Inhaltsverzeichnis

I. Affine Algebraische Varietäten

I.1. Algebraische Ergänzungen

Ringe sind kommutativ (mit 1), Ringhomomorphismen $\varphi : A \to B$ erfüllen $\varphi(1) = 1$. Erzeugte Ideale

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} A a_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid b_1, \ldots, b_n \in A \right\}$$

I.1.1 Definition.
Sei A ein Ring, sei $I \subseteq A$ ein Ideal

(a) $\sqrt{I} := \{a \in A \mid \exists n \geq 1 \text{ mit } a^n \in I\}$ ist ein Ideal in A, genannt das Radikal von I.

Ist $I = \sqrt{I}$, so heißt I ein Radikalideal.

(b) $\mathrm{Nil}(A) := \sqrt{\{0\}}$ heißt das Nilradikal von A. Die Elemente von $\mathrm{Nil}(A)$ heißen die nilpotenten Elemente von A.

(c) Der Ring A heißt reduziert, wenn $\mathrm{Nil}(A) = \{0\}$ ist

Beweis. (a) Seien $a, b \in \sqrt{I}$, etwa $a^m \in I, b^n \in I$. Dann

$$(a+b)^{m+n} = \sum_{i+j=m+n} \binom{m+n}{i} \underbrace{a^i b^j}_{\in I} \in I \implies a + b \in \sqrt{I}$$

Und $(ac)^m = a^m c^m \in I$ für $c \in A \implies ac \in \sqrt{I}$

□

I.1.2 Bemerkung.

- $I \subseteq \sqrt{I}$
- Jedes Primideal ist ein Radikalideal.
- $A = \mathbb{Z}, n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ mit p_i prim, $e_i \geq 1$, dann ist $\sqrt{\langle n \rangle} = \langle p_1 \cdots p_r \rangle$

I.1.3 Lemma.
Seien $I, I_1, I_2 \subseteq A$ Ideale.

(a) $\sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$

(b) $\sqrt{I} = \langle 1 \rangle \iff I = \langle 1 \rangle$

(c) Ist $J \supseteq I$ ein weiteres Ideal, dann ist $\sqrt{J/I} = \sqrt{J}/I$ (in A/I).

Insbesondere: Der Ring A/I ist reduziert genau dann, wenn $I = \sqrt{I}$

Beweis. Aufgabe 4. □

I.1.4 Satz.
Für jedes Ideal $I \subseteq A$ ist
$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} \mathfrak{p}$$
Die Radikalideale sind also die Durchschnitte von Primidealen.

Beweis.
„$\subseteq$“: Aus $I \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ prim folgt $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$

„$\supseteq$“: Sei $t \in A, t \notin \sqrt{I}$, sei $A_t := A_S$ mit $S := \{1, t, t^2, \ldots\}$.
Sei $\varphi : A \to A_t, \varphi(a) = \frac{a}{1}$. Dann ist $IA_t := I_t := \left\{ \frac{a}{t^n} \mid a \in I, n \geq 0 \right\}$ ein Ideal in A_t und $1 \notin IA_t$ [Angenommen, $1 = \frac{1}{1} = \frac{a}{t^n}$ mit $a \in I \implies \exists m : t^m(t^n - a) = 0$, d.h. $t^{m+n} = at^m \in I$ ↯].
Also existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A_t mit $IA_t \subseteq \mathfrak{m} \implies \mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ und $t \notin \mathfrak{p}$. □

I.1.5 Korollar.
$\operatorname{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} \mathfrak{p}$

I.1.6 Definition.
Sei R ein Ring

(a) Eine <u>R-Algebra</u> ist ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to A$ (in einen Ring A). Sprechweise „A ist eine R-Algebra“.

(b) Seien $\alpha : R \to A, \beta : R \to B$ zwei R-Algebren. Ein <u>Homomorphismus von R-Algebren</u> (oder R-Homomorphismus) von A nach B ist ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ mit $\varphi \circ \alpha = \beta$.

(c) R-Algebren A, B heißen <u>isomorph</u> (als <u>R-Algebren</u>), wenn es einen bijektiven R-Homomorphismus $\varphi : A \to B$ gibt.

I.1.7 Beispiel.

1. Sei $R \subseteq A$ Teilring, dann ist A eine R-Algebra via Inklusion.
2. Sei A eine R-Algebra, dann gibt es eine Bijektion
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(R[x_1,\dots,x_n],A) &\to A \times \cdots \times A = A^n \\ \varphi &\mapsto (\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)) \end{aligned}$$
3. Zwei R-Algebren können als Ring isomorph sein, ohne es als R-Algebren zu sein (Aufgabe 2).

I.1.8 Lemma.
Für jede R-Algebra $\alpha : R \to A$ sind äquivalent:

(i) $\exists n \in \mathbb{N} : \exists a_1,\dots,a_n \in A$, so dass A als Ring von $\alpha(R)$ und $a_1,\dots,a_n$ erzeugt wird.

(ii) $\exists n \in \mathbb{N} : \exists$ surjektiver Homomorphismus $R[x_1,\dots,x_n] \to A$ von R-Algebren.

Gelten (i) und (ii), so heißt die R-Algebra A endlich erzeugt.

Beweis. Einfach (verwende 1.7.2) □

I.1.9 Bemerkung.
Ist die R-Algebra A als R-Modul endlich erzeugt, so auch als R-Algebra. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch (Beispiel $A = R[x]$).

I.1.10 Definition.
Sei $\varphi : A \to B$ ein A-Algebra

(a) $b \in B$ heißt ganz über A, falls es eine Identität $b^n + \varphi(a_1)b^{n-1} + \cdots + \varphi(a_n) = 0$ gibt ($n \in \mathbb{N}, a_i \in A$).

(b) Die A-Algebra B heißt ganz, wenn jedes $b \in B$ ganz über A ist.
Leicht zu sehen: $b \in B$ ist ganz über A genau dann, wenn $A[b]$ (:= der von $\varphi(A)$ und b erzeugte Teilring von B) als A-Modul endlich erzeugt ist.

I.1.11 Satz.
Sei B eine A-Algebra. Dann ist $C := \{b \in B \mid b \text{ ganz über } A\}$ ein Teilring von B, genannt der ganze Abschluss von A in B.

I.1.12 Definition.
Ein Ring heißt noethersch, wenn jedes Ideal von A endlich erzeugt ist.
Beispiel: Hauptidealringe sind noethersch. Ist A noethersch, so auch A/I und A_S (I Ideal, $S \subseteq A$ multiplikative Menge).

I.1.13 Theorem. Hilbertscher Basissatz
Ist A noethersch, so auch $A[x]$.

I.1.14 Korollar.
Ist A noethersch, so ist auch jede endlich erzeugte A-Algebra noethersch.

Beweis. 1.13 und 1.8(ii) □

I.2. Affine Algebraische Mengen

k: (fixierter) Grundkörper, $\overline{k}$: (ein) algebraischer Abschluss von k. Sei $k \subseteq K$ eine (beliebige) Körpererweiterung mit K algebraisch abgeschlossen (z.B. $K = \overline{k}$).
Sei $n \in \mathbb{N}, \underline{x} = (x_1, \dots, x_n), k[\underline{x}] = k[x_1, \dots, x_n]$.

I.2.1 Definition.

(a) $\mathbb{A}^n := K^n$ der n-dimensionale affine Raum

(b) Sei $P \subseteq k[\underline{x}]$ eine Menge von Polynomen, dann schreibe

$$\mathcal{V}(P) := \mathcal{V}_{\mathbb{A}^n}(P) := \{\xi \in K^n \mid \forall p \in P : p(\xi) = 0\}$$

Varietät von P.

(c) Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt <u>affine k-Varietät</u>, falls $\exists P \subseteq k[\underline{x}]$ mit $V = \mathcal{V}(P)$.

(d) Sind $W \subseteq V \subseteq \mathbb{A}^n$ affine k-Varietäten, so heißt W eine <u>k-Untervarietät</u> von V.

I.2.2 Lemma.
Sei $P \subseteq k[\underline{x}]$ eine Menge, sei $I := \langle P \rangle$ (das von P erzeugte Ideal in $k[\underline{x}]$). Dann ist $\mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(\sqrt{I})$.

Beweis.
„$\supseteq$“: klar

„$\subseteq$“: Sei $\xi \in \mathcal{V}(P)$, sei $f \in \sqrt{I}$, also $f^m = g_1p_1 + \cdots + g_rp_r$ mit $m \in \mathbb{N}, g_i \in k[\underline{x}], p_i \in P$. Auswerten in ξ liefert:

$$f(\xi)^m = \sum_{i=1}^{r} g_i(\xi) \underbrace{p_i(\xi)}_{=0} = 0$$

Also $f(\xi) = 0$. □

I.2.3 Korollar.
Jede affine k-Varietät hat die Form $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ mit endlich vielen $f_1, \dots, f_r \in k[\underline{x}]$

Beweis.
Sei $V = \mathcal{V}(P)$ mit einer Teilmenge $P \subseteq k[\underline{x}]$. Sei $\langle P \rangle = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ mit $f_i \in k[\underline{x}]$ (Hilberscher Basissatz). Dann ist $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ mit Lemma 2.2 □

I.2.4 Lemma.

(a) $\emptyset, \mathbb{A}^n$ sind affine k-Varietäten.

(b) Sind $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ affine k-Varietäten, so auch $V_1 \cup V_2$.

(c) Sind $V_\lambda \subseteq \mathbb{A}^n$ affine k-Varietäten für $\lambda \in \Lambda$, so auch $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$.

(d) Sind $V \subseteq \mathbb{A}^m, W \subseteq \mathbb{A}^n$ affine k-Varietäten, so auch $V \times W \subseteq \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{m+n}$.

Beweis.

(a) $\emptyset = \mathcal{V}(1), \mathbb{A} = \mathcal{V}(0)$

(b) Seien $V_i = \mathcal{V}(I_i)$ mit $I_i \subseteq k[\underline{x}]$ Ideale $(i = 1, 2)$.

Behauptung: $V_1 \cup V_2 = \mathcal{V}(I_1 \cap I_2)$.

Begründung:
„$\subseteq$“: klar

„$\supseteq$“: Sei $\xi \in \mathcal{V}(I_1 \cap I_2)$. Ohne Einschränkung $\xi \notin V_1$, also gibt es $f \in I_1$ mit $f(\xi) \neq 0$. Für jedes $g \in I_2$ ist $fg \in I_1 \cap I_2$, also nach Voraussetzung ist $\underbrace{f(\xi)}_{\neq 0} g(\xi) = 0$. Also ist $g(\xi) = 0$, also $\xi \in \mathcal{V}(I_2) = V_2$.

(c)

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}(I_\lambda) = \mathcal{V}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$$

(d) Sei $V = \mathcal{V}_{\mathbb{A}^m}(I)$ mit $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_m]$. Sei $W = \mathcal{V}_{\mathbb{A}^n}(J)$ mit $J \subseteq k[y_1, \ldots, y_n]$. Dann ist $V \times W = \mathcal{V}_{\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n}(I \cup J)$

$\square$

I.2.5 Korollar.
Sind I_1, I_2, I_λ $(\lambda \in \Lambda)$ Ideale in $k[\underline{x}]$, so ist

(a) $\mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2) = \mathcal{V}(I_1 V_2) = \mathcal{V}(I_1 \cap I_2)$

(b) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}(I_\lambda) = \mathcal{V}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$

I.2.6 Definition.
Ist $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Teilmenge, so heißt $\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}_k(V) := \{f \in k[\underline{x}] \mid \forall \xi \in V : f(\xi) = 0\}$ das <u>(Verschwindungs-)Ideal</u> von V.

I.2.7 Lemma.
Seien $V, V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ Teilmengen

(a) $\mathfrak{I}_k(V)$ ist ein Radikalideal in $k[\underline{x}]$. Ist V eine affine k-Varietät, so ist $\mathcal{V}(\mathfrak{I}_k(V)) = V$.

(b) Aus $V_1 \subseteq V_2$ folgt $\mathfrak{I}_k(V_2) \subseteq \mathfrak{I}_k(V_1)$. Ist V_2 eine affine k-Varietät, so gilt auch $\mathfrak{I}_k(V_2) \subseteq \mathfrak{I}_k(V_1) \implies V_1 \subseteq V_2$.

(c) $\mathfrak{I}_k(V_1 \cup V_2) = \mathfrak{I}_k(V_1) \cap \mathfrak{I}_k(V_2)$.

(d) Jede absteigende Folge $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots$ von affinen k-Varietäten in $\mathbb{A}^n$ wird stationär.

Beweis.

(a) $\mathfrak{I}_k(V)$ ist ein Radikalideal: klar.

Sei $V = \mathcal{V}(I)$ eine affine k-Varietät mit I Ideal.
Dann ist $I \subseteq \mathfrak{I}_k(V)$, also $\mathcal{V}(\mathfrak{I}_k(V)) \subseteq \mathcal{V}(I) = V$. Umgekehrt ist $V \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{I}_k(V))$ trivial.

(b) „ $\Longrightarrow$ “ ist trivial.

„ $\Longleftarrow$ “ (falls V eine affine k-Varietät ist) folgt aus

$$V_1 \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{I}(V_1)) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{I}(V_2)) \overset{(a)}{=} V_2.$$

(c) offensichtlich.

(d) $\mathfrak{I}(V_1) \subseteq \mathfrak{I}(V_2) \subseteq \cdots$ wird stationär, weil $k[\underline{x}]$ noethersch ist. Ist $\mathfrak{I}(V_i) = \mathfrak{I}(V_{i+1})$, so auch $V_i = V_{i+1}$ nach (b).

$\square$

I.2.8 Beispiel.

1. $\mathfrak{I}(\emptyset) = \langle 1 \rangle = k[\underline{x}]$

   $\mathfrak{I}(\mathbb{A}^n) = \{0\}$ (Ist $0 \neq f \in k[\underline{x}]$, so existiert $\xi \in K^n$ mit $f(\xi) \neq 0$, wegen $|K| = \infty$)

2. Einige Beispiele:

f	$\mathcal{V}(f)$
$x_1^2 + x_2^2 - 1$	
$x_1 x_2$	
$x_2^2 - x_1^2 - x_1^3$	
$x_2^2 - x_1^3$	
$x_1^2 + x_2^2$	

In $\mathbb{A}^3$:

f	$\mathcal{V}(f)$
$x_1^2 + x_2^2 - 1$	
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$	
$x_1^2 - x_2^2 x_3$	

3. Ist $V = \mathcal{V}(f)$ mit $f \in k[\underline{x}] \setminus k$, so heißt V eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^n$.

4. Ist $V = \mathcal{V}_{\mathbb{A}^n}(f_1, \dots, f_r)$ mit $\deg(f_i) = 1$, so heißt (ist) V ein affin-linearer Teilraum des $\mathbb{A}^n$.

5. Endliche Teilmengen von k^n sind affine k-Varietäten in $\mathbb{A}^n$: Ist $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in k^n$, so ist $\{\xi\} = \mathcal{V}(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n)$.

6. Rational parametrisierte Varietäten:
$$\mathcal{V}(x_1^2 - x_2^3 = \left\{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{A}^n\right\})$$
$$\mathcal{V}(x_1^2 - x_2^2 - 1) = \left\{\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}, \frac{2t}{t^2-1}\right) \mid t \in \mathbb{A}^n \setminus \{\pm 1\}\right\} \cup \{(1,0)\}$$

I.2.9 Theorem. (Hilbertscher Nullstellensatz, körpertheoretische Form)
Sei $k \subseteq F$ eine Körpererweiterung. Ist F als k-Algebra endlich erzeugt, so ist $k \subseteq F$ endlich algebraisch.

Beweis.
Es gibt $0 \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ mit $F = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Durch Induktion nach n zeigen wir F/k ist algebraisch.
$n = 1$: Es gibt $p \in k[\alpha_1]$ mit $\frac{1}{\alpha_1} = p(\alpha_1)$, also ist α_1 algebraisch über k.

$n - 1 \to n$: Es ist auch $F = k(\alpha_1)[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$. Durch Induktion sind $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ algebraisch über $k(\alpha_1)$. Es genügt daher zu zeigen, dass α_1 algebraisch über k ist. Es gibt Gleichungen
$$u_i \alpha_i^{d_i} + \sum_{j=1}^{d_i - 1} v_{ij} \alpha_i^j = 0$$
in F $(i = 1, \dots, n)$ mit $u_i, v_{ij} \in k[\alpha_1], u_i \neq 0$. Dividiere durch u_i, daraus folgt, dass α_i ganz über $k[\alpha_1, \frac{1}{u_i}] \subseteq k(\alpha_1)$ ist $(i = 2, \dots, n)$. Für $u := u_2 \cdots u_n$ gilt also $0 \neq u \in k[\alpha_1]$ und $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ sind ganz über $k[\alpha_1, \frac{1}{u}]$. Also ist $k[\alpha_1, \frac{1}{u}] \subseteq F$ eine ganze Ringerweiterung. Angenommen α_i ist transzendent über k. Wähle $f \in k[\alpha_1]$ irreduzibel mit $f \nmid u$. Es gibt eine Ganzheitsgleichung für $\frac{1}{f}$: $\left(\frac{1}{f}\right)^m + b_1 \left(\frac{1}{f}\right)^{m-1} + \cdots + b_m = 0$ in F mit $b_1, \dots b_m \in k[\alpha_1, \frac{1}{u}]$. Multiplizieren mit f^m und einer hohen Potenz von u liefert eine Gleichung $u^N + c_1 f + \cdots + c_m f^m = 0$ mit $N \geq 0, c_1, \dots, c_m \in k[\alpha_1]$. Widerspruch zu $f \nmid u$ und f irreduzibel. $\square$

I.2.10 Korollar.
Ist k ein Körper, A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von k.

Beweis.
$A/\mathfrak{m}$ ist eine endlich erzeugte k-Algebra (und Körpererweiterung), also $[A/\mathfrak{m} : k] < \infty$ nach 2.9. $\square$

I.2.11 Korollar. (Hilbertscher Nullstellensatz, geometrische Form)
Für jedes Ideal $I \neq \langle 1 \rangle$ in $k[\underline{x}]$ ist $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.

Beweis.
Es gibt ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq k[\underline{x}]$ mit $I \subseteq \mathfrak{m}$, also $[\frac{k[\underline{x}]}{\mathfrak{m}} : k] < \infty$ nach Korollar 2.10. Es gibt eine k-Einbettung $\varphi : k[\underline{x}]/\mathfrak{m} \to K$. Setze $\xi_i := \varphi(x_i + \mathfrak{m}) \in K$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Behauptung: $\xi \in \mathcal{V}(I)$.

Begründung:
Für $f \in k[\underline{x}]$ ist $\varphi(f + \mathfrak{m}) = f(\xi)$, denn $f \in I \implies f \in \mathfrak{m} \implies f(\xi) = 0$.

□

I.2.12 Bemerkung.
Haben $f_1, \ldots, f_r \in k[\underline{x}]$ <u>keine</u> gemeinsame Nullstelle in $\mathbb{A}^n$, so existieren $g_1, \ldots, g_r \in k[\underline{x}]$ mit $f_1 g_1 + \cdots f_r g_r = 1$.