Modellistica

Cos’è un modello
Caratteristiche dei modelli
Modelli matematici
Metodi formali
Esempi per sistemi semplici

Modelli di Processi

Descrizione o realizzazione di un fenomeno o di un oggetto, che
evidenzia alcuni aspetti di interesse

ESEMPI

Modello in scala
Modello analogico

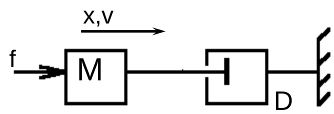
Astrazione ↓ Realismo ↑

Modello grafico
Modello matematico*

*** gli unici manipolabili con un calcolatore.**

ES1: Sistema Massa - Smorzatore

modello grafico

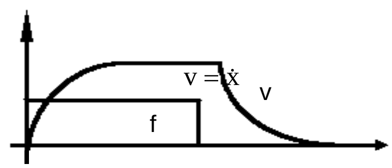


1° livello di astrazione

equazione

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}(f - vD)$$

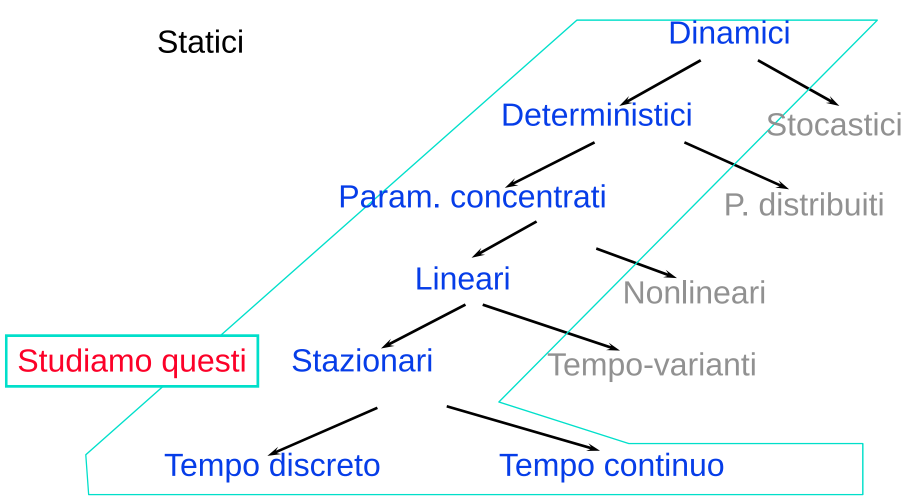
diagrammi



Si perde il "meccanismo" FISICO

Modello in scala: non riportabile qui in quanto non è informazione

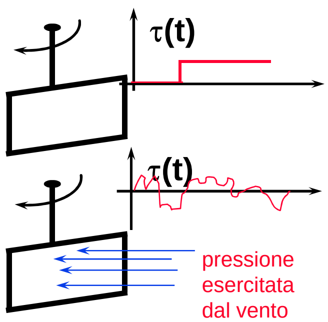
Una tassonomia dei Modelli



semplicità d'uso ← → *aderenza alla realtà*

Modelli Deterministici e non

Il modello è deterministico quando sono “ben” noti tutti gli ingressi applicati



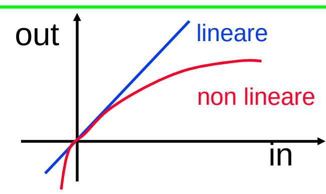
Esempio di situazione deterministica:
pendolo soggetto a una coppia $\tau(t)$ nota, descrivibile come funzione.

Esempio di situazione non deterministica:
pendolo soggetto a una coppia $\tau(t)$ derivante dalla pressione dal vento (caos dovuto a vorticosità).

Caso non deterministico: non si può/interessa determinare con esattezza il moto del pendolo istante per istante, si usa una modellazione stocastica: si usano grandezze statistiche, invece di quelle istantanee (ad es. la media, la varianza, ecc..).

Linearità

Sulle caratteristiche statiche
(a regime)

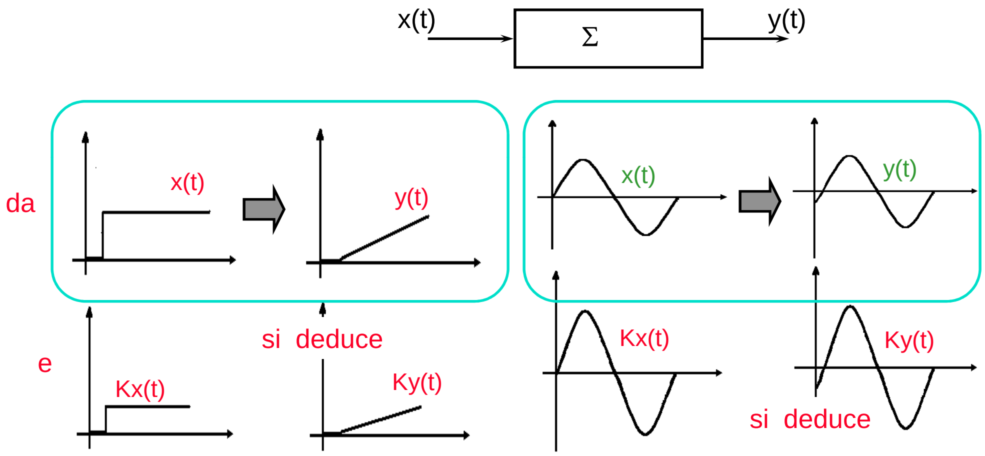


y=f(x) è lineare se $y = f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2) = ay_1 + by_2$

detto PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

LINEARE	NON LINEARE
$y = kx$	$y = x^2$
$y = \frac{dx}{dt}$	$y = \lvert x \rvert$
$y = \int x dt$	$y = sign(x)$
	$y = e^x$

Utilità Della Linearità



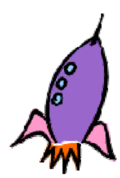
stessa frequenza !

Si intuisce che la conoscenza necessaria sul sistema si riduce notevolmente: il modello può essere "compattato"

Altre proprietà

Tempo varianti (non stazionari)

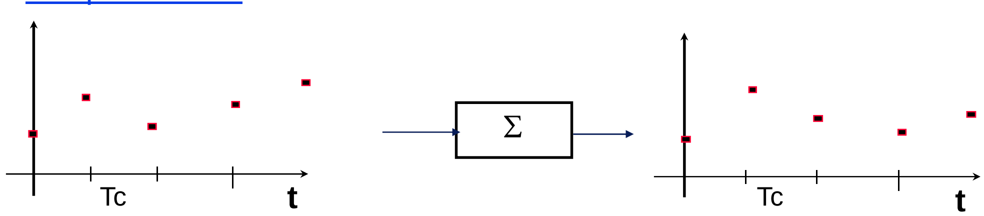
$$y = k(t) \cdot x$$



$$F = M(t) \cdot a$$

(analogo ad un missile che consuma il propellente)

Tempo discreto

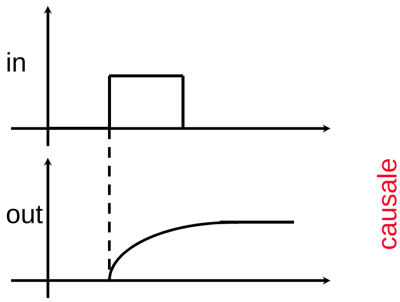


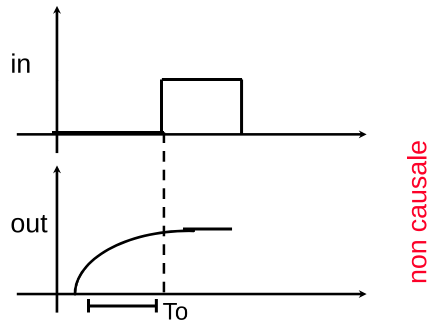
Invece di eq. differenziali, eq. alle differenze:
Es. Programmi di simulazione sul computer.

$$x_{k+1} = bx_k + au_k$$

Causalità

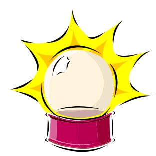
Causalità (proprietà di...)



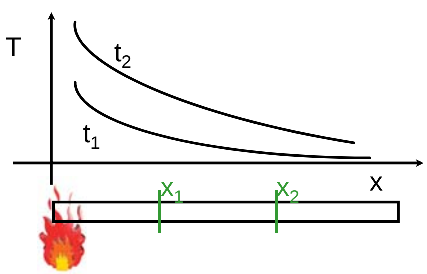


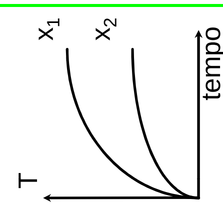
Ogni effetto deve succedere temporalmente alla propria causa

L'effetto precede la causa, impossibile !



Parametri Distribuiti





T=T(x,t)

x_1 , x_2=sensori di temperatura

Es.: barretta riscaldata ad un'estremità

$$f\left(T, \frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = 0$$

Equazione differenziale alle derivate parziali
Difficilissima da trattare in generale

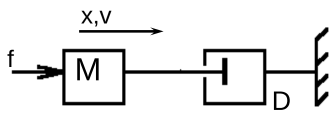
Soluzione
Considerare N elementi(detti elementi finiti) con T= costante all'interno

T_1	T_2	T_3	T_4	.....	T_N

Per ognuno scrivere un'equazione ottenendo N equazioni differenziali ordinarie

Massa – Smorzatore rivisto

rappresentazione grafica



equazione

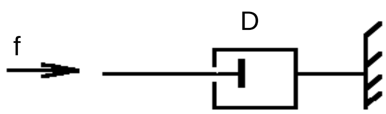
$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}(f - vD)$$

Deterministico (se f(t) è un gradino, sinusoide, ecc.)
Parametri concentrati (ma vedi dopo)
Lineare
Stazionario
Tempo continuo

Sistema Massa - Smorzatore

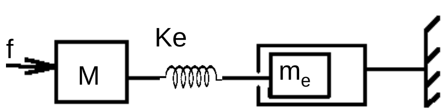
<u>ATTENZIONE al livello di dettaglio</u>

- fenomeni molto lenti: $M\frac{dv}{dt} \cong 0$



f = v D

- fenomeni molto veloci

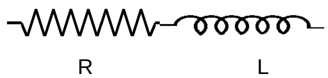


inoltre F non è costante con la velocità di spostamento

Il modello “ottimo” va determinato in base alle esigenze del problema

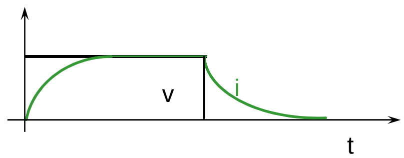
ES2: Circuito RL

POSSIBILI MODELLI



anche questo è
un modello

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}$$



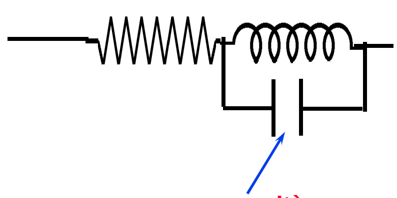
Quello in scala ha l'inconveniente
di non essere informazione pura

ES2: Circuito RL

MA:

Se la frequenza è molto bassa

Se la frequenza è molto alta

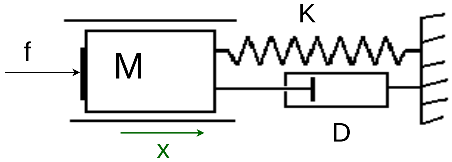


capacità parassita

ed esistono altre varianti importanti

Il modello "ottimo" va determinato
in base alle esigenze del problema

ES3: Massa molla smorzatore



molla: $f_e = - K\,x$

smorzatore: $f_s = -D\dot{x}$

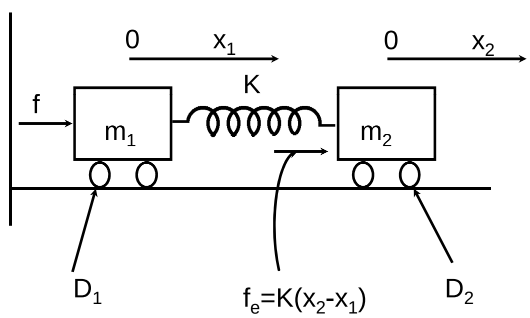
$x=0$: riposo della molla

$$M\ddot{x} = \sum f_i = f - Kx - D\dot{x}$$

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = f$$

Equivale al circuito RLC

ES4: 2 masse 1 molla



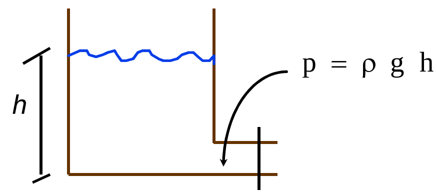
Scelti in modo che quando x_1=x_2=0 la molla sia a riposo

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = f + K(x_2 - x_1) - D_1\dot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1) - D_2\dot{x}_2 \end{cases}$$

Si possono scrivere 4 eqs del 1° ord. usando:

$\dot{x}_1 = v_1;\ \dot{x}_2 = v_2$

ES5: Sistema Idraulico Elementare



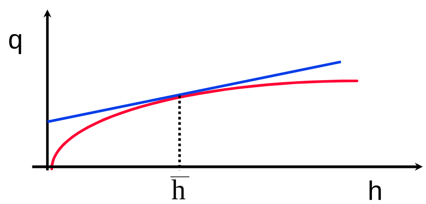
$$p : P_a = \left[N / m^2 \right]$$

$$\rho : \left[Kg / m^3 \right]$$

$$A = \left[m^2 \right]$$

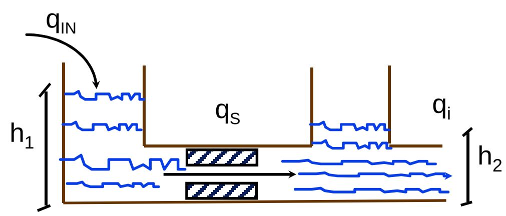
(dal teorema di Bernoulli) $v = \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p}$

$$q = Av = A\sqrt{2gh}$$



ES6: Due serbatoi

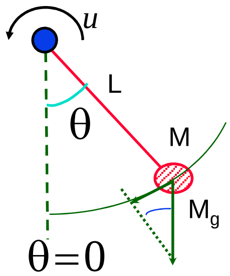
Trascuriamo (qui) le non linearità e l'inerzia del fluido



$$q_S = \frac{h_1 - h_2}{R}$$

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = \sum q_i = q_{IN} - \frac{h_1 - h_2}{R} \\ A\dot{h}_2 = \frac{h_1 - h_2}{R} - q_u \end{cases}$$

Pendolo



Coppie
- input u
- gravità $\tau_g = -M_g L \sin\theta$
- inerzia ML^2

bilanciamento delle coppie:

$$J\dot{\omega} = \sum \text{coppie}$$

$$J\ddot{\theta} = u - MgL\sin\theta$$

equazione NON lineare
ma valida per ogni θ

(pendoli al lavoro)

Passi per modellare un Σ

Diagramma schematico del sistema e definizione delle variabili

Derivazione delle equazioni matematiche dei componenti elementari (blocchi).

Interconnessione dei modelli elementari

Validazione sperimentale (confronto tra simulazioni e esperimenti)

eq. di equilibrio	
Kirchoff:	Σ elettrici
Lagrange:	Σ meccanici
Bernoulli:	Σ idraulici

utili

ALTERNATIVAMENTE Identificazione del modello dalle misure (legame ingresso-uscita)

ES7: Un Σ meccanico

Le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i$$

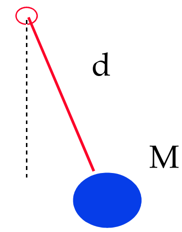
$$L = T - U$$

T : en. cinetica
U : en. potenziale

q_i: coord. Lagrangiane (posizioni)

Indispensabili nel caso dei robot industriali

q: angolo dalla verticale
u: coppia al fulcro



$$T = \frac{1}{2} I \dot q^2 \qquad U = U_0 - Mgd\cos(q)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = \frac{d}{dt}(I\dot q) = I\ddot q$$

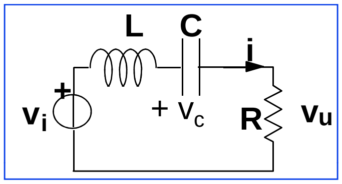
$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -Mgd\sin(q)$$

$$\boxed{I\ddot q + Mgd\sin(q) = u(t)}$$

Anche qui si possono scrivere 2 eqs del 1° ord

ES8: Un Σ elettrico

$$\boxed{\sum v = 0}$$



$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_c(0) + Ri(t) = v_i(t)$$

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dv_i}{dt}$$

$$v_u = Ri(t)$$

Un eq. del 2° ordine

Oppure...

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = -(v_c(t) + Ri) + v_i(t) \\ C\dfrac{dv_c}{dt} = i(t) \end{cases}$$

Due eq. del 1° ordine

$$v_u = Ri(t)$$

Tipi di Modelli matematici

Due formati standard

a) Un equazione differenziale di ordine **N**

$$a_N \frac{d^N y}{dt^N} + \cdots + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M u}{dt^M} + \cdots + b_0 u(t)$$

"Relazione ingresso - uscita"

b) **N** equazioni differenziali di 1° ordine

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_1^N a_{1h} x_h + \sum_1^M b_{1k} u_k \\ \dot{x}_N = \sum_1^N a_{Nh} x_h + \sum_1^M b_{Nk} u_k \end{cases}$$

dove X è lo STATO

"Relazione ingresso - stato"

per ora assumiamo che l'uscita sia uno degli stati

Ma lo stato è qualcosa di più di una sostituzione di variabili ....

Rappr. Ingresso-Uscita

Ingresso $\longrightarrow$ $\boxed{\text{G( )}}$ $\longrightarrow$ Uscita

un operatore lineare
(e.g. risposta armonica)

Deriva da un'equazione differenziale in cui compaiono l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{d\ y(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{d\ u(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Per sistemi relativamente semplici

Grande semplicità di impiego x SISO; esteso a MIMO diviene complesso

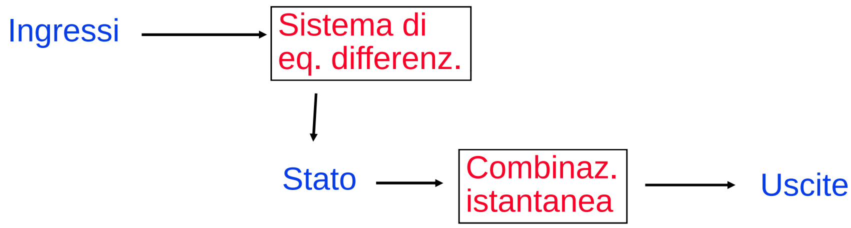
Possibilità di incorporare semplicemente dati sperimentali

Metodi grafici

Requisito essenziale: LINEARITA'

Rappresentaz. Ingresso - Stato - Uscita

Basato sulla descrizione dei processi nel dominio del tempo.



stessa trattazione per sistemi MIMO e SISO

enfasi sui fenomeni interni al processo
(e.g. instabilità di grandezze non "osservabili")

procedure di calcolo automatizzato (per ottenere prestazioni migliori)

estensione a sistemi non-stazionari e non-lineari

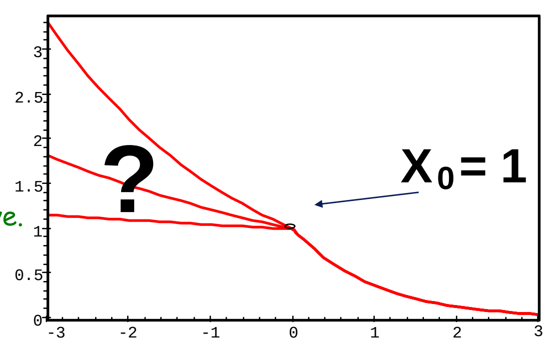
Cosa sono le VdS ?

Per il principio di causalità, esiste
un insieme (minimo) di variabili fisiche che, ad un dato istante, determinano l'evoluzione futura del sistema, in assenza di eccitazioni esterne.

Queste sono le Variabili di Stato del sistema.

Esempio:
Scarica di un condensatore

La conoscenza per t< 0 non serve.
Basta sapere che x(0)=1.



Cosa sono (2)

- Definizione molto generale e intuitiva
- la scelta non è unica, ma il numero sì
- in generale non è facile sceglierle a occhio
  (per sistemi semplici, sì)

Se si ha
un sistema di equazioni differenziali (indipendenti) del primo ordine,
il numero di variabili di stato è uguale al numero di equazioni.

Nota: sicuramente c'e' una variabile di stato per ogni grandezza fisica connessa ad accumulo (di energia).

Esempi
Energia cinetica --> Velocita'
Energia elettrostatica --> tensione sul condens.
Accumulo di massa --> livello del serbatoio
"Accumulo di spazio" --> posizione

Modelli con le VdS

Σ non lineare

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathrm{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathrm{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots u_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots u_m) \end{cases} \; \& \; \begin{cases} y_1 = g_1(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots u_m) \\ \vdots \\ y_l = g_l(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots u_m) \end{cases}$$

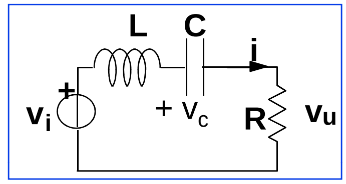
Σ lineare

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1N} \\ a_{N1} & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1M} \\ b_{N1} & b_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{1N} \\ c_{p1} & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{1M} \\ d_{p1} & d_{pM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_M \end{bmatrix}$$

ES8 vds : Un Σ elettrico

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = -\left(v_c(t) + Ri\right) + v_i(t) \\ C\dfrac{dv_c}{dt} = i(t) \end{cases}$$



si pone $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} \quad u = v_i$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{R}{L}x_1 + \dfrac{1}{L}v_i \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Linearizzazione

Linearizzazione

Si opera attorno ad un punto di equilibrio.

Per modelli nello stato:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

1.Equilibrio: calcolare $x_0, u_0 : \; f(x_0, u_0) = 0$

2.variazioni $x = x_0 + \Delta x, \;\; u = u_0 + \Delta u$

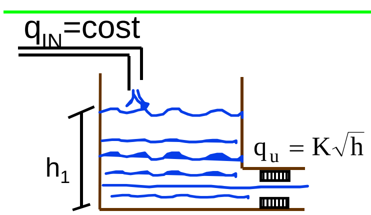
3.espansione in serie di Taylor → equazioni linearizzate

$$f(x,u) = \cancel{f(x_0,u_0)} + f_x(x_0,u_0)\Delta x + f_u(x_0,u_0)\Delta u$$

Se #(var. di stato) o #(ingressi) >1, f_x e f_u sono jacobiani

$$f_x = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{Bmatrix} \quad f_u = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{Bmatrix}$$

Esempi di Linearizzazione



da cui: $A\dot{h} = q_{IN} - K\sqrt{h}$

Equazione non lineare

Conservazione della massa

Adh	=	q_{IN} dt	-	$q_u$dt
accumulo		ingresso		uscita

Condizione di equilibrio

$$\dot{h} = 0 \Rightarrow q_{IN} = K\sqrt{h_{eq}}, \quad h_{eq} = (q_{IN}/K)^2$$

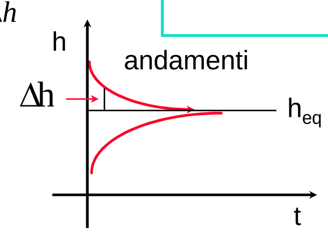
$\Delta h = h - h_{eq}$ piccolo !

$$A\Delta\dot{h} = \cancel{q_{in}} - \cancel{K\sqrt{h_{eq}}} - \frac{K}{2\sqrt{h_{eq}}}\Delta h$$

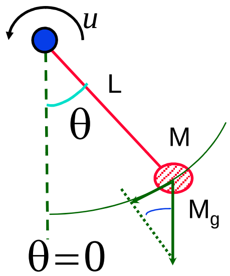
Equazione linearizzata per h ≅ h_{eq}

$$A\Delta\dot{h} = -\frac{K}{2\sqrt{h_{eq}}}\Delta h$$

$$\Delta\dot{h} = -K'\,\Delta h$$



Pendolo linearizzato 1



$$J\dot{\omega} = \sum \text{coppie}$$

$$J\ddot{\theta} = u - MgL\sin\theta \qquad \begin{cases} \dot{q} = \omega \\ \dot{\omega} = -MgL\sin(q) + u \end{cases}$$

pto di equilibrio per u_0 dato $\quad \omega_0 = 0;\ q_0 = \arcsin\left(\dfrac{u_0}{MgL}\right)$

variazioni intorno all'equil. $\quad \Delta q = q - q_0;\ \Delta\omega = \omega - \omega_0;\ \Delta u = u - u_0;$

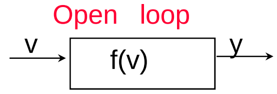
equaz. linearizzate $\quad \begin{cases} \Delta\dot{q} = \Delta\omega \\ \Delta\dot{\omega} = -MgL\cos(q_0)\Delta q + \Delta u \end{cases}$

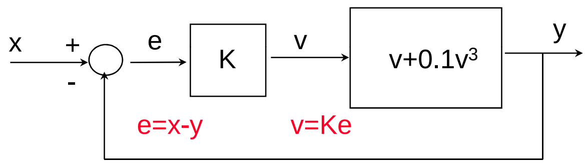
$$\left.\frac{d\sin(q)}{dq}\right|_{q=q_0}$$

La linearizzazione operata dalla controreazione

Relazione lineare desiderata: y=x
Relazione non lineare reale: y=v+0.1v³=f(v)

Open loop





Closed loop:

K(x-y)+0.1K³(x-y)³-y

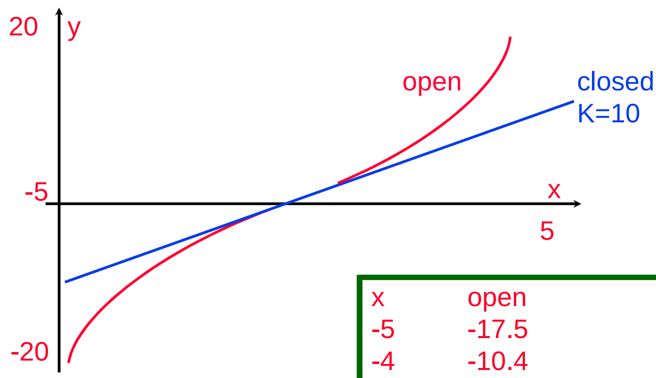
Risolvere $\quad (x-y)^3 + \dfrac{K(x-y)-y}{0.1K^3} = 0$

per $K \to \infty$ si ha $(x-y)^3=0$ ➡ x=y !

altra soluzione $\quad y = x - \dfrac{1}{K}\sqrt[3]{\dfrac{K(x-y)-y}{0.1}}$

Diminuisce quando
K diminuisce

...Risultati Numerici



x	open	K=10	K=100
-5	-17.5	-4.73	-4.95
-4	-10.4	-3.76	-3.97
..	......	......	......
..	......	......	......
0	0	0	0
..	......	......	......
+4	+10.4	+3.76	+3.97
+5	+17.5	+4.73	+4.95