Linearizzazione

E’ un procedimento che permette di analizzare i sistemi non lineari intorno al/ai punti di equilibrio (P.D.E.) per piccoli scostamenti.

Cos’è la non linearità? Se ho $x = f(x)$ allora: $f(\alpha + \beta) \neq f(\alpha) + f(\beta)$

La linearizzazione è un’approssimazione che è migliore tanto quanto più si è vicini ad un punto di equilibrio.

Il punto di equilibrio è un punto per il quale la funzione si annulla.

Esempio:

$\dot{x} = f(x, u)$ $\quad f$ è la funzione non lineare, x è lo stato e u è l’ingresso.

Passi per linearizzare un sistema:

1) Calcolare i P.D.E.
2) Indicare gli scostamenti. Nel nostro esempio: $x = x_0 + \Delta x \qquad u = u_0 + \Delta u$
   Dove x_0 e u_0 sono i PDE e Δx e Δu rappresentano gli scostamenti.
3) Espansione in serie di Taylor arrestata al primo ordine:
   $f(x, u) = f(x_0, u_0) + f_x(x_0, u_0)\Delta x + f_u(x_0, u_0)\Delta u$
   Dove:
   $f(x_0, u_0) = 0$ per definizione perché la funzione in condizioni di equilibrio si annulla.
   $f_x(x_0, u_0)\Delta x$ è la derivata parziale della funzione rispetto ad x
   $f_u(x_0, u_0)\Delta u$ è la derivata parziale della funzione rispetto ad u

Esercizio 1

Linearizzare il seguente sistema, sapendo che $u_0 = 1$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2xu \quad (dinamica) \\ y = 3x^3 + u \qquad (uscita) \end{cases}$$

Mi calcolo i P.D.E.:

Per definizione so che un punto di equilibrio mi annulla la funzione, in questo caso la mia funzione è $x^2 - 2xu$ perciò ad u sostituisco il valore noto 1 e la eguaglio a 0:

$x^2 - 2x \cdot 1 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x(x - 2) = 0 \rightarrow \;\; x = 0$ e $x = 2$

Quindi i miei due punti di equilibrio sono: $(0, 1)$ e $(2, 1)$

Lo scostamento è $x = x_0 + \Delta x$ che derivato diventa: $\dot{x} = \Delta\dot{x}$

Adesso faccio l’espansione in serie di Taylor:

$f(x_0, u_0) = 0$ per definizione

$f_x(x_0, u_0)\Delta x = 2x_0 - 2u_0\ \Delta x$

Ora faccio il procedimento solo per il punto di equilibrio $(0,1)$ per l’altro lo si ripete in maniera identica, cambia solo la quantità numerica.

Quindi sostituisco i valori noti $x_0 = 0$ e $u_0 = 1$ nella derivata parziale:

$f_x(x_0, u_0)\Delta x = -2\Delta x$

Faccio l'altra derivata parziale:

$f_u(x_0, u_0)\Delta u = 0 - 2x_0\ \Delta u$

Sostituendo:

$f_u(x_0, u_0)\Delta u = 0$

Quindi mettendo insieme i pezzi alla fine ottengo:

$\Delta\dot{x} = 0 - 2\Delta x + 0 = -2\Delta x$

Ora linearizzo l'uscita y:

Derivando y ottengo Δy.

Derivando prima rispetto ad x ottengo: $9x_0^2\Delta x$ sostituendo $x_0 = 0$ ottengo 0

Derivando poi rispetto ad u ottengo: $1 \cdot \Delta u = \Delta u$

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = -2\Delta x \\ \\ \Delta y = \Delta u \end{cases}$$

Esercizio 2

Linearizzare il seguente sistema sapendo che $u_0 = 1$ e che i punti di equilibrio sono $x_{10} = 0$ e $x_{20} = 2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_2 \cdot \sin(\pi \cdot x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 \cdot x_2 + 2x_1 u \\ y = x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

So che $\dot{x} = \Delta\dot{x}$

Faccio la derivata parziale rispetto ad x_1, poi rispetto ad x_2 ed infine rispetto a u per la prima equazione:

$f_{x_1}(x_0, u_0)\Delta x_1 = -6\pi x_{20}\cos(\pi x_{10})\,\Delta x_1$

$f_{x_2}(x_0, u_0)\Delta x_2 = -6\sin(\pi x_{10})\,\Delta x_2$

Sostituendo $x_{10} = 0$ e $x_{20} = 2$ ottengo:

$f_{x_1}(x_0, u_0)\Delta x_1 = -12\pi\Delta x_1$

$f_{x_2}(x_0, u_0)\Delta x_2 = 0$

Sommando le derivate parziali ottengo:

$\Delta\dot{x}_1 = -12\pi\Delta x_1$

Faccio la derivata parziale rispetto ad x_1, poi rispetto ad x_2 ed infine rispetto a u per la seconda equazione:

$f_{x_1}(x_0, u_0)\Delta x_1 = -x_{20} + 2u_0\ \Delta x_1 = 0$

$f_{x_2}(x_0, u_0)\Delta x_2 = -x_{10}\ \Delta x_2 = 0$

$f_u(x_0, u_0)\Delta u = -2x_{10} = 0$

Quindi $\Delta \dot{x}_2 = 0$

Linearizzo l'uscita:

$\Delta y = 2x_{10}\Delta x_1 + 2x_{20}\Delta x_2 = 4\Delta x_2$