Funzione Descrittiva

Sistemi con semplici Non Linearità

Sistemi Non Lineari

- Le caratteristiche dipendono dall'ampiezza dei segnali
- Lo studio è molto più complesso
- Difficile anche imporre specifiche

→ Non si applica la sovrapposizione

Obiettivi minimi:

- Verificare la presenza di oscillazioni (cicli limite)
- Calcolare i valori di regime

Ipotesi semplificative della presente trattazione

- Una sola NL SISO nel loop
- La caratteristica è algebrica non differenziale → Non dipende da ω

(Rif. MARRO: Controlli Automatici)

CICLI LIMITE

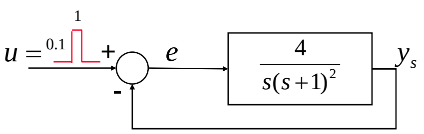
- Si ha un ciclo limite quando l'andamento delle variabili di stato di un sistema autonomo (u=0) è periodico.
  E' definito (almeno) da ampiezza e frequenza.
  Es.: orbita di un satellite.

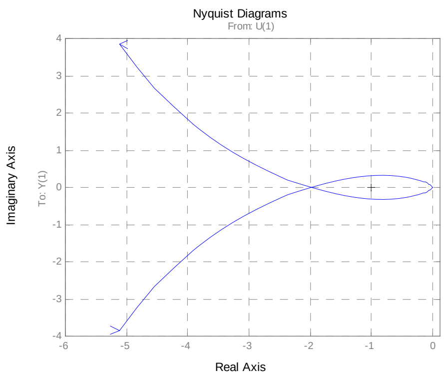
- Ciclo limite stabile: x(t), dopo una piccola perturbazione istantanea, torna sul ciclo limite.

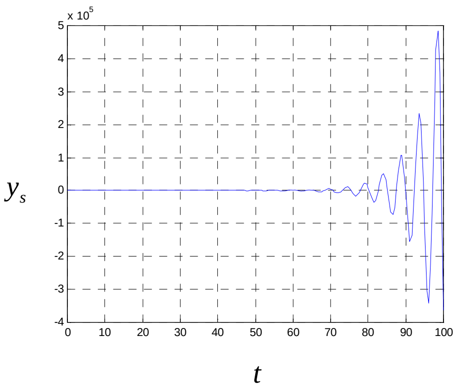
- Ciclo limite instabile: x(t), …, si allontana.

- I cicli limite si possono avere solo con sistemi non lineari.

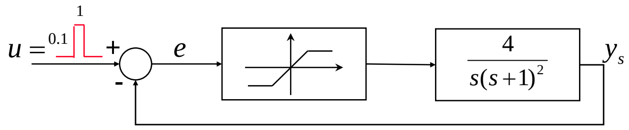
OSCILLAZIONI IN UN SISTEMA LINEARE

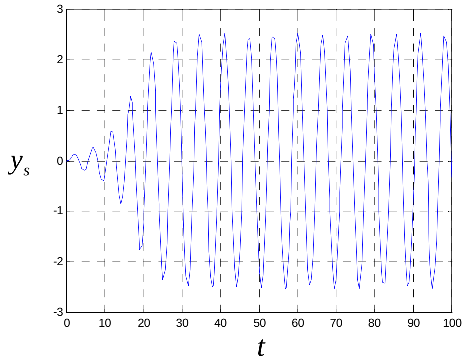




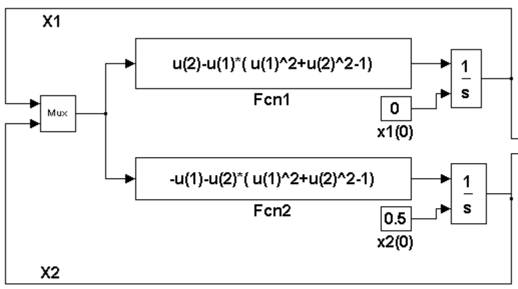


Ciclo Limite in un Sistema Non Lineare

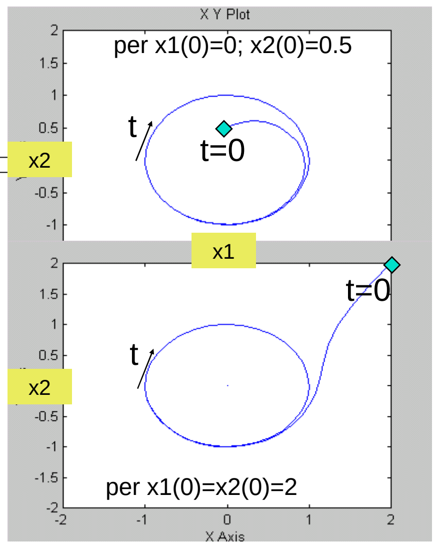




Esempio di C.L. stabile



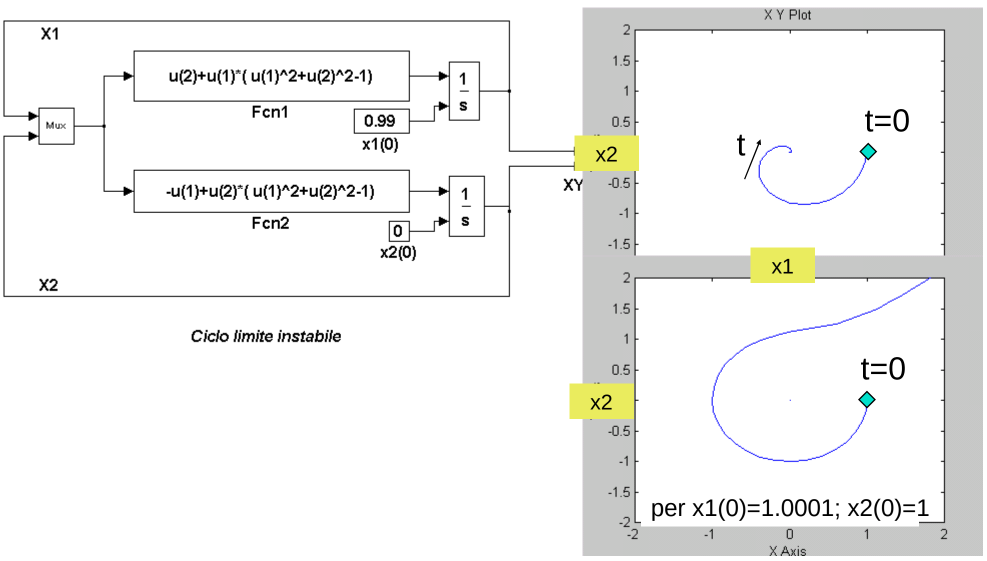
Ciclo limite stabile



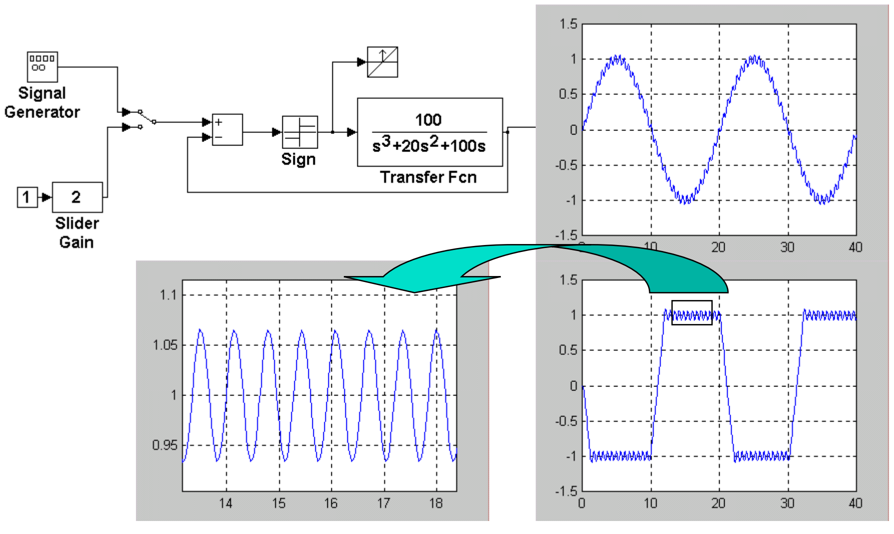
n.b.: $x_1^2+x_2^2=1$

n.b. 2: Il sistema è instabile,
il ciclo limite (C.L.) è stabile

CICLO LIMITE INSTABILE



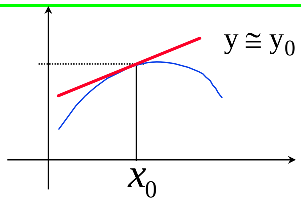
C.L. IN UN SIST. A CONTROREAZIONE



Linearizzazioni

Taylor

• esatta per $\Delta x \to 0$



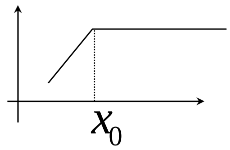
$$y \cong y_0 + f'(x_0)\Delta x$$

• adatta $\forall$ tipo di $\Delta x(t)$

Si trascurano le derivate >1

• Cade se Δx grande, ad es. oscillazioni

• Non utilizzabile se $\nexists\, f'(x)$



Linearizzazioni (2)

Armonica

$$x \sin \omega t \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow K x \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x \sin \omega t \longrightarrow \boxed{NL} \longrightarrow \Sigma Y_i(x)\sin[i\omega t + \varphi_i(x)] \cong Y_0 + Y_1(x)\sin[\omega t + \varphi_1(x)]$$

• Non legata ad un punto di lavoro
ma ad un tipo di ingresso

• Valida per ogni ampiezza

Si trascurano le armoniche >1

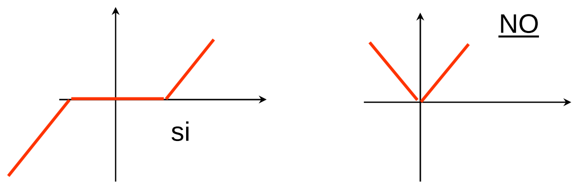
Sono entrambi sviluppi in serie di funzioni ortogonali

Metodo della funzione descrittiva

Ipotesi :

- Ingresso del sistema nullo
- Caratteristiche NL antisimmetriche

$$Y_0 \equiv 0$$



- la parte lineare è "passa basso"

attenua le armoniche superiori

$$y(t) \cong Y_1(x)\sin\left[\omega t + \varphi_1(x)\right]$$

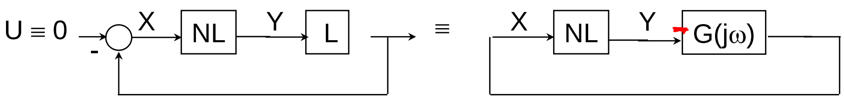
Definizione

- Si definisce "FUNZIONE DESCRITTIVA", la fcn complessa:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{x} \cdot Y_1(x) \cdot e^{j\varphi_1(x)}}$$

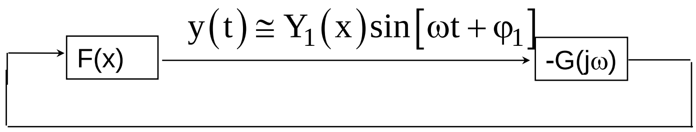
- Si approssimano le oscillazioni (cicli limite) con andamenti sinusoidali

- F(x) quasi una funzione di trasferimento,
  un guadagno variabile



METODO DELLA FUNZIONE DESCRITTIVA

per la determinazione dei cicli limite



$$X\sin\omega t \xrightarrow{F(x)} Y_1(x)\sin[\omega t + \varphi_1] \xrightarrow{-G(j\,\omega)} X\sin\omega t$$

Condizioni per un ciclo limite $\bar{x}, \bar{\omega}$

$$\begin{cases} |G(j\bar{\omega})| \cdot Y_1(\bar{x}) = \bar{x} \\ \angle G(j\bar{\omega}) + \varphi_1(\bar{x}) = 180° \end{cases} \Rightarrow \quad |G| = \frac{1}{|F|}$$

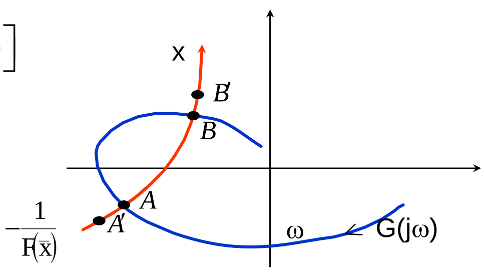
METODO DELLA FUNZIONE DESCRITTIVA

Interpretazione Grafica

$$\arg[G(j\bar{\omega})] = 180° - \arg[F(\bar{x})]$$

$$|G(J\bar{\omega})| = \frac{1}{|F(\bar{x})|}$$

$$-\frac{1}{F(\bar{x})} = G(j\bar{\omega})$$



Quando c'è intersezione c'è un ciclo limite

A : C.L. instabile se $\bar{x}$ diminuisce (A'), occorrerebbe |G|maggiore

B : C.L. stabile se $\bar{x}$ aumenta (B') con |G|=cost, può ridiminuire e tornare a B

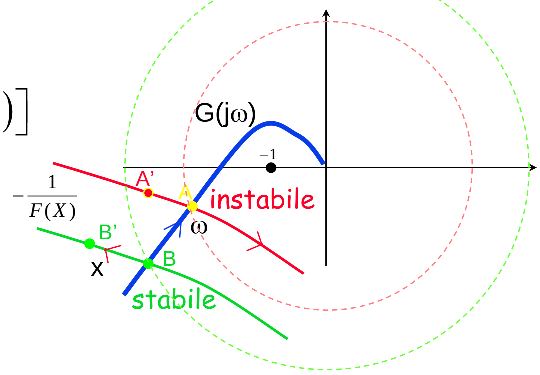
Metodo della funzione descrittiva

Interpretazione Grafica

$$\arg\left[G(j\bar{\omega})\right] = 180° - \arg\left[F(\bar{x})\right]$$

$$\left|G(J\bar{\omega})\right| = \frac{1}{\left|F(\bar{x})\right|}$$

$$-\frac{1}{F(\bar{x})} = G(j\bar{\omega})$$



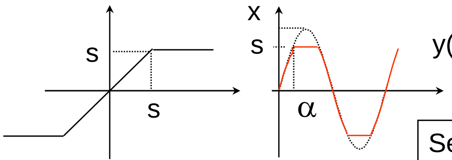
Quando c'è intersezione c'è un ciclo limite

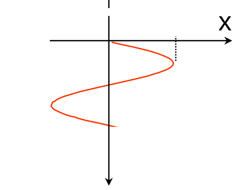
A : C.L. instabile se x diminuisce (A'), F(x)* diminuisce $\Rightarrow$ x continua a diminuire

B : C.L. stabile se x aumenta (B') F(x)* diminuisce $\Rightarrow$ effetto stabilizzante $\Rightarrow$ x ridiminuisce e torna a B

(*) i.e. il guadagno d'anello

Esempio di Calcolo (saturazione)





Se $x \le s$
F(x) ≡ 1

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{s}{x}\right)$$

Occorre calcolare la 1ª armonica di y(t)

$$F(x) = \frac{1}{x}\left[b_1(x) + ja_1(x)\right]$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\sin(\omega t)\,d\omega t$$

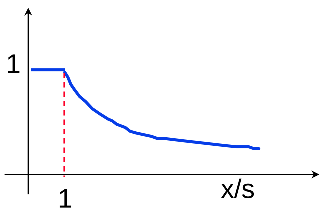
$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\cos(\omega t)\,d\omega t$$

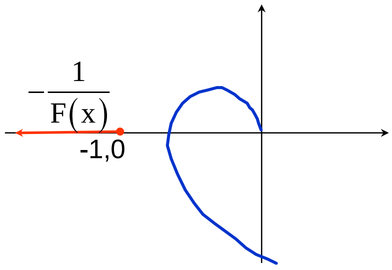
Per la simmetria $a_1 \equiv 0$ *F(x) solo Reale*

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots\ldots = \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\alpha} x\cdot\sin^2\omega t\cdot d\omega t + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} s\cdot\sin\omega t\cdot d\omega t\right]$$

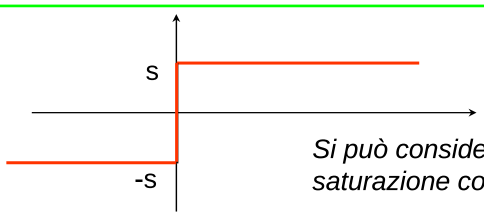
SATURAZIONE (2)

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \le s \\ \dfrac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\dfrac{s}{x}\right) + \dfrac{s}{x}\sqrt{1-\left(\dfrac{s}{x}\right)^2}\,\right] & x > s \end{cases}$$





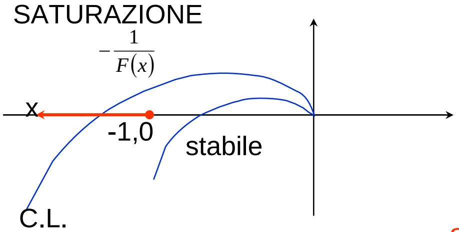
RELAY



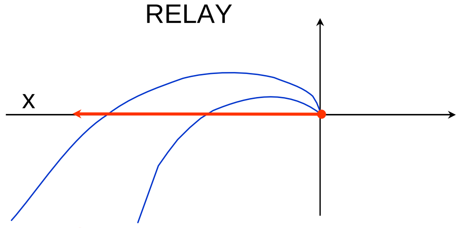
$$\boxed{F(x) = \frac{4s}{\pi x}}$$

Si può considerare come una saturazione con guadagno infinito

SATURAZIONE



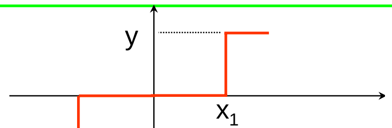
RELAY



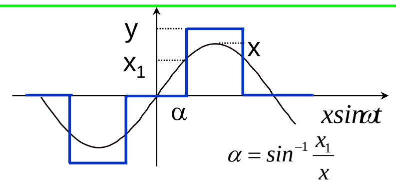
Sempre C.L. !

Si noti che per piccoli sfasamenti o $|G| \to 0$ $\begin{cases} \omega \to \infty \\ \bar{x} \to 0 \end{cases}$

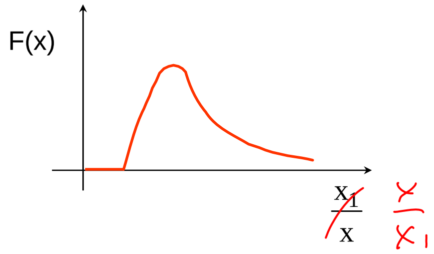
RELAY CON SOGLIA

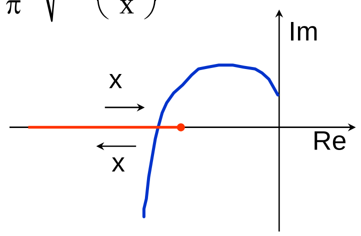


Simmetria → $a_1 = 0$



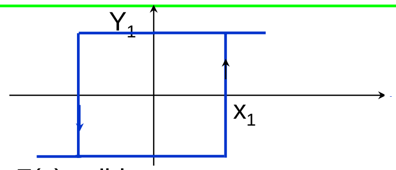
$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} .... = \frac{4}{\pi}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} Y_1 \cdot \sin\omega t \cdot d\omega t = \begin{cases} 0 & x \le x_1 \\ \dfrac{4Y_1}{\pi}\sqrt{1-\left(\dfrac{x_1}{x}\right)^2} & x > x_1 \end{cases}$$



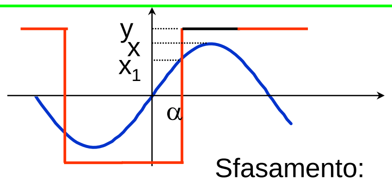


Due intersez. : un ciclo stabile (x→ inf)
uno instabile

RELAY CON ISTERESI



F(x) valida per $x > x_1$



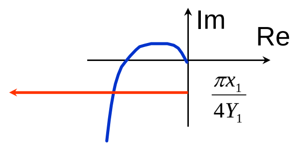
Sfasamento:

$Im[F] \neq 0$

$$a_1 = -\frac{4Y_1}{\pi}\cdot\frac{x_1}{x} \quad , \quad b_1 = \frac{4Y_1}{\pi}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x_1}{x}\right)^2}$$

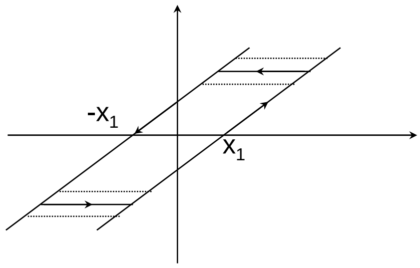
$$F(x) = \frac{1}{x}(b_1 + ja_1) = \frac{4Y_1}{\pi x}\left(\sqrt{1-k^2} - jk\right)$$

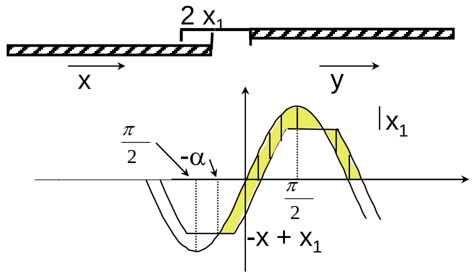
$$-\frac{1}{F(x)} = \frac{\pi x}{4Y_1}\left(\sqrt{1-k^2} + jk\right) = -\frac{\pi x}{4Y_1}\left[\sqrt{1-\left(\frac{x_1}{x}\right)^2} + j\frac{x_1}{x}\right]$$



NO

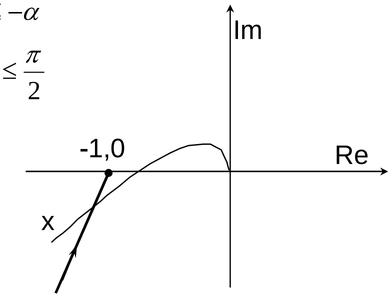
Gioco





$y(t) = -x + x_1 \qquad -\frac{\pi}{2} \le \omega t \le -\alpha$

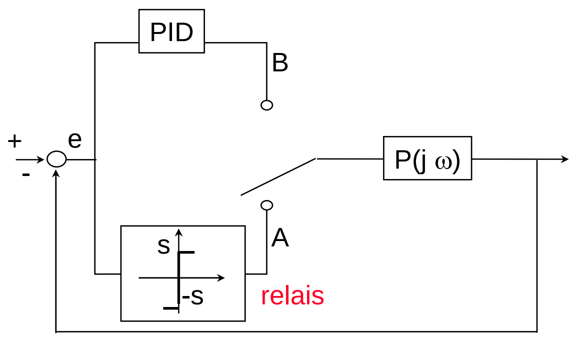
$y(t) = x \cdot \sin \omega t - x_1 \qquad -\alpha \le \omega t \le \frac{\pi}{2}$

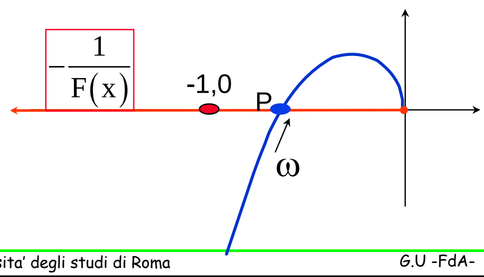


Un metodo per l'autotuning dei regolatori

A: il sistema ha un C.L. si misurano *e* e ω per determinare ω_L e k_L

B: Normale Funzionamento





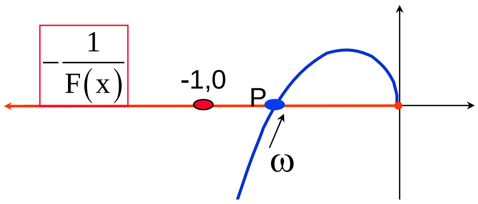
UN METODO PER L'AUTOTUNING ... (2)

$$F(x) = \frac{4S}{\pi x}$$

$$\bar{x} \equiv \left| e_{osc} \right|$$

$$\frac{1}{m_g} = \frac{\pi x_{osc}}{4S} \quad , \quad \omega_L = \omega_{osc}$$

= margine di guadagno = K_L



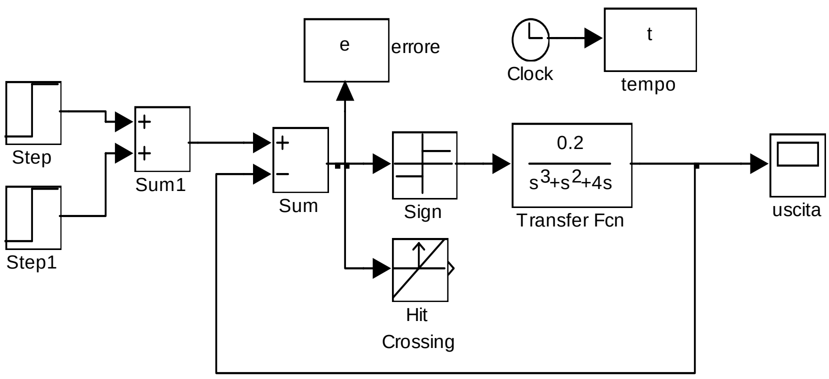
Si individua
la posizione di P
dalle misure di :

-frequenza oscillazione ω_{osc}

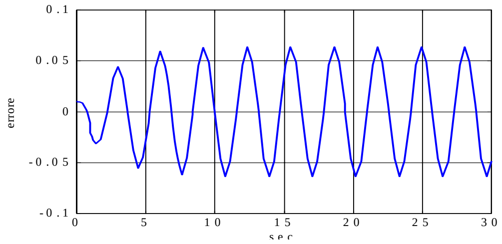
-ampiezza oscillazione e_{osc}

In base a questi valori si calcolano k_P , k_I , k_D
Poi si commuta sul PID

ESEMPIO

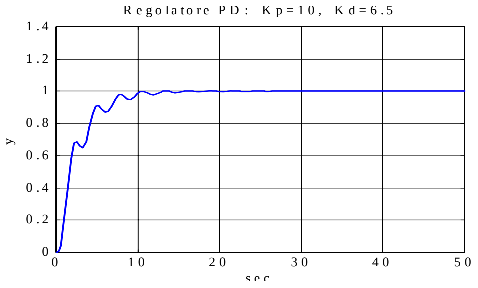


ESEMPIO (2)



Misura con il relè:
m_g=20
ω_L=2.01 rad/sec

Uso normale
con Regolatore
Proporzionale
Derivativo



ESEMPIO (CONTINUA)

Dai diagrammi di Nyquist: