Algebra II

1 Moduln

1.1 Definitionen und grundlegende Tatsachen

1.1.1 Definition

Ein **Modul** ist ein Tupel $(R, +_R, \cdot_R, M, +, \cdot)$, wobei $(R, +_R, \cdot_R)$ ein Ring (mit 1, nicht notwendigerweise kommutativ), $(M, +)$ eine abelsche Gruppe und $\cdot : R \times M \to M$ eine (meist gar nicht oder infix geschriebene) Abbildung mit folgenden Eigenschaften

($\vec{D}$) $\forall a \in R : \forall x, y \in M : a(x + y) = ax + ay$ „distributiv“

(D') $\forall a, b \in R : \forall x \in M : (a + b)x = ax + bx$ „distributiv“

(N) $\forall x \in M : 1_R \cdot x = x$ „normiert“

(V) $\forall a, b \in R : \forall x \in M : (ab)x = a(bx)$ „verträglich“

1.1.2 Bemerkung

(a) Schlampiger Sprachgebrauch:

- „Sei M ein R-Modul“ statt „Sei $(R, +_R, \cdot_R, M, +, \cdot)$ ein Modul“
- „Sei M ein Modul“ statt „Es gebe einen Ring R so, dass M ein R-Modul ist“

(b) Statt „R-Modul“ sagt man auch „Modul über R“

(c) Vektorräume sind Moduln über Körper. Viele Sprechweisen (wie „Skalar“, „Linearkombination“, nicht jedoch „Vektor“) übertragen wir stillschweigend von Vektorräumen auf Moduln, ebenso Konventionen (wie „Punkt vor Strich“).

(d) Abelsche Gruppen „sind“ $\mathbb{Z}$-Moduln. Sei G eine abelsche Gruppe. Dann gibt es genau eine Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{Z} \times G \to G$ vermöge derer G zu einem

$\mathbb{Z}$-Modul wird, nämlich die natürliche, die durch

$$n \cdot a := \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{-mal}} & \text{falls } n > 0 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \\ \underbrace{-a - a - \cdots - a}_{(-n)\text{-mal}} & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

gegeben ist.

(e) $(\overrightarrow{D})$ besagt, dass für alle $a \in R$ die Abbildung $M \to M, x \mapsto ax$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Insbesondere gilt $a \cdot 0 = 0$ und $a \cdot (-x) = -ax$ für alle $a \in R, x \in M$.

(D') besagt, dass für alle $x \in M$ die Abbildung $R \to M, a \mapsto ax$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Insbesondere gilt $0 \cdot x = 0$ und $(-a) \cdot x = -ax$ für alle $a \in R, x \in M$.

1.1.3 Beispiele

(a) Nullmoduln $\{0\}$

(b) Sei A ein Unterring des Ringes B. Dann ist B ein A-Modul vermöge der Skalarmultiplikation $\cdot : A \times B \to B, (a, x) \mapsto ax$

Insbesondere ist jeder Ring ein Modul über sich selbst.

(c) Sei R ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann wird die abelsche Gruppe R^n zu einem $R^{n \times n}$-Modul vermöge der Skalarmultiplikation

$$\cdot : R^{n \times n} \times R^n \to R^n, (A, x) \mapsto Ax$$

Dies folgt aus den Rechenregeln für Matrixmultiplikation.

1.1.4 Definitionen, Propositionen, Sätze und Notationen

Sei R ein Ring. Die folgenden für die Theorie der R-Moduln grundlegenden Begriffe und Resultate sind eine direkte Verallgemeinerung der entsprechenden Tatsachen für Vektorräume (also für den Fall, dass R ein Körper) und für abelsche Gruppen (also $R = \mathbb{Z}$) aus der Linearen Algebra:

(a) Genauso wie bei Vektorräumen führt man **direkte Produkte** von R-Moduln ein.

(b) Sind M und N R-Moduln, so heißt N ein **Untermodul** von M, wenn die N zugrunde liegende abelsche Gruppe eine Untergruppe der M zugrunde liegenden abelschen Gruppe ist und

$$\forall a \in R : \forall x \in M : a \cdot_N x = a \cdot_M x$$

Ein Untermodul eines Moduls ist offenbar durch seine Trägermenge (d.h. seine zugrunde liegende Menge) eindeutig bestimmt.

Ist M ein R-Modul und $N \subseteq M$, so ist N offenbar genau dann (Trägermenge) ein(e) Untermodul(s) von M, wenn $0 \in N, \forall x, y \in N : x + y \in N, \forall a \in R : \forall x \in N : ax \in N$

(c) Sei M ein Modul und $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Dann ist $\bigcap_{i \in I} N_i := \bigcap \{N_i | i \in I\}$ (mit $\bigcap_{i \in I} N_i = M$, falls $I = \emptyset$) wieder ein Untermodul von M und zwar der größte Untermodul von M, der in allen N_i enthalten ist.

Weiter ist auch $\sum_{i \in I} N_i := \left\{\sum_{i \in I} x_i | (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} N_i, \{i \in I | x_i \neq 0\} \text{ endlich}\right\}$ Untermodul von M und zwar der kleinste Untermodul von M, der alle N_i enthält.

(d) Sei M ein R-Modul. Ist $x \in M$, so ist $Rx := \{ax | a \in R\}$ ein Untermodul von M und zwar der kleinste Untermodul, der x enthält.

Ist $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen von M, so ist $\sum_{i \in I} Rx_i$ der kleinste Untermodul von M, der alle x_i enthält.

Man nennt ihn den von den x_i ($i \in I$) (oder $\{x_i | i \in I\}$) erzeugten Untermodul von M (oder lineare Hülle der Span von $\{x_i | i \in I\}$).

Man nennt M **zyklisch**, wenn M von einem Element erzeugt wird, d.h. es ein $x \in M$ gibt mit $M = Rx$. Man nennt M endlich erzeugt (e.e.), wenn M von endlich vielen Elementen erzeugt wird, d.h. es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \ldots, x_n \in M$ gibt mit

$$M = Rx_1 + \cdots + Rx_n := \sum_{i=1}^{n} Rx_i := \sum_{i \in \{1, \ldots, n\}} Rx_i$$

Inhaltsverzeichnis