BÚSQUEDA DE CEROS. Método de la bisección.

Queremos encontrar el valor de x que verifica $f(x) = 0$.

Supongamos que sabemos que $x \in (a, b)$. Entonces, $f(a) * f(b) < 0$. Se trata de realizar divisiones sucesivas del intervalo hasta acotar la solución en un subintervalo de tamaño menor que la precisión deseada en el cálculo.

Llamemos $x_a = a$ y $x_b = b$. Entonces, $f(x_a) * f(x_b) < 0$. Dividimos el intervalo (x_a, x_b) en dos trozos iguales (x_a, x_0) y (x_0, x_b) donde $x_0 = (x_a + x_b)/2$. Supongamos que se cumple $f(x_0) * f(x_b) < 0$, entonces llamamos $x_a = x_0$ y dividimos el intervalo (x_a, x_b) en dos trozos iguales (x_a, x_0) y (x_0, x_b) donde $x_0 = (x_a + x_b)/2$. Supongamos que se cumple $f(x_a) * f(x_0) < 0$, entonces llamamos $x_b = x_0$ y dividimos el intervalo (x_a, x_b) en dos trozos iguales (x_a, x_0) y (x_0, x_b) donde $x_0 = (x_a + x_b)/2$. Este proceso iterativo se continuará mientras $|x_b - x_0| > \epsilon$ donde ϵ es la precisión que necesitamos para la solución. Al final del proceso iterativo, la solución numérica será $x_0 \pm \epsilon$.

Error del método.

Sea x_c la solución exacta de $f(x) = 0$ y $x_0^{(n)}$ la solución que se obtiene usando el método de la bisección con n iteraciones. El error en la aproximación numérica será $|x_c - x_0^{(n)}| \leq \epsilon$.

Convergencia.

Después de n iteraciones, el intervalo n-esimo tiene la mitad de longitud que el intervalo $n-1$, es decir:

$$(x_b^{(n)} - x_a^{(n)}) = \frac{1}{2}(x_b^{(n-1)} - x_a^{(n-1)}) = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

Entonces:

$$|x_c - x_0^{(n)}| \leq |x_b^{(n)} - x_a^{(n)}| = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

Luego, el método converge a la solución exacta cuando $n \to \infty$ a la velocidad indicada.

Relación entre el número de iteraciones y ϵ.

Después de n iteraciones,

$$|x_b^{(n)} - x_a^{(n)}| \leq \epsilon$$

Entonces:

$$\frac{1}{2^n}(b - a) \leq \epsilon \Longrightarrow n \geq \frac{ln((b - a)/\epsilon)}{ln\ 2}$$

BÚSQUEDA DE CEROS. Método de Newton.

Queremos encontrar el valor de x que verifica $f(x) = 0$.

El método consiste en seguir la pendiente de la función f hasta llegar al cero.

Sea $x^{(0)}$ un valor inicial. La derivada de f en $x^{(0)}$ es la tangente a f en el punto $x^{(0)}$. Sea $(x^{(1)}, 0)$ un punto por donde pasa esta tangente. Entonces,

$$f'(x^{(0)}) = \frac{f(x^{(0)})}{x^{(0)} - x^{(1)}}$$

Despejando $x^{(1)}$ tenemos:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

Podemos comenzar de nuevo el proceso considerando x_1 como valor inicial. Entonces:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

Así sucesivamente, tenemos un proceso iterativo donde:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

El proceso iterativo se sigue mientras $|x^{(n+1)} - x^{(n)}| > \epsilon$ donde ϵ es la precisión requerida; es nuestro error en la determinación del cero.

Convergencia

Usando el teorema de Taylor

$$f(x_c) = f(x^{(n)}) + (x_c - x^{(n)})f'(x^{(n)}) + \frac{1}{2}(x_c - x^{(n)})^2 f''(\xi^{(n)})$$

donde $\xi^{(n)} \in (x_c, x^{(n)})$.

Como $f(x_c) = 0$ y dividiendo por $f'(x^{(n)})$ nos queda:

$$0 = \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} + (x_c - x^{(n)}) + (x_c - x^{(n)})^2 \frac{f''(\xi^{(n)})}{2f'(x^{(n)})}$$

Como

$$x^{(n)} - x^{(n+1)} = \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

tenemos:

$$x_c - x^{(n+1)} = -\frac{f''(\xi^{(n)})}{2f'(x^{(n)})}(x_c - x^{(n)})^2$$

Si

$$\frac{f''(\xi^{(n)})}{2f'(x^{(n)})}$$

acotado, llamemos M a la cota, es decir:

$$M = \frac{\max |f''(x)|}{2 \min |f'(x)|}$$

donde x está en la region de trabajo, entonces

$$|x_c - x^{(n+1)}| \leq M|x_c - x^{(n)}|^2 = M^{-1}(M|x_c - x^{(n)}|)^2 \leq M^{-1}(M|x_c - x^{(0)}|)^{2^{n+1}}$$

Si $M|x_c - x^{(0)}| < 1$, entonces $|x_c - x^{(n+1)}| \to 0$

BÚSQUEDA DE CEROS. Método de la Secante.

La estrategia es parecida a la del método de Newton-Raphson, pero en lugar de utilizar un punto inicial se utilizan dos puntos para caer por la recta que los une hasta el eje de abcisas.

Igualando las pendientes:

$$\frac{f(x^{(1)})}{x^{(1)} - x^{(2)}} = \frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}}$$

Despejando $x^{(2)}$ obtenemos:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{\Delta^{(1)}}$$

donde

$$\Delta^{(1)} = \frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}}$$

En general,

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{\Delta^{(n)}}$$

donde

$$\Delta^{(n)} = \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}}$$

El proceso iterativo se sigue mientras $|x^{(n+1)} - x^{(n)}| > \epsilon$ donde ϵ es la precisión requerida; es nuestro error en la determinación del cero.

<u>Convergencia</u>

Sea $e_n = x^{(n)} - x_c$. Llamemos $f_n = f(x^{(n)})$. Entonces,

$$e_{n+1} = x^{(n+1)} - x_c = x^{(n)} - \tfrac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{f_n - f_{n-1}} f_n - x_c =$$
$$\tfrac{x^{(n)} f_n - x^{(n)} f_{n-1} - x^{(n)} f_n + x^{(n-1)} f_n - f_n x_c + f_{n-1} x_c}{f_n - f_{n-1}} =$$
$$\tfrac{e_{n-1} f_n - e_n f_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} = \tfrac{e_{n-1} f(x_c + e_n) - e_n f(x_c + e_{n-1})}{f(x_c + e_n) - f(x_c + e_{n-1})}$$

Aproximando la función por su desarrollo de Taylor hasta orden 2, es decir:

$$f(x_c + e_n) \sim f'(x_c) e_n + \frac{f''(x_c)}{2} e_n^2 + O(e_n^3)$$

tenemos:

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1} e_n \frac{f''(x_c)}{2} + O(e_{n-1}^4)}{f'(x_c) + (e_n + e_{n-1}) \frac{f''(x_c)}{2} + O(e_{n-1}^2)}$$

Como:

$$\frac{1}{f'(x_c)+\epsilon} \sim \frac{1}{f'(x_c)} - \epsilon\frac{1}{(f'(x_c))^2}$$

tenemos:

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1}e_n f''(x_c)}{2f'(x_c)} + O(e_{n-1}^3)$$

Queremos encontrar α tal que $|e_{n+1}| = C|e_n|^\alpha$ es decir:

$$|\frac{e_{n-1}e_n f''(x_c)}{2f'(x_c)}| = C|e_n|^\alpha \Rightarrow |\frac{e_{n-1} f''(x_c)}{2f'(x_c)}| = C|e_n|^{\alpha-1} \Rightarrow |e_n|^{\alpha-1} = D|e_{n-1}|$$

donde

$$D = |\frac{e_{n-1} f''(x_c)}{2Cf'(x_c)}|$$

La relacion de recurrencia anterior la podemos escribir como:

$$|e_{n+1}|^{\alpha-1} = D|e_n|$$

Elevando los dos lados a α queda:

$$|e_{n+1}|^{\alpha(\alpha-1)} = D^\alpha|e_n|^\alpha$$

Por otro lado sabemos que

$$|e_{n+1}| = C|e_n|^\alpha$$

Por lo tanto, $C = D^\alpha$ y $\alpha(\alpha-1) = 1$.

$$\alpha(\alpha-1) = 1 \Rightarrow \alpha = (1+\sqrt{5})/2 \sim 1.6$$

La convergencia es algo más lenta que en el método de Newton donde $\alpha = 2$.