REGIME PERMANENTE

(vedi Vitelli-Petternella par. VI.1,VI.1.1,VI.2)

Comportamento a regime permanente
Classificazione in tipi
Condizioni a Ciclo Chiuso
Condizioni a Ciclo Aperto
Risposta a Regime per Disturbi Costanti
Disturbo sulla misura
Risposta a regime per Ingressi Sinusoidali
Reiezione disturbi aleatori

(sul Marro la trattazione è un po' diversa)

COMPORTAMENTO A REGIME PERMANENTE

premesse 0) ampiezza ingresso unitaria se non specificata

1) Risposta di un sistema Lineare =Risposta Transitoria + R. Permanente + R. Libera

2) Errore $e(t) = y_d(t) - y(t) = k_d u(t) - y(t) \Rightarrow E(s) = k_d U(s) - Y(s)$

3) Nel dominio di s : $Y(s) = \underbrace{\frac{\sum b_j a^j}{\sum a_i s^i} U(s)}_{\text{Risposta Forzata}} + \underbrace{\frac{\text{termini in } y^k(0)}{\sum a_i s^i}}_{\text{Risposta Libera}}$

4) Se il sistema è asintoticamente stabile, cioè se:

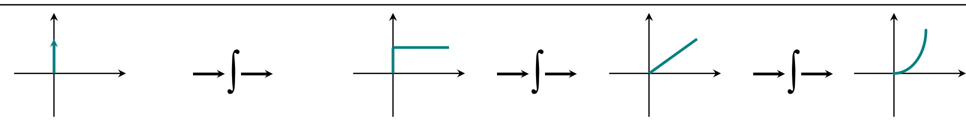
poli di G(s) sono a parte reale negativa $\longleftrightarrow$ $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$

g(t): risposta impulsiva

allora la risposta permanente non dipende dalle condizioni iniziali del sistema

Comportamento a Regime Permanente (vedi Marro par. 4.4)

Per “saggiare” il sistema lineare, si usano ingressi particolari (ingressi canonici)



IMPULSO	GRADINO	RAMPA	PARABOLA
$u(t)=\delta_0(t)$	$u(t)=\delta_{-1}(t)$	$u(t)=t\delta_{-1}(t)$	$u(t)=\frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$
$U(s)=1$ (solo di principio)	$U(s)=1/s$	$U(s)=1/s^2$	$U(s)=1/s^3$

In generale polinomi di ordine k: $u(t)=\frac{t^k}{k!}$ o ingressi sinusoidali

Con un ingresso canonico u(t), un sistema lineare asintoticamente stabile ha una risposta permanente $\tilde{y}(t)$ e :

Errore a regime $\tilde{e}(t)=k_d u(t)-\tilde{y}(t)$

Errore transitorio $e_t(t)=e(t)-\tilde{e}(t)$

Classificazione dei sistemi di controllo in tipi

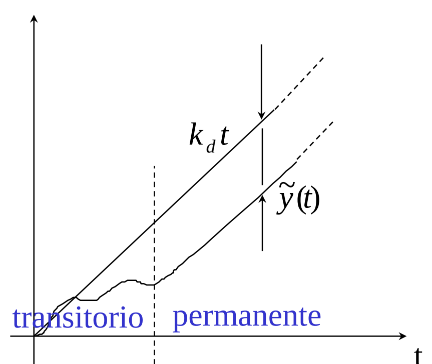


fig: Errore costante , non nullo

⇨ **SISTEMA di TIPO 1**

DEFINIZIONE: Un sistema di controllo è di TIPO K se la risposta permanente ad un ingresso canonico di ordine K:

$$u(t)=\frac{t^k}{k!}$$

differisce per una quantità costante e non nulla da:

$$y_d(t)=k_d\frac{t^k}{k!}$$

Corollario: Per un sistema di tipo k,

- l’errore è nullo per ingressi canonici d’ordine inferiore
- l’errore è illimitato per ingressi canonici d’ordine superiore

Condizioni a Ciclo Chiuso 1

Condizione sulla funzione di trasferimento W(s) a ciclo chiuso

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ \ldots\ldots\ b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \ \ldots\ldots\ a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

L'errore a regime permanente per |U|=1 :

U(s)

$$y_d(t) - \tilde{y}(t) = k_d u(t) - \tilde{y}(t) = \lim_{t\to\infty} [k_d \frac{t^k}{k!} - y(t)] = \lim_{s\to 0} s \cdot [k_d - W(s)] \frac{1}{s^{k+1}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^k} \underbrace{\frac{(k_d a_0 - b_0) + (k_d a_1 - b_1)s + \ldots + (k_d a_{n-1} - b_{n-1}) s^{n-1} + k_d s^n}{a_0 + a_1 s + \ldots\ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}}$$

Funzione di Trasferimento dell'errore W_e

Condizioni a ciclo chiuso 2

$$e(t\to\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^k} \frac{(k_d a_0 - b_0) + (k_d a_1 - b_1)s + \ldots + (k_d a_{n-1} - b_{n-1}) s^{n-1} + k_d s^n}{a_0 + a_1 s + \ldots\ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

affinché abbia valore FINITO e NON NULLO occorre ed è sufficiente che:

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1} = \ldots\ldots = \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} = k_d$$

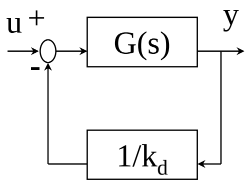
$$\frac{b_k}{a_k} \neq k_d$$

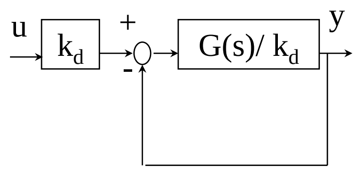
$W_e(s)$ ha uno zero in s=0 di molteplicità K

Il valore dell'errore di regime è: $e_k = \dfrac{k_d a_k - b_k}{a_0} |U|$

CONDIZIONI A CICLO APERTO

Come si riconosce un sistema di controllo di tipo K dalla funzione di trasferimento del processo G(s) ad anello aperto?





$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + \frac{G(s)}{k_d}}$$

$$E(s) = Y_d(s) - Y(s) = \left[k_d - W(s)\right]U(s)$$

Funzione di trasferimento di ERRORE We(s):

$$W_e(s) = k_d - W(s) = \frac{k_d^2}{k_d + G(s)}$$

Zeri di k_d-W(s) ≡ Poli di G(s)

CONDIZIONI A CICLO APERTO

Il sistema di controllo è di tipo k se e solo se: **G(s) ha un polo di molteplicità k in s = 0**

ovvero $\Rightarrow$ $$G(s) = \frac{k_G}{s^k}\frac{\prod_j (s\tau_j^z + 1)}{\prod_i (s\tau_i^p + 1)}$$

ovvero W $\Rightarrow$ $$\frac{k_d^2}{k_d + G(s)} = \frac{s^k \prod_i (s\tau_i^p + 1) k_d^2}{s^k \prod_i (s\tau_i^p + 1) k_d + k_G \prod_j (s\tau_j^z + 1)}$$

La catena diretta ha k integratori in cascata

L'ERRORE VALE:

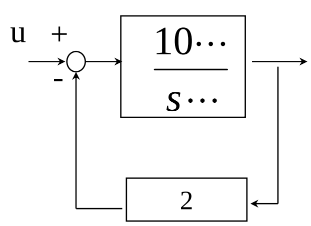
per |U|=1

TIPO 0	**TIPO K**
$e_0 = \frac{k_d^2}{k_d + k_G}$	$e_k = \frac{k_d^2}{k_G}$
K_G = guadagno di $G(s)=\left[s^k G(s)\right]_{s=0}$	

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{s^{i+1}} W_e(s) = \lim_{s\to 0} \frac{k_d^2 s^{k-i}}{k_d s^k + k_G} \qquad \begin{cases} \text{k : numero poli origine} \\ \text{i : ordine ingresso} \end{cases}$$

Tipo del sistema \ Ingresso	0 : Gradino	1 : Rampa	2 : Parabola
0	$\frac{k_d^2}{k_d + k_G}$	∞	∞
1	0	$\frac{k_d^2}{k_G}$	∞
2	0	0	$\frac{k_d^2}{k_G}$

N.B. Da moltiplicare per U, ampiezza dell'ingresso

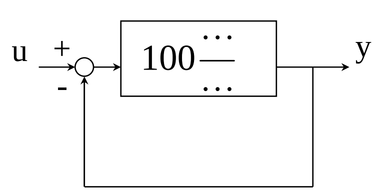


TIPO 1 $k_G = 10 \quad k_d = 0.5$

Errore al gradino :0

Errore a rampa unitaria $u(t) = t$

$$e(\infty) = \frac{0.25}{10} = 0.025$$



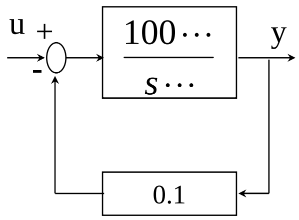
TIPO 0 $k_G = 100 \quad k_d = 1$

Errore al gradino $u(t) = 2\delta_{-1}(t)$

$$e(\infty) = \frac{2}{101} \cong 0.02$$

Esempi

TIPO 1 $k_G = 100 \quad k_d = 10$



L' uscita desiderata è a rampa : $Y_d(t) = 5t$
qual è l'errore ?

$$u(t) = \frac{Y_d(t)}{k_d} = 0.5t$$

$$e(\infty) = 0.5\frac{100}{100} = 0.5$$

In genere si usano le formule inverse:
qual è deve essere il guadagno k_G affinché : errore < valore dato

$$k_G \geq \frac{k_d^2 U}{e} - k_d \qquad \text{Tipo 0}$$

$$k_G \geq \frac{k_d^2 U}{e} \qquad \text{Altri}$$

Considerazioni Qualitative

•Polo nell'origine in catena diretta $\left(\frac{1}{s}\right)$ ⟺ **Equivale** ⟺ Guadagno infinito per frequenza zero

$$\left(\left|\frac{1}{j\omega}\right| \to \infty \quad \text{se} \quad \omega \to 0\right)$$

⇒ Fedeltà elevata per segnali a bassa frequenza, infinita a frequenza zero !

• Influenza dei poli in s = 0 di G(s) sulla stabilità ad anello chiuso:
- ogni polo nell'origine dà uno sfasamento di -90° e
- peggiora drasticamente i margini di stabilità

Infatti:
$$\begin{cases} \frac{1}{s} & \text{è al limite di stabilità ad anello aperto} \\ \frac{1}{s^2} & \text{è instabile ad anello aperto} \end{cases}$$

I poli nell'origine possono essere nel processo ovvero introdotti nel controllore

- Controllo di posizione

$$u \rightarrow \boxed{G_p(s)} \rightarrow y$$

$$\begin{cases} M\ddot{y} = u - D\dot{y} \\ G_p(s) = \dfrac{1}{s(D+Ms)} \end{cases}$$

(y = posizione
u = forza)

Tipo 1

- Controllo di velocità

$$u \rightarrow \boxed{G_v(s)} \rightarrow y$$

$$\begin{cases} M\dot{y} = u - Dy \\ G_v(s) = \dfrac{1}{D+Ms} \end{cases}$$

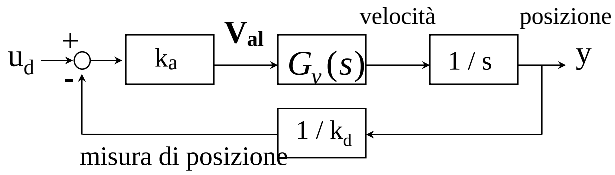
(y = velocità
u = forza)

Tipo 0

N.B. Se **D=0**, il tipo aumenta di **1**

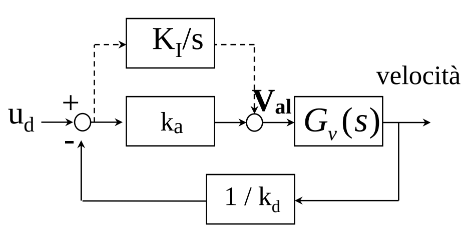
Osservazione: a regime, l'ingresso di un integratore deve essere zero

Asservimento di posizione a regime, u=gradino



L'ingresso al motore deve essere zero, altrimenti il motore gira e y varia.

In un asservimento di velocità



misura di velocità

L'ingresso al motore deve essere non nullo perché giri,
ma, se $K_I \neq 0$, l'errore sarà comunque zero.

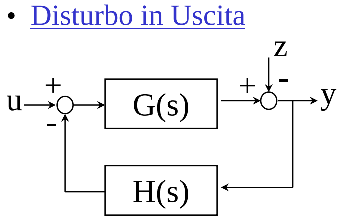
RISP. A REGIME PER DISTURBI COSTANTI

- Sistema di controllo Astatico se risposta a regime nulla a disturbo costante:

CNES Astatismo: $W_z(s)$ ha uno zero in s=0

Altrimenti l'errore indotto in uscita da un disturbo costante di ampiezza unitaria è : $e_z = [W_z(s)]_{s=0}$

- Disturbo in Uscita



$$W_z(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

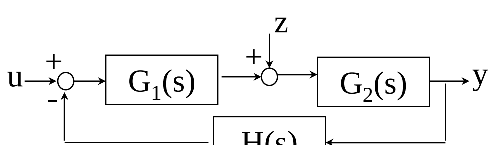
Astatismo: G(s) ha un polo in s=0
H(s) con un polo in s=0: non va bene per un legame Y/U proporzionale

Altrimenti $|y_z| = \dfrac{|z|}{1+K_G K_H}$ che può essere ridotto aumentando il guadagno in catena diretta K_G

automatica ROMA TRE 15

RISP. A REGIME PER DISTURBI COSTANTI

Disturbo in Catena Diretta



$$W_z(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Astatismo : $G_1(s)$ ha un polo in s=0

$G_2(s)$ con uno zero in s=0 non è compatibile con un legame Y/U proporzionale

Polo a monte del disturbo

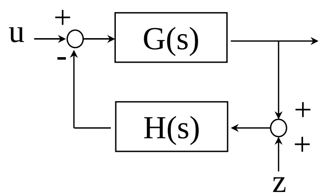
altrimenti in uscita si ha a causa del disturbo

$\lvert y_z\rvert = \dfrac{k_{G_2}\lvert z\rvert}{1+k_{G_1}k_{G_2}k_H}$ (se G_2 non ha poli in s = 0)	$\lvert y_z\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{k_{G_1}k_H}$ (se G_2 ha poli in s = 0)

Riducibili incrementando k_{G1}

automatica ROMA TRE 16

Disturbo sulla misura



$$W_z(s) = \frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

MAI ASTATICO ! ➡ *zero in s = 0 per G(s) o H(s) :*
non va bene per un legame Y/U proporzionale;

$\lvert y_z \rvert = \dfrac{k_G k_H \lvert z \rvert}{1+k_G k_H}$ G senza poli in s = 0	$\lvert y_z \rvert = \lvert z \rvert$ G con polo in s = 0

Errore per ingresso sinusoidale

- Ipotesi : Stabilità asintotica
- Risposta a regime ad un ingresso sinusoidale di frequenza data: $\tilde{u}(t) = \lvert U \rvert \sin \tilde{\omega} t$

è una sinusoide $\tilde{y}(t) = \lvert U \rvert M(\tilde{\omega}) \sin(\tilde{\omega} t + \varphi(\tilde{\omega}))$

- Risposta armonica a ciclo chiuso $W(j\omega) = \dfrac{G(j\omega)}{1+k_d / G(j\omega)}$

- Errore $\tilde{e}(t) = \tilde{y}_d(t) - \tilde{y}(t);\quad E(j\omega) = W_e(j\omega)\widetilde{U}(j\omega)$

- $W_e(j\omega) = k_d - W(j\omega) = \dfrac{k^2{}_d}{k_d + G(j\omega)}$

$$\lvert \tilde{e}(t) \rvert = \left| \frac{k^2{}_d \lvert U \rvert}{k_d + G(j\tilde{\omega})} \right| = \left| \frac{k_d \lvert U \rvert}{1+F(j\tilde{\omega})} \right|$$

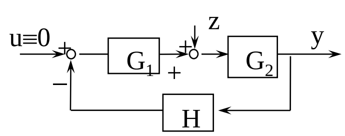
($\lvert F(j\omega) \rvert$ si legge sui diagrammi di Bode)

Reiezione Disturbi aleatori

Esempi: Ridurre l'effetto del vento su un'antenna, o quello delle onde su una nave, o quello di una raffica su un aereo

Problema: Il disturbo non è misurabile

Soluzione: L'effetto c'è e si può misurare



Specifica: Ridurre l'effetto di un fattore K

A CICLO APERTO

$$y_{z0} = G_2 \cdot z$$

A CICLO CHIUSO

$$y_{zc} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} \cdot z = \frac{G_2 \cdot z}{1 + F}$$

Dalla specifica:

$$\left|\frac{y_{zc}}{y_{z0}}\right| < \frac{1}{k} \Rightarrow \left|\frac{y_{z0}}{y_{zc}}\right| = |1 + F| > k$$, che si può approssimare con $|F| > k$ (agendo su G_1)