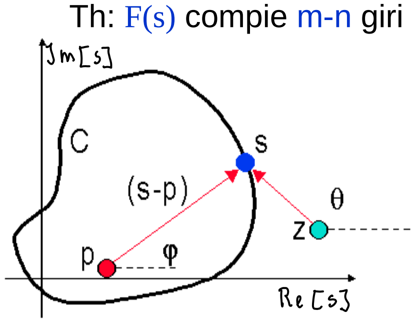
Il Criterio di Nyquist

- Criterio grafico per determinare la stabilità di un sistema a ciclo chiuso che usa i diagrammi di Nyquist
- Si determina la stabilità a ciclo chiuso dalle caratteristiche a ciclo aperto
- Si applica anche a Sistemi con FdT non razionale
- Consente di definire la "robustezza" di un sistema di controllo

Theo. Indicatore Logaritmico

Ip: F(s): analitica, C: curva chiusa, s compie un giro su C,
all'interno di C ci sono n poli e m zeri.
Th: F(s) compie m-n giri nello stesso verso

Marro p. 233 dimostrazione completa



$$F(s) = K' \frac{s-z}{s-p} = K' \frac{r}{\rho} e^{j(\theta-\varphi)}$$

r e ρ non ci interessano
φ compie un giro,
θ oscilla ma complessivamente non cambia

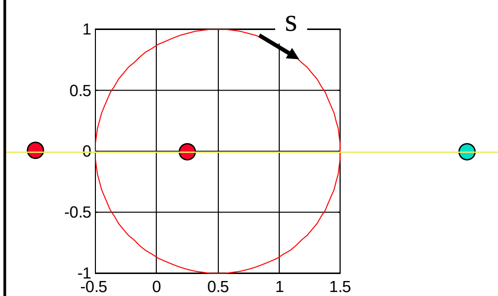
$$s - z = re^{j\theta}$$

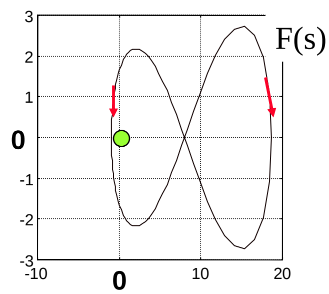
$$s - p = \rho e^{j\varphi}$$

Esempio

$$F(s) = 2\frac{s-3}{(s-0.25)(s+1)}$$

```
th=0:pi/50:2*pi;
j=sqrt(-1);
C=exp(j*th)+0.5;
figure(1)
plot(C,'r'); axis('square'), grid
figure(2)
plot(2*(C-3)./((C-0.25).*(C+1)),'b')
axis('square'), grid
```





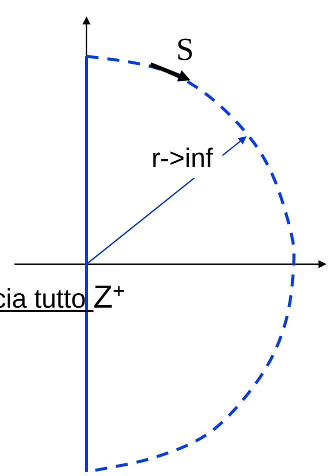
R: rotazioni orarie di F(s) attorno all'origine = -1

L'idea

Quanti poli a parte reale positiva (p.r.p.)
ha la FdT a ciclo chiuso W(s)?

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+F(s)}; \quad F(s) = G(s)H(s)$$

Sono quanti gli zeri del denominatore 1+F(s) p.r.p.



C: una curva chiusa che abbraccia tutto Z^+

Il criterio dà R = # zeri(1+F) - # poli(1+F) p.r.p.
Ma i poli di 1+F sono quelli di F (FdT ciclo aperto).

(R: rotazioni orarie)

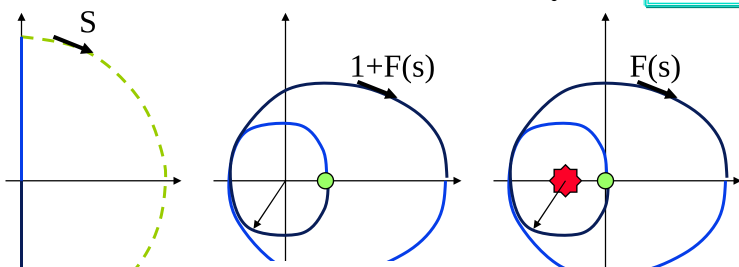
$$\boxed{\#poli(W) = \#zeri(1+F) = \#poli(1+F) + R = \#poli(F) + R}$$

Il criterio di Nyquist

$\boxed{\#poli(W) = R + \#poli(F)}$ Stabilità di W(s) ==> #poli(W)=0 p.r.p.

$\boxed{R = - \#poli(F) \text{ p.r.p.}}$

R: rotazioni orarie di **1+F(s)** attorno alla **origine**
=rotazioni orarie di **F** attorno a **−1+j0**



F(s):
- *strettam. causale*
- *senza poli: Re[p]=0*

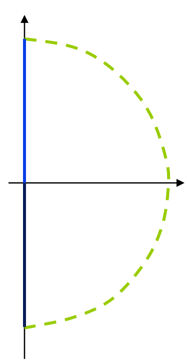
: [-1, j0]

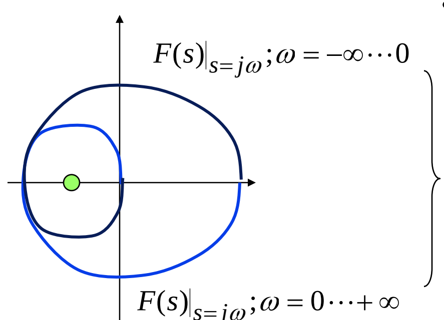
Ovviamente
se F(s) stabile
R=0
(criterio ridotto)

Il grafico di che?

Di quale funzione facciamo il grafico?

F(s):
- *senza poli Re[p]=0*



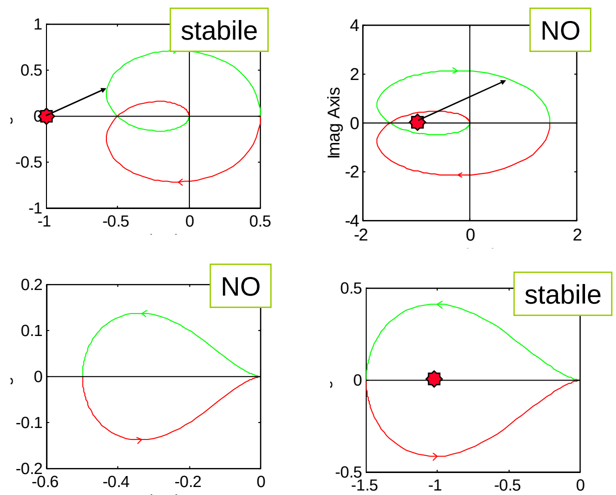


Se F(s) è stabile,
risp. armonica
a ciclo aperto
da -inf a +inf

per ω →∞, 2 casi: $\frac{b_m s^m}{a_n s^n},\ \begin{cases} m < n, |F(s)| = 0 \\ m = n, |F(s)| = K, \Delta\varphi = 0 \end{cases}$

Esempi

(colori Matlab, diversi da precedenti)




```
» n=[-1,1];
» d=[1, 1, 1];
» nyquist(n,d)
» nyquist(0.5*n,d)
» nyquist(1.5*n,d)
```

$$\frac{1-s}{s^2+s+1}$$

R = - #poli(F) p.r.p. = 0

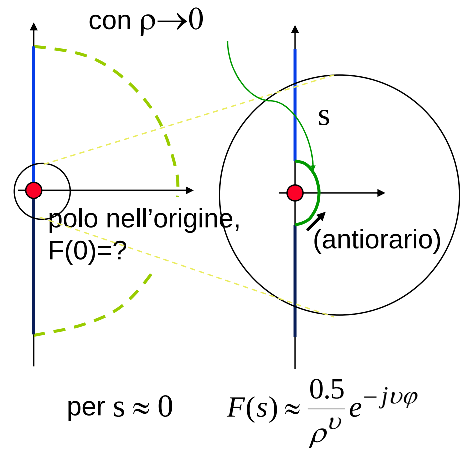
```
» d=[1 1 -1];
» n=0.5;
» nyquist(n,d)
» n=1.5;
» nyquist(n,d)
```

$$\frac{1}{s^2+s-1}$$

R = - #poli(F) p.r.p. = 1

Poli con Re = 0 in F(s)

"percorso uncinato" di s con $\rho \to 0$

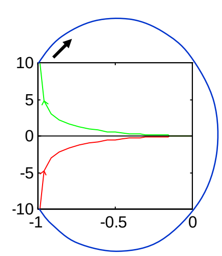


per $s \approx 0$ $\quad F(s) \approx \dfrac{0.5}{\rho^{\upsilon}} e^{-j\upsilon\varphi}$

Lo stesso per coppie di poli immaginari

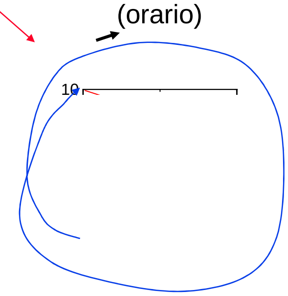
F(s)

$$\frac{1}{s(s+1)}$$

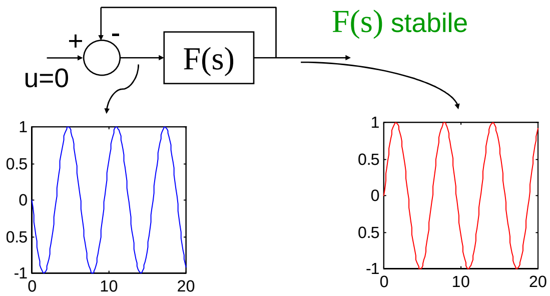


$$\frac{1}{s^2(s+1)}$$

(orario)

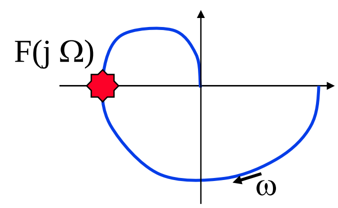


Spiegazione intuititiva
del criterio ridotto

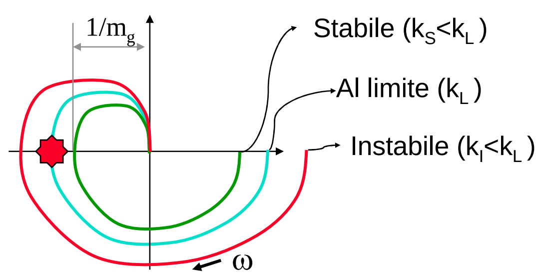


- Sistema a controreazione sede di un'oscillazione stazionaria con pulsazione Ω.
- I segnali hanno le relazioni indicate, quindi $F(j\,\Omega) = -1$.
- L'oscillazione ha la pulsazione per cui $F(j\,\Omega) = -1$.

- Se il guadagno in catena diretta è maggiore, oscillazioni divergenti;
- se è minore, oscillazioni convergenti.



Margini di Stabilità

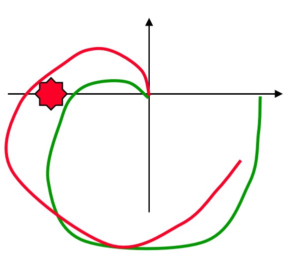


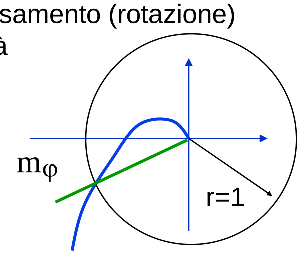
(solo criterio ridotto)

All'aumentare del guadagno un sistema generalmente diventa instabile.

$$m_g = \frac{K_L}{K_S}$$

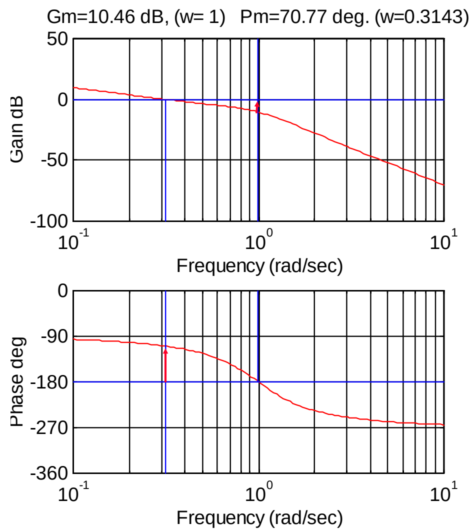
Anche uno sfasamento (rotazione) porta instabilità



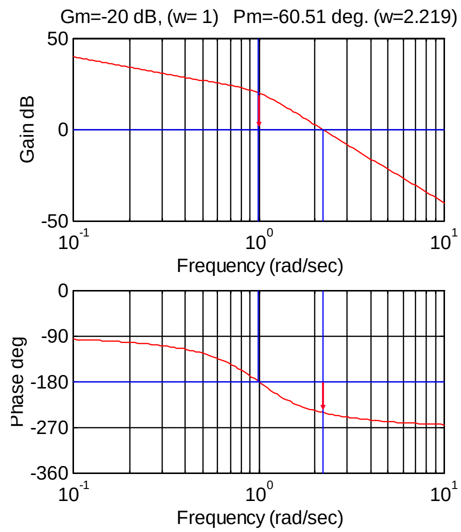


Margini di Stab. su Bode

Stabile



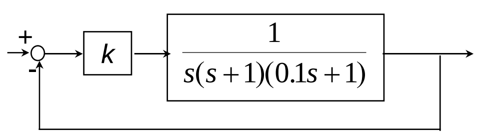
Instabile



Istruzione Matlab: `margin(num,den)`

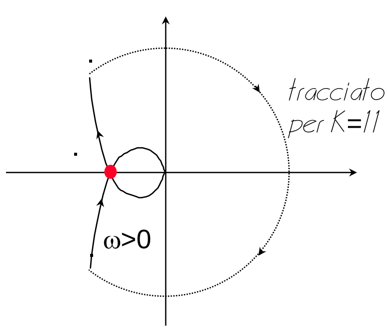
Esempio

Esempio già fatto con Routh



Risultava 0 < k < 11

$$W = \frac{k}{0.1s^3 + 1.1s^2 + s + k}$$



0.1	1	
1.1	K	
$1-\frac{K}{11}$	0	K<11
K		K>0

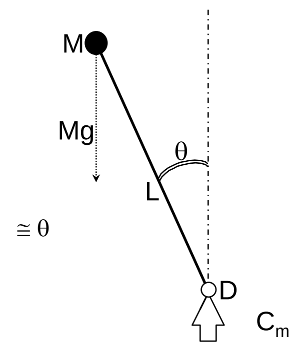
PENDOLO ROVESCIATO

$$ML^2\ddot{\theta} = C_m + MgL \cdot \overset{\cong \theta}{\sin\theta} - D\dot{\theta}$$

$$\Theta(s) \cdot \left[ML^2 s^2 + Ds - MgL\right] = C_m(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{ML^2 s^2 + Ds - MgL}$$ (anello aperto)

instabile



Introduciamo un controllo: $C_m = -k(\theta - \theta_d)$ $\qquad \theta_d = 0$

$$\Theta(s) \cdot \left[ML^2 s^2 + Ds - MgL\right] = -k\Theta + k\Theta_1$$

$$W(s) = \frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{k}{ML^2 s^2 + Ds + (k - MgL)}$$ (anello chiuso)

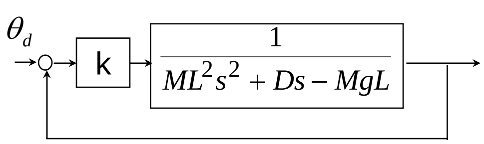
se K>MgL il sistema è stabile

PENDOLO 2

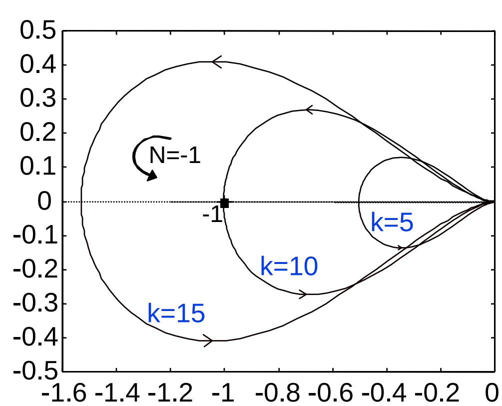
M = L = 1

D = 3

k > 10



n_p=1

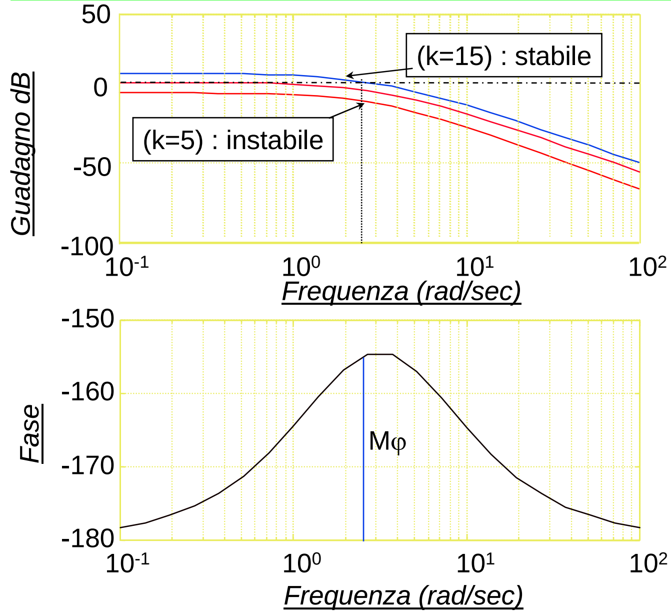


Deve risultare R (orarie) = - n_p

Stabilità "paradossale" :
solo per k > k_0 il contrario del solito.

Se k > MgL il sistema è stabile

DIAGRAMMI DI BODE DEL PENDOLO ROVESCIATO



(Anello Aperto)

$M\,\varphi = 25°$ $M_G = \infty$

Il criterio ridotto non va!!