RISPOSTA ARMONICA

(VEDI MARRO PAR. 3.1 A 3.2)

(VEDI VITELLI-PETTERNELLA PAR.VII.2, VII.2.1)

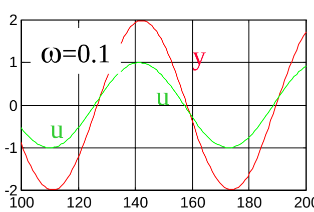
CHE COSA E'

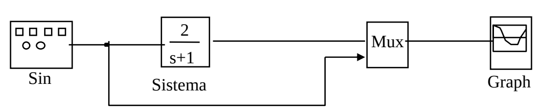
COME SI CALCOLA

(COME SI MISURA)

CRITERI DI STABILITA'

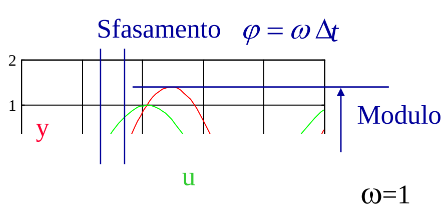
CHE COSA È (VEDI BODEUNPOLO_N.VI RELIZZATO CON LABVIEW)

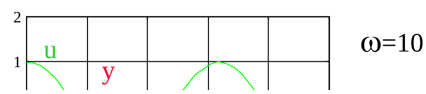




Risposta Armonica:

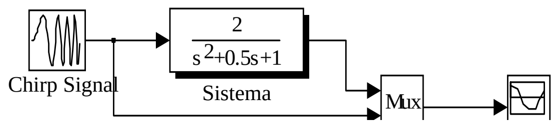
M(ω) e φ(ω) di Y(j ω)/U(j ω)



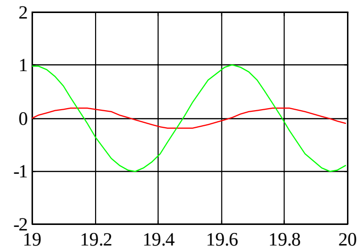


La Risonanza

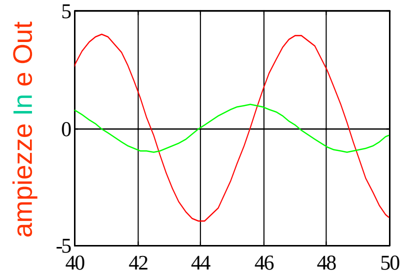
Alcune frequenze possono essere enfatizzate



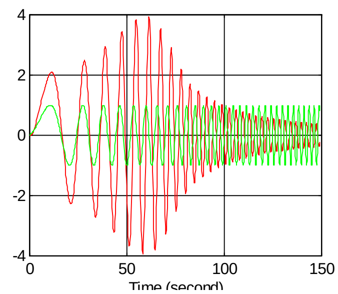
ω=10



ω=0.1



ω=0.06–2.4



Calcolo dalla FdT

- G(s) : asintoticamente stabile, Re $[p_i]<0$ $\forall p_i$

$$u(t)=\begin{cases}\sin\omega t & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases} \qquad U(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

frazioni parziali

$$Y(s)=G(s)\cdot U(s)=G(s)\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=G(s)\cdot\frac{\omega}{(s+j\omega)\cdot(s-j\omega)}=Y_t(s)+\underbrace{\frac{R}{s-j\omega}+\frac{R^*}{s+j\omega}}_{\text{permanente}}$$

$$\text{con}\quad R=\lim_{s\to j\Omega}(s-j\omega)\cdot Y(s)=\lim G(s)\frac{\omega}{s+j\omega}=\frac{1}{2j}G(j\omega)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} G(s)_{s=j\omega}=G(j\omega)\\ \textit{risposta armonica}\end{array}}$$

La risposta permanente è una sinusoide

Antitrasformando

$$y(t) = y_t(t) + \frac{1}{2j}\left[G(j\omega)e^{j\omega t} - G(j\omega)e^{-j\omega t}\right]$$

quando il transitorio si è esaurito

$$y(t) = \cancel{y_t(t)} \quad + \underbrace{\left|G(j\omega)\right|}_{\text{ampiezza}}\sin\left(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)}_{\text{fase}}\right)$$

rimane una sinusoide

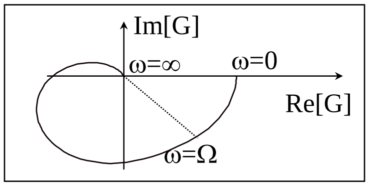
Comportamenti al limite

Comportamento asintotico G(jω):

$j\omega \to 0 \;\cong t \to \infty$	$j\omega \to \infty \cong t \to 0$
$G(j\omega) \to \dfrac{K}{(j\omega)^h}$	$G(j\omega) \to \dfrac{b_m}{a_n}(j\omega)^{m-n}$
se $\begin{cases} h = 0 & G(j\omega) = k = \dfrac{b_0}{a_0} \\ h > 0 & \left\|G(j\omega)\right\| \to \infty \\ h \text{ qualsiasi} & \angle G(j\omega) \to h \cdot 90^\circ \end{cases}$	se $\begin{cases} m < n \quad \dfrac{b_m}{a_n}\dfrac{1}{(j\omega)^{n-m}} & \|\cdot\| \to 0 \quad \angle \to \text{-(n-m)*90} \\ m = n^{*} & \|\cdot\| \to \dfrac{b_m}{a_n} \quad \angle\cdot \to 0^\circ \\ \text{n>m non può accadere} & \end{cases}$

* natura *"passa-basso"* dei sistemi fisici ⇔ CAUSALITA'

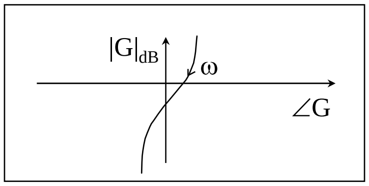
Rappresentazioni di $G(j\omega)$ (vedi es. realizzati in Scilab)



Polare o Re-Im (parametro=ω) : <u>NYQUIST</u>

(vedi Marro par. 3.5,vedi Vitelli-Petternella par.VIII.3)

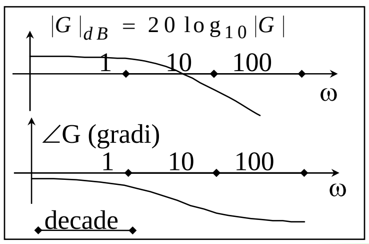
•Poco usato in pratica, utile in certe dimostrazioni.



Modulo-fase (parametro=ω) : <u>NICHOLS</u>

(vedi Marro par. 3.6, vedi Vitelli-Petternella par.VIII.2)

•Un tempo usata la carta di Nichols nella progettazione, oggi non più.



Modulo e fase separati : <u>BODE</u>

(vedi Marro par. 3.3, vedi Vitelli-Petternella par.VII.3)

•Ancora estremamente diffuso
•Usato nella strumentazione
•Usato nella progettazione manuale ed assistita

DECIBEL

•Bell : $B = \log_{10}\frac{W_2}{W_1}$ •Decibel : $dB = 10\log_{10}\frac{A_2}{A_1}$

Poiché $W \propto V^2, I^2$ ….. *Es.:* $W=RI^2$ W : potenza quando si usano le ampiezze :

Decibel: $dB = 20\log_{10}\frac{A_2}{A_1}$

Vantaggi:
• campo di valori maggiore a parità d’ingombro
• errore di rappresentazione costante in percentuale
• alcuni andamenti si semplificano

<u>Alcuni valori</u>

$2\big|_{dB} \cong 6$

$0.1\big|_{dB} = -20$

$10\big|_{dB} = 20$

$20\big|_{dB} \cong 26$

$1\big|_{dB} = 0$

$100\big|_{dB} = 40$

$$\boxed{\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right|_{dB} = -\left|G(j\omega)\right|_{dB}}$$

Scomposizione in termini semplici

Per G(s) razionale: $G(j\Omega)$ contiene tre tipi di termini (e loro reciproci)

$$G(s) = \frac{\sum b_j s^j}{\sum a_i s^i} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Per ogni polinomio (N o D) le radici possono essere:

		Termini della fattorizzazione	Notazione usuale
• $p_i = 0$	$\longrightarrow$	s	s
• p_i : reale	$\longrightarrow$	$(s-p_i)$	$1+\tau s$
• p_i, p_j coppia c.c.	$\longrightarrow$	$[s^2-2\sigma s+(\sigma^2+\omega^2)]$	$1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}$

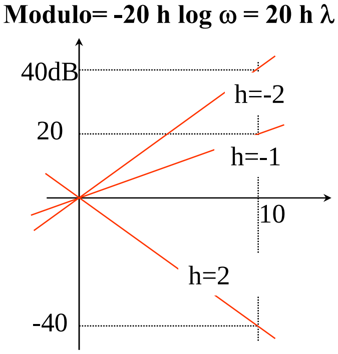
$$G(s) = \frac{K}{s^h}\cdot\frac{\prod(1+\tau_i s)\prod\left(1+\frac{2\zeta_i s}{\omega_{ni}}+\frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)}{\prod(1+\tau_j s)\prod\left(1+\frac{2\zeta_i s}{\omega_{nj}}+\frac{s^2}{\omega_{nj}^2}\right)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$$

Termine monomio $1/j\omega^h$

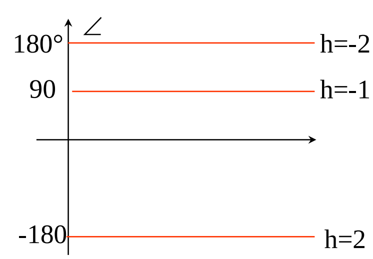
$1/j\omega^h$

λ	-1	0	1	2
w	0.1	1	10	100

Modulo= -20 h log ω = 20 h λ



Fase = -90° h

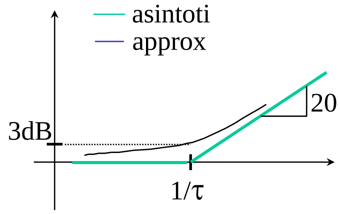


Termine binomio ($1+j\omega\tau$)

τ: costante di tempo

$$|\bullet| = 20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2} = 10\log\left(1+\omega^2\tau^2\right)$$

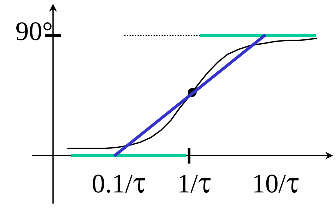
$$\begin{cases} \omega << \dfrac{1}{\tau} & 10\log 1 = 0 \\ \omega >> \dfrac{1}{\tau} & 10\log\omega^2\tau^2 = 20\log\tau + 20\lambda \end{cases}$$



$$|1/G(j\omega)|_{dB} = -|G(j\omega)|_{dB}$$

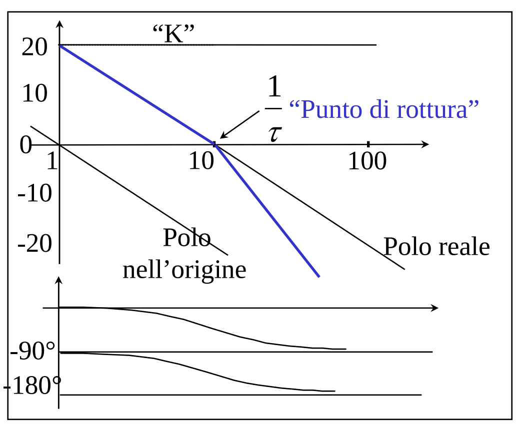
$$\angle(1+j\omega t) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega\tau}{1}\right)$$

$$\begin{cases} \omega << \dfrac{1}{\tau} & tg^{-1}(0) = 0 \\ \omega >> \dfrac{1}{\tau} & tg^{-1}(\infty) = 90^\circ \\ \omega = \dfrac{1}{\tau} & tg^{-1}(1) = 45^\circ \end{cases}$$



$$\angle 1/G(j\omega) = -\angle G(j\omega)$$

Esempio



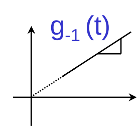
non è K! fattore di guadagno K

- $$G(s) = \frac{100}{s(s+10)} = \frac{10}{s(1+0.1s)}$$

polo nell'origine polo reale

- Significato di K

$$\lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}\cdot\frac{100}{s(s+10)} = \infty$$



pendenza .. s·G(s)

$$\lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}\cdot\cancel{s}\cdot\frac{100}{\cancel{s}(s+10)} = 10$$

Il Termine Trinomio

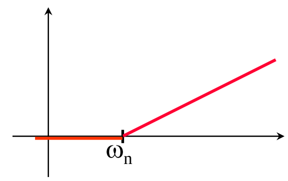
$$W_3(s) = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

•Rappresenta *"modi pseudoperiodici"*

- RISONANZE (Denominatore) e
- ANTIRISONANZE (Numeratore)

$$W_3(s)\Big|_{s=j\omega} = \begin{cases} \omega \to 0 & , \ 1 \\ \omega \to \infty & , \ -\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2} \end{cases}$$

$$|\,|_{dB} = \begin{cases} \mathbf{0} \\ -40\log\omega_n + 40\,\lambda \quad (\lambda = \log\omega) \end{cases}$$



Per $\omega=\omega_n$ $\quad W_3 = \cancel{1} + 2j\zeta\frac{\cancel{\omega_n}}{\cancel{\omega_n}} - \cancel{\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}} = 2j\zeta$ $\quad \begin{cases} |W_3(j\omega_n)| = 2\zeta \\ \angle = +90° \end{cases}$ $\quad (\zeta = 0 \div 1)$

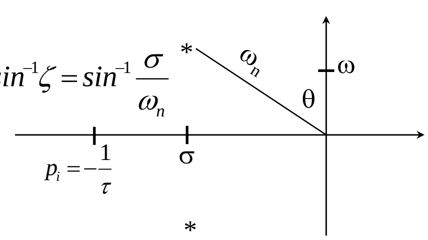
Pulsazione naturale e smorzamento

$$W_3(s) = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

ω_n : pulsazione naturale
ζ : smorzamento, 0÷1

Rapporti con Re[poli]=σ e Im[poli]=±ω

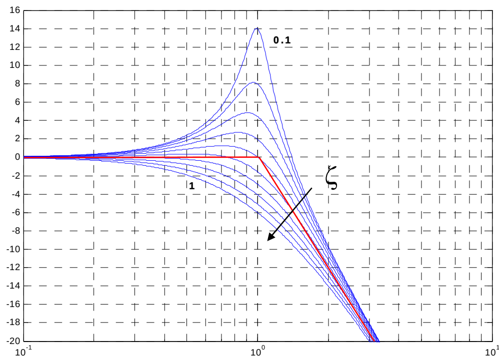
$$\theta = \sin^{-1}\zeta = \sin^{-1}\frac{\sigma}{\omega_n}$$



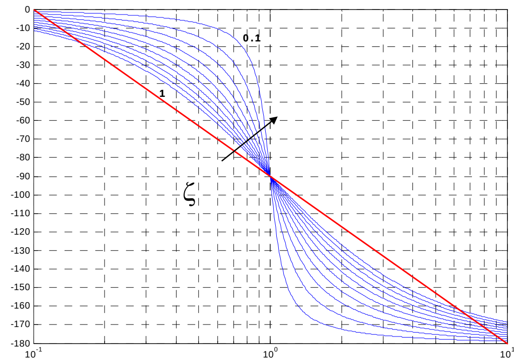
Risp. Armonica Termine Trinomio

$\omega_n = 1$

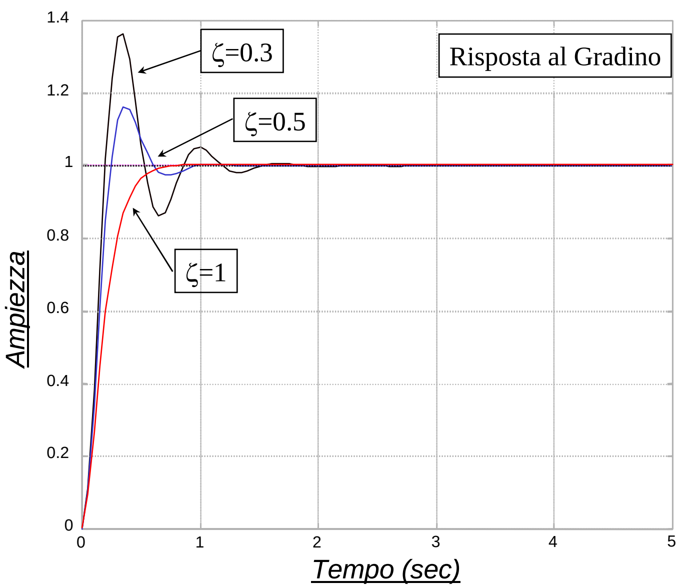
modulo



fase



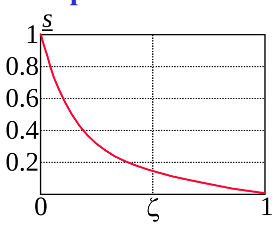
Risposta al gradino del Termine Trinomio

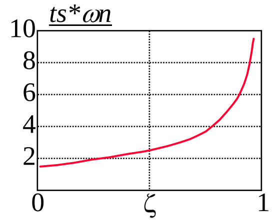


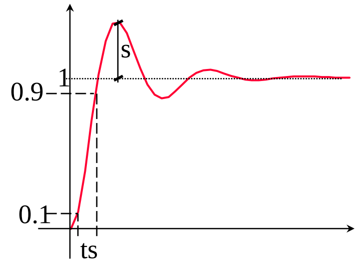
$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2\zeta}{\omega_n}s+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}\right]$$

Parametri del T. Trinomio in funzione di ζ

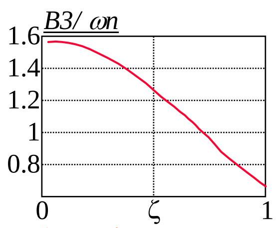
Tempo

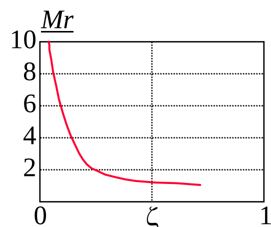


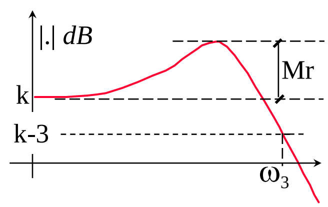




Frequenza







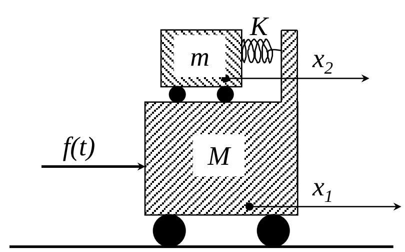
Attenzione :$B_3 = \omega_3/2\pi$ in Hz

ω_n in rad/sec

Esempio

1ª massa: $M\ddot{x}_1 = f(t) - K(x_1 - x_2)$

2ª massa: $m\ddot{x}_2 = K(x_1 - x_2)$



Attriti nulli

Trasformando :

$$\begin{cases} (Ms^2 + K)\cdot X_1(s) = F(s) + K\cdot X_2(s) \\ (ms^2 + K)\cdot X_2(s) = K\cdot X_1(s) \end{cases}$$

$$X_1(s)\left[(Ms^2+K) - \frac{K^2}{ms^2+K}\right] = F(s)$$

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{ms^2+K}{(Ms^2+K)(ms^2+K)-K^2} = \frac{ms^2+K}{\left[mMs^2 + K(m+M)\right]\cdot s^2}$$

N.B.

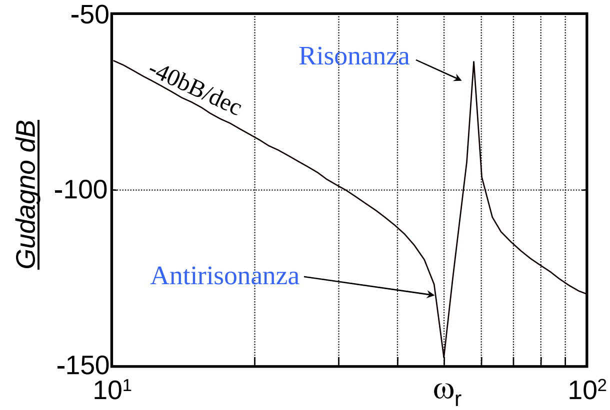
ω di antirisonanza è il punto in cui si annulla il numeratore

ω di risonanza è il punto in cui si annulla il denominatore

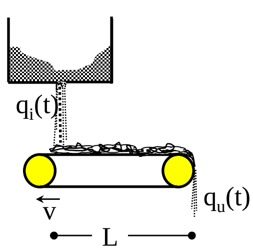
Esempio (continua)

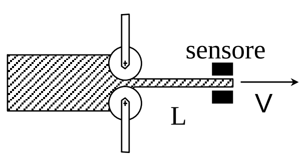
$Ms^2 + K = 0 \qquad \omega_r = \sqrt{\frac{K}{m}}$ per

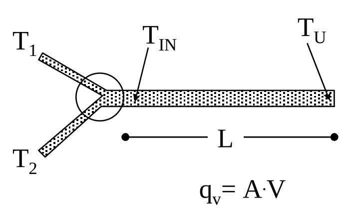
M = 20Kg	$\omega_r = 50$
m = 5Kg	$K = 50^2 \cdot m$



Sistemi con ritardo finito (vedi Marro par.4.7)







$$q_u(t) = q_i\left(t - \frac{L}{V}\right)$$

$$d_{mis}(t) = d\left(t - \frac{L}{V}\right)$$

$$T_U(t) = T_{IN}\left(t - \frac{L \cdot A}{q_V}\right)$$

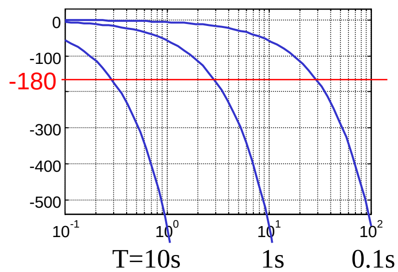
Sistemi con ritardo finito

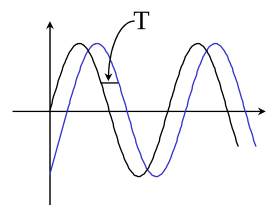
• Teorema della traslazione nel tempo $L[f(t-T)] = e^{-sT} L[f(t)]$ con T = cost.

• Possibili approssimazioni :

$$\begin{cases} e^{-sT} = 1 - sT + \dfrac{s^2T^2}{2} - \dfrac{s^3T^3}{3} + \cdots & \text{(Taylor)} \\ e^{-sT} = \dfrac{1-\frac{sT}{2}}{1+\frac{sT}{2}} & \text{(Padè)} \end{cases}$$

• Risposta in frequenza $u(t) = \sin(\omega t)$ $y(t) = \sin\Big[\omega t - \overbrace{\omega T}^{\varphi}\Big]$

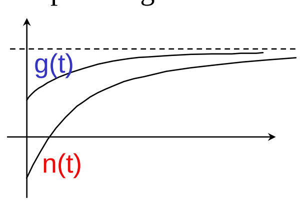




Sistemi a Fase Non Minima

Hanno zeri a parte reale positiva: $G(s) = \dfrac{1+as}{1+bs}$ $N(s) = \dfrac{1-as}{1+bs}$

Risposta a gradino

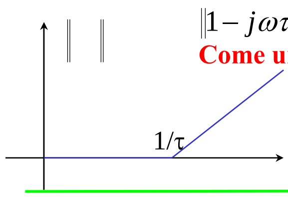


t = 0 $\lim_{s\to\infty} s \cdot \dfrac{1 \pm as}{1+bs} \cdot \dfrac{1}{s} = \pm \dfrac{a}{b}$

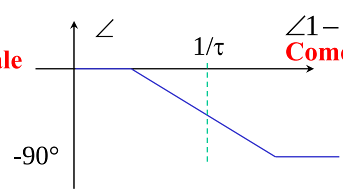
t = ∞ $\lim_{s\to 0} s \cdot \dfrac{1 \pm as}{1+bs} \cdot \dfrac{1}{s} = 1$

Ad uno stimolo positivo rispondono inizialmente con uno spostamento negativo.
Stravolgono il meccanismo della controreazione !

$\|1 - j\omega\tau\| = \|1 + j\omega\tau\|$
Come uno zero normale



$\angle 1 - j\omega\tau = -\angle 1 + j\omega\tau$
Come un polo



Precisazione per l'esame

Oggi se si vogliono dei diagrammi fatti bene si usano i PC

Occorre comunque saper tracciare l'andamento approssimativo
e/o saperlo comprendere quando lo si incontra

All'esame quindi il tracciamento dei diagrammi è parte importante
ma è richiesto solo il tracciamento asintotico

Per i termini trinomi questo significa anche assumere $\zeta=1$, anche se
il valore è diverso

Per eventuali ritardi, consiglio di tracciare prima il resto della F(jw)
e poi correggere la fase