Método de Jacobi

Ejemplo del método de Jacobi para resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

$$
\begin{aligned}
9x_1 + x_2 + x_3 = 10 &\implies x_1 = \frac{1}{9}(10 - x_2 - x_3) \\
2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 19 &\implies x_2 = \frac{1}{10}(19 - 2x_1 - 3x_3) \\
3x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 0 &\implies x_3 = \frac{1}{11}(0 - 3x_1 - 4x_2)
\end{aligned}
$$

Fórmula para la iteración:

$x_1^{(k)} = \frac{1}{9}(10 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)})$
$x_2^{(k)} = \frac{1}{10}(19 - 2x_1^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)})$
$x_3^{(k)} = \frac{1}{11}(0 - 3x_1^{(k-1)} - 4x_2^{(k-1)})$

Valor inicial: $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$

	float			double		
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	1.111	1.900	.000	1.111	1.900	.000
2	.900	1.678	-.994	.900	1.678	-.994
3	1.035	2.018	-.856	1.035	2.018	-.856
4	.982	1.950	-1.016	.982	1.950	-1.016
5	1.007	2.008	-.977	1.007	2.008	-.977
6	.996	1.992	-1.005	.996	1.992	-1.005
7	1.002	2.002	-.996	1.002	2.002	-.996
8	.999	1.998	-1.001	.999	1.998	-1.001
9	1.000	2.001	-.999	1.000	2.001	-.999
10	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
11	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
12	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
13	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
14	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000
15	1.000	2.000	-1.000	1.000	2.000	-1.000

Solución exacta:

$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b \qquad$ donde: $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\det A = 847 \qquad A^{-1} = \frac{1}{847}\begin{pmatrix} 98 & -7 & -7 \\ -13 & 96 & -25 \\ -22 & -33 & 88 \end{pmatrix}$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi.
Ejemplo:

$$\begin{aligned}
9x_1 + x_2 + x_3 = 10 &\implies 9x_1 = (10 - x_2 - x_3) \\
2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 19 &\implies 10x_2 = (19 - 2x_1 - 3x_3) \\
3x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 0 &\implies 11x_3 = (0 - 3x_1 - 4x_2)
\end{aligned}$$

Si la ecuacion es $Ax = b$, lo anterior seria como escribir:

$$\begin{aligned}
A_{11}x_1 &= (b_1 - A_{12}x_2 - A_{13}x_3) \\
A_{22}x_2 &= (b_2 - A_{21}x_1 - A_{23}x_3) \\
A_{33}x_3 &= (b_3 - A_{31}x_1 - A_{32}x_2)
\end{aligned}$$

$Ax = b \Rightarrow Cx = b + (C - A)x$ donde $C_{ii} = A_{ii}$; $C_{ij} = 0, i \neq j$

Fórmula de iteración:
$Cx^{(k)} = b + (C - A)x^{(k-1)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} Cx = b + (C - A)x \\ Cx^{(k)} = b + (C - A)x^{(k-1)} \end{array} \right\} \Rightarrow C(x - x^{(k)}) = (C - A)(x - x^{(k-1)})$$
$\Rightarrow (x - x^{(k)}) = C^{-1}(C - A)(x - x^{(k-1)})$
$\Rightarrow (x - x^{(k)}) = (1 - C^{-1}A)(x - x^{(k-1)})$
$\Rightarrow (x - x^{(k)}) = (1 - C^{-1}A)^k(x - x^0)$
$\Rightarrow \|(x - x^{(k)})\| = \|(1 - C^{-1}A)^k(x - x^0)\|$
$\Rightarrow \|(x - x^{(k)})\| \leq \|(1 - C^{-1}A)^k\|\|(x - x^0)\|$
$\Rightarrow \|(x - x^{(k)})\| \leq \|(1 - C^{-1}A)\|^k\|(x - x^0)\|$

Si $\|1 - C^{-1}A\| < 1$ entonces $\|(x - x^{(k)})\| \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$

Propiedad.En $(R^n, \| \|_{sup})$, $\|A\| = \sup_{i=1,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$, donde A_{ij} es la matriz asociada al operador en la base canónica.

Dem.
1)

$$\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$
$$\vec{h} = A\vec{x} \quad , \quad \|\vec{h}\| = \sup_{i=1,n} |h_i|$$
$$h_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \Rightarrow |h_i| = |\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

2)

$$\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| \geq \|A\vec{w}\|$$

para cierto vector $\vec{w}$ / $\|w\| = 1$

$$\|A\vec{w}\| = \max_i |\sum_{j=1}^{n} A_{ij}w_j| \geq |\sum_{j=1}^{n} A_{kj}w_j|$$

Elijamos $\vec{w}$ / $w_j = 1$ si $A_{kj} \geq 0$ y $w_j = -1$ si $A_{kj} < 0$
Entonces:

$$|\sum_{j=1}^{n} A_{kj}w_j| = \sum_{j=1}^{n} |A_{kj}|$$

Elijamos k / $\sum_{j=1}^{n} |A_{kj}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$

Método de Gauss-Seidel

Es una optimización del método de Jacobi. Se trabaja con cada componente de x que se van usando según se van determinando. En el ejemplo de sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, x en la iteración k-esima sería:

$$A_{11}x_1^{(k)} = (b_1 - A_{12}x_2^{(k-1)} - A_{13}x_3^{(k-1)})$$
$$A_{22}x_2^{(k)} = (b_2 - A_{21}x_1^{(k)} - A_{23}x_3^{(k-1)})$$
$$A_{33}x_3^{(k)} = (b_3 - A_{31}x_1^{(k)} - A_{32}x_2^{(k)})$$