TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 30, núm. 2, 1979, pp. 33 a 55

APLICACION DE LOS PROCESOS DE DIFUSION A LA PLANIFICACION DEL DESARROLLO ECONOMICO

UN EJEMPLO ILUSTRATIVO (COLOMBIA)

Guillermo L. Gómez *

Gerhard Tintner

Universidad Técnica de Viena (1976)

RESUMEN

Bajo la hipótesis: el desarrollo económico es un proceso de difusión, hemos investigado empíricamente la capacidad de predicción del presente modelo. Para resolver la ecuación diferencial estocástica, a través de la cual se controla el sistema, empleamos un método indirecto con la ayuda del principio de máxima verosimilitud. Primero hemos supuesto que el vector velocidad del proceso de difusión sólo depende del tiempo. Luego, hacemos la hipótesis más realista: el vector velocidad depende también de los cambios relativos en los gastos del gobierno y en la inversión privada. Así podrá ser usado en la economía política, con ayuda de la teoría matemática del control óptimo.

§0.

Los problemas de la planificación económica han adquirido gran importancia en las tres últimas décadas. La reconstrucción económica después de la última guerra mundial, el enfrentamiento y creciente dependencia económico-política, financiera y comercial entre el mundo industrializado y el llamado tercer mundo, la política mundial de las materias primas y la complejidad creciente del sistema socio-económico-político y administrativo de los países industrializados han sido los

* División de Matemáticas Aplicadas. Brown Univ., Providence, Rhode Island 02912.

más dominantes estímulos de este interés. El surgimiento y resurgimiento de algunas teorías matemáticas durante la última guerra mundial ha ofrecido un terreno fructífero a algunos problemas metodológicos de la planificación.

El presente trabajo, el cual pertenece a una serie de estudios sobre la planificación del desarrollo económico, constituye una contribución preliminar a esta problemática y quiere motivar matemáticos, estadísticos, economistas, ingenieros, etc. etc. de los países en vía de desarrollo a poner sus conocimientos académicos y técnicos al servicio de la lucha contra el subdesarrollo, el hambre, el desempleo, las deficiencias en la salud pública, la ignorancia, miseria y demás males que plagan hoy en día a dos terceras partes del mundo.

§1.1.

La variable de dimensión $k \times 1$ $x(t)$ representa el estado del sistema:

$$x_t = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k(t) \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

La siguiente ecuación diferencial representa el movimiento del sistema:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + \dot{\mu}(t), \tag{1.1.2}$$

donde $\dot{\mu}(t)$ representa todas las perturbaciones externas del sistema de carácter determinístico o estocástico.

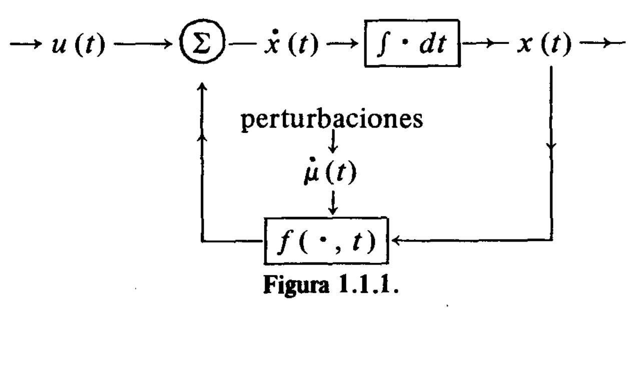
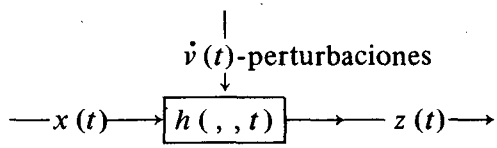


Figura 1.1.1.

Suponemos que nuestro sistema es observable. Esto significa que disponemos de un sistema de mediciones (Fig. 1.1.2) que nos permite reconstruir el estado del sistema a partir de mediciones que no están libres de error.



donde $\dot{v}(t)$ representa las perturbaciones del sistema de mediciones, que pueden ser de carácter determinístico o estocástico.

La siguiente ecuación representa el sistema de observaciones:

(1.1.3) $$z(t) = h(x(t), t) + \dot{v}(t),$$

donde $\dot{v}(t)$ es un murmullo blanco (white noise), que representa el carácter determinístico o estocástico de las perturbaciones de las mediciones. $h(x(t), t)$ es una transformación vectorial $l \times 1$ del estado $x(t)$ en observaciones de estado $z(t)$.

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1.2) y (1.1.3) significa determinar la trayectoria de la variable $x(t)$ para cada sistema de condiciones iniciales. En el caso determinístico el conocimiento de $x(t)$ para algún t, fija unívocamente la trayectoria para cada sistema de condiciones iniciales. Para el caso estocástico es además necesario determinar la distribución de la probabilidad de la trayectoria. La teoría estocástica de la estimación aunque ha alcanzado un gran nivel de desarrollo en el caso lineal, sólo ofrece soluciones satisfactorias para algunos casos no lineales (3, 6, 11, 17). Atención se dedica especialmente a aquellos problemas donde la distribución de probabilidad se puede determinar conocido un número finito de estadísticas suficientes, por ejemplo la media y la varianza (1, 5, 6, 17). Una alternativa de interés creciente es la solución de casos no lineales mediante aproximación a casos lineales (16, 18).

§ 1.2.

La solución $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t))'$ de la ecuación del movimiento de un sistema económico genera, bajo ciertas condiciones, un proceso estocástico cuya trayectoria representa el crecimiento o desarrollo económico. Las trayectorias $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)$ y los parámetros estructurales pueden ser afectados por decisiones humanas (ver §5).

El comportamiento humano juega, por esta razón, un papel decisivo en la modelación del camino del progreso. En el §5 mostramos cómo variaciones en los parámetros estructurales inducen en la trayectoria del progreso aceleración, retraso o estancamiento, o conducen a un nivel mayor, menor o igual en el valor de las variables en un tiempo dado.

La consideración de incertidumbre en variables como $\dot{\mu}(t)$, $\dot{\nu}(t)$ en (1.1.2) y (1.1.3) se justifica teniendo en cuenta el carácter estructural y de aproximación a la realidad del modelo, las prácticas usuales en el levantamiento de los datos estadísticos y su significado económico.

Las siguientes son tres razones muy típicas:

1) La imperfección del modelo, puesto que algunas variables han sido excluidas por razón de simplicidad. Un modelo fiel a la realidad sería muy complicado de describir; más aún, los cálculos estadísticos serían demasiado complicados dado que existieran datos disponibles para cada variable.

2) Errores de medición debido a la cuantificación de características cualitativas y a errores en las observaciones.

3) Simplificación en las relaciones entre las variables para propósitos empíricos.

Puesto que estamos interesados especialmente en modelos de crecimiento y desarrollo económico, es conveniente hacer las siguientes hipótesis:

i) $x(t)$ es un proceso estocástico evolutivo,

ii) las condiciones iniciales de las ecuaciones (1.1.2) y (1.1.3) son estocásticas.

En esta forma queda establecido el carácter estocástico de las ecuaciones (1.1.2) y (1.1.3).

Por otra parte, la introducción de elementos probabilísticos en modelos de desarrollo económico, es indispensable para justificar el desarrollo desigual de sistemas con similar estructura económica y similares condiciones iniciales (4, 8, 17).

§ 1.3.

Con la intención de hacer el presente artículo asequible al mayor número posible de lectores, reproducimos a continuación algunos conceptos sobre procesos estocásticos. También hemos reproducido en los Apéndices I y II algunos conceptos intuitivos de la teoría de sistemas y de la estimación estadística, que esperamos sean útiles al lector no experto.

Para el tratamiento de ecuaciones del tipo (1.1.2) y (1.1.3) ha sido desarrollado un nuevo método de cálculo (2, 7, 9, 16).

Un proceso de Wiener $w(t)$ es un proceso estocástico de Gauss con trayectorias continuas y en ninguna parte diferenciables con valor medio $Ew(t) = 0$ y covarianza $Ew(t)\, w'(s) = \min(s, t)$

Un proceso de Gauss estacionario $\xi(t)$ con valor medio cero y función de densidad espectral constante, es llamado un murmullo blanco.

Si $\xi(t)$ y $w(t)$ son procesos generalizados, resulta

(1.3.1) $$w(t) = \int_0^t \xi(s)\, ds.$$

De este modo, (1.1.2) adquiere la siguiente forma diferencial:

(1.3.2) $$dx(t) = f(x(t), t)\, dt + G(x(t), t)\, dw(t),$$

donde $\dot{\mu}(t) = G(x(t), t)\, \dot{w}(t); x(t_0) = c$.

Así obtenemos la ecuación integral de Ito

(1.3.3) $$x(t) = c + \int_{t_0}^t f(x(s), s)\, ds + \int_{t_0}^t G(x(s), s)\, dw(s).$$

La solución (1.3.3) de la ecuación diferencial estocástica (1.3.2), es un proceso de Markov con trayectorias continuas y más aún un proceso de difusión.

Todo proceso de difusión (suave) es a su vez solución de una ecuación diferencial estocástica de la forma (1.3.2), donde f es el vector de velocidad y G^2 es el coeficiente de difusión del proceso.

Existen dos métodos probabilísticos básicos para abordar la clase de los procesos de difusión:

a) *Método teórico indirecto.* Este se realiza a través de condiciones sobre la probabilidad de transición $P(s, x, t, B)$.

b) *Método directo.* Este analiza la variable aleatoria $x(t)$ y sus variaciones.

Ambos procedimientos conducen esencialmente a la misma clase de procesos (Arnold [2]). Dentro de estas dos clases de métodos existe una variedad de alternativas. El lector interesado puede dirigirse a Bharucha-Reid [3] para una vista general y más literatura.

Un proceso de Markov $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, con valores en R^k y con trayectorias continuas casi con seguridad (almost sure), se llama un proceso de difusión si su probabilidad de transición $P(s, x, t, B)$ para todo $s \in [t_0, T]$. $x \in R^k$ y $\epsilon > 0$ cumple las siguientes propiedades:

a) $$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\epsilon} P(s, x, t, dy) = 0.$$

b) Existe una función $f(x, s)$
$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leqslant \epsilon} (y-x) P(s, x, t, dy) = f(x, s).$$

c) Existe una función matricial $B(x, s)$ de dimensión $k \mathrm{x} k$ tal que:
$$\lim \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leqslant \epsilon} (y-x)(y-x)' P(t, x, t, dy) = B(x, s).$$

Las funciones f y B se llaman coeficientes del proceso de difusión. $B(x, s)$ es simétrica y no-negativa definida. La condición a) hace improbable cambios grandes en $x(t)$ en intervalos de tiempo pequeños.

$$P(|x(t) - x(s)| \leqslant \epsilon \,|\, x(s) = x) = 1 - 0(t-s).$$

$f(x(s), s)$ es el vector de velocidad promedio del movimiento probabilístico descrito por $x(t)$ bajo la condición $x(s) = x$. $B(x(s), s)$ es una medida para la intensidad local de las fluctuaciones de $x(t) - x(s)$ alrededor del promedio.

Es decisivo en los procesos de difusión que la probabilidad de transición $P(s, x, t, B)$ se determina unívocamente, bajo ciertas condiciones de regularidad, dados el vector de impulso f y la matriz de difusión B. Esto es sorprendente ya que f y B se derivan, según definición, de los dos primeros momentos de $P(s, x, t, B)$, los que no determinan en general una distribución.

§1.4.

Se intenta investigar la tendencia del desarrollo económico (a largo plazo), la cual se describe por medio de ecuaciones diferenciales estocásticas cuya solución es un proceso multivariable lognormal de difusión.

Sobre los coeficientes de difusión de este proceso multivariable lognormal de difusión, hacemos las siguientes hipótesis para efectos de simplicidad (ver Bartlett [4], Pawula [12]):

$$(1.4.1) \qquad \begin{cases} f_i(x(t), s) = f_i\, x_i \\ B(i, j)(x(t), s) = b(i, j)\, x_i\, x_j \\ b(i, j) > 0;\ b(i, j),\ f_i \in R;\ i, j = 1(1)k. \end{cases}$$

Esto significa que las variaciones esperadas en $x(t)$ y en la matriz de varianzas-covarianzas son supuestas proporcionales a los valores actuales de $x(t)$. Si $B(x(t), s)$ es positiva semidefinida, entonces la variable $x(t)$ asume variaciones en el intervalo de tiempo Δt, aunque estas variaciones son pequeñas para pequeños Δt.

Estas especificaciones del proceso estocástico $\{x(t), t > 0\}$ resultan muy razonables, si se tiene en cuenta la naturaleza mudable de la economía, el carácter continuo del desarrollo económico (cuyo estado varía estocásticamente), el complejo mundo interdependiente de las actividades económicas y su difusión.

La densidad de la probabilidad de transición $p(s, x, t, y)$ de nuestro proceso de difusión satisface, bajo ciertas condiciones, la ecuación de Fokker-Planck (forward) y de Kolmogorov (backward) siguientes (ver Gihman, Skorohod [7]):

$$(1.4.2) \qquad -\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial y_i}(f_i\, y_i\, p) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} b(i,j) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(y_i y_j p) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} f_i x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} b(i,j) x_i x_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Transformando las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas (1.4.2) en ecuaciones diferenciales parciales lineales de primer orden por medio de una transformación de Fourier, se puede resolver entonces la ecuación de primer orden considerando su sistema de Lagrange asociado (ver Pawula [12]). Así resulta la función característica condicional asociada a $p(s, x, t, y)$. La solución para $p(s, x, t, y)$ tiene la forma:

(1.4.3) $$p(s,x,t,y) = (2\pi(t-s))^{-\frac{k}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} (\prod_{i=1}^{k} y_i)^{-1} \exp(-\frac{1}{2}(t-s)^{-1} Q)$$

donde

$$Q = (\log y_i(t) - \log x_i(s) - \beta_i(t-s)) B^{-1} (\log y_i(t) - \log x_i(t) - \beta_i(t-s))$$

(1.4.4) $$B = (b(i,j)), \ \beta = f - \frac{1}{2}(b(i,i)), \ t > s, \ i,j = 1\,(1)\,k$$

con las funciones medias y varianzas y covarianzas de $x(t)$ siguientes:

$$E(x_i(t)) = x_i(s) \exp(f_i(t-s))$$

varianzas-covarianzas:

$$VK(x_i(t)) = x_i(s) (\exp(f_i + f_j)(t-s)) (\exp(b(i,j)(t-s)) - 1)$$

correlaciones:

$$R(x_i(t), x_j(t)) = \frac{\exp(b(i,j)(t-s)) - 1}{[\exp(b(i,i)(t-s) - 1)]^{1/2} [\exp(b(j,j)(t-s) - 1)]^{1/2}}$$

para $i, j = 1\,(1)\,k$.

En el Apéndice II presentamos un método de estimación para los coeficientes de difusión f y B, que determinan según las ecuaciones anteriores la trayectoria esperada de $x(t)$.

Para cada variable $x_i(t)$ resulta una tendencia funcional exponencial. Si las condiciones iniciales y los coeficientes de difusión son conocidos, entonces es posible estimar la trayectoria del desarrollo económico por medio de las ecuaciones siguientes:

$$E(x_i(t)) = x_i(1) \exp(f_i(t-1))$$

$$VK(x_i(t), x_j(t)) = x_i(1)x_j(1)\exp((f_i + f_j)(t-1))(\exp((b(i,j)(t-1))-1)$$

para $i, j = 1\,(1)\,k$; $t = 1\,(1)\,n$.

Con la ayuda de estas ecuaciones y con datos estadísticos anuales de Colombia para el período 1950-1972, estimamos las siguientes tendencias funcionales. Nótese que la tendencia, según nuestra hipótesis (1.4.1), depende sólo del tiempo (ver la Tabla 1.4.2).

$$(1.4.5)\quad \begin{cases} E(x_1(t)) = 13790.4 \exp(0.0555\,(t-1)); & t = 1, 2, \ldots \\ E(x_2(t)) = 10604.7 \exp(0.0530\,(t-1)); & t = 1, 2, \ldots \\ E(x_3(t)) = 1952.1 \exp(0.0697\,(t-1)); & t = 1, 2, \ldots \\ E(x_4(t)) = 760.0 \exp(0.0738\,(t-1)); & t = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Con estas funciones estimadas de las tendencias, nos resulta posible establecer los siguientes pronósticos para el período de tiempo 1973-1982 (ver Tabla 1.4.1).

Tabla 1.4.1

Año	$E(x_1(t))$	$E(x_2(t))$	$E(x^3(t))$	$E(x_4(t))$
1973	49415.3	35855.3	9691.8	4147.5
1974	52234.9	37805.6	10391.0	4465.1
1975	55215.4	39861.9	11140.8	4807.0
1976	58366.0	42030.1	11944.6	5175.1
1977	61696.3	44316.2	12806.4	5571.3
1978	65216.7	46726.7	13730.5	5997.9
1979	68937.9	49268.3	14721.1	6457.2
1980	72871.5	51948.1	15783.3	6951.6
1981	77029.5	54773.7	16922.1	7483.9
1982	81424.7	57753.0	18143.1	8058.9

Donde:

$x_1(t)$:= producto nacional real;
$x_2(t)$:= consumo privado real;
$x_3(t)$:= inversiones privadas reales;
$x_4(t)$:= gastos reales del gobierno;
$Ex_i(t)$:= correspondiente $x_i(t)$ esperado.

El índice de precios con respecto a 1958.

Tabla 1.4.2

(en millones de pesos: 1958 = 100)

Año	$x_1(t)$	$E(x_1(t))$	$x_2(t)$	$E(x_2(t))$	$x_3(t)$	$E(x_3(t))$	$x_4(t)$	$E(x_4(t))$
1950	13790.4	13790.4	10604.7	10604.7	1952.1	1952.1	760.0	760.0
1951	14657.2	14577.2	11403.9	11181.6	1949.7	2093.0	853.8	818.2
1952	15318.9	15409.0	11876.2	11789.7	2116.2	2244.0	923.5	880.8
1953	16021.9	16288.2	12326.9	12431.0	2665.1	2405.9	1080.7	948.3
1954	18226.9	17217.6	13874.0	13107.2	3088.3	2579.5	1222.9	1020.9
1955	18150.4	18200.0	13952.2	13820.1	3264.4	2765.6	1284.8	1099.1
1956	19302.3	19238.5	14587.4	14571.8	3281.4	2965.1	1246.0	1183.2
1957	20239.3	20336.3	14759.0	15364.4	3003.8	3179.1	1160.9	1273.8
1958	20682.5	21496.6	15004.9	16200.1	3338.8	3408.4	1196.1	1371.4
1959	21897.0	22723.2	15924.3	17081.3	3618.4	3654.4	1268.1	1476.4
1960	23258.0	24019.8	17034.2	18010.4	4213.0	3918.0	1442.9	1589.4
1961	24533.1	25390.4	18213.3	18990.0	4500.2	4200.7	1625.8	1711.1
1962	26106.3	26839.1	19618.1	20022.9	4684.7	4503.8	1798.5	1842.1
1963	26702.8	28370.5	20260.6	21112.0	4397.2	4828.8	1931.9	1983.2
1964	28444.6	29989.3	21940.5	22260.4	4578.7	5177.2	1843.2	2135.0
1965	29657,4	31700.5	22186.4	23471.2	4636.2	5550.7	1928.9	2298.5
1966	31458.2	33509.3	23864.4	24747.8	5257.9	5951.2	2098.5	2474.5
1967	32002.0	35421.4	23769.5	26093.9	5643.3	6380.6	2190.3	2664.0
1968	34559.7	37442.5	25338.9	27513.2	6743.8	6841.0	2358.4	2868.0
1969	37108.1	39578.9	27316.9	29009.8	7100.4	7334.6	2619.7	3087.6
1970	40556.1	41837.3	29385.9	30587.7	8028.0	7863.8	3093.7	3324.0
1971	42951.3	44224.5	31127.0	32251.4	8746.6	8431.2	3751.0	3578.5
1972	46383.8	46747.9	33675.4	34005.7	8490.0	9039.5	3662.3	3852.5

§1.5.

Si se quiere investigar los efectos de medidas económico-políticas sobre la tendencia (a largo plazo) del desarrollo económico, es necesario introducir en las ecuaciones diferenciales (1.1.2) o equivalente (1.4.2) variables instrumentos (controles) tales como los gastos del gobierno, inversiones privadas, impuestos, tasas de descuento, etc. Las variables instrumento, también llamadas controles, son elementos que por su naturaleza se dejan manipular para objetivos económico-políticos. Con este propósito queremos extender nuestras hipótesis sobre los coeficientes de difusión en la forma siguiente:

$$(1.5.1)\qquad \begin{cases} f_i(x(t),t) = f_i^*(t)\,x_i(t) \\ B(i,j)(x(t),t) = b(i,j)\,x_i(t)\,x_j(t); \quad i,j = 1(1)k \end{cases}$$

Donde:

$$f_i^*(t) = f_{i0} + f_{i1}[\Delta G(t)] + f_i[\Delta I(t)]$$

$$b(i,j) > 0,\ f_{i0},\ f_{i1},\ f_{i2} \in R.$$

Esto significa que la tendencia del desarrollo depende ahora no sólo del tiempo sino también de los cambios relativos en los gastos del gobierno $\Delta G(t)$ y en las inversiones privadas $\Delta I(t)$. Esta dependencia actúa directamente a través del vector de impulso f como (1.5.1) indica.

Así se obtiene para cada variable $x_i(t)$ la siguiente funcional exponencial de la tendencia:

$$(1.5.2)\qquad E(x_i(t)) = x_i(1)\exp(f_i^*(t-1)),$$

donde

$$f_i^*(t-1) = f_{i0}(t-1) + f_{i1}\sum_{\alpha=1}^{n}\Delta x_3(\alpha) + f_{i2}\sum_{\alpha=1}^{n}\Delta x_4(\alpha)$$

$$\Delta x_h(\alpha) = \frac{x_h(\alpha+1) - x_h(\alpha)}{}, \quad h = 3,4.$$

y correspondientemente la siguiente matriz funcional de la varianza-covarianza:

$$VK(x_i(t),x_j(t)) = x_i(t)\,x_j(t)\exp((f_i+f_j)(t-1))\exp(b(i,j)(t-1)-1)$$

para $i,j = 1(1)k$; $t = 1,2,\ldots$

Con ayuda del principio de máxima verosimilidad, de (1.5.1), (1.4.3), (1.4.4) es posible estimar las componentes el vector de impulso f del proceso de difusión (ver Tabla 1.5.1).

Tabla 1.5.1

i	f_{i0}	f_{i1}	f_{i2}
1	0.04314	0.07620	0.06347
2	0.03784	0.13985	0.03741
3	−0.00065	0.00890	0.92631
4	−0.00055	0.93666	0.00508

De este modo es posible estimar el vector funcional de impulso (1.5.3) del proceso de difusión. Es claro que el vector impulso (1.5.3) depende del tiempo y de los cambios relativos en los gastos del gobierno y en las inversiones privadas (ver también la Tabla 1.5.2 y compárese con la Tabla 1.4.2).

$$
(1.5.3) \quad \begin{cases}
E(x_1(t)) = 13790.4 \exp\Big[0.043\,(t-1) + \\
\qquad + 0.076 \sum\limits_{a=1}^{t} \Delta x_3(\alpha) + 0.063 \sum\limits_{a=1}^{t} \Delta x_4(\alpha)\Big] \\
E(x_2(t)) = 10604.7 \exp\Big[0.037\,(t-1) + \\
\qquad + 0.139 \sum\limits_{a=1}^{t} \Delta x_3(\alpha) + 0.037 \sum\limits_{a=1}^{t} \Delta x_4(\alpha)\Big] \\
E(x_3(t)) = 1952.1 \exp\Big[-0.00065\,(t-1) + \\
\qquad + 0.008 \sum\limits_{a=1}^{t} \Delta x_3(\alpha) + 0.926 \sum\limits_{a=1}^{t} \Delta x_4(\alpha)\Big] \\
E(x_4(t)) = 760.0 \exp\Big[-0.00055\,(t-1) + \\
\qquad + 0.9366 \sum\limits_{a=1}^{t} \Delta x_3(\alpha) + 0.005 \sum\limits_{a=1}^{t} \Delta x_4(\alpha)\Big]
\end{cases}
$$

Bajo la hipótesis que las inversiones privadas $x_3(t)$ y los gastos del gobierno $x_4(t)$ crecen con una tasa que es la tasa promedio de su crecimiento en el período 1950-1972, nos es posible establecer los siguientes pronósticos (Tabla 1.5.3) para los años 1973-1982.

Tabla 1.5.2

Año	$x_1(t)$	$E(x_1(t))$	$x_2(t)$	$E(x_2(t))$	$x_3(t)$	$E(x_3(t))$	$x_4(t)$	$E(x_4(t))$
1950	13790.4	13790.4	10604.7	10604.7	1952.1	1952.1	760.0	760.0
1951	14657.2	14533.2	11403.9	11205.0	1949.7	1950.7	853.8	852.6
1952	15318.9	15351.6	11876.2	11808.5	2116.2	2111.5	923.5	920.3
1953	16021.9	16507.3	12326.9	12682.0	2665.1	2687.2	1080.7	1080.2
1954	18226.9	17584.9	13874.0	13495.6	3088.3	3114.6	1222.9	1222.1
1955	18150.4	18498.0	13952.2	14145.9	3264.4	3282.9	1284.8	1281.2
1956	19502.3	19275.5	14587.4	14632.5	3281.4	3295.7	1246.0	1244.8
1957	20239.3	19913.6	14759.0	15004.9	3003.8	3043.4	1160.9	1166.5
1958	20682.5	20987.7	15004.9	15715.3	3338.8	3373.3	1196.1	1200.1
1959	21897.0	22130.9	15924.3	16511.1	3618.4	3645.0	1268.1	1269.5
1960	23258.0	23595.4	17034.2	17589.6	4213.0	4246.6	1442.9	1444.9
1961	24533.1	24982.7	18213.3	18642.3	4500.2	4525.6	1625.8	1626.7
1962	26106.3	26364.6	19618.1	19681.3	4684.7	4702.1	1798.5	1796.3
1963	26702.8	27575.4	20260.6	20606.3	4397.2	4442.3	1931.9	1923.8
1964	28444.6	28765.7	21940.5	21297.0	4578.7	4610.5	1843.2	1842.2
1965	29567.4	30164.6	22186.4	22273.3	4636.2	4663.3	1928.9	1923.3
1966	31458.2	31977.1	23864.4	23536.3	5257.9	5280.8	2098.5	2088.6
1967	32002.0	33654.6	23769.5	24661.8	5643.3	5650.2	2190.3	2175.6
1968	34559.7	35784.5	25338.9	26078.9	6743.8	6768.9	2358.4	2338.7
1969	37108.1	37805.6	27316.9	27562.3	7100.4	7111.1	2619.7	2593.7
1970	40556.1	40353.6	29385.9	29502.9	8028.0	8033.6	3093.7	3073.1
1971	42951.3	43064.3	31127.0	31670.9	8746.6	8738.8	3751.0	3749.4
1972	46383.8	44798.4	33675.4	32748.0	8490.0	8497.2	3662.3	3664.7

$R^2 = 0.894$ F-valor 169.56 $R^2 = 0.998$ F-valor 4465.15 $R^2 = 0.999$ F-valor 407945.6 $R^2 = 30.999$ F-valor 265672.1

Nota: La estimación de la correlación R^2 y del respectivo F-valor muestra el porcentaje de la varianza explicado a través de la regresión medida en la varianza de las variables dependientes $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$.

Tabla 1.5.3

Año	$E(x_1(t))$	$E(x_2(t))$	$E(x_3(t))$	$E(x_4(t))$
1973	47263.0	34470.2	9084.7	3936.3
1974	49863.1	36282.9	9712.8	4228.1
1975	52606.3	38190.9	10384.4	4541.5
1976	55500.5	40199.3	11102.4	4878.2
1977	58553.8	42313.3	11870.0	5239.8
1978	61775.1	44538.5	12690.7	5628.2
1979	65173.7	46880.7	13568.1	6045.4
1980	68759.2	49346.0	14506.3	6493.5
1981	72541.9	51941.1	15509.2	6974.9
1982	76532.8	54672.5	16581.6	7491.9

Igualmente establecemos los siguientes pronósticos (Tabla 1.5.4) para el período 1973-1982, asumiendo que las tasas de crecimiento de los gastos del gobierno y de las inversiones privadas permanecen constantes durante el período 1973-1982 y tienen valores como en el año 1972.

Tabla 1.5.4

Año	$E(x_1(t))$	$E(x_2(t))$	$E(x_3(t))$	$E(x_4(t))$
1973	48656.8	35167.9	8256.8	3579.9
1974	50616.2	36363.8	8028.5	3499.0
1975	52654.4	37600.5	7806.5	3419.9
1976	54774.6	38879.2	7590.6	3342.6
1977	56980.3	40201.4	7380.8	3267.1
1978	59274.7	41568.6	7176.7	3193.2
1979	61661.6	42982.3	6978.2	3121.1
1980	64144.6	44444.0	6785.3	3050.5
1981	66727.5	45955.5	6597.7	2981.6
1982	69414.5	47518.3	6415.3	2914.2

También hemos calculado las respectivas máximas tasas de crecimientos en el período 1950-1972 y supuesto que los gastos del gobierno y las inversiones privadas crecen con estas tasas durante el período 1973-1982. Los respectivos pronósticos se indican en la Tabla 1.5.5.

Tabla 1.5.5

Año	$E(x_1(t))$	$E(x_2(t))$	$E(x_3(t))$	$E(x_4(t))$
1973	50456.5	36743.3	10811.0	4472.6
1974	54429.6	39694.9	13764.1	5461.6
1975	58715.6	42883.6	17523.7	6669.4
1976	63339.0	46328.5	22310.4	8144.3
1977	68326.6	50050.1	28404.4	9945.3
1978	73706.8	54070.6	36163.1	12144.6
1979	79510.7	58414.1	46041.0	14830.2
1980	85771.7	63106.5	58617.1	18109.8
1981	92525.6	68175.9	74628.4	22114.5
1982	99811.4	73652.5	95013.1	27004.9

La función de la tendencia (1.5.3) nos permite estimar la trayectoria del desarrollo económico bajo diferentes hipótesis sobre los cambios en las variables instrumentos.

Nuestro próximo objetivo es determinar una combinación óptima de cambios en las variables instrumentos. Una combinación óptima significa que las variaciones induzcan mayores tasas de crecimientos en las variables dependientes y permanezcan en un dominio realizable. Es decir, que el sistema económico sea capaz de realizar.

§ 1.6. En investigación.

Para determinar una combinación óptima de variaciones, debemos escoger una función objetivo o un criterio apropiado que nos indique cuándo el sistema alcanza un punto óptimo o cuándo una política económica es más favorable para el desarrollo económico.

Para esta tarea, así como para el desarrollo de los algoritmos apropiados y para la caracterización de un sistema dinámico complejo por medio de un modelo matemático, ofrece la teoría matemática del control los más apropiados instrumentos.

Cuando un sistema en actividad está sometido a perturbaciones no predicibles, se hace imprescindible el uso de la teoría matemática del control, cuyo objetivo fundamental consiste entonces en mantener algunas variables del sistema dentro de un rango limitado. Así surge el tratamiento de estabilidad de sistemas bajo el efecto de perturbaciones estocásticas. Esto conduce a otro problema: la búsqueda de la mejor posible y más aceptable estrategia de control.

Nosotros consideramos un sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$(1.6.1) \qquad dx(t) = f(x(t), t, u(x(t), t))\,dt + G(x(t), t, u(x(t), t))\,dw(t)$$

$$x(t_0) = c, \quad t > t_0.$$

La variable adicional nueva $u(x(t), t)$ es una función de control, que puede ser seleccionada de un conjunto de funciones de control admisibles.

Con la elección de la función de control $u(x(t), t)$ hasta el tiempo $T > \infty$ partiendo del estado $x(s) = x$ en el tiempo s está asociada la siguiente función de costos:

$$(1.6.2) \qquad V_u(x(t), s) = E_{s,x}(\int_s^t k(x(r), r, u(x(r), r))\,dr + M(x(T), T)$$

Nosotros buscamos la función de control óptima. Esto significa una función de control admisible que minimice (1.6.2).

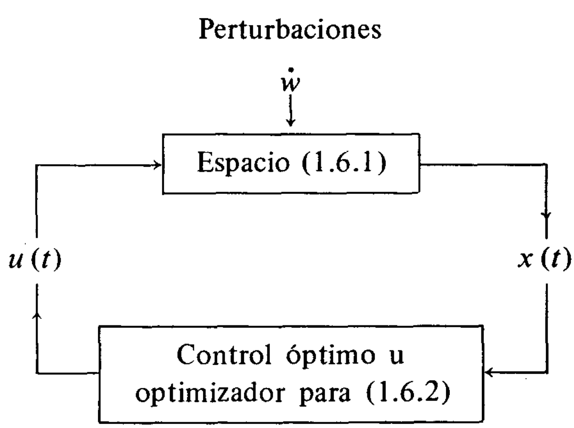


Diagrama para un ajustamiento óptimo

Apéndice I.

Un proceso es un cambio cualitativo o cuantitativo en dependencia del tiempo, que ocurre en un objeto que llamamos un sistema.

El concepto de cambio debe ser entendido en una forma bien amplia. Por ejemplo, cambios en las coordenadas de una pequeña partícula, o en la temperatura de un cuerpo, o en el crecimiento de una planta, o en el crecimiento económico de un país, o en el comportamiento de una persona. Desde un punto de vista dialéctico, se describen tales cambios como un movimiento y nosotros nos interesamos especialmente en su ecuación. Un sistema está compuesto de elementos activos. Un elemento activo es un objeto, cuya ecuación de movimiento contribuye al análisis del sistema en cuestión.

De un elemento activo nos interesa sólo conocer los insumos, productos y sus relaciones cualitativas y cuantitativas.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\qquad\qquad} \longrightarrow y(t)$$

Dentro de los subsistemas activos de un sistema, tienen lugar relaciones recíprocas alternantes, las cuales, según la naturaleza del sistema y la selección de objetivo, varían en importancia. Llamaremos el conjunto de las relaciones características invariables (!) entre los elementos del sistema y entre los sistemas mismos, estructura del sistema.

Entre dos sistemas que son similares en una cierta forma, llamamos el más simple el modelo del más complicado. Un modelo puede ser conceptual, intuitivo, artificial y natural (ver Diagrama 1).

Es necesario extender intuitivamente la idea de sistema para cubrir tareas de planeación. Así llamaremos un sistema en una forma aún general, una entidad dinámica organizada que puede ser influenciada desde su exterior y cuyo comportamiento puede ser manipulado de una cierta manera.

Cuando en la salida del sistema disponemos de un mecanismo que nos informe en cada unidad de tiempo sobre la calidad y cantidad del producto decimos que podemos observar el estado del sistema.

Otra extensión muy natural de nuestra concepción intuitiva, es la elaboración de un mecanismo (feedback), que informe continuamente a la unidad de insumos del estado actual del sistema. Así conocida la estructura del sistema, este mecanismo graduaría los insumos de tal modo que el estado del sistema alcance un nivel deseado.

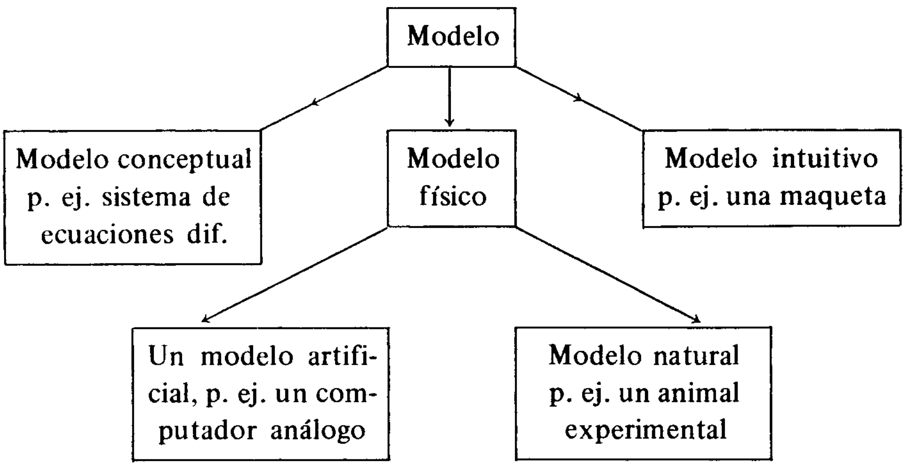


Diagrama I

Apéndice II. Estimaciones de máxima verosimilitud.

Nosotros derivamos las estimaciones de los coeficientes de difusión f y B, empleando el principio de máxima verosimilitud.

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ los vectores de observaciones de $x(t)$ en las unidades de tiempo $t_0, t_1, \ldots, t_n$ respectivamente. Sea además $P[x(t_1) = x_1] = 1$. La probabilidad conjunta de las observaciones, esto es la función de máxima verosimilitud, es:

$$L(x_0, \ldots, x_n) = p(x_1)\, p(t_1, x_1; t_2, x_2) \ldots p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{nk}{2}} |B^{-1}|^{-\frac{n}{2}} \prod_{a=1}^{n} (t_{a+1} - t_a)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^{k} (x_{ia})^{-1} \exp\left[\frac{1}{2} (t_a - t\alpha)^{-1} Q_a\right]$$

donde:

$$Q_a = \left[\log x_{a+1} - \log x_a - \beta(t_{a+1})\right]^{-1} B^{-1} \left[\log x_{a+1} - \log x_a - \beta(t_{a+1} - t_a)\right]$$

Nosotros formamos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_i} = 0, \quad \frac{\partial \log L}{\partial b(i,j)} = 0; \quad i,j = 1\,(1)\,k.$$

Solucionado este sistema de ecuación, resultan estimaciones para f y B.

Apéndice III.

Aquí resumimos las más importantes estimaciones de máxima verosimilitud y sus varianzas.

Respecto al § 1.4

$$\widehat{B} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.7108 & 0.6939 & 0.4997 & 0.4183 \\ & 0.8872 & 0.5804 & 0.6712 \\ & & 5.7010 & 3.0980 \\ & & & 4.6040 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\beta} = \begin{bmatrix} 0.0551 \\ 0.0525 \\ 0.0668 \\ 0.0715 \end{bmatrix} \qquad \widehat{f} = \begin{bmatrix} 0.0555 \\ 0.0530 \\ 0.0697 \\ 0.0738 \end{bmatrix}$$

$$V(\widehat{\beta}_i) = \frac{10^{-4}}{t} \begin{bmatrix} 0.309 \\ 0.386 \\ 2.479 \\ 2.002 \end{bmatrix} \qquad t = 1, 2, \ldots$$

$$V(\widehat{b}_{ij}) = 10^{-7} \begin{bmatrix} 0.4393 & 0.4835 & 1.1870 & 1.4990 \\ & 0.6845 & 2.3460 & 1.9720 \\ & & 28.260 & 15.560 \\ & & & 18.430 \end{bmatrix}$$

$$V(\widehat{f}) = \frac{10^{-4}}{t} \begin{bmatrix} 0.309 \\ 0.386 \\ 2.479 \\ 2.002 \end{bmatrix} + 10^{-7} \begin{bmatrix} 0.2196 \\ 0.3422 \\ 14.1310 \\ 9.2160 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{R}\,(x_i\,(t), x_j\,(t)) = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.87 & 0.24 & 0.28 \\ & 1.00 & 0.25 & 0.33 \\ & & 1.00 & 0.60 \\ & & & 1.00 \end{bmatrix}$$

Respecto al parágrafo 1.5

$$\widehat{B} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.637 & 0.6028 & -0.0017 & -0.0187 \\ & 0.7553 & 0.0140 & -0.0088 \\ & & 0.0136 & 0.0033 \\ & & & 0.0069 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\beta}_0 = \begin{bmatrix} 0.04282 \\ 0.03746 \\ -0.00066 \\ -0.06056 \end{bmatrix} \quad \widehat{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 0.07588 \\ 0.13947 \\ 0.00890 \\ 0.93660 \end{bmatrix} \quad \widehat{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0.06315 \\ 0.03703 \\ 0.92630 \\ 0.0050855 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{f}_0 = \begin{bmatrix} 0.04314 \\ 0.03784 \\ -0.00065 \\ -0.00055 \end{bmatrix} \quad \widehat{f}_1 = \begin{bmatrix} 0.07620 \\ 0.13985 \\ 0.00890 \\ 0.93666 \end{bmatrix} \quad \widehat{f}_2 = \begin{bmatrix} 0.06347 \\ 0.03741 \\ 0.92631 \\ 0.00508 \end{bmatrix}$$

$$V(\widehat{\beta}_0) = \frac{10^{-4}}{t} \begin{bmatrix} 0.2768 \\ 0.3284 \\ 0.0059 \\ 0.0030 \end{bmatrix} \qquad V(\widehat{\beta}_1) = \frac{10^{-4}}{t} \begin{bmatrix} 0.1643 \\ 0.1950 \\ 0.0035 \\ 0.0017 \end{bmatrix}$$

Datos estadísticos
(en millones de pesos a precios corrientes)

Año	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$	P	ΔG	ΔI
1950	7860.5	6044.7	1112.7	433.2	57.0	0.00000	0.00000
1951	8940.9	6956.4	1189.3	520.8	61.0	.12338	—.00125
1952	9650.9	7482.0	1333.2	581.8	63.0	.08166	.08541
1953	10734.7	8259.0	1785.6	724.1	67.0	.17028	.25937
1954	12758.8	9711.8	2161.8	856.0	70.0	.13149	.15880
1955	13249.8	10185.1	2383.0	937.9	73.0	.05065	.05702
1956	14862.8	11232.3	2526.7	959.4	77.0	—.03022	.00522
1957	17810.6	12987.9	2643.3	1021.6	88.0	—.06827	—.08462
1958	20682.5	15004.9	3338.8	1196.1	100.0	.03031	.11154
1959	23648.8	17198.2	3907.9	1369.5	108.0	.06016	.08375
1960	26746.7	19589.3	4844.9	1659.3	115.0	.13786	.16431
1961	30421.0	22584.5	5580.3	2016.0	124.0	.12679	.06819
1962	34199.2	25699.7	6136.9	2356.0	131.0	.10620	.04098
1963	43525.5	33024.8	7167.5	3149.0	163.0	.07419	—.06135
1964	53760.3	41467.6	8653.8	3483.6	189.0	—.04593	.04127
1965	60797.6	45482.1	9504.2	3954.3	205.0	.04652	.01255
1966	73612.3	55842.6	12303.6	4910.4	234.0	.08789	.13411
1967	83525.2	62038.5	14729.1	5716.8	261.0	.04379	.07330
1968	96421.7	70695.6	18815.1	6579.8	279.0	.07670	.19500
1969	110953.3	81677.4	21230.1	7832.8	299.0	.11080	.05288
1970	130590.8	94622.7	25850.3	9961.6	322.0	.18094	.13065
1971	153765.5	111434.8	31312.8	13428.6	358.0	.21248	.08950
1972	185535.3	134701.6	33960.2	14649.2	400.0	—.02365	—.02933

Notas: a) P: Indice nacional de precios del consumidor; ΔG: Cambios relativos en los gastos del gobierno; ΔI: Cambios relativos en la inversión privada.
b) Hemos usado variables reales más que nominales, las cuales hemos calculado con ayuda del único índice de precios a nuestra disposición. Las variables nominales empleadas aparecen en esta tabla.
c) Fuente de los datos: Cuentas nacionales del Banco de la República, 1974.

$$V(\widehat{\beta}_2) = \frac{10^{-4}}{t} \begin{bmatrix} 0.1744 \\ 0.2069 \\ 0.0037 \\ 0.0018 \end{bmatrix} \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

$$V(\widehat{f}_0) = \frac{10^{-4}}{t} \begin{bmatrix} 0.2768 \\ 0.3284 \\ 0.0059 \\ 0.0030 \end{bmatrix} + 10^{-7} \begin{bmatrix} 0.176262 \\ 0.248069 \\ 0.000812 \\ 0.000023 \end{bmatrix}$$

$$V(\widehat{f}_2) = \frac{10^{-4}}{t} \begin{bmatrix} 0.1643 \\ -0.1950 \\ 0.0035 \\ 0.0018 \end{bmatrix} + 10^{-7} \begin{bmatrix} 0.0176262 \\ 0.248069 \\ 0.000812 \\ 0.00023 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{R}(x_i(t),\ x_j(t)) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.8691 & -0.0018 & -0.2822 \\ & 1.0000 & 0.0113 & -0.1230 \\ & & 1.0000 & 0.0712 \\ & & & 1.0000 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] K. J. Aström (1970): *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press.

[2] L. Arnold (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. Wiley.

[3] A. T. Bharucha-Reid (1972): *Random Integral Equations*. Academic Press.

[4] M. S. Bartlet (1955): *An Introduction to Stochastic Process*. Cambridge University Press.

[5] G. Chow (1975): *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*.

[6] W. Fleming; R. W. Rishel (1975): *Deterministic and Stochastic Control Theory*. Springer Verlag.

[7] I. I. Gihman; A. V. Skorohod (1972): *Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag.

[8] T. Haavelmo (1954): *A Study in the Theory of Economic Evolution*. North Holland.

[9] K. Ito (1951): *On Stochastic Differential Equations*. Mem. Amer. Math. Soc. No. 4.

[10] G. Klaus; H. Liebsher (1971): *Systeme, Informationen, Strategien*. VEB Verlag. Leipzig.

[11] T. McGarty (1974): *Stochastic System and State Estimation*. Wiley.

[12] R. F. Pawula (1967): *Generalization and Extensions of the Fokker-Plank-Kolmogorov Equations*. IEEE Trans. Inf. Theory IT-13, 33-41.

[13] R. Pindyck (1975): *Optimal Planning for Economic Stabilization*. North Holland.

[14] A. Rentos (Ed.) (1974): *Modelling the Economy*. Heinemann Educational Books.

[15] K. Reinisch (1974): *Kybernetische Grundlagen und Beschreibung Kontineirlicher Systeme*.

[16] R. L. Stratonovich (1968): *Conditional Markov Processes and their Application to the Theory of optimal Control*. North Holland.

[17] G. Tintner; J. Sengupta (1972): *Stochastic Economics*. Academic Press.

[18] M. T. Wasan (1962): *Stochastic Approximation*. Cambridge University Press.