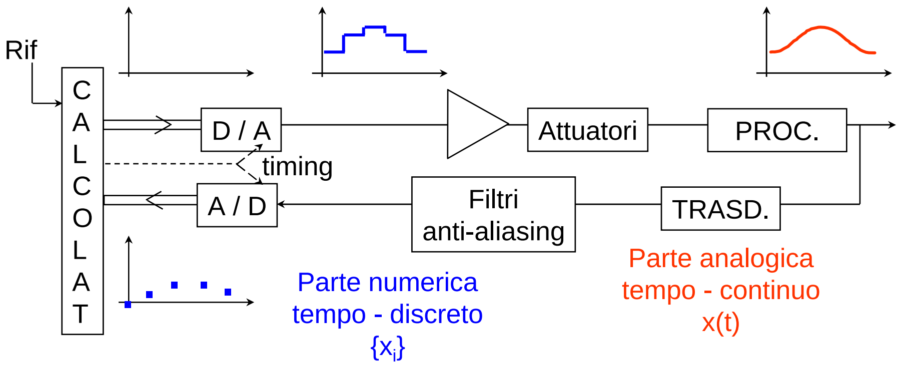
Sistemi a Segnali Campionati (1)

- Controllori a segnali campionati
- Il campionamento
- L'organo di Tenuta
- Spettro di un segnale campionato
- Aliasing

Un sistema di controllo digitale

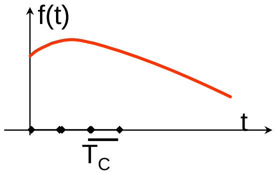


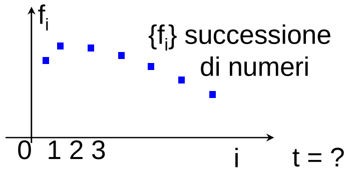
Trovare un modo per rappresentare la parte a tempo discreto che permetta :

a) di utilizzare gli strumenti già noti;

b) di lavorare anche con sistemi misti (tempo continuo/discreto).

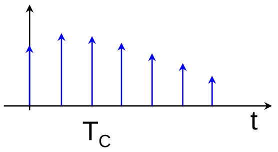
CAMPIONAMENTO (A/D)





Ad essa associamo una successione di impulsi

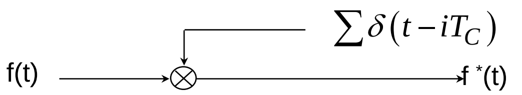
$$f^*(t)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i\cdot\delta(t-iT_C)$$



(Nella realtà non esiste)

In tal modo abbiamo di nuovo un segnale e l'informazione relativa al tempo .

Schema equivalente:



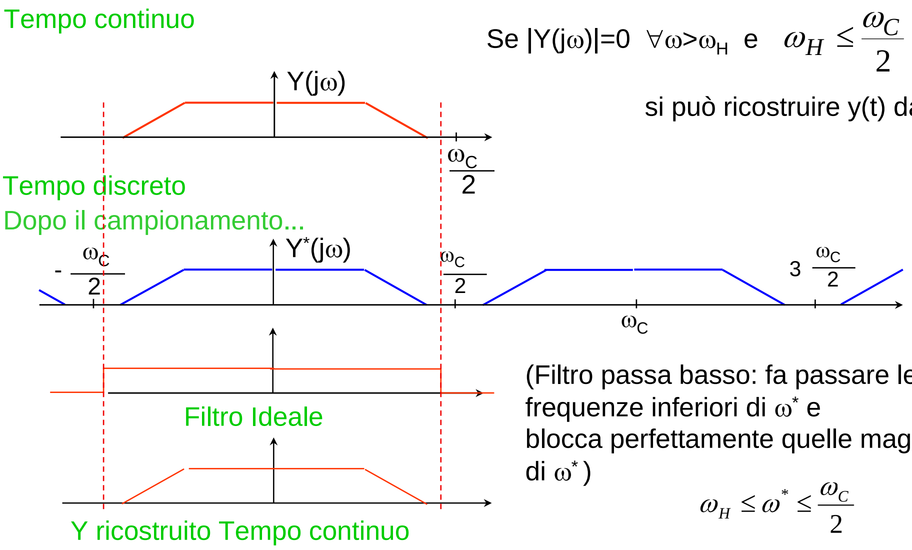
$$F^*(s)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i\cdot e^{-iT_C s}$$ Trasformata di Laplace

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

(Shannon)

Se |Y(jω)|=0 ∀ω>ω_H e $\omega_H \le \dfrac{\omega_C}{2}=\dfrac{\pi}{T_C}$

si può ricostruire y(t) da y*(t)

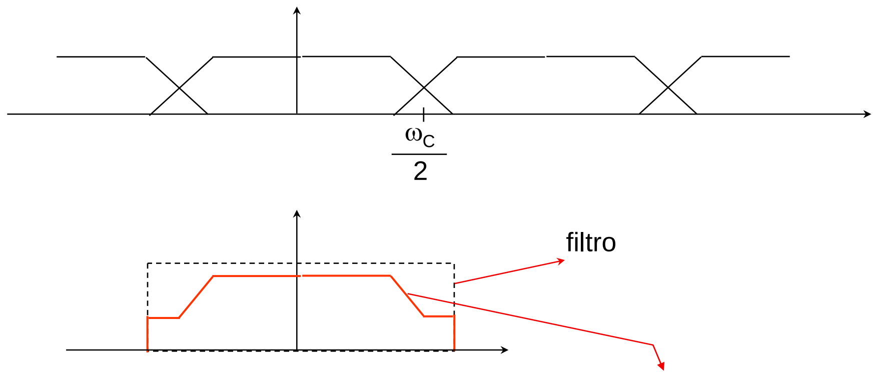


(Filtro passa basso: fa passare le frequenze inferiori di ω* e blocca perfettamente quelle maggiori di ω*)

$$\omega_H \le \omega^* \le \frac{\omega_C}{2}$$

Cosa accade con Fc troppo bassa

Altrimenti, se $\omega_H > \frac{\omega_C}{2}$



I singoli lobi, sommandosi, si modificano, quindi non si può più isolare quello principale.

Esempio di aliasing

Esempio semplice , T_C = 1 msec

$y_1(t)=\sin(500\pi t)$

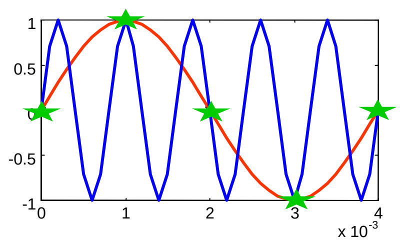
$y_1(iT_C)=\sin(\pi/2 \cdot i)$

i.e. f=250 Hz $\Longrightarrow$ T=4 msec

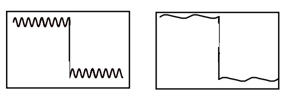
$y_2(t)=\sin(2500\pi t)$

$y_2(iT_C)=\sin[(2\pi+\pi/2)i]=\sin(\pi/2 \cdot i)$

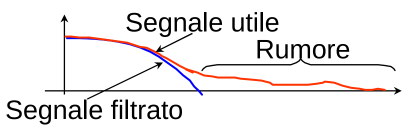
i.e. f=1250 Hz $\Longrightarrow$ T=0.8 msec



Problema reale:
il segnale utile è affetto
da rumore ad alta frequenza



Soluzione:
Usare dei filtri antialiasing
di guardia con $\omega^* << \omega/2$

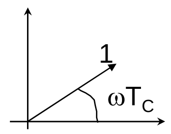


Periodicità delle trasformate

$$x^*(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x(t)\delta(t-iT_C)$$

REM : $L\left[\delta\left(t-iT_C\right)\right]=e^{-st_i}$ $\quad (t_i=iT_C)$

$$X^*(s)=L\left[x^*(t)\right]=\sum_{i=0}^{\infty}x(iT_C)e^{-siT_C}$$



REM : $e^{-siT_C}=e^{-\alpha iT_C}\cdot e^{-j\omega iT_C}$ $\quad s=\alpha+j\omega$

per $\bar{\omega}=\omega+\omega_C=\omega+\dfrac{2\pi}{T_C}$ $\Rightarrow$ $e^{j\bar{\omega}iT_C}=e^{j\omega iT_C}$

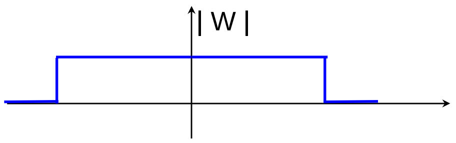
Quindi $X^*\left(s+kj\omega_C\right)=X^*(s)$ K=…,-1,0,1,2,...

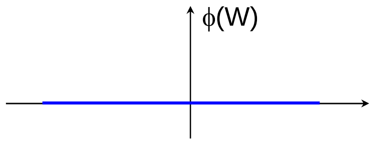
Ovvero X*(s) è periodica
rispetto a ω=Im[s] con periodo $\omega_C=\dfrac{2\pi}{T_C}$

Vero anche per $X^*(j\omega)=X^*(s)\Big|_{s=j\omega}$

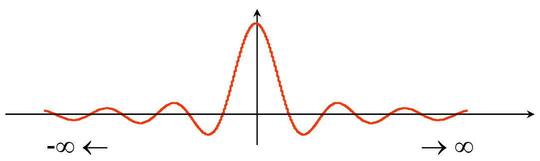
Perché non usiamo un filtro ideale?

Antitrasformando la W(jω)

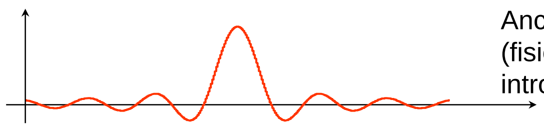




Si ha la risposta impulsiva W(t)=sync(t), non è causale!



W(t) ≠ 0 t = -∞……∞
W(t) ≠ 0 t < 0 !!

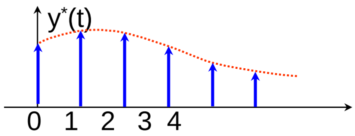


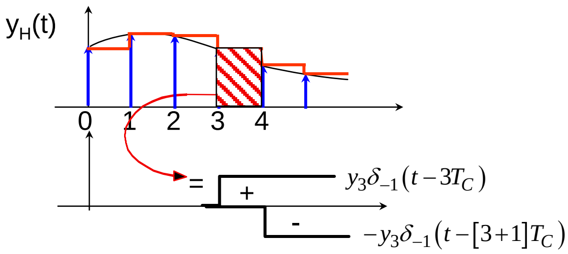
Anche un suo troncamento e traslazione (fisicamente realizzabile) non va bene: introduce un tempo di ritardo

Però questa idea è utilizzabile nelle TLC (e.g. Compact Disk)

Organo di Tenuta: ZOH

Dagli impulsi "ricostruisce" il segnale tempo continuo





$$L\left[\sum_0^{\infty} y_i\delta(t-iT_C)\right]=$$

$$=\underbrace{\sum_0^{\infty} y_i\, e^{-isT_C}}_{y^*(s)}$$

$$Y_H(s)=\sum_0^{\infty} y_i\left[\frac{1}{s}e^{-isT_C}-\frac{1}{s}e^{-(i+1)sT_C}\right]=$$

$$=\underbrace{\sum_0^{\infty}{}_i\; y_i\cdot e^{-isT_C}}_{y^*(s)}\underbrace{\left(\frac{1-e^{-sT_C}}{s}\right)}_{T(s)}$$

$$T(s)=\frac{1-e^{-sT_C}}{s}$$

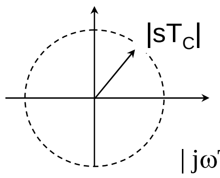
Funzione di trasferimento in s dell'organo di tenuta di ordine 0 (ZOH)

Approssimazione dello ZOH

$$T(s)=\frac{1-e^{-sT_C}}{s}=\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{e^{sT_C}}\right)$$

$$e^x=1+x+\cancel{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots}$$

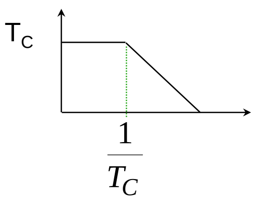
≈ 0 per $|sT_C| << 1$



$|j\omega T_C| << 1$

$$\boxed{T_C << \frac{1}{\omega}}$$

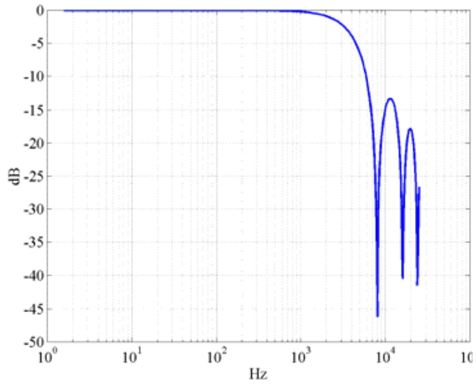
$$T(s)\cong\frac{1}{s}\left(\frac{1+sT_C-1}{1+sT_C}\right)=\frac{T_C}{1+sT_C}$$

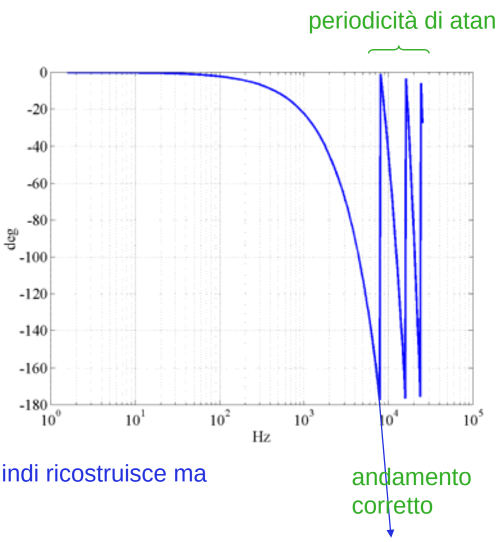


L'organo di tenuta alle basse frequenze ha un comportamento passa basso.

Risposta Armonica ZOH

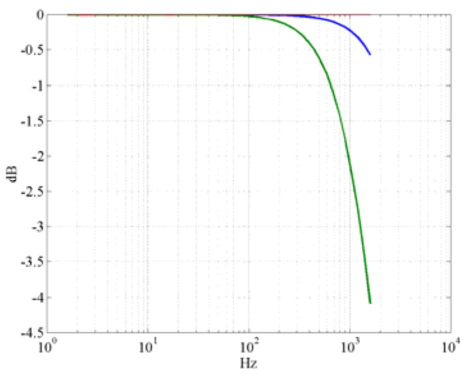
$F_c = 8000$ Hz

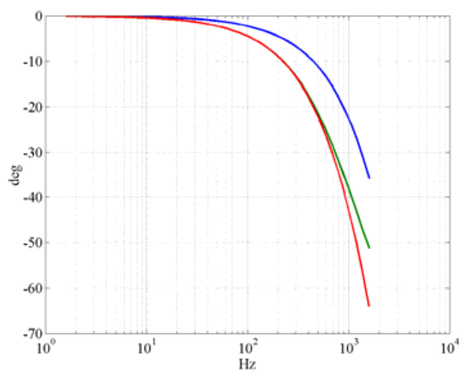




Ha un comportamento passa-basso, quindi ricostruisce ma ha i lobi laterali

Risposta in Freq ZOH - 2



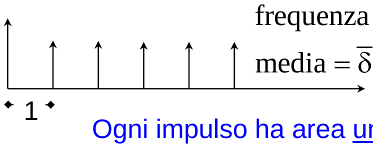


ZOH

approx 1 polo

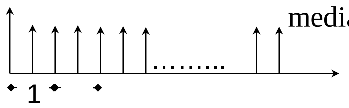
approx Padè

Guadagno del campionamento



frequenza = 1

media = $\bar{\delta} = 1$



media = $\bar{\delta} = 2$

Ogni impulso ha area <u>unitaria</u>

$$f(t) \rightarrow \otimes \rightarrow f^*(t), \qquad \sum \delta(t - iT_C)$$

alle basse frequenze: $\sum \delta(t - iT_C) \approx \bar{\delta}$

$$f(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{T_C}} \rightarrow$$

quindi consideriamo campionamento + tenuta

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{\cancel{T_C}}} \rightarrow \boxed{\frac{\cancel{T_C}}{1+sT_C}} \rightarrow \quad \approx \text{ (basse frequenze)} \quad \rightarrow \boxed{\frac{1}{1+sT_C}} \rightarrow$$

06/04/2010 Terza Universita' degli studi di Roma G.U -FdA- 13