Nota importante: questi appunti sono stati presi da me a lezione, e integrati ove necessario con materiale reperito su siti web, libri, etc.
Questi appunti non sono assolutamente da ritenere come sostituto di materiale didattico fornito dal professore del corso (libri, dispense etc.), ma come supporto allo studio personale; non sono inoltre né visionati né approvati dal Docente del Corso.
Non escludo che siano affetti da errori e/o imprecisioni, e declino ogni responsabilità sull'uso che si farà di questo fascicolo.

23 Maggio 2013

Funzione descrittiva

Sistemi con semplici non linearità

L'ipotesi di linearità di un sistema di controllo è giustificata nella realtà solo se tutte le variabili del sistema subiscono variazioni piccole; infatti, tutti i sistemi reali sono non lineari e si comportano approssimativamente in maniera lineare solo per piccoli segnali. In particolare:

- le caratteristiche dipendono dall'ampiezza dei segnali;
- lo studio è più complesso;
- è difficile imporre specifiche.

Gli obiettivi minimi sono di verificare la presenza di oscillazioni (cicli limite) e calcolare i valori di regime.

Le ipotesi sono:

- Una sola NL SISO (Non lineare, Singolo Ingresso Singola Uscita) nel ciclo;
- La caratteristica è algebrica non differenziale, cioè non dipende da ω .

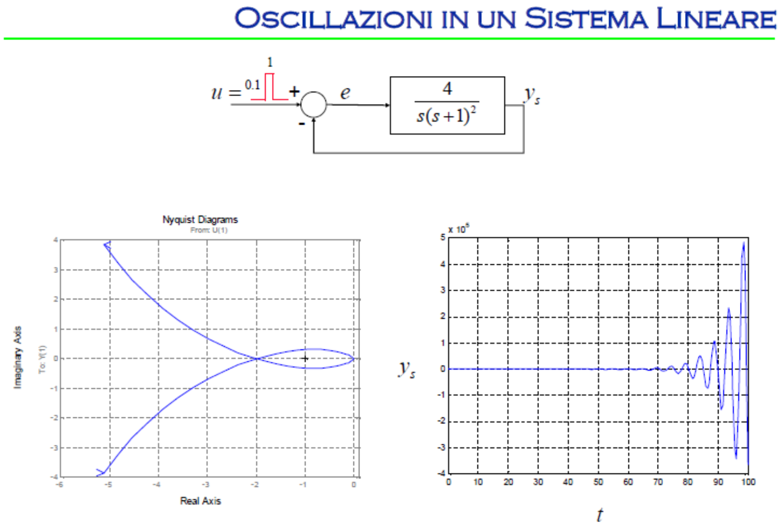
Ciclo limite

Si ha un ciclo limite quando l'andamento delle variabili di stato di un sistema autonomo (u=0) è periodico. È definito da ampiezza e frequenza. Un esempio è l'orbita di un satellite. Possiamo applicare al ciclo limite i concetti di stabilità:

- ciclo limite stabile: x(t), dopo una piccola pertubazione istantanea, torna sul ciclo limite;
- ciclo limite instabile: x(t), dopo una piccola pertubazione istantanea, si allontana.

I cicli limite si possono avere solo con sistemi non lineari.

Oscillazione di un sistema lineare



Abbiamo modo di notare che la funzione ad anello aperto è instabile:

- su Bode il margine di fase è negativo;
- su Nyquist abbraccia il punto (-1, 0); inoltre Nyquist mi dice che anche il sistema ad anello chiuso è instabile.

La funzione ad anello chiuso è:

$$\frac{4}{s^3+2s^2+s+4}$$

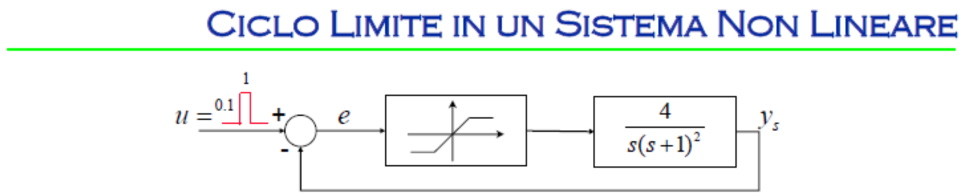
L'instabilità della funzione a ciclo chiuso la posso vedere:

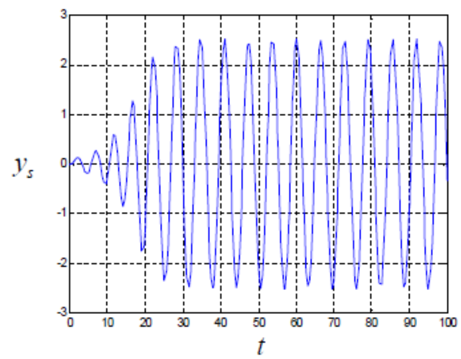
- su Bode il margine di fase è negativo;
- su Nyquist: un diagramma a ciclo aperto di Nyquist instabile implica che il diagramma di Nyquist a ciclo chiuso dove abbraccia (-1, 0), ma qui non succede quindi è instabile.

La risposta impulsiva del sistema a ciclo chiuso è uguale al secondo grafico in basso a destra dell'immagine qui sopra.

Ciclo limite di un sistema non lineare

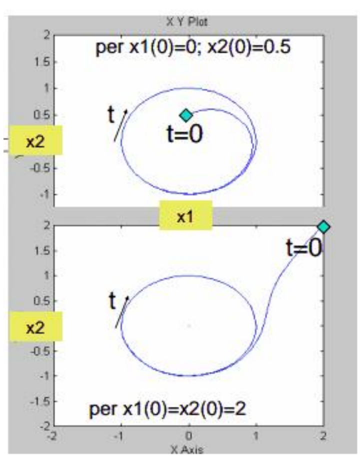
Inseriamo un saturatore nel sistema:



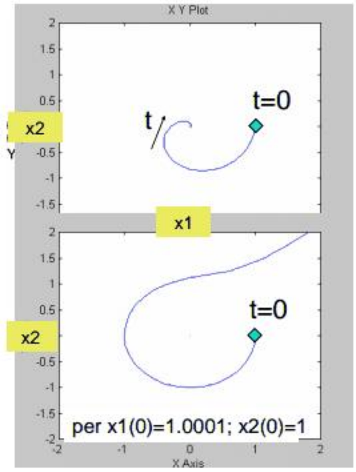


La saturazione è il massimo (e minimo) valore assoluto che la magnetizzazione di un materiale può raggiungere, quando tale materiale è sottoposto ad un campo magnetico esterno. In questo sistema, il saturatore dopo una certa frequenza taglia il segnale mantenendolo costante.

Un ciclo limite è stabile se il suo diagramma segue l'andamento circolare ($x_1^2 + x_2^2 = 1$), altrimenti assume una forma uncinata ed è instabile.



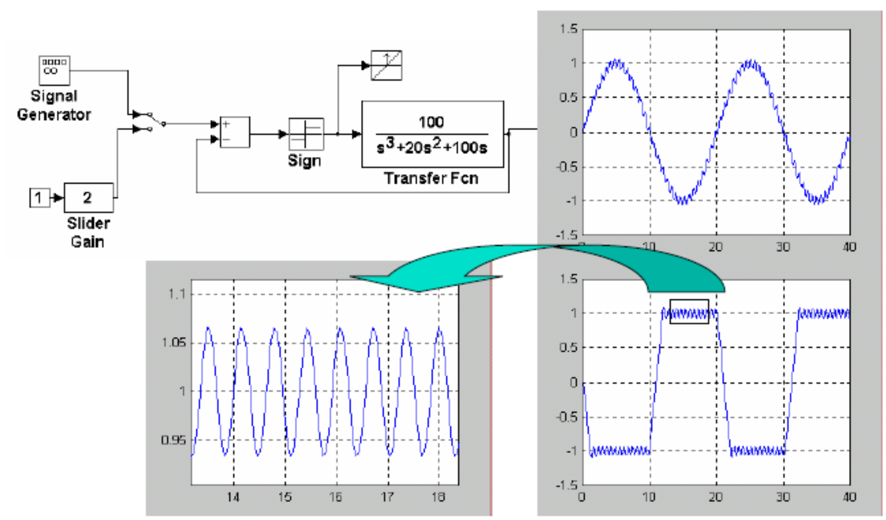
ciclo limite stabile



ciclo limite instabile

Ciclo limite in un sistema a controreazione

Il ciclo limite di un sistema a controreazione, invece si presenta cosi:



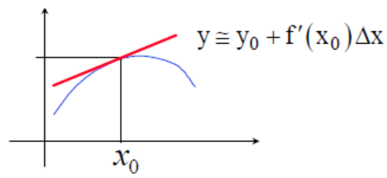
Questo sistema trasforma gli ingressi positivi in +1, mentre quelli negativi in -1.

Linearizzazione

Abbiamo studiato le linearizzazioni mediante l'espansione i nserie di Taylor; essa è adatta per ogni tipo di $\Delta x(t)$ purchè sia tendente a 0 e purchè sia derivabile.

Taylor

- esatta per $\Delta x \to 0$

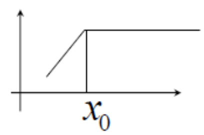


- adatta $\forall$ tipo di $\Delta x(t)$

Si trascurano le derivate >1

- Cade se Δx grande, ad es. oscillazioni

- Non utilizzabile se $\nexists f'(x)$



In questi sistemi si deve linearizzare secondo il metodo armonico:

Armonica

$$x \sin \omega t \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow K x \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x \sin \omega t \longrightarrow \boxed{NL} \longrightarrow \Sigma Y_i(x) \sin[i\omega t + \varphi_i(x)] \cong Y_0 + Y_1(x)\sin[\omega t + \varphi_1(x)]$$

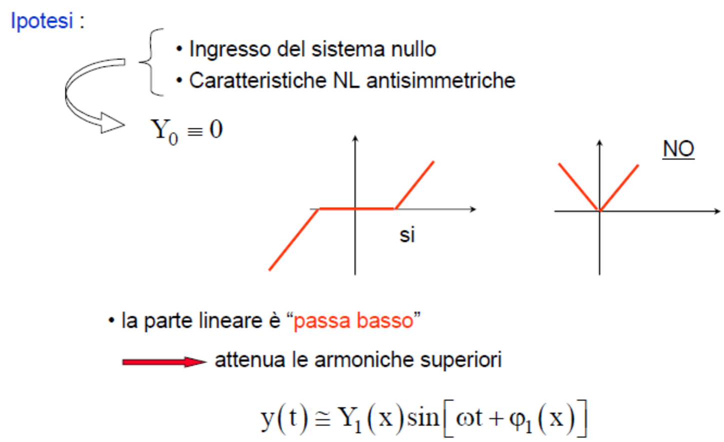
- Non legata ad un punto di lavoro ma ad un tipo di ingresso
- Valida per ogni ampiezza

Si trascurano le armoniche >1

Il segnale in uscita è esprimibile come somma di armoniche. Non considero le armoniche di ordine superiore. L'uscita dipende dall'ampiezza del segnale x applicato all'ingresso.

Metodo della funzione descrittiva

Le ipotesi vogliono che l’ingresso sia nullo, che ci sia anti-simmetrica rispetto all’origini, e che la parte lineare sia passa-basso in modo da attenuare le armoniche superiori (visto che come detto prima si trascurano le armoniche che :



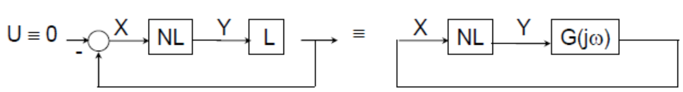
Andiamo a considerare delle non linearità che sono simmetriche all’origine: in mancanza di simmetria rispetto all’origine, un ingresso sinusoidale produrrebbe un valore medio. Ipotizziamo che la parte lineare si di tipo passa basso.

La funzione descrittiva è una funzione complessa:

$$F(x) = \frac{1}{x} \cdot Y_1(x) \cdot e^{j\phi_1(x)}$$

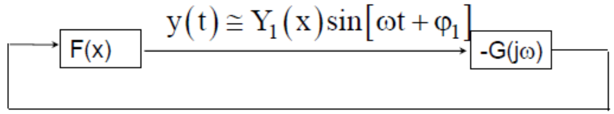
ovvero il numero complesso, funzione dell’ampiezza X del segnale sinusoidale applicato all’ingresso, il cui modulo è uguale al rapporto tra l’ampiezza fondamentale y_1 del segnale d’uscita e quella x del segnale d’ingresso e il cui argomento è uguale allo sfasamento ϕ_1 della fondamentale del segnale d’uscita rispetto al segnale d’ingresso.

F(x) è quasi una funzione di trasferimento, con guadagno variabile.



Il primo è il loop che vogliamo studiare (L rappresenta la parte lineare e c’è la non linearità rappresentata da NL). L’ingresso viene impostato a 0 perché il tutto si deve autosostenere.

Il segno meno quindi viene messo dall'altra parte dentro il nuovo blocco $G(j\omega)$:



y(t), dopo esser passato per F(x), quando passa per il secondo blocco, ritorna al valore iniziale:

$$X\sin\omega t \xrightarrow{F(x)} Y_1(x)\sin[\omega t+\varphi_1] \xrightarrow{-G(j\,\omega)} X\sin\omega t$$

Condizioni per un ciclo limite $\bar{x}, \bar{\omega}$

$$\begin{cases} |G(j\bar{\omega})|\cdot Y_1(\bar{x})=\bar{x} & \Rightarrow \quad |G|=\dfrac{1}{|F|} \\ \angle G(j\omega)+\varphi_1(\bar{x})=180^\circ \end{cases}$$

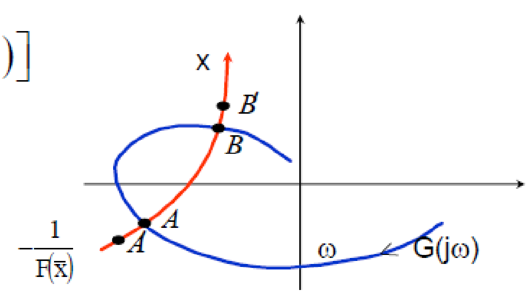
L'equazione possiamo risolverla graficamente poiché gli eventuali punti di intersezione tra i diagrammi polari (Nyquist) e $G(j\omega)$ e $-\frac{1}{F(x)}$ corrispondono ai valori di ω di x per i quali è soddisfatta la precedente la precedente condizione.

Interpretazione Grafica

$$\arg[G(j\bar{\omega})]=180^\circ-\arg[F(\bar{x})]$$

$$|G(J\bar{\omega})|=\frac{1}{|F(\bar{x})|}$$

$$-\frac{1}{F(\bar{x})}=G(j\bar{\omega})$$



Quando c'è intersezione c'è un ciclo limite

A : C.L. instabile se $\bar{x}$ diminuisce (A'), occorrerebbe |G|maggiore

B : C.L. stabile se $\bar{x}$ aumenta (B') con |G|=cost,
può ridiminuire e tornare a B

Ad un punto di intersezione di $G(j\omega)$ e $-\frac{1}{F(x)}$ corrisponde un ciclo limite stabile quando all'aumentare di x, il punto $-\frac{1}{F(x)}$ tende ad uscire dal dominio la cui frontiera è costituita dal diagramma polare completo di $G(j\omega)$, altrimenti è instabile.