Método de Jacobi para obtener autovalores y autovectores. Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 2 & 0.1 \\ 0.02 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica. Consideramos los elementos por encima de la diagonal. Los elementos por debajo son los mismos.

- PRIMERA ITERACION

  Buscamos $\max |A_{ij}|\ ,\ i < j$. El máximo es 0.1 que se encuentra en A_{23}.

  Construimos la matriz de rotación:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

  donde θ se elige tal que $B = R^T A R$ produzca $B_{23} = 0$. Este angulo resulta ser:

$$\theta = \frac{1}{2} atan(\frac{2A_{23}}{A_{22} - A_{33}}) = 0.0986978$$

  La matriz B queda:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0.011922 & 0.018917 \\ 0.011922 & 2.009902 & 0 \\ 0.018917 & 0 & 0.990098 \end{pmatrix}$$

  Esta va a ser nuestra nueva matriz A para la siguiente iteración.

  La matriz de autovectores es $U = R$.

- SEGUNDA ITERACION

  Buscamos $\max |A_{ij}|\ ,\ i < j$. El máximo es 0.18917 que se encuentra en A_{13}.

  Construimos la matriz de rotación:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

  donde

$$\theta = \frac{1}{2} atan(\frac{2A_{13}}{A_{11} - A_{33}}) = 0.094108$$

Entonces:

$$B = R^T AR = \begin{pmatrix} 3.000178 & 0.011922 & 0 \\ 0.011922 & 2.009902 & -0.000112 \\ 0 & -0.000112 & -0.98992 \end{pmatrix}$$

Esta es la nueva matriz A para la siguiente iteración.

La matriz de autovectores es:

$$U = UR = \begin{pmatrix} 0.999956 & 0 & -0.009411 \\ -0.000927 & 0.995133 & -0.098533 \\ 0.009365 & 0.098538 & 0.995089 \end{pmatrix}$$

- TERCERA ITERACION

Buscamos $\max |A_{ij}|\ ,\ i < j$. El máximo es 0.011922 que se encuentra en A_{12}.

Construimos la matriz de rotación:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\theta = \frac{1}{2} atan(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}})$$

Entonces:

$$B = R^T AR = \begin{pmatrix} 3.00032 & 0 & -1.35\ 10^{-6} \\ 0 & 2.00976 & -1.12\ 10^{-4} \\ -1.35\ 10^{-6} & -1.12\ 10^{-4} & 0.989920 \end{pmatrix}$$

Esta es la nueva matriz A para la siguiente iteración.

La matriz de autovectores es:

$$U = UR = \begin{pmatrix} 0.999883 & -0.0120355 & -0.094108 \\ 0.0110502 & 0.995072 & -0.098533 \\ 0.0105503 & 0.0984177 & 0.995089 \end{pmatrix}$$

Si decidimos parar en esta iteración tercera, los autovalores estan en la diagonal de A y los autovectores las columnas de la matriz U.