Nota importante: questi appunti sono stati presi da me a lezione, e integrati ove necessario con materiale reperito su siti web, libri, etc.
Questi appunti non sono assolutamente da ritenere come sostituto di materiale didattico fornito dal professore del corso (libri, dispense etc.), ma come supporto allo studio personale; non sono inoltre né visionati né approvati dal Docente del Corso.
Non escludo che siano affetti da errori e/o imprecisioni, e declino ogni responsabilità sull'uso che si farà di questo fascicolo.

Controllo Dead-Beat

Il controllo DeadBeat è una tecnica usata per sintetizzare dei controllori analogici o digitali. Ha come obbiettivi principali, in risposta ad un dato segnale in ingresso, l'ottenimento di buone proprietà dinamiche e l'assenza di errore a regime.

Un controllore digitale deadbeat richiede che, in seguito all'applicazione di un segnale di prova (gradino, rampa, parabola, ecc.):

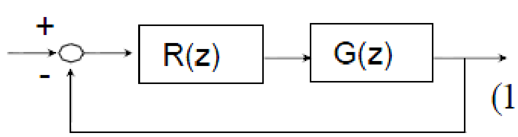
- l'uscita raggiunga il valore finale nel tempo minimo;
- l'errore a regime sia nullo;
- non ci siano oscillazioni (ringing) tra gli istanti di campionamento.

Riproduzione esatta, anche se ritardata

$y(k) = u(k - n)$

$w(z) = z^{-n}$

$n = min = ?$



$$(1+RG)w = RG$$

$$w = \frac{RG}{1+RG}$$

$$R = \frac{w}{1-w} \cdot \frac{1}{G}$$

Importante: zeri e poli di G(z) stabili

$$w = z^{-n} \qquad R = \frac{1}{z^n + 1} \frac{D_G}{N_G}$$

se G(t) causale, 1/G non lo è

grado numeratore $R(z) = g[N_R] = g[D_G]$

grado denominatore $R(z) = g[DR] = n + g[NG]$

$g[DR] = g[NR] \rightarrow n_{min} = g[DG]\text{-}g[NG]$

Identificazione dei parametri

Ci poniamo l'obiettivo di identificare i parametri; a tale scopo considero il sistema di un'equazione differenziale:

$$y(i) = -a_1 y(i-1) - \cdots - a_n y(i-n) + b_0 u(i) + \cdots + b_n y(i-m)$$

I parametri li metto nel vettore

$$\vartheta = [-a_1 \cdots -a_n, b_0 \cdots b_n]^T \qquad \text{n}° = 2\text{n}+1$$

in cui n, nel caso ideale, è n'=2n+1; misurerò i parametri negli istanti *i* e li salvo in:

$$q_i = [y(i-1) \cdots y(i-n), u(i) \cdots u(i-n)]^T$$

Allora $y(i) = q_i^T \cdot \vartheta$ preleva le misure q_i per ogni i = 0, ..., 2n:

$$\begin{aligned} y(0) &= q_0^T \cdot \vartheta \\ y(1) &= q_1^T \cdot \vartheta \\ &\vdots \\ y(2n) &= q_{2n}^T \cdot \vartheta \end{aligned} \longrightarrow \bar{y} = Q \cdot \vartheta \qquad Q = \begin{bmatrix} - q_0^T - \\ - q_1^T - \\ - q_{2n}^T - \end{bmatrix} \begin{matrix} (2n+1) \\ \text{x} \\ (2n+1) \end{matrix}$$

Se $|Q| \neq 0 \Rightarrow \exists Q^{-1}$ e dunque $\vartheta = Q^{-1} \cdot \bar{y}$.

($\bar{y}$ è un vettore e $|Q|$ è il determinante).

Se c'è eccitazione, ho $|Q| \neq 0$, ma se l'ingresso è costante ho n+1 colonne tutte uguali e quindi parametri difficili da identificare e quindi le colonne sono linearmente dipendenti. Di conseguenza, $|Q| = 0$ e quindi non è invertibile.

Se alle misure c'è un rumore ε_i sovrapposto, di sicuro non c'è più dipendenza lineare; si usa allora il metodo dei minimi quadrati, ovvero si aggiunge un termine M per far si che torni il valore finale. Infine si impone che la somma dei minimi quadrati sia minima:

$$\boxed{y = Q\vartheta + \varepsilon}$$

cerchiamo $\hat{\vartheta} : \sum \varepsilon_i^2 = \min$ allora:

$$\varepsilon = y - Q\vartheta \qquad \sum \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \cdot \varepsilon = (y - Q\varepsilon)^T (y - Q\varepsilon)$$

Derivando ε risp. a ϑ e uguagliando a zero

$$\hat{\vartheta} = \underbrace{\left(Q^T Q\right)^{-1} Q^T}_{\text{pseudo inversa di Q}} y$$

Esercizio

Approssimare $G(s)$ con le differenze:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \qquad s = \frac{1}{T_c}\left(1 - z^{-1}\right) \qquad T_c = 0{,}05$$

Soluzione

$$\left.\frac{1}{s^2+4s+3}\right|_{s = \frac{1}{T_c}(1-z^{-1})} = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_c}(1-z^{-1})\right)^2 + 4\frac{1}{T_c}\left(1-z^{-1}\right) + 3} :$$

$$= \frac{1}{400(1-z^{-1})^2 + 80\left(1-z^{-1}\right)+3} = \frac{1}{483 - 880z^{-1} + 400z^{-2}}$$

$$= 400\,y(z)z^{-2} - 880\,y(z)z^{-1} + 483\,y(z) = u(z)$$

$$y(z) = 1{,}82\,y_{k-1} - 0{,}83\,y_{k-2} + 0{,}002\,u_k$$

Esercizio

ESERCIZIO

$y_k = 0,9_{k-1} + 0,1_k$

$U_k = \{1, 0, 0\}$ impulsivo

Uscite $y_k = ?$

SOLUZIONE

$y_k = \{0,1,\ 0,09,\ 0,081\}$

Trovare matrice Q e vettore ϑ

ora ignoriamola e non utilizziamola più.

Matrice Q:

$$y_0 = \vartheta_1 y_{-1} + \vartheta_2 \cdot 0,1$$

$$y_1 = \vartheta_1 y_0 + \vartheta_2 \cdot 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0 \\ 0,09 & 0 \\ 0,081 & 0 \end{bmatrix}$$

potrei fermarmi anche alle prime due equazioni

$$\begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

$0,1 = \vartheta_2$

$0,09 = 0,1\,\vartheta_1$