Trasformate e sistemi lineari

Trasformata di Laplace
Funzione di Trasferimento
Modi
Risposta Impulsiva
Calcolo dell'uscita noto l'ingresso

Operatore lineare che trasforma i segnali nel dominio del tempo in segnali di variabile complessa *s* (var. di Laplace), in modo da:

- facilitare alcune operazioni matematiche, quali l'integrazione o la derivazione, rendendole puramente algebriche
- mettere in evidenza le caratteristiche periodiche o pseudoperiodiche del segnale (dominio della frequenza)

La trasformazione è biunivoca

Formalmente, la Trasformata di Laplace $F(s)$ di una funzione $f(t)$ è l'integrale:

$$f(s) = L[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

- importante quando ci sono impulsi nell'origine

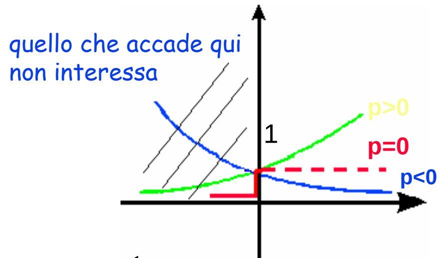
$s = \sigma + j\omega$

hp tecniche: $f(t)$ sommabile

Esistono tabelle di trasformate :^)

Una Trasformata Fondamentale

$$f(t)=\begin{cases} e^{pt} & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$



p *può essere anche complesso*

$$F(s)=\int_0^\infty e^{p\,t}\,e^{-s\,t}\,dt=\frac{1}{p-s}\left[e^{(p-s)\,t}\right]_0^\infty=\frac{1}{s-p} \qquad se\ \ \mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[p]$$

$$L[e^{\,p\,t}]=\frac{1}{s-p}$$

$$L\left[e^{j\Omega t}\right]=\frac{1}{s-j\Omega}$$ *caso cmplx, utile per trasformare sin(t) e cos(t)*

$$\delta_{-1}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases} \qquad \boxed{\mathrm{L}[1]=\mathrm{L}[\delta_{-1}(t)]=\frac{1}{s}}$$

Gradino, step,
f. di Heaviside: $\delta_{-1}(t)$

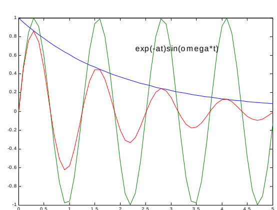
Proprietà notevoli

LINEARITA' $L[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)]=c_1F_1(s)+c_2F_2(s)$

ESPONENZIALE $L\left[e^{at}\right]=\int_0^\infty e^{-s\,t}e^{a\,t}dt=\dfrac{1}{s-a}$

SINUSOIDE $L[\sin\Omega\,t]=L\left[\dfrac{e^{j\Omega\,t}-e^{-j\Omega\,t}}{2j}\right]=\dfrac{\Omega}{s^2+\Omega^2}$

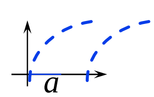
ESPONENZIALE • FUNZIONE del TEMPO



$$L\left[e^{at}f(t)\right]=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,f(t)\,dt=F(s-a)$$

TRASLAZIONE

$$L[\delta_{-1}(t-a)\,f(t-a)]=e^{-as}F(s)$$



PROPRIETÀ NOTEVOLISSIME

TEOREMA del VALORE FINALE $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

TEOREMA del VALORE INIZIALE $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

INTEGRAZIONE $\mathrm{L}\left[\int_0^t f(t)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$

DERIVAZIONE

$$\mathrm{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}\,dt = \text{integrando per parti} = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathrm{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = \underbrace{s^2F(s)}_{\text{per } f(0^-)=0} - sf(0^-) - \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0^-}$$

$$\mathrm{L}\left[\frac{d^3}{dt^3}f(t)\right] = s^3F(s)$$ *(se C.I. = 0)*

ESEMPIO PER LA DERIVATA

$$y(t) = 3e^{-2t} \qquad \dot{y}(t) = -6e^{-2t}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s+2} \qquad L[\dot{y}] = \frac{-6}{s+2} \qquad sY(s) - f(0^-) = \frac{3s}{s+2} - 3 = \frac{-6}{s+2}$$

Spesso si vuole esplicitare che un segnale (di solito l'ingresso) è nullo per t<0

$$y(t) = 3e^{-2t}\delta_{-1}(t) \qquad \dot{y}(t) = -6e^{-2t}\delta_{-1}(t) + 3e^{-2t}\delta_0(t) = -6e^{-2t}\delta_{-1}(t) + 3\delta_0(t)$$

$$Y(s) = \frac{3}{s+2} \qquad L[\dot{y}] = \frac{-6}{s+2} + 3 = \frac{3s}{s+2}$$

$$sY(s) - f(0^-) = \frac{3s}{s+2} - 0 = \frac{3s}{s+2}$$

•CONVOLUZIONE NEL TEMPO

$$\mathrm{L}[\int_0^t f(t)\, g(t-\tau)\, d\tau\,] \xrightarrow[\mathrm{L}]{} F(s)\cdot G(s) \quad \text{un prodotto!}$$

$e.g.\quad e^{a(t-\tau)}u(\tau)\ \equiv$ utilissima per il calcolo della risposta al forzamento (eq. differenziale non omogenea)

Esempio: $\dfrac{1}{s^2}=\dfrac{1}{s}\times\dfrac{1}{s} \qquad L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]=\int_0^t \delta_{-1}(t)\delta_{-1}(t-\tau)d\tau=\int_0^t 1\, d\tau = t$

•ESTENSIONE DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

Per i segnali Fourier trasformabili:

$$\mathscr{F}[\delta_{-1}(t)\, f(t)] = F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}$$

•CONIUGATO

$F(s^*)=F^*(s)$ $\qquad$ s^*="coniugato" di s

Trasformata degli ingressi canonici:

f(t)	$\delta_0(t)$	$\delta_{-1}(t)$	$\delta_{-2}(t)=t$	$\delta_{-k}(t)=t^{k-1}/_{(k-1)!}$
F(s)	1	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^k$

integrali

Altri ingressi molto utili sono:

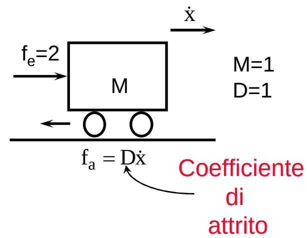
$\sin(\omega t) \quad e \quad \cos(\omega t), \qquad \omega=\omega_1 \div \omega_2$

$\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$	$e^{-\sigma t}\sin(\omega t)$	$e^{-\sigma t}\cos(\omega t)$
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$	$\dfrac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$

si utilizza $\mathrm{L}\left[e^{-\sigma t}f(t)\right]=F(s+\sigma)$

Esempio elementare

Carrellino con attrito viscoso e forza applicata



ingresso: $f_e = 2\delta_{-1}(t) \rightarrow F_e(s) = \dfrac{2}{s}$ *Linearità*

equazioni:

$$M\dot{v} = f_e(t) - Dv$$

$$t \xrightarrow{L} s$$

$$M\left[sV(s) - v(0)\right] = F_e(s) - DV(s)$$

v(0)=0 $\quad [sM + D]V(s) = F_e(s)$

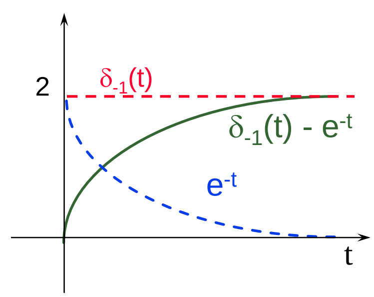
$$V(s) = \frac{1}{Ms + D} \cdot F_e(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s}$$

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s+1} \frac{2}{s} = 2$$

... Esempio elementare

$$V(s) = \frac{B}{s+1} + \frac{A}{s} = \frac{As + A + Bs}{(s+1)s} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$s \xrightarrow{L^{-1}} t$$



$$v(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right] = \underbrace{L^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] + L^{-1}\left[-\frac{2}{s+1}\right]} = 2\delta_{-1}(t)\left[1 - e^{-t}\right]$$

La trasformata della somma è uguale alla somma delle trasformate

Abbiamo risolto l'eq. differenziale tramite un eq. algebrica

Antitrasformata (semplice)

Se la G(s) è un rapporto di polinomi e le radici p_i sono distinte,

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_n}{a_n}+\sum_1^n\frac{R_i}{(s-p_i)}\qquad \begin{array}{l} R_i\ :\ \text{Residui}\\ p_i:\text{Poli}\end{array}$$

il segnale g(t) è la somma di andamenti esponenziali
(eventualmente complessi)

$$g(t)=L^{-1}\left[G(s)\right]=\frac{b_n}{a_n}\delta(t)+\sum_1^n R_i e^{p_i t}$$

che prendono il nome di "modi del segnale".

I modi decadono a zero se
la parte reale dei poli è negativa

Attenzione: esistono
F(s) non razionali !

Applicazione alle eq. diff. Ingresso Uscita

Eq. diff. ordinaria, lineare, stazionaria, ordine=n : LPPC

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+....+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y(t)=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+.....+b_0u(t);$$

Per le derivate dell'uscita y(t) separiamo i valori in t=0
Se il sistema è inizialmente a riposo saranno nulli,
altrimenti sono le condizioni (stato) iniziali
L'ingresso si può supporre nullo con le derivate in t=0^-

$$\mathrm{L}\left[\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right]=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}\dot{y}(0)-....-y^{(n-1)}(0)=s^nY(s)-\underbrace{\sum_{K=0}^{n-1}s^{n-k-1}y^{(k)}(0)}_{C.I.}$$

quindi:

$$a_ns^nY(s)+.....+a_1sY(s)+a_0Y(s)+CI_y^{(n-1)}(s)=b_ms^mU(s)+.....+b_0U(s)$$

Funzione di Trasferimento

risolvendo per Y(s)

$$\boxed{Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots a_0} U(s) - \frac{CIy^{(n-1)}(s)}{a_n s^n \dots a_0}}$$

Il denominatore $a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$ compare in entrambe gli addendi.
E' il polinomio caratteristico (dell'eq. omogenea associata)

$$G(s) = \frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i} \rightarrow$$

Funzione di trasferimento
del sistema descritto dall'equazione diff.

E' un modello completo del sistema stesso che contiene tutte le informazioni dell'eq. diff.

Osservazioni

$$Y(s) = \underbrace{U(s)\frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}}_{A} - \underbrace{\frac{CI_y}{\sum a_i s^i}}_{B}$$

- A è nullo se u(t) ≡ 0 ➡ *B rappresenta l'evoluzione libera del sistema*
- Den(A) contiene i poli di B + quelli della trasformata dell'ingresso. ➡ *I modi* presenti nell'uscita sono quelli propri del sistema + quelli dell'ingresso*

Primo criterio intuitivo di stabilita:
"il sistema è stabile se basta azzerare l'ingresso per riportarlo a riposo" ! ➡ *Se i modi del Sistema convergono a zero, nel lungo periodo rimangono solo quelli dell'ingresso:*

IL SISTEMA E' ASINTOTICAMENTE STABILE

(*) "Modi" : andamenti elementari della soluz. dell'omogenea

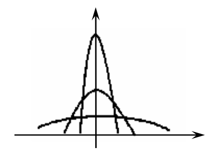
COS'È L'ANTITRASFORMATA DI G(S) ?

$\boxed{Y(s) = G(s) \cdot U(s)}$ C.I.=0

Assumiamo U(s)=1 ➔ u(t)=δ(t) impulso

Y(s)=G(s) ·1

y(t)=g(t) Risposta Impulsiva



area unitaria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)dt = 1$$

Ma anche (con la convoluzione) : $y(t) = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \delta(t)g(t-\tau)d\tau = g(t)$

Inoltre se: $u(t) = \delta_{-1}(t)$ $U(s) = \frac{1}{s}$ gradino

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} \qquad y(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau = g_{-1}(t)$$

Risposta Indiciale
(integrale di quella impulsiva)

MODI PROPRI DI UN SISTEMA

Sono i modi della risposta impulsiva, quindi nel caso semplice in cui la FdT è un rapporto di polinomi e i poli sono semplici,

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_n}{a_n} + \sum_1^n \frac{R_i}{(s-p_i)}$$

i "modi propri del sistema" sono andamenti esponenziali (eventualmente complessi)

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = \frac{b_n}{a_n}\delta(t) + \sum_1^n R_i e^{p_i t}$$

I modi propri decadono a zero se la parte reale dei poli è negativa

Decomposizione della Risposta

$$\boxed{Y(s)=U(s)\frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}-\frac{CI_y}{\sum a_i s^i}}$$

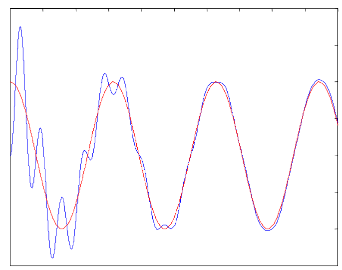
Risp. Libera: $u(t)=U(s)\equiv 0 \Rightarrow \quad Y(s)=-\frac{CI_y}{\sum a_i s^i}$

Risp. Forzata: $CI_y \equiv 0 \Rightarrow \quad Y(s)=U(s)\frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}=\frac{N_U(s)}{D_U(s)}\frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}$

I poli sono l'unione di quelli della Risp Imp e dell'ingresso

SSE il sistema e' asintoticamente stabile :

Forzata
- transitorio: prima dell'estinzione dei modi naturali del sistema
- permanente : dopo rimane solo la parte con i poli dell'ingresso



Applicazione al Carrellino

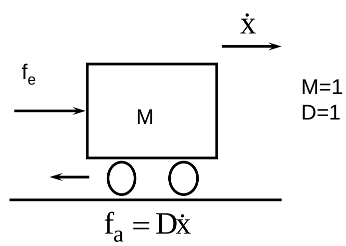
ingresso:

$f_e=\delta_{-1}(t)\rightarrow F_e(s)=\frac{1}{s}$

v(0) = CI_y = 0.5

equazioni: $M\dot{v}=f_e(t)-Dv$

$M[sV(s)-v(0)]=F_e(s)-DV(s)$



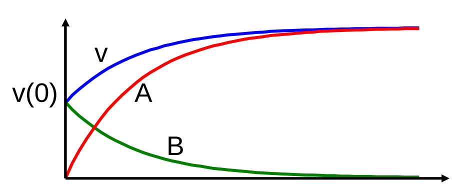
$v(0)=0.5$

$$V(s)=\frac{1}{Ms+D}\cdot F_e(s)+\frac{v(0)}{Ms+D}=\underbrace{\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s}}_{A}+\underbrace{\frac{0.5}{s+1}}_{B}$$

A: risposta forzata, ingresso+sistema
B: risposta libera, solo sistema

Polo di $G(s)\equiv$ Polo della risp. libera = -1

Poli di $V(s)$: -1, 0 *(dall'ingresso $U(s)$)*



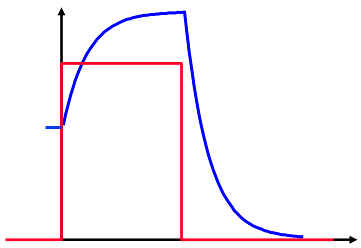
Un ingresso più complesso

Dopo 5 secondi, la forza torna a 0

Possiamo studiare la risposta all'ingresso: $\delta_{-1}(t)-\delta_{-1}(t-5)$

oppure considerare l'evoluzione libera da t=5

Si ottiene comunque:



Se u(t) torna a zero,
il sistema torna a riposo ➔
Stabilità Asintotica Re[p_i]<0

Metodo per l'inversione delle L-trasformate

Partiamo da un rapporto di polinomi, in quanto consideriamo sistemi a costanti concentrate (in genere), $m \le n$ per la causalità

denominatore: $\sum a_i s^i = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + a_0 = a_n(s-p_n)\ldots(s-p_1)$

p_i : poli della trasformata $\equiv$ zeri del denominatore

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}$$

Espansione in frazioni parziali:

$$\boxed{\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_n}{a_n}+\sum_{1}^{n}\frac{R_i}{(s-p_i)} \qquad R_i \ : \ \text{Residui}}$$

$$R_i = \lim_{s\to p_i}(s-p_i)\frac{N(s)}{D(s)} \quad \underbrace{se \ \ p_i \neq p_j}_{poli \ \ semplici}$$

in pratica

$$\frac{N(p_i)}{a_n(p_i-p_n)\ldots.\cancel{(p_i-p_i)}\ldots.(p_i-p_1)}\cancel{(p_i-p_i)}$$

Poli Reali Multipli

Se il k-mo polo compare r volte, lo sviluppo prende questa forma:

$$\frac{R_k^{(1)}}{s-p_k}+\frac{R_k^{(2)}}{(s-p_k)^2}+....+\frac{R_k^{(r)}}{(s-p_k)^r}$$

con

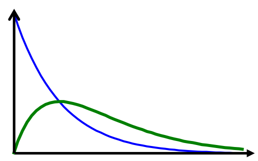
$$R_k^{(j)}=\lim_{s\to p_k}\frac{1}{(r-j)!}\frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}}\left[(s-p_k)^r\frac{N(s)}{D(s)}\right]$$

$$\boxed{L^{-1}\left[\frac{R^{(h)}}{(s-p)^h}\right]=\frac{R^{(h)}t^{(h-1)}e^{pt}}{(h-1)!}}$$

$$\frac{1}{(s-p)^2} \Rightarrow t\cdot e^{pt} \quad \text{con} \quad p<0$$

Ricordi 1/s² ?

dall'analisi: un'esponziale tende a 0 (inf) più velocemente di qualsiasi polinomio



Esistono anche poli complessi multipli, con analogo comportamento

Esempi poli reali multipli

Esempio tipico r = 2

$$R_k^{(1)}=\lim_{s\to p_k}\frac{d}{ds}\left[(s-p_k)^2\frac{N}{D}\right] \qquad R_k^{(2)}=\lim_{s\to p_k}\left[(s-p_k)^2\frac{N}{D}\right]$$

$$L[\delta_{-1}(t)(1-t)]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}=\boxed{\frac{s-1}{s^2}}$$

Una trasformata con 2 poli nell'origine

$$R^{(1)}=\frac{d}{ds}(s-1)\Big|_{s=0}=1;$$

$$R^{(2)}=(s-1)\big|_{s=0}=-1$$

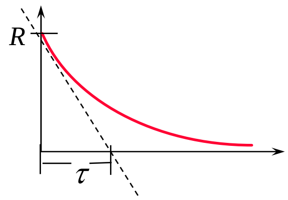
Calcolando i residui, si ritrovano i coeff. delle 2 frazioni

Modi Aperiodici (poli reali)

Conviene definire dei parametri pratici per caratterizzare i modi propri

Poli reali ($p<0$) $\quad Y_t(s)=\dfrac{\sum b_i s^i}{(s-p)(........)}$ danno luogo ai "Modi Aperiodici"

$$y(t)=R\,e^{pt}$$
$$\dot{y}(0)=R\,p$$



$R:$ ampiezza del modo

$\tau=-\dfrac{1}{p}$ Costante di tempo

Se il modo è convergente [$p<0$] si può considerare estinto per $t>3\tau$

$$\frac{y(3\tau)}{y(0)}=5\%$$

Modi Pseudoperiodici (poli complessi coniugati)

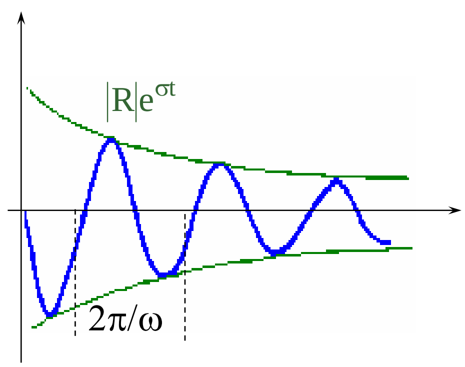
$Y_t(s)=\dfrac{\sum b_i s^i}{\left(s^2+a_1 s+a_0\right)(.......)}$ Radici $p=\sigma+j\omega,\ p^*$; Residui R, R^*

Antitrasformata

$$y(t)=|R|e^{j\varphi}e^{(\sigma+j\omega)t}+|R|e^{-j\varphi}e^{(\sigma-j\omega)t}=|R|e^{\sigma t}\left[e^{j(\omega t+\varphi)}+e^{-j(\omega t+\varphi)}\right]=$$

$$=2|R|e^{\sigma t}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$R=|R|e^{j\varphi},\ R^*=|R|e^{-j\varphi};\ p=\sigma+j\omega$$



Modi Pseudoperiodici 2

$$Y_t(s) = \frac{\sum b_i s^i}{\left(s^2 + a_1 s + a_0\right)(.......)}$$

$$\mathrm{Re}[p] = \mathrm{Re}[p^*] < 0 \iff a_0 > 0,\ a_1 > 0$$

Terminologia

$$(s-p)(s-p^*) = s^2 - 2\sigma s + \left(\omega^2 + \sigma^2\right) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2;$$

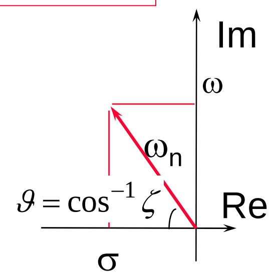
$$a_0 = \omega_n^2;\ a_1 = 2\zeta\omega_n$$

ω_n =pulsazione naturale,
ζ =coefficiente di smorzamento

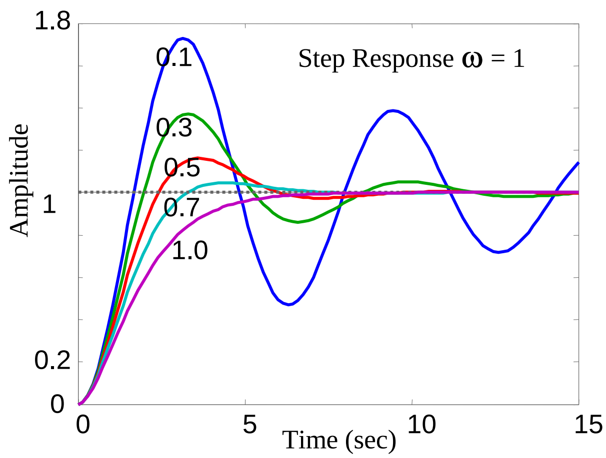
$\zeta \geq 1$ i poli sono reali

$\zeta < 0$ diverge

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$



Risposta di una coppia Cplx Conj



Risposta al gradino =
gradino (permanente)
+
oscillazione (transitorio)

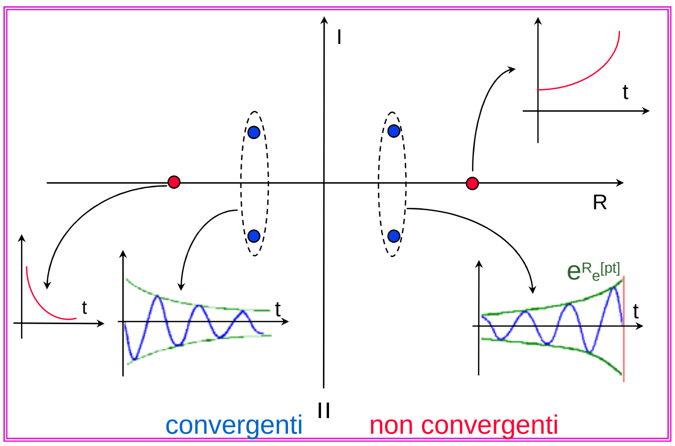
Al diminuire di ζ, aumenta il comportamento oscillatorio

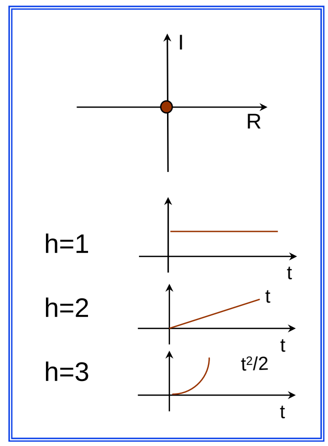
Per $\zeta = 0$ si ha una sinusoide intorno a 1
(i poli sono a Re[ ]=0, sistema non asintoticamente stabile).

Andamenti in t vs. posizione dei Poli

$$\frac{R}{(s-p)^h} \qquad \text{nel tempo:} \quad \frac{R t^{h-1} \cdot e^{pt}}{(h-1)!}$$

la Risposta Libera è fatta di Combinazioni Lineari di questi andamenti





Andamenti elementari

$$L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right]$$

con G(s) razionale, (per t ≥ 0) è somma di

Esponenziali	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
Sinusoidi smorzate*	$e^{pt}\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{1}{s^2+as+b}$
Polinomi(t)	$1, t, \frac{t^2}{2}, \cdots$	$\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3},$
Polinomi x esponenziali	$t\,e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
Impulsi	$\delta(t)$	1

(*) trascuriamo $1/(\ldots)^h$

1. Il loro numero è pari al grado del denominatore (le sinusoidi contano per 2)
2. La posizione dei poli sul piano s, determina gli andamenti
3. La convergenza a 0 dipende da $Re[p_i]$
4. Il sistema è (asintoticamente) stabile se $Re[p_i] < 0$

Caratteristiche della Funz. di Trasferimento

Un Σ è descritto (quasi*) completamente dalla sua funzione di trasferimento

$$G(s)=\frac{b_m\, s^m+\cdots+b_0}{a_n\, s^n+\cdots+a_0}$$

* salvo cancellazioni

L'analisi della G(s) ci permette di determinare facilmente:

1. Stabilità asintotica: $R_e[p_i]<0$
2. Velocità di convergenza: maggiore se $R_e[p_i]$ minore
3. Comportamento oscillatorio: $p_i = p_j{}^*$ complessi
4. Valore per $t\to\infty$ dell'uscita (regime): $\lim_{s\to 0} s\cdot G(s)\cdot U(s)$

spesso $u(t)=\delta_{-1}(t)\Rightarrow U(s)=\frac{1}{s}$

Stabilità quando Re[s]=0

Stabilità asintotica (dell'evoluzione libera) se $R_e[p_i]<0$

$$p_i<0 \text{ polo semplice} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{p_i t}\to 0$$

$$p_i<0 \text{ polo ad es. doppio} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} t\, e^{p_i t}\to 0 \text{ comunque}$$

Cosa succede se $R_e[p_i]=0$?

Dalle espressioni precedenti, se semplice,
l'evoluzione libera contiene una costante (stabile non asintoticamente)

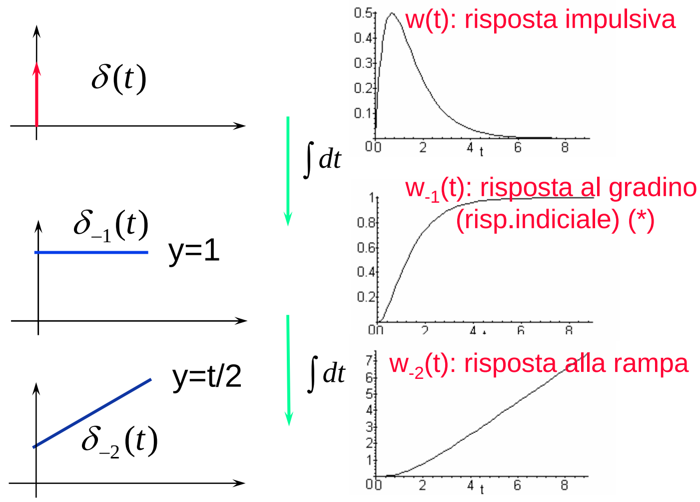
Se multiplo,
contiene una rampa, una parabola, ecc. (instabile)

Per poli immaginari puri, si hanno sinusoidi (se poli semplici)
o divergenti polinomialmente (se poli multipli)

Ingressi e Risposte Canoniche

La risposta impulsiva è di scarso interesse pratico (gli impulsi non esistono fisicamente), ma è importante, perché consente di vedere tutti e soli i modi del sistema

Le risposte canoniche (utili) si ricavano integrando quella impulsiva



E' sulla seconda (*) che si definiscono le specifiche di progetto nel dominio del tempo

VdS → FdT

Da A,B,C (,D) a F(s).

Passare a Laplace, eliminare X(s), ottenere il modello in-out.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu; \qquad y = Cx + Du; \qquad x(0) = 0$$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s);$$
$$(sI - A)X = BU;$$
$$X = (sI - A)^{-1}Bu; \qquad Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Per un sistema SISO (un ingresso, un'uscita) è la solita FdT scalare

Esempio

A := matrix(2,2,[-1, 2, -1,-1]);

B := matrix(2,1,[1, 1]);

C:=matrix(1,2,[3, 2]); D:=0:

Id:=matrix(2,2,[1,0,0,1]):

Q:=evalm(s*Id-A);

iQ:=adjoint(Q);

detQ := det(Q);

num := evalm(C &* iQ &* B);

F := num[1,1]/detQ;

--Maple V--

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C := [\,3 \quad 2\,]$$

$$Q := \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \qquad iQ := \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$detQ := s^2 + 2\,s + 3$$

$$\boxed{F := \frac{5\,s+9}{s^2+2\,s+3}}$$

evalm: valuta op. matriciali
&*: prodotto scalare

Poli = Autovalori

Q:=evalm(s*Id-A);

detQ := det(Q);

$$detQ := s^2 + 2\,s + 3$$

Il denominatore è
il polinomio caratteristico di A

Poli = Autovalori

Conseguenze
- Stabilità asintotica --> $Re[\lambda_i] < 0$
- Modi naturali del sistema
- Comportamento integrale ($\lambda_i = 0$)

STOP

Verificare che il grado di den(s) non sia minore di N = # VdS a causa di cancellazioni num-den

E' una situazione patologica da analizzare.

iQ:=adjoint(Q); Grado del Num < N

FdT → VdS

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} \qquad a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t)$$

per $n = m+1 = 3$ e $a_3 = 1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u \end{cases}$$
$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3$$

se $m = n$, scorporare D calcolando il quoziente

Con altri procedimenti

si può arrivare a matrici diverse

(Lo stato non è unico!)

Infatti trasformando:

$$X_2 = X_3 / s; X_1 = X_3 / s^2$$
$$sX_3 = -a_0 \frac{X_3}{s^2} - a_1 \frac{X_3}{s} - a_2 X_3 + U$$

(da cui X_3)

$$X_3 = \frac{s^2}{s^3 + s^2 a_2 + s a_1 + a_0} U$$

ma $$Y = X_3 \left[\frac{b_0}{s^2} + \frac{b_1}{s} + b_2 \right]$$

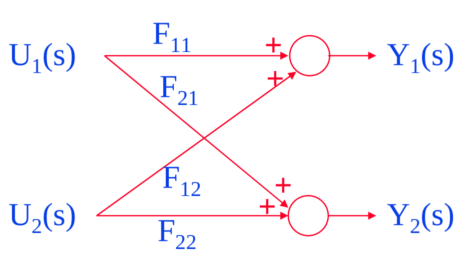
da cui si ritrova la FdT

FdT MIMO

Per un sistema MIMO (molti ingressi, molte uscite) è una matrice di FdT.

Per un sistema 2x2:

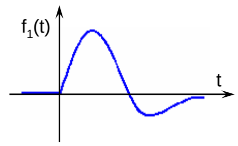
$$F(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = F(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

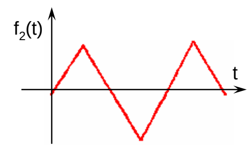


CONVOLUZIONE (FACOLTATIVO)

$$g(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

Rappresentazione grafica:





$$L[g(t)] = L[f_1(t)] \cdot L[f_2(t)]$$

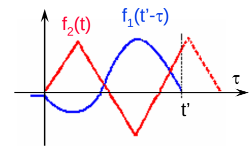
Dim: $G(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt =$

$$= \int_0^\infty f_2(\tau) \left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) e^{-st} dt \right] d\tau =$$

L di funzione ritardata

$$= \int_0^\infty f_2(\tau) \cdot F_1(s) e^{-s\tau} d\tau = F_1(s) \int_0^\infty f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= F_1(s) \cdot F_2(s)$$



Il valore di g(t) in t' dipende dal passato

DIMOSTRAZIONI ISTRUTTIVE (FACOLTATIVO)

$$\boxed{L[f(t)] = F(s); \quad L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)}$$

Dim: $L\left[\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = F(s) \cdot G(s)\right]$

$$g(t) = 1 = \text{cost} \quad (\ per \quad t > 0 : g(t) = \delta_{-1}(t))$$

$$L[f(\tau)] = F(s) \cdot \qquad L[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{L[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)}$$

Dim: $\int_0^t \dot{f}(\tau) d\tau = f(t) - f(0)$

$$\frac{1}{s} \ L \ [\dot{f}(t)] = F(s) - \frac{f(0)}{s}$$

$$L[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$$