- **Stabilità BIBO**
  - Risposta impulsiva
  - Poli sull'asse immaginario
- **Criteri per la stabilità**
  - Routh
  - Kharitonov
  - Nyquist (dopo la risposta Armonica)

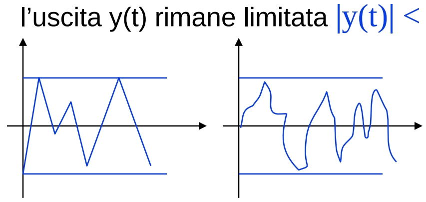
La Stabilita' BIBO

BIBO: "Bounded Input Bounded Output" detta anche
ILUL: " Ingresso Limitato Uscita Limitata"

dato un sistema a riposo per il quale valga y(t)=0 per u(t)=0,

Si ha stabilità BIBO se per ogni ingresso limitato $|u(t)| < M_u$,

l'uscita y(t) rimane limitata $|y(t)| < M_y$



CNES: $$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \le M < \infty$$

Cioè la Risp. Impulsiva è sommabile

Dim: $$|y(t)| = \left| \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau \right| \le \int_0^t |u(\tau)| |g(t-\tau)| d\tau \le M_u \int_0^{\infty} |g(t-\tau)| d\tau$$

E QUINDI LA G(S) ?

Dalla definizione $$|G(s)| = \left|\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt\right| \le \int_0^\infty |g(t)|\left|e^{-st}\right|dt$$

Per ogni s nel semipiano destro (Re[s] ≥ 0) si ha : $\left|e^{-st}\right| = \left|e^{-\sigma t}\right| \le 1$ $\sigma = \mathrm{Re}[s]$

allora $$|G(s)| \le \int_0^\infty |g(t)|dt$$ (quando $\mathrm{Re}[s]>0$)

Quindi g(t) non può essere sommabile se G(s) ha poli nel semipiano destro (sarebbe possibile porre s=polo e avere |G(s)| $\to \infty$ ⇒ La stabilità richiede che G(s) abbia solo poli p.r.n.

(vedi Marro pag.231 per la sufficienza)

E SE CI SONO POLI : RE[P]=0 ?

Consideriamo un caso semplicissimo: integratore, applichiamo 2 ingressi limitati: cosinusoide e gradino

$$U \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \longrightarrow Y$$

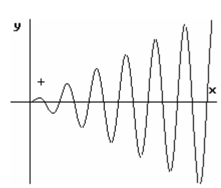
$$y(t) = \int K\cos\omega t\, dt = \frac{K}{\omega}\sin\omega t \qquad y(t) \text{ limitato}$$

$$y(t) = \int K\, dt = Kt \qquad y(t) \text{ illimitato}$$

U: limitato e a valor medio nullo $\to$ Y limitato

U contiene $\frac{\alpha}{s}$ $\to$ Y contiene αt

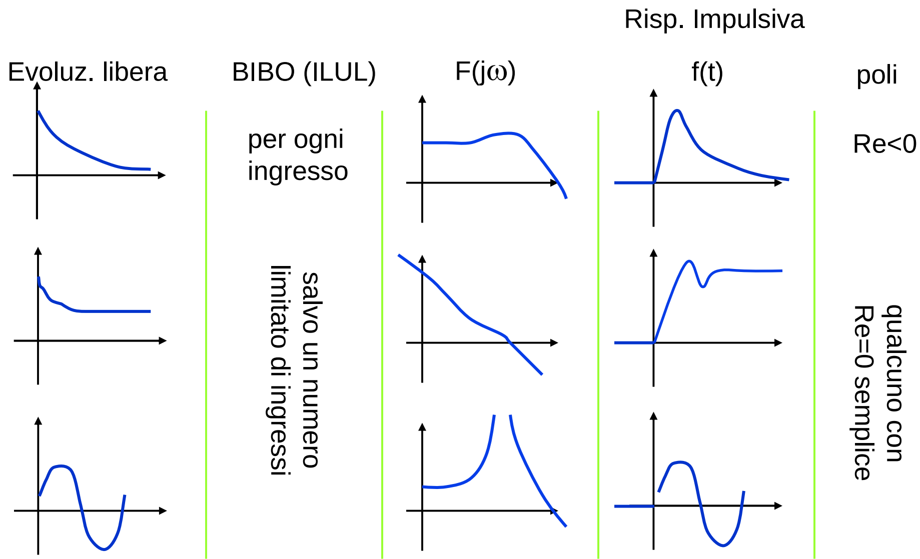
Quindi esiste un solo ingresso (il gradino) per cui l'uscita diverge ⇒ Σ al limite di stabilita'



Risonanza !!!!

Osservazione: $$\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}} \longrightarrow y(t) \text{ illimitato}$$

Quadro sulla Stabilita'



In generale…

- Abbiamo visto che la stabilità dipende dalla parte reale dei poli della FdT:
  - Re[poli]<0 => stabilità asintotica
  - Re[poli]=0, poli semplici => stabilità semplice
- Potremmo calcolare i poli: D(s)=0
  - calcoli complessi e con possibili errori numerici
  - nessuna informazione su come agire su un Σ instabile

CRITERIO DI ROUTH

Prima osservazione: i coefficienti di D(s) devono essere tutti positivi, altrimenti il S non è stabile (potrebbe essere al limite di stabilità se qualcuno è nullo).

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ccc}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \\
b_1 & b_2 & \cdots & \\
c_1 & c_2 & \cdots &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

Questi elementi devono avere tutti lo stesso segno, altrimenti si ha una radice positiva per ogni variazione di segno

Le righe si possono scalare proporzionalmente. Quindi si può trascurare [denominatore]

CRITERIO DI ROUTH

- Teorema:
  - se l'equazione polinomiale non ha soluzioni a parte reale nulla, ne esisterà una a parte reale positiva per ogni variazione di segno.
- Criterio di Routh:
  - c.n.s. per avere stabilità asintotica è che non si abbiano variazioni di segno
- E se ci sono radici a parte reale nulla?
  - in zero ➔ caso banale, si eliminano prima
  - coniugate ➔ zeri nella tabella: bisogna estendere il criterio

Esempio numerico

$$s^3 + 7s^2 + 18s + 18 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 18 \\
2 & 7 & 18 \\
1 & \dfrac{18 - 7*18}{-7} & \boxed{} \\
0 & 18 &
\end{array}$$

Nessuna variazione di segno, infatti le radici hanno parte reale negativa !

è uno zero!

Roots=

-3.0000

-2.0000 + 1.4142i

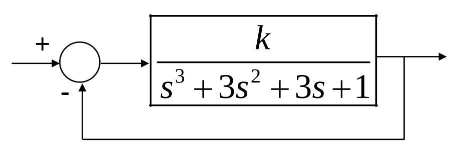
-2.0000 - 1.4142i

Esempi simbolici

$$as^2 + bs + c = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
2 & a & c \\
1 & b & \\
0 & c &
\end{array}$$

Per un eq di 2° grado la condizione sui singoli coefficienti è anche sufficiente !



$$W(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 3s + (1+k)}$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & 3 & 1+k \\
1 & \dfrac{8-k}{3} & \\
0 & 1+k &
\end{array}$$

-1 < k < 8

Rapidità di convergenza

$$s^3+7s^2+16s+12=0$$

$$s\to s-1\ \ \text{(cambiamento di variabile)}$$

$$(s-1)^3+7(s-1)^2+16(s-1)+12=0$$

$$s^3+4s^2+5s+2=0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & \frac{9}{2} & \\ 0 & 2 & \end{array}$$

Nessuna variazione di segno, quindi le radici hanno parte reale minore di –1 !!!

Questo implica che il sistema si stabilizza esponenziamente a zero con un andamento più rapido di e^{-t}

Casi particolari

Elemento nullo nella prima colonna $s^4+s^3+s^2+s+1=0$

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & \emptyset\to\varepsilon & 1 & \\ 1 & \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} & & \\ 0 & 1 & & \end{array}$$

- Sostituiamo lo 0 con ε
- È equivalente a dare una piccola perturbazione ai coefficienti del polinomio ovvero alle radici dell'equazione polinomiale

$\varepsilon \to 0^+$ 2 variazioni

$\varepsilon \to 0^-$ 2 variazioni

- Comunque, abbiamo 2 variazioni
- Ne consegue la presenza di due radici a parte reale positiva

Casi particolari

Una riga è tutta nulla

$$s^4+s^3-3s^2-s+2=0$$

$$\begin{array}{r|l|lll}
n= & 4 & 1 & -3 & 2 \\
 & 3 & 1 & -1 & 0 \\
q= & 2 & -2 & 2 & \\
 & 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \\
 & 1' & -4 & 0 & \\
 & 0 & 2 & &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left(-2s^2+2\right)$$

- In questo caso il polinomio di partenza è scomponibile nel prodotto di due polinomi:

  $P(s)=P_1(s)\,P_2(s)$

- La posizione delle (n-q) radici di $P_1(s)$ è data dalle variazioni delle prime (n-q+1) righe
- La riga q fornisce $P_2(s)$ (equazione ausiliaria) che è sempre di grado pari e, risolta, fornisce le ultime radici

- Alternativamente, si sostituisce la riga nulla con la derivata dell'equazione ausiliaria
- Le variazioni delle ultime q+1 righe corrispondono alle radici a parte reale positiva della eq. ausiliaria (per simmetria anche a quelle a parte reale negativa). Le rimanenti sono immaginarie.
- In questo caso 1 var. (1 rad. Re[ ]>0) + 1 var. (1 rad. Re[ ]>0 e 1 rad. Re[ ]<0)

Teorema di Kharitonov

(Enunciato)

Spesso i coefficienti sono noti come campi di variazione: $l_i < a_i < u_i$

La stabilità per qualsiasi valore dei parametri all'interno degli intervalli è implicata dalla stabilità di solo quattro polinomi

$$u_n s^n + u_{n-1}s^{n-1} + l_{n-2}s^{n-2} + l_{n-3}s^{n-3} + \dots = 0$$
$$l_n s^n + l_{n-1}s^{n-1} + u_{n-2}s^{n-2} + u_{n-3}s^{n-3} + \dots = 0$$
$$u_n s^n + l_{n-1}s^{n-1} + l_{n-2}s^{n-2} + u_{n-3}s^{n-3} + \dots = 0$$
$$l_n s^n + u_{n-1}s^{n-1} + u_{n-2}s^{n-2} + l_{n-3}s^{n-3} + \dots = 0$$