

$\theta_1 \neq \theta_2$, i due angoli non devono essere pari a metà passo. Spesso si pone uno dei due angoli pari a $2\pi/4n$, ossia, come si dice, si pongono le due maschere incrementali in quadratura.

Capitolo XIV

Una raccolta di esercizi svolti.

In questo Capitolo vengono presentati testi e svolgimenti relativi ad una selezione di esercizi riguardanti gli argomenti di maggior rilievo trattati in questo Testo, tenendo però conto che l'approccio non può essere esaustivo, e quindi non vengono presi in esame tutti gli argomenti.

Gli svolgimenti proposti sono un possibile esempio ragionato di come possano essere svolti gli esercizi, ed inoltre chiaramente la trattazione qui presentata risulta essere sovrabbondante rispetto alle reali necessità di svolgimento, in quanto detta trattazione vuole essere anche di ulteriore aiuto nella comprensione globale della materia; ad esempio, nello svolgimento degli esercizi riguardanti il tracciamento del luogo delle radici e dei diagrammi di Bode viene descritta minuziosamente la procedura, cosa che nello svolgimento da parte dell'allievo non è necessario fare.

Si tenga infine conto che questi esercizi sono stati in effetti dati, a suo tempo, all'esame scritto del Corso di Elementi di Automatica presso l'Università "Tor Vergata" di Roma.

Si consiglia di svolgere gli esercizi qui proposti quando la comprensione degli argomenti teorici proposti nel Testo risulta essere completa. Inoltre si suggerisce vivamente agli studenti di svolgere autonomamente gli esercizi, confrontando solo a posteriori il proprio svolgimento con quello riportato; a tale scopo infatti si sono separati i testi dalle soluzioni.

XIV.1 Testi degli esercizi.

Esercizio N° 1.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{k(s-1)^2(s+4)^2}{(s^2+2s+26)^2(s+2)(s+8)};$$

per detto sistema si disegni il luogo completo delle radici.

Esercizio N° 2.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{k(s+3)}{s(s+2)(s^2+6s+18)};$$

per detto sistema si disegni il luogo completo delle radici, e si applichi il criterio di Routh per l'analisi della stabilità a ciclo chiuso.

Esercizio N° 3.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = k \frac{(s+1)(s^2+6s+18)^2}{s(s^2+2s+5)^2};$$

per detto sistema si disegni il luogo completo delle radici.

Esercizio N° 4.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{k(s+1)^2}{(s^2-2s+26)(s+8)(s+10)^2};$$

per detto sistema si disegni il luogo completo delle radici.

Esercizio N° 5.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{(s+4)^2(s^2+2s+10)};$$

per detto sistema si disegni il luogo completo delle radici, e si applichi il criterio di Routh per l'analisi della stabilità a ciclo chiuso.

Esercizio N° 6.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{640s^2}{(s+0.5)^2(s^2+64)(s+10)};$$

per detto sistema si disegni il diagramma asintotico di Bode dei moduli e delle fasi.

Esercizio N° 7.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{64(4-s^2)}{s(s+0.5)(s+8)^2};$$

per detto sistema si disegni il diagramma asintotico di Bode dei moduli e delle fasi, e se ne valuti la stabilità a ciclo chiuso.

Esercizio N° 8.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{20480(s+0.4)}{s^2(s+2)(s+8)^2};$$

per detto sistema si disegni il diagramma asintotico di Bode dei moduli e delle fasi.

Esercizio N° 9.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{16(s+0.5)^2}{s(s^2+4)(s+4)^2};$$

per detto sistema si disegni il diagramma asintotico di Bode dei moduli e delle fasi.

Esercizio N° 10.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{64s(s-1)}{(s+0.5)(s^2-4)(s+4)};$$

per detto sistema si disegni il diagramma asintotico di Bode dei moduli e delle fasi.

Esercizio N° 11.

Dato il sistema dinamico:

$$F(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s};$$

scrivere per detto sistema una realizzazione in una qualsiasi forma canonica che risulti comunque sia controllabile che osservabile.

Esercizio N° 12.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{240}{(s+1)(s+2)(s+8)};$$

per detto sistema si progetti un compensatore tale che a ciclo chiuso si abbia errore a regime in corrispondenza ad un ingresso a gradino unitario non superiore a 0.02, con un margine di guadagno di circa 4 dB.

Esercizio N° 13.

Sia dato il sistema dinamico:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x},$$

avente condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$, ed ingresso $u(t) = 1$, per ogni t maggiore di zero; si calcoli il limite, per t tendente all'infinito, dell'uscita $y(t)$ di detto sistema.

Esercizio N° 14.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena aperta:

$$P(s) = \frac{s+2}{s(s-1)};$$

si progetti un compensatore che consenta al sistema compensato di dare una risposta indiciale a ciclo chiuso non sovraelongante, in corrispondenza ad un guadagno statico positivo.

Esercizio N° 15.

Sia dato il sistema dinamico:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x},$$

avente condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 0 \quad 1]^T$, ed ingresso $u(t)$ pari a zero nell'intervallo di tempo compreso tra zero e t_f .

Si calcoli per detto sistema il valore dell'uscita $y(t_f)$ in corrispondenza al tempo $t_f = 2$. Si valutino inoltre, dandone adeguata giustificazione, la stabilità e le proprietà strutturali del sistema.

Esercizio N° 16.

Dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$P(s) = \frac{24}{(s+4)(s^2-2s+17)}$$

si progetti una compensazione in grado di ottenere per il sistema compensato una risposta stabile a ciclo chiuso, approssimabile ad una del secondo ordine caratterizzata da $\zeta = 0.5$ ed $\omega_n = 2$.

Esercizio N° 17.

Sia dato il sistema dinamico:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \ 0] x;$$

si valuti se il sistema risulta essere stabile BIBO, e si valuti se, in corrispondenza ad un ingresso a gradino unitario e per condizioni iniziali nulle, l'uscita $y(t)$ risulta essere limitata. In caso affermativo, si determini un valore reale M per il quale $y(t) \leq M$ per ogni t maggiore di zero.

Esercizio N° 18.

Sia dato un servomeccanismo di posizione caratterizzato da:

- ☐ un attuatore di tipo elettromeccanico (motore elettrico in cc controllato sull'armatura), la cui trasfrenza, dopo aver ridotto la controreazione dovuta alla forza controelettromotrice, presenta guadagno unitario, polo elettrico in $s = -1$, e polo meccanico in $s = -25$;
- ☐ un sensore di posizione istantaneo con guadagno pari ad uno;
- ☐ una rete di correzione di tipo anticipatrice caratterizzata da guadagno pari a k , zero in $s = -2$, e polo in $s = -24$.

Si disegni il luogo delle radici per il sistema compensato, si valuti la stabilità del sistema al variare del parametro k , ed il massimo valore di detto guadagno in corrispondenza al quale il sistema complessivo a ciclo chiuso presenta risposta indiciale non sovraelungante.

Esercizio N° 19.

Sia dato il sistema dinamico:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_2(t) + \gamma u(t)$$

$$y(t) = \gamma x_1(t) + x_2(t);$$

si determini per quali valori del parametro reale γ il sistema risulta controllabile ed osservabile.

Esercizio N° 20.

Sia dato un sistema a controreazione unitaria caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+4)(s+6)};$$

impiegando, ove possibile, un procedimento non analitico, e facendo uso delle tecniche proprie del luogo delle radici, si trovi il valore del parametro k che consente di ottenere per il sistema a ciclo chiuso una coppia di poli complessi coniugati caratterizzati da $\zeta = 0.707$ ed $\omega_n = 1.972$, valutando inoltre la posizione del polo reale in corrispondenza a detto valore di k .

XIV.2 Svolgimento degli esercizi.

Soluzione dell'esercizio N° 1.

Si posizionano i poli e gli zeri del sistema sul piano complesso; dopo aver osservato che vi sono due asintoti, ed aver calcolato il baricentro $\sigma_b = -4$, che risulta essere l'unico parametro significativo necessario da calcolare, si procede al tracciamento del luogo delle radici, che viene riportato in figura XIV.1.

Relativamente all'asse reale si ha:

- ☐ luogo negativo a destra del doppio zero in $s = +1$;
- ☐ luogo negativo tra il polo in $s = -2$ ed il doppio zero in $s = +1$;
- ☐ luogo positivo tra il doppio zero in $s = -4$ ed il polo in $s = -2$;
- ☐ luogo positivo tra il polo in $s = -8$ ed il doppio zero in $s = -4$;

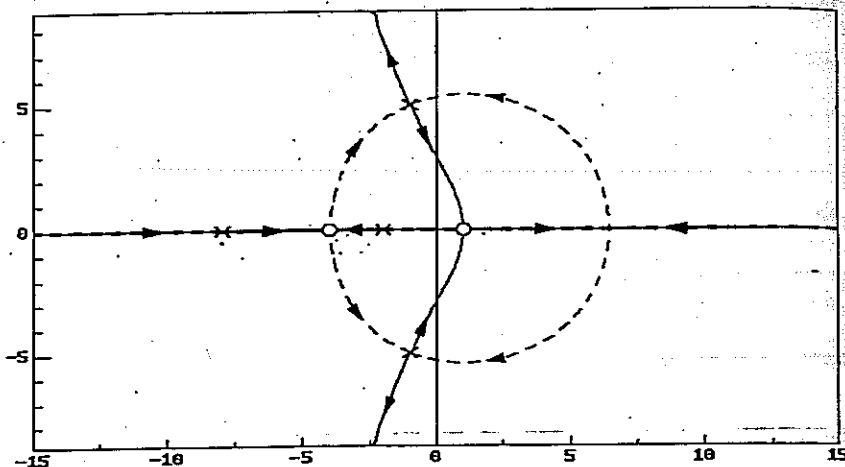


Figura XIV.1

□ luogo negativo a sinistra del polo in $s = -8$.

Si osservi che l'asse reale è asintoto del luogo negativo, e quindi secondo detto asse tendono a più e meno infinito due rami del luogo negativo.

Fermo restando che i punti multipli sono anche punti singolari nei quali si incrociano rami di segno opposto, si osservi che si ha senz'altro un punto singolare del luogo negativo a destra del doppio zero in $s = +1$.

Relativamente alla costruzione del resto del luogo si ha:

- dalla doppia coppia di poli complessi coniugati in $s = -1 \pm j5$ partono due rami del luogo positivo diretti verso gli zeri all'infinito secondo gli asintoti verticali;
- dalla doppia coppia di poli complessi coniugati partono altri due rami del luogo positivo diretti verso il punto singolare costituito dal doppio zero in $s = +1$;
- dal punto singolare sull'asse reale a destra del doppio zero in $s = +1$ partono due rami del luogo negativo diretti verso la doppia coppia di poli complessi coniugati in $s = -1 \pm j5$;
- altri due rami del luogo negativo partono dal doppio zero in $s = +1$ diretti verso la suddetta doppia coppia di poli complessi coniugati.

Si osservi che nei punti singolari dati dalla doppia coppia di poli complessi coniugati i rami del luogo positivo e quelli del luogo negativo si intersecano a 90° , mentre i rami che escono, ovvero entrano, sull'asse reale sono ortogonali rispetto a detto asse.

Dall'esame del luogo ottenuto si ritiene che non vi siano possibili ambiguità di tracciamento, e quindi si considera concluso l'esercizio, senza necessità di ulteriori approfondimenti allo scopo di ottenere un tracciamento corretto.

Soluzione dell'esercizio N° 2.

Ai fini dell'analisi della stabilità del sistema a ciclo chiuso mediante l'applicazione del criterio di Routh, si costruisce la relativa tabella a partire dall'equazione caratteristica del sistema:

$$Q(s, k) = s^4 + 8s^3 + 30s^2 + (k + 36)s + 3k = 0,$$

da cui:

4	1	30	3k
3	8	k + 36	
2	204 - k	24k	
1	$-k^2 - 24k + 7344$		
0	3k		

dalla quale, tenendo conto dei vincoli imposti dalla condizione necessaria,

$$k > -36, \quad k > 0,$$

e di quelli che si ottengono dalla condizione sufficiente:

$$k < 204, \quad -99.5 < k < 74.53, \quad k > 0,$$

si ottiene per l'intervallo di valori di k per la stabilità $0 < k < 74.53$.

Si osservi che si è preferito trattare subito l'esame della stabilità con il criterio di Routh, in quanto dall'esame della tabella si possono trarre utili informazioni per la costruzione del luogo delle radici.

Si posizionano i poli e gli zeri del sistema sul piano complesso, e dopo aver osservato che vi sono tre asintoti, ed aver calcolato il baricentro $\sigma_b = -1.666$, che risulta essere l'unico parametro significativo necessario da calcolare, si procede al tracciamento del luogo delle radici, che viene riportato in figura XIV.2.

Relativamente all'asse reale si ha:

- luogo negativo a destra del polo nell'origine;
- luogo positivo tra il polo in $s = -2$ ed il polo nell'origine;
- luogo negativo tra lo zero in $s = -3$ ed il polo in $s = -2$;
- luogo positivo a sinistra dello zero in $s = -3$.

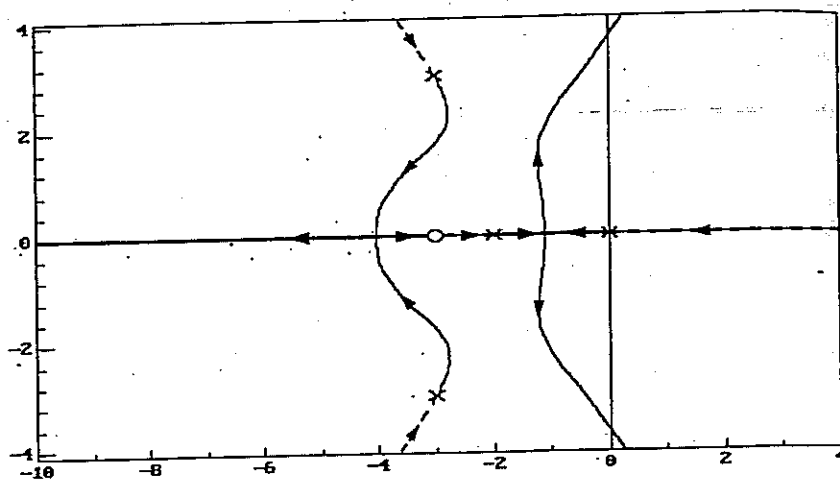


Figura XIV.2

Si osservi che il semiasse reale positivo è asintoto del luogo negativo, e quindi secondo detto semiasse tende a più infinito un ramo del luogo negativo, mentre il semiasse reale negativo è asintoto del luogo positivo, e quindi secondo detto semiasse tende a meno infinito un ramo del luogo positivo.

Si osservi che si ha senz'altro un punto singolare del luogo positivo tra il polo in $s = -2$ ed il polo nell'origine, ed un altro punto singolare del luogo positivo tra lo zero in $s = -3$ e meno infinito.

Relativamente alla costruzione del resto del luogo si ha:

- dalla coppia di poli complessi coniugati in $s = -3 \pm j3$ partono due rami del luogo positivo diretti verso il punto singolare posizionato tra lo zero in $s = -3$ e meno infinito;
- due rami del luogo negativo provengono dagli zeri all'infinito secondo gli asintoti diretti verso la coppia di poli complessi coniugati in $s = -3 \pm j3$;
- dal punto singolare sull'asse reale posizionato tra il polo in $s = -2$ ed il polo nell'origine partono due rami del luogo positivo diretti agli zeri all'infinito secondo gli asintoti.

Si ricordi che i rami che escono ovvero entrano sull'asse reale sono ortogonali rispetto a detto asse.

Si osservi che potrebbe nascere un'ambiguità nel tracciamento impiegando le sole regole qualitative e senza adottare verifiche quantitative, ottenendo il

luogo riportato in figura XIV.3, tracciato, per semplicità, relativamente ai soli valori positivi di k .

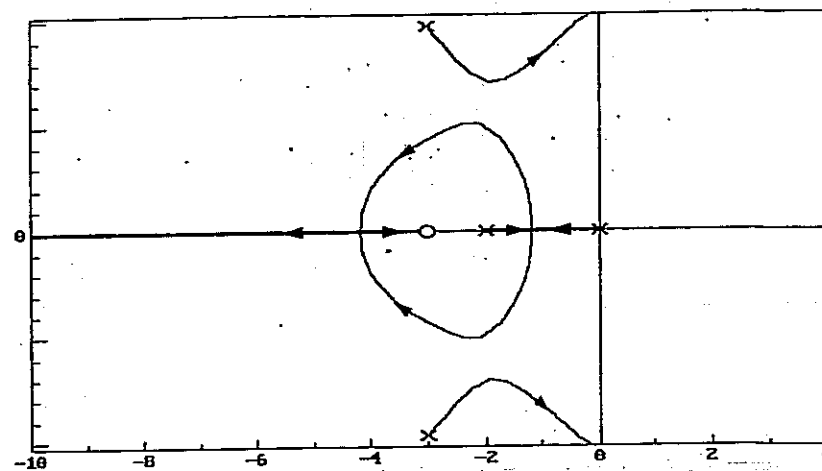


Figura XIV.3

Per valutare quale dei due è quello corretto, alla luce del confronto, tra i due luoghi, quello esatto e quello errato, si può osservare che il calcolo degli angoli di ingresso e di uscita del luogo dalla coppia di poli complessi coniugati non dovrebbe dare informazioni adeguate per dirimere detta ambiguità.

Si potrebbe pensare, in alternativa, all'impiego di una traslazione dell'asse immaginario allo scopo di evidenziare eventuali particolari attraversamenti relativamente all'asse traslato.

Traslando infatti l'asse immaginario in $s = -2.5$, si otterrebbe, nel primo caso una sola intersezione del luogo con l'asse traslato in corrispondenza dell'asse reale, mentre nel secondo caso dovrebbero essere contemporaneamente presenti cinque intersezioni, due coppie complesse coniugate relativamente a valori positivi di k , ed una reale relativamente a valori negativi di k .

Effettuando la suddetta traslazione, l'equazione caratteristica del luogo in oggetto diventa:

$$Q(s, k)|_{s=-2.5} = x^4 - 2x^3 + 7.5x^2 + (k - 26.5)x + 0.5k + 11.5625 = 0;$$

costruendo poi la tabella di Routh si ha:

4	1	7.5	$0.5k + 11.5625$
3	-2	$k - 26.5$	
2	$11.5 - k$	$-k - 23.125$	
1	$-k^2 + 36k - 351$		
0	$-k - 23.125$		

e si trova che:

- ☐ la condizione che si ricava dalla riga di ordine due risulta accettabile in quanto relativa ad una coppia di radici complesse coniugate per la variabile traslata x ottenuta in corrispondenza a valori positivi di k ;
- ☐ le radici relative al parametro k ottenute dalla riga di ordine uno sono complesse coniugate, quindi inaccettabili in quanto k deve appartenere all'insieme dei numeri reali;
- ☐ infine la condizione relativa alla riga di ordine zero risulta accettabile in quanto riguarda un valore negativo di k , dando luogo per la variabile traslata x ad una radice reale.

Si osservi che la condizione necessaria non viene rispettata, ma questo fatto risulta logico in quanto vi sono sempre rami del luogo a destra dell'asse traslato.

Non essendo verificata contemporaneamente la presenza di due coppie di intersezioni del luogo positivo ed una del luogo negativo, il tracciamento alternativo riportato in figura XIV.3 deve essere scartato.

A conclusione si osservi che comunque ambedue i luoghi portano allo stesso comportamento nei confronti della stabilità; la risoluzione della ambiguità presente è pertanto legata al solo scopo di ottenere un tracciamento esatto.

Soluzione dell'esercizio N° 3.

Si posizionano i poli e gli zeri del sistema sul piano complesso; dopo aver osservato che non vi sono asintoti, si procede al tracciamento del luogo delle radici, che viene riportato in figura XIV.4.

Relativamente all'asse reale si ha:

- ☐ luogo negativo a destra del polo nell'origine;
- ☐ luogo positivo tra lo zero in $s = -1$ ed il polo nell'origine;
- ☐ luogo negativo a sinistra dello zero in $s = -1$.

Si osservi che, poiché non vi sono zeri all'infinito, il luogo negativo che parte dallo zero in $s = -1$ tende al polo nell'origine andando secondo il semiasse reale negativo all'infinito e tornando dall'infinito secondo il semiasse reale positivo; risulta inoltre possibile dimostrare che per funzioni di trasferimento a ciclo

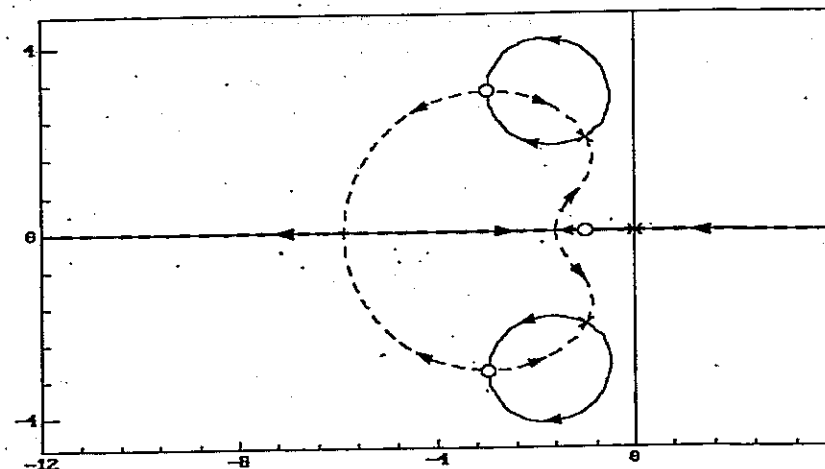


Figura XIV.4

aperto aventi denominatori monici, il valore del parametro k in corrispondenza al quale la variabile s va all'infinito vale meno uno.

Si osservi che è ragionevole pensare che vi siano due punti singolari del luogo negativo tra lo zero in $s = -1$ e meno infinito; si ricordi che in effetti non vi sono zeri all'infinito, e pertanto i due punti singolari sono posizionati tra lo zero in $s = -1$ ed il polo nell'origine, passando per l'infinito,

Relativamente alla costruzione del resto del luogo si ha:

- ☐ dalla doppia coppia di poli complessi coniugati in $s = -1 \pm j2$ partono due coppie di rami del luogo positivo dirette verso la doppia coppia di zeri complessi coniugati in $s = -3 \pm j3$;
- ☐ dalla doppia coppia di zeri complessi coniugati in $s = -3 \pm j3$ partono due coppie di rami del luogo negativo dirette, l'una verso la doppia coppia di poli complessi coniugati in $s = -1 \pm j2$ e l'altra verso il punto singolare più a sinistra sul semiasse reale negativo;
- ☐ dall'altro punto singolare sul semiasse reale negativo partono due rami del luogo negativo diretti verso la doppia coppia di poli complessi coniugati in $s = -1 \pm j2$.

Si osservi che nei punti singolari dati dalla doppia coppia di poli complessi coniugati e dalla doppia coppia di zeri complessi coniugati, i rami del luogo positivo e quelli del luogo negativo si intersecano a 90° , mentre i rami che escono ovvero entrano sull'asse reale sono ortogonali rispetto a detto asse.

Dall'esame del luogo ottenuto si potrebbe ritenere che vi possano essere situazioni di ambiguità di tracciamento, ad esempio chiudendo il luogo negativo tre le due doppie coppie di poli e zeri, senza che vi siano perciò punti singolari sull'asse reale; applicando però la formula per il calcolo dei punti singolari, si trova che essi in effetti sono presenti in numero di due, come peraltro indicati in precedenza per via qualitativa, posizionati in $s = -1.59$ con guadagno $k = -0.42$, ed in $s = -5.89$ con guadagno $k = -3.12$.

Soluzione dell'esercizio N° 4.

Si posizionano i poli e gli zeri del sistema sul piano complesso; dopo aver osservato che vi sono tre asintoti, ed aver calcolato il baricentro $\sigma_b = -8$, che risulta essere l'unico parametro significativo necessario da calcolare, si procede al tracciamento del luogo delle radici, che viene riportato in figura XIV.5.

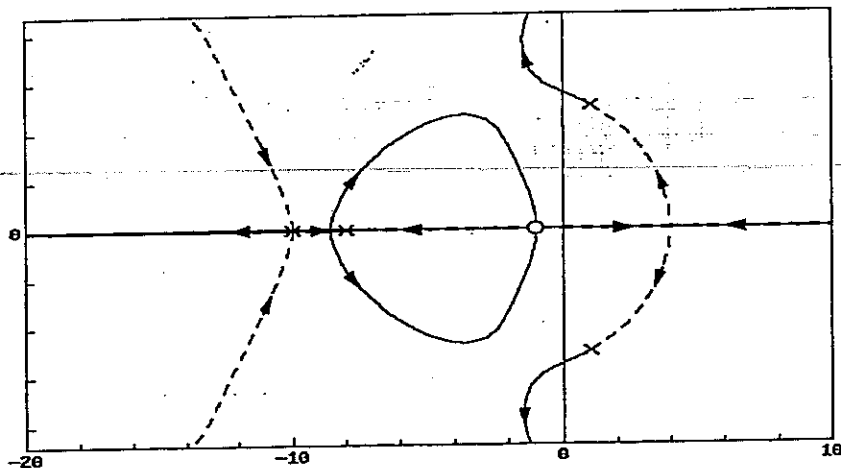


Figura XIV.5

Relativamente all'asse reale si ha:

- ☐ luogo negativo a destra del doppio zero in $s = -1$;
- ☐ luogo negativo tra il polo in $s = -8$ ed il doppio zero in $s = -1$;
- ☐ luogo positivo tra il doppio polo in $s = -10$ ed il polo in $s = -8$;
- ☐ luogo positivo a sinistra del doppio polo in $s = -10$.

Si osservi che il semiasse reale positivo è asintoto del luogo negativo, e quindi secondo detto semiasse tende a più infinito un ramo del luogo negativo, mentre il semiasse reale negativo è asintoto del luogo positivo, e quindi secondo detto semiasse tende a meno infinito un ramo del luogo positivo.

Fermo restando che i punti multipli sono anche punti singolari nei quali si incrociano rami di segno opposto, si osservi che si ha senz'altro un punto singolare del luogo negativo a destra del doppio zero in $s = -1$ ed un punto singolare del luogo positivo tra il doppio polo in $s = -10$ ed il polo in $s = -8$.

Relativamente alla costruzione del resto del luogo si ha:

- ☐ dalla coppia di poli complessi coniugati in $s = +1 \pm j5$ partono due rami del luogo positivo diretti verso gli zeri all'infinito secondo gli asintoti;
- ☐ dal punto singolare posizionato sull'asse reale a destra del doppio zero in $s = -1$ partono due rami del luogo negativo diretti verso la coppia di poli complessi coniugati in $s = +1 \pm j5$;
- ☐ dal punto singolare sull'asse reale tra il doppio polo in $s = -10$ ed il polo in $s = -8$ partono due rami del luogo positivo diretti verso la coppia di zeri in $s = -1$;
- ☐ altri due rami del luogo negativo provengono dall'infinito secondo gli asintoti diretti verso il punto singolare costituito dal doppio polo in $s = -10$.

Si osservi che potrebbe nascere una ambiguità nel tracciamento qualitativo e senza verifiche quantitative, ottenendo il luogo riportato in figura XIV.6.

In effetti, alla luce dei due luoghi tracciati, quello esatto e quello errato, non vi sono mezzi semplici per poter capire quale dei due è corretto, in quanto sia l'attraversamento dell'asse immaginario, sia il calcolo degli angoli di partenza e di arrivo dalla coppia di poli complessi coniugati, che infine l'impiego di una traslazione dell'asse immaginario per evidenziare eventuali particolari attraversamenti relativamente all'asse traslato, non portano a conclusioni certe. Questo è quindi il caso in cui il tracciamento esatto può essere ottenuto solo con l'impiego di un calcolatore per poter calcolare quantitativamente almeno alcuni punti del luogo. Si osservi infine che comunque ambedue i luoghi portano allo stesso comportamento nei confronti della stabilità; la risoluzione della ambiguità presente è pertanto legata al solo scopo di ottenere un tracciamento esatto.

Soluzione dell'esercizio N° 5.

Ai fini dell'analisi della stabilità del sistema a ciclo chiuso mediante l'applicazione del criterio di Routh, si costruisce la relativa tabella a partire dall'equazione caratteristica del sistema:

$$Q(s, k) = s^4 + 10s^3 + 42s^2 + (k + 112)s + 2k + 160 = 0,$$

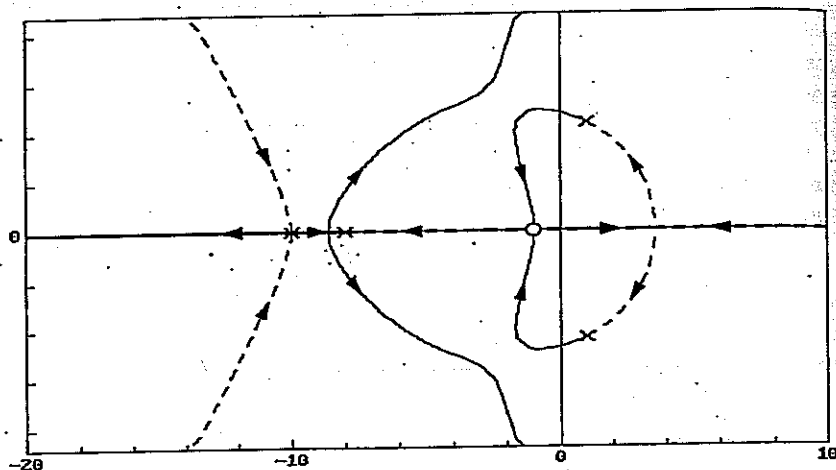


Figura XIV.6

da cui:

4	1	42	$2k + 160$
3	10	$k + 112$	
2	$308 - k$	$20k + 1600$	
1	$-k^2 - 4k + 18496$		
0	$2k + 160$		

dalla quale, tenendo conto dei vincoli imposti dalla condizione necessaria,

$$k > -112, \quad k > -80,$$

e di quelli che si ottengono dalla condizione sufficiente:

$$k < 308, \quad -138.014 < k < 134.014, \quad k > -80,$$

si ottiene per l'intervallo di valori di k per la stabilità $-80 < k < 134.014$.

Si osservi che si è preferito trattare subito l'esame dalla stabilità con il criterio di Routh, in quanto dall'esame della tabella si possono trarre utili informazioni per la costruzione del luogo delle radici

Si posizionano i poli e gli zeri del sistema sul piano complesso; dopo aver osservato che vi sono tre asintoti, ed aver calcolato il baricentro $\sigma_b = -2.666$, che risulta essere l'unico parametro significativo necessario da calcolare, si procede al tracciamento del luogo delle radici, che viene riportato in figura XIV.7.

Relativamente all'asse reale si ha:

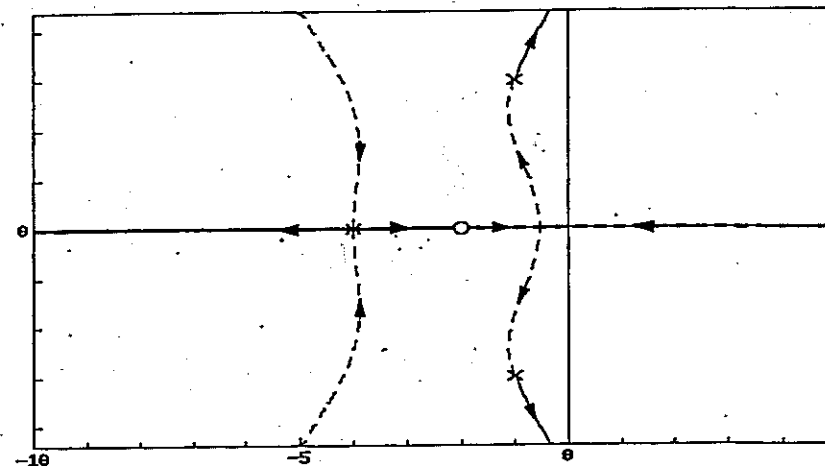


Figura XIV.7

- ☐ luogo negativo a destra dello zero in $s = -2$;
- ☐ luogo positivo tra il doppio polo in $s = -4$ e lo zero in $s = -2$;
- ☐ luogo positivo a sinistra del doppio polo in $s = -4$.

Si osservi che il semiasse reale positivo è asintoto del luogo negativo, e quindi secondo detto semiasse tende a più infinito un ramo del luogo negativo, mentre il semiasse reale negativo è asintoto del luogo positivo, e quindi secondo detto semiasse tende a meno infinito un ramo del luogo positivo.

Si osservi che si ha senz'altro un punto singolare del luogo negativo a destra dello zero in $s = -2$, posizionato però comunque nel semiasse reale negativo; questa considerazione nasce dai risultati che si hanno applicando il criterio di Routh, in quanto il k_L negativo si ha in corrispondenza ad un attraversamento sull'asse reale.

Relativamente alla costruzione del resto del luogo si ha:

- ☐ dalla coppia di poli complessi coniugati in $s = -1 \pm j3$ partono due rami del luogo positivo diretti, secondo gli asintoti verso gli zeri all'infinito;
- ☐ alla coppia di poli complessi coniugati in $s = -1 \pm j3$ giungono due rami del luogo negativo provenienti dal punto singolare posizionato a destra dello zero in $s = -2$;

- due rami del luogo negativo provengono dagli zeri all'infinito secondo gli asintoti diretti verso la coppia di poli complessi coniugati in $s = -4$, che costituisce anche punto singolare.

Si ricordi che i rami che escono ovvero entrano sull'asse reale sono ortogonali rispetto a detto asse.

Si osservi che potrebbe nascere una ambiguità nel tracciamento del luogo, analoga a quella riportata nella soluzione dell'esercizio N° 4. Si lascia al lettore interessato il compito di ripetere, adattandolo al caso in oggetto, il procedimento visto in precedenza nella soluzione dell'esercizio N° 4.

Soluzione dell'esercizio N° 6.

Si traccia il diagramma di Bode, dopo aver calcolato il valore del guadagno statico che risulta essere pari a $K = 4$.

Per quanto attiene al diagramma dei moduli:

- si traccia il diagramma relativo al doppio zero nell'origine, tenendo conto del guadagno statico precedentemente calcolato, mediante una retta con pendenza pari a $+40$ dB/dec per il punto di ordinata pari a 12 dB e pulsazione pari a 1 rad s^{-1} , come se il polo doppio in $s = 0.5$ non esistesse;
- in corrispondenza al punto di rottura relativo al doppio polo in $s = -0.5$ la pendenza del diagramma diventa pari a 0 dB/dec fino alla coppia di poli immaginari;
- in corrispondenza alla pulsazione di risonanza relativa alla coppia di poli immaginari il diagramma dei moduli va all'infinito;
- tra la pulsazione di risonanza relativa alla coppia di poli immaginari ed il punto di rottura relativo al polo in $s = -10$ la pendenza del diagramma diventa pari a -40 dB/dec;
- dopo il punto di rottura relativo al polo in $s = -10$ la pendenza diventa pari a -60 dB/dec.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi sia ha:

- la fase iniziale vale $+180^\circ$ fino ad una pulsazione pari a 0.05 rad s^{-1} ;
- tra 0.05 rad s^{-1} ed 1 rad s^{-1} la pendenza del diagramma delle fasi vale $-90^\circ/\text{dec}$;
- tra 1 rad s^{-1} ed 5 rad s^{-1} la pendenza del diagramma delle fasi vale $-135^\circ/\text{dec}$;
- tra 5 rad s^{-1} ed 100 rad s^{-1} la pendenza del diagramma delle fasi vale $-45^\circ/\text{dec}$

- in corrispondenza alla pulsazione di risonanza relativa alla coppia di poli immaginari, pari a 8 rad s^{-1} il diagramma delle fasi ha una discontinuità pari a -180° ;
- per pulsazioni superiori a 100 rad s^{-1} il diagramma delle fasi ha andamento costante con valore pari a -270° .

Si ottiene in definitiva il diagramma di Bode riportato in figura XIV.8; per esigenze grafiche il diagramma delle fasi, a tratteggio in figura, viene riportato in modo esatto e non in modo approssimato.

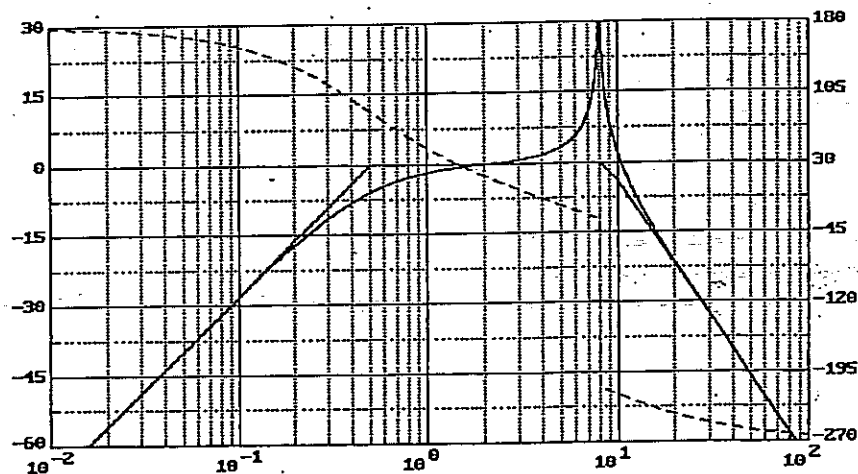


Figura XIV.8

Soluzione dell'esercizio N° 7.

Si traccia il diagramma di Bode, dopo aver calcolato il valore del guadagno statico che risulta essere pari a $K = 8$. Tenendo conto che l'unico punto critico presente nello svolgimento è dato dal segno meno davanti alla variabile di Laplace al numeratore, si riscrive il sistema nel seguente modo:

$$G(s) = \frac{-64(s^2 - 4)}{s(s + 0.5)(s + 8)^2}$$

Per quanto attiene al diagramma dei moduli:

- si traccia il diagramma relativo al polo nell'origine, tenendo conto del guadagno statico precedentemente calcolato, mediante una retta con pendenza pari a -20 dB/dec per il punto di ordinata pari a 18 dB e pulsazione pari a 1 rad s^{-1} , come se il polo in $s = -0.5$ non esistesse;
- in corrispondenza al punto di rottura relativo al polo in $s = -0.5$ la pendenza del diagramma diventa pari a -40 dB/dec fino alla coppia di zeri, l'uno a parte reale positiva e l'altro a parte reale negativa, con punto di rottura a 2 rad s^{-1} ;
- in corrispondenza alla pulsazione relativa al suddetto punto di rottura a 2 rad s^{-1} la pendenza del diagramma diventa nulla;
- dopo il punto di rottura relativo al polo doppio in $s = -8$ la pendenza diventa pari a -40 dB/dec.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi sia ha:

- la fase iniziale vale -90° fino ad una pulsazione pari a 0.05 rad s^{-1} ;
- tra 0.05 rad s^{-1} ed 0.8 rad s^{-1} la pendenza vale $-45^\circ/\text{dec}$;
- tra 0.8 rad s^{-1} ed 5 rad s^{-1} la pendenza del diagramma delle fasi vale $-135^\circ/\text{dec}$;
- si osservi che la coppia di zeri, l'uno a parte reale positiva e l'altro a parte reale negativa, con punto di rottura a 2 rad s^{-1} non danno contributo al diagramma delle fasi, in quanto i loro contributi di fase sono uguali ed opposti;
- tra 5 rad s^{-1} ed 80 rad s^{-1} la pendenza vale $-90^\circ/\text{dec}$;
- per pulsazioni superiori a 80 rad s^{-1} il diagramma delle fasi ha andamento costante con valore pari a -360° .

In figura XIV.9 è rappresentato il diagramma di Bode; per motivi grafici, il diagramma delle fasi, tratteggiato in figura, è stato tracciato in modo esatto.

Per quanto riguarda lo studio della stabilità, può convenire in questo caso impiegare il criterio di Routh; si ha la seguente equazione caratteristica, scritta direttamente considerando il guadagno effettivamente presente:

$$Q(s) = s^4 + 16.5s^3 + 71s^2 + 32s + 4 = 0,$$

da cui si ottiene la tabella di Routh:

4	1	8	256
3	16.5	32	
2	100	4224	
1	-66496		
0			

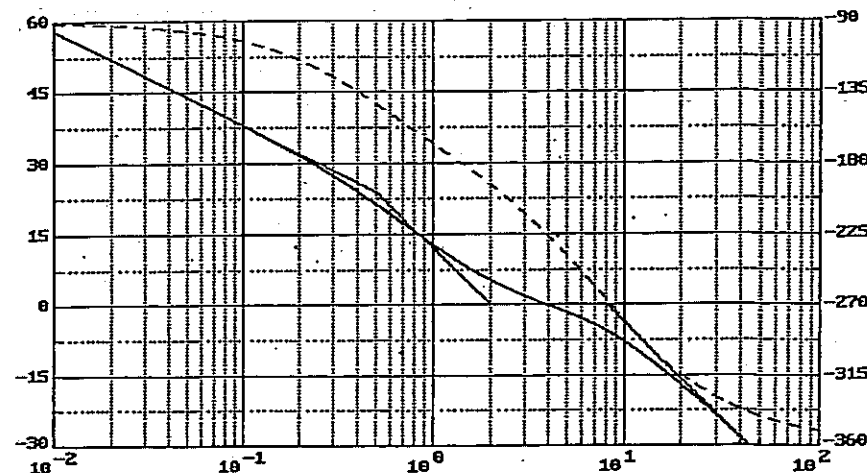


Figura XIV.9

trovando che il sistema risulta instabile a ciclo chiuso in corrispondenza al guadagno pari a 64 . Si osservi che il calcolo della tabella è stato arrestato al primo termine negativo trovato nel costruire la prima colonna.

In alternativa, per lo studio della stabilità, si può tracciare il diagramma di Nyquist a partire da quello di Bode già disegnato, ottenendo il diagramma riportato in figura XIV.10, dal quale, avendo tracciato anche il diagramma per le pulsazioni negative come peraltro fatto in figura XIV.10 ed effettuando le chiusure, si trova che il sistema a ciclo chiuso è instabile in quanto si contano due rotazioni in verso orario.

Soluzione dell'esercizio N° 8.

Si traccia il diagramma di Bode, dopo aver calcolato il valore del guadagno statico che risulta essere pari a $K = 64$.

Per quanto attiene al diagramma dei moduli:

- si traccia il diagramma relativo al doppio polo nell'origine, tenendo conto del guadagno statico precedentemente calcolato, mediante una retta con pendenza di -40 dB/dec per il punto di ordinata pari a 36 dB e pulsazione 1 rad s^{-1} , come se lo zero in $s = -0.4$ non esistesse;
- in corrispondenza al punto di rottura relativo allo zero in $s = -0.4$ la pendenza del diagramma diventa pari a -20 dB/dec fino al polo con punto di rottura a 2 rad s^{-1} ;

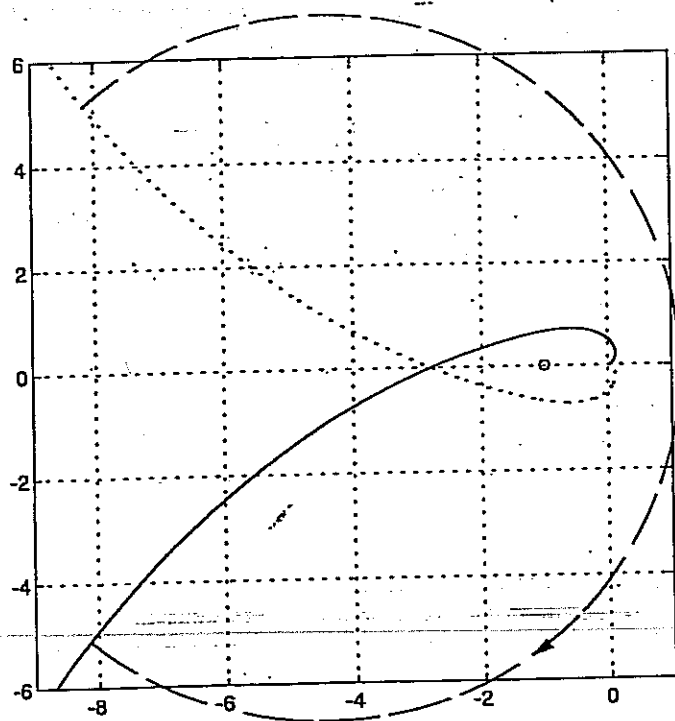


Figura XIV.10

- ☐ in corrispondenza alla pulsazione relativa al suddetto punto di rottura a 2 rad s^{-1} la pendenza del diagramma ritorna pari a -40 dB/dec ;
- ☐ dopo il punto di rottura relativo al polo doppio in $s = -8$ la pendenza diventa pari a -80 dB/dec .

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi sia ha:

- ☐ la fase iniziale vale -180° fino ad una pulsazione pari a 0.04 rad s^{-1} ;
- ☐ tra 0.04 rad s^{-1} ed 0.2 rad s^{-1} la pendenza vale $+45^\circ/\text{dec}$;
- ☐ tra 0.2 rad s^{-1} ed 0.8 rad s^{-1} la pendenza del diagramma delle fasi risulta nulla;
- ☐ tra 0.8 rad s^{-1} ed 4 rad s^{-1} la pendenza vale $-90^\circ/\text{dec}$;
- ☐ tra 4 rad s^{-1} ed 20 rad s^{-1} la pendenza vale $-135^\circ/\text{dec}$;

- ☐ tra 20 rad s^{-1} ed 80 rad s^{-1} la pendenza vale $-90^\circ/\text{dec}$;

- ☐ per pulsazioni superiori a 80 rad s^{-1} il diagramma delle fasi ha andamento costante con valore pari a -360° .

Si ottiene in definitiva il diagramma di Bode riportato in figura XIV.11; per esigenze grafiche il diagramma delle fasi viene riportato in modo esatto e non in modo approssimato.

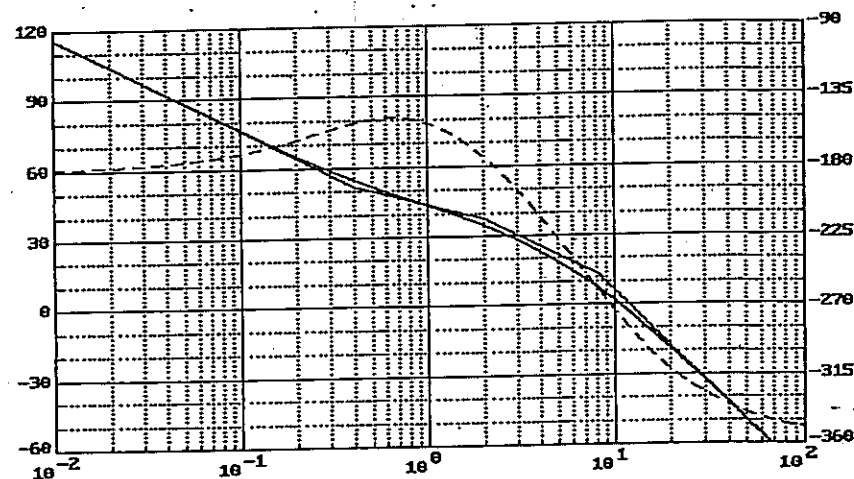


Figura XIV.11

Non viene riportato, in quanto non significativo, il diagramma di Nyquist relativo al sistema in oggetto, che pur non richiesto dal problema, poteva risultare utile per completezza espositiva; il sistema risulta infatti stabile in un intervallo del guadagno pari a $0 < k < 462.81$, mentre il guadagno del sistema vale $k = 20480$, e quindi il sistema risulta instabile. Questo fatto poteva comunque essere rilevato applicando il criterio di Bode, ed osservando che non sono definibili i margini di fase e di guadagno.

Soluzione dell'esercizio N° 9.

Si traccia il diagramma di Bode, dopo aver calcolato il valore del guadagno statico che risulta essere pari a $K = 0.0625$.

Per quanto attiene al diagramma dei moduli:

- ☐ si traccia il diagramma relativo al polo nell'origine, tenendo conto del guadagno statico precedentemente calcolato, mediante una retta con pendenza di -20

dB/dec per il punto di ordinata pari a -24 dB e pulsazione 1 rad s^{-1} , come se il doppio zero in $s = -0.5$ non esistesse;

- ☐ in corrispondenza al punto di rottura relativo al doppio zero in $s = -0.5$ la pendenza del diagramma diventa pari a $+20 \text{ dB/dec}$ fino alla pulsazione di risonanza della coppia di poli immaginari a 2 rad s^{-1} ;
- ☐ in corrispondenza alla pulsazione di risonanza della coppia di poli immaginari a 2 rad s^{-1} il diagramma dei moduli va all'infinito;
- ☐ tra la pulsazione di risonanza della coppia di poli immaginari a 2 rad s^{-1} e la coppia di poli in $s = -4$ la pendenza diventa pari a -20 dB/dec ;
- ☐ dopo il punto di rottura relativo al polo doppio in $s = -4$ la pendenza diventa pari a -60 dB/dec .

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi sia ha:

- ☐ la fase iniziale vale -90° fino ad una pulsazione pari a 0.05 rad s^{-1} ;
- ☐ tra 0.05 rad s^{-1} ed 0.4 rad s^{-1} la pendenza vale $+90^\circ/\text{dec}$;
- ☐ tra 0.4 rad s^{-1} ed 5 rad s^{-1} la pendenza risulta nulla;
- ☐ in corrispondenza alla pulsazione di risonanza relativa alla coppia di poli immaginari, pari a 2 rad s^{-1} il diagramma delle fasi ha una discontinuità pari a -180° ;
- ☐ tra 5 rad s^{-1} ed 40 rad s^{-1} la pendenza vale $-90^\circ/\text{dec}$;
- ☐ per pulsazioni superiori a 40 rad s^{-1} il diagramma delle fasi ha andamento costante con valore pari a -270° .

Si ottiene in definitiva il diagramma di Bode riportato in figura XIV.12; per esigenze grafiche il diagramma delle fasi viene riportato in modo esatto e non in modo approssimato.

Soluzione dell'esercizio N° 10.

Si traccia il diagramma di Bode, dopo aver calcolato il valore del guadagno statico che risulta essere pari a $K = 8$.

Per quanto attiene al diagramma dei moduli:

- ☐ si traccia il diagramma relativo allo zero nell'origine, tenendo conto del guadagno statico precedentemente calcolato, mediante una retta con pendenza di $+20 \text{ dB/dec}$ per il punto di ordinata pari a 18 dB e pulsazione 1 rad s^{-1} , come se il polo in $s = 0.5$ non esistesse;

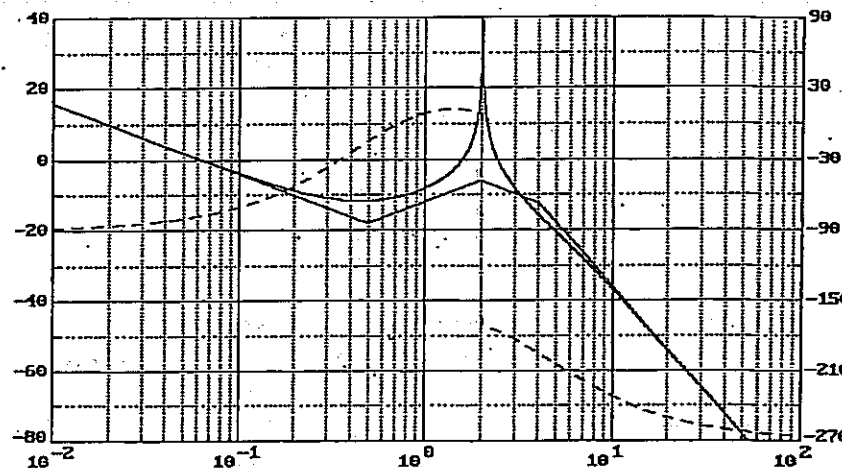


Figura XIV.12

- ☐ in corrispondenza al punto di rottura relativo al polo in $s = -0.5$ la pendenza del diagramma diventa pari a 0 dB/dec fino al punto di rottura rappresentato dallo zero a parte reale positiva in $s = +1$.
- ☐ fino alla coppia di poli, l'uno a parte reale positiva e l'altro a parte reale negativa, con punto di rottura pari a 2 rad s^{-1} la pendenza del diagramma diventa pari a 20 dB/dec ;
- ☐ in corrispondenza a detto punto di rottura e fino al punto di rottura del polo in $s = -4$ la pendenza del diagramma diventa pari a -20 dB/dec ;
- ☐ dopo il punto di rottura relativo al polo in $s = -4$ la pendenza diventa pari a -40 dB/dec .

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi sia ha:

- ☐ la fase iniziale vale $+90^\circ$ fino ad una pulsazione pari a 0.05 rad s^{-1} ;
- ☐ tra 0.05 rad s^{-1} e 0.1 rad s^{-1} la pendenza vale $-45^\circ/\text{dec}$;
- ☐ tra 0.1 rad s^{-1} ed 0.4 rad s^{-1} la pendenza vale $-90^\circ/\text{dec}$, in quanto lo zero a parte reale positiva contribuisce con una fase negativa, ed inoltre il contributo in fase della coppia di poli, l'uno a parte reale positiva e l'altro a parte reale negativa, con punto di rottura pari a 2 rad s^{-1} risulta nullo;
- ☐ tra 0.4 rad s^{-1} ed 5 rad s^{-1} la pendenza vale $-135^\circ/\text{dec}$;

- tra 5 rad s^{-1} ed 10 rad s^{-1} la pendenza vale $-90^\circ/\text{dec}$;
- tra 10 rad s^{-1} ed 40 rad s^{-1} la pendenza vale $-45^\circ/\text{dec}$;
- per pulsazioni superiori a 40 rad s^{-1} il diagramma delle fasi ha andamento costante con valore pari a -180° .

Si ottiene in definitiva il diagramma di Bode riportato in figura XIV.13; per esigenze grafiche il diagramma delle fasi, tratteggiato in figura, viene riportato in modo esatto e non in modo approssimato.

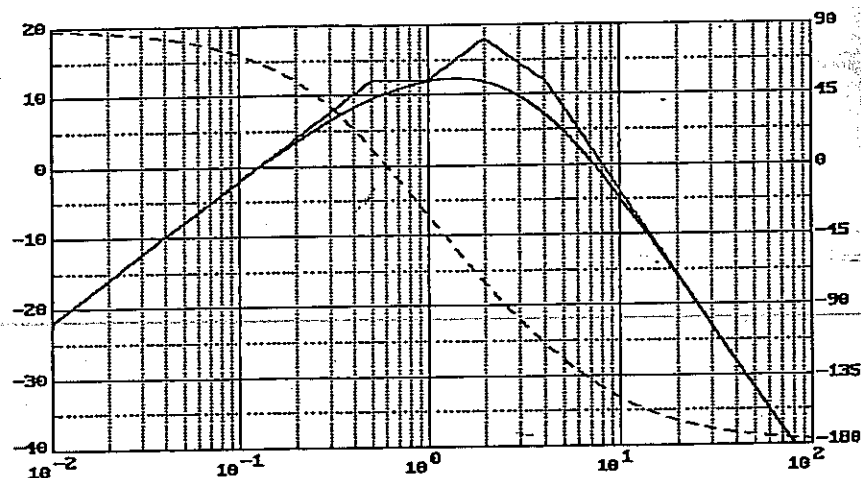


Figura XIV.13

Non viene riportato il diagramma di Nyquist relativo al sistema in oggetto, che pur non richiesto dall'esercizio, poteva risultare utile per completezza espositiva, in quanto non significativo; il sistema risulta infatti sempre instabile. Basterebbe infatti pensare al luogo delle radici relativo al sistema in oggetto ed osservare che esiste comunque un ramo del luogo positivo tra lo zero in $s = -1$ ed il polo in $s = -2$.

Soluzione dell'esercizio N° 11.

Questo esercizio richiede la realizzazione in una forma canonica, ad esempio quella di controllore, del sistema proposto; detta realizzazione risulta essere sicuramente controllabile, ma per quanto concerne la osservabilità si dovrebbe effettuare il test di Kalman, verificando che la matrice di osservabilità O sia di

rango pieno. Discorso analogo potrebbe essere fatto se si scegliesse la forma di osservatore, verificando che la matrice di osservabilità C sia di rango pieno. Se invece si scegliesse la forma diagonale, o di Jordan, sarebbero garantite sia la controllabilità che la osservabilità. Ma detta scelta impone che la funzione di partenza sia scritta in forma fattorizzata, almeno per il denominatore, per poter calcolare i residui. Questo calcolo in questo caso risulta oneroso a causa del grado del polinomio a denominatore.

In alternativa si può verificare che il sistema di partenza sia scritto in forma minima, e quindi una qualunque realizzazione risulterebbe essere sia controllabile che osservabile.

In effetti si ritiene in questo caso che questa sia la strada migliore, o quanto meno la più semplice, e a tale scopo si risolve il polinomio a numeratore trovando le due radici $s = -2$, e $s = -3$, e si verifica se esse siano radici anche del polinomio a denominatore. Si trova in effetti che $s = -2$ è anche radice del polinomio a denominatore e quindi, effettuate le semplificazioni, il sistema dinamico, scritto pertanto in forma minima, risulta pari a:

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3+5s^2+4s}.$$

Risulta banale a questo punto scrivere la realizzazione, ad esempio in forma canonica di controllore, che è sicuramente sia controllabile che osservabile. Si ottiene pertanto:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [3 \quad 1 \quad 0] x(t).$$

Soluzione dell'esercizio N° 12.

Come primo approccio al problema si può pensare di scegliere come compensatore un guadagno k tale da ottenere per il sistema errore a regime per ingresso a gradino unitario non superiore a 0.02, verificando poi che il sistema compensato ottenuto sia stabile a ciclo chiuso e che rispetti la specifica sul margine di guadagno.

Si calcola pertanto il guadagno statico del sistema K , ottenendo $K = 15$, ed applicando la formula che dà l'errore a regime per ingresso a gradino, si ottiene:

$$0.02 = \frac{1}{1+k \cdot 15},$$

da cui $k = 49/15$.

Il sistema compensato diventa pertanto:

$$C(s)G(s) = kG(s) = \frac{49}{15} \frac{240}{(s+1)(s+2)(s+8)},$$

e si deve poi verificare che esso sia stabile a ciclo chiuso e che rispetti la specifica sul margine di guadagno mediante l'impiego dei diagrammi di Bode. Si tenga però conto che il rispetto della specifica sul margine di guadagno assicura comunque la stabilità del sistema a ciclo chiuso.

In figura XIV.14, nella quale il diagramma delle fasi è tratteggiato e per esigenze grafiche tracciato solo in modo esatto, è riportato il diagramma di Bode del sistema compensato, e si può osservare che in corrispondenza alla pulsazione $\omega_{-\pi}$, si ha un modulo, letto sul diagramma asintotico, pari a circa 12 dB. Risulta quindi che il sistema è instabile, e si deve procedere in altro modo.

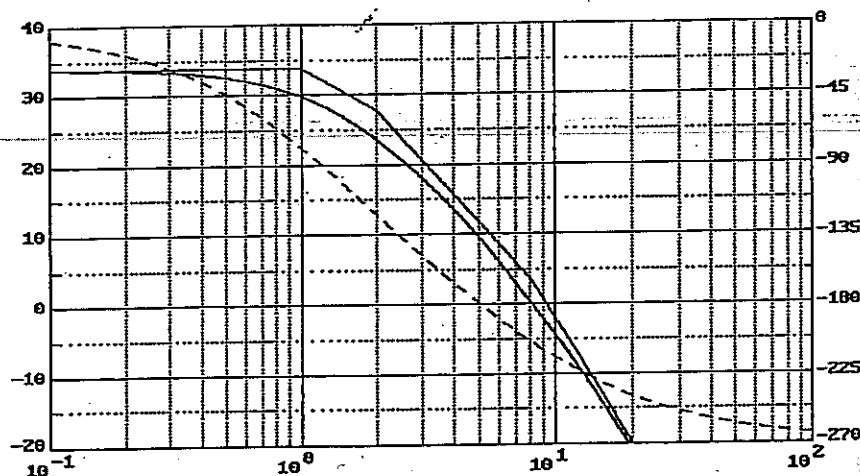


Figura XIV.14

Allo scopo di ottemperare sia alla specifica sull'errore a regime che a quella sul margine di guadagno, si potrebbe adottare come compensatore una rete composta da un guadagno k e da un polo nell'origine, in modo che l'errore a regime per ingresso a gradino risulti comunque nullo, e si può scegliere il guadagno, che risulta quindi essere un parametro libero, in modo da soddisfare la specifica sul margine di guadagno.

Scegliendo inizialmente, solo per semplicità, $k = 1$ si ha:

$$C(s)G(s) = \frac{240}{s(s+1)(s+2)(s+8)},$$

e tracciando il diagramma di Bode, riportato nella figura XIV.15, si valuta il valore del guadagno k tale da ottenere il margine di guadagno desiderato.

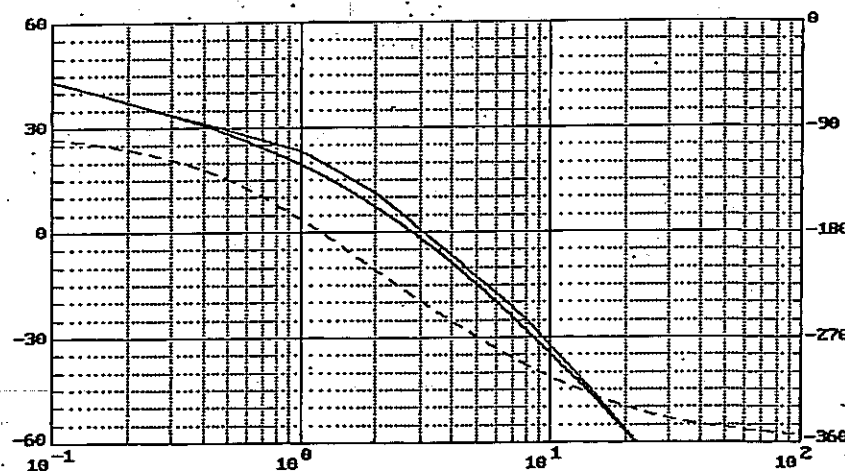


Figura XIV.15

Si trova, relativamente al diagramma asintotico, che risulta necessario attenuare di 24 dB per ottenere il margine voluto, e quindi si deve moltiplicare il guadagno del sistema, attualmente posto pari a 240, per 0.063, ottenendo pertanto un guadagno complessivo pari a 15.12.

In alternativa a quanto visto si potrebbe calcolare, relativamente al sistema compensato $C(s)G(s)$, il guadagno limite tramite l'applicazione del criterio di Routh. Si tenga conto che i risultati che si ottengono con questo procedimento possono differire abbastanza da quelli trovati col l'altro in quanto in precedenza si è impiegato un metodo grafico, ed inoltre il valore per k è stato trovato relativamente al diagramma asintotico dei moduli. Si ha:

$$Q(s, k) = s^4 + 11s^3 + 26s^2 + 16s + k = 0,$$

e quindi:

$$\begin{array}{c|cc} 4 & 1 & 26 \quad k \\ 3 & 11 & 16 \\ 2 & 270 & 11k \\ 1 & 4320 - 121k & \\ 0 & k & \end{array}$$

trovando per il guadagno limite un valore $k_L = 35.7$. Tenendo poi conto che si vuole un margine di guadagno pari a 4 dB, si trova il guadagno k necessario. Partendo infatti dal k_L trovato pari a 35.7, sottraendo 4 dB, ovvero moltiplicando per 0.63095, si ottiene un guadagno pari a 22.525.

Il valore per il guadagno pari a 15.12 trovato in precedenza sulla base del diagramma asintotico dei moduli, differisce abbastanza da quello calcolato per via analitica a causa delle pesanti approssimazioni introdotte dai diagrammi asintotici. Infatti, tenendo conto che in corrispondenza alla pulsazione ω_π il valore del modulo letto sul diagramma esatto dei moduli di figura XIV.15 vale circa 16.6 dB, tenendo conto della specifica e sottraendo quindi 20.6 dB, ovvero moltiplicando per 0.093325, si ottiene un valore pari a 22.39, in buon accordo con quello trovato per via analitica.

Soluzione dell'esercizio N° 13.

Per prima cosa si calcolano gli autovalori del sistema, ottenendo:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1),$$

e si può osservare, essendo gli autovalori tutti a parte reale strettamente negativa, che il sistema risulta asintoticamente stabile, e quindi, per t che tende all'infinito, si esaurisce il contributo dovuto alle condizioni iniziali; si può quindi calcolare il limite per t tendente all'infinito dell'uscita $y(t)$ a partire dal solo contributo dovuto al forzamento, ad esempio secondo il seguente procedimento.

Applicando il teorema del valore finale alla risposta del sistema $y(t)$ si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s)U(s),$$

da cui, essendo:

$$U(s) = \frac{1}{s}, \quad W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c(sI - A)^{-1}b,$$

e calcolando poi:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+s+1} & \frac{1}{s^2+s+1} & 0 \\ \frac{-1}{s^2+s+1} & \frac{s}{s^2+s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix},$$

si ottiene:

$$W(s) = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+s+1} \\ \frac{s}{s^2+s+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s+1}{s^2+s+1},$$

da cui:

$$sW(s)U(s) = s \frac{s+1}{s^2+s+1} \frac{1}{s},$$

ed effettuando il limite per s che tende a zero della precedente espressione, si trova che il limite per t che tende all'infinito di $y(t)$ vale uno.

Soluzione dell'esercizio N° 14.

La specifica riguardante il segno del guadagno statico impone che nel semipiano destro vi sia un numero pari di poli e/o zeri, ricordando peraltro che non è lecito effettuare delle cancellazioni nel semipiano destro. D'altronde è noto che se nel semipiano destro vi sono solo poli, è sufficiente posizionare nel semipiano sinistro un numero di zeri tale da avere eccesso poli-zeri pari ad uno, posizionando poi sempre nel semipiano sinistro altrettanti poli lontani al fine di garantire la realizzabilità fisica del compensatore, mentre se nel semipiano destro vi sono sia poli che zeri, non vi sono regole generali, ma si deve operare caso per caso.

Nel caso in esame si deve pertanto introdurre un ulteriore polo nel semipiano destro ed uno zero in quello sinistro, sia al fine di mantenere un eccesso poli-zeri pari ad uno, che al fine di rendere pari il numero di poli nel semipiano destro. Si noti che la rete introdotta non necessita di ulteriori poli lontani in quanto, avendo $n = m$, viene considerata fisicamente realizzabile.

La specifica riguardante la risposta indiciale non sovraelongante a ciclo chiuso, impone poi che i poli a ciclo chiuso siano tutti reali, oltreché stabili.

Se ad esempio si sceglie una rete del tipo:

$$C(s) = k \frac{s+2}{s-1},$$

si ottiene il luogo delle radici riportato in figura XIV.16, dalla quale si evince che risulta sufficiente calcolare un valore di k tale da trovarsi in corrispondenza al punto singolare situato nel semipiano sinistro.

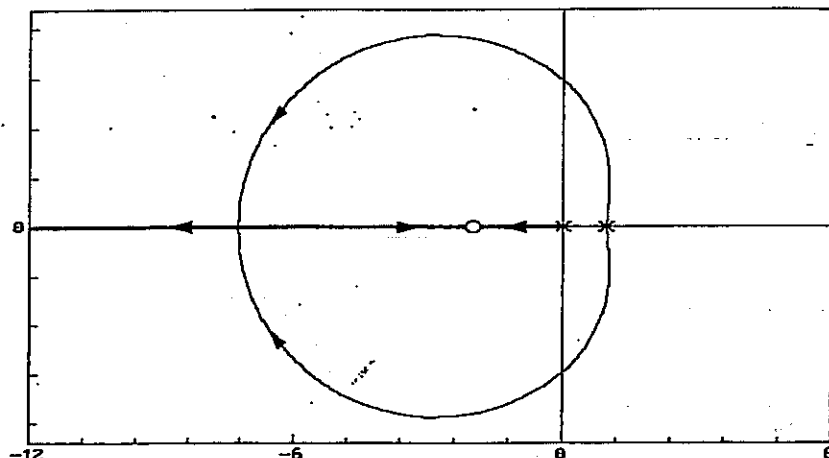


Figura XIV.16

Si osservi che la posizione del polo e dello zero della rete è stata scelta coincidente con quella del polo non nullo e dello zero del sistema, allo scopo di ottenere un calcolo agevole per i punti singolari, in quanto l'equazione che si ottiene rimane dello stesso grado di quella che si aveva senza il compensatore.

Calcolando i punti singolari si ottiene infatti:

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s+2} = 0,$$

da cui trovando le soluzioni, che risultano essere pari a $s = 0.275$ e a $s = -7.275$, e sostituendo quella negativa nella equazione caratteristica:

$$Q(s, k) = s(s-1)^2 + k(s+2)^2 = 0;$$

si ottiene infine $k = 17.9$.

Soluzione dell'esercizio N° 15.

Per calcolare il valore dell'uscita $y(t_f)$ in corrispondenza al tempo assegnato $t_f = 2$, si scrive l'espressione generale per l'uscita in condizioni di ingresso

nullo, calcolata appunto in corrispondenza al tempo t_f :

$$y(t_f) = ce^{At_f}x(0).$$

Per procedere nel calcolo si dovrebbe, a questo punto, calcolare l'esponentiale di matrice, passando attraverso la matrice diagonale A ed operando il cambiamento di base; ma si può notare che la matrice A è in effetti posta in forma canonica di Jordan, e che gli autovalori associati al blocco di Jordan di dimensione due sono pari a zero, mentre quello associato al blocco di dimensione uno è pari a meno uno, e quindi direttamente si ha:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix},$$

da cui, con semplici passaggi, si ottiene:

$$y(t_f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{-t_f} \end{bmatrix} = 1 + e^{-t_f} = 1 + e^{-2} \simeq 1.135.$$

Per quanto riguarda la stabilità si osserva immediatamente, data la struttura della matrice dinamica, che il sistema ha autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, con molteplicità algebrica pari a 2 e molteplicità geometrica pari a 1, e $\lambda_3 = -1$; pertanto il sistema risulta instabile.

Per quanto riguarda la controllabilità e la osservabilità, si può osservare che non è necessario passare attraverso il calcolo delle matrici di controllabilità e di osservabilità, in quanto il sistema è già posto in forma di Jordan, e quindi osservabile e controllabile.

Si ha pertanto che il sistema non risulta controllabile, in quanto la seconda componente del vettore di ingresso b che in effetti corrisponde all'ultima riga del blocco di Jordan relativo all'autovalore $\lambda = 0$, è nulla, ed anche risulta essere osservabile, in quanto le componenti del vettore di uscita c che corrispondono alle prime colonne dei due blocchi di Jordan sono non nulle.

Soluzione dell'esercizio N° 16.

Per progettare un compensatore in grado di ottemperare alle specifiche richieste si può operare mediante sintesi per assegnazione dei poli. Risulta ovvio che la sintesi diretta non può essere impiegata a causa della presenza della coppia di poli complessi coniugati a parte reale positiva. Risulta altrettanto ovvio che la sintesi per tentativi in s , pur corretta da un punto di vista metodologico, non risulta di semplice applicazione.

Risulta noto che il compensatore da progettare deve avere un numero di poli almeno pari a quello del sistema da compensare meno uno, e quindi nel caso

in esame devono avere due poli; per esso si assume una struttura del tipo:

$$C(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_0 + a_1 s + s^2}.$$

Si pone per il denominatore della $W(s)$ desiderata una struttura del tipo:

$$D_W(s) = (s^2 + 2s + 4)(s + 30)^3,$$

in cui si tiene conto delle specifiche richieste nel termine del secondo ordine, e si aggiungono poi tre poli lontani per ottenere complessivamente un numero di poli pari alla somma dei poli del sistema e del compensatore.

Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} D_W(s) &= D_P(s)D_C(s) + N_P(s)N_C(s) = \\ &= (s^2 + 2s + 4)(s + 30)^3 = \\ &= (s + 4)(s^2 - 2s + 17)(a_0 + a_1 s + s^2) + 24(b_0 + b_1 s + b_2 s^2), \end{aligned}$$

che dopo essere stata sviluppata, confrontando i termini omologhi, si giunge al seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{aligned} 2 + a_1 &= 92 \\ a_0 + 2a_1 + 9 &= 2884 \\ 24b_2 + 68 + 9a_1 + 2a_0 &= 32760 \\ 68a_1 + 9a_0 + 24b_1 &= 64800 \\ 68a_0 + 24b_0 &= 108000, \end{aligned}$$

che risolto dà luogo ai coefficienti cercati:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2695 \\ a_1 &= 90 \\ b_0 &= \frac{-18815}{6} \\ b_1 &= \frac{11475}{8} \\ b_2 &= \frac{6623}{6}. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio N° 17.

Per calcolare se il sistema risulta essere stabile BIBO si calcolano gli autovalori della matrice dinamica A ottenendo:

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & \lambda \end{bmatrix},$$

da cui:

$$\det(A - \lambda I) = s^2 + 4,$$

e pertanto si hanno due autovalori immaginari pari a $\pm j2$. Il sistema pertanto non risulta essere stabile BIBO.

Per valutare se l'uscita $y(t)$, in corrispondenza ad un ingresso a gradino unitario, e per condizioni iniziali nulle, risulta essere limitata, risulta sufficiente considerare che l'ingresso in oggetto non è una sinusoide del tipo $A \sin(2t + \varphi)$, ovvero con la pulsazione coincidente con la posizione della coppia di poli sull'asse immaginario, e quindi l'uscita risulta limitata.

Per valutare un valore reale M dal quale l'uscita $y(t)$ risulta sempre limitata, si calcola la funzione di trasferimento del sistema, ottenendo:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4} \begin{bmatrix} s & 2 \\ -2 & s \end{bmatrix},$$

da cui:

$$c(sI - A)^{-1}b = \frac{1}{s^2 + 4} \begin{bmatrix} s & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2 + 4}$$

e considerando che:

$$Y(s) = c(sI - A)^{-1}bU(s) = \frac{s}{s^2 + 4} \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4},$$

la cui antitrasformata di Laplace vale:

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin(2t),$$

si ottiene che il valore limitante M vale appunto $\frac{1}{2}$.

Soluzione dell'esercizio N° 18.

Il sistema compensato ha la seguente funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$F(s) = k \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 24)(s + 25)},$$

il luogo delle radici è riportato in figura XIV.17; si osservi che il luogo è stato tracciato per i soli valori positivi del guadagno k , tenendo conto che si sono tre asintoti il cui baricentro si trova in $\sigma_b = -16$.

Si osservi che tra lo zero in $s = -2$ ed il polo in $s = -24$ vi sono due punti singolari. Questa peculiarità poteva essere trovata applicando la formula per il calcolo dei punti singolari, ma essendo $n + m - 1 = 4$, il calcolo poteva risultare oneroso. In effetti, si può pensare, vista la lontananza tra la coppia di poli in $s = 0$ e $s = -1$ e quella in $s = -24$ e $s = -25$, di approssimare dette coppie di

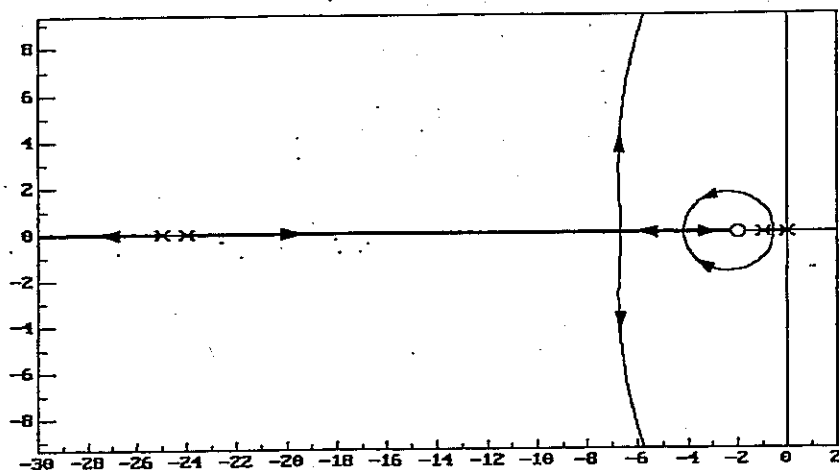


Figura XIV.17

poli distinti con coppie di poli coincidenti posizionate alla metà dell'intervallo, ottenendo un sistema approssimato $F'(s)$ dato da:

$$F'(s) = F(s) = k \frac{s+2}{(s+0.5)^2(s+24.5)^2}.$$

Relativamente a detto sistema si applica la formula per il calcolo dei punti singolari ottenendo:

$$\frac{2}{(s+0.5)} + \frac{2}{(s+24.5)} - \frac{1}{(s+2)} = 0,$$

che risolta porta a valori pari a $s = -4.5$ e $s = -6.5$.

Scrivendo l'equazione caratteristica $Q'(s, k)$ del sistema approssimato, e sostituendo in essa i valori della variabile s trovati con il calcolo dei punti singolari, si trovano i valori del guadagno k corrispondenti ad essi; alla luce del luogo tracciato, si osserva che il valore $s = -6.5$ comporta il massimo valore del guadagno per il quale si ha risposta indiciale a ciclo chiuso non sovraelongante. Si ha:

$$Q'(s, k) = s^4 + 50s^3 + 649.5s^2 + (0.5k + 612.5)s + 2k + 150 = 0,$$

che calcolata in $s = -6.5$ porta ad un valore per il guadagno pari a $k = 2592$.

Si osservi inoltre che l'eventuale approssimazione consistente nel trascurare i poli lontani sarebbe stata errata, in quanto cambiando notevolmente l'eccesso poli-zeri, non avrebbe portato ad alcun risultato accettabile.

Al solo scopo di verifica, sono stati calcolati, partendo dal sistema esatto, i punti singolari, con i relativi valori del guadagno, e si sono ottenute le seguenti coppie di valori s, k :

$$\begin{aligned} s &= -0.57, & k &= 98.11, \\ s &= -4.256, & k &= 2515, \\ s &= -6.66, & k &= 2572, \\ s &= -24.5, & k &= -6.39, \end{aligned}$$

con quest'ultima coppia appartenente al luogo negativo. Si può osservare che il valore ottenuto con la procedura approssimata è in ottimo accordo con i risultati esatti.

Per quanto riguarda l'analisi della stabilità a ciclo chiuso mediante il criterio di Routh, si scrive l'equazione caratteristica relativa al sistema non approssimato, ottenendo:

$$Q(s, k) = s^4 + 50s^3 + 649s^2 + (k + 600)s + 2k = 0,$$

da cui:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & & 1 & 649 & 2k \\ 3 & & 50 & k+600 & \\ 2 & & 31850-k & 100k & \\ 1 & -k^2+26250k+1911000 & & & \\ 0 & 2k & & & \end{array}$$

ottenendo per l'intervallo di valori di k per la stabilità $0 < k < 26959$.

Soluzione dell'esercizio N° 19.

Si scrivono, a partire dal sistema di equazioni differenziali, la matrice dinamica ed i vettori di ingresso e di uscita, ottenendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad c = [\gamma \quad 1 \quad 0].$$

Dall'esame delle matrici appena scritte, si può osservare che il sistema risulta controllabile per ogni $\gamma \neq 0$, in quanto, se si considera impresso l'ingresso $\bar{u}(t) = u(t)/\gamma$, il sistema può essere ricondotto alla forma canonica di controllore, e quindi controllabile per costruzione.

Per valutare la osservabilità, è necessario scrivere la matrice di osservabilità Z ottenendo:

$$Z = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}.$$

per cui calcolandone il determinante si ottiene:

$$\det(Z) = \gamma(\gamma^2 - 1);$$

risultando il sistema osservabile per $\gamma \neq 0$ e per $\gamma \neq \pm 1$.

In definitiva il sistema risulta essere controllabile ed osservabile per $\gamma \neq 0$ e per $\gamma \neq \pm 1$.

Soluzione dell'esercizio N° 20.

Si traccia il luogo delle radici del sistema in oggetto per i soli valori positivi di k , e relativamente al solo semipiano positivo per la parte immaginaria, come riportato in figura XIV.18.

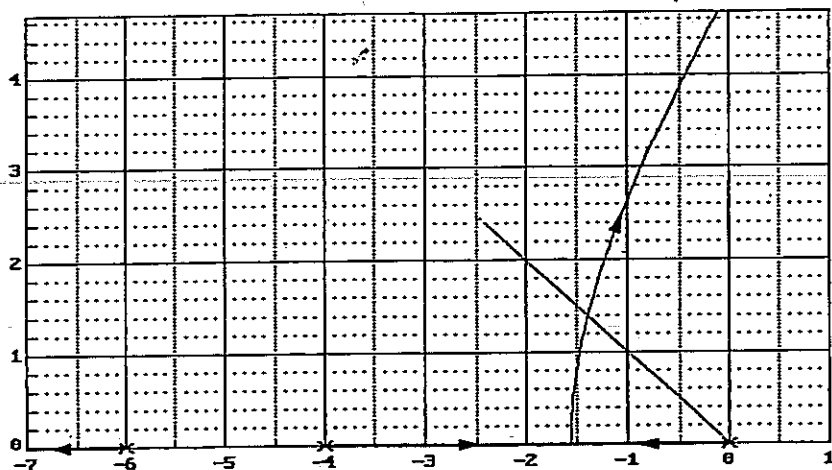


Figura XIV.18

Ricordando che per una coppia di poli complessi coniugati la parte reale è data dalla relazione $\sigma = -\zeta\omega_n$, si ottiene $\sigma = -1.3944$, che risulta anche uguale alla pulsazione di risonanza, tenendo conto del valore di ζ .

Si calcolano poi geometricamente le distanze dei poli a ciclo aperto dal polo complesso coniugato in oggetto e ricordando la regola dei moduli, si ottiene il valore cercato di k ; si ha:

$$k = 1.972 \cdot \sqrt{(-6 + 1.3944)^2 + 1.3944^2} \cdot \sqrt{(-4 + 1.3944)^2 + 1.3944^2} = 28.044.$$

Ricordando infine che la somma dei poli a ciclo aperto è pari alla somma dei poli a ciclo chiuso, si ottiene $-1.3944 - 1.3944 + p = -10$ da cui il polo reale si trova, per quel valore del guadagno, in $s = -7.21$.