DERIVACION

- Método a partir de formula de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \tfrac{1}{2}f''(x)h^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(x)h^3 + \tfrac{1}{4!}f^{iv}(x)h^4 + \tfrac{1}{5!}f^{v}(x)h^5$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \tfrac{1}{2}f''(x)h^2 - \tfrac{1}{3!}f'''(x)h^3 + \tfrac{1}{4!}f^{iv}(x)h^4 - \tfrac{1}{5!}f^{v}(x)h^5$$

Restando queda:

$$f'(x) \sim \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{O(h^3)}{2h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Si en lugar de una función f tuvieramos datos experimentales, aplicariamos la misma fórmula pero para los puntos (x_i, y_i), es decir:

$$f'(x) \sim \frac{y_{x+h} - y_{x-h}}{2h} + O(h^2)$$

La fórmula anterior para calcular la derivada de datos experimentales la aplicaríamos haciendo grupos de tres puntos, que pueden superponerse. De esta manera tendríamos la derivada en cada punto excepto los dos extremos.

Sumando los desarrollos de Taylor de $f(x+h)$ y de $f(x-h)$ queda:

$$f''(x) \sim \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \frac{O(h^4)}{h^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Se puede aumentar la precisión en el cálculo numérico de derivadas considerando más términos del desarrollo de Taylor. Considerar los desarrollos de $f(x+h)$ y $f(x-h)$ de más arriba. Vamos a combinarlos con los siguientes para obtener una aproximación muy precisa para la derivada primera:

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x)2h + \tfrac{1}{2}f''(x)(2h)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(x)(2h)^3 + \tfrac{1}{4!}f^{iv}(x)(2h)^4 + \tfrac{1}{5!}f^{v}(x)(2h)^5$$

$$f(x-2h) = f(x) - f'(x)2h + \tfrac{1}{2}f''(x)(2h)^2 - \tfrac{1}{3!}f'''(x)(2h)^3 + \tfrac{1}{4!}f^{iv}(x)(2h)^4 - \tfrac{1}{5!}f^{v}(x)(2h)^5$$

Entonces, la siguiente combinación lineal cancela los términos de Taylor adecuados para darnos la derivada primera:

$$f'(x) \sim \frac{8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h) - f(x+2h)}{12h} + O(h^4)$$