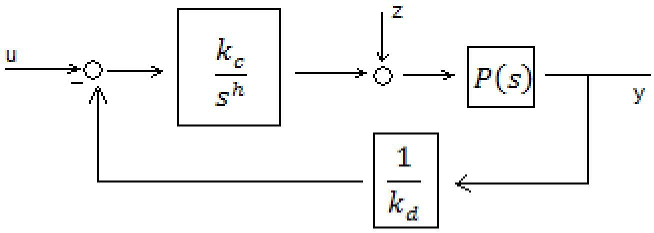
Esercizi

Esame Gennaio 2002

Dati del problema:



$$P(s) = \frac{1000 \cdot \left(\frac{s}{170} + 1\right)}{s^2 + 50s + 2500} \qquad k_d = 3 \qquad e = u(t) = 2t < 0{,}45$$

Soluzione:

Mi ricavo k_p che sarebbe il guadagno (lineare) di P(s) cioè devo fare il limite per s che tende a zero.

$$k_p = \frac{2}{5}$$

Ora considero il tipo di errore, è una funzione a rampa, perciò consultando la seguente tabella:

	Ingresso		
Tipo	0 - Gradino	1 - Rampa	2 - Parabola
0	$\frac{k_d^2}{k_d + k_G}$	∞	∞
1	0	$\frac{k_d^2}{k_G}$	∞
2	0	0	$\frac{k_d^2}{k_G}$

Posso determinare che si tratta del tipo 1.

Calcolo di h:

Siccome è di tipo n (nel nostro caso 1) allora serviranno n integratori. Ogni polo nell'origine è un integratore. Quindi dovrei aggiungere n poli nell'origine a $P(s)$ (tenendo conto però di quelli che già possiede).

Quindi posso schematizzare il calcolo così: $h = n - n'$

Dove n è il numero di poli nell'origine che dovrei aggiungere (equivale al numero del tipo di errore) e dove n' è il numero di poli nell'origine già presenti.

Nel nostro caso ho: $h = 1 - 0 = 1$

A questo punto prendo la formula corrispondente del caso trattato, la moltiplico per l'ingresso u (il coefficiente della rampa o del gradino o della parabola) e la pongo minore del limite dato dal problema.

$$\frac{k_d^2}{k_G} \cdot u \leq 0{,}45$$

Sapendo che:

$$k_G = k_p \cdot k_c$$

Ho che:

$$k_G = \frac{2}{5} \cdot k_c$$

Quindi ho:

$$\frac{3^2}{\frac{2}{5} \cdot k_c} \cdot 2 \leq 0{,}45 \quad \rightarrow \quad k_c \geq 100$$

Quindi mi sono calcolato il mio k_c.

Nel nostro caso il controllore $C(s)$ è pari a:

$$C(s) = \frac{k_c}{s^h} = \frac{100}{s}$$

Ho scelto un valore dell'intervallo di k_c, in particolare il minimo.

Tutto questo procedimento l'ho fatto senza contare il disturbo. Ora il problema mi dice che c'è un disturbo $z(t) = 2t$ e mi chiede di calcolare l'uscita a regime.

Pongo l'ingresso $u = 0$ e calcolo la F.d.T. (funzione di trasferimento) tra z e y.

Mi calcolo $y(s) = F.d.T. \cdot z(s)$

Quindi trasformo z da tempo a laplace $z(s) = \frac{2}{s^2}$

Per vedere quanto vale a regime faccio il limite a infinito:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot y(s) = 0{,}06$$

In realtà esistono due formule che costituiscono il limite già risolto:

Con poli nell'origine	Senza poli nell'origine
$\dfrac{1}{k_c \cdot \frac{1}{k_d}}$	$\dfrac{k_p}{1 + k_c k_p \cdot \frac{1}{k_d}}$

Nel nostro caso poiché gli abbiamo aggiunto un polo nell'origine (poiché $h = 1$) utilizzo la prima formula (non mi devo scordare di moltiplicarla per il coefficiente di z(t)):

$$y_z = \frac{1}{k_c \cdot \frac{1}{k_d}} \cdot 2 = \frac{1}{100 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 2 = 0{,}06$$

Quindi usando queste ultime due formule dirette non ho bisogno di trasformare z da tempo a laplace e di fare il limite.

Il problema poi mi chiede fino a che pulsazione l'arrivo di riproduzione di una sinusoide risulta < 0,3

In questo caso bisogna usare una formula ben determinata, che è la seguente:

$$\left|\frac{k_d}{1+F(j\omega)}\right| < e \;\rightarrow\; |F(j\omega)| > \frac{k_d}{e} \;\rightarrow\; |F(j\omega)| > \frac{3}{0{,}3} \;\rightarrow |F(j\omega)| > 10 \rightarrow\; |F(j\omega)| > 20dB$$

A questo punto traccio il grafico del modulo di Bode della funzione di trasferimento tra z e y (con $u = 0$). Vedo dove il modulo scende sotto i 20dB e mi vedo l'omega corrispondente a quel punto.

Alla fine quindi avrò che per $\omega < 1{,}2\ rad/sec$ la relazione è soddisfatta.

Altro esercizio

Il grafico è lo stesso del precedente.

Dati:

$$P(s) = \frac{8(4+s)}{s(s+20)} \qquad k_d = 10 \qquad e = u(t) = t \leq 0{,}2$$

Soluzione:

$$k_p = \frac{8}{5}$$

Mi calcolo h:

$$h = 1 - 1 = 0$$

infatti l'errore è di tipo 1 (rampa), quindi devo aggiungere un polo nell'origine, ma un polo nell'origine già era presente in $P(s)$.

$$e = \frac{k_d^2}{k_G} \cdot u \leq 0{,}2$$

$$k_G = k_p \cdot k_c \;\rightarrow\; k_G = \frac{8}{5} \cdot k_c$$

$$e = \frac{10^2}{\frac{8}{5} k_c} \cdot 1 \leq 0{,}2 \;\rightarrow\; k_c \geq 312{,}5$$

Introducendo un disturbo $z(t) = 4\delta_{-1}(t)$ (cioè un gradino, mentre la rampa può anche essere indicata come $\delta_{-2}(t)$ e la parabola $\delta_{-3}(t)$) calcolare k_c in modo tale che l'errore sia minore di 0,1

Avendo poli nell'origine uso la prima formula della tabella (moltiplicata per il coefficiente di z):

$$y_z = \frac{1}{k_c \cdot \frac{1}{k_d}} \cdot z = \frac{1}{k_c \cdot \frac{1}{10}} \cdot 4 \leq 0{,}1 \quad \rightarrow \quad k_c \geq 400$$