Differentiation
(অন্তরীকরণ)

স্বাধীন চলকের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য অধীন চলকের যে পরিবর্তন হয় তাকে অন্তরীকরণ (Differentiation) বলা হয়।

আমরা এই প্রক্রিয়াকে চার ভাগে ভাগ করেছি।

অন্তরীকরণ

- লিমিট
- অন্তরীকরণের সাধারণ সূত্র
- পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ
- অন্তরীকরণের প্রয়োগ

৩য় অধ্যায়

Limit

লিমিট: চলমান রাশি x এর মান উভয় দিক হতে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর দিকে অগ্রসর হয়ে a এর সন্নিকটবর্তী হওয়ায় যদি ফাংশন $f(x)$, একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর যথেষ্ট নিকটবর্তী হয় তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বলা হয়।

একে, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সীমার মৌলিক ধর্ম:

যদি $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = m$ হয়,

① $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) \pm \varphi(x)\} = l \pm m$

② $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times \varphi(x)] = lm$

③ $\lim_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{m}$ [যদি $m \neq 0$ হয়]

④ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{l}{m}$ [যদি $m \neq 0$ হয়]

⑤ $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

➡ **$x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ function অবিচ্ছিন্ন হওয়ার শর্তঃ**

1. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান $f(a)$ বিদ্যমান থাকবে।

2. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ and $\lim_{x \to a^-} f(x)$ বিদ্যমান থাকবে

অর্থাৎ সসীম হবে।

3. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ and $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ হবে।

অসীম লিমিট (Infinite limit)

ধরি, $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, যখন $x\to 1$ অর্থাৎ, যখন x এর মান উভয় দিক হতে 1 এর নিকটবর্তী হয়, তখন $f(x)$ এর মান প্রদত্ত যেকোন সংখ্যার উর্ধ্বে চলে যায়।

$$\therefore \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty \text{ and } \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty.$$

Lagrange's Mean value theorem:

যদি $f(x)$ একটি ফাংশন হয়

1. $f(x)$ ফাংশনটি $[a,b]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং;
2. (a,b) ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান, তাহলে (a,b) ব্যবধির মধ্যে কমপক্ষে একটি বিন্দু c পাওয়া যায়। Examples:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ ;\ \text{when, } a<c<b$$

⇒ Mean Value theorem এর প্রয়োগঃ

Example: $f(x) = x(x-2)$ ফাংশনের জন্য $[1,2]$ ব্যবধিতে একটি বিন্দু $x = c$ নির্ণয় কর।

Answer: দেওয়া আছে,

$$f(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$$

1. $f(x)$ একটি বহুপদী। সুতরাং $[1,2]$ ব্যবধিতে $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

2. $f'(x) = 2x - 2$ যা, $(1,2)$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

তাহলে $f(x)$ ফাংশনটি Mean Value theorem এর শর্ত পূরণ করে।

∴ আমরা পাই,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ যেখানে } a < c < b$$

এখানে,

$a = 1,\ b = 2 \Rightarrow f(a) = f(1) = 1 - 2 = -1,$

যেহেতু $f(x) = x^2 - 2x$.

$f(b) = f(2) = 4 - 4 = 0$ and $f'(c) = 2c - 2$

$$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{0-(-1)}{2-1} = 2c-2$$

$$\Rightarrow 1 = 2c-2$$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$\therefore 1 < \frac{3}{2} < 2$ অর্থাৎ, $(1,2)$ ব্যবধি মধ্যে $\frac{3}{2}$ আছে

Sandwich Theorem: (সসীম লিমিট সম্পর্কিত উপপাদ্য).

যদি $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ and যদি

$$\lim_{x \to a} f(x) = l = \lim_{x \to a} h(x)$$ হয়,

তাহলে,

$$\lim_{x \to a} g(x) = l$$ হবে

Sandwich উপপাদ্যের প্রয়োগঃ

উদাহরণঃ $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

$\Rightarrow$ $x = 0$ বসিয়ে সমাধান করতে গেলে $\frac{1}{x^2}$ নিতে দুটি সমস্যা সমাধানই আসল কাজ

We know,

$$-1 \le \cos x \le +1 \quad \therefore -1 \le \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \le +1, \ (x \neq 0)$$

যেহেতু, x^2 সর্বদাই ধনাত্মক, তাই x^2 দিয়ে গুণ করলে, $-x^2 \le x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \le x^2$

কিন্তু $\lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0 \quad \therefore 0 \le x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \le 0$

$\therefore$ Sandwich উপপাদ্য অনুসারে,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.}$$

ঘ) প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

3. $\sin^{-1}$ $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ থাকলে।

প্রমাণঃ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^{-1}x}{x}$ এখানে $\tan^{-1}x = \theta$ ধরতে হবে

$\therefore x = \tan\theta$ এবং $x \to 0$ হলে, $\theta \to 0$

$\therefore \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta}{\tan\theta} = 1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^{-1}x}{x} = 1$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^{-1}x}{x} = 0$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^{-1}x}{x} = 1$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

9. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

10. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

11. $\lim\limits_{x \to a} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

La Hospitals Rule:

কোন ফাংশনের $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ আকারে থাকলে এবং $x = a$ বসালে যদি $\frac{0}{0}$ অথবা $\frac{\infty}{\infty}$ আকার আসে তবে এই নিয়মটি প্রযোজ্য হবে।

নিয়মঃ যদি $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ হয় এবং $x = a$ বসালে $\frac{0}{0}$ অথবা $\frac{\infty}{\infty}$ নির্ণেয় আসে তাহলে লব এবং হরকে আলাদাভাবে অন্তরীকরণ করার পর $x = a$ বসালে যদি আবার $\frac{0}{0}$ or, $\frac{\infty}{\infty}$ নির্ণেয় আসে তাহলে, আবার অন্তরীকরণ করে $x = a$ বসাতে হবে।

লিমিট Problem গুলো Solve করার বিভিন্ন Rules

Rule 01: যখন $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}{f(x)}$ আকারে থাকে তখন $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ এর বিপরীত রাশি $\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)$ দিয়ে লব ও হরকে গুণ করতে হবে।

Rule 02: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ আকারে থাকলে x এর সর্বোচ্চ ঘাত দিয়ে লব ও হরকে ভাগ করতে হবে। এরপর $x=\infty$ বসাতে হবে।

Rule 03: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ আকারে থাকলে সরাসরি সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

Rule 04: ত্রিকোণমিতিক ফাংশন আকারে থাকলে $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ বা $\dfrac{\tan\theta}{\theta}$ আকারে আনতে পারলে ভালো।

Rule 05: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec x-\tan x}{\pi/2-x}$ আকারে থাকলে সেখানেই $\dfrac{\pi}{2}-x=h$ ধরে করতে হবে।

Type 01: La Hospitals Rule

লব ও হরকে আলাদাভাবে Differentiate করতে হবে যতক্ষণ না পর্যন্ত $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ বা $\frac{\infty}{0}$ আকার মুক্ত না হয়।

Ex: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$

$\boxed{\text{Solve:}}$ এখানে, $x \to 0$ বসালে আমরা $\frac{0}{0}$ আকারে পাই, যা অসংজ্ঞায়িত

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1 - \cos ax)}{\frac{d}{dx}(1 - \cos bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{a \sin ax}{b \sin bx}$$

আবার, $x \to 0$ বসালে $\frac{0}{0}$ আকারে আসে এজন্য আবার আমরা Differentiate করবো।

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \cdot a \cos ax}{b \cdot b \cos bx} = \frac{a^2 \cdot 1}{b^2 \cdot 1}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}$$ $\boxed{\text{Answer}}$

Type 02: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ -এর ক্ষেত্রে অনির্ণেয় আকার $\frac{0}{0}$; কিন্তু লব ও হরে $(x-a)$ উৎপাদক বিদ্যমান।

Ex: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$ -এর মান নির্ণয় কর।

Solve: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x+4}$$

$$= \frac{2-3}{2+4}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Answer:

Type 03: হর বা লব বা উভয়টিতে ($\sqrt{\ }$) চিহ্নযুক্ত মান নির্ণয়পদ্ধতি।

Ex: $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+1}\right]$ এর মান নির্ণয় কর।

Solve: $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+1}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{1}{1+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$ Answer:

Type 04: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ -এর ক্ষেত্রে

Ex: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+3x+5}{2x^2+9x-4}$ -এর মান নির্ণয় কর।

Solve: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+3x+5}{2x^2+9x-4}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{9}{x}-\frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$ Answer:

Type 05: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ সূত্রের ব্যবহার

Ex: $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{y^{7/2} - b^{7/2}}{\sqrt{y}-\sqrt{b}}$ -এর মান কত?

Solve: $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{(\sqrt{y})^7 - (\sqrt{b})^7}{\sqrt{y}-\sqrt{b}} = 7(\sqrt{b})^{7-1}$

$$= 7(\sqrt{b})^6$$

$$= 7b^3$$

Answer:

Type 06: সূচক ও ত্রিকোণমিতিক নিয়মের ব্যবহার

Ex: $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{a}{2^x}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solve: ধরি,

$$\frac{a}{2^x} = \theta$$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{a}{\theta}$$

$x \to \infty$ হলে, $\theta \Rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0} \frac{a}{\theta}\sin\theta = a\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$= a \quad \text{Answer:}$$

Type 07: ত্রিকোণমিতিক ও বীজগাণিতিক রাশিমালার মিশ্রণ

Ex: $\lim\limits_{x\to y} \frac{\tan x - \tan y}{x-y}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solve: $\lim\limits_{x\to y} \frac{\tan x - \tan y}{x-y}$

$$= \lim_{x\to y} \frac{\sin x\cos y - \cos x \sin y}{(x-y)\cos x\cos y}$$

$$= \lim_{x-y\to 0} \frac{\sin(x-y)}{(x-y)} \times \lim_{x\to y}\frac{1}{\cos x\cos y}$$

$$= 1\times\frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y \quad \text{Answer:}$$

Type 06: সূচক ও লগারিদমিক নিয়মের ব্যবহার

Ex: $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{a}{2^x}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solve: ধরি,

$$\frac{a}{2^x} = \theta$$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{a}{\theta}$$

$x\to\infty$ হলে, $\theta \Rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0} \frac{a}{\theta}\sin\theta = a\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$= a$$ Answer:

Type 07: ত্রিকোণমিতিক ও বীজগাণিতিক রাশিমালার মিশ্রণ।

Ex: $\lim\limits_{x\to y}\frac{\tan x - \tan y}{x-y}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solve: $\lim\limits_{x\to y}\frac{\tan x - \tan y}{x-y}$

$$= \lim_{x\to y}\frac{\sin x\cos y - \cos x\sin y}{(x-y)\cos x\cos y}$$

$$= \lim_{x-y\to 0}\frac{\sin(x-y)}{(x-y)} \times \lim_{x\to y}\frac{1}{\cos x\cos y}$$

$$= 1\times\frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y$$ Answer:

Episode-02

* অন্তরীকরণের সাধারণ সূত্র:

⇒ অন্তরক সহগ বা অন্তরক (Differential co-efficient) হল তাৎক্ষণিক বৃদ্ধির হার।

$$y = f(x) \text{ হলে, } \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

স্বাধীন চলরাশি x এর মানের ক্ষুদ্র পরিবর্তন বৃদ্ধির সাপেক্ষে অধীন চলরাশি y এর মানে যে বৃদ্ধি ঘটে, তাদের অনুপাতের সীমাস্থ মানই হল x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক সহগ। সুতরাং অন্তরক এক বৃদ্ধির নির্দেশক লিখিত।

⇒ x এর সাপেক্ষে $f(x)$ এর অন্তরক বোঝাতে চিহ্ন y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $D_x y$, Dy, y_1 ইত্যাদি সংকেত ব্যবহার করা হয়।

* সূত্রাবলী:

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\frac{d}{dx} cf(x) = c\frac{d}{dx} f(x)$

3. $\frac{d}{dx}(cx^n) = c \cdot \frac{d}{dx}(x^n) = cnx^{n-1}$

4. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

5. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

6. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

7. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

8. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$

9. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

10. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

11. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

12. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

13. $\frac{d}{dx}(e^{nx}) = ne^{nx}$

14. $\frac{d}{dx}(uv) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ [most important Rules]

15. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$ [most important Rules]

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

18. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

19. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

20. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$

21. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

22. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

23. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$

24. $\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx$

25. $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

26. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$ [most important Rule]

* অন্তরীকরণের নিয়মাবলি:

১। মূল নিয়মে অন্তরীকরণঃ

$y = f(x)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

যেকোন বিন্দুতে $x = a$ হলে,

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

* অনেকগুলি ফাংশনের গুণ ও ভাগফলের Mix:

সূত্রঃ $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \left[\dfrac{\text{Power}(d\,\text{Num}_1)}{\text{Num}_1} + \dfrac{\text{Power}(d\,\text{Num}_2)}{\text{Num}_2} + \ldots\ldots - \dfrac{\text{Power}(d\,\text{Den}_1)}{\text{Den}_1} - \dfrac{\text{Power}(d\,\text{Den}_2)}{\text{Den}_2}\right]}$

Note: লবের ক্ষেত্রে ধনাত্মক এবং হরের ক্ষেত্রে ঋণাত্মক চিহ্ন হবে।

* লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ:

কোন চলক অন্য কোন চলকের সূচক হিসেবে থাকলে উভয় পাশে ln নিতে হবে।

Example: $y = (\sin^{-1}x)^{\ln x}$ হলে, $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Solve: $y = (\sin^{-1}x)^{\ln x}$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln(\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \ln x \cdot \frac{1}{\sin^{-1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln(\sin^{-1}x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin^{-1}x)^{\ln x}\left[\frac{\ln x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}} + \ln(\sin^{-1}x)\,\frac{1}{x}\right]$$

ত্রিকোণমিতিক প্রতিস্থাপন পদ্ধতি:

নিচে যাদের বেলায় যাহা ধরতে হবে তা দেওয়া হলো:

Term	যা ধরতে হবে
$(1+x^2)^n, n=1, \frac{1}{2}, 3/2$ etc	$x = \tan\theta$
$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$x = \cos\theta$
$\frac{2x}{1-x^2}$	$x = \tan\theta$
$\frac{1-x^2}{1+x^2}$	$x = \tan\theta$

Example:

$$y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$; ধরি, $x = \tan\theta$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}x$$

$$\therefore y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta/2 \cdot \cos\theta/2}$$

$$= \tan^{-1}\tan\theta/2$$

$$= \theta/2$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

Answer:

Type → 01

⇒ অনেকগুলো ফাংশনের গুণ ও ভাগফলের ক্ষেত্রে

Example: x এর সাপেক্ষে $\sqrt{\frac{1-x}{1+x+x^2}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর?

Solve: ধরি,

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x+x^2}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\left[\ln(1-x) - \ln(1+x+x^2)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1+2x}{1+x+x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-x^2-(1+2x)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x+x^2}} \times \frac{x^2-2x-2}{2(1-x)(1+x+x^2)}$$

Answer:

Type ⇒ 02

⇒ $\{f(x)\}^{g(x)}$ এর ক্ষেত্রে অন্তরীকরণ

Method: $y = (\text{base})^{\text{power}}$ যদি power variable হয়।

then,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = (\text{base})^{\text{power}} \left\{ \text{power} \cdot \frac{d}{dx} \ln(\text{base}) + \ln(\text{base}) \frac{d}{dx}(\text{power}) \right\}}$$

Example: x এর সাপেক্ষে $(\sin x)^{\tan x}$ এর অন্তরজ সহগ নির্ণয় কর?

Solve: ধরি,

$$y = (\sin x)^{\tan x}$$

$$\Rightarrow y = e^{\ln (\sin x)^{\tan x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\tan x} \frac{d}{dx}\left[\tan x \cdot \ln(\sin x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\tan x}\left[\tan x \times \frac{\cos x}{\sin x} + \sec^2 x (\ln \sin x)\right]$$

(Ans)

Type ⇒ 03

→ অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ

Example: $e^x + e^y = e^{x+y}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

Solve: $e^x + e^y = e^{x+y}$

$$\Rightarrow e^x + e^y \frac{dy}{dx} = e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \left(e^y - e^{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = e^{x+y} - e^x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y} - e^x}{e^y - e^{x+y}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x\left(e^y - 1\right)}{e^y\left(1 - e^x\right)}$$

Answer:

Type ⇒ 04

⇒ বিবিধ সমস্যাবলি

Example: যদি, $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 - 1$$

Solve:

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - 4 \cdot e^x \cdot e^{-x}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left\{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right\}^2 - 1$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 - 1$$

[Showed]

Type-05

$\Rightarrow$ পরামিতিক সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}$ বের করার নিয়ম:

Example: $x = \frac{3at}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ বের কর?

Solve: $\frac{dx}{dt} = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2}$.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

Answer:

Type-06

⇒ ফাংশনের সাপেক্ষে ফাংশনের অন্তরজ সহগ নির্ণয়:

Example: $\sin^{-1}x$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}x$ এর অন্তরজ সহগ নির্ণয় কর?

Solve: ধরি,

$y = \sin^{-1}x$, $z = \tan^{-1}x$ হলে, $\frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করতে হবে।

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; ; \; \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+x^2} \times \sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$$ (Answer)

Episode-03

⇒ Important theories:

$y=f(x)$ এই ফাংশনকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে যে অন্তরজ রাশি পাওয়া যায় তাকে প্রথম অন্তরজ রাশি বলা হয়। এই অন্তরজ রাশিকে আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে দ্বিতীয় অন্তরজ রাশি পাওয়া যায়, ইহাকে y_2 বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ বা, $f''(x)$ দ্বারা নির্দেশ করা যায়। এভাবে বারবার অন্তরজ রাশি পাওয়া যায়। একে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ বলা হয়।

⇒ Important formula:

→ $y=x^n$ হলে, $y_n = n!$ এবং $y_{n+1} = y_{n+2} = \cdots = 0$

→ $y=(ax+b)^m$ হলে, এবং;

(i) $m>n$ হলে, $y_n = \frac{m!}{(m-n)!} a^n . (ax+b)^{m-n}$

(ii) $m=n$ হলে, $y_n = n.a^n!$

(iii) $m<n$ হলে, $y_n = 0$

→ $y = e^{ax}$ হলে, $y_n = a^n e^{ax}$

→ $y = \sin ax$ হলে, $y_n = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$ and

$y = \sin x$ হলে,

$$y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

→ $y = \cos ax$ হলে, $y_n = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ and

$y = \cos x$ হলে,

$$y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

→ $y = \ln(ax+b)$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$

→ $y = \ln(x+a)$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$

→ $y = \frac{1}{ax+b}$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^n n!\,a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

→ $y = \frac{1}{x+a}$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

CamScanner

→ $y = e^{ax}\sin(bx+c)$ হলে,

$$y_n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n e^{ax}\sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

→ $y = e^{ax}\cos(bx+c)$ হলে,

$$y_n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

বিভিন্ন ফাংশনের n তম অন্তরজ সহজে নির্ণয়ের ক্ষেত্রে উপরোক্ত সূত্রগুলো মুখস্থ রাখলে সহজে ঐ ফাংশনের n তম অন্তরজ সহজে নির্ণয় করা যায় নতুবা ভুল হতে পারে।

Type : 01 : বিভিন্ন ফাংশনের n তম অন্তরজের মান নির্ণয়।

Example: $\ln \frac{a-x}{a+x}$ এর n তম অন্তরজের মান নির্ণয় কর।

Solve: ধরি,

$$y = \ln \frac{a-x}{a+x}$$

$$\Rightarrow y = \ln(a-x) - \ln(a+x)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{-1}{a-x} - \frac{1}{a+x}$$

$$\therefore y_n = -\frac{(n-1)!}{(a-x)^n} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(a+x)^n}$$ [সূত্রানুসারে]

$$= -\frac{(n-1)!}{(a-x)^n} + \frac{(-1)^n (n-1)!}{(a+x)^n}$$

$$= (n-1)!\left[\frac{(-1)^n}{(a+x)^n} - \frac{1}{(a-x)^n}\right]$$

[Answer]

Type 02: দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরজ সহগ নির্ণয় যখন সংজ্ঞায়িত আছে $y=f(x)$

Example: $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0$$

Solve: $y=\sin(m\sin^{-1}x)$

$$\Rightarrow y_1=\cos(m\sin^{-1}x)\times\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1=m\cos(m\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y'+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)y_1=-m^2\sin(m\sin^{-1}x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_2-xy_1=-m^2y$$

$$\therefore (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0$$

[proved]

Type 03: দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরক সহগ নির্ণয় যখন ফাংশন প্যারামিট্রিক।

Example: $x = a(\theta + \sin\theta)$ and $y = a(1 - \cos\theta)$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ মান $\frac{\theta}{2}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর?

Solve: $x = a(\theta + \sin\theta)$; $\quad y = a(1 - \cos\theta)$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta) \qquad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = a\sin\theta \times \frac{1}{a(1+\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan\frac{\theta}{2} \qquad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2} \times \frac{1}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{4a}\sec^4\frac{\theta}{2}$$

[Answer]

Episode- 04

⇒ **অন্তরীকরণের প্রয়োগ:**

Important formula:

→ $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$ যা ঐ বিন্দুতে অন্তরকের মান নির্দেশ করে।

→ স্পর্শক x অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করলে $\frac{dy}{dx} = 1$ হবে।

→ অক্ষদ্বয়ের সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ হবে।

→ স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে

→ স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$ হবে।

→ সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ (a = বাহুর দৈর্ঘ্য)।

স্পর্শকের সমীকরণঃ

→ $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $(y - y_1) = f'(x)(x - x_1)$

অভিলম্ব ও তার সমীকরণঃ

→ স্পর্শ বিন্দুগামী ও স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাটিকে অভিলম্ব বলে।

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ-

→ $f'(x)(y - y_1) + (x - x_1) = 0.$

Note: স্পর্শক ও অভিলম্বের মধ্যবর্তী কোণ $90°$ হওয়ায় তাদের ঢালের গুণফল (-1) হবে।

→ স্পর্শক একটি সরলরেখা বলে একটি সরলরেখার ঢাল সকল বিন্দুতে সমান।

→ কোন ফাংশনের চরমমান বলতে উচ্চতম ও নিম্নতম মানকে বুঝায়। উচ্চতম মানকে গুরুমান ও নিম্নতম মানকে লঘুমান বলে।

গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয়ের নিয়ম:

ধরে নিই,

$y=f(x)$ একটি ফাংশন।

(i) গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় করার জন্য $\frac{dy}{dx}$ বের করে $\frac{dy}{dx}=0$ বসাতে হবে এবং সমাধান থেকে x এর মানগুলি নির্ণয় করতে হবে। এ সকল মানগুলোকে সংকট বিন্দু বলে।

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করে তাতে x এর মানগুলো বসাতে হবে। যদি $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ হয়, তবে x এর ঐ মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনের লঘুমান পাওয়া যাবে। এবং যদি $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ হয়, তবে x এর ঐ মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনের গুরুমান পাওয়া যাবে।

(iii) x এর মানগুলো $y=f(x)$ এ বসিয়ে গুরুমান এবং লঘুমান নির্ণয় করা যাবে।

Type 01: স্পর্শকের সমীকরণ

Example: $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(-4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর?

Solve: দেওয়া আছে,

$$x^2 - y^2 = 7$$

$$\Rightarrow 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ আবার, $(-4, 3)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 3 = -\frac{4}{3}(x+4)$

$$\Rightarrow 3y - 9 = -4x - 16$$

$$\Rightarrow 4x + 3y + 7 = 0$$

[Answer]

Type 02: অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়

Example: $y(x-2)(x-3)-x+7=0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর?

Solve: $y(x-2)(x-3)-x+7=0$

ছেদবিন্দুতে $y=0$ $\therefore -x+7=0$

$\Rightarrow -x=-7$

$\Rightarrow x=7$

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(7,0)$

এখন, $y(x-2)(x-3)-x+7=0$

$\Rightarrow y(x^2-5x+6)-x+7=0$

$\Rightarrow x^2y-5xy+6y-6y-x+7=0$

$\Rightarrow 2xy+x^2\frac{dy}{dx}-5x\frac{dy}{dx}-5y+6\frac{dy}{dx}-1=0$

$\Rightarrow (x^2-5x+6)\frac{dy}{dx}=5y-2xy+1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{5y-2xy+1}{x^2-5x+6}$

(7,0) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{20}$

(7,0) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - 0 = -20(x-7)$

$\Rightarrow y = -20x + 140$

$\therefore 20x + y - 140 = 0$

[Answer]

Type 03: বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়

Example: c এর মান কত হলে $y = cx(1+x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে।

Solve: $y = cx(1+x) = cx + cx^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = c + 2cx$ মূলবিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = c$

স্পর্শক x অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে

যেহেতু $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [Answer]

Type 04: অবকলনের প্রমাণ সংক্রান্ত

Example: একটি কণা t সময়ে $S = at^2 + bt + c$ পথ অতিক্রম করে। t সময়ে কণাটির বেগ যদি v হলে, দেখাও যে $v^2 - b^2 = 4a(S-c)$ যেখানে, a, b, c ধ্রুবক।

Solve: $S = at^2 + bt + c$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = 2t^2 + b$$

$$\Rightarrow v = 2at + b$$

$$\Rightarrow v^2 = 4a^2t^2 + b^2 + 4atb$$

$$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(at^2 + bt)$$

$$\therefore v^2 - b^2 = 4a(s-c)$$

[Showed]

Type 05: চরম মান নির্ণয়

Example: x এর কোন মানের জন্য $(x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5)$ ফাংশনটি মান গুরুমান ও লঘুমান হবে?

Solve: ধরি, $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$

$\therefore f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

গুরুমান ও লঘুমান মানের জন্য $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$\cancel{\Rightarrow x^2(x-6)}$

$\Rightarrow x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 1, 2, 3$ এখানে, $f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$.

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান ক্ষুদ্রতম।

$x = 2$ হলে, $f''(2) = 48 - 96 + 44 + 44 = 92 - 96 = -4 < 0$

$\therefore x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান বৃহত্তম

[Answer]

$x = 3$ হলে, $f''(3) = 108 - 144 + 44 + 152 - 144$
$= 8 > 0$.

$\therefore x = 3$ হলে, ফাংশনটির মান ক্ষুদ্রতর হবে।

[Answer]

উপপাদ্য : (i) স্লোমিস ও রসির আকারের অবশেষ,
(ii) কসির আকারের অবশেষ
(iii) ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ.
টেইলর উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ :-

<u>বর্ণনা:-</u> যদি $f(x), f'(x), f''(x) \dots f^{(n-1)}(x)$ ফাংশনগুলি $\boxed{[a, a+h]}$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয়, এবং $f^{(n)}(x)$ ফাংশনটি $(a, a+h)$ খোলা ব্যবধিতে বিদ্যমান থাকে, তবে টেইলরের উপপাদ্য হইবে-

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n.$$

যেখানে $R_n = \dfrac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{m(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h),\ 0<\theta<1$

এটা স্লোমিস ও রসির আকারের অবশেষ।

<u>প্রমাণ:-</u> $$F(x) = f(x) + (a+h-x)f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + K(a+h-x)^m \quad \text{---(1)}$$

যেখানে ধ্রুবক K এমনভাবে নির্ধারণ করা হল যাতে,

$$F(a) = F(a+h) \text{ হয়।}$$

(1) নং এ $x = a$ বসাইয়া

P.T.O.

$$F(a) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(a) + Kh^m$$

আবার, ① নং এ $x = a+h$ বসিয়ে, $F(a+h) = f(a+h)$

$$\therefore f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(a) + Kh^m \quad \text{(ii)}$$

① নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$$F'(x) = f'(x) + (a+h-x)f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + K(a+h-x)^m$$

$$= \cancel{f'(x)} + (0+0-1)\cancel{f'(x)} + \cancel{(a+h-x)f''(x)} + \frac{2(a+h-x)(-1)}{2!}\cancel{f''(x)} + \frac{(a+h-x)^2}{2!}f'''(x) + \cdots + \frac{(n-1)(a+h-x)^{n-1-1}(-1)}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) + Km(a+h-x)^{m-1}(-1)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n}(x) - Km(a+h-x)^{m-1} \quad \text{(iii)}$$

যেহেতু $F(x)$ ফাংশন $[a, a+h]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $(a, a+h)$ খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য এবং $F(a) = F(a+h)$

P.T.O.

সুতরাং রোলের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$F'(a+\theta h) = 0$ যেখানে $a < a+\theta h < a+h$

$= 0 < \theta < 1$.

(iii) $\Rightarrow$

$$F'(a+\theta h) = \frac{(a+h-a-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a+\theta h) - km(a+h-a-\theta h)^{m-1}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{(h-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a+\theta h) - km(h-\theta h)^{m-1}$$

$$\Rightarrow km(h-\theta h)^{m-1} = \frac{(h-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a+\theta h)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\frac{(h-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a+\theta h)}{m.(h-\theta h)^{m-1}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{(h-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a+\theta h) \frac{1}{m(h-\theta h)^{m-1}}$$

$$\Rightarrow k \Rightarrow \frac{(h-\theta h)^{n-1-m+1}}{m(n-1)!} f^n(a+\theta h).$$

$$\Rightarrow k = \frac{(h-\theta h)^{n-m}}{m(n-1)!} f^n(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{h^{n-m}(1-\theta)^{n-m}}{m(n-1)!} f^n(a+\theta h)$$

P.T.O.

(ii) নং সমীকরণে K এর মান বসাইয়া-

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{m(n-1)!}f^n(a+\theta h)$$ যেখানে $0<\theta<1$

(ii) নং এ $m=1$ হইলে পাই,

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(a+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

ইহাই কশি আকারের অবশেষসহ টেইলর উপপাদ্য—

(ii) নং এ $m=n$ হইলে পাই,

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

ইহা লাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষ সহ টেইলর উপপাদ্য