Controllo Digitale

Lezione 25

27 maggio 2015

Ing. Chiara Foglietta
chiara.foglietta@uniroma3.it

Fondamenti di Automatica
Ingegneria Elettronica
A.A. 2014 - 2015
Università degli Studi "Roma TRE"

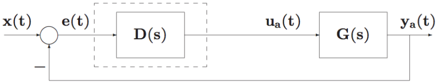
ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Agenda

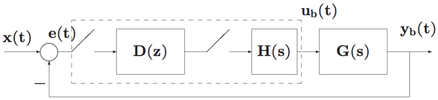
Molto spesso il sistema da controllare è un sistema continuo, rappresentato da una funzione di trasferimento $G(s)$, per il quale è molto naturale esprimere le specifiche nel dominio continuo. Inoltre, può capitare che per una data applicazione esista già un regolatore analogico soddisfacente, e che si voglia semplicemente passare ad una sua realizzazione digitale. Infine, non bisogna trascurare il fatto che nel tempo continuo sono state sviluppate da tempo tecniche di progetto ben assestate, e molto spesso il progettista ha una grande familiarità con queste piuttosto che con tecniche ideate espressamente per il dominio discreto.

Considerazioni sulla Discretizzazione II

Dunque si supponga di avere già definita una legge di controllo continua rappresentata da una funzione di trasferimento $D(s)$. Si pone allora il problema di come ottenere una legge $D(z)$, da inserire nell'anello di retroazione comprensivo del ricostruttore, che permetta di ottenere prestazioni il più possibile simili a quelle ottenute impiegando la $D(s)$.



(a)



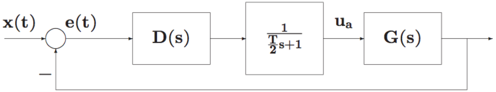
(b)

Considerazioni sulla Discretizzazione III

É evidente che utilizzare un regolatore digitale ottenuto discretizzando un regolatore analogico porta ad introdurre variazioni delle delle prestazioni del sistema in retroazione. Tali variazioni dipendono da diversi fattori, quali la scelta del periodo di campionamento e la tecnica di discretizzazione utilizzata. Comunque è ovvio che effettuando l'operazione di discretizzazione si cerchi di far sì che le caratteristiche sia temporali che frequenziali del nuovo regolatore si discontino di poco da quelle dell'originale.

Un metodo empirico per ottenere prestazioni soddisfacenti è quello di scegliere frequenze di campionamento più alte possibili, che comportano però un aggravio delle prestazioni computazionali richieste:

1. Definizione del periodo di campionamento T e verifica del fatto che l'inserimento del campionatore-ricostruttore non destabilizzi il sistema: se necessario si deve provvedere ad una correzione della $D(s)$ o a modificare T.



Considerazioni sulla Discretizzazione V

É noto infatti che il ricostruttore introduce un ritardo nell'anello. Considerando per esempio il ricostruttore di ordine 0 , si ha che

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sim \frac{T}{T/2\,s + 1}, \qquad \text{Approx di Pad}$$

oppure

$$H_0(s) \sim e^{-sT/2}$$

e che quindi per l'analisi degli effetti dinamici si deve considerare, per esempio, il termine

$$\frac{1}{T/2\,s + 1}$$

nell'anello continuo prima di procedere alla discretizzazione.

Si noti che il guadagno T non viene considerato in quanto nello schema finale discreto tale fattore è compensato dal guadagno $1/T$ del campionatore

2. discretizzazione della $D(s)$
3. verifica a posteriore del comportamento dinamico del sistema con controllore discreto. Si deve discretizzare il sistema continuo $G(s)$ con ricostruttore, cioè ottenere la $\mathcal{Z}[H_0(s)G(s)] = HG(z)$ e verificare la risposta dell'intero sistema in retroazione utilizzando la $D(z)$

Esistono diverse tecniche per discretizzare la funzione di trasferimento analogica $D(s)$:

- metodo delle differenze all'indietro (Eulero all'indietro)
- metodo delle differenze in avanti (Eulero in avanti)
- trasformazione bilineare (Tustin)
- metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata con ricostruttore di ordine 0

Con le prime tre sostanzialmente si approssima l'operatore integratore analogico con un suo equivalente discreto; mentre con l'ultima tecnica si vuole definire una legge discreta che permette di ottenere i valori $y_b(t)$ che negli istanti di campionamento approssimano al meglio i valori $y_a(t)$ quando il segnale $x(t)$ di ingresso è un gradino.

Questo metodo è essenzialmente una semplice tecnica di integrazione numerica. Si impone che

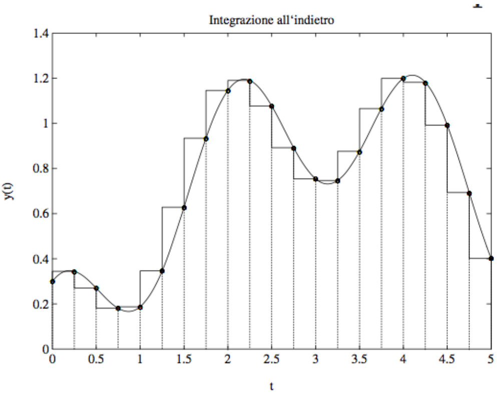
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z - 1}{Tz}$$

e quindi questa relazione esprime la trasformazione da effettuare per discretizzare un filtro analogico col metodo delle differenze all'indietro ossia

$$D(z) = D(s)|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

Nel metodo delle differenze all'indietro si considera il rettangolo di altezza pari a $y(kT)$ nell'intervallo $[(k-1)T; kT]$.

Metodo delle Differenze all'Indietro II



Metodo delle Differenze all'Indietro III

Effettuandola trasformazione, il piano s viene mappato nel piano z e viceversa. La regione di stabilità in s (semi piano a parte reale negativa) diventa una circonferenza sul piano z di centro $(1/2, 0j)$ e raggio $1/2$. Questo significa in particolare che ogni funzione di trasferimento $D(s)$ stabile viene trasformata in una $D(z)$ stabile. Inoltre, anche poli instabili in s possono essere trasformati in poli stabili in z. Poichè tutto il semipiano sinistro del piano s viene trasformato in un cerchio all'interno del cerchio unitario, si viene a creare una notevole distorsione frequenziale, che si può ridurre diminuendo il periodo di campionamento T.

Metodo delle Differenze in Avanti I

Anche questa tecnica rappresenta un'approssimazione del calcolo integrale. A differenza della tecnica precedente, si considera ora per il generico periodo $(k-1)T \div kT$ il valore iniziale $y((k-1)T)$ anzichè il valore finale $y(kT)$. Questa tecnica di integrazione numerica è detta anche *integrazione di Eulero*.

In questo caso la trasformazione da effettuare è

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}} = \frac{z-1}{T}$$

da cui

$$D(z) = D(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

Metodo delle Differenze in Avanti II

A differenza del metodo di trasformazione precedente, si deve sottolineare che questa trasformazione introduce un problema di stabilità dei filtri digitali ottenuti. Il semipiano sinistro del piano s viene trasformato nel semipiano a sinistra della retta $\sigma = 1$ del piano z, e quindi funzioni di trasferimento analogiche stabili possono essere trasformate in funzioni di trasferimento discrete instabili. Per tale motivo questa tecnica di trasformazione non viene utilizzata nella pratica.

Trasformazione Bilineare I

Anche la trasformazione bilineare può essere considerata come una tecnica di integrazione numerica, detta integrazione trapezoidale o metodo di trasformazione di Tustin. Si suppone che la funzione vari in modo lineare tra due istanti di campionamento successivi, e la trasformazione da effettuare è:

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1}$$

La funzione di trasferimento discreta corrispondente è

$$D(z) = D(s)|_{s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

Trasformazione Bilineare II

Per quanto riguarda la stabilità, il semipiano sinistro del piano s viene trasformato nella regione definita dalla regione interna al cerchio unitario centrato nell'origine. Quindi la trasformazioni bilineare trasforma una $D(s)$ analogica stabile in una $D(z)$ discreta stabile e viceversa. Si noti che la trasformazione mette in corrispondenza l'intero asse immaginario del piano s con la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano z. Questa circonferenza viene percorsa però una sola volta per ω che varia tra $-\infty$ e $+\infty$ in s e quindi si ha, con questa trasformazione, il fenomeno di aliasing.

La corrispondenza tra i due piani è quindi simile a quella ottenuta ponendo $z = e^{sT}$, cioè mediante la $\mathcal{Z}$-trasformata. Con quest'ultima, però, i cerchio unitario viene percorse infinite volte, e quindi per l'analisi frequenziale si devono considerare solo le frequenze all'interno della striscia primaria $[-\pi/T, +\pi/T]$.

Tale trasformazione non genera sovrapposizione frequenziale, ma introduce distorsioni. Si ha quindi un fenomeno di "compressione" alle alte frequenze.

Metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata con Ricostruttore di Ordine 0 I

Con questo metodo, si desidera che i valori delle variabili $u_b(t)$ e $u_a(t)$ siano gli stessi negli istanti di campionamento quando il segnale $e(t)$ è un gradino. Si desidera in altre parole che valga la seguente relazione

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[D(z)\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[D(s)\frac{1}{s}\right]\Bigg|_{t=kT}$$

ossia

$$D(z) = \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left[\frac{D(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}D(s)\right]$$

Questa ultima relazione dice che per ottenere la $D(z)$ in questo caso si deve effettuare la $\mathcal{Z}$-trasformata della $D(s)$ in cascata ad un ricostruttore di ordine 0 fittizio.

Metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata con Ricostruttore di Ordine 0 II

Anche in questo caso, possono insorgere fenomeni di aliasing, che però sono in genere più attenuati rispetto al caso precedente in quanto il ricostruttore fittizio introduce un effetto di filtraggio. Analogamente al caso precedente, funzioni continue stabili sono trasformate in funzioni discrete stabili.

Progetto nel Piano ω I

Nel caso continuo sono state sviluppate tecniche frequenziali per il progetto di regolatori basate sull'uso dei diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols. Queste tecniche, essenzialmente per tentativi, sono molto comuni per la loro facile applicabilità anche se adatte solamente alla definizione di regolatori con struttura molto semplice, tipicamente reti correttrici.
É ovviamente interessante recuperare anche in campo discreto questo tipo di tecniche progettuali. Purtroppo, si è visto che nel dominio z la frequenza entra come funzione di $z = e^{j\omega T}$, e quindi si perdono proprietà importanti come la sommabilità dei diagrammi logaritmici. Per ovviare all'inconveniente, si ricorre alla trasformazione bilineare e alla sua inversa, che mettono in relazione il piano z con un piano ausiliario w che approssima il piano complesso s.

Progetto nel Piano ω II

La trasformazione bilineare

$$z = \frac{1 + wT/2}{1 - wT/2}$$

e la sua inversa

$$w = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1}$$

mettono in relazione il piano z con un piano ausiliario w che approssima il piano complesso s. Utilizzando la nuova variabile w come la variabile s della trasformata di Laplace, si è in grado di eseguire il progetto del regolatore utilizzando le usuali tecniche frequenziali. Alla fine, ottenuto in w il regolatore desiderato $D(w)$, si provvede ad una sua antitrasformazione in z.

Progetto nel Piano ω III

I passi logici del progetto sono:

1. fissare un periodo di campionamento T sulla base delle dinamiche del processo e delle prestazioni desiderate;
2. ricavare la funzione di trasferimento $G(z)$ del processo, considerando anche il ricostruttore;
3. trasformare la $G(z)$ così ottenuta in una $G(w)$;
4. applicare, utilizzando la $G(w)$, una delle tecniche frequenziali note per il progetto di regolatori, ricavando l'espressione $D(w)$ desiderata;
5. antitrasformare la $D(w)$ così ottenuta nella $D(z)$ corrispondente;
6. verificare che le prestazioni ottenute siano quelle desiderate.

Regolatori PID Digitali I

I regolatori digitali di tipo PID possono essere ottenuti per discretizzazione del classico regolatore PID analogico:

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s)$$

Usando l'integrazione rettangolare si ottiene la forma di posizione

$$u_n = K_p \left[e_n + \frac{T}{T_i} \sum_{k=0}^{n} e_k + \frac{T_d}{T} (e_n - e_{n-1}) \right] + M_R$$

Altre espressioni possono essere ottenute discretizzando con tecniche diverse i vari termini.

Una forma di algoritmo particolarmente utilizzata in pratica è quella che si ottiene sostituendo il termine derivativo con il termine

$$\frac{T_d s}{1 + T_d s/N}, \qquad N = 3 \div 10$$

ed usando l'approssimazione di Eulero (corrispondente a porre la derivata uguale alla "differenza in avanti") per la parte integrale e l'approssimazione del tipo differenza all'indietro per il termine derivativo.
Così facendo si ottiene il controllore:

$$D_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left[1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d}{T + \frac{T_d}{N}} \frac{z-1}{z - \frac{T_d}{NT + T_d}} \right]$$