$$\begin{array}{c} y'(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \Rightarrow y(t) = \int_{t_0}^{t} f(\omega) d\omega + y_0$$

<u>Ejemplos:</u>

$$\begin{array}{c} y'(t) = sin(t) \\ y(\pi/3) = 2 \end{array} \Rightarrow y(t) = -cos(t) + cos(\pi/3) + 2 = -cos(t) + 2.5$$

Problema mas general:

$$\begin{array}{c} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \quad t \in (t_0, t_f)$$

<u>Método de Euler</u>
Dividimos el intervalo (t_0, t_f) en n subintervalos de la misma longitud τ pequeña:
$(t_0, t_1); (t_1, t_2); ....; (t_{n-1}, t_n = t_f)$
donde
$|t_{j+1} - t_j| = \tau \;\; ; \;\; j = 0, \ldots, n$
El parámetro τ se llama paso en el método de Euler.
Según la fórmula de Taylor:

$$y(t_j + \tau) = y(t_j) + \tau y'(t_j) + \frac{\tau^2}{2!} y''(c_j) \quad c_j \in (t_j, t_{j+1})$$

Si despreciamos el término cuadrático en τ obtenemos la aproximación de Euler:

$$\tilde{y}(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) + \tau f(t_j, \tilde{y}(t_j))$$

La ecuación diferencial se reduce a:

$$\begin{array}{c} \tilde{y}(t_0) = y_0 \\ \tilde{y}(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) + \tau f(t_j, \tilde{y}(t_j)) \end{array}$$

<u>Ejemplos:</u>

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(t) = -y(t) \\ y(0) = 1 \end{array} \right\} t \in (0, 1/2)$$

Sea $\tau = 0.1$. La ecuación iterativa a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{c} \tilde{y}(0) = 1 \\ \tilde{y}(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) - \tau \tilde{y}(t_j) \end{array} \right\}$$

Es decir:

$$\begin{array}{l} \tilde{y}(0) = 1 \\ \tilde{y}(0.1) = \tilde{y}(0) - \tau \tilde{y}(0) = 1 - 0.1 = 0.9 \\ \tilde{y}(0.2) = \tilde{y}(0.1) - \tau \tilde{y}(0.1) = 0.9 - 0.09 = 0.81 \\ \tilde{y}(0.3) = \tilde{y}(0.2) - \tau \tilde{y}(0.2) = 0.81 - 0.081 = 0.729 \\ \tilde{y}(0.4) = \tilde{y}(0.3) - \tau \tilde{y}(0.3) = 0.729 - 0.0729 = 0.6561 \\ \tilde{y}(0.5) = \tilde{y}(0.4) - \tau \tilde{y}(0.4) = 0.6561 - 0.06561 = 0.59049 \end{array}$$

Comparamos este resultado con la solución exacta

$y(t) = e^{-t}$	$\lvert y - \tilde{y}\rvert$
$y(0.1) = 0.9048$	0.0048
$y(0.2) = 0.8187$	0.0087
$y(0.3) = 0.7408$	0.0118
$y(0.4) = 0.6703$	0.0142
$y(0.5) = 0.6065$	0.0160

Estimación del error en la aproximación de Euler.
Hemos aplicado la fórmula de Taylor:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \tau y'(t_j) + \frac{\tau^2}{2!} y''(c_j)$$

donde $c_j \in (t_j, t_{j+1})$.
El error por truncamiento del desarrollo Taylor será:

$$\frac{\tau^2}{2!} y''(c_j)$$

Llamemos y_j a la solución exacta en t_j, es decir $y_j = y(t_j)$. Llamemos $\tilde{y}_j$ a la solución de Euler en t_j, es decir $\tilde{y}_j = \tilde{y}(t_j)$.

$$y(t_{j+1}) - \tilde{y}(t_{j+1}) = y(t_j) - \tilde{y}(t_j) + \tau(f(t_j, y(t_j)) - f(t_j, \tilde{y}(t_j)))$$

$$+\frac{\tau^2}{2} y''(c_j)$$

Si se cumple que

$$\exists K \ / \ |f(t_j, y(t_j)) - f(t_j, \tilde{y}(t_j))| \leq K|(y(t_j) - \tilde{y}(t_j))|$$

y además $y(t_0) = \tilde{y}(t_0)$, entonces:
$e_j = |y(t_j) - \tilde{y}(t_j)| \leq \tilde{h}\tau$
donde $\tilde{h}$ es cierta constante.
Demostración.

$$e_{j+1} \leq e_j(1 + \tau K) + \tau^2 \frac{1}{2}|y''(c_j)|$$

Llamemos $h = \frac{1}{2} \sup |y''(c_j)| \quad , \quad j = 0, \ldots, n$
Demos valores a j.
$e_0 = 0$
$e_1 \leq h\tau^2$
$e_2 \leq e_1(1 + \tau K) + h\tau^2 \leq h\tau^2(1 + (1 + \tau K))$
$e_3 \leq e_2(1 + \tau K) + h\tau^2 \leq h\tau^2(1 + (1 + \tau K) + (1 + \tau K)^2)$
.....

$$e_j \leq e_{j-1}(1+\tau K)+h\tau^2 \leq h\tau^2(\sum_{i=0}^{j-1}(1+\tau K)^i) = h\tau^2(\frac{(1 + \tau K)^j - 1}{1 + \tau K - 1}) = \frac{h}{K}\tau((1+\tau K)^j-1)$$

Por otra parte, sabemos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}e^c x^2$$

como el ultimo término es positivo, tenemos que $1 + x \leq e^x$, y por lo tanto $(1+x)^j \leq e^{jx}$

Lo cual implica que $(1+\tau K)^j \leq e^{j\tau K}$

Por tanto,

$$e_j \leq \frac{h}{K}\tau(e^{j\tau K} - 1) \leq \frac{h}{K}\tau(e^{(t_f - t_0)K} - 1) = \tilde{h}\tau \quad , \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

Métodos de Runge-Kutta

Son de la forma:

$$\tilde{y}(t_0) = y_0$$
$$\tilde{y}(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) + \tau G(t_j, \tilde{y}(t_j), \tau)$$

donde G es cierta función. Si $G = f$ obtenemos el método de Euler.
Una elección típica de G es:

$$G(t_j, \tilde{y}(t_j), \tau) = \frac{1}{2}(f(t_j, \tilde{y}(t_j)) + f(t_{j+1}, \tilde{y}(t_{j+1})))$$

donde $\tilde{y}(t_{j+1})$ puede obtenerse como: $\tilde{y}(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) + \tau f(t_j, \tilde{y}(t_j))$
Este es el llamado método "Runge-Kutta pendiente media".

Ejemplos:

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(t) = -y(t) \\ y(0) = 1 \end{array} \right\} t \in (0, 1/2)$$

Sea $\tau = 0.1$. La ecuación iterativa a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{c} \tilde{y}(0) = 1 \\ \tilde{y}(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) + \tau \frac{1}{2}(-\tilde{y}(t_j) - \tilde{y}(t_j) + \tau \tilde{y}(t_j)) \end{array} \right\}$$

$\tilde{y}(0) = 1$
$\tilde{y}(0.1) = \tilde{y}(0) + \tau G(0, \tilde{y}(0)) = \tilde{y}(0) + \tau \frac{1}{2}(-\tilde{y}(0) - \tilde{y}(0) + \tau \tilde{y}(0))$
$1 + 0.1\frac{1}{2}(-1 - 1 + 0.1) = 0.9049$
$\tilde{y}(0.2) = \tilde{y}(0.1) + \tau G(0.1, \tilde{y}(0.1)) = \tilde{y}(0.1) + \tau \frac{1}{2}(-\tilde{y}(0.1) - \tilde{y}(0.1) + \tau \tilde{y}(0.1)) =$
$0.9049 + 0.1\frac{1}{2}(-0.9049 - 0.9049 + 0.1 \cdot 0.9049) = 0.8190$
$\tilde{y}(0.3) = \tilde{y}(0.2) + \tau G(0.2, \tilde{y}(0.2)) = \tilde{y}(0.2) - \tau \frac{1}{2}(-\tilde{y}(0.2) - \tilde{y}(0.2) + \tau \tilde{y}(0.2)) =$
$0.8190 - 0.1\frac{1}{2}(-0.8190 - 0.8190 + 0.1 \cdot 0.8190) = 0.7412$

Comparamos este resultado con la solución exacta y con la solución de Euler:

$y(t) = e^{-t}$	$\tilde{y}_{Runge}$	$\tilde{y}_{Euler}$
$y(0.1) = 0.9048$	0.9049	0.9000
$y(0.2) = 0.8187$	0.8190	0.8100
$y(0.3) = 0.7408$	0.7412	0.7290

Se puede demostrar que el error de esta aproximación de Runge-Kutta pendiente media es

$e_j \leq k\tau^2$

donde k es una constante.

Típicamente los métodos de Runge-Kutta con error $O(\tau^2)$ se pueden escribir en la forma:

$$\tilde{y}_{j+1} = \tilde{y}_j + c_1 \tau f(t_j, \tilde{y}_j) + c_2 \tau f(t_j + \alpha\tau, \tilde{y}_j + \beta\tau f(t_j, \tilde{y}_j))$$

donde c_1, c_2, α, β son parámetros a determinar con la condición de minimizar el error del método. Si $c_1 = c_2 = 1/2$, $\alpha = \beta = 1$ tenemos el procedimiento descrito arriba de pendiente media.

Existen otras combinaciones que hacen el error el más pequeño. En particular la siguiente elección tiene un error $O(\tau^4)$:

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

donde

$$\begin{array}{l} K_1 = \tau f(t_j \ , \ \tilde{y}_j) \\ K_2 = \tau f(t_j + \frac{1}{2}\tau \ , \ \tilde{y}_j + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 = \tau f(t_j + \frac{1}{2}\tau \ , \ \tilde{y}_j + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 = \tau f(t_j + \tau \ , \ \tilde{y}_j + K_3) \end{array}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt}y^{(0)}(t) = f^{(0)}(t, y^{(0)}, ..., y^{(m-1)}) & y^{(0)}(t_0) = y_0^{(0)} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \frac{d}{dt}y^{(m-1)}(t) = f^{(m-1)}(t, y^{(0)}, ..., y^{(m-1)}) & y^{(m-1)}(t_0) = y_0^{(m-1)} \end{array} \right\}$$

El sistema se puede escribir como una ecuación vectorial:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

donde

$$y = \begin{pmatrix} y^{(0)} \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix} \ ; \ y_0 = \begin{pmatrix} y_0^{(0)} \\ \vdots \\ y_0^{(m-1)} \end{pmatrix} \ ; \ f = \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ \vdots \\ f^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

Los métodos de Euler y de Runge-Kutta tienen la misma forma vista en clase anterior, pero ahora las variables son vectores. A saber:

- Euler

$$\begin{array}{c} \tilde{y}(t_0) = y_0 \\ \tilde{y}(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) + \tau f(t_j, \tilde{y}(t_j)) \end{array}$$

- Runge-Kutta (pendiente media)

$$\tilde{y}(t_0) = y_0$$

$$\tilde{y}_s(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) + \tau f(t_j, \tilde{y}(t_j))$$

$$\tilde{y}(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) + \tau \tfrac{1}{2}\,[\; f(t_j, \tilde{y}(t_j)) \;+\; f(t_{j+1}, \tilde{y}_s(t_{j+1}))\;]$$

<u>Ejemplos:</u>
Aplicar el método de Euler para resolver la siguiente ecuación de caida libre de una bola desde una altura de 10 metros. Se elimina la atmósfera en este ejercicio.

$$\left\{ \begin{array}{l} mz'' = -mg \\ z'(0) = 0 \\ z(0) = 10\ metros \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} v' = -g & v(0) = 0 \\ z' = v & z(0) = 10 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{array} \right\}$$

donde

$$y = \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(0)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} \;;\; y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \;;\; f(t, y) = \begin{pmatrix} -g \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \\ y^{(0)} \end{pmatrix}$$

Método de Euler:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}(0) = y_0 \\ \tilde{y}(t_{j+1}) = \tilde{y}(t_j) + \tau f(t_j, \tilde{y}(t_j)) \end{array} \right\}$$

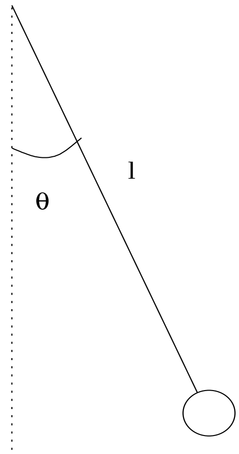
Si elegimos $\tau = 0.1$ tenemos:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}(0) = y_0 \\ \tilde{y}(0.1) = \tilde{y}(0) + \tau f(0, \tilde{y}(0)) \\ \tilde{y}(0.2) = \tilde{y}(0.1) + \tau f(0.1, \tilde{y}(0.1)) \\ \tilde{y}(0.3) = \tilde{y}(0.2) + \tau f(0.2, \tilde{y}(0.2)) \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Por ejemplo:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \\ \tilde{y}(0.1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1g \\ 10 \end{pmatrix} \\ \tilde{y}(0.2) = \begin{pmatrix} -0.1g \\ 10 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -g \\ -0.1g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2g \\ 10 - 0.01g \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

EJERCICIO.
Sea la ecuación diferencial para un péndulo rígido:



$$\left\{ \begin{array}{c} m\ l^2\ \theta'' = -\ m\ g\ l\ sin(\theta) \\ \theta(0) = \frac{1}{180}\ \pi \\ \theta'(0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} l\ \omega' = -g\ sin(\theta) & \omega(0) = 0 \\ \theta' = \omega & \theta(0) = \frac{1}{180}\ \pi \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{array} \right\}$$

donde

$$y = \left(\begin{array}{c} \omega \\ \theta \end{array} \right)\ ;\ y_0 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{180}\ \pi \end{array} \right)\ ;\ f(t, y) = \left(\begin{array}{c} -(g/l)\ sin(\theta) \\ \omega \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -(g/l)\ sin(y^{(1)}) \\ y^{(0)} \end{array} \right)$$

Obtener por el método de Runge-Kutta la posición angular del péndulo rígido anterior para los tiempos 0.1 y 0.2 segundos. Se puede suponer que la longitud l es igual a uno y el paso $\tau = 0.1$.

EJERCICIO

Resolver por el método de Runge-Kutta la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{array}{l} z'' + tz' + e^t z = 0 \\ x'' + x' = 0 \\ z'(0) = 0 \\ z(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \\ x(0) = 0 \end{array}$$