# Introduzione al Controllo Digitale

## Lezione 23

20 maggio 2015

Ing. Chiara Foglietta
chiara.foglietta@uniroma3.it

Fondamenti di Automatica
Ingegneria Elettronica
A.A. 2014 - 2015
Università degli Studi "Roma TRE"

# Agenda





Introduzione

Campionamento del segnale

Spettro di un segnale campionato

Ricostruttore di segnale

Aliasing

# Introduzione



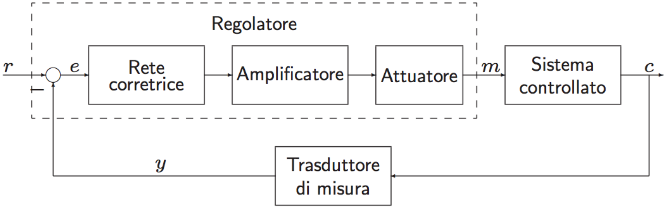


Un sistema di controllo digitale è un sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un calcolatore digitale e quindi una elaborazione a tempo discreto della legge di controllo.

Tale scelta è dettata dalla considerazione che il controllo digitale è oggi ampiamente usato, grazie allo sviluppo dei microprocessori e microcontrollori, non solo nelle applicazioni high-tech, ma anche nelle applicazioni di piccola media taglia di larga diffusione e quindi di ampio interesse tecnico.

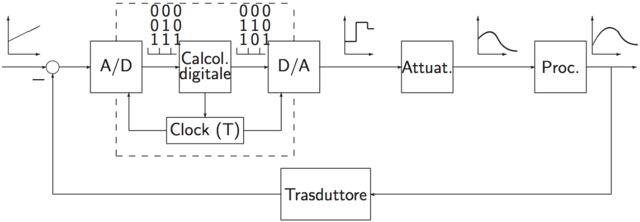
# Schema tipico di un sistema di controllo analogico





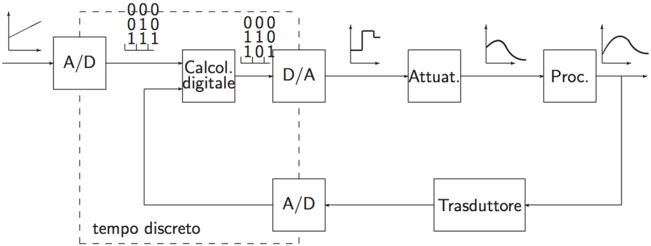
# Schema tipico di un sistema di controllo digitale I





# Schema tipico di un sistema di controllo digitale II





**A/D** , ossia convertitore analogico/digitale. Questo dispositivo effettua il campionamento, di periodo $T$, del segnale analogico di ingresso $x(t)$ restituendo in uscita la sequenza dei valori $x(kT)$, codificati e quantizzati. Negli schemi, il convertitore A/D è spesso indicato con un interruttore al fine di sottolineare la natura discreta dell'informazione trasmessa. Il campionamento è modellato matematicamente con un processo a modulazione di impulsi di Dirac, dove l'uscita è pari a

$$x(kT)\delta(t - KT)$$

dove compare un impulso per $t = kT$ di valore pari al valore del campione $x(kT)$.

**D/A** , ossia convertitore digitale/analogico. É il dispositivo che realizza la conversione inversa, ossia la ricostruzione di un segnale analogico a partire dalla sequenza dei suoi campioni. Tale operazione non è univocamente definita a meno che non siano soddisfate le condizioni derivanti dal teorema di Shannon

# Vantaggi dei sistemi di controllo digitale I







- *Maggiore capacità e precisione di elaborazione.* L'elaborazione numerica dei segnali consente l'utilizzazione di algoritmi più sofisticati, che si traducono in programmi più o meno complessi che possono comprendere anche verifiche, messaggi all'operatore, registrazione dei dati.
- *Maggiore flessibilità.* Mentre nel caso dei sistemi analogici è necessario modificare fisicamente il regolatore a seconda del particolare sistema da controllare (pur ottenendo una buona adattabilità con i regolatori standard PID) nel caso digitale è sufficiente in generale modificare il programma (cioè intervenire sul "software") mantenendo la stessa piattaforma "hardware"

# Vantaggi dei sistemi di controllo digitale II

- *Maggiore affidabilità e ripetibilità.* L'elaborazione numerica è sempre identica, mentre quella analogica può variare per modifiche delle caratteristiche elettriche dei componenti, dovuti a fattori ambientali o a deterioramento.
- *Maggiore sensibilità e trasmissibilità dei segnali.* La sensibilità è concentrata nel codificatore; l'elaborazione digitale non presenta soglie o saturazioni; la trasmissione a distanza è priva di errori essendo i segnali codificati; vengono eliminati i disturbi, in particolare quelli a frequenza di rete provenienti da apparati di potenza

# Svantaggi dei sistemi di controllo digitale I





- *Progettazione più difficile e articolata.* Per il progetto completa di un controllore digitale si richiede una competenza sia sui sistemi dinamici ad evoluzione discreta che sugli elaboratori digitali (linguaggi di programmazione, sistemi operativi real-time, interfacciamento)
- *Stabilizzazione più precaria.* La discontinuità nella trasmissione dell'informazione legata al campionamento implica ritardi negli interventi di regolazione e quindi maggiore difficoltà nella stabilizzazione degli anelli di regolazione, per cui si può affermare che uno dei problemi più importanti nel progetto di un apparato di controllo digitale è la scelta del periodo di campionamento, che implica un compromesso fra le qualità della regolazione e la quantità di impegno computazionale dell'elaborazione

# Svantaggi dei sistemi di controllo digitale II







- *Possibilità di arresti non previsti dovuti a disturbi.* Se la programmazione non è così accurata da prevedere il superamento di tutte le situazioni anomale provocate da eventuali disturbi agenti sul sistema da controllare, il programma del regolatore si può bloccare interrompendo improvvisamente la regolazione
- *Necessità di utilizzare energia elettrica.* I sistemi digitali sono sempre elettronici, mentre quelli analogici standard possono essere pneumatici e risultano quindi utilizzabili anche in ambienti critici per la possibilità di esplosioni ed incendi.

Il campionatore, o convertitore A/D, converte un segnale a tempo continuo in una sequenza di campioni prelevati negli istanti $t = 0, T, 2T, ...$ dove $T$ è il periodo di campionamento. Si introduce allora un segnale denominato treno di impulsi di Dirac composto da una sequenza di impulsi elementari posizionati in $k \cdot T$, distanti quindi tra di loro un tempo $T$, e si definisce segnale campionato $x_c(t)$ il prodotto del segnale originario $x(t)$ per il treno di impulsi

$$x_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

# Esempio di campionamento 1/2



Si consideri un segnale di andamento esponenziale:

$$x(t) = e^{-3t}$$

e si supponga di campionarlo con un periodo di campionamento di 10 msec. Si otterrà allora la sequenza di campioni:

$$e^{0}, e^{-0.03}, e^{-0.06}, \ldots, e^{-0.03k}$$

e quindi il segnale campionato sarà

$$x_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-0.03k} \cdot \delta(t - 0.01k)$$

# Esempio di campionamento 2/2





Si consideri un segnale di andamento sinusoidale:

$$x(t) = \sin(500\pi t)$$

e si supponga di campionarlo con un periodo di campionamento di 1 msec. Si otterrà allora il seguente segnale campionato

$$x_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(0.5\pi k) \cdot \delta(t - 0.001k)$$

# Esempio di campionamento 2/2



Se si considera un altro segnale sinusoidale con il medesimo periodo di campionamento:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sin(2500\pi t) \\
x_c(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin(2.5\pi k) \cdot \delta(t - 0.001k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sin(0.5\pi k) \cdot \delta(t - 0.001k)
\end{aligned}
$$

# Spettro di un segnale campionato I





L'operazione di campionamento permette di derivare da un segnale continuo un nuovo segnale considerando il primo solo in istanti discreti. E' intuitivo che tale operazione possa ridurre il contenuto informativo del segnale originario, cioè renda impossibile ricostruire esattamente il primo segnale a partire dal secondo. Esistono però certe condizioni sotto le quali è possibile eseguire l'operazione inversa appena descritta.

Tali condizioni sono state studiate da Nyquist e da Shannon il quale le sintetizzò in un importante teorema (detto del campionamento). Operiamo innanzitutto una preliminare analisi di alcune caratteristiche dello spettro del segnale $x_c(t)$.

# Spettro di un segnale campionato II





Si vuole vedere qual'è il legame tra la trasformata di Laplace $X_c(s)$ del segnale campionato e la trasformata di Laplace $X(s)$ del segnale originario. Supponendo che il segnale $x(t)$ sia nullo per $t < 0$, il segnale campionato $x_c(t)$ può essere espresso come il prodotto di $x(t)$ per la sequenza $\delta(t - kT)$ di impulsi di Dirac di area unitaria estesa a tutto l'asse del tempo, ossia considerando come estremo inferiore della sommatoria $k = -\infty$

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

# Spettro di un segnale campionato III







Essendo periodico di periodo $T$, il segnale può essere sviluppato in serie di Fourier. Utilizzando la formula a coefficienti complessi dello sviluppo di Fourier si ottiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jk\omega_s t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

dove $\omega_s = 2\pi/T$, da cui si ottiene

$$x_c(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = x(t)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_s t}$$

# Spettro di un segnale campionato IV





Passando alle trasformate di Laplace e utilizzando le proprietà di linearità e di traslazione complessa si ottiene:

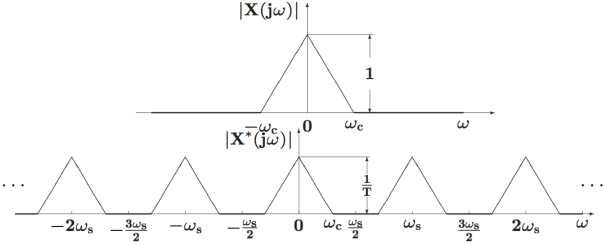
$$X_c(s) = \mathcal{L}[x_c(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[x(t)e^{jk\omega_s t}] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[X(s - jk\omega_s)]$$

Quindi, a meno della costante moltiplicativa $1/T$, la trasformata di Laplace $X_c(s)$ del segnale campionato è data dalla somma degli infiniti termini $X(s - jk\omega_s)$, ciascuno dei quali è ottenuto da $X(s)$ mediante traslazione $jk\omega_s$ nel campo complesso.

Per comprendere il processo di campionamento da un punto di vista frequenziale, prendiamo ora in considerazione un segnale $x(t)$ avente uno spettro limitato in frequenza, o come spesso si dice "a banda limitata". Il segnale $x(t)$ non contiene nessuna componente frequenziale al di sopra della pulsazione $\omega_c$. L'andamento spettrale del segnale campionato si ottiene sostituendo $j\omega$ al posto della variabile complessa $s$:

$$X_c(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s)$$

Possibile andamento spettrale di un segnale $x(t)$ a banda limitata.



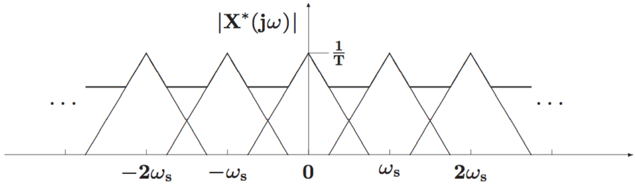

La condizione $\omega_s > 2\omega_c$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$.

# Spettro di un segnale campionato VII





Nel caso in cui la condizione non venga rispettata, lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato.



# Teorema di Shannon I



Sia $w_s = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione di campionamento (detta anche pulsazione di Nyquist) dove $T$ è il periodo di campionamento, e sia $\omega_c$ la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è perfettamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x_c(t)$ se e solo se la pulsazione di campionamento è maggiore del doppio della pulsazione $\omega_c$:

$$\omega_s > 2\omega_c$$

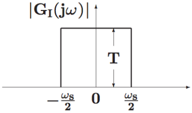
# Teorema di Shannon II





La ricostruzione di $x(t)$ avviene filtrando il segnale campionato $x_c(t)$ mediante un filtro ideale $G_I(j\omega)$ avente il seguente spettro

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

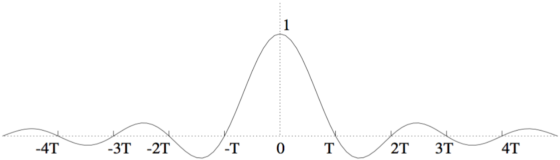


Allo scopo di dimostrare che il filtro ideale $G_I(j\omega)$ non è fisicamente realizzabile, ossia $G_I(j\omega)$ non rappresenta un sistema causale, calcoliamo la risposta all'impulso $g_I(t)$ del filtro stesso, usando la trasformata inversa di Fourier:

$$g_I(t) = \frac{\sin\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)}{\frac{\omega_s t}{2}}$$

# Teorema di Shannon IV






Ad un impulso di Dirac applicato all'istante $t = 0$, il filtro $G_I(j\omega)$ risponde con un segnale che non è nullo per $t < 0$. Il sistema quindi risulta non-causale.

27

I ricostruttori di segnale sono dispositivi che ricevono in ingresso una sequenza $x(kT)$ di valori campionati e forniscono in uscita un segnale continuo $x_r(t)$ che in qualche modo approssima il segnale $x(t)$ da cui è stata ricavata la sequenza $x(kT)$.

# Ricostruttori di segnale II







I ricostruttori di uso più comune sono quelli che si ottengono dall'espansione in serie di Taylor del segnale $x(t)$ nell'intorno del punto $t = kT$:

$$
\begin{aligned}
x(t) = x(kT) &+ \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=kT}(t-kT) \\
&+ \left.\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right|_{t=kT}\frac{(t-kT)^2}{2!} + \dots
\end{aligned}
$$

Avendo a disposizione solamente i valori campionati $x(kT)$, le derivate del segnale $x(t)$ nel punto $t = kT$ vengono calcolate secondo le seguenti espressioni:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=kT} &\sim \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \\
\left.\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right|_{t=kT} &\sim \frac{x(kT) - 2x((k-1)T) + x((k-2)T)}{T^2}
\end{aligned}
$$

# Ricostruttori di segnale III







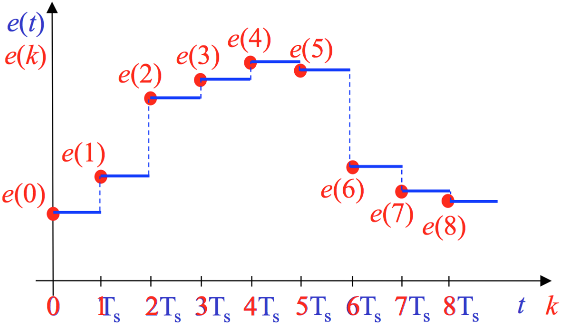
Il numero di termini derivativi che vengono presi in considerazione nell’espansione è detto ordine del ricostruttore. Al crescere dell’ordine migliora la capacità di ricostruzione del dispositivo, ma aumentano anche la complessità realizzativa del dispositivo stesso e gli effetti negativi dovuti all’introduzione di ritardi più elevati nell’anello di controllo.

# Ricostruttore di ordine zero (ZOH) I



Il legame ingresso-uscita di tale ricostruttore è il seguente:

$$x_0(t) = x(kT), \qquad kT \leq t \leq (k+1)T$$



# Ricostruttore di ordine zero (ZOH) II





Se indichiamo con $h(t - t^\star)$ la funzione gradino unitaria applicata all'istante $t = t^\star$, la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine zero si ottiene trasformando secondo Laplace la risposta all'impulso $g_0(t)$:

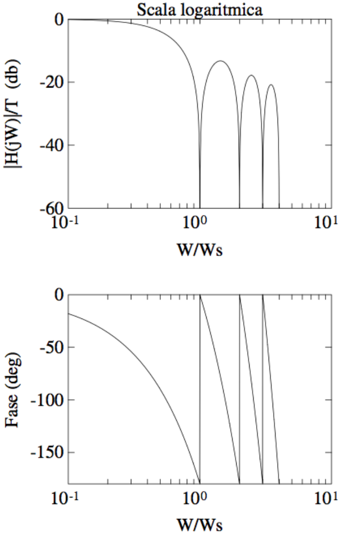
$$
\begin{aligned}
H_0(s) &= \mathcal{L}[g_0(t)] = \mathcal{L}[h(t) - h(t - T)] \\
&= \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}
\end{aligned}
$$

# Ricostruttore di ordine zero (ZOH) III



Per basse frequenze, il ricostruttore può essere approssimato con un ritardo pari a $t/2$:

$$H_0(j\omega) \sim Te^{-j\omega T/2}, \quad \omega T/2 << 1$$



# Aliasing







Con il termine aliasing si indica quel fenomeno per il quale, mediante campionamento, si generano delle nuove componenti spettrali (armoniche) alla stessa frequenza della componente spettrale di partenza che impediscono la corretta ricostruzione del segnale di partenza. Si può avere aliasing

solo nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ del teorema di Shannon non sia verificata.

# Esempio I



$$x(t) = \sin(\omega_2 t + \theta)$$
$$y(t) = \sin((\omega_2 + n\omega_s)t + \theta)$$

Avente medesima pulsazione che differisce di un multiplo intero di $\omega_s$. Se i due segnali vengono campionati

$$\begin{aligned} x(kT) &= \sin(\omega_2 kT + \theta) \\ y(kT) &= \sin((\omega_2 + n\omega_s)kT + \theta) \\ &= \sin(\omega_2 kT + 2k\pi n + \theta) \\ &= \sin(\omega_2 kT + \theta) \end{aligned}$$

Quindi i valori campionati coincidono $x(kT) = y(kT)$.

# Esempio II