ECUACIONES DIFERENCIALES con condiciones de contorno.

Método del disparo (shooting method)
Primero nos fijaremos en ecuaciones lineales del tipo:

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x) \; ; \; x \in [a,b]$$
$$u(a) = u_a \; ; \; u(b) = u_b$$

Las siguientes condiciones implican solución única:

$$p(x), q(x), r(x) \; continuas \; ; \; x \in [a,b]$$

$$q(x) > 0 \; ; \; x \in [a,b]$$

Como sabemos resolver ecuaciones con condiciones iniciales mediante, por ejemplo, el método de Runge Kutta, si supieramos el valor de $u'(a)$ podriamos aplicar Runge Kutta a nuestra ecuación.

En el método del disparo se intentan dos valores para $u'(a)$ y se aplica Runge Kutta para obtener u en b. Se interpola linealmente entre los dos puntos para obtener el valor de $u'(a)$ que produce el valor correcto $u(b) = u_b$.

Veamos un ejemplo para mayor claridad.

Ejemplos:.

Resolver la siguiente ecuación por el método del disparo.

$$u'' = (1 - x/5)u + x \; ; \; x \in [1,3]$$
$$u(1) = 2 \; ; \; u(3) = -1$$

Elegimos un primer valor para $u'(1)$. Por ejemplo:

$$u'(1) = \frac{u(3) - u(1)}{3 - 1} = -1.5$$

Resolvemos por Runge-Kutta la ecuación:

$$u'' = (1 - x/5)u + x$$
$$u(1) = 2$$
$$u'(1) = -1.5$$

Eligiendo un paso $\tau = 0.1$ el resultado es $u(3) = 4.77649$. Debemos bajar el valor de $u'(1)$. Probemos con $u'(1) = -1.5 - 1 = -2.5$.

Resolvemos por Runge-Kutta la ecuación:

$$u'' = (1 - x/5)u + x$$
$$u(1) = 2$$
$$u'(1) = -2.5$$

Eligiendo un paso $\tau = 0.1$ el resultado es $u(3) = 1.88009$.

Obtenemos el polinomio de interpolación de grado 1 entre los puntos:

$$(4.77649, -1.5) \; ; \; (1.88009, -2.5)$$

El valor del polinomio de interpolación en -1.0 nos dá $u'(1) = -3.49437$.

Resolvemos por Runge-Kutta la ecuación:

$$
\begin{aligned}
&u'' = (1 - x/5)u + x \\
&u(1) = 2 \\
&u'(1) = -3.49437
\end{aligned}
$$

Eligiendo un paso $\tau = 0.1$ el resultado es:

x	u(x)
1	2
1.1	1.66356
1.2	1.35105
1.3	1.06076
1.4	0.791281
1.5	0.54146
1.6	0.310394
1.7	0.0974072
1.8	-0.0979666
1.9	-0.275996
2	-0.436763
2.1	-0.580176
2.2	-0.70598
2.3	-0.813762
2.4	-0.902963
2.5	-0.972883
2.6	-1.02269
2.7	-1.05143
2.8	-1.05804
2.9	-1.04132
3	-1

Método del disparo: procedimiento general

En el caso de cualquier ecuación lineal o no lineal tendremos:

$$
\begin{aligned}
&u'' = f(x, u, u') \ ; \ x \in [a, b] \\
&u(a) = u_a \ ; \ u(b) = u_b
\end{aligned}
$$

Queremos convertir la ecuación anterior en una ecuación con condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
&u'' = f(x, u, u') \ ; \ x \in [a, b] \\
&u(a) = u_a \ ; \ u'(a) = \lambda
\end{aligned}
$$

tal que $u(b) = u_b$. Como $u(b)$ depende de λ, podemos considerar la función:

$$g(\lambda) = u(b; \lambda) - u_b$$

y encontrar numéricamente un λ que hace cero $g(\lambda)$. Para ello podemos usar, por ejemplo, el método de la secante:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - (u(b;\lambda_k) - u_b)\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{u(b;\lambda_k) - u(b;\lambda_{k-1})}$$

En cada iteración anterior debemos obtener $u(b;\lambda_{k+1})$ resolviendo de nuevo la ecuación con condiciones iniciales:

$$\begin{array}{l} u'' = f(x,u,u') \ ; \ x \in [a,b] \\ u(a) = u_a \ ; \ u'(a) = \lambda_{k+1} \end{array}$$

El proceso iterativo se sigue mientras $||u(b;\lambda_{k+1}) - u(b;\lambda_k)|| > \epsilon$, donde ϵ es un parámetro de precisión. También puede ponerse como condición $||u(b;\lambda_{k+1}) - u_b|| > \epsilon$

Ejercicios:

Resolver la siguiente ecuación por el método del disparo.

$$\begin{array}{l} u'' = -(u')^2 \ ; \ x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \ ; \ u(1) = 1 \end{array}$$

Método de las diferencias finitas

Nos fijaremos en ecuaciones lineales del tipo:

$$\begin{array}{l} u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x) \ ; \ x \in [a,b] \\ u(a) = u_a \ ; \ u(b) = u_b \end{array}$$

Dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de la misma longitud h:

$$a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, b = x_n$$

donde $x_{i+1} - x_i = h$.

Obtenemos la aproximación numérica para la primera y segunda derivadas de u en cada punto x_i , $i = 1, \ldots n-1$, es decir:

$$u' = \tfrac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$$

$$u'' = \tfrac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

Por simplificar la notación llamemos:

$$u_i = u(x_i) \ ; \ p_i = p(x_i) \ ; \ q_i = q(x_i) \ ; \ r_i = r(x_i)$$

Entonces la ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = p_i\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i + r_i$$

Reorganizando términos:

$$-(\frac{h}{2}p_i + 1)u_{i-1} + (2 + h^2 q_i)u_i + (\frac{h}{2}p_i - 1)u_{i+1} = -h^2 r_i$$

que es un sistema de $n-1$ ecuaciones algebraicas, que podemos escribir en notación matricial como:

$$Au = b$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 2+h^2q_1 & \frac{h}{2}p_1 - 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(\frac{h}{2}p_2+1) & 2+h^2q_2 & \frac{h}{2}p_2 - 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(\frac{h}{2}p_3+1) & 2+h^2q_3 & \frac{h}{2}p_3 - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -(\frac{h}{2}p_4+1) & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{h}{2}p_{n-2} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2+h^2q_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -h^2r_1 + (\frac{h}{2}p_1+1)u_0 \\ -h^2r_2 \\ -h^2r_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ -h^2r_{n-2} \\ -h^2r_{n-1} - (\frac{h}{2}p_{n-1}-1)u_n \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

Puede aplicarse el método LU para resolver este sistema y obtener $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Ejercicio.

Resolver la siguiente ecuación por el método de las diferencias finitas, dividiendo el interval (2,3) en cuatro subintervalos.

$$u'' = (1 - x/5)u + x \; ; \; x \in [1,3]$$
$$u(1) = 2 \; ; \; u(3) = -1$$