SISTEMI A SEGNALI CAMPIONATI (2)

•La Z-trasformata
•Passaggio da F(s) a F(z)
•Equazioni alle differenze
•Andamenti caratteristici della risposta impulsiva
•Mapping S$\rightarrow$ Z
•Trasformazioni approssimate
•Metodi di sintesi
•Regolatore PID discreto
•Scelta del tempo di campionamento
•Controllore Dead-Beat
•Identificazione Parametrica

LA Z-TRASFORMATA

Analoga a quella di Laplace ma per segnali a tempo-discreto (equaz. alle differenze)

$$y^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y(i)\delta(t - iT_C) \qquad Y^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} y(i)\cdot 1\cdot e^{-siT_C}$$

Poniamo $z = e^{sT_C}$

$$\boxed{Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y(i)z^{-i}}$$ Trasformata Z

• z^{-1} : operatore di ritardo elementare.
Si trasformano sia segnali che risposte impulsive.

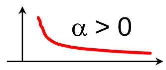
Considerando solo un tipo di segnale (l'impulso), possiamo specializzare la trasf. di Laplace

ALCUNE Z - TRASFORMATE

$$y(t) = e^{-\alpha t}$$

$$y(iT_C) = e^{-i\alpha T_C}$$

$$Y(z) = 1 + \left(z e^{\alpha T_C}\right)^{-1} + \left(z e^{\alpha T_C}\right)^{-2} + \ldots\ldots$$



$$Y(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

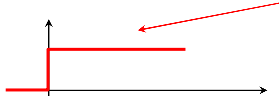
$$\sum_{i=0}^{\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

$|x| > 1$ ← Analogo dell'ascissa di convergenza

$$Y(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T_C} z^{-1}} = \boxed{\frac{1}{1-\beta z^{-1}} = \frac{z}{z-\beta}}$$

ALCUNE Z - TRASFORMATE

Se $\alpha = 0$



$$Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Se $\alpha = j\omega$ (2 poli)

$$y(t) = \sin\varpi t$$

numeri

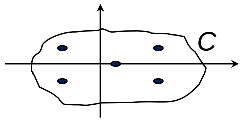
$$Y(z) = \frac{\sin\varpi T_C \cdot z}{z^2 - 2\cos\varpi T_C \cdot z + 1}$$

INVERSIONE Z - TRASFORMATA

$$F(z) \rightarrow f(kT_c)$$

Per il theo. di Shannon il passaggio a f(t) non è univoco

$$f(kT_c) = \oint_C F(z)\, z^{k-1} dz$$



più pratico:

$$\sum f(kT_c) z^{-k} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_m z^{-m}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$f_0 D(z) + f_1 z^{-1} D(z) + \cdots = N(z)$$

uguagliando le potenze di z^{-k}

$$b_0 = a_0 f_0 \qquad f_0 = \frac{b_0}{a_0}$$

$$b_1 = a_0 f_1 + a_1 f_0 \qquad f_1 = \ldots$$

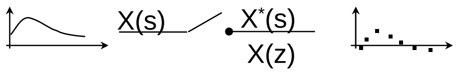
$$b_2 = a_0 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_0$$

$\boxed{\sum \text{indici} = \# \text{ equazioni}}$

Sistema triangolare si risolve subito.
Dà in sequenza tutti i campioni f_k.

DA X(S) A X(Z): METODO "ESATTO"

$$X(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2).....}{(s - p_1)(s - p_2).....}$$



espansione in frazioni parziali (caso con poli semplici)

$$= \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \ldots. \quad \rightarrow \quad \frac{R_1}{1 - \beta_1 z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \beta_2 z^{-1}} + \ldots. \quad (\beta_i = e^{p_i T_C})$$

Sottinteso un passaggio nel dominio del tempo.

Il numero di poli resta invariato.
Vengono proiettati da S in Z come $z = e^{sT_C}$

Il n° di zeri cambia e vale N o N-1, in genere.

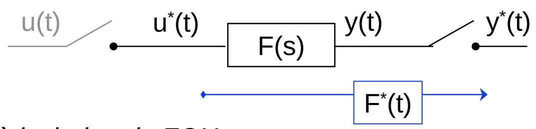
Osservazione Importante $\quad \bar{s}$: complex $\qquad \bar{s} = \sigma + j\omega$

$$e^{[s + jk\omega_C]T_C} = e^{sT_C} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T_C} \cdot T_C} = e^{sT_C} \cdot e^{j2\pi k} = e^{sT_C}$$

Quindi il piano S risulta diviso in fasce orizzontali di altezza ω_C, tutte uguali fra di loro. Cfr. theo di Shannon

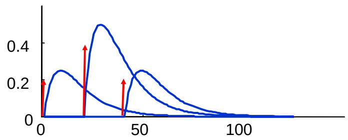
RISPOSTA A SEGNALI CAMPIONATI

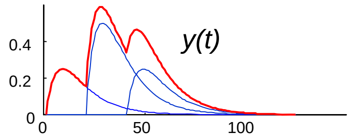
Come risponde un sistema a <u>tempo continuo</u> ad un segnale campionato



F(s) può includere lo ZOH

u(t)* : una successione di impulsi ➡ *y(t)* : somma di risposte impulsive *f(t)*



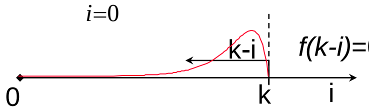


$$u^*(t)=\sum_{i=0}^{\infty}u(i)\delta(t-iT_C)\qquad y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}f(t-iT_C)u(i)$$

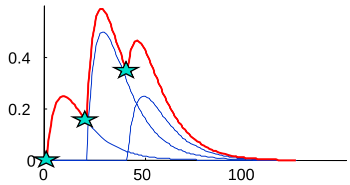
FDT A TEMPO DISCRETO

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}f(t-iT_C)u(i)$$

$$y^*(k)=\sum_{i=0}^{k/\infty}f[(k-i)T_C]u(i)\delta(t-kT_C)$$



f(k-i)=0 per i>k



L-trasformando e "con facili calcoli"

$$Y^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}y(k)e^{-skT_C}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}f[(k-i)T_C]u(i)\cdot e^{-skT_C}=$$

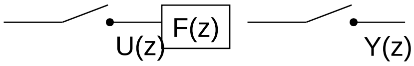
$$k=l+i\ ,\ k-i=l \qquad =\underbrace{\sum_{l=0}^{\infty}f(l)e^{-slT_C}}_{F^*(s)}\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}u(i)\cdot e^{-siT_C}}_{U^*(s)}$$

$Y^*(s) = F^*(s) \cdot U^*(s)$

Y(z)=F(z) U(z)

Tra le uscite dei due campionatori vale una relazione analoga alle usuali funzioni di trasferimento

DETERMINAZIONE DI F(Z)



$$Y(z) = F(z) \cdot U(z)$$

$$X(z) = X^*(s)\Big|_{z=e^{sT_C}} = \sum X(i) e^{-isT_C}\Big|_{z=e^{sT_C}} \qquad X = \{U, Y, F\}$$

F(z) si ottiene : $F(z) = \sum f(l) e^{-lsT_C}$

- espandendo F(s) in frazioni parziali . $F(s) = \sum \dfrac{R_i}{s - p_i}$, $F(z) = \sum \dfrac{R_i}{1 - \beta_i z^{-i}}$

  Metodo “impulse invariant”, conserva
  i campioni della risp. impulsiva, ma non la $W(j\omega)$

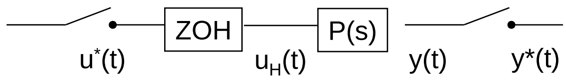
- da apposite tavole
- con sostituzioni approssimate

  impiegato anche per il progetto
  di filtri digitali $F(z) = F(s)\Big|_{s=Q(z)}$ e.g. $s = \dfrac{2}{T_C} \dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ $\equiv$

- dalle equazioni differenziali

$$\frac{d}{dt} \cong \frac{\Delta}{\Delta t}$$

CON ORGANO DI TENUTA



$$Y(z) = Z[ZOH(s) \cdot P(s)] \cdot U(z) = Z\left[\frac{1 - e^{-sT_C}}{s} P(s)\right] \cdot U(z) =$$

$$= Z\left[\frac{P(s)}{s}\right] - Z\left[e^{-sT_c} \frac{P(s)}{s}\right] =$$

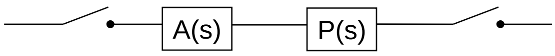
$$= \left(1 - z^{-1}\right) Z\left[\frac{P(s)}{s}\right] \cdot U(z)$$

questa si ottiene con
i metodi precedenti

PROPRIETÀ – 1

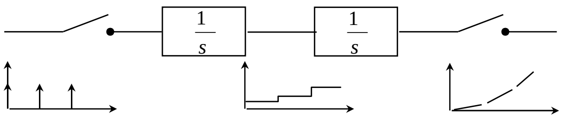
$$\boxed{Z[A(s)+P(s)] = Z[A(s)] + Z[P(s)]}$$

$$\boxed{Z[A(s)\cdot P(s)] \neq Z[A(s)]\cdot Z[P(s)]}$$

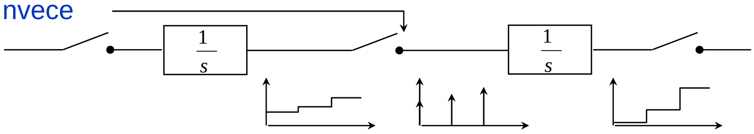


Occorre trasformare
A(s)·P(s) insieme

Spiegazione intuitiva



Invece



PROPRIETÀ – 2

• Causalità : dall'equazione alle differenze $y_k = a_1 y_{k-1} + ... + b_0 u_k$

Poiché y_k deve dipendere al più da u_k , nel numeratore di G(z) non ci possono essere potenze positive

• Valore finale $\boxed{\lim_{i\to\infty} y(i) = \lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)Y(z)}$

$$y(z) = \cancel{y(0)} + z^{-1}\cancel{y(1)} + z^{-2}\cancel{y(2)} + .. + z^{-i+1}\cancel{y(i-1)} + z^{-i}y(i)$$

$$z^{-1}y(z) = 0 + \cancel{z^{-1}y(0)} + \cancel{z^{-2}}y(1) + \cancel{z^{-3}}y(2) + .. + \cancel{z^{-i}}y(i-1)$$

$$y(i) \quad i\to\infty$$

Proprietà – 3

• Guadagno di una FdT : valore finale della risposta ad un gradino (escluse le azioni integrali)

$$k=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}\frac{b_0+..+b_m z^{-m}}{a_0+..a_m z^{-m}}=\boxed{\frac{\sum b_i}{\sum a_i}}$$

• Azione integrale $\frac{1}{s}\equiv\frac{1}{1-z^{-1}}$

$$G(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}G'(z)$$ un polo in z = 1

• Ritardi puri

$$G(z)=z^{-d}G'(z)$$ d poli nell'origine

Equazioni alle Differenze

Una FdT campionata (un sistema a t. discreto) equivale a una equazione alle differenze.

$$G(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_m z^{-m}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots . a_m z^{-m}}=\frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$Y(z)\left[1+a_1 z^{-1}+\ldots . a_m z^{-m}\right]=U(z)\left[b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_m z^{-m}\right]$$

$$y_k+a_1 y_{k-1}+\ldots .+a_m y_{k-m}=b_0 u_k+b_1 u_{k-1}+\ldots .+b_m u_{k-m}$$

INFATTI…

Scriviamo ∞ equazioni $y_k + a_1 y_{k-1} + ... + a_m y_{k-m} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + ... + b_m u_{k-m}$

k=0, moltipl. per e^{-0sTc} $\quad [y_0 + y_{-1}a_1 + ... = u_0 b_0 + ...] \cdot e^{-0sT_C}$

k=1, moltipl. per e^{-1sTc} $\quad [y_1 + y_0 a_1 + ... = u_1 b_0 + ...] \cdot e^{-sT_C}$

k=2, … $\quad [y_2 + y_1 a_1 + ... = u_2 b_0 + ...] \cdot e^{-2sT_C}$

$$\equiv$$

generica $\quad [y_k + y_{k-1} a_1 + ... = u_k b_0 + ...] \cdot e^{-ksT_C}$ $\quad \Sigma$

somma per colonna $\quad \sum y(i) e^{-isT_C} + \bar{a}_1 \sum y(i-1) e^{-isT_C} + ...$

raccogliere e^{-ksTc} $\quad a_1 e^{-sT_C} \sum y(i-1) e^{-(i-1)sT_C}$

trasformare $\quad Y(z) + z^{-1} Y(z) + ...$

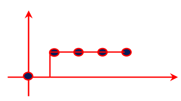
SOLUZIONE DELL'EQ. ALLE DIFFERENZE

$$\boxed{F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}} \qquad Y(z)\left(1 - 0.9z^{-1}\right) = z^{-1} U(z)$$

$$\boxed{Y_{k+1} = 0.9 Y_k + U_k}$$

$C.I. = y_0 = 0$

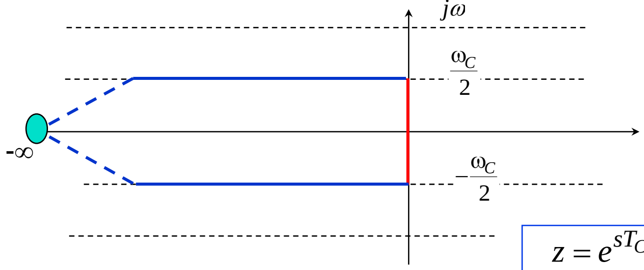
input: $U_k = \{0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots\}$



k =	y_k	u_k	y_{k+1}
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	1	1.9
3	1.9	1	2.8

La risposta impulsiva si ha con U_K={1, 0, 0, 0,…}
quella al gradino con U_K={1, 1, 1, 1,…}

MAPPING $S \to Z$



■ $s = \pm j\frac{\omega_C}{2} + \sigma$

■ $s = j\omega + 0$

● $s = -\infty$

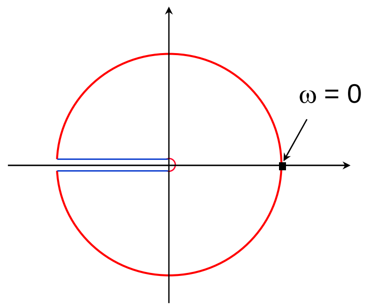
$z = e^{sT_C} = e^{\sigma T_C} \cdot e^{j\omega T_C}$

modulo angolo

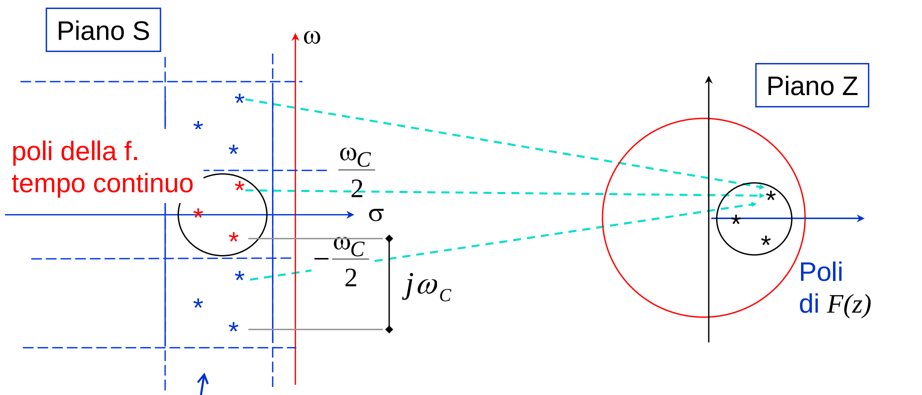
■ $z = e^{\sigma T_C} \cdot e^{\pm j\frac{\omega_C}{2}\frac{2\pi}{\omega_C}} = e^{\sigma T_C} \cdot e^{\pm j\pi}$

■ $z = 1 \cdot e^{j\omega T_C} = e^{j\omega\frac{2\pi}{\omega_C}} = e^{j2\pi\frac{\omega}{\omega_C}}$

● $z = e^{-\infty} = 0$



MAPPING S → Z (2)

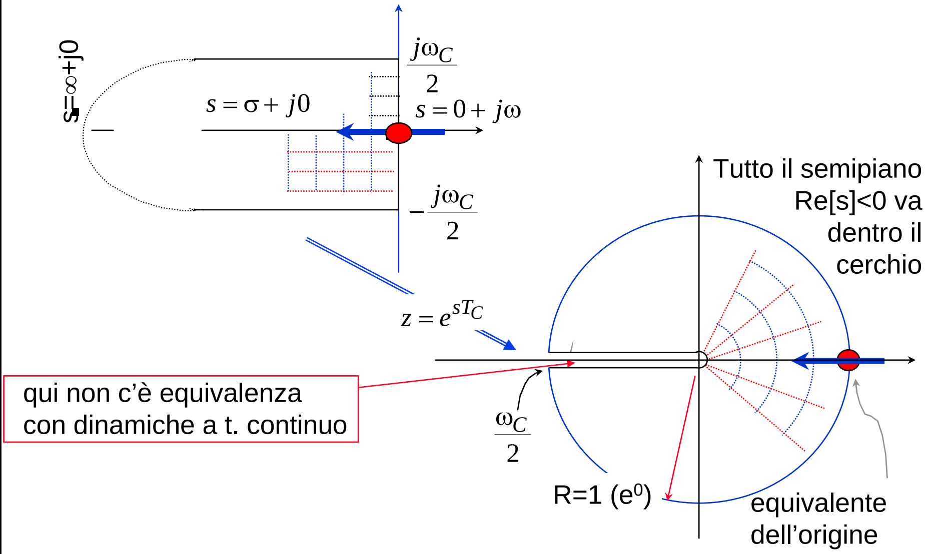


∞ poli generati dal campionamento

(poli di $\sum y_i e^{-siT_C}$)

Tutti i poli distanti tra loro $jk\omega_C$ danno lo stesso valore di z

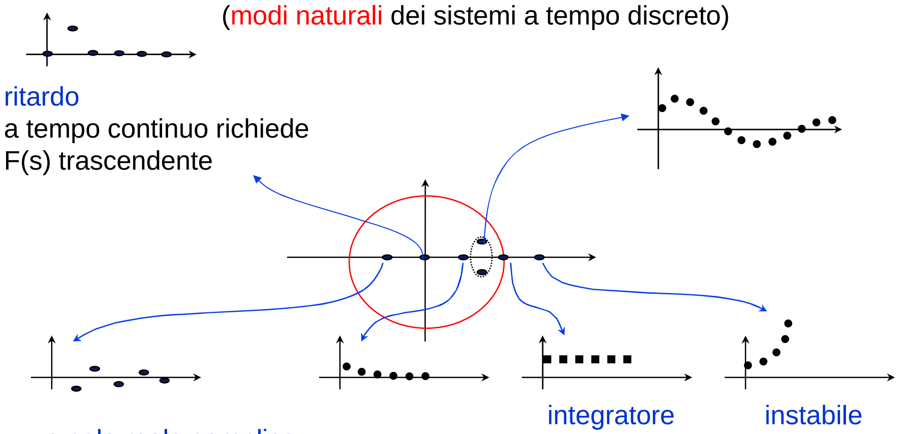
MAPPING S → Z (3)



I sistemi a tempo discreto stabili hanno i poli di F(z) dentro al cerchio di raggio unitario

TIPICHE RISPOSTE IMPULSIVE

(modi naturali dei sistemi a tempo discreto)



un polo reale semplice
non ha corrispettivo a tempo continuo
Invece un polo doppio sì.

Si possono tutte ricavare come
risposte impulsive di semplici sistemi

Metodi di Trasformazione Approx

Il metodo di trasformazione "esatto":

a) Conserva intatti i campioni della risposta impulsiva;
b) Altera la risposta in frequenza
c) E' scomodo

Esistono metodi più pratici che sfruttano il fatto che T_C è "piccolo".

ad esempio $$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + ... + b_0 u(t)$$

$y(t) \cong y(kT_C)$ Per $t \simeq T_C$ e T_C piccolo

$$\dot{y}(t) \cong \frac{y(kT_C) - y[(k-1)T_C]}{T_C} \qquad \ddot{y}(t) \cong \frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{T_C{}^2}$$

ovvero $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \Rightarrow \dot{y}(t) = u(t) \qquad \frac{y(k+1) - y(k)}{T_C} = u(k+1)$$

$$Y(z)\left[1 - z^{-1}\right] = T_C \cdot U(z) \qquad \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T_C}{1 - z^{-1}} \qquad s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T_C}$$

Altri metodi (approx)

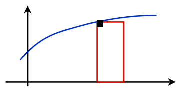
$$\boxed{\frac{1}{s}}$$

Rappresenta un'integrazione, può essere approssimato in più modi :

Forward integration

$$y_{k+1} = y_k + u_k T_C \qquad Y(z) = \left[Y(z) + U(z) T_C\right] z^{-1}$$

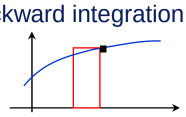
$$Y(z) = \frac{T_C z^{-1}}{1 - z^{-1}} U(z) \qquad s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T_C z^{-1}}$$



Backward integration

$$y_{k+1} = y_k + u_{k+1} T_C$$

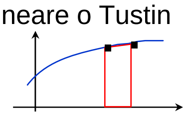
$$Y(z) = \frac{T_C}{1 - z^{-1}} U(z) \qquad s \cong \frac{1}{T_C}\left(1 - z^{-1}\right)$$



Bilineare o Tustin

$$y_{k+1} = y_k + \frac{u_k + u_{k+1}}{2} T_C$$

$$Y(z) = \frac{T_C}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} U(z) \qquad s \cong \frac{2}{T_C} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$



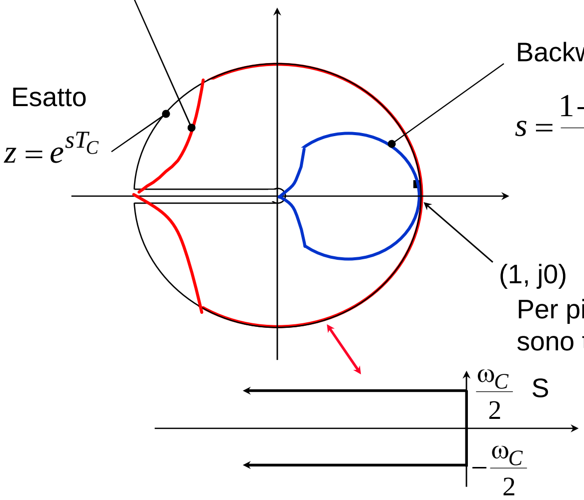
Sono tutte approssimazioni di $s = \frac{1}{T_C} \log(z)$

Confronti

Tustin $s = \frac{2}{T_C}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \longrightarrow z = \frac{2+T_C s}{2-T_C s}$

Backward difference

$s = \frac{1-z^{-1}}{T_C} \longrightarrow z = \frac{1}{1-sT_C}$



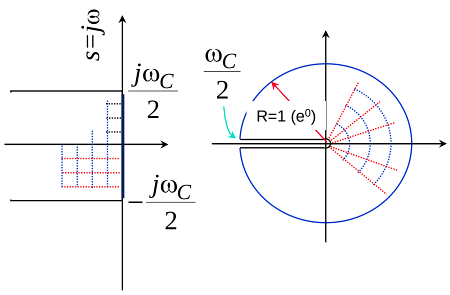
Per piccoli valori di $|sT_c|$ sono tutti equivalenti

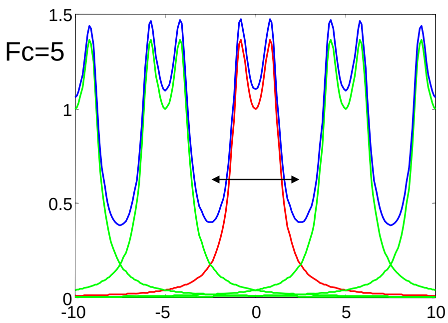
Risposta in Frequenza

In Laplace la risposta in frequenza è $F(j\omega) = [F(s)]_{s=j\omega}$

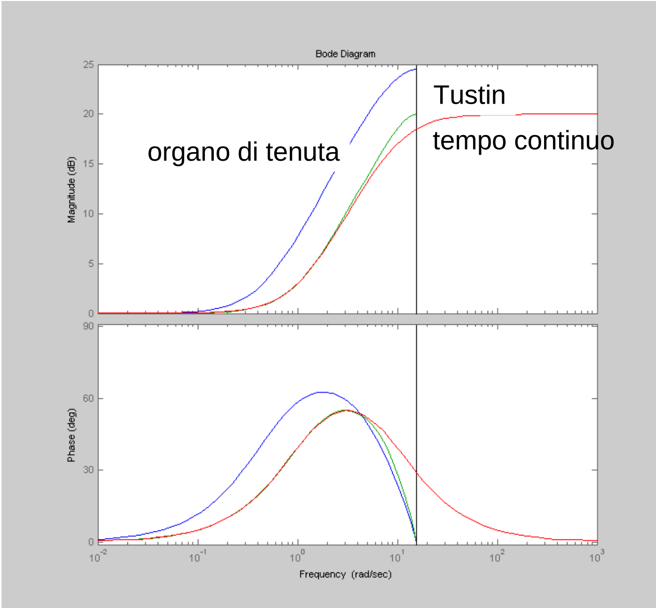
in Z è $F(j\Omega) = [F(z)]_{|z|=1}$

Infatti la retta $j\omega$ si mappa sulla circonferenza, compiendo <u>infiniti</u> giri quindi la risposta armonica è somma di infinite risposte traslate di kF_C





RISULTATI PER UN'ANTICIPATRICE



RICHIAMI

Sistema dinamico lineare parametri concentrati

Equazione differenziale

Funzione di trasferimento ($\mathscr{L}$- trasf.) F(s)

Risposta impulsiva f(t)

Campionamento (T_c)

$z = e^{sT_c}$

$\sum f(kT_c) z^{-k}$

F(z) → [caratteristiche]

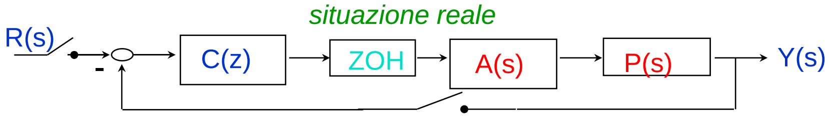
Equazioni alle differenze

Sintesi

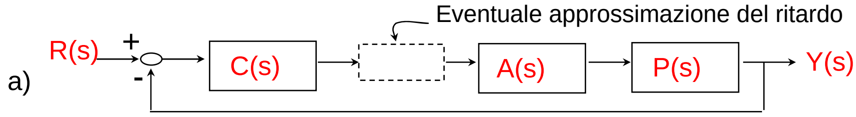
schematizzazioni
metodi
approssimazioni

Schemi per la sintesi

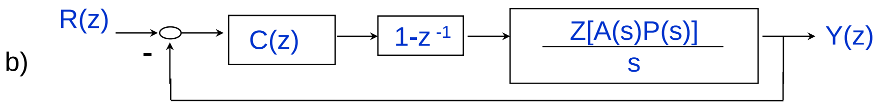
situazione reale



a) Trasposizione della sintesi nel t. continuo
b) Sintesi direttamente nel t. discreto



C(z) ≅ implementazione di C(s)



a) Va bene con T_c “abbastanza piccoli”

b) Richiede specifiche “discretizzate”

Scelta del Tc

Operazione critica. Scelta tipica: $f_c \geq 10 B_{-3db}$

Se è possibile è meglio che sia un po’ più alta
(20 ÷ 30 B_{-3db}),
specie se non si hanno elevati margini di fase.

Altro modo di scegliere Tc
(o verificare la scelta precedente):

- Eseguire il progetto sui diagrammi di Bode
- Scegliere Tc in modo che introduzione dello ZOH sia compatibile con il margine di fase (impiegarne un modello approssimato a t. continuo)

Scelta del Tc (2)

Attenzione un T_c troppo piccolo
provoca inconvenienti con le derivate,
specie con parole di memoria di lunghezza ridotta.

esempio

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{y_k - y_{k-1}}{T_c} \qquad\qquad y(t) = 0.1t$$

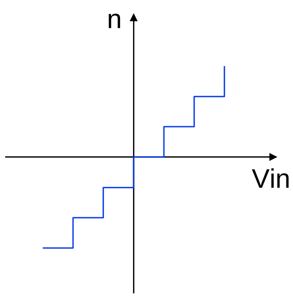
$$T_c = 0.1 \qquad y(100) - y(99.9) = 10.00 - 9.99$$
$$T_c = 0.01 \qquad y(100) - y(99.99) = 10.000 - 9.999$$

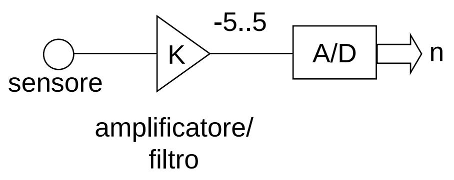
e ciò è vero anche in floating-point.

REM: l'uscita dei convertitori A/D è in virgola fissa

Il convertitore A/D

- E' l'organo fisico che effetta il campionamento (nel tempo) e la quantizzazione (nell'ampiezza) del segnale.
- Il range di ingresso in genere è [0 .. 5]V oppure [-5 .. +5]V
- La risoluzione dell'ingresso è legata al numero N di bit del numero prodotto. E' pari a range/2^N.
- Valori tipici di N da 8 a 12 e più bit.





Regolatore PID discreto

$$c(t)=k_p e(t)+k_I\int_0^t e(\tau)+k_D\frac{de}{dt}$$

$$c(i)=k_p e(i)+\frac{k_D}{T_c}\left[e(i)-e(i-1)\right]+$$
$$+\frac{T_c}{2}k_i\left\{\left[e(0)+e(1)\right]+\left[e(1)+e(2)\right]+\cdots+\left[e(i)+e(i-1)\right]\right\}$$

Un metodo abbastanza generale e utile: le somme telescopiche

$$c(i+1)=k_p e(i+1)+\frac{k_D}{T_c}\left[e(i+1)-e(i)\right]+\frac{T_c}{2}k_i\left\{\left[e(0)+e(1)\right]+\right.$$
$$\left.+\left[e(1)+e(2)\right]+\cdots+\left[e(i)+e(i-1)\right]+\left[e(i+1)+e(i)\right]\right\}$$

$$c(i+1)-c(i)=k_p\left[e(i+1)+e(i)\right]+$$
$$+\frac{k_D}{T_c}\left[e(i+1)-2e(i)+e(i-1)\right]+\frac{T_c}{2}k_i\left[e(i+1)+e(i)\right]$$

$$c(i+1)=c(i)+\Delta=c(i)+a_1e(i+1)+a_2e(i)+a_3e(i-1)$$

PID: Esempio di programma

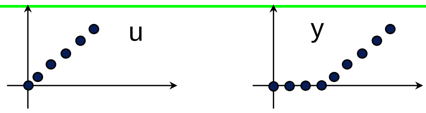
```
    {inizializzazione}
            E1:=0 ;  E2:=0 ;  C0:=0

    {ciclo di controllo}
REPEAT
   * INP_ANALG(E0);
     C1:=0 + A1*E0 + A2*E1 + A3*E2;
   * OUT_ANALG(C1);
     C0:=C1;
     E2:=E1 ;  E1:=E0 ;            E2 si perde e viene rimpiazzata
   * WAIT (TC);
 UNTIL FALSE {FOREVER} ;
```

* istruzioni "insolite"

WAIT(TC) : aspetta TC secondi dall'ultima chiamata.

INP / OUT _ANALG : chiamano i convertitori A/D e D/A.

CONTROLLO DEAD - BEAT

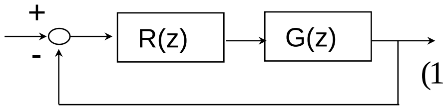


y(k) = u(k - n)

w(z) = z^{-n}

n = min = ?

Riproduzione esatta, anche se ritardata



$$(1+RG)w = RG$$

$$w = \frac{RG}{1+RG}$$

$$R = \frac{w}{1-w}\cdot\frac{1}{G}$$

Importante: zeri e poli di G(z) stabili

$$w = z^{-n} \qquad R = \frac{1}{z^n+1}\,\frac{D_G}{N_G}$$

se G(t) causale, 1/G non lo è

grado numeratore R(z) $= g[N_R] = g[D_G]$

grado denominatore R(z) $= g[DR] = n + g[NG]$

$g[DR] = g[NR] \;\rightarrow\; n_{min} = g[DG]\text{-}g[NG]$

IDENTIFICAZIONE DEI PARAMETRI

Sistema : equazione delle differenze

$$y(i) = -a_1 y(i-1) - \cdots - a_n y(i-n) + b_0 u(i) + \cdots + b_n y(i-m)$$

parametri $\vartheta = [-a_1 \ \cdots \ -a_n, b_0 \ \cdots \ b_n]^T$ n° = 2n+1

misure all'istante i $q_i = [y(i-1) \ \cdots \ y(i-n), u(i) \ \cdots \ u(i-n)]^T$

$$y(i) = q_i^T \cdot \vartheta$$

Preleviamo le misure q_i per i = 0 ÷ 2n

$$\begin{aligned} y(0) &= q_0^T \cdot \vartheta \\ y(1) &= q_1^T \cdot \vartheta \\ &\vdots \\ y(2n) &= q_{2n}^T \cdot \vartheta \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \bar{y} = Q \cdot \vartheta \qquad Q = \begin{bmatrix} - q_0^T - \\ - q_1^T - \\ - q_{2n}^T - \end{bmatrix}$$

(2n + 1)
x
(2n + 1)

Se $|Q| \neq 0$ (dipende dall'eccitazione di S) $\exists$ Q^{-1} $\vartheta = Q^{-1} \cdot \bar{y}$

IDENTIF. DEI PARAMETRI (2)

Se c'è rumore sulle misure ?

Si usano
i minimi quadrati

$$\begin{cases} y_k = -y_{k-1}a_1 - y_{k-2}a_2 + \cdots + u_k b_k + u_k b_{k-1} + \cdots + \varepsilon_k \\ \quad \vdots \\ y_{k+M} = -y_{k+M-1}a_1 - \cdots + \cdots + \varepsilon_{k+M} \end{cases}$$

$$\boxed{y = Q\vartheta + \varepsilon}$$

cerchiamo $\hat{\vartheta} \; : \; \sum \varepsilon_{\mathrm{i}}^2 = \min$

$$\varepsilon = y - Q\vartheta \qquad \sum \varepsilon_{\mathrm{i}}^2 = \varepsilon^T \cdot \varepsilon = (y - Q\varepsilon)^T (y - Q\varepsilon)$$

Derivando ε risp. a ϑ e uguagliando a zero

$$\hat{\vartheta} = \underbrace{\left(Q^T Q\right)^{-1} Q^T}\, y$$

pseudo inversa di Q