Modelli per Sistemi a Tempo Discreto

Lezione 24

24 maggio 2015

Ing. Chiara Foglietta

chiara.foglietta@uniroma3.it

Fondamenti di Automatica
Ingegneria Elettronica
A.A. 2014 - 2015
Università degli Studi “Roma TRE”

Agenda

Equazioni lineari alle differenze I

Si assuma di avere una sequenza di dati discreta del tipo $e_k = e(kT), k = 0, 1, 2, \ldots$. e di volerli elaborare per ottenere una seconda sequenza discreta u_k, funzione di e_k. Il risultato dell'elaborazione u_k viene fornito negli stessi istanti discreti nei quali si acquisisce un nuovo campione. In forma simbolica questa operazione si può descrivere come:

$$u_k = f(e_0, e_1, \ldots, e_k; u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$$

Assumendo che la funzione $f(\cdot)$ sia lineare e dipendente solo da un numero finito di valori passati di e e di u, si può scrivere che

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \cdots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \cdots + b_m$$

Questa equazione è detta equazione lineare alle differenze di ordine n, e rappresenta l'analogo dell'equazione differenziale lineare del caso tempo-continuo.

Equazioni lineari alle differenze II

Il termine “equazione alle differenze” deriva dal fatto che è possibile riscrivere l'equazione precedente usando le differenze così definite:

$$
\begin{aligned}
\nabla u_k &= u_k - u_{k-1} && \text{differenza di ordine 1} \\
\nabla^2 u_k &= \nabla u_k - \nabla u_{k-1} && \text{differenza di ordine 2} \\
\nabla^3 u_k &= \nabla^2 u_k - \nabla^2 u_{k-1} && \text{differenza di ordine 3} \\
&\dots && \dots \\
\nabla^n u_k &= \nabla^{n-1} u_k - \nabla^{n-1} u_{k-1} && \text{differenza di ordine n}
\end{aligned}
$$

Se i valori dei parametri a_j e b_j nelle equazioni differenziali sono costanti, allora si ha un'equazione alle differenze a coefficienti costanti, che costituisce il modello dinamico di più ampio interesse nel contesto del controllo digitale.

Esempio

Se per esempio si ha un'equazione del tipo

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + b_0 e_k$$

sostituendo a u_k, u_{k-1}, u_{k-2} i termini calcolati in funzione delle loro differenze

$$\begin{aligned} u_k &= u_k \\ u_{k-1} &= u_k - \triangledown u_k \\ u_{k-2} &= u_k - 2 \triangledown u_k + \triangledown^2 u_k \end{aligned}$$

Si ottiene l'equazione

$$a_2 \triangledown^2 u_k - (a_1 + 2a_2) \triangledown u_k + (a_2 + a_1 + 1) u_k = b_0 e_k$$

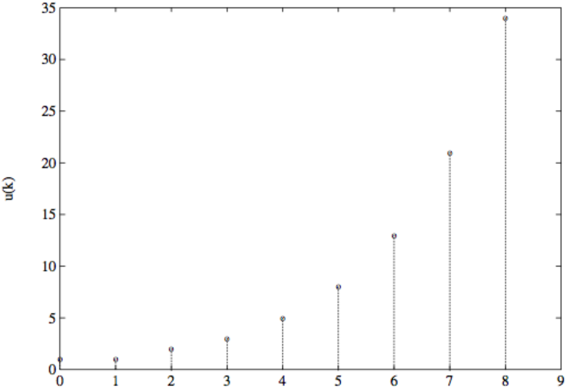
Soluzione di eq. alle differenze a coeff. costanti I

É necessario conoscere le condizioni iniziali, cioè i valori di partenza dei segnali e_k, u_k e l'istante iniziale di tempo. Per esempio, si supponga di voler risolvere l'equazione alle differenze del secondo ordine

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$$

a partire dall'istante iniziale $k = 2$. Non sono presenti ingressi, e quindi per calcolare i valori di $u_k, k \geq 2$, si devono conoscere solamente le condizioni iniziali u_0 e u_1. Si supponga che $u_0 = u_1 = 1$.

Soluzione di eq. alle differenze a coeff. costanti II



I valori della successione u_k crescono con il tempo.

Soluzione elementare tipo z^k I

Se si considera l'equazione precedente, in cui si sostituisce $u_k = cz^k$, si ottiene:

$$u_k = cz^k = cz^{k-1} + cz^{k-2}$$

Dividendo per cz^k, supposti entrambi non nulli, si ottiene

$$1 = z^{-1} + z^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad z^2 - z - 1 = 0$$

Tale polinomio in z del secondo ordine, detto *polinomio caratteristico*, presenta due radici in $z_{1,2} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2}$. Per ottenere i valori di c_1 e c_2 basta imporre specifiche condizioni iniziali

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = u_0 & = 1 \\ c_1 z_1 + c_2 z_2 & = u_1 & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 & = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ c_2 & = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Poichè $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, il termine $c_1 z_1^k$ cresce illimitatamente al crescere di k, affermando l'instabilità del sistema.

Soluzione generalizzata

L'equazione polinomiale in z che si ottiene dopo la sostituzione $u_k = z^k$ è detta equazione caratteristica dell'equazione alle differenze.
Se una delle radici dell'equazione caratteristica ha modulo maggiore di 1 (cioè è esterno del cerchio unitario centrato nell'origine del piano complesso z), la corrispondente equazione alle differenze è *instabile*, cioè la sua soluzione divergerà al crescere del tempo er qualsiasi condizione iniziale finita.
Se tutte le radici dell'equazione caratteristica sono entro il cerchio unitario, allora la corrispondente equazione alle differenze è *stabile*, cioè la sua soluzione convergerà a zero al crescere del tempo per ogni condizione iniziale finita.

La Trasformata $\mathcal{Z}$ I

La trasformata $\mathcal{Z}$ è un metodo operazionale utilizzato per studiare i sistemi discreti. Essa rappresenta essenzialmente l'analogo della trasformata di Laplace per i sistemi continui.

Trasformata $\mathcal{Z}$

Sia data una sequenza di valori $x_k \in \mathbb{R}$, definita per $k = 0, 1, 2, \dots$ e nulla per $k < 0$. La $\mathcal{Z}$-trasformata unilatera della sequenza x_k è la funzione di variabile complessa z definita come segue:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x_k] = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots + +x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

La Trasformata $\mathcal{Z}$ II

Nel caso in cui la sequenza di valori x_k sia ottenuta campionando uniformemente con periodo T un segnale continuo descritto dalla funzione $x(t)$, $t \geq 0$, si avrà che $x_k = x(kT)$ e in corrispondenza si scriverà

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

dove viene omesso il parametro che indica il periodo di campionamento T, da cui dipendono i valori dei campioni della sequenza, cioè i coefficienti della serie.

Si noti che spesso si usa anche la notazione:

$$X(z) = \mathcal{Z}\left[X(s)\right]$$

dove $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ intendendo con questo

$$X(z) = \mathcal{Z}\left[\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]\big|_{t=kT}\right\}\right]$$

ossia la $\mathcal{Z}$-trasformata della sequenza ottenuta campionando con periodo T l'antitrasformata di Laplace di $X(s)$.

Funzione razionale fratta I

La funzione $X(s)$ assume in generale un'espressione razionale fratta del tipo

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad m \leq n$$

La posizione dei poli e degli zeri di $X(z)$ nel piano complesso z determina le caratteristiche dell'andamento di $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$, cioè della sequenza dei valori temporali.

Funzione razionale fratta II

Si noti che si può raccogliere il termine z^n sia a numeratore che a denominatore si ottiene

$$X(z) = \frac{z^n \left(b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m z^{-n}\right)}{z^n \left(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}\right)}$$
$$= \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m-1)} + \cdots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

in cui compaiono solo potenze di z^{-1}. Questa forma è più comunemente utilizzata poiché z^{-1} è interpretabile come un operatore di ritardo unitario, cioè

$$z^{-1} x_k = x_{k-1}$$

Impulso discreto unitario

Sia data la funzione, detta anche funzione delta di Kronecker $\delta_0(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Applicando la definizione di $\mathcal{Z}$- trasformata si ottiene

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ &= 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

Gradino unitario

Sia data la funzione gradino unitario

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Applicando la definizione di $\mathcal{Z}$- trasformata di ottiene

$$\begin{aligned} H(z) = \mathcal{Z}[h(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

La serie è convergente per $|z| > 1$.

Funzione esponenziale

Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

dove a è una costante reale o complessa. Applicando la definizione di $\mathcal{Z}$- trasformata di ottiene

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\left[e^{-at}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

La serie è convergente per $|z| > e^{-Re(a)T}$.

Funzione sinusoidale

Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dalle formule di Eulero è noto che

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

Applicando il risultato precedente e la proprietà di linearità della $\mathcal{Z}$- trasformata si ottiene

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}\left[sin(\omega t)\right] &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{\left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right)z^{-1}}{1 - \left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right)z^{-1+z^{-2}}}\right) \\ &= \frac{z^{-1}\sin(\omega T)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega T) + z^{-2}} = \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} \end{aligned}$$

Linearità

La $\mathcal{Z}$-trasformata è un operatore lineare. Infatti date due funzioni $f(k)$ e $g(k)$ con $\mathcal{Z}$-trasformate $F(z)$ e $G(z)$ rispettivamente, e date due costanti a e b, allora la funzione

$$x(k) = af(k) + bg(k)$$

Ha $\mathcal{Z}$-trasformata data da

$$X(z) = aF(z) + bG(z)$$

Teorema della traslazione nel tempo

Data la funzione $x(t)$, nulla per $t < 0$, sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$. Per $n = 1, 2, \dots,$ si ha che:

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n}X(z)$$

per il ritardo temporale

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$

per l'anticipo temporale

Teorema del valore iniziale

Sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(t)$. Se esiste il $\lim_{z\to\infty} X(z)$, allora il valore iniziale $x(0)$ di $x(t)$ è dato da:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Il comportamento del segnale per $t = 0$ o $k = 0$ può quindi essere valutato determinando il comportamento di $X(z)$ per $z \to \infty$.

Teorema del valore finale

Sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(t)$ e siano tutti i poli di $X(z)$ all'interno del cerchio unitario, con al più un polo semplice per $z = 1$. Allora il valore finale di $x(k)$, cioè il valore di $x(k)$ per $k \to \infty$, è dato da:

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \left[(1 - z^{-1})X(z)\right]$$

Il comportamento del segnale per $t = 0$ o $k = 0$ può quindi essere valutato determinando il comportamento di $X(z)$ per $z \to \infty$.

L'antitrasformata $\mathcal{Z}$ I

Per poter utilizzare appieno lo strumento delle $\mathcal{Z}$-trasformate, si devono avere strumenti matematici per passare da una $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ alla corrispondente sequenza x_k e possibilmente alla funzione continua $x(t)$ cui corrisponde per campionamento x_k. Tale operazione prende il nome di antitrasformata $\mathcal{Z}$.

É bene sottolineare che mediante l'antitrasformata $\mathcal{Z}$ si ottiene in modo univoco la sequenza x_k dei dati agli istanti di campionamento, ma non la $x(t)$. In altre parole, con l'antitrasformta si possono calcolare i valori di una funzione $x(t)$ solo in specifici istanti di tempo, mentre non si conosce l'andamento della $x(t)$ negli istanti intermedi.

L'antitrasformata $\mathcal{Z}$ II

Esistono diversi metodi per l'antitrasformare una funzione $X(z)$:

1. metodo della lunga divisione
2. metodo computazionale
3. metodo della scomposizione in fratti semplici
4. metodo dell'integrale di inversione (o dei residui)

Metodo della lunga divisione

Con questa tecnica si espande la $X(z)$ in una serie di potenze di z^{-1}. Il metodo viene applicato quando non si riescono a trovare espressioni in forma chiusa per $x(k)$ e nel caso in cui si sia interessati a ricavare solo un numero finito di $x(k)$.
Se la $X(z)$ è espressa tramite una funzione razionale fratta, se ne ottiene l'espressione come serie di potenze di z^{-1} semplicemente dividendo il polinomio a numeratore per il polinomio a denominatore con la regola di Euclide. I coefficienti dei termini $z^{-k}(k = 0, 1, 2, \dots)$ sono i valori $x(kT)$ della sequenza temporale. Si ha quindi

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

da cui si ricava che

$$x(0) = c_0, \qquad x(T) = c_1, \qquad x(2T) = c_2, \dots$$

$$X(z) = \frac{3}{(1-z^{-1})^2(1-0.5\,z^{-1})} = \frac{6}{2-5\,z^{-1}+4\,z^{-2}-z^{-3}} = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{h=0}^{\infty} q_h z^{-h}$$

$$\begin{array}{rllllll|l}
N(z) = & 6 & & & & & & \underline{D(z)} \\
 & 6 & -15z^{-1} & +12z^{-2} & -3z^{-3} & & & 3 = q_0 \\
R_0(z) = & & +15z^{-1} & -12z^{-2} & +3z^{-3} & & & \\
 & & +15z^{-1} & -37.5z^{-2} & +30z^{-3} & -7.5z^{-4} & & 7.5 = q_1 \\
R_1(z) = & & & +25.5z^{-2} & -27z^{-3} & +7.5z^{-4} & & \\
 & & & +25.5z^{-2} & -63.75z^{-3} & +51z^{-4} & -12.75z^{-5} & 12.75 = q_2 \\
R_2(z) = & & & & +36.75z^{-3} & -43.5z^{-4} & +12.75z^{-5} & \\
 & & & & & & \dots & \dots
\end{array}$$

trovando i quozienti q_i in sequenza e procedendo con la divisione dei resti $R_i(z)$, si ottiene

$$X(z) = 3 + 7.5\,z^{-1} + 12.75\,z^{-2} + 18.375\,z^{-3} + \dots$$

$$x(0) = 3, \qquad x(1) = 7.5, \qquad x(2) = 12.75, \qquad x(3) = 18.375, \qquad \dots$$

Metodo computazionale I

Questa tecnica viene utilizzata per calcolare tramite elaboratore digitale i valori numerici della successione $x(k)(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Si consideri per esempio la $\mathcal{Z}$-trasformata .

$$X(z) = \frac{3}{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1} \quad (\cdot\, U(z) = 1 \text{ impulso discreto unitario})$$

$$X(z) = \frac{3}{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1} U(z)$$

$$X(z)\left(1 - 2.5z^{-1} + 2z^{-2} - 0.5z^{-3}\right) = 3\,U(z)$$

$$x(k) = 2.5\,x(k-1) - 2\,x(k-2) + 0.5\,x(k-3) + 3\,u(k)$$

Posto $u(0) = 1$ e $u(k) = 0$ per $k > 0$, ed essendo $x(-1) = x(-2) = x(-3) = 0$, si ha in modo ricorsivo (equazione alle differenze)

$$\begin{aligned}
x(0) &= 3 \\
x(1) &= 2.5\,x(0) = 7.5 \\
x(2) &= 2.5\,x(1) - 2\,x(0) = 12.75 \\
x(3) &= 2.5\,x(2) - 2\,x(1) + 0.5\,x(0) = 18.375 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Scomposizione in fratti semplici I

Questa tecnica è l'analogo nel discreto della tecnica della scomposizione in fratti semplici utilizzata con le trasformate di Laplace. Infatti, poichè la $\mathcal{Z}$-trasformata è un operatore lineare, è possibile scomporre l'espressione di una $X(z)$ in termini elementari, dai quali si può ricavare l'antitrasformata tramite tabelle, e sommare i vari elementi così ottenuti.
Data una funzione

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Scomposizione in fratti semplici II

Si devono dapprima calcolare le radici del polinomio $D(z)$ a denominatore, quindi i residui. Alla fine si ottenie:

$$X(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z - p_i}$$

dove

$$c_i = [(z - p_i)X(z)]_{z=p_i}$$

Esempio

Esempio di scomposizione: Si consideri la funzione

$$X(z) = \frac{1}{z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4} = \frac{1}{(z+2)^2(z+1)^2}$$

Si ha

$$X(z) = \frac{c_{11}}{(z+2)^2} + \frac{c_{12}}{z+2} + \frac{c_{21}}{(z+1)^2} + \frac{c_{22}}{z+1}$$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \left[(z+2)^2 X(z)\right]_{z=-2} = 1 \\
c_{12} &= \left[\frac{d}{dz}(z+2)^2 X(z)\right]_{z=-2} = 2 \\
c_{21} &= \left[(z+1)^2 X(z)\right]_{z=-1} = 1 \\
c_{22} &= \left[\frac{d}{dz}(z+1)^2 X(z)\right]_{z=-1} = -2
\end{aligned}$$

Metodo dell'integrale di inversione

Questo è il metodo di antitrasformazione più generale, basato sulla teoria delle funzioni di variabile complessa. Si può infatti dimostrare che vale la seguente uguaglianza:

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j}\int_C X(z)z^{k-1}dz, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

dove C è una curva chiusa nel piano complesso che racchiude tutti i poli della funzione $X(z)$. Per il calcolo dell'integrale si può applicare il teorema dei residui, ossia:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C X(z)z^{k-1}dz = \sum_{i=1}^{m} k_i$$

dove k_i è il residuo di $X(z)z^{k-1}$ nel polo $z = z_i$ di $X(z)z^{k-1}$.

Esempio 1 (poli semplici): Calcolare $x(kT)$ da

$$X(z) = \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$\Rightarrow \quad X(z)z^{k-1} = \frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^{2}\left[\text{residuo di } \frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})} \text{ in } z = p_i\right] = k_1 + k_2$$

dove i residui sono

$$k_1 = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right] = 1$$

$$k_2 = \lim_{z\to e^{-aT}}\left[(z-e^{-aT})\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right] = -e^{-akT}$$

Relazione tra piano s e piano z I

La trasformata di Laplace $X_c(s)$ del segnale campionato è legata alla trasformata $X(z)$ della sequenza di campioni $x(kT)$ dalla relazione

$$X_c(s) = X(z)|_{z=e^{sT}}$$

Le variabili complesse s e z sono legate fra di loro dalla relazione fondamentale

$$z = e^{sT}$$

che pone in corrispondenza i punti dei due piani complessi s e z.

Relazione tra piano s e piano z II

Siano σ e ω, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria della variabile complessa s:

$$s = \sigma + j\omega$$

Quindi si ha che

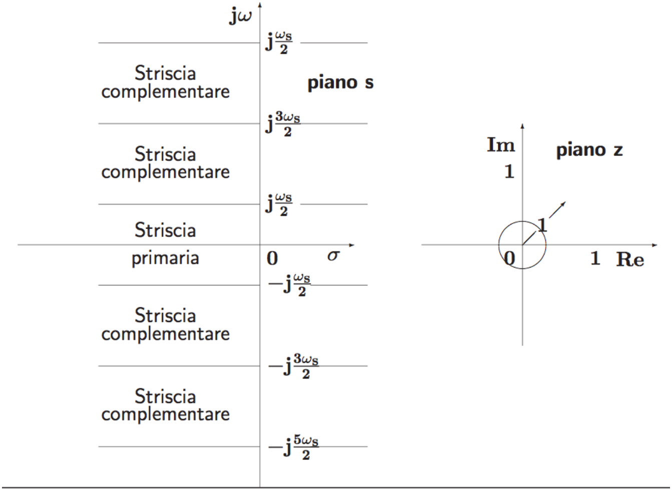
$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{jT\left(\omega+\frac{2k\pi}{T}\right)}$$

Relazione tra piano s e piano z III

Si ha che i punti del piano s la cui pulsazione differisce di un multiplo intero della pulsazione di campionamento $2\pi/T$ vengono trasformati nello stesso punto nel piano z. Quindi la relazione non è biunivoca: ogni punto nel piano z è in corrispondenza con infiniti punti nel piano s. Infatti i punti nel piano s a parte reale negativa ($\sigma < 0$) sono in corrispondenza con i punti del piano z all'interno del cerchio unitario

$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

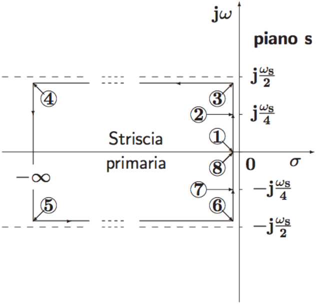
Relazione tra piano s e piano z IV

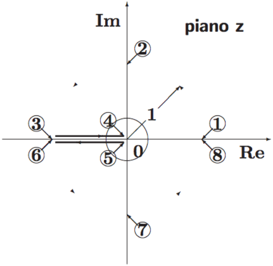


Relazione tra piano s e piano z V

I punti sull'asse immaginario ($\sigma = 0$) vengono mappati sul cerchio unitario ($|z| = 1$), quelli a parte reale positiva ($\sigma > 0$) vengono mappati all'esterno del cerchio unitario ($|z| > 1$). Si nota anche che la fase di z è $Arg[z] = \omega T$, per cui al variare di ω da $-\omega_s/2$ a $\omega_s/2$ la fase di z varia da $-\pi$ a π. É quindi possibile suddividere il piano s in strisce orizzontali di ampiezza ω, tali che la striscia sia in corrispondenza biunivoca con tutto il piano z. La striscia di piano s delimitata dalle rette orizzontali $s = j\omega_s/2$ e $s = -j\omega_s/2$ prende il nome di striscia primaria. Tutte le altre strisce prendono il nome di strisce complementari.

Relazione tra piano s e piano z VI

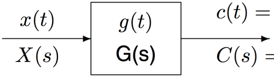




Relazione tra piano s e piano z VII

In particolare, l'origine $s = 0$ è in corrispondenza del punto $z = 1$ (1); i punti $s = \pm j\omega_s/4$ (2 e 7) sono in corrispondenza con i punti $z = \pm j$; i punti $s = \pm j\omega_s/2$ (punti 3 e 6) sono in corrispondenza con il punto $z = -1$; i punti della striscia primaria all'infinito $s = -\infty \pm j\omega_s/2$ (4 e 5) sono in corrispondenza con l'origine $z = 0$ del piano z.

Si ricorda che nel caso tempo-continuo la risposta di un sistema dinamico lineare tempo-invariante, a partire dalle condizioni di quiete, è data dall'integrale di convoluzione della risposta all'impulso $g(t)$ con il segnale di ingresso $x(t)$ e che tale relazione in termini di trasformate di Laplace si riduce al prodotto algebrico delle rispettive trasformate.



$$c(t) = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$$

$$C(s) = G(s)\,X(s)$$

Sommatoria di convoluzione II

Per il caso discreto vale dunque una proprietà simile all'integrale di convoluzione del caso continuo:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

essendo $y(t)$, $x(t)$ e $g(t)$, rispettivamente, l'uscita, l'ingresso e la risposta all'impulso.

Sommatoria di convoluzione III

Poichè il sistema descritto dalla $G(s)$ è un sistema lineare continuo, e poichè al suo ingresso è presente una sequenza di impulsi $x_c(t) = x(kT)\delta(t - kT), k = 0, 1, 2, \dots$ la risposta $y(t)$ è data dalla somma delle risposte ai singoli impulsi. In altri termini si ha che

$$y(t) = \sum_{h=0}^{k} g(t - hT)x(hT) \qquad 0 \leq t < (k + 1)T$$

e volendo calcolare il valore $y(t)$ negli istanti di campionamento $t = kT$, si ha che

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{k} x(kT - hT)g(hT)$$

che è detta *somma di convoluzione*.

Funzione di trasferimento discreta I

Si introduce ora la nozione di funzione di trasferimento nel caso tempo-discreto. Applicando la definizione di $\mathcal{Z}$-trasformata della sequenza

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)$$

Si ha

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(mT)x(hT)z^{-m-h} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m}\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)z^{-h} = G(z)X(z) \end{aligned}$$

Funzione di trasferimento discreta II

dove si è posto $m = k - h$, e $G(z)$ è la $\mathcal{Z}$-trasformata di $g(t)$

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(mT) z^{-m}$$

che esprime la $\mathcal{Z}$-trasformata $Y(z)$ dell'uscita del sistema in funzione della $\mathcal{Z}$-trasformata del segnale presente all'ingresso $X(z)$ a partire da condizioni iniziali di quiete.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$