NOIP 2024 模拟

试题解答

代讲人： xza

Alice 的数

- 离 x 最近的完全平方数不止一个?
- 一定不可能，相邻的完全平方数奇偶性不同
- 找规律，从 1 开始：$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$
- $[1, 2, -3], [-4, -5, -6, 7, 8], [9, 10, 11, 12, -13, -14, -15], [16, \ldots], \ldots$
- 不难发现，每一组的和均为 0
- 问题转化为 $[1, r]$ 之和减去 $[1, l-1]$ 之和。以 $[1, r]$ 之和为例，找到 r 所属的组之后，分类计算即可
- 时间复杂度 $O(1)$

Bob 的图

- 首先求出最短路，和最短路 DAG
- 按照 dist 排序，保留满足 $d_u + w_{u,v} = d_v$ 的边 $u \to v$，成为 DAG
- DAG 上 1 到 x 的路径，与原图 1 到 x 的最短路一一对应。转化为 DAG 上的问题
- $$\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=j+1}^{n_i} |d_{i,j}| \times |d_{i,k}| = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{n_i} |d_{i,j}| \right)^2 - \sum_{j=1}^{n_i} |d_{i,j}|^2 \right)$$
- 问题转化为求所有路径的长度和，以及路径长度平方和
- 设 f_x, g_x, h_x 分别表示所有 1 到 x 的路径长度 $0, 1, 2$ 次方之和。则对于边 $y \to x$
- $$f_x \mathrel{+}= f_y, \quad g_x \mathrel{+}= g_y + f_y, \quad h_x \mathrel{+}= h_y + 2g_y + f_y$$

维护整数列

- 关键性质：只考虑除 $p\,(|p| \geq 2)$ 的操作，任何数在至多 $\log v$ 次除法后变为 $\{-1,0,1\}$ 中的一个数
- 考虑对于绝对值 ≥ 2 的数暴力做除法操作，则至多操作 $(n+m)\log v$ 次（每个操作四只会产生一个新的数）后不再存在这样的数
- 当一个区间内只含有 $-1,0,1$ 时，只需要维护 $-1,0,1$ 各自的个数，就能完成除法操作
- 此外需要特殊处理的是 $p=-1$，相当于对区间内的数取相反数，使用懒标记维护即可
- 最后分析一下时间复杂度：需要暴力 DFS 到叶子做除法的次数为 $(n+m)\log v$，所有可以统一处理的区间（只含有 $-1,0,1$）的数量也是 $(n+m)\log v$。再乘上线段树的单次操作时间复杂度，总时间复杂度为 $O((n+m)\log v \log n)$

大头问题

- 下面以 $k = 3$ 为例，m^3 可以解释为从 m 条边依此选 3 条边 (可以重复) 的方案数
- 假设选出的三条边都相同：选出一条边，剩余的 $n-2$ 个点可以任选
- 假设选出的两条边相同：根据是否共端点分类
- 假设选出的三条边互不相同：三条边均不共端点（三条链）；其中两条边共端点（两条链）；构成长度为三的链（一条链）；三条边共同一端点 (菊花树)；构成三元环
- 比较好算的是「菊花树」与「三元环」
- 一条链的情形，需要枚举中间的边，两侧各选一条边，再减去三元环（3次）
- 两条链的情形，需要枚举中间的点，选择两个相邻的边，最后减去三元环（3次）和一条链（2次）的情形
- 三条链的情形，就是总方案数减去前面所有的情形

补充：三元环计数

- 预处理：按照度数从大到小对点排序，度数大的点指向度数小的点
- 算法：枚举 x，枚举 $x \to y$，枚举 $y \to z$，判断 $x \to z$ 是否有边（通过提前对 x 指向的点染色来实现）
- 时间复杂度分析：瓶颈在于枚举所有 $x \to y \to z$ 的时间复杂度
  - 当 y 出度 $\leq \sqrt{m}$，这里 y 最多被枚举 m 次，共计 $O(m\sqrt{m})$
  - 当 y 出度 $> \sqrt{m}$，则 x 出度也 $> \sqrt{m}$（至多只有 $\sqrt{m}$ 个），总计也是 $O(m\sqrt{m})$