INTERPOLACIÓN POLINOMICA.

- Interpolación mediante Polinomio de grado uno.

  Supongamos que conocemos los valores de cierta función $f(t)$ en dos puntos $t_1$, $t_2$. Llamemos a estos valores $y_1 = f(t_1)$, $y_2 = f(t_2)$.

  Vamos a realizar una interpolación lineal entre los dos puntos $(t_1, y_1)$ ; $(t_2, y_2)$ , que servirá de aproximación a la función. La interpolación lineal quiere decir que usamos el polinomio de grado uno $(P_1)$ que conecta los dos puntos anteriores como aproximación a la función en el intervalo $(t_1, t_2)$.

$$P_1(t) = h_1 t + h_0 \quad / \quad \begin{array}{rl} y_1 = & h_1 t_1 + h_0 \\ y_2 = & h_1 t_2 + h_0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rl} h_1 = & \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \\ \\ h_0 = & \frac{t_2 y_1 - t_1 y_2}{t_2 - t_1} \end{array}$$

$$\Rightarrow P_1(t) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} t + \frac{t_2 y_1 - t_1 y_2}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow P_1(t) = y_1 \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} + y_2 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow P_1(t) = y_1 \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} + y_2 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

Error de la aproximación de $f$ por el polinomio $P_1$

El error en la aproximación de $f(t)$ por $P_1(t)$ dentro del intervalo $(t_1, t_2)$ es:

$$f(t) - P_1(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{2} f^{(2)}(c)$$

donde $c \in (t_1, t_2)$.

Dem.

Sea

$$g(s) = f(s) - P_1(s) - (f(t) - P_1(t)) \frac{(s - t_1)(s - t_2)}{(t - t_1)(t - t_2)}$$

donde $s \in (t_1, t_2)$ , $t \in (t_1, t_2)$

Como $g$ es diferenciable, según el teorema de Rolle del valor medio:

$$g(t_1) = 0, g(t) = 0 \;\Rightarrow \exists d_1 \;/\; g^{(1)}(d_1) = 0$$

$$g(t) = 0, g(t_2) = 0 \;\Rightarrow \exists d_2 \;/\; g^{(1)}(d_2) = 0$$

$$g^{(1)}(d_1) = 0, g^{(1)}(d_2) = 0 \;\Rightarrow \exists c \;/\; g^{(2)}(c) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = f^{(2)}(c) - (f(t) - P_1(t)) \frac{d^2}{ds^2} \frac{(s-t_1)(s-t_2)}{(t-t_1)(t-t_2)}$$

$$\Rightarrow 0 = f^{(2)}(c) - (f(t) - P_1(t)) \frac{2}{(t-t_1)(t-t_2)}$$

$$\Rightarrow f(t) - P_1(t) = \frac{1}{2}(t-t_1)(t-t_2) f^{(2)}(c)$$

- Interpolación mediante polinomio de grado 2.

  Supongamos que conocemos los valores de cierta función $f(t)$ en tres puntos $t_1$, $t_2$, $t_3$. Llamemos a estos valores $y_1 = f(t_1)$, $y_2 = f(t_2)$, $y_3 = f(t_2)$.

  Vamos a realizar una interpolación mediante un polonomio de grado 2 (interpolación cuadrática) entre los tres puntos $(t_1, y_1)$ ; $(t_2, y_2)$ ; $(t_3, y_3)$ , que servirá de aproximación a la función.

$$P_2(t) = h_2 t^2 + h_1 t + h_0 \;\; / \;\; \begin{array}{rl} y_1 = & h_2 t_1^2 + h_1 t_1 + h_0 \\ y_2 = & h_2 t_2^2 + h_1 t_2 + h_0 \\ y_3 = & h_2 t_3^2 + h_1 t_3 + h_0 \end{array}$$

  De las tres ecuaciones anteriores obtenemos los coeficientes $h_2, h_1, h_0$ y, simplificando, nos queda el polimomio:

$$\Rightarrow P_2(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} y_1 + \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} y_2 + \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} y_3$$

- Interpolación mediante polonomio de grado $n$.

  Supongamos que conocemos los valores de cierta función $f(t)$ en $n+1$ puntos $t_j$ , $j = 1, \ldots, n+1$. Llamemos a estos valores $y_j = f(t_j)$ , $j = 1, \ldots, n+1$.

  Vamos a realizar una interpolación mediante un polonomio de grado $n$ entre los $n+1$ puntos $(t_j, y_j)$ , $j = 1, \ldots, n+1$. que servirá de aproximación a la función.

  Se puede demostrar que el polinomio de grado $n$ que buscamos es:

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i L_i(t)$$

donde:

$$L_i(t) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(t - t_j)}{(t_i - t_j)}$$

Ésta es la llamada fórmula de Lagrange para interpolación polinómica.

Error de la aproximación de $f$ por el polinomio $P_n$

El error en la aproximación de $f(t)$ por $P_n(t)$ dentro del intervalo $(t_1, t_{n+1})$ es:

$$f(t) - P_n(t) = \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(t - t_j)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

donde $c \in (t_1, t_{n+1})$.

Ejercicio.

| t | y |
|---|---|
| 1.1 | 0.89 |
| 1.6 | 1.00 |
| 2.1 | 0.86 |

Obtener el polinomio de interpolacion de grado 2 ( $P_2(t)$ ). Obtener P2(t) para t=1.9

Obtener el polinomio de interpolacion de grado 1 ( $P_1(t)$ ) que une los puntos de dos en dos.