

Appunti dalle lezioni sulla analisi delle rappresentazioni nello spazio di stato di sistemi dinamici e sulla sintesi di semplici sistemi di controllo¹

prof. Stefano Panzieri
Dipartimento di Informatica e Automazione
Università degli Studi “Roma TRE”



1 ottobre 2014

¹Rev. 7.3

Indice

Indice	6
Elenco delle figure	8
I Analisi dei sistemi	9
1 Introduzione	10
1.1 Sistemi di equazioni differenziali	10
1.2 Definizioni	11
2 Interconnessione di sistemi alle V.d.S.	12
2.1 Corrispondenza tra rappresentazioni di sistemi del primo ordine	12
2.1.1 Cascata di sistemi con poli distinti	12
2.1.2 Cascata di integratori	13
2.1.3 Parallelo di poli	14
2.2 Cascata di due sistemi generici	14
3 Evoluzione libera e forzata	16
3.1 Esponenziale di matrice	16
3.2 Funzione di transizione dello stato	16
3.3 Calcolo di e^{At} con A diagonale	17
3.4 Calcolo di e^{At} con A cascata di integratori	18
3.5 Calcolo di e^{At} con A cascata di poli coincidenti	18
3.5.1 Esempio: calcolo evoluzione libera e forzata	19
3.6 Calcolo di e^{At} con A sistema oscillante	20
4 Decomposizione modale	21
4.1 Autovalori e autovettori destri	21
4.1.1 Esempio: calcolo autovalori e autovettori	22
4.2 Calcolo di e^{At} tramite decomposizione modale	22
4.2.1 Esempio: calcolo evoluzione libera tramite diagonalizzazione	23
4.3 Calcolo di e^{At} tramite decomposizione modale con autovettori complessi e coniugati	23
4.3.1 Esempio: calcolo decomposizione modale con autovalori complessi e coniugati	24

5	Relazioni tra le rappresentazioni ingresso-uscita e ingresso-stato-uscita	26
5.1	Passaggio da V.d.S. a $F(s)$	26
5.1.1	Esempio: funzione di trasferimento ed evoluzione libera	27
5.2	Passaggio da $F(s)$ a V.d.S.: la forma Compagna	27
5.2.1	Esempio	29
6	Trasformazioni di coordinate e forme canoniche	30
6.1	Cambiamento di variabile	30
6.2	Teorema di Cayley-Hamilton	30
6.3	Cambiamento di coordinate per la forma canonica diagonale	31
6.4	Cambiamento di coordinate per la forma canonica compagna	32
6.5	Forma canonica di Jordan	33
7	Esempi di forme canoniche e complementi	34
7.1	Diagonalizzazione con autovalori distinti	34
7.2	Diagonalizzazione mediante espansione in frazioni parziali	35
7.3	Autovalori coincidenti	36
7.3.1	due poli in parallelo: forma diagonale	36
7.3.2	due poli in serie: forma di Jordan	36
7.3.3	Diagonalizzazione nel caso di m.a. coincidente con la m.g.	37
7.3.4	Jordanizzazione mediante espansione in frazioni parziali	38
8	Proprietà strutturali	40
8.1	Controllabilità	40
8.2	Forma di Kalman per la controllabilità	42
8.2.1	Esempio: decomposizione di Kalman per i sottospazi controllabile e non controllabile	43
8.3	Osservabilità (<i>reconstructability</i>)	44
8.4	Ricostruzione dello stato iniziale	45
8.5	Forma di Kalman per l'osservabilità	46
8.5.1	Esempio: decomposizione di Kalman per i sottospazi osservabile e non osservabile	47
8.6	Decomposizione completa di Kalman	47
8.6.1	Esempio: decomposizione di Kalman completa	48
8.7	Controllabilità e osservabilità: ruolo degli zeri	48
8.8	Il test PBH (Popov-Belevitch-Hautus)	49
II	Sintesi lineare dei sistemi di controllo	51
9	Assegnazione degli autovalori	52
9.1	Assegnazione degli autovalori con controreazione dallo stato per un sistema completamente controllabile	52
9.1.1	Esempio: assegnazione autovalori dallo stato	54
9.2	Assegnazione autovalori del sottosistema controllabile	55

9.2.1	Esempio: Assegnazione autovalori del sottospazio controllabile	56
9.2.2	Stabilizzabilità	57
9.3	Assegnazione degli autovalori dallo stato per sistemi con più ingressi	57
9.3.1	Esempio: assegnazione dinamiche con due ingressi	61
9.4	Assegnazione degli autovalori con controreazione dall'uscita per un sistema controllabile e osservabile	62
9.4.1	Rilevabilità (<i>detectability</i>)	64
9.4.2	Esempio: assegnazione autovalori con osservatore dall'uscita	65
9.5	Osservatore del sottospazio osservabile	65
9.6	Osservatori per sistemi con più uscite	66
9.7	Filtraggio dell'uscita	66
9.8	Come scegliere le dinamiche	66
9.8.1	Esempio: assegnazione della banda passante	68
9.9	L'osservatore ridotto	69
9.9.1	Esempio:	69
10	Spostamento di singole dinamiche	72
10.1	Autovettori sinistri	72
10.2	Sistemi a un ingresso	73
10.2.1	Esempio: spostamento di un autovalore	74
10.3	Spostamento di più autovalori	74
10.3.1	Esempio: spostamento di più autovalori uno alla volta	74
10.4	Minimizzazione dello sforzo di controllo con più ingressi	75
10.4.1	Esempio: spostamento di un autovalore usando uno o due ingressi	76
11	Controllo Ottimo	78
11.1	Premessa	78
11.2	Il problema del Controllo Ottimo	78
11.3	Una panoramica sul calcolo variazionale	80
11.3.1	Definizioni e lemmi generali	80
11.3.2	Metodo dei moltiplicatori di Lagrange	80
11.3.3	Minimizzazione di funzioni integrali	81
11.4	Controllo a energia minima	85
11.5	Il regolatore lineare quadratico	88
11.5.1	Soluzione dell'equazione di Riccati	93
11.5.2	Il problema del regolatore quadratico lineare a regime	95
12	Regolatori dell'uscita con assegnazione della dinamica	99
12.1	Un regolatore semplice	99
12.1.1	Regolazione con informazione completa senza estensione	99
12.1.2	Esempio: regolazione della posizione di un sistema smorzato	100
12.2	Regolazione con informazione completa con estensione	101

12.2.1 Esempio: regolazione della posizione di un sistema smorzato ed elastico	102
12.3 Regolazione con reiezione dei disturbi	103
12.3.1 Esempi di problemi di regolazione	105
12.4 Regolazione dell'uscita con reazione statica dallo stato	105
12.4.1 Definizione del problema	105
12.4.2 Esistenza della soluzione del regolatore	107
12.4.3 Sintesi del regolatore	107
12.5 Regolazione dell'uscita con reazione dinamica dall'errore	109
12.5.1 Definizione del problema	109
12.5.2 Esistenza della soluzione del regolatore	110
12.5.3 Soluzione particolare	111
12.5.4 Equazioni di Sylvester e del regolatore	114
12.5.5 Considerazioni conclusive sul regolatore di Francis	115
III Tecniche basate sulla linearizzazione	116
13 Stabilità alla Lyapunov	117
13.1 Stabilità alla Lyapunov	117
13.2 Criterio di stabilità di Lyapunov	118
13.2.1 Esempio: stabilità con la funzione di Lyapunov del pendolo	119
13.3 Criterio di instabilità	119
13.4 Scelta della funzione di Lyapunov	120
13.5 Criterio del massimo invariante: teorema di La Salle	121
13.5.1 Esempio: stabilità di un circuito RLC nonlineare	121
13.5.2 Esempio: Applicazione del teorema di la Salle alla stabilità del pendolo	122
13.6 Stabilità alla Lyapunov dei sistemi lineari	122
13.7 Stabilità del sistema linearizzato	123
13.7.1 Esempio: linearizzazione del pendolo	123
14 Feedback Linearizzazione	125
14.1 Introduzione alla feedback linearizzazione	125
14.2 Trasformazione di Coordinate	126
14.3 Derivata di Lie	126
14.3.1 Calcolo di una derivata di Lie	127
14.4 Grado Relativo	127
14.5 Modello di una Dinamica Zero	127
14.6 Input/Output linearizzazione per sistemi SISO	129
14.6.1 Dinamiche interne	130
14.6.2 Procedura formale per l' i/o linearizzazione	132
14.6.3 Un semplice esempio di i/o linearizzazione	132
14.7 Input/Stato linearizzazione	133

14.8	Feedback linearizzazione per sistemi MIMO non lineari	136
14.9	Conclusioni	136
IV	Modelli, esempi di sistemi di controllo, esercizi	139
15	Esempi di sistemi di controllo	140
15.1	Esempio: levitazione magnetica	140
15.2	Esempio: controllo del pendolo inverso montato su un carrello	144
15.3	Esempio: controllo dell'assetto di un satellite	149
15.4	Esempio: il controllo di un robot flessibile	155
15.4.1	Modellistica del flexarm	155
15.4.2	Applicazione del controllo ottimo sul flexarm	160
15.5	Esempio: manipolatore a due bracci	166
15.5.1	Introduzione al modello per il manipolatore.	166
15.5.2	Manipolatore a due bracci	169
15.5.3	Modello Linearizzato.	171
16	Esercizi	175
16.1	Assegnazione autovalori dall'uscita	175
16.2	Studio della controllabilità e dell'osservabilità e calcolo dell'evoluzione libera	176
16.3	Stabilizzazione statica dall'uscita	177
16.4	Stabilizzazione con reazione statica dall'uscita	178
16.5	Regolatore semplice dell'uscita	179
16.6	Regolazione con riferimento sinusoidale	179
16.7	Esercizi sulla stabilità $\ell^{\frac{1}{2}}$ alla Lyapunov	182
16.7.1	Esercizio 1	182
16.7.2	Esercizio 2	183
16.7.3	Esercizio 3	184
16.7.4	Esercizio 4	185
16.7.5	Esercizio 5	185
16.7.6	Esercizio 6	186
16.7.7	Esercizio 7	186
16.7.8	Esercizio 8	188
16.7.9	Esercizio 9	188
16.7.10	Esercizio 10	188
16.7.11	Esercizio 11	189
16.7.12	Esercizio 12	189
16.8	Esercizi sulla feedback linearizzazione	189
16.8.1	Esercizio 1	189
16.8.2	Esercizio 2	190
16.8.3	Esercizio 3	190

16.8.4 Esercizio 4	190
16.8.5 Esercizio 5	190
17 Altri esercizi di esame	191
17.1 Regolazione senza estensione	191
17.2 Evoluzione libera di un sistema	192
17.3 Stabilizzazione di una cascata di sistemi	192
17.4 Forma di Kalman e stabilizzazione statica dall'uscita	194
17.5 Regolazione senza estensione	195
17.6 Proprietà strutturali ed evoluzione libera	196
17.7 Evoluzione forzata	197
17.8 Stabilizzazione con osservatore	197
17.9 Proprietà strutturali ed evoluzione libera	198
17.10Assegnazione dinamiche con osservatore	199
17.11Proprietà strutturali ed evoluzione forzata	200
17.12Proprietà strutturali e stabilizzazione dall'uscita	201
17.13Stabilizzazione con reazione dinamica dall'uscita	202
17.14Evoluzione libera	202
17.15Stabilizzazione con reazione statica dall'uscita	203
17.16Analisi e stabilizzazione di un sistema con più ingressi	204
17.17Analisi di un sistema con più ingressi	206
17.18Problema di regolazione	208

Elenco delle figure

2.1	Cascata poli distinti	12
2.2	Cascata integratori	13
2.3	Paralelo poli distinti	14
2.4	Cascata di due sistemi	14
3.1	Sistema diagonale	18
3.2	Cascata poli uguali	18
7.1	Poli in parallelo	36
7.2	Poli in serie	36
7.3	Jordanizzazione mediante decomposizione in poli e residui	38
8.1	Cancellazione zero-polo	48
8.2	Cancellazione polo-zero	49
9.1	Assegnazione autovalori con reazione dallo stato	52
9.2	Assegnazione autovalori con reazione dall'uscita	62
9.3	Osservatore	65
9.4	Uscita	66
9.5	Posizione dei poli (cerchi -Butterworth-, asterischi -Bessel-)	69
9.6	Diagrammi di Bode delle tre funzioni a ciclo chiuso (continuo -Butterworth-, tratteggiato -coincidenti-, dotted -Bessel-)	70
9.7	Risposta al gradino, (continuo -Butterworth-, tratteggiato -coincidenti-, dotted -Bessel-). I pallini indicano il tempo di assestamento al 5%.	70
9.8	Sforzo di controllo, (continuo -Butterworth-, tratteggiato -coincidenti-, dotted -Bessel-).	71
10.1	Spostamento della dinamica utilizzando solo il primo ingresso	77
10.2	Spostamento della dinamica utilizzando entrambi gli ingressi	77
11.1	Diagramma a Blocchi a ciclo chiuso del Regolatore Lineare Quadratico.	97
12.1	Regolatore dell'uscita senza estensione	100
12.2	Carrello smorzato	101
12.3	Regolatore dell'uscita con estensione	102

12.4 Carrello smorzato con molla	103
12.5 Sistema di controllo con reazione dinamica	103
12.6 Schema del regolatore con reazione dall'errore	104
12.7 Schema del regolatore con reazione dallo stato e dai disturbi/riferimenti	105
12.8 Sistema di controllo con reazione dallo stato	106
13.1 Stabilità semplice	117
13.2 Stabilità asintotica	118
13.3 Pendolo	119
13.4 Circuito RLC	121
15.1 Il sistema a levitazione magnetica	140
15.2 Spostamento singolo autovalore	142
15.3 Assegnazione di tutti gli autovalori con reazione all'uscita	143
15.4 Definizione delle variabili del carrello e del pendolo	144
15.5 Modello del carrello con pendolo inverso	146
15.6 Schema per regolazione semplice del carrello con pendolo inverso	147
15.7 Andamento della posizione e dell'angolo durante un riposizionamento	148
15.8 Confronto tra sistema lineare e sistema non lineare per riposizionamenti limite	148
15.9 Satellite	149
15.10 Schema per regolazione con estensione	152
15.11 Stabilizzazione satellite con estensione	153
15.12 Regolatore	154
15.13 Modello analitico del braccio flessibile	155
15.14 caso 1: $Q1=20 \cdot \text{eye}(n)$; $Q2=\text{eye}(n)$; $R1=R2=1$;	165
15.15 caso 2: $Q1=Q2=\text{eye}(n)$; $R1=1$; $R2=0.5$;	165
15.16 Schema Manipolatore Planare	169
15.17 Schema Simulink	173
15.18 Dinamica θ_1 e $\ddot{\theta}_1$	173
15.19 dinamica θ_2 e $\ddot{\theta}_2$	174
15.20 ingressi τ_1 e τ_2	174
16.1 Regolatore	179
16.2 Schema di controllo	181
16.3 Andamento del riferimento, dell'uscita e dei disturbi	181
16.4 Rappresentazione grafica del punto di equilibrio	182
16.5 Rappresentazione grafica delle 2 funzioni della disequazione	187
17.1 Sistema	191
17.2 Sistema	194
17.3 Sistema	195

Parte I

Analisi dei sistemi

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Sistemi di equazioni differenziali

Sia dato un sistema di equazioni differenziali del primo ordine lineari e a coefficienti costanti del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1p}u_p \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2p}u_p \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{np}u_p \end{cases}$$

e si supponga che le predette equazioni rappresentino il comportamento dinamico di un sistema con p ingressi (u_1, \dots, u_p) e q uscite (y_1, \dots, y_q) , quest'ultime date dalla seguente combinazione lineare:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \dots + d_{1p}u_p \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \dots + d_{2p}u_p \\ &\vdots \\ y_q &= c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \dots + c_{qn}x_n + d_{q1}u_1 + d_{q2}u_2 + \dots + d_{qp}u_p \end{aligned}$$

Questa rappresentazione, detta **ingresso-stato-uscita** può anche essere caratterizzata in forma matriciale con il seguente formalismo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

dove si è indicato con:

- $u \in \mathbb{R}^p$ vettore delle grandezze di ingresso
- $y \in \mathbb{R}^q$ vettore delle grandezze di uscita
- $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema con $x_i(t) \in \mathbb{R}$ i -esima variabile di stato
- A matrice dinamica del sistema $(n \times n)$
- B matrice di ingresso $(n \times p)$
- C matrice di uscita $(q \times n)$
- D matrice del legame diretto ingresso-uscita $(q \times p)$.

Il comportamento del sistema per $t \in [t_0, t_1]$, con t_0 istante iniziale, rimane univocamente determinato a partire dall'andamento dell'ingresso $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ e dal valore x_0 dello stato all'istante $t = t_0$, una volta fissate le matrici (A,B,C,D).

Si definisce *spazio di stato* lo spazio n -dimensionale \mathbb{R}^n a cui appartiene lo stato $x(t)$.

Il concetto di stato può essere esteso anche a sistemi non lineari tempo varianti che hanno una rappresentazione del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= \eta(t, x(t), u(t))\end{aligned}$$

Le definizioni che seguono e i concetti sulla stabilità di seguito riportati si applicano anche a questi ultimi sistemi.

1.2 Definizioni

Definizione 1.1 Si definisce **funzione di transizione dello stato** la funzione $\phi(t, t_0, x_0, u(t))$ che fornisce l'andamento di $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ a partire dallo stato iniziale x_0 e l'ingresso $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Definizione 1.2 Si definisce **traiettoria** di un sistema nello spazio di stato l'insieme dei valori

$$\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(t, t_0, x_0, u(t)), t \in [t_0, t_1]\}.$$

Definizione 1.3 Si definisce **moto** di un sistema l'insieme così definito.

$$\mathcal{M} = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n : x = \phi(t, t_0, x_0, u(t)), t \in [t_0, t_1]\}.$$

In particolare un moto viene detto **periodico** se $x(t + nT) = x(t)$, con T periodo del moto.

Definizione 1.4 Un sistema si definisce **autonomo** se non dipende dal tempo, ad esempio $\dot{x}(t) = f(x)$.

Capitolo 2

Interconnessione di sistemi alle V.d.S.

2.1 Corrispondenza tra rappresentazioni di sistemi del primo ordine

Supponiamo di avere un sistema di ordine uno scritto nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

e calcoliamone la sua rappresentazione **ingresso-uscita** con la trasformata di Laplace. La funzione di trasferimento che se ne ricava è

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bc}{s+a}.$$

Si capisce già da adesso, per la presenza del prodotto bc , che la stessa funzione di trasferimento può derivare da più di una rappresentazione ingresso-stato-uscita. Vedremo in seguito il significato di questa affermazione. Approfondiamo, invece, lo studio delle rappresentazioni a cui giungiamo se consideriamo connessioni in serie e in parallelo di sistemi come quello appena visto.

2.1.1 Cascata di sistemi con poli distinti

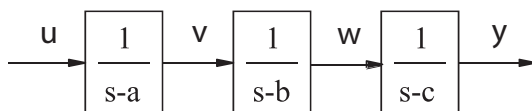


Figura 2.1: Cascata poli distinti

Dal sistema della Fig. 2.1 scriviamo le tre equazioni differenziali che regolano i tre sistemi:

$$\begin{aligned} \dot{v} - av &= u \\ \dot{w} - bw &= v \\ \dot{y} - cy &= w. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Introducendo a tal scopo tre stati x_1 , x_2 e x_3 rispettivamente per il terzo, secondo e il primo sistema dinamico, possiamo riscrivere i tre sistemi nella seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = cx_1 + w \\ y = x_1 \\ \dot{x}_2 = bx_2 + v \\ w = x_2 \\ \dot{x}_3 = ax_3 + u \\ v = x_3. \end{cases}$$

Per interconnetterli in cascata eliminiamo la v e la w e otteniamo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = cx_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = bx_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = ax_3 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Notiamo che questo sistema presenta una matrice di stato A strutturata triangolare superiore.

2.1.2 Cascata di integratori

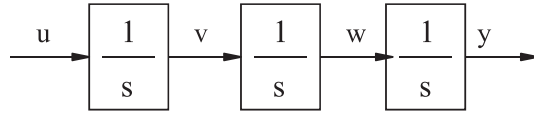


Figura 2.2: Cascata integratori

Nel caso in cui $a = b = c = 0$, come in Fig. 2.2, il sistema finale diventa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Se gli integratori diventano n :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

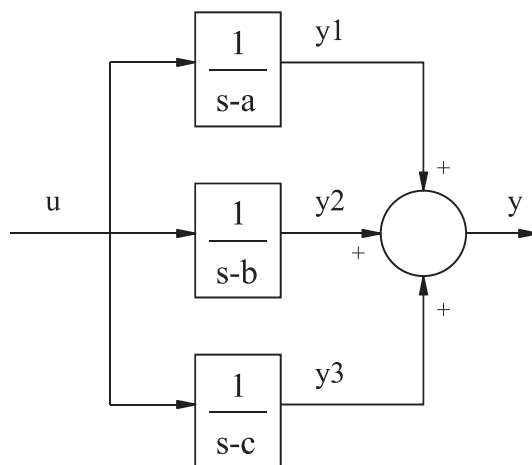


Figura 2.3: Parallelo poli distinti

2.1.3 Parallelo di poli

Consideriamo adesso il parallelo di tre funzioni di trasferimento come riportato in Fig. 2.3.

In questo caso le equazioni da combinare sono le seguenti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + u \\ \dot{x}_2 = bx_2 + u \\ \dot{x}_3 = cx_3 + u \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ y = y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

che possono essere riassunte nella seguente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che la matrice di stato si presenta adesso sotto forma diagonale e il sistema prende il nome di disaccoppiato in quanto le varie equazioni differenziali non si influenzano le une con le altre.

2.2 Cascata di due sistemi generici

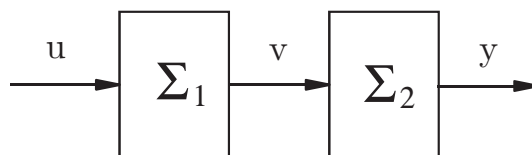


Figura 2.4: Cascata di due sistemi

E' immediato vedere che, dati i due sistemi in cascata Σ_1 e Σ_2 di Fig. 2.4, le cui equazioni di stato possono essere scritte come

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ v = C_1 x_1 + D_1 u \end{cases}, \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 v \\ y = C_2 x_2 + D_2 v \end{cases},$$

allora la cascata dei due può essere espressa come un unico sistema nella forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [D_2 D_1] u. \end{aligned}$$

Capitolo 3

Evoluzione libera e forzata

3.1 Esponenziale di matrice

Definiamo l'esponenziale di matrice con la seguente sommatoria:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!}.$$

La derivata di questa funzione si può calcolare derivando ogni elemento della sommatoria e vale

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}.$$

L'inversa di e^{At} è pari a e^{-At} , infatti il loro prodotto vale:

$$e^{At}e^{-At} = e^{(A-A)t} = e^0 = I$$

dove si è sfruttata la proprietà che

$$e^{A_1}e^{A_2} = e^{A_1+A_2}$$

se e solo se $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$ (ovvero le matrici sono commutative rispetto al prodotto).

3.2 Funzione di transizione dello stato

Dato un sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

e fissato un istante iniziale t_0 nel quale lo stato assuma il valore $x(t_0) = x_0$, la funzione di transizione dello stato prende la seguente forma:

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(t)) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.$$

Per dimostrare che la soluzione proposta soddisfa il sistema di equazioni differenziali basta osservare che per $t = t_0$ fornisce x_0 e che la sua derivata è uguale a $Ax + bu$, infatti

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{d}{dt} \left(e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(e^{A(t-t_0)} x_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau \right) = \\ &= Ae^{A(t-t_0)} x_0 + Ae^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau + e^{At} e^{-At} bu(t) = \\ &= Ae^{A(t-t_0)} x_0 + A \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + bu(t) = \\ &= Ae^{A(t-t_0)} x_0 + A(x(t) - e^{A(t-t_0)} x_0) + bu(t) = Ax(t) + bu(t).\end{aligned}$$

Notiamo che l'evoluzione dello stato $x(t)$ può essere scomposta nella sua evoluzione libera, dipendente dalle condizioni iniziali, e nell'evoluzione forzata, dipendente dall'ingresso. In particolare, l'integrale che fornisce l'evoluzione forzata è un integrale di convoluzione e pertanto la soluzione può essere scritta anche

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + e^{At} \otimes bu(t)$$

oppure, considerando l'uscita $y(t)$,

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + Ce^{At} \otimes bu(t)$$

dove Ce^{At} svolge il ruolo di risposta impulsiva che, in perfetta analogia con la trattazione tramite trasformata di Laplace, va convoluta (moltiplicata in Laplace) con l'ingresso per avere l'evoluzione forzata.

Vedremo nelle prossime sezioni il calcolo di alcuni esponenziali di matrici.

3.3 Calcolo di e^{At} con A diagonale

Il calcolo di e^{At} per una matrice A diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è molto semplice, e può essere affrontato con l'espansione in serie:

$$e^{At} = I + \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a_{11}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}^2 \end{pmatrix} t^2 + \dots = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix}.$$

Ogni elemento della diagonale è l'espansione in serie di un esponenziale scalare. Si noti che la matrice diagonale può rappresentare un sistema disaccoppiato, le cui dinamiche siano indipendenti le une dalle altre (Fig. 3.1), e che abbia le seguenti matrici A e b

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

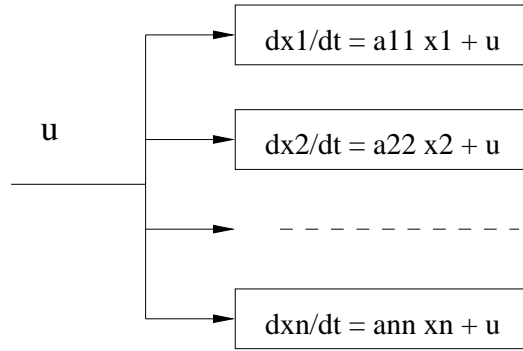


Figura 3.1: Sistema diagonale

3.4 Calcolo di e^{At} con A cascata di integratori

Nel caso di 2 integratori in cascata abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e per il calcolo di e^{At} si procede facilmente utilizzando l'espansione in serie:

$$e^{At} = I + At + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

notiamo che l'espansione si arresta al secondo termine essendo i successivi tutti nulli. Questo fatto non è casuale come si vedrà nella sezione successiva.

3.5 Calcolo di e^{At} con A cascata di poli coincidenti

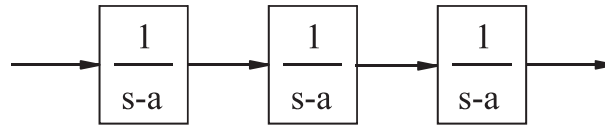


Figura 3.2: Cascata poli uguali

Una cascata di blocchi del tipo di quella raffigurata in Fig. 3.2 ha la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Se si verifica che $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$, allora risulta $e^{(A_1+A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$. Se una delle due matrici è del tipo aI risulta ovviamente sempre $aI \cdot A_2 = A_2 \cdot aI$. Dunque per la matrice A sopra riportata

$$e^{At} = e^{(A_1+A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$$

con

$$e^{A_1 t} = \begin{pmatrix} e^{at} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{at} \end{pmatrix}.$$

Per il calcolo di $e^{A_2 t}$ è sufficiente osservare che la matrice A_2 è *nil*-potente di ordine n , cioè $A^k = 0$ per $k \geq n$, e quindi l'espansione in serie dell'esponenziale si arresta ai primi n termini divenendo una somma finita.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & \ddots \\ & & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora $e^{A_2 t}$ ha la forma

$$e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \\ & & 1 & t & \ddots \\ & & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

3.5.1 Esempio: calcolo evoluzione libera e forzata

Dato il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcoliamone l'uscita per $t = 4\text{sec}$ con $u(t) = \delta_{-1}(t)$ e $x_0 = (1, -2)$.

La forma generale dell'uscita è scritta come

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

che, nel nostro caso, diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau$$

Dobbiamo, dunque, calcolare l'esponenziale di matrice e^{At} e la sua inversa. Per far ciò possiamo sfruttare la considerazione che

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A_1 + A_2$$

e che A_1 e A_2 commutano nel prodotto consentendoci di calcolare l'esponenziale come

$$e^{At} = e^{A_1 t} e^{A_2 t}$$

con A_1 diagonale e A_2 nilpotente. Avremo quindi

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -te^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

La sua inversa sarà invece

$$e^{-At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

A questo punto calcoliamo anche l'integrale:

$$\int_0^t \begin{bmatrix} e^{2\tau} & 0 \\ \tau e^{2\tau} & e^{2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2\tau} \\ \tau e^{2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2\tau} \\ \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

e la soluzione finale varrà

$$y(t) = \dots$$

In $t = 4$ sec abbiamo $y(4) = \dots$.

3.6 Calcolo di e^{At} con A sistema oscillante

Nel caso che A sia:

$$A = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero sia possibile scomporla nella somma di due matrici, la prima diagonale e la seconda antisimmetrica con zeri sulla diagonale, è possibile affrontare il calcolo dell'esponenziale con la tecnica vista prima. Per la matrice diagonale non abbiamo particolari problemi, per quella antisimmetrica si può procedere con l'espansione in serie.

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 \\ \omega^3 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^3}{3!} + \begin{pmatrix} \omega^4 & 0 \\ 0 & \omega^4 \end{pmatrix} \frac{t^4}{4!} + \dots$$

Si riconosce che i termini che si ottengono con l'espansione rappresentano lo sviluppo di Taylor delle funzioni seno e coseno di ωt , ottenendo

$$e^{A_2 t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix},$$

quindi

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\sigma t} & 0 \\ 0 & e^{\sigma t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\sigma t} \cos \omega t & e^{\sigma t} \sin \omega t \\ -e^{\sigma t} \sin \omega t & e^{\sigma t} \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Capitolo 4

Decomposizione modale

4.1 Autovalori e autovettori destri

Sia A una matrice quadrata di ordine n che rappresenti una trasformazione lineare (endomorfismo) da \mathcal{R}^n a \mathcal{R}^n :

$$w = Av.$$

Definizione 4.1 Si definisce nucleo (o kernel) della matrice A il sottospazio vettoriale $Ker(A)$ tale che per $v \in Ker(A)$ si abbia $Av = 0$.

Ovviamente per avere un nucleo di vettori diversi da zero il rango $\rho(A)$ non deve essere massimo, ovvero il determinante $det(A)$ deve valere zero. Detto $q = \rho(A)$, la dimensione del nucleo è proprio pari a $n - q$ e il sistema lineare omogeneo $Av = 0$ ammetterà ∞^{n-q} soluzioni.

Definizione 4.2 Si definiscono autovettori destri quei vettori v tali che $Av = \lambda v$ dove λ è uno scalare detto autovalore.

per il calcolo degli autovalori si può procedere portando a sinistra il termine λv e mettendo in evidenza v :

$$(A - \lambda I)v = 0$$

A questo punto, per ammettere soluzioni non banali, il nucleo della matrice $(A - \lambda I)$ dovrà avere una dimensione diversa da zero, ovvero

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Questo è un polinomio in λ di grado n e ammetterà n soluzioni, eventualmente anche coincidenti tra di loro, $\lambda_i, i = 1, \dots, n$.

Definizione 4.3 Si definisce molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i la molteplicità della soluzione $\lambda = \lambda_i$ nell'equazione $det(A - \lambda I) = 0$

Teorema 4.1 Se gli n autovalori sono tutti distinti allora la matrice A ammette n autovettori linearmente indipendenti.

4.1.1 Esempio: calcolo autovalori e autovettori

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo innanzitutto gli autovalori. Dobbiamo impostare l'equazione

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

per cui scriviamo $A - \lambda I$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 3 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

calcoliamo il determinante

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(5 - \lambda) + 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

e risolviamo rispetto a λ trovando le due radici $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Cerchiamo adesso i due autovettori.

In corrispondenza di $\lambda_1 = 2$ risolviamo il sistema

$$(A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente il rango cade di uno permettendoci la determinazione di ∞^1 soluzioni. Scrivendo solo la prima equazione (la seconda è uguale alla prima moltiplicata per -3)

$$-x - y = 0 \Rightarrow x = -y$$

che ci fornisce, tra le infinite possibilità, l'autovettore

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In corrispondenza di $\lambda_2 = 4$ abbiamo il seguente sistema

$$(A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che conduce all'unica equazione

$$-3x - y = 0 \Rightarrow y = -3x$$

e, per esempio, all'autovettore

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

4.2 Calcolo di e^{At} tramite decomposizione modale

Supponiamo che la matrice A ammetta autovettori tutti linearmente indipendenti.

Sia T la matrice che ha per colonne gli autovettori v_i di A :

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$$

Si noti che $\exists T^{-1}$ perchè $\det T \neq 0$. Quindi si avrà:

$$AT = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \cdots \quad \lambda_n v_n] = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = T\Lambda$$

moltiplicando a destra per T^{-1}

$$A = T\Lambda T^{-1}.$$

Nello sviluppo dell'esponenziale,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(T\Lambda T^{-1})^k}{k!} t^k,$$

il termine $(T\Lambda T^{-1})^k$ fornisce, per i diversi valori di k ,

$$k = 0 \Rightarrow I$$

$$k = 1 \Rightarrow T\Lambda T^{-1}$$

$$k = 2 \Rightarrow T\Lambda^2 T^{-1}$$

sino ad arrivare al termine di ordine n

$$k = n \Rightarrow T\Lambda^n T^{-1}.$$

Questo implica che:

$$e^{At} = T \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} t^k \right) T^{-1} = T e^{\Lambda t} T^{-1},$$

con

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Si osservi che se un autovalore λ_i è positivo l'esponenziale $e^{\lambda_i t}$ diverge per $t \rightarrow +\infty$. Essendo e^{At} una combinazione lineare di termini $e^{\lambda_i t}$ avrà anch'essa un carattere non convergente e, moltiplicata per una condizione iniziale x_0 , darà origine ad una evoluzione libera non convergente.

4.2.1 Esempio: calcolo evoluzione libera tramite diagonalizzazione

Supponiamo di voler calcolare $e^{At}x_0$ con A la matrice dell'esempio 4.1.1, $t = 1$ secondo e $x_0 = (1, 2)$. Poichè abbiamo già determinato la matrice degli autovettori la soluzione sarà la seguente:

$$e^{At}x_0 = T e^{\Lambda t} T^{-1} x_0, \quad t = 1$$

con

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63.42 \\ 227.21 \end{pmatrix}.$$

4.3 Calcolo di e^{At} tramite decomposizione modale con autovettori complessi e coniugati

Nel caso in cui gli autovalori di A risultino complessi, e quindi coniugati, si può procedere a una particolare decomposizione modale adatta a mettere in evidenza la natura oscillatoria della soluzione. Detti λ e λ^* i due autovalori a cui corrispondano i due autovettori v e v^* , definiamo i seguenti vettori x e y :

$$x = \frac{v + v^*}{2} = \text{Re}[v], \quad y = \frac{v - v^*}{2j} = \text{Im}[v]$$

Con questi due vettori costruiamo la seguente trasformazione:

$$T = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[v] & \operatorname{Im}[v] \end{bmatrix}.$$

Vediamo che la matrice \tilde{A} risulterà data da

$$\tilde{A} = T^{-1}AT$$

che si può riscrivere

$$T\tilde{A} = AT.$$

Calcoliamo adesso AT :

$$\begin{aligned} AT &= A \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[v] & \operatorname{Im}[v] \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{v+v^*}{2} & \frac{v-v^*}{2j} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{Av+Av^*}{2} & \frac{Av-Av^*}{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda v+\lambda^* v^*}{2} & \frac{\lambda v-\lambda^* v^*}{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\lambda v] & \operatorname{Im}[\lambda v] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Posto $\lambda = \sigma + j\omega$, notiamo che

$$\operatorname{Re}[\lambda v] = \operatorname{Re}[(\sigma + j\omega)v] = \operatorname{Re}[\sigma v + j\omega v] = \sigma \operatorname{Re}[v] - \omega \operatorname{Im}[v]$$

e

$$\operatorname{Im}[\lambda v] = \operatorname{Im}[(\sigma + j\omega)v] = \operatorname{Im}[\sigma v + j\omega v] = \sigma \operatorname{Im}[v] + \omega \operatorname{Re}[v]$$

per cui

$$AT = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\lambda v] & \operatorname{Im}[\lambda v] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[v] & \operatorname{Im}[v] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Rimane, quindi, definita \tilde{A} come

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

A questo punto si può usare la soluzione calcolata nel paragrafo 3.6 e scrivere

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\sigma t} \cos(\omega t) & e^{\sigma t} \sin(\omega t) \\ -e^{\sigma t} \sin(\omega t) & e^{\sigma t} \cos(\omega t) \end{bmatrix} T^{-1}$$

4.3.1 Esempio: calcolo decomposizione modale con autovalori complessi e coniugati

Consideriamo il sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5$$

che ha per radici i due autovalori coniugati $\lambda = -2 + j$ e $\lambda^* = -2 - j$. L'autovettore v associato a λ è dato dalla soluzione di $(A - \lambda I)v = 0$ e, ad esempio, è possibile prendere

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 + j \end{bmatrix}.$$

La matrice di trasformazione T si scrive, a questo punto, come

$$T = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[v] & \operatorname{Im}[v] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha come inversa

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trasformando con queste due matrici otteniamo

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

per cui la soluzione è:

$$\begin{aligned} e^{At} &= T e^{\tilde{A}t} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} \cos(t) & e^{-2t} \sin(t) \\ -e^{-2t} \sin(t) & e^{-2t} \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} \cos(t) - 2e^{-2t} \sin(t) & e^{-2t} \sin(t) \\ -4e^{-2t} \cos(t) + 3e^{-2t} \sin(t) & -2e^{-2t} \sin(t) + e^{-2t} \cos(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Capitolo 5

Relazioni tra le rappresentazioni ingresso-uscita e ingresso-stato-uscita

5.1 Passaggio da V.d.S. a F(s)

Abbiamo visto come un sistema di equazioni differenziali,

$$\dot{x} = Ax + bu$$

abbia per soluzione il vettore:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

dove, senza perdere di generalità, si è posto $t_0 = 0$. Trasformando l'equazione differenziale secondo Laplace e osservando la sua soluzione sopra riportata si possono fare alcune considerazioni:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + bU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + bU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}bU(s)$$

con

- $(sI - A)^{-1}x(0)$ trasformata dell'evoluzione libera dello stato
- $(sI - A)^{-1}bU(s)$ trasformata dell'evoluzione forzata dello stato.

Si evince inoltre dal confronto che:

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1},$$

e quindi

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}],$$

che risulta essere un ulteriore metodo per il calcolo dell'esponenziale di matrice. Notiamo che l'antitrasformata di Laplace di una matrice è data dalla antitrasformata dei singoli elementi.

Adesso, poichè

$$y = Cx$$

abbiamo

$$Y(s) = CX(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}bU(s).$$

La funzione di trasferimento, come rapporto tra uscita e ingresso trasformati, sarà dunque

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}b.$$

Osserviamo che se H è una matrice invertibile la sua inversa H^{-1} risulta $H^{-1} = \frac{\text{adj}(H)^T}{\det(H)}$, dunque la $F(s)$ (che è uno scalare) sarà:

$$F(s) = \frac{\dots}{\det(sI - A)}$$

che ha per poli esattamente gli autovalori della matrice A , a meno che, nell'esecuzione dei calcoli, non si semplifichino termini del tipo $(s - \lambda_i)$.

Quindi, a meno di cancellazioni, gli autovalori della matrice di stato A coincidono con i poli della funzione di trasferimento giustificando, insieme a quanto detto nel paragrafo precedente, la seguente affermazione:

Proposizione 5.1 *Il sistema descritto dalle equazioni*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice di stato A sono a parte reale negativa.

5.1.1 Esempio: funzione di trasferimento ed evoluzione libera

Sia dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} x.\end{aligned}$$

L'espressione dell'uscita come somma di risposta libera e di risposta forzata è data da

$$Y(s) = Y_{libera}(s) + Y_{forzata}(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}bU(s)$$

per cui, sostituendo le matrici del sistema

$$Y(s) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^2+5} & \frac{-2}{s^2+5} \\ \frac{3}{s^2+5} & \frac{s-1}{s^2+5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^2+5} & \frac{-2}{s^2+5} \\ \frac{3}{s^2+5} & \frac{s-1}{s^2+5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(s).$$

L'evoluzione libera sarà dunque

$$Y_{libera}(s) = \frac{2s-1}{s^2+5}x_{1,0} - \frac{3+s}{s^2+5}x_{2,0}$$

mentre la funzione di trasferimento verrà

$$F(s) = \frac{Y_{forzata}(s)}{U(s)} = -\frac{3+s}{s^2+5}.$$

5.2 Passaggio da $F(s)$ a V.d.S.: la forma Compagna

Si supponga di avere un sistema la cui funzione di trasferimento $F(s)$ sia:

$$F(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

con $m < n$. Tale sistema può essere visto in termini di variabili di stato, associando il numeratore della $F(s)$ al rapporto $\frac{Y(s)}{X(s)}$ e il denominatore al rapporto $\frac{X(s)}{U(s)}$, cioè

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} \cdot \frac{X(s)}{U(s)},$$

con

$$\begin{aligned} \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \\ \frac{Y(s)}{X(s)} &= b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0. \end{aligned}$$

Osservando che

$$X(s)(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0) = U(s) \Rightarrow \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = u$$

$$Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)X(s) \Rightarrow y(t) = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_0 x,$$

ed effettuando la posizione

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ x_3 = x'' \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u \end{cases}$$

si avrà

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

con le seguenti matrici che prendono il nome di forma compagna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo a questo punto che gli elementi dell'ultima riga di una matrice in forma compagna sono, con segno opposto, i coefficienti del polinomio caratteristico. Inoltre avremo $y = Cx$, con

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Nel caso in cui sia $m = n$ si esegue la divisione tra il polinomio a numeratore e quello a denominatore: il quoziente rappresenta il legame diretto, il resto è una funzione di trasferimento con $m < n$.

5.2.1 Esempio

Sia data la funzione di trasferimento strettamente propria

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s + 1}{s^5 + 4s^3 - 3s + 2}$$

I coefficienti del denominatore sono $(1, 0, 4, 0, -3, 2)$ per cui abbiamo la seguente traduzione in forma compagna:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Nel caso in cui la funzione di trasferimento fosse propria dovremo effettuare prima la divisione:

$$F(s) = \frac{-2s^2 + s + 1}{s^2 + 3s + 1} = -2 + \frac{-5s - 1}{s^2 + 3s + 1}$$

e quindi tradurre in

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [-1 \quad -5], D = [-2]$$

Capitolo 6

Trasformazioni di coordinate e forme canoniche

6.1 Cambiamento di variabile

Per poter meglio approfondire la struttura delle rappresentazioni in esame introduciamo la possibilità di operare un cambiamento di variabile. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

poniamo $x = Tz$ con T matrice di trasformazione $n \times n$ invertibile e $z \in \mathbb{R}^n$ nuovo vettore di stato. Nelle nuove coordinate il sistema assumerà la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz \end{cases}$$

che con le posizioni

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B, \tilde{C} = CT$$

diventerà

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z \end{cases}$$

Teorema 6.1 *La funzione di trasferimento calcolata sul sistema a valle della trasformazione di coordinate rimane invariata.*

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \\ &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B = \\ &= CT(T^{-1}sIT - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B = \\ &= CT(T^{-1}(sI - A)T)^{-1}T^{-1}B = CT(T^{-1}(sI - A)^{-1}T)T^{-1}B = \\ &= C(sI - A)^{-1}B = F(s) \end{aligned}$$

‡

6.2 Teorema di Cayley-Hamilton

Teorema 6.2 *Se $P_A(\lambda)$ è il polinomio caratteristico di una matrice A , cioè il polinomio formato dall'espressione $\det(\lambda I - A)$ allora si ha $P_A(A) = 0$, ossia ogni matrice soddisfa la propria equazione caratteristica .*

Una prima conseguenza di questo risultato è che, per qualsiasi matrice, detto $P_A(\lambda)$ il suo polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n,$$

allora la potenza n -esima di A si può sempre esprimere con la seguente combinazione lineare:

$$A^n = -\alpha_0 I - \alpha_1 A - \alpha_2 A^2 - \dots - \alpha_{n-1} A^{n-1}.$$

Usando questo teorema si può dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 6.1 *Gli autovalori di A sono uguali a quelli di $\tilde{A} = T^{-1}AT$.*

Dimostrazione: La matrice A soddisfa il proprio polinomio caratteristico, quindi

$$P_A(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + A^n = 0.$$

Vediamo se anche la \tilde{A} soddisfa lo stesso polinomio:

$$\begin{aligned} P_A(\tilde{A}) &= a_0 I + a_1 \tilde{A} + a_2 \tilde{A}^2 + \dots + a_n \tilde{A}^n = \\ &= a_0 I + a_1 T^{-1}AT + a_2 (T^{-1}AT)^2 + \dots + (T^{-1}AT)^n \end{aligned}$$

poichè

$$(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT$$

abbiamo

$$\begin{aligned} P_A(\tilde{A}) &= a_0 I + a_1 T^{-1}AT + a_2 T^{-1}A^2T + \dots + T^{-1}A^nT = \\ &= T^{-1}P_A(A)T = 0 \end{aligned}$$

Quindi, poiché le due matrici soddisfano lo stesso polinomio caratteristico avranno, a causa della sua unicità, gli stessi autovalori.‡

6.3 Cambiamento di coordinate per la forma canonica diagonale

Abbiamo già visto che una trasformazione che renda \tilde{A} diagonale si può realizzare con una matrice T che abbia per colonne gli autovettori di A :

$$\begin{aligned} T &= [v_1 v_2 \dots v_n] \\ \dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{b}u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} z + \tilde{b}u, \end{aligned}$$

dove λ_i è l' i -esimo autovalore. Con questa trasformazione cambiamo sistema di riferimento e andiamo a prendere come nuovi assi proprio gli autovettori della matrice A . Quindi la coordinata z_i fornisce lo spostamento lungo la direzione dell' i -esimo autovettore.

Essendo \tilde{A} diagonale (disaccoppiata) si può notare come, perturbando una sola variabile z_i dal suo valore di equilibrio (ovvero l'origine) l'evoluzione libera, a causa del fatto che il vettore velocità $\dot{z} = \tilde{A}z$ ha la stessa direzione di z_i , rimarrà confinata all'interno dell'asse i -esimo (stabile o instabile)

Allo stesso modo, nel sistema di coordinate x l'evoluzione che parte dall'interno del sottospazio vettoriale associato a un particolare autovalore (ovvero l'autospazio descritto dal suo autovettore) rimane confinata al suo interno. Tali sottospazi prendono pertanto il nome di invarianti.

6.4 Cambiamento di coordinate per la forma canonica compagna

Dato un sistema con un solo ingresso $\dot{x} = Ax + bu$ si definisca la matrice R come:

$$R = [b \mid Ab \mid A^2b \mid \dots \mid A^{n-1}b]$$

Supponiamo che esista R^{-1} , e definiamo γ come l'ultima riga di R^{-1}

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma & & \end{bmatrix}$$

ricordando che $R^{-1}R = I$, deve risultare, dal computo dell'ultima riga di questo prodotto,

$$\begin{cases} \gamma b = 0 \\ \gamma Ab = 0 \\ \gamma A^2b = 0 \\ \vdots \\ \gamma A^{n-2}b = 0 \\ \gamma A^{n-1}b = 1 \end{cases}$$

Teorema 6.3 *Definita la matrice Q come segue*

$$Q = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma A \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{bmatrix}$$

questa è invertibile.

Dimostrazione: Se Q non fosse invertibile esisterebbe una combinazione lineare $\sum_{i=0}^{n-1} c_i \gamma A^i = 0$ con c_i non tutti nulli. Questo è assurdo e infatti mostreremo che l'unico modo per annullare la predetta combinazione lineare è avere tutti i coefficienti c_i nulli. Moltiplicando a destra per b la sommatoria otteniamo $\sum_{i=0}^{n-1} c_i \gamma A^i b = 0$. Per quanto scritto prima il prodotto $\gamma A^i b$ risulta sempre nullo tranne che per $i = n-1$ dove è pari a 1.

Dunque

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i \gamma A^i b = c_{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{n-1} = 0$$

Moltiplicando adesso $\sum_{i=0}^{n-1} c_i \gamma A^i = \sum_{i=0}^{n-2} c_i \gamma A^i = 0$ per Ab si ottiene

$$\left(\sum_{i=0}^{n-2} c_i \gamma A^i \right) Ab = \sum_{i=0}^{n-2} c_i \gamma A^{i+1} b = 0$$

da cui ricaviamo, come visto in precedenza, che $\sum_{i=0}^{n-2} c_i \gamma A^{i+1} b = c_{n-2} = 0$. Proseguendo alla stessa maniera si dimostra che tutti i c_i devono essere uguali a zero.†

Ora dobbiamo trovare una trasformazione che dalla matrice A ci porti alla matrice \tilde{A} in forma compagna. Posto $T = Q^{-1}$ risulta:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = QAQ^{-1}$$

moltiplicando per Q

$$\tilde{A}Q = QA$$

ovvero

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma A \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma A \\ \gamma A^2 \\ \vdots \\ \gamma A^n \end{bmatrix}$$

Da ciò si osserva che le n righe della matrice \tilde{A} devono essere

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

dove l'ultima riga si ricava grazie al teorema di Cayley-Hamilton, infatti se il polinomio caratteristico di A vale $a_0I + a_1A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0$ moltiplicando a sinistra per γ risulta $a_0\gamma + a_1\gamma A + \dots + a_{n-1}\gamma A^{n-1} = -\gamma A^n$. Analogamente per la \tilde{b}

$$\tilde{b} = T^{-1}b = Qb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6.5 Forma canonica di Jordan

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili. Una matrice non è diagonalizzabile quando non ammette n autovettori linearmente indipendenti. Questo caso si può presentare quando nella risoluzione dell'equazione caratteristica della matrice A gli autovalori non sono tutti distinti e, per esempio, un autovalore ha molteplicità algebrica maggiore di uno. In questo caso dobbiamo andare a vedere la dimensione dell'autospazio associato a detto autovalore e, chiamata molteplicità geometrica questa dimensione, possiamo enunciare la seguente proposizione

Proposizione 6.2 *Se e solo se la molteplicità algebrica di un autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica la matrice A è diagonalizzabile.*

Infatti solo in questo caso siamo in grado di trovare una base vettoriale di dimensione n composta solo da autovettori.

Nel caso in cui non sia possibile effettuare la diagonalizzazione si può procedere applicando il metodo della Jordanizzazione, con il quale si ottiene una matrice diagonale a blocchi in cui ogni blocco ha una struttura diagonale oppure è del tipo

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Per esempio una cascata di due poli uguali situati in -3 è sempre non diagonalizzabile, e la matrice A ha la forma:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ & -3 \end{bmatrix}$$

Capitolo 7

Esempi di forme canoniche e complementi

7.1 Diagonalizzazione con autovalori distinti

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

e vediamo se è sia possibile diagonalizzarla con un cambiamento di variabile che abbia per base degli autovettori.

Cerchiamo dapprima gli autovalori e scriviamo

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 0 & 6 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ -4 & 0 & -5 - \lambda \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det(A - \lambda I) = (-2 - \lambda)((5 - \lambda)(-5 - \lambda) + 24) = (-2 - \lambda)(\lambda^2 - 1)$$

che fornisce $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$. Gli autovalori sono distinti e quindi è sicuramente possibile la diagonalizzazione. Vediamo adesso gli autovettori. Per $\lambda_1 = -2$ abbiamo

$$(A + 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e quindi le equazioni

$$\begin{cases} 7x + 6z = 0 \\ -4x - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

da cui l'autovettore

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per $\lambda_2 = 1$ abbiamo

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le equazioni

$$\begin{cases} 4x + 6z = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/2z \\ y = 0 \end{cases}$$

e l'autovettore

$$v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per $\lambda_3 = -1$ abbiamo

$$(A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le equazioni

$$\begin{cases} 6x + 6z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

e l'autovettore

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice di trasformazione vale

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice \tilde{A} prende la forma

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.2 Diagonalizzazione mediante espansione in frazioni parziali

Supponiamo di avere un sistema rappresentato con una funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{3s + 1}{(s + 2)(s + 3)(s - 1)}.$$

Per arrivare a una rappresentazione diagonale operiamo la decomposizione in poli e residui:

$$F(s) = \frac{5/3}{s + 2} + \frac{-2}{s + 3} + \frac{1/3}{(s - 1)}.$$

A questo punto notiamo che il nostro sistema è dato dal parallelo (somma) di tre sistemi e l'uscita è pari alla somma delle uscite dei tre. Possiamo allora scriverlo come

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + u \\ \dot{x}_3 = x_3 + u \\ y = \frac{5}{3}x_1 - 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

ed in forma matriciale

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

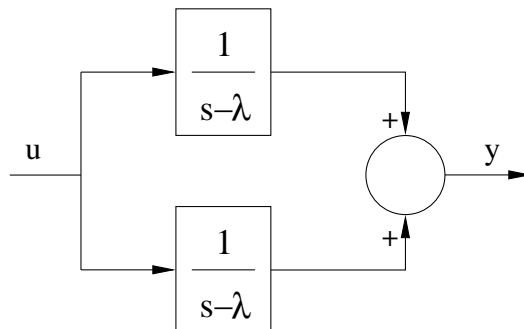


Figura 7.1: Poli in parallelo

7.3 Autovalori coincidenti

7.3.1 due poli in parallelo: forma diagonale

Il sistema di Fig. 7.1 si diagonalizza, infatti la sua matrice A è già diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \quad 1]$$

Notiamo che la funzione di trasferimento vale

$$F(s) = \frac{2}{s - \lambda}$$

ovvero una delle due dinamiche è scomparsa (c'è una cancellazione).

7.3.2 due poli in serie: forma di Jordan

Il sistema in Fig. 7.2 non si può diagonalizzare.

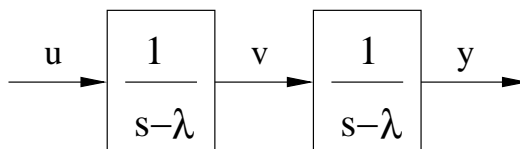


Figura 7.2: Poli in serie

La sua matrice di stato è, infatti, data da

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

e le altre si possono scrivere come

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \quad 0]$$

Si osserva subito che l'autovalore ha molteplicità algebrica 2 mentre per la molteplicità geometrica dobbiamo calcolare gli autovettori. La matrice $(\lambda I - A)$ ha rango 1, infatti vale

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dunque il sistema $(\lambda I - A)v = 0$ è risolto da un solo vettore linearmente indipendente. Quindi la molteplicità geometrica vale 1 ed è differente da quella algebrica.

La funzione di trasferimento in questo caso vale:

$$F(s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

dove, questa volta, troviamo entrambe le dinamiche.

7.3.3 Diagonalizzazione nel caso di m.a. coincidente con la m.g.

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ -3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e cerchiamo di diagonalizzarla con un cambiamento di variabile che abbia per base gli autovettori. Cerchiamo dapprima gli autovalori e scriviamo

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 0 & -6 \\ -3 & 2 - \lambda & -3 \\ 3 & 0 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)((-4 - \lambda)(5 - \lambda) + 18) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

che vale zero per $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$. La molteplicità algebrica di $\lambda = 2$ è però pari a 2. Vediamo adesso gli autovettori. Per $\lambda = -1$ abbiamo

$$(A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

che fornisce le equazioni

$$\begin{cases} -3x - 6z = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ z = -y \end{cases}$$

e, ad esempio, l'autovettore

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per l'autovalore $\lambda = 2$ abbiamo, invece,

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

che cade di rango due volte e fornisce solo l'equazione

$$-x - z = 0 \Rightarrow x = -z.$$

Questo ci consente di scrivere due autovettori (molteplicità geometrica pari a 2 uguale a quella algebrica)

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e di diagonalizzare la matrice con la matrice di trasformazione

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risulterà:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.3.4 Jordanizzazione mediante espansione in frazioni parziali

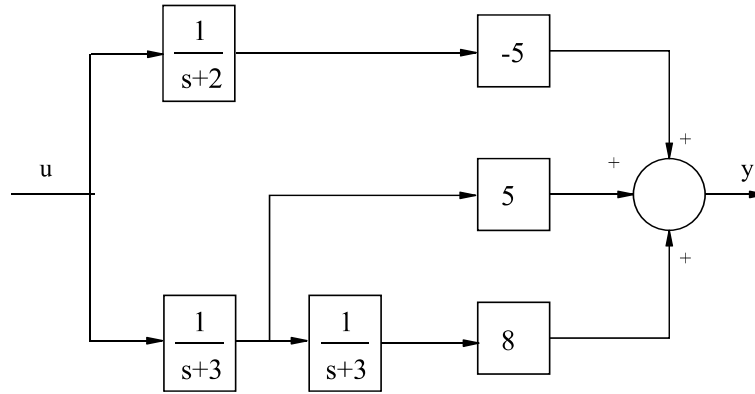


Figura 7.3: Jordanizzazione mediante decomposizione in poli e residui

Qualora la funzione di trasferimento di un sistema presenti poli multipli è sempre possibile porre il sistema nella forma canonica di Jordan. Supponiamo di avere la seguente $F(s)$:

$$F(s) = \frac{3s+1}{(s+2)(s+3)^2}$$

la cui decomposizione in poli e residui è

$$F(s) = \frac{-5}{s+2} + \frac{5}{s+3} + \frac{8}{(s+3)^2}.$$

Vediamo dalla Fig. 7.3 che il sistema può essere rappresentato come un parallelo tra due rami: il primo contenente solo il blocco $1/(s+2)$ e il secondo contenente la cascata di due blocchi uguali a $1/(s+3)$.

A questo punto, assegnando al blocco $1/(s+2)$ la variabile di stato x_1 e ai 2 blocchi $1/(s+3)$ le variabili di stato x_2 e x_3 (a partire dall'uscita), abbiamo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + u \\ y = -5x_1 + 8x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

che, in forma matriciale, si scrive

$$\begin{matrix} A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

dove notiamo un blocco di Jordan di dimensione 1 in corrispondenza all'autovalore -2 e un blocco di Jordan di dimensione 2 in corrispondenza all'autovalore -3.

Capitolo 8

Proprietà strutturali

8.1 Controllabilità

Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Definizione 8.1 Uno **stato** $x \in \mathbb{R}^n$ è detto **controllabile** all'istante $T > 0$ se esiste un'ingresso $u(t), t \in [0, T]$ per il sistema tale che posto il sistema nello stato iniziale x all'istante $t_0 = 0$ risulti $x(T) = 0$:

$$x(T) = e^{AT}x + \int_0^T e^{A(T-\tau)}bu(\tau) d\tau = 0$$

Definizione 8.2 Un sistema si dice controllabile se è controllabile ogni stato.

Teorema 8.1 (Teorema della controllabilità) Definita una matrice $G(T)$, detta matrice gramiana di controllabilità

$$G(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)}bb^T e^{A^T(T-\tau)} d\tau$$

condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia controllabile è che il gramiano $G(T)$ sia invertibile.

Dimostrazione sufficienza: L'esistenza di $G^{-1}(T)$ è una condizione sufficiente infatti, dato uno stato x e supponendo che esista $z \in \mathbb{R}^n$ tale che $G(t)z = e^{AT}x$, si può definire un ingresso $u(t)$ dato da

$$u(t) = -b^T e^{A^T(T-t)}z.$$

Con questo ingresso, che esiste sicuramente se il Gramiano è invertibile, l'evoluzione dello stato sarà

$$x(T) = e^{AT}x + \int_0^T e^{A(T-\tau)}bu(\tau) d\tau = e^{AT}x - \int_0^T e^{A(T-\tau)}bb^T e^{A^T(T-\tau)} d\tau z = e^{AT}x - G(T)z = 0$$

Dimostrazione necessarietà: La necessarietà si dimostra facendo vedere che dovrebbero esistere degli stati non controllabili qualora il gramiano $G(T)$ fosse singolare.

Se $G(T)$ fosse non invertibile allora $\det[G(T)] = 0$ ed esisterebbe un nucleo di dimensione non nulla. Supponiamo che sia $v \in \text{Ker}(G(T))$. Ciò implica che $v^T G(T) v = 0$, ovvero

$$\int_0^T v^T e^{A(T-\tau)} b b^T e^{A^T(T-\tau)} v d\tau = 0.$$

Posto $z(\tau) = b^T e^{A^T(T-\tau)} v$ si può riscrivere l'equazione precedente come

$$\int_0^T z^T(\tau) z(\tau) d\tau = 0$$

e notiamo che essendo b^T un vettore riga $z(\tau)$ sarà uno scalare e nell'integrale comparirà praticamente il quadrato di $z(\tau)$. Affinchè l'integrale di questa funzione quadratica sia zero dovrà per forza essere $z(t) \equiv 0$ in $[0, T]$ con tutte le sue derivate. In particolare, per $t = T$ si avranno le seguenti condizioni

$$\left. \frac{d^k z(t)}{dt^k} \right|_{t=T} = 0$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} z(T) = b^T I v = 0 \\ z'(T) = b^T A^T v = 0 \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(T) = b^T A^{T^{n-1}} v = 0 \end{cases}$$

è ovviamente inutile proseguire in quanto vale sempre il teorema di Cayley-Hamilton per il quale

$$A^n = -a_0 I - a_1 A - a_2 A^2 \dots - a_{n-1} A^{n-1}$$

e perciò

$$b^T A^{n^T} v = -a_0 b^T I v - a_1 b^T A^T v - \dots - a_{n-1} b^T A^{(n-1)^T} v$$

risulterà dipendente dalle equazioni già scritte. A questo punto, raccogliendo le n equazioni, si può scrivere sotto forma matriciale

$$\begin{bmatrix} b^T \\ b^T A^T \\ \vdots \\ b^T A^{(n-1)^T} \end{bmatrix} v = R^T v = 0$$

che mostra come la matrice R^T abbia lo stesso nucleo del gramiano $G(T)$. Proviamo a porre come stato iniziale proprio un vettore v appartenente a questo nucleo e vediamo se riusciamo a ottenere $x(T) = 0$. L'equazione che si vorrebbe soddisfare per l'evoluzione dello stato (libera e forzata) è

$$0 = e^{AT} v + \int_0^T e^{A(T-\tau)} b u(\tau) d\tau.$$

Moltiplichiamo a sinistra per v^T

$$0 = v^T e^{AT} v + \int_0^T v^T e^{A(T-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

poichè nell'integrale c'è l'espressione di $z^T(\tau)$, che è identicamente nulla, l'equazione diventa

$$0 = v^T e^{AT} v$$

e quest'ultima non è mai verificata in quanto la matrice esponenziale è una forma sempre diversa da zero. Quindi v è uno stato non controllabile e tutto il sottospazio non controllabile si può ottenere studiando il nucleo della matrice R^T . La matrice R viene detta, per questo, matrice di controllabilità.

In particolare, le righe di R^T , ovvero le colonne di R , sono ortogonali al nucleo e quindi, scelte quelle indipendenti tra di loro, queste possono essere prese come base del sottospazio controllabile.

8.2 Forma di Kalman per la controllabilità

Sia $p = \rho(R)$ il rango di R , e quindi la dimensione del sottospazio controllabile, e sia $n - p$ la dimensione del sottospazio non controllabile.

La base del sottospazio controllabile è data da p colonne indipendenti di R ma queste coincidono con le prime p colonne. Infatti, se si incontra una colonna che dipende linearmente dalle precedenti anche le successive lo saranno:

$$A^p b = \alpha_0 b + \alpha_1 A b + \dots + \alpha_{p-1} A^{p-1} b$$

implica che

$$A^{p+1} b = \alpha_0 A b + \alpha_1 A^2 b + \dots + \alpha_{p-1} A^p b.$$

Quindi, se ce ne devono essere p indipendenti devono essere per forza le prime.

Scegliamo adesso una matrice di trasformazione T tale che $x = Tz$ sia costruita nella seguente maniera:

$$T = [b, \quad Ab, \quad \dots, \quad A^{p-1}b \quad | \quad c]$$

dove c sono $n - p$ colonne di completamento che assicurano l'invertibilità di T .

Poichè in prima posizione abbiamo messo una base del sottospazio controllabile nel nuovo spazio di stato z avremo p variabili di stato, che indicheremo con il vettore z_1 , appartenenti al sottospazio controllabile e $n - p$, che raggrupperemo nel vettore z_2 , corrispondenti al sottospazio non controllabile.

In particolare le nuove matrici ingresso-stato-uscita assumeranno la seguente forma:

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = T^{-1} b = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C T = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2]$$

ed il sistema si potrà scrivere:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] z$$

Notiamo la presenza di alcuni zeri strutturali che implicano la non controllabilità del sottosistema z_2 sia dalla variabile di ingresso u che attraverso lo stato z_1 .

Se proviamo a calcolare al funzione di trasferimento di questo nuovo sistema avremo

$$F(s) = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \left[sI - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \begin{bmatrix} sI_{11} - \tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} \\ 0 & sI_{22} - \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1} & (sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{A}_{12} (sI_{22} - \tilde{A}_{22})^{-1} \\ 0 & (sI_{22} - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 (sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1} & \tilde{C}_1 (sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{A}_{12} (sI_{22} - \tilde{A}_{22})^{-1} + \tilde{C}_2 (sI_{22} - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \tilde{C}_1 (sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{b}_1
\end{aligned}$$

cioè $F(s) = \tilde{C}_1 (sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{b}_1$. Notiamo che nella funzione di trasferimento sono presenti solo le dinamiche del sottospazio controllabile mentre gli autovalori di \tilde{A}_{22} vengono cancellati e non compaiono nel legame ingresso-uscita. Ricordiamo, infatti, che

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

e dunque gli autovalori della matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

sono dati da quelli di \tilde{A}_{11} più quelli di \tilde{A}_{22} .

Notiamo pure, osservando l'espressione della trasformata dell'uscita $y(t)$, che

$$Y(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}z(0) + \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{b}U(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}z(0) + \tilde{C}_1(sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{b}_1U(s)$$

cioè, che gli autovalori di \tilde{A}_{22} influiscono solo sull'evoluzione libera e tale influenza non può essere modificata dall'esterno con la $u(t)$.

8.2.1 Esempio: decomposizione di Kalman per i sottospazi controllabile e non controllabile

Dato il sistema

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice di controllabilità vale

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

ed il suo rango è 2. Abbiamo, quindi, due stati controllabili e uno non controllabile. Usiamo la seguente matrice di trasformazione:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

che presenta una colonna di completamento. A valle del cambiamento di coordinate avremo la forma canonica di Kalman per la controllabilità:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

che presenta, nelle opportune posizioni, i dovuti zeri strutturali. Gli autovalori della parte controllabile sono -2 e 1 e un autovalore non controllabile si colloca in -1 anch'esso.

8.3 Osservabilità (*reconstructability*)

Si supponga di avere un sistema lineare e stazionario descritto dalle equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ \dot{y}(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Si vuole determinare lo stato $x(t)$ del sistema al tempo t disponendo dei dati di ingresso e di uscita relativi a tempi successivi all'istante t , ossia conoscendo i valori delle funzioni $u(t)$ e $y(t)$ in un intervallo del tipo $[t, T]$ con $T > t$. Non si perde di generalità se si assume $t = 0$; l'intervallo è dunque $[0, T]$.

La conoscenza di $u(t)$ permette di calcolare l'evoluzione forzata $y_f(t)$:

$$y_f(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau.$$

Si osservi come tale uscita non dipenda dallo stato iniziale $x(0)$, il quale deve poter essere determinato dalla sola evoluzione libera $y_l(t)$. Questa analisi giustifica la seguente definizione.

Definizione 8.3 (*Definizione di stato non osservabile*) Uno stato x è indistinguibile dallo stato 0 nell'intervallo $[0, T]$ (detto anche non osservabile o inosservabile), se vale la seguente relazione:

$$y_l(t) = Ce^{At}x = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

cioè se l'evoluzione libera è nulla per tutto l'intervallo $[0, T]$.

Definizione 8.4 Un sistema si dice completamente osservabile se non esistono stati non osservabili.

Come nel caso della controllabilità si definisce matrice gramiana di osservabilità:

$$G^o(T) = \int_0^T e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

che risulta quadrata e simmetrica. Anche in questo caso esiste un teorema analogo a quello della controllabilità in cui interviene questo gramiano, che però qui non riporteremo. Si può dimostrare, infatti, che il sottospazio degli stati non osservabili nell'intervallo $[0, T]$ corrisponde esattamente al nucleo del gramiano. Per determinare tale sottospazio è possibile evitare questo calcolo e ragionare nella seguente maniera.

Se l'evoluzione libera deve essere identicamente nulla nell'intervallo $[0, T]$ allora anche tutte le sue derivate devono essere nulle nello stesso intervallo estremi inclusi. In particolare si possono imporre le seguenti condizioni:

$$\left. \frac{d^k y_l(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

che si traducono nelle seguenti equazioni

$$CA^k e^{At}x \Big|_{t=0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Sostituendo $t = 0$ si semplifica in

$$CA^k x = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Notiamo che per il teorema di Cayley-Hamilton è inutile calcolare la precedente relazione per $k > n-1$, quindi ci limiteremo a scrivere le prime n equazioni e a raccoglierle in una notazione matriciale. A tale scopo si definisce la matrice di osservabilità

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

con la quale è possibile scrivere le equazioni sopra ricavate come

$$Ox = 0.$$

A questo punto il sottospazio degli stati inosservabili nell'intervallo $[0, T]$ coincide con il nucleo della matrice O . Poiché la matrice O non dipende da T , l'intervallo di osservazione $[0, T]$ non ha nessuna importanza nella determinazione degli stati inosservabili. Un sistema risulterà completamente osservabile se l'insieme degli stati inosservabili ha dimensione nulla, ovvero se la matrice O ha rango massimo (pari ad n).

8.4 Ricostruzione dello stato iniziale

Un importante risultato permette di risalire allo stato iniziale $x(0)$ una volta noti gli andamenti delle funzioni $u(t)$ e $y(t)$ nell'intervallo $[0, T]$. Infatti calcolata l'evoluzione libera come

$$y_l(t) = Ce^{At}x_0$$

si può ottenere lo stato iniziale sfruttando l'invertibilità di $G^o(T)$. Moltiplicando a sinistra per $e^{A^T t}C^T$:

$$e^{A^T t}C^T y_l(t) = e^{A^T t}C^T Ce^{At}x_0$$

e integrando ambo i membri

$$\int_0^T e^{A^T t}C^T y_l(t)dt = \int_0^T e^{A^T t}C^T Ce^{At}x_0dt$$

ossiamo notare che l'integrale a destra definisce il gramiano di osservabilità, per cui

$$\int_0^T e^{A^T t}C^T y_l(t)dt = G^o(T)x_0$$

e quindi, supponendo il sistema completamente osservabile,

$$x_0 = G^{o-1}(T) \int_0^T e^{A^T t}C^T y_l(t)dt.$$

Se poi il sistema avesse un'uscita dovuta non ha solo all'evoluzione libera basta sostituire al posto di $y_l(t)$ la seguente espressione

$$y_l(t) = y(t) - y_f(t) = y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

per arrivare alla

$$x_0 = G^{o-1}(T) \int_0^T e^{A^T t}C^T y(t)dt - G^{o-1}(T) \int_0^T e^{A^T t}C^T C \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau dt$$

ovvero

$$x_0 = G^{-1}(T) \int_0^T e^{A^T t} C^T y(t) dt - G_o^{-1}(T) \int_0^T e^{A^T t} C^T C e^{A t} \int_0^t e^{-A \tau} b u(\tau) d\tau dt.$$

8.5 Forma di Kalman per l'osservabilità

Supponiamo che la dimensione del sottospazio degli stati non osservabili sia non nulla, dunque la matrice O ha rango non massimo. Sia $q = \rho(O)$ il rango di O . Le righe di O rappresentano vettori ortogonali al nucleo di O quindi se ne possono scegliere q indipendenti (le prime q sono sicuramente indipendenti, anche qui il rango di O cresce riga dopo riga fino a fermarsi definitivamente dopo la riga q -esima) e utilizzarle come base del sottospazio osservabile.

Eseguendo la trasformazione $x = Tz$, dove T^{-1} è costruita dalle q righe indipendenti di O più un completamento di base con $n - q$ righe indipendenti dalle precedenti, ovvero

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{q-1} \\ \text{---} \\ c \end{bmatrix}$$

si giunge alla seguente forma canonica:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \\ \tilde{b} &= \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= [\tilde{C}_1 0] \end{aligned}$$

dove \tilde{A}_{22} è una matrice quadrata di dimensione $n - q$, e \tilde{b}_2 è un vettore colonna di dimensione $n - q$. Il sottosistema di dimensione q descritto dalla terna di matrici \tilde{A}_{11} , \tilde{b}_1 , \tilde{C}_1 viene detto sottosistema osservabile.

Per la funzione di trasferimento $F(s)$ si ha:

$$\begin{aligned} F(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{b} = [\tilde{C}_1 0] \begin{bmatrix} sI_{11} - \tilde{A}_{11} & 0 \\ -\tilde{A}_{21} & sI_{22} - \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \\ &= [\tilde{C}_1 0] \begin{bmatrix} (sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1} & 0 \\ (sI_{22} - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{A}_{22}(sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1} & (sI_{22} - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \\ &= [\tilde{C}_1(sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1}0] \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \tilde{C}_1(sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{b}_1 \end{aligned}$$

Quindi risulta

$$F(s) = \tilde{C}_1(sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{b}_1$$

da cui si vede che nella funzione di trasferimento non compare la parte non osservabile, ovvero, compaiono le dinamiche (autovalori) di \tilde{A}_{11} e non quelle di \tilde{A}_{22} .

8.5.1 Esempio: decomposizione di Kalman per i sottospazi osservabile e non osservabile

Riprendiamo lo stesso sistema dell'esempio della sezione 8.2.1. La matrice di osservabilità vale:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui rango è uno. Possiamo asserire dunque che esiste una sola dinamica osservabile e ben due non osservabili. Calcoliamo la decomposizione di Kalman di osservabilità utilizzando la matrice di trasformazione

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

. Le matrici trasformate saranno:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui notiamo che l'autovalore osservabile quello in -2 mentre gli autovalori in 1 e -1 non lo sono. Complessivamente, considerando anche il risultato trovato nella sezione 8.2.1 abbiamo:

- autovalore -2: controllabile e osservabile;
- autovalore 1: controllabile e non osservabile;
- autovalore -1: non controllabile e non osservabile.

La funzione di trasferimento ingresso uscita è calcolabile come

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s+2}$$

e notiamo che presenta solo la dinamica contemporaneamente controllabile e osservabile.

8.6 Decomposizione completa di Kalman

Abbiamo visto come lo spazio vettoriale nel quale è definito lo stato di un sistema possa essere decomposto sia in una parte controllabile e una non controllabile, sia in una parte osservabile e una non osservabile. In generale si formeranno quattro sottospazi

- il sottospazio controllabile e non osservabile con base χ_1
- il sottospazio controllabile e osservabile con base χ_2
- il sottospazio non controllabile e non osservabile con base χ_3
- il sottospazio non controllabile e osservabile con base χ_4

Esiste una decomposizione di Kalman che mette evidenza allo stesso tempo i quattro sottospazi ed è ottenibile con la seguente matrice di trasformazione:

$$T = [\chi_1 \quad \chi_2 \quad \chi_3 \quad \chi_4]$$

dove le varie basi si ottengono con il seguente procedimento: sia P una base del sottospazio controllabile (le colonne indipendenti di R) e Q una base del sottospazio inosservabile (il nucleo di O). Le basi, $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$, saranno costruite tramite le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} P \cap Q &= \chi_1 \\ \chi_1 \oplus \chi_2 &= P \\ \chi_1 \oplus \chi_3 &= Q \\ \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 &= R^n \end{aligned}$$

dove con \oplus si è indicata la somma diretta di sottospazi. Il sistema a cui si arriva sarà della forma

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 & \tilde{C}_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.6.1 Esempio: decomposizione di Kalman completa

da completare

8.7 Controllabilità e osservabilità: ruolo degli zeri

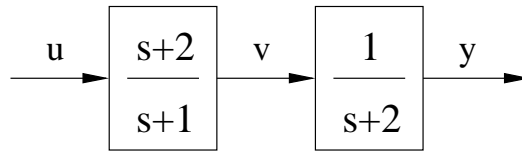


Figura 8.1: Cancellazione zero-polo

Si considerino i due sistemi raffigurati in Fig. 8.1 la cui funzione di trasferimento complessiva risulta essere

$$F(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Abbiamo

$$v = \frac{s+2}{s+1}u = u + \frac{1}{s+1}u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ v = x_1 + u \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 + v \\ y = x_2 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

con $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ autovalori del sistema,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [0, 1]$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(R_1) = 1$$

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(O_1) = 2$$

Nel sistema 1, nel blocco a monte figura uno zero che viene cancellato con il polo del blocco a valle. In queste condizioni si dice che il modo relativo al polo che si è eliso con lo zero è reso non controllabile, in quanto qualunque sia l'ingresso impresso, il modo in questione non viene eccitato; tuttavia è sempre possibile osservarlo dall'uscita, qualora venga originato da una condizione iniziale non nulla.

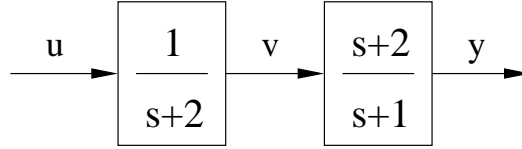


Figura 8.2: Cancellazione polo-zero

Consideriamo, adesso i sistemi della Fig. 8.2 la cui funzione di trasferimento è sempre

$$F(s) = \frac{1}{s+1}.$$

In questo caso

$$y = \frac{s+2}{s+1}v = v + \frac{1}{s+1}v$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + v \\ y = x_1 + v \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_1 + u \\ v = x_2 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

con $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ autovalori del sistema,

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = [1, 1]$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(R_2) = 2$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(O_2) = 1$$

Nel sistema 2, nel blocco a monte figura un polo che si cancella con uno zero del blocco a valle. In queste condizioni si dice che il modo relativo al polo che si è eliso con lo zero è reso non osservabile, in quanto, se viene impresso un ingresso tale da eccitare tutti i modi del sistema, il modo in questione viene comunque eccitato, ma non è possibile osservarlo dall'uscita.

8.8 Il test PBH (Popov-Belevitch-Hautus)

Esiste un test molto semplice che può essere eseguito per determinare se la dinamica associata a un dato autovalore λ risulterà controllabile o meno.

Teorema 8.2 *Supponiamo λ un autovalore della matrice A . La dinamica (o eventualmente almeno una dinamica nel caso di molteplicità algebrica maggiore di uno) relativa all'autovalore λ sarà controllabile se e solo se risulterà*

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix} = n$$

con n dimensione del sistema.

Dimostrazione: Supponiamo che esista un λ tale che il rango non sia massimo. Vorrà dire che esisterà un vettore v^T tale che

$$v^T \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix} = 0$$

da cui $v^T A = \lambda v^T$ e anche $v^T B = 0$. Questo implica che per i prodotti del tipo $v^T A^k B$ varrà

$$v^T A^k B = \lambda v^T A^{k-1} B = \lambda^2 v^T A^{k-2} B = \dots = \lambda^k v^T B = 0.$$

E' immediato dedurre, a questo punto, che il prodotto

$$v^T \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{pmatrix} = v^T R$$

con R matrice di controllabilità sarà uguale a zero, implicando un rango non massimo della matrice stessa e quindi la non completa controllabilità del sistema. Per di più, il vettore v risulterà appartenere al nullo di R^T e quindi appartenente al sottospazio non controllabile. Ma sappiamo che gli autovettori sinistri sono ortogonali a tutti gli autovettori destri associati agli altri autovalori per cui la dinamica non controllabile deve essere quella dell'autovalore λ stesso.

Assumiamo ora la coppia (A, B) non controllabile. Esisterà una matrice di trasformazione T tale che si potrà operare una decomposizione di Kalman di controllabilità tale da porre il sistema nella forma

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E' evidente che per un λ autovalore di \tilde{A}_{22} la matrice

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} - \lambda I & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_1 \\ 0 & \tilde{A}_{22} - \lambda I & 0 \end{pmatrix}$$

non può avere rango massimo e quindi, essendo

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\tilde{A}T^{-1} - \lambda I & T\tilde{B} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{A} - \lambda I & \tilde{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

anche il rango di quest'ultima sarà minore di n . ‡

Naturalmente esiste anche il teorema duale sulla proprietà di osservabilità di una dinamica che afferma:

Teorema 8.3 *Supponiamo λ autovalore di molteplicità singola della matrice A . La dinamica relativa all'autovalore λ sarà osservabile se e solo se risulterà*

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} = n$$

con n dimensione del sistema.

La dimostrazione di questo teorema ricalca da vicino quella del teorema precedente.

Parte II

Sintesi lineare dei sistemi di controllo

Capitolo 9

Assegnazione degli autovalori

9.1 Assegnazione degli autovalori con controreazione dallo stato per un sistema completamente controllabile

Ipotizziamo che lo stato di un sistema sia completamente misurabile e costruiamo un sistema di controllo a controreazione dallo stato come mostrato in Fig. 9.1.

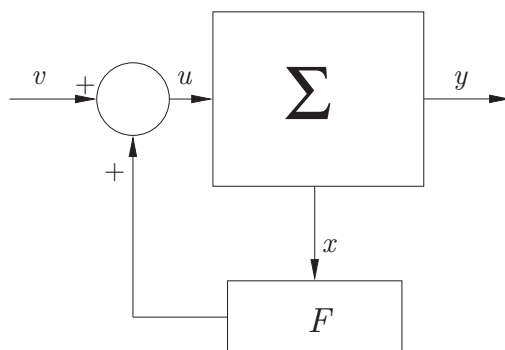


Figura 9.1: Assegnazione autovalori con reazione dallo stato

Ci chiediamo se sia possibile stabilizzare il sistema tramite una scelta dei coefficienti della matrice F che sarà, se il sistema ha un unico ingresso, solo un vettore riga.

Supponiamo il sistema Σ rappresentabile come

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

mentre la controreazione sia

$$u = v + Fx.$$

Consideriamo la matrice di controllabilità R definita in precedenza

$$R = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b],$$

e facciamo l'ipotesi che il sistema sia controllabile, ovvero esista R^{-1} tale da poter definire una trasformazione $x = Tz$ con

$$T^{-1} = Q = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma A \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{bmatrix}$$

che porti le matrici A e b nella forma compagna A_c, b_c .

Sostituendo nelle equazioni dinamiche del sistema l'equazione della controreazione otteniamo

$$\dot{x} = Ax + bv + bFx = (A + bF)x + bv$$

Eseguiamo adesso il cambiamento di coordinate $x = Tz$ secondo quanto detto prima:

$$\dot{z} = T^{-1}(A + bF)Tz + T^{-1}bv = (T^{-1}AT + T^{-1}bFT)z + T^{-1}bv$$

Ovviamente $T^{-1}AT$ è una matrice in forma compagna e, facendo le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} A_c &= T^{-1}AT \\ b_c &= T^{-1}b \\ F_c &= FT, \end{aligned}$$

possiamo riscrivere il tutto come

$$\dot{z} = (A_c + b_c F_c)z + b_c v.$$

Se supponiamo che F_c sia il vettore riga

$$F_c = [f_{c0} \quad f_{c1} \quad f_{c2} \quad \dots \quad f_{c_{n-1}}],$$

ricordando che nella forma compagna b_c è un vettore colonna formato da tutti zeri con un uno in ultima posizione, possiamo scrivere

$$A_c + b_c F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{c0} & f_{c1} & f_{c2} & \dots & f_{c_{n-1}} \end{bmatrix}$$

e quindi la nuova matrice di stato che chiameremo A_w sarà

$$A_w = A_c + b_c F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_{c0} - a_0 & f_{c1} - a_1 & f_{c2} - a_2 & \dots & f_{c_{n-1}} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

La matrice A_w è evidentemente ancora in forma compagna e quindi i valori dell'ultima riga sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A_w cambiati di segno. Si potranno assegnare nuovi autovalori $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a questo sistema scrivendo un polinomio caratteristico desiderato:

$$P^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*) \dots (\lambda - \lambda_n^*) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

e poi imponendo le seguenti relazioni per i coefficienti di F_c

$$\begin{cases} f_{c_0} - a_0 = -\alpha_0 \\ f_{c_1} - a_1 = -\alpha_1 \\ \vdots \\ f_{c_{n-1}} - a_{n-1} = -\alpha_{n-1} \end{cases}$$

ovvero

$$f_{c_i} = a_i - \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

e quindi

$$F_c = [a_0 - \alpha_0 \quad a_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad a_{n-1} - \alpha_{n-1}]$$

Tornando al sistema espresso nelle coordinate x iniziali, e ricordando di avere posto $F_c = FT$, otteniamo la matrice F :

$$\begin{aligned} F = F_c T^{-1} &= [a_0 - \alpha_0 \quad a_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad a_{n-1} - \alpha_{n-1}] \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma A \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{bmatrix} = \\ &= (a_0 \gamma I + a_1 \gamma A + \dots + a_{n-1} \gamma A^{n-1}) - (\alpha_0 \gamma I + \alpha_1 \gamma A + \dots + \alpha_{n-1} \gamma A^{n-1}) \end{aligned}$$

applicando il teorema di Cayley-Hamilton al primo termine tra parentesi e, per la seconda parentesi, valutando su A il polinomio caratteristico desiderato $P^*(\lambda)$ si ottiene la formula di Ackermann:

$$F = -\gamma A^n - (\gamma P^*(A) - \gamma A^n) = -\gamma P^*(A)$$

9.1.1 Esempio: assegnazione autovalori dallo stato

Supponiamo di avere il sistema descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 2 \quad -4].$$

Vogliamo trovare una reazione dallo stato in grado di assegnare gli, autovalori $\lambda_i = (-1, -2, -3)$. Si tratta, cioè, di imporre il seguente polinomio caratteristico:

$$P^*(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3).$$

Vediamo, innanzitutto, se il sistema è completamente controllabile; la matrice di controllabilità vale

$$R = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & 19 \end{bmatrix}$$

il cui rango è massimo. La sua inversa è

$$R^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} 113 & -83 & -71 \\ 7 & -8 & -5 \\ -16 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

per cui l'ultima riga, che chiameremo γ , è scritta come

$$\gamma = \left[-\frac{16}{17} \quad -\frac{11}{17} \quad -\frac{9}{17} \right].$$

Dobbiamo, adesso, valutare il polinomio caratteristico $P^*(\lambda)$ sulla matrice A :

$$P^*(A) = (A + I)(A + 2I)(A + 3I) = \begin{bmatrix} 50 & 53 & 34 \\ 75 & 35 & 20 \\ 20 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

e calcolare la matrice di guadagno da mettere in controreazione come

$$F = -\gamma P^*(A) = \begin{bmatrix} \frac{205}{17} & -\frac{193}{17} & -\frac{144}{17} \end{bmatrix}.$$

Come controprova si può calcolare la matrice

$$A + BF = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 188 & -142 & -110 \\ -120 & 159 & 144 \\ 615 & -545 & -449 \end{bmatrix}$$

I cui autovalori sono proprio quelli assegnati.

9.2 Assegnazione autovalori del sottosistema controllabile

Sia

$$\dot{x} = Ax + bu$$

un sistema dinamico di cui supponiamo si possa misurare lo stato x , e sia

$$u = v + Fx$$

lo schema di controllo con reazione dallo stato.

Supponiamo che la matrice di controllabilità abbia rango k , e quindi sia possibile trasformare il sistema nella forma canonica di Kalman per la controllabilità con la matrice

$$T = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{k-1}b \quad | \quad t_1 \quad \dots \quad t_{n-k}]$$

ottenendo così

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{b} = T^{-1}b$$

e

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

e anche

$$u = v + Fx = v + FTz = v + \tilde{F}z.$$

Se adesso poniamo

$$\tilde{F} = [\tilde{F}_1 \quad 0]$$

con \tilde{F}_1 vettore di k elementi, possiamo scrivere

$$\dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{A}_{12}z_2 + \tilde{b}_1(v + \tilde{F}_1z_1)$$

$$\dot{z}_2 = \tilde{A}_{22}z_2$$

che diventa

$$\dot{z}_1 = (\tilde{A}_{11} + \tilde{b}_1\tilde{F}_1)z_1 + \tilde{A}_{12}z_2 + \tilde{b}_1v$$

$$\dot{z}_2 = \tilde{A}_{22}z_2$$

A questo punto è possibile risolvere il problema di assegnazione degli autovalori per il sottospazio controllabile la cui dinamica è descritta da $(\tilde{A}_{11}, \tilde{b}_1)$ scegliendo

$$\tilde{F}_1 = -\gamma P_{11}^*(\tilde{A}_{11})$$

con γ ultima riga dell'inverso della matrice

$$R_1 = [\tilde{b}_1 \quad \tilde{A}_{11}\tilde{b}_1 \quad \dots \quad \tilde{A}_{11}^{k-1}\tilde{b}_1].$$

Dalle posizioni fatte segue

$$F = \tilde{F}T^{-1} = [\tilde{F}_1 \quad 0]T^{-1}$$

9.2.1 Esempio: Assegnazione autovalori del sottospazio controllabile

Dato il sistema

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -6 & -3 & -14 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si vogliono assegnare (se possibile) gli autovalori $(-3, -2, -2)$.

La matrice di controllabilità è

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ed il suo rango è 2. Quindi la dimensione del sottospazio controllabile è soltanto due. A questo punto andiamo a vedere l'autovalore della parte non controllabile quanto vale. Consideriamo la trasformazione per la forma di Kalman che mette in evidenza il sottospazio controllabile

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

da cui

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le nuove matrici di stato saranno

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \tilde{b} = T^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'autovalore della parte non controllabile vale -3 quindi non solo è stabile ma coincide anche con uno di quelli richiesti. Adesso non resta che assegnare gli altri due alla parte rimanente (quella controllabile).

Consideriamo le matrici

$$\tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con queste costruiamo la matrice di controllabilità ridotta e calcoliamo l'ultima riga della sua inversa:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = (0 \quad 1).$$

Il polinomio caratteristico desiderato sarà

$$P^*(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

e quindi

$$\tilde{F}_1 = -\gamma P_{11}^*(\tilde{A}_{11}) = (-8 \quad -32)$$

che ci fornisce

$$F = \tilde{F}T^{-1} = [\tilde{F}_1 \quad 0]T^{-1} = (-32 \quad 0 \quad -40).$$

9.2.2 Stabilizzabilità

Definiamo adesso una proprietà più debole della completa controllabilità di un sistema:

Definizione 9.1 Una coppia (A, B) si dice *stabilizzabile* se esiste una matrice F tale che la matrice $A + BF$ abbia tutti gli autovalori a parte reale negativa

Varrà naturalmente il seguente risultato derivato dal teorema 8.2:

Corollario 9.1 Una coppia (A, B) risulterà stabilizzabile se e solo se per ogni autovalore λ di A a parte reale positiva o nulla risulterà

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix} = n.$$

9.3 Assegnazione degli autovalori dallo stato per sistemi con più ingressi

Sia

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{9.1}$$

un sistema dinamico di cui supponiamo si possa misurare lo stato x , e sia

$$u = v + QKx$$

lo schema di controllo con reazione dallo stato con B matrice di proiezione degli ingressi di dimensione $n \times p$ con p maggiore di 1, Q una matrice $p \times p$ non singolare, e K una matrice di guadagni di dimensioni $p \times n$.

Si tratterà, dunque, di trovare K e Q tali che la matrice

$$A + BQK \tag{9.2}$$

abbia le dinamiche volute.

Supponiamo che la matrice B sia di rango massimo e che il sistema sia completamente controllabile. Quest'ultima condizione corrisponde a chiedere che la matrice di controllabilità

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

abbia rango massimo. In questo caso possiamo selezionare n colonne indipendenti di R in modo da ottenere una matrice quadrata invertibile.

Per scegliere quali colonne utilizzare, procediamo con il seguente algoritmo:

1. Prendiamo tutte le colonne di B . L'ipotesi di rango massimo ci dice che queste sono indipendenti tra di loro.
2. Scriviamo la AB e selezioniamo le colonne che fanno aumentare il rango procedendo, ad esempio, da Ab_1 fino ad Ab_p .
3. Continuiamo con A^2B , A^3B , \dots , sempre con lo stesso ordine, fino a quando non abbiamo selezionato n colonne indipendenti.

4. Chiamiamo indici di controllabilità i valori n_i che corrispondono al numero di colonne $A^j b_i$ aggiunte in corrispondenza dell'ingresso i -esimo.

La somma degli indici di controllabilità sarà uguale a n e questo ci consente di definire la matrice R_c formata con le colonne di R selezionate secondo gli indici n_i :

$$R_c = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & A^{n_1-1}b_1 & | & \dots & | & b_p & \dots & A^{n_p-1}b_p \end{bmatrix}.$$

Questa matrice ha rango pieno e quindi la sua inversa esiste e può essere partizionata per righe in blocchi di lunghezza n_i . Indicate con γ_i le ultime righe di questi blocchi:

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_p \end{bmatrix}$$

possiamo usare le γ_i per definire sia la matrice Q :

$$Q = \left(\begin{bmatrix} \gamma_1 A^{n_1-1} \\ \gamma_2 A^{n_2-1} \\ \vdots \\ \gamma_p A^{n_p-1} \end{bmatrix} B \right)^{-1},$$

sia la matrice K come

$$K = \begin{bmatrix} -\gamma_1 P_1^*(A) \\ -\gamma_2 P_2^*(A) \\ \vdots \\ -\gamma_p P_p^*(A) \end{bmatrix},$$

dove i vari $P_i^*(A)$ sono dei polinomi di grado n_i con radici assegnate.

Per dimostrare che questa posizione è sufficiente a ottenere il risultato di assegnare al sistema controreazionato le dinamiche del polinomio

$$P^*(\lambda) = P_1^*(\lambda) \cdot P_2^*(\lambda) \cdot \dots \cdot P_p^*(\lambda)$$

prendiamo in esame un caso in cui si abbiano tre ingressi con i seguenti indici: $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ e $n_3 = 1$.

In questo caso la matrice R_c prende la forma

$$R_c = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

e la sua inversa sarà

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} * \\ \gamma_1 \\ * \\ * \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Dovendo essere $R_c^{-1}R = I$ matrice identità, saranno vere le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \gamma_1 b_1 = 0 \\ \gamma_1 A b_1 = 1 \\ \gamma_2 b_2 = 0 \\ \gamma_2 A b_2 = 0 \\ \gamma_2 A^2 b_2 = 1 \\ \gamma_3 b_3 = 1 \end{cases} . \quad (9.3)$$

In realtà anche altre combinazioni riga colonna, che qui non riportiamo, daranno come risultato zero.

Definiamo adesso una trasformazione di coordinare $x = Tz$ con

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_1 A \\ \gamma_2 \\ \gamma_2 A \\ \gamma_2 A^2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

ed applichamola al sistema (9.1) che diventa

$$\dot{z} = T^{-1}(A + BQK)Tz + Bv$$

Cerchiamo di calcolare la matrice di stato di questo nuovo sistema: dobbiamo calcolare la matrice di stato

$$\tilde{A} = T^{-1}(A + BQK)T$$

o meglio, moltiplicando a destra per T^{-1} possiamo scrivere

$$\tilde{A}T^{-1} = T^{-1}(A + BQK)$$

e, per il momento, cerchiamo di determinare $T^{-1}A + T^{-1}BQK$. Per la matrice $T^{-1}A$ vediamo subito che essa vale:

$$T^{-1}A = \begin{bmatrix} \gamma_1 A \\ \gamma_1 A^2 \\ \gamma_2 A \\ \gamma_2 A^2 \\ \gamma_2 A^3 \\ \gamma_3 A \end{bmatrix} .$$

Per la Q abbiamo

$$Q = \left(\begin{bmatrix} \gamma_1 A \\ \gamma_2 A^2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} B \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1 AB \\ \gamma_2 A^2 B \\ \gamma_3 B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

e visto che

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 AB \\ \gamma_2 A^2 B \\ \gamma_3 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = I$$

se ne deduce che

$$\begin{cases} \gamma_1 AB p_1 = 1 & \gamma_1 AB p_2 = 0 & \gamma_1 AB p_3 = 0 \\ \gamma_2 A^2 B p_1 = 0 & \gamma_2 A^2 B p_2 = 1 & \gamma_2 A^2 B p_3 = 0 \\ \gamma_3 B p_1 = 0 & \gamma_3 B p_2 = 0 & \gamma_3 B p_3 = 1 \end{cases} .$$

A questo punto calcoliamo $T^{-1}B$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} \gamma_1 B \\ \gamma_1 AB \\ \gamma_2 B \\ \gamma_2 AB \\ \gamma_2 A^2 B \\ \gamma_3 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 b_1 & \gamma_1 b_2 & \gamma_1 b_3 \\ & \gamma_1 AB & \\ \gamma_2 b_1 & \gamma_2 b_2 & \gamma_2 b_3 \\ \gamma_2 Ab_1 & \gamma_2 Ab_2 & \gamma_2 Ab_3 \\ & \gamma_2 A^2 B & \\ & \gamma_3 B & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_1 AB \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_2 A^2 B \\ \gamma_3 B \end{bmatrix}$$

Gli zeri che compaiono in questa matrice sono dovuti al fatto che alcuni elementi del tipo $\gamma_i A^j b_k$ sono uguali a zero in quanto sono già tali nell'elenco (9.3), mentre altri saranno combinazioni lineari di colonne della R_c che, premoltiplicate per γ_i , varranno zero. Ad esempio, $\gamma_2 Ab_3$ è combinazione lineare delle colonne

$$[\gamma_2 b_1 \quad \gamma_2 b_2 \quad \gamma_2 b_3 \quad \gamma_2 Ab_1 \quad \gamma_2 Ab_2]. \quad (9.4)$$

Solo queste colonne in quanto, per costruzione, la colonna Ab_3 deve essere stata esclusa dal computo di R_c in quanto combinazione lineare di quelle già inserite, altrimenti non ci sarebbe stato bisogno della $A^2 b_2$. Allora, visto che la premoltiplicazione della (9.4) per γ_2 dà degli zeri, e visto che Ab_3 è combinazione lineare di queste, anche $\gamma_2 Ab_3$ sarà nulla.

A questo punto calcoliamo $T^{-1}BQ$ che, per quanto detto prima, vale

$$T^{-1}BQ = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_1 AB \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_2 A^2 B \\ \gamma_3 B \end{bmatrix} [p_1 \quad p_2 \quad p_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ed infine

$$T^{-1}BQK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 P_1^*(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 P_2^*(A) & 0 & 0 \\ -\gamma_3 P_3^*(A) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sommando le due componenti ora calcolate abbiamo

$$T^{-1}A + T^{-1}BQK = \begin{bmatrix} \gamma_1 A \\ \gamma_1 (A^2 - P_1^*(A)) \\ \gamma_2 A \\ \gamma_2 A^2 \\ \gamma_2 (A^3 - P_2^*(A)) \\ \gamma_3 (A - P_3^*(A)) \end{bmatrix}$$

e, ponendo ad esempio

$$\begin{cases} P_1^*(A) = \alpha_0^1 I + \alpha_1^1 A + A^2 \\ P_2^*(A) = \alpha_0^2 I + \alpha_1^2 A + \alpha_2^2 A + A^3 \\ P_3^*(A) = \alpha_0^3 I + A \end{cases}$$

abbiamo

$$T^{-1}A + T^{-1}BQK = \begin{bmatrix} \gamma_1 A \\ \gamma_1 (-\alpha_0^1 I - \alpha_1^1 A) \\ \gamma_2 A \\ \gamma_2 A^2 \\ \gamma_2 (-\alpha_0^2 I - \alpha_1^2 A - \alpha_2^2 A) \\ \gamma_3 (-\alpha_0^3 I) \end{bmatrix}.$$

Poiché questa matrice dovrà essere uguale, come detto, ad $\tilde{A}T^{-1}$, ne consegue che \tilde{A} dovrà avere la forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -\alpha_0^1 & -\alpha_1^1 & & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & -\alpha_0^2 & -\alpha_1^2 & -\alpha_2^2 \\ & & & & -\alpha_0^3 \end{bmatrix}$$

dove si sono omessi degli zeri per mettere in evidenza la particolare struttura di questa matrice, la quale prende il nome di *forma canonica di Brunowsky*. E' diagonale a blocchi, e ogni blocco ha la forma di una matrice compagna o forma canonica di controllore. Per questo motivo, dall'analisi dei coefficienti di ciascun blocco possiamo essere sicuri di avere imposto esattamente le radici dei polinomi $P_i^*(\lambda)$.

9.3.1 Esempio: assegnazione dinamiche con due ingressi

Sia dato il sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vogliamo spostare tutte le dinamiche in -1.

Cominciamo a notare che il rango di B è pari a 2 e calcoliamo la matrice di controllabilità completa:

$$R = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & Ab_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & & \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & \vdots & & \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -2 & \vdots & & \end{bmatrix}.$$

Raggiunto il rango 3 con la quarta colonna (la terza dipende dalle precedenti) possiamo fermarci e concludere che il sistema è completamente controllabile con i due ingressi. Gli indici di controllabilità varranno $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$. Per cui, selezionando e riordinando le righe opportune:

$$R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

La sua inversa vale

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi i due vettori γ_i saranno la prima e la terza riga:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adesso calcoliamo la matrice Q :

$$Q = \left(\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 A \end{bmatrix} B \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definiti i due polinomi desiderati pari a

$$P_1^*(\lambda) = \lambda + 1 \\ P_2^*(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

ed avendoli calcolati su A

$$P_1^*(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P_2^*(A) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

possiamo calcolare la matrice dei guadagni K come

$$K = \begin{bmatrix} -\gamma_1 P_1^*(A) \\ -\gamma_2 P_2^*(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -3 \end{bmatrix}$$

Per verificare la bontà del risultato calcoliamo la dinamica del ciclo chiuso come $(A + BK)$, ricordando che in controreazione c'è il prodotto QK ma che Q è venuta pari alla matrice identità:

$$A + BK = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 16 & -5 \end{bmatrix}$$

i cui tre autovalori valgono appunto -1.

9.4 Assegnazione degli autovalori con controreazione dall'uscita per un sistema controllabile e osservabile

Sia dato il sistema dinamico Σ

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

con (A, b, C) note e supponiamo di non poter misurare direttamente lo stato x . Vogliamo costruire un sistema di controllo a controreazione in grado di assegnare delle dinamiche prestabilite. Poiché l'unica informazione sull'evoluzione del sistema ci giunge attraverso l'uscita ipotizziamo che il sistema sia completamente osservabile in modo da garantirci la possibilità di ricostruire il suo stato interno. Supponiamo inoltre che il sistema sia completamente controllabile.

Per ricostruire lo stato x del sistema Σ progettiamo un secondo sistema dinamico, detto osservatore, in grado di fornire una stima z dello stato stesso.

$$\dot{z} = Fz + bu + K_2 y.$$

Ovviamente chiederemo che $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - z(t)\| = 0$.

Con l'osservatore sopra indicato, e la reazione $u = v + K_1 z$, costruiamo il sistema di controllo della Fig. 9.2.

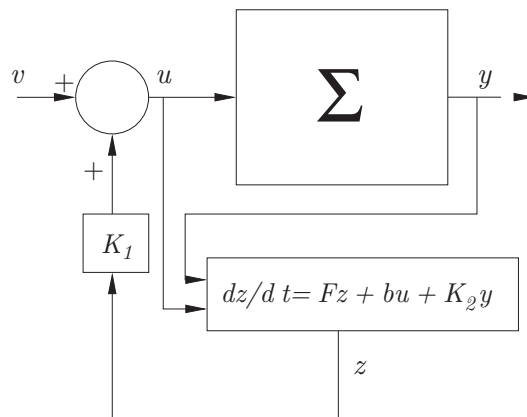


Figura 9.2: Assegnazione autovalori con reazione dall'uscita

La matrice K_1 avrà il compito di assegnare delle dinamiche prestabilite al sistema da controllare, le matrici F e K_2 dovranno invece garantire la convergenza dell'errore di stima $e(t) = x(t) - z(t)$ a zero. Per studiare

le dinamiche del sistema Σ +osservatore scriviamo le equazioni di stato complessive e poiché siamo interessati all'andamento di $e(t)$, consideriamo lo stato esteso $\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$.

Per \dot{x} possiamo scrivere la seguente equazione

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax + b(v + K_1 z) = Ax + bv + bK_1(x - e) = (A + bK_1)x - bK_1 e + bv,$$

mentre per \dot{e} abbiamo

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{z} = Ax + bu - Fz - bu - K_2 y = Ax - F(x - e) - K_2 Cx = (A - K_2 C)x - Fx + Fe.$$

Se poniamo $F = A - K_2 C$ l'equazione si riduce a

$$\dot{e} = (A - K_2 C)e.$$

Le due equazioni possono essere raggruppate e scritte nel seguente modo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + bK_1 & -bK_1 \\ 0 & A - K_2 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v$$

mentre l'uscita diventa

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}.$$

Notiamo adesso alcune cose: prima di tutto la matrice di stato è in forma triangolare e quindi gli autovalori del sottosistema x coincidono con quelli della matrice $(A + bK_1)$, mentre quelli del sottosistema e con quelli di $(A - K_2 C)$. Secondo, il sottosistema di errore è non controllabile visto che le matrici sono in forma di Kalman di controllabilità (con gli zeri strutturali al posto giusto).

Il primo fatto, noto come proprietà di disaccoppiamento, implica la possibilità di utilizzare la matrice K_1 per assegnare le dinamiche prescelte al sistema x con la nota formula di Ackermann

$$K_1 = -\gamma P^*(A)$$

con γ l'ultima riga dell'inversa della matrice di controllabilità della coppia (A, b) e $P_A^*(A)$ il polinomio caratteristico desiderato (le cui radici sono gli autovalori che si vogliono imporre) calcolato sulla matrice A .

Il secondo fatto ci consente di assegnare, in maniera del tutto indipendente, anche la dinamiche dello stimatore, ovvero assegnare, tramite la matrice K_2 gli autovalori di $A - K_2 C$. Queste dinamiche, da progettare in maniera che risultino stabili, imporranno la convergenza a zero dell'errore e e quindi anche di x . Infatti, imponendo la condizione di equilibrio $\dot{x} = 0$ per il primo sottosistema avremo:

$$0 = (A + bK_1)x_{eq} - bK_1 e_{eq} + bv_{eq}$$

e quindi, vista l'invertibilità di $(A + bK_1)$ garantita dall'aver assegnato autovalori tutti a parte reale negativa,

$$x_{eq} = (A + bK_1)^{-1}(bK_1 e_{eq} - bv_{eq}).$$

Poiché $e_{eq} = 0$ se il riferimento v_{eq} è nullo anche x_{eq} varrà zero. Da qui si evince anche che per far convergere x a zero l'errore deve essere già andato a zero e per questo si sceglieranno, per il sottosistema di errore, delle dinamiche con velocità di convergenza uguale o superiore a quelle scelte per la x .

Vediamo ora come imporre tali autovalori tramite la matrice K_2 . Per quanto concerne gli autovalori di $A - K_2 C$ non può essere applicato direttamente l'algoritmo di Ackermann in quanto il vettore incognito K_2

è un vettore colonna. Per ovviare a ciò possiamo imporre gli autovalori di $(A - K_2C)^T$ che sono ovviamente identici:

$$(A - K_2C)^T = A^T + C^T(-K_2^T)$$

Per l'applicazione dell'algoritmo di Ackermann calcoleremo la matrice

$$[c^T \mid A^T c^T \mid \dots \mid (A^{n-1})^T c^T] = O^T$$

che deve essere invertibile, cioè $\rho(0) = n$, ovvero il sistema deve essere completamente osservabile. In questo caso

$$-K_2^T = -\tilde{\gamma}P_e^*(A^T)$$

con $P_e^*(\lambda)$ polinomio caratteristico le cui radici sono gli autovalori desiderati per l'errore e $\tilde{\gamma}$ l'ultima riga dell'inversa della matrice O^T . Eseguendo la trasposizione su entrambi i membri:

$$K_2 = P_e^*(A^T)^T \tilde{\gamma}^T = P_e^*(A) \tilde{\gamma}^T$$

Essendo poi

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

e valendo per qualsiasi matrice invertibile che l'inversa della trasposta coincide con la trasposta dell'inversa, avremo che l'ultima riga di $O^{T^{-1}}$ sarà uguale all'ultima riga di O^{-1^T} e quindi γ^T coinciderà con l'ultima colonna di O^{-1} .

$$O^{-1} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \gamma^T \end{bmatrix}.$$

Vogliamo adesso mettere in evidenza la particolare struttura di questo osservatore, chiamato anche di Luenberger. Notiamo come il sistema osservatore

$$\dot{z} = Fz + Bu + K_2y$$

possa essere riscritto sostituendo la definizione di $F = A - KC$, notando che $Cz = y_z$ è l'uscita stimata dall'osservatore, e riordinando i vari termini:

$$\dot{z} = Az + Bu + K_2(y - y_z).$$

Come si può constatare si tratta in tutto e per tutto di una replica esatta del sistema osservato con un ulteriore ingresso dipendente dal guadagno K_2 il quale tiene conto della differenza tra l'uscita vera e quella stimata e forza la variabile z al fine di poter ridurre questa differenza.

9.4.1 Rilevabilità (*detectability*)

Le stesse considerazioni fatte nel paragrafo 9.2.1 sulla stabilizzabilità dei sistemi non completamente controllabili possono essere fatte qui per i sistemi non completamente osservabili. Anche in questo caso sarà possibile, tramite la matrice K_2 assegnare solo quelle dinamiche che risulteranno osservabili. Diamo allora la seguente definizione:

Definizione 9.2 Una coppia (A, C) si dice rilevabile se esiste una matrice K tale che la matrice $A + KC$ abbia tutti gli autovalori a parte reale negativa

Varrà anche qui un risultato analogo a quello già visto per la stabilizzabilità:

Corollario 9.2 *Una coppia (A, C) risulterà rilevabile se e solo se per ogni autovalore λ di A a parte reale positiva o nulla risulterà*

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} = n$$

9.4.2 Esempio: assegnazione autovalori con osservatore dall'uscita

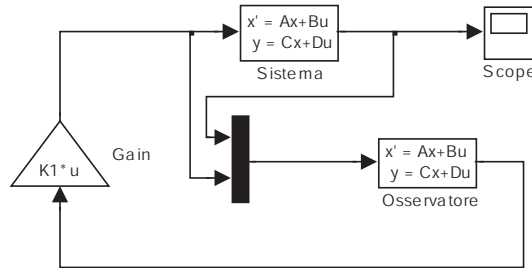


Figura 9.3: Osservatore

Supponiamo di avere il sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix},$$

E di voler assegnare le dinamiche $(-1, -1)$ per il sistema e $(-2, -2)$ per l'osservatore. Verifichiamo innanzitutto la piena controllabilità e osservabilità delle dinamiche

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}; O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Le due matrici hanno rango pieno e quindi possiamo procedere con l'assegnazione delle dinamiche. Per la parte stato del sistema siamo in cerca di una matrice di guadagni K_1 tale che gli autovalori di $A + BK_1$, matrice di stato del ciclo chiuso, siano entrambi -1. Si tratterà di applicare la formula di Ackermann

$$K_1 = -\gamma P^*(A)$$

con $P^*(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ e γ ultima riga dell'inversa della matrice di controllabilità.

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Per la parte osservatore dobbiamo trovare una matrice K_2 tale che gli autovalori di $A - K_2C$ si collochino entrambi in -2. Questo può essere fatto utilizzando la formula di Ackermann sulla coppia (A, C)

$$K_2 = P_e^*(A)\tilde{\gamma}^T$$

con $P_e^*(\lambda) = (\lambda + 2)^2$ e $\tilde{\gamma}^T$ ultima colonna dell'inversa della matrice di osservabilità:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$$

In figura 9.3 vediamo un'implementazione in Simulink dell'osservatore. Simulando il sistema a partire da uno stato iniziale pari a $(1, -1)$ otteniamo l'andamento della figura 9.3

9.5 Osservatore del sottospazio osservabile

da completare

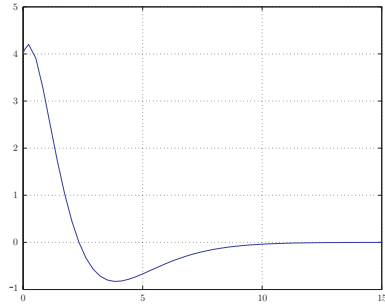


Figura 9.4: Uscita

9.6 Osservatori per sistemi con più uscite

Analogamente a quanto detto nella sezione 9.3, è possibile sintetizzare un osservatore in presenza di una uscita di dimensione maggiore a uno. Il problema è esattamente il duale e si tratterà di trovare la matrice \hat{K} tale che

$$A - \hat{K}C$$

abbia gli autovalori richiesti con C composta da 2 o più righe. Come già visto, questo problema può essere affrontato facendo prima la trasposta

$$A^T - C^T \hat{K}^T$$

e quindi, ponendo $\hat{K}^T = -QK$, può essere espresso come

$$A^T + C^T QK$$

che ha esattamente la stessa forma dell'equazione (9.2). Trovate Q e K la soluzione sarà data da $\hat{K} = -K^T Q^T$.

9.7 Filtraggio dell'uscita

L'osservatore di Luenberger così come è stato introdotto ha sicuramente lo scopo di stimare le variabili di stato del sistema al fine di consentire una reazione dallo stato stimato e guidare il sistema complessivo verso l'origine con delle dinamiche assegnate. Un effetto secondario, non trascurabile e dovuto al fatto che l'osservatore è anch'esso un sistema dinamico, è quello di filtrare la stima in questione secondo una banda passante assegnata. In realtà questo effetto può essere visto come un'opportunità in quanto spesso la misura dell'uscita del sistema sotto osservazione può presentare delle componenti di rumore che, se fossero riportate in feedback all'ingresso dello stesso, potrebbero comportare un'inutile sollecitazione degli attuatori e in generale un degrado delle prestazioni del sistema complessivo. Non è infrequente, infatti, l'uso di osservatori anche là dove le misure dello stato sono tutte (o quasi tutte) disponibili. Vediamo dunque che l'uso di osservatori ridotti deve essere giustificato dalla disponibilità di misure sufficientemente esenti dal suddetto rumore essendo preferibile, altrimenti, l'uso di un osservatore completo.

9.8 Come scegliere le dinamiche

Dopo avere provato che le dinamiche del ciclo chiuso possono, sotto certe condizioni, essere assegnate a piacimento, viene naturale chiedersi quale sia la migliore posizione delle stesse sul piano complesso. Ovvero, in funzione di alcune prestazioni richieste, dove piazzare gli autovalori del sistema controreazionato.

Notiamo innanzitutto che il guadagno della matrice F non può essere scelto arbitrariamente alto in quanto questo comporterebbe un eccessivo valore dell'ingresso al processo, almeno durante il transitorio. Questa cosa, oltre a essere in pratica poco realizzabile a causa delle saturazioni sempre presenti, provocherebbe al sistema degli stress che potrebbero essere non sopportabili dalla struttura fisica. Alcune volte la saturazione è richiesta ma in questo caso si va verso controllori di tipo *bang-bang* in cui si desidera imporre al sistema sempre il massimo valore dell'ingresso producibile dall'attuatore. Ovviamente questo tipo di progettazione ricade nella categoria nonlineare e va al di fuori della presente trattazione.

In generale è vero che la matrice dei guadagni F ha una modulo che tanto più ampio quanto più dobbiamo spostare le dinamiche. Questo è deducibile immediatamente dalla 9.1. Inoltre, il modulo di F sarà maggiore quanto più piccolo è il rango della matrice di controllabilità, ovvero quanto meno facilmente le singole dinamiche risulteranno controllabili.

Un altro discorso che va fatto riguarda la banda passante che si vuole ottenere per il ciclo chiuso. In generale una banda passante arbitrariamente ampia non è desiderabile, in quanto spesso saranno presenti dei disturbi o risonanze la cui collocazione in frequenza limiterà notevolmente la scelta di questa. Notiamo poi che la banda passante di un sistema è principalmente governata dai suoi *poli dominanti*, ovvero i poli più vicini all'origine degli assi. Il suo transitorio, invece, è legato sia ai poli lontani dall'origine, per quanto riguarda i modi più veloci, sia a quelli prossimi all'origine, per le dinamiche più lente.

E' naturale, a questo punto, chiedere al sistema di utilizzare al meglio lo sforzo di controllo e quindi, poiché le dinamiche più veloci possono assorbire una larga parte di questo senza peraltro alterare la banda passante, appare abbastanza logico chiedere al processo di assegnazione delle dinamiche di portare tutti gli autovalori alla stessa distanza dall'origine. Inoltre, uno dei risultati a cui si può arrivare studiando un problema di ottimizzazione inteso a minimizzare lo sforzo di controllo è quello che afferma che al decrescere dello sforzo di controllo gli autovalori si allontanano dall'origine lungo dei raggi che escono da essa.

Quindi, per contenere la banda passante in un certo limite e per dosare efficientemente lo sforzo di controllo, è pensabile assegnare gli autovalori lungo una circonferenza di raggio ω_0 nelle radici fornite dalla

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2k} = (-1)^{k+1} \quad (9.5)$$

dove k è il numero di dinamiche da assegnare nel semipiano sinistro.

Questo tipo di assegnazione corrisponde a scegliere come locazioni le radici di una famiglia di polinomi detti di *Butterworth*. Dalla (9.5) si deduce che vi saranno $2k$ poli equispaziati in angolo su una circonferenza di raggio ω_0 . Nessun polo può cadere sull'asse immaginario, mentre ne cade uno sull'asse reale se k è dispari e nessuno per k pari.

I sistemi con polinomi di Butterworth a denominatore (che in un contesto di filtraggio di segnali chiameremmo filtri di Butterworth) sono caratterizzati dalla proprietà che la risposta in ampiezza è molto piatta fino alla frequenza della banda passante, hanno buone caratteristiche di fase (abbastanza lineare) ma il fronte della banda di transizione (dopo la banda passante) è poco ripido. Una seconda proprietà fondamentale è che la caratteristica di frequenza prima della banda passante e nella banda oscura (la banda dove l'attenuazione è ormai sotto una soglia prefissata) è monotona. Inoltre, la frequenza della banda passante è assegnabile con esattezza ed è pari proprio a ω_0 .

Un secondo metodo, che sceglie sempre i poli su una circonferenza centrata nell'origine, è quello che sfrutta le radici dei polinomi di *Bessel*. In questo caso si ottiene un filtro che non ha una banda passante definita con

estrema precisione ma che, fino alla frequenza di progetto ω_0 , presenta un ritardo di fase molto ben approssimabile con lo sfasamento dovuto ad un termine esponenziale e pertanto presenta un ritardo di gruppo piatto. Questo fa sì che la distorsione introdotta, nella riproduzione di segnali complessi, sia minima. La risposta a un gradino, che come segnale di ingresso presenta infinite componenti armoniche, sarà pertanto migliore di tutte le altre scelte.

9.8.1 Esempio: assegnazione della banda passante

Sia dato il sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che consiste nella cascata di tre poli, due stabili in -2 e -4 , e uno instabile in $+1$. Vogliamo assegnare le dinamiche con reazione dallo stato cercando di imporre una banda passante pari a 3 rad/sec.

Per confronto procediamo prima ad assegnare le dinamiche utilizzando tre poli coincidenti in -3 . La matrice di reazione dallo stato che si ottiene è pari a

$$F = \begin{bmatrix} -64 & -21 & -4 \end{bmatrix}.$$

Usiamo adesso un polinomio di Butterworth di grado 6 e quindi scegliamo le 3 radici che si trovano sul semipiano sinistro. Questo in Matlab può essere fatto nel seguente modo:

```

1 w0=3; % Banda passante designata
2 k=3; % Numero di poli da assegnare
3 poli=roots([1 zeros(1,2*k-1) -w0^(2*k)]); % Radici del polinomio di Butterworth
4 poli=poli(1:k); % Radici a parte reale negativa
```

Con questa scelta dei poli si ottiene la matrice

$$F = \begin{bmatrix} -52 & -15 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se, invece, ricaviamo le radici di un polinomio di Bessel del terzo ordine, che può essere fatto in Matlab con le seguenti istruzioni

```

1 w0=3; % Banda a ritardo di gruppo costante
2 k=3; % Numero di poli
3 [B.bess,A.bess] = besself(k,w0) % Coefficienti del polinomio di Bessel
4 poli=roots(A.bess); % Radici del polinomio
```

otterremo la seguente matrice di guadagni

$$F = \begin{bmatrix} -57.4946 & -17.8973 & -2.2986 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che il modulo delle tre matrici risulta essere molto simile e questo ci induce a pensare che lo sforzo di controllo sarà della stessa entità.

In figura 9.5 vediamo la posizione dei tre poli ottenuti con i polinomi di Butterworth e di Bessel. Mentre la loro distanza dall'origine è proprio pari a 3 nel primo caso, nel secondo è leggermente inferiore.

In figura 9.6 vediamo i tre diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento a ciclo chiuso calcolate dopo l'operazione di assegnazione tramite il metodo di Ackermann. Notiamo che mentre quella continua, ottenuta utilizzando il polinomio di Butterworth, ha una risposta particolarmente piatta e ha una banda passante di esattamente 3 dB, quella tratteggiata, ottenuta assegnando le tre dinamiche coincidenti, ha una banda passante più piccola. Anche per quella ottenuta con Bessel la banda passante è leggermente inferiore. Notiamo però che il comportamento asintotico è esattamente lo stesso, sia dal punto di vista della pendenza, sia dal punto di vista della attenuazione alle alte frequenze.

Anche le fasi sono differenti, migliore di tutte quella ottenuta con Bessel, che scende linearmente con la frequenza fino alla omega di progetto, distorcendo di meno il segnale in ingresso. Questa linearità si può cogliere meglio facendo un plot della fase logaritmico su entrambi gli assi.

In figura 9.7 troviamo la risposta al gradino e in figura 9.8 lo sforzo di controllo. Notiamo che per uno sforzo di controllo grosso modo uguale abbiamo un tempo di salita inferiore per il sistema con gli autovalori di Butterworth. Tuttavia, con i poli presi dal polinomi di Bessel, la sovraelongazione viene ridotta in maniera molto sensibile. Il tempo di assestamento risulta essere molto simile. In figura 9.7 è segnato con un pallino il tempo di assestamento

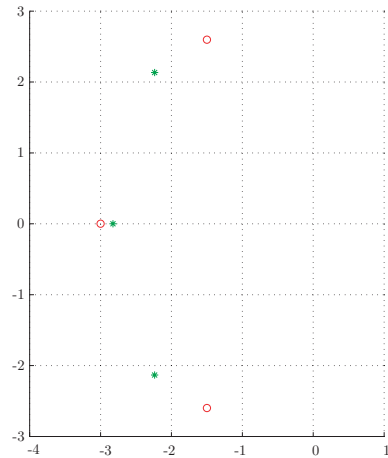


Figura 9.5: Posizione dei poli (cerchi -Butterworth-, asterischi -Bessel-)

al 5% e si va da un minimo di 1.53 sec per Bessel ad un massimo di 2.1 sec per i poli coincidenti passando per 1.99 sec di Butterworth.

E' chiaro, infine, che come pensiamo di spostare qualche autovalore verso sinistra per migliorare la banda passante lo sforzo di controllo comincerebbe ad aumentare sensibilmente.

9.9 L'osservatore ridotto

da completare

9.9.1 Esempio:

da completare

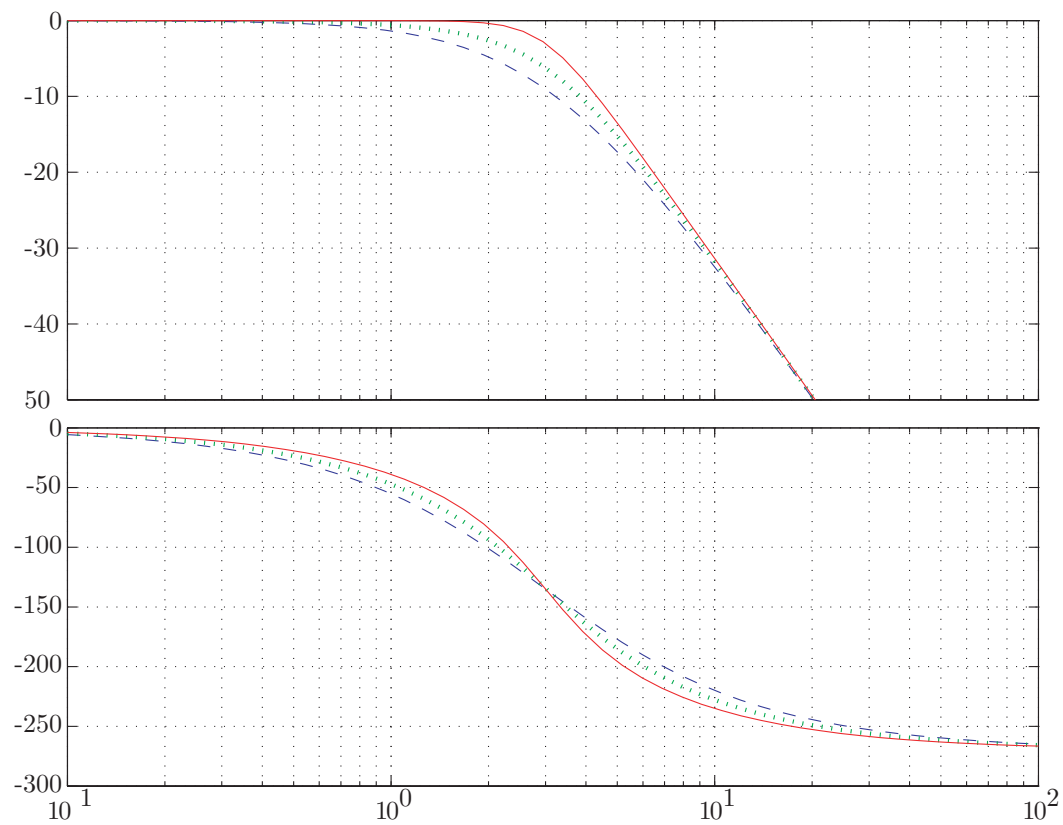


Figura 9.6: Diagrammi di Bode delle tre funzioni a ciclo chiuso (continuo -Butterworth-, tratteggiato -coincidenti-, dotted -Bessel-)

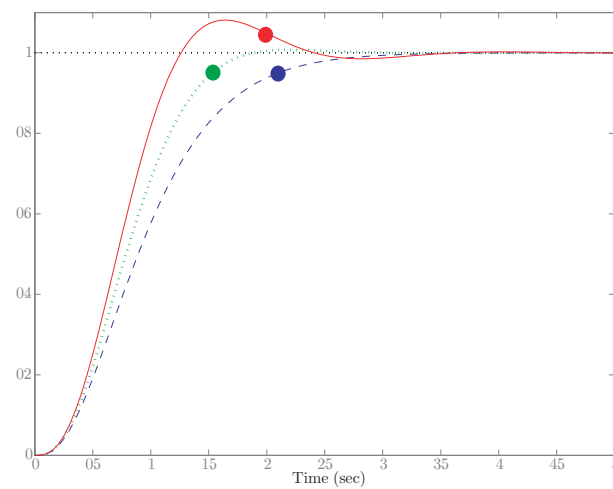


Figura 9.7: Risposta al gradino, (continuo -Butterworth-, tratteggiato -coincidenti-, dotted -Bessel-). I pallini indicano il tempo di assestamento al 5%.

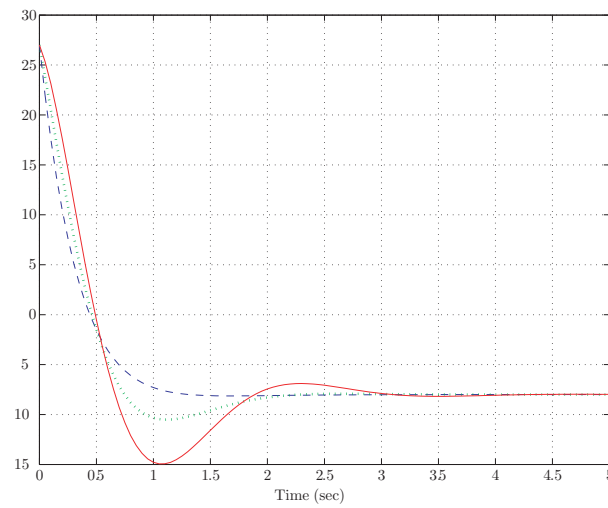


Figura 9.8: Sforzo di controllo, (continuo -Butterworth-, tratteggiato -coincidenti-, dotted -Bessel-).

Capitolo 10

Spostamento di singole dinamiche

Nel caso in cui non sia necessario assegnare tutte le dinamiche di un processo, ma ci si possa limitare ad agire solo su alcune di esse, è possibile utilizzare un approccio *modale* in grado di modificare i singoli autovalori. Questo approccio può rendersi necessario quando lo sforzo di controllo per spostare alcune dinamiche sia eccessivo e forse non necessario a ottenere le prestazioni complessive richieste al sistema a ciclo chiuso.

10.1 Autovettori sinistri

Definizione 10.1 Si definiscono autovettori sinistri quei vettori v tali che $v^T A = \lambda v^T$ dove λ è uno scalare detto autovalore.

per il calcolo degli autovettori sinistri si può procedere portando a sinistra il termine $v^T \lambda$ e mettendo in evidenza v^T :

$$v^T (A - \lambda I) = 0$$

La stessa relazione deve sussistere trasponendo il tutto

$$(A^T - \lambda I)v = 0$$

A questo punto, per ammettere soluzioni non banali, il nucleo della matrice $(A^T - \lambda I)$ dovrà avere una dimensione diversa da zero, ovvero

$$\det(A^T - \lambda I) = 0.$$

Questa equazione è del tutto uguale a quella che si ottiene ponendo $\det(A - \lambda I) = 0$ che, come detto, fornisce gli autovalori del sistema. Ne deduciamo che gli autovalori associati agli autovettori sinistri sono gli stessi di quelli associati agli autovalori destri.

Teorema 10.1 Ogni autovettore sinistro associato a un particolare autovalore è ortogonale a tutti gli autovettori destri associati ai rimanenti autovalori.

Dimostrazione: Chiamiamo v_s^T e v_d gli autovettori sinistro e destro degli autovalori λ_i e λ_j rispettivamente. Avremo, dalla definizione,

$$v_s^T A = \lambda_i v_s^T, \quad A v_d = \lambda_j v_d.$$

Notiamo adesso che la seguente espressione

$$(\lambda_i - \lambda_j)v_s^T v_d = \lambda_i v_s^T v_d - v_s^T \lambda_j v_d = v_s^T A v_d - v_s^T A v_d = 0$$

si annulla e quindi nel caso in cui $\lambda_i \neq \lambda_j$ ne consegue che $v_s^T v_d$ deve essere nullo e perciò i due vettori risulteranno ortogonali. ‡

10.2 Sistemi a un ingresso

Supponiamo di avere un sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

e immaginiamo di voler sostituire l'autovalore λ_i di A con l'autovalore desiderato $\hat{\lambda}_i$ lasciando inalterati tutti gli altri autovalori. Proiettiamo l'equazione dinamica del sistema lungo la direzione dell'autovettore v_i : questo significa eseguire il prodotto scalare con il corrispondente autovettore sinistro per eliminare tutte le componenti di stato lungo gli altri autovettori:

$$v_i^T \dot{x} = v_i^T (Ax + bu) = v_i^T Ax + v_i^T bu = \lambda_i v_i^T x + v_i^T bu$$

mentre vorrei che l'equazione di stato diventasse:

$$v_i^T \dot{x} = \hat{\lambda}_i v_i^T x.$$

Questo è realizzabile uguagliando i membri di destra delle due equazioni e scegliendo un controllo pari a

$$u = \frac{(\hat{\lambda}_i - \lambda_i)}{v_i^T b} v_i^T x = k_i v_i^T x. \quad (10.1)$$

Ovviamente il tutto è consentito solo se la dinamica che stiamo spostando è controllabile. E' possibile vedere che se ciò è vero allora $v_i^T b$ risulta diverso da zero.

Teorema 10.2 *Se la dinamica associata all'autovalore λ_i è controllabile allora, detto v_i^T l'autovettore sinistro associato, risulterà $v_i^T b \neq 0$.*

Dimostrazione: Se la dinamica è controllabile, il test PBH ci dice che

$$\rho \left(\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & b \end{bmatrix} \right) = n, \quad (10.2)$$

ovvero che il rango di questa matrice è massimo. In tal caso, moltiplicando a sinistra per un qualsiasi vettore non nullo, e in particolare per v_i^T , otterremo

$$v_i^T \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & b \end{bmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_i^T A - \lambda_i v_i^T & v_i^T b \end{bmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & v_i^T b \end{bmatrix} \neq 0. \quad (10.3)$$

Quest'ultima relazione può essere vera se e solo se $v_i^T b \neq 0$. ‡

10.2.1 Esempio: spostamento di un autovalore

Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -3/4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + bu$$

ricaviamo gli autovalori che sono le radici di

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1.5\lambda + 0.5 = 0$$

ovvero $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -0.5$. Supponiamo di voler aumentare la prontezza di risposta del sistema spostando il secondo autovalore in $\hat{\lambda}_2 = -2$. Occorre trovare l'autovettore sinistro associato a λ_2 , ossia risolvere il sistema

$$\begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui $v_x = -v_y$ e quindi, per esempio,

$$v_2^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$k_2 = \frac{(\hat{\lambda}_2 - \lambda_2)}{v_2^T b} = -1.5$$

e quindi la controreazione da implementare risulterà essere

$$u = k_2 v_2^T x = -1.5(x_1 - x_2).$$

10.3 Spostamento di più autovalori

Nel caso si voglia continuare a spostare altri autovalori basterà scegliere un ingresso del tipo

$$u = \frac{(\hat{\lambda}_i - \lambda_i)}{v_i^T b} v_i^T x = k_i v_i^T x + w$$

ed agire su w ripetendo l'algoritmo visto in precedenza.

10.3.1 Esempio: spostamento di più autovalori uno alla volta

Supponiamo di avere il sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la cui matrice di controllabilità sia

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Il rango di questa matrice è soltanto due e pertanto abbiamo solo due delle tre dinamiche completamente controllabili. Vediamo quali: operiamo una trasformazione di Kalman nei sottospazi controllabile e non. Scegliamo a questo scopo una matrice di trasformazione T , fatta con le prime due colonne di R e un completamento di base, e calcoliamo la sua inversa:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le matrici trasformate saranno:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -11 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui deduciamo che il sottospazio controllabile ha autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, mentre il sottospazio non controllabile ha autovalore $\lambda_3 = -1$.

Per stabilizzare il sistema possiamo spostare, una alla volta, le due dinamiche instabili in -2 .

Cominciamo con la prima: $\lambda_1 = 2$. Calcoliamo l'autovettore sinistro associato a questo autovalore. La

$$v_1^T (A - \lambda_1 I) = 0$$

fornisce $v_1^T = (-3, 1, 0)$ e quindi, usando la (10.1), abbiamo un guadagno

$$k_1 = \frac{(\hat{\lambda}_1 - \lambda_1)}{v_1^T B} v_1^T = \frac{(-2 - 2)}{1} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per spostare il secondo autovalore dovremmo ricalcolare tutto il sistema a ciclo chiuso e, sulla matrice $(A + Bk_1)$, ripetere il calcolo dell'autovettore sinistro.

$$v_2^T ((A + Bk_1) - \lambda_2 I) = 0$$

che ci fornisce $v_2^T = (2, 1, 0)$. Con questo calcoliamo il secondo guadagno:

$$k_2 = \frac{(\hat{\lambda}_2 - \lambda_2)}{v_2^T B} v_2^T = \frac{(-2 - 3)}{1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adesso, il guadagno da applicare sarà dato dalla somma dei due guadagni calcolati prima:

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

e, in effetti, gli autovalori di

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sono proprio $(-1, -2, -2)$.

10.4 Minimizzazione dello sforzo di controllo con più ingressi

Supponiamo di avere un sistema con m ingressi descritto da

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

vogliamo, come prima cosa, spostare l'autovalore λ_i in $\hat{\lambda}_i$ e, contemporaneamente, agire su tutti gli ingressi a disposizione per minimizzare lo sforzo di controllo definito dal prodotto

$$u^T u = \sum_{i=1}^m u_i^2. \quad (10.4)$$

Come prima, proiettiamo l'equazione dinamica del sistema lungo la direzione dell'autovettore sinistro v_i^T moltiplicando a sinistra per lo stesso:

$$v_i^T \dot{x} = v_i^T (Ax + Bu) = v_i^T Ax + v_i^T Bu = \lambda_i v_i^T x + v_i^T Bu.$$

Vogliamo che sia

$$\lambda_i v_i^T x + v_i^T Bu = \hat{\lambda}_i v_i^T x,$$

ovvero

$$v_i^T Bu = (\lambda_i - \hat{\lambda}_i) v_i^T x$$

che si può scrivere anche

$$Ju = c,$$

con $J = v_i^T B$ matrice $(1 \times m)$ e c scalare. Non potendo invertire direttamente J impostiamo un problema di minimizzazione vincolata:

$$\min \frac{1}{2} u^T u \quad Ju = c.$$

Questo problema può essere risolto adoperando i moltiplicatori di Lagrange, ovvero cercando il minimo la dove si annullano le derivate della funzione

$$L = \frac{1}{2} u^T u + \lambda^T (Ju - c),$$

ovvero, dove valgono le condizioni necessarie di ottimo vincolato

$$\nabla_u L = \frac{\partial L}{\partial u} = u^T + \lambda^T J = 0$$

$$\nabla_{\lambda^T} L = \frac{\partial L}{\partial \lambda^T} = Ju - c = 0$$

da cui, considerando la trasposta della prima e risolvendola rispetto a u , si ha

$$u = -J^T \lambda$$

e sostituendo nella seconda, nell'ipotesi che il rango di J sia massimo, si può ricavare λ

$$\lambda = -(JJ^T)^{-1} c.$$

Infine

$$u = J^T (JJ^T)^{-1} c = J^\dagger c$$

dove si è indicato con J^\dagger la pseudo-inversa della matrice J . Nel nostro caso JJ^T è uno scalare per cui

$$u = \frac{(\hat{\lambda}_i - \lambda_i)}{v_i^T B B^T v_i} B^T v_i v_i^T x. \quad (10.5)$$

Si tratta, in pratica, della soluzione a norma minima.

Teorema 10.3 *La controllabilità di λ_i da tutti gli ingressi garantisce che lo scalare $v_i^T B B^T v_i$ sia diverso da zero.*

10.4.1 Esempio: spostamento di un autovalore usando uno o due ingressi

Sia dato il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

I suoi autovalori sono in $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$; vogliamo spostare la prima dinamica in -2. Possiamo procedere in due modi: il primo consiste nell'utilizzare uno solo dei due ingressi, ad esempio il primo, mentre il secondo cerca di minimizzare lo sforzo di controllo utilizzando entrambi.

Per applicare il primo metodo dobbiamo calcolare l'autovettore sinistro associato all'autovalore 3. Dalla

$$v_2^T (A - \lambda_2 I) = 0$$

ricaviamo, ad esempio, l'autovettore $v_2^T = (0, 1)$. Usando la (10.1) calcoliamo la matrice dei guadagni

$$k_2 = \frac{(\hat{\lambda}_2 - \lambda_2)}{v_2^T B} v_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

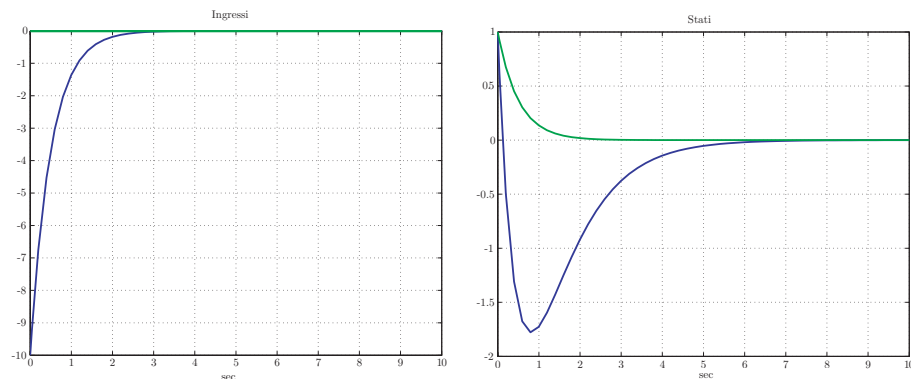


Figura 10.1: Spostamento della dinamica utilizzando solo il primo ingresso

Avendo il sistema due ingressi la matrice complessiva da usare nella controreazione avrà degli zeri in corrispondenza del secondo ingresso:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supponiamo adesso di porre il sistema nella condizione iniziale $x_0 = (1, 1)$ e osserviamo, in figura 10.1 l'andamento del transitorio.

Il primo ingresso parte da un valore di circa -10 mentre il secondo rimane a zero. Lo stato, come deve, evolve verso l'origine secondo le dinamiche assegnate.

Se, invece, utilizziamo entrambi gli ingressi dobbiamo calcolare la matrice dei guadagni utilizzando la formula 10.5 che ci fornisce un guadagno pari a

$$K = \frac{(\hat{\lambda}_i - \lambda_i)}{v_i^T B B^T v_i} B^T v_i v_i^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Con questo guadagno otteniamo lo stesso transitorio per lo stato (gli autovalori assegnati sono sempre quelli) ma l'andamento degli ingressi è quello riportato in figura 10.2.

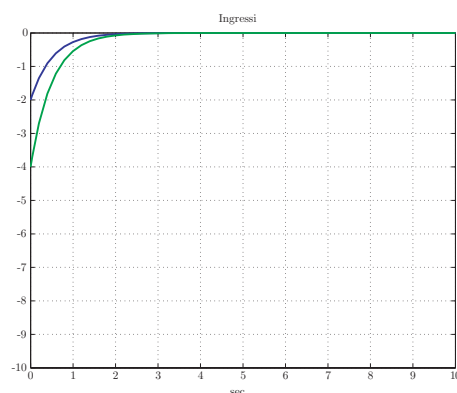


Figura 10.2: Spostamento della dinamica utilizzando entrambi gli ingressi

Notiamo che partono da un valore più piccolo e, se calcoliamo per entrambi gli approcci l'integrale della somma dei quadrati degli ingressi applicati, scopriamo che nel primo caso questo tende al valore 25 mentre in questo secondo caso si ferma al valore 5. Rimane quindi comprovato che il secondo approccio richiede un'energia minore o, per lo meno, minimizza il funzionale quadratico definito nella 10.4.

Capitolo 11

Controllo Ottimo

11.1 Premessa

I metodi classici di sintesi si basano su diverse tecniche:

- Assegnazione dei poli dominanti o degli autovalori sulla base di proprietà temporali della risposta libera o forzata del sistema.
- La Sintesi per tentativi: impostazione della risposta in frequenza sulla base di relazioni empiriche con la risposta forzata.
- Criteri empirici: la taratura dei regolatori industriali standard PID.

Un metodo molto usato per assegnare le dinamiche a un sistema a ciclo chiuso è noto come *Controllo Ottimo*.

Le tecniche di controllo ottimo sono basate sul progetto della legge di controllo in modo da rendere minimo (o massimo) un opportuno funzionale detto *indice di costo* (o di prestazione). L'indice di costo è di solito definito in termini di norme di segnali, e tiene tipicamente conto della necessità di soddisfare obiettivi contrastanti tra loro, ciascuno dei quali viene pesato in maniera opportuna nel funzionale da ottimizzare. [1]

Questa tecnica, a differenza di altre, consente di determinare la matrice di guadagno dallo stato in relazione all'indice di costo preventivamente definito, il quale assume il significato di metrica (ad esempio: tempo, energia, etc.) secondo la quale intendiamo minimizzare l'azione di controllo nell'intervallo $[t_0, t_f]$.

11.2 Il problema del Controllo Ottimo

Il progetto del controllo consiste in un problema di ottimizzazione, in cui i vincoli sono costituiti dalla dinamica del sistema da controllare. L'incognita è rappresentata dalla sequenza di ingressi da applicare in un dato intervallo di tempo, eventualmente infinito. La soluzione di alcuni problemi standard si presenta sotto forma di legge di controllo in retroazione, dinamica o statica.

In questo testo consideriamo l'equazione di stato tempo invariante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (11.1)$$

Il nostro obiettivo è quello di minimizzare il seguente indice di costo

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt + \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) \quad (11.2)$$

Tale indice contiene un contributo che assegna una penalità allo stato e all'input in modo dipendente da t , ed un contributo che assegna una penalità in base allo stato finale assunto. Si assume che le matrici Q , R ed S siano simmetriche con Q ed S semidefinite positive ed R definita positiva.¹ È possibile notare il modo in cui l'indice di costo sopra riportato rappresenti un compromesso tra le prestazioni del controllo e gli sforzi necessari per ottenerlo. In particolare, se i termini quadratici legati allo stato sono “grandi” rispetto ai termini quadratici legati all'input, allora la traiettoria dello stato ottimale mostrerà “buone” prestazioni in cui la risposta ad uno stato iniziale diverso da zero ritornerà rapidamente allo stato di equilibrio nell'origine, a scapito di una spesa elevata di energia. Al contrario se l'input viene penalizzato maggiormente rispetto allo stato, allora il segnale di controllo potrebbe non richiedere una grande quantità di energia, ma le prestazioni del controllo potrebbero non essere accettabili.

In generale si può pensare di piazzare i poli solo cercando di raggiungere due obiettivi:

- rendere lo stato $x(k)$ piccolo per regolarlo verso l'origine, penalizzandone la norma quadratica pesata $x^T(t)Qx(t)$
- utilizzare un ingresso $u(k)$ piccolo per mantenere bassa l'energia del segnale di comando economizzando l'uso degli attuatori. Infatti il termine $u^T(t)Ru(t)$ pesa l'intensità dell'azione di controllo al generico istante, dunque la sua somma su tutto l'orizzonte temporale rappresenta l'energia del controllo stesso.

Infine, il termine $x^T(t_f)Sx(t_f)$ pesa in modo separato lo scostamento dello stato finale dallo stato iniziale, determinando l'esito dell'azione di controllo, ed è quindi detto *costo terminale*. Le matrici Q , R , S determinano il peso relativo dei vari termini e quindi codificano le specifiche di progetto. [1]

La scelta delle matrici Q e R riflettono l'alternativa tra la necessità di regolare lo stato verso l'equilibrio e il dispendio di energia. Per esempio la matrice diagonale:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

dà la seguente forma quadratica:

$$x(t)^T Q x(t) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2(t)$$

La dimensione del termine q_i indica l'importanza che il progettista attribuisce allo stato $x_i(t)$ di trovarsi lontano dallo stato di equilibrio. [2]

Le condizioni necessarie che devono essere soddisfatte dalla soluzione $[x^*(t), u^*(t)]$ che ottimizza il problema appena descritto vengono fornite dal *calcolo variazionale* e dalla *programmazione dinamica*.

¹ È noto in algebra lineare che se una matrice S è simmetrica allora tutti i suoi autovalori sono reali ed è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale M il che vuol dire che $M^{-1} = M^T$. Inoltre per la simmetria della matrice S sarà che $S = S^T$

11.3 Una panoramica sul calcolo variazionale

11.3.1 Definizioni e lemmi generali

Consideriamo funzioni di valori reali $f(z): \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}$ ed introduciamo alcune definizioni ed osservazioni:

Definizione 1 (punto di minimo locale) Se z^* minimizza localmente $f(z)$, allora esiste un intorno $B(z^*)$ tale che per ogni vettore $v \in B(z^*)$ diverso da zero si abbia $f(z^* + v) > f(z^*)$.

Definizione 2 (punto di minimo globale) Se z^* minimizza $f(z)$, allora $f(z^* + v) > f(z^*)$ per ogni vettore $v \in \mathcal{R}^d$ diverso da zero.

Lemma 11.1 Se z^* è un qualunque punto di minimo, allora $\nabla f(z^*) = 0$.

Definizione 3 (punto critico) Se z^* è tale che $\nabla f(z^*) = 0$, allora si dice che z^* è un punto critico di $f(z)$.

Quindi, qualunque punto di minimo è un punto critico ma non è necessariamente vero il contrario.

Definizione 4 (funzione convessa) Una funzione reale $f(z): \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}$ è convessa se

$$f(z + v) - f(z) \geq \nabla f(z)v \text{ per ogni } z, v \in \mathcal{R}^d.$$

E' strettamente convessa se vale sempre il segno maggiore.

Lemma 11.2 Se una funzione è strettamente convessa, allora un punto critico è anche un punto di minimo.

11.3.2 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Volgiamo ora la nostra attenzione al problema della minimizzazione di una funzione reale $f(z)$ su tutto $z \in \mathcal{R}^d$ che soddisfi vincoli della forma:

$$g_i(z) = 0 \text{ con } i = 1, \dots, n$$

o, in forma vettoriale

$$G(z) = \begin{bmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ \vdots \\ g_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assumiamo che $n < d$ ed usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per risolvere il problema vincolato. Aggiungiamo quindi alla funzione $f(z)$ i moltiplicatori di Lagrange e raccogliamoli in un vettore colonna λ , ed otteniamo la nuova funzione

$$\tilde{f}(z) = f(z) + \lambda_1 g_1(z) + \lambda_2 g_2(z) + \dots + \lambda_n g_n(z) = f(z) + \lambda^T G(z)$$

Lemma 11.3 Se z^* è il punto di minimo della funzione aumentata $\tilde{f}(z)$ e se per ogni vettore di moltiplicatori di Lagrange λ si ha che $G(z) = G(z^*)$ per ogni $z \neq z^*$, allora z^* minimizza anche la funzione originaria $f(z)$.

Ora, se $\tilde{f}(z)$ è strettamente convessa, e in generale dipende dai moltiplicatori Lagrangiani λ , allora il minimo di $\tilde{f}(z)$ è caratterizzato da $\nabla \tilde{f}(z^*) = 0$. Ciò, assieme ai vincoli $G(z^*) = 0$, conduce a $d + n$ equazioni che, in principio, possono essere risolte in $d + n$ incognite date dalle componenti di z^* e λ .

Si noti che una volta determinati z^* e λ , dobbiamo verificare che $\tilde{f}(z)$ sia strettamente convessa per i valori di λ ottenuti, in modo da poter concludere che il *punto critico* z^* minimizza $\tilde{f}(z)$, e di conseguenza $f(z)$, su tutto $z \in \mathcal{R}^d$. La $G(z) = G(z^*) = 0$ sarà soddisfatta dal fatto che nel calcolo del gradiente appare proprio $G(z) = 0$.

Lemma 11.4 *Se $f(z)$ è strettamente convessa e i vincoli sono dati dall'equazione $G(z) = Cz - d$, allora $\tilde{f}(z)$ è strettamente convessa.*

11.3.3 Minimizzazione di funzioni integrali

Spostiamo ora la nostra attenzione sulla minimizzazione di funzioni integrali della forma

$$F(z) = \int_{t_0}^{t_f} f[t, z(t), \dot{z}(t)] dt$$

sugli elementi dell'insieme delle funzioni definite nell'intervallo $[t_0, t_f]$, continue e con derivata continua. Indichiamo tale insieme con $C^1[t_0, t_f]$. Assumiamo inoltre che queste funzioni soddisfino una delle condizioni al contorno:

- $z(t_0) = z_0$ è specificato
- $z(t_f) = z_f$ è specificato
- entrambi $z(t_0) = z_0$ e $z(t_f) = z_f$ sono specificati

Per generalizzare i precedenti risultati ottenuti su \mathcal{R}^d , dobbiamo prima introdurre la nozione di *derivata direzionale* che ci permetterà di stabilire una condizione necessaria per la minimizzazione della funzione integrale $F(z)$ e di caratterizzare la condizione di convessità.

Consideriamo quindi la *variazione di Gâteaux* della funzione integrale $F(z)$ su $z(t)$ nella direzione $v(t) \in C^1[t_0, t_f]$, definita come

$$\delta F(z; v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(z + \varepsilon v) - F(z)}{\varepsilon}$$

Se assumiamo che la funzione integranda $f(t, z, \dot{z})$ ammetta derivate parziali continue rispetto al secondo e al terzo argomento, possiamo calcolare la variazione di Gâteaux usando la *chained rule* come segue:

$$\begin{aligned} \delta F(z; v) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(z + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f[t, z(t) + \varepsilon v(t), \dot{z}(t) + \varepsilon \dot{v}(t)] dt \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z}[t, z(t), \dot{z}(t)] v(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t, z(t), \dot{z}(t)] \dot{v}(t) \right\} dt \end{aligned} \quad (11.3)$$

Condizione necessaria di minimo

Deriviamo ora una condizione necessaria per $z^*(t) \in C^1[t_0, t_f]$ per minimizzare $F(z)$ su tutti gli $z(t) \in C^1[t_0, t_f]$ che soddisfino una delle tre condizioni al contorno.

Se $z^*(t)$ è un minimo, allora $F(z^* + v) \geq F(z^*)$ per ogni $v(t) \in C^1[t_0, t_f]$ tale che anche $z^*(t) + v(t)$ soddisfi le condizioni al contorno specificate. Questo requisito caratterizza le cosiddette *direzioni ammissibili*:

- se $z(t_0) = z_0$ è specificato, allora $v(t_0) = 0 \in \mathcal{R}^d$.
- se $z(t_f) = z_f$ è specificato, allora $v(t_f) = 0 \in \mathcal{R}^d$.
- se entrambi $z(t_0) = z_0$ e $z(t_f) = z_f$ sono specificati, allora $v(t_0) = v(t_f) = 0 \in \mathcal{R}^d$.

Ora, se $F(z^* + v) \geq F(z^*)$ per ogni direzione ammissibile, osserviamo che per ogni $\varepsilon > 0$, $F(z^* \pm \varepsilon v) \geq F(z^*)$ per ogni direzione ammissibile, dalla quale si ottiene

$$\delta F(z^*; v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(z^* + \varepsilon v) - F(z^*)}{\varepsilon} \geq 0$$

$$\delta F(z^*; -v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(z^* - \varepsilon v) - F(z^*)}{\varepsilon} \geq 0$$

Inoltre le variazioni di Gâteaux soddisfano l'equazione $\delta F(z; -v) = -\delta F(z; v)$, solo nel caso in cui $\delta F(z^*; v) = 0$ per tutte le direzioni ammissibili.

Lemma 11.5 *Se $z^*(t)$ minimizza $F(z)$, allora $\delta F(z^*; v) = 0$ per tutte le direzioni ammissibili.*

Equazione di Eulero-Lagrange

Per la funzione integrale $F(z)$, un modo per garantire che la variazione di Gâteaux soddisfi l'equazione $\delta F(z; v) = 0$ per tutte le direzioni ammissibili è quello di richiedere che sia soddisfatta l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t, z(t), \dot{z}(t)] = \frac{\partial f}{\partial z}[t, z(t), \dot{z}(t)] \text{ per ogni } t \in (t_0, t_f). \quad (11.4)$$

Le soluzioni di tale equazione sono funzioni stazionarie.

Riprendendo adesso l'equazione 11.3 utilizzando la 11.4 per calcolare la variazione di Gâteaux:

$$\begin{aligned} \delta F(z; v) &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z}[t, z(t), \dot{z}(t)]v(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t, z(t), \dot{z}(t)]\dot{v}(t) \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t, z(t), \dot{z}(t)] \right\} v(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t, z(t), \dot{z}(t)]\dot{v}(t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t, z(t), \dot{z}(t)]v(t) \right\} dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t_f, z(t_f), \dot{z}(t_f)]v(t_f) - \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t_0, z(t_0), \dot{z}(t_0)]v(t_0) \end{aligned}$$

Ora, capiamo che il modo per ottenere $\delta F(z; v) = 0$ per ogni direzione ammissibile dipende dalle condizioni al contorno specificate originariamente. Se $z(t_0) = z_0$ è specificato ma $z(t_f)$ è libero, allora $v(t)$ deve solo

soddisfare la condizione $v(t_0) = 0$, e, in modo di ottenere $\delta F(z; v) = 0$ per tutte le direzioni, dobbiamo imporre additionally la *condizione al contorno naturale*

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t_f, z(t_f), \dot{z}(t_f)] = 0$$

Analogamente, se $z(t_f) = z_f$ è specificato ma $z(t_0)$ è libero, si ha che $v(t)$ deve soddisfare la condizione $v(t_f) = 0$ e quindi, dobbiamo imporre che

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}[t_0, z(t_0), \dot{z}(t_0)] = 0$$

Infine, se entrambi $z(t_0) = z_0$ e $z(t_f) = z_f$ sono specificati, allora le direzioni ammissibili devono soddisfare $v(t_0) = v(t_f) = 0$, dalle quali si ottiene $\delta F(z; v) = 0$ senza imporre nessuna ulteriore condizione. In questo modo abbiamo argomentato che soddisfare l'equazione di Eulero-Lagrange assieme alle appropriate combinazioni al contorno è un modo per ottenere $\delta F(z; v) = 0$ per tutte le direzioni ammissibili.

Verifica della convessità

Definizione 5 (convessità per funzioni integrali) La funzione integrale $F(z)$ è convessa se

$$F(z + v) - F(z) \geq \delta F(z; v) \text{ per ogni } z \in C^1[t_0, t_f] \text{ e ogni direzione ammissibile } v \in C^1[t_0, t_f].$$

$F(z)$ è strettamente convessa se e solo se l'uguaglianza è verificata per la sola direzione ammissibile $v(t) = 0$.

Analogamente a quanto visto prima, se una funzione $F(z)$ è strettamente convessa, allora la circostanza in cui $\delta F(z^*; v) = 0$ per ogni v ammissibile, ci permette di dire che z^* minimizza $F(z)$.

Minimizzazione con vincoli

Concludiamo la panoramica sul calcolo variazionale incorporando, nel problema presentato, i vincoli della forma

$$g_i[t, z(t), \dot{z}(t)] = 0 \text{ per ogni } t \in [t_0, t_f] \text{ con } i = 1, 2, \dots, n$$

o, in forma vettoriale

$$G[t, z(t), \dot{z}(t)] = \begin{bmatrix} g_1[t, z(t), \dot{z}(t)] \\ g_2[t, z(t), \dot{z}(t)] \\ \vdots \\ g_n[t, z(t), \dot{z}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Introduciamo un vettore di moltiplicatori di Lagrange, dipendenti da t , della forma

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

dove, per semplicità, assumiamo che i moltiplicatori di Lagrange siano funzioni continuamente differenziabili sull'intervallo $[t_0, t_f]$. Possiamo quindi definire la funzione

$$\tilde{f}(t, z, \dot{z}) = f(t, z, \dot{z}) + \lambda_1(t)g_1(t, z, \dot{z}) + \lambda_2(t)g_2(t, z, \dot{z}) + \cdots + \lambda_n(t)g_n(t, z, \dot{z}) = f(t, z, \dot{z}) + \lambda^T(t)G(t, z, \dot{z})$$

Supponiamo ora che $z^*(t)$ minimizzi la funzione integrale aumentata

$$\tilde{F}(z) = \int_{t_0}^{t_f} \tilde{f}[t, z(t), \dot{z}(t)] dt$$

su tutti gli $z(t) \in C^1[t_0, t_f]$ che soddisfano le condizioni al contorno in modo che

$$\tilde{F}(z) > \tilde{F}(z^*) \text{ con } z(t) \neq z^*(t)$$

In particolare, se $z(t)$ soddisfa anche $G[t, z(t), \dot{z}(t)] = G[t, z^*(t), \dot{z}^*(t)]$ per ogni $t \in [t_0, t_f]$, allora per ogni vettore $\lambda(t)$ si ha che

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) - \tilde{F}(z^*) &= \left\{ F(z) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t)G[t, z(t), \dot{z}(t)] dt \right\} - \left\{ F(z^*) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t)G[t, z^*(t), \dot{z}^*(t)] dt \right\} \\ &= F(z) - F(z^*) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) \left\{ G[t, z(t), \dot{z}(t)] - G[t, z^*(t), \dot{z}^*(t)] \right\} dt = F(z) - F(z^*) \end{aligned}$$

Concludiamo che $z^*(t)$ minimizza $F(z)$ su tutti gli $z(t) \in C^1[t_0, t_f]$ che soddisfano le specificate condizioni al contorno e $G[t, z(t), \dot{z}(t)] = G[t, z^*(t), \dot{z}^*(t)]$ per ogni $t \in [t_0, t_f]$. Se $\tilde{F}(z)$ è strettamente convessa, allora il minimo di $\tilde{F}(z)$ è caratterizzato da $\delta\tilde{F}(z^*; v) = 0$ per tutte le direzioni ammissibili come determinato dalle condizioni al contorno. Possiamo caratterizzare $z^*(t)$ come le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{z}}[t, z(t), \dot{z}(t)] = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}[t, z(t), \dot{z}(t)] \text{ per ogni } t \in (t_0, t_f)$$

con le annesse combinazioni di equazioni al contorno originariamente specificate e le condizioni al contorno naturali che adesso coinvolgono $(\delta\tilde{f}/\delta\dot{z})[t, z(t), \dot{z}(t)]$ valutate a $t = t_0$ e/o a $t = t_f$. La nostra speranza è che ciò, assieme all'equazione dei vincoli $G[t, z(t), \dot{z}(t)] = 0$, ci permetta di determinare $z^*(t)$, $\lambda(t)$ e inoltre, per i $\lambda(t)$ così ottenuti che $\tilde{F}(z)$ sia strettamente convessa.

Allora, possiamo concludere che $z^*(t)$ minimizza $F(z)$ su tutte le $z(t) \in C^1[t_0, t_f]$ che soddisfano le condizioni specificate e il vincolo $G[t, z(t), \dot{z}(t)] = 0$ per ogni $t \in [t_0, t_f]$.

Un vincolo particolare

Una situazione in cui la convessità di $\tilde{F}(z)$ è assicurata per ogni vettore di moltiplicatori di Lagrange è quando $F(z)$ è strettamente convessa e $z(t)$ è vincolata a soddisfare l'equazione differenziale lineare

$$E(t)\dot{z}(t) = C(t)z(t) + d(t)$$

Questo comporta un'equazione dei vincoli della forma

$$G(t, z(t), \dot{z}(t)) = C(t)z(t) + d(t) - E(t)\dot{z}(t) = 0$$

In questo caso, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(t, z, \dot{z}) &= \frac{\partial f}{\partial z}(t, z, \dot{z}) + \lambda^T(t) \frac{\partial G}{\partial z}(t, z, \dot{z}) = \frac{\partial f}{\partial z}(t, z, \dot{z}) + \lambda^T(t) C(t) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{z}}(t, z, \dot{z}) &= \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}(t, z, \dot{z}) + \lambda^T(t) \frac{\partial G}{\partial \dot{z}}(t, z, \dot{z}) = \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}(t, z, \dot{z}) - \lambda^T(t) E(t)\end{aligned}$$

che dà

$$\delta \tilde{F}(z; v) = \delta F(z; v) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) [C(t)v(t) - E(t)\dot{v}(t)] dt$$

Questo ci permette di concludere che per ogni $\lambda(t)$,

$$\begin{aligned}\tilde{F}(z+v) - \tilde{F}(z) &= \\ &= \left(F(z+v) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) C(t) [z(t) + v(t)] + d(t) - E(t) [\dot{z}(t) + \dot{v}(t)] dt \right) \\ &\quad - \left(F(z) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) [C(t)z(t) + d(t) - E(t)\dot{z}(t)] dt \right) \\ &= F(z+v) - F(z) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) [C(t)v(t) - E(t)\dot{v}(t)] dt \\ &\geq \delta F(z; v) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) [C(t)v(t) - E(t)\dot{v}(t)] dt \\ &= \delta \tilde{F}(z; v)\end{aligned}$$

per tutte le direzioni ammissibili, con l'uguaglianza valida se e solo se la direzione ammissibile è $v(t) = 0$ su $[t_0, t_f]$. Quindi, per questa classe di vincoli, la stretta convessità di $F(z)$ implica la stretta convessità di $\tilde{F}(z)$ per ogni vettore di moltiplicatori di Lagrange.

11.4 Controllo a energia minima

Prima di introdurre il problema del regolatore quadratico lineare, vediamo il caso di un controllo che prevede, una volta fissati gli stati finali ed iniziali, di minimizzare l'energia del segnale in ingresso. A tal fine consideriamo la funzione di costo descritta come

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T u(t) dt \quad (11.5)$$

e imponiamo le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f\end{aligned} \quad (11.6)$$

Vogliamo minimizzare la 11.5 su tutti gli $z(t) = [x^T(t), u^T(t)]$ che soddisfano le condizioni al contorno specificate ed il vincolo

$$\begin{aligned}G[t, z(t), \dot{z}(t)] &= Ax(t) + Bu(t) - \dot{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = 0\end{aligned} \quad (11.7)$$

Adattando la metodologia vista nel paragrafo precedente al caso in questione, possiamo caratterizzare le direzioni ammissibili, associate con le condizioni al contorno, come $v(t) = [\xi^T(t), \mu^T(t)]^T$ con $\xi(t_0) = \xi(t_f) = 0$, e poichè $u(t_0)$ e $u(t_f)$ sono senza vincoli, allora $\mu(t_0)$ e $\mu(t_f)$ sono liberi.

Funzione obiettivo aumentata

Aggiungiamo quindi il vincolo appena descritto facendo uso del vettore dei moltiplicatori di Lagrange

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

a formare la funzione obiettivo aumentata

$$\tilde{J}(z) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} u(t)^T u(t) + \lambda^T(t) [Ax(t) + Bu(t) - \dot{x}(t)] \right\} dt$$

Verifica convessità

Possiamo direttamente controllare la convessità della funzione aumentata considerando la funzione integranda

$$\tilde{f}(t, z, \dot{z}) = \frac{1}{2} u^T u + \lambda^T(t) (Ax + Bu - \dot{x})$$

per poi calcolare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(t, z, \dot{z}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(t, z, \dot{z}) & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(t, z, \dot{z}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^T(t)A & u^T + \lambda^T(t)B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{z}}(t, z, \dot{z}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{x}}(t, z, \dot{z}) & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{u}}(t, z, \dot{z}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda^T(t) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che ci permettono di scrivere la variazione di Gâteaux

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}(z; v) &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda^T(t)A & u^T(t) + \lambda^T(t)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} -\lambda^T(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ [u^T(t) + \lambda^T(t)B]\mu(t) + \lambda^T(t)[A\xi(t) - \dot{\xi}(t)] \right\} dt \end{aligned}$$

Calcoliamo quindi la seguente differenza

$$\begin{aligned} &\tilde{J}(z+v) - \tilde{J}(z) \\ &= \left(\int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (u(t) + \mu(t))^T (u(t) + \mu(t)) + \lambda^T(t) \left\{ A[x(t) + \xi(t)] + B[u(t) + \mu(t)] - [\dot{x}(t) + \dot{\xi}(t)] \right\} dt \right) \\ &\quad - \left(\int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u(t)^T u(t) + \lambda^T(t) [A(t)x(t) + Bu(t) - \dot{x}(t)] dt \right) \\ &= \delta \tilde{J}(z; v) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \mu(t)^T \mu(t) dt \geq \delta \tilde{J}(z; v) \end{aligned}$$

dalla quale concludiamo che $\tilde{J}(z)$ è convessa.

Sfortunatamente, non possiamo concludere che $\tilde{J}(z)$ sia strettamente convessa poichè vale l'uguaglianza per ogni direzione ammissibile della forma $v(t) = [\xi^T(t), 0]^T$. In ogni caso, possiamo dimostrare direttamente che se l'uguaglianza è verificata per $v(t) = [\xi^T(t), 0]^T$ in cui $\xi(t_0) = \xi(t_f) = 0$, ed entrambi $z(t)$ e $z(t) + v(t)$ soddisfano la 11.7, dobbiamo avere $\xi(t) \equiv 0$. Infatti, nel caso in cui $z(t) = [x^T(t), u^T(t)]^T$ soddisfi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

e $z(t) + v(t) = [(x(t) + \xi(t))^T, u^T(t)]^T$ soddisfi

$$\dot{x}(t) + \dot{\xi}(t) = A[x(t) + \xi(t)] + Bu(t)$$

allora, sottraendo queste due identità, si ottiene

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t)$$

dalla quale con la condizione iniziale $\xi(t_0) = 0$, oppure la condizione finale $\xi(t_f) = 0$, si ricava $\xi(t) = 0$ sull'intervallo $[t_0, t_f]$ come richiesto.

Concludiamo quindi che se $z^*(t)$ soddisfa $\delta\tilde{J}(z; v) = 0$ per tutte le direzioni ammissibili, assieme alla 11.7, allora $z^*(t)$ minimizza $J(z)$ su tutti gli $z(t)$ che soddisfano la condizione al contorno ed il vincolo.

Equazione di Eulero-Lagrange

Volgiamo ora la nostra attenzione all'equazione di Eulero-Lagrange che prende la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -\lambda^T(t) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^T(t)A & u^T(t) + \lambda^T(t)B \end{bmatrix}$$

che può essere riformulata come

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -A^T \lambda(t) \\ u(t) &= -B^T \lambda(t) \end{aligned} \tag{11.8}$$

Notiamo che le naturali condizioni al contorno associate alle condizioni 11.6 sono

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{u}}(t, z(t_0), \dot{z}(t_0)) = 0$$

e

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{u}}(t, z(t_f), \dot{z}(t_f)) = 0$$

che sono soddisfatte automaticamente poichè $\tilde{f}(t, z, \dot{z})$ è indipendente da \dot{u} . L'equazione 11.8 implica che per ogni $t_a \in [t_0, t_f]$, posto $\lambda(t_a) = \lambda_a$, $\lambda(t) = e^{-A^T(t-t_a)}\lambda_a$, è univocamente determinata. Scegliamo $t_a = t_0$, da cui si ottiene

$$\lambda(t) = e^{-A^T(t-t_0)}\lambda_0 = e^{A^T(t_0-t)}\lambda_0$$

e

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_0-t)}\lambda_0$$

Questo segnale in input determina la traiettoria dello stato $x(t)$ data dallo specifico stato iniziale $x(t_0) = x_0$. Rimane da scegliere λ_0 in modo che

$$x(t_f) = e^{A(t_f-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= e^{A(t_f-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}BB^Te^{A^T(t_0-\tau)}d\tau\lambda_0$$

e, sommando e sottraendo t_0 nel primo esponenziale dentro l'integrale,

$$= e^{A(t_f-t_0)} \left[x_0 - \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)}BB^Te^{A^T(t_0-\tau)}d\tau\lambda_0 \right] = x_f$$

Ricordiamo la forma del Gramiano di controllabilità

$$W(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)}BB^Te^{A^T(t_0-\tau)}d\tau$$

che è non-singolare per ogni $t_f > t_0$ poichè l'equazione di stato è controllabile. Allora possiamo risolvere per λ_0 ed ottenere

$$\lambda_0 = W^{-1}(t_0, t_f)(x_0 - e^{A(t_0-t_f)}x_f)$$

che specifica in modo completo il segnale di controllo a minima energia:

$$u^*(t) = -B^Te^{A^T(t_0-t)}W^{-1}(t_0, t_f)(x_0 - e^{A(t_0-t_f)}x_f)$$

Valutiamo la funzione obiettivo per il segnale di controllo appena calcolato ed otteniamo

$$J^* = \frac{1}{2}(x_0 - e^{A(t_0-t_f)}x_f)^TW^{-1}(t_0, t_f)(x_0 - e^{A(t_0-t_f)}x_f)$$

11.5 Il regolatore lineare quadratico

A differenza del caso del controllo a minima energia, in questo caso lo stato finale è lasciato libero ma è penalizzato attraverso l'indice di costo.

Consideriamo, analogamente a prima, lo stato esteso $z(t) = [x^T(t), u^T(t)]^T$ e la direzione $v(t) = [\xi^T(t), \mu^T(t)]^T$. Vogliamo che $\xi(t_0) = 0$, con $\xi(t_f), \mu(t_0)$ e $\mu(t_f)$ liberi. Consideriamo quindi come sistema lineare di partenza il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = kx(t) \end{cases} \quad (11.9)$$

L'obiettivo è quello di trovare un valore k da assegnare al controllo $u(t) = kx(t)$ tale da minimizzare una funzione quadratica del tipo

$$\tilde{J}(z) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] \right\} dt \quad (11.10)$$

detta *funzionale di costo*.

Notiamo come nella 11.10 figurino i termini $x^T(t)Qx(t)$ e $u^T(t)Ru(t)$, rispettivamente utilizzati per pesare i transitori e l'energia: se infatti fosse stato presente solo il $u^T(t)Ru(t)$ il problema si sarebbe ridotto al controllo a minima energia.

Funzione obiettivo aumentata

Si riscriva ora la funzione di costo 11.10 di modo che in essa sia incluso anche il vettore dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\tilde{J}(z) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left\{ [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] + 2\lambda^T(t)[Ax(t) + Bu(t) - \dot{x}(t)] \right\} dt \quad (11.11)$$

Notiamo che la funzione integranda aumentata si può scrivere anche

$$\tilde{f}(t, z, \dot{z}) = h(t, z) - \lambda^T(t)\dot{x}$$

dove $h(t, x, u)$ è la funzione *Hamiltoniana* data da

$$h(t, z) = \frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru) + \lambda^T(t)(Ax + Bu).$$

Verifica della convessità

Al fine di controllare la convessità di $\tilde{J}(z)$ usiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(t, z, \dot{z}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(t, x, u) & \frac{\partial h}{\partial u}(t, x, u) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^T Q + \lambda^T(t)A & u^T R + \lambda^T(t)B \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{z}}(t, z, \dot{z}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{x}}(t, z, \dot{z}) & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{u}}(t, z, \dot{z}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda^T(t) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

assieme alla derivata direzionale del termine relativo allo stato finale espressa come

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z(t_f)} \left[\frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) \right] v(t_f) &= \begin{bmatrix} x^T(t_f)S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t_f) \\ \mu(t_f) \end{bmatrix} \\ &= x^T(t_f)S\xi(t_f) \end{aligned}$$

per ottenere la variazione di Gâteaux

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}(z; v) &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} x^T(t)Q + \lambda^T(t)A & u^T(t)R + \lambda^T(t)B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} dt \\ &\quad + \left[\begin{bmatrix} -\lambda^T(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} \right] dt + x^T(t_f)S\xi(t_f) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[(u^T(t)R + \lambda^T(t)B)\mu(t) \right. \\ &\quad \left. + (x^T(t)Q + \lambda^T(t)A)\xi(t) - \lambda^T(t)\dot{\xi}(t) \right] dt + x^T(t_f)S\xi(t_f) \end{aligned}$$

In modo analogo a ciò che abbiamo fatto nel paragrafo precedente, calcoliamo ed osserviamo che

$$\tilde{J}(z + v) - \tilde{J}(z) \geq \delta \tilde{J}(z; v)$$

dalla quale possiamo concludere che $\tilde{J}(z)$ è convessa, e l'uguaglianza è verificata se e solo se ognuna delle forme quadratiche soddisfa le condizioni:

$$\xi^T(t)Q\xi(t) \equiv 0 \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$\begin{aligned}\mu^T(t)R\mu(t) &\equiv 0 \quad t \in [t_0, t_f] \\ \xi^T(t_f)S\xi(t_f) &= 0.\end{aligned}$$

Ora, avendo assunto che R è definita positiva, la seconda uguaglianza è verificata se e solo se $\mu(t) \equiv 0$ per ogni $t \in [t_0, t_f]$. In ogni caso, avendo assunto che Q ed S sono semidefinite positive, la prima e la terza identità potrebbero essere verificate per valori di $\xi(t)$ diversi da zero. Non possiamo quindi concludere che $\tilde{J}(z)$ sia strettamente convessa poichè le uguaglianze rimangono verificate per ogni direzione ammissibile della forma $v(t) = [\xi^T(t), 0]^T$ con $\xi^T(t)Q\xi(t) \equiv 0$ e $\xi^T(t_f)S\xi(t_f) = 0$. Tuttavia, come già fatto nel paragrafo precedente, possiamo dire che se l'uguaglianza è verificata per $z(t)$ e per $v(t) = [\xi^T(t), 0]^T$ in cui $\xi(t_0) = 0$, e se entrambi $z(t)$ e $z(t) + v(t)$ soddisfano l'uguaglianza dell'equazione di stato, allora possiamo avere $\xi(t) = 0$. Quindi, in questo modo, possiamo concludere che se $z^*(t)$ soddisfa $\delta\tilde{J}(z; v) = 0$ per tutte le direzioni ammissibili, assieme al vincolo 11.7, allora $z^*(t)$ minimizza la funzione obiettivo su tutti gli $z(t)$ che soddisfano la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ ed il vincolo dell'equazione di stato, determinando il segnale di controllo ottimo e la relativa traiettoria.

Equazione di Eulero-Lagrange

A questo punto poniamo l'attenzione alla equazione di Eulero-Lagrange, che nel nostro caso prende la seguente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -\lambda^T(t) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T(t)Q + \lambda^T(t)A & u^T(t)R + \lambda^T(t)B \end{bmatrix}$$

vale a dire:

- $-\dot{\lambda}^T = x^T Q + \lambda^T A$, poi trasponendo $\dot{\lambda} = -A^T \lambda - Q^T x$
- $0 = u^T R + \lambda^T B$, poi trasponendo $R^T u + B^T \lambda = 0$

Che andranno considerate insieme all'equazione del vincolo:

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Qualche osservazione:

Abbiamo quindi

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda(t) - Q^T x(t) \\ u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \end{cases} \quad (11.12)$$

o equivalentemente in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

$$u(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t).$$

Notiamo che la matrice R è quadrata e definita positiva (non singolare), motivo per cui è stato possibile farne l'inversa.

Condizioni al contorno

La soluzione ottima del nostro problema sarà quindi fornita dalla 11.13 con l'aggiunta di due opportune condizioni al contorno: la prima, già nota, è la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$; la seconda richiede che sia $\delta\tilde{J}(z; v) = 0$ per tutte le direzioni ammissibili. A tal fine usiamo l'equazione di Eulero-Lagrange per scrivere

$$\begin{aligned}\delta\tilde{J}(z; v) &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \begin{bmatrix} -\dot{\lambda}^T(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda^T(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} \right\} dt \\ &\quad + x^T(t_f) S \xi(t_f) \\ &= - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\lambda^T(t) \xi(t)] dt + x^T(t_f) S \xi(t_f) \\ &= -\lambda^T(t_f) \xi(t_f) + \lambda(t_0) \xi^T(t_0) + x^T(t_f) S \xi(t_f)\end{aligned}$$

Come notato precedentemente, le direzioni ammissibili $v(t) = [\xi^T(t), \mu^T(t)]^T$ devono soddisfare $\xi(t_0) = 0$, ma $\xi(t_f)$ è libera. Questo comporta che

$$\delta\tilde{J}(z; v) = [-\lambda^T(t_f) + x^T(t_f) S] \xi(t_f) = 0$$

risulterà valida per ogni $\xi(t_f)$ se e solo se $\lambda(t_f) = Sx(t_f)$.

Soluzione al problema di regolazione ottima

Ora abbiamo tutto il necessario per definire le soluzioni del problema del regolatore quadratico lineare. La traiettoria di stato ottimale ed il segnale di controllo, assieme al vettore dei moltiplicatori di Lagrange, sono governati dall'equazione di stato

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \\ u(t) &= -R^{-1}B^T\lambda(t)\end{aligned}\tag{11.14}$$

assieme alle condizioni al contorno

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0 \\ \lambda(t_f) &= Sx(t_f)\end{aligned}\tag{11.15}$$

Possiamo dire che queste condizioni sono *combinare* poichè per $x(t)$ è specificato lo stato iniziale, e, per $\lambda(t)$ è specificato lo stato finale. Questa circostanza è nota come *problema del valore dei due punti al contorno*, che a prima vista, sembra possa causare alcuni dilemmi a livello computazionale. Nel caso in cui prendessimo un valore per $\lambda(t_0)$, allora l'equazione di stato 11.14 potrebbe essere risolta *in avanti* in modo da ottenere $x(t)$ e $\lambda(t)$ per ogni $t \in [t_0, t_f]$, ma non c'è garanzia che $x(t_f)$ e $\lambda(t_f)$ soddisfino la seconda relazione della (13). Alternativamente, nel caso in cui prendessimo $x(t_f)$ e ponessimo $\lambda(t_f) = Sx(t_f)$, allora l'equazione 11.14 potrebbe essere risolta *all'indietro* a dare $x(t)$ e $\lambda(t)$ per ogni $t \in [t_0, t_f]$, ma non c'è garanzia che $x(t)$ soddisfi la condizione iniziale.

Soluzione con sweep method: l'Equazione di Riccati

Fortunatamente, questa situazione può essere risolta usando una tecnica nota come *sweep method*, che consiste nell'assumere che $x(t)$ e $\lambda(t)$ siano legati dalla relazione

$$\lambda(t) = P(t)x(t) \quad (11.16)$$

Il nostro obiettivo è quello di specificare la matrice $P(t)$ di dimensione $(n \times n)$ sull'intervallo $[t_0, t_f]$, che, in effetti, spazza via questa condizione terminale e permette di avere la corretta condizione iniziale $\lambda(t_0)$, che assieme a $x(t_0) = x_0$ permette all'equazione di stato 11.14 di essere risolta.

Una volta che $P(t)$ è determinata, la relazione lineare 11.16 permette di realizzare il segnale di controllo ottimale come

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) = -K(t)x(t)$$

dove

$$K(t) = -R^{-1}B^T P(t)$$

Calcolando la derivata dell'equazione 11.16 e confrontandola con le espressioni di $\dot{\lambda}(t)$ e di $\dot{x}(t)$ presenti nella 11.13 si ricava il sistema

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) = -A^T P(t)x(t) - Q^T x(t) \\ \dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T P(t)x(t) \end{cases} \quad (11.17)$$

Ora moltiplichiamo la seconda equazione per $P(t)$, così da ottenere

$$P(t)\dot{x}(t) = P(t)Ax(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t)x(t)$$

e confrontiamola con la prima, nella quale portiamo $\dot{P}(t)x(t)$ a destra dell'uguale in modo che si abbia

$$P(t)\dot{x}(t) = -\dot{P}(t)x(t) - A^T P(t)x(t) - Q^T x(t)$$

Uguagliando le due espressioni e dividendo il tutto per $x(t)$, visto che l'uguaglianza deve valere per ogni traiettoria $x(t)$, abbiamo

$$-\dot{P}(t) - A^T(t)P(t) - Q^T = P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t)$$

la quale, riscritta per chiarezza (sfruttando la simmetria della Q) come

$$-\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q \quad (11.18)$$

è la nota *Equazione differenziale di Riccati*. La soluzione di tale equazione è una matrice simmetrica.

Per integrare questa equazione partiamo dalla condizione al contorno

$$\lambda(t_f) = Sx(t_f)$$

e sostituiamoci $\lambda(t) = P(t)x(t)$ per ottenere come condizione da usare:

$$P(t_f) = S.$$

A questo punto abbiamo completamente specificato la soluzione del regolatore quadratico lineare. L'equazione di Riccati permette di ottenere il segnale di controllo ottimo che genera una traiettoria dello stato, data da:

$$\dot{x}(t) = [A - BR^{-1}B^T P(t)]x(t) \text{ con } x(t_0) = x_0$$

Valutiamo infine la funzione obiettivo con il risultato appena ottenuto: sostituendo $u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t)$ nel funzionale di costo si ha

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) [Q + P(t)BR^{-1}B^T P(t)]x(t)dt + \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) \left[\dot{P}(t) + A^T P(t) + P(t)A - 2P(t)BR^{-1}B^T P(t) \right] x(t)dt + \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) \left\{ \dot{P}(t) + [A - BR^{-1}B^T P(t)]^T P(t) \right. \\ &\quad \left. + P(t)[A - BR^{-1}B^T P(t)] \right\} x(t)dt + \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [x^T(t)P(t)x(t)]dt + \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) \\ &= -\frac{1}{2}x^T(t_f)P(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) + \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) \end{aligned}$$

e visto ² che $P(t_f) = S$

$$= \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0)$$

11.5.1 Soluzione dell'equazione di Riccati

L'equazione differenziale di Riccati è un'equazione matriciale differenziale non-lineare a causa del termine quadratico $P(t)BR^{-1}B^T P(t)$. Risolvendo questa equazione si ottiene la legge di controllo ottimo ricercata. La soluzione dell'equazione in questione può essere ottenuta dall'equazione posta nella forma

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{\Lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ \Lambda(t) \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

nella quale $X(t)$ e $\Lambda(t)$ sono matrici $(n \times n)$ che soddisfano la condizione al contorno

$$\begin{bmatrix} X(t_f) \\ \Lambda(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} \quad (11.20)$$

² Basta imporre $\frac{\partial \tilde{J}(z)}{\partial x(t_f)} = 0$, perché si vuole minimizzare l'errore dovuto al transitorio: questo significa che

$$\tilde{J}(z) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) - \frac{1}{2}x^T(t_f)P_f x(t_f) + \frac{1}{2}x^T(t_0)P_0 x(t_0)$$

dove P_0 e P_f sono i valori della matrice $P(t)$ rispettivamente in t_0 e in t_f . Derivando $\tilde{J}(z)$ rispetto a $x(t_f)$ si trova

$$\frac{\partial \tilde{J}(z)}{\partial x(t_f)} = x^T(t_f)S - x^T(t_f)P_f = 0$$

da cui $x^T(t_f)(S - P_f) = 0$ e visto che $x^T(t_f)$ non è il vettore nullo, allora $P(t_f) = S$.

La matrice ($2n \times 2n$) che appare nell'equazione 11.14, cioè

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q^T & -A^T \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

è chiamata matrice *Hamiltoniana*.

Si richiede che se $X(t)$ è non-singolare per ogni $t \in [t_0, t_f]$, la soluzione dell'equazione differenziale di Riccati può essere espressa come

$$P(t) = \Lambda(t)X^{-1}(t)$$

E' chiaro che la condizione 11.21 implica che $P(t_f) = S$. Mostriamo che $\Lambda(t)X^{-1}(t)$ è la soluzione della 11.18. All'inizio, la regola del prodotto per derivare le funzioni matriciali porta a

$$\frac{d}{dt}[\Lambda(t)X^{-1}(t)] = \frac{d\Lambda(t)}{dt}X^{-1}(t) + \Lambda(t)\frac{dX^{-1}(t)}{dt}$$

Inoltre, derivando l'identità $X(t)X^{-1}(t) = I$ si ha

$$\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -X^{-1}(t)\frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t)$$

usando queste relazioni, assieme alle espressioni per le derivate di $X(t)$ e $\Lambda(t)$ estratte dalla 11.19, notiamo che

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}[\Lambda(t)X^{-1}(t)] &= -[-Q^T X(t) - A^T \Lambda(t)]X^{-1}(t) + \Lambda(t)X^{-1}(t) \times [AX(t) - BR^{-1}B^T \Lambda(t)]X^{-1}(t) \\ &= Q^T + A^T[\Lambda(t)X^{-1}(t)] + [\Lambda(t)X^{-1}(t)]A - [\Lambda(t)X^{-1}(t)]BR^{-1}B^T[\Lambda(t)X^{-1}(t)] \end{aligned}$$

Quest'ultimo passaggio ci permette di notare che $\Lambda(t)X^{-1}$ soddisfa l'equazione 11.18 come richiesto.

La matrice *Hamiltoniana* gode di speciali proprietà relative ai suoi autovalori che ci permettono di essere più chiari nella rappresentazione delle soluzioni dell'equazione di Riccati. Osserviamo che la matrice ($2n \times 2n$)

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

è non-singolare e con matrice inversa $J^{-1} = -J$. Un calcolo diretto rivela che

$$\begin{aligned} J^{-1}HJ &= -JHJ \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} A^T & -Q^T \\ -BR^{-1}B^T & -A \end{bmatrix} = -H^T \end{aligned}$$

che implica che H e $-H^T$ hanno gli stessi autovalori. Inoltre, nel momento in cui gli autovalori non sono influenzati dalla trasposizione della matrice, è chiaro che H e $-H$ hanno gli stessi autovalori. Concludiamo che se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di H , allora lo è anche $-\lambda$. Inoltre, se H è una matrice di numeri reali anche $\bar{\lambda}$ e $-\bar{\lambda}$ sono autovalori. Notiamo che gli autovalori di H vanno a posizionarsi in modo simmetrico sul piano complesso

$$\lambda = \sigma + jw, \quad -\lambda = -\sigma - jw, \quad \bar{\lambda} = \sigma - jw, \quad -\bar{\lambda} = -\sigma + jw$$

Ora, sotto l'ipotesi che H non abbia autovalori sull'asse immaginario, i $2n$ autovalori possono essere separati in un gruppo di n autovalori a parte reale strettamente negativa ed un gruppo di n autovalori a parte reale

strettamente positiva. Sia T una matrice di trasformazione che trasforma H nella forma canonica di Jordan data da

$$T^{-1}HT = \begin{bmatrix} J^- & 0 \\ 0 & J^+ \end{bmatrix}$$

nella quale J^- specifica la collezione del blocco di Jordan associato agli autovalori a parte reale negativa di H , e J^+ quello associato agli autovalori a parte reale positiva. Usiamo la matrice di trasformazione T partizionata in quattro blocchi di dimensione $(n \times n)$ in modo conforme ad H :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

per trasformare la (13) attraverso

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ \Lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}(t) \\ \hat{\Lambda}(t) \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}}(t) \\ \dot{\hat{\Lambda}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^- & 0 \\ 0 & J^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}(t) \\ \hat{\Lambda}(t) \end{bmatrix}$$

Le condizioni al contorno espresse dalla 11.16 diventano

$$\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}(t_f) \\ \hat{\Lambda}(t_f) \end{bmatrix}$$

Nonostante questa determini univocamente sia $\hat{X}(t_f)$ e $\hat{\Lambda}(t_f)$, per i nostri scopi sarà sufficiente esprimere $\hat{\Lambda}(t_f) = M\hat{X}(t_f)$, nel quale

$$M = -[T_{22} - ST_{12}]^{-1}[T_{21} - ST_{11}]$$

Perciò abbiamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{X}(t) \\ \hat{\Lambda}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{J^-(t-t_f)} \\ e^{J^+(t-t_f)}M \end{bmatrix} \hat{X}(t_f) \\ &= \begin{bmatrix} I \\ e^{J^+(t-t_f)}Me^{-J^-(t-t_f)} \end{bmatrix} e^{J^-(t-t_f)} \hat{X}(t_f) \end{aligned}$$

che porta a

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ \Lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} + T_{12}e^{J^+(t-t_f)}Me^{-J^-(t-t_f)} \\ T_{21} + T_{22}e^{J^+(t-t_f)}Me^{-J^-(t-t_f)} \end{bmatrix} e^{J^-(t-t_f)} \hat{X}(t_f)$$

Infine possiamo combinare queste identità per ottenere il risultato

$$P(t) = \Lambda(t)X^{-1}(t) = (T_{21} + T_{22}e^{J^+(t-t_f)}Me^{-J^-(t-t_f)})(T_{11} + T_{12}e^{J^+(t-t_f)}Me^{-J^-(t-t_f)})^{-1} \quad (11.22)$$

11.5.2 Il problema del regolatore quadratico lineare a regime

Volgiamo ora la nostra attenzione al problema del regolatore quadratico lineare a regime. Nei casi pratici, l'obiettivo del controllo consiste nel far raggiungere al sistema una condizione di regime dopo un transitorio rispondente a determinate caratteristiche. Rispetto a questo problema, la soluzione ottima su orizzonte finito non è significativa. Sarebbe opportuno determinare una legge di controllo, se possibile in forma di retroazione statica dallo stato, che minimizzi il costo necessario a raggiungere la condizione di regime, quindi su un orizzonte temporale in generale infinito. Affinché questo possa essere ottenuto, è ovviamente necessario che il costo non

diverga quando l'orizzonte temporale tende all'infinito. Infine, la legge di controllo ottima deve essere tale da stabilizzare asintoticamente il sistema. Il problema di controllo su orizzonte infinito può essere formulato come segue: [1]

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (11.23)$$

Possiamo interpretare questa come derivante dalla funzione di costo iniziale nel quale si è posto $t_0 = 0$, $S = 0$ e facendo tendere t_f all'infinito. Per trattare questo come un caso limite della precedente analisi, sfruttiamo il fatto che entrambe le matrici esponenziali

$$e^{-J^-(t-t_f)} = e^{J^-(t_f-t)} \text{ ed } e^{J^+(t-t_f)} = e^{-J^+(t_f-t)}$$

tendono ad una matrice ($n \times n$) diversa da zero per t_f che tende ad infinito poichè J^- e J^+ hanno autovalori a parte reale negativa. Questo ci permette di concludere dall'equazione 11.22 che

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t) = T_{21}T_{11}^{-1} = \bar{P}$$

Questo significa che, per t_f che tende all'infinito, la soluzione dell'equazione di Riccati tende a regime ad un valore costante \bar{P} . Ci aspettiamo quindi, che \bar{P} caratterizzi la soluzione di equilibrio dell'equazione 11.18, cioè

$$A^T\bar{P} + \bar{P}A - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} + Q = 0 \quad (11.24)$$

Quest'ultima equazione è chiamata *equazione algebrica di Riccati*. Possiamo verificare che $\bar{P} = T_{21}T_{11}^{-1}$ soddisfa l'equazione 11.24 nel modo seguente. Per prima cosa, la matrice di trasformazione T che porta alla forma canonica di Jordan a partire dalla matrice Hamiltoniana H soddisfa

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} J^- \quad (11.25)$$

Questa può essere ulteriormente manipolata e dare

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \bar{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \bar{P} \end{bmatrix} T_{11}J^-T_{11}^{-1} = 0$$

Espandendo la parte sinistra riconosciamo l'equazione 11.24. Concludiamo che il problema del regolatore quadratico lineare a regime può essere risolto se l'equazione differenziale di Riccati ha a regime una ben definita soluzione costante \bar{P} che soddisfa l'equazione algebrica di Riccati. In questo caso, la legge di controllo ottimo è tempo invariante ed è data da

$$u(t) = -K_{LQR}x(t) \text{ con } K_{LQR} = R^{-1}B^T\bar{P} \quad (11.26)$$

Questo porta ad un'equazione di stato ad anello chiuso tempo-invariante data da

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T\bar{P})x(t) \text{ con } x(0) = x_0 \quad (11.27)$$

raffigurata nel diagramma a blocchi di figura 11.1.

Possiamo ora chiederci sotto quali condizioni l'equazione di Riccati ammetta una soluzione. A tal fine ci viene in aiuto il seguente Teorema.

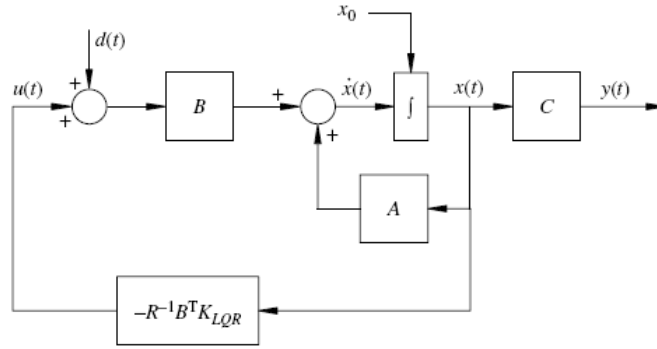


Figura 11.1: Diagramma a Blocchi a ciclo chiuso del Regolatore Lineare Quadratico.

Teorema 1 Se la coppia (A, B) è controllabile e la coppia (A, C) è osservabile, allora, l'equazione algebrica di Riccati 11.24 ammette un'unica soluzione definita positiva, e l'equazione di stato ad anello chiuso 11.27 è asintoticamente stabile.

Osservazione 1 Se $Q = C^T C$ per una matrice C di dimensioni $(p \times n)$, dove $p < n$, è possibile dimostrare che la coppia (Q, A) è osservabile se e solo se la coppia (C, A) è osservabile. ³

A questo punto risolviamo l'equazione algebrica di Riccati 11.24 esprimendo Q come

$$Q = \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} - A^T \bar{P} - \bar{P} A$$

Sostituendo quest'ultima espressione nell'indice di costo, per ogni $u(t)$ ammissibile ottenuto per $x \rightarrow 0$ (per $t \rightarrow \infty$) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} J(x_0, u) &= \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \\ &= \int_0^\infty [x^T(t) \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} x(t) + u^T(t) R u(t) - x^T(t) (A^T \bar{P} + \bar{P} A) x(t)] dt \\ &= \int_0^\infty [u(t) + R^{-1} B^T \bar{P} x(t)]^T R [u(t) + R^{-1} B^T \bar{P} x(t)] dt \\ &\quad - \int_0^\infty [u(t) B^T \bar{P} x(t) + x^T(t) \bar{P} B u(t) + x^T(t) A^T \bar{P} x(t) + x^T(t) \bar{P} A x(t)] dt \end{aligned}$$

(vediamo come è stato possibile scomporre l'integrale in questa nuova forma. Svolgendo il prodotto presente nell'integrale a sinistra del segno di sottrazione ricaviamo le seguenti espressioni:

1. $u^T(t) R u(t)$
2. $u^T(t) R R^{-1} B^T \bar{P} x(t) = u^T(t) B^T \bar{P} x(t)$
3. $x^T(t) \bar{P}^T B R^{-1T} R u(t) = x^T(t) \bar{P} B u(t)$
4. $x^T(t) \bar{P}^T B R^{-1T} R R^{-1} B^T \bar{P} x(t) = x^T(t) \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} x(t)$

³Ogni matrice simmetrica definita positiva è fattorizzabile nel prodotto di due matrici l'una la trasposta dell'altra

a questo punto basta notare che la seconda e la terza espressione si semplificano con le loro opposte presenti nell'integrale a destra del segno di sottrazione, mentre la prima e la quarta rimangono, uguagliando così l'integrale del passaggio precedente)

$$= \int_0^\infty \left\{ [u(t) + R^{-1}B^T\bar{P}x(t)]^T R[u(t) + R^{-1}B^T\bar{P}x(t)]dt - [\dot{x}^T(t)\bar{P}x(t) + x^T(t)\bar{P}\dot{x}(t)]dt \right\}$$

(si è proceduto ad una integrazione per parti dell'integrale a destra del segno di sottrazione del passaggio precedente)

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty [u(t) + R^{-1}B^T\bar{P}x(t)]^T R[u(t) + R^{-1}B^T\bar{P}x(t)]dt - \int_0^\infty \frac{d}{dt}(x^T(t)\bar{P}x(t))dt \\ &= x_0^T\bar{P}x_0 + \int_0^\infty [u(t) + R^{-1}B^T\bar{P}x(t)]^T R[u(t) + R^{-1}B^T\bar{P}x(t)]dt \end{aligned}$$

Dal momento che $x_0^T\bar{P}x_0$ è costante e non è influenzata dalla scelta di $u(t)$ e dal momento che $u(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}x(t)$ è ammissibile, risulta chiaro che l'indice di costo ottimo sarà dato da: [2]

$$J^*(x_0) = x_0^T\bar{P}x_0$$

Capitolo 12

Regolatori dell'uscita con assegnazione della dinamica

12.1 Un regolatore semplice

(to be completed)

12.1.1 Regolazione con informazione completa senza estensione

Abbiamo affrontato fino a ora il problema della stabilizzazione del punto $x = 0$, supponiamo invece di voler costruire un regolatore che porti l'uscita del nostro sistema a un valore y_d . Poiché il sistema che stiamo studiando possiede solo un ingresso è in generale impossibile regolare tutto lo stato a un valore prefissato x_d . Vedremo che questo sarà realizzabile solo sotto particolari condizioni e per particolari valori di x_d .

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

e supponiamo che si voglia ottenere un'uscita $y = y_d$. All'equilibrio del sistema si avrà

$$\begin{cases} 0 = Ax_{eq} + bu_{eq} \\ y_d = Cx_{eq} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} A & b \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{eq} \\ u_{eq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_d \end{pmatrix}$$

e sarà possibile trovare una coppia (x_{eq}, u_{eq}) tale da soddisfare queste relazioni solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} A & b \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

risulterà invertibile (di rango massimo) fornendo

$$\begin{pmatrix} x_{eq} \\ u_{eq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y_d \end{pmatrix}$$

A questo punto si può pensare di porre $u = F(x - x_{eq})$ e di costruire lo schema di regolazione di Fig. [12.1](#).

Il sistema complessivamente sarà descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \\ u = F(x - x_{eq}) \end{cases}$$

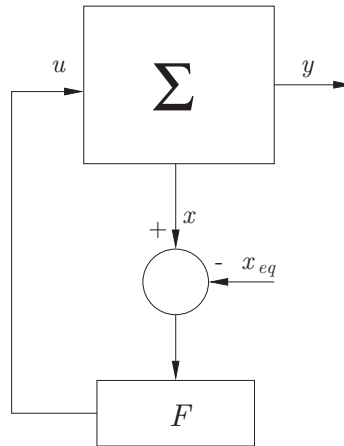


Figura 12.1: Regolatore dell'uscita senza estensione

da cui

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + bF)x - bFx_{eq} \\ y = Cx \end{cases}$$

Ponendo $e = x - x_{eq}$ possiamo riscrivere le equazioni nella seguente maniera

$$\begin{cases} \dot{e} = (A + bF)e + Ax_{eq} \\ y = Ce + Cx_{eq} \end{cases}$$

Il sistema si suppone tutto controllabile (cioè $\rho(R)$ massimo con $R = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$). Sotto questa ipotesi si può scegliere F con l'algoritmo di Ackermann in modo tale che si abbia per $(A + bF)$ lo spettro di autovalori desiderati. Se si scelgono tutti autovalori a parte reale negativa la matrice $(A + bF)$ risulterà anche invertibile. Cerchiamo adesso il valore di equilibrio di e in funzione di x_{eq} ponendo $\dot{e} = 0$:

$$0 = (A + bF)e_{eq} + Ax_{eq}$$

quindi

$$e_{eq} = -(A + bF)^{-1}Ax_{eq}$$

Affinchè l'errore e_{eq} sia nullo, Ax_{eq} dovrà essere nullo. Ciò significa che x_{eq} , oltre a essere funzione di y_d secondo la relazione vista sopra, dovrà anche essere nel nucleo di A . Quest'ultima cosa si verificherà solo se anche $u_{eq} = 0$, ovvero l'uscita desiderata si può ottenere dal sistema applicando un ingresso nullo. In generale questo non è verificato potendo tuttavia accadere per particolari sistemi e per particolari stati.

Notiamo che la condizione $Ax_{eq} = 0$ implica anche la presenza di un autovalore nullo per A , ovvero un integratore nella funzione di trasferimento del sistema.

12.1.2 Esempio: regolazione della posizione di un sistema smorzato

Prendiamo il sistema di figura 12.2 e scriviamo le equazioni del modello. Sia F la forza applicata al carrello di massa M e D l'attrito sul piano orizzontale. Detta y la posizione del carrello vale la

$$M\ddot{y} = -D\dot{y} + F.$$

Ponendo $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$ possiamo riscrivere questo modello come

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f$$

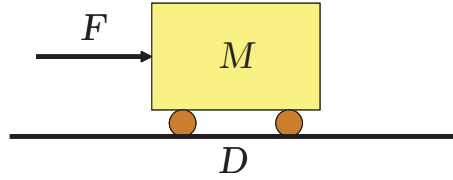


Figura 12.2: Carrello smorzato

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vediamo adesso che la matrice

$$\begin{bmatrix} A & b \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{M} & -\frac{1}{M} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è invertibile per cui possiamo determinare lo stato ed il forzamento in una posizione desiderata y_d :

$$\begin{bmatrix} A & b \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,eq} \\ x_{2,eq} \\ f_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_d \end{bmatrix},$$

che fornisce

$$\begin{bmatrix} x_{1,eq} \\ x_{2,eq} \\ f_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che $f_{eq} = 0$, che è la stessa cosa di osservare che $Ax_{eq} = 0$, e quindi lo schema di controllo della figura 12.1, con un'opportuna F ricavata assegnando le dinamiche desiderate ad $(A + bF)$, sarà in grado di stabilizzare il sistema sulla posizione y_d con errore nullo.

12.2 Regolazione con informazione completa con estensione

Consideriamo ancora il problema della regolazione dell'uscita e supponiamo che la condizione $Ax_{eq} = 0$, ovvero $u_{eq} = 0$, non sia verificata. Ipotizziamo comunque che, data un'uscita desiderata y_d , si possa ricavare la coppia (x_{eq}, u_{eq})

$$\begin{pmatrix} x_{eq} \\ u_{eq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y_d \end{pmatrix}$$

Estendiamo allora lo stato del sistema con un integratore sull'ingresso e, come rappresentato in Fig. 12.3, dopo aver posto $\dot{u} = v$, scriviamo le equazioni complessive

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

con

$$y = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}.$$

Poniamo z lo stato aumentato e riscriviamo il tutto come

$$\begin{cases} \dot{z} = Mz + Nv \\ y = \tilde{C}z \end{cases}$$

Proposizione 12.1 *L'estensione con integratore non modifica la controllabilità.*

Dimostrazione: Supponiamo la coppia (A, b) controllabile, la matrice di controllabilità del sistema esteso sarà

$$R_E = \begin{bmatrix} N & MN & M^2N & \cdots & M^nN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

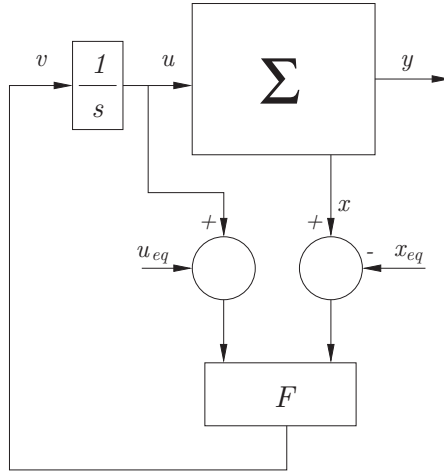


Figura 12.3: Regolatore dell'uscita con estensione

che è ovviamente invertibile se lo è quella del sistema non esteso.†

Supponiamo adesso di costruire lo schema di controllo a controreazione di Fig. 12.3 con

$$v = F \begin{pmatrix} x - x_{eq} \\ u - u_{eq} \end{pmatrix} = F(z - z_{eq}) = Fe$$

con $e = z - z_{eq}$. Il sistema di errore è si potrà allora scrivere come

$$\begin{cases} \dot{e} = M(e + z_{eq}) + NFe \\ y = \bar{C}e + \bar{C}z_{eq} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \dot{e} = (M + NF)e + Mz_{eq} \\ y = \bar{C}e + y_d \end{cases}$$

e, dopo avere assegnato grazie alla matrice F le dinamiche del sistema di errore, questo convergerà a zero se $Mz_{eq} = 0$. Notiamo però che

$$Mz_{eq} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{eq} \\ u_{eq} \end{pmatrix} = Ax_{eq} + bu_{eq} = 0$$

quindi l'errore si annullerà e l'uscita y convergerà a y_d .

Notiamo che l'estensione può essere effettuata anche con più di un integratore, consentendo al sistema di inseguire segnali di qualsiasi natura. La stabilità, al contrario dei sistemi di controllo a feedback sintetizzati con l'approccio in frequenza, può essere sempre garantita da un'opportuna reazione dallo stato.

12.2.1 Esempio: regolazione della posizione di un sistema smorzato ed elastico

Prendiamo adesso il sistema di figura 12.4 e scriviamo le sue equazioni. Sia F la forza applicata al carrello di massa M , D l'attrito sul piano orizzontale e K la costante elastica della molla. Detta y la posizione del carrello varrà la

$$M\ddot{y} = -D\dot{y} - Ky + F.$$

Ponendo sempre $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$ possiamo riscrivere questo modello come

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f \\ y &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12.1}$$

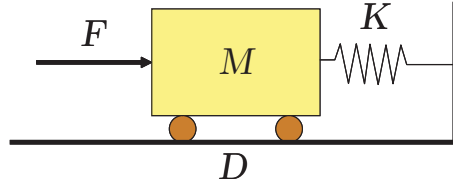


Figura 12.4: Carrello smorzato con molla

Anche per questo sistema la matrice

$$\begin{bmatrix} A & b \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} & -\frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

è invertibile per cui possiamo determinare lo stato ed il forzamento in una posizione desiderata y_d :

$$\begin{bmatrix} A & b \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,eq} \\ x_{2,eq} \\ f_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_d \end{bmatrix},$$

che fornisce

$$\begin{bmatrix} x_{1,eq} \\ x_{2,eq} \\ f_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_d \\ 0 \\ Ky_d \end{bmatrix}.$$

Notiamo che questa volta, al contrario dell'esempio del paragrafo 12.1.2, $f_{eq} \neq 0$ ed infatti il prodotto Ax_{eq} non è nullo. Per avere errore nullo a regime con riferimento costante dobbiamo procedere a estendere il sistema controllato con un integratore e a includere nello stato complessivo il forzamento f . Il sistema diventa, allora,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f \end{bmatrix}.$$

Adesso, usando le nuove matrici A' e b' possiamo determinare la matrice di guadagno F che assegna le dinamiche volute ad $A' + b'F$ ed usare così lo schema di figura 12.3. Notiamo che per avere errore nullo a regime con questo schema dobbiamo avere una piena conoscenza dei parametri del sistema in quanto un errore sulla stima di questi porterebbe ad avere un errore a regime nel posizionamento. Vedremo, nel paragrafo 12.3, come questo inconveniente possa essere superato con uno schema di controllo che ingloba al suo interno un osservatore dello stato.

12.3 Regolazione con reiezione dei disturbi

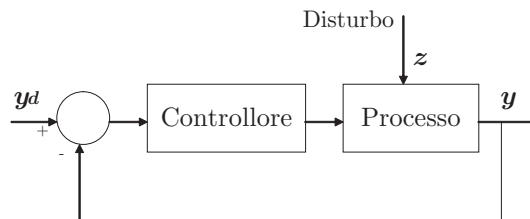


Figura 12.5: Sistema di controllo con reazione dinamica

Vediamo adesso di affrontare in maniera più generale il problema della regolazione dell'uscita a un valore desiderato in presenza di disturbi. Lo schema a cui facciamo riferimento è quello della Fig. 12.5. Supponiamo

che il processo da regolare venga descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pz \\ y = Cx + Qz \end{cases} \quad (12.2)$$

L'errore da azzerare asintoticamente rimarrà definito come

$$e = -Cx - Qz + y_d.$$

Per arrivare a una notazione più compatta, che ci consentirà di trattare in maniera unificata segnali di riferimento e disturbi, possiamo supporre che entrambi questi *ingressi* siano generati da un unico sistema esterno, detto *exosistema*. Questo approccio ci permette di restringere il problema della regolazione a delle classi di ingressi e di disturbi noti a priori.

Riformuliamo, allora, il problema della regolazione nel seguente modo: Supponiamo di poter definire un exosistema

$$\dot{w} = Sw$$

il cui stato w fornisca disturbo z e riferimento y_d in modo che il termine $-Qz + y_d$ possa essere espresso come $\tilde{Q}w$, e l'errore come

$$e = \tilde{C}x + \tilde{Q}w$$

con $\tilde{C} = -C$ e \tilde{Q} matrici opportune.

Il sistema (1) potrà essere riscritto, allora, come

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \tilde{P}w \\ e = \tilde{C}x + \tilde{Q}w \end{cases}$$

con $\tilde{P} = (P \ 0)$. Lo schema di riferimento sarà, quindi, quello della figura 12.6 e il problema illustrato prenderà il nome di *Regolazione dell'uscita con reazione dinamica dall'errore*. La sua soluzione sarà presentata nel paragrafo 12.5.

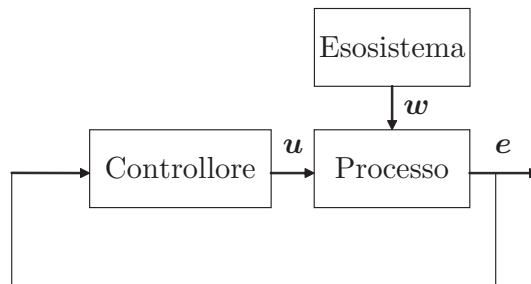


Figura 12.6: Schema del regolatore con reazione dall'errore

Nel caso in cui sia disponibile la misura delle variabili di stato, e sia possibile avere anche la misura del vettore w (ovviamente i riferimenti ma, soprattutto, i disturbi), lo schema della figura 12.5 si potrà semplificare e il controllore andrà ad assumere una forma lineare come illustrato dalla figura 12.7.

Si parlerà, in questo caso, di *Regolazione dell'uscita con reazione statica dallo stato e dai disturbi* e la sua soluzione verrà presentata nel paragrafo 12.4.

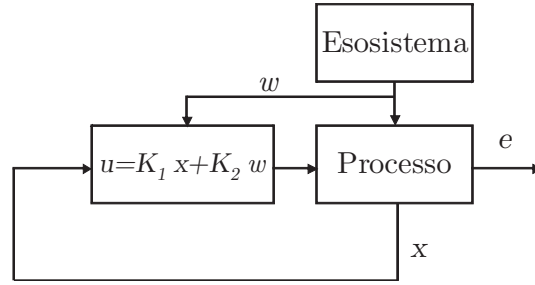


Figura 12.7: Schema del regolatore con reazione dallo stato e dai disturbi/riferimenti

12.3.1 Esempi di problemi di regolazione

Facciamo alcuni esempi per capire meglio questa formulazione:

- Uscita desiderata costante pari a K_d e disturbo costante sull'uscita pari a z_0 . Dovremo creare un esosistema con un autovalore in zero e scegliere le matrici \tilde{P} e \tilde{Q} come segue:

$$S = (0), \tilde{P} = (1), \tilde{Q} = (1)$$

e stato iniziale pari a

$$w_0 = 1.$$

- Riferimento a rampa $C_1 t$ e disturbo costante. Per produrre l'ingresso a rampa abbiamo bisogno di una cascata di integratori:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

inizializzati a

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Riferimento sinusoidale $y_d(t) = \sin(\omega t)$ e nessun disturbo. In questo caso è

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con stato iniziale

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12.4 Regolazione dell'uscita con reazione statica dallo stato

12.4.1 Definizione del problema

Sotto l'ipotesi di completa misurabilità del sistema è possibile formulare il problema della regolazione dell'uscita mediante reazione statica dallo stato :

Problema 1 (del Regolatore con informazione completa). *Sia dato un processo descritto dalle matrici di stato*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pw \\ e = Cx + Qw \end{cases}. \quad (12.3)$$

Supponiamo che sia il segnale di riferimento, sia il disturbo siano generati da un unico esosistema del tipo

$$\dot{w} = Sw, \quad (12.4)$$

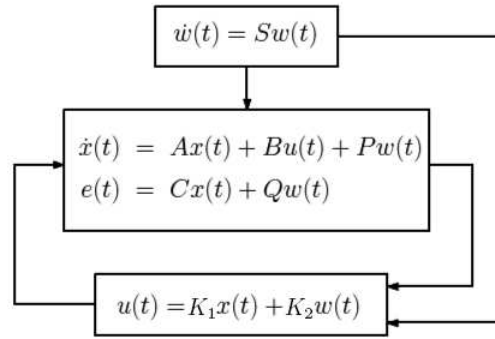


Figura 12.8: Sistema di controllo con reazione dallo stato

supponiamo che il controllore possa essere realizzato mediante reazione statica dallo stato del tipo

$$u = K_1x + K_2w.$$

Il sistema complessivo a ciclo chiuso risulterà

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK_1 & P + BK_2 \\ 0 & S \\ C & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \quad (12.5)$$

Si vuole risolvere il problema del regolatore in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

Condizione 1 (Stabilità del ciclo chiuso). Il sistema complessivo a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile, ovvero la matrice

$$(A + BK_1)$$

abbia tutti gli autovalori a parte reale negativa.

Condizione 2 (Convergenza a zero dell'errore). L'evoluzione dell'errore e a partire da qualsiasi stato iniziale (x_0, w_0) sia convergente a zero, ovvero

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [Cx(t) + Qw(t)] = 0.$$

Formuliamo adesso alcune ipotesi aggiuntive che serviranno a rendere risolvibile il problema:

Ipotesi 1 L'exosistema è antistabile, ovvero la matrice S possiede solo autovalori a parte reale nulla o positiva.

Questa ipotesi non è limitativa in quanto le classi di ingressi e di disturbi normalmente considerate soddisfano sempre questa condizione.

Ipotesi 2 La coppia (A, B) è stabilizzabile.

Questa seconda condizione ci assicurerà di poter spostare nel semipiano sinistro le dinamiche, eventualmente instabili, presenti nel processo.

12.4.2 Esistenza della soluzione del regolatore

Vediamo ora un lemma che assicura l'esistenza della soluzione del regolatore in questo caso.

Lemma 12.1 *Supponiamo che siano soddisfatte l'ipotesi 1 e 2. E' quindi possibile scegliere K_1 tale che $(A + BK_1)$ sia stabile. Allora, se e solo se esistono due matrici Π e K_2 che risolvano le seguenti equazioni*

$$\Pi S = (A + BK_1)\Pi + BK_2 + P \quad (12.6)$$

$$0 = C\Pi + Q, \quad (12.7)$$

la condizione 2 sarà soddisfatta.

Dimostrazione:

Operiamo un cambiamento di variabile ponendo $\tilde{x} = x - \Pi w$. Tenendo conto che $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \Pi\dot{w} = \dot{x} - \Pi Sw$, e considerando che Π soddisfa (12.6), possiamo riscrivere il sistema in (12.5) come:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A + BK_1)\tilde{x}, \\ e &= C\tilde{x} + (C\Pi + Q)w \end{aligned} \quad (12.8)$$

Perciò l'evoluzione dell'errore, a partire da un qualsiasi stato iniziale (x_0, w_0) , sarà data da

$$e(t) = Ce^{(A+BK_1)t}\tilde{x}_0 + (C\Pi + Q)e^{St}w_0.$$

Dalla stabilità di $A + BK_1$ discende $\lim_{t \rightarrow \infty} Ce^{(A+BK_1)t}\tilde{x}_0 = 0$, quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (C\Pi + Q)e^{St}w_0,$$

allora, a causa dell'ipotesi 1, necessariamente si dovrà utilizzare la 12.7 per avere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

‡

12.4.3 Sintesi del regolatore

Il lemma 12.1 suggerisce un metodo per la sintesi del controllore:

- assegnare tramite K_1 le dinamiche alla coppia (A, B) in modo tale che $A + BK_1$ sia stabile;
- risolvere il sistema di equazioni costituito dalle (12.6, 12.7) rispetto a Π e a K_2 .

Il controllore sarà quindi dato da $u = K_1x + K_2w$. Tale approccio presenta uno svantaggio in quanto Π e K_2 dipendono da K_1 . Perciò ogni qualvolta sia necessario modificare K_1 dovranno essere ricalcolati anche Π e K_2 . Un approccio migliore può essere ottenuto effettuando la seguente posizione

$$\Gamma = K_1\Pi + K_2. \quad (12.9)$$

In questo caso, le equazioni (12.6) e (12.7) possono essere riscritte usando le matrici incognite $\Pi = \tilde{\Pi}$ e Γ :

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 &= C\Pi + Q. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Queste equazioni, conosciute come *equazioni del regolatore di Francis*, sono completamente determinate dati i parametri del sistema A, B, C, P, Q ed S .

Tramite le equazioni del regolatore (12.10) è possibile giungere al seguente risultato.

Teorema 12.1 *Sotto le ipotesi 1 e 2, si prenda K_1 tale che $(A + BK_1)$ sia stabile. Allora, il problema lineare della regolazione dell'uscita è risolvibile, tramite retroazione statica dallo stato, da un controllo della forma*

$$u = K_1 x + K_2 w$$

se e solo se esistono due matrici Π e Γ che soddisfano le equazioni del regolatore (12.10) con K_2 dato da

$$K_2 = \Gamma - K_1 \Pi.$$

Dimostrazione: Supponendo soddisfatte le equazioni del regolatore 12.10, e dalla posizione fatta 12.9 per cui

$$\Gamma = K_1 \Pi + K_2,$$

rimarranno verificate le equazioni 12.6 e 12.7 del Lemma 12.1 e quanto di conseguenza. ‡

Per quello che riguarda la risoluzione delle equazioni del regolatore si vedrà nel paragrafo 12.5.4 che questa rimarrà legata al soddisfacimento di una semplice condizione indicata nel Corollario 12.2.

Osservazione 12.1 Un'interpretazione alla soluzione delle equazioni (12.10) può essere data come segue. Si consideri il caso speciale in cui l'uscita del sistema esogeno sia costante. Si avrà quindi $S = 0$, le equazioni (12.6, 12.7) diventano

$$\begin{aligned} 0 &= (A + BK_1)\Pi + BK_2 + P \\ 0 &= C\Pi + Q \end{aligned} \quad (12.11)$$

mentre le (12.10) diventano

$$\begin{aligned} 0 &= A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 &= C\Pi + Q \end{aligned} \quad (12.12)$$

Le equazioni (12.11) indicano che, per ogni w costante, Πw è un punto d'equilibrio del sistema a ciclo chiuso in cui l'errore è zero. Inoltre dalla dimostrazione del lemma 12.1 risulta che il sistema a ciclo chiuso può essere scritto come in (12.8) con $\tilde{x} = x - \Pi w$ da cui discende che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x - \Pi w = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(A+BK_1)t} \tilde{x}_0 = 0$$

e quindi essendo w costante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \Pi w.$$

Perciò, per ogni w costante, Πw è lo stato di regime del sistema a ciclo chiuso in cui l'errore è zero. D'altra parte, le equazioni (12.12) mostrano che, per ogni w costante, Γw è l'input sotto il quale lo schema ad anello aperto ha uno stato d'equilibrio Πw in corrispondenza del quale l'errore è zero. Inoltre poiché

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K_1 x + K_2 w = (K_1 \Pi + K_2) w = \Gamma w$$

per ogni w costante l'ingresso a regime tenderà a tale input. Quindi la possibilità o meno di realizzare il sistema a ciclo chiuso in modo tale da soddisfare la condizione 1 dipende dalla risolvibilità delle equazioni del regolatore.

Tale discorso può essere esteso al caso generale. Per ogni controllore che risolve il problema della regolazione dell'uscita, le traiettorie del sistema a ciclo chiuso da un qualunque stato iniziale $x(0)$ e $w(0)$ soddisfano

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \Pi w(t)) = 0.$$

Corrispondentemente, l'input di controllo soddisfa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - (K_1 \Pi + K_2)w(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - \Gamma w(t)) = 0.$$

Perciò, se il problema della regolazione dell'uscita è risolvibile, necessariamente, tutte le traiettorie del sistema a ciclo chiuso tenderanno a regime a $\Pi w(t)$, e i corrispondenti controlli a $\Gamma w(t)$.

Quindi l'impiego di una reazione dallo stato del tipo descritto nel teorema 12.1, con Π e Γ soluzioni delle equazioni del regolatore di Francis, comporta la definizione di un sottospazio globalmente attrattivo $V = \{(x, w) : x = \Pi w\}$ dello spazio di stato a ciclo chiuso. In corrispondenza di tale sottospazio il sistema a regime ha errore nullo. Esprimendo l'ingresso di controllo come

$$u = K_1 x + K_2 w = K_1 x + (\Gamma - K_1 \Pi)w = K_1(x - \Pi w) + \Gamma w$$

si può notare che esso risulta composto da due termini: il primo costituisce una retroazione il cui scopo è quello di guidare lo stato verso V , tale termine si azzerava quando $x = \Pi w$. Il secondo termine costituisce un'azione in avanti che rende V invariante per il sistema, ossia tale che $\forall x_{c0} = (x_0, w_0) \in V \Rightarrow x_c(t) = e^{A_c t} x_{c0} \in V$ per $\forall t > 0$, cioè tale che se lo stato si trova nel sottospazio V l'evoluzione del sistema rimarrà in esso.

Condizione sufficiente affinché un sottospazio V sia invariante per un sistema lineare del tipo $\dot{x} = Ax$ è che $\forall z \in V \Rightarrow Az \in V$. A regime poiché $x_c \in V$, i.e. $x_c = (\Pi w, w)$, l'ingresso di controllo diviene $u = K_1(x - \Pi w) + \Gamma w = \Gamma w$ ed il sistema complessivo risulta:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B\Gamma + P \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi w \\ w \end{pmatrix}$$

Indicando con A_c la matrice dinamica di tale sistema si può verificare facilmente che $A_c x_c \in V$, cioè V è invariante per A_c .

Quindi in conclusione il comportamento a regime del sistema a ciclo chiuso è completamente caratterizzato dalla soluzione delle equazioni del regolatore.

12.5 Regolazione dell'uscita con reazione dinamica dall'errore

Solitamente lo stato x del sistema e/o lo stato w dell'exosistema non sono misurabili, non è possibile quindi effettuare una controreazione statica dallo stato. In questi casi è possibile risolvere il problema del regolatore tramite reazione dinamica dall'errore.

12.5.1 Definizione del problema

Con riferimento alla Fig. 12.6, e tenendo presente le considerazioni fatte, formuliamo il problema della regolazione dell'uscita con reazione dall'errore in questo modo:

Problema 2 (del Regolatore con reazione dall'errore). *Sia dato un processo descritto dalle matrici di stato*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pw \\ e = Cx + Qw \end{cases} \quad (12.13)$$

Supponiamo che sia il segnale di riferimento, sia il disturbo siano generati da un unico exosistema del tipo

$$\dot{w} = Sw, \quad (12.14)$$

e il controllore possa essere un sistema dinamico del tipo

$$\begin{cases} \dot{\xi} = F\xi + Ge \\ u = H\xi \end{cases}.$$

Il sistema complessivo processo+exosistema+controllore si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BH & P \\ GC & F & GQ \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \\ w \end{pmatrix}.$$

Si vuole risolvere il problema del regolatore in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

Condizione 3 (Stabilità del ciclo chiuso). Il sistema complessivo a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile, ovvero la matrice

$$\begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix}$$

abbia tutti gli autovalori a parte reale negativa.

Condizione 4 (Convergenza a zero dell'errore). L'evoluzione dell'errore e a partire da qualsiasi stato iniziale (x_0, ξ_0, w_0) sia convergente a zero, ovvero

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [Cx(t) + Qw(t)] = 0.$$

Come nel problema della regolazione tramite reazione dallo stato, anche in questo al fine di rendere risolubile il problema si formulano le ipotesi di antistabilità dell'exosistema S (ipotesi 1) e di controllabilità della coppia (A, B) (ipotesi 2).

12.5.2 Esistenza della soluzione del regolatore

Vediamo adesso un lemma che ci assicura l'esistenza di una soluzione. Ipotizzeremo qui che il sistema a ciclo chiuso sia stabile, salvo poi mostrare più avanti un metodo per stabilizzarlo.

Lemma 12.2 Supponiamo che sia soddisfatta l'ipotesi 1 e che la condizione 3 sia vera. Allora, se e solo se esistono due matrici Π e Σ che risolvano le seguenti equazioni

$$\Pi S = A\Pi + BH\Sigma + P \quad (12.15)$$

$$\Sigma S = F\Sigma \quad (12.16)$$

$$0 = C\Pi + Q, \quad (12.17)$$

la condizione 4 sarà soddisfatta.

Dimostrazione:

Poniamo $x_c = (x, \xi, w)$ e chiamiamo A_c la matrice di stato del sistema a ciclo chiuso 2:

$$\dot{x}_c = A_c x_c.$$

Operiamo una trasformazione sullo stesso con una matrice T definita come

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 & \Pi \\ 0 & I & \Sigma \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

La nuova matrice di stato diventerà

$$\tilde{A}_c = T^{-1} A_c T = \begin{pmatrix} A & BH & A\Pi + BH + P - \Pi S \\ GC & F & GC\Pi + F\Sigma + GQ - \Sigma S \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}$$

e, sfruttando le (12.15), (12.16) e (12.17), avremo

$$\tilde{A}_c = \begin{pmatrix} A & BH & 0 \\ GC & F & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

A questo punto, a partire da un qualsiasi stato iniziale x_c^0 , l'evoluzione dell'errore sarà data da

$$\begin{aligned} e(t) &= \begin{pmatrix} C & 0 & Q \end{pmatrix} e^{A_c t} x_c^0 \\ &= \begin{pmatrix} C & 0 & Q \end{pmatrix} T e^{\tilde{A}_c t} \tilde{x}_c^0 \\ &= \begin{pmatrix} C & 0 & C\Pi + Q \end{pmatrix} e^{\tilde{A}_c t} \tilde{x}_c^0 \end{aligned}$$

e a causa della condizione 3, che assicura la stabilità asintotica del primo sottospazio della \tilde{A}_c , e della 12.17, potremo concludere che la condizione 4 è soddisfatta. ‡

Una considerazione che può essere subito fatta è la seguente: prendiamo il compensatore la cui dinamica è data dalla matrice F . Supponendo che la dimensione del controllore sia maggiore o uguale della dimensione dell'exosistema le colonne di Σ risulteranno linearmente indipendenti ed è quindi possibile immaginare una trasformazione di coordinate T fatta come

$$T = \begin{pmatrix} \Sigma & \Lambda \end{pmatrix}$$

con Λ matrice di completamento di base. Nella nuova base avremo una matrice

$$\tilde{F} = T^{-1} F T$$

da cui $FT = T\tilde{F}$ che, utilizzando la (12.16), ci consente di dedurre che \tilde{F} assumerà una forma del tipo

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} S & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Questo significa che la soluzione al problema del regolatore è tale contenere una replica dell'exosistema nel compensatore stesso (*principio del modello interno*).

12.5.3 Soluzione particolare

Introduciamo ora altre due ipotesi che ci consentiranno di arrivare rapidamente a formulare un controllore in grado di soddisfare allo stesso tempo sia le ipotesi del lemma 12.2 (e di conseguenza anche la condizione 4), sia la condizione 3.

Ipotesi 3 *La coppia di matrici*

$$\begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & Q \end{pmatrix}$$

è osservabile

questa ipotesi è più restrittiva della semplice seguente ipotesi

Ipotesi 4 *La coppia di matrici*

$$(A, C)$$

è osservabile

L'ipotesi 3 in realtà non è strettamente necessaria. La consideriamo valida per semplificare la trattazione. Notiamo infatti che la stessa implica sicuramente l'ipotesi 4. Supponiamo allora che solo la seconda sia verificata: la presenza di dinamiche non osservabili dovrà essere circoscritta, a questo punto, al solo exosistema. Ma affermare che alcune dinamiche dell'exosistema non hanno influenza sull'uscita (che a questo punto è l'errore di inseguimento) significa affermare che per queste dinamiche il problema di regolazione è già risolto o, quanto meno, non si pone affatto. Nel caso, perciò, di non soddisfacimento dell'ipotesi 3 ci si può accontentare del soddisfacimento della 4.

Ora procediamo alla costruzione di una particolare soluzione al problema del regolatore. Si noti che questa che viene data è solo una possibile soluzione.

Poiché conosciamo come sintetizzare un controllore tramite reazione statica dallo stato (x, w) , viene naturale cercare di sintetizzare il controllore con reazione dall'errore, effettuando una stima dello stato (x, w) . A questo scopo consideriamo il sistema complessivo processo+exosistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

$$e = (C \quad Q) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}.$$

Applicando la teoria dell'osservatore di Luenberger otteniamo il seguente controllore:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + G(e - [C \quad Q]\xi), \\ u &= (K_1 \quad K_2)\xi, \end{aligned} \tag{12.18}$$

dove G è la matrice tramite la quale si assegnano le dinamiche dello stimatore, cioè gli autovalori di

$$\begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} - G(C \quad Q).$$

Si noti che $u = [K_1 \quad K_2]\xi$ è equivalente, in presenza dello stimatore, alla legge di controllo $u = K_1x + K_2w$ impiegata nel caso del regolatore con reazione dallo stato. Ovviamente la (12.18) può essere espressa nella forma

$$\dot{\xi} = F\xi + Ge, \quad u = H\xi,$$

con

$$G = \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \end{pmatrix}, \quad H = (K_1 \quad K_2) \tag{12.19}$$

$$F = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} H - G \begin{pmatrix} C & Q \end{pmatrix} \tag{12.20}$$

.

Teorema 12.2 *Supponiamo valide le ipotesi 1, 2 e 3. Il problema della regolazione dell'uscita con reazione dall'errore ammette una soluzione se e solo se esistono due matrici Π e Γ che soddisfano le equazioni del regolatore di Francis*

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \quad (12.21)$$

$$0 = C\Pi + Q. \quad (12.22)$$

Una soluzione particolare sarà data dal controllore descritto nelle (12.19) e (12.20) con $K_2 = \Gamma - K_1\Pi$ cioè $H = (K_1, K_2) = (K_1, \Gamma - K_1\Pi)$.

Dimostrazione: Per dimostrare tale teorema si può procedere attraverso i seguenti punti:

- dimostrare che sotto le ipotesi fatte il compensatore proposto è in grado di soddisfare la condizione 3
- dimostrare che esistono due matrici Π e Γ che soddisfano le equazioni del regolatore di Francis (12.21, 12.22) allora esisteranno due matrici Π e Σ che soddisfano le equazioni (12.15-12.17).

Verifichiamo la condizione 3: sostituendo le tre matrici proposte nelle 12.19-12.20 abbiamo

$$\begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK_1 & B(\Gamma - K_1\Pi) \\ G_0C & A - G_0C + BK_1 & P - G_0Q + B(\Gamma - K_1\Pi) \\ G_1C & -G_1C & S - G_1Q \end{pmatrix}$$

che, con una trasformazione T definita come

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

diventa

$$\begin{pmatrix} A + BK_1 & BK_1 & B(\Gamma - K_1\Pi) \\ 0 & A - G_0C & P - G_0Q \\ 0 & -G_1C & S - G_1Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK_1 & BK_1 & B(\Gamma - K_1\Pi) \\ 0 & \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} - G \begin{pmatrix} C & Q \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

che può essere stabilizzata con una scelta opportuna di K_1 , grazie all'ipotesi 2, e di G , grazie all'ipotesi 3.

Dimostriamo ora che con questa scelta del compensatore e con le Π e Γ soluzioni di (12.21, 12.22) esisteranno Π e Σ soluzioni di (12.15-12.17). Prendiamo allora la matrice Π soluzione delle equazioni di Francis, e poniamo

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix}.$$

Vediamo cosa succede alle (12.15-12.17):

- Prendiamo la 12.15 e sostituiamo la definizione di Σ :

$$\Pi S = A\Pi + B \begin{pmatrix} K & \Gamma - K\Pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix} + P$$

che diventa

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P$$

ovviamente coincidente con la 12.21.

- Scriviamo la (12.16) e riscriviamola sostituendo Σ

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} A + BK - G_0C & P - G_0Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ -G_1C & S - G_1Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix}$$

Questa può essere calcolata e darà luogo al sistema

$$\begin{cases} \Pi S = A\Pi + BK\Pi - G_0C\Pi + P - G_0Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ S = -G_1C\Pi + S - G_1Q \end{cases}$$

che, semplificato, fornisce

$$\begin{cases} \Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \\ S = S \end{cases}.$$

La prima è la (12.21) e la seconda è ovviamente vera.

- La 12.17 è la stessa della 12.22.

‡

12.5.4 Equazioni di Sylvester e del regolatore

Riprendiamo l'equazione (??) e notiamo che si tratta di un'equazione che può essere scritta nella forma:

$$AX - XS = R, \quad (12.23)$$

prendendo il nome di *equazione di Sylvester* con A e S matrici quadrate e R matrice compatibile.

Invece, le equazioni del regolatore di Francis

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \quad (12.24)$$

$$0 = C\Pi + Q. \quad (12.25)$$

possono essere riorganizzate e scritte come

$$\begin{pmatrix} -P \\ -Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} S,$$

ovvero, con le opportune posizioni,

$$A_1X - A_2XS = R. \quad (12.26)$$

In realtà, sia le (12.24) e (12.25), sia la (12.26), sono forme particolari della più generale equazione di Hautus:

$$A_1Xq_1(S) + \dots + A_kXq_k(S) = R, \quad (12.27)$$

con A_i matrici $n \times m$, per la cui risolubilità vale il seguente teorema:

Teorema 12.3 *L'equazione di Hautus (12.27) è risolubile se e solo se le righe della matrice*

$$A(\lambda) = A_1q_1(\lambda) + \dots + A_kq_k(\lambda) \quad (12.28)$$

sono linearmente indipendenti per ogni λ autovalore di S . Se poi $n = m$ allora la soluzione è unica.‡

Particolarizzando il teorema 12.3 al caso dell'equazione di Sylvester, ovvero, ponendo

$$A_1 = A, \quad A_2 = I, \quad q_1(S) = 1, \quad q_2(S) = S,$$

la condizione di esistenza della soluzione ci dice che per ogni $\lambda \in \sigma(S)$ la matrice $A - \lambda I$ dovrebbe avere rango massimo. In altre parole vale il seguente Corollario:

Corollario 12.1 *L'equazione di Sylvester (12.23) è risolvibile quale che sia la matrice R , e la sua soluzione è unica, se e solo se*

$$\sigma(A) \cap \sigma(S) = \emptyset. \ddagger$$

Se invece usiamo il teorema 12.3 nel caso delle equazioni del regolatore di Francis con

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_1(S) = 1, \quad q_2(S) = S,$$

abbiamo:

Corollario 12.2 *Le equazioni del regolatore (12.24) e (12.25) sono risolvibili quali che siano le matrici P e Q se e solo se le righe della matrice*

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti per ogni λ che sia autovalore di S . Se poi il numero di colonne di B è uguale al numero di righe di C la soluzione è unica. \ddagger

Infine, qualora fossimo interessati solo a riferimenti e disturbi di tipo costante, la matrice S dell'exosistema assumerebbe la forma

$$S = (0)$$

e il corollario 12.2 richiederebbe semplicemente che la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

avesse le righe indipendenti. Inoltre, le equazioni del regolatore si ridurrebbero a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ -Q \end{pmatrix}$$

e, quindi, se il numero di ingressi fosse pari al numero di uscite il vettore (Π, Γ) si calcolerebbe semplicemente con la

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -P \\ -Q \end{pmatrix}.$$

12.5.5 Considerazioni conclusive sul regolatore di Francis

Notiamo che il teorema 12.2 fornisce delle condizioni necessarie e sufficienti in presenza di alcune ipotesi iniziali (le ipotesi 1, 2 e 3) unitamente alla possibilità di risolvere le equazioni del regolatore di Francis (12.21) e (12.22). Considerate nel loro complesso, sostituendo l'ipotesi 3 con la 4, e adoperando la condizione di risolvibilità delle equazioni del regolatore di Francis, il problema può essere riformulato nella seguente maniera:

Teorema 12.4 *Supposte valide le ipotesi 1, 2 e 4, il problema del regolatore dell'uscita mediante reazione dalla stato ha una soluzione, costituita dalle equazioni delle (12.19 12.20) con Π e Γ soluzioni della (12.26), se le righe della matrice*

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti per ogni numero complesso λ che sia autovalore di S .

Resta inteso che qualora l'ipotesi 4 non implicasse anche il soddisfacimento dell'ipotesi 3, si tratterà di restringere il problema del regolatore al sottospazio di S che risulta osservabile dall'errore.

Parte III

Tecniche basate sulla linearizzazione

Capitolo 13

Stabilità alla Lyapunov

13.1 Stabilità alla Lyapunov

Consideriamo il caso di sistemi autonomi:

Definizione 13.1 Si definisce **stato di equilibrio** di un sistema lo stato x_e per il quale valga: $\phi(t, t_0, x_e, 0) = x_e, t > t_0$.

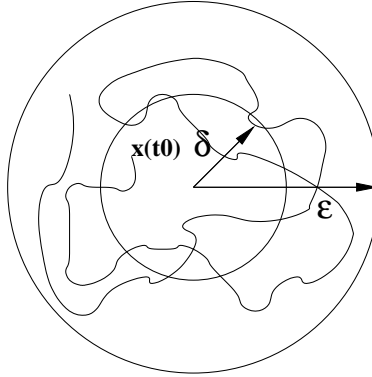


Figura 13.1: Stabilità semplice

Definizione 13.2 Uno stato di equilibrio x_e si dice **stabile** se:

$$\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon, t_0) : \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon$$

Questo significa che fissato un $\varepsilon > 0$ e piccolo a piacere esiste un δ tale che, se $x(t_0) - x_e$ è in norma minore di δ allora $x(t)$ deve rimanere in un intorno di raggio ε di x_e per ogni $t > t_0$.

Definizione 13.3 Uno stato di equilibrio si dice **localmente asintoticamente stabile** se è stabile e inoltre

$$\exists \delta_a(t_0) : \|x(t_0) - x_e\| < \delta_a(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

Quindi il sistema converge, per $t \rightarrow \infty$, a x_e se parte all'interno di un intorno di raggio $\delta_a(t_0)$ di x_e .

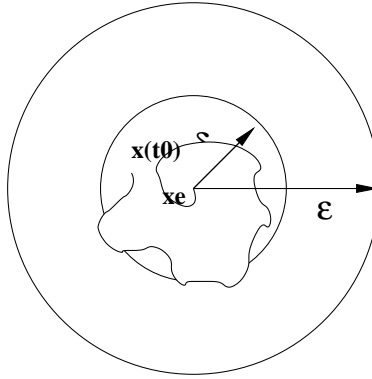


Figura 13.2: Stabilità asintotica

Definizione 13.4 Uno stato di equilibrio si dice **globalmente asintoticamente stabile** se esso è stabile e inoltre

$$\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

Definizione 13.5 Uno stato di equilibrio si dice **esponenzialmente stabile** se esiste un valore $\lambda < 0$ tale che:

$$\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon) : \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Definizione 13.6 Un moto si dice **stabile** se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) : \|x - x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\phi(t, t_0, x, u) - \phi(t, t_0, x_0, u)\| < \varepsilon, \forall t \in [t_0, \infty],$$

Quindi, per piccole perturbazioni dello stato iniziale, a ogni istante t successivo all'istante t_0 l'evoluzione perturbata si mantiene vicina alla evoluzione non perturbata.

Nel seguito limiteremo la nostra analisi ai sistemi dinamici rappresentabili con un sistema di equazioni differenziali lineari e stazionarie del primo ordine con un ingresso ($q = 1$) e una uscita ($p = 1$).

13.2 Criterio di stabilità di Lyapunov

Sia dato un sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$. Supponiamo che esistano dei punti di equilibrio e, detto x_e uno di essi, esista un intorno compatto dello stesso, ad esempio una palla n -dimensionale di raggio r che indicheremo con $B(x_e, r)$, all'interno della quale si possa definire una funzione dello stato $V(x)$ (detta funzione di Lyapunov) definita positiva e dotata di derivata prima. Calcoliamo la derivata rispetto al tempo $\dot{V}(x)$: varrà il seguente teorema di Lyapunov:

Teorema 13.1 Se la derivata prima $\dot{V}(x)$ risulta definita negativa in $B(x_e, r)$ il punto x_e sarà localmente asintoticamente stabile, se la derivata prima risulta semi-definita negativa il punto x_e sarà localmente stabile.

Se poi la palla $B(x_e, r)$ può essere estesa a tutto lo spazio \mathbb{R}^n e la funzione $V(x)$ viene presa radialmente illimitata (che tende a infinito per punti che si allontanano da x_e), allora la tesi del teorema sulla stabilità varrà in senso globale.

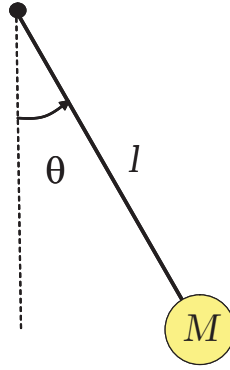


Figura 13.3: Pendolo

13.2.1 Esempio: stabilità con la funzione di Lyapunov del pendolo

Prendiamo il pendolo della figura 13.3, supponiamo che sia presente un attrito d al mozzo e scriviamo le relative equazioni dinamiche ponendo $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{Ml^2} x_2 \end{cases} \quad (13.1)$$

I punti di equilibrio sono ovviamente infiniti e pari a $x_{eq} = (k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Studiamo la stabilità di uno di quelli inferiori, ad esempio $x_{eq} = (0, 0)$. Una possibile funzione di Lyapunov potrebbe essere l'energia meccanica:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} M l^2 x_2^2 + M g l (1 - \cos x_1) \quad (13.2)$$

la cui derivata, dopo avere sostituito la seconda equazione del sistema (13.1), vale

$$\dot{V}(x_1, x_2) = M l^2 x_2 \dot{x}_2 + M g l \sin x_1 \dot{x}_1 = -d x_2^2$$

e questa è semi-definita negativa. Al massimo, con questa $V(x)$, possiamo dedurre che l'origine è localmente stabile.

Allora proviamo a scegliere un'altra candidata di Lyapunov; ad esempio, notiamo che se scegliamo

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} M l^2 x_2^2 + 2 M l g (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{l\sqrt{M}} x_1 + l\sqrt{M} x_2 \right)^2$$

questa è definita positiva e la sua derivata

$$\dot{V}(x_1, x_2) = M l^2 x_2 \dot{x}_2 + 2 M g l \sin x_1 \dot{x}_1 + \left(\frac{d}{l\sqrt{M}} x_1 + l\sqrt{M} x_2 \right) \left(\frac{d}{l\sqrt{M}} \dot{x}_1 + l\sqrt{M} \dot{x}_2 \right) = -d x_2^2 - \frac{dg}{l} x_1 \sin x_1$$

risulta definita negativa in un intorno dell'origine.

La conclusione che si può trarre è che il pendolo presenta un punto di equilibrio nell'origine che risulta localmente asintoticamente stabile.

13.3 Criterio di instabilità

Il pendolo ha anche un punto di equilibrio in $x_{eq} = (\pi, 0)$, con configurazione verticale verso l'alto. Tale punto d'equilibrio presenta delle caratteristiche di instabilità intuibili a livello fisico. L'esistenza di una funzione di Lyapunov, che è condizione necessaria e sufficiente per la stabilità, non è possibile escluderla a priori. Dunque risulta utile introdurre il **Teorema di Cetaev** che ci permette di verificare l'instabilità di un punto d'equilibrio:

Teorema 13.2 Dato un sistema $\dot{x} = f(x)$, sia x_e un punto d'equilibrio del sistema. Supponiamo che esista una funzione di Lyapunov $V(x) \in C^1$ tale che

1. L'insieme $P = \{x : V(x) < 0\}$ ha x_e come punto d'accumulazione

2. $\dot{V}(x)$ risulta definita positiva in $U = P \cap B(x_e, r)$, con $r > 0$

Allora x_e è un punto di equilibrio instabile per il sistema.

Ricordiamo che x è un punto d'accumulazione per un insieme S , se ogni intorno di x contiene punti di S distinti da x (non è un punto isolato).

13.4 Scelta della funzione di Lyapunov

Spesso trovare la funzione di Lyapunov per un sistema può risultare piuttosto difficile. L'approccio 'energy-like', non sempre è sufficiente. Proprio per questo, possono risultare utili alcuni teoremi che ci forniscono una metodologia sistematica per la ricerca della funzione di Lyapunov. Il primo che introduciamo è il **Metodo di Krasovski**:

Teorema 13.3 *Supponiamo che l'origine sia un punto d'equilibrio per un sistema $\dot{x} = f(x)$. Scegliamo come candidata di Lyapunov $V(x) = f^T(x)f(x)$, forma quadratica definita positiva in un intorno di x_e . Indichiamo con $J(x)$ lo Jacobiano della funzione $f(x)$ rispetto a x .*

1. se la matrice $F(x) = J(x) + J^T(x)$ è definita negativa in un intorno $B(x_e, r)$, allora x_e è localmente asintoticamente stabile.
2. se la matrice $F(x) = J(x) + J^T(x)$ è definita negativa in tutto \mathbb{R}^n , e $V(x) = f^T(x)f(x)$ è radialmente illimitata, allora x_e è globalmente asintoticamente stabile.

Un altro metodo interessante per la ricerca della funzione di Lyapunov è il **Metodo del Gradiente Variabile**. Se consideriamo una funzione di Lyapunov $V(x)$ per un punto di equilibrio x_e del sistema $\dot{x} = f(x)$, allora si avrà che:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx}\dot{x} = \nabla V^T(x)\dot{x}$$

dove $\nabla V(x)$ è il gradiente di V rispetto a x . Invece di scegliere la funzione V , il metodo propone di scegliere direttamente $\nabla V(x)$, in modo tale da rispettare le condizioni di V definita positiva, e \dot{V} definita negativa. In generale si pone:

$$\nabla V_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)x_j$$

La scelta degli a_{ij} deve verificare le seguenti 3 condizioni:

1. La prima derivante dal **Teorema di Schwartz** per cui:

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, \dots, n$$

2. \dot{V} deve essere definita negativa in un intorno $B(x_e, r)$

3. Infine V definito come:

$$V(x) = \int_0^x \frac{dV}{dx} dx = \int_0^x \nabla V^T(x) dx$$

deve essere definita positiva in $B(x_e, r)$

13.5 Criterio del massimo invariante: teorema di La Salle

Definizione 13.7 Un sottoinsieme $G \subset \mathbb{R}^n$ dello spazio di stato si dice **insieme invariante** per un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ se qualsiasi traiettoria $x(t)$ del sistema che parte da un punto $x_0 \in G$ rimane indefinitamente in G .

Esempi di insiemi invarianti sono un qualsiasi punto di equilibrio, un dominio di attrazione di un punto di equilibrio asintoticamente stabile, qualsiasi traiettoria di un sistema.

Teorema 13.4 Dato un sistema $\dot{x} = f(x)$, supponiamo che esista una funzione di Lyapunov definita positiva $V(x) \in C^1$ tale che

1. Esista una regione Ω_α di \mathbb{R}^n limitata definita da $V(x) < \alpha$ (con $\alpha > 0$)
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ in Ω_α

In questo caso, ogni traiettoria che parte da Ω_α tenderà all'insieme M , **massimo insieme invariante** contenuto in P , ovvero l'insieme dei punti di Ω_α dove $\dot{V}(x) = 0$.

Il massimo insieme invariante si intende come l'unione di tutti i sottoinsiemi invarianti di P .

Se poi la $V(x)$ risulta radialmente illimitata e la sua derivata semi-definita negativa in tutto \mathbb{R}^n allora ogni traiettoria tenderà all'insieme M , il massimo insieme invariante contenuto in P , l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n dove $\dot{V}(x) = 0$.

13.5.1 Esempio: stabilità di un circuito RLC nonlineare

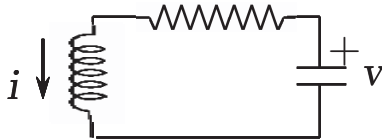


Figura 13.4: Circuito RLC

Sia dato il semplice circuito della figura 13.4 caratterizzato dall'avere una resistenza dal comportamento non lineare. Le equazioni che descrivono il suo comportamento siano:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = v - R_0 i - R_1 i^3 \\ C \frac{dv}{dt} = -i \end{cases} \quad (13.3)$$

I punti di equilibrio possono essere trovati annullando le due derivate e ottenendo

$$\begin{cases} 0 = v_{eq} - R_0 i_{eq} - R_1 i_{eq}^3 \\ 0 = -i_{eq} \end{cases}$$

ovvero, $v_{eq} = 0$ $i_{eq} = 0$. Una funzione di Lyapunov “energetica” può senza dubbio essere

$$E(i, v) = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C v^2.$$

Questa è definita positiva su tutto lo spazio (v, i) e la sua derivata prima vale

$$\dot{E}(i, v) = -R_0 i^2 - R_1 i^4,$$

che, annullandosi in tutti i punti dove $i = 0$ e $v \neq 0$ risulta semi-definita positiva. La conclusione che si può trarre, fino a questo punto, è che il sistema sia globalmente stabile ma non asintoticamente.

Vediamo di applicare, se possibile, il teorema di La Salle. Vediamo subito che esiste un α tale che

$$E(i, v) < \alpha.$$

In questa regione la derivata prima è semi-definita negativa e si annulla dove

$$-R_0 i^2 - R_1 i^4 = 0,$$

ovvero

$$i^2(R_0 + R_1 i^2) = 0$$

e quindi, considerando solo valori reali per la corrente, in $i = 0$ e v qualsiasi. Per ottenere l'insieme P poniamo $E(0, v) < \alpha$, ovvero

$$v^2 < \frac{2}{C}\alpha.$$

Vediamo adesso quali di questi punti fanno parte di M : notiamo che se si pone il sistema in un punto qualsiasi di P con $v \neq 0$, la dinamica dovuta alla prima equazione delle (13.3) porterà il sistema verso una regione dove $i \neq 0$, ovvero fuori da P . L'unico punto di P che si mantiene inalterato è $v = 0$ e $i = 0$, e questo coinciderà con M . Possiamo concludere, quindi, che il sistema possiede l'origine come punto di equilibrio localmente asintoticamente stabile.

13.5.2 Esempio: Applicazione del teorema di la Salle alla stabilità del pendolo

Riprendiamo il modello del pendolo dato nell'esempio del paragrafo 13.2.1 e utilizziamo la prima funzione di Lyapunov ovvero la (13.2), quella di derivazione energetica. la sua derivata, come detto, vale

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -dx_2^2$$

e questa è semi-definita negativa. A questo punto notiamo che esiste sicuramente un α tale che, per opportuni valori di x_1 e x_2 , risulta

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}Ml^2 x_2^2 + Mgl(1 - \cos x_1) < \alpha.$$

Nella regione che rimane definita, la derivata prima si annulla dove $x_2 = 0$ quindi, per ottenere la regione P , potremo considerare allora la seguente disuguaglianza:

$$V(x_1, 0) < \alpha$$

che porta alla

$$\cos x_1 > 1 - \frac{\alpha}{Mgl}. \quad (13.4)$$

Con α abbastanza piccolo, rimarranno definiti una serie di insiemi *disgiunti* tra i quali anche un intorno di $x_1 = 0$. Limitiamoci a questo che sarà il nostro insieme P . In questa regione l'unico punto che risulta invariante, ovvero dal quale il sistema non esce essendo nulle tutte le derivate, è dato da $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$. Pertanto, il sistema non può che tendere a questo punto il quale risulterà localmente asintoticamente stabile.

Notiamo infine che non esiste un α tale che in un intorno di $x_1 = \pi$ la relazione (13.4) sia soddisfatta e pertanto non potremo mai dimostrare che la posizione verticale superiore è un punto di stabilità asintotica.

13.6 Stabilità alla Lyapunov dei sistemi lineari

Cerchiamo adesso di applicare il criterio di stabilità di Lyapunov ai sistemi lineari del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (13.5)$$

Supponiamo di avere una funzione di Lyapunov di tipo quadratica scritta nella forma

$$V(x) = x^T P x$$

con P matrice reale definita positiva. La sua derivata lungo le traiettorie del sistema vale

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x.$$

dove Q è una matrice simmetrica definita come

$$PA + A^T P = -Q. \quad (13.6)$$

Per avere stabilità asintotica dell'origine dovrà risultare Q definita positiva. Questo ragionamento può essere rovesciato: supponiamo di partire con una matrice Q definita positiva e di chiederci se sia possibile trovare una matrice P che soddisfi l'equazione di Lyapunov (13.6). Vale il seguente teorema:

Teorema 13.5 *La matrice A del sistema (13.5) risulterà essere di Hurwitz (cioè $\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$ per tutti i λ_i autovalori di A), se e solo se per ogni data matrice Q simmetrica e definita positiva, esisterà una matrice P definita positiva che soddisfi l'equazione di Lyapunov (13.6).*

Questo teorema ci dice che se e solo se la matrice A è di Hurwitz allora il sistema (13.5) risulterà asintoticamente stabile, ovvero con tutte le dinamiche convergenti a zero.

13.7 Stabilità del sistema linearizzato

Una analisi alternativa della stabilità asintotica di un punto di equilibrio di un sistema non lineare può essere tentata considerando la linearizzazione di questo nell'intorno del punto stesso. Si tratta di sostituire all'equazione

$$\dot{x} = f(x) \quad (13.7)$$

la sua espansione in serie di Taylor nell'intorno di x_e arrestata al primo ordine sarà:

$$\dot{\Delta x} = J(x_e) \Delta x \quad (13.8)$$

dove $J(x_e)$ è lo Jacobiano della funzione $f(x)$ rispetto a x . Per il sistema linearizzato vale il seguente risultato:

Teorema 13.6 *Dato il sistema linearizzato (13.8) relativo a un punto di equilibrio x_e del sistema (13.7), si ha*

1. *Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile (tutti gli autovalori hanno parte reale negativa), x_e è un punto di equilibrio localmente asintoticamente stabile per il sistema non lineare;*
2. *Se il sistema linearizzato è instabile per il fatto di avere almeno un autovalore a parte reale positiva, x_e è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.*

Se il sistema linearizzato possiede autovalori, eventualmente anche con molteplicità maggiore di 1, sull'asse immaginario senza averne a parte reale positiva non si può decidere nulla in quanto rimangono decisivi i termini dell'espansione superiore al primo.

13.7.1 Esempio: linearizzazione del pendolo

Riprendiamo il modello del pendolo della sezione 13.2.1. La sua linearizzazione nell'intorno dell'origine vale

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \Delta x_1 - \frac{k}{ml^2} \Delta x_2 \end{cases}$$

e lo Jacobiano si può scrivere come

$$J(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono la soluzione dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \frac{k}{ml^2}\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

che, naturalmente, ha due soluzioni a parte reale negativa.

Ne deduciamo, dunque, che il sistema lineare è asintoticamente stabile e che quello non lineare possiede un punto di equilibrio in $x_e = (0, 0)$ localmente asintoticamente stabile.

Capitolo 14

Feedback Linearizzazione

14.1 Introduzione alla feedback linearizzazione

La feedback linearizzazione è una tecnica di approccio ai sistemi non lineari la cui idea di base è quella di trasformare algebricamente il modello del sistema originario in un modello equivalente più semplice, per cui sia possibile utilizzare le classiche tecniche di controllo lineari. Questa tecnica differisce completamente dall'approccio classico ai sistemi non lineari: infatti anziché ricondurre il sistema ad una sua approssimazione lineare (nell'intorno di un certo stato di interesse), l'obiettivo è quello di eliminare le dinamiche non lineari attraverso una trasformazione di stato ed un ingresso di controllo in retroazione.

Il termine *feedback linearizzazione* è un termine generico che identifica le tecniche di controllo in cui l'ingresso viene utilizzato per linearizzare alcune o tutte le equazioni differenziali di un sistema. Possiamo tuttavia distinguere due differenti casi di feedback linearizzazione: Input/Output linearizzazione e Input/Stato linearizzazione. Per capire la differenza tra questi due approcci è necessario introdurre un concetto preliminare: il *grado relativo* r . Sia $y=h(x)$ l'uscita del nostro sistema dinamico: l'indice r viene definito come l'ordine della prima derivata di y in cui compare l'ingresso u con coefficiente non nullo.

La Input/Output linearizzazione è una tecnica per cui l'uscita y viene differenziata finché non compare l'ingresso u con coefficiente non nullo (sia l'ordine di tale derivata r). L'ingresso u viene quindi scelto per ottenere una funzione di trasferimento tra l'*ingresso sintetico* v e y del tipo: $\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{s^r}$

Se r coincide con l'ordine del sistema n , allora l' i/o linearizzazione coincide con la i/s linearizzazione.

La Input/State linearizzazione è una tecnica in cui viene preliminarmente scelta una nuova uscita $y_{new} = h_{new}(x)$ in modo tale che il grado relativo r del sistema rispetto alla nuova uscita y_{new} sia proprio pari all'ordine del sistema n . A questo punto il procedimento è lo stesso di quello utilizzato nella i/o linearizzazione. La i/s linearizzazione viene utilizzata per porre rimedio al problema delle dinamiche interne che si riscontra con la i/o linearizzazione: in un sistema di ordine n con grado relativo r ($r < n$) si avranno $(n-r)$ dinamiche interne non osservabili (e questo è certamente un problema che vorremmo evitare).

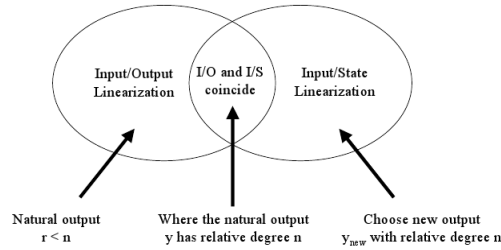


Fig. 1.1: Tipi di feedback linearizzazione

La feedback linearizzazione si basa però su alcuni concetti fondamentali che sono la trasformazione di coordinate, la derivata di Lie, il grado relativo e le dinamiche zero.

14.2 Trasformazione di Coordinate

Consideriamo una funzione Φ in n variabili invertibile del tipo:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

differenziabile continuamente per ogni ordine di derivata parziale e tale che la sua inversa sia ancora derivabile, si definisce trasformata di coordinate di un sistema non lineare quella la sua applicazione: $z = \Phi(x)$

Una trasformazione fatta in tal modo viene anche chiamata diffeomorfismo globale su tutto lo spazio di stato.

Ad esempio supponiamo che una funzione f del tipo:

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^3 + x_2^3 \end{bmatrix}$$

allora data Φ nel seguente modo $z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1} \\ \sqrt{x_2} \end{bmatrix}$ è invertibile per ogni $x_1 \geq 0$ e per ogni $x_2 \geq 0$, si avrà :

$x = \Phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{bmatrix}$ che porterà il nostro sistema nelle nuove coordinate al tipo:

$$f(z) = f(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1^4 + z_2^4 \\ z_1^6 + z_2^6 \end{bmatrix}$$

14.3 Derivata di Lie

La derivata di Lie gioca un ruolo molto importante nell' approccio geometrico dell' analisi e controllo di sistemi non lineari. Se consideriamo un dominio aperto $U = \text{dom}(f) = \text{dom}(\lambda) \subseteq R^n$ un vettore $\lambda \in R^n \rightarrow R^n$ definito in U e una funzione $f \in R^n \rightarrow R^n$ non lineare e continuamente differenziabile in U allora possiamo definire derivata di f lungo la direzione λ o più semplicemente derivata di Lie:

$$L_\lambda f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] \lambda(x) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \right] \lambda_i(x)$$

14.3.1 Calcolo di una derivata di Lie

Consideriamo lo spazio sia definito unidimensionale e supponiamo quindi che la nostra funzione f e la direzione λ , data, siano:

$$f(x) = x^2$$

$$\lambda(x) = \sqrt{x}$$

allora, dalla definizione, è facile verificare che la derivata di Lie è:

$$L_\lambda f(x) = 2x\sqrt{x}$$

Nel caso bidimensionale invece possiamo vedere che: siano date f e λ come segue:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2$$

$$\lambda(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^3 + x_2^3 \end{bmatrix}$$

allora la derivata di Lie sarà facilmente calcolabile moltiplicando la derivata semplice di f per la sola direzione x_1 definita dal vettore λ .

$$L_\lambda f(x_1, x_2) = 2x(x_1^2 + x_2^2)$$

E' importante notare che applicando la derivata di Lie, ad una funzione f definita su uno spazio n-dimensionale, il risultato sarà sempre e comunque definito in uno spazio unidimensionale; questo significa che:

$$L_\lambda f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Infine si può estendere la definizione di derivata K-esima di Lie come concetto ricorsivo ovvero:

$$L_\lambda^k f(x) = \left[\frac{\partial(L_\lambda^{k-1} f(x))}{\partial x} \right] \lambda(x)$$

14.4 Grado Relativo

Si definisce grado relativo r in $x(0)$ di un sistema non lineare SISO (single-input single-output) la condizione definita non-banale :

$$L_g L_f^K h(x) = 0 \quad \forall x \in \text{ad un di } x_0 \quad e \quad \forall K < r - 1$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$$

ove i termini indicati con la notazione L_g sono i coefficienti di quella che viene definita serie di Fliess .

14.5 Modello di una Dinamica Zero

Consideriamo un sistema non lineare con vincolo sull'uscita $y = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ 0 = h(x) \end{cases} \quad (14.1)$$

Tale sistema viene definito come dinamica vincolata a uscita nulla o più semplicemente Dinamica Zero.

Il problema dell' azzeramento dell' uscita corrisponde ad un problema nel quale dobbiamo trovare (se esiste) uno stato iniziale x^* e una funzione di ingresso, definita $\forall t$ in un intorno di $t = 0$, tale che l' uscita $y(t) = 0 \forall t$ in un intorno di $t = 0$.

Prendiamo in considerazione il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (14.2)$$

alla quale applichiamo una opportuna trasformazione di coordinate con

$$\begin{aligned} z = \Phi_i(x) &= L_f^{i-1}h(x) \quad \text{con } 1 \leq i \leq r \\ L_g\Phi_i(x) &= 0 \end{aligned}$$

e verificando che Φ sia invertibile ovvero sia valida la seguente relazione $x = \Phi^{-1}(z)$ possiamo rappresentare il nuovo sistema non lineare come:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 \\ \dot{z}_2 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \end{aligned} \quad \text{dove con } r \text{ indichiamo il grado relativo}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \eta &= q(\xi, \eta) \end{aligned}$$

Effettuiamo le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ (poiché il sistema è a singolo ingresso)} \\ p &= 1 \text{ (poiché il sistema è a singola uscita)} \\ \xi &= [z_1, \dots, z_r] \\ \eta &= [z_{r+1}, \dots, z_n] \\ a(\xi, \eta) &= L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \\ b(\xi, \eta) &= L_f^r h(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \\ \Phi^{-1}(\xi, \eta) &= \Phi^{-1}(z_n) = x \end{aligned}$$

e consideriamo l'equazione differenziale, $\eta(t) = q(0, \eta(t))$, che descrive il comportamento interno del sistema quando forziamo l'uscita a zero, con condizioni al contorno con stato iniziale del sistema posto a 0:

$$\begin{aligned} \xi(0) &= 0 \\ \eta(0) &= \eta^0 \end{aligned}$$

Ricaviamo la funzione di ingresso $\dot{z}_1 = b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u$ e sapendo dalle condizioni al contorno che:

$$\begin{aligned} \dot{z}_r &= 0 \\ 0 &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \end{aligned}$$

allora è noto anche come dobbiamo inizializzare l'ingresso: $u = -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\xi, \eta)}$

14.6 Input/Output linearizzazione per sistemi SISO

Consideriamo un semplice sistema singolo ingresso singola uscita:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (14.3)$$

e cerchiamo di capire come si applica la tecnica di input/output linearizzazione.

Consideriamo, dunque, la derivata prima dell'uscita y rispetto al tempo t , si avrà :

$$\dot{y} = \dot{h}(x) = \frac{\delta h}{\delta t} = \frac{\delta h}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\delta h}{\delta x} \dot{x}$$

da cui

$$\dot{y} = \frac{\delta h}{\delta x} f(x) + \frac{\delta h}{\delta x} g(x)u = L_f^1(h) + L_g(h)u$$

Osservazione: la notazione $L_f^i h$ indica la derivata di Lie di ordine i della funzione $h : R^n \rightarrow R$ rispetto al campo vettoriale $f : R^n \rightarrow R^n$

Dall'equazione della derivata dell'uscita y osserviamo che se $L_g(h)$ è nulla, allora l'ingresso u non compare nell'uscita dello spazio di stato in cui ci troviamo: questo significa che non possiamo agire con un ingresso di controllo su tale uscita ed è quindi una situazione che non può soddisfarci.

Seguendo il metodo continuiamo dunque a differenziare l'uscita y finchè il coefficiente dell'ingresso u sia non nullo: otteniamo la sequenza di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} y &= h(x) = L_f^0(h) \\ \dot{y} &= L_f^1(h) + L_g(h)u = L_f^1(h) \quad \text{con} \quad L_g(h) = 0 \\ \ddot{y} &= L_f^2(h) + L_g(L_f^1(h))u = L_f^2(h) \quad \text{con} \quad L_g(L_f^1(h)) = 0 \\ &\dots \\ y^{(r)} &= L_f^r(h) + L_g(L_f^{r-1}(h))u \quad \text{con} \quad L_g(L_f^{r-1}(h)) \neq 0 \end{aligned} \quad (14.4)$$

Condizione Necessaria e Sufficiente per r

L'indice r (che individua l'ordine della derivata r -esima di y rispetto al tempo) rappresenta il *grado relativo* di $y = h(x)$ se e solo se $L_g(L_f^{r-1}h) \neq 0$. In altre parole, r è il più piccolo intero per il quale il coefficiente di u , cioè $L_g(L_f^{r-1}h)$, è non nullo nello spazio in cui vogliamo controllare il sistema. Siano $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ rispettivamente:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= L_f^r(h) \\ \beta(x) &= L_g(L_f^{r-1}(h)) \end{aligned} \quad (14.5)$$

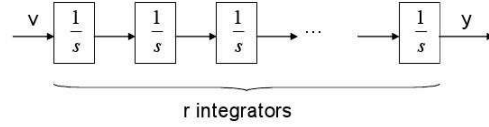
possiamo dunque riscrivere la derivata di ordine r dell'uscita y come:

$$y^{(r)} = L_f^r(h) + L_g(L_f^{r-1}(h))u = \alpha(x) + \beta(x)u \quad \text{con} \quad \beta(x) \neq 0$$

A questo punto scegliamo di costruire un così detto “synthetic input” v del tipo:

$$v = y^{(r)} = \alpha(x) + \beta(x)u$$

E' evidente la relazione che intercorre tra l'“ingresso sintetico” v e l'uscita del sistema originario y : si tratta di un sistema dinamico lineare costituito da r integratori in cascata

Fig. 1.2: Legame tra v e y : r integratori

A questo punto è possibile progettare un controllore per il nostro sistema non lineare attraverso una qualsiasi tecnica di controllo lineare. Abbiamo infatti $v = \alpha(x) + \beta(x)u$, da cui possiamo facilmente ricavare l'ingresso di controllo u come:

$$u = \frac{1}{\beta(x)}(-\alpha(x) + v)$$

e costruire l'ingresso sintetico v mediante una qualunque tecnica lineare, ad esempio:

$$v = -\sum_{k=0}^{r-1} c_k L_f^k(h) = -c_0 y - c_1 \dot{y} - c_2 \ddot{y} - \dots$$

e poichè $v = y^{(r)}$, si ottiene una dinamica classica del tipo: $y^{(r)} + c_{r-1}y^{(r-1)} + \dots + c_0 y = 0$, per cui possiamo posizionare i poli a ciclo chiuso del sistema "linearizzato" dove vogliamo attraverso una adeguata scelta dei coefficienti c_k .

Quali sono i principali problemi per tale approccio?

1. Si richiede una conoscenza perfetta del sistema, ossia un modello estremamente fedele delle dinamiche e dei parametri. E' evidente che una condizione così stringente impone seri problemi di robustezza al metodo: cosa accade infatti se ad esempio variano alcuni parametri del sistema? Quanto sarà efficiente l'ingresso u progettato se il modello del sistema contiene una o più imprecisioni, o si dimostra troppo semplice e/o incompleto?
2. Osserviamo che se l'obiettivo del controllo è quello di portare l'uscita y su di un determinato valore (cioè vogliamo $y \rightarrow y_d$) possiamo sintetizzare v come: $v = -c_0(y - y_d) - \dots - c_{r-1}(y^{(r-1)} - y_d^{(r-1)})$. Cosa succede però se ci troviamo in un caso in cui $r < n$? Teniamo a mente che nei casi reali è possibile che sia anche $r \ll n$, ad esempio $r=2$ e $n=20$... Ad ogni modo in casi come questi si ha nel sistema la presenza di $(n-r)$ stati di cui non conosco la dinamica: si parla in questo caso di problema delle dinamiche interne, ossia di dinamiche del sistema che non sono osservabili né tanto meno dipendono dall'ingresso u .

14.6.1 Dinamiche interne

Approfondiamo il problema delle dinamiche interne nel caso di input/output linearizzazione per sistemi siso. Come abbiamo appena visto, nel caso in cui $r < n$ sono presenti nel sistema dinamiche interne non osservabili: cosa possiamo dire al riguardo? Definiamo il vettore z come:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_r \end{pmatrix} \quad \text{in cui risulta :} \quad \begin{cases} z_1 = y = L_f^0(h) \\ z_2 = \dot{y} = L_f^1(h) \\ \dots \\ z_r = y^{(r-1)} = L_f^{r-1}(h) \end{cases}.$$

possiamo quindi scrivere un sistema di equazioni differenziali in z del tipo:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bv \\ y = Cz \end{cases}$$

con le matrici A , B e C nella forma standard:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 0)$$

Definiamo a questo punto il vettore di stato x come:

$$x = \begin{pmatrix} z \\ \xi \end{pmatrix}$$

in cui z è un vettore di dimensioni $r \times 1$ ($z \in R^r$) e ξ è un vettore di dimensioni $(n-r) \times 1$ ($\xi \in R^{n-r}$)

Vista la struttura delle matrici A , B e C in forma normale, è garantita l'esistenza di una qualche ξ per cui valga:

$$\dot{\xi} = \Psi(z, \xi)$$

Possiamo quindi ridefinire il nostro sistema come:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bv \\ \dot{\xi} = \Psi(z, \xi) \end{cases}$$

in cui le equazioni in ξ rappresentano le $(n-r)$ dinamiche interne.

Facciamo bene attenzione a queste equazioni: Ψ è funzione di z e di ξ , ma non dell'ingresso u . Osserviamo inoltre che z non dipende in alcun modo da ξ : questo significa che le dinamiche interne non sono osservabili, e rappresentano quindi un problema difficile da analizzare.

Ci chiediamo a questo punto in che modo sia possibile analizzare queste dinamiche interne. Poiché il sistema è piuttosto complicato da studiare, spesso volte ci accontentiamo di analizzare le così dette "zero dynamics":

$$\dot{\xi} = \Psi(0, \xi)$$

o, ancora meglio, le "zero dynamics linearizzate":

$$J = \left. \frac{\delta \Psi}{\delta \xi} \right|_0$$

Costruita la matrice J , ne andiamo a studiare gli autovalori in zero: se questi si "comportano bene", ossia se sono tutti a parte reale negativa, è possibile che anche le dinamiche non lineari siano stabili. Se però gli

autovalori sono a parte reale positiva, allora potrebbe non essere possibile realizzare un controllo accettabile per il sistema originario non lineare. Se $\dot{\xi} = \Psi(0, \xi)$ è instabile, allora il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

si dice “sistema non lineare a *fase non minima*”.

14.6.2 Procedura formale per l’i/o linearizzazione

Ricapitoliamo dunque quella che è la procedura formale da seguire nel caso in cui si voglia applicare la tecnica della input/output linearizzazione per un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

1. Derivare l’uscita del sistema y fino a che non compare nell’equazione della derivata stessa l’ingresso del sistema u con coefficiente non nullo: sia r l’ordine di tale derivata.

$$\begin{cases} y \\ \dot{y} \\ \dots \\ y^{(r)} = \alpha(x) + \beta(x)u \end{cases}$$

dopo r derivate compare u , con coefficiente $\beta(x)$ non nullo.

2. Scegliere un ingresso di controllo u in maniera tale che risulti $v = y^{(r)}$, essendo v il così detto “ingresso sintetico”. Dunque risulta:

$$u = \frac{1}{\beta(x)}(-\alpha(x) + v)$$

3. A questo punto il sistema ha la forma: $\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{s^r}$
cioè una cascata di r integratori (quindi un sistema lineare) per cui possiamo progettare una legge di controllo lineare con una qualunque tecnica.
4. Controllare le dinamiche interne, in particolare verificando che le “zero dynamics linearizzate” siano stabili.

14.6.3 Un semplice esempio di i/o linearizzazione

Consideriamo un semplice sistema non lineare cui si voglia applicare una tecnica di feedback linearizzazione, o meglio la input/output linearizzazione. In particolare vogliamo progettare un controllore i/o linearizzante in maniera tale che l’uscita y tenda a zero ($y \rightarrow 0$) per il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^3 + u \\ \dot{x}_2 = -u \\ y = h(x) = x_1 \end{cases}$$

Seguiamo passo per passo la procedura formale appena descritta.

1. Deriviamo y finché non compare u

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + x_1^3 + u$$

u compare con coefficiente non nullo già alla derivata prima: ci fermiamo qui col calcolo delle derivate di y . Risulta $r = 1$, e poiché l'ordine del sistema è $n = 2$ già sappiamo che ci sarà una dinamica interna non direttamente osservabile

2. Scegliamo l'ingresso di controllo u in maniera che risulti $v = y^{(r)}$, cioè $v = \dot{y} = x_2 + x_1^3 + u$ risulta quindi:

$$u = -x_2 - x_1^3 + v$$

in questo caso dunque risultano: $\alpha(x) = x_2 + x_1^3$ e $\beta(x) = 1$

3. Scegliamo una legge di controllo lineare per il sistema di integratori in cascata. Ad esempio realizziamo un controllore proporzionale:

$$v = -K_p(y - y_{des}) = -K_p y \quad \text{essendo} \quad y_{des} = 0$$

4. Controlliamo le dinamiche interne. Andiamo quindi ad analizzare il sistema a ciclo chiuso:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^3 + u = x_2 + x_1^3 - x_2 - x_1^3 + v = v = -K_p x_1 \\ \dot{x}_2 = -u = +x_2 + x_1^3 - v = x_1^3 + K_p x_1 + x_2 \end{cases}$$

se $y \rightarrow 0$ come desiderato, cioè $x_1 \rightarrow 0$ il sistema residuo è:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

per cui, in particolare, la dinamica interna x_2 risulta *instabile*!

Cosa si può fare in casi del genere, in cui cioè ci accorgiamo della presenza di dinamiche interne instabili?

Vi sono 2 soluzioni possibili:

1. Provare a ridefinire l'uscita y come funzione sia di x_1 che di x_2 : $y = h(x_1, x_2)$
2. Provare a "linearizzare" l'intero stato del sistema attraverso l'approccio di feedback linearizzazione detto *input/stato linearizzazione*.

14.7 Input/Stato linearizzazione

In questo approccio l'idea di fondo è quella di trovare una nuova y , y_{new} , per la quale il grado relativo r sia pari ad n . Ossia cerchiamo una funzione $y_{new} = h_{new}(x)$ per cui applicando la tecnica di input/output linearizzazione risulti $(r - n) = 0$, cioè non vi siano dinamiche interne non osservabili. Ciò che differenzia nella pratica dunque questo approccio da quello appena descritto della semplice i/o linearizzazione è solo la fase iniziale: una volta definita la giusta y_{new} , la input/state linearizzazione segue esattamente gli stessi passi della input/output linearizzazione.

Partiamo dal solito sistema non lineare in forma generica:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

La prima domanda fondamentale che ci poniamo è se esista una qualche trasformazione $\Phi(x)$ per cui il sistema trasformato risulti lineare. Sia z il vettore dello stato trasformato:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Dunque, cerchiamo una $\Phi(x)$ per cui risulti:

1. $\dot{z} = Az + Bv$
2. $v \in R$, essendo $v=v(x,u)$ l'ingresso sintetico
3. il sistema risulti nella forma standard di controllabilità (Brunowski), ossia A e B sono una matrice $n \times n$ e un vettore $n \times 1$ definiti come segue:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quella che vogliamo nella pratica è una corrispondenza biunivoca (1 ad 1) tra z ed x :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La seconda domanda che dobbiamo porci è se esista un'uscita $y = z_1(x)$ che abbia grado relativo pari ad n . Questo significa che deve risultare: $L_g(L_f^{n-1}(z_1))$ primo coefficiente di u diverso da zero. Per capire meglio:

$$\dot{z}_1 = L_f^1(h) + L_g(h)u = L_f^1(h) \quad \text{con } L_g(h) = 0$$

Sia: $z_2 \equiv L_f^1(z_1)$, allora deve essere: $L_g(L_f^1(z_1)) = 0$

Risulta dunque:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_n &= L_f^n(z_1) + L_g(L_f^{n-1}(z_1))u \equiv v \end{aligned} \tag{14.6}$$

Vogliamo sapere se esiste una $z_1(x)$ per cui valga:

$$\begin{aligned} L_g(L_f^K(h)) &= 0 \quad \text{per } K = 1, 2, \dots, (n-2) \\ L_g(L_f^{n-1}(h)) &\neq 0 \end{aligned} \tag{14.7}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^0(z_1) \\ L_f^1(z_1) \\ \dots \\ L_f^{n-1}(z_1) \end{pmatrix}$$

C'è un test per capire se esiste una tale z_1 ?

Ci vengono in soccorso l'*Identità di Jacobi* ed il *Teorema di Frobenius*.

E' necessario però dare prima una qualche definizione dell'algebra di Lie.

Un'algebra di Lie è una struttura costituita da uno spazio vettoriale g su un certo campo F (per esempio i numeri reali, i numeri complessi, o un campo finito) e da un operatore binario $[\hat{A}\cdot, \hat{A}\cdot] : g \times g \rightarrow g$, detto prodotto di Lie, che soddisfa le seguenti proprietà :

1. è bilineare, cioè $[a x + b y, z] = a [x, z] + b [y, z]$ e $[z, a x + b y] = a [z, x] + b [z, y]$ per tutti gli a, b in F e tutti gli x, y, z in g
2. soddisfa l'identità di Jacobi, cioè $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$ per tutti gli x, y, z in g
3. è nilpotente, cioè $[x, x] = 0$ per tutti gli x in g

Identità di Jacobi

L'identità di Jacobi è la seguente:

$$L_{ad_f}g(h) = L_f(L_g(h)) - L_g(L_f(h))$$

in cui vale:

$$ad_f^i g \equiv [f, ad_f^{i-1} g] \quad e \quad ad_f g \equiv [f, g] \equiv \frac{\delta g}{\delta x} f - \frac{\delta f}{\delta x} g \quad (14.8)$$

L'utilizzo di questa relazione ci permette di mantenere tutte le condizioni in z_1 in equazioni del primo ordine, ovvero possiamo scrivere l'equivalenza:

$$L_g(L_f^k(z_1)) = 0 \quad per \quad k \in [0, (n-2)] \quad \Leftrightarrow \quad L_{ad_f^k}g(z_1) = 0 \quad per \quad k \in [0, (n-2)]$$

ed in particolare vediamo che vale: $L_{ad_f^k}g(z_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla z_1 [g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2}g] = 0$

Teorema di Frobenius

Il teorema di Frobenius ci fornisce una condizione sufficiente e necessaria affinché l'insieme di equazioni differenziali $L_{ad_f^k}g(z_1) = 0 \quad per \quad k \in [0, (n-2)]$ abbia soluzione. In particolare, esiste una soluzione per questo insieme di equazioni se e solo se:

1. $[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1}g]$ ha rango n
2. $[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2}g]$ è involutiva

Per ricapitolare, le tecniche di feedback linearizzazione si riducono al problema di individuare una trasformazione di coordinate $z = T(x)$ che sia un *diffeomorfismo* e che porti il sistema $\dot{y} = f(x) + g(x)u$ nella così detta forma standard.

Definizione: Un *diffeomorfismo* è una funzione tra due varietà differenziabili con la proprietà di essere differenziabile, invertibile e di avere l'inversa differenziabile.

14.8 Feedback linearizzazione per sistemi MIMO non lineari

Analizziamo ora brevemente il caso di sistemi con più ingressi e più uscite. In particolare prendiamo in esame un sistema “quadrato”, ossia un sistema per cui si abbia: numero degli input = numero degli output = m . Il sistema studiato è quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i u_i \\ y = [h_1 \dots h_m]^T \end{cases} \quad (14.9)$$

per cui la derivata della k -esima uscita risulta: $\dot{y}_k = L_f(h_k) + \sum_{i=1}^m L_{g_i}(h_k)u_i$ ed il grado relativo r è definito per ogni uscita y_k .

Ipotizziamo ora che per qualche i valga: $L_{g_i}(L_f^{r_k-1}(h_k)) \neq 0$ possiamo definire la *matrice di sdoppiamento* J come:

$$J(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1}(L_f^{r_1-1}(h_1)) & \dots & L_{g_m}(L_f^{r_1-1}(h_1)) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1}(L_f^{r_m-1}(h_m)) & \dots & L_{g_m}(L_f^{r_m-1}(h_m)) \end{bmatrix}$$

e assumiamo che tale matrice sia non singolare. Definiamo inoltre i vettore $n \times 1$ $y^{(r)}$ e $l(x)$ come:

$$y^{(r)} = \begin{pmatrix} \frac{d^{r_1} y_1}{dt^{r_1}} \\ \dots \\ \frac{d^{r_m} y_m}{dt^{r_m}} \end{pmatrix} \quad e \quad l(x) = \begin{pmatrix} L_f^{r_1}(h_1) \\ \dots \\ L_f^{r_m}(h_m) \end{pmatrix}$$

e possiamo scrivere: $y^{(r)} = l(x) + J(x)u = v$

Otteniamo in poche parole un insieme di equazioni indipendenti per il nostro ingresso sintetico v del tipo:

$$\begin{cases} \frac{d^{r_1} y_1}{dt^{r_1}} = v_1 \\ \frac{d^{r_2} y_2}{dt^{r_2}} = v_2 \\ \dots \\ \frac{d^{r_m} y_m}{dt^{r_m}} = v_m \end{cases} \quad (14.10)$$

che ci permette di progettare l'ingresso sintetico v con una qualunque tecnica lineare, e quindi costruire l'ingresso di controllo del sistema u come:

$$u = J^{-1}(v - l)$$

Anche nel caso di più ingressi e più uscite i problemi dell'approccio mediante feedback linearizzazione rimangono la necessità di un modello molto accurato (possibili problemi di robustezza) ed il problema della possibile presenza di dinamiche interne non osservabili nè tantomeno controllabili (possibili problemi di stabilità).

14.9 Conclusioni

Ricapitolando, il metodo della feedback linearizzazione si porge la seguente domanda: è possibile in generale cancellare le non linearità di un sistema attraverso la retroazione? Esiste una *proprietà strutturale* dei sistemi che garantisce tale possibilità?

Con questo tipo di approccio la legge di controllo cercata ha solitamente due componenti differenti: una che ha

il compito di linearizzare esattamente (mediante la cancellazione di tutte le componenti non lineari) la dinamica a ciclo chiuso, l'altra che serve per stabilizzare tale dinamica (ora lineare).

Quando l'equazione dello stato ha la forma:

$$\dot{x} = Ax + B\beta^{-1}(x)(u - \alpha(x))$$

con β^{-1} matrice non singolare in un dominio che contiene l'origine, allora è certamente sempre possibile scegliere

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

per ottenere un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

che, se la coppia (A,B) è stabilizzabile, può essere facilmente stabilizzato mediante la scelta di un ingresso sintetico v pari a:

$$v = Kx$$

con cui la retroazione complessiva diventa

$$u = \alpha(x) + \beta(x)Kx$$

che *non è lineare!*

Quando invece l'equazione dello stato non ha la forma:

$$\dot{x} = Ax + B\beta^{-1}(x)(u - \alpha(x))$$

il procedimento prevede di cercare una trasformazione di coordinate, e più precisamente un diffeomorfismo, $z = T(x)$, che possa portare il sistema nella forma desiderata.

Generalizzando possiamo dunque enunciare la seguente proprietà : un sistema non lineare $\dot{x} = f(x, u)$ si dice *linearizzabile ingresso/stato*, se esiste un diffeomorfismo $z=T(x)$, definito su un dominio D_x che contenga l'origine, che metta il sistema nella forma:

$$\dot{x} = Ax + B\beta^{-1}(x)(u - \alpha(x))$$

con la matrice β^{-1} non singolare nel dominio D_x .

I sistemi non lineari possono essere controllati quindi mediante una opportuna trasformazione di coordinate ed una reazione statica dallo stato. E' possibile controllare tali sistemi anche nel caso il problema sia formulato a livello dell'uscita mediante trasformazione di coordinate e reazione statica e/o dinamica dallo stato: si parla in questo caso di input/output linearizzazione.

I limiti di tale approccio sono i seguenti:

1. Si necessita di una ottima conoscenza del modello del sistema per poterne cancellare le non linearità
2. Eventuali controllori progettati con questo metodo possono mostrare gravi limiti di robustezza a fronte di variazioni parametriche del sistema
3. A volte è possibile che vengano cancellate dinamiche non lineari del sistema che sarebbero però per loro natura benefiche per la stabilizzazione del sistema stesso.

Parte IV

Modelli, esempi di sistemi di controllo, esercizi

Capitolo 15

Esempi di sistemi di controllo

15.1 Esempio: levitazione magnetica

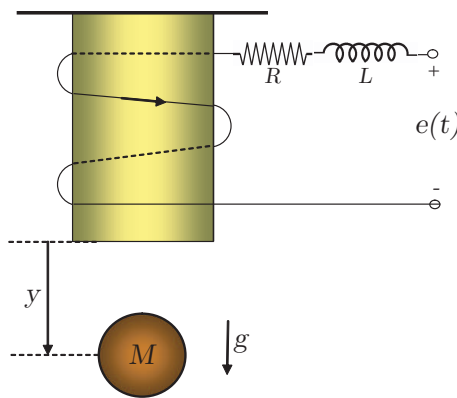


Figura 15.1: Il sistema a levitazione magnetica

Consideriamo il modello del levitatore magnetico della figura 15.1 in cui una sfera metallica di massa M è tenuta sospesa grazie all'azione di un'elettrocalamita. I parametri elettrici dell'avvolgimento siano la resistenza R e l'induttanza L e denominiamo con $e(t)$ la tensione applicata a questo circuito. La forza esercitata sulla sfera, diretta verso l'alto con un'opportuna scelta del segno della tensione applicata, sarà proporzionale al quadrato della corrente $i(t)$ che scorre nel circuito, inversamente proporzionale alla distanza della sfera dall'elettrocalamita e pari a

$$-k \frac{i^2(t)}{y(t)}$$

con k opportuna costante dipendente dai materiali, dalla geometria e dal numero di spire dell'avvolgimento.

Detta y la distanza della sfera, e supponendo la stessa sottoposta anche all'azione della gravità, potremo scrivere due equazioni, una meccanica ed una elettrica, in questo modo:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= Mg - k \frac{i^2(t)}{y(t)} \\ e(t) &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \end{aligned} .$$

A questo punto, ponendo $x_1 = y(t)$, $x_2 = \dot{y}(t)$ e $x_3 = i(t)$, potremo impostare un modello nello spazio di stato con tre equazioni nella seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \frac{k}{M} \frac{x_3^2}{x_1} \\ \dot{x}_3 = -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} e(t) \end{cases} \quad (15.1)$$

Notiamo che il modello non è lineare.

Supponiamo adesso di voler determinare un feedback in grado di stabilizzare il sistema intorno ad una posizione $x_{1,eq} = y_0$ assegnata. Volendo tentare una sintesi nel lineare proviamo a linearizzare il sistema nell'intorno di questo punto. Determiniamo, allora, il punto di equilibrio annullando tutte le derivate:

$$\begin{cases} 0 = x_{2,eq} \\ 0 = g - \frac{k}{M} \frac{x_{3,eq}^2}{x_{1,eq}} \\ 0 = -\frac{R}{L} x_{3,eq} + \frac{1}{L} e_{eq} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x_{1,eq} = y_0 \\ x_{2,eq} = 0 \\ x_{3,eq} = \sqrt{\frac{gMy_0}{k}} \\ e_{eq} = Rx_{3,eq} \end{cases}.$$

Notiamo adesso che la prima e la terza equazione della (15.1) sono già lineari e che dobbiamo espandere con Taylor, nell'intorno del punto di equilibrio, solo la seconda:

$$g - \frac{k}{M} \frac{x_3^2}{x_1} = f(x_1, x_3) = f(x_{1,eq}, x_{3,eq}) + f_{x_1}(x_1, x_3)|_{eq} \Delta x_1 + f_{x_3}(x_1, x_3)|_{eq} \Delta x_3 = \frac{k}{M} \frac{x_{3,eq}^2}{x_{1,eq}^2} \Delta x_1 - 2 \frac{k}{M} \frac{x_{3,eq}}{x_{1,eq}} \Delta x_1.$$

Il sistema linearizzato risultante avrà, perciò, le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & 0 & -2\sqrt{\frac{kg}{My_0}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di questo sistema sono

$$\lambda_1 = -\frac{R}{L}, \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{g}{y_0}}$$

per cui abbiamo due dinamiche stabili ed una instabile. Il sistema è, nel suo complesso, instabile.

Verifichiamo ora la controllabilità e l'osservabilità:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{L} \sqrt{\frac{kg}{My_0}} \\ 0 & -\frac{2}{L} \sqrt{\frac{kg}{My_0}} & \frac{2R}{L^2} \sqrt{\frac{kg}{My_0}} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} & \frac{R^2}{L^3} \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & 0 & -2\sqrt{\frac{kg}{My_0}} \end{bmatrix}.$$

Il rango è massimo per entrambe le matrici, quindi non ci sono problemi di sorta ad applicare algoritmi di assegnazione delle dinamiche con reazione dallo stato o dall'uscita.

Visto che c'è un solo autovalore a parte reale positiva proviamo un feedback dallo stato in grado di spostare una singola dinamica come illustrato nella sezione 10.2. L'autovalore positivo sia $\lambda = \sqrt{\frac{g}{y_0}}$ e calcoliamo l'autovettore sinistro risolvendo la

$$v^T A = \lambda v^T$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{g}{y_0}} & 1 & 0 \\ \frac{g}{y_0} & -\sqrt{\frac{g}{y_0}} & -2\sqrt{\frac{kg}{My_0}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{g}{y_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scartiamo la seconda colonna che può essere ottenuta dalla prima dividendo la prima per $-\sqrt{\frac{g}{y_0}}$, e scriviamo le equazioni indipendenti che rimangono:

$$\begin{cases} -\sqrt{\frac{g}{y_0}}v_1 + \frac{g}{y_0}v_2 = 0 \\ -2\sqrt{\frac{kg}{My_0}}v_1 - \left(\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{g}{y_0}}\right)v_3 = 0 \end{cases}$$

Se passiamo ai valori numerici, supponendo $M = 0.05$, $g = 9.81$, $L = 0.01$, $R = 1$, $k = 1$, e fissiamo come punto di equilibrio la distanza $y_0 = 2$, una soluzione ammissibile è la seguente: $v^T = [0.9085, 0.4102, -0.0795]$. Con questo autovettore sinistro, e supponendo di voler spostare la dinamica in questione in $\lambda_{des} = -10$, possiamo procedere a determinare il guadagno di reazione dallo stato con la

$$K = \frac{\lambda_{des} - \lambda}{v^T B} v^T = \begin{bmatrix} -1.3959 & -0.6303 & 0.1221 \end{bmatrix}.$$

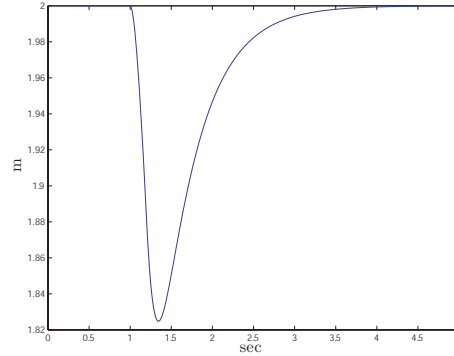


Figura 15.2: Spostamento singolo autovalore

Con questo guadagno, supponendo di dare una perturbazione alla sfera in equilibrio applicandole una forza diretta verso l'alto per un breve durata, otteniamo l'andamento della figura 15.2, dove vediamo la sfera stessa tornare rapidamente verso la sua posizione di equilibrio. Notiamo, tuttavia, che per implementare questo sistema di controllo dobbiamo misurare tutto lo stato (posizione, velocità e corrente).

Per ovviare a questo inconveniente è possibile implementare una strategia che fa uso di un osservatore dello stato dalla sola uscita in posizione. Procedendo nella sintesi e assegnando tutti gli autovalori del sistema in -10 e tutti quelli dell'osservatore in -100 , otteniamo, in corrispondenza della stessa perturbazione, l'andamento molto simile al precedente di figura 15.3.

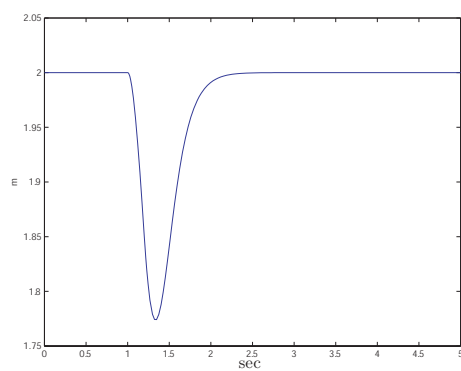


Figura 15.3: Assegnazione di tutti gli autovalori con reazione all'uscita

15.2 Esempio: controllo del pendolo inverso montato su un carrello

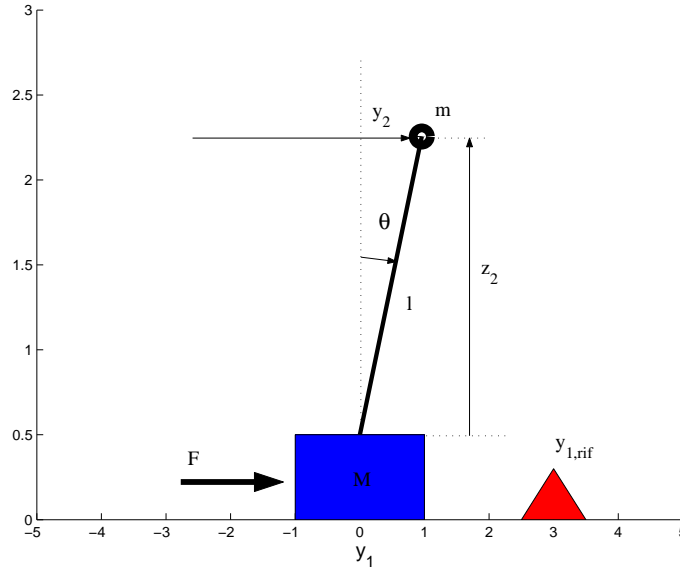


Figura 15.4: Definizione delle variabili del carrello e del pendolo

Consideriamo il controllo di un pendolo inverso montato su di un carrello come illustrato in Fig. 15.4. L'unico ingresso è la forza F applicata al carrello mentre il pendolo inverso è collegato con una semplice cerniera. Definiamo le seguenti grandezze:

- M, m : masse del carrello e del peso in cima al pendolo inverso
- d_1, d_2 : attriti del carrello e del pendolo inverso
- l : lunghezza del pendolo inverso
- y_1 : spostamento orizzontale assoluto del carrello
- y_2 : spostamento orizzontale assoluto della massa m
- z_2 elevazione della massa m rispetto alla cerniera
- θ angolo del pendolo inverso (positivo in senso orario)

Sia poi $y_{1,rif}$ la posizione di riferimento a cui si vuole traslare il carrello mantenendo il pendolo inverso in equilibrio sulla verticale ($\theta = 0$).

Per risolvere questo problema di controllo dobbiamo innanzitutto precedere con la modellazione del sistema. Una via percorribile è quella di scrivere il Lagrangiano del sistema e da questo ricavare le equazioni differenziali del moto. Per scrivere il Lagrangiano dobbiamo esprimere, in funzione delle variabili y_1 e θ le energie cinetiche e potenziali dei corpi in questione.

L'energia cinetica del carrello è esprimibile come

$$T_{carrello} = \frac{1}{2} M \dot{y}_1^2$$

mentre quella della massa m si può scrivere facilmente in funzione di y_2 e z_2 :

$$T_{pendolo} = \frac{1}{2} m(\dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2).$$

Ci accorgiamo, però, che valgono le relazioni

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + l \sin \theta \\ z_2 &= l \cos \theta \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + l \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z}_2 &= -l \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

per cui l'energia cinetica totale vale

$$T_{totale} = \frac{1}{2} M \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + m \dot{y}_1 l \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Per l'energia potenziale, supponendo di essere in un campo gravitazionale di costante g , abbiamo solo il contributo dovuto al pendolo:

$$U_{pendolo} = mgl \cos \theta.$$

L'espressione del Lagrangiano sarà quindi

$$L = T_{totale} - U_{pendolo} = \frac{1}{2} M \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + m \dot{y}_1 l \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

e le due equazioni differenziali del secondo ordine che governano il moto dei due corpi si ricaveranno come

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} = F - d_1 \dot{y}_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d_2 \dot{\theta} \end{cases}$$

dove si è considerato il contributo della forza esterna F nella prima equazione e quello degli attriti in entrambe. Svolgendo i calcoli otteniamo le due equazioni:

$$\begin{cases} M \ddot{y}_1 + m \ddot{y}_1 + ml \ddot{\theta} \cos \theta - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta = F - d_1 \dot{y}_1 \\ ml (\ddot{y}_1 \cos \theta + l \ddot{\theta} - g \sin \theta) = -d_2 \dot{\theta} \end{cases}$$

Esplicitando \ddot{y}_1 e $\ddot{\theta}$ otteniamo

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{m^2 g l \sin \theta - m d_2 \dot{\theta} - m^2 \cos \theta l^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - m \cos \theta F l + m \cos \theta d_1 \dot{y}_1 l + m g l \sin \theta M - d_2 \dot{\theta} M}{((\sin \theta)^2 m + M) m l^2} \\ \ddot{y}_1 = - \frac{\cos \theta m g l \sin \theta - \cos \theta d_2 \dot{\theta} - m l^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - F l + d_1 (\dot{y}_1) l}{l ((\sin \theta)^2 m + M)} \end{cases}$$

che in questa forma sono utilizzabili ai fini della simulazione del pendolo stesso. Infatti, inserite in due blocchi **Fcn** del Simulink come in Fig. 15.5, le espressioni di queste accelerazioni, ci danno modo, integrate due volte, di ricavare le velocità e le posizioni. Notiamo che $\sin \theta$ e $\cos \theta$ sono calcolati una volta per tutte.

Ai fini del controllo vorremmo scegliere l'approccio di assegnazione delle dinamiche con reazione dallo stato all'interno di uno schema di regolazione. Per fare ciò, essendo il sistema non lineare, dobbiamo operare una linearizzazione intorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$. Se le perturbazioni da questa posizione verticale durante il riposizionamento non saranno troppo elevate, lo schema di controllo continuerà a funzionare anche sul sistema non lineare. Poniamo, quindi, $\sin \theta \simeq \theta$, $\cos \theta \simeq 1$ e annulliamo tutti gli infinitesimi di ordine

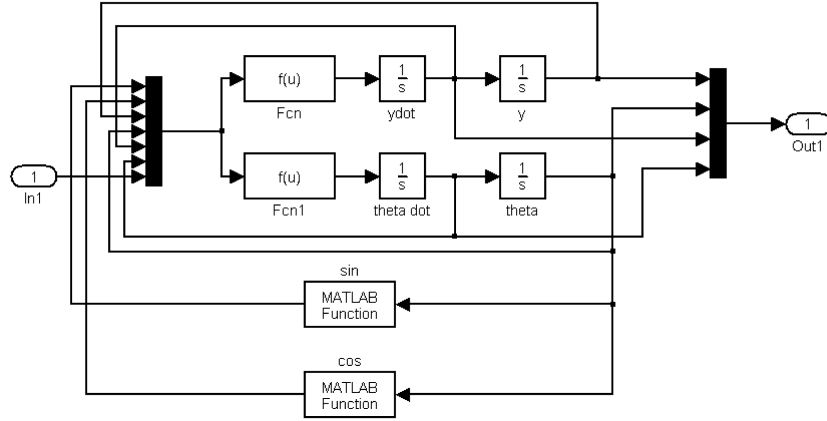


Figura 15.5: Modello del carrello con pendolo inverso

superiore al primo come ad esempio i quadrati delle variabili derivate. Si potranno scrivere, allora, le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \frac{mg\theta}{M} = \frac{F}{M} - \frac{d_1 \dot{y}_1}{M} + \frac{d_2 \dot{\theta}}{Ml} \\ \ddot{\theta} - \frac{g\theta}{l} - \frac{mg\theta}{Ml} = -\frac{F}{Ml} + \frac{d_1 \dot{y}_1}{Ml} - \frac{d_2 \dot{\theta}}{l^2 m} - \frac{d_2 \ddot{\theta}}{Ml^2} \end{cases}$$

e, definendo il vettore di stato $x = (y_1, \theta, \dot{y}_1, \dot{\theta})$ potremo scrivere le tre matrici di stato come

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{d_1}{M} & \frac{d_2}{Ml} \\ 0 & \frac{g(M+m)}{Ml} & \frac{d_1}{Ml} & -\frac{d_2(M+m)}{l^2 m M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

La funzione di trasferimento tra F e y_1 a cui si giunge è calcolata come

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = -\frac{sd_2 + s^2 l^2 m - glm}{s(-sd_2 d_1 - s^2 d_1 l^2 m - s^2 M d_2 - s^2 d_2 m - s^3 M l^2 m + glmd_1 + glmsM + glm^2 s)}$$

e, dando i seguenti valori alle costanti per fare un esempio concreto:

$$M = 10, \quad m = 1, \quad l = 2, \quad d_1 = 0.3, \quad d_2 = 0.2, \quad g = 9.8,$$

abbiamo

$$P(s) = \frac{0.3s^2 + 0.2s - 2.94}{s(0.3s^3 + 0.35s^2 - 3.762s - 0.882)}.$$

Questa funzione di trasferimento presenta un polo e uno zero a parte reale positiva e la sua stabilizzazione con un feedback statico dall'uscita risulterebbe alquanto complessa.

Più semplicemente, supponendo di poter misurare tutto lo stato del sistema, è possibile realizzare un feedback in grado di regolare il sistema in una posizione $y_{1,rif}$ con $\theta = 0$ e assegnare delle dinamiche specifiche. Questo può essere effettuato impiegando lo schema di controllo del regolatore semplice della Fig. 15.6 dove l'estensione dinamica con un eventuale integratore non si rende necessaria in quanto Ax_{ref} vale

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{d_1}{M} & \frac{d_2}{Ml} \\ 0 & \frac{g(M+m)}{Ml} & \frac{d_1}{Ml} & \frac{d_2(M+m)}{l^2 m M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,rif} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

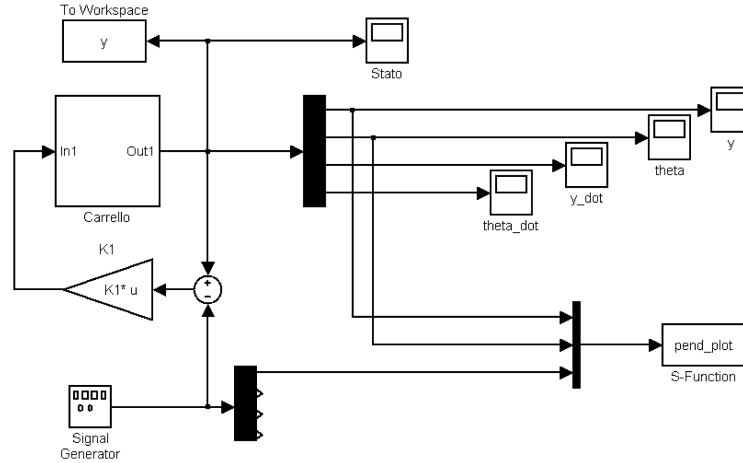


Figura 15.6: Schema per regolazione semplice del carrello con pendolo inverso

ed infatti non c'è bisogno di alcuna forza applicata per tenere il pendolo sulla verticale. Supponiamo allora di voler assegnare il polinomio caratteristico $P^*(\lambda) = (\lambda + 1)^4$. Calcoliamo al tal scopo la riga γ come ultima riga dell'inversa della matrice di controllabilità

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

che, con i valori scelti, vale

$$\gamma = [-2.0408 \quad -4.0837 \quad -0.0208 \quad -0.0416]$$

per cui la matrice dei guadagni K_1 vale

$$K_1 = -\gamma P^*(A) = [2.0408 \quad 232.7000 \quad 8.4841 \quad 95.2682]$$

Con queste posizioni, simulando un riposizionamento sul sistema non lineare completo, si ottengono, per uno spostamento di un metro, gli andamenti della posizione e dell'inclinazione del pendolo riportati nella Fig. 15.7. Il limite di questo schema di controllo, che ricordiamo è stato calcolato sull'espressione linearizzata del modello, è quello di funzionare solo se le perturbazioni sono abbastanza piccole. Per riposizionamenti più elevati di 60 metri il sistema diventa instabile ma già dopo i 50 metri si ottengono andamenti che differiscono in maniera sensibile da quelli che si dovrebbero avere se il sistema fosse veramente lineare. In Fig. 15.8 è riportato il confronto tra gli andamenti di y_1 e θ nel caso di sistema controllato lineare e di sistema controllato non lineare. Notiamo che nel caso non lineare le oscillazioni sono più accentuate in quanti ci si sta avvicinando al riposizionamento limite dei 60 metri.

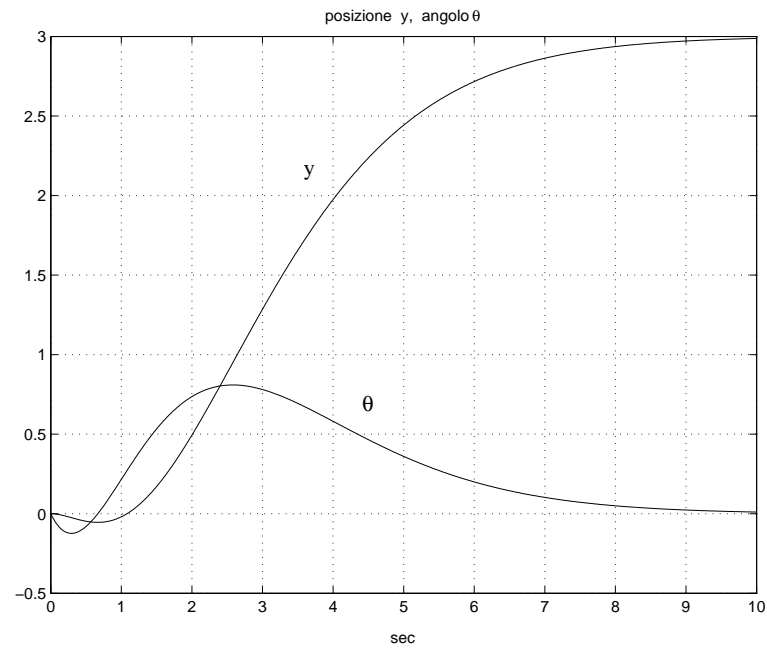


Figura 15.7: Andamento della posizione e dell'angolo durante un riposizionamento

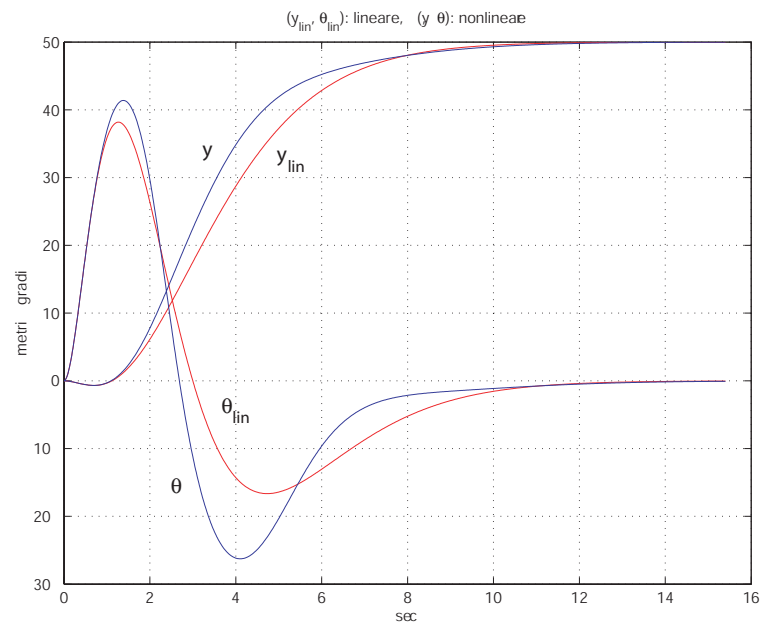


Figura 15.8: Confronto tra sistema lineare e sistema non lineare per riposizionamenti limite

15.3 Esempio: controllo dell'assetto di un satellite

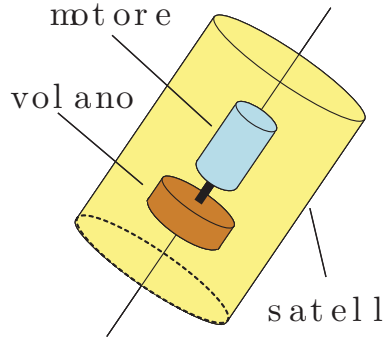


Figura 15.9: Satellite

Supponiamo di ridurre il problema del controllo dell'assetto di un satellite in orbita al controllo di uno solo dei suoi assi. L'attuatore che viene utilizzato è un volano posto in rotazione grazie a un motore elettrico. Con riferimento alla Fig. 15.9 poniamo:

- θ_s, ω_s, J_s : posizione, velocità angolare e momento di inerzia del satellite;
- ω_v, J_v : velocità angolare e momento di inerzia del volano;
- D, K_m : attrito e costante di coppia del motore elettrico;

Le equazioni inerziali che si possono scrivere sono semplicemente le seguenti

$$\begin{cases} J_s \dot{\omega}_s = D(\omega_v - \omega_s) - K_m u \\ J_v \dot{\omega}_v = -D(\omega_v - \omega_s) + K_m u. \end{cases}$$

Scrivendo le matrici A e b abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{D}{J_s} & \frac{D}{J_v} \\ \frac{D}{J_v} & -\frac{D}{J_s} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -\frac{K_m}{J_s} \\ \frac{K_m}{J_v} \end{bmatrix}$$

e notiamo subito che la matrice di controllabilità

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{K_m}{J_s} & \frac{DK_m}{J_s^2} + \frac{DK_m}{J_s J_v} \\ \frac{K_m}{J_v} & -\frac{DK_m}{J_v J_s} - \frac{DK_m}{J_v^2} \end{bmatrix}$$

ha rango pari a uno, denunciando la presenza di una dinamica non controllabile. Per capire di quale dinamica si tratti potremo operare una diagonalizzazione oppure una decomposizione di Kalman: prendiamo la strada del disaccoppiamento.

Calcoliamo innanzitutto gli autovalori: risolvendo rispetto a λ la

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

otteniamo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -(D/J_s + D/J_v)$. I rispettivi autovettori li calcoliamo dalle $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ che forniscono, ad esempio,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -J_v \\ J_s \end{bmatrix}.$$

Usando la matrice di trasformazione composta con i due vettori v_1 e v_2 avremo le nuove matrici di stato:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\frac{D}{J_s} + \frac{D}{J_v}) \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J_s} + \frac{K_m}{J_v} \end{bmatrix}.$$

Notiamo che la prima dinamica, quella sicuramente non controllabile a causa dello zero nella matrice \tilde{b} , corrisponde a un integratore mentre la seconda, controllabile, è una dinamica stabile. Per meglio capire il significato di queste due dinamiche esaminiamo più da vicino la matrice T che ci ha posto in questo nuovo sistema di riferimento. Le nuove variabili di stato, z_1 e z_2 , saranno date da:

$$z = T^{-1}x = \begin{bmatrix} J_s & J_v \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_s \\ \omega_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_s\omega_s + J_v\omega_v \\ \omega_v - \omega_s \end{bmatrix}.$$

notiamo che la prima variabile è pari a $J_s\omega_s + J_v\omega_v$ ed è la quantità di moto complessiva del sistema satellite più volano. Questa non dipende, ovviamente, né dall'ingresso, né da altre variabili dello stato (non è controllabile) e la sua dinamica ha autovalore nullo, cioè rimane costante nel tempo. La seconda variabile, invece, è pari alla differenza tra la velocità di rotazione del satellite e quella del volano e la sua evoluzione libera, ovvero in assenza di ingresso (la corrente imposta al motore), tende a zero in quanto l'attrito dissiperà la parte di energia del sistema dipendente da questa differenza.

A questo punto, poniamo

$$q_M = J_s\omega_s + J_v\omega_v \Rightarrow \omega_v = \frac{q_M - J_s\omega_s}{J_v}$$

e usiamo come variabili di stato q_M , ω_s e includiamo anche la posizione del satellite θ_s , la cui derivata è ovviamente ω_s . Riscrivendo le equazioni abbiamo

$$\begin{cases} \dot{\theta}_s = \omega_s \\ \dot{\omega}_s = \frac{D}{J_s J_v} q_M - \frac{D J_s + D J_v}{J_s J_v} \omega_s - \frac{K_m}{J_s} u. \\ \dot{q}_M = 0 \end{cases}$$

Le matrici A e b , in questo sistema di riferimento, saranno

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D J_s + D J_v}{J_s J_v} & \frac{D}{J_s J_v} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_m}{J_s} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Adesso, volendo regolare la posizione angolare del satellite su una posizione θ_{rif} , possiamo pensare di applicare uno schema di assegnazione degli autovalori con reazione dallo stato. Infatti, è del tutto plausibile pensare di poter misurare la posizione e la velocità assoluta del satellite, mentre della quantità di moto, tra l'altro non controllabile, non vogliamo richiederne alcuna misura.

Notiamo, tuttavia, che a regime la velocità di rotazione del motore $\omega_v - \omega_s$ non potrà essere zero proprio perchè con $\omega_s = 0$ all'equilibrio il volano dovrà avere accumulato tutta la quantità di moto del sistema satellite+volano. Quindi, visto che esiste un attrito D , per mantenere in rotazione il volano il controllo u dovrà essere diverso da zero. A riprova, proviamo il test $Ax_{rif} = 0$:

$$Ax_{rif} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D J_s + D J_v}{J_s J_v} & \frac{D}{J_s J_v} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{rif} \\ 0 \\ q_{M,tot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{D}{J_s J_v} q_{M,tot} \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $q_{M,tot} \neq 0$ il test non è verificato.

Per poter fare alcune simulazioni numeriche fissiamo i valori dei vari parametri e poniamo: $J_s = J_v = D = 1$ e $K_m = 2$.

Per adottare una strategia di reazione dallo stato dobbiamo, allora, estendere dinamicamente il sistema con un integratore e assegnare degli autovalori stabili al sistema complessivo. Le matrici A e b estese diventano

$$A_{ext} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di controllabilità è, allora,

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango pari a 3 e quindi possiamo impostare la trasformazione

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con la quale si arriva alla forma di Kalman

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per assegnare gli autovalori prestabiliti al sottospazio controllabile calcoliamo la nuova matrice di controllabilità sul sistema $(\tilde{A}_{11}, \tilde{b}_1)$:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_1^{-1} \Rightarrow \gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico da imporre, scegliendo 3 autovalori in -2, sarà $P^*(\lambda) = (\lambda + 2)^3$ e quindi

$$P^*(\tilde{A}_{11}) = (\tilde{A}_{11} + 2I)^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

per cui la matrice F di controreazione dallo stato sarà:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\gamma P^*(\tilde{A}_{11}) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \\ F_t &= \begin{bmatrix} F_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ F &= F_t T^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Con questa matrice di guadagno mettiamo in piedi lo schema di controllo indicato in Fig. 15.10 e anche qui simuliamo un riposizionamento da $(\theta_s = 1, \omega_s = 0, q_M = 2, u = -1)$ a $(\theta_{s,rif} = 4, \omega_{s,rif} = 0, u_{rif} = 1)$.

Notiamo che non serve conoscere il valore finale di q_M in quanto c'è uno zero nella matrice dei guadagni F in corrispondenza del terzo coefficiente ma siamo costretti a specificare il valore finale del controllo u_{rif} . Poichè a regime abbiamo dalle equazioni dinamiche $u_{rif} = D * q_M / (J_v * K_m)$ siamo comunque costretti a valutare questo termine costante una volta per tutte. Può essere fatto a terra con opportune misure oppure può essere fatto in orbita dando delle piccole variazioni a u fino a quando θ_s non sia proprio quella desiderata: da questo momento in poi u_{rif} rimarrà sempre costante.

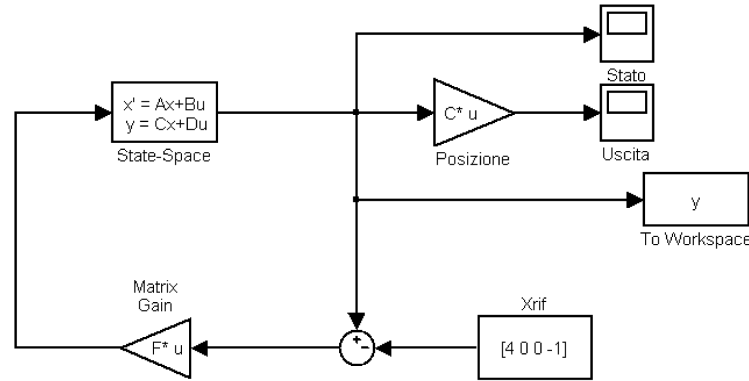


Figura 15.10: Schema per regolazione con estensione

Una strategia alternativa è quella di utilizzare il regolatore di Francis considerando l'equazione della quantità di moto, non controllabile, come un disturbo al resto del sistema. In questo caso avremo bisogno di un esosistema di dimensione uno che fornisca disturbo e riferimento, entrambi costanti.

Le matrici del processo che consideriamo hanno dimensione 2 in quanto la quantità di moto è un disturbo costante per la seconda delle due:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-D*(J_s + J_v)}{J_s J_v} \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-K_m}{J_s} \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un esosistema S in grado di produrre le dinamiche del riferimento e dei disturbi è dato da

$$S = [0]$$

Per metterlo nella forma canonica vista nella sezione 12.5.1 definiamo l'errore $e = y_r - y$. Basterà invertire il segno della matrice \bar{C} e definire le opportune matrici P e Q che mappano le dinamiche dell'esosistema rispettivamente nello stato e sull'uscita:

$$A = \bar{A}, \quad B = \bar{B}, \quad C = -\bar{C}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = [1]$$

Per essere risolubile dobbiamo controllare che la matrice

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

abbia rango massimo per tutti i λ autovalori di S . In questo caso abbiamo $\lambda = 0$ e quindi la matrice vale

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui rango è massimo.

Dobbiamo quindi controllare la controllabilità della coppia (A, B) che è verificata visto che il rango della matrice di raggiungibilità è massimo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

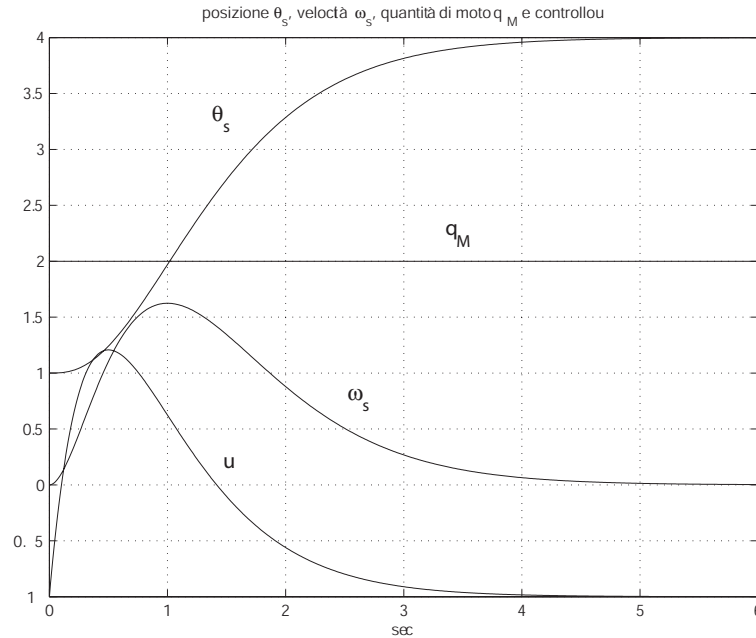


Figura 15.11: Stabilizzazione satellite con estensione

Dobbiamo, infine, verificare l'osservabilità della coppia

$$\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix}, [C \quad Q]$$

sempre tramite la matrice di osservabilità che risulta di rango massimo.

Possiamo pertanto scrivere le equazioni del regolatore di Francis

$$\begin{pmatrix} -P \\ -Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} S$$

ed essendo $S = [0]$ queste sono risolvibili con una semplice inversione che fornisce:

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -P \\ -Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\Pi = [1 \quad 0], \Gamma = [0.5].$$

Troviamo adesso, con la formula di Ackermann, la matrice K che assegna le dinamiche di $A + BK$. Per avere due autovalori coincidenti in -2 avremo

$$K = [2 \quad 1]$$

Allo stesso modo determiniamo la matrice G che assegna le dinamiche della parte osservatore, ovvero di

$$\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} - G [C \quad Q].$$

Questa varrà, scegliendo tre dinamiche in -3,

$$G = \begin{bmatrix} -34 \\ -13 \\ -27 \end{bmatrix}$$

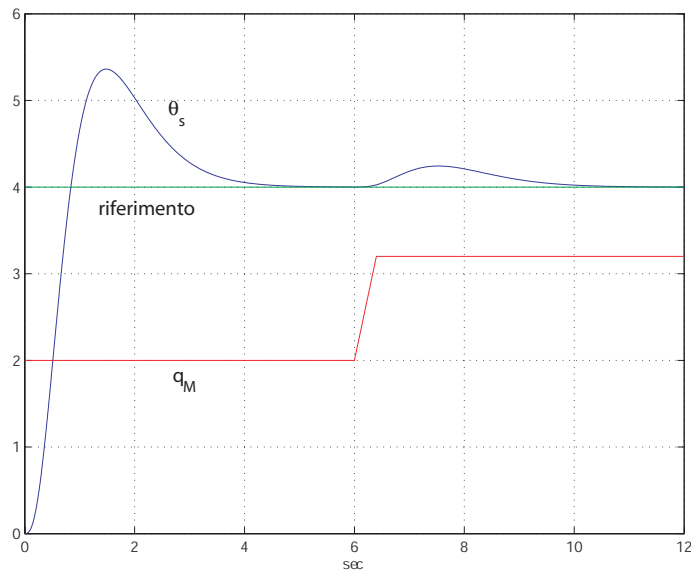


Figura 15.12: Regolatore

Ora abbiamo tutti gli elementi per scrivere le matrici H ed F del compensatore

$$H = [K \quad \Gamma - K\Pi] = [2 \quad 1 \quad -1.5]$$

e

$$F = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} H - G [C \quad Q] = \begin{bmatrix} -34 & 1 & 34 \\ -17 & -4 & 17 \\ -27 & 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

Notiamo nella figura 15.12 gli andamenti del riferimento y_r , del disturbo q_M e dell'uscita θ_s del sistema la quale, in corrispondenza delle variazioni delle due quantità sopra citate, ha due transitori che la riportano comunque a coincidere con il riferimento. Con questo schema non è necessario conoscere la quantità di moto e, come uniche misure, necessità della posizione e della velocità del satellite. Notiamo infine che, tenendo attivo questo schema di controllo, è possibile agire sui gas-jet in qualsiasi momento per ridurre velocità eccessive del volano stesso.

15.4 Esempio: il controllo di un robot flessibile

Vediamo in questo paragrafo l'applicazione del controllo ottimo per il problema della regolazione della posizione di un robot flessibile a regime. Il robot è costituito da un braccio flessibile (di lunghezza l [m]) in rotazione su un piano orizzontale, costituito da una barra sottile di acciaio temperato (di densità di massa uniforme ρ [kg/m]), con caratteristiche elastiche riassunte attraverso la costante EI [$N \times m^2$] (dove E = modulo di Young di rigidezza flessionale, I = inerzia della sezione trasversale). Il motore c.c. è pilotato in corrente di armatura, ha una inerzia del rotore pari a J_0 [$kg \times m^2$] ed è collegato con il carico mediante accoppiamento diretto (*direct-drive*).

15.4.1 Modellistica del flexarm

Facendo riferimento alla figura 15.13, presentiamo il modello del sistema:

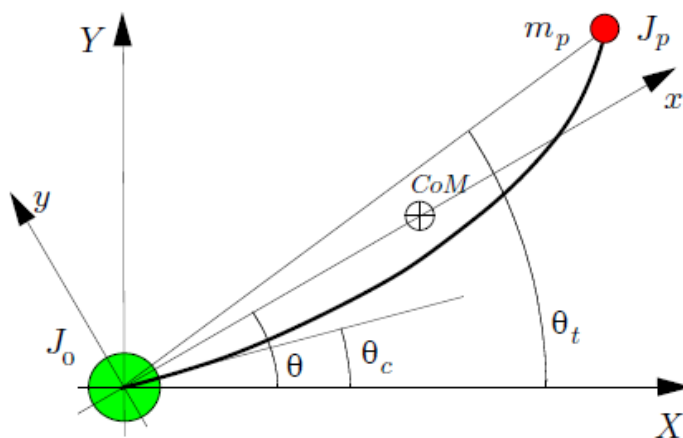


Figura 15.13: Modello analitico del braccio flessibile

I parametri del modello sono elencati nella tabella seguente:

Tabella 15.1: Parametri del modello del flexarm

Parametro	Breve descrizione
CoM	Centro di massa del braccio
J_o	Inerzia del rotore
J_p	Inerzia del carico in punta (<i>tip payload</i>)
m_p	Massa del carico in punta
Θ	Angolo rispetto al centro di massa del braccio
Θ_c	Angolo del motore
Θ_t	Angolo del tip
$w(x, t)$	Deformazione laterale (<i>normale</i> all'asse x)

Il sistema è governato da un'equazione che ne descrive il moto rigido:

$$u(t) - J\ddot{\Theta} = 0$$

dove $J = J_0 + \frac{\rho l^3}{3} + J_p$ è l'inerzia totale del motore alla base di rotazione e u è la coppia prodotta dal motore, vale a dire l'ingresso di controllo.

Inoltre devono essere rispettate dal sistema alcune condizioni al contorno, derivanti da vincoli dinamici e geometrici (come il bilanciamento di forze e momenti di taglio):

$$w(0, t) = 0$$

$$EIw''(0, t) = J_0(\ddot{\theta}(t) + \ddot{w}'(0, t)) - u(t)$$

$$EIw''(l, t) = -J_p(\ddot{\theta}(t) + \ddot{w}'(l, t))$$

$$EIw'''(l, t) = m_p(l\ddot{\theta}(t) + \ddot{w}(l, t))$$

Grazie al principio di Hamilton, la deformazione laterale $w(x, t)$ rispetto all'asse x e la posizione angolare $\theta(t)$ soddisfano la seguente equazione alle *derivare parziali* (di *Eulero-Bernoulli*)

$$EIw''''(x, t) + \rho(\ddot{w}(x, t) + x\ddot{\theta}(t)) = 0$$

dove si è usata la notazione $d()/dx = ()'$ per indicare la derivata spaziale e $d()/dt = (\dot{})$ per la derivata temporale.

Posto $u(t) \equiv 0$ (condizione di evoluzione libera) l'equazione alle derivate parziali si risolve con il metodo della *separazione delle variabili*, grazie al quale è possibile esprimere la deformazione laterale come prodotto di due funzioni:

$$w(x, t) = \phi(x)\delta(t) \quad (15.2)$$

dove $\phi(x)$ è il modo spaziale di deformazione del braccio e $\delta(t)$ è la variabile temporale che modula la deformazione spaziale.

Dall'equazione del moto rigido, avendo imposto che $u(t) \equiv 0$ si ha che $\ddot{\theta}(t) = 0$. Sostituendo la (26) all'interno dell'equazione relativa al principio di Hamilton, si ha:

$$\frac{EI}{\rho} \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} = -\frac{\ddot{\delta}(t)}{\delta(t)} \equiv \omega^2$$

grazie alla quale si ottengono due equazioni separate, una per la $\delta(t)$ ed una per la $\phi(x)$:

1.

$$\ddot{\delta}(t) = -\omega^2 \delta(t)$$

che ha soluzione generale

$$\delta(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$$

con c_1, c_2 dipendenti dalle condizioni iniziali $\delta(0)$ e $\dot{\delta}(0)$ di evoluzione libera,

2.

$$\phi''''(x) = \beta^4 \phi(x)$$

dove $\beta^4 = \frac{\rho \omega^2}{EI}$, che ha soluzione generale

$$\phi(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x.$$

e le matrici A, B, C, D si ottengono imponendo le condizioni al contorno sulla $w(x, t)$.

Sostituendo in queste soluzioni la (26), usando la $\ddot{\delta}(t) = -\omega^2 \delta(t)$ e notando che esse devono valere per ogni $\delta(t)$, si ottengono condizioni al contorno solo sulla $\phi(t)$:

$$\phi(0) = 0$$

$$EI\phi''(0) + J_0 w^2 \phi'(0) = 0$$

$$EI\phi''(l) - J_p w^2 \phi'(l) = 0$$

$$EI\phi'''(l) + m_p w^2 \phi(l) = 0$$

A questo punto, sostituendo la soluzione generale $\phi(x)$ in queste nuove condizioni, si ottiene un sistema di equazioni lineari omogenee della forma

$$\left(\mathcal{A}(EI, \rho, l, J_0, m_p, J_p, \beta, w^2 = \frac{EI\beta^4}{\rho}) \right) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \quad (15.3)$$

nel quale, escludendo la soluzione banale ($A=B=C=D=0$), si deve imporre che il determinante della matrice \mathcal{A} sia nullo. Così facendo si può notare che l'equazione caratteristica ammette infinite (seppur contabili) radici β_i (con $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 \dots$) e quindi il sistema è *infinito-dimensionale*:

$$\begin{aligned} (c \, sh - s \, ch) - \frac{2m_p}{\rho} \beta_i s \, sh - \frac{m_p}{\rho^2} \beta_i^4 (J_0 + J_p)(c \, sh - s \, ch) - \frac{2J_p}{\rho} \beta_i^3 c \, ch \\ - \frac{J_0}{\rho} \beta_i^3 (1 + c \, ch) + \frac{J_0 J_p}{\rho^2} \beta_i^6 (c \, sh + s \, ch) - \frac{J_0 J_p m_p}{\rho^3} \beta_i^7 (1 - c \, ch) = 0 \end{aligned}$$

dove $s = \sin \beta_i l$, $c = \cos \beta_i l$, $sh = \sinh \beta_i l$, $ch = \cosh \beta_i l$.

Pertanto si considerano solo i primi n_e autovalori che si vogliono includere nel modello approssimato. Così la deformazione laterale è descritta dalla

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta_i(t) \approx \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i(x) \delta_i(t).$$

In pratica si è risolto un *problema agli autovalori* con i modi di deformazione

$$\phi_i(x) = A_i \sin \beta_i x + B_i \cos \beta_i x + C_i \sinh \beta_i x + D_i \cosh \beta_i x$$

e le variabili di deformazione

$$\delta_i(t) = c_{1i} \sin \omega_i t + c_{2i} \cos \omega_i t$$

in cui ϕ_i sono gli autovettori (da normalizzare) e ω_i sono le autofrequenze di vibrazione (vale a dire gli autovalori associati agli autovettori) proprie della struttura flessibile.

Grazie alla ortogonalità degli autovettori trovati con questo metodo, poi opportunamente normalizzati, il modello dinamico è

$$J\ddot{\Theta} = u \quad (15.4)$$

$$\ddot{\delta}_i + \omega_i^2 \delta_i = \phi_i'(0) u \text{ con } i = 1 \dots n_e \quad (15.5)$$

dal quale si ricavano le seguenti proprietà notevoli:

- il disaccoppiamento tra moto rigido $\theta(t)$ e ciascun moto vibratorio $\delta_i(t)$, in condizioni di evoluzione libera ($u(t) \equiv 0$);
- l'eccitabilità di tutti i modi da parte di un ingresso $u(t) \neq 0$, pesata dalla $\phi'(0)$;
- la rigidità della struttura è riassunta dai valori delle autofrequenze w_i^2 ;
- ciascun moto vibratorio, se inizialmente eccitato, è persistente in evoluzione libera.

Di solito il braccio non è dotato di una perfetta elasticità, motivo per cui è possibile introdurre uno smorzamento modale $2\varsigma_i\omega_i\dot{\delta}_i$ nel modello dinamico, accanto alla equazione del moto rigido:

$$J\ddot{\theta} = u \quad (15.6)$$

$$\ddot{\delta}_i + 2\varsigma_i\omega_i\dot{\delta}_i + \omega_i^2\delta_i = \phi'_i(0)u \quad \text{con } i = 1 \dots n_e \quad (15.7)$$

A questo punto è possibile riscrivere il tutto sotto forma matriciale impostando il vettore delle coordinate generalizzate $q = (\theta \ \delta_1 \ \dots \ \delta_{n_e})^T$:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Hq = Bu$$

che rappresenta un sistema del tipo *massa-molla-smorzatore*, con

$$M = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2Z\Omega \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi' \end{pmatrix}$$

dove

$$\Omega = \text{diag}(w_1, \dots, w_{n_e}), \quad Z = \text{diag}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_{n_e}), \quad \Phi' = (\phi'_1(0), \dots, \phi'_{n_e}(0))^T$$

Riguardo alle possibili uscite y di interesse per il controllo del moto, queste sono almeno due:

- uscita a livello di giunto: la posizione angolare della base del braccio flessibile è

$$\theta_c = \theta + \sum_{i=1}^{n_e} \phi'_i(0)$$

E' sempre una uscita a *fase minima*, cioè la corrispondente funzione di trasferimento I/O ha zeri nel semipiano complesso a parte reale negativa o nulla, in assenza di smorzamento modale;

- uscita a livello di tip: la posizione angolare della punta del braccio flessibile è

$$\theta_t = \theta + \sum_{i=1}^{n_e} \frac{\phi'_i(l)}{l} \delta_i$$

E' sempre una uscita a *fase non minima*, cioè esistono zeri nel semipiano complesso a parte reale positiva (o coppie reali simmetriche in assenza di smorzamento modale) almeno in assenza di carico utile in punta.

Ovviamente l'uscita a livello di tip è una approssimazione lineare (*per piccole deformazioni*) della posizione angolare effettiva della punta del braccio flessibile, vale a dire

$$\theta_t = \theta + \arctan \frac{w(l, t)}{l} \approx \theta + \frac{w(l, t)}{l} = \theta + \sum_{i=1}^{n_e} \frac{\phi'_i(l)}{l} \delta_i$$

e analogamente la posizione angolare θ_x di un generico punto posto lungo la struttura a distanza x dalla base può essere approssimata come

$$\theta_x = \theta + \sum_{i=1}^{n_e} \frac{\phi_i(x)}{x} \delta_i$$

mentre la posizione angolare θ_c della base del braccio si può determinare come

$$\theta_c = \lim_{x \rightarrow 0} \theta_x$$

Siamo ora in grado di scrivere le matrici per le equazioni di stato: posto

$$x(t) = [q(t)\dot{q}(t)] \in \mathcal{R}^{2(n_e+1)}$$

si ha

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) \\ y(t) = \mathcal{C}x(t) \end{cases}$$

dove

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}H & -M^{-1}D \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = (C \quad 0)$$

essendo C una matrice dipendente dall'uscita del tipo (C_t) :

$$C_t = (1 \quad \phi_l^T)$$

e

$$\phi_l^T = \left(\frac{\phi_1(l)}{l}, \dots, \frac{\phi_{n_e}(l)}{l} \right)$$

Sfruttando infine la non singolarità della matrice di Vandermonde (che compare nell'espressione del determinante della matrice di controllabilità, nel caso di n_e modi) possiamo affermare che la controllabilità del sistema è assicurata per ogni valore di n_e scelto. Per questo è dunque possibile assegnare arbitrariamente, mediante una matrice \mathcal{K} unica, uno spettro desiderato di autovalori per la matrice $\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K}$.

15.4.2 Applicazione del controllo ottimo sul flexarm

La funzione seguente permette di ottenere le matrici \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} appena scritte in forma simbolica:

```
% parametri del braccio flessibile
% uscita al tip

function [Ap,Bp,Cp]=FlexParam(ne)

% dati

J0 = 0.002;    % inerzia motore
ell = 1;       % lunghezza braccio [m]
ro = 0.500;    % densita' lineare [kg/m]
EI = 1;        % rigidezza equivalente (modulo di Young)

Mp=0;    % no payload
Jp=0;

J = J0+ro*ell^3/3+Jp+Mp*ell^2; % inerzia totale al giunto

% risultati con 5 modi (calcolati altrove)

omsq5=[421.585 3122.603 10273.194 31562.286 82049.350]; % om^2 [rad/sec^2]

freq5=[3.2678 8.8936 16.1314 28.2751 45.5887]; %sqrt(omsq5)/(2*pi) [Hz]

ph5=[7.8259 14.6803 12.1284 6.4761 3.7648]; % phi'(0)

phL5=[-2.6954 2.3268 -2.4970 2.7380 -2.7982]; % phi(L)/L [m]

% estrazione dei primi 'ne' modi

omsq=omsq5(1:ne);
om=sqrt(omsq);
zeta=0*ones(1,ne);
ph=ph5(1:ne);
phL=phL5(1:ne);

% matrici
```

```

M=[J zeros(1,ne); zeros(ne,1) eye(ne,ne)];
D=[0 zeros(1,ne); zeros(ne,1) diag(2*zeta.*om)];
H=[0 zeros(1,ne); zeros(ne,1) diag(omsq)];
B=[1 ph]';

Ap=[zeros(ne+1,ne+1) eye(ne+1); -M^(-1)*H -M^(-1)*D];
Bp=[zeros(ne+1,1); M^(-1)*B];
Cp=[1 phL zeros(1,ne+1)];

Rp=ctrb(Ap,Bp);
rankRp=rank(Rp);
Op=obsv(Ap,Cp);
rankOp=rank(Op);

```

Una volta scelto il numero di modi da considerare nel modello possiamo invocare la funzione `FlexParam` ed ottenere le matrici A , B e C che descrivono il sistema. Nel seguente script si confrontano le prestazioni del controllo ottenuto mediante due diversi indici J_1 e J_2 . In un primo caso viene penalizzato maggiormente il valore relativo allo stato del sistema mediante una matrice $Q1$ con valori pari a 20 sulla diagonale e una matrice $Q2$ con valori pari a 1 sulla diagonale, a parità di penalizzazioni sull'input ($R1=R2=1$). Nel secondo caso invece viene invece penalizzato maggiormente l'input mediante una matrice $R1=1$ e una matrice $R2=0.5$, a parità di penalizzazioni sullo stato del sistema ($Q1=Q2=I$).

Illustriamo brevemente le funzioni usate nel prossimo script

- ARE: Algebraic Riccati Equation

Il suo utilizzo è possibile mediante il seguente prototipo:

```
P = are (A,BB,Q)
```

che restituisce la soluzione stabilizzante dell'equazione algebrica di Riccati:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

data la matrice dinamica A del sistema, la matrice dei coefficienti del termine quadratico $BB=B \cdot \text{inv}(R) \cdot B'$, e la matrice dei pesi Q .

- LQR: Linear Quadratic Regulator

Il prototipo è:

```
K = lqr (A,B,Q,R)
```

che calcola la matrice K dei guadagni del regolatore LQR, data la matrice dinamica A del sistema, la matrice B degli input, e le matrici dei pesi Q ed R .

- SS: State Space

In questo script è stato usato il seguente prototipo:

```
SYS = ss(A,B,C,D)
```

che restituisce un oggetto che rappresenta il modello nella forma di spazio di stato. Nell'esempio si ha che $D = 0$ in quanto il sistema considerato è un sistema *proprio*.

- INITIAL:

Il prototipo è dato da:

```
[X,t,Y] = initial (SYS,X0)
```

Questa funzione restituisce l'evoluzione libera del sistema SYS una volta fornita la condizione iniziale X0. La traiettoria dello stato, il vettore relativo al tempo di simulazione e l'uscita sono salvati rispettivamente nelle variabili X,t,Y.

Siamo quindi pronti a poter scrivere lo script che realizza il controllo ottimo in termini di J_1 e J_2

```
%Implementa il sistema in base al controllo ottimo

%modi da considerare nel modello
ne= 5;

%Determinazione matrici A,B,C
[A,B,C]=FlexParam(ne);
D = 0;

%Dimensioni della matrice A
n = size(A,1);
m = size(A,2);

%Matrici relative all'indice J1
Q1 = 20*eye(n);
R1 = 1;

%Matrici relative all'indice J2
Q2 = eye(n);
R2 = 1;

% caso_1: Q1=20*eye(n); Q2=eye(n); R1=R2=1;
% caso_2: Q1=Q2=eye(n); R1=1; R2=0.5;

BB1=B*inv(R1)*B';
BB2=B*inv(R2)*B';

%Soluzione dell'equazione algebrica di Riccati per J1 e J2 e leggi di
%controllo
Pbar1=are(A,BB1,Q1);
Pbar2=are(A,BB2,Q2);

KLQR1=inv(R1)*B'*Pbar1;      % o egualmente KLQR1=lqr[A,B,Q1,R1]
KLQR2=inv(R2)*B'*Pbar2;      % o egualmente KLQR2=lqr[A,B,Q2,R2]

ALQR1 = A-B*KLQR1;
ALQR2 = A-B*KLQR2;

%Creazione del sistema con regolatore per J1 e J2
```

```

JbkRLQR1=ss(ALQR1,B,C,D);
JbkRLQR2=ss(ALQR2,B,C,D);

%Definizione dello stato iniziale
X0 = zeros(12,1);
X0(1) = pi/4;

%Evoluzione libera
t = [0:0.005:6-0.005]';
[Y1,t1,X1]=initial(JbkRLQR1,X0,t);
[Y2,t2,X2]=initial(JbkRLQR2,X0,t);

%Calcolo dello sforzo di controllo richiesto al regolatore
ULQR1=-inv(R1)*B'*Pbar1*X1';
ULQR2=-inv(R2)*B'*Pbar2*X2';

%Grafici
figure(1)
subplot(2,1,1);
plot(t1,Y1,t2,ULQR1);
set(gca,'FontSize',12);
grid;legend('Y1','ULQR1');
title('J1');
subplot(2,1,2);
plot(t1,Y2,t2,ULQR2);
set(gca,'FontSize',12);
grid;legend('Y2','ULQR2');
title('J2');

```

L'esecuzione dello script Matlab appena presentato produce i seguenti grafici in cui è facile notare come la scelta delle matrici di *weighting*, cioè le matrici Q , R ed S , influisca sulle prestazioni del controllo. È chiaro che una opportuna scelta di queste matrici possa allineare le specifiche di progetto con l'esito del controllo sul sistema.

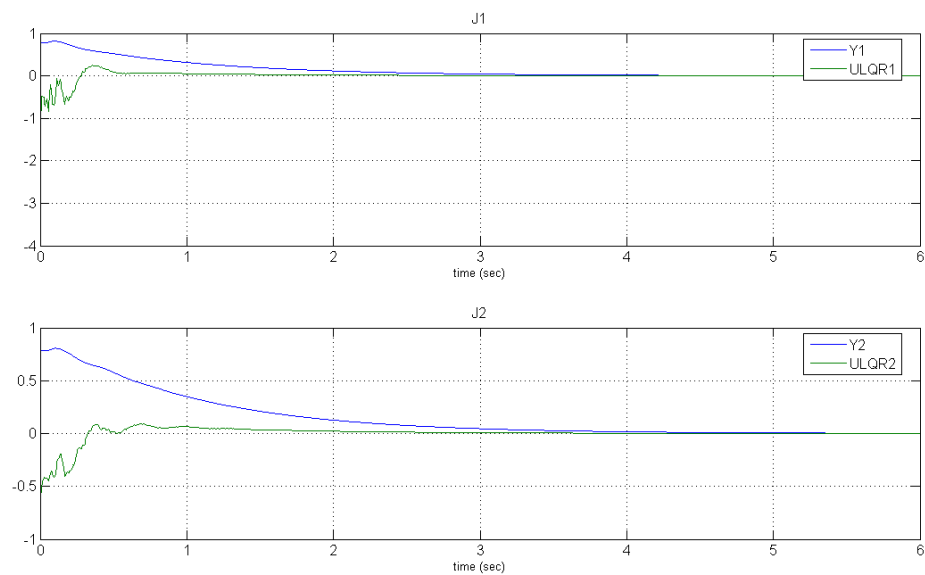


Figura 15.14: caso 1: $Q1=20 \cdot \text{eye}(n)$; $Q2=\text{eye}(n)$; $R1=R2=1$;

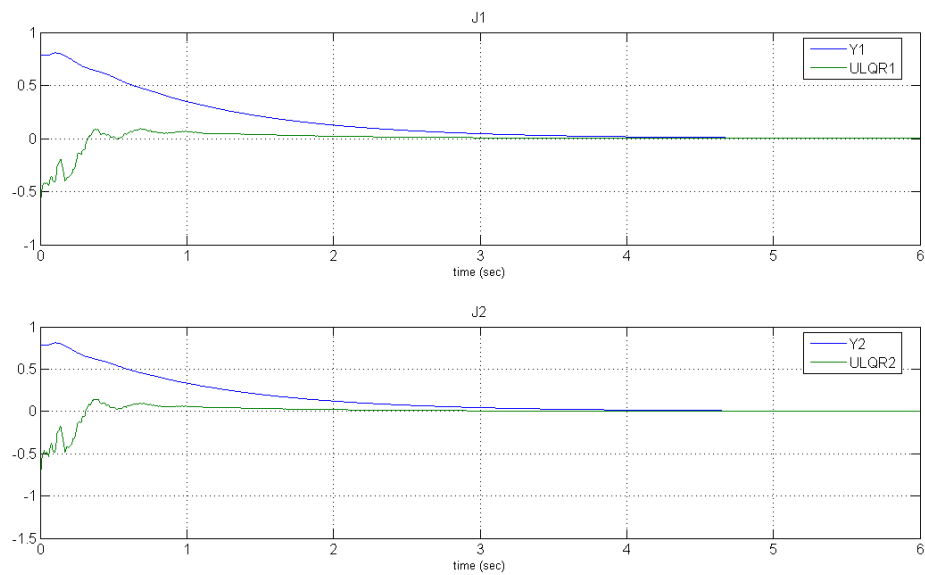


Figura 15.15: caso 2: $Q1=Q2=\text{eye}(n)$; $R1=1$; $R2=0.5$;

15.5 Esempio: manipolatore a due bracci

15.5.1 Introduzione al modello per il manipolatore.

La deduzione del modello dinamico di questo sistema viene realizzata attraverso la formulazione di Lagrange.

Mediante tale tecnica le equazioni del moto possono essere ottenute con un approccio indipendente dai sistemi di riferimento.

Si definiscono con q_i con $i = 1, \dots, n$, le coordinate generalizzate che descrivano le posizioni degli elementi meccanici che costituiscono il manipolatore.

Le equazioni del moto si ottengono poi dalle equazioni di Eulero Lagrange riportate di seguito.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \xi_i \quad (15.8)$$

Dove $L = \tau - u$ è detto Lagrangiano e ξ_i è la i -esima forza generalizzata associata alla coordinata generalizzata q_i .

Occorre quindi determinare l'energia cinetica e potenziale del sistema.

Per il contributo di energia cinetica si consideri che esso può essere espresso come la somma dei contributi del moto di ogni braccio τ_{l_i} e delle masse presenti alla estremità degli stessi rappresentative degli attuatori τ_{m_i} .

$$\tau = \sum_{i=1}^{n_b} (\tau_{l_i} + \tau_{m_i}) \quad (15.9)$$

L'energia cinetica associata al braccio i -esimo è pari a:

$$\tau_{l_i} = \frac{1}{2} \int_{V_{l_i}} \rho \dot{p}_i^{*T} \dot{p}_i^* dv \quad (15.10)$$

Con \dot{p}_i^* si intende la velocità lineare della particella appartenente all' i -esimo braccio.

Sia p_{l_i} il vettore posizione del centro di massa del braccio i -esimo, si definisce allora $p_i^* - p_{l_i} = r_i$, dove quindi il vettore $r_i = [r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}]$ individua le componenti delle particelle del braccio i -esimo rispetto al baricentro.

Da tale posizione possiamo esprimere la velocità della particella appartenente all' i -esimo braccio con la seguente relazione:

$$\dot{p}_i^* = \dot{p}_{l_i} + \omega_i \times r_i \quad (15.11)$$

Utilizzando la matrice $S(\omega_i)r_i$ per esprimere il prodotto vettore si ha quanto segue:

$$\dot{p}_i^* = \dot{p}_{l_i} + S(\omega_i)r_i = \dot{p}_{l_i} - S(r_i)\omega_i \quad (15.12)$$

Dove la matrice

$$S(r_i) = \begin{bmatrix} 0 & -r_{iz} & r_{iy} \\ r_{iz} & 0 & -r_{ix} \\ -r_{iy} & r_{ix} & 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo nella relazione dell'energia cinetica (3) l'espressione della velocità riportata in (5) si ottengono tre termini, il doppio prodotto risulta nullo mentre i termini quadratici forniscono:

$$\tau = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{p}_{l_i}^T \dot{p}_{l_i} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_{l_i} \omega_i \quad (15.13)$$

Dove

$$I_{l_i} = \begin{bmatrix} I_{l_{ixx}} & -I_{l_{ixy}} & -I_{l_{ixz}} \\ -I_{l_{iyx}} & I_{l_{iyy}} & -I_{l_{iyz}} \\ -I_{l_{izx}} & -I_{l_{izy}} & I_{l_{izz}} \end{bmatrix}$$

detta matrice di inerzia del braccio i -esimo espresso rispetto alla terna base, dipendente quindi dalla configurazione.

Se definiamo la velocità angolare ω_i^i , del riferimento solidale al braccio i -esimo la velocità angolare di tale braccio rispetto alla terna base è esprimibile mediante la relazione $\omega_i = R_i \omega_i^i$.

Si può dimostrare che per il tensore di inerzia vale la seguente relazione $I_{l_i} = R_i^T I_{l_i}^i R_i$, dove la matrice di rotazione R_i è quella tra la terna solidale al braccio i e la terna base, mentre la matrice di inerzia $I_{l_i}^i$ del braccio i -esimo rispetto al riferimento solidale con lo stesso è quindi indipendente dalla configurazione.

Se la terna solidale al braccio i -esimo coincide con gli assi centrali dell'elemento allora la matrice di inerzia risulta essere diagonale.

In definitiva per l'energia cinetica abbiamo:

$$\tau_{l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{p}_{l_i}^T \dot{p}_{l_i} + \frac{1}{2} \omega_i^T R_i I_{l_i}^i R_i^T \omega_i \quad (15.14)$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica associata alle masse concentrate rappresentanti i meccanismi di azionamento dell' i -esimo braccio si ha:

$$\tau_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{p}_{m_i}^T \dot{p}_{m_i} + \frac{1}{2} \omega_{m_i}^T I_{m_i} \omega_{m_i} \quad (15.15)$$

Nella relazione m_{m_i} indica la massa del rotore, \dot{p}_{m_i} la velocità lineare del baricentro del rotore, I_{m_i} è il tensore di inerzia relativo al baricentro del rotore i -esimo e ω_{m_i} indica la velocità angolare dello stesso.

La velocità angolare $\omega_{m_i} = \omega_{i-1} + k_{ri} \dot{q}_i z_{m_i}$ dove ω_{i-1} è la velocità angolare del braccio $i-1$ dove il rotore è situato, z_{m_i} è il versore dell'asse del rotore k_{ri} è il rapporto di trasmissione meccanica.

Occorre quindi in successivamente esprimere l'energia cinetica in funzione delle coordinate generalizzate del sistema, quindi delle variabili di giunto.

A tal proposito può essere utilizzato il metodo dello Jacobiano geometrico, per il quale si ha:

$$\dot{p}_{l_i} = J_{p1}^{(l_i)} \dot{q}_1 + \dots + J_{pi}^{(l_i)} \dot{q}_i = J_p^{(l_i)} \dot{q} \quad (15.16)$$

$$\omega_i = J_{o1}^{(l_i)} \dot{q}_1 + \dots + J_{oi}^{(l_i)} \dot{q}_i = J_o^{(l_i)} \dot{q} \quad (15.17)$$

Analogamente può essere fatto per le masse concentrate negli snodi:

$$\dot{p}_{m_i} = J_p^{(m_i)} \dot{q} \quad (15.18)$$

dove lo Jacobiano sarà pertanto:

$$J_p^{(m_i)} = \begin{bmatrix} J_{p1}^{(m_i)} & \dots & J_{pi-1}^{(m_i)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (15.19)$$

Per scrivere le velocità angolari in funzione delle variabili di giunto si pone inoltre:

$$\omega_{m_i} = J_o^{(m_i)} \dot{q} \quad (15.20)$$

Sostituendo tali posizioni nella equazione (7) si ottiene:

$$\tau = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \quad (15.21)$$

dove

$$B(q) = \sum_{i=1}^{Nb} (m_{l_i} J_P^{(l_i)T} J_P^{(l_i)} + J_o^{(l_i)T} R_i I_{l_i}^i R_i^T J_o^{(l_i)} + m_{m_i} J_P^{(m_i)T} J_P^{(m_i)} + J_o^{(m_i)T} R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_o^{(m_i)}) \quad (15.22)$$

Questa matrice è detta matrice di inerzia ha dimensioni $[n \times n]$, risulta inoltre definita positiva, simmetrica e dipendente dalla configurazione.

Per quanto riguarda l'energia potenziale abbiamo la seguente relazione:

$$u = \sum_{i=1}^{Nb} (u_{l_i} + u_{m_i}) \quad (15.23)$$

dove

$$u_{l_i} = - \int_{V_{l_i}} g_0^T p_i^* \rho dv = -m_{l_i} g_0^T p_{l_i} \quad (15.24)$$

dove $g_0 = [0, 0, -g]$ se l'asse z è quello verticale, e p_{l_i} è il vettore delle coordinate del centro di massa del braccio i -esimo.

Stessa relazione vale per l'energia cinetica relativa alle masse concentrate.

$$u_{m_i} = -m_{m_i} g_0^T p_{m_i} \quad (15.25)$$

quindi in definitiva

$$u = - \sum_{i=1}^{Nb} (m_{l_i} g_0^T p_{l_i} + m_{m_i} g_0^T p_{m_i}) \quad (15.26)$$

Si evince come tale contributo abbia dipendenza da q ma non da \dot{q} .

Le equazioni del moto si ottengono applicando le equazioni di Eulero Lagrange (1) al Lagrangiano.

$$L(q, \dot{q}) = \tau(q, \dot{q}) - u(q) \quad (15.27)$$

da cui si ottiene la relazione:

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + F_v \dot{q} + g(q) = \tau \quad (15.28)$$

Dove la matrice $B(q)$ tiene conto dei termini inerziali, nel termine $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ sono contenuti sia gli effetti della forza centrifuga, che si presentano come $(\dot{q}_i)^2$ e gli effetti della forza di Coriolis nella forma di prodotti misti $(\dot{q}_i \dot{q}_j)^2$.

Il termine $F_v \dot{q}$ tiene conto delle dissipazioni viscosi e $g(q)$ gli effetti della configurazione geometrica e quindi della gravità.

15.5.2 Manipolatore a due bracci

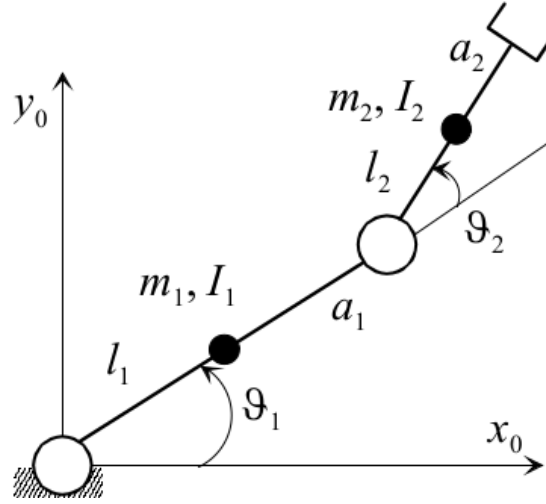


Figura 15.16: Schema Manipolatore Planare

Occorre premettere che in questa trattazione vengono indicati con $c_1 = \cos(\theta_1)$ e $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$.

In questo caso particolare il vettore delle variabili Lagrangiane è pari a $[\theta_1, \theta_2]^T$.

Definiamo con l_1 e l_2 la distanza dei baricentri dagli assi dei giunti, con m_{l_1} e m_{l_2} le loro massa, con m_{m_1} e m_{m_2} le masse dei due motori ai giunti.

Siano inoltre I_{l_1} e I_{l_2} i momenti di inerzia baricentrali dei due bracci e I_{m_1} e I_{m_2} i momenti di inerzia dei due motori intorno agli assi dei due rotori.

Si indica inoltre con a_1 la lunghezza intera del braccio uno e con a_2 la lunghezza del braccio due.

Supponiamo inoltre che i rotori abbiano baricentro coincidente con le origini delle due terne solidali con i due bracci.

Si procede quindi al calcolo degli Jacobiani ottenendo:

$$J_p^{(l1)} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_p^{(l2)} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_O^{(l1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, J_O^{(l2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, J_p^{(m1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_p^{(m2)} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 & 0 \\ a_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_O^{(m1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{r1} & 0 \end{bmatrix}, J_O^{(m2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & k_{r2} \end{bmatrix} \text{ dove } k_{ri} \text{ è il rapporto di trasmissione del motore } i\text{-esimo.}$$

Essendo inoltre R_1 la matrice di rotazione tra il riferimento solidale con il primo braccio e quello base, ed R_2 tra il riferimento solidale con il secondo braccio ed il primo, si ottiene la matrice di rotazione tra il braccio secondo e il riferimento base, definita R_{12} riportata di seguito.

$$R_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{12} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 - s_1 s_2 & -c_2 s_1 - s_1 c_2 & 0 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & c_1 c_2 - s_1 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Siano inoltre i momenti di inerzia $I_{l_i}^i$ descritti nei riferimenti locali, quindi:

$$I_{R1} = \begin{bmatrix} I_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, I_{R2} = \begin{bmatrix} I_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo sostituire nella espressione dell'energia cinetica i termini descritti precedentemente.

$$B(q) = \sum_{i=1}^{Nb} (m_{l_i} J_P^{(l_i)T} J_P^{(l_i)} + J_o^{(l_i)T} R_i I_{l_i}^i R_i^T J_o^{(l_i)} + m_{m_i} J_P^{(m_i)T} J_P^{(m_i)} + J_o^{(m_i)T} R_{m_i} I_{m_i}^i R_{m_i}^T J_o^{(m_i)})$$

Per i tenimi relativi alla energia potenziale abbiamo:

$$u = - \sum_{i=1}^{Nb} (m_{l_i} g_0^T p_{l_i} + m_{m_i} g_0^T p_{m_i}) \quad (15.29)$$

$$P_{l1} = [l_1 c \theta_1, l_1 s \theta_1, 0]$$

$$P_{l2} = [(a_1 c \theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2)), a_1 s \theta_1 + l_2 s(\theta_1 + \theta_2), 0]$$

$$P_{m2} = [a_1 c \theta_1, a_1 s \theta_1, 0]$$

il vettore $g_0 = [0, -g, 0]$.

Definito il Lagrangiano come $L = \tau - u$ si applicano le equazioni di Eulero Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \xi_i \quad (15.30)$$

ottenendo quindi le seguenti due equazioni.

Prima equazione:

$$(I_{l1} + m_{l1} l_1^2 + k_{r1}^2 I_{m1} + I_{l2} + m_{l2} (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 c_2) + I_{m2} + m_{m2} a_1^2) \ddot{\theta}_1 + (I_{l2} + m_{l2} (l_2^2 + a_1 l_2 c_2) + k_{r2} I_{m2}) \ddot{\theta}_2 +$$

$$-2m_{l2} a_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_{l2} a_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 + (m_{l1} l_1 + m_{m2} a_1 + m_{l2} a_1) g c_1 + m_{l2} l_2 g c_{12} = \tau_1 \quad (15.31)$$

Seconda equazione:

$$(I_{l2} + m_{l2} (l_2^2 + a_1 l_2 c_2) + k_{r2} I_{m2}) \ddot{\theta}_1 + (I_{l2} + m_{l2} l_2^2 + k_{r2}^2 I_{m2}) \ddot{\theta}_2 + m_{l2} a_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_{l2} l_2 g c_{12} = \tau_2 \quad (15.32)$$

Si può quindi esplicitare il sistema nella forma matriciale seguente:

$$\begin{bmatrix} I_{l1} + m_{l1} l_1^2 + k_{r1}^2 I_{m1} + I_{l2} + m_{l2} (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 c_2) + I_{m2} + m_{m2} a_1^2 & I_{l2} + m_{l2} (l_2^2 + a_1 l_2 c_2) + k_{r2} I_{m2} \\ I_{l2} + m_{l2} (l_2^2 + a_1 l_2 c_2) + k_{r2} I_{m2} & I_{l2} + m_{l2} l_2^2 + k_{r2}^2 I_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -2m_{l2} a_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2 & -m_{l2} a_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2 \\ m_{l2} a_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_{l1} l_1 + m_{m2} a_1 + m_{l2} a_1) g c_1 + m_{l2} l_2 g c_{12} \\ m_{l2} l_2 g c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Dalle quali sono evidenti le matrici che compongono la forma

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + F_v \dot{q} + g(q) = \tau \quad (15.33)$$

Dove $B(q)$ è la matrice di inerzia, la matrice $C(q, \dot{q})$ è di Coriolis e il termine $g(q)$ tiene conto dei termini dovuti alla gravità.

15.5.3 Modello Linearizzato.

Per poter studiare la stabilità del sistema intorno ad una generica condizione di equilibrio, seguendo l'approccio proposto da Lyapunov, per il quale esso è localmente asintoticamente stabile intorno alla condizione di equilibrio generica se gli autovalori della matrice di stato del sistema linearizzato intorno a tale condizione hanno parte reale minore di zero, occorre fornire una espressione dello stesso del tipo $\dot{X} = A_{lin}X + B_{lin}u$ dove compaiono le matrici linearizzate dello stato e dell'ingresso ottenute come Jacobiani del sistema non lineare fatti rispetto alla stato e all'ingresso e calcolati nella posizione di equilibrio.

Possiamo inoltre sviluppare su questa linearizzazione un sistema di controllo che lo renda stabile anche lì dove esso non lo fosse, il quale può poi essere applicato al sistema non lineare.

Le equazioni precedentemente riportate del manipolatore planare vengono quindi linearizzate intorno ad una condizione di equilibrio generica $[\theta_{1eq}, \theta_{2eq}]$ andando a sostituire ove compare θ_1 e θ_2 la loro espressione perturbativa $\theta_1 = \theta_{1eq} + \delta\theta_1$ e $\theta_2 = \theta_{2eq} + \delta\theta_2$.

Mediante tale procedura si otterranno dei termini $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_{1eq} + \delta\ddot{\theta}_1$, termini relativi alla forza di Coriolis tipo $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 = (\dot{\theta}_{1eq} + \delta\dot{\theta}_1)(\dot{\theta}_{2eq} + \delta\dot{\theta}_2)$ e dei termini centrifughi tipo $(\dot{\theta}_{1eq} + \delta\dot{\theta}_1)^2$.

Nelle espressioni dove compare $\sin(\theta_1)$ si sostituisce $\sin(\theta_1 + \delta\theta_1)$ e si applicano poi le formule di somma dei seni e coseni.

Fatta questa operazione si effettua una espansione all'ordine zero di Taylor ottenendo $\sin(\delta\theta_1) \approx \delta\theta_1$ e $\cos(\delta\theta_1) \approx 1$.

Si svolgono i prodotti e si eliminano tutti i termini perturbativi di ordine superiore al primo.

Si impongono infine le condizioni di equilibrio statico per le quali si ha $\ddot{\theta}_{1eq} = 0$, $\ddot{\theta}_{2eq} = 0$, $\dot{\theta}_{1eq} = 0$, $\dot{\theta}_{2eq} = 0$.

In questa trattazione si indica con c_{1eq2eq} il $\cos(\theta_{1eq} + \theta_{2eq})$ e con s_{1eq2eq} il $\sin(\theta_{1eq} + \theta_{2eq})$.

Le equazioni del secondo ordine linearizzate saranno:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{l1} + m_{l1}l_1^2 + I_{l2} + m_{l2}(a_1^2 + l_2^2 + 2a_1l_2c_{2eq}) + m_{m2}a_1^2 & I_{l2} + m_{l2}(l_2 + a_1l_2c_{2eq}) \\ I_{l2} + m_{l2}(l_2^2 + a_1l_2c_{2eq}) & (I_{l2} + m_{l2}l_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta\theta}_1 \\ \ddot{\delta\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ & - \begin{bmatrix} gs_{1eq}(m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1) + m_{l2}l_2gs_{1eq2eq} & m_{l2}l_2gs_{2eq1eq} \\ gm_{l2}l_2s_{1eq2eq} & m_{l2}l_2gs_{2eq1eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} gc_{1eq}(m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1) + m_{l2}l_2gc_{2eq1eq} \\ m_{l2}l_2gc_{1eq2eq} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Il termine indicato con C rappresenta la forzante $[\tau_1, \tau_2]$ statica che garantisce la condizione di equilibrio in analisi.

Occorre notare che nelle posizioni di equilibrio $[-\pi/2, 0]$, $[\pi/2, 0]$, $[-\pi/2, \pi]$, $[\pi/2, \pi]$ il termine C risulta nullo.

Al fine di ottenere il sistema nella forma canonica di primo grado lo si normalizza ponendo :

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} I_{l1} + m_{l1}l_1^2 + I_{l2} + m_{l2}(a_1^2 + l_2^2 + 2a_1l_2c_{2eq}) + m_{m2}a_1^2 & I_{l2} + m_{l2}(l_2 + a_1l_2c_{2eq}) \\ I_{l2} + m_{l2}(l_2^2 + a_1l_2c_{2eq}) & (I_{l2} + m_{l2}l_2^2) \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} gs_{1eq}(m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1) + m_{l2}l_2gs_{1eq2eq} & m_{l2}l_2gs_{2eq1eq} \\ gm_{l2}l_2s_{1eq2eq} & m_{l2}l_2gs_{2eq1eq} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

inoltre si pone il sistema nella forma:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\dot{\theta} \\ \delta\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

quindi:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\theta} \\ \delta\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Dove

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I \\ K & 0 \end{bmatrix}$$

Dato tale sistema si possono studiare le condizioni di equilibrio, esso risulta asintoticamente stabile soltanto nella configurazione $[-\pi/2, 0, 0, 0]$, tale configurazione sarà quindi localmente asintoticamente stabile anche per il sistema non lineare in virtù del prima citato teorema di Lyapunov.

Definiamo la matrice proiezione degli ingressi:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

inoltre si ottiene la matrice B_{lin} ,

$$B_{lin} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può ora sviluppare un sistema in controreazione dallo stato facendo l'ipotesi che esso sia completamente osservabile, ed essendo nelle quattro condizioni di equilibrio sopra menzionate completamente controllabile.

Si utilizza quindi la formula di Ackermann che determina quale deve essere la matrice K_c affinché $(A_n + B_n K_c)$ abbia tutte le dinamiche desiderate.

Tale matrice K_c si può assegnare anche attraverso il regolatore quadratico lineare, specificando le matrici di peso degli ingressi e dello stato.

Si applica infine il controllo $u = K_c X$ in controreazione dallo stato al sistema non lineare.

Si riportano di seguito alcune immagini relative al programma in Simulink che implementa tale controllore.

Si riportano di seguito i diagrammi dello stato e degli ingressi ottenuti nel controllo applicato alla condizione di equilibrio instabile $[-\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0]$.

Le condizioni iniziali da sono $[\pi/2, 0, 0, 0]$.

In figura 15.18 e 15.19 si riporta gli stati $\theta_1(t)$, $\dot{\theta}_1(t)$, $\theta_2(t)$ e $\dot{\theta}_2(t)$.

Si riporta in figura 15.20 Lo sforzo di controllo $\tau_1(t)$ e $\tau_2(t)$.

In questa simulazione specifica la matrice di controllo in controreazione K_c è stata determinata attraverso il regolatore quadratico lineare.

Si nota come lo stato θ_1 si porti alla condizione desiderata, in $\frac{\pi}{2}$, e come θ_2 si porti anche esso nella configurazione desiderata in π .

Anche gli sforzi di controllo risultano essere contenuti, tale risultato è ottenuto grazie all'assegnazione delle dinamiche attraverso l'applicazione del regolatore lineare quadratico.

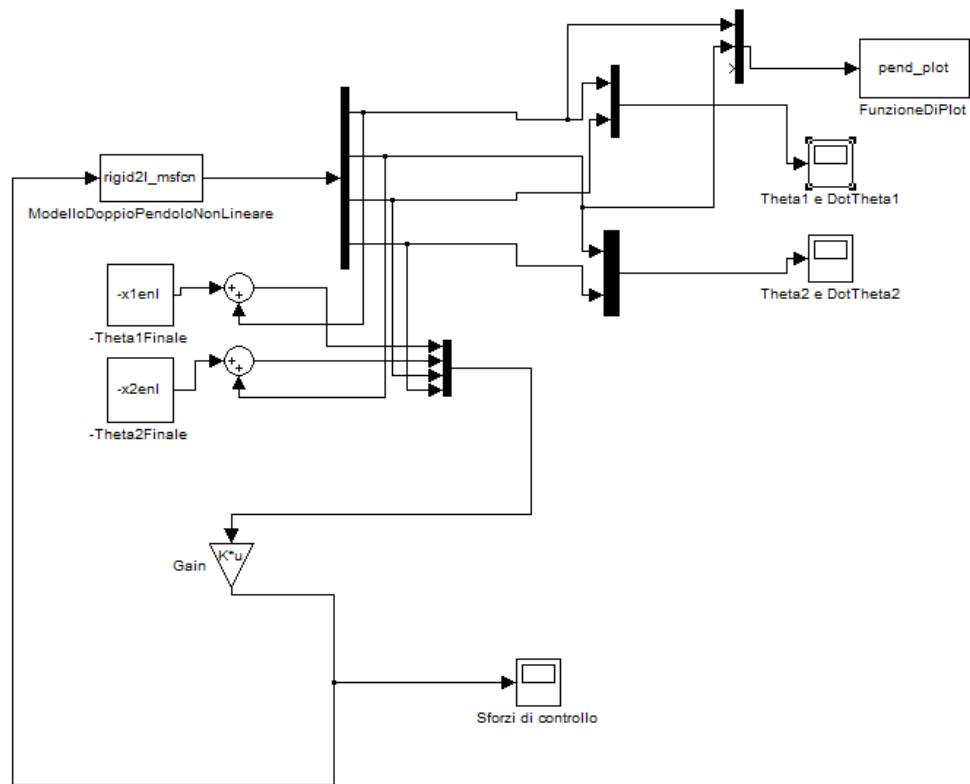
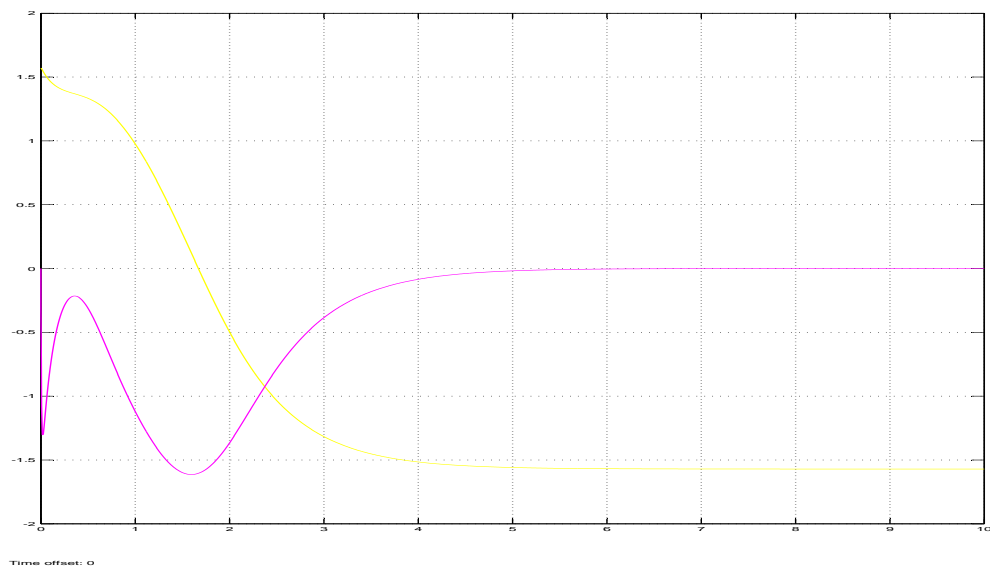
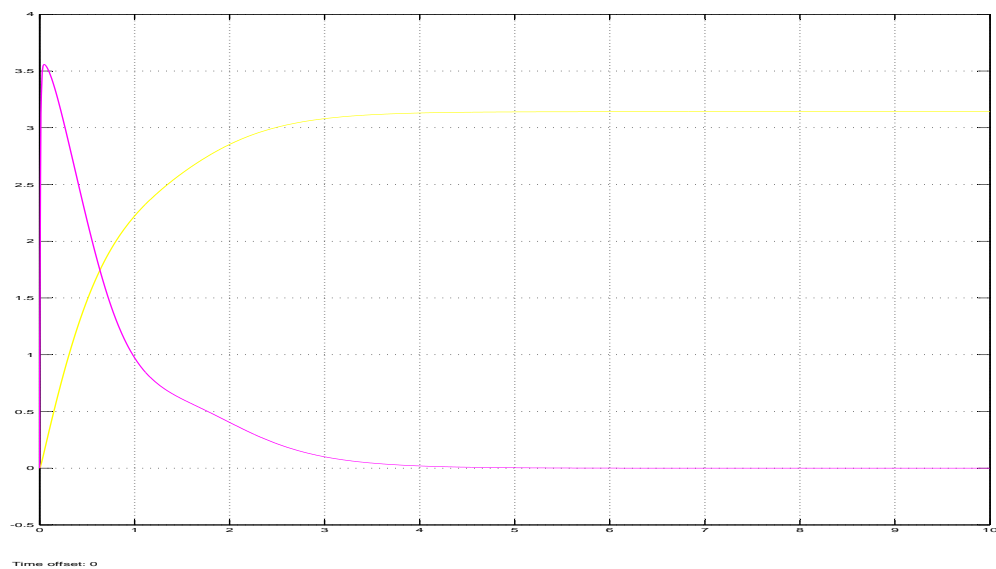
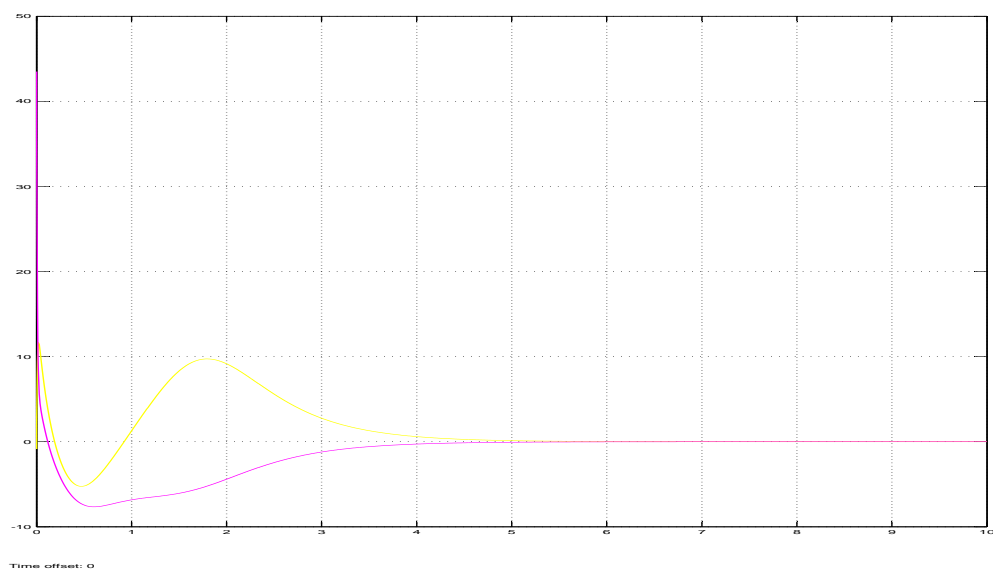


Figura 15.17: Schema Simulink

Figura 15.18: Dinamica θ_1 e $\dot{\theta}_1$

Figura 15.19: dinamica θ_2 e $\dot{\theta}_2$ Figura 15.20: ingressi τ_1 e τ_2

Capitolo 16

Esercizi

16.1 Assegnazione autovalori dall'uscita

Esercizio 1 Dato il sistema $P(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s-3)}$ fornire una possibile realizzazione nello spazio di stato A B C . Scrivere la f.d.t di $F(s)$ del sistema in controreazione impiegando un osservatore dall'uscita, imponendo gli autovalori $\lambda^* = (-2, -3)$ $\lambda_2^* = (-1, -1)$

Per trovare una possibile realizzazione possiamo scegliere A B C nella forma compagna

$$P(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s-3)} = \frac{s+2}{s^2-4s+3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

E' possibile applicare un osservatore dall'uscita:

$$P^*(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 \quad P_e^*(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+1) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad O^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{15}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

$$K_1 = -\gamma P^*(A) = \begin{bmatrix} -3 & -9 \end{bmatrix} \quad K_2 = P_e^*(A) \tilde{\gamma}^T = \begin{bmatrix} \frac{14}{15} \\ \frac{62}{15} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + bK_1 & -bK_1 \\ 0 & A - K_2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = cx = 2x_1 + x_2$$

$$F(s) = C(sI - (A + bK_1))^{-1}b = \frac{1}{s+3}$$

C'è una cancellazione questo significa che l'autovalore $\lambda = 2$ non è osservabile, visto che deve essere controllabile

16.2 Studio della controllabilità e dell'osservabilità e calcolo dell'evoluzione libera

Esercizio 2 Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 + 2u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Calcolare la f.d.t del sistema. Eseguire la decomposizione di Kalman per la controllabilità e osservabilità. Calcolare inoltre il valore dell'uscita $y(t)$ in evoluzione libera dall'istante $t=2$ sapendo che lo stato all'istante $t=0$ è $x_0 = (1, 1)$.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 1]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \rho(R) = 2 \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \rho(O) = 1$$

$$T_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow T_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_o &= T_o^{-1} A T_o = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_o &= C T_o = [1 \quad 0] \quad \tilde{b}_o = T_o^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad z_0 = T_o^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'autovalore -1 di \tilde{A}_o è non osservabile ma comunque negativo

$$\begin{aligned} F(s) &= \tilde{C}_o (sI - \tilde{A}_o)^{-1} \tilde{b}_o = C_{o1} (sI_{11} - \tilde{A}_{o11})^{-1} \tilde{b}_{o1} = \frac{2}{s+2} \\ Y(s) &= \tilde{C}_o (sI - \tilde{A}_o)^{-1} z_0 + F(s) U(s) = \frac{2}{s+2} \end{aligned}$$

$$y(t) = L^{-1} \left(\frac{2}{s+2} \right) = 2e^{-2t} \text{ che in } t=2 \quad y(2) = 2e^{-4} = 0,0366$$

L'uscita è ovviamente direttamente calcolabile senza passare per la trasformata in s, infatti essendo il sistema osservabile solo in parte, l'uscita è data da

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} u(\tau) d\tau = C_{o1} e^{\tilde{A}_{o11} t} z_0 = 2e^{-2t}$$

L'integrale è nullo in quanto $u(\tau) = 0$

Nel caso non si conosca il sottospazio non osservabile (visto che nell'esercizio non è richiesta la decomposizione di Kalman), si può diagonalizzare il sistema calcolando e^{At} come segue: si cercano gli autovalori $\lambda_1 \quad \lambda_2$, da questi gli autovettori $v_1 \quad v_2$

$$T = [v_1 \quad v_2] \rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

altrimenti si può calcolare l'intera trasformata di $y(t)$ (che è uno scalare in s) a partire da A, e quindi antitrasformare

$$y(t) = C e^{At} x_0 = L^{-1} [C(sI - A)^{-1} x_0.]$$

16.3 Stabilizzazione statica dall'uscita

Esercizio 3 Analizzare la cascata dei due seguenti sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = [-2] \quad b_1 = [1] \quad c_1 = [-1] \\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Discutere la controllabilità / osservabilità, trovare la f.d.t, e indicare se con un ingresso $u = k(v - y)$ è possibile portare i poli del sistema a parte reale minore di -1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -2x_1 + u \\ v = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 + v \\ \dot{x}_3 = 2x_2 - x_3 + v \\ y = 2x_2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ y = 2x_2 \end{array} \right.$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(R) = 2 \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \rho(O) = 2$$

Per il calcolo della f.d.t ci avvaliamo della semplificazione che si ha con Kalman

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -2$ sono controllabili, mentre l'autovalore $\lambda_3 = -2$ non è controllabile

$$F(s) = \tilde{c}_1(sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{b}_1 = \frac{-2}{(s+2)(s-1)}$$

nella f.d.t è nascosta una cancellazione

$$F(s) = \tilde{c}_1(sI_{11} - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{b}_1 = \frac{-2}{(s+2)(s-1)} \leftarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2 \text{ presenti } \lambda_3 = -2 \text{ non presente.}$$

Senza osservare la matrice di osservabilità O nulla si può concludere riguardo l'osservabilità di λ_3 , sapendo invece che $\rho(O) = 2$ e che l'unico autovalore scomparso in F(s) è λ_3 , possiamo dire che λ_3 è anche non osservabile. Ciò non impedisce (essendo λ_3 negativo) che il sistema possa stabilizzarsi con un ingresso del tipo $u = k(v - y)$

$$W(s) = \frac{kF(s)}{1 + kF(s)} = \frac{-2k}{(s+2)(s-1) - 2k} = \frac{-2k}{s^2 + s - 2 - 2k}$$

Grazie al criterio di Routh sappiamo che se $k < -1$ il sistema è stabile.

A noi interessa che i poli siano minori di -1. A tal fine applichiamo la sostituzione $s = -1 + \sigma$

$$(-1 + \sigma)^2 - 1 + \sigma - 2 - 2k = \sigma^2 - \sigma - 2 - 2k$$

con questa sostituzione non può essere stabile.

16.4 Stabilizzazione con reazione statica dall'uscita

Esercizio 4 Analizzare il seguente sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -18 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [-2, 1, 1]$$

Calcolare la decomposizione di Kalman per la controllabilità. Determinare inoltre se una reazione statica dall'uscita $u = ky + v$ è in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema.

Per calcolare la decomposizione di Kalman per la controllabilità, si scrive la matrice R :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con rango $\rho(R) = 1$; dunque il sottospazio controllabile ha dimensione 1.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(complemento di T con vettori linearmente indipendenti da b , quindi non fanno parte del sottospazio controllabile)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dove, per quanto concerne gli elementi sulla diagonale principale, $\lambda_1 = 2$ è l'autovalore del sottospazio controllabile, mentre $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$ sono gli autovalori dello spazio non controllabile.

Gli autovalori del sottospazio non controllabile sono negativi, dunque il sistema ha la parte non controllabile già stabile. Per stabilizzare il sistema e portare l'autovalore λ_1 a un valore negativo si può operare senz'altro con l'algoritmo di Ackermann, che con una controreazione dallo stato è possibile imporre il valore desiderato a tutti gli autovalori controllabili. Con una controreazione dall'uscita invece è possibile tentare una stabilizzazione solo se gli autovalori instabili sono tutti controllabili e osservabili: gli autovalori non solo devono essere controllabili, ma devono anche essere visti dall'uscita. Per sapere se $\lambda_1 = 2$ è osservabile si può operare una decomposizione di Kalman per l'osservabilità, ma una strada senz'altro più veloce consiste nello scrivere la f.d.t.:

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}b = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{b} = \tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{b}_1 =$$

in cui sappiamo che compare solo la parte controllabile

$$= 1(s - 2)^{-1}1 = \frac{1}{s - 2}$$

e vedendo il valore della f.d.t., poiché è presente $\lambda_1 = 2$, possiamo asserire che $\lambda_1 = 2$ è osservabile; infatti, se così non fosse, non potrebbe comparire nella f.d.t.

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 - KF(s)} = \frac{1}{s - 2 - k}$$

in cui a denominatore è presente il segno meno in quanto ky viene sommato a v invece di essere sottratto.

E' stabilizzabile, e risulta stabile se $k < -2$.

16.5 Regolatore semplice dell'uscita

Esercizio 5 Dato il sistema definito dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [1, 0]$$

ed il riferimento

$$x_{rif} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Trovare la matrice di reazione dallo stato in grado di assicurare, se possibile, errore nullo a regime permanente e convergenza esponenziale con autovalori in -1 .

Innanzitutto il sistema deve essere controllabile.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(R) = 2.$$

Inoltre, il nucleo di A deve avere dimensione non nulla (infatti $\det(A) = 0$) e x_{rif} deve far parte del nucleo stesso. Poichè $Ax_{rif} = 0$ il sistema controllato a regime presenterà errore nullo ($e_{eq} = 0$). Per renderlo stabile con le dinamiche assegnate scegliamo $F = -\gamma P^*(A)$ con $P^*(\lambda) = (\lambda + 1)^2$.

16.6 Regolazione con riferimento sinusoidale

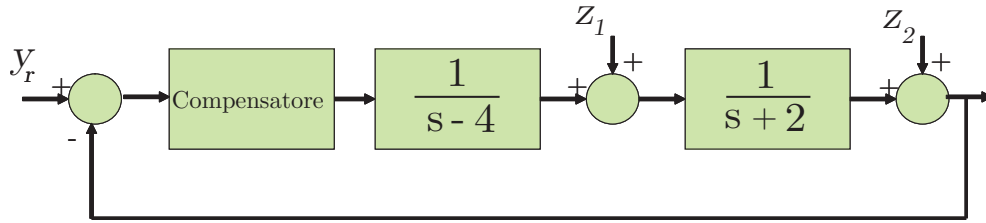


Figura 16.1: Regolatore

Dato il sistema della figura 16.1 supponiamo di voler impostare un problema di regolazione dell'uscita tale che l'errore di inseguimento possa andare asintoticamente a zero quando

$$\begin{aligned} y_r &= 2\sin(3t) \\ z_1 &= k_1 \\ z_2 &= k_2 \end{aligned}$$

e le dinamiche possano essere assegnate tutte coincidenti in -2 .

Andiamo a calcolare per prima cosa le equazioni che descrivono tutto il sistema a ciclo aperto della figura 16.1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + z_1 \\ \dot{x}_2 = +4x_2 + u \\ y = x_1 + z_2 \end{cases}$$

Le matrici del processo sono

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{C} = [1 \quad 0].$$

Un esosistema S in grado di produrre le dinamiche del riferimento e dei disturbi è dato da

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per metterlo nella forma canonica vista nella sezione 12.5.1 definiamo l'errore $e = y_r - y$. Basterà invertire il segno della matrice \bar{C} e definire le opportune matrici P e Q che mappano le dinamiche dell'esosistema rispettivamente nello stato e sull'uscita:

$$A = \bar{A}, \quad B = \bar{B}, \quad C = -\bar{C}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per essere risolubile dobbiamo controllare che la matrice

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

abbia rango massimo per tutti i λ autovalori di S . In questo caso abbiamo $\lambda_1 = -3j$, $\lambda_2 = 3j$, $\lambda_3 = 0$ e quindi le matrici

$$\begin{bmatrix} 2+3j & 1 & 0 \\ 0 & -4+3j & 4 \\ -1 & 0 & 3j \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2-3j & 1 & 0 \\ 0 & -4-3j & 4 \\ -1 & 0 & -3j \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui rango è massimo.

Dobbiamo quindi controllare la controllabilità della coppia (A, B) , che è verificata visto che il rango della matrice di raggiungibilità è massimo: $R =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dobbiamo, infine, verificare l'osservabilità della coppia

$$\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}$$

che si può dedurre dalla matrice di osservabilità

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & -9 & 0 & 2 \\ 8 & -12 & 0 & -27 & -4 \\ -16 & -40 & 81 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

la quale risulta di rango massimo.

Possiamo pertanto scrivere le equazioni del regolatore di Francis

$$\begin{pmatrix} -P \\ -Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} S$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che possono essere risolte a mano (o con un programma di manipolazione simbolica) svolgendo tutti i calcoli (è lineare nelle varie incognite) fino a fornire:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} -17 & -6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Troviamo adesso con la formula di Ackermann la matrice K che assegna le dinamiche di $A + BK$. Per avere due autovalori coincidenti in -2 avremo

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Allo stesso modo determiniamo la matrice G che assegna le dinamiche di

$$\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} - G \begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}.$$

Questa varrà

$$G = \begin{bmatrix} -12.8119 \\ -77.7600 \\ -0.5156 \\ 3.7200 \\ 0.2963 \end{bmatrix}$$

Ora abbiamo tutti gli elementi per scrivere le matrici H ed F del compensatore

$$H = \begin{bmatrix} K & \Gamma - K\Pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -5 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

e

$$F = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} H - G \begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.8119 & 1.0000 & 12.8119 & 0 & -11.8119 \\ -77.7600 & -2.0000 & 72.7600 & 12.0000 & -83.7600 \\ -0.5156 & 0 & 0.5156 & 3.0000 & -0.5156 \\ 3.7200 & 0 & -6.7200 & 0 & 3.7200 \\ 0.2963 & 0 & -0.2963 & 0 & 0.2963 \end{bmatrix}.$$

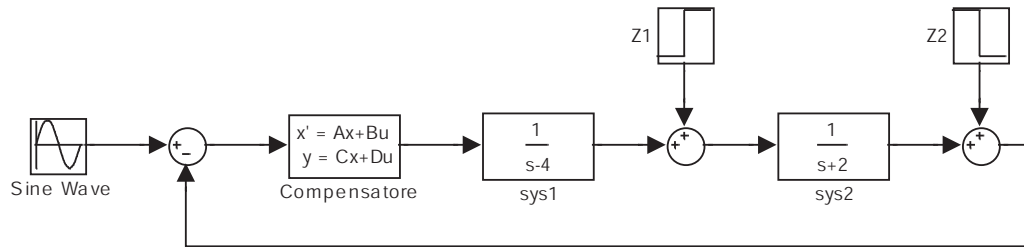


Figura 16.2: Schema di controllo

In figura 16.2 possiamo vedere lo schema di controllo utilizzato per testare il regolatore progettato. Il riferimento è una sinusoide di ampiezza due e iniziale e i disturbi non sono applicati. Come si può vedere dalla figura 16.3, l'uscita converge sul riferimento in 8 secondi. All'istante $t = 10\text{sec}$ vengono applicati i due disturbi costanti (z_1 positivo e pari ad 1, z_2 negativo e pari a -1) e l'uscita subisce un secondo transitorio che si esaurisce di nuovo in meno di 8 secondi.

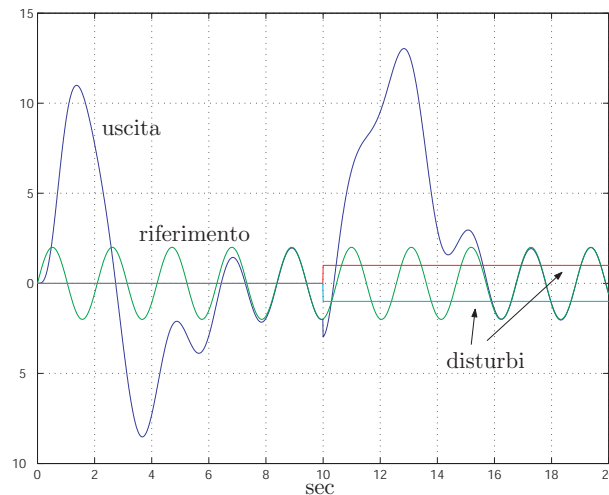


Figura 16.3: Andamento del riferimento, dell'uscita e dei disturbi.

16.7 Esercizi sulla stabilità $\frac{1}{2}$ alla Lyapunov

16.7.1 Esercizio 1

Si consideri un sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \sin x_1 - 2\text{sat}(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

dove $\text{sat}(\cdot)$ è la funzione di saturazione, definita nel seguente modo:

$$\text{sat}(z) = \begin{cases} z & \text{se } |z| \leq 1 \\ \text{sign}(z) & \text{se } |z| > 1 \end{cases}$$

Si dimostri che l'origine è l'unico punto di equilibrio del sistema, e che è asintoticamente stabile.

Soluzione

Per prima cosa, troviamo l'insieme dei punti di equilibrio di questo sistema, uguagliando a zero i secondi membri delle equazioni differenziali.

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \\ -x_2 - \sin x_1 - 2\text{sat}(x_1 + x_2) &= 0\end{aligned}$$

In particolare dovrà essere

$$-x_2 - \sin x_1 - 2\text{sat}(x_1 + x_2) = 0$$

Per verificare che l'unica soluzione di questa equazione è nel punto $x_1 = 0$, possiamo utilizzare il metodo grafico e intersecare graficamente le 2 funzioni, $y = \sin(x_1)$ e $y = -2\text{sat}(x_1)$:

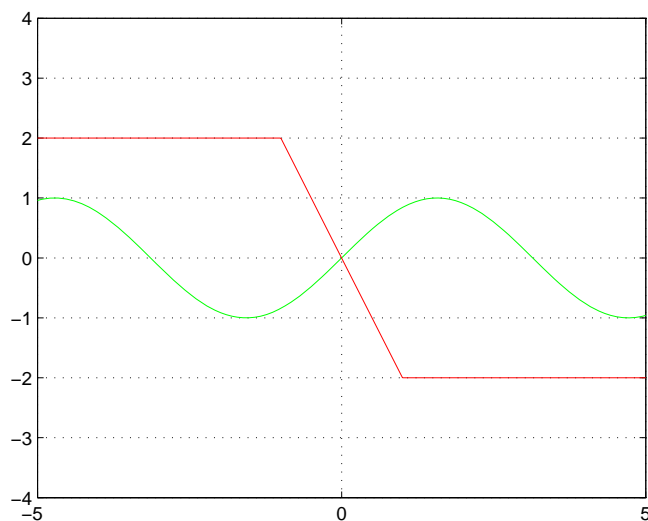


Figura 16.4: Rappresentazione grafica del punto di equilibrio

Dunque l'unica intersezione tra le 2 curve si ha per $x_1 = 0$. L'unico punto di equilibrio del sistema $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ l'origine $x = 0$.

Per eliminare l'effetto legato alla saturazione ci conviene studiare la stabilità $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ dell'origine in un intorno circolare S contenuto nell'insieme:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + x_2| < 1\}$$

Tale intorno contiene l'origine e le equazioni del sistema diventano:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_2 - \sin x_1\end{aligned}$$

Per applicare il criterio diretto di Lyapunov, si calcola la Jacobiana di questo sistema nell'origine $x = 0$. Si avrà $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ dunque:

$$J(x)|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - \cos x_1 & -3 \end{pmatrix} \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Tale matrice $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ in forma compagna e si nota chiaramente che $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ una matrice di Hurwitz, ovvero ha tutti gli autovalori a parte reale negativa. L'origine del sistema $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ dunque un punto d'equilibrio asintoticamente stabile, e l'analisi condotta fino ad adesso ha validità $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ puramente locale.

16.7.2 Esercizio 2

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \text{sat}(x_2^2 - x_3^2) \\ \dot{x}_3 &= x_3 \text{sat}(x_2^2 - x_3^2)\end{aligned}$$

- Dimostrare che l'origine $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ l'unico punto d'equilibrio del sistema
- Utilizzando il criterio diretto di Lyapunov, dimostrare che l'origine $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ un punto d'equilibrio globalmente asintoticamente stabile

Soluzione

Per trovare i punti di equilibrio del sistema, uguagliamo a zero le derivate prime e calcoliamo le soluzioni del sistema. Risulta immediatamente dalla prima equazione che $x_2 = 0$. Sostituendo nella seconda e nella terza equazione ottengo $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$. Essendo l'unica soluzione del sistema risulta che l'origine $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ l'unico punto di equilibrio del sistema. Analizziamo ora la stabilità $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ dell'origine utilizzando il criterio indiretto di Lyapunov. Costruiamo dunque la Jacobiana ottenuta dalle derivate parziali rispetto alle componenti della variabile di stato x .

$$J(x)|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3x_2^2 + x_3^2 & -2x_2x_3 \\ 0 & 2x_2x_3 & -3x_3^2 \end{pmatrix} \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La Jacobiana ha autovalori a parte reale nulla, e dunque ci troviamo nel caso critico, caso in cui non possiamo dedurre nulla sulla stabilità $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ del punto d'equilibrio. Proviamo allora a studiare la stabilità $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ del punto con il metodo diretto di Lyapunov. Come candidata di Lyapunov scegliamo inizialmente la semplice funzione quadratica $V = \frac{1}{2}(x - x_e)^T I (x - x_e)$, ovvero nel nostro caso $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2$. La funzione V $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ definita positiva ed $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ radialmente illimitata. Dobbiamo a questo punto verificare la sua derivata rispetto al tempo

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3 = x_1x_2 - x_1x_2 - x_2^2\text{sat}(x_2^2 - x_3^2) + x_3^2\text{sat}(x_2^2 - x_3^2) = -(x_2^2 - x_3^2)\text{sat}(x_2^2 - x_3^2)$$

Quindi poichè $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ la funzione di saturazione mantiene lo stesso segno dell'argomento, avremo che la derivata \dot{V} risulterà $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ semidefinita negativa in ogni intorno dell'origine, annullandosi per $x_2^2 = x_3^2$. L'origine $\ddot{L}_{\frac{1}{2}}$ dunque

sicuramente stabile, ma questa funzione non ci consente di determinare la stabilità $\frac{1}{2}$ asintotica con il criterio diretto di Lyapunov.

Per approfondire l'analisi possiamo applicare a questo punto il teorema dell'insieme invariante, usando la stessa funzione V .

L'insieme dei punti dove $\dot{V} = 0$ è dato da $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 = x_3^2\}$. La dinamica residua nell'insieme P è

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \\ \dot{x}_3 &= 0\end{aligned}$$

In questa situazione risulta evidente che x_3 è costante in P . Se $x_1 \neq 0$, si avrebbe che $\dot{x}_2 \neq 0$, e dunque la traiettoria di x uscirebbe dall'insieme P . Quindi il massimo insieme invariante contenuto in P è l'origine, che risulta perciò globalmente asintoticamente stabile.

16.7.3 Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= kx_1 + x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 - x_1^2x_2\end{aligned}$$

con $k \neq 0$. Si individuino tutti i punti di equilibrio del sistema, e se ne studi la stabilità $\frac{1}{2}$ al variare di k (positivo o negativo).

Soluzione

Per trovare i punti di equilibrio del sistema uguagliamo a zero i secondi membri delle equazioni ottenendo

$$kx_1 + x_1x_2^2 = x_1(x_2^2 + k) = 0$$

e dunque si ottengono come soluzioni $x_1 = 0$ oppure $x_2 = \pm\sqrt{k}$. Considerando anche la seconda equazione si ottiene

$$-x_2^3 - x_1^2x_2 = -x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

Con $x_1 = 0$ si ricava immediatamente $x_2 = 0$. Se $x_1 \neq 0$ si ricava nuovamente $x_2 = 0$ poiché il termine $x_1^2 + x_2^2$ è sempre positivo al di fuori dell'origine. Essendo però $k \neq 0$, si deduce che l'origine è l'unico punto di equilibrio.

Studiamo la stabilità dell'origine con il criterio indiretto di Lyapunov:

$$J(x)|_0 = \left(\begin{array}{cc} k + x_2^2 & 2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & -3x_2^2 - x_1^2 \end{array} \right) \bigg|_{x=x_e} = \left(\begin{array}{cc} k & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

Consideriamo ora l'andamento di k . Se $k \leq 0$ ci troviamo nel caso critico, e non possiamo concludere nulla sulla stabilità del sistema. Se $k > 0$ invece, possiamo dedurre l'instabilità del sistema, a causa della presenza dell'autovalore positivo $\lambda = k$.

Cerchiamo allora di applicare il criterio diretto di Lyapunov scegliendo $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, che è definita positiva e radialmente illimitata. Calcoliamo la derivata \dot{V} rispetto al tempo:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = kx_1^2 + x_1^2x_2^2 - x_2^4 - x_1^2x_2^2 = kx_1^2 - x_2^4$$

Dunque \dot{V} è definita negativa se $k < 0$, ed in questo caso si può concludere che l'origine è globalmente asintoticamente stabile. Con $k > 0$, anche se la \dot{V} risulta indefinita, già sapevamo tramite il metodo indiretto che il punto d'equilibrio è instabile. L'instabilità per $k > 0$ è confermata anche dal teorema di Cetaev. Se scegliamo infatti come funzione di Lyapunov $V = \frac{1}{2}x_1^2$ che è positiva in qualsiasi intorno dell'origine, ed ha x_e come punto di accumulazione la $\dot{V} = x_1\dot{x}_1 = kx_1^2 + x_1^2x_2^2$ è definita positiva nello stesso intorno.

16.7.4 Esercizio 4

Consideriamo il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{1+x_3} - x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 - 3x_3\end{aligned}$$

- Dimostrare che nella regione $R = x : x_i > 0, i = 1, 2, 3$ esiste un unico punto d'equilibrio x_e .
- Studiare la stabilità $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ di x_e mediante il criterio indiretto di Lyapunov, e scoprire se $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ possibile escludere il fatto che x_e sia globalmente asintoticamente stabile.

Soluzione

Troviamo i punti di equilibrio del sistema. Dalle ultime 2 equazioni otteniamo che $x_1 = 6x_3$. Sostituendo nella prima equazione abbiamo:

$$6x_3 = \frac{1}{1+x_3}$$

Dunque dobbiamo risolvere l'equazione di secondo grado $6x_3^2 + 6x_3 - 1 = 0$, che ha come soluzioni $x_{3,1} = -1.1455$ e $x_{3,2} = 0.1455$. La prima soluzione non la consideriamo poiché $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ vogliamo trovare i punti di equilibrio all'interno della regione R . Quindi dei due punti d'equilibrio del sistema, l'unico punto d'equilibrio esistente nell'insieme R $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$:

$$x_e = (0.8730, 0.4365, 0.1455)$$

Applichiamo il criterio indiretto di Lyapunov e calcoliamoci la Jacobiana calcolata nel punto x_e :

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} -1 & 2x_1x_2 & \frac{-1}{(1+x_3)^2} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \bigg|_{x=x_e} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -0.762 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice sono $\lambda_1 = -1.3671 + 0.4490i$, $\lambda_2 = -1.3671 - 0.4490i$, e $\lambda_3 = -3.2657$. Tutti e tre gli autovalori sono a parte reale negativa, e dunque x_e $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ un punto d'equilibrio asintoticamente stabile. Poiché $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ il sistema ammette $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ di un punto di equilibrio, si può $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ escludere che x_e sia anche globalmente asintoticamente stabile.

16.7.5 Esercizio 5

Consideriamo il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

Prendiamo in considerazione il punto d'equilibrio nell'origine $x_e = (0, 0)$.

- Studiare la stabilità $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ di x_e tramite il criterio indiretto di Lyapunov.
- Studiare la stabilità $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ di x_e tramite il criterio diretto di Lyapunov, determinando l'eventuale dominio di attrazione.
- Determinare, se esistono, gli altri punti di equilibrio del sistema.

Soluzione

Per il primo punto, calcoliamo inizialmente la Jacobiana nell'origine:

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & 2 - 2x_1x_2 \\ -1 - 4x_1x_2 & -2x_1^2 - 6x_2^2 \end{pmatrix} \bigg|_{x=x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$. Ci troviamo dunque nel caso critico e non possiamo dire nulla sulla stabilità $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ dell'origine.

Applichiamo ora il criterio diretto di Lyapunov, scegliendo come funzione $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2^2)$, che $\tilde{\ell}^{\frac{1}{2}}$ definita positiva in qualsiasi intorno dell'origine e radialmente illimitata. calcolando la derivata rispetto al tempo della funzione otteniamo:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = x_1(-x_1^3 - x_1 x_2^2 + 2x_2) + 2x_2(-x_1 - 2x_1^2 x_2 - 2x_2^3) = -x_1^4 - 5x_1^2 x_2^2 - 4x_2^4$$

La \dot{V} è definita negativa in qualsiasi intorno dell'origine, e dunque x_e è un punto d'equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

Essendo globalmente asintoticamente stabile, non possono esistere altri punti di equilibrio per il sistema.

16.7.6 Esercizio 6

Consideriamo il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -kh(x)x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x)x_2 - x_1^3\end{aligned}$$

dove k è una costante, e $h(x)$ una funzione di x . Indichiamo con S , l'interno della circonferenza di raggio unitario. Utilizzando la funzione $V = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$, e applicando i vari criteri noti, studiare la stabilità dell'origine nei seguenti casi:

- $k > 0$, $h(x) > 0 \forall x \in S$;
- $k > 0$, $h(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^2$;
- $k > 0$, $h(x) < 0 \forall x \in S$;
- $k > 0$, $h(x) = 0 \forall x \in S$;
- $k = 0$, $h(x) > 0 \forall x \in S$;
- $k = 0$, $h(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^2$;

Soluzione

Si consideri l'intorno dell'origine $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$. Se calcoliamo la derivata rispetto al tempo di V si ottiene:

$$\dot{V} = x_1^3 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -kh(x)x_1^4 + x_2 x_1^3 - h(x)x_2^2 - x_1^3 x_2 = -kh(x)x_1^4 - h(x)x_2^2$$

- Essendo $k > 0$, $h(x) > 0$ in S si ha che l'origine è localmente asintoticamente stabile.
- Essendo $k > 0$, $h(x) > 0$ in \mathbb{R}^2 , l'origine è globalmente asintoticamente stabile;
- Essendo $k > 0$, $h(x) < 0$ in S , si ha che l'origine è instabile. Infatti, si applica il criterio di Caetev considerando che l'insieme $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) > 0\}$ ha come punto di accumulazione l'origine e \dot{V} è definita positiva in $P \cap S(0, r) \forall r < 1$.
- Essendo $k > 0$, $h(x) = 0$ in S , si ha che $\dot{V} = 0$ in S . Dunque, l'origine è semplicemente stabile.
- Essendo $k = 0$, $h(x) > 0$ in S , si ha che $\dot{V} = -h(x)x_2^2$ è semidefinita negativa in S . Appliciamo il teorema dell'insieme invariante, con $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$. La dinamica residua in P è:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -kh(x)x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3\end{aligned}$$

Se $x_1 \neq 0$, x_2 varia. Se ne deduce che il massimo insieme invariante contenuto in P è l'origine. Dunque l'origine è un punto d'equilibrio localmente asintoticamente stabile.

- Essendo $k = 0$, $h(x) > 0$ in \mathbb{R}^2 , si ha che l'origine è un punto d'equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

16.7.7 Esercizio 7

Consideriamo il seguente sistema non lineare:

$$\dot{x} = x(\lambda - ax)$$

nel dominio aperto $x > 0$ con $\lambda > 0$ e $a > 0$.

Dimostrare che la funzione:

$$V(x) = c \left(x - x_e - x_e \ln \left(\frac{x}{x_e} \right) \right)$$

è una funzione di Lyapunov del sistema $\forall c > 0$, essendo $x_e > 0$ lo stato di equilibrio del sistema. Studiare quindi la stabilità del punto x_e utilizzando la suddetta funzione.

1. Troviamo i punti di equilibrio del sistema uguagliando a zero il secondo membro dell'equazione del sistema.

$$x(\lambda - ax) = 0$$

Dunque avremo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x_e = \frac{\lambda}{a} \end{cases} \quad \text{si esclude perché } \frac{1}{2} \text{ abbiamo ipotizzato che } x_e > 0$$

Nel nostro dominio dunque abbiamo un unico punto d'equilibrio.

2. Studiamo la stabilità $\frac{1}{2}$ del nostro punto di equilibrio.

Per applicare il criterio diretto di Lyapunov andiamo a verificare la prima delle *due* condizioni del teorema, ovvero verifichiamo che $V(x)$ sia definita positiva. Dovrà $\frac{1}{2}$ valere quindi la disequazione:

$$x - x_e - x_e \ln \frac{x}{x_e} > 0$$

Possiamo risolvere graficamente la disequazione, andando a rappresentare le 2 funzioni $y = x - x_e$ e $y = -x_e \ln \frac{x}{x_e}$. La rappresentazione delle 2 funzioni rispetto agli assi cartesiani $\frac{1}{2}$ data da:

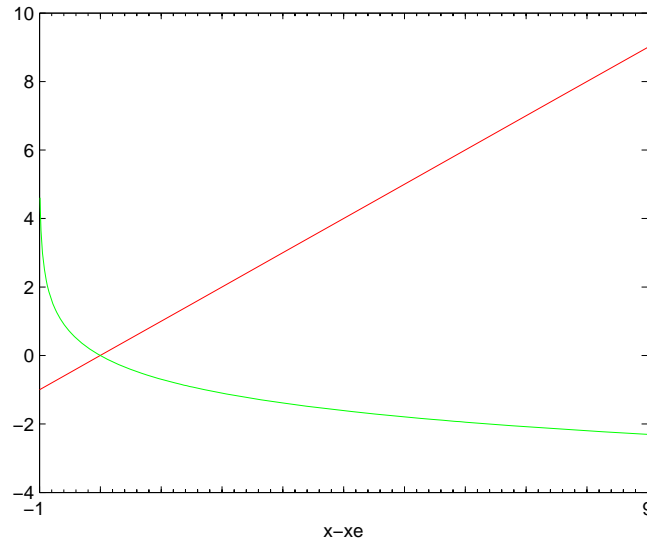


Figura 16.5: Rappresentazione grafica delle 2 funzioni della disequazione

Si vede chiaramente che sia prima che dopo il punto d'equilibrio x_e , la funzione $V(x) > 0$, e quindi risulta definita positiva.

Ora vediamo se la derivata della $V(x)$ $\frac{1}{2}$ definita negativa:

$$\dot{V} = c\dot{x} - c\frac{x_e}{x}\dot{x} \leq 0$$

Sostituendo all'interno della disequazione la \dot{x} otteniamo:

$$\left(c - c\frac{x_e}{x}\right)(x(\lambda - ax)) = \frac{c}{a}(x - x_e)(x_e - x) \leq 0$$

Tale disequazione $\frac{1}{2}$ soddisfatta per qualsiasi valore di x , annullandosi in $x = x_e$. Dunque la \dot{V} $\frac{1}{2}$ definita negativa, e quindi il punto d'equilibrio risulta localmente asintoticamente stabile.

16.7.8 Esercizio 8

Per il sistema descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1(1-x_2) + x_2(2-x_1) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - x_2(1+x_2)\end{aligned}$$

- si individuino *tutti* i punti di equilibrio;
- se ne studi la stabilità $\tilde{\mathcal{L}}_{\frac{1}{2}}$ con il criterio indiretto di Lyapunov;
- per i punti di equilibrio che risultano asintoticamente stabili dal punto precedente, si approfondisca lo studio con il criterio diretto di Lyapunov, ricavando una stima del dominio di attrazione.

Soluzione problema 2

- Si trovano facilmente i due punti di equilibrio $x_{e1} = (0, 0)$ e $x_{e2} = (-5, -10)$.
- La matrice jacobiana della dinamica del sistema

$$J(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1-2x_2 \end{pmatrix} \implies J(x_{e1}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad J(x_{e2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

si trova facilmente che $J(x_{e1})$ ha due autovalori con parte reale negativa, mentre $J(x_{e2})$ ne ha uno con parte reale positiva. Dunque, per il sistema originario x_{e1} è asintoticamente stabile e x_{e2} è instabile.

- Si consideri la seguente candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

che è definita negativa in qualsiasi intorno dell'origine e radialmente illimitata. La sua derivata lungo le traiettorie del sistema

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^2(1+x_2)$$

che è definita negativa in $S(0, 1^-)$, cioè $\tilde{\mathcal{L}}_{\frac{1}{2}}$ all'interno della circonferenza di raggio unitario. Ciò conferma che x_{e1} è asintoticamente stabile, e indica che una stima del dominio di attrazione è proprio $S(0, 1^-)$ (si noti infatti che le curve di livello sono chiuse in $S(0, 1^-)$).

16.7.9 Esercizio 9

Analizzare con il metodo indiretto di Lyapunov il seguente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{4}x_2(x_2^2 + 3x_1^2) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{4}x_1(x_1^2 + 3x_2^2)\end{aligned}$$

- si individuino *tutti* i punti di equilibrio;
- se ne studi la stabilità con un metodo quadratico.

16.7.10 Esercizio 10

Analizzare con Lyapunov il seguente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_1 u \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_2 u\end{aligned}$$

- si dimostri che il sistema, con $u = 0$ è instabile;
- posto $u = -x_2^2$ si dimostri che una funzione di Lyapunov quadratica ha la derivata \dot{V} negativa al di fuori di una certa regione e pertanto il sistema risulta UUB (Uniformly Ultimately Bounded).

16.7.11 Esercizio 11

Analizzare con Lyapunov il seguente sistema

$$\ddot{x} = -x - \dot{x} + x^3$$

- a) si dimostri che l'origine $\mathbb{R}^1_{\frac{1}{2}}$ un punto di equilibrio asintoticamente stabile;
 b) si stimi il corrispondente dominio di attrazione.

16.7.12 Esercizio 12

Analizzare con Lyapunov il seguente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3^3 - x_2^3\end{aligned}$$

Si vuole dimostrare che esiste un controllo u tale da stabilizzare l'origine. Utilizzando la seguente funzione di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2^2)^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{4}x_2^4 \quad (16.1)$$

si trovi il feedback u tale da avere la sua derivata almeno semidefinita negativa. A questo punto si usi il teorema sul massimo invariante per dimostrare la stabilità $\mathbb{R}^1_{\frac{1}{2}}$ asintotica.

Soluzione

Calcolando la derivata di $V(x)$ si ottiene

$$\dot{V}(x) = -x_3^4 + (x_1 - x_2^2)(u - 2x_2x_3)$$

che ci porta a scegliere

$$u = 2x_2x_3 - (x_1 - x_2^2)$$

al fine di ottenere

$$\dot{V}(x) = -x_3^4 - (x_1 - x_2^2)^2.$$

Questa $\mathbb{R}^1_{\frac{1}{2}}$ evidentemente semidefinita negativa potendo essere zero anche con $x_1 = x_2^2 \neq 0$ e $x_3 = 0$. Notiamo però $\mathbb{R}^1_{\frac{1}{2}}$ che sulla curva $x_1 = x_2^2 = a$ e $x_3 = 0$ il sistema si riduce a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= a.\end{aligned}$$

Pertanto, a partire da tutti i punti di questa curva si avrà $\mathbb{R}^1_{\frac{1}{2}}$ una evoluzione che porterà $\mathbb{R}^1_{\frac{1}{2}}$ il sistema fuori dal piano $x_3 = 0$, e quindi fuori dalla zona dove $\dot{V}(x) = 0$, tranne che nell'origine che a questo punto risulterà $\mathbb{R}^1_{\frac{1}{2}}$ l'unico insieme invariante. Il sistema $\mathbb{R}^1_{\frac{1}{2}}$ dunque stabile asintoticamente nell'origine degli assi.

16.8 Esercizi sulla feedback linearizzazione

16.8.1 Esercizio 1

6. Dato il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + a \cos(2z_1)\end{aligned}$$

linearizzare la seconda equazione con una opportuna scelta di u e imporre che le due dinamiche linearizzate abbiano autovalori in -3 .

16.8.2 Esercizio 2

Analizzare il seguente sistema, trovare il grado relativo e determinare se sia o meno a fase non minima (dinamica zero stabile).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + \frac{x_2}{1+x_1^2} \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 + u \\ y &= x_2\end{aligned}$$

Lo stesso con $y = x_1$.

16.8.3 Esercizio 3

Dato il modello dinamico di un unicycle:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos(\theta)v_t \\ \dot{y} &= \sin(\theta)v_t \\ \dot{\theta} &= v_s\end{aligned}$$

determinare se sia possibile feedback linearizzare il sistema dall'uscita $y = x$ immaginando che il sistema abbia la velocità di traslazione v_t assegnata e costante.

16.8.4 Esercizio 4

Dato il seguente sistema nonlineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \sin x_1 - x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^2 \\ y = x_2 \end{cases}$$

- Trovare i punti di equilibrio per $u=0$
- Linearizzarlo intorno a $(0,0)$
- Verificare che il sistema è feedback lineare attraverso l'output indicato

16.8.5 Esercizio 5

Capitolo 17

Altri esercizi di esame

17.1 Regolazione senza estensione

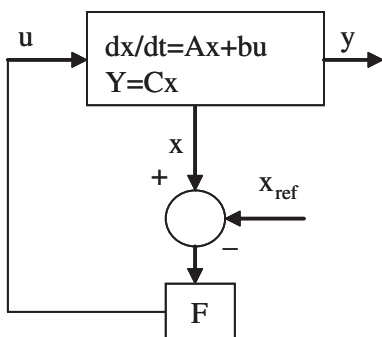


Figura 17.1: Sistema

Esercizio 6 Dato il sistema di controllo riportato in figura 17.1, con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

determinare a quale sottospazio di R^2 deve appartenere x_{ref} per avere errore nullo a regime. Supposto che appartenga a detto sottospazio determinare la matrice F in modo da assegnare gli autovalori $(-1, -1)$.

A ciclo chiuso l'equazione che si ottiene è la seguente:

$$dx/dt = (A + bF)x - bFx_{ref}$$

All'equilibrio $dx/dt = 0$ la soluzione x soddisferà la seguente equazione: $Ax + bFx - bFx_{ref} = 0$. Affinchè si possa avere errore nullo per $t \rightarrow \infty$, ovvero $x = x_{ref}$, x_{ref} dovrà appartenere al nucleo della matrice A :

$$Ax_{ref} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui si evince che x_{ref} deve appartenere al sottospazio descritto per esempio dal vettore: $x_{ref} = (1, -2)$.

A questo punto, supposto che x_{ref} appartenga a questo sottospazio si può procedere con la normale assegnazione degli autovalori dallo stato che prevede solo di verificare la raggiungibilità del sistema: La matrice di

raggiungibilità vale:

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed il suo determinante vale 2 ne segue che ha rango pieno e quindi il sistema è tutto raggiungibile. La sua inversa vale:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

e l'ultima riga quindi $\gamma = (0, 1/2)$. Il polinomio caratteristico desiderato, visti gli autovalori desiderati, si può esprimere come

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

e la matrice F risulterà pari a

$$F = -\gamma P(A) = \begin{bmatrix} -7 & -4 \end{bmatrix}$$

17.2 Evoluzione libera di un sistema

Esercizio 7 Calcolare uscita $y(t)$ con $t = 2$ sec, $u(t) = 0$ ed $x_0 = (1, -1)$ del seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 2u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

La soluzione generica di un sistema di equazioni lineari e stazionarie è:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Nel nostro caso $u(t) = 0$ e $t = 2$ sec, per cui si tratterà di valutare e^{2A} .

Un metodo è quello di diagonalizzare, se possibile, la matrice A .

Per diagonalizzarla calcoliamo gli autovalori risolvendo l'equazione $\det(A - \lambda I) = 0$. Da questa otteniamo $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Poichè sono differenti sarà sicuramente possibile diagonalizzare la matrice A .

Calcoliamo il primo autovettore risolvendo il sistema: $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$ da cui $v_1 = (-2, 3)$. Calcoliamo il secondo autovettore risolvendo $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0$ da cui $v_2 = (1, -1)$. La matrice diagonalizzata sarà data da $\Lambda = T^{-1}AT$ che, senza alcun calcolo, si scriverà

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A questo punto per calcolare e^{2A} si potrà applicare il noto risultato che ci fornisce $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$, e quindi

$$e^{2A} = \begin{bmatrix} -0.2157 & -0.2340 \\ 0.3511 & 0.3694 \end{bmatrix}.$$

L'uscita, infine, sarà: $y(2) = Ce^{2A}x_0 = 0.0366$

17.3 Stabilizzazione di una cascata di sistemi

Esercizio 8 Analizzare la cascata dei due sistemi qui riportati

$$A_1 = [-2]; B_1 = [1]; C_1 = [-1]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; C_2 = [2 \quad 0]$$

(l'uscita del primo è l'ingresso del secondo). Determinare controllabilità ed osservabilità dell'intero sistema e calcolarne la FdT. Determinare, quindi, se una reazione statica dall'uscita del tipo $u = k(v - y)$ (con k scalare) sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema con autovalori tutti a parte reale minore di -1 .

Ponendo l'ingresso del secondo sistema pari all'uscita del primo si ottiene il nuovo sistema

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 2 \quad 0]$$

La matrice di controllabilità è data da:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

il cui rango vale 2, pari alla dimensione del sottospazio controllabile. Usando la matrice di trasformazione:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = [0 \quad -2 \quad 0]$$

quindi avremo nella parte controllabile gli autovalori 1 e -2 e nella parte non controllabile l'autovalore -2. La funzione di trasferimento si può calcolare utilizzando il sottospazio controllabile:

$$F(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \frac{2}{(1-s)(s+2)} = -\frac{2}{s^2 + s - 2}$$

La matrice di osservabilità è data da:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

il cui rango vale 2, pari alla dimensione del sottospazio osservabile. L'unico autovalore non osservabile è -2 proprio quello non controllabile altrimenti sarebbe scomparso nel calcolo della funzione di trasferimento. A questo punto basta applicare Routh al sistema con controreazione unitaria che ha $k * F(s)$ in catena diretta. Al denominatore della funzione di trasferimento si avrà:

$$(1-s)(s+2) + 2 * k = 0$$

$$-s^2 - s + 2 + 2k = 0$$

con un cambiamento di variabile $s = \sigma - 1$

$$-(\sigma - 1)^2 - (\sigma - 1) + 2 + 2k = 0$$

$$-(\sigma^2 - 2\sigma + 1) - \sigma + 1 + 2 + 2k = 0$$

$$-\sigma^2 + \sigma + 2 + 2k = 0$$

da cui si deduce che non esiste un k in grado di porre tutti gli autovalori a parte reale minore di -1.

17.4 Forma di Kalman e stabilizzazione statica dall'uscita

Esercizio 9 Dato il sistema in figura 17.2, ricavare l'espressione delle matrici A , B , e C che lo descrivono. Trovare poi per quale valore di a il sistema risulti, in ogni tipo di realizzazione, non completamente osservabile e determinare per tale valore la decomposizione canonica di Kalman nei sottospazi osservabile/non osservabile. Sempre per tale valore di a , il sistema risulta stabilizzabile con una controreazione dall'uscita? Lavorando sulla FdT calcolare, se esiste, una controreazione statica che stabilizzi il sistema.

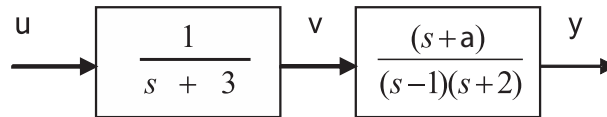


Figura 17.2: Sistema

Scriviamo separatamente le equazioni differenziali dei due blocchi (usando per il secondo la forma compagna come possibile realizzazione) e quindi poniamo l'ingresso del secondo sistema pari all'uscita del primo. Otterremo il seguente nuovo sistema:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad a \quad 1]$$

La matrice di osservabilità è data da:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 2 & a-1 \\ a-4 & 2a-2 & 3-a \end{bmatrix}$$

che con $a = 3$, il valore di a per cui si ha una cancellazione tra i due sistemi, diventa:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui rango vale 2, pari alla dimensione del sottospazio osservabile. Usando la matrice di trasformazione:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = [1 \quad 0 \quad 0]$$

quindi avremo nella parte non osservabile l'autovalore -3 già stabile. Per vedere se possiamo stabilizzare la parte rimanente basta scrivere la funzione di trasferimento che, per $a = 3$, vale

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

A questo punto basta applicare Routh al sistema con controreazione unitaria che ha $k * F(s)$ in catena diretta. Al denominatore della funzione di trasferimento si avrà:

$$s^2 + s + -2 + k$$

che, ovviamente, si stabilizza con $k > 2$.

17.5 Regolazione senza estensione

Esercizio 10 Dato il sistema di controllo riportato in figura 17.3, con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

determinare se sia possibile regolare il sistema nel punto $x_{ref} = (1-3)$ con errore nullo. In tal caso, determinare la matrice F in modo da assegnare gli autovalori $(-2, -2)$.

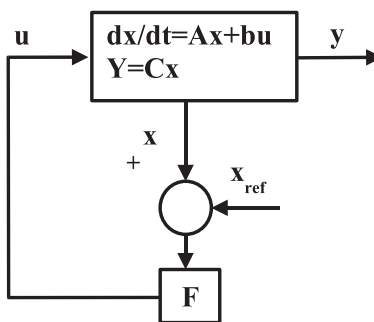


Figura 17.3: Sistema

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$u = F(x - x_{ref})$$

$$e = (x - x_{ref})$$

$$x = e + x_{ref}$$

$$\dot{x} = Ax + bFe$$

$$\dot{e} = A(e + x_{ref}) + bFe$$

$$\dot{e} = (A + bF)e + Ax_{ref}$$

all'equilibrio:

$$(A + bF)e + Ax_{ref} = 0$$

che fornisce errore nullo se

$$Ax_{ref} = 0$$

in questo caso abbiamo

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per cui la condizione è soddisfatta.

Per determinare la matrice di controreazione dallo stato che sposta gli altri autovalori in, per esempio, $(-2, -2)$, scriviamo il polinomio caratteristico desiderato:

$$P^*(\lambda) = (\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

e calcoliamo il vettore γ

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$F = -\gamma P^*(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 & 9 \\ 54 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{85}{6} & -\frac{31}{6} \end{bmatrix}$$

17.6 Proprietà strutturali ed evoluzione libera

Esercizio 11 *Determinare le proprietà strutturali (controllabilità e osservabilità) del seguente sistema e calcolarne l'uscita $y(t)$ per $t = 2$ sec, $u(t) = 0$ ed $x_0 = (1, 1)$:*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per la controllabilità :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{rango}(R) = 2$$

Per l'osservabilità :

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \text{rango}(O) = 1$$

quindi c'è un autovalore osservabile ed uno non osservabile. Nel calcolo dell'evoluzione libera possiamo, pertanto, limitarci a considerare il sottospazio osservabile. Operiamo la trasformazione di Kalman $x = Tz$ con:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $z = T^{-1}x$, varrà :

$$z_0 = T^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{bmatrix}$$

l'equazione del sottospazio osservabile è :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + 2u \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

la cui soluzione è data da

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{-2t} z_{1,0} \\ y(t) &= z_1(t) = e^{-2t} z_{1,0} = 2e^{-2t} \end{aligned}$$

e quindi in $t = 2$

$$y(2) = 2e^{-4} = 0.0366$$

Il problema può essere risolto anche nei due seguenti modi:

1. Diagonalizzando la matrice A calcolando autovalori ed autovettori
2. Valutando la seguente antritrasmformata di Laplace:

$$L^{-1} \{ C(sI - A)^{-1} \} \big|_{t=2} x_0$$

17.7 Evoluzione forzata

Esercizio 12 *Dato il sistema:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determinare l'uscita per $t=4\text{sec}$ determinata dalla applicazione di un gradino unitario a partire da condizioni iniziali $x_0 = (2, 0)$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La soluzione completa può essere scritta, passando alla trasformata di Laplace, come:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}X_0 + C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

con

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, U(s) = \frac{1}{s}$$

Calcoliamo prima il termine $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1}X_0 = -2\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$C(sI - A)^{-1}BU(s) = -\frac{1}{(s+1)(s+2)s}$$

La soluzione si ottiene antitrasformando entrambe le espressioni e calcolandole per $t = 4$

$$y(t) = L^{-1} \left\{ -2\frac{1}{(s+1)(s+2)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{-2s-1}{(s+1)(s+2)s} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

$$y(t=4) = -0.5178$$

17.8 Stabilizzazione con osservatore

Esercizio 13 *Data la funzione di trasferimento:*

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+3s-4}$$

determinare un sistema di controllo basato su un osservatore in modo da ottenere un sistema che abbia a ciclo chiuso un polinomio caratteristico pari a $P(s) = s(s+2)$. Scegliere a piacere la dinamica dell'osservatore.

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+3s-4}$$

Possiamo scegliere il tipo di realizzazione. Utilizziamo la forma compagna:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo schema di controllo con osservatore ci richiede di calcolare le matrici K_1, K_2 e di conseguenza calcolare la $F = A - K_2C$ per poter scrivere la dinamica dell'osservatore nella seguente forma:

$$\dot{z} = Fz + Bu + K_2y$$

e poi la controreazione dallo stato stimato come:

$$u = v + K_1z$$

Per K_1 , visto che il sistema è in forma compagna, possiamo semplicemente scrivere

$$K_1 = \begin{bmatrix} a_0 - \alpha_0 & a_1 - \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix}$$

con $a_0 = -4$ e $a_1 = 3$ coefficienti del polinomio caratteristico di $F(s)$ e $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1 = 2$ coefficienti del polinomio caratteristico desiderato $P(s) = s^2 + 2s$.

Per quel che riguarda la dinamica dell'errore (cioè dell'osservatore) l'importante è avere delle costanti di tempo almeno paragonabili con quelle richieste per il sistema. Quindi poniamo, ad esempio,

$$P_e^*(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

La matrice di osservabilità vale:

$$O = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

La cui inversa è

$$O^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

A questo punto una possibile soluzione per K_2 è:

$$K_2 = P_e^*(A) \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

17.9 Proprietà strutturali ed evoluzione libera

Esercizio 14 Determinare le proprietà strutturali (controllabilità e osservabilità) del seguente sistema e calcolare l'uscita $y(t)$ per $t = 5$ sec, $u(t) = 0$ ed $x_0 = (2, 1)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 + 2u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per la controllabilità :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \rho(R) = 2$$

Per l'osservabilità :

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \rho(O) = 1$$

quindi c'è un autovalore osservabile ed uno non osservabile. Nel calcolo dell'evoluzione libera possiamo, pertanto, limitarci a considerare il sottospazio osservabile. Operiamo la trasformazione di Kalman $x = Tz$ con:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

poichè $z = T^{-1}x$, varrà :

$$z_0 = T^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{bmatrix}$$

l'equazione del sottospazio osservabile è :

$$\dot{z}_1 = 2u$$

$$y = z_1$$

la cui soluzione, con $u = 0$ visto che ne calcoliamo l'evoluzione libera, è data da

$$z_1(t) = z_{1,0}$$

$$y(t) = z_1(t) = z_{1,0} = 3$$

e quindi in $t = 5$, come per qualsiasi t , si ha

$$y(5) = 3$$

Il problema può essere risolto anche nei due seguenti modi:

1. Diagonalizzando la matrice A calcolando autovalori ed autovettori
2. Valutando la seguente antitrasformata di Laplace:

$$L^{-1} \{ C(sI - A)^{-1} \} \big|_{t=5} x_0$$

17.10 Assegnazione dinamiche con osservatore

Esercizio 15 Data la seguente funzione di trasferimento, determinare un sistema di controllo con reazione dinamica dall'uscita tale da poter assegnare le dinamiche $(-1, -1, -1)$. Scegliere gli autovalori del sistema d'errore considerando che alla misura dell'uscita è sovrapposto un rumore colorato le cui componenti si trovano al di sopra della pulsazione $= 20\text{rad/sec}$.

$$F(s) = \frac{1 + s}{s^3 + 2s^2 - s + 1}$$

$$F(s) = \frac{1+s}{s^3 + 2s^2 - s + 1}$$

con la forma compagna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

il sistema è per definizione controllabile e osservabile per cui procediamo con il calcolo delle matrici K_1 e K_2 . In particolare, al sistema di errore assegniamo autovalori che siano maggiori di -1 per riuscire ad inseguire lo stato in maniera soddisfacente, ma minori di 20 per filtrare via il rumore che, presente in uscita, tenderebbe ad entrare nell'osservatore. Per esempio scegliamo la terna $(-2, -2, -2)$.

$$P^*(\lambda) = (\lambda + 1)^3$$

$$P_e^*(\lambda) = (\lambda + 2)^3$$

quindi le due matrici dei guadagni saranno:

$$K_1 = -\gamma P^*(A) = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = P_e^*(A)\tilde{\gamma}^T = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 10/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

17.11 Proprietà strutturali ed evoluzione forzata

Esercizio 16 Determinare le proprietà strutturali (controllabilità e osservabilità) del seguente sistema e calcolarne l'uscita $y(t)$ per $t = 3$ sec, $u(t) = 2\delta_{-1}(t)$ ed $x_0 = (0, 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - u \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per la controllabilità :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{rango}(R) = 1$$

quindi c'è un autovalore controllabile ed uno non controllabile. Nel calcolo dell'evoluzione forzata possiamo, pertanto, limitarci a considerare il sottospazio controllabile.

Operiamo la trasformazione di Kalman $x = Tz$ con:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

l'autovalore in 1 è controllabile, quello in zero no.

L'equazione del sottospazio controllabile è :

$$\dot{z}_1 = z_1 + u$$

$$y = -z_1$$

la cui soluzione, visto che ne calcoliamo solo l'evoluzione forzata, è data da

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \int_0^t e^{(t-\tau)} \delta_{-1}(\tau) d\tau = 2e^t \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \\ &= 2e^{-t} [-e^{-\tau}]_0^t = 2e^t (-e^{-t} + 1) = -2 + 2e^t \\ y(t=3) &= -z_1(t=3) = 2 - 2e^3 = -38.17 \end{aligned}$$

Per l'osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{rango}(O) = 1$$

quindi l'autovalore non controllabile è anche non osservabile (altrimenti l'uscita sarebbe risultata 0).

17.12 Proprietà strutturali e stabilizzazione dall'uscita

Esercizio 17 *Determinare le proprietà strutturali (controllabilità e osservabilità) del seguente sistema e stabilire se si possa stabilizzare asintoticamente con una reazione dall'uscita.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 - u \\ y = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Soluzione

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; C = [2 \quad 1]$$

Per la controllabilità:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \text{rango}(R) = 1$$

Per l'osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \text{rango}(O) = 2$$

quindi c'è un autovalore controllabile ed uno non controllabile. Per capire se il sistema è stabilizzabile dall'uscita operiamo la trasformazione di Kalman con $x = Tz$:

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = [1 \quad 2] \end{aligned}$$

Quindi l'autovalore 4 è instabile ma può essere stabilizzato dall'uscita in quanto si controllabile che osservabile, invece l'autovalore in 0 non può essere reso asintoticamente stabile vista la sua non controllabilità. Il sistema, dunque, non è stabilizzabile dall'uscita.

17.13 Stabilizzazione con reazione dinamica dall'uscita

Esercizio 18 Dato il sistema lineare descritto dalla terna di matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

con α e β numeri reali, trovare per quali valori di α e β è possibile costruire un controllore con reazione dall'uscita tale che tutti gli autovalori del processo controllato si trovino in -2 ;

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Per verificare la possibilità di spostare gli autovalori dall'ingresso studiamo la controllabilità del sistema:

$$R = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \beta & 1 - 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\det(R) = 1 - 2\beta + \beta = 1 - \beta$$

che vale 0 per $\beta = 1$. Quindi per $\beta = 1$ il sistema non è controllabile. Tuttavia uno dei due autovalori di A è proprio pari a -2 , come si vede per ispezione diretta della matrice A che è triangolare. Se -2 fosse proprio l'autovalore non controllabile potremmo accettare anche il valore $\beta = 1$. Per verificare la controllabilità di -2 operiamo la decomposizione di Kalman che pone in evidenza i sottospazi controllabile e non:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \tilde{B} = BT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui l'autovalore -2 non risulterebbe controllabile con $\beta = 1$, il che non ci pone problemi. Vediamo adesso, visto che si richiede un controllore dall'uscita, cosa succede per l'osservabilità :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha - 1 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(O) = -2\alpha - \alpha(\alpha - 1) = -\alpha^2 - \alpha$$

che si annulla per $\alpha = 0$ e per $\alpha = -1$. Per poter osservare entrambe le dinamiche dobbiamo escludere entrambi i valori.

Complessivamente la risposta al problema è :

$$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq -1 \end{cases}$$

Un'analisi ancora più accurata potrebbe essere fatta determinando quali dinamiche diventano inosservabili per $\alpha = 0$ e per $\alpha = -1$.

17.14 Evoluzione libera

Esercizio 19 Data la funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2-2s+1}$$

determinare una rappresentazione ingresso-stato-uscita e quindi, su di essa, calcolare l'evoluzione libera dell'uscita $y(t)$ per $t = 2$ sec a partire dalla condizione $y(0) = 3$, $dy(t)/dt|_{t=0} = 0$.

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2-2s+1} = \frac{s+3}{(s-1)^2}$$

Una possibile rappresentazione è quella in forma compagna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ma il calcolo di e^{At} risulta complesso. Più semplice è scrivere il sistema in forma diagonale/Jordan mediante la decomposizione in poli e residui

$$F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}$$

Notiamo che si forma un blocco di Jordan di ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $y = 2x_1 + x_2$. Dalle condizioni iniziali assegnate abbiamo le seguenti condizioni sullo stato

$$\begin{cases} 2x_{1,0} + x_{2,0} = 3 \\ 2\dot{x}_{1,0} + \dot{x}_{2,0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_{1,0} + x_{2,0} = 3 \\ 2(x_{1,0} + x_{2,0}) + x_{2,0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_{1,0} + x_{2,0} = 3 \\ 2x_{1,0} + 3x_{2,0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,0} = -3/4 \\ x_{2,0} = 3/2 \end{cases}$$

Per il calcolo dell'esponenziale procediamo con la decomposizione in somma e l'espansione in serie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1 + A_2$$

$$e^{At} = e^{A_1 t} e^{A_2 t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

quindi

$$e^{At}x_0|_{t=2} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \Big|_{t=2} = -\frac{3}{4}e^t + \frac{3}{2}te^t + \frac{3}{2}e^t \Big|_{t=2} = 27.7090$$

17.15 Stabilizzazione con reazione statica dall'uscita

Esercizio 20 Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3/2 \\ 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

già in forma di Kalman di controllabilità, determinare anche gli autovalori appartenenti al sottospazio non osservabile e trovare il valore K_p di un controllore statico dall'uscita puramente proporzionale tale da ottenere tutte dinamiche a parte reale minore o uguale a -1 .

L'autovalore della parte non controllabile è -1 , quindi possiamo sicuramente continuare con la sintesi e cercare di capire se c'è qualche dinamica non osservabile e che quindi non potrà essere spostata con una

controreazione dall'uscita. Possiamo provare a calcolare, a tal scopo, la funzione di trasferimento sul sottosistema controllabile:

$$\begin{aligned} F(s) &= C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -4 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 4 \\ 1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2-4} = \\ &= \begin{pmatrix} 2s+4 & -8-4s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2-4} = \frac{2(s+2)}{s^2-4} = \frac{2}{s-2} \end{aligned}$$

Poichè compare un solo polo in $+2$ ne deduciamo che questo è sicuramente osservabile. Per sapere se l'autovalore in -1 è osservabile o meno (scomparebbe comunque a causa della non controllabilità) vediamo quanto vale il rango della matrice di osservabilità :

$$O = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \\ 8 & 16 & 9 \end{pmatrix}$$

Il determinante è nullo ma esiste un minore di dimensione 2 con determinante diverso da zero, quindi il rango è 2. A questo punto possiamo affermare la dinamica non osservabile è quella in -2 mentre -1 rimane solamente non controllabile. Per trovare il K_p possiamo adesso calcolare il nuovo polo:

$$W(s) := \frac{2K_p}{s-2+2K_p}$$

il polo si trova dunque in $2-2K_p$ affinché sia a sinistra di -1 basterà porre

$$2-2K_p < -1$$

da cui

$$K_p > 3/2$$

17.16 Analisi e stabilizzazione di un sistema con più ingressi

Esercizio 21 Dato il sistema di equazioni differenziali

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

determinare:

- la controllabilità di tutte le dinamiche dai due ingressi.
- L'osservabilità di tutte le dinamiche dall'uscita.
- La matrice di reazione dallo stato che stabilizza il sistema da uno dei due ingressi e assegna tutte le dinamiche in -3 .
- E' possibile, inoltre, regolare il sistema sull'uscita $y_d = 2$ solo con una controreazione statica dallo stato usando uno dei due ingressi?

Cominciamo con il calcolare la matrice di controllabilità dal primo ingresso utilizzando la prima colonna della matrice B

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Il rango di questa matrice è pari a tre e pertanto il sistema è interamente controllabile da questo ingresso.

Vediamo adesso la controllabilità dal secondo ingresso con la seconda colonna di B .

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il rango di questa seconda matrice è pari a 2 e quindi abbiamo due stati controllabili e uno non controllabile. Troviamo gli autovalori corrispondenti operando una trasformazione di Kalman di controllabilità con la matrice:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

la cui inversa vale

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

In questa nuova base il sistema si esprimerà come

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = T^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

essendo B_2 la seconda colonna della matrice B . Notiamo la presenza degli zeri strutturali e che l'autovalore non controllabile vale $\lambda_3 = -2$. I due autovalori controllabili saranno, invece, dati dalle radici di

$$\det(\lambda I - \tilde{A}_{11}) = 0$$

e valgono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

Per quanto riguarda l'osservabilità scriviamo la matrice di osservabilità

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e notiamo che il suo rango è solo uno. Troviamo l'unico autovalore osservabile tramite il criterio di Popov-Belevitch-Hautus (vedi il paragrafo 8.8): proviamo prima con l'autovalore $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avendo una colonna di zeri il rango è 2 (minore di 3) e questo ci fa concludere l'inosservabilità di questo autovalore. Proviamo adesso con $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il rango di questa matrice è ancora 2 e pertanto anche questo autovalore non è quello osservabile. Di conseguenza, l'ultimo autovalore ($\lambda_3 = -2$) sarà quello osservabile.

Per risolvere il terzo punto dobbiamo utilizzare obbligatoriamente il primo ingresso, l'unico da cui possiamo spostare tutti gli autovalori. Utilizziamo il polinomio caratteristico desiderato

$$P^*(\lambda) = (\lambda + 3)^3$$

e, applicando la formula di Ackerman, troviamo

$$K = -\gamma P^*(\lambda) = \begin{bmatrix} -64 & -7 & -28 \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda la controreazione statica dallo stato per regolare il sistema sul punto $y_d = 2$ dobbiamo innanzitutto verificarne la possibilità andando a controllare il rango di

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questo è massimo quindi possiamo procedere a calcolare lo stato di equilibrio

$$\begin{bmatrix} x_{eq} \\ u_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Notiamo subito che il valore di u_{eq} è diverso da zero e pertanto possiamo concludere che non è possibile regolare il sistema sul punto 2 solo con un guadagno.

17.17 Analisi di un sistema con più ingressi

Esercizio 22 Dato il sistema di equazioni differenziali

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

determinare:

- la controllabilità di tutte le dinamiche per ogni ingresso.
- L'osservabilità di tutte le dinamiche da ogni uscita.
- Se è possibile stabilizzare il sistema con una reazione dallo stato attraverso uno degli ingressi
- Se è possibile stabilizzare il sistema con una qualsiasi reazione dall'uscite
- La funzione di trasferimento tra il secondo ingresso e l'uscita.
- L'evoluzione libera della prima uscita per $t=3$ sec, con $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Innanzitutto, notiamo che il sistema è partizionabile in due blocchi disaccoppiati. Il primo contiene le due dinamiche in 2 e il secondo le dinamiche in -1, 1 e 3. Notiamo anche che il primo blocco è in forma canonica di Jordan mentre il secondo è comunque una cascata di tre poli. In quanto tale, questo secondo blocco sarà completamente controllabile se è influenzata dall'ingresso la dinamica in 3.

Per quanto riguarda il primo ingresso abbiamo un 1 in seconda posizione che ci garantisce la controllabilità del blocco di Jordan e un 1 in ultima posizione che ci fornisce la piena controllabilità della cascata. Si può concludere che il sistema è completamente controllabile dal primo ingresso.

Per quanto riguarda il secondo ingresso abbiamo che solo una dinamica del blocco di Jordan è controllabile mentre la seconda non lo è. I due 1 in terza e quarta posizione ci garantiranno, inoltre, la controllabilità delle dinamiche in -1 e 1 ma non quella in 3. Il sistema non solo non è pienamente controllabile da questo ingresso ma non è neanche stabilizzabile a causa della instabilità delle due dinamiche non controllabili.

Per l'uscita, notiamo che il blocco di Jordan è completamente osservabile e che altrettanto si può dire per la cascata. Infatti, basta la presenza dell'1 in terza posizione. A questo punto il sistema è completamente osservabile. Questo significa che, utilizzando il primo ingresso, è possibile portare tutti gli autovalori in qualsiasi posizione del piano.

la funzione di trasferimento tra il secondo ingresso e l'uscita si calcola sommando due funzioni di trasferimento. la prima dovuta all'autovalore controllabile in 2, e pari a

$$F_1(s) = \frac{1}{s-2},$$

la seconda relativa al sottosistema delle equazioni 3 e 4:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che fornisce

$$F_2(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})\hat{B} = \frac{2s+1}{s^2-1}.$$

Per cui:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{2s+1}{s^2-1}$$

Per l'evoluzione libera, notiamo ancora una volta che abbiamo la somma di due componenti: la prima relativa al solo autovalore 2, la seconda relativa al blocco formato dalle equazioni 3 e 4. Pertanto avremo:

$$y(t) = 1 \cdot e^{2t} \cdot 1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per calcolare l'esponenziale di matrice possiamo sfruttare il fatto di aver già calcolato l'espressione $(sI - \hat{A})^{-1}$ e fare semplicemente una trasformata di Laplace inversa:

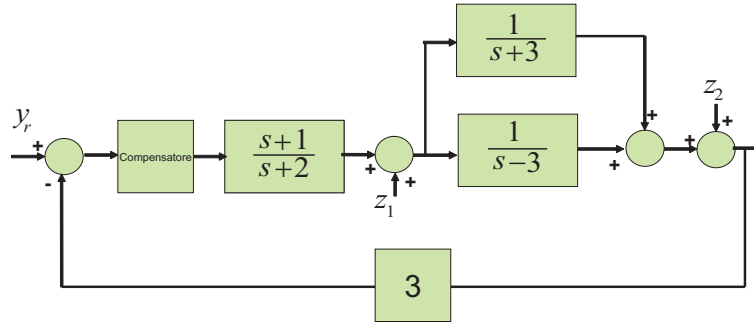
$$e^{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t} = e^{\hat{A}t} = L^{-1} \left\{ (sI - \hat{A}) \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2-1} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \sinh(t) \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

con $\sinh(t) = (e^t - e^{-t})/2$. Pertanto

$$y(3) = e^{2 \cdot 3} + e^{-3} = 403.47.$$

17.18 Problema di regolazione

Esercizio 23 Impostare un problema di regolazione per il seguente sistema di controllo:



e determinare il compensatore tale che l'errore possa andare asintoticamente a zero quando

$$\begin{aligned} y_r &= k_1 t \\ z_1 &= k_2 \sin(3t) \\ z_2 &= k_3 t. \end{aligned}$$

Cominciamo con il determinare la matrice dell'esosistema S :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto si possono determinare le matrici del sistema di errore. Con pochi passaggi si ottiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w \\ e &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} w \end{aligned}$$

Verifichiamo adesso la risolubilità del problema.

Per la controllabilità della coppia (A, B) si vede che la matrice di controllabilità

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 14 \\ 1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ha rango massimo.

Per l'osservabilità controlliamo che la coppia

$$\begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & Q \end{pmatrix}$$

sia osservabile. In effetti, la matrice di osservabilità viene di rango massimo.

A questo punto, per la risolubilità del problema di regolazione, controlliamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

abbia rango massimo per $\lambda = \{0, 3j\}$.

Per trovare una soluzione al problema dovremo, infine, risolvere le equazioni del regolatore.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \\ \pi_5 & \pi_6 & \pi_7 & \pi_8 \\ \pi_9 & \pi_{10} & \pi_{11} & \pi_{12} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \\ \pi_5 & \pi_6 & \pi_7 & \pi_8 \\ \pi_9 & \pi_{10} & \pi_{11} & \pi_{12} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} S = \begin{pmatrix} -P \\ -Q \end{pmatrix}.$$

Bibliografia

- [1] G. Bianchini, Università degli studi di Siena, *Progetto dei Sistemi di Controllo*
- [2] Raymond H. Kwong, University of Toronto, *Linear Quadratic Optimal Control*