ersatzschaltbild für den magnetischen Fluss  $\Phi$  dargestellt. Es besteht aus einer Durchflutungsquelle  $\Theta = Ni$ , wobei  $N$  die Anzahl der Windungen bezeichnet, einer konstanten Eisenreluktanz  $\mathcal{R}_E = p_1$  und einer luftspaltabhängigen Reluktanz  $\mathcal{R}_L(\delta) = p_2 \delta$  mit den Konstanten  $p_1$  und  $p_2$ . Für das elektrische Teilsystem gilt  $\frac{d}{dt}\psi = -Ri + v$ , wobei  $\psi = L_G(\delta)i$  den verketteten Fluss und  $R$  den elektrischen Widerstand der Spule des Elektromagneten bezeichnen.

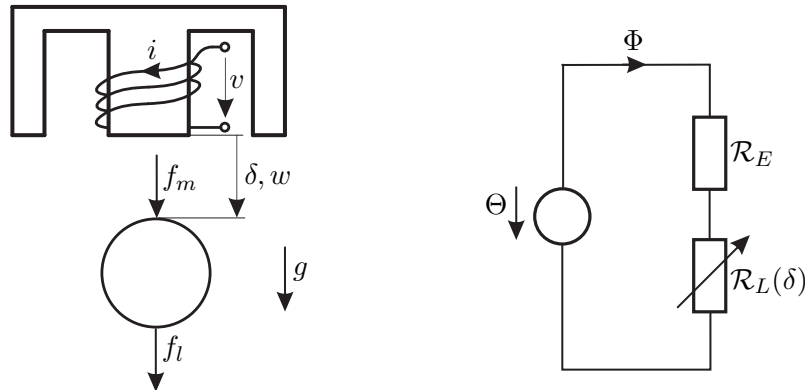


Abbildung 1.1.: Prinzipskizze der eindimensionalen Magnetlagerung und magnetisches Ersatzschaltbild.

Für die Induktivität gilt

$$L_G(\delta) = \frac{N^2}{\mathcal{R}_G(\delta)}, \quad (1.1)$$

wobei  $\mathcal{R}_G(\delta)$  die Ersatzreluktanz des Magnetkreises gemäß Abbildung 1.1(b) bezeichnet. Für die Magnetkraft gilt

$$f_m = \frac{1}{2} \frac{\partial L_G(\delta)}{\partial \delta} i^2. \quad (1.2)$$

Das Gesamtmodell der magnetischen Lagerung lautet mit dem Strom  $i$  als Ausgangsgröße

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\delta} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{R(p_1 + p_2\delta)}{N^2}\psi + v \\ w \\ -\frac{1}{2}\frac{p_2}{N^2m}\psi^2 + g + \frac{f_l}{m} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\psi}{L_G(\delta)} = \frac{p_1 + p_2\delta}{N^2}\psi. \quad (1.4)$$

- a) Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des Systems für konstante Eingangsgrößen  $\mathbf{u}_R = [v_R \quad f_{l,R}]^T$ .

Im Weiteren wird angenommen,  $\delta_R = \bar{\delta}$  sei eine gewünschte Ruhelage des Systems für  $f_{l,R} = 0$ . Bestimmen Sie  $v_R$  so, dass  $\delta_R = \bar{\delta}$  eine Ruhelage des Systems darstellt.

- b) Linearisieren Sie das nichtlineare Zustandsmodell um eine allgemeine Ruhelage  $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$  und geben Sie es in der Zustandsraumdarstellung

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \quad (1.5a)$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \quad (1.5b)$$

an.

**Aufgabe 1.2 (Ruhelagen und Linearisierung).** Im Folgendem soll die Berechnung der Ruhelagen und die Linearisierung für verschiedene Systemklassen behandelt werden.

- a) Das mathematische Modell einer Kugel (Radius  $R > 0$ , Masse  $m > 0$ ), die in einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht  $\rho$  schwimmt (siehe Abbildung 1.2) ist durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} w \\ g - \frac{F}{m} - \frac{\rho g \pi h^2}{3m}(3R - h) \end{bmatrix}$$

$$h(\mathbf{x}, u) = h$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $\mathbf{x} = [h \quad w]^T$  den Zustand,  $u = F$  den Eingang und  $y = h$  den Ausgang sowie  $g$  die Gravitationskonstante.

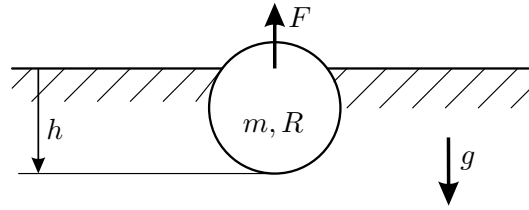


Abbildung 1.2.: Schwimmende Kugel.

Bestimmen Sie jenen Wert der Kraft  $F_R$ , bei dem die Eintauchtiefe der Kugel in der Ruhe  $h_R = \frac{R}{3}$  beträgt und bringen Sie das mathematische Modell durch Linearisierung um diese Ruhelage in die Form (1.5).

- b) Gegeben ist das elektrische System nach Abbildung 1.3. Die darin verwendete Induktivität ist eine Funktion des Stroms  $L = L(i_L)$  und die Kapazität ist von der Spannung  $u_C$  abhängig, d. h.  $C = C(u_C)$ . Der Operationsverstärker wird ideal angenommen und ein unbelasteter Ausgang  $u_C$  vorausgesetzt, d. h. es fließt kein Strom aus den Klemmen.

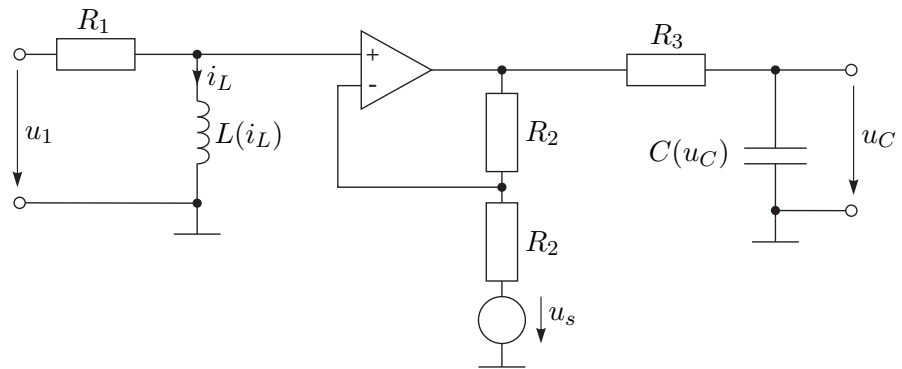


Abbildung 1.3.: Elektrisches Netzwerk.

Das mathematische Modell ergibt sich mit dem Zustand  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_C & i_L \end{bmatrix}^T$  zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{(2u_1 - u_C - u_s - 2R_1 i_L)}{\left(C(u_C) + u_C \frac{d(C(u_C))}{du_C}\right) R_3} \\ \frac{u_1 - R_1 i_L}{L(i_L) + i_L \frac{d(L(i_L))}{di_L}} \end{bmatrix}$$

$$y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = u_C.$$

Im Folgenden gilt

$$L(i_L) = L_0 + L_1 i_L^2$$
$$C(u_C) = C_0 + C_1 \left( 1 - e^{-\frac{u_C}{u_{C0}}} \right)$$

mit den konstanten, positiven Parametern  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $C_0$ ,  $C_1$  und  $u_{C0}$ . Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems für  $u_s = 0$  und  $u_1 = \text{konst.}$

**Aufgabe 1.3 (Linearität und Zeitinvarianz).** Überprüfen Sie die folgenden dynamischen Systeme auf Linearität bzw. Zeitinvarianz.

a)

$$5\ddot{y} - \frac{1}{10}\dot{y}y = 7.5tu$$

b)

$$\frac{1}{2}y^{(3)} - 10\ddot{y} - \frac{y}{1+t} = \int_0^t \sqrt{2}u(\tau)d\tau + \frac{1}{3}\dot{u}$$

c)

$$\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)\ddot{y} + 3y = \frac{7}{10}u$$