本题考察了动态规划的相关知识。

10pts

$f[i][j]$ 表示能否得到 $a_1=i,a_2=j$ 的状态，枚举下一个取模的数进行转移。

+20pts

注意到只会取模 $x\in[1,20]$，2^{20} 枚举并去重即可。

+50pts

因为 $a_i=i$，思考该序列进行若干次操作以后的形态。

首先注意到给定的参数 x 一定递减，否则无意义。

我们以 $x=7,5,3$ 为例，模拟 a_i 的变化过程

$x=7$ 时，$a=1,2,3,4,5,6,0,1,2,3,4,5,6,0,\dots$。

加入 $x=5$ 时，$a=1,2,3,4,0,1,0,1,2,3,4,0,1,0,\dots$。

加入 $x=3$ 时，$a=1,2,0,1,0,1,0,1,2,0,1,0,1,0$。

这个过程并不直观，我们把整个过程倒过来。

$x=3$ 时，$a=1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,\dots$。

$x=3,5$ 时，$a=1,2,0,1,0,1,2,0,1,0,\dots$。

$x=3,5,7$ 时，$a=1,2,0,1,0,1,0,1,2,0,1,0,1,0...$。

可以发现从小到大加入所有正整数 x_i，加入该数字时即为将第 x_i 位修改为 0，然后变成一个 x_i 为循环节的数列。

从以上性质倒退，我们可以断言，以下 a_i 序列可以构造得到的充要条件为：

> 1. 存在一个正整数 x，对于 $1\le i<x$ 都有 $a_i=i$ 且 $a_x=0$。
> 2. 对于 $i>x$，有 $a_i<x$，且 $a_i=0$ 或 $a_i=a_{i-1}+1$。

因为我们可以取每个 $a_i=0$ 处加入到 x 这一操作集合，即可构造出以上方案。

容易发现此时 x 一定唯一，枚举 x 进行计数。

100pts

假设最终序列为 b。

将所有 a 从小到大进行排序，枚举 x 的值进行DP，$f[i][j]$ 表示将 a_i 修改为 j，此时 $a_1,a_2,\dots,a_i$ 不同的方案数，转移时要求 $b[i]<x$ 且 $b[i+1]-b[i]\le a[i+1]-a[i]$，直接 DP 即可，这样可能会算重，在此基础上强制要求 $x-1$ 在 b 序列中出现即可，因此用 $f[0/1][i][j]$ 表示 $x-1$ 是否出现，且 $b_i=j$ 的方案数。