Come disegnare un diagramma di Bode

Definizioni Teoriche

La risposta armonica è una funzione complessa a variabile reale che restituisce il rapporto tra i moduli e la differenza tra le fasi (cioè lo sfasamento).

Il diagramma di Bode è una rappresentazione della risposta armonica.

Esempi pratici

Nota: Consiglio di seguire tutti gli esempi perché man mano che andrò avanti aggiungerò dettagli che inizialmente ho omesso per rendere più semplice la comprensione.

Sia data la seguente funzione di trasferimento, della quale tocca tracciare il diagramma di Bode:

$$G(s) = \frac{20 \cdot (1 + 0{,}4s)}{(1 + s) \cdot (1 + 10s)}$$

Ricordando (da Laplace) che $s = j\omega$

Prima di tutto tocca calcolare il guadagno statico (che indicherò con k).

Il guadagno statico si calcola risolvendo il seguente limite:

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{20 \cdot (1 + 0{,}4j\omega)}{(1 + j\omega) \cdot (1 + 10j\omega)} = 20$$

Ho sostituito $j\omega$ ad s poiché sono equivalenti. Per fare prima si può calcolare direttamente il limite di $s \to 0$ poiché se ω tende a zero, anche s tenderà a zero.

Il numero ottenuto è il guadagno statico che però a noi servirà rappresentato in decibel.

Se devo calcolarmi il valore in decibel di x allora dovrò eseguire la seguente operazione:

$$20 \log_{10} x$$

Nel nostro caso:

$$k = 20 \log_{10} 20 \cong 26\ dB$$

Ora che abbiamo calcolato il guadagno statico, dobbiamo calcolarci i poli e gli zeri.

Gli zeri sono quei valori di s per cui il numeratore si annulla.

Il numeratore, nel nostro caso, si annulla solo se: $1 + 0{,}4s = 0$

Perciò abbiamo un solo zero che è: $s = -1/0{,}4 = -2{,}5$

I poli sono quei valori di s per cui si annulla il denominatore.

Il denominatore, sempre nel nostro caso, si annulla nei seguenti casi:

Se $1 + s = 0$ quindi ho un primo polo: $s = -1$

Oppure se $1 + 10s = 0$ quindi ho un secondo polo: $s = -1/10 = -0{,}1$

Quindi riassumendo ho:

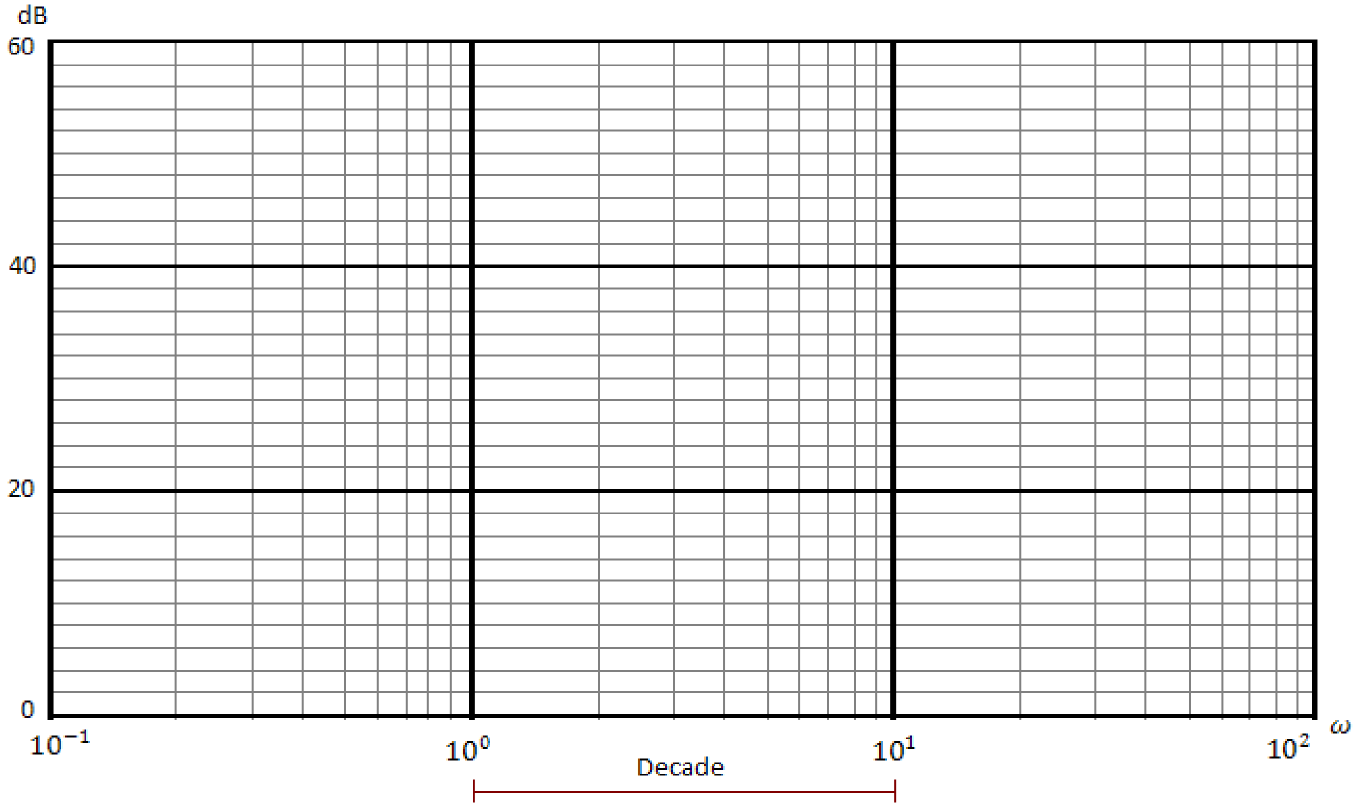
$k = 26 \qquad Z) -2{,}5 \qquad P) -0{,}1; -1$

Ora ho tutti i dati necessari per poter disegnare il grafico.

In genere si fanno due diagrammi distinti, uno per il modulo e uno per la fase. Questi diagrammi vengono fatti su carta semilogaritmica.

Ora inizierò a disegnare il grafico del modulo.

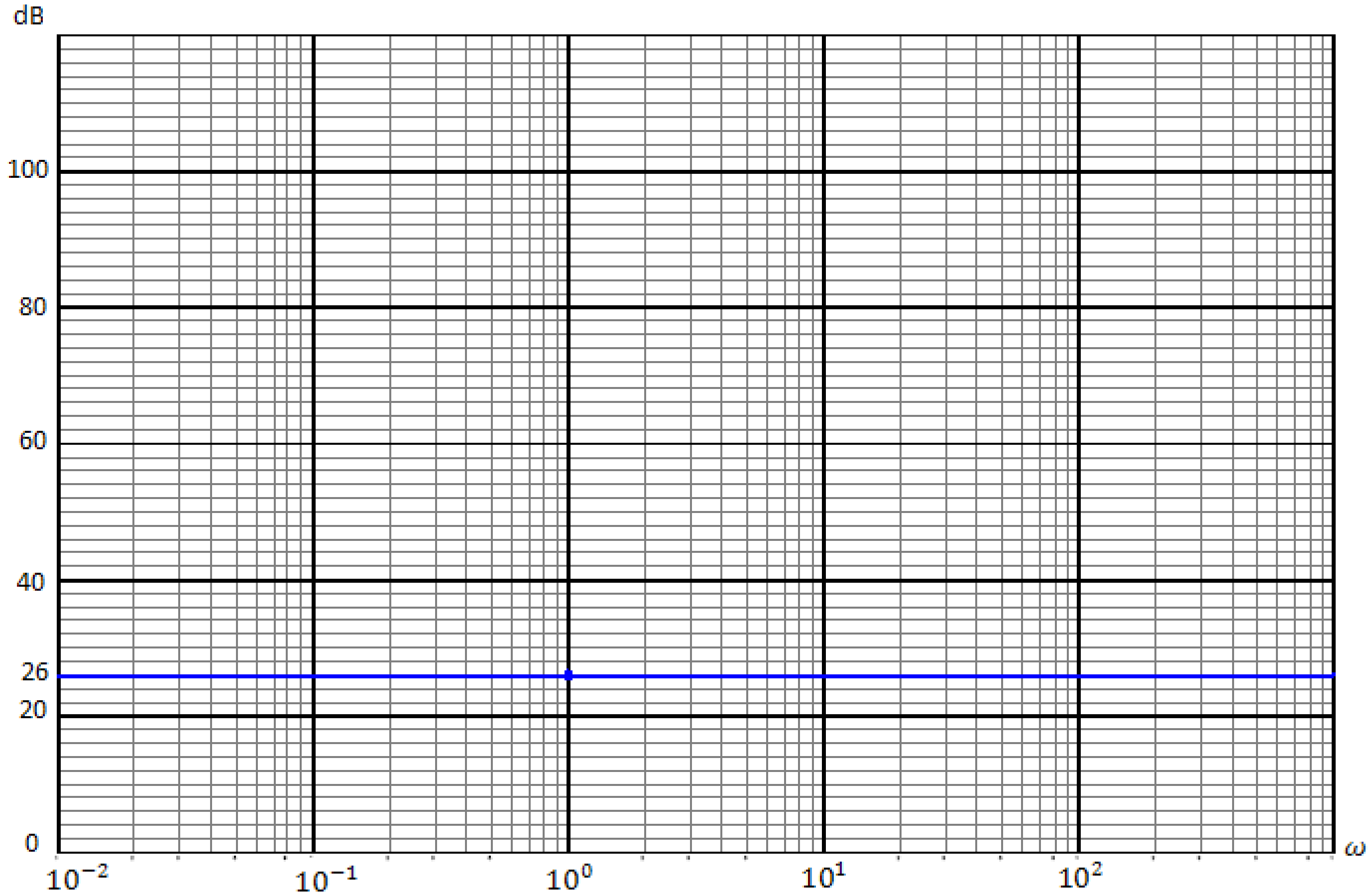
Nel grafico l'asse delle ascisse è diviso in decadi, cioè in potenze di 10 (guardare la figura), mentre le ordinate sono costituite dai decibel (meglio segnare "gradini" di 20).



Possiamo partire da una potenza di 10 a scelta (nella fig. sopra sono partito da 10^{-1}), nel nostro caso l'asse delle ascisse partirà da 10^{-2} (più avanti i criteri di scelta da cui far partire il grafico diventeranno più chiari).

Per iniziare a disegnare il grafico, farò finta, momentaneamente, che non ci siano ne poli ne zeri. Idealmente sopra 10^0 mi troverò sempre ad altezza k. Quindi, vedo dov'è 10^0 e faccio un puntino ad altezza 26 (il nostro k). A questo punto mi muovo in orizzontale tracciando una retta di altezza 26 (se incontrassi poli o zeri, avrei dei punti di rottura, ovvero non avrei più una retta ma segmenti, ma al momento assumiamo che non ci siano ne poli ne zeri).

Quindi il “grafico ideale” (in blu) è il seguente:



In realtà (come vedremo nei prossimi esempi) non sempre si parte da una retta parallela con l’asse delle ascisse, ma questi casi particolari li vedremo in seguito.

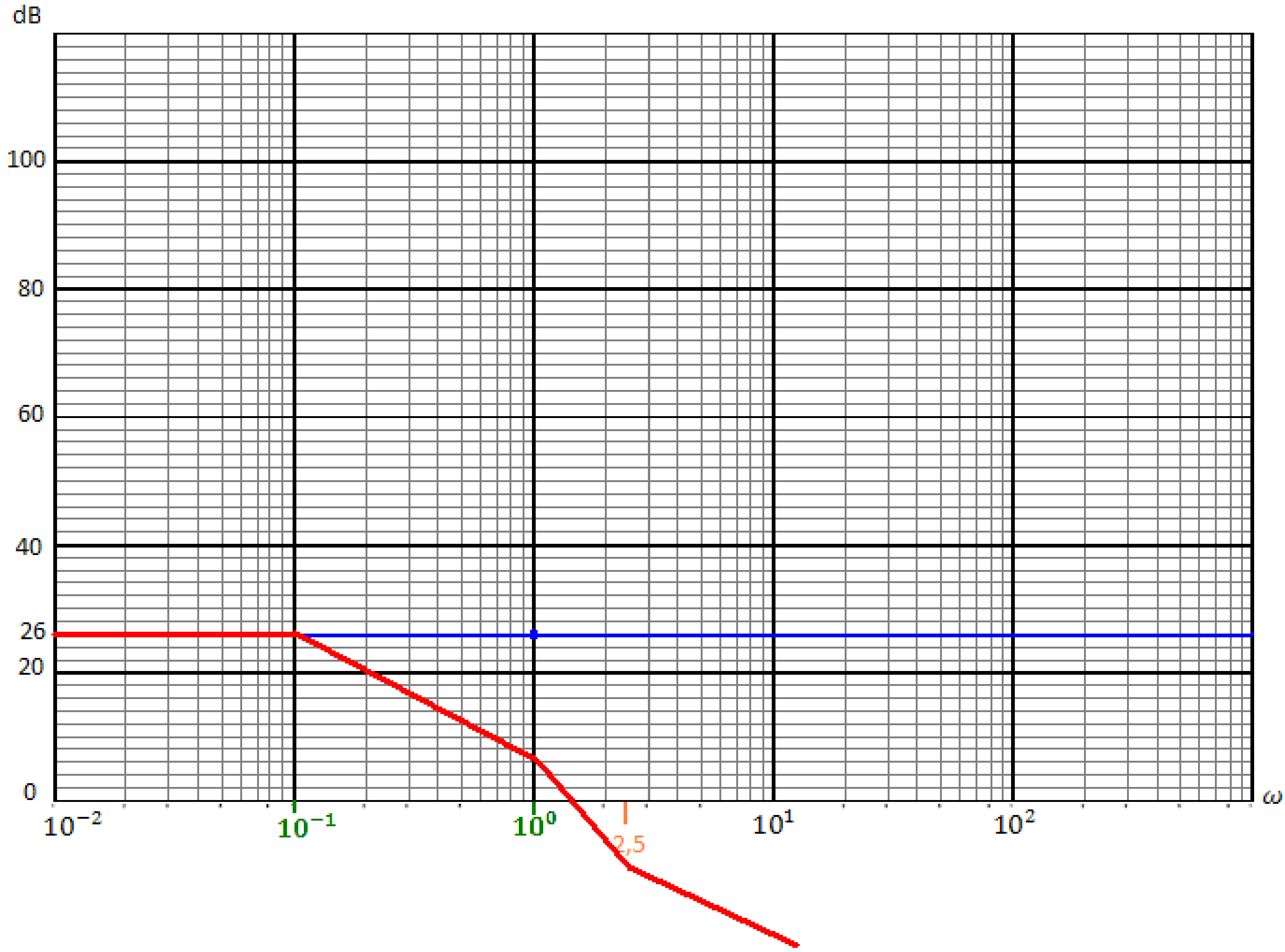
Adesso mi segno sull’asse dove si trovano i poli e gli zeri (presi in modulo) con dei puntini colorati (io ho scelto arancione per gli zeri e il verde per i poli).

Ad esempio lo zero (2,5 in modulo) starà un po’ dopo 10^0 poiché $10^0 = 1$

Una volta che ho segnato zeri e poli sull’asse, ripercorro la linea ideale blu e quando incontro un polo scendo di 20 dB per decade e quando incontro uno zero salgo di 20 dB per decade.

Salire (o scendere) di 20 dB per decade significa che dopo aver percorso una decade mi ritrovo ad un altezza maggiorata (o minorata) di 20 (è per questo che dicevo che è meglio spezzare le ordinate in multipli di 20, cioè per agevolare il grafico).

Quindi ora traccio il grafico definitivo (per i moduli) ripassando la linea blu con una linea rossa, ma stavolta tenendo conto degli zeri e dei poli.



Quindi scendo due volte (pendenza di 40 dB per decade) e poi risalgo una volta (di 20 dB per decade) grazie allo zero. Quando non ci sono più poli o zeri continuo con quella pendenza fino alla fine del grafico.

In questo caso è facile vedere che la pendenza finale è di -20dB per decade, ma esiste una formula per calcolarla (e quindi per verificare se abbiamo disegnato il grafico correttamente).

Indicando con n il numero di poli (in questo caso due) e con m il numero di zeri (in questo caso uno) la pendenza finale è data da:

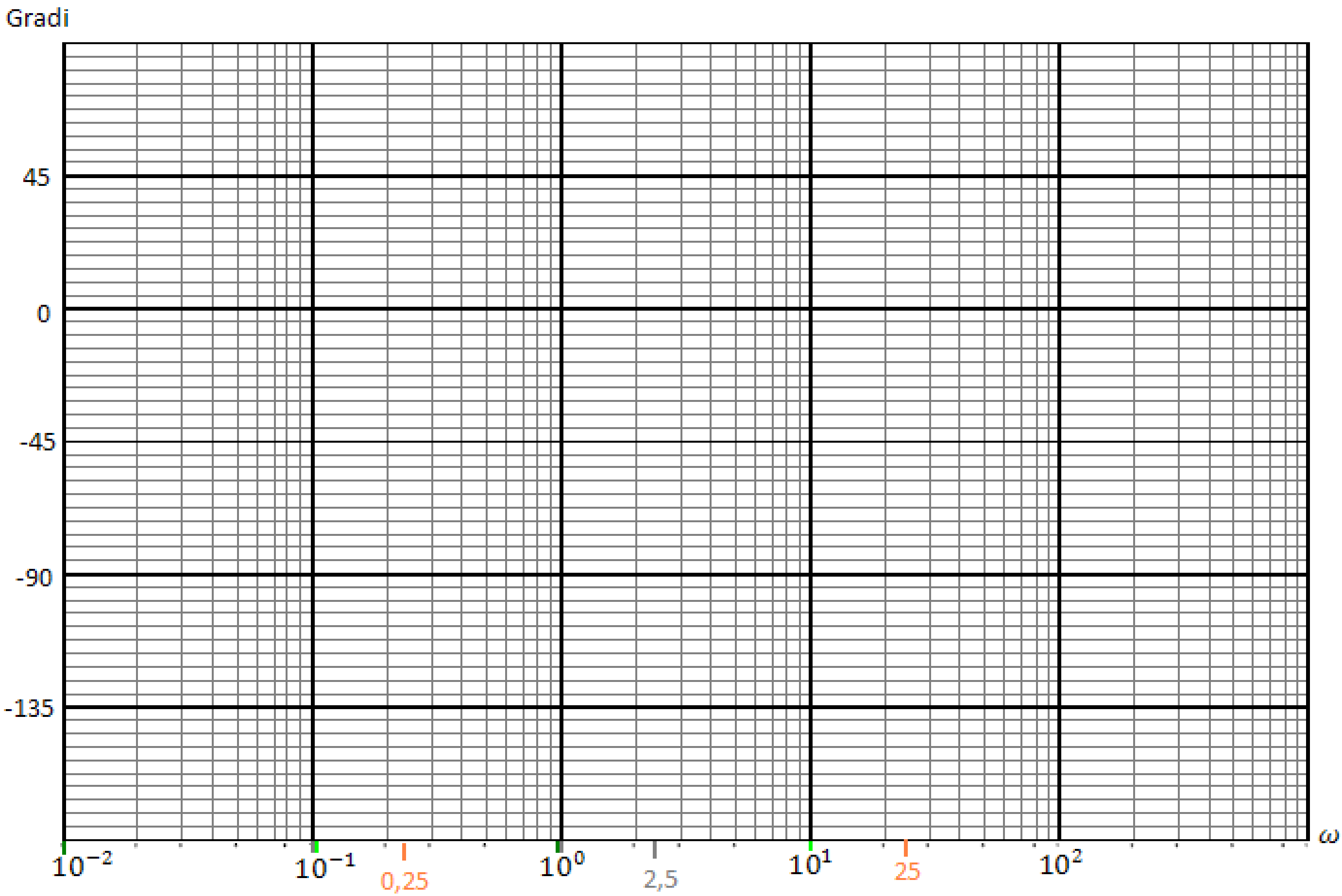
$$(n - m) \cdot -20$$

Adesso devo fare il grafico della fase. Il grafico della fase ha sull'ascissa sempre le pulsazioni divise in decadi, ma come ordinate ha i gradi (o radianti). Noi useremo i gradi perché è la convenzione di molti esercizi e per comodità divideremo l'asse delle ordinate in multipli di 45°.

La potenza di 10 da cui partirò per il grafico della fase è la stessa potenza da cui sono partito per il grafico del modulo.

Il grafico della fase si inizia a tracciare ad altezza 0 (cioè a 0 gradi). Se non considerassi poli o zeri avrei semplicemente una retta. Come per il modulo (con le stesse convenzioni per i colori) mi segno gli zeri e i poli sull'asse. A differenza di prima non mi segno dove si trova esattamente il polo/zero ma lo "sdoppio" segnandomi il polo una decade prima e una decade dopo (cioè dal polo di partenza otterrò due poli, uno si troverà moltiplicando per 10 e l'altro dividendo per 10). Stesso discorso per gli zeri. Per capire meglio consiglio di guardare il grafico (dove in grigio ho segnato il polo/zero "madre" che si è sdoppiato e che ormai non conta più ai fini del grafico).

Per una migliore comprensione farò un polo (che nel diagramma della fase si è sdoppiato, quindi dovrei parlare di coppia di poli) di colore verde scuro e l'altro (ovvero l'altra coppia) verde chiaro.



Per rendere più facile la comprensione dirò che dal polo/zero madre si sono originate due metà opposte (presto si capirà il perché di questo nome).

Quindi inizio a tracciare la mia linea da 0 finchè non incontro la metà di qualche polo o qualche zero.

Già in 10^{-2} ho un polo, quindi, nel mio caso, il grafico parte inclinato, ma se fossi partito da 10^{-3} avrei avuto un segmento parallelo alle ascisse per una decade (cioè fino a quando non incontravo il polo).

L'inclinazione in discesa/salita stavolta è di 45° per decade.

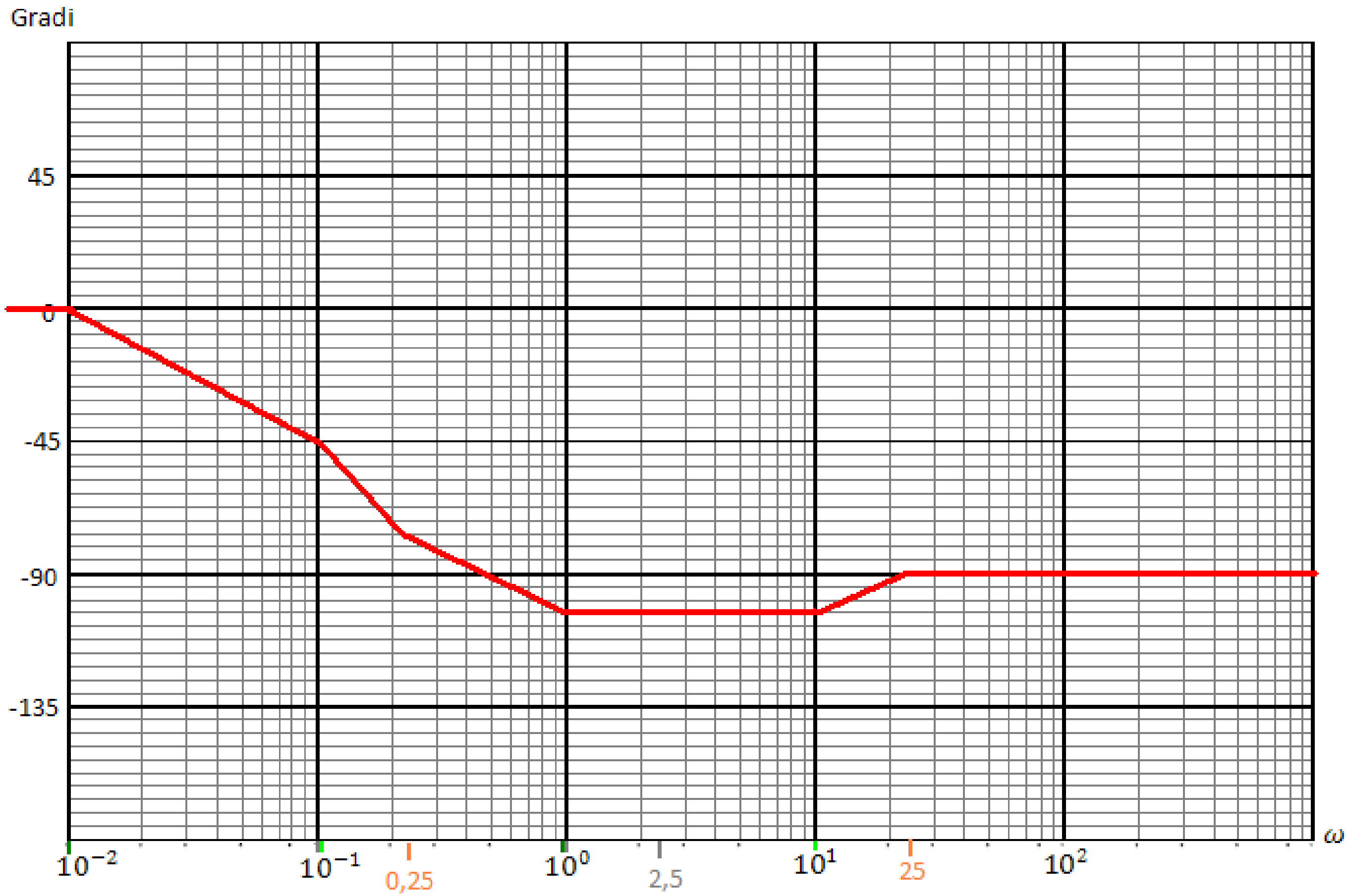
Quindi in 10^{-2} ho un polo e inizio a scendere con una pendenza di 45° per decade in 10^{-1} ne ho un altro dunque scendo ancora di più. In 10^{-1} ho, in realtà, una metà che si è originata dal polo -1 preso in modulo quindi non sto considerando il polo che c'era prima $-0{,}1$ (preso in modulo) perché anch'esso si è diviso, perciò devo considerare solo le metà.

Continuando becco uno zero perciò salgo di +45° per decade (poiché prima scendevo di 90° per decade significa che ora scenderò di 45° gradi per decade). Andando ancora avanti becco la seconda metà di un polo. Avevo detto che queste due metà sono "opposte" questo perché adesso la seconda metà del polo mi fa salire di 45° gradi per decade.

Quindi la prima metà di un polo mi fa scendere e la metà successiva mi fa salire. Viceversa con le metà degli zeri, prima salgo e poi scendo (sempre di 45° per decade).

Se per caso (sia nel diagramma dei moduli che in quello delle fasi) avessi più poli o zeri sovrapposti dovrei fare la somma degli effetti. Ad esempio se in un punto ho uno zero e un polo l'effetto si annulla, la pendenza non cambierà, se ho due poli invece scenderò due volte più rapidamente.

Il grafico finale per la fase è il seguente:



La fase ha un grafico che inizia sempre con una semiretta parallela alle ascisse e che finisce con una semiretta anch'essa parallela. In parole semplici inizia e finisce con una pendenza nulla.

Per sapere a quanti gradi si troverà la fase alla fine del grafico, si può usare la seguente formula:

$(n - m) \cdot -90°$

Esempio 2

Mettiamo di avere:

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+3)^2}$$

Come si può notare c'è un s da "solo" al denominatore. Questo è un polo nell'origine, perché in realtà sarebbe:

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(0+s)\cdot(s+3)\cdot(s+3)}$$

Ma procediamo con ordine. Prima mi calcolo k facendo il limite.

Però, nell'esercizio precedente, ho scritto una versione semplificata del limite. Infatti, la formula è:

$$\lim_{\omega \to 0} \left| \left(\frac{1}{s}\right)^m \cdot s^n \cdot G(s) \right|$$

Dove m è il numero di zeri e n è il numero di poli.

Quindi praticamente gli s che stanno da soli al numeratore o al denominatore li faccio diventare 1.

Quindi risolvo il limite (usando come variabile s che tanto è equivalente):

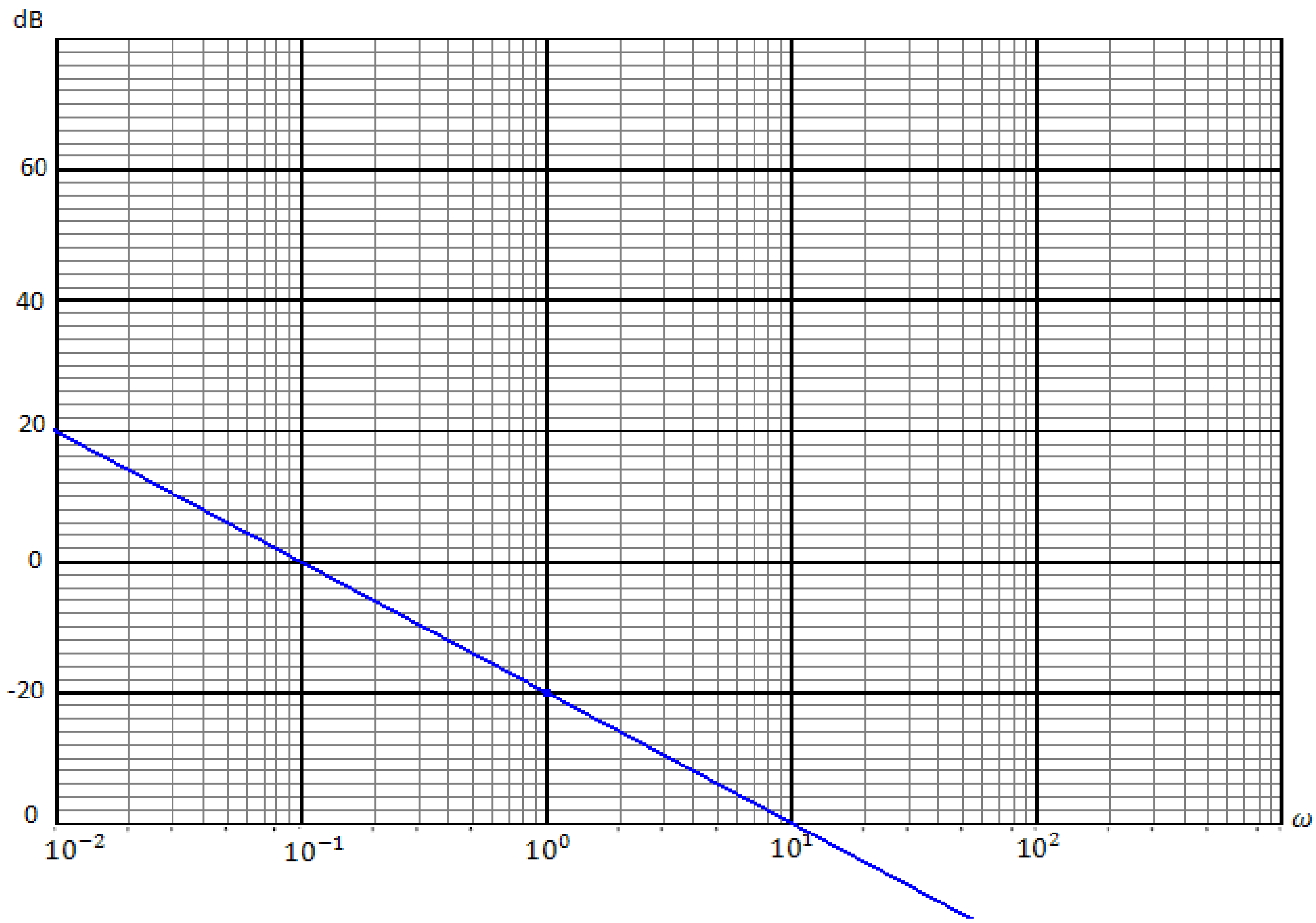
$$\lim_{s \to 0} \left(\frac{1}{s}\right)^0 \cdot s^1 \cdot \frac{(s+1)}{s(s+3)^2} = \frac{1}{9} = 0{,}1$$

$$k = 20 \log_{10} 0{,}1 = -20\ dB$$

Il numeratore si annulla solo se $s + 1 = 0 \to s = -1$ (zero)

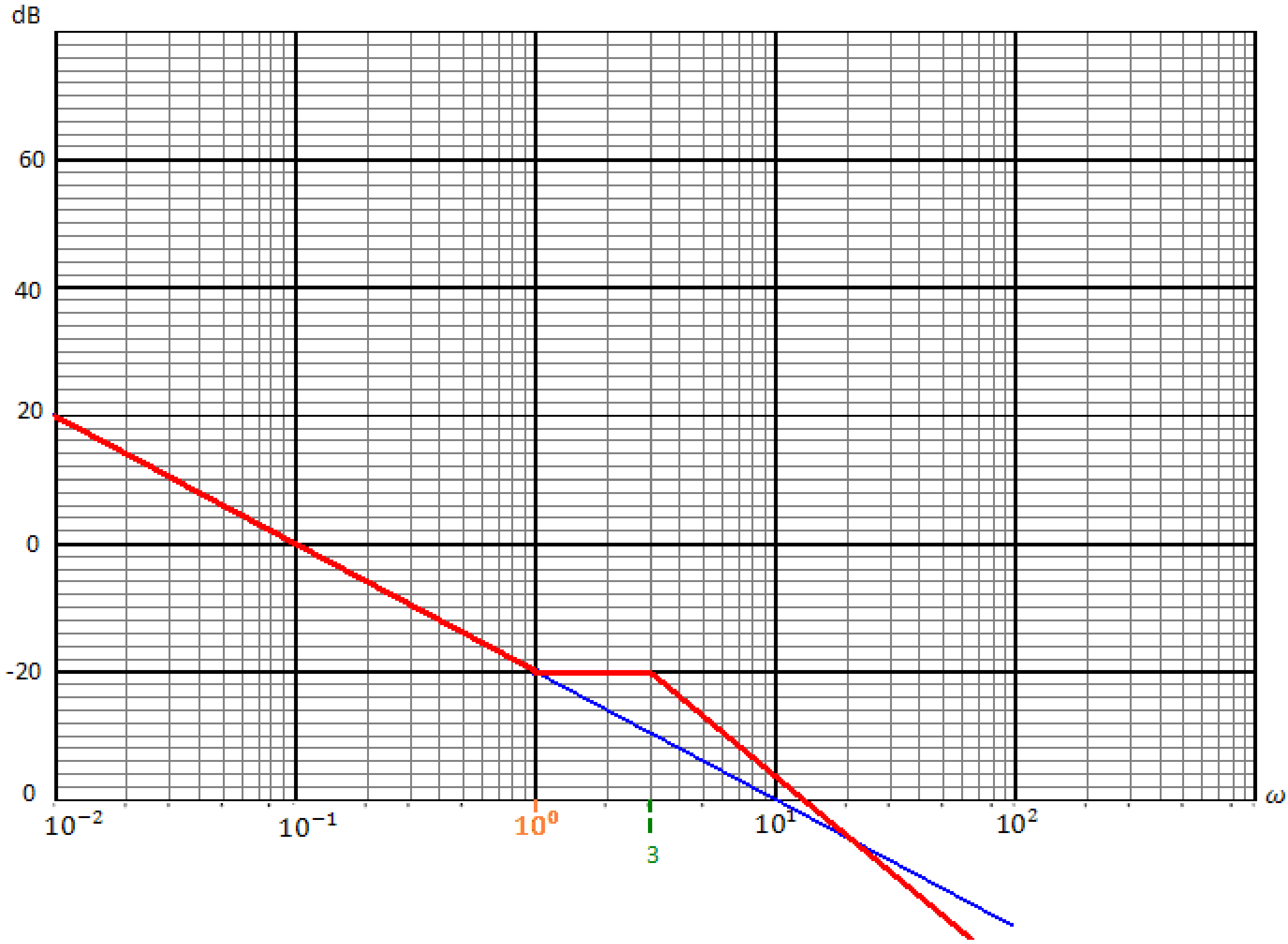
Il denominatore si annulla se $0 + s = 0 \to s = 0$ (1° polo) o se $s + 3 = 0 \to s = -3$ (2° polo) o se $s + 3 = 0 \to s = -3$ (3° polo)

Come si può notare ho anche due poli coincidenti (ma come già detto nel primo esempio poco importa, semplicemente si sommano gli effetti). Per iniziare a tracciare il grafico (del modulo) segno un puntino di altezza k sopra 10^0. Ora traccio il grafico ideale, cioè non considerando poli e zeri, che consiste in una retta passante per il punto segnato. A differenza del caso precedente non sarà più orizzontale, ma la nostra retta ideale avrà una pendenza di $-20\ dB$ per decade. La retta è in discesa perché c'è un polo nell'origine (è vero che poco fa ho detto di non tener conto di poli e zeri ma in realtà per il grafico "ideale" devo tenere conto dei poli e degli zeri nell'origine). Se avessi avuto al denominatore $s^2(s+3)^2$ ciò avrebbe significato che la retta ideale avrebbe avuto un inclinazione di -40 dB per decade (somma degli effetti). Stesso discorso per gli zeri. Se avessi avuto uno (o più) zeri nell'origine avrei dovuto inclinare la retta in salita.



Poiché la retta passa per -20 a 10^0 ed ha una pendenza di -20 dB per decade so che una decade prima (cioè a 10^{-1}) passa per un punto che si trova ad un'altezza maggiorata di 20, cioè a 0. Conoscendo quindi due punti posso tracciare la retta.

Come nell'esempio precedente mi segno sugli assi gli zeri e i poli (ma non mi segno il polo nell'origine poiché il "suo effetto" già l'ho contato partendo da un grafico "ideale" inclinato) e prestando attenzione all'effetto doppio del polo 3.



Ho usato il trattino doppio per indicare il doppio polo.

La pendenza finale è:

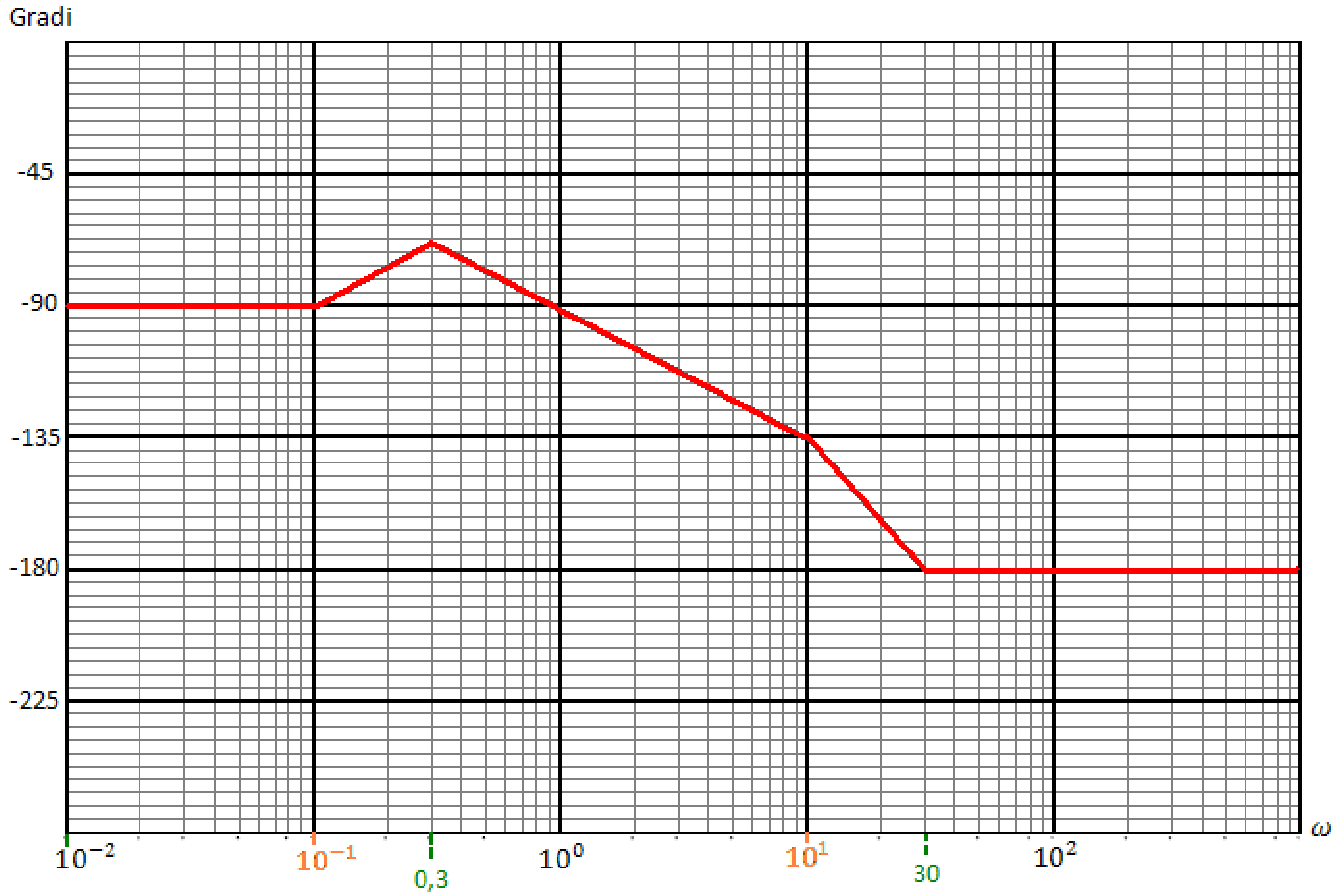
$(3\ poli - 1\ zero) \cdot -20 => -40\ dB$ per decade

La fase invece parte sempre in orizzontale, però per ogni polo nell'origine parte 90° sotto, per ogni zero 90° sopra. Ciò significa che nel nostro caso partirà da $-90°$ perché abbiamo un polo nell'origine (se fossero stati due saremmo partiti da $-180°$).

Come nel modulo il polo nell'origine non viene considerato (quindi non viene sdoppiato) perché abbiamo già tenuto conto del suo effetto partendo da $-90°$.

Per il resto si procede normalmente. Quando sdoppieremo il polo doppio, esso genererà due metà doppie. Quindi, quando incontreremo le prime due sovrapposte, dovremo scendere di 90° gradi per decade, quando incontreremo le altre due seconde metà saliremo di 90° gradi.

Questa volta i poli madre non li segnerò neanche più nel grafico.



Il grafico finisce a:

$(3\ poli - 1\ zero) \cdot -90 \Rightarrow\ -180°$

Esempio 3

$$G(s) = \frac{s(s-1)}{(s+2)}$$

Calcolo k:

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s}\right)^{1} \cdot s^{0} \cdot \frac{s(s-1)}{(s+2)} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

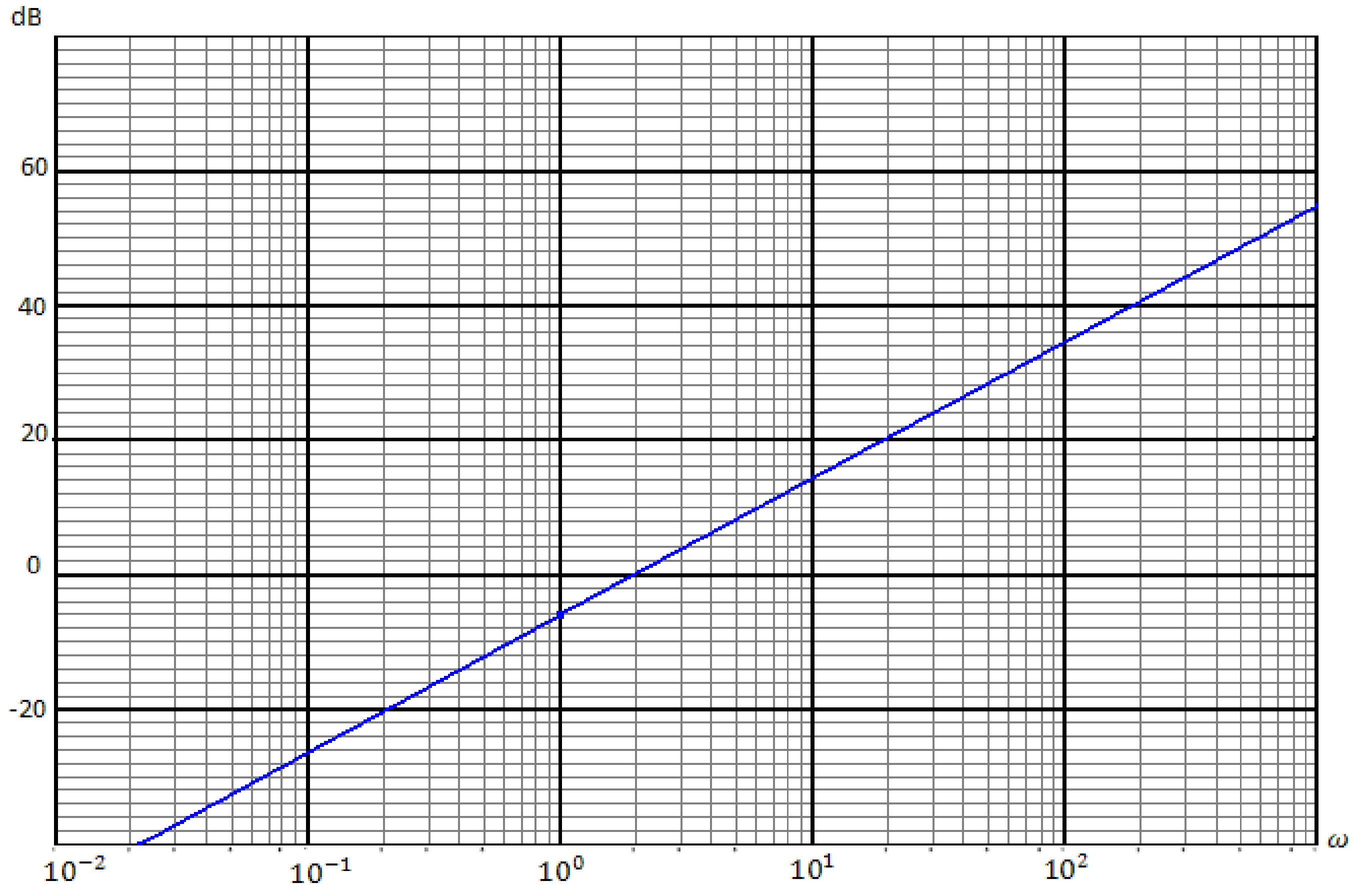
Prendo il numero ottenuto in modulo (perché l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo):

$k = 20\log_{10} 0{,}5 = -6 \qquad Z)0;\ 1 \quad P) - 2$

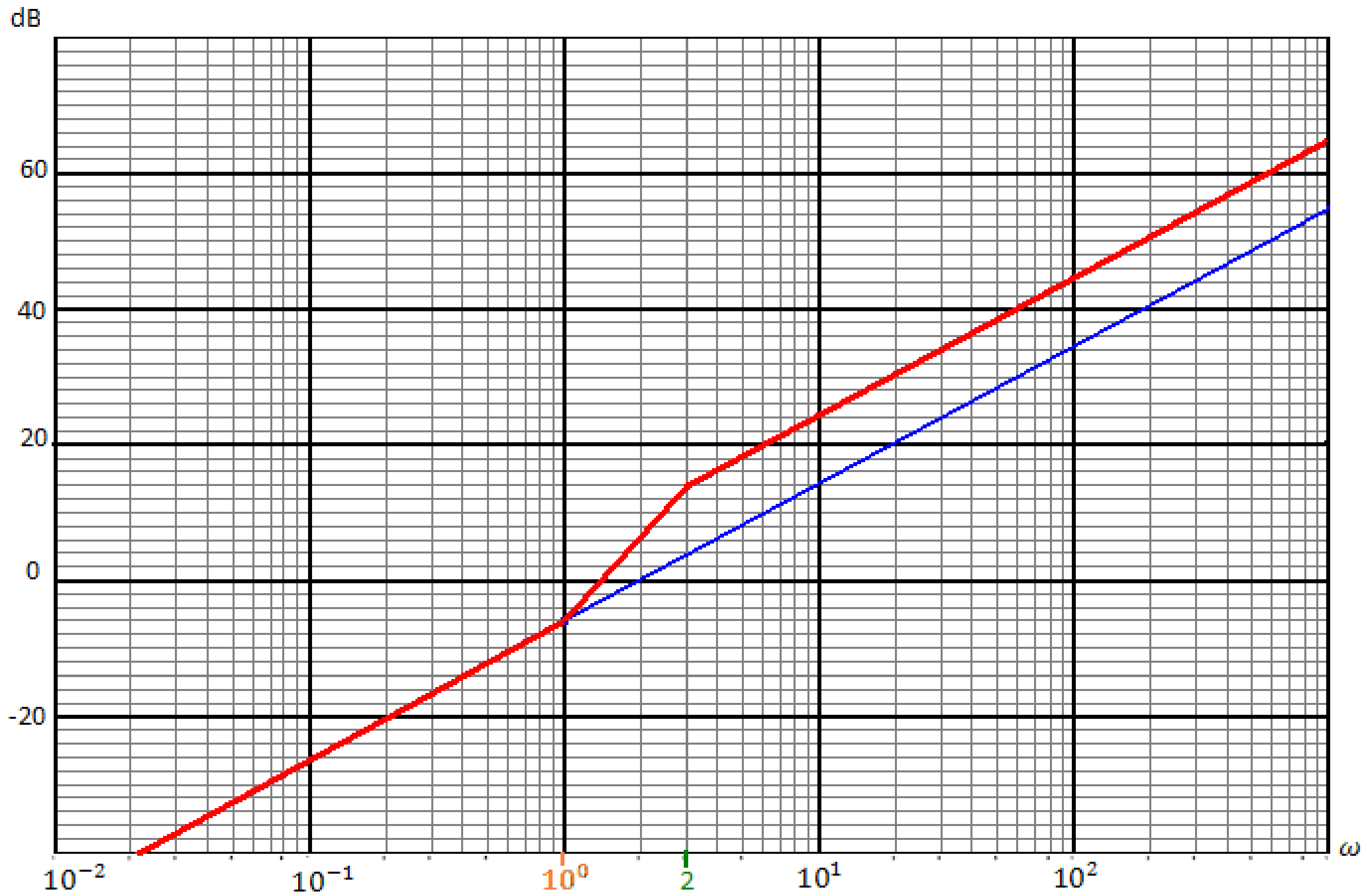
Lo zero dato da $(s-1)$ cambierà il comportamento del grafico della fase, ma non del modulo.

Traccio il grafico del modulo tenendo conto delle istruzioni già date negli esempi precedenti e prendendo poli e zeri in modulo e posizionandoli sull'asse delle ascisse.

Poiché ho uno zero nell'origine la retta sarà inclinata in alto e per 10^0 passerà ad altezza -6



Ora la ricalco tenendo conto degli zeri e dei poli:



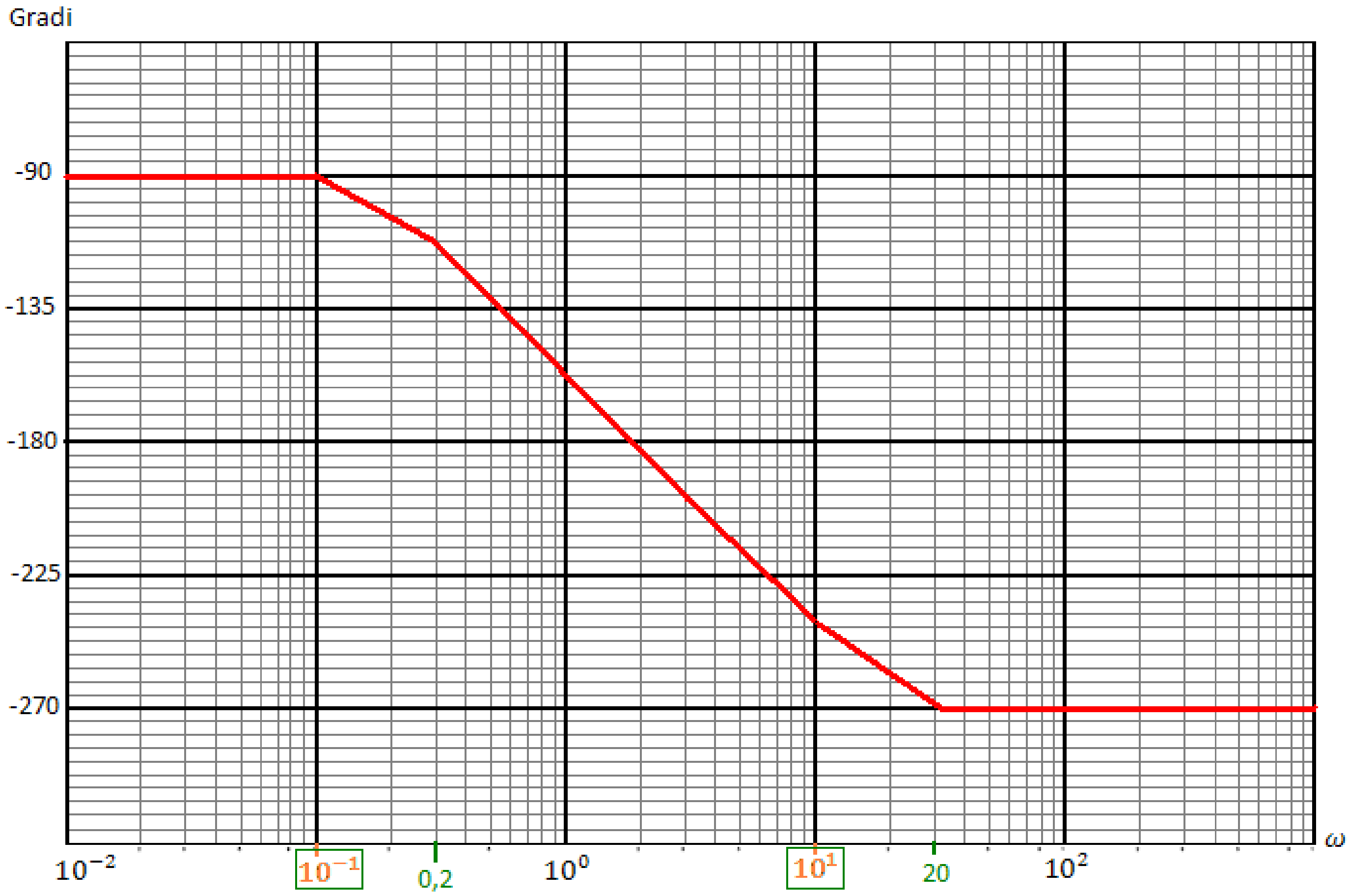
Ora devo fare il grafico della fase, il quale partirà da 90° poiché ho uno zero nell’origine.

Pendenza finale: $(1\ polo - 2\ zeri) \cdot -20 => 20$ dB per decade

La particolarità è che la fase tiene, in un certo senso, conto dei segni. Nel grafico dispongo sempre i poli e gli zeri prendendoli in modulo e sdoppiandoli, però le due metà dello zero, poiché provengono da uno zero a parte reale positiva (cioè s esce positivo poiché c'è il meno), si comportano in maniera opposta, cioè la prima metà mi farà scendere e la seconda mi farà salire (proprio come farebbero le due metà di un polo). Questo succede anche per i poli. Cioè se ho un polo con parte reale positiva (cioè ho un meno nell'espressione che mi rende positivo il polo) allora in fase le sue due metà si comporteranno come uno zero (prima sale e poi scende).

In oltre, poiché il k lineare (cioè il risultato del limite, quello in dB non mi interessa) era negativo, la fase, che nel nostro caso dovrebbe partire da 90°, partirà da $-90°$. Questo perché quando k è negativo nella fase si sottraggono al punto di partenza 180°.

Quindi il grafico risultante sarà:



Ho evidenziato in verde le due metà dello zero per indicare più chiaramente che si comportano come se fossero poli. Altezza finale: $-180 + (2\ poli - 1\ zero) \cdot -90 => -270°$

Di polo, in teoria, ne ho solo uno. In realtà, poiché lo zero si comporta come polo lo considero a tutti gli effetti un polo e quindi lo conto come tale (questo vale solo per la fase). Perciò, l'unico zero è quello nell'origine. In oltre, poiché k è negativo, dato che sono partito traslato finirò traslato, se k fosse stato positivo non ci sarebbe stato bisogno di sottrarre 180°.

In questo esempio, poiché k lineare era negativo abbiamo sfasato la fase di 180° sottraendoli. Volendo si poteva anche sommarli poiché $-180°$ e 180° sono lo stesso angolo è indifferente, ma per convenzione ho scelto $-180°$.

In questo documento non sono stati trattati e non si tratteranno poli e zeri con parte immaginaria.

Materiale di riferimento

Esercizi svolti: http://www.elzim.altervista.org/alterpages/files/FDT_BODE_ESERCIZI.pdf

Programma per tracciare diagrammi (sviluppato al MIT):

http://math.mit.edu/mathlets/mathlets/bode-and-nyquist-plots/