Discretizzazione

Esame luglio 2007 Compito A esercizio D

Discretizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{2s + 4}{(s^2 + 4s + 3)}$$

Utilizzando il metodo esatto con $T_c = 0{,}1$ secondi. Calcolare i primi 5 campioni dell'uscita quando in ingresso al sistema viene applicato il segnale $u(t) = 2 \cdot \delta_{-1}(t - 0{,}2)$

Soluzione:

Scompongo il denominatore in modo che risulti un prodotto tra polinomi con s di primo grado. In questo caso risolvo l'equazione di secondo grado e mi riscrivo la funzione:

$$F(s) = \frac{2s + 4}{(s + 1) \cdot (s + 3)}$$

Ora scompongo e sommo ciascun polo trovato:

$$F(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 3}$$

Ora trasformo in maniera diretta, cioè sapendo che:

$$\frac{1}{s + k} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{-k \cdot T_c} z^{-1}}$$

Ottengo:

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-1 \cdot 0{,}1} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-3 \cdot 0{,}1} z^{-1}}$$

Scrivendo l'esponenziale in forma decimale ho:

$$F(z) = \frac{1}{1 - 0{,}9048 z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0{,}7408 z^{-1}}$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore di una frazione per la stessa quantità il risultato non cambia perciò l'espressione precedente equivale a scrivere:

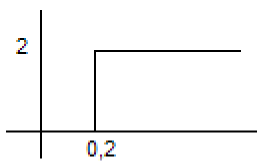
$$F(z) = \frac{z}{z - 0{,}9048} + \frac{z}{z - 0{,}7408}$$

Facendo il minimo comune multiplo ottengo:

$$F(z) = \frac{2z^2 - 1{,}646z}{z^2 - 1{,}646z + 0{,}6703}$$

Ora che ho discretizzato devo campionare il segnale.

So di avere in ingresso un segnale a gradino del tipo:



Quindi, se campiono ogni 0,1 secondi a partire dall'origine avrò in ingresso: 0 0 2 2 2 2 …

Schematizzando ho: $u(0) = 0 \;\; u(1) = 0 \;\; u(2) = 2 \;\; u(3) = 2 \;\; u(4) = 2 \ldots u(n) = 2$

Ora mi devo calcolare l'uscita. Quindi mi devo ricavare l'espressione della funzione discreta in uscita con questo procedimento:

Prendo la mia $F(z)$ e la pongo uguale a uscita fratto ingresso:

$$\frac{2z^2 - 1{,}646z}{z^2 - 1{,}646z + 0{,}6703} = \frac{y(k)}{u(k)}$$

Prima raccolgo la z con esponente maggiore (nel nostro caso z^2):

$$\frac{z^2}{z^2} \cdot \frac{2 - 1{,}646z^{-1}}{1 - 1{,}646z^{-1} + 0{,}6703z^{-2}} = \frac{y(k)}{u(k)}$$

Quindi mi rimane:

$$\frac{2 - 1{,}646z^{-1}}{1 - 1{,}646z^{-1} + 0{,}6703z^{-2}} = \frac{y(k)}{u(k)}$$

Ora faccio il prodotto incrociato:

$$(2 - 1{,}646z^{-1}) \cdot u(k) = y(k) \cdot (1 - 1{,}646z^{-1} + 0{,}6703z^{-2})$$

Faccio i prodotti:

$$2u(k) - 1{,}646z^{-1}u(k) = y(k) - 1{,}646z^{-1}y(k) + 0{,}6703z^{-2}y(k)$$

A questo punto "porto gli esponenti delle z, dentro gli ingressi e dentro le uscite". Cioè, se ho $z^{-3} \cdot u(k)$ questo mi diventerà $u(k-3)$. Quindi avrò:

$$2u(k) - 1{,}646u(k-1) = y(k) - 1{,}646y(k-1) + 0{,}6703y(k-2)$$

Mi ricavo $y(k)$:

$$y(k) = 2u(k) - 1{,}646u(k-1) + 1{,}646y(k-1) - 0{,}6703y(k-2)$$

Visto che l'esercizio mi dice di ricavare il valore dei primi 5 campioni, significa che calcolerò il valore di $y(k)$ per i k che vanno da 0 a 4 (cioè i primi 5).

Prendo $k = 0$

Verifico quanto valgono le singole uscite/ingressi che poi moltiplicherò per il loro coefficiente e sommerò:

$2 \cdot u(0) = 2 \cdot 0 = 0$ Perché $u(0)$ significa andare a guardare il primo ingresso che ho.

Tralasciando, al momento, i coefficienti ho:

$u(0-1) = 0$ Perché mi chiedo quant'è l'ingresso una posizione prima di quando inizio a campionare. Quindi, visto che solo dal terzo campione (cioè $u(2)$) ho tutti 2 e prima tutti 0 allora $u(-1) = 0$

$y(0-1)$ significa che mi chiedo quant'è l'uscita una posizione prima che inizio a campionare, ma per un discorso analogo agli ingressi è 0, infatti le uscite inizio ad avercele da $y(0)$, prima non ho nessuna uscita, cioè è nulla. Stesso discorso per $y(0-2) = y(-2) = 0$

Perciò ho che:

$y(0) = 2 \cdot 0 - 1{,}646 \cdot 0 + 1{,}646 \cdot 0 - 0{,}6703 \cdot 0 = 0$

Prendo $k = 1$

$u(1) = 0$ Il mio secondo ingresso ancora è nullo.

$u(0 - 1) = 0$

$y(1 - 1) = y(0)$ è zero poiché la prima uscita è nulla (sarebbe il risultato precedente per $k = 0$) e anche $y(1 - 2) = y(-1)$ è zero per il discorso di prima.

Quindi:

$y(1) = 0$

Prendo $k = 2$

$u(2) = 2 \quad u(2 - 1) = u(1) = 0 \quad y(2 - 1) = y(1) = 0 \quad y(2 - 2) = y(0) = 0$

$y(2) = 2 \cdot 2 - 1{,}646 \cdot 0 + 1{,}646 \cdot 0 - 0{,}6703 \cdot 0 = 4$

Prendo $k = 3$

$u(3) = 2 \quad u(3 - 1) = u(2) = 2 \quad y(3 - 1) = y(2) = 4 \quad y(3 - 2) = y(1) = 0$

$y(3) = 2 \cdot 2 - 1{,}646 \cdot 2 + 1{,}646 \cdot 4 - 0{,}6703 \cdot 0 = 7{,}29$

Prendo $k = 4$

$u(4) = 2 \quad u(4 - 1) = u(3) = 2 \quad y(4 - 1) = y(3) = 7{,}29 \quad y(4 - 2) = y(2) = 4$

$y(4) = 2 \cdot 2 - 1{,}646 \cdot 2 + 1{,}646 \cdot 7{,}29 - 0{,}6703 \cdot 4 = 10{,}026$