Criterio di Routh

L'idea è quella di costruire una certa tabella: prendiamo i coefficienti del polinomio e ciascuna altra riga la costruiamo guardando le precedenti attraverso questi calcoli:

Prima osservazione: i coefficienti di D(s) devono essere tutti positivi, altrimenti il S non è stabile (potrebbe essere al limite di stabilità se qualcuno è nullo).

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Tabella di Routh

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
a_{n-1}	a_{n-3}	$\cdots$	
b_1	b_2	$\cdots$	
c_1	c_2	$\cdots$	

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

Questi elementi devono avere tutti lo stesso segno, altrimenti si ha una radice positiva per ogni variazione di segno

Le righe si possono scalare proporzionalmente. Quindi si può trascurare [denominatore]

- Se l'equazione polinomiale non ha soluzioni a parte reale nulla, ne esisterà una a parte reale positiva per ogni variazione di segno.
- Il criterio non mi dice né quali sono i polinomi, né in che posizione si trovano, ma mi dice solo quanti sono in base alla variazione di segno.
- Gli elementi della colonna base (quella cerchiata in rosso qui sopra) devono essere tutti concordi.
- Ad ogni variazione di segno corrisponde un polo a parte reale positiva.
- Se i coefficiente a_i sono negativi, ci sono sicuramente poli instabili.Se sono tutti positivi non posso dire nulla senza aver fatto la tabella.L'unico caso in cui posso dirlo è il polinomio di grado 2: se a_i sono tutti positivi, non ho poli instabili.

Esempio

$$(s^3 + s^2 + 2) \cdot (s^2 + 5s + 1) = s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 13s + 2$$

Costruiamo la tabella:

4	1	18	2
3	8	13	0
2	16,3	2	0
1	12	0	0
0	2	0	0

Spieghiamo come siamo arrivati a questa conclusione:

Passo 1

I valori:

4	1	18	2
3	8	13	0
2			
1			
0			

- La colonna in “giallo” è la colonna dei gradi del polinimio;
- Gli altri valori corrispondono ai coefficienti del polinomio: vengono disposte nelle prime due righe “a colonna”.

Passo 2

4	1	18	2
3	8	13	0
2	16,3	2	0
1			
0			

dove:

- 16,3 è il risultato del calcolo dell'inverso del determinante della matrice 2x2. Questa matrice è una 2x2 formata dalla colonna base (che abbiamo colorato in celeste) e la colonna a destra del valore che dobbiamo trovare; nel denominatore della formula del calcolo del determinante andremo a mettere il valore che si trova nella colonna "base" (quella celeste) nella riga sopra la casella di cui stiamo calcolando il valore. In queso caso quindi:

$$16,3 = \frac{(8\cdot18)-(1\cdot13)}{8}$$

$$2 = \frac{(8\cdot2)-(0\cdot1)}{8}$$

$$0 = \frac{(13\cdot0)-(0\cdot1)}{8}$$

Passo 3

4	1	18	2
3	8	13	0
2	16,3	2	0
1	12	0	0
0			

- Applichiamo la stessa cosa applicata nel passo 2:

$$12 = \frac{(16{,}3 \cdot 13) - (2 \cdot 8)}{16{,}3}$$

$$0 = \frac{(16{,}3 \cdot 0) - (0 \cdot 8)}{16{,}3}$$

$$0 = \frac{(16{,}3 \cdot 0) - (0 \cdot 8)}{16{,}3}$$

Passo 4

4	1	18	2
3	8	13	0
2	16,3	2	0
1	12	0	0
0	2	0	0

- Ripetiamo la stessa operazione:

$$2 = \frac{(12 \cdot 2) - (16{,}3 \cdot 0)}{12}$$

$$0 = \frac{(12 \cdot 0) - (0 \cdot 16{,}3)}{12}$$

$$0 = \frac{(12 \cdot 0) - (0 \cdot 16{,}3)}{12}$$

Se mi trovo un elemento sulla prima colonna uguale a 0?

Elemento nullo nella prima colonna $\quad s^4 + s^3 + s^2 + s + 1 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & \\
2 & 0 \to \varepsilon & 1 & \\
1 & \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} & & \\
0 & 1 & &
\end{array}
$$

- Sostituiamo lo 0 con ε
- È equivalente a dare una piccola perturbazione ai coefficienti del polinomio ovvero alle radici dell'equazione polinomiale

$\varepsilon \to 0^+$ 2 variazioni

$\varepsilon \to 0^-$ 2 variazioni

- Comunque, abbiamo 2 variazioni
- Ne consegue la presenza di due radici a parte reale positiva

Quando calcoliamo il primo elemento, notiamo che il determinante dà 0.

- Si sostituisce lo 0 con un ε (valore positivo e piccolo).
- Se scegliamo ε negativo, non cambia nulla: vengono sempre due variazioni.
- Per variazione si intende il cambio di segno dei poli (prima colonna, colonna base). Nel caso che scegliamo un ε positivo piccolo, avremo la variazione al "grado 1", poiché $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ diventa negativo (prima variazione) e la successiva sarà al grado 0, quando con 1 il polo tornerà positivo. Lo stesso discorso può essere fatto per ε negativo: infatti avremo nella riga del "grado 2" un valore negativo, che tonerà positivo nel polo di grado inferiore. Con due variazioni possiamo definire il sistema non stabile.

Analizziamo un altro caso particolare:

$$s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$$

La tabella sarà:

4	1	-3	2
3	1	-1	0
2	-2	2	0
1	0	0	0
0	0	0	0

Abbiamo nella riga corrispondete al grado 1 tutti 0. In questo caso se utilizzassimo ε non cambierebbe nulla.

Come procedere?

- Si deve cancellare la riga dove sono presenti gli 0

1	0	0	0

- Si deve ricostruire la riga mettendo al posto dello 0 nella colonna base il valore derivante da:

$$\frac{d}{ds}(-2s^2 + 2)$$

Dove:

  - i coefficienti si prendono dalla riga superiore e gli si associa la variabile di grado corrispondente: infatti si parte da $-2s^2$ e scalando sempre il grado di 2, il +2 avrà grado 0. Il risultato sarà:

1	-4	0	0

- Si applica di nuovo la formula classica per trovare gli altri valori (l'inverso del determinante della matrice). Il risultato finale sarà:

4	1	-3	2
3	1	-1	0
2	-2	2	0
1	-4	0	0
0	2	0	0