Inhaltsverzeichnis

I. Affine Algebraische Varietäten

I.1. Algebraische Ergänzungen

Ringe sind kommutativ (mit 1), Ringhomomorphismen $\varphi : A \to B$ erfüllen $\varphi(1) = 1$. Erzeugte Ideale

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} A a_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid b_1, \dots, b_n \in A \right\}$$

I.1.1 Definition.
Sei A ein Ring, sei $I \subseteq A$ ein Ideal

(a) $\sqrt{I} := \{a \in A \mid \exists n \geq 1 \text{ mit } a^n \in I\}$ ist ein Ideal in A, genannt das <u>Radikal</u> von I.

Ist $I = \sqrt{I}$, so heißt I ein <u>Radikalideal</u>.

(b) $\mathrm{Nil}(A) := \sqrt{\{0\}}$ heißt das <u>Nilradikal</u> von A. Die Elemente von $\mathrm{Nil}(A)$ heißen die <u>nilpotenten</u> Elemente von A.

(c) Der Ring A heißt <u>reduziert</u>, wenn $\mathrm{Nil}(A) = \{0\}$ ist

Beweis. (a) Seien $a, b \in \sqrt{I}$, etwa $a^m \in I, b^n \in I$. Dann

$$(a+b)^{m+n} = \sum_{i+j=m+n} \binom{m+n}{i} \underbrace{a^i b^j}_{\in I} \in I \implies a + b \in \sqrt{I}$$

Und $(ac)^m = a^m c^m \in I$ für $c \in A \implies ac \in \sqrt{I}$

□

I.1.2 Bemerkung.

- $I \subseteq \sqrt{I}$
- Jedes Primideal ist ein Radikalideal.
- $A = \mathbb{Z}, n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ mit p_i prim, $e_i \geq 1$, dann ist $\sqrt{\langle n \rangle} = \langle p_1 \cdots p_r \rangle$

I.1.3 Lemma.
Seien $I, I_1, I_2 \subseteq A$ Ideale.

(a) $\sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$

(b) $\sqrt{I} = \langle 1 \rangle \iff I = \langle 1 \rangle$

(c) Ist $J \supseteq I$ ein weiteres Ideal, dann ist $\sqrt{J/I} = \sqrt{J}/I$ (in A/I).

Insbesondere: Der Ring A/I ist reduziert genau dann, wenn $I = \sqrt{I}$

Beweis. Aufgabe 4. □

I.1.4 Satz.
Für jedes Ideal $I \subseteq A$ ist
$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} \mathfrak{p}$$
Die Radikalideale sind also die Durchschnitte von Primidealen.

Beweis.
„$\subseteq$“: Aus $I \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ prim folgt $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$

„$\supseteq$“: Sei $t \in A, t \notin \sqrt{I}$, sei $A_t := A_S$ mit $S := \{1, t, t^2, \ldots\}$.
Sei $\varphi : A \to A_t, \varphi(a) = \frac{a}{1}$. Dann ist $IA_t := I_t := \left\{ \frac{a}{t^n} \mid a \in I, n \geq 0 \right\}$ ein Ideal in A_t und $1 \notin IA_t$ [Angenommen, $1 = \frac{1}{1} = \frac{a}{t^n}$ mit $a \in I \implies \exists m : t^m(t^n - a) = 0$, d.h. $t^{m+n} = at^m \in I \lightning$].
Also existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A_t mit $IA_t \subseteq \mathfrak{m} \implies \mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ und $t \notin \mathfrak{p}$. □

I.1.5 Korollar.
$\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{p}$

I.1.6 Definition.
Sei R ein Ring

(a) Eine <u>R-Algebra</u> ist ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to A$ (in einen Ring A). Sprechweise „A ist eine R-Algebra“.

(b) Seien $\alpha : R \to A, \beta : R \to B$ zwei R-Algebren. Ein <u>Homomorphismus von R-Algebren</u> (oder R-Homomorphismus) von A nach B ist ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ mit $\varphi \circ \alpha = \beta$.

(c) R-Algebren A, B heißen <u>isomorph</u> (als <u>R-Algebren</u>), wenn es einen bijektiven R-Homomorphismus $\varphi : A \to B$ gibt.

I.1.7 Beispiel.

1. Sei $R \subseteq A$ Teilring, dann ist A eine R-Algebra via Inklusion.
2. Sei A eine R-Algebra, dann gibt es eine Bijektion
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(R[x_1, \dots, x_n], A) &\to A \times \dots \times A = A^n \\ \varphi &\mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))\end{aligned}$$
3. Zwei R-Algebren können als Ring isomorph sein, ohne es als R-Algebren zu sein (Aufgabe 2).

I.1.8 Lemma.
Für jede R-Algebra $\alpha : R \to A$ sind äquivalent:

(i) $\exists n \in \mathbb{N} : \exists a_1, \dots, a_n \in A$, so dass A als Ring von $\alpha(R)$ und $a_1, \dots, a_n$ erzeugt wird.

(ii) $\exists n \in \mathbb{N} : \exists$ surjektiver Homomorphismus $R[x_1, \dots, x_n] \to A$ von R-Algebren.

Gelten (i) und (ii), so heißt die R-Algebra A <u>endlich erzeugt</u>.

Beweis. Einfach (verwende 1.7.2) □

I.1.9 Bemerkung.
Ist die R-Algebra A als R-Modul endlich erzeugt, so auch als R-Algebra. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch (Beispiel $A = R[x]$).

I.1.10 Definition.
Sei $\varphi : A \to B$ ein A-Algebra

(a) $b \in B$ heißt <u>ganz</u> über A, falls es eine Identität $b^n + \varphi(a_1)b^{n-1} + \dots + \varphi(a_n) = 0$ gibt ($n \in \mathbb{N}, a_i \in A$).

(b) Die A-Algebra B heißt <u>ganz</u>, wenn jedes $b \in B$ ganz über A ist.
Leicht zu sehen: $b \in B$ ist ganz über A genau dann, wenn $A[b]$ (:= der von $\varphi(A)$ und b erzeugte Teilring von B) als A-Modul endlich erzeugt ist.

I.1.11 Satz.
Sei B eine A-Algebra. Dann ist $C := \{b \in B \mid b \text{ ganz über } A\}$ ein Teilring von B, genannt der <u>ganze Abschluss</u> von A in B.

I.1.12 Definition.
Ein Ring heißt <u>noethersch</u>, wenn jedes Ideal von A endlich erzeugt ist.
Beispiel: Hauptidealringe sind noethersch. Ist A noethersch, so auch A/I und A_S (I Ideal, $S \subseteq A$ multiplikative Menge).

I.1.13 Theorem. Hilbertscher Basissatz
Ist A noethersch, so auch $A[x]$.

I.1.14 Korollar.
Ist A noethersch, so ist auch jede endlich erzeugte A-Algebra noethersch.

Beweis. 1.13 und 1.8(ii) □

I.2. Affine Algebraische Mengen

k: (fixierter) Grundkörper, $\overline{k}$: (ein) algebraischer Abschluss von k. Sei $k \subseteq K$ eine (beliebige) Körpererweiterung mit K algebraisch abgeschlossen (z.B. $K = \overline{k}$).
Sei $n \in \mathbb{N}, \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), k[\underline{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$.

I.2.1 Definition.

(a) $\mathbb{A}^n := K^n$ der n-dimensionale affine Raum

(b) Sei $P \subseteq k[\underline{x}]$ eine Menge von Polynomen, dann schreibe

$$\mathcal{V}(P) := \mathcal{V}_{\mathbb{A}^n}(P) := \{\xi \in K^n \mid \forall p \in P : p(\xi) = 0\}$$

Varietät von P.

(c) Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt <u>affine k-Varietät</u>, falls $\exists P \subseteq k[\underline{x}]$ mit $V = \mathcal{V}(P)$.

(d) Sind $W \subseteq V \subseteq \mathbb{A}^n$ affine k-Varietäten, so heißt W eine <u>k-Untervarietät</u> von V.

I.2.2 Lemma.
Sei $P \subseteq k[\underline{x}]$ eine Menge, sei $I := \langle P \rangle$ (das von P erzeugte Ideal in $k[\underline{x}]$). Dann ist $\mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(\sqrt{I})$.

Beweis.
„$\supseteq$“: klar

„$\subseteq$“: Sei $\xi \in \mathcal{V}(P)$, sei $f \in \sqrt{I}$, also $f^m = g_1 p_1 + \cdots + g_r p_r$ mit $m \in \mathbb{N}, g_i[\underline{x}], p_i \in P$. Auswerten in ξ liefert:

$$f(\xi)^m = \sum_{i=1}^{r} g_i(\xi) \underbrace{p_i(\xi)}_{=0} = 0$$

Also $f(\xi) = 0$. $\square$