INTEGRACION.Método Trapezoidal.

Obtención de

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Se divide (a, b) en n subintervalos

  $(x_0 = a, x_1); (x_1, x_2); ....; (x_{n-1}, x_n = b)$

  del mismo tamaño $x_{j+1} - x_j = \tau$

  De manera que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx$$

- En cada subintervalo (x_j, x_{j+1}) se aproxima la funcion f por un polinomio de interpolación de grado 1.

$$P_1(x) = h_1 x + h_0 \quad / \quad \begin{array}{rl} f(x_j) = & h_1 x_j + h_0 \\ f(x_{j+1}) = & h_1 x_{j+1} + h_0 \end{array}$$

$$\Rightarrow P_1(x) = f(x_j)\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + f(x_{j+1})\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

- Integración de P_1.

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} P_1(x)dx = \frac{f(x_j)}{x_j - x_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_{j+1})dx + \frac{f(x_{j+1})}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j)dx$$

$$= \frac{f(x_j)}{x_j - x_{j+1}}(\frac{-1}{2})(x_j - x_{j+1})^2 + \frac{f(x_{j+1})}{x_{j+1} - x_j}\frac{1}{2}(x_{j+1} - x_j)^2$$

$$\Rightarrow \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_1(x)dx = (x_{j+1} - x_j)\frac{f(x_{j+1}) + f(x_j)}{2}$$

Si $x_{j+1} - x_j = \tau \ \ \forall j$, entonces:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} P_1(x)dx = \tau\frac{f(x_{j+1}) + f(x_j)}{2}$$

- Integración de f.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_1(x)dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \tau \frac{f(x_{j+1}) + f(x_j)}{2}$$

$$= \tau(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) + \frac{1}{2}f(x_2) + \cdots + \frac{1}{2}f(x_n))$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \tau(\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b))$$

Ejemplos:
Obtener

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Dividimos el intervalo $(0, 1)$ en 4 subintervalos
$(0, \frac{1}{4}); (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}); (\frac{3}{4}, 1)$
Entonces:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq \frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{-0} + e^{-(\frac{1}{4})^2} + e^{-(\frac{1}{2})^2} + e^{-(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{2}e^{-1}) = 0.743$$

Estimación del error al aplicar el método trapezoidal

- Error en la aproximación de $f(x)$ por $P_1(x)$ en el subintervalo (x_j, x_{j+1}).

$$f(x) - P_1(x) = \frac{1}{2}(x - x_j)(x - x_{j+1})f^{(2)}(c_{j+1})$$

  donde $c_{j+1} \in (x_j, x_{j+1})$.

- Error en la aproximación de la integral dentro del subintervalo (x_j, x_{j+1}).

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_1(x)dx = \frac{\tau^3}{12} f^{(2)}(c_{j+1})$$

  donde $c_{j+1} \in (x_j, x_{j+1})$.

  Dem.

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_1(x)dx = \frac{f^{(2)}(c_{j+1})}{2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x-x_j)(x-x_{j+1})dx$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (x-x_j)(x-x_{j+1})dx = \int_{x_j}^{x_j+\tau} (x-x_j)(x-x_j-\tau)dx$$

$$= \int_0^{\tau} \omega(\omega-\tau)d\omega = \frac{1}{3}\tau^3 - \frac{1}{2}\tau^3 = \frac{1}{6}\tau^3$$

Luego:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_1(x)dx = \frac{1}{12}\tau^3 f^{(2)}(c_{j+1})$$

- Error en la aproximación de la integral dentro del intervalo (a, b).

$$error = \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_1(x)dx \simeq \frac{\tau^2}{12}(f^{(1)}(b) - f^{(1)}(a))$$

Dem.

$$error = \frac{1}{12}\tau^3 \sum_{j=0}^{n-1} f^{(2)}(c_{j+1})$$

$$= \frac{1}{12}\tau^2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau f^{(2)}(c_{j+1}) \simeq \frac{1}{12}\tau^2 \int_a^b f^{(2)}(x)dx$$

$$= \frac{1}{12}\tau^2 (f^{(1)}(b) - f^{(1)}(a))$$

Ejemplos:
Obtener el error en la aproximación del ejemplo anterior.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$\tau = \frac{1}{4}$.

$$f^{(1)}(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow \begin{array}{rr} f^{(1)}(1) = & -2e^{-1} \\ f^{(1)}(0) = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow |error| \simeq \frac{1}{12}(\frac{1}{4})^2 (f^{(1)}(1) - f^{(1)}(0)) = 0.004$$

Ejercicio
Obtener:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx$$

Dividir el intervalo $(0, \pi)$ en 4 subintervalos.
Dar una estimación del error en el cálculo de esta integral.

Obtención de

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Se divide (a,b) en n subintervalos donde n es par

  $(x_0 = a, x_1); (x_1, x_2); ....; (x_{n-1}, x_n = b)$

  del mismo tamaño $x_{j+1} - x_j = \tau$

- Por cada tres puntos (x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) se aproxima la funcion f por un polinomio de grado 2.

$$P_2(x) = h_2x^2 + h_1x + h_0 \quad / \quad \begin{aligned} f(x_{j-1}) = &\quad h_2x_{j-1}^2 + h_1x_{j-1} + h_0 \\ f(x_j) = &\quad h_2x_j^2 + h_1x_j + h_0 \\ f(x_{j+1}) = &\quad h_2x_{j+1}^2 + h_1x_{j+1} + h_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j-1}-x_j)(x_{j-1}-x_{j+1})}f(x_{j-1}) + \frac{(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})}f(x_j)+$$

$$\frac{(x-x_{j-1})(x-x_j)}{(x_{j+1}-x_{j-1})(x_{j+1}-x_j)}f(x_{j+1})$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2(\tau)^2}f(x_{j-1}) + \frac{(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{-(\tau)^2}f(x_j)+$$

$$\frac{(x-x_{j-1})(x-x_j)}{2(\tau)^2}f(x_{j+1})$$

- Integración de P_2.

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} P_2(x)dx = \frac{f(x_{j-1})}{2\tau^2}I_1 - \frac{f(x_j)}{\tau^2}I_2 + \frac{f(x_{j+1})}{2\tau^2}I_3$$

$$I_1 = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (x-x_j)(x-x_{j+1})dx$$

Con el cambio $u = (x - x_j)$ la integral queda:

$$I_1 = \int_{-\tau}^{\tau} u(u-\tau)du = \int_{-\tau}^{\tau} u^2du - \tau\int_{-\tau}^{\tau} udu$$

$$I_1 = \int_{-\tau}^{\tau} u^2 du = 2\int_0^{\tau} u^2 du = \frac{2}{3}\tau^3$$

$$I_2 = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (x - x_{j-1})(x - x_{j+1})dx$$

Con el cambio $u = (x - x_j)$ la integral queda:

$$I_2 = \int_{-\tau}^{\tau} (u+\tau)(u-\tau)du = \int_{-\tau}^{\tau} (u^2 - \tau^2)du = -\frac{4}{3}\tau^3$$

$$I_3 = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (x - x_{j-1})(x - x_j)dx$$

Con el cambio $u = (x - x_j)$ la integral queda:

$$I_3 = \int_{-\tau}^{\tau} (u+\tau)udu = 2\int_0^{\tau} u^2 du = \frac{2}{3}\tau^3$$

Entonces:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} P_2(x)dx = \frac{1}{3}\tau(f(x_{j-1}) + 4f(x_j) + f(x_{j+1}))$$

- Integración de f.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1;j\ impar}^{n-1} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)dx \simeq \sum_{j=1;j\ impar}^{n-1} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} P_2(x)dx$$

$$= \sum_{j=1\ ;\ j\ impar}^{n-1} \frac{1}{3}\tau(f(x_{j-1}) + 4f(x_j) + f(x_{j+1}))$$

$$= \frac{\tau}{3}[f(x_0) + 2\sum_{j=2;j=par}^{n-2} f(x_j) + 4\sum_{j=1;j=impar}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)]$$

Ejemplos:
Obtener

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Dividimos el intervalo $(0,1)$ en 4 subintervalos
Entonces:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \simeq \frac{1}{3}(\frac{1}{4})(1+2e^{-(\frac{1}{2})^2}+4e^{-(\frac{1}{4})^2}+4e^{-(\frac{3}{4})^2}+e^{-1}) = 0.74686$$

Estimación del error al aplicar el método Simpson

Se puede demostrar que una estimación para el error cometido en el cálculo de la integral por el método de Simpson es:

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} P_2(x)dx \simeq -\frac{1}{180}(\tau)^4(f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a))$$

En el ejemplo anterior el error en valor absoluto sería:

$$|error| \simeq 0.00003$$

Ejercicio

Obtener:

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

Dividir el intervalo $(0,\pi)$ en 4 subintervalos.

Hay otras variantes del método de Simpson (o regla de Simpson). Por ejemplo, se podría utilizar un polinomio de grado 3 en lugar de un polinomio de grado 2. El resultado sería:

$$\int_a^b f(x)dx = \tau\frac{3}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+2f(x_6)+\cdots+f(x_n)]$$

INTEGRACION. Método de la Cuadratura Gaussiana

En los metodos trapezoidal y de Simpson se dividía el intervalo (a,b) en n subintervalos de igual longitud y se hacia una aproximacion de f por un polininomio de interpolacion de grado 1 (en el método trapezoidal) o 2 (en el método de Simpson). En ambos casos la intergral cobraba la forma siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx \sim \sum_{j=1}^{M} w_j f(x_j)$$

donde w_j son ciertos pesos.

Por ejemplo en el método de Simpson teníamos:

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{\tau}{3}[f(x_0)+2\sum_{j=2;j=par}^{n-2} f(x_j)+4\sum_{j=1;j=impar}^{n-1} f(x_j)+f(x_n)]$$

Si $n=1$ aproximaríamos la función f por un polinomio en todo el intervalo (a,b). Para que la aproximación sea suficientemente buena, el grado g del polinomio debe ser suficientemente alto. El tipo de polinomio puedes ser: el de interpolacion, Laguerre, etc, según el tipo de función.

Lo que si sabemos integrar es un polinomio, es decir, sabemos resolver de manera exacta la integral para el caso $f(x) = P_g(x)$. La idea del método de la cuadratura gaussiana es determinar $(w_j,\ x_j)\ \forall j = 1, \ldots, M$ suponiendo $f(x) = P_g(x)$, y utilizar estos mismos valores para cualquier $f(x)$.

Por claridad veamos un caso particular de este procedimiento.

Supongamos $M = 2,\ a = -1,\ b = 1$, es decir:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

Para determinar los parámetros $(w_j,\ x_j)\ \ \forall j = 1, 2$ exigimos que la integral sea exacta para los siguientes cuatro casos:

$$\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = x \\ f(x) = x^2 \\ f(x) = x^3 \end{array}$$

Esto nos conduce a las siguientes 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & w_1 + w_2 \\ 0 & = & w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ \frac{2}{3} & = & w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 \\ 0 & = & w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 \end{array}$$

cuya solución es:

$$w_1 = w_2 = 1\ ;\ x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Entonces, nuestra formula de integración sería:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

<u>Ejemplos:</u>

Obtener

$$\int_{-1}^{1} e^x dx$$

Solución aproximada por la fórmula anterior:

$$\int_{-1}^{1} e^x dx \sim e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}} + e^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2.3427$$

mientras que la solución exacta es:

$$\int_{-1}^{1} e^x dx = e - \frac{1}{e} = 2.3504$$

Ejercicio

Obtener:

$$\int_0^{\pi} \sin y dy$$

Ayuda: Cambio de intervalo $y \in (a, b)$ al $x \in (-1, 1)$

$$y = (b + a + x * (b - a))/2$$

Por un procedimiento similar se puede demostrar que para $M = 8$ los valores de los parámetros son:

$$\begin{array}{ll}
x_1 = -0.9602898565 & w_1 = 0.1012285363 \\
x_2 = +0.9602898565 & w_2 = 0.1012285363 \\
x_3 = -0.7966664774 & w_3 = 0.2223810345 \\
x_4 = +0.7966664774 & w_4 = 0.2223810345 \\
x_5 = -0.5255324099 & w_5 = 0.3137066459 \\
x_6 = +0.5255324099 & w_6 = 0.3137066459 \\
x_7 = -0.1834346425 & w_7 = 0.3626837834 \\
x_8 = -0.1834346425 & w_8 = 0.3626837834
\end{array}$$

Ejemplos:

Si aplicamos los 16 parámetros anteriores para resolver la integral de la exponencial obtenemos:

$$\int_{-1}^{1} e^x dx \sim 2.3504$$

INTEGRACION. Definición de integral.

$$\textstyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x^{(i)})$$

Cuando n es suficientemente grande, podemos entonces aproximar la integral de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x^{(i)})$$